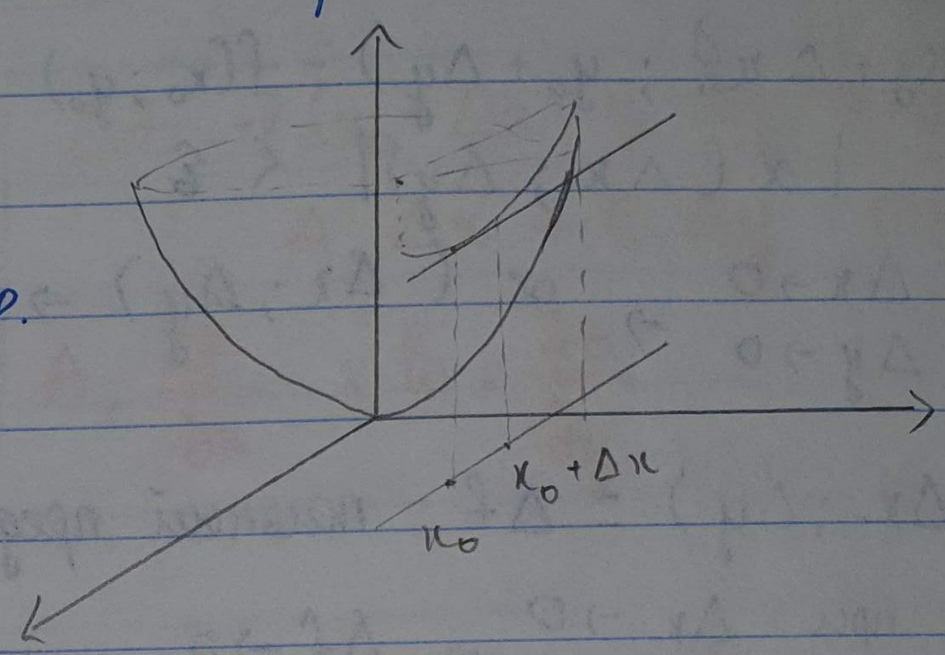
17.02.20

Đạo hàm riêng &
vi phân hàm số nhi biến

1, Геометрическое смысл л. произ.

– производный ф-ции одной переменной tan касательной к кривой, которая опроиз. и плокасти правильной либо Ox или Oy в пересечение ~~ало~~ получает кривая



2, Разностное определ непрер.

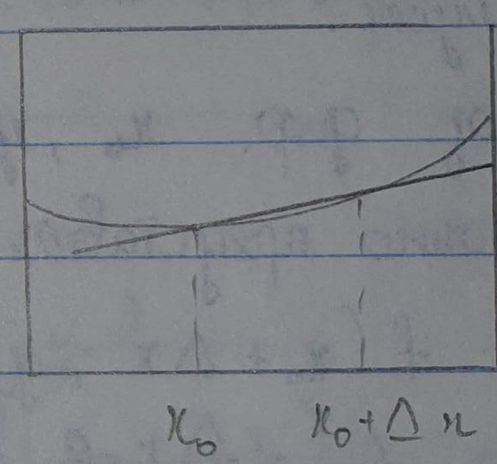
– Ф-ция одной перем.

$y = f(x)$

$f(x)$ непрер. в т. x_0

1, Если $f(x)$ определ в т. x_0

2, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$



2*, $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0)$

2**, $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0$

Ф-ция двух прем.

1, $z = f(x, y)$ опре. в т. $(x_0; y_0)$

2, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0; y_0)$

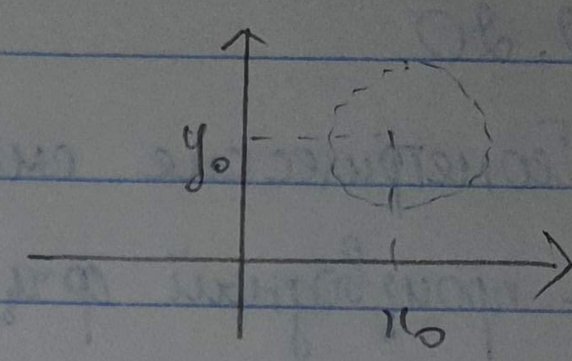
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(x) \quad \forall N(x, y) \in U_\delta(x_0; y_0)$

$|f(N) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$

Опред. предел след.

$N(x, y)$: $x_0 + \Delta x = x$

$y_0 + \Delta y = y$



$f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0) = \alpha(\Delta x; \Delta y)$

$|\alpha(\Delta x; \Delta y)| < \varepsilon$

Если $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ $\Rightarrow$ $\alpha(\Delta x; \Delta y) \to 0$

$\alpha(\Delta x; \Delta y) = \Delta f$ - польный пред. функция.

Если при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ $\Rightarrow$ $\Delta f \to 0$: непре. в т.

3, Дифференцируем.

Ф-ция наз. диф. x_0, y_0 области ее определение если польная функции можно представить видя.

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$$
$$= A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y$$

где A, B - const

α, β - бесконечн. ф-ции зависит от Δx и Δy

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha(\Delta x, \Delta y) = 0 \quad (\beta)$$

Теорема частная производная.

Если $f(x, y)$ диф. x_0 и y_0 области ее определение $\Rightarrow$ то она имеет в той тоже частное произ. $\frac{df}{dx} = A$ и $\frac{df}{dy} = B$

Следовательно ее частной по переменной

$$\Delta_x f = f(x_0 + \Delta x ; y_0) = f(x_0 ; y_0)$$

$$= A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x) \to 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = A + 0$$

$$\| $$

$$\frac{df}{dx} = A$$

$$\Delta z = z(x_0 + \Delta x ; y_0 + \Delta y) - z(x_0 ; y_0)$$

$$= A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + C \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

$$A = \frac{\partial z}{\partial x} ; B = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Если фун. x_0, y_0

$$\Delta f = \frac{df}{dx} \Delta x + \frac{df}{dy} \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y$$

(1) $z = 3x^2 + y + 2xy$

$$\Delta z = z(x_0 + \Delta x ; y_0 + \Delta y) - z(x_0 ; y_0)$$

$$= 3(x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y) + 2(x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y) - 3x_0^2 - y_0 - 2x_0 y_0$$

$$= 3(x_0^2 + 2x_0 \Delta x + \Delta x^2) + y_0 + \Delta y + 2x_0 y_0 + 2y_0 \Delta x + 2x_0 \Delta y + 2\Delta x \Delta y - 3x_0^2 - y_0 - 2x_0 y_0$$

$$= (6x_0 + 3\Delta x + 2y_0 + 2\Delta y)\Delta x + (1 + 2x_0)\Delta y$$

$$= (6x_0 + 2y_0)\Delta x + (1 + 2x_0)\Delta y + (3\Delta y)\Delta x + (2\Delta x)\Delta y$$

$$\frac{dz}{dx} = 6x + 2y ; \frac{dz}{dy} = 1 + 2x$$

При исслед. ф-ции на последний в определении. удобно записать другой форме.

Пусть про распратание между т. $(x_0+\Delta x\,;\,y_0+\Delta y)$ и $(x_0;y_0)$

$$\delta = \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

тогда $\alpha\Delta x + \beta\Delta y = \left(\alpha\frac{\Delta x}{\delta} + \beta\frac{\Delta y}{\delta}\right)\delta = \gamma\cdot\delta$

где $\gamma = \alpha\frac{\Delta x}{\delta} + \beta\frac{\Delta y}{\delta}$

Теорема:

1, Если ~~фц~~ $f(x,y)$ непрер. то она непрерыв. и не, а обратное

2, Если $f(x,y)$ имеет ч. произв. в т. (x_0,y_0) причем эти произ. непрерыв., то ф-ция дифф.

4, Польная диф.

Пусть $z=f(x)$ диф. в т. $(x_0;y_0)$ полном дифф. наз. следующие $dz = \frac{dz}{dx}\cdot dx + \frac{dz}{dy}\cdot \underset{\Delta y}{\underset{\downarrow}{dy}}$

$u = f(x,y,z)$

$$du = \underset{\underset{f'(x)}{\parallel}}{\frac{df}{dx}}\,dx + \frac{df}{dy}\cdot dy + \frac{df}{dz}\cdot dz$$

Замечание 1: польная дифф. следует что $(\Delta x;\Delta y)$ достаточно малых соотв. ф-ции может быть польным дифф.

Пример: (2) $\sqrt[3]{1,02^{1,97}}$

② $\sqrt[3]{1,02^{1,97}}$

$z = \sqrt[3]{x^y} = x^{\frac{y}{3}}$

$(x_0; y_0) = (1; 2)$

$\Delta x = 0,02$

$\Delta y = -0,03$

$\approx f(x_0; y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0;y_0)} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0;y_0)} \cdot \Delta y$

Δ = труёс − sau

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$

$\approx \frac{df}{dx}\Big|_{(x_0;y_0)} \cdot \Delta x + \frac{df}{dy}\Big|_{(x_0;y_0)} \cdot \Delta y$

$\frac{df}{dx} = \frac{y}{3} \cdot x^{y/3 - 1}\Big|_{(x_0;y_0)} = \frac{2}{3} \cdot 1^{-1/3} = \frac{2}{3}$

$\frac{df}{dy} = x^{y/3} \cdot \ln x\Big|_{(x_0;y_0)} = 1^{2/3} \cdot \ln 1 = 0$

$f(x_0; y_0) = 1 \approx 0,7$

$\Rightarrow \sqrt[3]{1,02^{1,97}} \approx 1 + \frac{2}{3} \cdot 0,02 + 0 \approx 1,014$

$f(x; y) = g(x; y)$

$df = dg$

Дифф. можно обрат. нескольких переменн. опрераются на перед. дифф. в этом сущ., где поведение ф-ции изучал при помощью производ.

Произ. сложн. фун.

Теорема ~~пр~~ по диф. сложн. функ.

$x = \cancel{x(y)}\ x(t)$; $y = y(t)$ диф. в т. x_0

$z = z(x;y)$ диф-ма в соотв. т. $(x(t_0) = x_0 ; y(t_0) = y_0)$

$z = z(x(t); y(t))$ - дифф-ма в т. t_0

$$\cancel{\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dt} + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}} \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Пусть в. $t_0 \to t_0 + \Delta t \to x_0 \to x_0 + \Delta x$

$y_0 \to y_0 + \Delta y$

то свою очеред придёт к прош Δz, которое по определению дифф. можно поставит везде $\cancel{\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x}$

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial t}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} +$$

$$+ \lim_{\Delta t \to 0} \left(\alpha \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta \frac{\Delta y}{\Delta t} \right)$$

$$= \frac{\partial t}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

* Тоng hợp :

1. Геометрический смысл частных производных ý nghĩa h.học của đ.hàm riêng
2. Разностное определение непрерывности đ.nghĩa ≠ nhau của tính liên tục

3, Дифференцируемость — đạo hàm

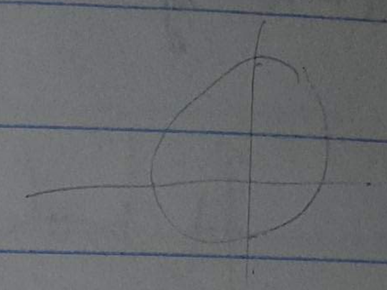
4, Полный дифференциал — vi phân

5, Производная по направлению и градиент ф-ции. — đạo hàm định hướng & độ dốc hàm

---

19.02.20

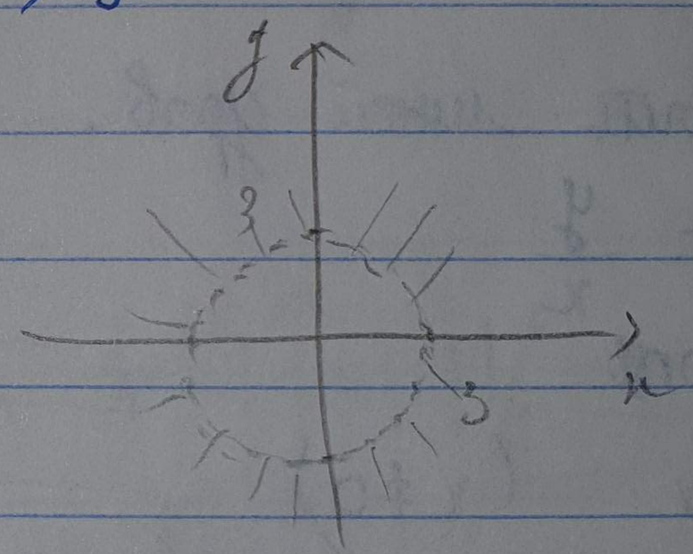
1) ① $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-9}}$



$$\Delta z = z(x_0+\Delta x;\ y_0+\Delta y) - z(x_0;y_0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(x_0+\Delta x)^2+(y_0+\Delta y)^2-9}} - \frac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2-9}}$$

$x^2+y^2-9>0 \iff x^2+y^2>9$



$-1 \le \sin(x+y) \le 1$

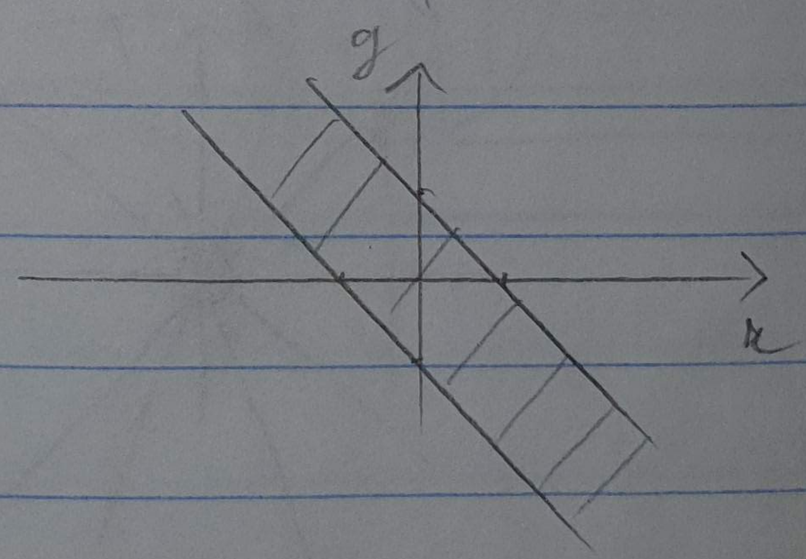
$-\frac{\pi}{2} \le \sin(x+y) \le \frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} \le x+y \le \frac{\pi}{2}$

