Estudio de Funciones

1.Introducción

Una función, por sí misma, no ofrece la información necesaria para dibujar su gráfica con un mínimo de exactitud.
La derivada va a ser la herramienta muy potente a la hora de dar forma a la representación gráfica de una función. Ella determinará con fidelidad el crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos y puntos de inflexión; conceptos que serán definidos en el desarrollo del tema.
Ante una función cualquiera *f(x)* puede averiguarse fácilmente, con un mínimo análisis, cuál es su dominio de definición (dónde está y dónde no está definida). Este conocimiento obliga, al representar la función en un sistema de ejes cartesianos, a centrar la atención en los puntos del eje de abscisas donde está definida.
El primer matemático del que se tenga constancia que representó gráficamente una función fue un profesor de la Universidad de París, Nicole Oresme (1323-1382), quien mediante un par de rectas perpendiculares dibujó la gráfica de un movimiento uniformemente acelerado, de forma similar a como se hace en nuestros días. No obstante, la mayor aportación que hizo Oresme a la matemática fue la definición de potencias de exponentes fraccionarios y operaciones con ellas.
La representación gráfica de una función aporta mucha más información que la simple definición de la función, por cuanto nos permite visualizar la variación de la variable dependiente, *y*, con respecto a la variable independiente, *x*; es decir, cuándo la función es creciente o decreciente, cuándo se alcanza el punto máximo o el mínimo, entre otros muchos aspectos.
Aunque la palabra *curva* puede tener varios significados, en lo que sigue, se debe entender como la representación gráfica de una función en un sistema de ejes cartesianos, es decir, la representación de todos los puntos de la forma *(x,f(x))*. Como, en general, este conjunto de puntos es infinito, no se podrán señalizar uno a uno, por lo que habrá que conformarse con una aproximación que, por otro lado, será tanto mejor cuanta más información se tenga del comportamiento de la curva, que podrá ser muy variable. Por esto es necesario distinguir y analizar los distintos casos que se pueden presentar.

2. Funciones Crecientes y Decrecientes

Consideremos la gráfica de abajo en la que se tiene el recorrido de un ciclista en una carrera; en ella se observan desniveles en el recorrido, se tiene un primer trozo en el que el ciclista sube, después baja y por último sube otra vez hasta llegar a la meta. Pretendemos formalizar el concepto "subir" en la gráfica de una función, para ello tomemos dos puntos $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ del eje X y obtengamos sus asociados del eje Y, se observa que si $\mathbf{x_1<x_2}$ entonces se tendrá que $\mathbf{f(x_1)<f(x_2)}$.

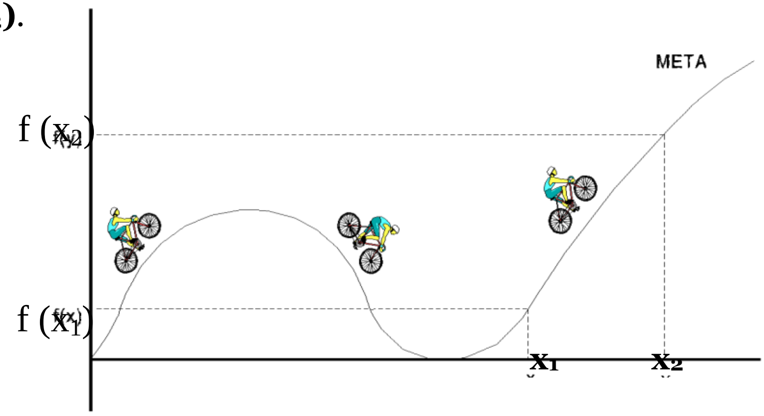


Fig.1

- **Definición:** Una función es **creciente en un intervalo [a,b]** si al tomar dos puntos cualesquiera, x_1 y x_2 pertenecientes al intervalo [a,b], con la condición $x_1 \leq x_2$, se verifica que:
  $f(x_1) < f(x_2)$.

Se dice **estrictamente creciente** si de $x_1 < x_2$ se deduce que $f(x_1) < f(x_2)$.

Si por el contrario tomamos dos puntos del eje X en los que la función "baja" con $\mathbf{x_1} < \mathbf{x_2}$ y obtenemos sus asociados del eje Y, se tiene que debido a la bajada $\mathbf{f(x_1)}$ tiene que ser mayor que $\mathbf{f(x_2)}$.

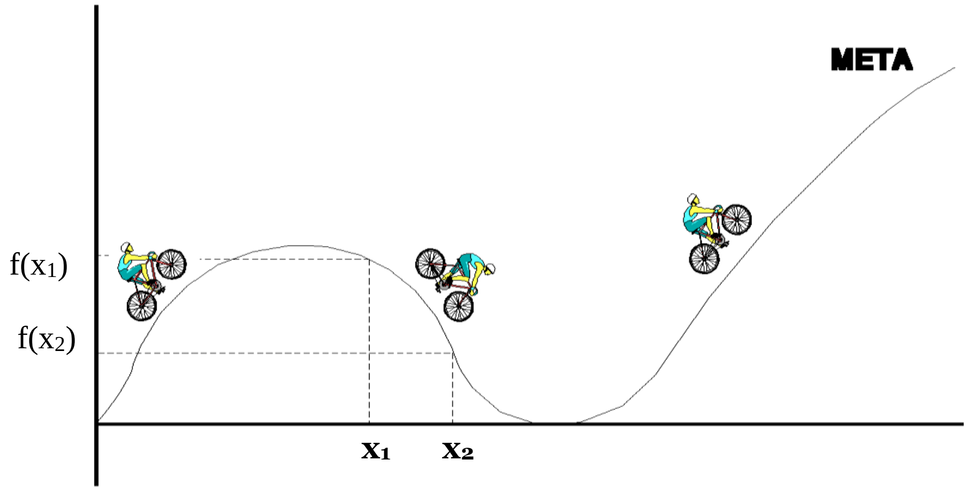


Fig.2

- **Definición:** Una función **es decreciente en un intervalo [a,b]** si para cualesquiera puntos del intervalo, x_1 y x_2, que cumplan $x_1 \leq x_2$, entonces $f(x_1) \geq f(x_2)$. Siempre que de $x_1 < x_2$ se deduzca $f(x_1) > f(x_2)$, la función se dice *estrictamente decreciente.*

2.1 Funciones Crecientes y Decrecientes en un punto

Una **función es creciente en un punto *a*** si existe un intervalo abierto
$(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, cumpliéndose:

$f(x) \leq f(a)$ si x pertenece a $(a - \varepsilon, a)$ y además
$f(x) \geq f(a)$ si x pertenece a $(a, a + \varepsilon)$.

Análogamente, una *función* es *decreciente en un punto a* si existe un intervalo abierto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ en el que

$f(x) \geq f(a)$ si x pertenece a $(a - \varepsilon, a)$ y además
$f(x) \leq f(a)$ si x pertenece a $(a, a + \varepsilon)$.

La definición de función estrictamente creciente o decreciente en un punto se obtiene sin más que sustituir el símbolo $\leq$ por $<$ y el $\geq$ por el $>$.
Es preciso diferenciar el significado de función creciente o decreciente en un intervalo del de función creciente o decreciente en un punto.

Ejemplo:

Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función $y = x^2$ en los puntos

$\frac{1}{2}$, -1 y 0.

• La función $y = x^2$ es estrictamente creciente en el intervalo $[0, +\infty)$ puesto que si $x_1 < x_2$, $x_1^2 < x_2^2$.

Es estrictamente creciente en $x = \frac{1}{2}$.

Por otro lado, es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0]$ ya que en este intervalo (al ser números negativos), si $x_3 < x_4 \rightarrow x_3^2 > x_4^2$ (por ejemplo, $-7 < -3$ y $(-7)^2 > (-3)^2$).
Es estrictamente decreciente en $x = -1$

• Nótese cómo en $x = 0$ la función no es creciente ni decreciente. A la izquierda de este punto es decreciente y a la derecha es creciente.
Como pone de manifiesto este ejemplo, toda función creciente en un intervalo (respectivamente decreciente) es creciente (respectivamente decreciente) en todo punto de ese intervalo.
Recíprocamente, toda función estrictamente creciente (respectivamente decreciente) en todo punto de un intervalo, es creciente (respectivamente decreciente) en todo el intervalo.

2.2 Determinación de los intervalos de crecimiento y decrecimiento

La determinación del crecimiento y decrecimiento de una función es en general una tarea bastante difícil, veamos si las derivadas nos pueden ayudar. Observemos la gráfica de la Fig.3 , en ella tenemos una función creciente y se han trazado varias rectas tangentes en distintos puntos, los ángulos que forman todas estas tangentes son siempre ángulos cuyas medidas están comprendidas entre 0º y 90º y por tanto su tangente siempre es positiva, tendremos entonces que siempre que la función sea creciente la derivada tiene signo positivo o es cero

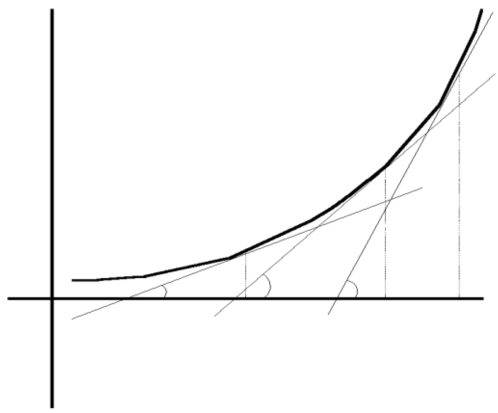


Fig.3

Por otro lado, sea ahora la gráfica de otra función decreciente,Fig.4 se tiene entonces que todas las tangentes trazadas a dicha gráfica forman siempre ángulos comprendidos entre 90º y 180º y por tanto la derivada en esos puntos será siempre negativa, es decir, si la función es decreciente la derivada tiene que tener signo negativo o ser cero.

