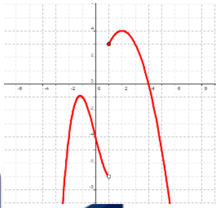


CONTINUIDAD PARTE 2

https://es.slideshare.net/Mayazmin/tipos-de-discontinuidad?next_slideshow=1

CLASIFICACIÓN DE PUNTOS DE DISCONTINUIDAD

- Para que una función f(x) sea ***discontinua o no continua***
- ***en x_0*** deberá como ya hemos visto fallar alguna de las **tres**
- **condiciones** dadas en la definición de continuidad.
- Es decir:

$$a)\ \text{No existe } \lim_{x \to x_0^-} f(x) \text{ o no existe } \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

- o bien existen los limites laterales pero no coinciden
- o no es un limite finito
-
- b) No esta definida la función en x_0

$$c)\ \text{Existe } \lim_{x \to x_0} f(x), \text{ pero } \lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

- Dependiendo de qué condición no se verifica, se clasifican en puntos de **discontinuidad :**

- **evitable (o inevitable**).

- **discontinuidad esencial**

Discontinuidad Evitable

- Una función presenta una **discontinuidad evitable** en un punto x_0 cuando pasan estos dos casos:
- Existe el límite de la función en el punto x_0 , pero no coincide con el valor que toma la función en el punto x_0
- o bien no esta definida la función en el punto x_0

Se denomina así porque La discontinuidad se puede evitar asignando a la función, en el punto x_0, el valor de su límite.

O bien sino esta definida asignándole un valor y redefiniéndola

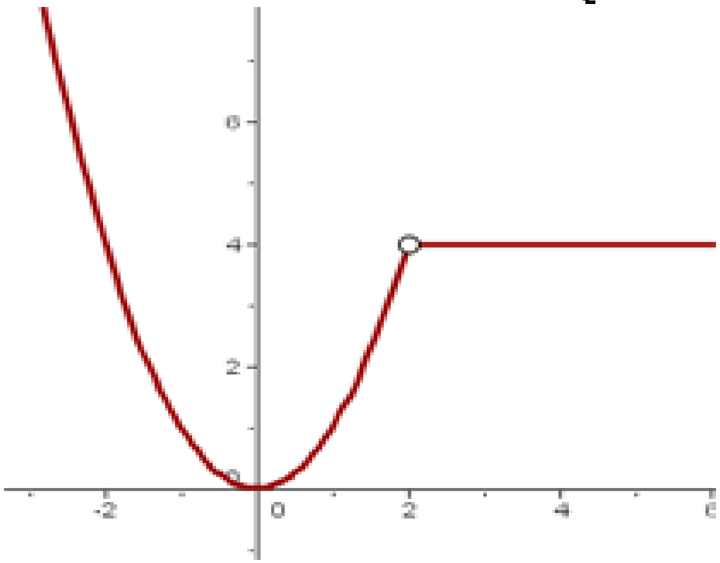
En ambos caso redefinimos una nueva función en base a la dada pero que es continua en x_0

Ejemplos:

Ej 1-La función no está definida en x =2

Sea

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x<2 \\ 4 & si \quad x>2 \end{cases}$$



$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 4$$

La función no esta definida en x_0=2 $\nexists f(2)$

Ej.2. La imagen no coincide con el límite.

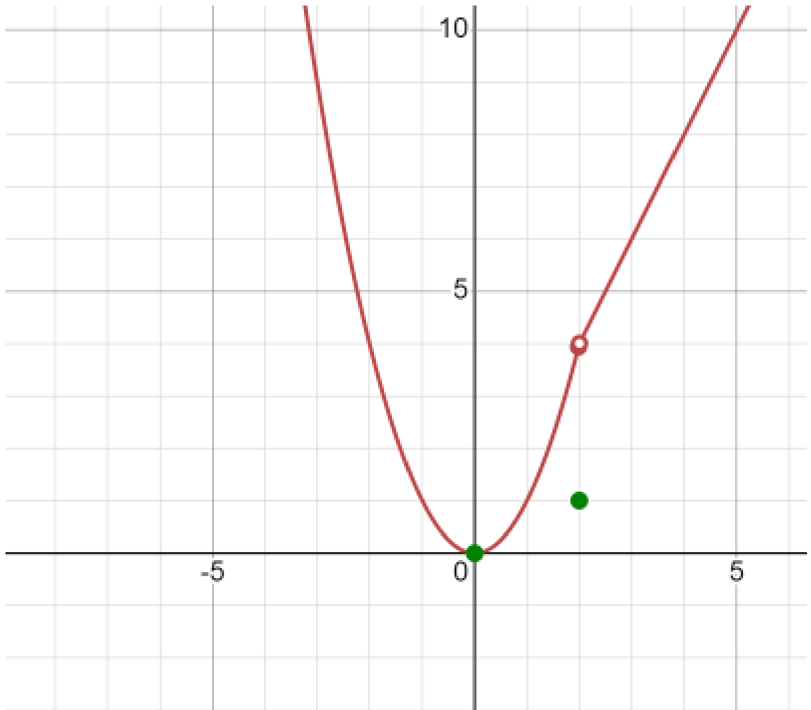
Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \ \ x < 2 \\ 2x & si \ \ x > 2 \\ 1 & si \ \ x = 2 \end{cases}$$

