области D (включая границу) т.е. такие, чьи координаты удовлетворяют системе неравенств, задающих саму область. В данном случае обе точки принадлежат D (точка M_1 является граничной точкой, а M_2 - внутренней). В этих точках находим значение ф-ции $w(M_1)=0$ $w(M_2)=-1$

~~Se~~ Исследуем теперь ф-цию на границе области, т.е. на сторонах заданного прямоугольника

На границе $x=0$, $-1\le y\le 2$, ф-ция w является ф-цией одной независимой переменной $w=y^3$. Полученная ф-ция на указанном отрезке возрастает и принимает наименьшее и наибольшее значения на концах отрезка. Таким образом, на данном участке границы области исследуемая ф-ция принимает следующие наименьшее и наибольшее значения

$$w_{min}=w(0;-1)=-1$$

$$w_{max}=w(0;2)=8$$

На границе $x=2$; $-1\le y\le 2$, имеем $w=f(y)=y^3-6y+8$. Вычисляя первую производную полученной ф-ции и приравнивая ее нулю, получаем уравнение $f'=3y^2-6=0$. Это уравнение имеет единственное решение $y=\sqrt{2}$, принадлежащее отрезку $-1\le y\le 2$. Вычисляем значение ф-ции $f(y)=y^3-6y+8$ в данной точке и на концах отрезка $f(\sqrt{2})=8-4\sqrt{2}$, $f(-1)=13$, $f(2)=4$.

Таким образом, на данном участке границы области исследуемая ф-ция принимает следующие наименьшее и наибольшее значения

$$w_{min}=w(2;\sqrt{2})=8-4\sqrt{2}$$

$$w_{max}=w(2;-1)=13$$

На границе $y = -1$; $0 \le x \le 2$, имеем $w = g(x) = x^3 + 3x - 1$

Первая производная полученной ф-ции $g' = 3x^2 + 3$ везде положительна, следовательно, ф-ция возрастает и принимает наименьшее и наибольшее значения на концах указанного промежутка. Таким образом, на данном участке границы области исследуемая ф-ция принимает следующие наименьшее и наибольшее значения

$$w_{min} = w(0; -1) = -1$$

$$w_{max} = w(2; -1) = 13$$

На границе $y = 2$, $0 \le x \le 2$, имеем $w = h(x) = x^3 - 6x + 8$

$$w_{min} = w(\sqrt{2}; 2) = 8 - 4\sqrt{2}$$

$$w_{max} = \cancel{w(2; -1) = 13}\ w(0; 2) = 8$$

Сравнивая значения ф-ции во всех найденных выше точках, получаем наименьшее и наибольше значения ф-ции в заданной области:

$$w_{min} = w(1; 1) = w(0; 1) = -1$$

$$w_{max} = w(2; -1) = 13$$

3.1 Найдите наибольшее и наименьшее значения ф-ции z в области, заданной неравенством

а) $x^2 + y^2 \le 5$, $z = 5x^2 - 4xy + 2y^2$

$$z = 5x^2 - 4xy + 2y^2 = 2(x^2 \cancel{+} - 2xy + y^2) + 3x^2$$

$$= 2(x - y)^2 + 3x^2$$

$$\begin{cases} z'_x = 10x - 4y = 0 \\ z'_y = 4y - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow M(0;0) \Rightarrow z(M) = 0$$

$x^2+y^2 \le 5$

$\Rightarrow z = 2x^2+2y^2+3x^2-4xy$

$= 10 + 3x^2 - 4x(\sqrt{5-x^2})$

$z'_x = 6x - 4\sqrt{5-x^2} + \frac{4x^2}{\sqrt{5-x^2}}$

$= 6x - \frac{4(5-x^2+4x^2)}{\sqrt{5-x^2}} = 6x - \frac{20+12x^2}{\sqrt{5-x^2}}$

27.04.20

Метод интегрирования

Метод подведения под знак дифференциала

Теорема о замене переменной под знаком интеграла:

Пусть ф-ция $\varphi(t)$ определена и дифференцируема на промежутке T

X – множество значений этой ф-ции, на котором определена ф-ция $f(x)$ на X, то $F(\varphi(t))$ – первообразная для ф-ции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Другими словами на множестве T выполняется равенство:

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

<u>Доказано</u>:

$F(x)$; $G(t) = F(\varphi(t))$

По правду дифф. $G'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$

$\int e^x dx = e^x + C$

$\int e^{\sin x} d\sin x = e^{\sin x} + C = \int e^{\sin x}\cos x\,dx$

Примеры:

Слева момент: $\boxed{d(f(x)) = f'(x)\,dx}$

$\boxed{df = f'dx}$

① $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C$

$= -\ln|\sin x| + C$

② Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, тогда

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\,d(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

$dx = d(x+a)$; $dx = \frac{1}{a}\,d(ax+b)$

$\frac{dx}{x} = d\ln x$; $x\,dx = \frac{1}{2}\,dx^2$; $x^2dx = \frac{1}{3}\,dx^3$; ...

$\sin x\,dx = -d\cos x$; $\cos dx = d\sin x$; $\frac{dx}{\cos^2 x} = d\tan x$; $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d\cot x$

$e^x dx = de^x$; $\frac{dx}{1+x^2} = d\arctan x$

– Метод интегрирования

+) Метод интегрирования по частям

Теорема: Пусть ф-ции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на некотором промежутке. Тогда верна следующая формула:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

• $d(u.v) = u\,dv + v\,du$

$(u.v)' = u'v + v'u$

$d(uv) = (u'v + v'u)dx = \underbrace{u'v\,dx}_{du} + \underbrace{v'u\,dx}_{dv} = v\,du + u\,dv$

$\int d(uv) = \int u\,dv + \int v\,du$

$uv = \int u\,dv + \int v\,du \Rightarrow \int u\,dv = uv - \int v\,du$

Пример:

$\int \ln x\,dx$

$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}\,dx \\ v = x \end{cases} \Rightarrow$

$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx$

$= x\ln x - x + C$

1) $\int P_n(x) \sin x \, dx \Rightarrow u = P_n(x)$; $dv = \sin x \, dx$

2) $\int \ln x \, P_n(x) \, dx \Rightarrow u = \ln x$; $dv = P_n(x) \, dx$

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

→ $n \geq m \Rightarrow$ неправильно

→ $n < m$: $\int f(x) \, dx$

$Q_m(x)$: $(x - a_i)$

$(x^2 + p_k x + q_k)$

$p_k^2 - 4q_k < 0$

$f(x)$ → сумма прост. дробей

$\frac{A}{x-a}$; $\frac{A}{(x-a)^r}$ $(r > 1)$

$\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$; $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^r}$

$$\frac{P_n(x)}{(x-a_1)^{r_1} \dots (x-a_s)^{r_s} (x^2+p_1x+q_1)^{e_1} \dots (x^2+p_jx+q_j)^{c_j}}$$

$$= \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_{r_1}}{(x-a_1)^{r_1}} + \dots + \frac{B_1x+C_1}{x^2+p_1x+q_1}$$

29.04.20

Найти неопределенные интегралы

1.4 $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{4-x^2}} \right) dx$

$$= 2\int \frac{1}{x^2+1} dx - 3\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = 2\arctan x \cancel{+ 3\ln|x + \sqrt{x^2-4}|} + C$$

$$- 3\arcsin \frac{x}{2} + C$$

(1.6) $\int \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\,dx = \int \frac{3x^2(x^2+1)}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$

$= \int 3x^2\,dx + \arctan x + C = x^3 + \arctan x + C$

(1.8) $\int \frac{(1-x)^2}{x^2}\,dx = \int \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 dx$

$= \int dx - 2\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx$

$= x - 2\ln x - \frac{1}{x} + C$

(1.10) $\cancel{\int \frac{6x-1}{\sqrt{1-3x}}\,dx = -\int \frac{6x-1}{\sqrt{3x-1}}\,dx = -\int \frac{3x-1}{\sqrt{3x-1}}\,dx - 3\int \frac{x}{\sqrt{3x-1}}\,dx}$

$\cancel{= -\int \frac{1}{\sqrt{3x-1}}\,dx - \sqrt{3}\int \frac{x}{\sqrt{x-\frac{1}{3}}}\,dx}$

$\cancel{= \frac{-1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\sqrt{x-\frac{1}{3}}}\,d\left(\sqrt{x-\frac{1}{3}}\right) -}$

(1.10) $\int \frac{6x-1}{\sqrt{1-3x}}\,dx$

$\sqrt{1-3x} = t \iff t^2 = 1-3x \iff x = \frac{1-t^2}{3}$

$dx = \frac{-2}{3}\,t\,dt$

$= \frac{-2}{3}\int \frac{2-2t^2-1}{t}\cdot t\,dt = \frac{2}{3}\int (2t^2-1)\,dt = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}t^3 - t\right) + C$

$= \frac{4}{9}t^3 - \frac{2}{3}t + C = \frac{4}{9}(1-3x)\sqrt{1-3x} - \frac{2}{3}\sqrt{1-3x}$

1.12 $\int \frac{1-3x}{3+2x}\,dx = \frac{-3}{2}\int \frac{x-\frac{1}{3}}{x+\frac{3}{2}}\,dx = \frac{-3}{2}\int \frac{x+\frac{3}{2}-\frac{11}{6}}{x+\frac{3}{2}}\,dx$

$= \frac{-3}{2}\int dx + \frac{11}{4}\int \frac{1}{x+\frac{3}{2}}\,dx = \frac{-3}{2}x + \frac{11}{4}\ln\left|x+\frac{3}{2}\right| + C$

1.14 $\int \frac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}\,dx = 3\int \tan^2 x \, d\tan x = \tan^3 x + C$

1.16 $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx = \int \sqrt{1+\ln x}\; d(\ln x + 1)$

$= \frac{2}{3}(1+\ln x)\sqrt{1+\ln x} + C$

1.18 $\int x^2 \cdot \sqrt[5]{x^3-8}\,dx = \frac{1}{3}\int \sqrt[5]{x^3-8}\; d(x^3-8) = \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6}(x^3-8)^{6/5} + C$

$= \frac{5}{18}(x^3-8)^{6/5} + C$

1.20 $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx = \int e^{\tan x}\, d\tan x = e^{\tan x} + C$

1.22 $\int \frac{x^2+1}{(x^3+3x+1)^4}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x^3+3x+1)^4}\; d(x^3+3x+1)$

$= \frac{-1}{9(x^3+3x+1)^3} + C$

1.24 $\int \frac{3\sqrt{x}+1}{2x\sqrt{x}+x}\,dx = \int \frac{1}{2x\sqrt{x}+x}\; d(2x\sqrt{x}+x) = \ln\left|2x\sqrt{x}+x\right| + C$

* Gthích: $(2x\sqrt{x}+x)' = (2x^{3/2}+x)' = 3x^{1/2}+1 = 3\sqrt{x}+1$

(1.26) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\,dx^2 = \frac{1}{2}\arcsin x^2 + C$

(1.32) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,d(x+2)$

$= \arctan(x+2) + C$

(1) $\int e^x \sin x\,dx = I$

$\begin{cases} u = e^x \\ dv = \sin x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x\,dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

$= -e^x\cos x + \int e^x \cos x\,dx$

$\begin{cases} u = e^x \\ dv = \cos dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x\,dx \\ v = \sin x \end{cases}$

$= -e^x\cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx$

$\Rightarrow I = -e^x\cos x + e^x\sin x - I$

$\Leftrightarrow I = \frac{1}{2}\left(-e^x\cos x + e^x\sin x\right) = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$

04.05.20

Интегрирование рациональных дробей

1. Убедиться, что дробь правильная (если это не так, то выделить целую часть дроби)
2. Разложить знаменатель на множители первой и второй степени
3. Написать разложение рациональной дроби в сумму простейших дробей с неопределёнными коэффициентами
4. Найти коэффициенты, приравнивая числители соответствующих дробей.