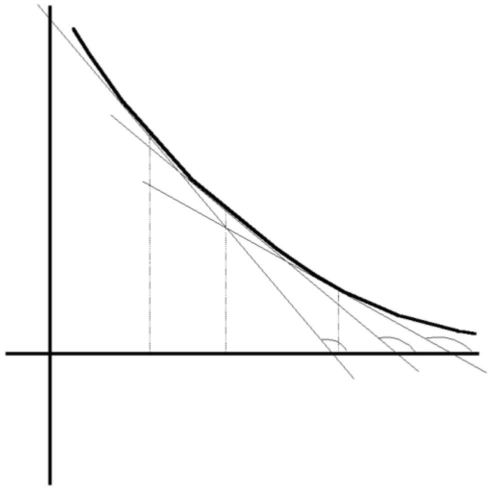


Fig.4

Como consecuencia inmediata tenemos entonces:

Teorema

Sea **f** una función definida en un intervalo entonces:

a) Si **f** es creciente en dicho intervalo entonces $\mathbf{f'} \geq 0$.

b) Si **f** es decreciente en dicho intervalo entonces $\mathbf{f'} \leq 0$.

Teorema

a) Si $\mathbf{f'}>0$ entonces **f** es estrictamente creciente.

b) Si $\mathbf{f'}<0$ entonces **f** es estrictamente decreciente.

Como consecuencia del teorema anterior tenemos que para determinar los intervalos en que la función es creciente o decreciente tenemos que estudiar el signo de la primera derivada.

Para ello:

a) Se obtiene si existe, la primera derivada de **f(x)** y se resuelve la ecuación que se obtiene de igualarla a cero .En el caso de que la derivada no exista en algún punto del dominio este también debe ser considerado como extremo de un intervalo

b) después se divide el dominio de definición de la función en **intervalos abiertos** que tienen por extremos los ceros de la primera derivada , los puntos donde la función no es derivable y los puntos de acumulación del dominio de definición de la función que no pertenecen al dominio

c) posteriormente se estudia el signo de la primera derivada en cada uno de esos intervalos (en esos intervalos el signo de la primera derivada es siempre el mismo)

d) en donde tenga signo positivo la función es estrictamente creciente y donde tenga signo negativo la función es estrictamente decreciente.

Ejemplos.

1- Sea la función $f : R \rightarrow R / f(x) = x^3 + 2$

Obtenemos la primera derivada de f(x) es decir f´(x)= $3x^2$

Esta se hace cero en x=0 luego aquí la función es derivable en todo el dominio por lo tanto hay dos intervalos que están dados por $(-\infty,0);(0,\infty)$

Tomamos el intervalo $(-\infty;0)$; tomando un punto de este intervalo por ejemplo "-1" verificamos si f´(-1) es mayor o menos que cero ; si f´(-1)>0 la función es estrictamente creciente

Tomamos ahora el $(0,\infty)$; tomando un punto de este intervalo por ejemplo "1" f´(1)>0 la función es estrictamente creciente.

Es decir, en este ejemplo la función es estrictamente creciente en todo el Df

2-Sea f(x)= $\frac{1}{x^2-4}$ tal que Df : $R-\{-2,2\}$

Hacemos la derivada

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-4)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$$

Si bien aquí se determina que x=0 no debemos olvidar que en x=-2 y x=2 la función no esta definida (no es continua) si bien -2 y 2 no pertenece al Df pero tomamos intervalos abiertos

Por lo tanto debemos contemplar los siguientes intervalos

$(-\infty,-2);(-2,0);(0,2);(2,\infty)$

Veamos el signo de la derivada en cada uno de estos intervalos

En $(-\infty,-2)$ tomamos un punto que pertenece a este intervalo por ejemplo -3

f´(-3)= $\frac{-2.(-3)}{((-3)^2-4)^2} = \frac{6}{25} > 0$ luego en este intervalo la función crece estrictamente

(-2,0) tomamos un punto que pertenece a este intervalo por ejemplo -1

f(-1)= $\frac{-2(-1)}{((-1)^2-4)^2} = \frac{2}{9} > 0$ luego en este intervalo la función crece estrictamente

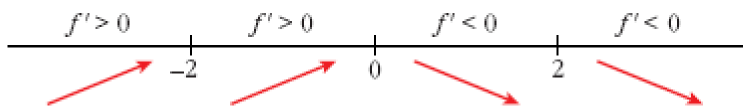
(0,2) tomamos un punto que pertenece a este intervalo por ejemplo 1

f(1)= $\frac{-2(1)}{((1)^2-4)^2} = \frac{-2}{9} < 0$ luego en este intervalo la función decrece estrictamente

$(2,\infty)$ tomamos un punto que pertenece a este intervalo por ejemplo 3

$$f(3)=\frac{-2(3)}{\left((3)^2-4\right)^2}=\frac{-6}{25}<0$$ luego en este intervalo la función decrece estrictamente

Observamos el gráfico



La función: crece en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$

decrece en $(0,2)\cup(2,+\infty)$

3. Puntos Críticos o singulares

- **Definición:** Sea f una función definida en un cierto dominio D. Decimos que un punto "a" perteneciente al dominio Df es un punto crítico o singular de la función f si y solo si f´(a)=0 o bien f´(a) no existe.

Ejemplos.

1. Sea $f: R \to R / f(x)=|x|$ en x=0 la función no es derivable luego f´(0) no existe por lo tanto x=0 es un punto critico de f
2. Sea $f: R \to R / f(x)=(\frac{x^3}{3}-4x)$ su derivada esta dada por x^2-4 esta es cero en x=2 y x=-2 ,quiere decir que esta función tiene dos puntos críticos en $x=\pm 2$

4.Máximos y Mínimos de una Función

4.1. Máximos y mínimos relativos

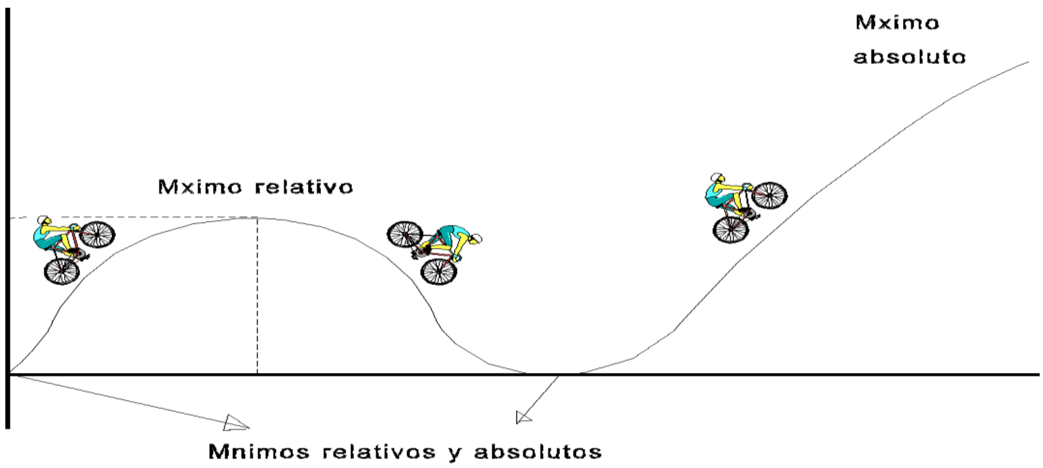


Fig.5

Sea ahora la gráfica, en ella se pueden observar una serie de puntos donde nuestro ciclista pasa de "subir" a "bajar" o bien de "bajar" a "subir". Esos puntos son donde alcanza la cima de una montaña o bien donde se encuentra en el punto más bajo del recorrido. Tiene por tanto sentido que intentemos clasificar también dichos puntos y que a los puntos donde se alcanzan las cimas los llamemos máximos y a los puntos donde alcanza las menores alturas los llamemos mínimos. Observar que en un máximo que no esté en los extremos la función tiene que pasar de creciente a decreciente y que en los mínimos que no están en los extremos la función tiene que pasar de ser decreciente a ser creciente.

- **<u>Definición:</u>** Dada una función $f(x)$, se dice que tiene un ***máximo relativo*** en un punto de *abscisa* $x= a$, si existe un intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ en el que $f(x) < f(a)$ para cualquier punto x perteneciente a $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. El máximo es entonces el punto $(a, f(a))$ de la curva.

- **<u>Definición:</u>** La función $f(x)$ tiene un ***mínimo relativo*** en un punto b si hay un intervalo $(b - \delta, b + \delta)$ en el que $f(x) > f(b)$ para cualquier punto x perteneciente a $(b - \delta, b + \delta)$. El mínimo es entonces el punto $(b, f(b))$ de la curva.

A los máximos y mínimos de una función se les da el nombre común de *extremos relativos* o simplemente *extremos*.

- **<u>Definición :</u>**La función f(x) tiene un máximo absoluto en el punto “a” si y solo si Para todo x perteneciente al dominio de dicha función $f(x)\leq f(a)$

- **<u>Definición :</u>**La función f(x) tiene un mínimo absoluto en el punto “b” si y solo si Para todo x perteneciente al dominio de dicha función $f(x)\geq f(a)$

Es claro, que una función puede tener más de un máximo y más de un mínimo relativo.