$$f(2) = 1$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$$

$$f(2) \neq \lim_{x \to 2} f(x)$$

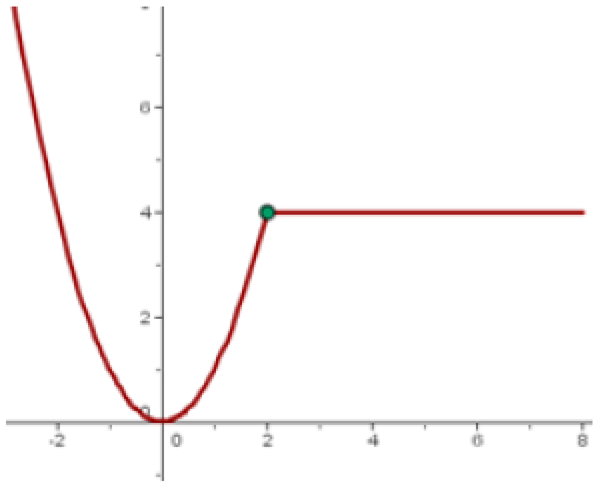


- **Cuando una función presenta una** discontinuidad evitable en un punto se puede redefinir en dicho punto para convertirla en una función continua. **La dos funciones estudiadas anteriormente las redefinimos de modo** que:

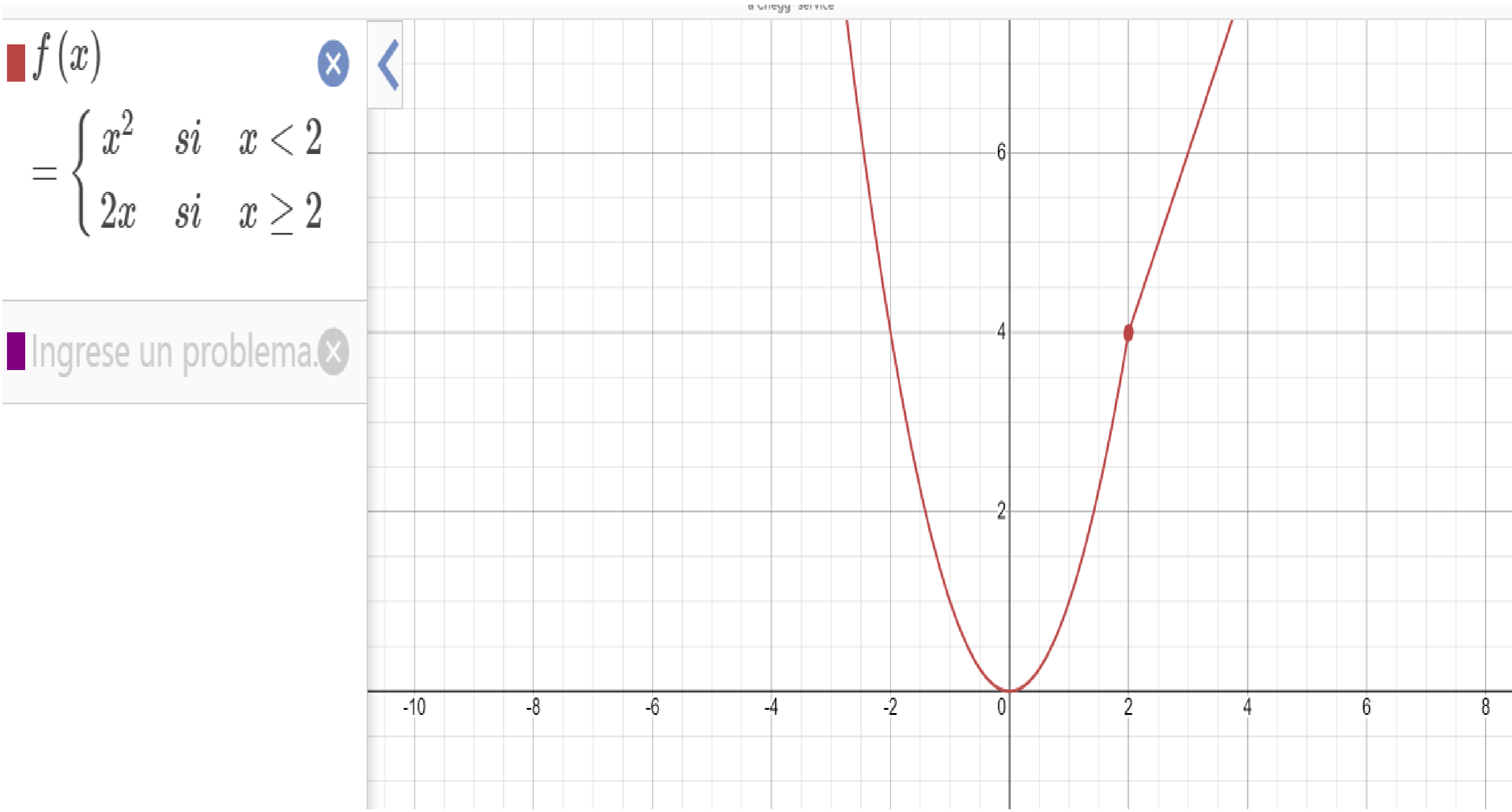
Ej. 1 lo redefinimos

$$f(2)=\lim_{x\to 2} f(x)$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x<2 \\ 4 & si \quad x\geq 2 \end{cases}$$



Ej. 2 lo redefinimos



Discontinuidad Esencial

Una función presenta una ***discontinuidad esencial*** en un punto x_0 cuando **no existe algún límite lateral** o bien los **límites laterales existen pero son distintos (no hay límite)**

Estos casos, hacen que dentro de la discontinuidad esencial tengamos discontinuidades de diferente especie

- **Discontinuidad de 1º especie** cuando los límites laterales no coinciden, es decir se produce un salto en la función

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$$

- El Salto es la diferencia en valor absoluto de los límites laterales

$$\left| \lim_{x \to a^-} f(x) - \lim_{x \to a^+} f(x) \right|$$

Este valor absoluto puede ser un numero k (finito) o no . Según el resultado de este intervalo será el tipo de salto nos encontramos entonces con dos **tipos de discontinuidad esencial de 1º especie**

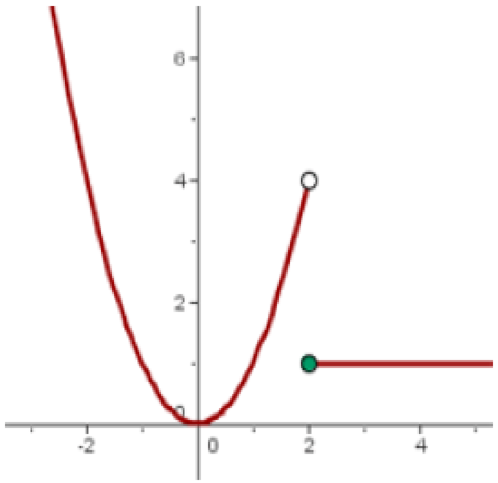
a. Salto finito

La diferencia entre los límites laterales es un número real.

$$\left|\lim_{x\to a^-} f(x) - \lim_{x\to a^+} f(x)\right| = k \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \quad si \quad x < 2 \\ 1 \quad si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-} x^2 = 4 \qquad \lim_{x\to 2^+} 1 = 1$$



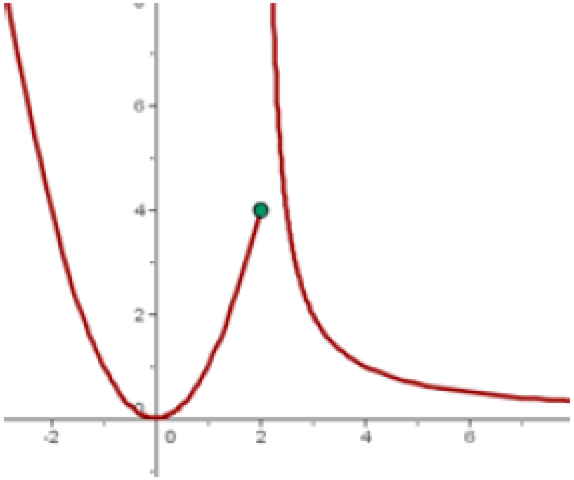
b. Salto infinito

La diferencia entre los límites laterales es infinito.

