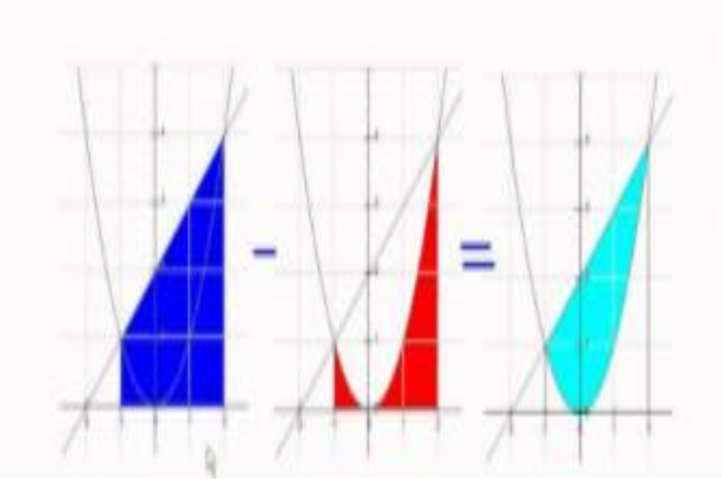


INTEGRACIÓN PARTE 4
APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

1.LONGITUD DE ARCO DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

- Usualmente medimos la longitud con una línea segmento, pero las curvas también tienen longitud. Un ejemplo familiar es la circunferencia de un círculo de radio r, cuya longitud es $2\pi r$
- En general, le llamamos a la longitud de una curva "**longitud de arco**". Pero, ¿cómo encuentras la longitud de arco de una curva arbitraria?

Aproximar la longitud de arco

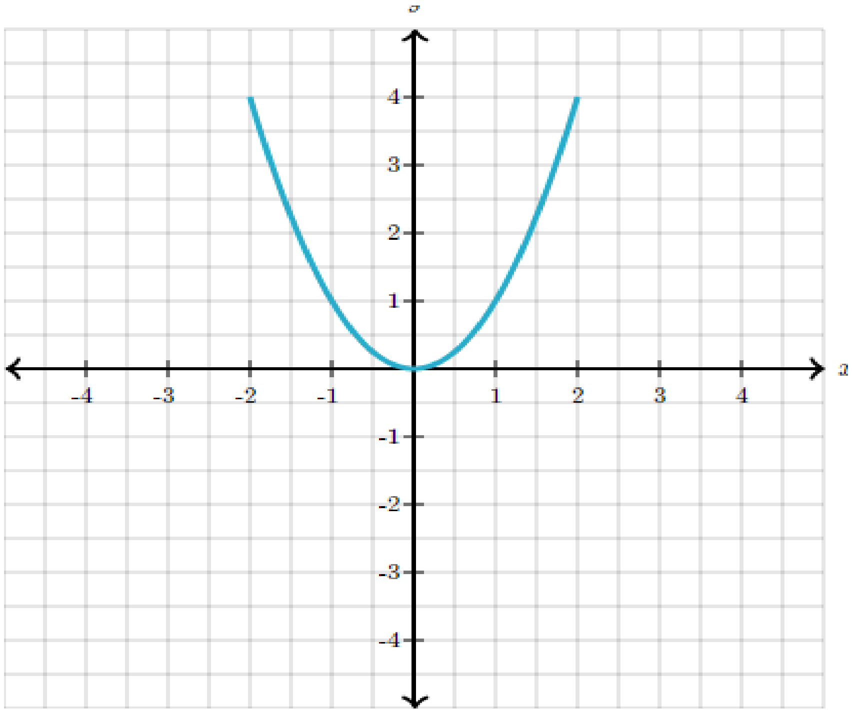
- ✓Veamos la parábola definida por la siguiente ecuación:

$y = f(x)= x$^2

Consideramos la porción de la curva que está entre $x = -2$ y $x = 2$ es decir

Pero Cual es la long

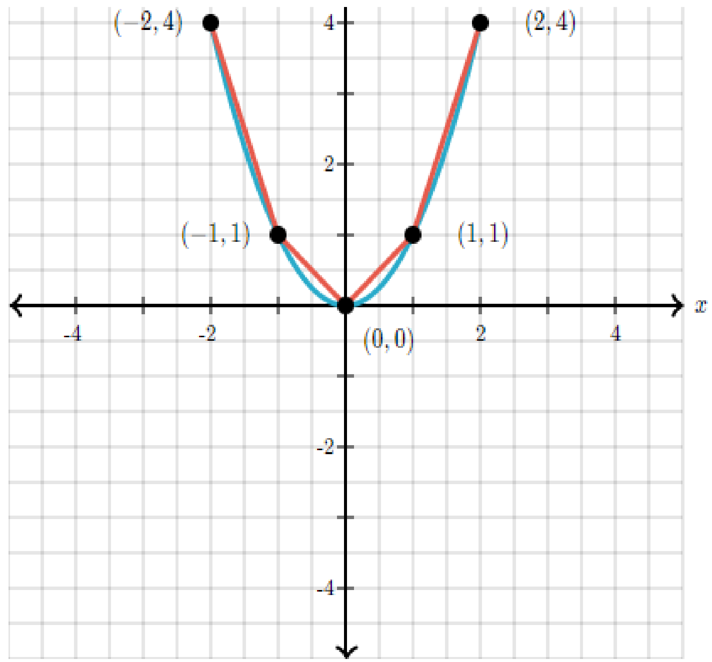
de este arco?



Pensamos lo siguiente:

Imaginamos que la curva es un pedazo de cuerda, y que la estiras y mides su longitud con una regla.

