TIPE Propagation d'épidémie sur un Graphe
et stratégie vaccinale

Adrien Ledoux

Année 2020-22

1 Introduction

Le but de cette preuve est de démontrer et formaliser l'intuition que le plus petit contour *discret* entourant une partie connexe de $\mathbb{Z}^2$ est le contour de son "enveloppe convexe" (discret).

Autrement dit que la "longueur du contour" de l'enveloppe convexe d'une partie connexe de $\mathbb{Z}^2$ est minimale par rapport à la longueur des contours d'ensemble contenant cette partie.

2 Notations Générales

Dans ce document :

— M, M_1, M_2, ... , M_i désignent des points de $\mathbb{Z}^2$ dont les coordonnées sont respectivement (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... , (x_i, y_i).
— Δx représente la variation $x_2 - x_1$ d'une grandeur x.
— $\#E$ représente le cardinal d'un ensemble E.
— $\preceq$ désigne l'ordre lexicographique
— $\mathbb{V}_4(M)$ désigne l'ensemble $\{(x+1, y); (x-1, y); (x, y+1); (x, y-1)\}$ nommé voisinage 4-connexe de M
— $\mathbb{V}_8(M)$ désigne l'ensemble $\{(x+i, y+j), (i, j) \in \{-1; 0; 1\}\}\backslash\{M\}$ nommé voisinage 8-connexe de M

3 Définitions

Notre preuve s'intéressant d'abord aux ensembles connexes voici un rappel de définition.

3.1 Chemin

Soit M_1, M_2 deux points de $\mathbb{Z}^2$.
On appelle chemin entre M_1 et M_2 (noté $\mu[M_1, M_2]$) une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{Z}^2)^{\mathbb{N}}$ stationnaire tel que en posant :

$$n = max\{i \in \mathbb{N} | v_i \neq v_{i+1}\}$$

Elle vérifie :

$$v_0 = M_1,\ v_n = M_2$$
$$\forall k \in [\![0; n-2]\!],\ v_k \in \mathbb{V}_8(v_{(k+1)})$$

Remarque : On notera $\mathbb{H}$ l'ensemble des chemins de $\mathbb{Z}^2$ et l'ensemble $I = \{v_i, i \in [\![0; n]\!]\}$ sera nommé le support de μ.

3.2 Connexité

Soit $X \in \mathscr{P}(\mathbb{Z}^2)$. On dit que X est *connexe* si :

$$\boxed{\forall (M_1, M_2) \in f^2 \ \ \exists \mu \ \ \mu[M_1, M_2] \subset f}$$

Remarque : pour un chemin (v_n) noté μ de support I, $\mu \subset X$ signifie :

$$\forall n \in I,\ v_n \in X$$

Comme on travaille sur un ensemble discret qui n'est pas de structure d'espace vectorielle, on souhaite (pour pouvoir parler d'enveloppe convexe) étendre la notion d'ensemble convexe et de segment à cet ensemble. D'où les définitions suivantes :

3.3 Segment de Bresenham

On munit $\mathbb{Z}^2$ de l'ordre lexicographique noté $\preceq$.
Par ailleurs, on note $P(M_1, M_2, M)$ l'assertion définie sur $(\mathbb{Z}^2)^3$ par :

$$P(M_1, M_2, M) : \text{«} \left\{ \begin{array}{cccc} x = x_1 & \text{et} & y = y_1 & \text{si} \quad \Delta x = \Delta y = 0 \\ y = \left\lfloor \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_1) + y_1 \right\rfloor & \text{et} & x \in [\![x_1; x_2]\!] & \text{si} \quad \Delta x \neq 0 \text{ et } \frac{\Delta y}{\Delta x} \in [-1; 1] \\ y = \left\lfloor \frac{\Delta x}{\Delta y}(y - y_1) + x_1 \right\rfloor & \text{et} & x \in [\![y_1; y_2]\!] \cup [\![y_2; y_1]\!] & \text{sinon} \end{array} \right. \text{»}$$

Soit M_1 et M_2 deux point de $\mathbb{Z}^2$ tel que $M_1 \preceq M_2$.
On appelle *segment ordonné sur $\mathbb{Z}^2$ entre M_1 et M_2* l'ensemble :

$$[M_1; M_2]_{ord} = \{M \in \mathbb{Z}^2 | P(M_1, M_2, M)\}$$

Enfin, pour deux points M_1 et M_2 quelconque, on appelle *segment sur $\mathbb{Z}^2$* l'ensemble défini par :

$$\boxed{[M_1; M_2] = \left\{ \begin{array}{ll} [M_1; M_2]_{ord} & \text{si} \quad M_1 \preceq M_2 \\ [M_2; M_1]_{ord} & \text{sinon} \end{array} \right.}$$

Propriété : Un segment permet de définir un chemin sur $\mathbb{Z}^2$, la réciproque est fausse.

