Глава 4. М-метод - метод введения искусственных базисных переменных

Если ЗЛП задана в каноническом виде, но не имеет начального опорного решения, то для ее решения применяется метод введения искусственных базисных переменных - так называемый М-метод. Согласно данному методу для ЗЛП составляется расширенная ЗЛП с начальным опорным решением, которая решается Симплекс методом. На основе результатов решения расширенной задачи либо находится оптимальное решение исходной задачи, либо устанавливается отсутствие оптимального решения и причина такого отсутствия.

Пусть исходная задача имеет вид

$$\boldsymbol{Z(X) = CX \to max}$$
$$(*) \begin{cases} \boldsymbol{AX = B_0} \\ \boldsymbol{X \geq "\theta"} \\ \boldsymbol{(B_0 \geq "\theta")} \end{cases}$$

где $A = A^{m\times n}$; $r(A) = m$; $\boldsymbol{B_0} = (b_{01},..., b_{0m})$; $b_{0i} \geq 0$, $i = 1, \dots, m$; $X = (x_1, \dots, x_n)$; $m < n$

Пусть система уравнений $\boldsymbol{AX = B_0}$ не содержит начального опорного решения, то есть только l $(l < m)$ различных переменных являются разрешенными (в частности, l может равняться нулю). Без ограничения общности можно считать, что разрешенными являются переменные $x_1, \dots, x_l$ в первых l уравнениях системы, а остальные $m - l$ уравнений не имеют разрешенных переменных.

Определение 1. **Искусственной переменой** называется переменная, которая вводится в левую часть уравнения исходной задачи, не имеющего разрешенной переменной, с коэффициентом 1 (единица). Если в каждое уравнение исходной задачи, не имеющее разрешенной переменной, ввести свою искусственную переменную, то новая система уравнений станет разрешенной, то есть будет иметь искусственное начальное опорное решение.

Определение 2. **Расширенной задачей** для задачи $(*)$ называется задача

$$\boldsymbol{\tilde{Z}(\tilde{X}) = CX - M \cdot (a_1 + \dots + a_{m-l}) \to max}$$
$$(**) \begin{cases} \boldsymbol{\tilde{A}\tilde{X} = B_0} \\ \boldsymbol{\tilde{X} \geq "\theta"} \quad) \\ \boldsymbol{(B_0 \geq "\theta")} \end{cases}$$

где $\boldsymbol{\tilde{X} = (x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_{m-l})}$, а - сколь угодно большое число.

Пример 1.

$$Z(X) = 5x_1 - x_2 + x_3 \to max$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 \quad = 1 \\ \quad 2x_2 + 3x_3 = 18 \\ x_j \geq 0 \;\; j = 1, \dots, 3 \end{cases}$$

x_1 – разрешенная переменная в первом уравнении. Во втором уравнении разрешенной переменной нет, поэтому для получения расширенной задачи добавим в левую часть уравнения неотрицательную искусственную переменную a , а в целевую функцию - слагаемое $-Ma$.

$$\tilde{Z}(X) = 5x_1 - x_2 + x_3 - Ma \to max$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 \quad = 1 \\ \quad 2x_2 + 3x_3 + a = 18 \\ x_j \geq 0 \;\; j = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

Лемма 1. Если $\boldsymbol{X = (k_1, \dots, k_n)}$ - решение задачи $(*)$, то $\boldsymbol{\tilde{X} = (k_1, \dots, k_n, 0, \dots, 0)}$ - решение задачи $(**)$, и наоборот, если то $\boldsymbol{\tilde{X} = (k_1, \dots, k_n, 0, \dots, 0)}$ - решение задачи $(**)$, то $\boldsymbol{X = (k_1, \dots, k_n)}$ - решение задачи $(*)$, причем $\boldsymbol{\tilde{Z}(\tilde{X}) = Z(X)}$.

Лемма 2. $\boldsymbol{\tilde{Z}(\tilde{X}_0) > \tilde{Z}(\tilde{X}_1)}$, где $\boldsymbol{\tilde{X} = (k_1, \dots, k_n, 0, \dots, 0)}$ и $\boldsymbol{\tilde{X}_1 = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_{m-l})}$ - решения задачи $(**)$, причем хотя бы одна из искусственных переменных $\boldsymbol{q_i > 0}$.

Теорема 1. (признак оптимальности решения). Если $\boldsymbol{\tilde{X}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*, 0, \dots, 0)}$ – оптимальное решение задачи $(**)$ (все искусственные переменные равны нулю), то $\boldsymbol{X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)}$ - оптимальное решение задачи $(*)$ и

$$\boldsymbol{Z^* = Z(X^*) = \tilde{Z}(\tilde{X}^*) = \tilde{Z}^*}$$

Теорема 2. (признак отсутствия оптимального решения из-за несовместности системы ограничений). Если оптимальное решение расширенной задачи содержит хотя бы одну отличную от нуля (положительную) переменную, то исходная задача не имеет решения из-за несовместности системы ограничений.

Теорема 3. (признак отсутствия оптимального решения из-за неограниченности целевой функции). Если расширенная не имеет решения из-за неограниченности целевой функции, то и исходная задача не имеет решения по той же причине.

Замечание 1. Оценки свободных переменных в начальной таблице и, быть может, в некоторых следующих симплексных таблицах содержат слагаемые с множителем $-M$. Так как M - сколь угодно большое число, то все такие оценки являются отрицательными.

Замечание 2. Если какая-либо искусственная переменная выводится из базиса, то больше она в него не будет вводиться, и можно не рассчитывать в дальнейшем элементы соответствующего этой переменной столбца.

Замечание 3. Иногда удобно перед введением искусственных переменных преобразовать систему ограничений так, чтобы в ней было как можно больше основных разрешенных переменных.

Пример 2.

$$Z(X) = 2x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 \to max$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ -5x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

Пример 3.

$$Z(X) = 2x_1 - 8x_2 + 2x_3 + x_4 \to max$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 8 \\ -2x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

Пример 4.

$$Z(X) = 2x + 2y - 5z \to min;$$

$$\begin{cases} 2x - 2y + 3z \geq 12 \\ -x + y - z \leq 2 \\ 2x - y + 2z = 24 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases}$$

Пример 5.

$$Z(X) = x + 2y - 2z \to max$$

$$\begin{cases} 2x - 3y + z \leq 8 \\ x + 2y + 2z \geq 4 \\ 3x - 2y + z = 12 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases}$$