Retículos

Se dice que $(A ; \preccurlyeq)$ es **Superior Semirretículo** si y sólo si: $\forall\ a,b \in A : \exists$ supremo(a,b)
O sea, entre todo par de elementos debe existir el supremo (mínima cota superior)

Se dice que $(A ; \preccurlyeq)$ es **Inferior Semirretículo** si y sólo si: $\forall\ a,b \in A : \exists$ ínfimo(a,b)
O sea, entre todo par de elementos debe existir el ínfimo (máxima cota inferior)

¿Qué es un Retículo, Red, Reticulado, Lattice o Latis?

Veamos la definición:

> Sea $(A ; \preccurlyeq)$ un conjunto ordenado. Se dice que es **Retículo (Red, Reticulado, Lattice o Latis)** si y sólo si es a la vez Superior Semirretículo e Inferior Semirretículo.
> O sea, entre todo par de elementos debe existir el SUPREMO y el INFIMO.

Notación:

Al supremo entre a y b lo vamos a denotar: $\sup\{a,b\} = a \vee b$
Al ínfimo entre a y b lo vamos a denotar: $\inf\{a,b\} = a \wedge b$

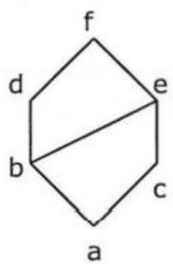
Antes de ver algunos ejemplos, para ahorrarnos de analizar algunos casos, veamos la siguiente propiedad:

$$\text{Si } a \preccurlyeq b \;\Rightarrow\; a \vee b = b \quad \text{y} \quad a \wedge b = a$$

O sea que SIEMPRE existen el supremo y el ínfimo entre elementos que están relacionados. Para saber si un conjunto ordenado es red, solamente hay que fijarse en los que son INCOMPARABLES.

Ejemplo:

Sea el conjunto A= { a, b, c, d, e, f } ordenado según muestra el siguiente diagrama e Hasse:



$\vee$	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	b	e	d	e	f
c	c	e	c	f	e	f
d	d	d	f	d	f	f
e	e	e	e	f	e	f
f	f	f	f	f	f	f

$\wedge$	a	b	c	d	e	f
a	a	a	a	a	a	a
b	a	b	a	b	b	b
c	a	a	c	a	c	c
d	a	b	a	d	b	d
e	a	b	c	b	e	e
f	a	b	c	d	e	f

A continuación, veremos unos conceptos para clasificar las redes:

COMPLEMENTO DE UN ELEMENTO

Sea $(A\ ;\preccurlyeq)$ una Red con primer elemento 0_A y último elemento 1_A.

Sea $a \in A$. Se define complemento de a (y se indica $\overline{a}$) a todo elemento que cumpla las siguientes condiciones: 1) $a \wedge \overline{a} = 0_A$ y 2) $a \vee \overline{a} = 1_A$

¿Qué es una Red Complementada?

Una Red es Complementada si y sólo si cada elemento tiene al menos un complemento.

La red $(A\ ;\ \preccurlyeq)$ es COMPLEMENTADA $\Leftrightarrow \forall x \in A : \exists\ \overline{a} \in A \,/\, a \vee \overline{a} = 1_A$ y $a \wedge \overline{a} = 0_A$

Ejemplos:

a) $(P(\{1,2\})\ ;\subseteq)$	b) $(A =\{1,2,3,5,30\}\ ;\ \mid)$	c) $(\{1,2,3,4\}\ ;\geq)$

Los complementos de cada elemento de las siguientes redes son:

a) $(P(\{1,2\})\ ;\subseteq)$ $\overline{\varnothing} = \{1,2\}$; $\overline{\{1\}} = \{2\}$ $\overline{\{2\}} = \{1\}$; $\overline{\{1,2\}} = \varnothing$	b) $(A =\{1,2,3,5,30\}\ ;\ \mid)$ $\overline{1} = 30$; $\overline{30} = 1$ $\overline{2} = \{3,5\}$; $\overline{3} = \{2,5\}$ $\overline{5} = \{2,3\}$	c) $(\{1,2,3,4\}\ ;\geq)$ $\overline{1} = 4$; $\overline{4} = 1$ No existe $\overline{2}$ No existe $\overline{3}$

