INTEGRACIÓN PARTE 3

Métodos de Integración

1.Método de integración por Sustitución

- El método consiste en sustituir el integrando o parte de éste **por** otra función para que la expresión resultante sea más fácil de integrar. Si escogemos un cambio de variable adecuado de modo que al aplicarlo obtenemos en el **integrando** un función multiplicada **por su derivada**, la **integral** será inmediata.

Ejemplo

1. $\int 2x\sqrt{1+x^2}\ dx$

llamamos **u= 1+x²** derivamos **du= 2x dx**

ahora tenemos

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\ dx$$ donde

du = 2x dx y **u= 1+x²**

Sustituyendo entonces nos queda $\int \sqrt{u}$ du

Esta integral es mucho mas facil de resolver

Resolvemos

$$\int \sqrt{u}\ du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + k$$

Haciendo la sustitición nuevamente

u= 1+x² tenemos

$$\frac{2\sqrt{(1+x^2)^3}}{3} + k$$

2. $\int \frac{dx}{(3x-2)^5} =$

u= 3x-2 du= 3 dx

Sustituimos y compensamos agregando un 3 y 1/3

$$\int \frac{1}{3} \frac{3dx}{(3x-2)^5} =$$

ahora sustituimos

$$\frac{1}{3} \int u^{-5}\, du = \frac{1}{3} \frac{u^{-4}}{(-4)} + k = -\frac{1}{12}\,(3x-2)^{-4} + k$$

3. $\int \frac{x^2}{x+5} dx =$

u=x+5 du=1.dx

x=u-5 entonces x^2= $(u-5)^2$= u^2-10u+25

Sustituyendo

$$\int \frac{u^2-10u+25}{u} du = \int \frac{u^2}{u} - \frac{10u}{u} + \frac{25}{u} \; du$$

$$= \int u - 10 + 25u^{-1} du = \frac{u^2}{2} - 10u + 25 \ln|u|$$

$$= sustituyendo$$

$\frac{1}{2}(x+5)^2 - 10\,(x-5) + 25 \ln\,|x+5|$+k

REGLA DE SUSTITUCIÓN

- Si $g(x) = u$ es una función derivable cuyo rango es un intervalo [a , b] y f es continua en [a , b] entonces

$$\int f(g(x)).\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

2. MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR PARTES

- Cuando el integrando está formado por un producto (o una división, que podemos tratar como un producto) se recomienda utilizar el método de integración por partes que consiste en aplicar la siguiente fórmula:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Método:

- El integrando debe ser un producto de dos factores.
- Uno de los factores será u y el otro será dv.
- Se calcula du derivando u y se calcula v integrando dv.
- Se aplica la fórmula.

Ejemplos

› 1.

$$\int xe^x dx$$

Integramos por partes:

$$\int xe^x dx = \begin{bmatrix} u = x \rightarrow du = 1 \\ dv = e^x \rightarrow \quad v = e^x \end{bmatrix} =$$

$$= xe^x - \int e^x \cdot 1 dx = xe^x - e^x =$$

$$= e^x(x-1) + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

2. $$\int x \cos x \, dx$$

Integramos por partes

$$\int x \cos x \, dx = \begin{bmatrix} u = x \rightarrow & du = 1 \\ dv = \cos x \rightarrow & v = \sin x \end{bmatrix} =$$

$$= x \sin x - \int \sin x \, dx =$$

$$= x \sin x + \cos x + C \quad C \in \mathbb{R}$$

3.

$$\int \ln(x)\,dx$$

$$u = \ln x \quad \rightarrow \quad du = \frac{1}{x}$$

$$dv = 1 \quad \rightarrow \quad v = x$$

$$\int \ln(x)dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C$$

4.