② $z = \arcsin(x+y)$

$-1 \le x+y \le 1$

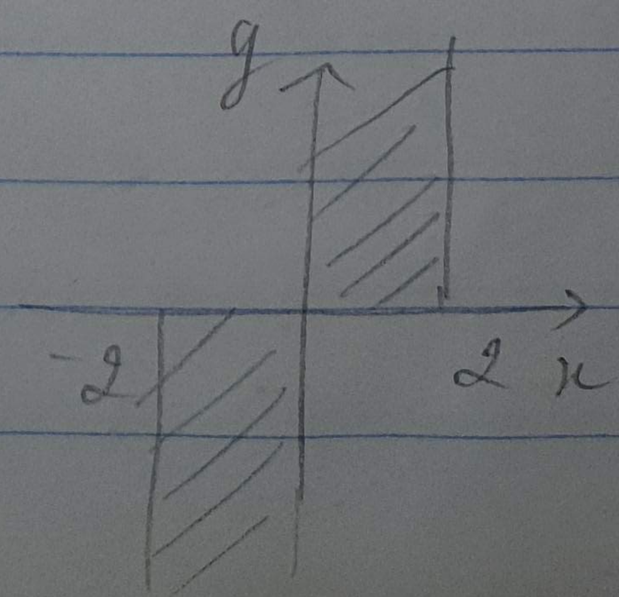
$\iff -1-x \le y \le 1-x$



③ $z = \sqrt{xy} + \arcsin\frac{x}{2}$

$$\begin{cases} xy \ge 0 \\ -1 \le \frac{x}{2} \le 1 \end{cases}$$

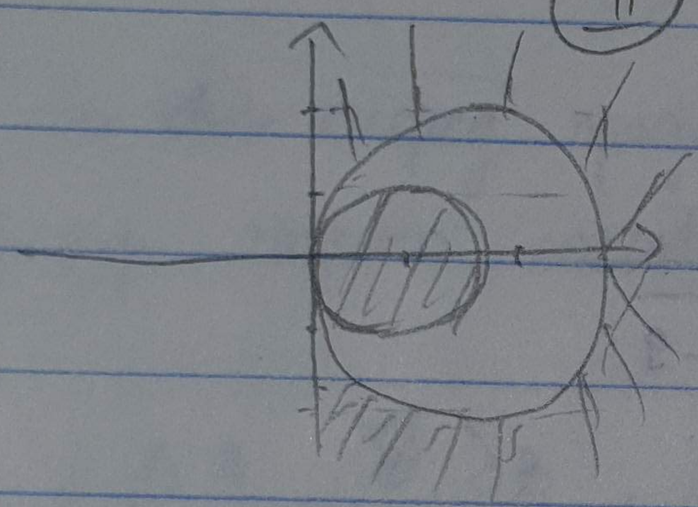
$$\iff \begin{cases} xy \ge 0 \\ -2 \le x \le 2 \end{cases}$$



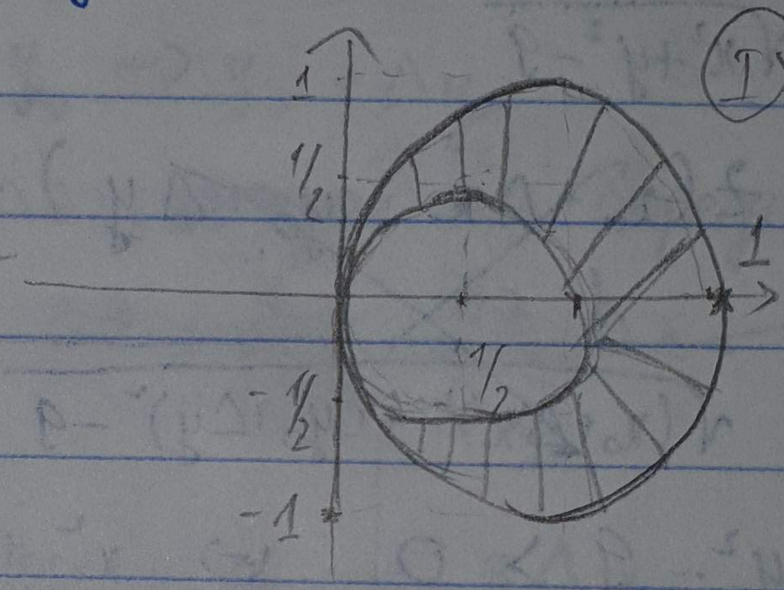
4) $z = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x^2+y^2-x \geq 0 \\ 2x-x^2-y^2 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2-x \leq 0 \\ 2x-x^2-y^2 < 0 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x^2-x+\frac{1}{4}+y^2-\frac{1}{4} \geq 0 \\ x^2-2x+1+y^2-1 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-x+\frac{1}{4}+y^2-\frac{1}{4} \leq 0 \\ x^2-2x+1+y^2-1 > 0 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\text{I} \begin{cases} (x-\frac{1}{2})^2+y^2 \geq \frac{1}{4} \\ (x-1)^2+y^2 < 1 \end{cases} \\ \text{II} \begin{cases} (x-\frac{1}{2})^2+y^2 \leq \frac{1}{4} \\ (x-1)^2+y^2 > 1 \end{cases}\end{array}\right.$$

II



I



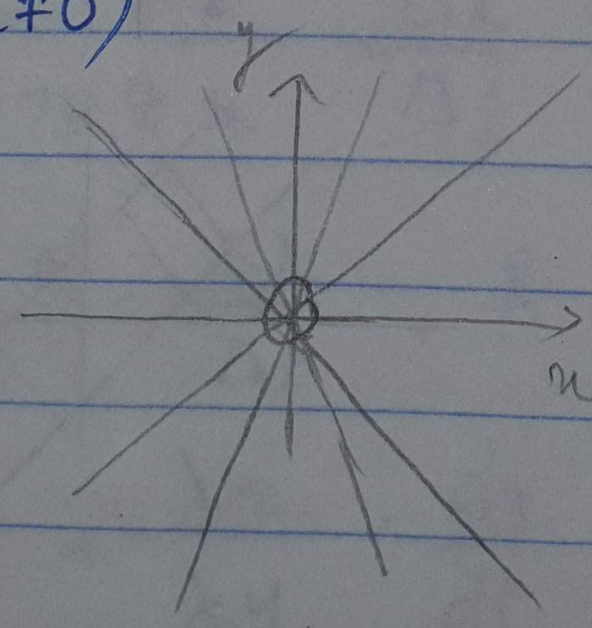
II Построить линей урав. фун.

1) $z = \dfrac{y}{x}$

$\dfrac{y}{x} = const$

$y = C \cdot x \quad (x \neq 0)$

Лин. урав - кривая опр.
$\delta = const$



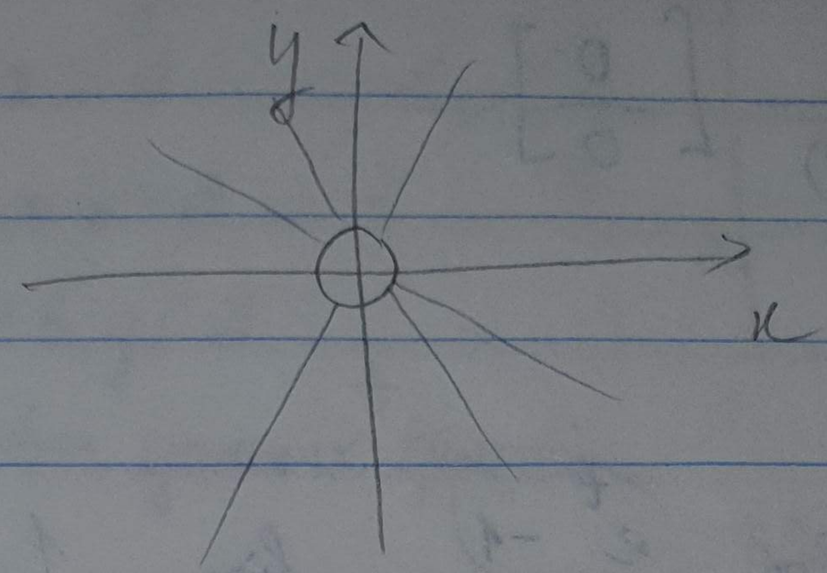
$\dfrac{y}{x} = 0$

$\dfrac{y}{x} = 1$

lem > c , rem < tan

② $z = \sqrt{\frac{x}{y}}$

$y = \frac{1}{c^2} x$



③ $z = x^2 y + y$

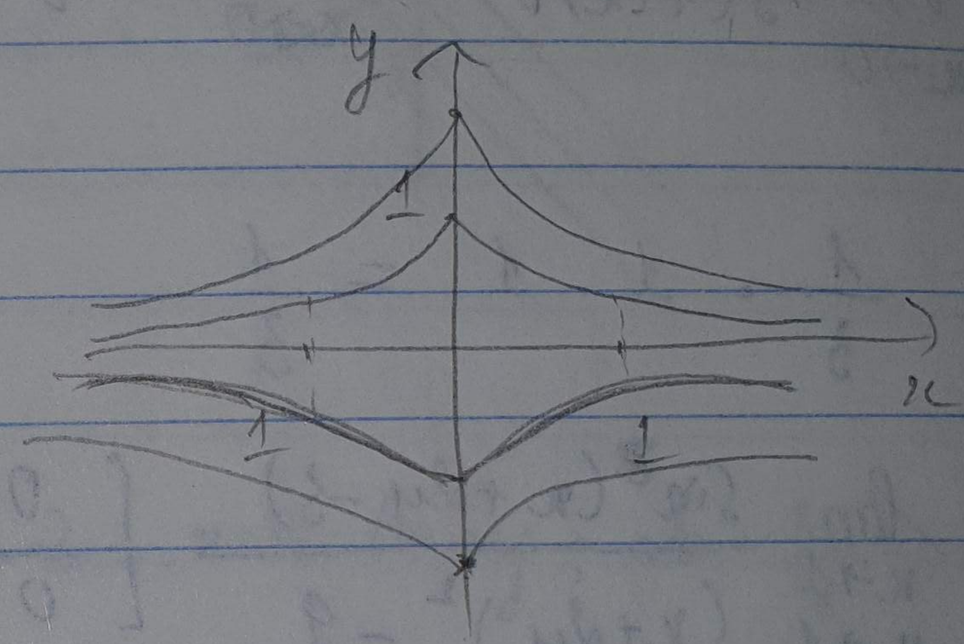
$x^2 y + y = C$

1, $x^2 y + y = 0$

$y = 0$

2, $y(x^2+1) = c$

$y = \frac{c}{x^2+1}$

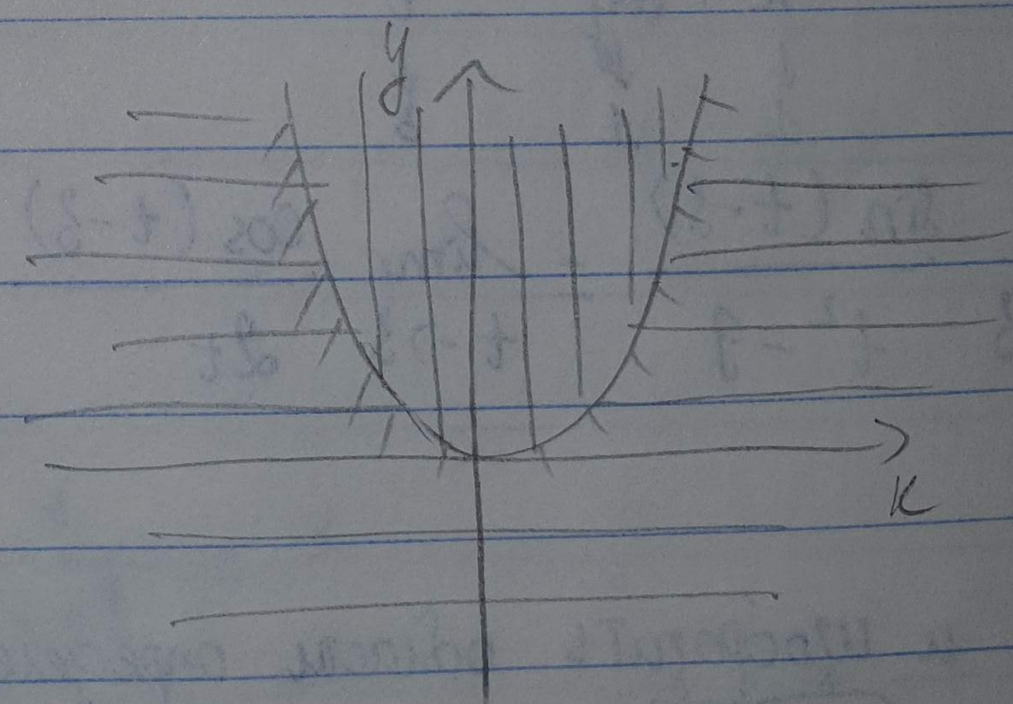


④ $z = \min(x^2; y)$

$\min(x^2; y) = \text{const}$

$\begin{cases} c = y \\ y < x^2 \end{cases}$

$\begin{cases} c = x^2 \\ x^2 < y \end{cases}$



III. Вычислить предел.

① $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{e^{(x+y-2)}-1}{3(1+x)(x+y-2)} \left[\dfrac{0}{0}\right]$

$$\underset{\downarrow\,0}{x} + \underset{\downarrow\,2}{y} - 2 = \underset{\downarrow\,0}{t}$$

$$= \lim_{\substack{t\to 0\\ x\to 0}} \frac{e^t-1}{3(1+x)t} = \frac{1}{3}\lim_{\substack{t\to 0\\ \cancel{x\to 0}}} \frac{\overbrace{e^t-1}^{t}}{t} \cdot \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{3}$$

② $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \dfrac{\sin(x+2y-3)}{(x+2y)^2-9} \left[\dfrac{0}{0}\right]$

$$\underset{\downarrow\,1}{x} + \underset{\downarrow\,1}{2y} = \underset{\downarrow\,3}{t}$$

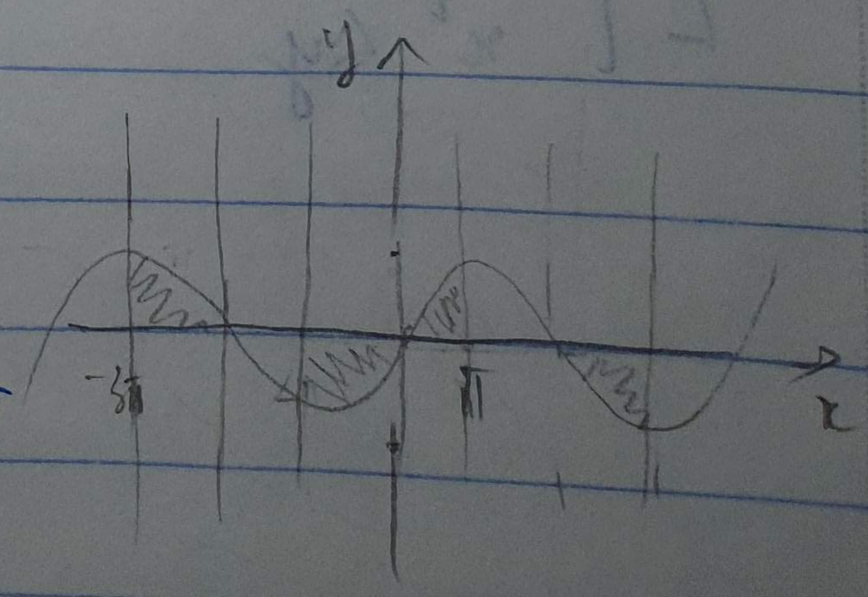
$$\lim_{t\to 3}\frac{\sin(t-3)}{t^2-9} = \lim_{t\to 3}\frac{\cos(t-3)}{2t} = \frac{1}{6}$$

* Дз 1.

