Traitement du Signal

Jean-Yves Tourneret[1] et Charly Poulliat[2]

(1) Université de Toulouse, ENSEEIHT-IRIT-TéSA

jyt@n7.fr

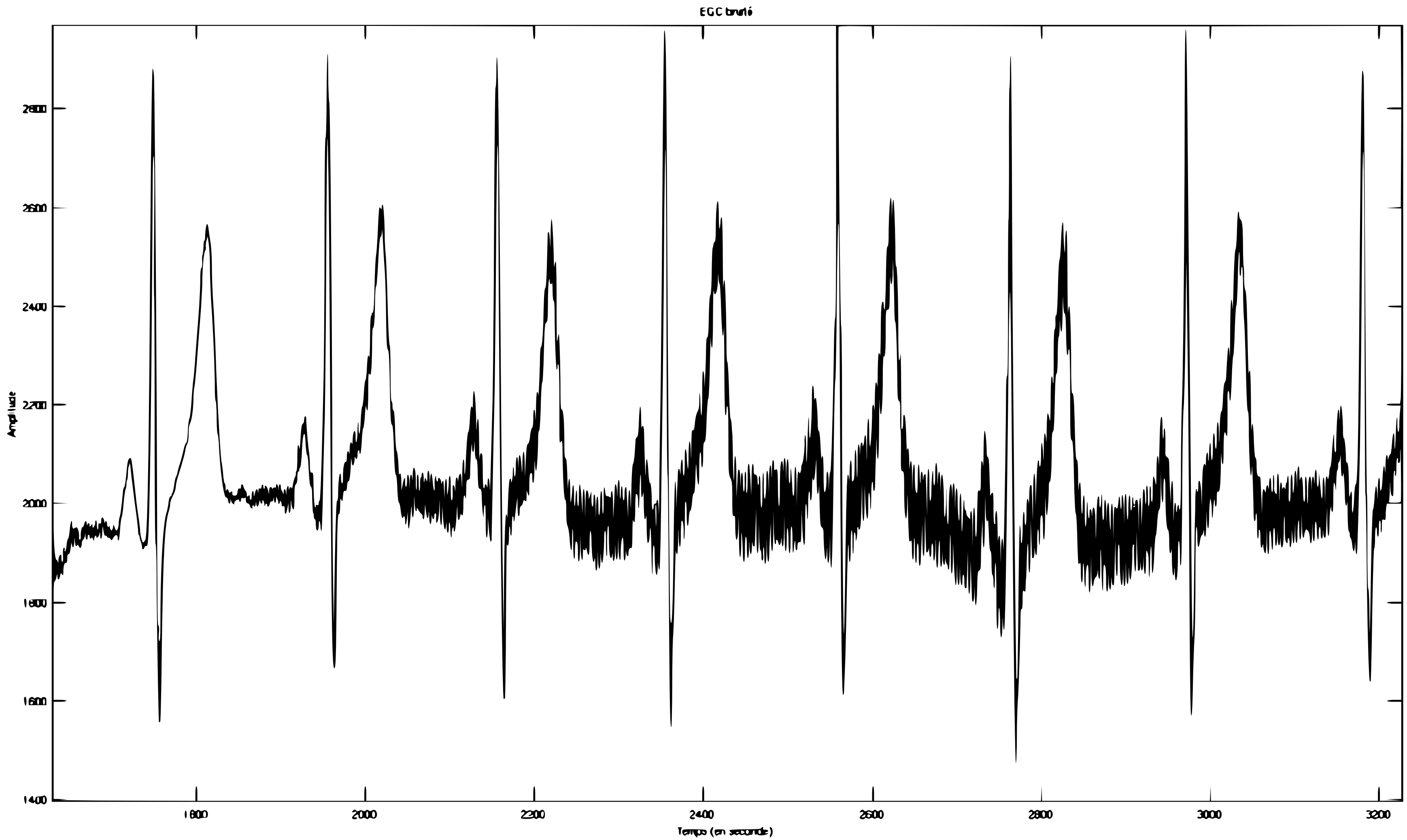
(2) Université de Toulouse, ENSEEIHT-IRIT

charly.poulliat@enseeiht.fr

Bibliographie

- J. Max et J.-L. Lacoume, Méthodes et techniques de traitement du signal, Dunod, 5ème édition, 2004.
- Athanasios Papoulis and S. Unnikrishna Pillai, Probability, Random Variables and Stochastic Processes, McGraw Hill Higher Education, 4th edition, 2002.

Électrocardiogramme



Lena

Original image
20
40
60
80
100
120
20
40
60
80
100
120
240
220
200
180
160
140
120
100
80
60
40

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
  - Transformée de Fourier
  - Classes de signaux déterministes et aléatoires
  - Propriétés de $R_x(\tau)$ et de $s_x(f)$
- Chapitre 2 : Filtrage Linéaire
- Chapitre 3 : Traitements Non-linéaires

Transformée de Fourier

- Définitions
  - Formule directe

$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) \exp\left(-j2\pi f t\right) dt$$

  - Formule inverse

$$x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) \exp\left(j2\pi f t\right) df$$

- Hypothèses

  TF sur L^1 ou L^2

Propriétés

- Linéarité

$$\text{TF}\left[ax(t) + by(t)\right] = aX(f) + bY(f)$$

- Parité $\quad x(t)$ réelle paire $\Rightarrow X(f)$ réelle paire
- Translation et Modulation

$$\text{TF}\left[x(t - t_0)\right] = \exp(-j2\pi f t_0)X(f)$$

$$\text{TF}\left[x(t)\exp(j2\pi f_0 t)\right] = X(f - f_0)$$

- Similitude

$$\text{TF}\left[x(at)\right] = \frac{1}{|a|}X\left(\frac{f}{a}\right)$$

Propriétés

- Produits de Convolution
  - Définition

$$
\begin{aligned}
y(t) = (h * x)(t) = h(t) * x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) h(\tau) d\tau
\end{aligned}
$$