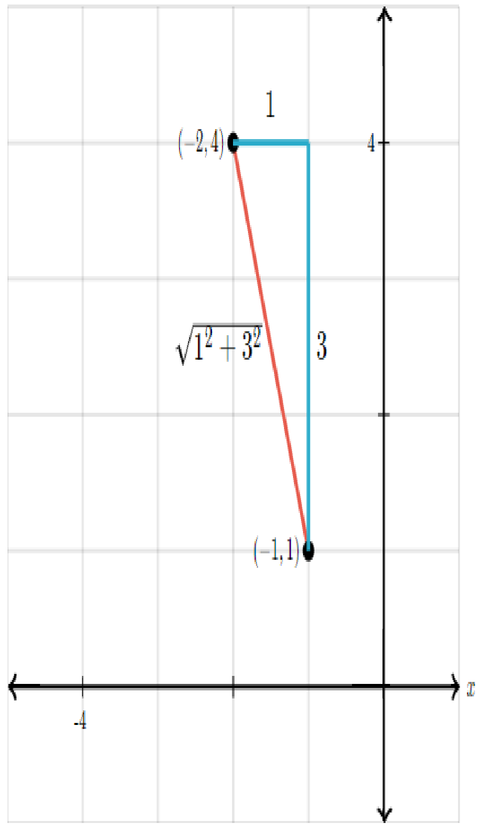
Si no pudiéramos hacer lo anterior, podríamos comenzar por aproximar esta curva con algunos segmentos de recta. Por ejemplo, así:



- Un segmento de recta comprendido entre $(-2,4)$ y $(-1,1)$.
- Un segmento de recta comprendido entre $(-1,1)$ y $(0,0)$.
- Un segmento de recta comprendido entre $(0,0)$ y $(1,1)$.
- Un segmento de recta comprendido entre $(1,1)$ y $(2,4)$.

Sería tedioso, pero podrías calcular la longitud de cada segmento de recta con el teorema de Pitágoras y luego sumar cada una.

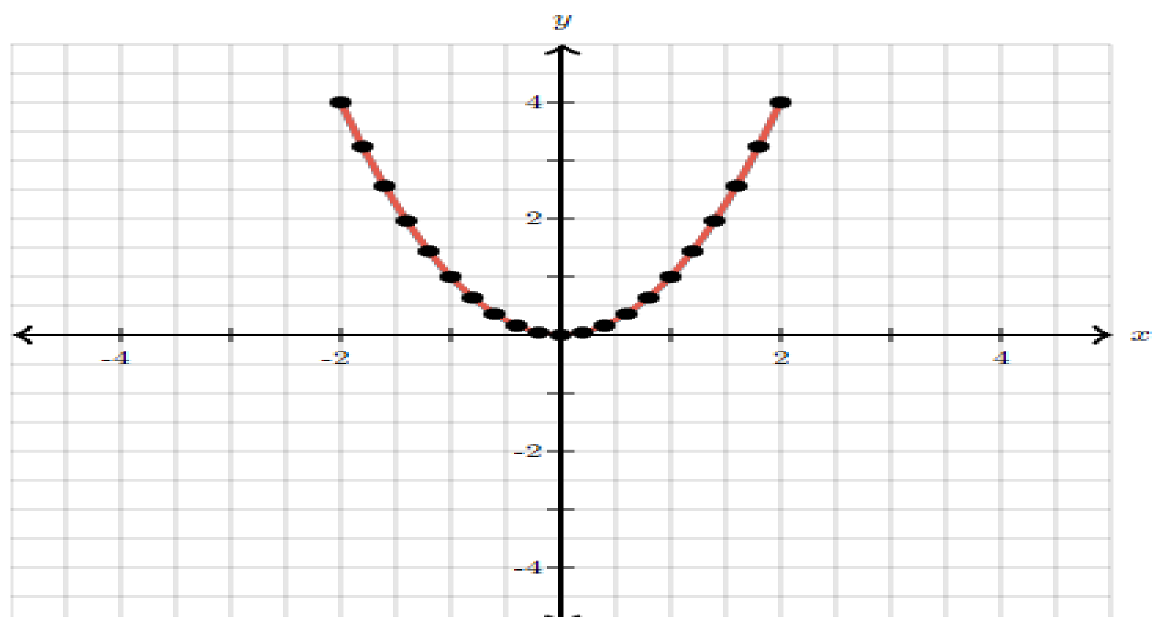
¿Cuál es la longitud de el segmento de recta comprendido entre (-2, 4)(−2,4)
La respuesta es :



