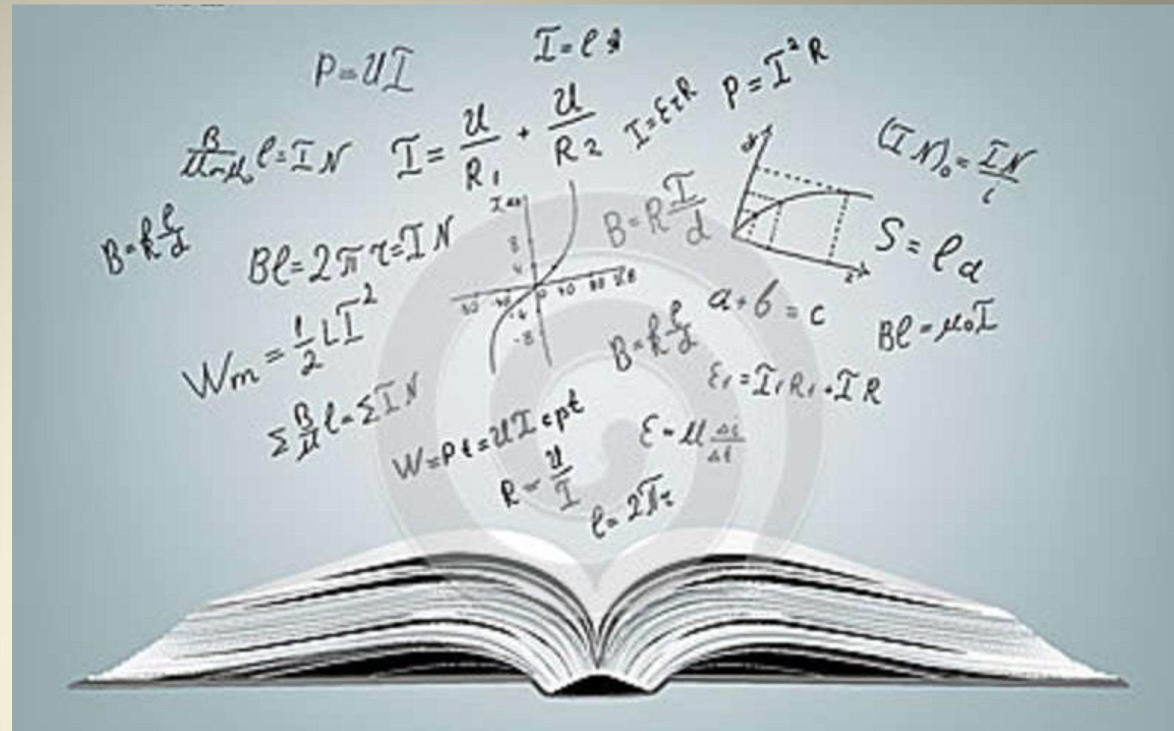
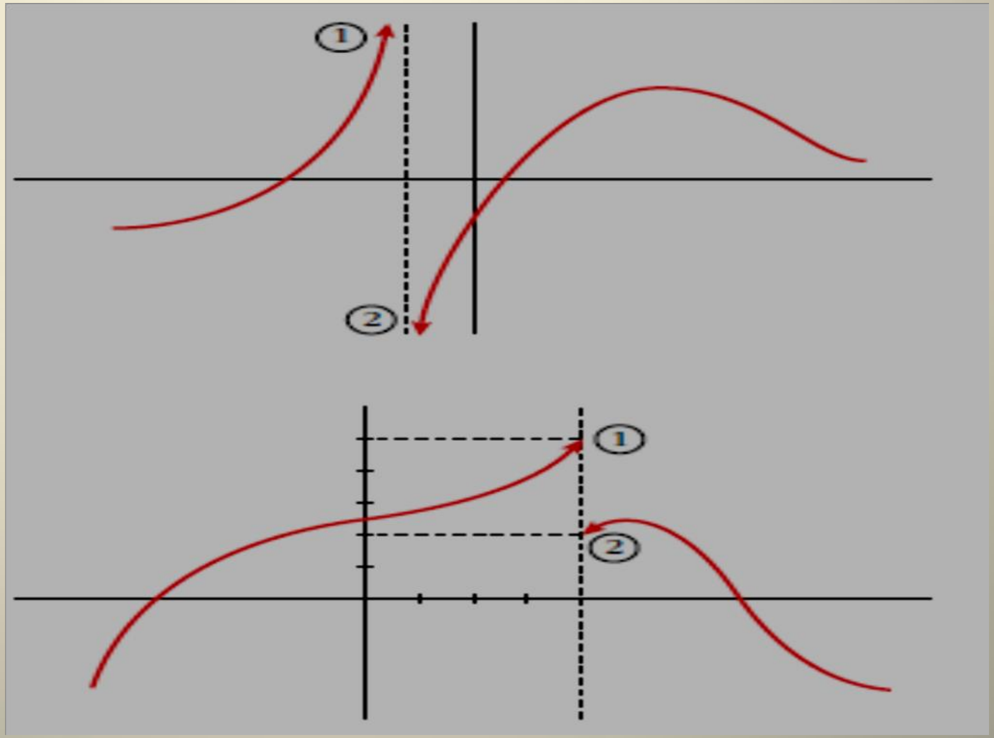


LÍMITE Parte 1

IDEA INTUITIVA

- En nuestro trabajo con funciones nos interesa saber, como esta se comporta en determinado intervalo,



- Si se acerca a determinado valor ,si crece indefinidamente o disminuye indefinidamente o de que manera se está comportando.
- Para esto no basta con averiguar el valor de la función en un determinado punto **"a",** en la mayoría de los casos no se resuelve con esto.
- Algunas veces "**a"** no pertenece ni siquiera al dominio de la función; por lo tanto en ese caso no es posible calcular f(a) pero sí tiene sentido interesarse por el comportamiento de la función en las **cercanías** de a. En los alrededores de "**a"**
- Es decir ,a veces algo no se puede calcular directamente..., muchas veces no sabemos cuál es el valor de la función en un punto; pero si podemos saber cuál debe de ser el resultado si te vas acercando más y más! es decir podemos calcular su valor en los "alrededores" de dicho punto

- Veamos este ejemplo :
- f: R-{ 1 } $\rightarrow$ R tal que : $f(x)= (x^2-1)/(x-1)$
- Y calculemos su valor para x=1: si bien 1 no pertenece al dominio de f aunque queramos calcular este valor lo que obtendríamos sería $(1^2-1)/(1-1) = (1-1)/(1-1) = 0/0$
- Pero 0/0 es un problema! En realidad no podemos saber el valor de 0/0 ya que no se puede dividir por cero , así que tenemos que encontrar otra manera de hacerlo.

