§2. Графический метод решения ЗЛП

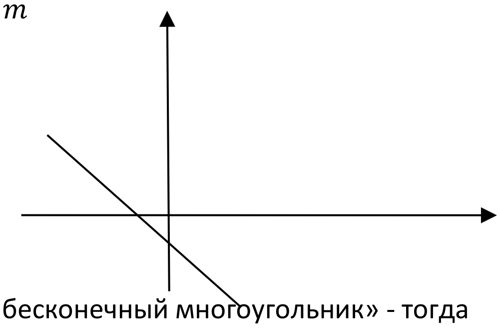
Пусть $n = 2$, тогда ЗЛП имеет вид

$$Z = c_1 x + c_2 y \to \max\ (min)$$

$$a_{i1}x + a_{i2}y \geq b_i \qquad i = 1, \dots, m$$

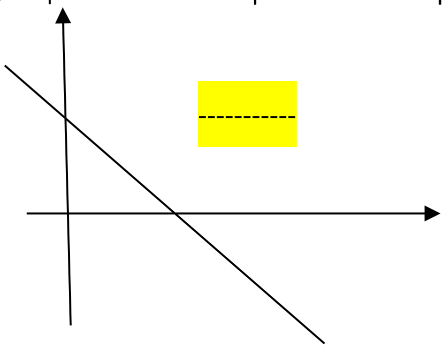
Рассмотрим три варианта вида **ОДР**

1. Пустое множество – тогда решения ЗЛП не существует



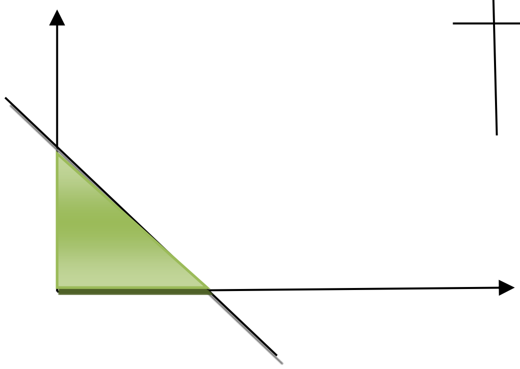
Пример: $\begin{cases} x + y \leq -1 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$

2. Бесконечная область, ограниченная ломаной линией – «бесконечный многоугольник» - тогда решение может существовать, а может и не существовать – функция Z может неограниченно возрастать (убывать)



Пример: $\begin{cases} x + y \geq 1 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$

3. Многоугольник



Пример: $\begin{cases} x + y \leq 1 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$

Определение 1. Прямая линия, задаваемая уравнением $c_1 x + c_2 y = const$, называется **линией уровня**.

Определение 2. Линия уровня, имеющая общие точки с ОДР и расположенная так, что ОДР находится целиком в одной из полуплоскостей, на которые делит плоскость данная линия уровня, называется **опорной прямой**.

Теорема. Все линии уровня параллельны друг другу и перпендикулярны вектору $\overline{N} = (c_1, c_2)$. Значения целевой функции на линии уровня увеличиваются, если ее перемещать параллельно самой себе направлении вектора $\overline{N}$, и уменьшаются при перемещении в противоположном направлении.

План решения ЗЛП графическим методом.

1. Строим ОДР.

2. Если ОДР – не пустое множество, строим вектор $\overline{N} = (c_1, c_{2)}$

3. Перпендикулярно вектору $\overline{N}$ проводим одну из линий уровня, например $L = L_0$: $c_1 x + c_2 y = 0$

4. Перемещаем линию уровня L до положения опорной прямой. Если такое положение невозможно, ЗЛП не имеет решения - Z неограниченно возрастает (убывает). Если возможно ($L = L^*$), то оптимальное решение находится в той вершине ОДР, которая лежит на опорной прямой L^*. Если опорная прямая L^* содержит целую сторону многоугольника ОДР, то решением ЗЛП является любая точка этой стороны, т. е. решение ЗЛП не единственно.

Пример 1.

