组　　号	Z08
实验题目	符号运算
队员姓名	1．宋昭琰
	2．徐意
	3．李宗琳
	4．向飞宇

目　录

1 问题一：用符号运算求解不定积分

问题描述： 求不定积分 $\int \sin^{10}(x)\,\mathrm{d}x$.

本题将 x 作为符号变量，构造符号函数 $\sin^{10}(x)$，最后使用 MatLab 中 int 函数对符号函数作不定积分，并使用 latex 命令将所得结果转换为 LaTeX 格式. 所得结果为:

$$\int \sin^{10}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{63\,x}{256} - \frac{105\,\sin(2\,x)}{512} + \frac{15\,\sin(4\,x)}{256} - \frac{15\,\sin(6\,x)}{1024} + \frac{5\,\sin(8\,x)}{2048} - \frac{\sin(10\,x)}{5120} + C$$

本题代码：

```
%% Exercise 1
syms x;
f = (sin(x))^10;
result = int(f);
latex(result)
```

2 问题二：用符号运算求解导数

问题描述： 求三元函数 $u(x,y,z) = \sin(xy)e^{x^2 y \sin z}$ 的偏导数:

$$\frac{\partial^5 u(x,y,z)}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z}|_{(1,2,1)}$$

本题首先将 x, y, z 作为符号变量，然后构造符号函数 $u(x,y,z) = \sin(xy)e^{x^2 y \sin z}$，然后使用 MatLab 中的 diff 函数，首先对变量 x 求二阶偏导，然后对变量 y 求二阶偏导，最后对变量 z 求一阶偏导（由于函数的光滑性，求偏导的先后顺序与最后结果无关）. 最后使用 subs 函数，将坐标 $(1,2,1)$ 作为元胞数组传给元胞变量数组 $\{x,y,z\}$，就可以得到结果:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^5 u(x,y,z)}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z}|_{(1,2,1)} &= 288\,\cos(1)\,\cos(2)\,\mathrm{e}^{2\,\sin(1)}\sin(1)^2 \\
&- 40\,\cos(1)\,\mathrm{e}^{2\,\sin(1)}\,\sin(2) \\
&- 28\,\cos(1)\,\cos(2)\,\mathrm{e}^{2\,\sin(1)} \\
&+ 96\,\cos(1)\,\cos(2)\,\mathrm{e}^{2\,\sin(1)}\sin(1)^3 \\
&+ 28\,\cos(1)\,\mathrm{e}^{2\,\sin(1)}\sin(1)^2\,\sin(2) \\
&+ 136\,\cos(1)\,\mathrm{e}^{2\,\sin(1)}\sin(1)^3\,\sin(2) \\
&+ 32\,\cos(1)\,\mathrm{e}^{2\,\sin(1)}\sin(1)^4\,\sin(2) \\
&+ 120\,\cos(1)\,\cos(2)\,\mathrm{e}^{2\,\sin(1)}\,\sin(1) \\
&- 168\,\cos(1)\,\mathrm{e}^{2\,\sin(1)}\,\sin(1)\,\sin(2)
\end{aligned}$$

由于结果过长，我们通过 vpa 指令将其数值结果给出：

$$\frac{\partial^5 u(x,y,z)}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z}|_{(1,2,1)} \approx -574.6890$$

本题代码：

```
%% Exercise 2
syms x y z;
f = sin(x * y) * exp(x^2 * y * sin(z));
diff_fx = diff(f, x, 2);
diff_fy = diff(diff_fx, y, 2);
diff_fz = diff(diff_fy, z, 1);
result = subs(diff_fz, {x, y, z}, {1, 2, 1});
latex(result)
```

3 问题三：用符号运算求参数方程的导数

问题描述：求以下参数方程的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$：

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

本题首先将 a, t 作为符号变量，然后构造两个符号方程 x, y. 利用：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}$$

