

1. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

- Линия уровня для функции двух переменных
- Определение частной производной и уметь взять любую производную
- Что такое градиент функции? Его свойства.
- Производная по направлению.
- Экстремум функции. Необходимое и достаточное условия.
- Условный экстремум функции. Функция Лагранжа.

2. ИНТЕГРАЛЫ

- Первообразная функции. Неопределенный интеграл.
- Таблица интегралов. Знать наизусть!!
- Методы интегрирования (есть в презентации)
- Определенный интеграл, свойства, геом.смысл
- Несобственные интегралы первого и второго рода
- Эталонные интегралы

3. РЯДЫ

- Определение. Свойства
- Необходимый признак сходимости
- Достаточные признаки сходимости для знакоположительных рядов
- Знакопередающие ряды. Условная сходимость. Признак Лейбница
- Степенные ряды. Радиус сходимости.
- Ряд Маклорена и ряд Тейлора. Знать разложения основных функций.

Задачи для творческого рейтинга:

1. Известно, что  $\int \frac{\pi^{3/2} \cos x}{\pi^2 + x^2} dx = F(x) + C$  и  $g(x) = F(x^2)$ . Найдите  $g'(\sqrt{\pi})$ .
2. Известно, что  $\int \frac{g(x)}{x^2 + 3x + 2} dx = a \cdot G(x, b) + c \cdot G(x, d) + C$ , где  $G(x, x_0)$  – первообразная функции  $\frac{g(x)}{x - x_0}$ . Найдите  $a, b, c, d$ , если  $b > d$ .
3. Найдите неопределенный интеграл  $\int \frac{x \cdot f(x)}{x^2 + x - 6} dx$ , если  $\int \frac{f(x)}{x - a} dx = F(x; a) + C$ , где  $F(x; a)$  – заданная функция переменных  $x$  и  $a$ ,  $C = \text{const}$ .
4. Пусть функция  $f(x; y)$  дифференцируема. Докажите, что  $f(1 + 2t; 2 + 3t) - f(1; 2) = k \cdot t + o(t)$  при  $t \rightarrow 0$ , и найдите  $k$ .

5. Используя определение дифференциала, найдите частные производные  $f'_x(0; 2)$  и  $f'_y(0; 2)$ , если  $f(2t; 2 - 3t) - f(0; 2) = -8t + o(t)$  и  $f(3t; 2 + 2t) - f(0; 2) = t + o(t)$ .
6. Известно, что  $f(5 - 3t; 6 + 4t) - f(5; 6) = 15t + o(t)$  при  $t \rightarrow 0$ . Найдите производную функции  $f(x; y)$  в точке  $A(5; 6)$  по направлению вектора  $\vec{l} = \{3; -4\}$ .
7. Функция  $f(x, y)$  имеет отрицательные непрерывные частные производные 2-го порядка в точке  $A(0; 1)$  и  $f'_x(A) = f'_y(A) = 0$ . Докажите, что функция  $g(t) = f(2t; 1 + 3t) - f(0; 1)$  имеет локальный максимум при  $t = 0$ .
8. На линии условия  $\varphi(x; y) = 2x + y - 1 = 0$  в семи точках даны градиенты функции двух переменных  $f(P) = f(x; y)$ :

в точке  $A(-3; 7)$  градиент равен  $(3; 1)$ ,  
 в точке  $B(-2; 5)$  градиент равен  $(2; 1)$ ,  
 в точке  $C(-1; 3)$  градиент равен  $(3; 1)$ ,  
 в точке  $D(0; 1)$  градиент равен  $(4; 2)$ ,  
 в точке  $E(1; -1)$  градиент равен  $(1; 1)$ ,  
 в точке  $F(2; -3)$  градиент равен  $(6; 3)$ ,  
 в точке  $G(3; -5)$  градиент равен  $(3; 1)$ .

Все точки, «подозрительные» на условный экстремум, находятся среди указанных. Найдите эти точки и исследуйте их на условный экстремум.

9. Вычислить следующие определенные интегралы, как предел интегральных сумм:  $\int_1^2 x^2 dx$ ;  $\int_0^5 (1 + x) dx$ ;  $\int_0^{10} e^x dx$ .

10. Выразите через определенный интеграл и найдите предел:

А)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n e^{\sin \frac{k}{n}} \cdot \left( \sin \frac{k}{n} - \sin \frac{k-1}{n} \right)$

Б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \left( \ln \frac{k}{n} \right) \cdot \left( \ln \frac{k}{n} - \ln \frac{k-1}{n} \right)$

11. Найдите множество всех возможных значений  $f(2)$ , если  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$  и  $1 \leq f''(x) \leq 6x^2 + 1$  при всех  $x \in [0; 2]$ .

12. Известно, что  $F'(x) = f(x)$  и  $G(x)$  – первообразная функции  $\cos 2x \cdot f(\sin 2x)$ .

Найдите  $G\left(\frac{\pi}{4}\right)$ , если  $F(0) = 2$ ,  $F(1) = 3$  и  $G(0) = 2$ .

13. Известно, что  $F'(x) = \sin x \cdot g'(x)$  и  $G'(x) = \cos x \cdot g(x)$ . Найдите  $F(\pi)$ , если  $F(0) = 1, G(0) = 1, G(\pi) = 3$

14. Найдите  $\int_0^2 x f(4 - x^2) dx$ , если

$$\int_0^2 f(4 - x^2) dx = 2, \quad \int_0^2 f(x) dx = 4 \quad \text{и} \quad \int_0^4 f(x) dx = 6.$$

15. Известно, что  $\Phi(x) = \int_0^x f(t, 0, 1) dt$ , где

$$f(t, a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right),$$

и

$$\Phi(0,5) \approx 0,1915, \quad \Phi(1) \approx 0,3413,$$

$$\Phi(1,5) \approx 0,4332, \quad \Phi(2) \approx 0,4772$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 0,5.$$

Найти параметры  $a$  или  $\sigma$ , если

А)  $\int_{-\infty}^5 f(x, a, 4) dx \approx 0,9332$

Б)  $\int_2^{+\infty} f(x, -2, \sigma) dx \approx 0,3085$

16. Найти  $n$ -ю частичную сумму ряда  $S_n$  и сумму ряда  $S$ :

А)  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$ ;

Б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{1}{2n^2}$

17. Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки  $x_0 = -2$  и найти радиус сходимости полученного ряда:

$$1 + \int_2^x \ln \frac{5t-7}{t} dt$$