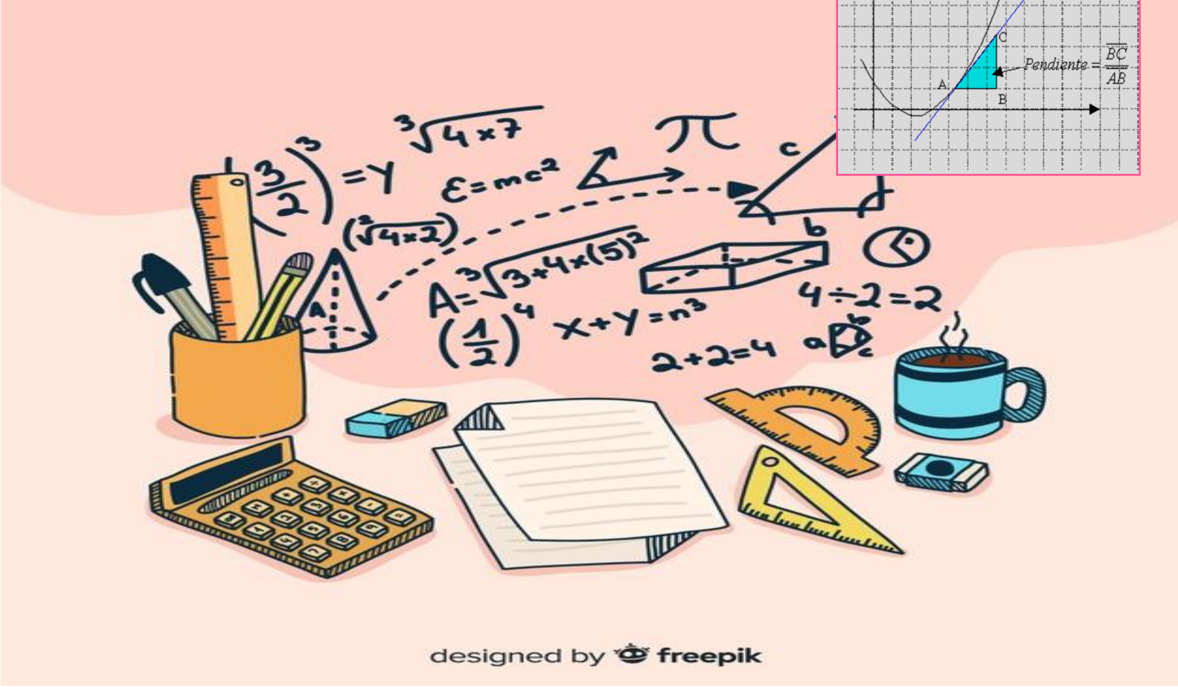


DERIVADA PARTE 1

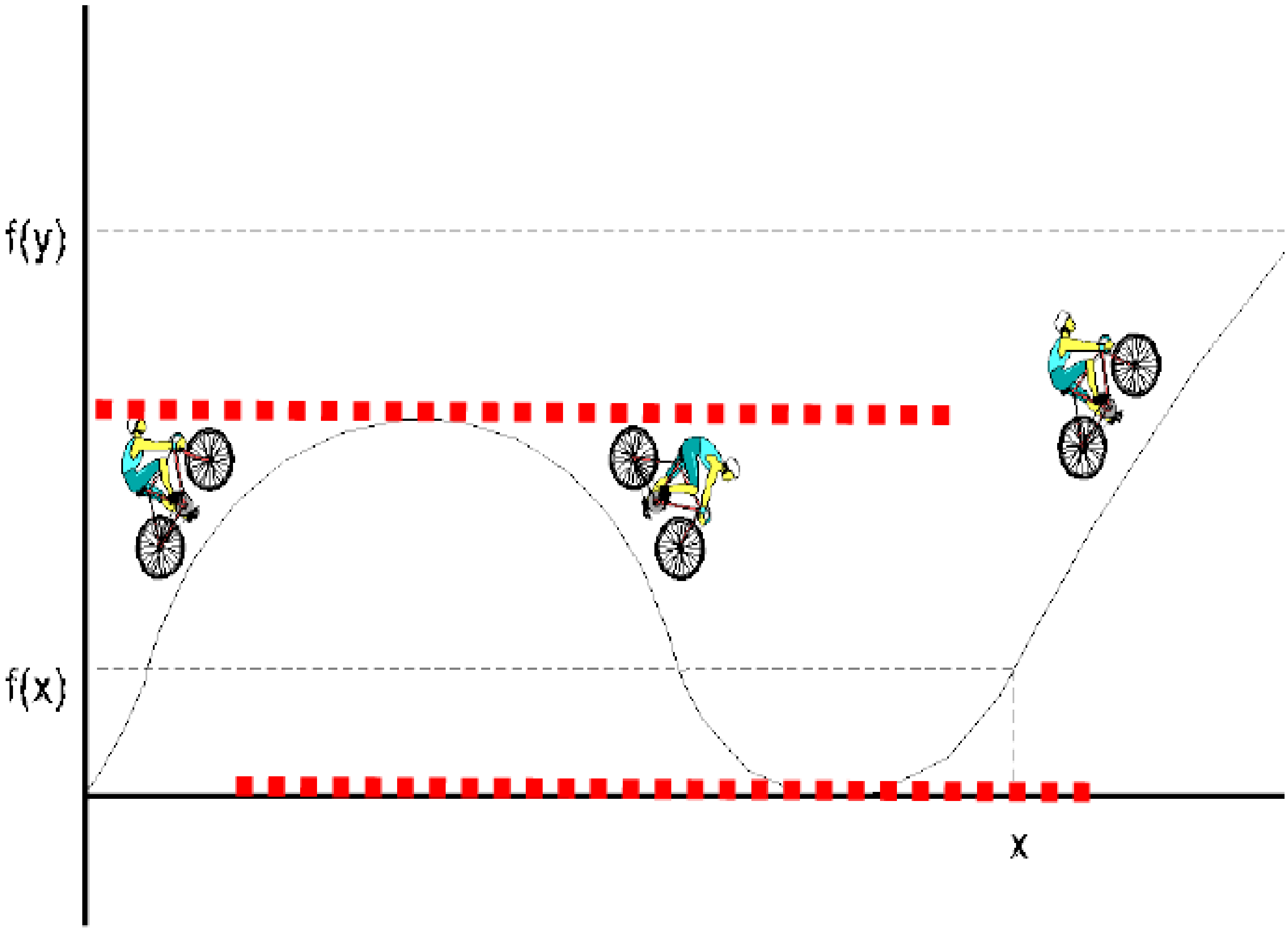
https://www.youtube.com/watch?v=_6-zwdrqD3U

Algunas Preguntas que nos Podemos Hacer

- **Que es el Cálculo Diferencial?**
- Podemos decir que es el estudio de las tasas de cambio instantáneas o derivadas.
- Que es la **Tasa de Cambio** de una función?
- Es una medida de cuánto **cambia** la **función** por unidad, en promedio, en ese intervalo. Nos lleva a la pendiente de la línea recta que conecta los extremos del intervalo en la gráfica de la **función**
- **Qué es una Derivada?**
- **La derivada de una función** se puede definir como la tasa de cambio de una función con respecto a una variable independiente. La **derivada** es uno de los pilares fundamentales de las matemáticas.

