Rapport TP Mixte

Youness Bouallou, Taha Ezzoury, Marouane Elbissouri

12 Novembre 2023

Rapport TP Mixte

Youness Bouallou, Taha Ezzoury, Marouane Elbissouri

12 Novembre 2023

Introduction

Dans ce rapport, nous étudierons l'échantillon de données provenant du fichier **"Income_Inequality.csv"**. Ce fichier classe les pays chaque année selon s'ils présentent une inégalité des revenus élevée (High) ou basse (Low) en se basant sur divers indicateurs économiques, sanitaires, financiers, environnementaux et d'autres indices qui seront révélés lors de la phase d'analyse des données.

Notre échantillon est composé de 870 lignes et 22 variables, en excluant les variables "Country" et "Year" puisqu'ils ne sont pas statistiquement significatives. La variable « Income_Inequality» est celle que nous cherchons à expliquer, et les 19 autres variables explicatives sont supposées continues.

Nous sommes donc confrontés à un problème de classification binaire, où l'objectif est de prédire si un pays a un niveau élevé (« H ») ou faible (« L ») d'inégalité des revenus en utilisant ces variables explicatives.

Le rapport sera structuré de la manière suivante : une première partie **"Analyse des données"** inclura une analyse descriptive des données "Income_Inequality". La deuxième partie utilisera le logiciel R pour construire un arbre de décision performant visant à classifier les observations de la variable "Income_Inequality" en "H" ou "L". Une autre section sera dédiée à la détection des anomalies (outliers) dans nos données à l'aide d'une forêt d'isolation. Ensuite, nous appliquerons l'Analyse en Composantes Principales (ACP), suivie de l'Analyse Factorielle Discriminante (AFD) sur les données.

1 Analyse Descriptive et Statistique des données

```r
data= read.csv("Income_Inequality.csv", sep=";", header=TRUE)
length(unique(data$Country))
min(data$Year)
max(data$Year)
```

R Output:

87 2010 2019

L'étude est faite sur 87 pays, entre 2010 et 2019. En mesurant 19 indicateurs différents.

Visualisons notre base de donnée, on montrera ici que les 10 premières lignes avec les 7 premières variables quantitatives:

```r
#nombre d'individus de chaque classe
sum(data$Income_Inequality=="H")#nb of high inequalities
sum(data$Income_Inequality=="L")#nb of low inequalities
```

R Output:

542 328

Il en existe 542 d'individus classés "H" dans Income_Inequality et 328 individus classés "L"

```r
print(paste("nombre de lignes :",nrow(data)))
print(paste("nombre de colonnes :",ncol(data)))
head(data)
```

R Output:

"nombre de lignes : 870"
"nombre de colonnes : 22"

Country	Year	Income_Inequality	Eco1	Eco2	Eco3	Energy1	Energy2	Energy3
1	2010	H	2993.421	2856.690	4891.382	3	34.89564	159
1	2011	H	2983.033	3528.956	6041.854	5	34.60000	159
1	2012	H	3118.344	4013.388	6584.964	5	37.13132	145
1	2013	H	3152.704	4737.956	7073.847	5	38.27803	145
1	2014	H	3185.122	5360.889	7766.977	9	32.00000	145
1	2015	H	3100.831	5508.138	7991.803	15	42.00000	145

Health2	Finan1	Finan2	Finan3	Finan4	Finan5	Governance	Poverty	Env
6.194	0.1531890	870198.5	0.5309046	1.417133	0.3083183	-1.1420902	52.79680	0.9759168
6.120	0.1420322	999636.8	0.6732950	1.424196	0.3752112	-1.1979872	53.31582	0.9837871
6.039	0.1326178	1057144.1	0.6715849	1.431295	0.4145523	-0.9909295	53.87546	0.9475831
5.953	0.1431929	1053465.2	0.6674563	1.438429	0.4379736	-1.2466297	54.55579	1.0310436
5.864	0.1339238	1162079.1	0.6228057	1.445598	0.4494888	-1.0550836	54.93318	1.0914971
5.774	0.1475701	1145485.4	0.4262843	1.452803	0.4168656	-0.8931830	56.05640	1.1251854

Other2	Other3
36.54	3.42132
36.49	3.03000
36.60	3.08191
35.92	4.43895
34.53	3.12292
35.25	3.48690

On peut remarquer une grande disparité d'échelle entre les variables. Par exemple, la variable "Governance" est mesurée à l'ordre de 1, tandis que la variable "Eco2" est mesurée à l'ordre de 20 000, on peut bien voir ça en visualisant les moyennes et les écarts types des variables quantitatives dans la suite.

```r
#longueur des colonnes
length(unique(data$Eco1)); length(unique(data$Eco2)); length(unique(data$Eco3))
length(unique(data$Energy1)); length(unique(data$Energy2));
length(unique(data$Energy3))
length(unique(data$Health1)); length(unique(data$Health2))
length(unique(data$Finan1)); length(unique(data$Finan2)); length(unique(data
 ↪$Finan3));
length(unique(data$Finan4)); length(unique(data$Finan5))
length(unique(data$Governance))
length(unique(data$Poverty))
length(unique(data$Env))
length(unique(data$Other1)); length(unique(data$Other2));
length(unique(data$Other3))
```

R Output:

```
[1] 870, 870, 870

[1] 92, 415, 143

[1] 416, 616

[1] 870, 870, 861, 870, 861

[1] 870

[1] 838

[1] 870

[1] 870, 480, 820
```

Même si l'indice Energy1 semble être qualitatif, il présente presque autant de valeurs distinctes que le critère Country. Cela légitime la description de cette variable comme étant qualitative. Cependant, pour cette analyse, on procèdera avec l'hypothèse qu'il est plutot quantitative.

```r
# Sélectionner les colonnes des variables quantitatives:
selected_columns <- data[, 4:ncol(data)]
# Calculer les moyennes des colonnes sélectionnées
moyennes <- colMeans(selected_columns, na.rm = TRUE)
# Calculer les écarts types des colonnes sélectionnées
ecart_types <- apply(selected_columns, 2, sd, na.rm = TRUE)
# Créer un data frame avec les moyennes et les écarts types
result_df <- data.frame(Moyenne = moyennes, Ecart_type = ecart_types)
view(result_df)
```

R Output:

Variable	Moyenne	Ecart_type
Eco1	1.608159e+04	1.974010e+04
Eco2	1.563012e+04	1.198748e+04
Eco3	2.154380e+04	1.841850e+04
Energy1	5.190460e+01	2.381268e+01
Energy2	8.518011e+01	2.658898e+01
Energy3	9.122605e+01	5.151618e+01
Health1	2.719460e+01	3.268411e+01
Health2	2.639169e+00	1.400614e+00
Finan1	4.083050e-01	2.556808e-01
Finan2	4.849812e+06	1.139902e+07
Finan3	6.034541e-01	2.846676e-01
Finan4	2.719485e+00	7.038315e-01
Finan5	6.428665e-01	2.342267e-01
Governance	2.015184e-01	9.317494e-01
Poverty	2.653826e+01	1.986219e+01
Env	4.891840e+00	5.436763e+00
Other1	5.089391e+00	6.793927e+00
Other2	1.497062e+01	1.548390e+01
Other3	4.580620e+00	1.454224e+00

Cela ne devrait pas poser de problème dans l'implémentation de l'arbre de décision. En revanche, pour l'Analyse en Composantes Principales (ACP), il est impératif de normaliser les données.

```r
#valeurs manquantes
sum(is.na(data))
```

R Output: 0

Il n'y a pas de données manquantes dans notre base de données, mais reste à souligner qu'on a remarqué que la variable "Other2" prend en plusieurs fois la valeur 0. On ne va pas les considérer comme données manquantes puisqu'on n'a pas assez d'informations à propos de cet indicateur ainsi que son contexte.

2 Implémentation de l'arbre de décision sur toutes les données

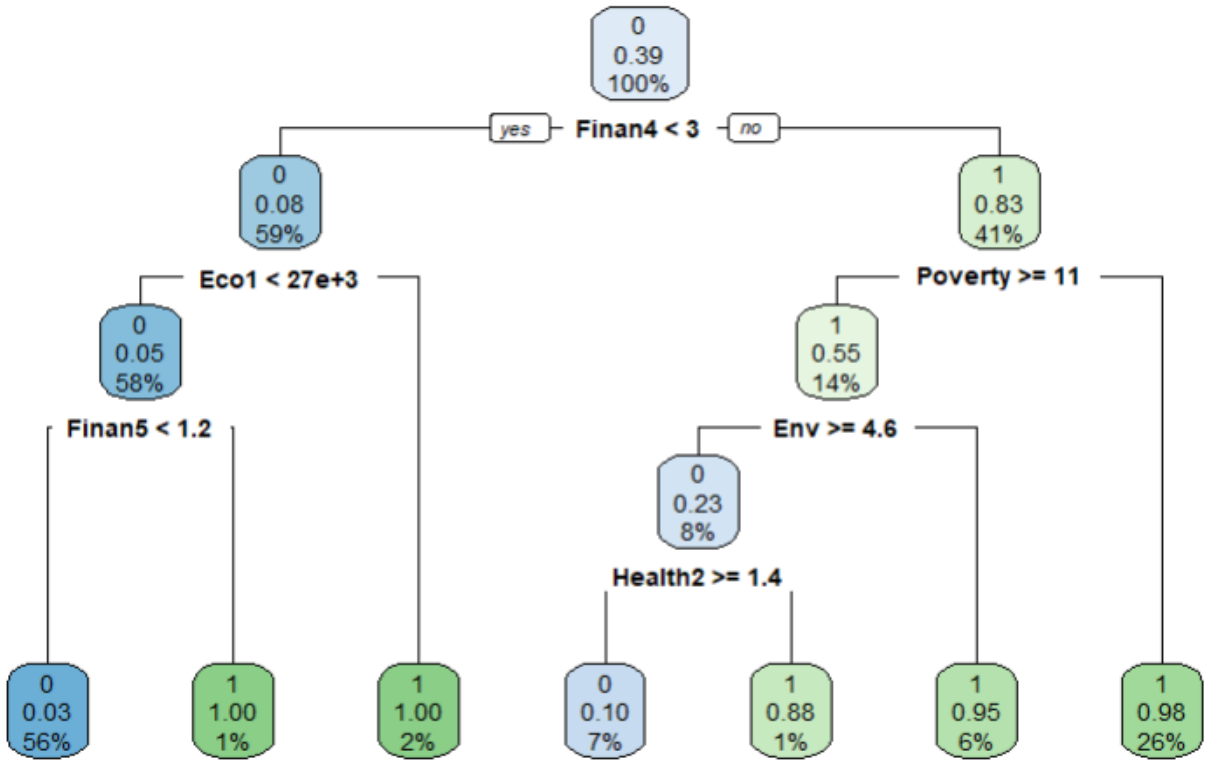
En premier temps, on supprime les deux colonnes "Country" et "Year", puis on catégorise la variable "Income_Inequality" en donnant la valeur 0 à "H" et la valeur 1 à "L".

```r
#on supprime les deux premières colonnes : Country et Year
data=data[,-c(1,2)]
#on catégorise les valeurs de Income_Inequality en 0->H et 1->L
data$Income_Inequality=ifelse(data$Income_Inequality == "L", 1, 0)
data$Income_Inequality= factor(data$Income_Inequality)
View(data)
```

	Income_Inequality	Eco1	Eco2	Eco3	Energy1	Energy2	Energy3	Health1	Health2	Finan1
19	0	13105.3972	19627.2696	22451.9892	54	99.989578	92.00	9.5	2.039	0.31911418
20	0	12716.2242	18460.9215	20767.9391	61	100.000000	92.00	8.6	1.994	0.27515927
21	1	2889.5663	9011.6686	10240.1519	48	99.800003	235.00	18.5	1.501	0.17740826
22	1	3043.2628	9892.4457	11016.0804	48	99.605797	235.00	17.6	1.500	0.19587721

On divise notre échantillon en données "train" et données "test" avec un seed égale à 1234, puis on implémente l'arbre de décision sans tuning des hyper-paramètres:

```
#On divise l'échantillon :
set.seed(1234)
index <- sample(1:nrow(data),round(0.70*nrow(data)))
train <- data[index,]
test <- data[-index,]


#Arbre de decision
tree = rpart(Income_Inequality~., data=train, method="class")
summary(tree)
rpart.plot::rpart.plot(tree)
varImp(tree)
#l'importance des vars
tree$cptable
```



	CP	nsplit	rel error	xerror	xstd
1	0.69787234	0	1.00000000	1.0000000	0.05112028
2	0.05531915	1	0.30212766	0.3404255	0.03547287
3	0.04255319	3	0.19148936	0.3063830	0.03390603
4	0.02978723	4	0.14893617	0.2255319	0.02960048
5	0.02553191	5	0.11914894	0.1872340	0.02718780
6	0.01000000	6	0.09361702	0.1744681	0.02631416

En analysant CP table, on peut voir que notre arbre, présente un R_α minimum égal à 0.17. Donc on n'aura pas besoin d'élaguer l'arbre.

Variable importance	
Eco1	35.800604
Eco2	144.051174
Eco3	31.254740
Energy1	4.902330
Energy2	110.369792
Env	22.281278
Finan3	4.481481
Finan4	165.522196
Finan5	28.329536
Governance	7.725917
Health1	155.356108
Health2	8.008333
Other3	3.008333
Poverty	185.299741
Energy3	0.000000
Finan1	0.000000
Finan2	0.000000
Other1	0.000000
Other2	0.000000

L'indicateur "Poverty" se révèle être le plus discriminant pour la classification des pays parmi tous les indicateurs, cependant des indicateurs comme Other2 ne jouent aucun rôle dans la construction de l'arbre.

Testons maintenant ce modèle sur les données test:

```
#Prédiction des données test:
pr <- predict(tree, newdata = test, type = "class")

#Précision:
mc <- table(pr, test$Income_Inequality)
err= 1-((mc[1,1]+mc[2,2])/sum(mc))
print(paste("Précision :",(1-err)*100,"%"))

# sensibilite et specificite
sp = mc[2,2]/(mc[1,2]+mc[2,2])
se = mc[1,1]/(mc[1,1]+mc[2,1])
print(paste("sensibilité :",se*100,"%"))
print(paste("specificité :",sp*100,"%"))

# ROC & auc
Predprob <- predict(tree, newdata = test,type = "prob")
Predprob = as.data.frame(Predprob)
Prediction <- prediction(Predprob[2],test$Income_Inequality)
performance <- performance(Prediction, "tpr","fpr")
plot(performance,main = "ROC Curve",col = 2,lwd = 2)
abline(a = 0,b = 1,lwd = 2,lty = 3,col = "black")
grid()
aucDT <- performance(Prediction, measure = "auc")
aucDT <- aucDT@y.values[[1]]
print(paste("area under curve :", aucDT))
```

R Output :

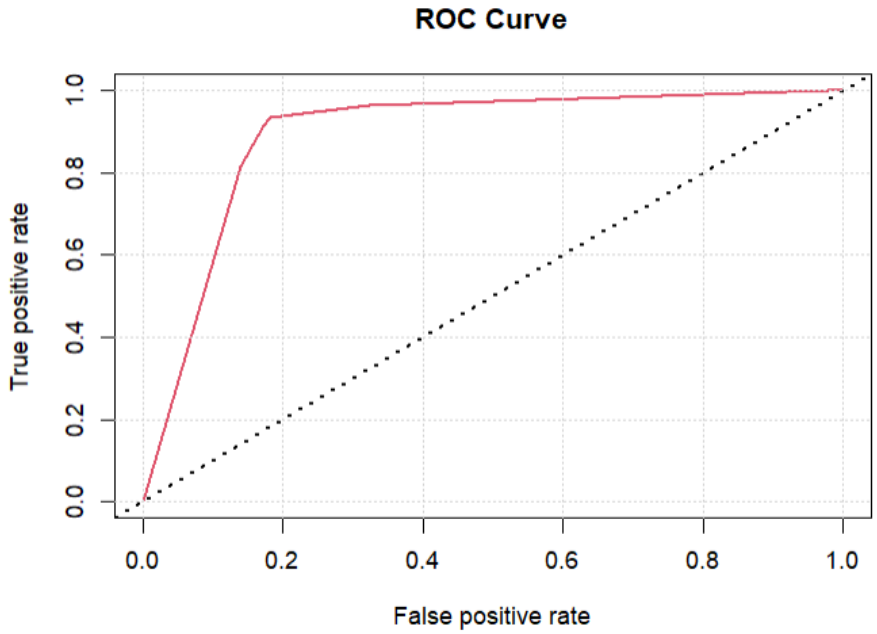
		Real 0	1
Predicted	0	154	16
	1	14	77

"Précision : 88.5057471264368 %"
"sensibilité : 91.6666666666667 %"
"spécificité : 82.7956989247312 %"

NB: Dans ce TP :

- La sensibilité signifie le taux de la bonne classsification de la classe 0 ("H")

- La spécificité : taux de la bonne classification de la classe 1 ("L")



"area under curve : 0.893305171530978"

On constate alors que ce modèle est bien performant avec une précision de 88%, il permet bien de détecter si un pays a une inégalité des revenus importante "H" (91%) mieux qu'un pays s'il a une inégalité de revenus moins importante "L" (82%).

Créons maintenant un autre modèle d'arbre "model1", avec 10-fold cross validation sur les données train :

```
#model d'arbre avec 10-fold cross validation sur train
ctrl= trainControl(method="cv", number = 10, savePredictions = TRUE)
model1= train(Income_Inequality~., data=train, method="rpart", trControl= ctrl)
model1$method
print(model1)
varImp(model1)
summary(model1)
```

```
cp          Accuracy   Kappa
0.04255319  0.8917407  0.7687292
0.05531915  0.8720139  0.7302771
0.69787234  0.7292411  0.3440988

Accuracy was used to select the optimal model using the largest value.
The final value used for the model was cp = 0.04255319.
```

```
          CP nsplit rel error
1 0.69787234      0 1.0000000
2 0.05531915      1 0.3021277
3 0.04255319      3 0.1914894

Variable importance
 Finan4 Poverty Health1    Eco2    Eco3 Energy2    Eco1  Finan2     Env
     19      16      15      15      14      12       3       3       3
```

On constate que ce modèle a révélé plusieurs variables statistiquement non significatives.

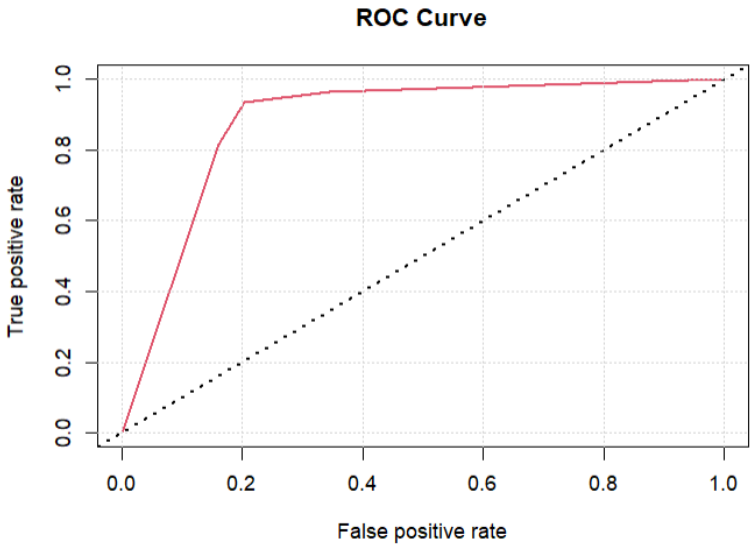
Performances du modèle:

```r
#prediction avec model1
pr1 <- predict(model1, newdata = test, type = "raw")

#Précision:
mc1 <- table(pr1, test$Income_Inequality)
err1= 1-((mc1[1,1]+mc1[2,2])/sum(mc1))
print(paste("Précision :",(1-err1)*100,"%"))

# sensibilite et specificite
sp1 = mc1[2,2]/(mc1[1,2]+mc1[2,2])
se1 = mc1[1,1]/(mc1[1,1]+mc1[2,1])
print(paste("sensibilité :",se1*100,"%"))
print(paste("specificité :",sp1*100,"%"))

# ROC & auc
Predprob1 <- predict(model1, newdata = test,type = "prob")
Predprob1 = as.data.frame(Predprob1)
Prediction1 <- prediction(Predprob1[2],test$Income_Inequality)
performance1 <- performance(Prediction1, "tpr","fpr")
plot(performance1,main = "ROC Curve",col = 2,lwd = 2)
abline(a = 0,b = 1,lwd = 2,lty = 3,col = "black")
grid()
aucDT1 <- performance(Prediction1, measure = "auc")
aucDT1 <- aucDT1@y.values[[1]]
print(paste("area under curve :", aucDT1))
```

R Output :

		Real 0	1
Predicted	0	157	19
	1	11	74

"Précision : 88.5057471264368 %"
"sensibilité : 93.4523809523809 %"
"spécificité : 79.5698924731183 %"



"area under curve : 0.880312339989759"

On peut constater que ce modèle conserve la même précision que celui précédent, avec une sensibilité élevée de 93%, lui permettant ainsi d'identifier efficacement les pays présentant une forte inégalité des revenus. En revanche, sa capacité d'identifier les pays à inégalité basse des revenus est dimminuée par rapport au modèle précédent.

3 Détéction des anomalies avec une forêt d'isolement:

Dans cette partie, nous travaillons avec l'ensemble des données (sans les diviser entre données d'entraînement et de test).

Tout d'abord, nous retirons la variable qualitative "Income_Inequality" puique les forêts d'isolement sont des modèles non supervisés qui ne nécessitent pas la classe des individus.

```
data_an= data[,-1]
View(data_an)
data_an_df= as_tibble(data_an)
```

	Eco1	Eco2	Eco3	Energy1	Energy2	Energy3	Health1	Health2	Finan1
1	2993.4210	2856.6903	4891.3820	3	34.895638	159.00	120.0	6.194	0.15318896
2	2983.0326	3528.9557	6041.8542	5	34.599998	159.00	112.2	6.120	0.14203219
3	3118.3437	4013.3876	6584.9636	5	37.131321	145.00	104.9	6.039	0.13261777
4	3152.7043	4737.9563	7073.8471	5	38.278030	145.00	98.3	5.953	0.14319290
5	3185.1224	5360.8891	7766.9774	9	32.000000	145.00	92.9	5.864	0.13392375
6	3100.8307	5508.1385	7991.8032	15	42.000000	145.00	88.3	5.774	0.14757015

Maintenant, nous construisons la forêt d'isolement en conservant les hyperparamètres tels quels, comme définis par défaut en R.

