TD : Transformée de Haar

On note Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ indicatrice de l'intervalle $[0, 1[$:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout $j \leq 0$ et $k \in [\![0, 2^{-j} - 1]\!]$, on définit la fonction $\phi_{j,k}$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{-\frac{j}{2}}\Phi(2^{-j}x - k)$$

On note $V_j = \text{Vect}(\phi_{j,k})_{0 \leq k \leq 2^{-j}-1}$ l'espace vectoriel engendré par les fonctions $\phi_{j,k}$. On notera Ω l'ensemble des couples (j, k) tels que $j \leq 0$ et $k \in [\![0, 2^{-j} - 1]\!]$.

1 Propriété des fonctions $\phi_{j,k}$ pour les bases de Haar

1. Montrer que pour tout couple $(j, k) \in \Omega$

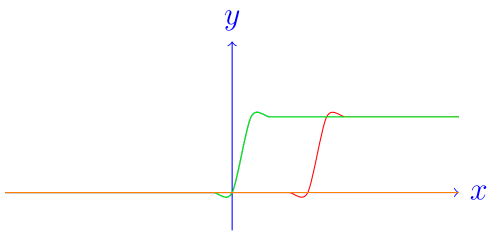
$$\Phi_{j,k}(x) = \begin{cases} 2^{-\frac{j}{2}} & \text{si } x \in [k2^j, (k+1)2^j[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $(j, k) \in \Omega$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} & \Phi_{j,k}(x) = 2^{-\frac{j}{2}} \\ \Leftrightarrow\ & \Phi(2^j x - k) = 1 \\ \Leftrightarrow\ & 0 \leq 2^j x - k < 1 \\ \Leftrightarrow\ & k2^j \leq x < (k+1)2^j \end{aligned}$$

2. Expliciter et représenter graphiquement les fonctions suivantes :

$$\Phi_{0,0}, \quad \Phi_{-1,0}, \quad \Phi_{-1,1}, \quad \Phi_{-2,0}, \quad \Phi_{-2,3}$$



3. Montrer que $(\Phi_{j,k})_{0\leq k\leq 2^{-j}-1}$ est une base orthonormée de V_j pour le produit scalaire défini par :
$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt \tag{1}$$

Soient $k, k' \in [\![0, 2^{-j}-1]\!]$.

$$\begin{aligned}
&\langle \Phi_{j,k}, \Phi_{j,k'}\rangle = 0\\
\Leftrightarrow &\int_0^1 \Phi_{j,k}(t)\Phi_{j,k'}(t)dt = 0\\
\Leftrightarrow &[k2^j, (k+1)2^j[\cap[k'2^j, (k'+1)2^j[= \emptyset\\
\Leftrightarrow &(k+1)2^j \leq k'2^j \text{ ou } (k'+1)2^j \leq k2^j\\
\Leftrightarrow &k+1 \leq k' \text{ ou } k'+1 \leq k\\
\Leftrightarrow &k \neq k'
\end{aligned}$$

De plus, pour tout $k \in [\![0, 2^{-j}-1]\!]$,

$$\begin{aligned}
||\Phi_{j,k}||^2 &= \int_0^1 \Phi_{j,k}(t)dt\\
&= \int_0^1 2^{-\frac{j}{2}}\Phi(2^{-j}t-k)dt\\
&= 2^{-j}\int_{k2^j}^{(k+1)2^j} 1dt\\
&= 2^{-j}\times 2^j\\
&= 1
\end{aligned}$$

Ainsi, $(\Phi_{j,k})_{0\leq k\leq 2^{-j}-1}$ est une base orthonormée de V_j.

4. Quelle est la dimension de V_j ?

Pour j fixé, $k \in [\![0, 2^{-j}-1]\!]$. Donc la dimension de V_j est 2^{-j}.

5. Montrer que pour tout couple $(j, k) \in \Omega$, on a :
$$\Phi_{j,k} = \frac{\sqrt{2}}{2}\Phi_{j-1,2k} + \frac{\sqrt{2}}{2}\Phi_{j-1,2k+1} \tag{2}$$

Soit $(j, k) \in \Omega$.

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2}}{2}(\Phi_{j-1,2k} + \Phi_{j-1,2k+1})(x) &= \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}2^{-\frac{j-1}{2}} & \text{si } x \in [2k2^{j-1}, (2k+1)2^{j-1}[\\ \frac{\sqrt{2}}{2}2^{-\frac{j-1}{2}} & \text{si } x \in [(2k+1)2^{j-1}, (2k+2)2^{j-1}[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\\
&= \begin{cases} 2^{-\frac{j}{2}} & \text{si } x \in [k2^j, (k+1)2^j[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\\
&= \Phi_{j,k}(x)
\end{aligned}$$

6. En déduire que $\forall j \leq 0$, $V_j \subset V_{j-1}$.

   D'après la question précédente, pour tout $(j,k) \in \Omega$, $\Phi_{j,k} \in V_{j-1}$.
   Donc $V_j \subset V_{j-1}$.

7. En déduire de (2) que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\Phi(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\Phi(2t) + \frac{\sqrt{2}}{2}\Phi(2t-1) \tag{3}$$

   Soient $j = k = 0$.

$$\begin{aligned} &\Phi_{0,0} = \frac{\sqrt{2}}{2}\Phi_{-1,0} + \frac{\sqrt{2}}{2}\Phi_{-1,1} \\ &\Leftrightarrow \Phi(t) = \Phi(2t) + \Phi(2t-1) \end{aligned}$$

   On définit la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ par :

$$h_n = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{si } n = 0 \text{ ou } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

8. Montrer qu'on peut réécrire (3) sous la forme :

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\Phi(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n \Phi(2t-n) \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n \Phi(2t-n) &= h_0\Phi(2t) + h_1\Phi(2t-1) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\Phi(t) \end{aligned}$$

9. En calculant la transformée de Fourier des deux membres de (4), montrer que pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, on a :

$$\hat{\Phi}(2\omega) = \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{h}(\omega)\hat{\Phi}(\omega) \tag{5}$$