将待求导数转换为 y 对 t 的导数与 x 对 t 的导数之比，最后将结果转换为 LaTeX 格式：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\sin(t)}{\cos(t) - 1}$$

本题代码：

```
%% Exercise 3
syms a t
x = a * (t - sin(t));
y = a * (1 - cos(t));
result = diff(y, t) / diff(x, t);
latex(result)
```

4 问题四：用符号运算求解常微分方程

问题描述： 求以下常微分方程的解析解并绘制解的图像：

$$\begin{cases} {y_1}' = y_1 - y_2 \\ {y_2}' = y_1 + y_2 \\ y_1(0) = 1, y_2(0) = 2 \end{cases} \tag{1}$$

本题使用了符号函数 $y_1(t), y_2(t)$，首先使用 diff 函数对 y_1, y_2 求导，并使用一个二元数组表示两个方程与两个初值条件 (方程和初值条件使用 == 来表示相等关系). 最后使用 MatLab 中 dsolve 函数求出方程的解析解如下：

$$\begin{cases} y_1(t) = \mathrm{e}^t \cos(t) - 2\,\mathrm{e}^t \sin(t) \\ y_2(t) = 2\,\mathrm{e}^t \cos(t) + \mathrm{e}^t \sin(t) \end{cases}$$

根据上面的函数表达式，通过 fplot 函数，设置线宽为 1，在 $t \in [-4, 4]$ 的区间上绘制函数的图像，绘制结果如下：

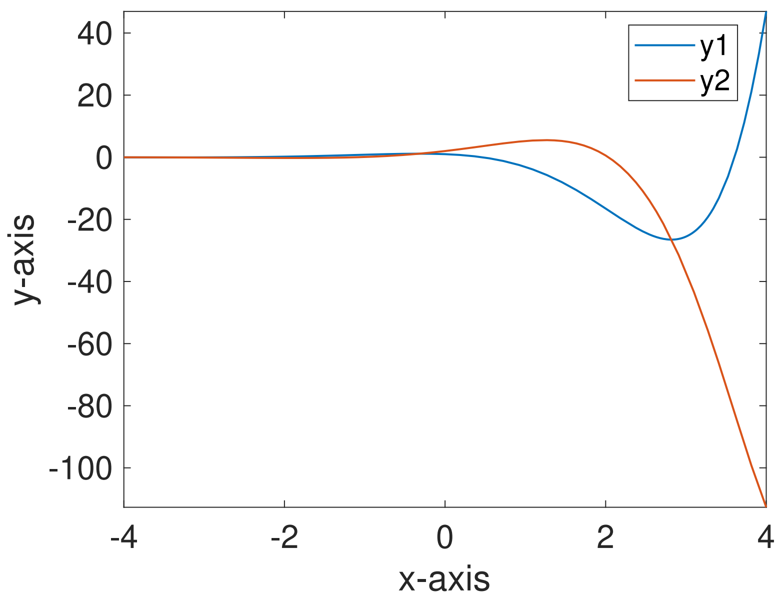

图 1　常微分方程（1）的解的图像

本题代码：

```
%% Exercise 4
syms y1(t) y2(t)
eqns = [diff(y1, t) == y1 - y2, diff(y2, t) == y1 + y2];
conds = [y1(0) == 1, y2(0) == 2];
```

```
sol = dsolve(eqns, conds);
latex(sol.y1)
latex(sol.y2)
fplot(sol.y1, [-4 4], 'linewidth', 1);
hold on;
fplot(sol.y2, [-4 4], 'linewidth', 1);
hold off;
legend('y1', 'y2');
xlabel('x-axis');
ylabel('y-axis');
set(gca, 'fontsize', 16);
```

5 问题五：用符号运算求线性方程组的解

问题描述：求线性方程组的解：

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

本题将 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, x, y$ 作为符号变量，并使用 MatLab 中的 solve 函数对线性方程组进行求解可得：

$$\begin{cases} x = -\frac{b_1\,c_2 - b_2\,c_1}{a_1\,b_2 - a_2\,b_1} \\ y = \frac{a_1\,c_2 - a_2\,c_1}{a_1\,b_2 - a_2\,b_1} \end{cases}$$

下面取 $a_1 = 1, b_1 = 2, c_1 = 3, a_2 = 3, b_2 = 2, c_2 = 1$ 代入上述所求方程，利用 subs 函数得到解（符号常量）：

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

这与事实情况相符.

