https://matematicasn.blogspot.com/

LIBROS PREUNIVERSITARIOS RUBIÑOS y Otros

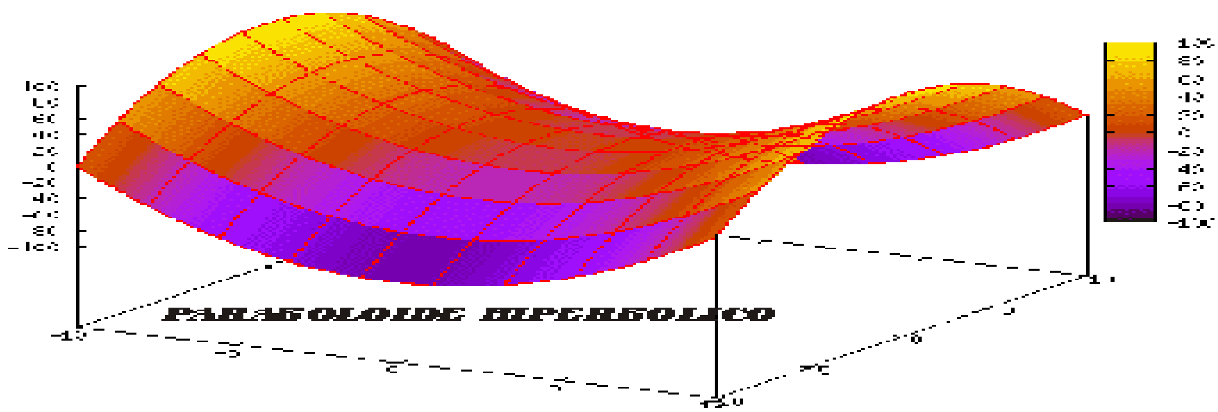
Funciones hiperbólicas

INTRODUCCIÓN :

A las funciones trigonométricas a veces se llaman funciones circulares debido a la relación estrecha que tiene con el círculo $x^2+y^2=1$.

En la misma forma ciertas combinaciones de las exponenciales e^x , e^{-x} se relacionan con la hipérbola que son :

Seno hiperbólico , coseno hiperbólico , tangente huperbólica , cotangente hiperbólica , secante hiperbólica y cosecante hiperbólica y que denotaremos por : **senh , cosh , tgh ,ctgh , sech , csch** ; respectivamente .



FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Se llaman funciones hiperbólicas, porque de alguna manera tienen propiedades similares a las funciones trigonométricas y se relacionan con la hipérbola en la forma en la que las funciones circulares (funciones trigonométricas) se relacionan con el círculo.

SENO HIPERBÓLICO

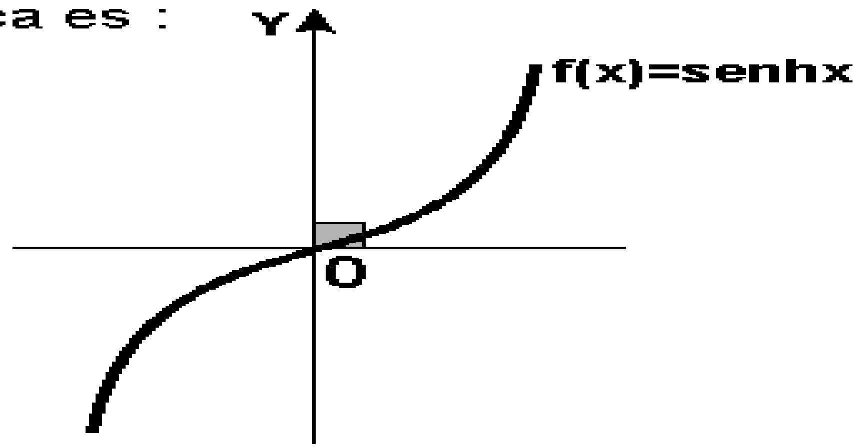
Se define así :

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \quad f(x) = \operatorname{senh} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

donde :

$$\mathbf{Dom f} = \langle -\infty ; \infty \rangle \wedge \mathbf{Ran f} = \langle -\infty ; \infty \rangle$$