  - TF

$$
\text{TF}\left[x(t) * y(t)\right] = X(f)Y(f)
$$

$$
\text{TF}\left[x(t)y(t)\right] = X(f) * Y(f)
$$

- Égalite de Parseval

$$
\int_{\mathbb{R}} x(t) y^*(t) dt = \int_{\mathbb{R}} X(f) Y^*(f) df
$$

Distributions

- Localisation

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

- Produit de Convolution

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$$

- Transformées de Fourier

$$\text{TF}\left[\delta(t)\right] = 1, \ \text{TF}\left[1\right] = \delta(f)$$

$$\text{TF}\left[\delta(t-t_0)\right] = \exp(-j2\pi f t_0), \ \text{TF}\left[\exp(j2\pi f_0 t)\right] = \delta(f-f_0)$$

Résumé des propriétés

	T.F.	
$ax(t) + by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f) + bY(f)$
$x(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi f t_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f - f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t)\,.\,y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)\,.\,Y(f)$
$x(at + b)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} X\left(\frac{f}{a}\right) e^{i2\pi \frac{b}{a} f}$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n\, X(f)$
$(-i2\pi t)^n\, x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval	Série de Fourier
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$	$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t} \rightleftharpoons \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta(f - n f_0)$
$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2\, dt = \int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2\, df$	

Tables

	T.F.	
1	$\rightleftharpoons$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta(f - f_0)$
$\delta(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi f t_0}$
$Ш_T(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t - kT)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T} Ш_{1/T}(f)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$e^{-a\|t\|}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} = T \sin c(\pi T f)$
$\Lambda_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T \sin c^2(\pi T f)$
$B \sin c(\pi B t)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B(f)$
$B \sin c^2(\pi B t)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B(f)$

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
  - Transformée de Fourier
  - Classes de signaux déterministes et aléatoires
  - Propriétés de $R_x(\tau)$ et de $s_x(f)$
- Chapitre 2 : Échantillonnage
- Chapitre 3 : Filtrage Linéaire
- Chapitre 4 : Traitements Non-linéaires

Classes de signaux déterministes et aléatoires

- Classe 1 : signaux déterministes à énergie finie
- Classe 2 : signaux déterministes périodiques à puissance finie
- Classe 3 : signaux déterministes non périodiques à puissance finie
- Classe 4 : signaux aléatoires stationnaires

Signaux déterministes à énergie finie

- **Définition** $\mathsf{E} = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |X(f)|^2 df < \infty$
- **Fonction d'autocorrélation**

$$R_x(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)x^*(t-\tau)dt = \langle x(t), x(t-\tau)\rangle$$

- **Fonction d'intercorrélation**

$$R_{xy}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t-\tau)dt = \langle x(t), y(t-\tau)\rangle$$

- **Produit scalaire**

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt$$

Densité spectrale d'énergie

- Définition

$$s_x(f) = \text{TF}\left[R_x(\tau)\right]$$

- Propriété

$$s_x(f) = \left|X(f)\right|^2$$

  - Preuve

$$\begin{aligned} s_x(f) &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} x(t)x^*(t-\tau)dt\right] \exp(-j2\pi f\tau)d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} x^*(t-\tau)\exp(-j2\pi f\tau)d\tau\right] x(t)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} x^*(u)\exp\left[j2\pi f(u-t)\right]du\right] x(t)dt \\ &= X^*(f)X(f) \end{aligned}$$

Exemple

- Fenêtre rectangulaire

$$x(t) = \Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Fonction d'autocorrélation

$$R_x(\tau) = T\Lambda_T(\tau)$$

- Densité spectrale d'énergie

$$s_x(f) = T^2 \text{sinc}^2(\pi T f) = |X(f)|^2$$

Signaux déterministes périodiques

- Définition $\mathsf{P} = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt < \infty$
- Fonction d'autocorrélation

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)x^*(t-\tau)dt = \langle x(t), x(t-\tau)\rangle$$

- Fonction d'intercorrélation

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)y^*(t-\tau)dt = \langle x(t), y(t-\tau)\rangle$$

- Produit scalaire

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)y^*(t)dt$$

Densité spectrale de puissance

- Définition

$$s_x(f) = \text{TF}\left[R_x(\tau)\right]$$

- Propriété

$$s_x(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 \delta(f - kf_0)$$

avec $x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \exp(j2\pi k f_0 t)$.

- Preuve

$$R_x(\tau) = \sum_{k,l} c_k c_l^* \exp\left(j2\pi l f_0 \tau\right) \left[\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \exp\left[j2\pi(k-l)f_0 t\right] dt\right]$$

$$= \sum_{k} |c_k|^2 \exp(j2\pi k f_0 \tau)$$

Exemple

- Sinusoïde

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$$

- Fonction d'autocorrélation

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)$$

- Densité spectrale de puissance

$$s_x(f) = \frac{A^2}{4}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$$

Signaux déterministes à puissance finie

- Définition P $= \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt < \infty$
- Fonction d'autocorrélation

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x^*(t-\tau)dt = \langle x(t), x(t-\tau)\rangle$$

- Fonction d'intercorrélation

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y^*(t-\tau)dt = \langle x(t), y(t-\tau)\rangle$$

- Produit scalaire

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y^*(t)dt$$

Densité spectrale de puissance

- Définition

$$s_x(f) = \text{TF}\left[R_x(\tau)\right]$$

- Propriété

$$s_x(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left|X_T(f)\right|^2$$

avec

$$X_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\exp(-j2\pi f t)dt$$

- Exemple

$$x(t) = A_1\cos(2\pi f_1 t) + A_2\cos(2\pi f_2 t)$$

avec f_1 et f_2 non commensurables.