Hacemos la siguiente tabla

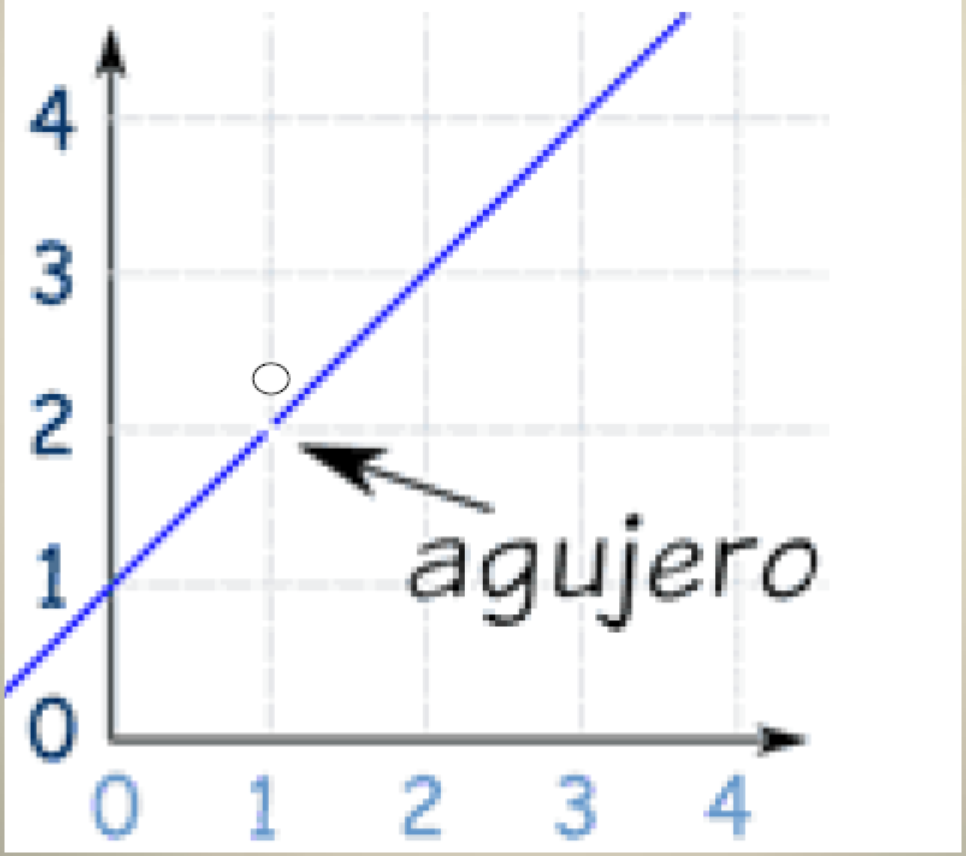
Vemos que cuando x se acerca a 1 (por ambos lados es decir para los menores que 1 y para los mayores que 1) , $(x^2-1)/(x-1)$ se acerca a 2 (esto se llama límite por inspección)

x	0.99	0.999	0.9999	0.99999	→	1	←	1.000001	1.0001	1.001	1.01	1.1
f(x)	1.990	1.9990	1.99990	1.99999		2		2.000001	2.00010	2.00100	2.01	2.1

No podemos decir cuanto vale en 1 pero si muy cerca de 1

Si hacemos el gráfico :**no puedes decir cuánto vale en x=1.**

Pero **sí puedes** decir que cuando te acercas a 1, **el límite es 2.**



En matemáticas esto se traduce en lo siguiente

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Esto no es otra cosa que decir que en las cercanías de 1 la función está tomando valores cercanos a 2

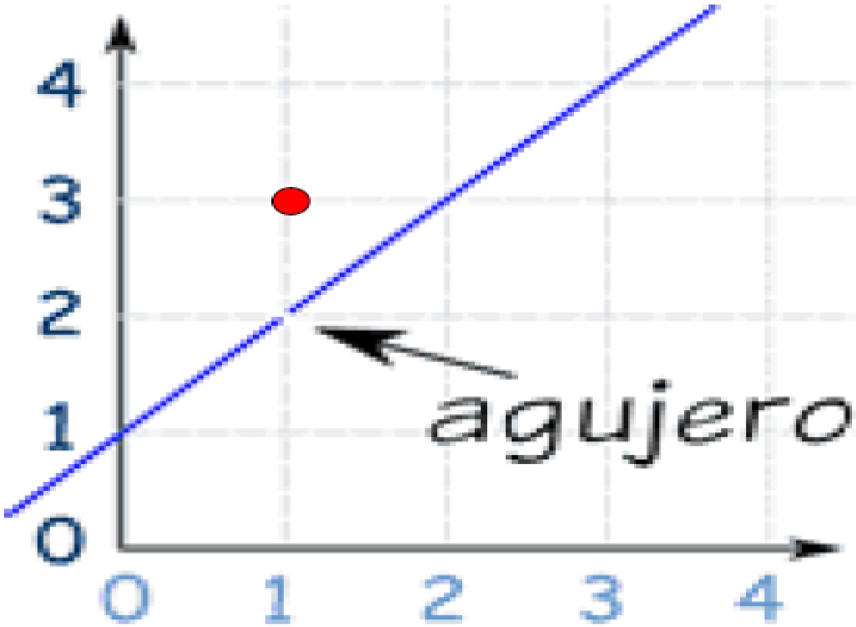
Nota:

- No hay que confundir ***EL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN*** con el ***VALOR DE UNA FUNCIÓN EN PUNTO***, que es el valor que tiene la función justo en ese punto. Mucho cuidado porque pueden o no coincidir como en el caso precedente en uno f(1) no existe

Veamos el siguiente ejemplo

$$f: R \to R \text{ tal que}: f(x) = \begin{cases} (x2-1)/(x-1) \text{ si } x \neq 1 \\ f(x) = 3 \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