Su gráfica es :



COSENO HIPERBÓLICO

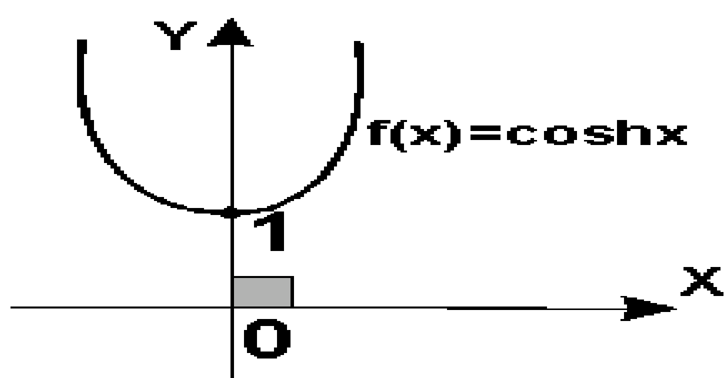
Se define así :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : f(x) = \cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

donde :

$$\mathbf{Dom f} = \langle -\infty ; \infty \rangle \wedge \mathbf{Ran f} = \langle 1 ; +\infty \rangle$$

Su gráfica es :



A la gráfica del coseno hiperbólico se le llama «**CATERIANA**» , la cual adopta la forma de un cable flexible y uniforme que cuelga de dos puntos fijos .

PROPIEDADES :

$$\boxed{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1}$$

$$\boxed{e^x = \operatorname{senh} x + \cosh x}$$

$$\boxed{e^{-x} = \cosh x - \operatorname{senh} x}$$

TANGENTE HIPERBÓLICA

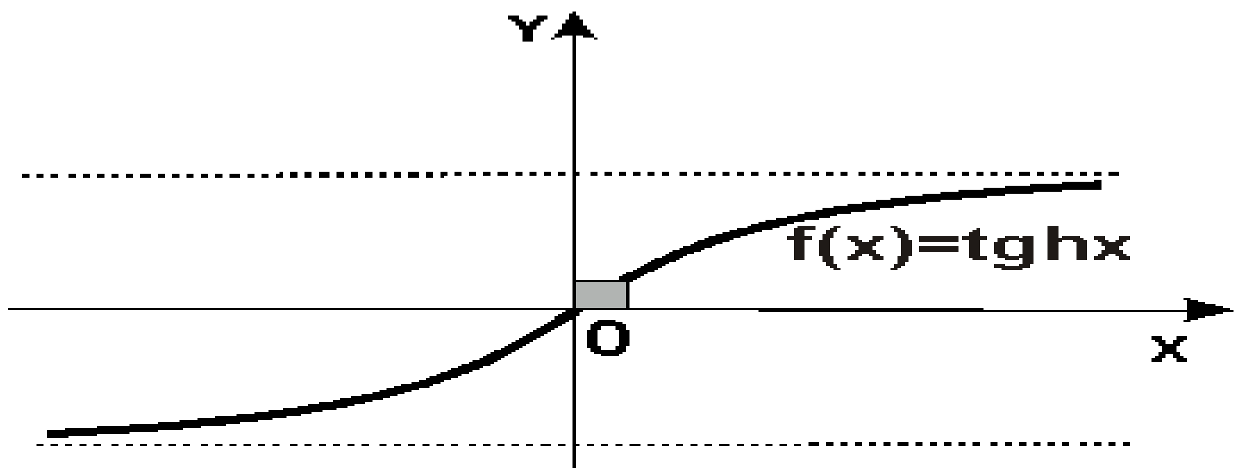
Se define así :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \boxed{f(x) = \operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}$$

donde :

$\mathbf{Domf} = \langle -\infty; \infty \rangle \wedge \mathbf{Ranf} = \langle -1; 1 \rangle$

Su gráfica es :



