Глава 2. Симплекс-метод

§1. Опорные решения ЗЛП в каноническом виде.

Рассмотрим ЗЛП, приведенную к каноническому виду

$$\boldsymbol{Z(X) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \to max};$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i} & \boldsymbol{i = 1, \dots, m} \\ \boldsymbol{x_j \geq 0} & \boldsymbol{j = 1, \dots, n} \\ \boldsymbol{b_i \geq 0} & \end{cases}$$

или в матричном виде

$$\boldsymbol{Z(X) = CX \to max}$$
$$(*) \begin{cases} \boldsymbol{AX = B} \\ \boldsymbol{X \geq "\theta"} \\ \boldsymbol{B \geq "\theta"} \end{cases}$$

где "θ" - нулевой n-мерный вектор. Будем считать, что

1) ранг матрицы $r(A) = m$ (иначе приведем ее к такому виду); ранг матрицы – количество строк в эквивалентной ей разрешенной матрице.

2) $m < n$, иначе система $\boldsymbol{AX = B}$ имеет единственное решение, и оно либо и есть оптимальное решение $(*)$, либо нет (если содержит отрицательные координаты).

Тогда система $\boldsymbol{AX = B}$ имеет бесчисленное множество решений, но общих решений с различным набором m базисных (разрешенных) переменных – конечное число. Каждому такому общему решению соответствует свое частное базисное решение, у которого m базисных переменных и $n - m$ свободных переменных (нулевых).

Определение 1. **Опорным решением** системы $AX = B$ называется ее базисное решение с неотрицательными координатами, то есть базисное решение системы $(*)$. Очевидно, что в опорном решении может быть не более m положительных координат.

Определение 2. Опорное решение называется **невырожденным**, если число его положительных координат равно m; в противном случае оно называется **вырожденным**.

Теорема. Любое опорное решение системы $AX = B$ является угловой точкой ОДР и наоборот.

Следствие: для нахождения оптимального решения ЗЛП с ограниченной ОДР достаточно сравнить значения целевой функции во всех опорных решениях системы $AX = B$.

Симплексный метод решения ЗЛП – это метод целенаправленного перебора опорных решений системы $AX = B$. За конечное число шагов можно либо найти оптимальное решение, либо доказать, что его нет.

§2. Переход к новому опорному решению

Пусть в системе уравнений $\boldsymbol{AX = B_0}$

$$r(A) = m;\ \boldsymbol{B_0} = (b_{01},\dots, b_{0m});\ b_{0i} \geq 0,\ \ i = 1, \dots, m$$

$x_1, \dots, x_m$ –разрешенные (базисные) переменные; $x_{m+1}, \dots, x_n$ – свободные переменные.

Тогда $(b_{01},\dots, b_{0m},0,\dots,0)=BFS_1$ – опорное решение $\boldsymbol{AX = B_0}$.

Найдем новое базисное решение системы $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B_0}$, при котором переменная

$x_k \quad (m+1 \le k \le n)$ становится базисной вместо переменной $\quad x_l \quad (1 \le l \le m)$. Для этого надо разрешить систему относительно нового разрешающего элемента $\; a_{lk}$. Чтобы это новое решение было опорным (с неотрицательными координатами), $\; l \;$ надо выбрать из условия

$$\theta_{lk} = \underbrace{min}_{1 \le i \le m} \theta_{ik} \quad \text{, где} \quad \theta_{ik} = \frac{b_{0i}}{a_{ik}} \quad \text{и} \quad a_{ik} > 0 \qquad (\text{Правило } \boldsymbol{\Theta})$$

Замечание. Если $\underbrace{min}_{1 \le i \le m} \theta_{ik}$ достигается при нескольких значениях i, то в качестве $\; l \;$ можно взять любое из этих значений.

Пример 1. Найти все опорные решения системы

$$\begin{cases} 2x + 3y + t \qquad\quad = 8 \\ 7x + 6y \quad + \quad u = 19 \\ \qquad x, y, t, u \ge 0 \end{cases}$$

ОБР — Опорное Базисное Решение

Б П — Разрешенные (базисные) переменные

min

Новый разрешающий элемент

Отрицательный элемент!

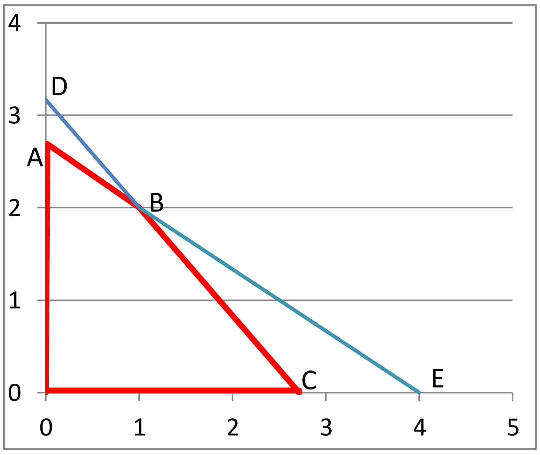
	Б П	x	y	t	u	ОБР	θ_y			
			↓							
←	**t**	2	3	1	0	**8**	2 2/3		(8:3=8/3)	
	u	7	6	0	1	**19**	3 1/6		(19:6=19/6)	*ОБР$_1$*(**0**; **0**; **8**; **19**) *т.О*
		↓					θ_x			
	y	2/3	1	1/3	0	**2 2/3**	4			
←	**u**	3	0	-2	1	**3**	1			*ОБР$_2$*(**0**; **8/3**; **0**; **3**) *т. А*
				↓			Θ_t			
←	**y**	0	1	7/9	- 2/9	**2**	1 2/9			*ОБР$_3$*(**1**; **2**; **0**; **0**) *т. В*
	x	1	0	- 2/3	1/3	**1**	-			
							θ_y	θ_u		
	t	0	1 2/7	1	- 2/7	**2 4/7**	2	-		*ОБР$_4$*(**19/7**; **0; 18/7**; **0**) *Т. С*
	x	1	6/7	0	1/7	**2 5/7**	3 1/6	19		