$$\left|\lim_{x\to a^-} f(x) - \lim_{x\to a^+} f(x)\right| = \infty$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \le 2 \\ \dfrac{2}{x-2} & si \quad x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-} x^2 = 4 \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{2}{x-2} = \infty$$



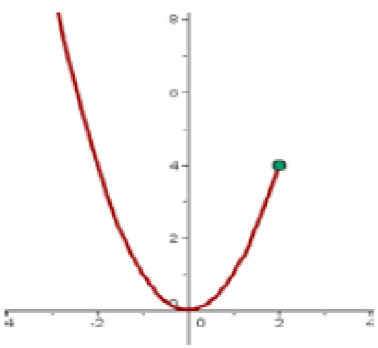
Discontinuidad de 2° especie

- Es una discontinuidad esencial de 2° especie si el limite es infinito o bien no existe alguno de los límites laterales

Esencial de 2° especie si no existe alguno de los límites laterales en x = a.

$$f(x) = x^2 \quad si \quad x \leq 2$$

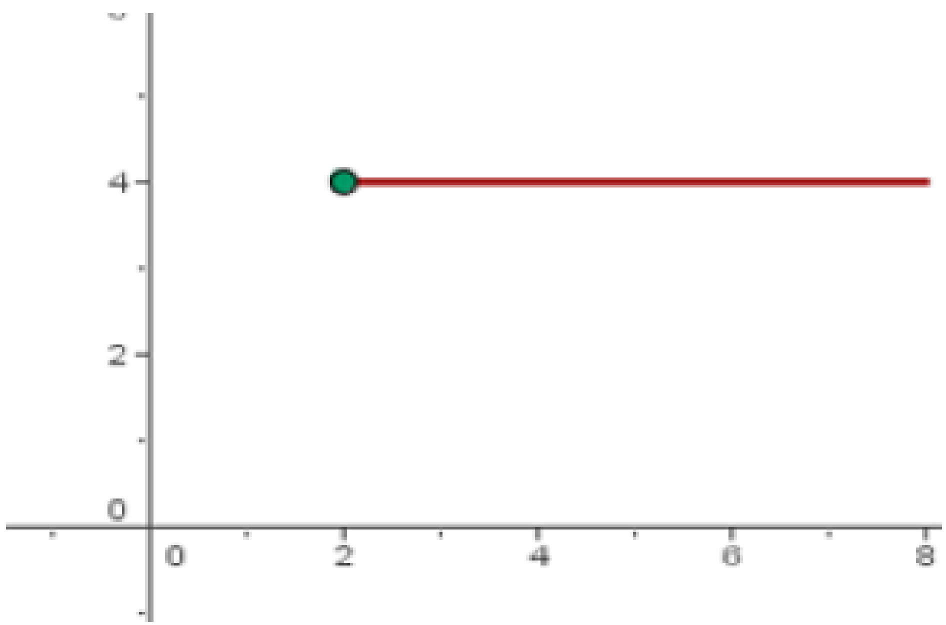
$$\lim_{x \to 2^-} x^2 = 4 \qquad\qquad \nexists \lim_{x \to 2^+}$$