COTANGENTE HIPERBÓLICA

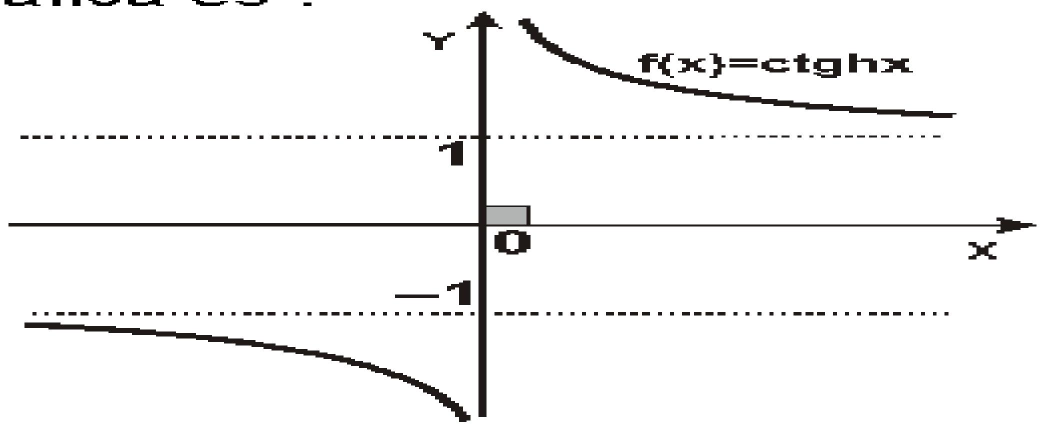
Se define así :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \boxed{f(x) = \operatorname{ctgh} x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}}$$

donde :

$\mathbf{Domf} = \langle -\infty; 0 \rangle \cup \langle 0; +\infty \rangle \wedge \mathbf{Ranf} = \langle -\infty; -1 \rangle \cup \langle 1; +\infty \rangle$

Su gráfica es :



SECANTE HIPERBÓLICO

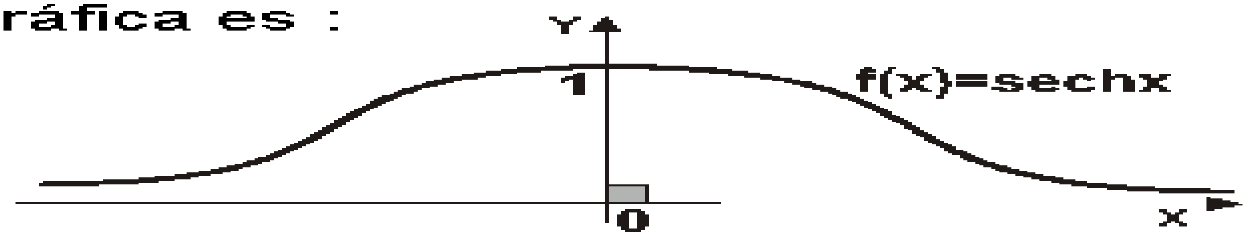
Se define así :

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}:\ \boxed{f(x)=\operatorname{sech}x=\frac{1}{\cosh x}=\frac{2}{e^{x}+e^{-x}}}$$

donde :

$\operatorname{Dom}f=\langle-\infty;\infty\rangle \wedge \operatorname{Ran}f=\langle 0;1]$

Su gráfica es :



COSECANTE HIPERBÓLICA

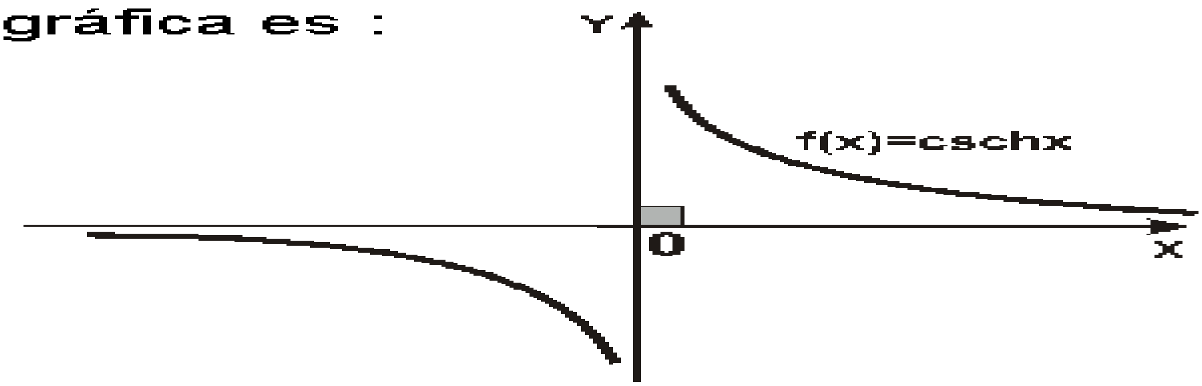
Se define así :