Su gráfico sería

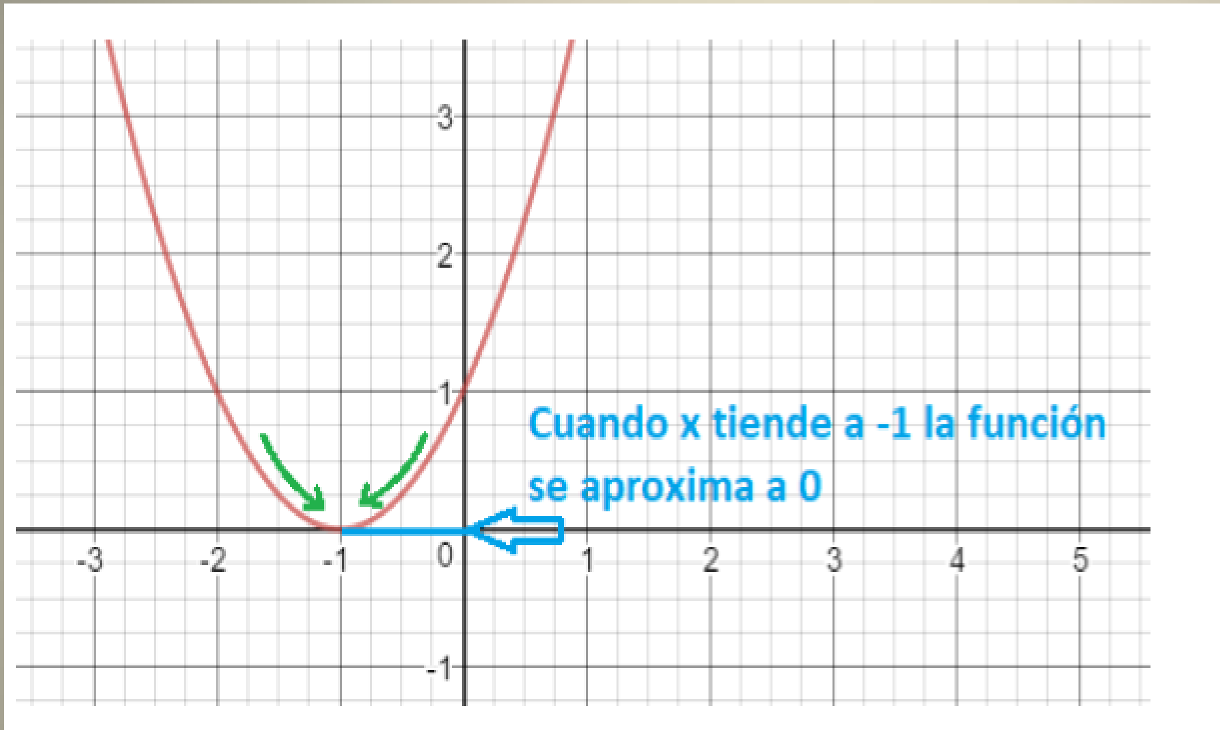


En este caso volvemos a hacer lo mismo y obtenemos que en las cercanías de 1 la función toma valores cercanos a 2 pero f(1) =3

en este caso expresamos $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$ y f(1)=3

- Otro Ejemplo : Sea f: R→R : $f(x)= x^2+2x+1$
- Cuando x=-1,2 el valor de la función es: y=0,04
- Cuando x=-1,1, el valor de la función es: y=0,01
- Cuanto mas me acerco a -1 la función toma valores cercanos a 0
- Vamos hacer lo mismo ahora, pero acercándonos al -1 por la derecha.
- Cuando x=-0,7, el valor de la función es: y=0,09
- Cuando x=-0,8, el valor de la función es: y= 0,04
- Cuando x=-0,9, el valor de la función es: y=0,0 1
- En este caso f(-1)=0 -1 pertenece al Df y además coincide con los valores cercanos

Gráficamente



Por tanto, el límite de la función cuando x tiende a -1 es igual a 0:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} x^2+2x+1=0$$

Entonces que es el límite de una función

El **límite** de una función es el valor al que tiende ésta cuando la variable independiente tiende a un valor a ($x \to a$) y se escribe:

$$L = \lim_{x \to a} f(x)$$

En el caso de existir este límite, éste es **único** (primera de las propiedades de los límites).

Otra forma para decir lo mismo:

El **límite de una función** ***en un punto*** es obtener el valor al que se va aproximando esa función cuando x (valores del dominio de f) tiende a ese punto "a", pero sin llegar a ese punto

esto se expresa :

$$L = \lim_{x \to a} f(x)$$

Nota:

RECORDAR . No necesariamente se cumple que:

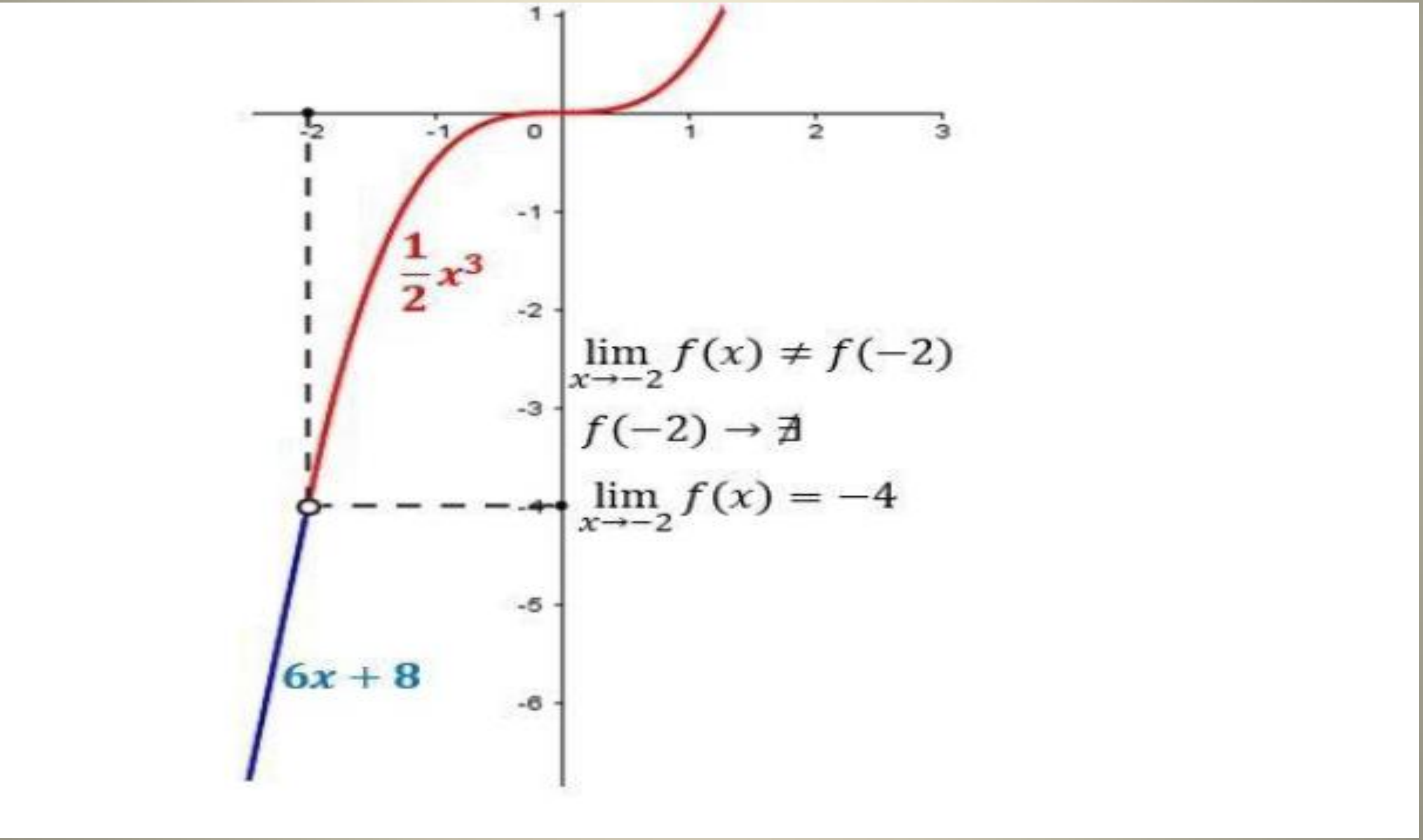
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^3 & si\ x > -2 \\ 6x + 8 & si\ x < -2 \end{cases}$$

En ella existe el límite para $x \to -2$, pero no existe $f(-2)$:

Gráficamente



Definición de límite

Idea intuitiva de límite de una función en un punto

Sea f:A→B / f(x)=y una función. Sea "a" un punto que puede o no pertenecer al conjunto A (dominio de f). El límite de una función f(x) en un punto "a" es el valor al que toma la función en los puntos muy próximos a "a"