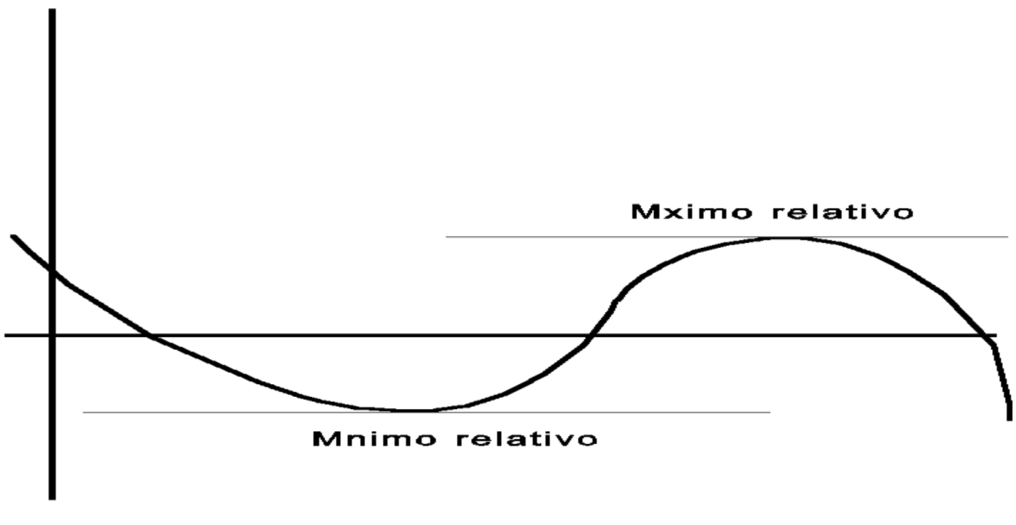


Fig.6

<u>4.2 Consecuencias</u>

1. La tangente a una curva en cualquiera de sus extremos es paralela al eje de abscisas, por lo que el ángulo que forma con dicho eje es de cero grados.

En consecuencia, la pendiente de dichas tangentes (*tg* 0º) es cero. Como estas pendientes coinciden con las derivadas de la función en los puntos de abscisa correspondientes, se deduce inmediatamente que $f'(a) = 0$ y $f'(b) = 0$, si en a y b existe un máximo o un mínimo.

2. De lo anterior se desprende que los extremos relativos de una función deben buscarse entre los valores que hacen cierta la igualdad $f'(x) = 0$.

No obstante, aún no se dispone de ningún método que permita determinar si las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$ son máximos, mínimos, o ni lo uno ni lo otro.

Todas estas consideraciones tienen sentido si la función es derivable en los extremos relativos, condición que, como ya se sabe y muestra la figura, no siempre se da.

Así, en el punto $(a,f(a))$ hay un mínimo relativo pero la función no es derivable en el punto a; por tanto, no existe $f'(a)$.

Ejemplo.

¿Qué puntos de la función $f(x) = 2x^2 - 3$ pueden ser extremos relativos?

Los posibles extremos relativos de la función $f(x) = 2x^2 - 3$ son los puntos créticos o singulares de la función es decir donde la derivada se hace 0 o bien no existe. La derivada de la función f existe siempre ya es que un polinomio de segundo grado con dominio en R por lo tanto solo nos queda resolver la ecuación

$$f'(x) = 2 \cdot 2x = 0, \text{ de donde necesariamente } x = 0$$

Aún así no se puede asegurar si en este punto hay máximo, mínimo o ni lo uno ni lo otro y solo es pto. crítico. Desde luego, si hay extremo relativo éste se encuentra en el punto de abscisa $x = 0$ que corresponde al punto $(0,-3)$.

Pero si podemos verlo a través del crecimiento de la función

Tenemos 2 intervalos para el crecimiento $(-\infty,0) y (0,\infty)$

Si tomamos el $(-\infty,0)$ y un punto de dicho intervalo por ejemplo -1; $f´(-1)=-4<0$ luego la función decrece

Si tomamos el $(0,\infty)$ y un punto de dicho intervalo por ejemplo 1; $f´(1)=4>0$ luego la función crece

Es decir que decrece hasta 0 y luego crece esto quiere decir que hay un mínimo relativo

4.3. Determinación de máximos y mínimos. Problemas de optimización.

Veamos qué ocurre con la recta tangente a la gráfica de una función tanto en los máximos relativos como en los mínimos relativos, siempre tiene que ser paralela al eje x, y por tanto el ángulo que forma con dicho eje tiene que ser siempre cero. Como la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente en dicho punto, en los extremos relativos la derivada de la función tiene que ser siempre cero.

Teorema

Sea **a** un punto donde **f** es derivable, entonces, si **a** es un extremo relativo se tiene que **f'(a)=0**.

A éste mismo resultado se puede llegar teniendo en cuenta que en un extremo relativo la función tiene que cambiar el sentido del crecimiento y se tiene que **f'(a)=0.**

Observar que si **f'(a)=0** no quiere decir que se tenga en **a** un extremo relativo .Para determinar los máximos y mínimos relativos existen dos métodos:

3.2.1. **Método de la Primera Derivada.** Se obtienen los intervalos de crecimiento y decrecimiento y se estudia el crecimiento y decrecimiento de la función. Si en uno de esos intervalos la función es creciente y en el siguiente decreciente, siendo el extremo común de los intervalos un punto del dominio de definición en el que la función es continua, tenemos un máximo; si la función es decreciente y en el siguiente intervalo es creciente, siendo el extremo común del intervalo un punto del dominio de definición en el que la función es continua, tenemos un mínimo.
Los puntos en los que la función no sea continua tendremos que estudiarlos aparte.

3.2.2. El segundo método se basa en el hecho siguiente: supongamos que **f'(a)=0** y que **f''(a)<0**, entonces por el teorema anterior se tiene que **f'** es estrictamente decreciente en un intervalo centrado en **a** y por tanto si **x** es punto de ese intervalo menor que **a**, como **f'(a)=0** se tendrá que **f'(x)>f'(a)=0** y por tanto la función para puntos menores que **a** es creciente; por otro lado si **x** es un punto de ese intervalo con **x** mayor que **a**, como **f'(a)=0** y **f'**es decreciente se tiene que **f'(x)<f'(a)=0** y por tanto para puntos mayores que **a** la función **f** es decreciente. Uniendo los dos resultados anteriores se tiene que en **a** la función tiene que tener un máximo. Razonando de forma similar en el caso de que **f'(a)=0** y **f''(a)>0** se tiene que en **a** hay un mínimo Se tiene entonces el:

<u>Teorema</u>

i) Sea **a** un punto donde **f** es derivable con **f'(a)=0** y **f''(a)<0**, entonces en **a** hay un máximo relativo.

ii) Sea **a** un punto donde **f** es derivable con **f'(a)=0** y **f''(a)>0**, entonces en **a** hay un mínimo relativo.

Por tanto, para determinar los extremos relativos se calcula la segunda derivada y se evalúa en ese punto, si el resultado tiene signo positivo se tiene un mínimo; si tiene signo negativo un máximo. Si el resultado sale cero no podemos afirmar nada y tendríamos que recurrir a la derivada tercera, si evaluando la derivada sale distinto de cero no es un extremo relativo, si por el contrario sale cero tendríamos que recurrir a la cuarta derivada y realizar el mismo proceso que con la segunda y así sucesivamente hasta que logremos clasificar ese punto.

<u>4.4. Propiedades de las Funciones Derivables</u>

1º Si una función $f(x)$ tiene derivada positiva en un punto a, la función es estrictamente creciente en ese punto.

2º Si una función $f(x)$ tiene derivada negativa en un punto a, la función es estrictamente decreciente en ese punto.

Ejemplos.

1. Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función $y = f(x) = 2x^3 - 5x^2$ en los puntos de abscisa 1 y 2.

- Se deriva *f(x)*: $f'(x) = 6x^2 - 10x$

$f'(x)=0$ si y solo si $6x^2-10x=0$ por lo tanto $x(6x-10)=0$ $x=0$ o bien $x=\frac{5}{3}$

Se establecen tres intervalos ($(-\infty,0)$; $\left(0,\frac{5}{3}\right)$; $\left(\frac{5}{3};\infty\right)$

Si debemos estudiar en x=1 y x=2 debemos estudiar el crecimiento de f en $\left(0,\frac{5}{3}\right)$; $\left(\frac{5}{3};\infty\right)$

$f'(1)= 6.1^2 - 10.1=-4$ luego la función decrece en $\left(0,\frac{5}{3}\right)$ y por lo tanto en x=1 es estrictamente decreciente

$f'(2)= 6.2^2 - 10.2=4$ luego la función crece en $\left(\frac{5}{3};\infty\right)$ por lo tanto en x=2 la función es estrictamente creciente

2. Si una función tiene un máximo o un mínimo relativo en un punto *a* y existe *f'(a)*, necesariamente *f'(a)* = 0.

- Si *f'(a)* fuese positivo, la función sería estrictamente creciente en *a*, cosa que no puede ocurrir al haber en *a* un extremo.

- Si *f'(a)* fuese negativo, la función sería estrictamente decreciente en *a*, lo que contradice el hecho de existir *a* en un extremo.

- En consecuencia, si existe *f'(a)*, ha de ser *f'(a)* = 0.