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}:\ \boxed{f(x)=\operatorname{csch}x=\frac{1}{\operatorname{senh}x}=\frac{2}{e^{x}-e^{-x}}}$$

donde :

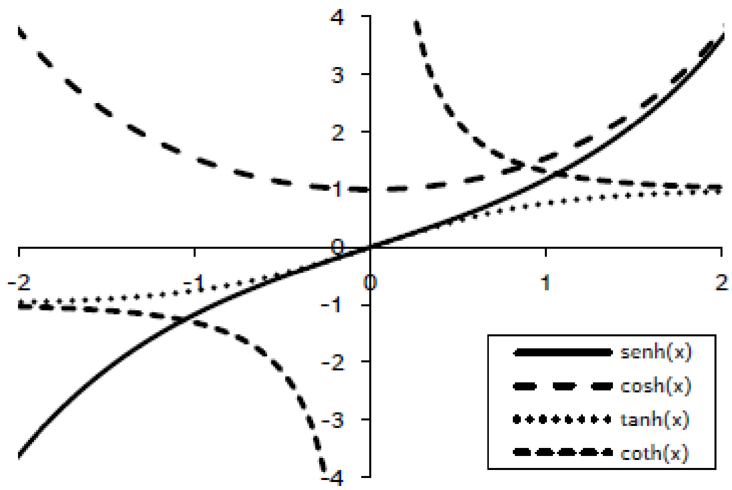
$\operatorname{Dom}f=\langle-\infty;0\rangle\cup\langle 0;+\infty\rangle \wedge \operatorname{Ran}f=\langle-\infty;0\rangle\cup\langle 0;+\infty\rangle$

Su gráfica es :



En un solo gráfico

Gráfica



Valores límite

	$x \to 0$	$x \to -\infty$	$x \to \infty$
$\operatorname{senh} x =$	0	$-\infty$	∞
$\cosh x =$	1	∞	∞
$\tanh x =$	0	-1	1
$\coth x =$	$\pm\infty$	-1	1

Relaciones mutuas

$$\operatorname{senh} x = \sqrt{\cosh^2 x - 1} = \frac{\tanh x}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{\coth^2 x - 1}}$$

$$\cosh x = \sqrt{\operatorname{senh}^2 x + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}} = \frac{\coth x}{\sqrt{\coth^2 x - 1}}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\sqrt{\sinh^2 x + 1}} = \frac{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}{\cosh x} = \frac{1}{\coth x}$$

Teoremas de adición

$$\operatorname{senh}(A \pm B) = \operatorname{senh} A \cosh B \pm \cosh A \operatorname{senh} B$$

$$\cosh(A \pm B) = \cosh A \cosh B \pm \sinh A \sinh B$$

$$\tanh(A \pm B) = \frac{\tanh A \pm \tanh B}{1 \pm \tanh A \tanh B}$$

$$\coth(A \pm B) = \frac{\coth A \coth B \pm 1}{\coth A \coth B}$$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS HIPERBÓLICAS

1) $\boxed{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1}$ 2) $\boxed{1 - \operatorname{tgh}^2 x = \operatorname{sech}^2 x}$

3) $\boxed{1 - \operatorname{ctgh}^2 x = \operatorname{csch}^2 x}$ 4) $\boxed{\operatorname{tgh} x = \frac{1}{\operatorname{ctgh} x}}$

