ESTRUCTURAS DISCRETAS

TEMA: MODELOS DE REDES Y REDES DE PETRÍ

INTRODUCCIÓN

El flujo vial en una ciudad, una red de aguas negras, una red informática son alguno ejemplos de aplicación del Modelo de Redes. Si se sobrecarga una calle, una cañería o un canal que obviamente tiene un límite de capacidad, posiblemente se obtenga un flujo más lento o una tubería con demasiada presión. Ante estos problemas, el Modelo de Redes es un método o secuencia el cual permite tomar una decisión acertada la cual podría ser mejorar o dar mayor aprovechamiento a los flujos a vías que tengan más capacidad, creando nuevas vías o eliminando algunas antiguas. También aporta un método para maximizar este flujo de manera eficiente de forma tal que se aprovechen al máximo los recursos. La maximización de flujos es un problema típico de la Investigación de Operaciones, el cual tiene muchas aplicaciones.

Por otra parte el objetivo de las Redes de Petrí se enfoca más al campo de la computación y es el de buscar mayor eficiencia y concurrencia en el tratamiento de los datos y que éstos no se estanquen o sobrecarguen la capacidad que ellos poseen en un procesador por medio de gráficas especiales.

MODELOS DE REDES

Definición

Una Red de Transporte (o simplemente, una red) es un dígrafo simple etiquetado $D = (V, A, \varphi)$, tal que:

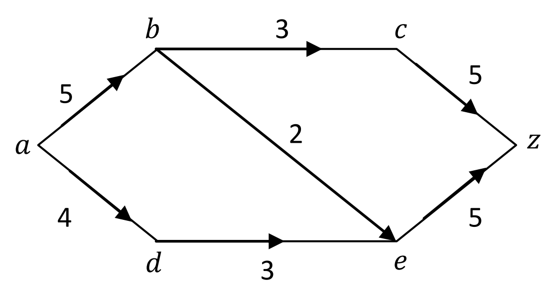
i) Existe un vértice $a \in V$ tal que a es una fuente (o vértice fijo que no tiene aristas de entrada)

ii) Existe un vértice $z \in V$ tal que z es un sumidero (o vértice fijo que no tiene arista de salida)

iii) El peso C_{ij} de la arista dirigida de i a j llamado capacidad de la arista es un número no negativo.

<u>Nota</u>: En adelante, llamaremos (i, j) a la arista dirigida del vértice i al vértice j.

El siguiente es un ejemplo de una red. El vértice a es la fuente y el vértice z es el sumidero. Por ejemplo, la capacidad de la arista (a, b) es $C_{ab} = 4$.



Definición

Sea D una red y sea C_{ij} la capacidad de la arista (i,j) se dice que un flujo F en D asigna a cada arista dirigida (i,j) un número no negativo F_{ij} tal que satisface:

i) $\forall i,j \in V$: $F_{ij} \leq C_{ij}$

ii) Para cada vértice $j \in V$, se verifica la ecuación $\sum_{i\in V} F_{ij} = \sum_{i\in V} F_{ji}$

<u>Observaciones</u>

1. La ecuación ii) es la llamada Ecuación de conservación de flujo.

2. Las sumatorias de la ecuación ii) se realizan sobre todos los vértices $i \in V$. Si para alguno de ellos, no existe arista que lo conecte con el vértice j, entonces se toma $F_{ij} = 0$.

3. Sea $j \in V$. Para cada $i \in V$, F_{ij} es el flujo de la arista (i,j) y F_{ji} es el flujo de la arista (j,i). Definimos entonces:

$\sum_{i\in V} F_{ij}$ flujo de entrada a j y

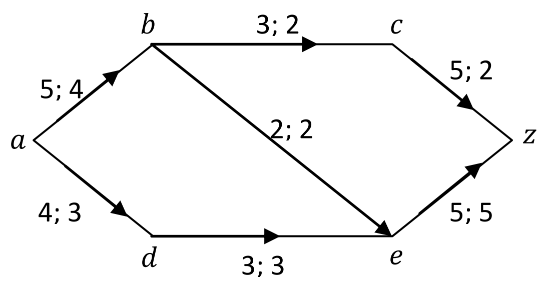
$\sum_{i\in V} F_{ji}$ flujo de salida de j.