$Z = 8x + 2y \to \max$

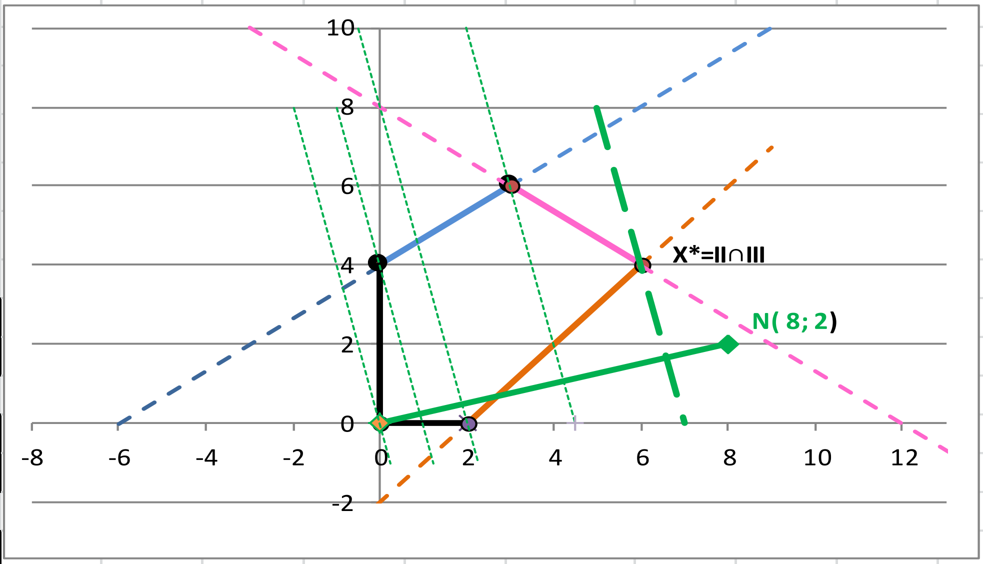
I $-2x + 3y \le 12$

II $x - y \le 2$

III $2x + 3y \le 24$

$x, y \ge 0$

I	x	0	-6
	y	4	0
II	x	0	2
	y	-2	0
III	x	0	12
	y	8	0



N = (8; 2)

X* :	$x - y = 2$	x_{X^*}	=	6		X* =	(6; 4)
	$2x + 3y = 24$	y_{X^*}	=	4	$Z^* = 8{\cdot}6 + 2{\cdot}4$	=	56

Пример 2.

$Z = -3x + 7y \to \max\ (\min)$

N = (-3; 7)

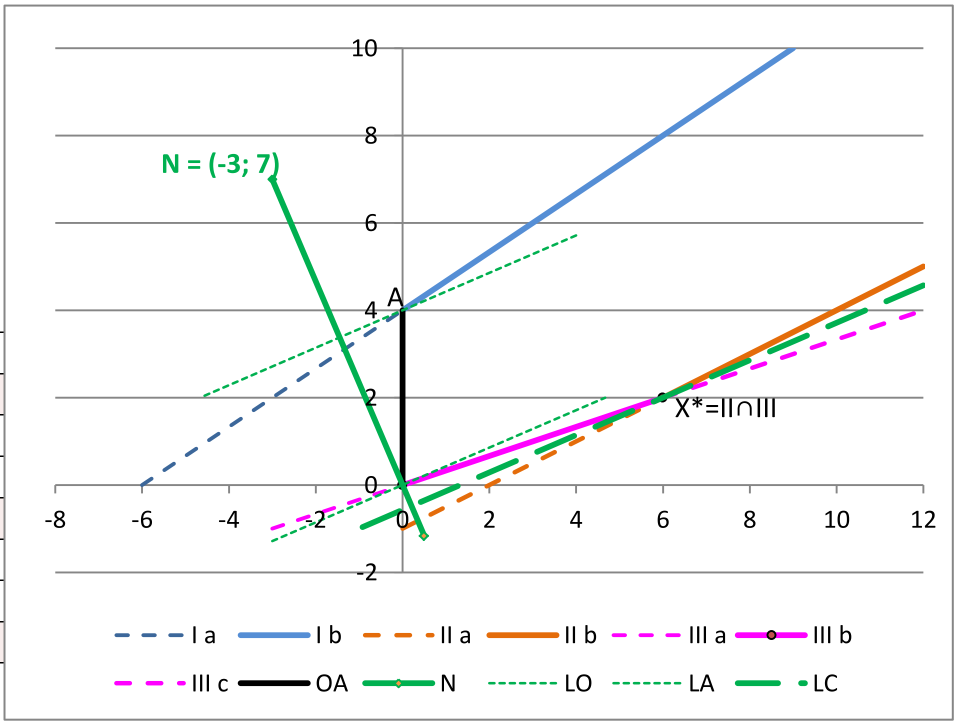
I $-2x + 3y \le 12$

II $x - 2y \le 2$

III $x - 3y \le 0$

$x, y \ge 0$

I	x	0	-6
	y	4	0
II	x	0	2
	y	-1	0
III	x	0	6
	y	0	2



$Z_{max} = +\infty$ (Z ↑) $X^* = II \cap III = (6; 2)$ $Z_{min} = Z(X^*) = -3*6 + 7*2 = -4$

Рассмотрим один из важнейших типов практических задач линейного программирования.

