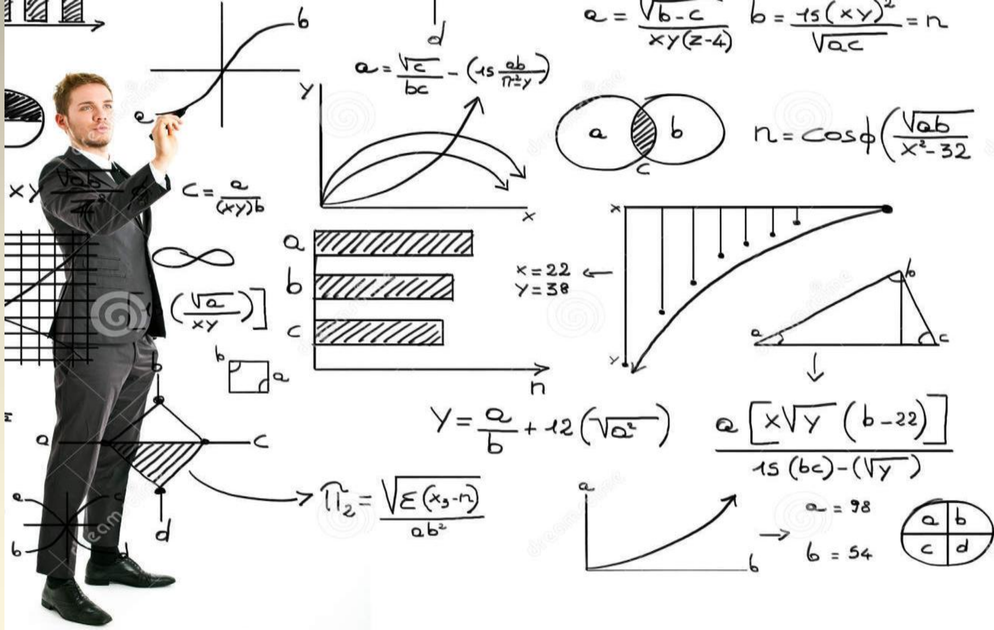


LÍMITE PARTE 2

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES FINITOS

- **a) *<u>Unicidad del Límite</u>*. Si una función tiene límite cuando x tiende al punto "a" ,este límite es único.**

Esto se puede escribir también así: si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} f(x) = L'$ entonces $L = L'$

- Dicho de otra manera, si existe el límite de f(x) cuando x se acerca a un cierto punto, a, f(x) no puede acercarse simultáneamente a dos puntos distintos

Álgebra del Límite

1-Limite de una función constante: $\lim_{x \to x_0} k = k$

Ejemplo:

$$\lim_{x \to 2} 5 = 5$$

2- Limite de la función identidad $\lim_{x\to x_0} x = x_0$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 2} x = 2$$

Sean *f* y *g* dos funciones tales que: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ y $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$

Para nuestros ejemplos :

Sean f: R→R Tal que $f(x)= x^3$ y g:R→R tal que $g(x)= x+3$

3-Límite de una suma de funciones

El límite de una suma de dos funciones con limite finito en x_0, es igual a la suma de los límites de cada una de ellas:

$$\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = A + B$$

Ejemplo :

Sean f: R→R Tal que $f(x)= x^3$ y g:R→R tal que $g(x)= x+3$

Hallar $\lim_{x \to 2}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to 2} f(x) + \lim_{x \to 2} g(x) =$

$\lim_{x \to 2} x^3 = 8$

$\lim_{x \to 2} x + 3 = 5$

$$\lim_{x \to 2}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to 2} f(x) + \lim_{x \to 2} g(x) = 8 + 5 = 13$$

4-Límite de una resta de funciones

El límite de una resta de dos funciones con límite finito en x_0, es igual a la diferencia de los límites de cada una de ellas:

$$\lim_{x \to x_0} (f - g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x) = A - B$$

Ejemplo:

Hallar $\lim_{x \to 2}(f(x) - g(x)) = \lim_{x \to 2} f(x) - \lim_{x \to 2} g(x) =$

