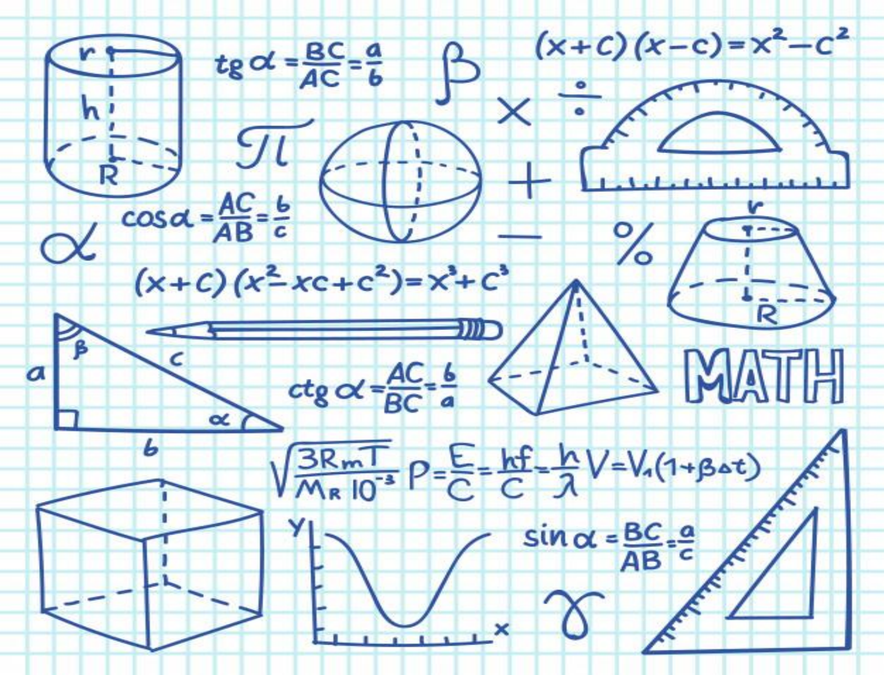


Límite Parte 4

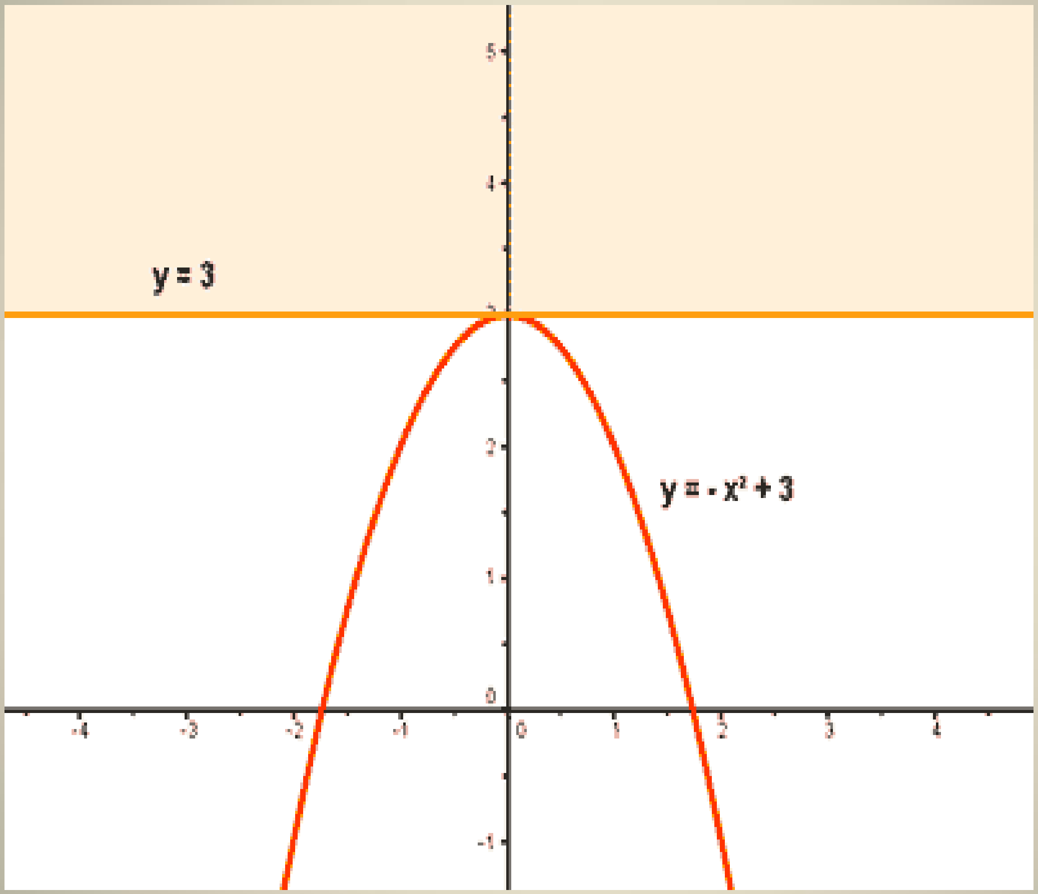
FUNCIONES ACOTADAS

Función Acotada Superiormente

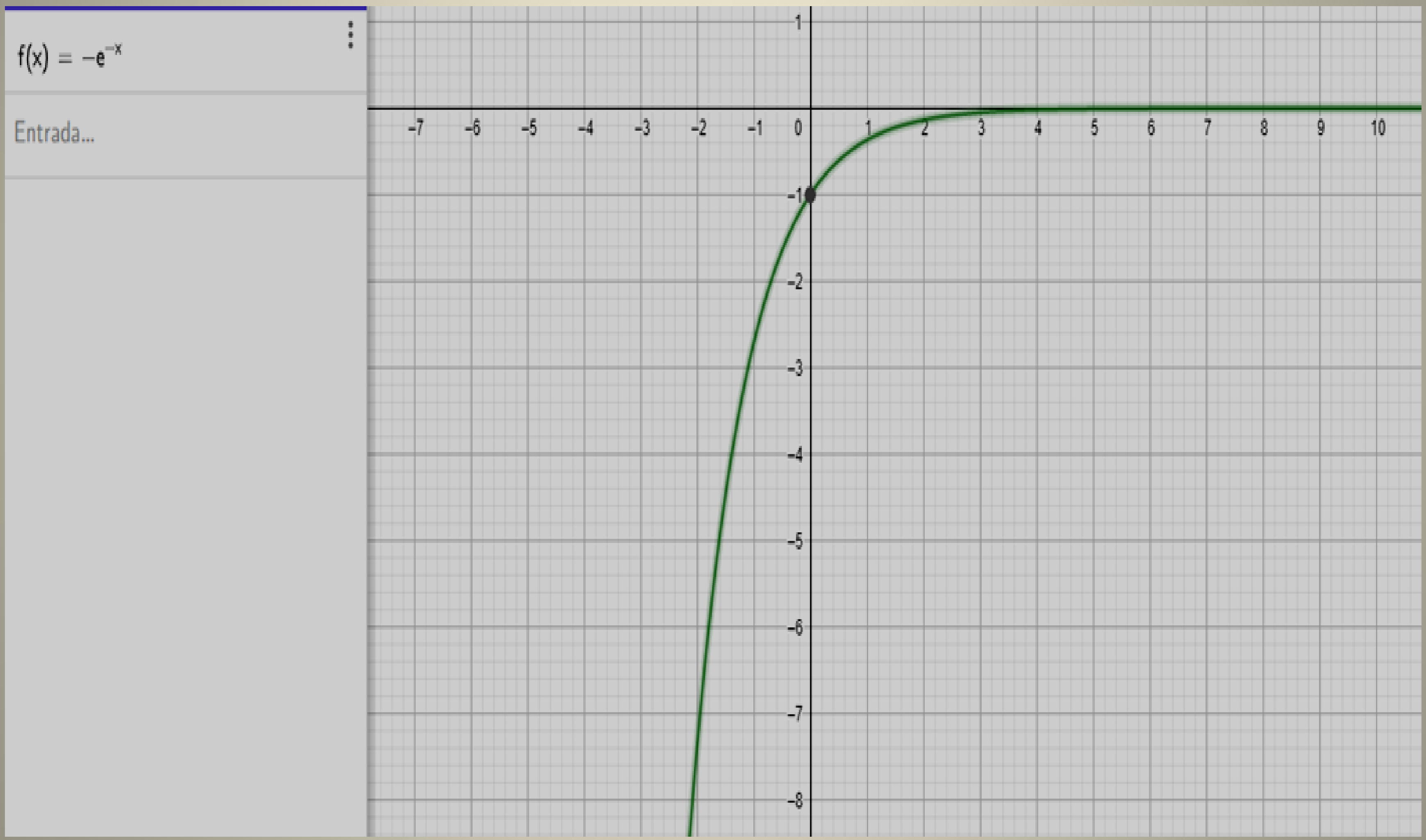
- Definición :Se dice que una función está ***acotada "superiormente"*** si existe algún número ***real K*** que es mayor o igual que cualquiera de los posibles valores de f(x). El número ***real K*** recibe el nombre de ***cota superior*** de f. El significado geométrico de este concepto es que la gráfica de la función y =f(x) está completamente por debajo de la recta horizontal y = K.

