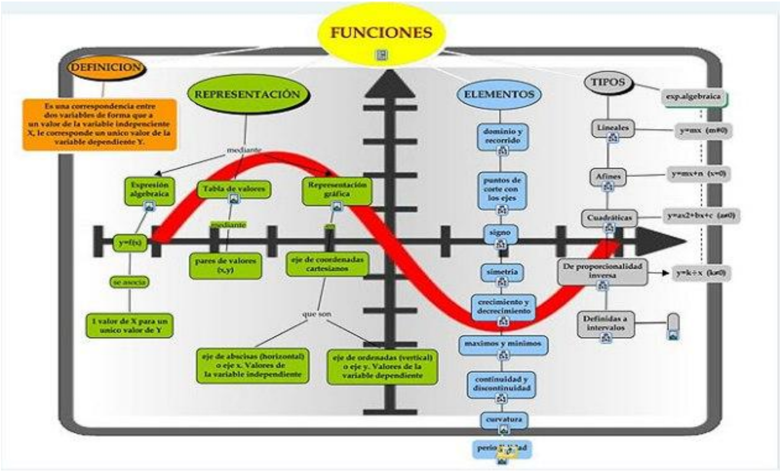
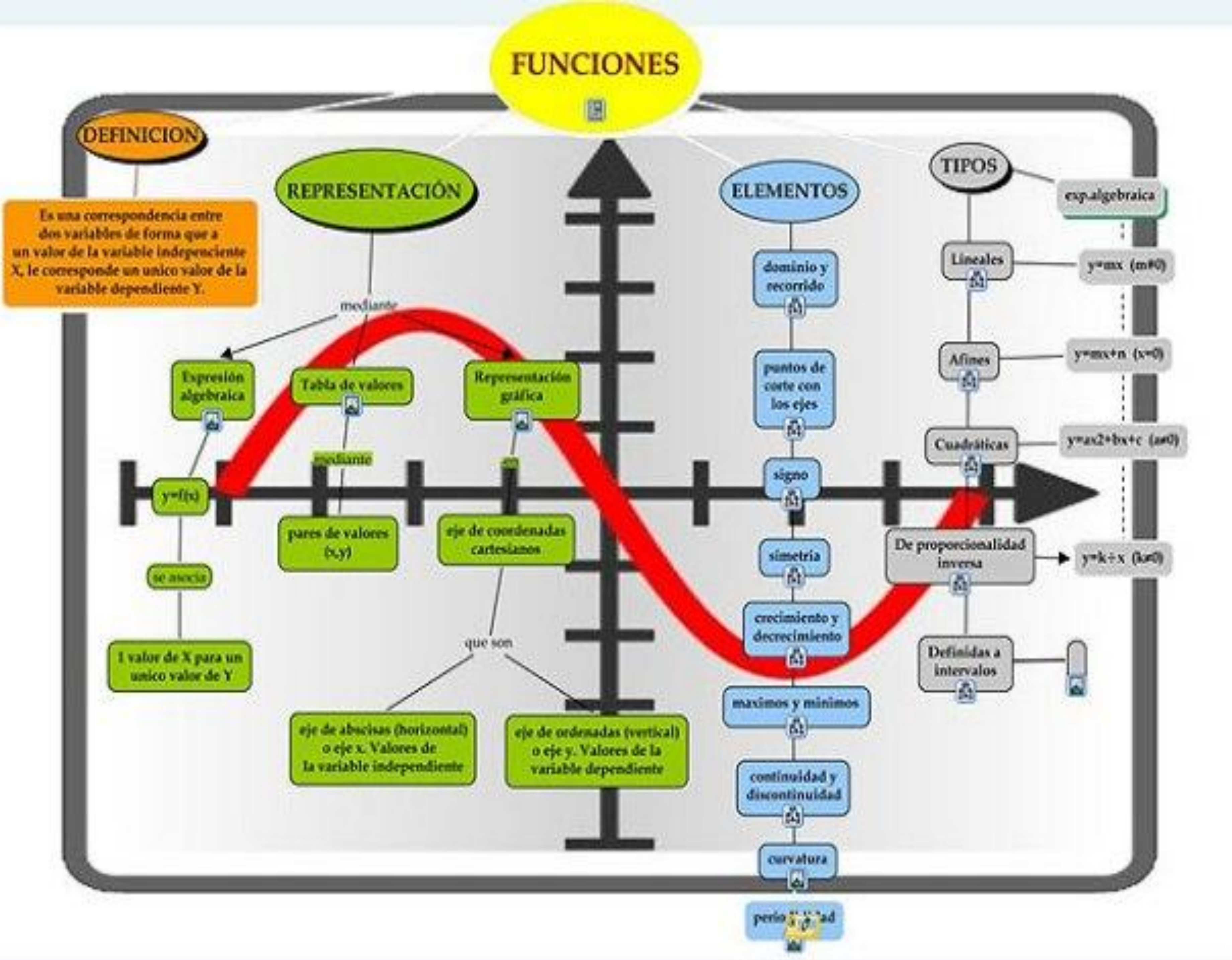


