Loi faible des grands nombres

Partiel Probas

Thm limite centrale : $Y_n = \frac{\sum_{k=1} X_k - nm}{\sigma \sqrt{n}}$.

Lois :

- Bernoulli : $X \sim Be(p)$. $E(X) = p$ $V(X) = p(1-p)$.
- Binomiale : $X \sim B(n,p)$ $E(X) = np$ $V(X) = np(1-p)$.
- Poisson : $X \sim P(\lambda)$ $E(X) = \lambda$ $V(X) = \lambda$.
- Géométrique : $X \sim G(p)$ $E(X) = \frac{1}{p}$ $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$.
- Uniforme : $X \sim U([a,b])$ $p(x) = \frac{1}{b-a}$
  $E(X) = \frac{a+b}{2}$ $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.
- Normale/Gaussienne : $X \sim N(m, \sigma^2)$ $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2}$.
  $E(X) = m$ $V(X) = \sigma^2$.
- Gamma : $X \sim Ga(\alpha, \beta)$ $p(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$
  $E(X) = \frac{\beta}{\alpha}$ $V(X) = \frac{\beta}{\alpha^2}$.
- Chi 2 : $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi_n^2$ $p_n(y) = \frac{y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})}$

Fonction de répartition : $F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)du \Rightarrow F'(x) = p(x)$

Fonction génératrice : $\Theta_X(u) = E(e^{uX})$

Fonction caractéristique : $\phi_X(u) = E(e^{iuX})$.

Changement de variable : $Y = g(X)$.

- Discrète : $P(X = k) = P(Y = g(k))$.
- Continue avec g bijective : $\boxed{p_Y(y) = p_X(g^{-1}(y)) \left|\frac{dx}{dy}\right|}$.
- Continue, g bijective / morceaux : par espaces.
- Continue, g non bijective : avec $F(x)$, $\Theta_X(u)$ ou $\phi_X(u)$.

Indépendance : $P(X \cap Y) = P(X)P(Y)$. $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \alpha(X) \perp\!\!\!\perp \beta(Y)$.

Covariance : $\text{cov}(X,Y) = E\big((X - E(X))(Y - E(Y))\big) = E(XY) - E(X)E(Y)$. $E(XY) = \iint xy\, p(x,y)\, dx dy$

Coefficient de corrélation : $r(X,Y) = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$. $-1 \leq r(X,Y) \leq 1$.

Changement de variable : $(U, V) = g(X, Y)$.

- Discret : $P(U = u_k, V = v_\ell) = \sum_{i,j / g(x_i, y_j) = u_k, v_\ell} P(X = x_i, Y = y_j)$.

- Continue, g bijective : $\boxed{p_{U,V}(u,v) = p_{X,Y}(g^{-1}(x,y))\,|\det J|}$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

- Continue, g bijective / morceaux : sur les intervalles.

↳ Utiliser une variable intermédiaire

↳ Utiliser fonction de répartition / caractéristique.

- Gaussien : $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ $X \sim N_n(m, \Sigma)$ $m \in \mathbb{R}^n$, $\Sigma \in S_n(\mathbb{R})$.

$$x \in \mathbb{R}^n. \quad p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det(\Sigma)}} e^{-\frac{1}{2}(x-m)^T \Sigma (x-m)}.$$

$$\Phi_X(u) = E(e^{iu^TX}) = e^{iu^Tm - \frac{1}{2}u^T\Sigma u}$$

$$\Theta_X(u) = E(e^{u^TX}) = e^{u^Tm + \frac{1}{2}u^T\Sigma u}.$$

- Changement de variable : $Y = AX + b$. $Y \sim N_p(Am + b, A\Sigma A^T)$.

- Théorème de Cochran :
  - $X \sim N_n(m, \sigma^2 I_n)$
  - $\mathbb{R}^n = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$
  - $Y_k = P_k X$

  $\rightarrow Y_k = N_n(P_k m, \sigma^2 P_k)$

- Convergence.
  - Loi : $F_n(x)$ CVS vers $F(x)$ $\Leftrightarrow$ $X_n \xrightarrow{L} X$
  - Probabilité : $P(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0$ $\Leftrightarrow$ $X_n \xrightarrow{P} X$
  - Moyenne quadratique : $E((X_n - X)^2) \to 0$ $\Leftrightarrow$ $X_n \xrightarrow{mq} X$
  - Presque sûre : $X_n(\omega) \to X(\omega)$ $\Leftrightarrow$ $X_n \xrightarrow{PS} X$.

- Gauss : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.