MATEMÁTICA DISCRETA

Funciones booleanas

LIC. MÓNICA LORDI

Departamento de Innovación Educativa

UNIVERSIDAD CAECE

Cámara Argentina de Comercio y Servicios

FUNCIONES BOOLEANAS

UNIVERSIDAD CAECE
Cámara Argentina de Comercio y Servicios

FUNCIONES BOOLEANAS:

¿Qué es una función booleana?

Una función booleana es: $f: B^n \to B$ siendo $(B ; \vee ; \wedge)$ Algebra de Boole

Si $(\{0,1\} ; + ; \bullet)$ Algebra de Boole usual, entonces para f se usan tablas de verdad.

Ejemplo: Este es un ejemplo de una función booleana dada por una tabla:

$f : B^3 \to B$ /

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Las funciones booleanas se pueden representar como circuitos, donde se entran ciertas variables y la salida es función de las variables de entrada.

¿Qué son las Expresiones booleanas?

Son expresiones que contienen variables, 0_A (primer elemento), 1_A (último elemento), suma, producto y complemento.

Nota: el punto del producto puede omitirse, es decir $x \bullet y$ se escribe directamente $x\,y$

Propiedad: Toda expresión booleana define una función booleana

Ejemplo: función booleana definida mediante una expresión booleana:

$$f(x,y,z) = x + \bar{y}\,(z + \bar{x})$$

Universidad CAECE
Cámara Argentina de Comercio y Servicios

EXPRESIONES BOOLEANAS EQUIVALENTES

Se dice que dos expresiones booleanas son EQUIVALENTES cuando definen a la misma función booleana

Ejemplo:

Las expresiones siguientes son equivalentes: e_1: $\bar{x}\,(z + x) + y$ e_2: $\bar{x}\,z + y\,x + y\,\bar{x}$

¿Puedes demostrarlo?

Seguiremos con unas definiciones que nos permitirán escribir a las funciones booleanas en unas formas canónicas.

¿A qué se llama Minitérmino?

Es un término en el que intervienen todas las variables o sus complementos multiplicadas entre sí.

Ejemplo: Con cuatro variables (a, b, c, d) un minitérmino es: $a \bullet \overline{b} \bullet \overline{c} \bullet d$

FORMA NORMAL DISYUNTIVA: se dice que una función booleana está expresada en forma normal disyuntiva cuando está expresada como suma de minitérminos.

Ejemplo: Ejemplo de función expresada en F.N.D. (forma normal disyuntiva):

$f(x,y,z) = x\,\overline{y}\,z + x\,y\,z + \overline{x}\,\overline{y}\,z$ esta función es suma de tres minitérminos.

ESCRIBIR FUNCIONES BOOLEANAS EN FORMA NORMAL DISYUNTIVA:

Caso 1: partiendo de una expresión que no está en F.N.D.

Ejemplo: Pasa a F.N.D. la siguiente función: $f(x,y,z) = \bar{y} \bullet (x + \bar{z})$

SOLUCION:

Para pasar a F.N.D. la siguiente función: $f(x,y,z) = \bar{y} \bullet (x + \bar{z})$

Debemos tener en cuenta las propiedades vistas de las Algebras de Boole.

Comencemos:

$f(x,y,z) = \bar{y} \bullet (x + \bar{z}) = \bar{y} \bullet x + \bar{y} \bullet \bar{z}$ (hemos aplicado distributiva)

$= \bar{y} \bullet x \bullet 1_A + \bar{y} \bullet \bar{z} \bullet 1_A$ (por ser 1_A elemento neutro de $\bullet$)

$= \bar{y} \bullet x \bullet (z + \bar{z}) + \bar{y} \bullet \bar{z} \bullet (x + \bar{x})$ (complementación: $a + \bar{a} = 1_A$)

$= \bar{y} \bullet x \bullet z + \bar{y} \bullet x \bullet \bar{z} + \bar{y} \bullet \bar{z} \bullet x + \bar{y} \bullet \bar{z} \bullet \bar{x}$ (distributiva)

Ordenamos por conmutatividad:

$f(x,y,z) = x \bullet \bar{y} \bullet z + x \bullet \bar{y} \bullet \bar{z} + x \bullet \bar{y} \bullet \bar{z} + \bar{x} \bullet \bar{y} \bullet \bar{z}$

Como los dos del medio son iguales, por idempotencia dejamos uno solo:

$f(x,y,z) = x \bullet \bar{y} \bullet z + x \bullet \bar{y} \bullet \bar{z} + \bar{x} \bullet \bar{y} \bullet \bar{z}$

Y esta expresión es la FORMA NORMAL DISYUNTIVA

UNIVERSIDAD CAECE
Cámara Argentina de Comercio y Servicios

Caso 2: partiendo de la tabla de la función booleana

Ejemplo: Pasar a F.N.D. la siguiente función dada mediante una tabla:

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

SOLUCIÓN:

Primero buscamos los renglones de la tabla en los que la función vale 1

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	**1**
0	1	0	**1**
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	**1**
1	1	1	0

Por cada uno de esos renglones escribimos un minitérmino de acuerdo a los valores de las variables (si valen cero van complementadas, si valen 1 van sin complementar):

	x	y	z	f(x,y,z)
	0	0	0	0
$\bar{x} \bullet \bar{y} \bullet z$	**0**	**0**	**1**	**1**
$\bar{x} \bullet y \bullet \bar{z}$	**0**	**1**	**0**	**1**
	0	1	1	0
	1	0	0	0
	1	0	1	0
$x \bullet y \bullet \bar{z}$	**1**	**1**	**0**	**1**
	1	1	1	0

Y luego sumamos todos esos minitérminos obteniendo la **F.N.D.**

$$\boxed{f(x,y,z) = \bar{x} \bullet \bar{y} \bullet z + \bar{x} \bullet y \bullet \bar{z} + x \bullet y \bullet \bar{z}}$$

¿A qué se llama Maxitérmino?

Es un factor en el que intervienen todas las variables sumadas entre sí, pudiendo estar o no complementadas.

FORMA NORMAL CONJUNTIVA: se dice que una función booleana está expresada en forma normal conjuntiva cuando está expresada como producto de maxitérminos.

Ejemplo: Esta es una función expresada en F.N.C. (forma normal conjuntiva):

$f(x,y,z) = (\bar{x} + y + \bar{z}) \bullet (\bar{x} + y + z)$ tiene dos maxitérminos

ESCRIBIR FUNCIONES BOOLEANAS EN FORMA NORMAL CONJUNTIVA:

Caso 1: partiendo de una expresión que no está en FNC

Ejemplo: Pasar a F.N.C. la siguiente función: $f(x,y,z) = x \bullet y + z$

SOLUCION:

$f(x,y,z) = x \bullet y + z = (x + z) \bullet (y + z)$ (por distributiva de + resp. •)

$= (x + z + 0_A) \bullet (y + z + 0_A)$ (por ser 0_A neutro de +)

$= (x + z + y \bullet \bar{y}) \bullet (y + z + x \bullet \bar{x})$ (por complementación $a \bullet \bar{a} = 0_A$)

$= (x + z + y) \bullet (x + z + \bar{y}) \bullet (y + z + x) \bullet (y + z + \bar{x})$ (distributiva)

Ordenamos por conmutatividad:

$= (x + y + z) \bullet (x + y + z) \bullet (x + \bar{y} + z) \bullet (\bar{x} + y + z)$

Como los dos primeros son iguales, por idempotencia dejamos uno solo:

$f(x,y,z) = (x + y + z) \bullet (x + \bar{y} + z) \bullet (\bar{x} + y + z)$

Y esta expresión es la FORMA NORMAL CONJUNTIVA

Caso 2: partiendo de la tabla de la función booleana

Ejemplo: Pasar a F.N.C. la siguiente función dada por tabla

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

SOLUCIÓN:

Primero buscamos los renglones de la tabla en los que la función vale 0:

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	1
0	0	1	**0**
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	**0**
1	0	1	**0**
1	1	0	1
1	1	1	**0**