En la red del ejemplo, podemos definir un flujo de acuerdo a las siguientes asignaciones:

$F_{ab} = 4$, $F_{ad} = 3$, $F_{bc} = 2$, $F_{be} = 2$, $F_{de} = 3$, $F_{ez} = 5$, $F_{cz} = 2$

El flujo de entrada de b es $F_{ab} = 4$ y el de salida $F_{bc} + F_{be} = 2 + 2 = 4$

<u>Nota</u>: una arista se etiqueta “x; y” indicando que su capacidad es “x” y el flujo “y”. En el ejemplo tenemos:



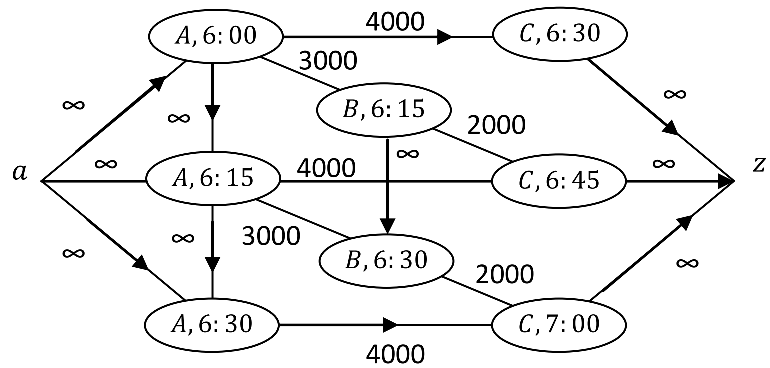
Teorema 1

Dado un flujo F en una red, el flujo de salida de la fuente es igual al flujo de entrada del sumidero. Este valor será el valor del flujo F.

En el ejemplo dado, ambos son iguales a 7. Es decir, el valor del flujo de la red es 7.

<u>Ejemplo 1</u>

Para ir de la ciudad A a la ciudad C podemos hacerlo directamente o pasar por la ciudad B. Durante el periodo de 6:00 a 7:00 PM, el tiempo promedio de A a B es 15 minutos, de B a C 30 minutos, y de A a C 30 minutos. La capacidad máxima de la ruta desde A hasta B es de 3000 autos, desde B hasta C de 2000 autos y desde A hasta C de 4000 autos. Representar el flujo de tráfico desde A hasta C, de 6:00 a 7:00 PM mediante una red.



FLUJO MÁXIMO

En una red D, el flujo máximo es un flujo cuyo valor es máximo. Generalmente existen varios flujos con el mismo valor máximo. Existe un algoritmo para encontrar el flujo máximo, el cual consiste básicamente en considerar un flujo inicial en cada arista igual a cero, después determinar un camino específico de la fuente al sumidero y e ir incrementando el flujo hasta que no pueda mejorarse más.

Antes de definir el algoritmo debemos considerar lo siguiente:

- En adelante llamaremos D a la red con fuente a, sumidero z y capacidad C.
- P = (v_0, v_1, … , v_n) con v_0 = a y v_n = z es un camino de a a z en esta red.
- Si una arista e en P está dirigida v_{i-1} a v_i, decimos que e está dirigida en forma propia con respecto a P, en caso contrario, si e está dirigida de v_{i+1} a v_i se dice que está dirigida en forma impropia con respecto a P.
- Si se determina un camino P de la fuente al sumidero en donde cada arista de P está orientada en forma propia y el flujo en cada arista es menor que la capacidad de la arista, es posible aumentar el valor de flujo.
- Si se determina un camino P de la fuente al sumidero en donde x es un vértice interior de este camino, tenemos 4 posibilidades para las orientaciones de las aristas e_1 y e_2 incidentes con x:

  - Caso A

  La arista e_1 está orientada en forma impropia y e_2 no. En este caso, si incrementamos en α el flujo en e_2, debemos disminuir en α el flujo en e_1 de manera tal que el flujo de entrada siga siendo igual al flujo de salida de x.

  - Caso B

  La arista e_2 está orientada en forma impropia y e_1 no. En este caso, si incrementamos en α el flujo en e_1, debemos disminuir en α el flujo en e_2 de manera tal que el flujo de entrada siga siendo igual al flujo de salida de x.

  - Caso C

  Las dos aristas están en forma impropia. Se debe disminuir el flujo en ambas aristas en α.

