Tutoriel pracma

Tarik HAKAM

10/12/2020

Cas d'usage du package pracma : Quadrature Hermite-Gauss

La quadrature Hermite-Gauss, également appelée quadrature Hermite, est une quadrature gaussienne sur l'intervalle $(-\infty, \infty)$ avec fonction de pondération w telle que :

$$w(x) = \exp(-x^2) \tag{1}$$

La quadrature Hermite est utilisée pour intégrer des fonctions de la forme :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-x^2)\, dx \tag{2}$$

x et w sont obtenus à partir des valeurs propres tridiagonales.

La valeur d'une telle intégrale est alors sum($w \times f(x)$).

R Code

Pour coder la quadrature Hermite-Gauss, le package pracma a une fonction prédéfinie : **gaussHermite(n)**

Dans notre exemple, nous prenons $n = 17$ comme ordre de quadrature.

```
#Gauss-Hermite Quadrature Formula
#gaussHermite(n) avec ici n = 17
library("pracma")
f <- gaussHermite(17)
```

Ensuite, nous calculons l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\, dx \tag{3}$$

Comme vu dans la section précédente, *"La valeur d'une telle intégrale est alors sum($w \times f(x)$)."*

```
sum(f$w) #=> 1.772453850905516 == sqrt(pi)
```

```
## [1] 1.772454
```

Ainsi, nous obtenons la résolution suivante :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\,dx = \sqrt{\pi} \tag{4}$$

Nous calculons de la même façon les intégrales suivantes :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-x^2)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} cos(x) \exp(-x^2)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\exp(1)^{1/4}} \tag{6}$$

Pour trouver ces solutions, nous avons codé les commandes suivantes :

```
# Integrate x^2 exp(-x^2)
sum(f$w * f$x^2) #=> 0.88622692545276 == sqrt(pi)/2
```

```
## [1] 0.8862269
```

```
# Integrate cos(x) * exp(-x^2)
sum(f$w * cos(f$x)) #=> 1.38038844704314 == sqrt(pi)/exp(1)^0.25
```

```
## [1] 1.380388
```

To dig depper

Les abscisses pour l'ordre de quadrature n sont données par les racines x_i des polynômes Hermite $H_n(x)$, dont les points sont positionnés symétriquement autour de 0. Les poids sont :

$$w_i = -\frac{A_{n+1}\gamma_n}{A_n H_n^{(x_i)} H'_{n+1}(x_i)} = \frac{A_n}{A_{n-1}} \frac{\gamma_{n-1}}{H_{n-1}(x_i) H'_n(x_i)} \tag{7}$$

où,

A_n est le coefficient de x^n dans $H_n(x)$.

Pour les polynômes Hermite,

$$A_n = 2^n \Leftrightarrow \frac{A_{n+1}}{A_n} = 2 \tag{8}$$

De plus,

$$\gamma_n = \sqrt(\pi) 2^n n!$$

$$w_i = -\frac{2^{n+1} n! \sqrt(\pi)}{H_{n+1}(x_i) H'_n(x_i)} = \frac{2^n (n-1)! \sqrt(\pi)}{H_{n-1}(x_i) H'_n(x_i)} = \frac{2^{n+1} n! \sqrt(\pi)}{[H'_n(x_i))]^2} = \frac{2^{n+1} n! \sqrt(\pi)}{[H_{n+1}(x_i)]^2} = \frac{2^{n-1} n! \sqrt(\pi)}{n^2 [H_{n-1}(x_i)]^2} \tag{9}$$

en utilisant la relation de récurrence suivante :

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x) \tag{10}$$

ainsi, on obtient :

$$H_n'(x_i) = 2nH_{n-1}(x_i) = -H_{n+1}(x_i) \tag{11}$$

Cas d'usage du package pracma : Approximation de Tchebytchev

Cette méthode traite des polynômes uniquement défini sur l'intervalle [-1;1] tandis que la fonction à étudier est sur l'intervalle [a;b] avec $a, b \in \mathbf{R}$.

Toute variable x de ce dernier correspondra une variable v comprise entre -1 et 1, par transformation affine suivante :

$$v = \frac{2(x-a)}{(b-a)-1} \tag{12}$$

L'idée de Tchebychev est d'approcher le calcul de f(x) par la formule :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k \times T_k(v) \tag{13}$$

$T_k(v)$ étant un polynôme de Tchebychev de degré k en v, ainsi défini :

$$T_k(v) = 2 \times v \times T_{[k-1]}(v) - T_{[k-2]}(v) \tag{14}$$

Code R

Nous allons approximer $sin(x)$ avec l'approximation de Tchebytchev sur $[-\pi, \pi]$. Pour commencer, nous avons comparer $sin(x)$ avec un polynôme de degré $n = 9$. On parle d'évaluation polynomiale.

