



# Rapport du projet de traitement de signal

Réalisé par : Achraf Marzougui Et Felix Foucher

Département Sciences du Numérique - Première année 2022-2023

## 1 Table des matieres

### 1.1 Introduction

### 1.2 Modem de fréquence

#### 1.2.1 Génération du signal NRZ

#### 1.2.2 Génération du signal $x$

### 1.3 Canal de transmission à bruit additif, blanc et Gaussien

### 1.4 Démodulation par filtrage

#### 1.4.1 Synthèse du filtre passe-bas

#### 1.4.2 Synthèse du filtre passe-haut

#### 1.4.3 Résultats obtenus avec un ordre des filtres de 61

#### 1.4.4 Modification de l'ordre des filtres

#### 1.4.5 Utilisation des fréquences de la recommandation V21.

### 1.5 Démodulateur de fréquence adapté à la norme V21

#### 1.5.1 Synchronisation idéale : Principe de fonctionnement de ce récepteur

#### 1.5.2 Résultats obtenus

#### 1.5.3 Gestion d'une erreur de synchronisation de phase porteuse

#### 1.5.4 Gestion d'erreur de synchronisation :Impact d'une erreur de phase porteuse sur le modem implanté précédemment

#### 1.5.5 Principe de fonctionnement de cette nouvelle version du modem de fréquence

#### 1.5.6 Résultats obtenus.

## 2 Table des Figures

### 2.1 Figure 1 : Génération du signal $NRZ$

### 2.2 Figure 2: La densité spectrale du signal $NRZ$

### 2.3 Figure 3 : Génération du signal $x(t)$

### 2.4 Figure 4: La densité spectrale du signal $x(t)$

### 2.5 Figure 5: La DSP de $x(t)$ et la réponse en fréquence du passe - bas

### 2.6 Figure 6: La sortie du signal $x(t)$ généré par le filtre passe - bas

- 2.7 Figure 7: La DSP de la sortie du signal  $x(t)$  généré par le filtre passe - bas
- 2.8 Figure 8: La DSP de  $x(t)$  généré par le filtre passe - haut
- 2.9 Figure 9: La sortie du signal  $x(t)$  généré par le filtre passe - haut
- 2.10 Figure 10: La DSP de la sortie du signal  $x(t)$  générée par le filtre passe - haut
- 2.11 Figure 11: Le signal perturbé pour un rapport signal sur bruit égale à 50

## Introduction :

L'objectif de ce projet est d'implanter un modem suivant la recommandation V21. Cette norme travaille avec un débit maximal de 300 bits par seconde. Ces bits sont transformés en morceaux de cosinus de deux fréquences différentes 1080 Hz et 980 Hz.

## Modem de fréquence :

### 1. Construction du signal modulé en fréquence

La première étape du projet consiste à réaliser la modulation de fréquence, i.e. transformer l'information binaire à transmettre en un signal modulé en fréquence (figure) Le signal modulé en fréquence  $x(t)$  est généré de la manière suivante :

$$x(t) = (1 - NRZ(t)) \times \cos(2\pi F_0 t + \varphi_0) + NRZ(t) \times \cos(2\pi F_0 t + \varphi_0)$$

Où NRZ(t) est un signal de type NRZ polaire formé à partir de la suite de bits à transmettre en codant les 0 et les 1 par des niveaux 0 et 1 de durée  $T_s$  secondes . et  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  sont des variables aléatoires indépendantes uniformément réparties sur  $[0, 2\pi]$  qui peuvent être obtenues sous Matlab en utilisant  $rand * 2 * pi$ .

### Génération du signal NRZ

1-On répète  $N_s$  fois les bits avec  $N_s = \frac{F_e}{300}$  (voir le code matlab)(Figure 1)

2-Le débit est bien 300 *bits/s*. La figure ( ci-dessus) représente le tracé de NRZ donc il y'a transmission de 300 *bits/s*.

3-La densité spectrale de puissance estimée avec le périodogramme est :

$\frac{1}{N} \times \text{abs}(\text{fft}(S_x))$  , la figure 1 contient cette densité.

## Génération du signal modulé en fréquence $x(t)$

1-On génère aléatoirement deux phases par la fonction randn et on utilise la formule :  $x(t) = (1 - NRZ(t)) \times \cos(2\pi F_0 t + \varphi_0) + NRZ(t) \times \cos(2\pi F_1 t + \varphi_1)$  ,(Figure 3).