① $\int \frac{dx}{x^3-1} = I$

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$\Rightarrow 1 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)$$

→ I способ :

$$\begin{cases} x^2 : 0 = A+B \\ x : 0 = A-B+C \\ x^0 : 1 = A-C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1/3 \\ B = -1/3 \\ C = -2/3 \end{cases}$$

→ II способ

$x = 1 \Rightarrow 1 = 3A \Leftrightarrow A = 1/3$

$x = 0 \Rightarrow 1 = 1/3 - C \Leftrightarrow C = -2/3$

$x = -1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{3} + \left(-B - \frac{2}{3}\right)(-2) \Leftrightarrow B = -1/3$

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\int \frac{(x+1/2)+3/2}{(x+1/2)^2+3/4}\,d\left(x+\frac{1}{2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\int \frac{t}{t^2+3/4}\,dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{t+3/4}\,dt + C$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}/2}\arctan\frac{2t}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{(x+1/2)}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{3}\operatorname{arctot}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right) + C$$

$$\int \sin^n x \cos^m x \, dx$$

- Если хотя бы одна степень нечетная, то замена
- Если обе степени четные, то тригонометрические формулы "понижения степени"

Пример: $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx = -\int \sin^2 x \cos^2 x \, d\cos x$

$$= -\int (1-t^2)t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C$$

- Если отрицательные степени, то используют формулы для замены на $\tan x$ и $\cot x$: $\frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \tan^2 x$

$$\frac{1}{\sin^2 x} - 1 = \cot^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}; \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin^k x \cos^k x = \frac{1}{2^k}\sin^k 2x$$

$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$

$t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow x = 2\arctan t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Пример:

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = 2\int \frac{dt}{(1+t^2)\left(1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}$$

$$= 2\int \frac{dt}{1+t^2+2t+1-t^2} = 2\cdot\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t+1} = \ln|t+1|+C$$

$$= \ln\left|\tan\frac{x}{2}+1\right|+C$$

$\int R(\sqrt[k_j]{ax+b})\,dx$

$ax+b = t^{НОК(k_j)}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}-2\cdot\sqrt[3]{x+1}}$$

НОК $(2,3,4) = 12$

$x+1 = t^6$

$x = t^6-1$

$dx = 6t^5\,dt$

$$= \int \frac{6t^5}{t^3-2t^2}\,dt$$

$\int R(\sqrt{a^2-x^2}, x)\,dx$

$\int R(\sqrt{a^2+x^2}, x)\,dx$

$\int R(\sqrt{x^2-a^2}, x)\,dx$

тригоном

$x = a\sin t$

$\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t} = a\cos t$

$x = a\tan t$

$\sqrt{a^2+a^2\tan t} = \frac{a}{\cos t}$

$x = \frac{a}{\cos t}$

$\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}-a^2} = a\tan t \Leftarrow$

Гиперб

$sh\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ | $ch^2 x - sh^2 x = 1$

$ch\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

06.05.20

① Для ф-ции $f(x)$ найти первообразную $F(x)$, график которой проходит через точку $(x_0; y_0)$

(1) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sin(x+1)$; $x \in (0; +\infty)$, $(1; 1)$

$$\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \sin(x+1)\right) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{1/2}}{1/2} - \cos(x+1) + C = F(x)$$

$\Leftrightarrow 1 = \sqrt{1} - \cos 2 + C \Leftrightarrow C = \cos 2$

(3) $f(x) = |x|$, $x \in R$, $(-2; 4)$

$$\int |x|\,dx = \begin{cases} \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C, & x \geq 0 \\ \int (-x)\,dx = \frac{-x^2}{2} + C, & x < 0 \end{cases}$$

13

(4) $\int \frac{dx}{(e^x + \sqrt{e^x})} = \int \frac{e^x dx}{e^x(e^x + \sqrt{e^x})} = \int \frac{d(e^x)}{e^x(e^x + \sqrt{e^x})}$

(5) $\int e^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int e^{\sqrt{x}}\, d(2\sqrt{x})$

$$sh\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$ch^2 x - sh^2 x = 1$$

$$sh\,2x = 2\,sh\,x\,ch\,x$$

$$ch\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$th\,x = \frac{sh\,x}{ch\,x}$$

(11) $$\int \frac{dx}{sh\,x} = 2\int \frac{dx}{e^x - \frac{1}{e^x}} = 2\int \frac{e^x dx}{e^{2x}-1} = 2\int \frac{de^x}{(e^x)^2 - 1}$$

$$= 2\ln\left|\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right|$$

15 (3) $$\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,dx \quad / \quad \frac{dx}{x^2} = -d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= -\int \cos\frac{1}{x}\,d\left(\frac{1}{x}\right) = -\sin\frac{1}{x} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

(5) $$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$$

(6) $$\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1 - 4\ln x - \ln^2 x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x - 2}}$$

② $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2+3x+1} = \int \frac{x\,dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}} = \int \frac{x\,d\left(x+3/2\right)}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}$

$$= \int \frac{\left(t-\frac{3}{2}\right)dt}{t^2-\frac{5}{4}} = \int \frac{t\,dt}{t^2-\frac{5}{4}} - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2-\frac{5}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|t^2-\frac{5}{4}\right| - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{t-\sqrt{5}/2}{t+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{4}\right| - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{x+\frac{3-\sqrt{5}}{2}}{x+\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right| + C$$

③ $\displaystyle\int \frac{d(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2-6}} = \ln\left|x-2+\sqrt{(x-2)^2-6}\right| + C$

④ $\displaystyle\int \frac{2x^2-1}{x(x-2)(x-3)} = I$

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} = \frac{2x^2-1}{x(x-2)(x-3)}$$

$$A(x-2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-2) = 2x^2-1$$

$x=0 \Rightarrow 6A = -1 \Leftrightarrow A = -1/6$

$x=2 \Rightarrow -2B = 7 \Leftrightarrow B = -7/2$

$x=3 \Rightarrow 3C = 17 \Leftrightarrow C = 17/3$

$$I = \frac{-1}{6}\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{7}{2}\int \frac{1}{x-2}\,dx + \frac{17}{3}\int \frac{1}{x-3}\,dx$$

$$= \frac{-1}{6}\ln|x| - \frac{7}{2}\ln|x-2| + \frac{17}{3}\ln|x-3| + C$$

11.05.20

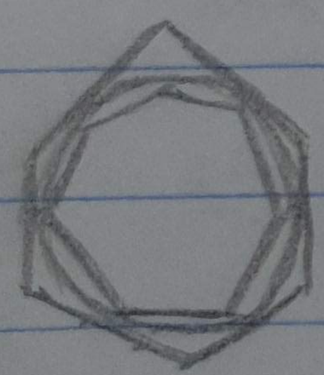
Определённый интеграл

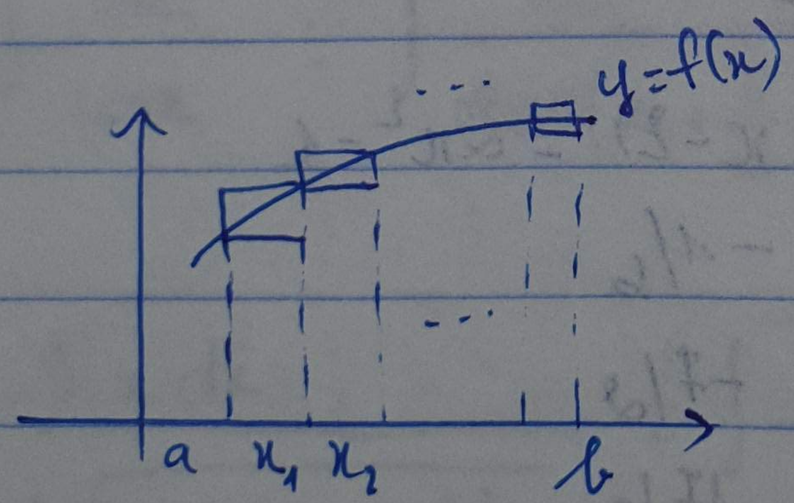
1. Постановка задачи
   а. метод исчерпывания
   б. пример
2. Понятие определенного интеграла
   а. суммы Дарбу - понятие
   б. свойства сумм Дарьбу
   в. определенный интеграл
   г. критерий интегрируемости
3. Несколько важных теорем
   а. аддитивность по отрезку
   б. теорема о среднем.

(I) Криволинейная трапеция

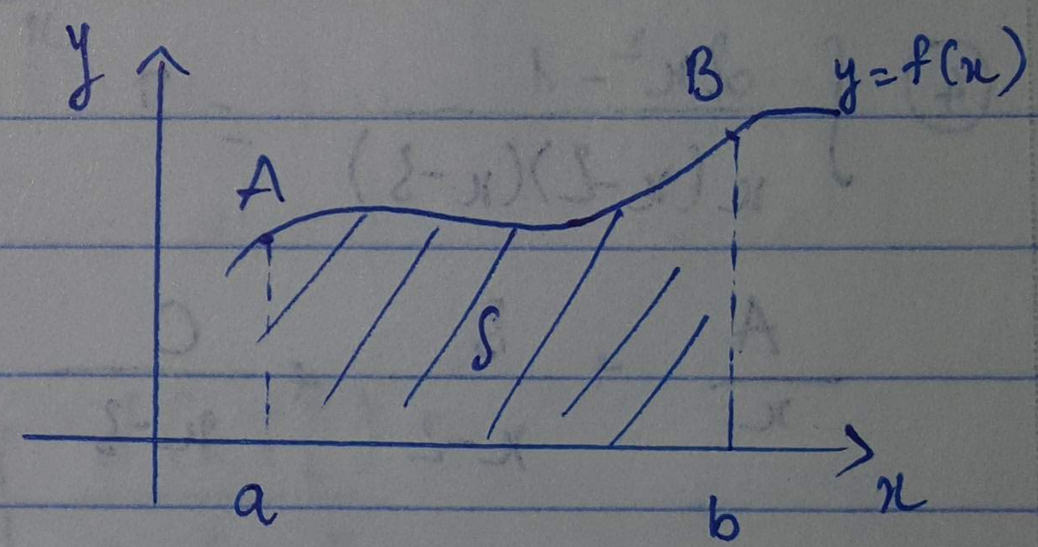
Как находили площадь круга?

$S_1 < S_{кр} < S_2$





$S_T < S < S_T$



$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < b = x_n$

1) $[x_k; x_{k+1}] \leftarrow f_{наим.} = m_k$

$\rightarrow S_k = m_k (x_{k+1} - x_k)$

$\sum_{k=0}^{n} m_k \cdot \Delta x_k = S_T$

2) $[x_k; x_{k+1}] \leftarrow f_{наиб.} = M_k$

$S_k = M_k \cdot \Delta x_k$

$\sum_{k=0}^{n} M_k \cdot \Delta x_k = S_T$ (T: достаточно мелкое (т.е. $n \to \infty$))

$\lim_{n \to \infty} S_T = S = \lim_{n \to \infty} S_T$

Твор. зад:

С точностью до 0,01 вычислить $S_{крив.трап}$ $[0;1]$ $y = x^3$

II Опред. интеграл

$y = f(x)$ огранич на $[a;b]$

T - разбиение $[a;b]$

$a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b$

(M : верхней гранью числ. множества X если $\forall x \in X : x \leq M$)

(m : нижней гранью числ. множества X если $\forall x \in X : x \geq m$)

$X : (0;3)$: $M = 3; 4; \dots$

$m = 0; -2; -3; \dots$

m_k ; M_k

$\sum_{k=0}^{n} m_k \Delta x_k$ и $\sum_{k=0}^{n} M_k \Delta_k$

$\| \qquad\qquad \|$

$s_T \qquad\qquad S_T$

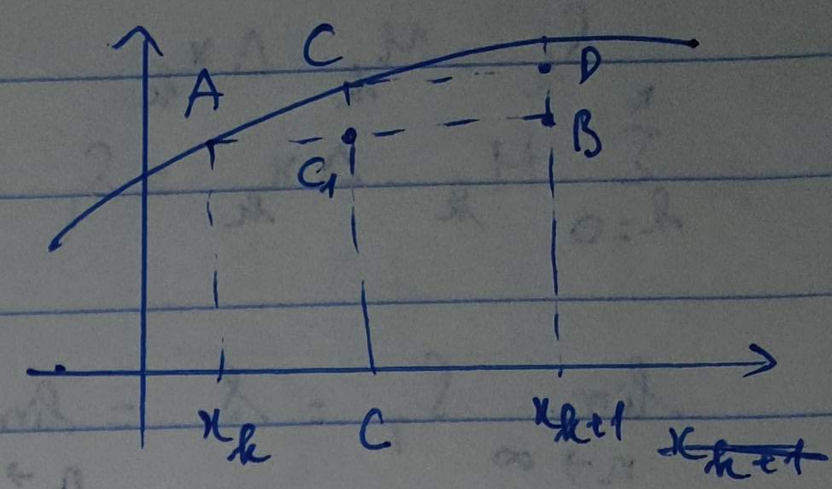
1) $\forall T : s_T \leq S_T$

следует из $\forall k : m_k \leq M_k$

2) $T_2 \leftarrow T_1$, то $s_{T_1} \leq s_{T_2}$; $S_{T_1} \geq S_{T_2}$

↳ добав несколько точек

$$S_{x_k ABx_{k+1}} < S_{x_k AC_1C} + S_{CCDx_{k+1}}$$



3) $\forall T_1$ и T_2 : $s_{T_1} \le S_{T_2}$

Пусть T_1 и $T_2 = T$

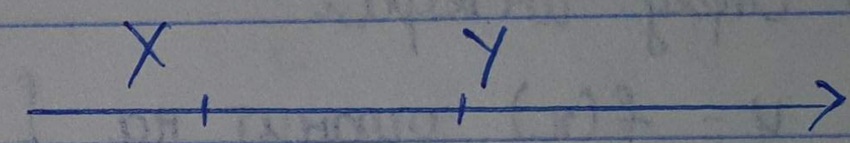
из 2) : $s_{T_1} \le S_T$

из 1) : $s_T \le S_T$

из 2) : $S_T \le S_{T_2}$

$\Rightarrow s_{T_1} < s_T \le S_T \le S_{T_2}$

Пусть X – множество s_T ($\forall T$)