Ejemplos

1) En este caso la parábola $y= -x^2+3$ esta acotada por la recta $y=3$



2) $f(x)= -e^{-x}$ esta acotada superiormente por y=0

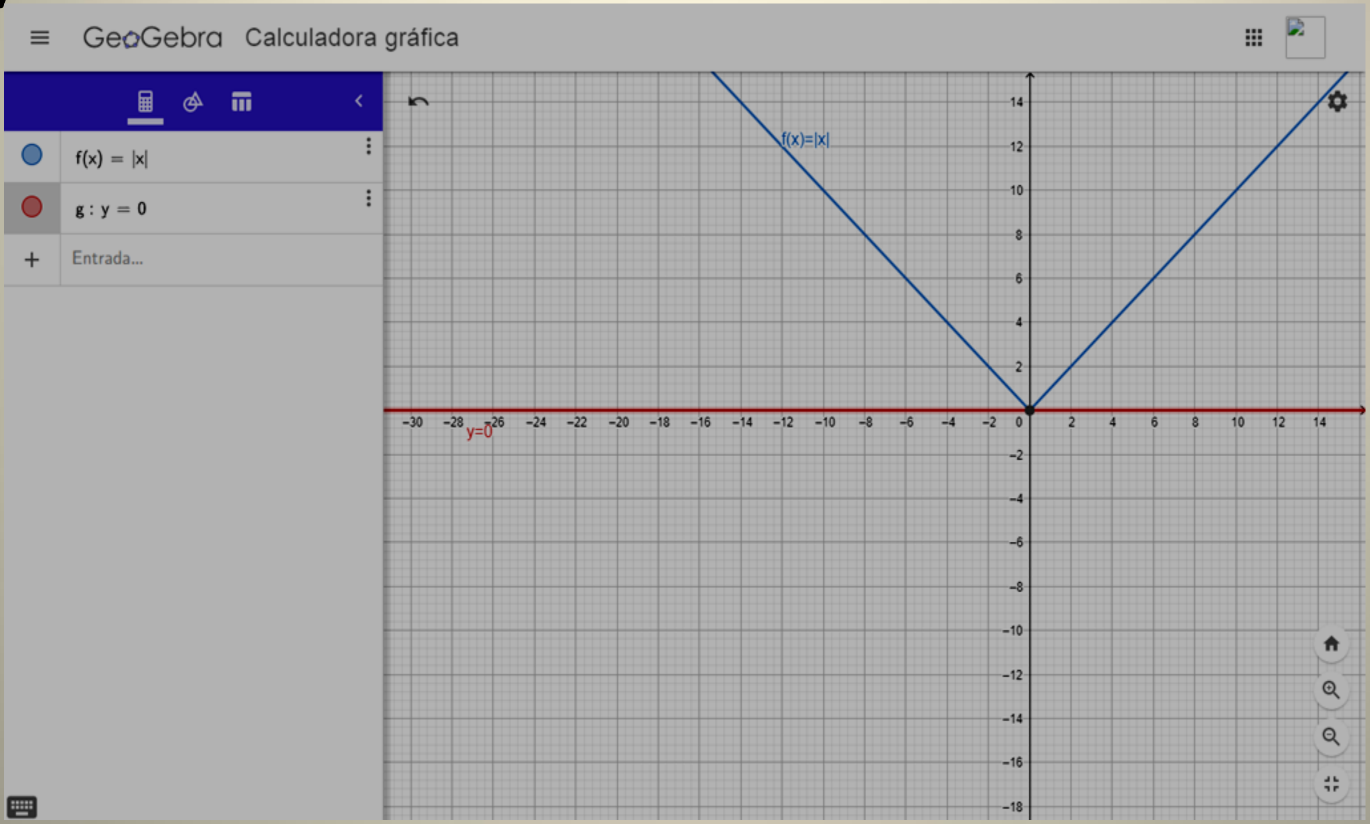


Función Acotada Inferiormente

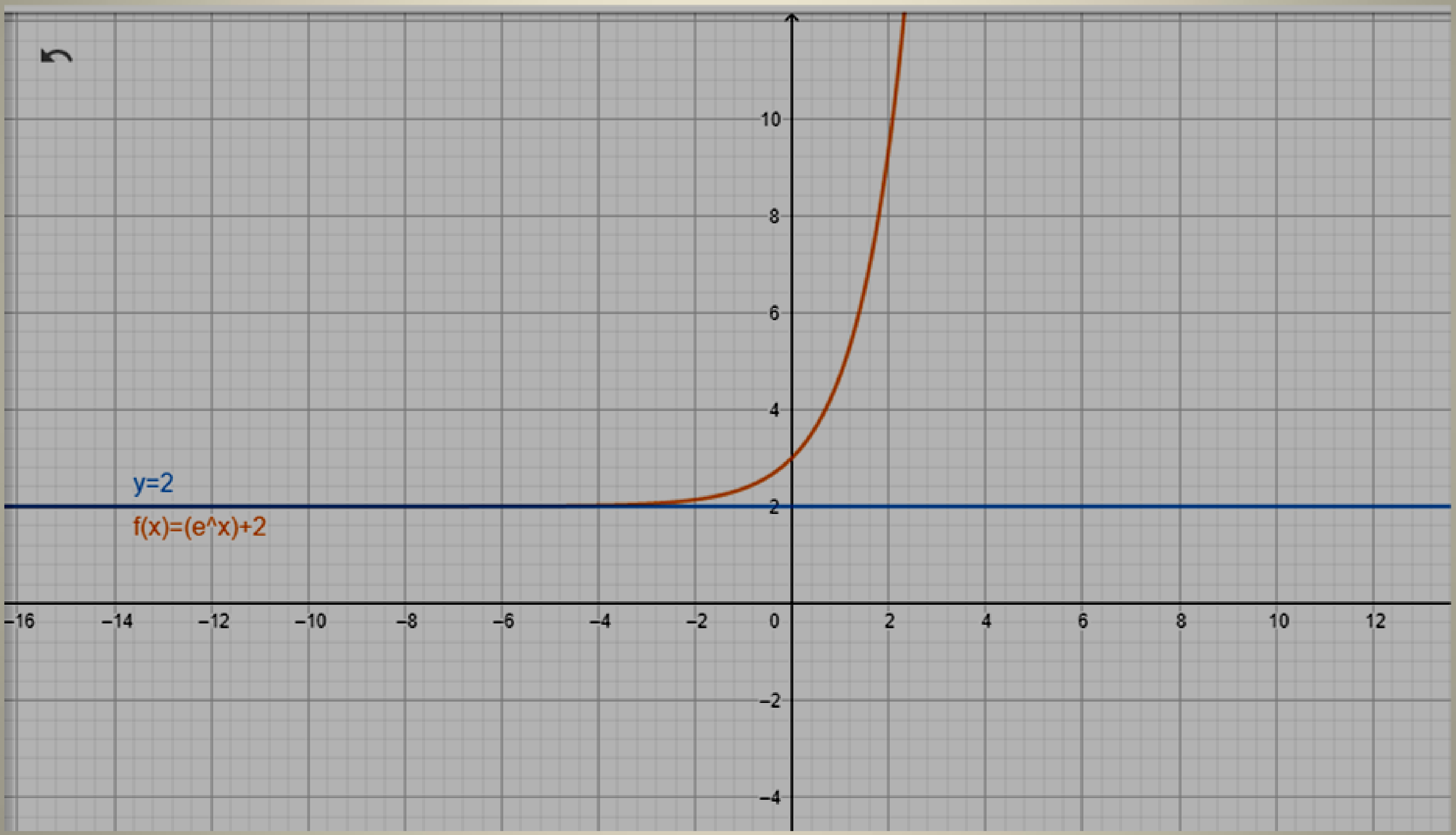
- Definición: Se dice que una función está ***acotada “inferiormente”*** si existe algún número ***real k*** que es **menor o igual** que cualquiera de los posibles valores de f(x). El número ***real k*** recibe el nombre de ***cota inferior*** de f. El significado geométrico de este concepto es que la gráfica de la función y=f(x) está completamente por encima de la recta horizontal y=k.

Ejemplos

- 1) f(x)= |x| es una función acotada inferiormente por y =0



2) $f(x) = e^x + 2$ está acotada inferiormente por y=2



- Definición: Diremos que una función está **acotada**, sin más, cuando lo está "***superior e inferiormente***". La gráfica de esta función está totalmente contenida en una banda limitada por dos rectas horizontales.

Ejemplos

- 1) $y = x^2$ función acotada inferiormente por $y = -1$ (por ej)
- 2) $y = - | x | +1$ función acotada superior mente por $y = 1$ (por ej)
- 3) $y = \cos x$ esta acotada. Por $y= +/-1$

Asíntotas

Asíntotas de una curva :

- Las **asíntotas** son rectas a las cuales la función se va aproximando indefinidamente, cuando por lo menos una de las variables (x o y variable independiente o dependiente) tienden al **infinito**.
- Las asíntotas se clasifican en:

$$\text{Asíntotas}\begin{cases}\text{Verticales}\\ \text{Horizontales}\\ \text{Oblicuas}\end{cases}$$

Asíntotas Verticales

- Las **asíntotas verticales** de una función son rectas cuya expresión es ***x=k*** .
- No hay restricciones en cuanto al número de asíntotas verticales que puede tener una función:

➢ hay funciones que no tienen asíntotas verticales,

➢ hay funciones que tienen sólo una asíntota vertical ,

➢ hay funciones que tienen dos y hasta funciones que tienen infinitas asíntotas verticales.

