Тема 2

Оценка структурной и временной сложности алгоритмов и программ

Временная сложность алгоритма. О-символика

Временная сложность алгоритма зависит от количества входных данных

Обычно говорят, что временная сложность алгоритма имеет порядок $T(n)$ от входных данных размера n

Точно определить величину $T(n)$ на практике представляется довольно трудно

Поэтому прибегают к асимптотическим отношениям с использованием О-символики

Если число тактов (действий), необходимое для работы алгоритма, выражается как $11n^2 + 19n - \log n + 3n + 4$, то это алгоритм, для которого $T(n)$ имеет порядок $O(n^2)$
Фактически, из всех слагаемых оставляется только то, которое вносит наибольший вклад при больших n (в этом случае остальными слагаемыми можно пренебречь), и игнорируется коэффициент перед ним

Когда используют обозначение $O()$, имеют в виду не точное время исполнения, а только его предел сверху, причем с точностью до постоянного множителя

Когда говорят, например, что алгоритму требуется время порядка $O(n^2)$, имеют в виду, что время исполнения задачи растет не быстрее, чем квадрат количества элементов

n	log n	n · log n	n^2
1	0	0	1
16	4	64	256
256	8	2 048	65 536
4 096	12	49 152	16 777 216
65 536	16	1 048 565	4 294 967 296
1 048 476	20	20 969 520	1 099 301 922 576
16 775 616	24	402 614 784	281 421 292 179 456

20 мкс

12 дней

Если операция выполняется за фиксированное число шагов, не зависящее от количества данных, то принято писать $O(1)$

Основание логарифма здесь не пишется

Пусть есть $O(\log_2 n)$.
Однако $\log_2 n = \log_3 n / \log_3 2$, а $\log_3 2$, как и любую константу, символ $O()$ не учитывает. Поэтому $O(\log_2 n) = O(\log_3 n)$

Время выполнения алгоритма зависит не только от количества входных данных, но и от их значений

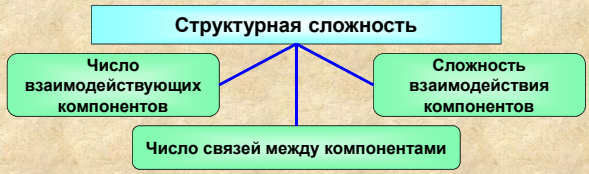
Чтобы учитывать этот факт, сохраняя при этом возможность анализировать алгоритмы независимо от данных, различают:

- максимальную сложность $T_{max}(n)$ – сложность наиболее неблагоприятного случая, когда алгоритм работает дольше всего
- среднюю сложность $T_{mid}(n)$ – сложность алгоритма в среднем
- минимальную сложность $T_{min}(n)$ – сложность в наиболее благоприятном случае, когда алгоритм справляется быстрее всего

Базовые принципы оценки временной сложности алгоритма :

- Время выполнения операций присваивания, чтения, записи обычно имеют порядок $O(1)$. Исключение – когда операнды представляют собой массивы или вызовы функций
- Время выполнения последовательности операций совпадает с наибольшим временем выполнения операции в ней (правило сумм – если одна операция имеет порядок $O(f(n))$, а другая – порядок $O(g(n))$, то общее время будет иметь порядок $O(max(f(n), g(n)))$)
- Время выполнения конструкции ветвления (if–then–else) состоит из времени вычисления логического выражения (обычно имеет порядок $O(1)$) и наибольшего из времени, необходимого для выполнения операций, исполняемых при истинном значении логического выражения и при ложном значении логического выражения
- Время выполнения цикла состоит из времени вычисления условия прекращения цикла (обычно имеет порядок $O(1)$) и произведения количества выполненных итераций цикла на наибольшее возможное время выполнения операций тела цикла
- Время выполнения операции вызова процедур определяется как время выполнения вызываемой процедуры
- При наличии в алгоритме операций безусловного перехода необходимо учитывать изменения последовательности операций, осуществляемых с использованием этих операций безусловного перехода