Y – множество S_T ($\forall T$)

из 3) : $\forall T$: $s_T = \sum_{k=0}^{n} m_k \cdot \Delta x_k \le L \le \sum_{k=0}^{n} M_k \cdot \Delta x_k = S_T$

$y = f(x)$: огран. по $[a; b]$ – наз-ся интегрируемой на $[a, b]$ если $\exists!$ L – число раздел. s_T и S_T $\forall T$

$$L = \int_a^b f(x)\,dx$$

1) $a < b$; $b < a$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k < 0 \Rightarrow s_T < 0$

$S_T > 0$

2) $a = b$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

критерий интегрируемости:

$y = f(x)$ (определена и огранич. по $[a;b]$) - интегрируемые $[a;b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists$ разб. T : $S_T - s_T$

13.05.20

① $$\int \frac{x^4+3x^3+3x^2-5}{x^3+3x^2+3x+1}\,dx = \int \left(x - \frac{x+5}{x^3+3x^2+3x+1} \right) dx$$

$$= \int x\,dx - \int \frac{x+5}{x^3+3x^2+3x+1}\,dx = \frac{x^2}{2} - \int \frac{x+5}{(x+1)^3}\,dx + C$$

$$\frac{x+5}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$$

$$A(x+1)^2 + B(x+1) + C = x+5$$

$x = -1 \Rightarrow C = 4$

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow A + B = 1 \\ x = 1 \Rightarrow 4A + 2B = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$= \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx - 4\int \frac{1}{(x+1)^3}\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{(x+1)} + \frac{2}{(x+1)^2} + C$$

② $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx$

$t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow x = 2\arctan t$

$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt \;;\; \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$$= \int \frac{2t}{(1+t^2)\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = 4\int \frac{t(1+t^2)\,dt}{(1+t^2)(1+t^2+2t)(1+t^2)}$$

$$= 4\int \frac{t\,dt}{(1+t^2)(t+1)^2} \quad \Big| \quad \frac{t}{(1+t^2)(t+1)^2} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{Ct+D}{t^2+1}$$

$= \dots\dots$

③ $\int \frac{dx}{(\sin x+4)(\sin x-1)}$ $\quad \Big| \quad t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow x = 2\arctan t$

$dx = \frac{2dt}{t^2+1} \;;\; \sin x = \frac{2t}{t^2+1}$

$$= \int \frac{2\,dt}{(1+t^2)\left(\frac{2t+4+4t^2}{t^2+1}\right)\left(\frac{2t-1-t^2}{t^2+1}\right)} = 2\int \frac{(t^2+1)\,dt}{-2(2t^2+t+2)(1-t)^2}$$

$$= -\int \frac{(t^2+1)\,dt}{(2t^2+t+2)(t-1)^2} \quad \Big| \quad \frac{t^2+1}{(2t^2+t+2)(t-1)^2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{Ct+D}{2t^2+t+2}$$

④ $\int \frac{1}{(\sin x+4)(\sin x-1)}\,dx$ $\quad \Big| \quad \frac{1}{(\sin x+4)(\sin x-1)} = \frac{A}{\sin x+4} + \frac{B}{\sin x-1}$

$A(\sin x-1) + B(\sin x+4) = 1$

$$\begin{cases} x = A+B=0 \\ -A+4B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1/5 \\ B = 1/5 \end{cases}$$

$$= \frac{-1}{5}\int \frac{1}{\sin x+4}\,dx + \frac{1}{5}\int \frac{1}{\sin x-1}\,dx$$

$$= \frac{-1}{5}\int \frac{2\,dt}{(t^2+1)\left(\frac{2t+4+4t^2}{t^2+1}\right)} + \frac{1}{5}\int \frac{2\,dt}{(1+t^2)\left(\frac{2t-1-t^2}{1+t^2}\right)}$$

$$= \frac{-2}{5}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{dt}{2t^2+t+2} - \frac{2}{5}\int \frac{dt}{(t-1)^2} = 2\left(t^2+\frac{1}{2}t\right)+2$$

$$= 2\left(t^2+2t\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}\right)+2$$

$$= 2\left(\left(t+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right)+2 = 2\left(t+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}+2$$

$$= 2\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{8} = \frac{-1}{5}\int \frac{dt}{2\left(t+\frac{1}{4}\right)+\frac{15}{8}} - \frac{2}{5}\int \frac{dt}{(t-1)^2}$$

$$= \frac{-1}{10}\int \frac{d(t+1/4)}{(t+1/4)^2+\frac{15}{16}} + \frac{2}{5(t-1)} + C$$

$$= \frac{-1}{10} + \frac{4}{\sqrt{15}}\arctan\frac{\sqrt{15}\,t}{4} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{t-1} + C \quad \left(t = \tan\frac{x}{2}\right)$$

$R\left(\sqrt[k_i]{ax+b};x\right)$; $R\left(\sqrt[x_i]{\frac{ax+b}{cx+d}};x\right)$; $\frac{ax+b}{cx+d} = t^{\text{HOK}(k_i)}$

(5) $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{dx}{(x-1)^3}$ $\Big|$ $\frac{x+1}{x-1} = t^3 \Leftrightarrow x+1 = t^3(x-1)$

$\Leftrightarrow x+1 = t^3x - t^3$

$\Leftrightarrow x(1-t^3) = -t^3-1$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-t^3-1}{1-t^3} = \frac{t^3+1}{t^3-1} \Rightarrow dx = -\frac{2\cdot 3t^2}{(t^3-1)^2}\,dt$$

$$(x-1)^3 = \left(1+\frac{2}{t^3-1}-1\right)^3 = \frac{8}{(t^3-1)^3}$$

$$= \int \frac{t(-6)\cancel{dt}\, t^2(t^3-1)^3 dt}{(t^3-1)^2 \cdot 8} = \frac{-3}{4}\int t^3(t^3-1)\,dt = \frac{-3}{4}\int (t^6 - t^3)\,dt$$

$$= \frac{-3}{4}\cdot\frac{t^7}{7} + \frac{3}{4}\frac{t^4}{4} + C = \frac{-3}{4}\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4}\right) + C \quad \left(t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\right)$$

⑥ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$

$$ch^2 t - sh^2 t = 1 \Rightarrow ch^2 t - 1 = sh^2 t$$

$$x = a\,ch\,t \Rightarrow dx = a\,sh\,t\,dt$$

$$x^2 - a^2 = a^2 ch^2 t - a^2 = a^2(ch^2 t - 1) = a^2 sh^2 t$$

$$= \int \frac{a\,sh\,t\,dt}{a\,sh\,t} = \int dt = t + C$$

$$x = a\cdot\frac{e^t + e^{-t}}{2} \Rightarrow 2\frac{x}{a} = e^t + \frac{1}{e^t} \Rightarrow e^t\cdot\frac{2x}{a} = e^{2t} + 1$$

$$e^{2t} - \frac{2x}{a}\cdot e^t + 1 = 0 \;\Big|\; e^t = z \;(z > 0)$$

$$\Rightarrow z^2 - \frac{2x}{a}z + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{\Delta}{4} = \frac{x^2}{a^2} - 1 \Rightarrow z = \frac{x}{a} \pm \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{x}{a} \pm \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$$

$$e^t = \frac{x + \sqrt{x^2-a^2}}{a} \Leftrightarrow t = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| - \ln a$$

18.05.20

1, ~~Аддитивность опред. интегр~~ Теорема о среднем

Пусть $f(x)$ - непрер. на $[a;b]$

Тогда $\exists$ точка $c \in [a;b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

Значение $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ - среднее значение ф-ции

2, Аддитивность опред. интегр.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \text{ если}$$

$f(x)$ - ~~нер~~ непрер. на $[a;b]$; $c \in [a;b]$

3, Формула Ньютона - Лейбница

а, Интеграл с переменным верхним пределом

$f(x)$ - интегр. на $[a;b]$. Рассмотрим $[a;x]$; где $a \le x \le b$

$\int_a^x f(t)\,dt$

Определение : $\int_a^x f(t)\,dt$ - интеграл с переменным верхнем

То есть рассматривается ф-ция $\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

Теорема : $f(x)$ - непрерива на $[a;b]$, тогда

$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ - дифференцируема в каждой точке отрезка

и $\varphi'(x) = f(x)$ (эта теорема утверждает, что $\varphi(x)$ - первообр. для $f(x)$)

Д-во : По опред. произв : $\varphi'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}$

(Δx – выбирается так, чтобы $x + \Delta x \in [a; b]$) рассмотрим:

$$\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt +$$

$$+ \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

Применим теорему о среднем: $\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt =$

$= f(c)\cdot\Delta x \quad (c \in [x; x+\Delta x])$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \frac{f(c)\cdot\Delta x}{\Delta x} = f(c)$$

Т.к. $f(x)$ непрер. и $c \to x$ при $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x) \Rightarrow \varphi'(x) = f(x)$$

б) Теорема формула Ньютона – Лейбница

$f(x)$ – непрер. на $[a; b]$; $F(x)$ – первообразная для $f(x)$

Тогда $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Док-во: Рассмотрим ф-цию $\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

подставим вместо $x = b$: $\varphi(b) = \int_a^b f(t)\,dt$, если же $x = a$

$$\Rightarrow \varphi(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0 \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt = \varphi(b) - \varphi(a)$$

Если $F(x)$ – другая первообр. $f(x)$, то выполнена:

$$F(x) = \varphi(x) + C$$

тогда $F(b) - F(a) = (\varphi(b) + C) - (\varphi(a + C) = \varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b f(t)\,dt$

Записывают: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$

Пример: ① $\int\limits_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x\ln x \ln(\ln x)} = \int\limits_{e^2}^{e^3} \frac{d\ln x}{\ln x \ln(\ln x)} = \int\limits_{e^2}^{e^3} \frac{d\ln(\ln x)}{\ln(\ln x)}$

$= \ln(\ln(\ln x))\Big|_{e^2}^{e^3} = \ln(\ln(\ln e^3)) - \ln(\ln(\ln e^2))$

$= \ln(\ln 3) - \ln(\ln 2) = \ln\left(\frac{\ln 3}{\ln 3}\right) = \ln(\log_2 3)$

② $\int\limits_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4} = 0{,}25$

О замени переменной под знаком опред. интеграл -

$f(x)$ - непрер. на $[a;b]$, $x = \varphi(t)$ определ. на $[\alpha;\beta]$ и имеет ~~инте~~ непрер. произв. внутри $[\alpha;\beta]$ причём $\varphi(\alpha)=a$; $\varphi(\beta)=b$; $\varphi([\alpha;\beta]) = [a;b]$, тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

Из условий теоремы следует, что: ф-ция $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ интегр. на $[\alpha;\beta]$; $F(\varphi(t))$ - её первообр., где $F(x)$ - первообр. для $f(x)$. Тогда: $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$

$= F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$

20.05.20

① $\int \frac{1}{(2-x)^2} \cdot \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\,dx$

$\frac{2-x}{2+x} = t^2 \Rightarrow 2-x = 2t^2 + xt^2$

$\Leftrightarrow 2-2t^2 = x(t^2-1)$

$\cancel{\Leftrightarrow x = 2(1-t^2)}$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{2(1-t^2)}{1+t^2} = -2\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right) = -2\left(1 - \frac{2}{t^2+1}\right)$$

$$= -2 + \frac{4}{t^2+1}$$

$$(2-x)^2 = \left(2+2-\frac{4}{t^2+1}\right)^2 = \left(4-\frac{4}{t^2+1}\right)^2 = \frac{16t^4}{(t^2+1)^2}$$

$$I = \int \frac{(t^2+1)^2}{16t^4} \cdot t \, \frac{(-8)t\,dt}{(t^2+1)^2} = \frac{-1}{2}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t} + C$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2+x}{2-x}} + C$$

(2) $$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}} = I$$

$$t = x-1 \Leftrightarrow x = t+1 \Rightarrow dx = dt$$

$$x-2 = t-1$$

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{t^3(t-1)}} = \int (t^{-3/2})\,dt \cdot \int (t-1)^{-1/2}\,dt$$

$$= -2t^{-1/2} \cdot 2(t-1)^{1/2} + C = -4\sqrt{\frac{t-1}{t}} + C = -4\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} + C$$

$$= \sqrt{\frac{x-2}{(x-1)^3(x-2)^2}} = \frac{1}{x-2}\sqrt{\frac{x-2}{(x-1)^3}} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} \cdot \sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$$

② $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}} = \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx \cdot \int \frac{x-1}{x-2}\,dx$

$\frac{x-1}{x-2} = t^2 \Rightarrow x-1 = xt^2 - 2t^2 \Rightarrow x(1-t^2) = 1-2t^2$

$\Leftrightarrow x = \frac{1-2t^2}{1-t^2} = \frac{2t^2-1}{t^2-1} = 2 + \frac{1}{t^2-1}$

$dx = -\frac{2t\,dt}{(t^2-1)^2}$

$(x-1)^2 = \left(2 + \frac{1}{t^2-1} - 1\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right)^2 = \frac{t^4}{(t^2-1)^2}$

$I = -2\int \frac{(t^2-1)^2 \cdot t \cdot t\,dt}{t^4 \cdot (t^2-1)^2} = -2\int \frac{dt}{t^2} = \frac{2}{t} + C = 2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} + C$

I) Интегрирование иррациональстей

1, интегрирование дифференциального бинома

$\int x^m (ax^n + b)^p\,dx$

1, $p \in Z$ $\quad x = t^N \; (mN;\ nN \in Z)$

2, $\frac{m+1}{n} \in Z$ $\quad ax^n + b = t^M$ (M - это знаменатель у P)

3, $\frac{m+1}{n} + P \in Z$ $\quad a + bx^{-n} = t^M$

II, Эйлеровы замены: можно почитать в Фихтенгольц Т.2

25.03.20

Несобственные интегралы:

Введение: До этого момента рассматривание непрерывные на конечном отрезке ф-ции.

