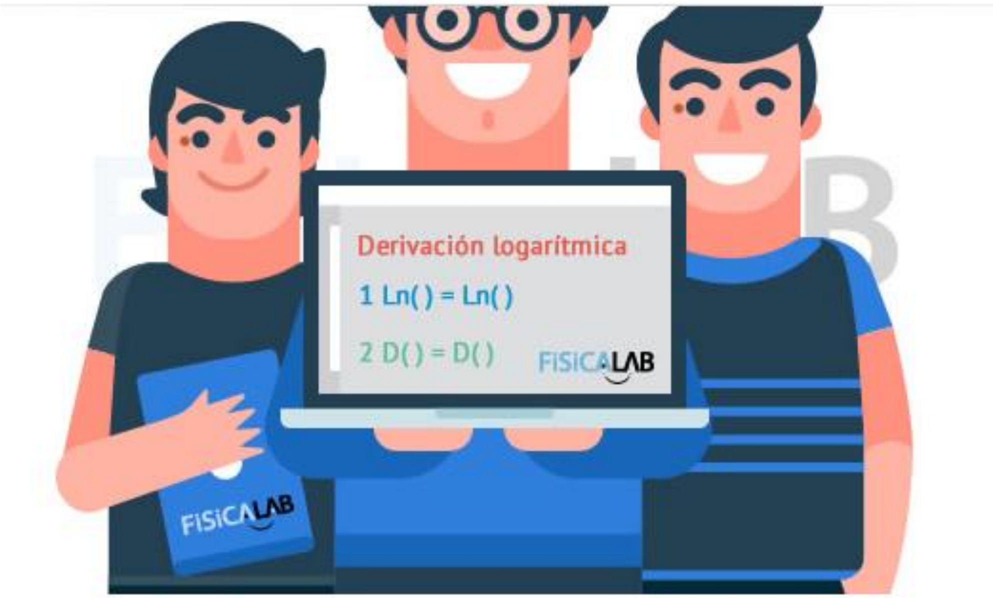


DERIVADAS PARTE 3

DERIVADAS DE FUNCIONES COMPUESTAS

La derivación de funciones simples es inmediata porque solo se necesita aplicar la tabla de derivadas y realizar operaciones algebraicas simples.

Cuando se trata de funciones compuestas la operación requiere dos partes, en primer lugar se deriva la función principal o **contenedora** y en segúndo lugar se deriva la función secundaria o **contenida**, finalmente se realiza la multiplicación.

$$f(x) = \operatorname{sen}(\ln x) \qquad f(x) = \operatorname{sen}[g(x)] \quad y \quad g(x) = \ln x$$

derivando queda: $f'(x) = \cos(g(x)) \quad y \quad g'(x) = \dfrac{1}{x}$

finalmente queda: $y' = \cos(\ln x).\dfrac{1}{x} = \dfrac{\cos(\ln x)}{x}$

$$\text{Sea:} \quad y = (f \circ g)(x) = f[g(x)], \text{entonces la derivada será}$$

$$y' = f'[g(x)].g'(x)$$

Como se puede ver en primer lugar se deriva f considerando que es la función **principal o contenedora de g(x**), en esta circunstancia la función g(x) funciona como si fuera la variable x en las derivadas inmediatas, a este resultado se lo multiplica por la derivada de g(x) como cualquier derivada inmediata.

Otra estategia muy útil consiste en hacer el siguiente cambio de variable:

$g(x) = \ln x = t$ entonces la función original $f(x) = \operatorname{sen}(\ln x)$ se transforma

en $f(t) = \operatorname{sen}(t)$ y su derivada $f'(t) = \cos(t).t'$

Otro ejemplo usando el cambio de vartiable g(x) = t:

sea $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x)$ haciendo el cambio de variable $t = \operatorname{sen} x$,

entonces $t' = \cos x$

la función original $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x)$ se convierte en $f(t) = \ln(t)$

derivando queda: $f'(t) = \frac{1}{t}\, t'$ y finalmente reemplazando quedará

$$y' = \frac{1}{\operatorname{sen} x} . \cos x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Mas Ejemplos

