MSG 2019/2020 — Zirkel 7c

Tommaso Rosati

# Unterricht 11

## Unterricht 10

1. **Mit Primzahlen Rechnen:**

   Für jede angegebene Zahl löse die folgenden drei Punkte:

   i. Errechne erst die Primzahlenfaktorisierung, **mit exponenten**, so dass jeder Primfaktor genau einmal vorkommt.[1]

   ii. Wir viele Teiler hat die Zahl (inklusive die 1 und die Zahl selber)?

   iii. Schreibe alle Teiler auf, die entweder eine Quadratzahl oder eine Kubikzahl ist - bis auf maximal 5 jeder Art.

$$\begin{array}{rll} 2\cdot 3^4\cdot 2\cdot 27\cdot 14, & 77\cdot 110\cdot 2^5\cdot 28, & 52\cdot 11\cdot 3^6\cdot 12\cdot 3\cdot 2, \\ 1024\cdot 20\cdot 26, & 13\cdot 22\cdot 63\cdot 14, & 41\cdot 42\cdot 81\cdot 12, \\ 65\cdot 64\cdot 63\cdot 62, & 30\cdot 32\cdot 34\cdot 35, & 300\cdot 200\cdot 100\cdot 50, \\ 10\cdot 21\cdot 23\cdot 54, & 22\cdot 44\cdot 93\cdot 99, & 4^{14}\cdot 2^{35}\cdot 144\cdot 3^5. \end{array}$$

2. **Wann bekommt man Quadratzahlen?**

   Sein $(a, b)$ und $(c, d)$ zwei vorgegebene Paare von natürlichen Zahlen. Ein Paar ist von Typ:

   i. (UG) wenn die erste Zahle gerade und die andere ungerade ist.

   ii. (GU) wenn das gegenteil passiert.

   iii. (GG) wenn beide gerade sind.

   iv. (UU) wenn beide ungerade sind.

   Zu jedem Paar $(a, b)$ assoziiert man die Zahl

$$2^a \cdot 5^b.$$

   Was für ein Typ muss $(a, b)$ sein, damit diese Zahl eine Quadratzahl ist?

   Was für Typen müssen $(a, b)$ und $(c, d)$ sein, damit

$$(2^a \cdot 5^b) \cdot (2^c \cdot 5^d)$$

   eine Quadratzahl ist?

1. Wir benutzen aus Einfachheit die Konvention, dass 1 keine Primzahl ist.

3. **Grosse Potenzen (MO)**

Gegeben sind fünf positive Teiler von $10^{2019}$. Zeige, dass es zwei dieser Teiler gibt, deren Produkt eine Quadratzahl ist.

4. **Der Größte Rest (K)**

Gregor teilt 2019 der Reihe nach durch $1, 2, 3, \dots$ und so weiter bis (inklusive) 1000. Er schreibt sich den Rest jeder Teilung auf. Welcher ist der Größte Rest den er bekommt?

5. **Zenos Paradox I**[2]

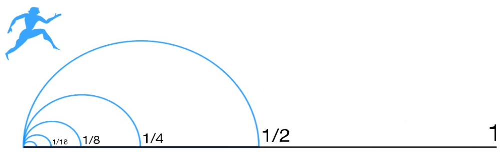
Für jedes $n$, betrachte die Summe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n}.$$

Kannst du begründen, warum diese Summe immer kleiner als 1 ist?

Fuer jede Zahl zwischen 0 und 1 (aber strikt kleiner als 1), kannst du ein $n$ finden, so dass die Summe größer als die vorgegebene Zahl ist?

Kannst du eine Formel für die Summe aufschreiben?




6. **Ein Zimmer in Bad Tölz (K)**

Die Stadt Bad Tölz ist nur von Lügnern und Rittern bewohnt. Lügner lügen immer, während Ritter immer die Wahrheit sagen. An einem Tag finden sich einige Badtölzer in ein Zimmer. Drei davon sprechen.

Der erste meint: “Es gibt nicht mehr als drei von uns im Zimmer und alle sind Lügner”.

Der zweite meint: “Es gibt nicht mehr als vier von uns im Zimmer. Nicht alle sind Lügner”.

Der dritte meint: “Es gibt fünf von uns im Zimmer, und drei davon sind Lügner”.

Wie viele Badtölzer gibt es im Zimmer, und wieviele davon sind Lügner?

2. “That which is in locomotion must arrive at the half-way stage before it arrives at the goal.” - von Aristotle, “Physics” VI:9, 239b10 (siehe Zeno’s paradoxes auf Wikipedia)