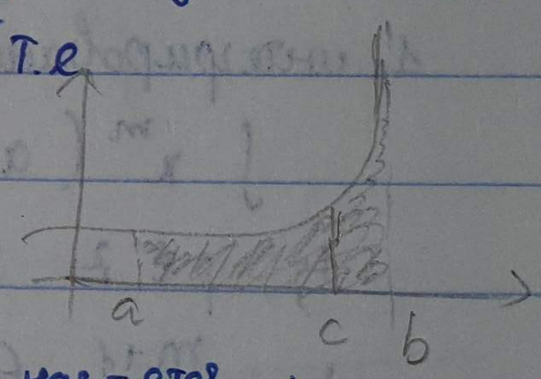
Нарушение условие I (конечный отрезк) приводит к понятию несобственного интеграла 1-ого рода А нарушение условия II (непрерывный) к несобств. интегралу II-ого рода.

Определение 1: Пусть на пром-ке $[a; +\infty]$ задана непрерывная $y = f(x)$ ф-ция. Тогда несобственным интегралом 1-ого рода наз-ется

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx \quad (\text{I - рода})$$

Определение 2: Пусть $y = f(x)$ непрерывна на промежутке ~~$[a; b]$~~ $[a; b)$, а b т. b имеет разрыв 2-ого рода (т.е

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \infty)$$



Тогда несобственным интегралом 2-ого рода наз-ется:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$$

Говорят, что если (в опред. 1 и в опред. 2) $\lim \exists$ и конечен, то интеграл сходится. В противном случае интеграл расходится

Замечание: Для несобст. интеграла 1-ого рода:

Мы можем рассматривать:

1) $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{b \to -\infty} \int_b^a f(x)\,dx$ ($f(x)$ - непрерывна на $[-\infty; a]$

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{b\to-\infty}\int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx + \lim\limits_{c\to+\infty}\int\limits_{a}^{c} f(x)\,dx$

где: $f(x)$ - непрер. при $x \in R$

a : произ число

Для интегралов 2-ого рода:

1) Если $f(x)$ неограничена в т. a:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim\limits_{c\to a^+}\int\limits_{c}^{b} f(x)\,dx \quad (\text{II-рода})$$

или, если $f(x)$ имеет разрыв 2-ого рода в т. $c \in [a;b]$

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{b} f(x)\,dx$$

$$= \lim\limits_{d\to c^-}\int\limits_{a}^{d} f(x)\,dx + \lim\limits_{e\to c^+}\int\limits_{e}^{b} f(x)\,dx$$

Пример 1: $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty}\arctan x\Big|_{1}^{b}$

$= \lim\limits_{b\to+\infty}(\arctan b - \arctan 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ => интеграл сходится

2) $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{x-2} = \lim\limits_{b\to2^-}\int\limits_{1}^{b}\frac{dx}{x-2} = \lim\limits_{b\to2^-}\ln|x-2|\Big|_{1}^{b}$

$= \lim\limits_{b\to2^-}(\ln|b-2| - \ln 1) = -\infty$ => интеграл расходится

Т 2 типа задач:

1) Вычисл или установить расходимость

2) Исследовать интеграла на сходимость

Для решения 2-й задачи используемся признаки сходимости

Пусть $f(x) \geq 0$, непрерывна на $[a; +\infty]$, тогда

Признак сходимости I-1

Пусть для ф-ций $f(x)$ и $g(x)$ выполнены след. условия при $x \geq a$:

1) $0 \leq f(x) \leq g(x)$

2) $f(x)$ и $g(x)$ - непрерывны

Тогда из сходимости $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx \Rightarrow$ сходимость $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$

а из расходимости $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \Rightarrow$ расходим. $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$

Д-во: Т.к. $0 \leq f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$

1) По условию $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ - сходится, т.е.

$\lim\limits_{b \to +\infty} \int_a^b g(x)\,dx = A$ - конечное число.

$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$ - будет также равен конечному числу из-за бесконечнение усл. 1)

2) Если $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ - расходится

При можим, что $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ - сходится, но тогда из доказанного выше $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ тоже сходится $\Rightarrow$ противоречие

$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ - расходится

Теорема II - 1

Пусть для ф-ций $f(x)$ и $g(x)$ на промежутке $[a;b)$ выполнены след. условия:

1, $0 \le f(x) \le g(x)$

2, $f(x)$ и $g(x)$ непрер.

3, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x \to b^-} g(x) = +\infty$

Тогда из сходимости $\int\limits_a^b g(x)\,dx \Rightarrow$ сходимость $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ а из расходимости $\int\limits_a^b f(x)\,dx \Rightarrow$ расходим $\int\limits_a^b g(x)\,dx$

Д-во аналогично.

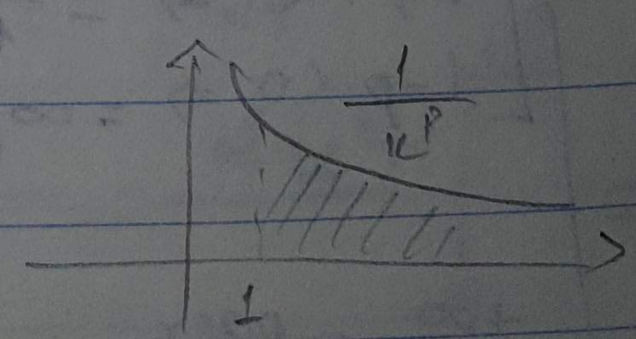
<u>Пример</u>: Исследовать на сходимость $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$

$$\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} > \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_2^b x^{-1/2}\,dx$$

$$= \lim_{b \to +\infty} 2\sqrt{x} \Big|_2^b = \lim_{b \to +\infty} \left(2\sqrt{b} - 2\sqrt{2}\right) = \infty \Rightarrow \text{расх.}$$

$$\Rightarrow \int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} - \text{расх.}$$

Рассмотрим $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ (где $p > 0$)



$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \text{если } p \ne 1 \\ \\ \text{если } p = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{b\to+\infty} \dfrac{}{-p+1}\Big|_1^b \\ \lim\limits_{b\to+\infty} \ln|x|\Big|_1^b \end{cases} = \begin{cases} p\neq 1: \dfrac{1}{1-p}\lim\limits_{b\to+\infty}\left(b^{1-p}-1\right) \\ p=1: \lim\limits_{b\to+\infty}(\ln b - \ln 1) = +\infty - \text{расх.} \end{cases}$$

$$* \; p\neq 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{если } 1-p>0 \Rightarrow +\infty \\ \text{если } 1-p<0 \Rightarrow \dfrac{-1}{1-p} \Rightarrow \text{сходится} \end{cases}$$

Вывод: $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ – сходится если $p>1$

расходится если $p\leq 1$

Для интеграла 2-ого рода

$$p>0 \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} p\neq 1 \\ p=1 \end{cases} = \begin{cases} \lim\limits_{b\to 0^+}\displaystyle\int_b^1 \frac{dx}{x^p} \\ \lim\limits_{b\to 0^+}\displaystyle\int_b^1 \frac{dx}{x} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \cancel{\lim\limits_{b\to 0^+}} \dfrac{1}{1-p}\lim\limits_{b\to 0^+} x^{-p+1}\Big|_b^1 \\ \lim\limits_{b\to 0^+} \ln|x|\Big|_b^1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p}\lim\limits_{b\to 0^+}\left(1-b^{-p+1}\right) \\ \cancel{\dfrac{1}{1-p}}\lim\limits_{b\to 0^+}(\ln 1 - \ln b) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1-p>0 \Rightarrow = \dfrac{1}{1-p} \\ 1-p<0 \Rightarrow = \infty \\ +\infty - \text{расх.} \end{cases}$$

Вывод: $p<1 \Rightarrow$ сходится

$p\geq 1 \Rightarrow$ расходится

Теорема I-2: Пусть для ф-ций $f(x)$ и $g(x)$ выполнены условия:

1, $f(x) > 0$; $g(x) > 0$

2, $f(x)$ и $g(x)$ непрер. на $[a; +\infty]$

3, $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$ - конечное число.

Тогда интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ - сходится или рас. одновре.

Теорема II-2: Пусть для $f(x)$ и $g(x)$: при $x \in [a; b)$

1, $f(x) > 0$; $g(x) > 0$

2, $f(x)$ и $g(x)$ непрер.

3, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \lim\limits_{x \to b^-} g(x) = +\infty$

4, $\lim\limits_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = k$ - конечное число

Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ - сходится или расх. одноврем.

27.05.20

① $\int\limits_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3x^3}\right)\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{3}\right) = \frac{21}{8}$

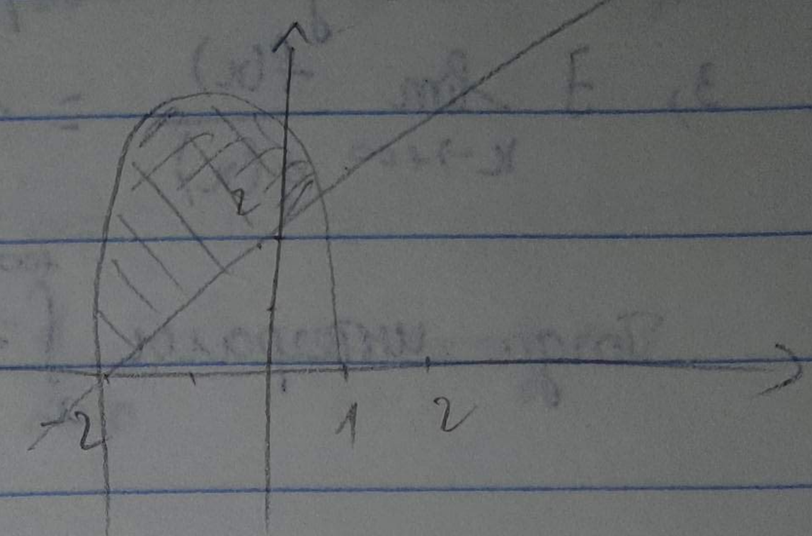
② $\int\limits_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+1}} = \cancel{\int\limits_0^{\ln 3} \frac{e^x+1}{\sqrt{e^x+1}}} = \int\limits_0^{\ln 3} \frac{d(e^x+1)}{\sqrt{e^x+1}} = 2\sqrt{e^x+1}\Big|_0^{\ln 3}$

$= 2\sqrt{e^{\ln 3}+1} - 2\sqrt{2} = 2(4 - \sqrt{2})$

③ $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{d(2x+1)}{\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2x+1}\Big|_0^4$