Компания производит два вида продукции – Продукт 1 и Продукт 2. Для производства каждого вида продукции требуется три вида ресурсов - Ресурс 1, Ресурс 2, Ресурс 3, количество которых на единицу продукции определяется технологической матрицей $= \{a_{ij}\}, i = 1,2,3; j = 1,2$. Для компании доступны заданные количества каждого ресурса (матица-столбец $B = \{b_i\}, i = 1,2,3$).

Какое количество продукции каждого вида необходимо произвести для получения максимальной прибыли, если прибыль за единицу продукции задается матрицей-строкой $C = \{c_j\}, j = 1,2$?

Данная задача относится к типу задач линейного программирования, которые называют задачами планирования производства. Пусть $X = \{x_1, x_2\}$— количество каждого из двух видов продукции; P — целевая функция, которая представляет собой прибыль от реализации произведенной продукции.
Математическая модель задачи может быть представлена следующим образом:

$$P = CX \to max$$
$$AX \le B$$
$$X \ge 0$$

или

$$P = c_1x_1 + c_2x_2 \to max$$
$$a_{11}\,x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$$
$$a_{21}\,x_1 + a_{22}x_2 \le b_2$$
$$a_{31}\,x_1 + a_{32}x_2 \le b_3$$
$$x_1, x_2 \ \ge 0$$

с возможным решением $P_{max} = P(X^*),\ X^* = (x_1^*, x_2^*)$.

После решения этой задачи линейного программирования, расчета ее оптимального плана и оптимального значения целевой функции, необходимо проанализировать полученные результаты. Такой анализ называют постоптимизационным.

Общая задача такого анализа - определить ***устойчивость*** полученного решения к тому или иному изменению ситуации, к изменению условий задачи, а также оценить ***чувствительность*** решения к изменению конкретных численных значений тех или иных параметров ситуации.

Прежде всего, необходимо выявить, на границах каких ограничений находится оптимальная точка. Эти ограничения выполняются как равенства (***связанные***, или ***активные*** ограничения), остальные - как строгие неравенства (***несвязанные***, ***неактивные*** ограничения). Для задачи производственного планирования ограничения соответствуют ресурсам. Равенство левой и правой частей ограничения, его активность означает полное использование данного ресурса. Строгое неравенство - неполное использование ресурса.

Можно посмотреть, как изменится значение максимальной прибыли при изменении прибыли за единицу того или иного продукта при сохранении точки оптимального решения. Границы такого изменения находятся из условия параллельности линии уровня оптимального решения линиям соответствующих активных ресурсов.

Знание того, какие ресурсы как используются, определяет узкие места в обеспечении производственного процесса и возможность маневра. Можно, например, продать излишки ресурсов для получения дополнительного дохода. Можно, наоборот, докупить дополнительные объемы тех ресурсов, которые используются полностью. Эти новые объемы вместе с оставшимися излишками других ресурсов позволят выпустить дополнительную продукцию и получить дополнительный доход. Для того, чтобы оценить выгодность такого решения, следует оценить величину такого дополнительного дохода, то есть величину предельной эффективности ресурсов. Величина предельной эффективности называется также ***теневой ценой*** (или ***двойственной оценкой***) ресурса. Очевидно, что теневые цены неактивных ресурсов равны 0.

Пример 3. Компания производит два вида продукции – Продукт 1 и Продукт 2. Для производства каждого продукта требуется три вида ресурсов - Ресурс 1, Ресурс 2 и Ресурс 3.

На единицу Продукта 1 требуется 5 единиц Ресурса 1, 4 единицы Ресурса2 и 7 единиц Ресурса3;

На единицу Продукта 2 требуется 8 единиц Ресурса 1, 3 единицы Ресурса2 и 3 единицы Ресурса3.

