MSG 2019/2020 — Zirkel 7c

Tommaso Rosati

# Probleme 22

1. **Einfach, aber aufgepasst!**

    - Eine Weinflasche kostet 10 Euro. Der Wein ist 9 Euro mehr wert, als die Flasche. Wie viel sind der Wein und die Flasche einzeln wert?
    - Ein Kaufmann kauft ein Buch für 7 Euro, verkauft es für 8 Euro, kauft es für 9 Euro zurück und verkauft es wieder für 10. Wie viel Profit hat der Kaufmann gemacht?
    - Unter 10 Hunden und Katzen werden 56 Kekse verteilt. Jede Katze bekommt 5 Kekse, jeder Hund 6. Wie viele Katzen und Hunde gibt es?

2. **Briefmarken:**

    Drei perfekte Logiker, A, B und C sitzen an einem Tisch. Es gibt 7 Briefmarken, 2 Rote, 2 Gelbe und 3 Grüne. Die drei Logiker schließen die Augen und jeder bekommt eine Briefmarke auf der Stirn geklebt. Die restlichen 4 werden weggeworfen. A wird gefragt: „Kennst du eine Farbe, die du sicherlich nicht besitzt?“, „Nein“ meint A. B wird die selbe Frage gestellt, „Nein“ ist die Antwort. Kannst du die Farbe von A, B oder C's Briefmarke bestimmen?

3. **Lucy oder Spinnen?**

    Edward und drei Freunde sind jeweils auf der Suche nach einem Hund. Der Verkäufer sagt: „Schaut euch diese Zwei Türen an. Jeder von euch muss eine wählen. Wenn dahinter ein Hund ist, darf ehr ihn mitnehmen. Sonst muss er eine Woche lang hier arbeiten. Aber vorsichtig: Es ist nicht gesagt, dass es überhaupt ein Hund hinter irgend einer Tür gibt! Um euch zu helfen, gibt es allerdings auf jede Tür ein Schild. Wenn hinter der linken Tür ein Hund ist, sagt das Schild die Wahrheit, sonst nicht. Wenn hinter der rechten Tür ein Hund ist, sagt das Schild nicht die Wahrheit, sonst doch.“

    - Das erste Mal sehen die Schilder so aus:

        1) Hinter beiden Türen befindet sich ein Hund
        2) Hinter beiden Türen befindet sich ein Hund

    - Das zweite Mal sehen die Schilder so aus:

1) Zumindest hinter einer Tür befindet sich ein Hund
2) Hinter der anderen Türe befindet sich ein Hund

- Das dritte Mal sehen die Schilder so aus:

  1) Es macht kein Unterschied, welche Türe du wählst
  2) Hinter der anderen Tür befindet sich ein Hund

- Das vierte Mal sehen die Schilder so aus:

  1) Es macht einen Unterschied, welche Türe du wählst
  2) Du wirst mehr Glück haben, wenn du die andere Türe wählst

Können alle 4 Freunde mit einem Hund nach Hause kommen? Wie?

4. **Diagonalen ziehen:**

   Anne und Bernd langweilen sich in der Quarantäne, und es gibt keine Elefanten mehr. Sie nehmen also ein regelmäßiges 2020-Eck. Die Freunde ziehen Abwechselnd eine Diagonale des 2020-Ecks (also eine Linie die zwei nicht nebeneinanderliegende Punkte verbindet), und zwar so, dass sich zwei Diagonalen nie überschneiden.

   Kann einer der beiden Spieler mit einer guten Strategie immer gewinnen? Was wenn es ein 2019-Eck ist? Ist es überhaupt wichtig eine Strategie zu haben? Begründe deine Antworten.

5. **Gibt es ein Trick?**

   Anne und Bernd spielen nun ein Spiel namens „Fünf gewinnt!“. Das Spielfeld ist ein $8 \times 8$-Schachbrett. Die Spieler setzen abwechselnd weiße und schwarze Spielfiguren auf das Schachbrett. Wer zuerst fünf seiner Figuren direkt nebeneinander in einer Reihe, Spalte oder Diagonalen hat, gewinnt das Spiel. Anne spielt als erste, aber sie möchte sicher sein, dass es keine Strategie gibt, durch die Bernd mit Sicherheit immer gewinnt. Was meinst du?

6. **Springer**:

   Anne und Bernd setzen abwechselnd weiße und schwarze Springer auf ein Schachbrett, immer so das der neue Springer nicht von den schon vorhandenen angegriffen werden kann.

   Wer gewinnt? Was wenn es Läufer statt Springer sind?

7. **Zifferntausch**:

Aus der zweistelligen Primzahl 79 erhält man wieder eine Primzahl, wenn man ihre Ziffern vertauscht: 97. ebenso kann man bei der Primzahl 131 alle drei Ziffern beliebig vertauschen, also die Zahlen 113, 311 bilden, ohne dass dabei die Primzahleneigenschaft verlorengeht.

Untersuche, ob es dreistellige Primzahlen mit paarweise voneinander verschiedenen Ziffern gibt, bei denen man bei sämtlichen möglichen Ziffernvertauschungen stets wieder dreistellige Primzahlen erhält.

*(Tipp: es kann nützlich sein, erst die nächste Aufgabe zu lösen, bzw. anzuwenden)*

8. **Für den Mathematiker:**

   1. Sei $n \in \mathbb{N}$ eine Zahl, die keine Primzahl ist. Dann gibt es ein Teiler $m$ von $n$ der kleiner als die Wurzel von $n$ ist:

      $$m \quad \text{teilt} \quad n \quad \text{und} \quad m \leq \sqrt{n}.$$

      *(Tipp: Kannst du eine Primzahl m finden, die die Bedingung erfüllt?)*

   2. Beweise, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

9. **Eine Aufgabe von Erdos:**

   Seien $m, n$ zwei positive ganze Zahlen. Seien $a_1, \ldots, a_{mn+1}$ andere $mn+1$ unterschiedliche Zahlen. Beweise, dass es entweder eine Teilmenge von $m+1$ Zahlen gibt, so dass

   $$a_{i_1} < a_{i_2} < \cdots < a_{i_{m+1}}, \qquad (\text{mit} \quad i_1 < i_2 < \cdots < i_{m+1}),$$

   oder $n+1$ Zahlen, so dass

   $$a_{j_1} > a_{j_2} > \cdots > a_{j_{n+1}}, \qquad (\text{mit} \quad j_1 < j_2 < \cdots < j_{n+1}).$$