- Caso D

  Las dos aristas están en forma propia. Si se incrementa el flujo en ambas aristas en α, el flujo de entrada en x seguirá siendo igual al flujo de salida.

Teorema 2

Sea P un camino de a a z en una red D tal que:

· Para cada arista (i, j) de P orientada en forma propia $F_{ij} < C_{ij}$

· Para cada arista (i, j) de P orientada en forma impropia $F_{ij} > 0$

Sea $\Delta = \min X$

Donde X es el conjunto formado por los valores $C_{ij} - F_{ij}$ si (i, j) está orientada en forma propia en P, y F_{ij} si (i, j) está orientada en forma impropia en P.

Definimos $$F^*{}_{ij} = \begin{cases} F_{ij} & si\ (i,j)\ no\ está\ en\ P \\ F_{ij} + \Delta & si\ (i,j) está\ orientada\ en\ forma\ propia\ en\ P \\ F_{ij} - \Delta & si\ (i,j) está\ orientada\ en\ forma\ impropia\ en\ P \end{cases}$$

Entonces, F^* es un flujo cuyo valor es Δ unidades mayor al valor de F.

Algoritmo de flujo máximo

Si no existieran caminos que satisfagan las condiciones del teorema 2, entonces el flujo es máximo. Así, es posible construir un algoritmo basándonos en este teorema:

- Iniciar con un flujo (por ejemplo, uno tal que el flujo en cada arista sea 0)
- Buscar un camino que satisfaga las condiciones del teorema 2. Si no existe el tal camino el flujo es máximo y hemos terminado.
- Se incrementa el flujo enΔ, donde Δ se define como en el teorema 2 y se regresa al paso 2.

Definición

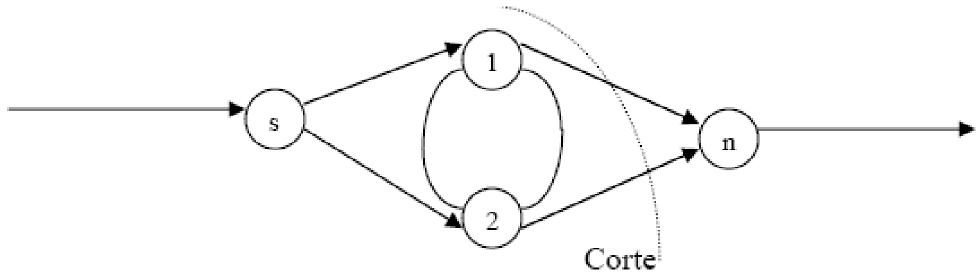
Un corte que separa el vértice a del vértice z es una partición de los vértices de la red en dos subconjuntos S y S^* tales que el a está en S y z está en S^*.

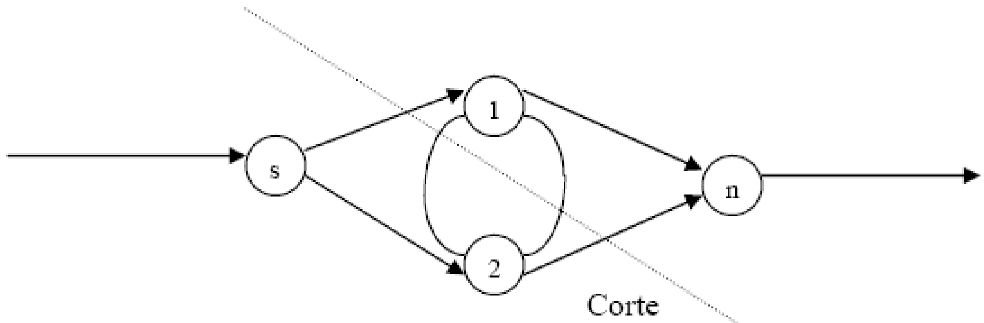
La capacidad de un corte es la suma de todas las capacidades de las aristas procedentes de los vértices de S a los vértices de S^*. Se denota $K(S, S^*)$. Esto es

$$K(S, S^*) = \sum_{i \in S, j \in S^*} k_{ij}$$

El corte con la capacidad más pequeña se denomina *corte mínimo*.