Signaux aléatoires stationnaires

- Définition
  - Moyenne : $E[x(t)]$ indépendant de t
  - Moment d'ordre 2 : $E[x(t)x^*(t-\tau)]$ indépendant de t
- Fonction d'autocorrélation

$$R_x(\tau) = E[x(t)x^*(t-\tau)] = \langle x(t), x(t-\tau) \rangle$$

- Fonction d'intercorrélation

$$E[x(t)y^*(t-\tau)] = \langle x(t), y(t-\tau) \rangle$$

- Produit scalaire

$$\langle x(t), y(t) \rangle = E[x(t)y^*(t)]$$

Remarques : stationnarité au sens strict, large, à l'ordre deux, tests de stationnarité.

Stationnaire ou non ?

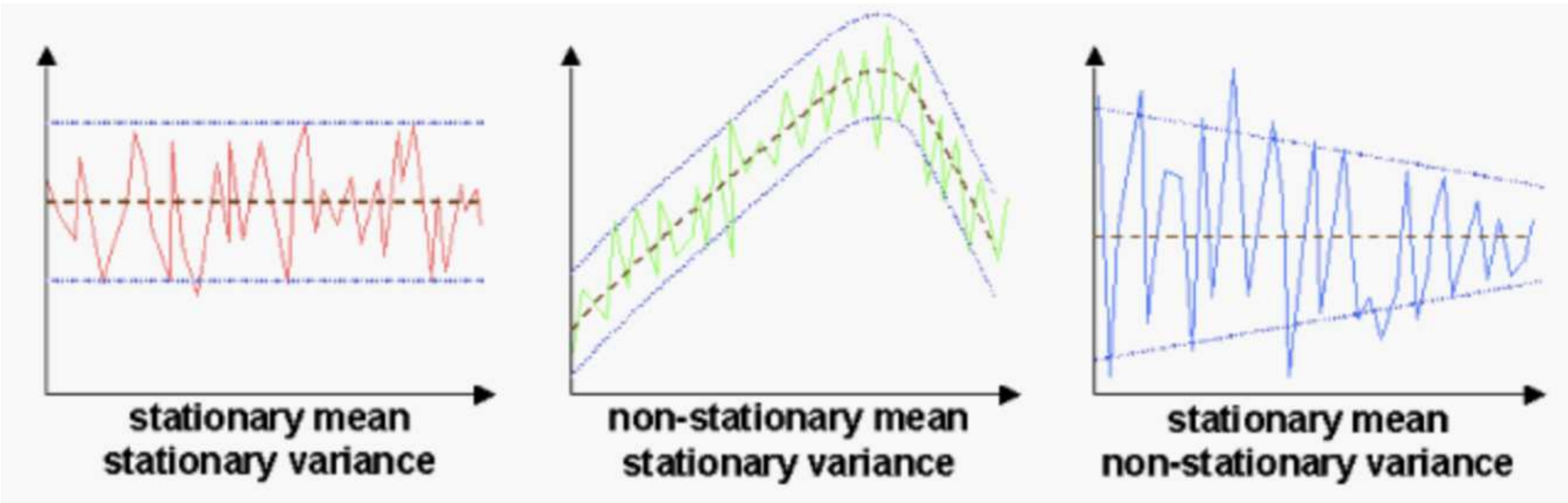


Figure 2: Constancy in mean and variance.

https://towardsdatascience.com/stationarity-in-time-series-analysis-90c94f27322

Densité spectrale de puissance

- Puissance moyenne

$$P = R_x(0) = E\left[|x(t)|^2\right] = \int_{\mathbb{R}} s_x(f)df$$

- Densité spectrale de puissance
  - Définition

$$s_x(f) = \text{TF}\left[R_x(\tau)\right]$$

  - Propriété

$$s_x(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E\left[|X_T(f)|^2\right]$$

mais en général $X(f)$ n'existe pas !

Exemples

- Exemple 1 : Sinusoïde

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

θ va uniforme sur $[0, 2\pi]$.

- Fonction d'autocorrélation

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)$$

- Densité spectrale de puissance

$$s_x(f) = \frac{A^2}{4}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$$

Exemples

- Exemple 2 : Bruit blanc
  - Fonction d'autocorrélation

$$R_x(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

  - Densité spectrale de puissance

$$s_x(f) = \frac{N_0}{2}$$

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
  - Transformée de Fourier
  - Classes de signaux déterministes et aléatoires
  - Propriétés de $R_x(\tau)$ et de $s_x(f)$
- Chapitre 2 : Filtrage Linéaire
- Chapitre 3 : Traitements Non-linéaires

Propriétés de $R_x(\tau)$

- Symétrie Hermitienne : $R_x^*(-\tau) = R_x(\tau)$
- Valeur maximale : $|R_x(\tau)| \leq R_x(0)$
- Distance entre $x(t)$ et $x(t-\tau)$: si $x(t)$ est un signal réel

  $$d^2\left[x(t), x(t-\tau)\right] = 2\left[R_x(0) - R_x(\tau)\right]$$

  Donc $R_x(\tau)$ mesure le lien entre $x(t)$ et $x(t-\tau)$.
- Décomposition de Lebesgue : dans la quasi-totalité des applications, on a

  $$R_x(\tau) = R_1(\tau) + R_2(\tau)$$

  où $R_1(\tau)$ est une somme de fonctions périodiques et $R_2(\tau)$ tend vers 0 lorsque $\tau \to \infty$.

Propriétés de $s_x(f)$

- DSP réelle

$$s_x(f) \in \mathbb{R}$$

De plus, si $x(t)$ signal réel, $s_x(f)$ réelle paire

- Positivité : $s_x(f) \geq 0$
- Lien entre DSP et puissance/énergie

$$P \text{ ou } E = R_x(0) = \int_{\mathbb{R}} s_x(f) df$$

- Décomposition : dans la plupart des applications, on a $s_x(f) = s_1(f) + s_2(f)$, où $s_1(f)$ est un spectre de raies et $s_2(f)$ un spectre continu (cas général : partie singulière).

Que faut-il savoir ?