本题代码：

```
%% Exercise 5
syms a1 b1 c1 a2 b2 c2 x y
eqns = [a1 * x + b1 * y == c1, a2 * x + b2 * y == c2];
sol = solve(eqns, [x, y]);
subs(sol.x, {a1, b1, c1, a2, b2, c2}, {1, 2, 3, 3, 2, 1})
subs(sol.y, {a1, b1, c1, a2, b2, c2}, {1, 2, 3, 3, 2, 1})
```

```
latex(sol.x)
latex(sol.y)
```

6 问题六：用符号运算求解函数的泰勒展开式

问题描述：求函数 $y(x)=\cos^2(x)e^x$ 在 $x=0$ 处的六阶、八阶、十阶泰勒展开式，并在同一坐标系下画出其图形.

本题中将 x 作为符号变量，然后将 $y(x)=\cos^2(x)e^x$ 作为符号函数，然后使用 MatLab 中的 taylor 函数，传入五个参数，分别定义展开目标 y，展开坐标 $x=0$ 以及阶数 $6,8,10$. 将所得的结果使用 latex 函数转为 LaTeX 格式，最后使用 fplot 函数与 hold on 函数，将三个展开式的函数图像显示在同一坐标轴中.

原函数在 $x=0$ 处的六阶 Taylor 展式为：

$$T_6(x)=\frac{7\,x^5}{40}-\frac{x^4}{8}-\frac{5\,x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+x+1$$

原函数在 $x=0$ 处的八阶 Taylor 展式为：

$$T_8(x)=\frac{x^7}{336}+\frac{59\,x^6}{720}+\frac{7\,x^5}{40}-\frac{x^4}{8}-\frac{5\,x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+x+1$$

原函数在 $x=0$ 处的十阶 Taylor 展式为：

$$T_{10}(x)=-\frac{599\,x^9}{362880}-\frac{263\,x^8}{40320}+\frac{x^7}{336}+\frac{59\,x^6}{720}+\frac{7\,x^5}{40}-\frac{x^4}{8}-\frac{5\,x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+x+1$$

