PROPIEDADES DE LAS RELACIONES BINARIAS

Propiedad reflexiva

$R \subseteq A^2$

Sea R una relación binaria R en A, (A $\neq \varnothing$).

Definición:

Diremos que R es <u>reflexiva</u> si $\forall a \in A$, $a \, R \, a$

Ejemplo:

En $\mathbf{N}$ la relación R definida por: "$x \, R \, y \Leftrightarrow$ x divide a y"

es reflexiva ya que $\forall x \in \mathbf{N}$, $x \, R \, x$ porque x divide a x

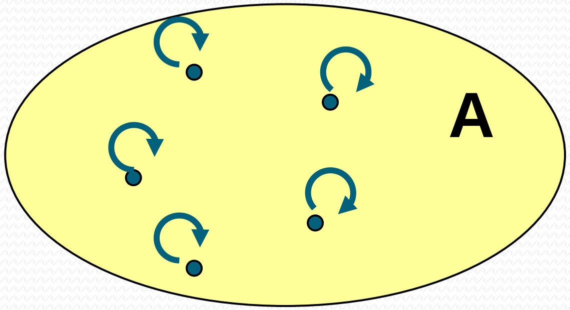
Propiedad reflexiva

Representación Matricial

Si la relación R es reflexiva entonces la diagonal pertenece a la relación. En la matriz asociada, la diagonal es toda de 1.

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dígrafo:



Si la relación R es reflexiva entonces todo elemento tiene una flecha que comienza y termina en sí mismo (un bucle).

Definición:

Diremos que R es arreflexiva si $\forall a \in A:\ a \not R a$

Representación Matricial

$$M_R = \begin{bmatrix} \color{red}{0} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \color{red}{0} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{0} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \color{red}{0} \end{bmatrix}$$

Dígrafo:

Ejemplo:

En N la relación R definida por: "a R b $\Leftrightarrow$ a < b".

Es arreflexiva ya que ningún número natural es menor que sí mismo.

Propiedad no reflexiva

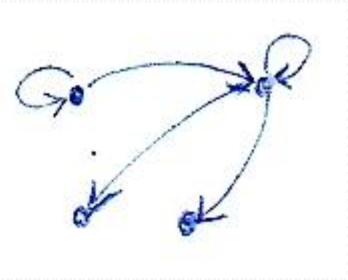
Definición:

Diremos que R es no reflexiva si $\exists a \in A \,/\, a \not R a$

Representación Matricial

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dígrafo:



Ejemplo:

En N la relación R definida por: "a R b $\Leftrightarrow$ a es el doble de b".

es no reflexiva ya que (1, 1) $\notin$R puesto que 1 no es el doble de 1

Propiedad simétrica

Definición:

Diremos que R es simétrica si $\forall$ a, b $\in$A: a R b $\Rightarrow$ b R a

Ejemplo:

1) En Z la relación R definida por:

"a R b $\Leftrightarrow$ a – b es múltiplo de 2".

es simétrica ya que si a R b $\Rightarrow$ hay p$\in$Z tal que a – b = 2p

$\Rightarrow$ b – a = 2(-p) con -p $\in$ Z $\Rightarrow$ b R a

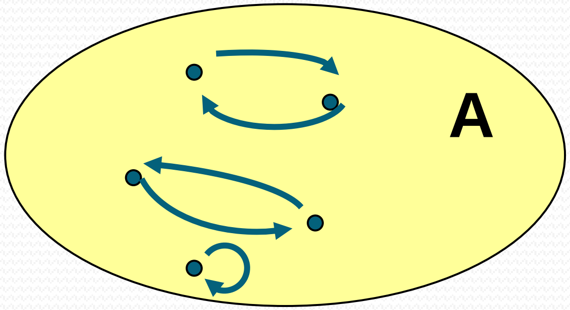
Propiedad simétrica

Representación Matricial

Si la relación R es simétrica sobre A entonces los pares relacionados se reflejan respecto a la diagonal principal, en la matriz asociada.

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dígrafo:



Si la relación R es simétrica entonces todo par de elementos que tiene una flecha la tiene en las dos direcciones

Propiedad asimétrica

Definición:

Diremos que R es asimétrica si $\forall$ a, b $\in$A: a R b $\Rightarrow$ b $\not{R}$ a

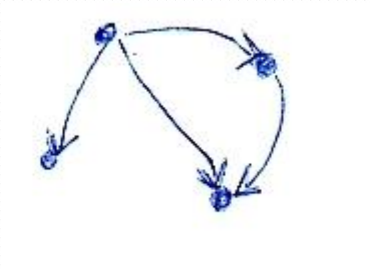
Representación Matricial

No hay pares que se reflejen a través de la diagonal

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dígrafo:

No hay flecha de ida y vuelta en ningún par de elementos.