2- Calcul de  $S_x(f)$  en fonction de  $S_{NRZ}(f)$  (Figure 4) :

On a :  $S_x(f) = TF[R_x(\tau)]$  on calculera d'abord  $R_x(\tau)$ .

On a :  $R_x(\tau) = E[x(t) \times x(t - \tau)]$

Donc :  $R_x(\tau) = E[(1 - NRZ(t))\cos(2\pi F_0 t + \varphi_0) + NRZ(t)\cos(2\pi F_1 t + \varphi_1)] \cdot [(1 - NRZ(t - \tau))\cos(2\pi F_0(t - \tau) + \varphi_0) + NRZ(t - \tau)\cos(2\pi F_1(t - \tau) + \varphi_1)]$

Donc après simplification des termes et par linéarité de l'espérance , on obtient :

$$\begin{aligned} R_x(\tau) = & E[(1 - NRZ(t))(1 - NRZ(t - \tau))\cos(2\pi F_0 t + \varphi_0)\cos(2\pi F_0(t - \tau))] \\ & + E[NRZ(t - \tau)(1 - NRZ(t))\cos(2\pi F_0 t + \varphi_0)\cos(2\pi F_1(t - \tau) + \varphi_1)] \\ & + E[NRZ(t)(1 - NRZ(t - \tau))\cos(2\pi F_1 t + \varphi_1)\cos(2\pi F_0(t - \tau) + \varphi_0)] \\ & + E[NRZ(t)NRZ(t - \tau)\cos(2\pi F_1 t + \varphi_1)\cos(2\pi F_1(t - \tau) + \varphi_1)] \end{aligned}$$

et par indépendances des variables aléatoires  $NRZ(t)$  ,  $\varphi_0$  ,  $\varphi_1$  , on pourra simplifier ces espérances :

$$\begin{aligned} R_x(\tau) = & E[(1 - NRZ(t))(1 - NRZ(t - \tau)) \cdot E[\cos(2\pi F_0 t + \varphi_0)\cos(2\pi F_1 t + \varphi_1)]] \\ & + E[(1 - NRZ(t))NRZ(t - \tau)] \cdot E[\cos(2\pi F_0 t + \varphi_0)\cos(2\pi F_1(t - \tau) + \varphi_1)] \\ & + E[NRZ(t)(1 - NRZ(t - \tau))] \cdot E[\cos(2\pi F_1 t + \varphi_1)\cos(2\pi F_0(t - \tau) + \varphi_0)] \\ & + E[NRZ(t)NRZ(t - \tau)] \cdot E[\cos(2\pi F_1 t + \varphi_0)\cos(2\pi F_1(t - \tau) + \varphi_1)] \end{aligned}$$

Et on utilise ensuite la formule trigonométrique :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2} \cdot (\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

Donc :

$$R_x(\tau) =$$

$$\begin{aligned} & E[(1-NRZ(t))(1-NRZ(t-\tau))] \cdot \frac{1}{2} \cdot (E[\cos(2\pi F_0(2t-\tau) + 2\varphi_0)] + E[\cos(2\pi F_0 t + \varphi_0)]) \\ & + E[(1-NRZ(t))NRZ(t-\tau)] \cdot E[\cos(2\pi F_0 t + \varphi_0)] \cdot E[\cos(2\pi F_0 t + \varphi_1)] \\ & + E[(1-NRZ(t-\tau))NRZ(t)] \cdot E[\cos(2\pi F_0 t + \varphi_0)] \cdot E[\cos(2\pi F_0 t + \varphi_1)] \\ & + E[NRZ(t)NRZ(t-\tau)] \cdot E[\cos(2\pi F_1(2t-\tau) + 2\varphi_1)] + E[\cos(2\pi F_1 \tau)] \end{aligned}$$

Et comme :

$E[NRZ(t)] = \frac{1}{2}$  et l'espérance d'une constante est elle meme et le fait que l'espérance du cos périodique sur  $[0, 2\pi]$  est nul on trouve enfin que :

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2} \cdot R_{NRZ}(\tau) \cdot (\cos(2\pi F_1 \tau) + \cos(2\pi F_0 \tau))$$