Así pues, queda confirmado que los extremos de una función hay que buscarlos entre los valores que resuelvan la ecuación *f'(x)* = 0. Sin embargo, una función puede tener derivada nula en un punto y no poseer extremo relativo en ese punto.

Ejemplo.

¿En qué puntos se anula la derivada de la función $f(x) = x^3$? ¿Son extremos relativos?

$$f'(x) = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0,\ y = 0$$

En el punto (0,0) no hay extremo relativo ya que esta es una función creciente en todo punto

Nota: Si *f(x)* es una función continua en un intervalo cerrado [*a,b*] y derivable en el abierto *(a,b)* con derivada cero en todos los puntos de [*a,b*], entonces la función es constante.

Sin que esto pueda considerarse como una demostración rigurosa, obsérvese que si la derivada es cero en todos los puntos, esto significa que en cada punto de la curva, la tangente es paralela al eje *X*, lo cual quiere decir que la gráfica de la función es una recta paralela al eje de abscisas.

La función es de la forma $f(x) = C =$ cte.

5. Concavidad de Funciones

Veamos ahora cómo determinar el sentido de la curvatura de una función, para ello definamos los siguientes conceptos

- **Definición** Una función f es *cóncava hacia arriba (o convexa)* en un punto **a** si la gráfica de la función se queda en un intervalo de centro **a** por encima de la recta tangente ala gráfica

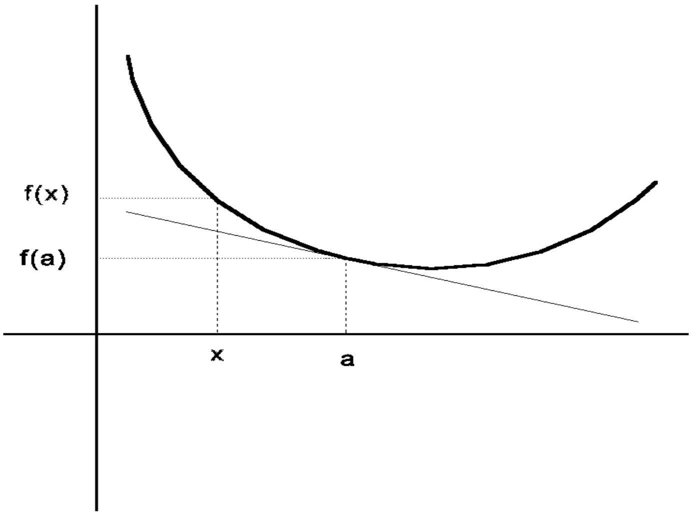


Fig.7

- **Definición:** Una función es *cóncava hacia arriba en un intervalo* si es cóncava hacia arriba en todos los puntos de ese intervalo.
- **Definición:** Una función **f** es *cóncava hacia abajo (o cóncava)* en un punto **a** si la gráfica de la función se queda en un intervalo de centro **a** por debajo de la recta tangente a la gráfica.

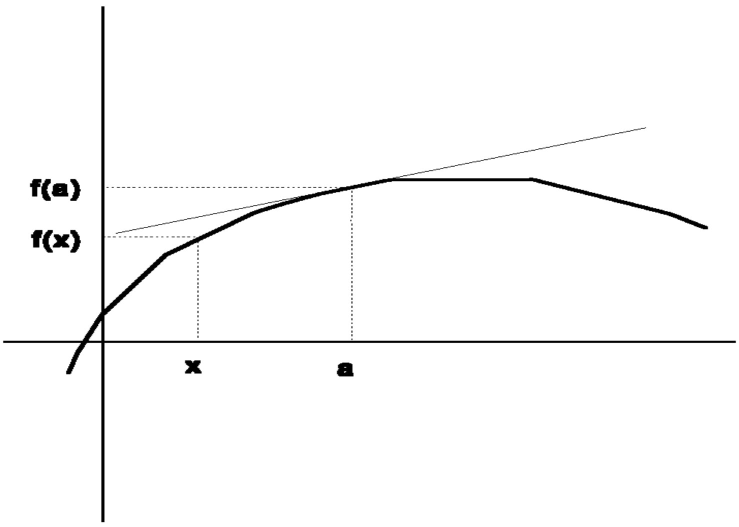


Fig 8

- **Definición:** Una función es *cóncava hacia abajo en un intervalo* si es cóncava hacia abajo en todos los puntos de ese intervalo.

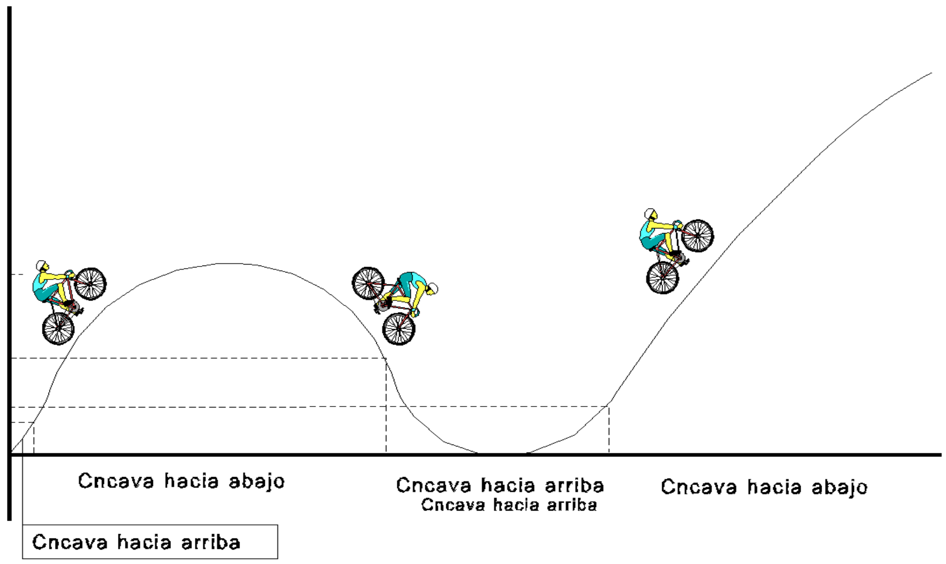


Fig.9

5.1.Determinación de los intervalos de concavidad.

Veamos cómo determinar fácilmente el sentido de la concavidad de una función.

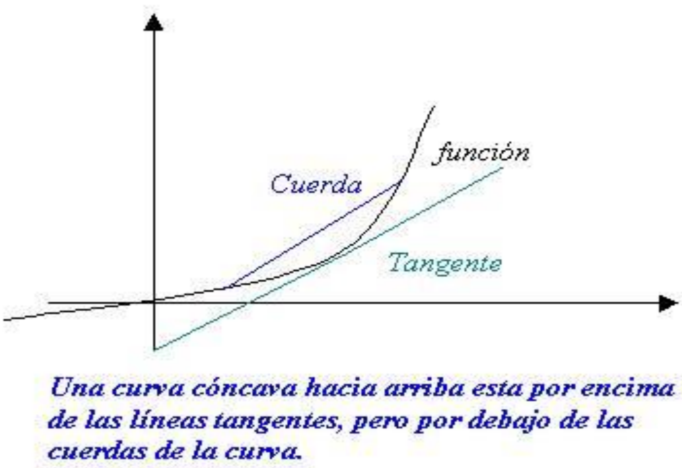


Fig.10

En la Fig. 11 tenemos la gráfica de una función también cóncava hacia arriba en la que se han trazado en este caso distintas tangentes a esa gráfica.

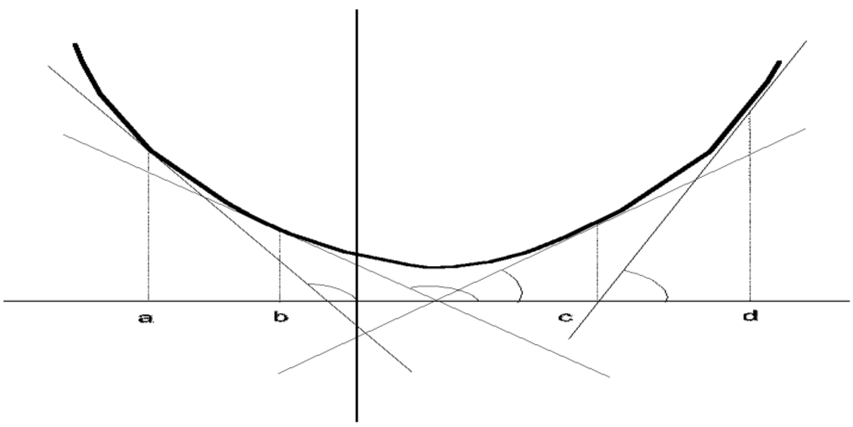
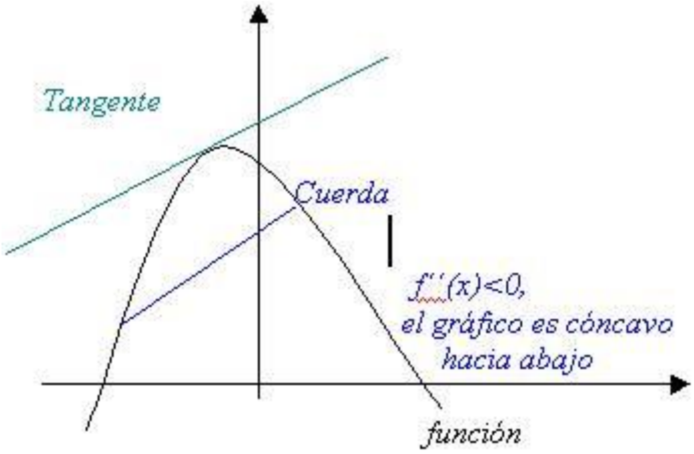
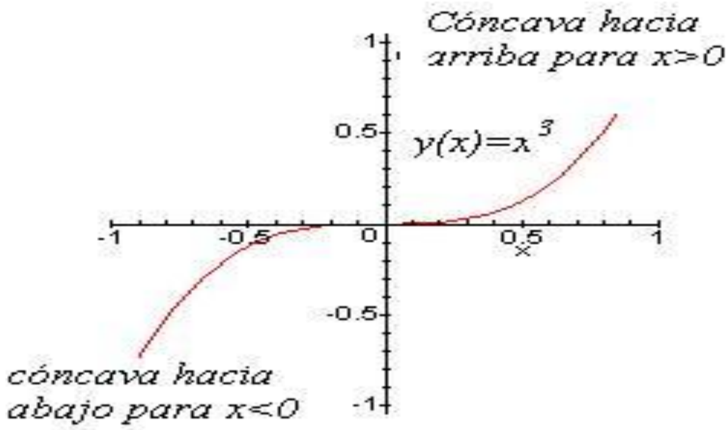


