

Analyse des phénomènes dispersifs et application à la modélisation fluviale

Félix Foucher de Brandois

Introduction

On souhaite étudier dans ce projet le comportement d'un produit déversé dans une rivière de largeur constante b et animée d'une vitesse V . Ce produit est supposé peu miscible à l'eau et moins dense que l'eau (par exemple de l'huile), de sorte qu'il flotte à la surface de l'eau.

Mise en équation

1. On commence par mettre en équation le problème physique. On a les équations suivantes :

- Conservation de la masse : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho V) = 0$
- Conservation de la concentration : $\frac{\partial \rho C}{\partial t} + \text{div}(\Phi) = 0$
- Expression du flux : $\Phi = -\lambda \nabla C + \rho C V$

$$\begin{aligned} \text{On a donc : } & \frac{\partial \rho C}{\partial t} + \text{div}(-\lambda \nabla C + \rho C V) = 0 \\ \Leftrightarrow & \rho \frac{\partial C}{\partial t} + C \frac{\partial \rho}{\partial t} - \lambda \Delta C + C \text{div}(\rho V) + \rho V \nabla C = 0 \\ \Leftrightarrow & \rho \frac{\partial C}{\partial t} - C \text{div}(\rho V) - \lambda \Delta C + C \text{div}(\rho V) + \rho V \nabla C = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\lambda}{\rho} \Delta C + V \nabla C = 0 \end{aligned}$$

Approximation spatiale du Laplacien

2. On cherche maintenant à discrétiser le problème. Cela nécessite d'approximer le Laplacien de u . On utilise un développement de Taylor à l'ordre 3 de $u(x_{i+1}, y_j)$ et de $u(x_{i-1}, y_j)$:

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}, y_j) &= u(x_i, y_j) + h_x \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) + \frac{h_x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) + \frac{h_x^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, y_j) + \mathcal{O}(h_x^4) \\ u(x_{i-1}, y_j) &= u(x_i, y_j) - h_x \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) + \frac{h_x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) - \frac{h_x^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, y_j) + \mathcal{O}(h_x^4) \\ \Leftrightarrow & -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{2u(x_i, y_j) - u(x_{i-1}, y_j) - u(x_{i+1}, y_j)}{h_x^2} + \mathcal{O}(h_x^2) \end{aligned}$$

On en déduit que l'approximation du Laplacien de u est donnée par :

$$-\Delta u(x_i, y_j) \approx \frac{2u_{i,j} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{2u_{i,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1}}{h_y^2}$$

3. On écrit le schéma aux différences finies à l'ordre 2 en un point (x_i, y_j) n'appartenant pas au bord :

On a : $-\mu \Delta u = f$ avec $\mu = \frac{\lambda}{\rho}$.

On a donc : $\mu \frac{-u_{i+1,j} + 2u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_x^2} + \mu \frac{-u_{i,j+1} + 2u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h_y^2} = f(x_i, y_j)$

4. Les conditions de Dirichlet homogènes sur le bord $\partial\Omega$ sont :

- $\forall j \in [0, N_{y+1}], u_{0,j} = 0$ et $\forall j \in [0, N_{y+1}], u_{N_{x+1},j} = 0$
- $\forall i \in [0, N_{x+1}], u_{i,0} = 0$ et $\forall i \in [0, N_{x+1}], u_{i,N_{y+1}} = 0$

On met ce schéma sous forme matricielle : $AU = F$ avec :

$$U = \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_j \\ \vdots \\ U_{N_{y+1}} \end{pmatrix}, \quad U_j = \begin{pmatrix} U_{0,j} \\ U_{1,j} \\ \vdots \\ U_{N_{x+1},j} \end{pmatrix} \quad 0 \leq j \leq N_{y+1} \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} f(x_0, y_0) \\ f(x_1, y_0) \\ \vdots \\ f(x_{N_{x+1}}, 0) \\ f(x_0, y_1) \\ \vdots \\ f(x_{N_{x+1}}, y_{N_{y+1}}) \end{pmatrix}$$

$$\text{On pose : } A = \begin{pmatrix} I_d & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C & B & C & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & C & B & C \\ 0 & \dots & 0 & 0 & I_d \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\mu}{h_x^2} & \frac{2\mu}{h_x^2} + \frac{2\mu}{h_y^2} & -\frac{\mu}{h_x^2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\frac{\mu}{h_x^2} & \frac{2\mu}{h_x^2} + \frac{2\mu}{h_y^2} & -\frac{\mu}{h_x^2} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ 0 & -\frac{\mu}{h_y^2} & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & -\frac{\mu}{h_y^2} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. On vérifie que notre implémentation est correcte. On pose $f(x, y) = \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$.

