FUNCIONES PARTE 2

FORMAS DE REPRESENTAR UNA FUNCIÓN

- ✓ 1. TABLA DE VALORES
- ✓ 2. EXPRESIÓN VERBAL
- ✓ 3. EXPRESIÓN ALGEBRAICA O ANALÍTICA
- ✓ 4. GRAFICAMENTE

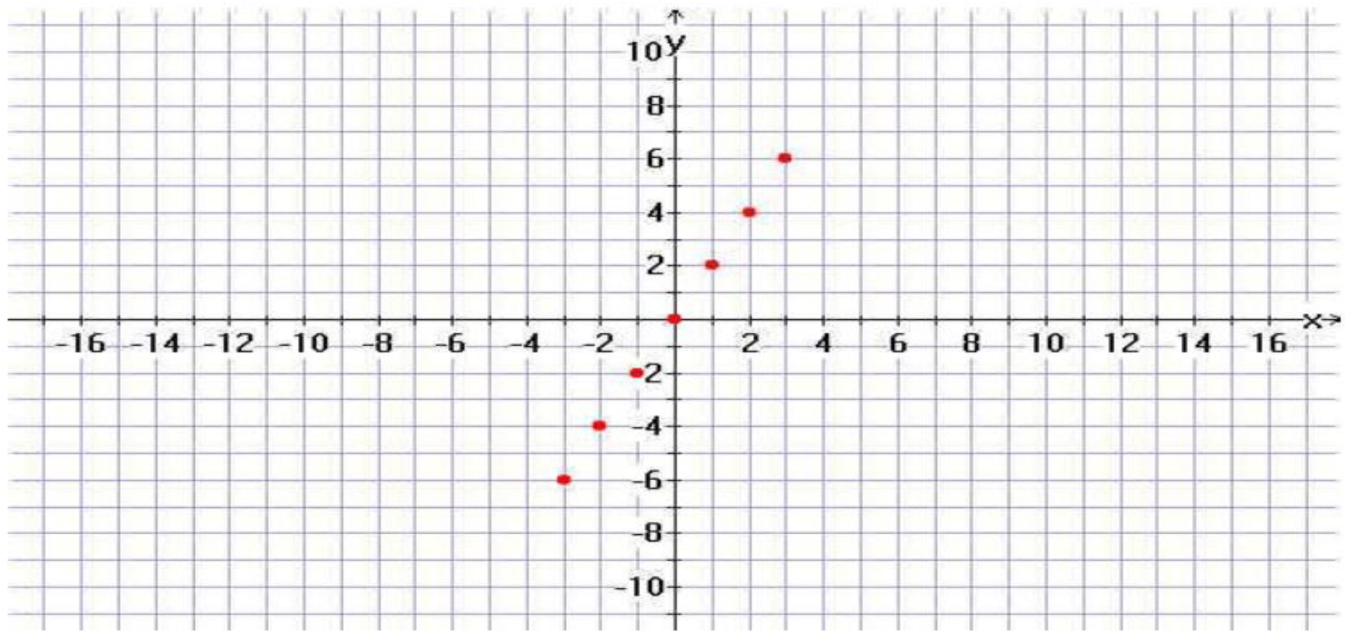
EJEMPLO

Sea la función dada por:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2x	-6	-4	-2	0	2	4	6

Tal que f(x)= 2x

Además de la expresión analítica de una función (f(x) = 2x), se suelen utilizar gráficas para visualizarlas y entenderlas de una forma rápida:



En este caso no se unirán los puntos ya que el Dom f esta dado {-3,-2-1,0,1,2,3}

IMPORTANTE:

- <u>**Definición:**</u> Una función **esta bien definida** si y solo si esta definido su **dominio**, su **codominio** y su **fórmula** (La regla por la cual se asigna a cada elemento del dominio uno y solo uno elemento del codominio).

Ejemplo

La función definida por:

$$f: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$$
$$x \longrightarrow x^2$$

Asigna a cada número real su cuadrado.

Tiene por conjunto dominio todos los números reales, pues dado cualquier número real x, siempre es posible calcular su cuadrado D(f)=R, siendo el resultado otro número real y mas específicamente es un numero real positivo.

Entonces, tiene por conjunto codominio a los números reales mientras que su imagen esta dada por todos los números reales positivos, puesto que el cuadrado de un número siempre es positivo:

$$Im(f) = \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$$

La regla de asignación es «dado cualquier número real x, calcular su cuadrado para obtener la imagen».

CONJUNTO de CEROS de una FUNCIÓN

- **<u>Definición:</u>** Sea una función f tal que: $f: A \to B$ Llamamos **conjunto de ceros** de la función f al subconjunto del dominio de la función tal que $f(x) = 0$ Se lo denota C_0

En símbolos:

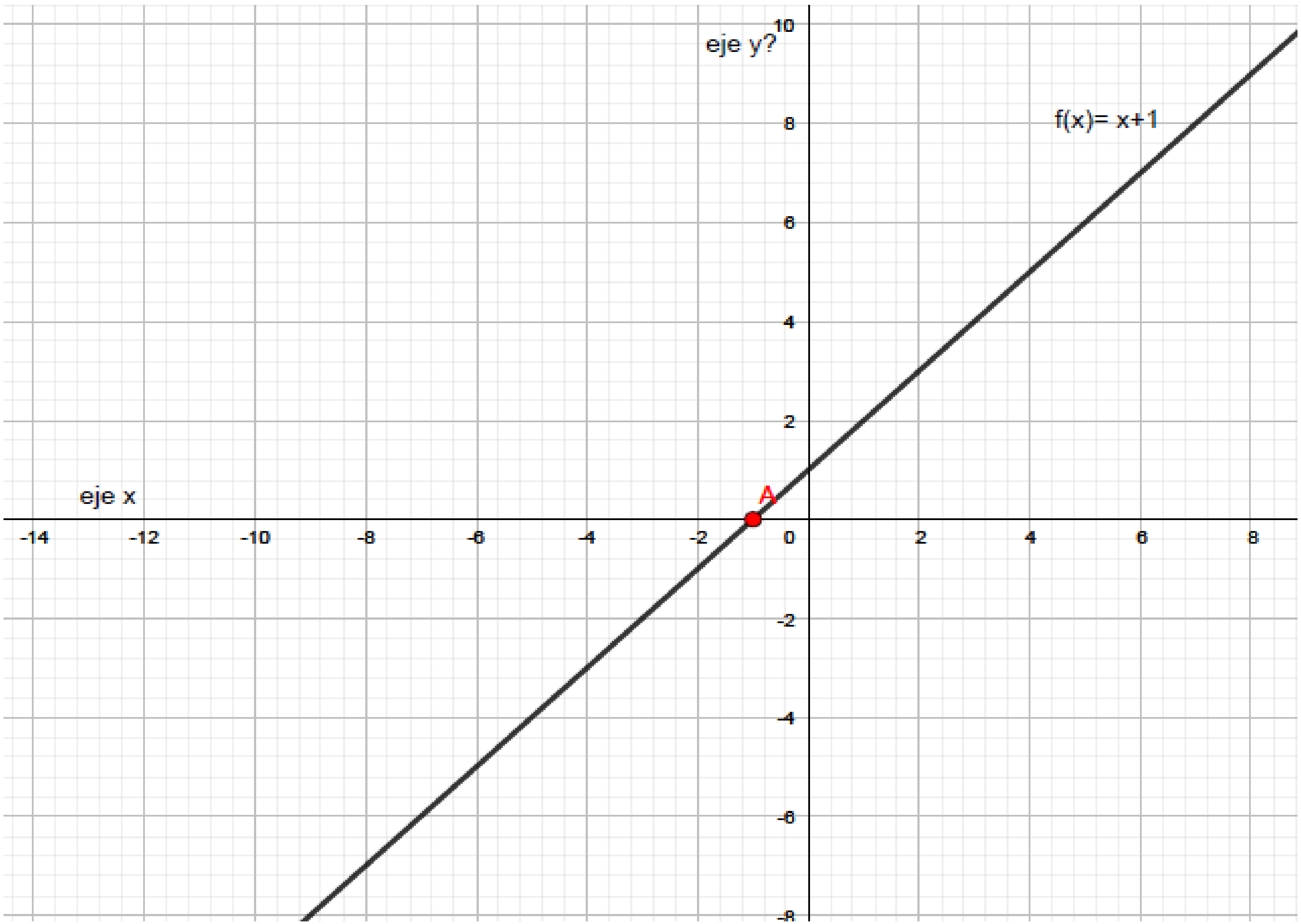
$$C_0 = \{ x / x \in A \wedge f(x) = 0 \}$$

EJEMPlO

$$f: R \rightarrow R \;/\; f(x) = x + 1$$

$$C_0 = \{x / x \in R \wedge x+1 = 0\} = \{x / x \in R \wedge x = -1\} = \{-1\}$$

GRÁFICAMENTE



CONJUNTO de POSITIVIDAD de una FUNCIÓN

- **Definición:** Sea una función f tal que: f: $A \rightarrow B$ Llamamos conjunto de positividad de la función f al subconjunto del dominio de la función tal que $f(x) > 0$ Se lo denota C_+

