RELACIONES DEFINIDAS EN UN CONJUNTO

1. Introducción. Relaciones binarias.

1.1. Definición de relación binaria

Dados dos conjuntos no vacíos A y B, una relación binaria definida entre los mismos es un subconjunto de A x B, caracterizado por alguna propiedad común a sus elementos

$$\boxed{R = \{(x, y) / (x, y) \in A \times B \ \wedge p(x, y)\} \subseteq A \times B}$$

Al ser una relación un subconjunto de A x B, es en particular un conjunto, entonces vale todo lo visto sobre conjuntos: definición por extensión o comprensión, operaciones de conjuntos, etc..

Algunos ejemplos:

a) si A = {x / x es vocal}, B ={día, sol, perro, sarampión, esperanza, abuelito, murciélago, mls(golosina en checo)} y la relación viene definida en la forma:

x R y sii x es letra de y

la relación definida por extensión quedaría:

R = {(a, día), (a, sarampión), (a, esperanza), (a, abuelito), (a, murciélago), (e, perro), (e, esperanza), (e, abuelito), (e, murciélago), (i, día), (i, sarampión), (i, abuelito), (i, murciélago), (o, sol), (o, perro), (o, sarampión), (o, abuelito), (o, murciélago), (u, abuelito), (u, murciélago)}

b) si $A = \{x / x \in Z_p \ \wedge \ -4 < x \leq 10\}$, B = Z y la relación viene definida en la forma:

x R y sii y es el cuadrado de x

la relación definida por extensión quedaría:
R = {(- 2, 4), (0, 0), (2, 4), (4, 16), (6, 36), (8, 64), (10, 100)}

c) si A = B = R, y la relación viene definida en la forma:

$x \, R \, y$ *sii* $x. \, y \leq 0$

si bien a la relación no se la puede expresar por extensión, se podrían señalar algunos elementos en la forma R = {(4, -6), (-3, 10), (0, 3), (0, - 9), …}

y se podría graficar en el plano cartesiano.

1.2. Dominio e imagen de una relación binaria:

Si $R \subseteq A \times B$, entonces

$D(R) = \{x \,/\, x \in A \wedge \exists\, y: (y \in B \wedge (x, y) \in R\} \subseteq A$

$I(R) = \{y \,/\, y \in B \wedge \exists\, x: (x \in A \wedge (x, y) \in R\} \subseteq B$

Así en los ejemplos considerados con anterioridad:

a)
$D(R) = A$ e $I(R) = B - \{mls\}$

b)
$D(R) = A$ e $I(R) = \{4, 0, 16, 36, 64, 100\}$

c)
$D(R) = I(R) = R$

1.3. Relación inversa de una relación binaria.

$R^{-1} = \{(y, x) \,/\, (y, x) \in B \times A \wedge (x, y) \in R\} \subseteq B \times A$

Así en los ejemplos considerados con anterioridad:

a) *$x\, R^{-1}\, y$ sii $y\, R\, x$ sii y es letra de x*

y definida por extensión quedaría:

R = {(día, a,), (sarampión, a,), (esperanza, a,), (abuelito, a,), (murciélago, a,), (perro, e,), (esperanza, e,), (abuelito, e,), (murciélago, e,), (día, i,), (sarampión, i,), (abuelito, i,), (murciélago, i,), (sol, o,), (perro, o,), (sarampión, o,), (abuelito, o,), (murciélago, o,), (abuelito, u,), (murciélago, u,)}

b) *$x\, R^{-1}\, y$ sii x es el cuadrado de y*

y definida por extensión quedaría:

$R = \{(4,-2), (0, 0), (4, 2), (16, 4), (36, 6), (64, 8), (100, 10)\}$

c) *$x\, R^{-1}\, y$ sii $y . x \leq 0$*

(observar que en este caso $R = R^{-1}$)

<u>Observaciones</u>:

a) en el caso de que las relaciones se puedan graficar en el plano cartesiano, se podría observar que los gráficos de la relación y su inversa son gráficos simétricos respecto de la recta x = y.

b) por convención se suele indicar (x, y) a los elementos de una relación binaria cualquiera. En el caso particular de la relación inversa, tener en cuenta:

$$(x, y) \in R^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R$$

2. Relaciones definidas en un conjunto

Si una relación R es tal que $R \subseteq A \times A$, se dice que está definida en el conjunto A.