Definición Formal de Límite

Hemos empleado en este apunte expresiones del tipo "acercarse a", "crecer indefinidamente", etc. Estas expresiones son un tanto vagas e imprecisas matemáticamente hablando, vamos a intentar dar una definición rigurosa de límite en sus distintas variantes. Para ello partiremos de situaciones concretas qué entendemos por estar cerca? ¿a partir de qué momento se considera que dos números están cerca? Para cuantificar este acercamiento utilizaremos la siguiente notación:

Decir cerca o lejos da idea de distancia por lo tanto recordemos ciertas nociones:

1.$d(a, b) = b - a = d(b, a) = a - b$ por lo tanto $d(a, b) = |b - a|$

como consecuencia de esto la $d(x, a) = |x - a|$

2. Idem para f(x) y b

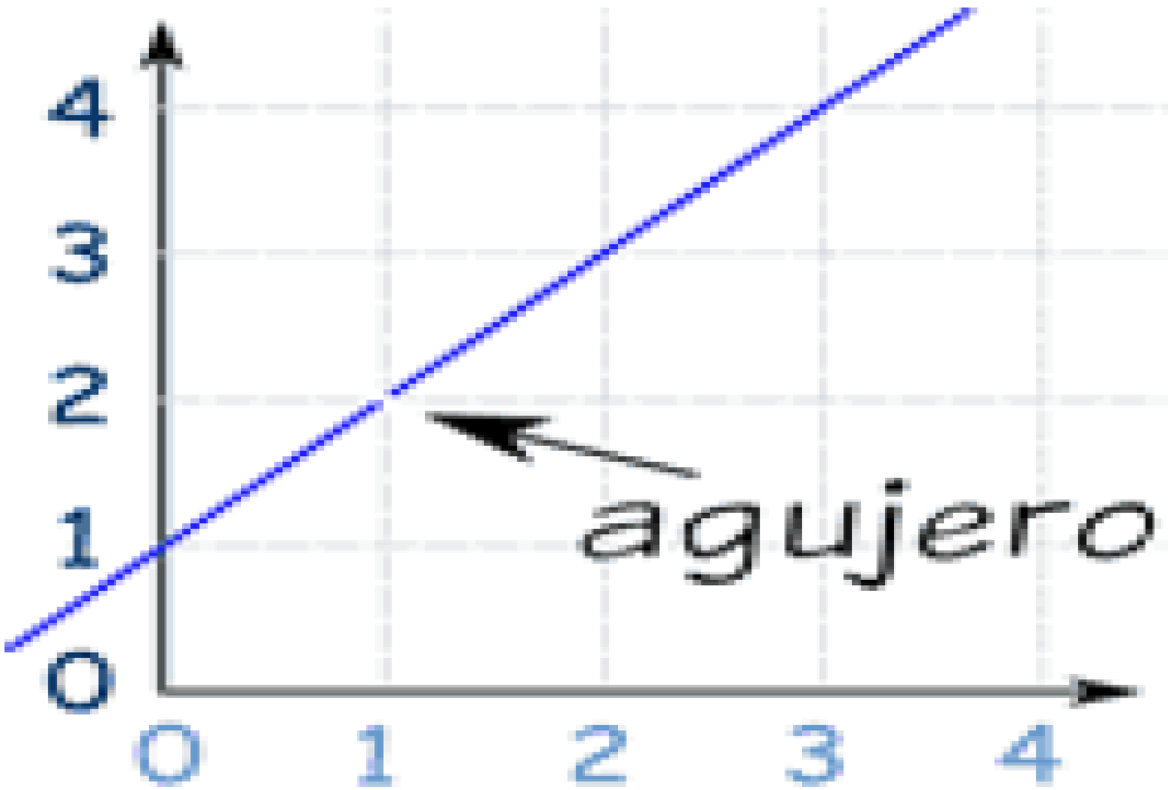
3. Recordemos que la distancia es siempre un numero real positivo o cero por Ej. cuando x = a

Tradicionalmente suelen emplearse letras griegas minúsculas para designar distancias "pequeñas". En concreto suelen usarse las letras ∂ (delta) para representar la distancia entre x y a y ε (epsilon) para representar la distancia entre f(x) y b.

Del mismo modo suelen emplearse letras mayúsculas latinas intermedias (tales como, K, L, etc.) para representar números "muy grandes" en valor absoluto.

Por lo tanto , |x-a| designa la distancia entre x y a
|f(x)-b| designa la distancia entre f(x) y b.

Ejemplo



Si 2 es el límite de f(x) cuando x tiende al punto 1, se cumple que sea cual sea el valor del número positivo Ɛ, es posible encontrar otro número positivo δ, tal que si la distancia entre x y 1 es menor que δ, entonces la distancia entre f(x) y 2 es menor que Ɛ.

se admite cualquier distancia como cercanía: decir *"f(x) está cerca de 2"* equivale a decir *"Sea Ɛ>0 cualquiera y |f(x)-b|<Ɛ".*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ /\ \left|x-a\right|<\delta \Rightarrow \left|f(x)-b\right|<\varepsilon$$

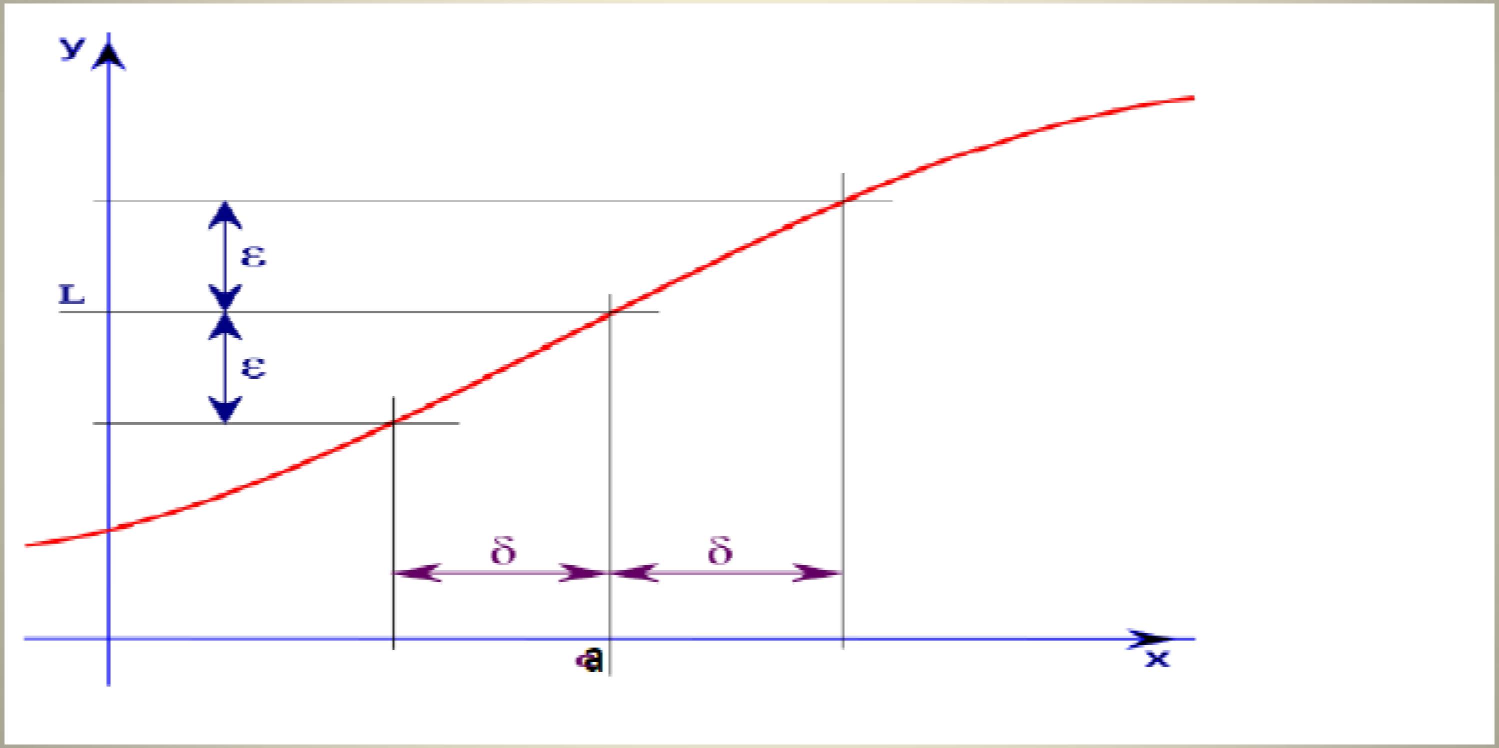
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2 \quad \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta_\varepsilon>0/|x-1|<\partial \Rightarrow |f(x)-2|<\varepsilon$$