ESTUDIO DE FUNCIONES PARTE 2

1https://www.youtube.com/watch?v=glkyHFBR-1Y&t=22s


FUNCIONES
DEFINICION
Es una correspondencia entre dos variables de forma que a un valor de la variable independeciente X, le corresponde un unico valor de la variable dependiente Y.
REPRESENTACIÓN
mediante
Expresión algebraica
Tabla de valores
Representación gráfica
mediante
y=f(x)
se asocia
1 valor de X para un unico valor de Y
pares de valores (x,y)
eje de coordenadas cartesianos
que son
eje de abscisas (horizontal) o eje x. Valores de la variable independiente
eje de ordenadas (vertical) o eje y. Valores de la variable dependiente
ELEMENTOS
dominio y recorrido
puntos de corte con los ejes
signo
simetría
crecimiento y decrecimiento
maximos y minimos
continuidad y discontinuidad
curvatura
TIPOS
exp.algebraica
Lineales
y=mx (m≠0)
Afines
y=mx+n (x≠0)
Cuadráticas
y=ax2+bx+c (a≠0)
De proporcionalidad inversa
y=k÷x (k≠0)
Definidas a intervalos

❖1. ***Dominio de una función***

✓Recordamos su Definición :
Se llama dominio de definición de la función, al conjunto de los valores que puede tomar la variable independiente, x.

✓El dominio (conjunto de definición o conjunto de partida) de una función es el conjunto de existencia de ella misma, es decir, los valores para los cuales la función está definida, se denota como Dom_f o bien D_f y está definido por:

$$D_f = \{x \in X \mid \exists y \in Y : f(x) = y\}$$

Razones por las que el dominio de definición puede restringirse:

- ✓Imposibilidad de realizar alguna operación con ciertos valores de x:
- ✓ Denominadores que se anulan.
- ✓ Raíces cuadradas de números negativos.
- ✓ Contexto real del que se ha extraído la función.
- ✓ Por voluntad de quien propone la función.

❖2. Simetría

➢Simetría respecto del eje de ordenadas

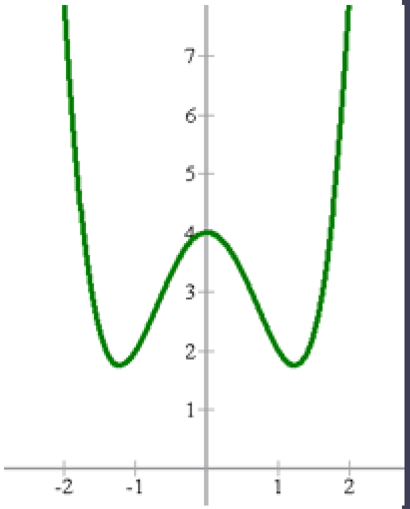
Una función es simétrica respecto del eje "y" si es una **función par**, es decir:

$$f(-x) = f(x)$$

Ejemplo:

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 4$$

$$f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 4 = x^4 - 3x^2 + 4 = f(x)$$

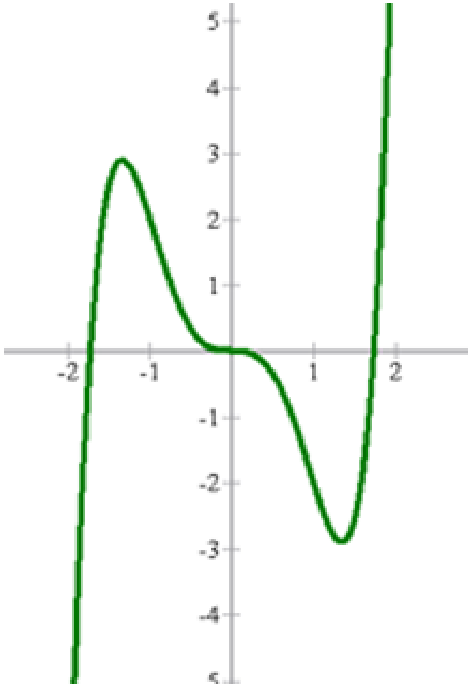


➢ Simetría con respecto al origen

Una función es simétrica respecto al origen si es una **función impar**, es decir:

$$f(-x) = -f(x)$$

Ejemplo $f(x) = x^5 - 3x^3$



3. Cortes con los Ejes

✓ Cortes con el eje x (raíces)

Para hallar los puntos de corte con el eje de abscisas hacemos y resolvemos la ecuación resultante.

