Analyse Hilbertienne

1 Rappels sur les espaces de Hilbert

1.1 Espace de Hilbert

Définition - Produit scalaire

Soit E un espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
On appelle un *produit scalaire* sur E, toute application $E \times E \to \mathbb{K}$, notée $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$, vérifiant les propriétés suivantes :

- $\forall x, y \in E, x \mapsto \langle x, y\rangle$ et $y \mapsto \langle x, y\rangle$ sont linéaires
- $\forall x, y \in E, \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ (symétrie conjuguée)
- $\forall x \in E, \langle x, x\rangle \geq 0$
- $\forall x \in E, \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Définition - Norme

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot\rangle$.
On appelle *norme* associée à ce produit scalaire, l'application $E \to \mathbb{R}^+$, notée $x \mapsto \|x\|$, définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Exemple :

- $E = \mathbb{C}^d$ muni du produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^d x_i\overline{y_i}$
- $E = \mathbb{R}^d$ muni du produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i$
- $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C})$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$

Remarque : $(E, || \cdot ||)$ est appelé un *espace préhilbertien.*

Propriété - Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E, || \cdot ||)$ un espace préhilbertien.
Alors $\forall x, y \in E, |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

▶ *Texte Manquant*

Propriété

- $2\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) = ||x + y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2$ (identité de polarisation)
- $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (identité de Parallelogramme)

1.2 Orthogonalité

Définition - Orthogonalité

- Soit $(x, y) \in E^2$.
  On dit que x et y sont *orthogonaux* si $\langle x, y\rangle = 0$.
- Soit $A \subset E$.
  L'orthogonal de A est l'ensemble $A^\perp = \{x \in E \,|\, \forall y \in A, \langle x, y\rangle = 0\}$.
- Une famille $(x_i)_{i=1,\ldots,n}$ est dite *orthogonale* si $\forall i \neq j, \langle x_i, x_j\rangle = 0$.

Remarque :

- $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
- Si $A = E$, alors $A^\perp = \{0\}$.
- $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$.

Remarque : Une famille orthogonale sans vecteur nul est libre.

Théorème - Théorème de Pythagore

Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace préhilbertien, et $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille orthogonale.
Alors $||\sum_{i=1}^n x_i||^2 = \sum_{i=1}^n ||x_i||^2$.

Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt :

Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille libre d'un espace préhilbertien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.
Il existe une famille orthogonale $(v_1, \ldots, v_n)$ telle que :
$\text{Vect}(x_1, \ldots, x_n) = \text{Vect}(v_1, \ldots, v_n)$.

Construction :

$v_1 = x_1$
$v_2 = x_2 - \frac{\langle x_2, v_1\rangle}{||v_1||^2} v_1$
$v_3 = x_3 - \frac{\langle x_3, v_1\rangle}{||v_1||^2} v_1 - \frac{\langle x_3, v_2\rangle}{||v_2||^2} v_2$
$\ldots$
$v_n = x_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle x_n, v_i\rangle}{||v_i||^2} v_i$

1.3 Espace de Hilbert

Définition

Un espace de Hilbert (réel ou hermitien dans le cas complexe) est un espace préhilbertien complet pour la norme associée au produit scalaire :
$||\cdot|| : x \mapsto \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Remarque : Cela signifie :
$\forall (x_n) \subset H$, si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}, ||x_n - x_p|| \leq \varepsilon$, alors (x_n) converge dans H.

Exemple :
Texte Manquant

Propriété - Sommabilité

Soit H un espace de Hilbert, et (u_n) une suite d'éléments de H.
Si la suite (u_n) est composée d'éléments deux à deux orthogonaux et si $\sum ||u_n||^2$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge dans H.
De plus, si $\sum ||u_n||$ converge, alors $\sum u_n$ converge dans H.

▶ $\sum |u_n|$ converge $\Leftrightarrow (T_n) = \sum_{k=0}^{n} ||u_k||$ converge.
$\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow (S_n) = \sum_{k=0}^{n} u_k$ converge.
Si E complet, alors $||S_n - S_m|| = ||\sum_{k=m+1}^{n} u_k|| \leq \sum_{k=m+1}^{n} ||u_k|| \leq T_n - T_m$.
Donc (T_n) converge $\Rightarrow (T_n)$ de Cauchy $\Rightarrow (S_n)$ de Cauchy dans un complet $\Rightarrow (S_n)$ converge.

2 Théorème de projection sur un convexe et applications

2.1 Théorème de projection, projection orthogonale

Théorème

Soit H un espace de Hilbert, et C un convexe fermé non-vide de H.
Pour tout $f \in H$, il existe un unique point $g \in C$, appelé *projection de f sur C*, tel que la distance entre f et g soit minimale.
Ce point est caractérisé par : $\forall h \in C, \mathrm{Re}(\langle f - g, h - g \rangle) \leq 0$.

Remarque : $d(f, C) = \inf\limits_{h \in C} ||f - h|| = ||f - \Pi_C(f)||$.

▶ Unicité : Soient $g_1, g_2 \in C$ tels que $||f - g_1|| = ||f - g_2|| = d(f, C)$.
Texte Manquant

Corollaire :
Tout élément $f \in H$ admet une unique décomposition $f = g + h$ avec $g \in C$ et $h \in C^\perp$.

On a donc : $H = C \oplus C^\perp \quad ; \quad (C^\perp)^\perp = C \quad ; \quad H^\perp = \{0\}$.
Si $A \in H$ alors $(A^\perp)^\perp = \overline{\mathrm{Vect}(A)}$ (adhérence).

▶ *Texte Manquant*

Remarque : $A \subset H$ est total $\Leftrightarrow \overline{\mathrm{Vect}(A)} = H \Leftrightarrow A^\perp = \{0\}$.

2.2 Théorème de représentation de Riesz

Théorème

Pour tout $f \in H$, l'application $h \mapsto \langle f, h \rangle$ est une forme linéaire continue sur H.
Réciproquement, si $\tilde{f}$ est une forme linéaire continue sur H, alors il existe un unique $f \in H$ tel que $\forall h \in H, \tilde{f}(h) = \langle f, h \rangle$.

- *Texte Manquant*

Remarque : Convolution :
Soit $T : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)$ un opérateur linéaire, continu, invariant par transformation.
Il existe $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ tel que $T(f) = f * g$.

Rappel :

$\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n) = \{$fonctions continues, limites nulles à l'infini$\}$
L'application $f \mapsto T(f)(0)$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ donc il existe $g_0 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ tel que $T(f)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g_0(x)}dx$.

De plus, $\tau_x(T(f)) = T(\tau_x(f))$ ($\tau_x : f \mapsto f(x)$).

$$\begin{aligned}
T(f)(x) = \tau_x(T(f))(0) &= T(\tau_x(f))(0) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x+y)\overline{g_0(y)}dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\overline{g_0(y-x)}dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy
\end{aligned}$$