ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Глава 1. Постановка задачи линейного программирования (ЗЛП).

§1. Определения

Определение 1. **ЗЛП** – это задача нахождения экстремума линейной функции n переменных при условии, что эти переменные удовлетворяют системе линейных ограничений.

$$(1)\quad Z(X) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n + c_0 \to max\ (min);\quad \text{обычно}\quad c_0 = 0$$

$$(2)\quad \begin{cases} a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i & i = 1, \dots, l \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \le\ (\ge) b_i & i = l+1, \dots, n \\ x_j \ge 0 \qquad j = 1, \dots, t; & t \le n \end{cases}$$

$$c_j = conct \qquad b_i = const \qquad a_{ij} = const \qquad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n;$$

$$(1)\qquad \boldsymbol{Z(X)} - \text{ целевая функция;}\qquad (\mathbf{2}) - \text{ система ограничений}$$

Определение 2. **Допустимым решением** ЗЛП называется решение системы ограничений (2) . Множество всех таких решений называется **областью допустимых решений (ОДР)**.

Определение 3. **Оптимальным решением** ЗЛП называется такое допустимое решение, при котором целевая функция достигает своего экстремума.

$$\boldsymbol{X^*} = (\boldsymbol{x_1^*}, \dots, \boldsymbol{x_n^*}) \quad : \quad \boldsymbol{Z^*} = \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{X^*}) = \mathbf{max(min)\,Z(X)}, \qquad \mathbf{X} \in \text{ОДР}$$

Определение 4. **Решить** ЗЛП означает найти **все** его оптимальные решения (иногда любое из них) и соответствующее им значение целевой функции или доказать, что оптимальных решений **нет.**

Замечание 1. Целевая функция может не иметь оптимального решения в двух случаях – когда ОДР пустое множество (решений нет никаких), и когда функция может принимать сколь угодно большое (в задачах на минимум – большое по модулю) значение на ОДР.

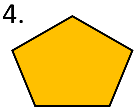
Замечание 2. Если $Z^* = Z(X^*)$, то для $Z_1(X) = Z(X) + c_0 \quad (c_0 - \forall) \qquad Z_1^* = Z_1(X^*) = Z^* + c_0$

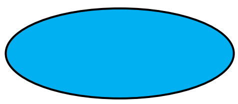
§2. Свойства ОДР

Определение 1. Точка $M(m_1, \dots, m_n)$ называется **выпуклой линейной комбинацией** точек $X(x_1, \dots, x_n)$ и $Y(y_1, \dots, \dots, y_n)$, если $m_i = tx_i + (1-t)y_i$, где $t \in [0;\ \ 1]$, для всех $i = 1, \dots, n$ (например, отрезок AB является множеством всех выпуклых линейных комбинаций точек A, B)

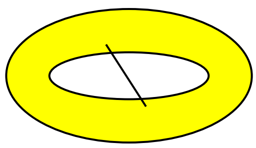
Определение 2. Множество точек называется выпуклым, если оно содержит все выпуклые линейные комбинации всех своих точек.

Примеры 1 - 4.

1) 

2) 

3) 

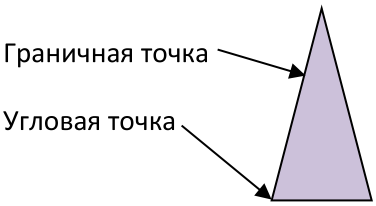
4) 

1, 2 - выпуклые множества 3, 4 - невыпуклые множества

Определение 3. **Граничной точкой** множества называется такая точка, у которой сколь угодно малая ее окрестность содержит как принадлежащие множеству точки, так и не принадлежащие.

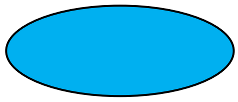
Определение 4. **Угловой точкой** множества называется граничная точка, не являющаяся выпуклой линейной комбинацией каких-либо точек множества.

Пример 5a.



Данное множество содержит 3 угловые точки.

Пример 5b.

