Calcul Scientifique

SVD : $A = U \Sigma V^T$ $\quad U \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$ $\quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 \cdots 0 & & 0 \\ 0 & \sigma_r & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$

$\Sigma \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

$V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ $\quad \sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ vp de A^TA.

- A^TA symétrique semi def pos
- vp de A^TA positives ou nulles
- $\operatorname{Ker}(A^TA) = \operatorname{Ker}(A)$
- $\operatorname{Im}(A^TA) = \operatorname{Im}(A^T)$
- A^TA inversible $\Leftrightarrow$ $rg(A) = n$.

Pseudo-inverse : $A^+ = V \Sigma^+ U^T$ $\quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1 \cdots & 1/\sigma_r & 0 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$

- $AA^+A = A$
- $A^+AA^+ = A^+$ $\quad$ • $(A^T)^+ = (A^+)^T$.
- $(AA^+)^T = AA^+$
- $(A^+A)^T = A^+A$

(P) : $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2$

$\nabla f(x) = A^T(Ax - b)$

$H f(x) = A^TA$: semi def pos $\Rightarrow$ f convexe sur $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ minimas = points critiques.

A^+b est solution de (P).

- $m = n = r \Rightarrow A^+ = A^{-1}$
- $m = r$, $m \geq n \Rightarrow A^+ = (A^TA)^{-1}A^T$
- $m = r$, $m \leq n \Rightarrow A^+ = A^T(AA^T)^{-1}$.

Estimation linéaire $f(a,x) = b$ $\Rightarrow a^T x = b$

Avec m observations : ~~On répète m fois~~

On cherche $\min f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2$.

$\Rightarrow x = A^+ b$.

Approximation : $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $rg(A) = r$.

$$A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T.$$

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T$$

- $\|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}$

$$(P) : \inf_{X \in M_{m,n}^k(\mathbb{R})} \|A - X\|$$

- A_k solution de (P).

Conditionnement $K(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ (A inversible, $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$)

- $K(\lambda A) = K(A)$
- $K(A) \geq 1$
- $K_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$.
- $K_2(A) = 1 \Leftrightarrow A = \lambda U \quad U \in O_n(\mathbb{R})$.

Perturbations : $x / Ax = b$. $y = x + \Delta x$.

- b : y tel que $Ay = b + \Delta b$. $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq K(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$
- A : $(A + \Delta A) y = b$. $\frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \leq K(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$.

Si $K(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} < 1$: $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{K(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}{1 - K(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}$.

Backward Error $B_{er} = \frac{\|A\tilde{x} - b\|_2}{\|A\| \|\tilde{x}\| + \|b\|}$.

Power method

- Trouver un couple (λ, v)
- Retirer le couple des couples à trouver.

Jacobi : Matrice symétrique.

- $A_1 = A$
- $A_{k+1} = \Theta_k^{-1} A_k \Theta_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Θ_k matrice orthogonale de rotation : $\Theta_k = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \cos & \sin & \\ & -\sin & \cos & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ i, j

$G(i,j)$

LU : A inversible ($\det A \neq 0$) et sous-matrices aussi

- $A^{(1)} = A$
- $A^{(k+1)} = L^{(k+1)} A^{(k)}$

$$L^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & -l_{k+1,k} & & \\ & \vdots & & \\ & -l_{n,k} & & 1 \end{pmatrix} \qquad l_{ik} = \frac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{k,k}}$$

$U = A^{(n)} = L^{(n-1)} \cdots L^{(1)} A$

$L = (L^{(n-1)})^{-1} \cdots (L^{(1)})^{-1}$.

Flops : $n^2 - n$

$\frac{2n^3}{3}$

$2n^2$

$Ax = (LU)x = Ly = b$.

Diagonally dominant : $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$.

- A^T strict diag dom $\Rightarrow$ A inversible $\Rightarrow$ A a une décompo LU.
- A inversible $\Rightarrow$ $\exists P$ une permutation / $PA = LU$ possible.

($\det(P) = \pm 1$).

Schur decomposition

$$PA = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \qquad S = A_{22} - A_{21} (A_{11})^{-1} A_{12}.$$

(schur matrix).

$$PA = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & S \end{pmatrix}.$$

LDL^T

A symétrique et a une LU décompo

$\Rightarrow A = LDL^T$ avec $D = \text{diag}(U)$.

Flops : $\frac{n^3}{3}$.

Cholesky : A sym def pos ($x^T A x > 0$)

- $A = LL^T$

Flops : $\frac{n^3}{3}$.

Algo ité de relaxation

$A = M - N \quad Ax^* = b \iff x^* = M^{-1}Nx^* + M^{-1}b$

$$x^{(p+1)} = x^{(p)} + M^{-1} r^{(p)} \qquad r^{(p)} = b - Ax^{(p)}.$$

$A = D - E - F.$

- Jacobi : $Dx^{(p+1)} - (E+F)x^{(p)} = b$ (CN : D inversible)
- Gauss-Seidel : $(D-E)x^{(p+1)} - Fx^{(p)} = b.$ ($D-E$ inversible)

Steepest Descent $x^{(p+1)} = x^{(p)} + \lambda_p r^{(p)}$ A sym def pos

- $r^{(p)} = -\mathrm{grad}(f)(x^{(p)}) = b - Ax^{(p)}$ $\quad f(x) = x^T A x + x^T b.$
- $\lambda_p = \dfrac{r^{(p)T} r^{(p)}}{r^{(p)} A r^{(p)}} = \dfrac{\|r^{(p)}\|_2^2}{\|r^{(p)}\|_A^2}.$

1 itération ?

Gradients conjugués (d_i) A-orthogonal : $\langle d_p, Ax^{(p)} \rangle = \langle d_p, Ax^{(0)} \rangle.$

Factorisation QR. $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. $A = QR$, $Q \in O_m(\mathbb{R})$.

- $H_1 A e_1 = \alpha_1 e_1$
- $H_{n-1} \dots H_1 A = R.$
- $Q^T = H_{n-1} \dots H_1.$

②

Householder matrice $\forall v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad H_v = I - \frac{2}{v^T v} v v^T$

- $H_v^T = H_v$
- $H_v^{-1} = H_v^T$
- $H_v v = v$ et $H_v x = x$ si $x \perp v$
- $\forall x \neq 0, \exists \sigma \neq 0, \exists v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \,/\, H_v x = -\sigma e_1$

$$\sigma = \text{sign}(x_1) \|x\| \qquad v = x + \sigma e_1.$$

Flops : $\frac{4}{3} n^3$

Given rotation $G(1, 4) = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. Flops : $2n^3$.