$\lim_{x \to 2} x^3 = 8 \qquad \lim_{x \to 2} x + 3 = 5$

$$\lim_{x \to 2}(f(x) - g(x)) = \lim_{x \to 2} f(x) - \lim_{x \to 2} g(x) = 8 - 5 = 3$$

5-Límite de un producto de funciones

El límite de un producto de dos funciones con límite finito en x_0, es igual al producto de los límites de cada una de ellas:

$$\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = A \cdot B$$

Ejemplo:

Hallar $\lim_{x \to 2}(f(x).g(x)) = \lim_{x \to 2} f(x).\lim_{x \to 2} g(x) =$

$\lim_{x \to 2} x^3 = 8 \qquad \lim_{x \to 2} x + 3 = 5$

$$\lim_{x \to 2}(f(x).g(x)) = \lim_{x \to 2} f(x).\lim_{x \to 2} g(x) = 8.5 = 40$$

6-Límite de un cociente de funciones

El límite de un cociente de dos funciones con limite finito en x_0, es igual al cociente de los límites de cada una de ellas, si el denominador no es nulo:

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{A}{B} \text{ (siempre que } B \neq 0\text{)}$$

Ejemplo:

Hallar $\lim_{x \to 2}(f(x) : g(x)) =$

$$\lim_{x \to 2} x^3 : \lim_{x \to 2}(x + 3) =$$

$$\lim_{x \to 2} x^3 = 8 \qquad \lim_{x \to 2}(x + 3) = 5$$

$$\lim_{x \to 2}(f(x) : g(x)) = \lim_{x \to 2} f(x) : \lim_{x \to 2} g(x) = 8 : 5 = \frac{8}{5}$$

7- Límite de una Constante por una Función

$$\lim_{x \to x_0} k.f(x) = k \lim_{x \to x_0} f(x) = kA$$

Ejemplo

$$\lim_{x \to 2} 4.x^3 = 4 \lim_{x \to 2} x^3 = 4.8 = 32$$

TEOREMAS SOBRE LIMITES

Sean $k \in \Re$, f y g funciones que tengan límite para $x \to c$, entonces son ciertas las siguientes propiedades

1) Si existe, el límite de una función para $x \to c$ es único.

2) $\lim\limits_{x \to c} \left(f(x) + g(x)\right) = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x)$

3) $\lim\limits_{x \to c} \left(f(x) - g(x)\right) = \lim\limits_{x \to c} f(x) - \lim\limits_{x \to c} g(x)$

4) $\lim\limits_{x \to c} \left(f(x) \,.\, g(x)\right) = \lim\limits_{x \to c} f(x) \,.\, \lim\limits_{x \to c} g(x)$

5) $\lim\limits_{x \to c} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$; siempre que $\lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$

6) $\lim\limits_{x \to c} (k.f(x)) = k \,.\, \lim\limits_{x \to c} f(x)$

- Veremos ahora Propiedades donde se Aplican Propiedades Anteriores

8- Límite de la función lineal

$$\lim_{x \to x_0} (mx + b) = \lim_{x \to x_0} mx + \lim_{x \to x_0} b = mx_0 + b$$

Ejemplo

$$\lim_{x \to 2} 4.x + 3 = \lim_{x \to 2} 4x + \lim_{x \to 2} 3 = 4.2 + 3 = 11$$

9- Límite de una función elevada a una potencia

$$\lim_{x \to x_0} (f(x))^n = \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right)^n = A^n$$

Ejemplo

$$\lim_{x \to 2} (x^3)^2 =$$

$$\left(\lim_{x \to 2} x^3 \right)^2 = 8^2 = 64$$

10- Límite de una función polinómica

Sea f (x) función polinómica f:R→R y tal que f(x)= $a_n x^n + a_{n\_1} x^{n-1} + \cdots \ldots\ldots + a_1 + a_0$

$$\lim_{x \to x_0} \left(a_n x^n + a_{n\_1} x^{n-1} + \cdots \ldots\ldots + a_1 x + a_0 \right) =$$

$$a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots a_1 x_0 + a_0 = f(x_0)$$

Ejemplo:

a) $\lim_{x_{\to}2} 3x^4 + 2x - 1 = 3.2^4 + 2.2 - 1 = 78 + 4 - 1 = 81$

b) $$\lim_{x \to 4} \frac{x^3 - 5x + 1}{x^3 + 2x^2 - 3x}$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^3 - 5x + 1}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \frac{45}{84} = \frac{15}{28}$$