Por ejemplo, para la siguiente red tenemos los cortes:





A partir de estos ejemplos se puede apreciar que si todos los arcos de un corte se eliminan de la red entonces no existe un camino que una la fuente con el sumidero, de aquí que el flujo de a a z no sería posible. En otras palabras, cualquier flujo de a a z debe atravesar los arcos en el corte, y por consiguiente, el flujo F estará limitado por la capacidad de ese corte. La relación entre flujos y cortes vendrá dada por el siguiente lema:

Lema

Para cualquier red dirigida, si F es el flujo desde la fuente al sumidero, y (S, S^*) es un corte, entonces el valor de F es menor o igual que la capacidad de ese corte $K(S, S^*)$.

Como consecuencia de este lema se tiene que cualquier flujo compatible desde el vértice fuente al sumidero no puede exceder la capacidad de ningún corte. Por tanto, el flujo máximo a través de la red está limitado por la capacidad del corte mínimo. El siguiente teorema establece que siempre es posible encontrar el flujo de a a z igual a la capacidad del corte mínimo.

Teorema de flujo máximo-corte mínimo: (Ford Fulkerson).

Para cualquier red, el flujo máximo desde la fuente al sumidero es igual a la capacidad del corte mínimo.

REDES DE PETRI

Una red de Petrí es un grafo dirigido bipartito, con un estado inicial, llamado marcación inicial. Los dos componentes principales de la red de Petrí son los sitios (también conocidos como estados) y las transiciones. Gráficamente, los sitios se representan como círculos y las transiciones como barras o rectángulos. Las aristas del dígrafo son conocidas como arcos. Estos tienen un peso específico, el cual es indicado por un número entero positivo, y van de sitio a transición y viceversa. Por simplicidad, el peso de los arcos no se indica cuando éste es igual a 1. Un arco que esté etiquetado con k puede ser interpretado como k arcos paralelos.

Definición

Una red de Petrí es un dígrafo $D = (V, E, \varphi)$ donde $V = P \cup T$ y $P \cap T = \emptyset$, tal que cualquier arista $e \in E$ es incidente con un vértice de P y uno de T.

El conjunto P es el conjunto de Lugares y el conjunto T es el conjunto de Transiciones. Los lugares representan condiciones, las transiciones representan eventos.

Definición

Un marcado de una Red de Petrí asigna a cada lugar un entero no negativo. Una red de Petrí con un marcado es una Red de Petrí Marcada (o simplemente una Red de Petrí).

Si un marcado asigna el valor no negativo n al lugar p, decimos que existen n elementos en p. Los elementos se representan mediante puntos. La presencia de al menos un elemento en un lugar (condición) indica que tal condición se cumple.

Más definiciones:

- Si una arista va del lugar p a la transición t, se dice que p es un *lugar de entrada* para la transición t.
- Un *lugar de salida* se define de manera análoga.
- Si cada lugar de entrada de una transición t tiene al menos un elemento, decimos que t esta *activada*.
- La *descarga* de una transición elimina un elemento de cada lugar de entrada y agrega un elemento a cada lugar de salida. Si una serie de descargas transforma un marcado M, en un marcado M', decimos que M' es alcanzable desde M.

Un evento puede ocurrir si y solo si se cumplen todas las condiciones para su ejecución; es decir, la transición se puede descargar solo si está activada.

Propiedades

Entre las propiedades más comunes de Redes de Petrí tenemos:

- Supervivencia: se refiere a la ausencia de estancamientos
- Seguridad: se relaciona con la capacidad limitada de la memoria.

Definición

Un marcado M de una red de Petrí está *vivo* si partiendo de M, sin importar la serie de descargas realizadas, es posible descargar cualquier transición dada mediante alguna secuencia de descargas adicionales.

Entonces, si un marcado M está vivo para una Red de Petrí P, sin importar la serie de descargas de transiciones, P nunca se estancará. De hecho, podemos descargar cualquier transición mediante cierta secuencia de descargas adicionales.

Definición

Un marcado M para una red de Petrí P esta *acotado* si existe algún entero positivo n con la propiedad de que, en cualquier secuencia de descarga, ningún lugar recibe más de n elementos. Si un marcado M, esta acotado y en cualquier secuencia de descarga ningún lugar recibe más de un elemento, decimos que M es un marcado s*eguro*.

Bibliografía:

-Johnsonbaugh, Richard, Matemáticas Discretas 4ª edición, PRENTICE may, México, 1999.

-Selecciones varias en Internet.