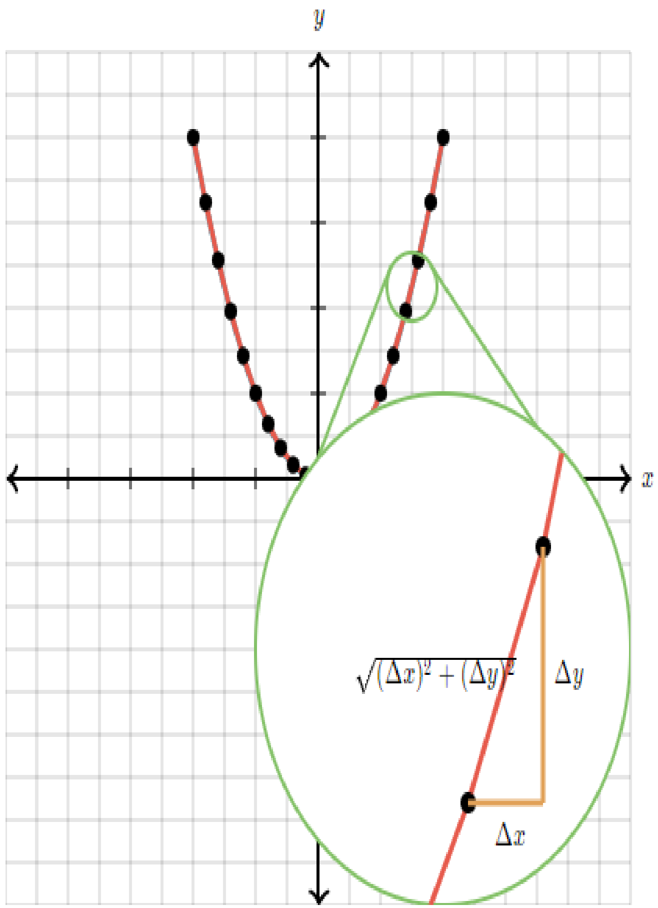
Aunque esta es solo una aproximación

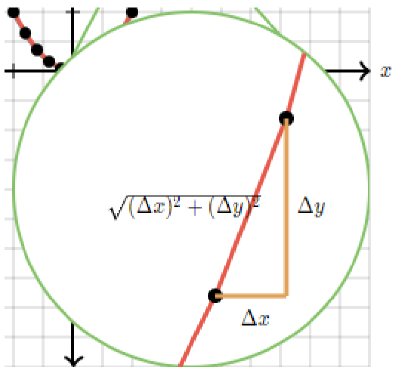
- Para un mejor estimado, podríamos aproximar la curva con muchos segmentos pequeños.

Para un mejor estimado, podrías aproximar la curva con mucho: pequeños.



Calcular todas sus longitudes y sumarlas sería dolorosamente soporífero, pero hagamos un desglose de cómo se vería. Haz un acercamiento a uno de los pequeños segmentos de recta.





Primero observamos el cambio en el valor de x del principio del segmento a su fin; a este valor, llamemos Δx. Similarmente, digamos que el cambio en el valor de y es Δy. Entonces, por medio del teorema de Pitágoras, podemos escribir la longitud del segmento como:

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Nuestra aproximación para la longitud de la curva será la suma de las longitudes de todos estos pequeños segmentos. Cuando expresamos una idea como esta con símbolos, es común que seamos un poco laxos con la notación y escribamos algo así:

$$\sum_{\text{todos los pequeños segmentos}} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Así podemos tomar $\int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$

Una cosa que esta notación no comunica muy bien es que dy, el cambio en la altura a través de uno de nuestros pequeños segmentos de recta, depende de dx, la componente horizontal de ese segmento. Específicamente, ya que la curva está definida por la relación $y = x^2$, podemos calcular la derivada de cada lado para ver cómo dy depende de dx:

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ d(y) &= d(x^2) \\ dy &= 2x\,dx \end{aligned}$$

Cuando sustituimos este resultado en nuestra integral, la expresión nos parece un poco más familiar.

$$\begin{aligned}\int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} &= \int \sqrt{(dx)^2 + (2x\, dx)^2} \\ &= \int \sqrt{(1 + (2x)^2)(dx)^2} \\ &= \int \sqrt{1 + 4x^2}dx\end{aligned}$$

Tiene sentido definir los límites a través de los valores de x, que en este caso van de -2 a 2,

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{1 + 4x^2}dx$$

Resumiendo

- La expresión central a recordar es $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, que representa una pequeña unidad de longitud de arco en términos de x y y.

- La integral de longitud de arco con la que comienzas se ve como algo parecido a:

$$\int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

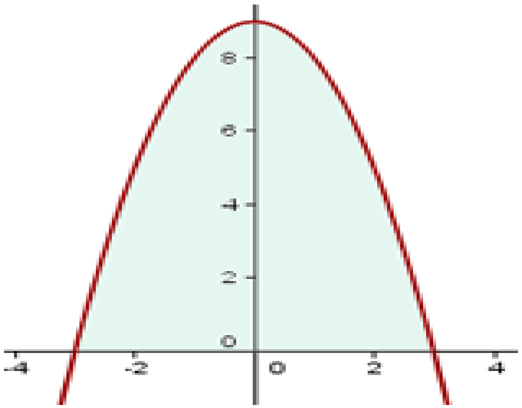
- Antes de calcular la integral, tuvimos que escribir la diferencial dy en términos de la diferencial dx. Para lograrlo, calculamos la derivada de la función que define la curva.

- En general, solo podemos calcular una integral con respecto a una sola diferencial; para encontrar relaciones entre diferenciales, usamos la derivada.

- Tal vez la lección más importante es que podemos usar integrales para muchas más cosas *además* de para calcular el área bajo una curva.

Cálculo de áreas

- **Caso 1: Área entre una función positiva y el eje de abscisas**
- Si la función es positiva en un intervalo entonces la gráfica de la función está por encima del eje de abscisas.



- El **área de la función** viene dada por:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

❖Para hallar el área seguiremos los siguientes pasos:

- ✓**1** Se calculan los **puntos de corte** con el eje , haciendo y resolviendo la ecuación.
- ✓**2** El **área** es igual a la **integral definida de la función** que tiene como límites de integración los puntos de corte.