Ensuite, nous calculons le score d'anomalie pour toutes les observations en les classant par ordre croissant.

```r
#Foret d'isolement:
iso = isolationForest$new(sample_size=nrow(data_an_df))
iso$fit(data_an_df)

#score d'anomalie
anomalie_data= data_an_df%>%iso$predict()%>%arrange(desc(anomaly_score))
view(anomalie_data)
```

	id	average_depth	anomaly_score
1	849	5.61	0.7360976
2	850	5.80	0.7284987
3	530	5.84	0.7269089
4	848	7.07	0.6796814
5	847	7.16	0.6763487
6	529	7.19	0.6752415

Maintenant visualisons les 10 observations ayant les scores d'anomalie les plus élevés et les 10 observations ayant les scores les plus bas:

```r
ind_max=anomalie_data$id[1:10]
ind_min=tail(anomalie_data$id, 10)
View(data[ind_max,])#individu plus anormales
View(data[ind_min,])#individus moins anormales
```

Les 10 observations les plus anormales :

	Income_Inequality	Eco1	Eco2	Eco3	Energy1	Energy2	Energy3	Health1	Health2
849	0	59607.394	50243.793	64000.725	76	100.00000	89.6	6.5	1.7295
850	0	60698.011	51133.485	64982.777	80	100.00000	89.6	6.4	1.7060
530	1	4385.112	9574.277	13234.986	30	97.22991	79.0	16.0	2.9370
848	0	58207.578	49278.816	62495.419	76	100.00000	89.6	6.6	1.7655
847	0	57292.539	48302.085	61196.165	75	100.00000	89.6	6.7	1.8205
529	1	4242.300	8553.200	11740.038	28	98.10000	79.0	16.8	2.9230
162	0	6152.686	5477.873	10637.789	51	99.84872	143.2	14.6	1.6680
161	0	5647.059	5128.249	9927.951	47	99.70000	143.2	15.8	1.6870
846	0	56762.729	47345.207	60689.138	74	100.00000	89.6	6.8	1.8435
842	0	53394.862	45453.585	57063.223	70	100.00000	89.6	7.2	1.8945

Les 10 observations les moins anormales :

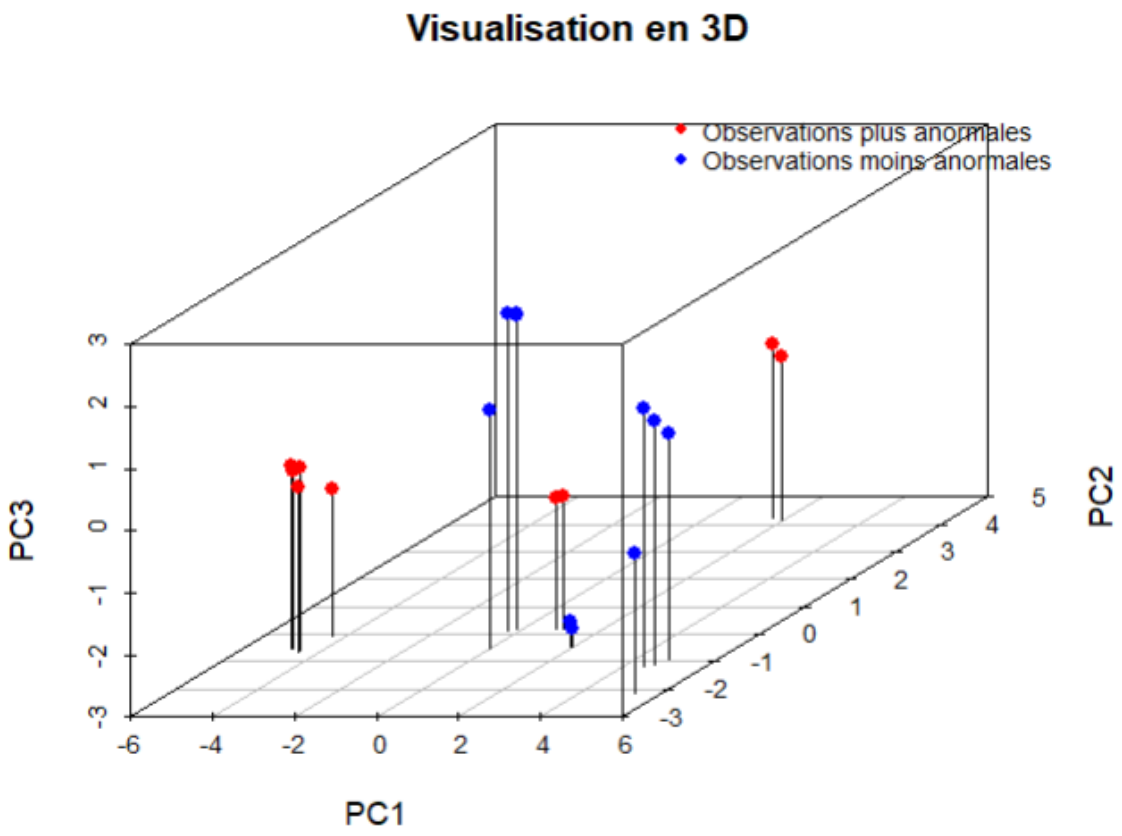
	Income_Inequality	Eco1	Eco2	Eco3	Energy1	Energy2	Energy3	Health1	Health2
804	0	10138.8288	16748.067	24427.866	60	100.00000	62	14.7	2.165
807	0	11022.5293	17467.139	25421.666	73	100.00000	55	12.2	2.177
808	0	11694.9252	18284.852	26928.305	75	100.00000	55	11.4	2.140
815	0	904.6152	1861.764	2559.557	14	23.50000	109	59.8	5.122
817	0	958.7219	1888.135	2398.833	21	32.80000	109	55.8	5.033
819	0	1011.0826	1914.582	2429.368	28	35.04802	105	51.9	4.923
820	0	1037.9403	1915.998	2460.646	46	37.65969	105	50.4	4.864
839	0	16142.0487	17420.706	20763.628	72	99.80000	48	7.3	1.658
853	0	6194.9928	10538.520	13346.765	35	85.30000	226	41.5	2.447
854	0	6263.1043	10553.014	13364.576	38	85.20000	226	39.6	2.428

Variable	**Moyenne**	**Ecart_type**
Eco1	1.608159e+04	1.974010e+04
Eco2	1.563012e+04	1.198748e+04
Eco3	2.154380e+04	1.841850e+04
Energy1	5.190460e+01	2.381268e+01
Energy2	8.518011e+01	2.658898e+01
Energy3	9.122605e+01	5.151618e+01
Health1	2.719460e+01	3.268411e+01
Health2	2.639169e+00	1.400614e+00
Finan1	4.083050e-01	2.556808e-01
Finan2	4.849812e+06	1.139902e+07
Finan3	6.034541e-01	2.846676e-01
Finan4	2.719485e+00	7.038315e-01
Finan5	6.428665e-01	2.342267e-01
Governance	2.015184e-01	9.317494e-01
Poverty	2.653826e+01	1.986219e+01
Env	4.891840e+00	5.436763e+00
Other1	5.089391e+00	6.793927e+00
Other2	1.497062e+01	1.548390e+01
Other3	4.580620e+00	1.454224e+00

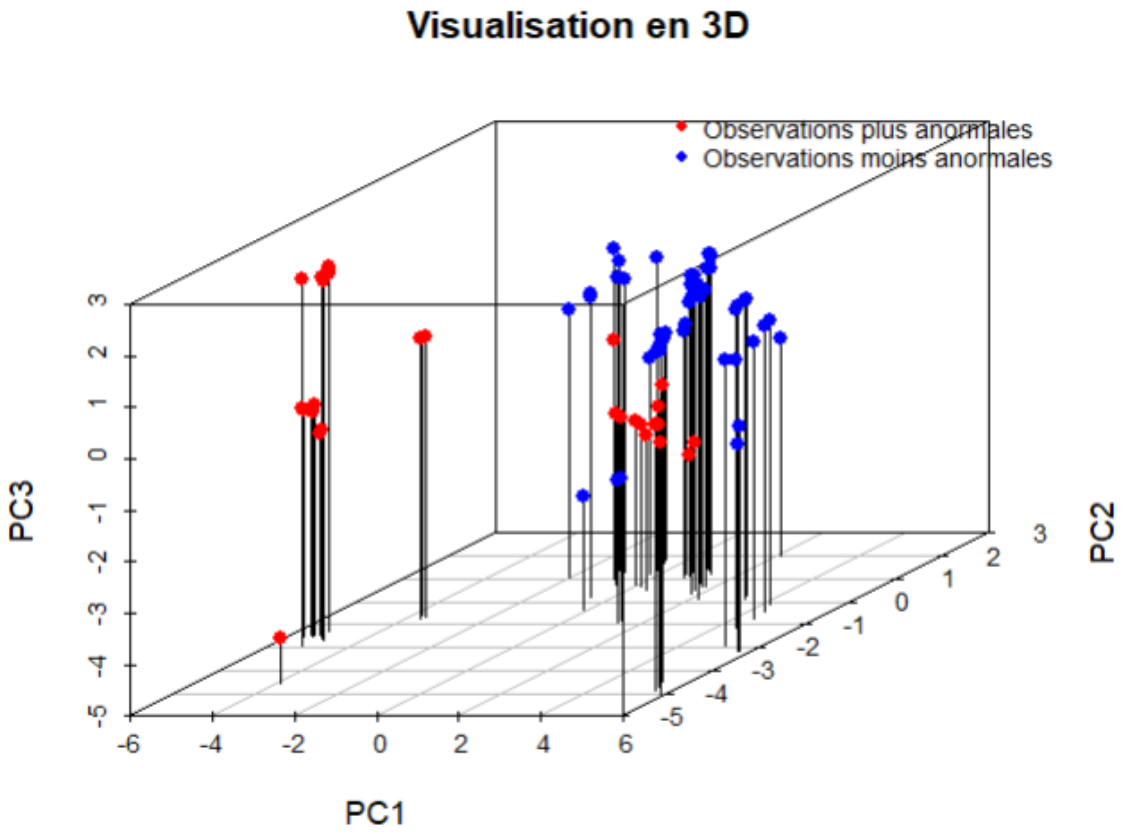
On remarque que la plupart des données numériques pour les individus anormales sortent de l'intervalle de confiance $[m - \sigma, m + \sigma]$.

Analyser ces données en 19 dimensions est assez difficile, c'est pourquoi nous appliquons l'ACP à ces 20 points afin de visualiser leur distribution en 3D.

```r
obs_anormales <- data_an_df[ind_max, ]
obs_normales <- data_an_df[ind_min, ]
view(obs_anormales)
view(obs_normales)

# Fusionner les deux ensembles de données
obs <- rbind(obs_anormales, obs_normales)
view(obs)
# Effectuer l'ACP sur les obs (On normalise les données)
pca_result <- prcomp(obs, scale. = TRUE)
# Réduction de dimension - réduire à 3 dimensions
reduced_data <- predict(pca_result, newdata = obs)[, 1:3]
view(reduced_data)

# Visualisation en 3D:
s3d <- scatterplot3d(reduced_data, color = "black", pch = 19, type = "h",
main = "Visualisation en 3D")
# Sélectionner les indices des observations norm et anorm
ind_anorm <- 1:10
ind_norm <- 11:20
# Visualiser les obs
s3d$points3d(reduced_data[ind_anorm, ], col = "red", pch = 19)
s3d$points3d(reduced_data[ind_norm, ], col = "blue", pch = 19)
# Ajouter des légendes pour les points
legend("topright", legend = c("Observations plus anormales",
"Observations moins anormales"),
       col = c("red", "blue"), pch = 19, bty = "n", cex = 0.8)
```



Donc, on peut clairement observer que les points moins anormaux forment des clusters distanciés des points normaux. Cette observation est évidente lorsque l'on visualise les 30 premiers points les plus anormaux et les 50 premiers points moins anormaux.



4 Implémentation de l'arbre de décision sans les 50 individus moins normales

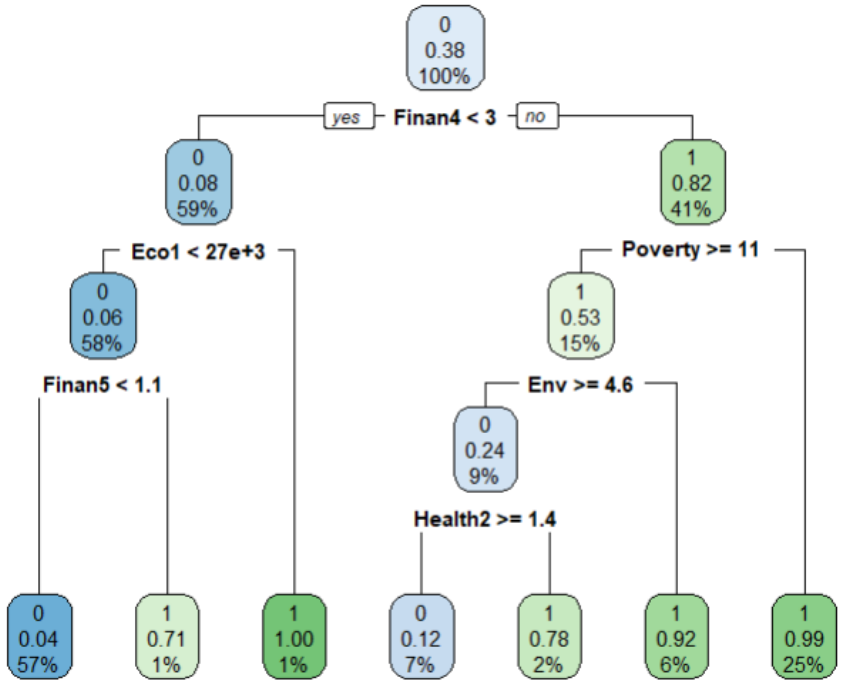
Maintenant on retire du jeu de données les 50 observations ayant les scores d'anomalie les plus élevés, puis on répéte la partie 2:

- on retire les jeux de données et on redivise l'échantillon en train et test:

```
#Supprimer les 50 obserbations:
ind_anorm=anomalie_data$id[1:50]
new_data=data[-ind_anorm,]
view(new_data)

#Diviser les données:
set.seed(1234)
index <- sample(1:nrow(new_data),round(0.70*nrow(new_data)))
new_train <- data[index,]
new_test <- data[-index,]
```

- On applique le premier modèle d'arbre de décision:

```r
#arbre de decision
new_tree = rpart(Income_Inequality~., data=new_train, method="class")
rpart.plot::rpart.plot(new_tree)
varImp(new_tree)
#CP table:
new_tree$cptable
```




```
          CP nsplit rel error    xerror       xstd
1 0.68055556      0 1.0000000 1.0000000 0.05373518
2 0.06018519      1 0.3194444 0.3518519 0.03759341
3 0.03240741      3 0.1990741 0.2638889 0.03317210
4 0.02314815      4 0.1666667 0.2361111 0.03155922
5 0.01388889      5 0.1435185 0.1944444 0.02888489
6 0.01000000      6 0.1296296 0.2083333 0.02981428
```

Toujours, notre arbre présente le R_α minimum, donc on n'aura pas besoin d'élaguer l'arbre.

Performances du modèle:

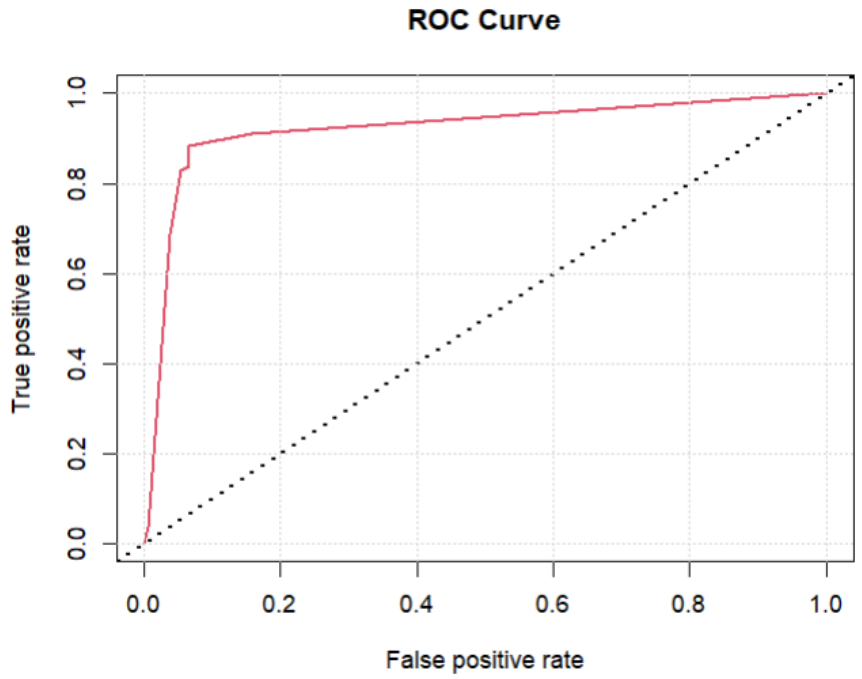
```r
#Prédiction des données test:
new_pr <- predict(new_tree, newdata = new_test, type = "class")
#Précision:
mc <- table(new_pr, new_test$Income_Inequality)
mc
err= 1-((mc[1,1]+mc[2,2])/sum(mc))
print(paste("Précision :",(1-err)*100,"%"))

# sensibilite et specificite
se = mc[1,1]/(mc[1,1]+mc[2,1])
sp = mc[2,2]/(mc[1,2]+mc[2,2])
print(paste("sensibilité :",se*100,"%"))
print(paste("specificité :",sp*100,"%"))
```

R Output :

		Real	
		0	1
Predicted	0	172	13
	1	12	99

"Précision : 91.5540540540541 %"
"sensibilité : 93.4782608695652 %"
"spécificité : 88.3928571428571 %"

On peut bien remarquer l'augmentation des performances du modèle après la suppression des données anormales. La sensibilité est passée à 93.4 % et la spécificité à 88.3 %, ce qui rend le modèle plus précis dans la prédiction des deux classes avec une précision de 91,5 %. Cela est également observable dans la courbe ROC, avec une AUC de 0,92 !!



"area under curve : 0.921025815217391"

Conclusion: les données aberrantes (outliers) ont une influence significative sur les performances du modèle. Cela souligne l'importance cruciale de détecter et de gérer efficacement ces valeurs aberrantes lors de la construction de modèles prédictifs

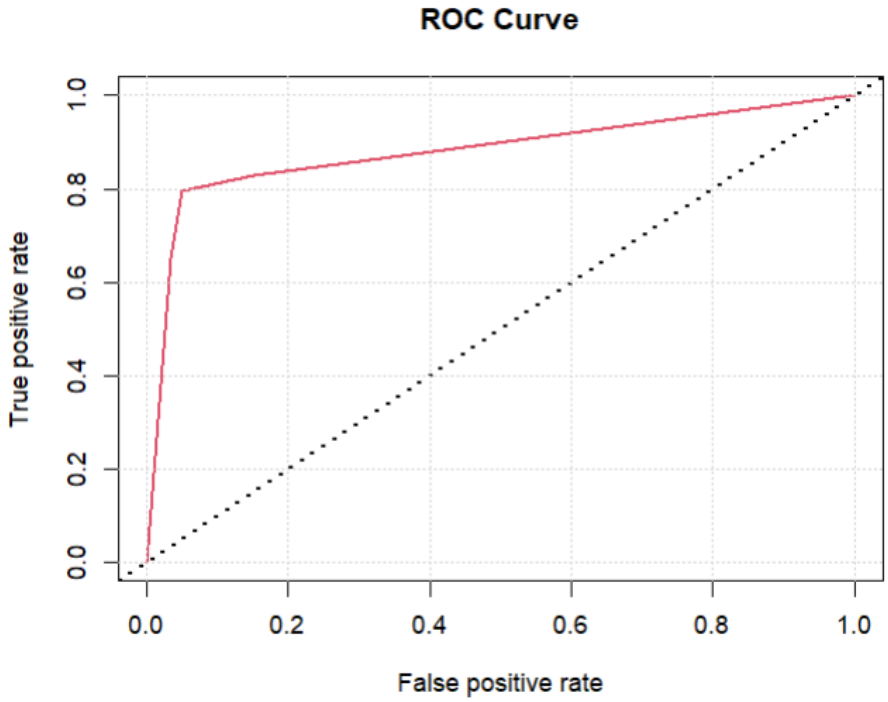
- On applique le deuxième modèle avec 10-fold cross validation:

```r
#model d'arbre avec 10-fold cross validation:
ctrl= trainControl(method="cv", number = 10, savePredictions = TRUE)
model1= train(Income_Inequality~., data=new_train, method="rpart", trControl=␣
 ↪ctrl)
model1$method

#prediction du modèle 1
pr1 <- predict(model1, newdata = new_test, type = "raw")
#Précision:
mc1 <- table(pr1, new_test$Income_Inequality)
mc1
err1= 1-((mc1[1,1]+mc1[2,2])/sum(mc1))
print(paste("Précision :",(1-err1)*100,"%"))

# sensibilite et specificite
sp1 = mc1[2,2]/(mc1[1,2]+mc1[2,2])
se1 = mc1[1,1]/(mc1[1,1]+mc1[2,1])
print(paste("sensibilité :",se1*100,"%"))
print(paste("specificité :",sp1*100,"%"))

# ROC & auc
Predprob1 <- predict(model1, newdata = new_test,type = "prob")
Predprob1 = as.data.frame(Predprob1)
Prediction1 <-prediction(Predprob1[2],new_test$Income_Inequality)
performance1 <- performance(Prediction1, "tpr","fpr")
plot(performance1,main = "ROC Curve",col = 2,lwd = 2)
abline(a = 0,b = 1,lwd = 2,lty = 3,col = "black")
grid()
aucDT1 <- performance(Prediction1, measure = "auc")
aucDT1 <- aucDT1@y.values[[1]]
print(paste("area under curve :", aucDT1))
```

R Output :

		Real 0	1
Predicted	0	175	23
	1	9	89

"Précision : 89.1891891891892 %"
"sensibilité : 95.1086956521739 %"
"spécificité : 79.4642857142857 %"



"area under curve : 0.882230201863354"

On peut remarquer que les performances de ce modèle ont peu été améliorées avec la suppression des données aberrantes, avec une sensibilité peu élevée au modèle précédant, à 95,1 % et une spécificité moins élevée, à 79,5 %. Il demeure moins performant que le modèle précédant en termes de précision globale. Cependant, ce modèle reste plus généralisable à d'autres données test.

Remarque :

Dans les deux sections suivantes, l'Analyse en Composantes Principales (ACP) et l'Analyse Factorielle Discriminante (AFD), il est demandé de trouver les 10 points les plus mal projetés des **données test**. Ensuite, il est demandé de comparer ces résultats avec ceux de la partie 'Forêt d'isolements'. Cependant, il convient de noter que dans la partie 'Forêt d'isolement', les points aberrants sont identifiés pour **l'ensemble des données** et non uniquement pour les données test. Pour cette raison, nous avons choisi de trouver les 10 points aberrants parmi les données test. Ensuite, nous comparerons les résultats de l'ACP et de l'AFD avec ces données:

```r
#Trouver les 10 points les plus anormales des données Test

#On supprime la colonne "Income_Inequality"
View(test)
data_an1= test[,-1]
View(data_an1)

#On réindexe
data_an1_reindex <- data_an1 %>% tibble::as_tibble() %>% mutate(index = row_
↪number() - 1)
view(data_an1_reindex)

#Foret d'isolement:
iso = isolationForest$new(sample_size=nrow(data_an1_reindex))
iso$fit(data_an1_reindex)
#score d'anomalie
anomalie_data1= data_an1_reindex%>%iso$predict()%>%arrange(desc(anomaly_score))
view(anomalie_data1)

#On prend les id des 10 points les plus anormales
ind_max1=anomalie_data1$id[1:10]
ind_points_anormales=ind_max1-1
#On a retranché 1 pour les comparer avec les indices qui commencent par 0 dans␣
↪la partie ACP et AFD
view(ind_points_anormales)
View(data_an1_reindex[ind_max1,])#individu plus anormales
```

Les 10 points les plus anormales dans les données "test":

Eco1	Eco2	Eco3	Energy1	Energy2	Energy3	Health1	Health2	Finan1	Finan2	Finan3	Fi
73179.	38506.	59734.	71	100	66	3	1.85	0.676	1441517.	1.55	3
2680.	5016.	5606.	9	52.5	149.	126.	5.62	0.217	3041313.	0.502	1
1796.	4397.	6268.	77	92.1	59.2	38.7	2.2	0.461	30257410	0.320	2
963.	1890.	2292.	8	36.9	158	107.	5.37	0.109	58376.	0.468	1
2471.	4314.	5108.	45	87.9	42	41.9	3.21	0.204	111501.	0.378	2
980.	2068.	2455.	9	38.4	158	105.	5.35	0.0936	57674.	0.458	1
51644.	32715.	44345.	66	100	38	4.1	1.75	0.686	1268594	1.39	3
82480.	38026.	57881.	46	100	39	4.4	1.52	0.949	2222874.	1.42	3
84968.	39445.	62430.	68	100	39	4.1	1.52	0.957	2707659	1.21	3
48370.	32391.	44252.	61	100	52	3.1	1.98	0.810	1799198.	1.25	3

Leurs indices dans les données test sont :

178 173 116 26 39 27 73 50 51 228

Puisqu'on travaillera ensuite par Python, les indices commencent par 0 au lieu de 1, pour cela la liste des points à prendre en Pyhton est :

177 172 115 25 38 26 72 49 50 227

5 Partie 5: réalisation de l'ACP sur $\mathbb{R}^p$

5.1 Introduction

Pour réaliser l'ACP, on utilise nos fonctions utilisés dans le TP ACP. Avec **PYTHON**, On essaie premièrement d'importer nos données "**train**" et "**test**" utilisés dans R à partie de la séparation avec un seed de 1234 pour pouvoir plus tard analyser et comparer les anomalies obtenus de l'ACP avec ceux de l'Isolation Forest.