Ainsi ayant définie des segments discret on peut désormais définir ce qu'est un ensemble convexe de manière discrète :

3.4 Ensemble convexe

Soit S une partie de $\mathbb{Z}^2$. On dit que S est convexe si et seulement si :

$$\boxed{\forall (M_1, M_2) \in S^2 \ \ [M_1; M_2] \subset S}$$

. **Corollaire :** Un ensemble convexe est connexe

On arrive donc à une définition naturel de l'ensemble convexe.

3.5 Enveloppe convexe

Soit $S \in \mathscr{P}(\mathbb{Z}^2)$ on appelle *enveloppe convexe de* S (noté $Cvx(S)$) l'ensemble définie par :

$$\boxed{Cvx(S) = \bigcap_{\substack{X \in \mathscr{P}(\mathbb{Z}^2) \\ S \subset X, X convexe}} X}$$

Propriété : L'enveloppe convexe est convexe donc **connexe**.

4 Structure topologique induite

Comme on souhaite parler de "longueur" de périmètre il est nécessaire de définir une distance liée aux objets précédemment définis.

4.1 Distance induite du segment

L'application, $d : \begin{pmatrix} \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (M_1, M_2) & \longmapsto & \#[M_1; M_2] - 1 \end{pmatrix}$ est une distance sur $\mathbb{Z}^2$.

Preuve :

— bonne définition : Soit $M_1, M_2 \in \mathbb{Z}^2$. Comme $M_1 \in [M_1; M_1]$ on a, $\#[M_2; M_1] \geqslant 1$ i.e $\#[M_2; M_1] - 1 \geqslant 0$. Ainsi d est bien à valeur dans $\mathbb{R}^+$.

— symétrie : Soit $M_1, M_2 \in \mathbb{Z}^2$, par construction $[M_2; M_1] = [M_1; M_2]$. Donc $d(M_1, M_2) = d(M_2, M_1)$.

— séparation : Soit M_1, M_2 tq $d(M_1, M_2) = 0$ alors $\#[M_1; M_2] = 1$.
Or $M_1, M_2 \in [M_1; M_2]$ donc $M_1 = M_2$

— inégalité triangulaire : En ayant remarqué que $d(X_1, X_2) = max(\#[\![x_1; x_2]\!], \#[\![y_1; y_2]\!])$, il suffit de faire une disjonction de cas (suivant les différentes pentes possibles) et de remarquer que la somme des segments possèdent au moins autant de points qu'une droite horizontale rejoignant les deux points.

4.2 Longueur

Pour chaque objet K considéré, on désignera par $len(K)$ la longueur induite par la distance précédemment définie sur l'objet K considéré.
Attention : *len* est donc une fonction *polymorphe*

4.2.1 Longueur d'un chemin

Soit $M_1, M_2 \in \mathbb{Z}^2$.
La longueur d'un chemin $\mu[M_1, M_2]$ (de cardinal de son support n) est donnée par

$$len(\mu) = \sum_{k=0}^{n-1} d(\mu_k, \mu_{k+1})$$

<u>Propriété :</u> On remarque que :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} d(\mu_k, \mu_{k+1}) &= \sum_{k=0}^{n-1} (\underbrace{\#[\mu_k, \mu_{k+1}]}_{=2} - 1) && \text{définition de } d \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (2-1) && \text{car, } \mu_k \in \mathbb{V}(\mu_{k+1}) \\
&= n
\end{aligned}$$

4.2.2 Longueur d'un segment

Soit $M_1, M_2 \in \mathbb{Z}^2$ et $n = \#[M_1, M_2]$

On peut décrire le segment $[M_1, M_2]$ comme un n-uplet $(X_1 = M_1, ..., X_k, ..., X_n = M_2)$ ordonné (par $\preceq$). La longueur du segment $[M_1, M_2]$ est alors donnée par :

$$\sum_{k=1}^{n-1} d(X_k, X_{k+1})$$

<u>Propriété :</u> On remarque que :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} d(X_k, X_{k+1}) &= \sum_{k=1}^{n-1} (\underbrace{\#[X_k, X_{k+1}]}_{=2} - 1) && \text{définition de } d \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (2-1) && \text{car, } X_k \in \mathbb{V}(X_{k+1}) \\
&= n - 1 \\
&= d(M_1, M_2)
\end{aligned}$$

4.3 Propriétés

4.3.1 Comparaison des différentes longueurs

Soit $M_1, M_2 \in \mathbb{Z}^2$ alors,

$$\forall \mu,\ len([M_1, M_2]) \leq len(\mu[M_1, M_2])$$

<u>Preuve :</u> Application des caractérisations des différentes longueurs.