En símbolos:

$$C_+ = \{ x / x \in A \wedge f(x) > 0 \}$$

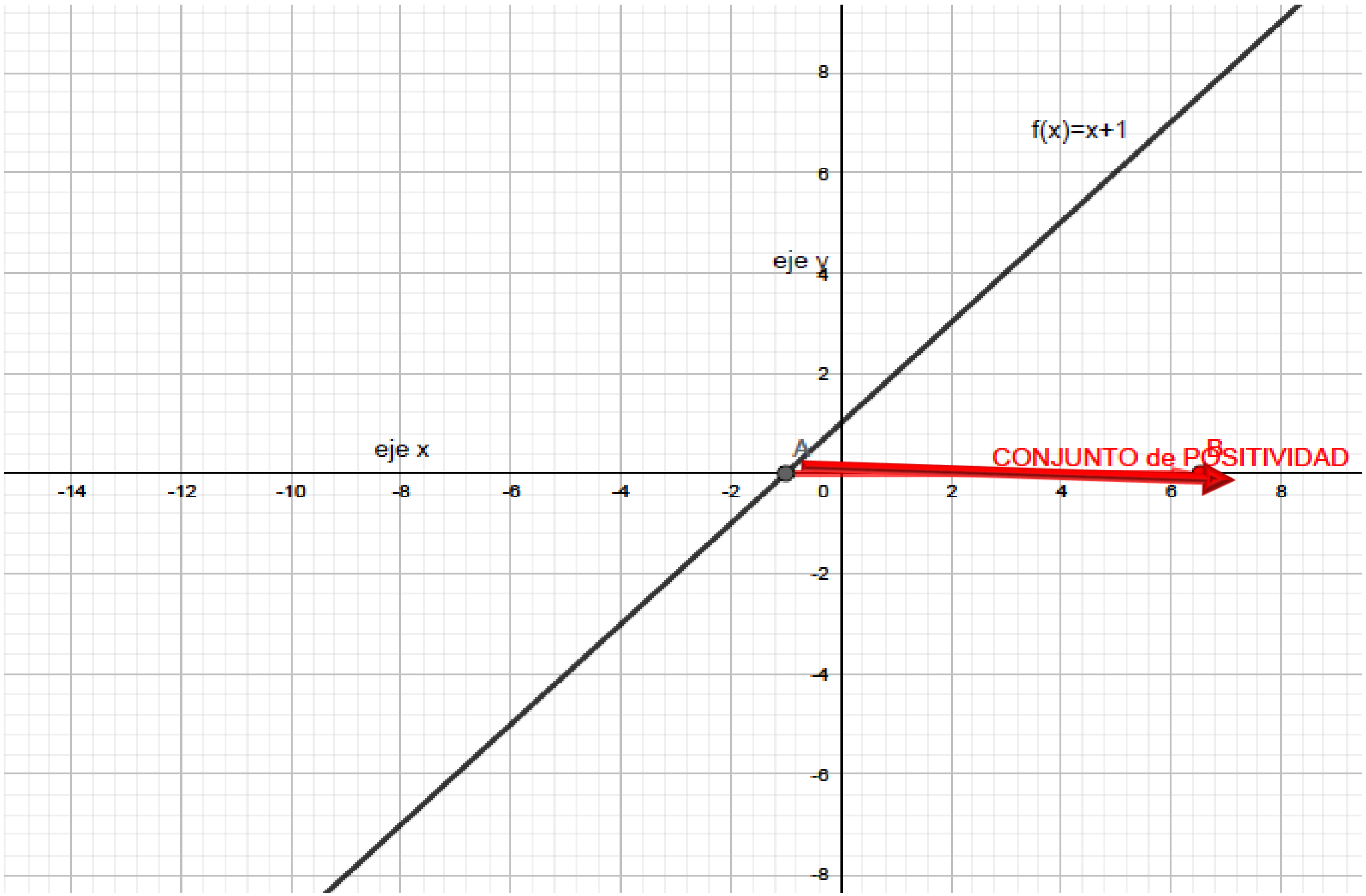
EJEMPLO

$$f: R \to R \,/\, f(x) = x + 1$$

$$C_+ = \{x / x \in R \wedge x + 1 > 0\} = \{x / x \in R \wedge x > -1\} = (-1, \infty)$$

GRÁFICAMENTE:

NO INCLUYE AL PUNTO A



CONJUNTO de NEGATIVIDAD de UNA FUNCIÓN

- <u>**Definición :**</u> Sea una función f tal que: $f: A \rightarrow B$ Llamamos **conjunto de negatividad** de la función f al subconjunto del dominio de la función tal que $f(x) < 0$

Se lo denota C_-

En símbolos:

$$C_- = \{x / x \in A \wedge f(x) < 0\}$$

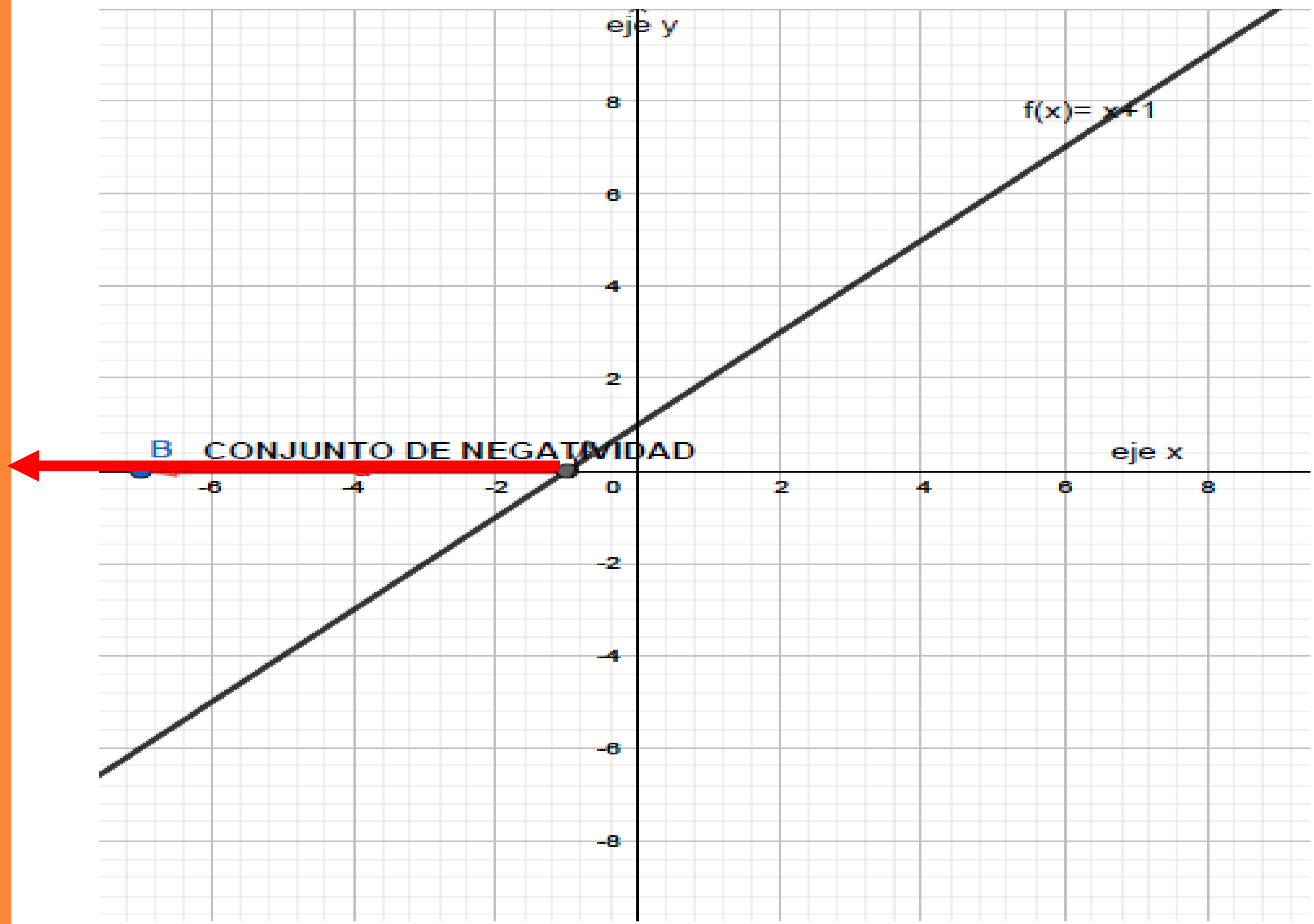
EJEMPLO

$$f: R \to R \,/\, f(x) = x + 1$$

$$C_{-} = \{x \,/\, x \in R \wedge x + 1 < 0\} = \{x \,/\, x \in R \wedge x < -1\} = (-\infty, -1)$$

GRÁFICAMENTE

NO INCLUYE AL PUNTO A



NOTA :

