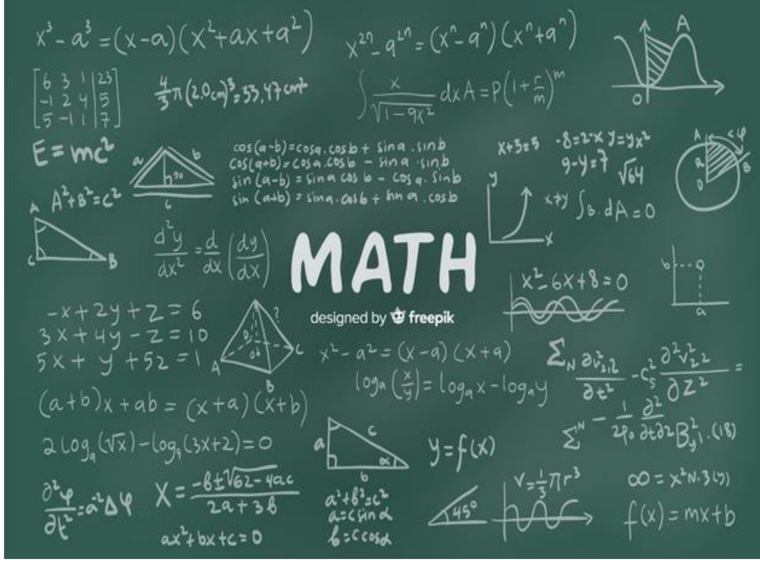


FUNCIONES PARTE 3

CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES

FUNCIONES REALES

Se trabaja desde

- **NÚMEROS REALES**
  - Conjunto de los números reales
  - Desigualdad en los números reales
  - Intervalos
  - Inecuaciones
  - Valor absoluto
- **FUNCIÓN**
  - Pareja ordenada
  - Producto cartesiano
  - Relación
  - Función
  - Dominio y rango
- **CLASIFICACIÓN DE FUNCIÓN**
  - Función biyectiva
    - Invectiva
    - Sobreyectiva
  - Función par, impar, creciente y decreciente
  - Función algebraica
    - Polinómica
    - Racional
    - Radical
  - Función trascendente
    - Exponencial
    - Logarítmica
    - Trigonométricas
  - Funciones especiales
    - Valor absoluto
    - A trozos
    - Parte entera
- **ÁLGEBRA Y TRANSFORMACIÓN DE FUNCIÓN**
  - Álgebra de función
    - Suma
    - Diferencia
    - Producto
    - Cociente
    - Composición
  - Transformación de funciones
    - Desplazamientos horizontales, verticales y oblicuos

Con el fin de **De resolver problemas** Con el fin de

Clasificación de Funciones

Según el dominio y codominio

- inyectividad
- sobreyectividad
- biyectividad

Según su paridad

- par
- impar

SEGÚN DOMINIO Y CODOMINIO

INYECTIVIDAD

- **Definición** : Sea f una función f: $A \to B$ Decimos que f es una función **inyectiva** si y solo si $\forall x_1 \in A : \forall x_2 \in A : (f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2)$

- **Otra Definición:** Decimos que f es una función **inyectiva** si y solo si $\forall x_1 \in A : \forall x_2 \in A : (x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2))$ (contra recíproco)