Понятие структурной сложности



Разнообразие поведения алгоритма (программы) и связей между его входными и результирующими данными определяется набором маршрутов (чередующихся последовательностей вершин и дуг графа управления), по которым он исполняется

Сложность программного модуля связана не столько с размером (числом команд) программы, сколько с числом маршрутов ее исполнения и их сложностью

Маршруты возможной обработки данных определяют сложность разработки программы

Данную метрику сложности можно использовать для оценки трудоемкости тестирования и сопровождения модуля, а также для оценки потенциальной надежности его функционирования

Маршруты исполнения программного модуля

- **Вычислительные маршруты**
- **Маршруты принятия логических решений**

Сложность вычислительных маршрутов оценивается формулой

$$S_1 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{l_i} \nu_j$$

m – количество маршрутов исполнения программы
l_i – число данных обрабатываемых в i-ом маршруте
ν_j – число значений обрабатываемых данных j-го типа ($2 \le \nu_j \le 5$)

Общее число арифметических операций не выходит за пределы 5–10%, поэтому вычислительные маршруты не определяют структурную сложность программ

Сложность маршрутов принятия логических решений оценивается формулой

$$S_2 = \sum_{i=1}^{m} p_i$$

p_i – число ветвлений или число проверяемых условий в i-ом маршруте

Общая сложность программы

$$S = c \cdot \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{l_i} \nu_i + p_i \right)$$

c – коэффициент пропорциональности

Критерии выделения маршрутов

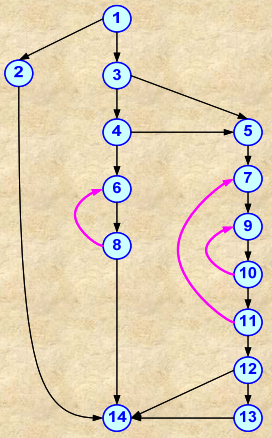
Наилучший критерий позволит выделить все реальные маршруты исполнения программы при любых сочетаниях исходных данных

1 *Критерий 1*

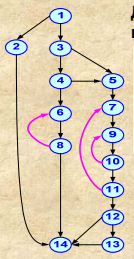
Граф программы по управлению должен быть покрыт минимальным набором путей, проходящих через каждый оператор ветвления по каждой дуге. Повторная проверка дуг не оценивается и считается избыточной. В процессе проверки гарантируется выполнение всех передач управления между операторами программы и каждого оператора не менее одного раза

Поток управления – последовательность выполнения различных модулей и операторов программы

Граф потока управления – ориентированный граф, моделирующий поток управления программы



Рассмотрим структурную сложность типичной программы управления, содержащей 100 – 200 команд, граф потока управления которой содержит 14 вершин, 20 дуг и 3 цикла



Для полной проверки этой программы по критерию 1 достаточно следующих маршрутов:

m1: 1 – 2 – 14
m2: 1 – 3 – 4 – 6 – 8 – 6 – 8 – 14
m3: 1 – 3 – 5 – 7 – 9 – 10 – 11 – 12 – 13 – 14
m4: 1 – 3 – 4 – 5 – 7 – 9 – 10 – 9 – 10 – 11 – 7 – 9 – 10 – 11 – 12 – 14

Структурная сложность программы по критерию 1

где p_i – количество вершин ветвления в i-том маршруте без учета последней вершины

$$S_1 = \sum_{i=1}^{m} p_i$$

С учетом точек ветвления:

m1: 1 - 2 - 14	= 1
m2: 1 - 3 - 4 - 6 - 8 - 6 - 8 – 14	= 5
m3: 1 - 3 - 5 - 7 - 9 - 10 - 11 - 12 - 13 - 14	= 5
m4: 1 - 3 - 4 - 5 - 7 - 9 - 10 - 9 - 10 - 11 - 7 - 9 - 10 - 11 - 12 - 14	= 9
	Итого - 20

Недостаток первого критерия: не учитывается комбинаторика сочетания условий на разных участках маршрутов (например, при сочетаниях ветвлений в вершинах 3 и 12)

2 *Критерий 2*

Основан на анализе базовых маршрутов в программе, формируемых и оцениваемых на основе цикломатического числа графа потока управления

