Ejemplo de relación de equivalencia

En el conjunto de los reales |R se define: $x \, S \, y \Leftrightarrow x^2 - 4x = y^2 - 4y$

a) Reflexiva:

$\forall x \in |R : x^2 - 4x = x^2 - 4x$ (por reflexividad de la igualdad) $\Rightarrow x \, S \, x$

Simétrica:

$\forall x, y \in |R: x \, S \, y \Rightarrow x^2 - 4x = y^2 - 4y \Rightarrow y^2 - 4y = x^2 - 4x$ (por simetría de la igualdad) $\Rightarrow y \, S \, x$

Transitiva:

$\forall x, y, z \in |R : x \, S \, y \wedge y \, S \, z \Rightarrow x^2 - 4x = y^2 - 4y \Rightarrow y^2 - 4y = z^2 - 4z \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 4x = z^2 - 4z$ (por transitividad de la igualdad) $\Rightarrow x \, S \, z$

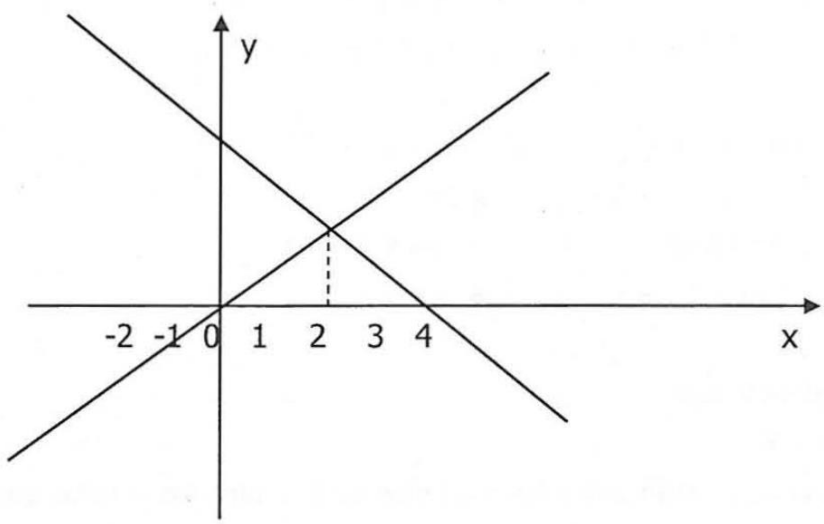
b) Para graficar la relación vamos a tratar de simplificar un poco:

$x^2 - 4x = y^2 - 4y \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = y^2 - 4y + 4 \Rightarrow (x - 2)^2 = (y - 2)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow |x - 2| = |y - 2| \Rightarrow x - 2 = y - 2 \lor x - 2 = -y + 2 \Rightarrow y = x \lor y = 4 - x$

La relación entonces nos queda: $x \, S \, y \Leftrightarrow y = x \lor y = 4 - x$

Son dos rectas:



c) Del gráfico se puede ver que todos los elementos se relacionan con dos (tienen dos imágenes) excepto el 2 que tiene 1 sola, pues es justo la intersección de las dos rectas:

cl(2) = { 2 }   para los demás: cl(x) = { x , 4 - x }

Por ejemplo: cl(1) = { 1, 3 }   , cl(5) = { 5 , -1 } , etc.

En total hay infinitas clases, por eso el conjunto cociente debe darse por comprensión en vez de por extensión.

¿Está bien escribir el conjunto cociente así: |R / S = { cl(x) / x ∈ |R }

NO!!!!! Pues se estaría nombrando dos veces a cada clase (al decir x ∈ |R , estamos nombrando por ejemplo la clase del uno dos veces al decir cl(1) y cl(3) que es la misma)

Entonces... ¿qué hacemos? Debemos encontrar un conjunto de índices (subconjunto de A que está formado por un representante de cada clase).

Se puede escribir así: |R / S = { cl(x) / x ∈ (- ∞ ; 2] }

O bien, si de cada clase tomamos como representante al mayor: |R / S = { cl(x) / x ∈ [2 , + ∞) }