



组 号 Z08

实验题目 微分方程求解

1. 宋昭琰

队员姓名 2. 徐意

3. 李宗琳

4. 向飞宇

目 录

1 实验一：种群数量的变化问题	2
1.1 背景知识：相互依存种群数量变化的数学模型	2
1.2 使用 Runge-Kutta 方法求解微分方程组的初值问题	2
1.2.1 微分方程的稳定性	3
1.2.2 对于不同条件下种群的变化规律	4
1.3 实验一的代码	5
2 实验二：求解微分方程的边值问题	6
2.1 使用 bvp4c 求解边值问题	6
2.2 实验二的代码	7
3 实验三：求解单摆与滑块的运动问题	8
3.1 运动方程的推导	8
3.1.1 理论知识	8
3.1.2 运用拉格朗日方程求解单摆与滑块运动问题	9
3.2 运动方程的求解	10
3.3 物体的动态化	10
3.4 不同条件下的实验结果	12
3.4.1 关于最大摆角的讨论	12
3.4.2 关于运动周期与物体质量，绳长和初始摆角的关系	13
3.5 实验三的代码	15
参考文献	16

1 实验一: 种群数量的变化问题

1.1 背景知识: 相互依存种群数量变化的数学模型

假设有两个相互依存的种群 P 和 H . H 在资源充足, 没有 P 的情况下, 其增长服从指数分布, 而 P 在其他情况良好但没有 H 的情况下, 有固定的负增长率, 设二者增长率分别为 r_1 和 $-r_2$. 现在把两个种群置入同一有限空间, 类似于 Lotka-Volterra (食饵-捕食者) 模型的推导方法, 我们可以假定 P 种群的增长有利于 H 种群的增长, 而 H 种群的增长也有利于 P 种群的增长, 即交叉项系数均为正数. 记 P 对 H 的影响为 $b_1 > 0$, H 对 P 的影响为 $b_2 > 0$, 则有以下式成立^[1]:

$$\begin{cases} \frac{dH}{dt} = (r_1 + b_1 P)H \\ \frac{dG}{dt} = (-r_2 + b_2 H)G \end{cases}$$

但是这个方程没有考虑到, 在空间有限的情况下, 即使 P 种群数量变为 0, H 的种群数量也不可能服从完全的指数增长, 故需要对模型进行修正. 我们假设在没有 P 的情况下, H 种群数量服从下述 Logistic 方程, 其他不变:

$$\frac{dH}{dt} = (r_1 - a_1 H)H$$

上述方程的平衡点为 $\frac{r_1}{a_1}$, 表示在该时间, H 种群数量达到最大. 显然这个平衡点随着空间、资源等外界因素变化, 故将该点时 H 种群的数量记作环境承载力 N_1 , 并且在原方程中用 N_1 替换 a_1 . 接下来, 对 P 种群做类似的修正, 我们得到一个新的种群数量变化的方程:

$$\begin{cases} \frac{dH}{dt} = (r_1 - \frac{r_1 H}{N_1} + b_1 P)H \\ \frac{dG}{dt} = (-r_2 - \frac{r_2 G}{N_2} + b_2 H)G \end{cases}$$

在这个修正后的方程中, 所有参数均为正数. 经过一定的变量代换后, 可以得到实验一待求的微分方程组.

1.2 使用 Runge-Kutta 方法求解微分方程组的初值问题

问题描述: 自然界中, 两个相互依存的种群数量 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 满足如下控制微分方程, 请就 $\rho_1 \rho_2 < 1$ 且 $\rho_2 > 1$, $N_1 = 1000$, $N_2 = 5000$ 情况, 数值求解微分方程初值问题, 并画出种群数量随时间变化的演化图:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = r_1 x_1 (1 - \frac{x_1}{N_1} + \rho_1 \frac{x_2}{N_2}) \\ \frac{dx_2}{dt} = r_2 x_2 (-1 + \rho_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}) \\ x_1(0) = \frac{N_1}{2} \\ x_2(0) = \frac{N_2}{2} \end{cases} \quad (1)$$

在求解本题的问题之前，我们先对这个方程进行了进一步的分析：

分析方程，我们发现， N_1 和 N_2 分别为两个种群的环境容纳量， r_1 和 r_2 分别为两个种群在资源无限的单一环境中种群数量的自然增长率，而 ρ_1 和 ρ_2 分别为两个种群对对方种群数量的影响。同时我们注意到，由于二者相互依存，两个微分方程的交叉项系数都为正数，即一个物种的变化会积极地影响另一个物种的变化；而由 Logistic 方程，二次项系数为负数，故种群数量的不断增长是不可能的。由于本题中我们仅讨论 $\rho_1 \rho_2 < 1$ 且 $\rho_2 > 1$ 的情况，即种群 1 对种群 2 的影响比较大，而种群 2 对种群 1 的影响比较小。以下将从方程稳定性的角度给出这样设定参数的理由。

1.2.1 微分方程的稳定性

以下讨论微分方程组 (1) 的稳定性。

微分方程组 (1) 的稳定性可以通过构造 Liapounov 函数的方法来证明。通过相关文献^[2]，Liapounov 函数取为：

$$V = c_1 \log x_1 + c_2 \log x_2$$

其中 c_1, c_2 需要满足（由种群方程构成解空间的凸性，以及凸集分离定理可以说明它们可以取得）：

$$c_1(r_1 x_1 (1 - \frac{x_1}{N_1} + \rho_1 \frac{x_2}{N_2})) + c_2(r_2 x_2 (-1 + \rho_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2})) > 0$$