Цикломатическое число исходного графа программы

$$Z = m - n + 2*p$$

m – общее число дуг в графе; **n** – общее число вершин в графе;
p – число связных компонентов графа

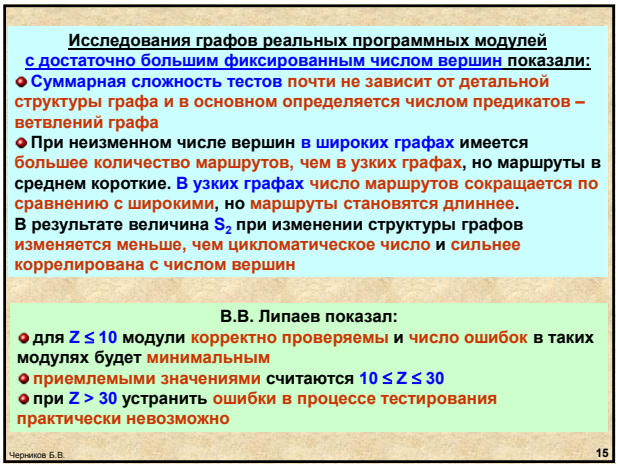
Число связных компонентов графа p равно количеству дуг, необходимых для превращения исходного графа в максимально связный (или полносвязный) граф

Максимально связным (полносвязным) называется граф, у которого любая вершина доступна из любой другой вершины

Максимально связный (полносвязный) граф получается из исходного графа путем замыкания конечных и начальной вершин


Для рассматриваемого графа полносвязный граф получается путем добавления дуги (14, 1)
Z = m – n + 2×p = 20 – 14 + 2×1 = 8
Критерий 2 (по цикломатическому числу) требует однократной проверки или тестирования каждого линейно-независимого цикла и каждого линейно-независимого ациклического участка программы
Каждый линейно-независимый ациклический маршрут или цикл отличается от всех остальных хотя бы одной вершиной или дугой
При использовании критерия 2 количество проверяемых маршрутов равно цикломатическому числу
Линейно-независимые циклические маршруты
m1: 6 – 8
m2: 9 – 10
m3: 7 – 9 – 10 – 11
Линейно-независимые ациклические маршруты
m4: 1 – 2 – 14
m5: 1 – 3 – 4 – 6 – 8 – 14
m6: 1 – 3 – 5 – 7 – 9 – 10 – 11 – 12 – 14
m7: 1 – 3 – 4 – 5 – 7 – 9 – 10 – 11 – 12 – 13 – 14
m8: 1 – 3 – 4 – 5 – 7 – 9 – 10 – 11 – 12 – 14
Черников Б.В.
13


Определение структурной сложности по второму критерию
m1: 6 - 8 = 1
m2: 9 - 10 = 1
m3: 7 - 9 - 10 – 11 = 2
m4: 1 - 2 – 14 = 1
m5: 1 - 3 - 4 - 6 - 8 – 14 = 4
m6: 1 - 3 - 5 - 7 - 9 - 10 - 11 - 12 – 14 = 5
m7: 1 - 3 - 4 - 5 - 7 - 9 - 10 - 11 - 12 – 14 = 6
m8: 1 - 3 - 4 - 5 - 7 - 9 - 10 - 11 - 12 - 13 – 14 = 6
Итого - 26
Для правильно структурированных программ цикломатическое число Z можно определить путем подсчета числа вершин nв, в которых происходит ветвление
Z = nв +1
В нашем примере Z = 7 + 1 = 8
(ветвления имеют место в вершинах графа 1, 3, 4, 8, 10, 11, 12)
Черников Б.В.
14

