BỘ CÔNG THƯƠNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP TP. HCM

*Nguyễn Đức Phương*

# *Bài giảng*
# *Quy hoạch tuyến tính*

MSSV: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
Họ tên: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

TP. HCM – Ngày 27 tháng 6 năm 2011

# Mục lục

# Chương 1

# Giới thiệu quy hoạch tuyến tính

## 1.1 Một số ví dụ dẫn đến bài toán quy hoạch tuyến tính

**Ví dụ 1.1** (Bài toán lập kế hoạch sản xuất)**.** Một trại cưa các khúc gỗ thành các tấm ván. Có hai loại ván: ván thành phẩm và ván sử dụng trong xây dựng. Giả sử, đối với:

- Ván thành phẩm cần 2 giờ để cưa và 5 giờ để bào 10m ván.
- Ván xây dưng cần 3 giờ để cưa và 3 giờ để bào 10m ván.

Máy cưa làm việc tối đa 8 giờ trong ngày, và máy bào làm việc tối đa 15 giờ trong ngày. Nếu lợi nhuận của 10m ván thành phẩm là 120 (ngàn đồng), và lợi nhuận của 10m ván xây dựng là 100 (ngàn đồng). Trong ngày, trại cưa phải cưa bao nhiêu ván mỗi loại để lợi nhuận lớn nhất?

*Giải.* ______________________________________________________________

**Ví dụ 1.2** (Bài toán khẩu phần ăn)**.** Chuyên gia dinh dưỡng định thành lập một thực đơn gồm 2 loại thực phẩm chính A và B. Cứ một (trăm gram):

- Thực phẩm A chứa 2 đơn vị chất béo, 1 đơn vị carbohydrate và 4 đơn vị protein.
- Thực phẩm B chứa 3 đơn vị chất béo, 3 đơn vị carbohydrate và 3 đơn vị protein.

Nếu một (trăm gram) thực phẩm A giá 20 (ngàn đồng) và một (trăm gram) thực phẩm B giá 25 (ngàn đồng). Nhà dinh dưỡng muốn thức ăn phải cung cấp ít nhất 18 đơn vị chất béo, 12 đơn vị carbohydrate và 24 đơn vị protein. Bao nhiêu (trăm gram) thực phẩm mỗi loại để có giá nhỏ nhất nhưng vẫn cung cấp đủ dinh dưỡng?

*Giải.*

**Ví dụ 1.3** (Bài toán vận tải)**.** Một nhà sản xuất có 2 nhà máy: Một nhà máy ở Vĩnh Phúc và một nhà máy ở Bình Dương. Có 3 kho hàng phân phối sản phẩm đặt ở Hà Nội, TP. HCM và Cần Thơ. Nhà máy ở Vĩnh phúc; Bình Dương, có khả năng cung cấp tối đa 100; 140 tấn mỗi tuần. Lượng cầu của các kho ở Hà Nội, TP. HCM và Cần Thơ lần lượt từ 100; 60 và 80 tấn trở lên. Chi phí vận chuyển (trăm ngàn) mỗi tấn cho như bảng bên dưới. Hỏi cần vận chuyển bao nhiêu tấn hàng hóa từ nhà sản xuất đến các kho hàng ở Hà Nội, TP. HCM và ở cần thơ để chi phí nhỏ nhất nhưng vẫn đáp ứng đủ nhu cầu?

| Trạm thu / Trạm phát | Hà Nội $W_1$:100 | TP. HCM $W_2$:60 | Cần thơ $W_3$:80 |
|---|---|---|---|
| Vĩnh Phúc-$Q_1$: 100 | 5 | 7 | 9 |
| Bình Dương-$Q_2$:140 | 8 | 7 | 10 |

*Giải.*

## 1.2 Các dạng của bài toán quy hoạch tuyến tính

### 1.2.1 Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng tổng quát

Từ các ví dụ mục 1.1, bài toán quy hoạch tuyến tính *tổng quát* được phát biểu như sau: Tìm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sao cho

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \rightarrow \max\,(\text{hay } \min) \tag{1.1}$$

Với các ràng buộc

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leq (\geq)(=) & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \leq (\geq)(=) & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leq (\geq)(=) & b_m \end{array}\right. \tag{1.2}$$

Hàm tuyến tính (1.1) gọi là hàm mục tiêu. Hệ bất phương trình tuyến tính (1.2) gọi là các ràng buộc. Vế trái của các ràng buộc là các hàm tuyến tính với $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các biến số.

### 1.2.2 Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn

Chúng ta nói bài toán quy hoạch tuyến tính có *dạng chuẩn* nếu nó có dạng như sau: Tìm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sao cho

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \rightarrow \max, (\text{hay } \min) \tag{1.3}$$

Với các ràng buộc

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{array}\right. \tag{1.4}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n \tag{1.5}$$

### 1.2.3 Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

Chúng ta nói bài toán quy hoạch tuyến tính có dạng *chính tắc** nếu nó có dạng như sau: Tìm $x_1, x_2, \ldots, n$ sao cho

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \rightarrow \max, (\text{hay } \min) \tag{1.6}$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \tag{1.7}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n \tag{1.8}$$

**Ví dụ 1.4.** Cho biết dạng của các bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

**a.** $z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & \leq & 6 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

**b.** $z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \rightarrow \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & \leq & 4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & \leq & 6 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \geq & -8 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

**c.** $z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 \rightarrow \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & - & 4x_4 & = & 7 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & x_4 & = & 8 \\ 6x_1 & + & 7x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & \leq & 4 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

**d.** $z = 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 \rightarrow \min$

*Một số sách có định nghĩa khác về dạng chuẩn và dạng chính tắc. Các bạn cần đọc kỹ định nghĩa khi tham khảo các tài liệu khác.

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_5 = 4 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$

**e.** $z = 2x_1 + 5x_2 \to \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 9x_2 \leq 8 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0$

**f.** $z = 2x_1 + 3x_2 \to \min$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 = 6 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

*Chú ý.* Bài toán tìm giá trị nhỏ nhất của hàm mục tiêu có thể viết thành bài toán tìm giá trị lớn nhất của hàm mục tiêu và ngược lại. Điều này các bạn sẽ thấy qua quan hệ:

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = -\max\left(-\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right) \tag{1.9}$$

tương đương

$$\min z = -\max(-z) \tag{1.10}$$

Do đó, không mất tính tổng quát trong phần lý thuyết ta chỉ phát biểu bài toán tìm giá trị lớn nhất của hàm mục tiêu ($\max z$). Bài toán tìm giá trị nhỏ nhất hàm mục tiêu ($\min z$) thì có thể sử dụng (1.10). □

**Ví dụ 1.5.** Chuyển các bài toán quy hoạch tuyến tính tìm max hàm mục tiêu thành tìm min hàm mục tiêu hay ngược lại

**a.** $z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq -8 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

**b.** $z = 3x_1 + 2x_2 \to \min$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$x \geq 0, y \geq 0$

*Giải.*

## 1.3 Quan hệ dạng chuẩn và chính tắc

### 1.3.1 Đổi chiều bất đẳng thức của các ràng buộc

Nếu ta nhân hai vế của bất phương trình

$$k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n \geq b$$

với $-1$ ta được bất phương trình

$$-k_1x_1 - k_2x_2 - \cdots - k_nx_n \leq -b$$

**Ví dụ 1.6.** Chuyển bài toán quy hoạch tuyến tính sau sang dạng chuẩn:

$$z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq -8 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

*Giải.* ______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

### 1.3.2 Biến không ràng buộc

Ta biết, một số bất kỳ chính là hiệu của hai số không âm. Giả sử $x_j$ không có ràng buộc không âm, chúng ta có thể thay $x_j$ bằng hai biến $x_j^+ \geq 0$ và $x_j^- \geq 0$ sao cho

$$x_j = x_j^+ - x_j^-$$

Với cách này chúng ta có thể chuyển bài toán không có ràng buộc không âm thành bài toán có ràng buộc không âm.

**Ví dụ 1.7.** Chuyển bài toán quy hoạch tuyến tính sau sang dạng chuẩn

$$z = 2x_1 + 5x_2 \to \max \tag{1.11}$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 9x_2 \leq 8 \end{cases} \tag{1.12}$$

$$x_1 \geq 0 \tag{1.13}$$

*Giải.* ____________________________________________

________________________________________________

________________________________________________

________________________________________________

________________________________________________

________________________________________________

________________________________________________

________________________________________________

*Nhận xét.* Mọi bài toán quy hoạch tuyến tính đều có thể chuyển đổi thành dạng chuẩn bằng các cách như trên. □

### 1.3.3 Biến đổi bài toán quy hoạch dạng chuẩn thành dạng chính tắc

Xét ràng buộc thức $i$ trong bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i \tag{1.14}$$

Chúng ta có thể chuyển ràng buộc (1.14) thành phương trình tuyến tính bằng cách thêm vào *biến phụ* $x_{n+i} \ge 0$, và

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i \tag{1.15}$$

Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn chuyển thành dạng chính tắc có dạng như sau

$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0, x_{n+1} \ge 0, \ldots, x_{n+m} \ge 0$

**Ví dụ 1.8.** Chuyển bài toán quy hoạch tuyến tính sau sang dạng chính tắc

$$z = 120x_1 + 100x_2 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

*Giải.*

**Ví dụ 1.9.** Chuyển các bài toán quy hoạch tuyến tính sau sang dạng chính tắc

**a.** $z = 3x_1 + 2x_2 \to \min$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

**b.** $z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \rightarrow \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq -8 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

**c.** $z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 \rightarrow \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ 6x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 5x_4 \leq 4 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

**d.** $z = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 9x_2 \leq 8 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0$

**e.** $z = 2x_1 + 3x_2 \to \min$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 = 6 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_3 \geq 0$

## 1.4 Dạng ma trận của bài toán quy hoạch

Xét bài toán quy hoạch dạng chuẩn:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n$

Đặt

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Chúng ta có thể viết bài toán quy hoạch trên thành dạng ma trận: Tìm $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ sao cho

$$z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \max$$

$$\text{Với các ràng buộc}$$

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

**Ví dụ 1.10.** Viết bài toán quy hoạch tuyến tính sau dưới dạng ma trận.

$$z = 120x_1 + 100x_2 \to \max$$

$$\text{Với các ràng buộc}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

*Giải.* ____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

## 1.5 Phương án chấp nhận được

**Định nghĩa 1.1** (Phương án chấp nhận được)**.** *Véctơ* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *thỏa tất cả các ràng buộc của bài toán quy hoạch tuyến tính được gọi là phương án chấp nhận được.*

**Ví dụ 1.11.** Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$z = 120x_1 + 100x_2 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 8 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & \leq & 15 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

và các phương án:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Phương án nào là phương án chấp nhận được?

*Giải.*

**Định nghĩa 1.2** (Phương án tối ưu)**.** *Phương án chấp nhận được làm cho hàm mục tiêu có giá trị lớn nhất (nếu là bài toán* max*) hay nhỏ nhất (nếu là bài toán* min*) thì được gọi là phương án tối ưu.*

## 1.6 Ý nghĩa hình học của bài toán quy hoạch tuyến tính

Trong phần này ta xét đến phương pháp giải bài toán quy hoạch tuyến tính bằng hình học. Phương pháp hình học chỉ giải bài toán quy hoạch tuyến tính hai hoặc ba biến. Tuy nhiên, ý nghĩa của phương pháp này cho ta ý tưởng để xây dựng thuật toán đại số có thể giải được bài toán rất lớn sẽ được trình bày trong chương 2.

### 1.6.1 Phương pháp đồ thị giải bài toán quy hoạch tuyến tính

**Ví dụ 1.12.** Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = 4x + 3y \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 5x + 3y \leq 15 \end{cases}$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

*Giải.*

**Ví dụ 1.13.** Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = 2x + 5y \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} -3x + 2y \leq 6 \\ \quad x + 2y \geq 2 \end{cases}$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

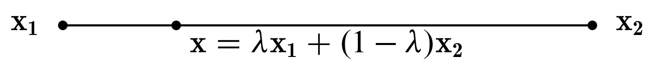
*Giải.*

## 1.6.2 Tính chất của tập phương án chấp nhận được

**Định nghĩa 1.3** (Đoạn thẳng)**.** *Đoạn thẳng nối hai điểm* $\mathbf{x_1}$ *và* $\mathbf{x_2}$ *được định nghĩa*

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x_1} + (1-\lambda)\mathbf{x_2}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1\} \tag{1.16}$$

Theo đó, nếu $\lambda = 0$ chúng ta có $\mathbf{x_2}$, và nếu $\lambda = 1$ chúng ta có $\mathbf{x_1}$. Những điểm thuộc đoạn thẳng với $0 < \lambda < 1$ được gọi là các **điểm trong** của đoạn, và $\mathbf{x_1}$ và $\mathbf{x_2}$ được gọi là **điểm biên** của đoạn thẳng.




Hình 1.1: $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$ là hai điểm biên, $\mathbf{x}$ là điểm trong

**Định lý 1.4.** *Cho* $\mathbf{x_1}$ *và* $\mathbf{x_2}$ *là hai phương án chấp nhận được của bài toán quy hoạch tuyến tính. Điểm* $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x_1} + (1-\lambda)\mathbf{x_2}, 0 \le \lambda \le 1$*, trên đoạn nối hai điểm* $\mathbf{x_1}$ *và* $\mathbf{x_2}$*. Khi đó*

*i.* $\mathbf{x}$ *cũng là phương án chấp nhận được.*

*ii. Nếu các giá trị hàm mục tiêu* $\mathbf{c}^T\mathbf{x_1} = \mathbf{c}^T\mathbf{x_2}$ *thì* $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{c}^T\mathbf{x_1} = \mathbf{c}^T\mathbf{x_2}$*.*

*iii. Nếu các giá trị hàm mục tiêu* $\mathbf{c}^T\mathbf{x_1} < \mathbf{c}^T\mathbf{x_2}$ *thì* $\mathbf{c}^T\mathbf{x} < \mathbf{c}^T\mathbf{x_2}$*.*

*Chứng minh.* Giả sử bài toán quy hoạch tuyến tính có ràng buộc $\mathbf{a}^T\mathbf{x} \le \mathbf{b}$. Vì $\mathbf{x_1}$ và $\mathbf{x_2}$ là hai phương án chấp nhận được cho nên $\mathbf{a}^T\mathbf{x_1} \le \mathbf{b}$ và $\mathbf{a}^T\mathbf{x_2} \le \mathbf{b}$.

i. Với $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x_1} + (1-\lambda)\mathbf{x_2}, 0 < \lambda < 1$, trên đoạn nối hai điểm $\mathbf{x_1}$ và $\mathbf{x_2}$, chúng ta có

$$\begin{aligned}\mathbf{a}^T\mathbf{x} &= \mathbf{a}^T\left(\lambda\mathbf{x_1} + (1-\lambda)\mathbf{x_2}\right)\\ &= \lambda\mathbf{a}^T\mathbf{x_1} + (1-\lambda)\mathbf{a}^T\mathbf{x_2}\\ &\le \lambda\mathbf{b} + (1-\lambda)\mathbf{b} < \mathbf{b}\end{aligned}$$

Do $\mathbf{x}$ thỏa ràng buộc cho nên $\mathbf{x}$ cũng là phương án chấp nhận được. Vậy, các điểm trên đoạn nối hai phương án chấp nhận được là các phương án chấp nhận được.

ii. Theo i), $\mathbf{x}$ là phương án chấp nhận được.

$$\begin{aligned}\mathbf{c}^T\mathbf{x} &= \mathbf{c}^T\left(\lambda\mathbf{x_1} + (1-\lambda)\mathbf{x_2}\right)\\ &= \lambda\mathbf{c}^T\mathbf{x_1} + (1-\lambda)\mathbf{c}^T\mathbf{x_2}\\ &= \mathbf{c}^T\mathbf{x_2} = \mathbf{c}^T\mathbf{x_1}\end{aligned}$$