Pour la question de standardisation des données ou non, notre premier reflexe sera d'utiliser des données centrés car comme on a vu dans le TP ACP: l'ACP standardisé conduit à une mise à l'échelle (scaling) des composantes principales et des variances éxpliqués par chaque points, ce qui est indésirable pour nous dans cette situation car on a besoin de bien distinguer les variances expliqués par chaque point dans chaque composante pour pouvoir visualiser plus tard l'effet des outliers sur la variance. Après si dans les données centrés l'ecart de variance est très grand entre les composantes, la distinction deviendra abberante et dans ce cas l'adoption de l'ACP standardisé est plus convenable.

On experimentera dans la suite avec les deux approches et on choisit la plus convenable.

On commence par importer les librairies nécessaires dans la suite.

[259]:
```
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.lines import Line2D
import seaborn as sb
```

On importe puis on visualise nos données train et test.

[260]:
```
# Importation des données train :
data_train = pd.read_excel('train_data.xlsx', decimal=',')
data_train.head()
```

[260]:

	Income_Inequality	Eco1	Eco2	Eco3	Energy1	Energy2	Energy3	Health1	Health2	Finan1	Finan2	Finan3	Finan4	Finan5	Governance	Poverty	Env	Other1	Other2	Other3
0	L	43044.997120	32416.819912	43757.013606	64	100.00000	42.0	2.7	1.7500	0.665518	1.258443e+06	1.202421	3.391014	0.794753	2.181061	0.151155	9.228086	0.498563	13.08	7.12404
1	H	58207.578310	49278.816384	62495.418887	76	100.00000	89.6	6.6	1.7655	0.915723	6.694028e+07	1.000000	3.738714	1.000000	1.549218	11.175388	14.823245	0.427546	0.00	5.10922
2	H	21452.921520	25778.473448	40041.105564	34	100.00000	85.0	8.5	2.0530	0.452552	2.227306e+05	0.442042	2.264699	1.038013	0.451604	0.000000	21.394807	20.462117	20.30	3.19000
3	H	5701.674149	8746.013481	11436.344113	43	91.09951	67.0	18.3	2.4870	0.300588	9.182161e+05	0.606352	2.715935	0.547731	-0.187987	32.137705	1.617522	9.999279	39.73	
4	L	12024.609507	21280.180517	25957.547446	57	100.00000	154.0	5.0	1.3200	0.451241	2.394525e+06	0.560190	3.327214	0.865860	0.768318	14.084801	7.516889	3.157677	18.09	

```
3  2.92276
4  4.93554
```

[261]:
```
data_train.shape
```

[261]:
```
(609, 20)
```

[262]:
```
# Importation des données test :
data_test = pd.read_excel('test_data.xlsx', decimal=',')
data_test.head()
```

[262]:
```
  Income_Inequality         Eco1         Eco2         Eco3  Energy1  \
0                 H  3118.343699  4013.387617  6584.963632        5
1                 H  3185.122401  5360.889146  7766.977359        9
2                 H  3100.830685  5508.138454  7991.803167       15
3                 H  2914.415459  5285.425544  7088.190165       16
4                 H  2808.521753  5462.176989  7059.195320       16

     Energy2  Energy3  Health1  Health2    Finan1       Finan2    Finan3  \
0  37.131321    145.0    104.9    6.039  0.132618  1057144.125  0.671585
1  32.000000    145.0     92.9    5.864  0.133924  1162079.125  0.622806
2  42.000000    145.0     88.3    5.774  0.147570  1145485.375  0.426284
3  41.813129    145.0     84.4    5.686  0.154190  1092634.500  0.243273
4  43.013260    121.0     81.1    5.600  0.148656  1281953.250  0.316407

     Finan4    Finan5  Governance    Poverty       Env     Other1  Other2  \
0  1.431295  0.414552   -0.990930  53.875463  0.947583  34.731008   36.60
1  1.445598  0.449489   -1.055084  54.933176  1.091497  22.124248   34.53
2  1.452803  0.416866   -0.893183  56.056403  1.125185  13.305675   35.25
3  1.460044  0.417792   -0.936142  56.904924  1.012552  20.885120    0.00
4  1.467321  0.414517   -0.919977  58.013752  0.829723  25.950330    0.00

    Other3
0  3.08191
1  3.12292
2  3.48690
3  2.75494
4  2.46688
```

[263]:
```
data_test.shape
```

[263]:
```
(261, 20)
```

On essaie d'encoder "H"->0 et "L"->1 pour Income_Inequality, la variable à classifier pour chaqu'un des données train et test.

[264]:
```
from sklearn import preprocessing
le = preprocessing.LabelEncoder()
y_train = le.fit_transform(data_train["Income_Inequality"])
y_test = le.fit_transform(data_test["Income_Inequality"])
del data_train["Income_Inequality"]
del data_test["Income_Inequality"]
```

[265]:
```
np.unique(y_train)
```

[265]:
```
array([0, 1])
```

[266]:
```
X= data_train.values
X.shape
```

[266]:
```
(609, 19)
```

5.2 Application de l'ACP sur les données de la matrice X

On commence par un rappel des fonctions utilisées dans le TP ACP.

[267]:
```
#Rappel des fonction statistiques:
def moyenne(X):
    n,_=np.shape(X)
    a=np.ones((n,n))
    return (1/n)*np.dot(a,X)

def cov(X):
    n,_=np.shape(X)
    a=X-moyenne(X)
    b=np.dot(np.transpose(a),a)
    return (1/(n))*b

def variance(X):
    return np.diag(cov(X))
def sigma(X):
    return np.sqrt(variance(X))

def corr(X):
    D=np.diag(1/sigma(X))
    a=cov(X)
    s=np.dot(a,D)
    s=np.dot(D,s)
    return s

# Centrage :
def center(X):
    return X-moyenne(X)

#Centrer et normer
def cennor(X):
    D = np.diag(1/sigma(X))
    return np.dot(center(X),D)
```

Rappel de la fonction de détermination des hyperplans pour lesquels l'inertie projetée est maximale.

[268]:
```
def sorted_eig_val_vect(A) :
    eigenvalues , eigenvectors = np.linalg.eig(A)
    s = sorted ( eigenvalues , reverse = True )
    s=np.array(s)
    sorted_indices = np . argsort ( eigenvalues ) [:: -1]
    sorted_eigenvectors = eigenvectors [:,sorted_indices ]
    return s , sorted_eigenvectors

def hyperplans(X):
    A = cov(X)
    return sorted_eig_val_vect(A)
```

[269]:
```
center(X).shape
```

[269]: (609, 19)

[270]:
```
print("min :", np.min(center(X),axis=0))
print("max :", np.max(center(X),axis=0))
print()
center(X)
```

```
min : [-1.59595428e+04 -1.48536396e+04 -2.09602960e+04 -5.00870279e+01
 -8.04571635e+01 -7.92956486e+01 -2.39252874e+01 -1.68629228e+00
 -3.52806927e-01 -4.93771396e+06 -4.27979647e-01 -1.55500274e+00
 -4.74883866e-01 -1.84665440e+00 -2.59825003e+01 -5.09237802e+00
 -5.22468231e+00 -1.48288342e+01 -4.08420953e+00]
max : [7.08939804e+04 3.36671886e+04 7.04376674e+04 3.89129721e+01
 1.42428363e+01 1.95704351e+02 1.21774713e+02 4.88070772e+00
 5.73978915e-01 9.45126521e+07 1.01898817e+00 1.16919322e+00
 7.48862598e-01 2.01591732e+00 5.79780802e+01 3.44550018e+01
 3.69827888e+01 3.96611658e+01 5.30924526e+00]
```

[270]:
```
array([[ 2.68153170e+04,  1.68051921e+04,  2.19491005e+04, ...,
        -4.73530223e+00, -1.74883415e+00,  2.57344690e+00],
       [ 4.19778982e+04,  3.36671886e+04,  4.06875057e+04, ...,
        -4.80631924e+00, -1.48288342e+01,  5.58626801e-01],
       [ 5.22324143e+03,  1.01668456e+04,  1.82331924e+04, ...,
         1.52282510e+01,  5.47116585e+00, -1.36059317e+00],
       ...,
       [ 5.57828695e+04,  2.06362277e+04,  7.04376674e+04, ...,
         2.68295246e+01, -2.67883415e+00, -4.76753086e-01],
       [-6.40598619e+03,  4.17084486e+02, -1.65353168e+03, ...,
         1.67488312e+01,  1.70911658e+01, -6.48903221e-01],
       [-2.15817140e+03,  2.31775143e+03, -6.21116958e+02, ...,
        -2.07827826e+00,  6.74116585e+00,  8.86016995e-01]])
```

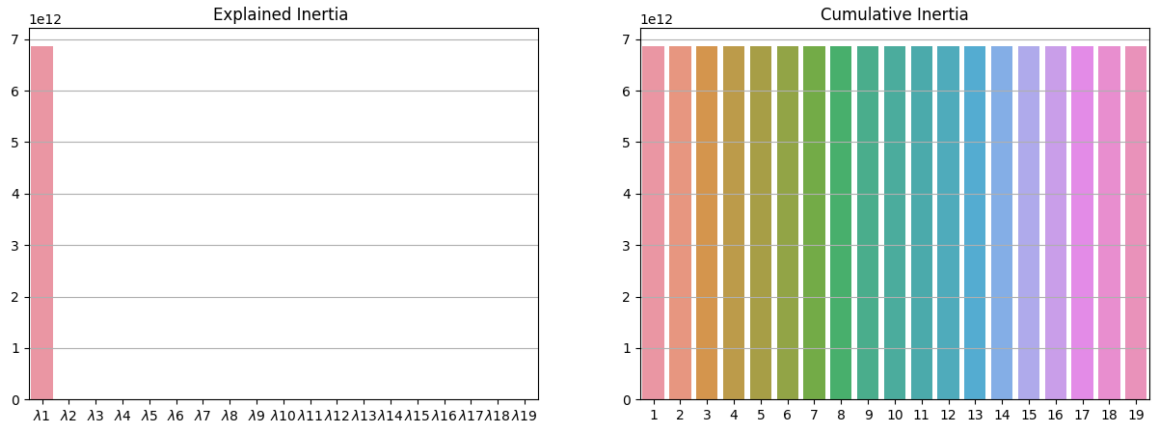
D'après la visualisation des données, il est pertinent de standariser vu qu'il y a des nombre très grands pour des individus et d'autre non ce qui peut influencer l'ACP. Si on doute quand même appliquons l'ACP au données centrées

[271]:
```
Vpc,Vc = hyperplans(center(X))
Vpn,Vn = hyperplans(cennor(X))
```

On visualise les composantes principales pour les données centrés.

[272]:
```
# Cas des données centrées
n = len(Vpc)
fig = plt.figure(figsize=(15, 5))
ax1 = fig.add_subplot(121)
ax2 = fig.add_subplot(122)
ax1.set_title("Explained Inertia ")
ax2.set_title("Cumulative Inertia")
ax1.grid()
ax2.grid()
a = sum(Vpn)
# Create a bar plot for explained inertia :
x = [f'$\lambda${i}' for i in range(1, n + 1)]
y = [Vpc[i] / a for i in range(n)]
```

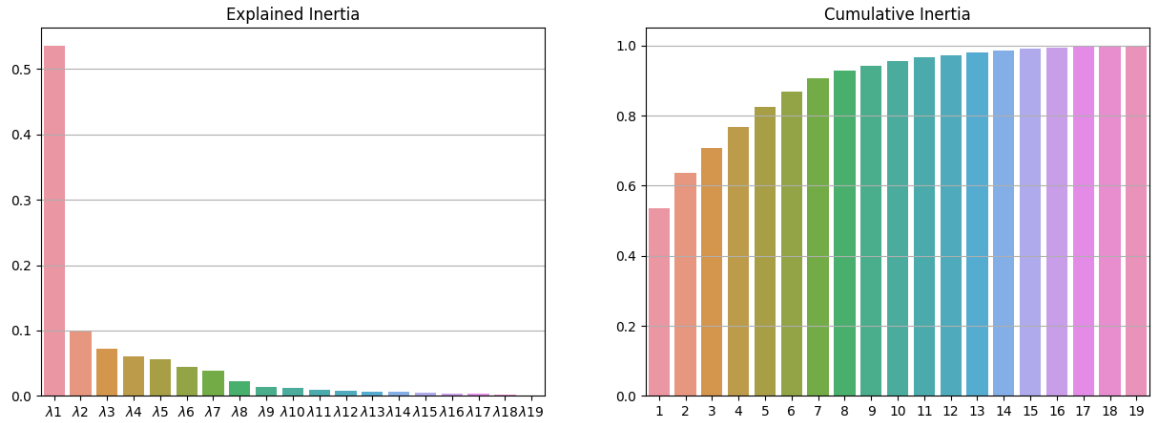
```
sb.barplot(x=x, y=y, ax=ax1)
# Create a bar plot for cumulative explained inertia
x = [f'{i}' for i in range(1, n + 1)]
y = [sum(Vpc[:i + 1]) / a for i in range(n)]
sb.barplot(x=x, y=y, ax=ax2)

plt.show()
```



Notre observation était donc juste, on voit qu'une seule composante qui est significative alos que cela peut être faux.

Dans la suite on travaillera avec les données standarisées (normalisées).

[273]:
```
# Cas des données normalisées
n = len(Vpn)
fig = plt.figure(figsize=(15, 5))
ax1 = fig.add_subplot(121)
ax2 = fig.add_subplot(122)
ax1.set_title("Explained Inertia")
ax2.set_title("Cumulative Inertia")
ax1.grid()
ax2.grid()
a = sum(Vpn)
# Create a bar plot for explained inertia :
x = [f'$\lambda${i}' for i in range(1, n + 1)]
y = [Vpn[i] / a for i in range(n)]
sb.barplot(x=x, y=y, ax=ax1)
# Create a bar plot for cumulative explained inertia :
x = [f'{i}' for i in range(1, n + 1)]
y = [sum(Vpn[:i + 1]) / a for i in range(n)]
sb.barplot(x=x, y=y, ax=ax2)

plt.show()
```

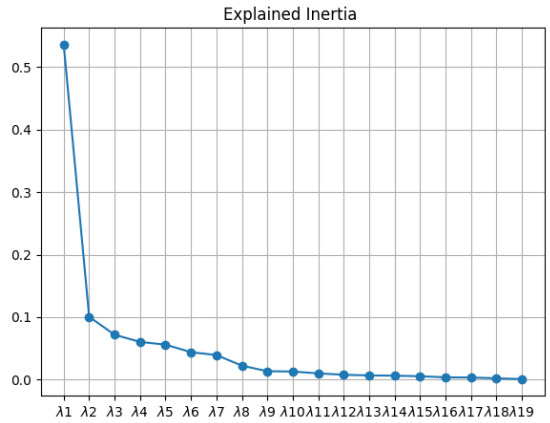


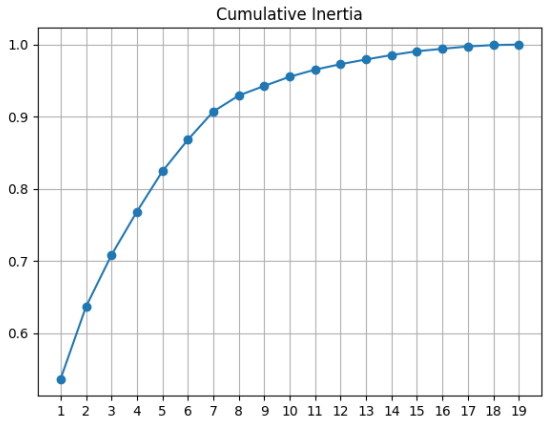
Ici, l'écart d'inertie entre les composantes principales est plus distinguable.

[274]:
```
# On travaillera avec les données standarisées
X= cennor(X)
Vp,V = hyperplans(X)
```

règles de choix du nombre de composantes principales: Pour la règle de Cantell, on se limitera à une détection visuelle des cassures

[275]:
```
# Règle de Cantell
# Cas des données centrées
n = len(Vp)
fig = plt.figure(figsize=(15, 5))
ax1 = fig.add_subplot(121)
ax2 = fig.add_subplot(122)
ax1.set_title("Explained Inertia ")
ax2.set_title("Cumulative Inertia")
ax1.grid()
ax2.grid()
a = sum(Vp)
# Create a plot for explained inertia :
x = [f'$\lambda${i}' for i in range(1, n + 1)]
y = [Vp[i]/a for i in range(n)]
ax1.plot(x,y,marker='o')
# Create a bar plot for cumulative explained inertia
x = [f'{i}' for i in range(1, n + 1)]
y = [sum(Vp[:i + 1]) / a for i in range(n)]
ax2.plot(x,y,marker='o')
print()
plt.show()
```





On peut dire que K=7, vu qu'on peut voir d'un coude apparent à gauche et un autre partagé avec la cummulative inertia plot. Mais cette visualisation reste tout de même imprécise.

[276]:
```
# Règle de Karlis - Saporta - Spinaki
def K_S_S(X):
    n,p=np.shape(X)
    Z=hyperplans(X)[0]
    a=2*np.sqrt((p-1)/(n-1))
    return len(Z[Z>a])

print(K_S_S(X))
```

8

[277]:
```
#Règle de Kaiser-Guttman : (Règle convenable quand on travaille avec des données␣
 ↪normalisées)
def K_G(X):
    Z = hyperplans(X)[0]
    a = Z[Z >= 1]
    return len(a)

print(K_G(X))
```

5

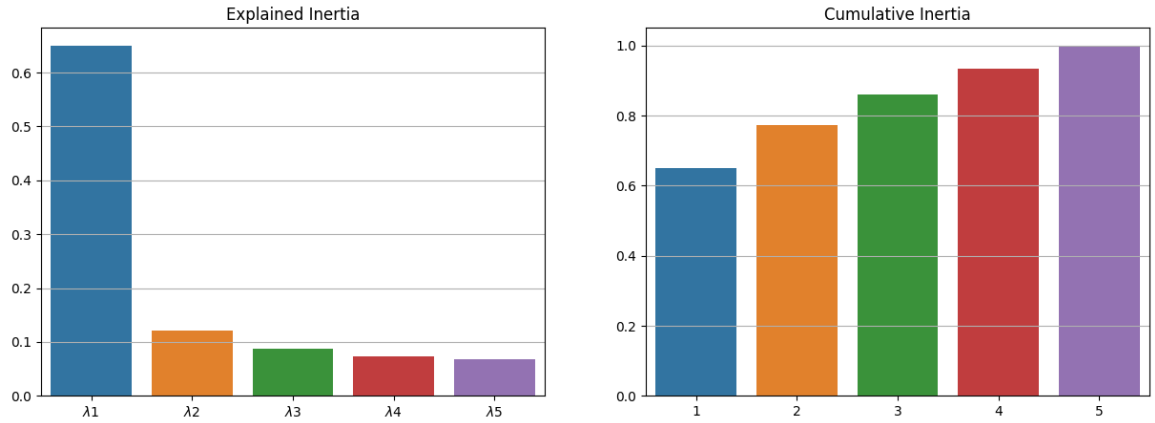
On pose alors K=5

5.3 ACP sur les 5 premières composantes

Trouvons l'inertie totale et cummulée expliquée par les composantes.

[278]:
```
n = 5
fig = plt.figure(figsize=(15, 5))
ax1 = fig.add_subplot(121)
ax2 = fig.add_subplot(122)
ax1.set_title("Explained Inertia")
ax2.set_title("Cumulative Inertia")
ax1.grid()
ax2.grid()
a = sum(Vpn[:5])
# Create a bar plot for explained inertia :
x = [f'$\lambda${i}' for i in range(1, n + 1)]
```

```
y = [Vpn[i] / a for i in range(n)]
sb.barplot(x=x, y=y, ax=ax1)
# Create a bar plot for cumulative explained inertia :
x = [f'{i}' for i in range(1, n + 1)]
y = [sum(Vpn[:i + 1]) / a for i in range(n)]
sb.barplot(x=x, y=y, ax=ax2)

plt.show()
```



Rappellons la fonction de projection :

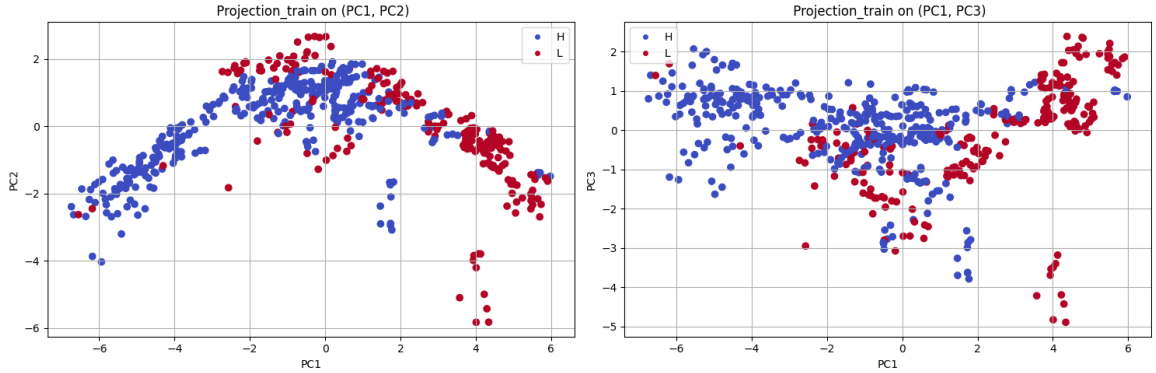
[279]:
```
def projection(X,k):
    P = hyperplans(X)[1]
    # We project onto the space of dimension k and then dimension p
    projection_k = np.dot(X, P[:,:k])
    full_projection = np.dot(X, P)
    return projection_k, full_projection
```

[280]:
```
Z1 = projection(X,5)[0]
Z1.shape
```

[280]:
```
(609, 5)
```

[281]:
```
fig = plt.figure(figsize=(15, 5))
ax1 = fig.add_subplot(121)
ax2 = fig.add_subplot(122)

# Create subplots for centered data with CP1, CP2

ax1.set_title(' Projection_train on (PC1, PC2)')
ax1.set_xlabel('PC1')
ax1.set_ylabel('PC2')
scatter1=ax1.scatter(Z1[:, 0], Z1[:, 1],c=y_train, cmap='coolwarm')

ax1.grid()

# Create subplots for centered data with CP1, CP3

ax2.set_title(' Projection_train on (PC1, PC3)')
ax2.set_xlabel('PC1')
```

```
ax2.set_ylabel('PC3')
ax2.scatter(Z1[:, 0], Z1[:, 2],c=y_train, cmap='coolwarm')

ax2.grid()
t=['H','L']
# Create a color map legend
legend_elements = [Line2D([0], [0], marker='o', color='w', label=t[i],
                          markerfacecolor=scatter1.cmap(scatter1.norm(i)))
                   for i in np.unique(y_train)]
ax1.legend(handles=legend_elements)
ax2.legend(handles=legend_elements)
plt.tight_layout()
plt.show()
```

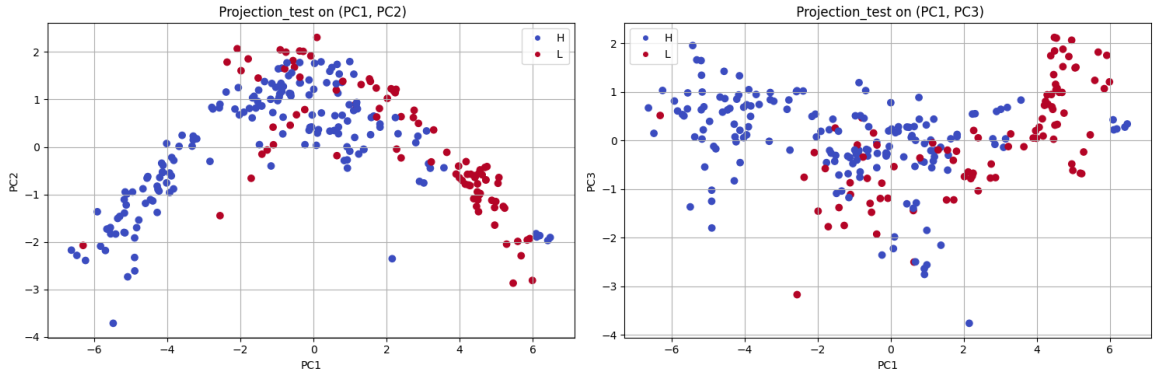


Bien que les deux composantes principales expliquent plus de 60% de l'inertie, on a pas réussi à séparer totalement les deux classes.

