Departamento de Matemática **Universidade de Aveiro**

Álgebra Linear e Geometria Analítica - A

Exame Final **10 de Janeiro de 2025**

Duração total do teste: 2h30m

Nome: ____________________

N^o mecanográfico: __________ **Curso** __________

Declaro que desisto: ____________________

Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5	Questão 6	Classificação final

PARTE I

Escolha múltipla

(4 val.) **1)** Selecione a (única) afirmação verdadeira em cada uma das seguintes questões. Cada resposta certa será cotada com $0,5$ valores.

(a) Considere as bases $\mathscr{B} = ((1,-1),(-3,4))$ e $\mathscr{C} = ((1,0),(0,1))$ de $\mathbb{R}^2$. A matriz de mudança de base de $\mathscr{B}$ para $\mathscr{C}$ é:

☒ $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$.

☐ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$.

☐ $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$.

☐ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$.

☐ Nenhuma das anteriores.

(b) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ k & 2k+3 \end{bmatrix}$, onde k é um parâmetro real. Podemos dizer que:

- ☐ A é invertível para todo $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $det(A) = -det(A^{-1})$ para todo $k \in \mathbb{R}$.
- ☒ $det(A) = det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3k+3 \end{bmatrix}$ para todo $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $det(2A) = 2det(A)$ para todo $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ Nenhuma das anteriores.

(c) Considere o sistema $\begin{cases} x + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \\ ax + 4z = 1 \end{cases}$ nas variáveis x, y, z e onde a é um parâmetro real. Então:

- ☒ o sistema é de Cramer se e só se $a \neq 4$. Se $a = 0$, $y = \dfrac{det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}}{det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}$.
- ☐ o sistema é de Cramer se e só se $a \neq 4$. Se $a = 0$, $y = \dfrac{det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}{det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}}$.
- ☐ o sistema é de Cramer se e só se $a = 0$. Se $a = 0$, $y = \dfrac{det \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}}{det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}$.
- ☐ o sistema é de Cramer se e só se $a = 0$. Se $a = 0$, $y = \dfrac{det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}}{det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}$.
- ☐ Nenhuma das anteriores.

(d) Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido de produto interno e os vetores $u = (1, 1, 1)$ e $v = (1, 2, -1)$. O produto vetorial entre u e v é:

- ☐ $u \times v = 2$.
- ☒ $u \times v = (-3, 2, 1)$.
- ☐ $u \times v = (1, 2, -3)$.
- ☐ $u \times v = 0$.
- ☐ $u \times v = (3, -2, -1)$.
- ☐ Nenhuma das anteriores.

(e) Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido de produto interno e o subespaço de $\mathbb{R}^3$

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x + y + z = 0\}.$$

Uma base ortogonal de F é:

- ☐ $\mathscr{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0))$.
- ☐ $\mathscr{B} = ((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$.
- ☐ $\mathscr{B} = ((1, 1, 1))$.
- ☒ $\mathscr{B} = ((-1, 1, 0), (1, 1, -2))$.
- ☐ Nenhuma das anteriores.

(f) Escolha a opção correta.

- ☐ Uma matriz A do tipo 3×3 é diagonalizável se e só se tem 3 valores próprios distintos.
- ☐ Se A é uma matriz do tipo 3×3 com dois valores próprios distintos então um dos subespaços próprios de A, associado a um dos valores próprios, tem dimensão superior a 1.
- ☒ Se A é uma matriz do tipo 4×4 com dois valores próprios distintos e o subespaço próprio associado a um desses valores tem dimensão 3, então A é diagonalizável.
- ☐ Nenhuma das anteriores.

(g) Seja $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que $L(x, y) = (2x + y, 3x - 4y, x - y)$. Então a matriz representativa de L relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^2$ e à base canónica de $\mathbb{R}^3$ é:

☐ $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$.

☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

☐ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$.

☒ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

☐ Nenhuma das anteriores.

(h) O determinante da matriz $\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 4 & 0 & c \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ é igual a:

☒ $-4 \det \begin{bmatrix} b & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - c \det \begin{bmatrix} a & b \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$.

☐ $-\det \begin{bmatrix} b & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} a & b \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$.

☐ $\det \begin{bmatrix} b & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a & b \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$.

☐ $4 \det \begin{bmatrix} b & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$.

☐ Nenhuma das anteriores.

PARTE II

Justifique devidamente as seguintes questões:

2) Considere o sistema de equações lineares nas variáveis x, y e z e no parâmetro real a,

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ (a+1)y + az = 1 \\ x + ay + a(a-1)z = a \end{cases}$$

a) *(1 val.)* Determine os valores de a para os quais o sistema é possível e determinado.

b) *(3 val.)* Determine o valor de a para o qual o sistema tem $(0, 1, -1)$ como solução e resolva o sistema usando o método de eliminação de Gauss-Jordan para este valor de a.

[Se não determinou o valor de a resolva o sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3y + 2z = -2 \\ x - 2y - 2z = 3 \end{cases}$ usando o método de eliminação de Gauss-Jordan. Neste caso a questão será cotada para 2 valores.]

c) *(1,5 val.)* Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e o subespaço $S = \langle (1,0,1), (a, a+1, a), (0, a, a(a-1)) \rangle$, onde a é um parâmetro real. Determine os valores de a para os quais $S = \mathbb{R}^3$.

*(3,5 val.)***3)** Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ e o subconjunto

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + 3z = 0 \ \wedge y = 2w\}.$$

a) Verifique que S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.

b) Determine uma base e a dimensão de S.

*(2 val.)***4)** Considere o sistema (impossível) $AX = B$, onde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Encontre a solução dos mínimos quadrados e calcule o erro dos mínimos quadrados associado.

*(1 val.)***5)** Seja A uma matriz $n \times n$ e λ um valor próprio de A. Mostre que:

(a) λ^2 é um valor próprio de A^2.

(b) se A é diagonalizável então A^2 também é diagonalizável.

*(4 val.)***6)**

(a) Determine uma equação reduzida e classifique a cónica definida pela equação

$$x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 6y + 9 = 0.$$

(b) Classifique a forma quadrática $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(x, y) = x^2 - 4xy + y^2$.