在同一坐标系中所得图像为（本题中取 $x\in[-2,2]$）：

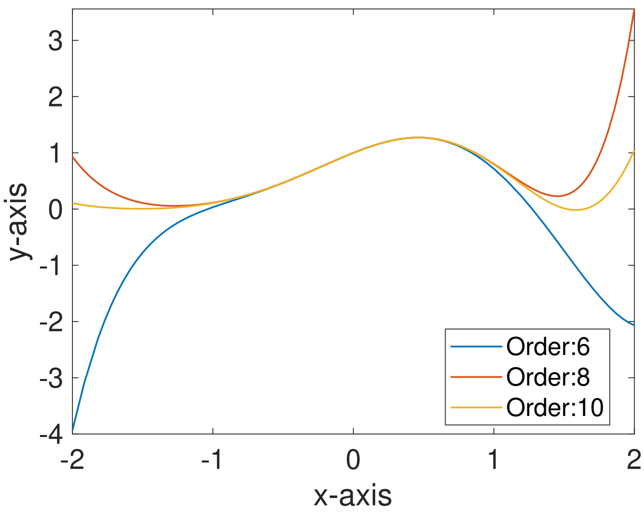

图 2 函数 $y(x)=\cos^2(x)e^x$ 在 $x=0$ 处的六阶、八阶、十阶泰勒展开式图像

本题代码：

```
%% Exercise 6
syms x
y = (cos(x))^2 * exp(x);
t6 = taylor(y, x, 0, 'Order', 6);
t8 = taylor(y, x, 0, 'Order', 8);
t10 = taylor(y, x, 0, 'Order', 10);
latex(t6)
latex(t8)
latex(t10)
fplot(t6, [-2, 2], 'linewidth', 1);
hold on;
fplot(t8, [-2, 2], 'linewidth', 1);
hold on;
fplot(t10, [-2, 2], 'linewidth', 1);
hold off;
legend('Order:6', 'Order:8', 'Order:10');
xlabel('x-axis');
ylabel('y-axis');
set(gca, 'fontsize', 16);
```

7 问题七：用符号运算求解矩阵特征值，特征向量与行列式值

问题描述：求下述矩阵的特征值，特征向量及行列式.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

本题首先利用 sym 函数构造了符号矩阵（$A = \mathrm{sym}([1\ 2\ 3;\ 4\ 1\ 2;\ 7\ 5\ 1])$），然后使用 eig 函数求出矩阵的特征值与特征向量为:

$$\lambda_1 = \frac{13}{\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}} + \left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3} + 1$$

$$\lambda_2 = 1 - \frac{\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}}{2} - \frac{13}{2\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}} - \frac{\sqrt{3}\left(\frac{13}{\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}} - \left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}\right)\mathrm{i}}{2}$$

$$\lambda_3 = 1 - \frac{\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}}{2} - \frac{13}{2\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}} + \frac{\sqrt{3}\left(\frac{13}{\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}} - \left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}\right)\mathrm{i}}{2}$$

对应的特征向量为:

$$v_1 = \begin{bmatrix} \frac{5\left(\frac{13}{\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}}+\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}+1\right)^2}{2} - \frac{156}{\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}} - 12\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3} - 80, \\ 112 + \frac{221}{\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}} + 17\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3} - \frac{7\left(\frac{13}{\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}}+\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}+1\right)^2}{2}, \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} \frac{5\left(\frac{13}{2\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}}+\frac{\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}}{2}-1+\frac{\sqrt{3}\left(\frac{13}{\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}}-\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}\right)\mathrm{i}}{2}\right)^2}{2} + \frac{78}{\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}} + \\ 6\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3} - 80 + \sqrt{3}\left(\frac{13}{\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}} - \left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}\right)6\mathrm{i}, \\ -\frac{7\left(\frac{13}{2\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}}+\frac{\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}}{2}-1+\frac{\sqrt{3}\left(\frac{13}{\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}}-\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}\right)\mathrm{i}}{2}\right)^2}{2} + 112 - \frac{221}{2\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}} \\ -\frac{17\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}}{2} - \frac{\sqrt{3}\left(\frac{13}{\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}}-\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}\right)17\mathrm{i}}{2}, \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} \frac{5\left(\frac{13}{2\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}}+\frac{\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}}{2}-1-\frac{\sqrt{3}\left(\frac{13}{\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}}-\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}\right)\mathrm{i}}{2}\right)^2}{2} + \frac{78}{\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}} + \\ 6\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3} - 80 - \sqrt{3}\left(\frac{13}{\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}} - \left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}\right)6\mathrm{i}, \\ -\frac{7\left(\frac{13}{2\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}}+\frac{\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}}{2}-1-\frac{\sqrt{3}\left(\frac{13}{\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}}-\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}\right)\mathrm{i}}{2}\right)^2}{2} + 112 - \frac{221}{2\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}} \\ -\frac{17\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}}{2} + \frac{\sqrt{3}\left(\frac{13}{\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}}-\left(44+\sqrt{261}\,\mathrm{i}\right)^{1/3}\right)17\mathrm{i}}{2}, \\ 1 \end{bmatrix}$$

矩阵的行列式值为:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 50$$

本题不用符号运算，使用相同的 eig，det 函数也可以算出答案，只不过得到的是数值结果，此处不再赘述. 值得注意的是，**数值计算时，由于计算误差，会略去最终结果虚部的值，而在符号运算中，这个值不会被忽略.**

本题代码：

```
%% Exercise 7
A = sym([1, 2, 3; 4, 1, 2; 7, 5, 1]);
[v, d] = eig(A);
latex(v)
latex(d)
latex(det(A))
```

8 问题八：用符号运算求解极限

问题描述： 求下式极限.