Por cada uno de esos renglones escribimos un maxitérmino de acuerdo a los valores de las variables (si valen cero van sin complementar, si valen 1 van complementadas):

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$(x + y + \bar{z}) \rightarrow$ fila 0 0 1

$(\bar{x} + y + z) \rightarrow$ fila 1 0 0

$(\bar{x} + y + \bar{z}) \rightarrow$ fila 1 0 1

$(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}) \rightarrow$ fila 1 1 1

UNIVERSIDAD CAECE
Cámara Argentina de Comercio y Servicios

Y luego multiplicamos todos esos maxitérminos obteniendo la **F.N.C.**

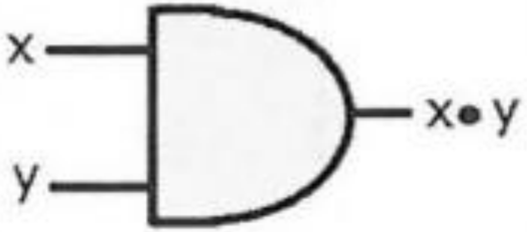
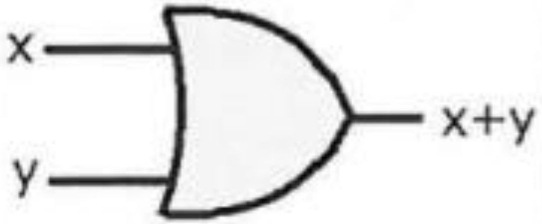
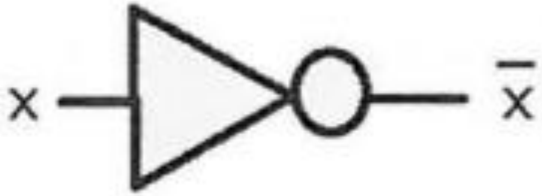
$$f(x,y,z) = (x + y + \bar{z}) \bullet (\bar{x} + y + z) \bullet (\bar{x} + y + \bar{z}) \bullet (\bar{x} + \bar{y} + \bar{z})$$

DIAGRAMAS LÓGICOS:

En esta última parte de la unidad, veremos la implementación de las funciones booleanas en **circuitos combinatorios**, es decir circuitos son memoria, en los cuales la salida depende únicamente de los valores de las entradas. Por ello para cada **combinación** de valores de las entradas, la salida queda determinada.

Dichos circuitos se representan por Diagramas Lógicos formados por Compuertas lógicas que representan las operaciones del Algebra de Boole.

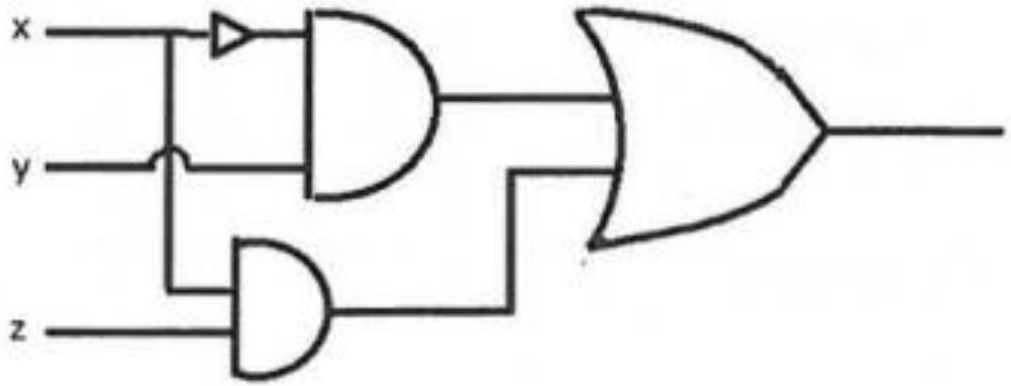
Las compuertas lógicas principales son:

Compuerta	AND	OR	NOT
Gráfico			

Observar que cada una representa una de las operaciones del Algebra de Boole.