Fig.11

Si llamamos a esos ángulos α ,β ,γ ,δ , se tiene que **0º<δ <γ <90º<α <β <180º**, y que **a<b<c<d** y por tanto sus tangentes estarían ordenadas como sigue **tg α <tg β <tg δ <tg λ** y por tanto las derivadas en esos puntos, al ser las pendientes de las rectas tangentes, verifican que **f'(a)<f'(b)<f'(c)<f'(d)**, es decir la derivada primera tiene que ser creciente, por tanto si **f** es cóncava hacia arriba entonces **f'** es creciente y utilizando el teorema anterior se concluye que 0 $\leq$**f''**. Con un razonamiento análogo para una función cóncava hacia abajo (realízalo como ejercicio)



Una función con ambas concavidades



Teorema

a) Si **f** es cóncava hacia arriba entonces **f''** ≥ 0

b) Si **f** es cóncava hacia abajo entonces **f''** $\leq$ **0**.

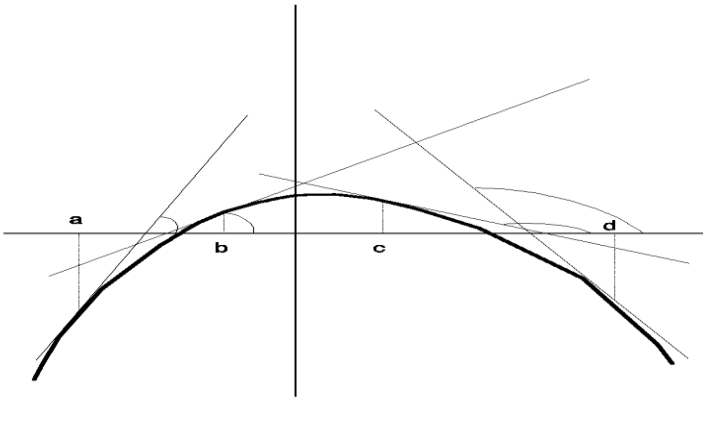


Fig.11

Teorema

Sea **f** una función entonces:

a) Si **f''>0** entonces **f** es cóncava hacia arriba.

b) Si **f''<0** entonces **f** es cóncava hacia abajo.

Ejemplo.

Sea $f(x)= x^3-3x^2+9x+22$ por ser f polinómica es derivable en todo punto de Df hallamos f´

$f´(x)=3x^2-6x+9$ luego f´´

$f´´(x)=6x-6$

Hacemos $f´´(x)=0$ es decir $6x-6=0$ entonces $x=1$

Obtenemos así dos intervalos $(-\infty,1)\, y (1,\infty)$

Vemos que pasa en cada uno de ellos

En $(-\infty,1)$ tomando un valor en este intervalo por ejemplo 0 $f´´(0)=-6<0$ cóncava abajo

En $(1, \infty)$ tomando un valor por ejemplo 2 $f´´(2)=6>0$ cóncava arriba

5.2. Criterio de la 2ª Derivada

Sea *f* una función con su primera derivada definida, al menos, en un intervalo abierto conteniendo al número *a*. Si *f´´* esta definida entonces podemos considerar los siguiente aspectos:

a) Si $f´(a)=0$ y $f´´(a)<0$ entonces se dice que *f* tiene un máximo local en *a*.

b) Si $f´(a)=0$ y $f´(a)>0$ entonces se dice que *f* tiene un mínimo local en *a*.

5.2. Para determinar los intervalos de concavidad se realizan los siguientes pasos:

a) se obtiene la segunda derivada de **f** y se resuelve la ecuación que se obtiene de igualarla a cero

b) después se divide el dominio de definición de la función en intervalos abiertos que tienen por extremos los ceros de la segunda derivada, los puntos de acumulación del dominio que no sean del dominio y los puntos donde no exista la segunda derivada

c) posteriormente se estudia el signo de la segunda derivada en cada uno de esos intervalos (en esos intervalos el signo de la segunda derivada es siempre el mismo)

d) en donde tenga signo positivo la función es cóncava hacia arriba y donde tenga signo negativo la función es cóncava hacia abajo.

Ejemplo.

Sea la función $f(x)=x^3$ con dominio en R

Tiene un punto crítico que es x=0, por lo tanto tiene dos intervalos de crecimiento que son:

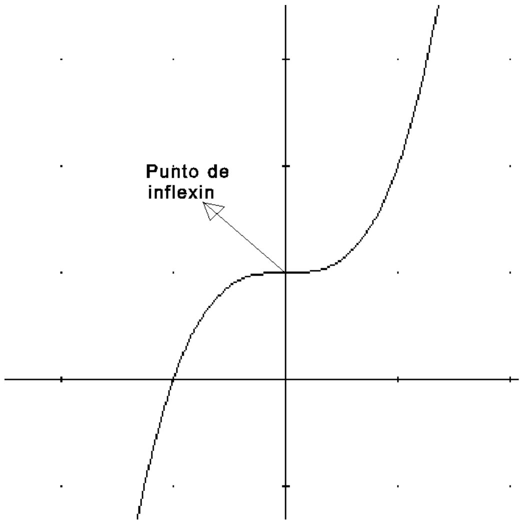
$(-\infty,0)$ y $(0,\infty)$ la función crece en ambos intervalos.

$f'(x)=3x^2$ su derivada segunda esta dada por $f''(x)=6x$ en el intervalo $(-\infty,0)$ la función es cóncava abajo y $(0,\infty)$ y la función es cóncava arriba

No hay máximos ni mínimo relativos.

6. Puntos de Inflexión

- **Definición:** Un punto se llama de *inflexión* si en él la función cambia el sentido de la concavidad, por tanto en los puntos de inflexión la segunda derivada tiene que cambiar de signo y por tanto en él la segunda derivada tiene que ser cero.



6.1. Para determinar los puntos de inflexión

Se determinan los intervalos de concavidad, si en uno de esos intervalos la función es cóncava hacia arriba o hacia abajo y en el siguiente cambia el sentido de la concavidad, siendo el extremo del intervalo un punto del dominio de definición en el que la función es continua, tendremos un punto de inflexión.
Por tanto para determinar si uno de los ceros de la segunda derivada es un punto de inflexión se calcula la tercera derivada y se evalúa en ese punto, si el resultado es distinto de cero se tiene un punto de inflexión. Si el resultado sale cero tenemos que calcular la cuarta derivada, si al evaluar en ese punto el resultado es distinto de cero no es un punto de inflexión (es un máximo o un mínimo) si sale cero tenemos que calcular la siguiente derivada y reiterar el proceso y así sucesivamente. Con esto concluimos que si $f''(a)=0$ pasamos a la próxima si esta es cero seguimos con la siguiente derivada y así sucesivamente hasta encontrar una que no sea cero en "a" si el orden de la derivada es impar entonces en (a,f(a)) hay un punto de inflexión y si el orden es par hay un máximo o un mínimo en (a,f(a)) según si la derivada de orden n sea > o < que 0.