EJEMPLOS

1.) Sea $f : R \rightarrow R \ / \ f(x) = x - 1$

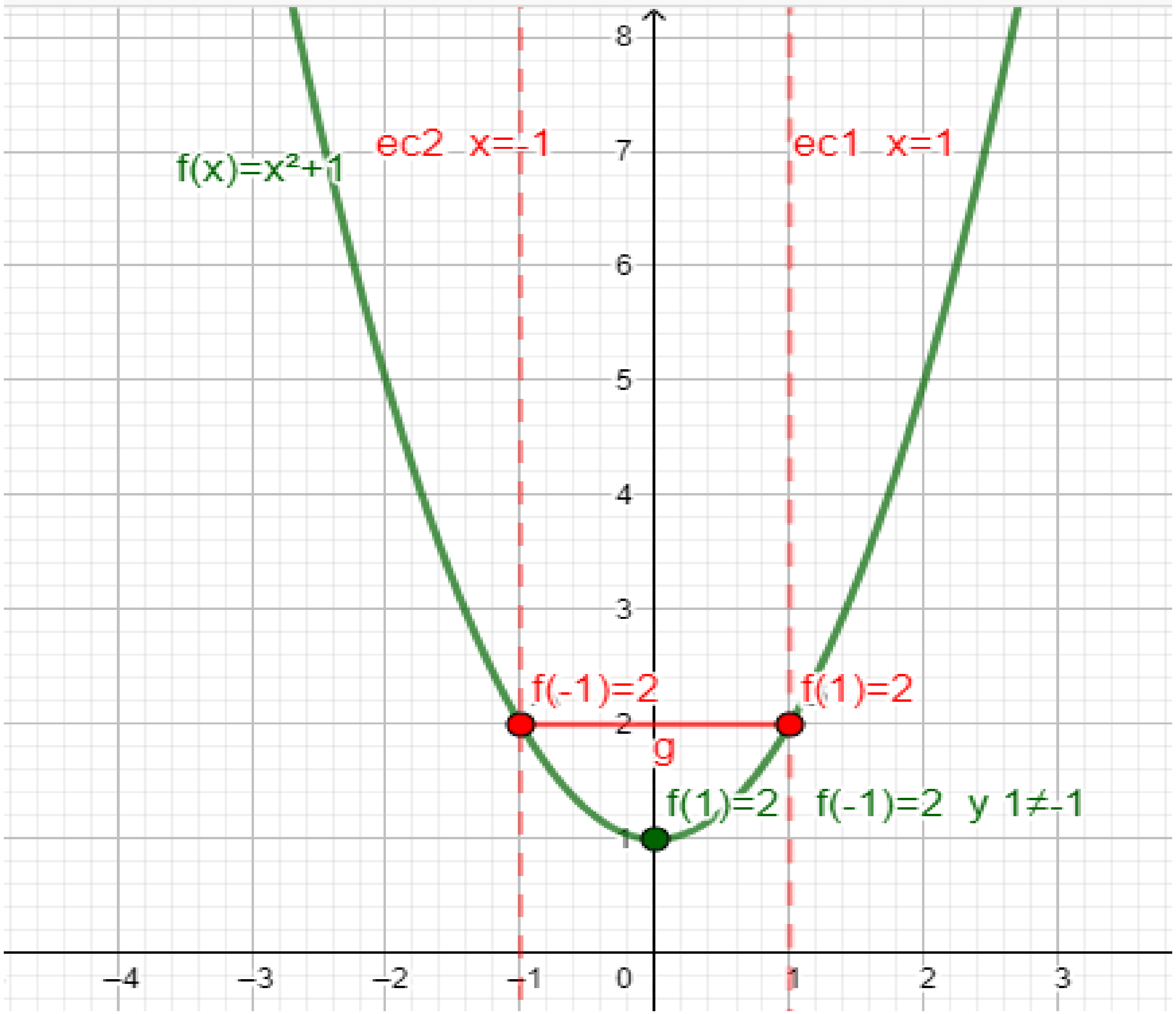
$\forall x_1, x_2 \in R \ (f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \rightarrow x_1 = x_2)$ Si es una función inyectiva

2.) $f : R \rightarrow R \ / \ f(x) = x^2 + 1$

$\forall x_1, x_2 \in R$ ☹ $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1^2 + 1 = x_2^2 + 1 \rightarrow x_1^2 = x_2^2 \rightarrow \mid x_1 \mid = \mid x_2 \mid)$ no es inyectiva ya que x por su dominio puede tomar valores R

Buscamos un contraejemplo:

$f(1) = f(-1) = 2$ y $1 \neq -1$



f(x)=x²+1
ec2 x=-1
ec1 x=1
f(-1)=2
f(1)=2
g
f(1)=2 f(-1)=2 y 1≠-1

IMPORTANTE

<u>Nota:</u> La inyectividad de una función no depende solo de la fórmula o regla sino también de su dominio. Es muy importante fijarse el dominio de la función, cuales son los valores que puede tomar la variable independiente.

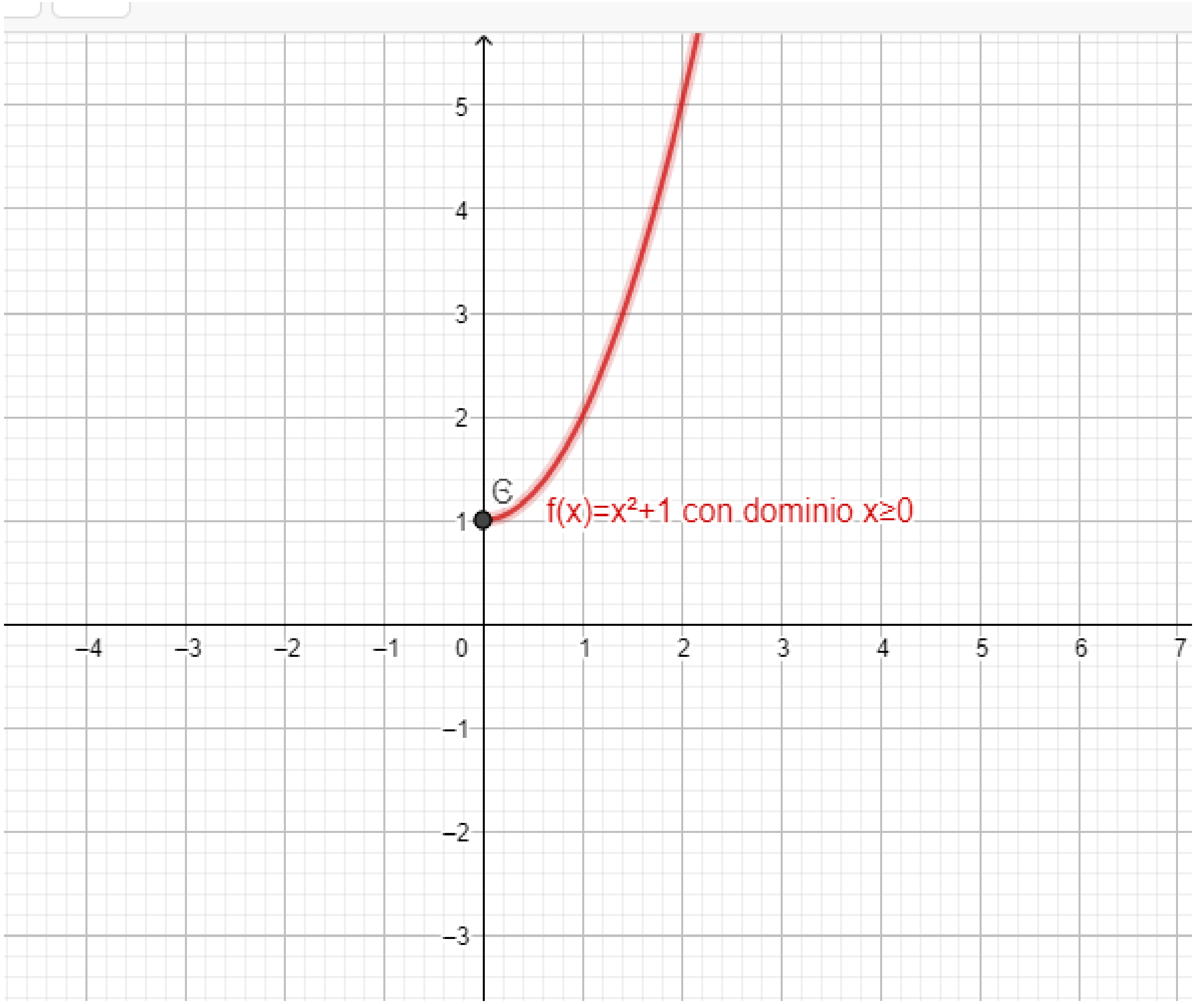
Por Ejemplo Sea : $f : R \to R \,/\, f(x) = x^2 + 1$