对 V 求导后，就可以证明方程的稳定性，同时这个结论也可以推导至有限维的种群微分方程组。

然后求解微分方程 (1) 的平衡点，即下列方程组的解：

$$\begin{cases} r_1 x_1 (1 - \frac{x_1}{N_1} + \rho_1 \frac{x_2}{N_2}) = 0 \\ r_2 x_2 (-1 + \rho_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}) = 0 \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1 - \rho_1}{1 - \rho_1 \rho_2} N_1 \\ x_2 = \frac{\rho_2 - 1}{1 - \rho_1 \rho_2} N_2 \end{cases}$$

由于微分方程组 (1) 是稳定的，那么两个物种的种群数量将稳定于 (1.2.1) 式得出的解，而题目中给出的 $\rho_1 \rho_2 < 1$, $\rho_2 > 1$ 的参数条件可以推出 $x_1 > 0, x_2 > 0$ ，即在这个条件下，可以保证两个物种均不灭绝。

1.2.2 对于不同条件下种群的变化规律

本题中使用 MatLab 中的 ode45 函数，它采用的是 4 阶方法提供候选解，5 阶方法控制误差的 Runge-Kutta 方法。

首先控制种群自然增长率 $r_1 = 0.5, r_2 = 0.5$ 不变，改变种群间影响因子 ρ_1, ρ_2 的值，可以得到图 (1) 结果。

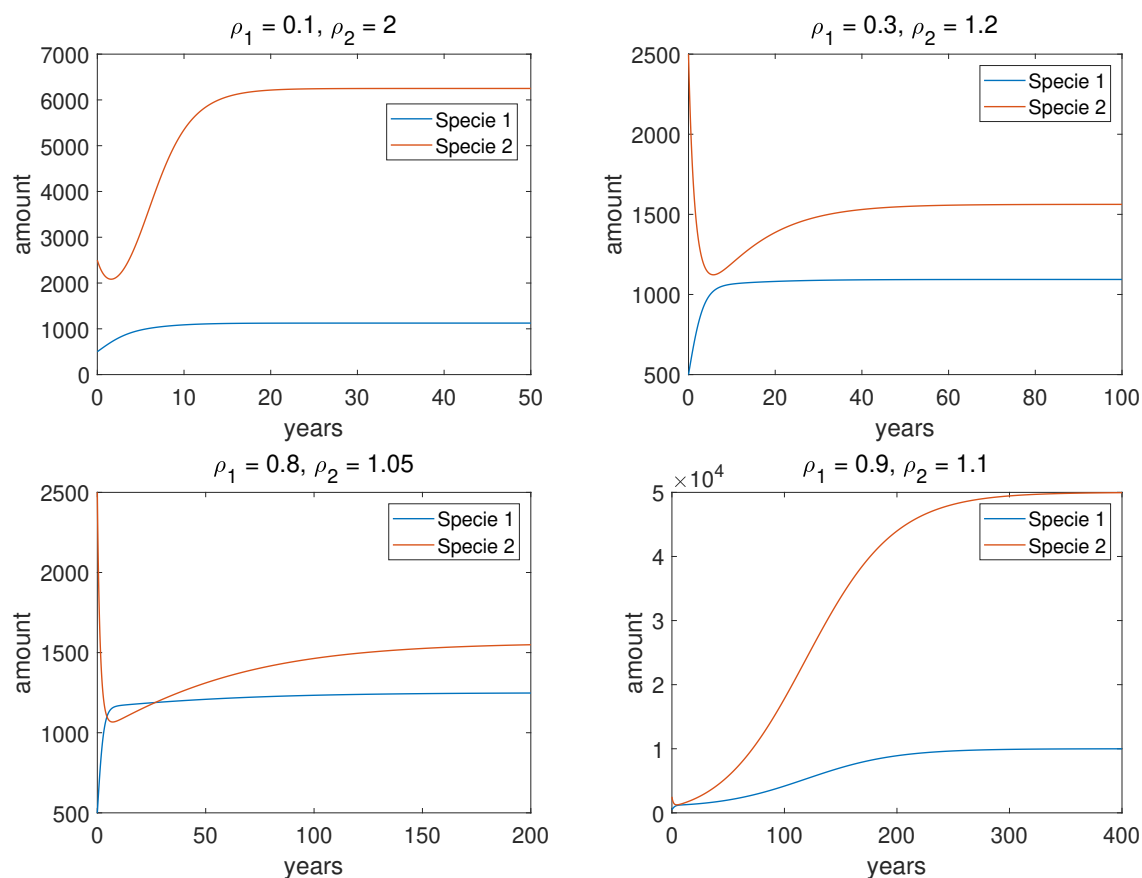


图 1 种群间影响因子的改变对种群变化规律的影响

从上面的实验结果可以发现，当 ρ_1 越小， ρ_2 越大，整个系统达到平衡的时间越短。当 ρ_1 越小，物种 1 达到平衡时的种群数量越少，当 ρ_2 越小，物种 2 达到平衡时的种群数量越少。当 $1 - \rho_1 \rho_2$ 的值越接近 0 时，整个系统达到平衡的时间越长，而且每个物种平衡时的种群数量均大量提升，这说明种群间的影响因子与种群数量的变化非常相关。同时上面得出的结果与对微分方程的理论分析得出的平衡点非常契合。