Et en passant à la transformée de Fourier on aura :

$$S_x(f) = \frac{1}{4} \cdot S_{NRZ}(f) * (\delta(f - F_0) + \delta(f + F_0) + \delta(f - F_1) + \delta(f + F_1))$$

Alors :  $S_x(f) = \frac{1}{4} \cdot (S_{NRZ}(f - F_0) + S_{NRZ}(f + F_0) + S_{NRZ}(f - F_1) + S_{NRZ}(f + F_1))$

## Canal de transmission à bruit additif, blanc et Gaussien :

Nous allons considérer que le canal de propagation ajoute au signal émis un bruit que l'on suppose blanc et Gaussien et qui modélise les perturbations introduites. La puissance du bruit Gaussien à ajouter devra être déduite du rapport signal sur bruit (SNR : Signal to Noise Ratio) souhaité pour la transmission donnée en dB :  $SNR_{db} = 10 \log_{10} (\frac{P_x}{P_b})$ . Où  $P_x$  représente la puissance du signal modulé en fréquence et  $P_b$  la puissance du bruit ajouté.

## 4-Démodulation par filtrage :

La figure 3 présente le récepteur implanté pour retrouver, à partir du signal modulé en fréquence bruité, le message binaire envoyé.

Un filtre passe-bas permet de filtrer les morceaux de cosinus à la fréquence,  $F_0 = 6000 \text{ Hz}$ , tandis qu'un filtre passe-haut permet de filtrer les morceaux de cosinus à la fréquence  $F_1 = 2000 \text{ Hz}$ . Une détection d'énergie réalisée tous les  $T_s$  secondes permettent de récupérer, à partir des signaux filtrés, les bits 0 et 1 transmis.

**4-1 Synthèse du filtre passe-bas:** On prend l'ordre du filtre égale à 61

1-Sa réponse impulsionnelle est donnée par :

$$h = 2 \times \frac{F_c}{F_e} \times \text{sinc}(2 \times F_c \times [-\frac{\text{ordre} - 1}{2} \times T_e : T_e : \frac{\text{ordre} - 1}{2} \times T_e])$$

2-Et le filtre sera implanté par la fonction  $\text{filter}(h, 1, x_{\text{padded}})$ .

**4-2 Synthèse du filtre passe-haut:** On prend l'ordre du filtre égale à 61

1-Sa réponse impulsionnelle est donnée par :

$$h = -2 \times \frac{F_c}{F_e} \times \text{sinc}(2 \times F_c \times [-\frac{\text{ordre} - 1}{2} \times T_e : T_e : \frac{\text{ordre} - 1}{2} \times T_e])$$

2-Et le filtre sera implanté par la fonction  $\text{filter}(h, 1, x_{\text{padded}})$ .

**4-3 Résultats obtenus avec un ordre des filtres de 61:**

(Figures : 5,6,7,8,9,10)

**4-4 Modification de l'ordre des filtres:**

**4-5 Utilisation des fréquences de la recommandation V21:**

On constate que pour un rapport signal sur bruit petit on a un taux d'erreur plus grand, cela vient du fait que lorsqu'on fait décroître le rapport la puissance du bruit devient plus grande et puis risque de détection correcte de l'énergie des différents fragments du signal. En prenant un rapport égal à 50dB, on obtient l'image de la figure ( Figure 11).

## 5-Démodulateur de fréquence adapté à la norme V21:

**5-1 Contexte de synchronisation idéale**

La figure du Démodulation FSK, présente le récepteur implanté afin de retrouver, dans un contexte de synchronisation idéale, le message binaire envoyé à partir du signal modulé en fréquence suivant la recommandation V21 .

### 5-1-1 Principe de fonctionnement de ce récepteur :

On va supposer que  $x(t) = \cos(2\pi F_0 t + \varphi_0)$  (les paramètres  $(F_0, \varphi_0)$  et  $(F_1, \varphi_1)$  jouent des rôles symétriques)

On devra calculer (Selon les deux blocs du circuit de la démodulation FSK):

$$\int_0^{T_s} x(t) \cdot \cos(2\pi F_0 t + \varphi_0) dt, \int_0^{T_s} x(t) \cdot \cos(2\pi F_1 t + \varphi_1) dt$$

Donc :

$$\begin{cases} \int_0^{T_s} \cos(2\pi F_0 t + \varphi_0)^2 dt \\ \int_0^{T_s} \cos(2\pi F_0 t + \varphi_0) \cdot \cos(2\pi F_1 t + \varphi_1) dt \end{cases}$$

Pour la première intégrale, l'intégrande est toujours positif donc l'intégrale est positive.

