TdS

Convolution

$$x(t) * y(t) = \int_{\mathbb{R}} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau$$

Transformée de Fourier

$$X(f) = TF(x(t)) = \int_{\mathbb{R}} x(t)\, e^{-2j\pi f t}\, dt.$$

$$x(t) = TF^{-1}(X(f)) = \int_{\mathbb{R}} X(f)\, e^{2j\pi f t}\, df$$

- $TF(a_1 x_1(x) + a_2 x_2(t)) = a_1\, TF(x_1(t)) + a_2\, TF(x_2(t)).$
- $TF(x(t-t_0)) = e^{-2j\pi f t_0} X(f)$
- $TF(x(at)) = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right).$
- $TF(x * y) = X\, Y$
- $TF(xy) = X * Y.$
- $\int_{\mathbb{R}} x(t)\, y^*(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)\, Y^*(f)\, df.$
- $\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2\, dt = \int_{\mathbb{R}} |X(f)|^2\, df.$
- $TF(x^*(t)) = X^*(-f).$

Dirac

- $\int_{\mathbb{R}} x(t)\, \delta(t-t_0) = x(t_0)$
- $x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$
- $TF(\delta(t-t_0)) = e^{-2j\pi f t_0}$
- $TF(e^{2j\pi f_0 t}) = \delta(f-f_0).$

Peigne de Dirac

$$Ш_T(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t-kT).$$

Heavyside :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Indicatrice :

$$\mathbb{1}_I(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \in I \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Classe des signaux

- Déterministe / Aléatoire
- Energie finie / Puissance finie
- Périodique / Non périodique
- Stationnaire / Non stationnaire.

Périodique $\downarrow$ Puissance

Déterministe NP Energie finie

- Energie : $E = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 \, dt < +\infty$ $\quad \boxed{E = R_x(0).}$
- Autocorrelation : $R_x(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt$
- Intercorrelation : $R_{xy}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)\, y^*(t-\tau)\, dt$
- DS d'energie : $S_x(f) = TF(R_x(\tau))$ $\quad \boxed{S_x(f) = |X(f)|^2}$

NP, Puissance finie :

- Puissance : $P = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt < +\infty$
- $R_x(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt$
- DS de Puissance : $\boxed{S_x(f) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2} = TF(R_x(\tau))$

avec $X_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-2j\pi f t} dt.$

P, puissance finie

- $P = \frac{1}{T_0} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt < +\infty$
- $R_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt$
- DSP : $S_x(f) = TF(R_x(\tau))$ $\quad \boxed{S_x(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 \delta(f - kf_0)}$

avec $x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{2j\pi k f_0 t}.$

Aléatoire :

- Espérance : $m_x = E(x(t,\theta)) = \int_{\theta(\Omega)} P(\theta)\, x(t,\theta)\, d\theta.$
- $R_x(\tau) = E(x(t)\, x^*(t-\tau))$

$\hookrightarrow$ utiliser la linéarité de l'espérance.

Stationnaire :
- Si m_x indépendant du temps, stationnaire d'ordre 1
- Si $R_x(\tau)$ indépendant du temps, stationnaire d'ordre 2.

Aléatoire, puissance moyenne finie
- Puissance : $P = E(|x(t)|^2) < +\infty$
- $R_x(\tau) = E(x(t)\, x^*(t-\tau))$
- DSP : $S_x(f) = TF(R_x(\tau)) = \boxed{\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} E(|X_T(f)|^2)}$

Filtres :
$y(t) = T(x(t))$
- Linéaire : $T(a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)) = a_1 T(x_1(t)) + a_2 T(x_2(t))$.
- Sans mémoire : Sortie à l'instant t ne dépend que de l'entrée à t.
- Causal : Sortie à t ne dépend que de l'entrée à $t' \leq t$.
- Invariant par décalage : $y(t-t_0) = T(x(t-t_0))$.

FLTD :
- Réponse impulsionnelle : $h = T(\delta)$
- Stabilité : stable $\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} |h(t)|\, dt < +\infty$
- Propriétés : $y(t) = x(t) * h(t)$

$\Leftrightarrow Y(f) = X(f)\, H(f)$

$H(f)$: transmittance / fonction de transfert. $H(f) = |H(f)|\, e^{j\arg(H(f))}$

- Réalisable : - Réponse impulsionnelle réelle
  - Causal
  - Stable.

Linéarité :

$$y(t) = T(e^{2j\pi f t})$$
$$= A(f,t)\, e^{2j\pi f t}.$$

- Si $A(f,t)$ indépendant du temps : Filtre linéaire et $H(f) = A(f)$
- Sinon, pas linéaire.

$R_{yx} = R_h(\tau) * R_x(\tau)$.

Relations de Weiner-Lee :

- $S_y(f) = S_x(f) \, |H(f)|^2$
- $R_y(\tau) = h(\tau) * h^*(-\tau) * R_x(\tau)$
  $= R_h(\tau) * R_x(\tau)$ (Déterministes).
- $E(y(t)) = H(0) \, E(x(t))$ (Aléatoire).

Thm de Price (non linéaire)

$$\frac{\partial E(Y_1 Y_2)}{\partial E(X_1 X_2)} = E\left(\frac{\partial Y_1}{\partial X_1} \frac{\partial Y_2}{\partial X_2}\right).$$ $X = (X_1, X_2)$ vecteur gaussien.

- avec $X_1 = x(t)$ $\quad p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2} X^T \Sigma X}$
  $X_2 = x(t-\tau)$

$$\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} = E\left(\frac{\partial y(t)}{\partial x(t)} \frac{\partial y(t-\tau)}{\partial x(t-\tau)}\right). \quad \Sigma = \begin{pmatrix} R_x(0) & R_x(\tau) \\ R_x(\tau) & R_x(0) \end{pmatrix}.$$

Quantification $x_Q(t) = i\Delta q = x_i$. avec $\Delta q = \frac{2A_{max}}{N} \rightarrow x \in [-A_{max}, A_{max}]$

$N = 2^n$ $\quad n$ nb de bits

$= x(t) + \varepsilon(t)$.

$$SNR_{dB} = 10 \log\left(\frac{P_x{}^2}{P_\varepsilon{}^2}\right) \approx 6n + 1{,}76.$$

Formule Interpol de Shanon : Permet de recréer un signal continu à partir de points discrets

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n, T_e) \, \mathrm{sinc}\left(\frac{t - nT_e}{T_e}\right).$$

Bruit blanc : Signal aléatoire qui a la même valeur de DSP sur toutes les fréquences.

Filtre anti repliement. : Filtre analogique qui supprime les $f > \frac{f_e}{2}$.

Shannon : $F_e > 2f_0$.