Vậy các phương án chấp nhận được cùng thuộc một đoạn thẳng thì cùng giá trị hàm mục tiêu.

iii. Với $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x_1} + (1-\lambda)\mathbf{x_2}, 0 < \lambda < 1$, trên đoạn nối hai điểm $\mathbf{x_1}$ và $\mathbf{x_2}$, chúng ta có

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}^T\mathbf{x} &= \mathbf{c}^T\left(\lambda\mathbf{x_1} + (1-\lambda)\mathbf{x_2}\right) \\
&= \lambda\mathbf{c}^T\mathbf{x_1} + (1-\lambda)\mathbf{c}^T\mathbf{x_2} \\
&< \lambda\mathbf{c}^T\mathbf{x_2} + (1-\lambda)\mathbf{c}^T\mathbf{x_2} = \mathbf{c^T}\mathbf{x_2}
\end{aligned}$$

Từ định lý này, xét tập các phương án chấp nhận được là đoạn thẳng nối bởi hai điểm $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$ thì một điểm biên có giá trị hàm mục tiêu lớn nhất và điểm biên còn lại có giá trị hàm mục tiêu nhỏ nhất. $\square$

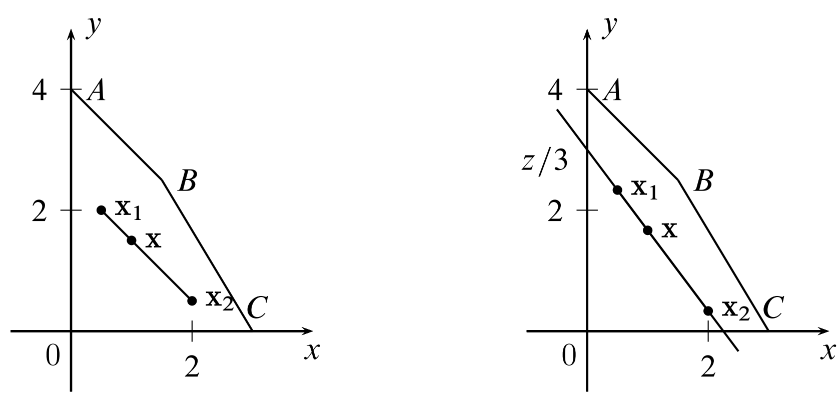
**Ví dụ 1.14.** Xem lại bài toán quy hoạch tuyến tính như ví dụ 1.12 trang 16.

$$z = 4x + 3y \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x + y \le 4 \\ 5x + 3y \le 15 \end{cases}$$

$$x \ge 0, y \ge 0$$




(a) (b)

Hình 1.2:

**a.** Ta thấy $\mathbf{x}_1^T = (1/2; 2), \mathbf{x}_2^T = (2; 1/2)$ là phương án chấp nhận được và điểm $\mathbf{x}$ thuộc đoạn nối hai điểm $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$. Điểm $\mathbf{x}$ định bởi

$$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\,\mathbf{x}_2, \quad \lambda = \frac{2}{3}$$

cũng là phương án chấp nhận được, xem hình 1.2a.

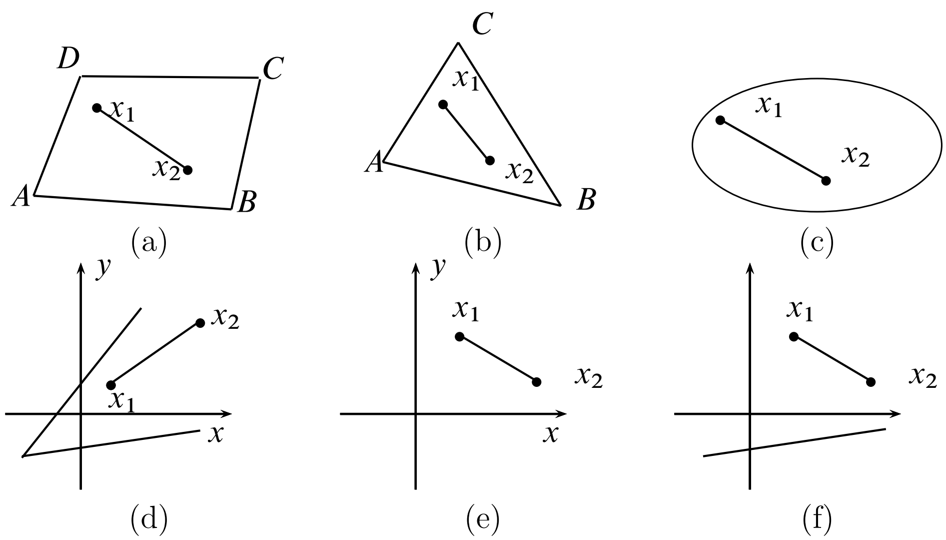
**b.** Cho hai phương án chấp nhận được $\mathbf{x}_1^T = (1/2; 7/3)$ và $\mathbf{x}_2^T = (2; 1/3)$ có cùng giá trị hàm mục tiêu là $(z/3 = 3)$, thì phương án $\mathbf{x}$ thuộc đoạn nối hai điểm $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$. Điểm $\mathbf{x}$ định bởi

$$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\,\mathbf{x}_2, \quad \lambda = \frac{2}{3}$$

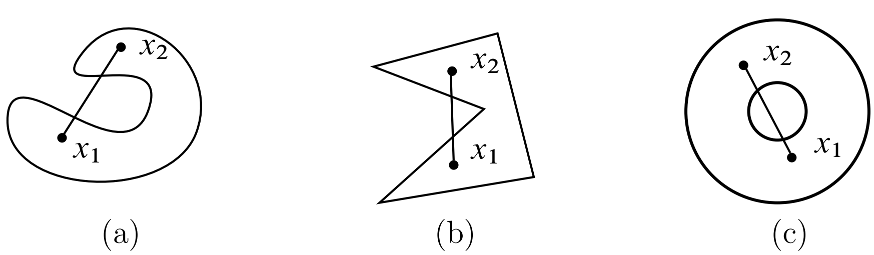
cũng cùng giá trị hàm mục tiêu là $(z/3 = 3)$, xem hình 1.2b. □

**Định nghĩa 1.5** (Tập lồi)**.** *Tập $S \in \mathbb{R}^n$ được gọi là tập lồi nếu với hai điểm phân biệt bất kỳ $\mathbf{x_1}$ và $\mathbf{x_2}$ thuộc $S$ thì đoạn nối hai điểm $\mathbf{x_1}$ và $\mathbf{x_2}$ cũng nằm trong tập $S$.*

**Ví dụ 1.15.** Các tập con của $\mathbb{R}^2$ trong hình 1.3 là các tập lồi. Các tập con của $\mathbb{R}^2$ trong hình 1.4 không phải là tập lồi. □




Hình 1.3:




Hình 1.4:

**Định lý 1.6.** *Tập tất cả các phương án chấp nhận được $S = \{\mathbf{x} | \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$ của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc là một tập lồi.*

*Chứng minh.* Gọi $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in S$ là hai phương án chấp nhận được, theo định lý 1.4(i) thì

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x_1} + (1-\lambda)\mathbf{x_2}$$

cũng là phương chấp nhận được. Do đó $\mathbf{x} \in S$, hay $S$ là tập lồi □

## 1.7 Điểm cực biên

**Định nghĩa 1.7** (Tổ hợp lồi)**.** *Điểm* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *là tổ hợp lồi của* $r$ *điểm* $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_r}$ *trong* $\mathbb{R}^n$ *nếu tồn tại* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r = 1$ *sao cho* $\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x_1} + \lambda_2 \mathbf{x_2} + \cdots + \lambda_r \mathbf{x_r}$.

**Định lý 1.8.** *Tập chứa tất các tổ hợp lồi của hữu hạn các điểm trong* $\mathbb{R}^n$ *là một tập lồi.*

*Chứng minh.* Gọi $S$ là tập chứa tất cả các tổ hợp lồi của $r$ điểm $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_r}$ trong $\mathbb{R}^n$. Lấy $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x_1} + \lambda_2 \mathbf{x_2} + \cdots + \lambda_r \mathbf{x_r}, \quad \sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i > 0$$

$$\mathbf{y} = \lambda_1' \mathbf{x_1} + \lambda_2' \mathbf{x_2} + \cdots + \lambda_r' \mathbf{x_r}, \quad \sum_{i=0}^{r} \lambda_i' = 1, \quad \lambda_i' > 0$$

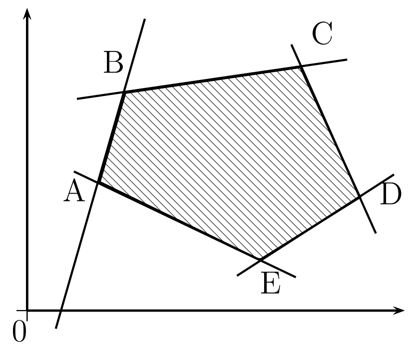
Điểm thuộc đoạn nối hai điểm $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ có dạng

$$\begin{aligned}\mathbf{z} &= \lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \\ &= \Big((\lambda\lambda_1 + \lambda_1' - \lambda\lambda_1')x_1; (\lambda\lambda_2 + \lambda_2' - \lambda\lambda_2')x_2; \ldots; (\lambda\lambda_r + \lambda_r' - \lambda\lambda_r')x_r\Big)\end{aligned}$$

Ta thấy $\sum_{i=1}^{r} \lambda\lambda_i + \lambda_i' - \lambda\lambda_i' = 1, \quad \lambda\lambda_i + \lambda_i' - \lambda\lambda_i' > 0$. Cho nên $\mathbf{z} \in S$, hay $S$ là tập lồi. □

**Định nghĩa 1.9** (Điểm cực biên của tập lồi)**.** *Điểm* $\mathbf{x}$ *của tập lồi* $S$ *được gọi là điểm cực biên của* $S$ *nếu* $\mathbf{x}$ *không là tổ hợp lồi của hai điểm của* $S$ *khác* $\mathbf{x}$.

**Ví dụ 1.16.** Tập lồi như hình 1.5, các điểm $A, B, C, D$ và $E$ là điểm cực biên. □




Hình 1.5:

*Nhận xét.* Từ định nghĩa điểm cực biên, ta thấy điểm $\mathbf{x} \in S$ là điểm cực biên nếu

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x_1} + (1-\lambda)\mathbf{x_2}, \quad \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in S, \quad \lambda > 0$$

thì $\mathbf{x_1} = \mathbf{x_2} = \mathbf{x}$. □

**Định nghĩa 1.10** (Phương án cực biên)**.** *Điểm cực biên của tập các phương án chấp nhận được còn gọi là phương án cực biên.*

## 1.8 Phương án cơ bản chấp nhận được

Trong phần này ta sẽ kết hợp ý tưởng của phương pháp hình học và phương án cực biên được trình bày trong phần 1.6 và 1.7 để giải bài toán quy hoạch tuyến tính bằng công cụ đại số. Ta sẽ thấy vai trò quan trọng của phương án cực biên trong việc tìm phương án tối ưu của hàm mục tiêu thông qua định lý 1.18.

Do điểm cực biên rất khó xác định bằng phương pháp hình học khi bài toán quy hoạch có từ ba biến trở lên. Cho nên phần này sẽ trình bày phương pháp đại số để tìm phương án cực biên. Các khái niệm được trình bày trong phần này là **nghiệm cơ bản, phương án cơ bản, phương án cơ bản chấp nhận được**. Để có thể định nghĩa phương án cơ bản, trước hết ta xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \max \tag{1.17}$$

Với các ràng buộc

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1.18}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \tag{1.19}$$

Trong đó $\mathbf{A}$ là ma trận cấp $m \times n$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, và $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Đặt các cột của ma trận $\mathbf{A}$ là $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$. Ràng buộc (1.18) được viết thành

$$x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \cdots + x_n\mathbf{A}_n = \mathbf{b} \tag{1.20}$$

Ta có hai giả sử về ma trận $\mathbf{A}$ :

- Thứ nhất là $m \leq n$.
- Thứ hai là ma trận $\mathbf{A}$ có $m$ dòng độc lập tuyến tính. Nghĩa là hạng của $\mathbf{A}$ là $m$, khi đó trong $n$ cột của $\mathbf{A}$ sẽ có $m$ cột độc lập tuyến tính.

Hai giả sử này đúng cho bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc được biến đổi từ bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn.

### 1.8.1 Nghiệm cơ bản của $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

Nghiệm cơ bản của $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ được xây dựng như sau:

(1) Chọn[†] tập $T$ gồm $m$ cột độc lập tuyến tính của $A$ (Chọn cơ sở cho $\mathbb{R}^m$).

(2) $n - m$ biến tương ứng với các cột còn lại cho bằng không.

(3) Phương trình $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ được viết lại

$$x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \cdots + x_n\mathbf{A}_n = \mathbf{b} \tag{1.21}$$

Trong đó $\mathbf{A}_i$ là cột thứ $i$ của $\mathbf{A}$. Đặt $i_1, i_2, \ldots, i_m$ là chỉ số các biến không cho bằng bằng không. Hệ phương trình (1.21) được viết gọn

$$x_{i_1}\mathbf{A}_{i_1} + x_{i_2}\mathbf{A}_{i_2} + \cdots + x_{i_m}\mathbf{A}_{i_m} = \mathbf{b} \tag{1.22}$$

hệ này có $m$ phương trình, $m$ ẩn có duy nhất một nghiệm.

(4) Nghiệm của hệ này kết hợp với $n - m$ thành phần ta cho bằng không ở trên được gọi là nghiệm cơ bản của $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

**Ví dụ 1.17.** Cho hệ phương trình tuyến tính bốn ẩn như sau

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_4 = 15 \end{cases}$$

Tìm tất cả nghiệm cơ bản.

[†] Sẽ có nhiều nhất $C_n^m$ tập $T$

*Giải.*

□

Trong một nghiệm cơ bản bất kỳ, $n-m$ biến có giá trị cho bằng không được gọi là **biến không cơ bản**, và $m$ biến giải được gọi là **biến cơ bản**.

Nghiệm cơ bản là nghiệm của hệ phương trình $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ nên nó không cần phải thỏa điều kiện $\mathbf{x}\geq\mathbf{0}$, và do đó nghiệm cơ bản không nhất thiết phải là phương án chấp nhận được của bài toán quy hoạch tuyến tính. (1.17), (1.18) và (1.19).

**Định nghĩa 1.11** (Phương án cơ bản chấp nhận được)**.** *Xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc có tập các ràng buộc* $S=\{\mathbf{x}|\mathbf{Ax}=\mathbf{b},\mathbf{x}\geq\mathbf{0}\}$*, nghiệm cơ bản của* $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ *thỏa điều kiện* $\mathbf{x}\geq\mathbf{0}$ *được là phương án cơ bản chấp nhận được.*

**Ví dụ 1.18.** Tìm tất cả các phương án cơ bản chấp nhận được của

$$z=4x_1+3x_2\rightarrow\max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_4 = 15 \end{cases}$$

$$x_j\geq 0,\quad j=1,\dots,4$$

*Giải.*

### 1.8.2 Thành lập phương án cực biên

Tập $m$ cột độc lập tuyến tính của $\mathbf{A}$ lập thành một cơ sở của $\mathbb{R}^m$. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $m$ cột cuối của $\mathbf{A}$ độc lập tuyến tính. Gọi $S = \{\mathbf{x}|\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ là tập lồi các phương án chấp nhận được của (1.17), (1.18) và (1.19).