Cambiemos ahora su dominio , usando su misma fórmula solo cambiamos Reales por Reales positivos

$$f: R^+ \to R \,/\, f(x) = x^2 + 1$$

$$\forall x_1 \in R^+, \forall x_2 \in R^+ \; (f(x_1) = f(x_2) \to x_1^2 + 1 = x_2^2 + 1 \to$$
$$\to x_1^2 = x_2^2 \to |x_1| = |x_2| \to_* x_1 = x_2 \,)$$

* es porque x_1 y x_2 pertenecen a los R^+ no pueden tomar valores negativos


f(x)=x²+1 con dominio x≥0
G
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
1
2
3
4
5
6
7

SOBREYECTIVIDAD

- **Definición:** Sea f una función tal que f: A → B Decimos que f es una función sobreyectiva si y solo si $\forall y \in B, \exists x \in A : f(x) = y$

- **Otra Definición:** Una función f es sobreyectiva si y solo si Im (f)= Codominio de f

EJEMPLOS

1.) Sea $f : R \to R \,/\, f(x) = x - 1$

$y = x - 1 \;\Rightarrow\; x = y + 1$

$\forall y \in R : y + 1 \in R \;\therefore\; \exists x = y + 1 \in R \,/\, f(y+1) = y + 1 - 1 = y$

Otra forma $\operatorname{Im}(f) = R$ y coincide con el codominio de f

Esta función es sobreyectiva

2.) $f: R \to R \,/\, f(x) = x^2 + 1$

$y = x^2 + 1 \to y - 1 = x^2 \to |x| = \sqrt{y-1}$ y no puede tomar cualquier valor real ya que existen valores reales de y como los menores 1 que hacen que la raíz cuadrada no tenga solución en R.

Esta función no es sobreyectiva.

Contraejemplo:

$\exists y = -5 \in R \,/\, \forall x \in R \;\; -5 \neq x^2 + 1$ ya que no existe x^2 que de cómo resultado -4

Otra forma :

$Im(f) = [1, \infty)$ no coincide con el codominio de la función que es R

IMPORTANTE

Nota: La Sobreyectividad de una función no depende solo de la fórmula o regla sino también de su imagen. Es importante fijarse cual es la imagen y cual es el codominio.

Por ejemplo Sea : $f:R \to R / f(x) = x^2 + 1$

Cambiemos ahora su codominio , usando su misma fórmula solo cambiamos Reales por el intervalo $[1,\infty)$

3) $f : R \to [1,\infty) / f(x) = x^2 + 1$ aquí la imagen coincide con el codominio pues:

$\forall x \in R \ x^2 > 0 \Rightarrow x^2 + 1 > 1 \therefore y > 1$

Luego esta es una función sobreyectiva

BIYECTIVIDAD

- <u>Definición:</u> Sea f una función tal que f: A → B Decimos que f es **biyectiva** si y solo si es **inyectiva** y **sobreyectiva**

EJEMPLO

$$f : R \rightarrow R \ / \ f(x) = x - 1$$

$\forall x_1, x_2 \in R \, (f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \rightarrow x_1 = x_2)$ Si es una función inyectiva

$$\forall y \in R : y + 1 \in R \therefore \exists x = y + 1 \in R / f(y+1) = y + 1 - 1 = y$$