11- Límite de una función radical

Si la función $\sqrt{f(x)}$ está definida en el punto $x = a$, suele ser válido que:

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{f(a)}$$

En general se cumple que:

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$$

Ejemplo :

$$\lim_{x \to 2} \sqrt[3]{4x + 19} = \sqrt[3]{\lim_{x \to 2} 4x + 19} = \sqrt[3]{4.2 + 19} = \sqrt[3]{27} = 3$$

Si el radical es par

Caso I: $f(a) \geq 0$

Cuando la función $\sqrt{f(x)}$ está definida en el punto $x = a$.

Ejemplo:

$$\lim_{x \to 1} \sqrt{4x + 5} = \sqrt{9} = 3$$

Caso II: $f(a) < 0$

Cuando la función $\sqrt{f(x)}$ no está definida en el punto $x = a$.

Ejemplo:

$$\lim_{x \to 2} \sqrt{2x - 7} = \sqrt{-3}$$

No existe el límite puesto que la función no está definida en el punto $x = 2$.

12- Límite de funciones logarítmicas

$$\lim_{x \to a}[\log_a f(x)] = \log_a \left[\lim_{x \to a} f(x)\right] \qquad \text{Si } a > 0 \text{ y } f(x) > 0$$

$\log_a A$

Ejemplo:

$$\lim_{x \to 0} \log(x^2 - 9) = \log\left[\lim_{x \to 0}(x^2 - 9)\right] = \log(-9) \qquad \textit{No existe}$$

Límite de la Función Compuesta

Si f y g son funciones tales que $\lim_{x \to c} g(x) = L$ y $\lim_{x \to L} f(x) = f(L)$,

resulta $\lim_{x \to c} f[g(x)] = f\left(\lim_{x \to c} g(x)\right) = f(L)$

Recuerda:

$(fog)(x) = f[g(x)]$

Ejemplos

1) Dadas las funciones $g(x)=5x-3$ y $f(x)=\sqrt[3]{x}$, definimos $(f o g)(x)=\sqrt[3]{5x-3}$.

Queremos hallar $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt[3]{5x-3}$.

Para calcular este límite podemos seguir el siguiente razonamiento:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Cuando } x\to 1, \quad (5x\text{-}3)\to 2 \\ \text{Cuando } (5x\text{-}3)\to 2, \ \sqrt[3]{5x-3} \to \sqrt[3]{2} \end{array}\right\} \text{Por lo tanto: } \lim_{x\to 1} \sqrt[3]{5x-3} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 1}(5x-3)} = \sqrt[3]{2}$$

2) Si consideramos ahora las funciones $g(x)=x^2+1$ y $f(x)=2^x$ resulta $(f o g)(x)=2^{(x^2+1)}$.

Con un razonamiento análogo al anterior podemos calcular el $\lim\limits_{x\to 3} 2^{(x^2+1)}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Cuando } x\to 3, \text{ resulta } (x^2+1)\to 10 \\ \text{Cuando } (x^2+1)\to 10, \quad 2^{(x^2+1)} \to 2^{10} \end{array}\right\} \text{Por lo tanto: } \lim_{x\to 3} 2^{(x^2+1)} = 2^{\lim\limits_{x\to 3}(x^2+1)} = 2^{10}$$

CÁLCULO DE ALGUNOS LÍMITES DE FUNCIONES SIMPLES

- Una función polinómica es una función del tipo:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \; \dots \; + a_n x^n$$

- Para calcular su límite, tendremos que distinguir dos casos:
- **a) Límite de una función polinómica cuando x tiende pto.x_0 (es decir $x \to x_0$ y que denominamos límite finito) usando método de sustitución**
- El límite de una función polinómica en un punto *x*0 es igual al valor que toma la función en ese punto:

$$\lim_{x \to x_0} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \; \dots \; + a_n x^n) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \; \dots \; + a_n x_0^n$$