I) Найти и изобразить области определения след. ф-ций.

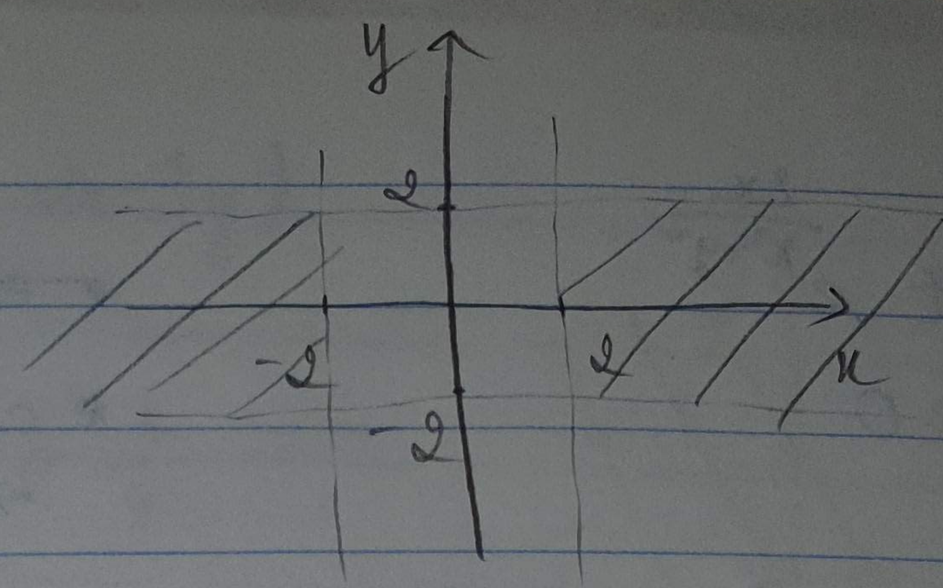
① $z = \sqrt{y\cdot\sin x}$

$$y\cdot\sin x \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1\leq \sin x\leq 0\\ y\leq 0\end{cases}\\ \begin{cases} 0\leq \sin x\leq 1\\ y\geq 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -\pi\leq x\leq 0\\ y\leq 0\end{cases}\\ \begin{cases} 0\leq x\leq \pi\\ y\geq 0\end{cases}\end{array}\right.$$



② $z = \sqrt{x^2-4} + \sqrt{4-y^2}$

$$\begin{cases} x^2-4 \geq 0 \\ 4-y^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \leq -2 \end{array}\right. \\ -2 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

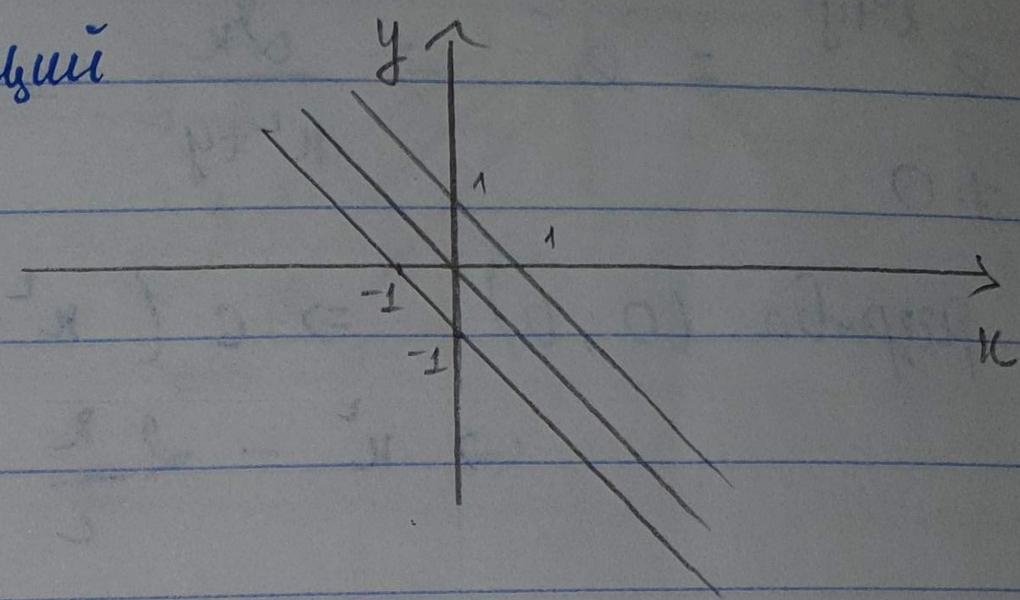


II) Найти линии уровня данных ф-ций

① $z = (1+x+y)^2$

$(1+x+y)^2 = c$

$(1+x+y)^2 = 0 \Leftrightarrow x+y = -1$



~~② $z = e^{\frac{2x}{x^2}}$~~

② $z = e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$

③ $z = \max(x+y;\ 2x-3y)$

III) Вычислить

① $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -3}} \dfrac{\ln(3+x^2+y)}{2+y+x^2} \left[\dfrac{0}{0}\right]$

$x^2+y = t$

$1 \quad -3 \quad -2$

$\lim\limits_{t\to -2} \dfrac{\ln(t+3)}{t+2} \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{t\to -2} \dfrac{1}{t+3} = 1$

② $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \dfrac{2(x-1)(y-2)}{(x-1)^2+(y-2)^2}$

$x-1 = t$

$1 \quad 0$

$y-2 = z$

$2 \quad 0$

$= \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ z\to 0}} \dfrac{2tz}{t^2+z^2} \left[\dfrac{0}{0}\right] \Bigg| \; z = kt \; = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ kt\to 0}} \dfrac{2t \cdot kt}{t^2+(kt)^2} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{2t^2k}{t^2+k^2t^2}$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{2t^2k}{t^2(1+k^2)} = \dfrac{2k}{1+k^2} \Rightarrow \nexists$

25.02.20.

① $z = \cancel{(x}\ e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$

$z \geq 0$

$e^{\frac{2x}{x^2+y^2}} = e^{c} \Rightarrow \frac{2x}{x^2+y^2} = c$

* $c \neq 0$

разрыва $(0;0)$ $\Rightarrow c(x^2+y^2) - 2x = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2\frac{x}{c} + y^2 = 0$

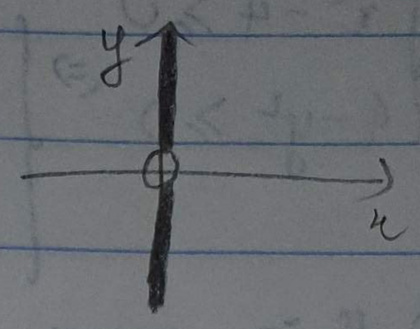
$\left(x^2 - 2\frac{x}{c} + \frac{1}{c^2}\right) + y^2 = \frac{1}{c^2}$

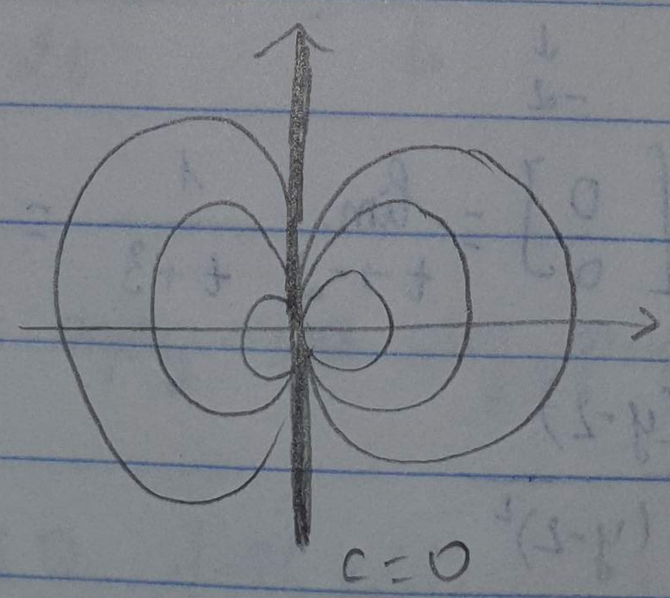
$\left(x - \frac{1}{c}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{c^2}$

смотрить с $z = \frac{1}{c}$ и $\left(\frac{1}{c}; 0\right)$

* $c = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$

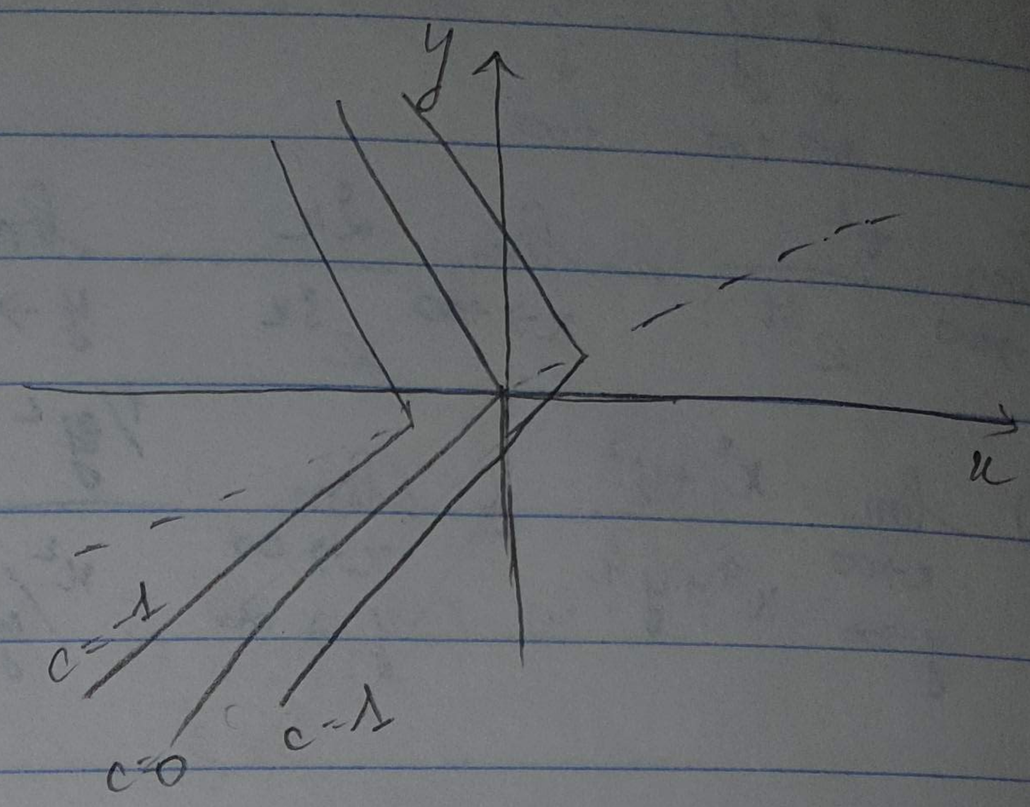




② $z = \max(x+y\,;\,2x-3y)$

$x+y \geq 2x-3y$

$\Leftrightarrow 4y \geq x \Leftrightarrow y \geq \frac{x}{4}$



$c = 0$

$$\begin{cases} x+y = 0 \\ 2x-3y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x \end{cases}$$

$c = 1$

$$\begin{cases} x+y = 1 \\ 2x-3y = 1 \end{cases}$$

③ $$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}} \frac{\tan(x+y)\,e^{x-y}}{x^2-y^2} = \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}} \frac{\tan(x+y)\,e^{x-y}}{(x-y)(x+y)}$$

$$\begin{array}{ccccc} x & +y & = t \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$$= \lim_{\substack{t\to 0\\ x\to 1\\ y\to -1}} \frac{\tan t \cdot e^{x-y}}{t(x-y)} = \frac{e^2}{2}$$

④ $$\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} (x^2+y^2)\,e^{-3(x+y)} = \lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \frac{x^2+y^2+2xy-2xy}{e^{3(x+y)}}$$

$$= \lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \frac{(x+y)^2-2xy}{e^{3(x+y)}} = \lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \frac{(x+y)^2}{e^{3(x+y)}} - \lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \frac{2xy}{e^{3(x+y)}}$$

$$\underset{+\infty}{x} + \underset{+\infty}{y} = \underset{+\infty}{t}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t^2}{e^{3t}} - \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^{3x}} \cdot \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^{3y}} = 0$$

(5) $$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{1/y^2 + 1/x^2}{x^2/y^2 + \frac{y^2}{x^2}} = 0 \quad \Big/ \quad \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \geq 2$$

Полное превращение, частные произв-о, дифф-я.

$z = x^2 y$, $M_0(1; 2)$

$\Delta x = 0,1$

$\Delta y = -0,2$

$z(M) - z(M_0) = (1+0,1)^2(2-0,2) - 1^2 \cdot 2 \cancel{= 1,21+1,2}$

$= 1,21 + 1,2 - 2 = 0,178.$

$z(M - z(M_0)) = z(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$

$= z(x_0; y_0 + \Delta y) + z(x_0; y_0 + \Delta y) - z(x_0; y_0)$

$= (1,01^2 \cdot 1,8 - 1 \cdot 1,8) + (1 \cdot 1,8 - 1 \cdot 2) = 0,178.$

$\Delta z = z(M) - z(M_0) \Rightarrow z(M) = z(M_0) + \Delta z \; \overset{\shortparallel}{\Delta z}$

$dz \approx \Delta z$ $\qquad \Rightarrow z(M) \approx z(M_0) + \alpha z$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y$$

$= 2xy\Delta x + x^2 \Delta y = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 0,1 + 1^2(-0,2)$

$= 0,4 - 0,2 = 0,2$

$z(M) \approx z(M_0) + dz = 1^2 \cdot 2 + 0,2 = 2,2$

(6) $z = e^{x^2+y^2}$

$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+y^2} \cdot 2x$

$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+y^2} \cdot 2y$

(7) $u = t^5 \cdot \sin^3 z$

$\frac{\partial u}{\partial t} = 5t^4 \cdot \sin^3 z$

$\frac{\partial u}{\partial z} = t^5 \cdot 3\sin^2 z \cdot \cos z$

$(\sin^3(x^5))' = 3\sin^2(x^5) \cdot \cos(x^5) \cdot 5x^4$

(8) $v = x^4 \cdot \cos^2 y - y^4 \cdot \sin^3 \cdot (x^5)$

$\frac{\partial v}{\partial x} = 4x^3 \cdot \cos^2 y - y^4 \cdot 5x^4 \cdot 3\sin^2(x^5) \cdot \cos(x^5)$

$\frac{\partial v}{\partial y} = x^4 \cdot 2\cos y \cdot (-\sin y) - 4y^3 \cdot \sin^3(x^5)$

$= -2x^4 \cdot \cos y \cdot \sin y - 4y^3 \cdot \sin^3(x^5)$

(9) $1,04^{2,03}$

$z = x^y$

$x_0 = 1 \Rightarrow \Delta x = 0,04$

$y_0 = 2 \Rightarrow \Delta y = 0,03$

$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}\Big|_{(1;2)} = 2 \cdot 1 = 2$

$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x\Big|_{(1;2)} = 1 \cdot \ln 1 = 0 \Rightarrow 1,04^{2,03} \approx 1^2 + 2 \cdot 0,04$

$\approx 1,08$

(10) $z = \sqrt{1,04^2 + 3,01^2}$

$z = \sqrt{x^2+y^2}$

$x_0 = 1 \Rightarrow \Delta x = 0,04$

$y_0 = 3 \quad \Delta y = 0,01$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Bigg|_{(1;3)} = \frac{1}{\sqrt{1+9}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Bigg|_{(1;3)} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$z(1;3) = \sqrt{10}$

$$z \approx \sqrt{10} + \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{9}{\sqrt{10}} \approx \frac{20}{\sqrt{10}} \approx 2\sqrt{10} \approx 6,325$$

26.02.20.

