MACRO PEGのお勉強

古賀 智裕*

2016/07/22†

概 要

この文書は, 私個人の「お勉強」のための文書である. MACRO PEG[2] に自分なりの形式的な定義を与え, その基本的な性質を証明する. ただし, この文書で扱うのは first order の MACRO PEG とする (以下では, foMPEG と書く). お勉強の性質上, 自明に見える事柄もなるべく省略せずに丁寧に証明した. その結果, 現状では 140 ページになってしまった. 内容は今後も加筆・修正される可能性がある. なお, 単なるお勉強に留まらず, 最適化をしない foMPEG の計算量の上界を 1 つ見つけることに成功したので, そのことも書いた.

1　イントロダクション

MACRO PEG [2] とは, PEG [1] にマクロのような機能を持たせて PEG を拡張したものである. この文書では, MACRO PEG[2] に自分なりの形式的な定義を与え, その基本的な性質を証明する. ただし, この文書で扱うのは first order の MACRO PEG とする (以下では, foMPEG と書く). 引数に規則そのものが取れる通常の MACRO PEG は, 定義の時点で面倒くさいので, この文書では扱わない. 現状では, 以下の内容を扱った:

- parsing expression の定義を与え, その基本的な性質を証明した.

- foMPEG の形式的な定義を与え, その基本的な性質を証明した.

- foMPEG を別の foMPEG に同値変形するとき, その変形がちゃんと同値変形になっていることを証明するのは凄まじく手間が掛かる. そこで, 同値変形の際に使用できる, わりと統一的な変換定理を作った. これにより, そういう類の変形がちゃんと同値変形になっていることが自動的に保証されるようになり, 変換のたびにいちいち証明する必要がなくなった.

- first order MACRO gTS という概念を私が勝手に考案し, その定義を与えた (以下では, foMgTS と書く).

- 任意の foMPEG が, それと同値な foMgTS に変換できることを証明した. 従って, 勝手に考案した foMgTS という概念は, それなりに正当性のある概念であると思われる. また, 変換後の foMgTS は, もともとの foMPEG よりも計算量が嵩んでいることを証明した. 変換は常に冗長な方向に進むので, 計算量が嵩むのは直感的には明らかではあるが, きちんと証明してみると, 同値変形に関する

*こが としひろ, toshihiro1123omega_f_ma_mgkvv_sigma_w7.dion.ne.jp _sigma_ → @ omega →

†最終更新日 2018/12/14

体系的な下準備が必要になってしまい, 相当に面倒くさかった.

- foMgTS に対する無限ループの基本的な性質を書いた.

- 最適化をしない foMPEG の計算量の上界を 1 つ求めた. なお, あくまでも上界に過ぎず, それが最良の値であるわけではない.

補足 以下では, 再帰的定義に関する注意を述べておく. [1] の Interpretation of a Grammar のところで使われる再帰的定義では,

- どこを再帰的定義のスタート地点とするのか?
- どのような経路で再帰が進んでいくのか?

といったことが分かりにくく, 個人的には大変に気持ち悪い. PEG の時点でこのような状況なのだから, MACRO PEG でも気持ち悪い状況になることが容易に想像できる. この部分は, 再帰的定義のような動的な感じのする定義で記述するのではなく, なるべくなら静的な定義で記述したい.
ところで, 再帰的定義は, ZF 集合論においては

ある種の条件を満たす集合のうち, 集合の包含関係に関して最小のもの

として定義し直せる. こちらの定義方法では, 再帰の経路を意識する必要がなく, しかも静的に定義が終わるので, 再帰的定義に見られる気持ち悪さが解消される. そこで, 今回の文書では, 一部の議論において, 再帰的定義ではなく, 上記の「最小性」に基づいた定義を使った.

2　覚え書き

この節では, 個人的な覚え書きを列挙していく. 「何を当たり前のことを言っているのだ」と思われるかもしれないが, 悪しからず.

覚え書き　正整数全体の集合を $\mathbb{N}$ と書く. 整数全体の集合を $\mathbb{Z}$ と書く. $n \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$\mathbb{Z}_{\geq n} := \{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq n\}$$

と定義する. $n, m \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$\begin{aligned}
[n, m] &:= \{x \in \mathbb{Z} \mid n \leq x \leq m\}, \\
[n, m) &:= \{x \in \mathbb{Z} \mid n \leq x < m\}, \\
(n, m] &:= \{x \in \mathbb{Z} \mid n < x \leq m\}
\end{aligned}$$

と定義する. よって, $n > m$ のときは $[n, m] = \emptyset$ であり, $n \geq m$ のときは $[n, m) = (n, m] = \emptyset$ である. 次に, 有限集合 X に対して, X の元の個数を $|X|$ で表す. $|\emptyset| = 0$ である.

覚え書き　命題 P, Q に対して, $P \Rightarrow Q$ は $\neg P \vee Q$ と等価.

覚え書き　X は集合とする. $x \in X$ に関する命題 $P(x)$ が与えられたときに,

$$\forall x \in X \ \ [\ P(x)\ ]$$

は

$$\forall x \ \ [\ x \in X \Rightarrow P(x)\ ]$$

と等価. 従って

$$\forall x \ \ [\ x \notin X \vee P(x)\ ]$$

と等価. 従って, $X = \emptyset$ のときは,

$$\forall x \in X \ \ [\ P(x)\ ]$$

は任意の P に対して常に真である.

覚え書き　X は集合とする. $x \in X$ に関する命題 $P(x)$ が与えられたとする.

$$\forall x \in X \ \ [\ P(x)\ ]$$

の証明を書き下したいとする. このとき, 普通は「$x \in X$ を任意に取る. $P(x)$ が真であることを示したい. 」という書き方で始める. しかし, $X = \emptyset$ のときには, $x \in X$ を満たす x は存在しないので, この書き方は気持ちが悪い. そこで, 書き方を修正すると,

$$X = \emptyset \text{ のときは無条件で真であるから, 以下では } X \neq \emptyset \text{ としてよい.}$$

という一文を付け加えることになる. しかし, この一文はしばしば省略される (当たり前の事実なので). 結局, 書き始めの文章は「$x \in X$ を任意に取る. $P(x)$ が真であることを示したい. 」というものになる.

覚え書き　X は集合とする．$x \in X$ に関する命題 $P(x)$, $Q(x)$ が与えられたとする．

$$\forall x \in X \ \ [\ P(x) \Rightarrow Q(x)\ ]$$

の証明を書き下したいとする．このとき, 普通は「$x \in X$ を任意に取る．$P(x)$ は真とする．$Q(x)$ が真であることを示したい．」という書き方で始める．しかし, $P(x)$ が常に偽のときは, $P(x)$ が真になるような x は存在しないので, この書き方は気持ちが悪い．しかし, $P(x) \Rightarrow Q(x)$ は $\neg P(x) \vee Q(x)$ と等価であるから, $P(x)$ が常に偽であるなら, $\neg P(x) \vee Q(x)$ は常に真となる．よって, この場合は証明が既に終わっている．そこで, 書き方を修正すると,

$P(x)$ が常に偽ならば, 証明は既に終わっている．
以下では, $P(x)$ が真になるような x が存在するとしてよい．

という一文を付け加えることになる．しかし, この一文はしばしば省略される (当たり前の事実なので)．結局, 書き始めの文章は「$x \in X$ を任意に取る．$P(x)$ は真とする．$Q(x)$ が真であることを示したい．」というものになる．

覚え書き

$$\exists ! x \in X \ \ [\ P(x)\ ]$$

は

- $\exists x \in X \ \ [\ P(x)\ ]$,
- $\forall x_1 \in X,\ \forall x_2 \in X \ \ [\ P(x_1) \wedge P(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2\ ]$

の省略記法.

覚え書き　$x \in X$ に関する命題 $P(x)$ と $A \subset X$ 対して,

$$\forall x \in A \ \ [\ P(x)\ ]$$

のことを

$$P(x)\ (x \in A)$$

とも書く．

覚え書き　(置換公理) 集合 x, y に関する命題 $\varphi(x, y)$ についての以下の主張を, 置換公理と呼ぶ:

$$[\ \forall x,\ \forall y,\ \forall z \ \ [\ [\ \varphi(x,y) \wedge \varphi(x,z)\ ] \Rightarrow y = z\ ]\ ] \Rightarrow$$
$$\forall X,\ \exists A,\ \forall y \ [\ y \in A \Leftrightarrow \exists x \in X \ \ [\ \varphi(x,y)\ ]\ ].$$

置換公理は単独の公理ではなく, $\varphi(x, y)$ ごとに 1 つずつ用意される．
公理の直感的な意味: 集合 x, y に関する命題 $\varphi(x, y)$ が

$$\forall x,\ \forall y,\ \forall z \ \ [\ [\ \varphi(x,y) \wedge \varphi(x,yz)\ ] \Rightarrow y = z\ ]$$

という条件を満たすとする．すなわち, 各 x ごとに, $\varphi(x, y)$ が真になるような y が高々1 つしかないとする．このとき, 任意の集合 X に対して,

$$\{y \mid \exists x \in X \ \ [\ \varphi(x,y)\ ]\ \}$$

もまた集合である．

覚え書き　(クラトフスキーの順序対) 集合 x, y に対して, $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ のことを $(x, y)_K$ と表記する．この $(x, y)_K$ のことをクラトフスキーの順序対と呼ぶ．次が成り立つことが分かる:

$$\forall a, b, x, y\ \ [\ (a, b)_K = (x, y)_K \Leftrightarrow [\ a = x \text{ かつ } b = y\ ]\ ].$$

以下では, 集合 A, B に対して,

$$A \times_K B := \{(a, b)_K \mid a \in A,\ b \in B\}$$

と定義する．

覚え書き　(写像の定義) X, Y は集合とする．$A \subset X \times_K Y$ であって, 次を満たすものを X から Y への写像と呼び, $A : X \to Y$ と書く:

$$\forall x \in X,\ \exists! y \in Y\ \ [\ (x, y)_K \in A\ ].$$

任意の $A : X \to Y$ と任意の $x \in X$ に対して, $(x, y)_K \in A$ を満たす唯 1 つの $y \in Y$ のことを $A(x)$ と書く．従って, $(x, A(x))_K \in A$ である．また, $(x, y)_K \in A$ ならば $y = A(x)$ である．次に, $A : X \to Y$ と $X_0 \subset X$ に対して

$$A(X_0) := \{A(x) \mid x \in X_0\}$$

と定義する．特に, $A(\emptyset) = \emptyset$ である．また, $A(X)$ のことを $Im(A)$ とも書く．

覚え書き　X, Y は集合とする．$X = \emptyset$ のときは, 任意の Y に対して $\emptyset \subset X \times_K Y$ が写像の定義を満たすので, $\emptyset$ は「$\emptyset$ から Y への写像」である．これを空写像と呼ぶ．$X \neq \emptyset$ かつ $Y = \emptyset$ のときは, 写像の定義を満たす $A \subset X \times_K Y$ は存在しない．

覚え書き　X から Y への写像全体の集合を $(X \to Y)$ と書く．$X = \emptyset$ のときは, 任意の Y に対して $(X \to Y)$ は 1 元集合であり, その唯 1 つの元は空写像 $\emptyset$ である．すなわち, $(\emptyset \to Y) = \{\emptyset\}$ である．$Y = \emptyset$ のときは, $X \neq \emptyset$ なら $(X \to Y)$ は空集合であり, $X = \emptyset$ なら, さっき書いたように $(X \to Y) = \{\emptyset\}$ である．すなわち, $X \neq \emptyset$ ならば $(X \to \emptyset) = \emptyset$ であり, $X = \emptyset$ ならば $(X \to \emptyset) = \{\emptyset\}$ である．

覚え書き　集合 A に対して

$$A \ni a \mapsto a \in A$$

という写像のことを id_A と書く．すなわち,

$$id_A : A \to A,\ \ id_A(a) := a\ \ (a \in A)$$

である．次に, $f : X \to Y$ と $A \subset X$ に対して, f の A への制限写像を $f|_A$ と書く．すなわち, $f|_A : A \to Y,\ f|_A(x) := f(x)\ (x \in A)$ である．ちなみに, $f|_A := f \circ id_A$ という定義でもよい．あるいは, $f|_A := f \cap (A \times_K Y)$ という定義でも, 実は上手く行く．

覚え書き　$X \subset \mathbb{Z}$ とする．Y は集合とする．写像 $f : X \to Y$ と $i \in X$ に対して, $f(i)$ のことを f_i と書くことがある．

覚え書き　(直積・順序対) $n \geq 2$ とする. U は集合で, $A : [1, n] \to U$ は写像とする. 写像 $x : [1, n] \to \cup_i A_i$ であって,

$$\forall i \in [1, n] \ [\ x_i \in A_i\ ]$$

を満たすものの集合を

$$A_1 \times \cdots \times A_n$$

と書き, これを $A_1, \cdots, A_n$ の直積と呼ぶ. $x \in A_1 \times \cdots \times A_n$ に対して,

$$x = (x_i)_{i=1}^n, \quad x = (x_i \mid 1 \leq i \leq n), \quad x = (x_1, \cdots, x_n)$$

などと表記する. よって,

$$(x_i)_{i=1}^n \in A_1 \times \cdots \times A_n, \quad (x_i \mid 1 \leq i \leq n) \in A_1 \times \cdots \times A_n, \quad (x_1, \cdots, x_n) \in A_1 \times \cdots \times A_n$$

といった書き方は意味を持つ. なお, 3 つ目の表記法では,

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_i \in A_i \ (1 \leq i \leq n)\}$$

と表せる. また, $(x_1, \cdots, x_n)$ は写像であり, $(x_1, \cdots, x_n) : [1, n] \to \cup_i A_i$ であり, $(x_1, \cdots, x_n)_i = x_i$ である. 特に, $n = 2$ のときは, (x_1, x_2) のことを順序対と呼ぶ. 次が成り立つことが分かる:

$$\forall a, b, x, y \ [\ (a, b) = (x, y) \Leftrightarrow [\ a = x \text{ かつ } b = y\ ]\ ].$$

補足　$A_i = A \ (1 \leq i \leq n)$ のときは,

$$A_1 \times \cdots \times A_n = ([1, n] \to A)$$

が成り立つことが確かめられる.

例　$(1, 1), (1, 2), (2, 3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad (1, 2, 3), (1, 1, 1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$

覚え書き　A は集合とする. 写像 $f : A \times A \to A$ を, A の上の二項演算と呼ぶ. $(a_1, a_2) \in A \times A$ に対して, $f(a_1, a_2)$ のことを $a_1\ f\ a_2$ とも書く (中置記法). また, 集合 $\mu \subset A \times A$ のことを A の上の二項関係と呼ぶ. $(a_1, a_2) \in \mu$ のとき, $a_1\ \mu\ a_2$ と書く.

覚え書き　$n, m \geq 0$ とする. X は集合とする. 写像 $x : [n, m] \to X$ のことを有限項の点列と呼び,

$$x = (x_i)_{i=n}^m, \quad x = (x_i \mid n \leq i \leq m), \quad x = (x_n, \cdots, x_m)$$

のように表記する[1]. なお, 慣習として

$$x = \{x_i\}_{i=n}^m$$

と書かれることも非常に多く, 自分もついついやってしまうが, 点列をこのように表記するのは語弊があるので好ましくない. というのも, こちらの表記は普通は

$$\{x_i \mid n \leq i \leq m\}$$

[1] $n > m$ のときは, このような写像 x は $x : \emptyset \to X$ を意味するので, x は空写像となる. すなわち, $x = \emptyset$ となる.

という集合のことを指すのであり[2], これでは $i \mapsto x_i$ という情報が抜け落ちてしまうからである. たとえば, $a, b : [1, 2] \to \mathbb{R}$ を $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $b_1 = 2$, $b_2 = 1$ と定義すると, 写像としては $a \neq b$ であるから, $(a_i)_{i=1}^2 \neq (b_i)_{i=1}^2$ が成り立つが, しかし $\{a_i\}_{i=1}^2 = \{b_i\}_{i=1}^2$ が成り立ってしまう. なぜなら,

$$\{a_i\}_{i=1}^2 = \{1, 2\}, \quad \{b_i\}_{i=1}^2 = \{2, 1\} = \{1, 2\}$$

なので.

覚え書き　X は集合とする. 写像 $x : \mathbb{N} \to X$ のことを「点列」または「列」と呼び,

$$x = (x_i)_{i=1}^\infty$$

と表記する. なお, 慣習として

$$x = \{x_i\}_{i=1}^\infty$$

と書かれることも多いが, 上と同じ理由により, この表記法はあまりよろしくない.

覚え書き　$n \geq 0$ とする. X は集合とする.

$$X^n := ([1, n] \to X)$$

と定義する. 特に, $X^0 = (\emptyset \to X) = \{\emptyset\}$ であり, これは 1 元集合である. 上の覚え書きの記法と合わせれば, $n \geq 0$ に対して

$$(x_i)_{i=1}^n \in X^n, \quad (x_i \mid 1 \leq i \leq n) \in X^n, \quad (x_1, \cdots, x_n) \in X^n$$

といった書き方は意味を持つ. なお, 3 つ目の表記法からの類推により, $\emptyset \in X^0$ のことを $()$ と別名表記する. すなわち, $() = \emptyset \in X^0$ である. ちなみに, 直積の定義から

$$X^2 = ([1, 2] \to X) = X \times X, \quad X^3 = ([1, 3] \to X) = X \times X \times X$$

などが成り立つ.

例　$() \in \mathbb{N}^0$, $(1), (2), (3) \in \mathbb{N}^1$, $(1, 1), (1, 2), (2, 3) \in \mathbb{N}^2$, $(1, 2, 3), (1, 1, 1) \in \mathbb{N}^3$.

覚え書き　(集合間の同一視について) X は集合とする. $X^1 = ([1, 1] \to X)$ であるから, X と X^1 は集合としては異なるのだが, 両者の間には自然な対応が存在するので, しばしば同一視される. すなわち, $x \in X$ に対して, $(x) \in X^1$ が x と同一視される. 次に, X, Y, Z は集合とする. $(X \times Y) \times Z$ の元は $((x, y), z)$ という形であり, $X \times Y \times Z$ の元は (x, y, z) という形である. よって, 集合としては $(X \times Y) \times Z$ と $X \times Y \times Z$ は全くの別物である. しかし, 両者の間には自然な対応関係があるので, しばしば同一視され, $(X \times Y) \times Z$ の元なのに (x, y, z) と書いたりする. この文書でも, 両者の区別が本質的でないところでは, このような同一視をして (x, y, z) のように書く. なお, これらの同一視は, 混乱のもとになりそうな場合は同一視せず, きちんと区別して扱う.

[2] $n > m$ のときは, この集合は空集合を表す.

覚え書き　X, Y, Z, W は集合とする．写像 $f : X \to Y$ に対して, 点 $x \in X$ における f の像は $f(x)$ と書かれるのだった．すると, $f : X \times Y \to Z$ のときには, 点 $(x, y) \in X \times Y$ における f の像は $f((x, y))$ と書くのが正式な記法である．しかし, この書き方は冗長なので, 普通は $f(x, y)$ と書かれる．同じく, $f : (X \times Y) \times Z \to W$ のときには, 点 $((x, y), z)$ における f の像は $f(((x, y), z))$ と書くのが正式な記法だが, 普通は $f((x, y), z)$ と書かれる．もしくは, 上の覚え書きと同様にして, $((x, y), z)$ と (x, y, z) を同一視することにより, 単に $f(x, y, z)$ と書かれることも多い.

覚え書き　(集合の族)
Λ, U は集合とする．$A : \Lambda \to U$ は写像とする．このとき,

$$A = (A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$$

と書き, A のことを集合の族と呼ぶ.

覚え書き　(数学的帰納法の有限個版) $m \geq 0$ とする．$0 \leq k \leq m$ で定義された命題 $P(k)$ があって, 次が成り立つとする.

- $P(0)$ は真.
- $\forall k \in [0, m)$ ［ $P(k)$ は真 $\Rightarrow P(k+1)$ は真 ］.

このとき, 任意の $0 \leq k \leq m$ に対して $P(k)$ は真である.

証明　ある $k \in [0, m]$ に対して $P(k)$ は偽とする．$P(0)$ は真だったから, $k \neq 0$ であり, よって, $1 \leq k \leq m$ である．よって $0 \leq k-1 \leq m-1 < m$ となる．よって, $P(k-1)$ が定義できる．もしこれが偽ならば, $k \in [0, m]$ の最小性に矛盾する．よって, $P(k-1)$ は真である．$0 \leq k-1 < m$ であるから, 仮定から $P(k)$ は真となる．これは矛盾.

覚え書き　(数学的帰納法の有限個版) $m \geq 0$ とする．$0 \leq k \leq m$ で定義された命題 $P(k)$ があって, 次が成り立つとする.

- $P(m)$ は真.
- $\forall k \in (0, m]$ ［ $P(k)$ は真 $\Rightarrow P(k-1)$ は真 ］.

このとき, 任意の $0 \leq k \leq m$ に対して $P(k)$ は真である.

証明　$0 \leq k \leq m$ で定義された命題 $Q(k)$ を

$$Q(k) : \ P(m-k)$$

と置けば, 上の覚え書きに帰着される.

3　文字の集合

この節では,「文字」と「文字の集合」を自分なりに定義する．より具体的には, ZF 集合論で「文字」と「文字の集合」を実装する方法を自分なりに 1 つ挙げる．やや技巧的な実装なので, なぜそれが「文字」の定義なのか直観的には分かりにくいかもしれない．

定理 3.1 X, Y は集合とする．このとき, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned}&(1)\quad X = Y \Leftrightarrow X^1 = Y^1.\\&(2)\quad X \cap Y = \emptyset \Leftrightarrow X^1 \cap Y^1 = \emptyset.\\&(3)\quad X \subset Y \Leftrightarrow X^1 \subset Y^1.\\&(4)\quad \forall n \geq 0,\ \forall x \in X^n\ \ [\ |x| = n\ ].\end{aligned}$$

また, $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が集合の族であるとき, 次が成り立つ:

$$(5)\quad \cup_\lambda X_\lambda^1 = (\cup_\lambda X_\lambda)^1.$$

証明　(1),(2),(3) 簡単なので省略.
(4) $n \geq 0$ と $x \in X^n$ を任意に取る．$|x|$ は集合 x の元の個数を表すのだったから,

$$\text{集合 } x \text{ の元の個数} = n \tag{$*$}$$

を示せばよい．$n = 0$ のときは, $x = \emptyset$ となるしかないので, 確かに $(*)$ が成り立つ．$n \geq 1$ のときは, $x \in X^n = ([1, n] \to X)$ より, $x : [1, n] \to X$ となるので, 写像の定義により,

$$x = \{(i, x(i))_K \mid 1 \leq i \leq n\}$$

という形になっている．右辺は明らかに n 元集合だから, やはり $(*)$ が成り立つ．よって, (4) が成り立つ.
(5) $f \in$ (左辺) とすると, ある λ に対して $f \in X_\lambda^1$ である．すなわち, $f : [1, 1] \to X_\lambda$ である．よって, $f : [1, 1] \to \cup_\lambda X_\lambda$ である．よって, $f \in$ (右辺) である．逆に, $f \in$ (右辺) とすると, $f : [1, 1] \to \cup_\lambda X_\lambda$ である．よって, ある λ に対して $f(1) \in X_\lambda$ である．同じ λ に対して, $f : [1, 1] \to X_\lambda$ である．よって, $f \in X_\lambda^1$ である．よって, $f \in$ (左辺) である．

定義 3.2 (「文字」の定義) 集合 a は, ある集合 x に対して $a = (x)$ と表されるとする．同じことだが,

$$a \in ([1, 1] \to \{x\}) = \{x\}^1$$

を満たすとする．このとき, a のことを「文字」あるいは「文字列長が 1 の文字」と呼ぶ．なお, $a = (x)$ を満たす x は, a を固定するごとに一意的である．

定理 3.3 Σ は集合で, Σ の任意の元は文字であるとする．このとき, ただ 1 つの集合 X が存在して, $\Sigma = X^1$ と表せる．逆に, 集合 Σ が, ある集合 X に対して $\Sigma = X^1$ と表されるとき, Σ の任意の元は文字である．

証明 Σ は集合で, Σ の任意の元は文字であるとする. ただ 1 つの集合 X が存在して, $\Sigma = X^1$ と表せることを示す.
X の存在性: 集合 x, y に関する命題 $G(x, y)$ を

$$G(a, x): \ a = (x)$$

と定義する. このとき, 次が成り立つことが確かめられる:

$$\forall a, \ \forall x_1, \ \forall x_2 \ [\ G(a, x_1) \wedge G(a, x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \ ].$$

よって, 置換公理により,

$$X := \{x \mid \exists a \in \Sigma \ [\ G(a, x) \ ] \ \} = \{x \mid \exists a \in \Sigma \ [\ a = (x) \ ] \ \}$$

は集合である. この X に対して, $\Sigma = X^1$ が成り立つことを示す. $a \in \Sigma$ とすると, 定理の仮定により, $a = (x)$ を満たす集合 x が取れる. $a \in \Sigma$ により, $x \in X$ となる. よって, $(x) \in X^1$ となる. $a = (x)$ だったから, $a \in X^1$ となる. 逆に, $a \in X^1$ とすると, $a = (x)$ を満たす $x \in X$ が取れる. X の定義から, ある $a' \in \Sigma$ が存在して $a' = (x)$ と表せる. よって, $a' = (x) = a$ となるので, $a \in \Sigma$ となる. よって, $\Sigma = X^1$ である.
X の一意性: 定理 3.1 の (1) を使えばよい.
次に, 集合 Σ が $\Sigma = X^1$ と表されるとする. このとき, Σ の任意の元は明らかに文字である.

補足 $\Sigma = \emptyset$ のときは, 上の証明の「存在性」のところで得られる X は $X = \emptyset$ となるが, このとき

$$X^1 = ([1, 1] \to X) = ([1, 1] \to \emptyset) = \emptyset = \Sigma$$

となるので, やはり $\Sigma = X^1$ が成り立っている.

定義 3.4 (「文字の集合」の定義) Σ は集合で, Σ の任意の元は文字であるとする. 同じことだが, ある集合 X に対して $\Sigma = X^1$ と表されるとする. このとき, Σ のことを「文字の集合」と呼ぶ. このときの X に対して,

$$\Sigma|_n := X^n \quad (n \geq 0)$$

と定義する. 特に

$$\Sigma|_0 = X^0 = \{\emptyset\}, \quad \Sigma|_1 = \Sigma$$

が成り立つ. また, $\Sigma|_0$ のただ 1 つの元 $\emptyset$ のことを ε と別名表記する. 従って, $\varepsilon = \emptyset$ であり, $\Sigma|_0 = X^0 = \{\emptyset\} = \{\varepsilon\}$ である. この ε のことを「空文字」と呼ぶ. また, $\cup_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} X^n$ のことを Σ^* と表記する. $\Sigma|_n = X^n$ だったから,

$$\Sigma^* = \cup_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \Sigma|_n$$

である. Σ^* の各元のことを文字列と呼ぶ. また, $\cup_{n \in \mathbb{N}} X^n$ のことを Σ^+ と表記する. $\Sigma|_n = X^n$ だったから,

$$\Sigma^+ = \cup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma|_n$$

である．次に, 任意の $x \in \Sigma^*$ に対して, $x \in \Sigma|_n$ を満たす $n \geq 0$ がただ 1 つ存在する．この n のとを「x の文字列長」と呼ぶ．定理 3.1 の (4) より, $|x| = n$ が成り立つので, x の文字列長は $|x|$ となる．特に, $x = \varepsilon$ のときは $|\varepsilon| = 0$ である．次に, Σ^* の上の二項演算 $*$ を以下のように定義する: $x, y \in \Sigma^*$ を任意に取る．それぞれ唯一の $n, m \geq 0$ が存在して $x \in \Sigma|_n = X^n$, $y \in \Sigma|_m = X^m$ となる[3]．$z \in \Sigma|_{n+m} = X^{n+m}$ を次のように定義する:

- $n = 0$ のとき： $z := y$.
- $m = 0$ のとき： $z := x$.
- それ以外のとき： $z_i := x_i \ \ (1 \leq i \leq n), \ \ y_{i-n} \ \ (n+1 \leq i \leq n+m)$.

この z のことを $x * y$ と表記する．こうして $*$ を定義すると, $(\Sigma^*, *)$ は ε を単位元とするモノイドになることが分かる．このモノイドの構造は,

Σの各元を日常用語的な意味で文字だと見なして文字列の連結操作をする

のと同じ構造になっている．Σ のことを「文字の集合」と呼ぶのは, これが由来である．以下では, $x, y \in \Sigma^*$ に対して, $x * y$ のことを単に xy と省略表記する．

補足　Σ^* は, $\Sigma = X^1$ となっているときに定義されるので, $(X^1)^*$ という書き方は意味を持つが, X^* という書き方は一般的には意味を成さない．

補足　空文字 ε は,「空文字」という名前がついてはいるものの, 定義 3.2 の意味においては「文字」ではない．なぜなら, もし ε が「文字」ならば, $\varepsilon = (a)$ を満たす集合 a が存在することになる．よって, $\varepsilon : [1, 1] \to \{a\}$ となるので, $\varepsilon = \{(1, a)_K\}$ となり, ε は 1 元集合となる[4]．一方で, ε は $\emptyset$ の別名表記なのだった．よって, $\emptyset = \{(1, a)_K\}$ となり, $\emptyset$ は 1 元集合となる．しかし, $\emptyset$ は空集合だから矛盾する．

例　a, b は異なる集合とし, $X := \{a, b\}$ と置くと, $\Sigma := X^1$ は文字の集合である．このとき,

$$\Sigma|_0 = X^0 = \{\varepsilon\}, \ \ \Sigma|_1 = X^1 = \{(a), (b)\}, \ \ \Sigma|_2 = X^2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\},$$
$$\Sigma|_3 = X^3 = \{(a, a, a), (a, a, b), (a, b, a), (a, b, b), (b, a, a), (b, a, b), (b, b, a), (b, b, b)\}$$

などが成り立つ．$(a, a) = (a)(a), \ (a, b, a) = (a)(b)(a)$ などが成り立つことから,

$$\Sigma|_0 = \{\varepsilon\}, \ \ \Sigma|_1 = \{(a), (b)\}, \ \ \Sigma|_2 = \{(a)(a), (a)(b), (b)(a), (b)(b)\},$$
$$\Sigma|_3 = \{(a)(a)(a), (a)(a)(b), (a)(b)(a), (a)(b)(b), (b)(a)(a), (b)(a)(b), (b)(b)(a), (b)(b)(b)\}$$

と表せる．よって,

$$A := (a) \in X^1, \ \ B := (b) \in X^1$$

と置くと, A, B は「文字」であり,

$$\Sigma|_0 = \{\varepsilon\}, \ \ \Sigma|_1 = \Sigma = \{A, B\}, \ \ \Sigma|_2 = \{AA, AB, BA, BB\},$$
$$\Sigma|_3 = \{AAA, AAB, ABA, ABB, BAA, BAB, BBA, BBB\}$$

[3] $\Sigma = \emptyset$ のときは, $X = \emptyset$ であり, $\Sigma|_0 = \{\varepsilon\}$, $\Sigma|_k = \emptyset \ (k \geq 1)$ となるので, $n = m = 0$ となる．
[4] $a = \emptyset$ などと置いてみてもなお, $\{(1, a)_K\}$ は 1 元集合である．

などが成り立つ．よって，Σ は「文字の集合」と呼ぶのに相応しい構造を備えている．なお，C++ 風に言うと，X の元 a, b は char 型だと見なせて，$X^1 = \Sigma$ の元 $(a), (b)$ は std::string 型 (文字列長は 1) だと見なせて，$X^n = \Sigma|_n$ の元は std::string 型 (文字列長は n) だと見なせる．

補足　X と X^1 は自然に同一視できるのだったが，X^1 を文字の集合とする場合は，同一視により

$$\text{char 型} \quad \text{と} \quad \text{std :: string型 (文字列長が 1 のもの)}$$

を同一視することになってしまうので，混乱のもとである．そこで，X^1 を文字の集合と見なす場合は，X と X^1 を同一視しないことにする．

補足　$\Sigma|_n$ と Σ^n は全くの別物である．実際，$\Sigma|_n = X^n$ であるが，$\Sigma^n = (X^1)^n$ である．ただし，X と X^1 を同一視する場合は，X^n と $(X^1)^n$ も同一視できるので，$\Sigma|_n$ と Σ^n は同一視できることになる．しかし，文字の集合ではこのような同一視をしないことにしているので，$\Sigma|_n$ と Σ^n は別物となる．ちなみに，今後の文章では，実際に $\Sigma|_n$ と Σ^n を区別しながら両方とも使う場面があるので，この区別は大切である．

定理 3.5　Σ は文字の集合とする．
(1) 任意の $V \subset \Sigma$ は文字の集合である．特に，V^* が定義できる．また，$V^* \subset \Sigma^*$ が成り立つ．
(2) $(\Sigma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は文字の集合の族とする．このとき，$\cup_\lambda \Sigma_\lambda$ もまた文字の集合である．特に，$(\cup_\lambda \Sigma_\lambda)^*$ が定義できる．

証明　(1) V の任意の元は明らかに文字であるから，V は文字の集合である．定理 3.3 より，$V = X^1$，$\Sigma = Y^1$ を満たす集合 X, Y が取れる．$V \subset \Sigma$ だったから，$X^1 \subset Y^1$ である．定理 3.1 の (3) より，$X \subset Y$ となる．よって，

$$V|_n = X^n = ([1, n] \to X) \subset ([1, n] \to Y) = Y^n = \Sigma|_n \quad (n \geq 0)$$

となるので，

$$V^* = \cup_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} V|_n \subset \cup_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \Sigma|_n = \Sigma^*$$

となる．
(2) $\cup_\lambda \Sigma_\lambda$ の任意の元が文字であることを言えばよいが，これは明らか．

定義 3.6　Σ は文字の集合とする．x は文字とする．$x \in \Sigma$ が成り立つとする．$s \in \Sigma^*$ は次を満たすとする:

$$\exists t_1, t_2 \in \Sigma^* \ [\ s = t_1 x t_2\ ]. \tag{1}$$

このとき，

$$\text{文字列 } s \text{ の中に文字 } x \text{ が出現する}$$

と呼ぶことにする．また，s が (1) を満たさないとき，

$$\text{文字列 } s \text{ の中に文字 } x \text{ は出現しない}$$

と呼ぶことにする．

定理 3.7 Σ は文字の集合とする．x は文字とする．$x \notin \Sigma$ が成り立つとする．このとき，次が成り立つ:

$$\forall s \in \Sigma^* \ [\ \text{文字列}\ s\ \text{の中に文字}\ x\ \text{は出現しない}\ ].$$

証明 x は文字だから，$x = (a)$ を満たす集合 a が存在する．また，Σ は文字の集合だから，$\Sigma = X^1$ を満たす集合 X が存在する．もし $a \in X$ ならば，$x = (a) \in X^1 = \Sigma$ となって矛盾するので，$a \notin X$ である．さて，ある $s \in \Sigma^*$ に対して，文字列 s の中に文字 x が出現するとする．従って，ある $t_1, t_2 \in \Sigma^*$ が存在して $s = t_1 x t_2$ が成り立つ．$n_i = |t_i|$ $(i = 1, 2)$ と置けば，$|s| = n_1 + 1 + n_2$ だから，$s \in \Sigma|_{n_1+1+n_2} = X^{n_1+1+n_2}$ である．よって，$s : [1, n_1 + 1 + n_2] \to X$ である．特に，任意の $1 \leq i \leq n_1 + 1 + n_2$ に対して $s_i \in X$ である．また，文字列の連結演算の定義により，$s_{n_1+1} = x_1 = a$ である．よって，$a \in X$ となるが，これは $a \notin X$ に矛盾する．

補足 今後の文章において，以下の 5 種類の記号を「文字」として使うことがある:

$$(\quad)\quad [\quad]\quad /$$

これらの記号を「文字」として使う場合，どのようにして「文字」と見なすのかというと，異なる 5 種類の集合 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 を好きに決め打ちして，

$$(a_1)\quad (a_2)\quad (a_3)\quad (a_4)\quad (a_5)$$

のことをそれぞれ

$$(\quad)\quad [\quad]\quad /$$

と別名表記するのである．これらの (a_i) は，ZF 集合論で「文字」を扱うときのバックグラウンドにおける実装に過ぎないので，(a_i) そのものが何を意味しているのかは気にする必要がない．そもそも，(a_i) のことを意識する必要もない．

4　再帰的定義の代替手段

この節では, 再帰的定義を回避するための代替手段を扱う．しかも,

$$\text{「再帰的定義の書き方と構造がそっくりなのに, 再帰的定義が回避できる」} \tag{$*$}$$

という都合の良い書き方を見つける．例として, 正の奇数を再帰的に定義する状況を考える．これは次のように定義できる．

(1) 1 は正の奇数である．

(2) n が正の奇数ならば, $n+2$ も正の奇数である．

(3) 以上の作業を有限回繰り返して得られる数のみが正の奇数である．

一方で, 再帰的定義を回避しつつ, 同じような書き方で正の奇数を定義するには, 次のようにする．まず, 正の奇数全体の集合を T と置く．このとき,

- $1 \in T$,
- $\forall n \in \mathbb{N}\ [\ n \in T \Rightarrow n+2 \in T\ ]$

が成り立つことが分かる．そこで, 逆に考えて, この 2 条件を満たす集合 $T \subset \mathbb{N}$ のことを正の奇数の集合と定義するのである．これで, 早くも $(*)$ の目標が達成できたように見えるが, 実は落とし穴がある．今のままでは, 冒頭の再帰的定義における (1),(2) しか反映できておらず, (3) に相当する言及が存在しないのである．すると, 余計な元が T に属する可能性が排除できない．実際,

- $1 \in \mathbb{N}$,
- $\forall n \in \mathbb{N}\ [\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+2 \in \mathbb{N}\ ]$

が成り立つので, 今のままでは, $\mathbb{N}$ もまた正の奇数の集合の候補になってしまう (余計な元が入りまくっている)．余計な元を排除するには,

- $1 \in U$,
- $\forall n \in \mathbb{N}\ [\ n \in U \Rightarrow n+2 \in U\ ]$

が成り立つ集合 $U \subset \mathbb{N}$ を全て考えた上で, そのような U の中で集合の包含関係に関して最小のものを, 求める集合と定義すればよい (最小の集合が実際に存在することは個別に証明が必要であるが)．この,「最小の集合を考える」という行為が, (3) に対応する．以上を踏まえると, 今回の例の場合は, 次のようにすればよい．まず, $\mathcal{M} \subset \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ を以下のように定義する:

$$\mathcal{M} := \{U \subset \mathbb{N} \mid 1 \in U,\ \forall n \in \mathbb{N}\ [\ n \in U \Rightarrow n+2 \in U\ ]\ \} \subset \mathfrak{P}(\mathbb{N}).$$

明らかに $\mathbb{N} \in \mathcal{M}$ であるから, $\mathcal{M}$ は空でない．そこで, $T = \cap_{U \in \mathcal{M}} U$ と置く．このとき, T もまた $T \in \mathcal{M}$ を満たすことが証明できる．また, 任意の $U \in \mathcal{M}$ に対して $T \subset U$ が成り立つ (最小性)．そこで, この T のことを, 正の奇数の集合と定義する．このとき,

$$T = \{2n+1 \mid n \geq 0\} \tag{i}$$

が成り立つことが証明できるので, T は実際に「正の奇数の集合」になる. よって, この定義はうまく行っている. なお, (i) は以下のようにして証明できる. $U_1 := \{2n+1 \mid n \geq 0\}$ と置く. $T = U_1$ を示せばよい. まず,

$$\forall n \geq 0 \ \ [\ 2n+1 \in T\ ] \tag{ii}$$

が成り立つことを示す. $n \geq 0$ に関する数学的帰納法を使う. $n = 0$ のときは, $1 \in T$ を示せばよいが, これは $T \in \mathcal{M}$ の性質から明らか. 次に, $n \geq 0$ を任意に取る. $2n+1 \in T$ とする. $2(n+1)+1 \in T$ を示したい. $2(n+1)+1 = (2n+1)+2$ であるから, $2n+1 \in T$ と $T \in \mathcal{M}$ の性質から, 確かに $2(n+1)+1 \in T$ である. よって, 数学的帰納法から, (ii) が成り立つ. よって, $U_1 \subset T$ が成り立つ. 次に, U_1 は

- $1 \in U_1$,
- $\forall n \in \mathbb{N}\ \ [\ n \in U_1 \Rightarrow n+2 \in U_1\ ]$

を満たすことが示せる. 特に $U_1 \in \mathcal{M}$ となる. よって, T の最小性により, $T \subset U_1$ が成り立つ $\cdots(iii)$ よって, $U_1 \subset T$ かつ $T \subset U_1$ となったので, $T = U_1$ となる. よって, (i) が言えた. このようにして, $(*)$ の目標が達成される.

最後に, 上記の証明における注意点を述べておく. 実は, T のみならず, 任意の $T' \in \mathcal{M}$ に対して

$$\forall n \geq 0 \ \ [\ 2n+1 \in T'\ ]$$

が証明できる. 特に, $U_1 \subset T'$ が成り立つ. さらに $T' \subset U_1$ まで成り立つなら, $T' = U_1$ となるのだが, $T' \subset U_1$ を満たす T' は T 以外には存在しない. では, どのようにして $T \subset U_1$ を示していたかと言うと, それは (iii) である. つまり, T の最小性によって $T \subset U_1$ が示されるのである. ここで「最小性」が効いてくるのであり, 「最小性」を定義の中で要求することは本質的に重要である. また, 証明の技術としては, このようにして「最小性」を使うことになる. 今回の文書では, 「最小性により $T \subset U_1$ が成り立つ」といった類の議論が頻繁に出てくる.

定理 4.1 (再帰的定義の代替手段) $d \in [1, 2018]$ とする. X は集合とする. S_i $(1 \leq i \leq d)$ は集合とする. $f_i : S_i \to X$ $(1 \leq i \leq d)$ は写像とする. $s \in S_i$ と集合 U に対して定義された命題 $P_i(s, U)$ は, 真理値として非負整数の 0, 1 を取るものとし, 0 は偽に対応し, 1 は真に対応するものとする. また, P_i は次の「単調性の条件」を満たすとする.

$$\forall i \in [1, d],\ \forall s \in S_i,\ \forall U_1,\ \forall U_2\ \ [\ U_1 \subset U_2 \Rightarrow P_i(s, U_1) \leq P_i(s, U_2)\ ].$$

ここで, 集合 U に関する命題 $Q(U)$ を

$$Q(U):\ \forall i \in [1, d],\ \forall s \in S_i\ \ [\ P_i(s, U) \Rightarrow f_i(s) \in U\ ]$$

と定義する. このとき, 次を満たす集合 T がただ 1 つ存在する.

- $Q(T)$ は真.
- $\forall U\ \ [\ Q(U) \Rightarrow T \subset U\ ]$.

証明　T の存在性:

$$\mathcal{M} := \{U \subset X \mid Q(U)\} \subset \mathfrak{P}(X)$$

と置く. まず, $\mathcal{M}$ は空でないことを示す. $X \in \mathcal{M}$ を示せば十分である. そのためには, $Q(X)$ が真であることを示せばよい. すなわち,

$$\forall i \in [1,d],\ \forall s \in S_i\ [\ \neg P_i(s,U) \vee f_i(s) \in X\ ]$$

を示せばよい. $f_i(s) \in X$ は常に真であるから, 確かに上の主張は真である. 次に,

$$T := \{x \in X \mid \forall U \in \mathcal{M}\ [\ x \in U\ ]\ \}$$

と置く. この T が求める T であることを示す. まずは

$$\begin{aligned} &(0)\ \ \forall U \in \mathcal{M}\ [\ T \subset U\ ],\\ &(1)\ \ T \subset X,\\ &(2)\ \ Q(T)\ \text{は真},\\ &(3)\ \ \forall U\ [\ Q(U) \Rightarrow T \subset U\ ] \end{aligned}$$

を示す. (0), (1) は, T の定義から明らか. (2) は,

$$\forall i \in [1,d],\ \forall s \in S_i\ [\ P_i(s,T) \Rightarrow f_i(s) \in T\ ]$$

を示せばよい. i, s を任意に取る. $P_i(s,T)$ は真とする. $f_i(s) \in T$ を示したい.

$$\begin{aligned} &(i)\ \ f_i(s) \in X,\\ &(ii)\ \ \forall U \in \mathcal{M}\ [\ f_i(s) \in U\ ] \end{aligned}$$

を示せばよい. (ii) から先に示す. $U \in \mathcal{M}$ を任意に取る. $Q(U)$ は真である. また, (0) より $T \subset U$ である. $P_i(s,T)$ は真だったから, P_i についての仮定により, $P_i(s,U)$ は真である. $Q(U)$ は真だったから, $f_i(s) \in U$ が成り立つ. よって, (ii) が成り立つ. 次に, (i) を示す. $X \in \mathcal{M}$ だったから, (ii) により, $f_i(s) \in X$ である. よって, (i) が成り立つ. よって, $f_i(s) \in T$ となる. よって, (2) が成り立つ. 次に, (3) を示す. 集合 U を任意に取る. $Q(U)$ は真とする. $T \subset U$ を示したい. $Y := T \cap U$ と置く. $Q(Y)$ は真であることを示す.

$$\forall i \in [1,d],\ \forall s \in S_i\ [\ P_i(s,Y) \Rightarrow f_i(s) \in Y\ ]$$

を示せばよい. i, s を任意に取る. $P_i(s,Y)$ は真とする. $Y \subset U$ かつ $Y \subset T$ だから, P_i の仮定から $P_i(s,U)$, $P_i(s,T)$ は真である. $Q(U)$, $Q(T)$ は真だったから, $f_i(s) \in U$, $f_i(s) \in T$ となる. よって, $f_i(s) \in U \cap T = Y$ となる. よって, $Q(Y)$ は真である. $Y \subset T \subset X$ により, $Y \in \mathcal{M}$ となるので, (0) より $T \subset Y$ となる. よって, $T \subset Y = U \cap T \subset U$ となる. すなわち, $T \subset U$ となる. よって, (3) が成り立つ. (2),(3) より, この T が求める T である.
T の一意性: $T_1, T_2 \subset X$ が条件を満たすとする. このとき, T_i の定義から $T_1 \subset T_2$ かつ $T_2 \subset T_1$ となるので, $T_1 = T_2$ となる.

定理 4.2 定理 4.1 の T について, 次が成り立つ.

$$T = \cup_{i=1}^{d} \{f_i(s) \mid s \in S_i,\ P_i(s,T)\}.$$

特に, $T \subset X$ である.

証明　右辺を U と置く．まず, $U \subset T$ を示す．$a \in U$ を任意に取る．

$$a = f_i(s), \quad s \in S_i, \quad P_i(s, T)$$

を満たす i, s が取れる．$Q(T)$ は真だから, $f_i(s) \in T$ である．これは $a \in T$ を意味する．よって, $U \subset T$ となる．あとは, $T \subset U$ を示せばよい．まず, $Q(U)$ は真であることを示す．

$$\forall i \in [1, d],\ \forall s \in S_i\ \ [\ P_i(s, U) \Rightarrow f_i(s) \in U\ ]$$

が成り立つことを言えばよい．i, s を任意に取る．$P_i(s, U)$ は真とする．$f_i(s) \in U$ が成り立つことを言いたい．そのためには,

$$f_i(s) = f_{i'}(s'), \quad s' \in S_{i'}, \quad P_{i'}(s', T)$$

を満たす i', s' が取れることを言えばよい．このような i', s' として i, s が取れるので, 確かに $f_i(s) \in U$ である．よって, $Q(U)$ は真である．よって, T の最小性から $T \subset U$ である．よって, $T = U$ である．最後に, $Im(f_i) \subset X$ により, $T \subset X$ となる．

補足　集合 T そのものを

$$T := \cup_{i=1}^{d} \{f_i(s) \mid s \in S_i,\ P_i(s, T)\}$$

と定義することは出来ない．なぜなら, 右辺の集合には $P_i(s, T)$ があるので, 定義すべき T 自身が登場してしまっており, T の定義としては循環論法になってしまうからである．あくまでも, 定理 4.1 で「存在性が既に保証されている」T が, さらなる性質として

$$T = \cup_{i=1}^{d} \{f_i(s) \mid s \in S_i,\ P_i(s, T)\}$$

という等式を満たす, ということである．

定義 4.3 定理 4.1 で定義される命題 Q のことを, $Q_{(P_i)_{i=1}^d,\ (f_i)_{i=1}^d}$ と書く．もしくは, 省略記法として $Q_{P,f}$ とも書く．また, 定理 4.1 で得られる T のことを $T_{(P_i)_{i=1}^d,\ (f_i)_{i=1}^d}$ と書く．もしくは, 省略記法として $T_{P,f}$ とも書く．よって, 次が成り立つ．

- $\forall U\ \ [\ Q_{P,f}(U) \Rightarrow T_{P,f} \subset U\ ]$.
- $T_{P,f} = \cup_{i=1}^{d} \{f_i(s) \mid s \in S_i,\ P_i(s, T_{P,f})\}$.
- $T_{P,f} \subset X$.

補足　応用上は, $S_1 = S_2 = \cdots = S_d$ として定理 4.1 を使うことが多い．この場合は, 単に 1 つの集合を決めればいいので, S_i とは書かずに S と書けば十分である．そして, この文書では, そのような使い方のみである．

例　$X := \mathbb{N}$, $S := \mathbb{N}$ とする．$s \in S$ と集合 U の上の命題 $P_i(s, U)$ $(i = 1, 2)$ を

$$P_1(s, U) :\ true,$$
$$P_2(s, u) :\ s \in U$$

と定義する．P_i は単調性の条件を満たす．また，$f_i : S \to X\ (i = 1, 2)$ を

$$f_1(s) := 1, \quad f_2(s) := s + 2$$

と定義する．$T := T_{P,f}$ と置く．この T は，

$$\begin{aligned} &\bullet\ 1 \in U, \\ &\bullet\ \forall n \in U\ [\ n + 2 \in U\ ] \end{aligned} \tag{1}$$

の 2 条件を満たすような集合 U のうち，集合の包含関係に関して最小のものである．また，命題 $Q_{P,f}(U)$ は (1) の 2 条件そのものである．また，この節の冒頭で見たように，T は正の奇数全体の集合に一致する．

定理 4.4 E は集合とする．$*$ は E の上の二項演算とする．$f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to E$ は写像とする．このとき，写像 $F : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to E$ であって，次を満たすものがただ 1 つ存在する．

- $F(0) = f(0)$,
- $F(n + 1) = F(n) * f(n + 1) \quad (n \geq 0)$.

証明 F の存在性: 再帰的定義を無条件で認めるなら，F の存在性は明らかである．しかし，せっかくなので，ここでは再帰的定義を回避しながら F の存在性を証明してみる．$X := \mathbb{Z}_{\geq 0} \times_K E$ と置く．$S := \mathbb{Z}_{\geq 0} \times E$ と置く．$s = (n, g) \in S$ と集合 U の上の命題 $P_i(s, U)\ (i = 1, 2)$ を

$$\begin{aligned} &P_1(s, U) :\ true, \\ &P_2(s, U) :\ (n, g)_K \in U \end{aligned}$$

と定義する．P_i は単調性の条件を満たす．また，$f_i : S \to X\ (i = 1, 2)$ を

$$f_1(n, g) := (0, f(0))_K, \quad f_2(n, g) := (n + 1, g * f(n + 1))_K$$

と定義する．$F := T_{P,f}$ と置くと，この F が求める F である．まずは，$F \in (\mathbb{Z}_{\geq 0} \to E)$ が成り立つことを示す．

$$\begin{aligned} &(1)\quad F \subset \mathbb{Z}_{\geq 0} \times_K E. \\ &(2)\quad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ \exists! g \in E\ [\ (n, g)_K \in F\ ] \end{aligned}$$

を示せばよい．
(1) $F = T_{P,f} \subset X$ より．
(2)

$$M = \{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \exists! g \in E\ [\ (n, g)_K \in F\ ]\ \}$$

と置く．$\mathbb{Z}_{\geq 0} \subset M$ が成り立つことを示せばよい．そのためには，

- $0 \in M$.
- $\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\ [\ n \in M \Rightarrow n + 1 \in M\ ]$

を示せば十分である (数学的帰納法).
まずは, $0 \in M$ を示す. F の定義により, $(0, f(0))_K \in F$ が成り立つ. あとは, $(0, h)_K \in F$ のとき $h = f(0)$ となることを言えばよい.

$$F = T_{P,f} = \cup_{i=1}^{2} \{f_i(s) \mid s \in S_i,\ P_i(s, F)\}$$

であるから, ある i と $s = (n, g) \in S$ が存在して $(0, h)_K = f_i(s)$, $P_i(s, F)$ が成り立つ. もし $i = 2$ ならば,

$$(0, h)_K = (n + 1, g * f(n + 1))_K$$

という形になるが, $n + 1 \neq 0$ だから矛盾する. よって, $i = 1$ となるしかない. このとき, $(0, h)_K = (0, f(0))_K$ となるので, $h = f(0)$ となる. よって, $0 \in M$ となる.
次に, $n \geq 0$ を任意に取る. $n \in M$ とする. このとき, $n{+}1 \in M$ が成り立つことを示す. まず, $n \in M$ より, $(n, g)_K \in F$ を満たす $g \in E$ がただ 1 つ取れる. F の定義により, $(n + 1, g * f(n + 1))_K \in F$ である. あとは, $(n + 1, h)_K \in F$ のとき $h = g * f(n + 1)$ となることを言えばよい. ある i と $s = (m, u) \in S$ が存在して $(n + 1, h)_K = f_i(s)$, $P_i(s, F)$ が成り立つ. もし $i = 1$ ならば, $(n + 1, h)_K = (0, u)_K$ となるが, $n + 1 \neq 0$ だから矛盾する. よって, $i = 2$ となるしかない. このとき,

$$(n + 1, h)_K = (m + 1, u * f(m + 1))_K,\ (m, u)_K \in F$$

となる[5]. よって, $n = m$ かつ $h = u * f(m + 1)$ である. $(m, u)_K \in F$ だったから, $(n, u)_K \in F$ である. 一方で, $(n, g)_K \in F$ なのだった. g の一意性により, $u = g$ となる. よって, $h = g * f(n + 1)$ となる. よって, $n + 1 \in M$ となる.
よって, $\mathbb{Z}_{\geq 0} \subset M$ が成り立つ. よって, $F \in (\mathbb{Z}_{\geq 0} \to E)$ である. あとは,

- $F(0) = f(0)$.
- $F(n + 1) = F(n) * f(n + 1)\ \ (n \geq 0)$.

を示せばよい. 1 行目については, F の定義により $(0, f(0))_K \in F$ だから, 確かに $F(0) = f(0)$ となる. 2 行目については, $n \geq 0$ を任意に取る. $(n, F(n))_K \in F$ だから, F の定義から $(n + 1, F(n) * f(n + 1))_K \in F$ である. よって, $F(n + 1) = F(n) * f(n + 1)$ である. よって, この F が求める F である.
F の一意性: F_1, F_2 が条件を満たすとする. $F_1 = F_2$ が成り立つことを言えばよい. そのためには, $F_1(n) = F_2(n)$ $(n \geq 0)$ が成り立つことを言えばよい. $n \geq 0$ に関する数学的帰納法で示す. $n = 0$ のときは, $F_1(0) = f(0) = F_2(0)$ であるから, 成立. 次に, $n \geq 0$ を任意に取る. $F_1(n) = F_2(n)$ が成り立つとする. $F_1(n + 1) = F_2(n + 1)$ が成り立つことを言いたい.

$$F_1(n + 1) = F_1(n) * f(n + 1) = F_2(n) * f(n + 1) = F_2(n + 1)$$

であるから, 確かに成り立つ. 数学的帰納法により, 任意の $n \geq 0$ に対して $F_1(n) = F_2(n)$ が成り立つ. よって, $F_1 = F_2$ である.

補足　$F(n)$ を具体的に書き下してみると

$$F(0) = f(0),\quad F(1) = f(0) * f(1),\quad F(2) = (f(0) * f(1)) * f(2),$$
$$F(3) = ((f(0) * f(1)) * f(2)) * f(3),\quad \cdots$$

[5] $(m, u)_K \in F$ は $P_2(s, F)$ から従う.

となっている．よって,

$$F(n) := (((\cdots(f(n) * f(n-1)) * \cdots f(1)) * f(0) \quad (n \geq 0) \tag{$*$}$$

と定義すれば, 再帰的定義を回避しつつ F の存在性が証明できているように見える．ただし, この場合には

$$(((\cdots(f(n) * f(n-1)) * \cdots f(1)) * f(0)$$

という表現そのものの定義が事前に必要である．n が具体的な整数定数ならば, そのような n ごとに, 実際に紙の上に

$$(((\cdots(f(n) * f(n-1)) * \cdots f(1)) * f(0)$$

を省略せずに書き下せば定義になる．しかし, これを一般の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ で行うことは不可能である．そこで, 普通は,

- $G(0) = f(0)$,
- $G(n+1) = G(n) * f(n+1) \quad (n \geq 0)$

を満たす写像 G を**再帰的定義を使って**定義したあと, $G(n)$ のことを

$$(((\cdots(f(n) * f(n-1)) * \cdots f(1)) * f(0)$$

と別名表記するものである．従って, $(*)$ の書き方を使って F の存在性を主張しても, 循環論法になってしまい, 再帰的定義を回避したことにはならない．一般に,「$\cdots$」という表現が出てきたら, 背後に再帰的定義が絡んでいることが多い.

補足　「$\cdots$」という表現が出てきたら, 背後に再帰的定義が絡んでいることが多い, $\cdots$ と書いたが, 例外もある．集合 X と $n \geq 1$ に対して, $x \in X^n$ のことを

$$x = (x_1, \cdots, x_n)$$

のように表現するのだったが, この表現は「$x \in X^n$」の単なる糖衣構文であり, 再帰的定義が絡んでいるわけではない．同じく,

$$n \text{ 個の } x_1, x_2, \cdots, x_n \in X \text{ を任意に取る}$$

などという表現があったら, これもまた,

$$x \in X^n \text{を任意に取る}$$

という表現の単なる糖衣構文である.

定理 4.5 E は集合とする．$*$ は E の上の二項演算とする．$f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to E$ は写像とする．このとき, 写像 $F : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to E$ であって, 次を満たすものがただ 1 つ存在する.

- $F(0) = f(0)$.
- $F(n+1) = f(n+1) * F(n) \quad (n \geq 0)$.

証明　前定理と全く同じようにして示せるので省略する.

定理 4.6 $(E, *)$ はモノイドとする. その単位元を, ここでは λ と表す. $m \geq 1$ とする. $e = (e_i)_{i=1}^m \in E^m$ を任意に取る. 写像

$$F : [0, m] \to E$$

であって, 次を満たすものがただ 1 つ存在する.

- $F(0) = \lambda$.
- $F(n) = F(n-1) * e_n \quad (1 \leq n \leq m)$.

この写像 F に対して, $F(n)$ $(0 \leq n \leq m)$ のことを

$$e_1 * e_2 * \cdots * e_n$$

と表記することにする. 従って,

$$\begin{aligned}
&e_1 * e_2 * \cdots * e_0 = \lambda, \\
&e_1 * e_2 * \cdots * e_1 = e_1, \\
&e_1 * e_2 * \cdots * e_2 = e_1 * e_2, \\
&e_1 * e_2 * \cdots * e_7 = e_1 * e_2 * e_3 * e_4 * e_5 * e_6 * e_7
\end{aligned}$$

などが成り立つ. $n = 0, 1, 2$ のときは, 書き方としては若干気持ち悪い. なお, $e_1 * e_2 * \cdots * e_n$ のほかにも, $e_1 * \cdots * e_n$ とか $e_1 * e_2 * e_3 \cdots * e_n$ といった書き方を使うこともある. もちろん, どの表現も $F(n)$ を指すものとする. 演算子 $*$ を省略する場合は, 単に $e_1 e_2 \cdots e_n$, $e_1 \cdots e_n$, $e_1 e_2 e_3 \cdots e_n$ などと書かれる.

証明　F の存在性: $f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to E$ を

$$f(n) := \lambda \quad (n = 0), \quad e_n \quad (1 \leq n \leq m), \quad \lambda \quad (n > m)$$

と定義する. このとき, 定理 4.4 が適用できて, そこで得られる写像 F に対して $F|_{[0,m]}$ という制限写像を考えれば, これが求める写像である.
F の一意性: F_1, F_2 が条件を満たすとする. $F_1 = F_2$ を示したい. $F_1(n) = F_2(n)$ $(0 \leq n \leq m)$ を示せばよい. 数学的帰納法の有限個版を使う. $n = 0$ のときは, $F_1(n) = \lambda = F_2(n)$ である. 次に, $n \in [0, m)$ を任意に取る. $F_1(n) = F_2(n)$ が成り立つとする. このとき, $F_1(n+1) = F_1(n) * e_{n+1} = F_2(n) * e_{n+1} = F_2(n+1)$ である. よって, 数学的帰納法が使えて, $F_1 = F_2$ である.

補足　上の証明において, 定理 4.4 ではなく, 定理 4.5 を使えば, $F : [0, m] \to E$ であって, 次を満たすものがただ 1 つ存在することが言える:

- $F(0) = \lambda$.
- $F(n) = e_n * F(n-1) \quad (1 \leq n \leq m)$.

この写像 F に対して, $F(n)$ $(0 \leq n \leq m)$ のことを

$$e_n * e_{n-1} * \cdots * e_1$$

と表記することにする.

補足　$1 \leq m < m'$ とする．$e = (e_i)_{i=1}^{m'} \in E^{m'}$ とする．定理 4.6 より, 写像 $F : [0, m] \to E$ と写像 $G : [0, m'] \to E$ であって, 次を満たすものがただ 1 つずつ存在する．

- $F(0) = \lambda$.
- $F(n) = F(n-1) * e_n \quad (1 \leq n \leq m)$.

- $G(0) = \lambda$.
- $G(n) = G(n-1) * e_n \quad (1 \leq n \leq m')$.

$1 \leq m < m'$ であるから,

$$e_1 * e_2 * \cdots * e_m = F(m), \quad e_1 * e_2 * \cdots * e_m = G(m)$$

となる．よって, $e_1 * e_2 * \cdots * e_m$ が二重に定義されていることになる．よって, もし $F(m) \neq G(m)$ ならば, $e_1 * e_2 * \cdots * e_m$ の定義は well-defined でないことになる．しかし, 実際には $F(m) = G(m)$ なので, この定義は well-defined であり, 心配はいらない．実際, $H := G|_{[0,m]}$ と置けば, $H : [0, m] \to E$ は明らかに

- $H(0) = \lambda$.
- $H(n) = H(n-1) * e_n \quad (1 \leq n \leq m)$

を満たすので, 定理 4.6 の一意性により, $F = H$ が成り立つ．特に $F(m) = H(m)$ が成り立つ．これは $F(m) = G(m)$ を意味する．

補足　$u : [0, m] \to E$ は

$$u_0 = \lambda, \quad u_n = u_{n-1} * e_n \quad (1 \leq n \leq m)$$

を満たすとする．このとき, 定理 4.6 の F の一意性により, $u_n = F(n)$ $(0 \leq n \leq m)$ が成り立つことになる．$F(n)$ のことを $e_1 * e_2 * \cdots * e_n$ と表記するのだったから,

$$u_n = e_1 * e_2 * \cdots * e_n \quad (0 \leq n \leq m)$$

が成り立つことになる．逆に, $v : [0, m] \to E$ を

$$v_n := e_1 * e_2 * \cdots * e_n \quad (0 \leq n \leq m) \tag{$*$}$$

で定義すると,

$$v_0 = \varepsilon, \quad v_n = v_{n-1} * e_n \quad (1 \leq n \leq m) \tag{$**$}$$

が成り立つ．実際, $F(n)$ のことを $e_1 * e_2 * \cdots * e_n$ と表記するのだったから, $(*)$ は

$$v_n := F(n) \quad (0 \leq n \leq m)$$

という定義になっている．よって, $(**)$ が成り立つ．

定理 4.7 Σ は空でない文字の集合とする. $(Y,\ *)$ はモノイドとする. その単位元を, ここでは λ と書く. 任意の $g : \Sigma \to Y$ に対して, 次を満たす $G : \Sigma^* \to Y$ がただ 1 つ存在する.