- Reconnaître si un signal est à énergie finie, à puissance finie périodique ou aléatoire.
- Qu’est ce qu’un signal aléatoire stationnaire ?
- Les différentes définitions d’une fonction d’autocorrélation $R_x(\tau)$
- La définition unifiée d’une densité spectrale : $s_x(f)$ = ?
- Les différentes définitions d’une densité spectrale
- Ce qu’est un bruit blanc
- Ce qu’est un bruit gaussien
- Propriétés de $R_x(\tau)$
- Propriétés de $s_x(f)$

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
- Chapitre 2 : Filtrage Linéaire
  - Introduction
  - Relations de Wiener-Lee
  - Formule des interférences
  - Exemples
- Chapitre 3 : Traitements Non-linéaires

Introduction

On cherche une opération avec les propriétés suivantes

- Linéarité : $T\left[a_1x_1(t)+a_2x_2(t)\right]=a_1T\left[x_1(t)\right]+a_2T\left[x_2(t)\right]$
- Invariance dans le temps
  Si $y(t)=T\left[x(t)\right]$ alors $T\left[x(t-t_0)\right]=y(t-t_0)$
- Stabilité BIBO
  Si $|x(t)|\leq M_x$ alors il existe M_y tel que

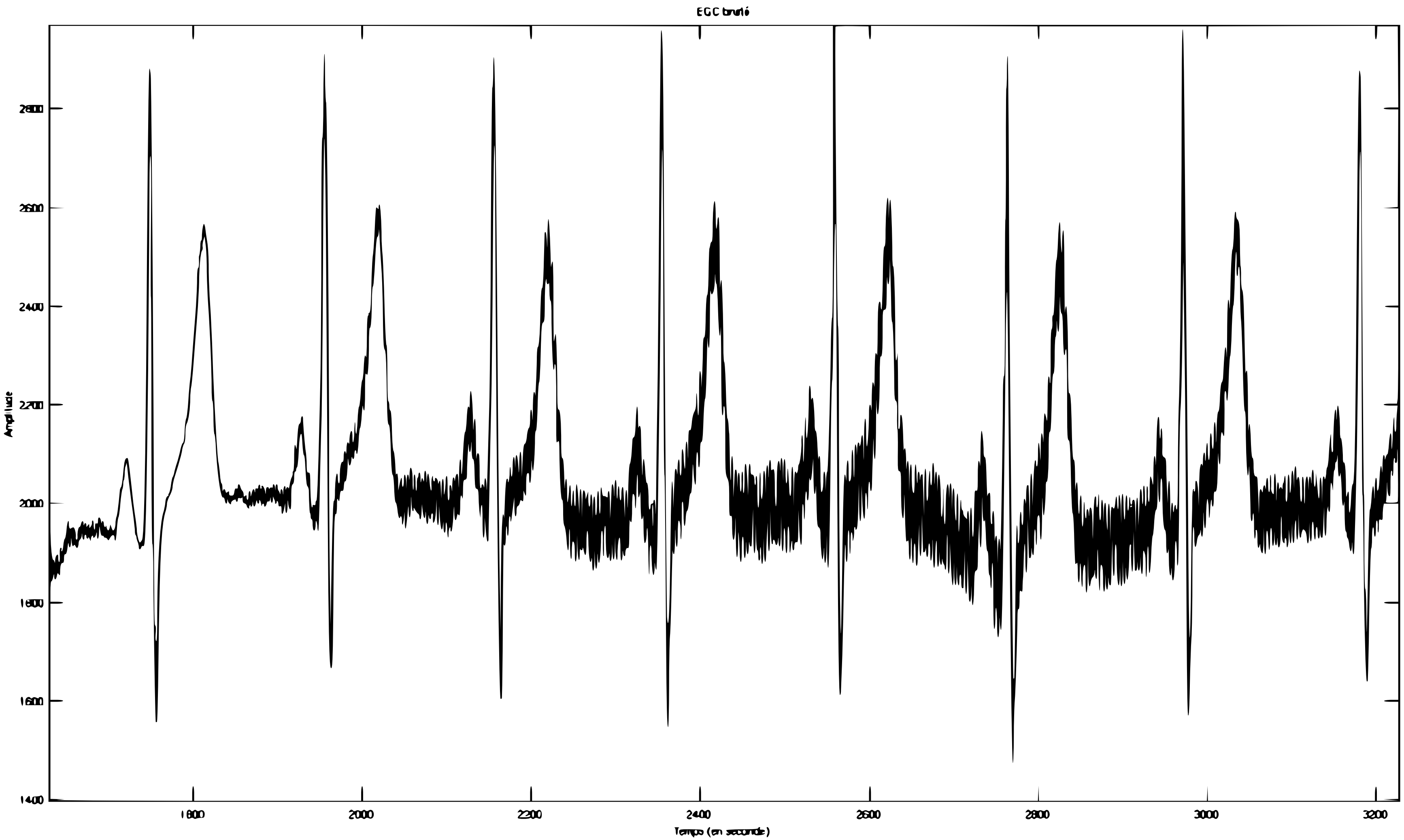
$$|y(t)|=\left|T\left[x(t)\right]\right|\leq M_y$$