Ejemplo:

$$f(x) = x^3 - x^2 \qquad x^3 - x^2 = 0$$

Igualamos a cero

$$x = 0 \longrightarrow (0,0) \qquad x = 1 \longrightarrow (1,0)$$

Concluimos que los puntos 0 y 1 son los puntos de corte en el eje x

✓Cortes con el eje y

Para hallar el punto de corte con el eje de ordenadas calculamos   haciendo

Ejemplo

$$f(x) = x^3 - x^2 + 5$$

$$f(0) = 0^3 - 0^2 + 5 = 5$$

Concluimos que el punto (0,5)   es el punto de corte en el eje y

❑ *Ejercicio*

❖ Estudiamos dominio , gráfica, cortes con los ejes y simetría de la siguiente función

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}$$

✓ Dominio: R el denominador no se anula para ningún valor real

✓ Cortes :

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1} = 0$$

$$x = 2 \quad \longrightarrow \quad (2,0) \qquad x = 1 \quad \longrightarrow \quad (1,0)$$

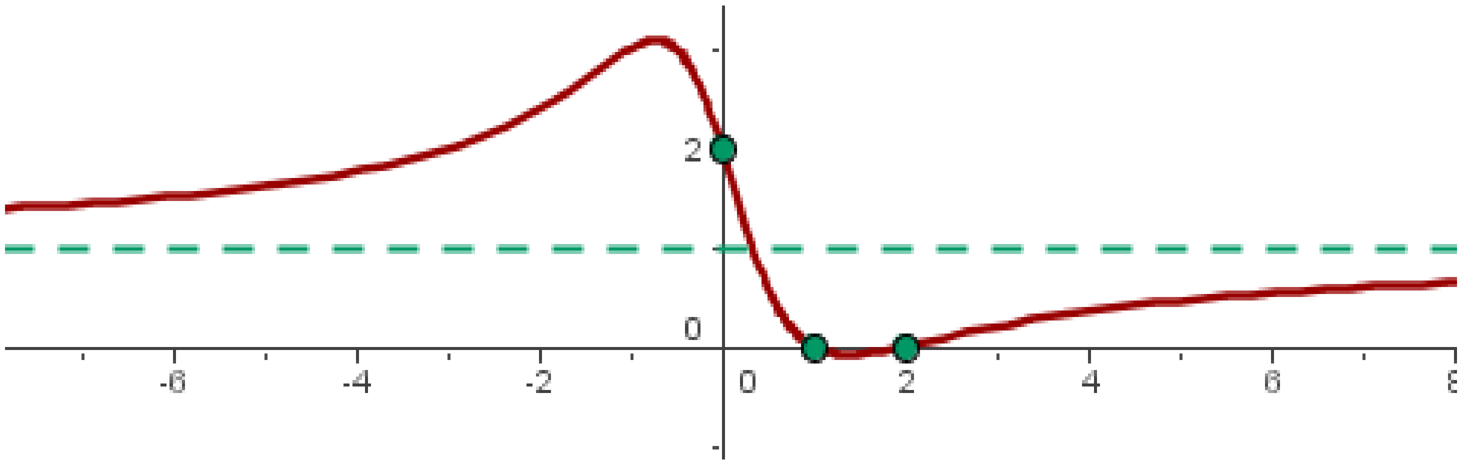
Concluimos que los puntos (2,0) y (1,0) son raíces, es decir la función corta al eje x en dichos puntos.

✓Evaluamos en x=0

$$f(0) = \frac{0^2 - 3 \cdot 0 + 2}{0^2 + 1} = 2$$

Concluimos que el punto (0,2) es el punto de corte en el eje y

✓ Gráfica



✓Estudiamos la simetría

$$f(-x)=\frac{(-x)^2-3(-x)+2}{(x)^2+1}=\frac{x^2+3x+2}{x^2+1}\neq f(x) no\ es\ par$$

Tampoco es impar

$$-f(-x)=-\frac{(-x)^2-3(-x)+2}{(x)^2+1}=\frac{-x^2-3x-2}{x^2+1}\neq f(x) no\ es\ impar$$