Comme notre problème s'intéresse à la longueur d'un contour, celui-ci n'est fini que dans le cas restreint ci-après.

5 Cas des parties finies, non vide et connexe

5.1 Notation propre

On notera,
- $\mathbb{F}$ l'ensemble $\{f \in \mathscr{P}(\mathbb{Z}^2)\backslash\emptyset |\ (\#f) \in \mathbb{N}\}$ i.e l'ensemble des parties finies non vide de $\mathbb{Z}^2$.
- $\mathbb{S}$ l'ensemble $\{f \in \mathbb{F} | f$ est connexe$\}$

6 Premier énoncé : Bordures

Un premier énoncé pour désigner le fait que l'enveloppe convexe d'une partie non vide finie connexe est enveloppée par le plus petit "périmètre" peut se faire en considérant les "Bordures" des parties.

6.1 Bordures

Soit S une partie non vide de $\mathbb{Z}^2$.
On désigne par *bordure extérieur* de S l'ensemble :

$$\mathbb{B}_{ext}(S) = \{M \in \mathbb{Z}^2\backslash S |\ \mathbb{V}_4(M) \cap S \neq \emptyset\ \}$$

Par la même occasion, on définit la *bordure intérieur* S comme l'ensemble :

$$\mathbb{B}_{int}(S) = \{M \in S |\ \mathbb{V}_4(M) \cap (S\backslash\mathbb{Z}^2) \neq \emptyset\ \}$$

Remarque : ces notions peuvent être étendues aux parties infinies de $\mathbb{Z}^2$

6.2 Énoncé

Soit $S \in \mathbb{S}$ alors,

$$\#\mathbb{B}_{ext}(Cvx(S)) = \min_{\substack{X \in \mathbb{F} \\ S \subset X}}(\#\mathbb{B}_{ext}(X))$$

Cet énoncé a cependant quelques défauts :
- La notion de contour n'est pas formalisée ni celle d'encerclement
- La notion de longueur d'un périmètre n'est pas non plus formalisée (elle est écrasée par la notion de cardinal)
- L'énoncé est relativement barbare

d'où la recherche d'un autre énoncé.

7 Deuxième énoncé : Contour

7.1 Contour, définition formelle

Soit $X \in \mathbb{F}$, on appelle *contour* de X l'ensemble

$$\Gamma_X = \mathbb{B}_{ext}(X \cup \{F \in \mathbb{F} \mid \mathbb{B}_{ext}(F) \subset \mathbb{B}_{int}(X)\})$$

7.2 Caractérisation du Contour

Soit $S \in \mathbb{F}$ alors, on dit qu'un chemin μ_S caractérise le contour de S si :

— Il existe un point M du contour tq $\mu_S = \mu_S[M; M]$
— μ_S est injectif (excepter pour M), et pour son support I on a $\Gamma_f = \mu_S(I)$,.

On admettre l'existence d'un tel chemin pour des ensembles connexes

7.3 Longueur d'un contour

Soit $S \in \mathbb{S}$. Pour tout chemin γ_S caractérisant le contour de S. La longueur de chemin ces chemins est invariante et est appelée longueur de la clôture.

Preuve : Les chemins caractérisant le contour de S décrivent une bijection de I (privée du dernier terme) dans Γ_S.
Ainsi on a, $len(\gamma_S) = \#\Gamma_S + 1$ ce qui prouve l'unicité.

Par ailleurs on notera que, $\boxed{len(\Gamma_S) = \#\Gamma_S + 1}$

7.4 Énoncé et équivalence

Soit $S \in \mathbb{S}$ alors,

$$\#\mathbb{B}_{ext}(Cvx(S)) = \min_{\substack{f \in \mathbb{F} \\ S \subset f}} (\#\mathbb{B}_{ext}(f)) \Longleftrightarrow len(\Gamma_{Cvx(S)}) = \min_{\substack{S_p \in \mathbb{S} \\ S \subset S_p}} len(\Gamma_{S_p})$$

Remarque : Il est donc licite de parler de *"longueur de la clôture"*.

8 Preuve

Nous allons montrer le deuxième énoncé à savoir :

$$\forall S \in \mathbb{S},\ len(\Gamma_{Cvx(S)}) = \min_{\substack{S_p \in \mathbb{S} \\ S \subset S_p}} len(\Gamma_{S_p})$$

Soit $S \in \mathbb{S}$ et notons $m = \min\limits_{\substack{S_p \in \mathbb{S} \\ S \subset S_p}} len(\Gamma_{S_p})$

8.1 Existence du minimum

Tout d'abord, remarquons que $S \subset S$ et $S \in \mathbb{S}$ donc m est bien définie comme minimum d'une partie non vide de $\mathbb{N}$.
Ainsi comme il s'agit d'un minimum on peut prendre, $F_p \in \mathbb{S}$ tel que : $len(\Gamma_{F_p}) = m$ et $S \subset F_p$.