- “Limitation” du spectre d'un signal

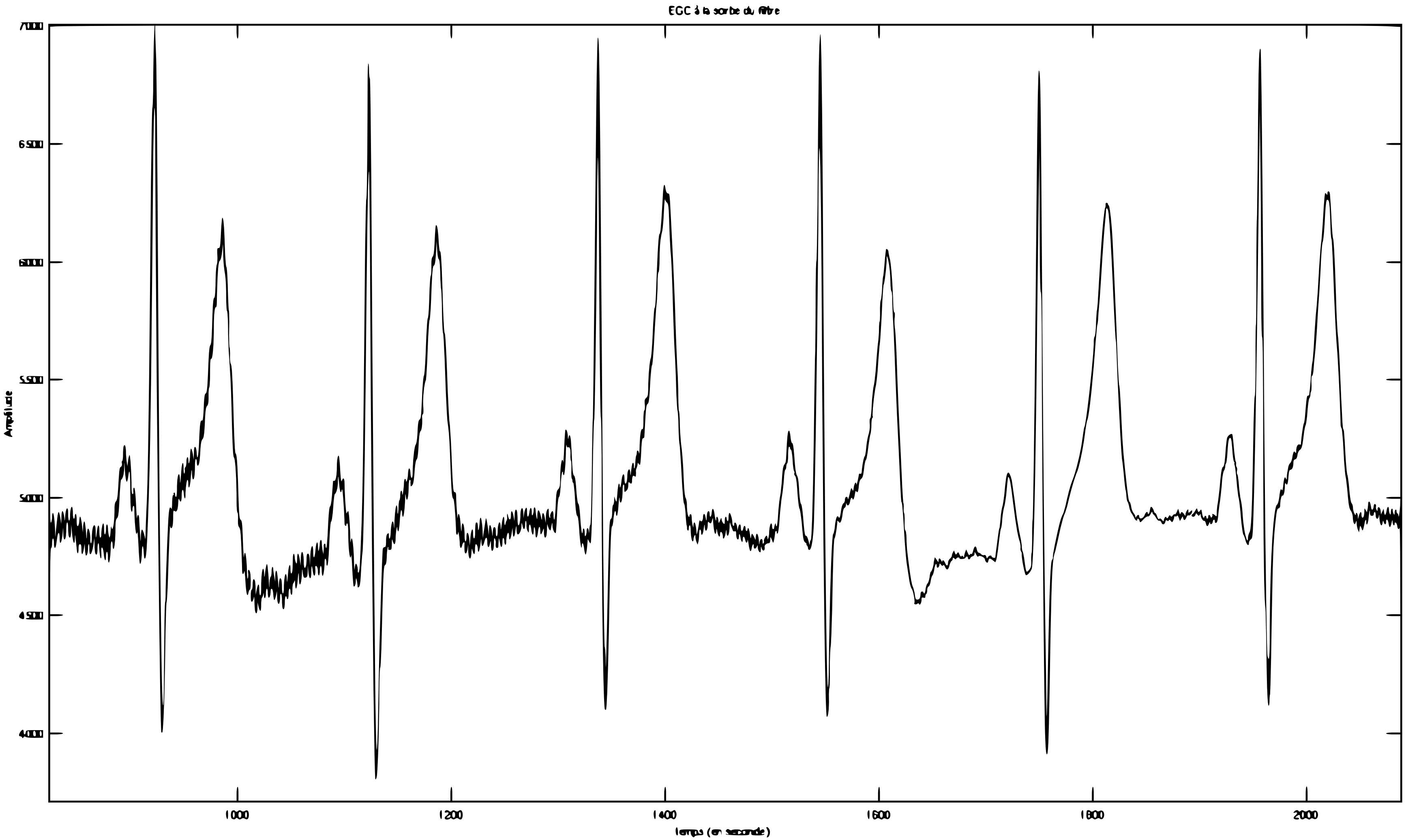
☞ Convolution

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{\mathbb{R}}x(u)h(t-u)du=h(t)*x(t)$$

ECG avant filtrage



ECG après filtrage



Commentaires

- La linéarité ne suffit pas. Contre-exemple

$$y(t) = m(t)x(t)$$

- CNS de Stabilité BIBO

$$\int_{\mathbb{R}} |h(t)|dt < \infty, \text{i.e.}, h \in L^1$$

- Réponse impulsionnelle et Transmittance

$$H(f) = \text{TF}\left[h(t)\right] = \int_{\mathbb{R}} h(t) \exp(-j2\pi f t)dt$$

Si $x(t) = \delta(t)$ alors $y(t) = h(t)$. Ceci permet d'obtenir la seule réponse impulsionnelle possible.

Réalisabilité d'un filtre

- Domaine temporel
  - (1) $h(t)$ réelle
  - (2) $h(t) \in L^1$ (stabilité)
  - (3) $h(t)$ causale (filtre sans mémoire)
- Domaine spectral
  - (1) Symétrie hermitienne : $H^*(-f) = H(f)$
  - (2) ne peut se traduire
  - (3) $H(f) = -j\widetilde{H}(f)$, où $\widetilde{H}(f) = H(f) * \frac{1}{\pi f}$ est la transformée de Hilbert de H (preuve dans le cours manuscrit).

Écriture équivalente

En écrivant $H(f) = H_r(f) + jH_i(f)$, on obtient

$$\begin{aligned} H_r(f) &= H_i(f) * \frac{1}{\pi f} \\ H_i(f) &= - H_r(f) * \frac{1}{\pi f} \end{aligned}$$

Identifier une relation de filtrage linéaire

- Signaux déterministes

$$y(t) = x(t) * h(t) \ \Leftrightarrow \ Y(f) = X(f)H(f)$$

- Signaux aléatoires : Isométrie fondamentale

$$\text{Si } x(t) \overset{I}{\leftrightarrow} e^{j2\pi ft}, \text{ alors } y(t) \overset{I}{\leftrightarrow} e^{j2\pi ft}H(f)$$

- Exemples
  - $y(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k x(t - t_k)$
  - $y(t) = x'(t)$
  - $y(t) = x(t)m(t)$

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
- Chapitre 2 : Filtrage Linéaire
  - Introduction
  - Relations de Wiener-Lee
  - Formule des interférences
  - Exemples
- Chapitre 3 : Traitements Non-linéaires

Relations de Wiener Lee

- Densité spectrale de puissance

$$s_y(f) = s_x(f)|H(f)|^2$$

- Intercorrélation

$$R_{yx}(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau)$$

- Autocorrélation

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)$$

Preuves (signaux à énergie finie)