- **Ejemplo :**

$$\lim_{x \to 2} 3x^4 - 2x^2 + 1 = 3.2^4 - 2x^2 + 1 = 48 - 8 + 1 = 41$$

b) Límite de una función polinómica cuando $x \to \infty$ (es decir x no tiende a un pto x_0 sino que x tiende $+\infty$ o $-\infty$ es lo que damos en llamar limite en el infinito)

El límite de una función polinómica en el infinito es $+\infty$ ó $-\infty$, dependiendo de que el coeficiente del término de mayor grado del polinomio sea positivo o negativo:

$$\lim_{x\to\infty} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ \dots\ + a_n x^n = +\infty; \text{ si } a_n \text{ es positivo.}$$

$$\lim_{x\to\infty} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ \dots\ + a_n x^n = -\infty; \text{ si } a_n \text{ es negativo.}$$

Ejemplos

Calcular $\lim\limits_{x\to -1} 4x^3 - 3x - 2.$

$$\lim_{x\to\infty} 3 + x^2 - 4x^5 = -\infty, \text{ ya que coeficiente del término de mayor grado es } -4.$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{8}{3}x^3 + \frac{5}{2}x - 6 = +\infty, \text{ puesto que el coeficiente del término de mayor grado,}$$

8/3, es positivo.

CÁLCULO DE LÍMITES DE FUNCIONES RACIONALES

Recordamos que llamamos función racional a:

Una función racional es una función del tipo $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

Para el estudio del límite de una función racional, distinguiremos dos casos:

A) Límite de una función racional cuando $x \to x_0$ (lo que se denomina límite finito)

Puesto que una función racional es el cociente de dos polinomios, para calcular su límite puede aplicarse la regla para el cálculo del límite de un cociente de dos funciones:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} P(x)}{\lim_{x \to x_0} Q(x)}$$

Tanto el límite del numerador como el del denominador son límites de funciones polinómicas$\to$ x_0, cuyo cálculo se explicó en el apartado anterior.

Al efectuar estos límites pueden darse varias situaciones.

Caso 1

A.1. *El límite del denominador es distinto de cero:* $\lim_{x \to x_0} Q(x) \neq 0$

Se calculan en este caso los límites de $P(x)$ y $Q(x)$ como funciones polinómicas y se halla su cociente.

Caso 2

A.2. *El límite del denominador es cero:* $\lim_{x \to x_0} Q(x) = 0$

Si el denominador se anula en x_0, puede ocurrir que el numerador también se anule en x_0, o que el numerador no se anule en x_0.

Puede suceder que el límite del numerador sea cero con lo cual

El límite del numerador también es cero: $\lim_{x \to x_0} Q(x) = 0$ y $\lim_{x \to x_0} P(x) = 0$

En este caso se obtiene el resultado $\frac{0}{0}$, que es una indeterminación.

Para resolver esto basta con tener en cuenta que si $Q(x_0) = 0$ y $P(x_0) = 0$, x_0 es raíz de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, y por tanto el cociente $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se puede simplificar.

Una vez hecha la simplificación, bien dividiendo $P(x)$ y $Q(x)$ entre $x - x_0$ ó bien aplicando la regla de Ruffini, se vuelven a calcular los límites de los polinomios ya simplificados.

Ejemplo :

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-6x+12}{x^2+3x-10}$$

Si usamos método por sustitución

- $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-6x+12}{x^2+3x-10} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3-2x^2-6x+12)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x-10)} = \frac{2^3-2\cdot 2^2-6\cdot 2+12}{2^2+3\cdot 2-10} = \frac{0}{0}$

Esto es una indeterminación se resuelve factorizando

A.2.2. *El límite del numerador no es cero.*

El límite del cociente da como resultado la indeterminación $\dfrac{\lim_{x \to x_0} P(x)}{0}$.

Para resolver lo es necesario estudiar los límites laterales de la función $f(x) = P(x)/Q(x)$, en el punto x_0.

Calcular $\lim_{x \to 3} \dfrac{1}{(x-3)^2}$

Si ambos límites laterales son iguales, la función tiene límite $\pm\infty$. Si no son iguales, la función no tiene límite.