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^3}$$

本题首先定义符号变量 x，然后构造符号函数 $(\cos x)^{1/x^3}$，最后利用 MatLab 中的 limit 函数对极限进行求解，最终发现：

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^3}\text{不存在.}$$

究其原因，我们对函数分别求解了左右导数，得到如下结果：

$$\lim_{x\to 0^+}(\cos x)^{1/x^3}=0$$
$$\lim_{x\to 0^+}(\cos x)^{1/x^3}=\infty$$

这说明函数的左右导数不相等，这解释了函数在 $x=0$ 处极限不存在的原因.

本题代码：

```
%% Exercise 8
syms x
f = (cos(x))^(1/x^3);
latex(limit(f, x, 0))
latex(limit(f, x, 0, 'left'))
latex(limit(f, x, 0, 'right'))
```

9 问题九：用符号运算求解隐函数导数（1）

问题描述： 设 $\ln x+e^{-y/x}=e$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

在这个函数的定义域上，这个函数足够光滑，能够满足隐函数求导的条件. 本题首先构造了两个符号变量 x,y. 然后根据这两个符号变量构造了一个函数：

$$F(x,y)=\ln x+e^{-y/x}-e$$

由隐函数求导定理，可得：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F_x}{F_y}$$

从而可以对上述函数分别对 x, y 求偏导，然后根据上述式子得出结果，并使用 latex 函数转换格式，最终得到：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\,\mathrm{e}^{y/x}\left(\frac{1}{x} + \frac{y\,\mathrm{e}^{-\frac{y}{x}}}{x^2}\right)$$

本题代码：

```
%% Exercise 9
syms x y
F = log(x) + exp(-y / x) - exp(1);
result = -diff(F, x) / diff(F, y);
latex(result)
```

10 问题十：用符号运算求解隐函数导数（2）

问题描述：设 $\sin\ (xy) + \cos\ (yz) + \tan\ (xz) = 0$，求 $\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x}$.

本题与上一题类似，只不过由于变量的增加，从求隐函数导数变成了偏导数.

在这个函数的定义域上，这个函数足够光滑，能够满足隐函数求导的条件. 本题首先构造了三个符号变量 x, y, z. 然后根据这三个符号变量构造了一个函数：

$$F(x, y, z) = \sin\ (xy) + \cos\ (yz) + \tan\ (xz)$$

由隐函数求导定理，可得：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

从而可以对上述函数分别对 x, y, z 求偏导，然后根据上述式子得出结果，并使用 latex 函数转换格式，最终得到：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z\left(\tan(x\,z)^2 + 1\right) + y\,\cos(x\,y)}{x\left(\tan(x\,z)^2 + 1\right) - y\,\sin(y\,z)}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x\,\cos(x\,y) - z\,\sin(y\,z)}{x\left(\tan(x\,z)^2 + 1\right) - y\,\sin(y\,z)}$$

本题代码：

```
%% Exercise 10
syms x y z
F = sin(x * y) + cos(y * z) + tan(x * z);
pzpx = -diff(F, x) / diff(F, z);
pzpy = -diff(F, y) / diff(F, z);
latex(pzpx)
latex(pzpy)
```

11 问题十一：用符号运算求解二重积分

问题描述： 计算二重积分 $\iint_D (2x^2\sin y + 3xy^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. 其中区域 D 是由 $y=0$，$x=3$，$y=x$ 所围成的区域.