5) $\boxed{\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x}$

6) $\boxed{\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x}$

7) $\boxed{\operatorname{senh}(x \pm y) = \operatorname{senh} x \cosh y \pm \cosh x \operatorname{senh} y}$

8) $\boxed{\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y}$

9) $\boxed{\operatorname{tgh}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tgh} x \pm \operatorname{tgh} y}{1 \pm \operatorname{tgh} x \operatorname{tgh} y}}$

10) $\boxed{\operatorname{senh} A + \operatorname{senh} B = 2 \operatorname{senh}\left(\frac{A+B}{2}\right) \cosh\left(\frac{A-B}{2}\right)}$

11) $\boxed{\cosh A + \cosh B = 2 \cosh\left(\frac{A+B}{2}\right) \cosh\left(\frac{A-B}{2}\right)}$

12) $\boxed{\operatorname{senh}^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}}$

13) $\boxed{\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}}$

14) $\boxed{(\operatorname{senh} x + \cosh x)^n = \operatorname{senh} nx + \cosh nx}$

15) $\boxed{\operatorname{senh} 3x = 3 \operatorname{senh} x + 4 \operatorname{senh}^3 x}$

16) $\boxed{\cosh 3x = 4 \cosh^3 x - 3 \cosh x}$

17) $\operatorname{senh} \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}} \wedge \cosh \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}}$

FUNCTIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS

Las funciones hiperbólicas **senhx , tghx , ctghx** y **cschx** son inyectivas en todo su dominio por lo tanto tienen inversa , y las funciones **coshx** y **sechx** no son inyectivas , pero si restringimos su dominio en el intervalo **[0 ;1 >**,en este intervalo las funciones **coshx** , **sechx** son inyectivas por lo tanto se puede determinar su inversa .

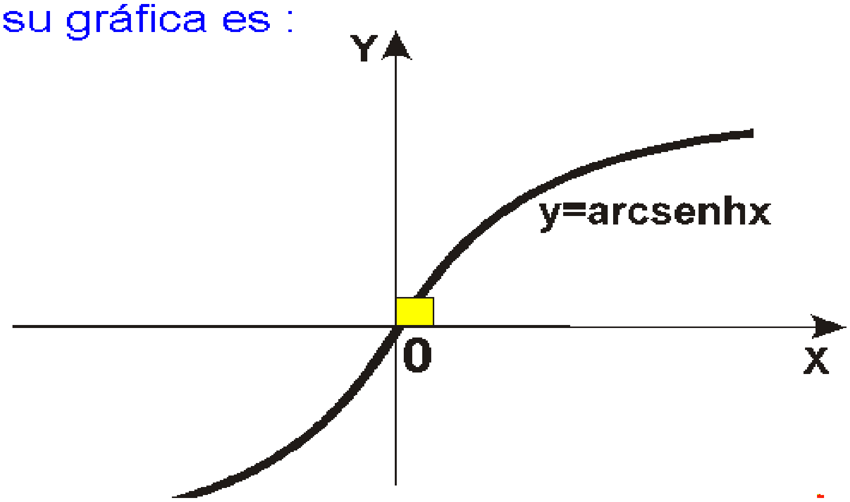
INVERSA DEL SENO HIPERBÓLICO :

notación : **arcsenhx** ó **senh^{-1}**

$$\boxed{y = \text{arcsenh}x \Leftrightarrow x = \text{senh}y}$$

de donde : $\begin{cases} \text{senh}(\text{arcsenh}x) = x \\ \text{arcsenh}(\text{senh}y) = y \end{cases}$

su gráfica es :



INVERSA DEL COSENO HIPERBÓLICO :

