

Problème 1

On veut résoudre :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ pour } x \in [0, L] \text{ et } t \in [0, T] \quad (1)$$

avec

$$\begin{cases} u(t, 0) = u(t, L) = 0 \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

1. Cherchez toutes les solutions possibles de la forme : $u(t, x) = w(t)v(x)$
2. En déduire l'expression de la solution de l'équation (1).
3. Généralisez au cas où les conditions limites ne sont pas homogènes et où on a une solution...

solution

1. Soit $u(t, x) = w(t)v(x)$, alors, d'après (1) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 &\Leftrightarrow w'(t)v(x) - Dw(t)v''(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{w'(t)}{w(t)} = D \frac{v''(x)}{v(x)} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} \frac{w'(t)}{w(t)} = -\lambda \text{ pour } t \in [0, T] \\ \frac{-Dv''(x)}{v(x)} = \lambda \text{ pour } x \in [0, L] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} w'(t) = -\lambda w(t), \forall t \in [0, T] \\ -Dv''(x) = \lambda v(x), \forall x \in [0, L] \end{cases} \end{aligned}$$

On s'intéresse d'abord à l'équation en x : $-Dv''(x) = \lambda v(x)$.

- Si $\lambda < 0$:

$$v''(x) + \frac{\lambda}{D}v(x) = 0 \Leftrightarrow v(x) = \alpha e^{\sqrt{\frac{\lambda}{D}}x} + \beta e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{D}}x}$$

On utilise les conditions limites :

$$\begin{aligned} \begin{cases} v(0) = 0 \\ v(L) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha e^{\sqrt{\frac{\lambda}{D}}L} + \beta e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{D}}L} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \alpha e^{2\sqrt{\frac{\lambda}{D}}L} = -\beta \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc pas de solutions.

- Si $\lambda = 0$:

$$v''(x) = 0 \Leftrightarrow v(x) = \alpha x + \beta$$

On utilise les conditions limites :

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v(L) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha L = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Donc pas de solutions.

- Si $\lambda > 0$:

$$v''(x) + \frac{\lambda}{D}v(x) = 0 \Leftrightarrow v(x) = \alpha \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{D}}x\right) + \beta \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{D}}x\right)$$

On utilise les conditions limites :

$$\begin{aligned} \begin{cases} v(0) = 0 \\ v(L) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{D}}L\right) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{D}}L\right) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \sqrt{\frac{\lambda}{D}}L = n\pi, n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \lambda = \frac{n^2\pi^2 D}{L^2}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \end{aligned}$$

Donc les solutions sont :

$$v_n(x) = \alpha \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), n \in \mathbb{N}^*, \alpha \in \mathbb{R}^* \quad (2)$$