$u = u(x;y)$; $x = x(t)$; $y = y(t)$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$f(u,v) = z$; $u = u(x,y)$; $v = v(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

(I) Найти $\cancel{\frac{\partial z}{\partial t}}$ $\frac{dz}{dt}$ / (1) $z = x^2y^3$

$x = t^3 + 2$

$y = 3t^4 - 1$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \cdot y^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 \cdot x^2$$

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2$$

$$\frac{dy}{dt} = 12t^3$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = 2x \cdot y^3 \cdot 3t^2 + 3y^2 \cdot x^2 \cdot 12t^3$$

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \underbrace{\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt}}_{\text{số hạng 1}} + \underbrace{\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}}_{\text{số hạng 2}}}$$

* Chú ý: z biểu diễn qua bao nhiêu nghiệm thì $\frac{dz}{dt}$ có bấy nhiêu số hạng

② $z = e^{xy} \cdot \ln(x+y)$

$x = 2t^2$

$y = \ln t$

$$\frac{dz}{dt} = \left(e^{xy} \cdot y \cdot \ln(x+y) + e^{xy} \cdot \frac{1}{x+y}\right) \cdot 4t + \left(e^{xy} \cdot x \cdot \ln(x+y) + e^{xy} \cdot \frac{1}{x+y}\right) \cdot \frac{1}{t}$$

③ $\frac{\partial z}{\partial u}$; $\frac{\partial z}{\partial v}$

$z = \sqrt{xy}$; $x = \cancel{1xy}\ \ln u$

$y = \ln v$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{2\sqrt{xy}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{xy}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{y}{2\sqrt{xy}} \cdot \frac{1}{u} + 0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 0 + \frac{x}{2\sqrt{xy}} \cdot \frac{1}{v} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{v}$$

(II) Найти $\frac{\partial z}{\partial t} = ?$ $\frac{dz}{dt} = ?$

(1) $z = \arctan \frac{xt}{y}$

$x = \tan t$

$y = e^{t^2+1}$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}t\right)^2}$$

Vì $z(x;y;t)$ nên $\frac{dz}{dt}$ có 3 số hạng

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \boxed{\frac{\partial z}{\partial t}}$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{t}{y}x\right)^2} \cdot \frac{t}{y} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} + \frac{1}{1+\left(\frac{xt}{y}\right)^2} \cdot \left(-\frac{xt}{y^2}\right) \cdot 2t \cdot e^{t^2+1}$$

$$+ \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}t\right)^2} \cdot \frac{x}{y}$$

(2) $F(x,y) = 0$

неявно заданная ф-ция $y = f(x)$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_x} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

$$dF(x,y) = d0 \qquad \frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot dy = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot dx = -\frac{\partial F}{\partial y}\cdot dy$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$$

Với hàm ẩn :

$F(x;y) = 0$

① $y = f(x)$

$$\frac{dy}{dx}\cancel{\frac{\partial z}{\partial x}} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$$

$F(x, y, z) = 0$

$z = z(x, y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$$

② $F(x, y, z) = 0$

$z = z(x; y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$$

02.03.20.

– Неяв. ~~произ.~~ функ. и их производные

$y = y(x)$ – неявный, если $F(x, y) = 0$

Подстановка $y = y(x)$ в урав-ние $F(x, y(x)) = 0$

① Если неявная ф-ция задане $F(x, y) = 0$, то

$$dF(x, y) = d0$$

Дифференциал

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx = \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/dx}{\partial F/dy}$$

Т.к $\frac{dy}{dx} = y'$.

② $F(x, y, z) = 0$ задает неявно заданную ф-ию

$z = z(x, y)$

$dF(x, y, z) = d0$

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0$$

$$dz = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} dx - \frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} dy \quad (1)$$

Теоретически $dz = \frac{-\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad (2)$

Сравнивание (1) и (2) Дф. ham cua ham ẩn

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}$$

Однородная функция

$z = z(x, y)$ - однородная ~~снижени~~ степени p, если

$\forall (x, y) \in R^2$ и нараметра t

$$z(tx, ty) = t^p z(x, y)$$

$z = x^2 + xy + y^2$

$z(tx, ty) = t^2x^2 + txty + t^2y^2 = t^2(x^2 + xy + y^2)$

1) $z = \cos(x + y)$ — НЕТ

2) $z = \cancel{\cos\frac{x+y}{xy}}$ $\cos\frac{x+y}{x-y}$

3) $z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{x+y}}$

см. 2) $z = \cos\cancel{t+x+y}\ \cos\frac{tx+ty}{tx-ty} = t^0 \cos\frac{x+y}{x-y}$

– степени 0

см. 3) $z(x,y) = \sqrt{\frac{t^2x^2+t^2y^2}{tx+ty}} = \sqrt{\frac{t^2}{t}\cdot\frac{x^2+y^2}{x+y}} = t^{1/2}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x+y}}$

– степени 1/2

* Теорема Эйлера для однородной функции.

Пусть $z(x,y)$ дифф много на $E \in R^2$ и однородной степени p тогда выполнина следующее:

$$\frac{\partial z}{\partial x}x + \frac{\partial z}{\partial y}y = p\cdot z(x,y)$$

Рассмотрим сложн. фун.

$z = z(x(t); y(t))$

$x(t) = x_0 t$

$y(t) = y_0 t$

$(x_0, y_0) \in E$

Найдем ~~ф~~ дифф. $z(tx_0; ty_0) = t^p \cdot z(x_0; y_0)$

левая часть

$A = dz = z'_x(tx_0; ty_0)\cdot dx + z'_y(tx_0; ty_0)\,dy$

$z'_t = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot x_0 + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot y_0$

Тогда учитывая

$dx = x_0\,dt$

$dy = y_0\,dt$

$\Rightarrow A = dz = (z'_x x_0 + z'_y \cdot y_0)\, dt$

<u>правая часть</u>:

Произ. $pt^{p-1} \cdot z(x_0; y_0)$

$$d(t^p \cdot z(x_0; y_0)) = p \cdot t^{p-1} \cdot z(x_0; y_0) \cdot dt$$

$$(z'_x \cdot x_0 + z'_y \cdot y_0)\, dt = p \cdot t^{p-1} \cdot z(x_0; y_0)\, dt$$

Пусть $t = 1 \Rightarrow z'_x \cdot x_0 + z'_y \cdot y_0 = p \cdot z(x_0; y_0)$

<u>Пример</u>: $z = x^2 + 3xy + 5y^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cancel{2y}\ 3x + 10y$$

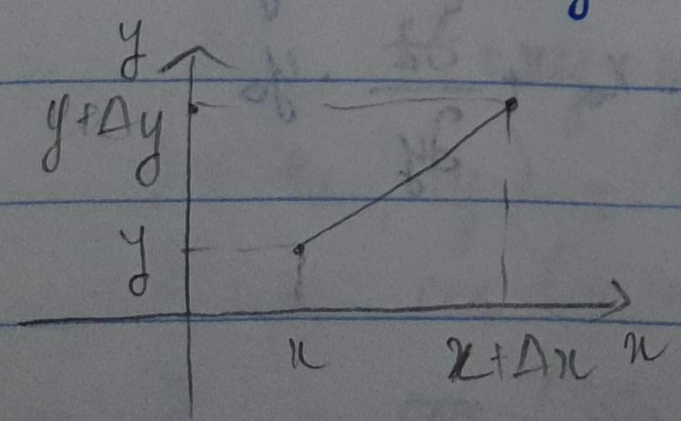
$$(2x + 3y)x + (3x + 10y)y = 2x^2 + 3xy + 3xy + 10y^2$$
$$= 2(x^2 + 3xy + 5y^2)$$

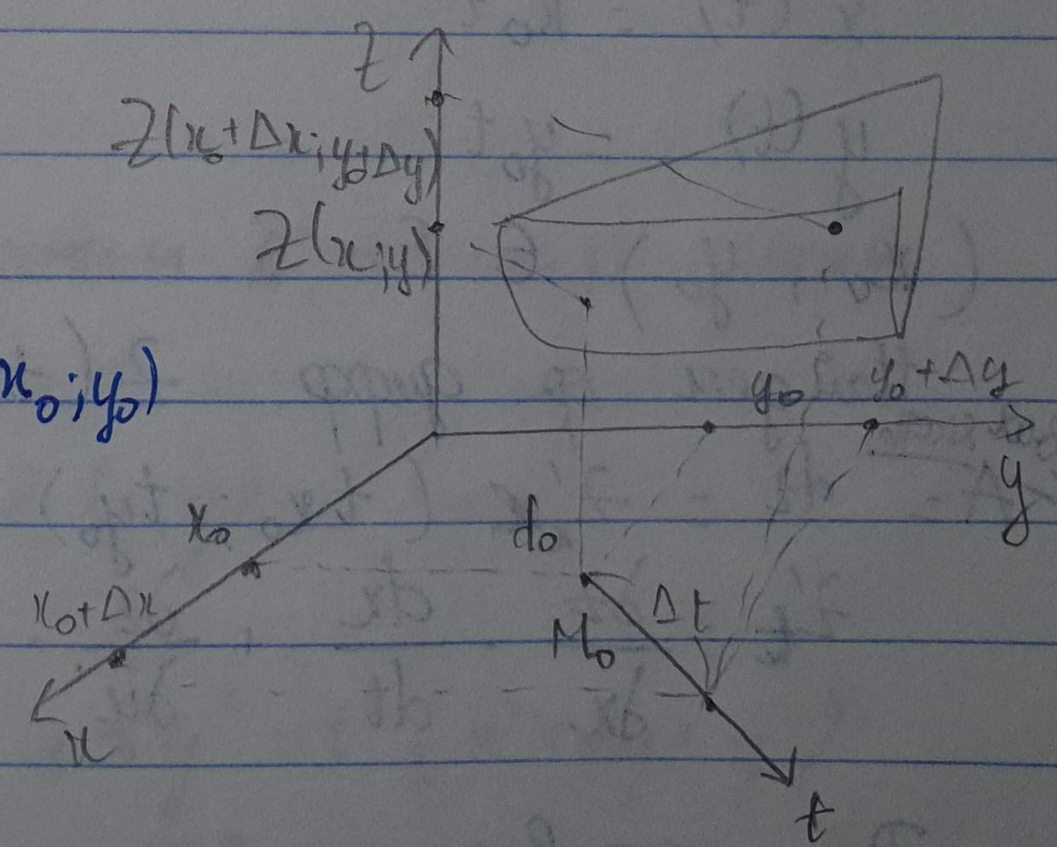
$\Rightarrow$ степени 2.

Пусть $z(x, y)$ задана в некоторые ф-ция получит какое

$$\Delta_l z = z(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - z(x_0; y_0)$$

$$\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$





$\lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l} = \frac{\partial z}{\partial l}$ наз. производ. фун. z по направлению l

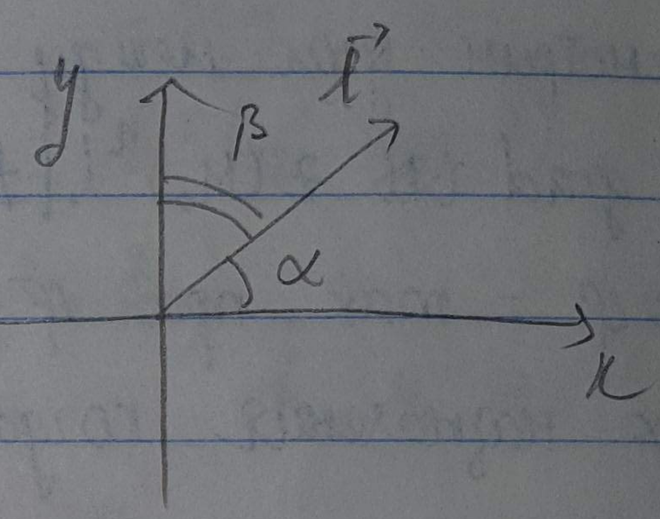
$x = x_0 + \Delta x = x_0 + \Delta l \cdot \cos\alpha$

$y = y_0 + \Delta y = y_0 + \Delta l \cdot \cos\beta$

$z = z(x, y) = z(x(\Delta l); y(\Delta l))$

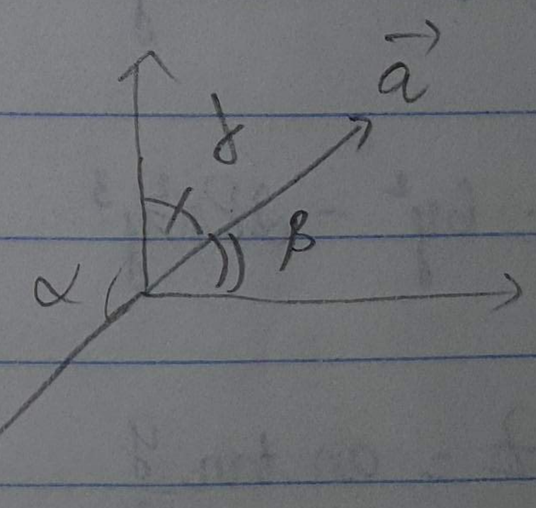
$\cancel{\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial}}$ $z(x; y)$

$$\boxed{\frac{dz}{d\vec{l}} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \underbrace{\frac{dx}{d\vec{l}}}_{\cos\alpha} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \underbrace{\frac{dy}{d\vec{l}}}_{\cos\beta} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \cos\beta}$$



$\vec{a} = \{x_a; y_a\}$

$\vec{a}_0 = \left\{ \underbrace{\frac{x_a}{|\vec{a}|}}_{\cos\alpha}; \underbrace{\frac{y_a}{|\vec{a}|}}_{\cos\beta} \right\}$ $|\vec{a}_0|^2 = 1^2$



$\vec{a} = \{x_a; y_a; z_a\}$

$\vec{a}_0 = \left\{ \underbrace{\frac{x_a}{|\vec{a}|}}_{\cos\alpha}; \underbrace{\frac{y_a}{|\vec{a}|}}_{\cos\beta}; \underbrace{\frac{z_a}{|\vec{a}|}}_{\cos\gamma} \right\}$

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

$z = z(x, y)$ в точке $M(x_0; y_0)$ наз. вектор

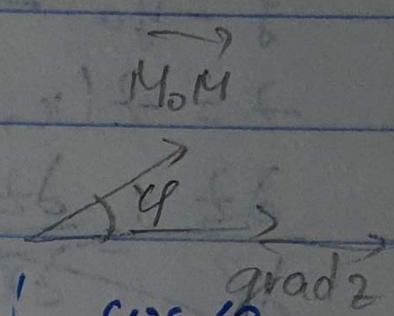
$$\overrightarrow{\text{grad}\, z\,(M)} = \left\{ \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_M ; \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_M \right\}$$

$\overrightarrow{\text{grad}}$ (vecto gradien)

$$\overrightarrow{M_0M}\,(\text{орт}) = \{\cos\alpha ; \cos\beta\}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}\, z\,(M)} : \overrightarrow{M_0M}\,(\text{орт}) = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta$$

Рассмотрим угол между $\overrightarrow{M_0M}$ и $\overrightarrow{\text{grad}\, z}$ φ, тогда



$$|\text{grad}\, z(M_0)| \cdot |\overrightarrow{M_0M}\,(\text{отр})| \cdot \cos\varphi = |\text{grad}\, z| \cdot \cos\varphi$$

$\cos\varphi = \max$ при $\varphi = 0$, то произ польная про. достигает max назначения когда $\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_{max} = |\overrightarrow{\text{grad}\, z}|$

Д.з.2.

