Automatique

Pt de fonctionnement

$f(x_e, u_e) = 0$.

Pt d'équilibre :

$f(x_e, 0) = 0$.

Soit Σ :

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Pt d'équilibre : } \quad Ker(A).}$

Pt d'équilibre hyperbolique :

x_e / $\forall \lambda$ vp de $f'(x_e)$, $Re(\lambda) \neq 0$.

Solution : $\boxed{x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} Bu(s)\, ds.}$

Linéaire : $f(x) = Ax$ **Autonome :** $A(t) = A$.

Stabilité : $\dot{x}(t) = f(x(t))$.

- $\forall \lambda$ vp de $f'(x_e)$, $Re(\lambda) < 0 \Rightarrow x_e$ asymptotiquement stable.
- $\forall \lambda$ vp de $f'(x_e)$, $Re(\lambda) > 0 \Rightarrow x_e$ pas stable as...

Mat de controllabilité : $C = (B \;\; AB \;\; \cdots \;\; A^{n-1}B)$.

Σ controllable $\Leftrightarrow rg(C) = n$.

Schéma d'Euler : $x_1 = x_0 + h f(t_0, x_0)$.

Schéma de Runge : $x_1 = x_0 + h f(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h}{2} f(t_0, x_0))$.

Matlab :

Retour d'état $\quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$.

- Linéaire : $\quad u(t) = Kx(t)$.

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = (A + BK)\,x(t).$$

↳ étudier $A + BK$ pour la stabilité.

- Non linéaire : $\quad u(t) = u_e + K(x(t) - x_e)$.

↳ étudier $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e) + \dfrac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e)K$ pour la stabilité

Méthode :

$$k_1 = f(t_0, x_0)$$
$$k_2 = f(t_0 + c_2 h,\ x_0 + h a_{21} k_1).$$
$$\vdots$$
$$k_s = f\left(t_0 + c_s h,\ x_0 + h \sum_{i=1}^{s-1} a_{si} k_i\right).$$
$$x_1 = x_0 + h \sum_{i=1}^{s} b_i k_i.$$
$$c_i = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}.$$

$$\begin{array}{c|cccc}
c_1 & 0 & & & \\
c_2 & a_{21} & & & \\
\vdots & \vdots & a_{32} & \ddots & \\
c_s & a_{s1} & \cdots & a_{s\,s-1} & \\
\hline
 & b_1 & \cdots & b_{s-1} & b_s
\end{array}$$

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

$$e^{tB} = e^{t\left(\alpha I_2 + \beta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)}$$
$$= e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}.$$

Stabilité asymptotique valable que pour un pt proche du pt de fonctionnement.

$J_f(x_e) = 0$: on peut rien dire sur la stabilité si non linéaire.