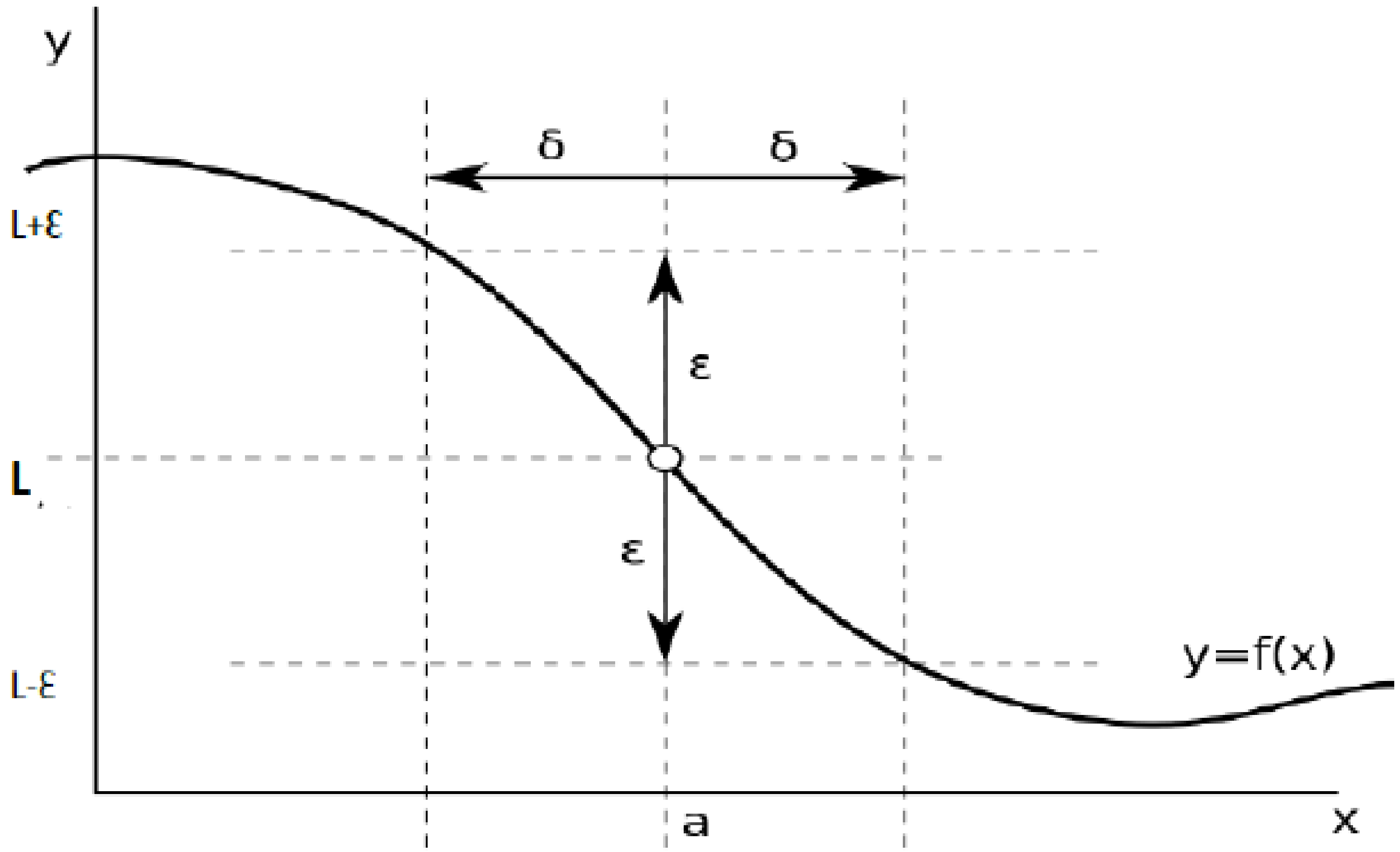
- https://www.youtube.com/watch?v=pYVVPqphPS0

- En términos generales :

- Si **b** es el límite de f(x) cuando **x tiende al punto a**, se cumple que sea cual sea el valor del número positivo **Ɛ**, es posible encontrar otro número positivo **δ**, tal que si la distancia entre **x y a es menor que δ**, entonces la distancia **entre f(x) y b es menor que Ɛ.**
- se admite cualquier distancia como cercanía: decir "f(x) está cerca de b" equivale a decir "Sea **Ɛ**>0 cualquiera y |f(x)-b|<**Ɛ**".
- Ahora bien, ¿cuando queremos que f(x) se acerque a b? Pues cuando x se acerque al punto a. Considerar que x y a estén cerca o lejos dependerá de qué hayamos considerado como cercanía en la distancia entre f(x) y b.
- El número que determina esa cercanía es el número arbitrario **Ɛ**, por lo que para cada valor que asignemos a este número deberá existir otro **δ**, que determine la cercanía entre x y a.
- Por lo tanto la frase "si la distancia entre x y a es menor que **δ**, entonces la distancia entre f(x) y b es menor que **Ɛ**". equivale a la frase "cuando x se acerca al punto a, f(x) se acerca al punto b".

Esto nos lleva a la siguiente a la siguiente definición de ***<u>LÍMITE FINITO</u>***.




y
δ
δ
L+ε
ε
L
ε
y=f(x)
L-ε
a
x

Definición

Diremos que b es el límite de la función f(x) cuando x tiende al punto a, cuando sea cual sea el valor del número positivo Ɛ, es posible encontrar otro número positivo δ, tal que si la distancia entre x y a es menor que δ, entonces la distancia entre f(x) y b es menor que Ɛ.