- $G(\varepsilon) = \lambda,\ G|_\Sigma = g.$
- $\forall x_1, x_2 \in \Sigma^*\ \ [\ G(x_1x_2) = G(x_1) * G(x_2)\ ].$

証明 以下では, Y の演算子 $*$ は省略することにする. すなわち, $y_1, y_2 \in Y$ に対して, $y_1 * y_2$ のことを y_1y_2 と略記する.
G の存在性: $x = \varepsilon$ のときは, $G(x) := \lambda$ と定義する. $x \in \Sigma^+$ のときは, $(g(x_i))_{i=1}^{|x|} \in Y^{|x|}$ に対して定理 4.6 を使って,

$$G(x) := g(x_1)\cdots g(x_{|x|})$$

と定義する. この G が求める G である. $G(\varepsilon) = \lambda$ は明らか. あとは

$$\forall x_1, x_2 \in \Sigma^*\ \ [\ G(x_1x_2) = G(x_1)G(x_2)\ ] \tag{1}$$

を示せばよい. まず, G の定義から

$$\forall a \in \Sigma,\ \forall x \in \Sigma^*\ \ [\ G(xa) = G(x)g(a)\ ] \tag{2}$$

が成り立つ. なぜなら, $x = \varepsilon$ のときは明らか. 以下では, $x \neq \varepsilon$ としてよい. $y = xa$ と置き,

$$v_i := g(y_1)\cdots g(y_i)\ \ (0 \le i \le |y|),$$
$$w_i := g(x_1)\cdots g(x_i)\ \ (0 \le i \le |x|)$$

と定義すると, G の定義から $G(xa) = G(y) = v_{|y|},\ G(x) = w_{|x|}$ となる. さて, $(v_i)_{i=0}^{|y|}$, $(w_i)_{i=0}^{|x|}$ は

$$v_0 = \varepsilon,\ \ v_i = v_{i-1}g(y_i)\ \ (1 \le i \le |y|),$$
$$w_0 = \varepsilon,\ \ w_i = w_{i-1}g(x_i)\ \ (1 \le i \le |x|)$$

を満たす. $y_i = x_i\ (1 \le i \le |x|)$ により,

$$v_0 = \varepsilon,\ \ v_i = v_{i-1}g(x_i)\ \ (1 \le i \le |y| - 1 = |x|)$$

が成り立つことになる. よって, $(v_i)_{i=0}^{|x|}$, $(w_i)_{i=0}^{|x|}$ は

$$v_0 = \varepsilon,\ \ v_i = v_{i-1}g(x_i)\ \ (1 \le i \le |x|),$$
$$w_0 = \varepsilon,\ \ w_i = w_{i-1}g(x_i)\ \ (1 \le i \le |x|)$$

を満たすので, 定理 4.6 の一意性により, $v_i = w_i\ (0 \le i \le |x|)$ となる. 特に

$$G(xa) = v_{|y|} = v_{|y|-1}g(y_{|y|}) = v_{|x|}g(a) = w_{|x|}g(a) = G(x)g(a)$$

となる. よって, (2) が成り立つ. さて, (1) を背理法で示す. ある $x_1, x_2 \in \Sigma^*$ が存在して, $G(x_1x_2) \neq G(x_1)G(x_2)$ が成り立つとする. そのような対 (x_1, x_2) のうち, $|x_2|$ が最小になるものを 1 組選び, 再び (x_1, x_2) と書く. $x_2 = \varepsilon$ のときは, 明らかに $G(x_1x_2) = G(x_1)G(x_2)$ であるから, $x_2 \neq \varepsilon$ である. よって, $x_2 = ya$, $a \in \Sigma$, $y \in \Sigma^*$ と表せて, (2) より

$$G(x_1x_2) = G(x_1ya) = G(x_1y)g(a)$$

となる．対 (x_1, y) について，$|x_2| = |y| + |a| > |y|$ であるから，$|x_2|$ の最小性により，$G(x_1 y) = G(x_1)G(y)$ が成り立つ．よって $G(x_1 x_2) = G(x_1)G(y)G(a)$ となる．一方で，(2) より

$$G(x_1)G(x_2) = G(x_1)G(ya) = G(x_1)G(y)G(a)$$

である．よって，$G(x_1 x_2) = G(x_1)G(x_2)$ となって，x_1, x_2 の取り方に矛盾する．よって，(1) が成り立つ．
G の一意性: G_1, G_2 が条件を満たすとする．$G_1 = G_2$ を示せばよい．

$$M = \{x \in \Sigma^* \mid G_1(x) = G_2(x)\}$$

と置く．$\Sigma^* \subset M$ が成り立つことを示せばよい．任意の $n \geq 0$ に対して $\Sigma|_n \subset M$ が成り立つことを示せばよい．n に関する数学的帰納法を使う．
$n = 0$ のとき: $x \in \Sigma|_0$ を任意に取る．$x = \varepsilon$ となるしかない．このとき，$G_1(x) = \lambda = G_2(x)$ である．よって，$x \in M$ である．よって，$\Sigma|_0 \subset M$ である．
以下では，$n \geq 0$ を任意に取る．$\Sigma|_n \subset M$ が成り立つとする．$\Sigma|_{n+1} \subset M$ が成り立つことを示す．
$x \in \Sigma|_{n+1}$ を任意に取る．$x = ya$, $a \in \Sigma$, $y \in \Sigma|_n$ と表せる．このとき，帰納法の仮定と G_i の定義から

$$G_1(x) = G_1(ya) = G_1(y)G_1(a) = G_1(y)g(a) = G_2(y)g(a) = G_2(y)G_2(a) = G_2(ya) = G_2(x)$$

である．よって，$x \in M$ となる．よって，$\Sigma|_{n+1} \subset M$ が成り立つ．
数学的帰納法より，任意の $n \geq 0$ に対して $\Sigma|_n \subset M$ が成り立つ．よって，一意性が成り立つ．

定理 4.8 (n 回合成関数の定義) X は集合とする．$E := (X \to X)$ と置く．$f, g \in E$ に対して，$f \circ g \in E$ を

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)) \quad (x \in X)$$

で定義する (合成関数)．このとき，$(E, \circ)$ はモノイドとなり，単位元は id_X である．このとき，任意の $g \in E$ に対して，次を満たす写像 $F : \mathbb{N} \to E$ がただ 1 つ存在する．

- $F(0) = id_X$.
- $F(n+1) = g \circ F(n) \quad (n \geq 0)$.

この F に対して，$F(n)$ のことを g^n と表記する (g の n 回合成関数の定義)．従って，次が成り立つことになる．

- $g^0 = id_X$.
- $g^{n+1} = g \circ g^n \quad (n \geq 0)$.

証明　F の存在性: $f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to E$ を

$$f(n) := id_X \quad (n = 0), \quad g \quad (n \geq 1)$$

と定義すれば，定理 4.4 を満たす F が存在する．この F が求める F である．
F の一意性: 定理 4.4 の一意性の証明と同じやり方で示せるので省略する．

定理 4.9 定理 4.8 の設定のもとで, 次が成り立つ.

$$\forall n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \ \left[\ g^{n+m} = g^n \circ g^m\ \right].$$

証明　$n \geq 0$ に関する命題 $P(n)$ を

$$P(n):\ \forall m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \ \left[\ g^{n+m} = g^n \circ g^m\ \right]$$

で定義する. 任意の $n \geq 0$ に対して $P(n)$ が真であることを示せばよい. n に関する数学的帰納法で証明する. $g^0 = id_X$ であるから, $P(0)$ は真であることが分かる. 次に, $n \geq 0$ を任意に取る. $P(n)$ は真とする. $P(n+1)$ も真であることを言いたい. 任意の $m \geq 0$ に対して

$$g^{(n+1)+m} = g^{n+m+1} = g \circ g^{n+m} = g \circ (g^n \circ g^m) = (g \circ g^n) \circ g^m = g^{(n+1)} \circ g^m$$

である. ただし, 2 つ目の等号と最後の等号では $g^{k+1} = g \circ g^k$ $(k \geq 0)$ を使った. また, 3 つ目の等号では $P(n)$ を使った. よって, $P(n+1)$ も真である. 数学的帰納法により, 任意の $n \geq 0$ に対して $P(n)$ は真である.

5 parsing expression

この節では, MACRO PEG の定義に必要となる, parsing expression という概念を定義する. parsing expression の定義は主に 2 通りの方法を考えることができて, 次のようになる:

(1) ある種の文字列そのものを parsing expression と定義する.

(2) 抽象構文木で parsing expression を定義する.

(1) の場合は, parsing expression の構造を解析するのにオートマトン的な手法が必要となるので, そこに関する余計な議論がデメリットとなる. ただし, 後の節で登場する「文字列に文字列を代入する操作」がすっきり定義できる. 一方で, (2) の場合は, parsing expression の構造を解析するのが容易であり, 定義が終わった時点でほとんど解析も終わっている (構造の作り方にもよるが). ただし, 後の節で「抽象構文木に抽象構文木を代入する操作」を定義しなければならず, これが何となくとっつきにくい. そこで, 今回は, (1) の方針で parsing expression を定義する. 具体的には, 文脈自由言語のような方針で parsing expression の定義を行う. なお, MACRO PEG においては

$$? \quad \& \quad ! \quad * \quad +$$

といった記号が使えるようになっているが, ? と $*$ と $+$ は除去可能であるから, これらの記号は今回は定義しない. また, & は !! で表現可能であるから, この記号も今回は定義しない. また, ! をそのまま定義すると, ! が parsing expression の中のどこまでの範囲に掛かっているのか分からないので, 一般にはカッコつきで $!(e)$ のように表現しなければならない. そして, どのみちカッコつきで表現するのなら, 最初からカッコによる表記法で ! を表現するようにした方が自然である. そこで, この文書では ! のかわりに [ ] という書き方を使うことにする. すなわち, $!e$ という書き方のかわりに $[e]$ という書き方を使うことにする.

定義 5.1 Σ は空でない文字の集合とする. $v, w \in \Sigma^*$ について, $w = vv'$ を満たす $v' \in \Sigma^*$ が取れるとき, かつそのときのみ $v \prec w$ と書く. すなわち, v が w のプレフィックスであるとき, かつそのときのみ $v \prec w$ と書く. 次に, $v \in \Sigma^*$ に対して, v の先頭の 1 文字を削った残りの文字列のことを v^{+1} と書くことにする. 同様にして v^{+n} $(n \geq 1)$ を定義する. たとえば, $(abcde)^{+2} = cde$, $(abcde)^{+10} = \varepsilon$, $\varepsilon^{+1} = \varepsilon$ などが成り立つ. 次に, $v \in \Sigma^*$ に対して, v を左右反転させた文字列を ${}^t v$ と書くことにする. たとえば ${}^t(abcde) = edcba$ である. 次に, 人工的ではあるが,

$$\overline{\Sigma} := \Sigma \cup \{\ (\ ,\ )\ ,\ /\ ,\ [\ ,\ ]\ \}$$

と定義する. ここから先の文章において, 文字 a が以下の 5 種類の文字

$$(\quad) \quad [\quad] \quad /$$

のいずれでもないとき, そのような a を「通常の文字」と呼ぶことにする. また, 集合 Σ の任意の元が通常の文字であるとき, Σ を「通常の文字の集合」と呼ぶことにする.

定理 5.2 Σ は空でない文字の集合とする. $m \geq 1$ とする. $e : [1, m] \to \Sigma^*$ とする. 写像

$$F : [0, m] \to \Sigma^*$$

であって, 次を満たすものがただ 1 つ存在する.

- $F(0) = \varepsilon$.
- $F(n) = F(n-1)e_n \quad (1 \leq n \leq m)$.

この写像 F に対して, $F(n)$ $(0 \leq n \leq m)$ のことを

$$e_1 e_2 \cdots e_n$$

と表記することにする. 従って,

$$\begin{aligned}
&e_1 e_2 \cdots e_0 = \varepsilon, \\
&e_1 e_2 \cdots e_1 = e_1, \\
&e_1 e_2 \cdots e_2 = e_1 e_2, \\
&e_1 e_2 \cdots e_7 = e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7
\end{aligned}$$

などが成り立つ. $n = 0, 1, 2$ のときは, 書き方としては若干気持ち悪い. なお, $e_1 e_2 \cdots e_n$ のほかにも, $e_1 \cdots e_n$ とか $e_1 e_2 e_3 \cdots e_n$ といった書き方を使うこともある. もちろん, どの表現も $F(n)$ を指すものとする.

証明　定理 4.6 で $E := \Sigma^*$ と置いて, E の上の二項演算 $*$ を文字列の連結演算とすればよい.

補足　$u : [0, m] \to \Sigma^*$ は

$$u_0 = \varepsilon, \quad u_n = u_{n-1} e_n \quad (1 \leq n \leq m)$$

を満たすとする. このとき, 定理 5.2 の F の一意性により, $u_n = F(n)$ $(0 \leq n \leq m)$ が成り立つことになる. $F(n)$ のことを $e_1 e_2 \cdots e_n$ と表記するのだったから,

$$u_n = e_1 e_2 \cdots e_n \quad (0 \leq n \leq m)$$

が成り立つことになる. 逆に, $v : [0, m] \to \Sigma^*$ を

$$v_n := e_1 e_2 \cdots e_n \quad (0 \leq n \leq m) \tag{$*$}$$

で定義すると,

$$v_0 = \varepsilon, \quad v_n = v_{n-1} e_n \quad (1 \leq n \leq m) \tag{$**$}$$

が成り立つ. なぜなら, $F(n)$ のことを $e_1 e_2 \cdots e_n$ と表記するのだったから, $(*)$ は

$$v_n := F(n) \quad (0 \leq n \leq m)$$

という定義になっている. よって, $(**)$ が成り立つ.

定理 5.3 Σ は空でない文字の集合とする. $G : \Sigma^* \to \Sigma^*$ は

$$\forall v, w \in \Sigma^* \ [\ G(vw) = G(v)G(w)\ ]$$

を満たすとする. このとき, $G(\varepsilon) = \varepsilon$ である. また, 次が成り立つ:

$$(1)\ \ \forall k \geq 1,\ \forall e : [1, k] \to \Sigma^* \ [\ G(e_1 \cdots e_k) = G(e_1) \cdots G(e_k)\ ].$$

証明　$G(vw) = G(v)G(w)$ において $v = w = \varepsilon$ とすれば, $G(\varepsilon) = G(\varepsilon)G(\varepsilon)$ となるので, $u = G(\varepsilon)$ と置けば, $u = uu$ となる．この性質を満たす $u \in \Sigma^*$ は $u = \varepsilon$ しかないので, $G(\varepsilon) = \varepsilon$ となる．次に, k と e を任意に取る．

$$u_0 = \varepsilon, \quad u_i = u_{i-1}e_i \quad (1 \le i \le k)$$

を満たすただ 1 つの $u : [0, k] \to \Sigma^*$ に対して, u_k のことを $e_1 \cdots e_k$ と表記するのだった．同じく,

$$v_0 = \varepsilon, \quad v_i = v_{i-1}G(e_i) \quad (1 \le i \le k)$$

を満たすただ 1 つの $v : [0, k] \to \Sigma^*$ に対して, v_k のことを $G(e_1) \cdots G(e_k)$ と表記するのだった．よって, (1) を示すには, $G(u_k) = v_k$ が示せれば十分である．$w_i := G(u_i)$ $(0 \le i \le k)$ と置くと,

$$w_0 = G(u_0) = G(\varepsilon) = \varepsilon$$

である．また,

$$w_i = G(u_i) = G(u_{i-1}e_i) = G(u_{i-1})G(e_i) = w_{i-1}G(e_i) \quad (1 \le i \le k)$$

である．まとめると,

$$w_0 = \varepsilon, \quad w_i = w_{i-1}G(e_i) \quad (1 \le i \le k)$$

となる．$v : [0, k] \to \Sigma^*$ の一意性により, $w_i = v_i$ $(0 \le i \le k)$ となる．特に $w_k = v_k$ となる．よって, $G(u_k) = v_k$ となる．

定義 5.4 V, W は空でない通常の文字の集合で, $V \cap W = \emptyset$ が成り立つとする．

$$X := \overline{V \cup W}^* = (V \cup W \cup \{\ (\ ,\ )\ ,\ /\ ,\ [\ ,\ ]\ \})^*$$

と置く．$S := V \times W \times X^d \times X^2$ と置く．$s = (a, A, t, (e_1, e_2)) \in S$ と集合 U の上の命題 $P_i(s, U)$ $(1 \le i \le 5)$ を

$$\begin{aligned} &P_i(s, U) :\ \mathit{true} \quad (i = 1, 2), \\ &P_i(s, U) :\ e_1, e_2 \in U \quad (3 \le i \le 5) \end{aligned}$$

と定義する．P_i は単調性の条件を満たす．また, $f_i : S \to X$ $(1 \le i \le 5)$ を

$$\begin{aligned} &f_1(s) := a,\ f_2(s) := A[t_1][t_2] \cdots [t_d], \\ &f_3(s) := (e_1e_2),\ f_4(s) := (e_1],\ f_5(s) := (e_1/e_2) \end{aligned}$$

と定義する．このときの $T_{P,f}$ のことを $PE_d(V, W)$ と書く．すなわち, $PE_d(V, W) := T_{P,f}$ と定義する．各 $e \in PE_d(V, W)$ のことを parsing expression と呼ぶ．

補足　$PE_d(V, W) \subset \overline{V \cup W}^*$ である．また, $PE_d(V, W)$ は,

- $\forall a \in V\ \ [\ a \in U\ ]$,
- $\forall A \in W,\ \forall t \in U^d,\ \forall e_1, e_2 \in U\ \ [\ A[t_1] \cdots [t_d], (e_1e_2), (e_1], (e_1/e_2) \in U\ ]$ (1)

の 2 条件を満たすような集合 U のうち, 集合の包含関係に関して最小のものである．従って, 集合 U が (1) の 2 条件を満たすなら, 必ず $PE_d(V, W) \subset U$ が成り立つ．また, 命題 $Q_{P,f}(U)$ は (1) の 2 条件そのものである．

補足　上の補足からも分かるが, 定義 5.4 は, 文脈自由文法で $PE_d(V,W)$ を定義しているのと本質的に同じ状況になっている. 具体的には, 次のような文脈自由文法となる:

$$
\begin{aligned}
&V_T = V \cup W \cup \{\ (\ ,\ )\ ,\ /\ ,\ [\ ,\ ]\ \},\quad V_N = \{S\},\\
&S \to a \quad (a \in V)\\
&S \to A\ ”[”\ S\ ”]”\ \cdots\ ”[”\ S\ ”]” \quad (A \in W)\ (\text{右辺は } [S] \text{ がちょうど } d \text{ 個ある})\\
&S \to ”(”\ SS\ ”)”\\
&S \to ”(”\ S\ ”]”\\
&S \to ”(”\ S\ ”/”\ S\ ”)”
\end{aligned}
$$

ただし, V, W が有限集合とは限らないので, 拡張された文脈自由文法といった感じか.

補足　$PE_d(V,W)$ の定義から, $V \subset PE_d(V,W)$ が成り立つ. $V \neq \emptyset$ だったから, $PE_d(V,W) \neq \emptyset$ である.

例　$V = \{a,b\}$, $W = \{A,B\}$, $d = 1$ のとき,

$$a,\quad b,\quad (ab),\quad (a],\quad A[a],\quad B[((ab)/(aa))],\quad A[((B[a]]/A[a])]$$

などは全て $PE_d(V,W)$ の元である.

定理 5.5

$$PE_d(V,W) = \{a, A[t_1]\cdots[t_d], (e_1e_2), (e_1], (e_1/e_2) \mid a \in V,\ A \in W,\ t_i, e_1, e_2 \in PE_d(V,W)\}\,.$$

特に, $\varepsilon \notin PE_d(V,W)$ である.

証明　定義 5.4 から

$$PE_d(V,W) = T_{P,f} = \cup_{i=1}^5 \{f_i(s) \mid s \in S,\ P_i(s, T_{P,f})\} = \cup_{i=1}^5 \{f_i(s) \mid s \in S,\ P_i(s, PE_d(V,W))\}$$

となる. これを使えばよい.

定理 5.6 簡単のため, $\Sigma := \overline{V \cup W}$ と置く. $g : \Sigma \to \mathbb{Z}$ を

$$g(”(”) := 1,\quad g(”[”) := 1,\quad g(”)”) := -1,\quad g(”]”) := -1,\quad g(x) := 0\ \ (\text{それ以外})$$

と定義する. $G : \Sigma^* \to \mathbb{Z}$ を

$$G(\varepsilon) := 0,\ G(v) := \sum_{i=1}^{|v|} g(v_i)\quad (v \neq \varepsilon)$$

と定義する. $G|_\Sigma = g$ が成り立つことが分かる. そこで, 記号の乱用により, G のことを再び g と書く. このとき, 次が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \ \forall v, w \in \Sigma^*\ \ [\ g(vw) = g(v) + g(w)\ ]\,.\\
&(2)\ \ \forall e \in PE_d(V,W),\ \forall e' \prec e\ \ [\ g(e) = 0,\ g(e') \geq 0\ ]\,.
\end{aligned}
$$

証明　(1) g の定義から明らか.
(2) $e \in \Sigma^*$ に関する命題 $H(e)$ を

$$H(e):\ \forall e' \prec e\ \ [\ g(e) = 0,\ g(e') \geq 0\ ]$$

と定義する.

$$M := \{e \in \Sigma^* \mid H(e)\}$$

と置く. $PE_d(V, W)$ の定義に使われる P, f に対して, $Q_{P,f}(M)$ が真であることを示す (このとき, 最小性により $PE_d(V, W) \subset M$ となるので, (2) が成り立つことになる). 以下では, $Q_{P,f}(M)$ が真であることを示す.

- $\forall a \in V\ \ [\ a \in M\ ]$,
- $\forall A \in W,\ \forall t \in M^d,\ \forall e_1, e_2 \in M\ \ [\ A[t_1] \cdots [t_d], (e_1 e_2), (e_1], (e_1/e_2) \in M\ ]$

を示せばよい. 1 行目は明らかなので省略する.

$A[t_1] \cdots [t_d] \in M$ について: $v_i := [t_1] \cdots [t_i]$ $(0 \leq i \leq d)$ と置けば, $v_0 = \varepsilon$ かつ $v_i = v_{i-1}[t_i]$ $(1 \leq i \leq d)$ である. また, $A[t_1] \cdots [t_d] = Av_d$ である. よって, $Av_d \in M$ を示せばよい. まず, $1 \leq i \leq d$ のとき

$$g(v_i) = g(v_{i-1}[t_i]) = g(v_{i-1}) + 1 + g(t_i) + (-1) = g(v_{i-1}) + g(t_i)$$

である. $t_i \in M$ より $g(t_i) = 0$ となるので, $g(v_i) = g(v_{i-1})$ $(1 \leq i \leq d)$ となる. よって, $g(v_i) = g(v_0) = g(\varepsilon) = 0$ $(1 \leq i \leq d)$ となる. $i = 0$ のときも $g(v_i) = 0$ だから, $g(v_i) = 0$ $(0 \leq i \leq d)$ となる. 特に

$$g(Av_d) = g(A) + g(v_d) = 0$$

である. あとは, 任意の $e' \prec Av_d$ に対して $g(e') \geq 0$ となることを言えばよい. $e' = \varepsilon$ のときは, $g(e') = 0$ である. 以下では, $e' = Ae'_1$, $e'_1 \prec v_d$ としてよい. よって, $g(e') = g(Ae'_1) = g(e'_1)$ となるので, $g(e'_1) \geq 0$ が示せればよい. $e'_1 \prec v_d$ だったから, $e'_1 \prec v_i$ を満たす i が少なくとも 1 つは存在することになる. そこで, そのような i のうち最小のものを再び i と置く. $i = 0$ のときは, $e'_1 \prec v_0 = \varepsilon$ より, $e'_1 = \varepsilon$ となるので, $g(e'_1) = 0$ である. 以下では, $i \geq 1$ としてよい. よって, $e'_1 \prec v_i$ かつ $\neg(e'_1 \prec v_{i-1})$ である. $v_i = v_{i-1}[t_i]$ であるから, $e'_1 = v_{i-1}e'_2$, $\varepsilon \neq e'_2 \prec [t_i]$ と表せる. 特に, $e'_2 = [e'_3$ かつ $e'_3 \prec t_i]$ と表せる. よって $e'_1 = v_{i-1}[e'_3$ となるので,

$$g(e'_1) = g(v_{i-1}[e'_3) = 0 + 1 + g(e'_3)$$

となる. よって, $g(e'_3) \geq -1$ が示せればよい. もし $e'_3 = t_i]$ ならば, $g(e'_3) = g(t_i]) = 0 + (-1) = -1$ となる. 以下では, $e'_3 \neq t_i]$ としてよい. よって, $e'_3 \prec t_i$ となる. $t_i \in M$ だったから, $g(e'_3) \geq 0$ である.

$(e_1 e_2) \in M$ について: $e_i \in M$ より $g(e_i) = 0$ であるから,

$$g((e_1 e_2)) = 1 + g(e_1) + g(e_2) + (-1) = 0$$

である．あとは, 任意の $e' \prec (e_1 e_2)$ に対して $g(e') \geq 0$ となることを示せばよい． $e' = \varepsilon$ のときは, $g(e') = 0$ である． $e' = (e_1 e_2)$ のときは, 既に見たように $g(e') = 0$ である．以下では, $e' = (e'_1$, $e'_1 \prec e_1 e_2$ としてよい．このとき, $g(e') = 1 + g(e'_1)$ となる．よって, $g(e'_1) \geq 0$ が示せれば十分である． $e'_1 \prec e_1$ のときは, $e_1 \in M$ により $g(e'_1) \geq 0$ である．それ以外のときは, $e'_1 = e_1 e'_2, e'_2 \prec e_2$ となるので, $e_1, e_2 \in M$ により $g(e'_1) = g(e_1) + g(e'_2) = 0 + g(e'_2) \geq 0$ となる．

$(e_1] \in M$ について: $e_1 \in M$ より $g(e_1) = 0$ であるから,

$$g((e_1]) = 1 + g(e_1) + (-1) = 0$$

である．あとは, 任意の $e' \prec (e_1]$ に対して $g(e') \geq 0$ となることを示せばよい． $e' = \varepsilon$ のときは, $g(e') = 0$ である． $e' = (e_1]$ のときは, 既に見たように $g(e') = 0$ である．以下では, $e' = (e'_1$, $e'_1 \prec e_1$ としてよい． $e_1 \in M$ により $g(e'_1) \geq 0$ である．よって $g(e') = 1 + g(e'_1) \geq 1 + 0$ となる．

$(e_1/e_2) \in M$ について: $e_i \in M$ より $g(e_i) = 0$ であるから,

$$g((e_1/e_2)) = 1 + g(e_1) + 0 + g(e_2) + (-1) = 0$$

である．あとは, 任意の $e' \prec (e_1/e_2)$ に対して $g(e') \geq 0$ となることを示せばよい． $e' = \varepsilon$ のときは, $g(e') = 0$ である． $e' = (e_1/e_2)$ のときは, 既に見たように $g(e') = 0$ である．以下では, $e' = (e'_1$, $e'_1 \prec e_1/e_2$ としてよい．よって $g(e') = 1 + g(e'_1)$ となる．よって, $g(e'_1) \geq 0$ が示せれば十分である． $e'_1 \prec e_1$ のときは, $e_1 \in M$ より $g(e'_1) \geq 0$ である．それ以外のときは, $e'_1 = e_1/e'_2$, $e'_2 \prec e_2$ となるので, $e_1, e_2 \in M$ により $g(e'_1) = g(e_1) + 0 + g(e'_2) = g(e'_2) \geq 0$ となる．

定理 5.7

(1) $\forall A \in W,\ \forall t \in PE_d(V,W)^d,\ \forall e' \prec A[t_1] \cdots [t_d]\ \ s.t.$
$g(e') = 0 \Rightarrow [\ e' = \varepsilon$ または $e' = A[t_1] \cdots [t_i]\ (\exists i \in [0,d])\ \ ]$.

(2) $\forall e \in PE_d(V,W) - \left\{A[t_1] \cdots [t_d] \mid A \in W, t \in PE_d(V,W)^d\right\},\ \forall e' \prec e\ \ s.t.$
$[\ g(e') = 0 \Rightarrow e' = \varepsilon$ または $e' = e\ ]$.

証明 (1) $e' \prec A[t_1] \cdots [t_d]$ を任意に取る． $g(e') = 0$ とする． $e' = \varepsilon$ ならば, (1) が成り立つ．以下では, $e' \neq \varepsilon$ としてよい．よって, $e' = Ae'_1$, $e'_1 \prec [t_1] \cdots [t_d]$ と表せる． $v_i = [t_1] \cdots [t_i]$ $(0 \leq i \leq d)$ と置けば, $e'_1 \prec v_d$ である．よって, $e'_1 \prec v_i$ を満たす i が少なくとも 1 つは存在することになる．そこで, そのような i のうち最小のものを再び i と置く． $i = 0$ のときは, $e'_1 \prec v_0 = \varepsilon$ より, $e'_1 = \varepsilon$ となるので, $e' = A$ となり, (1) が成り立つ．以下では, $i \geq 1$ としてよい．よって, $e'_1 \prec v_i$ かつ $\neg(e'_1 \prec v_{i-1})$ である． $v_i = v_{i-1}[t_i]$ であるから, $e'_1 = v_{i-1}e'_2, \varepsilon \neq e'_2 \prec [t_i]$ と表せる．特に, $e'_2 = [e'_3$, $e'_3 \prec t_i]$ と表せる．よって $e' = Av_{i-1}[e'_3$ となる．もし $e'_3 = t_i]$ ならば, $e' = Av_{i-1}[t_i] = Av_i$ となるので, (1) が成り立つ．以下では, $e'_3 \prec t_i$ としてよい． $t_i \in PE_d(V,W)$ により, 定理 5.6 から $g(e'_3) \geq 0$ が成り立つ．よって

$$0 = g(e') = g(Av_{i-1}[e'_3) = 0 + g(v_{i-1}) + 1 + g(e'_3) \geq g(v_{i-1}) + 1 \qquad (*)$$

となる．ここで, 定理 5.6 から $g(t_i) = 0$ $(1 \leq i \leq d)$ である．よって, $v_i = v_{i-1}[t_i]$ $(1 \leq i \leq d)$ より

$$g(v_j) = g(v_{j-1}) + 1 + g(t_i) + (-1) = g(v_{j-1})\ (1 \leq j \leq d)$$

となる．よって, $g(v_j) = g(v_0) = g(\varepsilon) = 0$ $(1 \leq j \leq d)$ となる．$j = 0$ のときも $g(v_i) = 0$ だから, $g(v_j) = 0$ $(0 \leq j \leq d)$ となる．これと $(*)$ から, $0 \geq 1$ となって矛盾する．よって, これは起こらない．よって, (1) が成り立つ．
(2) 定理 5.5 より, ある $a \in V$ と $e_1, e_2 \in PE_d(V, W)$ が存在して, $e = a, (e_1e_2), (e_1], (e_1/e_2)$ のいずれかの形である．

$e = a$ のとき: 明らかに (2) が成り立つ．

$e = (e_1e_2)$ のとき: $e' \prec e$ とする．$e' = \varepsilon, e$ のときは, (2) が成り立つ．以下では, $e' = (e'_1$, $e'_1 \prec e_1e_2$ としてよい．このとき, $0 = g(e') = 1 + g(e'_1)$ となる．よって, $g(e'_1) = -1$ となる．$e'_1 \prec e_1$ のときは, 定理 5.6 より $g(e'_1) \geq 0$ となるので, 矛盾する．それ以外のときは, $e'_1 = e_1e'_2$, $e'_2 \prec e_2$ となるので, 定理 5.6 より $g(e'_1) = g(e_1) + g(e'_2) = 0 + g(e'_2) \geq 0$ となり, やはり矛盾する．よって, これは起こらない．

$e = (e_1]$ のとき: $e' \prec e$ とする．$e' = \varepsilon, e$ のときは, (2) が成り立つ．以下では, $e' = (e'_1$, $e'_1 \prec e_1$ としてよい．定理 5.6 から, $0 = g(e') = 1 + g(e'_1) \geq 1 + 0$ となって矛盾する．よって, これは起こらない．

$e = (e_1/e_2)$ のとき: $e' \prec e$ とする．$e' = \varepsilon, e$ のときは, (2) が成り立つ．以下では, $e' = (e'_1$, $e'_1 \prec e_1/e_2$ としてよい．よって $0 = g(e') = 1 + g(e'_1)$ となる．よって, $g(e'_1) = -1$ となる．$e'_1 \prec e_1$ のときは, 定理 5.6 から $g(e'_1) \geq 0$ となり, 矛盾する．それ以外のときは, $e'_1 = e_1/e'_2$, $e'_2 \prec e_2$ となる．よって, 定理 5.6 から $g(e'_1) = g(e_1) + g(/) + g(e'_2) = 0 + 0 + g(e'_2) \geq 0$ となり, 矛盾する．よって, これは起こらない．

定理 5.8

$$\forall n, m \geq 1,\ \forall t \in PE_d(V, W)^n,\ f \in PE_d(V, W)^m\ \ [\ [t_1] \cdots [t_n] = [f_1] \cdots [f_m] \Rightarrow n = m,\ t = f\ ].$$

証明　$N \geq 1$ に関する命題 $P(N)$ を以下のように定義する:

$$P(N):\ \forall n, m \in [1, N],\ \forall t \in PE_d(V, W)^n,\ f \in PE_d(V, W)^m$$
$$[\ [t_1] \cdots [t_n] = [f_1] \cdots [f_m] \Rightarrow n = m,\ t = f\ ].$$

任意の $N \geq 1$ に対して $P(N)$ が真であることを, N に関する数学的帰納法で示せばよい．$N = 1$ のときは, $n = m = 1$ となるしかない．このとき, $[t_1] = [f_1]$ の先頭と末尾を 1 文字ずつ削って $t_1 = f_1$ となる．よって, $P(1)$ は真である．次に, $N \geq 1$ を任意に取る．$P(N)$ は真とする．$P(N + 1)$ も真であることを示す．$n, m \in [1, N + 1]$ と t, f を任意に取る．

$$[t_1] \cdots [t_n] = [f_1] \cdots [f_m] \tag{1}$$

が成り立つとする．$n = m$ かつ $t = f$ を示したい．$t_i \in PE_d(V, W)$ だから, $t_i \neq \varepsilon$ である．対称性から, $|t_1| \leq |f_1|$ としてよい．このとき, (1) の両辺を左から 1 文字ずつ比較していって, $t_1 \prec f_1$ となることが分かる．$t_1 = f_1$ が成り立つことを示す．$f_1 = A[c_1] \cdots [c_d]$, $A \in W$, $c \in PE_d(V, W)^d$ という形のときは．定理 5.7 の (1) から, $t_1 = \varepsilon, A[c_1] \cdots [c_i]$ $(\exists i \in [0, d])$ となる．$t_1 \neq \varepsilon$ であるから, $t_1 = A[c_1] \cdots [c_i]$ となる．$i = 0$ とすると, $t_1 = A$ であるから, (1) より

$$[A] \cdots [t_n] = [A[c_1] \cdots [c_d]] \cdots [f_m]$$

となる．よって,

$$]\cdots[t_n]=[c_1]\cdots[c_d]]\cdots[f_m]$$

となる．先頭の 1 文字を比較して, "]"="[" となって矛盾する．よって, $i\geq 1$ である．$i<d$ とすると, $f_1=t_1[c_{i+1}]\cdots[c_d]$ と表せるので, (1) より

$$[t_1][t_2]\cdots[t_n]=[t_1[c_{i+1}]\cdots[c_d]][f_2]\cdots[f_m]$$

となる．両辺を左から 1 文字ずつ比較していって,

$$][t_2]\cdots[t_n]=[c_{i+1}]\cdots[c_d]][f_2]\cdots[f_m] \tag{2}$$

となる．$i<d$ により, 文字列 $[c_{i+1}]\cdots[c_d]$ の部分は少なくとも $[c_{i+1}]$ が存在するので, (2) の両辺の先頭の 1 文字を比較して"]"="[" となり, 矛盾する．よって, $i=d$ となるしかない．このとき, $t_1=f_1$ となる．
以下では, f_1 は $A[c_1]\cdots[c_d]$ という形でないとしてよい．このときは, 定理 5.7 の (2) より, $t_1=\varepsilon, f_1$ となる．$t_1\neq\varepsilon$ であるから, $t_1=f_1$ となる．
以上より, 必ず $t_1=f_1$ が成り立つ．(1) に戻って両辺を比較すれば,

$$[t_2]\cdots[t_n]=[f_2]\cdots[f_m] \tag{3}$$

が成り立つ．もし $n=1$ ならば, (2) の左辺は ε となるので, $m=1$ でなければならず, このときは $n=m$ かつ $t=f$ となる．以下では, $n\geq 2$ としてよい．このとき, (2) の左辺は ε ではないので, $m\geq 2$ となる．よって, $n':=n-1,\ m':=m-1,\ t':=(t_2,\cdots,t_n),\ f':=(f_2,\cdots,f_m)$ と置けば,

$$n',m'\in[1,N],\ \ t'\in PE_d(V,W)^{n'},\ \ f'\in PE_d(V,W)^{m'},\ \ [t'_1]\cdots[t'_{n'}]=[f'_1]\cdots[f'_{m'}]$$

となる．帰納法の仮定より, $n'=m'$ かつ $t'=f'$ となる．よって, $n=m$ かつ $t=f$ となる．よって, $P(N+1)$ は真である．数学的帰納法から, 任意の $N\geq 1$ に対して $P(N)$ は真である．

系 5.9

$$\forall e_1,e_2\in PE_d(V,W)\ \ [\ e_1\prec e_2\Rightarrow e_1=e_2\ ].$$

証明 $e_1\neq\varepsilon$ かつ $e_2\neq\varepsilon$ である．$e_2=A[t_1]\cdots[t_d]$ という形のときは, 定理 5.8 より, $e_1=\varepsilon, A[t_1]\cdots[t_i]$ $(\exists i\in[0,d))$ と表せる．よって, $e_1=A[t_1]\cdots[t_i]$ $(\exists i\in[0,d])$ である．特に, e_1 の先頭の 1 文字は A である．$e_1\in PE_d(V,W)$ であるから, 定理 5.5 より,

$$e_1\in\{a,B[f_1]\cdots[f_d],(g_1e_2),(g_1],(g_1/g_2)\mid a\in V,\ B\in W,\ f_i,g_1,g_2\in PE_d(V,W)\}$$

である．e_1 の先頭の 1 文字は $A\in W$ だったから, $e_1=B[f_1]\cdots[f_d]$ という形になるしかない．よって, $B=A$ であり, かつ $[t_1]\cdots[t_i]=[f_1]\cdots[f_d]$ となる．$t_i,f_j\in PE_d(V,W)$ により, 定理 5.8 から $i=d$ かつ $t=f$ となる．よって, $e_1=A[t_1]\cdots[t_d]=e_2$ となる．以下では, e_2 は $A[t_1]\cdots[t_d]$ という形でないとしてよい．このとき, 定理 5.7 の (2) より, $e_1=\varepsilon, e_2$ である．よって, $e_1=e_2$ である．

定理 5.10 任意の $e \in PE_d(V,W)$ に対して, 次のうちいずれか 1 つのみが成り立つ.

- $\exists! a \in V \ \ [\ e = a\ ]$.
- $\exists! A \in W,\ \exists! t \in PE_d(V,W)^d \ \ [\ e = A[t_1]\cdots[t_d]\ ]$.
- $\exists! e_1, e_2 \in PE_d(V,W) \ \ [\ e = (e_1 e_2)\ ]$.
- $\exists! e_1 \in PE_d(V,W) \ \ [\ e = (e_1]\ ]$.
- $\exists! e_1, e_2 \in PE_d(V,W) \ \ [\ e = (e_1/e_2)\ ]$.

補足 parsing expression を抽象構文木で定義した場合は, この定理はほとんど明らかである (構造の作り方にもよるが). しかし, 今回は「ある種の文字列そのもの」を parsing expression と定義したので, この定理は自明ではなく, 下準備として定理 5.6, 5.7, 5.8, 5.9 が必要になってしまった.

証明 定理 5.5 より, どれか 1 つは必ず成り立つ. 次に, 2 つの行が同時に成り立つとして矛盾を導く.
1 行目と i 行目 $(i > 1)$ が同時に成り立つとすると, $i = 2$ ならば, e の 1 文字目が V の元かつ W の元となって, $V \cap W = \emptyset$ に矛盾する. $i > 2$ ならば, e は 1 文字かつ 2 文字以上となって矛盾する.
2 行目と i 行目 $(i > 2)$ が同時に成り立つとすると, e の 1 文字目は W の元かつ"("となって矛盾する.
3 行目と 4 行目が同時に成り立つとすると, e の末尾の 1 文字が")"かつ"]"となって矛盾する.
3 行目と 5 行目が同時に成り立つとすると, $e = (e_1 e_2) = (e_3/e_4)$ という形である. 特に $e_1 e_2 = e_3/e_4$ となる. 特に, $e_1 \prec e_3$ または $e_3 \prec e_1$ である. 定理 5.9 より, $e_1 = e_3$ となる. よって, $e_2 = /e_4$ となるので, e_2 の先頭の 1 文字は / となるが, 定理 5.5 により, e_2 の先頭の 1 文字は / になり得ず, 矛盾する.
4 行目と 5 行目が同時に成り立つとすると, e の末尾の 1 文字が")"かつ"]"となって矛盾する.
以上より, 2 つの行は同時に成り立たない.

次に, 同一の行は 1 通りの表示しか持たないことを示す.
1 行目の場合: 明らかに 1 通りの表示しかない.
2 行目の場合: $e = A[t_1]\cdots[t_d] = B[f_1]\cdots[f_d]$ とすると, $A = B$ であり, $[t_1]\cdots[t_d] = [f_1]\cdots[f_d]$ である. よって, 定理 5.8 から $t = f$ である. よって, 1 通りしかない.
3 行目の場合: $e = (e_1 e_2) = (e_3 e_4)$, $e_i \in PE_d(V,W)$ とする. このとき, $e_1 e_2 = e_3 e_4$ である. よって, $e_1 \prec e_3$ または $e_1 \prec e_3$ である. 定理 5.9 より, $e_1 = e_3$ となる. よって, $e_2 = e_4$ となる. よって, 1 通りしかない.
4 行目の場合: $e = (e_1] = (e_2]$, $e_i \in PE_d(V,W)$ とすると, 先頭と末尾の 1 文字ずつを削って, $e_1 = e_2$ となる.
5 行目の場合: $e = (e_1/e_2) = (e_3/e_4)$, $e_i \in PE_d(V,W)$ とする. このとき, $e_1/e_2 = e_3/e_4$ である. よって, $e_1 \prec e_3$ または $e_1 \prec e_3$ である. よって, $e_1 = e_3$ となる. よって, $/e_2 = /e_4$ となる. よって, $e_2 = e_4$ となる. よって, 1 通りしかない.

定理 5.11 $V \subset V'$, $W \subset W'$ ならば, $PE_d(V,W) \subset PE_d(V',W')$ である.

証明 $PE_d(V,W)$ の定義に使われる P, f に対して, $Q_{P,f}(PE_d(V',W'))$ が真であることを示せば

よい. すなわち, $M := PE_d(V', W')$ と置くとき,

- $\forall a \in V \ \ [\ a \in M\ ]$,
- $\forall A \in W,\ \forall t \in M^d,\ \forall e_1, e_2 \in M \ \ [\ A[t_1]\cdots[t_d], (e_1 e_2), (e_1], (e_1/e_2) \in M\ ]$

を示せばよい.
$a \in M$ について: $V \subset V' \subset M$ から示せる.
$A[t_1]\cdots[t_d], (e_1 e_2), (e_1], (e_1/e_2) \in M$ について: $W \subset W'$ と $M = PE_d(V', W')$ の性質から明らか.

6　文字列への代入操作

この節では, 文字列に別の文字列を代入する操作を扱う. 直感的には明らかな操作ばかりだが, きちんと証明すると, 本質的には数学的帰納法を経由することになる.

定理 6.1 B, C はそれぞれ空でない文字の集合とする. 任意の $g : B \to C^*$ に対して, 次を満たす $G : B^* \to C^*$ がただ 1 つ存在する.

- $G|_B = g$.
- $\forall x_1, x_2 \in B^* \ \ [\ G(x_1 x_2) = G(x_1)G(x_2)\ ]$.

この G のことを g^* と書くことにする.

証明　定理 5.3 より, 写像 $G : B^* \to C^*$ が条件を満たすことと

- $G(\varepsilon) = \varepsilon,\ G|_B = g$.
- $\forall x_1, x_2 \in B^* \ \ [\ G(x_1 x_2) = G(x_1)G(x_2)\ ]$.

を満たすことは同値である. よって, こちらを満たす写像 G がただ 1 つ存在することを示せばよい. 定理 4.7 で $\Sigma := B$, $Y := C^*$ と置いて, Y の上の二項演算 $*$ を文字列の連結演算とすればよい.

以下では, Σ と Σ' は空でない文字の集合とする.

定理 6.2 $l \geq 1$ とする. $x = (x_1, \cdots, x_l) \in \Sigma^l$ は $x_i \neq x_j\ (i \neq j)$ を満たすとする[6]. $s = (s_1, \cdots, s_l) \in (\Sigma^*)^l$ とする[7]. このとき, 次を満たす写像 $G : \Sigma^* \to \Sigma^*$ がただ 1 つ存在する:

- $\forall a \in \Sigma - \{x_i\}_{i=1}^{l} \ \ [\ G(a) = a\ ]$.
- $\forall i \in [1, l] \ \ [\ G(x_i) = s_i\ ]$.
- $\forall v, w \in \Sigma^* \ \ [\ G(vw) = G(v)G(w)\ ]$.

証明　G の存在性: $g : \Sigma \to \Sigma^*$ を

$$g(a) := a \ \ (a \in \Sigma - \{x_i\}_{i=1}^{l}),\ \ s_i \ \ (a = x_i)$$

で定義する. $G := g^*$ と置けば, この G が求める G である.
G の一意性: G_1, G_2 が条件を満たすとする. $G_1 = G_2$ が成り立つことを言いたい. 任意の $e \in \Sigma^*$ に対して $G_1(e) = G_2(e)$ が成り立つことを言えばよい. $|e| \geq 0$ に関する数学的帰納法で示す. $|e| = 0$ のときは, $e = \varepsilon$ となるしかない. 定理 5.3 より, $G_1(\varepsilon) = \varepsilon = G_2(\varepsilon)$ である. よって, $|e| = 0$ のときは成り立つ. $|e| = 1$ のときは, 場合分けする. $e \in \Sigma - \{x_i\}_{i=1}^{l}$ のときは, $G_1(e) = e = G_2(e)$ であるから成立. $e = x_i$ のときは, $G_1(e) = G_1(x_i) = s_i = G_2(x_i) = G_2(e)$ であるから, やはり成立. 以上より, $|e| = 1$ のときは成立. 以下では, $n \geq 1$ を任意に取る. $|e| \leq n$ のとき成り立つとして, $|e| = n + 1$ のとき: $e = e_1 e_2$, $e_1 \in \Sigma$, $e_2 \in \Sigma|_n$ と表せる. 帰納法の仮定と $|e| = 1$ のときの結果を使って,

$$G_1(e) = G_1(e_1 e_2) = G_1(e_1)G_1(e_2) = G_2(e_1)G_2(e_2) = G_2(e_1 e_2) = G_2(e)$$

となる. よって, $|e| = n + 1$ のときも成立. 数学的帰納法から, 一意性が成り立つ.

[6] $\Sigma|_l$ ではなく, Σ^l を使っている. 両者は別物なので注意する.
[7] 文字としての ( ) も扱われるので紛らわしいが, ここでの $(\Sigma^*)^l$ における ( ) は, ただのメタ記号とする. すなわち, ここでの $(\Sigma^*)^l$ は, Σ^* が l 個並んだ普通の直積 $\Sigma^* \times \Sigma^* \times \cdots \times \Sigma^*$ のこととする.

定義 6.3 定理 6.2 の $G(e)$ のことを

$$[e]^{\Sigma}_{x \to s}$$

と表記することにする[8]. 従って, $[\ \ ]^{\Sigma}_{x \to s}$ は次を満たすことになる:

- $\forall e \in \Sigma^* \ \left[\ [e]^{\Sigma}_{x \to s} \in \Sigma^*\ \right]$.
- $\forall a \in \Sigma - \{x_i\}_{i=1}^{l} \ \left[\ [a]^{\Sigma}_{x \to s} = a\ \right]$.
- $\forall i \in [1, l] \ \left[\ [x_i]^{\Sigma}_{x \to s} = s_i\ \right]$.
- $\forall v, w \in \Sigma^* \ \left[\ [vw]^{\Sigma}_{x \to s} = [v]^{\Sigma}_{x \to s}[w]^{\Sigma}_{x \to s}\ \right]$.

同じく, $k \geq 1$ とするとき, 任意の $e = (e_1, \cdots, e_k) \in (\Sigma^*)^k$ に対して,
$(G(e_1), G(e_2), \cdots, G(e_k)) \in (\Sigma^*)^k$ のことを, 全く同じ表記法で

$$[e]^{\Sigma}_{x \to s}$$

と表記することにする. 従って,

$$[e]^{\Sigma}_{x \to s} = [(e_1, \cdots, e_k)]^{\Sigma}_{x \to s} = ([e_1]^{\Sigma}_{x \to s}, \cdots, [e_k]^{\Sigma}_{x \to s})$$

である. よって, $k = 1$ のときは, $e \in (\Sigma^*)^1$ に対して $[e]^{\Sigma}_{x \to s}$ が定義されることになり,

$$[e]^{\Sigma}_{x \to s} = [(e_1)]^{\Sigma}_{x \to s} = ([e_1]^{\Sigma}_{x \to s})$$

となるのだが, 今後は, これを $e \in \Sigma^*$ に対する $[e]^{\Sigma}_{x \to s}$ と同一視して議論する.

例 定理 6.2 の $x = (x_1, \cdots, x_l)$ と $s = (s_1, \cdots, s_l)$ に対して,

$$[x]^{\Sigma}_{x \to s} = [(x_1, \cdots, x_l)]^{\Sigma}_{x \to s} = ([x_1]^{\Sigma}_{x \to s}, \cdots, [x_l]^{\Sigma}_{x \to s}) = (s_1, \cdots, s_l) = s$$

となる. すなわち, $[x]^{\Sigma}_{x \to s} = s$ が成り立つ.

例 $\Sigma = \{a, b, x, y\}$ のとき,

$$[a]^{\Sigma}_{(x,y) \to (aa,b)} = a, \quad [axyxb]^{\Sigma}_{(x,y) \to (aa,b)} = aaabaab, \quad [(a, axyxb)]^{\Sigma}_{(x,y) \to (aa,b)} = (a, aaabaab)$$

などが成り立つ. もしくは, (x, y) の順番を入れ替えて

$$[a]^{\Sigma}_{(y,x) \to (b,aa)} = a, \quad [axyxb]^{\Sigma}_{(y,x) \to (b,aa)} = aaabaab, \quad [(a, axyxb)]^{\Sigma}_{(y,x) \to (b,aa)} = (a, aaabaab)$$

とも書ける. 他の例としては,

$$\begin{aligned}&[x]^{\Sigma}_{x \to a} = a, \quad [a]_{a \to x} = x, \quad [x]^{\Sigma}_{x \to x} = x, \quad [xy]^{\Sigma}_{(x,y) \to (xx,xy)} = xxxy, \\ &[abxy]^{\Sigma}_{(a,b,x,y) \to (aa,bb,xx,yy)} = aabbxxyy\end{aligned}$$

なども成り立つ.

---

[8] 文字としての [ ] も扱われるので紛らわしいが, ここでの $[e]^{\Sigma}_{x \to s}$ における [ ] は, ただのメタ記号である.

定理 6.4 $l \geq 1$とする. $x = (x_1, \cdots, x_l) \in \Sigma^l$ は $x_i \neq x_j$ $(i \neq j)$ を満たすとする. $s = (s_1, \cdots, s_l) \in (\Sigma^*)^l$ とする. $m : [1, l] \to [1, l]$ は全単射とする. $k \geq 1$ とする. このとき, 任意の $e \in (\Sigma^*)^k$ に対して

$$[e]^{\Sigma}_{(x_{m_1}, \cdots, x_{m_l}) \to (s_{m_1}, \cdots, s_{m_l})} = [e]^{\Sigma}_{(x_1, \cdots, x_l) \to (s_1, \cdots, s_l)}.$$

証明 $k = 1$ のときを示す. $G_1, G_2 : \Sigma^* \to \Sigma^*$ を

$$\begin{aligned} G_1(e) &:= [e]^{\Sigma}_{(x_1, \cdots, x_l) \to (s_1, \cdots, s_l)}, \\ G_2(e) &:= [e]^{\Sigma}_{(x_{m_1}, \cdots, x_{m_l}) \to (s_{m_1}, \cdots, s_{m_l})} \end{aligned}$$

で定義する. $G_1 = G_2$ が成り立つことを示せばよい. $j = 1, 2$ に対して

$$\begin{aligned} &(1)\ \ \forall a \in \Sigma - \{x_i\}_{i=1}^l \ \ [\ G_j(a) = a\ ], \\ &(2)\ \ \forall i \in [1, l]\ \ [\ G_j(x_i) = s_i\ ], \\ &(3)\ \ \forall v, w \in \Sigma^*\ \ [\ G(vw) = G_j(v) G_j(w)\ ] \end{aligned}$$

が成り立つことを示す (このとき, 定理 6.2 の一意性により, $G_1 = G_2$ となるので, 証明が完了する). (1),(3) は明らか. (2) のみ示す. $i \in [1, l]$ を任意に取る. まず, 明らかに $G_1(x_i) = s_i$ である. 次に, $m : [1, l] \to [1, l]$ は全単射だったから, $i = m_t$ を満たす $t \in [1, l]$ が取れる. このとき, $G_2(x_i) = G_2(x_{m_t}) = s_{m_t} = s_i$ である. よって, (2) も成り立つ. 以上より, $k = 1$ のときは成立.
一般の k の場合は, 定義によって成分ごとの計算に分解できる. 具体的には

$$\begin{aligned} G_1(e) = G_1((e_1, \cdots, e_k)) = (G_1(e_1), \cdots, G_1(e_k)) = (G_2(e_1), \cdots, G_2(e_k)) &= G_2((e_1, \cdots, e_k)) \\ &= G_2(e) \end{aligned}$$

となる. よって, この場合も成立.

定理 6.5 $l \geq 1$ とする. $\Sigma \subset \Sigma'$ とする. $x = (x_1, \cdots, x_l) \in \Sigma^l$ は $x_i \neq x_j$ $(i \neq j)$ を満たすとする. $s = (s_1, \cdots, s_l) \in (\Sigma^*)^l$ とする. $k \geq 1$ とする. このとき, 任意の $e \in (\Sigma^*)^k$ に対して, $[e]^{\Sigma}_{x \to s}$ の他に $[e]^{\Sigma'}_{x \to s}$ も定義できることになるが, 実は

$$[e]^{\Sigma}_{x \to s} = [e]^{\Sigma'}_{x \to s}$$

が成り立つ.

証明 $k = 1$ のときを示す. $|e| \geq 0$ に関する数学的帰納法で示す. $|e| = 0$ のときは, $e = \varepsilon$ となるしかない. このときは, 明らかに $[e]^{\Sigma}_{x \to s} = [e]^{\Sigma'}_{x \to s}$ が成り立つ. $|e| = 1$ のときは, 場合分けする. $e \in \Sigma - \{x_i\}_{i=1}^l$ のときは, $[e]^{\Sigma}_{x \to s} = e = [e]^{\Sigma'}_{x \to s}$ であるから, 成立. $e = x_i$ のときは,

$$[e]^{\Sigma}_{x \to s} = [x_i]^{\Sigma}_{x \to s} = s_i,\ [e]^{\Sigma'}_{x \to s} = [x_i]^{\Sigma'}_{x \to s} = s_i$$

であるから, 成立. 以上より, $|e| = 1$ のときは成立. 以下では, $n \geq 1$ を任意に取る. $|e| \leq n$ のとき成り立つとして, $|e| = n + 1$ のとき: $e = e_1 e_2$, $e_1 \in \Sigma$, $e_2 \in \Sigma|_n$ と表せる. 帰納法の仮定と $|e| = 1$ のときの結果を使って,

$$[e]^{\Sigma}_{x \to s} = [e_1 e_2]^{\Sigma}_{x \to s} = [e_1]^{\Sigma}_{x \to s} [e_2]^{\Sigma}_{x \to s} = [e_1]^{\Sigma'}_{x \to s} [e_2]^{\Sigma'}_{x \to s} = [e_1 e_2]^{\Sigma'}_{x \to s} = [e]^{\Sigma'}_{x \to s}$$

となる．よって, $|e| = n+1$ のときも成立．数学的帰納法から, 常に $[e]^{\Sigma}_{x\to s} = [e]^{\Sigma'}_{x\to s}$ が成り立つ．このことから, $e \in \Sigma^*$ に対して

$$G_1(e) := [e]^{\Sigma}_{x\to s}, \quad G_2(e) := [e]^{\Sigma'}_{x\to s}$$

と置けば, $G_1(e) = G_2(e)$ $(e \in \Sigma^*)$ が言えたことになる．一般の k に対する $e = (e_1, \cdots, e_k) \in (\Sigma^*)^k$ の場合は, 成分ごとの計算で

$$\begin{aligned} G_1(e) = G_1((e_1,\cdots,e_k)) = (G_1(e_1),\cdots,G_1(e_k)) = (G_2(e_1),\cdots,G_2(e_k)) &= G_2((e_1,\cdots,e_k)) \\ &= G_2(e) \end{aligned}$$

となるので, やはり $G_1(e) = G_2(e)$ となる．

系 6.6 Σ, Σ' は空でない文字の集合とする．$l \geq 1$ とする．$B := \Sigma \cap \Sigma'$ とする．以下では, $B \neq \emptyset$ とする．$x = (x_1, \cdots, x_l) \in B^l$ は $x_i \neq x_j$ $(i \neq j)$ を満たすとする．$s = (s_1, \cdots, s_l) \in (B^*)^l$ とする．$k \geq 1$ とする．このとき, 任意の $e \in (B^*)^k$ に対して, $[e]^{\Sigma}_{x\to s}$ と $[e]^{\Sigma'}_{x\to s}$ が定義できることになるが, 実は

$$[e]^{\Sigma}_{x\to s} = [e]^{\Sigma'}_{x\to s}$$

が成り立つ．

証明 $[e]^{B}_{x\to s}$ もまた定義可能である．$B \subset \Sigma$ により, 定理 6.5 から $[e]^{B}_{x\to s} = [e]^{\Sigma}_{x\to s}$ となる．同じく, $B \subset \Sigma'$ であるから, $[e]^{B}_{x\to s} = [e]^{\Sigma'}_{x\to s}$ となる．よって, $[e]^{\Sigma}_{x\to s} = [e]^{\Sigma'}_{x\to s}$ となる．

定義 6.7 系 6.6 により, $[e]^{\Sigma}_{x\to s}$ における Σ は,

$$x \in \Sigma^l, \quad s \in (\Sigma^*)^l, \quad e \in (\Sigma^*)^k$$

が成り立ってさえいれば, どんな Σ を採用してもよく, $[e]^{\Sigma}_{x\to s}$ は常に同一の対象を表現していることになる．よって, $[e]^{\Sigma}_{x\to s}$ のことを単に $[e]_{x\to s}$ と書いても問題は起きない．そこで, 以下では単に $[e]_{x\to s}$ と書くことにする．従って, $[\ \ ]_{x\to s}$ は次を満たすことになる:

- $\forall e \in \Sigma^*\ \ [\ [e]_{x\to s} \in \Sigma^*\ ]$.
- $\forall a \in \Sigma - \{x_i\}_{i=1}^{l}\ \ [\ [a]_{x\to s} = a\ ]$.
- $\forall i \in [1, l]\ \ [\ [x_i]_{x\to s} = s_i\ ]$.
- $\forall v, w \in \Sigma^*\ \ [\ [vw]_{x\to s} = [v]_{x\to s}[w]_{x\to s}\ ]$.
- $\forall k \geq 1,\ \forall e = (e_1, \cdots, e_k) \in (\Sigma^*)^k\ \ [\ [e]_{x\to s} = ([e_1]_{x\to s}, \cdots, [e_k]_{x\to s})\ ]$.

定理 6.8 $l \geq 1$ とする．$x = (x_1, \cdots, x_l) \in \Sigma^l$ は $x_i \neq x_j$ $(i \neq j)$ を満たすとする．$m \geq 1$ とする．$y = (y_1, \cdots, y_m) \in \Sigma^m$ は $y_i \neq y_j$ $(i \neq j)$ を満たすとする．さらに, $\{x_i\}_{i=1}^{l} \cap \{y_i\}_{i=1}^{m} = \emptyset$ が成り立つとする．$s \in (\Sigma^*)^l$ と $t \in (\Sigma^*)^m$ を任意に取る．$k \geq 1$ とする．このとき, 次が成り立つ:

(1) $\forall e \in (\Sigma^*)^k$
$\Big[$ 文字列 e_iの中に $y_1, \cdots, y_m$が出現しない $(1 \leq i \leq k) \Rightarrow [e]_{(x,y)\to(s,t)} = [e]_{x\to s}$ $\Big]$.

(2) $\forall e \in (\Sigma^*)^k\ \ \big[\ [e]_{(x,y)\to(s,y)} = [e]_{x\to s}\ \big]$.

証明　まずは $k=1$ のときを示す.
(1) $|e| \geq 0$ に関する数学的帰納法で示す. $|e|=0$ のときは, $e=\varepsilon$ となるしかない. このときは, 明らかに (1) が成り立つ. $|e|=1$ のときは, 場合分けする. $e \in \Sigma - \{x_i\}_{i=1}^{l} - \{y_i\}_{i=1}^{m}$ のときは, $[e]_{(x,y)\to(s,t)} = e = [e]_{x\to s}$ であるから, 成立. $e=x_i$ のときは,

$$[e]_{(x,y)\to(s,t)} = [x_i]_{(x,y)\to(s,t)} = s_i,\ [e]_{x\to s} = [x_i]_{x\to s} = s_i$$

であるから, 成立. あとは $e=y_i$ の場合が残っているが, これは起こらない (仮定により). 以上より, $|e|=1$ のときは成立. 以下では, $n \geq 1$ を任意に取る. $|e| \leq n$ のとき成り立つとして, $|e|=n+1$ のとき: $e=e_1e_2$, $e_1 \in \Sigma$, $e_2 \in \Sigma|_n$ と表せる. 帰納法の仮定と $|e|=1$ のときの結果を使って,

$$\begin{aligned}[e]_{(x,y)\to(s,t)} = [e_1e_2]_{(x,y)\to(s,t)} = [e_1]_{(x,y)\to(s,t)}[e_2]_{(x,y)\to(s,t)} = [e_1]_{x\to s}[e_2]_{x\to s} &= [e_1e_2]_{x\to s} \\ &= [e]_{x\to s}\end{aligned}$$

となる. よって, $|e|=n+1$ のときも成立. 数学的帰納法から, (1) が成り立つ.
(2) $|e| \geq 0$ に関する数学的帰納法で示す. $|e|=0$ のときは, $e=\varepsilon$ となるしかない. このときは, 明らかに (2) が成り立つ. $|e|=1$ のときは, 場合分けする. $e \in \Sigma - \{x_i\}_{i=1}^{l} - \{y_i\}_{i=1}^{m}$ のときは, $[e]_{(x,y)\to(s,y)} = e = [e]_{x\to s}$ であるから, 成立. $e=x_i$ のときは,

$$[e]_{(x,y)\to(s,y)} = [x_i]_{(x,y)\to(s,y)} = s_i,\ [e]_{x\to s} = [x_i]_{x\to s} = s_i$$

であるから, 成立. $e=y_i$ のときは,

$$[e]_{(x,y)\to(s,y)} = [y_i]_{(x,y)\to(s,y)} = y_i,\ [e]_{x\to s} = [y_i]_{x\to s} = y_i$$

であるから, 成立. 以上より, $|e|=1$ のときは成立. 以下では, $n \geq 1$ を任意に取る. $|e| \leq n$ のとき成り立つとして, $|e|=n+1$ のとき: $e=e_1e_2$, $e_1 \in \Sigma$, $e_2 \in \Sigma|_n$ と表せる. 帰納法の仮定と $|e|=1$ のときの結果を使って,

$$\begin{aligned}[e]_{(x,y)\to(s,y)} = [e_1e_2]_{(x,y)\to(s,y)} = [e_1]_{(x,y)\to(s,y)}[e_2]_{(x,y)\to(s,y)} = [e_1]_{x\to s}[e_2]_{x\to s} &= [e_1e_2]_{x\to s} \\ &= [e]_{x\to s}\end{aligned}$$

となる. よって, $|e|=n+1$ のときも成立. 数学的帰納法から, (2) が成り立つ.
一般の k については, 成分ごとに計算すればよい.

定理 6.9 $l \geq 1$ とする. $x=(x_1,\cdots,x_l) \in \Sigma^l$ は $x_i \neq x_j$ $(i \neq j)$ を満たすとする. $s \in (\Sigma^*)^l$ を任意に取る. $k \geq 1$ とする. このとき, 次が成り立つ:

(1) $\forall e \in (\Sigma^*)^k$
　$[$ 文字列 e_iの中に $x_1,\cdots,x_l$が出現しない $(1 \leq i \leq k) \Rightarrow [e]_{x\to s} = e\ ]$.
(2) $\forall e \in (\Sigma^*)^k\ \ [\ [e]_{x\to x} = e\ ]$.

証明　(1) 定理 6.8 の (1) と同じやり方で証明できる.
(2) 定理 6.8 の (2) と同じやり方で証明できる.