**Định lý 1.12.** *Giả sử $m$ cột cuối của $\mathbf{A}$, được ký hiệu $\mathbf{A}_1^{'}, \mathbf{A}_2^{'}, \ldots, \mathbf{A}_m^{'}$ là độc lập tuyến tính và*

$$x_1^{'}\mathbf{A}_1^{'} + x_2^{'}\mathbf{A}_2^{'} + \cdots + x_m^{'}\mathbf{A}_m^{'} = \mathbf{b} \tag{1.23}$$

*trong đó $x_i^{'} \geq 0, \forall i = 1, 2, \ldots, m$. Khi đó điểm*

$$\mathbf{x} = (0, 0, \ldots, 0, x_1^{'}, x_2^{'}, \ldots, x_m^{'})$$

*là phương án cực biên (điểm cực biên của $S$).*

*Chứng minh.* Dễ dàng ta có $\mathbf{x}$ là phương án chấp nhận được của bài toán quy hoạch tuyến tính (1.17), (1.18) và (1.19).

Giả sử $\mathbf{x}$ không là điểm cực biên của $S$. Khi đó $\mathbf{x}$ là điểm trong của một đoạn thuộc $S$. Nghĩa là có hai điểm phân biệt $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$ khác $\mathbf{x}$ và số $\lambda, 0 < \lambda < 1$ sao cho

$$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{u} + (1 - \lambda)\mathbf{v} \tag{1.24}$$

Trong đó

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_{n-m}, u_1^{'}, u_2^{'}, \ldots, u_m^{'}) \geq \mathbf{0}$$

và

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_{n-m}, v_1^{'}, v_2^{'}, \ldots, v_m^{'}) \geq \mathbf{0}$$

Từ (1.24) chúng ta có

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda u_i + (1 - \lambda)v_i, \quad 1 \leq i \leq n - m \\ x_j^{'} &= \lambda u_i + (1 - \lambda)v_i, \quad 1 \leq j \leq m \end{aligned} \tag{1.25}$$

Bởi vì $u_i, v_i$ và $\lambda, 1 - \lambda$ là các số dương cho nên $u_i = 0$ và $v_i = 0$ với $i = 1, 2, \ldots, n - m$. $\mathbf{u}$ là phương án chấp nhận được nên

$$u_1^{'}\mathbf{A}_1^{'} + u_2^{'}\mathbf{A}_2^{'} + \cdots + u_n^{'}\mathbf{A}_n^{'} = \mathbf{b} \tag{1.26}$$

Lấy (1.23) trừ cho (1.26) ta được

$$(x_1^{'} - u_1^{'})\mathbf{A}_1^{'} + (x_2^{'} - u_2^{'})\mathbf{A}_2^{'} + \cdots + (x_n^{'} - u_n^{'})\mathbf{A}_n^{'} = \mathbf{b}$$

Bởi vì $\mathbf{A}_1^{'}, \mathbf{A}_2^{'}, \ldots, \mathbf{A}_m^{'}$ độc lập tuyến tính, nên

$$x_i^{'} = v_i^{'}, \quad \forall 1 \leq i \leq m$$

hay $\mathbf{x} = \mathbf{u}$, suy ra giả thiết $\mathbf{x} \neq \mathbf{u}$ là sai. Vậy $\mathbf{x}$ là điểm cực biên của $S$. □

*Nhận xét.* Chứng minh $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ là phương án cực biên:

- Kiểm $\mathbf{x}$ là phương án chấp nhận được.
- Đặt $T = \{\mathbf{A}_j | x_j > 0\}$, trong đó $\mathbf{A}_j$ là các véctơ cột của $\mathbf{A}$.
- Nếu các véctơ của $T$ là độc lập tuyến tính thì $\mathbf{x}$ là phương án cực biên. □

**Ví dụ 1.19.** Chứng minh $\mathbf{x}^T = (1, 2, 3, 0)$ là phương án cực biên của bài toán

$$z = -4x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 21 \\ 7x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 15 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4$$

*Giải.* ______________________________________________

**Định nghĩa 1.13.** *Phương án cực biên của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc được gọi là **không suy biến** nếu số thành phần dương của nó là $m$. Nếu số thành phần dương ít hơn $m$ thì gọi là phương án cực biên **suy biến**.*

**Định lý 1.14.** *Nếu $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là phương án cực biên của tập các phương án $S = \{\mathbf{x}|\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ thì các cột của $\mathbf{A}$ tương ứng $x_j > 0$ độc lập tuyến tính.*

*Chứng minh.* Để đơn giản, ta sắp xếp và đánh số lại các cột của $\mathbf{A}$ và các thành phần của $\mathbf{x}$ sao cho $k$ thành phần cuối của $\mathbf{x}$, ký hiệu $x_1', x_2', \ldots, x_k'$ là các số dương. Vậy phương trình (1.20) được viết

$$x_1'\mathbf{A}_1' + x_2'\mathbf{A}_2' + \cdots + x_k'\mathbf{A}_k' = \mathbf{b} \tag{1.27}$$

Ta cần chứng minh rằng $\mathbf{A}_1', \mathbf{A}_2', \ldots, \mathbf{A}_k'$ là độc lập tuyến tính. Ta chứng minh bằng phản chứng, giả sử chúng không độc lập tuyến tính. Nghĩa là tồn tại $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_k) \neq 0$ sao cho

$$c_1\mathbf{A}_1' + c_2\mathbf{A}_2' + \cdots + c_k\mathbf{A}_k' = \mathbf{0} \tag{1.28}$$

Nhân (1.28) với hằng số $d > 0$, đầu tiên cộng kết quả với (1.27) ta được phương trình (1.29), sau đó trừ kết quả với (1.27) ta được phương trình (1.30).

$$(x_1' + dc_1)\mathbf{A}_1' + (x_2' + dc_2)\mathbf{A}_2' + \cdots + (x_k' + dc_k)\mathbf{A}_k' = \mathbf{b} \tag{1.29}$$

$$(x_1' - dc_1)\mathbf{A}_1' - (x_2' + dc_2)\mathbf{A}_2' + \cdots + (x_k' - dc_k)\mathbf{A}_k' = \mathbf{b} \tag{1.30}$$

Bây giờ ta chọn hai điểm trong $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{v} = (0, 0, \ldots, 0, x_1' + dc_1, x_2' + dc_2, \ldots, x_k' + dc_k)$$

và

$$\mathbf{w} = (0, 0, \ldots, 0, x_1' - dc_1, x_2' - dc_2, \ldots, x_k' - dc_k)$$

Bởi vì $d$ là hằng số dương bất kỳ, ta chọn như sau:

$$0 < d < \min_j \frac{x_j'}{|c_j|}, \quad c_j \neq 0$$

Với cách chọn $d$ như trên, ta thấy $k$ thành phần sau của $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ là các số dương. Mặc khác, từ (1.29) và (1.30) ta cũng có $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ là phương án chấp nhận được. Nhưng ta lại có

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{v} + \frac{1}{2}\mathbf{w},$$

trái với giả thiết ban đầu $\mathbf{x}$ là điểm cực biên. Vậy giả sử $k$ cột cuối của $\mathbf{A}$ độc lập tuyến tính là sai. □

**Hệ quả 1.15.** *Số phương án cực biên của tập phương án chấp nhận được* $S = \{\mathbf{x}|\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ *là hữu hạn.*

*Chứng minh.* Bởi vì số hệ có $m$ véctơ cột độc lập tuyến tính là hữu hạn, nên theo định lý 1.14 thì số phương án cực biên của $S$ là hữu hạn. □

**Hệ quả 1.16.** *Số thành phần dương của một phương án cực biên tối đa là* $m$.

*Chứng minh.* Theo định lý 1.14, các cột của $\mathbf{A}$ tương ứng với các thành phần dương của phương án cực biên $\mathbf{x} \in S$ là độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^m$. Nhưng không thể có nhiều hơn $m$ véctơ độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^m$. Do đó số thành phần dương của một phương án cục biên tối đa là $m$. □

**Định lý 1.17** (Tương đương giữa phương án cực biên và phương án cơ bản chấp nhận được)**.** $\mathbf{x}$ *là điểm cực biên của* $S = \{\mathbf{x}|\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ *khi và chỉ khi* $\mathbf{x}$ *là phương án cơ bản chấp nhận được.*

**Ví dụ 1.20.** Tìm tất cả các phương án cực biên của

$$z = 4x_1 + 3x_2 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_4 = 15 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4$$

*Giải.* ______________________________

______________________________

______________________________

______________________________

### 1.8.3 Quan hệ giữa phương án cực biên và phương án tối ưu

**Định lý 1.18.** *Nếu bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc có phương án tối ưu thì sẽ có một phương án cực biên là phương án tối ưu.*

*Nhận xét.* Nhờ định lý 1.18, nếu ta chứng minh được bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc có phương án tối ưu, thì nó sẽ có phương án cực biên là phương án tối ưu. Trên đây chúng ta có thể tìm được tất cả các phương án cực biên (vì số phương án cực biên là hữu hạn theo hệ quả). Do đó trong số các phương án cực biên vừa chỉ ra, lần lượt thử từng phương án ta được phương án tối ưu. □

Ràng buộc của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ là một hệ $m$ phương trình tuyến tính $n$ ẩn. Định lý 1.12 và 1.14 cho ta mối quan hệ giữa điểm cực biên của tập các phương án chấp nhận được $S = \{\mathbf{x}|\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ và sự độc lập tuyến tính các cột của $\mathbf{A}$.

**Định lý 1.19.** *Điều kiện cần và đủ để bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc có phương án tối ưu là tập các phương án không rỗng và hàm mục tiêu bị chặn trên (nếu là bài toán* max*) hoặc bị chặn dưới (nếu là bài toán* min*).*

**Ví dụ 1.21.** Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = 4x_1 + 3x_2 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_4 = 15 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4$$

*Giải.* Bài toán quy hoạch này có các phương án cực biên

| Nghiệm cơ bản | Phương án cực biên | Giá trị hàm mục tiêu |
|---|---|---|
| $\mathbf{x}_1 = (3/2; 5/2; 0; 0)$ | $\mathbf{x}_1 = (3/2; 5/2; 0; 0)$ | |
| $\mathbf{x}_2 = (3; 0; 1; 0)$ | $\mathbf{x}_2 = (3; 0; 1; 0)$ | |
| $\mathbf{x}_3 = (4; 0; 0; -5)$ | | |
| $\mathbf{x}_4 = (0; 5; -1; 0)$ | | |
| $\mathbf{x}_5 = (0; 4; 0; 3)$ | $\mathbf{x}_5 = (0; 4; 0; 3)$ | |
| $\mathbf{x}_6 = (0; 0; 4; 15)$ | $\mathbf{x}_6 = (0; 0; 4; 15)$ | |

## 1.9 Bài tập chương 1

**Bài tập 1.1.** Bằng phương pháp hình học giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = -4x_1 + 3x_2 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

**Đáp án:** Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (6; 0)$ giá trị hàm mục tiêu $z = -10$.

**Bài tập 1.2.** Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$z = -2x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 3x_5 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 52 \\ 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 60 \\ x_1 + 3x_2 + x_5 = 36 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 5$$

Chứng minh $\mathbf{x}^T = (0; 34/3; 22/3; 0; 2)$ là phương án cực biên.

**Bài tập 1.3.** Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = x_1 - 2x_2 + 2x_3 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$$

**a.** Tìm tất cả các phương án cực biên.

**b.** Tìm phương án tối ưu.

**Đáp án:**

**a.** Phương án cực biên $\mathbf{x}_1^T = (2; 4; 0)$ ; $\mathbf{x}_2^T = (6; 0; 8)$

**b.** Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (2; 4; 0)$

# Chương 2

# Phương pháp đơn hình

## 2.1 Phương pháp đơn hình cho bài toán quy hoạch dạng chuẩn

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \max \tag{2.1}$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{cases} \tag{2.2}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n \tag{2.3}$$

ta đặt

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Bài toán có dạng ma trận

$$z = \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} \to \max \tag{2.4}$$

Với các ràng buộc

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \tag{2.5}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \tag{2.6}$$

Trong phần này ta giả sử $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, phần 2.3 sẽ trình bày bài toán cho trường hợp $\mathbf{b}$ không không âm.

Bây giờ ta sẽ biến đổi bài toán sang dạng chính tắc bằng cách thêm $m$ ẩn phụ.

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & +x_{n+1} & & & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & & +x_{n+2} & & = & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & & & +x_{n+m} & = & b_m \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, x_{n+1} \geq 0, \ldots, x_{n+m} \geq 0$$

Ta viết bài toán dưới dạng ma trận

$$z = \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} \to \max \tag{2.7}$$

Với các ràng buộc

$$\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{2.8}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \tag{2.9}$$

trong đó $\mathbf{A}'$ là ma trân $m \times (m+n)$ có dạng

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Gọi $S' = \{\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ là tập lồi các phương án chấp nhận được của bài toán quy hoạch tuyến tính (2.7), (2.8), (2.9). Theo 1.8 chương 1 thì phương án cơ bản chấp nhận được của bài toán quy hoạch tuyến tính là điểm cực biên của $S'$

**Định nghĩa 2.1** (Cực biên liền kề)**.** *Hai điểm cực biên khác nhau trong $S'$ được gọi là liền kề nếu chúng chỉ khác nhau một cặp biến cơ bản.*

**Ví dụ 2.1.** Xem lại ví dụ 1.21 trang 31, các điểm cực biên

$$(3/2; 5/2; 0; 0)\,, (3; 0; 1; 0)\,, (0; 4; 0; 3)\,, (0; 0; 4; 15)\,.$$

Hai điểm cực biên $(3/2; 5/2; 0; 0)$ và $(3; 0; 1; 0)$ là liền kề bởi vì biến cơ bản của điểm cực biên thứ nhất là $x_1, x_2$ và biến cơ bản của điểm cực biên thứ hai là $x_1, x_3$. Hai điểm cực biên $(3; 0; 1; 0), (0; 4; 0; 3)$ không liền kề. □

Năm 1947, nhà toán học George Bernard Danzig đưa ra phương pháp đơn hình, là phương pháp bắt đầu xét từ một điểm cực biên ban đầu (phương án cơ bản chấp nhận được) lần lươt xét đến các điểm cực biên liền kề sao cho làm tăng giá trị hàm mục tiêu. Quá trình tiến hành đến lúc thu được phương án tối ưu hoặc giá trị hàm mục tiêu không hữu hạn. Phương pháp đơn hình có ba bước:

(1) Thành lập một phương án cực biên

(2) Xét xem phương án cực biên hiện hành đã là phương án tối ưu hay chưa. Nếu phương án cực biên này là phương án tối ưu thì kết thúc. Ngược lại sang bước (3)

(3) Tìm phương án cực biên liền kề sao cho giá trị hàm mục tiêu lớn hơn hoặc bằng giá trị hàm mục tiêu của phương án cực biên trước đó.

(4) Quay về bước (2).

Để minh họa phương pháp đơn hình ta xét bài toán dạng chuẩn.

$$z = 4x_1 + 3x_2 \to \max \tag{2.10}$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \end{cases} \tag{2.11}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2 \tag{2.12}$$

Chuyển bài toán sang dạng chính tắc:

*Giải.* ______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

### 2.1.1 Phương án cực biên ban đầu

Để bắt đầu phương pháp đơn hình, ta phải tìm một phương án cực biên chấp nhận được. Với giả sử $\mathbf{b}^T = (4; 5) \geq \mathbf{0}$ ta tìm phương án cực biên rất dễ dàng, chỉ việc cho tất cả các biến không cơ bản bằng $x_1 = x_2 = 0$. Ta tìm:

$$x_3 = 4, \quad x_4 = 15$$

Phương án cực biên ban đầu là:

$$(x_1; x_2; x_3; x_4) = (0; 0; 4; 15)$$

Để thuận tiện cho việc lập bảng đơn hình, ta viết hàm mục tiêu 2.10 như sau

$$-4x_1 - 3x_2 + z = 0 \tag{2.13}$$

Ở đây ta xem $z$ là cũng một biến, mặc khác $x_1 = x_2 = 0$ nên giá trị hàm mục tiêu bây giờ $z = 0$. Bảng đơn hình cho như bảng 2.1

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $z$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| $x_4$ | 5 | 3 | 0 | 1 | 0 | 15 |
| | -4 | -3 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Bảng 2.1:

*Nhận xét.* Các dòng trong bảng đơn hình:

i. Dòng đầu tiên liệt kê tên biến $x_1, x_2, x_3, x_4$ và $z$ tương ứng cho từng cột.
ii. Dòng hai và ba là các hệ số của hai ràng buộc (2.11).
iii. Dòng cuối liệt kê hệ số $-c_j$ của hàm mục tiêu (2.10).
iv. Cột đầu tiên bên trái cho biết biến $x_3, x_4$ là biến cơ bản của dòng một và hai.
v. Phần tử ở dòng cuối, cột cuối là giá trị hàm mục tiêu.