$1.-\ f(x)=e^{xsenx}$ cambio de variable $t = xsenx$, y

$t' = senx + xcosx$ ahora es $f(t)=e^{t}$

y su derivada $f'(t)=e^{t}\,t'$ haciendo el cambio

de variable inverso queda $f'(x)=e^{xsenx}\left(senx+xcosx\right)$

$$2.-\ f(x)=\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right)\quad \text{cambio de variable}\ \ t=\sqrt{x}\quad t'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(t)=\operatorname{sen}(t);\ \text{y derivando}\ \ f'(t)=(\cos t)t'$$

y haciendo el cambio de variable inverso queda:

$$f'(x)=\cos\left(\sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\cos\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$$

Para el caso de composición de más de dos funciones se procede igual, en caso de que sean tres funciones será:

$$y=f\left\{g\left[h\left(x\right)\right]\right\} \text{ entonces } y'=f'\left\{g\left[h\left(x\right)\right]\right\}g'\left[h\left(x\right)\right]h'\left(x\right)$$

Derivada Logarítmica

- La **derivación logarítmica** es una *técnica de derivación* que nos permite hallar la **derivada de una función** aplicando las propiedades de los logaritmos. Aunque se puede utilizar para resolver muchos tipos de derivadas, es especialmente útil para las funciones de tipo *exponencial* como:

$$f(x) = g(x)^{h(x)}$$

Hablamos de propiedades de los Logaritmos

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

Los logaritmos, no importa cuál sea su base, todos tienen las siguientes propiedades:

1. $log\ A + log\ B = log\ AB$
2. $log\ A - log\ B = log\left(\dfrac{A}{B}\right)$
3. $A\ log\ B = log\ B^{A}$
4. Para cambio de base: $log_{C}\ A = \dfrac{log_{a}A}{log_{a}C}$

De éstas, la tercera será muy útil para resolver algunas derivadas de logaritmos, como se Expondrá más adelante.

f(x)* es una** de **función *g(x)* elevada a otra función *h(x).

- Para aplicar la **técnica de derivación logarítmica** a esta función:

❖1. Tomamos logaritmos en ambos miembros de la igualdad (como ambos miembros de la ecuación son iguales, al aplicar la misma operación a ambos, la igualdad se mantiene):

$$f(x) = g(x)^{h(x)}$$

- Entonces

$$\ln f(x) = \ln g(x)^{h(x)}$$

- 2. Aplicamos propiedad del logaritmo

$$A \log B = \log B^A$$

Por lo tanto nos queda :

$$\ln f(x) = \mathrm{h}(\mathrm{x}) \ln g(x)$$

- 3.Derivamos los dos miembros (si las funciones son iguales, sus derivadas también deben de serlo) teniendo en cuenta las reglas de derivación como por ejemplo la derivada del ln y la derivada del producto.

$$(\ln f(x) = \mathrm{h(x)} \ln g(x))'$$

$$\frac{1}{f(x)} . f'(x) = h'(x) . \, lng(x) + h(x) . \frac{1}{g(x)} g'(x)$$

❖4.Despejamos *f(x)*

$$f'(x) = \left(h'(x).\, lng(x) + h(x).\frac{1}{g(x)} g'(x) \right) f(x)$$

Observación:

Como **restricción**, tener en cuenta que, dado que el **dominio de la función logarítmica** es $\mathbb{R}^+$, en sentido riguroso *f(x)* debería tomar valores estrictamente positivos para poder aplicar esta técnica.

Ejemplo

Como ejemplo derivaremos la función $f(x)=x^x$:

$$f(x)=x^x \xRightarrow[\ln()=\ln()]{} \ln(f(x))=\ln(x^x) \xRightarrow[\ln(a^b)=b\ln(a)]{} \ln(f(x))=x\cdot\ln(x) \xRightarrow[D()=D()]{} \frac{f'(x)}{f(x)}=1\cdot\ln(x)+\frac{x}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=f(x)\cdot(\ln(x)+1) \Rightarrow \boxed{f'(x)=x^x\cdot(\ln(x)+1)}$$