定理 6.10 $1 \leq m \leq l$ とする. $x=(x_1,\cdots,x_l) \in \Sigma^l$ は $x_i \neq x_j$ $(i \neq j)$ を満たすとする. $t \in (\Sigma^*)^m$ と $s \in (\Sigma^*)^l$ を任意に取る. $k \geq 1$ とする. このとき, 次が成り立つ.

$$\forall e \in (\Sigma^*)^k\ \left[\ [\ [e]_{(x_1,\cdots,x_l)\to s}]_{(x_1,\cdots,x_m)\to t} = [e]_{(x_1,\cdots,x_l)\to [s]_{(x_1,\cdots,x_m)\to t}}\ \right].$$

同じことだが, $(x_1,\cdots,x_l)\to s$ のことを $x^l\to s$ と略記し, $(x_1,\cdots,x_m)\to t$ のことを $x^m\to t$ と略記すると, 次が成り立つ:

$$\forall e\in(\Sigma^*)^k\ \ \big[\ [\ [e]_{x^l\to s}]_{x^m\to t}=[e]_{x^l\to[s]_{x^m\to t}}\ \big].$$

証明 $k=1$ のときを示す. 任意の $e\in\Sigma^*$ に対して $[\ [e]_{x^l\to s}]_{x^m\to t}=[e]_{x^l\to[s]_{x^m\to t}}$ が成り立つことを, $|e|\ge 0$ に関する数学的帰納法で示す. $|e|=0$ のときは, $e=\varepsilon$ となるしかない. このとき,

$$[\ [e]_{x^l\to s}]_{x^m\to t}=[\ [\varepsilon]_{x^l\to s}]_{x^m\to t}=[\varepsilon]_{x^m\to t}=\varepsilon,\quad [e]_{x^l\to[s]_{x^m\to t}}=[\varepsilon]_{x^l\to[s]_{x^m\to t}}=\varepsilon$$

となる. よって, $|e|=0$ のときは成立. 次に, $|e|=1$ のときを考える. $e\in\Sigma-\{x_i\}_{i=1}^l$ のときは,

$$[\ [e]_{x^l\to s}]_{x^m\to t}=[e]_{x^m\to t}=e,\quad [e]_{x^l\to[s]_{x^m\to t}}=e$$

となるので成立. $e=x_i$ $(1\le i\le l)$ のときは,

$$\begin{aligned}&[\ [e]_{x^l\to s}]_{x^m\to t}=[\ [x_i]_{x^l\to s}]_{x^m\to t}=[s_i]_{x^m\to t},\\ &[e]_{x^l\to[s]_{x^m\to t}}=[x_i]_{x^l\to[s]_{x^m\to t}}=[x_i]_{x^l\to([s_1]_{x^m\to t},\cdots,[s_l]_{x^m\to t})}=[s_i]_{x^m\to t}\end{aligned}$$

となるので成立. 以上より, $|e|=1$ のときは $[\ [e]_{x^l\to s}]_{x^m\to t}=[e]_{x^l\to[s]_{x^m\to t}}$ が成り立つ. 次に, $n\ge 1$ を任意に取る. $0\le|e|\le n$ のときは成り立つとして, $|e|=n+1$ のときを考える. $e=e_1e_2$, $e_1\in\Sigma$, $e_2\in\Sigma|_n$ と表せる. 帰納法の仮定と $|e|=1$ のときの結果を使って,

$$\begin{aligned}[\ [e]_{x^l\to s}]_{x^m\to t}=[\ [e_1e_2]_{x^l\to s}]_{x^m\to t}=[\ [e_1]_{x^l\to s}[e_2]_{x^l\to s}]_{x^m\to t}&=[\ [e_1]_{x^l\to s}]_{x^m\to t}\ [\ [e_2]_{x^l\to s}]_{x^m\to t}\\ &=[e_1]_{x^l\to[s]_{x^m\to t}}\ [e_2]_{x^l\to[s]_{x^m\to t}}\\ &=[e_1e_2]_{x^l\to[s]_{x^m\to t}}\\ &=[e]_{x^l\to[s]_{x^m\to t}}\end{aligned}$$

となる. よって, $|e|=n+1$ のときも成り立つ. 数学的帰納法により, 任意の $e\in\Sigma^*$ に対して $[\ [e]_{x^l\to s}]_{x^m\to t}=[e]_{x^l\to[s]_{x^m\to t}}$ が成り立つ.
一般の k については, 成分ごとに計算すればよい.

例 $\Sigma=\{a,b,x,y\}$ とする. $e=xy$, $s=(xx,xyx)$, $t=(bb,a)$ と置けば,

$$\begin{aligned}&[e]_{(x,y)\to[s]_{(x,y)\to t}}=[xy]_{(x,y)\to[(xx,xyx)]_{(x,y)\to(bb,a)}}=[xy]_{(x,y)\to(bbbb,bbabb)}=bbbbbbabb,\\ &[\ [e]_{(x,y)\to s}]_{(x,y)\to t}=[\ [xy]_{(x,y)\to(xx,xyx)}]_{(x,y)\to(bb,a)}=[xxxyx]_{(x,y)\to(bb,a)}=bbbbbbabb\end{aligned}$$

となるので, 確かに $[\ [e]_{(x,y)\to s}]_{(x,y)\to t}=[e]_{(x,y)\to[s]_{(x,y)\to t}}$ が成り立つ.

定理 6.11 $l\ge 1$ とする. $x=(x_1,\cdots,x_l)\in\Sigma^l$ は $x_i\ne x_j$ $(i\ne j)$ を満たすとする. $m\ge 1$ とする. $y=(y_1,\cdots,y_m)\in\Sigma^m$ は $y_i\ne y_j$ $(i\ne j)$ を満たすとする. さらに, $\{x_i\}_{i=1}^l\cap\{y_i\}_{i=1}^m=\emptyset$ が成り立つとする. $s\in(\Sigma^*)^l$ と $t\in(\Sigma^*)^m$ を任意に取る.

$$\text{文字列 } s_i \text{の中に } y_1,\cdots,y_m \text{が出現しない } (1\le i\le l)$$

が成り立つとする. $k\ge 1$ とする. このとき, 次が成り立つ:

$$\forall e\in(\Sigma^*)^k\ \ \big[\ [e]_{(x,y)\to(s,t)}=[\ [e]_{x\to s}]_{y\to t}\ \big].$$

証明

$$\begin{aligned}
[\ [e]_{x\to s}]_{y\to t} &= [\ [e]_{(x,y)\to(s,y)}]_{y\to t} \quad (\text{定理 } 6.8 \text{ の } (2)) \\
&= [e]_{(x,y)\to[(s,y)]_{y\to t}} \quad (\text{定理 } 6.10) \\
&= [e]_{(x,y)\to([s]_{y\to t},[y]_{y\to t})} \\
&= [e]_{(x,y)\to([s]_{y\to t},t)} \\
&= [e]_{(x,y)\to(s,t)} \quad (\text{定理 } 6.9 \text{ の } (1)).
\end{aligned}$$

定理 6.12 $l \geq 1$ とする. $x = (x_1, \cdots, x_l) \in \Sigma^l$ は $x_i \neq x_j$ $(i \neq j)$ を満たすとする. $y = (y_1, \cdots, y_l) \in \Sigma^l$ は $y_i \neq y_j$ $(i \neq j)$ を満たすとする. さらに, $\{x_i\}_{i=1}^l \cap \{y_i\}_{i=1}^l = \emptyset$ が成り立つとする. $s \in (\Sigma^*)^l$ を任意に取る. $k \geq 1$ とする. このとき, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned}
&\forall e \in (\Sigma^*)^k \\
&[\ \text{文字列 } e_i \text{の中に } y_1, \cdots, y_m \text{が出現しない } (1 \leq i \leq k) \Rightarrow [e]_{x\to s} = [\ [e]_{x\to y}]_{y\to s}\ ].
\end{aligned}$$

補足 変数の名前を変更してもよい, という定理である. たとえば, $\Sigma = \{a, b, x, y\}$ とするとき, 文字列 axa の中に文字 y は出現しないので,

$$[axa]_{x\to b}, \quad [aya]_{y\to b}$$

は同じ文字列を表現することが分かる. また, 後者の $[aya]_{y\to b}$ は

$$[\ [axa]_{x\to y}]_{y\to b}$$

と表現できる. よって, このような形式で,「変数の名前の変更」を表現できる.

証明

$$\begin{aligned}
[\ [e]_{x\to y}]_{y\to s} &= [\ [e]_{(x,y)\to(y,y)}]_{y\to s} \quad (\text{定理 } 6.8 \text{ の } (2)) \\
&= [e]_{(x,y)\to[(y,y)]_{y\to s}} \quad (\text{定理 } 6.10) \\
&= [e]_{(x,y)\to([y]_{y\to s},[y]_{y\to s})} \\
&= [e]_{(x,y)\to(s,s)} \\
&= [e]_{x\to s} \quad (\text{定理 } 6.8 \text{ の } (1)).
\end{aligned}$$

定理 6.13 $l \geq 1$ とする. $x = (x_1, \cdots, x_l) \in \Sigma^l$ は $x_i \neq x_j$ $(i \neq j)$ を満たすとする. $G : \Sigma^* \to \Sigma^*$ は

- $\forall a \in \Sigma - \{x_i\}_{i=1}^l$ [文字列 $G(a)$ の中に x_i $(1 \leq i \leq l)$ は出現しない],
- $\forall i \in [1, l]$ [$G(x_i) = x_i$],
- $\forall v, w \in \Sigma^*$ [$G(vw) = G(v)G(w)$]

を満たすとする. $s \in (\Sigma^*)^l$ を任意に取る. $k \geq 1$ とする. このとき, 次が成り立つ.

$$\forall e \in (\Sigma^*)^k \ \left[\ G([e]_{x\to s}) = [G(e)]_{x\to G(s)}\ \right].$$

ただし, ここでは, $e = (e_1, \cdots, e_k) \in (\Sigma^*)^k$ に対して, $(G(e_1), \cdots, G(e_k))$ のことを $G(e)$ と表記することにする. 従って, $G(e) = (G(e_1), \cdots, G(e_k))$ である.

証明　定理 5.3 より, $G(\varepsilon) = \varepsilon$ が成り立つ．さて, $k = 1$ のときを示す．任意の $e \in \Sigma^*$ に対して $G([e]_{x \to s}) = [G(e)]_{x \to G(s)}$ が成り立つことを, $|e| \geq 0$ に関する数学的帰納法で示す．$|e| = 0$ のときは, $e = \varepsilon$ となるしかない．このとき,

$$G([e]_{x \to s}) = G([\varepsilon]_{x \to s}) = G(\varepsilon) = \varepsilon,\ [G(e)]_{x \to G(s)} = [G(\varepsilon)]_{x \to G(s)} = [\varepsilon]_{x \to G(s)} = \varepsilon$$

となる．よって, $|e| = 0$ のときは成立．次に, $|e| = 1$ のときを考える．$e \in \Sigma - \{x_i\}_{i=1}^{l}$ のときは, 文字列 $G(e)$ の中に x_i $(1 \leq i \leq l)$ が出現しないことから,

$$G([e]_{x \to s}) = G(e), \quad [G(e)]_{x \to G(s)} = G(e)$$

となり, 成立．$e = x_i$ のときは,

$$G([e]_{x \to s}) = G([x_i]_{x \to s}) = G(s_i), \quad [G(e)]_{x \to G(s)} = [G(x_i)]_{x \to G(s)} = [x_i]_{x \to (G(s_1), \cdots, G(s_l))} = G(s_i)$$

となり, 成立．よって, $|e| = 1$ のときは成立．次に, $n \geq 1$ を任意に取る．$0 \leq |e| \leq n$ のとき $G([e]_{x \to s}) = [G(e)]_{x \to G(s)}$ が成り立つとして, $|e| = n + 1$ のときを考える．$e = e_1 e_2$, $e_1 \in \Sigma$, $e_2 \in \Sigma|_n$ と表せる．帰納法の仮定と $|e| = 1$ のときの結果を使って,

$$\begin{aligned}
G([e]_{x \to s}) = G([e_1 e_2]_{x \to s}) = G([e_1]_{x \to s}[e_2]_{x \to s}) &= G([e_1]_{x \to s})G([e_2]_{x \to s}) \\
&= [G(e_1)]_{x \to G(s)}[G(e_2)]_{x \to G(s)} \\
&= [G(e_1)G(e_2)]_{x \to G(s)} \\
&= [G(e_1 e_2)]_{x \to G(s)} \\
&= [G(e)]_{x \to G(s)}
\end{aligned}$$

となる．よって, $|e| = n+1$ のときも成立．数学的帰納法により, 任意の $e \in \Sigma^*$ に対して $G([e]_{x \to s}) = [G(e)]_{x \to G(s)}$ が成り立つ．
一般の k については, 成分ごとに計算すればよい．

7 変数つきの parsing expression

この節では, 変数つきの parsing expression を扱う. MACRO PEG では非終端記号が引数を取れるので, 下準備として変数つきの parsing expression が必須である.

定義 7.1 $d \geq 1$ とする. V, W は空でない通常の文字の集合で, $V \cap W = \emptyset$ が成り立つとする. X は通常の文字の集合 (空集合でもよい) で, $X \cap (V \cup W) = \emptyset$ が成り立つとする. このとき, $PE_d(V \cup X, W)$ のことを $PE_d(V, W)[X]$ と表記する. 特に

$$X = \{x_i \mid 1 \leq i \leq l\}, \quad x_i \neq x_j \ (i \neq j)$$

という形のときには, $PE_d(V, W)[X]$ のことを $PE_d(V, W)[x_1, \cdots, x_l]$ とも表記する. 必ずしも $d = l$ である必要はなく, $d < l$ であっても $d > l$ であってもよい. 以下では, $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ は固定された通常の文字の列で, $x_i \neq x_j$ $(i \neq j)$ が成り立つとし, しかも $\{x_i \mid i \geq 1\} \cap (V \cup W) = \emptyset$ が成り立つとする. 各 x_i は文字列の代入の用途で使われるので, 変数と見なせる.

補足 $PE_d(V \cup \{x_i\}_{i=1}^{l}, W)$ という集合においては, $(x_i)_{i=1}^{d}$ における $i \mapsto x_i$ という情報が抜け落ちているので, x_i の表記順は関係がない. すなわち, $(k_1, k_2, \cdots, k_l)$ が $1, 2, \cdots, l$ の並べ替えであるとき, $PE_d(V, W)[x_{k_1}, \cdots, x_{k_l}]$ は $PE_d(V, W)[x_1, \cdots, x_l]$ と全く同じ意味である.

補足 $X \subset X'$ のとき, $PE_d(V, W)[X] \subset PE_d(V, W)[X']$ が成り立つ.

例 $V = \{a, b\}$, $W = \{A, B\}$ とするとき,

$$((A[x](ay))/((zb)/B[w])) \in PE_1(V, W)[x, y, z, w]$$

となる.

定理 7.2 簡単のため, $PE = PE_d(V, W)[x_1, \cdots, x_l]$ と置く. $s \in PE^l$ を任意に取る. このとき, 次が成り立つ.

(1) $\forall a \in V \ \ [\ [a]_{x \to s} = a\ ]$.

(2) $\forall i \in [1, l] \ \ [\ [x_i]_{x \to s} = s_i\ ]$.

(3) $\forall A \in W,\ \forall t \in PE^d \ \ [\ [A[t_1] \cdots [t_d]]_{x \to s} = A[\ [t_1]_{x \to s}] \cdots [\ [t_d]_{x \to s}]\ ]$.

(4) $\forall e_1, e_2 \in PE_d(V, W)[x_1, \cdots, x_l] \ \ s.t.$

$[(e_1 e_2)]_{x \to s} = ([e_1]_{x \to s}[e_2]_{x \to s}),\ [(e_1]]_{x \to s} = ([e_1]_{x \to s}],\ [(e_1/e_2)]_{x \to s} = ([e_1]_{x \to s}/[e_2]_{x \to s})$.

証明 (1),(2) 明らか.
(3)

$$\Sigma := \overline{V \cup \{x_i\}_{i=1}^{l} \cup W}$$

と置くと, $PE \subset \Sigma^*$ である. $G : \Sigma^* \to \Sigma^*$ を $G(e) := [e]_{x \to s}$ と定義すると,

$$\forall v, w \in \Sigma^* \ \ [\ G(vw) = G(v)G(w)\ ]$$

が成り立つ. 定理 5.3 より,

$$
\begin{aligned}
[A[t_1]\cdots[t_d]]_{x\to s} = G(A[t_1]\cdots[t_d]) &= G(A)G("[")G(t_1)G("]")\cdots G("[")G(t_d)G("]") \\
&= A[G(t_1)]\cdots[G(t_d)] \\
&= A[\ [t_1]_{x\to s}]\cdots[\ [t_d]_{x\to s}]
\end{aligned}
$$

となる.
(4)

$$[(e_1e_2)]_{x\to s} = ["("]_{x\to s}[e_1]_{x\to s}[e_2]_{x\to s}[")"]_{x\to s} = ([e_1]_{x\to s}[e_2]_{x\to s}).$$

その他も同様にして示せる.

定理 7.3 $l \geq 1$ とする. $m : [1,l] \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を任意に取る. 各 $i \in [1,l]$ に対して, 単射 $k_i : [1,m_i] \to \mathbb{N}$ を任意に取る. ただし, $m_i = 0$ のときは k_i は空写像である. 各 $i \in [1,l]$ に対して, $s_i \in PE_d(V,W)[\{x_{k_{ij}}\}_{j=1}^{m_i}]$ を任意に取る. ただし, $m_i = 0$ のときは, $\{x_{k_{ij}}\}_{j=1}^{m_i} := \emptyset$ と規約する. 従って, $m_i = 0$ のときは

$$PE_d(V,W)[\{x_{k_{ij}}\}_{j=1}^{m_i}] = PE_d(V,W)[\emptyset] = PE_d(V\cup\{\emptyset\},W) = PE_d(V,W)$$

である. このとき, 次が成り立つ:

$$\forall e \in PE_d(V,W)[x_1,\cdots,x_l]\ \left[\ [e]_{x\to s} \in PE_d(V,W)[\ \cup_{i=1}^{l}\{x_{k_{ij}}\}_{j=1}^{m_i}]\ \right].$$

補足 変数つきの parsing expression に変数つきの parsing expression を代入すると, 得られる文字列は再び変数つきの parsing expression になっている, という定理である. 代入先の文字列は一般的には単なる文字列であるから, それが必ず parsing expression になっていることは自明ではない.

証明 簡単のため, $PE := PE_d(V,W)[\ \cup_{i=1}^{l}\{x_{k_{ij}}\}_{j=1}^{m_i}]$ と置く.

$$\Sigma := \overline{V \cup \cup_{i=1}^{l}\{x_{k_{ij}}\}_{j=1}^{m_i} \cup W}$$

と置く.

$$M := \{e \in \Sigma^* \mid [e]_{x\to s} \in PE\}$$

と置く. PE の定義に使われる P, f に対して, $Q_{P,f}(M)$ が真であることを示せばよい. すなわち,

- $\forall a \in V \cup \{x_i\}_{i=1}^{l}\ \ [\ a \in M\ ]$,
- $\forall A \in W,\ \forall t \in M^d,\ \forall e_1, e_2 \in M\ \ [\ A[t_1]\cdots[t_d], (e_1e_2), (e_1], (e_1/e_2) \in M\ ]$

を示せばよい.

$a \in M$ について: $a \in V$ のときは, $[a]_{x\to s} = a \in PE$ であるから, 確かに $a \in M$ である. $a = x_i$ のときは,

$$[a]_{x\to s} = s_i \in PE_d(V,W)[\{x_{k_{ij}}\}_{j=1}^{m_i}] \subset PE$$

であるから, 確かに $a \in M$ である.

$A[t_1]\cdots[t_d] \in M$ について: t_i の仮定から, $f_i := [t_i]_{x\to s} \in PE$ である. また,

$$[A[t_1]\cdots[t_d]]_{x\to s} = A[[t_1]_{x\to s}]\cdots[[t_d]_{x\to s}] = A[f_1]\cdots[f_d]$$

である. PE の性質から $A[f_1]\cdots[f_d] \in PE$ となるので, 以上より, $A[t_1]\cdots[t_d] \in M$ となる.

$(e_1e_2) \in M$ について: e_i の仮定から, $[e_i]_{x\to s} \in PE$ である. よって,

$$[(e_1e_2)]_{x\to s} = ([e_1]_{x\to s}[e_2]_{x\to s}) \in PE$$

となる. よって, $(e_1e_2) \in M$ となる.

$(e_1], (e_1/e_2) \in M$ について: 上と同様にして示せる.

定理 7.4 $1 \le l' \le l$ とする. $m : [1, l'] \to \mathbb{Z}_{\ge 0}$ を任意に取る. 各 $i \in [1, l']$ に対して, 単射 $k_i : [1, m_i] \to \mathbb{N}$ を任意に取る. ただし, $m_i = 0$ のときは k_i は空写像である. 各 $i \in [1, l']$ に対して, $s_i \in PE_d(V, W)[\{x_{k_{ij}}\}_{j=1}^{m_i}]$ を任意に取る. このとき, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned}&\forall e \in PE_d(V,W)[x_1, \cdots, x_l]\\&\left[\ [e]_{(x_1,\cdots,x_{l'})\to(s_1,\cdots,s_{l'})} \in PE_d(V,W)[(\cup_{i=1}^{l}\left\{x_{k_{ij}}\right\}_{j=1}^{m_i}) \cup \{x_i\}_{i=l'+1}^{l}]\ \right].\end{aligned}$$

証明　定理 6.8 の (2) より

$$[e]_{(x_1,\cdots,x_{l'})\to s} = [e]_{(x_1,\cdots,x_l)\to(s,x_{l'+1},\cdots,x_l)}$$

である. $s_i \in PE_d(V,W)[\{x_{k_{ij}}\}_{j=1}^{m_i}]$ $(1 \le i \le l')$ と $x_i \in PE_d(V_N, V_T)_d(V,W)[x_i]$ $(l'+1 \le i \le l)$ により, 定理 7.3 から

$$[e]_{(x_1,\cdots,x_l)\to(s,x_{l'+1},\cdots,x_l)} \in PE_d(V,W)[(\cup_{i=1}^{l}\left\{x_{k_{ij}}\right\}_{j=1}^{m_i}) \cup \{x_i\}_{i=l'+1}^{l}].$$

定理 7.5 $k : [1, l] \to \mathbb{N}$ は単射とする. このとき, 次が成り立つ.

$$\forall e \in PE_d(V,W)[x_1, \cdots, x_l]\ \left[\ [e]_{x\to(x_{k_1},x_{k_2},\cdots,x_{k_l})} \in PE_d(V,W)[x_{k_1}, \cdots, x_{k_l}]\ \right].$$

補足　変数つきの parsing expression の変数名を置換したら, 得られる文字列は置換先の変数に関する parsing expression になっている, という定理である.

証明　$x_{k_i} \in PE_d(V,W)[x_{k_i}]$ $(1 \le i \le l)$ であるから, 定理 7.3 を使えばよい.

8 first order の MACRO PEG の定義

この節では, first order の MACRO PEG を定義する.

定義 8.1 集合 X, Y に対して, この節だけの限定的な記法として

$$(X \to Y)_0 := \bigcup_{A \subset X,\ B \subset Y} (A \to B)$$

と定義する. 以下では, V_1, V_2 は固定された可算無限集合とし, それぞれ通常の文字の集合とし, しかも $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ が成り立っているとする. さらに, $(x_i)_{i=1}^{\infty}, (y_i)_{i=1}^{\infty}$ は固定された通常の文字の列で, $x_i \neq x_j$かつ $y_i \neq y_j$ $(i \neq j)$ が成り立つものとし, しかも

$$\{x_i \mid i \geq 1\}, \quad \{y_i \mid i \geq 1\}, \quad (V_1 \cup V_2)$$

は互いに素とする. 以下では, V_1, V_2 の部分集合は常に「文字の集合」として使われる. また, 各 x_i と y_j は文字列の代入の用途で使われるので, 変数と見なせる.

定義 8.2 (first order MACRO PEG の定義) $d \geq 1$ とする.

$$\mathrm{foMPEG}_d \subset \mathfrak{P}(V_1) \times \mathfrak{P}(V_2) \times (V_2 \to PE_d(V_1, V_2)[x_1, \cdots, x_d])_0 \times PE_d(V_1, V_2)$$

を以下のように定義する:

$$\begin{aligned}(V_N, V_T, R, e_S) \in \mathrm{foMPEG}_d \ \Leftrightarrow_{def}\ & V_T \subset V_1,\ V_N \subset V_2 \text{ はともに空でない有限集合}, \\ & R \in (V_N \to PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]),\quad e_S \in PE_d(V_N, V_T).\end{aligned}$$

さらに, 空でない有限集合 $B \subset V_1$ に対して,

$$\mathrm{foMPEG}_d(B) := \{(V_N, V_T, R, e_S) \in \mathrm{foMPEG}_d \mid V_T = B\}$$

と定義する. さらに,

$$\mathrm{foMPEG} := \cup_{d \in \mathbb{N}} \mathrm{foMPEG}_d, \quad \mathrm{foMPEG}(B) := \cup_{d \in \mathbb{N}} \mathrm{foMPEG}_d(B)$$

と定義する. 任意の $G = (V_N, V_T, R, e_S) \in \mathrm{foMPEG}$ に対して, V_T の元のことを「終端記号」と呼び, V_N の元のことを「非終端記号」と呼ぶ. e_S は開始表現 (start expression) と呼ばれる. e_S は非終端記号**ではない**. R は「規則」と呼ばれる. また, $(A, e) \in R$ のとき, —— 同じことだが, $R(A) = e$ のとき, この (A, e) のことも「規則」と呼ばれる. また, $(A, e) \in R$ のとき,

$$A[x_1] \cdots [x_d] = e;$$

と表記することにする. この表記もまた「規則」と呼ばれる.

例 $a, b \in V_1$, $A \in V_2$ が成り立っているとして,

$$\begin{aligned}& V_T := \{a, b\}, \quad V_N := \{A\}, \\ & A[x_1] = (((aA[(ax)])/(bA[(bx)]))/x); \\ & e_S := A[((a](b])]\end{aligned}$$

とすると, $(V_N, V_T, R, e_S) \in \mathrm{foMPEG}_1$ である. この (V_N, V_T, R, e_S) が受理する言語は

$$\left\{ s^t s \mid s \in V_T^* \right\} \quad (\text{文字列長が偶数の回文全体})$$

となる. ただし, foMPEG_d の解釈の仕方をまだ定義してないので, 本当は現時点では何も言えない.

補足 今回の foMPEG_d の定義では, 全ての規則がちょうど d 個の引数を取らなければならないので, 通常の MACRO PEG よりも少し限定された定義になっている. 応用上は, 規則それぞれで引数の個数が違っているのが普通であるが, そのような foMPEG は, 十分大きな d を取ってくれば foMPEG_d の元であると見なせる. たとえば,

$$
\begin{aligned}
&V_T := \{a, b\}, \quad V_N = \{A, B, C\}, \\
&A[z][y][x] = axyz; \quad B[s][t] = sA[t][t][t]bC; \quad C = a; \\
&e_S := B[b][b]
\end{aligned}
$$

として $G := (V_N, V_T, R, e_S)$ を定義する[9]と, 各規則ごとに引数の個数が違っている. そこで, まずは, 各規則に使われる引数の個数の最大値を求める. 上の例の場合は「3」である. 次に, 3 つの異なる文字 x_1, x_2, x_3 を取り, 各規則の変数をこれらの文字に置換して次のようにする:

$$
\begin{aligned}
&V_T := \{a, b\} \quad V_N = \{A, B, C\} \\
&A[x_1][x_2][x_3] = ax_3x_2x_1; \quad B[x_1][x_2] = x_1A[x_2][x_2][x_2]bC; \quad C = a; \\
&e_S := B[b][b]
\end{aligned}
$$

次に, 各規則の左辺に注目する. 引数が 3 個未満のものは, 人工的に引数の個数を 3 個まで増やす:

$$
\begin{aligned}
&V_T := \{a, b\} \quad V_N = \{A, B, C\} \\
&A[x_1][x_2][x_3] = ax_3x_2x_1; \quad B[x_1][x_2][x_3] = x_1A[x_2][x_2][x_2]bC; \quad C[x_1][x_2][x_3] = a; \\
&e_S := B[b][b]
\end{aligned}
$$

次に, 各規則の右辺に注目する. 右辺に出現する非終端記号のうち, 引数が 3 個未満になっているものは, 人工的に引数の個数を 3 個まで増やし, その中身には a を指定する:

$$
\begin{aligned}
&V_T := \{a, b\} \quad V_N = \{A, B, C\} \\
&A[x_1][x_2][x_3] = ax_3x_2x_1; \quad B[x_1][x_2][x_3] = x_1A[x_2][x_2][x_2]bC[a][a][a]; \quad C[x_1][x_2][x_3] = a; \\
&e_S := B[b][b][a]
\end{aligned}
$$

最後に, V_N, V_T, R, e_S という記号を V'_N, V'_T, R', e'_S とでも変更して

$$
\begin{aligned}
&V'_T := \{a, b\} \quad V'_N = \{A, B, C\} \\
&A[x_1][x_2][x_3] = ax_3x_2x_1; \quad B[x_1][x_2][x_3] = x_1A[x_2][x_2][x_2]bC[a][a][a]; \quad C[x_1][x_2][x_3] = a; \\
&e'_S := B[b][b][a]
\end{aligned}
$$

と表記する. このとき, $G' := (V'_N, V'_T, R', e'_S) \in \text{foMPEG}_3$ が成り立つ. また, G と G' が生成する言語は一致することが分かる. このような変形によって, 常に引数の個数を揃えることができる. よって, 今回の限定の仕方は, 特に支障が出るような限定ではない.

補足 今回の foMPEG_d の定義では, 非終端記号が必ず 1 つは存在しなければならない. しかし, 理論的には, 非終端記号が 1 つもない MACRO PEG を考えることもできる. たとえば,

$$
\begin{aligned}
&V_T := \{a, b\} \quad V_N = \emptyset, \\
&e_S := b
\end{aligned}
$$

[9] parsing expression に書くべきカッコは省略した (ここでは本質的ではないので).

とでも定義すれば, $G := (V_N, V_T, R, e_S)$ には非終端記号が 1 つもない (特に $R = \emptyset$ である). この場合, 非終端記号を 1 つだけ増設し, その非終端記号に対する規則は自由に設定し, 例えば

$$
\begin{aligned}
&V'_T := \{a, b\} \quad V'_N := \{A\}, \\
&A[x_1] = a; \\
&e'_S := b
\end{aligned}
$$

とでも定義すれば, $G' := (V'_N, V'_T, R', e'_S) \in \mathrm{foMPEG}_1$ が成り立つ. また, G' における $A[x_1]$ は実質的には使われないので, G と G' が生成する言語は一致することが分かる. よって, 「非終端記号は 1 つ以上」という定義のままでも, 非終端記号が 0 個の MACRO PEG を実質的にはサポートしている.

定義 8.3 (EG の定義) $d \geq 1$ とする.

$$
\mathrm{EG}_d \subset \mathfrak{P}(V_1) \times \mathfrak{P}(V_2) \times (V_2 \to PE_d(V_1, V_2)[x_1, \cdots, x_d])_0
$$

を以下のように定義する:

$$
\begin{aligned}
(V_N, V_T, R) \in \mathrm{EG}_d \ \Leftrightarrow_{def} \ & V_T \subset V_1,\ V_N \subset V_2 \text{ はともに空でない有限集合}, \\
& R \in (V_N \to PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]).
\end{aligned}
$$

補足　任意の $(V_N, V_T, R) \in \mathrm{EG}_d$ と任意の $e \in PE_d(V_N, V_T)$ に対して, $(V_N, V_T, R, e) \in \mathrm{foMPEG}_d$ が成り立つ. 逆に, 任意の $(V_N, V_T, R, e_S) \in \mathrm{foMPEG}_d$ に対して, $(V_N, V_T, R) \in \mathrm{EG}_d$ が成り立つ. よって, foMPEG_d から e_S を取り除いたものが EG_d である. このような対象をどのように名づければいいのか思いつかなかったので, foMPEG から末尾の EG だけを取って EG_d と表記した. 良い命名とは言えないが, ご了承ください.

9　parsing expression の解釈の仕方

この節では, parsing expression に文字列を適用するときの解釈の仕方を定義する．より具体的には, $(V_N, V_T, R) \in \mathrm{EG}_d$ と $e \in PE_d(V_N, V_T)$ が与えられているとして, 各 $v \in V_T^*$ を e に適用したときの解釈の仕方を定義する．最も分かりやすい定義の仕方は, foMPEG の具体的な実装を C 言語なり何なりで 1 つ書き下して, 「このプログラムで v を e に適用したときの動作の仕方が parsing expression の解釈の定義だ」と言ってしまうことである．しかし, このような定義の場合, 与えられた実装と完全に一致する実装でなければ, 定義としては認められないことになってしまう．そこで, より柔軟性の高い定義を模索する．何が成り立っていてほしいのかという要件を列挙し, 「その要件さえ満たせば, どんな実装でも構わない」という形にしたい．従って, 定義の中には, 具体的な実装がなるべく出現しないようにしたい．すると,「入力」と「出力」のペアのみを全て列挙し, その一覧表を「要件」とするくらいしか方法がない．実際には, 「入力」と「出力」のほかに parsing expression が必要であるから, 結局,

$$(\text{parsing expression},\ \text{入力する文字列},\ \text{出力結果})$$

という三つ組みを列挙することで, 定義を行うことになる．すなわち,

$$(e, v, v_f) \quad (v_f \text{は出力結果})$$

という三つ組みを列挙することになる．v を e に適用して成功したときは, 出力結果は「残りの文字列」とする．この場合, v_f は v のサフィックスとなる．v を e に適用して失敗したときは, 「失敗」を表す特殊な記号 $\mathtt{f}$ を出力結果とする．よって, この場合は $v_f = \mathtt{f}$ となる．v を e に適用して無限ループに陥るときは, 解釈が終わらず出力結果が返ってこないので, (e, v, v_f) そのものを何も列挙しない．これらの考察を, [1] の流儀に習って定義すると, 以下のようになる:

定義 9.1 (parsing expression の解釈の定義) ここでは, 文字 $\mathtt{f}$ は V_1^* には含まれないとする．$a \in V_1$ と $v \in V_1^*$ と $v' \in V_1^* \cup \{\mathtt{f}\}$ に対して,

$$\langle v \rangle_a := v^{+1} \quad (a \prec v \text{ のとき}),\ \mathtt{f} \quad (\text{それ以外のとき}),$$
$$\langle v, v' \rangle := v \quad (v' = \mathtt{f} \text{ のとき}),\ \mathtt{f} \quad (v' \neq \mathtt{f} \text{ のとき})$$

として $\langle v \rangle_a$ と $\langle v, v' \rangle$ を定義する．$d \geq 1$ を任意に取る．人工的ではあるが, 任意の集合 $V \subset V_1$ と任意の集合 $W \subset V_2$ に対して,

$$[V, W]_d := PE_d(V, W) \times V^* \times (V^* \cup \{\mathtt{f}\})$$

と定義する．次に, $(V_N, V_T, R) \in \mathrm{EG}_d$ を任意に取る．

$$X := [V_N, V_T]_d,$$
$$S := V_T \times V_N \times PE_d(V_N, V_T)^d \times PE_d(V_N, V_T)^2 \times (V_T^*)^2 \times (V_T^* \cup \{\mathtt{f}\})$$

と置く．$s = (a, A, t, (e_1, e_2), (v, v_1), v_f) \in S$ と集合 U に関する命題 $P_i(s, U)$ $(1 \leq i \leq 7)$ そして写

像 $f_i : S \to X$ $(1 \le i \le 7)$ を以下のように定義する:

$$
\begin{aligned}
&[\ P_1(s,U):\ \mathit{true}\ ],\quad f_1(s) = (a, v, \langle v\rangle_a).\\
&[\ P_2(s,U):\ ([R(A)]_{x\to t}, v, v_f) \in U\ ],\quad f_2(s) = (A[t_1]\cdots[t_d], v, v_f).\\
&[\ P_3(s,U):\ (e, v, v_f) \in U\ ],\quad f_3(s) = (\langle e\rangle, v, \langle v, v_f\rangle).\\
&[\ P_4(s,U):\ (e_1, v, v_1), (e_2, v_1, v_f) \in U\ ]\quad f_4(s) = ((e_1 e_2), v, v_f).\\
&[\ P_5(s,U):\ (e_1, v, \mathtt{f}) \in U\ ],\quad f_5(s) = ((e_1 e_2), v, \mathtt{f}).\\
&[\ P_6(s,U):\ (e_1, v, v_1) \in U\ ],\quad f_6(s) = ((e_1/e_2), v, v_1).\\
&[\ P_7(s,U):\ (e_1, v, \mathtt{f}), (e_2, v, v_f) \in U\ ],\quad f_7(s) = ((e_1/e_2), v, v_f).
\end{aligned}
$$

ただし, P_2 のところでは $x = (x_1, \cdots, x_d)$ のつもりである. 上記の P_i は単調性の条件を満たす. $T_{P,f}$ のことを $\rho(d, V_N, V_T, R)$ と定義する. すなわち, $\rho(d, V_N, V_T, R) := T_{P,f}$ と定義する. この $\rho(d, V_N, V_T, R)$ を, parsing expression の解釈の定義として採用する.

補足 9.2 $\rho(d, V_N, V_T, R) \subset [V_N, V_T]_d$ である. また, $\rho(d, V_N, V_T, R)$ は, 次の条件を満たす集合 U のうち, 集合の包含関係に関して最小のものである:

$$
\begin{aligned}
&\forall a \in V_T,\ \forall A \in V_N,\ \forall t \in PE_d(V_N, V_T)^d,\ \forall e_1, e_2 \in PE_d(V_N, V_T),\ \forall v, v_1 \in V_T^*,\ v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}\\
&s.t.\ \text{次が全て成り立つ}:\\
&(A1)\quad (a, v, \langle v\rangle_a) \in U.\\
&(A2)\quad ([R(A)]_{x\to t}, v, v_f) \in U \Rightarrow (A[t_1]\cdots[t_d], v, v_f) \in U.\\
&(A3)\quad (e, v, v_f) \in U \Rightarrow (\langle e\rangle, v, \langle v, v_f\rangle) \in U.\\
&(A4)\quad (e_1, v, v_1), (e_2, v_1, v_f) \in U \Rightarrow ((e_1 e_2), v, v_f) \in U.\\
&(A5)\quad (e_1, v, \mathtt{f}) \in U \Rightarrow ((e_1 e_2), v, \mathtt{f}) \in U.\\
&(A6)\quad (e_1, v, v_1) \in U \Rightarrow ((e_1/e_2), v, v_1) \in U.\\
&(A7)\quad (e_1, v, \mathtt{f}), (e_2, v, v_f) \in U \Rightarrow ((e_1/e_2), v, v_f) \in U.
\end{aligned}
$$

従って, 集合 U が上の条件を満たすなら, 必ず $\rho(d, V_N, V_T, R) \subset U$ が成り立つ. また, 命題 $Q_{P,f}(U)$ は上の条件そのものである.

補足 集合 $\rho(d, V_N, V_T, R)$ は, 解釈の定義として列挙すべき三つ組み (e, v, v_f) を全て含んでいる. なおかつ, それ以外の余計な三つ組みは全く含まない. よって, この $\rho(d, V_N, V_T, R)$ は,「解釈の定義」と呼ぶに相応しい集合になっている.

補足 $\rho := \rho(d, V_N, V_T, R)$ と置く. ρ の定義から, 任意の $a \in V_T$ と任意の $v \in V_T^*$ に対して $(a, v, \langle v\rangle_a) \in \rho$ が成り立つ. $V_T \neq \emptyset$ であるから, $a \in V_T$ を 1 つ取れば, $v = \varepsilon \in V_T^*$ に対して $(a, v, \langle v\rangle_a) \in \rho$ である. すなわち, $(a, \varepsilon, \mathtt{f}) \in \rho$ である. よって, $\rho(d, V_N, V_T, R) \neq \emptyset$ である.

定理 9.3 $\rho := \rho(d, V_N, V_T, R)$ と置く. 任意の $\alpha \in \rho$ に対して, ある

$$(a, A, t, (e_1, e_2), (v, v_1), v_f) \in V_T \times V_N \times PE_d(V_N, V_T)^d \times PE_d(V_N, V_T)^2 \times (V_T^*)^2 \times (V_T^* \cup \{\mathtt{f}\})$$

が存在して, 次の 7 項のうち少なくとも 1 つが成り立つ.

$$
\begin{aligned}
&(B1)\quad \alpha = (a, v, \langle v\rangle_a).\\
&(B2)\quad ([R(A)]_{x\to t}, v, v_f) \in \rho,\ \ \alpha = (A[t_1]\cdots[t_d], v, v_f).\\
&(B3)\quad (e, v, v_f) \in \rho,\quad \alpha = ((e], v, \langle v, v_f\rangle).\\
&(B4)\quad (e_1, v, v_1), (e_2, v_1, v_f) \in \rho,\quad \alpha = ((e_1 e_2), v, v_f).\\
&(B5)\quad (e_1, v, \mathtt{f}) \in \rho,\quad \alpha = ((e_1 e_2), v, \mathtt{f}).\\
&(B6)\quad (e_1, v, v_1) \in \rho,\quad \alpha = ((e_1/e_2), v, v_1).\\
&(B7)\quad (e_1, v, \mathtt{f}), (e_2, v, v_f) \in \rho,\quad \alpha = ((e_1/e_2), v, v_f).
\end{aligned}
$$

証明　$\rho(d, V_N, V_T, R) = T_{P,f} = \cup_{i=1}^{7} \{f_i(s) \mid s \in S,\ P_i(s, \rho(d, V_N, V_T, R))\}$ を使えばよい.

定理 9.4

$$
\begin{gathered}
\forall e \in PE_d(V_N, V_T),\ \forall w \in V_T^*,\ \forall w_1, w_2 \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}\\
[\ (e, w, w_1), (e, w, w_2) \in \rho(d, V_N, V_T, R) \Rightarrow w_1 = w_2\ ].
\end{gathered}
$$

証明　$\rho := \rho(d, V_N, V_T, R)$ と置く.

$$
M := \{(e, w, x) \in [V_N, V_T]_d \mid \forall y \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}\ \ [\ (e, w, y) \in \rho \Rightarrow y = x\ ]\ \}
$$

と置く. $\rho \subset M$ が成り立つことを言えば十分である. そのためには, ρ の定義に使われる P, f に対して, $Q_{P,f}(M)$ が真であることを示せば十分である. よって, M が補足 9.2 の条件を満たすことを言えばよい.

$$
(a, A, t, (e_1, e_2), (v, v_1), v_f) \in V_T \times V_N \times PE_d(V_N, V_T)^d \times PE_d(V_N, V_T)^2 \times (V_T^*)^2 \times (V_T^* \cup \{\mathtt{f}\})
$$

を任意に取る.

$(A1)$: $(a, v, \langle v\rangle_a) \in M$ を示したい.

$$
\forall y \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}\ \ [\ (a, v, y) \in \rho \Rightarrow y = \langle v\rangle_a\ ]
$$

を示せばよい. $(a, v, y) \in \rho$ とする. 定理 9.3 より, $\alpha := (a, v, y)$ は 7 項の (B_i) のうち少なくとも 1 つを満たす. 定理 5.10 により, $i = 1$ しか起こりえない. よって, $(a, v, y) = (a', v', \langle v'\rangle_{a'})$ となる. 特に, $a = a'$, $v = v'$ となる. よって, $y = \langle v\rangle_a$ となる. よって, 成立.

$(A2)$: $([R(A)]_{x\to t}, v, v_f) \in M$ とする. $(A[t_1]\cdots[t_d], v, v_f) \in M$ を示したい. $(A[t_1]\cdots[t_d], v, y) \in \rho$ とする. $y = v_f$ を示せばよい. $(A[t_1]\cdots[t_d], v, y)$ が満たす (B_i) は $i = 2$ しかない (定理 5.10 より). よって, $(A[t_1]\cdots[t_d], v, y) = (A'[t_1']\cdots[t_d'], v', v_f')$ かつ $([R(A')]_{x\to t'}, v', v_f') \in \rho$ となる. 特に $A = A'$ かつ $t = t'$ かつ $v = v'$ となるので, $([R(A)]_{x\to t}, v, v_f') \in \rho$ となる. $([R(A)]_{x\to t}, v, v_f) \in M$ だったから, $v_f = v_f'$ となる. よって, $y = v_f' = v_f$ となる. よって, 成立.

$(A3)$: $(e, v, v_f) \in M$ とする. $((e], v, \langle v, v_f\rangle) \in M$ を示したい. $((e], v, y) \in \rho$ とする. $y = \langle v, v_f\rangle$ を示せばよい. $((e], v, y)$ が満たす (B_i) は $i = 3$ しかない (定理 5.10 より). よって, $((e], v, y) =$

$((e'], v', \langle v', v'_f\rangle)$ かつ $(e', v', v'_f) \in \rho$ となる．特に $e = e'$ かつ $v = v'$ となる．よって $(e, v, v'_f) \in \rho$ となる．$(e, v, v_f) \in M$ だったから, $v_f = v'_f$ となる．よって $y = \langle v', v'_f\rangle = \langle v, v_f\rangle$ となる．よって, 成立.

(A4): $(e_1, v, v_1), (e_2, v_1, v_f) \in M$ とする．$((e_1e_2), v, v_f) \in M$ を示したい．$((e_1e_2), v, y) \in \rho$ とする．$y = v_f$ を示せばよい．$((e_1e_2), v, y)$ が満たす (B_i) は $i = 4, 5$ のいずれかである (定理 5.10 より)．$i = 5$ とすると, $((e_1e_2), v, y) = ((e'_1e'_2), v', \mathtt{f})$ かつ $(e'_1, v', \mathtt{f}) \in \rho$ となる．特に $e_1 = e'_1$, $e_2 = e'_2$, $v = v'$ となる．よって $(e_1, v, \mathtt{f}) \in \rho$ となるので, $(e_1, v, v_1) \in M$ により $v_1 = \mathtt{f}$ となる．これは矛盾．よって, $i = 4$ となるしかない．よって, $((e_1e_2), v, y) = ((e'_1e'_2), v', v'_f)$ かつ $(e'_1, v', v'_1), (e'_2, v'_1, v'_f) \in \rho$ となる．特に $e_1 = e'_1$, $e_2 = e'_2$, $v = v'$ となる．よって $(e_1, v, v'_1) \in \rho$ となるので, $(e_1, v, v_1) \in M$ により $v_1 = v'_1$ となる．よって $(e_2, v_1, v'_f) \in \rho$ となるので, $(e_2, v_1, v_f) \in M$ により $v_f = v'_f$ となる．よって, $y = v'_f = v_f$ となる．よって, 成立.

(A5): $(e_1, v, f) \in M$ とする．$((e_1e_2), v, \mathtt{f}) \in M$ を示したい．$((e_1e_2), v, y) \in \rho$ とする．$y = \mathtt{f}$ を示せばよい．$((e_1e_2), v, y)$ が満たす (B_i) は $i = 4, 5$ のいずれかである (定理 5.10 より)．$i = 4$ とすると, $((e_1e_2), v, y) = ((e'_1e'_2), v', v'_f)$ かつ $(e'_1, v', v'_1), (e'_2, v'_1, v'_f) \in \rho$ かつ $v'_1 \in V_T^*$ となる．特に $e_1 = e'_1$, $e_2 = e'_2$, $v = v'$ となる．よって $(e_1, v, v'_1) \in \rho$ となるので, $(e_1, v, \mathtt{f}) \in M$ により $\mathtt{f} = v'_1$ となる．これは $v'_1 \in V_T^*$ に矛盾．よって, $i = 5$ となるしかない．よって, $((e_1e_2), v, y) = ((e'_1e'_2), v', \mathtt{f})$ かつ $(e'_1, v', \mathtt{f}) \in \rho$ となる．特に $y = \mathtt{f}$ となる．よって, 成立.

(A6): $(e_1, v, v_1) \in M$ とする．$((e_1/e_2), v, v_1) \in M$ を示したい．$((e_1/e_2), v, y) \in \rho$ とする．$y = v_1$ を示せばよい．$((e_1/e_2), v, y)$ が満たす (B_i) は $i = 6, 7$ のいずれかである (定理 5.10 より)．$i = 7$ とすると, $((e_1/e_2), v, y) = ((e'_1/e'_2), v', \mathtt{f})$ かつ $(e'_1, v', \mathtt{f}), (e'_2, v', \mathtt{f}) \in \rho$ となる．特に $e_1 = e'_1$, $e_2 = e'_2$, $v = v'$ となる．よって $(e_1, v, \mathtt{f}) \in \rho$ となるので, $(e_1, v, v_1) \in M$ により, $\mathtt{f} = v_1$ となる．これは矛盾．よって, $i = 6$ となるしかない．よって, $((e_1/e_2), v, y) = ((e'_1/e'_2), v', v'_1)$ かつ $(e'_1, v', v'_1) \in \rho$ となる．特に $e_1 = e'_1$, $e_2 = e'_2$, $v = v'$ となる．よって $(e_1, v, v'_1) \in \rho$ となるので, $(e_1, v, v_1) \in M$ により, $v_1 = v'_1$ となる．よって, $y = v'_1 = v_1$ となる．よって, 成立.

(A7): $(e_1, v, \mathtt{f}), (e_2, v, v_f) \in M$ とする．$((e_1/e_2), v, v_f) \in M$ を示したい．$((e_1/e_2), v, y) \in \rho$ とする．$y = v_f$ を示せばよい．$((e_1/e_2), v, y)$ が満たす (B_i) は $i = 6, 7$ のいずれかである (定理 5.10 より)．$i = 6$ とすると, $((e_1/e_2), v, y) = ((e'_1/e'_2), v', v'_1)$ かつ $(e'_1, v', v'_1) \in \rho$ かつ $v'_1 \in V_T^*$ となる．特に $e_1 = e'_1, e_2 = e'_2, v = v'$ となる．よって $(e_1, v, v'_1) \in \rho$ となるので, $(e_1, v, \mathtt{f}) \in M$ により, $\mathtt{f} = v'_1$ となる．これは $v'_1 \in V_T^*$ に矛盾．よって, $i = 7$ となるしかない．よって, $((e_1/e_2), v, y) = ((e'_1/e'_2), v', v'_f)$ かつ $(e'_1, v', \mathtt{f}), (e'_2, v', v'_f) \in \rho$ となる．特に $e_1 = e'_1$, $e_2 = e'_2$, $v = v'$ となる．よって $(e_2, v, v'_f) \in \rho$ となるので, $(e_2, v, v_f) \in M$ により, $v_f = v'_f$ となる．よって, $y = v'_f = v_f$ となる．よって, 成立.

定理 9.5 $\rho := \rho(d, V_N, V_T, R)$ と置く．任意の $\alpha \in \rho$ に対して, 次の 7 項のうち 1 つだけが成り

立つ.

$(C1)$ $\exists! a \in V_T\ [\ \alpha = (a, v, \langle v \rangle_a)\ ]$.

$(C2)$ $\exists! A \in V_N,\ \exists! t \in PE_d(V_N, V_T)^d,\ \exists! v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}$
$[\ ([R(A)]_{x \to t}, v, v_f) \in \rho,\ \alpha = (A[t_1] \cdots [t_d], v, v_f)\ ]$.

$(C3)$ $\exists! v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}\ [\ (e, v, v_f) \in \rho,\ \alpha = ((e], v, \langle v, v_f \rangle)\ ]$.

$(C4)$ $\exists! e_1, e_2 \in PE_d(V_N, V_T),\ \exists! v_1 \in V_T^*,\ \exists! v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}$
$[\ (e_1, v, v_1), (e_2, v_1, v_f) \in \rho,\ \alpha = ((e_1 e_2), v, v_f)\ ]$.

$(C5)$ $\exists! e_1, e_2 \in PE_d(V_N, V_T)\ [\ (e_1, v, \mathtt{f}) \in \rho,\ \alpha = ((e_1 e_2), v, \mathtt{f})\ ]$.

$(C6)$ $\exists! e_1, e_2 \in PE_d(V_N, V_T),\ \exists! v_1 \in V_T^*\ [\ (e_1, v, v_1) \in \rho,\ \alpha = ((e_1 / e_2), v, v_1)\ ]$.

$(C7)$ $\exists! e_1, e_2 \in PE_d(V_N, V_T),\ \exists! v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}$
$[\ (e_1, v, \mathtt{f}), (e_2, v, v_f) \in \rho,\ \alpha = ((e_1 / e_2), v, v_f)\ ]$.

証明　まず, 異なる 2 つの (C_i) が同時に成り立つことはないことを示す.
$(C1)$ と同時に起こりえる異なる (C_i) は存在しない.
$(C2)$ と同時に起こりえる異なる (C_i) は存在しない.
$(C3)$ と同時に起こりえる異なる (C_i) は存在しない.
$(C4)$ と同時に起こりえる異なる (C_i) は $(C5)$ だけである. このとき, $\alpha = ((e_1 e_2), v, v_f) = ((e'_1 e'_2), v', \mathtt{f})$, $(e_1, v, v_1), (e_2, v_1, v_f), (e'_1, v', \mathtt{f}) \in \rho$ となる. 特に $e_1 = e'_1$, $e_2 = e'_2$, $v = v'$ となるので, $(e_1, v, \mathtt{f}) \in \rho$ となる. 一方で, $(e_1, v, v_1) \in \rho$ なのだった. $\mathtt{f} \neq v_1$ であるから, 定理 9.4 に矛盾する.
$(C5)$ と同時に起こりえる異なる (C_i) は $(C4)$ だけであり, 既に矛盾が出ている.
$(C6)$ と同時に起こりえる異なる (C_i) は $(C7)$ だけである. このとき, $\alpha = ((e_1 / e_2), v, v_1) = ((e'_1 / e'_2), v', v'_f)$, $(e_1, v, v_1), (e'_1, v', \mathtt{f}), (e'_2, v', v'_f) \in \rho$ となる. 特に $e_1 = e'_1$, $e_2 = e'_2$, $v = v'$ となるので, $(e_1, v, \mathtt{f}) \in \rho$ となる. 一方で, $(e_1, v, v_1) \in \rho$ なのだった. $\mathtt{f} \neq v_1$ であるから, 定理 9.4 に矛盾する.
$(C7)$ と同時に起こりえる異なる (C_i) は $(C6)$ だけであり, 既に矛盾が出ている.
以上より, 異なる 2 つの (C_i) が同時に成り立つことはない. あとは, 少なくとも 1 つの (C_i) が成り立つことを言えばよい. 定理 9.3 より, 少なくとも 1 つの (B_i) が成り立つ. 各 i について, もし (B_i) が成り立つならば, 同じ i に対して (C_i) が成り立つことを示す. これが示せれば十分である.

$(B1)$ が成り立つ場合は, $\alpha = (a, v, \langle v \rangle_a)$ と表せている. 別の a', v' に対して $\alpha = (a', v', \langle v' \rangle_{a'})$ とも表せるとすると, $a = a'$, $v = v'$ が成り立つので, $\langle v \rangle_a = \langle v' \rangle_{a'}$ も成り立ち, $(C1)$ が成り立つ.

$(B2)$ の場合は, $([R(A)]_{x \to t}, v, v_f) \in \rho$, $\alpha = (A[t_1] \cdots [t_d], v, v_f)$ と表せている. 別の A', e', t', v', v'_f に対して $([R(A')]_{x \to t'}, v', v'_f) \in \rho$, $\alpha = (A'[t'_1] \cdots [t'_d], v', v'_f)$ とも表せるとすると, $A = A'$, $t = t'$, $v = v'$, $v_f = v'_f$ が成り立つので, $(C2)$ が成り立つ.

$(B3)$ の場合は, $(e, v, v_f) \in \rho$, $\alpha = ((e], v, \langle v, v_f \rangle)$ と表せている. 別の e', v', v'_f に対して $(e', v', v'_f) \in \rho$, $\alpha = ((e'], v', \langle v', v'_f \rangle)$ とも表せるとすると, $e = e'$, $v = v'$ が成り立つので, $(e, v, v'_f) \in \rho$ となる. 一方で, $(e, v, v_f) \in \rho$ なのだった. よって, 定理 9.4 より $v_f = v'_f$ となる. よって, $(C3)$ が成り立つ.

$(B4)$ の場合は, $(e_1, v, v_1), (e_2, v_1, v_f) \in \rho$, $\alpha = ((e_1 e_2), v, v_f)$ と表せている. 別の e_1', e_2', v', v_1', v_f' に対して $(e_1', v', v_1'), (e_2', v_1', v_f') \in \rho$, $\alpha = ((e_1' e_2'), v', v_f')$ とも表せるとすると, $e_1 = e_1'$, $e_2 = e_2'$, $v = v'$ が成り立つので, $(e_1, v, v_1') \in \rho$ となる. 一方で, $(e, v, v_1) \in \rho$ なのだった. よって, 定理 9.4 より $v_1 = v_1'$ となる. よって, $(e_2, v_1, v_f') \in \rho$ となる. 一方で, $(e_2, v_1, v_f) \in \rho$ なのだった. よって, 定理 9.4 より $v_f = v_f'$ となる. よって, $(C4)$ が成り立つ.

$(B5)$ の場合は, $(e_1, v, \mathtt{f}) \in \rho$, $\alpha = ((e_1 e_2), v, \mathtt{f})$ と表せている. 別の e_1', e_2', v' に対して $(e_1', v', \mathtt{f}) \in \rho$, $\alpha = ((e_1' e_2'), v', \mathtt{f})$ とも表せるとすると, $e_1 = e_1'$, $e_2 = e_2'$, $v = v'$ が成り立つので, $(C5)$ が成り立つ.

$(B6)$ の場合は, $(e_1, v, v_1) \in \rho$, $\alpha = ((e_1/e_2), v, v_1)$ と表せている. 別の e_1', e_2', v', v_1' に対して $(e_1', v', v_1') \in \rho$, $\alpha = ((e_1'/e_2'), v', v_1')$ とも表せるとすると, $e_1 = e_1'$, $e_2 = e_2'$, $v = v'$ が成り立つので, $(e_1, v, v_1') \in \rho$ となる. 一方で, $(e_1, v, v_1) \in \rho$ なのだった. よって, 定理 9.4 より $v_1 = v_1'$ となる. よって, $(C6)$ が成り立つ.

$(B7)$ の場合は, $(e_1, v, \mathtt{f}), (e_2, v, v_f) \in \rho$, $\alpha = ((e_1/e_2), v, v_f)$ と表せている. 別の e_1', e_2', v', v_f' に対して $(e_1', v', \mathtt{f}), (e_2', v', v_f') \in \rho$, $\alpha = ((e_1'/e_2'), v', v_f')$ とも表せるとすると, $e_1 = e_1'$, $e_2 = e_2'$, $v = v'$ が成り立つので, $(e_2, v, v_f') \in \rho$ となる. 一方で, $(e_2, v, v_f) \in \rho$ なのだった. よって, 定理 9.4 より, $v_f = v_f'$ となる. よって, $(C7)$ が成り立つ.

定理 9.6 $\rho := \rho(d, V_N, V_T, R)$ と置く. 任意の $v \in V_T^*$ に対して, 次が全て成り立つ.

$(D1)$ $\forall a \in V_T,\ \forall v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}\ \ [\ (a, v, v_f) \in \rho \Rightarrow v_f = \langle v \rangle_a\ ]$.

$(D2)$ $\forall A \in V_N,\ \forall t \in PE_d(V_N, V_T)^d,\ \forall v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}$
$[\ (A[t_1] \cdots [t_d], v, v_f) \in \rho \Rightarrow ([R(A)]_{x \to t}, v, v_f) \in \rho\ ]$.

$(D3)$ $\forall e \in PE,\ \forall v_1 \in V_T^*\ \ [\ ((e], v, v_1) \in \rho \Rightarrow v_1 = v,\ (e, v, \mathtt{f}) \in \rho\ ]$.

$(D4)$ $\forall e \in PE\ \ [\ ((e], v, \mathtt{f}) \in \rho \Rightarrow \exists! v_1 \in V_T^*\ \ [\ (e, v, v_1) \in \rho\ ]\ ]$.

$(D5)$ $\forall e_1, e_2 \in PE_d(V_N, V_T)\ [\ ((e_1 e_2), v, \mathtt{f}) \in \rho \Rightarrow$
$[\ (e_1, v, \mathtt{f}) \in \rho\ \vee\ \exists! v_1 \in V_T^*\ \ [\ (e_1, v, v_1), (e_2, v_1, \mathtt{f}) \in \rho\ ]\ ]]$.

$(D6)$ $\forall e_1, e_2 \in PE_d(V_N, V_T),\ \forall v_2 \in V_T^*\ [\ ((e_1 e_2), v, v_2) \in \rho \Rightarrow$
$\exists! v_1 \in V_T^*\ \ [\ (e_1, v, v_1), (e_2, v_1, v_2) \in \rho\ ]\ ]$.

$(D7)$ $\forall e_1, e_2 \in PE_d(V_N, V_T),\ \forall v_1 \in V_T^*\ [\ ((e_1/e_2), v, v_1) \in \rho \Rightarrow$
$[\ (e_1, v, v_1) \in \rho\ \vee\ \ [\ (e_1, v, \mathtt{f}), (e_2, v, v_1) \in \rho\ ]\ ]$.

$(D8)$ $\forall e_1, e_2 \in PE_d(V_N, V_T)\ \ [\ ((e_1/e_2), v, \mathtt{f}) \in \rho \Rightarrow (e_1, v, \mathtt{f}), (e_2, v, \mathtt{f}) \in \rho\ ]$.

証明 $(D1)$: $(a, v, v_f) \in \rho$ とする. 一方で, ρ の定義から $(a, v, \langle v \rangle_a) \in \rho$ である. 定理 9.4 から, $v_f = \langle v \rangle_a$ である.

$(D2)$: $(A[t_1] \cdots [t_d], v, v_f) \in \rho$ とする. 定理 9.3 より, ある i に対して $(A[t_1] \cdots [t_d], v, v_f)$ は (B_i) を満たす. よって, $i = 2$ となるしかない. よって, $([R(A')]_{x \to t'}, v', v_f') \in \rho$, $(A[t_1] \cdots [t_d], v, v_f, v, v_f)$ $= (A'[t_1'] \cdots [t_d'], v', v_f')$ と表せる. 特に $A = A'$, $t = t'$, $v = v'$, $v_f = v_f'$ である. よって, $([R(A)]_{x \to t}, v, v_f) \in \rho$ となる.

$(D3)$: $((e], v, v_1) \in \rho$ とする．定理 9.3 より，ある i に対して $((e], v, v_1)$ は (B_i) を満たす．よって，$i = 3$ となるしかない．よって，$(e', v', v'_f) \in \rho$, $((e], v, v_1) = ((e'], v', \langle v', v'_f \rangle)$ と表せる．特に $e = e'$, $v = v'$, $v_1 = \langle v', v'_f \rangle$ である．もし $v'_f \neq \mathtt{f}$ なら，$v_1 = \langle v', v'_f \rangle = \mathtt{f}$ となって矛盾するので，$v'_f = \mathtt{f}$ となる．$(e', v', v'_f) \in \rho$ だったから，$(e, v, \mathtt{f}) \in \rho$ となる．さらに，$v_1 = \langle v', v'_f \rangle = \langle v, \mathtt{f} \rangle = v$ である．

$(D4)$: $((e], v, \mathtt{f}) \in \rho$ とする．定理 9.3 より，ある i に対して $((e], v, \mathtt{f})$ は (B_i) を満たす．よって，$i = 3$ となるしかない．よって，$(e', v', v'_f) \in \rho$, $((e], v, \mathtt{f}) = ((e'], v', \langle v', v'_f \rangle)$ と表せる．特に $e = e'$, $v = v'$, $\mathtt{f} = \langle v', v'_f \rangle$ である．もし $v'_f = \mathtt{f}$ なら，$\mathtt{f} = \langle v', v'_f \rangle = v'$ となって矛盾するので，$v'_f \neq \mathtt{f}$ となる．特に $v'_f \in V_T^*$ となる．$(e', v', v'_f) \in \rho$ だったから，$(e, v, v'_f) \in \rho$ となる．よって，$v_1 := v'_f \in V_T^*$ と置けば，$(e, v, v_1) \in \rho$ である．このような v_1 の一意性は，定理 9.4 から従う．

$(D5)$: $((e_1 e_2), v, \mathtt{f}) \in \rho$ とする．定理 9.3 より，ある i に対して (e_1, v, f) は (B_i) を満たす．よって，$i = 4, 5$ となるしかない．$i = 4$ のときは，$(e'_1, v', v'_1), (e'_2, v'_1, v'_f) \in \rho$, $((e_1 e_2), v, \mathtt{f}) = ((e'_1 e'_2), v', v'_f)$ となる．特に $e_1 = e'_1$, $e_2 = e'_2$, $v = v'$, $\mathtt{f} = v'_f$ となる．よって $(e_1, v, v'_1), (e_2, v'_1, \mathtt{f}) \in \rho$ となる．よって，$v_1 := v'_1 \in V_T^*$ と置けばよい．このような v_1 の一意性は，定理 9.4 から従う．
$i = 5$ のときは，$(e'_1, v', \mathtt{f}) \in \rho$, $((e_1 e_2), v, \mathtt{f}) = ((e'_1 e'_2), v', v'_f)$ となる．特に $e_1 = e'_1$, $v = v'$, $\mathtt{f} = v'_f$ となる．よって $(e_1, v, \mathtt{f}) \in \rho$ となる．よって，成立．

$(D6)$: $((e_1 e_2), v, v_2) \in \rho$ とする．定理 9.3 より，ある i に対して (e_1, v, v_2) は (B_i) を満たす．よって，$i = 4, 5$ となるしかない．$v_2 \neq \mathtt{f}$ であるから，$i = 4$ となるしかない．よって，$(e'_1, v', v'_1), (e'_2, v'_1, v'_f) \in \rho$, $((e_1 e_2), v, v_2) = ((e'_1 e'_2), v', v'_f)$ となる．特に $e_1 = e'_1$, $e_2 = e'_2$, $v = v'$, $v_2 = v'_f$ となる．よって $(e_1, v, v'_1), (e_2, v'_1, v_2) \in \rho$ となる．よって，$v_1 := v'_1 \in V_T^*$ と置けば $(e_1, v, v_1), (e_2, v_1, v_2) \in \rho$ となる．このような v_1 の一意性は，定理 9.4 から従う．

$(D7)$: $((e_1/e_2), v, v_1) \in \rho$ とする．定理 9.3 より，ある i に対して $((e_1/e_2), v, v_1)$ は (B_i) を満たす．よって，$i = 6, 7$ となるしかない．$i = 6$ のときは，$(e'_1, v', v'_1) \in \rho$, $((e_1/e_2), v, v_1) = ((e'_1/e'_2), v', v'_1)$ となる．特に $e_1 = e'_1$, $e_2 = e'_2$, $v = v'$, $v_1 = v'_1$ となる．よって，$(e_1, v, v_1) \in \rho$ となる．$i = 7$ のときは，$(e'_1, v', \mathtt{f}), (e'_2, v', v'_f) \in \rho$, $((e_1/e_2), v, v_1) = ((e'_1/e'_2), v', v'_f)$ となる．特に $e_1 = e'_1$, $e_2 = e'_2$, $v = v'$, $v_1 = v'_f$ となる．よって，$(e_1, v, \mathtt{f}), (e_2, v, v_1) \in \rho$ となる．

$(D8)$: $((e_1/e_2), v, \mathtt{f}) \in \rho$ とする．定理 9.3 より，ある i に対して $((e_1/e_2), v, \mathtt{f})$ は (B_i) を満たす．よって，$i = 6, 7$ となるしかない．$\mathtt{f}$ の項に注意して，$i = 7$ となるしかない．よって，$(e'_1, v', \mathtt{f}), (e'_2, v', v'_f) \in \rho$, $((e_1/e_2), v, \mathtt{f}) = ((e'_1/e'_2), v', v'_f)$ となる．特に $e_1 = e'_1$, $e_2 = e'_2$, $v = v'$, $\mathtt{f} = v'_f$ となる．よって，$(e_1, v, \mathtt{f}), (e_2, v, \mathtt{f}) \in \rho$ となる．

定理 9.7 $d \geq 1$ とする．$(V_N, V_T, R) \in \mathrm{EG}_d$ を任意に取る．$\rho := \rho(d, V_N, V_T, R)$ と置く．このとき，

次を満たす $\varphi : \rho \to \mathbb{N}$ がただ 1 つ存在する．

$\forall a \in V_T,\ \forall A \in V_N,\ \forall t \in PE_d(V_N, V_T)^d,\ \forall e_1, e_2 \in PE_d(V_N, V_T),\ \forall v, v_1 \in V_T^*,\ v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}$
$s.t.$ 次が全て成り立つ：

- $\varphi(a, v, \langle v \rangle_a) = 1$.
- $([R(A)]_{x \to t}, v, v_f) \in \rho \Rightarrow \varphi(A[t_1] \cdots [t_d], v, v_f) = 1 + \varphi([R(A)]_{x \to t}, v, v_f)$.
- $(e, v, v_f) \in \rho \Rightarrow \varphi((e], v, \langle v, v_f \rangle) = 1 + \varphi(e, v, v_f)$.
- $(e_1, v, v_1), (e_2, v_1, v_f) \in \rho \Rightarrow \varphi((e_1 e_2), v, v_f) = 1 + \varphi(e_1, v, v_1) + \varphi(e_2, v_1, v_f)$.
- $(e_1, v, \mathtt{f}) \in \rho \Rightarrow \varphi((e_1 e_2), v, \mathtt{f}) = 1 + \varphi(e_1, v, \mathtt{f})$.
- $(e_1, v, v_1) \in \rho \Rightarrow \varphi((e_1 / e_2), v, v_1) = 1 + \varphi(e_1, v, v_1)$.
- $(e_1, v, \mathtt{f}), (e_2, v, v_f) \in \rho \Rightarrow \varphi((e_1 / e_2), v, v_f) = 1 + \varphi(e_1, v, \mathtt{f}) + \varphi(e_2, v, v_f)$.