RELACIONES DEFINIDAS EN UN CONJUNTO.

Dada $R \subset A \times A$ con $A \neq \emptyset$

- R es reflexiva sii en A: $\forall x$: $x R x$ (o bien $(x, x) \in R$)
- R es simétrica sii en A: $\forall x$: $\forall y$: $(x R y \Rightarrow y R x)$
- R es antisimétrica sii en A: $\forall x$: $\forall y$: $((x R y \wedge x \neq y) \Rightarrow y \not R x)$
  sii en A: $\forall x$: $\forall y$: $((x R y \wedge y R x) \Rightarrow x = y)$
- R es transitiva sii en A: $\forall x$: $\forall y$: $\forall z$: $((x R y \wedge y R z) \Rightarrow x R z)$
- R es de equivalencia sii R es reflexiva, simétrica y transitiva.
- R es de orden sii R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Cuestiones de notación…

- En A, si $x R y$ y R es de orden se indicará: $x \preccurlyeq y$ se leerá:

"x precede a y".

Si $x \preccurlyeq y$ y $x \neq y$, se puede indicar $x \prec y$ se leerá:

"x precede estrictamente a y"

- En A, si $x R y$ y R es de equivalencia se indicará $x \sim y$ se leerá:

"x es equivalente a y".

Ejemplos:

✓ En Z: $x R y$ sii $x + y < 1$

¿Es reflexiva?

<u>$x R x$</u> sii $x + x < 1$ sii $2x < 1$ sii <u>$x < ½$</u>

Esto querrá decir que <u>no es reflexiva</u> ya que por ejemplo <u>$(3, 3) \notin R$</u>.

(Es decir que: $\exists x$: $x \not R x$)

¿Es simétrica?

En Z: <u>$x R y$</u> $\Leftrightarrow x + y < 1 \Leftrightarrow y + x < 1 \Leftrightarrow$ <u>$y R x$</u>
(definición de R | conmutatividad de la suma | definición de R).

Esto querrá decir que <u>R es simétrica</u>.

¿Es antisimétrica?

En Z: $\underline{x \mathrel{R} y \wedge y \mathrel{R} x} \Leftrightarrow x + y < 1 \wedge y + x < 1$ (definición de R)

$\Leftrightarrow x + y < 1$ (conmutatividad de la suma i edempotencia)

$\nRightarrow x = y$

Esto querrá decir que <u>R no es antisimétrica</u> ya que por ejemplo:

$1 \mathrel{R} -1 \wedge -1 \mathrel{R} 1 \wedge -1 \neq 1$

(Es decir: $\exists x$: $\exists y$: $(x \mathrel{R} y \wedge y \mathrel{R} x \wedge x \neq y)$)

¿Es transitiva?

En Z: $\underline{x \mathrel{R} y \wedge y \mathrel{R} z} \Leftrightarrow x + y < 1 \wedge y + x < 1$ (definición de R)

$\Rightarrow x + y + y + z < 2$ (propiedad de '<')

$\Leftrightarrow x + 2y + z < 2$

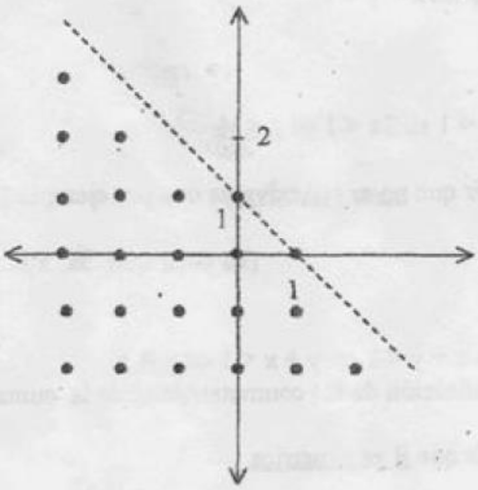
$\Leftrightarrow x + z < 2 - 2y$ (propiedad de '<')

$\underline{\nRightarrow x + z < 1}$

Esto querrá decir que <u>R no es transitiva</u> ya que por ejemplo:
Si se considera que <u>y = -4</u>; $2 - 2y = 2 - 2(-4) = 10$ y entonces de $x + z < 10$ no se desprende que necesariamente $x + z < 1$.
Completemos el caso tomando por ejemplo x y z de modo que $x + z = 4$; $x \mathrel{R} -4$ y $-4 \mathrel{R} z$.