❖4. ***Asíntotas***

✓Asíntotas Horizontales

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = k$$

ó

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = k$$

$y = k$

Ejemplo

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + 3}{x^2 - 1} = 2$$

$y = 2$

✓Asíntotas Verticales

$$\lim_{x \to k} f(x) = \pm\infty \qquad x = k$$

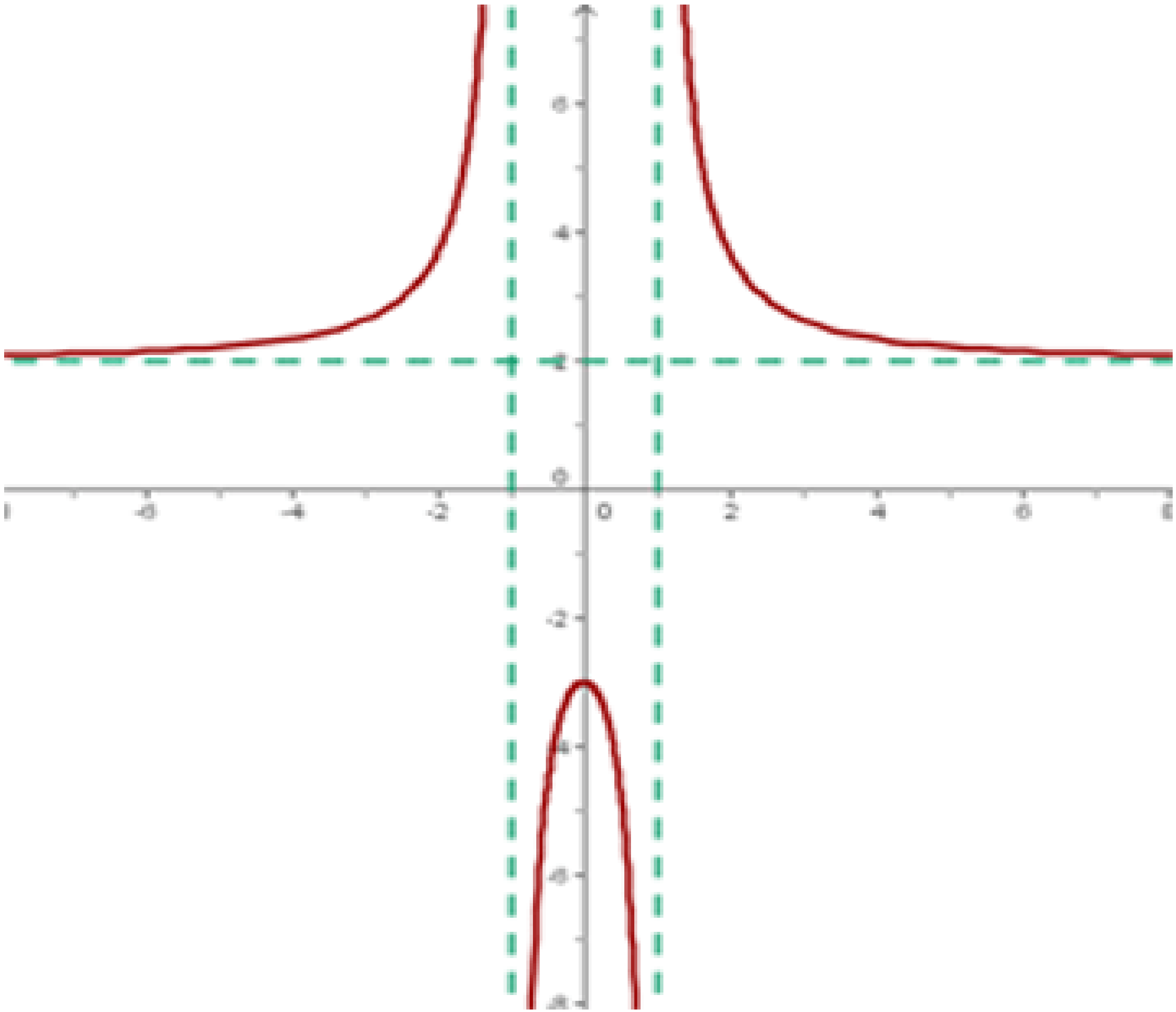
Ejemplo

$$f(x) = \frac{2x^2+3}{x^2-1}$$

El dominio de la función es D = $\mathcal{R}$ – {–1, 1}

$$\lim_{x \to -1} \frac{2x^2+3}{x^2-1} = \infty \qquad x = -1$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2+3}{x^2-1} = \infty \qquad x = 1$$



✓Asíntotas Oblicuas

$$y = mx + n$$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \qquad n = \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - mx \right]$$

NOTA 1: Para que haya asíntota oblicua se tiene que cumplir que el grado del numerador sea exactamente un grado mayor que el del denominador

NOTA 2: Sólo hallaremos las asíntotas oblicuas cuando no haya asíntotas horizontales.