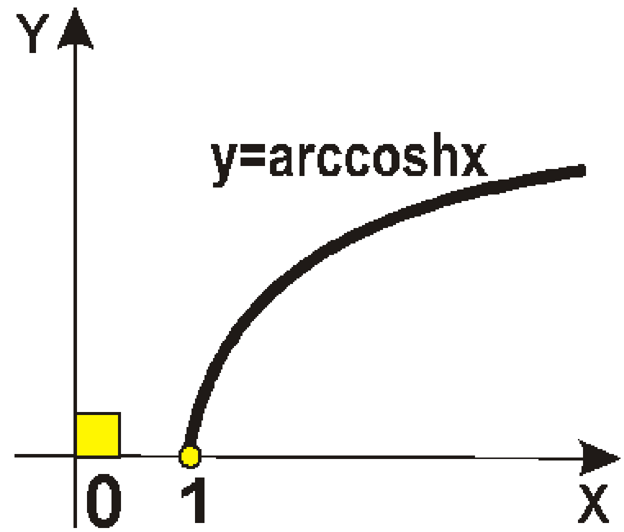
notación : **arccoshx** ó **cosh**$^{-1}$

$$\boxed{y = \text{arccoshx} \Leftrightarrow x = \text{coshy} \ ; y \geq 0}$$

$$\text{Dom} = [1;+\infty >;\text{Ran} = [0;+\infty >$$

$$\text{de donde}: \begin{cases} \cosh(\text{arccoshx}) = x; x \geq 1 \\ \text{arccosh}(\text{coshy}) = y; y \geq 0 \end{cases}$$

su gráfica es :



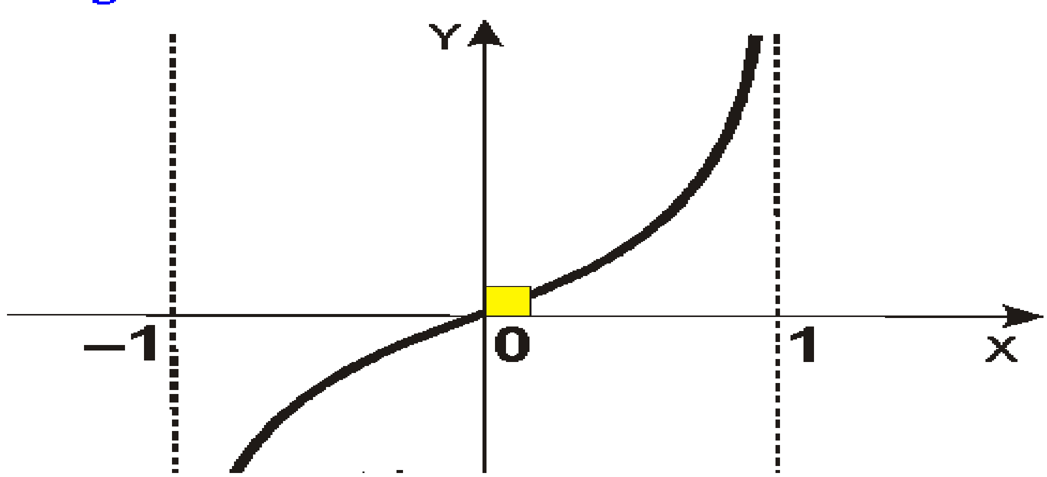
INVERSA DE LA TANGENTE HIPERBÓLICA :

notación : **arctghx** ó **tgh**$^{-1}$

$$\boxed{y = \text{arctghx} \Leftrightarrow x = \text{tghy}}$$

$$\text{Dom} = \langle -1;1 \rangle ;\text{Ran} = \mathbb{R}$$

su gráfica es :



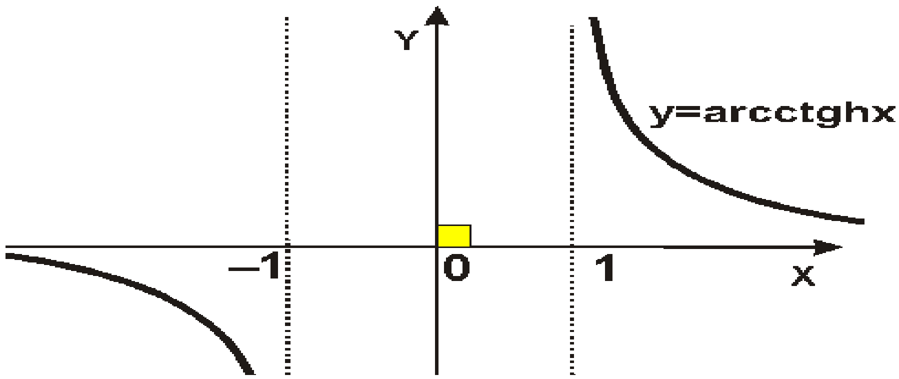
INVERSA DE LA COTANGENTE HIPERBÓLICA :