TEOREMA de INTERCALACIÓN

- El **teorema de intercalación (también llamado del emparedado** ,**teorema del sándwich**, y **de encaje**, entre otros)
- es un resultado muy intuitivo y útil a la hora de calcular el límite de algunas funciones.
- El teorema afirma que, si dos funciones tienen el mismo límite (en un intervalo determinado) , entonces las funciones que están comprendidas entre éstas en el mismo intervalo también tienen el mismo límite:

Es decir : en un I tal que aƐI

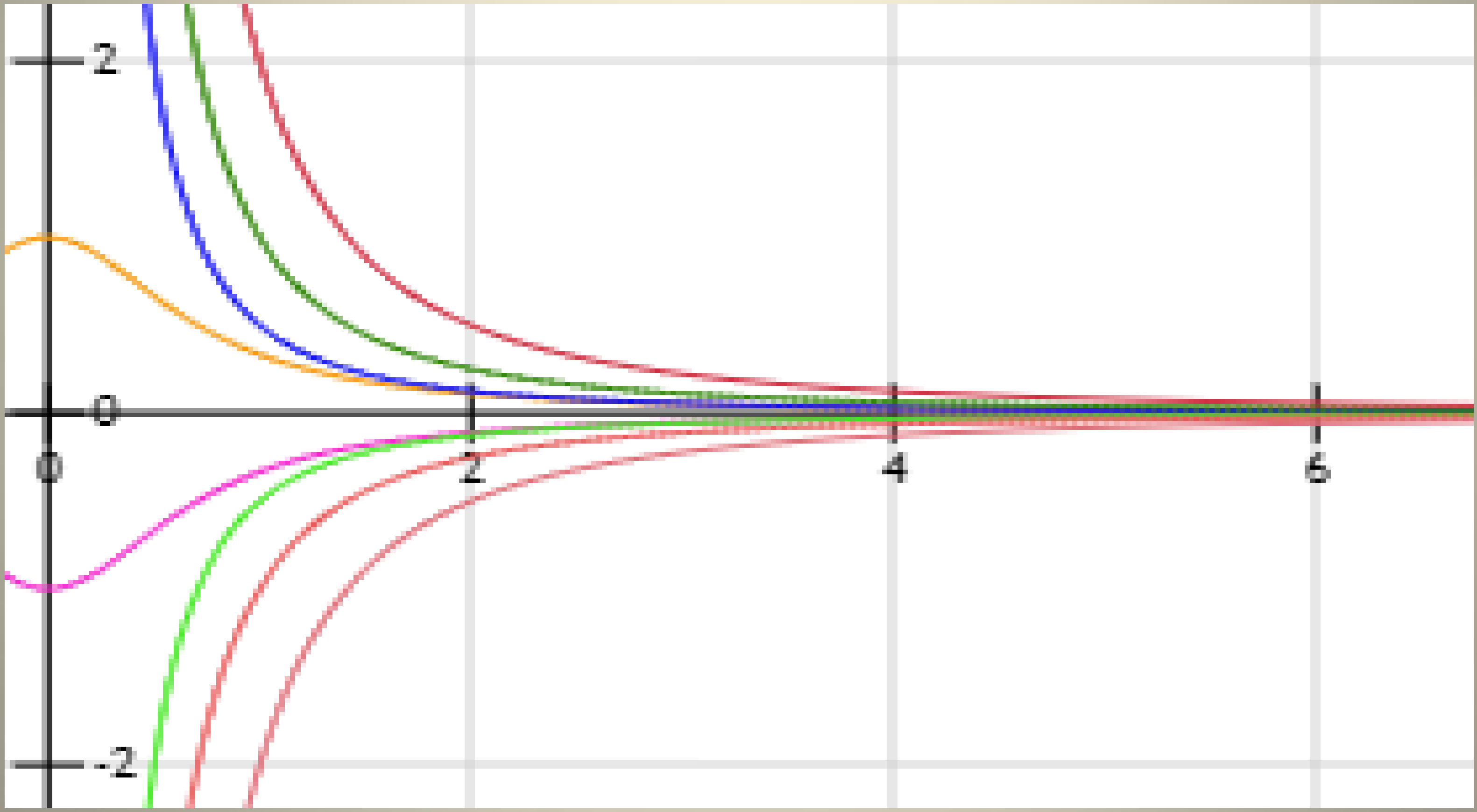
$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

$$\lim_{x \to a} g(x) = L = \lim_{x \to a} h(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Ejemplos de Funciones intercaladas