La solution exacte est alors $u(x, y) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$.

La figure 1 compare la solution exacte et la solution approchée pour $\mu = 1$:

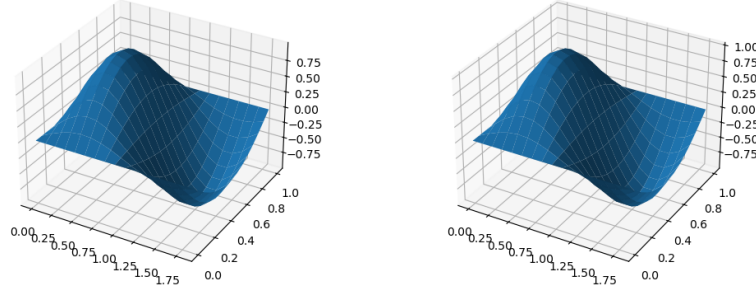


Figure 1: Comparaison de la solution exacte et de la solution approchée pour $\mu = 1$

La différence en norme L_2 entre la solution exacte et la solution approchée est de 0.0539107877692071. Notre implémentation est donc correcte.

6. On prend maintenant en compte la condition de Neumann sur le bord Γ_1 :

$$\begin{aligned}
 \text{Soit } y \in [0, b] \quad & u(a - h_x, y) = u(a, y) - h_x \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) + \frac{h_x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a, y) + \mathcal{O}(h_x^3) \\
 & u(a - 2h_x, y) = u(a, y) - 2h_x \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) + 2h_x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a, y) + \mathcal{O}(h_x^3) \\
 \Leftrightarrow \quad & 4u(a - h_x, y) - u(a - 2h_x, y) = 3u(a, y) - 2h_x \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) + \mathcal{O}(h_x^3) \\
 \Leftrightarrow \quad & \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = \frac{3u(a, y) - 4u(a - h_x, y) + u(a - 2h_x, y)}{2h_x} + \mathcal{O}(h_x^2)
 \end{aligned}$$

7. La matrice B est modifiée pour prendre en compte la condition de Neumann.

On a alors :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\mu}{h_x^2} & \frac{2\mu}{h_x^2} + \frac{2\mu}{h_y^2} & -\frac{\mu}{h_x^2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\frac{\mu}{h_x^2} & \frac{2\mu}{h_x^2} + \frac{2\mu}{h_y^2} & -\frac{\mu}{h_x^2} \\ 0 & \dots & \frac{1}{2h_x} & -\frac{4}{2h_x} & \frac{3}{2h_x} \end{pmatrix}$$

Approximation des termes advectifs

8. On introduit le nombre de Péclet $P_{el} = \frac{lv}{\mu}$, où l est la longueur caractéristique du problème et v la vitesse caractéristique.

On suppose que $P_{el} \gg 1 \Leftrightarrow lv \gg \mu$: le régime dominant est le régime advectif.

9. On pose : $V = \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \end{pmatrix}$. En utilisant un développement limité à l'ordre 2 de

$u(x_{i+1}, y_j)$ et de $u(x_{i-1}, y_j)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
u(x_{i+1}, y_j) &= u(x_i, y_j) + h_x \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) + \frac{h_x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) + \mathcal{O}(h_x^3) \\
u(x_{i-1}, y_j) &= u(x_i, y_j) - h_x \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) + \frac{h_x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) + \mathcal{O}(h_x^3) \\
\Leftrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) &= \frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{2h_x} + \mathcal{O}(h_x^2) \\
\Leftrightarrow \quad V \cdot \nabla u(x_i, y_j) &= \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc : $V \cdot \nabla u(x_i, y_j) = v_x \frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{2h_x} + \mathcal{O}(h_x^2)$.

La matrice A est modifiée pour prendre en compte les termes advectifs. On a alors :

$$A = \begin{pmatrix} I_d + D & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C & B & C & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & C & B & C \\ 0 & \dots & 0 & 0 & I_d + D \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad D = v_x \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2h_x} & 0 & -\frac{1}{2h_x} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \frac{1}{2h_x} & 0 & -\frac{1}{2h_x} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$