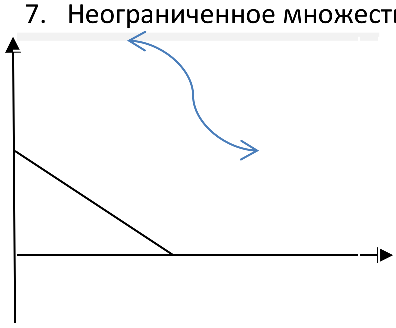


Данное множество содержит бесконечное множество угловых точек.

Определение 5. **Ограниченным** называется множество, координаты все х точек которого не превосходят по модулю некоторого числа N.

Примеры. 6. Ограниченное множество

7. Неограниченное множество



Определение 6. **Замкнутым** называется множество, содержащее все свои граничные точки.

Примеры.

8. $\{x; y\}$ $x > 0$ - незамкнутое множество 9. $\{x; y\}$ $x \geq 0$ - замкнутое множество

Определение 7. Замкнутое, выпуклое, ограниченное множество с конечным числом угловых точек называется **многогранником**; если в определении не требовать условия ограниченности, то такое множество называется «**бесконечным многогранником**».

Теорема 1. ОДР задачи ЛП является многогранником (или «бесконечным многогранником»).

Теорема 2. Целевая функция $Z(X)$ ЗЛП достигает своего максимума (минимума) в угловых точках ОДР, причем если $Z(X)$ достигает своего максимума (минимума) в нескольких точках ОДР, то она также достигает этого значения в любой выпуклой комбинации этих точек.

Замечание 1. Если ЗЛП не имеет решения, то ОДР либо пусто (решений нет никаких) , либо является «бесконечным многогранником» (функция может принимать сколь угодно большое (малое) значение).

Замечание 2. Если ОДР – бесконечный многогранник, то целевая функция не обязательно не имеет max или min.

Рассмотрим функцию одной переменной:

Пример 10. $Z(x) = cx;$ $\begin{cases} x \geq b_1 \\ x \leq b_2 \end{cases}$, $(b_1 < b_2);$ $\Leftrightarrow$ ОДР $= [b_1, b_2];$ b_1, b_2 – угловые точки

$$1)\ \ c = 0 \ \ \Leftrightarrow \ \ Z_{max} = Z_{min} = Z^* = Z(x) = 0\,, \ \ X^* = [b_1, b_2]$$

$$2)\ \ c > 0 \ \ \Leftrightarrow \ \ Z_{max} = Z(b_2); \qquad Z_{min} = Z(b_1)$$

$$3)\ \ c < 0 \ \ \Leftrightarrow \ \ Z_{max} = Z(b_1); \qquad Z_{min} = Z(b_2)$$

Пример 11. $Z(x) = cx;$ $x \geq b$ $\Rightarrow$ ОДР $= [b;\ +\infty);$ b – угловая точка

$$1)\ \ c = 0 \ \ \Leftrightarrow \ \ Z_{max} = Z_{min} = Z^* = Z(x) = 0\,, \ \ X^* = [b;\ +\infty)$$

$$2)\ \ c > 0 \ \ \Leftrightarrow \ \ Z_{max} = \infty \quad (Z \uparrow); \qquad Z_{min} = Z(b) = cb$$

$$3)\ \ c < 0 \ \ \Leftrightarrow \ \ Z_{max} = Z(b) = cb; \qquad Z_{min} = -\infty \quad (Z \downarrow)$$

§3. Каноническая форма записи ЗЛП

Определение. Говорят, что ЗЛП задана в каноническом виде, если

1) надо найти максимум целевой функции;
2) все ограничения заданы в виде уравнений с неотрицательной правой частью;
3) все переменные должны быть неотрицательными.

$$\boldsymbol{Z(X) = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n \to max}$$

$$\textbf{(1)} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n = b_i} & \boldsymbol{i = 1, \ldots, m} \\ \boldsymbol{x_j \geq 0} & \boldsymbol{j = 1, \ldots, n} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{c_j = conct} \qquad \boldsymbol{b_i = const} \quad \boldsymbol{(b_i \geq 0)} \qquad \boldsymbol{a_{ij} = const} \qquad \boldsymbol{i = 1, \ldots, m; \ \ j = 1, \ldots, n}$$