$= \sqrt{9} - \sqrt{1} = 3 - 1 = 2$

④ $y = 6 - x - 2x^2$; $y = x + 2$ / $S = ?$



$2x^2 + x - 6 + x + 2 = 0$

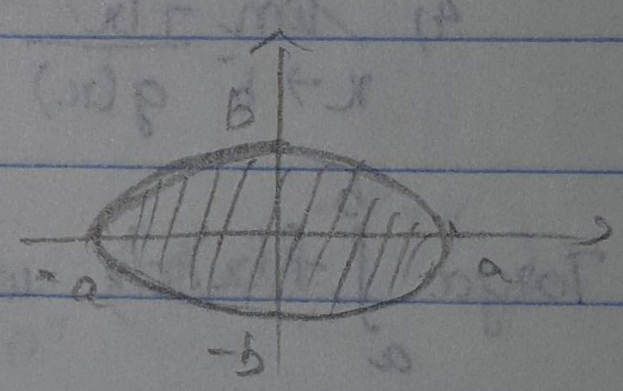
$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1 \end{array}\right.$

$S = \int_{-2}^{1} (6 - x - 2x^2 - x - 2)\,dx = \int_{-2}^{1} (4 - 2x - 2x^2)\,dx$

$= \left(4x - x^2 - \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{1} = 4(1+2) - (1-4) - \frac{2}{3}(1+8)$

$= 12 + 3 - 6 = 9$

⑤ Найти S фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$

$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$

$y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$

$S = 4b\int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx = 4b\int_0^a \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}\,dx$

$x = a\sin t$, $x = 0 \Rightarrow t = 0$

$a^2 - x^2 = a^2\cos^2 t$, $x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

$dx = a\cos t\,dt$, $a = a\sin t \Rightarrow \sin t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

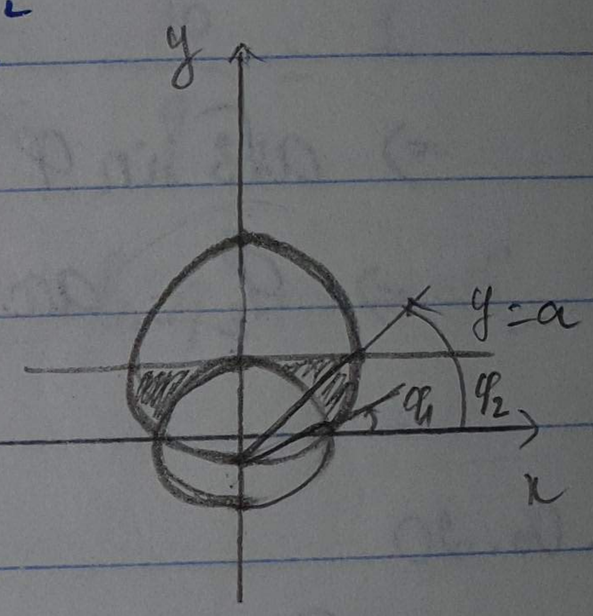
$$S = 4\frac{b}{a}\int_0^{\pi/2} a^2\cos^2 t\,dt = \frac{4ab}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt$$

$$= 2ab\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = 2ab\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\sin\pi - \sin 0)\right)$$

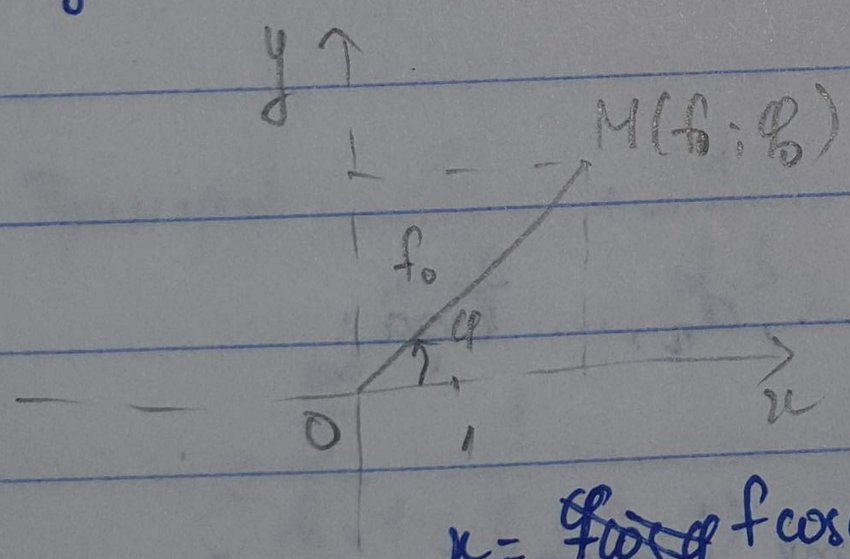
$$= ab\pi$$

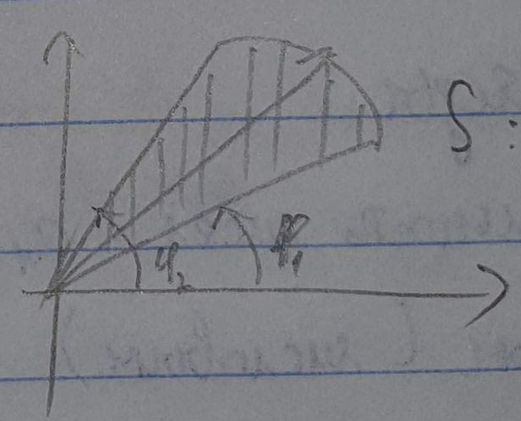
⑥ Дано: $\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ x^2+y^2-2ay=a^2 \\ y=a \end{cases}$

$$x^2+y^2-2ay=a^2 \Leftrightarrow x^2+(y-a)^2=2a^2$$



Полярные координаты: на плоскости задаётся точка отсчета, полярный луч и масштаб на нём





S: от φ_1 до φ_2

$$x = \cancel{f\cos\varphi}\ f\cos\varphi \quad (f \geq 0)$$
$$y = f\sin\varphi$$

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\varphi)\,d\varphi$$

Продолжение задачи:

$$\begin{cases} x = f\cos\varphi \\ y = f\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x^2+y^2=a^2 \to f^2\cos^2\varphi + f^2\sin^2\varphi = a^2 \Leftrightarrow f^2=a^2 \\ x^2+y^2-2ay=a^2 \Rightarrow f^2\cos^2\varphi + f^2\sin^2\varphi - 2af\sin\varphi = a^2 \\ f^2 - 2af\sin\varphi = a^2 \end{array}$$

$y = a \to f\sin\varphi = a \to f = \frac{a}{\sin\varphi}$

$\underline{\varphi_1}$:

$$\begin{cases} f^2 = a^2 \\ f^2 - 2af\sin\varphi = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow a^2 - 2aa\sin\varphi = a^2$$

$$\Leftrightarrow -2a^2\sin\varphi = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi_1 = 0$$

$\underline{\varphi_2}$: $\begin{cases} f^2 - 2a\sin\varphi = a^2 \\ f\sin\varphi = a \end{cases} \Leftrightarrow f^2 - 2a^2 = a^2$

$\Leftrightarrow f^2 = 3a^2$

$\Leftrightarrow f = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow a\sqrt{3}\sin\varphi = a \Leftrightarrow \sin\varphi = 1/\sqrt{3}$

$\Rightarrow \varphi_2 = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$

01.06.20

Тема : Ряды

Пусть дана последовательность чисел : $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ Тогда :

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – рядом (числовым)

Сумма конечного числа членов послед. наз-ется частичной суммой ряда

$S_1 = a_1$; $S_2 = a_1 + a_2$; ... $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$

Новая последовательность :

$S_1 ; S_2 ; \dots ; S_n ; \dots$ – сходится, если $\exists$ и конечен $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ (*)

При выполнении (*) ряд называется сходящимся. При этом S – наз-ется суммой ряда.

Пример 1:

Бесконечно убывающая ~~гео~~ геометрическая прогрессия - пример сходящегося ряда.

$$0,(9) = 1$$

$$0,(9) = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \dots + \frac{9}{10^n} + \dots$$

$$= \frac{9}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^{n-1}} + \frac{1}{10^n} + \dots\right)$$

$$= \frac{9}{10}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{10^k} = \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{1-1/10} = \frac{9}{10}\cdot\frac{10}{9} = 1$$

бескон. убыв. прогр: $b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \dots + b_1 q^n + \dots = S_\infty$

если $|q| < 1 \Rightarrow S_\infty = \frac{b_1}{1-q}$

Пример 2: $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} + \dots$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$$

Вычислим $S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-2)(n-1)} + \frac{1}{(n-1)n}$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$= 1 - \frac{1}{n}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 \Rightarrow$ ряд сходится по определению

Свойства сходящихся рядов:

1. Если $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ – сходится, то сходится и ряд, полученный из него отбрасыванием конечного числа членов.

Д-во: Пусть отбрасываются первые k членов ряда.

Оставшийся ряд: $a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{k+p} + \dots$ – будем называть остатком ряда.

По условию: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ – сходится $\Rightarrow \exists$ и конечен $\lim_{n\to\infty} S_n = S$

$$S_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_k) + (a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_n)$$
$$= \sigma_k + S_{n-k}$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (\sigma_k + S_{n-k}) = \sigma_k + \lim_{n\to\infty} S_{n-k}$$

Так как $\exists \lim_{n\to\infty} S_n \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} S_{n-k}$

$\Rightarrow \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i$ – сходится

2. Если $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ – сходится, то $\forall c \in R$ сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k$. Причём сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k = c \cdot S$

3. Если $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ – сходится к A (сумма ряда $= A$)

и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ – сходится к B, то сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ причем его сумма $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = A + B$

Доказательства 2 и 3 можно провесть самостоятельно.

4. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - сходится, то сходится и ряд, полученный любой группировкой, причем суммы рядов одинаковые.

Признаки сходимости

1. Если ряд сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Альтерно-тивная формулировка:

Если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - расходится

Д-во: Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - сходится $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = S$. Заметим, что

$a_n = S_n - S_{n-1}$

тогда $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$

Пример:

1) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}$

$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1 \Rightarrow$ ряд расх.

2) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \dots = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$, но ряд расх.

$1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \dots = 1 + 1 + 1 + \dots$ - расх.

3) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ - наз-ется гармоническим

$\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, но ряд расх-ся.

Д-во: Предположим, что ряд сходится, тогда

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$

$S_{2n} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots + a_{2n}$

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n) = 0$

но: $S_{2n} - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{2n}$

$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$

с одной стороны: $S_{2n} - S_n \to 0$

а с другой: $S_{2n} - S_n > \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ ряд расходится

но расходится очень медленно:

$S_{10} = 2,929$; $S_{1000} = 7,485$; $S_{10000} = 9,788$

Далее мы рассматриваем ряды с положительными членами ($a_k > 0$).

Критерий сходимости: для того, чтобы $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ($a_k > 0$) - сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограниченна:

Напомню: теорема о существовании предели ограниченной сверху возрастающей (или ограниченной снизу убывающей) последо-ти.

Д-во: достаточность. Пусть частичные суммы - ограничены.

Тогда: $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$, т.к. $a_{n+1} > 0$, то последовательность $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ монотонно возрастает $\Rightarrow \exists$ и конечен

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \Rightarrow$ ряд сходится.

Необходимость. Пусть ряд сходится. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

По свойству предела это означает последовательность $S_1, S_2, \dots, S_n$ ограничена.

Достаточные пр-ки сходится:

I-й признак сравнения:

Пусть даны два ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ и начиная с некоторого N: $a_n \le b_n$

Тогда: 1) из сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b$ и следует сх-ть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

2) из расходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow$ расходим $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b$ и

II признак сравнения

Признак Даламбера.