Concluyendo: $2 \mathrel{R} -4$ y $-4 \mathrel{R} 2$ y $2 \not\mathrel{R} 2$
<u>Así R ni es de orden ni de equivalencia.</u>

Observación:
La gráfica de una relación (en caso de poder efectuarla) ofrece información al respecto.



✓ En R: $x\,S\,y$ sii $\frac{x-y}{2} \in Z$

¿Es reflexiva?

$x\,S\,x$ sii $\frac{x-x}{2} \in Z$ sii $0 \in Z$ (V)

Esto querrá decir que S es reflexiva.

¿Es simétrica?

$$\underline{x\,S\,y} \Leftrightarrow \frac{x-y}{2} \in Z \Leftrightarrow -\left(\frac{x-y}{2}\right) \in Z \Leftrightarrow \frac{y-x}{2} \in Z \Leftrightarrow \underline{y\,S\,x}$$

(definición de S | propiedad de enteros | definición de S)

Esto querrá decir que S es simétrica.

¿Es antisimétrica?

$$x\,S\,y \wedge y\,S\,x \Leftrightarrow \frac{x-y}{2} \in Z \wedge \frac{y-x}{2} \in Z \Rightarrow \exists k \in Z : \frac{x-y}{2} = k$$
$$\Leftrightarrow \exists k \in Z : y = x - 2k.$$
$$\not\Rightarrow \underline{x = y}$$

(definición de S | simplificación)

Así por ejemplo $2R0 \wedge 0R2 \quad 0 \neq 2$

Esto querrá decir que S no es antisimétrica.

¿Es transitiva?

$$\underline{x\,S\,y \wedge y\,S\,z} \Leftrightarrow \frac{x-y}{2} \in Z \wedge \frac{y-z}{2} \in Z \Rightarrow \frac{x-y}{2} + \frac{y-z}{2} \in Z$$
$$\Leftrightarrow \frac{x-y}{2} \in Z \Leftrightarrow \underline{xSz}$$

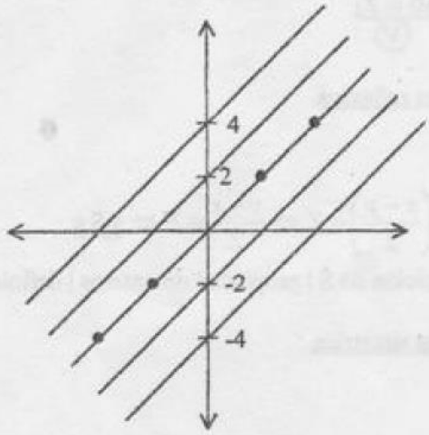
(Definición de S | suma cerrada en Z | definición de S)

Esto querrá decir que S es transitiva.

En cuanto a la gráfica...

x S y sii $\frac{x-y}{2} \in Z$ sii $\exists k \in Z\ \frac{x-y}{2} = k$ sii $\underline{\exists k \in Z : y = x - 2k}$

Entonces la gráfica está dada por una familia de rectas paralelas con pendiente igual a '1' y ordenada al origen "par".



✓ En R^2: (a, b) T (c, d) sii |a| = |c|

¿Es reflexiva?

(a, b) T (a, b) sii $\underbrace{|a| = |a|}_{\text{Ⓥ}}$, para cualquier asignación de a

De dónde resulta que T es reflexiva.

¿Es simétrica?

(a, b) T (c, d) ⇔ |a| = |c| ⇔ |c| = |a| ⇔ (c, d) T (a, b)
(Definición de T |simetría de la igualdad | definición de T)

De donde resulta que T es simétrica.

¿Es antisimétrica?