この写像 φ のことを step count と呼ぶ．$\rho(d, V_N, V_T, R)$ の step count を $\varphi_{\rho(d, V_N, V_T, R)}$ と書く．

証明

$$
\begin{aligned}
&X := [V_N, V_T]_d \times_K \mathbb{N}, \\
&S := V_T \times V_N \times PE_d(V_N, V_T)^d \times PE_d(V_N, V_T)^2 \times (V_T^*)^2 \times (V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}) \times \mathbb{N}^2
\end{aligned}
$$

と置く．$s = (a, A, (e_1, e_2), (v, v_1), v_f, (n, n_1)) \in S$ と集合 U に関する命題 $P_i(s, U)$ $(1 \le i \le 7)$ そして写像 $f_i : S \to X$ $(1 \le i \le 7)$ を以下のように定義する:

$[\ P_1(s, U):\ true\ ],\quad f_1(s) = ((a, v, \langle v \rangle_a), 1)_K$.
$[\ P_2(s, U):\ (([R(A)]_{x \to t}, v, v_f), n)_K \in U\ ],\ f_2(s) = ((A[t_1] \cdots [t_d], v, v_f), 1 + n)_K$.
$[\ P_3(s, U):\ ((e, v, v_f), n)_K \in U\ ],\quad f_3(s) = (((e], v, \langle v, v_f \rangle), 1 + n)_K$.
$[\ P_4(s, U):\ ((e_1, v, v_1), n)_K, ((e_2, v_1, v_f), n_1)_K \in U\ ],\quad f_4(s) = (((e_1 e_2), v, v_f), 1 + n + n_1)_K$.
$[\ P_5(s, U):\ ((e_1, v, \mathtt{f}), n)_K \in U\ ],\quad f_5(s) = (((e_1 e_2), v, \mathtt{f}), 1 + n)_K$.
$[\ P_6(s, U):\ ((e_1, v, v_1), n)_K \in U\ ],\quad f_6(s) = (((e_1 / e_2), v, v_1), 1 + n)_K$.
$[\ P_7(s, U):\ ((e_1, v, \mathtt{f}), n)_K, ((e_2, v, v_f), n_1)_K \in U\ ],\quad f_7(s) = (((e_1 / e_2), v, v_f), 1 + n + n_1)_K$.

P_i は単調性の条件を満たす．$\varphi := T_{P,f}$ と定義する．この φ が求める φ であることを示す．まず, φ が $\rho(d, V_N, V_T, R)$ から $\mathbb{N}$ への写像であることを示す．

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad \varphi \subset \rho \times_K \mathbb{N}, \\
&(2)\quad \forall \alpha \in \rho,\ \exists! n \in \mathbb{N}\ [\ (\alpha, n)_K \in \varphi\ ]
\end{aligned}
$$

を示せばよい．
(1) $\varphi = T_{P,f}$ の定義に使われる P, f に対して, $Q_{P,f}(\rho \times_K \mathbb{N})$ が真であることを示せば十分である．そして, これは簡単に示せる．よって, (1) が成り立つ．
(2)

$$
M := \{ \alpha \in [V_N, V_T]_d \mid \exists! n \in \mathbb{N}\ [\ (\alpha, n)_K \in \varphi\ ]\ \}
$$

と置く. $\rho \subset M$ が成り立つことを言えば十分である. よって, M が補足 9.2 の条件を満たすことを言えばよい.

$$(a, A, t, (e_1, e_2), (v, v_1), v_f) \in V_T \times V_N \times PE_d(V_N, V_T)^d \times PE_d(V_N, V_T)^2 \times (V_T^*)^2 \times (V_T^* \cup \{\mathtt{f}\})$$

を任意に取る.

(A1): $\alpha := (a, v, \langle v \rangle_a) \in M$ を示したい. ただ 1 つの $n \in \mathbb{N}$ に対して $(\alpha, n)_K \in \varphi$ が成り立つことを示せばよい. φ の定義により $(\alpha, 1)_K \in \varphi$ である. あとは, $(\alpha, m)_K \in \varphi$ のとき $m = 1$ となることを言えばよい.

$$\varphi = T_{P,f} = \cup_{i=1}^{7} \{f_i(s) \mid s \in S, P_i(s, \varphi)\}$$

であるから, ある i, s に対して $(\alpha, m)_K = f_i(s)$, $P_i(s, \varphi)$ が成り立つ. 定理 5.10 により, $i = 1$ しか起こらない. よって, $m = 1$ となる. よって, 成立.

(A2): $([R(A)]_{x \to t}, v, v_f) \in M$ とする. $\alpha := (A[t_1] \cdots [t_d], v, v_f) \in M$ を示したい. ただ 1 つの $n \in \mathbb{N}$ に対して $(\alpha, n)_K \in \varphi$ が成り立つことを示せばよい. M の定義により, $(([R(A)]_{x \to t}, v, v_f), n)_K \in \varphi$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ がただ 1 つ存在する. φ の定義により, $(\alpha, 1+n)_K \in \varphi$ である. あとは, $(\alpha, m)_K \in \varphi$ のとき $m = 1 + n$ となることを言えばよい. ある i, s に対して $(\alpha, m)_K = f_i(s)$, $P_i(s, \varphi)$ が成り立つ. 定理 5.10 により, $i = 2$ しか起こらない. よって, $(([R(A')]_{x \to t'}, v', v'_f), n')_K \in \varphi$, $(\alpha, m)_K = ((A'[t'_1] \cdots [t'_d], v', v'_f), 1 + n')_K$ となる. 特に $A = A'$, $t = t'$, $v = v'$, $v_f = v'_f$, $m = 1 + n'$ となる. $(([R(A')]_{x \to t'}, v', v'_f), n')_K \in \varphi$ だったから $(([R(A)]_{x \to t}, v, v_f), n')_K \in \varphi$ となる. 一方で, $(([R(A)]_{x \to t}, v, v_f), n)_K \in \varphi$ なのだった. n の一意性により, $n' = n$ となる. よって, $m = 1 + n$ となる. よって, 成立.

(A3): $(e, v, v_f) \in M$ とする. $\alpha := ((e], v, \langle v, v_f \rangle) \in M$ を示したい. ただ 1 つの $n \in \mathbb{N}$ に対して $(\alpha, n)_K \in \varphi$ が成り立つことを示せばよい. M の定義により, $((e, v, v_f), n)_K \in \varphi$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ がただ 1 つ存在する. φ の定義により, $(\alpha, 1 + n)_K \in \varphi$ である. また, (1) により, $(e, v, v_f) \in \rho$ である. あとは, $(\alpha, m)_K \in \varphi$ のとき $m = 1 + n$ となることを言えばよい. ある i, s に対して $(\alpha, m)_K = f_i(s)$, $P_i(s, \varphi)$ が成り立つ. 定理 5.10 により, $i = 3$ しか起こらない. よって, $((e', v', v'_f), n')_K \in \varphi$, $(\alpha, m)_K = (((e'], v', \langle v', v'_f \rangle), 1 + n')_K$ となる. 特に $e = e'$, $v = v'$, $m = 1 + n'$ となる. 特に $((e, v, v'_f), n')_K \in \varphi$ となる. (1) により, $(e, v, v'_f) \in \rho$ となる. $(e, v, v_f) \in \rho$ だったから, 定理 9.4 より, $v_f = v'_f$ となる. $((e', v', v'_f), n')_K \in \varphi$ だったから $((e, v, v_f), n')_K \in \varphi$ となる. 一方で, $((e, v, v_f), n)_K \in \varphi$ なのだった. n の一意性により, $n' = n$ となる. よって, $m = 1 + n$ となる. よって, 成立.

(A4): $(e_1, v, v_1), (e_2, v_1, v_f) \in M$ とする. $\alpha = ((e_1 e_2), v, v_f) \in M$ を示したい. ただ 1 つの $n \in \mathbb{N}$ に対して $(\alpha, n)_K \in \varphi$ が成り立つことを示せばよい. M の定義により,
$((e_1, v, v_1), n)_K, ((e_2, v_1, v_f), n_1)_K \in \varphi$ を満たす $n, n_1 \in \mathbb{N}$ がただ 1 つずつ存在する. φ の定義により, $(\alpha, 1 + n + n_1)_K \in \varphi$ である. また, (1) により, $(e_1, v, v_1), (e_2, v_1, v_f) \in \rho$ である. あとは, $(\alpha, m)_K \in \varphi$ のとき $m = 1 + n + n_1$ となることを言えばよい. ある i, s に対して $(\alpha, m)_K = f_i(s)$, $P_i(s, \varphi)$ が成り立つ. 定理 5.10 により, $i = 4, 5$ しか起こりえない. $i = 5$ とすると, $((e'_1, v', \mathtt{f}), n')_K \in \varphi$, $(\alpha, m)_K = (((e'_1 e'_2), v', \mathtt{f}), 1+n')_K$ となる. 特に $e_1 = e'_1$, $v = v'$ となる. (1) により, $(e'_1, v', \mathtt{f}) \in \rho$ であるから, $(e_1, v, \mathtt{f}) \in \rho$ となる. 一方で, $(e_1, v, v_1) \in \rho$ なのだった. $v_1 \neq \mathtt{f}$ だから, 定理 9.4

に矛盾する．よって，$i = 4$ となるしかない．よって，$((e'_1, v', v'_1), n')_K, ((e'_2, v'_1, v'_f), n'_1)_K \in \varphi$, $(\alpha, m)_K = (((e'_1 e'_2), v', v'_f), 1+n'+n'_1)_K$ となる．特に $e_1 = e'_1$, $e_2 = e'_2$, $v = v'$ となる．(1) により，$(e'_1, v', v'_1) \in \rho$ であるから，$(e_1, v, v'_1) \in \rho$ となる．一方で，$(e_1, v, v_1) \in \rho$ なのだった．定理 9.4 より，$v_1 = v'_1$ となる．(1) により，$(e'_2, v'_1, v'_f) \in \rho$ であるから，$(e_2, v_1, v'_f) \in \rho$ となる．一方で，$(e_2, v_1, v_f) \in \rho$ なのだった．定理 9.4 より，$v_f = v'_f$ となる．よって，$((e_1, v, v_1), n')_K, ((e_2, v_1, v_f), n'_1)_K \in \varphi$ となる．n と n_1 の一意性から，$n = n'$, $n_1 = n'_1$ となる．よって，$m = 1 + n' + n'_1 = 1 + n + n_1$ となる．よって，成立．

$(A5), (A6), (A7)$: $(A4)$ と全く同じ方針で証明できる．定理 9.4 が必要になることに注意する．

以上より，(2) が成り立つ．よって，φ は ρ から $\mathbb{N}$ への写像である．ここまで来れば，あとは簡単である．$a \in V_T$, $A \in V_N$, $t \in PE_d(V_N, V_T)^d$, $e_1, e_2 \in PE_d(V_N, V_T)$, $v, v_1 \in V_T^*$, $v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}$ を任意に取る．

$((a, v, \langle v \rangle_a), 1)_K \in \varphi$ であるから，$\varphi(a, v, \langle v \rangle_a) = 1$ である．

$([R(A)]_{x \to t}, v, v_f) \in \rho$ とすると，(2) より，$(([R(A)]_{x \to t}, v, v_f), n)_K \in \varphi$ を満たす n が存在する．また，φ の定義から $((A[t_1] \cdots [t_d], v, v_f), 1+n)_K \in \varphi$ である．φ は写像だったから，
$\varphi(A[t_1] \cdots [t_d], v, v_f) = 1 + n = 1 + \varphi([R(A)]_{x \to t}, v, v_f)$ である．

$(e, v, v_f) \in \rho$ とすると，(2) より，$((e, v, v_f), n)_K \in \varphi$ を満たす n が存在する．また，φ の定義から $(([e], v, \langle v, v_f \rangle), 1+n)_K \in \varphi$ である．φ は写像だったから，$\varphi([e], v, \langle v, v_f \rangle) = 1+n = 1+\varphi(e, v, v_f)$ である．

$(e_1, v, v_1), (e_2, v_1, v_f) \in \rho$ とすると，(2) より，$((e_1, v, v_1), n)_K, ((e_2, v_1, v_f), n_1)_K \in \varphi$ を満たす n, n_1 が存在する．また，φ の定義から $(((e_1 e_2), v, v_f), 1 + n + n_1)_K \in \varphi$ である．φ は写像だったから，$\varphi((e_1 e_2), v, v_f) = 1 + n + n_1 = 1 + \varphi(e_1, v, v_1) + \varphi(e_2, v_1, v_f)$ である．

残りの 3 パターンも同様にして示せる．

定理 9.8 定理 9.7 の φ について，次が成り立つ．

$$\forall \alpha \in \rho(d, V_N, V_T, R) \ [\ \varphi(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \alpha \text{は} (B1) \text{を満たす}\ ].$$

証明 $\varphi(\alpha) = 1$ とする．α が $(B1)$ 以外のケースだとすると，$\varphi(\alpha) = 1 + \varphi(\beta)$ もしくは $\varphi(\alpha) = 1 + \varphi(\beta) + \varphi(\gamma)$ という形になることが分かる．特に，$\varphi(\alpha) > 1$ となって矛盾する．よって，α は $(B1)$ を満たす．逆に，α は $(B1)$ を満たすとする．このとき，φ の定義により，$\varphi(\alpha) = 1$ である．

定理 9.9

$$\forall (e, w, w_1) \in \rho(d, V_N, V_T, R) \ [\ w_1 \neq \mathtt{f} \Rightarrow w_1 \text{は}\ w\ \text{のサフィックス}\ ].$$

証明

$$M := \{ (e, v, v_f) \in [V_N, V_T]_d \mid v_f \neq \mathtt{f} \Rightarrow v_f \text{は}\ v\ \text{のサフィックス}\ \}$$

と置く. $\rho(d, V_N, V_T, R)$ の定義に使われる P, f に対して $Q_{P,f}(M)$ が真であることを示せばよい.

$(A1), (A2), (A3), (A5), (A7)$: 明らか.

$(A4)$: $e_1, e_2 \in PE_d(V_N, V_T)$, $v, v_1 \in V_T^*$, $v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}$, $(e_1, v, v_1), (e_2, v_1, v_f) \in M$ とする. $((e_1 e_2), v, v_f) \in M$ を示したい. $v_f = \mathtt{f}$ ならば, 確かに成立. $v_f \neq \mathtt{f}$ のときは, $(e_1, v, v_1), (e_2, v_1, v_f) \in M$ より, v_1 は v のサフィックスであり, v_f は v_1 のサフィックスである. よって, v_f は v のサフィックスである. よって, $((e_1 e_2), v, v_f) \in M$ である.

$(A6)$: $e_1, e_2 \in PE_d(V_N, V_T)$, $v \in V_T^*$, $v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}$, $(e_1, v, \mathtt{f}), (e_2, v, v_f) \in M$ とする. $((e_1/e_2), v, v_f) \in M$ を示したい. $v_f = \mathtt{f}$ ならば, 確かに成立. $v_f \neq \mathtt{f}$ のときは, $(e_2, v, v_f) \in M$ より, v_f は v のサフィックスである. よって, $((e_1/e_2), v, v_f) \in M$ である.

10 first order MACRO PEG が受理する言語

この節では, first order MACRO PEG が受理する言語をやっと定義できる.

定義 10.1 以下では, 文字 $\mathtt{t}$ は V_1^* には含まれないとする. $d \geq 1$ とする. $V_T \subset V_1$ と $V_N \subset V_2$ は空でない有限集合とする. $e \in PE_d(V_N, V_T)$ を任意に取る. $R : V_N \to PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]$ を任意に取る. $v \in V_T^*$ とする.

- ある $v' \in V_T^*$が存在して $(e, v, v') \in \rho(d, V_N, V_T, R)$ が成り立つとき, $(e, v) \xrightarrow[d,V_N,V_T,R]{} \mathtt{t}$ と書く.

  このとき,「v を e に適用すると成功する」と呼ぶ.

- $(e, v, \mathtt{f}) \in \rho(d, V_N, V_T, R)$ が成り立つとき, $(e, v) \xrightarrow[d,V_N,V_T,R]{} \mathtt{f}$ と書く.

  このとき,「v を e に適用すると失敗する」と呼ぶ.

- $(e, v, v_f) \in \rho(d, V_N, V_T, R)$ となる $v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}$ が存在しないとき, $(e, v) \xrightarrow[d,V_N,V_T,R]{} \infty$ と書く.

  このとき,「v を e に適用すると無限ループに陥る」と呼ぶ.

定理 9.4 より, 任意の $(e, v) \in PE_d(V_N, V_T) \times V_T^*$ に対して, 上記の 3 つのケースのうちちょうど 1 つだけが成り立つ. また, $(e, v) \xrightarrow[d,V_N,V_T,R]{} \mathtt{t}$ ならば, $(e, v, v') \in \rho(d, V_N, V_T, R)$ を満たす $v' \in V_T^*$ はただ 1 つであり (定理 9.4 より), しかも v' は v のサフィックスである (定理 9.9 より). 特に, $v = v''v'$ という形に表せる. よって, このときの v'' も, ただ 1 つに定まる. この v'' のことを,「v を e に適用して成功したときに消費される文字列」と呼ぶ.

定義 10.2 $G = (V_N, V_T, R, e_S) \in \mathrm{foMPEG}_d$ と $v \in V_T^*$ を任意に取る.
$(e_S, v) \xrightarrow[d,V_N,V_T,R]{} \mathtt{t}$ が成り立つとき, $(G, v) \to \mathtt{t}$ と書き, 「v を G に適用すると成功する」と呼ぶ.
$(e_S, v) \xrightarrow[d,V_N,V_T,R]{} \mathtt{f}$ が成り立つとき, $(G, v) \to \mathtt{f}$ と書き, 「v を G に適用すると失敗する」と呼ぶ.
$(e_S, v) \xrightarrow[d,V_N,V_T,R]{} \infty$ が成り立つとき, $(G, v) \to \infty$ と書き, 「v を G に適用すると無限ループに陥る」と呼ぶ.
$(G, v) \to \mathtt{t}$ のとき, $(e_S, v) \xrightarrow[d,V_N,V_T,R]{} \mathtt{t}$ が成り立つのだから, 定義 10.1 で既に見たように, $(e_S, v, v') \in \rho(d, V_N, V_T, R)$ を満たす $v' \in V_T^*$ がただ 1 つ存在し, しかも v' は v のサフィックスである. よって, $v = v''v'$ という形に表せて, このときの v'' も, ただ 1 つに定まる. このときの v'' のことを, 「v を G に適用して成功したときに消費される文字列」と呼ぶ.

定義 10.3 $d \geq 1$ とする. $V_T \subset V_1$ と $V_N \subset V_2$ は空でない有限集合とする. $e \in PE_d(V_N, V_T)$ を任意に取る. $R : V_N \to PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]$ を任意に取る.

$$L_R(e) := \left\{ v \in V_T^* \mid (e, v) \xrightarrow[d,V_N,V_T,R]{} \mathtt{t} \right\}$$

と定義する. $L_R(e)$ のことを「規則 R のもとでの, $e \in PE_d(V_N, V_T)$ が受理する言語」と呼ぶ. V_N, V_T と $e \in PE_d(V_N, V_T)$ が全て固定されていても, $R : V_N \to PE_d(V_N, V_T)[x_1 \cdots, x_d]$ を取り替えるごとに, $L_R(e)$ は異なる集合になりえる.

定義 10.4 $G = (V_N, V_T, R, e_S) \in \mathrm{foMPEG}_d$ に対して, $L(G) := L_R(e_S)$ と置く. 同じことだが,

$$L(G) := \left\{ v \in V_T^* \mid (e_s, v) \xrightarrow[d,V_N,V_T,R]{} \mathtt{t} \right\}$$

と置く．$L(G)$ のことを「G が受理する言語」と呼ぶ．

定義 10.5

$$\mathrm{foMPEL} := \cup_{d\in\mathbb{N}} \{L(G) \mid G \in \mathrm{foMPEG}_d\} \subset \mathfrak{P}(V_1^*)$$

と定義する．各 $L \in \mathrm{foMPEL}$ のことを, foMPEG が受理する言語と呼ぶ．

例 $a, b \in V_1$, $A \in V_2$ が成り立っているとして,

$$\begin{aligned}
&V_T := \{a, b\}, \quad V_N := \{A\}, \\
&A[x_1] = (((aA)a)/b); \\
&e_S := (A[a]((a)(b)))
\end{aligned}$$

とすると, $G := (V_N, V_T, R, e_S) \in \mathrm{foMPEG}_1$ である．このとき,

$$L(G) = \{a^n b a^n \mid n \geq 0\}$$

が成り立つ．ただし, このことは自明ではなく, 今回の定義に照らし合わせてきちんと証明する必要がある．しかし, 面倒くさいのでこの文書では証明しない．

定義 10.6 (ステップ数の定義) $d \geq 1$ とする．$(V_N, V_T, R) \in \mathrm{EG}_d$ を任意に取る．$\rho := \rho(d, V_N, V_T, R)$, $\varphi := \varphi_\rho$ と置く．$v \in V_T^*$ と $e \in PE_d(V_N, V_T)$ を任意に取る．v を e に適用すると成功または失敗するとする．よって, ただ 1 つの $v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}$ が存在して, $(e, v, v_f) \in \rho(d, V_N, V_T, R)$ が成り立つことになる．この (e, v, v_f) に対して, $\varphi(e, v, v_f) \in \mathbb{N}$ のことを

v を e に適用したときのステップ数

と呼ぶことにする．

11 parsing expression の解釈の同値性

この節では, parsing expression の解釈の同値性を扱う. $a \in V_T$ とする. $e_1 = (((a]]/(a])$, $e_2 = ((a]/((a]])$ とすると, これらは異なる 2 つの parsing expression である. しかし, 各 e_i に入力文字列 v を適用したときの解釈の結果は, どちらでも常に「成功」であり, 文字列は全く消費しない. つまり, 解釈の結果は e_1, e_2 で全く同じである. このような意味での同値性を, この節では扱う. 主な目標は, MACRO PEG を別の MACRO PEG に同値変形するときに, その変形がちゃんと同値変形になっていることが自動的に保証されるような統一的な変換定理を記述することである.

定義 11.1 $d, l \geq 1$ とする. $V_T \subset V_1$ は空でない有限集合とする. 集合

$$E_{d,l}(V_T) \subset PE_d(V_1, V_2)^l \times \mathfrak{P}([V_1, V_2]_d)$$

を以下のように定義する:

$$(e, \rho) \in E_{d,l}(V_T) \ \Leftrightarrow_{def} \ \text{空でない有限集合 } V_N \subset V_2 \text{ と } R : V_N \to PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d] \\ \text{が存在して, } e \in PE_d(V_N, V_T)^l \text{かつ} \rho = \rho(d, V_N, V_T, R).$$

さて, $v \in V_T^*$ を任意に取る.

$$Su(v) := \{w \in V_T^* \mid w \text{ は } v \text{ のサフィックス }\} = \left\{v^{+k} \mid 0 \leq k \leq |v|\right\}$$

と置く. $E_{d,l}(V_T)$ の上の二項関係 $\sim_v$, $\prec_v$, $\ll_v$, $\gg_v$ を以下のように定義する:

$$(e_1, \rho_1) \sim_v (e_2, \rho_2) \ \Leftrightarrow_{def} \ \forall i \in [1, l],\ \forall w \in Su(v),\ \forall w_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\} \\ [\ (e_{1i}, w, w_f) \in \rho_1 \Leftrightarrow (e_{2i}, w, w_f) \in \rho_2\ ].$$

$$(e_1, \rho_1) \prec_v (e_2, \rho_2) \ \Leftrightarrow_{def} \ \forall i \in [1, l],\ \forall w \in Su(v),\ \forall w_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\} \\ [\ (e_{1i}, w, w_f) \in \rho_1 \Rightarrow (e_{2i}, w, w_f) \in \rho_2\ ].$$

$$(e_1, \rho_1) \ll_v (e_2, \rho_2) \ \Leftrightarrow_{def} \ \forall i \in [1, l],\ \forall w \in Su(v),\ \forall w_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}\ [\ (e_{1i}, w, w_f) \in \rho_1 \Rightarrow \\ [\ (e_{2i}, w, w_f) \in \rho_2,\ \varphi_1(e_{1i}, w, w_f) \leq \varphi_2(e_{2i}, w, w_f)\ ]\ ].$$

$$(e_1, \rho_1) \gg_v (e_2, \rho_2) \ \Leftrightarrow_{def} \ \forall i \in [1, l],\ \forall w \in Su(v),\ \forall w_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}\ [\ (e_{1i}, w, w_f) \in \rho_1 \Rightarrow \\ [\ (e_{2i}, w, w_f) \in \rho_2,\ \varphi_1(e_{1i}, w, w_f) \geq \varphi_2(e_{2i}, w, w_f)\ ]\ ].$$

ただし, $e_i = (e_{i1}, e_{i2}, \cdots, e_{il})$ $(i = 1, 2)$ と表した. また, $\varphi_i := \varphi_{\rho_i}$ $(i = 1, 2)$ と置いた. このとき, 次が成り立つことが分かる:

$\forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in E_{d,l}(V_T)$ $s.t.$ 次が全て成り立つ :

- $\alpha_1 \sim_v \alpha_1$.
- $\alpha_1 \sim_v \alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 \sim_v \alpha_1$.
- $\alpha_1 \sim_v \alpha_2,\ \alpha_2 \sim_v \alpha_3 \Rightarrow \alpha_1 \sim_v \alpha_3$.

$\forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in E_{d,l}(V_T)$ $s.t.$ 次が全て成り立つ:

- $\alpha_1 \prec_v \alpha_1$.
- $\alpha_1 \prec_v \alpha_2,\ \alpha_2 \prec_v \alpha_1 \Leftrightarrow \alpha_1 \sim_v \alpha_2$.
- $\alpha_1 \prec_v \alpha_2,\ \alpha_2 \prec_v \alpha_3 \Rightarrow \alpha_1 \prec_v \alpha_3$.

$\forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in E_{d,l}(V_T)$ $s.t.$ 次が全て成り立つ:

- $\alpha_1 \ll_v \alpha_1$.
- $\alpha_1 \ll_v \alpha_2,\ \alpha_2 \ll_v \alpha_3 \Rightarrow \alpha_1 \ll_v \alpha_3$.
- $\alpha_1 \ll_v \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 \prec_v \alpha_2$.
- $\alpha_1 \sim_v \alpha_2 \Rightarrow [\ \alpha_1 \ll_v \alpha_2 \Leftrightarrow \alpha_2 \gg_v \alpha_1\ ]$.

$\forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in E_{d,l}(V_T)$ $s.t.$ 次が全て成り立つ:

- $\alpha_1 \gg_v \alpha_1$.
- $\alpha_1 \gg_v \alpha_2,\ \alpha_2 \gg_v \alpha_3 \Rightarrow \alpha_1 \gg_v \alpha_3$.
- $\alpha_1 \gg_v \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 \prec_v \alpha_2$ ($\alpha_2 \prec_v \alpha_1$ではない).
- $\alpha_1 \sim_v \alpha_2 \Rightarrow [\ \alpha_1 \gg_v \alpha_2 \Leftrightarrow \alpha_2 \ll_v \alpha_1\ ]$.

さらに, $E_{d,l}(V_T)$ の上の二項関係 $\sim$, $\prec$, $\ll$, $\gg$ を以下のように定義する:

$$(e_1, \rho_1) \sim (e_2, \rho_2) \ \Leftrightarrow_{def}\ \forall i \in [1, l],\ \forall v \in V_T^*,\ \forall v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}\ [\ (e_{1i}, v, v_f) \in \rho_1 \Leftrightarrow (e_{2i}, v, v_f) \in \rho_2\ ].$$

$$(e_1, \rho_1) \prec (e_2, \rho_2) \ \Leftrightarrow_{def}\ \forall i \in [1, l],\ \forall v \in V_T^*,\ \forall v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}\ [\ (e_{1i}, v, v_f) \in \rho_1 \Rightarrow (e_{2i}, v, v_f) \in \rho_2\ ].$$

$$(e_1, \rho_1) \ll (e_2, \rho_2) \ \Leftrightarrow_{def}\ \forall i \in [1, l],\ \forall v \in V_T^*,\ \forall v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}\ [\ (e_{1i}, v, v_f) \in \rho_1 \Rightarrow [\ (e_{2i}, v, v_f) \in \rho_2,\ \varphi_1(e_{1i}, v, v_f) \leq \varphi_2(e_{2i}, v, v_f)\ ]\ ].$$

$$(e_1, \rho_1) \gg (e_2, \rho_2) \ \Leftrightarrow_{def}\ \forall i \in [1, l],\ \forall v \in V_T^*,\ \forall v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}\ [\ (e_{1i}, v, v_f) \in \rho_1 \Rightarrow [\ (e_{2i}, v, v_f) \in \rho_2,\ \varphi_1(e_{1i}, v, v_f) \geq \varphi_2(e_{2i}, v, v_f)\ ]\ ].$$

このとき, 次が成り立つことが分かる.

$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in E_{d,l}(V_T)$ $s.t.$ 次が全て成り立つ:

- $\alpha_1 \sim \alpha_2 \Leftrightarrow \forall v \in V_T^*\ [\ \alpha_1 \sim_v \alpha_2\ ]$.
- $\alpha_1 \prec \alpha_2 \Leftrightarrow \forall v \in V_T^*\ [\ \alpha_1 \prec_v \alpha_2\ ]$.
- $\alpha_1 \ll \alpha_2 \Leftrightarrow \forall v \in V_T^*\ [\ \alpha_1 \ll_v \alpha_2\ ]$.
- $\alpha_1 \gg \alpha_2 \Leftrightarrow \forall v \in V_T^*\ [\ \alpha_1 \gg_v \alpha_2\ ]$.

$\forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in E_{d,l}(V_T)$ $s.t.$ 次が全て成り立つ:

- $\alpha_1 \sim \alpha_1$.
- $\alpha_1 \sim \alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 \sim \alpha_1$.
- $\alpha_1 \sim \alpha_2,\ \alpha_2 \sim \alpha_3 \Rightarrow \alpha_1 \sim \alpha_3$.

$\forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in E_{d,l}(V_T)$ $s.t.$ 次が全て成り立つ:

- $\alpha_1 \prec \alpha_1$.
- $\alpha_1 \prec \alpha_2,\ \alpha_2 \prec \alpha_1 \Leftrightarrow \alpha_1 \sim \alpha_2$.
- $\alpha_1 \prec \alpha_2,\ \alpha_2 \prec \alpha_3 \Rightarrow \alpha_1 \prec \alpha_3$.

$\forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in E_{d,l}(V_T)$ $s.t.$ 次が全て成り立つ:

- $\alpha_1 \ll \alpha_1$.
- $\alpha_1 \ll \alpha_2,\ \alpha_2 \ll \alpha_3 \Rightarrow \alpha_1 \ll \alpha_3$.
- $\alpha_1 \ll \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 \prec \alpha_2$.
- $\alpha_1 \sim \alpha_2 \Rightarrow [\ \alpha_1 \ll \alpha_2 \Leftrightarrow \alpha_2 \gg \alpha_1\ ]$.

$\forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in E_{d,l}(V_T)$ $s.t.$ 次が全て成り立つ:

- $\alpha_1 \gg \alpha_1$.
- $\alpha_1 \gg \alpha_2,\ \alpha_2 \gg \alpha_3 \Rightarrow \alpha_1 \gg \alpha_3$.
- $\alpha_1 \gg \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 \prec \alpha_2$ ($\alpha_2 \prec \alpha_1$ではない).
- $\alpha_1 \sim \alpha_2 \Rightarrow [\ \alpha_1 \gg \alpha_2 \Leftrightarrow \alpha_2 \ll \alpha_1\ ]$.

次に, $\mathrm{foMPEG}_d(V_T)$ の上の二項関係 $\prec, \sim, \ll, \gg$ を以下のように定義する: $G = (V_N, V_T, R, e_S) \in \mathrm{foMPEG}_d(V_T)$, $G' = (V_N, V'_T, R', e'_S) \in \mathrm{foMPEG}_d(V_T)$ に対して,

$$
\begin{aligned}
G \sim G' &\ \Leftrightarrow_{def}\ (e_S, \rho) \sim (e'_S, \rho'). \\
G \prec G' &\ \Leftrightarrow_{def}\ (e_S, \rho) \prec (e'_S, \rho'). \\
G \ll G' &\ \Leftrightarrow_{def}\ (e_S, \rho) \ll (e'_S, \rho'). \\
G \gg G' &\ \Leftrightarrow_{def}\ (e_S, \rho) \gg (e'_S, \rho').
\end{aligned}
$$

ただし, $\rho := \rho(d, V_N, V_T, R)$, $\rho' := \rho(d, V_N, V'_T, R')$ と置いた.

補足 $\ll_v$ と $\gg_v$ は意味が違うので注意する. $\alpha_1 \ll_v \alpha_2$ であっても $\alpha_2 \gg_v \alpha_1$ であるとは限らないし, 逆に, $\alpha_2 \gg_v \alpha_1$ であっても $\alpha_1 \ll_v \alpha_2$ であるとは限らない. ただし, $\alpha_1 \sim_v \alpha_2$ のときには, 両者は同値である.

補足 $(e_1, \rho_1), (e_2, \rho_2) \in E_{d,l}(V_T)$ とする. e_1, e_2 の各成分に $w = v, v^{+1}, \cdots, v^{+|v|} = \varepsilon$ をそれぞれ適用したときの解釈の結果が全て一致するときに $(e_1, \rho_1) \sim_v (e_2, \rho_2)$ と書く, ということである. ただし, e_1 の解釈に使われるのは ρ_1 であり, e_2 の解釈に使われるのは ρ_2 である.

補足 $v \in V_T^*$ を任意に取る. 以下では, 記号 ν は $\prec_v$, $\ll_v$, $\gg_v$ のうちいずれか 1 つに固定されているとする. $\mathbb{R}$ の上の二項関係 $\overline{\nu}$ を以下のように定義する:

- νが $\prec_v$ のときは, $\overline{\nu} := \mathbb{R}^2$と定義する.
- νが $\ll_v$ のときは, $\overline{\nu} := \leq$ ($\mathbb{R}$ の通常の順序) と定義する.
- νが $\gg_v$ のときは, $\overline{\nu} := \geq$ ($\mathbb{R}$ の通常の順序) と定義する.

従って, ν が $\prec_v$ のときは, 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して $x \ \overline{\nu} \ y$ が成り立つことになる. さて, ν が $\prec_v$, $\ll_v$, $\gg_v$ のいずれか 1 つであるとき, 任意の $(e_i, \rho_i) \in E_{d,l}(V_T)$ $(i = 1, 2)$ に対して, 次が成り立つ:

$$(e_1, \rho_1) \ \nu \ (e_2, \rho_2) \Leftrightarrow \forall i \in [1, l],\ \forall w \in Su(w),\ \forall w_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\} \quad s.t. \ \ (e_{1i}, w, w_f) \in \rho_1 \Rightarrow$$
$$[\ (e_{2i}, w, w_f) \in \rho_2,\ \varphi_1(e_{1i}, w, w_f) \ \overline{\nu} \ \varphi_2(e_{2i}, w, w_f)\ ].$$

ただし, $\varphi_i := \varphi_{\rho_i}$ $(i = 1, 2)$ と置いた.

定理 11.2 $(e_1, \rho_1), (e_2, \rho_2) \in E_{d,l}(V_T)$ とする. 次が成り立つ:

- $(e_1, \rho_1) \sim_v (e_2, \rho_2) \Leftrightarrow \forall i \in [1, l]\ \ [\ (e_{1i}, \rho_1) \sim_v (e_{2i}, \rho_2)\ ]$.
- $(e_1, \rho_1) \prec_v (e_2, \rho_2) \Leftrightarrow \forall i \in [1, l]\ \ [\ (e_{1i}, \rho_1) \prec_v (e_{2i}, \rho_2)\ ]$.
- $(e_1, \rho_1) \ll_v (e_2, \rho_2) \Leftrightarrow \forall i \in [1, l]\ \ [\ (e_{1i}, \rho_1) \ll_v (e_{2i}, \rho_2)\ ]$.
- $(e_1, \rho_1) \gg_v (e_2, \rho_2) \Leftrightarrow \forall i \in [1, l]\ \ [\ (e_{1i}, \rho_1) \gg_v (e_{2i}, \rho_2)\ ]$.

補足 $(c, \rho) \in E_{d,l}(V_T)$ とする. $c = (c_1, \cdots, c_l)$ と表すとき, 各 $i \in [1, l]$ に対して $(c_i, \rho) \in E_{d,1}(V_T)$ となる.

証明 $\sim_v$, $\prec_v$, $\ll_v$, $\gg_v$ の定義から明らか.

定理 11.3 $d \geq 1$ とする. $(V_N, V_T, R) \in \mathrm{EG}_d$ を任意に取る. $\rho := \rho(d, V_N, V_T, R)$ と置く. 任意の $v \in V_T^*$ と $A \in V_N$ と $t \in PE_d(V_N, V_T)^d$ に対して, 次が成り立つ:

(1) $([R(A)]_{x \to t}, \rho) \sim_v (A[t_1] \cdots [t_d], \rho)$.

(2) $([R(A)]_{x \to t}, \rho) \ll_v (A[t_1] \cdots [t_d], \rho)$.

(3) $(A[t_1] \cdots [t_d], \rho) \gg_v ([R(A)]_{x \to t}, \rho)$.

証明 $\varphi := \varphi_\rho$ と置く. $w \in Su(v)$, $w_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}$ を任意に取る.
(1) $([R(A)]_{x \to t}, w, w_f) \in \rho$ とすると, ρ の定義から $(A[t_1] \cdots [t_d], w, w_f) \in \rho$ である. 逆に, これが成り立つとすると, 定理 9.6 の $(D2)$ より $([R(A)]_{x \to t}, w, w_f) \in \rho$ である. よって, (1) が成り立つ.
(2) $([R(A)]_{x \to t}, w, w_f) \in \rho$ とすると, 既に見たように $(A[t_1] \cdots [t_d], w, w_f) \in \rho$ である. さらに,

$$\varphi([R(A)]_{x \to t}, w, w_f) < 1 + \varphi([R(A)]_{x \to t}, w, w_f) = \varphi(A[t_1] \cdots [t_d], w, w_f)$$

である. よって, (2) が成り立つ.
(3) (1),(2) から従う.

定理 11.4 $d \geq 1$ とする．$(V_N, V_T^{(i)}, R^{(i)}) \in \mathrm{EG}_d$ $(i = 1, 2)$ を任意に取る．ここでは $V_N^{(1)} \subset V_N^{(2)}$ が成り立つとする．$PE_i := PE_d(V_N, V_T^{(i)})$ $(i = 1, 2)$ と置く．$\rho_i := \rho(d, V_N, V_T^{(i)}, R^{(i)})$ $(i = 1, 2)$ と置く．$e_i \in PE_i^d$ $(i = 1, 2)$ を任意に取る．$v \in V_T^*$ を任意に取る．以下では, 記号 ν は $\prec_v$, $\ll_v$, $\gg_v$ のうちいずれか 1 つに固定されているとする.
(1) 次が成り立つとする:

- $(e_1, \rho_1)\ \nu\ (e_2, \rho_2)$,
- $\forall A \in V_N^{(1)},\ \forall t \in PE_2^d\ \Big[\ ([R^{(1)}(A)]_{x \to t}, \rho_2)\ \nu\ ([R^{(2)}(A)]_{x \to t}, \rho_2)\ \Big]$.

このとき, 次が成り立つ.

$$\forall \alpha \in PE_1[x_1, \cdots, x_d]\ \ [\ ([\alpha]_{x \to e_1}, \rho_1)\ \nu\ ([\alpha]_{x \to e_2}, \rho_2)\ ].$$

(2) 次が成り立つとする:

- $(e_2, \rho_2) \gg_v (e_1, \rho_1)$,
- $\forall A \in V_N^{(1)},\ \forall t \in PE_2^d\ \Big[\ ([R^{(2)}(A)]_{x \to t}, \rho_2) \gg_v ([R^{(1)}(A)]_{x \to t}, \rho_2)\ \Big]$.

このとき, 次が成り立つ.

$$\forall \alpha \in PE_1[x_1, \cdots, x_d]\ \ [\ ([\alpha]_{x \to e_2}, \rho_2) \gg_v ([\alpha]_{x \to e_1}, \rho_1)\ ].$$

補足 $V_N^{(1)} \subset V_N^{(2)}$ より, $PE_1 \subset PE_2$ かつ $PE_1[x_1, \cdots, x_d] \subset PE_2[x_1, \cdots, x_d]$ となる．また, $\alpha \in PE_1[x_1, \cdots, x_d]$ と $t \in PE_1^d$, $t' \in PE_2^d$ に対して $[\alpha]_{x \to e_1}$, $[\alpha]_{x \to t} \in PE_1$ かつ $[\alpha]_{x \to e_2}$, $[\alpha]_{x \to t'} \in PE_2$ となる.

証明 $\varphi_i := \varphi_{\rho_i}$ $(i = 1, 2)$ と置く.
(1) $n \geq 1$ に関する命題 $P(n)$ を以下のように定義する:

$$\begin{aligned} P(n):\ & \forall \alpha \in PE_1[x_1, \cdots, x_d],\ \forall w \in Su(v),\ \forall w_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}\quad s.t. \\ & [\ ([\alpha]_{x \to e_1}, w, w_f) \in \rho_1,\ \varphi_1([\alpha]_{x \to e_1}, w, w_f) \leq n\ ] \Rightarrow \\ & [\ ([\alpha]_{x \to e_2}, w, w_f) \in \rho_2,\ \varphi_1([\alpha]_{x \to e_1}, w, w_f)\ \overline{\nu}\ \varphi_2([\alpha]_{x \to e_2}, w, w_f)\ ]. \end{aligned}$$

任意の $n \geq 1$ に対して $P(n)$ が真であることを, n に関する数学的帰納法で示せばよい.

$n = 1$ のとき: α, w, w_f を任意に取る.

$$([\alpha]_{x \to e_1}, w, w_f) \in \rho_1,\ \varphi_1([\alpha]_{x \to e_1}, w, w_f) \leq 1$$

とする.

$$([\alpha]_{x \to e_2}, w, w_f) \in \rho_2,\ \varphi_1([\alpha]_{x \to e_1}, w, w_f)\ \overline{\nu}\ \varphi_2([\alpha]_{x \to e_2}, w, w_f) \qquad (*)$$

を示したい．まず, $\varphi_1([\alpha]_{x \to e_1}, w, w_f) = 1$ である．$\alpha \in PE_1[x_1, \cdots, x_d]$ だったから,

$$\alpha = a,\ A[c_1] \cdots [c_d],\ (g_1 g_2),\ (g_1],\ (g_1/g_2) \qquad (**)$$

のいずれかの形である. ただし,

$$a \in V_T \cup \{x_k\}_{k=1}^d,\ A \in V_N^{(1)},\ c \in PE_1[x_1, \cdots, x_d]^d,\ g_1, g_2 \in PE_1[x_1, \cdots, x_d]$$

である. $\alpha = a$ 以外の形だと, $\varphi_1([\alpha]_{x\to e_1}, w, w_f) > 1$ が成り立つことが分かる. たとえば, $\alpha = (g_1 g_2)$ のときは,

$$[\alpha]_{x\to e_1} = [(g_1 g_2)]_{x\to e_1} = ([g_1]_{x\to e_1}[g_2]_{x\to e_1}) = (f_1 f_2),\quad f_i := [g_i]_{x\to e_1} \in PE_1$$

となるので,

$$\varphi_1([\alpha]_{x\to e_1}, w, w_f) = \varphi_1((f_1 f_2), w, w_f) > 1$$

となる. 他の場合も同様. よって, $\alpha = a \in V_T \cup \{x_k\}_{k=1}^d$ となるしかない. $a \in V_T$ のときは, $[\alpha]_{x\to e_i} = a\ (i = 1, 2)$ である. $([\alpha]_{x\to e_1}, w, w_f) \in \rho_1$ だったから, $(a, w, w_f) \in \rho_1$ となる. よって, 定理 9.6 の $(D1)$ より, $w_f = \langle w\rangle_a$ となる. よって, $([\alpha]_{x\to e_2}, w, w_f) = (a, w, \langle w\rangle_a) \in \rho_2$ となる. さらに,

$$\varphi_1([\alpha]_{x\to e_1}, w, w_f) = 1 = \varphi_2([\alpha]_{x\to e_2}, w, w_f)$$

である. よって, この場合は $(*)$ が成り立つ. 以下では, $a = x_k$ としてよい. このとき, $[\alpha]_{x\to e_i} = e_{ik}\ (i = 1, 2)$ である. ただし, $e_i = (e_{i1}, \cdots, e_{id})$ と表した. $([\alpha]_{x\to e_1}, w, w_f) \in \rho_1$ だったから, $(e_{1k}, w, w_f) \in \rho_1$ である. 定理の仮定により,

$$(e_{2k}, w, w_f) \in \rho_2,\ \varphi_1(e_{1k}, w, w_f)\ \overline{\nu}\ \varphi_2(e_{2k}, w, w_f)$$

となる. $[\alpha]_{x\to e_i} = e_{ik}$ だったから, $(*)$ が成り立つ. よって, $P(1)$ は真である.

次に, $n \geq 1$ を任意に取る. $P(n)$ は真とする. $P(n+1)$ も真であることを言いたい. α, w, w_f を任意に取る.

$$([\alpha]_{x\to e_1}, w, w_f) \in \rho_1,\ \varphi_1([\alpha]_{x\to e_1}, w, w_f) = n + 1$$

という仮定のもとで $(*)$ を示せば十分である. α は $(**)$ のいずれかの形である. $\alpha = a$ のときは, $n = 1$ のときと全く同じ手順で示せる. 以下では, α はそれ以外の形としてよい. α の形で場合分けする.

$\alpha = A[c_1]\cdots[c_d]$ のとき:

$$[\alpha]_{x\to e_i} = A[\ [c_1]_{x\to e_i}]\cdots[\ [c_d]_{x\to e_i}] = A[t_1^{(i)}]\cdots[t_d^{(i)}],\quad t_k^{(i)} := [c_k]_{x\to e_i} \in PE_i\quad (i = 1, 2)$$

となる. $([\alpha]_{x\to e_1}, w, w_f) \in \rho_1$ だったから, $(A[t_1^{(1)}]\cdots[t_d^{(1)}], w, w_f) \in \rho_1$ となるので, 定理 9.6 の $(D2)$ より,

$$([R^{(1)}(A)]_{x\to t^{(1)}}, w, w_f) \in \rho_1 \tag{i}$$

となる. また,

$$\varphi_1([R^{(1)}(A)]_{x\to t^{(1)}}, w, w_f) = n \tag{ii}$$

である.

$$t^{(i)} = (t_1^{(i)}, \cdots, t_d^{(i)}) = ([c_1]_{x \to e_i}, \cdots, [c_d]_{x \to e_i}) = [(c_1, \cdots, c_d)]_{x \to e_i} = [c]_{x \to e_i} \quad (i = 1, 2)$$

となるので, 定理 6.10 が使えて

$$\begin{aligned} &[R^{(1)}(A)]_{x \to t^{(i)}} = [R^{(1)}(A)]_{x \to [c]_{x \to e_i}} = [\ [R^{(1)}(A)]_{x \to c}]_{x \to e_i} = [\beta]_{x \to e_i} \quad (i = 1, 2), \\ &\beta := [R^{(1)}(A)]_{x \to c} \end{aligned}$$

となる. $R^{(1)}(A), c_1, \cdots, c_d \in PE_1[x_1, \cdots, x_d]$ により, $\beta \in PE_1[x_1, \cdots, x_d]$ である. $(i), (ii)$ と合わせて,

$$\beta \in PE_1[x_1, \cdots, x_d],\ ([\beta]_{x \to e_1}, w, w_f) \in \rho_1,\ \varphi_1([\beta]_{x \to e_1}, w, w_f) = n$$

となる. $P(n)$ は真だったから,

$$([\beta]_{x \to e_2}, w, w_f) \in \rho_2, \quad \varphi_1([\beta]_{x \to e_1}, w, w_f)\ \overline{\nu}\ \varphi_2([\beta]_{x \to e_2}, w, w_f) \tag{iii}$$

が成り立つ. $[\beta]_{x \to e_i} = [R^{(1)}(A)]_{x \to t^{(i)}}$ だったから, (iii) に代入して

$$([R^{(1)}(A)]_{x \to t^{(2)}}, w, w_f) \in \rho_2, \tag{iv}$$

$$\varphi_1([R^{(1)}(A)]_{x \to t^{(1)}}, w, w_f)\ \overline{\nu}\ \varphi_2([R^{(1)}(A)]_{x \to t^{(2)}}, w, w_f) \tag{v}$$

となる. $t^{(2)} \in PE_2$ により, (iv) に定理の仮定が使えて,

$$([R^{(2)}(A)]_{x \to t^{(2)}}, w, w_f) \in \rho_2, \quad \varphi_2([R^{(1)}(A)]_{x \to t^{(2)}}, w, w_f)\ \overline{\nu}\ \varphi_2([R^{(2)}(A)]_{x \to t^{(2)}}, w, w_f) \tag{vi}$$

となる. これと (v) から

$$\varphi_1([R^{(1)}(A)]_{x \to t^{(1)}}, w, w_f)\ \overline{\nu}\ \varphi_2([R^{(2)}(A)]_{x \to t^{(2)}}, w, w_f) \tag{vii}$$

である. さて, $(*)$ を示したいのだった. $[\alpha]_{x \to e_2} = A[t_1^{(2)}] \cdots [t_d^{(2)}]$ であるから,

$$(A[t_1^{(2)}] \cdots [t_d^{(2)}], w, w_f) \in \rho_2, \quad \varphi_1([\alpha]_{x \to e_1}, w, w_f)\ \overline{\nu}\ \varphi_2(A[t_1^{(2)}] \cdots [t_d^{(2)}], w, w_f)$$

を示せばよい. そのためには,

$$([R^{(2)}(A)]_{x \to t^{(2)}}, w, w_f) \in \rho_2, \quad \varphi_1([\alpha]_{x \to e_1}, w, w_f)\ \overline{\nu}\ 1 + \varphi_2([R^{(2)}(A)]_{x \to t^{(2)}}, w, w_f)$$

を示せば十分である. 前者は (vi) で既に示されている. 後者は, (vii) により

$$\begin{aligned} \varphi_1([\alpha]_{x \to e_1}, w, w_f) = \varphi_1(A[t_1^{(1)}] \cdots [t_d^{(1)}], w, w_f) &= 1 + \varphi_1([R^{(1)}(A)]_{x \to t^{(1)}}, w, w_f) \\ &\overline{\nu}\ 1 + \varphi_2([R^{(2)}(A)]_{x \to t^{(2)}}, w, w_f) \end{aligned}$$

なので, 成立. よって, $(*)$ が成り立つ.

$\alpha = (g_1 g_2)$ のとき:

$$[\alpha]_{x \to e_1} = ([g_1]_{x \to e_1} [g_2]_{x \to e_1}) = (f_1 f_2), \quad f_i := [g_i]_{x \to e_1} \in PE_1$$

である．$([\alpha]_{x\to e_1}, w, w_f) \in \rho_1$ だったから，$((f_1 f_2), w, w_f) \in \rho_1$ である．もし $w_f \neq \mathtt{f}$ ならば，定理 9.6 の $(D6)$ より，ある $w_1 \in V_T^*$ が存在して

$$(f_1, w, w_1), (f_2, w_1, w_f) \in \rho_1$$

が成り立つ．また，

$$n+1 = \varphi_1([\alpha]_{x\to e_1}, w, w_f) = 1 + \varphi_1(f_1, w, w_1) + \varphi_1(f_2, w_1, w_f)$$

である．よって，

$$\varphi_1(f_1, w, w_1) \leq n,\ \varphi_1(f_2, w_1, w_f) \leq n$$

である．すなわち，

$$\varphi_1([g_1]_{x\to e_1}, w, w_1) \leq n,\ \varphi_1([g_2]_{x\to e_1}, w_1, w_f) \leq n$$

である．定理 9.9 より，w_1 は w のサフィックスであるから，w_1 は v のサフィックスでもあり，よって $w_1 \in Su(v)$ である．$g_i \in PE_1[x_1, \cdots, x_d]$ であるから，$P(n)$ が真であることから

$$\begin{aligned}
&([g_1]_{x\to e_2}, w, w_1), ([g_2]_{x\to e_2}, w_1, w_f) \in \rho_2,\\
&\varphi_1([g_1]_{x\to e_1}, w, w_1)\ \overline{\nu}\ \varphi_2([g_1]_{x\to e_2}, w, w_1),\quad \varphi_1([g_2]_{x\to e_1}, w_1, w_f)\ \overline{\nu}\ \varphi_2([g_2]_{x\to e_2}, w_1, w_f)
\end{aligned}$$

となる． 特に $(([g_1]_{x\to e_2}[g_2]_{x\to e_2}), w, w_f) \in \rho_2$ となる． $[\alpha]_{x\to e_2} = ([g_1]_{x\to e_2}[g_2]_{x\to e_2})$ により，$([\alpha]_{x\to e_2}, w, w_f) \in \rho_2$ となる．さらに，

$$\begin{aligned}
\varphi([\alpha]_{x\to e_1}, w, w_f) &= 1 + \varphi_1([g_1]_{x\to e_1}, w, w_1) + \varphi_1([g_2]_{x\to e_1}, w_1, w_f)\\
&\overline{\nu}\ 1 + \varphi_2([g_1]_{x\to e_2}, w, w_1) + \varphi_2[g_2]_{x\to e_2}, w_1, w_f)\\
&= \varphi_2(([g_1]_{x\to e_2}[g_2]_{x\to e_2}), w, w_f)\\
&= \varphi_2([\alpha]_{x\to e_2}, w, w_f)
\end{aligned}$$

となる． よって，$w_f \neq \mathtt{f}$ のときは $(*)$ が成り立つ． 以下では，$w_f = \mathtt{f}$ としてよい． このとき，定理 9.6 の $(D5)$ より，$([g_1]_{x\to e_1}, w, \mathtt{f}) \in \rho_1$ であるか，もしくは，ある $w_1 \in V_T^*$ が存在して $([g_1]_{x\to e_1}, w, w_1), ([g_2]_{x\to e_1}, w_1, \mathtt{f}) \in \rho_1$ であるかのいずれかである．後者の場合は，さっきと全く同じやり方で示せる．前者の場合は，

$$n+1 = \varphi_1([\alpha]_{x\to e_1}, w, w_f) = \varphi_1([\alpha]_{x\to e_1}, w, \mathtt{f}) = 1 + \varphi_1([g_1]_{x\to e_1}, w, \mathtt{f})$$

となるので，$\varphi_1([g_1]_{x\to e_1}, w, \mathtt{f}) \leq n$ である．$P(n)$ は真だったから，

$$([g_1]_{x\to e_2}, w, \mathtt{f}) \in \rho,\quad \varphi_1([g_1]_{x\to e_1}, w, \mathtt{f})\ \overline{\nu}\ \varphi_2([g_1]_{x\to e_2}, w, \mathtt{f})$$

となる．特に，$(([g_1]_{x\to e_2}[g_2]_{x\to e_2}), w, \mathtt{f}) \in \rho_2$ となる．すなわち，$([\alpha]_{x\to e_2}, w, w_f) \in \rho$ となる．さらに，

$$\begin{aligned}
\varphi_1([\alpha]_{x\to e_1}, w, w_f) = \varphi_1([\alpha]_{x\to e_1}, w, \mathtt{f}) = 1 + \varphi_1([g_1]_{x\to e_1}, w, \mathtt{f})\ &\overline{\nu}\ 1 + \varphi_2([g_1]_{x\to e_2}, w, \mathtt{f})\\
&= \varphi_2(([g_1]_{x\to e_2}[g_2]_{x\to e_2}), w, \mathtt{f})\\
&= \varphi_2([\alpha]_{x\to e_2}, w, w_f)
\end{aligned}$$

となる. よって, この場合も $(*)$ が成り立つ.

$\alpha = (g_1], (g_1/g_2)$ のとき: 上と同じ方針で示せるので省略する.

以上より, $P(n+1)$ も真となる. 数学的帰納法から, 任意の $n \geq 1$ に対して $P(n)$ は真である.

(2) (1) で使った $(*), (**), (i), (ii)$ などの番号はリセットし, ここから先でこれらの番号を再び使うことにする. $n \geq 1$ に関する命題 $P(n)$ を以下のように定義する:

$$
\begin{aligned}
P(n): \ & \forall \alpha \in PE_1[x_1, \cdots, x_d],\ \forall w \in Su(v),\ \forall w_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\} \quad s.t. \\
& [\ ([\alpha]_{x \to e_2}, w, w_f) \in \rho_2,\ \varphi_2([\alpha]_{x \to e_2}, w, w_f) \leq n\ ] \Rightarrow \\
& [\ ([\alpha]_{x \to e_1}, w, w_f) \in \rho_1,\ \varphi_2([\alpha]_{x \to e_2}, w, w_f) \geq \varphi_1([\alpha]_{x \to e_1}, w, w_f)\ ].
\end{aligned}
$$

任意の $n \geq 1$ に対して $P(n)$ が真であることを, n に関する数学的帰納法で示せばよい. $P(1)$ が真であることは簡単に示せるので省略する. 次に, $P(n)$ が真だとして, $P(n+1)$ も真であることを示す. α, w, w_f を任意に取る.

$$([\alpha]_{x \to e_2}, w, w_f) \in \rho_2,\ \varphi_2([\alpha]_{x \to e_2}, w, w_f) = n+1$$

という仮定のもとで

$$([\alpha]_{x \to e_1}, w, w_f) \in \rho_1,\ \varphi_2([\alpha]_{x \to e_2}, w, w_f) \geq \varphi_1([\alpha]_{x \to e_1}, w, w_f) \tag{$*$}$$

を示せば十分である. $\alpha = A[c_1] \cdots [c_d]$ 以外の形のときは簡単に示せるので省略する. 以下では, $\alpha = A[c_1] \cdots [c_d]$, $A \in V_N^{(1)},\ c \in PE_1[x_1, \cdots, x_d]^d$ のときのみ考える. (1) と同様にして,

$$[\alpha]_{x \to e_i} = A[t_1^{(i)}] \cdots [t_d^{(i)}],\quad t_k^{(i)} := [c_k]_{x \to e_i} \in PE_i \quad (i = 1, 2)$$

となる. $([\alpha]_{x \to e_2}, w, w_f) \in \rho_2$ だったから, $(A[t_1^{(2)}] \cdots [t_d^{(2)}], w, w_f) \in \rho_2$ となるので,

$$([R^{(2)}(A)]_{x \to t^{(2)}}, w, w_f) \in \rho_2,\quad \varphi_2([R^{(2)}(A)]_{x \to t^{(2)}}, w, w_f) = n$$

である. $t^{(2)} \in PE_2$ であるから, 上記の前者に定理の仮定を使って,

$$([R^{(1)}(A)]_{x \to t^{(2)}}, w, w_f) \in \rho_2,\quad \varphi_2([R^{(2)}(A)]_{x \to t^{(2)}}, w, w_f) \geq \varphi_2([R^{(1)}(A)]_{x \to t^{(2)}}, w, w_f) \tag{i}$$

となる. よって,

$$([R^{(1)}(A)]_{x \to t^{(2)}}, w, w_f) \in \rho_2,\quad \varphi_2([R^{(1)}(A)]_{x \to t^{(2)}}, w, w_f) \leq n \tag{ii}$$

となる. さて, (1) と同様にして

$$[R^{(1)}(A)]_{x \to t^{(i)}} = [\beta]_{x \to e_i} \quad (i = 1, 2),\quad \beta := [R^{(1)}(A)]_{x \to c}$$

となる. $R^{(1)}(A), c_1, \cdots, c_d \in PE_1[x_1, \cdots, x_d]$ により, $\beta \in PE_1[x_1, \cdots, x_d]$ である. (ii) と合わせて,

$$\beta \in PE_1[x_1, \cdots, x_d],\ ([\beta]_{x \to e_2}, w, w_f) \in \rho_2,\ \varphi_2([\beta]_{x \to e_2}, w, w_f) \leq n$$

となる．$P(n)$ は真だったから，

$$([\beta]_{x\to e_1}, w, w_f) \in \rho_1, \quad \varphi_2([\beta]_{x\to e_2}, w, w_f) \geq \varphi_1([\beta]_{x\to e_1}, w, w_f) \tag{iii}$$

が成り立つ．$[\beta]_{x\to e_i} = [R^{(1)}(A)]_{x\to t^{(i)}}$ だったから，(iii) と合わせて

$$([R^{(1)}(A)]_{x\to t^{(1)}}, w, w_f) \in \rho_1, \tag{iv}$$
$$\varphi_2([R^{(1)}(A)]_{x\to t^{(2)}}, w, w_f) \geq \varphi_1([R^{(1)}(A)]_{x\to t^{(1)}}, w, w_f) \tag{v}$$

となる．(v) と (i) を合わせて

$$\varphi_2([R^{(2)}(A)]_{x\to t^{(2)}}, w, w_f) \geq \varphi_1([R^{(1)}(A)]_{x\to t^{(1)}}, w, w_f) \tag{vi}$$

となる．さて，$(*)$ を示したいのだった．$[\alpha]_{x\to e_1} = A[t_1^{(1)}]\cdots[t_d^{(1)}]$ であるから，

$$(A[t_1^{(1)}]\cdots[t_d^{(1)}], w, w_f) \in \rho_1, \quad \varphi_2([\alpha]_{x\to e_2}, w, w_f) \geq \varphi_1(A[t_1^{(1)}]\cdots[t_d^{(1)}], w, w_f)$$

を示せばよい．そのためには，

$$([R^{(1)}(A)]_{x\to t^{(1)}}, w, w_f) \in \rho_1, \quad \varphi_2([\alpha]_{x\to e_2}, w, w_f) \geq 1 + \varphi_1([R^{(1)}(A)]_{x\to t^{(1)}}, w, w_f)$$

を示せば十分である．前者は (iv) で既に示されている．後者は，(vi) により

$$\begin{aligned}\varphi_2([\alpha]_{x\to e_2}, w, w_f) = \varphi_2(A[t_1^{(2)}]\cdots[t_d^{(2)}], w, w_f) &= 1 + \varphi_2([R^{(2)}(A)]_{x\to t^{(2)}}, w, w_f) \\ &\geq 1 + \varphi_1([R^{(1)}(A)]_{x\to t^{(1)}}, w, w_f)\end{aligned}$$

なので，成立．よって，$(*)$ が成り立つ．
以上より，$P(n+1)$ も真となる．数学的帰納法から，任意の $n \geq 1$ に対して $P(n)$ は真である．

定理 11.5 $d \geq 1$ とする．$(V_N, V_T^{(i)}, R^{(i)}) \in \mathrm{EG}_d$ $(i = 1, 2)$ を任意に取る．ここでは $V_N^{(1)} \subset V_N^{(2)}$ が成り立つとする．$PE_i := PE_d(V_N, V_T^{(i)})$ $(i = 1, 2)$ と置く．$\rho_i := \rho(d, V_N, V_T^{(i)}, R^{(i)})$ $(i = 1, 2)$ と置く．$v \in V_T^*$ を任意に取る．以下では，記号 ν は $\prec_v$, $\ll_v$, $\gg_v$ のうちいずれか 1 つに固定されているとする．
(1) 次が成り立つとする:

$$\forall A \in V_N^{(1)},\ \forall t \in PE_2^d\ \left[\ ([R^{(1)}(A)]_{x\to t}, \rho_2)\ \nu\ ([R^{(2)}(A)]_{x\to t}, \rho_2)\ \right].$$

このとき，次が成り立つ．

$$\forall e \in PE_1\ [\ (e, \rho_1)\ \nu\ (e, \rho_2)\ ].$$

(2) 次が成り立つとする:

$$\forall A \in V_N^{(1)},\ \forall t \in PE_2^d\ \left[\ ([R^{(2)}(A)]_{x\to t}, \rho_2) \gg_v ([R^{(1)}(A)]_{x\to t}, \rho_2)\ \right].$$

このとき，次が成り立つ．

$$\forall e \in PE_1\ [\ (e, \rho_2) \gg_v (e, \rho_1)\ ].$$

証明　$a \in V_T$ を 1 つ固定する．$e_i := (a, a, \cdots, a) \in PE_i^d$ $(i = 1, 2)$ と置く．
(1) 明らかに $(e_1, \rho_1)\ \nu\ (e_2, \rho_2)$ である．これと定理の仮定から, 定理 11.4 の仮定の部分が成り立つことになる．よって, 定理 11.4 の結論の部分が成り立つ．そこでの α として, 特に $\alpha \in PE_1 = PE_d(V_N, V_T)$ を任意に取れば, $[\alpha]_{x \to e_i} = \alpha$ により

$$(\alpha, \rho_1)\ \nu\ (\alpha, \rho_2)$$

となる．

(2) 明らかに $(e_2, \rho_2) \gg_v (e_1, \rho_1)$ である．これと定理の仮定から, 定理 11.4 の仮定の部分が成り立つことになる．よって, 定理 11.4 の結論の部分が成り立つ．そこでの α として, 特に $\alpha \in PE_1 = PE_d(V_N, V_T)$ を任意に取れば, $[\alpha]_{x \to e_i} = \alpha$ により

$$(\alpha, \rho_2) \gg_v (\alpha, \rho_1)$$

となる．

定理 11.6 $d \geq 1$ とする．$(V_N, V_T, R) \in \mathrm{EG}_d$ を任意に取る．$\rho := \rho(d, V_N, V_T, R)$ と置く．$e_i \in PE_d(V_N, V_T)^d$ $(i = 1, 2)$ を任意に取る．$v \in V_T^*$ と $A \in V_N$ を任意に取る．以下では, 記号 ν は $\sim_v$, $\prec_v$, $\ll_v$, $\gg_v$ のうちいずれか 1 つに固定されているとする．このとき, 次が成り立つ:

(1) $(e_1, \rho)\ \nu\ (e_2, \rho) \Rightarrow \forall \alpha \in PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]\ [\ ([\alpha]_{x \to e_1}, \rho)\ \nu\ ([\alpha]_{x \to e_2}, \rho)\ ]$.