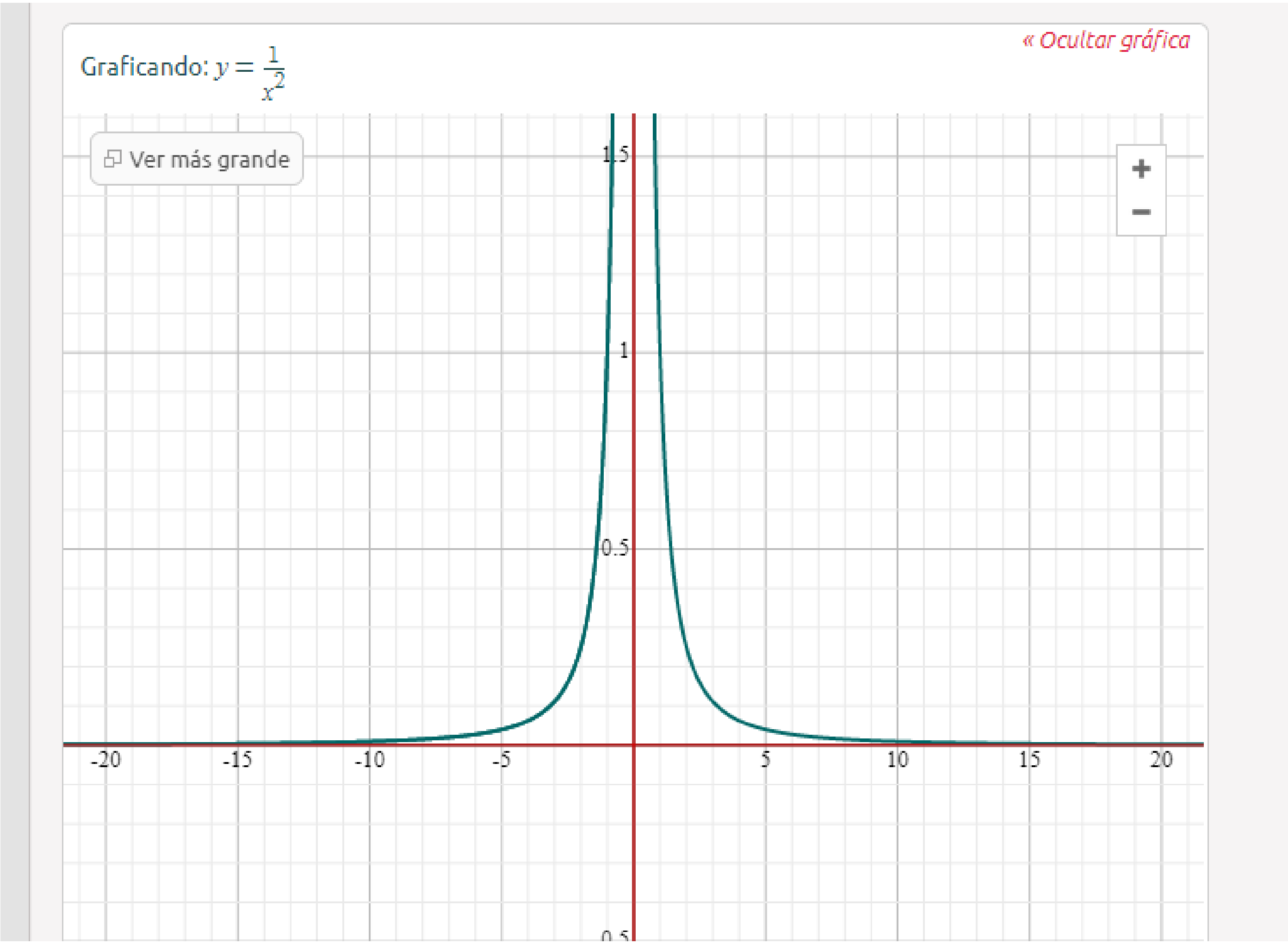


En x = 2 hay una discontinuidad esencial porque no tiene límite por la derecha.

$f(x) = 4 \quad si \quad x \geq 2$

$\nexists \lim_{x \to 2^-}$ $\qquad$ $\lim_{x \to 2^+} 4 = 4$





Graficando: $y = \frac{1}{x^2}$
« Ocultar gráfica
Ver más grande
1.5
1
0.5
-20
-15
-10
-5
5
10
15
20

Nota:

- Dentro de estas últimas
- Podríamos dar una nueva subclase que son las discontinuidades asintóticas
- Que son las asíntotas verticales

Operaciones con funciones continuas

- 1. **Suma**
- La suma de dos funciones continuas en un punto es también una función continua en ese punto.

Demostración:

Sean f y g dos funciones continuas en un punto x_0. Esto significa que:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ y } \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$$

Para probar que la función suma $f + g$ es una función continua en x_0, es necesario demostrar que $\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = (f + g)(x_0)$.

Aplicando una de las propiedades de los límites de funciones,

$$\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0) = (f + g)(x_0)$$

La demostración es válida para una suma de n funciones continuas en x_0.

La resta de dos funciones continuas en un punto es también una función continua en ese punto.

Producto

El producto de dos funciones continuas en un punto es también una función continua en ese punto.

Producto de una función por un número

El producto de una función continua en un punto, por un número real, es otra función continua en ese punto.

Cociente

El cociente de dos funciones continuas en un punto es otra función continua en ese punto. (Siempre que el denominador no se anule).

Continuidad de funciones elementales

Función constante

Sea la función constante $f(x) = k$, diremos que es continua en todos los puntos. Ya que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to x_0} f(x) = k \\ f(x_0) = k \end{array}\right\} \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Función identidad

La función identidad $f(x) = x$ es continua en todos los puntos. Ya que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to x_0} f(x) = x_0 \\ f(x_0) = x_0 \end{array}\right\} \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Función polinómica

La función $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ \ldots \ + a_n x^n$ es una función continua en todos

los puntos, por ser suma de funciones continuas en todos los puntos.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ \ldots \ + a_n x_0^n \\ f(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ \ldots \ + a_n x_0^n \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Función racional

La función $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinómicas, es continua

en todos los puntos, salvo en los que el denominador se anula, por ser un cociente de dos funciones continuas.