*Chú ý.* Trong bảng đơn hình, biến cơ bản có các tính chất:

i. Biến cơ bản chỉ xuất hiện trong một phương trình (ràng buộc) và biến cơ bản này có hệ số là +1.
ii. Cột có biến cơ bản toàn là số 0 trừ số +1 là hệ số của biến cơ bản.
iii. Giá trị của biến cơ bản là giá trị nằm cùng dòng ở cột cuối.
iv. Hệ số của biến cơ bản ở hàm mục tiêu , $c_j = 0$. □

Đến đây bài toán quy hoạch đã được chuyển sang bảng đơn hình. Bảng đơn hình thể hiện tất cả thông tin của các ràng buộc, hàm mục tiêu, phương án cực biên và giá trị của hàm mục tiêu tương ứng. Bảng đơn hình tổng quát của bài toán quy hoạch (2.7), (2.8), (2.9) cho như bảng 2.8.

| | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ | $x_{n+1}$ | $x_{n+2}$ | $\cdots$ | $x_{n+m}$ | z | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_{n+1}$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $\cdots$ | $a_{1n}$ | 1 | 0 | $\cdots$ | 0 | 0 | $b_1$ |
| $x_{n+2}$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $\cdots$ | $a_{2n}$ | 0 | 1 | $\cdots$ | 0 | 0 | $b_2$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $x_{n+m}$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | $\cdots$ | $a_{mn}$ | 0 | 0 | $\cdots$ | 1 | 0 | $b_m$ |
| | $-c_1$ | $-c_2$ | $\cdots$ | $-c_n$ | 0 | 0 | $\cdots$ | 0 | 1 | 0 |

Bảng 2.2:

### 2.1.2 Dấu hiệu tối ưu

Tiếp tục, ta sẽ tìm hiểu dấu hiệu để xác định phương án cực biên trong bảng có làm hàm mục tiêu tối ưu chưa?

Trong ví dụ này, chúng ta có thể tăng giá trị của

$$z = \underbrace{4x_1 + 3x_2}_{\text{không cơ bản}} + \underbrace{0x_3 + 0x_4}_{\text{cơ bản}}$$

bằng cách tăng giá trị của biến không cơ bản (hiện tai $x_1 = x_2 = 0$). Tổng quát, một hàm mục tiêu ta có thể viết

$$z = \sum_{\text{không cơ bản}} c_j x_j + \sum_{\text{cơ bản}} 0 \cdot x_j \tag{2.14}$$

Bây giờ giá trị của $z$ có thể được tăng lên bằng cách tăng giá trị của biến không cơ bản có hệ số hàm mục tiêu âm trong bảng đơn hình từ giá trị 0.

Nếu làm điều này thì phải có một biến cơ bản khác (giá trị biến này khác không) trở thành biến không cơ bản (giá trị bằng không) bởi vì số biến cơ bản không thay đổi.

Việc đổi giá trị của một biến cơ bản về giá trị 0 thì không làm thay đổi giá trị của hàm mục tiêu bởi vì hệ số hàm mục tiêu của biến cơ bản là 0. Đến đây ta có dấu hiệu tối ưu như sau:

**Định lý 2.2** (Dấu hiệu tối ưu)**.** *Nếu hệ số hàm mục tiêu của bảng đơn hình là **không** ($-c_j = 0$) đối với biến cơ bản và **không âm** ($-c_j \geq 0$) đối với biến không cơ bản thì phương án cực biên hiện thời trong bảng đơn hình là phương án ưu.*

**Định lý 2.3** (Dấu hiệu có phương án cực biên tốt hơn)**.** *Nếu hệ số hàm mục tiêu của bảng đơn hình là **không** ($-c_j = 0$) đối với biến cơ bản và **âm** ($-c_j < 0$) đối với biến không cơ bản sẽ có phương án cực biên khác tốt hơn, nghĩa là làm giá trị hàm mục tiêu lớn hơn.*

*Nhận xét.* Nếu trong bảng đơn hình:

- $-c_j \geq 0, \forall j$ thì phương án cực biên hiện thời là phương án tối ưu.
- Có $-c_j < 0$ thì phương án cực biên hiện thời không là phương án tối ưu. □

**Ví dụ 2.2.** Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = -7x_1 + 26x_2 - 9x_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \phantom{{}+x_3} = 5 \\ \phantom{x_1} - x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$$

**a.** Chứng minh $\mathbf{x}^T = (5; 0; 7)$ là phương án cực biên.

**b.** Xét xem $\mathbf{x}^T$ có là phương án cực biên tối ưu của bài toán hay không.

*Giải.* ____________________________________________

**Ví dụ 2.3.** Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = 5x_1 - x_2 - 19x_3 - 16x_4 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 2 \\ -3x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 8x_4 = 9 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4$$

Chứng minh $\mathbf{x}^T = (25/13; 64/13; 0; 8/13)$ là phương án cực biên, tối ưu của bài toán đã cho.

*Giải.*

### 2.1.3 Chọn biến vào cơ sở

Giả sử bảng đơn hình bây giờ có $-c_j < 0$ thì lúc này giá trị hàm mục tiêu chưa tối ưu. Do đó cần có sự điều chỉnh giá trị của các biến. Trong ví dụ:

$$z = \underbrace{4x_1 + 3x_2}_{\text{không cơ bản}} + \underbrace{0x_3 + 0x_4}_{\text{cơ bản}}$$

Ta thấy nếu $x_1$ tăng 1 đơn vị thì z tăng 4 đơn vị, trong khi $x_2$ tăng 1 đơn vị thì $z$ tăng 3 đơn vị, do đó ta nên tăng giá trị của $x_1$. Vậy $x_1$ là biến vào cơ sở

Nhớ lại rằng, hệ số của các biến không cơ bản $c_j > 0$ hay trong bảng đơn hình thì $-c_j < 0$. Vậy ta chọn biến $x_v$ vào cơ sở nếu

$$\min\left\{-c_j; -c_j < 0\right\} = -c_v$$

Cột chứa biến vào cơ sở được gọi là **cột xoay**

| | $\downarrow$ $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $z$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| $x_4$ | 5 | 3 | 0 | 1 | 0 | 15 |
| | -4 | -3 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Bảng 2.3:

### 2.1.4 Chọn biến ra khỏi cơ sở

Giải (2.11) cho $x_3, x_4$ ta có

$$\begin{cases} x_3 = 4 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 15 - 5x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

Ta tăng giá trị của $x_1$ và giữ nguyên giá trị của $x_2 = 0$

$$\begin{cases} x_3 = 4 - x_1 \\ x_4 = 15 - 5x_1 \end{cases} \tag{2.15}$$

Từ (2.15) cho thấy, khi tăng giá trị của $x_1$ thì $x_3, x_4$ giảm. Vậy vấn đề là $x$ tăng đến giá trị nào? Nhớ lại rằng $x_3, x_4 \geq 0$ do đó ta tăng giá trị $x_1$ sao cho:

$$\begin{cases} x_3 = 4 - x_1 \geq 0 \\ x_4 = 15 - 5x_1 \geq 0 \end{cases} \tag{2.16}$$

Giải (2.16) ta được

$$\begin{cases} x_1 \leq 4/1 \\ x_1 \leq 15/5 = 3 \end{cases}$$

Ta thấy rằng, ta chỉ có thể tăng giá trị của $x_1$ đến $\min\{4; 3\} = 3$. Phương án cực biên bây giờ là

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 0$$

Phương án này là phương án liền kề với phương án trước. Biến cơ bản bây giờ là $x_1$ và $x_3$, biến không cơ bản bây giờ là $x_2$ và $x_4$. Biến ra khỏi cơ sở trong trường hợp này là $x_4$, xem bảng 2.4.

| | | ↓ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $z$ | |
| | $x_3$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| ← | $x_4$ | 5 | 3 | 0 | 1 | 0 | 15 |
| | | -4 | -3 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Bảng 2.4:

Dòng chứa $x_4$ của bảng đơn hình gọi là **dòng xoay**, phần tử nằm trên dòng xoay và cột xoay gọi là **phần tử trực**. Trong ví dụ của ta phần tử trực là (5).

| | | ↓ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $z$ | |
| | $x_3$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| ← | $x_4$ | (5) | 3 | 0 | 1 | 0 | 15 |
| | | -4 | -3 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Bảng 2.5:

*Nhận xét.* Giả sử $x_v$ là biến vào cơ sở. Nếu

$$\min\left\{\frac{b_i}{a_{iv}}; a_{iv} > 0\right\} = \frac{b_r}{a_{rv}}$$

thì biến $x_r$ là biến ra khỏi cơ sở. □

### 2.1.5 Lập bảng đơn hình mới

Đến đây, ta đã xác định được biến mới vào cơ sở và biến ra khỏi cơ sở, lúc này:

- Biến cơ bản là $x_1, x_3$
- Biến không cơ bản là $x_2, x_4$

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $z$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | | | | | | |
| $x_1$ | | | | | | |
| | | | | | | |

Bảng 2.6:

Vì $x_1$ là biến cơ bản mới trong dòng hai của ràng buộc nên:

- **Hệ số của $x_1$ trong ràng buộc thứ hai là 1**. Ta chia hai vế của ràng buộc thứ hai cho phần tử trực (là 5).

$$x_1 + \frac{3}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_4 = 3 \tag{2.17}$$

- **Biến $x_1$ không có mặt trong ràng buộc thứ nhất và hàm mục tiêu.** Để có điều này, ta thay $x_1 = 3 - \frac{3}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_4$ trong 2.17 vào ràng buộc thứ nhất

$$3 - \frac{3}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_4 + x_2 + x_4 = 4 \tag{2.18}$$

tương đương

$$\frac{2}{5}x_2 + x_3 - \frac{1}{5}x_4 = 1 \tag{2.19}$$

và hàm mục tiêu

$$-\frac{3}{5}x_2 + \frac{4}{5}x_4 + z = 12 \tag{2.20}$$

Ta có bảng đơn hình mới như bảng 2.7.

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $z$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 0 | 2/5 | 1 | -1/5 | 0 | 1 |
| $x_1$ | 1 | 3/5 | 0 | 1/5 | 0 | 3 |
| | 0 | -3/5 | 0 | 4/5 | 1 | 12 |

Bảng 2.7:

*Nhận xét.* Tóm tắt thuật toán đơn hình:

| | | | ↓ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $\cdots$ | $x_v$ | $\cdots$ | $x_n$ | $x_{n+1}$ | $\cdots$ | $x_{n+m}$ | z | |
| | $x_{n+1}$ | $a_{11}$ | $\cdots$ | $a_{1v}$ | $\cdots$ | $a_{1n}$ | 1 | $\cdots$ | 0 | 0 | $b_1$ |
| | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| ← | $x_r$ | $a_{r1}$ | $\cdots$ | $(a_{rv})$ | $\cdots$ | $a_{rn}$ | 0 | $\cdots$ | 0 | 0 | $b_r$ |
| | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| | $x_{n+m}$ | $a_{m1}$ | $\cdots$ | $a_{mv}$ | $\cdots$ | $a_{mn}$ | 0 | $\cdots$ | 1 | 0 | $b_m$ |
| | | $-c_1$ | $\cdots$ | $-c_v$ | $\cdots$ | $-c_n$ | 0 | $\cdots$ | 0 | 1 | 0 |

Bảng 2.8:

**Bước 1: Chọn biến vào cở sở.** Nếu $\min\left\{-c_j; -c_j < 0\right\} = -c_v$ thì biến $x_v$ vào cơ sở. Ngược lại, nếu $-c_j > 0$ với mọi $j$ thì phương án cực biên hiện thời là phương án tối ưu.

**Bước 2: Chọn biến ra cở sở.** Nếu

$$\min\left\{\frac{b_i}{a_{iv}}; a_{iv} > 0\right\} = \frac{b_r}{a_{rv}}$$

thì biến $x_r$ là biến ra khỏi cơ sở. Ngược lại, nếu không tìm được biến ra khỏi cơ sở thì bài toán không có phương án tối ưu.

**Bước 3: Lập bảng đơn hình mới.** Ta đã xác định biến $x_v$ là biến vào và $x_r$ là biến ra khỏi cơ sở. Ta lập bảng đơn hình mới

- Xác định phần tử trực $a_{rv}$.
- Chia dòng chứa phần tử trực cho phần tử trực.
- Các phần tử dòng $i$ cột $j$ khác của bảng được tính

$$a_{ij} = \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{iv} \\ a_{rj} & a_{rv} \end{vmatrix} / a_{rv} = \left(a_{ij}a_{rv} - a_{rj}a_{iv}\right) / a_{rv}$$

**Ví dụ 2.4.** Giải lại chi tiết bài toán

$$z = 4x_1 + 3x_2 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_4 = 15 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4$$

được minh họa trong ví dụ trên bằng thuật toán đơn hình.

*Giải.* ______________________________

______________________________

______________________________

______________________________

______________________________

______________________________

*Nhận xét.* Trong các bảng đơn hình, cột chứa $z$ không thay đổi qua các bước lặp. Do đó, để đơn giản ta sẽ không ghi cột $z$ trong bảng đơn hình.

**Ví dụ 2.5.** Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = 2x_1 - 3x_2 + x_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 \leq 15 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 20 \\ 4x_1 + x_3 \leq 10 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$$

*Giải.*

**Ví dụ 2.6.** Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 \le 7 \\ -x_1 + 2x_2 \le 5 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, 3$$

*Giải.*

**Ví dụ 2.7.** Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ -2x_2 - 7x_3 + 3x_4 + x_5 = 3 \\ -3x_3 + 2x_4 + x_6 = 7 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 6$$

*Giải.*

**Ví dụ 2.8.** Giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn

$$z = -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 + 2x_6 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 5x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_5 = 4 \\ -4x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 6$$

*Giải.*

## 2.2 Thuật toán đơn hình cho bài toán min

Thuật toán đơn hình cho bài toán tìm giá trị nhỏ nhất của hàm mục tiêu về cơ bản giống với bài toán tìm giá trị lớn nhất. Ta có dấu hiệu tối ưu được phát biểu như sau:

**Định lý 2.4** (Dấu hiệu tối ưu)**.** *Nếu hệ số hàm mục tiêu của bảng đơn hình là **không** $(-c_j = 0)$ đối với biến cơ bản và **không dương** $(-c_j \leq 0)$ đối với biến không cơ bản thì phương án cực biên hiện thời trong bảng đơn hình là phương án ưu.*

**Định lý 2.5** (Dấu hiệu có hiệu phương án cực biên tốt hơn)**.** *Nếu hệ số hàm mục tiêu của bảng đơn hình là **không** $(-c_j = 0)$ đối với biến cơ bản và*

***dương*** $(-c_j > 0)$ *đối với biến không cơ bản sẽ có phương án cực biên khác tốt hơn, nghĩa là làm giá trị hàm mục tiêu lớn nhỏ.*

*Nhận xét.* Nếu trong bảng đơn hình:

- $-c_j \leq 0, \forall j$ thì phương án cực biên hiện thời là phương án tối ưu.
- Có $-c_j > 0$ thì phương án cực biên hiện thời chưa là phương án tối ưu. □

**Ví dụ 2.9.** Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = x_1 + x_2 - 3x_3 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1 \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2 \\ 3x_1 + x_3 \leq 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$$

*Giải.* ______________________________

## 2.3 Bài toán chính tắc không có sẵn ma trận đơn vị

Giả sử cần giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.21}$$

Trong đó $\mathbf{A}$ không có ma trận đơn vị, $\mathbf{b} \geq 0$ . Chẳng hạn cần giải bài toán sau:

**Ví dụ 2.10.** Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = -3x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 6x_4 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 13x_4 & = & 14 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & + & 14x_4 & = & 11 \\ & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 14x_4 & = & 16 \end{array}\right.$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4$$

*Giải.* Do ma trận các hệ số **A** không có ma trận đơn vị nên chưa xác định được phương án cực biên ban đầu. Vì tập các phương án là hệ phương trình tuyến tính nên ta có thể biến đổi để có ba véctơ đơn vị

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 13 & 14 \\ 2 & 1 & 0 & 14 & 11 \\ 0 & 3 & 1 & 14 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2=d_2-2d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 13 & 14 \\ 0 & -1 & -2 & -12 & -17 \\ 0 & 3 & 1 & 14 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2=-d_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 13 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & 12 & 17 \\ 0 & 3 & 1 & 14 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3=d_3-3d_2]{d_1=d_1-d_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 12 & 17 \\ 0 & 0 & -5 & -22 & -35 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3=-1/5d_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 12 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 22/5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_2=d_2-2d_3]{d_1=d_1+d_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 27/5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 16/5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 22/5 & 7 \end{pmatrix}$$

Bài toán lúc này là

$$z = -123/5x_4 + 35 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 & & & + & 27/5x_4 & = & 4 \\ & x_2 & & + & 16/5x_4 & = & 3 \\ & & x_3 & + & 22/5x_4 & = & 7 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4$$

Với bài toán này ta có bảng đơn hình như sau

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 27/5 | 4 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 16/5 | 3 |
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | 22/5 | 7 |
| | 0 | 0 | 0 | 123/5 | 35 |

Phương án tối ưu $\mathbf{x} = (4; 3; 7; 0)$, giá trị tối ưu $z = 35$ □

Nhưng có thể trong quá trình biến đổi sau khi đã có các véctơ đơn vị mà phương án không thỏa điều kiện không âm thì cách làm trên rất khó gặp một phương án cực biên ban đầu.