- Densité spectrale d'énergie

$$s_y(f) = |Y(f)|^2 = |X(f)H(f)|^2 = s_x(f)|H(f)|^2$$

- Intercorrélation

$$\begin{aligned} R_{yx}(\tau) &= \int_{\mathbb{R}} y(u)x^*(u-\tau)du \\ &= \int_{\mathbb{R}} Y(f)\left[e^{-j2\pi f\tau}X(f)\right]^* df \\ &= \int_{\mathbb{R}} X(f)H(f)\left[e^{j2\pi f\tau}X^*(f)\right] df \\ &= \int_{\mathbb{R}} s_x(f)H(f)e^{j2\pi f\tau}df = \text{TF}^{-1}[s_x(f)H(f)] \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

Preuve (signaux à puissance finie)

- Intercorrélation

$$
\begin{aligned}
R_{yx}(\tau) =& \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t)x^*(t-\tau)dt \\
=& \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left[\int_{\mathbb{R}} h(v)x(t-v)dv\right] x^*(t-\tau)dt \\
=& \int_{\mathbb{R}} h(v) \left[\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t-v)x^*(t-\tau)dt\right] dv \\
=& \int_{\mathbb{R}} h(v)R_x(\tau-v)dv \quad \text{CQFD}
\end{aligned}
$$

- etc ...

Preuves (signaux aléatoires)

- Intercorrélation

$$
\begin{aligned}
R_{yx}(\tau) =& E[y(t)x^*(t-\tau)] \\
=& \langle y(t), x(t-\tau) \rangle \\
=& \langle e^{j2\pi ft} H(f), e^{j2\pi f(t-\tau)} \rangle \\
=& \int_{\mathbb{R}} e^{j2\pi ft} H(f) e^{-j2\pi f(t-\tau)} s_X(f) df \\
=& \int_{\mathbb{R}} H(f) e^{j2\pi f\tau} s_X(f) df \\
=& \; h(\tau) * R_x(\tau) \quad \text{CQFD}
\end{aligned}
$$

Preuves (signaux aléatoires)

- Autocorrélation

$$
\begin{aligned}
R_y(\tau) &= E[y(t)y^*(t-\tau)] \\
&= \langle y(t), y(t-\tau)\rangle \\
&= \langle e^{j2\pi ft}H(f), e^{j2\pi f(t-\tau)}H(f)\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{j2\pi ft}H(f)e^{-j2\pi f(t-\tau)}H^*(f)s_x(f)df \\
&= \int_{\mathbb{R}} |H(f)|^2 s_x(f)e^{j2\pi f\tau}df \\
&= \text{TF}^{-1}\{s_x(f)|H(f)|^2\} \\
&= h(\tau) * h^*(-\tau) * R_x(\tau) \quad \text{CQFD}
\end{aligned}
$$

Preuves (signaux aléatoires)

- Autocorrélation

$$R_y(\tau) = \mathsf{TF}^{-1}\{s_x(f)|H(f)|^2\}$$

- Densité Spectrale de Puissance

$$s_y(f) = s_x(f)|H(f)|^2 \quad \text{CQFD}$$

Valeur moyenne

- Propriété

$$E[Y(t)] = E[X(t)]H(0)$$

- Preuve

$$\begin{aligned} E[Y(t)] =& E\left[\int_{\mathbb{R}} X(t-u)h(u)du\right] \\ =& \int_{\mathbb{R}} E[X(t-u)]h(u)du \\ =& E[X(t)] \int_{\mathbb{R}} h(u)du \quad \text{(signal stationnaire)} \\ =& E[X(t)]H(0) \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

Plan du cours

Formule des interférences

- Hypothèses

$$y_1(t) = x(t) * h_1(t) \text{ et } y_2(t) = x(t) * h_2(t)$$

- Conclusion

$$R_{y_1 y_2}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} s_x(f) H_1(f) H_2^*(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

  - Preuve (signaux à énergie finie)

$$R_{y_1 y_2}(\tau) = \int y_1(t) y_2^*(t-\tau) dt = \int_{\mathbb{R}} Y_1(f) \left[Y_2(f) e^{-j2\pi f\tau} \right]^* df$$

$$= \int_{\mathbb{R}} H_1(f) H_2^*(f) e^{j2\pi f\tau} s_x(f) df \quad \text{CQFD}$$

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
- Chapitre 2 : Filtrage Linéaire
  - Introduction
  - Relations de Wiener-Lee
  - Formule des interférences
  - Exemples
- Chapitre 3 : Traitements Non-linéaires

Exemples

- Filtre Passe-bas
  - Transmittance

$$H(f) = \Pi_F(f)$$

  - Réponse impulsionnelle

$$h(t) = F\text{sinc}\left(\pi F t\right)$$

non causale et $\notin L^1 \;\Rightarrow$ troncature + décalage

- Filtres liaisons montante et descendante d'une chaîne de transmission

Filtre adapté : maximisation du SNR

- Signal observé

$$x(t) = s(t) + n(t), \qquad t \in [0, T]$$

$s(t)$ signal déterministe à énergie finie et $n(t)$ signal aléatoire stationnaire de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance $s_n(f)$.