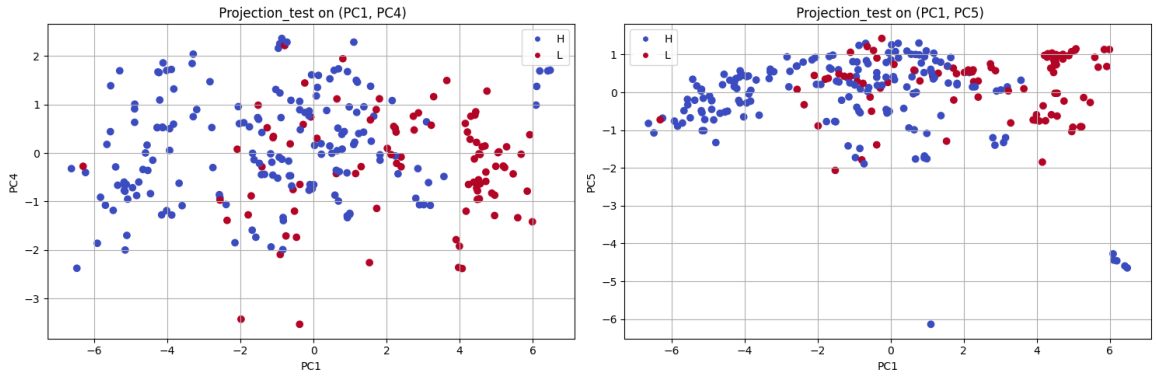
On essaie ainsi de projeter les données test sur les composantes principales.

[282]:
```
Y=data_test.values
Y=cennor(Y)
Z2=np.dot(Y,V[:,:5])

fig = plt.figure(figsize=(15, 5))
ax1 = fig.add_subplot(121)
ax2 = fig.add_subplot(122)

# Create subplots for centered data with CP1, CP2

ax1.set_title(' Projection_test on (PC1, PC2)')
ax1.set_xlabel('PC1')
ax1.set_ylabel('PC2')
ax1.scatter(Z2[:, 0], Z2[:, 1],c=y_test, cmap='coolwarm')

ax1.grid()

# Create subplots for centered data with CP1, CP3

ax2.set_title(' Projection_test on (PC1, PC3)')
ax2.set_xlabel('PC1')
ax2.set_ylabel('PC3')
ax2.scatter(Z2[:, 0], Z2[:, 2],c=y_test, cmap='coolwarm')
```

```
ax2.grid()
t=['H','L']
# Create a color map legend
legend_elements = [Line2D([0], [0], marker='o', color='w', label=t[i],
                          markerfacecolor=scatter1.cmap(scatter1.norm(i)))
                   for i in np.unique(y_test)]
ax1.legend(handles=legend_elements)
ax2.legend(handles=legend_elements)
plt.tight_layout()
plt.show()
```



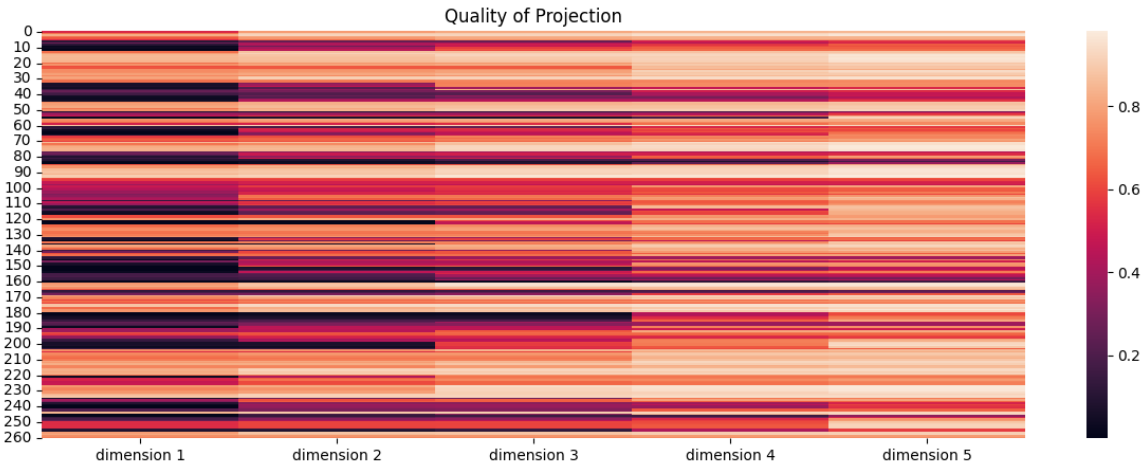
[283]:
```
fig = plt.figure(figsize=(15, 5))
ax1 = fig.add_subplot(121)
ax2 = fig.add_subplot(122)
ax1.set_title(' Projection_test on (PC1, PC4)')
ax1.set_xlabel('PC1')
ax1.set_ylabel('PC4')
scatter1 = ax1.scatter(Z2[:, 0], Z2[:, 3], c=y_test, cmap='coolwarm')

ax1.grid()

ax2.set_title(' Projection_test on (PC1, PC5)')
ax2.set_xlabel('PC1')
ax2.set_ylabel('PC5')
scatter2 = ax2.scatter(Z2[:, 0], Z2[:, 4],c=y_test, cmap='coolwarm')
ax2.grid()
t=['H','L']
# Create a color map legend
legend_elements = [Line2D([0], [0], marker='o', color='w', label=t[i],
                          markerfacecolor=scatter1.cmap(scatter1.norm(i)))
                   for i in np.unique(y_test)]
ax1.legend(handles=legend_elements)
ax2.legend(handles=legend_elements)
plt.tight_layout()
plt.show()
```



On constate que le nuage des points ici est plus dispersé sur (PC1, PC4), cependant les deux classes ne sont pas encore bien séparés.

Essayons de visualiser les qualités de projections des données test standarisés.

[284]:
```
# X = données train standarisés
# Y = données test standarisés
# Rappel sur les fonction de la qualité de projection:
def qual_proj(X,Y,k):
    V = hyperplans(X)[1]
    X_k, X_p = np.dot(Y,V[:,:k]),np.dot(Y,V)
    quality = np.sum(X_k**2, axis=1) / np.sum(X_p**2, axis=1)
    return quality

def matrix_quality(X,Y,k):
    L = []
    for i in range(1, k+1):
        L.append(qual_proj(X,Y,i))
    return np.array(L)
T = np.transpose(matrix_quality(X,Y,5))
d = T
fig = plt.figure(figsize=(15, 5))
ax1 = fig.add_subplot(111)
ax1.set_title("Quality of Projection")
sb.heatmap(d, ax=ax1, xticklabels=['dimension 1', 'dimension 2', 'dimension 3',␣
 ↪'dimension 4','dimension 5'])


plt.show()
```



Identification des 10 points mals projetés :

Il est totalement accepatable que la qualité de projections des individus augmente avec la dimension de l'espace choisi. Bien que la plupart des individus sont presque 80% expliqués par les 5 premières composantes, il existe d'autre qui sont mal projetés, càd qu'il sont positionnés preque ortogonalement par rapports aux cinq composantes si on les visualisent sur toutes les 19 composantes.

Trouvons quelque uns de ces individus dans nos données test.

N.B: Il faut bien noter que mal projeté ne veut pas dire anomalies, parcequ'il faut prendre de beaucoup d'autres facteurs tel que la distance..

Essayons de trouvez les 10 premiers individus mal projetés.

[285]:
```
# obtenons la matrice des qualités de projection sur les 5 composantes paricipales␣
↪pour chaque individu
d= T[:,4]
d
```

[285]:
```
array([0.84898228, 0.93650015, 0.96878038, 0.84675484, 0.83487887,
       0.77250278, 0.5542261 , 0.51732081, 0.64295323, 0.62357029,
       0.64680882, 0.67715077, 0.67431153, 0.87860243, 0.91607484,
       0.96375217, 0.95262177, 0.96328907, 0.96085569, 0.95050813,
       0.88028421, 0.90187375, 0.87536604, 0.88084536, 0.81777596,
       0.93769345, 0.91306412, 0.89668179, 0.85398162, 0.95411204,
       0.96073078, 0.76011584, 0.73775888, 0.75122654, 0.74725885,
       0.76375085, 0.53326704, 0.86989503, 0.54036344, 0.46584306,
       0.47451925, 0.48454615, 0.42235354, 0.50821887, 0.56563231,
       0.88778091, 0.8721932 , 0.88852443, 0.89726681, 0.89348362,
       0.91618365, 0.31080154, 0.4905711 , 0.58221584, 0.81627895,
       0.92151309, 0.82825   , 0.8137778 , 0.74580989, 0.74231114,
       0.92134442, 0.57589941, 0.64168038, 0.59865147, 0.66219551,
       0.69539998, 0.75021944, 0.73149759, 0.73331881, 0.79387997,
       0.75068389, 0.94915341, 0.9488294 , 0.97580825, 0.97524575,
       0.97153906, 0.9613203 , 0.41880007, 0.53611076, 0.55579482,
       0.78546269, 0.68126868, 0.30318015, 0.17898655, 0.36802759,
       0.80985732, 0.92148553, 0.93545511, 0.9582575 , 0.97009046,
       0.96045526, 0.94874214, 0.98110035, 0.98099951, 0.63244828,
       0.599613  , 0.52533873, 0.51699499, 0.48084478, 0.80364795,
       0.65148463, 0.64514938, 0.63569171, 0.70925457, 0.6050871 ,
       0.76586511, 0.86739887, 0.83557934, 0.74238623, 0.72229043,
```

```
       0.75304181, 0.78240105, 0.86984695, 0.88045193, 0.85217756,
       0.83072454, 0.82044117, 0.82309688, 0.78366102, 0.77947674,
       0.83272714, 0.68267623, 0.69341984, 0.6009737 , 0.82776353,
       0.84973273, 0.87188405, 0.8314976 , 0.8260856 , 0.86003819,
       0.88394798, 0.91181233, 0.65043733, 0.67971459, 0.59320568,
       0.8819504 , 0.87017963, 0.92027913, 0.90343528, 0.82386318,
       0.86854035, 0.78851308, 0.65107664, 0.79645833, 0.41662625,
       0.38043047, 0.74005021, 0.50072481, 0.78498831, 0.76791181,
       0.74558509, 0.44991637, 0.43991196, 0.53585983, 0.71021352,
       0.55036803, 0.45711053, 0.41150601, 0.29505003, 0.44132133,
       0.15998168, 0.95675325, 0.96693757, 0.94483928, 0.8723321 ,
       0.82202253, 0.23401737, 0.29911289, 0.6367258 , 0.95716638,
       0.88606873, 0.90782059, 0.71768181, 0.74415252, 0.68451399,
       0.95320781, 0.95848203, 0.9161999 , 0.96343532, 0.92395905,
       0.61911728, 0.60797577, 0.65594307, 0.70828688, 0.73470777,
       0.80587311, 0.4081342 , 0.38266995, 0.38888927, 0.75495932,
       0.50976494, 0.49173428, 0.81266605, 0.70306608, 0.65843111,
       0.6027037 , 0.57367326, 0.79152422, 0.8278595 , 0.91373631,
       0.9281095 , 0.94400596, 0.88828651, 0.64319966, 0.85538832,
       0.81888001, 0.88957638, 0.88786742, 0.85027605, 0.82975724,
       0.87779259, 0.92944856, 0.9253944 , 0.90774352, 0.84811256,
       0.85714457, 0.93148982, 0.93478951, 0.89526453, 0.91907554,
       0.77368463, 0.69781673, 0.74731431, 0.7818032 , 0.7325419 ,
       0.71811094, 0.72282714, 0.97101052, 0.97409965, 0.96870946,
       0.96723408, 0.94008955, 0.91891085, 0.93167175, 0.93936691,
       0.7079275 , 0.79758618, 0.66295022, 0.52110634, 0.59483798,
       0.55913165, 0.54244381, 0.65520985, 0.66601967, 0.92434707,
       0.93183245, 0.35138912, 0.49893307, 0.76110914, 0.78182509,
       0.88180422, 0.91002642, 0.91780823, 0.91703341, 0.91463158,
       0.58320651, 0.57363379, 0.90578332, 0.91934763, 0.78498324,
       0.75170918])
```

[286]:
```
seuil= sorted(d)[10]
least_proj= np.where(d<seuil)
least_proj=least_proj[0]
least_proj
```

[286]:
```
array([ 51,  82,  83,  84, 145, 158, 160, 166, 167, 246])
```

[287]:
```
# les 10 moins projetés
data_test.iloc[least_proj]
pd.DataFrame(cennor(data_test.values)).iloc[least_proj]
```

[287]:

	0	1	2	3	4	5	6	\
51	-0.207292	-0.089800	-0.083112	-0.298499	0.577975	-0.960052	-0.594781	
82	-0.650176	-0.551031	-0.623953	-0.577883	0.572681	-0.750114	-0.018807	
83	-0.646802	-0.334820	-0.487792	-0.098939	0.569202	-0.750114	-0.173546	
84	-0.639103	-0.398041	-0.535761	0.539653	0.594963	-0.750114	-0.219395	
145	-0.634062	-0.545909	-0.515320	-0.138851	0.116530	0.782432	-0.546067	
158	-0.619484	-0.592724	-0.609213	-1.136651	0.220990	-0.204276	-0.313958	
160	-0.593726	-0.494879	-0.446462	-0.857267	0.493017	-0.204276	-0.385596	
166	-0.367439	0.025300	0.062020	-0.098939	0.587603	-0.918064	-0.611974	
167	-0.315745	0.122680	0.137667	0.220357	0.586823	-1.211977	-0.609108	
246	-0.119072	-0.128549	-0.166756	0.140533	0.569202	-0.855083	-0.534604	

```
            7         8         9         10        11        12        13  \
51  -0.611616  0.466316 -0.308053  0.341006  0.363992  0.646659  1.026518
82   0.343611 -0.321816 -0.300753 -1.154875 -0.488042  2.311173 -0.526802
83   0.499210 -0.516266 -0.278263 -1.044089 -0.209328  3.035136 -0.887965
84   0.300350 -0.440813 -0.278585 -1.350593 -0.130176  2.980601 -0.718082
145 -0.366006 -0.618990 -0.362157 -0.990439  0.226973  0.735778 -0.402790
158  0.164986 -0.068496 -0.394852 -0.934797  0.340554 -1.527787 -0.276961
160  0.151031 -0.195824 -0.393414 -0.942793  0.468999 -1.430131 -0.397583
166 -0.421826  1.055346 -0.216910 -0.480131  0.291365  0.127819  0.769123
167 -0.475554  1.057397 -0.176174 -0.722417  0.379747 -0.123591  0.809774
246 -0.495091 -0.801850 -0.386610  0.348609 -0.182966  0.378395  0.464763

           14        15        16        17        18
51   0.105485 -0.059194  1.181083 -0.079438 -0.315341
82   0.101194 -0.502941  0.766889  0.972523 -0.715131
83   0.051726 -0.498088 -0.101725  1.152969 -0.464585
84   0.241790 -0.476743  0.154506 -0.979108 -0.387684
145  0.309230 -0.863122 -0.753295  1.422358 -2.035943
158 -0.286353  0.406794  0.864726 -0.979108  0.354812
160 -0.354048  0.692372  1.635796 -0.979108  4.601915
166 -0.263716  0.634584  0.726960  0.926452  0.702426
167 -0.467892  0.801112  0.296847  0.689057  0.157600
246 -0.108578 -0.606504 -0.445702  0.769042 -0.190661
```

[288]:
```
pd.DataFrame(np.mean(cennor(data_test.values)[least_proj], axis=0)).T
```

[288]:
```
        0         1         2         3         4         5         6   \
0 -0.47929 -0.298777 -0.326868 -0.230649  0.488899 -0.582164 -0.400784

        7         8         9         10        11        12     13        14  \
0 -0.09109 -0.038499 -0.309577 -0.693052  0.106112  0.713405 -0.014 -0.067116

          15        16        17        18
0 -0.047173  0.432609  0.291564  0.170741
```

[289]:
```
pd.DataFrame(np.std(cennor(data_test.values)[least_proj], axis=0)).T
```

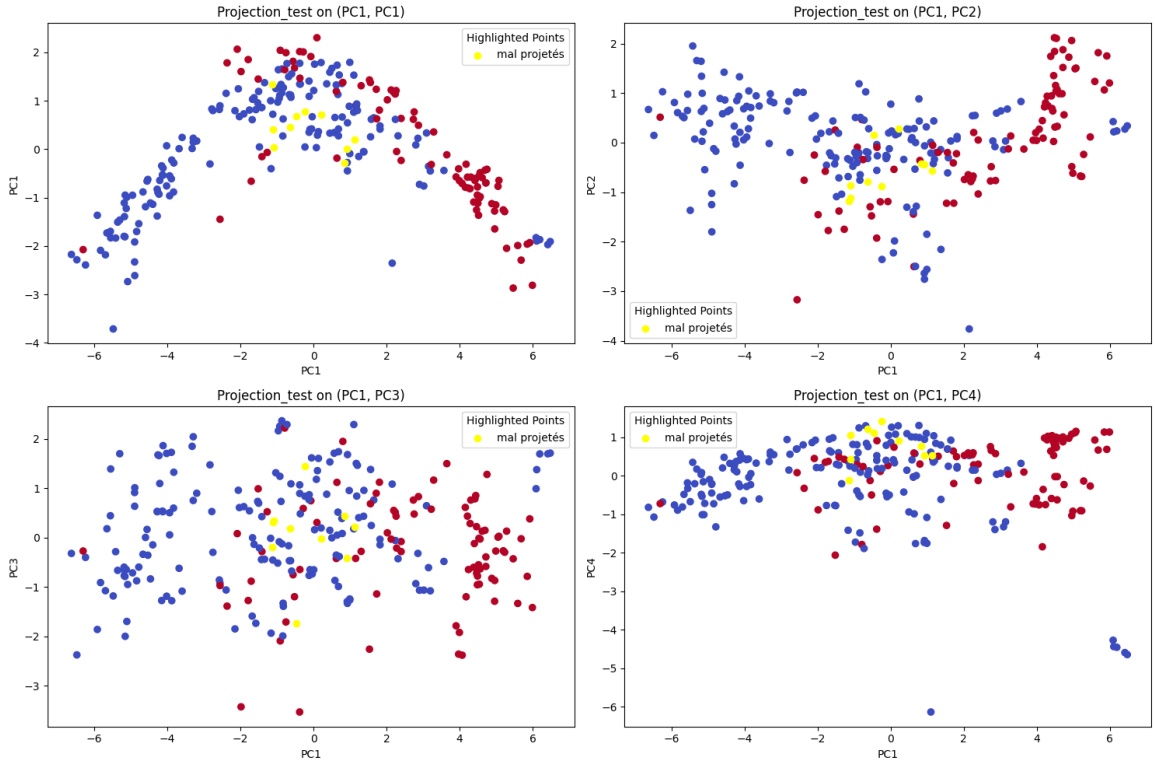
[289]:
```
          0         1         2         3         4         5         6   \
0  0.195577  0.248197  0.271921  0.481283  0.163977  0.543978  0.200715

          7         8         9         10        11        12        13  \
0  0.397716  0.637811  0.071697  0.563795  0.311267  1.544727  0.670353

          14        15        16        17        18
0  0.253118  0.592599  0.703709  0.908568  1.633666
```

On remarque dans ces individus beaucoup de déviations de l'intervalle de confiance $[m - \sigma, m + \sigma]$. Prennons comme exemple l'individu d'indice 158 pour Energy1, l'individu 160 pour Other3... En génarale la plupart des individus prennent des valeurs standarisés proches en valeur absolue à 1 ou même la surpasser.

essayons maintenant de visualizer ces données dans le nuage des points standarisés.

[290]:
```
remaining_indices = np.setdiff1d(np.arange(len(Z2)), least_proj)
fig, axes = plt.subplots(2, 2, figsize=(15, 10))
```

```
for i, ax in enumerate(axes.flat):
    pc_number = i + 1

    remaining_indices = np.setdiff1d(np.arange(len(Z2)), least_proj)

    scatter = ax.scatter(Z2[remaining_indices, 0], Z2[remaining_indices,␣
↪pc_number], c=y_test[remaining_indices], cmap='coolwarm')
    highlighted = ax.scatter(Z2[least_proj, 0], Z2[least_proj, pc_number],␣
↪c='yellow', label='mal projetés')

    ax.set_title(f'Projection_test on (PC1, PC{pc_number+1})')
    ax.set_xlabel('PC1')
    ax.set_ylabel(f'PC{pc_number+1}')
    ax.legend(handles=[highlighted], title='Highlighted Points')

plt.tight_layout()

plt.show()
```



Il est évident que la plupart de ces points sont encombrés avec les points originales.

Comme on vient d'évoquer la qualités de projection n'est pas le seul critère pour assurer une séparation "totale" des autres individus. Cependant il faut noter que ces individus n'ont pas pu suivre le même modèle que les autres, et une mauvaise représentation sur les 5 principales composantes induit une représentation importante de la part des autres composantes, qui expliquent moins la plupart des individus (car on a trouvé que 80% de l'inertie de la plupart des individus est expliquée par les 5 composantes principales).

5.4 Mise en évidence des outliers avec ACP inverse

Maintenant, prenons une autre approche pour detecter les anomalies des données test. On prendra les données test, on les centrera, on les projète sur les 5 composantes principales produits par les données train centrés, puis on les transforme dans l'hyperespace centenant tous les composantes, enfin on les décentrera pour calculer leurs distances de leurs états avant une telle transformation. Les individus les plus anormales sont ceux qui sont les plus distants du point originaire. Cette approche met en évidence les individus les plus inconvenables avec le modèle construit.

Algorithme:

```
X = train_data
m = mean(X)
X_c = centered(X)
Y = test_data
Y_c = centered(Y)
P5 = 5_principal_component_matrix_from_X
Y_red = Y %*% P5
Y_new = Y_red %*% transpose(P5)
Y_new = Y_new + m
distance = sum(sqrt((Y_new-Y)^2), axis=1)
```

[291]:
```
X= data_train.values
m= np.mean(X, axis=0)
Y= data_test.values
Y_c= Y-m
P= hyperplans(X)[1][:,:5]
Y_red= np.dot(Y_c, P)
Y_new= np.dot(Y_red, P.T)
Y_new= Y_new+m
distance= np.sum(np.sqrt((Y_new-Y)**2), axis=1)
```

[292]:
```
seuil= sorted(distance)[10]
anomalies= np.where(distance<seuil)[0]
anomalies
```

[292]:
```
array([ 22,  23,  53,  91,  92,  93, 175, 176, 192, 227])
```

[293]:
```
least_proj
```

[293]:
```
array([ 51,  82,  83,  84, 145, 158, 160, 166, 167, 246])
```

Il semble que les outliers obtenus ici soint totalement différents de ceux obtenus dans la partie précedente. essayons de les visualiser dans l'espace de l'ACP centré.

