Regla de L´ Hôpital

Regla de l'Hospital Suponga que f y g son derivables y $g'(x) \neq 0$ sobre un intervalo abierto I que contiene a (excepto posiblemente en a). Suponga que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

o que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

(En otras palabras, tenemos una forma indeterminada de tipo $\frac{0}{0}$ o ∞/∞.) Entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si existe el límite del lado derecho (o es ∞ o $-\infty$).

Teorema (Regla 1 de Hôpital). Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivables, y supongamos que existen $\lim_{x\to a^+} f(x) = 0 = \lim_{x\to a^+} g(x)$, y $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Entonces existe $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$, y

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demostración de la Regla de l´Hôpital :

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \lim_{x\to a} \frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

NOTA 1 La regla de l'Hospital señala que el límite de un cociente de funciones es igual al límite del cociente de sus derivadas, siempre que se cumplan con las condiciones dadas. Es especialmente importante verificar las condiciones impuestas a los límites de f y g antes de utilizar la regla de l'Hospital.

EJEMPLO 1 Encuentre $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1}$.

Dado que

$$\lim_{x \to 1} \ln x = \ln 1 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1} (x - 1) = 0$$

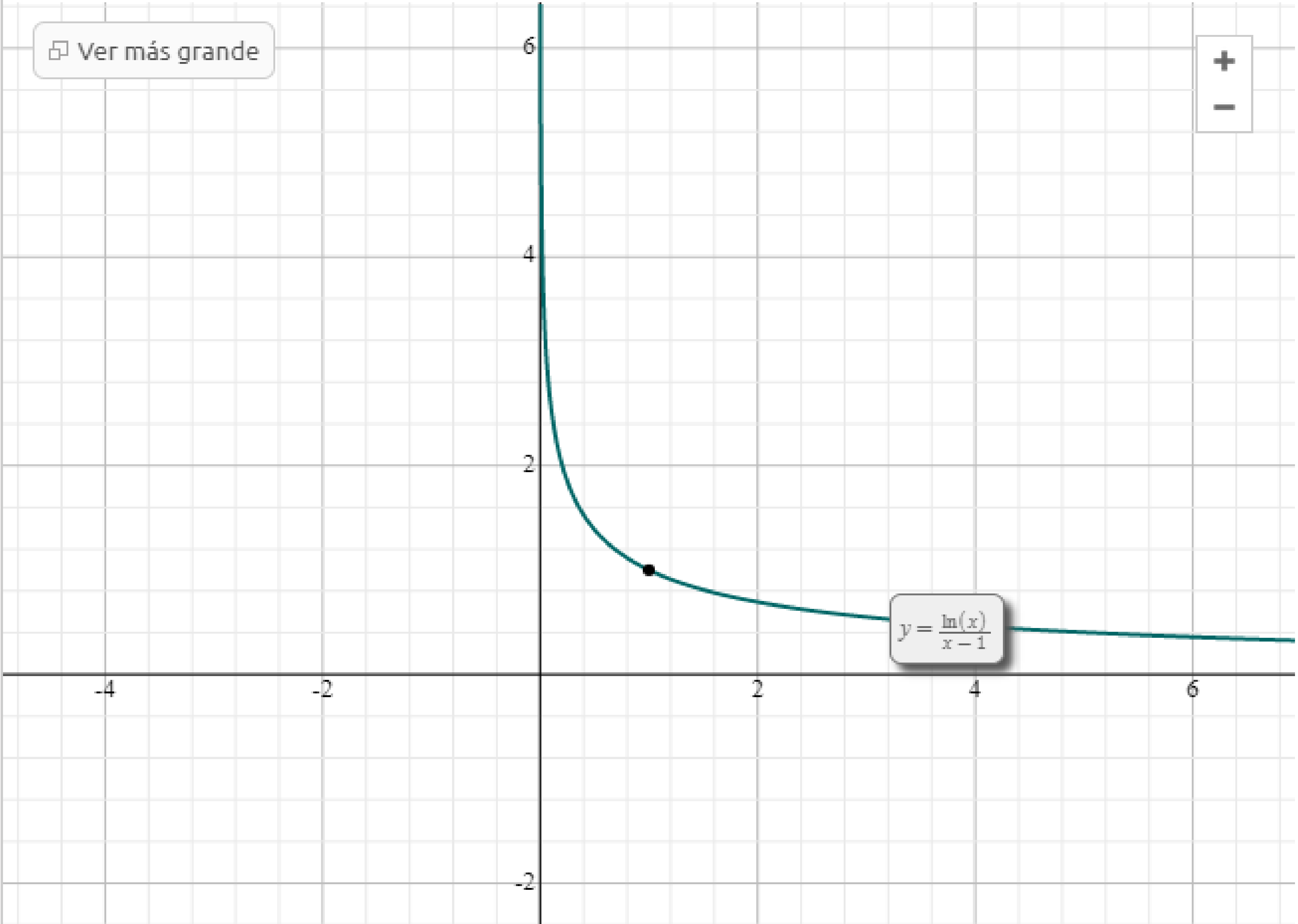
podemos aplicar la regla de l'Hospital:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\dfrac{d}{dx}(\ln x)}{\dfrac{d}{dx}(x - 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1/x}{1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$$

« Ocultar gráfica

Graficando: $\frac{\ln(x)}{x-1}$



NO EJEMPLO

Encuentre $\displaystyle \lim_{x \to \pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$.

Si intentamos ciegamente utilizar la regla de l'Hospital, obtendríamos

$$\lim_{x \to \pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = \lim_{x \to \pi^-} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = -\infty$$

¡Esto es erróneo! Aunque el numerador $x \to 0$ conforme $x \to \pi^-$, note que el denominador $(1 - \cos x)$ no tiende a 0, así que aquí no es posible aplicar la regla de l'Hospital.