然后控制种群间影响因子 $\rho_1 = 0.3, \rho_2 = 1.2$ 不变，改变种群的自然增长率，可以得到图 (2) 结果。

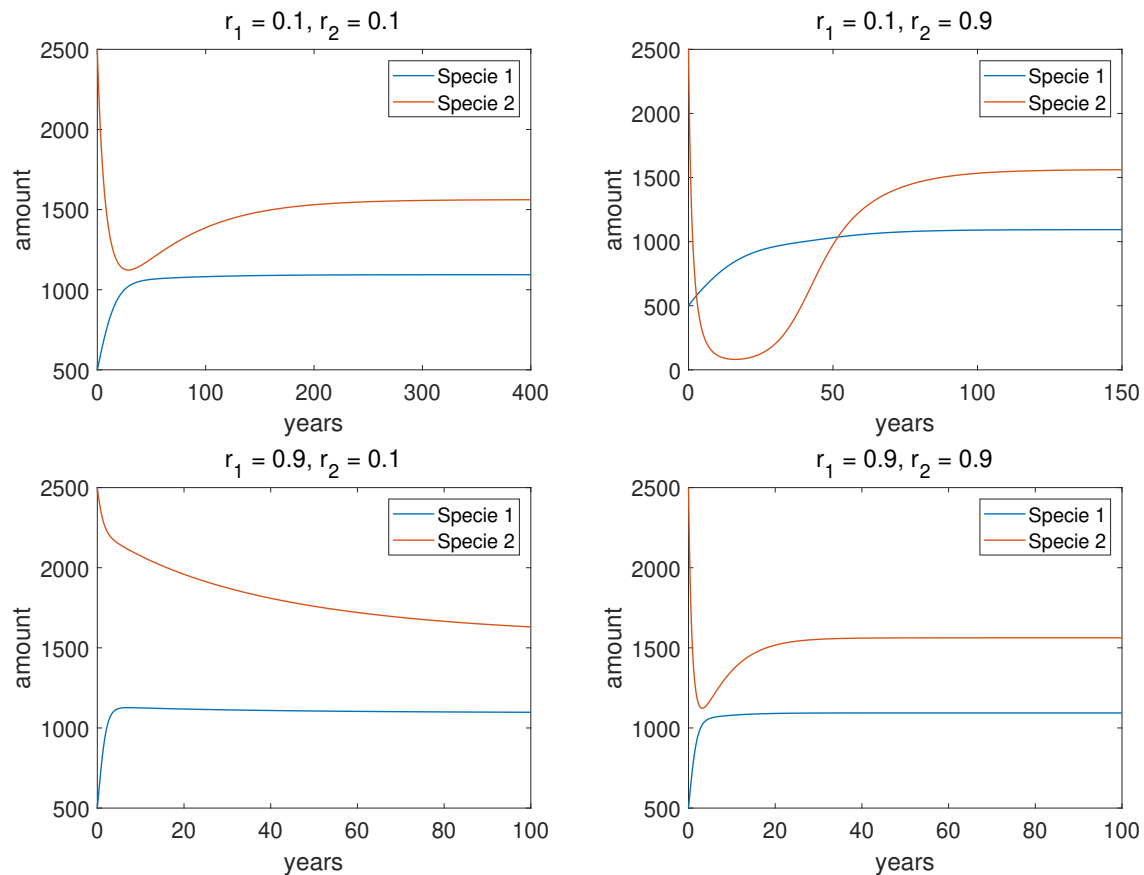


图 2 种群间影响因子的改变对种群变化规律的影响

从实验结果可以发现, r_1, r_2 的大小不会决定系统平衡点的值, 但是会影响系统到达平衡点的时间. 如果 $r_1 = r_2$, 得到的种群变化的函数曲线非常接近; 但是 r_1, r_2 任意取值时, 所得的种群变化的函数曲线大相径庭. 而且种群的自然增长率会大幅度影响短时间内种群的数量, 在自然环境下, 异常的自然增长率可能会导致生物爆发或锐减, 很有可能会不满足此时得出的种群变化的曲线.

1.3 实验一的代码

```
r1 = 0.5; % variable here
r2 = 0.5; % variable here
rho1 = 0.3; % variable here
rho2 = 1.2; % variable here
N1 = 1000;
N2 = 5000;

options = odeset('RelTol',1e-12,'AbsTol',[1e-10 1e-10]);
```

```
[t, x] = ode45(@(t, x)rigid(t, x, r1, r2, rho1, rho2, N1, N2), [0 100],
↳ [N1 / 2, N2 / 2], options); % Solve the function

plot(t, x(:, 1), 'linewidth', 1);
hold on;
plot(t, x(:, 2), 'linewidth', 1);
hold off;
set(gca, 'fontsize', 16);
xlabel('year');
ylabel('amount');
legend(['Specie 1'; 'Specie 2'])

function dx = rigid(t, x, r1, r2, rho1, rho2, N1, N2)
    dx = zeros(2, 1);
    dx(1) = r1 * x(1) * (1 - x(1) / N1 + rho1 * x(2) / N2);
    dx(2) = r2 * x(2) * (-1 - x(2) / N2 + rho2 * x(1) / N1);
end
```