§4. Приведение общей ЗЛП к канонической форме

1. Задачу на ***min*** можно свести к задаче на ***max*** , так как

$$\boldsymbol{min(c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n) = -max(-c_1 x_1 - \cdots - c_n x_n)} \qquad \boldsymbol{X} \in \text{ОДР}$$

Рассмотрим вместо функции $\boldsymbol{Z(X)}$ функцию $\boldsymbol{\widetilde{Z}(X) = -Z(X),}$ тогда

$$\text{если} \quad \boldsymbol{\widetilde{Z}_{max} = \widetilde{Z}(X^*),} \qquad \text{то} \quad \boldsymbol{Z_{min} = Z(X^*) = -\widetilde{Z}_{max}} \qquad \boldsymbol{X} \in \text{ОДР}$$

2а. Если некоторое $b_i < 0$, то соответствующее уравнение или неравенство умножается на (-1).

2б. Пусть $\boldsymbol{a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n \leq (\geq) b_i}$ **(∗)**

Введем новую переменную $\boldsymbol{s_1 = b_m - a_{m1} x_1 - \cdots - a_{mn} x_n}$

$$\boldsymbol{(s_1 = a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n - b_m)}$$

Тогда неравенство (∗) можно записать в виде системы уравнения и неравенства

$\begin{cases} \boldsymbol{a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n + (-)\, s_1 = b_m} \\ \boldsymbol{s_1 \geq 0} \end{cases}$ **(**)** $\boldsymbol{s_1}$ называется **дополнительной переменной**

Теорема 1. Любому решению неравенства $(*)$ соответствует решение системы $(**)$.

Таким образом, каждое неравенство из системы ограничений общей ЗЛП (1) может быть заменено на уравнение путем прибавления (вычитания) неотрицательной дополнительной переменной, при этом в целевую функцию дополнительные переменные вводятся с коэффициентом ноль.

Теорема 2. Рассмотрим ЗЛП (2) - модифицированную ЗЛП (1)

$$\boldsymbol{\tilde{Z}(\tilde{X}) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n + 0 \cdot s_1 \to max}$$

$$\boldsymbol{\tilde{X} = (x_1, \dots, x_n, s_1)}$$

$$\textbf{(2)} \quad \begin{cases} \boldsymbol{a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i} & \boldsymbol{i = 1, \dots, m-1} \\ \boldsymbol{a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + (-)s_1 = b_m} & \\ \boldsymbol{x_j \ge 0, \ s_1 \ge 0} & \boldsymbol{j = 1, \dots, n} \end{cases}$$

Если $\tilde{X}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*, s_1^*)$ - оптимальное решение ЗЛП (2), то $\boldsymbol{X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)}$ - оптимальное решение ЗЛП (1) и

$$\boldsymbol{\tilde{Z}_{max}(\tilde{X})} = \tilde{Z}^* = \tilde{Z}(\tilde{X}^*) = Z(X^*) = Z^* = Z_{max}(X), \qquad (\mathbf{X} \in \text{ОДР})$$

3. Пусть существует переменная $\boldsymbol{x_j}$, для которой нет условия неотрицательности. Введем новые неотрицательные переменные x_j' и x_j'' : $\boldsymbol{x_j} = x_j' - x_j''$; при этом коэффициенты новой целевой функции $\tilde{Z}$ при этих переменных будут равны $c_j' = c_j'' = c_j$

Можно показать, что решение новой задачи эквивалентно решению исходной.

Пример. Привести к каноническому виду:

$$Z = -3x_1 - 4x_2 + 3x_3 \to min$$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 \le -2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 \le 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

1) Введем новую целевую функцию $\ddot{Z} = -Z$ и домножим на (-1) ограничение-неравенство с **отрицательной правой частью**

$$\ddot{Z} = -Z = 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 \le 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2) Чтобы превратить ограничения-неравенства в ограничения-уравнения, введем дополнительные неотрицательные переменные s_1, s_2

$$\dddot{Z} = 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - s_1 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + s_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 \ge 0 \end{cases}$$