El **área de la función** viene dada por:

$$A = \int_a^b f(x)\, dx$$

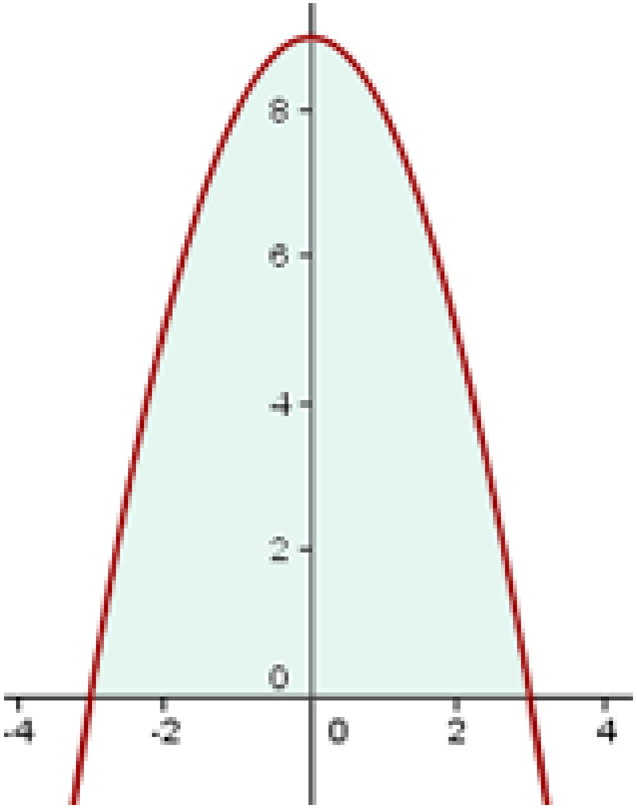
Ejemplos

1. Calcular el área del recinto limitado por la curva f(x) = $9-x^2$ y el eje X

En primer lugar hallamos los puntos de corte con el eje X (raíces) para representar la curva y conocer los límites de integración.

$$0 = 9 - x^2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3 \quad x_2 = -3$$

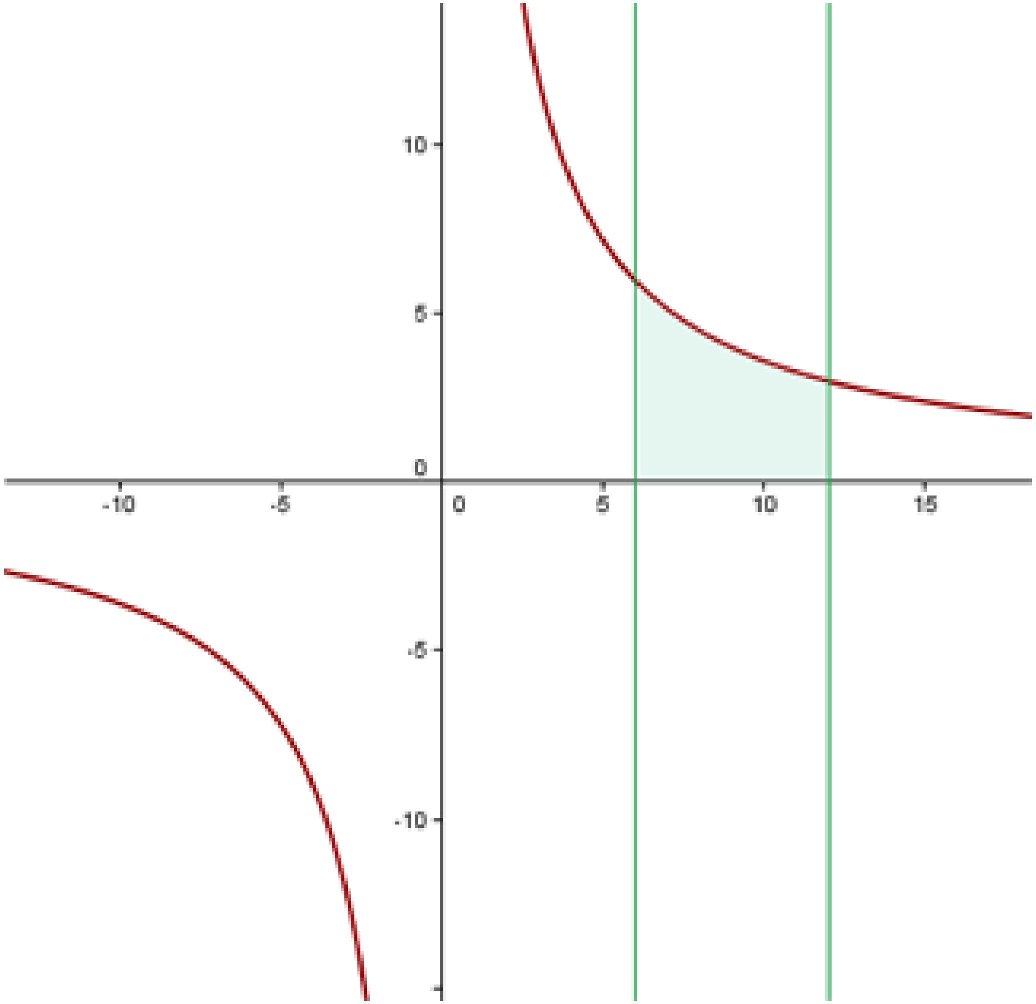
Dibujamos la curva



- ✓Como la parábola es simétrica respecto al eje Y , el área será igual al doble del área comprendida entre x=0 y x=3

$$A=\int_{-3}^{3}(9-x^2)\,dx=2\int_{0}^{3}(9-x^2)\,dx=2\left[9x-\frac{x^3}{3}\right]_0^3=36\,u^2$$