Ejemplo

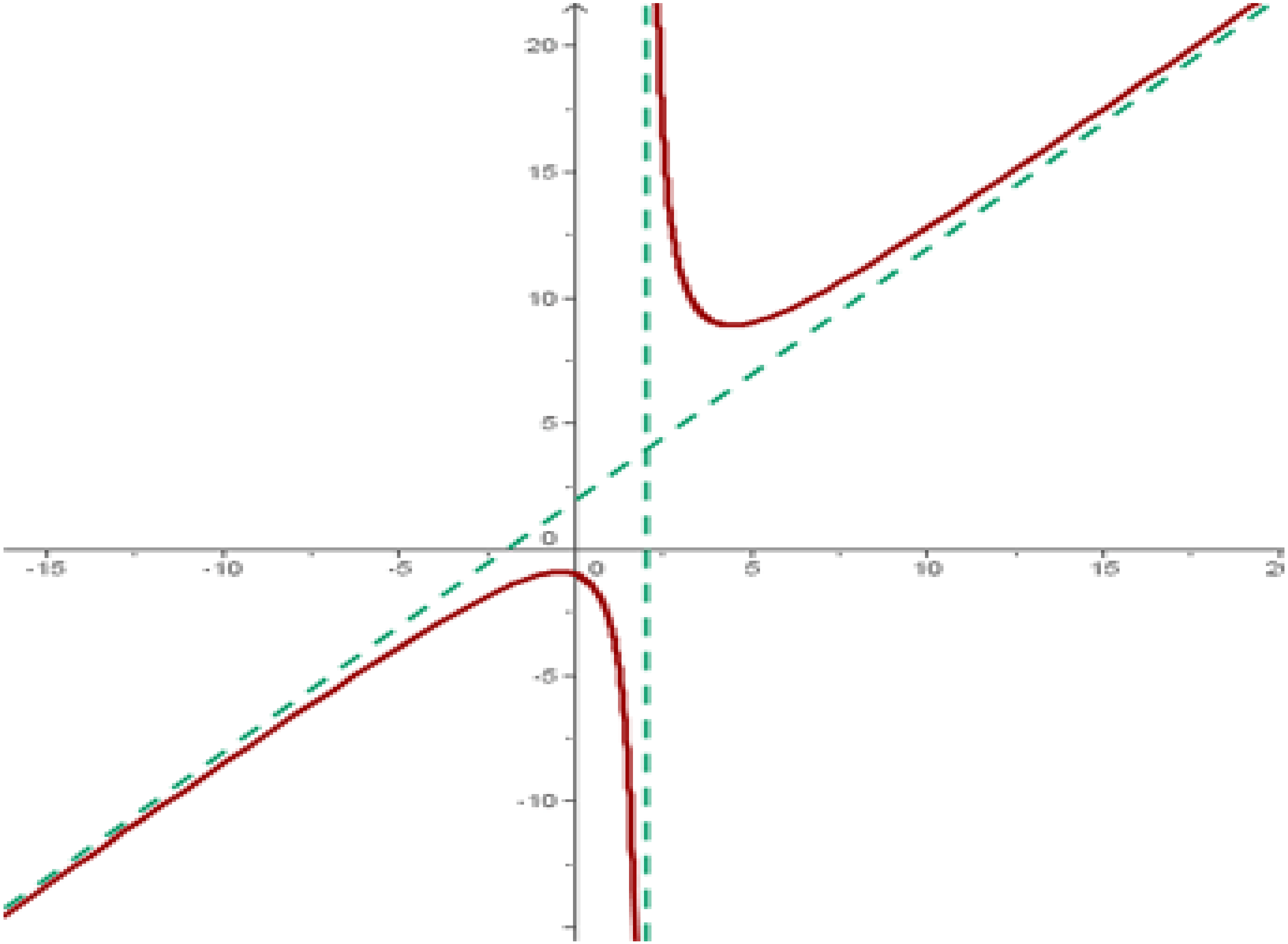
$$\frac{x^2+2}{x-2}=\infty$$

No hay asíntotas horizontales

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+2}{x-2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{x^2-2x}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x-2}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+2}{x-2}=2$$

$$y=x+2$$



20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-10
-5
0
5
10
15
20

❑ ***Ejercicio***

❖ Estudiamos dominio , gráfica, cortes con los ejes ,simetría y asíntotas de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^4+1}{x^2}$$

- ✓ El dominio de f es : R-{0}
- ✓ Cortes con los ejes : no corta al eje y
- ✓ : $\frac{x^4+1}{x^2}$ =0 no tiene raíces no corta al eje x

✓Estudiamos la simetría

$$f(-x) = \frac{(-x)^4 + 1}{(-x)^2} = \frac{x^4 + 1}{x^2} = f(x)$$

es par

$$-f(-x) = -\frac{(-x)^4 + 1}{(-x)^2} = -\frac{x^4 + 1}{x^2} \neq f(x)$$

no es impar .