03.05.20

Двойные интегралы

Постановка задачи

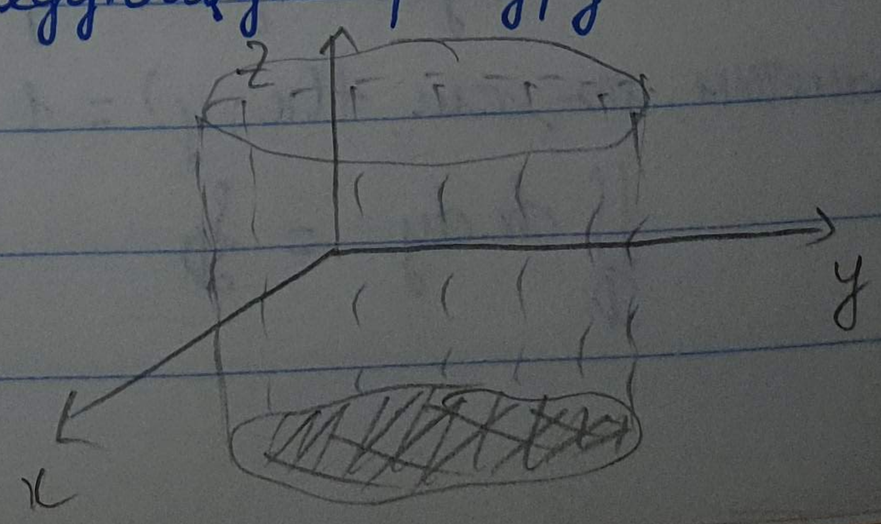
Дана ф-ция $z = f(x;y)$

Назовём цилиндрическим телом следующую фигуру

$z = f(x;y)$

$D \in Oxy$

боковая поверхность $\parallel Oz$

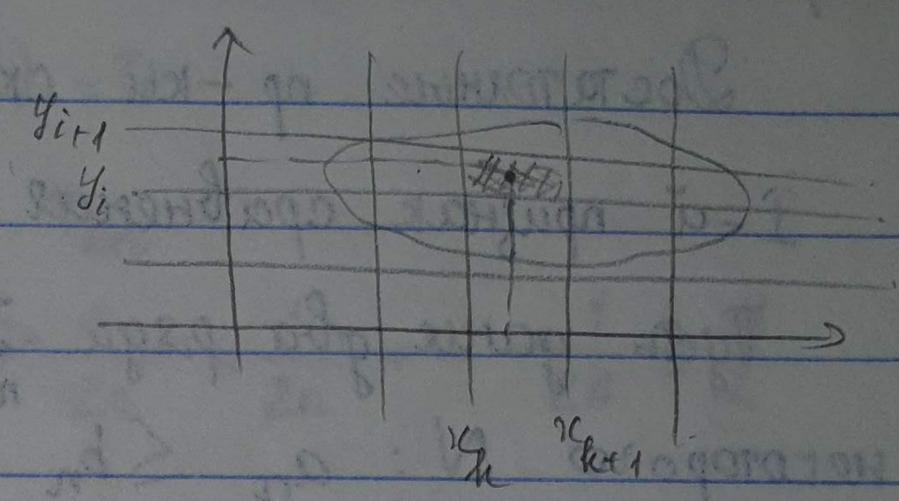


Задача: Найти объём данной фигуры

Разобьём область D на прямоуг. ячейки со сторонами $[x_k; x_{k+1}]$ $[y_i; y_{i+1}]$, где $k = 0; n$

$i = 0; m$

Далее, в каждой ячейке выберем некоторую точку ξ_{k+1} и найдем значение: $f(\xi_{k_i}) = z_{k_i}$



Построим прямоугольный параллелепид с основанием: прямоугольник $\in Oxy$ и высотой z_{k_i}

Объем пар-да:

$$V_{k_i} = \Delta x_k \cdot \Delta y_i \cdot z_{k_i}$$

где $\cancel{\Delta x_k} = \Delta x_k = x_{k+1} - x_k$

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

$$V_{\text{цил. тела}} \approx V_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \cdot \Delta y_i \cdot z_{k_i}$$

Тогда $V_{\substack{\text{цил.}\\ \text{тела}}} = \lim\limits_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta x_k \cdot \Delta y_i \cdot z_{k_i}$

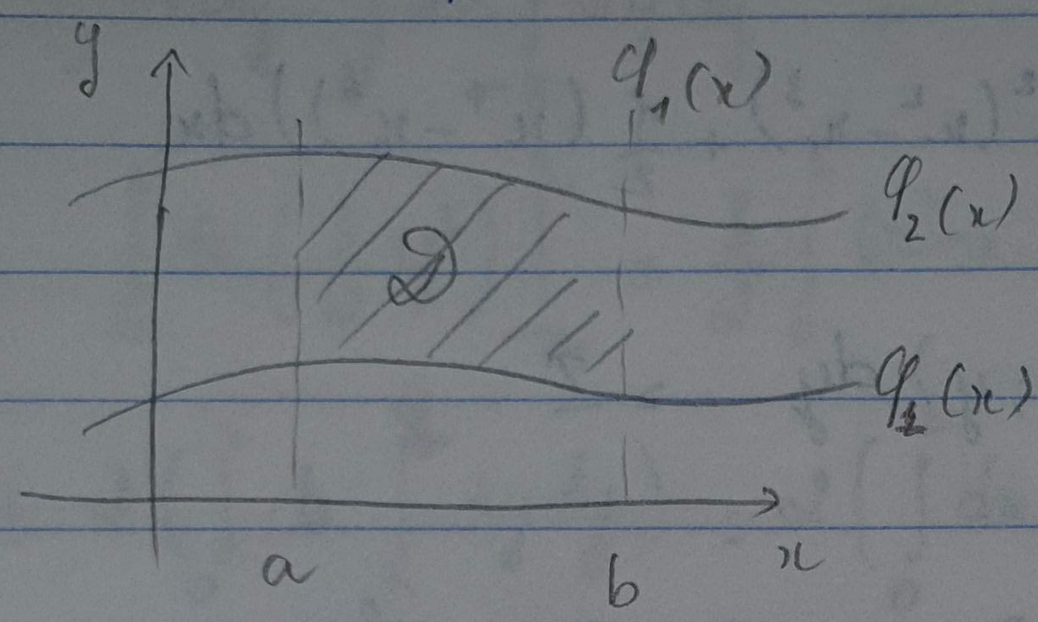
Такой предел наз-ется двойным интегралом $\iint\limits_D f(x; y)\, dx dy$

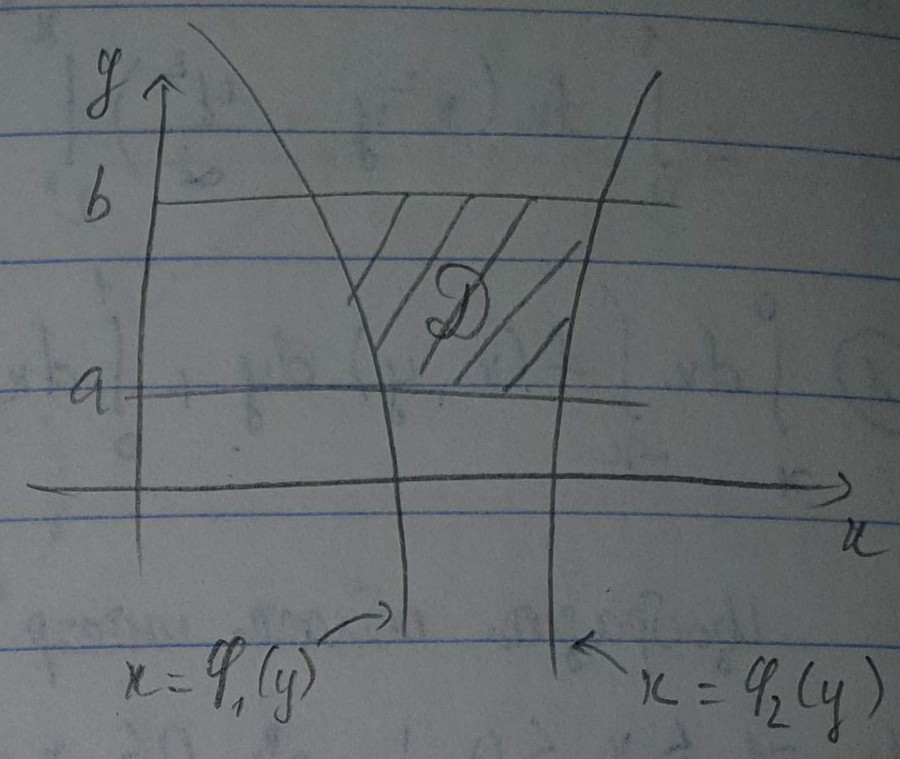
Заметим, что если $f(x; y) = 1$ то

$$\iint\limits_D dx dy = S_D$$

Повторным интегралом наз-ется:

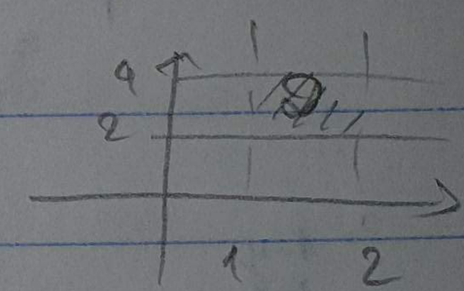
$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f\,dy \quad \text{или} \quad \int_a^b dy \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f\,dx$$





Самая простая область - это прямоугольник

Пример: $\iint\limits_D (x^2+y)\,dx\,dy$ (вычислить)



1, $D: 1 \le x \le 2;\ 2 \le y \le 4$

За переход от двойного интеграла к повторному отвечает теорема ~~ф-ц~~ Фубини

$$\iint\limits_D (x^2+y)\,dx\,dy = \int_1^2 dx \int_2^4 (x^2+\overset{\text{const}}{y})\,dx$$

$$= \int_1^2 dx \left(x^2 y + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_2^4 = \int_1^2 \left(x^2(4-2) + \frac{1}{2}(16-4)\right) dx$$

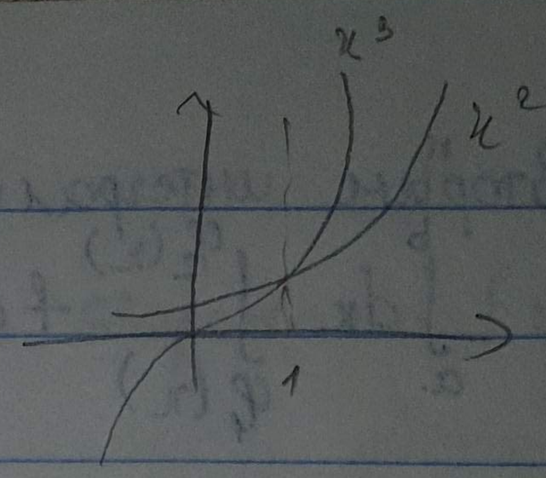
$$= \int_1^2 (2x^2+6)\,dx = \left(\frac{2}{3}x^3 + 6x\right)\Big|_1^2 = \frac{2}{3}(8-1) + 6(2-1)$$

$$= \frac{2}{3}\cdot 7 + 6 = \frac{14}{3} + 6 = \frac{32}{3}$$

$$\int_2^4 dy \int_1^2 (x^2+\overset{\text{const}}{y})\,dx$$

2) $D: y = x^2;\ y = x^3$

$$\iint_D (x^2+y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} (x^2+y)\,dy$$



$$= \int_0^1 dx \left(x^2 y + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{x^3}^{x^2} = \int_0^1 \left(x^2(x^2-x^3) + \frac{1}{2}(x^4-x^6)\right) dx$$

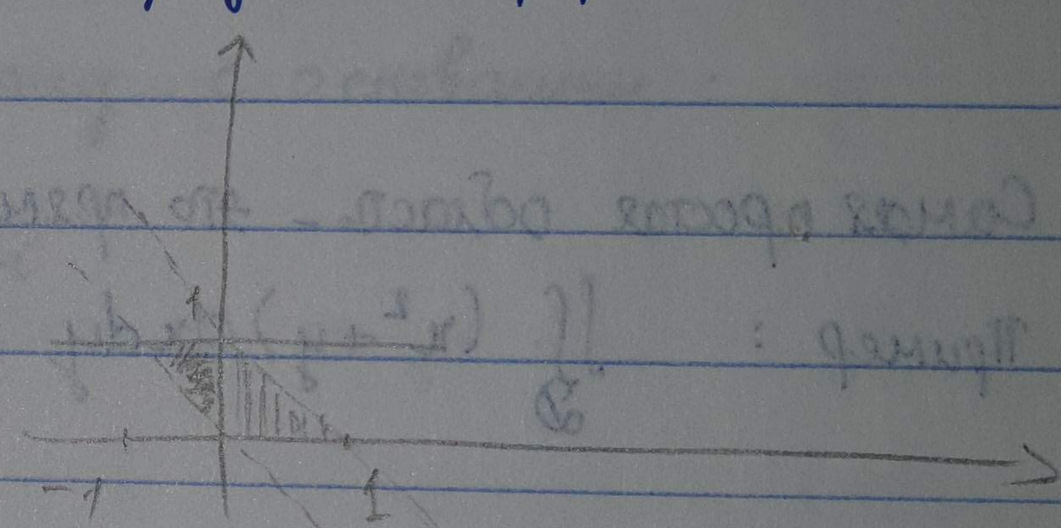
(1) $$\int_{-1}^{0} dx \int_{-x}^{1} f(x,y)\,dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x;y)\,dy = I$$

Изобразить область интегр, изменить порядок интегрирование.

