① Известно, что $\int \frac{\pi^{3/2}\cos x}{\pi^2+x^2}dx = F(x)+C$ и $g(x)=F(x^2)$. Найдите $g'(\sqrt{\pi})$

$$F(x^2)+C' = \int \frac{\pi^{3/2}\cos x^2}{\pi^2+x^4}dx^2 = \int \frac{\pi^{3/2}\cos x^2}{\pi^2+x^4}2x\,dx$$

$$g(x)=F(x^2) \Rightarrow g'(x) = F'(x^2) = [F(x^2)+C']' = 2x\,\frac{\pi^{3/2}\cos x^2}{\pi^2+x^4}$$

$$\Rightarrow g'(\sqrt{\pi}) = 2\sqrt{\pi}\cdot\frac{\pi^{3/2}\cos\pi}{\pi^2+\pi^2} = \frac{2\pi^2\cos\pi}{2\pi^2} = -1$$

② Известно, что $\int \frac{g(x)}{x^2+3x+2}dx = a.G(x,b)+c.G(x,d)+C$, где $G(x;x_0)$ - первообразная функции $\frac{g(x)}{x-x_0}$. Найдите a,b,c,d если $b>d$

$$I = \int \frac{g(x)}{x^2+3x+2}dx = \int g(x)\left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}\right)dx = \int\left(\frac{Ag(x)}{x+1}+\frac{Bg(x)}{x+2}\right)dx$$

$$Ag(x)(x+2)+Bg(x)(x+1) = g(x)$$
$$\Leftrightarrow A(x+2)+B(x+1) = 1$$
$$x=-1 \Rightarrow A=1$$
$$x=-2 \Rightarrow B=-1$$

$$I = \int\frac{g(x)}{x+1}dx - \int\frac{g(x)}{x+2}dx = G(x;-1)-G(x;-2)+C$$

$$\Rightarrow a=1;\ b=-1;\ c=-1;\ d=-2$$

③ Найдите неопределенный интеграл $\int\frac{xf(x)}{x^2+x-6}dx$, если $\int\frac{f(x)}{x-a}dx = F(x;a)+C$, где $F(x;a)$ - заданная функция переменных x и a, $C=\text{const}$

$$I = \int\frac{xf(x)}{x^2+x-6}dx = \int f(x)\left(\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}\right)dx$$

$$A(x+3)+B(x-2) = x$$
$$x=2 \Rightarrow 5A=2 \Leftrightarrow A=2/5\ ;\ x=-3 \Rightarrow -5B=-3 \Leftrightarrow B=\frac{3}{5}$$

$$I = \frac{2}{5}\int\frac{f(x)}{x-2}dx + \frac{3}{5}\int\frac{f(x)}{x+3}dx$$

$$= \frac{2}{5}F(x;2)+\frac{3}{5}F(x;-3)+C$$

④ Пусть функция $f(x;y)$ дифференцируема. Докажите, что $f(1+2t;2+3t)-f(1;2)=kt+\bar{o}(t)$ при $t\to 0$, и найдите k

$$f(1+2t;\ 2+3t) - f(1;2) = f'_x(1;2)2t + f'_y(1;2)3t + \bar{o}(t)$$

$$= \frac{2}{5} F(x;2) + \frac{3}{5} F(x;-3) + C$$

④ Пусть функция $f(x;y)$ дифференцируема. Докажите, что $f(1+2t;2+3t)-f(1;2)=kt+\bar{o}(t)$ при $t\to 0$, и найдите k

$$f(1+2t;2+3t)-f(1;2) = f'_x(1;2)2t + f'_y(1;2)3t + \bar{o}(t)$$
$$= t\left[2f'_x(1;2) + 3f'_y(1;2)\right] + \bar{o}(t)$$
$$= kt + \bar{o}(t)$$
$$\Rightarrow k = 2f'_x(1;2) + 3f'_y(1;2)$$

⑤ Используя определение дифференциала, найдите частные производные $f'_x(0;2)$ и $f'_y(0;2)$, если $f(2t;2-3t)-f(0;2)=-8t+\bar{o}(t)$ и $f(3t;2+2t)-f(0;2)=t+\bar{o}(t)$

$$f(2t;2-3t)-f(0;2) = -8t+\bar{o}(t)$$
$$\Leftrightarrow f'_x(0;2)2t - f'_y(0;2)3t + \bar{o}(t) = -8t + \bar{o}(t)$$
$$\Leftrightarrow 2f'_x(0;2) - 3f'_y(0;2) = -8 \quad (1)$$

$$f(3t;2+2t) - f(0;2) = t + \bar{o}(t)$$
$$\Leftrightarrow f'_x(0;2)3t + f'_y(0;2)2t + \bar{o}(t) = t + \bar{o}(t)$$
$$\Leftrightarrow 3f'_x(0;2) + 2f'_y(0;2) = 1 \quad (2)$$
$$(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} 2f'_x(0;2) - 3f'_y(0;2) = -8 \\ 3f'_x(0;2) + 2f'_y(0;2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'_x(0;2) = -1 \\ f'_y(0;2) = 2 \end{cases}$$

⑥ Известно, что $f(5-3t;6+4t)-f(5;6)=15t+\bar{o}(t)$ при $t\to 0$. Найдите производную функции $f(x;y)$ в точке $A(5;6)$ по направлению вектора $\vec{l}=(3;-4)$

$$f(5-3t;6+4t) - f(5;6) = 15t + \bar{o}(t)$$
$$\Leftrightarrow -f'_x(5;6)3t + f'_y(5;6)4t + \bar{o}(t) = 15t + \bar{o}(t)$$
$$\Leftrightarrow -3f'_x(5;6) + 4f'_y(5;6) = 15$$

$$\frac{\partial f(5;6)}{\partial \vec{l}} = \frac{1}{5}\left[3f'_x(5;6) - 4f'_y(5;6)\right] = \frac{-15}{5} = -3$$