El límite requerido es, de hecho, fácil de encontrar porque la función es continua en π y el denominador es distinto de cero:

$$\lim_{x \to \pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = \frac{\operatorname{sen} \pi}{1 - \cos \pi} = \frac{0}{1 - (-1)} = 0$$

EJEMPLO 2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$$

Observar los gráficos de $y = \frac{\sin x}{x}$ e $y = \cos x$, en las cercanías de $x = 0$, en el siguiente dibujo.

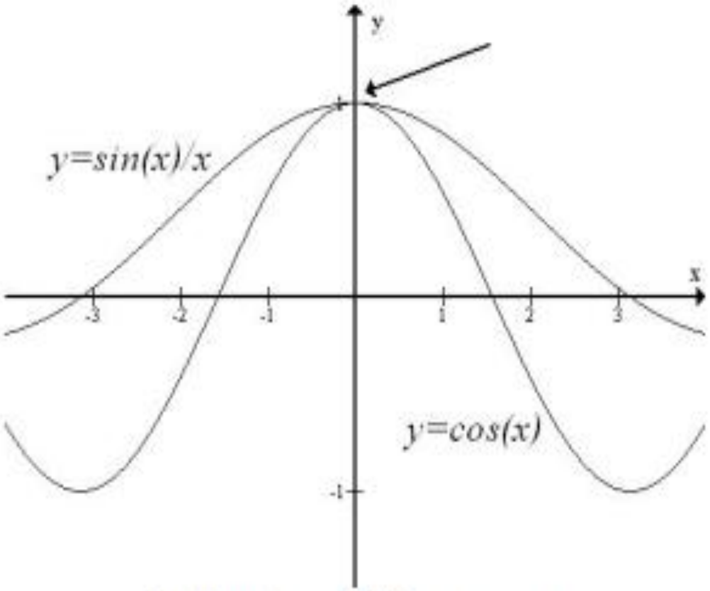


Gráfico de $y = \frac{\sin x}{x}$ e $y = \cos x$

Pero la regla de L'Hôpital es mucho más general, pues es aplicable no sólo a la indeterminación 0/0, sino también a las indeterminaciones: ∞/∞ ; $0.\infty$; $\infty-\infty$

- Por ejemplo, una indeterminación del tipo ∞/∞, provendrá de un límite de la forma: $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$

En donde las dos funciones *f(x)* y *g(x)* tiendan a infinito en *x=a*, y este límite obviamente no varía si lo expresamos en la forma:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$$

y ahora sí tiene la forma 0/0. En definitiva, la indeterminación ∞/∞ no es diferente de la 0/0.

NOTA 2 La regla de l'Hospital también es válida para límites unilaterales y límites al infinito o al infinito negativo; es decir, "$x \to a$" puede ser sustituido por cualquiera de los símbolos $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$ o $x \to -\infty$.

EJEMPLO 3

Hallar el límite: $\lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{5x-3}$

Este límite en principio toma la forma indeterminada ∞ / ∞ , y lo resolvemos aplicando directamente la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{5x-3} = \lim_{x \to \infty} \frac{(x+1)'}{(5x-3)'} = \frac{1}{5}$$

OBSERVACIÓN: No es necesario pasar el límite a la indeterminación 0/0 ántes de aplicar la regla de L'Hôpital. Si bien (f'/g') es distinto de $(1/g)'/(1/f')$, en cambio no son diferentes para nuestro caso de límites en el punto $x=a$.

Productos indeterminados

Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ (o $-\infty$), entonces no es claro cuál es el valor de $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)]$, si existe. Hay una lucha entre f y g. Si gana f, la respuesta será 0; si gana g, la respuesta será ∞ (o $-\infty$). O puede haber un comportamiento intermedio donde la respuesta es un número finito distinto de cero. Este tipo de límite se llama **forma indeterminada de tipo $0 \cdot \infty$**, y lo podemos abordar expresando el producto fg como un cociente:

$$fg = \frac{f}{1/g} \qquad \text{o} \qquad fg = \frac{g}{1/f}$$

Esto convierte el límite dado en una forma indeterminada de tipo $\frac{0}{0}$ o ∞/∞, por lo que podemos utilizar la regla de l'Hospital.

EJEMPLO 4

Evalúe $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$.

El límite dado está indeterminado porque, conforme $x \to 0^+$, el primer factor (x) tiende a 0, mientras que el segundo factor $(\ln x)$ tiende a $-\infty$. Escribiendo $x = 1/(1/x)$, tenemos $1/x \to \infty$ a medida que $x \to 0^+$, por lo que la regla de l'Hospital da

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

NOTA Tenga en cuenta que al resolver el ejemplo 6 otra opción posible habría sido escribir

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{1/\ln x}$$

Esto da una forma indeterminada del tipo 0/0, pero si aplicamos la regla de l'Hospital, obtenemos una expresión más complicada que con la que empezamos. En general, cuando rescribimos un producto indeterminado, intentamos elegir la opción que conduce hasta el límite más simple.

OTRO EJEMPLO

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}=\left[\!\left[\frac{0}{0}\right]\!\right]\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2\ sen\ 2x}$$

$$=\left[\!\left[\frac{0}{0}\right]\!\right]\ aplicamos\ L'Hôpital\ por\ segunda\ vez\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{4\cos 2x}$$

$$=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

NOTA 1: La Regla de L´Hopital se puede usar en un número finito de veces siempre y cuando cumpla con las hipotesis indicadas .

NOTA 2: La regla de L´Hôpital puede aplicarse a límites laterales