Ejemplo:

En Z la relación R definida por: “a R b $\Leftrightarrow$ a < b”. es asimétrica ya que si a< b , b por lo tanto no será menor que a.

Propiedad no simétrica

Definición:

Diremos que R es no simétrica si $\exists a\, \exists b \,/\, aRb \wedge b \not R a$

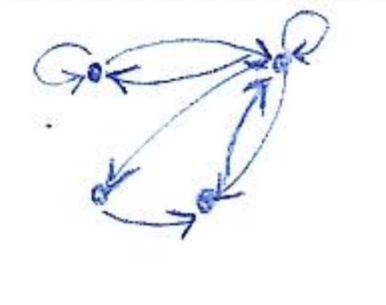
Representación Matricial

Hay pares que se reflejen a través de la diagonal y otros que no.

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dígrafo:

No hay flecha de ida y vuelta en todos los pares relacionados.



Ejemplo:

En N la relación R definida por: "x R y $\Leftrightarrow$ x divide a y" es no simétrica ya que 2R4 porque 2 divide a 4 pero 4 no divide a 2 por lo tanto $(4,2) \notin R$

Propiedad antisimétrica

Definición:

Diremos que R es antisimétrica si $\forall$ a, b $\in$A: [a R b $\wedge$ b R a] $\Rightarrow$ a = b
Otra manera de expresarlo: Si a$\neq$b $\Rightarrow$ [(a,b) $\notin$ R $\vee$ (b,a) $\notin$ R]

Ejemplo:

En N la relación R definida por: "x R y $\Leftrightarrow$ x divide a y" es antisimétrica

Ya que si a R b y b R a entonces existen n, m $\in$N tales que:

b = an y a = bm.

Sustituyendo en esta última,

a = bm = (a.n).m $\Rightarrow$ n.m = 1 $\Rightarrow$

n = m = 1 $\Rightarrow$ a = b.

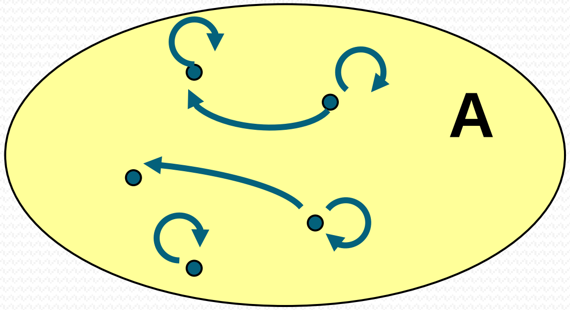
Propiedad antisimétrica

Representación Matricial

Si la relación R es antisimétrica pueden existir pares por encima o por debajo de la diagonal pero ningún par tiene reflejo respecto a la diagonal principal excepto la diagonal misma.

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dígrafo:



La relación R es antisimétrica si para cada par de elementos distintos relacionados la flecha está solo en un sentido

Propiedad Transitiva

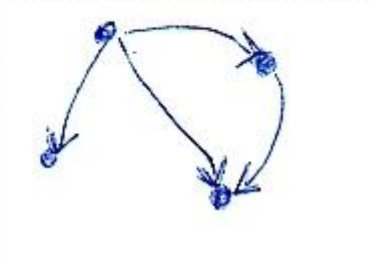
Definición:

Diremos que R es <u>transitiva</u> si $\forall$ a, b, c $\in$A: [a R b $\wedge$ b R c] $\Rightarrow$ a R c

Ejemplo:

En N la relación R definida por: "x R y $\Leftrightarrow$ x divide a y" es transitiva ya que si a R b y b R c entonces existen n, m $\in$N tales que: b = an y c = bm. Sustituyendo en esta última: c = bm = (a.n).m= a(n.m) con n.m $\in$N $\Rightarrow$ b R c.