8.2 Transformation en ensemble "plein"

Pour éviter les cas compliqués où F_p serait par exemple un tore, posons

$$F = F_p \cup \{t \in \mathbb{S}|\ \ \mathbb{B}_{ext}(t) \subset \mathbb{B}_{int}(F)\}$$

et montrons que F vérifie les mêmes propriétés que F_p.

Conservation de la longueur du contour :

Par définition on a,

$$\begin{aligned}\Gamma_{F_p} &= \mathbb{B}_{ext}(F_p \cup \{t \in \mathbb{S}|\mathbb{B}_{ext}(t) \subset \mathbb{B}_{int}(F_p)\}) \\ &= \mathbb{B}_{ext}(F) \\ &= \Gamma_F\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\Gamma_{F_p} = \Gamma_F = \mathbb{B}_{ext}(F)}$$

Donc,

$$\boxed{len(\Gamma_{F_p}) = len(\Gamma_F) = m}$$

Connexité

Montrons que F est connexe. Comme F_p est connexe, il suffit de montrer que pour n'importe quel point $M \in F \backslash F_p$ on peut le relier à un point $M' \in F_p$.

Soit $M \in F \backslash F_p$, alors il existe $t \in \mathbb{S}$ tq $\mathbb{B}_{ext}(t) \subset \mathbb{B}_{int}(F_p)$ et $M \in t$. Or t est connexe, il suffit donc de prendre un de ces points sur sa bordure et M' un point de la bordure intérieur de F_p dans le voisinage de ce point.
Ainsi,

$$\boxed{F \text{ est connexe}}$$

8.3 retour sur enveloppe convexe

Revenons à notre preuve et distinguons deux cas.

Premier cas :

Supposons que $Cvx(S) \subset F$ alors comme $\Gamma_{Cvx(S)} = \mathbb{B}_{ext}(Cvx(S))$ et $\Gamma_F = \mathbb{B}_{ext}(F)$ il existe une surjection $\Psi : \Gamma_{Cvx(S)} \longrightarrow \Gamma_F$.
Ainsi,

$$len(\Gamma_{Cvx(S)}) \leq len(\Gamma_F) = m$$

Or, $S \subset Cvx(S)$ et $Cvx(S) \in \mathbb{S}$ donc, $m \leq len(\Gamma_{Cvx(S)})$. On en déduit que : $\boxed{len(\Gamma_{Cvx(S)}) = m}$

Deuxième cas :

Supposons que, $Cvx(S) \not\subset F$, alors il existe $(M_1, M_2) \in S^2$ tel que :

$$[M_1; M_2] \not\subset F$$

Comme $S \subset F$ peut donc prendre deux points $(X_1, X_2) \in ([M_1; M_2] \cap \mathbb{B}_{int}(F))^2$ tq :

$$[X_1; X_2] \backslash \{X_1, X_2\} \in \mathscr{P}(\mathbb{Z}^2 \backslash F) \backslash \emptyset$$

Or F est connexe donc il existe un chemin $\mu[X_1; X_2]$ à valeur dans F de longueur minimal. Comme celui-ci est de longueur minimal il est à valeur dans $\mathbb{B}_{int}(F)$. Ainsi les points sur un bord de ce chemin appartiennent à Γ_F. Or par la caractérisation de la longueur d'un chemin et d'un segment on trouve qu'il y a au mieux autant de points en contact sur un coté du segment $\mu[X_1; X_2]$ que sur ce chemin. On montre ainsi que :

$$len(\Gamma_{Cvx(S)}) \leq m$$

Donc

$$\boxed{len(\Gamma_{Cvx(S)}) = m}$$

9 Annexes

9.1 écriture de la surjection

$$\Psi : \left(\begin{array}{ccc} \Gamma_{Cvx(S)} & \longrightarrow & \Gamma_F \\ (x,y) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{cc} (x + min\{k_0 \in \mathbb{N} | (x+k_0, y) \in \Gamma_F\}, y) & \text{si } \exists k \in \mathbb{N}(x+k, y) \in F \\ (x - min\{k_0 \in \mathbb{N} | (x-k_0, y) \in \Gamma_F\}, y) & \text{si } \exists k \in \mathbb{N}(x-k, y) \in F \\ \left\{ \begin{array}{cc} (x, y + min\{k_0 \in \mathbb{N} | (x, y+k_0) \in \Gamma_F\}) & \text{si } \dots \\ & \dots \end{array} \right. & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right)$$