notación : **arcctghx** ó **$c\,tgh^{-1}$**

$$\boxed{y = \text{arcctghx} \Leftrightarrow x = \text{ctghy}}$$

$$\text{Dom} = \langle -\infty;1\rangle \cup \langle 1;+\infty\rangle;\text{Ran} = \mathbb{R} - \{0\}$$

su gráfica es :



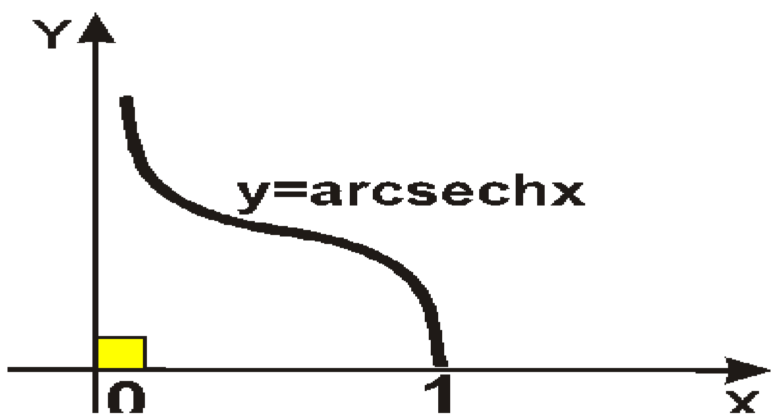
INVERSA DE LA SECANTE HIPERBÓLICA :

notación : **arcsechx** ó **sech**

$$\boxed{y = \text{arc sec x} \Leftrightarrow x = \text{sechy}}$$

$$\text{Dom} = < 0;1];\text{Ran} = [0;+\infty >$$

su gráfica es :



INVERSA DE LA COSECANTE HIPERBÓLICA :

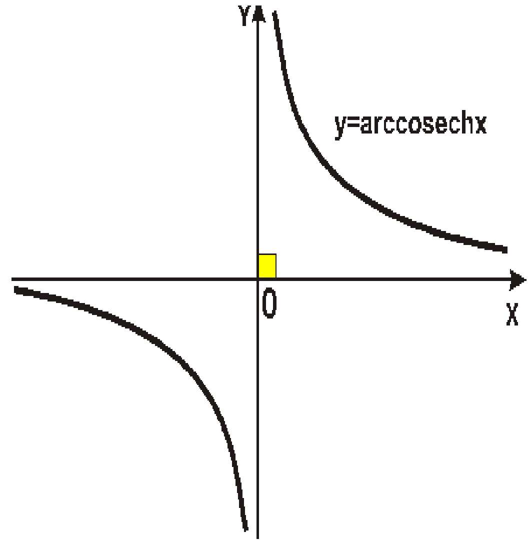
notación : **arcccschx** ó **csch⁻¹**

$$\boxed{y = \text{arccschx} \Leftrightarrow x = \text{cschy}}$$

$$\text{Dom} = \langle -\infty; 0 \rangle \cup \langle 0; +\infty \rangle$$

$$\text{Ran} = \langle -\infty; 0 \rangle \cup \langle 0; +\infty \rangle$$

su gráfica es :



IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS HIPERBÓLICAS INVERSAS

1) $$\boxed{\text{arcsenhx} = \text{Ln}\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \; ; \forall x \in \mathbb{R}}$$

2) $$\boxed{\text{arccoshx} = \text{Ln}\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \; ; \forall x \geq 1}$$

3) $$\boxed{\text{arctghx} = \frac{1}{2}\text{Ln}\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right); |x| < 1}$$

4) $$\boxed{\text{arcctghx} = \frac{1}{2}\text{Ln}\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right); |x| > 1}$$