⑨ Вычислить следующие определенные интегралы, как предел интегральных сумм

А) $\int\limits_1^2 x^2\,dx$

Разобьем фигуру, образованную линией $f(x) = x^2$ и осью Ox на n равных частей

$\Rightarrow$ ширина каждого фрагмента $w = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}$

высота $h = f\left(1 + \frac{1}{n}i\right),\ i = 1;2;\dots;n$

площадь отдельного фрагмента $S_i = w\cdot h = \frac{1}{n}\cdot f\left(1+\frac{1}{n}i\right) = \frac{1}{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)^2$

площадь всей фигуры $S = \sum\limits_{i=1}^{n} S_i = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(1+\frac{2i}{n}+\frac{i^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}+ \\ +1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}+ \\ +\dots\dots \\ +1+\frac{2n}{n}+\frac{n^2}{n^2} \end{pmatrix}$

сумма первых слагаемых $= n$

сумма вторых слагаемых $= \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2i}{n} = \frac{1}{n}\cdot n(n+1) = n+1$

сумма третьих слагаемых $= \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$\Rightarrow S = \frac{1}{n}\left(n+n+1+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}\right) = 2+\frac{1}{n}+\frac{1}{6}\cdot\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} S = \lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{6}\,\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{6}\,\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{1}\right) = 2+\frac{1}{6}\cdot 2 = \frac{7}{3}$

Б) $\int\limits_0^5 (1+x)\,dx$

Разобьем фигуру, образованную линией $f(x) = 1+x$ и осью Ox на n равных частей

$\Rightarrow$ ширина каждого фрагмента $w = \frac{5}{n}$; высота $h = f\left(\frac{5}{n}i\right),\ i = 1;2;\dots;n$

площадь отдельного фрагмента $S_i = w\cdot h = \frac{5}{n}\cdot f\left(\frac{5i}{n}\right) = \frac{5}{n}\left(1+\frac{5i}{n}\right)$

площадь всей фигуры $S = \sum\limits_{i=1}^{n} S_i = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{5}{n}\left(1+\frac{5i}{n}\right) = \frac{5}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(1+\frac{5i}{n}\right) = \frac{5}{n}\begin{pmatrix} 1+\frac{5}{n}+ \\ +1+\frac{10}{n}+ \\ \dots \\ +1+\frac{5n}{n} \end{pmatrix}$

сумма первых слагаемых $= n$

сумма вторых слагаемых $= \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{5i}{n} = \frac{1}{n}\cdot\frac{5}{2}n(n+1) = \frac{5}{2}(n+1)$

$\Rightarrow S = \frac{5}{n}\left(n+\frac{5}{2}n+\frac{5}{2}\right) = \frac{35}{2}+\frac{25}{2}\cdot\frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} S = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{35}{2}+\frac{25}{2}\cdot\frac{1}{n}\right) = \frac{35}{2}$

$\int^{10}$

В) $\int_0^{10} e^x dx$

Разобьем фигуру, образованную линией $f(x) = e^x$ и осью Ox на n равных частей

$\Rightarrow$ ширина каждого фрагмента $w = \frac{10}{n}$; высота $h = f\left(\frac{10}{n} i\right)$; $i = 1; 2; 3; \dots; n$

площадь отдельного фрагмента $S_i = w \cdot h = \frac{10}{n} \cdot e^{\frac{10}{n} i}$

площадь всей фигуры $S = \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{10}{n} e^{\frac{10}{n} i} = \frac{10}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{10}{n} i} = \frac{10}{n}\left(e^{\frac{10}{n}} + \left(e^{\frac{10}{n}}\right)^2 + \dots + \left(e^{\frac{10}{n}}\right)^n\right)$

$$\Rightarrow S = \frac{10}{n} \cdot \frac{e^{\frac{10}{n}}\left(e^{10} - 1\right)}{e^{\frac{10}{n}} - 1} = 10\left(e^{10} - 1\right) \cdot \frac{e^{\frac{10}{n}}}{n\left(e^{\frac{10}{n}} - 1\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty} S = 10\left(e^{10} - 1\right) \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{10}{n}}}{n\left(e^{\frac{10}{n}} - 1\right)} = 10\left(e^{10} - 1\right) \frac{\lim_{n\to\infty} e^{\frac{10}{n}}}{\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{10}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}}$$

$$= 10\left(e^{10} - 1\right) \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-10 e^{10/n}}{x^2}}{-1/x^2}} = 10\left(e^{10} - 1\right) \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(10 e^{10/n}\right)} = e^{10} - 1$$

(16) Найти n-ю частичную сумму ряда S_n и сумму ряда S

А) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)$

$k=1: \; 1 - 2\sqrt{2} + \sqrt{3} +$

$k=2: \; \sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{4} +$

$k=3: \; \sqrt{3} - 2\sqrt{4} + \sqrt{5} +$

$\dots$

$k=n-1: \; \sqrt{n-1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n+1} +$

$k=n: \; \sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}$

$$S_n = 1 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{n+1} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}$$
$$= 1 - \sqrt{2} - \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \sqrt{2} - \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \sqrt{2} + \frac{\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}\right)$$

$$S = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \sqrt{2} + \underbrace{\frac{1}{\underbrace{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}_{\to\infty}}}_{\to 0}\right) = 1 - \sqrt{2}$$