- Definición :Se dice que la función f(x) tiene una asíntota vertical en **x = k** si y solo si

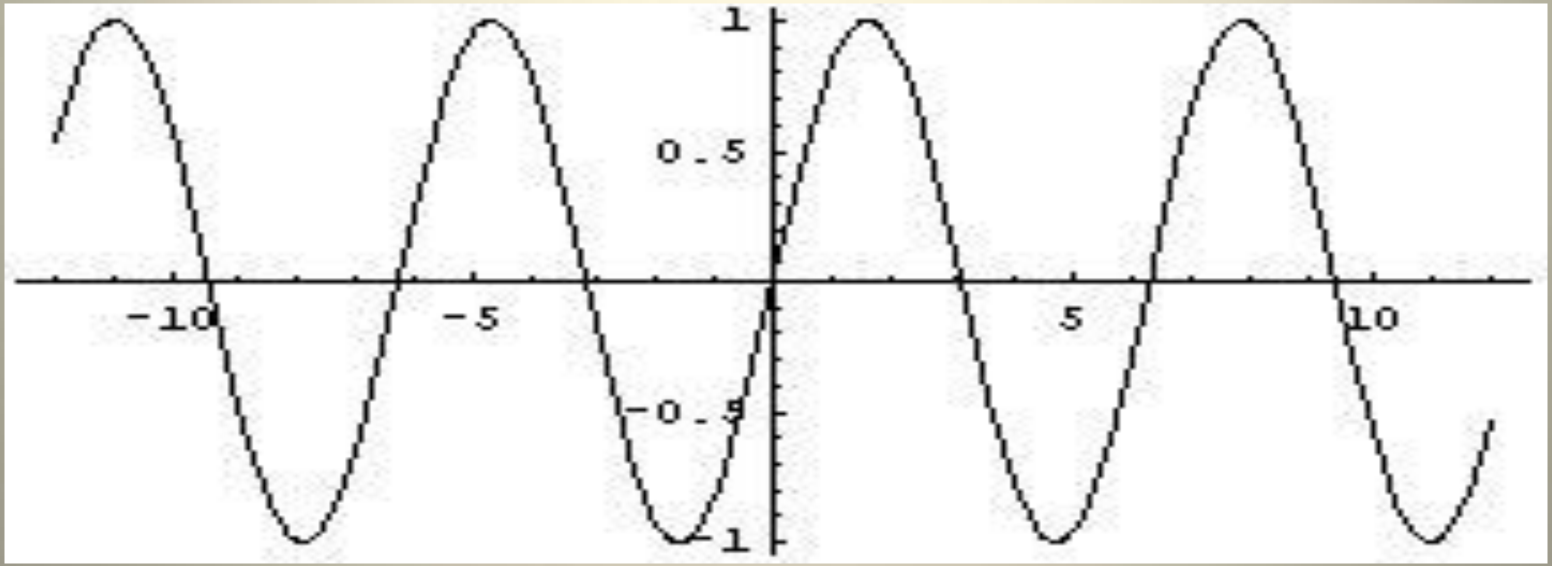
  alguno de ellos (o ambos) de los límites laterales es +/-∞

$$\lim_{x \to k} f(x) = \pm\infty$$

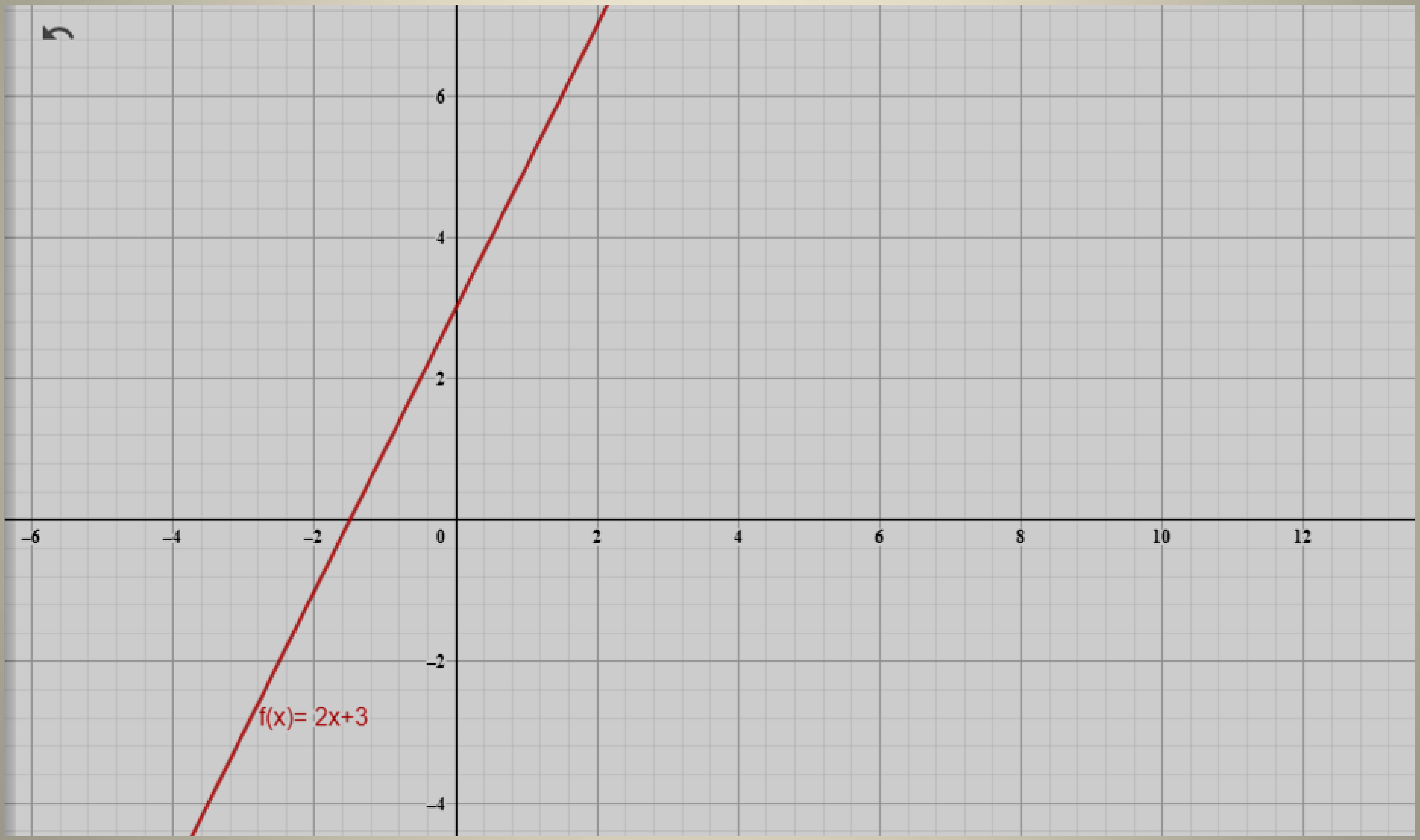
- Es decir, puede haber asíntota vertical por la derecha, por la izquierda o por ambos lados
- Puede haber una asíntota vertical, varias o infinitas

1)Funciones que no tienen asíntotas verticales

- Por ejemplo, no tiene asíntotas verticales f(x)=sen x (su dominio es R y no hay denominadores)