Otra forma Im(f) = R y coincide con el codominio de f

Esta función es sobreyectiva

por lo tanto es biyectiva

SEGÚN SU PARIDAD

https://www.youtube.com/watch?v=XRLR9iBRTps

FUNCIÓN PAR

Una función f:A→B /f(x) es **par** si y solo si

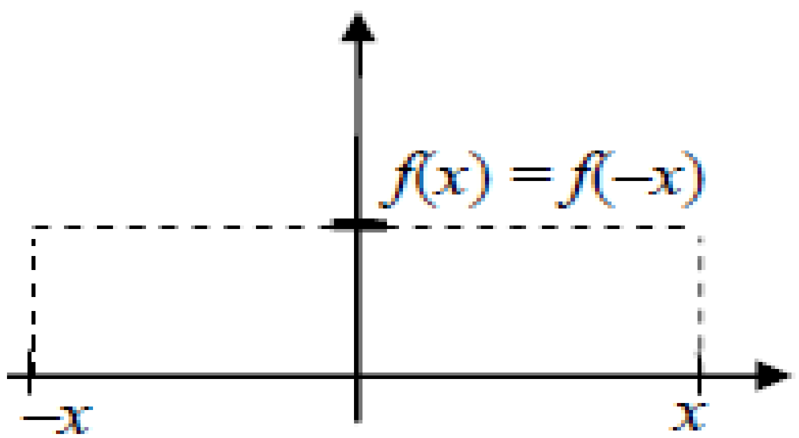
$f(x)=f(-x)$ para todo $x \in A$

Es decir la imagen de x y de su opuesto coinciden

Pasa por los puntos (x,f(x)) y (-x,f(x))

Nótese que debe considerarse $-x \in A$

Una función par es simétrica respecto del eje y



EJEMPLOS DE FUNCIONES PARES

Sean funciones de $R \rightarrow R$

Tal que 1) $f(x) = x^4$

$f(-x)$	=	$(-x)^4$	Sustituimos x por –x en f(x)
	=	$(-1)^4 (x)^4$	$(-1)^4 = 1$
	=	$(x)^4 = x^4$	Definición de f(x)

por lo tanto $f(x)=x^4$ es par

2) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5$

$f(-x)$	=	$3(-x)^4 - 2(-x)^2 + 5$	*se sustituye x por –x en f(x)*
	=	$3x^4 - 2x^2 + 5$	*se simplifica*
	=	$f(x)$	*definición de f*

Como $f(-x) = f(x)$, f es función par.

FUNCIONES IMPARES

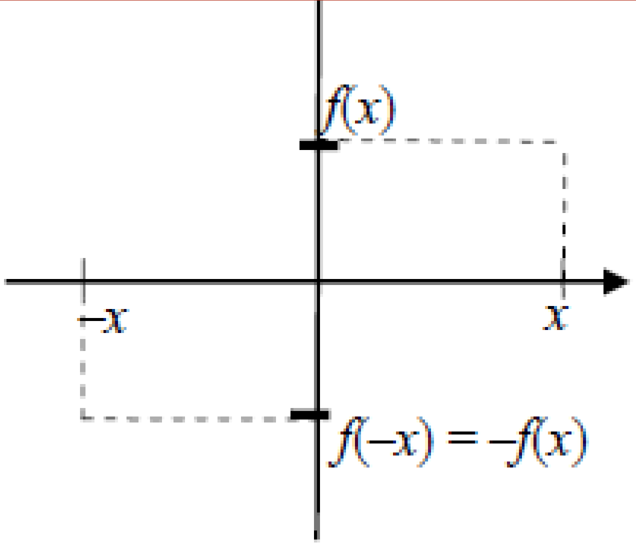
Una función f:A→B /f(x) es impar si y solo si

-f(x)=f(–x) para todo x ∈A

Nótese que debe considerarse –x ∈A

Analizando el grafico vemos que la gráfica pasa por los puntos $(x, f(x))$ y $(-x, f(-x))$,

Una función impar es simétrica respecto del origen de coordenadas



NI PAR NI IMPAR

EJEMPLO DE UNA FUNCIÓN QUE NO ES NI PAR NI ES IMPAR

Sea f:R→R tal que $f(x) = x^3 + x^2$

$f(-x)$	$=$	$(-x)^3 + (-x)^2$	se sustituye x por $-x$ en $f(x)$
	$=$	$-x^3 + x^2$	se simplifica

Como $f(-x) \neq f(x)$, y $f(-x) \neq -f(x)$ (nótese que $-f(x) = -x^3 - x^2$), la función f ni es par ni impar.

EJEMPLOS DE FUNCIONES IMPARES

Sean funciones de R→R Tal que

1) $f(x) = x^5$ entonces $-f(x) = -x^5$ -

f(-x)	=	$(-x)^5$	Sustituimos x por –x en f(x)
	=	$(-1)\,(x)^5$	$(-1)^5 = -1$
	=	$= -x^5$	Definición de f(x)

por lo tanto $-f(x) = f(-x)$ es impar

2) $f(x) = 2x^5 - 7x^3 + 4x$

$f(-x)$	=	$2(-x)^5 - 7(-x)^3 + 4(-x)$	se sustituye x por $-x$ en $f(x)$
	=	$-2x^5 + 7x^3 - 4x$	se simplifica
	=	$-(2x^5 - 7x^3 + 4x)$	se saca -1 como factor común
	=	$-f(x)$	definición de f

Como $f(-x) = -f(x)$, f es función impar.