**Ví dụ 2.11.** Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = 2x_1 - x_2 - 2x_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$$

Vì ma trận các hệ số **A** không có ma trận đơn vị nên chưa xác định được phương án cực biên ban đầu. Vì tập các phương án là hệ phương trình tuyến tính nên ta có thể biến đổi để có hai véctơ đơn vị.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Bài toán lúc này là

$$z = 6x_3 - 11 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 = -4 \\ x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$$

Đến đây ta gặp khó khăn trong việc tìm phương án cực biên. Ta dùng phương pháp sau đây gọi là phương pháp **đánh thuế** để giải cho trường hợp này. □

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc:

$$z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \to \max \tag{2.22}$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \ldots, x_n$$

Thêm các ẩn $y_1, \dots, y_m \geq 0$ mà ta gọi là **ẩn giả** vào $m$ ràng buộc khi đó bài toán có dạng

$$z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n - My_1 - \cdots - My_m \to \max \tag{2.23}$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & + & y_1 & & & & & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & & & + & y_2 & & & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & & & & & + & y_m & = & b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n; y_i \geq 0, i = 1, \dots, m$$

Trong đó $M$ là số dương rất lớn, lớn hơn bất kỳ số nào mà ta cần so sánh.

**Định lý 2.6.** *Bài toán (2.22) có phương án tối ưu* $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ *khi và chỉ khi bài toán (2.23) có phương án tối ưu*

$$\mathbf{y} = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0).$$

*Chú ý.* Khi giải bài toán (2.23) bằng phương pháp đơn hình thì các hệ số hàm mục tiêu có chứa tham số $M$. Vì $M$ lớn nên khi so sánh các giá trị có tham số $M$ ta có quy ước như sau

$$aM + b > 0 \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} a > 0 \\ a = 0, b > 0 \end{array} \right.$$

$$aM + b < 0 \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} a < 0 \\ a = 0, b < 0 \end{array} \right.$$

$$aM + b > cM + d \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} a > c \\ a = c, b > d \end{array} \right.$$

**Ví dụ 2.12.** Giả lại bài toán quy hoạch tuyến tính ví dụ 2.11

$$z = 2x_1 - x_2 - 2x_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$$

*Giải.*

**Ví dụ 2.13.** Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = 2x_1 + 5x_2 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

*Giải.*

## 2.4 Bài tập chương 2

**Bài tập 2.1.** Giải các bài toán quy hoạch tuyến tính:

**a.** $z = x_1 - 2x_2 + 2x_3 \to \min$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_4 = 6 \\ 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 8 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4$

**Đáp án.** Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (2; 4; 0; 0)$, giá trị hàm mục tiêu $z = -6$

**b.** $z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 \leq 6 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 7 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$

**Đáp án.** Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (125/12; 17/6; 39/4)$, giá trị hàm mục tiêu $z = 469/12$.

**c.** $z = 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \to \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \\ x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 8 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4$

**Đáp án.** Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (16; 0; 0; 4)$, giá trị hàm mục tiêu $z = 44$.

**d.** $z = -x_1 - 7x_2 - 2x_3 - zx_4 \to \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \geq 10 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 \geq 15 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4$

**Đáp án:** Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (10; 0; 0; 0)$ , giá trị hàm mục tiêu $z = -10$.

**e.** $z = 15x_1 + 19x_2 \to \min$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 7 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \geq 0$

**Đáp án.** Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (1; 1; 1)$ , giá trị hàm mục tiêu $z = 34$.

**Bài tập 2.2.** Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$z = -4x_1 - 5x_2 - 7x_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$$

**a.** Chứng minh $\mathbf{x}^T = (0; 4; 2)$ là phương án cực biên, nhưng không phải là phương án tối ưu.

**b.** Hãy xây dựng một phương án cực biên mới tốt hơn phướng án cực biên ở câu a.

**Bài tập 2.3.** Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$z = -x_1 + 2x_2 - 2x_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad\qquad + 4x_4 = 6 \\ \qquad 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4$$

**a.** Chứng minh $\mathbf{x}^T = (0; 2/3; 0; 4/3)$ là phương án cực biên, nhưng không phải là phương án tối ưu.

**b.** Hãy xây dựng một phương án cực biên mới tốt hơn phướng án cực biên ở câu a.

**Bài tập 2.4.** Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$z = -4x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 20 \\ 8x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 15 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4$$

Chứng minh $\mathbf{x}^T = (1; 2; 3; 0)$ là phương án cực biên, tối ưu của bài toán.

**Bài tập 2.5.** Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$z = x_1 + x_2 + mx_3 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$$

**a.** Chứng minh $\mathbf{x}^T = (1; 2; 0)$ là phương án cực biên của bài toán.

**b.** Tìm $m$ để $\mathbf{x}$ là phương án tối ưu.

**Bài tập 2.6.** Một công ty sản xuất hai loại sơn: sơn nội thất và sơn ngoài trời. Nguyên liệu để sản xuất gồm hai loại A, B với trữ lượng tương ứng là 16 tấn và 18 tấn. Để sản xuất 1 tấn sơn nội thất cần 1 tấn nguyên liệu A và 2 tấn nguyên liệu B. Để sản xuất 1 tấn sơn ngoài trời cần 2 tấn nguyên liệu A và 3 tấn nguyên liệu B. Qua điều tra thị trường công ty biết rằng nhu cầu sơn nội thất không hơn sơn ngoài trời quá 1 tấn. Giá bán một tấn sơn nội thất là 4000 USD, giá bán một tấn sơn ngoài trời là 3000 USD. Khi sản xuất 1 tấn sơn nội thất phải bỏ ra một chi phí là 1300 USD, khi sản xuất 1 tấn sơn ngoài trời phải bỏ ra một chi phí là 1000 USD. Hỏi cần sản xuất mỗi loại sơn bao nhiêu tấn để có lợi nhuận lớn nhất?

**Đáp án.** Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (21/5; 16/5)$, giá trị hàm mục tiêu $z = 17740$

**Bài tập 2.7.** Một công ty sản xuất hai loại sơn nội thất và sơn ngoài trời. Nguyên liệu để sản xuất gồm hai loại A, B với trữ lượng là 6 tấn và 8 tấn tương ứng. Để sản xuất một tấn sơn nội thất cần 2 tấn nguyên liệu A và 1 tấn nguyên liệu B. Để sản xuất một tấn sơn ngoài trời cần 1 tấn nguyên liệu A và 2 tấn nguyên liệu B. Qua điều tra thị trường công ty biết rằng nhu cầu sơn nội thất không hơn sơn ngoài trời quá 1 tấn, nhu cầu cực đại của sơn nội thất là 2 tấn. Giá bán một tấn sơn nội thất là 2000 USD, giá bán một tấn sơn ngoài trời là 3000 USD. Hỏi cần sản xuất mỗi loại sơn bao nhiêu tấn để có doanh thu lớn nhất?

**Đáp án.** Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (4/3; 10/3)$, giá trị hàm mục tiêu $z = 38000/3$.

**Bài tập 2.8.** Một công ty sản xuất hai loại thực phẩm A, B. Nguyên liệu để sản xuất gồm ba loại bột, đường và dầu thực vật. Với trữ lượng dự trự tương ứng là 30 tấn, 12 tấn, 6 tấn. Để sản xuất:

- 1 tấn thực phẩm loại A cần 0,5 tấn bột, 0,5 tấn đường, 0,2 tấn dầu thực vật.
- 1 tấn thực phẩm loại B cần 0,8 tấn bột, 0,4 tấn đường, 0,4 tấn dầu thực vật.

Giá bán một tấn thực phẩm A là 4000 USD, giá bán một tấn thực phẩm B là 4500 USD. Hỏi cần sản xuất mỗi loại thực phẩm bao nhiêu tấn để có doanh thu lớn nhất?

**Đáp án.** Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (20; 5)$, giá trị hàm mục tiêu $z = 102500$

**Bài tập 2.9.** Một xí nghiệp dự định sản xuất ba loại sản phẩm A, B và C. Các sản phẩm này được chế tạo từ ba loại nguyên liệu I, II và III . Số lượng các nguyên liệu I, II và III mà xí nghiệp có lần lượt là 30, 50, 40. Số lượng các nguyên liệu cần để sản xuất một đơn vị sản phẩm A, B, C được cho ở bảng sau đây:

| SP \ NL | I | II | III |
|---|---|---|---|
| A | 1 | 1 | 3 |
| B | 1 | 2 | 2 |
| C | 2 | 3 | 1 |

Xí nghiệp muốn lập kế hoạch sản xuất để thu được tổng số lãi nhiều nhất (với giả thiết các sản phẩm làm ra đều bán hết), nếu biết rằng lãi 5 triệu đồng cho một đơn vị sản phẩm loại A, lãi 3,5 triệu đồng cho một đơn vị sản phẩm loại B, lãi 2 triệu đồng cho một đơn vị sản phẩm loại C.

**a.** Lập mô hình bài toán Quy hoạch tuyến tính.

**b.** Bằng phương pháp đơn hình, hãy giải bài toán trên.

**Đáp án.** Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (5/2; 25/2; 15/2)$, giá trị hàm mục tiêu $z = 285/4$

**Bài tập 2.10.** Một Xí nghiệp chăn nuôi cần mua một loại thức ăn tổng hợp T1, T2, T3 cho gia súc với tỷ lệ chất dinh dưỡng như sau:

- 1 kg T1 chứa 4 đơn vị dinh dưỡng D1, 2 đơn vị dinh dưỡng D2, và 1 đơn vị dinh dưỡng D3.
- 1 kg T2 chứa 1 đơn vị dinh dưỡng D1, 7 đơn vị dinh dưỡng D2, và 3 đơn vị dinh dưỡng D3
- 1 kg T3 chứa 3 đơn vị dinh dưỡng D1, 1 đơn vị dinh dưỡng D2, và 4 đơn vị dinh dưỡng D3.

Mỗi bữa ăn, gia súc cần tối thiểu 20 đơn vị D1, 25 đơn vị D2 và 30 đơn vị D3. Hỏi Xí nghiệp phải mua bao nhiêu kg T1, T2, T3 mỗi loại cho một bữa ăn để bảo đảm tốt về chất dinh dưỡng và tổng số tiền mua là nhỏ nhất? Biết rằng 1 kg T1 có giá là 10 ngàn đồng, 1 kg T2 có giá là 12 ngàn đồng, 1 kg T3 có giá là 14 ngàn đồng.

**Đáp án.** Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (5/18; 49/18; 97/18)$, giá trị hàm mục tiêu $z = 998/9$

**Bài tập 2.11.** Một Xí nghiệp xử lý giấy, có ba phân xưởng I, II, III cùng xử lý hai loại giấy A, B. Do hai phân xưởng có nhiều sự khác nhau, nên nếu cùng đầu tư 10 triệu đồng vào mỗi phân xưởng thì cuối kỳ phân xưởng I xử lý được 6 tạ giấy loại A, 5 tạ giấy loại B. Trong khi đó phân xưởng II xử lý được 4 tạ giấy loại A, 6 tạ giấy loại B. Phân xưởng III xử lý được 5 tạ giấy loại A, 4 tạ giấy loại B. Theo yêu cầu lao động thì cuối kỳ Xí nghiệp phải xử lý ít nhất 6 tấn giấy loại A, 8 tấn giấy loại B. Hỏi cần đầu tư vào mỗi phân xưởng bao nhiêu tiền để xí nghiệp hoàn thành công việc với giá tiền đầu tư là nhỏ nhất.

**Đáp án.** Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (5/2; 45/4; 0)$ , giá trị hàm mục tiêu $z = 55/4$

**Bài tập 2.12.** Một gia đình cần ít nhất 1800 đơn vị prôtêin và 1500 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Một kilôgam thịt bò chứa 600 đơn vị prôtêin và 600 đơn vị lipit, một kilôgam thịt heo chứa 600 đơn vị prôtêin và 300 đơn vị lipit, một kilôgam thịt gà chứa 600 đơn vị prôtêin và 600 đơn vị lipit. Giá một kilôgam thịt bò là 84 ngàn đồng, giá một kilôgam thịt heo là 71 ngàn đồng, giá một kilôgam thịt gà là 90 ngàn đồng. Hỏi một gia đình nên mua bao nhiêu kilôgam thịt mỗi loại để bảo đảm tốt khẩu phần ăn trong một ngày và tổng số tiền phải mua là nhỏ nhất?

**Đáp án.** Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (2; 1; 0)$ , giá trị hàm mục tiêu $z = 239$

# Chương 3

# Lý thuyết đối ngẫu

## 3.1 Ví dụ dẫn đến bái toán đối ngẫu

**Ví dụ 3.1.** Có $m$ loại nguyên liệu dự trữ dùng để sản xuất ra $n$ loại sản phẩm. Để làm ra một sản phẩm $j$ cần $a_{ij}$ nguyên liệu $i$ cho như bảng sau:

| $SP$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ | NL dự trữ |
|---|---|---|---|---|---|
| $NL$ | 1 | 2 | $\cdots$ | $n$ | |
| 1 | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $\cdots$ | $a_{1n}$ | $b_1$ |
| 2 | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $\cdots$ | $a_{2n}$ | $b_2$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | $\cdots$ | $a_{mn}$ | $b_m$ |
| Giá bán | $c_1$ | $c_2$ | $\cdots$ | $c_n$ | |

Trong đó, lượng nguyên liệu dự trữ thứ $i$ là $b_i$ và giá bán mỗi sản phẩm $j$ là $c_j$. Yêu cầu tìm số lượng sản phẩm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sao cho tổng doanh thu lớn nhất.