Pour la deuxième intégrale, l'intégrande fluctue rapidement entre des valeurs positives et négatives, c'est presque nulle.

### 5-1-2 Résultats obtenus :

les explications + figures

## 5-2 Gestion d'une erreur de synchronisation de phase porteuse

### 5.2.1 Impact d'une erreur de phase porteuse sur le modem implanté précédemment

les explications

### 5.2.2 Principe de fonctionnement de cette nouvelle version du modem de fréquence

les explications + figure

### 5.2.3 Résultats obtenus



De même on suppose que  $x(t) = \cos(2\pi F_0 t + \varphi_0)$  et on raisonnera sur le circuit en bas ( celui qui contient F1):

On peut écrire  $x(t)$  comme :

$$x(t) = \cos(2\pi F_0 t) \cdot \cos(\varphi_0) - \sin(2\pi F_0 t) \cdot \sin(\varphi_0)$$

Pour le bloc en haut du circuit bas (contenant F1), l'intégrale est :

$$\int_0^{T_s} \cos(2\pi F_0 t + \varphi_0)^2 \cdot \cos(\varphi_0) \, dt - \int_0^{T_s} \cos(2\pi F_0 t) \cdot \sin(\varphi_0) \cdot \sin(2\pi F_0 t) \, dt$$

Et pour le circuit qui est en bas :

$$\int_0^{T_s} \cos(2\pi F_0 t) \cdot \cos(\varphi_0) \cdot \sin(2\pi F_0 t) \, dt - \int_0^{T_s} \sin(2\pi F_0 t + \varphi_0)^2 \cdot \sin(\varphi_0) \, dt$$

et comme  $2\cos(y)\sin(y) = \sin(2y)$  , alors les termes:

$\int_0^{T_s} \cos(2\pi F_0 t) \cdot \sin(\varphi_0) \cdot \sin(2\pi F_0 t) \, dt$  ,  $\int_0^{T_s} \cos(2\pi F_0 t) \cdot \cos(\varphi_0) \cdot \sin(2\pi F_0 t) \, dt$  sont preques nulles.

On trouve alors respectivement pour les deux blocs en haut et en bas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{T_s} \mathbf{cos}(2\pi F_0 t)^2 \cdot \cos(\varphi_0) \, dt \\ \int_0^{T_s} \mathbf{sin}(2\pi F_0 t)^2 \cdot \sin(\varphi_0) \, dt \end{array} \right.$$

Et comme ces deux intégrales sont un peu près égaux , notons  $I$  cette valeur commune , après élévation au carré et somme on conclut que les deux circuits produisent cette valeur  $I$ .

Alors , lorsque la valeur à la sortie de ce circuit est *positive*, c'est à dire le bit correspond à un bit 0. Le même raisonnement s'applique pour la partie en haut du circuit (celle de  $F_0$ ) donne le résultat.

## 6-Conclusion:

En travaillant avec la recommandation V21, on remarque que le démodulateur FSK est adapter pour restituer du signal modulé en fréquence  $x(t)$ , en minimisant en même temps le taux d'erreur binaire entre l'information émise et celle restituée.