Otro ejemplo

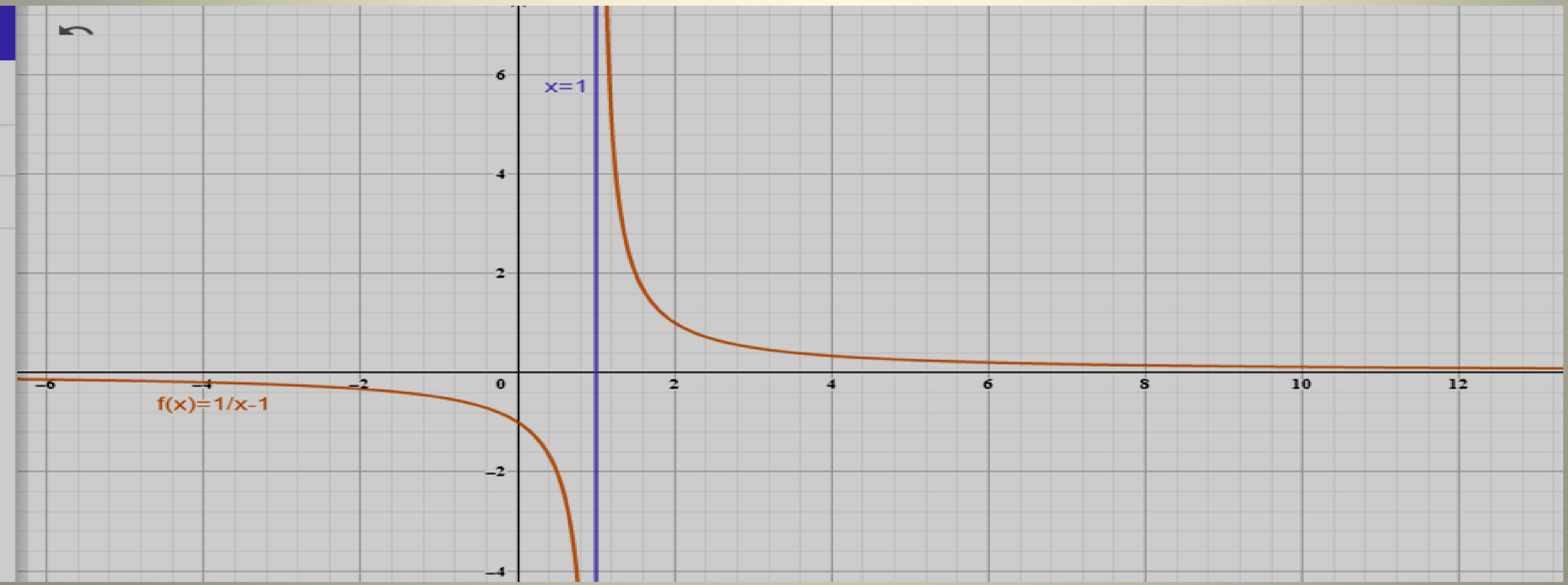


2) Funciones con una asíntota vertical

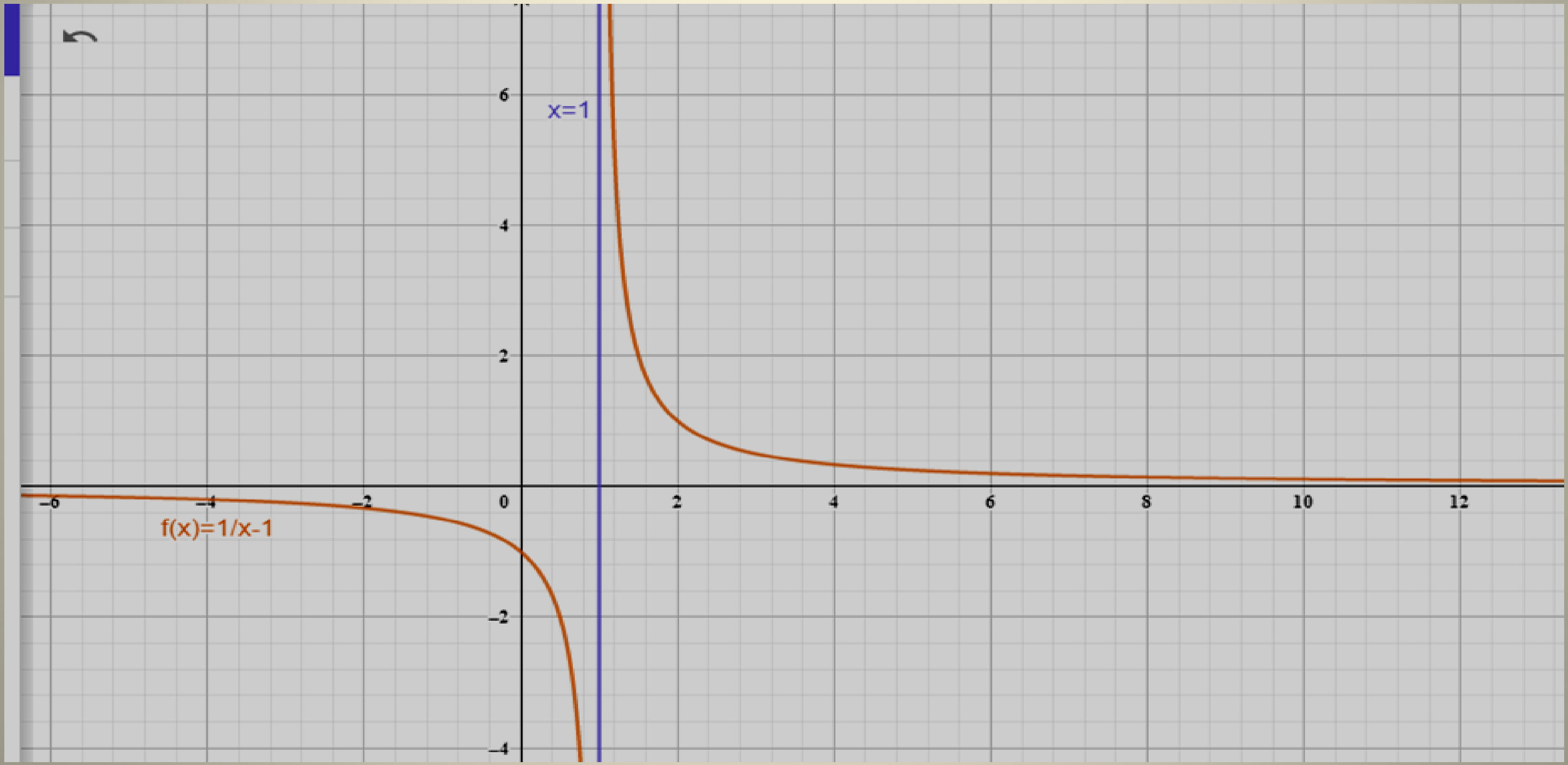
En este caso presenta un denominador que se anula en x=1.Si calculamos los límites que hemos comentado anteriormente obtenemos los siguientes resultados:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

$$f: R - \{1\} \to R \quad tal\ que\ f(x) = \frac{1}{x-1}$$



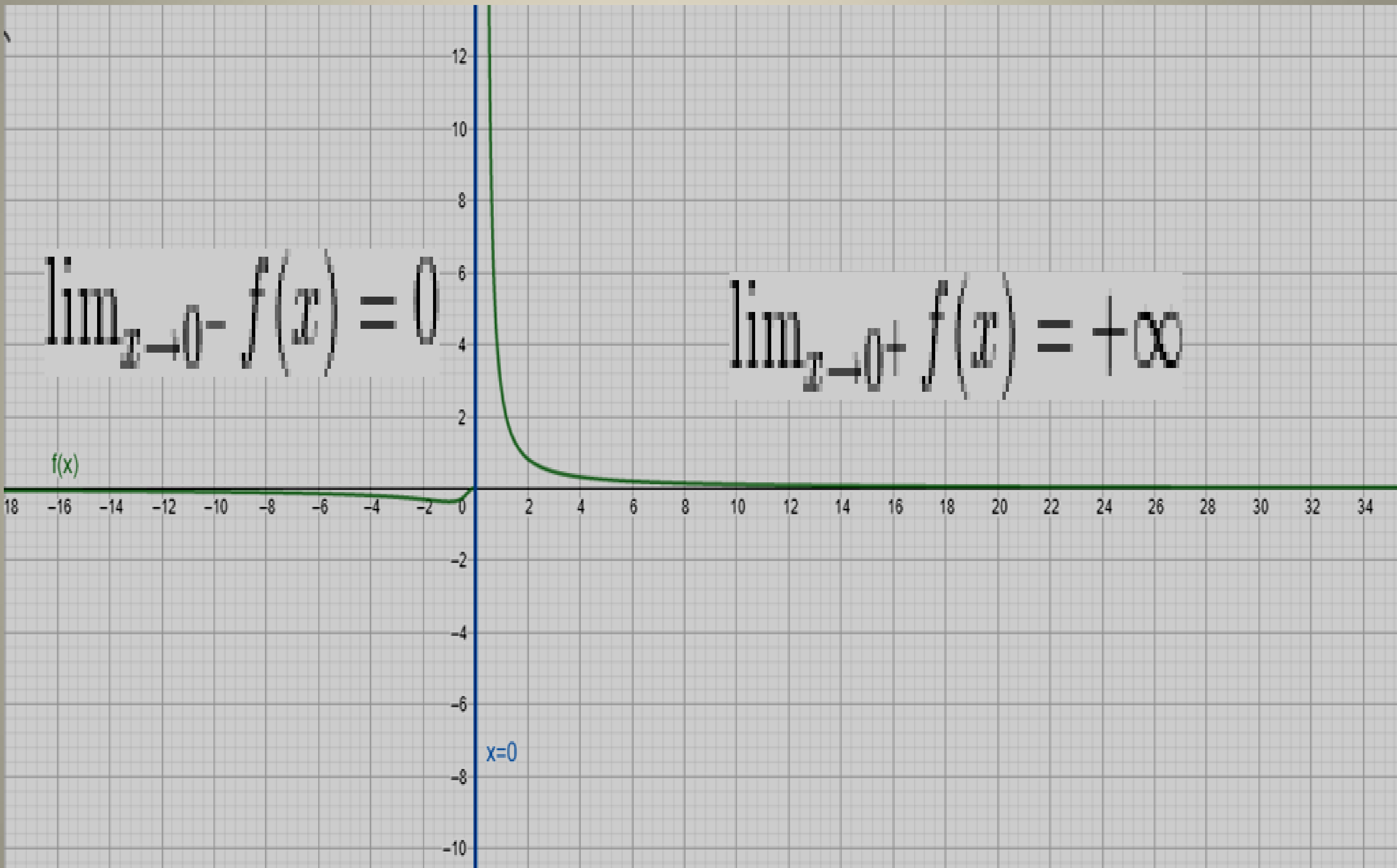
Por lo tanto, la recta x=1 es una asíntota vertical para **por los dos lados**.
Lo vemos en su gráfica
(la asíntota es la recta de color azul):



3) Funciones que tienen una asíntota vertical sólo por un lado

- Por ejemplo, $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$
- tiene una asíntota vertical en (anula los dos denominadores que tiene la función). Calculamos los límites:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$