(I) Найдите частные произ. 1-ого порядка.

2.1. $z = x^3 + 2y^3 - 7x^2y^4$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 14xy^4$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 6y^2 - 28x^2y^3$$

2.9 $z = \arctan\frac{y}{x}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}}$$

(2.14) $z = y^2 \cos(2y^2 - 4xy + 2)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -y^2(-4y)\sin(2y^2 - 4xy + 2) = 4y^3 \sin(2y^2 - 4xy + 2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y\cos(2y^2 - 4xy + 2) + y^2(4y - 4x)(-\sin(2y^2 - 4xy + 2))$$

$$= 2y\cos(2y^2 - 4xy + 2) - (4y^3 - 4xy^2)\sin(2y^2 - 4xy + 2)$$

(2.16) $z = y^2 \log_5(y^3 - 3xy + 7)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2(-3x) \cdot \frac{1}{\ln 5(y^2 - 3xy + 7)} = \frac{-3xy^2}{\ln 5(y^2 - 3xy + 7)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y \cdot \log_5(y^3 - 3xy + 7) + y^2(3y^2 - 3x) \cdot \frac{1}{\ln 5(y^2 - 3xy + 7)}$$

$$= 2y \cdot \log_5(y^3 - 3xy + 7) + \frac{3y^4 - 3xy^2}{\ln 5(y^2 - 3xy + 7)}$$

(2.20) $u = \left(\frac{x}{y}\right)^z$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cancel{z\left(\frac{x}{y}\right)} \cancel{z\left(\frac{1}{y}x\right)^{z-1}} \quad z \cdot \frac{x}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-xz}{y^2}\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^z \cdot \ln\frac{x}{y}$$

(2.29) Найти u'_x и u'_y, если $u = f(t)$ и $t = \frac{y}{x}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-y}{x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x}$$

(2.33) $\frac{dz}{dt} = ?$

$$z = x \cdot \sin\frac{x}{y}$$

$$x = 1 + 3t$$

$$y = \sqrt{1+t^2}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \cancel{+ \frac{\partial z}{\partial t}}$$

$$= \left(\sin\frac{x}{y} + x \cdot \frac{1}{y} \cdot \cos\frac{x}{y}\right) \cdot 3 + x\left(\frac{-x}{y^2}\right) \cdot \cos\frac{x}{y} \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$= 3\sin\frac{x}{y} + \frac{3x}{y} \cdot \cos\frac{x}{y} - \frac{x^2}{y^2} \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \cos\frac{x}{y}$$

(2.34) $\frac{\partial z}{\partial t} = ?$; $\frac{dz}{dt} = ?$

(1) $z = e^{\frac{x^2+y^2}{\sqrt{t}}}$ u $x = \sin t$, $y = \tan t$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = e^{\frac{x^2+y^2}{\sqrt{t}}} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)(x^2+y^2) \cdot t^{-3/2}$$

$$= \frac{-e^{\frac{x^2+y^2}{\sqrt{t}}}(x^2+y^2)}{2 \cdot \sqrt{t^3}}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial t}$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{t}} \cdot \cos t \cdot e^{\frac{x^2+y^2}{\sqrt{t}}} + e^{\frac{x^2+y^2}{\sqrt{t}}} \cdot \frac{2y}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} - \frac{e^{\frac{x^2+y^2}{\sqrt{t}}}(x^2+y^2)}{2\sqrt{t^3}}$$

② $z = \ln(x + \sqrt{t^2+y^2})$ и $x = t^2+1$, $y = e^t$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{t}{(x+\sqrt{t^2+y^2})\sqrt{t^2+y^2}}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial t}$$

$$= \frac{2t}{x+\sqrt{t^2+y^2}} + \frac{y\cdot e^t}{(x+\sqrt{t^2+y^2})\sqrt{t^2+y^2}} + \frac{t}{(x+\sqrt{t^2+y^2})\sqrt{t^2+y^2}}$$

⑤ $z = e^{xy}$ и $y = \varphi(x)$

2.37 Найдите в точке произ. ф-ции $y = y(x)$ заданной неявно.

в) $(1+2x)e^{y/x} - x = 0$, $(-1;0)$

$$F'_x = 2e^{y/x} + (1+2x)\cdot e^{y/x}\cdot\left(\frac{-y}{x^2}\right) - 1$$

$$= 2\cdot e^{y/x} - \frac{y}{x^2}(1+2x)\cdot e^{y/x} - 1\Big|_{(-1;0)} = 1$$

$$F'_y = (1+2x)e^{y/x}\cdot\frac{1}{x}\Big|_{(-1;0)} = 1$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -1$$

04.03.2020.

① Найти произ. ф-ции

$u = xy - \frac{x}{z}$ в точке $A(-4;3;1)$ по направлению $\vec{AB}$

$B(1;4;-2)$

$\vec{AB} = (5;1;-3)$ дано нам на А теоретическ $\vec{AB}$.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A = y - \left.\frac{1}{z}\right|_{(-4;3;1)} = 2$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A = x\Big|_A = -4$$

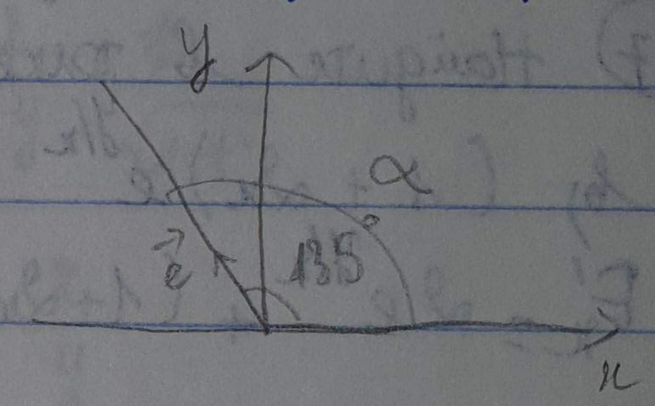
$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A = \left.\frac{x}{z^2}\right|_A = -4$$

$$\overrightarrow{grad}\,(2;-4;-4)\cdot\overrightarrow{AB} = 10-4+12 = 18.$$

② $z = 3x^4 + y^3 + xy$, $M(1;2)$ в напр. луча, обр с осью Ox угол $135°$.

$$\vec{e}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$\cos 135°$ $\sin 135°$



$$z'_x\big|_M = 12x^3 + y = 14$$

$$z'_y\big|_M = 3y^2 + x = 13$$

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial z}{\partial x}(M)\cdot\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}(M)\cdot\sin\alpha$$

$$\overrightarrow{grad}\,(M)\,(14;13)$$

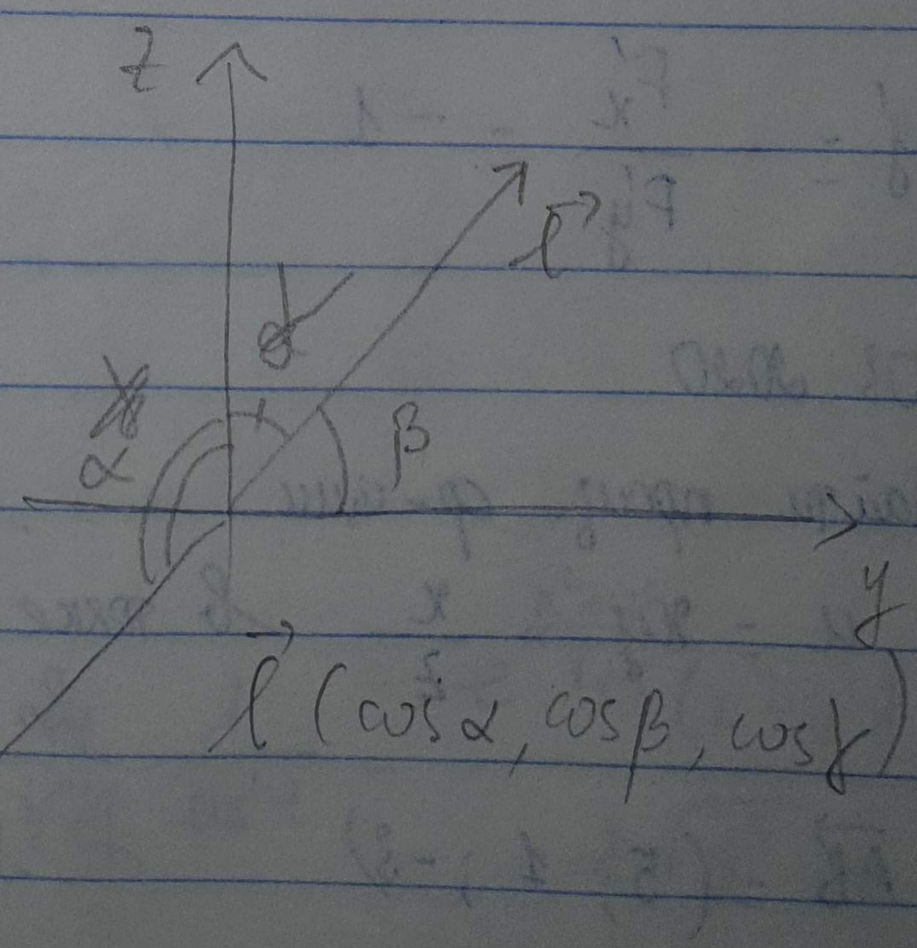
$$\frac{\partial z}{\partial \vec{e}}(M) = 14\cdot\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) + 13\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

(2.1)

$$\overrightarrow{AB} = (5;1;-3)$$

$$\vec{l} = \left(\frac{5}{\sqrt{35}};\ \frac{1}{\sqrt{35}};\ \frac{-3}{\sqrt{35}}\right)$$

$$\overrightarrow{grad}\,(A)\cdot\overrightarrow{AB} = 2\cdot\frac{5}{\sqrt{35}} - \frac{4}{\sqrt{35}} + \frac{12}{\sqrt{35}} = \frac{18}{\sqrt{35}}$$



③ $\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}$ в точке $M(1;1)$, если $z = f(x^2+xy+2x+2y-1)$

$f'(5) = -2\sqrt{13}$

$\vec{l} = (3;2)$

<u>сл</u>: $t(x;y) = x^2+xy+2x+2y-1$

$z = z(t(x;y))$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{dz}{dt}\cdot(2x+y+2)$$

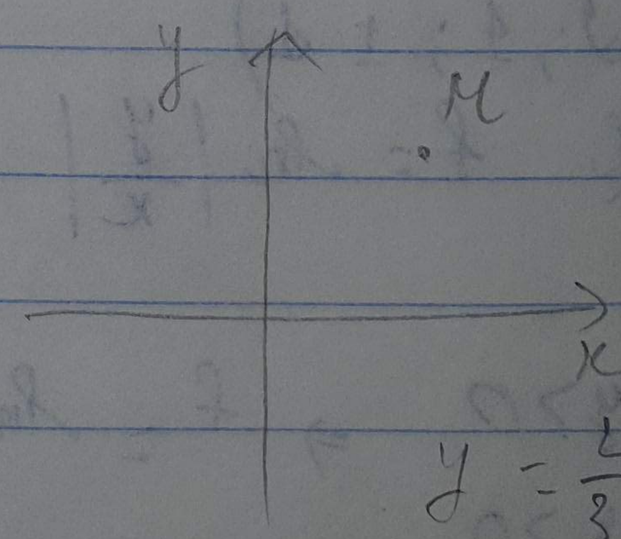
$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_M = \frac{dz}{dt}\Big|_M \cdot 5 = -10\sqrt{13} \Leftarrow \frac{dz}{dt}\Big|_M = -2\sqrt{13}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{dz}{dt}(x+2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_M = -2\sqrt{13}\cdot 3 = -6\sqrt{13}$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}\ ;\ \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\Big|_M = -30-12 = -42$$



$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

$$\cancel{\text{сл}: z = f\left(x^2 + x\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right) + 2x + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3} - 1\right)}$$

$$\cancel{z = f\left(\frac{5x^2}{3} + \frac{11}{3}x - \frac{1}{3}\right)}$$

$$\cancel{z'_x(x) = f'\left(\frac{5}{3}x^2 + \frac{11}{3}x - \frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{10}{3}x + \frac{11}{3}\right)}$$

$z'_x(1) = -2\sqrt{13} \cdot 7 = \cancel{-14\sqrt{13}}$

④ Решить уравнение ф-ции $\overrightarrow{\text{grad} f} = \vec{0}$

$$f = 2z^3 + x^2 + 2y^2 + xy + 3x - 2y - 6z + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y + 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y + x - 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 6z^2 - 6$$

$$\begin{cases} 2x + y + 3 = 0 \\ 4y + x - 2 = 0 \\ 6z^2 - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cancel{\begin{cases} x = \frac{-y-3}{2} \\ y = \frac{2-z}{4} \\ z = \pm 1 \end{cases}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = \pm 1 \end{cases}$$

$-1/4 - 3$

$\frac{-1-12}{4}$

$\cancel{* \; z = 1 \to y = -1/4}$

$\cancel{x = -13/8}$

$\Rightarrow (-2; 1; \pm 1)$

⑤ $f = \ln\left|\frac{y}{x}\right|$; $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$; $B(1; -1)$

$$* \begin{cases} y > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow f = \ln\frac{y}{x}$$

$$f'_x = \frac{-y}{x^2} \cdot \frac{x}{y} = \frac{-1}{x}$$

$$f'_y = \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{y}$$

$\text{grad} f(A) (-2 ; 4)$

$* \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases} \Rightarrow f = \ln\left(\frac{-y}{x}\right)$

$f'_x = \frac{y}{x^2}\left(\frac{-x}{y}\right) = \frac{-1}{x}$

$f'_y = \left(\frac{-x}{y}\right)\cdot\left(\frac{-1}{x}\right) = \frac{1}{y}$

$\text{grad} f(B) (-1 ; -1)$

$\cos\varphi = \frac{(-2)(-1) + 4(-1)}{\sqrt{(-2)^2+4^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}} = \frac{2-4}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{2}} = \frac{-2}{\sqrt{40}} = \frac{-1}{\sqrt{10}}$

⑥ ~~Trouver~~ $z = x^2 - xy + y^2$, $M(-1; 2)$

$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \text{grad} f(M) \cdot \vec{l} = |\text{grad} f(M)| \cdot \underbrace{|\vec{l}|}_{1} \cdot \cos\varphi$

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y$

$\frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y$

$\overrightarrow{\text{grad}}(M) (-4 ; 5)$

$\vec{l} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\text{grad}}(M)$, $|\vec{l}| = 1$

$|\overrightarrow{\text{grad}}(M)| = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$

$\vec{l}\left(\frac{-4}{\sqrt{41}} ; \frac{5}{\sqrt{41}}\right)$

(7) $z = 3x^2y + x + y^3$, $A(1;2)$, $\vec{l} = a\vec{i} + 30\vec{j}$

$a = ? \Rightarrow \max$

11.03.20. Сем. 5.