$(a, b)\ T\ (c, d) \wedge (c, d)\ T (a, b) \Leftrightarrow |a| = |c| \wedge |c| = |a| \Leftrightarrow |a| = |c|$

$\Leftrightarrow a = c \vee a = -c$

$\not\Rightarrow (a, b) = (c, d)$

Así por ejemplo (1, 2) T (-1, 3) $\wedge$ (-1, 3) $\wedge$ (1, 2) $\wedge$ (1, 2) $\neq$ (-1, 3)
De donde resulta que T no es antisimétrica.

¿Es transitiva?

$$
\begin{aligned}
(a, b)\ T\ (c, d) \wedge (c, d)\ T\ (e, f) &\Leftrightarrow |a| = |c| \wedge |c| = |e| \\
&\Rightarrow |a| = |e| \\
&\Leftrightarrow \underline{(a,b)\mathrm{T}(e,f)}
\end{aligned}
$$

(Definición de T | transitividad de la igualdad | definición de T)

De donde T es transitiva.

✓ En A = {r/r es recta no horizontal del plano real}: r M r' sii r y r' tienen la misma pendiente.

¿Es reflexiva?

r M r sii $\underbrace{\text{r y r tienen la misma pendiente}}_{\text{(V) cualquiera sea la recta}}$

De donde M es reflexiva.

¿Es simétrica?

r M r' sii r y r' tienen la misma pendiente sii r' y r tienen la misma pendiente sii r' M r.
De donde M es simétrica.

¿Es antisimétrica?

r M r' $\wedge$ r' M r $\Leftrightarrow$ r y r' tienen la misma pendiente $\not\Rightarrow$ r = r'

Por ejemplo si $r: y = 2x+1$ y $r': y = 2x$; r y r' tienen como pendiente '2' pero son distintas.
De donde M no es antisimétrica.

¿Es transitiva?

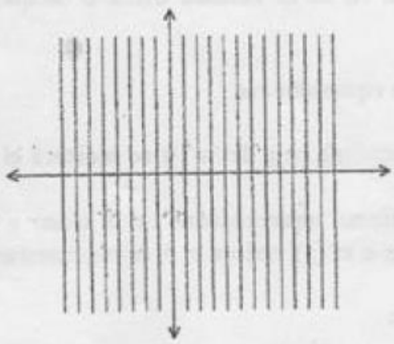
r M r' $\wedge$ r' M r'' $\Leftrightarrow$ r y r' tienen la mismas pendiente y r' y r'' tienen la misma pendiente.
$\Leftrightarrow$ r y r'' tienen la mismas pendiente.
$\Leftrightarrow$ r M r''.
De donde M es transitiva.

RELACIONES DE EQUIVALENCIA

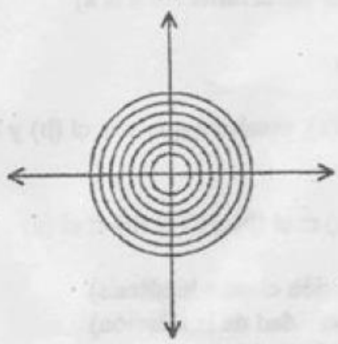
Ahora bien en numerosas cuestiones, se trata de particionar a un conjunto dado en subconjuntos disyuntos dos a dos de modo que la unión entre ellos sea el conjunto.

Así por ejemplo:

Puede partirse al plano real (considerado como un conjunto de puntos) en rectas verticales que lo cubran.



O bien, en circunferencias concéntricas en el origen.



Así también se podría particionar el conjunto de habitantes de una ciudad de acuerdo a la fecha de nacimiento o el conjunto de triángulos según tenga la misma área o el mismo perímetro.

Pero los criterios para realizar dicha partición, si bien son diversos no son del todo arbitrarios. Por ejemplo no podría paricionarse al conjunto de los números enteros (Z) de modo que en cada conjunto estén los números que difieran en dos unidades.

En efecto el criterio a considerar consistirá en elegir una relación que cumpla determinada condición, la de ser **relación de equivalencia**.

Partición de un conjunto.

Dado $A \neq \varnothing$ y $P = \{A_i\}$ con $i \in I$, $A_i \subset A$ y $A_i \neq \varnothing$ $\forall i \in I$. Se dice que P constituye una partición de A sii $\bigcup_{i \in I} A_i = A$ y $A_i \cap A_j = \varnothing$ para $i \neq j$

(**Observación**: a cada subconjunto A_i se lo llamará celda o bloque de la partición y a I: conjunto de índices).