Un poco de Historia

- La noción de derivada es históricamente anterior al concepto de límite aunque actualmente se estudie la noción de derivada inmediatamente después de éste.
- La derivada de una función en un punto x_0 (es un concepto puntual) surge del problema de **calcular la tangente a la gráfica** de la función en el punto de abscisa x_0, y fue **FERMAT** el primero que aportó la primera idea al tratar de buscar los máximos y mínimos de algunas funciones.
- En dichos puntos las tangentes han de ser paralelas al eje de abscisas, por lo que el ángulo que forman con éste es de cero grados. En estas condiciones, **FERMAT** buscaba aquellos puntos en los que las tangentes fueran horizontales

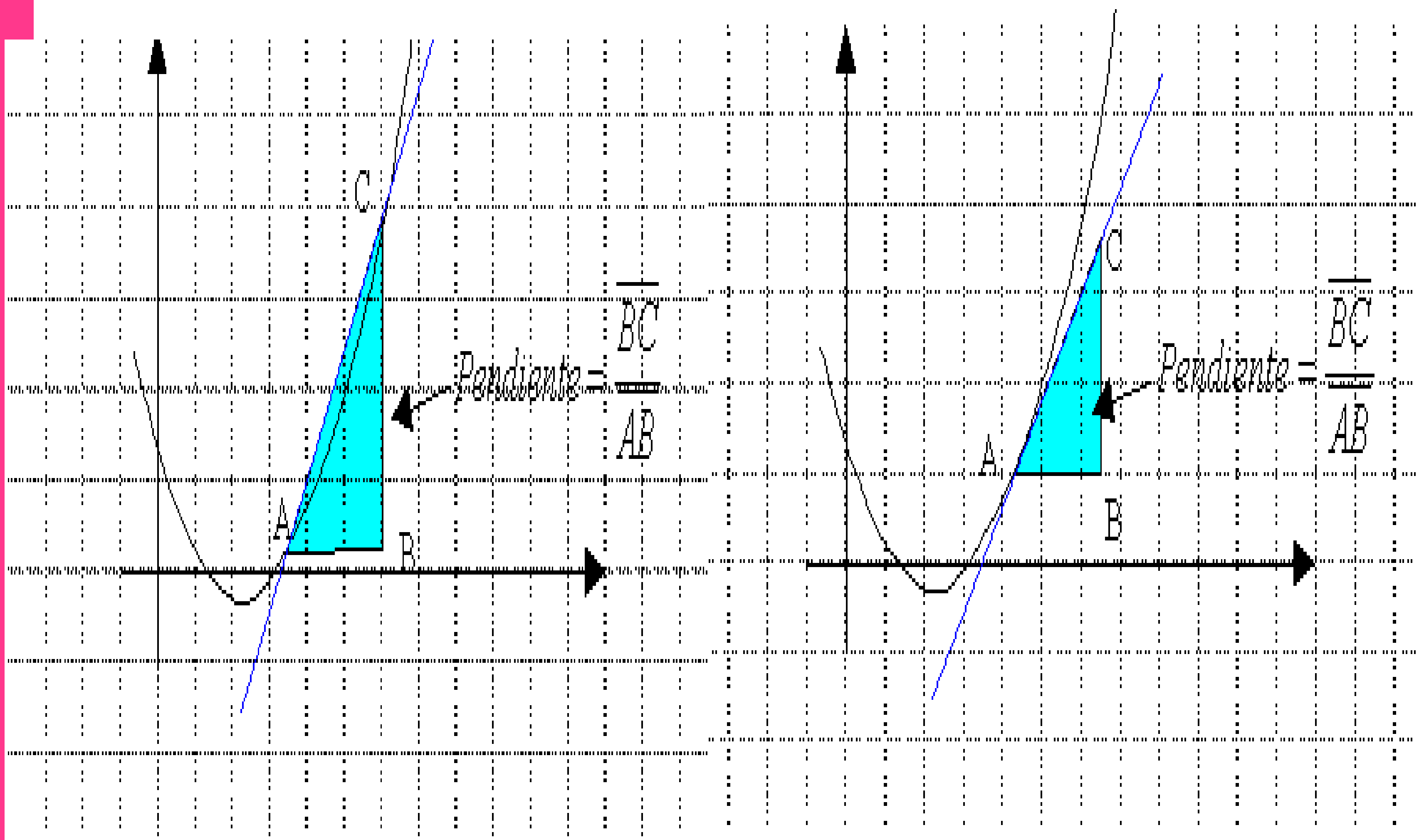

f(y)
f(x)
x

Recordando Algunos Conceptos

- Una recta es ***secante*** a una curva (en un intervalo) cuando la corta en dos puntos distintos.