(2.52) $f(B) \approx ?$, если $f(A) = -8$, $AB = 0{,}06$, $\overrightarrow{grad}(A) = (12;5)$

$\cos(\overrightarrow{grad}(A), \overrightarrow{AB}) = \frac{-1}{3}$

$$\lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta l} \approx \frac{\Delta f}{AB}; \quad \frac{f(B) - f(A)}{AB} \approx \frac{\partial f}{\partial l}$$

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \overrightarrow{grad} f(A) \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{grad} f(A)| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos(\overrightarrow{grad}(A), \overrightarrow{AB})$$

$$= 13 \cdot 0{,}06\left(\frac{-1}{3}\right) = -0{,}26$$

$$\frac{f(B) + 8}{0{,}06} \approx -0{,}26$$

$f(B) \approx -8{,}0156$.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} dz$$

$f(t)$

$f(B) = f(t)$

$$\Delta f(\Delta x, \Delta y) \approx \frac{\partial f|_A}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f|_A}{\partial y} \cdot \Delta y$$

(3.1). Найти Δf и df в т. $(1;1)$, если $f(x,y) = x^2 y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy\Big|_A = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2\Big|_A = 1$$

(2;5)

$$\Rightarrow df = 2xy\,dx + x^2 dy = 2dx + dy$$

$$\Delta f \approx 2\Delta x + \Delta y$$

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\cdot\Delta x + \frac{f''(x)\Delta x^2}{2} + \dots$$

$$f(x+\Delta x; y+\Delta y) = f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Delta y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2 +$$

$$+ 2\frac{\partial f^2}{\partial x\cdot\partial y}\cdot\Delta x\cdot\Delta y + \dots$$

(3.5). Найти частные производные 2-ого порядка.

$$\frac{\partial f}{\partial x\cdot\partial y} \text{ (смешной)} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ (вт. по } x\text{)} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \text{ (вт. по } y\text{)} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

a) $f(x, y) = xy\,(x^3 + y^3 - 3)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\,(x^3 + y^3 - 3) + 3x^3y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\,(x^3 + y^3 - 3) + 3xy^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y \cdot 3x^2 + 9x^2y = 3x^2y + 9x^2y = 12x^2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x \cdot 3y^2 + 9xy^2 = 12xy^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = x^3 + y^3 - 3 + x(3x^2) + 3y^3$$

$$= x^3 + y^3 + 3x^3 + 3y^3 - 3$$

$$= 4x^3 + 4y^3 - 3$$

3.6. Покажите, что если $u = xz + e^{yz} + y$, то

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \cdot \partial y \cdot \partial z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = z$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = ze^{yz} + 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x + ye^{yz}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \cdot \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = e^{yz} \cdot z \cdot y + e^{yz}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{yz} \cdot z \cdot y + e^{yz}\right) = 0$$

$$\boxed{d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx\, dy}$$

3.9. Найти 2-ого дифференциалы:

$$z = e^{3x-2y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3e^{3x-2y} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 9e^{3x-2y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2e^{3x-2y} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4e^{3x-2y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6 \cdot e^{3x-2y}$$

$$d^2 f = 9e^{3x-2y} dx^2 + 4e^{3x-2y} dy^2 - 12 e^{3x-2y} dx\, dy$$

3.10. Найдите точки, в которых 2 радиент ф-ции $= 0$.

$$z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 4 - 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 2 = 0$$

$$x + f - 4x - 2 = 0$$

$$6 - 3x = 0$$

$$x = 2$$

$$y = 4 - 4 = 0$$

$(2; 0)$

3.12. $f(P) = f(x, y)$

$f(A) = 2;\ f(B) = 2{,}03;\ f(C) = 1{,}92$

$A(2;6);\ B(2;6{,}01);\ C(2{,}02;6)$

Найти $\approx f'(A)$ и значение про-ной по направлению $\vec{l} = (3;4)$

$$f(B) \approx f(A) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_A \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_A \Delta y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_A \approx \frac{f(B) - f(A)}{\Delta y}\Big|_A = \frac{2{,}03 - 2}{0{,}01} = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_A \approx \frac{f(C) - f(A)}{\Delta x}\Big|_A = \frac{1{,}92 - 2}{0{,}02} = -4$$

$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(A) \approx (-4;3)$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \overrightarrow{\text{grad}} f(A) \cdot \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = \frac{-12+12}{|\vec{l}|} = 0$$

16.03.20.

Геом смысл Чпр.

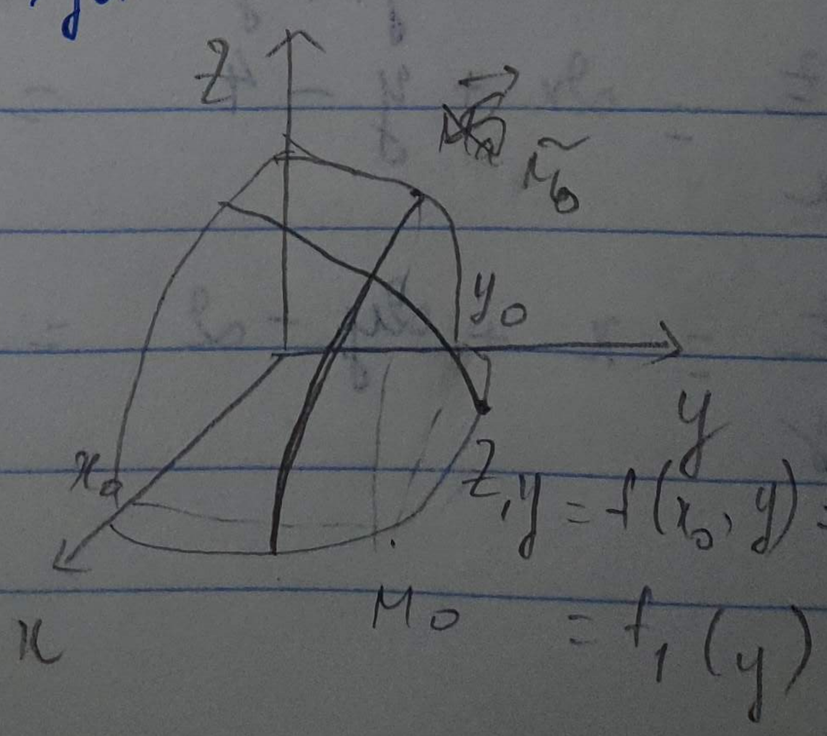
$z = f(x,y)$ (f'_x, f'_y - непр в M_0)

$M_0 \in D \subset R^2$ $M_0(x_0, y_0)$

$z = f(x,y)$

$\tilde{M}_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

$x = x_0$



$y = y_0$

$z_2(x) = f(x, y_0) = f_2(x)$

$z = f_2'(x_0)(x - x_0) + f_2(x_0)$

$f_2'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$

$\parallel$

$\frac{df_2}{dx}(x_0)$

$l_2: z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + f(x_0, y_0)$

$l_1: z = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$

$\cancel{l_1 \perp l_2}$ $f_2'(x_0) = \tan\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)$

$\alpha = \widehat{l_2^{*}, Ox}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = \tan\beta$

$\beta = \widehat{l_1 Oy}$

(Π): $l_1 \subset (\Pi)$

$l_2 \subset (\Pi)$

Т.к. l_1, l_2 – кас. $\Rightarrow$ кас. пл-сть

к пов $z = f(x, y)$ в $M_0(x_0; y_0)$

Ур. кас. плоскости.

$Ax + By + Cz + D = 0$

$\vec{n} = (A, B, C) \perp (\Pi)$

$\tilde{M}_0 \in (\Pi) : Ax_0 + By_0 + C\overset{f(x_0;y_0)}{\overset{\shortparallel}{z_0}} + D = 0$

$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$

$C \neq 0 \Rightarrow z - z_0 = -\frac{A}{C}(x-x_0) - \frac{B}{C}(y-y_0)$

$= \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{M_0}(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{M_0}(y-y_0)$

* $x = x_0 \cap (\Pi) = l_1$

$x = x_0$

$z - z_0 = \frac{-A}{C}(x-x_0) - \frac{B}{C}(y-y_0)$

$l_1 : z - z_0 = \frac{-B}{C}(y-y_0)$

$z = \frac{-B}{C}(y-y_0) + z_0 \Rightarrow \boxed{\frac{-B}{C} = \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)}$

* $y = y_0 \cap (\Pi) = l_2$

$\boxed{\frac{-A}{C} = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)}$

$$\boxed{z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)(y-y_0)}$$

кас. плоскость: (mph tiếp tuyến)

Замеч: 1) $\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)(y-y_0) + (-1)(z-z_0) = 0$

2) Если пов-сть $F(x,y,z) = 0$, то кас. пл.

$\underset{\underset{f(x,y)}{\shortparallel}}{F(x,y,z)} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-F'_y}{F'_z}$

$F'_z(M_0) \neq 0$

$F'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(\ldots)(z - z_0) = 0$

Частная произ. высших порядк

$z = f(x, y)$

$D \subset R^2$

Пусть $\exists f'_x, f'_y \ \forall M \in D$

$f'_x(x, y) \to f''_x, \ f''_y \Rightarrow$ л. пр. 2ого пор.

$$(f'_x)'_x = f''_{xx} = \cancel{\frac{\partial f}{\partial x}} \ \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$\partial x \cdot \partial x$

$$(f'_x)'_y = f''_{xy} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$(f'_y)'_x = f''_{yx} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \cdot \partial x}$$

$$(f'_y)'_y = f''_{yy} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Пример : $z = 3xy^2$

$z'_x = 3y^2 \Rightarrow z''_{xx} = 0 \; ; \; z''_{xy} = 6y$

$z'_y = 6xy \Rightarrow z''_{yx} = 6y \; ; \; z''_{yy} = 6x$

* Чтó ý : z'_{y^2} (дифф. нам бас 1 сна y^2) $= 3x$

z''_{y^2} ~~(f)~~ $= z''_{yy} = 6x$

z''_{xy}, z''_{yx} – смешанные производные.

Теорема : (о рав-ве смеш. произ.)

Если для $z = f(x,y)$, f''_{xy} и f''_{yx} – непрерывны в окр. некоторых $M_0(x_0; y_0)$ то

$$f''_{xy}(M_0) = f''_{yx}(M_0)$$

Д-во :

$$W = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)] - [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)]$$

* $[x_0, x_0 + \Delta x]$

$\varphi(x) = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)$

$W = \Delta\varphi = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)$

по теореме Лагранжа : $\exists\, \varepsilon \in (x_0, x_0 + \Delta x)$

$W = \Delta\varphi = \varphi'(\varepsilon) \cdot \Delta x = (f'_\varepsilon(\varepsilon, y_0 + \Delta y) - f'_x(\varepsilon, y_0)) \cdot \Delta x$

тео. Л: $[y_0, y_0 + \Delta y]$ $\exists\, z \in (y_0, y_0 + \Delta y)$

$W = f''_{xy}(\varepsilon, z) \cdot \Delta y \cdot \Delta x$

* $[y, y_0 + \Delta y)$

$\psi(y) = f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y_0)$

$W = (f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)) - (f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0))$

$W = \Delta\Psi = \Psi(y_0 + \Delta y) - \Psi(y_0)$

по теор. Л $\exists \alpha \in (y_0, y_0 + \Delta y)$

$W = \Psi'(\alpha) \cdot \Delta y = (f'_y(x_0 + \Delta x, \alpha) - f'_y(x_0, \alpha))\Delta y$

по теор. Л к f'_y $[x_0, x_0 + \Delta x]$

$\exists \beta \in (x_0, x_0 + \Delta x)$

$W = f''_{yx}(\beta; \alpha)\Delta x \cdot \Delta y$

$\Leftrightarrow \exists \alpha, z \in (y_0, y_0 + \Delta y), \exists \varepsilon, \beta \in (x_0, x_0 + \Delta x)$

$f''_{xy}(\varepsilon, z) = f''_{yx}(\beta, \alpha)$

А так как f''_{xy}, f''_{yx} - непр.

$\left.\begin{array}{l}\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0\end{array}\right| \Rightarrow f''_{xy}(\underbrace{x_0; y_0}_{M_0}) = f''_{yx}(\underbrace{x_0; y_0}_{M_0})$

пер. к lim

$\Rightarrow$ теорема доказана.

Дифф. высших порядков.

$z = f(x, y)$: $\exists f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{xy} = f''_{yx}, f''_{yy}$ - непр.

$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$

x, y - независимы $\Rightarrow dx = \Delta x, dy = \Delta y$

$\Rightarrow dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ - ф-ция от x, y

$\Delta(dz) = \underbrace{\frac{\partial(dz)}{\partial x}dx + \frac{\partial(dz)}{\partial y}dy}_{\text{дифф. 2ого порядка.}} + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$

$\alpha, \beta \to 0$ при $\Delta x, \Delta y \to 0$

$d^2 z = \partial(dz)$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$d^2 z = d(dz) = \frac{\partial (dz)}{\partial z} dx + \frac{\partial (dz)}{\partial y} dy$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y} dy\right)\right) dx + \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y} dy\right)\right)\right) dy$$

dx, dy – const

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy\right) dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} dy\right) dy$$

$$\boxed{= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 = d^2 z}$$

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}}$$

$$d^3 z = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} (dx)^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx\, dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3$$

18.03.20.