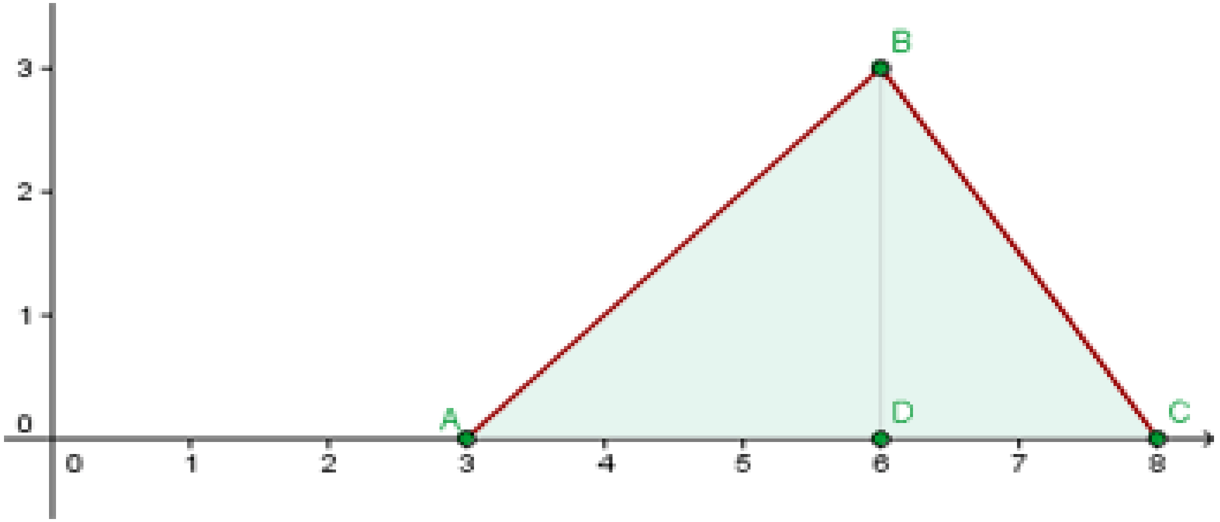
2.Calcular el área limitada por la curva x.y = 36 el eje x y las recta x=6 y x= 12 . Hacemos gráfico



Resolvemos

$$\int_{6}^{12} \frac{36}{x}\,dx = [36\ln x]_{6}^{12} = 36\ln 2\,u^2$$

3. Calcular el área del triángulo cuyos vértices son A(3,0) B(6,3) C (8,0)



Ecuación de la recta que pasa por : AB es y = x-3

Ecuación de la recta que pasa por BC es $y = -\frac{3}{2}(x-8)$

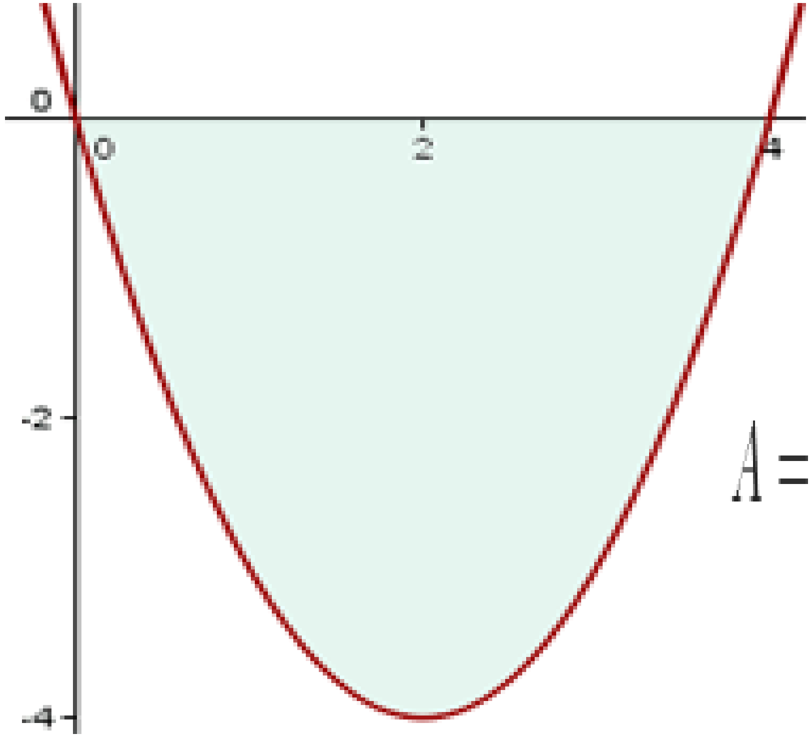
$$A = \int_3^6 (x-3)\,dx + \int_6^8 \left[-\frac{3}{2}(x-8)\right] dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - 3x\right]_3^6 + \left[-\tfrac{3}{4}x^2 + 12x\right]_6^8$$

$$= \left(18 - 18 - \tfrac{9}{2} + 9\right) + \left(-48 + 96 + 27 - 72\right) = \tfrac{15}{2}\, u^2$$

✓ Caso 2: Área entre una función negativa y el eje de abscisas

✓Si la función es negativa en un intervalo entonces la gráfica de la función está por debajo del eje de abscisas.