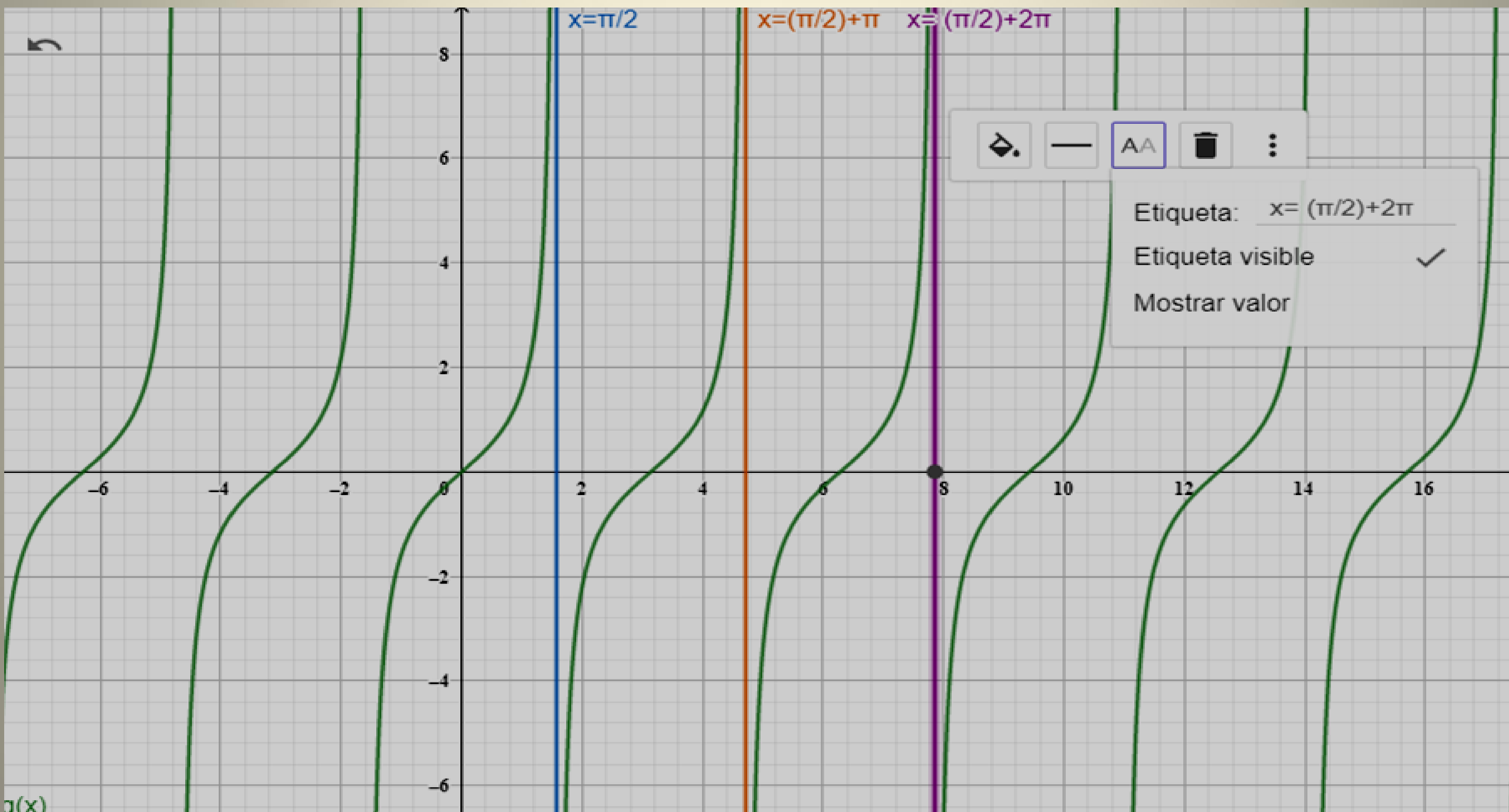
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

4)Funciones que tienen infinitas asíntotas verticales

- Hemos comentado antes que una función puede tener cualquier número de asíntotas verticales. El caso posiblemente más curioso es el de una función que tenga infinitas asíntotas de este tipo. El ejemplo más conocido es el de la función tg(x)

Se puede comprobar de forma sencilla (con los límites anteriores) que tiene una asíntota vertical en cada uno de los puntos $\frac{\pi}{2}+n\pi$, por lo que tiene infinitas asíntotas verticales. Lo vemos en su gráfico



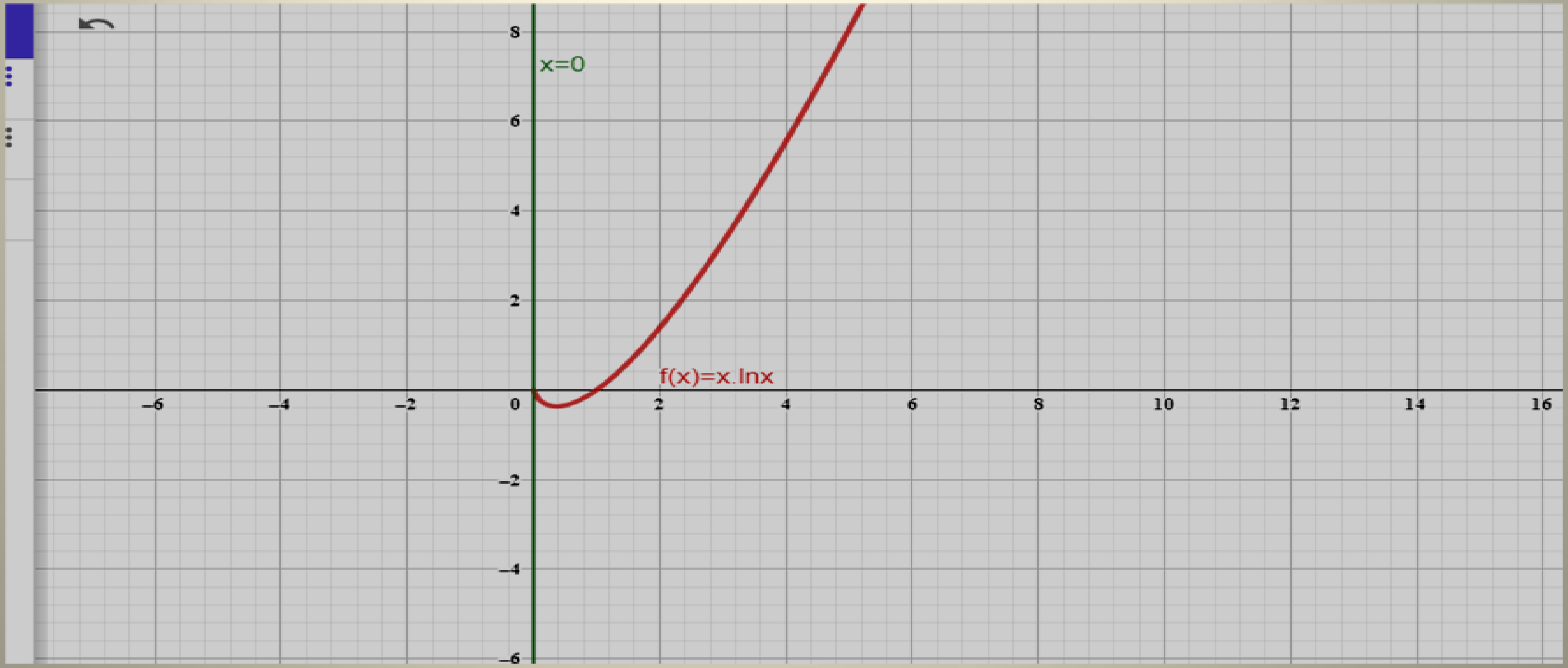
Los valores *candidatos* a existencia de asíntota vertical son los siguientes:

- **1)Valores que anulan algún denominador de la función**
- Por ejemplo, para $f(x) = \frac{x}{x-1}$

tenemos un candidato a asíntota vertical en el punto x=1

2) Extremos de intervalos del dominio de la función y que no pertenezcan al propio dominio

- $f(x) = x\,ln(x)$ en el intervalo $(0,\infty)$ donde 0 no pertenece al dominio de f. En x=0 hay un candidato a asíntota



- En consecuencia, lo primero que debemos hacer cuando tengamos que calcular las asíntotas de una función es calcular su dominio (fundamental para cualquier cálculo relacionado con la gráfica de una función) e igualar a cero todos los denominadores que aparezcan en la misma para recopilar todos los candidatos

Asíntotas Horizontales

- Las ***asíntotas horizontales*** de una función son rectas horizontales cuya expresión es ***y= b***. (donde b es un número real) Una función puede tener a lo ***sumo dos*** asíntotas horizontales: una cuando $x \longrightarrow -\infty$ y otra por cuando $x \longrightarrow \infty$ (muchas veces este límite coincide y tiene una sola asíntota horizontal). La asíntota horizontal puede aparecer cuando $x \rightarrow +\infty$ o bien $x \rightarrow -\infty$ o a ambos.

Ejemplos

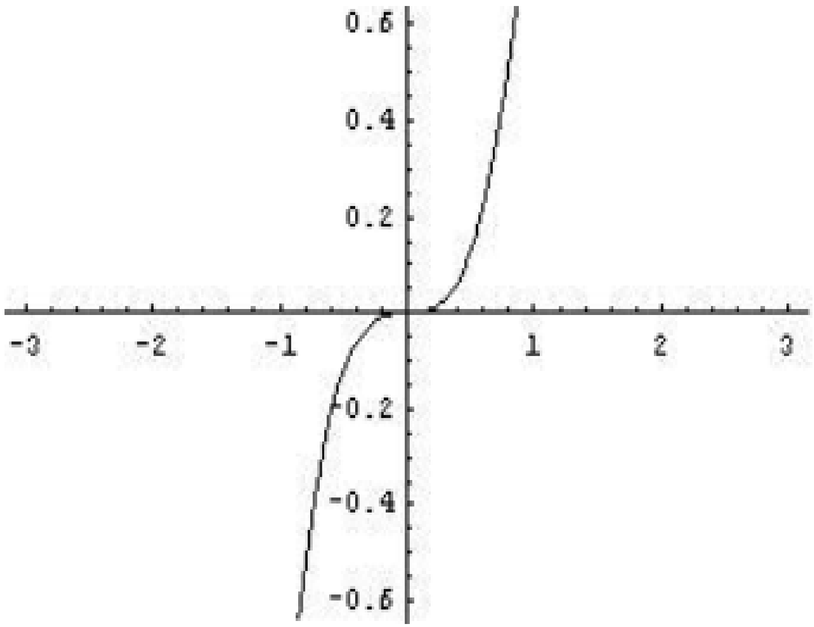
- a) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

- b) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x-1} = 1 \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

- c) $$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1 \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = -1$$

1) Funcionen que no tienen asíntotas horizontales

Por ejemplo, $f(x) = x^3$ no cumple que los dos límites expuestos anteriormente dan como resultado $-\infty$ y $+\infty$respectivamente. Vemos su gráfica:

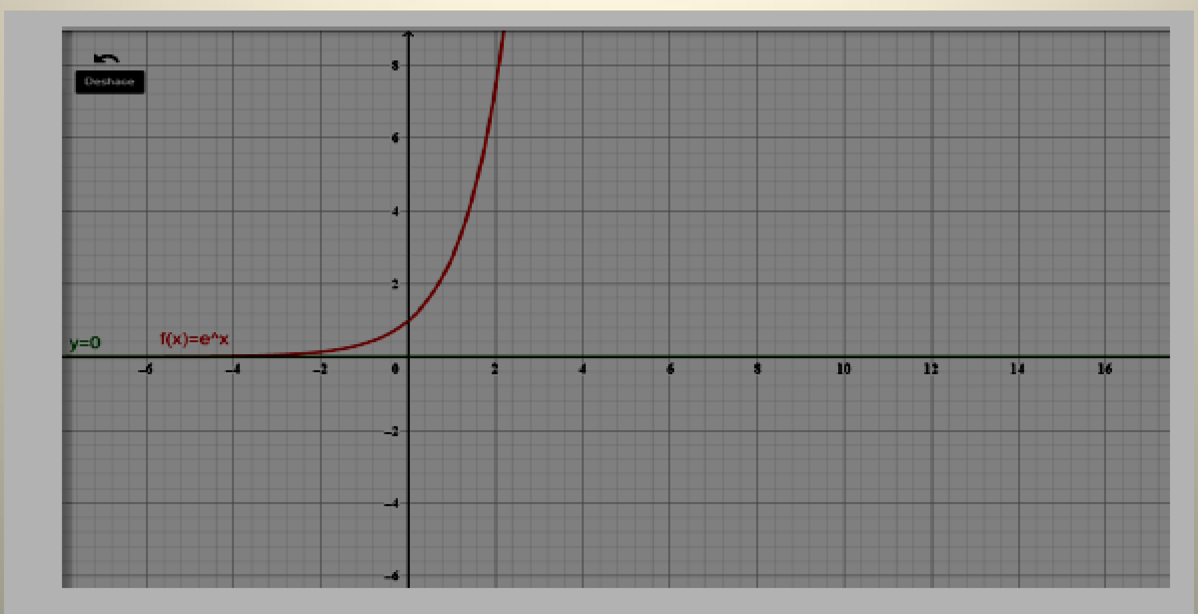


2) Funciones que tienen una sola asíntota horizontal y que lo es solo por un lado

Como ejemplo tenemos la función $f(x) = e^x$. En este caso $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$,

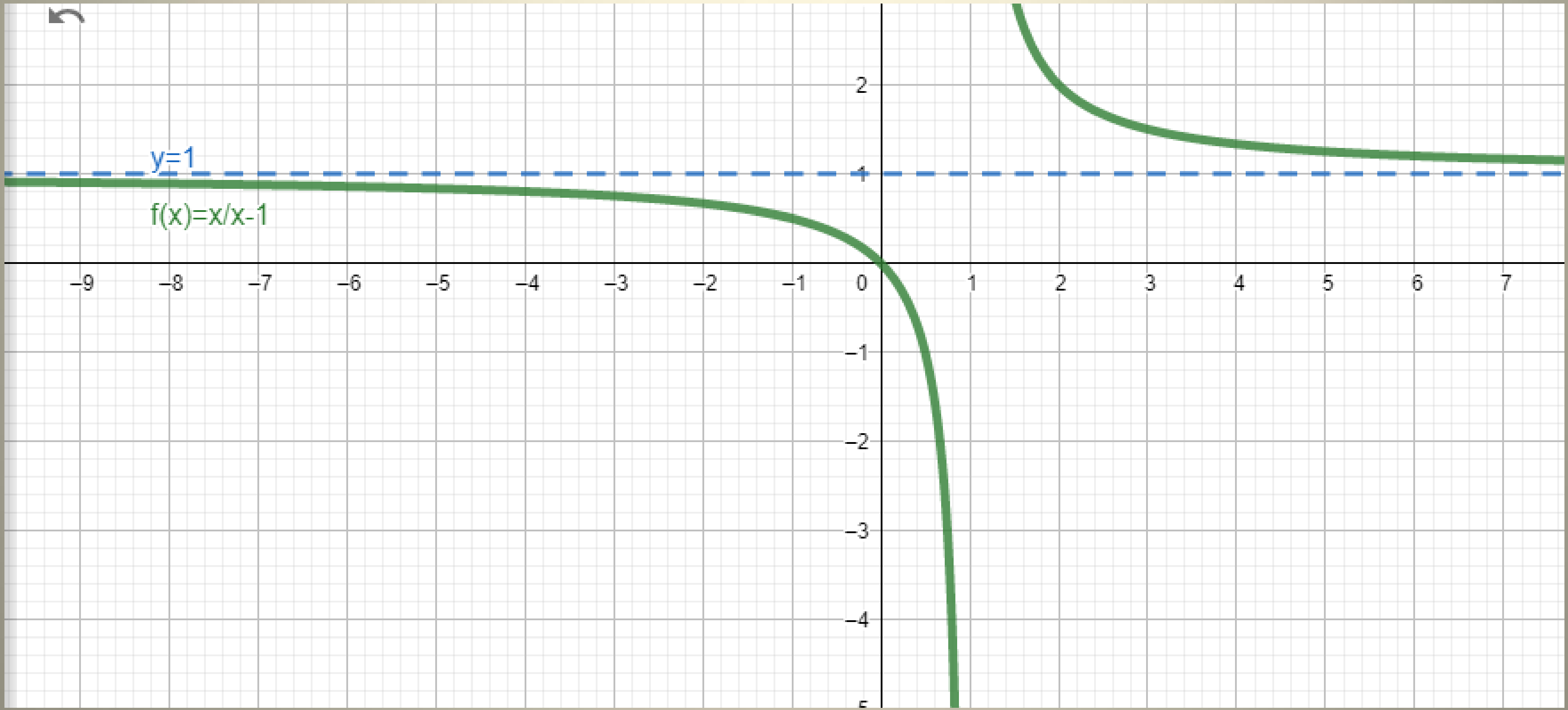
por lo que $y = 0$ es una asíntota horizontal de $f(x)$ por la izquierda, y

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, por lo que por la derecha no tenemos asíntota horizontal.
Vemos su gráfica junto a su asíntota (en verde):



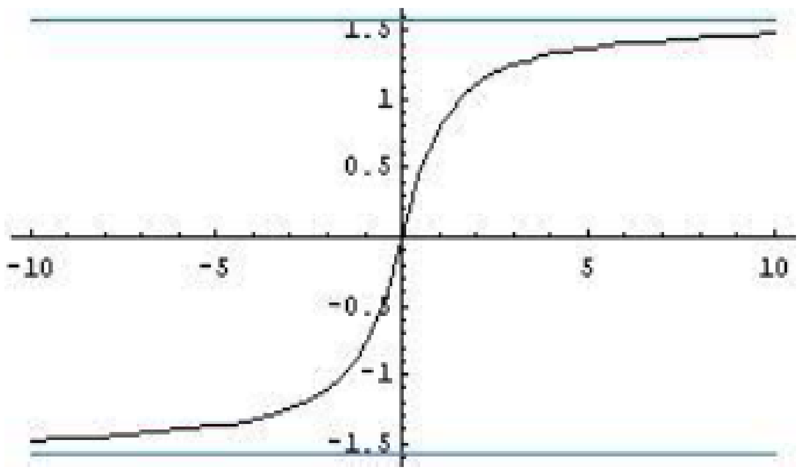
3)Funciones que tienen una asíntota horizontal que lo es por los dos lados

Por ejemplo, $f(x) = \frac{x}{x-1}$. En este caso, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 1$, por lo que la recta $y = 1$ es asíntota horizontal de $f(x)$ tanto por la izquierda como por la derecha. Vemos su gráfica junto a su asíntota (en rojo):



4)**Funciones que tienen dos asíntotas horizontales distintas**

Por ejemplo $f(x) = \arctan x$ cumple que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{-\pi}{2}$, por lo que $y = \frac{-\pi}{2}$ es asíntota horizontal de $f(x)$ por la izquierda y $\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$, por lo que $y = \frac{\pi}{2}$ es asíntota horizontal de $f(x)$ por la derecha. Podéis ver su gráfica junto a sus dos asíntotas (en azul) en la siguiente imagen:



Asíntotas Oblicuas

- Las **asíntotas oblicuas** de una función son rectas cuya expresión es $\boldsymbol{y=mx+n}$ ($m \neq 0$) Una función puede tener, **como máximo**, dos asíntotas oblicuas distintas

Por lo general nosotros decimos que:

Sea f (x) una función racional dada por $\dfrac{g(x)}{h(x)}$ donde el grado de g (x) = grado (h (x) + 1). Haciendo el cociente entre g (x) y h (x) obtenemos m x + b y r (x) cociente y resto de dicha división respectivamente luego podemos escribir a :

Si este cociente tiende a cero cuando $x \to \pm\infty$

$$f(x) = \frac{(mx+b)h(x)+r(x)}{h(x)} = (mx+b) + \frac{r(x)}{h(x)}$$

y = mx + b es la asíntota oblicua para f (x)

El cálculo de las mismas se realiza así:

Asíntota oblicua por la izquierda

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Si m da un resultado distinto de 0 y de $\pm\infty$ prodecemos con el cálculo de n de esta forma:

$$n = \lim_{x \to -\infty}(f(x) - mx)$$

Si n da como resultado un número real (es decir, ese límite no vale ni ∞ ni $-\infty$), entonces la recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua para $f(x)$por la izquierda.