Hay simetría axial es simétrica respecto del eje “y”

π

✓ Estudiamos las Asíntotas

Asíntotas verticales : Hay a. v . en x=0

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^4 + 1}{x^2} = \infty$$

Asíntotas Horizontales : No hay pues :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+1}{x^2} = \infty$$

Para resolver este límite tenemos que

Dividir entre el denominador con mayor potencia: $x^2 + \frac{1}{x^2}$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(x^2\right)+\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2\right)=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)=0$$

$$=\infty+0$$

Aplicar las propiedades para limites infinitos/en el infinito: $\infty + c = \infty$

$$=\infty$$

Asíntotas Oblicuas

La función no posee asíntotas horizontales

El grado del numerador supera en 2 al grado del denominado .

Tampoco cumple para asíntotas oblicuas

Igualmente Calculamos mediante límites la pendiente ordenada al origen de las asíntotas oblícuas, si es posible

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4+1}{x^3} = \infty$$

La función no posee asíntotas oblicuas

5. Monotonía de una función : crecimiento y decrecimiento de una función

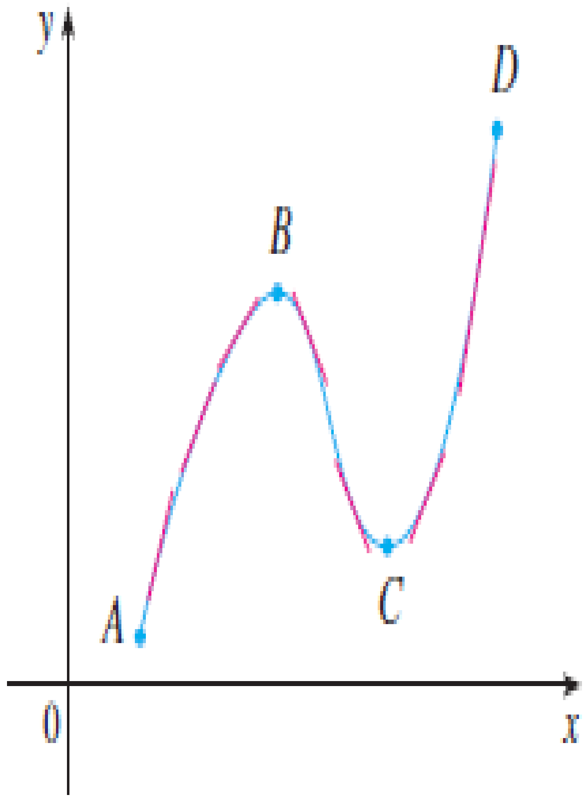
- Respecto a la **monotonía**, buscaremos los intervalos en los que la función es monótona **creciente** o **decreciente** aplicando el **criterio de la primera derivada**, lo que nos permitirá deducir la existencia de extremos (máximos y mínimos). También podemos usar el **criterio de la segunda derivada** para determinar el tipo de extremo directamente.
- Estudiamos el **signo de la derivada** en algún punto de los intervalos en que los puntos críticos dividen el dominio

¿Qué indica f ´ respecto a f ?

- *Una de las cosas que puede decirnos f´ respecto de f es el crecimiento de la misma. Ver como f´ puede decirnos donde una función es creciente o decreciente. Sabemos que la derivada de una función en un punto nos esta dando la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto* .Miremos la figura

- Entre *A y B y entre C y D, las rectas tangentes tienen pendiente positiva,* por lo que *f ´ > 0. Entre B y C, las rectas tangentes tienen pendiente negativa, así*

- que *f ´ <0. Así, parece que f crece cuando f ´ es positiva y decrece cuando f ´* es negativa. Para demostrar que esto siempre es el caso, usamos el teorema del valor.



❖*Crecimiento y Decrecimiento de una función*

Las definiciones que siguen son tan intuitivas que no precisan casi ninguna explicación .

Diremos que una función :

✓ $f : I \rightarrow R$ es ***creciente*** si y solo si

Para todo $x,y \in I$, $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

✓ $f : I \rightarrow R$ es ***decreciente*** si y solo si

Para todo $x,y \in I$, $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

Diremos que una función :

- ✓ $f : I \to R$ es estrictamente ***creciente*** si y solo si

  Para todo $x,y \in I$, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

- ✓ $f : I \to R$ es estrictamente ***decreciente*** si y solo si

  Para todo $x,y \in I$, $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

- Nota: Una función es estrictamente creciente si, y sólo si, es creciente e inyectiva.

- Análogamente, el decrecimiento estricto equivale a decrecimiento más inyectividad,

Nuestra Definición

Una función f se llama *creciente* sobre un intervalo I si

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } I$$

Se llama decreciente sobre I si

$$f(x_1) > f(x_2) \quad \text{siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } I$$

a) Si $f'(x) > 0$ sobre un intervalo, entonces f es creciente sobre ese intervalo.

DEMOSTRACIÓN de a)

Sean x_1 y x_2 dos números cualesquiera en el intervalo con $x_1 < x_2$.