Resumiendo: (estudiaremos como ejemplo) f(x)= $\frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

Para estudiar una función en forma completa:

- 1- Cortes con ejes .Se trata de hallar los cortes con los ejes coordenados

$$\begin{cases} para \quad el \quad eje \quad x \quad hallar \quad f(x)=0 \\ \\ para \quad el \quad eje \quad y \quad hallar \quad f0) \end{cases}$$

En nuestro ejemplo. f(x)= $\frac{1}{4}x^4 - 2x^2$ para hallar la intersección con los ejes tenemos :

$\frac{1}{4}x^4 - 2x^2$ =0 entonces $\frac{1}{4}$ x²(x²-8)=0 esto es x=0 y x=$\pm 2\sqrt{2}$. Es decir, corta al eje x en (0,0); (2$\sqrt{2}$,0) y en (-2$\sqrt{2}$,0)

f(0)= $\frac{1}{4}.0^4 - 2.0^2$=0 Es decir corta al eje y en (0,0)

- 2- Las Ramas infinitas y las Asíntotas. Es saber que pasa cuando x$\to -\infty$ y que pasa cuando x$\to \infty$ o bien en los puntos donde no esta definida la función

En nuestro ejemplo.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 = \infty \quad y \quad \lim_{x\to \infty} \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 = \infty$$

- 3- Puntos Críticos. Se trata de hallar los puntos críticos esto es donde la primera derivada se hace cero o bien no existe

En nuestro ejemplo. f(x)= $\frac{1}{4}x^4 - 2x^2$ su primera derivada es f´(x)=x³-4x aquí la derivada existe siempre ya que es una función polinómicas y las funciones polinómicas son derivables en todo su Df. Por lo tanto para hallar si hay algún punto crítico solo debemos igualar la f´(x) =0

Es decir,

x³-4x =0 entonces x(x²-4)=0 para x=0 y x=± 2 por lo tanto hay 3 puntos críticos en:

(0,f(0))= (0,0) ; $(-2, f(-2))=$ (-2,-4) y (2,f(2)) = (2,-4)

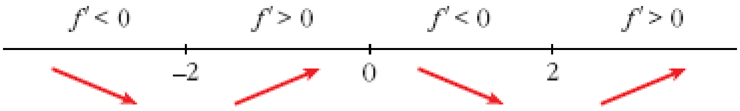
- 4- Intervalos de crecimiento. Al hallar los puntos críticos también hallamos los extremos de dichos intervalos. Para saber si la función crece o decrece en dicho intervalo tomamos un valor de x=a que pertenezca a ese intervalo si f´(a)>0 la función es estrictamente creciente si f´(a)<0 la función es estrictamente decreciente

En nuestro ejemplo. $(-\infty,-2);(-2,0);(0,2)y(2,\infty)$. Vemos que pasa en cada uno de ellos

(-∞,-2) tomamos el valor -3 y hallamos f´(-3)=-15<0 la función es estrictamente decreciente en (-∞,-2)

(-2,0) Tomamos el valor -1 y hallamos f´(-1)=1>0 la función es estrictamente creciente en (-2, 0)

(0,2) Tomamos el valor 1 y hallamos f´(1)=-3<0 la función es estrictamente decreciente en (0,2)



• 5- Máximos y mínimos. Estos se pueden observar a través del método o criterio de la 1ª derivada. es decir si una función crece hasta en punto a y después comienza a decrecer hay un máximo relativo. Si una función decrece hasta en punto a y después comienza a crecer hay un mínimo relativo.

En nuestro ejemplo.

Hay un mínimo relativo en (-2,-4) ya que decrece hasta -2 y a partir de allí comienza a crecer hasta 0

Hay un máximo relativo en (0,0) ya que crece hasta 0 y luego decrece hasta 2

Hay un mínimo relativo en (2,-4) ya que decrece hasta -2 y a partir de allí comienza a crecer hasta 0

• 6- Concavidad. Se trata de hallar la concavidad de la función en determinados intervalos. Para ello basta con ver donde f ´´(x)=0 (o bien no es derivable) con esto conseguimos los extremos de los intervalos de concavidad. Luego tomando un valor “a” en cada uno de ellos y viendo si f´´(a)>0 la función f(x) es cóncava arriba en ese intervalo y si f´´(a)<0 la función f(x) es cóncava abajo en dicho intervalo.

En nuestro ejemplo. f(x)= $\frac{1}{4}x^4-2x^2$ su primera derivada es f´(x)= x^3-4x su 2ª derivada es f´´(x)=$3x^2$-4 esta es derivable en todo su Df. por ser polinómicas. Por lo tanto solo nos queda ver cuando f´´(x)=0

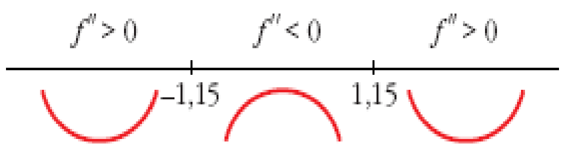
f´´(x)=0 si y solo si $3x^2$-4 =0 entonces $x=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$ por lo tanto hay tres intervalos de concavidad $\left(-\infty,-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ y $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\infty\right)$. Estudiamos en cada uno de ellos

$\left(-\infty,-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ Tomamos un valor por ejemplo -2 f´´(-2)=8>0 f(x) es cóncava arriba en

$\left(-\infty,-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

$\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ Tomamos un valor por ejemplo $0\, f''(0)=$ -4<0 f(x) es cóncava abajo en $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\infty\right)$ Tomamos un valor por ejemplo 2 f´´(2)=8>0 f(x) es cóncava arriba en $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\infty\right)$



- 7- Puntos de Inflexión. Es el punto donde la función cambia de concavidad.

En nuestro ejemplo. Y tomando en cuanta lo efectuado anteriormente hay dos puntos de inflexión $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},-\frac{20}{9}\right) y \left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{20}{9}\right)$

- 8- Los Máximos y mínimos se pueden saber a través de del método o criterio de la 2ª derivada es decir si "a" es critico y f´´(a)>0 tenemos un mínimo y si "a" es crítico y f´´(a)<0 tenemos un máximo

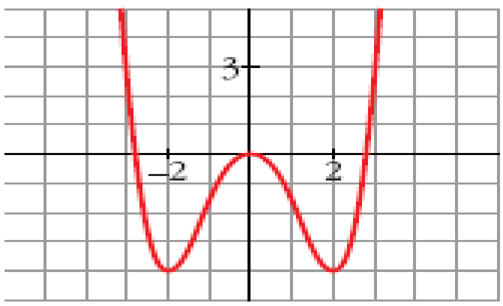
En nuestro ejemplo. Tenemos como puntos críticos (0,0) ; (-2,-4) y (2,-4)

f´´(x)=3x²-4 por lo tanto hacemos f´´(0)=-4 <0 hay un máximo en (0,0) como habíamos obtenido antes

f´´(-2)=8>0 por lo tanto tenemos un mínimo en (-2,-4) como habíamos obtenido antes

f´´(2)=8>0 por lo tanto tenemos un mínimo en (2,-4) como habíamos obtenido antes

- 9 Gráfico



TENER EN CUENTA TAMBIÉN LO SIGUIENTE:

Si se tiene un punto crítico (x,f(x)) este punto crítico es un posible máximo o mínimo según el criterio de la 2° derivada . Pero qué pasa si $f''(x)=0$ no podemos saber si este punto es máximo o mínimo. Que debemos hacer ¿????

Debemos seguir derivando y ver qué pasa con las derivadas de orden superior.

Hacemos las derivadas de orden superior, Hasta encontrar una derivada donde $f^n(x)\neq 0$.

a) Si el orden de la derivada es par y $f^n(x)>0$ será (x f(x)) un mínimo
b) Si el orden de la derivada es par y $f^n(x)<0$ será (x f(x)) un máximo
c) Si el orden es impar (x,f(x)) es un punto de inflexión

Ejemplo Sea $f(x)=(x-2)^4$

Determinemos sus puntos críticos $f'(x)=4(x-2)^3$esta derivada existe para todo x pero se hace cero en x=2

¿ En x=2 será mínimo o máximo?

Hacemos el criterio de la segunda derivada $f''(x)=12(x-2)^2$ Cuando reemplazamos el punto x=2 la segunda derivada también nos da cero.

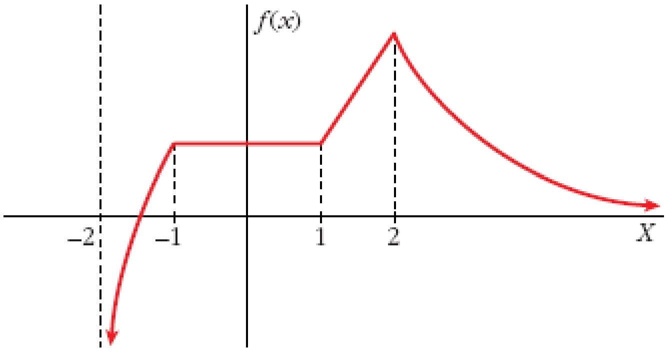
Usamos entonces las derivadas de orden superior.

$f'''(x)=24(x-2)$ también aquí $f'''(2)=0$

$f''''(x)=24$ y $f''''(2)=24$ aquí encontramos una derivada de orden superior que no es cero su orden es par porque es de 4° orden y es >0 porlo tanto en (2,f(2)) ay un mínimo

Algunos Ejercicios Resueltos

Ejercicio 1- Dada la gráfica



Se pide hallar:

a) Df
b) Intervalos de crecimiento
c) Intervalos donde la derivada es positiva
d) Puntos donde no es derivable
e) Ecuaciones de las asíntotas

a) $(-2, +\infty)$

b) Es creciente en $(-2, -1) \cup (1, 2)$ y es decreciente en $(2, +\infty)$.

c) $f'(x) > 0$ en $(-2, -1) \cup (1, 2)$.

d) No es derivable en $x = -1$, ni en $x = 1$, ni en $x = 2$.

e) Asíntota vertical: $x = -2$

Asíntota horizontal: $y = 0$

Ejercicio 2- Sea la función definida por $f(x) = \dfrac{kx}{1+x^2}$ *con* $k \neq 0$ hallar:

a) Df
b) Asíntotas para f si la hay
c) Determinar el valor de k para que f tenga un máximo en (1,3)

a) Su Df es R ya que $1+x^2$ nunca es cero
b) No tiene asuntotas verticales ya que el denominador nunca es cero. Y tiene una asíntota horizontal en y=0 pues :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

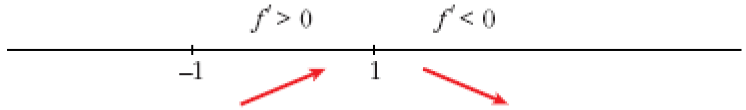
c) $f(1) = 3 \quad \rightarrow \quad \dfrac{b}{2} = 3 \quad \rightarrow \quad b = 6 \quad \rightarrow \quad f(x) = \dfrac{6x}{x^2 + 1}$

Comprobemos que, en efecto, hay un máximo para $x = 1$:

$$f'(x) = \frac{6(x^2 + 1) - 6x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{6x^2 + 6 - 12x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{6 - 6x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 6 - 6x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = 1 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



Como $f' > 0$ a la izquierda de $x = 1$, y $f' < 0$ a su derecha, en $x = 1$ hay un máximo.