Ahora bien, dada una relación de equivalencia.

Y $a \in A$, se denominará clase de equivalencia de "a" y se indicará cl (a) al conjunto cl (a) = $\{x/x \in A \wedge x \, R \, a\}$.
Cualquier elemento de cl (a) se llama representante de la clase y en particular, como la relación es reflexiva, en cuyo caso $a \in$ cl (a), todo $a \in A$ es representante de la clase cl (a).

Propiedades relativas a las clases:

1. En A: $\forall a$: cl (a) $\neq \varnothing$
   Se verifica dado que $a \in$ cl (a) (por ser R reflexiva a R a)

2. Si $a, b \in A$: cl (a) = cl (b) $\Leftrightarrow a \sim b$

$\Rightarrow$) si cl (a) = cl (b); dado que $a \in$ cl (a), resultará que $a \in$ cl (b) y entonces por definición de clase de equivalencia $a \sim b$.

$\Leftarrow$) si $a \sim b$, habrá que probar: 1) cl (a) $\subset$ cl (b) y 2) cl (b) $\subset$ cl (a)

$$\begin{array}{lll} 1)\ x \in \text{cl}(a) & \Leftrightarrow x \sim a \wedge a \sim b & \text{(definición clase e hipótesis)} \\ & \Rightarrow x \sim b & \text{(transitividad de la relación)} \\ & \Leftrightarrow x \in \text{cl}(b) & \text{(definición clase)} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 2)\ x \in \text{cl}(b) & \Leftrightarrow x \sim b \wedge a \sim b & \text{(definición clase e hipótesis)} \\ & \Leftrightarrow x \sim b \wedge b \sim a & \text{(simetría de la relación)} \\ & \Rightarrow x \sim a & \text{(transitividad de la relación)} \\ & \Leftrightarrow x \in \text{cl}(a) & \text{(definición clase)} \end{array}$$

3. Si a, b $\in$ A: cl (a) $\neq$ cl (b) $\Leftrightarrow$ cl (a) $\cap$ cl (b) = $\varnothing$

$\Leftarrow$) obvio, dado que cl (a), cl (b) $\neq \varnothing$

$\Rightarrow$) por contrarecíproco:

cl (a) $\cap$ cl (b) $\neq \varnothing$	$\Leftrightarrow \exists x$: $x \in$ cl (a) $\cap$ cl (b)	(definición de no vacío)
	$\Leftrightarrow \exists x$: ($x \in$ cl (a) $\wedge$ $x \in$ cl (b)	(definición intersección)
	$\Leftrightarrow \exists x$: ($x \sim a \wedge x \sim b$)	(definición de clase)
	$\Leftrightarrow \exists x$: ($a \sim x \wedge x \sim b$)	(simetria de la relación)
	$\Rightarrow a \sim b$	(transitividad de la relación)
	$\Leftrightarrow$ cl (a) = cl (b)	(2.)

Se llamará: conjunto cociente de A respecto de la relación R.

Al conjunto formado por todas las clases de equivalencias de elementos del conjunto A respecto de la relación R.

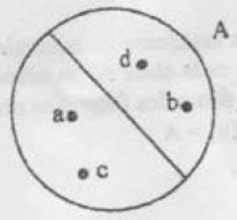
$$A/R = \{cl\ (a)\ /\ a \in A\}$$

Observación: Dado que podrá haber clases coincidentes, se evitará la repetición de las mismas en A/R.

Ejemplos: Probar que las relaciones en A son de equivalencia y hallar clases de equivalencia y conjunto cociente.

✓ A = {a, b, c, d} y R = {(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, c), (c, a), (b, d), (d, b)}.

R: de equivalencia (a cargo del lector).
cl (a) = {a, c} = cl (c)
cl (b) = {b, d} = cl (d)
de donde A/R = {cl (a), cl (b)}



✓ A = R y x R y sii ent(x) = ent(y) (ent(x): parte entera de x; con ent(x) = máx $\{z \in Z / z \leq x\}$)

<u>R de equivalencia</u>
Reflexividad) En R: $\forall x$: ent(x) = ent(x) de donde x R x.