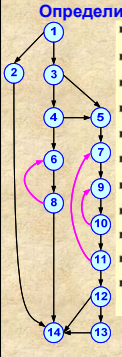

Исследования графов реальных программных модулей с достаточно большим фиксированным числом вершин показали:
Суммарная сложность тестов почти не зависит от детальной структуры графа и в основном определяется числом предикатов – ветвлений графа
При неизменном числе вершин в широких графах имеется большее количество маршрутов, чем в узких графах, но маршруты в среднем короткие. В узких графах число маршрутов сокращается по сравнению с широкими, но маршруты становятся длиннее.
В результате величина S2 при изменении структуры графов изменяется меньше, чем цикломатическое число и сильнее коррелирована с числом вершин
В.В. Липаев показал:
для Z ≤ 10 модули корректно проверяемы и число ошибок в таких модулях будет минимальным
приемлемыми значениями считаются 10 ≤ Z ≤ 30
при Z > 30 устранить ошибки в процессе тестирования практически невозможно
Черников Б.В.
15


Для автоматического анализа графов по второму критерию с помощью ЭВМ используются матрицы смежности и достижимости графов
Матрица смежности – это квадратная матрица, в которой 1 располагается в позиции (i, j), если в графе имеется дуга (i, j)
Черников Б.В.
16


Матрица достижимости – это квадратная матрица, в которой 1 располагается в позиции, соответствующей дуге (i, j), причем 1 ставится для всех вершин, до которых можно «достать»
С помощью матрицы достижимости можно сравнительно просто выделить циклы, отмечая диагональные элементы, равные 1, и идентичные строки (6 – 8, 9 – 10, 7 – 9 – 10 – 11)
Черников Б.В.
17


3 Критерий 3
Основан на выделении полного состава базовых структур графа программы и заключается в анализе хотя бы один раз каждого из реальных ациклических маршрутов исходного графа программы и каждого цикла, достижимого из всех этих маршрутов
Если из некоторого ациклического маршрута исходного графа достижимы несколько элементарных циклов, то при тестировании должны исполняться все достижимые циклы
m1: 1 – 2 – 14
m2: 1 – 3 – 4 – 6 – 8 – 14
m3: 1 – 3 – 5 – 7 – 9 – 10 – 11 – 12 – 14
m4: 1 – 3 – 4 – 5 – 7 – 9 – 10 – 11 – 12 – 14
m5: 1 – 3 – 5 – 7 – 9 – 10 – 11 – 12 – 13 – 14
m6: 1 – 3 – 4 – 5 – 7 – 9 – 10 – 11 – 12 – 13 – 14
m7: 1 – 3 – 4 – 6 – 8 – 6 – 8 – 14
m8: 1 – 3 – 5 – 7 – 9 – 10 – 9 – 10 – 11 – 7 – 9 – 10 – 11 – 12 – 14
m9: 1 – 3 – 4 – 5 – 7 – 9 – 10 – 9 – 10 – 11 – 7 – 9 – 10 – 11 – 12 – 14
m10: 1 – 3 – 5 – 7 – 9 – 10 – 9 – 10 – 11 – 7 – 9 – 10 – 11 – 12 – 13 – 14
m11: 1 – 3 – 4 – 5 – 7 – 9 – 10 – 9 – 10 – 11 – 7 – 9 – 10 – 11 – 12 – 13 – 14
Черников Б.В.

Определим структурную сложность программы по критерию 3



m1: 1 - 2 - 14 = 1

m2: 1 - 3 - 4 – 6 – 8 – 14 = 4

m3: 1 - 3 - 5 - 7 - 9 - 10 - 11 - 12 - 14 = 5

m4: 1 - 3 - 4 - 5 - 7 - 9 - 10 - 11 - 12 – 14 = 6

m5: 1 - 3 - 5 - 7 - 9 - 10 - 11 - 12 - 13 - 14 = 5

m6: 1 - 3 - 4 - 5 - 7 - 9 - 10 - 11 - 12 - 13 – 14 = 6

m7: 1 - 3 - 4 - 6 - 8 - 6 - 8 - 14 = 5

m8: 1 - 3 - 5 - 7 - 9 - 10 - 9 - 10 - 11 - 7 - 9 - 10 - 11 - 12 – 14 = 8

m9: 1 - 3 - 4 - 5 - 7 - 9 - 10 - 9 - 10 - 11 - 7 - 9 - 10 - 11 - 12 – 14 = 9

m10: 1 - 3 - 5 - 7 - 9 - 10 - 9 - 10 - 11 - 7 - 9 - 10 - 11 - 12 – 13 – 14 = 8

m11: 1 - 3 - 4 - 5 - 7 - 9 - 10 - 9 - 10 - 11 - 7 - 9 - 10 - 11 - 12 – 13 – 14 = 9