Según la definición de una función creciente, tenemos que demostrar que $f(x_1) < f(x_2)$

Sabemos que $f'(x) > 0$ y que f es derivable sobre (x_1, x_2), así que, por el ***Teorema del Valor Medio***, existe un numero c entre x_1 y x_2 tal que:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Ahora $f'(c) > 0$ por el supuesto de que $x_2 - x_1 > 0$ ya que $x_1 < x_2$.

$f(x_2) - f(x_1) > 0$ o $f(x_1) < f(x_2)$ lo que demuestra que f es creciente.

b) Si $f'(x) < 0$ sobre un intervalo, entonces f es decreciente sobre ese intervalo.

El inciso b) se demuestra de manera similar.

Queda para la demostración para el alumno

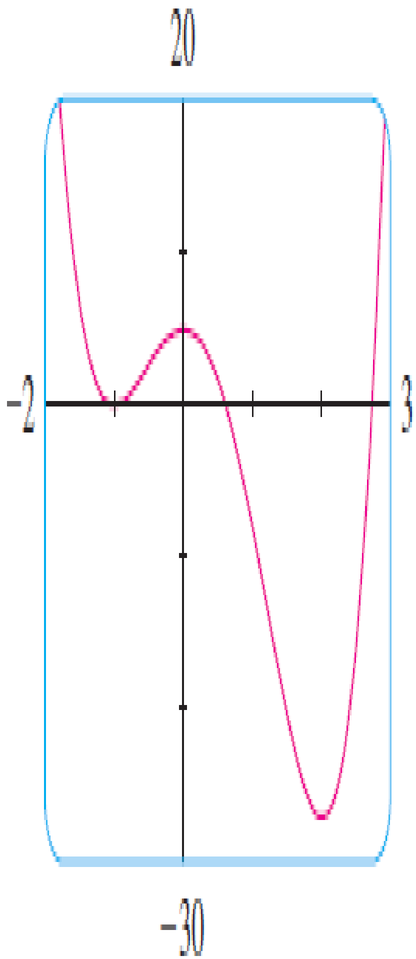
Ejemplo

Encuentre dónde la función $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ es creciente y

dónde es decreciente.

SOLUCIÓN $\quad f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)(x + 1)$

Para utilizar la prueba C/D tenemos que investigar dónde $f'(x) > 0$ y dónde $f'(x) < 0$. Esto depende de los signos de los tres factores de $f'(x)$, es decir, $12x$, $(x - 2)$ y $(x + 1)$. Para esto, dividimos la recta real en intervalos cuyos extremos son los números críticos: -1, 0 y 2, y organizamos nuestro trabajo en una gráfica. Un signo *más* indica que la expresión dada es positiva, y un signo *menos* indica que es negativa. La última columna de la tabla da la conclusión basada en la prueba C/D. Por ejemplo, $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2$, por lo que f es decreciente sobre $(0, 2)$. (También sería correcto decir que f es decreciente sobre el intervalo cerrado $[0, 2]$.)



Intervalo	$12x$	$x-2$	$x+1$	$f'(x)$	f
$x < -1$	$-$	$-$	$-$	$-$	Decreciente sobre $(-\infty, -1)$
$-1 < x < 0$	$-$	$-$	$+$	$+$	Creciente sobre $(-1, 0)$
$0 < x < 2$	$+$	$-$	$+$	$-$	Decreciente sobre $(0, 2)$
$x > 2$	$+$	$+$	$+$	$+$	Creciente sobre $(2, \infty)$

Teorema Si $f'(x) = 0$ para toda x en un intervalo (a, b), entonces f es constante en (a, b).

DEMOSTRACIÓN Sean x_1 y x_2 dos números cualesquier en (a, b), con $x_1 < x_2$. Dado que f es derivable sobre (a, b), debe ser derivable sobre (x_1, x_2) y continua sobre $[x_1, x_2]$. Aplicando el teorema del valor medio a f sobre el intervalo $[x_1, x_2]$, obtenemos un número $x = c$ tal que $x_1 < c < x_2$ y