(2) $(e_1, \rho)\ \nu\ (e_2, \rho) \Rightarrow (A[e_{11}] \cdots [e_{1d}], \rho)\ \nu\ (A[e_{21}] \cdots [e_{2d}], \rho)$.

証明　$V_N^{(i)} := V_N$, $R^{(i)} := R$ $(i = 1, 2)$ と置けば, 定理 11.4 の ρ_i, PE_i について $\rho_i = \rho$, $PE_i = PE_d(V_N, V_T)$ $(i = 1, 2)$ が成り立つ．また, $V_N^{(1)} \subset V_N^{(2)}$ である．以下では, ν の値で場合分けする．

$\nu \neq \sim_v$ のとき:
(1) $(e_1, \rho)\ \nu\ (e_2, \rho)$ とする．$R^{(1)} = R^{(2)}$ であるから, 定理 11.4 の仮定の部分が成り立つことが分かる．よって, 定理 11.4 の結論の部分が成り立つ．よって, (1) が成り立つ．
(2) (1) で $\alpha := A[x_1] \cdots [x_d]$ を適用すればよい．

$\nu = \sim_v$ のとき: $(e_1, \rho) \sim (e_2, \rho)$ とする．よって, $(e_1, \rho) \prec (e_2, \rho)$ かつ $(e_2, \rho) \prec (e_1, \rho)$ である．$\nu = \prec_v$ のときの結果から, 次が成り立つ:

- $\forall \alpha \in PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]\ [\ ([\alpha]_{x \to e_1}, \rho) \prec_v ([\alpha]_{x \to e_2}, \rho)\ ]$.
- $(A[e_{11}] \cdots [e_{1d}], \rho) \prec_v (A[e_{21}] \cdots [e_{2d}], \rho)$.
- $\forall \alpha \in PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]\ [\ ([\alpha]_{x \to e_2}, \rho) \prec_v ([\alpha]_{x \to e_1}, \rho)\ ]$.
- $(A[e_{21}] \cdots [e_{2d}], \rho) \prec_v (A[e_{11}] \cdots [e_{1d}], \rho)$.

以上より, $\nu = \sim_v$ のときの (1),(2) が成り立つ．

定理 11.7 $d \geq 1$ とする．$(V_N, V_T, R) \in \mathrm{EG}_d$ を任意に取る．$\rho := \rho(d, V_N, V_T, R)$ と置く．$e_i \in PE_d(V_N, V_T)$ $(i = 1, 2)$ を任意に取る．$v \in V_T^*$ を任意に取る．以下では, 記号 ν は $\sim_v$, $\prec_v$, $\ll_v$, $\gg_v$ のうちいずれか 1 つに固定されているとする．このとき, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned}(e_1, \rho)\ \nu\ (e_2, \rho) \Rightarrow & \forall \alpha \in PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d, y_1],\ \forall t \in PE_d(V_N, V_T)^d \\ & [\ ([\alpha]_{(x, y_1) \to (t, e_1)}, \rho)\ \nu\ ([\alpha]_{(x, y_1) \to (t, e_2)}, \rho)\ ].\end{aligned}$$

証明　α と t を任意に取る．まず, 定理 6.11 より

$$[\alpha]_{(x,y_1)\to(t,e_i)} = [\ [\alpha]_{x\to t}]_{y_1\to e_i} = [\beta]_{y_1\to e_i},\quad \beta := [\alpha]_{x\to t}$$

となる．定理 7.3 より, $\beta \in PE_d(V_N, V_T)[y_1]$ である．よって, 定理 6.12 より

$$[\beta]_{y_1\to e_i} = [\ [\beta]_{y_1\to x_1}]_{x_1\to e_i} = [\gamma]_{x_1\to e_i},\quad \gamma := [\beta]_{y_1\to x_1}$$

となる．定理 7.3 より, $\gamma \in PE_d(V_N, V_T)[x_1]$ である．よって, $a \in V_T$ を 1 つ固定すれば, 定理 6.8 の (2) より

$$[\gamma]_{x_1\to e_i} = [\gamma]_{(x_1,x_2,\cdots,x_d)\to(e_i,a,\cdots,a)}$$

となる．以上より,

$$[\alpha]_{(x,y_1)\to(t,e_i)} = [\gamma]_{(x_1,x_2,\cdots,x_d)\to(e_i,a,\cdots,a)}$$

となる．よって,

$$([\gamma]_{(x_1,x_2,\cdots,x_d)\to(e_1,a,\cdots,a)}, \rho)\ \nu\ ([\gamma]_{(x_1,x_2,\cdots,x_d)\to(e_2,a,\cdots,a)}, \rho) \qquad (*)$$

を示せばよい．定理の仮定より, $(e_1, \rho)\ \nu\ (e_2, \rho)$ である．また, 明らかに $(a, \rho)\ \nu\ (a, \rho)$ である．よって,

$$((e_1, a, \cdots, a), \rho)\ \nu\ ((e_2, a, \cdots, a), \rho)$$

である．$\gamma \in PE_d(V_N, V_T)[x_1] \subset PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]$ であるから, 定理 11.6 の (1) が使えて, 確かに $(*)$ が成り立つ.

定理 11.8 (first order MACRO PEG の同値変形に関する統一的な変換定理) $d \geq 1$ とする．$(V_N, V_T, R) \in \mathrm{EG}_d$ を任意に取る．$v \in V_T^*$ を任意に取る．$A \in V_N$ は, ある $\alpha \in PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d, y_1]$ とある $\beta \in PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]$ が存在して

$$R(A) = [\alpha]_{y_1\to\beta}$$

と表されるとする．$A_1 \in V_2 - V_N$ を 1 つ取り, $V_N' \subset V_2$ と $R' : V_N' \to PE_d(V_N, V_T')[x_1, \cdots, x_d]$ を以下のように定義する:

$$\begin{aligned} &V_N' := V_N \cup \{A_1\}, \\ &R'(X) := R(X)\ \ (X \neq A, A_1), \\ &R'(A) := [\alpha]_{y_1\to A_1[x_1]\cdots[x_d]}, \\ &R'(A_1) := \beta. \end{aligned}$$

以下では, $\rho := \rho(d, V_N, V_T, R)$, $\rho' := \rho(d, V_N', V_T, R')$ と置く．このとき, 次が成り立つ:

$$\forall e \in PE_d(V_N, V_T)\ \ [\ (e, \rho) \sim (e, \rho') \text{ かつ } (e, \rho) \ll (e, \rho')\ ].$$

補足　$G = (V_N, V_T, R, e_S) \in \mathrm{foMPEG}_1$ とする．ある $A \in V_N$ が

$$A[x] = ((xx)a);$$

のように定義されていたとする．このとき, A の部分だけを

$$A[x] = (A_1[x]a);\quad A_1[x] = (xx);$$

と変更した新しい G を $G' \in \mathrm{foMPEG}_1$ とすれば, G と G' は本質的に同じ first order MACRO PEG を表していると考えられる．しかも, G よりも G' の方がステップ数が少し嵩むと考えられる．このような状況を統一的に記述できるのが, 上の定理である．今の場合, $\alpha := (ya) \in PE_1(V_N, V_T)[x, y]$ と置けば, G における A の定義は

$$A[x] = [\alpha]_{y \to (xx)};$$

と記述できる．そして, G' における A, A_1 の定義は

$$A[x] = [\alpha]_{y \to A_1[x]};\quad A_1[x] = (xx);$$

と記述できる．

証明

$$\forall e \in PE_d(V_N, V_T),\ \forall v \in V_T^*\ \ [\ (e, \rho) \prec_v (e, \rho')\ かつ\ (e, \rho') \prec_v (e, \rho)\ かつ\ (e, \rho) \ll_v (e, \rho')\ ]$$

を示せばよい．まずは

$$\forall e \in PE_d(V_N, V_T),\ \forall v \in V_T^*\ \ [\ (e, \rho) \prec_v (e, \rho')\ かつ\ (e, \rho) \ll_v (e, \rho')\ ]$$

を示す．$\nu = \prec_v, \ll_v$ に対して

$$\forall e \in PE_d(V_N, V_T),\ \forall v \in V_T^*\ \ [\ (e, \rho)\ \nu\ (e, \rho')\ ] \tag{i}$$

が成り立つことを言えばよい．定理 11.5 を使う．$V_N^{(1)} := V_N$, $V_N^{(2)} := V'_N$, $R^{(1)} := R$, $R^{(2)} := R'$ と置けば, 定理 11.5 の ρ_i, PE_i について, $\rho_1 = \rho$, $\rho_2 = \rho'$, $PE_1 = PE_d(V_N, V_T)$, $PE_2 = PE_d(V_N, V'_T)$ が成り立つ．また, $V_N^{(1)} \subset V_N^{(2)}$ である．よって,

$$\forall X \in V_N^{(1)},\ t \in PE_2^d\ \left[\ ([R^{(1)}(X)]_{x \to t}, \rho_2)\ \nu\ ([R^{(2)}(X)]_{x \to t}, \rho_2)\ \right]$$

が示せれば, 定理 11.5 より, (i) が従う．さて, $X \in V_N^{(1)}$ と $t \in PE_2^d$ を任意に取る．

$$([R(X)]_{x \to t}, \rho')\ \nu\ ([R'(X)]_{x \to t}, \rho')$$

を示せばよい．$X \neq A, A_1$ のときは, $R(X) = R'(X)$ であるから, 確かに成立．$X = A_1$ のときは, そもそも $X \in V_N^{(1)}$ になってないので, 考える必要はない．$X = A$ のときは, 定理 6.8 の (2) と定理 6.10 より

$$\begin{aligned}
[R(X)]_{x \to t} = [R(A)]_{x \to t} = [\ [\alpha]_{y_1 \to \beta}]_{x \to t} &= [\ [\alpha]_{(x, y_1) \to (x, \beta)}]_{x \to t} \\
&= [\alpha]_{(x, y_1) \to [(x, \beta)]_{x \to t}} \\
&= [\alpha]_{(x, y_1) \to (t, [\beta]_{x \to t})}
\end{aligned} \tag{ii}$$

である．一方で,

$$\begin{aligned}
[R'(X)]_{x \to t} = [R'(A)]_{x \to t} &= [\ [\alpha]_{y_1 \to A_1[x_1] \cdots [x_d]}]_{x \to t} \\
&= [\ [\alpha]_{(x, y_1) \to (x, A_1[x_1] \cdots [x_d])}]_{x \to t} \\
&= [\alpha]_{(x, y_1) \to [(x, A_1[x_1] \cdots [x_d])]_{x \to t}} \\
&= [\alpha]_{(x, y_1) \to (t, A_1[t_1] \cdots [t_d])}
\end{aligned} \tag{iii}$$

である．よって,

$$([\alpha]_{(x,y_1)\to(t,[\beta]_{x\to t})},\rho')\ \nu\ ([\alpha]_{(x,y_1)\to(t,A_1[t_1]\cdots[t_d])},\rho') \tag{iv}$$

を示せばよい．定理 11.3 より

$$([R'(A_1)]_{x\to t},\rho')\ \nu\ (A_1[t_1]\cdots[t_d],\rho')$$

である．すなわち,

$$([\beta]_{x\to t},\rho')\ \nu\ (A_1[t_1]\cdots[t_d],\rho') \tag{v}$$

である．

$$\begin{aligned}
&\alpha\in PE_d(V_N,V_T)[x_1,\cdots,x_d,y_1]\subset PE_d(V_N,V_T')[x_1,\cdots,x_d,y_1],\\
&\beta\in PE_d(V_N,V_T)[x_1,\cdots,x_d]\subset PE_d(V_N,V_T')[x_1,\cdots,x_d],\\
&t\in PE_d(V_N,V_T')^d,\ \ [\beta]_{x\to t}\in PE_d(V_N,V_T'),\ \ A_1[t_1]\cdots[t_d]\in PE_d(V_N,V_T')
\end{aligned}$$

により, (v) に定理 11.7 が適用できて, (iv) が成り立つ．以上より, (i) が成り立つ．
あとは,

$$\forall v\in V_T^*,\ \forall e\in PE_d(V_N,V_T)\ \ [\ (e,\rho')\prec_v(e,\rho)\ ]$$

を示せばよい．より強く,

$$\forall v\in V_T^*,\ \forall e\in PE_d(V_N,V_T)\ \ [\ (e,\rho')\gg_v(e,\rho)\ ] \tag{$*$}$$

が成り立つことを示す．定理 11.5 を使う．

$$\forall X\in V_N^{(1)},\ t\in PE_2^d\ \left[\ ([R^{(2)}(X)]_{x\to t},\rho_2)\gg_v([R^{(1)}(X)]_{x\to t},\rho_2)\ \right]$$

が示せれば, 定理 11.5 から $(*)$ が従う．さて, $X\in V_N^{(1)}$ と $t\in PE_2^d$ を任意に取る．

$$([R'(X)]_{x\to t},\rho')\gg_v([R(X)]_{x\to t},\rho')$$

を示せばよい．$X\neq A,A_1$ ならば, $R'(X)=R(X)$ であるから, 確かに成立．$X=A_1$ のときは, そもそも $X\in V_N^{(1)}$ になってないので, 考える必要がない．$X=A$ のときは, $(ii),(iii)$ に注意して

$$([\alpha]_{(x,y_1)\to(t,A_1[t_1]\cdots[t_d])},\rho')\gg_v([\alpha]_{(x,y_1)\to(t,[\beta]_{x\to t})},\rho') \tag{$**$}$$

を示せばよい．定理 11.3 より,

$$(A_1[t_1]\cdots[t_d],\rho')\gg_v([R'(A_1)]_{x\to t},\rho')$$

である．すなわち,

$$(A_1[t_1]\cdots[t_d],\rho')\gg_v([\beta]_{x\to t},\rho')$$

である．

$$\begin{aligned}
&\alpha\in PE_d(V_N,V_T)[x_1,\cdots,x_d,y_1]\subset PE_d(V_N,V_T')[x_1,\cdots,x_d,y_1],\\
&\beta\in PE_d(V_N,V_T)[x_1,\cdots,x_d]\subset PE_d(V_N,V_T')[x_1,\cdots,x_d],\\
&t\in PE_d(V_N,V_T')^d,\ \ [\beta]_{x\to t}\in PE_d(V_N,V_T'),\ \ A_1[t_1]\cdots[t_d]\in PE_d(V_N,V_T')
\end{aligned}$$

であるから, 定理 11.7 が使えて, $(**)$ が成り立つ．

定理 11.9 (first order MACRO PEG の同値変形に関する統一的な変換定理 (拡張版)) $m \geq 1$ とする．$d \geq 1$ とする．$(V_N, V_T, R) \in \mathrm{EG}_d$ を任意に取る．$v \in V_T^*$ を任意に取る．$A \in V_N$ は, ある $\alpha \in PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d, y_1, \cdots, y_m]$ とある $\beta \in PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]^m$ が存在して

$$R(A) = [\alpha]_{y \to \beta}$$

と表されるとする．異なる m 個の $A_1, \cdots, A_m \in V_2 - V_N$ を取り，$V'_N \subset V_2$ と $R' : V'_N \to PE_d(V_N, V'_T)[x_1, \cdots, x_d]$ を以下のように定義する:

$$\begin{aligned} &V'_N := V_N \cup \{A_i\}_{i=1}^m, \\ &R'(X) := R(X) \quad (X \neq A, A_1, \cdots, A_m), \\ &R'(A) := [\alpha]_{y \to (A_1[x_1]\cdots[x_d], A_2[x_1]\cdots[x_d], \cdots, A_m[x_1]\cdots[x_d])}, \\ &R'(A_i) := \beta_i \quad (1 \leq i \leq m). \end{aligned}$$

以下では, $\rho := \rho(d, V_N, V_T, R)$, $\rho' := \rho(d, V_N, V'_T, R')$ と置く．このとき, 次が成り立つ:

$$\forall e \in PE_d(V_N, V_T) \ [\ (e, \rho) \sim (e, \rho') \text{ かつ } (e, \rho) \ll (e, \rho')\ ].$$

証明　定理の主張全体を, m をパラメータとする命題だと見なし, $P(m)$ と置く．任意の $m \geq 1$ に対して $P(m)$ が真であることを, m に関する数学的帰納法で示せばよい．$P(1)$ は定理 11.8 そのものであるから, $P(1)$ は成立する．次に, $m_0 \geq 1$ を任意に取る．$1 \leq m \leq m_0$ のときは $P(m)$ は真とする．$m = m_0 + 1$ のときも, $P(m)$ が真であることを示す．$y' = (y_1, \cdots, y_{m-1})$, $\beta' = (\beta_1, \cdots, \beta_{m-1})$ と置く．定理 6.11 より

$$R(A) = [\alpha]_{y \to \beta} = [\ [\alpha]_{y_m \to \beta_m}]_{y' \to \beta'} = [\alpha']_{y' \to \beta'}, \quad \alpha' := [\alpha]_{y_m \to \beta_m}$$

と表せる．定理 7.3 より, $\alpha' \in PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d, y_1, \cdots, y_{m-1}]$ である．よって, 帰納法の仮定により, 次が成り立つ: 異なる $(m-1)$ 個の $A_1, \cdots, A_{m-1} \in V_2 - V_N$ を取り, $V'_N \subset V_2$ と $R' : V'_N \to PE_d(V_N, V'_T)[x_1, \cdots, x_d]$ を以下のように定義する:

$$\begin{aligned} &V'_N := V_N \cup \{A_i\}_{i=1}^{m-1}, \\ &R'(X) := R(X) \quad (X \neq A, A_1, \cdots, A_{m-1}), \\ &R'(A) := [\alpha']_{y' \to (A_1[x_1]\cdots[x_d], A_2[x_1]\cdots[x_d], \cdots, A_{m-1}[x_1]\cdots[x_d])}, \\ &R'(A_i) := \beta'_i = \beta_i \quad (1 \leq i \leq m-1). \end{aligned}$$

以下では, $\rho := \rho(d, V_N, V_T, R)$, $\rho' := \rho(d, V_N, V'_T, R')$ と置く．このとき, 次が成り立つ:

$$\forall e \in PE_d(V_N, V_T) \ [\ (e, \rho) \sim (e, \rho') \text{ かつ } (e, \rho) \ll (e, \rho')\ ]. \tag{1}$$

さて, 定理 6.11 より

$$\begin{aligned} R'(A) &= [\alpha']_{y' \to (A_1[x_1]\cdots[x_d], A_2[x_1]\cdots[x_d], \cdots, A_{m-1}[x_1]\cdots[x_d])} \\ &= [\ [\alpha]_{y_m \to \beta_m}]_{y' \to (A_1[x_1]\cdots[x_d], A_2[x_1]\cdots[x_d], \cdots, A_{m-1}[x_1]\cdots[x_d])} \\ &= [\alpha]_{y \to (A_1[x_1]\cdots[x_d], A_2[x_1]\cdots[x_d], \cdots, A_{m-1}[x_1]\cdots[x_d], \beta_m)} \\ &= [\ [\alpha]_{y' \to (A_1[x_1]\cdots[x_d], A_2[x_1]\cdots[x_d], \cdots, A_{m-1}[x_1]\cdots[x_d])}]_{y_m \to \beta_m} \\ &= [\alpha'']_{y_m \to \beta_m}, \quad \alpha'' := [\alpha]_{y' \to (A_1[x_1]\cdots[x_d], A_2[x_1]\cdots[x_d], \cdots, A_{m-1}[x_1]\cdots[x_d])} \end{aligned}$$

と表せる．定理 7.3 より，$\alpha'' \in PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d, y_m]$ である．よって，$m = 1$ のときの結果から，次が成り立つ:
異なる 1 個の $A_m \in V_2 - V_N$ を取り，$V''_N \subset V_2$ と $R'' : V''_N \to PE_d(V_N, V''_T)[x_1, \cdots, x_d]$ を以下のように定義する:

$$
\begin{aligned}
&V''_N := V'_N \cup \{A_m\}, \\
&R''(X) := R'(X) \ \ (X \neq A, A_m), \\
&R''(A) := [\alpha'']_{y_m \to A_m[x_1]\cdots[x_d]}, \\
&R''(A_m) := \beta_m.
\end{aligned}
$$

以下では，$\rho'' := \rho(d, V_N, V''_T, R'')$ と置く．このとき，次が成り立つ:

$$\forall e \in PE_d(V_N, V'_T) \ \ [\ (e, \rho') \sim (e, \rho'') \text{ かつ } (e, \rho') \ll (e, \rho'')\ ]. \tag{2}$$

(1),(2) と $PE_d(V_N, V_T) \subset PE_d(V_N, V'_T)$ から，次が成り立つ:

$$\forall e \in PE_d(V_N, V_T) \ \ [\ (e, \rho) \sim (e, \rho'') \text{ かつ } (e, \rho) \ll (e, \rho'')\ ]. \tag{3}$$

また，定理 6.11 より，

$$
\begin{aligned}
R''(A) &= [\alpha'']_{y_m \to A_m[x_1]\cdots[x_d]} \\
&= [\ [\alpha]_{y' \to (A_1[x_1]\cdots[x_d], A_2[x_1]\cdots[x_d], \cdots, A_{m-1}[x_1]\cdots[x_d])}]_{y_m \to A_m[x_1]\cdots[x_d]} \\
&= [\alpha]_{y \to (A_1[x_1]\cdots[x_d], A_2[x_1]\cdots[x_d], \cdots, A_m[x_1]\cdots[x_d])}
\end{aligned}
$$

である．また，R', R'' の定義により，$X \neq A, A_1, \cdots, A_m$ のときは $R''(X) = R'(X) = R(X)$ である．また，$X = A_m$ のときは $R''(X) = R''(A_m) = \beta_m$ である．また，$X = A_i,\ 1 \leq i \leq m-1$ のときは，$X \neq A, A_m$ となるので $R''(X) = R'(X) = R'(A_i) = \beta'_i = \beta_i$ である．よって，V''_N, R'' を V_N, R から見ると，次が成り立つことになる: 異なる m 個の $A_1, \cdots, A_m \in V_2 - V_N$ が存在して，

$$
\begin{aligned}
&V''_N = V_N \cup \{A_i\}_{i=1}^m, \\
&R''(X) = R(X) \ \ (X \neq A, A_1, \cdots, A_m), \\
&R''(A) = [\alpha]_{y \to (A_1[x_1]\cdots[x_d], A_2[x_1]\cdots[x_d], \cdots, A_m[x_1]\cdots[x_d])}, \\
&R''(A_i) = \beta_i \ \ (1 \leq i \leq m).
\end{aligned}
$$

よって，(3) と合わせて，$P(m)$ は真となる．以上より，$m = m_0 + 1$ のときも $P(m)$ は真である．数学的帰納法により，任意の $m \geq 1$ で $P(m)$ は真である．

定理 11.10 (V_N の名前の付け替え) $d \geq 1$ とする．$(V_N, V_T, R) \in \mathrm{EG}_d$ を任意に取る．$f : V_N \to V_2$ は単射とする．$V'_N = Im(f)$ と置く．

$$\Sigma := \overline{V_1 \cup \{x_i\}_{i=1}^d \cup V_2}, \ \ \Sigma_1 := \overline{V_T \cup \{x_i\}_{i=1}^d \cup V_N}, \ \ \Sigma_2 := \overline{V_T \cup \{x_i\}_{i=1}^d \cup V'_N}$$

と置く．$g : \Sigma \to \Sigma^*$ を

$$g(a) := a \ \ (a \notin V_N), \ \ f(a) \ \ (a \in V_N)$$

で定義する. 定理 6.1 によって $g^* : \Sigma^* \to \Sigma^*$ を定義する. このとき, 次が成り立つ.

(0) $g|_{\Sigma_1} : \Sigma_1 \to \Sigma_2$.

(1) $\forall e \in PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]\ \ [\ g^*(e) \in PE_d(V_N, V'_T)[x_1, \cdots, x_d]\ ]$.

(2) $\forall e \in PE_d(V_N, V_T)\ \ [\ g^*(e) \in PE_d(V_N, V'_T)\ ]$.

(3) $g^*|_{PE_d(V_N,V_T)[x_1,\cdots,x_d]} : PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d] \to PE_d(V_N, V'_T)[x_1, \cdots, x_d]$ は全単射.

(4) $g^*|_{PE_d(V_N,V_T)} : PE_d(V_N, V_T) \to PE_d(V_N, V'_T)$ は全単射.

ここで, $V'_N \subset V_2$, $R' : V'_N \to PE_d(V_N, V'_T)[x_1, \cdots, x_d]$ を以下のように定義する:

$$V'_N := Im(f), \quad R'(X) := g^*(R(f^{-1}(X)))\quad (X \in V'_N).$$

このとき, 次が成り立つ.

(5) $\forall e \in PE_d(V_N, V_T)\ \ [\ (e, \rho) \sim (g^*(e), \rho')\ ]$.

(6) $\forall e \in PE_d(V_N, V_T)\ \ [\ (e, \rho) \ll (g^*(e), \rho')\ ]$.

(7) $\forall e \in PE_d(V_N, V_T)\ \ [\ (e, \rho) \gg (g^*(e), \rho')\ ]$.

ただし, $\rho := \rho(d, V_N, V_T, R)$, $\rho' := \rho(d, V_N, V'_T, R')$ と置いた.

補足　$R'(X)$ の定義について補足する. $X \in V'_N$ を任意に取る. このとき, $f^{-1}(X) \in V_N$ であるから, $R(f^{-1}(X)) \in PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]$ である. (3) により, $g^*(R(f^{-1}(X))) \in PE_d(V_N, V'_T)[x_1, \cdots, x_d]$ である. よって, $R'(X) := g^*(R(f^{-1}(X)))$ という定義によって
$R' : V'_N \to PE_d(V_N, V'_T)[x_1, \cdots, x_d]$ となる.

補足　$G \in \mathrm{foMPEG}_d$ について, 非終端記号の名前を任意に付け替えた G を G' と置くと, G と G' は本質的に同じ first order MACRO PEG を表していると考えられる. もちろん, 解釈の結果は両者で全く同じはずであり, そのときのステップ数も両者で全く同じはずである. このことを丁寧に表現したのが上の定理であり, 意外と面倒くさい.

証明　(0) 明らか.
(1) $PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d] \subset \Sigma_1^* \subset \Sigma^*$ だから, $e \in PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]$ に対して $g^*(e) \in \Sigma^*$ が定義可能である. さて,

$$M := \{e \in \Sigma^* \mid g^*(e) \in PE_d(V_N, V'_T)[x_1, \cdots, x_d]\ \}$$

と置く. $PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]$ の定義に使われる P, f に対して $Q_{P,f}(M)$ が真であることを示せばよい. すなわち,

- $\forall a \in V \cup \{x_i\}_{i=1}^{l}\ \ [\ a \in M\ ]$,
- $\forall A \in W,\ \forall t \in M^d,\ \forall e_1, e_2 \in M\ \ [\ A[t_1] \cdots [t_d], (e_1 e_2), (e_1], (e_1/e_2) \in M\ ]$

を示せばよい.

$a \in M$ について: $g^*(a) = a \in PE_d(V_N, V'_T)[x_1, \cdots, x_d]$ より, 成立.

$A[t_1]\cdots[t_d] \in M$ について:

$$g^*(A[t_1]\cdots[t_d]) = g^*(A)[g^*(t_1)]\cdots[g^*(t_d)] = f(A)[g^*(t_1)]\cdots[g^*(t_d)]$$

である. $t_i \in M$ より $g^*(t_i) \in PE_d(V_N, V_T')[x_1, \cdots, x_d]$ である. また, f の定義から $f(A) \in V_N' \subset PE_d(V_N, V_T')[x_1, \cdots, x_d]$ である. よって, $f(A)[g^*(t_1)]\cdots[g^*(t_d)] \in PE_d(V_N, V_T')[x_1, \cdots, x_d]$ である. よって, $A[t_1]\cdots[t_d] \in M$ である.

$(e_1e_2) \in M$ について: $g^*((e_1e_2)) = (g^*(e_1)g^*(e_2))$ である. $e_i \in M$ より,
$g^*(e_i) \in PE_d(V_N, V_T')[x_1, \cdots, x_d]$ であるから, $(g^*(e_1)g^*(e_2)) \in PE_d(V_N, V_T')[x_1, \cdots, x_d]$ である.
よって, $(e_1e_2) \in M$ である.

$(e_1], (e_1/e_2) \in M$ について: 上と同様にして示せる.

以上より, (1) が成り立つ.
(2) (1) と同様にして示せる.
(3) (1) より,

$$g^*|_{PE_d(V_N,V_T)[x_1,\cdots,x_d]} : PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d] \to PE_d(V_N, V_T')[x_1, \cdots, x_d]$$

が成り立つ. 次に, $h : \Sigma \to \Sigma$ を

$$h(x) := x \quad (x \notin V_N'), \quad f^{-1}(x) \quad (x \in V_N')$$

で定義する. このとき, $h|_{\Sigma_2} : \Sigma_2 \to \Sigma_1$ が成り立つことが分かる. さらに, $g|_{\Sigma_1} = h|_{\Sigma_2}^{-1}$ が成り立つことが分かる. また, (1) と同様にして,

$$h^*|_{PE_d(V_N,V_T')[x_1,\cdots,x_d]} : PE_d(V_N, V_T')[x_1, \cdots, x_d] \to PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]$$

となることが分かる. 以下では, $G := g^*|_{PE_d(V_N,V_T)[x_1,\cdots,x_d]}$, $H := h^*|_{PE_d(V_N,V_T')[x_1,\cdots,x_d]}$ と置く. $G \circ H$ と $H \circ G$ が定義できることに注意する. さて, $e \in PE_d(V_N, V_T')[x_1, \cdots, x_d] \subset \Sigma_2^*$ を任意に取る. $e \neq \varepsilon$ である. $g|_{\Sigma_1} = h|_{\Sigma_2}^{-1}$ により,

$$\begin{aligned}(G \circ H)(e) = G(H(e)) = g^*(h^*(e)) = g^*(h(e_1)\cdots h(e_{|e|})) = g(h(e_1))\cdots g(h(e_{|e|})) &= e_1 \cdots e_{|e|} \\ &= e\end{aligned}$$

となる. すなわち,

$$G \circ H = id_{PE_d(V_N,V_T')[x_1,\cdots,x_d]}$$

となる. 同様にして,

$$H \circ G = id_{PE_d(V_N,V_T)[x_1,\cdots,x_d]}$$

となる. よって, $G = g^*|_{PE_d(V_N,V_T)[x_1,\cdots,x_d]}$ は全単射であり, $G^{-1} = H$ である.
(4) (2) より,

$$G_1 := g^*|_{PE_d(V_N,V_T)} : PE_d(V_N, V_T) \to PE_d(V_N, V_T')$$

が成り立つ. また, (3) の h について, (2) と同様にして

$$H_1 := h^*|_{PE_d(V_N,V_T')} : PE_d(V_N,V_T') \to PE_d(V_N,V_T)$$

となることが分かる. 特に, $G_1 \circ H_1$ と $H_1 \circ G_1$ が定義できて,

$$G_1 \circ H_1 = id_{PE_d(V_N,V_T')}, \quad H_1 \circ G_1 = id_{PE_d(V_N,V_T)}$$

となることが分かる. よって, $G_1 := g^*|_{PE_d(V_N,V_T)}$ は全単射であり, $G_1^{-1} = H_1$ である.
(6),(7) 先に (6),(7) を示す. 簡単のため, $\varphi_1 := \varphi_\rho$, $\varphi_2 := \varphi_{\rho'}$ と置く. $n \geq 1$ に関する命題 $P(n)$ を以下のように定義する:

$$\begin{aligned}&P(n):\ \forall e \in PE_d(V_N,V_T),\ \forall v \in V_T^*,\ \forall v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}\\ &[\ [\ (e,v,v_f) \in \rho,\ \varphi_1(e,v,v_f) \leq n\ ] \Rightarrow [\ (g^*(e),v,v_f) \in \rho',\ \varphi_1(e,v,v_f) = \varphi_2(g^*(e),v,v_f)\ ]\ ].\end{aligned}$$

任意の $n \geq 1$ に対して $P(n)$ が真であることを, n に関する数学的帰納法で示す.

$n = 1$ のとき: $(e,v,v_f) \in \rho$, $\varphi_1(e,v,v_f) \leq 1$ とする. $e = a \in V_T$ となるしかない. $(e,v,v_f) \in \rho$ より $(a,v,v_f) \in \rho$ となるので, $v_f = \langle v \rangle_a$ となる. また, $g^*(e) = a$ である. よって, $(g^*(e),v,v_f) = (a,v,\langle v \rangle_a) \in \rho'$ である. また, $\varphi_1(e,v,v_f) = 1 = \varphi_2(g^*(e),v,v_f)$ である. よって, $P(1)$ は真である.

次に, $n \geq 1$ を任意に取る. $P(n)$ が真だとして, $P(n+1)$ も真であることを示す.

$$(e,v,v_f) \in \rho,\ \varphi_1(e,v,v_f) = n+1$$

という仮定のもとで

$$(g^*(e),v,v_f) \in \rho', \quad \varphi_1(e,v,v_f) = \varphi_2(g^*(e),v,v_f)$$

を示せば十分である.

$e = a \in V_T$ のとき: $n = 1$ のときと全く同じ手順で示せる.

$e = A[t_1]\cdots[t_d]$, $A \in V_N$, $t \in PE_d(V_N,V_T)^d$ のとき: $(e,v,v_f) \in \rho$ より, $([R(A)]_{x \to t},v,v_f) \in \rho$ となる. また, $\varphi_1([R(A)]_{x \to t},v,v_f) = n$ である. $P(n)$ は真だったから,

$$(g^*([R(A)]_{x \to t}),v,v_f) \in \rho', \quad \varphi_1([R(A)]_{x \to t},v,v_f) = \varphi_2(g^*([R(A)]_{x \to t}),v,v_f)$$

となる. $g^* : \Sigma^* \to \Sigma^*$ は

- $\forall a \in \Sigma - \{x_i\}_{i=1}^d$ [文字列 $g^*(a)$ の中に x_i $(1 \leq i \leq d)$ は出現しない],
- $\forall i \in [1,d]$ [$g^*(x_i) = x_i$],
- $\forall v,w \in \Sigma^*$ [$g^*(vw) = g^*(v)g^*(w)$]

を満たすことが確かめられる. よって, 定理 6.13 から, $g^*([R(A)]_{x \to t}) = [g^*(R(A))]_{x \to g^*(t)}$ となる. よって,

$$([g^*(R(A))]_{x \to g^*(t)},v,v_f) \in \rho', \quad \varphi_1([R(A)]_{x \to t},v,v_f) = \varphi_2([g^*(R(A))]_{x \to g^*(t)},v,v_f) \qquad (*)$$

となる．さて，

$$(g^*(A[t_1]\cdots[t_d]),v,v_f)\in\rho',\quad \varphi_1(A[t_1]\cdots[t_d],v,v_f)=\varphi_2(g^*(A[t_1]\cdots[t_d]),v,v_f)$$

を示したいのだった．

$$g^*(A[t_1]\cdots[t_d])=f(A)[g^*(t_1)]\cdots[g^*(t_d)]=B[t_1']\cdots[t_d'],\quad B:=f(A),\quad t_i':=g^*(t_i)$$

であるから，

$$(B[t_1']\cdots[t_d'],v,v_f)\in\rho',\quad \varphi_1(A[t_1]\cdots[t_d],v,v_f)=\varphi_2(B[t_1']\cdots[t_d'],v,v_f)$$

を示せばよい．そのためには，

$$([R'(B)]_{x\to t'},v,v_f)\in\rho',\quad \varphi_1(A[t_1]\cdots[t_d],v,v_f)=1+\varphi_2([R'(B)]_{x\to t'},v,v_f)$$

を示せば十分である．

$$\begin{aligned}&R'(B)=g^*(R(f^{-1}(B)))=g^*(R(A)),\\&t'=(t_1',\cdots,t_d')=(g^*(t_1),\cdots,g^*(t_d))=g^*(t)\end{aligned}$$

であるから，$[R'(B)]_{x\to t'}=[g^*(R(A))]_{x\to g^*(t)}$ である．よって，

$$([g^*(R(A))]_{x\to g^*(t)},v,v_f)\in\rho',\quad \varphi_1(A[t_1]\cdots[t_d],v,v_f)=1+\varphi_2([g^*(R(A))]_{x\to g^*(t)},v,v_f)$$

を示せばよい．前者は $(*)$ で既に示してある．後者は，$(*)$ により

$$\varphi_1(A[t_1]\cdots[t_d],v,v_f)=1+\varphi_1([R(A)]_{x\to t},v,v_f)=1+\varphi_2([g^*(R(A))]_{x\to g^*(t)},v,v_f)$$

となるので，成立．

$e=(e_1e_2)$, $e_i\in PE_d(V_N,V_T)$ のとき: $((e_1e_2),v,v_f)\in\rho$ である．$v_f\neq \mathtt{f}$ ならば，ある $v_1\in V_T^*$ が存在して $(e_1,v,v_1),(e_2,v,v_f)\in\rho$ である．また，

$$n+1=\varphi_1(e,v,v_f)=1+\varphi_1(e_1,v,v_1)+\varphi_1(e_2,v,v_f)$$

である．よって，

$$\varphi_1(e_1,v,v_1)\le n,\quad \varphi_1(e_2,v,v_f)\le n$$

である．帰納法の仮定により，

$$\begin{aligned}&(g^*(e_1),v,v_1),(g^*(e_2),v_1,v_f)\in\rho',\\&\varphi_1(e_1,v,v_1)=\varphi_2(g^*(e_1),v,v_1),\quad \varphi_1(e_2,v_1,v_f)=\varphi_2(g^*(e_2),v_1,v_f)\end{aligned}$$

となる．特に，$((g^*(e_1)g^*(e_2)),v,v_f)\in\rho'$ となる．よって，$(g^*(e),v,v_f)\in\rho'$ となる．さらに，

$$\begin{aligned}\varphi_2(g^*(e),v,v_f)=1+\varphi_2(g^*(e_1),v,v_1)+\varphi_2(g^*(e_2),v_1,v_f)&=1+\varphi_1(e_1,v,v_1)+\varphi_2(e_2,v_1,v_f)\\&=\varphi_1(e,v,v_f)\end{aligned}$$

である．よって, $v_f \neq \mathtt{f}$ のときは成立．$v_f = \mathtt{f}$ のときは, $(e_1, v, \mathtt{f}) \in \rho$ であるか, もしくは, ある $v_1 \in V_T^*$ が存在して $(e_1, v, v_1), (e_2, v, \mathtt{f}) \in \rho$ であるかのいずれかである．後者のときは, さっきと全く同じやり方で示せる．前者のときは,

$$n + 1 = \varphi_1(e, v, v_f) = \varphi_1(e, v, \mathtt{f}) = 1 + \varphi_1(e_1, v, \mathtt{f})$$

である．よって, $\varphi_1(e_1, v, \mathtt{f}) \leq n$ である．帰納法の仮定から,

$$(g^*(e_1), v, \mathtt{f}) \in \rho', \quad \varphi_1(e, v, \mathtt{f}) = \varphi_2(g^*(e), v, \mathtt{f})$$

となる．よって, $((g^*(e_1)g^*(e_2)), v, \mathtt{f}) \in \rho'$ となる．よって, $(g^*(e), v, v_f) \in \rho'$ となる．さらに,

$$\varphi_2(g^*(e), v, v_f) = 1 + \varphi_2(g^*(e_1), v, \mathtt{f}) = 1 + \varphi_1(e_1, v, \mathtt{f}) = \varphi_1(e, v, v_f)$$

である．よって, この場合も成立.

$e = (e_1], (e_1/e_2)$ のとき: 上と同じ方針で示せるので省略する.

以上より, 任意の $n \geq 1$ に対して $P(n)$ は真である．ここから (6),(7) が従う.

(5) (6) から特に, 次が成り立つ:

$$\forall e \in PE_d(V_N, V_T), \ \forall v \in V_T^*, \ \forall v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\} \ \ [\ (e, v, v_f) \in \rho \Rightarrow (g^*(e), v, v_f) \in \rho'\ ].$$

全く同様にして, (3) の h に対して次が成り立つ.

$$\forall e \in PE_d(V_N, V_T'), \ \forall v \in V_T^*, \ \forall v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\} \ \ [\ (e, v, v_f) \in \rho' \Rightarrow (h^*(e), v, v_f) \in \rho\ ]. \qquad (**)$$

ここから (5) が従う．実際, (5) のために示すべき残りの主張は

$$\forall e \in PE_d(V_N, V_T), \ \forall v \in V_T^*, \ \forall v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\} \ \ [\ (g^*(e), v, v_f) \in \rho' \Rightarrow (e, v, v_f) \in \rho\ ]$$

のみである．以下でこれを示す．e, v, v_f を任意に取る．$(g^*(e), v, v_f) \in \rho'$ とする．$e' = g^*(e)$ と置けば, $e' \in PE_d(V_N, V_T')$ であり, $(e', v, v_f) \in \rho'$ である．よって, $(**)$ により $(h^*(e'), v, v_f) \in \rho$ となる．$e' = g^*(e)$ だったから, 両辺に h^* を施して, (4) で証明したことから $h^*(e') = h^*(g^*(e)) = e$ となる．よって $(e, v, v_f) \in \rho$ となる．以上より, (5) が成り立つ.

定義 11.11 $a \in V_T$ を任意に取る．ここから先の文章では, $((a]/((a]])$ という parsing expression のことを $\mathtt{t}_a$ と略記し, $((a]a)$ という parsing expression のことを $\mathtt{f}_a$ と略記する.

補足 今回は, parsing expression としての true, false を特に定義していないので, その代替物として $\mathtt{t}_a = ((a]/((a]])$, $\mathtt{f}_a = ((a]a)$ を用いている．$\mathtt{t}_a$ は任意の入力文字列に対して成功し, 消費文字列はないので, true の代替物として使用できる．同じく, $\mathtt{f}_a$ は任意の入力文字列に対して失敗する (もちろん消費文字列はない) ので, false の代替物として使用できる.

定理 11.12 $d \geq 1$ とする．$(V_N, V_T, R) \in \mathrm{EG}_d$ を任意に取る．$e_1, e_2 \in PE_d(V_N, V_T)$ を任意に取る．$\rho := \rho(d, V_N, V_T, R)$ と置く．$a \in V_T$ を任意に取る．このとき，次が成り立つ:

- $(\ (e_1 e_2), \rho) \sim (\ ((e_1 e_2)/((e_1]\mathtt{f}_a)), \rho)$.
- $(\ (e_1 e_2), \rho) \ll (\ ((e_1 e_2)/((e_1]\mathtt{f}_a)), \rho)$.
- $(\ (e_1/e_2), \rho) \sim (\ ((e_1 \mathtt{t}_a)/((e_1]e_2)), \rho)$.
- $(\ (e_1/e_2), \rho) \ll (\ ((e_1 \mathtt{t}_a)/((e_1]e_2)), \rho)$.
- $(e_1, \rho) \sim (\ ((e_1 \mathtt{t}_a)/((e_1]\mathtt{f}_a)), \rho)$.
- $(e_1, \rho) \ll (\ ((e_1 \mathtt{t}_a)/((e_1]\mathtt{f}_a)), \rho)$.
- $(\ (e_1], \rho) \sim (\ ((e_1 \mathtt{f}_a)/((e_1]\mathtt{t}_a)), \rho)$.
- $(\ (e_1], \rho) \ll (\ ((e_1 \mathtt{f}_a)/((e_1]\mathtt{t}_a)), \rho)$.

証明は簡単なので省略する．

補足

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in E_{d,l}(V_T)\ \ [\ \alpha_1 \sim_v \alpha_2 \Rightarrow [\ \alpha_1 \ll_v \alpha_2 \Leftrightarrow \alpha_2 \gg_v \alpha_1\ ]\ ]$$

に注意して，次も成り立つことになる:

- $(\ ((e_1 e_2)/((e_1]\mathtt{f}_a)), \rho) \gg (\ (e_1 e_2), \rho)$.
- $(\ ((e_1 \mathtt{t}_a)/((e_1]e_2)), \rho) \gg (\ (e_1/e_2), \rho)$.
- $(\ ((e_1 \mathtt{t}_a)/((e_1]\mathtt{f}_a)), \rho) \gg (e_1, \rho)$.

12 first order MACRO gTS (1 変数版)

この節では, first order の MACRO gTS (1 変数) を定義する. また, その基本的な性質を証明する.

定義 12.1 (1 変数の first order MACRO gTS) $G = (V_N, V_T, R, e_S) \in \mathrm{foMPEG}_1$ は次を満たすとする.

$\forall A \in V_N,\ \exists a \in V_T,\ \exists B, C, D, B_1, C_1, D_1 \in V_N\ \ s.t.$ 次の 5 つのうちいずれかが成り立つ.

- $R(A) = a$.
- $R(A) = x_1$.
- $R(A) = \mathtt{t}_a$.
- $R(A) = \mathtt{f}_a$.
- $R(A) = (\ (\ B[B_1[x_1]]\ C[C_1[x_1]]\ )\ /\ (\ (\ B[B_1[x_1]\ ]\ ]\ D[D_1[x_1]]\ )\ )$.

さらに, ある $a \in V_T$ とある $Z, Z_1 \in V_N$ に対して

$$e_S = Z[Z_1[\mathtt{t}_a]]$$

という形であるとする. このとき, G は first order の MACRO gTS であると呼ぶ. このような G 全体の集合を foMgTS_1 と置く.

定理 12.2 $d = 1$ とする. $G = (V_N, V_T, R, e_S) \in \mathrm{foMPEG}_d$ とする. $A \in V_N$ は, ある $g_1, g_2 \in PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]$ に対して $R(A) = (g_1 g_2)$ と表されているとする. $a \in V_T$ と $B, B_1, C, C_1, D, D_1 \in V_2 - V_N$ を 1 つずつ取り, $V'_N \subset V_2$ と $R' : V'_N \to PE_d(V_N, V'_T)[x_1, \cdots, x_d]$ を

$$\begin{aligned}
&V'_N := V_N \cup \{B, B_1, C, C_1, D, D_1\},\\
&R'(X) := R(X)\ \ (X \neq A, B, B_1, C, C_1, D, D_1),\\
&R'(A) := (\ (\ B[B_1[x_1]]\ C[C_1[x_1]]\ )\ /\ (\ (\ B[B_1[x_1]]\ ]\ D[D_1[x_1]]\ )\ ),\\
&R'(B) := g_1,\\
&R'(B_1) := x_1,\\
&R'(C) := g_2,\\
&R'(C_1) := x_1,\\
&R'(D) := \mathtt{f}_a,\\
&R'(D_1) := x_1
\end{aligned}$$

と定義する. さらに, $e'_S := e_S$ と定義する. $G' := (V_N, V'_T, R', e'_S) \in \mathrm{foMPEG}_d$ と置くとき, $G \sim G'$ かつ $G \ll G'$ が成り立つ.

証明 $a \in V_T$ を 1 つ固定し, $G^{(1)} = (V_N, V_T^{(1)}, R^{(1)}, e_S^{(1)}) \in \mathrm{foMPEG}_d$ を以下のように定義する:

$$\begin{aligned}
&V_N^{(1)} := V_N.\\
&R^{(1)}(X) := R(X)\ \ (X \neq A).\\
&R^{(1)}(A) := (\ (\ g_1\ g_2\ )\ /\ (\ (g_1]\ \mathtt{f}_a\ )\ ).\\
&e_S^{(1)} := e_S.
\end{aligned}$$

このとき, 定理 11.5, 11.12 により, $G \sim G^{(1)}$, $G \ll G^{(1)}$ となることが分かる.

$$\alpha^{(1)} := (\ (\ y_1\ y_2\ )\ /\ (\ (y_1]\ y_3\ )\ ) \in PE_1(V_N, V_T^{(1)})[x_1, y_1, y_2, y_3]$$

と置けば,

$$R^{(1)}(A) = [\alpha^{(1)}]_{y \to (g_1, g_2, \mathtt{f}_a)}$$

と表せる. そこで, $B, C, D \in V_2 - V_N^{(1)}$ を 1 つずつ取って,
$G^{(2)} = (V_N, V_T^{(2)}, R^{(2)}, e_S^{(2)}) \in \mathrm{foMPEG}_d$ を以下のように定義する:

$$\begin{aligned}
&V_N^{(2)} := V_N^{(1)} \cup \{B, C, D\}. \\
&R^{(2)}(X) := R^{(1)}(X) \quad (X \neq A, B, C, D). \\
&R^{(2)}(A) := [\alpha^{(1)}]_{y \to (B[x_1], C[x_1], D[x_1])} = (\ (\ B[x_1]\ C[x_1]\ )\ /\ (\ (\ B[x_1]\ ]\ D[x_1]\ )\ ). \\
&R^{(2)}(B) := g_1. \\
&R^{(2)}(C) := g_2. \\
&R^{(2)}(D) := \mathtt{f}_a. \\
&e_S^{(2)} := e_S^{(1)}.
\end{aligned}$$

定理 11.9 により, $G^{(1)} \sim G^{(2)}$, $G^{(1)} \ll G^{(2)}$ となることが分かる.

$$\alpha^{(2)} := (\ (\ B[y_1]\ C[y_2]\ )\ /\ (\ (\ B[y_1]\ ]\ D[y_3]\ )\ ) \in PE_1(V_N, V_T^{(2)})[x_1, y_1, y_2, y_3]$$

と置けば,

$$R^{(2)}(A) = [\alpha^{(2)}]_{y \to (x_1, x_1, x_1)}$$

と表せる. そこで, $B_1, C_1, D_1 \in V_2 - V_N^{(2)}$ を 1 つずつ取って,
$G^{(3)} = (V_N, V_T^{(3)}, R^{(3)}, e_S^{(3)}) \in \mathrm{foMPEG}_d$ を以下のように定義する:

$$\begin{aligned}
&V_N^{(3)} := V_N^{(2)} \cup \{B_1, C_1, D_1\}. \\
&R^{(3)}(X) := R^{(2)}(X) \quad (X \neq A, B_1, C_1, D_1). \\
&R^{(3)}(A) := [\alpha^{(2)}]_{y \to (B_1[x_1], C_1[x_1], D_1[x_1])} \\
&\qquad = (\ (\ B[B_1[x_1]]\ C[C_1[x_1]]\ )\ /\ (\ (\ B[B_1[x_1]]\ ]\ D[D_1[x_1]]\ )\ ). \\
&R^{(3)}(B_1) := x_1. \\
&R^{(3)}(C_1) := x_1. \\
&R^{(3)}(D_1) := x_1. \\
&e_S^{(3)} := e_S^{(2)}.
\end{aligned}$$

定理 11.9 により, $G^{(2)} \sim G^{(3)}$, $G^{(2)} \ll G^{(3)}$ となることが分かる. この $G^{(3)}$ を G から見ると, 次が

成り立つことが分かる: ある $a \in V_T$ と $B, B_1, C, C_1, D, D_1 \in V_2 - V_N$ が存在して,

$$
\begin{aligned}
&V_N^{(3)} = V_N \cup \{B, B_1, C, C_1, D, D_1\},\\
&R^{(3)}(X) = R(X) \quad (X \neq A, B, B_1, C, C_1, D, D_1),\\
&R^{(3)}(A) = (\ (\ B[B_1[x_1]]\ C[C_1[x_1]]\ )\ /\ (\ (\ B[B_1[x_1]]\ ]\ D[D_1[x_1]]\ )\ ),\\
&R^{(3)}(B) = g_1,\\
&R^{(3)}(B_1) = x_1,\\
&R^{(3)}(C) = g_2,\\
&R^{(3)}(C_1) = x_1,\\
&R^{(3)}(D) = \mathtt{f}_a,\\
&R^{(3)}(D_1) = x_1,\\
&e_S^{(3)} = e_S.
\end{aligned}
$$

さらに, $G \sim G^{(3)}$ かつ $G \ll G^{(3)}$ が成り立つ. 以上より, この $G^{(3)}$ が求める G' である.

定理 12.3 $d = 1$ とする. $G = (V_N, V_T, R, e_S) \in \mathrm{foMPEG}_d$ とする. $A \in V_N$ は, ある $g_1 \in PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]$ に対して $R(A) = (g_1]$ と表されているとする. $a \in V_T$ と $B, B_1, C, C_1, D, D_1 \in V_2 - V_N$ を 1 つずつ取り, $V'_N \subset V_2$ と $R' : V'_N \to PE_d(V_N, V'_T)[x_1, \cdots, x_d]$ を

$$
\begin{aligned}
&V'_N := V_N \cup \{B, B_1, C, C_1, D, D_1\},\\
&R'(X) := R(X) \quad (X \neq A, B, B_1, C, C_1, D, D_1),\\
&R'(A) := (\ (\ B[B_1[x_1]]\ C[C_1[x_1]]\ )\ /\ (\ (\ B[B_1[x_1]]\ ]\ D[D_1[x_1]]\ )\ ),\\
&R'(B) := g_1,\\
&R'(B_1) := x_1,\\
&R'(C) := \mathtt{f}_a,\\
&R'(C_1) := x_1,\\
&R'(D) := \mathtt{t}_a,\\
&R'(D_1) := x_1
\end{aligned}
$$

と定義する. さらに, $e'_S := e_S$ と定義する. $G' := (V_N, V'_T, R', e'_S) \in \mathrm{foMPEG}_d$ と置くとき, $G \sim G'$ かつ $G \ll G'$ が成り立つ.

証明 定理 12.2 と同じやり方で示せるので省略する.

定理 12.4 以下では, $d = 1$ とする. $G = (V_N, V_T, R, e_S) \in \mathrm{foMPEG}_d$ とする. $A \in V_N$ は, ある $g_1, g_2 \in PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]$ に対して $R(A) = (g_1/g_2)$ と表されているとする. $a \in V_T$ と $B, B_1, C, C_1, D, D_1 \in V_2 - V_N$ を 1 つずつ取り, $V'_N \subset V_2$ と $R' : V'_N \to PE_d(V_N, V'_T)[x_1, \cdots, x_d]$

を

$$
\begin{aligned}
&V_N' := V_N \cup \{B, B_1, C, C_1, D, D_1\},\\
&R'(X) := R(X) \ \ (X \neq A, B, B_1, C, C_1, D, D_1),\\
&R'(A) := (\ (\ B[B_1[x_1]]\ C[C_1[x_1]]\ )\ /\ (\ (\ B[B_1[x_1]]\ ]\ D[D_1[x_1]]\ )\ ),\\
&R'(B) := g_1,\\
&R'(B_1) := x_1,\\
&R'(C) := \mathtt{t}_a,\\
&R'(C_1) := x_1,\\
&R'(D) := g_2,\\
&R'(D_1) := x_1
\end{aligned}
$$

と定義する．さらに, $e_S' := e_S$ と定義する．$G' := (V_N, V_T', R', e_S') \in \mathrm{foMPEG}_d$ と置くとき, $G \sim G'$ かつ $G \ll G'$ が成り立つ.

証明　定理 12.2 と同じやり方で示せるので省略する.

定理 12.5 $d = 1$ とする．$G = (V_N, V_T, R, e_S) \in \mathrm{foMPEG}_d$ とする．$A \in V_N$ は, ある $B \in V_N$ とある $c_1 \in PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]$ に対して $R(A) = B[c_1]$ と表されているとする．$a \in V_T$ と $B_1, C, C_1, D, D_1 \in V_2 - V_N$ を 1 つずつ取り, $V_N' \subset V_2$ と $R' : V_N' \to PE_d(V_N, V_T')[x_1, \cdots, x_d]$ を

$$
\begin{aligned}
&V_N' := V_N \cup \{B_1, C, C_1, D, D_1\},\\
&R'(X) := R(X) \ \ (X \neq A, B_1, C, C_1, D, D_1),\\
&R'(A) := (\ (\ B[B_1[x_1]]\ C[C_1[x_1]]\ )\ /\ (\ (\ B[B_1[x_1]]\ ]\ D[D_1[x_1]]\ )\ ),\\
&R'(B_1) := c_1,\\
&R'(C) := \mathtt{t}_a,\\
&R'(C_1) := x_1,\\
&R'(D) := \mathtt{f}_a,\\
&R'(D_1) := x_1
\end{aligned}
$$

と定義する．さらに, $e_S' := e_S$ と定義する．$G' := (V_N, V_T', R', e_S') \in \mathrm{foMPEG}_d$ と置くとき, $G \sim G'$ かつ $G \ll G'$ が成り立つ.

証明　$a \in V_T$ を 1 つ固定し, $G^{(1)} = (V_N, V_T^{(1)}, R^{(1)}, e_S^{(1)}) \in \mathrm{foMPEG}_d$ を以下のように定義する:

$$
\begin{aligned}
&V_N^{(1)} := V_N.\\
&R^{(1)}(X) := R(X) \ \ (X \neq A).\\
&R^{(1)}(A) := (\ (\ B[c_1]\ \mathtt{t}_a\ )\ /\ (\ (\ B[c_1]\ ]\ \mathtt{f}_a\ )\ ).\\
&e_S^{(1)} := e_S.
\end{aligned}
$$

このとき, 定理 11.5, 11.12 により, $G \sim G^{(1)}$, $G \ll G^{(1)}$ となることが分かる (定理 12.2 と同じ順番で示せる).

$$\alpha^{(1)} := (\ (\ B[y_1]\ y_2\ )\ /\ (\ (\ B[y_1]\ ]\ y_3\ )\ ) \in PE_1(V_N, V_T^{(1)})[x_1, y_1, y_2, y_3]$$

と置けば,

$$R^{(1)}(A) = [\alpha^{(1)}]_{y \to (c_1, \mathtt{t}_a, \mathtt{f}_a)}$$

と表せる. そこで, $B_1, C, D \in V_2 - V_N^{(1)}$ を 1 つずつ取って,
$G^{(2)} = (V_N, V_T^{(2)}, R^{(2)}, e_S^{(2)}) \in \mathrm{foMPEG}_d$ を以下のように定義する:

$V_N^{(2)} := V_N^{(1)} \cup \{B_1, C, D\}$.

$R^{(2)}(X) := R^{(1)}(X) \quad (X \neq A, B_1, C, D)$.

$R^{(2)}(A) := [\alpha^{(1)}]_{y \to (B_1[x_1], C[x_1], D[x_1])} = (\ (\ B[B_1[x_1]]\ C[x_1]\ )\ /\ (\ (\ B[B_1[x_1]]\ ]\ D[x_1]\ )\ )$.

$R^{(2)}(B_1) := c_1$.

$R^{(2)}(C) := \mathtt{t}_a$.

$R^{(2)}(D) := \mathtt{f}_a$.

$e_S^{(2)} := e_S^{(1)}$.

定理 11.9 により, $G^{(1)} \sim G^{(2)}$, $G^{(1)} \ll G^{(2)}$ となることが分かる.

$$\alpha^{(2)} := (\ (\ B[B_1[x_1]]\ C[y_1]\ )\ /\ (\ (\ B[B_1[x_1]]\ ]\ D[y_2]\ )\ ) \in PE_1(V_N, V_T^{(2)})[x_1, y_1, y_2]$$

と置けば,

$$R^{(2)}(A) = [\alpha^{(2)}]_{y \to (x_1, x_1)}$$

と表せる. そこで, $C_1, D_1 \in V_2 - V_N^{(2)}$ を 1 つずつ取って,
$G^{(3)} = (V_N, V_T^{(3)}, R^{(3)}, e_S^{(3)}) \in \mathrm{foMPEG}_d$ を以下のように定義する:

$V_N^{(3)} := V_N^{(2)} \cup \{C_1, D_1\}$.

$R^{(3)}(X) := R^{(2)}(X) \quad (X \neq A, C_1, D_1)$.

$R^{(3)}(A) := [\alpha^{(2)}]_{y \to (C_1[x_1], D_1[x_1])}$
$\quad = (\ (\ B[B_1[x_1]]\ C[C_1[x_1]]\ )\ /\ (\ (\ B[B_1[x_1]]\ ]\ D[D_1[x_1]]\ )\ )$.

$R^{(3)}(C_1) := x_1$.

$R^{(3)}(D_1) := x_1$.

$e_S^{(3)} := e_S^{(2)}$.

定理 11.9 により, $G^{(2)} \sim G^{(3)}$, $G^{(2)} \ll G^{(3)}$ となることが分かる. この $G^{(3)}$ を G から見ると, 次が成り立つことが分かる: ある $a \in V_T$ と $B_1, C, C_1, D, D_1 \in V_2 - V_N$ が存在して,

$V_N^{(3)} = V_N \cup \{B_1, C, C_1, D, D_1\}$,

$R^{(3)}(X) = R(X) \quad (X \neq A, B_1, C, C_1, D, D_1)$,

$R^{(3)}(A) = (\ (\ B[B_1[x_1]]\ C[C_1[x_1]]\ )\ /\ (\ (\ B[B_1[x_1]]\ ]\ D[D_1[x_1]]\ )\ )$,

$R^{(3)}(B_1) = c_1$,

$R^{(3)}(C) = \mathtt{t}_a$,

$R^{(3)}(C_1) = x_1$,

$R^{(3)}(D) = \mathtt{f}_a$,

$R^{(3)}(D_1) = x_1$,

$e_S^{(3)} = e_S$.

さらに, $G \sim G^{(3)}$ かつ $G \ll G^{(3)}$ が成り立つ. 以上より, この $G^{(3)}$ が求める G' である.

13 first order MACRO gTS (d 変数版)

この節では, first order の MACRO gTS(d 変数) を定義する. また, 任意の foMPEG が, それと同値な foMgTS に変換できることを証明する.

定義 13.1 (d 変数の MACRO gTS) $G = (V_N, V_T, R, e_S) \in \mathrm{foMPEG}_d$ は次を満たすとする.

$\forall A \in V_N,\ \exists a \in V_T,\ \exists k \in [1,d],\ \exists B, C, D \in V_N,\ \exists (B_i)_{i=1}^d,\ (C_i)_{i=1}^d,\ (D_i)_{i=1}^d \in V_N^d \quad s.t.$

次の 5 つのうちいずれかが成り立つ.

- $R(A) = a$.
- $R(A) = x_k$.
- $R(A) = \mathtt{t}_a$.
- $R(A) = \mathtt{f}_a$.
- $R(A) = (\ (\ \overline{B}\ \overline{C}\ )\ /\ (\ [\overline{B}]\ \overline{D}\ )\ )$.

ただし, 記述量を削減するため,

$$\overline{B} = B[B_1[x_1]\cdots[x_d]][B_2[x_1]\cdots[x_d]]\cdots[B_d[x_1]\cdots[x_d]]$$

と省略表記した ($\overline{C}$, $\overline{D}$ も同様である) [10]. さらに, ある $a \in V_T$ とある $Z \in V_N$ とある $(Z_i)_{i=1}^d \in V_N^d$ に対して

$$e_S = Z[Z_1[\mathtt{t}_a]\cdots[\mathtt{t}_a]][Z_2[\mathtt{t}_a]\cdots[\mathtt{t}_a]]\cdots[Z_d[\mathtt{t}_a]\cdots[\mathtt{t}_a]]$$

という形であるとする. このとき, G は first order の MACRO gTS であると呼ぶ. このような G 全体の集合を foMgTS_d と置く.