2 实验二：求解微分方程的边值问题

2.1 使用 bvp4c 求解边值问题

问题描述：求以下微分方程边值问题的数值解，并在相平面中绘制解的图形：

$$\begin{cases} y_1' = y_1(1 - \sin y_2) \\ y_2' = y_1 + y_2 \\ y_1(0) = 1, y_2(1) = 2 \end{cases}$$

与以往的微分方程不同，这个微分方程是不是初值问题，所以无法使用符号运算中的 `dsolve` 求出精确解，也无法使用数值运算中的 `ode45` 求解. 这个微分方程是一个两点边值问题，其中 y_1, y_2 满足的方程相互影响，且它们一个给出了初值条件，另一个给出了终端条件. 求解边值问题需要使用 MatLab 中的 `bvp4c` 函数进行处理. 具体处理的方法如下：

首先，需要使用 `bvpinit(x,yinit)` 函数得出边界值问题求解器的初始估计值 `solinit`，其中 x 是指定初始网格的向量. 由于本题要在 $[0, 1]$ 中对边值问题求解，我们将 $[0, 1]$ 区间十等分作为估计值，这样的估计通常足以满足需求. `yinit` 是解的估计值. 本题中，可以直接将边值作为估计值，即 $y_1(\cdot) = 1, y_2(\cdot) = 2$.

然后给出 bvp4c 的调用方法：

```
sol = bvp4c(@twoode, @twobc, solinit);
```

通过以上的调用方法分别设计相应的函数 twoode 函数就是题目中给出的微分方程，而 twobc 函数则是边值条件。值得注意的是，此时的边值条件中不需要传入求解的区间参数，只需要给出两点边值的点态条件即可。具体而言，这个方程要写成以下的形式：

```
function res = twobc(ya, yb)
    res = [ya(1) - 1; yb(2) - 2];
end
```

其中 $ya(1) - 1$ 项表示左端点处第一个分向量的值为 1，即 $y_1(0) = 1$ ，而 $yb(2) - 2$ 表示右端点处第二个分向量的值为 2，即 $y_2(1) = 2$ 。

通过以上的设置，可以得出方程的解如下图所示：

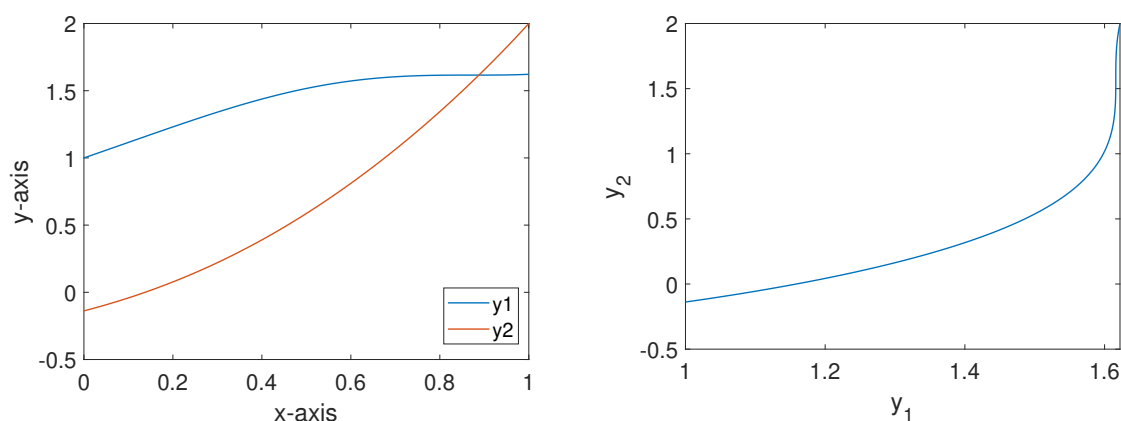


图 3 微分方程边值问题的解（左）及相平面图（右）

2.2 实验二的代码

```
solinit = bvpinit(linspace(0, 1, 10), [2 1]);
sol = bvp4c(@twoode, @twobc, solinit);
x = linspace(0, 1);
y = deval(sol, x);

figure(1)
plot(x, y(1, :), 'linewidth', 1);
hold on;
```



```

plot(x, y(2, :), 'linewidth', 1);
hold off;
set(gca, 'fontsize', 16);
xlabel('x-axis');
ylabel('y-axis');
legend(['y1'; 'y2'])

figure(2)
plot(y(1, :), y(2, :), 'linewidth', 1);
xlabel('y_1');
ylabel('y_2');
set(gca, 'fontsize', 16);

function dydx = twoode(x, y)
    dydx = [y(1) .* (1 - sin(y(2))); y(1) + y(2)];
end

function res = twobc(ya, yb)
    res = [ya(1) - 1; yb(2) - 2];
end

```

3 实验三：求解单摆与滑块的运动问题

3.1 运动方程的推导

3.1.1 理论知识

这个由滑块和单摆构成的体系所受的约束是理想和完整的，主动力都是保守力，我们可以引入广义坐标来建立拉格朗日方程解决这个问题。

定义 3.1（拉格朗日函数） 令 $q = \cup_{\alpha=1}^s q_{\alpha}$, $\alpha = 1, \dots, s$ 为 s 个独立的广义坐标, $T = T(q, \dot{q}, t)$ 是体系的动能, $V = V(q)$ 是体系的势能, 函数

$$L = T - V = L(q, \dot{q}, t)$$

称为体系的拉格朗日函数.

