Equations aux dérivées partielles

Problème 1

On veut résoudre :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ pour } x \in [0, L] \text{ et } t \in [0, T] \tag{1}$$

avec

$$\begin{cases} u(t, 0) = u(t, L) = 0 \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

1. Cherchez toutes les solutions possibles de la forme : $u(t, x) = w(t)v(x)$
2. En déduire l'expression de la solution de l'équation (1).
3. Généralisez au cas où les conditions limites ne sont pas homogènes et où on a une solution...

solution

1. Soit $u(t, x) = w(t)v(x)$, alors, d'après (1) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 &\Leftrightarrow w'(t)v(x) - Dw(t)v''(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{w'(t)}{w(t)} = D\frac{v''(x)}{v(x)} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} \frac{w'(t)}{w(t)} = -\lambda \text{ pour } t \in [0, T] \\ \frac{-Dv''(x)}{v(x)} = \lambda \text{ pour } x \in [0, L] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} w'(t) = -\lambda w(t), \forall t \in [0, T] \\ -Dv''(x) = \lambda v(x), \forall x \in [0, L] \end{cases} \end{aligned}$$

On s'intéresse d'abord à l'équation en x : $-Dv''(x) = \lambda v(x)$.

- Si $\lambda < 0$:

$$v''(x) + \frac{\lambda}{D}v(x) = 0 \Leftrightarrow v(x) = \alpha e^{\sqrt{\frac{\lambda}{D}}x} + \beta e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{D}}x}$$

On utilise les conditions limites :

$$\begin{aligned} \begin{cases} v(0) = 0 \\ v(L) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha e^{\sqrt{\frac{\lambda}{D}}L} + \beta e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{D}}L} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \alpha e^{2\sqrt{\frac{\lambda}{D}}L} = -\beta \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc pas de solutions.

- Si $\lambda = 0$:
$$v''(x) = 0 \Leftrightarrow v(x) = \alpha x + \beta$$
On utilise les conditions limites :
$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v(L) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha L = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$
Donc pas de solutions.
- Si $\lambda > 0$:
$$v''(x) + \frac{\lambda}{D} v(x) = 0 \Leftrightarrow v(x) = \alpha \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{D}} x\right) + \beta \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{D}} x\right)$$
On utilise les conditions limites :
$$\begin{aligned} \begin{cases} v(0) = 0 \\ v(L) = 0 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{D}} L\right) = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{D}} L\right) = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \sqrt{\frac{\lambda}{D}} L = n\pi, n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \lambda = \frac{n^2\pi^2 D}{L^2}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \end{aligned}$$
Donc les solutions sont :
$$v_n(x) = \alpha \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right), n \in \mathbb{N}^*, \alpha \in \mathbb{R}^* \tag{2}$$

On va normaliser les solutions en choisissant α tel que :
$$\|v_n\|_{L^2([0,L])} = 1 \Leftrightarrow \int_0^L v_n^2(x) \mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow \alpha^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow \alpha^2 \frac{L}{2} = 1 \Leftrightarrow \alpha = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

On s'intéresse maintenant à l'équation en t : $w'(t) = -\lambda_n w(t)$ avec $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2 D}{L^2}$.
$$w'(t) = -\lambda_n w(t) \Leftrightarrow w(t) = w_n \mathrm{e}^{-\lambda_n t}, w_n \in \mathbb{R}$$

<u>Conclusion :</u> Les solutions de (1) de la forme $u(t,x) = w(t)v(x)$ sont :
$$u_n(t,x) = w_n \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \mathrm{e}^{-\frac{n\pi^2 D}{L^2} t}, n \in \mathbb{N}^*, w_n \in \mathbb{R} \tag{3}$$

Reste à verifier les conditions initiales :
$$u_n(0,x) = u_0(x) \Leftrightarrow u_0(x) = w_n \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$
Deux cas possibles :

- tetetdjg