3) Поскольку на переменную x_3 нет условия неотрицательности , введем неотрицательные переменные x_3', x_3'' : $x_3 = x_3' - x_3''$, тогда задачу приведется к каноническому виду

$$\tilde{Z} = 3x_1 + 4x_2 - 3(x_3' - x_3'') + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3' + x_3'' - s_1 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3' + 3x_3'' + s_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3' - 2x_3'' = 4 \\ x_1, x_2, x_3', x_3'', s_1, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

Если известно, что $\tilde{Z}^* = \tilde{Z}_{max} = \tilde{Z}(\tilde{X}^*) = 71$ и $\tilde{X}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3'^*, x_3''^*, s_1, s_2) = (0; 14; 0; 5; 31; 0)$ то

$$Z^* = -\tilde{Z}^* = -\tilde{Z}(\tilde{X}^*) = Z(X^*) = -71 \text{ и } X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3'^* - x_3''^*) = (0; 14; -5)$$

Глава 2. ЗЛП с двумя переменными

§1. Графический метод решения систем линейных неравенств с двумя переменными

Теорема. Решением линейного неравенства $a_1x + a_2y \leq b$ $(a_1x + a_2y \geq b)$ является одна из полуплоскостей в x, y плоскости с границей, определяемой уравнением прямой $a_1x + a_2y = b$. Чтобы выбрать нужную полуплоскость, достаточно подставить в неравенство координаты любой точки, не принадлежащей границе. Если эти координаты удовлетворяют данному неравенству, то и сама точка, и полуплоскость, ее содержащая, представляют собой решение неравенства.

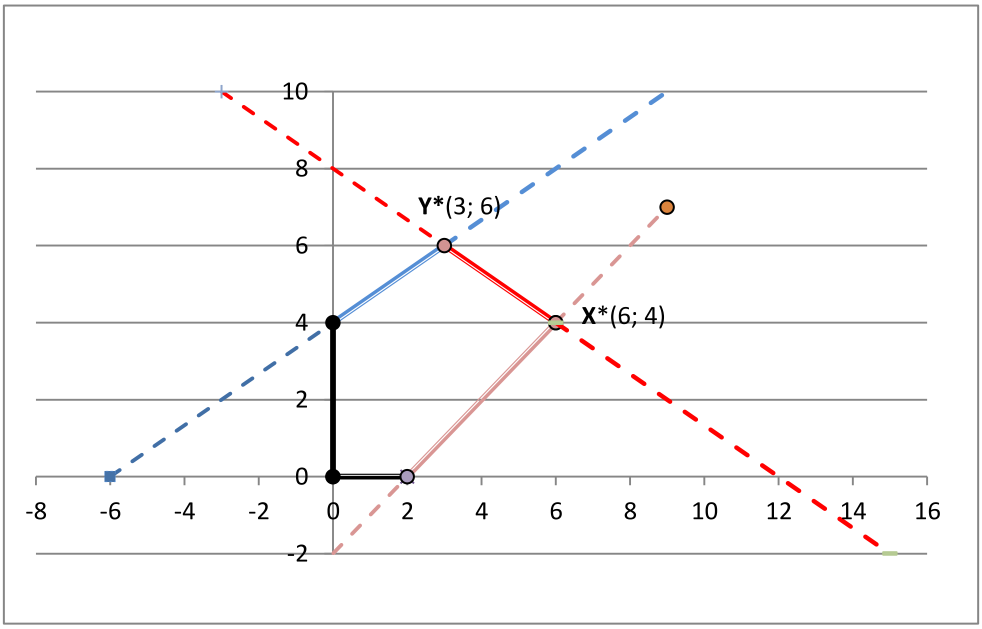
Пример.

I $-2x + 3y \leq 12$

II $x - y \leq 2$

III $2x + 3y \leq 24$

$x, y \geq 0$



I

x	0	-6
y	4	0

(0;0) TRUE

II

x	0	2
y	-2	0

(0;0) TRUE

III

x	0	12
y	8	0

(0;0) TRUE

X*:	$x - y = 2$	$x_{X^*} =$	6	Y* :	$-2x + 3y = 12$	$x_{Y^*} =$	3
(III * II)	$2x + 3y = 24$	$y_{X^*} =$	4	(I * III)	$2x + 3y = 24$	$y_{Y^*} =$	6