定理 3.2（主动力只有保守力的理想、完整体系的拉格朗日方程） 如果主动力均为保

守力，体系所受的约束是理想和完整的，则满足的拉格朗日方程为：

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad \alpha = 1, 2, \dots, s. \quad (2)$$

3.1.2 运用拉格朗日方程求解单摆与滑块运动问题

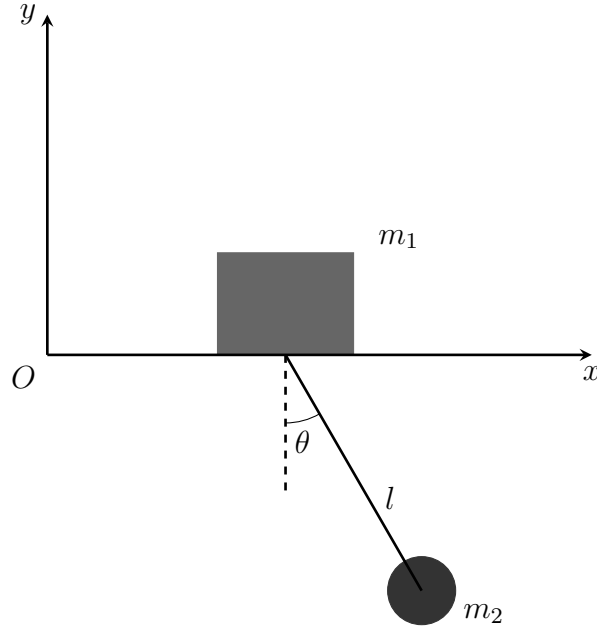


图 4 滑块与单摆组成的运动体系

体系为滑块和单摆，自由度为 2. 易知动能为滑块和单摆的动能之和，势能为滑块和单摆的重力势能之和. 以滑块所在的水平面为 x 轴，与滑块水平面垂直的轴为 y 轴构建平面直角坐标系，并选取滑块坐标 x 和摆的振幅 θ 作为广义坐标. 那么有 m_1 的坐标为 $(x, 0)$, m_2 的坐标为 $(x + l \sin \theta, -l \cos \theta)$ ，可以求得体系的动能：

$$\begin{aligned} T &= T_{m_1} + T_{m_2} \\ &= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[\left(\dot{x} + l \dot{\theta} \cos \theta \right) \vec{i} + \left(l \dot{\theta} \sin \theta \right) \vec{j} \right]^2 \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\theta}^2 + m_2 l \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta. \end{aligned}$$

以 $y = 0$ 为零势面，则：

$$V = -\frac{1}{2} m_2 g l \cos \theta.$$

由此得：

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\theta}^2 + m_2 l \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2} m_2 g l \cos \theta. \quad (3)$$

将该体系的两个广义坐标和拉格朗日函数代入到 (4) 中，可以得到以下等式

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) \ddot{x} + m_2 l \ddot{\theta} \cos \theta - m_2 l \dot{\theta}^2 \sin \theta = 0 \\ m_2 l^2 \ddot{\theta} + m_2 l \ddot{x} \cos \theta + m_2 g l \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (4)$$

令 $M = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$ ，进一步整理可得如下微分方程：

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{-M\dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta - \frac{g}{l} \sin \theta}{1 - M \cos^2 \theta} \\ \ddot{x} = \frac{Mg \sin \theta \cos \theta + Ml\dot{\theta}^2 \sin \theta}{1 - M \cos^2 \theta} \end{cases} \quad (5)$$

3.2 运动方程的求解

上一节中推导出的微分方程是一个二阶微分方程组，而 MatLab 中并不能直接求解二阶微分方程，必须要降阶处理。记 $y_1 = \theta, y_2 = \frac{d\theta}{dt}, y_3 = x, y_4 = \frac{dx}{dt}$ ，则原方程可以变形为：

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = \frac{-M \cos \theta \sin \theta (y_2)^2 - \frac{g}{l} \sin \theta}{1 - M \cos^2 \theta} \\ \dot{y}_3 = y_4 \\ \dot{y}_4 = \frac{Mg \sin \theta \cos \theta + Ml \sin \theta (y_2)^2}{1 - M \cos^2 \theta} \end{cases}$$

这样就将一个二阶微分方程组转变为一阶微分方程组，这样就可以调用 MatLab 中的 ode45 函数对其进行求解。与此同时，我们也需要考虑这个一阶微分方程组的初始条件，这些条件可以由物体运动的物理意义给出。由上述推导可知，广义坐标为 x, θ ，而初始时刻整个系统处于静止状态，所以有：

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = 0$$

由以上的方程，我们可以得出任意 $[0, T]$ 时刻，两个物体的运动状态。在给出它们运动状态之前，我们先给出变形为一阶微分方程，且有 $m_1 = 1, m_2 = 1, l = 1, \theta_0 = \frac{\pi}{6}$ 时方程的解：

