MSG 2019/2020 — Zirkel 7c
Tommaso Rosati

Unterricht 5 - Modulo rechnen!

(1) **Fundamentalsatz der Arithmetik - werden wir später beweisen.**

Jede natürliche Zahl lässt sich eindeutig als Produkt von Primzahlen darstellen. Diese Darstellung heißt Primfaktorzerlegung

(2) **Rechnen**

Bestimme die Primfaktorzerlegung von folgenden Zahlen:

$$7, \ 120, \ 1024, \ 2025, \ 153153$$

(3) **Definition von Kongruenz**

Wir schreiben, für ganze Zahlen a, b und eine natürliche Zahl n:

$$a \equiv b \pmod{n} \qquad \text{falls } \ n \ \text{ ein Teiler von } \ a-b \ \text{ ist.}$$

Wenn R der Rest von der Division mit Rest von a durch n ist, dann gilt

$$a \equiv R \pmod{n}.$$

(4) **Rechnungen**

Bestimme die Kongruenzklassen von folgenden Zahlen:

$$10 \pmod{7}, \quad -1 \pmod{3}, \quad 19 \pmod{11}, \quad 27 \pmod{27}, \quad -153155 \pmod{3}, \ 0 \pmod{2}.$$

(5) **Große Zahlen, kleine Zahlen**

Ist $222^{555} + 555^{222}$ teilbar durch 7?
Hinweis: es könnte günstig sein, erst die nächsten Aufgaben zu lösen!

(6) **Symbolrechnung Reloaded**

Zum warmwerden, benutze die Distributive Regel, also $a(b+c) = ab+ac$ um zu zeigen, dass folgende Formel für alle $a, b \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

(7) **Eigenschaften**

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt und nehme an, dass für $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$ gilt, dass:

$$a \equiv a' \pmod{n}, \qquad b \equiv b' \pmod{n}.$$

Beweise, nur durch die Definition von Aufgabe (3), dass

$$a+b \equiv a'+b' \pmod{n}, \qquad a \cdot b \equiv a' \cdot b' \pmod{n}.$$

(8) **Eigenschaften 2.0**

Seien a, a', n wie in der vorherigen Aufgabe. Benutze nun die Eigenschaften die du bewiesen hast, um zu zeigen, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$:

$$a^k \equiv (a')^k \pmod n$$

(9) **Stufen Zählen**

Eine Treppe ist zwischen 15 und 20 Meter hoch, wobei die Stufenhöhe genau $15cm$ beträgt. Fritzchen steigt die Hälfte der Stufen hoch, dann ein Drittel des Restes, und schließlich ein Achtel der noch übrig gebliebenen Stufen. Dann ist er aber immer noch nicht ganz oben.

Wie hoch ist die Treppe insgesamt? Und wie viele Stuten muss Fritzchen noch hochsteigen?

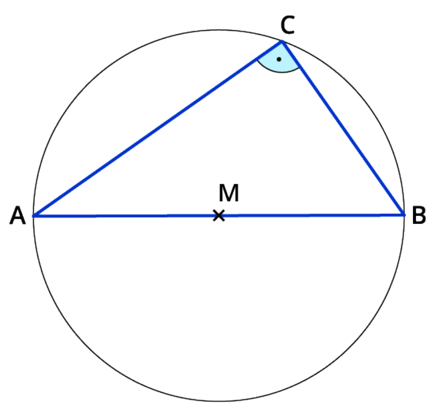
(10) **Lineare Gleichungen**

Löse folgendes System von Gleichungen (also bestimme $x, y, z \in \mathbb{Q}$ die die drei Gleichungen unten gleichzeitig erfüllen):

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 6x - 4y + 5z = 31, \\ 5x + 2y + 2z = 13. \end{cases}$$

(11) **Satz von Thales**

Sein A, B, C drei Punkte auf einem Kreis mit Zentrum M. Beweise, dass $\angle ACB = 90°$ gilt.



Glossar. Die logischen Zeichen die wir benutzen lesen sich wie folgt:

$a \in A,$	„a Element von A", kurz „a in A"
$\forall \ldots$	„Für alle ..."
$a \mid b,$	„a teilt b", wobei $a, b \in \mathbb{N}$ sind.

Zum Beispiel liest sich:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \quad \text{gilt es, dass} \quad 1 \mid n$$

„Für alle n in $\mathbb{N}$, mit $n \geq 1$ (also für alle natürlichen Zahlen die nicht Null sind) gilt es, dass n durch 1 geteilt wird."