Die Eulersche Polyederformel

Aufgabe 1: Eine Vermutung

Die Eulersche Polyederformel beschreibt, wie in **konvexen** Polyedern die Anzahl der Ecken, die der Kanten und die Anzahl der Flächen zusammenhängen. Wir wollen die Anzahl der Ecken mit e, die der Kanten mit k und der Flächen mit f bezeichnen.

Welchen Zusammenhang zwischen e, k und f vermutest du?

In konvexen Polyedern gilt der Zusammenhang ____.

Aufgabe 2: Die plattonischen Körper

Wir werden die Eulersche Polyederformel beweisen, indem wir ausnutzen, dass konvexe Polyeder **plättbar** sind, das heißt, dass wir einen gleichwertigen Graphen auf Papier zeichnen können, **in dem sich keine Kanten überkreuzen**. Zunächst wollen wir die Platonischen Körper „plätten".

(a) Zeichne für jeden der Platonischen Körper einen zugehörigen ebenen Graphen.

(b) Wo finden sich in diesen ebenen Graphen die Knoten, Kanten und Flächen des platonischen Körpers? Wie lautet die entsprechende Zusammenhang zwische e, k und f aus Aufgabe 1 für solche ebenen Graphen?

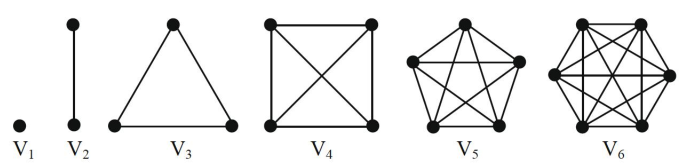
Aufgabe 3: Das Haus vom Nikolaus und andere Plattheiten

(a) Überprüfe: Für das Haus vom Nikolaus gilt die (ebene Version der) Eulersche Polyederformel nicht. (Das liegt daran, dass der Graph des Hauses vom Nikolaus nicht überschneidungsfrei ist.)

(b) Zeige: Das Haus des Nikolaus ist plättbar, d.h. indem man die Kanten und Ecken verschiebt (wobei jede Kante an ihren Ecken befestigt bleibt), kann man es in einen ebenen Graphen ohne Überschneidungen überführen. Prüfe, ob für den geplätteten Graphen die Eulersche Polyederformel für ihn gilt.

(c) Zeichne zwei Häuser vom Nikolaus nebeneinander. Das Gesamtbild ist wieder ein Graph. Gilt für diesen Graphen die (ebene Version der) Eulersche Polyederformel? (Es gibt hier drei Möglichkeiten, die beiden Häuser zu zeichnen; wähle eine aus.)

(d) Sind die so genannten vollständigen Graphen V_n mit n Ecken (s. Bild unten) plättbar? Untersuche diese Frage für die unten abgebildeten Fälle mit 1 bis 6 Ecken.



Die Eulersche Polyederformel für Graphen

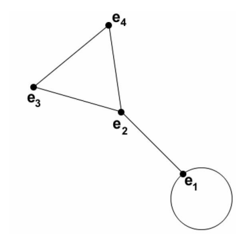
Vermutung: In jedem Graphen, der ______________________________

und ______________________________ ist, gilt für die Anzahl der Ecken e, die der Knoten k und die Anzahl der entstehenden Flächen f der Zusammenhang

______________________________.

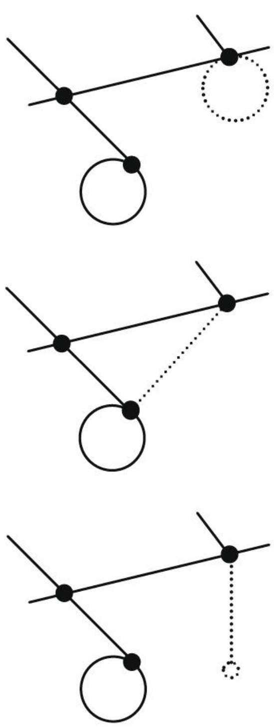
Aufgabe 4: Beweisvorbereitung

(a) Finde eine Möglichkeit, den folgenden Graphen Schritt für Schritt so aufzubauen (also schrittweise zu zeichnen), dass in jedem Schritt ein zusammenhängender einfacher Graph entsteht.



(b) Beweise die Polyederformel für den folgenden, recht schlichten Graphen.

Aufgabe 5: Beweis der Formel



Die Beweisidee für die Eulersche Polyederformel ist die folgende: Wir können jeden ebenen, zusammenhängenden Graphen konstruieren, indem wir mit einer seiner Ecken (also dem Startgraphen aus Aufgabe 4(b)) beginnen und dann Schritt für Schritt Kanten und gegebenenfalls Ecken hinzufügen.

Die Anzahlen der Ecken, Kanten und Flächen ändern sich dabei nur so, dass die Formel, die wir für den Startgraphen bewiesen haben, dabei weiterhin gültig bleibt.

(a) Beschreibe jeden der links abgebildeten „Aufbauschritte“. Prüfe, dass die Polyederformel bei jedem der Schritte gültig bleibt, wenn sie vorher gegolten hat.

(b) Findest du noch andere „Aufbauschritte“, die von zusammenhängenden, ebenen Graphen zu zusammenhängenden, ebenen Graphen führen? Zeige, dass diese sich immer auf die drei links abgebildeten Schritte zurückführen lassen.

(c) Fasse zusammen: Wieso haben wir mit Aufgabe 4 und 5 bewiesen, dass die Eulersche Polyederformel für jeden Graphen, der die Voraussetzungen erfüllt, richtig ist?