[294]:
```
# les 10 moins projetés
pd.DataFrame(cennor(data_test.values)).iloc[anomalies]
```

[294]:

	0	1	2	3	4	5	6	\
22	1.265451	1.276108	1.426761	0.739213	0.594963	2.356965	-0.717999	
23	1.291203	1.293143	1.407658	1.098421	0.594963	2.356965	-0.726596	
53	-0.126447	0.174387	0.173820	0.020797	0.580242	-0.960052	-0.606243	
91	1.393956	1.345236	1.171650	0.260269	0.594963	0.404544	-0.695075	
92	1.442295	1.398020	1.239756	0.978685	0.594963	-0.204276	-0.712268	
93	1.534409	1.475107	1.383739	1.258069	0.594963	-0.204276	-0.715133	
175	1.491094	1.492132	1.457514	0.579565	0.594963	0.446531	-0.723730	
176	1.481278	1.435709	1.414801	0.938773	0.594963	0.446531	-0.726596	
192	-0.217826	0.455790	0.264850	0.180445	0.594963	1.370258	-0.695075	

```
227  1.706960  1.356475  1.353717  0.380005  0.594963 -0.771108 -0.755251

           7         8         9         10        11        12        13  \
22  -0.635340  1.069163 -0.188522  1.925720  0.528527  1.314835  1.613256
23  -0.684182  0.974429 -0.163466  1.593569  0.554079  1.144555  1.397901
53  -0.652086  0.460577 -0.276166  0.343868  0.438793  0.783795  1.026673
91  -0.558586  2.040207  0.562114  1.670758  1.355330  0.847764  1.502509
92  -0.621384  1.834156  0.736895  1.676929  1.387273  0.730327  1.392052
93  -0.642317  1.739670  0.822533  1.575996  1.408680  0.654032  1.622005
175 -0.698138  1.412624 -0.052549  1.579937  0.801567  1.505854  1.734839
176 -0.726048  1.369780 -0.023932  1.582977  0.820559  1.567393  1.703419
192 -0.998172  0.262274 -0.205178 -0.176019  0.806909  1.106590  0.495269
227 -0.516721  1.652573 -0.249083  2.255402  0.867308  0.980518  1.864390

           14        15        16        17        18
22  -1.210478  1.080670 -0.764948  0.154118  1.149668
23  -1.242257  0.913672 -0.764579  0.176513  1.251951
53  -0.118242  0.097607  0.474994 -0.160703 -0.078257
91  -1.076052  0.822278 -0.635119 -0.318113  0.656738
92  -1.074299  0.671553 -0.658604 -0.366744  0.548658
93  -1.092583  0.446319 -0.720573 -0.446729  0.557262
175 -1.352103  1.242180 -0.590921 -0.460166  0.490210
176 -1.310426  1.229780 -0.592899 -0.439050  0.565297
192 -0.670349  0.859686 -0.231613  0.227704  0.206490
227 -1.225074  0.190151 -0.544867 -0.246447  1.208206
```

[295]:
```
pd.DataFrame(np.mean(cennor(data_test.values)[anomalies],axis=0)).T
```

[295]:
```
         0         1         2         3         4         5         6   \
0  1.126237  1.170211  1.129427  0.643424  0.593491  0.524208 -0.707397

         7         8         9         10        11        12        13  \
0 -0.673297  1.281545  0.096264  1.402914  0.896903  1.063566  1.435231

         14       15        16        17        18
0 -1.037186  0.75539 -0.502913 -0.187962  0.655622
```

[296]:
```
pd.DataFrame(np.std(cennor(data_test.values)[anomalies],axis=0)).T
```

[296]:
```
         0         1         2         3         4         5         6   \
0  0.660068  0.437344  0.463089  0.401983  0.004416  1.113662  0.037451

         7         8        9         10        11        12        13  \
0  0.123403  0.557296  0.41096  0.699397  0.346341  0.305207  0.383494

         14        15        16        17       18
0  0.355838  0.382485  0.356894  0.260731  0.41255
```

On remarque que dans ces anomalies les valeurs de variables prédictives est encore plus grand et dépasse 1 en valeur absolue (et donc hors de l'interval de confiance standardisé $[-1, 1]$).

On remarque que ce modèle, sachant que la première composante explique plus de 95% de l'inertie (cas ACP centré), a bien réussi à séparer les points anormales que le modèle précedent, ceci peut être bien distingué des valeurs standardisés obtenus. Essayons maintenant de les comparer avec les outliers obtenus de la forêt d'isolement.

[328]:
```
outliers= pd.read_csv("ind_points_anormales.csv")
outliers= np.array(outliers["x"])
outliers
```

[328]:
```
array([177, 172, 115,  25,  38,  26,  72,  49,  50, 227])
```

[329]:
```
#anomalies des forets d'isolement
pd.DataFrame(cennor(data_test.values)).iloc[outliers]
```

[329]:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
177	3.004622	1.852703	2.252278	0.779125	0.594963	-0.477195	-0.758117	-0.607429	1.118340	-0.280698	3.309822	1.206423	3.160131	1.798436	-1.407940	0.831063	0.749113	-0.126789	1.758099
172	-0.682937	-0.864722	-0.889226	-1.695419	-1.153159	1.274526	2.777960	2.020317	-0.720715	-0.139294	-0.371682	-1.145950	-0.255773	-1.216781	1.178307	-0.923127	-0.032348	2.379617	-2.662346
115	-0.729157	-0.914967	-0.850814	1.018597	0.305141	-0.619743	0.264881	-0.363215	0.255140	2.266299	-1.006083	-0.806069	-0.874159	-0.123892	0.893298	-0.648113	-0.451866	-0.979108	-0.222815
25	-0.772737	-1.118369	-1.081572	-1.735331	-1.727279	1.454233	2.219180	1.845878	-1.152647	-0.402952	-0.490101	-1.523492	-1.194403	-0.775020	1.645518	-0.949476	-0.207844	2.547905	-0.163160
38	-0.693821	-0.921724	-0.918128	-0.258587	0.149148	-0.981046	0.356579	0.343611	-0.772758	-0.398256	-0.802872	0.008095	-0.810651	-0.723796	0.410289	-0.713668	0.719716	2.544066	2.039044
26	-0.771831	-1.103923	-1.072086	-1.695419	-1.672076	1.454233	2.153272	1.832621	-1.216242	-0.403014	-0.523118	-1.462563	-1.025167	-0.753732	1.611513	-0.957953	-0.135584	2.453203	-0.702630
72	1.878240	1.382788	1.359113	0.579565	0.594963	-1.065021	-0.726596	-0.677205	1.154991	-0.295982	2.740397	1.017872	1.404020	2.009760	-1.380083	0.833865	-0.508759	-0.002653	2.474603
49	3.491130	1.813717	2.144732	-0.218675	0.594963	-1.044027	-0.717999	-0.837689	2.209258	-0.211635	2.828733	1.292654	1.737221	1.711514	-1.369622	0.255151	-0.773689	-0.559347	0.140923
50	3.621251	1.928830	2.408716	0.659389	0.594963	-1.044027	-0.726596	-0.837689	2.243887	-0.168785	2.094452	1.333940	1.489992	1.956598	-1.297945	0.057973	-0.774097	-0.979108	0.194195
227	1.706960	1.356475	1.353717	0.380005	0.594963	-0.771108	-0.755251	-0.516721	1.652573	-0.249083	2.255402	0.867308	0.980518	1.864390	-1.225074	0.190151	-0.544867	-0.246447	1.208206

[330]:
```
pd.DataFrame(np.mean(cennor(data_test.values)[outliers],axis=0)).T
```

[330]:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	1.005172	0.341081	0.470673	-0.218675	-0.112341	-0.181918	0.408731	0.220248	0.477183	-0.02834	1.003495	0.078822	0.461173	0.574748	-0.094174	-0.202413	-0.196022	0.703134	0.406412

[331]:
```
pd.DataFrame(np.std(cennor(data_test.values)[least_proj],axis=0)).T
```

[331]:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	0.195577	0.248197	0.271921	0.481283	0.163977	0.543978	0.200715	0.397716	0.637811	0.071697	0.563795	0.311267	1.544727	0.670353	0.253118	0.592599	0.703709	0.908568	1.633666

[332]:
```
#anomalies de l'ACP
pd.DataFrame(cennor(data_test.values)).iloc[least_proj]
```

[332]:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
51	-0.207292	-0.089800	-0.083112	-0.298499	0.577975	-0.960052	-0.594781	-0.611616	0.466316	-0.308053	0.341006	0.363992	0.646659	1.026518	0.105485	-0.059194	1.181083	-0.079438	-0.315341
82	-0.650176	-0.551031	-0.623953	-0.577883	0.572681	-0.750114	-0.018807	0.343611	-0.321816	-0.300753	-1.154875	-0.488042	2.311173	-0.526802	0.101194	-0.502941	0.766889	0.972523	-0.715131
83	-0.646802	-0.334820	-0.487792	-0.098939	0.569202	-0.750114	-0.173546	0.499210	-0.516266	-0.278263	-1.044089	-0.209328	3.035136	-0.887965	0.051726	-0.498088	-0.101725	1.152969	-0.464585
84	-0.639103	-0.398041	-0.535761	0.539653	0.594963	-0.750114	-0.219395	0.300350	-0.440813	-0.278585	-1.350593	-0.130176	2.980601	-0.718082	0.241790	-0.476743	0.154506	-0.979108	-0.387684
145	-0.634062	-0.545909	-0.515320	-0.138851	0.116530	0.782432	-0.546067	-0.366006	-0.618990	-0.362157	-0.990439	0.226973	0.735778	-0.402790	0.309230	-0.863122	-0.753295	1.422358	-2.035943
158	-0.619484	-0.592724	-0.609213	-1.136651	0.220990	-0.204276	-0.313958	0.164986	-0.068496	-0.394852	-0.934797	0.340554	-1.527787	-0.276961	-0.286353	0.406794	0.864726	-0.979108	0.354812
160	-0.593726	-0.494879	-0.446462	-0.857267	0.493017	-0.204276	-0.385596	0.151031	-0.195824	-0.393414	-0.942793	0.468999	-1.430131	-0.397583	-0.354048	0.692372	1.635796	-0.979108	4.601915
166	-0.367439	0.025300	0.062020	-0.098939	0.587603	-0.918064	-0.611974	-0.421826	1.055346	-0.216910	-0.480131	0.291365	0.127819	0.769123	-0.263716	0.634584	0.726960	0.926452	0.702426
167	-0.315745	0.122680	0.137667	0.220357	0.586823	-1.211977	-0.609108	-0.475554	1.057397	-0.176174	-0.722417	0.379747	-0.123591	0.809774	-0.467892	0.801112	0.296847	0.689057	0.157600
246	-0.119072	-0.128549	-0.166756	0.140533	0.569202	-0.855083	-0.534604	-0.495091	-0.801850	-0.386610	0.348609	-0.182966	0.378395	0.464763	-0.108578	-0.606504	-0.445702	0.769042	-0.190661

[333]:
```
pd.DataFrame(np.mean(cennor(data_test.values)[least_proj],axis=0)).T
```

[333]:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	\
0	-0.47929	-0.298777	-0.326868	-0.230649	0.488899	-0.582164	-0.400784									

```
0 -0.09109 -0.038499 -0.309577 -0.693052  0.106112  0.713405 -0.014 -0.067116

         15        16        17        18
0 -0.047173  0.432609  0.291564  0.170741
```

[334]:
```
pd.DataFrame(np.std(cennor(data_test.values)[least_proj],axis=0)).T
```

[334]:
```
         0         1         2         3         4         5         6   \
0  0.195577  0.248197  0.271921  0.481283  0.163977  0.543978  0.200715

         7         8         9         10        11        12        13  \
0  0.397716  0.637811  0.071697  0.563795  0.311267  1.544727  0.670353

         14        15        16        17        18
0  0.253118  0.592599  0.703709  0.908568  1.633666
```

[335]:
```
#anomalies de l'ACP inverse
pd.DataFrame(cennor(data_test.values)).iloc[anomalies]
```

[335]:
```
           0         1         2         3         4         5         6   \
22   1.265451  1.276108  1.426761  0.739213  0.594963  2.356965 -0.717999
23   1.291203  1.293143  1.407658  1.098421  0.594963  2.356965 -0.726596
53  -0.126447  0.174387  0.173820  0.020797  0.580242 -0.960052 -0.606243
91   1.393956  1.345236  1.171650  0.260269  0.594963  0.404544 -0.695075
92   1.442295  1.398020  1.239756  0.978685  0.594963 -0.204276 -0.712268
93   1.534409  1.475107  1.383739  1.258069  0.594963 -0.204276 -0.715133
175  1.491094  1.492132  1.457514  0.579565  0.594963  0.446531 -0.723730
176  1.481278  1.435709  1.414801  0.938773  0.594963  0.446531 -0.726596
192 -0.217826  0.455790  0.264850  0.180445  0.594963  1.370258 -0.695075
227  1.706960  1.356475  1.353717  0.380005  0.594963 -0.771108 -0.755251

           7         8         9         10        11        12        13  \
22  -0.635340  1.069163 -0.188522  1.925720  0.528527  1.314835  1.613256
23  -0.684182  0.974429 -0.163466  1.593569  0.554079  1.144555  1.397901
53  -0.652086  0.460577 -0.276166  0.343868  0.438793  0.783795  1.026673
91  -0.558586  2.040207  0.562114  1.670758  1.355330  0.847764  1.502509
92  -0.621384  1.834156  0.736895  1.676929  1.387273  0.730327  1.392052
93  -0.642317  1.739670  0.822533  1.575996  1.408680  0.654032  1.622005
175 -0.698138  1.412624 -0.052549  1.579937  0.801567  1.505854  1.734839
176 -0.726048  1.369780 -0.023932  1.582977  0.820559  1.567393  1.703419
192 -0.998172  0.262274 -0.205178 -0.176019  0.806909  1.106590  0.495269
227 -0.516721  1.652573 -0.249083  2.255402  0.867308  0.980518  1.864390

           14        15        16        17        18
22  -1.210478  1.080670 -0.764948  0.154118  1.149668
23  -1.242257  0.913672 -0.764579  0.176513  1.251951
53  -0.118242  0.097607  0.474994 -0.160703 -0.078257
91  -1.076052  0.822278 -0.635119 -0.318113  0.656738
92  -1.074299  0.671553 -0.658604 -0.366744  0.548658
93  -1.092583  0.446319 -0.720573 -0.446729  0.557262
175 -1.352103  1.242180 -0.590921 -0.460166  0.490210
176 -1.310426  1.229780 -0.592899 -0.439050  0.565297
192 -0.670349  0.859686 -0.231613  0.227704  0.206490
227 -1.225074  0.190151 -0.544867 -0.246447  1.208206
```

[336]:
```
pd.DataFrame(np.mean(cennor(data_test.values)[anomalies],axis=0)).T
```

[336]:
```
          0         1         2         3         4         5         6   \
0  1.126237  1.170211  1.129427  0.643424  0.593491  0.524208 -0.707397

          7         8         9         10        11        12        13  \
0 -0.673297  1.281545  0.096264  1.402914  0.896903  1.063566  1.435231

          14       15        16        17        18
0 -1.037186  0.75539 -0.502913 -0.187962  0.655622
```

[337]:
```
pd.DataFrame(np.std(cennor(data_test.values)[anomalies],axis=0)).T
```

[337]:
```
          0         1         2         3         4         5         6   \
0  0.660068  0.437344  0.463089  0.401983  0.004416  1.113662  0.037451

          7         8         9         10        11        12        13  \
0  0.123403  0.557296  0.41096  0.699397  0.346341  0.305207  0.383494

          14        15        16        17       18
0  0.355838  0.382485  0.356894  0.260731  0.41255
```

Bien que les anomalies de l'ACP inverse (ceux les plus incompatibles au modèle de l'ACP) sont de valeurs significatives que les anomalies détéctés par qualité de projection (la plupart des valeurs dépassent 1 en valeur absolue). Les anomalies détectés par la forêt d'isolement sont plus importantes puisque des valeurs dépassent même 3 en valeur absolue.

Notons qu'en ACP inverse, on a utilisé la distance comme métrique pour faire réveler les anomalies. Il en existe d'autres métriques tels que: - $R_i^2 = 1 - \frac{\Sigma(X_ij - fij)^2}{X_ij^2}$: plus R_i^2 proche de 1 le point est normale. - $RMSE_i = \sqrt{\overline{(X_i - f_i)^2}}$: plus il est elevé le point est anormale - $NRMSE_i = \sqrt{\frac{\overline{(X_i - f_i)^2}}{\overline{(X_i)^2}}}$

6 Partie 6: AFD sur $\mathbb{R}^p$

commençons par importer les packages nécessaires.

[338]:
```
import numpy as np
from sklearn import preprocessing
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sb
```

on essaie de lire les données train de 2.(a) à partie du ficher importé *'train_data.csv'*.

[339]:
```
data=pd.read_csv("train_data.csv",delimiter=',')
```

[340]:
```
data.shape
```

[340]:
```
(609, 20)
```

[341]:
```
data.head()
```

[341]:
```
  Income_Inequality          Eco1          Eco2          Eco3  Energy1  \
0                 L  43044.997120  32416.819912  43757.013606       64
1                 H  58207.578310  49278.816384  62495.418887       76
2                 H  21452.921520  25778.473448  40041.105564       34
3                 H   5701.674149   8746.013481  11436.344113       43
4                 L  12024.609507  21280.180517  25957.547446       57
```

```
     Energy2  Energy3  Health1  Health2    Finan1        Finan2    Finan3  \
0  100.00000     42.0      2.7   1.7500  0.665518  1.258443e+06  1.202421
1  100.00000     89.6      6.6   1.7655  0.915723  6.694028e+07  1.000000
2  100.00000     85.0      8.5   2.0530  0.452552  2.227306e+05  0.442042
3   91.09951     67.0     18.3   2.4870  0.300588  9.182161e+05  0.606352
4  100.00000    154.0      5.0   1.3200  0.451241  2.394525e+06  0.560190

     Finan4    Finan5  Governance    Poverty        Env     Other1  Other2  \
0  3.391014  0.794753    2.181061   0.151155   9.228086   0.498563   13.08
1  3.738714  1.000000    1.549218  11.175388  14.823245   0.427546    0.00
2  2.264699  1.038013    0.451604   0.000000  21.394807  20.462117   20.30
3  2.715935  0.547731   -0.187987  32.137705   1.617522   9.999279   39.73
4  3.327214  0.865860    0.768318  14.084801   7.516889   3.157677   18.09

    Other3
0  7.12404
1  5.10922
2  3.19000
3  2.92276
4  4.93554
```

[342]:
```
#visualisons les differentes classes
set(data["Income_Inequality"])
```

[342]:
```
{'H', 'L'}
```

Maintenant on essaie de créer un encoder y qui regroupe les classes des différents entité ordonnés selon les identifiants des lignes. Cet encoder assigne des chiffres à partir de 0 selon l'ordre alphabétique de la classe. Dans notre cas: "H"->0(négatifs) et "L"->1(positifs)

[343]:
```
le = preprocessing.LabelEncoder()
y = le.fit_transform(data["Income_Inequality"])
np.unique(y)
```

[343]:
```
array([0, 1])
```

Maintenant qu'on a créée un encoder, essayer de prélever la variable à classifier de notre base de données.

[344]:
```
#data sans les classifications
X = data.drop(["Income_Inequality"], axis=1)
n,p= X.shape[0], X.shape[1]
K= len(set(data["Income_Inequality"]));K
```

[344]:
```
2
```

On crée une fonction pour centrer nos données

[345]:
```
def center(X):
    m=np.mean(X, axis=0)
    return X-m
```

6.1 Calcul des variances

On crée une fonction pour le calcul respective de la variance totale, la variance inter-classes, puis la variance intra-classes.

[346]:
```
#fonction qui retourne V,B,W,groupes
def var(X,y):
    n,p= X.shape[0], X.shape[1]
    grp=np.unique(y)
    m=np.mean(X,axis=0)
    W=np.zeros((p,p))
    B=np.zeros((p,p))
    V=np.zeros((p,p))
    for classe in grp:
        X_c=X[y==classe]
        n_c=X_c.shape[0]
        m_c=np.mean(X_c,axis=0)
        W=W+(1/n)*((X_c-m_c).T.dot((X_c-m_c)))
        inter_diff= (m_c-m).values.reshape(p,1)
        B+=n_c*((inter_diff).dot((inter_diff).T))
    V= (1/n)*((X-m)).T.dot((X-m))
    B=(1/n)*B
    return V,B,W,grp
```

On éssaie aussi de créer une fonction pour faire retourner les variances intra-classes ordonnées selon les groupes assignés par le encoder y.

[347]:
```
#calcul des Wk: dispersion de chaque cluster
def intra_var(X,y):
    n,p= X.shape[0], X.shape[1]
    grp=np.unique(y)
    L=[]
    for classe in grp:
        W=np.zeros((p,p))
        X_c=X[y==classe]
        n_c=X_c.shape[0]
        m_c=np.mean(X_c,axis=0)
        W=W+(1/n)*((X_c-m_c).T.dot((X_c-m_c)))
        L.append(W)
    return L
```

On fera la même chose pour les variables inter-classes.

[348]:
```
#calcul des Bk: dispersions des centroides des clusters
def inter_var(X,y):
    n,p= X.shape[0], X.shape[1]
    grp=np.unique(y)
    m=np.mean(X,axis=0)
    L=[]
    for classe in grp:
        B=np.zeros((p,p))
        X_c=X[y==classe]
        n_c=X_c.shape[0]
        m_c=np.mean(X_c,axis=0)
        inter_diff= (m_c-m).values.reshape(p,1)
        B+=n_c*((inter_diff).dot((inter_diff).T))
        B=(1/n)*B
        L.append(B)
    return L
```

[349]:
```
V=var(X,y)[0]
```

essayons de visualiser les variances.