Sea una función f tal que: $f: A \to B$

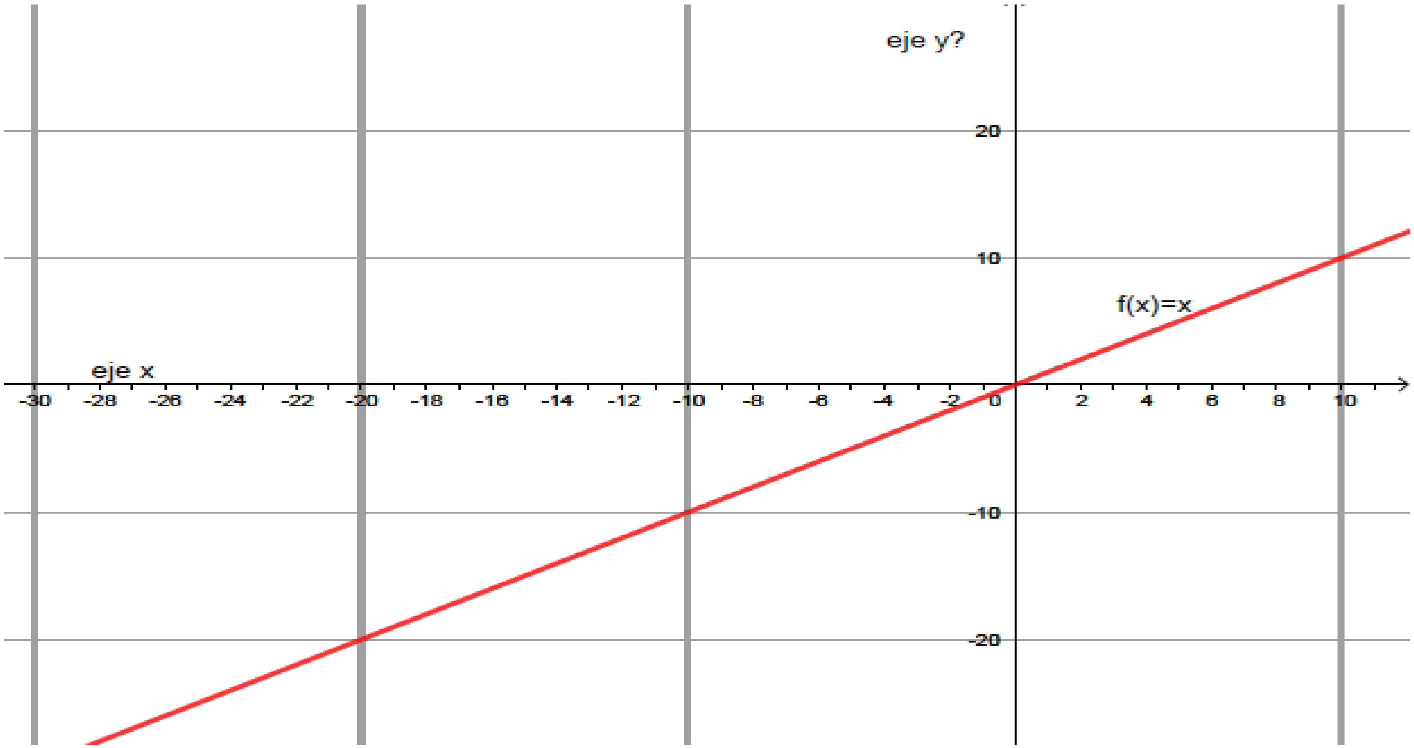
$$C_+ \cup C_- \cup C_0 = A$$

FUNCIONES MAS USUALES

❖ FUNCIÓN IDENTIDAD

$$f: A \to A : f(x) = x \quad Im(f)=A$$

EJEMPLO $f: R \to R \;/\; f(x)= x$



❖FUNCIÓN CONSTANTE

1- Sea k un constante tal que $k \in$ al conjunto B

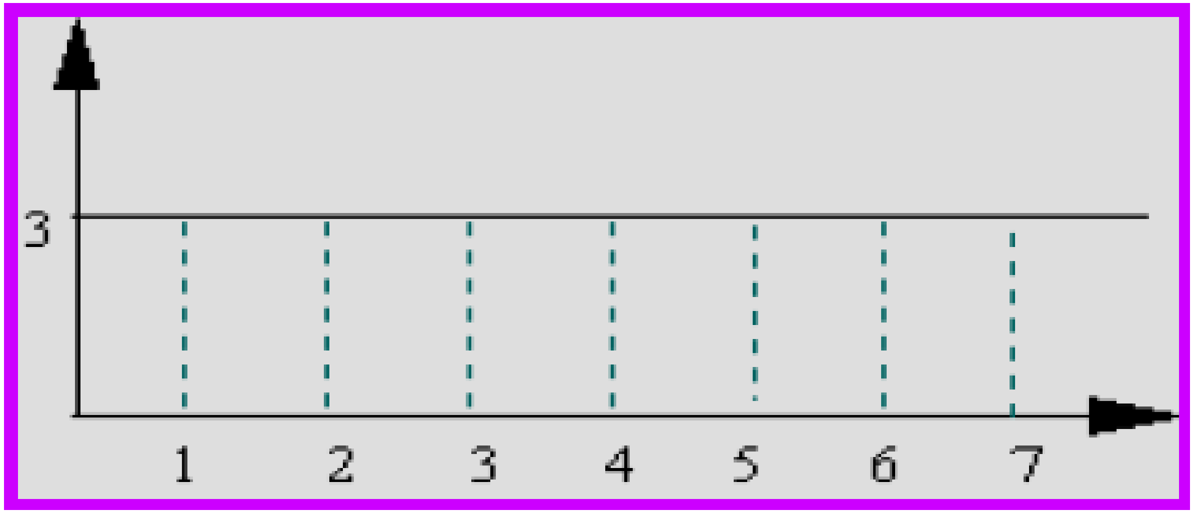
$f: A \rightarrow B : f(x) = k \ \forall x \in A \quad Im(f)=\{k\}$

Ejemplo

$f: R \rightarrow R : f(x) = 3$

$Imf = 3$

Gráficamente :



2- Función nula. Podríamos decir que es un caso particular de la función constante, donde dicha constante es 0.

Sea $k = 0$ tal que $0 \in$ al conjunto B

$f: A \to B : f(x) = 0 \ \forall x \in A$ (Función Nula)

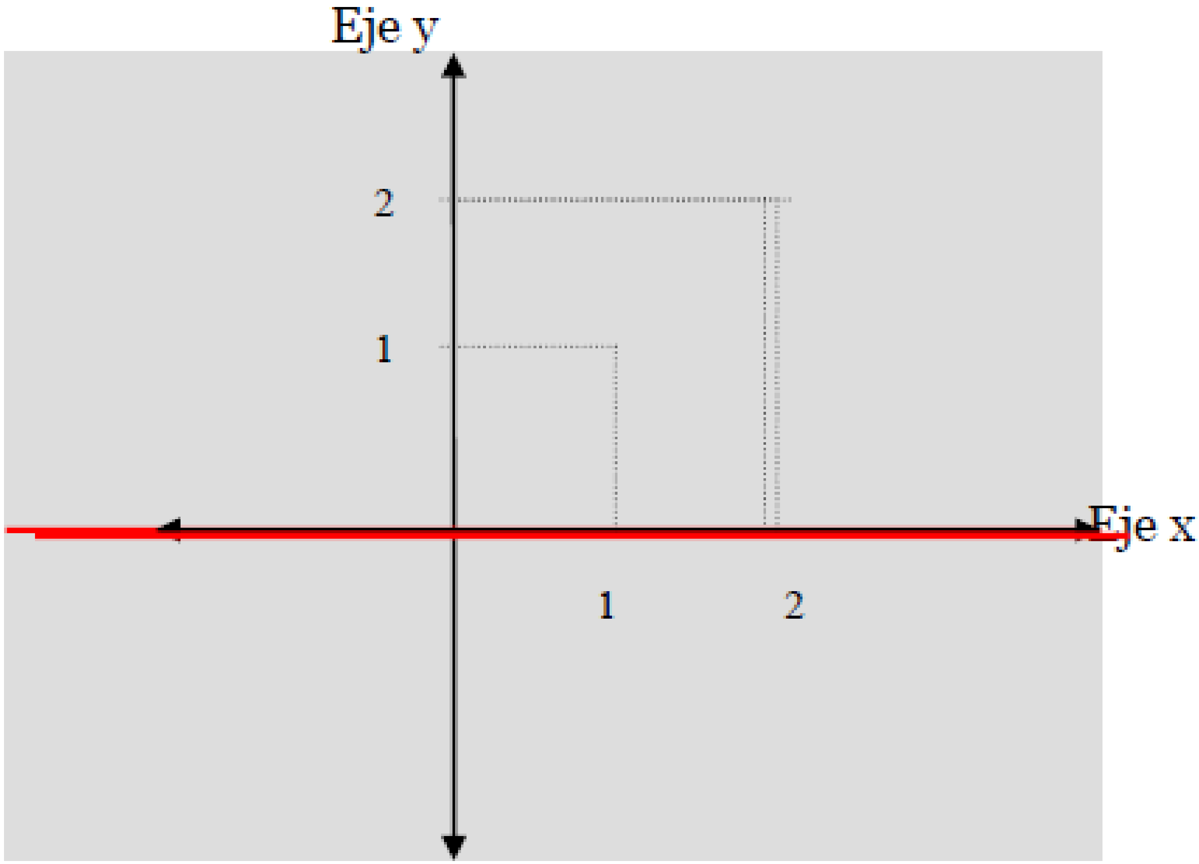
Ejemplo

$f: R \to R : f(x) = 0$

$Imf = 0$

Gráficamente

Graficamente : la función nula de R en R



FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

SE DENOMINAN ASÍ a AQUELLAS FUNCIONES CUYO DOMINIO SON LOS REALES o CUALQUIER SUBCONJUNTO DE ESTOS

Ejemplos:

$f: R \to R \,/\, f(x) = x - 1$

$g(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$ donde $g(x) = R - \{1\} \to R$

$f: Z \to Z \,/\, f(x) = x^2$

$g: [0, \infty) \to [-1, \infty) \,/\, g(x) = x - 1$

FUNCIONES DE VARIABLE REAL MAS USUALES

❖FUNCIÓN LINEAL

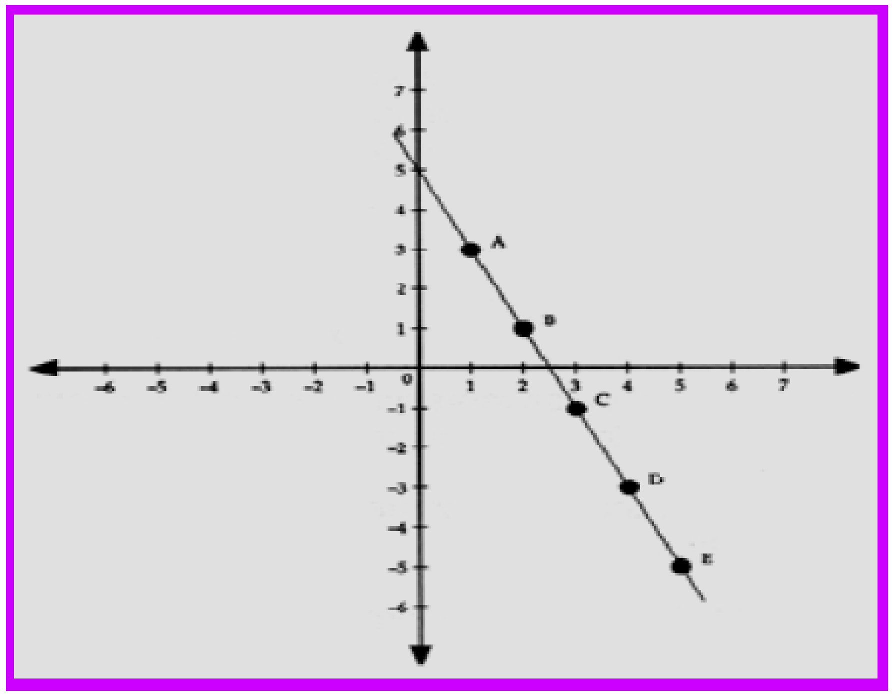
- **<u>Definición:</u>**

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = ax + b$ con $a \neq 0$[4]

Ejemplo

Función: $y = -2x + 5$

Gráficamente



Img f=R

NOTA

Son consideradas también funciones lineales las constantes incluida la función nula