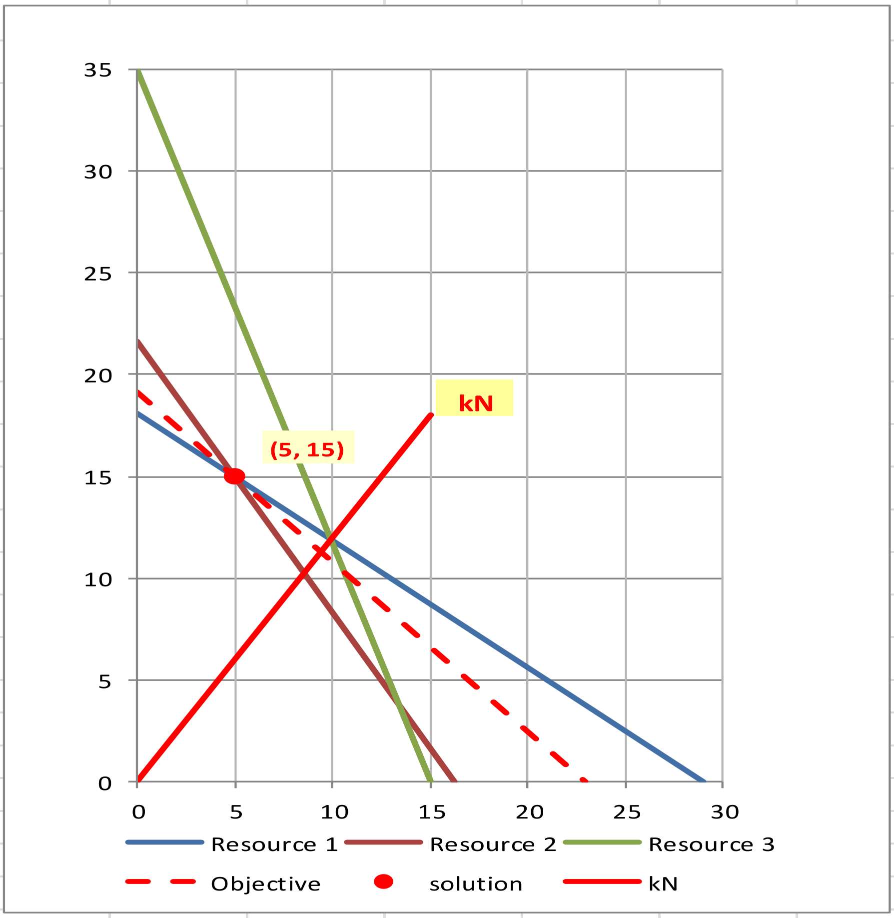
Для компании доступны 145 единиц Ресурса 1, 65 единиц Ресурса2 и 105 единиц Ресурса3.

a) Какое количество продукции каждого вида необходимо произвести для получения максимальной прибыли, если прибыль за единицу Продукта 1 и Продукта 2 равны соответственно $5 и $6? Какова будет величина полученной прибыли?

b) Пусть прибыль за единицу Продукта 1 фиксирована. В каких пределах может меняться прибыль за единицу Продукта 2 так, чтобы оптимальное решение оставалось в точке пересечения тех же границ ОДР?

c) Найти теневые цены для каждого ресурса задачи, то есть величину изменения прибыли при увеличении соответствующего ресурса на единицу.

a		x	y					
	Solution	5	15					
					Objective			
		5	*6*		115			
						Resources		
					Used		Available	
I	Resource 1	5	8		145	≤	145	binding
II	Resource 2	4	3		65	≤	65	binding
III	Resource 3	7	3		80	≤	105	



a)

$$P = 5x + 6y \to max$$
$$\begin{cases} 5x + 8y \le 145 \\ 4x + 3y \le \ \ 65 \\ 7x + 3y \le 105 \\ \quad x, y \ge 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{X^*} = (x^*, y^*) = \ I \cap II = \ \mathbf{(5; 15)}; \qquad \boldsymbol{P^*} = P_{max} = P(5; 15) = 5 \cdot 5 + 6 \cdot 15 = \mathbf{115}$$

$$b) \quad P = 5x + ky \to \max \qquad X^* = (x^*, y^*) = \ I \cap II$$

$$I: \quad 5x + 8y = 145 \quad P = 5x + ky; \quad P \parallel I \quad \Rightarrow \frac{k}{5} = \frac{8}{5} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{k = 8}$$

$$II: \quad 4x + 3y = \ \ 65 \quad P = 5x + ky; \quad P \parallel II \quad \Rightarrow \frac{k}{5} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{k = 3.75}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{k} \in \mathbf{[3.75; 8]}$$

c) $P = 5x + 6y \to max$

$$\begin{cases} 5x + 8y \le 145 \\ 4x + 3y \le \ \ 65 \\ 7x + 3y \le 105 \\ \quad x, y \ge 0 \end{cases}$$

$$X^* = (x^*, y^*) = \ I \cap II = \ (5; 15); \qquad P^* = P_{max} = P(5; 15) = 5 \cdot 5 + 6 \cdot 15 = 115$$