Simbólicamente esta definición se representa así:

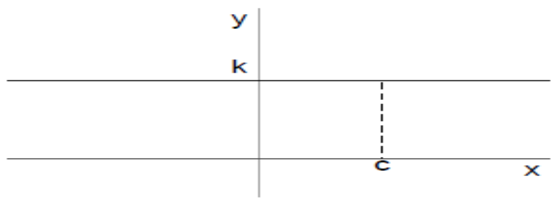
$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ / \ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

- LÍMITES POR SUSTITUCIÓN DIRECTA:

Para las siguientes funciones y a partir del análisis de su comportamiento, admitimos que el límite de la función para $x \to c$ se obtiene por sustitución directa. Es decir: $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

Función constante.

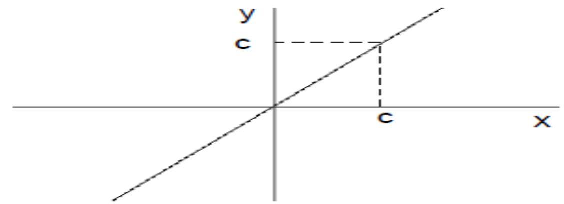
$f(x)=k$



$\lim_{x\to c} k = k$

Función identidad

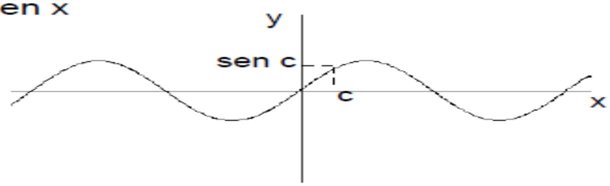
$f(x)=x$



$\lim_{x\to c} x = c$

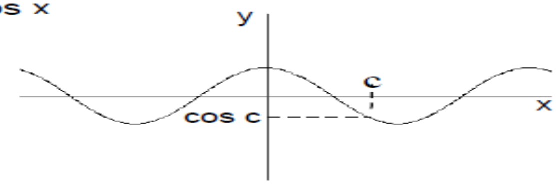
Función seno

$f(x)=\text{sen } x$



Función coseno

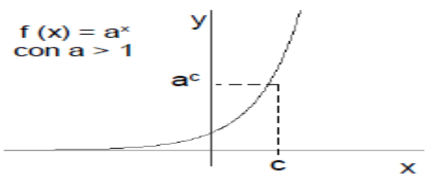
$f(x)=\cos x$



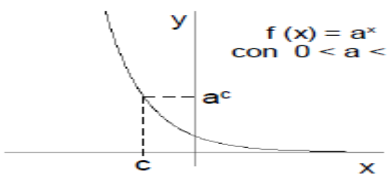
$\lim_{x\to c} \cos x = \cos c$

Función exponencial

$f(x) = a^x$ con $a > 1$



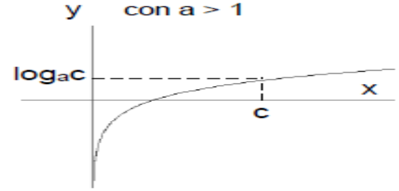
$f(x) = a^x$ con $0 < a < 1$



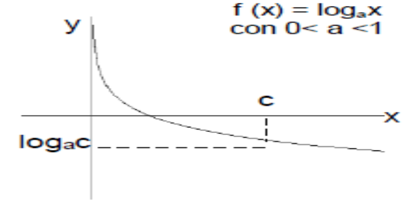
$\lim_{x\to c} a^x = a^c$

Función logarítmica

$f(x) = \log_a x$ con $a > 1$

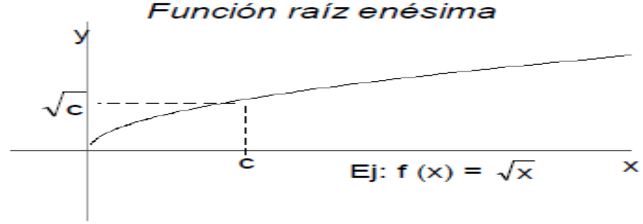


$f(x) = \log_a x$ con $0 < a < 1$



$\lim_{x\to c} \log_a x = \log_a c \ (c>0)$

Función raíz enésima

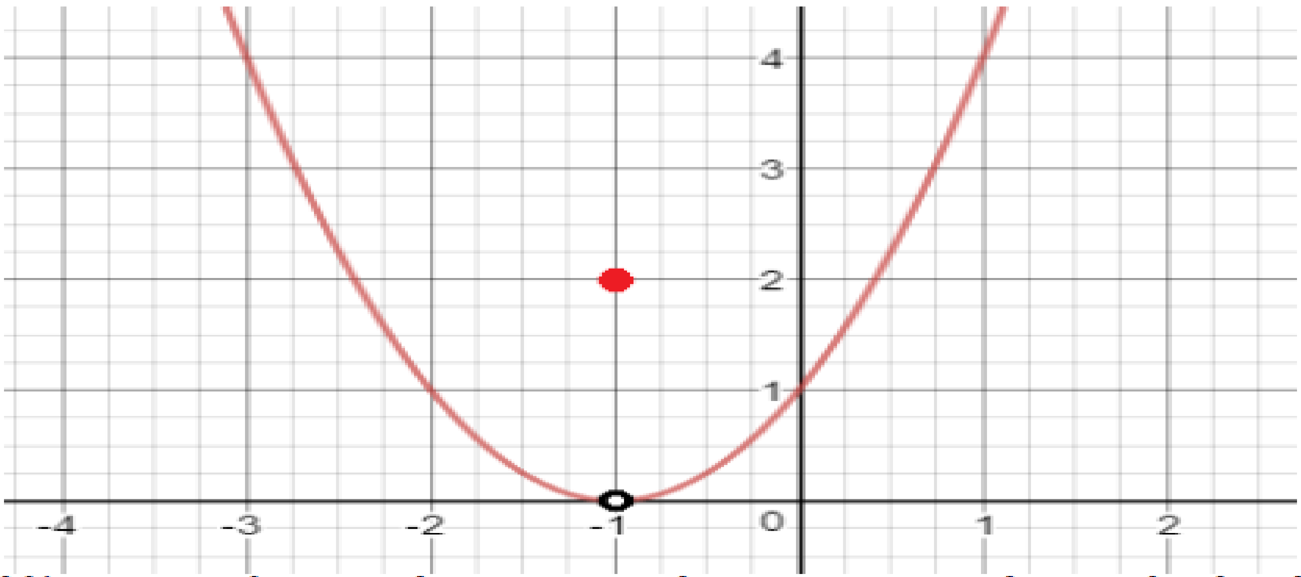


$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c} \quad (\forall n \in N - \{1\},\ \forall c \text{ si } n \text{ es impar } \wedge \forall c > 0 \text{ si } n \text{ es par})$

Cómo resolver el límite de una función

En **funciones que no son continuas** hay puntos donde el límite tenga un valor y sin embargo, la función en ese punto no exista o el valor de la función tenga otro valor distinto.