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Puesto que $f'(x) = 0$ para toda x, tenemos $f'(c) = 0$, así que la ecuación 6 resulta

$$f(x_2) - f(x_1) = 0 \qquad \text{o} \qquad f(x_2) = f(x_1)$$

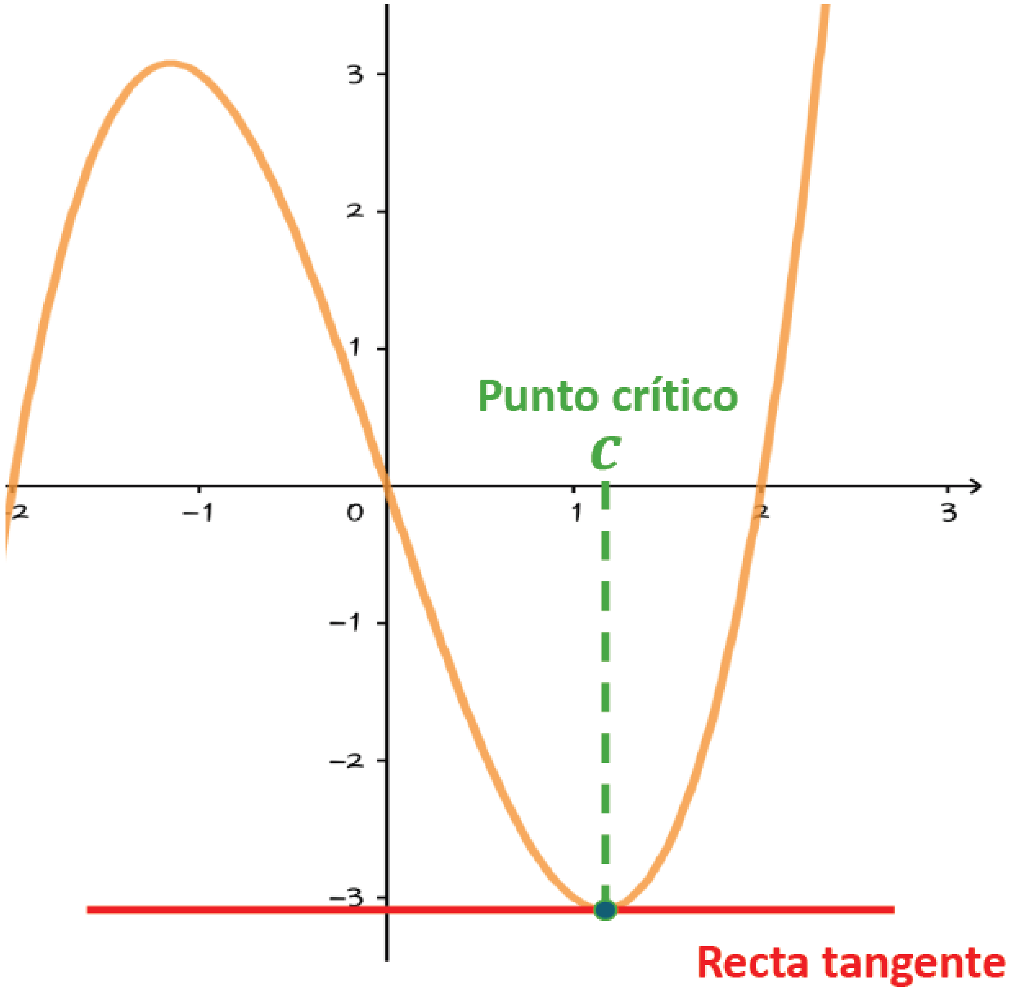
Por tanto, f tiene el mismo valor que *cualesquiera* dos números x_1 y x_2 en (a, b). Esto significa que f es constante sobre (a, b).

❖ Punto crítico(singular)

✓(c, f (c)) es un punto crítico de la función f si y solo si f´ (c) = 0 o f´ (c)no existe

Los máximos relativos o mínimos relativos ocurren solo en los puntos críticos. Es decir, los puntos críticos son aquellos puntos donde se puede presentar un máximo relativo o un mínimo relativo

Si una recta horizontal es tangente a la curva de una función en un punto, entonces la primera derivada en ese punto es igual a cero.



3
2
1
Punto crítico
c
-1
0
1
3
-1
-2
-3
Recta tangente

Ejemplo

Determine los puntos críticos de la función

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{13x^3}{3} + \frac{17x^2}{2} + 12x - 3}$$

Obtener la primera derivada de la función

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 4x^3 - \frac{13}{3} \cdot 3x^2 + \frac{17}{2} \cdot 2x + 12$$

$$= 2x^3 - 13x^2 + 17x + 12$$

Igualar a cero la primera derivada

$$2x^3 - 13x^2 + 17x + 12 = 0$$

Factorizar la expresión

$$(2x^2 - 5x - 3)(x - 4) = 0$$

$$(x - 3)(2x + 1)(x - 4) = 0$$

Igualar cada factor a cero

$$x - 3 = 0 \qquad 2x + 1 = 0 \qquad x - 4 = 0$$

Despejar la variable x

$$x - 3 = 0 \qquad 2x + 1 = 0 \qquad x - 4 = 0$$

$$x = 3 \qquad 2x = -1 \qquad x = 4$$

$$x = \frac{-1}{2}$$

Los puntos críticos de la función son:

$$x = 3, \qquad x = 4, \qquad x = \frac{-1}{2}$$