Ejemplo:

La función booleana: $f(x,y,z) = \bar{x} \bullet y + x \bullet z$ se representa con el siguiente diagrama lógico:

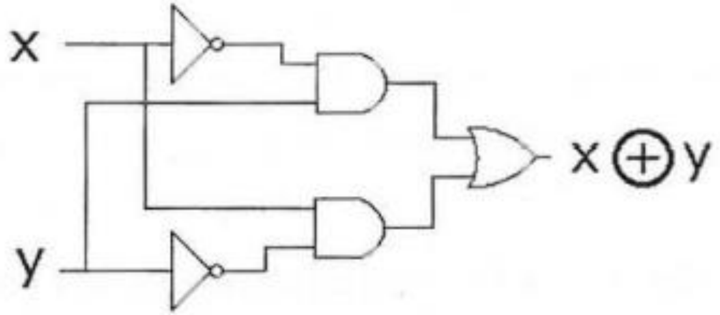


Compuerta XOR

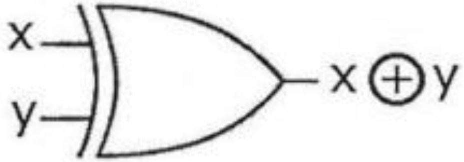
Denotamos por $x \oplus y$ a la expresión análoga a la "o excluyente"

Es decir: $x \oplus y = x \bullet \bar{y} + \bar{x} \bullet y$

Si queremos representar una función que devuelva esto: $f(x,y) = x \oplus y$ mediante un diagrama lógico usando las compuertas principales AND, OR y NOT tendríamos que hacer:



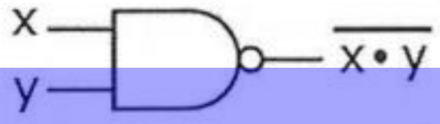
Pero esta compuerta XOR es equivalente:



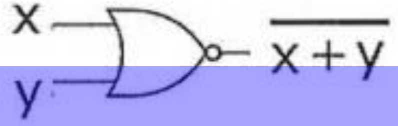
Compuertas NAND y NOR

Son como la AND o la OR pero con la salida negada (complementada):

NAND

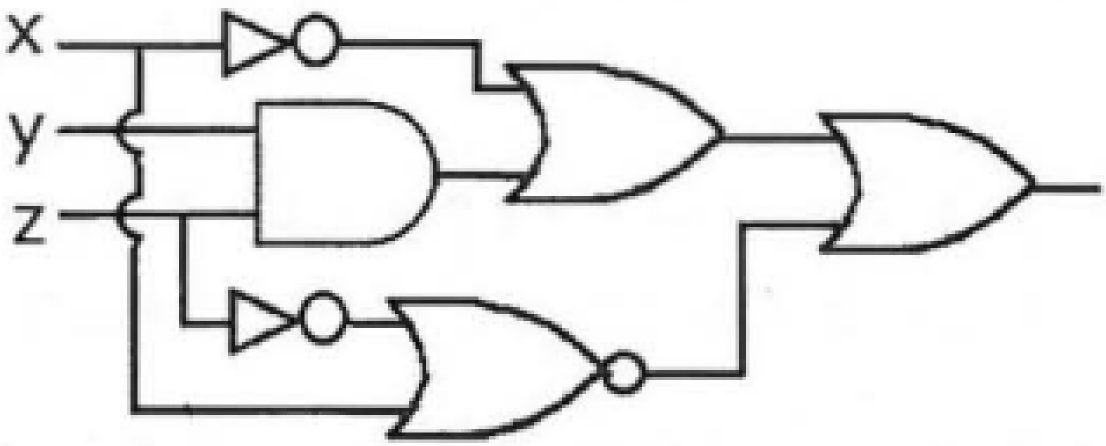


NOR



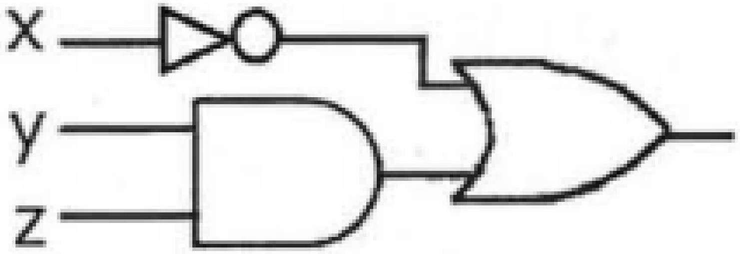
El diagrama lógico de la función booleana:

$f(x,y,z) = \bar{x} + y \bullet z + \overline{x + \bar{z}}$ es:



Pero simplificando la expresión:

$f(x,y,z) = \bar{x} + y \bullet z$ podemos hacer un diagrama más simple:



CONJUNTOS DE COMPUERTAS FUNCIONALMENTE COMPLETOS:

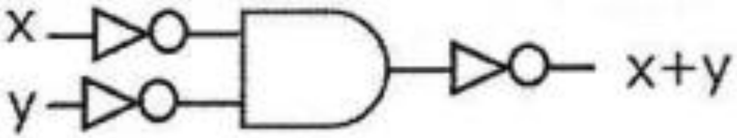
Un conjunto de tipos de compuertas se dice FUNCIONALMENTE COMPLETO si con dicho conjunto se puede representar cualquier función booleana.

Nota: para poder representar cualquier función booleana es necesario y suficiente que se puedan representar las dos operaciones binarias (+ y •) y la unaria (complemento)

☑ **Ejemplo:**

1) El conjunto { AND, OR, NOT } es obviamente funcionalmente completo.

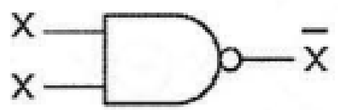
2) El conjunto { AND, NOT } es funcionalmente completo también ya que para realizar la operación +, lo hacemos de esta forma, gracias a la ley de De Morgan: $x + y = \overline{\overline{x} \bullet \overline{y}}$



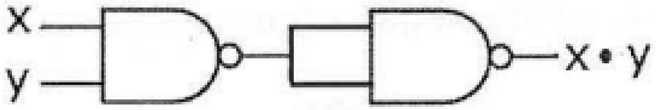
3) Lo mismo ocurre con el conjunto { OR, NOT }. Por De Morgan el producto se puede escribir: $x \bullet y = \overline{\overline{x} + \overline{y}}$ y se representa:

4) El conjunto { NAND } es funcionalmente completo también. Para demostrarlo, debemos hacer las tres operaciones, teniendo en cuenta las propiedades de las Algebras de Boole:

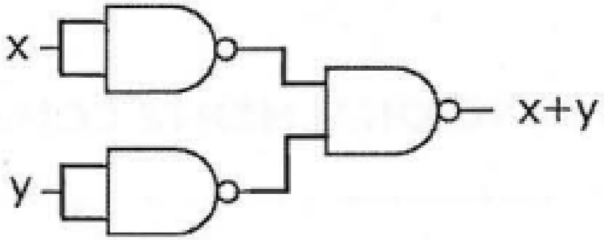
Como $x \bullet x = x$ por idempotencia entonces $\bar{x} = \overline{x \bullet x}$ y ya podemos realizar una negación usando NAND:



Y entonces podemos armar el producto de esta forma: $x \bullet y = \overline{\overline{x \bullet y} \bullet \overline{x \bullet y}}$



Por último, para hacer una suma usando solo compuertas NAND, tenemos en cuenta por Ley de De Morgan e idempotencia: $x + y = \overline{\overline{x \bullet x} \bullet \overline{y \bullet y}}$



5) El conjunto { NOR } es funcionalmente completo también. Para demostrarlo, debemos hacer las tres operaciones de manera similar a lo que hicimos con las NAND.

Ejemplo:

Implementar la función booleana: $f((x,y,z)) = (\,\overline{x}\bullet y + \overline{z}\,)\bullet z + x$ con un circuito formado solamente por compuertas NAND.