Dígrafo:

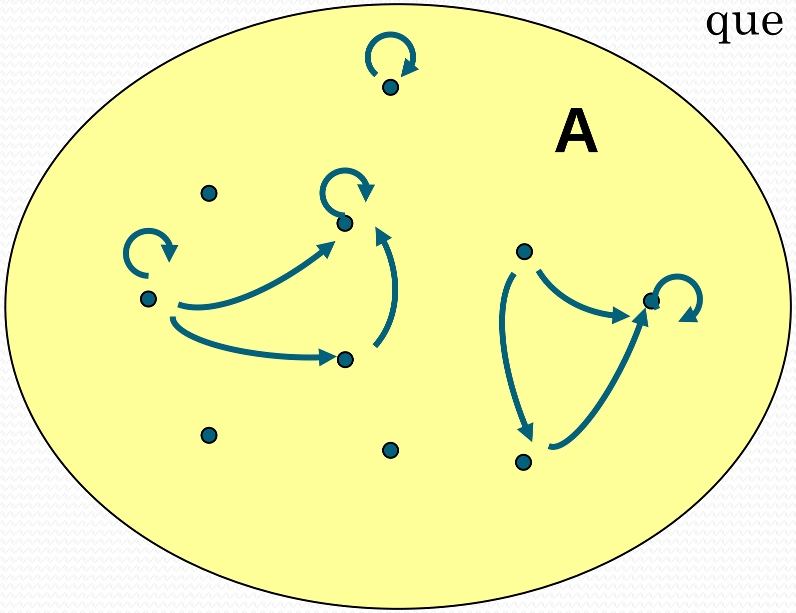


Cada vez que hay un camino de un elemento a otro pasando por un elemento intermedio, también existe un camino entre ambos elementos directamente.

Propiedad Transitiva

Dígrafo:

La relación R es transitiva si cada vez que hay un camino entre tres elementos, también está la flecha que comienza en el principio del camino y va al elemento que es final del camino.



Propiedad no transitiva

Definición:

Diremos que R es no transitiva si $\exists a\, \exists b\, \exists c \,/\, aRb \wedge bRc \wedge a \not R c$

Ejemplo:

En N la relación R definida por: "a R b $\Leftrightarrow$ a es el doble de b". es no transitiva ya que (4, 2) $\in$ R y (2, 1) $\in$ R puesto que 4 es el doble de 2 y 2 es el doble de 1, sin embargo 4 no es el doble de 1, de donde (4,1)$\notin$ R

Propiedad atransitiva

Definición:

Diremos que R es atransitiva si $\forall a\, \forall b\, \forall c \,/\, aRb \wedge bRc \Rightarrow a \not R c$

Ejemplo:

En A={1,2,3} "aRb $\Leftrightarrow$a+b=3"
R ={(1,2), (2,1)} es atransitiva , ya que si (1,2)$\in$R y (2,3) $\in$ R, entonces (1,3) $\notin$R

$$R \subseteq A^2 \quad M: matriz\ asociada$$

$$I_n: matriz\ identidad \quad M^t: matriz\ transpuesta$$

$$R\ es\ reflexiva \Leftrightarrow I_n \leq M$$

$$R\ es\ simétrica \Leftrightarrow M = M^t$$

$$R\ es\ transitiva \Leftrightarrow M^2 \leq M$$

$$R\ es\ antisimétrica \Leftrightarrow M \wedge M^t \leq I_n$$

Nota:

S y T matrices booleanas del mismo orden

$S \prec T \quad si\ s_{ij} \leq t_{ij}$

Tipos de relaciones

Relación de equivalencia

Diremos que una relación binaria sobre A, es una Relación de equivalencia si satisface las tres propiedades:

- R es reflexiva
- R es simétrica
- R es transitiva

Ejemplos:

Son de equivalencia:

1) En Z la relación R definida por: a R b $\Leftrightarrow$ a – b es múltiplo de 3.

2) Dado un conjunto $D \subseteq U$, la relación:

$$A \, R \, B \quad \Leftrightarrow \quad A \cap D = B \cap D$$

Tipos de relaciones

Relación de orden

Diremos que una relación binaria sobre A, es una relación de orden parcial si satisface las tres propiedades:

- R es reflexiva
- R es antisimétrica
- R es transitiva

En este caso diremos que el conjunto A está parcialmente ordenado

Ejemplos:

Son Relaciones de orden:

1) En D60 , el conjunto de todos los divisores de 60, la relación R definida por: a R b $\Leftrightarrow$ a divide a b.
2) En R, la relación definida por a R b $\Leftrightarrow$ $a \leq b$.