3.18 (сем 5)

$f(P) = f(x; y)$, $f(A) = -7$; $f(B) = -7{,}02$; $f(C) = -7{,}04$

$A(6; 4)$; $B(6{,}01; 4)$; $C(6; 3{,}98)$. Найти

а) частные производные и 1-ый дифф в т. A.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$ | дифф. в т. A

$$df = -2 \cdot 0{,}01 + 2 \cdot (-0{,}02) = -0{,}06$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(B) - f(A)}{\Delta x} = \frac{-0{,}02}{0{,}01} = -2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f(C) - f(A)}{\Delta y} = \frac{-0{,}04}{-0{,}02} = 2$$ | частные произ. в т. A

$$\overrightarrow{grad}(A) \approx (-2; 2)$$

б) ~~знач~~ значение ф-ции в т. $D(5{,}95; 4{,}02)$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = -2\,dx + 2\,dy$$

$$= -2(-0{,}05) + 2 \cdot 0{,}02 = 0{,}14$$

$$f(D) \approx f(A) + df = -6{,}86 \quad (= -7 + 0{,}14)$$

tiếp tuyến mặt phẳng bề mặt

в) касательную плоскость к поверхности $z = f(P)$ в т. A.

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) + z_0$$

$$x_0 = 6; \quad y_0 = 4; \quad z_0 = -7$$

$$z = -2(x-6) + 2(y-4) - 7$$

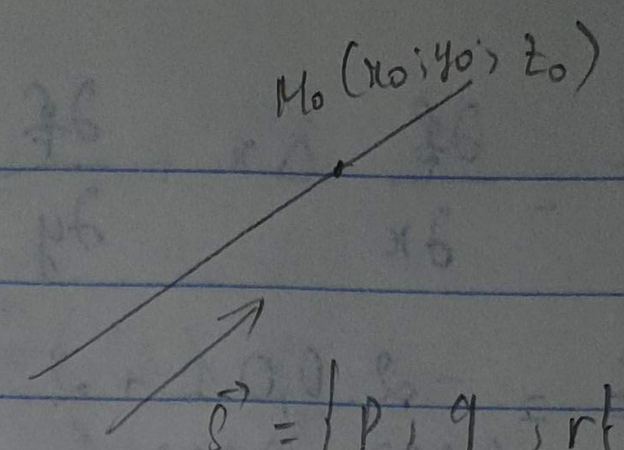
vectơ pháp tuyến

г) нормаль к поверхности $z = f(P)$ в точке A

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$\vec{n} = (A; B; C)$: vectơ нормаль

$$\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$$



$\vec{s} = (-2; 2; -1)$

$$\frac{x-6}{-2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+7}{-1}$$

(g) градиент в т. A

$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(A) = (-2; 2)$

(e) $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \overrightarrow{\text{grad}}(A) \cdot \vec{l_0} = \underbrace{|\overrightarrow{\text{grad}}\, f(A)|}_{2\sqrt{2}} \cdot \underbrace{|\vec{l_0}|}_{1} \cdot \underbrace{\cos\varphi}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{6}$

* Произ. в т. A по направлению, составляющему угол $\frac{\pi}{6}$

(ж) Произ. в т. A по направлению $\overrightarrow{AD}$

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f(A) \cdot \frac{\overrightarrow{AD}}{|AD|}$$ *

$\overrightarrow{AD} = (-0{,}05; 0{,}02) \Rightarrow |AD| = \sqrt{0{,}05^2 + 0{,}02^2} = \frac{\sqrt{29}}{100}$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial l} = \frac{(2 \cdot 0{,}05 + 2 \cdot 0{,}02) \cdot 100}{\sqrt{29}} = \frac{14}{\sqrt{29}}$$

11.5.8 (см 5-6)

$z = 4x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - y^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = ?$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 12x^2 + 6xy + 3y^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 + 6xy - 3y^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 24x + 6y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x + 6y \quad ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6x + 6y$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^n$$

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial z^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

3.15 (сем 5-6) Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в т. M.

(2) $x(y+z)(z-xy) = 8$, $M(2;1;3)$

23.03.20

Формула Тейлора

$z = z(x;y)$, $M_0(x_0;y_0)$

Возьмем x, y из z с координатами $x = x_0 + t\Delta x$

$y = y_0 + t\Delta y$

получим $z = \cancel{z(x(t))}\ z(x(t); y(t))$

t - переменная, $t \in [0;1]$

$$z(t) = z(0) + \frac{z'(0)}{1!}t + \frac{z''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{z^{(n)}(0)}{n!}t^n + \bar{o}(t^n)$$

Если $t = 1$, то формула следующий вид

$$z(1) = z(0) + \frac{z'(0)}{1!} + \frac{z''(0)}{2!} + \dots + \frac{z^{(n)}(0)}{n!} + \bar{o}(1)$$

$z(1) = z(x_0 + \Delta x ; y_0 + \Delta y)$

$z(0) = z(x_0 ; y_0)$

$z'(0) = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$

$x = x_0 + \Delta x \cdot t$

$\frac{dx}{dt} = \Delta x \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = \Delta y$

$\Rightarrow z'(0) = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{M_0} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{M_0} \cdot \Delta y = dz$

$z''(0) = d^2 z$ (подсказка: $z''(0) = (z')'$

$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}\right)$

и так далее по до дифф n-порядк. подставля на 1 формула

получим $z(x_0 + \Delta x ; y_0 + \Delta y) = z(x_0 ; y_0) + \frac{dz}{1!}\Big|_{M_0} + \frac{d^2 z}{2!}\Big|_{M_0} + \dots + \frac{d^n z}{n!}\Big|_{M_0} + \bar{o}(\rho)$

где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

$z = z(x, y)$

$z(M_0) \geq z(M) \ \forall M(x ; y) \in V(M_0)$

M_0 - extr $\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{M_0} = 0 \ ; \ \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{M_0} = 0$

$\left\{ \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right\} = \overrightarrow{\text{grad}\, z}$

$A = f''_{xx}(M_0)$

$B = f''_{xy}(M_0)$

$C = f''_{yy}(M_0)$

1) extr, ecли $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC^2 - B^2 > 0$

2) no extr

$u = f(x; y; z)$

$$H_f = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{vmatrix} \quad \min: \begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 > 0 \end{cases} ; \max \begin{cases} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 < 0 \end{cases}$$

11.5.7. $z = \sin x \sin y$, $d^2 z = ?$

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \sin y \cdot \cos x$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin y \sin x$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos x \cos y$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \sin x \cos y$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin x \sin y$

$\Rightarrow \cancel{d^2 z = \cos x \sin y}$

$\Rightarrow d^2 z = -\sin x \sin y\, dx^2 + 2\cos x \cos y\, dx\,dy - \sin x \sin y\, dy^2$

(1.5.9) $z = xy + \sin(x+y)$; $\frac{\partial z}{\partial x^2} = ?$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + \cos(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin(x+y)$$

(11.5.14) $z = \sin(x + \cos y)$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = ?$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(x + \cos y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin(x + \cos y)$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = +\sin y \cdot \cos(x + \cos y)$$

(11.5.15) $z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $d^2 z = ?$

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{x^2+y^2} ; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} ; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} ; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow d^2 z = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} dx^2 - \frac{4xy}{(x^2+y^2)^2} dx dy + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy^2$$

11.5.16 $z = \cos(x+y)$, $d^2z = ?$

$\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin(x+y)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\cos(x+y)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\cos(x+y)$

$\frac{\partial z}{\partial y} = -\sin(x+y)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\cos(x+y)$

$\Rightarrow d^2z = -\cos(x+y)\,dx^2 - 2\cos(x+y)\,dx\,dy - \cos(x+y)\,dy^2$.

3.14 $f(P) = f(x;y)$; $f(A) = 3$; $f(B) = 2{,}97$; $f(C) = 3{,}08$; $A(3;6)$; $B(3;6{,}01)$; $C(3{,}02;6)$. Найдите приближенно частные производные в точке A и значение производной по направлению $\vec{l} = (3;4)$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_A = \left.\frac{f(C)-f(A)}{\Delta x}\right|_A = \frac{0{,}08}{0{,}02} = 4$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_A = \left.\frac{f(B)-f(A)}{\Delta y}\right|_A = \frac{-0{,}03}{0{,}01} = -3$$

$\Rightarrow \overrightarrow{grad}(A) \approx (4;-3)$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \overrightarrow{grad}(A) \cdot \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = \frac{12-12}{|\vec{l}|} = 0$$

3.15 Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в точке M

(a) $z = \frac{x^2}{2} - y^2$, $M(2;-1;1)$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = x = 2 \; ; \; \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = -2y = 2$$

- Уравнение касательной плоскости:

$z = 2(x-2) + 2(y+1) + 1$

- Нормали к поверхности:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

(б) $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$; $M(1;1;1)$

$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = 2x - 2y - 1\big|_M = -1$

$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = -2x + 2y + 2\big|_M = 2$

$z = -(x-1) + 2(y-1) + 1$

нормаль: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1}$

(в) $z = \ln(x^2+y^2)$; $M(1;0;0)$

$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = \left.\frac{2x}{x^2+y^2}\right|_M = 2$

$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = \left.\frac{2y}{x^2+y^2}\right|_M = 0$

Плоскость:

$z = 2(x-1)$

нет нормали к поверхности т.к. $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = 0$

(2) $x(y+z)(z-xy) = 8$

4.7 Разложите ф-цию $f(x;y)$ по формуле Тейлора в окрестности точки M.

(а) $f(x;y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$; $M(1;-2)$

$f(M) = 2 + 2 - 4 - 6 + 6 + 5 = 5$

$f'\big|_M = 4x - y - 6\big|_M = 0$

$f'' = 4$

$f''' = 0$

$z(1+\Delta x; -2+\Delta y) = 5 + \frac{4}{2!} + \bar{o}\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)$

25.03.20

3.15 2) $x(y+z)(z-xy)=8$ (1) ; $M(2;1;3)$

$F(x;y;z)$

$z=z(x;y)$

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-F'_x}{F'_z}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-F'_y}{F'_z}$

(1) $\Leftrightarrow (xy+xz)(z-xy)=xyz-x^2y^2+xz^2-x^2yz$

$F'_x=yz-2xy^2+z^2-2xyz$

$F'_z=xy+2xz-x^2y$

$F'_y=xz-2x^2y-x^2z$

$\Rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M=\left.\frac{-yz+2xy^2-z^2+2xyz}{xy+2xz-x^2y}\right|_M=\frac{2}{5}=0,4$

$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M=\left.\frac{-xz+2x^2y+x^2z}{xy+2xz-x^2y}\right|_M=\frac{7}{5}=1,4$

Плоскость:

$z=0,4(x-2)+1,4(y-1)+3$

Нормаль:

$\frac{x-2}{0,4}=\frac{y-1}{1,4}=\frac{z-3}{-1}$

4.5 При заданной производственной ф-ции Кобба-Дугласа $Q=AK^{0,9}L^{0,5}$ ($A=const$) установите, как изменится объем выпуска продукции Q (в процентах) при увеличении затрат капитала K и уменьшении трудовых ресурсов L соответственно на 5% и 7%

$Q = AK^{0,9} \cdot L^{0,5}$; $(K+\Delta K;\ L+\Delta L)$

$\Delta K = 0,05K$; $\Delta L = -0,07L$

$Q_1 \approx Q + dQ$

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial K}\Delta K + \frac{\partial Q}{\partial L}\Delta L = 0,9AL^{0,5} \cdot K^{-0,1} \cdot 0,05K + 0,5AK^{0,9} \cdot L^{-0,5} \cdot (-0,07L) = 0,045AL^{0,5}K^{0,9} - 0,035AL^{0,5}K^{0,9}$$

$$= 0,01AL^{0,5}K^{0,9}$$

4.7 Разложите ф-цию $f(x;y)$ по формуле Тейлора в окрестности т. M

а) $f(x;y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$; $M(1;-2)$

$f'_x = 4x - y - 6$; $f''_{xx} = 4$

$f'_y = -x - 2y - 3$; $f''_{yy} = -2$; $f''_{xy} = -1$

$$f(x;y) = 5 + \frac{1}{2!}\underbrace{\left(4(\overset{=\Delta x}{x-1})^2 - 2(x-1)(y+2) - 2(\overset{=\Delta y}{y+2})^2\right)}_{d^2z = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2}$$

$$f = 5 + 2\left(\Delta x^2 - 2\Delta x \cdot \frac{\Delta y}{4} + \frac{\Delta y^2}{16} - \frac{\Delta y^2}{16} - \frac{1}{2}\Delta y^2\right)$$

$$= 5 + 2\left(\Delta x - \frac{\Delta y}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}\Delta y^2$$

$\Rightarrow$ не min не max

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y - 6 = 0 \\ -x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -9 < 0$$

Экстремума нет

* Найдите локальные экстремумы ф-ции

(1.3) $u = x^3 - 2y^2 - 3x + 8y$

$f'_x = 3x^2 - 3$; $f''_{xx} = 6x$; $f''_{xy} = 0$

$f'_y = -4y + 8$; $f''_{yy} = -4$

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow M_1(1;2)$; $M_2(-1;2)$

• $M_1(1;2)$

$f''_{xx} = 6$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -24 < 0 \Rightarrow \text{нет экстремума}$$

• $M_2(-1;2) \Rightarrow f''_{xx} = -6$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 24 > 0 \Rightarrow M(-1;2) - \max.$$

* Тоже ket :

$\Delta > 0$, $f''_{xx} > 0 \to M_0 - \min$

$\Delta > 0$, $f''_{xx} < 0 \to M_0 - \max$

$\Delta < 0 \Rightarrow M_0$ - не является точкой экстр.

$\Delta = 0 \Rightarrow$ требуются дополнительные исследования.

Сем 6-2

Найдите локальные экстремумы ф-ций

1.1 $z = 2x + 8y - x^2 - 2y^2$

$z'_x = 2 - 2x$

$z'_y = 8 - 4y$

$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2 = 0 \\ -4y + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow M_0(1;2)$

$z''_{xx} = -2$; $z''_{yy} = -4$; $z''_{xy} = 0$

$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 8 > 0$

$z''_{xx} < 0 \Rightarrow M_0(1;2)$ - т. max

1.2 $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$

$z'_x = 3 - 2x - y$

$z'_y = 6 - x - 2y$

$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y = -3 \\ -x - 2y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow M_0(0;3)$

$z''_{xx} = -2$

$z''_{yy} = -2$ $\Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0$

$z''_{xy} = -1$

$z''_{xx} < 0 \Rightarrow M_0(0;3)$ - т. max

1.4 $U = x^2 - 2xy + 4y^3$

$U'_x = 2x - 2y$

$U'_y = -2x + 12y^2$

$$\begin{cases} u'_x = 0 \\ u'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2x + 12y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(0;0) \\ M_2\left(\frac{1}{6};\frac{1}{6}\right) \end{array} \right.$$

$$u''_{xx} = 2$$

$$u''_{yy} = 24y$$

$$u''_{xy} = -2$$

* $M_1(0;0) \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0$

$\Rightarrow$ ~~точ~~ $M_1(0;0)$ не явл. т. экст.