*Giải.*

**Ví dụ 3.2.** Với giả thiết giống như ví dụ 3.1, giả sử có một người muốn mua lại toàn bộ nguyên liệu trên.

| $NL$ \ $SP$ | $x_1$ 1 | $x_2$ 2 | $\cdots$ $\cdots$ | $x_n$ $n$ | NL dự trữ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_1, 1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $\cdots$ | $a_{1n}$ | $b_1$ |
| $y_2, 2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $\cdots$ | $a_{2n}$ | $b_2$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $y_m, m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | $\cdots$ | $a_{mn}$ | $b_m$ |
| Giá bán | $c_1$ | $c_2$ | $\cdots$ | $c_n$ | |

Tìm giá bán nguyên liệu $i$, $y_i$ để:

- Người bán không bị thiệt.
- Người mua được mua với giá rẻ nhất.

*Giải.*

### 3.1.1 Bài toán đối ngẫu của bài toán max

Hai bài toán quy hoạch tuyến tính sau gọi là cặp bài toán đối ngẫu. Bài toán 1 gọi là bài toán gốc, bài toán 2 gọi là bài toán đối ngẫu. Một ràng buộc và điều kiện về biến trên cùng một dòng gọi là **cặp ràng buộc đối ngẫu.**

| Bài toán gốc (1) | Bài toán đối ngẫu (2) |
|---|---|
| $z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \to \max$ | $z' = b_1y_1 + \cdots + b_my_m \to \min$ |
| $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$ | $y_i \leq 0$ |
| $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$ | $y_i \geq 0$ |
| $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$ | $y_i \in \mathbb{R}$ |
| $x_j \geq 0$ | $a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m \geq c_j$ |
| $x_j \leq 0$ | $a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m \leq c_j$ |
| $x_j \in \mathbb{R}$ | $a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m = c_j$ |

*Nhận xét.* Quan sát cặp bài toán đối ngẫu trên ta có các nhận xét:

- Trong cặp bài toán đối ngẫu trên, hệ số của ràng buộc thứ $i$ của bài toán gốc trở thành hệ số của biến $y_i$ trong bài toán đối ngẫu. Ngược lại, hệ số của $x_j$ trong bài toán gốc chính là hệ số của dòng $j$ trong bài toán đối ngẫu.
- Hệ số của hàm mục tiêu của bài toán gốc trở thành hệ số vế phải của ràng buộc và ngược lại. □

**Ví dụ 3.3.** Viết bài toán đối ngẫu của bài toán gốc sau và cho biết các cặp ràng buộc đối ngẫu

$$z = 2x_1 + x_2 - 8x_3 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 28 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 15 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

*Giải.* ____________________

____________________

____________________

**Ví dụ 3.4.** Viết bài toán đối ngẫu của bài toán gốc sau và cho biết các cặp ràng buộc đối ngẫu

$$z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\ 4x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

*Giải.*

### 3.1.2 Bài toán đối ngẫu của bài toán min

| Bài toán gốc (1) | Bài toán đối ngẫu (2) |
|---|---|
| $z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \to \min$ | $z' = b_1y_1 + \cdots + b_my_m \to \max$ |
| $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$<br>$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$<br>$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$ | $y_i \geq 0$<br>$y_i \leq 0$<br>$y_i \in \mathbb{R}$ |
| $x_j \geq 0$<br>$x_j \leq 0$<br>$x_j \in \mathbb{R}$ | $a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m \leq c_j$<br>$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m \geq c_j$<br>$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m = c_j$ |

Hai bài toán quy hoạch tuyến tính này gọi là cặp bài toán đối ngẫu. Bài toán 1 gọi là bài toán gốc, bài toán 2 gọi là bài toán đối ngẫu. Một ràng buộc và điều kiện về biến trên cùng một dòng gọi là **cặp ràng buộc đối ngẫu.**

**Ví dụ 3.5.** Viết bài toán đối ngẫu của bài toán gốc sau và cho biết các cặp ràng buộc đối ngẫu

$$z = 4x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_4 - x_5 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 12x_1 + 5x_2 - 3x_5 \leq 5 \\ x_1 - x_3 - 4x_4 - 5x_5 \leq -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \geq 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = 17 \end{cases}$$

$$x_1, x_3 \geq 0; x_2 \in \mathbb{R}; x_4, x_5 \leq 0$$

*Giải.*

**Ví dụ 3.6.** Viết bài toán đối ngẫu của bài toán gốc sau và giải bài toán đối ngẫu bằng phương pháp đơn hình

$$z = 10x_1 + 8x_2 + 19x_3 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 6 \\ 3x_1 + 2x_3 \geq 2 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 5 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

*Giải.*

*Nhận xét.* Bài toán quy hoạch tuyến tính gốc dạng

$$z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &\geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

trong đó $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$ thì bài toán đối ngẫu có dạng chuẩn

$$z' = \mathbf{b}^T\mathbf{y} \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T\mathbf{y} &\leq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

được giải trực tiếp bằng phương pháp đơn hình. □

*Chú ý.* Các phần sau, ta chỉ xét bài toán gốc dạng min .

## 3.2 Các định lý về đối ngẫu

Cho cặp bài toán gốc, đối ngẫu như sau:

| **Bài toán gốc (1)** | **Bài toán đối ngẫu (2)** |
|---|---|
| $z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \to \min$ | $z' = b_1y_1 + \cdots + b_my_m \to \max$ |
| $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$<br>$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$<br>$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$ | $y_i \geq 0$<br>$y_i \leq 0$<br>$y_i \in \mathbb{R}$ |
| $x_j \geq 0$<br>$x_j \leq 0$<br>$x_j \in \mathbb{R}$ | $a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m \leq c_j$<br>$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m \geq c_j$<br>$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m = c_j$ |

**Định lý 3.1** (Đối ngẫu yếu)**.** *Nếu* $\mathbf{x}^T = (x_1, \ldots, x_n)$ *là phương án chấp nhận được của bài toán gốc và* $\mathbf{y}^T = (y_1, \ldots, y_n)$ *là phương án chấp nhận được của bài toán đối ngẫu thì*

$$c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \geq b_1y_1 + \cdots + b_my_m \tag{3.1}$$

*(Nghĩa là giá trị hàm mục tiêu của bài toán gốc luôn lớn hơn hoặc bằng giá trị hàm mục tiêu của bài toán đối ngẫu)*

*Chứng minh.* Ta đặt

$$\begin{aligned} u_i &= (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - b_i)y_i \geq 0 \\ v_j &= x_j[c_j - (a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m)] \geq 0 \end{aligned}$$

Cho nên

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} u_i &= \sum_{i=1}^{n} (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - b_i)y_i \geq 0 \\ \sum_{j=1}^{n} v_j &= \sum_{j=1}^{n} x_j[c_j - (a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m)] \geq 0 \end{aligned}$$

Do đó

$$0 \leq \sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j = (c_1x_1 + \cdots + c_nx_n) - (b_1y_1 + \cdots + b_my_m)$$

Ta có điều cần chứng minh. □

**Hệ quả 3.2** (Dấu hiệu không có phương án chấp nhận được)**.**

*i. Nếu hàm mục tiêu của bài toán quy hoạch tuyến tính gốc không giới nội dưới, thì bài toán đối ngẫu không có phương án chấp nhận được.*

*ii. Nếu hàm mục tiêu của bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu không giới nội trên, thì bài toán gốc không có phương án chấp nhận được.*

*Chứng minh.* Do sự tương tự ta chỉ chứng minh i). Giả sử bài toán gốc không giới nội dưới tức tồn các phương án chấp nhận được $\mathbf{x}^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k)$ sao cho giá trị hàm mục tiêu

$$z = c_1x_1^k + \cdots + c_nx_n^k \to -\infty \text{ khi } k \to \infty$$

Ta chứng minh bằng phản chứng, giả sử bài toán đối ngẫu có phương án chấp nhận được $\mathbf{y}^T = (y_1, \ldots, y_m)$. Khi đó, do định lý đối ngẫu yếu

$$b_1y_1 + \cdots + b_my_m \leq c_1x_1^k + \cdots + c_nx_n^k \text{ với mọi } \mathbf{x}^T = (x_1^k, \ldots, x_n^k)$$

Cho $k \to \infty$ ta được điều vô lý

$$b_1 y_1 + \cdots + b_m y_m \le -\infty$$

Vậy ta có điều cần chứng minh. □

**Hệ quả 3.3.** *Cho* $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ *và* $\mathbf{y}^* = (y_1^*, \ldots, y_m)$ *là phương án chấp nhận được tương ứng của bài toán gốc và bài toán đối ngẫu. Nếu giá trị hàm mục tiêu của hai bài toán này bằng nhau, nghĩa là*

$$c_1 x_1^* + \cdots + c_n x_n^* = b_1 y_1^* + \cdots + b_m y_m^* \tag{3.2}$$

*thì* $\mathbf{x}^*$ *và* $\mathbf{y}^*$ *là phương án tối ưu tương ứng của hai bài toán.*

*Chứng minh.* Gọi $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ là một phương án chấp nhận được bất kỳ của bài toán gốc. Theo định lý đối ngẫu yếu ta có

$$b_1 y_1^* + \cdots + b_m y_m^* \le c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$

do đó

$$c_1 x_1^* + \cdots + c_n x_n^* \le c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$

Vậy $\mathbf{x}^* = \left(x_1^*, \ldots, x_n^*\right)$ là phương án tối ưu của bài toán gốc. Tương tự, ta có $\mathbf{y}^*$ là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu. □

**Định lý 3.4** (Đối ngẫu mạnh)**.** *Nếu một trong hai bài toán quy hoạch tuyến tính gốc hoặc đối ngẫu có phương án tối ưu thì:*

*i. Bài toán quy hoạch kia cũng có phương án tối ưu.*

*ii. Giá trị hàm mục tiêu tối ưu của hai bài toán bằng nhau.*

**Định lý 3.5** (Độ lệch bù)**.** *Giả sử* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *tương ứng là phương án chấp nhận được của bài toán gốc, bài toán đối ngẫu. Khi đó* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *là tối ưu khi và chỉ khi*

$$(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - b_i)y_i = 0 \quad \forall i \tag{3.3}$$

$$x_j(a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m - c_j) = 0 \quad \forall j \tag{3.4}$$

*Chứng minh.* Ta đặt

$$\begin{aligned} u_i &= (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - b_i)y_i \ge 0 \\ v_j &= x_j[c_j - (a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m)] \ge 0 \end{aligned}$$

Cho nên

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} u_i &= \sum_{i=1}^{n} (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - b_i)y_i \geq 0 \\ \sum_{j=1}^{n} v_j &= \sum_{j=1}^{n} x_j[c_j - (a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m)] \geq 0\end{aligned}$$

Do đó

$$0 \leq \sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j = (c_1x_1 + \cdots + c_nx_n) - (b_1y_1 + \cdots + b_my_m)$$

Theo định lý đối ngẫu mạnh, nếu $\mathbf{x}^T = (x_1, \ldots, x_n)$ và $\mathbf{y}^T = (y_1, \ldots, y_m)$ là phương án tối ưu của bài toán gốc và bài toán đối ngẫu thì

$$(c_1x_1 + \cdots + c_nx_n) = (b_1y_1 + \cdots + b_my_m).$$

Do đó $u_i = v_j = 0$ với mọi $i, j$.

Ngược lại nếu $u_i = v_j = 0$ với mọi $i, j$ thì

$$(c_1x_1 + \cdots + c_nx_n) = (b_1y_1 + \cdots + b_my_m).$$

Theo hệ quả 3.3 thì $\mathbf{x}$ và $\mathbf{y}$ cũng là phương án tối ưu. $\square$

**Ví dụ 3.7.** Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad + \;\; x_3 = 2 \\ \quad\quad x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$$

có phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu là $\mathbf{y}^T = (2; 3)$. Hãy tìm phương án tối ưu của bài toán gốc.

*Giải.* ____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

**Ví dụ 3.8.** Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 = 50 \\ -3x_1 + x_3 + 2x_4 \geq 16 \\ 4x_1 + 3x_3 + x_4 \leq 23 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4$$

có phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (0; 14; 6; 5)$. Hãy tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

*Giải.*

**Ví dụ 3.9.** Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = -4x_1 + 9x_2 + 16x_3 - 8x_4 - 20x_5 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 \geq 5 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 - 5x_5 \geq -9 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

**a.** Phát biểu bài toán đối ngẫu của bài toán trên.

**b.** Kiểm tra tính tối ưu của phương án $\mathbf{x}^T = (2; 0; 1; -2; 3)$ và tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

*Giải.*

**Ví dụ 3.10.** Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = 10x_1 + 8x_2 + 19x_3 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 6 \\ 3x_1 + 2x_3 \geq 2 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 3$$

*Giải.*

## 3.3 Bài tập chương 3

**Bài tập 3.1.** Giải các bài toán qui hoạch tuyến tính

**a.** $z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \min$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 19 \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \geq 24 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$

**Đáp án.** Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (7/5; 53/15; 0)$, giá trị hàm mục tiêu $z = 67/5$

**b.** $z = x_1 + x_2 + x_3 \to \min$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 20 \\ x_1 + 7x_2 + 3x_3 \geq 25 \\ 3x_1 + x_2 + 8x_3 \geq 30 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$

**Đáp án.** Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (131/60; 127/60; 8/3)$, giá trị hàm mục tiêu $z = 209/30$

**Bài tập 3.2.** Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 16 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 8 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 \leq 20 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4$

**a.** Phát biểu bài toán đối ngẫu của bài toán trên.

**b.** Hãy giải một trong hai bài toán rồi suy ra phương án tối ưu của bài toán còn lại.

**Bài tập 3.3.** Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = -5x_1 + x_2 + x_3 + 16x_4 \to \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 2 \\ -3x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 8x_4 = 9 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 4$

**a.** Hỏi $\mathbf{x}^T = (25/13; 64/13; 0; 8/13)$ có phải là phương án tối ưu của bài toán trên không?

**b.** Viết bài toán đối ngẫu của bài toán trên và tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

**Bài tập 3.4.** Một Xí nghiệp xử lý giấy, có ba phân xưởng I, II, III cùng xử lý hai loại giấy A, B. Do hai phân xưởng có nhiều sự khác nhau, nên nếu cùng đầu tư 10 triệu đồng vào mỗi phân xưởng thì cuối kỳ phân xưởng I xử lý được 6 tạ giấy loại A, 5 tạ giấy loại B. Trong khi đó phân xưởng II xử lý được 4 tạ giấy loại A, 6 tạ giấy loại B. Phân xưởng III xử lý được 5 tạ giấy loại A, 4 tạ giấy loại B. Theo yêu cầu lao động thì cuối kỳ Xí nghiệp phải xử lý ít nhất 6 tấn giấy loại A, 8 tấn giấy loại B. Hỏi cần đầu tư vào mỗi phân xưởng bao nhiêu tiền để xí nghiệp hoàn thành công việc với giá tiền đầu tư là nhỏ nhất.

**Đáp án.** Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (5/4; 45/4; 0)$, giá trị hàm mục tiêu $z = 55/4$.

**Bài tập 3.5.** Một gia đình cần ít nhất 1800 đơn vị prôtêin và 1500 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Một kilôgam thịt bò chứa 600 đơn vị prôtêin và 600 đơn vị lipit, một kilôgam thịt heo chứa 600 đơn vị prôtêin và 300 đơn vị lipit, một kilôgam thịt gà chứa 600 đơn vị prôtêin và 600 đơn vị lipit. Giá một kilôgam thịt bò là 84 ngàn đồng, giá một kilôgam thịt heo là 71 ngàn đồng, giá một kilôgam thịt gà là 90 ngàn đồng. Hỏi một gia đình nên mua bao nhiêu kilôgam thịt mỗi loại để bảo đảm tốt khẩu phần ăn trong một ngày và tổng số tiền phải mua là nhỏ nhất?

