Sem déf pos : $x^T A x \geq 0$.

Optimisation.

Pb aux moindres carrés $(P) : \begin{cases} \min\ f(\beta) = \frac{1}{2} \| r(\beta) \|^2 \\ \beta \in C \end{cases}$

$$r(\beta) = \sum_i \text{mesures}_i - \text{modèle}_i(\beta)$$

- **Linéaire** si $r(\beta) = y - X\beta$

$$\nabla f(\beta) = X^T X \beta - X^T y. \qquad \beta^* \text{ solution } \Leftrightarrow \nabla f(\beta^*) = 0$$

- **Sans contraintes** si $C = \mathbb{R}^n$.

⚠ minimum global $\neq$ minimum local
↳ solution de (P).

Forme bilinéaire : $f(x, y) = X^T A Y$

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} y_1 & \cdots & y_n \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array} & \begin{pmatrix} x_1 y_1 & & \\ & & \\ x_n y_1 & & * \end{pmatrix} \end{array}$$

Forme quadratique $q(x) = f(x, x) = X^T A X$

Fonctionnelle quadratique généralisée

- $f(x) = \frac{1}{2} X^T A X - B^T X + c$
- $f'(x) = Ax - B$
- $f''(x) = A$
- $\min(f) : \hat{x} \,/\, A\hat{x} = B$
- $f(\hat{x}) = -\frac{1}{2} B^T A B + c$

Gradient : $f'(a) \cdot h = \langle \nabla f(a), h \rangle = h^T \nabla f(a) = J_f(x) \times h$.

Hessienne : $f''(a) \cdot (h, k) = \langle \nabla^2 f(a) h, k \rangle = \langle h, \nabla^2 f(a) k \rangle = h^T \nabla^2 f(a) k$

$$\nabla^2 f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1} & & \ddots \end{pmatrix}.$$

$$(g \circ f)'(x) \cdot h = g'(f(x)) \cdot (f'(x) \cdot h).$$

Convexité :
- $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.
- $f(y) - f(x) \geqslant f'(x) \cdot (y-x)$ ($> \Leftrightarrow$ strictement)
- $f''(x) \cdot (y-x, y-x) \geqslant 0$ ($> \Rightarrow$ strictement).
- vp de Hessienne $\geqslant 0$
- $f''(x)$ semi-def pos sur C convexe.

Différentielle : $f(a+h) = f(a) + \underbrace{f'(a)}_{\text{linéaire et continue.}} \cdot h + \frac{1}{2} f''(a) \cdot (h,h) + \|h\|^2 \varepsilon(h)$

SOLUTIONS DE (P)

Existence :
- f continue, C compact $\Rightarrow \exists$ solution
- C fermé non-vide, f continue et coercive $\Rightarrow \exists$ solution.

Unicité :
- C convexe, $f : C \to \mathbb{R}$ strictement convexe $\Rightarrow$ max 1 solution.

Coercive : $f(x) \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$

- C convexe, $f : C \to \mathbb{R}$ convexe $\Rightarrow$ min local = min global.

CN 1 : $f(x^*)$ min local $\overset{D_1}{\Rightarrow} f'(x^*) = 0$

CN 2 : $f(x^*)$ min local $\overset{D_2}{\Rightarrow} f''(x^*)$ semi def pos.

CS 2 : $f'(x^*) = 0$, $f''(x^*)$ semi def pos $\overset{D_2}{\Rightarrow} x^*$ min local.

⚠ CN 1 + CS 2 + f convexe $\Leftrightarrow x^*$ solution.

Méthode :
- On résoud $f'(x) = 0$:
- pour les x candidats, on évalue $f''(x)$ (semi def pos)
- on vérifie la convexité.

Newton : ~~linéaire~~

- $x^{(k+1)} = x^{(k)} - J_f(x^{(k)})^{-1} f(x^{(k)})$. (linéaire)

- Non linéaire : $f(\beta) = \frac{1}{2} \|r(\beta)\|^2 = \frac{1}{2} \sum_i r_i^2(\beta)$.

$$\nabla f(\beta) = \sum_i r_i(\beta) \nabla r_i(\beta) = J_r(\beta)^T r(\beta).$$

$$\nabla^2 f(\beta) = \sum_i r_i(\beta) \nabla^2 r_i(\beta) + \sum_i \nabla r_i(\beta) \nabla r_i(\beta)^T = S(\beta) + J_r(\beta)^T J_r(\beta)$$

$$\beta^{(k+1)} = \beta^{(k)} - (\nabla^2 f(\beta))^{-1} \nabla f(\beta).$$

Gauß-Newton

$$s = \beta - \beta^{(k)}$$

$$f_k(s) = \frac{1}{2} \| r(\beta^{(k)}) + J_r(\beta^{(k)}) s \|^2$$

$$\beta^{(k+1)} = \beta^{(k)} - \left(J_r(\beta^{(k)})^T J_r(\beta^{(k)}) \right)^{-1} J_r(\beta^{(k)})^T r(\beta^{(k)}).$$

EDP

Dérivée partielle

- $u'_i = \dfrac{u_{i+1} + u_i}{h}$

- $u'_i = \dfrac{u_{i-1} - u_i}{h}$

- $u'_i = \dfrac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$.

- $u''_i = \dfrac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$

Méthode :

$$x_i = a + ih$$

$$h = \frac{b-a}{N+1}$$

$$(1) \begin{cases} u''(x) + c(x) u(x) = f(x) \\ u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta. \end{cases}$$

$$u_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}.$$

- remplacer (1) par u_i, $c(x_i)$, $f(x_i)$ $\forall i \in [\![1, N]\!]$.
- Mettre sous forme $A_h u_h = B_h$
- $u_h = A_h^{-1} B_h$.

⚠ $u(x_i + h) = u(x_i) + h u'(x_i) + \frac{h^2}{2} u''(x_i) + \frac{h^3}{3!} u'''(x_i) \cdots$

<u>Erreur de consistance</u>

$$\mathcal{E}_h(u) = A_h \Pi_h(u) - B_h \quad , \quad \Pi_h(u) = \begin{pmatrix} u(x_1) \\ \vdots \\ u(x_N) \end{pmatrix}.$$

Shéma consistant pour la norme $\|.\| \Leftarrow \|\mathcal{E}_h(u)\| \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

$\|\mathcal{E}_h(u)\| \leq C(h^p + \Delta t^q) \Rightarrow$ shéma consistant d'ordre p (espace)
q (temps)

<u>Stabilité:</u>

$$u_h^{n+1} = B u_h^n + \Delta t F^n.$$

Shéma stable $\Leftrightarrow \exists C \geq 0 \ / \ \sup \|B^n\| \leq C$

<u>Convergence:</u> Shéma convergent pour $\|.\|$ si $\sup \|u_h^n - \Pi_h^n(u)\| \to 0$.

- C convexe, f convexe sur C, dérivable sur C :

x^* minimum global sur C

$\Leftrightarrow x^*$ minimum local sur C

$\Leftrightarrow \forall y \in C, \ f'(x^*) \cdot (y - x^*) \geq 0$.