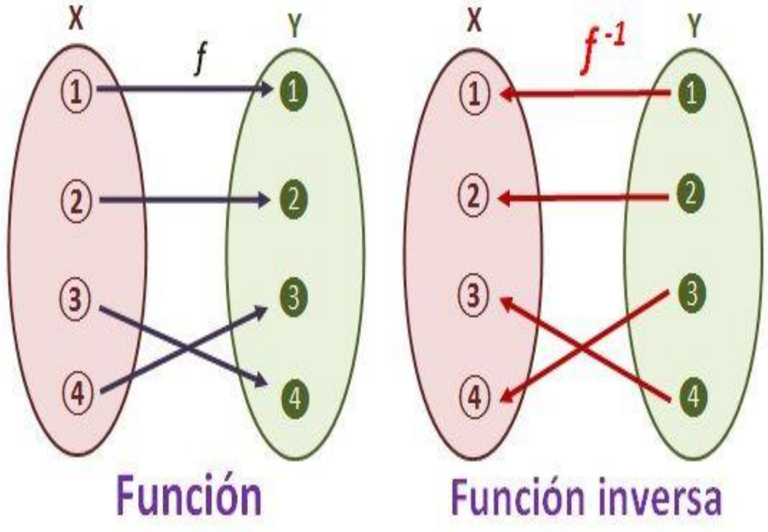
- **Definición:** Sea f una función definida de A en B es decir $f: A \rightarrow B$, existe una relación que va de $B \rightarrow A$ y que denotamos como f^{-1} que tiene la siguiente característica: $(x, y) \in f$ entonces $(y, x) \in f^{-1}$

En símbolos:

$$f^{-1} = \{(y, x) / (x, y) \in f\}$$

a esta **relación la llamamos relación inversa** de la función f ,esta nueva relación es función si cumple con las propiedades de **existencia y unicidad**.

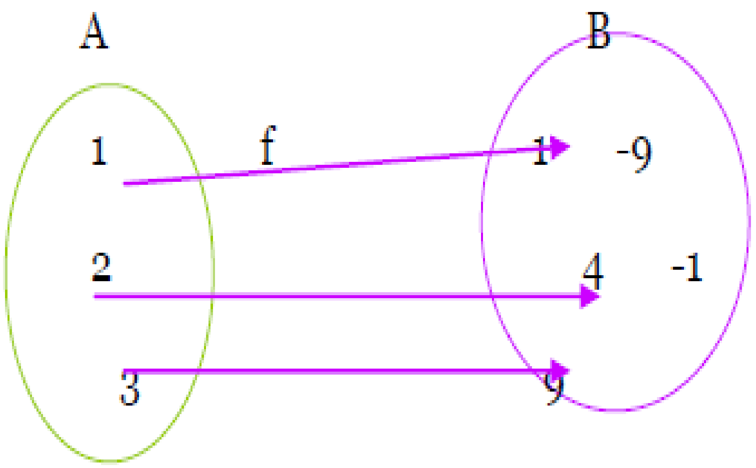
__Nota:__ Dada una función, su relación inversa no siempre es función. Veremos ejemplos de esto y además veremos que condiciones tiene que cumplir la función f para que relación inversa sea una función también.

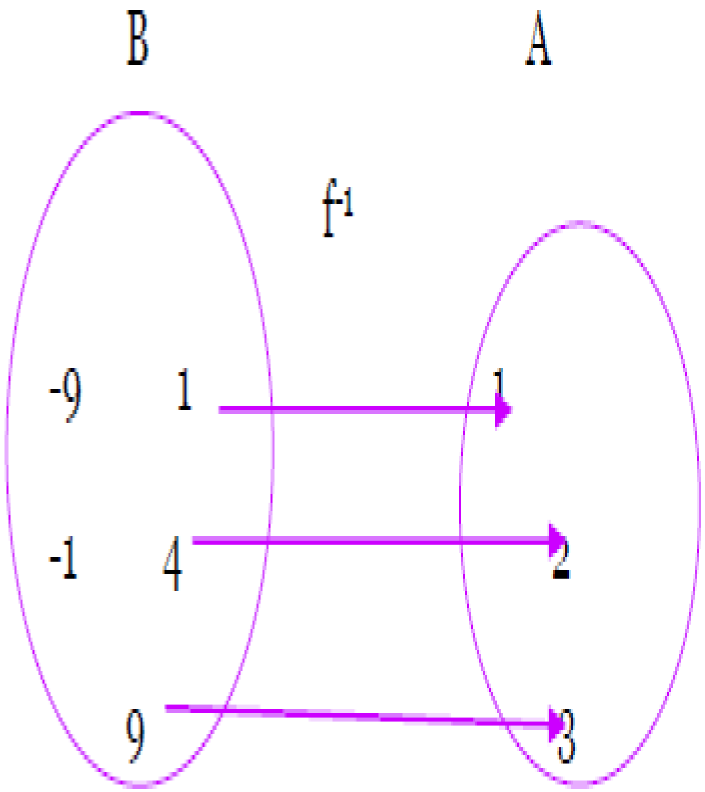


FUNCIÓN INVERSA
https://www.youtube.com/watch?v=j1Z746lff4E

EJEMPLOS

1- Sean los conjuntos A={ 1,2,3} y B ={-1,1,4,9,-9}. Sea la siguiente función f definida de la siguiente manera f(1)= 1 ; f(2)= 4 ; f(3)= 9
Los pares (1,1) (2,4) y (3, 9) pertenecen a f por lo tanto según definición de relación inversa los pares (1,1) ; (4,2) ; (9,3) pertenecen a **la relación** f^{-1} (relación inversa de f) Dicha relación no es función ya que no cumple existencia