- El ejemplo típico que se utiliza para mostrar la utilidad de este resultado es el cálculo del límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

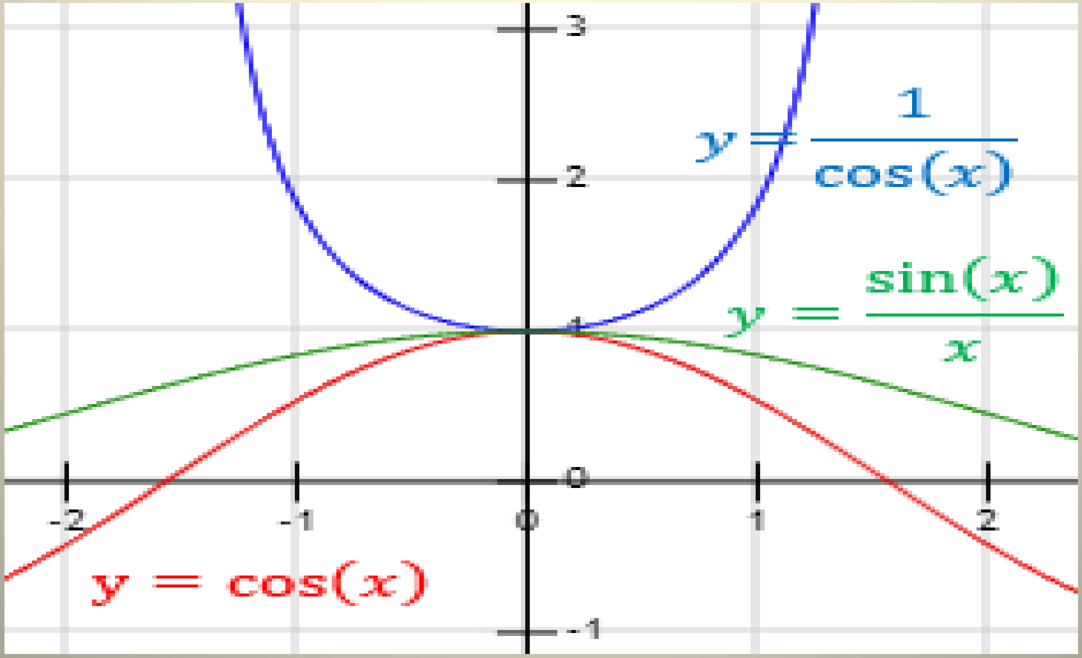
- **Nota:** este límite es fácil de calcular, por ejemplo, aplicando la regla de L'Hôpital.

- Para demostrar que el límite $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

es igual a 1

sólo hay que tener en cuenta que para x pequeños,

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$



- **Enunciado:**
- Sean f, h y g funciones definidas en un intervalo I que contiene al punto a tales que:
- Siendo $$g(x) \leq f(x) \leq h(x),\ \forall x \in I$$
- Entonces, $$\lim_{x \to a} g(x) = L = \lim_{x \to a} h(x)$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Nota1: las funciones pueden **estar o no definidas** en el punto $a \in I$

Nota 2: L debe ser finito y $L \in R$.

Demostración:

Por definición de límite, para todo ε>0 existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que

$$|x-a| < \delta_1 \rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon$$

$$|x-a| < \delta_2 \rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon$$

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ entonces para $|x-a| > \delta$ se cumplen

$$-\varepsilon < g(x) - L < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < h(x) - L < \varepsilon$$