定理 13.2 $G = (V_N, V_T, R, e_S) \in \mathrm{foMPEG}_d$ とする. $A \in V_N$ は, ある $g_1, g_2 \in PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]$ に対して $R(A) = (g_1 g_2)$ と表されているとする. $a \in V_T$ と $B, B_1, \cdots, B_d, C, C_1, \cdots, C_d, D, D_1, \cdots, D_d \in V_2 - V_N$ を 1 つずつ取り, $V_N' \subset V_2$ と $R' : V_N' \to PE_d(V_N, V_T')[x_1, \cdots, x_d]$ を

$$
\begin{aligned}
&V_N' := V_N \cup \{B, B_1, \cdots, B_d, C, C_1, \cdots, C_d, D, D_1, \cdots, D_d\},\\
&R'(X) := R(X) \quad (X \neq A, B, B_1, \cdots, B_d, C, C_1, \cdots, C_d, D, D_1, \cdots, D_d),\\
&R'(A) := (\ (\ \overline{B}\ \overline{C}\ )\ /\ (\ [\overline{B}]\ \overline{D}\ )\ ),\\
&R'(B) := g_1,\\
&R'(B_i) := x_i,\\
&R'(C) := g_2,\\
&R'(C_i) := x_i,\\
&R'(D) := \mathtt{f}_a,\\
&R'(D_i) := x_i
\end{aligned}
$$

と定義する. さらに, $e_S' := e_S$ と定義する. $G' := (V_N, V_T', R', e_S') \in \mathrm{foMPEG}_d$ と置くとき, $G \sim G'$ かつ $G \ll G'$ が成り立つ.

[10] かなり乱暴な書き方ではあるが, 文脈上, 混乱の恐れはないはず.

証明 前節と同じやり方で示せるので省略する.

定理 13.3 $G = (V_N, V_T, R, e_S) \in \mathrm{foMPEG}_d$ とする. $A \in V_N$ は, ある $g_1 \in PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]$ に対して $R(A) = (g_1]$ と表されているとする. $a \in V_T$ と $B, B_1, \cdots, B_d, C, C_1, \cdots, C_d, D, D_1, \cdots, D_d \in V_2 - V_N$ を 1 つずつ取り, $V_N' \subset V_2$ と $R' : V_N' \to PE_d(V_N, V_T')[x_1, \cdots, x_d]$ を

$$
\begin{aligned}
&V_N' := V_N \cup \{B, B_1, \cdots, B_d, C, C_1, \cdots, C_d, D, D_1, \cdots, D_d\}, \\
&R'(X) := R(X) \quad (X \neq A, B, B_1, \cdots, B_d, C, C_1, \cdots, C_d, D, D_1, \cdots, D_d), \\
&R'(A) := (\ (\ \overline{B}\ \overline{C}\ )\ /\ (\ (\overline{B}]\ \overline{D}\ )\ ), \\
&R'(B) := g_1, \\
&R'(B_i) := x_i, \\
&R'(C) := \mathtt{f}_a, \\
&R'(C_i) := x_i, \\
&R'(D) := \mathtt{t}_a, \\
&R'(D_i) := x_i
\end{aligned}
$$

と定義する. さらに, $e_S' := e_S$ と定義する. $G' := (V_N, V_T', R', e_S') \in \mathrm{foMPEG}_d$ と置くとき, $G \sim G'$ かつ $G \ll G'$ が成り立つ.

証明 前節と同じやり方で示せるので省略する.

定理 13.4 $G = (V_N, V_T, R, e_S) \in \mathrm{foMPEG}_d$ とする. $A \in V_N$ は, ある $g_1, g_2 \in PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]$ に対して $R(A) = (g_1/g_2)$ と表されているとする. $a \in V_T$ と $B, B_1, \cdots, B_d, C, C_1, \cdots, C_d, D, D_1, \cdots, D_d \in V_2 - V_N$ を 1 つずつ取り, $V_N' \subset V_2$ と $R' : V_N' \to PE_d(V_N, V_T')[x_1, \cdots, x_d]$ を

$$
\begin{aligned}
&V_N' := V_N \cup \{B, B_1, \cdots, B_d, C, C_1, \cdots, C_d, D, D_1, \cdots, D_d\}, \\
&R'(X) := R(X) \quad (X \neq A, B, B_1, \cdots, B_d, C, C_1, \cdots, C_d, D, D_1, \cdots, D_d), \\
&R'(A) := (\ (\ \overline{B}\ \overline{C}\ )\ /\ (\ (\overline{B}]\ \overline{D}\ )\ ), \\
&R'(B) := g_1, \\
&R'(B_i) := x_i, \\
&R'(C) := \mathtt{t}_a, \\
&R'(C_i) := x_i, \\
&R'(D) := g_2, \\
&R'(D_i) := x_i
\end{aligned}
$$

と定義する. さらに, $e_S' := e_S$ と定義する. $G' := (V_N, V_T', R', e_S') \in \mathrm{foMPEG}_d$ と置くとき, $G \sim G'$ かつ $G \ll G'$ が成り立つ.

証明 前節と同じやり方で示せるので省略する.

定理 13.5 $G = (V_N, V_T, R, e_S) \in \mathrm{foMPEG}_d$ とする. $A \in V_N$ は, ある $B \in V_N$ とある $c \in PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]^d$ に対して $R(A) = B[c_1] \cdots [c_d]$ と表されているとする. $a \in V_T$ と

$B_1, \cdots, B_d, C, C_1, \cdots, C_d, D, D_1, \cdots, D_d \in V_2 - V_N$ を 1 つずつ取り, $V_N' \subset V_2$ と $R' : V_N' \to PE_d(V_N, V_T')[x_1, \cdots, x_d]$ を

$$
\begin{aligned}
&V_N' := V_N \cup \{B_1, \cdots, B_d, C, C_1, \cdots, C_d, D, D_1, \cdots, D_d\}, \\
&R'(X) := R(X) \quad (X \neq A, B_1, \cdots, B_d, C, C_1, \cdots, C_d, D, D_1, \cdots, D_d), \\
&R'(A) := (\ (\ \overline{B}\ \overline{C}\ )\ /\ (\ (\overline{B}]\ \overline{D}\ )\ ), \\
&R'(B_i) := c_i, \\
&R'(C) := \mathtt{t}_a, \\
&R'(C_i) := x_i, \\
&R'(D) := \mathtt{f}_a, \\
&R'(D_i) := x_i
\end{aligned}
$$

と定義する. さらに, $e_S' := e_S$ と定義する. $G' := (V_N, V_T', R', e_S') \in \mathrm{foMPEG}_d$ と置くとき, $G \sim G'$ かつ $G \ll G'$ が成り立つ.

証明　前節と同じやり方で示せるので省略する.

定理 13.6 $(V_N, V_T, R), (V_N, V_T', R') \in \mathrm{EG}_d$ は次を満たすとする:

- $V_N \subset V_N'$.
- $\forall A \in V_N\ \ [\ R(A) = R'(A)\ ]$.

以下では, $\rho := \rho(d, V_N, V_T, R)$, $\rho' := \rho(d, V_N, V_T', R')$ と置く. このとき, 次が成り立つ.

$$\forall e \in PE_d(V_N, V_T)\ \ [\ (e, \rho) \sim (e, \rho') \text{ かつ } (e, \rho) \ll (e, \rho')\ ].$$

証明　$R(X)$ $(X \in V_N' - V_N)$ は事実上使われないので, 直感的には明らかである. 厳密には, 次のようにして示せる: 任意の $v \in V_T^*$ に対して

$$(e, \rho) \prec_v (e, \rho') \text{ かつ } (e, \rho') \prec_v (e, \rho) \text{ かつ } (e, \rho) \ll_v (e, \rho')$$

が成り立つことを示せばよい.

$$(e, \rho) \prec_v (e, \rho') \text{ かつ } (e, \rho) \ll_v (e, \rho')$$

は定理 11.5 から従う. 残りの

$$(e, \rho') \prec_v (e, \rho)$$

については, より強く

$$(e, \rho') \gg_v (e, \rho)$$

を示せば十分である. そして, これも定理 11.5 から従う.

定理 13.7 $G = (V_N, V_T, R, e_S) \in \mathrm{foMPEG}_d$ を任意に取る. $a \in V_T$ と $Z, Z_1, \cdots, Z_d \in V_2 - V_N$ を 1 つずつ取り, $G' = (V_N, V'_T, R', e'_S) \in \mathrm{foMPEG}_d$ を以下のように定義する:

$$
\begin{aligned}
&V'_N := V_N \cup \{Z, Z_1, \cdots, Z_d\}. \\
&R'(X) := R(X) \quad (X \in V_N). \\
&R'(Z) := e_S. \\
&R'(Z_i) := x_i \quad (1 \le i \le d). \\
&e'_S := Z[Z_1[\mathtt{t}_a]\cdots[\mathtt{t}_a]][Z_2[\mathtt{t}_a]\cdots[\mathtt{t}_a]]\cdots[Z_d[\mathtt{t}_a]\cdots[\mathtt{t}_a]].
\end{aligned}
$$

このとき, $G \sim G'$ かつ $G \ll G'$ が成り立つ.

証明 $\rho := \rho(d, V_N, V_T, R)$, $\rho' := \rho(d, V_N, V'_T, R')$ と置く.

- $V_N \subset V'_N$,
- $\forall A \in V_N \ \ [\ R(A) = R'(A)\ ]$

が成り立つことが確かめられる. 以下では, $v \in V_T^*$ を任意に取る. $e_S \in PE_d(V_N, V_T)$ により, 定理 13.6 から

$$(e_S, \rho) \sim_v (e_S, \rho'), \quad (e_S, \rho) \ll_v (e_S, \rho') \tag{1}$$

が成り立つ. 次に,

$$t := (Z_1[\mathtt{t}_a]\cdots[\mathtt{t}_a], Z_2[\mathtt{t}_a]\cdots[\mathtt{t}_a], \cdots, Z_d[\mathtt{t}_a]\cdots[\mathtt{t}_a]) \in PE_d(V_N, V'_T)^d$$

と置く. 定理 11.3 より

$$([R'(Z)]_{x\to t}, \rho') \sim_v (Z[t_1]\cdots[t_d], \rho'), \quad ([R'(Z)]_{x\to t}, \rho') \ll_v (Z[t_1]\cdots[t_d], \rho') \tag{2}$$

が成り立つ. $e_S \in PE_d(V_N, V_T)$ (すなわち, e_Sは変数を含まない) により,

$$[R'(Z)]_{x\to t} = [e_S]_{x\to t} = e_S$$

が成り立つ. さらに,

$$Z[t_1]\cdots[t_d] = Z[Z_1[\mathtt{t}_a]\cdots[\mathtt{t}_a]][Z_2[\mathtt{t}_a]\cdots[\mathtt{t}_a]]\cdots[Z_d[\mathtt{t}_a]\cdots[\mathtt{t}_a]] = e'_S$$

である. これらと (2) を合わせて,

$$(e_S, \rho') \sim_v (e'_S, \rho'), \quad (e_S, \rho') \ll_v (e'_S, \rho')$$

が成り立つ. これと (1) から,

$$(e_S, \rho) \sim_v (e'_S, \rho'), \quad (e_S, \rho) \ll_v (e'_S, \rho')$$

が成り立つ. よって, $G \sim_v G'$, $G \ll_v G'$ が成り立つ.

定理 13.8 $G = (V_N, V_T, R, e_S) \in \mathrm{foMPEG}_d$ を任意に取る. $V_G \subset V_N$ を以下のように定義する:

$A \in V_G \ \Leftrightarrow_{def}\ \exists a \in V_T,\ \exists k \in [1, d],\ \exists B, C, D \in V_N,\ \exists (B_i)_{i=1}^d,\ (C_i)_{i=1}^d,\ (D_i)_{i=1}^d \in V_N^d\ \ s.t.$
次の 5 つのうちいずれかが成り立つ.

- $R(A) = a$.
- $R(A) = x_k$.
- $R(A) = \mathtt{t}_a$.
- $R(A) = \mathtt{f}_a$.
- $R(A) = (\ (\ \overline{B}\ \overline{C}\ )\ /\ (\ (\overline{B}]\ \overline{D}\ )\ )$.

さて, $G = (V_N, V_T, R, e_S) \in \mathrm{foMPEG}_d$ と $G' = (V_N, V'_T, R', e'_S) \in \mathrm{foMPEG}_d$ と $X \in V_N$ は次を満たすとする:

$$V_N \subset V'_N, \quad X \in V_G, \quad R(X) = R'(X).$$

このとき, $X \in V_{G'}$ が成り立つ.

証明 $X \in V_G$ の定義により, ある $a \in V_T$ と $k \in [1, d]$ と $B, C, D \in V_N$ と $(B_i)_{i=1}^d$, $(C_i)_{i=1}^d$, $(D_i)_{i=1}^d$ $\in V_N^d$ が存在して, 次の 5 つのうちいずれかが成り立つ:

- $R(X) = a$.
- $R(X) = x_k$.
- $R(X) = \mathtt{t}_a$.
- $R(X) = \mathtt{f}_a$.
- $R(X) = (\ (\ \overline{B}\ \overline{C}\ )\ /\ (\ (\overline{B}]\ \overline{D}\ )\ )$.

$V_N \subset V'_N$ であるから, $B, C, D \in V'_N$ かつ $(B_i)_{i=1}^d$, $(C_i)_{i=1}^d$, $(D_i)_{i=1}^d \in V_N'^d$ である. また, $R(X) = R'(X)$ である. よって, 次の 5 つのうちいずれかが成り立つ:

- $R'(X) = a$.
- $R'(X) = x_k$.
- $R'(X) = \mathtt{t}_a$.
- $R'(X) = \mathtt{f}_a$.
- $R'(X) = (\ (\ \overline{B}\ \overline{C}\ )\ /\ (\ (\overline{B}]\ \overline{D}\ )\ )$.

よって, $X \in V_{G'}$ となる.

定理 13.9 定理 13.8 の V_G を取る. $f : \mathrm{foMPEG}_d \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を以下のように定義する: $G = (V_N, V_T, R, e_S) \in \mathrm{foMPEG}_d$ に対して,

$$f(G) := \sum_{A \in V_N - V_G} |R(A)|.$$

ただし, $V_N - V_G = \emptyset$ のときは $f(G) := 0$ と定義する. このとき, 次が成り立つ:

(1) $\forall G \in \mathrm{foMPEG}_d\ [\ f(G) > 0 \Leftrightarrow V_N \neq V_G\ ]$.

(2) $\forall G = (V_N, V_T, R, e_S) \in \mathrm{foMPEG}_d\ [\ f(G) > 0 \Rightarrow \exists G' = (V_N, V'_T, R', e'_S) \in \mathrm{foMPEG}_d$
$[\ e'_S = e_S,\ G \sim G',\ G \ll G',\ \ f(G') < f(G),\ |V'_N| \leq |V_N| + 3(d+1)\ ]\ ]$.

補足　$f(G)$ の定義に出現する $|R(A)|$ は，parsing expression としての $R(A)$ の文字列の長さを表すのだが，これは parsing expression を「ある種の文字列そのもの」として定義したからこその量である． parsing expression を抽象構文木で定義した場合は，$|R(A)|$ に相当する量を別個に用意しなければばならない．実は，$PE_d(V,W)$ を文字列として定義しようが抽象構文木として定義しようが，次を満たす $\psi : PE_d(V,W) \to \mathbb{N}$ がただ 1 つ存在することが証明できる:

- $\forall a \in V \ \ [\ \psi(a) = 1\ ]$.
- $\forall A \in W,\ \forall t \in PE_d(V,W)^d \ \left[\ \psi(A[t_1]\cdots[t_d]) = 1 + \sum_i \psi(t_i)\ \right]$.
- $\forall e_1, e_2 \in PE_d(V,W) \ \ s.t.$ 次が全て成り立つ：
- $\psi((e_1 e_2)) = 1 + \psi(e_1) + \psi(e_2)$.
- $\psi((e_1]) = 1 + \psi(e_1)$.
- $\psi((e_1/e_2)) = 1 + \psi(e_1) + \psi(e_2)$.

よって，この量を $|R(A)|$ の代替物として用いればよい[11].

補足　$e \in PE_d(V_N,V_T)[x_1,\cdots,x_d]$ とする．e の文字列長 $|e|$ のカウントの仕方は，$PE_d(V_N,V_T)$ の定義に照らし合わせて整理すると，次のようになる:

- 終端記号・非終端記号・変数はどれも 1 文字であるとカウントする.
- parsing expression の中に出現する 5 種類の文字 ”(” ”)” ”[” ”]” ”/” は，どれも 1 文字であるとカウントする.

証明　(1) $G = (V_N, V_T, R, e_S) \in \mathrm{foMPEG}_d$ を任意に取る．$f(G) > 0$ とすると，明らかに $V_N \neq V_G$ である．逆に，$V_N \neq V_G$ とすると，$V_N - V_G$ は空でない．そこで，$A \in V_N - V_G$ を 1 つ固定する．このとき，$f(G) \geq |R(A)|$ である．$R(A) \in PE_d(V_N,V_T)[x_1,\cdots,x_d]$ と $\varepsilon \notin PE_d(V_N,V_T)[x_1,\cdots,x_d]$ により，$R(A) \neq \varepsilon$ である．よって，$|R(A)| > 0$ である．よって，$f(G) > 0$ となる．
(2) $G = (V_N, V_T, R, e_S) \in \mathrm{foMPEG}_d$ を任意に取る．$f(G) > 0$ とする．$V_N - V_G \neq \emptyset$ である．そこで，$A \in V_N - V_G$ を 1 つ固定する．

$$R(A) = a,\ B[c_1]\cdots[c_d],\ (g_1 g_2),\ (g_1],\ (g_1/g_2)$$

のいずれかの形である．ただし，

$$a \in V_T \cup \{x_i\}_{i=1}^d,\ B \in V_N,\ c \in PE_d(V_N,V_T)[x_1,\cdots,x_d]^d,\ g_1, g_2 \in PE_d(V_N,V_T)[x_1,\cdots,x_d]$$

である．以下では，$R(A)$ の値で場合分けする．

$R(A) = a \in V_T \cup \{x_i\}_{i=1}^d$ のとき: $A \in V_N - V_G$ に矛盾するので，これは起こらない.

$R(A) = B[c_1]\cdots[c_d]$ のとき: A と G に対して定理 13.5 を適用する．そこで得られる foMPEG_d を

[11] 従って，文字列として parsing expression を定義していても，この ψ を使って $f(G)$ を定義することが可能である．また，文字列長よりも ψ の方が一般的には値が小さいので，ψ の方が良い評価になる．

$G' = (V_N, V_T', R', e_S')$ と表す．$e_S' = e_S$, $G \sim G'$, $G \ll G'$ である．また, G' の作り方から, ある $B_1, \cdots, B_d, C, C_1, \cdots, C_d, D, D_1, \cdots, D_d \in V_2 - V_N$ が存在して

$$
\begin{aligned}
&V_N' = V_N \cup \{B_1, \cdots, B_d, C, C_1, \cdots, C_d, D, D_1, \cdots, D_d\}, \\
&R'(X) = R(X) \quad (X \neq A, B_1, \cdots, B_d, C, C_1, \cdots, C_d, D, D_1, \cdots, D_d), \\
&R'(A) = (\ (\ \overline{B}\ \overline{C}\ )\ /\ (\ (\overline{B}]\ \overline{D}\ )\ ), \\
&R'(B_i) = c_i, \\
&R'(C) = \mathtt{t}_a, \\
&R'(C_i) = x_i, \\
&R'(D) = \mathtt{f}_a, \\
&R'(D_i) = x_i
\end{aligned}
$$

となっている．よって, $|V_N'| = |V_N| + 3(d+1) - 1$ である．また, $f(G') < f(G)$ が成り立つ．そのために, まずは次が成り立つことを示す:

$$
\begin{aligned}
(i)&\quad \forall X \in V_N - \{A\}\ \ [\ R'(X) = R(X)\ ]\,. \\
(ii)&\quad V_G \cup \{A, C, C_1, \cdots, C_d, D, D_1, \cdots, D_d\} \subset V_{G'}. \\
(iii)&\quad V_N' - V_{G'} \subset (V_N - V_G - \{A\}) \cup \{B_1, \cdots, B_d\}\,.
\end{aligned}
$$

(i)

$$
\begin{aligned}
X \in V_N - \{A\} &= (V_N' - \{B_1, \cdots, B_d, C, C_1, \cdots, C_d, D, D_1, \cdots, D_d\}) - \{A\} \\
&= V_N' - \{A, B_1, \cdots, B_d, C, C_1, \cdots, C_d, D, D_1, \cdots, D_d\}
\end{aligned}
$$

となるので, R' の定義から $R'(X) = R(X)$ である．
(ii) $X \in$ (左辺) を任意に取る．$X \in V_G$ のときは, $V_G \subset V_N$ より, $X \in V_N$ である．もし $X = A$ とすると, $A \notin V_G$ に矛盾するので, $X \neq A$ である．よって, $X \in V_N - \{A\}$ となるので, (i) より $R'(X) = R(X)$ となる．よって,

$$V_N \subset V_N', \quad X \in V_G, \quad R'(X) = R(X)$$

となる．よって, 定理 13.8 により, $X \in V_{G'}$ となる．次に, $X \in \{A, C, C_1, \cdots, C_d, D, D_1, \cdots, D_d\}$ のときは, 明らかに $X \in V_{G'}$ である．よって, (ii) が成り立つ．
(iii) $X \in$ (左辺) を任意に取る．$X = B_1, \cdots, B_d$ ならば, $X \in$ (右辺) である．以下では, $X \neq B_1, \cdots, B_d$ としてよい．よって, $X \in V_N' - V_{G'} - \{B_1, \cdots, B_d\}$ である．(ii) により

$$
\begin{aligned}
X &\in V_N' - V_{G'} - \{B_1, \cdots, B_d\} \\
&\subset V_N' - (V_G \cup \{A, C, C_1, \cdots, C_d, D, D_1, \cdots, D_d\}) - \{B_1, \cdots, B_d\} \\
&= V_N' - \{A, B_1, \cdots, B_d, C, C_1, \cdots, C_d, D, D_1, \cdots, D_d\} - V_G \\
&= V_N - \{A\} - V_G
\end{aligned}
$$

となるので, やはり $X \in$ (右辺) となる．よって, (iii) が成り立つ．

$(i), (iii)$ と $A \in V_N - V_G$ から,

$$
\begin{aligned}
f(G') = \sum_{X \in V'_N - V_{G'}} |R'(X)| &\leq \sum_{X \in (V_N - V_G - \{A\}) \cup \{B_1, \cdots, B_d\}} |R'(X)| \\
&= \sum_{X \in (V_N - V_G - \{A\})} |R'(X)| + \sum_{i=1}^{d} |R'(B_i)| \\
&= \sum_{X \in (V_N - V_G - \{A\})} |R(X)| + \sum_{i=1}^{d} |R'(B_i)| \\
&= \sum_{X \in V_N - V_G} |R(X)| - |R(A)| + \sum_{i=1}^{d} |R'(B_i)| \\
&= f(G) - |B[c_1] \cdots [c_d]| + \sum_{i=1}^{d} |c_i| \\
&= f(G) - 2d - 1 \\
&< f(G)
\end{aligned}
$$

となる. よって, この G' が求める G' である.

$R(A) = (g_1 g_2)$ のとき: A と G に対して定理 13.2 を適用する. そこで得られる foMPEG_d を $G' = (V_N, V'_T, R', e'_S)$ と表す. $e'_S = e_S$, $G \sim G'$, $G \ll G'$ である. また, G' の作り方から, ある $B, B_1, \cdots, B_d, C, C_1, \cdots, C_d, D, D_1, \cdots, D_d \in V_2 - V_N$ が存在して

$$
\begin{aligned}
&V'_N = V_N \cup \{B, B_1, \cdots, B_d, C, C_1, \cdots, C_d, D, D_1, \cdots, D_d\}, \\
&R'(X) = R(X) \quad (X \neq A, B, B_1, \cdots, B_d, C, C_1, \cdots, C_d, D, D_1, \cdots, D_d), \\
&R'(A) = (\ (\ \overline{B}\ \overline{C}\ )\ /\ (\ (\overline{B}]\ \overline{D}\ )\ ), \\
&R'(B) = g_1, \\
&R'(B_i) = x_i, \\
&R'(C) = g_2, \\
&R'(C_i) = x_i, \\
&R'(D) = \mathtt{f}_a, \\
&R'(D_i) = x_i
\end{aligned}
$$

となっている. よって, $|V'_N| = |V_N| + 3(d+1)$ である. また, $f(G') < f(G)$ が成り立つ. そのために, まずは次が成り立つことを示す:

$$
\begin{aligned}
(iv)&\quad \forall X \in V_N - \{A\}\ \ [\ R'(X) = R(X)\ ]. \\
(v)&\quad V_G \cup \{A, B_1, \cdots, B_d, C_1, \cdots, C_d, D, D_1, \cdots, D_d\} \subset V_{G'}. \\
(vi)&\quad V'_N - V_{G'} \subset (V_N - V_G - \{A\}) \cup \{B, C\}.
\end{aligned}
$$

(iv)

$$
\begin{aligned}
X \in V_N - \{A\} &= V'_N - \{B, B_1, \cdots, B_d, C, C_1, \cdots, C_d, D, D_1, \cdots, D_d\} - \{A\} \\
&= V'_N - \{A, B, B_1, \cdots, B_d, C, C_1, \cdots, C_d, D, D_1, \cdots, D_d\}
\end{aligned}
$$

となるので, R' の定義から $R'(X) = R(X)$ である.
(v): $X \in$ (左辺) を任意に取る. $X \in V_G$ のときは, $V_G \subset V_N$ より, $X \in V_N$ である. もし $X = A$ とすると, $A \notin V_G$ に矛盾するので, $X \neq A$ である. よって, $X \in V_N - \{A\}$ となるので, (iv) より $R'(X) = R(X)$ となる. よって,

$$V_N \subset V'_N, \quad X \in V_G, \quad R'(X) = R(X)$$

となる. よって, 定理 13.8 により, $X \in V_{G'}$ となる. 次に,

$$X \in \{A, B_1, \cdots, B_d, C_1, \cdots, C_d, D, D_1, \cdots, D_d\}$$

のときは, 明らかに $X \in V_{G'}$ である. よって, (v) が成り立つ.
(vi) $X \in$ (左辺) を任意に取る. $X = B, C$ ならば, $X \in$ (右辺) である. 以下では, $X \neq B, C$ としてよい. よって, $X \in V'_N - V_{G'} - \{B, C\}$ である. (v) により

$$\begin{aligned} X \in V'_N - V_{G'} - \{B, C\} &\subset V'_N - (V_G \cup \{A, B_1, \cdots, B_d, C_1, \cdots, C_d, D, D_1, \cdots, D_d\}) - \{B, C\} \\ &= V'_N - \{A, B, B_1, \cdots, B_d, C, C_1, \cdots, C_d, D, D_1, \cdots, D_d\} - V_G \\ &= V_N - \{A\} - V_G \end{aligned}$$

となるので, やはり $X \in$ (右辺) となる. よって, (vi) が成り立つ.
$(iv), (vi)$ と $A \in V_N - V_G$ から,

$$\begin{aligned} f(G') = \sum_{X \in V'_N - V_{G'}} |R'(X)| &\leq \sum_{X \in (V_N - V_G - \{A\}) \cup \{B, C\}} |R'(X)| \\ &= \sum_{X \in (V_N - V_G - \{A\})} |R'(X)| + |R'(B)| + |R'(C)| \\ &= \sum_{X \in (V_N - V_G - \{A\})} |R(X)| + |R'(B)| + |R'(C)| \\ &= \sum_{X \in V_N - V_G} |R(X)| - |R(A)| + |R'(B)| + |R'(C)| \\ &= f(G) - |(g_1 g_2)| + |g_1| + |g_2| \\ &= f(G) - 2 \\ &< f(G) \end{aligned}$$

となる. よって, この G' が求める G' である.

$R(A) = (g_1], (g_1/g_2)$ のとき: 定理 13.3, 13.4 を適用すれば, 上と同じような議論で目標の $G' \in \mathrm{foMPEG}_d$ が取れる.

定理 13.10 定理 13.9 の f を取る. $G = (V_N, V_T, R, e_S) \in \mathrm{foMPEG}_d$ は, ある $a \in V_T$ とある $Z \in V_N$ とある $(Z_i)_{i=1}^d \in V_N^d$ に対して

$$e_S = Z[Z_1[\mathtt{t}_a] \cdots [\mathtt{t}_a]][Z_2[\mathtt{t}_a] \cdots [\mathtt{t}_a]] \cdots [Z_d[\mathtt{t}_a] \cdots [\mathtt{t}_a]]$$

という形であるとする. このとき, ある $G' = (V_N, V'_T, R', e'_S) \in \mathrm{foMgTS}_d$ が存在して, 次が成り

立つ:

- $e'_S = e_S$.
- $G \sim G',\ \ G \ll G'$.
- $|V'_N| \leq 3(d+1)f(G) + |V_N|$.

証明　$m := f(G)$ に関する数学的帰納法で示す. $m = 0$ のときは, $f(G) = 0$ だから, 定理 13.9 の (1) より, $V_N = V_G$ である. よって, e_S の形にも注意して, $G \in \mathrm{foMgTS}_d$ が成り立つことになる. よって, $G' := G$ と置けば, $G' \in \mathrm{foMgTS}_d$ であり, $e'_S = e_S$ であり, $G \sim G'$, $G \ll G'$ であり, かつ

$$|V'_N| = |V_N| \leq 3(d+1)f(G) + |V_N|$$

である. よって, この G' が求める G' である. よって, $m = 0$ のときは成立. 次に, $m' \geq 0$ を任意に取る. $0 \leq m \leq m'$ のときは成り立つとする. $m = m'+1$ のときを考える. $f(G) = m = m'+1 \geq 1$ であるから, 定理 13.9 の (2) より, ある $G' = (V_N, V'_T, R', e'_S) \in \mathrm{foMPEG}_d$ が存在して,

$$e'_S = e_S,\ G \sim G',\ G \ll G',\ f(G') < f(G),\ |V'_N| \leq |V_N| + 3(d+1)$$

が成り立つ. 特に,

$$e'_S = e_S = Z[Z_1[\mathtt{t}_a] \cdots [\mathtt{t}_a]] \cdots [Z_d[\mathtt{t}_a] \cdots [\mathtt{t}_a]]$$

である. これと $f(G') < f(G) = m$ から, G' に対して帰納法の仮定が使えて, ある $G'' = (V_N, V''_T, R'', e''_S) \in \mathrm{foMgTS}_d$ が存在して,

$$e''_S = e'_S,\ G' \sim G'',\ G' \ll G'',\ |V''_N| \leq 3(d+1)f(G') + |V'_N|$$

が成り立つ. 特に, $e_S = e''_S$, $G \sim G''$, $G \ll G''$ が成り立つ. また,

$$\begin{aligned}|V''_N| \leq 3(d+1)f(G') + |V'_N| &\leq 3(d+1)f(G') + |V_N| + 3(d+1)\\ &= 3(d+1)(f(G')+1) + |V_N|\\ &\leq 3(d+1)f(G) + |V_N|\end{aligned}$$

となる. よって, $m = m_0 + 1$ のときも成り立つ. 数学的帰納法により, 任意の $m \geq 0$ に対して目標の G' が存在する.

定理 13.11 定理 13.9 の f を取る. 任意の $G = (V_N, V_T, R, e_S) \in \mathrm{foMPEG}_d$ に対して, ある $G' = (V_N, V'_T, R', e'_S) \in \mathrm{foMgTS}_d$ が存在して, 次が成り立つ:

- $G \sim G',\ \ G \ll G'$.
- $|V'_N| \leq 3(d+1)f(G) + 3(d+1)|e_S| + |V_N| + (d+1)$.

証明　$G = (V_N, V_T, R, e_S) \in \mathrm{foMPEG}_d$ を任意に取る. 定理 13.7 の結論で得られる $G' = (V_N, V'_T, R', e'_S) \in \mathrm{foMPEG}_d$ を取る. よって, $G \sim G'$ かつ $G \ll G'$ である. また, $V'_N = V_N \cup \{Z, Z_1, \cdots, Z_d\}$ であるから, $|V'_N| = |V_N| + (d+1)$ である. さらに, e'_S は

$$e'_S = Z[Z_1[\mathtt{t}_a] \cdots [\mathtt{t}_a]] \cdots [Z_d[\mathtt{t}_a] \cdots [\mathtt{t}_a]]$$

という形である．よって, 定理 13.10 から, ある $G'' = (V_N, V_T'', R'', e_S'') \in \mathrm{foMgTS}_d$ が存在して,

- $e_S'' = e_S'$,
- $G' \sim G''$, $\ G' \ll G''$,
- $|V_N''| \leq 3(d+1)f(G') + |V_N'|$

が成り立つ．特に, $G \sim G''$, $G \ll G''$ が成り立つ．実は

$$|V_N''| \leq 3(d+1)f(G) + 3(d+1)|e_S| + |V_N| + (d+1)$$

が成り立つ (もしこれが示せたら, この G'' でよい)．まずは次が成り立つことを示す:

(1) $\forall X \in V_N\ \ [\ R'(X) = R(X)\ ]$.

(2) $V_G \subset V_{G'}$.

(3) $V_N' - V_{G'} \subset (V_N - V_G) \cup \{Z\}$.

(1) R' の作り方から明らか.
(2) $X \in V_G$ を任意に取る．$V_G \subset V_N$ により, $X \in V_N$ である．(1) から, $R'(X) = R(X)$ である．よって

$$V_N \subset V_N', \quad X \in V_G, \quad R'(X) = R(X)$$

となる．よって, 定理 13.8 から, $X \in V_{G'}$ となる.
(3) $X \in$ (左辺) を任意に取る．$X = Z$ ならば, $X \in$ (右辺) である．$X \neq Z$ ならば,

$$X \in V_N' - V_{G'} - \{Z\} = V_N \cup \{Z, Z_1, \cdots, Z_d\} - V_{G'} - \{Z\} = V_N \cup \{Z_1, \cdots, Z_d\} - V_{G'}$$

となる．$Z_i \in V_{G'}$ $(1 \leq i \leq d)$ により,

$$V_N \cup \{Z_1, \cdots, Z_d\} - V_{G'} \subset V_N - V_{G'}$$

となる．さらに, (2) より $V_N - V_{G'} \subset V_N - V_G$ である．よって, $X \in V_N - V_G$ となるので, $X \in$ (右辺) となる.
(1),(3) より

$$\begin{aligned}
|V_N''| \leq 3(d+1)f(G') + |V_N'| &= 3(d+1) \sum_{A \in V_N' - V_{G'}} |R'(A)| + |V_N'| \\
&\leq 3(d+1) \sum_{A \in (V_N - V_G) \cup \{Z\}} |R'(A)| + |V_N'| \\
&= 3(d+1) \sum_{A \in (V_N - V_G)} |R'(A)| + 3(d+1)|R'(Z)| + |V_N'| \\
&= 3(d+1) \sum_{A \in (V_N - V_G)} |R(A)| + 3(d+1)|R'(Z)| + |V_N'| \\
&= 3(d+1)f(G) + 3(d+1)|e_S| + |V_N'| \\
&= 3(d+1)f(G) + 3(d+1)|e_S| + |V_N| + (d+1)
\end{aligned}$$

となるので, 確かに $|V_N''| \leq 3(d+1)f(G) + 3(d+1)|e_S| + |V_N| + (d+1)$ である.

系 13.12 任意の $G = (V_N, V_T, R, e_S) \in \mathrm{foMPEG}_d$ に対して，ある $G' = (V_N, V'_T, R', e'_S) \in \mathrm{foMgTS}_d$ が存在して, 次が成り立つ:

- $G \sim G'$,　$G \ll G'$.
- $|V'_N| \leq 3(d+1) \displaystyle\sum_{A \in V_N} |R(A)| + 3(d+1)|e_S| + |V_N| + (d+1)$.

証明　定理 13.11 を満たす $G' = (V_N, V'_T, R', e'_S) \in \mathrm{foMgTS}_d$ を取る.

$$f(G) = \sum_{A \in V_N - V_G} |R(A)| \leq \sum_{A \in V_N} |R(A)|$$

であるから,

$$\begin{aligned} |V'_N| &\leq 3(d+1)f(G) + 3(d+1)|e_S| + |V_N| + (d+1) \\ &\leq 3(d+1) \sum_{A \in V_N} |R(A)| + 3(d+1)|e_S| + |V_N| + (d+1). \end{aligned}$$

14 first order MACRO gTS における無限ループ

この節では, foMgTS に対する無限ループを扱う.

定理 14.1 $d \geq 1$ とする. 空でない有限集合 $V_T \subset V_1$, $V_N \subset V_2$ を任意に取る. $A \in V_N$, $\alpha \in PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]^d$ に対して,

$$A\langle\alpha\rangle := A[\alpha_1]\cdots[\alpha_d] \in PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]$$

と定義する. 写像 $h : (V_N^d)^1 \to (PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]^d \to PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]^d)$ を以下のように定義する: $\mathcal{A} = ((A_1, \cdots, A_d)) \in (V_N^d)^1$ と $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d) \in PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]^d$ に対して

$$h(\mathcal{A})(\alpha) := (A_1\langle\alpha\rangle, A_2\langle\alpha\rangle, \cdots, A_d\langle\alpha\rangle) \in PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]^d.$$

このとき, 写像

$$H : ((V_N^d)^1)^* \to (PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]^d \to PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]^d)$$

であって[12], 次を満たすものがただ 1 つ存在する:

- $H(\varepsilon) = id_{PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]^d}$.
- $\forall \mathcal{A} \in (V_N^d)^1 \ [\ H(\mathcal{A}) = h(\mathcal{A})\ ]$.
- $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in ((V_N^d)^1)^* \ [\ H(\mathcal{A}\mathcal{B}) = H(\mathcal{A}) \circ H(\mathcal{B})\ ]$.

証明 定理 4.7 で

$$\Sigma := (V_N^d)^1, \quad Y := (PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]^d \to PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]^d), \quad g := h$$

と置いて, Y の上の二項演算 $*$ を写像の合成演算とすれば, そこで得られる唯一の G が, 求める唯一の H となる.

定義 14.2 定理 14.1 の H を取る. $\mathcal{A} \in ((V_N^d)^1)^*$ と $\alpha \in PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]^d$ に対して,

$$\mathcal{A}\langle\alpha\rangle := H(\mathcal{A})(\alpha) \in PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]^d$$

と定義する. 従って, 次が成り立つことになる:

- $\forall A \in V_N,\ \forall \alpha \in PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]^d$
  $[\ A\langle\alpha\rangle = A[\alpha_1]\cdots[\alpha_d] \in PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]\ ]$.
- $\forall \mathcal{A} \in ((V_N^d)^1)^*,\ \forall \alpha \in PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]^d \ [\ \mathcal{A}\langle\alpha\rangle \in PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]^d\ ]$.
- $\forall \alpha \in PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]^d \ [\ \varepsilon\langle\alpha\rangle = \alpha\ ]$.
- $\forall \mathcal{A} = ((A_1, \cdots, A_d)) \in (V_N^d)^1,\ \forall \alpha \in PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]^d$
  $[\ \mathcal{A}\langle\alpha\rangle = (A_1\langle\alpha\rangle, A_2\langle\alpha\rangle, \cdots, A_d\langle\alpha\rangle)\ ]$.
- $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in ((V_N^d)^1)^*,\ \forall \alpha \in PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]^d \ [\ \mathcal{A}\mathcal{B}\langle\alpha\rangle = \mathcal{A}\langle\mathcal{B}\langle\alpha\rangle\rangle\ ]$.

[12] $\Sigma := (V_N^d)^1$ と置くと, Σ は文字の集合である. 特に, Σ^* を考えることができる. この Σ^* を, Σ を書かずに表現すると $((V_N^d)^1)^*$ と書くしかないので, そのように書いている.

補足 $m \geq 1$ が具体的な正整数で, $\mathcal{A} \in ((V_N^d)^1)^+$ が $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 \cdots \mathcal{A}_m,\ \mathcal{A}_i \in (V_N^d)^1$ と表されるとき,

$$\mathcal{A}\langle\alpha\rangle = \mathcal{A}_1\langle\mathcal{A}_2\langle\cdots\langle\mathcal{A}_m\langle\alpha\rangle\rangle\cdots\rangle\rangle$$

と表せることが分かる.

例 $\mathcal{A}\langle e\rangle$ の具体例は, 次のようになる. まず, $d = 2$ のときは,

$$((A_1, A_2))\langle(\alpha_1, \alpha_2)\rangle = (A_1[\alpha_1][\alpha_2], A_2[\alpha_1][\alpha_2]),$$
$$((A_1, A_2))((B_1, B_2))\langle(\alpha_1, \alpha_2)\rangle = (A_1[B_1[\alpha_1][\alpha_2]][B_2[\alpha_1][\alpha_2]], A_2[B_1[\alpha_1][\alpha_2]][B_2[\alpha_1][\alpha_2]])$$

などとなる. $d = 1$ のときは,

$$((A_1))\langle(\alpha_1)\rangle = (A_1[\alpha_1]),\quad ((A_1))((B_1))\langle(\alpha_1)\rangle = (A_1[B_1[\alpha_1]]),$$
$$((A_1))((B_1))((C_1))\langle(\alpha_1)\rangle = (A_1[B_1[C_1[\alpha_1]]])$$

などとなる. このように, $d = 1$ のときの $\mathcal{A}\langle e\rangle$ は分かりやすいが, $d \geq 2$ の場合は, $\mathcal{A}\langle e\rangle$ の中身は複雑である. それでも, $\mathcal{A}\langle e\rangle$ という表記法を使う限りは, $d = 1$ のときとほとんど同じ書き方が可能になる (上記の補足により). また, $\mathcal{A}\langle e\rangle$ が持っている本質的な構造も, 実は $d = 1$ のときとほとんど同じである.

定理 14.3 次が成り立つ:

$$(1)\ \ \forall A \in V_N,\ \forall t \in PE_d(V_N, V_T)^d\ \ [\ A\langle t\rangle \in PE_d(V_N, V_T)\ ].$$
$$(2)\ \ \forall \mathcal{A} \in ((V_N^d)^1)^*,\ \forall t \in PE_d(V_N, V_T)^d\ \ \left[\ \mathcal{A}\langle t\rangle \in PE_d(V_N, V_T)^d\ \right].$$

さらに, 次が成り立つ:

$$(3)\ \ \forall A \in V_N,\ \forall \alpha, \beta \in PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]^d\ \ [\ [A\langle\alpha\rangle]_{x\to\beta} = A\langle[\alpha]_{x\to\beta}\rangle\ ].$$
$$(4)\ \ \forall \mathcal{A} \in ((V_N^d)^1)^*,\ \forall \alpha, \beta \in PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]^d\ \ [\ [\mathcal{A}\langle\alpha\rangle]_{x\to\beta} = \mathcal{A}\langle[\alpha]_{x\to\beta}\rangle\ ].$$

さらに, 任意の $R : V_N \to PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]$ に対して, 次が成り立つ:

$$(5)\ \ \forall A \in V_N,\ \forall \mathcal{A} \in ((V_N^d)^1)^*,\ \forall t \in PE_d(V_N, V_T)^d,\ \forall v \in v_T^*,\ \forall v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}$$
$$\left[\ (A\langle\mathcal{A}\langle t\rangle\rangle, v, v_f) \in \rho(d, V_N, V_T, R) \Leftrightarrow ([R(A)]_{x\to\mathcal{A}\langle t\rangle}, v, v_f) \in \rho(d, V_N, V_T, R)\ \right].$$

証明 (1) $A \in V_N$ と $t \in PE_d(V_N, V_T)^d$ を任意に取る.

$$A\langle t\rangle = A[t_1]\cdots[t_d]$$

であるから, $PE_d(V_N, V_T)$ の定義により, 確かに $A\langle t\rangle \in PE_d(V_N, V_T)$ である.
(2) $|\mathcal{A}|$ に関する数学的帰納法で示す. $|\mathcal{A}| = 0$ のときは, $\mathcal{A} = \varepsilon$ となるしかない. このとき, 任意の $t \in PE_d(V_N, V_T)^d$ に対して

$$\mathcal{A}\langle t\rangle = \varepsilon\langle t\rangle = t \in PE_d(V_N, V_T)^d$$

であるから, 確かに (2) が成り立つ. 次に, $|\mathcal{A}|=1$ のときは, $\mathcal{A}=((A_1,\cdots,A_d))$, $A_i\in V_N$ と表せる. このとき, 任意の $t\in PE_d(V_N,V_T)^d$ に対して

$$\mathcal{A}\langle t\rangle=(A_1\langle t\rangle,\cdots,A_d\langle t\rangle)$$

である. (1) より $A_i\langle t\rangle\in PE_d(V_N,V_T)$ であるから, $\mathcal{A}\langle t\rangle\in PE_d(V_N,V_T)^d$ となる. よって, この場合も (2) が成り立つ. 次に, $n\geq 1$ を任意に取る. $0\leq|\mathcal{A}|\leq n$ のときは (2) が成り立つとする. $|\mathcal{A}|=n+1$ のときを考える. $\mathcal{A}\neq\varepsilon$ であるから, $\mathcal{A}=\mathcal{A}_1\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}_1\in(V_N^d)^1$, $\mathcal{A}'\in((V_N^d)^1)^*$ と表せる. さて, $t\in PE_d(V_N,V_T)^d$ を任意に取る.

$$\mathcal{A}\langle t\rangle=\mathcal{A}_1\mathcal{A}'\langle t\rangle=\mathcal{A}_1\langle\mathcal{A}'\langle t\rangle\rangle=\mathcal{A}_1\langle t'\rangle,\ \ t':=\mathcal{A}'\langle t\rangle$$

である. $|\mathcal{A}'|=n$ だから, 帰納法の仮定から, $t'\in PE_d(V_N,V_T)^d$ である. $|\mathcal{A}_1|=1$ であるから, $n=1$ のときの結果から, $\mathcal{A}_1\langle t'\rangle\in PE_d(V_N,V_T)^d$ となる. よって, $|\mathcal{A}|=n+1$ のときも (2) が成り立つ. 数学的帰納法から, (2) が成立つ.
(3) $[\alpha]_{x\to\beta}\in PE_d(V_N,V_T)[x_1,\cdots,x_d]^d$ であるから, $A\langle[\alpha]_{x\to\beta}\rangle$ は定義可能である. $c:=[\alpha]_{x\to\beta}$ と置くと, $c_i=[\alpha_i]_{x\to\beta}\in PE_d(V_N,V_T)[x_1,\cdots,x_d]$ $(1\leq i\leq d)$ である. また,

$$A\langle[\alpha]_{x\to\beta}\rangle=A\langle c\rangle=A[c_1]\cdots[c_d]=A[\ [\alpha_1]_{x\to\beta}]\cdots[\ [\alpha_d]_{x\to\beta}]=[A[\alpha_1]\cdots[\alpha_d]]_{x\to\beta}=[A\langle\alpha\rangle]_{x\to\beta}$$

である.
(4) $[\alpha]_{x\to\beta}\in PE_d(V_N,V_T)[x_1,\cdots,x_d]^d$ であるから, $\mathcal{A}\langle[\alpha]_{x\to\beta}\rangle$ は定義可能である. さて, (4) を $|\mathcal{A}|$ に関する数学的帰納法で示す. $|\mathcal{A}|=0$ のときは, $\mathcal{A}=\varepsilon$ となるしかない. このとき,

$$[\mathcal{A}\langle\alpha\rangle]_{x\to\beta}=[\varepsilon\langle\alpha\rangle]_{x\to\beta}=[\alpha]_{x\to\beta}$$

であるから, 確かに (4) が成り立つ. 次に, $|\mathcal{A}|=1$ のときは, $\mathcal{A}=((A_1,\cdots,A_d))$, $A_i\in V_N$ と表せる. このとき,

$$\mathcal{A}\langle[\alpha]_{x\to\beta}\rangle=(A_1\langle[\alpha]_{x\to\beta}\rangle,\cdots,A_d\langle[\alpha]_{x\to\beta}\rangle)$$

である. (1) より $[A_i\langle\alpha\rangle]_{x\to\beta}=A_i\langle[\alpha]_{x\to\beta}\rangle$ であるから,

$$\begin{aligned}(A_1\langle[\alpha]_{x\to\beta}\rangle,\cdots,A_d\langle[\alpha]_{x\to\beta}\rangle)=([A_1\langle\alpha\rangle]_{x\to\beta},\cdots,[A_d\langle\alpha\rangle]_{x\to\beta})&=[(A_1\langle\alpha\rangle,\cdots,A_d\langle\alpha\rangle)]_{x\to\beta}\\&=[\mathcal{A}\langle\alpha\rangle]_{x\to\beta}\end{aligned}$$

である. よって, この場合も (4) が成り立つ. 次に, $n\geq 1$ を任意に取る. $0\leq|\mathcal{A}|\leq n$ のときは (4) が成り立つとする. $|\mathcal{A}|=n+1$ のときを考える. $\mathcal{A}\neq\varepsilon$ であるから, $\mathcal{A}=\mathcal{A}_1\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}_1\in(V_N^d)^1$, $\mathcal{A}'\in((V_N^d)^1)^*$ と表せる. $\mathcal{A}\langle[\alpha]_{x\to\beta}\rangle$ が定義できるのだったから,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\langle[\alpha]_{x\to\beta}\rangle=\mathcal{A}_1\mathcal{A}'\langle[\alpha]_{x\to\beta}\rangle=\mathcal{A}_1\langle\mathcal{A}'\langle[\alpha]_{x\to\beta}\rangle\rangle=\mathcal{A}_1\langle[\mathcal{A}'\langle\alpha\rangle]_{x\to\beta}\rangle&=[\mathcal{A}_1\langle\mathcal{A}'\langle\alpha\rangle\rangle]_{x\to\beta}\\&=[\mathcal{A}_1\mathcal{A}'\langle\alpha\rangle]_{x\to\beta}\\&=[\mathcal{A}\langle\alpha\rangle]_{x\to\beta}\end{aligned}$$

となる. ただし, 3番目の等号では $|\mathcal{A}'|=n$ と帰納法の仮定を使った. また, 4番目の等号では $|\mathcal{A}_1|=1$ と $\mathcal{A}'\langle\alpha\rangle\in PE_d(V_N,V_T)[x_1,\cdots,x_d]^d$ と $n=1$ のときの結果を使った. よって, $|\mathcal{A}|=n+1$ のときも (4) が成り立つ. 数学的帰納法から, (4) が成立つ.
(5) 簡単のため, $\rho:=\rho(d,V_N,V_T,R)$ と置く. $A\in V_T$, $\mathcal{A}\in((V_N^d)^1)^*$, $t\in PE_d(V_N,V_T)^d$, $v\in v_T^*$,

$v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}$ を任意に取る． $t \in PE_d(V_N, V_T)^d$ だから, $t' := \mathcal{A}\langle t\rangle$ と置けば．(1) より $t' \in PE_d(V_N, V_T)^d$ となる．さて, $(A\langle\mathcal{A}\langle t\rangle\rangle, v, v_f) \in \rho$ とする．

$$A\langle\mathcal{A}\langle t\rangle\rangle = A\langle t'\rangle = A[t'_1]\cdots[t'_d] \tag{$*$}$$

により, $(A[t'_1]\cdots[t'_d], v, v_f) \in \rho$ となる． 定理 9.6 の $(D2)$ から, $([R(A)]_{x\to t'}, v, v_f) \in \rho$ となる． すなわち, $([R(A)]_{x\to\mathcal{A}\langle t\rangle}, v, v_f) \in \rho$ となる． 逆に, $([R(A)]_{x\to\mathcal{A}\langle t\rangle}, v, v_f) \in \rho$ とすると, $([R(A)]_{x\to t'}, v, v_f) \in \rho$ であるから, ρ の定義から $(A[t'_1]\cdots[t'_d], v, v_f) \in \rho$ である．$(*)$ により, $(A\langle\mathcal{A}\langle t\rangle\rangle, v, v_f) \in \rho$ である．

定理 14.4

$$\forall\mathcal{A},\mathcal{B} \in ((V_N^d)^1)^*,\ \forall\alpha \in PE_d(V_N, V_T)[x_1,\cdots,x_d]^d\ \ [\ \mathcal{A}\langle\alpha\rangle = \mathcal{B}\langle\alpha\rangle \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{B}\ ].$$

証明　まず,

$$(1)\ \ \forall\mathcal{A},\mathcal{B} \in ((V_N^d)^1)^+,\ \forall\alpha \in PE_d(V_N, V_T)[x_1,\cdots,x_d]^d\ \ [\ \mathcal{A}\langle\alpha\rangle = \mathcal{B}\langle\alpha\rangle \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{B}\ ]$$

が成り立つことを示す．これが成り立たない $(\mathcal{A},\mathcal{B},\alpha)$ があったとして, その中で $|\mathcal{A}| + |\mathcal{B}|$ が最小のものを 1 つ選んで再び $(\mathcal{A},\mathcal{B},\alpha)$ と置く．よって,

$$\mathcal{A},\mathcal{B} \in ((V_N^d)^1)^+,\quad \mathcal{A}\langle\alpha\rangle = \mathcal{B}\langle\alpha\rangle,\quad \mathcal{A} \neq \mathcal{B}$$

である．さて, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1\mathcal{A}'$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1\mathcal{B}'$, $\mathcal{A}', \mathcal{B}' \in ((V_N^d)^1)^*$ と表せる．$\mathcal{A}\langle\alpha\rangle = \mathcal{B}\langle\alpha\rangle$ より,

$$\mathcal{A}_1\langle\mathcal{A}'\langle\alpha\rangle\rangle = \mathcal{B}_1\langle\mathcal{B}'\langle\alpha\rangle\rangle$$

となる．$\alpha' := \mathcal{A}'\langle\alpha\rangle$, $\beta' := \mathcal{B}'\langle\alpha\rangle$ と表せば,

$$\mathcal{A}_1\langle\alpha'\rangle = \mathcal{B}_1\langle\beta'\rangle,\quad \alpha', \beta' \in PE_d(V_N, V_T)[x_1,\cdots,x_d]^d$$

となる．$\mathcal{A}_1 = ((A_1,\cdots,A_d))$, $\mathcal{B}_1 = ((B_1,\cdots,B_d))$ と表せば,

$$(A_1\langle\alpha'\rangle,\cdots,A_d\langle\alpha'\rangle) = (B_1\langle\beta'\rangle,\cdots,B_d\langle\beta'\rangle)$$

となる．第 i 成分を比較して, $A_i\langle\alpha'\rangle = B_i\langle\beta'\rangle$ となる．すなわち,

$$A_i[\alpha'_1]\cdots[\alpha'_d] = B_i[\beta'_1]\cdots[\beta'_d]$$

となる． よって, $A_i = B_i$ $(1 \le i \le d)$ かつ $\alpha'_j = \beta'_j$ $(1 \le j \le d)$ となる． よって, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{B}_1$ かつ $\alpha' = \beta'$ となる．後者から $\mathcal{A}'\langle\alpha\rangle = \mathcal{B}'\langle\alpha\rangle$ が成り立つ． $|\mathcal{A}'| + |\mathcal{B}'| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| - 2$ であるから, $|\mathcal{A}| + |\mathcal{B}|$ の最小性により, $\mathcal{A}' = \mathcal{B}'$ が成り立つ．よって, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1\mathcal{A}' = \mathcal{B}_1\mathcal{B}' = \mathcal{B}$ となり, $(\mathcal{A},\mathcal{B},\alpha)$ の取り方に矛盾する．よって, (1) が成り立つ．
さて, $\mathcal{A},\mathcal{B} \in ((V_N^d)^1)^*$ を任意に取る．

$$\forall\alpha \in PE_d(V_N, V_T)[x_1,\cdots,x_d]^d\ \ [\ \mathcal{A}\langle\alpha\rangle = \mathcal{B}\langle\alpha\rangle \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{B}\ ]$$

を示したい．$\mathcal{A},\mathcal{B} \in ((V_N^d)^1)^+$ のときは, (1) から成立．以下では, $\mathcal{A} = \varepsilon$ または $\mathcal{B} = \varepsilon$ としてよい．対称性から, $\mathcal{B} = \varepsilon$ としてよい． $\alpha \in PE_d(V_N, V_T)[x_1,\cdots,x_d]^d$ は $\mathcal{A}\langle\alpha\rangle = \mathcal{B}\langle\alpha\rangle$ を満たすとする

(よって, $\mathcal{A}\langle\alpha\rangle = \alpha$ である). $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ を示したい. $\mathcal{A} = \varepsilon$ を示せばよい. 背理法を使う. $\mathcal{A} \neq \varepsilon$ とする. よって, ある $m \geq 1$ に対して $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\cdots\mathcal{A}_m$, $\mathcal{A}_i \in (V_N^d)^1$ という形になる.

$$\begin{aligned} v^{(i)} &:= \mathcal{A}_i\cdots\mathcal{A}_m \quad (1 \leq i \leq m), \\ \alpha^{(i)} &:= v^{(i)}\langle\alpha\rangle \quad (1 \leq i \leq m) \end{aligned}$$

と定義する. $v^{(i)} \in ((V_N^d)^1)^*$, $\alpha^{(i)} \in PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]^d$ であり,

$$\alpha^{(1)} = v^{(1)}\langle\alpha\rangle = \mathcal{A}_1\cdots\mathcal{A}_m\langle\alpha\rangle = \mathcal{A}\langle\alpha\rangle = \alpha$$

である. また, $v^{(i)} = \mathcal{A}_i v^{(i+1)}$ $(1 \leq i < m)$ であるから,

$$\alpha^{(i)} = v^{(i)}\langle\alpha\rangle = \mathcal{A}_i v^{(i+1)}\langle\alpha\rangle = \mathcal{A}_i\langle v^{(i+1)}\langle\alpha\rangle\rangle = \mathcal{A}_i\langle\alpha^{(i+1)}\rangle \quad (1 \leq i < m) \tag{1}$$

となる. $\mathcal{A}_i = ((A_{i1}, \cdots, A_{id}))$ $(1 \leq i \leq m)$ と表せば, (1) より

$$\alpha^{(i)} = (A_{i1}\langle\alpha^{(i+1)}\rangle, A_{i2}\langle\alpha^{(i+1)}\rangle, \cdots, A_{id}\langle\alpha^{(i+1)}\rangle) \quad (1 \leq i < m)$$

となる. 両辺の第一成分を比べることにより

$$\alpha_1^{(i)} = A_{i1}\langle\alpha^{(i+1)}\rangle = A_{i1}[\alpha_1^{(i+1)}]\cdots[\alpha_d^{(i+1)}]$$

となる. 特に $|\alpha_1^{(i)}| > |\alpha_1^{(i+1)}|$ となる. これが任意の $1 \leq i < m$ で成り立つ. よって, $|\alpha_1^{(1)}| > |\alpha_1^{(m)}|$ である. また,

$$\alpha^{(m)} = v^{(m)}\langle\alpha\rangle = \mathcal{A}_m\langle\alpha\rangle = (A_{m1}\langle\alpha\rangle, A_{m2}\langle\alpha\rangle, \cdots, A_{md}\langle\alpha\rangle)$$

であるから, 両辺の第一成分を比べることにより

$$\alpha_1^{(m)} = A_{m1}\langle\alpha\rangle = A_{m1}[\alpha_1]\cdots[\alpha_d]$$

となる. 特に $|\alpha_1^{(m)}| > |\alpha_1|$ となる. 以上を繋げて, $|\alpha_1^{(1)}| > |\alpha_1|$ となる. 特に, $\alpha_1^{(1)} \neq \alpha_1$ である. 一方で, $\alpha^{(1)} = \mathcal{A}\langle\alpha\rangle = \alpha$ だったから, $\alpha_1^{(1)} = \alpha_1$ である. これは矛盾.

定理 14.5

$$\begin{aligned} &\forall A, B \in V_N,\ \forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in ((V_N^d)^1)^*,\ \forall \alpha \in PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]^d \\ &[\ A\langle\mathcal{A}\langle\alpha\rangle\rangle = B\langle\mathcal{B}\langle\alpha\rangle\rangle \Rightarrow A = B \text{ かつ } \mathcal{A} = \mathcal{B}\ ]. \end{aligned}$$

証明 $\alpha' = \mathcal{A}\langle\alpha\rangle$, $\beta' = \mathcal{B}\langle\alpha\rangle$ と置けば,

$$A\langle\alpha'\rangle = B\langle\beta'\rangle, \quad \alpha', \beta' \in PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]^d$$

となる. 特に

$$A[\alpha_1']\cdots[\alpha_d'] = B[\beta_1']\cdots[\beta_d']$$

となる. よって, $A = B$ かつ $\alpha' = \beta'$ となる. 後者から $\mathcal{A}\langle\alpha\rangle = \mathcal{B}\langle\alpha\rangle$ が成り立つ. 定理 14.4 より, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ となる.

定義 14.6 $a \in V_T$ を任意に取る. $t_a := (\mathtt{t}_a, \mathtt{t}_a, \cdots, \mathtt{t}_a) \in PE_d(V_N, V_T)^d$ と置く. $E_d(V_N, V_T, a) \subset PE_d(V_N, V_T)$ を以下のように定義する:

$$E_d(V_N, V_T, a) := \left\{ A\langle \mathcal{A}\langle t_a \rangle\rangle \mid (A, \mathcal{A}) \in V_N \times ((V_N^d)^1)^* \right\} \subset PE_d(V_N, V_T).$$

これ以降の議論では, $E_d(V_N, V_T, a)$ においてどの $a \in V_T$ を使うかは重要でないことが多い. そこで, 以下では, 特に断りのない限り, 暗黙のうちに $a \in V_T$ を 1 つ固定することにし, そのときの $E_d(V_N, V_T, a)$ のことを単に $E_d(V_N, V_T)$ と書くことにする. また, そのときの t_a のことを, 以下では t_0 と書くことにする.

補足　$e \in E_d(V_N, V_T)$ を任意に取る. ある $A \in V_N$ と $\mathcal{A} \in ((V_N^d)^1)^*$ が存在して,

$$e = A\langle \mathcal{A}\langle t_0 \rangle\rangle$$

と表せる. 定理 14.5 より, そのような $(A, \mathcal{A})$ は e ごとに一意的である.

補足　上記の表記法を使うと, 任意の $G = (V_N, V_T, R, e_S) \in \mathrm{foMgTS}_d$ に対して次が成り立つ:

> $\forall A \in V_N,\ \exists a \in V_T,\ \exists k \in [1, d],\ \exists B, C, D \in V_N,\ \exists \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D} \in (V_N^d)^1\ \ s.t.$
> 次の 5 つのうちいずれかが成り立つ.
> - $R(A) = a$.
> - $R(A) = x_k$.
> - $R(A) = \mathtt{t}_a$.
> - $R(A) = \mathtt{f}_a$.
> - $R(A) = (\ (\ B\langle \mathcal{B}\langle x \rangle\rangle\ C\langle \mathcal{C}\langle x \rangle\rangle\ )\ /\ (\ (\ B\langle \mathcal{B}\langle x \rangle\rangle\ ]\ D\langle \mathcal{D}\langle x \rangle\rangle\ )\ )$.
>   (ここでの x は, $x = (x_1, \cdots, x_d) \in PE_d(V_N, V_T)[x_1, \cdots, x_d]^d$ のつもり.)

さらに, ある $a \in V_T$ と $A \in V_N$ と $\mathcal{A} \in (V_N^d)^1$ に対して

$$e_S = A\langle \mathcal{A}\langle t_a \rangle\rangle$$

が成り立つ.
ご覧のとおり, $d = 1$ の場合と書き方がそっくりになる.

定義 14.7 $d \geq 1$ とする. $(V_N, V_T, R) \in \mathrm{EG}_d$ を任意に取る. $\rho := \rho(d, V_N, V_T, R)$ と置く. 定義 14.6 の t_0 を取る.

$$s = ((e, v), (e', v')) \in (E_d(V_N, V_T) \times V_T^*)^2$$

の上の命題 $P_i(s)$ $(1 \leq i \leq 4)$ を以下のように定義する: まず, $e = A\langle \mathcal{A}\langle t_0 \rangle\rangle$, $e' = A'\langle \mathcal{A}'\langle t_0 \rangle\rangle$ を満たす $(A, \mathcal{A})$ と $(A', \mathcal{A}')$ がそれぞれ一意的に存在する. この $A, A', \mathcal{A}, \mathcal{A}'$ に対して, $P_i(s)$ を以下の

ように定義する:

$$\begin{aligned}
&P_1(s):\ \exists k\in[1,d],\ \exists(A_i)_{i=1}^m\in V_N^d\ \ s.t.\\
&R(A)=x_k,\ A'=A_k,\ \mathcal{A}=((A_1,\cdots,A_d))\mathcal{A}',\ v'=v.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&P_2(s):\ \exists B,C,D\in V_N,\ \exists\mathcal{B},\mathcal{C},\mathcal{D}\in(V_N^d)^1\ \ s.t.\\
&R(A)=(\ (\ B\langle\mathcal{B}\langle x\rangle\rangle\ C\langle\mathcal{C}\langle x\rangle\rangle\ )\ /\ (\ (\ B\langle\mathcal{B}\langle x\rangle\rangle\ ]\ D\langle\mathcal{D}\langle x\rangle\rangle\ )\ ),\\
&A'=B,\ \mathcal{A}'=\mathcal{B}\mathcal{A},\ v'=v.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&P_3(s):\ \exists B,C,D\in V_N,\ \exists\mathcal{B},\mathcal{C},\mathcal{D}\in(V_N^d)^1\ \ s.t.\\
&R(A)=(\ (\ B\langle\mathcal{B}\langle x\rangle\rangle\ C\langle\mathcal{C}\langle x\rangle\rangle\ )\ /\ (\ (\ B\langle\mathcal{B}\langle x\rangle\rangle\ ]\ D\langle\mathcal{D}\langle x\rangle\rangle\ )\ ),\\
&(B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle,v,\mathtt{f})\in\rho,\ A'=D,\ \mathcal{A}'=\mathcal{D}\mathcal{A},\ v'=v.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&P_4(s):\ \exists B,C,D\in V_N,\ \exists\mathcal{B},\mathcal{C},\mathcal{D}\in(V_N^d)^1,\ \exists v_1\in V_T^*\ \ s.t.\\
&R(A)=(\ (\ B\langle\mathcal{B}\langle x\rangle\rangle\ C\langle\mathcal{C}\langle x\rangle\rangle\ )\ /\ (\ (\ B\langle\mathcal{B}\langle x\rangle\rangle\ ]\ D\langle\mathcal{D}\langle x\rangle\rangle\ )\ ),\\
&(B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle,v,v_1)\in\rho,\ A'=C,\ \mathcal{A}'=\mathcal{C}\mathcal{A},\ v'=v_1.
\end{aligned}$$

そして, $(E_d(V_N,V_T)\times V_T^*)^2$ の上の二項関係 $\mu(V_N,V_T,R)$, $\mu_j(V_N,V_T,R)$ を以下のように定義する:

$$\mu_j(V_N,V_T,R):=\left\{s\in(E_d(V_N,V_T)\times V_T^*)^2\mid P_j(s)\right\}\ (j=1,2,3,4),\quad \mu(V_N,V_T,R):=\cup_{j=1}^4\mu_j.$$

応用上は, $(V_N,V_T,R)\in\mathrm{EG}_d$ を固定してから $\mu(V_N,V_T,R)$, $\mu_j(V_N,V_T,R)$ を使うことになるので, 以下では単に μ, μ_j と省略表記する.