从上述方程的解可以看出，这两个物体的运动是周期运动，而对于运动周期的讨论将在实现物体的动态化之后进行。

3.3 物体的动态化

对图像结构的划分：

为了使物体呈现出运动的效果，我们需要对求解之后的数据进行处理，并对每一个求解出的数据进行绘图。首先对图像进行简单的拆分，发现绘制图像需要以下部分：

- 摆的绳子的运动：这需要两个端点来确定一条直线，两个端点即为滑块和重物的重心所在位置；

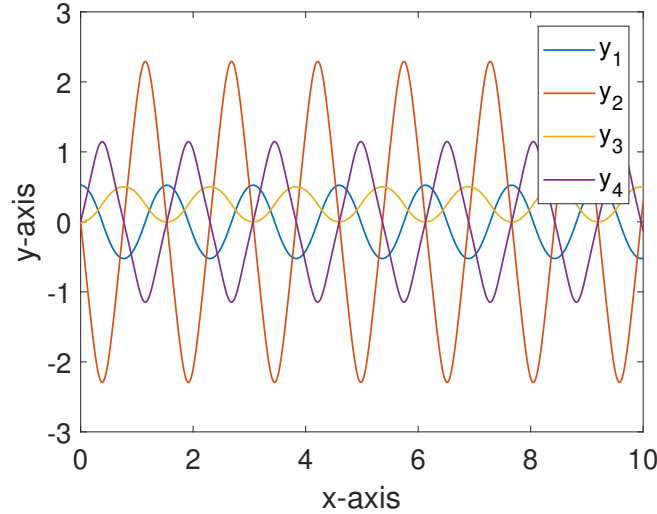


图 5 一阶微分方程组的解

- 滑块的运动：滑块固定在一个水平轨道上面，所以有其纵坐标 $y_b = 0$ ，横坐标根据微分方程的解 $x = y_1$ 实时确定；
- 重物的运动：重物的运动轨迹受绳长和滑块的位置决定，所得出的几何关系为：

$$x_g = x + l \sin \theta$$

$$y_g = -l \cos \theta$$

对所需图像的绘制：

我们使用一条直线来表示绳子，绘制直线时，我们选用了 MatLab 中的 line 函数进行绘制，line 函数需要给出所绘制直线的两个端点. 我们使用矩形来表示滑块和重物，绘制矩形时，我们选用了 MatLab 中的 rectangle 函数进行绘制，rectangle 函数需要给定待绘制矩形的长，宽以及左上角坐标，而我们知道的数据是长方形的中心坐标，为了使构图美观，我们将矩形的长宽比定为 $1 : 0.618$ ，同时设定宽度为绳长的 $\frac{1}{10}$ ，这样可以得到绘制矩形所需的四个参数：

$$L = \frac{l}{6.18}$$

$$H = \frac{l}{10}$$

$$x = x_c - \frac{L}{2}$$

$$y = y_c - \frac{H}{2}$$

其中 L 为矩形的长， H 为矩形的宽， (x, y) 为矩形左上角坐标， (x_c, y_c) 为矩形中心坐标.

由于绳子的坐标会不断变化，这样所得到的图形会因为坐标没有固定而长短不一

致，所以需要使用 `axis` 函数固定图像的坐标，由于绳加滑块（以及矩形）总长度不可能超过绳长的 1.2 倍，我们使用了这个长度作为固定坐标的长度。

此外，由于 `line`, `rectangle` 函数执行时自动加入了 `hold on`，即不会擦除上一次绘制的结果，所以在使用 `drawnow` 绘制图像后，还需要使用 `cla reset` 将作图区的图像清空。

以下是我们的绘制结果，由于无法插入动态图片，我们随机选取了运动的两个时刻作为示例：

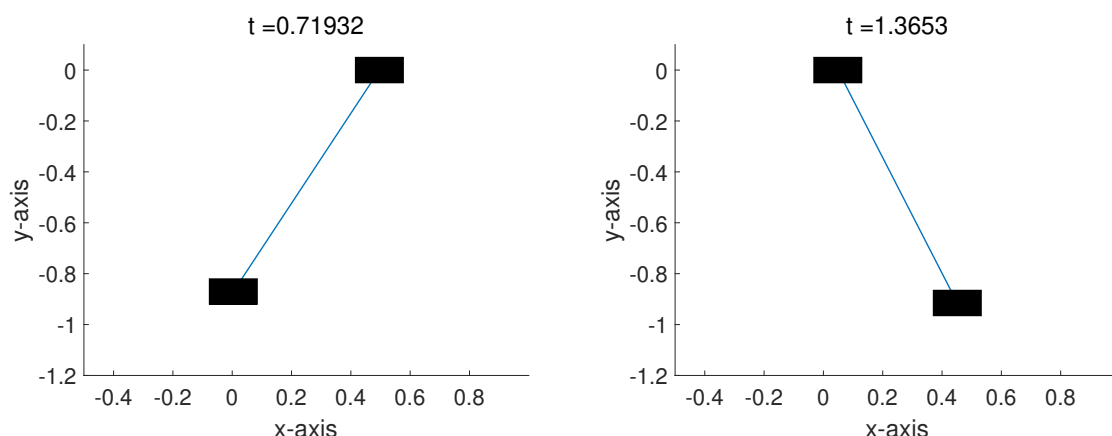


图 6 滑块与重物的运动

3.4 不同条件下的实验结果

本实验中可以控制的变量是：滑块与重物的质量，绳长与初始摆角，以下实验中，我们将改变这些参数，研究最大摆角和摆的运动周期与这些变量的关系。

3.4.1 关于最大摆角的讨论

从能量守恒的角度上，如果不计摩擦，最大摆角就是初始摆角。下面对此进行证明。

记 E_{kb} 为滑块动能， E_{kg} 为重物动能， E_{pb} 为滑块势能， E_{pg} 为重物势能。选取滑块所在高度为零势能点。在运动的所有阶段，由于机械能守恒，有：