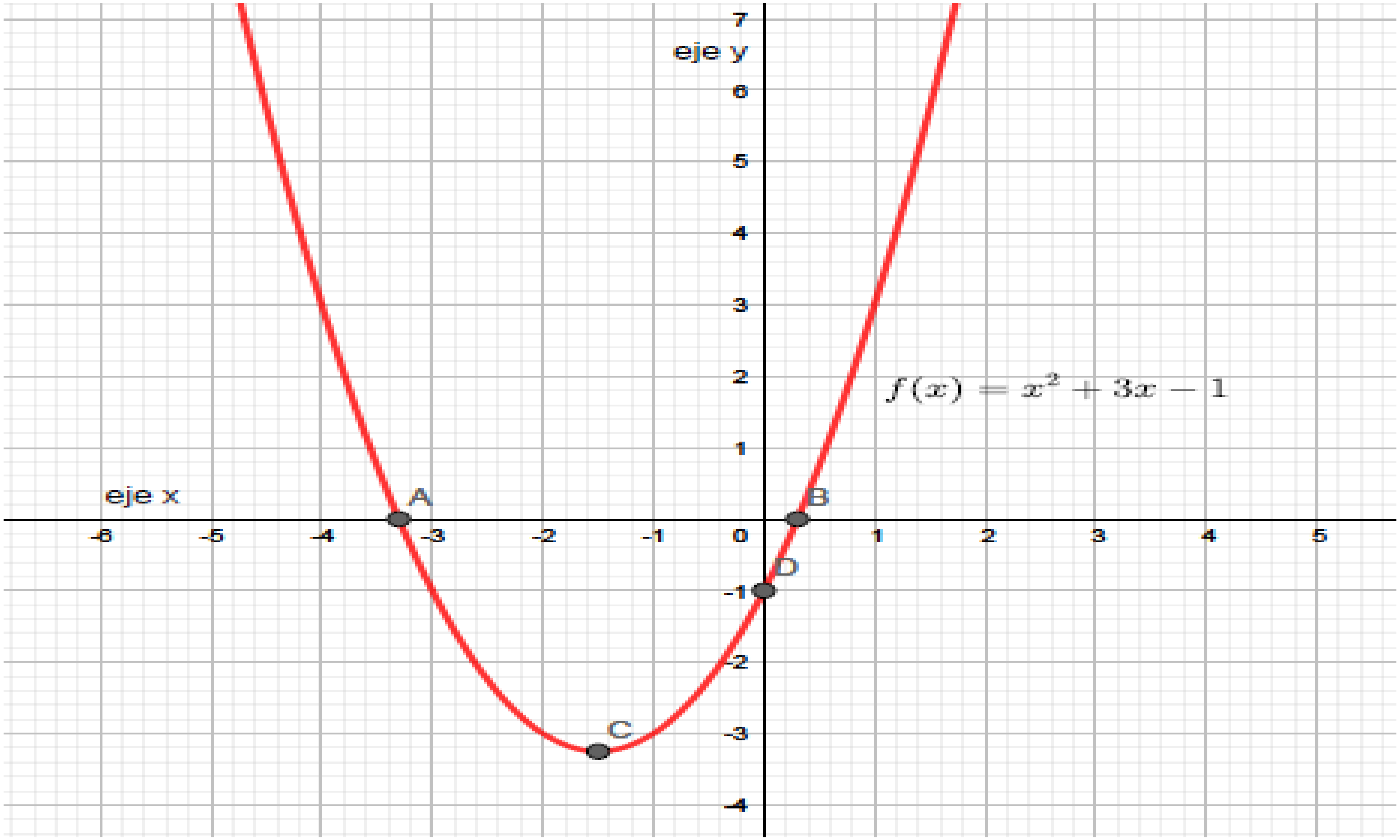
❖FUNCIÓN CUADRÁTICA

- **<u>Definición:</u>**

$$f: R \to R : f(x) = ax^2 + bx + c \text{ con } a \neq 0$$

GRAFICAMENTE :

Sea f(x)= x^2+3x-1

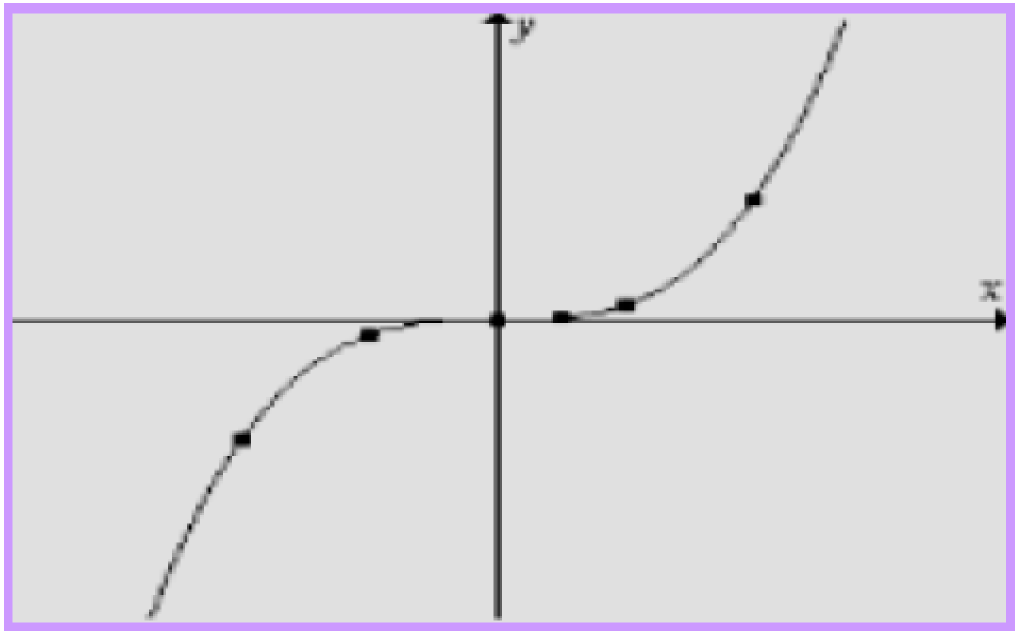


❖FUNCIÓN CÚBICA

- **<u>Definición:</u>**

f: R → R : f (x) = a x^3 + b x^2 + c x+d con a ≠ 0

Ejemplo
$f(x)=x^3$



Im(f)=R

FUNCIONES POLINÓMICAS

- **Definición:** Sea una función $P: R \to R$ / definimos la función polinómica como la función que tiene la siguiente expresión

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots a_1 x^1 + a_0$$

con $n \in N \cup \{0\}$

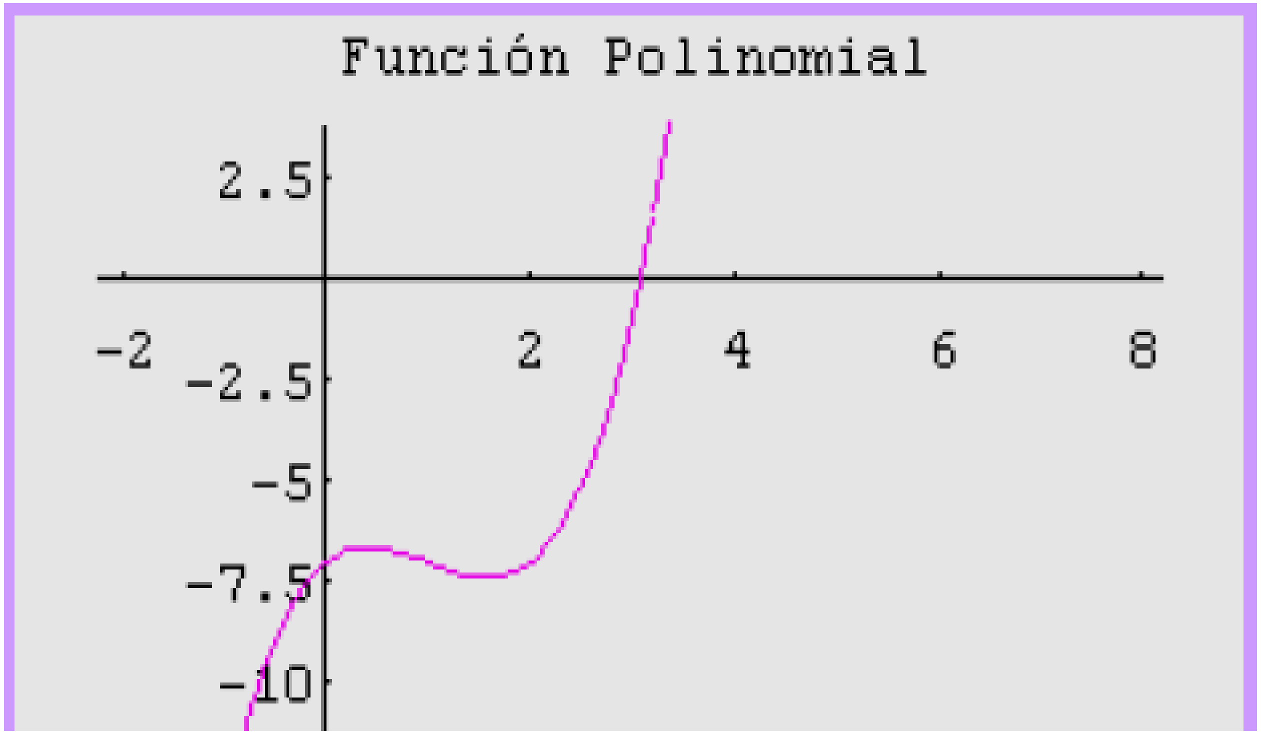
Otra forma de expresar: $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