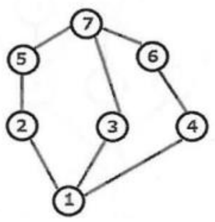
Veremos otra propiedad que pueden o no tener las redes:

DISTRIBUTIVIDAD

Sea $(A\ ;\vee\ ;\wedge)$ una Red, diremos que la Red es distributiva si y sólo si:

$\forall\ a, b, c \in A : a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

$\forall\ a, b, c \in A : a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$



La red $(A\ ;\ \preccurlyeq)$ dada por el diagrama NO es distributiva ya que:

$2 \vee (3 \wedge 5) = 2 \vee 1 = 2$ pero $(2 \vee 3) \wedge (2 \vee 5) = 7 \wedge 5 = 5$

Propiedad: En toda red distributiva, el complemento, si existe, es único.

Esto significa que si existe un elemento con más de un complemento, la Red no será distributiva.

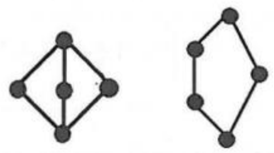
Dem) Supongamos que un elemento a posee dos complementos b y c. Lo que escribimos:

$a \vee b = 1 \quad a \wedge b = 0 \quad a \vee c = 1 \quad a \wedge c = 0$

Sabemos que: $b = b \wedge 1 = b \wedge (a \vee c) = (b \wedge a) \vee (b \wedge c) = 0 \vee (b \wedge c) = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$
$= (a \vee b) \wedge c = 1 \wedge c = c$

Propiedad:

Toda red finita es distributiva $\Leftrightarrow$ no contiene ninguna subred isomorfa a alguna de las siguientes:

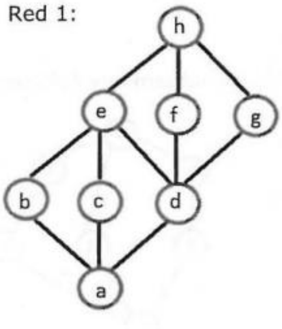


Nota: un subconjunto de una Red, se puede considerar SUBRED, si es red en sí misma y además mantiene los mismos supremos e ínfimos.

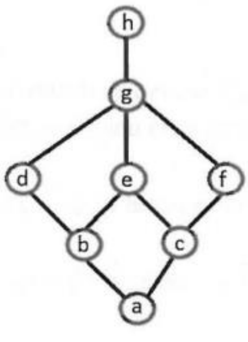
Ejemplos:

Consideremos las redes dadas por los diagramas de Hasse:

Red 1:

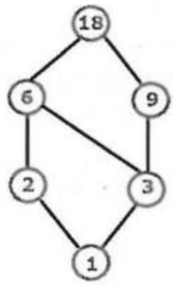


Red 2:



De acuerdo a la propiedad, podemos afirmar que ninguna es distributiva, ya que la Red 1 contiene subred no distributiva de la primera forma (tomando por ejemplo {a,b,c,d,e})
La Red 2 contiene subred no distributiva de la segunda forma (tomando por ejemplo el subconjunto { a,b,d,f,g })

Si consideramos la red (D_{18} ; |) y observamos su diagrama de Hasse:



Podemos pensar que si suprimimos el 3, nos queda una subred isomorfa a la segunda de las redes no distributivas, con lo cual nos quedaría que esta red no es distributiva. Pero sabemos que esta red algebraicamente se estructura con las operaciones m.c.m. y m.c.d. y ellas son distributivas mutuamente.

¿Cuál es el error?

Creer que (D_{18} - {3}, |) es subred, ya que no lo es. El ínfimo entre 6 y 9 es diferente en ambas redes.

Principio de dualidad

Este principio establece que si una propiedad es válida en una Red, entonces su expresión DUAL también lo es. La expresión DUAL es la que se obtiene intercambiando las operaciones entre si y el primer elemento 0_A con el último elemento 1_A.

Ejemplos:

- ✓ Dada la siguiente propiedad: $a \vee 1_A = 1_A$

  Su DUAL es: $a \wedge 0_A = 0_A$

- ✓ Dada la siguiente propiedad: $\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$

  Su DUAL es: $\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$