$$E_{kb} + E_{pb} + E_{kg} + E_{pg} = C$$

由初始时刻的重物势能，可得 $C = -m_2 gl \cos \theta_0$ 。

对于滑块，其初动能和初势能均为 0，所以在任何时刻：

$$E_{kg} + E_{pg} = C$$

而由几何关系，有：

$$E_{pg} = -m_2 gl \cos \theta$$

上式表明，重物势能越大，其摆角越大. 故当其动能最小，即 $E_{kg} = 0$ 时， $E_{pg} = -m_2gl \cos \theta_0$.

以上表明 $\theta = \theta_0$ 为最大摆角，即最大摆角就是初始摆角.

3.4.2 关于运动周期与物体质量，绳长和初始摆角的关系

运动周期的计算：

运动周期不能按照能量的方式进行计算，但是以上关于最大摆角的讨论对运动周期的求解很有帮助. 上面的讨论说明，无论重物相对滑块在左还是在右，都能达到一个最大摆角，且它们的运动是对称的，所以这个系统是有周期的. 那么，如果我们得出了摆角的足够多的信息，就可以计算出这个系统的运动周期了.

我们可以通过求解微分方程组得到摆角在某个时间段内的值，通过三次样条插值处理后再求其峰值的间隔，两个峰值的间隔即为系统的运动周期.

根据以上的分析，我们通过控制变量得出了以下实验结果.

其它条件不变，仅改变滑块和重物的质量（即改变 M 的值）：

以下实验取 $l = 1, \theta_0 = \frac{\pi}{6}, M = 0.01, 0.02, \dots, 0.99$ ，分别计算系统的运动周期，得到下图结果：

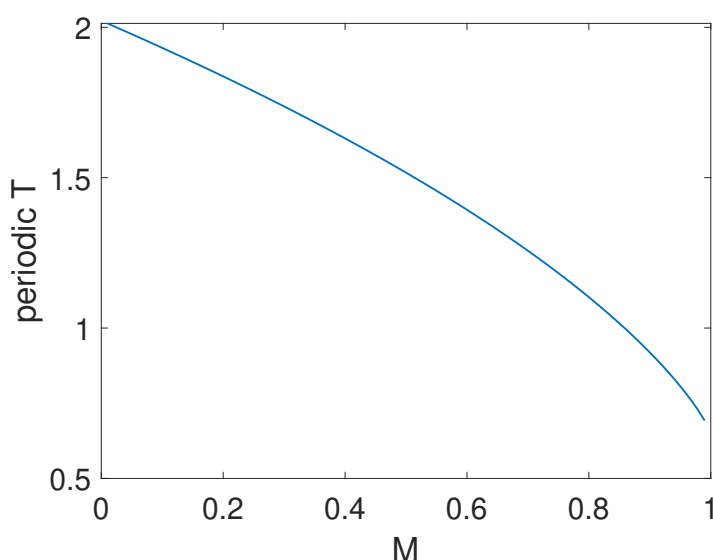


图 7 M 与运动周期的关系

从以上的实验结果可以看出， M 与系统运动周期呈负相关，且约在 $M \leq 0.6$ 时近似为线性的负相关关系，但是在 $M > 0.6$ 时， M 的少量增加将会导致运动周期的大量减少，由于 $M < 1$ ，在 M 无限接近于 1，即 $m_2 \gg m_1$ 时，单摆的运动周期很小，这也符合实际的运动情况. 同时， M 对运动周期的影响较小.

其它条件不变，仅改变绳长（即改变 l 的值）：

以下实验取 $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$, $M = 0.5$, $l = 1, 2, \dots, 95$, 分别计算系统的运动周期, 得到下图结果:

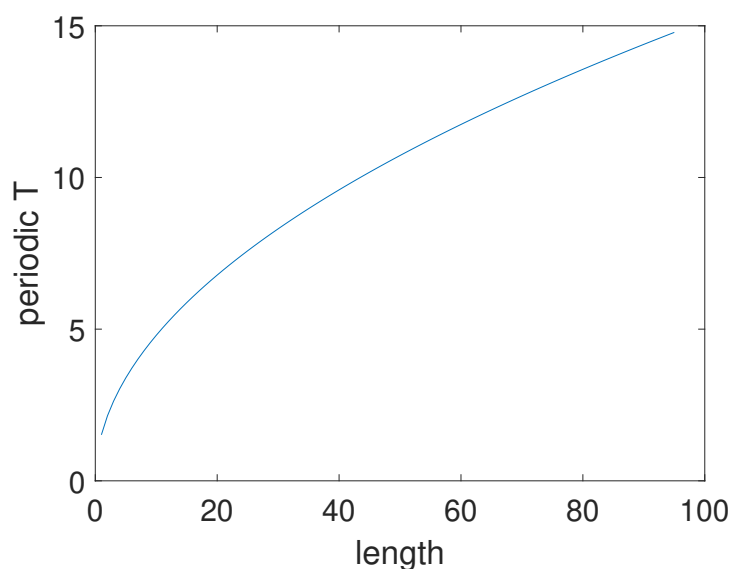


图 8 l 与运动周期的关系

从以上的实验结果可以看出, l 与系统运动周期呈**正相关**, 在 $M < 60$ 时, l 的少量增加就会导致运动周期的大量增加. 考虑到摆角较小时, 单摆的周期为 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, 此时的正相关关系与单摆的运动周期非常类似, 这也符合运动规律.