Como vemos para los elementos -1 y -9 no existen correspondientes en el conjunto A

2- Sea la función f: $R \to R : f(x) = x^2$

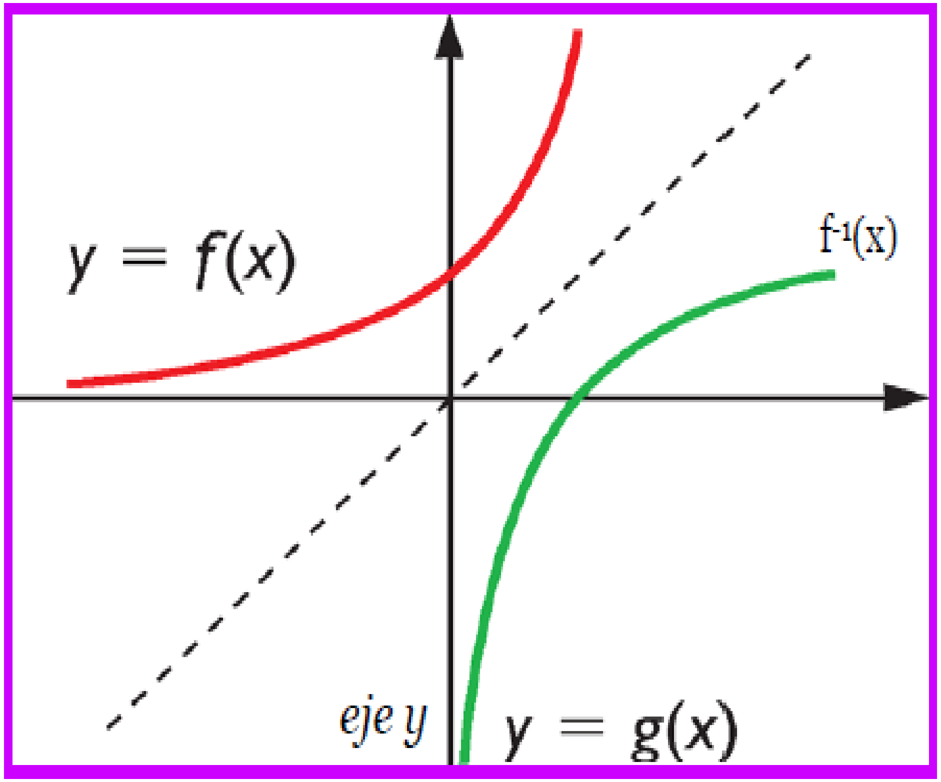
La relación inversa de f esta dada por f^{-1}: $R \to R$ tal que $f^{-1} = \pm\sqrt{x}$

Esta relación f^{-1} no cumple ni la condición de existencia y unicidad ya que: por ejemplo no existe $\pm\sqrt{-1}$ o bien no hay unicidad para $\pm\sqrt{4}$ ya que para 4 tiene dos resultados 2 y -2

Veremos que f^{-1} **es una función si y solo si f es una función biyectiva**

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN Y SU INVERSA

eje x



Como podemos observar los gráficos correspondientes a las funciones inversas son simétricos respecto de la bisectriz del primero y tercer cuadrante.

TEOREMA : La relación inversa f^{-1} de la función f es una función si y solo si f es una función biyectiva

Sea $f : A \rightarrow B \,/\, f(x) = y$ función y $f^{-1} : B \rightarrow A \,/\, f(y) = x$

Este teorema esta dado por una condición necesaria y suficiente por lo tanto debemos demostrar ambas

$\Rightarrow$

Hipótesis

$f^{-1}: B \to A$ es función (por lo tanto cumple existencia y unicidad)

Tesis

f es biyectiva

Es decir, debemos demostrar que f es inyectiva $\forall x_1, x_2 \in A: f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$

Además, debemos demostrar que f es sobreyectiva, es decir

$\forall y \in B: \exists x \in A: f(x) = y$

Demostración.

Inyectividad

$$\forall x_1, x_2 \in A : (f(x_1) = f(x_2) \rightarrow_1 f(x_1) = y \wedge f(x_2) = y \rightarrow_2 (y, x_1) \in f^{-1} \wedge (y, x_2) \in f^{-1} \rightarrow$$

$$\rightarrow_3 f^{-1}(y) = x_1 \text{ y } f^{-1}(y) = x_2 \rightarrow_4 x_1 = x_2)$$

1. Definición de función
2. Definición de relación inversa
3. Notación
4. Unicidad de f^{-1}

Sobreyectividad

Por ser f^{-1} una función, cumple la existencia luego

$$\forall y \in B : \exists x \in A : f^{-1}(y) = x \rightarrow_1 (x, y) \in f \rightarrow_2 f(x) = y$$

