# Глава 5

## Теория двойственности

Любой ЗЛП можно поставить в соответствие другую задачу, называемую сопряженной или двойственной. Обе эти задачи образуют пару задач, сопряженных или двойственных друг другу, решения которых связаны определенным образом между собой. Для построения двойственной задачи исходная задача должна быть преобразована к определенному виду.

Пусть $A = A^{m\times n}$; $B = (b_1,..., b_m)$; $C = (c_1, ..., c_n)$ - заданные матрица и вектора условий для ЗЛП

$X = (x_1, ..., x_n)$; $Y = (y_1, ..., y_m)$ - вектора неизвестных

Рассматривают 4 пары двойственных ЗЛП:

Симметричные пары

1) $Z(X) = CX \to max$ $\qquad$ $F(Y) = YB \to min$

$AX \leq B$; $X \geq "\Theta"$ $\qquad$ $YA \geq C$; $Y \geq "\Theta"$

2) $Z(X) = CX \to min$ $\qquad$ $F(Y) = YB \to max$

$AX \geq B$; $X \geq "\Theta"$ $\qquad$ $YA \leq C$; $Y \geq "\Theta"$

Несимметричные пары

3) $Z(X) = CX \to max$ $\qquad$ $F(Y) = YB \to min$

$AX = B$; $X \geq "\Theta"$ $\qquad$ $YA \geq C$

4) $Z(X) = CX \to min$ $\qquad$ $F(Y) = YB \to max$

$AX = B$; $X \geq "\Theta"$ $\qquad$ $YA \leq C$

Правила составления пар двойственных или сопряженных задач.

Для прямой задачи:

1. Ограничения-неравенства должны иметь знак неравенства в одну и ту же сторону.

2. Если задача на максимум, то знаки неравенств должны быть " $\leq$ ", а если на минимум – то "$\geq$".

Для двойственной задачи:

3. Каждому ограничению прямой задачи соответствует неизвестная в двойственной. Неизвестная, соответствующая ограничению – неравенству, должна быть неотрицательной, а соответствующая ограничению – уравнению может быть любого знака.

4. Целевые функции прямой и двойственной задач оптимизируются в противоположном смысле

$$Z(X) \to max \ \ (min) \quad \Leftrightarrow \quad F(Y) \to min \ (max)$$

5. Любой неизвестной в прямой задаче соответствует ограничение в двойственной задаче.

Совокупность этих ограничений вместе с условиями неотрицательности неизвестных двойственной задачи, соответствующих ограничениям-неравенствам прямой задачи, образуют систему ограничений двойственной задачи, для которой выполняются пункты 1 – 3 .

Пример 1. К данной задаче составить двойственную

$$Z(X) = 2x_1 + 4x_2 - 8x_3 + 11x_4 \to min$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 \le 4 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 \ge -1 \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 13 \\ x_j \ge 0 \qquad\qquad j = 1, \ldots, 4 \end{cases}$$

1) - 2) Будем рассматривать эту задачу как задачу на минимум – тогда все неравенства-ограничения должны быть направлены в одну сторону - “≥”. Умножим первой неравенство-ограничение на -1:

$$Z(X) = 2x_1 + 4x_2 - 8x_3 + 11x_4 \to min$$

$$\begin{cases} -7x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 \ge -4 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 \ge -1 \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 13 \\ x_j \ge 0 \qquad\qquad j = 1, \ldots, 4 \end{cases}$$

3) Прямая задача имеет три ограничения $\Longrightarrow$ двойственная задача будет иметь три переменных.

4) Прямая задача является задачей на минимум $\Longrightarrow$ двойственная задача будет задачей на максимум, при этом коэффициентами целевой функции будут являться правые части неравенств прямой задачи.

5) Система ограничений будет состоять из четырех неравенств в сторону “≤”; правые части неравенств будут коэффициентами соответствующих переменных в целевой функции прямой задачи. Первые две переменных должны быть неотрицательными (так как первые два ограничения прямой задачи являются неравенствами), третья переменная двойственной задачей может быть любой.