- Filtrage

$$y(t) = y_s(t) + y_n(t) = s(t) * h(t) + n(t) * h(t)$$

- Rapport signal sur bruit à l'instant $t = t_0$

$$\text{SNR}(t_0) = \frac{y_s^2(t_0)}{E\left[y_n^2(t_0)\right]}$$

Expression équivalente du SNR

$$SNR(t_0) = \frac{y_s^2(t_0)}{E\left[y_n^2(t_0)\right]} = \frac{\left|\int_{\mathbb{R}} H(f)S(f)e^{j2\pi f t_0}df\right|^2}{\int_{\mathbb{R}} \left|H(f)\right|^2 s_n(f)df}$$

- Numérateur

$$y_s(t) = TF^{-1}\left[S(f)H(f)\right] = \int_{\mathbb{R}} H(f)S(f)e^{j2\pi f t}df$$

- Dénominateur
  - Wiener Lee

$$s_{y_n}(f) = s_n(f)\left|H(f)\right|^2$$

  - Puissance

$$P_{y_n} = E\left[y_n^2(t_0)\right] = R_{y_n}(0) = \int_{\mathbb{R}} s_n(f)\left|H(f)\right|^2 df$$

Inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\left|\int_{\mathbb{R}} a(f)b^*(f)df\right|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} a(f)a^*(f)df \int_{\mathbb{R}} b(f)b^*(f)df$$

- Numérateur

$$\left|\int_{\mathbb{R}} H(f)S(f)e^{j2\pi f t_0}df\right|^2 = \left|\int_{\mathbb{R}} a(f)b^*(f)df\right|^2$$

avec $a(f) = \sqrt{s_n(f)}H(f)$ et $b(f) = \frac{S^*(f)}{\sqrt{s_n(f)}}e^{-j2\pi f t_0}$.

- Dénominateur

$$\int_{\mathbb{R}} s_n(f)\left|H(f)\right|^2 df = \int_{\mathbb{R}} a(f)a^*(f)df$$

Expression du filtre adapté

- Cauchy-Schwartz

$$SNR(t_0) = \frac{\left|\int_{\mathbb{R}} H(f)S(f)e^{j2\pi f t_0}df\right|^2}{\int_{\mathbb{R}} |H(f)|^2 s_n(f)df} \leq \int_{\mathbb{R}} b(f)b^*(f)df$$

avec égalité pour $a(f) = kb(f)$, i.e.,

$$H(f) = k\frac{S^*(f)}{s_n(f)}e^{-j2\pi f t_0}$$

- Cas d'un bruit blanc

$$H(f) = KS^*(f)e^{-j2\pi f t_0} \Leftrightarrow h(t) = Ks^*(t_0 - t)$$

Symétrie oy + Translation

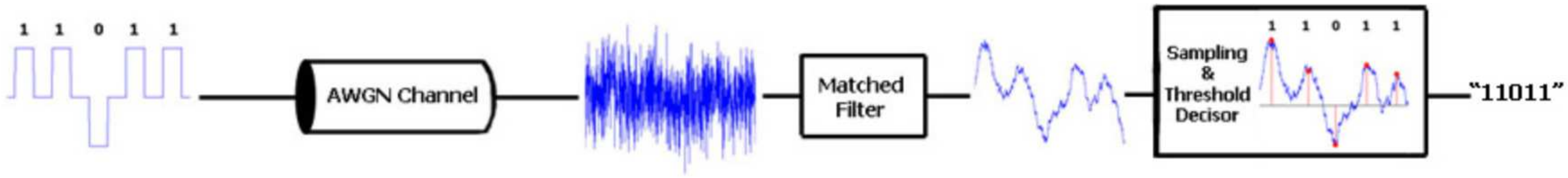
SNR maximum

- Définition

$$SNR(t_0)^{\max} = \int_{\mathbb{R}} b(f)b^*(f)df = \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{N_0} |S(f)|^2 \, df = \frac{2E}{N_0}$$

  où E est l'énergie du signal. On voit donc que le le rapport signal à bruit maximal ne dépend pas de la forme du signal mais uniquement de son énergie.

- Page wikipedia Matched Filter



Que faut-il savoir ?

- Reconnaître une relation de filtrage linéaire
- Densité spectrale de puissance de la sortie d'un filtre
- Intercorrélation entre l'entrée et la sortie d'un filtre
- Moyenne de la sortie d'un filtre
- Formule des interférences
- Réponse impulsionnelle causale et $\in L^1$, sinon ...

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
- Chapitre 2 : Filtrage Linéaire
- Chapitre 3 : Traitements Non-linéaires
  - Introduction
  - Quadrateur
  - Quantification

Introduction

- Transformation sans mémoire

$$y(t) = g\left[x(t)\right]$$

- Exemples
  - Quadrateur

$$y(t) = x^2(t)$$

  - Quantification

$$y(t) = x_Q(t)$$

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
- Chapitre 2 : Filtrage Linéaire
- Chapitre 3 : Traitements Non-linéaires
  - Introduction
  - Quadrateur
  - Quantification

Quadrateur

- Signaux déterministes

$$Y(f) = X(f) * X(f)$$

- Exemples
  - Sinusoïde : $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$

$$Y(f) = \frac{A^2}{2}\delta(f) + \frac{A^2}{4}\left[\delta(f - 2f_0) + \delta(f + 2f_0)\right]$$

    Disparition de la fréquence f_0 et apparition de la fréquence $2f_0$
  - Somme de sinusoïdes : Termes d'intermodulation
  - Sinus cardinal : doublement de la largeur de bande

Signal aléatoire gaussien

- Définition
  On dit qu'un signal aléatoire $X(t)$ est gaussien si pour tout ensemble d'instants $(t_1, ..., t_n)$, le vecteur $[X(t_1), ..., X(t_n)]^T$ est un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^n$.
- Loi univariée de $X(t)$
  La loi de $X(t)$ est alors une loi gaussienne de densité

$$p[X(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \exp\left\{ -\frac{[X(t) - m(t)]^2}{2\sigma^2(t)} \right\}.$$

  Si le signal $X(t)$ est stationnaire au sens large alors

$$m(t) = E[X(t)] = m, \text{ et } \sigma^2(t) = E[X^2(t)] - E^2[X(t)] = R_X(0) - m^2.$$

  donc les paramètres de la densité de $X(t)$ sont indépendants du temps.