**Đáp án.** Phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (2; 1; 0)$, giá trị hàm mục tiêu $z = 239$.

**Bài tập 3.6.** Cho bài toán quy hoạch tuyến tính.

$$z = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \to \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 6 \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 \geq -4 \\ x_1 + 3x_3 - 4x_5 \geq 8 \end{cases}$$

$$x_1, x_3, x_5 \geq 0$$

**a.** Phát biểu bài toán đối ngẫu của bài toán trên, chứng tỏa tập phương án của bài toán đối ngẫu là tập rỗng.

**b.** Kiểm tra tính tối ưu của phương án $\mathbf{x}^T = (5; -6; 1; -4; 0)$ cho bài toán gốc

**c.** Chứng tỏa bài toán đã cho không có phương án tối ưu.

*Hướng dẫn giải.*

**a.** Chỉ ra không có phương án nào thỏa các ràng buộc của bài toán đối ngẫu.

**b.** Sử dụng định lý độ lệch bù, với phương án $\mathbf{x}^T = (5; -6; 1; -4; 0)$ thì không tồn tại phương án nào của bài toán đối ngẫu thỏa định lý độ lệch bù.

**c.** Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử bài toán gốc có phương án tối ưu thì bài toán đối ngẫu cũng có phương án tối ưu (theo định lý đối ngẫu mạnh 3.4). Điều này trái với câu a). Vậy ta được điều phải chứng minh.

# Chương 4

# Bài toán vận tải

## 4.1 Bài toán vận tải cân bằng thu phát

Giả sử:

| Phát \ Thu | $b_1$ | $b_2$ | $\cdots$ | $b_j$ | $\cdots$ | $b_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $c_{11}$ | $c_{12}$ | $\cdots$ | $c_{1j}$ | $\cdots$ | $c_{1n}$ |
| $a_2$ | $c_{21}$ | $c_{22}$ | $\cdots$ | $c_{2j}$ | $\cdots$ | $c_{2n}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\cdots$ | $\vdots$ | $\cdots$ | $\vdots$ |
| $a_i$ | $c_{i1}$ | $c_{i2}$ | $\cdots$ | $c_{ij}$ | $\cdots$ | $c_{in}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\cdots$ | $\vdots$ | $\cdots$ | $\vdots$ |
| $a_m$ | $c_{m1}$ | $c_{m2}$ | $\cdots$ | $c_{mj}$ | $\cdots$ | $c_{mn}$ |

- Có $m$ nơi cung cấp hàng hóa (trạm phát), trạm phát $i$ chứa $a_i$ đơn vị hàng hóa $i = 1, \ldots, m$.
- Có $n$ nơi tiêu thụ hàng hóa (trạm thu), trạm thu thứ $j$ chứa $b_j$ đơn vị hàng hóa $j = 1, \ldots, n$.
- Tổng lượng phát bằng tổng lượng thu, nghĩa là

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{4.1}$$

- Cước phí vận chuyển một đơn vị hàng hóa từ nơi cung cấp thứ $i$ đến nơi tiêu thụ thứ $j$ là $c_{ij}$.

Yêu cầu của bài toán là tìm lượng hàng phân phối $x_{ij} \geq 0$ từ trạm phát thứ $i$ đến trạm thu thứ $j$ sao cho:

- Tổng chi phí vận chuyển thấp nhất

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \tag{4.2}$$

- Giải tỏa kho

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \ldots, m \tag{4.3}$$

- Cửa hàng nhận đủ hàng

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1, \ldots, n \tag{4.4}$$

Bảng phân phối lượng hàng vận chuyển $x_{ij}$ từ trạm phát thứ $i$ đến trạm thu thứ $j$ thường được trình bày như sau:

| $a_i \backslash b_j$ | $b_1$ | $b_2$ | $\cdots$ | $b_j$ | $\cdots$ | $b_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $c_{11}$ $x_{11}$ | $c_{12}$ $x_{12}$ | | $c_{1j}$ $x_{1j}$ | | $c_{1n}$ $x_{1n}$ |
| $a_2$ | $c_{21}$ $x_{21}$ | $c_{22}$ $x_{22}$ | | $c_{2j}$ $x_{2j}$ | | $c_{2n}$ $x_{2n}$ |
| $\vdots$ | | | | | | |
| $a_i$ | $c_{i1}$ $x_{i1}$ | $c_{i2}$ $x_{i2}$ | | $c_{ij}$ $x_{ij}$ | | $c_{in}$ $x_{in}$ |
| $\vdots$ | | | | | | |
| $a_m$ | $c_{m1}$ $x_{m1}$ | $c_{m2}$ $x_{m2}$ | | $c_{mj}$ $x_{mj}$ | | $c_{mn}$ $x_{mn}$ |

Ma trận

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

thỏa các ràng buộc (4.3) và (4.4) được gọi là phương án chấp nhận được.

**Tính chất 4.1.** *Bài toán vận tải cân bằng thu phát luôn có phương án tối ưu.*

*Chứng minh.* Ta cần chứng minh tập các phương án chấp nhận được khác rỗng và hàm mục tiêu luôn bị chặn dưới. Thật vậy ta có

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{\sum_{i=1}^{m} a_i} \geq 0, \quad \forall i, j \tag{4.6}$$

là phương án chấp nhận được vì

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{\sum_{i=1}^{m} a_i} = \frac{a_i}{\sum_{i=1}^{m} a_i} \sum_{j=1}^{n} b_j = a_i, \quad i = 1, \ldots, m \tag{4.7}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{\sum_{i=1}^{m} a_i} = \frac{b_j}{\sum_{i=1}^{m} a_i} \sum_{i=1}^{m} a_i = b_j, \quad j = 1, \ldots, n \tag{4.8}$$

Hàm mục tiêu bị chặn dưới bởi không

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \geq 0 \tag{4.9}$$

Vậy theo tính chất của bài toán quy hoạch tuyến tính, bài toán vận tải luôn có phương án tối ưu. □

**Tính chất 4.2.** *Ma trận hệ số các ràng buộc của bài toán vận tải có hạng bằng $m + n - 1$.*

## 4.2 Phương án cực biên của bài toán vận tải

**Định nghĩa 4.3** (Ô chọn, ô loại)**.**

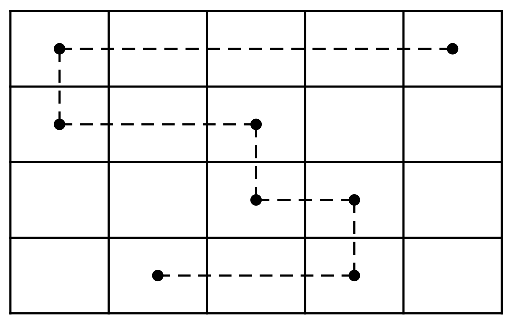
*i. Ta viết $(i; j)$ là ô ở dòng $i$ cột $j$.*

*ii. Trong bảng vận tải, những ô có $x_{ij} > 0$ được gọi là* ***ô chọn****, những ô có $x_{ij} = 0$ gọi là* ***ô loại****.*

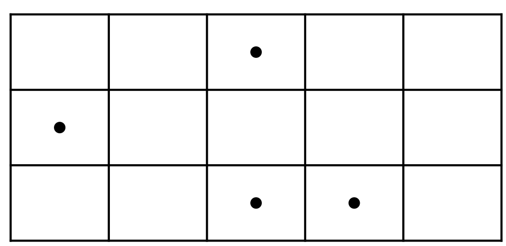
**Định nghĩa 4.4** (Đường đi)**.** *Ta gọi một đường đi là tập hợp các ô chọn sao cho:*

- *Trên cùng một dòng hay một cột không có quá hai ô chọn.*
- *Hai ôchọn liên tiếp thì nằm trên cùng một dòng hay một cột.*

**Ví dụ 4.1.** Dãy các ô chọn sau tạo thành một đường đi:

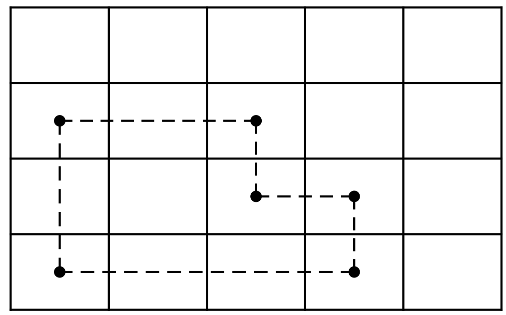


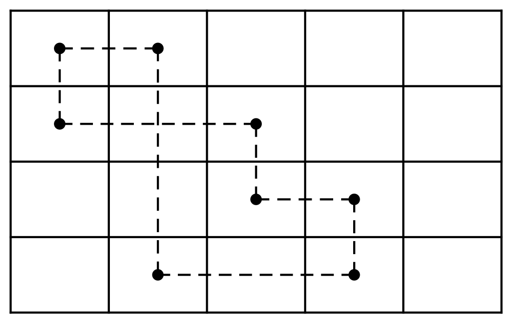
**Ví dụ 4.2.** Các ô chọn sau có lập thành đường đi không, tại sao?



**Định nghĩa 4.5** (Chu trình)**.** *Một đường đi khép kín được gọi là một chu trình.*

**Ví dụ 4.3.** Dãy các ô chọn sau tạo thành một chu trình

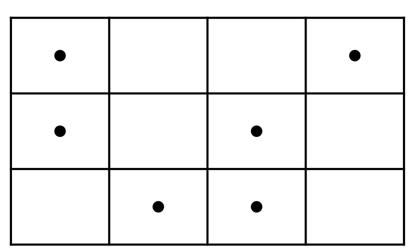




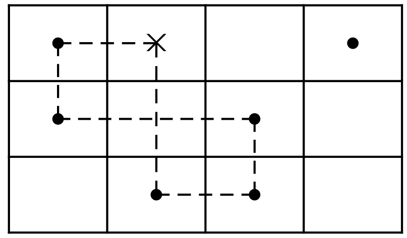
**Tính chất 4.6.** *Một bảng vận tải có* $m$ *dòng,* $n$ *cột thì tập các ô chọn không chứa chu trình có tối đa* $m + n - 1$ *ô.*

**Tính chất 4.7.** *Với một phương án có đủ* $m + n - 1$ *ô chọn không chứa chu trình, thì với bất kỳ một ô loại nào được đưa vào phương án thì sẽ tạo thành một chu trình và chu trình này là duy nhất.*

**Ví dụ 4.4.** Xét bảng vận tải 3 dòng, 4 cột với một phương án có $3+4-1 = 6$ ô chọn cho như sau



Khi ta thêm một ô loại bất kỳ thì ô loại này kết hợp với một số ô chọn này tạo thành chu trình. Chẳng hạn, ta thêm ô loại $(1, 2)$ vào phương án thì ô này sẽ kết hợp với các ô $(3, 2)$; $(3, 3)$; $(2, 3)$; $(2, 1)$; $(1, 1)$ tạo thành chu trình.



□

**Định lý 4.8.** *Một phương án được gọi là phương án cực biên của bài toán vận tải khi và chỉ khi tập các ô chọn của nó không chứa chu trình.*

**Định nghĩa 4.9.** *Một phương án cực biên có $m + n - 1$ ô chọn được gọi là phương án cực biên không suy biến. Ngược lại, một phương án cực biên có ít hơn $m + n - 1$ ô chọn được gọi là phương án cực biên suy biến.*

**Ví dụ 4.5.** Phương án sau là phương án cực biên không suy biến

| $a_i \backslash b_j$ | **30** | **40** | **50** | **60** |
|---|---|---|---|---|
| **80** | 1 **30** | 5 | 7 | 2 **50** |
| **45** | 5 | 7 | 4 **35** | 9 **10** |
| **55** | 12 | 2 **40** | 3 **15** | 6 |

**Ví dụ 4.6.** Phương án sau là phương án cực biên suy biến

| $a_i \backslash b_j$ | **40** | **100** | **60** | **50** |
|---|---|---|---|---|
| **80** | 1 **40** | 2 | 4 **40** | 3 |
| **70** | 2 | 4 | 5 **20** | 1 **50** |
| **100** | 4 | 1 **100** | 2 | 5 |

*Nhận xét.* Một phương án cơ bản có các cô chọn có thể không lập thành một đường đi.

## 4.3 Các phương pháp thành lập phương án cực biên

### 4.3.1 Phương pháp cước phí thấp nhất

Ý tưởng chính của phương pháp này là phân phối lượng hàng lớn nhất có thể vào ô có cước phí thấp nhất. Phương pháp phân phối lượng hàng $x_{ij}$ được thực hiện như sau:

$$x_{ij} = \min\{a_i; b_j\} = \begin{cases} a_i & \text{loại dòng } i, b_j = b_j - a_i \\ b_j & \text{loại cột } j, a_i = a_i - b_j \\ a_i = b_j & \text{loại dòng } i \text{ cột j} \end{cases} \tag{4.10}$$

Lặp lại quá trình trên cho các ô tiếp theo đến khi yếu cầu của trạm phát, trạm thu được thỏa mãn. Phương án thu được bằng phương pháp này là phương án cực biên.

**Ví dụ 4.7.** Bằng phương pháp cước phí thấp nhất, thành lập một phương án cực biên của bài toán vận tải:

| $a_i$ \ $b_j$ | **30** | **40** | **50** | **60** |
|---|---|---|---|---|
| **80** | 1 | 5 | 7 | 2 |
| **45** | 5 | 7 | 4 | 9 |
| **55** | 12 | 2 | 3 | 6 |

*Giải.* ____________________________________________

□

### 4.3.2 Phương pháp góc Tây - Bắc

Ta ưu tiên phân phối lượng hàng nhiều nhất vào ô ở góc Tây - Bắc trên bảng vận tải. Khi đó nếu:

- Trạm phát nào đã hết hàng thì ta xóa dòng chứa trạm phát đó.
- Trạm thu nào đã nhận đủ hàng thì ta xóa cột chứa trạm thu đó.

Sau đó lặp lại quá trình trên đối với những ô còn lại. Phương án được thành lập bằng phương pháp góc Tây - Bắc là phương án cực biên

**Ví dụ 4.8.** Bằng phương pháp góc Tây - Bắc, thành lập phương án cực biên của bài toán vận tải

| $a_i \backslash b_j$ | **30** | **40** | **50** | **60** |
|---|---|---|---|---|
| **80** | 1 | 5 | 7 | 2 |
| **45** | 5 | 7 | 4 | 9 |
| **55** | 12 | 2 | 3 | 6 |

*Giải.* ______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

□

### 4.3.3 Phương pháp Vogel (Fogel)

Phương pháp Vogel cho ta một phương án cực biên khá tốt, theo nghĩa nó rất gần với phương án tối ưu.

i) Trên mỗi dòng, mỗi cột của ma trận cước phí ta tính hiệu số giữa hai giá trị cước phí nhỏ nhất.

ii) Chọn dòng hay cột có hiệu số này lớn nhất (nếu có nhiều dòng hay cột thỏa điều kiện này thì ta chọn một dòng hay một cột trong các dòng, cột này)

iii) Phân lượng hàng nhiều nhất vào ô có cước phí nhỏ nhất trên dòng hay cột vừa chọn được. (Khi đó nếu nơi nào đã phát hết hàng thì ta xóa dòng chứa nơi phát đó. Nếu nơi nào nhận đủ hàng thì ta xóa cột chứa nơi nhận đó. Lúc đó cột (dòng) này hiệu số sẽ không tính cho bước sau).

iv) Lặp lại ba bước nói trên với những ô còn lại cho đến hết. Ta thu được phương án cực biên.

**Ví dụ 4.9.** Bằng phương pháp Vogel tìm phương án cực biên của bài toán vận tải:

| $a_i \backslash b_j$ | **30** | **40** | **50** | **60** |
|---|---|---|---|---|
| **80** | 1 | 5 | 7 | 2 |
| **45** | 5 | 7 | 4 | 9 |
| **55** | 12 | 2 | 3 | 6 |

*Giải.*

---

□

## 4.4 Thuật toán thế vị giải bài toán vận tải

Để giải bài toán vận tải, ta thực hiện bốn bước như sau:

**Bước 1.** Thành lập phương án cực biên bằng một trong các phương pháp: **cước phí thấp nhất, Tây - Bắc, Vogel**.

**Bước 2.** Xét xem phương án cực biên hiện thời đã tối ưu hay chưa bằng thuật toán **quy không cước phí ô chọn.** Nếu phương án cực biên hiện thời là phương án tối ưu thì thuật toán kết thúc. Ngược lại sang bước 3.