Función exponencial

La función exponencial $f(x) = a^x$, con $a > 0$, es continua en todos los puntos.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a^{x_0} \\ f(x_0) = a^{x_0} \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

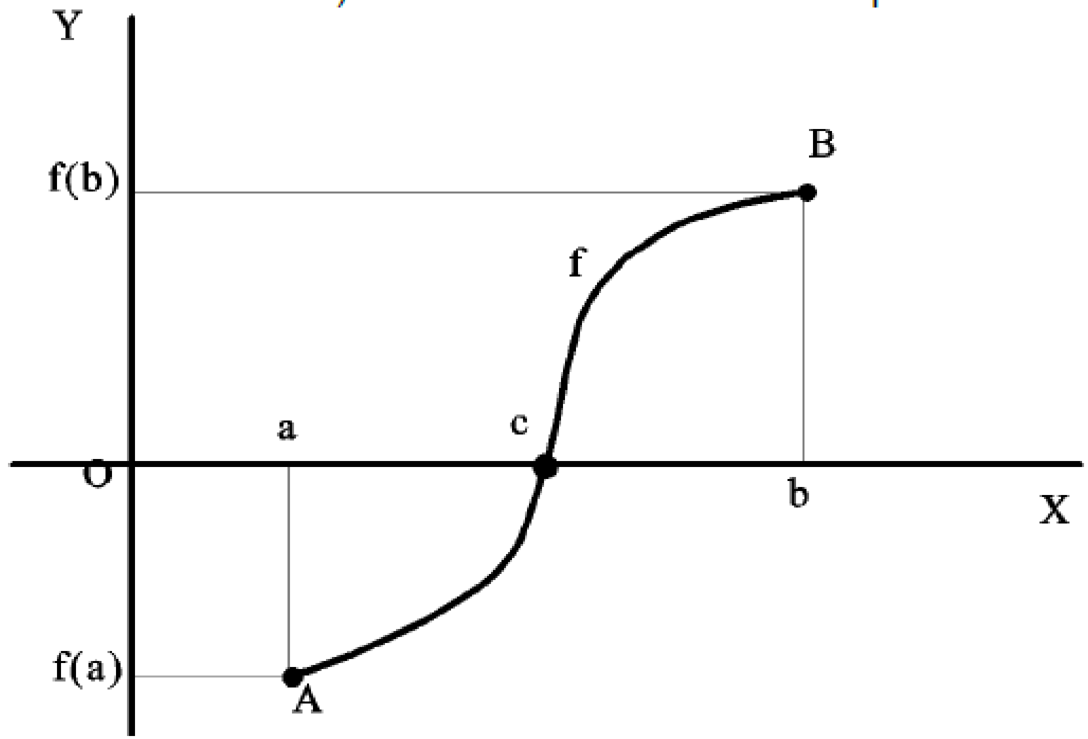
Función logarítmica

La función $f(x) = \log_a x$, siendo $a > 1$, es continua en todos los puntos de su campo de existencia $(0, +\infty)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \log_a x_0 \\ f(x_0) = \log_a x_0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Teorema de Bolzano

Sea f una función tal que f : D→ R continua en un intervalo cerrado $[a,b]$
Si f (a) y f (b) son no nulos y f(a).f(b) <0 (es decir son de distinto signo),entonces
c $\in (a,b)$ tal que f(c) = 0 **(Teorema de Bolzano)**
El teorema de Bolzano se usa fundamentalmente para hallar intervalos en los que haya
de una ecuación (acotación de la raíz) con el fin de hallar un valor aproximado a éstas.