- Es ***tangente*** a la curva (en un intervalo) cuando la toca en un sólo punto.

❖La ***pendiente*** de la recta secante a la curva que pasa por los puntos A y C de la figura es el cociente :



- Hemos hablado de la tasa de cambio (instantánea) veamos lo siguiente
- Un avión que realice un vuelo transatlántico de 4500 km entre las 12:00 y las 18:00, viaja a una velocidad media de 750 km/h. Sin embargo, puede estar viajando a velocidades mayores o menores en distintos tramos de la ruta. En particular, si entre las 15:00 y las 15:30 recorre 400 km, su velocidad media en ese tramo es de 800 km/h. Para conocer su velocidad instantánea a las 15:20, por ejemplo, es necesario calcular la velocidad media en intervalos de tiempo cada vez menores alrededor de esta hora: entre las 15:15 y las 15:25, entre las 15:19 y las 15:21.

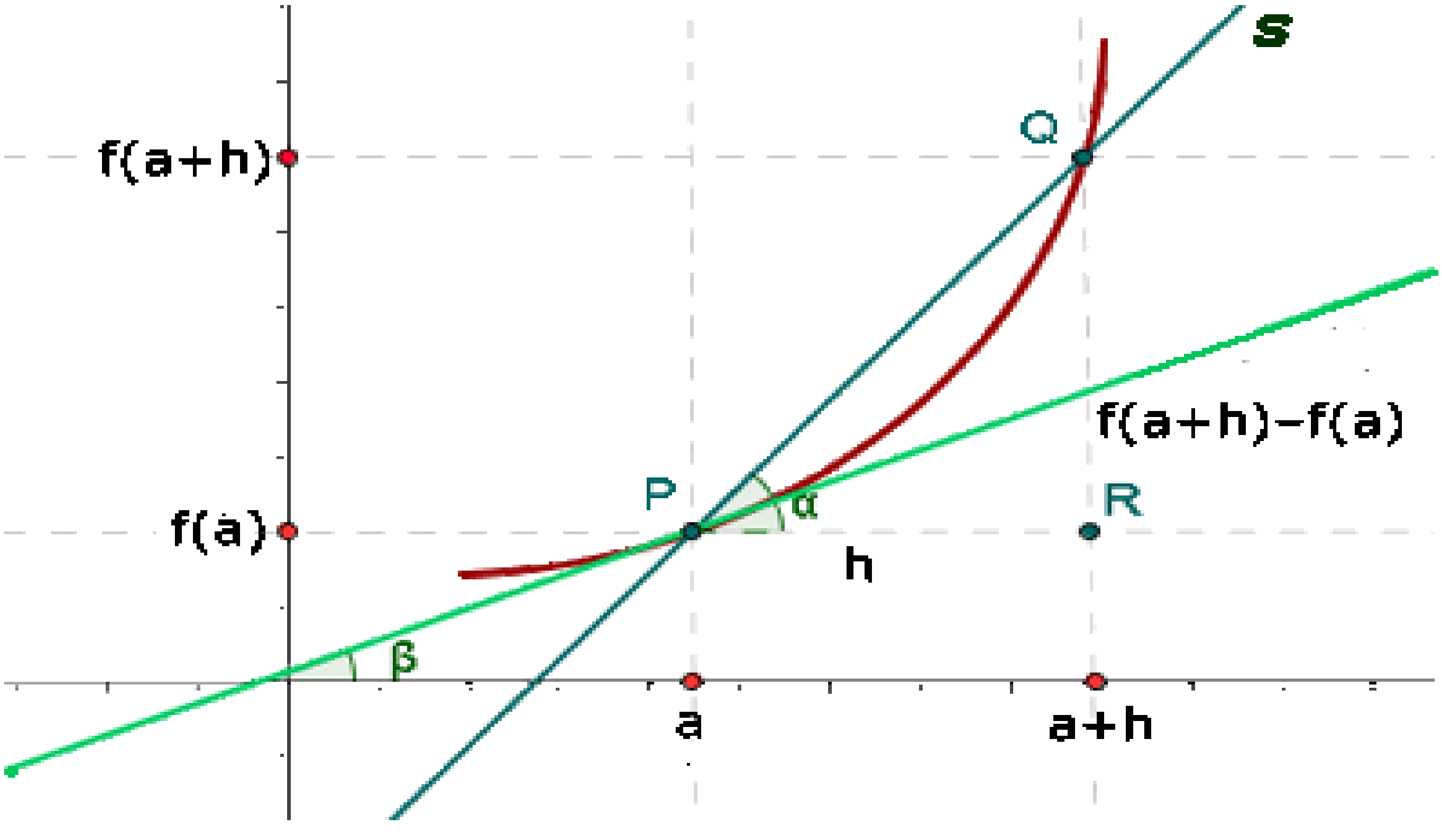
Video

https://youtu.be/_6-zwdrqD3U?t=2098

Derivada en un punto x=a

❖ Noción

- Sea una función y = f(x)   definida en un intervalo   I   y   sea "**a**" un punto de dicho intervalo .
- Si se toma un punto a+ h muy próximo a la punto "**a**"   (h es un número muy pequeño), a medida que se hace tender h a cero, la recta secante que une los puntos P (a f(a))   y Q (a+ h,   f(a + h)), **tiende a confundirse con la tangente a la curva en el punto** (a,f(a)).



Si α_h es el ángulo que forma la secante con el eje de abscisas, y α el ángulo

