

Tommaso Rosati

Probleme 21

1. Elefantenspiel:

Zwei Freunde, Anne und Bernd, sitzen an einem runden Tisch und auf dem Tisch liegen n Elefanten. Die sind etwas zu schwer für den Tisch, und sie entscheiden ein Spiel zu spielen: es wird derjenige gewinnen, der den letzten Elefanten vom Tisch nimmt. Dabei kann man in jeden Zug nur eine Zahl $k \leq n$ von Elefanten auf einmal Nehmen, und die Zahl k muss aus einer Menge M gewählt wird. Sei M eine der folgenden Mengen:

1. $M = \{1, 2, \dots, m\}$ für ein $m \leq n$.
2. $M = \{1, 2, 4, 8, \dots\}$.
3. $M = \{1, 2, 3, 5, 7, \dots\}$ (alle Primzahlen und die 1).

Kannst du sagen wann einer der Spieler mit Sicherheit gewinnen kann? Und wie?

2. Diagonalen ziehen:

Anne und Bernd langweilen sich in der Quarantäne, und es gibt keine Elefanten mehr. Sie nehmen also ein regelmäßiges 2020-Eck. Die Freunde ziehen Abwechselnd eine Diagonale des 2020-Ecks (also eine Linie die zwei nicht nebeneinanderliegende Punkte verbindet), und zwar so, dass sich zwei Diagonalen nie überschneiden.

Kann einer der beiden Spieler mit einer guten Strategie immer gewinnen? Was wenn es ein 2019-Eck ist? Ist es überhaupt wichtig eine Strategie zu haben? Begründe deine Antworten.

3. Münzen werfen:

Auch das Spiel mit den Diagonalen langweilt Anne und Bernd mittlerweile. Sie setzen sich wieder am runden Tisch. In der Mitte ist eine Münze. Die beiden werfen abwechselnd Münzen auf dem Tisch, bis einer kein Platz mehr finden kann. Wer gewinnt?

4. Gibt es ein Trick?

Anne und Bernd spielen nun ein Spiel namens „Fünf gewinnt!“. Das Spielfeld ist ein 8×8 -Schachbrett. Die Spieler setzen abwechselnd weiße und schwarze Spielfiguren auf das Schachbrett. Wer zuerst fünf seiner Figuren direkt nebeneinander in einer Reihe, Spalte oder Diagonalen hat, gewinnt das Spiel. Anne spielt als erste, aber sie möchte sicher sein, dass es keine Strategie gibt, durch die Bernd mit Sicherheit immer gewinnt. Was meinst du?

5. Springer:

Anne und Bernd setzen abwechselnd weiße und schwarze Springer auf ein Schachbrett, immer so das der neue Springer nicht von den schon vorhandenen angegriffen werden kann.

Wer gewinnt? Was wenn es Läufer statt Springer sind?

6. Zifferntausch:

Aus der zweistelligen Primzahl 79 erhält man wieder eine Primzahl, wenn man ihre Ziffern vertauscht: 97. ebenso kann man bei der Primzahl 131 alle drei Ziffern beliebig vertauschen, also die Zahlen 113, 311 bilden, ohne dass dabei die Primzahleneigenschaft verlorengeht.

Untersuche, ob es dreistellige Primzahlen mit paarweise voneinander verschiedenen Ziffern gibt, bei denen man bei sämtlichen möglichen Ziffernvertauschungen stets wieder dreistellige Primzahlen erhält.

(Tipp: es kann nützlich sein, erst die nächste Aufgabe zu lösen, bzw. anzuwenden)

7. Für den Mathematiker:

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ eine Zahl, die keine Primzahl ist. Dann gibt es ein Teiler m von n der kleiner als die Wurzel von n ist:

$$m \text{ teilt } n \text{ und } m \leq \sqrt{n}.$$

(Tipp: Kannst du eine Primzahl m finden, die die Bedingung erfüllt?)

2. Beweise, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

8. Eine Aufgabe von Erdos:

Seien m, n zwei positive ganze Zahlen. Seien a_1, \dots, a_{mn+1} andere $mn+1$ unterschiedliche Zahlen. Beweise, dass es entweder eine Teilmenge von $m+1$ Zahlen gibt, so dass

$$a_{i_1} < a_{i_2} < \dots < a_{i_{m+1}}, \quad (\text{mit } i_1 < i_2 < \dots < i_{m+1}),$$

oder $n+1$ Zahlen, so dass

$$a_{j_1} > a_{j_2} > \dots > a_{j_{n+1}}, \quad (\text{mit } j_1 < j_2 < \dots < j_{n+1}).$$

9. Wonderland Sport Tag (in english!):

Alice, the March Hare and the Mock Turtle were the only three competitors at the Wonderland Sports Day, and all three of them competed in each event. The scoring system was exactly the same for each event: the points awarded for first, second and third places were all positive integers and (even in Wonderland) more points were awarded for first place than for second and more points for second place than for third.

Of course, the March Hare won the Sack Race. At the end of the day, Alice had scored 18 points while the Mock Turtle had 9 points and the March Hare had 8 points.

Can you tell how many events there were? And can you tell who came last in the 'Egg and Spoon' race?