MSG 2019/2020 — Zirkel 7c

Tommaso Rosati

Aufgaben 20

1. **Wetten & Nachdenken:**

   Lorenz spielt ein Wettspiel. Hier gibt es eine Wahrscheinlichkeit $0<p<1$, dass man doppelt die Summe gewinnt, die man wettet. Sonst verliert man alles.

   Lorenz hat folgende Idee. Er spielt erst 1 Euro, und spielt weiter bis er das erste Mal gewinnt. Dabei verdoppelt er immer seine Wette (das zweite Mal wettet er 2 Euro, dann 4, dann 8, usw.).

   - Ist es möglich, dass er niemals gewinnt? Gibt es ein Zeitpunkt ab dem er sicherlich gewinnt? Begründe deine Antwort.
   - Wenn er das erste Mal gewinnt, wie viel Profit (das bedeutet, wie viel er gewonnen hat minus all das Geld, dass er insgesamt gewettet hat) hat er gemacht?
   - Nehme an, p ist klein (z.B. $p=\frac{1}{13.000.000}$, also etwas besser als im Lotto). Was könnte problematisch sein, wenn man versucht das Schema von Lukas zu verwirklichen?
   - Wie viel Kapital braucht Lukas, wenn er das Spiel bis zu n Mal spielen möchte (wobei $n \in \mathbb{N}$ ist)?

     (Tipp: Es kann nützlich sein, erst die folgende Aufgabe zu lösen)

2. **Summen von Potenzen:**

   Sei $n \in \mathbb{N}$ festgelegt. Beweise folgende Aussagen:

   - Es gilt:
   $$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^n \geq 2^n.$$
   - Es gilt:
   $$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^n = 2^{n+1}-1 \qquad \left(= \frac{2^{n+1}-1}{2-1}\right).$$
   - Andersrum gilt es:
   $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n} = 2-\frac{1}{2^n} \qquad \left(=\frac{1-2^{-(n+1)}}{1-2^{-1}}\right).$$

   (Tipp: Multipliziere die linke Seite mit dem Teiler des in Klammern geschriebenen Ausdruckes. Was beobachtest du?)

3. **Der Größte Rest:**

   Welcher ist der größte Rest den man bekommen kann, wenn man eine zweistellige Zahl durch ihre Quersumme teilt?

4. **Kangaroo Game!**

   Im Ausdruck
$$\frac{K \times A \times N \times G \times A \times R \times O \times O}{G \times A \times M \times E}$$
   Steht jeder Buchstabe für eine unterschiedliche ganze Zahl zwischen 1 und 9. Welche ist die kleinste *ganze* Zahl, die der Ausdruck annehmen kann?

5. **Verrechnet!**

   In einem Kiosk kauft Paul für sich und seine Freunde dreizehn Flaschen Limonade zu je 0,69 Euro, sechs Müsliriegel und neun belegte Brötchen. Paul soll dafür 17,81 Euro bezahlen. „Das kann nicht stimmen“, sagt er. Dabei wusste er nicht, wie viel ein Müsliriegel und ein belegtes Brötchen jeweils kostet.
   - Weshalb konnte sich Paul seiner Behauptung trotzdem sicher sein?
   - Der Verkäufer hat sich um genau einen Cent verrechnet. Muss Paul ein Cent mehr oder weniger bezahlen?

6. **Zifferntausch**:

   Aus der zweistelligen Primzahl 79 erhält man wieder eine Primzahl, wenn man ihre Ziffern vertauscht: 97. ebenso kann man bei der Primzahl 131 alle drei Ziffern beliebig vertauschen, also die Zahlen 113, 311 bilden, ohne dass dabei die Primzahleneigenschaft verlorengeht.

   Untersuche, ob es dreistellige Primzahlen mit paarweise voneinander verschiedenen Ziffern gibt, bei denen man bei sämtlichen möglichen Ziffernvertauschungen stets wieder dreistellige Primzahlen erhält.

   (Tipp: es kann nützlich sein, erst die nächste Aufgabe zu lösen, bzw. anzuwenden)

7. **Methoden:**

   Beweise folgende Aussagen:
   - Sei $n \in \mathbb{N}$ eine Zahl, die keine Primzahl ist. Dann gibt es ein Teiler m von n der kleiner als die Wurzel von n ist:
$$m \quad \text{teilt} \quad n \quad \text{und} \quad m \leq \sqrt{n}.$$
   - Sei abc eine Dreistellige Zahl. Zeige, dass diese durch 7 teilbar ist, genau dann wenn:
$$2a + 3b + c \qquad \text{durch} \quad 7 \quad \text{teilbar ist.}$$