<u>Ejercicio 3-</u> Estudiar en forma completa y graficar la siguiente función

f(x)= $\dfrac{1}{x^2 - 1}$

1. El Df R-{-1,1} , verificamos si corta a los ejes

f(x)=0 es decir $\dfrac{1}{x^2 - 1}$ =0 entonces 1=0 absurdo no corta al eje x

f(0)= $\dfrac{1}{0^2 - 1} = -1$ corta al eje y en (0,-1)

2. Asíntotas

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$y = 0$ es asíntota horizontal.

(si $x \to -\infty,\ f(x) > 0;$ si $x \to +\infty,\ f(x) > 0)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = -1 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

3. Puntos Críticos

f(x)= $\frac{1}{x^2-1}$ entonces f´(x)= $\frac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2} =$ esta derivada no existe en x= ± 1 y se hace cero en x=0 Por lo tanto tenemos cuatro puntos críticos dos de los cuales son (0,-1)y los otros dos no pertenecen al dominio de la función

4. Crecimiento

Se determinaron los siguientes intervalos $(-\infty,-1)$;(-1,0);(0,1); y$(1,\infty)$

Vemos que pasa en cada uno de ellos

$(-\infty,-1)$ Tomamos como valor -2 f´(-2)= $\frac{4}{9} > 0$ la función crece

(-1,0) Tomamos como valor $-\frac{1}{2}$ f´($-\frac{1}{2}$)= $\frac{16}{9} > 0$ la función crece

(0,1) Tomamos como valor $\frac{1}{2}$ f´($\frac{1}{2}$)= $\frac{-16}{9} < 0$ <0 la función decrece

$(1,\infty)$ Tomamos como valor 2 f´(2)= $\frac{-4}{9} < 0$ la función decrece

5. Máximos y mínimos

Existe un máximo en (0-1) ya que la función crece hasta 0 y luego de decrece

6. Concavidad

Buscamos la 2ª derivada de f es decir f´´(x)=$\frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$ esta no se hace cero nunca solo la derivada no esta definida en ± 1 por lo tanto tenemos los intervalos de concavidad

(-∞,-1) (-1,1) y (1, ∞)

(-∞,-1) Tomamos un valor por ej.-2 f´´(-2)=$\frac{26}{27}>0$ cóncava arriba

(-1,1) Tomamos un valor por ej. 0 f´´(0)=-2<0 cóncava abajo

(1,∞) Tomamos el valor por ej 2 f´´(2)=$\frac{26}{27}>0$ cóncava arriba

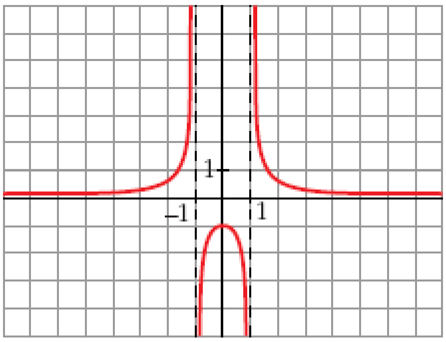
7. Ptos de inflexión

Si bien hay cambios de concavidad estos se presentan en ± 1 que son valores que no están en el Df

8. Máximos y mínimos. A través del criterio de la 2ª derivada podemos corroborar nuestros máximos y mínimos

La 2ª derivada es f´´(x) =$\frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$ y los puntos críticos son (0,-1) y en x= ± 1 estos últimos hacen que la 2ª no exista por lo tanto solo usaremos este método con (0,-1) Hallaremos f´´(0) es decir f´´(0)=$-2<0$ por lo tanto hay un máximo relativo como ya habíamos observado .

9. Gráfico



<u>Ejercicio 4-</u> Estudiar la función en forma completa siendo $f: R \to R / f(x) = \frac{-1}{x^2+1}$

1. Corte con los ejes y Df

El Df como ya esta especificado es R

El corte con los ejes

$f(x) = \frac{-1}{x^2+1} = 0$ Obtenemos -1=0 absurdo no corta al eje x

$f(0) = \dfrac{-1}{x^2+1} = -1$ Corta al eje y en (0,-1)

2. Ramas infinitas y Asíntotas

No tiene asíntotas verticales

Si tiene asíntota horizontal

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-1}{x^2+1} = 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-1}{x^2+1} = 0$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) < 0$)

3. Puntos críticos

$f(x) = \dfrac{-1}{x^2+1}$ donde f´(x) =0 o bien no existe

La derivada de f esta dada por f´(x)= $\dfrac{2x}{(x^2+1)^2} = 0$ entonces x=0

f´(x) existe siempre

Por lo tanto hay un solo punto crítico que es (0,-1)

4. Crecimiento

La derivada 2ª ya nos esta diciendo que hay dos intervalos que son $(-\infty,0)$ y $(0,\infty)$

Vemos que pasa en cada uno de ellos

$(-\infty,0)$ Tomamos un valor por ej. -1 f´(-1)= $\dfrac{-1}{2}$ <0 f decrece

$(0,\infty)$ Tomamos un valor por ej. 1 f´(1)= $\dfrac{1}{2}$ >0 f crece

5. Máximos y mínimos

Según lo analizado en el punto anterior la función f decrece hasta 0 y luego comienza a crece esto esta indicando que hay un mínimo en (0,-1)

6. Concavidad

Para analizar la concavidad de f debemos hallar la derivada 2ª f´´(x)= $\dfrac{-6x^2+2}{(x^2+1)^3}$

f´´(x)=0 en x= $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ lo que determina los siguientes intervalos de concavidad

$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\infty\right)$

Analizamos que pasa en cada uno

$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ Tomamos un valor por ej. -1 f´´(-1)= $-\frac{1}{2}<0$ cóncava abajo

$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ Tomamos un valor por ej. 0 f´´(0)=2>0 cóncava arriba

$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\infty\right)$ Tomamos un valor por ej. 2 f´´(2)= $-\frac{22}{125}<0$ cóncava abajo

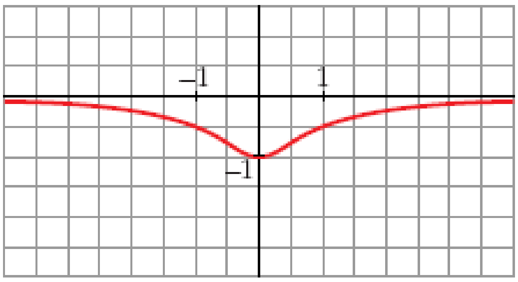
7. Puntos de Inflexión

Según lo estudiado en el punto anterior hay dos puntos de inflexión $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{3}{4}\right)$ y en $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{3}{4}\right)$

8. Podemos corroborar los Máximos y los mínimos a través del criterio de la 2ª derivada

f´´(x)= $\frac{-6x^2+2}{\left(x^2+1\right)^3}$ y el punto crítico es (0,-1) por lo tanto f´´(0)=2>0 luego hay un mínimo en (0,-1) como ya habíamos visto

9. Gráfico



<u>Ejercicio 5-</u> Estudiar en forma completa la función f(x)= x+ $\frac{1}{x}$

1. Df y corte con los ejes

Df : R-{0}

f(x)=x+ $\frac{1}{x}=\frac{x^2+1}{x}$ =0 si y solo si x^2+1 =0 esto es absurdo por lo tanto f no corta al eje x

f(0) 0 no pertenece al dominio de f por lo tanto f(0) no esta definida ,no corta al eje y

2. Asíntotas y Ramas Infinitas

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 0 \quad \text{es asíntota vertical.}$$

$$y = x \quad \text{es asíntota oblícua.}$$

$$(f(x) < x \quad \text{si} \quad x \to -\infty; \quad f(x) > x \quad \text{si} \quad x \to +\infty)$$

3. Puntos Críticos

f´(x)=1- $\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$ la derivada es 0 en x= ± 1 y no existe en x=0

4. Crecimiento

De acuerdo a lo analizado en el punto anterior los intervalos de crecimiento son $(-\infty,-1)$; (-1,0) ; (0, 1) ; (1; ∞)

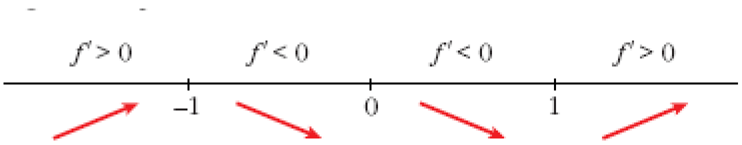
Vemos que pasa en cada uno de ellos

$(-\infty,-1)$ Tomamos un valor por ejemplo -2 f´(-2)= $\frac{3}{4}>0$ función crece

(-1,0) Tomamos un valor por ejemplo $-\frac{1}{2}$; $f´(-\frac{1}{2})$ = -3<0 función decrece

(0, 1) Tomamos un valor por ejemplo $\frac{1}{2}$; $f´(\frac{1}{2})$ = -3<0 función decrece