Que determina la tangente con el eje x , en el triángulo cuyos vértices son (a,f(a)) ; (a+h,f(a+h)) y R (a+h,f(a)) se verifica que :

$$tg\ \alpha_h = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

https://www.geogebra.org/m/REXZpfnx

https://youtu.be/-9sVJ4--YTE

- Al hacer tender *h* a cero, y puesto que la secante tiende a confundirse con un segmento de la tangente, tgα_h tiende a tg α es decir la pendiente de la tangente a la curva en (a f(a))
- Esto se expresa matemáticamente así

$$\lim_{h \to 0} tg\ \alpha_h = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = tg\ \alpha$$

Definición

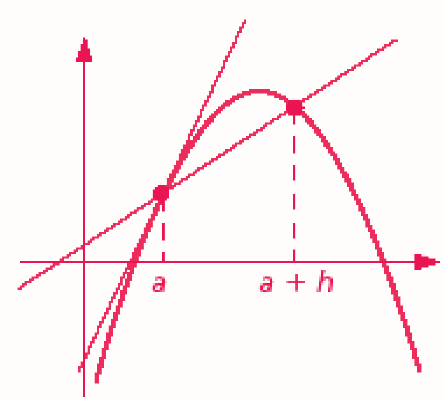
- Dada una función f definida en cierto dominio se llama derivada de la función en el punto x=a al límite (si existe y es finito)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)=D(f(a))$$

Cuando este límite existe (y es finito) se dice que la función *f(x)* es *derivable* en el punto *x=a . También se puede usar la siguiente expresión*

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$



Importante

- La Derivada de la función en un punto x=a ,no es otra cosa que la **pendiente de la tangente a la curva** (gráfica de la función) en el punto (a ; f(a))

Ejemplos

- Calcular la derivada de la función $f(x) = 3x + 5$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Resolución:

Se pide el valor de $f'(1)$ (en este caso, $x_0 = 1$).

