Dpto. de Matemática

MATEMÁTICA DISCRETA

Álgebras de Boole

LIC. MÓNICA LORDI

Departamento de Innovación Educativa

UNIVERSIDAD CAECE

Cámara Argentina de Comercio y Servicios

En 1854 George Boole introdujo una notación simbólica para el tratamiento de variables cuyo valor podría ser verdadero o falso (variables binarias) Así el álgebra de Boole nos permite manipular relaciones proposicionales y cantidades binarias. Aplicada a las técnicas digitales se utiliza para la descripción y diseño de circuitos mas económicos. Las expresiones booleanas serán una representación de la función que realiza un circuito digital. En estas expresiones booleanas se utilizarán las tres operaciones básicas (AND, OR NOT) para construir expresiones matemáticas en las cuales estos operadores manejan variables booleanas (lo que quiere decir variables binarias).

Los símbolos elementales son:
- 0: representativo de FALSO
- 1: representativo de VERDADERO

Las operaciones fundamentales son:
- Conjunción u operación AND (se representa con **.**)
- Disyunción u operación OR (se representa con +)
- Complementación, Negación u operación NOT (se representa con una barra sobre la variable, $\overline{X}$

Las variables son las proposiciones, que se representan o simbolizan por letras

POSTULADOS:

Los postulados para las tres operaciones básicas, AND, OR Y NOT, son suficientes para deducir cualquier relación boleana.

COMPLEMENTO	ADICION	MULTIPLICACION
$\overline{0} = 1$	$0 + 0 = 0$	$0 \cdot 0 = 0$
$\overline{1} = 0$	$0 + 1 = 1$	$0 \cdot 1 = 0$
	$1 + 0 = 1$	$1 \cdot 0 = 0$
	$1 + 1 = 1$	$1 \cdot 1 = 1$

Axiomas del Álgebra de Boole:

1. CONMUTATIVIDAD

a) $X + Y = Y + X$ Conmutatividad del +
b) $X \cdot Y = Y \cdot X$ Conmutatividad del ·

2. ASOCIATIVIDAD

a) $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z = X + Y + Z$ Asociatividad del +
b) $X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot Y \cdot Z$ Asociatividad del ·

3. DISTRIBUTIVIDAD

a) $X + Y \cdot Z = (X + Y) (X + Z)$ Distribuitvidad del +
b) $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$ Distribuitividad del ·

4. IDENTIDAD

a) $0 + X = X$

b) $1 \cdot X = X$

5. COMPLEMENTACIÓN

a) $X + \overline{X} = 1$

b) $X \cdot \overline{X} = 0$

UNIVERSIDAD CAECE
Cámara Argentina de Comercio y Servicios

Propiedades básicas

1. **IDEMPOTENCIA O POTENCIAS IGUALES**

a) $X + X = X$ b) $X \cdot X = X$

2. **ABSORCIÓN**

a) $x + 1 = 1$ b) $x \cdot 0 = 0$

c) $(X + Y) = X$ d) $X + X \cdot Y = X$

UNIVERSIDAD CAECE
Cámara Argentina de Comercio y Servicios

3. INVOLUCIÓN

$$\overline{\overline{X}} = X$$

4. LEYES DE DE MORGAN

a) $\overline{X \cdot Y} = \overline{X} + \overline{Y}$

b) $\overline{X + Y} = \overline{X} \cdot \overline{Y}$

Dualidad

Los axiomas y propiedades presentados están representados de a pares. Esto es porque cada propiedad o axioma tiene lo que llamamos su dual. El dual de una expresión se obtiene intercambiando las ocurrencias de OR por AND, 0 por 1 y viceversa.

Si un teorema es válido también lo será su dual.

Simplificar las siguientes expresiones mediante los postulados del álgebra de Boole:

- $a * b + c * \overline{(a * b)}$

$$a * b + c * \overline{(a * b)}$$

$$[(a * b) + c] * [(a * b) + \overline{(a * b)}]$$ Propiedad Distributiva

$$[(a * b) + c] * 1$$ Complementación

$$\boxed{[(a * b) + c]}$$ Identidad

Simplificar las siguientes expresiones mediante los postulados del álgebra de Boole:

- $(\overline{\bar{x} * \bar{y}} + z) * (\overline{x + \bar{y}})$

$(\overline{\bar{x} * \bar{y}} + z) * (\overline{x + \bar{y}})$		
$(x + y + z) * (\bar{x} * y)$	De Morgan	Involución
$(x + y) * (\bar{x} * y) + z * (\bar{x} * y)$	Propiedad Distributiva	
$x * (\bar{x} * y) + (\bar{x} * y) * y + z * (\bar{x} * y)$	Propiedad Conmutativa	Propiedad Distributiva
$0 * y + \overline{(x} * y * y) + z * (\bar{x} * y)$	Idempotencia	Complementación
	Propiedad Distributiva	
$(\bar{x} * y) + z * \bar{x} * y$	Absorción y Distributiva	Identidad
$1 * (\bar{x} * y) + z * \bar{x} * y$	Complementación	Identidad
$\boxed{(\bar{x} * y) * (1 + z)}$	Propiedad Distributiva	

Mediante la aplicación de teoremas del álgebra de Boole, probar que:

UNIVERSIDAD CAECE
Cámara Argentina de Comercio y Servicios

$x * \bar{y} = 0 \leftrightarrow x * y = x$

$\longleftarrow$

$$x * y = x \rightarrow x * \bar{y} = 0$$

$$x * \bar{y} = (x * y) * \bar{y} = x * (y * \bar{y}) = x * 0 = 0$$

Hipótesis

Asociatividad

Complementación

Identidad

$\longrightarrow$

$$x * \bar{y} = 0 \rightarrow x * y = x$$

$$x * y = (x * y) + 0 = (x * y) + (x * \bar{y}) = x * (y + \bar{y}) = x * 1 = x$$

Identidad

Hipótesis

Distributiva

Complemento

Identidad

UNIVERSIDAD CAECE

Cámara Argentina de Comercio y Servicios

Dpto. de Matemática