[350]:
```
#W0 et W1
W0,W1= intra_var(X,y)[0],intra_var(X,y)[1]
```

[351]:
```
W0
```

[351]:

	Eco1	Eco2	Eco3	Energy1	\
Eco1	5.263097e+07	4.600477e+07	6.121001e+07	7.027764e+04	
Eco2	4.600477e+07	4.565289e+07	6.048476e+07	7.863079e+04	
Eco3	6.121001e+07	6.048476e+07	8.147415e+07	1.027032e+05	
Energy1	7.027764e+04	7.863079e+04	1.027032e+05	3.205067e+02	
Energy2	8.101614e+04	1.016017e+05	1.346632e+05	3.262816e+02	
Energy3	-4.660518e+03	-8.335034e+03	-1.369024e+04	-8.171190e+01	
Health1	-9.770219e+04	-1.174045e+05	-1.561873e+05	-3.771280e+02	
Health2	-3.897434e+03	-4.970101e+03	-6.560618e+03	-1.657104e+01	
Finan1	8.232738e+02	8.190824e+02	1.104356e+03	2.025973e+00	
Finan2	2.980376e+10	2.057457e+10	3.005203e+10	5.466055e+07	
Finan3	7.070488e+02	5.633259e+02	7.333634e+02	8.255176e-01	
Finan4	2.142946e+03	2.324091e+03	2.966739e+03	6.317581e+00	
Finan5	7.303147e+02	8.226955e+02	1.109199e+03	1.607850e+00	
Governance	2.772991e+03	2.740023e+03	3.654801e+03	6.698193e+00	
Poverty	-6.246300e+04	-7.227657e+04	-9.718233e+04	-1.762299e+02	
Env	1.605334e+04	1.706927e+04	2.389535e+04	2.382607e+01	
Other1	-8.409584e+03	-8.277839e+03	-9.163033e+03	-4.109165e+01	
Other2	-1.574865e+04	-1.638693e+04	-2.142625e+04	-9.508945e+01	
Other3	1.588204e+03	1.224883e+03	1.287084e+03	5.429550e+00	

	Energy2	Energy3	Health1	Health2	\
Eco1	8.101614e+04	-4.660518e+03	-9.770219e+04	-3.897434e+03	
Eco2	1.016017e+05	-8.335034e+03	-1.174045e+05	-4.970101e+03	
Eco3	1.346632e+05	-1.369024e+04	-1.561873e+05	-6.560618e+03	
Energy1	3.262816e+02	-8.171190e+01	-3.771280e+02	-1.657104e+01	
Energy2	5.561371e+02	-1.775175e+02	-5.456749e+02	-2.489019e+01	
Energy3	-1.775175e+02	1.082574e+03	2.115924e+02	6.912061e+00	
Health1	-5.456749e+02	2.115924e+02	7.516630e+02	2.902923e+01	
Health2	-2.489019e+01	6.912061e+00	2.902923e+01	1.352912e+00	
Finan1	2.421499e+00	-9.491322e-02	-2.706795e+00	-1.273930e-01	
Finan2	5.850019e+07	3.765113e+07	-6.184714e+07	-3.387609e+06	
Finan3	1.031327e+00	3.262132e-01	-1.106163e+00	-4.629766e-02	
Finan4	8.925587e+00	-1.167078e+00	-1.008572e+01	-4.334659e-01	
Finan5	2.485750e+00	-5.590304e-01	-2.345521e+00	-1.025979e-01	
Governance	7.821018e+00	-2.725119e+00	-9.881651e+00	-4.132460e-01	
Poverty	-2.674212e+02	1.034538e+02	2.808639e+02	1.223912e+01	
Env	3.749024e+01	8.404881e+00	-4.340785e+01	-1.885050e+00	
Other1	-5.181418e+01	3.776495e+01	5.799704e+01	2.574304e+00	
Other2	-5.255733e+01	5.690416e+01	8.175437e+01	2.921164e+00	
Other3	4.232253e+00	-2.432078e+00	-8.875654e+00	-3.360249e-01	

	Finan1	Finan2	Finan3	Finan4	\
Eco1	823.273784	2.980376e+10	707.048774	2.142946e+03	
Eco2	819.082426	2.057457e+10	563.325877	2.324091e+03	
Eco3	1104.355515	3.005203e+10	733.363415	2.966739e+03	
Energy1	2.025973	5.466055e+07	0.825518	6.317581e+00	
Energy2	2.421499	5.850019e+07	1.031327	8.925587e+00	
Energy3	-0.094913	3.765113e+07	0.326213	-1.167078e+00	

```
Health1         -2.706795 -6.184714e+07      -1.106163 -1.008572e+01
Health2         -0.127393 -3.387609e+06      -0.046298 -4.334659e-01
Finan1           0.026349  8.604241e+05       0.011040  5.102524e-02
Finan2      860424.131484  1.140540e+14  413527.589577  1.307781e+06
Finan3           0.011040  4.135276e+05       0.016065  2.745839e-02
Finan4           0.051025  1.307781e+06       0.027458  2.246194e-01
Finan5           0.013148  1.522492e+05       0.007965  4.020987e-02
Governance       0.066699  1.745526e+06       0.038419  1.730689e-01
Poverty         -1.381213 -2.949124e+07      -0.652861 -4.595689e+00
Env              0.313732  1.244227e+07       0.134301  7.534229e-01
Other1          -0.247923 -7.439954e+06      -0.165402 -1.111753e+00
Other2          -0.254874 -1.629440e+07       0.147600 -1.356849e+00
Other3           0.035745  2.970020e+05       0.041441  1.118248e-01

                   Finan5    Governance       Poverty           Env  \
Eco1           730.314740  2.772991e+03 -6.246300e+04  1.605334e+04
Eco2           822.695453  2.740023e+03 -7.227657e+04  1.706927e+04
Eco3          1109.199196  3.654801e+03 -9.718233e+04  2.389535e+04
Energy1          1.607850  6.698193e+00 -1.762299e+02  2.382607e+01
Energy2          2.485750  7.821018e+00 -2.674212e+02  3.749024e+01
Energy3         -0.559030 -2.725119e+00  1.034538e+02  8.404881e+00
Health1         -2.345521 -9.881651e+00  2.808639e+02 -4.340785e+01
Health2         -0.102598 -4.132460e-01  1.223912e+01 -1.885050e+00
Finan1           0.013148  6.669874e-02 -1.381213e+00  3.137320e-01
Finan2      152249.177924  1.745526e+06 -2.949124e+07  1.244227e+07
Finan3           0.007965  3.841934e-02 -6.528606e-01  1.343006e-01
Finan4           0.040210  1.730689e-01 -4.595689e+00  7.534229e-01
Finan5           0.026504  4.755341e-02 -1.638058e+00  3.172619e-01
Governance       0.047553  2.680950e-01 -4.777721e+00  9.675671e-01
Poverty         -1.638058 -4.777721e+00  1.884368e+02 -2.953582e+01
Env              0.317262  9.675671e-01 -2.953582e+01  1.080381e+01
Other1          -0.152592 -1.168616e+00  1.983551e+01  1.804017e+00
Other2          -0.307751 -1.075874e+00  3.564740e+01 -6.873097e+00
Other3          -0.004370  1.572999e-01 -2.554426e-01  4.056055e-02

                  Other1        Other2         Other3
Eco1       -8.409584e+03 -1.574865e+04    1588.203648
Eco2       -8.277839e+03 -1.638693e+04    1224.883214
Eco3       -9.163033e+03 -2.142625e+04    1287.083858
Energy1    -4.109165e+01 -9.508945e+01       5.429550
Energy2    -5.181418e+01 -5.255733e+01       4.232253
Energy3     3.776495e+01  5.690416e+01      -2.432078
Health1     5.799704e+01  8.175437e+01      -8.875654
Health2     2.574304e+00  2.921164e+00      -0.336025
Finan1     -2.479232e-01 -2.548736e-01       0.035745
Finan2     -7.439954e+06 -1.629440e+07  297001.952776
Finan3     -1.654020e-01  1.475999e-01       0.041441
Finan4     -1.111753e+00 -1.356849e+00       0.111825
Finan5     -1.525924e-01 -3.077510e-01      -0.004370
Governance -1.168616e+00 -1.075874e+00       0.157300
Poverty     1.983551e+01  3.564740e+01      -0.255443
Env         1.804017e+00 -6.873097e+00       0.040561
Other1      2.853380e+01  1.178669e+01      -1.043148
Other2      1.178669e+01  1.681042e+02       0.038951
Other3     -1.043148e+00  3.895057e-02       1.204921
```

[352]:
```
W1
```

[352]:

	Eco1	Eco2	Eco3	Energy1
Eco1	2.195040e+08	8.996067e+07	1.726311e+08	6.371270e+04
Eco2	8.996067e+07	4.651992e+07	7.516026e+07	4.493658e+04
Eco3	1.726311e+08	7.516026e+07	1.587241e+08	6.055505e+04
Energy1	6.371270e+04	4.493658e+04	6.055505e+04	1.100944e+02
Energy2	1.628519e+04	1.186258e+04	1.732803e+04	2.809977e+01
Energy3	-2.467966e+05	-1.068736e+05	-1.847324e+05	-6.086828e+01
Health1	-6.018371e+04	-3.936701e+04	-5.862401e+04	-5.928969e+01
Health2	-2.559595e+03	-1.851391e+03	-2.646652e+03	-3.289647e+00
Finan1	1.850711e+03	9.686796e+02	1.426403e+03	8.967954e-01
Finan2	9.229131e+09	8.707170e+09	7.868628e+09	1.330618e+07
Finan3	2.697329e+03	1.292735e+03	1.896730e+03	9.045297e-01
Finan4	1.219007e+03	7.770868e+02	8.656209e+02	1.239036e+00
Finan5	1.324883e+03	6.643860e+02	1.045895e+03	5.742705e-01
Governance	7.147975e+03	3.754631e+03	5.681736e+03	3.773107e+00
Poverty	-6.502546e+04	-3.464265e+04	-5.933720e+04	-3.833791e+01
Env	3.125794e+04	1.277715e+04	3.762516e+04	3.454450e+00
Other1	1.389989e+03	-4.906876e+03	8.495667e+03	-2.215324e+01
Other2	-4.834328e+04	-2.709863e+04	-4.466969e+04	-4.921977e+01
Other3	2.733647e+03	1.142481e+03	5.579235e+02	6.620214e-01

	Energy2	Energy3	Health1	Health2
Eco1	1.628519e+04	-2.467966e+05	-6.018371e+04	-2559.595406
Eco2	1.186258e+04	-1.068736e+05	-3.936701e+04	-1851.391284
Eco3	1.732803e+04	-1.847324e+05	-5.862401e+04	-2646.652224
Energy1	2.809977e+01	-6.086828e+01	-5.928969e+01	-3.289647
Energy2	3.227589e+01	-3.295982e+00	-4.052897e+01	-1.973885
Energy3	-3.295982e+00	1.690769e+03	4.252208e+01	-0.222113
Health1	-4.052897e+01	4.252208e+01	7.848840e+01	3.934807
Health2	-1.973885e+00	-2.221131e-01	3.934807e+00	0.252733
Finan1	2.144308e-01	-2.714028e+00	-8.147766e-01	-0.041396
Finan2	1.406620e+06	-3.478782e+07	-6.753537e+06	-530946.993451
Finan3	1.853798e-01	-3.405131e+00	-8.927739e-01	-0.040216
Finan4	8.590723e-01	-1.219906e+00	-1.499960e+00	-0.080297
Finan5	2.497758e-01	-1.970279e+00	-5.653979e-01	-0.018073
Governance	8.190733e-01	-9.235506e+00	-3.139208e+00	-0.158930
Poverty	-1.906849e+01	4.746092e+01	4.581300e+01	2.196806
Env	3.728724e+00	-2.909403e+01	-1.059862e+01	-0.440663
Other1	-4.791247e+00	-4.117916e+00	9.153334e+00	0.796940
Other2	-8.953912e+00	1.076354e+02	2.898182e+01	1.261302
Other3	5.532597e-01	1.192241e+00	-1.008801e+00	-0.026698

	Finan1	Finan2	Finan3	Finan4
Eco1	1850.711025	9.229131e+09	2697.329452	1219.007365
Eco2	968.679618	8.707170e+09	1292.735480	777.086757
Eco3	1426.402808	7.868628e+09	1896.729909	865.620950
Energy1	0.896795	1.330618e+07	0.904530	1.239036
Energy2	0.214431	1.406620e+06	0.185380	0.859072
Energy3	-2.714028	-3.478782e+07	-3.405131	-1.219906
Health1	-0.814777	-6.753537e+06	-0.892774	-1.499960
Health2	-0.041396	-5.309470e+05	-0.040216	-0.080297
Finan1	0.026258	3.407525e+05	0.030450	0.016193
Finan2	340752.485943	1.646788e+13	270792.971197	172407.197916

```
Finan3           0.030450  2.707930e+05       0.048381       0.022414
Finan4           0.016193  1.724072e+05       0.022414       0.057259
Finan5           0.012983  5.981379e+04       0.018428       0.004968
Governance       0.085626  8.678103e+05       0.114320       0.067778
Poverty         -0.655931 -4.451896e+06      -0.890253      -0.962226
Env              0.193042  2.608707e+05       0.208164       0.075774
Other1          -0.218420 -5.107444e+06      -0.254691      -0.391779
Other2          -0.556971 -7.308856e+06      -0.462620      -0.581514
Other3           0.019096 -4.975806e+05       0.060310       0.046687

                  Finan5     Governance       Poverty            Env  \
Eco1         1324.883294    7147.974715 -6.502546e+04   31257.939442
Eco2          664.385986    3754.631092 -3.464265e+04   12777.151652
Eco3         1045.894713    5681.736414 -5.933720e+04   37625.155919
Energy1         0.574271       3.773107 -3.833791e+01       3.454450
Energy2         0.249776       0.819073 -1.906849e+01       3.728724
Energy3        -1.970279      -9.235506  4.746092e+01     -29.094034
Health1        -0.565398      -3.139208  4.581300e+01     -10.598623
Health2        -0.018073      -0.158930  2.196806e+00      -0.440663
Finan1          0.012983       0.085626 -6.559310e-01       0.193042
Finan2      59813.788922  867810.281181 -4.451896e+06  260870.719622
Finan3          0.018428       0.114320 -8.902530e-01       0.208164
Finan4          0.004968       0.067778 -9.622261e-01       0.075774
Finan5          0.021360       0.051830 -4.004549e-01       0.126064
Governance      0.051830       0.343152 -2.721102e+00       0.744996
Poverty        -0.400455      -2.721102  3.838780e+01     -12.917389
Env             0.126064       0.744996 -1.291739e+01      18.523980
Other1         -0.030974      -0.841984  2.773488e+00      11.614256
Other2         -0.289630      -2.163021  1.939165e+01      -5.301823
Other3          0.012133       0.120756 -1.131837e+00      -0.748777

                 Other1        Other2         Other3
Eco1       1.389989e+03 -4.834328e+04    2733.646686
Eco2      -4.906876e+03 -2.709863e+04    1142.480804
Eco3       8.495667e+03 -4.466969e+04     557.923546
Energy1   -2.215324e+01 -4.921977e+01       0.662021
Energy2   -4.791247e+00 -8.953912e+00       0.553260
Energy3   -4.117916e+00  1.076354e+02       1.192241
Health1    9.153334e+00  2.898182e+01      -1.008801
Health2    7.969395e-01  1.261302e+00      -0.026698
Finan1    -2.184196e-01 -5.569713e-01       0.019096
Finan2    -5.107444e+06 -7.308856e+06 -497580.640186
Finan3    -2.546908e-01 -4.626199e-01       0.060310
Finan4    -3.917788e-01 -5.815144e-01       0.046687
Finan5    -3.097365e-02 -2.896301e-01       0.012133
Governance -8.419843e-01 -2.163021e+00       0.120756
Poverty    2.773488e+00  1.939165e+01      -1.131837
Env        1.161426e+01 -5.301823e+00      -0.748777
Other1     2.004091e+01  4.989912e+00      -0.754881
Other2     4.989912e+00  6.206454e+01      -0.148233
Other3    -7.548805e-01 -1.482330e-01       0.687947
```

[353]:
```
#B
B= pd.DataFrame(var(X,y)[1], index= V.index.tolist(), columns= V.index.tolist())
B
```

[353]:

	Eco1	Eco2	Eco3	Energy1
Eco1	1.271816e+08	7.795462e+07	1.216771e+08	117945.356069
Eco2	7.795462e+07	4.778148e+07	7.458073e+07	72293.387741
Eco3	1.216771e+08	7.458073e+07	1.164109e+08	112840.658518
Energy1	1.179454e+05	7.229339e+04	1.128407e+05	109.379914
Energy2	1.143741e+05	7.010445e+04	1.094240e+05	106.068051
Energy3	6.897033e+04	4.227465e+04	6.598528e+04	63.961558
Health1	-1.466540e+05	-8.989008e+04	-1.403068e+05	-136.003712
Health2	-6.271555e+03	-3.844085e+03	-6.000121e+03	-5.816101
Finan1	1.329312e+03	8.147878e+02	1.271779e+03	1.232774
Finan2	-1.285701e+08	-7.880573e+07	-1.230056e+08	-119233.094085
Finan3	1.435006e+03	8.795720e+02	1.372899e+03	1.330793
Finan4	4.994633e+03	3.061409e+03	4.778464e+03	4.631912
Finan5	1.064561e+03	6.525118e+02	1.018487e+03	0.987251
Governance	5.510312e+03	3.377489e+03	5.271824e+03	5.110141
Poverty	-1.461706e+05	-8.959378e+04	-1.398443e+05	-135.555413
Env	2.660576e+04	1.630772e+04	2.545426e+04	24.673591
Other1	-1.200525e+04	-7.358494e+03	-1.148566e+04	-11.133403
Other2	-3.026308e+04	-1.854944e+04	-2.895329e+04	-28.065309
Other3	3.437113e+03	2.106743e+03	3.288354e+03	3.187503

	Energy2	Energy3	Health1	Health2
Eco1	114374.143989	68970.330195	-146654.039301	-6271.554986
Eco2	70104.450183	42274.651496	-89890.078595	-3844.084849
Eco3	109424.009179	65985.281123	-140306.824453	-6000.120887
Energy1	106.068051	63.961558	-136.003712	-5.816101
Energy2	102.856466	62.024896	-131.885719	-5.639998
Energy3	62.024896	37.402488	-79.530227	-3.401053
Health1	-131.885719	-79.530227	169.107918	7.231779
Health2	-5.639998	-3.401053	7.231779	0.309262
Finan1	1.195448	0.720883	-1.532840	-0.065551
Finan2	-115622.891190	-69723.354470	148255.221305	6340.028388
Finan3	1.290498	0.778201	-1.654716	-0.070763
Finan4	4.491664	2.708581	-5.759350	-0.246294
Finan5	0.957358	0.577310	-1.227554	-0.052495
Governance	4.955414	2.988232	-6.353983	-0.271724
Poverty	-131.450994	-79.268077	168.550501	7.207941
Env	23.926511	14.428255	-30.679307	-1.311979
Other1	-10.796300	-6.510426	13.843347	0.592001
Other2	-27.215533	-16.411614	34.896591	1.492328
Other3	3.090990	1.863941	-3.963362	-0.169490

	Finan1	Finan2	Finan3	Finan4	Finan5
Eco1	1329.311630	-1.285701e+08	1435.005863	4994.632727	1064.561195
Eco2	814.787833	-7.880573e+07	879.572021	3061.408541	652.511788
Eco3	1271.778769	-1.230056e+08	1372.898535	4778.464068	1018.486783
Energy1	1.232774	-1.192331e+05	1.330793	4.631912	0.987251
Energy2	1.195448	-1.156229e+05	1.290498	4.491664	0.957358
Energy3	0.720883	-6.972335e+04	0.778201	2.708581	0.577310
Health1	-1.532840	1.482552e+05	-1.654716	-5.759350	-1.227554
Health2	-0.065551	6.340028e+03	-0.070763	-0.246294	-0.052495
Finan1	0.013894	-1.343825e+03	0.014999	0.052204	0.011127
Finan2	-1343.825174	1.299739e+08	-1450.673386	-5049.164577	-1076.184170
Finan3	0.014999	-1.450673e+03	0.016191	0.056355	0.012012
Finan4	0.052204	-5.049165e+03	0.056355	0.196148	0.041807

```
Finan5         0.011127 -1.076184e+03     0.012012     0.041807     0.008911
Governance     0.057594 -5.570474e+03     0.062174     0.216399     0.046124
Poverty       -1.527787  1.477665e+05    -1.649262    -5.740366    -1.223508
Env            0.278085 -2.689624e+04     0.300196     1.044853     0.222701
Other1        -0.125480  1.213632e+04    -0.135457    -0.471466    -0.100489
Other2        -0.316312  3.059349e+04    -0.341462    -1.188482    -0.253314
Other3         0.035925 -3.474640e+03     0.038781     0.134981     0.028770

              Governance        Poverty           Env        Other1  \
Eco1        5510.311617 -146170.634900  26605.757587 -12005.249458
Eco2        3377.488589  -89593.780860  16307.724301  -7358.493653
Eco3        5271.824277 -139844.341887  25454.255314 -11485.659967
Energy1        5.110141    -135.555413     24.673591    -11.133403
Energy2        4.955414    -131.450994     23.926511    -10.796300
Energy3        2.988232     -79.268077     14.428255     -6.510426
Health1       -6.353983     168.550501    -30.679307     13.843347
Health2       -0.271724       7.207941     -1.311979      0.592001
Finan1         0.057594      -1.527787      0.278085     -0.125480
Finan2     -5570.473695  147766.539052 -26896.241643  12136.323852
Finan3         0.062174      -1.649262      0.300196     -0.135457
Finan4         0.216399      -5.740366      1.044853     -0.471466
Finan5         0.046124      -1.223508      0.222701     -0.100489
Governance     0.238742      -6.333039      1.152730     -0.520144
Poverty       -6.333039     167.994921    -30.578181     13.797716
Env            1.152730     -30.578181      5.565794     -2.511439
Other1        -0.520144      13.797716     -2.511439      1.133231
Other2        -1.311189      34.781565     -6.330888      2.856671
Other3         0.148918      -3.950298      0.719027     -0.324445

                Other2       Other3
Eco1       -30263.077841  3437.113421
Eco2       -18549.440974  2106.743169
Eco3       -28953.286048  3288.354495
Energy1       -28.065309     3.187503
Energy2       -27.215533     3.090990
Energy3       -16.411614     1.863941
Health1        34.896591    -3.963362
Health2         1.492328    -0.169490
Finan1         -0.316312     0.035925
Finan2      30593.492849 -3474.640135
Finan3         -0.341462     0.038781
Finan4         -1.188482     0.134981
Finan5         -0.253314     0.028770
Governance     -1.311189     0.148918
Poverty        34.781565    -3.950298
Env            -6.330888     0.719027
Other1          2.856671    -0.324445
Other2          7.201154    -0.817867
Other3         -0.817867     0.092889
```

[354]:
```
#W
W= pd.DataFrame(var(X,y)[2], index= V.index.tolist(), columns= V.index.tolist())
W
```

[354]:

	Eco1	Eco2	Eco3	Energy1
Eco1	2.721350e+08	1.359654e+08	2.338411e+08	1.339903e+05
Eco2	1.359654e+08	9.217282e+07	1.356450e+08	1.235674e+05
Eco3	2.338411e+08	1.356450e+08	2.401982e+08	1.632582e+05
Energy1	1.339903e+05	1.235674e+05	1.632582e+05	4.306010e+02
Energy2	9.730133e+04	1.134643e+05	1.519913e+05	3.543814e+02
Energy3	-2.514572e+05	-1.152086e+05	-1.984226e+05	-1.425802e+02
Health1	-1.578859e+05	-1.567715e+05	-2.148113e+05	-4.364177e+02
Health2	-6.457030e+03	-6.821493e+03	-9.207270e+03	-1.986069e+01
Finan1	2.673985e+03	1.787762e+03	2.530758e+03	2.922768e+00
Finan2	3.903289e+10	2.928174e+10	3.792066e+10	6.796672e+07
Finan3	3.404378e+03	1.856061e+03	2.630093e+03	1.730047e+00
Finan4	3.361953e+03	3.101178e+03	3.832360e+03	7.556616e+00
Finan5	2.055198e+03	1.487081e+03	2.155094e+03	2.182120e+00
Governance	9.920966e+03	6.494654e+03	9.336537e+03	1.047130e+01
Poverty	-1.274885e+05	-1.069192e+05	-1.565195e+05	-2.145678e+02
Env	4.731128e+04	2.984642e+04	6.152050e+04	2.728052e+01
Other1	-7.019594e+03	-1.318472e+04	-6.673668e+02	-6.324490e+01
Other2	-6.409192e+04	-4.348555e+04	-6.609593e+04	-1.443092e+02
Other3	4.321850e+03	2.367364e+03	1.845007e+03	6.091571e+00

	Energy2	Energy3	Health1	Health2
Eco1	9.730133e+04	-2.514572e+05	-1.578859e+05	-6.457030e+03
Eco2	1.134643e+05	-1.152086e+05	-1.567715e+05	-6.821493e+03
Eco3	1.519913e+05	-1.984226e+05	-2.148113e+05	-9.207270e+03
Energy1	3.543814e+02	-1.425802e+02	-4.364177e+02	-1.986069e+01
Energy2	5.884130e+02	-1.808135e+02	-5.862039e+02	-2.686408e+01
Energy3	-1.808135e+02	2.773343e+03	2.541144e+02	6.689948e+00
Health1	-5.862039e+02	2.541144e+02	8.301514e+02	3.296403e+01
Health2	-2.686408e+01	6.689948e+00	3.296403e+01	1.605645e+00
Finan1	2.635930e+00	-2.808941e+00	-3.521572e+00	-1.687889e-01
Finan2	5.990681e+07	2.863311e+06	-6.860068e+07	-3.918556e+06
Finan3	1.216707e+00	-3.078918e+00	-1.998937e+00	-8.651403e-02
Finan4	9.784660e+00	-2.386984e+00	-1.158568e+01	-5.137624e-01
Finan5	2.735526e+00	-2.529310e+00	-2.910918e+00	-1.206709e-01
Governance	8.640091e+00	-1.196063e+01	-1.302086e+01	-5.721761e-01
Poverty	-2.864897e+02	1.509148e+02	3.266769e+02	1.443593e+01
Env	4.121896e+01	-2.068915e+01	-5.400647e+01	-2.325713e+00
Other1	-5.660542e+01	3.364704e+01	6.715037e+01	3.371243e+00
Other2	-6.151124e+01	1.645395e+02	1.107362e+02	4.182466e+00
Other3	4.785512e+00	-1.239838e+00	-9.884455e+00	-3.627231e-01

