Tutoriel pracma - Auto-évaluation

Tarik HAKAM

22/12/2020

1. Critères d'évaluation

1. Comportement du Rmd à l'exécution
2. Qualité de la rédaction du dossier
3. Accessibilité, didactisme et pertinence du dossier
4. Qualité et lisibilité du Rmarkdown
5. Qualité du LaTeX / équation et des illustrations

2. Lien vers le document commenté

En cliquant **ici**, vous trouverez le lien menant à mon GitHub hébergeant le fruit de ma réalisation.

3. Auteurs du document commenté

Le document évalué dans le cadre de ce rendu a été produit par moi-même, étudiant en Master 2 Data Management à Paris School of Business.

4. Synthèse du document

A travers ma réalisation, vous retrouverez une brève introduction autour de la quadrature Hermite-Gauss, également appelée quadrature Hermite.

Celle-ci est une quadrature gaussienne sur l'intervalle $(-\infty, \infty)$ avec fonction de pondération w telle que :

$$w(x) = \exp(-x^2) \tag{1}$$

Vous trouverez également un cas d'usage du package pracma autour de l'approximation de Tchebytchev.

Cette méthode traite des polynômes uniquement défini sur l'intervalle [-1;1] tandis que la fonction à étudier est sur l'intervalle [a;b] avec $a, b \in \mathbf{R}$.

Toute variable x de ce dernier correspondra une variable v comprise entre -1 et 1, par transformation affine suivante :

$$v = \frac{2(x-a)}{(b-a)-1} \tag{2}$$

L'idée de Tchebychev est d'approcher le calcul de f(x) par la formule :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k \times T_k(v) \tag{3}$$

$T_k(v)$ étant un polynôme de Tchebychev de degré k en v, ainsi défini :

$$T_k(v) = 2 \times v \times T_{[k-1]}(v) - T_{[k-2]}(v) \tag{4}$$

5. Extrait commenté des parties de code

Quadrature Hermite-Gauss

Pour coder la quadrature Hermite-Gauss, le package pracma a une fonction prédéfinie : **gaussHermite(n)**
Dans notre exemple, nous prenons $n = 17$ comme ordre de quadrature.

```r
#Gauss-Hermite Quadrature Formula
#gaussHermite(n) avec ici n = 17
library("pracma")
f <- gaussHermite(17)
```

Ensuite, nous calculons l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\,dx \tag{5}$$

Comme vu dans le document, *"La valeur d'une telle intégrale est alors sum(w×$f(x)$)."*

```r
sum(f$w) #=> 1.77245385090552 == sqrt(pi)
```

Ainsi, nous obtenons la résolution suivante :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\,dx = \sqrt{\pi} \tag{6}$$

Nous calculons de la même façon les intégrales suivantes :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-x^2)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{7}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} cos(x) \exp(-x^2)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\exp(1)^{1/4}} \tag{8}$$

Pour trouver ces solutions, nous avons codé les commandes suivantes :

```
# Integrate x^2 exp(-x^2)
sum(f$w * f$x^2) #=> 0.886226925452716 == sqrt(pi)/2

# Integrate cos(x) * exp(-x^2)
sum(f$w * cos(f$x)) #=> 1.38038844704314 == sqrt(pi)/exp(1)^0.25
```

Approximation de Tchebytchev

Nous allons approximer $sin(x)$ avec l'approximation de Tchebytchev sur $[-\pi, \pi]$. Pour commencer, nous avons comparer $sin(x)$ avec un polynôme de degré $n = 9$. On parle d'évaluation polynomiale.

L'exemple est le suivant :

$$P(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 \tag{9}$$

Ainsi, on code un polynôme de la façon suivante :

```
#Approximate sin(x) on [-pi, pi] with a polynomial of degree 9
# Polynomial:
p1 <- rev(c(0, 1, 0, -1/6, 0, 1/120, 0, -1/5040, 0, 1/362880))
```

Ensuite pour l'approximation de Tchebytchev, on définit les coefficients de Tchebytchev pour les polynômes de Tchebytchev.

```
#Compare
#chebCoeff(f, a, b, n)
p2 <- chebCoeff(sin, -pi, pi, 9)
```

On découpe ensuite l'intervalle $[-\pi, \pi]$, ici en 101 chuncks. Plus le pas est petit, plus l'approximation est "juste".

```
# Estimate the maximal distance
x <- seq(-pi, pi, length.out = 101)
#length.out = length of the sequence
```

Afin de comparer l'efficacité de l'approximation de Tchebytchev et celle de l'évaluation polynomiale, on définit les fonctions suivantes : la fonction à approximer $sin(x)$, l'évaluation polynomiale yp, l'approximation de Tchebytchev yc.

```
ys <- sin(x)
yp <- polyval(p1, x)
yc <- chebApprox(x, sin, -pi, pi, 9)
```

On obtient les écarts suivants :

```r
max(abs(ys-yp)) # 0.006925271
max(abs(ys-yc)) # 1.151207e-05
```

On peut ainsi conclure que l'approximation de Tchebytchev est plus efficace que l'évaluation polynomiale.

Pour finir, on "plot" les fonctions de l'exemple pour illustrer.

```r
# Plot the corresponding curves
plot(x, ys, type = "l", col = "gray", lwd = 5,
     main="Comparaison sin(x) vs approximations")
lines(x, yp, col = "navy")
lines(x, yc, col = "red")
grid()
```

6. Evaluation du travail suivant les 5 critères précités

1. Comportement du Rmd à l'exécution

L'exécution du code Rmd se réalise parfaitement.

2. Qualité de la rédaction du dossier

La rédaction de ce document me semble de bonne qualité.

Elle suit cette logique de se vouloir être un tutoriel accessible, cependant il est vrai qu'il est davanatage orienté pour des profils ayant une base mathématiques solide.

Toutefois, ce package présente beaucoup trop de fonctionnalités pour être illustré sous la forme d'un tutoriel complet.

Ainsi, nous avons trouvé que les fonctions type quadrature, approximation et interpolation semblaient le plus accessible à présenter.

3. Accessibilité, didactisme et pertinence du dossier

La lecture de ce dossier semble effectivement assez complexe et peu accessible à tous les profils.

Cependant, je pense que les descriptions sont plutôt explicites et suffisamment illustrées.

4. Qualité et lisibilité du RMarkdown

Le RMarkdown me semnle bien écrit, lisible et aéré.

je pense qu'il s'agit d'un code bien réalisé.

5. Qualité du LaTeX / équation et des illustrations

Les applications sont relativement complexes, de qualités et illustrées d'expressions LaTeX maîtrisées. Cela apporte un plus au document

7. Conclusion

Selon moi, il s'agit globalement d'un tutoriel de bonne qualité même s'il requiert une compréhension des mathématiques avancée.

Je pense avoir fourni un dossier recherché et documenté

Ce document apporte toute de même une bonne approche pour découvrir le potentiel de ce package.

Vous retrouvez ce document sur mon **GitHub**.