$$\int e^{-x}\cos x\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} u = e^{-x} & \rightarrow & du = -e^{-x} \\ dv = \cos x & \rightarrow & v = \sin x \end{array}}$$

$$\int e^{-x}\cos x\,dx = e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\sin x\,dx =$$

$$= \left[\begin{array}{lll} u = e^{-x} & \rightarrow & du = -e^{-x} \\ dv = \sin x & \rightarrow & v = -\cos x \end{array}\right] =$$

$$= e^{-x}\sin x + \left(-e^{-x}\cos x + \int e^{-x}\cos x\,dx\right)$$

$$\int e^{-x}\cos x\,dx =$$

$$= e^{-x}\sin x - e^{x}\cos x - \int e^{-x}\cos x\,dx$$

$$2\int e^{-x}\cos x\,dx = e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x$$

$$\int e^{-x}\cos x\,dx = \frac{e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x}{2} =$$

$$= \frac{e^{-x}}{2}(\sin x - \cos x) + C$$

π

3. MÉTODO POR FRACCIONES SIMPLES O PARCIALES

El método de las fracciones parciales consiste en reducir un cociente de polinomios en fracciones más simples, que permitan obtener de manera inmediata una integral o una transformada de Laplace Inversa. El requisito más importante es que el grado del polinomio del denominador sea ***estrictamente mayor*** que el grado del numerador.

- Definimos fracciones parciales o simples a la función F(x) en la cual dicha función depende de un numerador y un denominador F(x)= P(x) / Q(x).

Para que sea una fracción parcial o simple el grado del denominador tiene que ser ***mayor*** al grado del numerador.

Ejemplo:

1

$$\int \frac{2x+5}{x^2+5x+6}\,dx$$

2. En este ejemplo el grado del denominador es menor que el grado del numerador

$$\frac{x^3 + 3x}{x^2 - 2x - 3}$$

Podemos transformarlo en una fracción simple dividiendo Recordamos

grado de *P* mayor o igual que el de *Q*

Al efectuar la división tendremos que

P(x)=Q(x)·C(x)+R(x)

Siendo *C(x)* el polinomio cociente y *R(x)* el polinomio resto de la división.

Si dividimos la expresión por *Q(x)* obtenemos

P(x)/Q(x)=C(x)+R(x)/Q(x)

Hacemos la división para recordar

x^3+0x^2+3x+0	x^2-2x-3
$-x^3+2x^2+3x$	**$x+2$** $\leftarrow$ *cociente*
/ $2x^2+6x$	
$-2x^2+4x+6$	
/ **$10x+6$**	$\leftarrow$***resto***

$P(x) = Q(x)\,C(x) + R(x)$

es decir $x^3+3x = (x^2-2x-3)(x+2) + 10x+6$

Dividimos por Q(x) y simplificamos

$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$

En nuestro ejemplo

$$\frac{x^3+3x}{x^2-2x-3} = (x+2) + \frac{10x+6}{x^2-2x-3}$$

De este modo, aplicando las propiedades de las integrales, habremos descompuesto la integral en la suma de dos integrales:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} = \int C(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$$

$$\int \frac{x^3 + 3x}{x^2 - 2x - 3}\,dx = \int (x+2)\,dx + \int \frac{10x + 6}{x^2 - 2x - 3}\,dx$$

Siempre debemos Factorizar el denominador de nuestra fracción simple. Y aparecen distintos casos u opciones .

Hay 4 casos para la resolución según este método :

Caso 1 : Raíces reales distintas

Caso 1:

<u>Factores lineales distintos:</u>

Cada factor lineal **ax+b** del denominador de una fracción racional propia le corresponde una fracción de la forma $\frac{A}{ax+b}$ siendo A una constante a determinar.

$$\frac{1}{(x+3)(x-2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2}$$

Ejemplo:

1. $\int \frac{(2x+3)\,dx}{x^3+x^2-2x}$

El denominador de dicha fracción se pueda factorizar por factor común:

$$x(x^2+x+2)$$

Al obtener estos dos factores debemos percatarnos que estos se puedan reducir lo más posible, el segundo factor se puede factorizar ya que es un trinomio de la forma x^2+bx+c dando como resultado:

$$x(x-1)(x+2)$$

De manera que dicha fracción parcial que daría de esta forma:

$$\frac{(2x+3)\,dx}{x(x-1)(x+2)}$$

Posteriormente se acomodan los factores tomando como referencia el caso 1:

$$\frac{(2x+3)\,dx}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x+2)}$$

Por lo cual A, B y C son constantes a determinar, por lo cual vamos a multiplicar ambos lados de la expresión por el denominador:

$$(2x+3) = A(x-1)(x+2) + B(x)(x+2) + C(x)(x-1)$$

$$2x+3 = Ax^2 + Ax - 2A + Bx^2 + 2Bx + Cx^2 - Cx$$

Separamos por factor común:

$$2x+3 = (A+B+C)x^2 + (A+2B-C)x - 2A$$

Posteriormente vamos a igualar los coeficientes de las mismas potencias de x en los dos términos del lado izquierdo, de manera que obtendremos tres ecuaciones:

$$A + B + C = 0$$

$$A + 2B - C = 2$$

$$-2A = 3$$

Una vez que hemos resuelto este sistema de ecuaciones obtenemos los valores de las constantes que son:

$$A = -\frac{3}{2} \quad B = \frac{5}{3} \quad C = -\frac{1}{6}$$

Es momento de sustituir los valores:

$$\frac{(2x+3)\,dx}{x(x-1)(x+2)} = -\frac{3}{2x} + \frac{5}{3(x-1)} - \frac{1}{6(x+2)}$$

Después se integra:

$$\int \frac{(2x+3)\,dx}{x(x-1)(x+2)} = -\frac{2}{3}\int \frac{dx}{x} + \frac{5}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+2}$$

Después se integra:

$$\int \frac{(2x+3)\,dx}{x(x-1)(x+2)} = -\frac{2}{3}\int \frac{dx}{x} + \frac{5}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+2}$$

Resolvemos las integrales del lado derecho por la formula $\int \frac{dx}{v} = \ln v + c$:

$$= -\frac{2}{3}\ln(x) + \frac{5}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{6}\ln(x+2) + c$$

Usando propiedades logarítmicas el resultado final sería:

$$= ln\frac{(x-1)^{\frac{5}{3}}}{(x)^{\frac{2}{3}}(x+2)^{\frac{1}{6}}} + c$$

Caso 2 : Raíces reales con multiplicidad

Caso 2:

Factores lineales iguales:

A cada factor lineal **ax+b** que figure **n** veces en el denominador de una fracción racional propia le corresponde una suma de n fracciones de la forma $\frac{A1}{ax+b} + \frac{A2}{(ax+b)^2} \ldots\ldots \frac{An}{(ax+b)^N}$
Siendo A una constante a determinar.

$$\frac{6x^2-14x-27}{(x+2)(x-3)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}$$

Ejemplo #2

$$\int \frac{X^2+10x-36}{X+(X-3)^2}$$

- Se acomodan los factores de la siguiente manera:

$$\frac{X^2+10x-36}{X(X-3)^2}=\frac{A}{X}+\frac{B}{X-3}+\frac{C}{(X-3)^2}$$

- Se obtiene un común denominador

$X^2+10x-36= A(X-3)^2+B(X)(X-3)+C(X)$

- Resolviendo

$X^2+10x-36= A(X^2-6X+9)+B(X^2-3X)+C(X)$

- Se obtienen las 3 ecuaciones y se resuelven con el método mas conveniente

$A+B=1$	$A=-4$
$-6A-3B+C=10$	$C=1$
$9A=-36$	$B=5$

- Se sustituye en la ecuación original

$$\frac{X^2+10x-36}{X(X-3)^2}=\frac{-4}{X}+\frac{5}{X-3}+\frac{1}{(X-3)^2}$$

- Se obtienen el resultado de las integrales:

$$\int \frac{-4}{X}\,dX=-4\,Ln\,|X|$$

$$\int \frac{5\,dX}{X-3}=5\,Ln\,|X-3|$$

$$-\int \frac{dX}{(X-3)^2}=-\frac{1}{x-3}$$

2. $\int \frac{(5x^2-36x+48)\,dx}{x(x-4)^2}$

Al obtener estos dos factores debemos percatarnos que estos se puedan reducir lo más posible. Utilizando el caso 2 la descomposición de fracciones parciales seria de esta manera:

$$\frac{(5x^2-36x+48)\,dx}{x(x-4)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{C}{(x-4)}$$