**Bước 3.** Xây dựng phương án cực biên mới tốt hơn xem 4.4.2.

**Bước 4.** Quay về bước 2.

### 4.4.1 Thuật toán quy không cước phí ô chọn

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính có phương án cực biên ban đầu không suy biến (có $m+n-1$ ô chọn). Nếu bài toán có phương án cực biên suy biến (có ít hơn $m+n-1$ ô chọn) thì ta thêm **ô chọn giả** $(i,j)$ với $x_{ij}=0$ vào sao cho các ô chọn giả này và các ô chọn ban đầu không tạo thành chu trình.

**Ví dụ 4.10.** Xét bài toán vận tải có phương án cực biên suy biến

| $a_i \backslash b_j$ | **40** | **100** | **60** | **50** |
|---|---|---|---|---|
| **80** | 1<br>**40** | 2 | 4<br>**40** | 3 |
| **70** | 2 | 4 | 5<br>**20** | 1<br>**50** |
| **100** | 4 | 1<br>**100** | 2 | 5 |

Ta thêm ô chọn giả $(1,2)$ với $x_{12}=0$ thì bài toán có $m+n-1$ ô chọn

| $a_i \backslash b_j$ | **40** | **100** | **60** | **50** |
|---|---|---|---|---|
| **80** | 1 **40** | 2 **0** | 4 **40** | 3 |
| **70** | 2 | 4 | 5 **20** | 1 **50** |
| **100** | 4 | 1 **100** | 2 | 5 |

Thuật toán quy không cước phí thực hiện như sau: Lần lượt cộng vào các cước phí ở dòng $1, \ldots, m$ một lượng $r_1, \ldots, r_m$ và vào cột $1, \ldots, n$ một lượng $s_1, \ldots, s_n$ sao cho tổng cước phí trên các ô chọn bằng không.

**Ví dụ 4.11.** Quy không cước phí các ô chọn của bảng vận tải.

| $a_i \backslash b_j$ | **30** | **40** | **50** | **60** |
|---|---|---|---|---|
| **80** | 1 **30** | 5 | 7 | 2 **50** |
| **45** | 5 | 7 | 4 **35** | 9 **10** |
| **55** | 12 | 2 **40** | 3 **15** | 6 |

*Giải.*

| $r_i \backslash s_j$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 **30** | 5 | 7 | 2 **50** |
| | 5 | 7 | 4 **35** | 9 **10** |
| | 12 | 2 **40** | 3 **15** | 6 |

Bài toán vận tải sau khi quy không cước phí ô chọn:

| $a_i$ \ $b_j$ | **30** | **40** | **50** | **60** |
|---|---|---|---|---|
| **80** | **30** | | | **50** |
| **45** | | | **35** | **10** |
| **55** | | **40** | **15** | |

**Định lý 4.10.** *Lần lượt cộng vào các cước phí ở dòng* $1, \ldots, m$ *một lượng* $r_1, \ldots, r_m$ *và vào cột* $1, \ldots, n$ *một lượng* $s_1, \ldots, s_n$ *tức thay* $c_{ij}$ *bởi*

$$c'_{ij} = r_i + s_j + c_{ij}$$

*thì ta được bài toán mới có cùng phương án tối ưu với bài toán cũ.*

*Nhận xét.* Theo định lý 4.10, bài toán vận tải với phương án cực biên

| $a_i$ \ $b_j$ | **30** | **40** | **50** | **60** |
|---|---|---|---|---|
| **80** | 1 **30** | 5 | 7 | 2 **50** |
| **45** | 5 | 7 | 4 **35** | 9 **10** |
| **55** | 12 | 2 **40** | 3 **15** | 6 |

và bài toán vận tải sau khi quy không cước phí các ô chọn với phương án cực biên

| $a_i$ \ $b_j$ | **30** | **40** | **50** | **60** |
|---|---|---|---|---|
| **80** | 0 **30** | 9 | 10 | 0 **50** |
| **45** | -3 | 4 | 0 **35** | 0 **10** |
| **55** | 5 | 0 **40** | 0 **15** | -2 |

là tương đương nhau. Nghĩa bài toán quy không cước phí tối ưu thì bài toán ban đầu cũng tối ưu và chúng cùng phương án tối ưu.

Ta nhận thấy, trong bài toán quy không cước phí trên dòng 2, có ô $(2, 1)$ có cước phí "rẻ" hơn cước phí các ô chọn $(2, 3)$ và $(2, 4)$ nên phương án hiện thời chưa tối ưu.

**Định lý 4.11** (Dấu hiệu tối ưu)**.** *Bài toán vận tải sau khi quy không cước phí các ô chọn:*

- *Nếu* $c'_{ij} \geq 0$ *với mọi* $(i, j)$ *thì phương án cực biên hiện thời là phương án tối ưu.*
- *Nếu tồn tại* $c'_{ij} < 0$ *thì có thể tìm một phương án mới tốt hơn phương án hiện thời.*

**Ví dụ 4.12.** Chứng minh phương án cực biên hiện thời của bài toán vận tải sau không phải là phương án tối ưu.

| $a_i$ \ $b_j$ | **30** | **40** | **50** | **60** |
|---|---|---|---|---|
| **80** | 1 **30** | 5 **40** | 7 **10** | 2 |
| **45** | 5 | 7 | 4 **40** | 9 **5** |
| **55** | 12 | 2 | 3 | 6 **55** |

*Giải.*

**Ví dụ 4.13.** Chứng minh phương án cực biên hiện thời của bài toán vận tải sau là phương án tối ưu.

| $a_i$ \ $b_j$ | **30** | **40** | **50** | **60** |
|---|---|---|---|---|
| **80** | 1 **20** | 5 | 7 | 2 **60** |
| **45** | 5 **10** | 7 | 4 **35** | 9 |
| **55** | 12 | 2 **40** | 3 **15** | 6 |

*Giải.*

### 4.4.2 Xây dựng phương án cực biên mới

Trên bảng quy không cước phí tìm

**Bước 1.** Ô vào là ô loại có $c'_{ij} < 0$ nhỏ nhất.

**Bước 2.** Xác định chu trình chứa ô vào vừa xác định bước 2. Ô vào đánh dấu (+), các ô còn lại xen kẻ dấu (-), (+) trên chu trình.

**Bước 3.** Xác định phương án cực biên mới.

- Lượng điều chỉnh $q = \min\left\{x_{ij} | (i, j) \text{ có dấu (-)}\right\}$
- Phương án cực biên mới:

$$x_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + q & \text{Ô có dấu (+)} \\ x_{ij} - q & \text{Ô có dấu (-)} \\ x_{ij} & \text{Ô không có dấu} \end{cases} \tag{4.11}$$

**Ví dụ 4.14.** Cho bài toán vận tải có phương án cực biên

| $a_i$ \ $b_j$ | **30** | **50** | **80** | **40** |
|---|---|---|---|---|
| **90** | 3 **30** | 2 | 5 **20** | 1 **40** |
| **70** | 4 | 1 **50** | 3 **20** | 6 |
| **40** | 7 | 4 | 2 **40** | 5 |

Chứng minh phương án cực biên hiện thời chưa tối ưu. Xây dựng một phương án khác tốt hơn.

*Giải.* ______________________________________________

**Ví dụ 4.15.** Cho bài toán vận tải có phương án cực biên

| $a_i \backslash b_j$ | **25** | **25** | **10** |
|---|---|---|---|
| **10** | 5 | 3 | 5 **10** |
| **30** | 7 **25** | 6 **5** | 8 |
| **20** | 3 | 2 **20** | 2 |

Chứng minh phương án cực biên hiện thời chưa tối ưu. Xây dựng một phương án khác tốt hơn.

*Giải.*

**Ví dụ 4.16.** Giải bài toán vận tải

| $a_i \backslash b_j$ | **50** | **40** | **70** |
|---|---|---|---|
| **80** | 5 | 5 | 12 |
| **20** | 7 | 9 | 11 |
| **60** | 4 | 2 | 3 |

*Giải.*

## 4.5 Một số trường hợp đặc biệt của bài toán vận tải

### 4.5.1 Bài toán vận tải không cân bằng thu phát

**Trường hợp phát lớn hơn thu.** Ta thêm trạm thu giả $b_{n+1}$, với lượng hàng là

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j, \quad c_{in+1} = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

Lúc này bài toán cân bằng thu phát.

**Trường hợp phát ít hơn thu.** Ta thêm trạm phát giả $a_{m+1}$, với lượng hàng là

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i, \quad c_{m+1i} = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

Lúc này bài toán cân bằng thu phát.

**Ví dụ 4.17.** Giải bài toán vận tải không cân bằng thu phát cho bởi bảng vận tải sau:

| $a_i \backslash b_j$ | **100** | **65** | **95** |
|---|---|---|---|
| **80** | 7 | 5 | 2 |
| **70** | 3 | 4 | 5 |
| **150** | 9 | 2 | 7 |

*Giải.*

### 4.5.2 Bài toán vận tải có ô cấm

Đây là bài toán vận tải mà vì một lý do no đó có một nơi phát không thể chuyên chở hàng đến một nơi nhận nào đó được. Để giải quyết vấn đề này chúng ta cho cước phí ở ô đó là $\boldsymbol{M}$, với $\boldsymbol{M}$ là số dương rất lớn, lớn hơn bất kỳ số nào cần so sánh. Sau đó chúng ta giải như những bài toán đã trình bày ở trên.

**Ví dụ 4.18.** Giải bài toán vận tải với hai ô cấm cho như sau:

| $a_i \backslash b_j$ | **100** | **65** | **95** | **40** |
|---|---|---|---|---|
| **80** | 6 | 5 | 11 | 10 |
| **70** | 10 | $\times$ | 5 | 7 |
| **150** | 9 | 8 | 7 | $\times$ |

*Giải.*

## 4.6 Bài toán vận tải cực đại cước phí

**Bước 1.** Thành lập phương án cực biên bằng phương pháp cực đại cước phí, chúng ta phân phối lượng hàng nhiều nhất vào ô có cước phí lớn nhất.

**Bước 2.** Xét xem phương án cực biên hiện thời đã tối ưu hay chưa bằng thuật toán **quy không cước phí ô chọn.**

- Nếu $c'_{ij} \leq 0$ với mọi $(i, j)$ thì phương án cực biên hiện thời là phương án tối ưu, thuật toán kết thúc.
- Nếu tồn tại $c'_{ij} > 0$ thì có thể tìm một phương án mới tốt hơn phương án hiện thời, chuyển sang bước 3.

**Bước 3.** Xây dựng phương án cực biên mới tốt hơn, chú ý ô vào là ô loại có $c'_{ij} > 0$ lớn nhất, các bước tiếp theo làm giống bài toán min.

**Bước 4.** Quay về bước 2.

**Ví dụ 4.19.** Giải bài toán vận tải cực đại cước phí sau:

| $a_i \backslash b_j$ | **70** | **55** | **85** | **60** |
|---|---|---|---|---|
| **90** | 6 | 5 | 11 | 10 |
| **80** | 10 | 6 | 5 | 7 |
| **100** | 9 | 8 | 7 | 4 |

*Giải.*

## 4.7 Bài tập chương 4

**Bài tập 4.1.** Giải bài toán vận tải

| $a_i \backslash b_j$ | **30** | **50** | **80** | **40** |
|---|---|---|---|---|
| **90** | 3 | 2 | 5 | 1 |
| **70** | 4 | 1 | 3 | 6 |
| **40** | 7 | 4 | 2 | 5 |

**Đáp án:** Phương án tối ưu

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 30 & 20 & 0 & 40 \\ 0 & 30 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 0 \end{pmatrix}, \quad z = 400$$

**Bài tập 4.2.** Giải bài toán vận tải:

| $a_i \backslash b_j$ | **40** | **100** | **60** | **50** |
|---|---|---|---|---|
| **80** | 1 | 2 | 4 | 3 |
| **70** | 2 | 4 | 5 | 1 |
| **100** | 4 | 1 | 2 | 5 |

**Đáp án:** Phương án tối ưu

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 20 & 60 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 40 & 60 & 0 \end{pmatrix}, \quad z = 390$$

**Bài tập 4.3.** Giải bài toán vận tải:

| $a_i \backslash b_j$ | **20** | **30** | **45** | **50** |
|---|---|---|---|---|
| **40** | 5 | 8 | 6 | 11 |
| **30** | 6 | 7 | 7 | 12 |
| **55** | 8 | 8 | 9 | 10 |

**Đáp án:** Phương án tối ưu

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 40 & 0 \\ 20 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 30 \end{pmatrix}, \quad z = 930$$

**Bài tập 4.4.** Giải bài toán vận tải có ô cấm

| $s_j$ / $r_i$ | **45** | **100** | **50** | **60** |
|---|---|---|---|---|
| **70** | | 16 | 15 | 11 |
| **100** | 10 | 17 | 9 | |
| **85** | 12 | 14 | 10 | 13 |

**Đáp án:** Phương án tối ưu

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 60 \\ 45 & 5 & 50 & 0 \\ 0 & 85 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad z = 2995$$

**Bài tập 4.5.** Cho bài toán vận tải cân bằng thu phát và một phương án:

| $b_j$ / $a_i$ | **40** | **45** | **60** | **65** |
|---|---|---|---|---|
| **90** | 4 **25** | 5 | 7 | 2 **65** |
| **65** | 5 | 1 **45** | 2 **20** | 10 |
| **55** | 11 **15** | 2 | 3 **40** | 6 |

**a.** Tính cước phí vận chuyển của phương án này, chứng minh phương án cực biên đã cho không phải là phương án tối ưu.

**b.** Xuất phát từ phương án trên hãy xây dựng một phương án mới tốt hơn (chỉ cần một phương án mới tốt hơn).

**Bài tập 4.6.** Một nhà máy chế biến thịt, sản xuất ba loại thịt: bò, lợn, cừu, với tổng lượng mỗi ngày là 480 tấn bò; 400 tấn lợn; 230 tấn cừu. Mỗi loại đều có thể bán được ở dạng tươi hoặc nấu chín. Tổng lượng các loại thịt nấu chín để bán trong giờ làm việc là 420 tấn. Ngoài ra nấu thêm ngoài giờ 250 tấn (với giá cao hơn). Lợi nhuận thu được trên một tấn được cho bằng bảng sau: (với đơn vị là triệu đồng)

| | Tươi | Nấu chín | Nấu chín Ngoài giờ |
|---|---|---|---|
| Bò | 8 | 11 | 14 |
| Lợn | 4 | 7 | 12 |
| Cừu | 4 | 9 | 13 |

Mục đích của nhà máy là tìm phương án sản xuất để làm cực đại lợi nhuận. Hãy tìm phương án tối ưu.

# Tài liệu tham khảo

[1] Phan Quốc Khánh, Trần Huệ Nương. (2000). *Quy hoạch tuyến tính*. NXB Giáo dục.

[2] Nguyễn Đình Tùng. (2010). *Quy hoạch tuyến tính*.

[3] Lê Khánh Luận. (2006). *Quy hoạch tuyến tính* . NXB Lao động.

[4] Bùi Phúc Trung. (2003). *Quy hoạch tuyến tính*. NXB Lao động - Xã hội.

[5] Bernard Kolman, Robert E. Beck. (1995). *Elementary Linear Programming with Applications*. Elsevier Science & Technology Books.

[6] Robert J. Vanderbei. (2007). *Linear Programming, Foundations and Extensions Third Edition*. Springer Publication.

[7] George B. Dantzig, Mukund N. Thapa. (1997). *Linear Programming, Introduction*. Springer Publication.