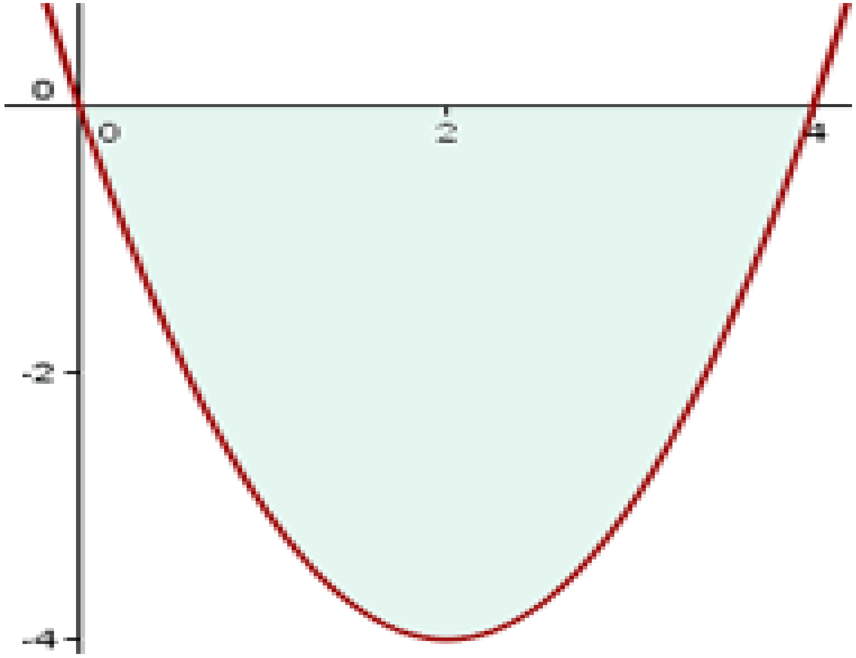
El **área de la función** viene dada por:

$$A = -\int_a^b f(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad A = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

Ejemplos

Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = x^2 - 4x$ y el eje X.

- ✓ Hacemos el gráfico



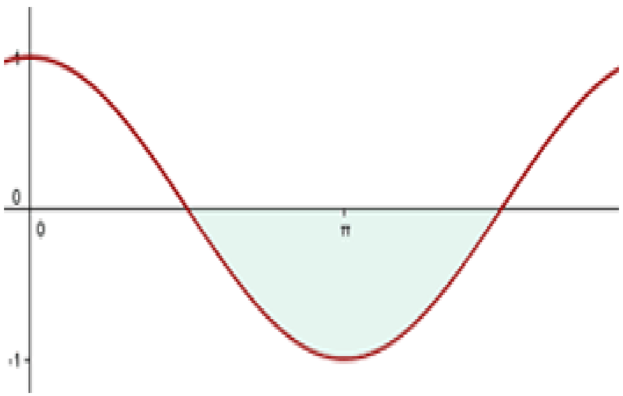
Calculamos las raíces

$$0 = x^2 - 4x \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 4$$

$$A = \int_0^4 (x^2 - 4x)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2\right]_0^4 = -\frac{32}{3}$$

$$|A| = \frac{32}{3}\, u^2$$

2 Hallar el área limitada por la curva $y = \cos x$ y el eje OX entre $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$.



$$A = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x \, dx = [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \sin\frac{3\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2} = -1 - 1 = -2$$

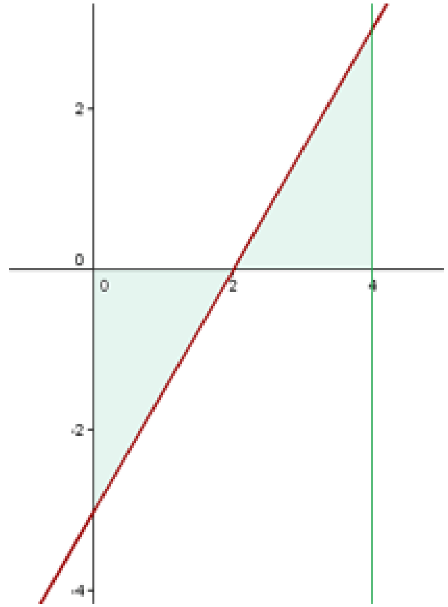
$$|A| = 2\,u^2$$

Caso 3: La función toma valores positivos y negativos

- ❖En ese caso el el recinto tiene zonas por encima y por debajo del eje de abscisas. Para calcular el **área de la función** seguiremos los siguientes pasos:
- ✓**1** Se calculan los puntos de corte con el eje X, haciendo $f(x)=0$ y resolviendo la ecuación.
- ✓**2** Se ordenan de menor a mayor las raíces, que serán los límites de integración.
- ✓**3** El **área** es igual a la **suma de las integrales definidas** en valor absoluto de cada intervalo.

Ejemplos

1 Hallar el área limitada por la recta $y = \frac{3x-6}{2}$, el eje de abscisas y las ordenadas correspondientes a $x = 0$ y $x = 4$.



$$A_1 = \int_0^2 \left(\frac{3x-6}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}x^2 - 6x\right]_0^2 = \frac{1}{2}(6-12)$$

$$A_2 = \int_2^4 \left(\frac{3x-6}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}x^2 - 6x\right]_2^4 = \frac{1}{2}[(24-2$$

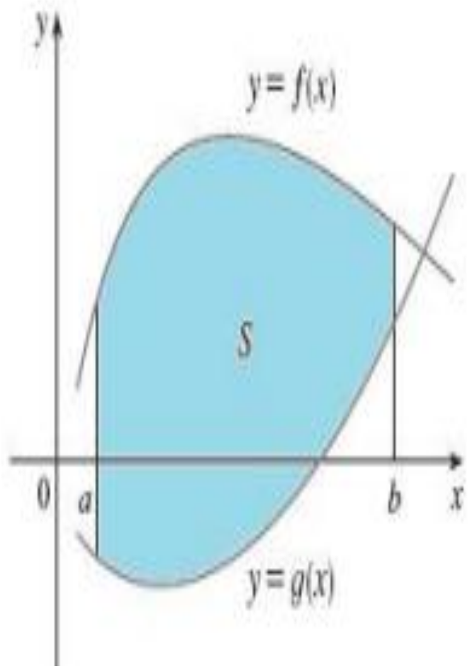
$$A = |A_1| + |A_2| = |-3| + 3 = 6\,u^2$$