Solución:

Primero vamos a simplificar la expresión de la función booleana:

$f((x,y,z)) = (\,\overline{x}\bullet y + \overline{z}\,)\bullet z + x$

Distributiva del • respecto del +: $f((x,y,z)) = \overline{x}\bullet y\bullet z + \overline{z}\bullet z + x$

Complementación en el segundo: $f((x,y,z)) = \overline{x}\bullet y\bullet z + 0_A + x$

Identidad (neutro): $f((x,y,z)) = \overline{x}\bullet y\bullet z + x$

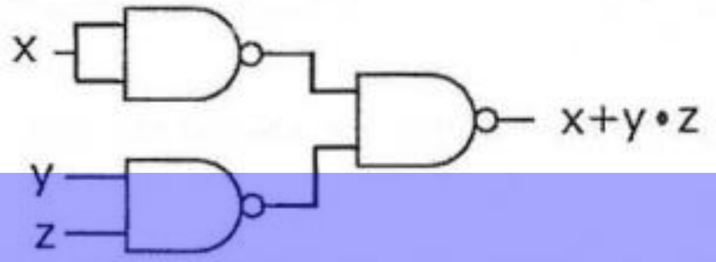
Distributiva del + respecto del •: $f((x,y,z)) = (\,\overline{x} + x\,)\bullet(\,y\bullet z + x\,)$

Complementación en el primero: $f((x,y,z)) = 1_A\bullet(\,y\bullet z + x\,)$

Identidad (neutro): $f((x,y,z)) = y\bullet z + x$

Que se puede escribir (por De Morgan) como: $f((x,y,z)) = \overline{\overline{y\bullet z}\bullet\overline{x\bullet x}}$

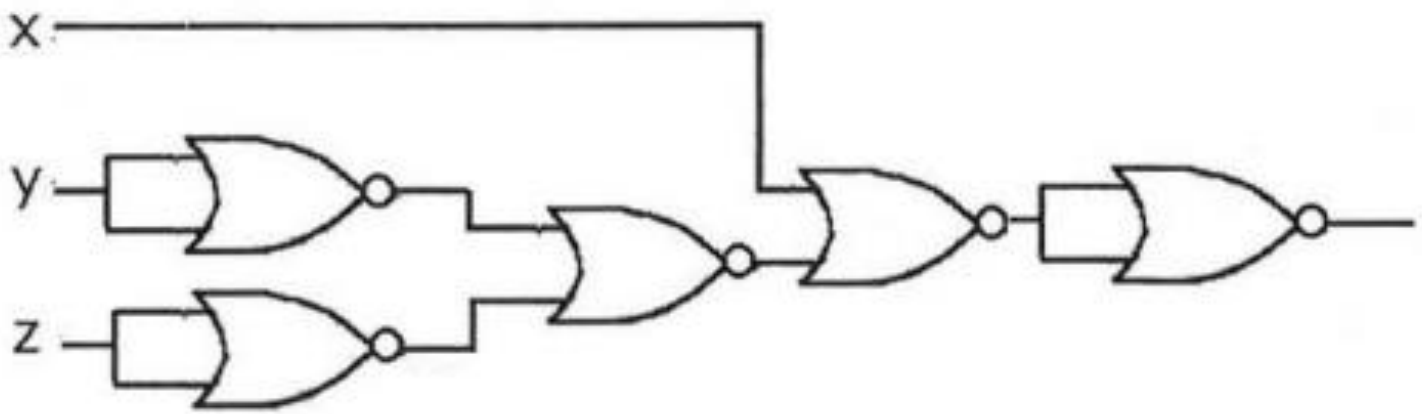
Y entonces se puede implementar con un circuito formado solamente por tres NAND:



Para hacer un circuito solo con NOR que implemente la función: $f((x,y,z)) = y \bullet z + x$

Escribimos: $f((x,y,z)) = y \bullet z + x = \overline{\overline{y+y}+\overline{z+z}} + x = \overline{\left(\overline{\overline{\overline{y+y}+\overline{z+z}}+x}\right)+\left(\overline{\overline{\overline{y+y}+\overline{z+z}}+x}\right)}$

Y el circuito es:



UNIVERSIDAD CAECE

Cámara Argentina de Comercio y Servicios