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \quad \left\} \begin{array}{l} f(1+h) = 3(1+h) + 5 = 3h + 8 \\ f(1) = 3 \cdot 1 + 5 = 8 \end{array} \right.$$

- $$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{3h + 8 - 8}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3h}{h} = \lim_{h \to 0} 3 = 3$$

Por tanto, $f'(1) = 3$.

Otro s ejemplos

Calcular la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x}$ en el punto 2.

Resolución:

- $f'(2) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} \left\} \begin{array}{l} f(2+h) = \sqrt{2+h} \\ f(2) = \sqrt{2} \end{array} \right.$
- $f'(2) = \lim_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h}$, multiplicando numerador y denominador por

$\sqrt{2+h} + \sqrt{2}$ (conjugado del numerador)

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{2+h} - \sqrt{2})(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})}$$

Recordando que suma por diferencia es igual a la diferencia de los cuadrados:

$$(\sqrt{2+h} - \sqrt{2})(\sqrt{2+h} + \sqrt{2}) = 2 + h - 2 = h$$

- $f'(2) = \lim_{h \to 0} \dfrac{h}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} = \lim_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

Hallar la derivada de la función f(x) = $3x^2$ en el punto x = 2.

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(2+h)^2 - 3 \cdot 2^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3(4+4h+h^2) - 12}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3h^2 + 12h}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (3h + 12) = 12$$

Derivadas laterales

- Definición :

Derivada por la derecha:

La ***derivada lateral por la derecha*** de una función ***f (x)*** en el punto ***x= a***

$$f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

cuando este límite existe y es finito, decimos que la función tiene derivada lateral por la derecha de x=a

- Definición:

- La ***derivada lateral por la izquierda*** de una función ***f(x)*** en el punto ***x= a*** es el límite de cuando ***h*** tiende a cero por la izquierda del cero

$$f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

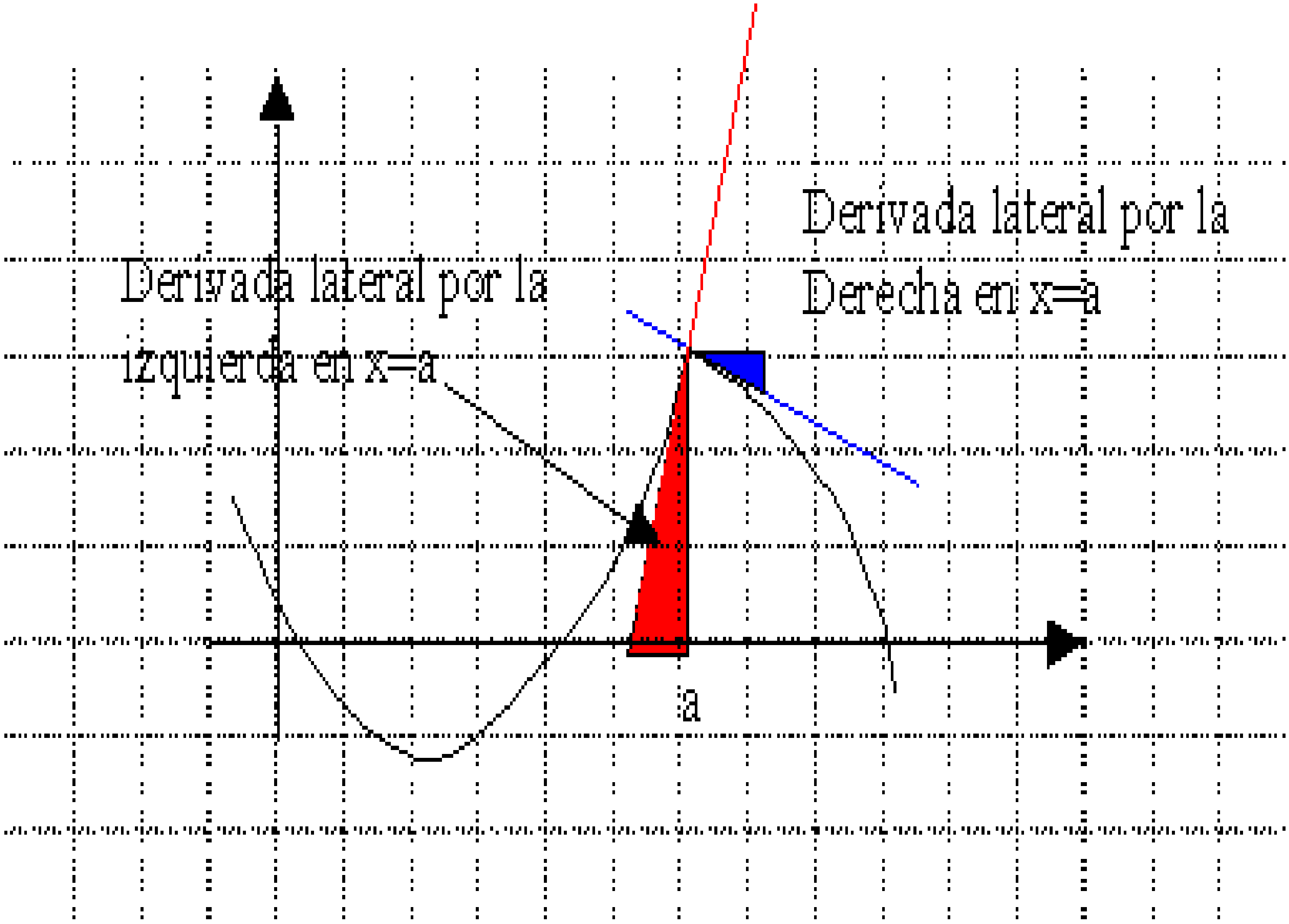
cuando este límite existe y es finito, decimos que la función tiene derivada lateral por la izquierda de x=a