1) $-1 \le x \le 0$ | 2) $0 \le x \le 1$

$y = -x$ | $y = 0$

$y = 1$ | $y = 1-x$



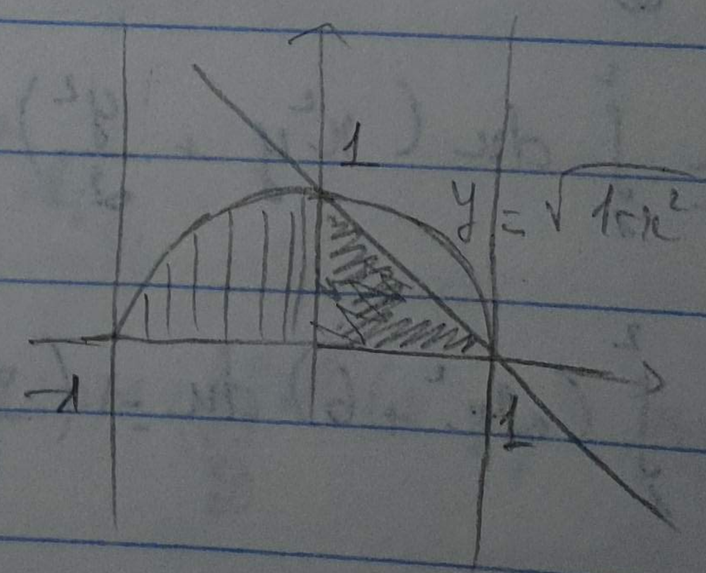
$$I = \int_0^1 dy \int_{-y}^{1-y} f(x;y)\,dx$$

(2) $$\underbrace{\int_{-1}^{0} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}}}_{\text{по } x} f(x;y)\,dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x;y)\,dy = I$$

по y

$y = \sqrt{1-x^2}$

$$I = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x;y)\,dx\,dy$$

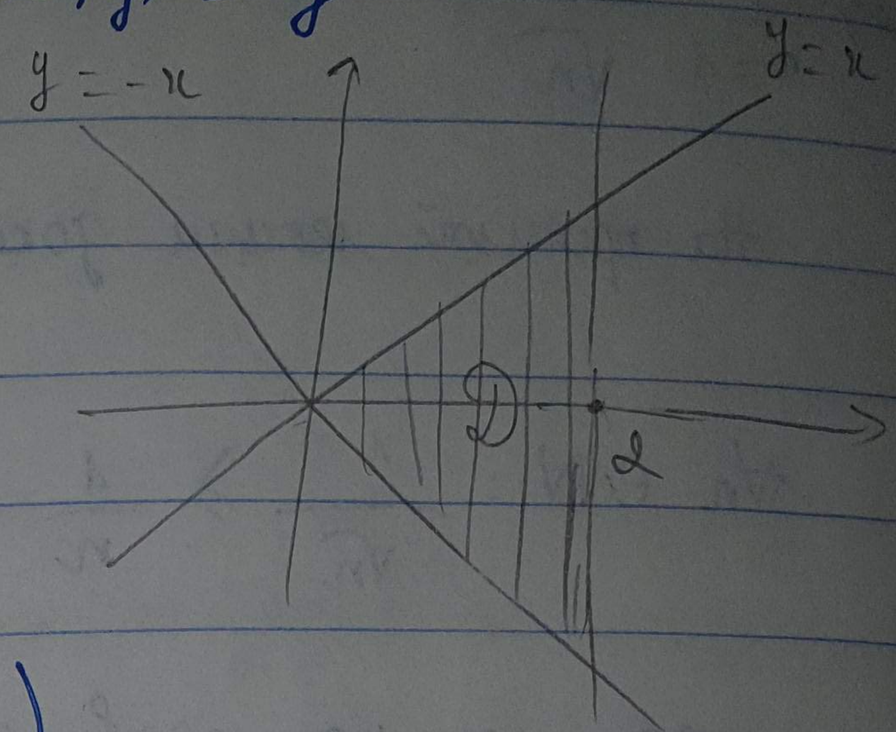


$y = \sqrt{1-x^2}$

$y^2 = 1 - x^2$

$x^2 = 1 - y^2$

③ $D = \{0 \le x \le 2;\ -x \le y \le x\}$, $f(x;y) = 3y$



$$\iint_D 3y\,dx\,dy = \int_0^2 dx \int_{-x}^{x} 3y\,dy$$

$$= \int_0^2 dx \left(\frac{3}{2}y^2\right)\Big|_{-x}^{x} = \frac{3}{2}\int_0^2 (x^2 - x^2)\,dx = 0$$

$$V = 2\left(\int_0^2 dx \int_0^{x} 3y\,dy\right) = 2\left(\int_0^2 dx \left(\frac{3}{2}y^2\right)\Big|_0^{x}\right)$$

$$= 2 \cdot \frac{3}{2}\int_0^2 x^2\,dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = 8$$

08.06.20

Достаточные условия сходимости рядов

1. Признаки сравнения (прошлая лекция)

Примеры:

1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \quad (1)$$

на прошлой лекции: $$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad (2)$$

Ряд (2) сходится (доказали)

$$\forall n \in N: \cancel{\frac{1}{2^2}}\ \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)} \quad (\text{т.к. } (n+1)^2 > n(n+1))$$

$\Rightarrow$ ① тоже сходится

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ (1)

На прошлой лекции доказали, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (2) – расходится

$\forall n \in N: \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{n}$ (т.к. $n \geqslant \sqrt{n}$)

$\Rightarrow$ по пр-ку сравнение ряд (1) – расходится.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^3+5n^2+2n-10}$

Сравним с $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ($\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ – сходится)

По предельному признаку сравнения:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n^3+5n^2+2n-10} \cdot \frac{n^2}{1} = 2$$

$\Rightarrow$ ряд ведут себя одинаково $\Rightarrow$ исходный ряд сходится

Признак Даламбера

Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $\exists$ такое число $q < 1$, что $\forall n$ (или начиная с некоторого) выполняется неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$$

то ряд сходится

Если же $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ ($\forall n$ или начиная с некоторого), то ряд расходится.

На практике пр-к Даламбера применяется в следующей форме

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p$, то:

1, Если $p > 1$ – ряд $\sum a_n$ – расх.

2, Если $p < 1$ – ряд $\sum a_n$ – сход.

3, Если $p = 1$ – требуется допорнии исследов

Пример: Исследовать на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

$$a_n = \frac{n^n}{n!} \; ; \; a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

По признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n (n+1)}{n!\,(n+1)} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1$$

$\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ – расходится

Радикальный признак Коши

Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и рассматривается $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n} = p$

Тогда: 1, если $p < 1$ – ~~расходится~~ ряд сходится

2, если $p > 1$ – ряд расходится

3, если $p = 1$ – ~~требуде~~ требуется дополнит. исследование.

Пример: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\ln n}\right)^{3n}$ – исследовать на сходимость.

По радикальному признаку Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{\ln n}\right)^{3n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{\ln n}\right)^{3} = 0 < 1 \Rightarrow \text{ряд сх-тся}$$

Интегральный признак Коши:

Пусть рассматривается ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ и про ф-цию $f(x)$ $(x \in R)$ известно, что:

1, $f(x)$ – непрерывна при $x \geq 1$

2, $f(x)$ – монотонно убывает при $x \geq 1$

3, $f(x)$ – неотрицательна при $x \geq 1$

Тогда $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ ведут себя одинаково.

Примеры: рассмотрим ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

Тогда при $k > 0$: $f(x) = \frac{1}{x^k}$ удовлетворяет всем условиям интегр. признака:

$\Rightarrow$ рассмотрим $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^k}$ – уже знаем, что при $k > 1$ интеграл сходится при $0 \leq k \leq 1$ – расходится.

Следовательно, только так же ведет себя и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$

! Результат этого примера используется при применении признаков сравнения. Для эталонных рядов будутся:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \left(\begin{array}{l} k>1 \text{ - сходится} \\ 0 \le k \le 1 \text{ - расходится} \end{array} \right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |q|^n \left(\begin{array}{l} |q| < 1 \text{ - сходится - геометр. прогр.} \\ |q| \geq 1 \text{ - расходится - по необход. признаку} \end{array} \right)$$

Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.

Ряд: $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \; (a_n \geq 0 \; \forall n)$

называется знакочередующимся.

Для такого ряда используется признак Лейбница, позволяющий исследовать знакочередующейся ряд на сходимость

Пусть члены знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине: $a_1 > a_2 > a_3 \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots$

и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, т.е. выполнен необходимый пр-к сходимости

тогда говорят, что $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ - сходится условно

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots$

Проверим условия приз. Лейбница:

1, Убывание: $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ - выполнено

2, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ – сходится условно

Абсолютная сходимость

Пусть дан знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (т.е. знаки произвольные – не чередуются)

Тогда можно рассмотреть ряд из модулей

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ – знакоположительный ряд $\Rightarrow$ для такого ряда выполнены все признаки, рассмотр. выше (для знакоположит. рядов)

Если ряд из модулей сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – тоже сходится и говорят, что этот ряд сходится абсолютно.

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi/n}{n^2}$ – знакоперем. ряд $\Rightarrow$ рассмотрим

ряд из модулей: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$ – ряд сходится

т.к. $\frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ $\Rightarrow$ по признаку сравнения

$\sum \frac{|\sin n|}{n^2}$ – сходится (т.к. $\sum \frac{1}{n^2}$ – сходится)

$\Rightarrow$ Исходный ряд сходится абсолютно и

$\Rightarrow$ ряд сходится

Абсолютная сходимость $\Rightarrow$ сходимость

В общем случае говорят так, что: если знакопеременный

ряд сходится, но не сходится абсолютно, то он сходится условно.

Степенные ряды наз-ется:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^n \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right)$$

где a_n - числа ; $x \in R$

Заметим, что в 1-м семестре мы сталкивались со степенные рядами.

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Т.е. $\sin x$ можно задать в виде ряда.

Вопрос, который интересует нас у степенные рядов при каких x ряд сходится.

Например: будет ли выполнено:

$$\sin 2 = \sum \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

10.06.20

① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S$$

$S_1 = a_1$; $S_2 = a_1 + a_2$ ... $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

$$S_n = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$$

$$1 = A(n+1)(n+2) + Bn(n+2) + Cn(n+1)$$

$$\left.\begin{array}{l} n=0 \Rightarrow 1 = 2A \Leftrightarrow A = 1/2 \\ n=-1 \Rightarrow 1 = -B \Leftrightarrow B = -1 \\ n=-2 \Rightarrow 1 = 2C \Leftrightarrow C = 1/2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)} = a_n$$

$$S_n = \overbrace{\frac{1}{2.1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3}}^{a_1} + \overbrace{\frac{1}{2.2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2.4}}^{a_2} + \overbrace{\frac{1}{2.3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2.5}}^{a_3} + \dots$$

$$+ \overbrace{\frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}}^{a_n}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n+2}\right)$$

$k=1: \frac{1}{1} - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} +$

$k=2: + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}$

$k=3: + \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5}$

$k=4: + \frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6}$

$k=5: + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \frac{1}{7}$

$k = n-2$: $+\frac{1}{n-2} - \frac{2}{n-1} + \frac{1}{n}$

$k = n-1$: $+\frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1}$

$k = n$: $+\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}$

$$\Rightarrow 1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{4}$$

(*) Исследовать на сходимость

Необходимый признак, если ряд $\to a_n \to 0$, $n \to \infty$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2}$ vs $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (расх.)

по предельному признаку сравнения:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n-2} \cdot \frac{n}{1} = \frac{1}{3}$$ $\Rightarrow$ ряда ведут себя одинаково

$\Rightarrow$ оба расх-ся.

(3) 12.21: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^3-1}$ vs $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n^3-1} \cdot \frac{n^2}{1} = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$ по предельному признаку ряди ведут себя одинаково

$\Rightarrow$ оба сходится

④ 12.25 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \tan^6 \frac{\pi}{n}$ vs $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^6}{n^6} = \pi^6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}}_{\text{сх-ся}}$

$$\tan \frac{\pi}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\pi}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \tan^6 \frac{\pi}{n} \cdot \frac{n^4}{n^6} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^6 \cdot \pi^6}{\pi^6 \cdot n^6} = 1$$

$\Rightarrow$ оба ведут себя одинаково $\Rightarrow$ обе сх-ся.

⑤ 12.27 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^2}}$ vs $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}}_{\text{расх.}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^2}} \cdot \frac{n^{2/3}}{1} = \lim_{n\to\infty} \ln n = \infty$$

$$\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^2}} > \frac{1}{n^{2/3}} \quad (\forall n \geq 3)$$

$n = 1$: $\ln 1 = 0$ | $a_n \leq b_n$

$n = 2$: $\ln 2 < 1$ |

$n = 3$: $\ln 3 > 1$ |

По теореме сравнения больше расх. $\Rightarrow$ расх.