* $M_2\left(\frac{1}{6};\frac{1}{6}\right) \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 > 0$, $u''_{xx} > 0$ $\Rightarrow M_2\left(\frac{1}{6};\frac{1}{6}\right)$ - т. min

---

06.04.20.

Условный экстремум

* Определение

- Точка $P_0 \in X$ наз-ется точкой условного максимума (минимума) ф-ции f, если для всех достаточно близких к ней точек $P \in X$ выполняется неравенство

$$f(P) \leq f(P_0) \quad (f(P) \geq f(P_0))$$

- В чем отличие условного экстремума от обычно экстремума? Название "условный" экст. связано с тем, что на переменные наложены дополнительные условия.

- Для приложений наиболее важен случай, когда множество X задано системой уравнений и неравенств. Но пока ограничимся случаем уравнений. Итак, множество X (оно же условие) задано:

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ g_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$ уравнения связи

Задача: Найти экстремумы ф-ции $f(x_1, \dots, x_n)$ при условии, что переменные $x_1, \dots, x_n$ подлиняются уравнениям связи.

* Необходимое условие условного ж-ма.

Пусть ф-ции f и $g_1, \dots, g_m$ определены и имеют непрерывные частные производные в окрестности точки P_0, причем векторы

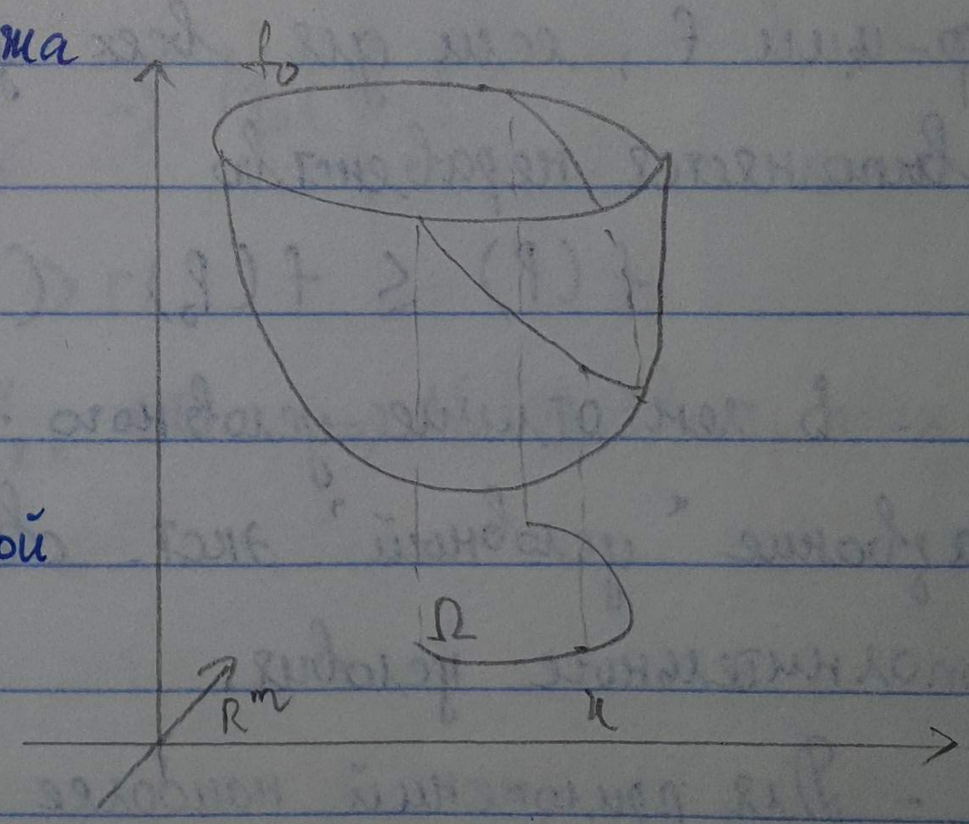
$$\overrightarrow{\operatorname{grad} g_1}(P_0), \dots, \overrightarrow{\operatorname{grad} g_m}(P_0)$$

линейно независимы. Тогда, если P_0 - точка условного экстремума ф-ции f, то найдутся числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, для которых P_0 - стационарная точка ф-ции

$$L = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m g_m(x_1, \dots, x_n)$$

Эта ф-ция наз. ф-цией Лагранжа

- Геометрическая интерпретация множителей Лагранжа:



В точке условного ж-ма градиент исследуемой ф-ции является линейной комбинацией градиентов ф-ций из уравнений связи.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial x_i}$$

* Достаточное условие

- Пусть ф-ции f и $g_1, \dots, g_m$ имеют непрерывные частные производные второго порядка, точка P_0 стационарная точка ф-ции Лагранжа L''_{xx} - матрица размера $n \times n$ с элементами $\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}$

Тогда если эта матрица в точке P_0:

+) положительно определена, то - условный минимум

+) отрицательно определена, то - условный максимум

+) знакопеременная, то экстремума нет.

* Окаймленная матрица гессе (второй способ)

$$H = \begin{array}{c} \\ m \end{array} \overset{n}{\begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & F''_{xx} & F''_{xy} \\ g'_y & F''_{xy} & F''_{yy} \end{vmatrix}}$$

$H > 0$ - условный max

$H < 0$ - условный min

* Пример: метод множителей Лагранжа для ф-ций двух переменных

<u>Задача</u>: Найти локальные условные экстремумы ф-ции нескольких переменных $w = x + 2y$ при условии $g(x;y) = x^2 + y^2 - 5 = 0$

<u>Решение</u>: Составим ф-цию Лагранжа

$$L = w(x;y) + \lambda g(x;y) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$$

Вычислим частные производные ф-ции Лагранжа и приравняем их нулю. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} L'_x = 1 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = 2 + 2\lambda y = 0 \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 - 5 = 0 \end{cases}$$

Для решения этой системы удобно в первых двух уравнениях слагаемые, содержащие множитель λ, перенести в правую часть

$$\lambda = -2\lambda x$$

$$2 = -2\lambda y$$

Затем, поделив друг на друга данные уравнения, получим $\frac{1}{2} = \frac{x}{y}$, от куда $y = 2x$.

Подставляя это равенство в третье уравнение исходной системы, получаем $x_{1,2} = \pm 1$ и затем $y_{1,2} = \pm 2$, $\lambda_{1,2} = \mp \frac{1}{2}$.

Таким образом, мы получили две точки: $M_1(1; 2; -0,5)$, $M_2(-1; -2; 0,5)$

Далее необходимо составить окаймленную матрицу Гессе

$$H = -\begin{pmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ g'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

Если $\det H > 0$, то ф-ция $w(x; y)$ имеет в соответствующей точке условный минимум, а если $\det H < 0$ – условный максимум.

В нашей задаче $\det H(M_1) = -20 < 0$, $\det H(M_2) = 20 > 0$.

Следовательно, в точке $P_1(1; 2)$ ф-ция $w(x; y)$ имеет условный максимум, а в точке $P_1 = (-1; -2)$ – условный минимум.

08.04.20

① Используя метод Лагранжа и метод исключения переменной, найдите условные локальные экстремумы ф-ции z при условии

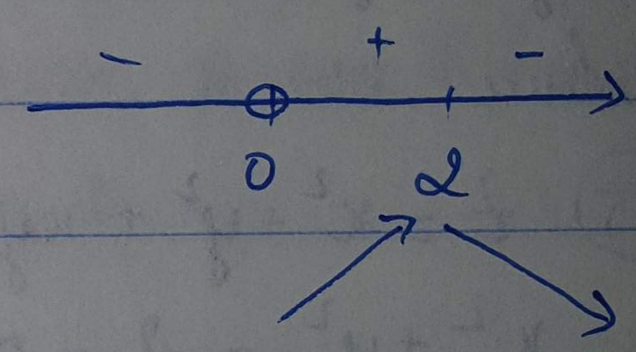
22 $z = \frac{y}{x^2}$; $y - x + 1 = 0$

$y - x + 1 = 0 \Leftrightarrow y = x - 1$

$\Rightarrow z = \frac{x-1}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0)$

$z' = \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{-x+2}{x^3}$

$z' = 0 \Rightarrow \frac{-x+2}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x = 2$



Ф-ция Лагранжа :

$L = \frac{y}{x^2} + \lambda(y - x + 1)$

$$\begin{cases} L'_x = \frac{-2y}{x^3} - \lambda = 0 \\ L'_y = \frac{1}{x^2} + \lambda = 0 \\ L'_\lambda = y - x + 1 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \frac{2y}{x^3} = \frac{1}{x^2}$

$\Leftrightarrow 2y = x$

$\Leftrightarrow 2y = y + 1 \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = 2$

$\Rightarrow \lambda = \frac{-1}{4}$

$L''_{xx} = \frac{6y}{x^4}$

$L''_{xy} = \frac{-2}{x^2}$

$L''_{yy} = 0$

$$H = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3/8 & -1/4 \\ 1 & -1/4 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{3}{8} > 0 \Rightarrow \max$$

② Найдите условные локальные экстремумы ф-ции при заданном условии

(2.5) $z = x^2 + y^2 + xy$; $x^2 + y^2 = 2$ $= g(x)$

усл.: $x^2 + y^2 - 2 = 0$

$L(x; y; \lambda) = x^2 + y^2 + xy + \lambda(x^2 + y^2 - 2)$

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 2x\lambda = 0 \\ 2y + x + 2y\lambda = 0 \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ \lambda = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{2x+y}{2x} = \frac{2y+x}{2y}$

$\Leftrightarrow 2xy + y^2 = 2xy + x^2$

$\Leftrightarrow y = \pm x$

$2y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$M_1(1; 1); \lambda = \frac{-3}{2}$

$M_2(1; -1); \lambda = \frac{-1}{2}$

$M_3(-1; 1); \lambda = \frac{-1}{2}$

$M_4(-1; -1); \lambda = \frac{-3}{2}$

$L''_{xx} = 2 + 2\lambda$

$L''_{xy} = 1$

$L''_{yy} = 2 + 2\lambda$

$g'_x = 2x$

$g'_y = 2y$

$$H = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2+2\lambda & 1 \\ 2y & 1 & 2+2\lambda \end{vmatrix}$$

13.04.20

Неопределенный интеграл

* Определение и простейшие свойства

– Определение 1: Первообразной для ф-ции f на множестве X наз-ется любая ф-ция $F(x)$, для которой выполнено:

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in X$$

– Определение 2: Неопределенным интегралом ф-ции f на множ-ве X наз-ется множ-во всех первообразных f на X

– Обозначение, введенное Лейбницем:

$$\int f(x)\,dx$$

$$df(x) = f'(x)\,dx$$

* Пример:

– Если $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0; +\infty)$, то одна из первообразных для f на указанном промежутке – ф-ция $F(x) = \ln x$

При этом, если $x \in (-\infty; 0)$, то одной из первообразных является ф-ция $F(x) = \ln(-x)$

Таким образом, ф-ция $F(x) = \ln|x|$ – одна из первообразных ф-ции $f(x) = \frac{1}{x}$ на всей области определения

— Однако, не всякая ф-ция имеет первообразную на любом промежутке из области определения. Например:

$$y = \operatorname{sgn}(x)$$

не имеет производной на любом промежутке, содержащем внутренную точки $x = 0$. Почему?

* Основные свойства

— Теорема о структуре множ-ва первообразных. Если F — одна из первообразных для f на некотором мно-ве X, то $\int f(x)dx$ (множ-во всех первообразных для f) является мно-вом всех ф-ций вида $F(x) + C$, где C — произвольное действительное число.

— Доказательство:

1, Если F — одна из первообразных для f, то для любого числа $C \in R$ имеем: $(F(x) + C)' = f(x) + 0 = f(x)$

2, Пусть $\Phi(x)$ — некоторая первообразная для f. Тогда дифференцируемая ф-ция $\varphi(x) = \Phi(x) - F(x)$ имеет производную равную 0 для любых x из X. Следовательно

$$\Phi(x) - F(x) = C \Rightarrow \Phi(x) = F(x) + C$$

— Теорема (простейшие свойства):

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
2. Если ф-ция F дифференцируема, то:

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

3. $\int(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \int \alpha f(x)dx + \int \beta g(x)dx$, $\alpha, \beta \neq 0$
4. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(\alpha x + \beta)dx = \dfrac{F(\alpha x + \beta)}{\alpha} + C$

15.04.20

* Сем. 6

Д.19 Исследуйте точку A на условный экстремум если в этой точке первый дифференциал ф-ции Лагранжа $L(A,\lambda)$ равен нулю, а второй: $d^2L(A,\lambda) = 7(dx)^2 - 4dxdy - 5(dy)^2 - 2dxd\lambda + 6dyd\lambda$

$L''_{xx} = 7$

$L''_{xy} = -2$

$L''_{yy} = -5$

$L(x,y,\lambda) = f(x;y) + \lambda\varphi(x;y)$

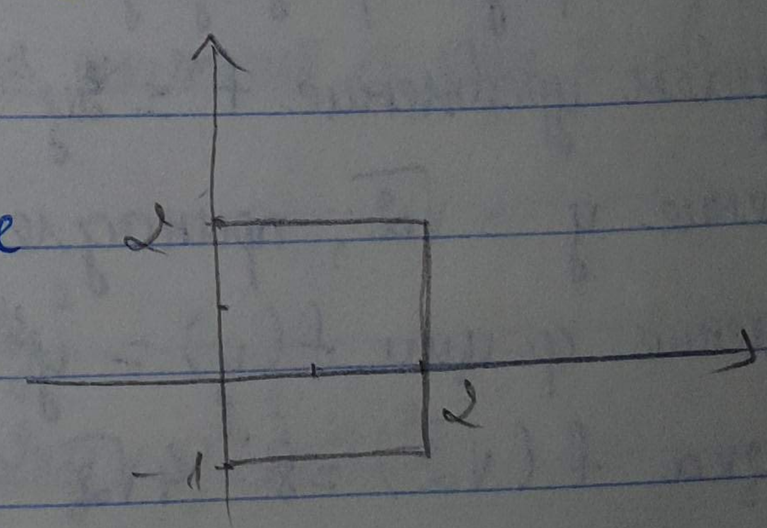
$d^2L = (f''_{xx} + \lambda\varphi''_{xx})dx^2 + (f''_{yy} + \lambda\varphi''_{yy})dy^2 + 0d\lambda^2 +$

$+ 2(f''_{xy} + \lambda\varphi''_{xy})dxdy + 2(\varphi'_x)dxd\lambda + 2(\varphi'_y)dydx$

$$H = \begin{vmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -2 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -1 & 7 & -2 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -(6+6-63+5) > 0$$

1) Вычислить наибольшее и наименьшее значения ф-ции $w = x^3 + y^3 - 3xy$ в области $D: 0 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 2$

1) Найдем вначале точки, в которых у данной ф-ции выполняется необходимое условие локального экстремума



$$\begin{cases} w'_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ w'_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

Из решения системы найдем 2 стационарные точки $M_1 = (0;0)$, $M_2(1;1)$. Нас интересуют только точки, принадлежащие рассматриваемой