(1; ∞) Tomamos un valor por ejemplo 2 f´(2)= $\frac{3}{4}>0$ función crece



5. Máximos y mínimos

Según lo analizado en el punto anterior hay un máximo en (-1,-2) y y mínimo en (1,2)

6. Concavidad

Debemos buscar la 2ª derivada f´´(x)=$\frac{2}{x^3}$ esta derivada no se hace cero jamás pero no existe en x=0 por lo tanto hay 2 intervalos de concavidad $(-\infty,0)$ y $(0,\infty)$ Analizamos cada uno

$(-\infty,0)$ Tomamos un valor por ejemplo -1 f´´(-1)<0 la función es cóncava abajo

$(0,\infty)$ Tomamos un valor por ejemplo 1 f´´(1)>0 la función es cóncavas arriba

7. Analizamos los máximo y los mínimos por el criterio de la 2ª derivada

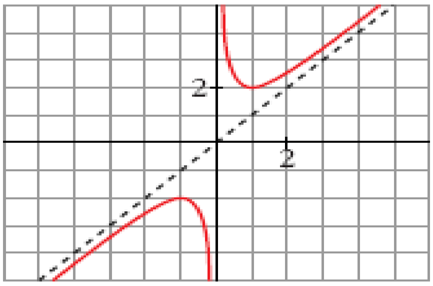
f´´(x)=$\frac{2}{x^3}$ y (-1 ,-2) (1, 2) en x=0 la derivada no existe

f´´(-1) =-2<0 Máximo en (-1,-2)

f´´(1)=2>0 mínimo en (1,2)

8. Puntos de inflexión . si bien en 0 cambia la concavidad x=0 no pertenece al dominio por lo tanto no puede ser de inflexión

9. Gráfica



Ejercicio 6- Sea la función f(x)= $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ hallar Df, corte con los ejes, Asíntotas y gráfica

1. Df y cortes con los ejes

El único problema que existe para el dominio de esta función racional es que el denominados sea cero por lo tanto buscamos las raíces para el denominador. Al usar la formula de Baskara el radicando es <0 por lo tanto no tiene raíces es decir el denominador no se hace cero nunca.

De acuerdo con esto Df=R

f(x)=0 si y solo si x^2-x+1 Al usar la fórmula de Baskara el radicando es <0 por lo tanto no corta nunca al eje x

f(0)=1 corta al eje y en el punto (0,1)

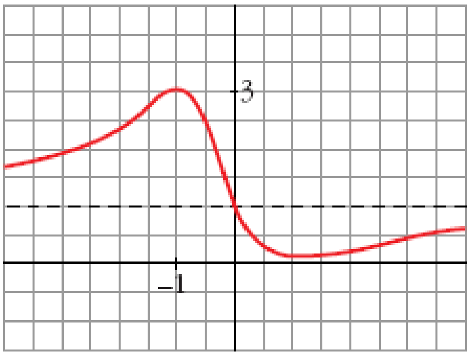
2. Asíntotas y Ramas infinitas

No hay asíntotas verticales ya que el denominador no se hace cero nunca

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

$$(\text{si } x \to -\infty,\ f(x) > 1;\ \text{si } x \to +\infty,\ f(x) < 1)$$

$y = 1$ es asíntota horizontal.



Nótese que si bien y=1 es asíntota la función f(x) la corta en (0,1)

<u>Ejercicio 7- </u> Estudiar y graficar

a) f(x)= 2x+ $\frac{8}{x}$

b) f(x)= $\frac{4x-12}{(x-2)^2}$

a)

1. Df = R-{0}

No tiene cortes con los ejes

2. Asíntotas y Ramas infinitas

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = 2x$ es asíntota oblicua.

$$(\text{si } x \to -\infty,\ f(x) < 2x;\ \text{si } x \to +\infty,\ f(x) > 2x)$$

3. Puntos Críticos

f´(x)= 2- $\frac{8}{x^2}$ x=0 y x=± 2

(-2, -8) y (2, 2)

4. Crecimiento

Hay 4 intervalos de crecimiento $(-\infty,-2)$; (-2, 0) ; (0, 2) y (2,∞)

$(-\infty,-2)$ f´(x)>0

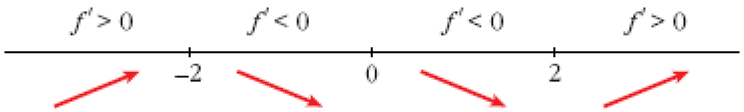
(-2, 0) f´(x)<0

(0,2) f´(x) <0

(2,∞) f´(x) >0

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

es decreciente en $(-2, 0) \cup (0, 2)$



5. Máximos y mínimos

tiene un máximo en $(-2, -8)$

tiene un mínimo en $(2, 8)$

6. Concavidad

f´´(x)=$\dfrac{16}{x^3}$ x=0

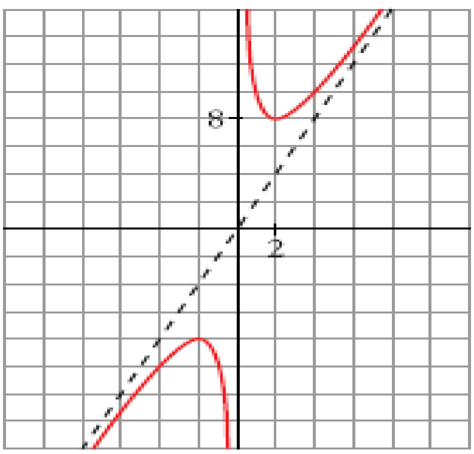
hay 2 intervalos $(-\infty,0)$ y (0, ∞)

(-∞,0) f´´(x)<0 cóncava abajo

(0, ∞) f´´(x)>0 cóncava arriba

7. no hay punto de inflexión ya que 0 no pertenece al Df

8. Gráfico



b) f(x)= $\dfrac{4x-12}{(x-2)^2}$

1. Df :R-{2}

Corta al eje x en (3,0) y al eje y (0,-3)

2. Asíntotas y Rama infinitas

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

$$(\text{si } x \to -\infty,\ f(x) < 0; \ \text{si } x \to +\infty,\ f(x) > 0)$$

$y = 0$ es asíntota oblicua.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

3. Puntos críticos

$$f'(x) = \frac{4(x-2)^2 - (4x-12)\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{4(x-2) - 2(4x-12)}{(x-2)^3} =$$

$$= \frac{4x - 8 - 8x + 24}{(x-2)^3} = \frac{-4x + 16}{(x-2)^3}$$

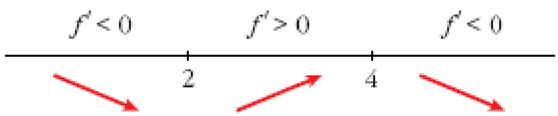
$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad -4x + 16 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 4$$

Hay 2 puntos críticos (4 ,1) y en 0 ya que allí la derivada no existe

4. Crecimiento

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$

es creciente en $(2, 4)$



5. Máximos y mínimos

Tiene un máximo en (4,1)

6. Concavidad

F´´(x)= $\dfrac{12x-52}{(x-2)^4}$ =0 x= $\dfrac{13}{3}$ hay tres intervalos de concavidad

$(-\infty,2)$;$(2,\frac{13}{3})$ y $(\frac{13}{3},\infty)$

$(-\infty,2)$ $f''(x)<0$ cóncava abajo

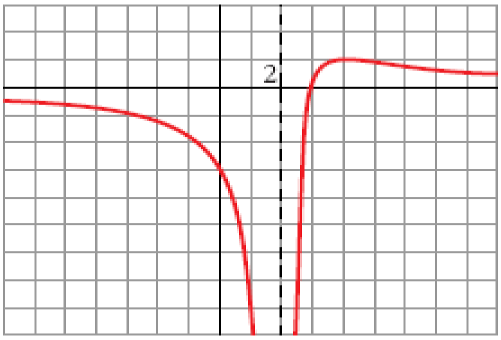
$(2,\frac{13}{3})$ $f''(x)<0$ cóncava abajo

$(\frac{13}{3},\infty)$ $f''(x)>0$ cóncava arriba

7.Puntos de Inflexión

Hay un solo punto de inflexión $(\frac{13}{3},\frac{48}{49})$

8. Gráfico



BIBLIOGRAFÍA

Apostol,Tom. Análisis Matemático. Editorial Reverté. Barcelona.1960
Apuntes de Algebra, Centro de Palma de Mallorca
Budnick,Frank. Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales. Mc Graw-Hill.México.1990
Faires,J y Otros .Precálculo . International Thomson Editores. México.2001
Haeussler,Ernest. Matemática para Administración y Economía. Editorial Iberoamericana. México.1987
Leithold, Louis. Álgebra . Oxford. Mexico. 1992
Lipschutz, Seymour. Teoría de conjuntos y temas afines .Colección Schaum. McGraw Hill. México 1994
Rojo ,Armando. Algebra I. Editorial "El Ateneo".Buenos Aires.1973.
Swokowski, Earl. Cálculo con Geometría Analítica. Editorial Iberoamericana. Bogotá .1988.
Swokowski, Earl. Algebra y Trigonometría . Editorial Iberoamericana. Bogotá .1988.

Páginas Web
www.recursosmatematicos.com
www.unlu.edu.ar
www.fisica-facil.com
www.redematica.com
www.prisma.com

Nota: Algunos temas, ejercicios y gráficos fueron extraídos de páginas de Internet referidas a los temas dados y "Apuntes de Algebra, Centro de Palma de Mallorca".