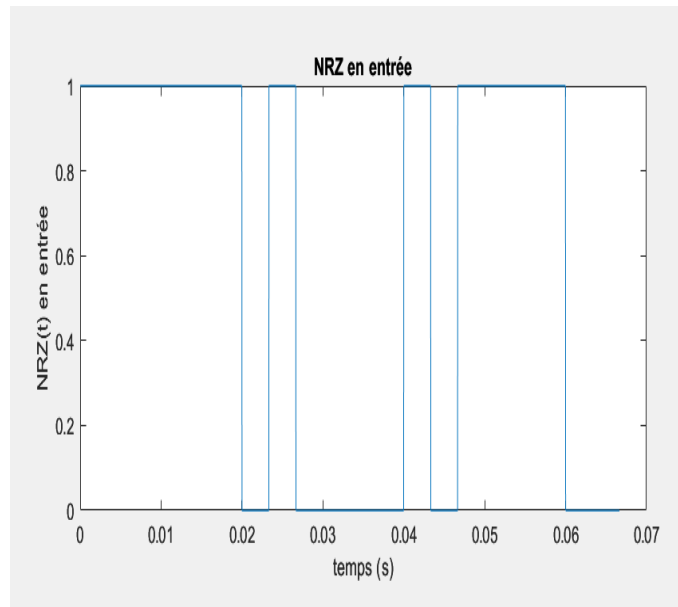


Figure 1: Génération du signal NRZ

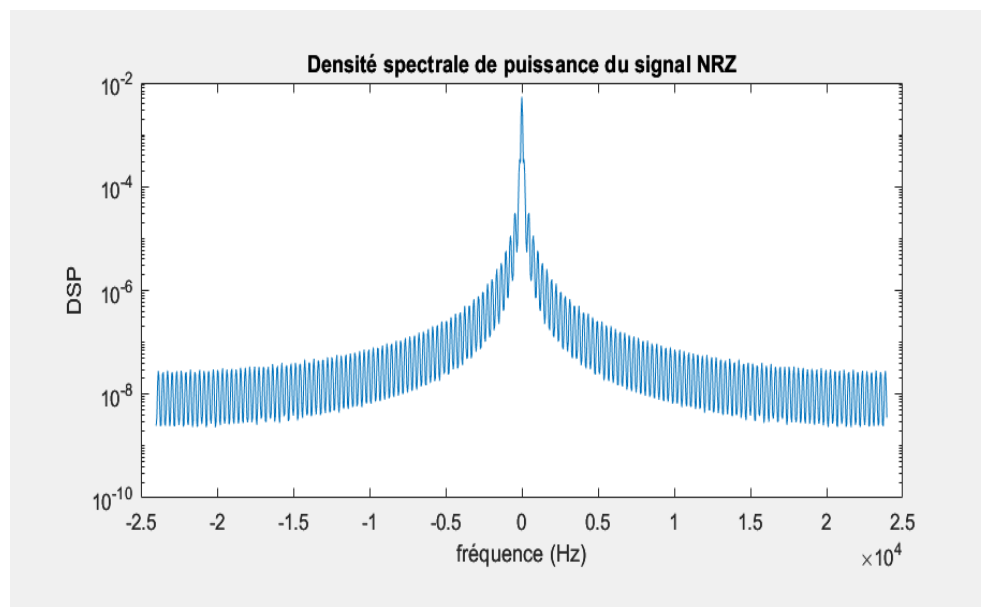


Figure 2: La densité spectrale du signal *NRZ*

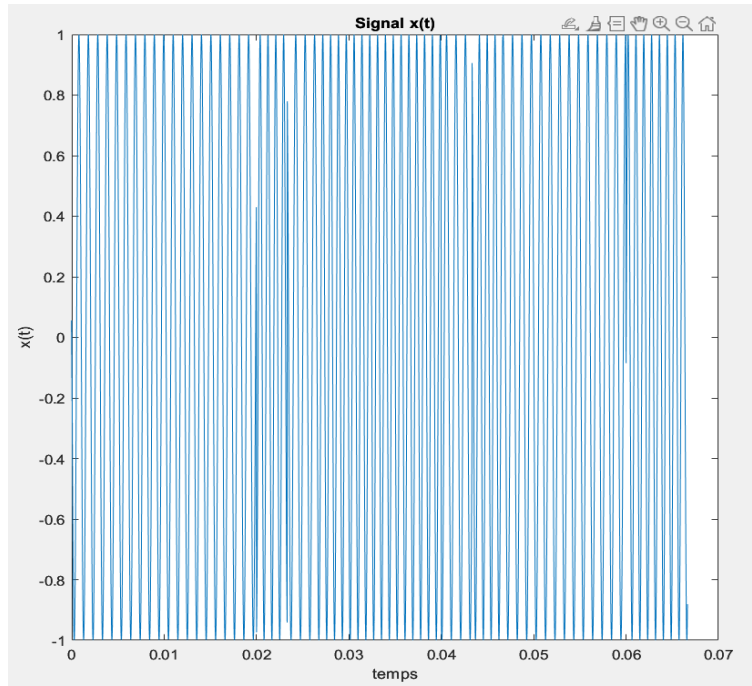


Figure 3: Génération du signal  $x(t)$

