Telecom :

Convolution : $x(t) * y(t) = \int_{\mathbb{R}} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau.$

Fourier : $X(f) = TF(x(t)) = \int_{\mathbb{R}} x(t)\, e^{-2j\pi f t}\, dt.$

$x(t) = TF^{-1}(X(f)) = \int_{\mathbb{R}} X(f)\, e^{2j\pi f t}\, df.$

- $TF(x(t-t_0)) = X(f)\, e^{-2j\pi f t_0}$
- $TF(x * y) = X \times Y.$
- $\int_{\mathbb{R}} x(t)\, y^*(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)\, Y^*(f)\, df$
- $\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2\, dt = \int_{\mathbb{R}} |X(f)|^2\, df$
- $TF(x^*(f)) = X^*(-f).$
- $x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0).$
- $TF(\Pi_{T_s}(t)) = T_s\, \mathrm{sinc}(\pi f T_s)$
- $E_b = P_y T_b = \int_{\mathbb{R}} S_y(f)\, df \times T_b.$
- $S_w(f) = S_n(f) \times |H_r(f)|^2.$ $\quad (n(t) * h_r(t) = w(t)).$

$$\text{bits} \xrightarrow{\text{mapping}} a_k \longrightarrow \Sigma a_k\, \delta(t-kT_s) \xrightarrow{* h(t)} x(t) = \Sigma a_k\, h(t-kT_s)$$

$$x(t) \xrightarrow[* h_c(t)]{\text{canal}} + \; r(t) \xrightarrow[* h_r(t)]{} z(t) \xrightarrow{\text{échantillonnage}} z(t_0 + mT_s) \xrightarrow{\text{décision}} \hat{a}_m \xrightarrow{\text{dé-mapping}} \text{bits}$$

- $\int_{\mathbb{R}} x(t)\, \delta(t-t_0)\, dt = x(t_0).$

$$T_s = \frac{1}{R_s} = n\,T_b \qquad R_s = \frac{R_b}{n} = \frac{R_b}{\log_2(M)}.$$

DSP

$$S_x(f) = \frac{\sigma_a^2}{T_s}|H(f)|^2 + \frac{2\sigma_a^2}{T_s}|H(f)|^2 \sum \mathrm{Re}\left(R_a(k)e^{j2\pi f k T_s}\right)$$
$$+ \frac{|m_a|^2}{T_s^2}\sum \left|H\left(\frac{k}{T_s}\right)\right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right).$$

$$m_a = E(a_k)$$

$$\sigma_a^2 = E(|a_k - m_a|^2)$$

$$R_a(k) = \frac{E(a_m a_{m-k}) - |m_a|^2}{\sigma_a^2}.$$

$$H(f) = TF(h(t)).$$

Bande Passante : Qté d'infos pouvant être transmises simultanément sur une voie.

$$B = k\,R_s.$$

- Bande de Nyquist : $B_N = \frac{1}{2T_s} = \frac{R_s}{2}$.
- Cosinus surélevé : $B = \frac{1+\alpha}{2T_s}$.

Efficacité spectrale

$$\eta = \frac{R_b}{B} = \frac{\log_2(M)}{k}. \qquad \eta \nearrow \text{ si } M \nearrow \text{ ou } B \searrow.$$

Interférences :

$$z(t_0 + mT_s) = \underbrace{a_m\,g(t_0)}_{\text{terme utile}} + \underbrace{\sum a_m\,g(t_0 + (m-k)T_s)}_{\text{terme d'interférences (ISI)}} + \underbrace{w(t_0 + mT_s)}_{\text{bruit}}.$$

$$g(t) = h(t) * h_c(t) * h_r(t).$$

Critère de Nyquist

$$ISI = 0 \iff \begin{cases} g(t_0) \neq 0 \\ \forall p \in \mathbb{Z},\ g(t_0 + pT_s) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \sum G^{(t_0)}\left(f - \frac{k}{T_s}\right) = cst \qquad G^{(t_0)}(f) = TF\left(\frac{g(t+t_0)}{g(t_0)}\right).$$

Diag de l'œil Autant de points que de symboles $\iff$ Nyquist vérifié.

Canal AWGN Si $B_w > F_{max}$, le signal peut continuer à respecter le critère $\Leftrightarrow \frac{B_w}{K} > R_s$ de Nyquist.

Si critère de Nyquist vérifié : $z(t_0 + mT_s) = a_m g(t_0) + w(t_0 + mT_s)$

$$SNR = \frac{P_{a_m g(t_0)}}{P_w} = \frac{|g(t_0)|^2}{\sigma_w^2}$$

Filtre adapté : $H_r(f) = \lambda H_e^*(f) e^{-j2\pi f t_0}$ $\qquad H_e = H \times H_c$

$\Leftrightarrow h_r(t) = \lambda h_e^*(t_0 - t)$

Décision : $\hat{a}_n = \arg\max p(z_n | \tilde{a}_m)$ $\qquad$ Seuil à milieux $g(t_0)$.

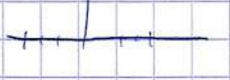
TEB : $TEB = \frac{TES}{\log_2(M)}$ pour un mapping de Gray.

$$TES = Q\left(\frac{Vg(t_0)}{\sigma_w}\right) = Q\left(\frac{D_{min}}{2\sigma_w}\right).$$

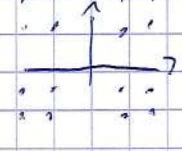
$TES = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$ si Nyquist vérifié
Filtre de réception adapté.
Seuil en 0
symboles binaires à moyenne nulle.

M-PAM : $TES = 2\left(\frac{M-1}{M}\right) Q\left(\frac{Vg(t_0)}{\sigma_w}\right) = 2\left(\frac{M-1}{M}\right) Q\left(\sqrt{\frac{6\log_2(M)}{M^2-1}\frac{E_b}{N_0}}\right)$

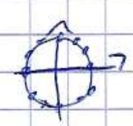
M-ASK : Même TES.



M-QAM : $TES = 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2(M)}{M-1}\frac{E_b}{N_0}}\right)$.



M-PSK : $TES = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right)$.



efficacité sp : Même efficacité.

efficacité en P ASK < PSK < QAM.