$$\begin{cases} \mathbf{5x^* + 8y^* = 145} & \text{активный ресурс} \\ \mathbf{4x^* + 3y^* = \ \ 65} & \text{активный ресурс} \\ 7x^* + 3y^* = 80 \le 105 & \text{неактивный ресурсе} \\ \quad x^*, y^* \ge 0 \end{cases}$$

$$c_1) \quad P = 5x + 6y \to max$$

$$\begin{cases} \mathbf{5x + 8y \le 145 + \Delta r_1} \\ \mathbf{4x + 3y \le \ \ 65} \\ 7x + 3y \le 105 \\ \quad x, y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \quad X^*_{new} = (x^* + \Delta x_1, y^* + \Delta y_1) = \ I_{new} \cap II$$

$$P^*_{new} = P_{newmax} = P(x^* + \Delta x_1, y^* + \Delta y_1) = 5 \cdot (x^* + \Delta x_1,) + 6 \cdot (y^* + \Delta y_1) = P^* + 5 \cdot \Delta x_1 + 6 \cdot \Delta y_1 = P^* + \Delta P_1$$

$$\begin{cases} 5(x^* + \Delta x_1) + 8(y^* + \Delta y_1) = 145 + \Delta r_1 \\ 4(x^* + \Delta x_1) + 3(y^* + \Delta y_1) = \ \ 65 \\ 7(x^* + \Delta x_1) + 3(y^* + \Delta y_1) \le 80 + 25 \\ (x^* + \Delta x_1), (y^* + \Delta y_1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\Delta x_1 + 8\Delta y_1 = \Delta r_1 \\ 4\Delta x_1 + 3\Delta y_1 = \ 0 \\ 7\Delta x_1 + 3\Delta y_1 \le 25 \\ \Delta x_1 \ge -5; \ \Delta y_1 \ge -15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{5\Delta x_1 + 8\Delta y_1 = \Delta r_1} \\ \mathbf{4\Delta x_1 + 3\Delta y_1 = \ 0} \end{cases}$$

$$\Delta x_1 = -\frac{3}{4}\Delta y_1; \quad 5\left(-\frac{3}{4}\Delta y_1\right) + 8\Delta y_1 = \Delta r_1; \quad \frac{17}{4}\Delta y_1 = \Delta r_1; \quad \Delta y_1 = \frac{4}{17}\Delta r_1; \quad \Delta x_1 = -\frac{3}{17}\Delta r_1$$

$$\begin{cases} \Delta x_1 = -\dfrac{3}{17}\Delta r_1 \\ \Delta y_1 = \dfrac{4}{17}\Delta r_1 \\ -\dfrac{7\cdot 3}{17}\Delta r_1 + \dfrac{3\cdot 4}{17}\Delta r_1 \le 25 \\ -\dfrac{3}{17}\Delta r_1 \ge -5;\ \ \dfrac{4}{17}\Delta r_1 \ge -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta x_1 = -\dfrac{3}{17}\Delta r_1 \\ \Delta y_1 = \dfrac{4}{17}\Delta r_1 \\ \dfrac{-9}{17}\Delta r_1 \le 25 \\ \Delta r_1 \le \dfrac{85}{3};\ \ \Delta r_1 \ge -63.75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta x_1 = -\dfrac{3}{17}\Delta r_1 \\ \Delta y_1 = \dfrac{4}{17}\Delta r_1 \\ \Delta r_1 \ge -\dfrac{425}{9} \quad (-47.2) \\ -\dfrac{425}{9} \le \Delta r_1 \le \dfrac{85}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta x_1 = -\dfrac{3}{17}\Delta r_1 \\ \Delta y_1 = \dfrac{4}{17}\Delta r_1 \\ 0 \le \Delta r_1 \le \dfrac{85}{3} \quad (\approx 28.3) \end{cases} \Leftrightarrow \qquad \Delta P_1 = 5\cdot\left(-\frac{3}{17}\Delta r_1\right) + 6\cdot\left(\frac{4}{17}\Delta r_1\right) = \mathbf{\frac{9}{17}}\Delta r_1$$

Теневая цена Ресурса 1 равна $\mathbf{\frac{9}{17}}$**.**

Аналогично можно найти теневую цену Ресурса 2 - $\mathbf{\frac{10}{17}}$**.** **(**$0 \le \Delta r_2 \le \frac{425}{41}$). Теневая цена Ресурса 3 – неактивного – равна 0.