Asíntota oblicua por la derecha

$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$

Si $m$da un resultado distinto de 0 y de $\pm\infty$ prodecemos con el cálculo de $n$de esta forma:

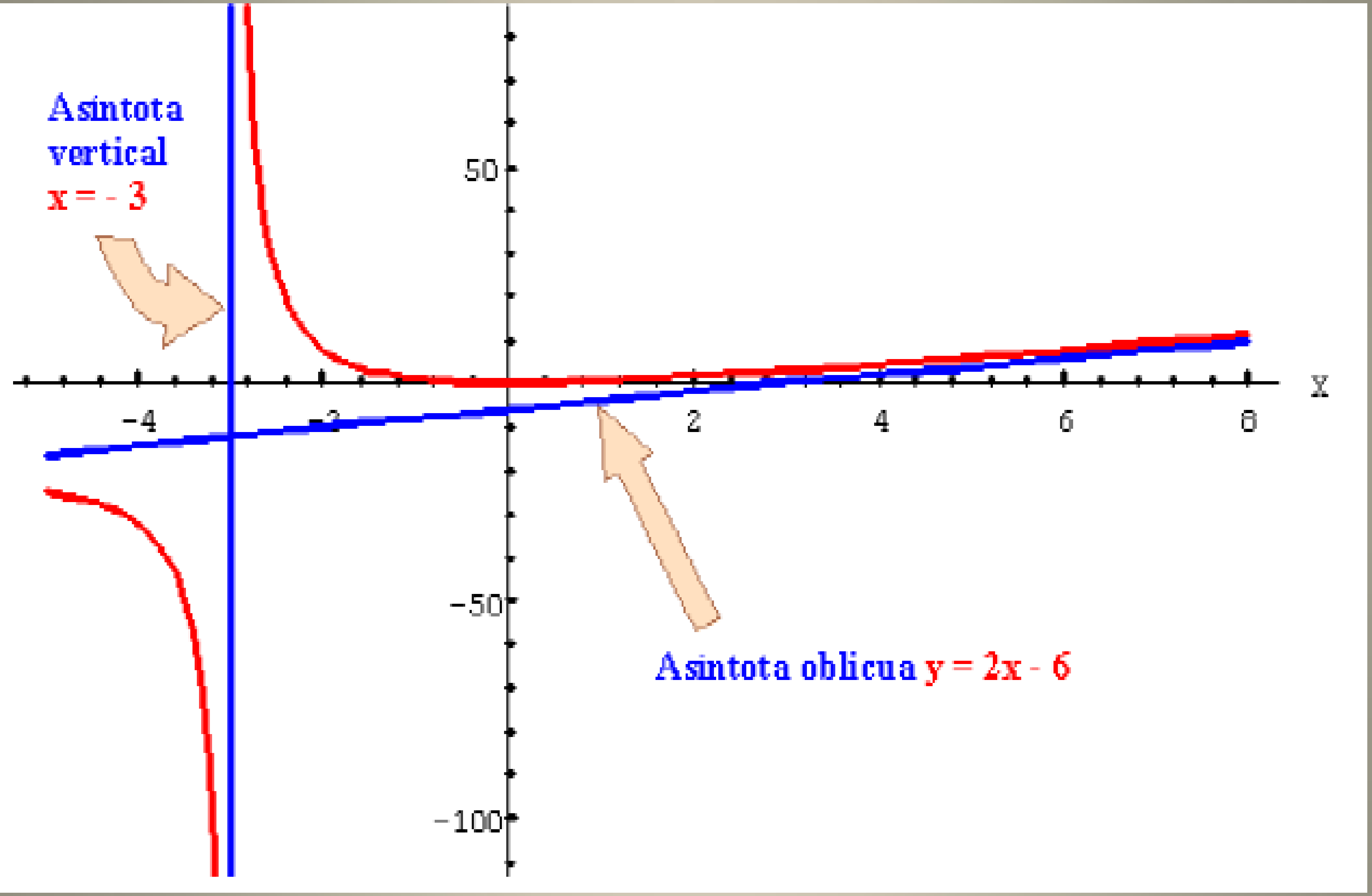
$n = \lim_{x \to \infty}(f(x) - mx)$

Si $n$da como resultado un número real (es decir, ese límite no vale ni ∞ni $-\infty$), entonces la recta $y = mx + n$es una asíntota oblicua para $f(x)$por la derecha.

Ejemplo

$$f(x) = \frac{2x^2}{x+3} \quad , \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2}{x+3}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2+3x} = 2 = m$$

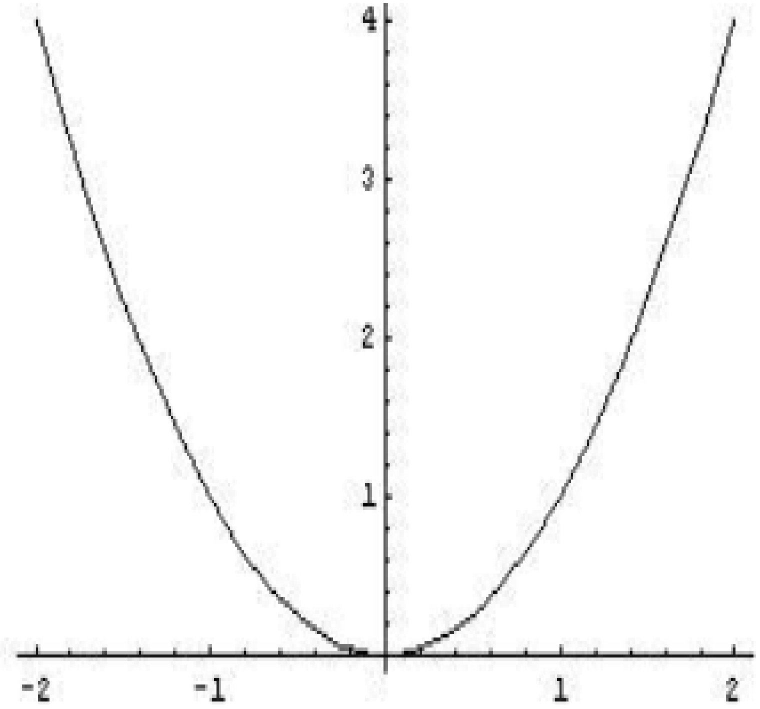
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2}{x+3} - 2x\right) = -6 = n \quad , \quad \mathrm{y} = 2\mathrm{x} - 6$$


Asintota vertical
x = - 3
50
-4
2
4
6
8
x
-50
-100
Asintota oblicua y = 2x - 6

Nota: En el cálculo de los límites se entiende la posibilidad de calcular los límites laterales (derecho, izquierdo), pudiendo dar lugar a la existencia de asíntotas por la derecha y por la izquierda diferentes o solo una de las dos.

1. Funciones que no tienen asíntotas oblicuas

Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ no tiene asíntotas oblicuas ya que al calcular m tanto por la izquierda como por la derecha obtenemos $m = +\infty$. Su gráfica es la parábola que nos solemos encontrar con más frecuencia:



2. Funciones que tienen una asíntota oblicua por los dos lados

Por ejemplo, la función $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$tiene una única asíntota oblicua, que además lo es por los dos lados. Veamos cuál es exactamente dicha asíntota:

$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x-2} = 1$

$n = \lim_{x \to -infty} (f(x) - 1 \cdot x) = 2$

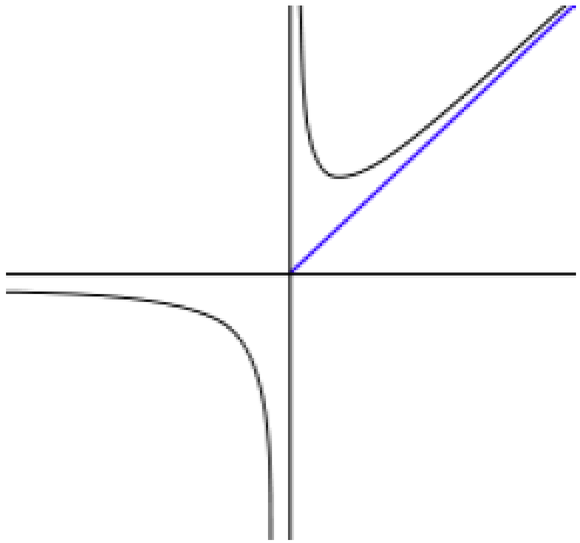
Por tanto la asíntota oblicua por la izquierda es $y = x + 2$.

Si realizamos los cálculos cuando $x \to +\infty$el resultado es el mismo. Por tanto la recta $y = x + 2$es asíntota oblicua de la función por los dos lados. Lo vemos en la siguiente gráfica (la asíntota oblicua en azul):

