Analyse Hilbertienne

1 Rappels sur les espaces de Hilbert

1.1 Espace de Hilbert

Définition - Produit scalaire

Soit E un espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
On appelle un *produit scalaire* sur E, toute application $E \times E \to \mathbb{K}$, notée $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$, vérifiant les propriétés suivantes :

- $\forall x, y \in E, x \mapsto \langle x, y\rangle$ et $y \mapsto \langle x, y\rangle$ sont linéaires
- $\forall x, y \in E, \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ (symétrie conjuguée)
- $\forall x \in E, \langle x, x\rangle \geq 0$
- $\forall x \in E, \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Définition - Norme

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
On appelle *norme* associée à ce produit scalaire, l'application $E \to \mathbb{R}^+$, notée $x \mapsto \|x\|$, définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Exemple :

- $E = \mathbb{C}^d$ muni du produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^d x_i\overline{y_i}$
- $E = \mathbb{R}^d$ muni du produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i$
- $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C})$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$

Remarque : $(E, ||\cdot||)$ est appelé un *espace préhilbertien.*

Propriété - Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace préhilbertien.
Alors $\forall x, y \in E, |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

▶ *Texte Manquant*

Propriété

- $2\text{Re}(\langle x, y\rangle) = ||x + y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2$ (identité de polarisation)
- $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (identité de Parallelogramme)

1.2 Orthogonalité

Définition - Orthogonalité

- Soit $(x, y) \in E^2$.
  On dit que x et y sont *orthogonaux* si $\langle x, y \rangle = 0$.
- Soit $A \subset E$.
  L'orthogonal de A est l'ensemble $A^\perp = \{x \in E \,|\, \forall y \in A, \langle x, y \rangle = 0\}$.

Remarque :

- $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
- Si $A = E$, alors $A^\perp = \{0\}$.
- $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$.

Texte Manquant

Propriété

Soit H un espace de Hilbert, et (u_n) une suite d'éléments de H.
Si la suite (u_n) est composée d'éléments deux à deux orthogonaux et si $\sum ||u_n||^2$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge dans H.

▶ $\sum |u_n|$ converge $\Leftrightarrow (T_n) = \sum_{k=0}^n ||u_k||$ converge.
$\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow (S_n) = \sum_{k=0}^n u_k$ converge.
Si E complet, alors $||S_n - S_m|| = ||\sum_{k=m+1}^n u_k|| \leq \sum_{k=m+1}^n ||u_k|| \leq T_n - T_m$.
Donc (T_n) converge $\Rightarrow (T_n)$ de Cauchy $\Rightarrow (S_n)$ de Cauchy dans un complet $\Rightarrow (S_n)$ converge.

1.3 Projection sur un convexe

Théorème

Soit H un espace de Hilbert, et C un convexe fermé non-vide de H.
Pour tout $f \in H$, il existe un unique point $p \in C$, appelé *projection de f sur C*, tel que la distance entre f et p soit minimale.
Ce point est caractérisé par : $\forall h \in C, \text{Re}(\langle f - p, h - p \rangle) \leq 0$.

Remarque : $d(f, C) = \inf_{h \in C} ||f - h|| = ||f - \Pi_C(f)||$.

▶ Unicité : Soient $g_1, g_2 \in C$ tels que $||f - g_1|| = ||f - g_2|| = d(f, C)$.
Texte Manquant