Signal aléatoire gaussien

- Loi bivariée de $[X(t), X(t-\tau)]$
La loi du vecteur $\boldsymbol{V}(t) = [X(t), X(t-\tau)]^T$ est alors une loi gaussienne de $\mathbb{R}^2$ de densité

$$p[x(t), x(t-\tau)] = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}(t)|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{V}(t) - \boldsymbol{m}(t)\right]^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(t)\left[\boldsymbol{V}(t) - \boldsymbol{m}(t)\right]\right\}.$$

où $\boldsymbol{m}(t) = [m_1(t), m_2(t)]^T \in \mathbb{R}^2$ est le vecteur moyenne, avec $m_1(t) = E[X(t)]$ and $m_2(t) = E[X(t-\tau)]$, et $\boldsymbol{\Sigma}(t) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est la matrice de covariance définie par

$$\boldsymbol{\Sigma}(t) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2(t,\tau) & \sigma_{1,2}(t,\tau) \\ \sigma_{1,2}(\tau) & \sigma_2^2(t,\tau) \end{pmatrix}$$

où $\sigma_1^2(t,\tau)$ et $\sigma_2^2(t,\tau)$ sont les variances de $X(t)$ et de $X(t-\tau)$ et $\sigma_{1,2}(t,\tau)$ est la covariance $[X(t), X(t-\tau)]^T$. Si le signal $X(t)$ est stationnaire au sens large alors

$\sigma_i(t,\tau) = R_X(0) - m^2$ et $\sigma_{1,2}(t,\tau) = E[X(t)X(t-\tau)] - E[X(t)]E[X(t-\tau)] = R_X(\tau) - m^2$.

donc les paramètres de la densité de $\boldsymbol{V}(t)$ sont indépendants du temps.

Stationnarité de $Y(t) = g[X(t)]$

Si $X(t)$ est un signal aléatoire stationnaire, alors pour toute non-linéarité g, $Y(t)$ est également un signal aléatoire stationnaire. En effet

- Moyenne

$$E[Y(t)] = E\{g[X(t)]\} = \int g[x(t)]p[x(t)]dx(t).$$

  Comme les paramètres de $p[x(t)]$ ne dépendent que de $R_X(0)$ et de m, $E[Y(t)]$ est une quantité indépendante de t.

- Fonction d'autocorrélation

$$E\left[Y(t)Y(t-\tau)\right] = \int\int g[x(t)]g[x(t-\tau)]p[x(t), x(t-\tau)]dx(t)dx(t-\tau).$$

  Comme les paramètres de $p[x(t), x(t-\tau)]$ ne dépendent que de $R_X(\tau)$, $R_X(0)$ et de m, $E[Y(t)Y(t-\tau)]$ est une quantité indépendante de t.

Le signal $Y(t)$ est donc stationnaire au sens large. Sa moyenne dépend de $R_X(0)$ et de m et sa fonction d'autocorrélation dépend de $R_X(\tau)$, $R_X(0)$ et de m.

Quadrateur pour signaux aléatoires

- Théorème de Price
  - Hypothèses
    (X_1, X_2) vecteur Gaussien de vecteur moyenne nul
    $Y_1 = g(X_1)$ et $Y_2 = g(X_2)$
  - Conclusion

$$\frac{\partial E(Y_1 Y_2)}{\partial E(X_1 X_2)} = E\left(\frac{\partial Y_1}{\partial X_1}\frac{\partial Y_2}{\partial X_2}\right)$$

  - Application au quadrateur

$$R_Y(\tau) = 2R_X^2(\tau) + K$$

Détermination de K

- Moments d'une loi Gaussienne centrée

$$E\left(X^{2n+1}\right) = 0, \; E\left(X^{2n}\right) = [(2n-1)\times(2n-3)...\times 3\times 1]\sigma^{2n}$$

- $\tau = 0$

$$K = R_Y(0) - 2R_X^2(0) = 3R_X^2(0) - 2R_X^2(0) = R_X^2(0)$$

- $\tau \to +\infty$

$$K = R_Y(+\infty) - 2R_X(+\infty) = R_X^2(0)$$

- Autocorrélation

$$R_Y(\tau) = 2R_X^2(\tau) + R_X^2(0)$$

Summary

- Autocorrélation

$$R_Y(\tau) = 2R_X^2(\tau) + R_X^2(0)$$

- Densité spectrale de puissance

$$s_Y(f) = 2s_X(f) * s_X(f) + R_X^2(0)\delta(f)$$

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
- Chapitre 2 : Filtrage Linéaire
- Chapitre 3 : Traitements Non-linéaires
  - Introduction
  - Quadrateur
  - Quantification

Quantification

- Principe

$$x_Q(t) = i\Delta q_i = x_i \text{ et } x_i - \frac{\Delta q_i}{2} \leq x(t) \leq x_i + \frac{\Delta q_i}{2}$$

- Définitions
  - Pas de quantification Δq_i
  - Quantification uniforme $\Delta q_i = \Delta q = \frac{2A_{\max}}{N}$
  - Niveaux de quantification: x_i
  - Nombre de bits de quantification $N = 2^n$

Erreur de quantification

- Hypothèse
  $\epsilon(t)$ suit la loi uniforme sur $\left[-\frac{\Delta q}{2}, \frac{\Delta q}{2}\right]$, i.e., $N \geq 2^8$
- Rapport signal sur bruit de quantification

$$\text{SNR}_{\text{dB}} = 10 \log_{10}\left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_\epsilon^2}\right)$$

  - Variance du bruit : $\sigma_\epsilon^2 = \frac{(\Delta q)^2}{12}$
  - Sinusoïde : $\sigma_x^2 = \frac{A^2}{2}$
- Conclusion

$$\text{SNR}_{\text{dB}} = 6n + 1.76$$

Remarques

- Généralisation à un signal Gaussien

$$2S\sigma = N\Delta q \;\Rightarrow\; \text{SNR}_{\text{dB}} = 6n + \ldots$$

- Quantification non uniforme

Que faut-il savoir ?

- Traitement non-linéaire = possibilité de créer de nouvelles fréquences
- Savoir appliquer le théorème de Price. Intérêt ?
- Définition et propriétés de la quantification
- Savoir calculer le rapport signal sur bruit de quantification