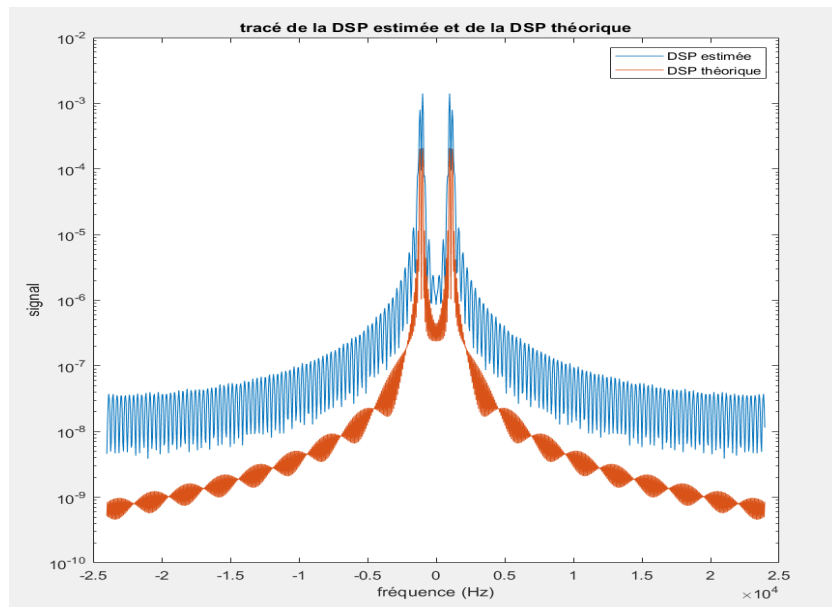


Figure 4: La densité spectrale du signal  $x(t)$

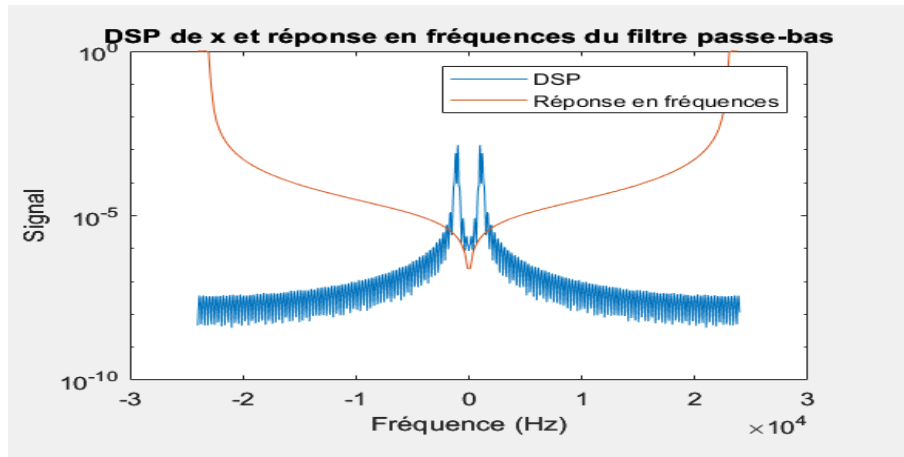


Figure 5: La DSP de  $x(t)$  et la réponse en fréquence du passe - bas