⑥ исследовать на сх.: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n^3}}$ vs $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ сх. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/6}}$

$$\frac{\ln n}{\sqrt{n^3}} > \frac{1}{n^{3/2}} \quad \forall n \geq 0$$

шкала роста: $\ln n < n^{\alpha}$ $(\alpha > 0)$

$$\frac{\ln n}{\sqrt{n^3}} < \frac{n^{\alpha}}{n^{3/2}} \left(\begin{cases} \alpha = 1 \text{ - неподх.} \\ \dfrac{1}{n^{1/2}} \end{cases} \quad \alpha = \frac{1}{3} \right)$$

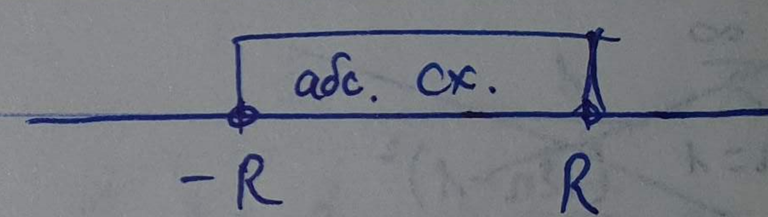
$$\frac{\ln n}{\sqrt{n^3}} < \frac{n^{1/3}}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{7/6}} \qquad \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$$

7 $\underline{12.165}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^n \cdot n^2}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^n$ - степенной ряд

При каждом $x = x_0$ - это числовой ряд

если найти R при котором ряд сходится $\Rightarrow |x| \le R$



Признак Даламбера для знакоположит. числовых рядов:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p \quad \begin{cases} p < 1 \text{ - сх.} \\ p > 1 \text{ - расх.} \\ p = 1 \text{ - ?} \end{cases}$$

Используем признак Даламбера для степенных рядов:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(z-1)^{n+1}}{(n+1)^2 \cdot 2^{n+1}} \cdot \frac{2^n \cdot n^2}{(z-1)^n} \right| = \frac{|z-1|}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1$$

$$= \frac{|z-1|}{2} < 1 \text{ - сх.}$$

$a_{n+1} \cdot x^{n+1}$ расх. | абс. сх. | расх.

проверка $\to -1$ $\quad 1 \quad 3 \leftarrow$ проверка $\quad |z-1| < 2$ R

$$z = -1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2 \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)2^n}{n^2 \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

проверим на абс. сх.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leftarrow \text{сх.}$$

абс. сх. при $z = -1$

$$z = 3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{сх.}$$

при $z \in [-1; 3]$ - абс. сх.

вне отрезка - расх.

$$\cancel{\sum \frac{(-1)^n}{n} \text{ — рас. абс.}}$$

17.06.20

$$① \quad \cancel{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}}$$

Необходимо признак → только расх.

Достаточные признаки

1) Сравн. ①
   - → Даламбер
   - → Коши
   - → Интегр. Коши

2) Сравн. ②
   предельный

① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ Vs $\sum \frac{1}{n^2}$ – сх.

По предельному признаку срав.

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cdot \frac{n^2}{1} = \frac{1}{4}$ – конечное число $\neq 0$

$\Rightarrow$ оба ряда ведут себе одинаково

$\Rightarrow$ оба сходится.

② $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^2} \arctan \frac{1}{n^2}$

Так как $\arctan \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^2} \arctan \frac{1}{n^2}$ Vs $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$ – сх.

По предельному признаку срав.

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^2} \arctan \frac{1}{n^2} \cdot n^{4/3} = \lim_{n\to\infty} \left(n^2 \cdot \frac{1}{n^2}\right) = 1 \Rightarrow$ оба сх.

③ $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{n^2}$

* По Даламберу: $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{(n+1)^2} : \left(\frac{1}{e}\right)^{n^2}$

$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{n^2+2n+1-n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{2n+1}} = 0 < 1$ – сходится.

* По признаку сравнения ① : $\left(\frac{1}{e}\right)^{n^2} \le \frac{1}{e} \quad \forall n \geq 1$

меньше сход. → сходится.

④ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3.5\ldots(2n+1)}{1.4\ldots(3n-2)}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3.5\ldots(2n+1)(2n+3)}{1.4\ldots(3n-2)(3n+1)} \cdot \frac{1.4\ldots(3n-2)}{3.5\ldots(2n+1)}$$

$$= \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \text{сх.}$$

⑤ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{сх.}$$

⑥ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(\frac{n}{4n-3}\right)^{2n}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{1/2}\left(\frac{n}{4n-3}\right)^{2n}} = \lim_{n\to\infty} n^{1/2n}\left(\frac{n}{4n-3}\right)^2 = \frac{1}{16}\lim_{n\to\infty} n^{1/2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\ln n^{1/2n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{2n}\cdot\ln n} = 1$$

$\frac{1}{2n}\cdot\ln n \to 0$, $\left(\frac{n}{4n-3}\right) \to \frac{1}{4}$

⑦ $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^2}$

$$\int_3^{\infty} \frac{dx}{x\ln x(\ln\ln x)^2} = \lim_{b\to\infty}\int_3^b \frac{d\ln x}{\ln x(\ln\ln x)^2} = \lim_{b\to\infty}\int_3^b \frac{d\ln(\ln x)}{(\ln\ln x)^2}$$

$$= -\lim_{b\to\infty} \frac{1}{\ln\ln x}\Big|_3^b = -\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{\ln\ln b} - \frac{1}{\ln\ln 3}\right) = \frac{1}{\ln\ln 3} \text{ — интег. сх.}$$

$\frac{1}{\ln\ln b} \to 0$, $\ln\ln b \to \infty$

$\Rightarrow$ ряд сх.

Знакочередующиеся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \quad (a_n > 0)$$

Признак Лейбница

1) $a_n > a_{n+1} \quad \forall n$

2) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n \to 0$

Составим ряд из модулей:

$\left(\left| (-1)^{n+1} a_n \right| = a_n \right. \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – исследование этого ряда на сх-ть

Если ряд сх-ся абсолютно, то он сх-ся!

Исслед. на абсол. сх.

+) да: рем. законого

+) нет: применяем пр-к Лейбница.

- да: усл. сх.
- нет: расх.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n-1}$$

ряд из модулей: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1} \vee \sum \frac{1}{n}$ – расх. по пред. при-ку

абсолютно расх. → признак Лейбница

1) $\frac{1}{3n-1} \vee \frac{1}{3(n+1)-1} = \frac{1}{3n+2}$

$3n-1 \vee 3n+2$

$-1 < 2 \Rightarrow 3n-1 < 3n+2$

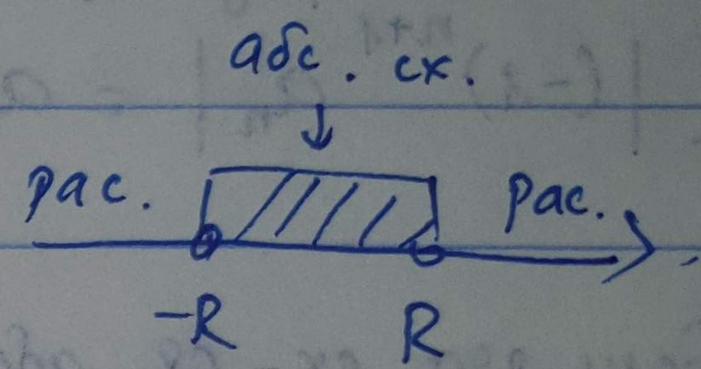
$$\Rightarrow \frac{1}{3n-1} > \frac{1}{3n+2}$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3n-1} = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{3n-1} \text{ — усл. сх.}$$

⑧ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (z+1)^n}{(3n-2)\cdot 2^n}$

Например : $z = 1$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot z^{\cancel{n}}}{(3n-2)\cdot z^{\cancel{n}}}$

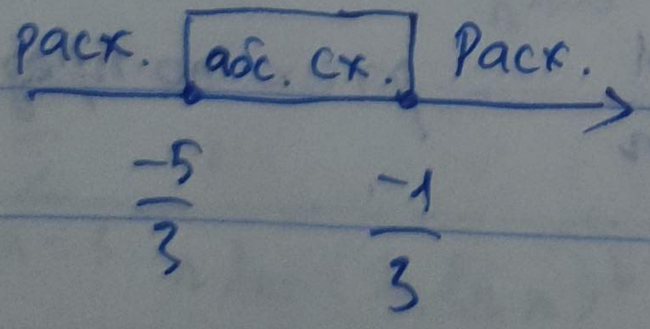


Признак Даламбера :

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^{n+1} \cancel{(z+1)^{n+1}}}{(3n+1)\, 2^{\cancel{n+1}}} \cdot \frac{(3n-2)\, 2^{\cancel{n}}}{3^n \cancel{(z+1)^n}} \right|$$

$$= \frac{3}{2} |z+1| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{3n-2}{3n+1} = \frac{3}{2} |z+1| < 1 \Rightarrow \text{сх.}$$

$$\frac{3}{2}|z+1| < 1 \Leftrightarrow |z+1| < \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{-2}{3} < z+1 < \frac{2}{3}$$



$$\Leftrightarrow \frac{-5}{3} < z < \frac{-1}{3}$$

$$z = \frac{-5}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \left(\frac{-5}{3}+1\right)^n}{(3n-2)\cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \left(\frac{-2}{3}\right)^n}{(3n-2)\cdot 2^n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \cancel{3^n} \left(\frac{2}{3}\right)^n}{(3n-2)\cdot \cancel{2^n}} \Rightarrow \text{усл. сх.}$$

⑨ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arc}\overset{\cot}{\cancel{\tan}}(n+3)}{2-n^3} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arc}\overset{\cot}{\cancel{\tan}}(n+3)}{n^3-2}$

$\arctan x + \operatorname{arc}\cot x = \frac{\pi}{2}$

$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi/2 - \arctan(n+3)}{n^3-2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n+3) - \pi/2}{n^3-2}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n+3)}{n^3-2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi/2}{n^3-2}$ → сх. → сх.

$\arctan(n+3) < \frac{\pi}{2}$

$\sum \frac{\pi/2}{n^3-2} \vee \sum \frac{1}{n^3}$

23.06.20

① $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan^2 \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \sim \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)^2 = \frac{1}{n^{2/3}}$ – расх.

② $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n+2}\right)^{2n}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+3}{n+2}\right)^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+3}{n+2}\right)^2 = 4 > 1 \Rightarrow$ расх.

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n^2+3n}$

абс. сх. — да → сх.; нет → лейбница: да → усл. сх.; нет → расх.

абс. сх. : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{n^2+3n} \vee \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расх.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+3n} \cdot \frac{n}{1} = 1$$

Признак Лейбница: 1) $\underbrace{\frac{n+1}{n^2+3n}}_{a_n} > \underbrace{\frac{n+2}{(n+1)^2+3(n+1)}}_{a_{n+1}}$

$(n+1)(n^2+2n+1+3n+3) \vee (n+2)(n^2+3n)$

$n^3+5n^2+4n+n^2+5n+4 \vee n^3+3n^2+2n^2+6n$

$n^2+3n+4 > 0 \quad (n \in N)$

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+3n} = 0$

(4) Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right) x^{3n}$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{3n+3}(n+3)}{n+1} \cdot \frac{n}{(n+2)x^{3n}} \right| = |x^3| < 1 \text{ — абс. сх.}$$

$\Rightarrow |x| < 1$

расх. | абс. сх. | расх.

-1 $\quad$ 1

расх. $\quad$ расх.

$x=1: \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right) \neq 0$

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad R > 0$ — радиус сх.

1) при $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$

ряд можно почленно дифференцировать причём:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n (x-x_0)^n\right)'$$

$$\parallel$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n (x-x_0)^{n-1}$$

2) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$; $R>0$

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}_{\text{ф-ция}} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} a_n (x-x_0)^n\,dx}_{R>0 \text{ - радиус. сх.}}$$

~~arctan x~~

Формула Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad \Big| \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^n}{n}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad \Big| \quad e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$(1+x)^k = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!} x^n$$

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

из разложения в ряд $(1+x)^k$ следует 2 часто используемых случая:

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n$$

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$\frac{1}{1+t^2} \Rightarrow$ используем разложение $\frac{1}{1+x}$

2) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$; $R>0$

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}_{\text{ф-ция}} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} a_n (x-x_0)^n\,dx}_{R>0 \text{ - радиус. сх.}}$$

~~arctan x~~

Формула Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad | \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^n}{n}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad | \quad e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$(1+x)^k = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k(k-1)\dots(k-1}{n!} \boxed{x^n}$$

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

из разложения в ряд $(1+x)^k$ следует 2 часто используемых случа

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n$$

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot t^{2n}$$

$$= (t^2+1)^{-1}$$

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n}\,dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^x = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}} \leftarrow \arctan x$$

$f(0) = 1$

$f' = \cancel{\frac{1}{t}} \; -2(t^2+1)^{-2} \Rightarrow f'(0) =$