Area entre curvas

Para encontrar el área de una región entre dos curvas, hay que considerar dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, continuas en el intervalo $[a,b]$. Si las gráficas están sobre el eje X y la gráfica de $y=g(x)$ esta debajo de la gráfica $y=f(x)$, se puede interpretar geométricamente el área de la región entre las gráficas, es decir restar el área de la función $y=g(x)$ al área de la función $y=f(x)$, esto nos dará el área entre 2 curvas en determinados intervalos.

Caso I.

Definición: Si $y = f(x)$ y $y = g(x)$ son continuas en $[a,b]$ y $y = g(x) \leq y = f(x)$ $\forall x \in [a,b]$, entonces el área de la región acotada por las gráficas $y = f(x), \wedge, y = g(x)$ y las rectas verticales $x = a, \wedge x = b$ es $Area\ de\ S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\ dx$

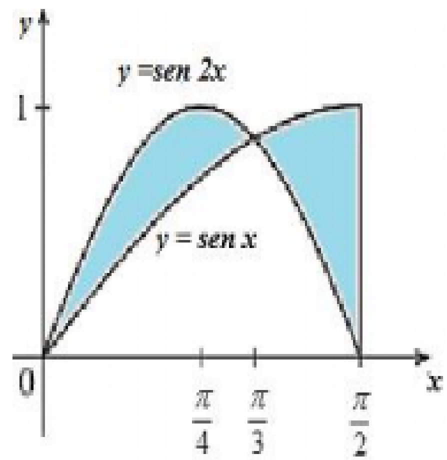


Caso II.

Área de una región entre dos curvas que se intersecan

Se utiliza el mismo método, con excepción que aquí los intervalos se buscan. Como intervalos se utilizan los puntos donde se intersecan las gráficas. En algunas ocasiones las gráficas se intersecan más de 2 veces y de aquí se deduce que se suman las regiones, sin importar que grafica pase arriba o abajo, ya que para eso solo se utiliza la misma lógica de seccionar la región por subintervalos tales que $y = g(x) y \leq y = f(x)$ ó, $y = f(x) y \leq A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx + \int_b^c [g(x) - f(x)]dx + \ldots dado\ el\ caso.$ de esa forma se tendrán los intervalos, uno para $[a,b]$ y otro para $[b,c]$ y los demás que resulten.

El siguiente ejemplo ilustra la situación: dividimos la región de integración en dos intervalos. El primero $[a,b] = [o, \frac{\pi}{3}]$ y el segundo que va desde $[b,c] = [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$



Algunas regiones se manejan mejor si se considera a x en función de y. Si una región está limitada con curvas de ecuaciones $x = f(y),\ x = g(y),\ y = c,\ y = d$ Donde f y g son continuas y $f(y) \geq g(y)$ para $c \leq y \leq d$

entonces su área es $A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\, dy$ bajo esta situación es conveniente usar rectángulos horizontales y encontrar el are integrando la variable y.

En general, para determinar el área entre dos curvas, se usan

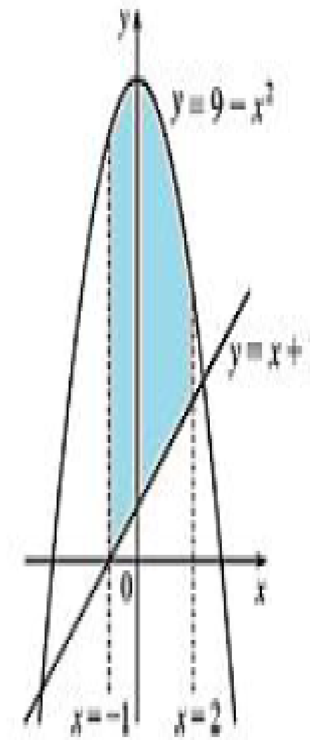
$$A = \int_{x_1}^{x_2} [(curva\ de\ arriba) - (curva\ de\ abajo)]dx \quad Rectangulos\ veticales$$

$$A = \int_{y_1}^{y_2} [(curva\ derecha) - (curva\ izquierda)]dx \quad Rectangulos\ horizontales$$

Donde (x_1, x_2) y (y_1, y_2) son los puntos adyacentes de intersección de las dos curvas implicadas o puntos sobre las rectas de la frontera especificadas.