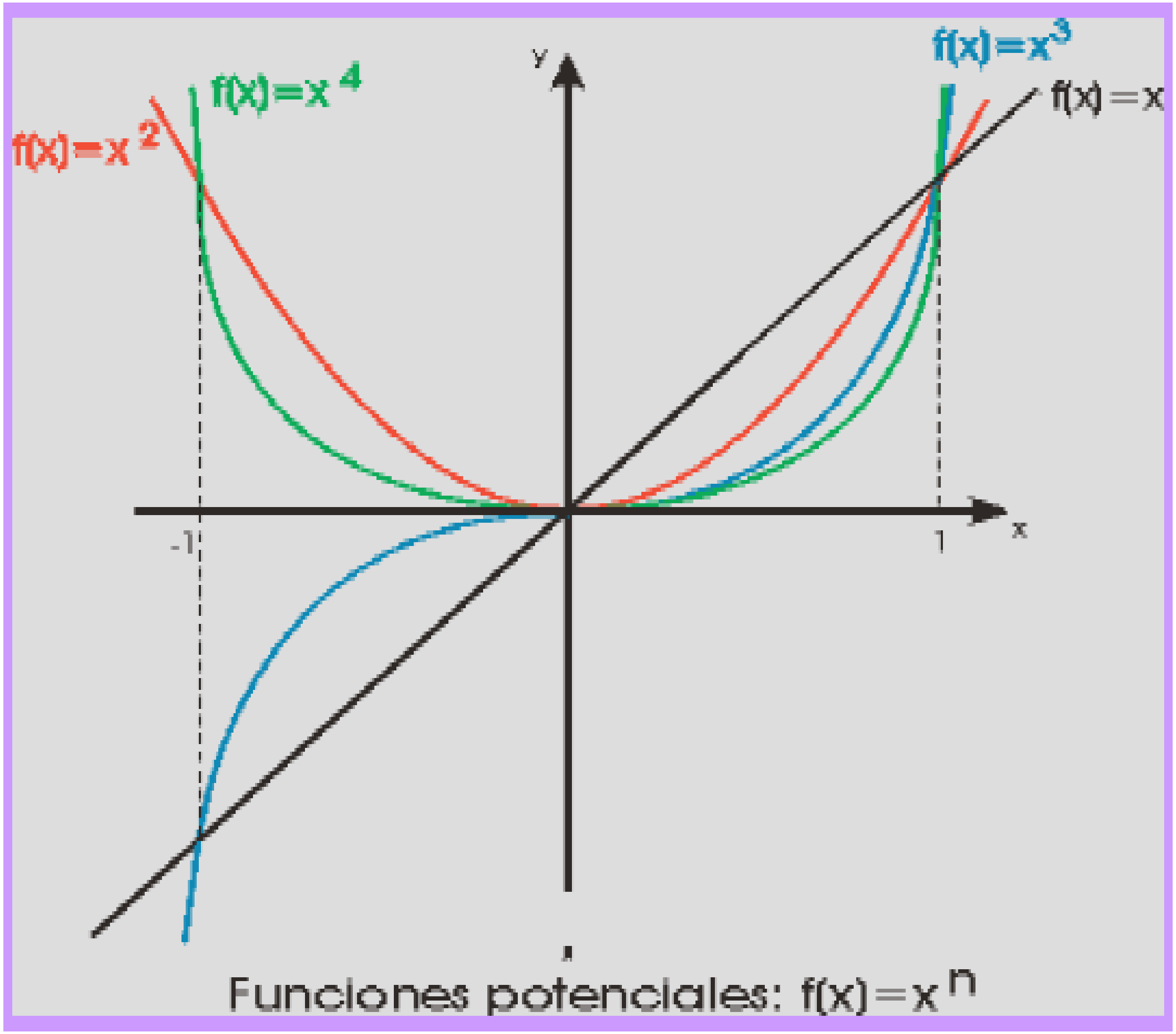
Ejemplo

$P(x)= x^3 - 3x^2 + 2x - 7$ es un polinomio

$Q(x)= 3x^5-4x^2-\sqrt{x}$ no es un polinomio ya que el término dado por $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ el exponente no es natural o cero

Hacemos el grafico de $P(x)= x^3 - 3x^2 + 2x - 7$





f(x)=x 2
f(x)=x 4
y
f(x)=x3
f(x)=x
-1
1
x
Funciones potenciales: f(x)=x n

FUNCIONES POR PARTES o de DOMINIO PARTIDO

- **Definición:** Son aquellas que se las define dividiendo el dominio en intervalos cuya intersección es vacía dos a dos y la unión es todo el dominio dado, y que por lo tanto requieren de mas de una expresión para la definición de su fórmula

Dentro de esta clasificación tenemos las siguientes entre otras:

FUNCIÓN PARTE ENTERA

- **Definición:** Definimos parte entera de x que denotamos $[x]$ al entero inmediatamente anterior

O sea $[x] = z$

Ejemplos

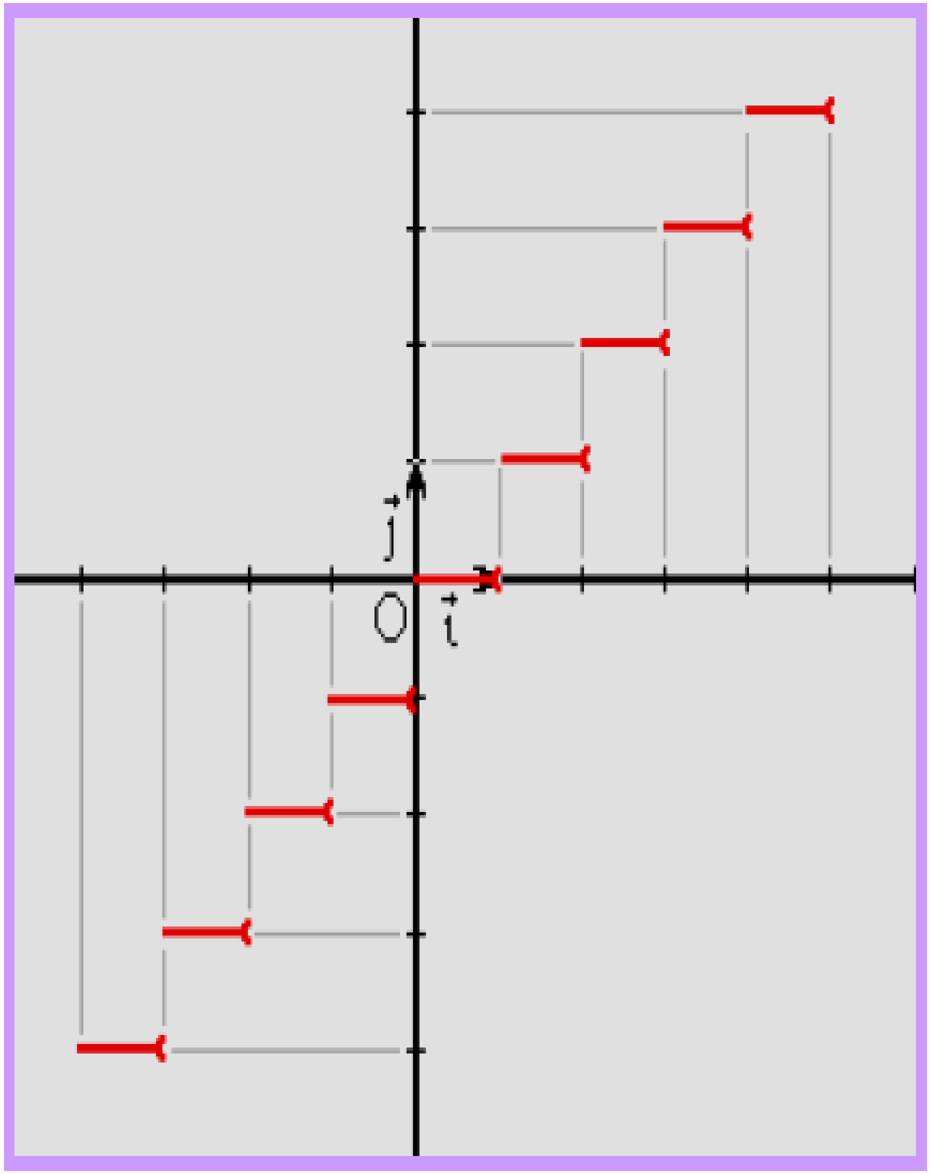
$[2.85] = 2$ ya que $2 \le 2.85 < 3$

$[-1,45] = -2$ ya que $-2 \le -1.45 < -1$

Definimos ahora **la función parte entera** como: $[x] : R \to R \quad / \quad [x] = z$

$\mathrm{Im}[x] = Z$

Gráficamente:



FUNCIÓN MANTISA

- **Definición:** Definimos la función mantisa ,la cual denotamos mant (x) ,según la función parte entera y de la siguiente manera :