補足 v を $A\langle\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle$ に適用するとき, そのまま計算を続けていって

$$v'\text{を } A'\langle\mathcal{A}'\langle t_0\rangle\rangle \text{ に適用する}$$

という状態にできるとき,

$$(A\langle\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle,v)\ \mu\ (A'\langle\mathcal{A}'\langle t_0\rangle\rangle,v')$$

と書く, と言っているような感じである.

補題 14.8 $(V_N,V_T,R)\in\mathrm{EG}_d$ を任意に取る. $\rho:=\rho(d,V_N,V_T,R)$, $\varphi:=\varphi_\rho$ と置く. $e_1,e_2,e_3\in PE_d(V_N,V_T)$ と $v,v_1\in V_T^*$ と $v_f\in V_T^*\cup\{\mathtt{f}\}$ を任意に取る. $e=((e_1e_2)/((e_1]e_3))$ と置く. このとき, 次が成り立つ:

(1) $(e,v,v_f)\in\rho\Rightarrow[\ \exists!v'\in V_T^*\cup\{\mathtt{f}\}\ \ [\ (e_1,v,v')\in\rho,\ \varphi(e_1,v,v')<\varphi(e,v,v_f)\ ]\ ]$.

(2) $(e,v,v_f)\in\rho,\ (e_1,v,\mathtt{f})\in\rho\Rightarrow[\ (e_3,v,v_f)\in\rho,\ \varphi(e_3,v,v_f)<\varphi(e,v,v_f)\ ]$.

(3) $(e,v,v_f)\in\rho,\ (e_1,v,v_1)\in\rho\Rightarrow[\ (e_2,v_1,v_f)\in\rho,\ \varphi(e_2,v_1,v_f)<\varphi(e,v,v_f)\ ]$.

証明 先に, いくつか計算をしておく.
$v_f\in V_T^*$ のとき: $(e,v,v_f)\in\rho$ とする. 定理 9.6 の $(D7)$ より,

$$((e_1e_2),v,v_f)\in\rho\ \ \text{または}\ \ [\ ((e_1e_2),v,\mathtt{f}),(((e_1]e_3),v,v_f)\in\rho\ ]$$

が成り立つ. 前者の場合は, 定理 9.6 の $(D6)$ より, ある $v_1 \in V_T^*$ が存在して

$$(e_1, v, v_1), (e_2, v_1, v_f) \in \rho$$

である. また,

$$\varphi(e, v, v_f) = 1 + \varphi((e_1 e_2), v, v_f) = 1 + (1 + \varphi(e_1, v, v_1) + \varphi(e_2, v_1, v_f))$$

となる. 後者の場合は, $(((e_1]e_3), v, v_f) \in \rho$ と定理 9.6 の $(D6)$ より, ある $v_1 \in V_T^*$ が存在して

$$((e_1], v, v_1), (e_3, v_1, v_f) \in \rho$$

である. さらに, 定理 9.6 の $(D3)$ より, $(e_1, v, \mathtt{f}) \in \rho$ である. よって, $((e_1], v, v) \in \rho$ である. よって, $v_1 = v$ である. また,

$$\begin{aligned}
\varphi(e, v, v_f) &= 1 + \varphi((e_1 e_2), v, \mathtt{f}) + \varphi(((e_1]e_3), v, v_f) \\
&= 1 + (1 + \varphi(e_1, v, \mathtt{f})) + (1 + \varphi((e_1], v, v_1) + \varphi(e_3, v_1, v_f)) \\
&= 1 + (1 + \varphi(e_1, v, \mathtt{f})) + (1 + \varphi((e_1], v, v) + \varphi(e_3, v, v_f))
\end{aligned}$$

となる.

$v_f = \mathtt{f}$ のとき: $(e, v, \mathtt{f}) \in \rho$ とする. 定理 9.6 の $(D8)$ より,

$$((e_1 e_2), v, \mathtt{f}), (((e_1]e_3), v, \mathtt{f}) \in \rho$$

が成り立つ. 定理 9.6 の $(D5)$ より, 次の 2 行が成り立つ:

- $(e_1, v, \mathtt{f}) \in \rho \ \vee \ \exists! v_1 \in V_T^* \ [\ (e_1, v, v_1), (e_2, v_1, \mathtt{f}) \in \rho\ ]$,
- $((e_1], v, \mathtt{f}) \in \rho \ \vee \ \exists! v_1 \in V_T^* \ [\ ((e_1], v, v_1), (e_3, v_1, \mathtt{f}) \in \rho\ ]$.

簡単のため, これを

- $P_1 \vee P_2$,
- $Q_1 \vee Q_2$

と表す. ただし, P_i と Q_i はそれぞれ対応する論理式とする. よって, P_iかつ Q_j $(i, j \in [1, 2])$ の 4 通りのケースが生じる. P_1 の場合は, $((e_1], v, v) \in \rho$ である. よって, Q_1 は起こらず, Q_2 になるしかない. このとき, Q_2 における v_1 は $v_1 = v$ を満たすことになる. また,

$$\begin{aligned}
\varphi(e, v, \mathtt{f}) &= 1 + \varphi((e_1 e_2), v, \mathtt{f}) + \varphi(((e_1]e_3), v, \mathtt{f}) \\
&= 1 + (1 + \varphi(e_1, v, \mathtt{f})) + (1 + \varphi((e_1], v, v_1) + \varphi(e_3, v_1, \mathtt{f})) \\
&= 1 + (1 + \varphi(e_1, v, \mathtt{f})) + (1 + \varphi((e_1], v, v) + \varphi(e_3, v, \mathtt{f}))
\end{aligned}$$

となる. P_2 の場合は, $((e_1], v, \mathtt{f}) \in \rho$ である. よって, Q_2 は起こらず, Q_1 になるしかない. また,

$$\begin{aligned}
\varphi(e, v, \mathtt{f}) &= 1 + \varphi((e_1 e_2), v, \mathtt{f}) + \varphi(((e_1]e_3), v, \mathtt{f}) \\
&= 1 + (1 + \varphi(e_1, v, v_1) + \varphi(e_2, v_1, \mathtt{f})) + (1 + \varphi((e_1], v, \mathtt{f}))
\end{aligned}$$

となる.
以上の計算から, (1),(2),(3) が示せる.

定理 14.9 $G = (V_N, V_T, R, e_S) \in \mathrm{foMgTS}_d$ を任意に取る．$\rho := \rho(d, V_N, V_T, R)$, $\varphi := \varphi_\rho$ と置く．定義 14.6 の t_0 を取る．$m \geq 1$ とする．

$$r := ((A^{(i)}\langle \mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(i)}))_{i=1}^m \in (E_d(V_N, V_T) \times V_T^*)^m$$

は $r_i \ \mu \ r_{i+1}$ $(1 \leq i < m)$ を満たすとする．また, ある $v_f \in V_T^*$ が存在して

$$(A^{(1)}\langle \mathcal{A}^{(1)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(1)}, v_f) \in \rho$$

が成り立つとする．このとき, ある $(w^{(i)})_{i=1}^m \in (V_T^* \cup \{\mathtt{f}\})^m$ が存在して, 次が成り立つ:

- $w^{(1)} = v_f$.
- $\forall i \in [1, m] \ \left[\ (A^{(i)}\langle \mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(i)}, w^{(i)}) \in \rho \ \right]$.
- $(\varphi(A^{(i)}\langle \mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(i)}, w^{(i)}))_{i=1}^m$ は狭義単調減少である．

証明　$w^{(1)} := v_f$ と置けば, $n = 1$ に対して次が成り立っている:

- $w^{(1)}, \cdots, w^{(n)} \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}$ が定義されている．
- $(A^{(i)}\langle \mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(i)}, w^{(i)}) \in \rho$ $(1 \leq i \leq n)$ である．
- $(\varphi(A^{(i)}\langle \mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(i)}, w^{(i)}))_{i=1}^n$ は狭義単調減少である．
- $w^{(1)} = v_f$ である．

上記の 4 行をまとめて $P(n)$ と書くことにする．よって, $P(1)$ は真である．次に, $n \in [1, m)$ を任意に取る．$P(n)$ は真とする．このとき, $P(n{+}1)$ も真となることを示す．まず, $(A^{(n)}\langle \mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(n)}, w^{(n)}) \in \rho$ であるから,

$$\begin{aligned}
&([R(A^{(n)})]_{x \to \mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle}, v^{(n)}, w^{(n)}) \in \rho, \\
&\varphi([R(A^{(n)})]_{x \to \mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle}, v^{(n)}, w^{(n)}) = \varphi(A^{(n)}\langle \mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(n)}, w^{(n)}) - 1 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad < \varphi(A^{(n)}\langle \mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(n)}, w^{(n)}) \qquad (*)
\end{aligned}$$

が成り立つ．次に, 定理の仮定から, $r_n \ \mu \ r_{n+1}$ が成り立つ．μ の定義から, ある j に対して $r_n \ \mu_j \ r_{n+1}$ が成り立つ．以下では, j の値で場合分けする．

$j = 1$ のとき: ある $k \in [1, d]$, $(A_i)_{i=1}^m \in V_N^d$ が存在して,

$$R(A^{(n)}) = x_k, \ A^{(n+1)} = A_k, \ \mathcal{A}^{(n)} = ((A_1, \cdots, A_d))\mathcal{A}^{(n+1)}, \ v^{(n+1)} = v^{(n)} \qquad (1)$$

と表せる．

$$\begin{aligned}
[R(A^{(n)})]_{x \to \mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle} = [x_k]_{x \to ((A_1, \cdots, A_d))\mathcal{A}^{(n+1)}\langle t_0\rangle} &= [x_k]_{x \to ((A_1, \cdots, A_d))\langle \mathcal{A}^{(n+1)}\langle t_0\rangle\rangle} \\
&= [x_k]_{x \to (A_1\langle \mathcal{A}^{(n+1)}\langle t_0\rangle\rangle, \cdots, A_d\langle \mathcal{A}^{(n+1)}\langle t_0\rangle\rangle)} \\
&= A_k\langle \mathcal{A}^{(n+1)}\langle t_0\rangle\rangle
\end{aligned}$$

であるから, これを $(*)$ と合わせて

$$\begin{aligned}
&(A_k\langle \mathcal{A}^{(n+1)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(n)}, w^{(n)}) \in \rho, \\
&\varphi(A_k\langle \mathcal{A}^{(n+1)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(n)}, w^{(n)}) < \varphi(A^{(n)}\langle \mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(n)}, w^{(n)})
\end{aligned}$$

となる. よって, $w^{(n+1)} := w^{(n)}$ と置けば, (1) と合わせて

$$
\begin{aligned}
&(A^{(n+1)}\langle\mathcal{A}^{(n+1)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(n+1)}, w^{(n+1)}) \in \rho, \\
&\varphi(A^{(n+1)}\langle\mathcal{A}^{(n+1)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(n+1)}, w^{(n+1)}) < \varphi(A^{(n)}\langle\mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(n)}, w^{(n)})
\end{aligned}
$$

となる. よって, この場合は $P(n+1)$ は真である.

$j=2$ のとき: ある $B, C, D \in V_N$ と $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D} \in (V_N^d)^1$ が存在して,

$$
\begin{aligned}
&R(A^{(n)}) = (\ (\ B\langle\mathcal{B}\langle x\rangle\rangle\ C\langle\mathcal{C}\langle x\rangle\rangle\ )\ /\ (\ (\ B\langle\mathcal{B}\langle x\rangle\rangle\ ]\ D\langle\mathcal{D}\langle x\rangle\rangle\ )\ ), \\
&A^{(n+1)} = B,\ \mathcal{A}^{(n+1)} = \mathcal{B}\mathcal{A}^{(n)},\ v^{(n+1)} = v^{(n)} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

と表せる.

$$
\begin{aligned}
&[R(A^{(n)})]_{x\to\mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle} \\
&= [\ (\ (\ B\langle\mathcal{B}\langle x\rangle\rangle\ C\langle\mathcal{C}\langle x\rangle\rangle\ )\ /\ (\ (\ B\langle\mathcal{B}\langle x\rangle\rangle\ ]\ D\langle\mathcal{D}\langle x\rangle\rangle\ )\ )]_{x\to\mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle} \\
&= (\ (\ B\langle\mathcal{B}\langle\mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle\rangle\rangle\ C\langle\mathcal{C}\langle\mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle\rangle\rangle\ )\ /\ (\ (\ B\langle\mathcal{B}\langle\mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle\rangle\rangle\ ]\ D\langle\mathcal{D}\langle\mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle\rangle\rangle\ )\ ) \\
&= (\ (\ B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle\rangle\ C\langle\mathcal{C}\mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle\rangle\ )\ /\ (\ (\ B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle\rangle\ ]\ D\langle\mathcal{D}\mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle\rangle\ )\ )
\end{aligned}
$$

であるから, これと $(*)$ と補題 14.8 の (1) から, ある $v' \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}$ が存在して

$$
\begin{aligned}
&(B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(n)}, v') \in \rho, \\
&\varphi(B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(n)}, v') < \varphi([R(A^{(n)})]_{x\to\mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle}, v^{(n)}, w^{(n)}) < \varphi(A^{(n)}\langle\mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(n)}, w^{(n)})
\end{aligned}
$$

が成り立つことが分かる. よって, $w^{(n+1)} := v'$ と置けば, (2) と合わせて

$$
\begin{aligned}
&(A^{(n+1)}\langle\mathcal{A}^{(n+1)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(n+1)}, w^{(n+1)}) \in \rho, \\
&\varphi(A^{(n+1)}\langle\mathcal{A}^{(n+1)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(n+1)}, w^{(n+1)}) < \varphi(A^{(n)}\langle\mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(n)}, w^{(n)})
\end{aligned}
$$

となる. よって, この場合は $P(n+1)$ は真である.

$j=3$ のとき: ある $B, C, D \in V_N$ と $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D} \in (V_N^d)^1$ が存在して,

$$
\begin{aligned}
&R(A^{(n)}) = (\ (\ B\langle\mathcal{B}\langle x\rangle\rangle\ C\langle\mathcal{C}\langle x\rangle\rangle\ )\ /\ (\ (\ B\langle\mathcal{B}\langle x\rangle\rangle\ ]\ D\langle\mathcal{D}\langle x\rangle\rangle\ )\ ), \\
&(B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, \mathtt{f}) \in \rho,\ A^{(n+1)} = D,\ \mathcal{A}^{(n+1)} = \mathcal{D}\mathcal{A}^{(n)},\ v^{(n+1)} = v^{(n)} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

と表せる.

$$
\begin{aligned}
&[R(A^{(n)})]_{x\to\mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle} \\
&= (\ (\ B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle\rangle\ C\langle\mathcal{C}\mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle\rangle\ )\ /\ (\ (\ B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle\rangle\ ]\ D\langle\mathcal{D}\mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle\rangle\ )\ )
\end{aligned}
$$

であるから, $(*)$ と (3) と補題 14.8 の (2) から,

$$
\begin{aligned}
&(D\langle\mathcal{D}\mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(n)}, w^{(n)}) \in \rho, \\
&\varphi(D\langle\mathcal{D}\mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(n)}, w^{(n)}) < \varphi([R(A^{(n)})]_{x\to\mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle}, v^{(n)}, w^{(n)}) < \varphi(A^{(n)}\langle\mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(n)}, w^{(n)})
\end{aligned}
$$

が成り立つ. よって, $w^{(n+1)} := w^{(n)}$ と置けば, (3) と合わせて

$$(A^{(n+1)}\langle \mathcal{A}^{(n+1)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(n+1)}, w^{(n+1)}) \in \rho,$$
$$\varphi(A^{(n+1)}\langle \mathcal{A}^{(n+1)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(n+1)}, w^{(n+1)}) < \varphi(A^{(n)}\langle \mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(n)}, w^{(n)})$$

となる. よって, この場合は $P(n+1)$ は真である.

$j = 4$ のとき: ある $B, C, D \in V_N$ と $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D} \in (V_N^d)^1$ と $v_1 \in V_T^*$ が存在して,

$$R(A) = (\ (\ B\langle \mathcal{B}\langle x\rangle\rangle\ C\langle \mathcal{C}\langle x\rangle\rangle\ )\ /\ (\ (\ B\langle \mathcal{B}\langle x\rangle\rangle\ ]\ D\langle \mathcal{D}\langle x\rangle\rangle\ )\ ),$$
$$(B\langle \mathcal{B}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, v_1) \in \rho,\ A^{(n+1)} = C,\ \mathcal{A}^{(n+1)} = \mathcal{C}\mathcal{A},\ v^{(n+1)} = v_1 \tag{4}$$

と表せる.

$$[R(A^{(n)})]_{x\to\mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle}$$
$$= (\ (\ B\langle \mathcal{B}\mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle\rangle\ C\langle \mathcal{C}\mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle\rangle\ )\ /\ (\ (\ B\langle \mathcal{B}\mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle\rangle\ ]\ D\langle \mathcal{D}\mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle\rangle\ )\ )$$

であるから, $(*)$ と (4) と補題 14.8 の (3) から,

$$(C\langle \mathcal{C}\mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle\rangle, v_1, w^{(n)}) \in \rho,$$
$$\varphi(C\langle \mathcal{C}\mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle\rangle, v_1, w^{(n)}) < \varphi([R(A^{(n)})]_{x\to\mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle}, v^{(n)}, w^{(n)}) < \varphi(A^{(n)}\langle \mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(n)}, w^{(n)})$$

が成り立つ. よって, $w^{(n+1)} := w^{(n)}$ と置けば, (4) と合わせて

$$(A^{(n+1)}\langle \mathcal{A}^{(n+1)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(n+1)}, w^{(n+1)}) \in \rho,$$
$$\varphi(A^{(n+1)}\langle \mathcal{A}^{(n+1)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(n+1)}, w^{(n+1)}) < \varphi(A^{(n)}\langle \mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(n)}, w^{(n)})$$

となる. よって, この場合は $P(n+1)$ は真である.

よって, いずれの場合も $P(n+1)$ は真である. 数学的帰納法から, 任意の $n \in [1, m]$ に対して $P(n)$ は真となる. 特に, $P(m)$ は真となる. この $P(m)$ を使えばよい.

系 14.10 $G = (V_N, V_T, R, e_S) \in \mathrm{foMgTS}_d$ を任意に取る. 定義 14.6 の t_0 を取る. $A \in V_N$, $\mathcal{A} \in ((V_N^d)^1)^*$, $v \in V_T^*$ は次を満たすとする:

$$\forall m \geq 1,\ \exists r = ((A^{(i)}\langle \mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(i)}))_{i=1}^m \in (E_d(V_N, V_T) \times V_T^*)^m\ \ s.t.$$
$$r_i\ \mu\ r_{i+1}\ (1 \leq i < m),\ \ A^{(1)} = A,\ \ \mathcal{A}^{(1)} = \mathcal{A},\ \ v^{(1)} = v.$$

このとき, v を $A\langle \mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle$ に適用すると無限ループに陥る. すなわち, 次が成り立つ:

$$\forall v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}\ \ [\ (A\langle \mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, v_f) \notin \rho(d, V_N, V_T, R)\ ].$$

証明 $\rho := \rho(d, V_N, V_T, R)$, $\varphi := \varphi_\rho$ と置く. 背理法で示す. ある $v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}$ が存在して $(A\langle \mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, v_f) \in \rho$ が成り立つとする. $m_0 := \varphi(A\langle \mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, v_f)$ と置く. $m := m_0 + 1$ として, 定理の仮定にある $r := ((A^{(i)}\langle \mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(i)}))_{i=1}^m$ を取る. よって, 次が成り立っている:

- $r_i\ \mu\ r_{i+1}\ \ (1 \leq i < m)$.
- $(A^{(1)}\langle \mathcal{A}^{(1)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(1)}, v_f) \in \rho$.

そこで, 定理 14.9 を満たす $(w^{(i)})_{i=1}^m$ を取る.

$$z := (\varphi(A^{(i)}\langle\mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(i)}, w^{(i)}))_{i=1}^m$$

と置けば, これは狭義単調減少であるから,

$$z_1 > z_2 > \cdots > z_m$$

となる. 特に $z_i \le z_1 - i + 1$ $(1 \le i \le m)$ となるので,

$$z_m \le z_1 - m + 1 = z_1 - m_0$$

となる. $A^{(1)} = A,\ \mathcal{A}^{(1)} = \mathcal{A},\ v^{(1)} = v,\ w^{(1)} = v_f$ により,

$$z_1 = \varphi(A^{(1)}\langle\mathcal{A}^{(1)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(1)}, w^{(1)}) = \varphi(A\langle\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, v_f) = m_0$$

となるので, $z_m \le 0$ となる. 一方で,

$$z_m = \varphi(A^{(m)}\langle\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(m)}, w^{(m)}) \ge 1$$

であるから矛盾する.

定理 14.11 $G = (V_N, V_T, R, e_S) \in \mathrm{foMgTS}_d$ を任意に取る. 定義 14.6 の t_0 を取る. $A \in V_N$, $\mathcal{A} \in ((V_N^d)^1)^*$, $v \in V_T^*$ は次を満たすとする:

$$\forall v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}\ \ [\ (A\langle\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, v_f) \notin \rho(d, V_N, V_T, R)\ ].$$

すなわち, v を $A\langle\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle$ に適用すると無限ループに陥るとする. このとき, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned}&\forall m \ge 1,\ \exists r = ((A^{(i)}\langle\mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(i)}))_{i=1}^m \in (E_d(V_N, V_T) \times V_T^*)^m\ \ s.t.\\ &r_i\ \mu\ r_{i+1}\ (1 \le i < m),\ \ A^{(1)} = A,\ \ \mathcal{A}^{(1)} = \mathcal{A},\ \ v^{(1)} = v.\end{aligned}$$

証明 $\rho := \rho(d, V_N, V_T, R)$ と置く. $m \ge 1$ に関する命題 $P(m)$ を以下のように定義する:

$P(m):\ \exists((A^{(i)}\langle\mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(i)}))_{i=1}^m \in (E_d(V_N, V_T) \times V_T^*)^m$ $s.t.$ 次が全て成り立つ :

- $(A^{(i)}\langle\mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(i)})\ \mu\ (A^{(i+1)}\langle\mathcal{A}^{(i+1)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(i+1)})$ $(1 \le i < m)$.
- $A^{(1)} = A,\ \mathcal{A}^{(1)} = \mathcal{A},\ v^{(1)} = v$.
- $v^{(i)}$を $A^{(i)}\langle\mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle$ に適用すると無限ループに陥る $(1 \le i \le m)$.

任意の $m \ge 1$ に対して $P(m)$ が真であることを, m に関する数学的帰納法で示す. $m = 1$ のときは, $A^{(1)} := A,\ \mathcal{A}^{(1)} := \mathcal{A},\ v^{(1)} := v$ と置けばよい. 次に, $m \ge 1$ を任意に取る. $P(m)$ は真とする. $P(m+1)$ も真であることを言いたい. まず, $P(m)$ の要件を満たす $((A^{(i)}\langle\mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(i)}))_{i=1}^m$ を 1 つ取る. $v^{(m)}$ を $A^{(m)}\langle\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle\rangle$ に適用すると無限ループに陥る. すなわち,

$$\forall v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}\ \ \Big[\ (A^{(m)}\langle\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(m)}, v_f) \notin \rho\ \Big]$$

が成り立つ. もし

$$\exists v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}\ \ \Big[\ ([R(A^{(m)})]_{x \to \langle\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle\rangle}, v^{(m)}, v_f) \in \rho\ \Big]$$

が成り立つならば, 同じ v_f に対して $(A^{(m)}\langle\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(m)}, v_f) \in \rho$ となって矛盾する. よって,

$$\forall v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\} \ \left[\ ([R(A^{(m)})]_{x\to\langle\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle\rangle}, v^{(m)}, v_f) \notin \rho \ \right] \tag{1}$$

が成り立つ. ここで, $R(A^{(m)})$ は次のいずれかの形である.

$\exists a \in V_T,\ \exists k \in [1,d],\ \exists B, C, D \in V_N,\ \exists \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D} \in (V_N^d)^1 \quad s.t.$

- $R(A^{(m)}) = a$.
- $R(A^{(m)}) = x_k$.
- $R(A^{(m)}) = \mathtt{t}_a$.
- $R(A^{(m)}) = \mathtt{f}_a$.
- $R(A^{(m)}) = (\ (\ B\langle\mathcal{B}\langle x\rangle\rangle\ C\langle\mathcal{C}\langle x\rangle\rangle\ )\ /\ (\ (\ B\langle\mathcal{B}\langle x\rangle\rangle\ ]\ D\langle\mathcal{D}\langle x\rangle\rangle\ )\ )$.

そこで, どの形であるかで場合分けする.

$R(A^{(m)}) = a$ のとき: (1) と合わせて

$$\forall v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\} \ \left[\ (a, v^{(m)}, v_f) \notin \rho \ \right]$$

となるが, 一方で $(a, v^{(m)}, \langle v^{(m)}\rangle_a) \in \rho$ だから矛盾する. よって, これは起こらない.

$R(A^{(m)}) = \mathtt{t}_a$ のとき: (1) と合わせて

$$\forall v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\} \ \left[\ (\mathtt{t}_a, v^{(m)}, v_f) \notin \rho \ \right]$$

となるが, 一方で $(\mathtt{t}_a, v^{(m)}, v^{(m)}) \in \rho$ が成り立つことが確かめられる. よって, これは起こらない.

$R(A^{(m)}) = \mathtt{f}_a$ のとき: (1) と合わせて

$$\forall v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\} \ \left[\ (\mathtt{f}_a, v^{(m)}, v_f) \notin \rho \ \right]$$

となるが, 一方で $(\mathtt{f}_a, v^{(m)}, \mathtt{f}) \in \rho$ が成り立つことが確かめられる. よって, これは起こらない.

$R(A^{(m)}) = x_k$ のとき: (1) と合わせて

$$\forall v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\} \ \left[\ ([x_k]_{x\to\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle}, v^{(m)}, v_f) \notin \rho \ \right]$$

となる. もし $\mathcal{A}^{(m)} = \varepsilon$ ならば,

$$[x_k]_{x\to\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle} = [x_k]_{x\to t_0} = [x_k]_{x\to(\mathtt{t}_a,\mathtt{t}_a,\cdots,\mathtt{t}_a)} = \mathtt{t}_a$$

により,

$$\forall v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\} \ \left[\ (\mathtt{t}_a, v^{(m)}, v_f) \notin \rho \ \right]$$

となる. しかし, $(\mathtt{t}_a, v^{(m)}, v^{(m)}) \in \rho$ が成り立つことが確かめられる. よって, これは起こらず, $\mathcal{A}^{(m)} \neq \varepsilon$ である. よって, $\mathcal{A}^{(m)} = ((A_1, \cdots, A_d))\mathcal{A}'$ という形に表せて,

$$\begin{aligned}[x_k]_{x\to\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle} = [x_k]_{x\to((A_1,\cdots,A_d))\mathcal{A}'\langle t_0\rangle} &= [x_k]_{x\to((A_1,\cdots,A_d))\langle\mathcal{A}'\langle t_0\rangle\rangle} \\ &= [x_k]_{x\to(A_1\langle\mathcal{A}'\langle t_0\rangle\rangle,\cdots,A_d\langle\mathcal{A}'\langle t_0\rangle\rangle)} \\ &= A_k\langle\mathcal{A}'\langle t_0\rangle\rangle\end{aligned}$$

となる. (1) と合わせて,

$$\forall v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\} \ \left[\ (A_k\langle \mathcal{A}'\langle t_0\rangle\rangle, v^{(m)}, v_f) \notin \rho \ \right]$$

となる. よって, $A^{(m+1)} := A_k$, $\mathcal{A}^{(m+1)} := \mathcal{A}'$, $v^{(m+1)} := v^{(m)}$ と置けば,

(2) $(A^{(m)}\langle \mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(m)}) \ \mu \ (A^{(m+1)}\langle \mathcal{A}^{(m+1)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(m+1)})$,

(3) $v^{(m+1)}$ を $A^{(m+1)}\langle \mathcal{A}^{(m+1)}\langle t_0\rangle\rangle$ に適用すると無限ループに陥る

が成り立つことが分かる. よって, $((A^{(i)}\langle \mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(i)}))_{i=1}^{m+1}$ は $P(m+1)$ の要件を満たすことになり, $P(m+1)$ が成り立つ.

$R(A^{(m)}) = (\ (\ B\langle \mathcal{B}\langle x\rangle\rangle \ C\langle \mathcal{C}\langle x\rangle\rangle\ )\ /\ (\ (\ B\langle \mathcal{B}\langle x\rangle\rangle\ ]\ D\langle \mathcal{D}\langle x\rangle\rangle\ )\ )$ のとき: (1) と合わせて

$$\forall v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\} \\ \left[\ ((\ (\ B\langle \mathcal{B}\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle\rangle \ C\langle \mathcal{C}\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle\rangle\ )\ /\ (\ (\ B\langle \mathcal{B}\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle\rangle\ ]\ D\langle \mathcal{D}\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle\rangle\ )\ )), v^{(m)}, v_f) \notin \rho \ \right] \tag{4}$$

が成り立つ. ここで, さらに場合分けする.

$v^{(m)}$ を $B\langle \mathcal{B}\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle\rangle$ に適用すると無限ループに陥るとき: $A^{(m+1)} := B$, $\mathcal{A}^{(m+1)} := \mathcal{B}\mathcal{A}^{(m)}$, $v^{(m+1)} := v^{(m)}$ と置けば, (2),(3) が成り立つことが分かり, $P(m+1)$ は真となる.

それ以外のとき: ある $v_1 \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}$ に対して $(B\langle \mathcal{B}\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(m)}, v_1) \in \rho$ である. v_1 の値で場合分けする.

$v_1 = \mathtt{f}$ のとき:

$$((\ B\langle \mathcal{B}\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle\rangle\ ], v^{(m)}, v^{(m)}) \in \rho$$

である. もし, ある $v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}$ に対して

$$(D\langle \mathcal{D}\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(m)}, v_f) \in \rho$$

とすると,

$$(B\langle \mathcal{B}\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(m)}, \mathtt{f}),\ ((\ B\langle \mathcal{B}\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle\rangle\ ], v^{(m)}, v^{(m)}),\ (D\langle \mathcal{D}\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(m)}, v_f) \in \rho$$

となるので,

$$((\ (\ B\langle \mathcal{B}\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle\rangle \ C\langle \mathcal{C}\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle\rangle\ )\ /\ (\ (\ B\langle \mathcal{B}\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle\rangle\ ]\ D\langle \mathcal{B}\mathcal{D}^{(m)}\langle t_0\rangle\rangle\ )\ )), v^{(m)}, v_f) \in \rho$$

が成り立つことが分かる. これは (4) に矛盾する. よって, そのような v_f は存在しない. そこで, $A^{(m+1)} := D$, $\mathcal{A}^{(m+1)} := \mathcal{D}\mathcal{A}^{(m)}$, $v^{(m+1)} := v^{(m)}$ と置けば, (2),(3) が成り立つことが分かり, $P(m+1)$ は真となる.

$v_1 \in V_T^*$ のとき: もし, ある $v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}$ に対して

$$(C\langle \mathcal{C}\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle\rangle, v_1, v_f) \in \rho$$

とすると,

$$(B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(m)}, v_1),\ (C\langle\mathcal{C}\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle\rangle, v_1, v_f) \in \rho$$

となるので,

$$((\ (\ B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle\rangle\ C\langle\mathcal{C}\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle\rangle\ )\ /\ (\ (\ B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle\rangle\ ]\ D\langle\mathcal{B}\mathcal{D}^{(m)}\langle t_0\rangle\rangle\ )\ )), v^{(m)}, v_f) \in \rho$$

が成り立つことが分かる．これは (4) に矛盾する．よって, そのような v_f は存在しない．そこで, $A^{(m+1)} := C$, $\mathcal{A}^{(m+1)} := \mathcal{C}\mathcal{A}^{(m)}$, $v^{(m+1)} := v_1 \in V_T^*$ と置けば, (2),(3) が成り立つことが分かり, $P(m+1)$ は真となる．

よって, いずれの場合も $P(m+1)$ は真となる．数学的帰納法から, 任意の $m \geq 1$ に対して $P(m)$ は真となる．

系 14.12 (無限ループの特徴づけ) $G = (V_N, V_T, R, e_S) \in \mathrm{foMgTS}_d$ を任意に取る．定義 14.6 の t_0 を取る．$A \in V_N$, $\mathcal{A} \in ((V_N^d)^1)^*$, $v \in V_T^*$ を任意に取る．このとき,

$$\forall v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}\ \ [\ (A\langle\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, v_f) \notin \rho(d, V_N, V_T, R)\ ].$$

が成り立つことと,

$$\begin{aligned}&\forall m \geq 1,\ \exists r = ((A^{(i)}\langle\mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(i)}))_{i=1}^m \in (E_d(V_N, V_T) \times V_T^*)^m\ \ s.t.\\ &r_i\ \mu\ r_{i+1}\ (1 \leq i < m),\ \ A^{(1)} = A,\ \ \mathcal{A}^{(1)} = \mathcal{A},\ \ v^{(1)} = v\end{aligned}$$

が成り立つことは同値である．

15 first order MACRO PEG のステップ数の上界

最適化をしない foMPEG のステップ数の上界を 1 つ求めることに成功したので, ここに書き留めておく. あくまでも上界に過ぎず, それが最良の値であるわけではない. 任意の foMPEG_d のステップ数を対象にしているため, 本格的に解析しなければ上界の存在性すら疑わしく, この節だけで結構な長さがある. ラムゼー型の定理を 1 つ自作し, それを使うことで上界を求めることができた.

補題 15.1 $(V_N, V_T, R) \in \mathrm{EG}_d$ を任意に取る. $\rho := \rho(d, V_N, V_T, R)$ と置く. $e_1, e_2 \in PE_d(V_N, V_T)^d$ と $v \in V_T^*$ は $(e_1, \rho) \sim_v (e_2, \rho)$ を満たすとする. このとき, 次が成り立つ:

$$(1)\ \ \forall A \in V_N\ \ [\ (A\langle e_1\rangle, \rho) \sim_v (A\langle e_2\rangle, \rho)\ ].$$
$$(2)\ \ \forall \mathcal{A} \in ((V_N^d)^1)^*\ \ [\ (\mathcal{A}\langle e_1\rangle, \rho) \sim_v (\mathcal{A}\langle e_2\rangle, \rho)\ ].$$

証明 $e_i = (e_{i1}, \cdots, e_{id})$ $(i = 1, 2)$ と表しておく.
(1)

$$(A[e_{11}]\cdots[e_{1d}], \rho) \sim_v (A[e_{21}]\cdots[e_{2d}], \rho)$$

を示せばよい. 定理 11.6 の (2) より, これは確かに成り立つ. よって, (1) が成り立つ.
(2) $|\mathcal{A}| \geq 0$ に関する数学的帰納法で (2) を示す. $|\mathcal{A}| = 0$ のときは, $\mathcal{A} = \varepsilon$ となるしかない. このときは, 明らかに (2) が成り立つ. $|\mathcal{A}| = 1$ のときは, $\mathcal{A} = ((A_1, \cdots, A_d))$, $A_i \in V_N$ という形に表せる. (1) より, $(A_i\langle e_1\rangle, \rho) \sim_v (A_i\langle e_2\rangle, \rho)$ $(1 \leq i \leq d)$ が成り立つ. よって,

$$((A_1\langle e_1\rangle, A_2\langle e_1\rangle, \cdots, A_d\langle e_1\rangle), \rho) \sim_v ((A_1\langle e_2\rangle, A_2\langle e_2\rangle, \cdots, A_d\langle e_2\rangle), \rho)$$

が成り立つ. すなわち, (2) が成り立つ. 次に, $n \geq 1$ を任意に取る. $|\mathcal{A}| \leq n$ のときは (2) が成り立つとする. $|\mathcal{A}| = n + 1$ のときを考える. $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}_1 \in (V_N^d)^1$, $\mathcal{A}' \in ((V_N^d)^1)^*$ と表せる. $|\mathcal{A}'| = n$ であるから, 帰納法の仮定により,

$$(\mathcal{A}'\langle e_1\rangle, \rho) \sim_v (\mathcal{A}'\langle e_2\rangle, \rho)$$

である. $\mathcal{A}'\langle e_i\rangle \in PE_d(V_N, V_T)^d$ であるから, $n = 1$ のときの結果から,

$$(\mathcal{A}_1\langle \mathcal{A}'\langle e_1\rangle\rangle, \rho) \sim_v (\mathcal{A}_1\langle \mathcal{A}'\langle e_2\rangle\rangle, \rho)$$

となる. すなわち,

$$(\mathcal{A}_1\mathcal{A}'\langle e_1\rangle, \rho) \sim_v (\mathcal{A}_1\mathcal{A}'\langle e_2\rangle, \rho)$$

となる. よって, (2) が成り立つ. よって, $|\mathcal{A}| = n + 1$ のときも (2) が成り立つ. 数学的帰納法から, (2) が成り立つ.

定理 15.2 $G = (V_N, V_T, R, e_S) \in \mathrm{foMgTS}_d$ を任意に取る. $\rho := \rho(d, V_N, V_T, R)$ と置く. 定義 14.6 の t_0 を取る. $A \in V_T$, $\mathcal{A} \in V_N^d$, $v \in V_T^*$ は次を満たすとする:

$$\begin{aligned}
&\exists m \geq 2,\ \exists r = ((A^{(i)}\langle \mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v))_{i=1}^m \in (E_d(V_N, V_T) \times V_T^*)^m\ \ s.t. \\
&r_i\ \mu\ r_{i+1}\ \ (1 \leq i \leq m-1), \\
&(\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle, \rho) \sim_v (\mathcal{A}^{(1)}\langle t_0\rangle, \rho),\ \ |\mathcal{A}^{(i)}| \geq |\mathcal{A}^{(1)}|\ (1 \leq i \leq m),\ \ A^{(m)} = A^{(1)}, \\
&A^{(1)} = A,\ \ \mathcal{A}^{(1)} = \mathcal{A}.
\end{aligned}$$

このとき, v を $A\langle\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle$ に適用すると無限ループに陥る. すなわち, 次が成り立つ:

$$\forall v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\} \ \ [\ (A\langle\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, v_f) \notin \rho(d, V_N, V_T, R)\ ].$$

証明 $m \geq 2$ に関する命題 $P(m)$ を以下のように定義する:

$$\begin{aligned}
P(m):\ & \exists((A^{(i)}\langle\mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v))_{i=1}^m \in (E_d(V_N, V_T) \times V_T^*)^m \ \ s.t. \\
& (A^{(i)}\langle\mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v)\ \mu\ (A^{(i+1)}\langle\mathcal{A}^{(i+1)}\langle t_0\rangle\rangle, v) \ \ (1 \leq i \leq m-1), \\
& (\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle, \rho) \sim_v (\mathcal{A}^{(1)}\langle t_0\rangle, \rho), \ \ |\mathcal{A}^{(i)}| \geq |\mathcal{A}^{(1)}|\ (1 \leq i \leq m), \ \ A^{(m)} = A^{(1)}, \\
& A^{(1)} = A, \ \ \mathcal{A}^{(1)} = \mathcal{A}.
\end{aligned}$$

さて, $m \geq 2$ を任意に取る. $P(m)$ は真とする. このとき, $P(2m-1)$ は真となることを示す. $P(m)$ を満たす $((A^{(i)}\langle\mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v))_{i=1}^m$ を 1 つ取る. このとき, ある $(\mathcal{A}'^{(i)})_{i=1}^m \in (((V_N^d)^1)^*)^m$ が存在して, $\mathcal{A}^{(i)} = \mathcal{A}'^{(i)}\mathcal{A}^{(1)}$ $(1 \leq i \leq m)$ が成り立つ $\cdots(i)$ ことを示す. $i = 1$ のときは, $\mathcal{A}'^{(1)} := \varepsilon$ と置けばよい. よって, $n = 1$ に対して次が成り立っている:

- $\mathcal{A}'^{(1)}, \cdots, \mathcal{A}'^{(n)} \in ((V_N^d)^1)^*$まで定義されている.
- $\mathcal{A}^{(i)} = \mathcal{A}'^{(i)}\mathcal{A}^{(1)}$ $(1 \leq i \leq n)$ が成り立つ.

以下では, 上記の 2 行をまとめて $Q(n)$ と書くことにする. よって, $Q(1)$ は真である. 次に, $n \in [1, m)$ を任意に取る. $Q(n)$ は真とする. このとき, $Q(n+1)$ も真となることを示す. まず,

$$(A^{(n)}\langle\mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle\rangle, v)\ \mu\ (A^{(n+1)}\langle\mathcal{A}^{(n+1)}\langle t_0\rangle\rangle, v)$$

であるから, ある j に対して

$$(A^{(n)}\langle\mathcal{A}^{(n)}\langle t_0\rangle\rangle, v)\ \mu_j\ (A^{(n+1)}\langle\mathcal{A}^{(n+1)}\langle t_0\rangle\rangle, v)$$

が成り立つ. 以下では, j の値で場合分けする.

$j = 1$ のとき: ある $k \in [1, d]$, $(A_i)_{i=1}^m \in V_N^d$ に対して $R(A^{(n)}) = x_k$, $A^{(n+1)} = A_k$, $\mathcal{A}^{(n)} = ((A_1, \cdots, A_d))\mathcal{A}^{(n+1)}$ となる. $\mathcal{A}^{(n)} = \mathcal{A}'^{(n)}\mathcal{A}^{(1)}$ であるから, もし $\mathcal{A}'^{(n)} = \varepsilon$ ならば,
$\mathcal{A}^{(1)} = \mathcal{A}^{(n)} = ((A_1, \cdots, A_d))\mathcal{A}^{(n+1)}$ となるので, $|\mathcal{A}^{(1)}| = |((A_1, \cdots, A_d))\mathcal{A}^{(n+1)}| = 1 + |\mathcal{A}^{(n+1)}|$ となる. よって $|\mathcal{A}^{(n+1)}| < |\mathcal{A}^{(1)}|$ となり, $P(m)$ に矛盾する. よって, $\mathcal{A}'^{(n)} \neq \varepsilon$ であり, $\mathcal{A}'^{(n)} = ((A'_1, \cdots, A'_d))\mathcal{A}'$ という形に表せることになる. 以上を再掲すると

$$\mathcal{A}^{(n)} = ((A_1, \cdots, A_d))\mathcal{A}^{(n+1)}, \ \ \mathcal{A}^{(n)} = \mathcal{A}'^{(n)}\mathcal{A}^{(1)}, \ \ \mathcal{A}'^{(n)} = ((A'_1, \cdots, A'_d))\mathcal{A}'$$

となるので,

$$((A_1, \cdots, A_d))\mathcal{A}^{(n+1)} = ((A'_1, \cdots, A'_d))\mathcal{A}'\mathcal{A}^{(1)}$$

となる. よって, $A_i = A'_i$ $(1 \leq i \leq d)$ かつ $\mathcal{A}^{(n+1)} = \mathcal{A}'\mathcal{A}^{(1)}$ となる. よって, $\mathcal{A}'^{(n+1)} := \mathcal{A}'$ と置けば, $Q(n+1)$ は真となる.

$j \neq 1$ のとき:

$$R(A^{(n)}) = (\ (\ B\langle\mathcal{B}\langle x\rangle\rangle\ C\langle\mathcal{C}\langle x\rangle\rangle\ )\ |\ (\ (\ B\langle\mathcal{B}\langle x\rangle\rangle\ ]\ D\langle\mathcal{D}\langle x\rangle\rangle\ )\ )$$

という形である. 以下では, $j=2,3,4$ で場合分けする.

$j=2$ のとき: $\mathcal{A}^{(n+1)}=\mathcal{B}\mathcal{A}^{(n)}$ である. よって, $\mathcal{A}'^{(n+1)}:=\mathcal{B}$ と置けば, $Q(n+1)$ は真となる.
$j=3$ のとき: $\mathcal{A}^{(n+1)}=\mathcal{D}\mathcal{A}^{(n)}$ である. よって, $\mathcal{A}'^{(n+1)}:=\mathcal{D}$ と置けば, $Q(n+1)$ は真となる.
$j=4$ のとき: $\mathcal{A}^{(n+1)}=\mathcal{C}\mathcal{A}^{(n)}$ である. よって, $\mathcal{A}'^{(n+1)}:=\mathcal{C}$ と置けば, $Q(n+1)$ は真となる.

以上より, いずれの場合も $Q(n+1)$ は真となるので, 数学的帰納法により, $Q(n)$ $(1\le n\le m)$ は真である. 特に, $Q(m)$ は真である. よって, (i) が成り立つ. 以下では, (i) を満たす $(\mathcal{A}'^{(i)})_{i=1}^{m}$ を 1 つ取っておく. $\mathcal{A}^{(1)}=\mathcal{A}'^{(1)}\mathcal{A}^{(1)}$ より, $\mathcal{A}'^{(1)}=\varepsilon$ が成り立つ. さて, $((A^{(i)}\langle\mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle,v))_{i=m+1}^{2m-1}$ を以下のように定義する:

$$A^{(i)}:=A^{(i-m+1)},\ \ \mathcal{A}^{(i)}:=\mathcal{A}'^{(i-m+1)}\mathcal{A}^{(m)}\ \ (m+1\le i\le 2m-1).$$

よって,

$$\begin{aligned}&A^{(i)}=A^{(i-m+1)}\ \ (m+1\le i\le 2m-1),\\&\mathcal{A}^{(i)}=\mathcal{A}'^{(i)}\mathcal{A}^{(1)}\ \ (1\le i\le m),\ \ \mathcal{A}'^{(i-m+1)}\mathcal{A}^{(m)}\ \ (m+1\le i\le 2m-1)\end{aligned}$$

となる. 簡単な考察により,

$$\begin{aligned}&A^{(i)}=A^{(i-m+1)}\ \ (m\le i\le 2m-1),\\&\mathcal{A}^{(i)}=\mathcal{A}'^{(i)}\mathcal{A}^{(1)}\ \ (1\le i\le m),\ \ \mathcal{A}'^{(i-m+1)}\mathcal{A}^{(m)}\ \ (m\le i\le 2m-1)\end{aligned}$$

が成り立つことが分かる. このとき, $((A^{(i)}\langle\mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle,v))_{i=1}^{2m-1}$ は $P(2m-1)$ の要求を満たすことを示す.

- $A^{(1)}=A,\ \ \mathcal{A}^{(1)}=\mathcal{A},\ \ A^{(2m-1)}=A^{(1)},$
- $|\mathcal{A}^{(i)}|\ge|\mathcal{A}^{(1)}|$ $(1\le i\le 2m-1),$
- $(\mathcal{A}^{(2m-1)}\langle t_0\rangle,\rho)\sim_v(\mathcal{A}^{(1)}\langle t_0\rangle,\rho),$
- $(A^{(i)}\langle\mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle,v)\ \mu\ (A^{(i+1)}\langle\mathcal{A}^{(i+1)}\langle t_0\rangle\rangle,v)\ \ (1\le i\le 2m-2)$

の 4 行を示せばよい.

1 行目: 最初の 2 項は明らか. 最後の 3 項目は $A^{(2m-1)}=A^{(m)}=A^{(1)}$ より.

2 行目: $1\le i\le m$ のときは, $P(m)$ から成立. $m+1\le i\le 2m-1$ のときは,

$$|\mathcal{A}^{(i)}|=|\mathcal{A}'^{(i-m+1)}\mathcal{A}^{(m)}|\ge|\mathcal{A}^{(m)}|\ge|\mathcal{A}^{(1)}|$$

から成立.

3 行目: $P(m)$ により, $(\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle,\rho)\sim_v(\mathcal{A}^{(1)}\langle t_0\rangle,\rho)$ である. よって, 補題 15.1 の (2) より

$$(\mathcal{A}'^{(m)}\langle\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle\rangle,\rho)\sim_v(\mathcal{A}'^{(m)}\langle\mathcal{A}^{(1)}\langle t_0\rangle\rangle,\rho)$$

である. すなわち,

$$(\mathcal{A}'^{(m)}\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle,\rho)\sim_v(\mathcal{A}'^{(m)}\mathcal{A}^{(1)}\langle t_0\rangle,\rho)$$

である. $\mathcal{A}^{(2m-1)} = \mathcal{A}'^{(m)}\mathcal{A}^{(m)}$, $\mathcal{A}^{(m)} = \mathcal{A}'^{(m)}\mathcal{A}^{(1)}$ により,

$$(\mathcal{A}^{(2m-1)}\langle t_0\rangle, \rho) \sim_v (\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle, \rho)$$

である. 以上を繋げて, 3 行目が成り立つ.

4 行目: まず, $P(m)$ により $(\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle, \rho) \sim_v (\mathcal{A}^{(1)}\langle t_0\rangle, \rho)$ であるから, 補題 15.1 の (2) より,

$$(\mathcal{A}'^{(i)}\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle, \rho) \sim_v (\mathcal{A}'^{(i)}\mathcal{A}^{(1)}\langle t_0\rangle, \rho) \quad (1 \le i \le m-1) \tag{ii}$$

である. さて, $1 \le i \le m-1$ を任意に取る. $P(m)$ により,

$$(A^{(i)}\langle \mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v) \ \mu \ (A^{(i+1)}\langle \mathcal{A}^{(i+1)}\langle t_0\rangle\rangle, v)$$

が成り立つ. よって, ある j に対して

$$(A^{(i)}\langle \mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v) \ \mu_j \ (A^{(i+1)}\langle \mathcal{A}^{(i+1)}\langle t_0\rangle\rangle, v) \tag{iii}$$

が成り立つ. このとき,

$$(A^{(i+m-1)}\langle \mathcal{A}^{(i+m-1)}\langle t_0\rangle\rangle, v) \ \mu \ (A^{(i+m)}\langle \mathcal{A}^{(i+m)}\langle t_0\rangle\rangle, v)$$

が成り立つことを示す. (iii) と同じ j に対して

$$(A^{(i+m-1)}\langle \mathcal{A}^{(i+m-1)}\langle t_0\rangle\rangle, v) \ \mu_j \ (A^{(i+m)}\langle \mathcal{A}^{(i+m)}\langle t_0\rangle\rangle, v)$$

が成り立つことを示せば十分である. 実際には

$$(A^{(i)}\langle \mathcal{A}'^{(i)}\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle\rangle, v) \ \mu_j \ (A^{(i+1)}\langle \mathcal{A}'^{(i+1)}\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle\rangle, v) \tag{iv}$$

を示せばよい. j の値で場合分けする.

$j = 1$ のとき: (iii) により, ある $k \in [1, d]$, $(A_i)_{i=1}^m \in V_N^d$ に対して $R(A^{(i)}) = x_k$, $A^{(i+1)} = A_k$, $\mathcal{A}^{(i)} = ((A_1, \cdots, A_d))\mathcal{A}^{(i+1)}$ となる. $\mathcal{A}^{(i)} = \mathcal{A}'^{(i)}\mathcal{A}^{(1)}$ であるから, もし $\mathcal{A}'^{(i)} = \varepsilon$ ならば, $\mathcal{A}^{(1)} = \mathcal{A}^{(i)} = ((A_1, \cdots, A_d))\mathcal{A}^{(i+1)}$ となるので, $|\mathcal{A}^{(1)}| = |((A_1, \cdots, A_d))\mathcal{A}^{(i+1)}| = 1 + |\mathcal{A}^{(i+1)}|$ となる. よって, $|\mathcal{A}^{(i+1)}| < |\mathcal{A}^{(1)}|$ となり, $P(m)$ に矛盾する. よって, $\mathcal{A}'^{(i)} \ne \varepsilon$ であり, $\mathcal{A}'^{(i)} = ((A'_1, \cdots, A'_d))\mathcal{A}'$ という形に表せることになる. 以上を再掲すると

$$\mathcal{A}^{(i)} = ((A_1, \cdots, A_d))\mathcal{A}^{(i+1)}, \quad \mathcal{A}^{(i)} = \mathcal{A}'^{(i)}\mathcal{A}^{(1)}, \quad \mathcal{A}'^{(i)} = ((A'_1, \cdots, A'_d))\mathcal{A}'$$

となるので,

$$((A_1, \cdots, A_d))\mathcal{A}^{(i+1)} = ((A'_1, \cdots, A'_d))\mathcal{A}'\mathcal{A}^{(1)}$$

となる. よって, $A_l = A'_l$ $(1 \le l \le d)$ かつ $\mathcal{A}^{(i+1)} = \mathcal{A}'\mathcal{A}^{(1)}$ となる. 一方で, $i + 1 \le m$ により, $\mathcal{A}^{(i+1)} = \mathcal{A}'^{(i+1)}\mathcal{A}^{(1)}$ である. よって, $\mathcal{A}' = \mathcal{A}'^{(i+1)}$ となるので,

$$\mathcal{A}'^{(i)} = ((A'_1, \cdots, A'_d))\mathcal{A}' = ((A_1, \cdots, A_d))\mathcal{A}'^{(i+1)}$$

となる. さて, (iv) を示したいのだったが,

$$R(A^{(i)}) = x_k, \quad A^{(i+1)} = A_k, \quad \mathcal{A}'^{(i)}\mathcal{A}^{(m)} = ((A_1, \cdots, A_d))\mathcal{A}'^{(i+1)}\mathcal{A}^{(m)}$$

により, 確かに (iv) が成り立つ.

$j \neq 1$ のとき: (iii) により,

$$R(A^{(i)}) = (\ (\ B\langle\mathcal{B}\langle x\rangle\rangle\ C\langle\mathcal{C}\langle x\rangle\rangle\ )\ /\ (\ (\ B\langle\mathcal{B}\langle x\rangle\rangle\ ]\ D\langle\mathcal{D}\langle x\rangle\rangle\ )\ )$$

という形である. 以下では, $j = 2, 3, 4$ で場合分けする.

$j = 2$ のとき: (iii) により, $A^{(i+1)} = B$, $\mathcal{A}^{(i+1)} = \mathcal{B}\mathcal{A}^{(i)}$ である. 特に $\mathcal{A}'^{(i+1)}\mathcal{A}^{(1)} = \mathcal{B}\mathcal{A}'^{(i)}\mathcal{A}^{(1)}$ となるので, $\mathcal{A}'^{(i+1)} = \mathcal{B}\mathcal{A}'^{(i)}$ となる. さて, (iv) を示したいのだったが,

$$\begin{aligned}
&R(A^{(i)}) = (\ (\ B\langle\mathcal{B}\langle x\rangle\rangle\ C\langle\mathcal{C}\langle x\rangle\rangle\ )\ /\ (\ (\ B\langle\mathcal{B}\langle x\rangle\rangle\ ]\ D\langle\mathcal{D}\langle x\rangle\rangle\ )\ ),\\
&A^{(i+1)} = B,\quad \mathcal{A}'^{(i+1)}\mathcal{A}^{(m)} = \mathcal{B}\mathcal{A}'^{(i)}\mathcal{A}^{(m)}
\end{aligned}$$

により, 確かに (iv) が成り立つ.
$j = 3$ のとき: (iii) により,

$$(B\langle\mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v, \mathtt{f}) \in \rho,\quad A^{(i+1)} = D,\quad \mathcal{A}^{(i+1)} = \mathcal{D}\mathcal{A}^{(i)}$$

である. 特に $\mathcal{A}'^{(i+1)}\mathcal{A}^{(1)} = \mathcal{D}\mathcal{A}'^{(i)}\mathcal{A}^{(1)}$ となるので, $\mathcal{A}'^{(i+1)} = \mathcal{D}\mathcal{A}'^{(i)}$ となる. さて, (iv) を示したいのだった. まず,

$$\begin{aligned}
&R(A^{(i)}) = (\ (\ B\langle\mathcal{B}\langle x\rangle\rangle\ C\langle\mathcal{C}\langle x\rangle\rangle\ )\ /\ (\ (\ B\langle\mathcal{B}\langle x\rangle\rangle\ ]\ D\langle\mathcal{D}\langle x\rangle\rangle\ )\ ),\\
&A^{(i+1)} = D,\quad \mathcal{A}'^{(i+1)}\mathcal{A}^{(m)} = \mathcal{D}\mathcal{A}'^{(i)}\mathcal{A}^{(m)}
\end{aligned}$$

である. あとは,

$$(B\langle\mathcal{A}'^{(i)}\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle\rangle, v, \mathtt{f}) \in \rho$$

を示せばよい. $(B\langle\mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v, \mathtt{f}) \in \rho$ だったから,

$$(B\langle\mathcal{A}'^{(i)}\mathcal{A}^{(1)}\langle t_0\rangle\rangle, v, \mathtt{f}) \in \rho$$

である. (ii) と補題 15.1 の (1) より,

$$(B\langle\mathcal{A}'^{(i)}\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle\rangle, \rho) \sim_v (B\langle\mathcal{A}'^{(i)}\mathcal{A}^{(1)}\langle t_0\rangle\rangle, \rho)$$

となるので,

$$(B\langle\mathcal{A}'^{(i)}\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle\rangle, v, \mathtt{f}) \in \rho$$

となる. これは示したかったことそのものである. よって, (iv) が成り立つ.

$j = 4$ のとき: (iii) により, ある $v_1 \in V_T^*$ に対して

$$(B\langle\mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v, v_1) \in \rho,\quad A^{(i+1)} = C,\quad \mathcal{A}^{(i+1)} = \mathcal{C}\mathcal{A}^{(i)},\quad v = v_1$$

である. よって

$$(B\langle\mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v, v) \in \rho,\quad A^{(i+1)} = C,\quad \mathcal{A}^{(i+1)} = \mathcal{C}\mathcal{A}^{(i)}$$

となる. 特に $\mathcal{A}'^{(i+1)}\mathcal{A}^{(1)} = \mathcal{C}\mathcal{A}'^{(i)}\mathcal{A}^{(1)}$ となるので, $\mathcal{A}'^{(i+1)} = \mathcal{C}\mathcal{A}'^{(i)}$ となる. さて, (iv) を示したいのだった. まず,

$$R(A^{(i)}) = (\ (\ B\langle\mathcal{B}\langle x\rangle\rangle\ C\langle\mathcal{C}\langle x\rangle\rangle\ )\ /\ (\ (\ B\langle\mathcal{B}\langle x\rangle\rangle\ ]\ D\langle\mathcal{D}\langle x\rangle\rangle\ )\ ),$$
$$A^{(i+1)} = C,\quad \mathcal{A}'^{(i+1)}\mathcal{A}^{(m)} = \mathcal{C}\mathcal{A}'^{(i)}\mathcal{A}^{(m)}$$

である. あとは,

$$(B\langle\mathcal{A}'^{(i)}\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle\rangle, v, v) \in \rho$$

を示せばよい. $(B\langle\mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v, v) \in \rho$ だったから,

$$(B\langle\mathcal{A}'^{(i)}\mathcal{A}^{(1)}\langle t_0\rangle\rangle, v, v) \in \rho$$

である. (ii) と補題 15.1 の (1) より,

$$(B\langle\mathcal{A}'^{(i)}\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle\rangle, \rho) \sim_v (B\langle\mathcal{A}'^{(i)}\mathcal{A}^{(1)}\langle t_0\rangle\rangle, \rho)$$

となるので,

$$(B\langle\mathcal{A}'^{(i)}\mathcal{A}^{(m)}\langle t_0\rangle\rangle, v, v) \in \rho$$

となる. これは示したかったことそのものである. よって, (iv) が成り立つ.

よって, いずれの場合も (iv) が成り立つ. $1 \le i \le m-1$ は任意だったから, まとめると, 次のようになる:

- $(A^{(i)}\langle\mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v)\ \mu\ (A^{(i+1)}\langle\mathcal{A}^{(i+1)}\langle t_0\rangle\rangle, v)\quad (1 \le i \le m-1)$,
- $(A^{(i+m-1)}\langle\mathcal{A}^{(i+m-1)}\langle t_0\rangle\rangle, v)\ \mu\ (A^{(i+m)}\langle\mathcal{A}^{(i+m)}\langle t_0\rangle\rangle, v)\quad (1 \le i \le m-1)$.

以上より, 4 行目が成り立つ.
よって, $P(2m-1)$ は真である. まとめると, 次のようになる:

$$\forall m \ge 2\ [\ P(m) \Rightarrow P(2m-1)\ ]. \tag{v}$$

さて, 定理の仮定により, ある $m \ge 2$ に対して $P(m)$ は真なのだった. そのような m を 1 つ固定する. このとき, (v) を再帰的に使うことで, 任意の $k \ge 0$ に対して $P(2^k(m-1)+1)$ は真となることが分かる. $m \ge 2$ より $(m-1) \ge 1$ だから,

$$\lim_{k\to+\infty}(2^k(m-1)+1) = +\infty \tag{vi}$$

である. さて, $M \ge 1$ を任意に取る. (vi) により, $2^k(m-1)+1 > M$ を満たす $k \ge 0$ が取れる. $P(2^k(m-1)+1)$ を満たす $((A^{(i)}\langle\mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v))_{i=1}^{2^k(m-1)+1}$ を 1 つ取る. $2^k(m-1)+1 > M$ だから, 部分列 $((A^{(i)}\langle\mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v))_{i=1}^{M}$ を考えることができる. これは次の性質を満たしている:

$$(A^{(i)}\langle\mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v)\ \mu\ (A^{(i+1)}\langle\mathcal{A}^{(i+1)}\langle t_0\rangle\rangle, v)\quad (1 \le i < M),$$
$$A^{(1)} = A,\quad \mathcal{A}^{(1)} = \mathcal{A}.$$

まとめると, $M \ge 1$ を取るごとに, このような $((A^{(i)}\langle\mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v))_{i=1}^{M}$ が存在するということである. よって, 系 14.10 により, v を $A\langle\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle$ に適用すると無限ループに陥る.

定理 15.3 $G = (V_N, V_T, R, e_S) \in \mathrm{foMgTS}_d$ を任意に取る．定義14.6の t_0 を取る．$\rho := \rho(d, V_N, V_T, R)$, $\varphi := \varphi_\rho$ と置く．$m \geq 1$ とする．$A \in V_N$, $\mathcal{A} \in ((V_N^d)^1)^*$, $v \in V_T^*$, $v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}$ は

$$(A\langle \mathcal{A}\langle t_0 \rangle\rangle, v, v_f) \in \rho,\ \varphi(A\langle \mathcal{A}\langle t_0 \rangle\rangle, v, v_f) \geq 5^m$$

を満たすとする．このとき, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned} &\exists r = ((A^{(i)}\langle \mathcal{A}^{(i)}\langle t_0 \rangle\rangle, v^{(i)}))_{i=1}^m \in (E_d(V_N, V_T) \times V_T^*)^m \quad s.t. \\ &r_i \ \mu \ r_{i+1} \ (1 \leq i < m), \quad A^{(1)} = A, \quad \mathcal{A}^{(1)} = \mathcal{A}, \quad v^{(1)} = v. \end{aligned}$$

証明 簡単のため, $R(m) := 5^m$ $(m \geq 1)$ と置く．

- $R(m) \geq 25 \quad (m \geq 2)$,
- $\dfrac{R(m+1) - 3}{2} > \dfrac{R(m+1) - 5}{3} > R(m) \quad (m \geq 1)$

が成り立つ．さて, $m, A, \mathcal{A}, v, v_f$ に関する命題 $P(m, A, \mathcal{A}, v, v_f)$, $Q(m, A, \mathcal{A}, v)$ を以下のように定義する:

$$P(m, A, \mathcal{A}, v, v_f) :\ (A\langle \mathcal{A}\langle t_0 \rangle\rangle, v, v_f) \in \rho,\ \varphi(A\langle \mathcal{A}\langle t_0 \rangle\rangle, v, v_f) \geq R(m),$$

$$\begin{aligned} Q(m, A, \mathcal{A}, v) :\ &\exists ((A^{(i)}\langle \mathcal{A}^{(i)}\langle t_0 \rangle\rangle, v^{(i)}))_{i=1}^m \in (E_d(V_N, V_T) \times V_T^*)^m \quad s.t. \\ &(A^{(i)}\langle \mathcal{A}^{(i)}\langle t_0 \rangle\rangle, v^{(i)}) \ \mu \ (A^{(i+1)}\langle \mathcal{A}^{(i+1)}\langle t_0 \rangle\rangle, v^{(i+1)}) \ (1 \leq i < m), \\ &A^{(1)} = A,\ \mathcal{A}^{(1)} = \mathcal{A},\ v^{(1)} = v. \end{aligned}$$

次に, $m \geq 1$ に関する命題 $H(m)$ を以下のように定義する:

$$\begin{aligned} H(m) :\ &\forall (A, \mathcal{A}, v, v_f) \in V_N \times ((V_N^d)^1)^* \times V_T^* \times (V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}) \\ &[\ P(m, A, \mathcal{A}, v, v_f) \Rightarrow Q(m, A, \mathcal{A}, v)\ ]. \end{aligned}$$

任意の $m \geq 1$ に対して $H(m)$ が真となることを, m に関する数学的帰納法で示す．$m = 1$ のときは, $A^{(1)} := A$, $\mathcal{A}^{(1)} := \mathcal{A}$, $v^{(1)} := v$ と置けばよい．次に, $m \geq 1$ を任意に取る．$H(m)$ は真とする．$H(m+1)$ も真であることを言いたい．$(A, \mathcal{A}, v, v_f)$ を任意に取る．$P(m+1, A, \mathcal{A}, v, v_f)$ は真とする．よって

$$(A\langle \mathcal{A}\langle t_0 \rangle\rangle, v, v_f) \in \rho,\ \varphi(A\langle \mathcal{A}\langle t_0 \rangle\rangle, v, v_f) \geq R(m+1) \tag{1}$$

が成り立つ．$Q(m+1, A, \mathcal{A}, v)$ が真であることを言えばよい．(1) より

$$([R(A)]_{x \to \mathcal{A}\langle t_0 \rangle}, v, v_f) \in \rho, \quad \varphi([R(A)]_{x \to \mathcal{A}\langle t_0 \rangle}, v, v_f) \geq R(m+1) - 1 \tag{2}$$

である．さて, $R(A)$ は次のいずれかの形である:

$\exists a \in V_T,\ \exists k \in [1, d],\ \exists B, C, D \in V_N,\ \exists \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D} \in (V_N^d)^1 \quad s.t.$

- $R(A) = a$.
- $R(A) = x_k$.
- $R(A) = \mathtt{t}_a$.
- $R(A) = \mathtt{f}_a$.
- $R(A) = (\ (\ B\langle \mathcal{B}\langle x \rangle\rangle\ C\langle \mathcal{C}\langle x \rangle\rangle\ )\ /\ (\ (\ B\langle \mathcal{B}\langle x \rangle\rangle\ ]\ D\langle \mathcal{D}\langle x \rangle\rangle\ )\ )$.