Por lo cual A, B y C son constantes a determinar, por lo cual vamos a multiplicar ambos lados de la expresión por el denominador:

$$(5x^2-36x+48) = A(x-4)^2 + B(x) + C(x)(x-4)$$

$$(5x^2-36x+48) = Ax^2 - 8Ax + 16A + Bx + Cx^2 - 4Cx$$

Separamos por factor común:

$$(5x^2 - 36x + 48) = (A + C)x^2 + (-8A + B - 4C)x + (16A)$$

Posteriormente vamos a igualar los coeficientes de las mismas potencias de x en los dos términos del lado izquierdo, de manera que obtendremos tres ecuaciones:

$$A + C = 5$$

$$-8A + B - 4C = -36$$

$$16A = 48$$

Una vez que hemos resuelto este sistema de ecuaciones obtenemos los valores de las constantes que son:

$$A = 3 \quad B = -4\, C = 2$$

Es momento de sustituir los valores:

$$\frac{(5x^2 - 36x + 48)\,dx}{x(x-4)^2} = \frac{3}{x} - \frac{4}{(x-4)^2} + \frac{2}{(x-4)}$$

Después se integra:

$$\int \frac{(5x^2 - 36x + 48)\,dx}{x(x-4)^2} = 3\int \frac{dx}{x} - 4\int \frac{dx}{(x-4)^2} + 2\int \frac{dx}{(x-4)}$$

Resolvemos las integrales del lado derecho por la formula $\int \frac{dx}{v} = \ln v + c$ y $\int v^n\,dv = \frac{v^{n+1}}{n+1}$:

$$= 3\ln(x) - \frac{4}{(x-4)} + \ln(x-4) + c$$

Caso 3 : Se presentan raíces complejas de orden simple(no se repiten)
El denominador contiene factores de segundo grado que no se repite.

Caso 3:

Factores cuadráticos distintos:

A cada factor cuadrático reducible ax^2+bx+c que figure en el denominador de una fracción racional propia, le corresponde una fracción de la forma $\frac{Ax+b}{ax^2+bx+c}$ siendo A y B constantes a determinar.

$$\frac{A_1x+B_1}{(a_1x^2+b_1x+c_1)}+\frac{A_2x+B_2}{(a_2x^2+b_2x+c_2)}+\ldots+\frac{A_nx+B_n}{(a_nx^2+b_nx+c_n)}$$

A todo factor no repetido de segundo grado, como

$$x^2 + px + q$$

le corresponde una fracción parcial de la forma

$$\frac{Ax + B}{X^2 + px + q}$$

$$\frac{4x^2 - 8x + 1}{x^2 - x + 6} = \frac{4x^2 - 8x + 1}{(x+2)(x^2 - 2x + 3)} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{Bx + C}{(x^2 - 2x + 3)}$$

Ejemplo

3. $\int \frac{4\,dx}{x^3+4x}$

El denominador de dicha fracción se pueda factorizar por factor común:

$$x(x^2+4)$$

Al obtener estos dos factores debemos percatarnos que estos se puedan reducir lo más posible. En este caso no es necesario factorizarlo más. Así que tomando como partida el caso 3 dicha fracción parcial que daría de esta forma:

$$\frac{4\,dx}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+4)}$$

Por lo cual A, B y C son constantes a determinar, por lo cual vamos a multiplicar ambos lados de la expresión por el denominador:

$$4 = A(x^2+4) + Bx + C(x)$$

$$4 = Ax^2 + 4A + Bx^2 + Cx$$

Separamos por factor común:

$$4 = (A + B)x^2 + (C)x + (4A)$$

Posteriormente vamos a igualar los coeficientes de las mismas potencias de x en los dos términos del lado izquierdo, de manera que obtendremos tres ecuaciones:

$$A + B = 0$$

$$C = 0$$

$$4A = 4$$

Una vez que hemos resuelto este sistema de ecuaciones obtenemos los valores de las constantes que son:

$$A = 1 \quad B = -1 \quad C = 0$$

Es momento de sustituir los valores:

$$\frac{4\,dx}{x(x^2+4)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{(x^2+4)}$$