1 Definición de relación inversa

2 Notación

$\Leftarrow$

Hipótesis

f es biyectiva es decir es : inyectiva $\leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$

sobreyectiva $\leftrightarrow \forall y \in B \exists x \in A : f(x) = y$

Tesis

f^{-1} es función es decir debemos demostrar que cumple : existencia

$\leftrightarrow \forall y \in B : \exists x \in A : f^{-1}(y) = x$

y además cumple la unicidad $\leftrightarrow \forall y \in B f^{-1}(y) = x_1 y f^{-1}(y) = x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

Demostración

Comenzaremos por demostrar la existencia de f^{-1}

Por ser f biyectiva cumple la Sobreyectividad por lo tanto $\forall y \in B : \exists x \in A : f(x) = y \rightarrow_1$

$\rightarrow (x, y) \in f \rightarrow_2 (y , x) \in f^{-1} \rightarrow_2 f^{-1} (y) = x$ luego f^{-1} cumple la existencia

1. Notación
2. Definición de relación inversa

Por ser f biyectiva cumple la inyectividad por lo tanto

$\forall y \in B : f^{-1}(y) = x_1 \wedge f^{-1}(y) = x_2 \rightarrow_1 (y, x_1) \in f^{-1} \wedge (y, x_2) \in f^{-1} \rightarrow_2 (x_1, y) \in f \wedge (x_2, y) \in f \rightarrow_3$

$f(x_1) = y \wedge f(x_2) = y \rightarrow f(x_1) = f(x_2) \rightarrow_4 x_1 = x_2$

1. Notación
2. Definición de relación inversa
3. Notación
4. Inyectividad de f

MÉTODO PARA HALLAR LA INVERSA DE UNA FUNCIÓN

Tenemos la función $y = f(x)$, biyectiva y queremos hallar su inversa (que por el teorema anterior que sabemos que es función)

1) Se intercambian la **x** y la **y** en la expresión inicial: $y = f(x) \longrightarrow x = f(y)$

2) Se despeja la **y** en la nueva expresión: $x = f(y) \longrightarrow y = f^{-1}(x)$

FUNCIÓN COMPUESTA

- **Definición:** Sean $f: A \to B$ y $g: C \to D$ tal que $Im(f) \subset Dom(g)$.Por lo tanto ,existe una función $g o f$ que **se lee f compuesta con g** (tal que se aplica primero f y luego g) cuyo dominio es A y codominio es D y que se denomina función compuesta de f con g con la siguiente notación $g\, o f(x) = g(f(x))$

- **Definición :** Sean $f: A \to B$ y $g: C \to D$ tal que $Img.\, g \subset Dom.\, f$ Por lo tanto , Existe una función $f \circ g$ que **se lee g compuesta con f** (tal que se aplica primero g y luego f) cuyo dominio es C y codominio es B y que se denomina función compuesta de g con f con la siguiente notación $f\, o g(x) = f(g(x))$

Con respecto al ejemplo anterior, si tratamos de hallar la función $f \circ g(x) = f(g(x))$ esta no puede hallarse es decir no existe como función ya que imagen g no esta incluida en el dominio de f

IMPORTANTE NOTA:

La composición de funciones no es conmutativa $f \circ g \neq g \circ f$

PROPIEDADES DE LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

1. ASOCIATIVIDAD

2. LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES INYECTIVAS DA COMO RESULTADO UNA FUNCIÓN INYECTIVA

3. LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES SOBREYECTIVAS DA COMO RESULTADO UNA FUNCIÓN SOBREYECTIVA

4. LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES BIYECTIVAS DA COMO RESULTADO UNA FUNCIÓN BIYECTIVA

OPERACIONES CON FUNCIONES

OPERACIÓN DE FUNCIONES

Las operaciones suma, resta, multiplicación y división entre funciones son semejantes los números.

OPERACIÓN	NOTACIÓN	DOMINIO
Suma	$f(x) + g(x) = (f+g)(x)$	Intersección de $D_1 \cap D_2$
Resta	$f(x) - g(x) = (f-g)(x)$	Intersección de $D_1 \cap D_2$
Multiplicación	$f(x) * g(x) = (f*g)(x)$	Intersección de $D_1 \cap D_2$
División	$f(x) / g(x) = (f/g)(x)$	Intersección y quitar los puntos $D_1 \cap D_2 - \{x \in D_1 \cap D_2\} \neq 0$

EJEMPLO:

Suma

Se define la **suma o adición** de dos funciones *f(x)* y *g(x)* como:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

Si alguna de las funciones tiene una imagen que no está definida para algún valor de *x*, la función suma, que es en definitiva la suma de las imágenes, tampoco lo está. Dicho de otra forma, el dominio de la nueva función es:

$$Dom_{f+g} = Dom_f \cap Dom_g$$

Observar que el dominio de la función suma es el conjunto intersección de los dominios de las funciones f y g, de manera que si este fuese el conjunto vacío $\emptyset$, la nueva función carecería de dominio, es decir, no existiría.