Остальные базисные решения не являются опорными

(4; 0; 0; -9) т. E; (0; 19/6; -3/2; 0) т. D

$$\begin{array}{l|l|l} 2x + 3y \le 8 & + s_1 & 2x + 3y + s_1 \quad = 8 \\ 7x + 6y \le 19 & + s_2 \qquad (**) & 7x + 6y \quad + s_2 = 19 \\ x, y \ge 0 & & x, y, s_1, s_2 \ge 0 \end{array}$$

s_1, s_2 - ***Дополнительные переменные***



§3. Преобразование целевой функции при переходе к новому опорному решению

Рассмотрим ЗЛП, приведенную к каноническому виду

$$\boldsymbol{Z(X) = CX \rightarrow max}$$
$$(*)\ \begin{cases} \boldsymbol{AX = B} \\ \boldsymbol{X \geq "\theta"} \\ \boldsymbol{B \geq "\theta"} \end{cases}$$

Пусть $r(A) = m$, а $x_1, \dots, x_m -$ разрешенные (базисные) переменные; $x_{m+1}, \dots, x_n -$ свободные переменные.

Определение. **Оценкой** переменной x_k по набору базисных переменных $x_1, \dots, x_m$ называется величина

$$\Delta_{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{c_1 a_{1k} + \dots + c_m a_{mk} - c_k}$$

Замечание. Для базисных переменных $\Delta_{\boldsymbol{k}} = 0$

Теорема 1. Обозначим $\Delta \boldsymbol{Z_k}$ приращение целевой функции при переходе от одного опорного решения к другому (свободная переменная x_k становится базисной вместо x_l, выбранной по Правилу $\boldsymbol{\Theta}$). Тогда

$$\Delta \boldsymbol{Z_k} = -\theta_{lk} \cdot \Delta_{\boldsymbol{k}}$$

Теорема 2. **(Об улучшении опорного решения.)** Если хотя бы одна из оценок $\Delta_{\boldsymbol{k}}$ опорного решения отрицательна, то оно может быть улучшено переходом к новому опорному решению введением в базис новой переменной x_k вместо x_l, выбранной по Правилу $\boldsymbol{\Theta}$**,** при этом

$$\Delta \boldsymbol{Z_k} = -\theta_{lk} \cdot \Delta_{\boldsymbol{k}}$$

Следствие 1: (признак оптимальности решения) Опорное решение ЗЛП является оптимальным, если

$$\Delta_{\boldsymbol{j}} \geq 0 \quad \text{для всех} \quad j = 1, \dots, n$$

Следствие 2: (признак единственности оптимального решения) Если $\Delta_{\boldsymbol{k}} > 0$ для всех x_k, не входящих в базис, то оптимальное решение ЗЛП является единственным.

Следствие 3: (признак существования бесконечного множества оптимальных решений)

Если $\Delta_{\boldsymbol{k}} = 0$ для некоторого x_k, не входящего в базис, то ЗЛП имеет бесконечное множество оптимальных решений.

Следствие 4: (признак отсутствия оптимального решения ввиду неограниченности целевой функции)

Если для некоторого x_k $\Delta_{\boldsymbol{k}} < 0$, а все $a_{ik} \leq 0$ $(i = 1, \dots, m)$, то целевая функция неограниченно возрастает.

Замечание. Вычисление $\Delta_{\boldsymbol{k}}$ в симплексных таблицах, начиная со второй, может производиться аналогично вычислению коэффициентов матрицы A (методом Жордана-Гаусса).

Пример 0.

$$Z(x) = 1 * x_1 - 1 * x_2 + 3 * \underline{x_3} - 1 * \underline{x_4} \rightarrow \max$$

$$-1 * x_1 + 2 * x_2 + 1 * \underline{x_3} = 2$$

$$3 * x_1 - 2 * x_2 + 1 * \underline{x_4} = 6$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, 4$$

Б К	Б П	1	-1	3	-1	О Б Р	Θ_1
		x_1	x_2	$\underline{x_3}$	$\underline{x_4}$		
3	$\underline{x_3}$	-1	2	**1**	0	**2**	-
-1	$\underline{x_4}$	$\underline{3}$	- 2	0	**1**	**6**	6 : 3 = $\underline{2}$ *min*
	Δ_j	3 * (-1)+(-1) * 3- - 1= = $\underline{-7}$	3 * 2+(-1) * (-2) - - (-1)= =*9*	**0**	**0**	Z=3 * **2** +(- 1) * **6**= = 0	
3	x_3	0	**4/3**	**1**	1/3	$\underline{4}$	
1	x_1	**1**	-2/3	0	1/3	$\underline{2}$	
	Δ_j	**0**	**13/3**	**0**	**7/3**	Z = $\underline{14}$	

$X^* = X_{max} = (\underline{2}; 0; \underline{4}; 0)$ $\qquad$ $Z^* = Z_{max} = Z(X^*) = 2+3*4 = \underline{14}$