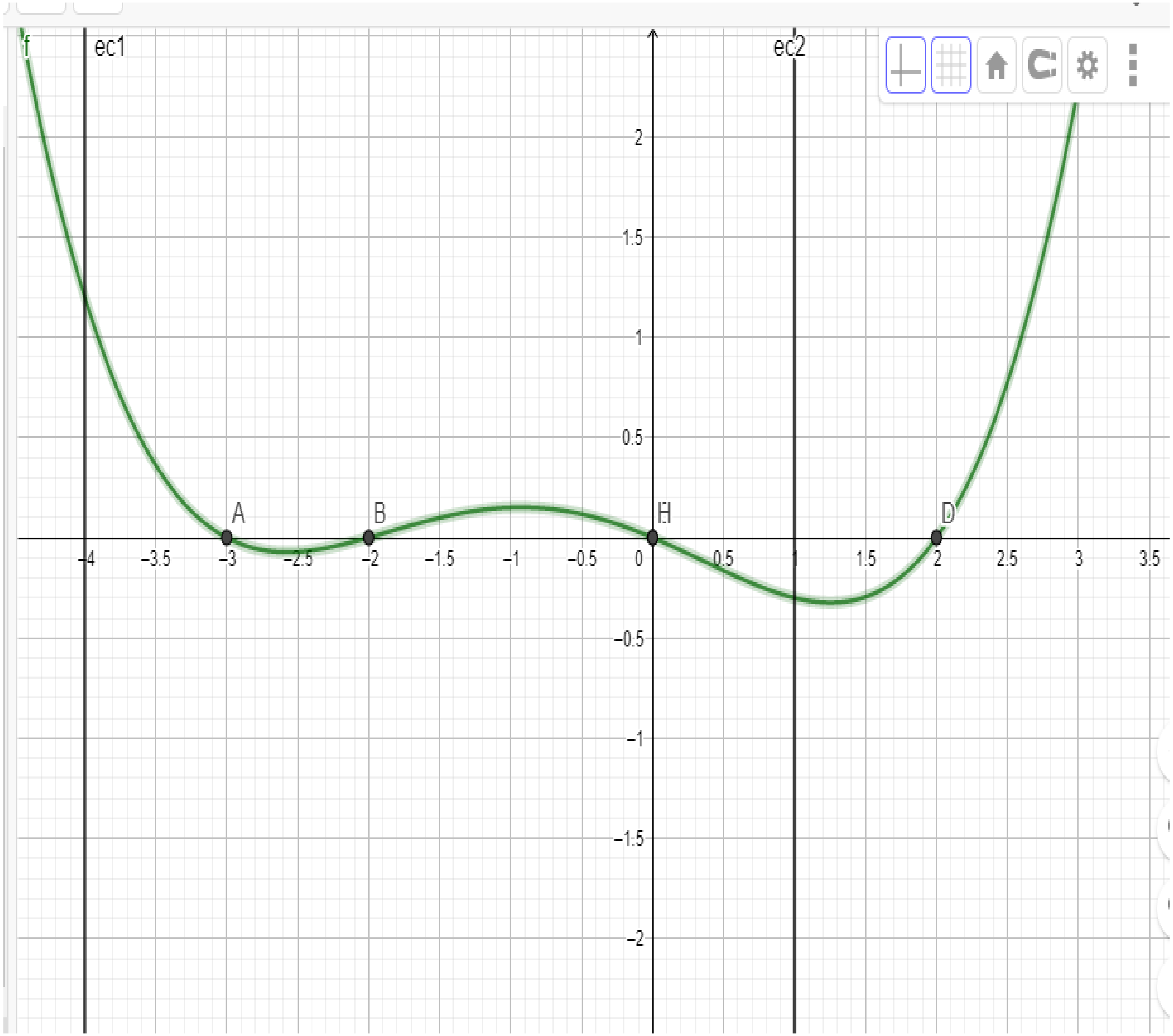


El punto c puede no ser único, según veremos en el siguiente ejemplo:

La función $f(x)=(x^4 +3x^3 -4x^2 -12x)/40$ cumple las hipótesis del teorema en el intervalo [-4,1], ¿en qué punto (o puntos) del intervalo (-4,1) se anula?. Comprueba el resultado analíticamente.

Rta : se anula en $x = -3$; $x = -2$; $x = 0$ También se anula en $x = 2$ pero este punto no esta en el intervalo dado. Pero se cumplen las hipótesis del teorema en el intervalo[1,3] donde si $f(2) = 0$