Propiedades

- **Conmutativa:** $f+g=g+f$

  Es decir, el orden en que operes es indiferente. Es una propiedad que también se cumple en los números reales: 3+2=2+3 = 5

- **Asociativa:** $(f+g)+h=f+(g+h)$

  Es decir, dadas 3 funciones cualesquiera, se obtiene igual resultado sumando la primera *(f)* y la segunda *(g)*, y a este resultado sumando la tercera *(h)*, que sumado la segunda *(g)* y la tercera *(h)* y al resultado sumar la primera *(f)*. Observa que esta propiedad se cumple también en los números reales: (3+2)+1=3+(2+1) = 6

- **Elemento neutro:** $f(x) = 0$

  Es decir, el elemento neutro de la suma de funciones, denotado a veces f_0 es la función constante *f(x)=0*, ya que al sumarla con cualquier otra función da como resultado la propia función: *g(x)+0=g(x)*. Siguiendo con nuestras analogías, en el mundo de los números reales, y para la operación suma, el elemento neutro es el número 0

- **Elemento simétrico:** $f(x) \Rightarrow -f(x)$

  Es decir, dada una función cualquiera *f*, su **función opuesta** es el elemento simétrico respecto a la suma de funciones ya que: $f(x)+[-f(x)]=0=f_0$. En el mundo de los números reales, y para la operación suma, el elemento simétrico de cualquier otro es su opuesto: el opuesto del 3 es el -3 porque 3+(-3) = 0)

Resta

Se define la **resta o sustracción** de dos funciones *f(x)* y *g(x)* como:

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

Si alguna de las funciones tiene una imagen que no está definida para algún valor de *x*, la función resta, que es en definitiva la resta de las imágenes, tampoco lo está. Dicho de otra forma, el dominio de la nueva función es:

$$Dom_{f-g} = Dom_f \cap Dom_g$$

De igual manera al caso de la suma, la resta puede no estar definida en ciertos casos. De hecho, la resta se puede considerar un caso particular de la suma de funciones:

$$f - g = f + (-g)$$

Cuando se realiza una suma o una resta de funciones y se **simplifica** la expresión resultante, esta **debe ser acompañada de su dominio**. De lo contrario, podrías deducir un dominio después de la simplificación que no sería el correcto. Recuerde que dos funciones son iguales cuando las imágenes y el dominio son el mismo.

Ejemplo

Realiza las siguientes operaciones, calcula el dominio de la función resultante y determina el elemento simétrico de cada función para la operación suma:

1. $$\begin{matrix} f(x) = \frac{1}{x} \\ g(x) = \frac{x+2}{x-1} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} f(x)+g(x) \\ f(x)-g(x) \end{matrix}$$

2. $$\begin{matrix} f(x) = \sqrt{x+2} \\ g(x) = \sqrt{2-x} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} f(x)+g(x) \\ g(x)-f(x) \end{matrix}$$

3. $$\begin{matrix} f(x) = \sqrt{\frac{2x}{3}+1} \\ g(x) = \ln(-x-2) \end{matrix} \Rightarrow g(x)+f(x)$$

RESOLUCIÓN

Resolución

Apartado 1

$$(f+g)(x)=\frac{1}{x}+\frac{x+2}{x-1}=\frac{x-2+x(x+2)}{x(x-1)}=\frac{x^2+3x-2}{x^2-x}$$

$$(f-g)(x)=\frac{1}{x}-\frac{x+2}{x-1}=\frac{-x^2-x-2}{x^2-x}$$

Los dominios:

$$\begin{array}{l} Dom_f=\mathbb{R}-\{0\} \\ Dom_g=\mathbb{R}-\{1\} \end{array} \Rightarrow Dom_{f+g}=Dom_{f-g}=Dom_f\cap Dom_g=\mathbb{R}-\{0,1\}$$

Los opuestos:

$$\begin{array}{r} f(x)=\frac{1}{x} \\ g(x)=\frac{x+2}{x-1} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} -f(x)=-\frac{1}{x} \\ -g(x)=-\frac{x+2}{x-1} \end{array}$$

Apartado 2

$$(f+g)(x)=\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}$$
$$(g-f)(x)=\sqrt{2-x}-\sqrt{x+2}$$

Los dominios:

$$\left.\begin{array}{l} Dom_f=[-2,\infty) \\ Dom_g=(-\infty,2] \end{array}\right. \Rightarrow Dom_{f+g}=Dom_{f-g}=Dom_f \cap Dom_g=\left[-2,2\right]$$

Los opuestos:

$$\begin{array}{l} f(x)=\sqrt{x+2} \\ g(x)=\sqrt{2-x} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} -f(x)=-\sqrt{x+2} \\ -g(x)=-\sqrt{2-x} \end{array}$$

Apartado 3

$$(f+g)(x)=\sqrt{\frac{2x}{3}+1}+\ln(-x-2)$$

Los dominios:

$$\begin{matrix} Dom_f=[-2,\infty) \\ Dom_g=(-\infty,2] \end{matrix} \Rightarrow Dom_{f+g}=Dom_{f-g}=Dom_f\cap Dom_g=\left[-2,2\right]$$

Este resultado implica que la función *(f+g)(x)* no existe, al no existir ningún valor que tenga imagen.

Los opuestos:

$$\begin{matrix} f(x)=\sqrt{\frac{2x}{3}+1} \\ g(x)=\ln(-x-2) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} -f(x)=-\sqrt{\frac{2x}{3}+1} \\ -g(x)=-\ln(-x-2) \end{matrix}$$