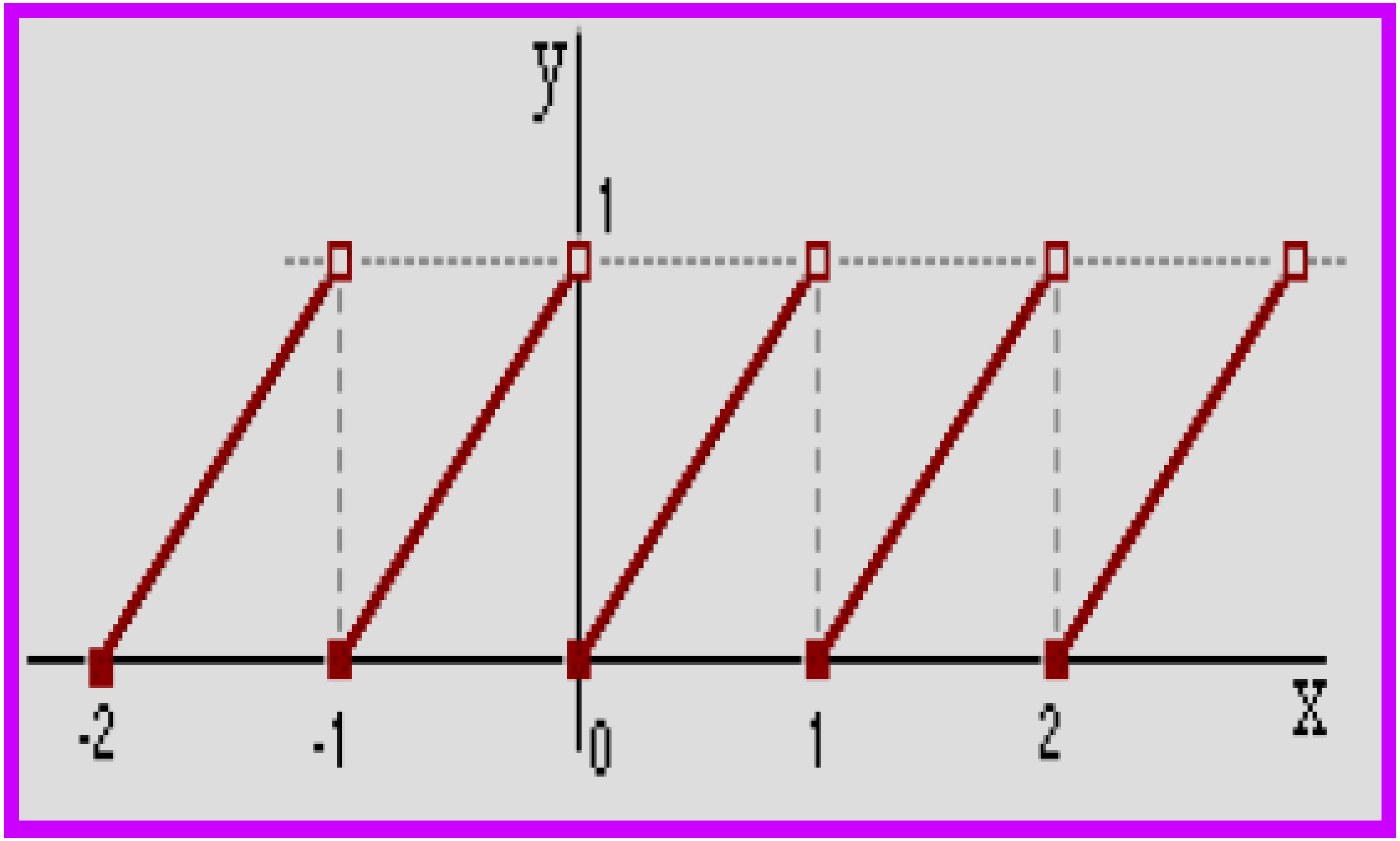
$$\text{mant}(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R} \, / \, \text{mant}(x) = x - [x]$$

Ejemplos

mant(2.85)=2.85-2=0.85
mant(-1.45)=-1.45-(-2)=2-1.45=0.55

Im mant(x) = [0,1)

GRÁFICAMENTE



Función de Dirichlet

- **Definición:** Se define esta función de la siguiente forma:

$$f: R \to R : f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in Q \\ 0 \text{ si } x \in I \end{cases}$$

Nota: Q es el conjunto de números racionales e I es el conjunto de irracionales.

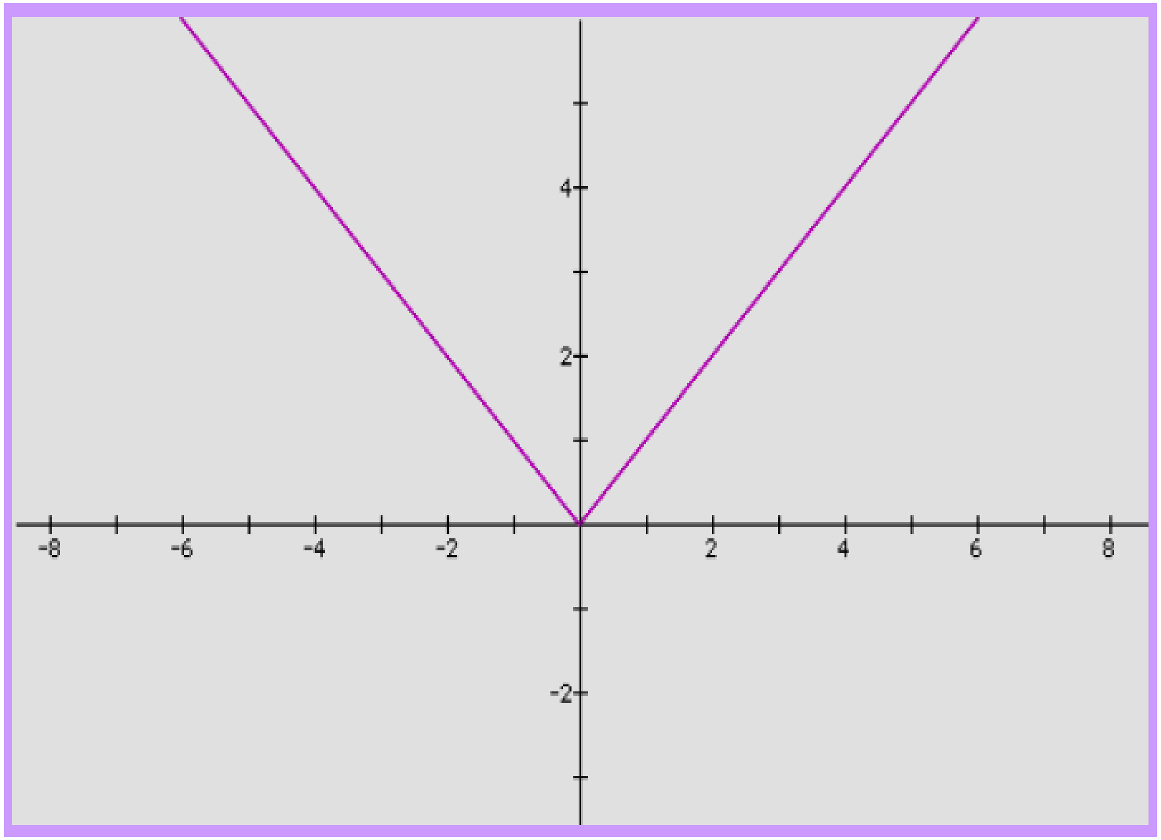
FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

SE DEFINE COMO:

$$f: R \rightarrow R \ \text{ tal que } f(x) = |x|$$

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

GRÁFICAMENTE



En este caso $D(f)=R$ y su $Im(f)=[0,+\infty)$

EJERCITACIÓN

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \text{ si } & -1\leq x\leq 1 \\ -x \text{ si } & x>1 \end{cases}$$

tal que $f\colon [-1,+\infty)\rightarrow R$

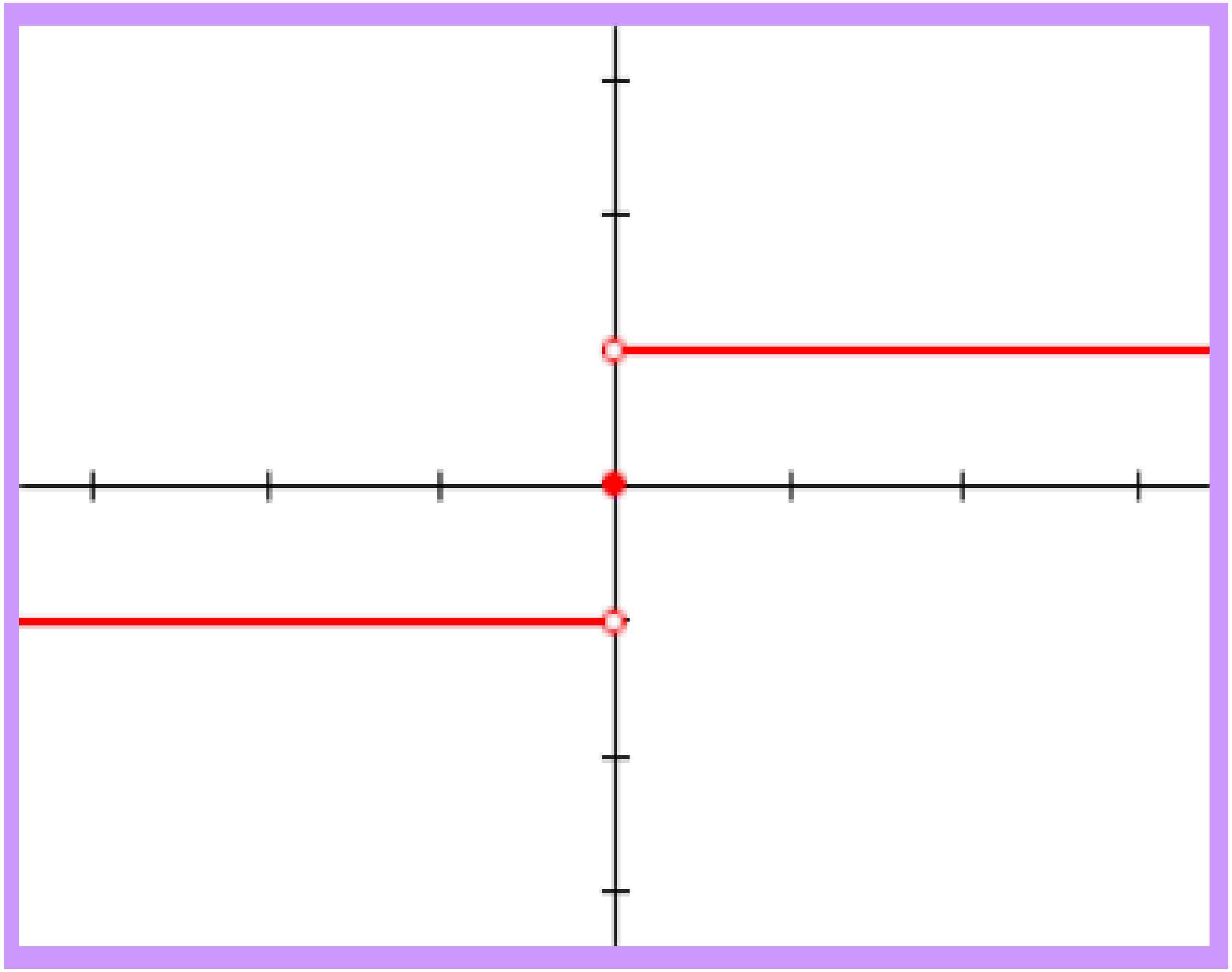
FUNCIÓN SIGNO

- **Definición:**

$$f: R \rightarrow R : f(x) = \begin{cases} 1 \quad si \ x > 0 \\ 0 \quad si \ x = 0 \\ -1 \quad si \ x < 0 \end{cases}$$

