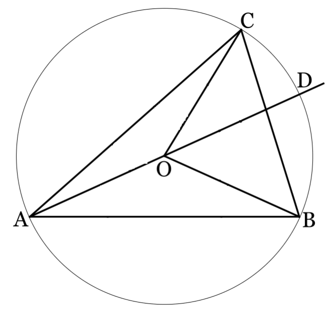
MSG 2019/2020 — Zirkel 7c
Tommaso Rosati

Unterricht 8

(1) **Peripheriewinkelsatz:**

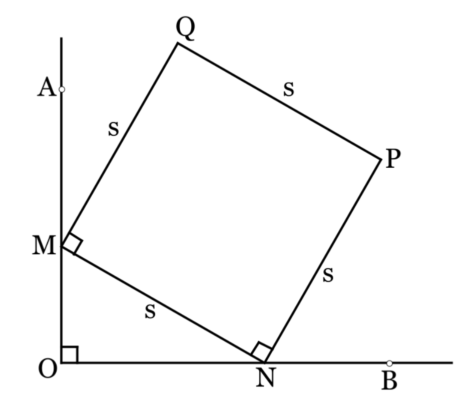
Sei O der Umkreismittelpunkt eines beliebigen Dreiecks ABC mit $\angle BAC = \alpha$ (wie z.B. in der Figur unten - **aber es ist nicht gesagt, dass** O **im inneren des Dreiecks liegen muss**). Beweise, dass der Winkel $\angle BOC$ dann gleich 2α ist.



(2) **Wilde Geometrie - Noch ein Versuch!**

Sei $\angle AOB$ ein rechter Winkel mit einem Punkt M auf der Halbgeraden OA und einem Punkt N auf der Halbgeraden OB. Ergänze M und N so zu einem Quadrat $MNPQ$, dass P auf der anderen Seite von MN liegt als O.

Auf welche Gerade befindet sich ***jeder*** Mittelpunkt eines solchen Quadrates $MNPQ$ - Also für eine beliebige Wahl von M und N? Stammt jeder Punkt in dieser Gerade aus einem so konstruierten Quadrat?



(3) **Runder Tisch:**

Eine Gruppe von 2013 Leuten setzt sich gleichmässig verteilt an einen runden Tisch. Nachdem sie sich hingesetzt haben, bemerken sie, dass an jedem Platz ein Namensschild steht und dass sich niemand an den Platz mit seinem Namen gesetzt hat. Zeige, dass sie den Tisch so drehen können, dass mindestens zwei Personen das richtige Namensschild vor sich haben.

(4) **Knackst du *diesen* Code?**

(a) Der Telegraphendienst von Sir Richard Blackmore hat eine erste codierte Nachricht seines Erzfeindes Black Adder abgefangen:

1-18-16-1 1-18-16-1:

7-10-18-16-18-13 22-24-07-18
8-18-5-7-18-13 7-10-18 10-7-10-24-1-18-13
13-10-18-2-0-17-16 6-13-0-22-6-18-13!

25-0 25-0 25-0!

Ein Spion von Sir Blackmore hat in Erfahrung bringen können, dass die Buchstaben von A bis Z zunächst als Zahlen von 0 bis 25 geschrieben werden werden. Sogar ein „Schlüssel“ ist bekannt: 11. Knackst du die Nachricht? Stelle dazu eine Verschlüsselungstabelle auf! (Denke immer daran: Das Alphabet hat 26 Buchstaben.)

(b) Sir Blackmore will den Code nun selbst benutzen! Er entscheidet sich als „Schlüssel“ für seine Glückszahl, die 13. Welches Problem hat Sir Blackmore bei der Verschlüsselung? Kannst du eine Erklärung geben?

(5) **ggT und kgV:**

Der grösste gemeinsame Teiler von zwei Zahlen $m,n \in \mathbb{N}$ (kurz: $ggT(m,n)$) ist die grösste Zahl, die m sowie n teilt. Das kleinste gemeinsame Vielfache von zwei Zahlen $m,n \in \mathbb{N}$ (kurz: $kgV(m,n)$) ist die kleinste Zahl, die ein Vielfaches von m sowie n ist.

Bestimme die Primzahlzerlegung, ggT und kgV von folgenden Paaren von Nummern:

$$(81,93),\quad (23,11),\quad (1,2),\quad (90,546),\quad (1449,3773).$$

(6) **Schweizerkreuz:**

Ein Schweizerkreuz besteht aus fünf Einheitsquadraten, einem zentralen und vier seitlich angrenzenden. Bestimme die kleinste natürliche Zahl n mit folgender Eigenschaft: Unter je n Punkten im Innern oder auf dem Rand eines Schweizerkreuzes gibt es stets zwei, deren Abstand kleiner als 1 ist.

(7) **Schulfreunde:**

Jeder von $2n+1$ Schülern wählt eine endliche, nichtleere Menge aufeinanderfolgender ganzer Zahlen. Zwei Schüler sind befreundet, falls sie eine gemeinsame Zahl ausgewählt haben. Jeder Schüler ist mit mindesten n anderen Schülern befreundet. Zeige, dass es einen Schüler gibt, welcher mit allen anderen befreundet ist.

(8) **Würfel färben:**

Aus 27 kleinen einfarbigen Holzwürfeln wird ein grosser Würfel zusammengebaut. Wie viele Farben sind nötig, wenn alle kleinen Würfel, die sich an mindestens einer Ecke berühren, verschiedenfarbig sein sollen?

(9) **Komische Teiler:**

Sei n eine natürliche Zahl. Und sein $a_1,\dots,a_n$ weitere n, beliebige, natürliche Zahlen. Dann gibt es eine Teilmenge von diese Zahlen, dessen Summe durch n teilbar ist.