其它条件不变, 仅改变初始摆角 (即改变 θ_0 的值):

以下实验取 $M = 0.5$, $l = 1$, $\theta_0 = \frac{\pi}{200}, \frac{2\pi}{200}, \dots, \frac{99\pi}{200}$, 分别计算系统的运动周期, 得到下图结果:

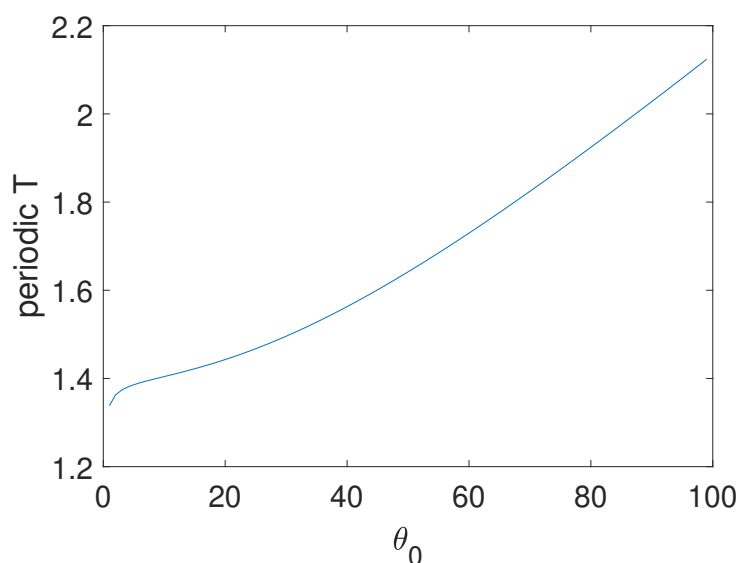


图 9 l 与运动周期的关系

从以上的实验结果可以看出， θ_0 与系统运动周期呈**正相关**，从图像上看， θ_0 的变化对运动周期的影响较小，比绳长对运动周期的影响小很多。

综上所述， M, l, θ_0 对运动周期均有影响，但是 l 对运动周期的影响最大，这类似于小角度单摆的运动规律。

3.5 实验三的代码

```
g = 9.8;
l = 1;
m1 = 1;
m2 = 1;
M = m2 / (m1 + m2);
init_theta = pi / 6;

options = odeset('RelTol',1e-12,'AbsTol',[1e-10 1e-10 1e-10 1e-10]);
[t, x] = ode45(@(t, x)rigid(t, x, M, g, l), [0 10], [init_theta, 0, 0,
    ↪ 0], options); % Solve the function
figure(1)
plot(t, x(:, 1), 'linewidth', 1);
hold on;
plot(t, x(:, 2), 'linewidth', 1);
hold on;
plot(t, x(:, 3), 'linewidth', 1);
hold on;
plot(t, x(:, 4), 'linewidth', 1);
hold off;
set(gca, 'fontsize', 16);
xlabel('x-axis');
ylabel('y-axis');
legend(['y_1'; 'y_2'; 'y_3'; 'y_4'])

for i = 1: size(t, 1)
    p1 = [x(i, 3), 0];
    p2 = [x(i, 3) + l * sin(x(i)), -l * cos(x(i))];
    line([p1(1) p2(1)], [p1(2) p2(2)], 'linewidth', 1);
```



```

rectangle('Position', [p1(1) - 1 / 12.36, p1(2) - 1 / 20, 1 / 6.18,
    ↪ 1 / 10], 'facecolor', [0, 0, 0]);
rectangle('Position', [p2(1) - 1 / 12.36, p2(2) - 1 / 20, 1 / 6.18,
    ↪ 1 / 10], 'facecolor', [0, 0, 0]);
axis([1 * min(sin(x(:, 1))), 1 * max(sin(x(:, 2))), -1 * 1.2, 1 /
    ↪ 10])
set(gca, 'fontsize', 16);
title(strcat('t = ', num2str(t(i))));
xlabel('x-axis');
ylabel('y-axis');
drawnow;
if i ~= size(t, 1)
    cla reset;
end
end

function dx = rigid(t, x, M, g, l)
    dx = zeros(4, 1);
    dx(1) = x(2);
    dx(2) = (-M * cos(x(1)) * sin(x(1)) * (dx(1))^2 - g / l * sin(x(1)))
    ↪ / (1 - M * cos(x(1))^2);
    dx(3) = x(4);
    dx(4) = (M * g * sin(x(1)) * cos(x(1)) + M * l * sin(x(1)) *
    ↪ (dx(1))^2) / (1 - M * cos(x(1))^2);
end

```

参考文献

- [1] 姜启源, 谢金星, 叶俊. 数学模型. 第 4 版 [M]. 高等教育出版社, 2011.
- [2] Shlomo Sternberg, Lecture 15, Lotka-Volterra.
<http://www.math.harvard.edu/library/sternberg/slides/11809LV.pdf>