Итого - 66

$$S_3 = 1 + 4 + 5 + 6 + 5 + 6 + 5 + 8 + 9 + 8 + 9 = 66$$

Особенностью четырех последних маршрутов с циклами и соответствующих им ациклических маршрутов является полный перебор сочетаний ветвлений в вершинах 3 и 12

Выводы по критериям оценки сложности программ

- Критерии для оценки сложности программных модулей характеризуют в каждом случае минимально необходимые величины проверок по каждому критерию
- Для проверки реальных программ это количество проверок может быть недостаточно (например, циклы желательно проверять на одном-двух промежуточных значениях, а также на максимальном и минимальном количествах исполнения циклов)
- Оценить достаточность проверок программы значительно труднее, так как при этом, кроме сложности структуры, необходимо анализировать сложность преобразования каждой переменной во всем диапазоне ее изменения и при сочетаниях с другими переменными

Метрика Маккейба

Основана на анализе потока передачи управления от одного оператора к другому, что позволяет учесть логику программы

Программа (алгоритм, спецификация) должна быть представлена в виде управляющего ориентированного графа G = (V, E) с V вершинами и E дугами, где вершины соответствуют операторам, а дуги – переходам от одного оператора к другому

Граф, описывающий программу в виде вершин-операторов и дуг-переходов, называют графом управления или управляющим графом программы

Обычно учитывают только исполнимые операторы, исключая операторы описания данных

Линейные участки программы можно заменить одним узлом графа

Желательно преобразовать операторы цикла в эквивалентную последовательность операторов ветвления, добавив операторы суммирования (счетчики) числа повторений цикла с «верхним» или «нижним» окончанием

Метрика Маккейба является цикломатическим числом графа управления программы

$$M = m - n + 2$$

m – количество ребер графа
n – количество вершин графа

Величину M называют цикломатическим числом Маккейба

Цикломатическая сложность программы – структурная (или топологическая) мера сложности программ, используемая для измерения качества программного обеспечения, основанная на методах статического анализа кода

Цикломатическая сложность программы равна увеличенному на единицу цикломатическому числу графа программы

Разработана Томасом Дж. Маккейбом в 1976 году

При вычислении цикломатической сложности используется граф потока управления программы: узлы графа соответствуют неделимым группам команд программы и ориентированным ребрам, каждый из которых соединяет два узла и соответствует двум командам, вторая из которых может быть выполнена сразу после первой

Эта стратегия тестирования называется основным маршрутом тестирования Маккейба: тестирование каждого линейного независимого маршрута через программу – в этом случае число тестов должно быть равно цикломатической сложности программы

Цикломатическая сложность части программного кода – счетное число линейно независимых маршрутов через программный код

Исходный код не содержит никаких точек решений (IF, FOR)	Сложность = 1 (есть только один маршрут)
Код имеет единственный оператор IF, содержащий простое условие	Два пути: один – через IF как TRUE и один – как FALSE

В теории графов цикломатическое число ориентированного графа

$$Z = m - n + 2 \times p$$

m – количество ребер
n – количество вершин
p – количество компонентов связности графа

Число компонентов связности p можно рассматривать как минимально необходимое количество ребер, которые нужно добавить к графу, чтобы сделать его полносвязным

Справедливо считать, что для любого графа управления программы число компонентов связности равно единице (p = 1)

Подстановка p = 1 в формулу определения цикломатического числа дает цикломатическое число Маккейба – определяет количество независимых контуров в полносвязном графе и, как следствие, количество различных путей, ведущих из начальной вершины в конечную

При оценке сложности программы с использованием цикломатического числа Маккейба действует правило: если цикломатическое число Z > 10, программа обладает излишней сложностью и ее следует разбить на составные части с меньшим значением цикломатического числа