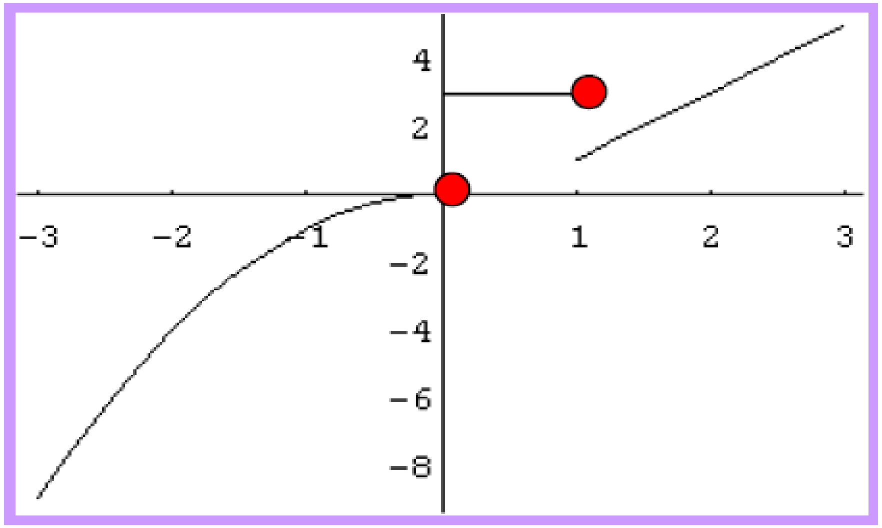
su dominio de definición es R y su conjunto imagen {-1;0;1}.

GRÁFICAMENTE



OTRO EJEMPLO DE FUNCIÓN POR PARTES

Sea f: $R \to R$ tal que $f(x) = \begin{cases} -x^2 \quad si \quad x \le 0 \\ 3 si \quad 0 < x \le 1 \\ 2x - 1 \quad si \quad x > 1 \end{cases}$



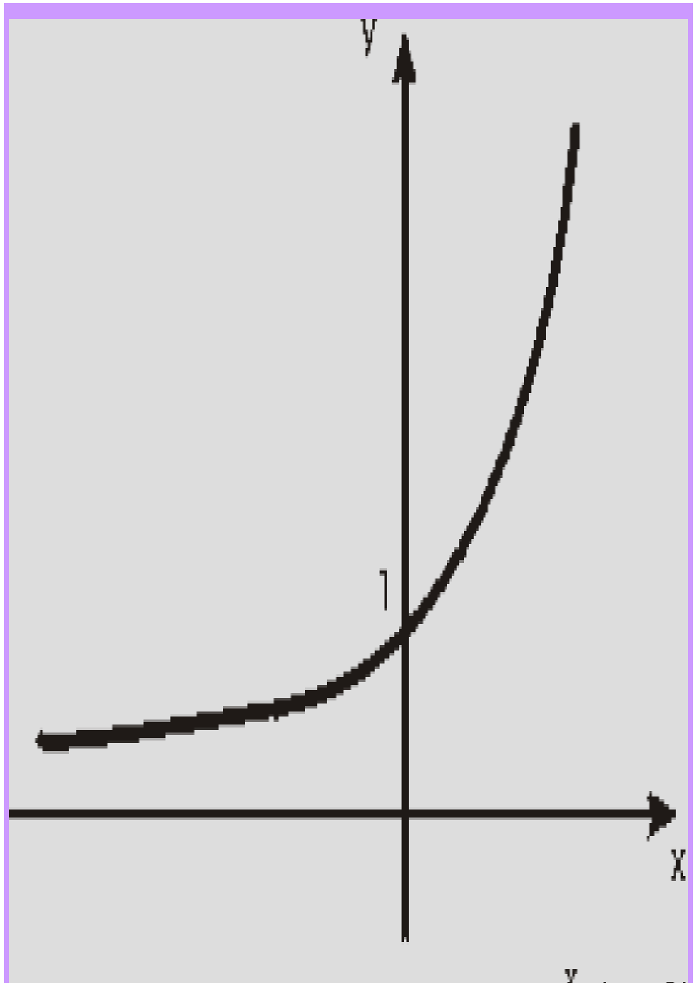
FUNCIÓN EXPONENCIAL

- **Definición:** Se llama función exponencial de base a, siendo a un número real positivo y distinto de 1, a la función:

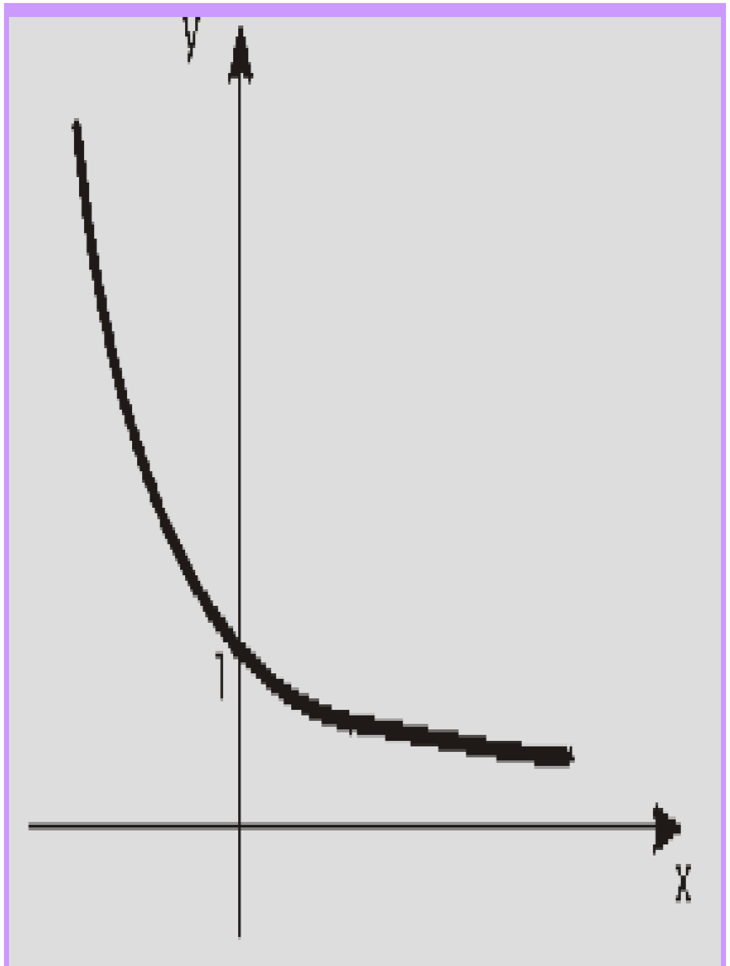
f: R→R tal que f(x)=a ^{x} donde $a \in R^{+} \wedge a \neq 1$

Nota: cuando decimos **a** número real positivo queremos decir que a $\in (0,+\infty)$ el cero no es real positivo.

Esta función se escribe también como f(x) = exp $_{a}$ x, se lee «**exponencial en base *a* de *x***».



Funciones exponenciales: $f(x)=a^x$ $(a>1)$



Funciones exponenciales: $f(x)=a^x$ $(0<a<1)$

FUNCIONES LÓGARITMICAS

- **Definición:** Cuando definimos logaritmo de un número lo definimos como: Dado un número real a positivo y distinto de 1, ($a > 0$; $a \neq 0$; $a \neq 1$), y un número b positivo ($b > 0$; $b \neq 0$), se llama logaritmo en base a de b al exponente x al que hay que elevar dicha base para obtener el número b

Para indicar que x es el logaritmo en base a de b se escribe:

$$\log_a b = x$$

y se lee **«logaritmo en base a de b es igual a x».**

Por lo tanto, $\log_a b = x$ (notación logarítmica) equivale a decir que $a^x = b$ (notación exponencial).

Notación logarítmica	Notación exponencial
$\log_2 8=3$	$2^3=8$
$\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$
$\log_7 7^3 = 3$	$7^3=7^3$

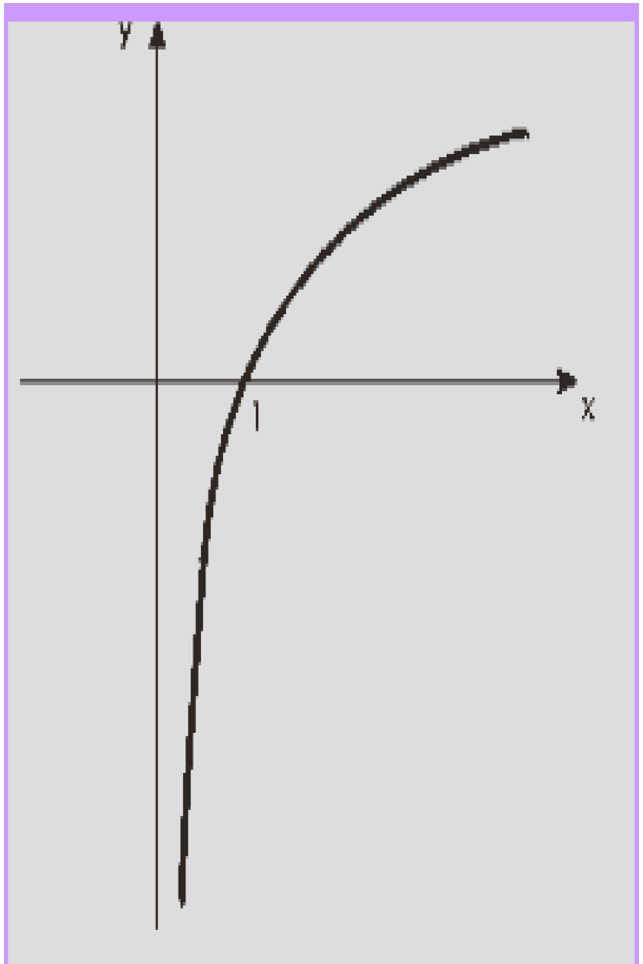
Definimos ahora la función logaritmo como