Por ejemplo, en la siguiente función:



El límite cuando x tiende a -1 es igual a 0, pero sin embargo el valor de la función en x=-1 es igual a 2:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = 0$$

$$f(-1) = 2$$

O el caso de esta otra función: f : R-{1} →R / f(x)= $\frac{x^2-1}{x-1}$

Vamos a ver qué pasa si calculamos el límite de la función cuando x tiende a 1 usando método por sustitución

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{0}{0}$$

Sustituimos la x por el 1:

$$\frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

Y no llegamos a ninguna solución, ya que dividir por 0 algebraicamente es imposible y en análisis cero sobre cero es una indeterminación.

- Pero como ya hemos visto tanto por inspección (haciendo una tabla) o gráficamente podemos ver que el lím cuando x tiende a 1 es 2

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \mathbf{2}$$

LÍMITES LATERALES

- Hemos visto que el límite de una función es el valor al que se va aproximando esa función cuando x tiende a un determinado punto, tanto por la izquierda como por la derecha. Lo hemos visto tanto por tablas (inspección como gráficamente)
- Sin embargo, se puede calcular el límite de una función cuando nos aproximamos **sólo por la izquierda** o cuando lo hacemos **sólo por la derecha**. Son los llamados **límites laterales.**
- El valor de los límites laterales de una función puede coincidir o no.
- Para que exista el límite de una función en un punto, el valor de los límites laterales debe coincidir y ése será el valor del límite en ese punto.
- La condición necesaria y suficiente para que exista el límite es que los límites laterales existan y que estos sean iguales:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$$

El límite lateral izquierdo de f (x) cuando x tiende a c es el número L_1, si los valores de f(x) se aproximan a L_1 tanto como se desee cuando x se acerca suficientemente a c mediante valores menores que c. Lo representamos: $\lim_{x\to c^-} f(x) = L_1$

El límite lateral derecho de f (x) cuando x tiende a c es el número L_2, si los valores de f(x) se aproximan a L_2 tanto como se desee cuando x se acerca suficientemente a c mediante valores mayores que c. Lo representamos: $\lim_{x\to c^+} f(x)= L_2$

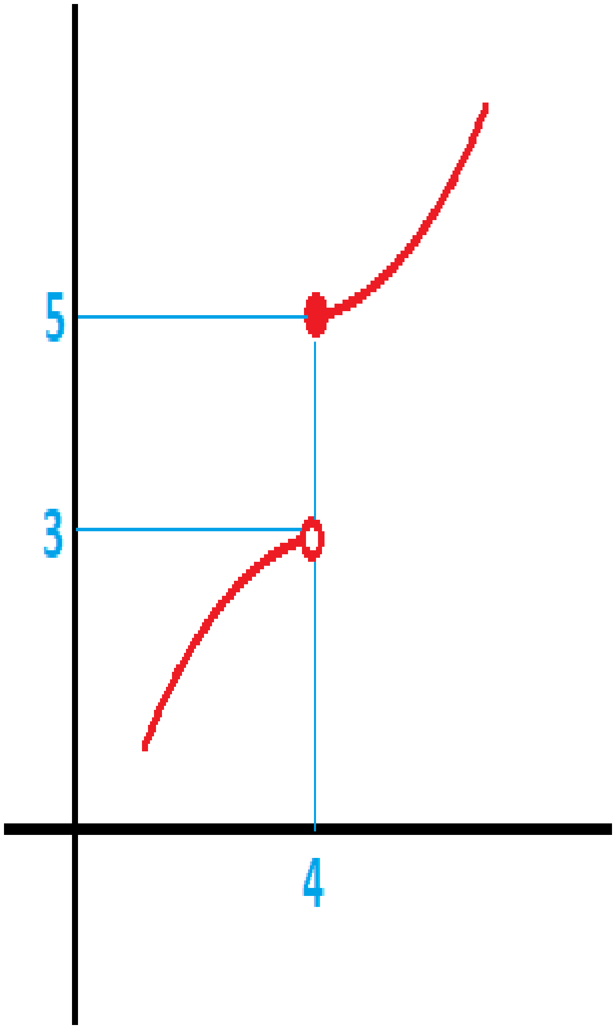
Teorema de los limites laterales

Sea f:A →B / f(x)=y el límite de f cuando x tiende a es L si y solo si

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = L$$

Si los límites laterales no coinciden, entonces el límite no existe.

Ejemplo



Vamos a calcular cuánto vale el límite de la función cuando x tiende a 4.

Si nos acercamos a x=4 por la izquierda, el límite es igual a 3:

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = 3$$

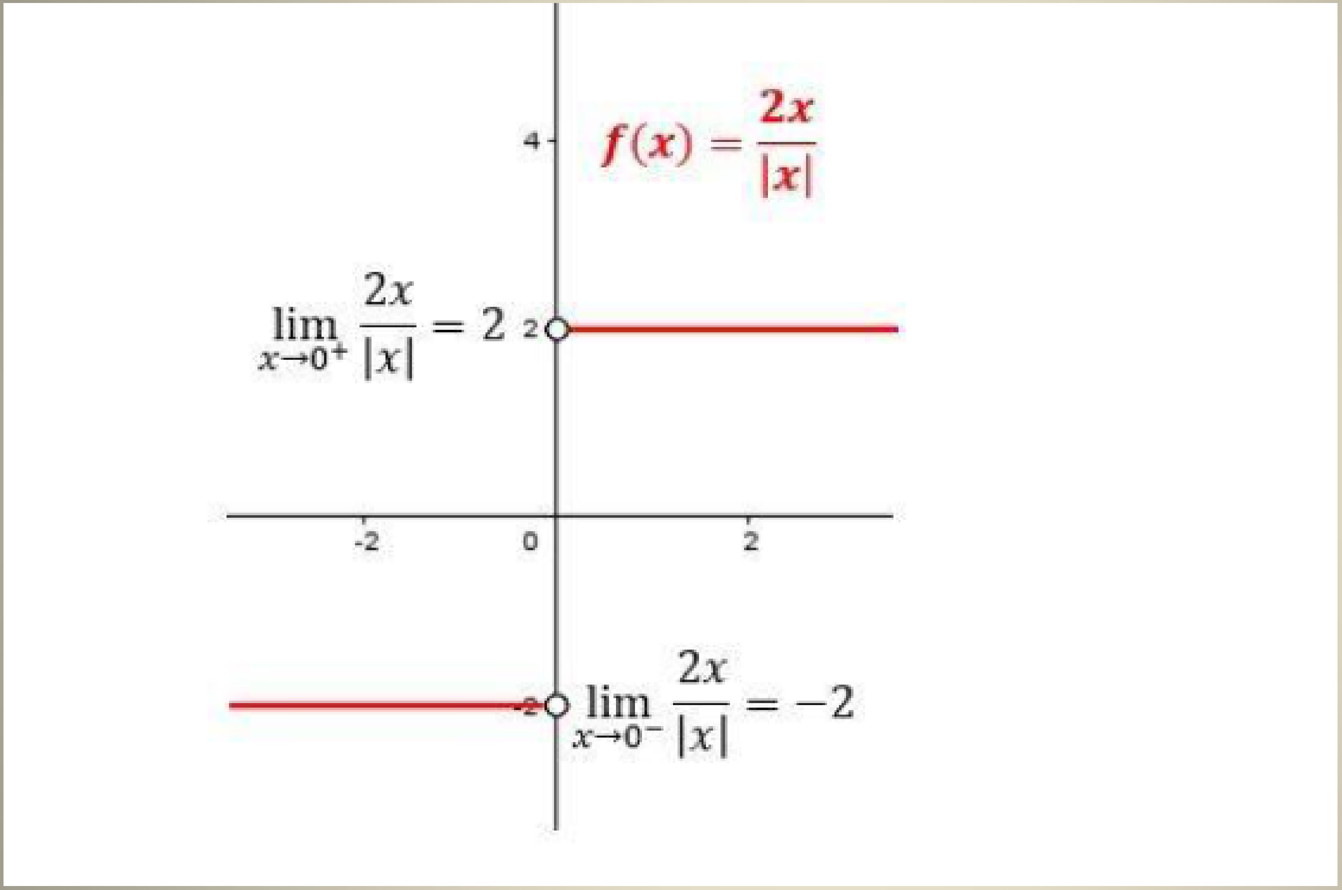
Cuando el límite lateral es **por la izquierda**, se le añade **como exponente un signo menos** al valor de x al que tiende el límite.