15
10
5
−5
−20
−15
−10
−5
0
5
10
15
20
25
30
35
40
g(X)=x+2
f(x)=(x^2)/x+2

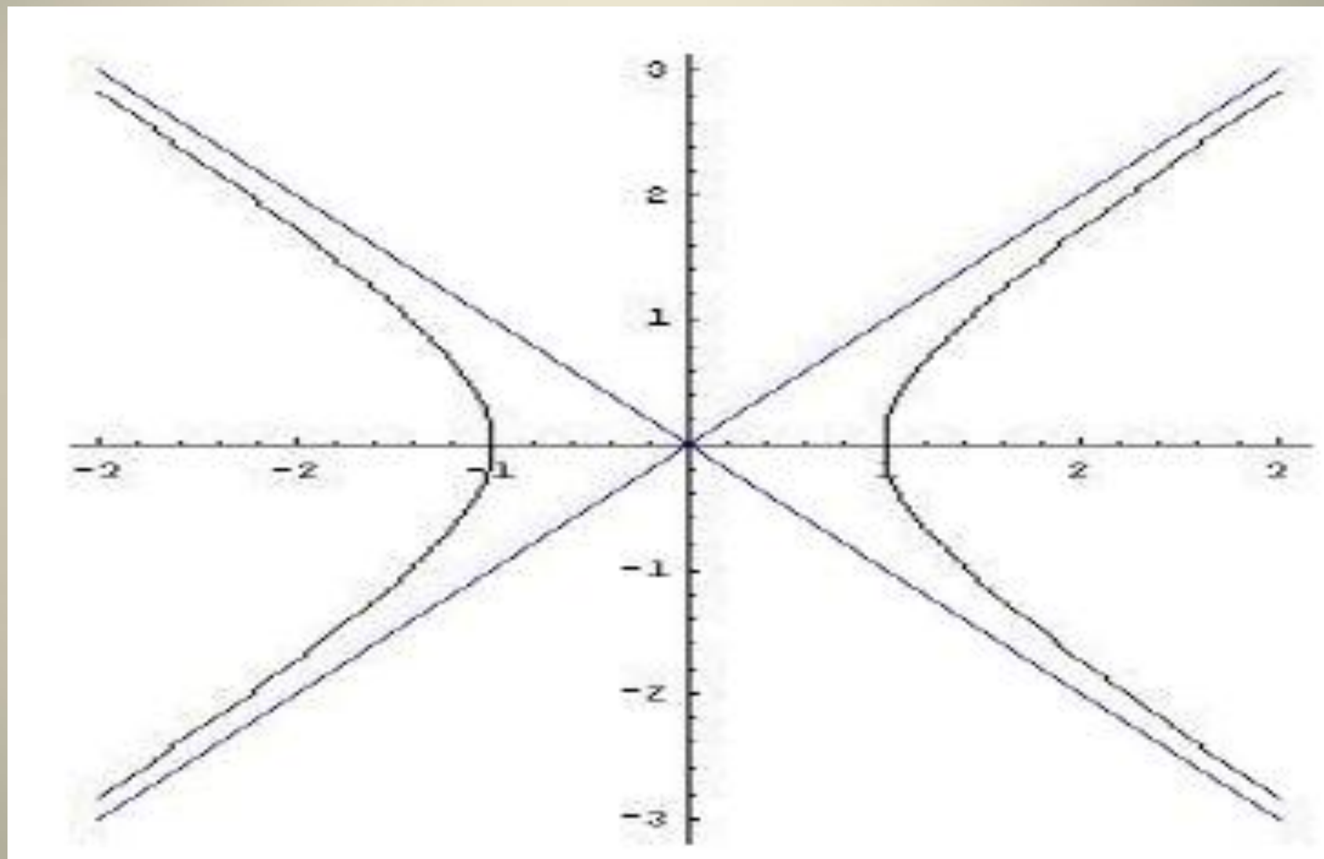
3. Funciones que tienen una asíntota oblicua sólo por un lado

Curioso caso, complicado de encontrar por otra parte. Un ejemplo puede ser la función $f(x) = x^{\frac{|x|}{x}} + \frac{1}{x}$. Su gráfica es:



4. Funciones que tienen dos asíntotas oblicuas distintas

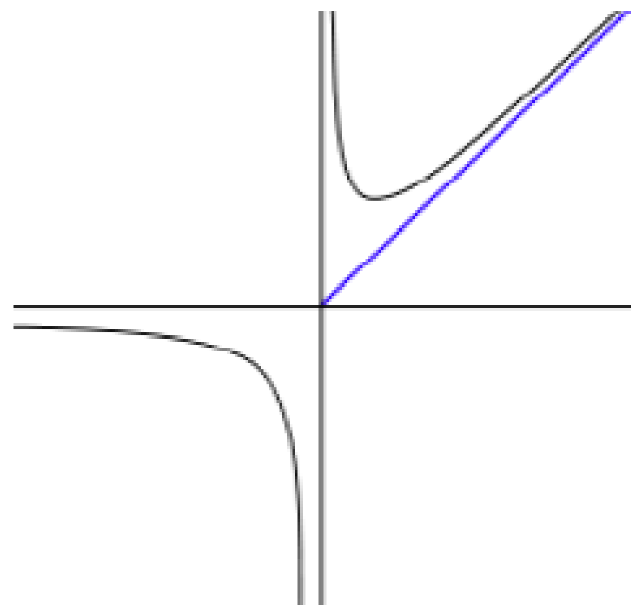
- Nosotros conocemos muy bien algunas de estas como
- $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad f(x) = \sqrt{x^2 - 1}.$$
- Hipérbola
- donde sus asíntotas oblicuas son $y=x$; $y=-x$


3
2
1
-1
-2
-3
-2
-2
-1
2
2

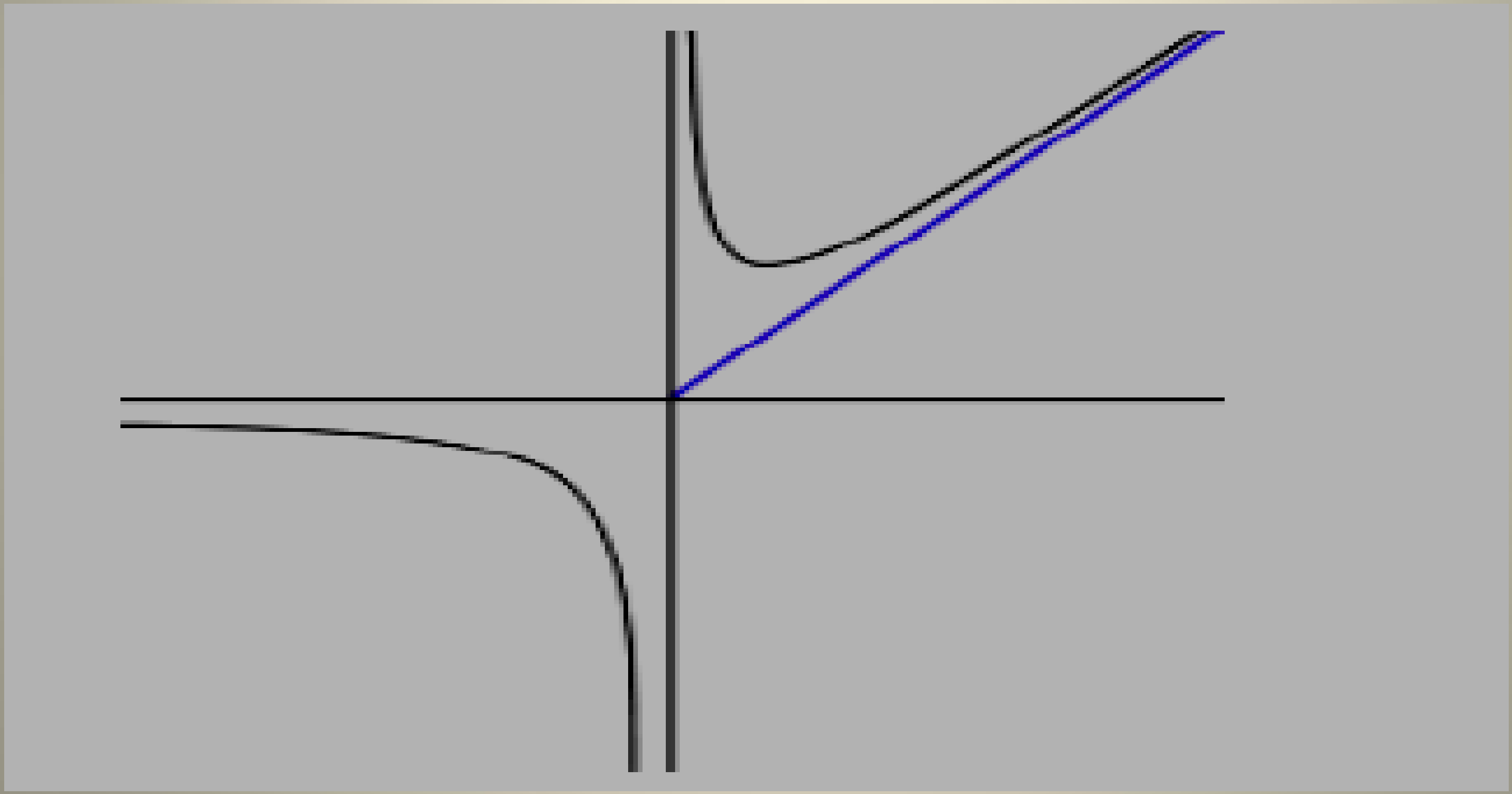
Mitos de las Asíntotas

Una función **sí puede tener asíntotas horizontales y oblicuas a la vez**.

Valga este ejemplo como explicación:



Que no pueden tener los tres tipos de asíntotas . No es cierto pueden tener las tres asíntotas
siendo la horizontal solamente por izquierda



NOTA

Una función no puede tener una asíntota horizontal y otra oblicua **por el mismo lado.**

Es decir, no podemos tener una asíntota horizontal y otra oblicua por la izquierda de la gráfica $(x \to -\infty)$ ni por la derecha $(x \to \infty)$. Pero una función sí puede presentar una horizontal por un lado y una oblicua por otro.

El número e (Euler)

- Una de las indeterminaciones esta dada por 1^{∞}
- El objetivo es encontrar el límite de funciones que se indeterminan de la forma 1^{∞}.

- Recordemos que el número de euler "e" es el valor a quien converge el siguiente límite:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

- Por lo tanto : El **número e** se define como el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \quad \text{, también se cumple:} \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$$

- **Ejemplos**

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{x(-1)(-1)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

Mas ejemplos

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{ax} = \lim_{x \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{a} = e^{a}$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{ax} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{ax} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{\frac{-ax}{-1}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-a} = e^{-a} = \frac{1}{e^{a}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{k}}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{k}}\right)^{x\frac{k}{k}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{k}}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^{k}=e^{k}$$

Aplicamos el inverso del inverso

$$\frac{k}{x}=\frac{1}{\frac{x}{k}}=1:\frac{x}{k}=\frac{k}{x}$$

Multiplicamos y dividimos por k

Aplicamos la propiedad de las potencias:

$$\left(a^{m}\right)^{n}=a^{m\cdot n}$$