そこで, どの形であるかで場合分けする.

$R(A) = a$ のとき: (2) と合わせて

$$(a, v, v_f) \in \rho, \quad \varphi(a, v, v_f) \geq R(m+1) - 1$$

となるので, $v_f = \langle v \rangle_a$ であり, かつ $\varphi(a, v, v_f) = 1$ である. よって, $2 \geq R(m+1)$ となるが, $m \geq 1$ だから矛盾する. よって, これは起こらない.

$R(A) = \mathtt{t}_a$ のとき: (2) と合わせて

$$(\mathtt{t}_a, v, v_f) \in \rho, \quad \varphi(\mathtt{t}_a, v, v_f) \geq R(m+1) - 1$$

となる. もし $a \prec v$ ならば,

$$(a, v, v^{+1}) \in \rho, \quad ((a], v, \mathtt{f}) \in \rho, \quad (((a]], v, v) \in \rho, \quad (\mathtt{t}_a, v, v) = (((a]/((a]]), v, v) \in \rho$$

となるので, $v_f = v$ であり, かつ

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathtt{t}_a, v, v_f) = \varphi(((a]/((a]]), v, v) &= 1 + \varphi((a], v, \mathtt{f}) + \varphi(((a]], v, v) \\
&= 1 + 1 + \varphi(a, v, v^{+1}) + 1 + \varphi((a], v, \mathtt{f}) \\
&= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \varphi(a, v, v^{+1}) \\
&= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\
&= 6
\end{aligned}$$

となる. よって, $7 \geq R(m+1)$ となるが, $m \geq 1$ だから矛盾する. $\neg(a \prec v)$ のときは,

$$(a, v, \mathtt{f}) \in \rho, \quad ((a], v, v) \in \rho, \quad (\mathtt{t}_a, v, v) = (((a]/((a]]), v, v) \in \rho$$

となるので, $v_f = v$ であり, かつ

$$\varphi(\mathtt{t}_a, v, v_f) = \varphi(((a]/((a]]), v, v) = 1 + \varphi((a], v, v) = 1 + 1 + \varphi(a, v, \mathtt{f}) = 1 + 1 + 1 = 3$$

となる. よって, $4 \geq R(m+1)$ となるが, $m \geq 1$ だから矛盾する. よって, これは起こらない.

$R(A) = \mathtt{f}_a$ のとき: (2) と合わせて

$$(\mathtt{f}_a, v, v_f) \in \rho, \quad \varphi(\mathtt{f}_a, v, v_f) \geq R(m+1) - 1$$

となる. もし $a \prec v$ ならば,

$$(a, v, v^{+1}) \in \rho, \quad ((a], v, \mathtt{f}) \in \rho, \quad (\mathtt{f}_a, v, \mathtt{f}) = (((a]a), v, \mathtt{f}) \in \rho$$

となるので, $v_f = \mathtt{f}$ であり, かつ

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathtt{f}_a, v, v_f) = \varphi(((a]a), v, \mathtt{f}) = 1 + \varphi((a], v, \mathtt{f}) &= 1 + 1 + \varphi(a, v, v^{+1}) \\
&= 1 + 1 + 1 \\
&= 3
\end{aligned}$$

となる．よって, $4 \geq R(m+1)$ となるが, $m \geq 1$ だから矛盾する．$\neg(a \prec v)$ のときは,

$$(a, v, \mathtt{f}) \in \rho, \quad ((a], v, v) \in \rho, \quad (\mathtt{f}_a, v, \mathtt{f}) = (((a]a), v, \mathtt{f}) \in \rho$$

となるので, $v_f = \mathtt{f}$ であり, かつ

$$\begin{aligned}\varphi(\mathtt{f}_a, v, v_f) = \varphi(((a]a), v, \mathtt{f}) = 1 + \varphi((a], v, v) + \varphi(a, v, \mathtt{f}) &= 1 + 1 + \varphi(a, v, \mathtt{f}) + 1 \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 \\ &= 4\end{aligned}$$

となる．よって, $5 \geq R(m+1)$ となるが, $m \geq 1$ だから矛盾する．よって, これは起こらない．

$R(A) = x_k$ のとき: (2) と合わせて

$$([x_k]_{x \to \mathcal{A}\langle t_0 \rangle}, v, v_f) \in \rho, \quad \varphi([x_k]_{x \to \mathcal{A}\langle t_0 \rangle}, v, v_f) \geq R(m+1) - 1$$

となる．もし $\mathcal{A} = \varepsilon$ ならば,

$$[x_k]_{x \to \mathcal{A}\langle t_0 \rangle} = [x_k]_{x \to t_0} = [x_k]_{x \to (\mathtt{t}_a, \mathtt{t}_a, \cdots, \mathtt{t}_a)} = \mathtt{t}_a$$

となるので,

$$(\mathtt{t}_a, v, v_f) \in \rho, \quad \varphi(\mathtt{t}_a, v, v_f) \geq R(m+1) - 1$$

となる．さっきと同様にして, $v_f = v$ かつ

$$\varphi(\mathtt{t}_a, v, v_f) = 6 \text{ または } 3$$

となることが分かる．よって, $7 \geq R(m+1)$ となるが, $m \geq 1$ だから矛盾する．よって, これは起こらず, $\mathcal{A} \neq \varepsilon$ である．よって, $\mathcal{A} = ((A_1, \cdots, A_d))\mathcal{A}'$ という形に表せて, $[x_k]_{x \to \mathcal{A}\langle t_0 \rangle} = A_k \langle \mathcal{A}' \langle t_0 \rangle \rangle$ となる．よって,

$$(A_k \langle \mathcal{A}' \langle t_0 \rangle \rangle, v, v_f) \in \rho, \quad \varphi(A_k \langle \mathcal{A}' \langle t_0 \rangle \rangle, v, v_f) \geq R(m+1) - 1$$

となる．$R(m+1) - 1 > R(m)$ により, $P(m, A_k, \mathcal{A}', v, v_f)$ は真となる．よって, 帰納法の仮定から, $Q(m, A_k, \mathcal{A}', v)$ は真である．よって, 次を満たす $((A'^{(i)} \langle \mathcal{A}'^{(i)} \langle t_0 \rangle \rangle, v'^{(i)}))_{i=1}^{m}$ が取れる:

$$\begin{aligned}&(A'^{(i)} \langle \mathcal{A}'^{(i)} \langle t_0 \rangle \rangle, v'^{(i)}) \ \mu \ (A'^{(i+1)} \langle \mathcal{A}'^{(i+1)} \langle t_0 \rangle \rangle, v'^{(i+1)}) \ (1 \leq i < m), \\ &A'^{(1)} = A_k, \ \mathcal{A}'^{(1)} = \mathcal{A}', \ v'^{(1)} = v.\end{aligned}$$

そこで, $A^{(1)} := A, \ \mathcal{A}^{(1)} := \mathcal{A}, \ v^{(1)} := v$ と置き, さらに

$$A^{(i)} := A'^{(i-1)}, \quad \mathcal{A}^{(i)} := \mathcal{A}'^{(i-1)}, \quad v^{(i)} = v'^{(i-1)} \quad (2 \leq i \leq m+1)$$

と置く．

$$(A \langle \mathcal{A} \langle t_0 \rangle \rangle, v) \ \mu_1 \ (A_k \langle \mathcal{A}' \langle t_0 \rangle \rangle, v)$$

が成り立つことから, $((A^{(i)} \langle \mathcal{A}^{(i)} \langle t_0 \rangle \rangle, v^{(i)}))_{i=1}^{m+1}$ は $Q(m+1, A, \mathcal{A}, v)$ の要件を満たすことが分かる．よって, $Q(m+1, A, \mathcal{A}, v)$ は真である．

$R(A) = (\ (\ B\langle\mathcal{B}\langle x\rangle\rangle\ C\langle\mathcal{C}\langle x\rangle\rangle\ )\ /\ (\ (\ B\langle\mathcal{B}\langle x\rangle\rangle\ ]\ D\langle\mathcal{D}\langle x\rangle\rangle\ )\ )$ のとき: (2) と合わせて

$$
\begin{aligned}
&((\ (\ B\langle\mathcal{BA}\langle t_0\rangle\rangle\ C\langle\mathcal{CA}\langle t_0\rangle\rangle\ )\ /\ (\ (\ B\langle\mathcal{BA}\langle t_0\rangle\rangle\ ]\ D\langle\mathcal{DA}\langle t_0\rangle\rangle\ )\ ), v, v_f) \in \rho, \\
&\varphi((\ (\ B\langle\mathcal{BA}\langle t_0\rangle\rangle\ C\langle\mathcal{CA}\langle t_0\rangle\rangle\ )\ /\ (\ (\ B\langle\mathcal{BA}\langle t_0\rangle\rangle\ ]\ D\langle\mathcal{DA}\langle t_0\rangle\rangle\ )\ ), v, v_f) \\
&\geq R(m+1) - 1
\end{aligned}
$$

が成り立つ. 以下では, v_f の値で場合分けする.

$v_f = \mathtt{f}$ のとき:

$$(B\langle\mathcal{BA}\langle t_0\rangle\rangle, v, \mathtt{f}), ((\ B\langle\mathcal{BA}\langle t_0\rangle\rangle\ ], v, v), (D\langle\mathcal{DA}\langle t_0\rangle\rangle, v, \mathtt{f}) \in \rho \tag{3}$$

であるか, もしくは, ある $v_1 \in V_T^*$ が存在して

$$(B\langle\mathcal{BA}\langle t_0\rangle\rangle, v, v_1), (C\langle\mathcal{CA}\langle t_0\rangle\rangle, v, \mathtt{f}), ((\ B\langle\mathcal{BA}\langle t_0\rangle\rangle\ ], v, \mathtt{f}) \in \rho \tag{4}$$

であるかのいずれかである. (3) の場合は,

$$
\begin{aligned}
&\varphi((\ (\ B\langle\mathcal{BA}\langle t_0\rangle\rangle\ C\langle\mathcal{CA}\langle t_0\rangle\rangle\ )\ /\ (\ (\ B\langle\mathcal{BA}\langle t_0\rangle\rangle\ ]\ D\langle\mathcal{DA}\langle t_0\rangle\rangle\ )\ ), v, v_f) \\
&= 1 + \varphi((\ B\langle\mathcal{BA}\langle t_0\rangle\rangle\ C\langle\mathcal{CA}\langle t_0\rangle\rangle\ ), v, \mathtt{f}) + \varphi(((\ B\langle\mathcal{BA}\langle t_0\rangle\rangle\ ]\ D\langle\mathcal{DA}\langle t_0\rangle\rangle\ ), v, \mathtt{f}) \\
&= 1 + 1 + \varphi(B\langle\mathcal{BA}\langle t_0\rangle\rangle, v, \mathtt{f}) + 1 + \varphi((\ B\langle\mathcal{BA}\langle t_0\rangle\rangle\ ], v, v) + \varphi(D\langle\mathcal{DA}\langle t_0\rangle\rangle, v, \mathtt{f}) \\
&= 1 + 1 + \varphi(B\langle\mathcal{BA}\langle t_0\rangle\rangle, v, \mathtt{f}) + 1 + 1 + \varphi(B\langle\mathcal{BA}\langle t_0\rangle\rangle, v, \mathtt{f}) + \varphi(D\langle\mathcal{DA}\langle t_0\rangle\rangle, v, \mathtt{f}) \\
&= 4 + 2\varphi(B\langle\mathcal{BA}\langle t_0\rangle\rangle, v, \mathtt{f}) + \varphi(D\langle\mathcal{DA}\langle t_0\rangle\rangle, v, \mathtt{f})
\end{aligned}
$$

となるので,

$$2\varphi(B\langle\mathcal{BA}\langle t_0\rangle\rangle, v, \mathtt{f}) + \varphi(D\langle\mathcal{DA}\langle t_0\rangle\rangle, v, \mathtt{f}) \geq R(m+1) - 5$$

となる. もし $\varphi(B\langle\mathcal{BA}\langle t_0\rangle\rangle, v, \mathtt{f}) \geq \varphi(D\langle\mathcal{DA}\langle t_0\rangle\rangle, v, \mathtt{f})$ ならば,

$$\varphi(B\langle\mathcal{BA}\langle t_0\rangle\rangle, v, \mathtt{f}) \geq \frac{R(m+1) - 5}{3} \geq R(m)$$

となるので, $P(m, B, \mathcal{BA}, v, \mathtt{f})$ は真である. よって, 帰納法の仮定から, $Q(m, B, \mathcal{BA}, v)$ は真である. よって, 次を満たす $((A'^{(i)}\langle\mathcal{A}'^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v'^{(i)}))_{i=1}^{m}$ が取れる:

$$
\begin{aligned}
&(A'^{(i)}\langle\mathcal{A}'^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v'^{(i)})\ \mu\ (A'^{(i+1)}\langle\mathcal{A}'^{(i+1)}\langle t_0\rangle\rangle, v'^{(i+1)})\ (1 \leq i < m), \\
&A'^{(1)} = B,\ \mathcal{A}'^{(1)} = \mathcal{BA},\ v'^{(1)} = v.
\end{aligned}
$$

そこで, $A^{(1)} := A,\ \mathcal{A}^{(1)} := \mathcal{A},\ v^{(1)} := v$ と置き, さらに

$$A^{(i)} := A'^{(i-1)},\quad \mathcal{A}^{(i)} := \mathcal{A}'^{(i-1)},\quad v^{(i)} = v'^{(i-1)}\quad (2 \leq i \leq m+1)$$

と置く.

$$(A\langle\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v)\ \mu_2\ (B\langle\mathcal{BA}\langle t_0\rangle\rangle, v)$$

が成り立つことから, $((A^{(i)}\langle\mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(i)}))_{i=1}^{m+1}$ は $Q(m+1, A, \mathcal{A}, v)$ の要件を満たすことが分かる. よって, $Q(m+1, A, \mathcal{A}, v)$ は真である. 以下では, $\varphi(B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, \mathtt{f}) < \varphi(D\langle\mathcal{D}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, \mathtt{f})$ としてよい. このとき,

$$\varphi(D\langle\mathcal{D}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, \mathtt{f}) \geq \frac{R(m+1)-5}{3} \geq R(m)$$

となるので, $P(m, D, \mathcal{D}\mathcal{A}, v, \mathtt{f})$ は真である. よって, 帰納法の仮定から, $Q(m, D, \mathcal{D}\mathcal{A}, v)$ は真である. よって, 次を満たす $((A'^{(i)}\langle\mathcal{A}'^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v'^{(i)}))_{i=1}^{m}$ が取れる:

$$\begin{aligned}
&(A'^{(i)}\langle\mathcal{A}'^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v'^{(i)})\ \mu\ (A'^{(i+1)}\langle\mathcal{A}'^{(i+1)}\langle t_0\rangle\rangle, v'^{(i+1)})\ (1 \leq i < m),\\
&A'^{(1)} = D,\ \mathcal{A}'^{(1)} = \mathcal{D}\mathcal{A},\ v'^{(1)} = v.
\end{aligned}$$

そこで, $A^{(1)} := A,\ \mathcal{A}^{(1)} := \mathcal{A},\ v^{(1)} := v$ と置き, さらに

$$A^{(i)} := A'^{(i-1)},\ \ \mathcal{A}^{(i)} := \mathcal{A}'^{(i-1)},\ \ v^{(i)} = v'^{(i-1)}\ \ (2 \leq i \leq m+1)$$

と置く.

$$(A\langle\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v)\ \mu_3\ (D\langle\mathcal{D}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v)$$

が成り立つことから, $((A^{(i)}\langle\mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(i)}))_{i=1}^{m+1}$ は $Q(m+1, A, \mathcal{A}, v)$ の要件を満たすことが分かる. よって, $Q(m+1, A, \mathcal{A}, v)$ は真である. 次に, (4) の場合は,

$$\begin{aligned}
&\varphi((\ (\ B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle\ C\langle\mathcal{C}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle\ )\ /\ (\ (\ B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle\ ]\ D\langle\mathcal{D}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle\ )\ ), v, v_f)\\
&= 1 + \varphi((\ B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle\ C\langle\mathcal{C}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle\ ), v, \mathtt{f}) + \varphi(((\ B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle\ ]\ D\langle\mathcal{D}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle\ ), v, \mathtt{f})\\
&= 1 + 1 + \varphi(B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, v_1) + \varphi(C\langle\mathcal{C}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v_1, \mathtt{f}) + 1 + \varphi((\ B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle\ ], v, \mathtt{f})\\
&= 1 + 1 + \varphi(B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, v_1) + \varphi(C\langle\mathcal{C}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v_1, \mathtt{f}) + 1 + 1 + \varphi(B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, v_1)\\
&= 4 + 2\varphi(B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, v_1) + \varphi(C\langle\mathcal{C}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v_1, \mathtt{f})
\end{aligned}$$

となるので,

$$2\varphi(B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, v_1) + \varphi(C\langle\mathcal{C}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v_1, \mathtt{f}) \geq R(m+1) - 5$$

となる. もし $\varphi(B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, v_1) \geq \varphi(C\langle\mathcal{C}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v_1, \mathtt{f})$ ならば,

$$\varphi(B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, v_1) \geq \frac{R(m+1)-5}{3} \geq R(m)$$

となるので, $P(m, B, \mathcal{B}\mathcal{A}, v, v_1)$ は真である. よって, 帰納法の仮定から, $Q(m, B, \mathcal{B}\mathcal{A}, v)$ は真である. さっきと同じ構成により, $Q(m+1, A, \mathcal{A}, v)$ は真となることが確かめられる. 以下では, $\varphi(B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, v_1) < \varphi(C\langle\mathcal{C}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v_1, \mathtt{f})$ としてよい. このとき,

$$\varphi(C\langle\mathcal{C}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v_1, \mathtt{f}) \geq \frac{R(m+1)-5}{3} \geq R(m)$$

となるので, $P(m, C, \mathcal{C}\mathcal{A}, v_1, \mathtt{f})$ は真である. よって, 帰納法の仮定から, $Q(m, C, \mathcal{C}\mathcal{A}, v_1)$ は真である. よって, 次を満たす $((A'^{(i)}\langle\mathcal{A}'^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v'^{(i)}))_{i=1}^{m}$ が取れる:

$$\begin{aligned}
&(A'^{(i)}\langle\mathcal{A}'^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v'^{(i)})\ \mu\ (A'^{(i+1)}\langle\mathcal{A}'^{(i+1)}\langle t_0\rangle\rangle, v'^{(i+1)})\ (1 \leq i < m),\\
&A'^{(1)} = C,\ \mathcal{A}'^{(1)} = \mathcal{C}\mathcal{A},\ v'^{(1)} = v_1.
\end{aligned}$$

そこで, $A^{(1)} := A,\ \mathcal{A}^{(1)} := \mathcal{A},\ v^{(1)} := v$ と置き, さらに

$$A^{(i)} := A'^{(i-1)},\ \ \mathcal{A}^{(i)} := \mathcal{A}'^{(i-1)},\ \ v^{(i)} = v'^{(i-1)}\ \ (2 \le i \le m+1)$$

と置く.

$$(A\langle\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v)\ \mu_4\ (C\langle\mathcal{C}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v_1)$$

が成り立つことから, $((A^{(i)}\langle\mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(i)}))_{i=1}^{m+1}$ は $Q(m+1, A, \mathcal{A}, v)$ の要件を満たすことが分かる. よって, $Q(m+1, A, \mathcal{A}, v)$ は真となる. 以上より, $v_f = \mathtt{f}$ のときは, $Q(m+1, A, \mathcal{A}, v)$ は真となる.

$v_f \in V_T^*$ のとき:

$$(B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, \mathtt{f}), ((\ B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle\ ], v, v), (D\langle\mathcal{D}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, v_f) \in \rho \tag{5}$$

であるか, もしくは, ある $v_1 \in V_T^*$ が存在して

$$(B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, v_1), (C\langle\mathcal{C}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v_1, v_f) \in \rho \tag{6}$$

であるかのいずれかである. (5) の場合は,

$$\begin{aligned}
&\varphi((\ (\ B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle\ C\langle\mathcal{C}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle\ )\ /\ (\ (\ B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle\ ]\ D\langle\mathcal{D}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle\ )\ ), v, v_f)\\
&= 1 + \varphi((\ B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle\ C\langle\mathcal{C}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle\ ), v, \mathtt{f}) + \varphi(((\ B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle\ ]\ D\langle\mathcal{D}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle\ ), v, v_f)\\
&= 1 + 1 + \varphi(B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, \mathtt{f}) + 1 + \varphi((\ B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle\ ], v, v) + \varphi(D\langle\mathcal{D}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, v_f)\\
&= 1 + 1 + \varphi(B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, \mathtt{f}) + 1 + 1 + \varphi(B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, \mathtt{f}) + \varphi(D\langle\mathcal{D}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, v_f)\\
&= 4 + 2\varphi(B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, \mathtt{f}) + \varphi(D\langle\mathcal{D}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, v_f)
\end{aligned}$$

となるので,

$$2\varphi(B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, \mathtt{f}) + \varphi(D\langle\mathcal{D}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, v_f) \ge R(m+1) - 5$$

となる. もし $\varphi(B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, \mathtt{f}) \ge \varphi(D\langle\mathcal{D}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, v_f)$ ならば,

$$\varphi(B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, \mathtt{f}) \ge \frac{R(m+1)-5}{3} \ge R(m)$$

となるので, $P(m, B, \mathcal{B}\mathcal{A}, v, \mathtt{f})$ は真である. よって, 帰納法の仮定から, $Q(m, B, \mathcal{B}\mathcal{A}, v)$ は真である. さっきと同じ構成により, $Q(m+1, A, \mathcal{A}, v)$ は真となることが確かめられる. 以下では, $\varphi(B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, \mathtt{f}) < \varphi(D\langle\mathcal{D}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, v_f)$ としてよい. このとき,

$$\varphi(D\langle\mathcal{D}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, v_f) \ge \frac{R(m+1)-5}{3} \ge R(m)$$

となるので, $P(m, D, \mathcal{D}\mathcal{A}, v, v_f)$ は真である. よって, 帰納法の仮定から, $Q(m, D, \mathcal{D}\mathcal{A}, v)$ は真である. さっきと同じ構成により, $Q(m+1, A, \mathcal{A}, v)$ は真となることが確かめられる. よって, $Q(m+1, A, \mathcal{A}, v)$ は真である. 次に, (6) の場合は,

$$\begin{aligned}
&\varphi((\ (\ B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle\ C\langle\mathcal{C}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle\ )\ /\ (\ (\ B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle\ ]\ D\langle\mathcal{D}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle\ )\ ), v, v_f)\\
&= 1 + \varphi((\ B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle\ C\langle\mathcal{C}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle\ ), v, v_f)\\
&= 1 + 1 + \varphi(B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, v_1) + \varphi(C\langle\mathcal{C}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v_1, v_f)\\
&= 2 + \varphi(B\langle\mathcal{B}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, v_1) + \varphi(C\langle\mathcal{C}\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v_1, v_f)
\end{aligned}$$

となるので,

$$\varphi(B\langle\mathcal{BA}\langle t_0\rangle\rangle, v, v_1) + \varphi(C\langle\mathcal{CA}\langle t_0\rangle\rangle, v_1, v_f) \geq R(m+1) - 3$$

となる．もし $\varphi(B\langle\mathcal{BA}\langle t_0\rangle\rangle, v, v_1) \geq \varphi(C\langle\mathcal{CA}\langle t_0\rangle\rangle, v_1, v_f)$ ならば,

$$\varphi(B\langle\mathcal{BA}\langle t_0\rangle\rangle, v, v_1) \geq \frac{R(m+1)-3}{2} \geq R(m)$$

となるので, $P(m, B, \mathcal{BA}, v, v_1)$ は真である．よって, 帰納法の仮定から, $Q(m, B, \mathcal{BA}, v)$ は真である．さっきと同じ構成により, $Q(m+1, A, \mathcal{A}, v)$ は真となることが確かめられる．以下では, $\varphi(B\langle\mathcal{BA}\langle t_0\rangle\rangle, v, v_1) < \varphi(C\langle\mathcal{CA}\langle t_0\rangle\rangle, v_1, v_f)$ としてよい．このとき,

$$\varphi(C\langle\mathcal{CA}\langle t_0\rangle\rangle, v_1, v_f) \geq \frac{R(m+1)-3}{2} \geq R(m)$$

となるので, $P(m, C, \mathcal{CA}, v_1, v_f)$ は真である．よって, 帰納法の仮定から, $Q(m, C, \mathcal{CA}, v_1)$ は真である．さっきと同じ構成により, $Q(m+1, A, \mathcal{A}, v)$ は真となることが確かめられる．以上より, $v_f \in V_T^*$ のときは, $Q(m+1, A, \mathcal{A}, v)$ は真となる.

よって, いずれの場合も $Q(m+1, A, \mathcal{A}, v)$ は真となる．よって, $H(m+1)$ は真となる．数学的帰納法から, 任意の $m \geq 1$ に対して $H(m)$ は真となる.

定義 15.4 X は集合とする.

$$[X]_* := \cup_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} X^n, \quad [X]_+ := \cup_{n\in\mathbb{N}} X^n$$

と定義する．任意の $x \in [X]_*$ に対して, $x \in X^n$ を満たす $n \geq 0$ がただ 1 つ存在する．n は集合 x の元の個数 $|x|$ に一致する．次に, $x \in [X]_*$ と $k \geq 0$ に対して, $x^{+k} \in [X]_*$ を以下のように定義する:

$$x^{+k} := \emptyset \quad (|x| \leq k \text{ のとき}),$$
$$x^{+k} := (x_{i+k})_{i=1}^{|x|-k} \quad (|x| > k \text{ のとき}).$$

定義 15.5 $d \geq 1$ とする．$a \in [\mathbb{R}]_+$ とする．$(i_j)_{j=1}^d \in [1, |a|]^d$ は狭義単調増加とする.

$$\forall j \in [1, d],\ \forall k \in [i_j, i_d]\ \left[\ a_{i_j} \leq a_k\ \right]$$

が成り立つとする．このときの $(a_{i_j})_{j=1}^d \in \mathbb{R}^d$ を, a 内の正規 d 列と呼ぶことにする.

例 $d = 1$ のときは, 任意の $a \in [\mathbb{R}]_+$ に対して, a 内には正規 d 列が存在する．具体的には, 任意の $i \in [1, |a|]$ に対して, $(a_i) \in \mathbb{R}^1$ が a 内の正規 d 列となる.

補題 15.6 $d \geq 1$ とする．$a \in [\mathbb{R}]_+$ とする．ある $1 \leq k \leq l \leq |a|$ が存在して, $(a_{i+k-1})_{i=1}^{l-k+1}$ 内に正規 d 列が存在するとする．このとき, a 内にも正規 d 列が存在する.

証明 $b_i := a_{i+k-1}$ $(1 \leq i \leq l-k+1)$ と置く．仮定から, $(b_i)_{i=1}^{l-k+1}$ 内には正規 d 列が存在する．それを 1 つ取って $(b_{i_j})_{j=1}^d$ と置く．$(i_j)_{j=1}^d \in [1, |b|]^d = [1, l-k+1]^d$ は狭義単調増加である．また, 次が成り立つ:

$$\forall j \in [1, d],\ \forall k' \in [i_j, i_d]\ \left[\ b_{i_j} \leq b_{k'}\ \right].$$

すなわち, 次が成り立つ:

$$\forall j \in [1,d],\ \forall k' \in [i_j, i_d]\ \left[\ a_{i_j+k-1} \leq a_{k'+k-1}\ \right].$$

よって,

$$i'_j := i_j + k - 1 \in [k,l] \subset [1,|a|]\ \ (1 \leq j \leq d)$$

と置けば, 次が成り立つ:

$$\forall j \in [1,d],\ \forall k' \in [i'_j - k + 1, i'_d - k + 1]\ \left[\ a_{i'_j} \leq a_{k'+k-1}\ \right].$$

よって, 次が成り立つ:

$$\forall j \in [1,d],\ \forall k' \in [i'_j, i'_d]\ \left[\ a_{i'_j} \leq a_{k'}\ \right].$$

$(i'_j)_{j=1}^d \in [1,|a|]^d$ は狭義単調増加であるから, $(a_{i'_j})_{j=1}^d$ は a 内の正規 d 列である.

補題 15.7 $d,t \geq 1$ とする. $a \in [\mathbb{R}]_+$ とする. a^{+t} 内に正規 d 列が存在し, かつ $a_1 \leq a_i$ $(1 \leq i \leq |a|)$ が成り立つならば, a 内には正規 $(d+1)$ 列が存在する.

証明 仮定から, $a^{+t} \neq \emptyset$ である. $a^{+t} = (a_i^{+t})_{i=1}^{|a|-t}$ 内の正規 d 列を 1 つ取って $(a_{i_j}^{+t})_{j=1}^d$ と置く. $(i_j)_{j=1}^d \in [1,|a^{+t}|]^d = [1,|a|-t]^d$ は狭義単調増加である. また, 次が成り立つ:

$$\forall j \in [1,d],\ \forall k \in [i_j, i_d]\ \left[\ a_{i_j}^{+t} \leq a_k^{+t}\ \right].$$

すなわち, 次が成り立つ:

$$\forall j \in [1,d],\ \forall k \in [i_j, i_d]\ \left[\ a_{i_j+t} \leq a_{k+t}\ \right].$$

よって,

$$i'_j := i_j + t \in [t+1,|a|] \subset [2,|a|]\ \ (1 \leq j \leq d)$$

と置けば, 次が成り立つ:

$$\forall j \in [1,d],\ \forall k \in [i'_j - t, i'_d - t]\ \left[\ a_{i'_j} \leq a_{k+t}\ \right].$$

よって, 次が成り立つ:

$$\forall j \in [1,d],\ \forall k \in [i'_j, i'_d]\ \left[\ a_{i'_j} \leq a_k\ \right].$$

また, 定理の仮定から, 次が成り立つ:

$$\forall k \in [1, i'_d]\ \left[\ a_1 \leq a_k\ \right].$$

よって,

$$i''_1 := 1,\ \ i''_j := i'_{j-1}\ \ (2 \leq j \leq d+1)$$

と置けば,

$$\forall j \in [1,d+1],\ \forall k \in [i''_j, i''_{d+1}]\ \left[\ a_{i''_j} \leq a_k\ \right]$$

が成り立つ. $(i''_j)_{j=1}^{d+1}$ は狭義単調増加であるから, $(a_{i''_j})_{j=1}^{d+1}$ は a 内の正規 $(d+1)$ 列である.

補題 15.8 $d \geq 1$ とする. $a \in [\mathbb{R}]_+$ は, a 内に正規 d 列が存在するとする. このとき, 任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して, $(a+c)$ 内にも正規 d 列が存在する. ただし, $a+c := (a_i+c)_{i=1}^{|a|}$ と規約する.

証明 a 内の正規 d 列を 1 つ取って $(a_{i_j})_{j=1}^{d}$ と置く. このとき, $(a_{i_j}+c)_{j=1}^{d}$ は $(a+c)$ 内の正規 d 列である.

定理 15.9 (正規 d 列に関するラムゼー型の定理) $s, n \in \mathbb{N}$ とする.

$$M_n(s) := \{a \in [\mathbb{N}]_+ \mid |a| \geq n,\ a_1 \in [1,s],\ a_{i+1}-a_i \in [-1,1]\ (1 \leq i < |a|)\}$$

と置く. このとき, 次が成り立つ.

$$\forall s \geq 1,\ \forall d \geq 1,\ \forall a \in M_{2^{d-1}s}(s)\ \ [\ a \text{ 内には正規 } d \text{ 列が存在する }\ ].$$

証明 $R(s,d) := 2^{d-1}s\ (s \geq 1,\ d \geq 1)$ と置く. $s \geq 1$ に関する命題 $P(s)$ を

$$P(s):\ \forall d \geq 1,\ \forall a \in M_{R(s,d)}(s)\ \ [\ a \text{ 内には正規 } d \text{ 列が存在する }\ ]$$

と置く. 任意の $s \geq 1$ に対して $P(s)$ が真であることを, s に関する数学的帰納法で示せばよい.
$s=1$ のとき:

$$\forall d \geq 1,\ \forall a \in M_{R(1,d)}(1)\ \ [\ a \text{ 内には正規 } d \text{ 列が存在する }\ ] \tag{1}$$

を示せばよい. これを, $d \geq 1$ に関する数学的帰納法で示す. $d=1$ のときは明らかである. 次に, $d' \geq 1$ を任意に取る. $d=d'$ のときは (1) が成り立つとする. $d=d'+1 \geq 2$ のときを考える. $a \in M_{R(1,d)}(1)$ を任意に取る. $|a| \geq R(1,d) = 2^{d-1} \geq 2$ だから, a_2 が存在する. 以下では, 場合分けする.
$a_2 \leq a_i\ (2 \leq i \leq |a|)$ のとき: $b := a^{+1} + (1-a_2)$ と置くと,

$$b_i = a_{i+1} + 1 - a_2 \geq a_2 + 1 - a_2 = 1 \quad (1 \leq i \leq |a|-1)$$

であるから, $b \in [\mathbb{N}]_+$ である. また, $b \in M_{|a|-1}(1)$ が成り立つことが分かる. $d \geq 2$ により,

$$|b| = |a| - 1 \geq R(1,d) - 1 = 2^{d-1} - 1 \geq 2^{d-2} = R(1,d-1)$$

となるので, $b \in M_{R(1,d-1)}(1)$ である. 帰納法の仮定から, b 内には正規 $(d-1)$ 列が存在する. 補題 15.8 より, $b+(a_2-1)$ 内には正規 $(d-1)$ 列が存在する. すなわち, a^{+1} 内には正規 $(d-1)$ 列が存在する. $a_1 = 1 \leq a_i\ (1 \leq i \leq |a|)$ であるから, 補題 15.7 により, a 内には正規 d 列が存在する.
それ以外のとき: ある $k \in [2,|a|]$ に対して $a_2 > a_k$ である. よって, $k \geq 3$ かつ $a_2 \geq 2$ である. $a_2 - a_1 \in [-1,1]$ と $a_1 = 1$ から, $a_2 = 2$ となるしかない. このとき, $2 = a_2 > a_k$ だから, $a_k = 1$ である. よって, 次のような状況になっている.

- $a_2 = 2$,
- $\exists t \in [3,|a|]\ \ [\ a_t = 1\ ]$.

そこで, $a_t = 1$ を満たすような $t \in [3,|a|]$ のうち最小のものを取って再び t と置く. このとき, 次が成り立つ:

- $a_2 = 2,\quad a_t = 1,\quad t \in [3,|a|]$.
- $\forall i \in [3,t-1]\ \ [\ a_i \geq 2\ ]$.

よって, 次が成り立つ:

- $a_2 = 2, \quad a_t = 1, \quad t \in [3, |a|]$.
- $\forall i \in [2, t-1] \ [\ a_i \geq 2\ ]$.

よって, 次が成り立つ:

- $a_2 = 2, \quad a_t = 1, \quad t \in [3, |a|]$.
- $\forall i \in [1, t-2] \ \left[\ a_i^{+1} - 1 \geq 1\ \right]$.

そこで,

$$b := (a_i^{+1})_{i=1}^{t-2} - 1 \neq \emptyset$$

と置く. このとき, $b \in M_{t-2}(1)$ が成り立つ. よって, もし $t-2 \geq R(1, d-1)$ ならば, $b \in M_{R(1,d-1)}(1)$ となるので, 帰納法の仮定により, b 内には正規 $(d-1)$ 列が存在する. 補題 15.8 により, $(a_i^{+1})_{i=1}^{t-2}$ 内には正規 $(d-1)$ 列が存在する. 補題 15.6 により, a^{+1} 内には正規 $(d-1)$ 列が存在する. $a_1 = 1 \leq a_i$ $(1 \leq i \leq |a|)$ であるから, 補題 15.7 により, a 内には正規 d 列が存在する. 以下では, $t-2 < R(1, d-1)$ としてよい. よって, $t-1 \leq R(1, d-1)$ である. よって,

$$|a| - (t-1) \geq |a| - R(1, d-1) \geq R(1, d) - R(1, d-1) = 2^{d-2} = R(1, d-1) \geq 1$$

となる. 特に, $a^{+(t-1)} \neq \emptyset$ である. $a_t = 1$ により, $a^{+(t-1)} \in M_{|a|-(t-1)}(1) \subset M_{R(1,d-1)}(1)$ である. よって, 帰納法の仮定から, $a^{+(t-1)}$ 内には正規 $(d-1)$ 列が存在する. $a_1 = 1 \leq a_i$ $(1 \leq i \leq |a|)$ と $t-1 \geq 1$ により, 補題 15.7 が使えて, a には正規 d 列が存在する.
よって, いずれの場合も, a には正規 d 列が存在する. 数学的帰納法により, (1) が成り立つ. よって, $s = 1$ のときは $P(s)$ が成り立つ.
次に, $s' \geq 1$ を任意に取る. $s = s'$ のときは $P(s)$ が成り立つとする. $s = s' + 1 \geq 2$ のときを考える. $d \geq 1$ を任意に取る. $a \in M_{R(s,d)}(s)$ を任意に取る.
$a_1 \leq a_i$ $(1 \leq i \leq |a|)$ のとき: $b := a + (1 - a_1)$ と置くと, $b \in M_{|a|}(1)$ である. また, $|b| = |a| \geq R(s, d) \geq R(1, d)$ である. よって, $b \in M_{R(1,d)}(1)$ である. $s = 1$ のときの結果から, b 内には正規 d 列が存在する. 補題 15.8 により, a 内には正規 d 列が存在する.
それ以外のとき: $a_1 > a_t$ を満たす $t \geq 1$ が存在する. そのような $t \geq 1$ のうち最小のものを再び t と置く. よって, $t \geq 2$ であり, 次が成り立つ:

- $a_1 > a_t, \quad t \in [2, |a|]$.
- $\forall i \in [1, t-1] \ [\ a_1 \leq a_i\ ]$.

$b := (a_i)_{i=1}^{t-1} + (1 - a_1) \neq \emptyset$ と置くと, $b \in M_{t-1}(1)$ である. もし $t-1 \geq R(1, d)$ ならば, $b \in M_{R(1,d)}(1)$ となるので, $s = 1$ のときの結果から, b 内には正規 d 列が存在する. 補題 15.8 より, $(a_i)_{i=1}^{t-1}$ 内には正規 d 列が存在する. 補題 15.6 より, a 内には正規 d 列が存在する. 以下では, $t-1 < R(1, d)$ としてよい.

$$|a| - (t-1) > |a| - R(1, d) \geq R(s, d) - R(1, d) = R(s-1, d) \geq 1$$

であるから, $a^{+(t-1)} \neq \emptyset$ である. $a_t < a_1 \leq s$ により, $a^{+(t-1)} \in M_{|a|-t+1}(s-1) \subset M_{R(s-1),d}(s-1)$ となる. s に関する帰納法の仮定により, $a^{+(t-1)}$ 内には正規 d 列が存在する. すなわち,

$(a_{i+t-1})_{i=1}^{|a|-t+1}$ 内には正規 d 列が存在する. 補題 15.6 により, a 内には正規 d 列が存在する.
よって, いずれの場合も, a 内には正規 d 列が存在する. 数学的帰納法から, 任意の s に対して $P(s)$ が成り立つ.

補題 15.10 $(V_N, V_T, R) \in \mathrm{EG}_d$ を任意に取る. $\rho := \rho(d, V_N, V_T, R)$ と置く. $v \in V_T^*$ を任意に取る. このとき, 次が成り立つ:

$$\forall (e^{(i)})_{i=1}^{(|v|+3)!^d/2^d+1} \in (PE_d(V_N, V_T)^d)^{(|v|+3)!^d/2^d+1},\ \exists i, j \in [1, (|v|+3)!^d/2^d+1] \left[\ i \neq j,\ (e^{(i)}, \rho) \sim_v (e^{(j)}, \rho)\ \right].$$

証明 $f : PE_d(V_N, V_T) \times V_T^* \to \mathbb{N}$ を以下のように定義する: $(e, v) \in PE_d(V_N, V_T) \times V_T^*$ を任意に取る. このとき, 次の 3 つのうちちょうど 1 つだけが成り立つ:

(1) $\exists! v_f \in V_T^*\ [\ (e, v, v_f) \in \rho\ ]$.

(2) $(e, v, \mathtt{f}) \in \rho$.

(3) $\forall v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}\ \ [\ (e, v, v_f) \notin \rho\ ]$.

そこで, (1) のときは, $f(e, v) := |v_f| + 1$ と定義する. この v_f は v のサフィックスであるから, $0 \leq |v_f| \leq |v|$ となる. また, (2) のときは $f(e, v) := |v| + 2$ と定義する. また, (3) のときは $f(e, v) := |v| + 3$ と定義する. この定義により, 次が成り立つことが確かめられる:

- $\forall (e, v) \in PE_d(V_N, V_T) \times V_T^*\ \ [\ f(e, v) \in [1, |v| + 3]\ ]$.
- $\forall (e, v) \in PE_d(V_N, V_T) \times V_T^*$
  $[\ f(e, v) \leq |v| + 1 \Rightarrow \exists! v_f \in V_T^*\ \ [\ (e, v, v_f) \in \rho,\ f(e, v) = |v_f| + 1\ ]\ ]$.
- $\forall (e, v) \in PE_d(V_N, V_T) \times V_T^*\ \ [\ f(e, v) = |v| + 2 \Rightarrow (e, v, \mathtt{f}) \in \rho\ ]$.
- $\forall (e, v) \in PE_d(V_N, V_T) \times V_T^*\ \ [\ f(e, v) = |v| + 3 \Rightarrow \forall v_f \in V_T^*\ \ [\ (e, v, v_f) \notin \rho\ ]\ ]$. (4)

次に, $g : PE_d(V_N, V_T)^d \times V_T^* \to [\mathbb{N}^d]_+$ を以下のように定義する: $e = (e_1, \cdots, e_d) \in PE_d(V_N, V_T)^d$ と $v \in V_T^*$ に対して,

$$g(e, v) := ((f(e_i, v^{+(j-1)}))_{i=1}^d)_{j=1}^{|v|+1}$$

と定義する[13]. このとき, 次が成り立つことを示す:

$$\forall v \in V_T^*,\ \forall e^{(1)}, e^{(2)} \in PE_d(V_N, V_T)^d\ \left[\ g(e^{(1)}, v) = g(e^{(2)}, v) \Rightarrow (e^{(1)}, \rho) \sim_v (e^{(2)}, \rho)\ \right]. \quad (5)$$

$v, e^{(1)}, e^{(2)}$ は $g(e^{(1)}, v) = g(e^{(2)}, v)$ を満たすとする. このとき, 次が成り立つことが分かる:

$$\forall i \in [1, d],\ \forall j \in [1, |v| + 1]\ \left[\ f(e_i^{(1)}, v^{+(j-1)}) = f(e_i^{(2)}, v^{+(j-1)})\ \right].$$

特に, 次が成り立つ:

$$\forall i \in [1, d],\ \forall w \in Su(v)\ \left[\ f(e_i^{(1)}, w) = f(e_i^{(2)}, w)\ \right]. \quad (6)$$

[13] $x \in [\mathbb{N}^d]_+$ のとき, $x \in (\mathbb{N}^d)^m$ を満たす $m \geq 1$ が取れる. よって $x = (x_j)_{j=1}^m$, $x_j \in \mathbb{N}^d$ と表せる. よって, $x_j = (x_{ji})_{i=1}^d$, $x_{ji} \in \mathbb{N}$ と表せる. よって $x = ((x_{ji})_{i=1}^d)_{j=1}^m$ と表せる.

さて, $(e^{(1)}, \rho) \sim_v (e^{(2)}, \rho)$ を示したいのだった.

$$\forall i \in [1, d],\ \forall w \in Su(v),\ \forall w_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}\ \left[\ (e_i^{(1)}, w, w_f) \in \rho \Leftrightarrow (e_i^{(2)}, w, w_f) \in \rho\ \right]$$

を示せばよい. 対称性により,

$$\forall i \in [1, d],\ \forall w \in Su(v),\ \forall w_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\}\ \left[\ (e_i^{(1)}, w, w_f) \in \rho \Rightarrow (e_i^{(2)}, w, w_f) \in \rho\ \right]$$

を示せば十分である. i と w と w_f を任意に取る. $(e_i^{(1)}, w, w_f) \in \rho$ とする. $(e_i^{(2)}, w, w_f) \in \rho$ を示したい. もし $w_f = \mathtt{f}$ ならば, $f(e_i^{(1)}, w) = |w| + 2$ である. (6) より, $|w| + 2 = f(e_i^{(2)}, w)$ となる. (4) により, $(e_i^{(2)}, w, \mathtt{f}) \in \rho$ となる. $w_f = \mathtt{f}$ だったから, 確かに $(e_i^{(2)}, w, w_f) \in \rho$ である. 以下では, $w_f \in V_T^*$ としてよい. このとき, $f(e_i^{(1)}, w) = |w_f| + 1$ である. (6) より, $|w_f| + 1 = f(e_i^{(2)}, w)$ となる. w_f は w のサフィックスであるから, $|w_f| + 1 \leq |w| + 1$ である. よって, $f(e_i^{(2)}, w) \leq |w| + 1$ となるので, (4) により, ある $w_f' \in V_T^*$ が存在して, $(e_i^{(2)}, w, w_f') \in \rho,\ f(e_i^{(2)}, w) = |w_f'| + 1$ が成り立つ. 特に $|w_f| + 1 = f(e_i^{(2)}, w) = |w_f'| + 1$ となるので, $|w_f| = |w_f'|$ である. w_f, w_f' は w のサフィックスであるから, $w_f = w_f'$ となる. よって, $(e_i^{(2)}, w, w_f) \in \rho$ となる. よって, (5) が成り立つ.
さて, $v \in V_T^*$ を任意に取る. このとき, $e \in PE_d(V_N, V_T)^d$ に対して

$$g(e, v) = ((f(e_i, v^{+(j-1)}))_{i=1}^d)_{j=1}^{|v|+1} \in \prod_{j=1}^{|v|+1} [1, |v^{+(j-1)}| + 3]^d = \prod_{j=1}^{|v|+1} [1, |v| - j + 4]^d$$

が成り立つ. よって, v を固定して e を動かしたときの $g(e, v)$ は, 高々

$$\prod_{j=1}^{|v|+1} (|v| - j + 4)^d = (|v| + 3)!^d / 2^d$$

通りしか存在しない. よって,

$$(e^{(i)})_{i=1}^{(|v|+3)!^d/2^d+1} \in (PE_d(V_N, V_T)^d)^{(|v|+3)!^d/2^d+1}$$

を任意に取れば, 鳩ノ巣原理により, ある $1 \leq i < j \leq (|v| + 3)!^d / 2^d + 1$ が存在して, $g(e^{(i)}, v) = g(e^{(j)}, v)$ が成り立つ. よって, (5) により, $(e^{(i)}, \rho) \sim_v (e^{(j)}, \rho)$ が成り立つ.

定理 15.11 $G = (V_N, V_T, R, e_S) \in \mathrm{foMgTS}_d$ を任意に取る. $\rho := \rho(d, V_N, V_T, R)$ と置く. 定義 14.6 の t_0 を取る. $m \geq 1$ とする.

$$r := (A^{(i)} \langle \mathcal{A}^{(i)} \langle t_0 \rangle \rangle, v)_{i=1}^m \in (E_d(V_N, V_T) \times V_T^*)^m$$

は次を満たすとする:

- $r_i\ \mu\ r_{i+1}\ (1 \leq i < m)$.
- $m \geq (|\mathcal{A}^{(1)}| + 1) \cdot 2^{|V_N|(|v|+3)!^d/2^d}$.

このとき, ある $i \in [1, m]$ が存在して, v を $A^{(i)} \langle \mathcal{A}^{(i)} \langle t_0 \rangle \rangle$ に適用すると無限ループに陥る.

証明 $D := |V_N|(|v| + 3)!^d / 2^d + 1$ と置く. 定理 15.9 の $M_n(s)$ を使う.

$$a_i := 1 + |\mathcal{A}^{(i)}|\ \ (1 \leq i \leq m)$$

と置く．各 i に対して $r_i\ \mu\ r_{i+1}$ であるから, i ごとにある j が存在して, $r_i\ \mu_j\ r_{i+1}$ となる．もし $j=1$ ならば, $a_{i+1}-a_i=-1$ となることが分かる．$j=2,3,4$ のときは, $a_{i+1}-a_i=+1$ となることが分かる．いずれにしても, $a_{i+1}-a_i\in[-1,1]$ である．よって, $a\in M_m(|\mathcal{A}^{(1)}|+1)$ が成り立つ．$m\geq(|\mathcal{A}^{(1)}|+1)\cdot 2^{D-1}$ であるから,

$$a\in M_{(|\mathcal{A}^{(1)}|+1)\cdot 2^{D-1}}(|\mathcal{A}^{(1)}|+1)$$

である．定理 15.9 より, a 内には正規 D 列が存在する．それを $(a_{i_j})_{j=1}^{D}$ と置く．

$$\forall j\in[1,D],\ \forall k\in[i_j,i_D]\ \left[\ a_k\geq a_{i_j}\ \right]$$

が成り立つ．すなわち,

$$\forall j\in[1,D],\ \forall k\in[i_j,i_D]\ \left[\ |\mathcal{A}^{(k)}|\geq\mathcal{A}^{(i_j)}\ \right] \tag{1}$$

が成り立つ．さて, $A^{(i)}\in V_N$ であるから, i を動かすとき, $A^{(i)}$ は $|V_N|$ 種類しかない．$A^{(i_j)}$ は $j=1,2,\cdots,D$ の D 個あるから, $D=|V_N|(|v|+3)!^d/2^d+1$ により, 鳩ノ巣原理から, $A^{(i_j)}$ $(j=1,2,\cdots,D)$ の中の少なくとも $(|v|+3)!^d/2^d+1$ 個は全く同じ V_N の元を表す．その同一の元を A とする．また, $A^{(i_j)}=A$ を満たす $(|v|+3)!^d/2^d+1$ 個の $j\in[1,D]$ を $1\leq j_1<j_2<\cdots<j_{(|v|+3)!^d/2^d+1}\leq D$ とする．よって,

$$A^{(i_{j_k})}=A\quad(1\leq k\leq(|v|+3)!^d/2^d+1)$$

である．

$$\mathcal{A}^{(i_{j_k})}\langle t_0\rangle\in PE_d(V_N,V_T)^d\quad(1\leq k\leq(|v|+3)!^d/2^d+1)$$

に対して補題 15.10 を使えば, ある $1\leq p<q\leq(|v|+3)!^d/2^d+1$ が存在して,

$$(\mathcal{A}^{(i_{j_p})}\langle t_0\rangle,\rho)\sim_v(\mathcal{A}^{(i_{j_q})}\langle t_0\rangle,\rho)$$

が成り立つ．そこで,

$$m':=i_{j_q}-i_{j_p}+1,\quad A'^{(i)}:=A^{(i+i_{j_p}-1)},\quad \mathcal{A}'^{(i)}:=\mathcal{A}^{(i+i_{j_p}-1)}\quad(1\leq i\leq m')$$

と置き, $r':=(A'^{(i)}\langle\mathcal{A}'^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle,v)_{i=1}^{m'}$ と置くと, 次が成り立つ:

(2) $m'\geq 2$.

(3) $r'_i\ \mu\ r'_{i+1}\quad(1\leq i\leq m'-1)$.

(4) $(\mathcal{A}'^{(m')}\langle t_0\rangle,\rho)\sim_v(\mathcal{A}'^{(1)}\langle t_0\rangle,\rho)$.

(5) $|\mathcal{A}'^{(i)}|\geq|\mathcal{A}'^{(1)}|\ (1\leq i\leq m')$.

(6) $A'^{(m')}=A'^{(1)}$.

(7) $A'^{(1)}=A^{(i_{j_p})},\quad \mathcal{A}'^{(1)}=\mathcal{A}^{(i_{j_p})}$.

実際, (5) 以外は明らか．(5) は,

$$\forall i\in[1,m']\ \left[\ |\mathcal{A}^{(i+i_{j_p}-1)}|\geq|\mathcal{A}^{(i_{j_p})}|\ \right]$$

を示せばよい．すなわち，

$$\forall k \in [i_{j_p}, i_{j_q}] \ \left[\ |\mathcal{A}^{(k)}| \geq |\mathcal{A}^{(i_{j_p})}|\ \right] \tag{$*$}$$

を示せばよい．(1) で $j = j_p$ とすれば

$$\forall k \in [i_{j_p}, i_D] \ \left[\ |\mathcal{A}^{(k)}| \geq \mathcal{A}^{(i_{j_p})}\ \right]$$

が成り立つ．$i_{j_q} \leq i_D$ だったから，確かに $(*)$ が成り立ち，よって (5) が成り立つ．よって，定理 15.2 が使えて，v を $A^{(i_{j_p})}\langle\mathcal{A}^{(i_{j_p})}\langle t_0\rangle\rangle$ に適用すると無限ループに陥る．よって，この i_{j_p} が求める i である．

定理 15.12 (foMgTS のステップ数の上界) $G = (V_N, V_T, R, e_S) \in \mathrm{foMgTS}_d$ を任意に取る．$\rho := \rho(d, V_N, V_T, R)$, $\varphi := \varphi_\rho$ と置く．このとき，次が成り立つ:

$$\forall v \in V_T^*,\ \forall v_f \in V_T^* \cup \{\mathtt{f}\} \ \left[\ (e_S, v, v_f) \in \rho \Rightarrow \varphi(e_S, v, v_f) < 5^{2^{|V_N|(|v|+4)!^d}}\ \right].$$

証明 $m := 2^{|V_N|(|v|+4)!^d}$ と置く．ある $a \in V_T$ と $A \in V_N$ と $\mathcal{A} \in (V_N^d)^1$ が存在して，

$$e_S = A\langle\mathcal{A}\langle t_a\rangle\rangle$$

という形である．以下では，この t_a のことを t_0 と書く．背理法を使う．$(e_S, v, v_f) \in \rho$ かつ

$$\varphi(e_S, v, v_f) \geq 5^m$$

が成り立つとする．よって

$$(A\langle\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, v_f) \in \rho, \quad \varphi(A\langle\mathcal{A}\langle t_0\rangle\rangle, v, v_f) \geq 5^m$$

である．定理 15.3 より，次を満たす $r := ((A^{(i)}\langle\mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(i)}))_{i=1}^m$ が取れる:

$$\begin{aligned} &r_i\ \mu\ r_{i+1}\ (1 \leq i < m), \\ &A^{(1)} = A, \quad \mathcal{A}^{(1)} = \mathcal{A}, \quad v^{(1)} = v. \end{aligned}$$

$(A^{(1)}\langle\mathcal{A}^{(1)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(1)}, v_f) \in \rho$ により，定理 14.9 を満たす $(w^{(i)})_{i=1}^m \in (V_T^* \cup \{\mathtt{f}\})^m$ が取れる．特に

$$\forall i \in [1, m] \ \left[\ (A^{(i)}\langle\mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(i)}, w^{(i)}) \in \rho\ \right] \tag{1}$$

である．さて，$r_i\ \mu\ r_{i+1}$ の定義により，$|\mathcal{A}^{(i+1)}| \leq |\mathcal{A}^{(i)}| + 1$ $(1 \leq i < m)$ となることが分かる．$|\mathcal{A}^{(1)}| = |\mathcal{A}| = 1$ により，

$$|\mathcal{A}^{(i)}| \leq i \quad (1 \leq i \leq m) \tag{2}$$

となる．また，$r_i\ \mu\ r_{i+1}$ の定義により，$v^{(i+1)}$ は $v^{(i)}$ のサフィックスであることが分かる $(1 \leq i < m)$．特に，任意の $i \in [1, m]$ に対して，ただ 1 つの $k_i \in [0, |v|]$ が存在して，$v^{(i)} = v^{+k_i}$ と表せる．$k_1 = 0$ であり，$(k_i)_{i=1}^m$ は広義単調増加である．そこで，各 $k \in [0, |v|]$ に対して，$k_i = k$ を満たす $i \in [1, m]$ の個数を l_k と置く．さらに，

$$L_k := \sum_{i=0}^{k} l_i \quad (0 \leq k \leq |v|)$$

と置く．さらに, $L_{-1} := 0$ と置く．$(k_i)_{i=1}^m$ は広義単調増加であるから, 次が成り立つことが分かる:

$$\text{(3)}\quad L_{-1} = 0,\quad L_0 = l_0 \geq 1,\quad L_{|v|} = m.$$

$$\text{(4)}\quad \forall k \in [0, |v|],\ \forall i \in (L_{k-1}, L_k]\ \left[\ k_i = k \quad i.e \quad v^{(i)} = v^{+k}\ \right].$$

ここで,

$$\forall k \in [0, |v|]\ \left[\ l_k < (L_{k-1} + 2) \cdot 2^{|V_N|(|v|-k+3)!^d/2^d}\ \right] \tag{5}$$

が成り立つことを示す．$k \in [0, |v|]$ を任意に取る．$l_k = 0$ のときは, 明らかに (5) が成り立つ．以下では, $l_k > 0$ としてよい．よって, $L_k = L_{k-1} + l_k \geq L_{k-1} + 1$ である．そこで,

$$s := ((A^{(i)}\langle\mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{(i)}))_{i=L_{k-1}+1}^{L_k} \neq \emptyset$$

について考える．(4) より,

$$s = ((A^{(i)}\langle\mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle, v^{+k}))_{i=L_{k-1}+1}^{L_k}$$

となる．s の項数は $L_k - L_{k-1} = l_k \geq 1$ である．もし

$$l_k \geq (|\mathcal{A}^{(L_{k-1}+1)}| + 1) \cdot 2^{|V_N|(|v^{+k}|+3)!^d/2^d}$$

が成り立つとすると, 定理 15.11 が使えて, ある $i \in [L_{k-1}+1, L_k]$ が存在して, $v^{+k} = v^{(i)}$ を $A^{(i)}\langle\mathcal{A}^{(i)}\langle t_0\rangle\rangle$ に適用すると無限ループに陥る．これは (1) に矛盾する．よって,

$$l_k < (|\mathcal{A}^{(L_{k-1}+1)}| + 1) \cdot 2^{|V_N|(|v^{+k}|+3)!^d/2^d}$$

である．(2) により,

$$l_k < (L_{k-1} + 2) \cdot 2^{|V_N|(|v^{+k}|+3)!^d/2^d}$$

である．$|v^{+k}| = |v| - k$ だったから, 以上より, (5) が成り立つ．さて, $L_k - L_{k-1} = l_k$ $(0 \leq k \leq |v|)$ だから, (5) と合わせて

$$L_k - L_{k-1} < (L_{k-1} + 2) \cdot 2^{|V_N|(|v|-k+3)!^d/2^d} \quad (0 \leq k \leq |v|)$$

となる．よって

$$L_k < L_{k-1} + (L_{k-1} + 2) \cdot 2^{|V_N|(|v|-k+3)!^d/2^d} \quad (0 \leq k \leq |v|)$$

となるので, 両辺に 2 を足して

$$\begin{aligned} L_k + 2 &< (L_{k-1} + 2) \cdot (1 + 2^{|V_N|(|v|-k+3)!^d/2^d}) \\ &\leq (L_{k-1} + 2) \cdot 2^{1+|V_N|(|v|-k+3)!^d/2^d} \\ &\leq (L_{k-1} + 2) \cdot 2^{|V_N|(|v|-k+3)!^d/2^{d-1}} \\ &\leq (L_{k-1} + 2) \cdot 2^{|V_N|(|v|-k+3)!^d} \quad (0 \leq k \leq |v|) \end{aligned}$$

となる．よって

$$\begin{aligned} L_{|v|} + 2 < (L_{0-1} + 2) \cdot \prod_{k=0}^{|v|} 2^{|V_N|(|v|-k+3)!^d} &= (0 + 2) \cdot 2^{\sum_{k=0}^{|v|} |V_N|(|v|-k+3)!^d} \\ &= 2^{1+\sum_{k=0}^{|v|} |V_N|(|v|-k+3)!^d} \end{aligned}$$

となる.

$$
\begin{aligned}
1+\sum_{k=0}^{|v|}|V_N|(|v|-k+3)!^d = 1+|V_N|\sum_{k=3}^{|v|+3}k!^d &\leq |V_N|+|V_N|\sum_{k=3}^{|v|+3}k!^d \\
&\leq |V_N|\sum_{k=1}^{|v|+3}k!^d \\
&\leq |V_N|\sum_{k=1}^{|v|+3}(|v|+3)!^d \\
&= |V_N|(|v|+3)!^d\cdot(|v|+3) \\
&< |V_N|(|v|+4)!^d
\end{aligned}
$$

により,

$$L_{|v|}+2 < 2^{|V_N|(|v|+4)!^d}$$

となる. よって,

$$m = L_{|v|} < L_{|v|}+2 < 2^{|V_N|(|v|+4)!^d}$$

となる. 一方で, $m = 2^{|V_N|(|v|+4)!^d}$ だったから矛盾する.

定理 15.13 (foMPEG のステップ数の上界) $G=(V_N,V_T,R,e_S)\in \mathrm{foMPEG}_d$ を任意に取る. $\rho := \rho(d,V_N,V_T,R)$, $\varphi := \varphi_\rho$ と置く.

$$D := 3(d+1)\sum_{A\in V_N}|R(A)|+3(d+1)|e_S|+|V_N|+(d+1)$$

と置く. このとき, 次が成り立つ:

$$\forall v\in V_T^*,\ \forall v_f\in V_T^*\cup\{\mathtt{f}\}\ \left[\ (e_S,v,v_f)\in\rho \Rightarrow \varphi(e_S,v,v_f) < 5^{2^{D(|v|+4)!^d}}\ \right].$$

証明 系 13.12 で得られる $G'=(V_N,V_T',R',e_S')\in \mathrm{foMgTS}_d$ について, 次が成り立っている:

$$G\sim G',\quad G\ll G',\quad |V_N'|\leq 3(d+1)\sum_{A\in V_N}|R(A)|+3(d+1)|e_S|+|V_N|+(d+1)=D. \tag{1}$$

以下では, $\rho' := \rho(d,V_N,V_T',R')$, $\varphi_2 := \varphi_{\rho'}$ と置く. さて, $v\in V_T^*$ と $v_f\in V_T^*\cup\{\mathtt{f}\}$ を任意に取る. $(e_S,v,v_f)\in\rho$ とする. $G\ll G'$ により,

$$(e_S',v,v_f)\in\rho',\quad \varphi(e_S,v,v_f)\leq\varphi_2(e_S',v,v_f)$$

が成り立つ. 定理 15.12 により,

$$\varphi_2(e_S',v,v_f) < 5^{2^{|V_N'|(|v|+4)!^d}}$$

である. (1) により,

$$\varphi_2(e_S',v,v_f) < 5^{2^{D(|v|+4)!^d}}$$

である. 以上を繋げて,

$$\varphi(e_S,v,v_f)\leq\varphi_2(e_S',v,v_f) < 5^{2^{D(|v|+4)!^d}}$$

となる.

補足　ラムゼー型の定理が必要になる理由は, PEG からの類推で考えると, 次のようになる: まず, PEG の場合は, gTS の計算経路の上に出現する非終端記号が有限種類しかなく, その非終端記号に適用する入力文字列も計算経路が進むごとに削られていって減少するので, 計算経路があまりにも長い場合, 単純な鳩ノ巣原理を使うだけで, 無限ループの発生が簡単に証明できる. このことから, PEG の計算経路は「あまり長くできない」ことになり, ステップ数の上界が具体的に求まる (指数オーダー程度になる).
一方で, MACRO PEG の場合は, 非終端記号が引数を取れるので, 非終端記号の種類は実質的には無限個となってしまい, 単純な鳩ノ巣原理では, 無限ループの発生が証明できない. しかし, 無限個あると思われた非終端記号には一種の法則性があるので, そこを詳しく解析すれば何とかなりそうに見える. この解析は, 単純な鳩ノ巣原理では歯が立たず, もう少し高度なツールが必要になる. 鳩ノ巣原理を高度に昇華したものはラムゼー理論と呼ばれるので, これが, ラムゼー型の定理が必要になる理由だと考えられる.

参考文献

[1] Ford, B.: Parsing Expression Grammars: A Recognition-Based Syntactic Foundation. In: POPL 2004: Proceedings of the 31st ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages, pp. 111-122. ACM, New York (2004)

[2] Kota Mizushima: Macro PEG: PEG with macro-like rules
https://github.com/kmizu/macro_peg