Después se integra:

$$\int \frac{4\,dx}{x(x^2+4)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x\,dx}{(x^2+4)}$$

Resolvemos las integrales del lado derecho por la formula $\int \frac{dx}{v} = \ln v + c$:

$$= \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + c$$

Usando propiedades logarítmicas el resultado final sería:

$$= ln\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} + c$$

Caso 4: Se presentan raíces complejas de orden múltiple (se repiten)
El denominador contiene factores de segundo grado que se repite.

Caso 4:

<u>Factores cuadráticos iguales:</u>

A cada factor cuadrático reducible

ax^2+bx+c que se repita **n** veces en el denominador de una fracción racional propia, le corresponde una sema de n fracciones de la forma $\frac{A1x+b1}{ax^2+bx+c}+\cdots+\frac{Anx+bn}{(ax^2+bx+c)^N}$

siendo A y B constantes a determinar.

$$\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}.$$

Ejemplo

$$4. \int \frac{(1 - x + 2x^2 - x^3)\, dx}{x(x^2+1)^2}$$

Al obtener estos dos factores debemos percatarnos que estos se puedan reducir lo más posible. Utilizando el caso 4 la descomposición de fracciones parciales seria de esta manera:

$$\frac{(1 - x + 2x^2 - x\text{^}3\ )\, dx}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{(x^2+1)} + \frac{Dx + E}{(x^2+1)^2}$$

Por lo cual A, B, C y D son constantes a determinar, por lo cual vamos a multiplicar ambos lados de la expresión por el denominador:

$$(1 - x + 2x^2 - x^3) = A(x^2+1)^2 + Bx + C(x)(x^2+1) + Dx + E(x)$$

$$(1 - x + 2x^2 - x^3) = Ax^4 + 2Ax^2 + A + Bx^4 + Bx^2 + Cx^3 + Cx + Dx^3 + Dx^2 + Ex$$

Separamos por factor común

$$(1 - x + 2x^2 - x^3) = (A + B)x^4 + (C)x^3 + (2A + B + D)x^2 + (C + E)x + (A)$$

Posteriormente vamos a igualar los coeficientes de las mismas potencias de x en los dos términos del lado izquierdo, de manera que obtendremos tres ecuaciones:

$$A + B = 0$$

$$C = -1$$

$$2A + B + D = 2$$

$$C + E = -1$$

$$A = 1$$

Una vez que hemos resuelto este sistema de ecuaciones obtenemos los valores de las constantes que son:

$$A = 1 \quad B = -1 \quad C = -1 \quad D = 1 \quad E = 0$$

Es momento de sustituir los valores:

$$\frac{(1 - x + 2x^2 - x\text{^}3\ )\,dx}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x-1}{(x^2+1)} + \frac{x}{(x^2+1)^2}$$

Después se integra:

$$\int \frac{(1 - x + 2x^2 - x\text{^}3\ )\,dx}{x(x^2+1)^2} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x-1}{(x^2+1)} dx + \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

Resolvemos las integrales del lado derecho por la formula $\int \frac{dv}{v} = \ln v + c$,

$\int \frac{dv}{v^2+a^2}$, $\int v^n\,dv = \frac{v^{n+1}}{n+1}$:

Usando propiedades logarítmicas el resultado final sería:

$$= \ln(x) - \frac{\ln(x^2+1)}{2} + arc\ tg\ (x) + \frac{1}{2} . \frac{(x^2+1)^3}{3} + c$$