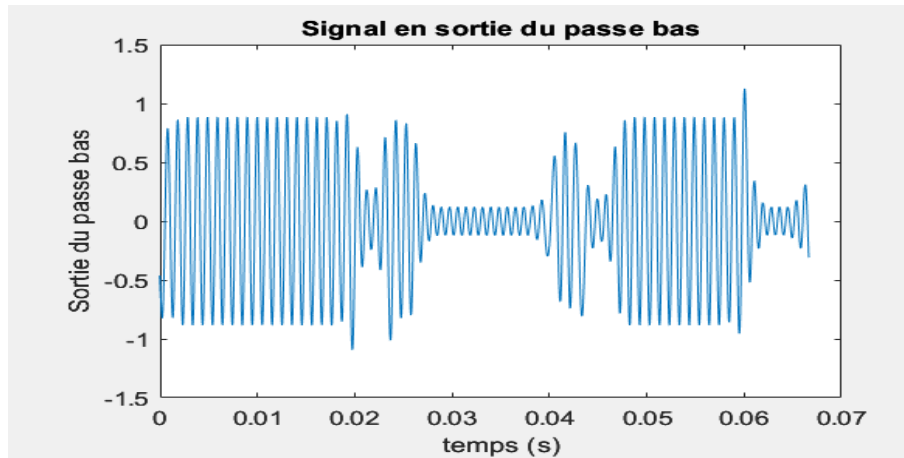


Figure 6: La sortie du signal  $x(t)$  généré par le filtre passe - bas

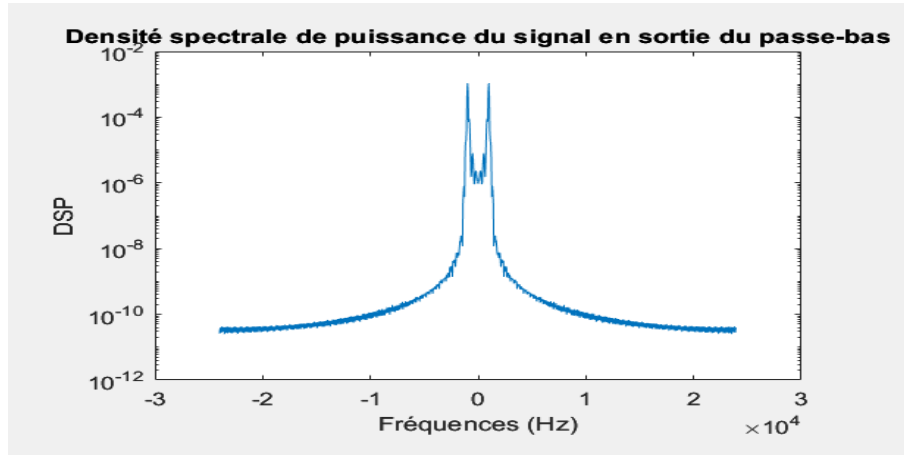


Figure 7: La DSP de la sortie du signal  $x(t)$  généré par le filtre passe - bas