Derivada de la Función Inversa

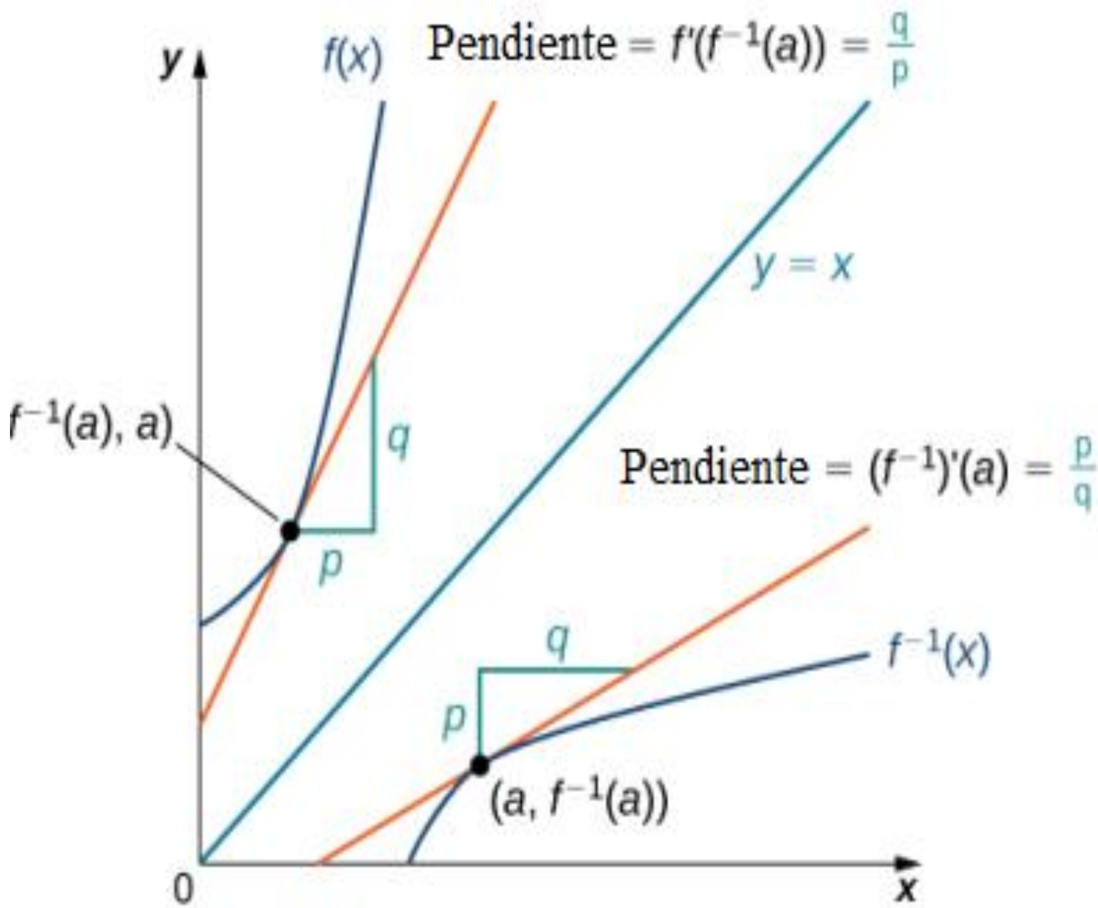
- La **función inversa** o **función** recíproca de una **función** dada y = f(x) es aquella **función** f^{-1} (x) que a partir de un valor “y” calcula el valor “x” que lo origina. La **derivada** de una **función** y la **derivada** de su **función inversa** son **funciones** recíprocas.

- Conocida una **función *f***, y su **inversa *f*$^{-1}$**, es posible ***obtener la derivada*** de esta última a partir de la siguiente expresión:

$$\left(f^{-1}\right)'(a) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(a)\right)}.$$

Nota: Tomemos en cuenta que la función *f* debe ser inversible y derivable

Las rectas tangentes de una función y su inversa están relacionadas; así también como las derivadas de estas funciones.



Ejemplo

$$g(x) = \sqrt[3]{x}.$$

Solución:

La función $g(x) = \sqrt[3]{x}$ es la inversa de la función $f(x) = x^3$. Como $g'(x) = 1/f'(g(x))$, comience por encontrar $f'(x)$. De donde,

$$f(x) = x^3 \rightarrow f'(x) = 3x^2 \rightarrow f'(g(x)) = 3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 = 3x^{2/3}$$

Finalmente

$$g'(x)\frac{1}{3x^{2/3}} = \frac{x^{-2/3}}{3}$$

Función Implícita

Es aquella *función* que se expresa mediante una *igualdad* en la forma:

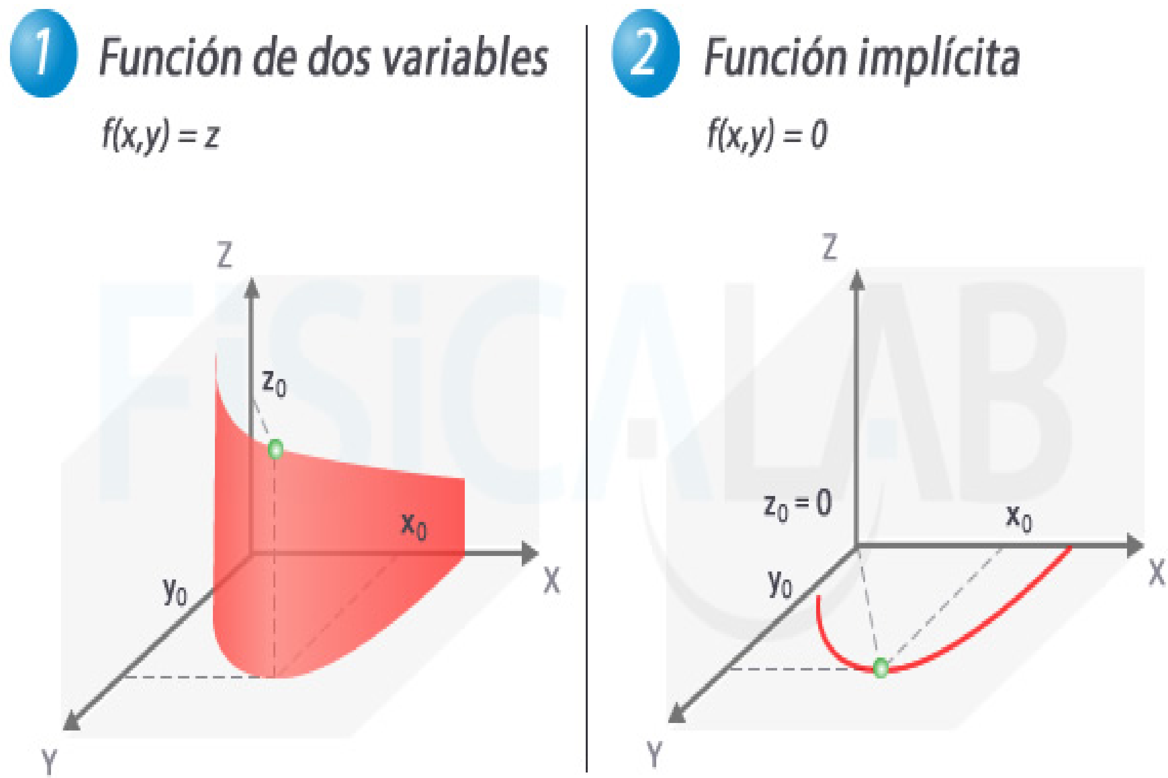
$$f(x,y)=0$$

Por ejemplo

$$x^2-y=0$$

es la implícita de

$$y=x^2$$



Gráfica de una función implícita

Gráficamente, se pude considerar una función implícita como un caso particular de una función de dos variables $f(x,y)=z$ en el que z siempre vale 0. Observa la gráfica en 1. Se trata de una función de dos variables (x e y). En ella se asigna un número real z_0 (una altura de la curva) a cada punto (x_0, y_0) del plano OXY que pertenezca al dominio. Como se aprecia en 2, si forzamos $z=0$ obtendríamos una función "pegada" al plano OXY, es decir, una función de una sola variable que quedaría representada dos dimensiones.

› La derivación implícita es la **técnica** que nos permite obtener la ***derivada*** de la función implícita. Se trata simplemente de aplicar la ***regla de la cadena***, considerando ”*y*” como una función que depende de ”*x*”.

Ejemplo

$y^3 - 5x^2 + 3xy^2 + 12 = 0.$

- $D(12) = 0$
- $D(5x^2) = 10x$
- $D(y^3) = 3y^2 \cdot y'$

Como decíamos, hemos considerado *y* una función que depende de *x* y aplicado la regla de la cadena

- $D\left(3xy^2\right) = 3\left(y^2 + x \cdot 2yy'\right)$

En este caso hemos considerado un producto de funciones Así, recuerda que *D(u·v)=u'v+uv'*. Partimos de la constante 3 que multiplica la primera 'función' *u=x*, y la segunda *v=y²*.

Con lo que podemos escribir:

$$3y^2y' - 10x + 3y^2 + 6xyy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{10x - 3y^2}{3y^2 + 6xy}$$