Como $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, entonces

$$-\varepsilon < g(x) - L \leq$$

$$\leq f(x) - L \leq$$

$$\leq h(x) - L < \varepsilon$$

Por tanto, se tiene

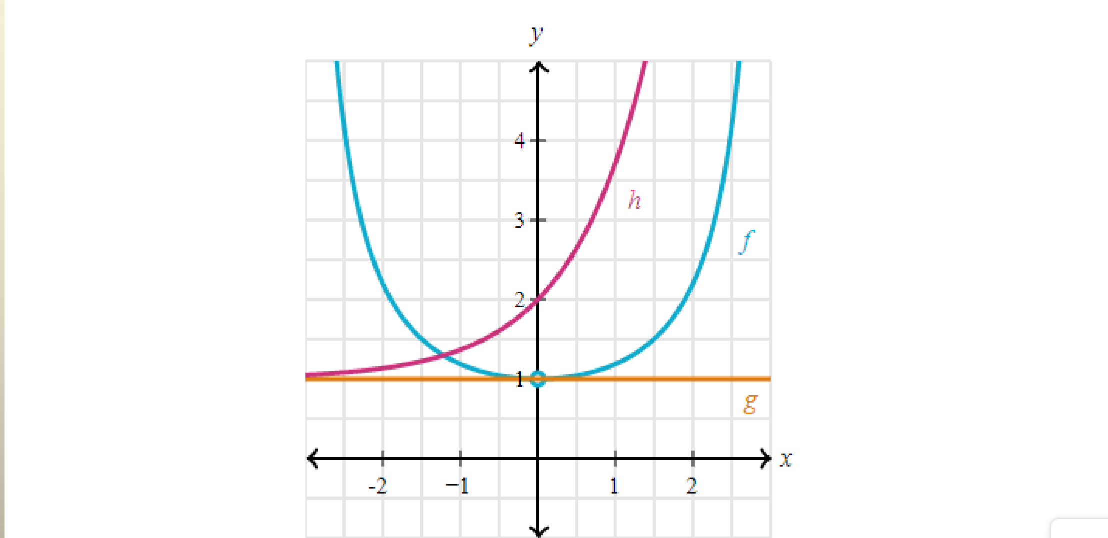
$$|x-a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Por lo que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Veamos lo siguiente :

- Se sugiere el siguiere el ejemplo
- las funciones $g(x)=1$ $h(x)=e^x+1$ para poder aplicar el teorema del sándwich y sea
- f(x) una función **cuando** x→0 ¿¿es posible usar el teorema en este caso ????



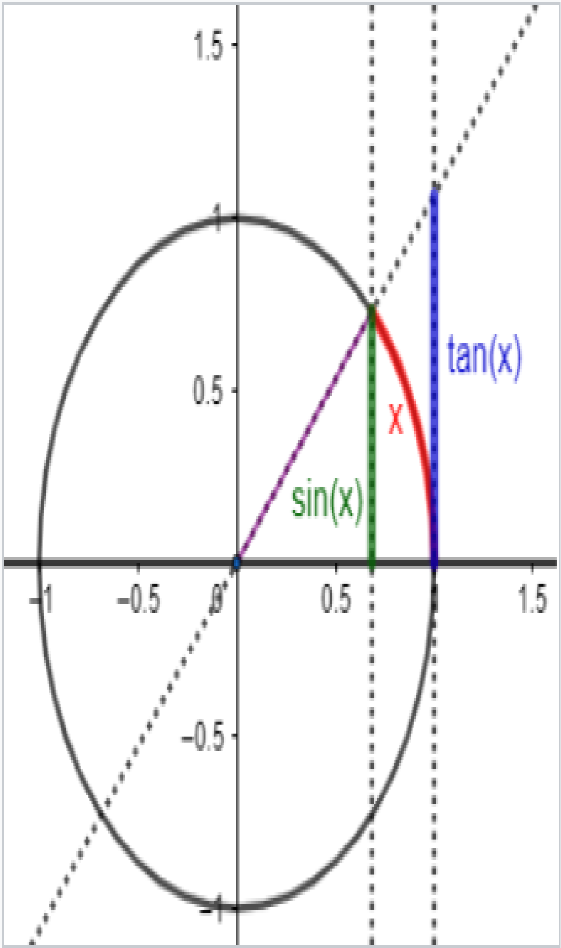
Para calcular el límite $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$, que es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, se siguen los siguientes pasos.[1]

- Se toma la relación $\sin x \leq x \leq \tan x$ en el intervalo (0,π/2), sin pérdida de generalidad.
- Dividiendo los miembros por $\sin x$ resulta:

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x} \iff 1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x$$

- Se sabe que $\lim_{x\to 0} 1 = 1$ y que $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$
- Por el teorema de sándwich, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$

Un razonamiento similar permite calcular el límite doble



Para 0<x<π/2, sin(x)≤x≤tan(x).