Матрица левых частей неравенств-ограничений – транспонированная матрице левых частей неравенств-ограничений прямой задачи.

Таким образом, двойственная задача имеет вид

$$F(Y) = -4y_1 - y_2 + 13y_3 \to max$$

$$\begin{cases} -7y_1 + 2y_2 + 4y_3 \le 2 \\ -2y_1 - 2y_2 - 3y_3 \le 4 \\ 3y_1 - 2y_2 + 5y_3 \le -8 \\ -5y_1 + y_2 + y_3 \le 11 \\ y_i \ge 0 \qquad i = 1,2 \end{cases}$$

Теоремы двойственности позволяют установить взаимосвязь между оптимальными решениями пары двойственных задач. Решив одну задачу из пары, можно или найти оптимальное решение другой задачи, или установить его отсутствие.

***Теорема 1.*** 1) Если одна из сопряженных задач имеет оптимальное решение, то другая тоже имеет оптимальное решение, причем $F^* = Y^*B = CX^* = Z^*$.

2) Если одна из сопряженных задач не имеет решения в виду неограниченности целевой функции, то другая не имеет решения в виду несовместности системы ограничений и наоборот. Однако, возможны случаи, когда обе сопряженные задачи вообще не имеют решений.

***Теорема 2.*** Для того, чтобы $X^*$ и $Y^*$ являлись оптимальными решениями пары двойственных задач, необходимо и достаточно, чтобы

$$x_j^*(A_jY^* - c_j) = 0; \qquad y_i^*(A^iX^* - b_i) = 0 \text{ для } \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n$$

Иначе

1) если $A_jY^* \neq c_j$ то $x_j^* = 0$ 2) если $y_i^* \neq 0$ то $A^iX^* = 0,$

то есть если при подстановке оптимального решения в систему ограничений прямой задачи i-тое ограничение выполняется как строгое неравенство, то i-тая координата оптимального решения двойственной задачи равна нулю; а если i-тая координата оптимального решения прямой задачи положительна, то i-тое ограничение двойственной задачи удовлетворяется оптимальным решением как равенство.

Пример 1 (продолжение). Пусть известно, что

$$\boldsymbol{F_{max} = F^* = F(Y^*) = -11}; \quad \boldsymbol{Y^* = \left(0;\ {}^{7}/_{3};-{}^{2}/_{3}\right)}, \quad \text{тогда} \quad \boldsymbol{Z_{min} = Z^* = F^* = -11};$$

$$\text{Так как} \quad \begin{cases} -7y_1^* + 2y_2^* + 4y_3^* = 2 \\ -2y_1^* - 2y_2^* - 3y_3^* < 4 \\ 3y_1^* - 2y_2^* + 5y_3^* = -8 \\ -5y_1^* + y_2^* + y_3^* < 11 \\ y_2^*, y_3^* \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{то} \quad x_2^* = x_4^* = 0; \quad \begin{cases} 2x_1^* - 2\cdot 0 - 2x_3^* + 0 = -1 \\ 4x_1^* - 3\cdot 0 + 5x_3^* + 0 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow x_1^* = {}^{7}/_{6}\, x_3^* = {}^{5}/_{3}; \Rightarrow \boldsymbol{X^* = \left({}^{7}/_{6};0;\ {}^{5}/_{3};0\right)}$$

Пример 2. Найти решение ЗЛП с помощью решения двойственной задачи

$$Z(X) = 6x_1 + 26x_2 + 8x_3 \to min$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 3 \\ x_j \geq 0 \qquad j = 1,2,3 \end{cases}$$

Пример 3. Найти решение ЗЛП с помощью решения двойственной задачи

$$Z(X) = 2x_1 - 8x_2 + 2x_3 + x_4 \to max$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 8 \\ -2x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ x_j \geq 0 \qquad j = 1, \dots, 4 \end{cases}$$