Equations aux dérivées partielles

1 Problème 1

On veut résoudre :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ pour } x \in [0, L] \text{ et } t \in [0, T] \tag{1}$$

avec

$$\begin{cases} u(t,0) = u(t,L) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

1. Cherchez toutes les solutions possibles de la forme : $u(t,x) = w(t)v(x)$
2. En déduire l'expression de la solution de l'équation (1).
3. Généralisez au cas où les conditions limites ne sont pas homogènes et où on a une solution...

solution

1. Soit $u(t,x) = w(t)v(x)$, alors, d'après (1) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 &\Leftrightarrow w'(t)v(x) - Dw(t)v''(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{w'(t)}{w(t)} = D\frac{v''(x)}{v(x)} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} \frac{w'(t)}{w(t)} = -\lambda \text{ pour } t \in [0,T] \\ \frac{-Dv''(x)}{v(x)} = \lambda \text{ pour } x \in [0,L] \end{cases} \end{aligned}$$