$$Log: R^{+} \rightarrow R \;/\; \log(x) = y \leftrightarrow 10^{y} = x$$

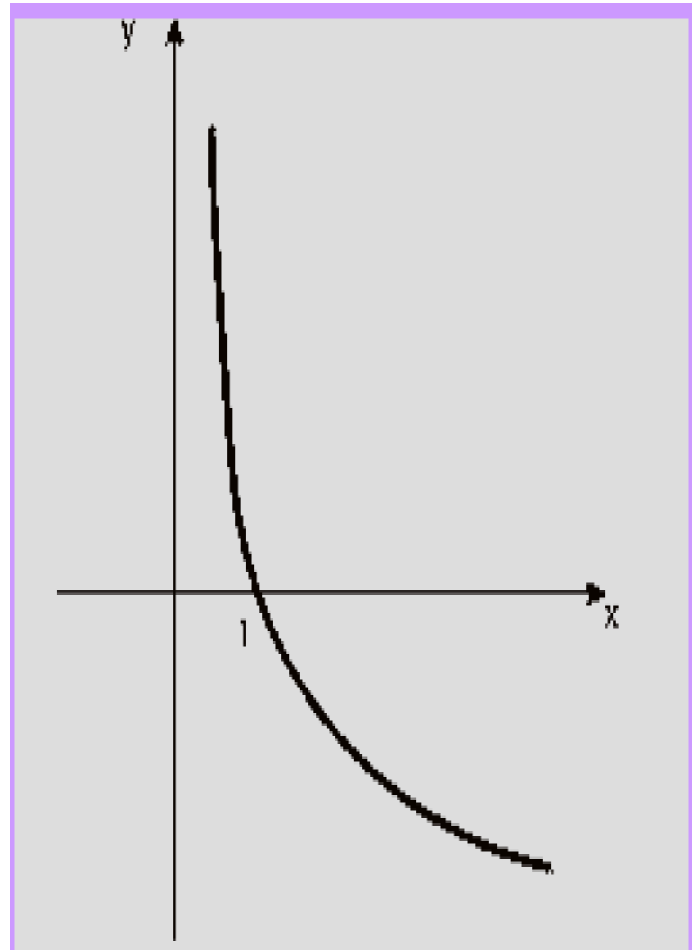
Nota: 1. Aclaramos que R^{+} son los reales positivos sin el cero

2. Cuando $a = \mathbf{10}$ los logaritmos se denominan decimales, mientras que si su base es **e** se denominan logaritmos naturales o neperianos.

GRÁFICAMENTE

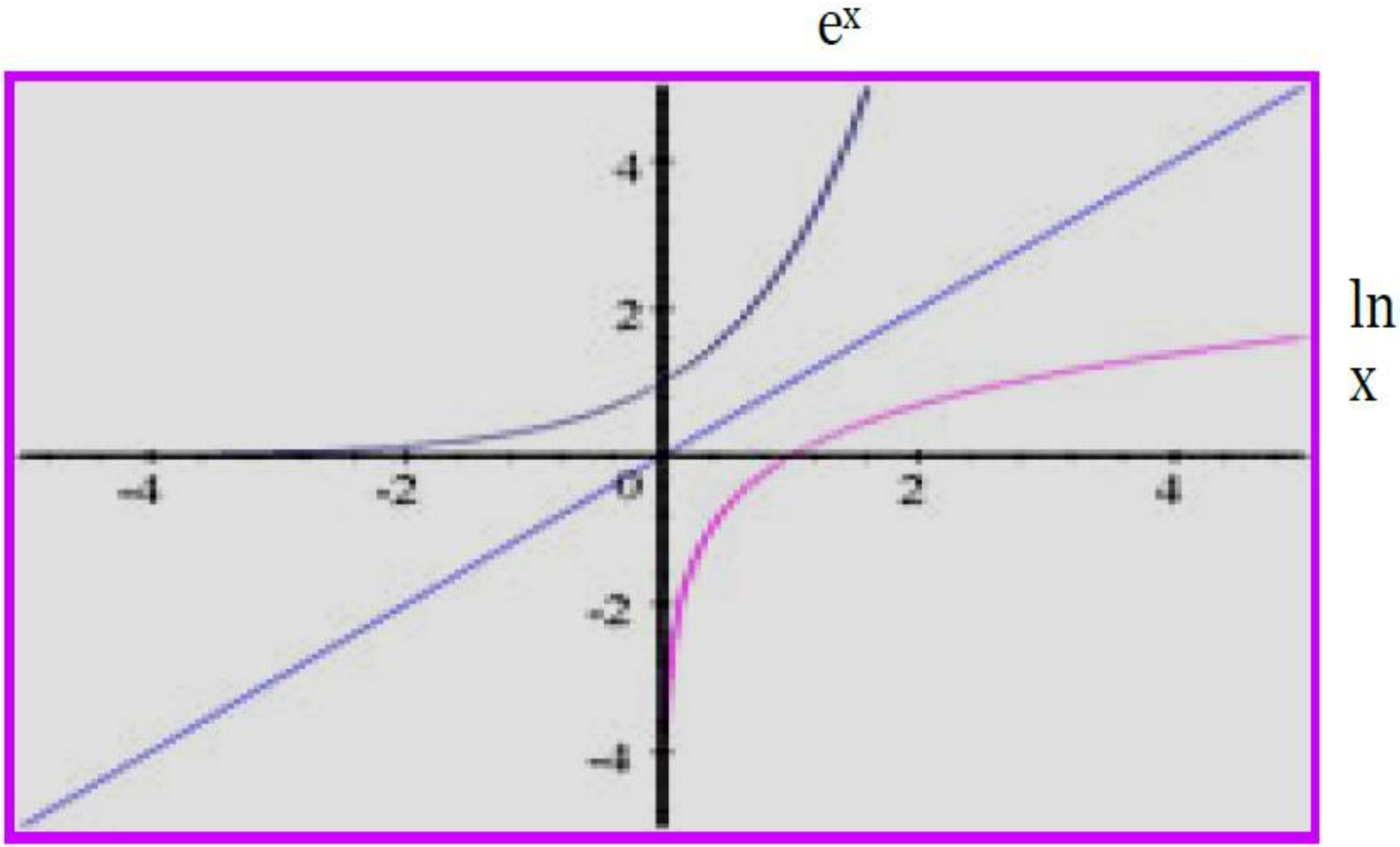


Funciones logarítmicas: $f(x)=\log_a x \quad (a>1)$



Funciones logarítmicas: $f(x)=\log_a x \quad (0<a<1)$

Hacemos una comparación entre los gráficos de e^x y ln x. Podemos observar que son simetricos respecto de la recta y=x



FUNCIONES RACIONALES

Una función racional se la define como un cociente de dos polinomios, $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

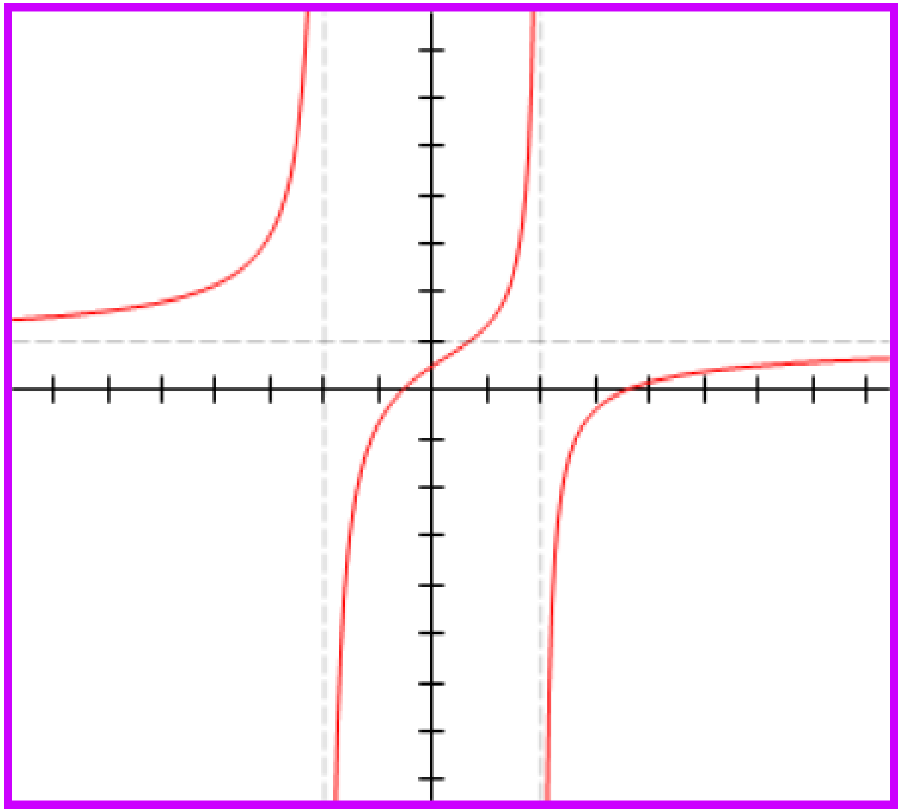
donde $Q(x) \neq 0$

El dominio de esta funciones esta dado por todos los reales donde Q(x) es distinto de cero.

Su gráfica depende de la definición de la función. Tienen asíntotas verticales, horizontales o ambas

EJEMPLO

1- f: $R - \left\{-2,\ 2\right\} \rightarrow R$ tal que : $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4}$



Dentro de las funciones racionales están las llamadas funciones homográficas

f: D$\to R$ tal que f(x)= $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ con a,b,c,d $\in R$ y además c$\neq 0$ y ad-cb$\neq 0$

veamos que pasa si c=0

f(x)= $\dfrac{ax+b}{0x+d} = \dfrac{ax+b}{d} = \dfrac{a}{d}x + \dfrac{b}{d}$ es una función lineal

Si no se exige esto, sucedería que la función lineal sería un caso particular de función racional para el caso de c=0.

La segunda condición que se exige en la definición de este tipo función racional es que a.d -b.c $\neq$ 0.

si fuera a.d - b.c = 0.

Sea f(x)= $\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{a(x+\frac{b}{a})}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}$ si ad-bc=0 entonces ad=bc entonces $\dfrac{b}{a}=\dfrac{d}{c}$ por lo tanto

f(x)= $\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{a\cancel{(x+\frac{b}{a})}}{c\cancel{\left(x+\frac{d}{c}\right)}}=\dfrac{a}{c}$ constante