Simetría) En R: $\forall x: \forall y: x \, R \, y \Leftrightarrow \text{ent}(x) = \text{ent}(y)$

$$\Leftrightarrow \text{ent}(y) = \text{ent}(x)$$

$$\Leftrightarrow y \, R \, x$$

(def. de R, simetría de la igualdad, def. de R).

Transitividad) En R: $\forall x: \forall y: \forall z: x \, R \, y \wedge y \, R \, z \Leftrightarrow \text{ent}(x) = \text{ent}(y) \wedge \text{ent}(y) = \text{ent}(z)$

$$\Rightarrow \text{ent}(x) = \text{ent}(z)$$

$$\Leftrightarrow x \, R \, z$$

(Def. de R, transitiva de la igualdad, def. de R)

¿Cómo son las clases de equivalencias?

Por ejemplo: $cl(1) = \{x \in R / \text{ent.}(x) = \text{ent}(1) = 1\} = [1, 2)$

$cl(3, 2) = \{x \in R / \text{ent.}(x) = \text{ent}(3, 2) = 3\} = [3, 4)$

$cl(-2, 8) = \{x \in R / \text{ent.}(x) = \text{ent}(-2, 8) = -3\} = [-3, -2)$

En general, si $a \in R$: $cl(a) = [z, z+1)$ con z el único número entero tal que $a \in [z, z+1)$.

$R/R = \{cl(z) / z \in Z\} = \{[z, +1) / z \in Z\}$

Y en la recta real quedará cubierta a través de estos intervalos de longitud unitaria.

$$\leftarrow [\quad)[\quad)[\quad)[\quad)[\quad)[\quad)[\quad)[\quad)[\quad) \rightarrow$$

$$\ldots -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \ldots$$

Estos ejemplos nos muestran que las clases de equivalencia permiten conseguir una partición del conjunto dado del modo planteado al comienzo. Formalicemos este concepto.

Teorema fundamental de las relaciones de equivalencia.

Si R es una relación de equivalencia en un conjunto A, el conjunto cociente A/R es una partición de A.

D/ El conjunto cociente A/R de todas las clases de equivalencia de la relación es una familia de subconjuntos de A no vacíos, pues cada clase de un subconjunto de A no vacío (**1. Pág.2**)
Por otra parte las clases son disjuntas dos a dos (según se probó en **3. Pag. 3**).
Solo queda entonces probar que $\bigcup_{a \in A} cl(a) = A$.

1) $A \subset \bigcup_{a \in A} cl(a)$

$x \in A \Rightarrow x \in cl(x) \wedge cl(x) \subset \bigcup_{a \in A} cl(a)$ (propiedad de cl (x) y prop. de unión que dice que todo conjunto está incluido en su unión con otro).

$\Rightarrow x \in \bigcup_{a \in A} cl(a)$ (definición de inclusión).

2) $\bigcup_{a \in A} cl\,(a) \subset A$

$x \in \bigcup_{a \in A} cl\,(a) \Leftrightarrow \exists\, a \in A: (x \in cl\,(a)) \wedge cl\,(a) \subset A)$ (def. de unión).

$\Rightarrow x \in A$ (def. de inclusión).

Teorema :

Si $P = \{A_i\}$ con $i \in I$ es una partición de A, puede definirse en A una relación de equivalencia Rp tal que A/Rp coincide con la partición.

D/ Considerando la definición de partición y de clase de equivalencia; la relación buscada resulta ser: $Rp \subset AxA$ con x Rp y sii x e y están en la misma celda de la partición.

Simbólicamente x Rp y sii $\exists\, i \in I$: x e y pertenezcan a A_i.

Consecuencia:

Para cualquier conjunto A, existe una correspondencia uno a uno entre las relaciones de equivalencia en A y las particiones en A.

Observación

En líneas generales **una relación de equivalencia R en un conjunto A generaliza la igualdad**; origina una característica de "identidad" entre los elementos de A. Justamente este concepto de "identidad" causa la descomposición del conjunto A en subconjuntos llamados clases de equivalencia. Y a la inversa se encuentra que una partición de un conjunto A origina una relación de equivalencia en A