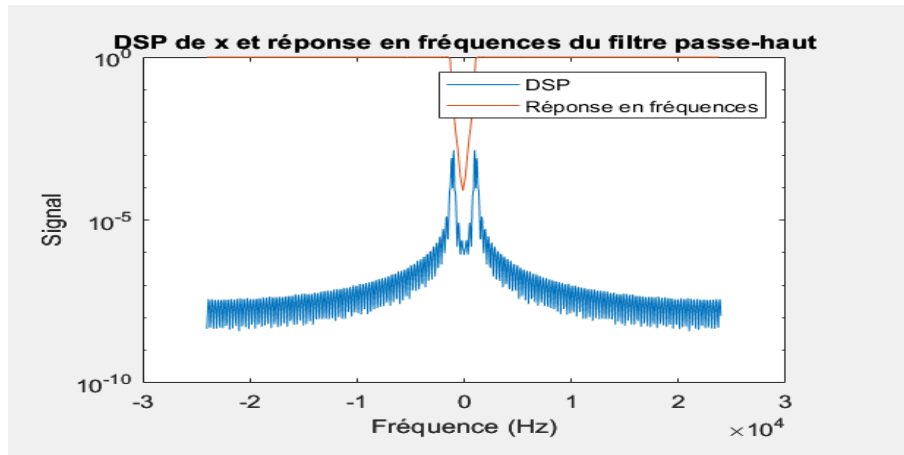


Figure 8: La DSP de  $x(t)$  généré par le filtre passe - haut

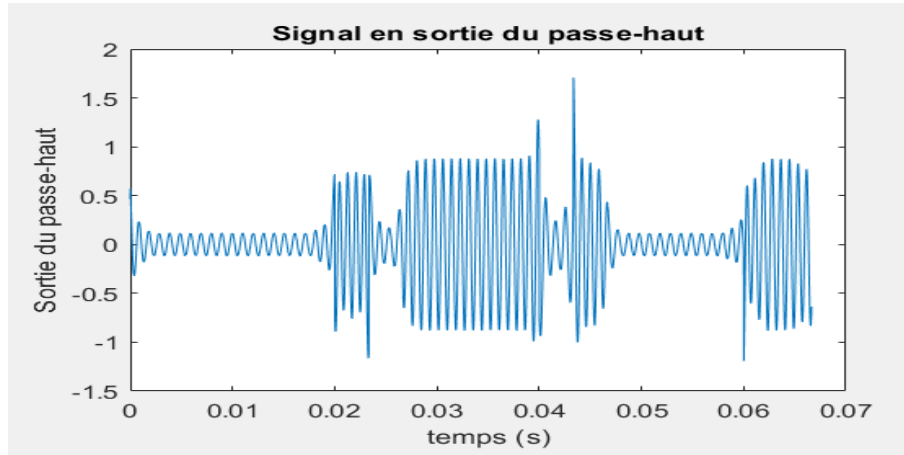


Figure 9: La sortie du signal  $x(t)$  généré par le filtre passe - haut

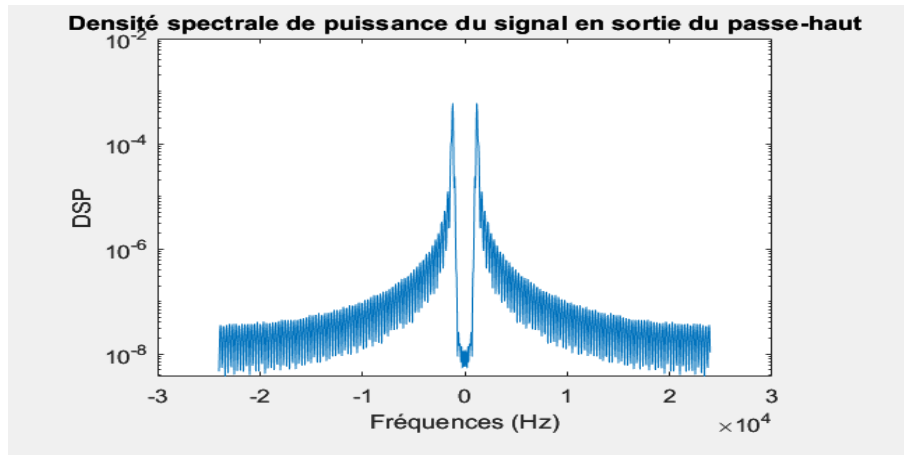


Figure 10: La DSP de la sortie du signal  $x(t)$  générée par le filtre passe - haut

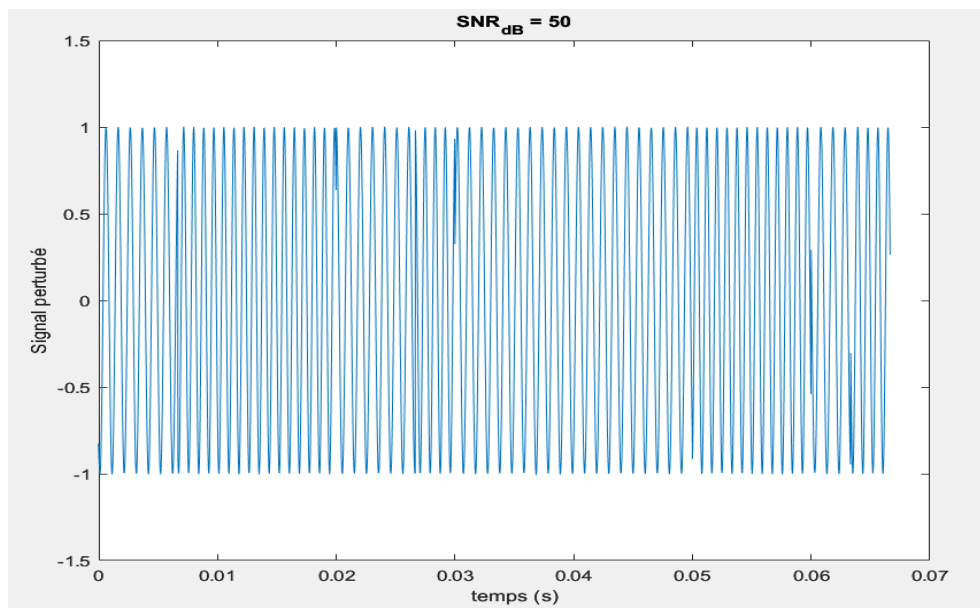


Figure 11: Le signal perturbé pour un rapport signal sur bruit égale à 50