Si nos acercamos a x=4 por la derecha, el límite es igual a 5:

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = 5$$

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) \neq \lim_{x \to 4^+} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 4} f(x)$$

Otro Ejemplo



cuando $x \to 0$. Los límites laterales no son iguales y, por lo tanto, este límite **no existe**.

En general

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x) \rightarrow \nexists \lim_{x\to a} f(x)$$

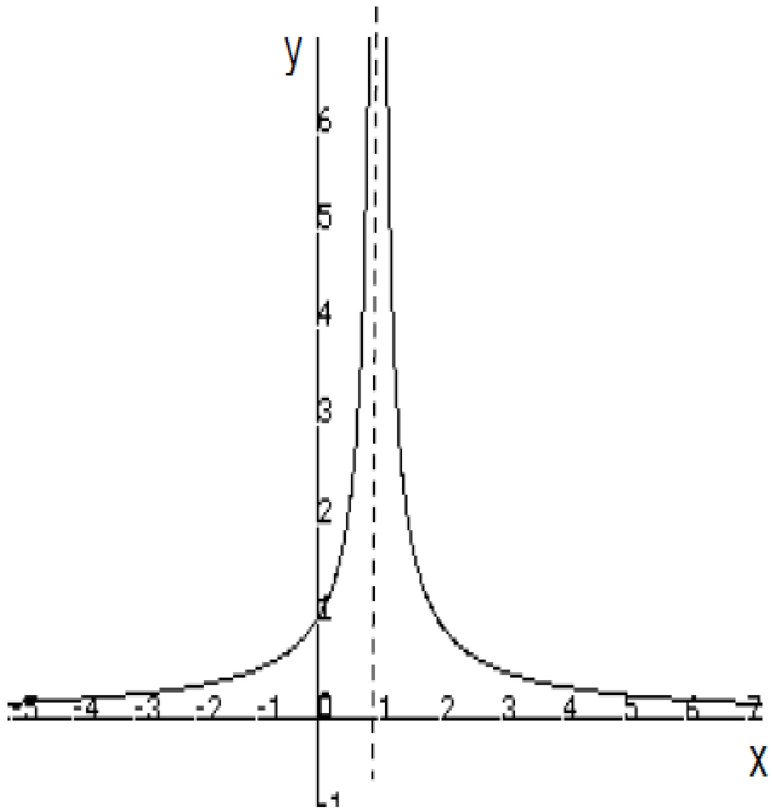
El límite de una función en un punto existe si y solo sí los dos límites laterales existen y son iguales.

Observación:

El límite finito de una función en un punto puede existir o no, independientemente de que la función esté o no definida en el punto.

Sea $f_5(x) = \left| \frac{1}{x-1} \right|$

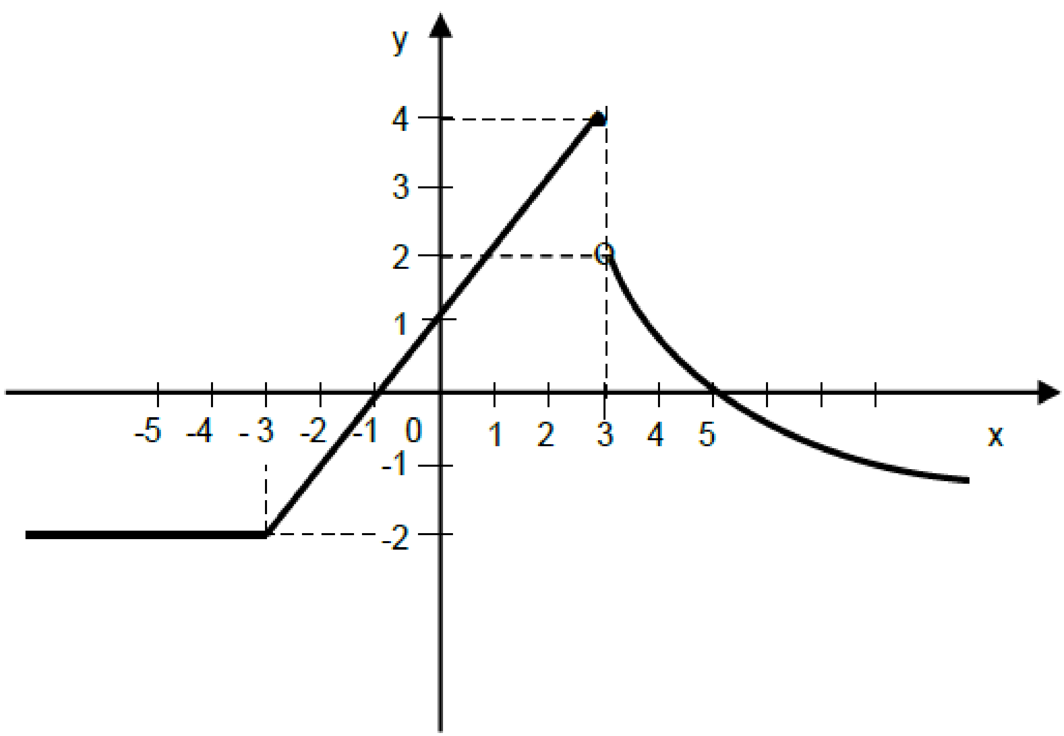
$$Dom_{f_5} = R - \{1\}$$



Para esta función, a medida que consideramos valores próximos a 1 por derecha o izquierda las imágenes no se acercan a ningún valor determinado, sino que crecen sin tope. Decimos entonces que la función tiene en c=1 un ***comportamiento no acotado*** y, por supuesto, no tiene límite finito. Este comportamiento será objeto de estudio más adelante.

Ejercicio

Determina el valor de cada límite indicado :



a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$

b) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) =$

c) $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) =$

d) $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) =$

e) $\lim\limits_{x \to -3} f(x) =$

f) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) =$

g) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) =$

h) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) =$

i) $\lim\limits_{x \to 5} f(x) =$

j) $\lim\limits_{x \to -4} f(x) =$