Importante

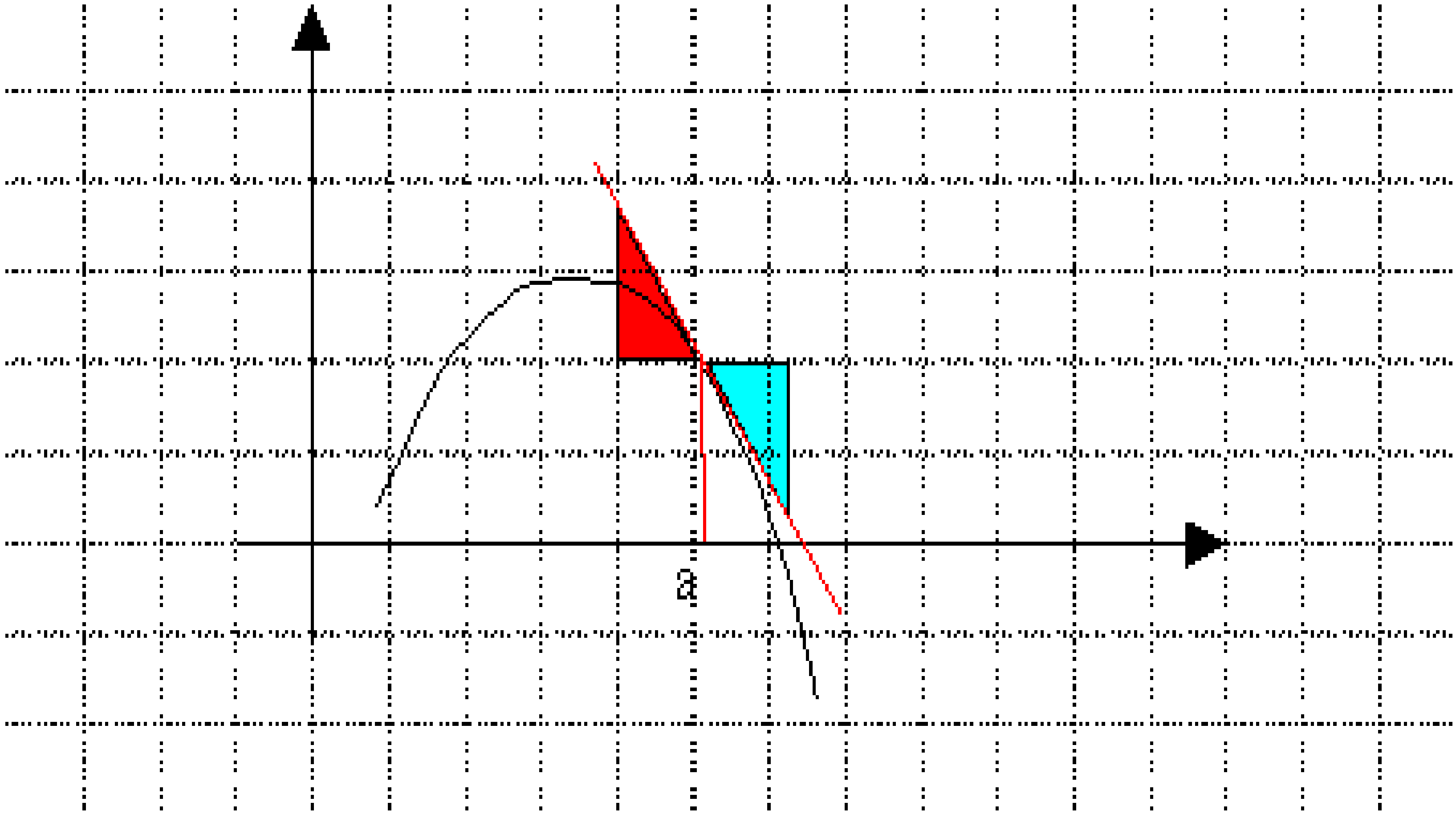
- Sea f: I →IR, donde I es un intervalo abierto incluido en R . De acuerdo con la definición, si las derivadas laterales son finitas en el punto *a* se cumple lo siguiente:

f **es derivable en** ***a*** ***si y solo si*** $f'_{+}(a) = f'_{-}(a)$

- Puede ocurrir que existiendo las derivadas a derecha e izquierda éstas sean distintas. En este caso no existe la tangente en *(a, f(a))*, sino dos semirrectas, cada una tangente a uno de los arcos en que el citado punto divide a la curva. Los puntos en que esto ocurre se llaman puntos angulosos.
- Si en un punto ***x=a***, las derivadas laterales no coinciden, es decir, son distintas, la función no es derivable en el punto ***x=a***.


Derivada lateral por la
Derecha en x=a
Derivada lateral por la
izquierda en x=a
a

Si la función tiene derivada en un punto ***x=a***, existen las derivadas laterales y son iguales:



Derivación en un intervalo

- Definición: Se dice que *f* **es derivable en un intervalo (a**, b)si *f* es derivable en *x*, para todo *x* ε (a,b)
- Se dice que *f* **es derivable en un intervalo cerrado [*a, b*]** si es derivable en el intervalo abierto *(a, b)* y además, existen la derivada por la derecha en *a* y la derivada por la izquierda en *b*.

Teorema

✓Si una función f(x) es derivable en un puntox$_0$, entonces f(x) es continua en x$_0$

Ejemplo

Sea

$$f(x)=\begin{cases}-x & Si \quad x<0\\ x^2 & Si \quad x\geq 0\end{cases}$$

Estudiamos las derivadas laterales en x=0

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{-(0+h)-0}{h}=\frac{-h}{h}=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(0+h)^2-0}{h}=\lim_{x\to 0^+}\frac{h^2}{h}=\lim_{x\to 0^+}h=0$$

Los límites laterales son finitos pero no coinciden por lo tanto la función no es derivable en x=0

No derivabilidad en x=0