	Finan1	Finan2	Finan3	Finan4
Eco1	2.673985e+03	3.903289e+10	3404.378226	3.361953e+03
Eco2	1.787762e+03	2.928174e+10	1856.061357	3.101178e+03
Eco3	2.530758e+03	3.792066e+10	2630.093324	3.832360e+03
Energy1	2.922768e+00	6.796672e+07	1.730047	7.556616e+00
Energy2	2.635930e+00	5.990681e+07	1.216707	9.784660e+00
Energy3	-2.808941e+00	2.863311e+06	-3.078918	-2.386984e+00
Health1	-3.521572e+00	-6.860068e+07	-1.998937	-1.158568e+01
Health2	-1.687889e-01	-3.918556e+06	-0.086514	-5.137624e-01
Finan1	5.260715e-02	1.201177e+06	0.041490	6.721808e-02
Finan2	1.201177e+06	1.305218e+14	684320.560774	1.480188e+06
Finan3	4.149033e-02	6.843206e+05	0.064446	4.987281e-02
Finan4	6.721808e-02	1.480188e+06	0.049873	2.818782e-01

```
Finan5      2.613065e-02  2.120630e+05       0.026393  4.517769e-02
Governance  1.523251e-01  2.613336e+06       0.152740  2.408473e-01
Poverty    -2.037144e+00 -3.394314e+07      -1.543114 -5.557916e+00
Env         5.067737e-01  1.270314e+07       0.342464  8.291971e-01
Other1     -4.663429e-01 -1.254740e+07      -0.420093 -1.503532e+00
Other2     -8.118448e-01 -2.360326e+07      -0.315020 -1.938364e+00
Other3      5.484082e-02 -2.005787e+05       0.101751  1.585122e-01

                  Finan5    Governance       Poverty           Env  \
Eco1          2055.198034  9.920966e+03 -1.274885e+05  4.731128e+04
Eco2          1487.081439  6.494654e+03 -1.069192e+05  2.984642e+04
Eco3          2155.093909  9.336537e+03 -1.565195e+05  6.152050e+04
Energy1          2.182120  1.047130e+01 -2.145678e+02  2.728052e+01
Energy2          2.735526  8.640091e+00 -2.864897e+02  4.121896e+01
Energy3         -2.529310 -1.196063e+01  1.509148e+02 -2.068915e+01
Health1         -2.910918 -1.302086e+01  3.266769e+02 -5.400647e+01
Health2         -0.120671 -5.721761e-01  1.443593e+01 -2.325713e+00
Finan1           0.026131  1.523251e-01 -2.037144e+00  5.067737e-01
Finan2      212062.966846  2.613336e+06 -3.394314e+07  1.270314e+07
Finan3           0.026393  1.527398e-01 -1.543114e+00  3.424643e-01
Finan4           0.045178  2.408473e-01 -5.557916e+00  8.291971e-01
Finan5           0.047863  9.938339e-02 -2.038513e+00  4.433257e-01
Governance       0.099383  6.112466e-01 -7.498824e+00  1.712563e+00
Poverty         -2.038513 -7.498824e+00  2.268246e+02 -4.245321e+01
Env              0.443326  1.712563e+00 -4.245321e+01  2.932779e+01
Other1          -0.183566 -2.010600e+00  2.260900e+01  1.341827e+01
Other2          -0.597381 -3.238896e+00  5.503904e+01 -1.217492e+01
Other3           0.007763  2.780560e-01 -1.387279e+00 -7.082168e-01

                 Other1        Other2         Other3
Eco1       -7.019594e+03 -6.409192e+04    4321.850335
Eco2       -1.318472e+04 -4.348555e+04    2367.364019
Eco3       -6.673668e+02 -6.609593e+04    1845.007404
Energy1    -6.324490e+01 -1.443092e+02       6.091571
Energy2    -5.660542e+01 -6.151124e+01       4.785512
Energy3     3.364704e+01  1.645395e+02      -1.239838
Health1     6.715037e+01  1.107362e+02      -9.884455
Health2     3.371243e+00  4.182466e+00      -0.362723
Finan1     -4.663429e-01 -8.118448e-01       0.054841
Finan2     -1.254740e+07 -2.360326e+07 -200578.687410
Finan3     -4.200928e-01 -3.150200e-01       0.101751
Finan4     -1.503532e+00 -1.938364e+00       0.158512
Finan5     -1.835661e-01 -5.973811e-01       0.007763
Governance -2.010600e+00 -3.238896e+00       0.278056
Poverty     2.260900e+01  5.503904e+01      -1.387279
Env         1.341827e+01 -1.217492e+01      -0.708217
Other1      4.857471e+01  1.677661e+01      -1.798029
Other2      1.677661e+01  2.301687e+02      -0.109282
Other3     -1.798029e+00 -1.092825e-01       1.892868
```

[355]:
```
#V
V=var(X,y)[0]
V
```

[355]:

	Eco1	Eco2	Eco3	Energy1
Eco1	3.993165e+08	2.139201e+08	3.555182e+08	2.519357e+05
Eco2	2.139201e+08	1.399543e+08	2.102257e+08	1.958608e+05
Eco3	3.555182e+08	2.102257e+08	3.566091e+08	2.760989e+05
Energy1	2.519357e+05	1.958608e+05	2.760989e+05	5.399809e+02
Energy2	2.116755e+05	1.835688e+05	2.614153e+05	4.604495e+02
Energy3	-1.824868e+05	-7.293399e+04	-1.324374e+05	-7.861862e+01
Health1	-3.045399e+05	-2.466616e+05	-3.551181e+05	-5.724214e+02
Health2	-1.272858e+04	-1.066558e+04	-1.520739e+04	-2.567679e+01
Finan1	4.003296e+03	2.602550e+03	3.802537e+03	4.155543e+00
Finan2	3.890432e+10	2.920294e+10	3.779765e+10	6.784749e+07
Finan3	4.839384e+03	2.735633e+03	4.002992e+03	3.060840e+00
Finan4	8.356586e+03	6.162587e+03	8.610824e+03	1.218853e+01
Finan5	3.119759e+03	2.139593e+03	3.173581e+03	3.169371e+00
Governance	1.543128e+04	9.872143e+03	1.460836e+04	1.558144e+01
Poverty	-2.736591e+05	-1.965130e+05	-2.963639e+05	-3.501232e+02
Env	7.391704e+04	4.615415e+04	8.697476e+04	5.195411e+01
Other1	-1.902484e+04	-2.054321e+04	-1.215303e+04	-7.437830e+01
Other2	-9.435500e+04	-6.203500e+04	-9.504922e+04	-1.723745e+02
Other3	7.758964e+03	4.474107e+03	5.133362e+03	9.279074e+00

	Energy2	Energy3	Health1	Health2
Eco1	2.116755e+05	-1.824868e+05	-3.045399e+05	-1.272858e+04
Eco2	1.835688e+05	-7.293399e+04	-2.466616e+05	-1.066558e+04
Eco3	2.614153e+05	-1.324374e+05	-3.551181e+05	-1.520739e+04
Energy1	4.604495e+02	-7.861862e+01	-5.724214e+02	-2.567679e+01
Energy2	6.912695e+02	-1.187886e+02	-7.180896e+02	-3.250408e+01
Energy3	-1.187886e+02	2.810746e+03	1.745842e+02	3.288894e+00
Health1	-7.180896e+02	1.745842e+02	9.992593e+02	4.019581e+01
Health2	-3.250408e+01	3.288894e+00	4.019581e+01	1.914906e+00
Finan1	3.831377e+00	-2.088058e+00	-5.054411e+00	-2.343397e-01
Finan2	5.979119e+07	2.793587e+06	-6.845242e+07	-3.912216e+06
Finan3	2.507205e+00	-2.300717e+00	-3.653653e+00	-1.572768e-01
Finan4	1.427632e+01	3.215962e-01	-1.734503e+01	-7.600569e-01
Finan5	3.692884e+00	-1.952000e+00	-4.138472e+00	-1.731663e-01
Governance	1.359550e+01	-8.972393e+00	-1.937484e+01	-8.438996e-01
Poverty	-4.179407e+02	7.164668e+01	4.952274e+02	2.164387e+01
Env	6.514548e+01	-6.260898e+00	-8.468578e+01	-3.637691e+00
Other1	-6.740172e+01	2.713661e+01	8.099372e+01	3.963244e+00
Other2	-8.872677e+01	1.481279e+02	1.456328e+02	5.674794e+00
Other3	7.876502e+00	6.241028e-01	-1.384782e+01	-5.322135e-01

	Finan1	Finan2	Finan3	Finan4
Eco1	4.003296e+03	3.890432e+10	4839.384088	8.356586e+03
Eco2	2.602550e+03	2.920294e+10	2735.633379	6.162587e+03
Eco3	3.802537e+03	3.779765e+10	4002.991859	8.610824e+03
Energy1	4.155543e+00	6.784749e+07	3.060840	1.218853e+01
Energy2	3.831377e+00	5.979119e+07	2.507205	1.427632e+01
Energy3	-2.088058e+00	2.793587e+06	-2.300717	3.215962e-01
Health1	-5.054411e+00	-6.845242e+07	-3.653653	-1.734503e+01
Health2	-2.343397e-01	-3.912216e+06	-0.157277	-7.600569e-01
Finan1	6.650122e-02	1.199833e+06	0.056489	1.194224e-01
Finan2	1.199833e+06	1.305220e+14	682869.887388	1.475139e+06
Finan3	5.648913e-02	6.828699e+05	0.080637	1.062279e-01
Finan4	1.194224e-01	1.475139e+06	0.106228	4.780258e-01

```
Finan5      3.725753e-02  2.109868e+05       0.038405  8.698480e-02
Governance  2.099193e-01  2.607766e+06       0.214913  4.572465e-01
Poverty    -3.564931e+00 -3.379537e+07      -3.192376 -1.129828e+01
Env         7.848592e-01  1.267624e+07       0.642660  1.874050e+00
Other1     -5.918227e-01 -1.253526e+07      -0.555550 -1.974998e+00
Other2     -1.128157e+00 -2.357266e+07      -0.656482 -3.126846e+00
Other3      9.076580e-02 -2.040533e+05       0.140532  2.934935e-01

                   Finan5    Governance       Poverty           Env  \
Eco1          3119.759229  1.543128e+04 -2.736591e+05  7.391704e+04
Eco2          2139.593227  9.872143e+03 -1.965130e+05  4.615415e+04
Eco3          3173.580692  1.460836e+04 -2.963639e+05  8.697476e+04
Energy1          3.169371  1.558144e+01 -3.501232e+02  5.195411e+01
Energy2          3.692884  1.359550e+01 -4.179407e+02  6.514548e+01
Energy3         -1.952000 -8.972393e+00  7.164668e+01 -6.260898e+00
Health1         -4.138472 -1.937484e+01  4.952274e+02 -8.468578e+01
Health2         -0.173166 -8.438996e-01  2.164387e+01 -3.637691e+00
Finan1           0.037258  2.099193e-01 -3.564931e+00  7.848592e-01
Finan2      210986.782676  2.607766e+06 -3.379537e+07  1.267624e+07
Finan3           0.038405  2.149133e-01 -3.192376e+00  6.426605e-01
Finan4           0.086985  4.572465e-01 -1.129828e+01  1.874050e+00
Finan5           0.056774  1.455069e-01 -3.262020e+00  6.660267e-01
Governance       0.145507  8.499883e-01 -1.383186e+01  2.865293e+00
Poverty         -3.262020 -1.383186e+01  3.948195e+02 -7.303139e+01
Env              0.666027  2.865293e+00 -7.303139e+01  3.489358e+01
Other1          -0.284055 -2.530744e+00  3.640672e+01  1.090683e+01
Other2          -0.850695 -4.550084e+00  8.982061e+01 -1.850581e+01
Other3           0.036533  4.269736e-01 -5.337578e+00  1.081049e-02

                  Other1        Other2         Other3
Eco1       -1.902484e+04 -9.435500e+04    7758.963755
Eco2       -2.054321e+04 -6.203500e+04    4474.107188
Eco3       -1.215303e+04 -9.504922e+04    5133.361899
Energy1    -7.437830e+01 -1.723745e+02       9.279074
Energy2    -6.740172e+01 -8.872677e+01       7.876502
Energy3     2.713661e+01  1.481279e+02       0.624103
Health1     8.099372e+01  1.456328e+02     -13.847817
Health2     3.963244e+00  5.674794e+00      -0.532213
Finan1     -5.918227e-01 -1.128157e+00       0.090766
Finan2     -1.253526e+07 -2.357266e+07 -204053.327544
Finan3     -5.555496e-01 -6.564823e-01       0.140532
Finan4     -1.974998e+00 -3.126846e+00       0.293493
Finan5     -2.840549e-01 -8.506953e-01       0.036533
Governance -2.530744e+00 -4.550084e+00       0.426974
Poverty     3.640672e+01  8.982061e+01      -5.337578
Env         1.090683e+01 -1.850581e+01       0.010810
Other1      4.970794e+01  1.963328e+01      -2.122474
Other2      1.963328e+01  2.373699e+02      -0.927150
Other3     -2.122474e+00 -9.271498e-01       1.985757
```

[356]:
```
B+W
```

[356]:
```
                   Eco1          Eco2          Eco3       Energy1  \
Eco1       3.993165e+08  2.139201e+08  3.555182e+08  2.519357e+05
Eco2       2.139201e+08  1.399543e+08  2.102257e+08  1.958608e+05
```

```
Eco3        3.555182e+08  2.102257e+08  3.566091e+08  2.760989e+05
Energy1     2.519357e+05  1.958608e+05  2.760989e+05  5.399809e+02
Energy2     2.116755e+05  1.835688e+05  2.614153e+05  4.604495e+02
Energy3    -1.824868e+05 -7.293399e+04 -1.324374e+05 -7.861862e+01
Health1    -3.045399e+05 -2.466616e+05 -3.551181e+05 -5.724214e+02
Health2    -1.272858e+04 -1.066558e+04 -1.520739e+04 -2.567679e+01
Finan1      4.003296e+03  2.602550e+03  3.802537e+03  4.155543e+00
Finan2      3.890432e+10  2.920294e+10  3.779765e+10  6.784749e+07
Finan3      4.839384e+03  2.735633e+03  4.002992e+03  3.060840e+00
Finan4      8.356586e+03  6.162587e+03  8.610824e+03  1.218853e+01
Finan5      3.119759e+03  2.139593e+03  3.173581e+03  3.169371e+00
Governance  1.543128e+04  9.872143e+03  1.460836e+04  1.558144e+01
Poverty    -2.736591e+05 -1.965130e+05 -2.963639e+05 -3.501232e+02
Env         7.391704e+04  4.615415e+04  8.697476e+04  5.195411e+01
Other1     -1.902484e+04 -2.054321e+04 -1.215303e+04 -7.437830e+01
Other2     -9.435500e+04 -6.203500e+04 -9.504922e+04 -1.723745e+02
Other3      7.758964e+03  4.474107e+03  5.133362e+03  9.279074e+00

                Energy2       Energy3       Health1       Health2  \
Eco1        2.116755e+05 -1.824868e+05 -3.045399e+05 -1.272858e+04
Eco2        1.835688e+05 -7.293399e+04 -2.466616e+05 -1.066558e+04
Eco3        2.614153e+05 -1.324374e+05 -3.551181e+05 -1.520739e+04
Energy1     4.604495e+02 -7.861862e+01 -5.724214e+02 -2.567679e+01
Energy2     6.912695e+02 -1.187886e+02 -7.180896e+02 -3.250408e+01
Energy3    -1.187886e+02  2.810746e+03  1.745842e+02  3.288894e+00
Health1    -7.180896e+02  1.745842e+02  9.992593e+02  4.019581e+01
Health2    -3.250408e+01  3.288894e+00  4.019581e+01  1.914906e+00
Finan1      3.831377e+00 -2.088058e+00 -5.054411e+00 -2.343397e-01
Finan2      5.979119e+07  2.793587e+06 -6.845242e+07 -3.912216e+06
Finan3      2.507205e+00 -2.300717e+00 -3.653653e+00 -1.572768e-01
Finan4      1.427632e+01  3.215962e-01 -1.734503e+01 -7.600569e-01
Finan5      3.692884e+00 -1.952000e+00 -4.138472e+00 -1.731663e-01
Governance  1.359550e+01 -8.972393e+00 -1.937484e+01 -8.438996e-01
Poverty    -4.179407e+02  7.164668e+01  4.952274e+02  2.164387e+01
Env         6.514548e+01 -6.260898e+00 -8.468578e+01 -3.637691e+00
Other1     -6.740172e+01  2.713661e+01  8.099372e+01  3.963244e+00
Other2     -8.872677e+01  1.481279e+02  1.456328e+02  5.674794e+00
Other3      7.876502e+00  6.241028e-01 -1.384782e+01 -5.322135e-01

                Finan1        Finan2         Finan3        Finan4  \
Eco1        4.003296e+03  3.890432e+10    4839.384088  8.356586e+03
Eco2        2.602550e+03  2.920294e+10    2735.633379  6.162587e+03
Eco3        3.802537e+03  3.779765e+10    4002.991859  8.610824e+03
Energy1     4.155543e+00  6.784749e+07       3.060840  1.218853e+01
Energy2     3.831377e+00  5.979119e+07       2.507205  1.427632e+01
Energy3    -2.088058e+00  2.793587e+06      -2.300717  3.215962e-01
Health1    -5.054411e+00 -6.845242e+07      -3.653653 -1.734503e+01
Health2    -2.343397e-01 -3.912216e+06      -0.157277 -7.600569e-01
Finan1      6.650122e-02  1.199833e+06       0.056489  1.194224e-01
Finan2      1.199833e+06  1.305220e+14  682869.887388  1.475139e+06
Finan3      5.648913e-02  6.828699e+05       0.080637  1.062279e-01
Finan4      1.194224e-01  1.475139e+06       0.106228  4.780258e-01
Finan5      3.725753e-02  2.109868e+05       0.038405  8.698480e-02
Governance  2.099193e-01  2.607766e+06       0.214913  4.572465e-01
Poverty    -3.564931e+00 -3.379537e+07      -3.192376 -1.129828e+01
```

```
Env          7.848592e-01  1.267624e+07       0.642660  1.874050e+00
Other1      -5.918227e-01 -1.253526e+07      -0.555550 -1.974998e+00
Other2      -1.128157e+00 -2.357266e+07      -0.656482 -3.126846e+00
Other3       9.076580e-02 -2.040533e+05       0.140532  2.934935e-01

                  Finan5    Governance       Poverty           Env  \
Eco1         3119.759229  1.543128e+04 -2.736591e+05  7.391704e+04
Eco2         2139.593227  9.872143e+03 -1.965130e+05  4.615415e+04
Eco3         3173.580692  1.460836e+04 -2.963639e+05  8.697476e+04
Energy1         3.169371  1.558144e+01 -3.501232e+02  5.195411e+01
Energy2         3.692884  1.359550e+01 -4.179407e+02  6.514548e+01
Energy3        -1.952000 -8.972393e+00  7.164668e+01 -6.260898e+00
Health1        -4.138472 -1.937484e+01  4.952274e+02 -8.468578e+01
Health2        -0.173166 -8.438996e-01  2.164387e+01 -3.637691e+00
Finan1          0.037258  2.099193e-01 -3.564931e+00  7.848592e-01
Finan2     210986.782676  2.607766e+06 -3.379537e+07  1.267624e+07
Finan3          0.038405  2.149133e-01 -3.192376e+00  6.426605e-01
Finan4          0.086985  4.572465e-01 -1.129828e+01  1.874050e+00
Finan5          0.056774  1.455069e-01 -3.262020e+00  6.660267e-01
Governance      0.145507  8.499883e-01 -1.383186e+01  2.865293e+00
Poverty        -3.262020 -1.383186e+01  3.948195e+02 -7.303139e+01
Env             0.666027  2.865293e+00 -7.303139e+01  3.489358e+01
Other1         -0.284055 -2.530744e+00  3.640672e+01  1.090683e+01
Other2         -0.850695 -4.550084e+00  8.982061e+01 -1.850581e+01
Other3          0.036533  4.269736e-01 -5.337578e+00  1.081049e-02

                Other1        Other2         Other3
Eco1       -1.902484e+04 -9.435500e+04    7758.963755
Eco2       -2.054321e+04 -6.203500e+04    4474.107188
Eco3       -1.215303e+04 -9.504922e+04    5133.361899
Energy1    -7.437830e+01 -1.723745e+02       9.279074
Energy2    -6.740172e+01 -8.872677e+01       7.876502
Energy3     2.713661e+01  1.481279e+02       0.624103
Health1     8.099372e+01  1.456328e+02     -13.847817
Health2     3.963244e+00  5.674794e+00      -0.532213
Finan1     -5.918227e-01 -1.128157e+00       0.090766
Finan2     -1.253526e+07 -2.357266e+07 -204053.327544
Finan3     -5.555496e-01 -6.564823e-01       0.140532
Finan4     -1.974998e+00 -3.126846e+00       0.293493
Finan5     -2.840549e-01 -8.506953e-01       0.036533
Governance -2.530744e+00 -4.550084e+00       0.426974
Poverty     3.640672e+01  8.982061e+01      -5.337578
Env         1.090683e+01 -1.850581e+01       0.010810
Other1      4.970794e+01  1.963328e+01      -2.122474
Other2      1.963328e+01  2.373699e+02      -0.927150
Other3     -2.122474e+00 -9.271498e-01       1.985757
```

[357]:
```
np.max(np.array(np.abs(V-B-W)))
```

[357]:
```
0.015625
```

On constate ci dessus que V=B+W. On effet l'ecart résonnable "floating point error" est de l'ordre de 10^{-9}, celui-ci est assez grand à cause de la présence des valeurs de l'ordre de 10^5 avec 6 chiffres après la virgule et d'autres colonnes de l'ordre 10^1... Cette variation d'ordre et de chiffres après la virgule d'une colonne à une autre à conduit à une telle erreur.

6.2 Recherches d'axes des variables discriminante

Notre objectif maintenant est de trouver des nouveaux axes maximisant la variance entre les centroides des 2 clusters pour les deux groupes, et en même temps qui minimisent la variance intra-classes, càd compresser les nuages en les distanciant entre eux. Notre problème d'optimisation peut être reformulée en $d(\frac{v^TBv}{v^TVv})$=0, et qui a pour solution v vérifiant: $V^{-1}Bv = \lambda v$. Cependant on sait que si on avait p classes, le rang maximale de B sera p-1, ceci est due à la relation entre les centroides et le centre de gravité globale: $\frac{1}{n}\Sigma n_k g_k = g$. Dans notre cas, nous avons 2 classes donc on trouvera une seule composante principale significative.

[358]:
```
#vpB= valeurs propres
#vb= matrice des vecteurs propres U regroupés par colonnes
vpB, vB= np.linalg.eig(np.linalg.inv(V).dot(B))
```

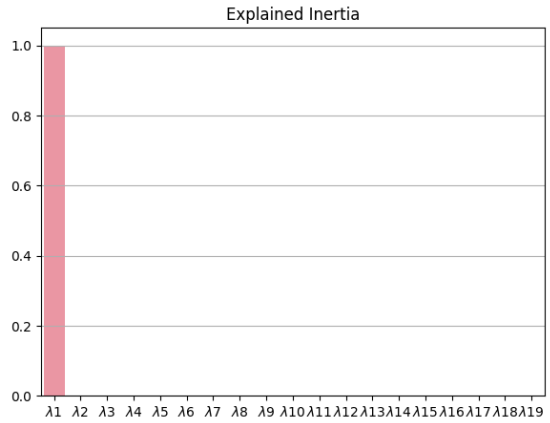
[359]:
```
vpB
```

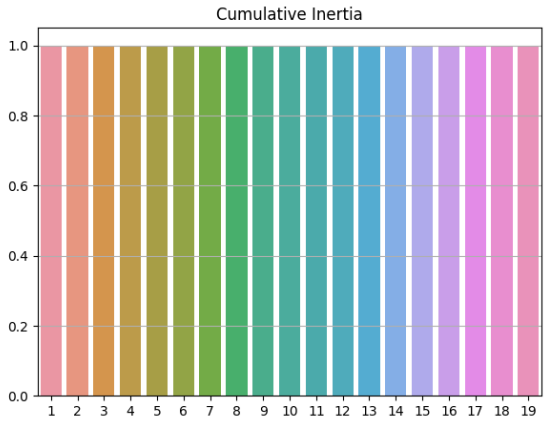
[359]:
```
array([ 6.20321701e-01+0.00000000e+00j, -5.97400640e-15+0.00000000e+00j,
         2.62285723e-15+0.00000000e+00j, -1.92528067e-15+4.16093739e-16j,
        -1.92528067e-15-4.16093739e-16j, -9.47919025e-16+0.00000000e+00j,
        -1.31174042e-16+7.55351021e-16j, -1.31174042e-16-7.55351021e-16j,
         6.76627060e-16+6.92186463e-17j,  6.76627060e-16-6.92186463e-17j,
         3.21538799e-16+0.00000000e+00j,  3.28324896e-17+2.50546946e-16j,
         3.28324896e-17-2.50546946e-16j, -2.48692462e-16+0.00000000e+00j,
         1.23498072e-16+0.00000000e+00j,  6.15425334e-18+5.45029351e-17j,
         6.15425334e-18-5.45029351e-17j, -3.92221944e-17+0.00000000e+00j,
         1.25987387e-18+0.00000000e+00j])
```

On essaie d'éradiquer les parties complexes pures de vpB et vB.