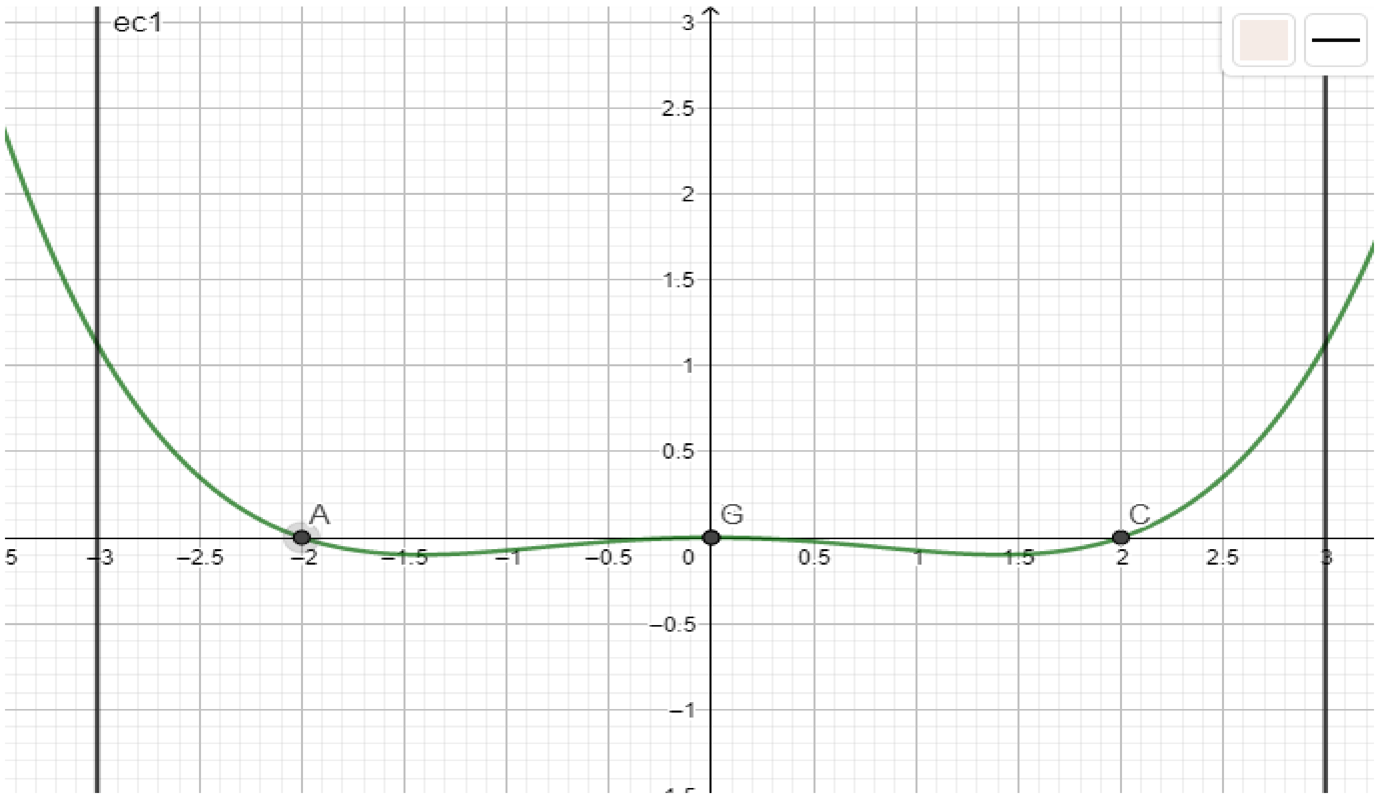
Si no se cumplen las hipótesis del teorema, la tesis puede cumplirse o no. Veamos un ejemplo de cada una de las dos situaciones:



f
ec1
ec2
A
B
H
D
2
1.5
1
0.5
−0.5
−1
−1.5
−2
−4
−3.5
−3
−2.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5

La función $f(x)=(x^4 - 4x^2)/40$ no cumple, en el intervalo [-3,3] una de las hipótesis del teorema de Bolzano, ¿cuál?, ¿cumple la tesis?, ¿en qué punto (o puntos) del intervalo (-3,3) se anula.

- f(3) es del mismo signo que f(-3) por lo tanto no se cumple esa hipótesis



Ejemplos:

1.-Hallar cuatro intervalos de la recta real en cada uno de los cuáles haya una raíz del polinomio $g(x)= x^4-x^3-13 x^2 +x + 12$.

Rta.: La función $g(x)=x^4-x^3-13x^2 +x +12$ cumple, por ejemplo, que $g(-4)=120>0$; $g(-2)= -18<0$; $g(0)=12>0$; $g(2)=-30 <0$ y $g(5)=192 >0$, luego tiene una raíz en cada uno de estos intervalos: $(-4, -2)$ $(-2, 0)$ $(0, 2)$ y $(2, 5)$, teniendo en cuenta que ni -2 ni 0 ni 2 son raíces de la ecuación.

Recordar

Has visto las raíces de varios polinomios de grado 4, ¿cuántas raíces reales tiene uno de estos polinomios? ¿Y los polinomios de grado 3?. Habrás observado que los de grado 4 tienen un número par de raíces reales y los de grado 3 un número impar, aunque ¡cuidado! porque algunas raíces son dobles.

Teorema del Valor Intermedio

Si una función es continua en el intervalo [a,b] y k es un número comprendido entre los valores f(a) y f(b), entonces existe algún c en [a,b] tal quef(c)=k