本题首先构造两个符号变量 x, y,然后根据这两个符号变量构造符号函数 $(2x^2\sin y + 3xy^2)$，根据区域 D，将二重积分化为：

$$\int_0^3 (\int_0^x (2x^2\sin y + 3xy^2)\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x$$

通过上式，可以利用 int 函数作两次积分，首先对变量 y 在 $[0,x]$ 上积分，然后根据所得结果再对变量 x 在 $[0,3]$ 上积分，最终得到的结果为：

$$\iint_D (2x^2\sin y + 3xy^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{333}{5} - 14\sin(3) - 12\cos(3)$$

通过使用 vpa 函数对上式进行数值计算，所得结果为 76.5042.

本题代码：

```
%% Exercise 11
syms x y;
f = 2 * x^2 * sin(y) + 3 * x * y^2;
fy = int(f, y, 0, x);
fx = int(fy, x, 0, 3);
fx
```

12 问题十二：用符号运算求解多项式问题

问题描述： 已知 $p_0(x)=1, p_1(x)=x$，由递推公式 $(k+1)p_{k+1}(x) = (2k+1)xp_k(x) - kp_{k-1}(x), (k=1,2,\cdots,10)$ 生成 Legendre 多项式族,求出多项式 $p_n(x), (n=1,2,\cdots,10)$ 的系数及零点，并画出多项式函数的图形.

本题定义了符号变量 x，同时使用一个元胞数组记录所有的多项式数据（符号函数形式），由于 MatLab 索引不能为零，为处理方便，我们计算出了 $p_2 = \frac{3*x^2-1}{2}$，从第三项开始迭代，这样就能避免索引为零的情况.

然后，我们转换了递推公式，将两边同时除以系数 $k+1$，可得：

$$p_{k+1}(x) = \frac{2k+1}{k+1} x p_k(x) - \frac{k}{k+1} p_{k-1}(x)$$

由于 MatLab 所计算的多项式不会自动化简，为了节省显示空间与下一步计算的方便，我们使用了 simplify 函数对多项式进行化简.

这样就可以依次递推得到前十项 Legendre 多项式，所得结果如下：

$$\begin{aligned}
&p_1(x) = x\\
&p_2(x) = \frac{3\,x^2}{2} - \frac{1}{2}\\
&p_3(x) = \frac{x\,\left(5\,x^2-3\right)}{2}\\
&p_4(x) = \frac{35\,x^4}{8} - \frac{15\,x^2}{4} + \frac{3}{8}\\
&p_5(x) = \frac{x\,\left(63\,x^4-70\,x^2+15\right)}{8}\\
&p_6(x) = \frac{231\,x^6}{16} - \frac{315\,x^4}{16} + \frac{105\,x^2}{16} - \frac{5}{16}\\
&p_7(x) = \frac{x\,\left(429\,x^6-693\,x^4+315\,x^2-35\right)}{16}\\
&p_8(x) = \frac{6435\,x^8}{128} - \frac{3003\,x^6}{32} + \frac{3465\,x^4}{64} - \frac{315\,x^2}{32} + \frac{35}{128}\\
&p_9(x) = \frac{x\,\left(12155\,x^8-25740\,x^6+18018\,x^4-4620\,x^2+315\right)}{128}\\
&p_{10}(x) = \frac{46189\,x^{10}}{256} - \frac{109395\,x^8}{256} + \frac{45045\,x^6}{128} - \frac{15015\,x^4}{128} + \frac{3465\,x^2}{256} - \frac{63}{256}
\end{aligned}$$

使用 sym2poly 函数即可将符号多项式转换为系数矩阵，此处不再赘述.

通过 solve 函数可以求出这些多项式的零点，但由于五阶及以上方程没有显式解，所以需要使用 vpasolve 求出方程的解，所得结果如表（1）所示.

由方程的解可以推断，Legendre 多项式的根关于原点对称，且 n 阶多项式在 $(-1,1)$ 上有 n 个实根.