[360]:
```
vpB, vB= vpB.real, vB.real
```

[361]:
```
#cascade valeurs propres, vp cummulés
n = len(vpB)
fig = plt.figure(figsize=(15, 5))
ax1 = fig.add_subplot(121)
ax2 = fig.add_subplot(122)
ax1.set_title("Explained Inertia")
ax2.set_title("Cumulative Inertia")
ax1.grid()
ax2.grid()
a = sum(vpB)
# Create a bar plot for explained inertia :
x = [f'$\lambda${i}' for i in range(1, n + 1)]
yy = [vpB[i] / a for i in range(n)]
sb.barplot(x=x, y=yy, ax=ax1)
# Create a bar plot for cumulative explained inertia :
x = [f'{i}' for i in range(1, n + 1)]
yy = [sum(vpB[:i + 1]) / a for i in range(n)]
sb.barplot(x=x, y=yy, ax=ax2)

plt.show()
```





Comme on vient d'évoquer à l'introduction il ne s'agit que d'une seule composante principale significative.

Essayons de créer une fonction projetant les points sur la composante principale.

[362]:
```
def transformation(V,B,X)  :
    V_inv = np.linalg.inv(V)
    A=np.dot(V_inv,B)
    valeur_propre,vecteur_propre=np.linalg.eig(A)
    #ordonner les valeurs et vecteurs selon inertie expliquée
    idx=np.argsort(abs(valeur_propre))[::-1]
    valeur_propre=valeur_propre[idx]
    vecteur_propre=vecteur_propre[idx]
    #on visualise à partir du centre de gravité
    #on nous restreint à 2 dim
    X_centre=center(X)
    vecteur_propre=vecteur_propre.real
    X_nv= X_centre.dot(vecteur_propre[:,0])
    return X_nv
```

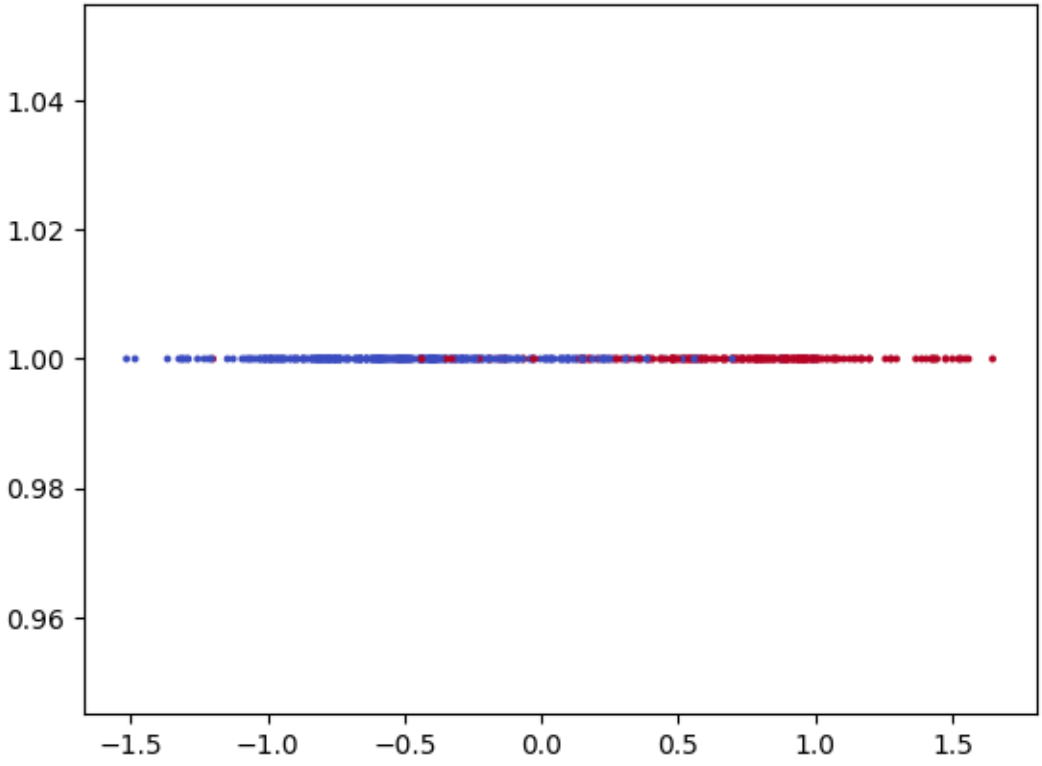
Essayons maintenant de visualiser nos données.

[363]:
```
X_nv=transformation(V,B,X)
X_nv
```

[363]:
```
0      0.921702
1      0.157616
2     -0.004279
3     -0.386765
4      0.520009
          ...
604   -0.860919
605   -0.131287
606    0.904913
607    0.436860
608   -0.144881
Length: 609, dtype: float64
```

[364]:
```
dummy=[1]*len(X_nv)
plt.scatter(X_nv, dummy, c=y, s=3,cmap='coolwarm')
plt.show()
```

```
#bleu->"H"
#rouge-> "L"
```



On constate que notre composante a pu bien séparer les deux classes.

6.3 calcul de la qualité de projection sur test

La qualité de projection sur un axe peut être formulée comme suite: $Q_i = \frac{1}{n}\frac{C_i^2}{\lambda}$, on peut la calucer simplement sans la mise en oeuvre d'un fonction.

[365]:
```
test= pd.read_csv("test_data.csv")
test
```

[365]:

	Income_Inequality	Eco1	Eco2	Eco3	Energy1	\
0	H	3118.343699	4013.387617	6584.963632	5	
1	H	3185.122401	5360.889146	7766.977359	9	
2	H	3100.830685	5508.138454	7991.803167	15	
3	H	2914.415459	5285.425544	7088.190165	16	
4	H	2808.521753	5462.176989	7059.195320	16	
..	...	...	...	...	...	
256	H	6252.317977	10436.142085	13068.735914	40	
257	H	1198.304817	2326.664974	3298.703671	11	
258	H	1294.500770	2445.265514	3634.345811	13	
259	H	1315.250562	2354.389942	3437.395432	23	
260	H	1319.607777	2168.492691	3292.797710	30	

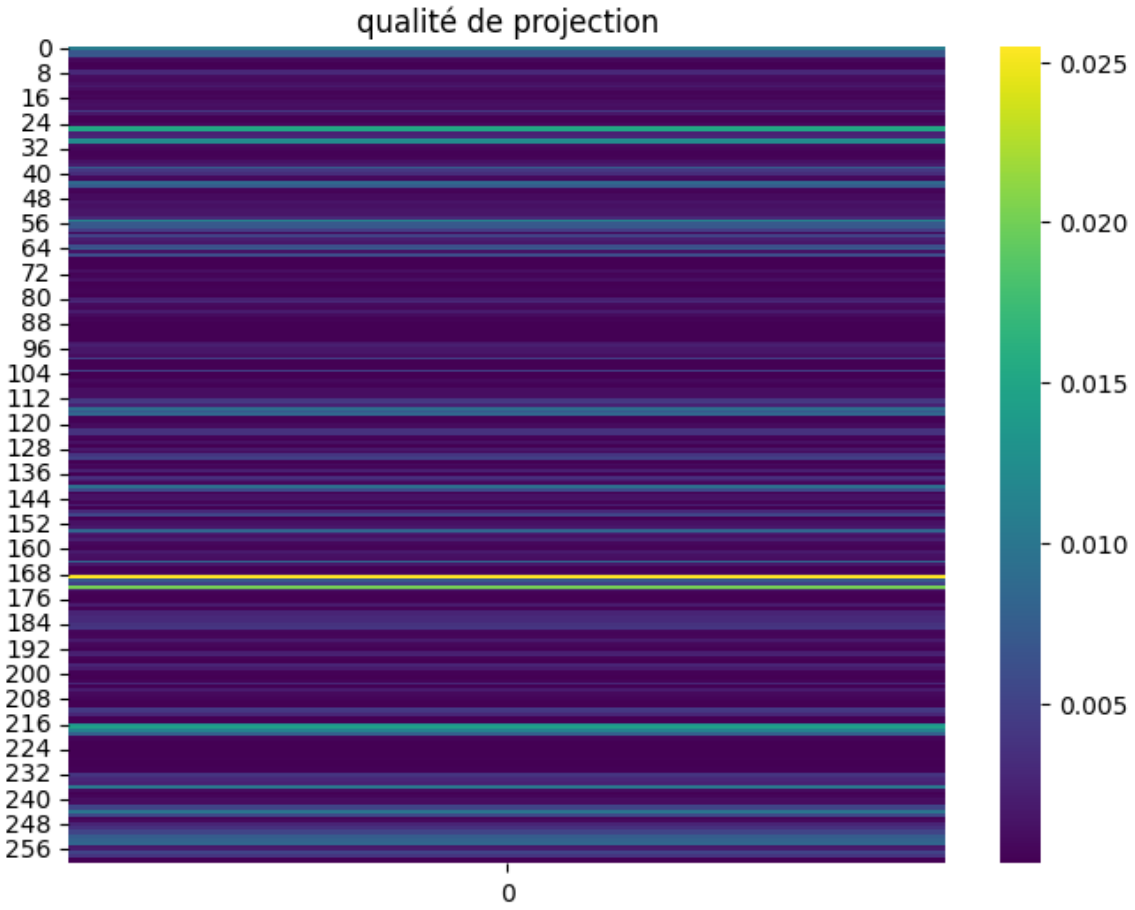
	Energy2	Energy3	Health1	Health2	Finan1	Finan2	Finan3	\
0	37.131321	145.0	104.9	6.039	0.132618	1.057144e+06	0.671585	
1	32.000000	145.0	92.9	5.864	0.133924	1.162079e+06	0.622806	
2	42.000000	145.0	88.3	5.774	0.147570	1.145485e+06	0.426284	

```
3    41.813129    145.0     84.4    5.686  0.154190  1.092634e+06  0.243273
4    43.013260    121.0     81.1    5.600  0.148656  1.281953e+06  0.316407
..         ...      ...      ...      ...       ...           ...       ...
256  85.900002    226.0     38.3    2.424  0.531852  2.631893e+06  0.513804
257  22.000000    117.0     78.7    5.363  0.171000  2.436316e+05  0.468498
258  29.886272    117.0     72.0    5.026  0.194709  2.497093e+05  0.524847
259  35.425453    117.0     65.3    4.707  0.186253  2.587091e+05  0.376191
260  40.299999    117.0     64.2    4.614  0.194725  2.546287e+05  0.440513

       Finan4    Finan5  Governance    Poverty       Env     Other1  Other2  \
0    1.431295  0.414552   -0.990930  53.875463  0.947583  34.731008   36.60
1    1.445598  0.449489   -1.055084  54.933176  1.091497  22.124248   34.53
2    1.452803  0.416866   -0.893183  56.056403  1.125185  13.305675   35.25
3    1.460044  0.417792   -0.936142  56.904924  1.012552  20.885120    0.00
4    1.467321  0.414517   -0.919977  58.013752  0.829723  25.950330    0.00
..        ...       ...         ...        ...       ...        ...     ...
256  2.675951  0.602909    0.164873  56.285901  8.191153   4.665734   21.33
257  2.222129  0.303489   -0.866416  69.491694  0.192639  18.664720   34.47
258  2.385934  0.308105   -0.521591  65.827419  0.278215  12.023595   30.83
259  2.561215  0.296417   -0.704611  65.299678  0.316995  11.677213    0.00
260  2.602425  0.294922   -0.671801  66.037969  0.393726  13.226440    0.00

      Other3
0    3.08191
1    3.12292
2    3.48690
3    2.75494
4    2.46688
..       ...
256  5.48978
257  3.70000
258  4.30000
259  3.74792
260  3.72964

[261 rows x 20 columns]
```

[366]:
```
#transformation
le = preprocessing.LabelEncoder()
yt = le.fit_transform(test["Income_Inequality"])
del test["Income_Inequality"]
```

[367]:
```
Vt,Bt,Wt,_= var(test,yt)
vpp, _= np.linalg.eig(np.linalg.inv(Vt).dot(Bt))
test_nv= transformation(Vt, Bt, test)
n=len(test_nv)
qual= (1/n)*(test_nv**2)*(1/vpp[0].real)
```

[368]:
```
# visualisation
n=len(qual)
plt.figure(figsize=(8, 6))
sb.heatmap(np.array(qual).reshape(n,1), cmap='viridis')
plt.title('qualité de projection')
plt.show()
```



Retrievons les 10 individus mal projetés

[369]:
```
seuil= sorted(qual)[10]
qual[qual<seuil]
```

[369]:
```
100    2.922812e-06
127    1.015699e-07
142    1.671706e-06
147    4.297129e-07
196    1.415196e-07
201    1.722550e-06
210    2.187167e-06
214    1.887586e-06
222    1.263481e-07
260    3.035730e-06
dtype: float64
```

[370]:
```
least_proj
```

[370]:
```
array([ 51,  82,  83,  84, 145, 158, 160, 166, 167, 246])
```

On constate bien que les mal projtés de l'AFD sont totalement distincts des malprojetés de l'ACP; En effet, il ne faut pas s'attendre à avoir les mêmes résultats car le but primale de l'AFD est de classifier les individus en maximisant l'intervariance entre les groupes, un individu mal projeté dans ce cas est un individu qui est mal classifié. Cependant dans les individus mal projetés par l'ACP indique un individu atypique pour l'ensemble de données, de plus l'ACP n'a rien à faire avec la classification

puisq'elle traite le problème de maximisation de variance d'une manière globale et pas discriminative pour chacune des classes comme l'AFD.

7 Partie 7: l'AFD prédictive

7.1 AFD prédictive sur les données normales

Puisqu'on est dans le cas de classes binaires, le score de Fisher est le plus adapté , il est défini comme la difference entre la distance des deux classes: $f(x) = (x-\mu_H)^T W^{-1}(x-\mu_H) - (x-\mu_L)^T W^{-1}(x-\mu_L)$.

Si f(x)>0 alors l'individu sera classifié dans L.

[371]:
```
mH= np.array(np.mean(X[y==0], axis=0))
mL= np.array(np.mean(X[y==1], axis=0))
_,p= X.shape
```

[372]:
```
def fischer(x):
  a= (np.array(x)-mH).reshape(1,p)
  b= (np.array(x)-mL).reshape(1,p)
  v1= np.dot(np.dot(a,np.linalg.inv(W)),a.T)
  v2= np.dot(np.dot(b,np.linalg.inv(W)),b.T)
  if all((v1-v2)>0):
    return 1
  return 0
```

[373]:
```
Y= pd.read_csv("test_data.csv")
Y.head()
```

[373]:

	Income_Inequality	Eco1	Eco2	Eco3	Energy1	Energy2	Energy3	Health1	Health2	Finan1	Finan2	Finan3	Finan4	Finan5	Governance	Poverty	Env	Other1	Other2	Other3
0	H	3118.343699	4013.387617	6584.963632	5	37.131321	145.0	104.9	6.039	0.132618	1057144.125	0.671585	1.431295	0.414552	-0.990930	53.875463	0.947583	34.731008	36.60	3.08191
1	H	3185.122401	5360.889146	7766.977359	9	32.000000	145.0	92.9	5.864	0.133924	1162079.125	0.622806	1.445598	0.449489	-1.055084	54.933176	1.091497	22.124248	34.53	3.12292
2	H	3100.830685	5508.138454	7991.803167	15	42.000000	145.0	88.3	5.774	0.147570	1145485.375	0.426284	1.452803	0.416866	-0.893183	56.056403	1.125185	13.305675	35.25	3.48690
3	H	2914.415459	5285.425544	7088.190165	16	41.813129	145.0	84.4	5.686	0.154190	1092634.500	0.243273	1.460044	0.417792	-0.936142	56.904924	1.012552	20.885120	0.00	2.75494
4	H	2808.521753	5462.176989	7059.195320	16	43.013260	121.0	81.1	5.600	0.148656	1281953.250	0.316407	1.467321	0.414517	-0.919977	58.013752	0.829723	25.950330	0.00	2.46688

[374]:
```
#on encode H==0 et L==1 dans y_test
from sklearn import preprocessing
le = preprocessing.LabelEncoder()
y_test = le.fit_transform(Y["Income_Inequality"])
del Y["Income_Inequality"]
```

Maintenant on classifie nos données test dans y_fischer en assignant 0 pour la classe “H” et 1 pour la classe “L”.

[375]:
```
y_fischer=[]
n,_=Y.shape
for i in range(n):
  y_fischer.append(fischer(np.array(Y.iloc[i])))
```

Claculons l’erreur de classification.

[376]:
```
np.sum(y_test!=y_fischer)/n
```

[376]:
```
0.13409961685823754
```

Ainsi notre modèle construit des données train a bien pu classifié nos données test avec une précision presque égale à 86%.

[377]:
```
from sklearn.metrics import confusion_matrix
cm = confusion_matrix(y_test ,y_fischer)
cm
```

[377]:
```
array([[146,  22],
       [ 13,  80]])
```

[378]:
```
sp= cm[1,1]/np.sum(cm[:,1])
se= cm[0,0]/np.sum(cm[:,0])
print("sensibilité :", se*100, "%")
print("spécificité :", sp*100, "%")
```

```
sensibilité : 91.82389937106919 %
spécificité : 78.43137254901961 %
```

Ce modèle a bien pu discerner les individus positives (inégalité de revenus basse) que les individus négatifs (haute inégalité de revenus).

7.2 AFD prédictive sur les données standardisés

Importons nos données normalisés.

[379]:
```
Yn= pd.DataFrame(cennor(Y.values))
Yn
```

[379]:

	0	1	2	3	4	5	6	\
0	-0.659986	-0.946097	-0.832418	-1.855067	-1.718766	1.181314	2.161869	
1	-0.656493	-0.836759	-0.763816	-1.695419	-1.907612	1.181314	1.818004	
2	-0.660902	-0.824811	-0.750767	-1.455947	-1.539586	1.181314	1.686189	
3	-0.670652	-0.842882	-0.803211	-1.416035	-1.546464	1.181314	1.574433	
4	-0.676191	-0.828540	-0.804894	-1.416035	-1.502296	0.677463	1.479870	
..	...	...	...	...	...	...	...	
256	-0.496059	-0.424947	-0.456111	-0.458147	0.076047	2.881810	0.253419	
257	-0.760416	-1.082959	-1.023147	-1.615595	-2.275638	0.593488	1.411097	
258	-0.755384	-1.073336	-1.003667	-1.535771	-1.985403	0.593488	1.219106	

```
259 -0.754299 -1.080710 -1.015097 -1.136651 -1.781547  0.593488  1.027115
260 -0.754071 -1.095793 -1.023489 -0.857267 -1.602151  0.593488  0.995594

           7         8         9         10        11        12        13  \
0    2.315467 -1.059883 -0.314672  0.223286 -1.753838 -1.010875 -1.236816
1    2.193360 -1.054652 -0.305397  0.052555 -1.734263 -0.854923 -1.304182
2    2.130562 -0.999984 -0.306864 -0.635287 -1.724403 -1.000548 -1.134176
3    2.069160 -0.973466 -0.311535 -1.275842 -1.714493 -0.996413 -1.179286
4    2.009153 -0.995633 -0.294802 -1.019866 -1.704534 -1.011030 -1.162312
..        ...       ...       ...       ...       ...       ...       ...
256 -0.206918  0.539454 -0.175482 -0.328962 -0.050439 -0.170078 -0.023151
257  1.843785 -0.906122 -0.386577 -0.487535 -0.671527 -1.506646 -1.106069
258  1.608641 -0.811143 -0.386040 -0.290309 -0.447348 -1.486041 -0.743981
259  1.386057 -0.845021 -0.385245 -0.810619 -0.207464 -1.538213 -0.936163
260  1.321166 -0.811079 -0.385605 -0.585486 -0.151064 -1.544887 -0.901711

           14        15        16        17        18
0    1.318840 -0.834187  4.893303  1.362849 -1.012496
1    1.372409 -0.798829  2.835554  1.230394 -0.986028
2    1.429295 -0.790552  1.396135  1.276466 -0.751113
3    1.472269 -0.818225  2.633296 -0.979108 -1.223525
4    1.528427 -0.863145  3.460069 -0.979108 -1.409440
..        ...       ...       ...       ...       ...
256  1.440919  0.945514 -0.014127  0.385754  0.541559
257  2.109738 -1.019673  2.270869  1.226555 -0.613577
258  1.924157 -0.998647  1.186866  0.993639 -0.226333
259  1.897429 -0.989119  1.130327 -0.979108 -0.582649
260  1.934821 -0.970267  1.383201 -0.979108 -0.594447

[261 rows x 19 columns]
```

Définissons les moyennes, l'intra-variance normalisé et la fonction fischer_normal pour classifier.

[380]:
```
mnL= np.array(np.mean(Yn[y_test==1], axis=0))
mnH= np.array(np.mean(Yn[y_test==0], axis=0))
Wn= var(pd.DataFrame(Yn),y_test)[2]
def fischer_normal(x):
  a= (np.array(x)-mnH).reshape(1,p)
  b= (np.array(x)-mnL).reshape(1,p)
  v1= np.dot(np.dot(a,np.linalg.inv(Wn)),a.T)
  v2= np.dot(np.dot(b,np.linalg.inv(Wn)),b.T)
  if all((v1-v2)>0):
    return 1
  return 0
```

[381]:
```
y_fischer_norm=[]
for i in range(n):
  y_fischer_norm.append(fischer_normal(np.array(Yn.iloc[i])))
```

[382]:
```
np.sum(y_fischer_norm!=y_test)/n
```

[382]:
```
0.10344827586206896
```

Le classifieur normé a achevé une précision de 90%, mieux que le classifieur précedent. Calculons sa matrice de confusion.

[383]:
```
from sklearn.metrics import confusion_matrix
cmn = confusion_matrix(y_test ,y_fischer_norm)
cmn
```

[383]:
```
array([[151,  17],
       [ 10,  83]])
```

[384]:
```
spn= cmn[1,1]/np.sum(cmn[:,1])
sen= cmn[0,0]/np.sum(cmn[:,0])
print("sensibilité :", sen*100, "%")
print("spécificité :", spn*100, "%")
```

```
sensibilité : 93.7888198757764 %
spécificité : 83.0 %
```

La capacité de distinguer les deux classes a aussi amelioré.

8 Conclusion

Dans ce TP on a étudié des méthodes de classification supervisés (**AFD & arbres**) ainsi que des méthodes de maximisation de variance et réduction des dimensions des données (**ACP**). Nous avons surtout bien pu distinguer l'importance de la normalisation dans transformation de la base de données à variables dont les échelles de représentation sont trop variés entre eux, surtout dans la distinction entre les anomalies. Parlant des anomalies, une grande partie de ce TP a été concentré sur des algorithmes de leurs détection: on est partit des forêts d'isolement, puis on a évalué la capacité de l'ACP à les discerner à partir des individus faiblement projetés sur les axes principaux, puis on a utilisé un algorithme d'ACP inverse qui a été plus performant que le dernier.

Néaumoins les algorithme de type Black-Box tel que la forêt d'isolement reste le plus performant en perspective de la détection des anomalies.

Enfin, il faut bien noter que dans l'AFD le discriminant utilisé peut être amelioré de telle façon qu'il peuve prendre en compte le taux de représentation de la classe et leurs dispersions depuis leurs centroides... Mais de telle critère s'avèrent innécessaires pour en prendre compte puisqu'on est mis dans le cas d'une classification binaire.