Projet d'EDP

Approximation spatiale du Laplacien

1. ...
2. ...
3. - Intérieur : $\mu\frac{-u_{i+1,j}+2u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h_x^2} + \mu\frac{-u_{i,j+1}+2u_{i,j}-u_{i,j-1}}{h_y^2} = f(x_i, y_j)$
   - Côté gauche : $x = 0 : (i = 0, j \in [0, N_{y+1}]) \quad u_{0,j} = 0$
   - Côté droit : $x = a : (i = N_{x+1}, j \in [0, N_{y+1}]) \quad u_{N_{x+1},j} = 0$
   - Côté haut : $y = b : (i \in [0, N_{x+1}], j = N_{y+1}) \quad u_{i,N_{y+1}} = 0$
   - Côté bas : $y = 0 : (i \in [0, N_{x+1}], j = 0) \quad u_{i,0} = 0$

   On pose sous forme matricielle : $AU = F$ avec $u_{i,j}$ l'approximation par le schéma de $u(x_i, y_j)$ et :

$$U = \begin{pmatrix} u_{0,0} \\ u_{1,0} \\ \vdots \\ u_{N_x+1,0} \\ u_{0,1} \\ \vdots \\ u_{N_x+1,N_y+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N_y+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N_x+2)(N_y+2)} \text{ (vecteur colonne)}$$

$$F = \begin{pmatrix} f(x_0, y_0) \\ f(x_1, y_0) \\ \vdots \\ f(x_{N_x+1}, 0) \\ f(x_0, y_1) \\ \vdots \\ f(x_{N_x+1}, y_{N_y+1}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N_x+2)(N_y+2)} \text{ (vecteur colonne)}$$

   On a donc :

   - $A = \begin{pmatrix} I_d & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C & B & C & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & C & B & C \\ 0 & \dots & 0 & 0 & I_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N_x+2)(N_y+2)\times(N_x+2)(N_y+2)}$ (matrice creuse)

- $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \\ -\frac{\mu}{h_x^2} & \frac{2\mu}{h_x^2} + \frac{2\mu}{h_y^2} & -\frac{\mu}{h_x^2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\frac{\mu}{h_x^2} & \frac{2\mu}{h_x^2} + \frac{2\mu}{h_y^2} & -\frac{\mu}{h_x^2} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N_x+2)\times(N_y+2)}$
- $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & -\frac{\mu}{h_y^2} & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & -\frac{\mu}{h_y^2} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N_x+2)\times(N_y+2)}$