利用 fplot 与 hold on 函数，可以在一个坐标系下同时绘制 10 个 Legendre 多项式的图像，绘制的结果如图（3）所示.

n	solution
1	0
2	-0.5774,0.5774
3	-0.7746,0,0.7746
4	-0.8611,-0.3400,0.3400,0.8611
5	-0.9062,-0.5385,0,0.5385,0.9062
6	-0.9325,-0.6612,-0.2386,0.2386,0.6612,0.9325
7	-0.9491,-0.7415,-0.4058,0,0.4058,0.7415,0.9491
8	-0.9603,-0.7967,-0.5255,-0.1834,0.1834,0.5255,0.7967,0.9603
9	-0.9682,-0.8360,-0.6134,-0.3243,0,0.3243,0.6134,0.8360,0.9682
10	-0.9739,-0.8651,-0.6794,-0.4334,-0.1489,0.1489,0.4334,0.6794,0.8651,0.9739

表 1　Legendre 多项式的解

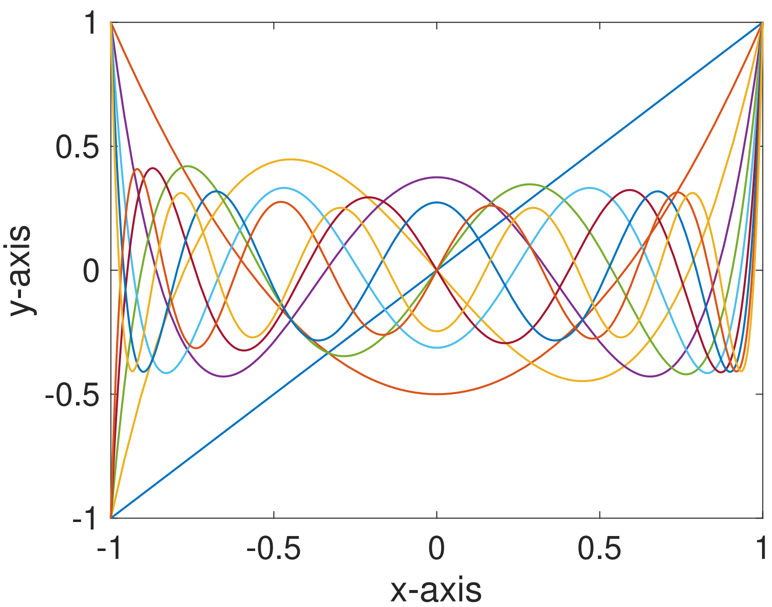

图 3　Legendre 多项式的图像

本题代码：

```
%% Exercise 12
syms x
polys = cell(1, 1);
polys{1} = x;
polys{2} = (3 * x^2 - 1) / 2;
for k = 2: 10
    polys{k + 1} = simplify((2 * k + 1) / (k + 1) * x * polys{k} - k
    ↪  / (k + 1) * polys{k - 1});
end

for k = 1: 10
    latex(polys{k})
    sym2poly(polys{k})
    vpasolve(polys{k} == 0)
    fplot(polys{k}, [-1, 1], 'linewidth', 1);
    hold on;
end

xlabel('x-axis');
ylabel('y-axis');
set(gca, 'fontsize', 16);
```

13 实验总结

通过符号运算能够得出精确的结果，而且容易将结果转换为 LaTeX 格式，但是对较长的式子而言，修改将会变得非常不容易（如计算特征向量的题目，使用数值表示会更好一些）. 而且符号运算能够进行更多数学表达式上的处理，例如可以进行符号求导，符号积分等，这比纯粹的数值计算更为简便. 但是符号计算的速度较慢，只适用于少量数据的计算工作，同时 MatLab 中的符号运算功能不能通过 mcc 进行编译（即不能编译为可执行代码），对于代码的移植有一定不便.