Ejemplo 1. Encontrar el área de la región limitada por $y = x+1,\ y = 9 - x^2,\ x = -1,\ x = 2$

La grafica de la región es la mostrada en la parte derecha de la pantalla



Solución

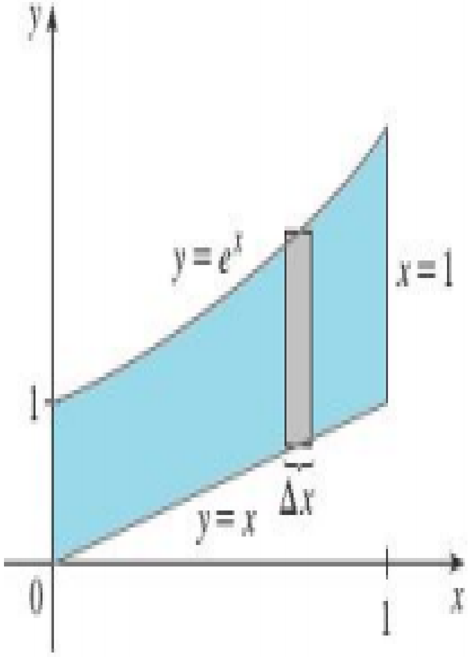
Como se observa en la figura nuestra función de arriba es $y = 9 - x^2$, y la de abajo es $y = x+1$, por lo tanto utilizamos nuestra ecuación donde $f(x) = 9 - x^2$, $g(x) = x+1$, con $a = -1,\ b = 1$, luego el área está limitada por:

$$A = \int_{-1}^{2} \left[\left(9 - x^2\right) - \left(x+1\right) \right] dx = \left[8x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{2} = \frac{39}{2}$$

Ejemplo 2. Encontrar el área de la región limitada por: $y=e^x$, $y=x$, $x=0, x=1$

Solución. Como se muestra en la figura la función de arriba es $y=e^x$, y en la parte de abajo es $y=x$ por lo tanto utilizamos nuestra ecuación donde $f(x)=e^x$, $g(x)=x, a=0, b=1$.

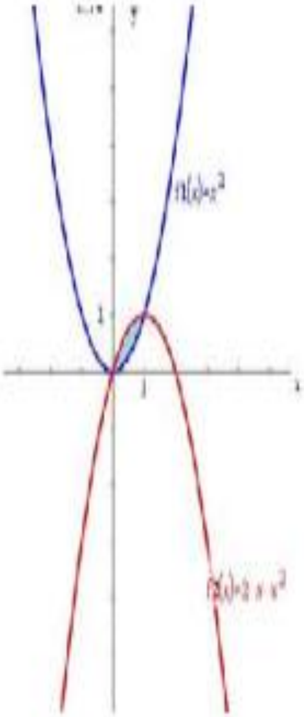
(Solucionar el ejercicio queda como tarea para el lector)



$$A=\int_0^1\left[\left(e^x\right)-\left(x\right)\right]dx=e-\frac{3}{2}$$

Ejemplo 3. Calcule el área dela región definida por las parábolas: $y = x^2$ y

$y = 2x - x^2$



Solución; la gráfica de la región limitada por las curvas se muestra en la parte derecha de la pantalla. Debemos dejara positivo el signo del cuadrado en la segunda parábola factorizando -1

Ecuación de la parábola: $y = -(x - 2x^2)$ completamos al cuadrado

$y = -((x-1)^2 - 1) \rightarrow y - 1 = -(x-1)^2$ Igualamos las ecuaciones para encontrar las intersecciones: $x^2 = 2x - x^2 \rightarrow x^2 = x \rightarrow x = 0, \vee \; x = 1$ Esto implica que la región estará definida por:

$$A = \int_0^1 \left[\left(2x - x^2\right) - \left(x^2\right) \right] dx = \frac{8}{3} und^2$$

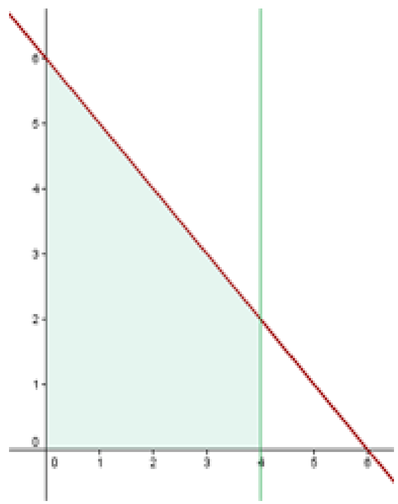
Volumen de un Cuerpo

El volumen del cuerpo de revolución engendrado al girar la curva f(x) alrededor del eje OX y

limitado por x = a y x = b, viene dado por:

$$V = \pi \int_a^b \left[f(x) \right]^2 dx$$

1. Hallar el volumen del tronco de cono engendrado por la rotación alrededor OX del área limitada por y = 6 − x, y = 0, x = 0, x = 4.



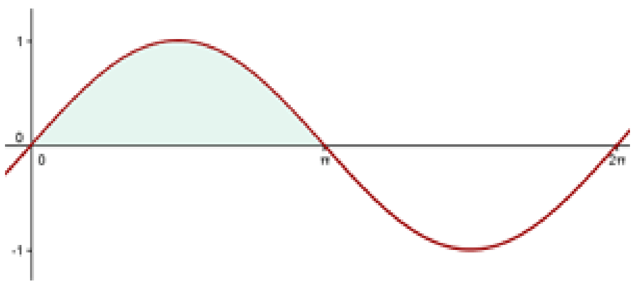
$$V = \pi \int_0^4 (6 - x)^2 \, dx = \pi \left[36x - 6x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_0^4 = \frac{208\pi}{3} \, u^3$$

2. Hallar el volumen engendrado por las superficies limitadas por las curvas y las rectas dadas al girar en torno al eje OX:

$y = \text{sen}\,x \qquad x = 0 \qquad x = \pi$

$$V = \pi\int_0^{\pi} \text{sen}^2 x\, dx = \pi\int_0^{\pi}\left(\left[\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right]\right)dx = \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{1}{2}\text{sen}2x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}u^3$$

3. Calcular el volumen engendrado por una semionda de la sinusoide y = sen x, al girar alrededor del eje OX.



$$V=\pi\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2 x\,dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}(\pi-0)=\frac{\pi^2}{2}\,u^3$$