L'exemple est le suivant :

$$P(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 \tag{15}$$

Ainsi, on code un polynôme de la façon suivante :

```r
#Approximate sin(x) on [-pi, pi] with a polynomial of degree 9
# Polynomial:
p1 <- rev(c(0, 1, 0, -1/6, 0, 1/120, 0, -1/5040, 0, 1/362880))
```

Ensuite pour l'approximation de Tchebytchev, on définit les coefficients de Tchebytchev pour les polynômes de Tchebytchev.

```r
#Compare
#chebCoeff(f, a, b, n)
p2 <- chebCoeff(sin, -pi, pi, 9)
```

On découpe ensuite l'intervalle $[-\pi, \pi]$, ici en 101 chuncks. Plus le pas est petit, plus l'approximation est "juste".

```r
# Estimate the maximal distance
x <- seq(-pi, pi, length.out = 101)
#length.out = length of the sequence
```

Afin de comparer l'efficacité de l'approximation de Tchebytchev et celle de l'évaluation polynomiale, on définit les fonctions suivantes : la fonction à approximer $sin(x)$, l'évaluation polynomiale yp, l'approximation de Tchebytchev yc.

```r
ys <- sin(x)
yp <- polyval(p1, x)
yc <- chebApprox(x, sin, -pi, pi, 9)
```

On obtient les écarts suivants :

```r
max(abs(ys-yp)) # 0.006925271
```

```
## [1] 0.006925271
```

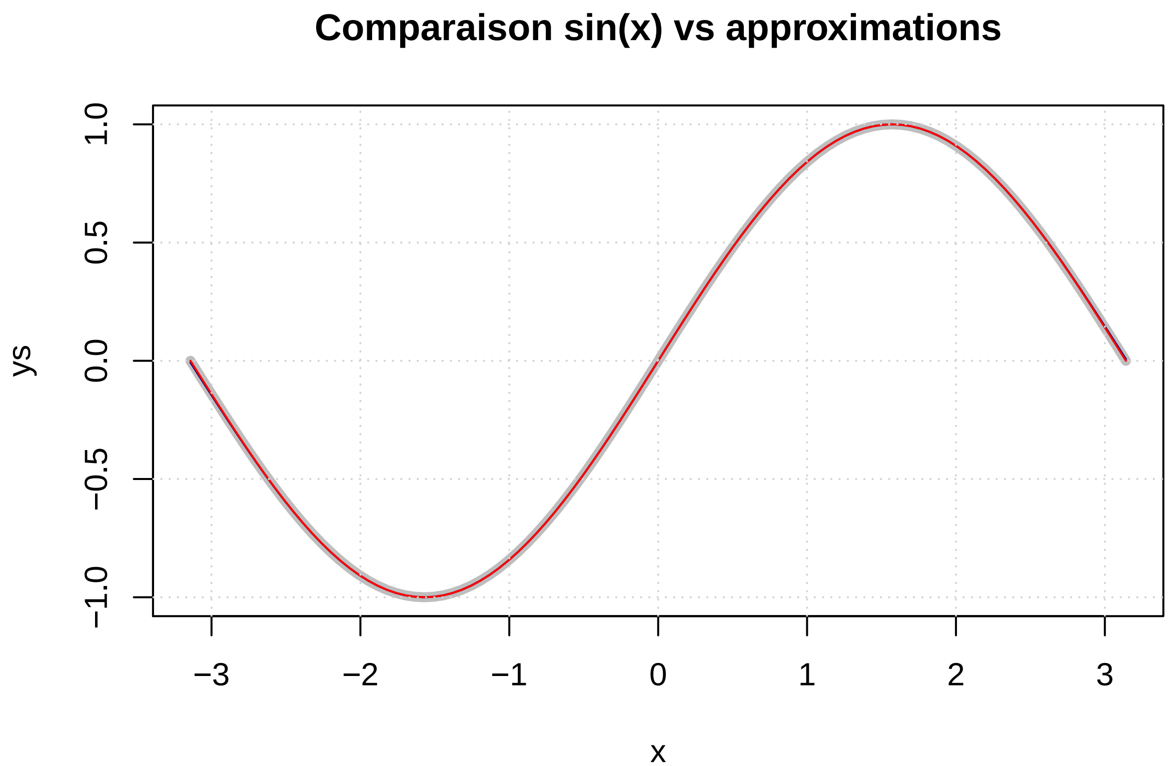
```r
max(abs(ys-yc)) # 1.151207e-05
```

```
## [1] 1.151207e-05
```

On peut ainsi conclure que l'approximation de Tchebytchev est plus efficace que l'évaluation polynomiale.

Pour finir, on "plot" les fonctions de l'exemple pour illustrer.

```r
# Plot the corresponding curves
plot(x, ys, type = "l", col = "gray", lwd = 5,
     main="Comparaison sin(x) vs approximations")
lines(x, yp, col = "navy")
lines(x, yc, col = "red")
grid()
```



Comparaison sin(x) vs approximations
ys
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−3
−2
−1
0
1
2
3
x