INTEGRACIÓN PARTE 2

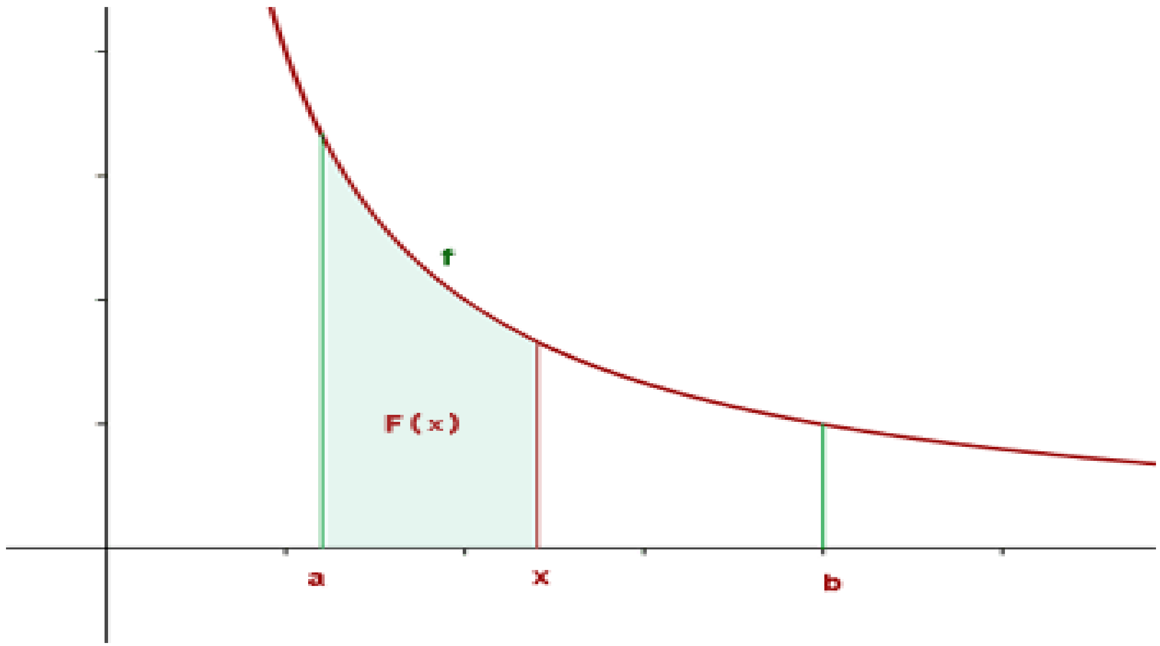
FUNCIÓN INTEGRAL

NOTA: Para evitar confusiones cuando se hace referencia a la variable de f, se la llama “t”, pero si la referencia es a la variable de F, se la llama “x”.

- Sea f (t) una función continua en el intervalo [a, b]. A partir de esta función se define la función integral:

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

Geométricamente la función integral, F(x), representa el área del recinto limitado por la curva y = f(t), el eje de abscisas y las rectas t = a y t = x.



El TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

❖ *Primera Parte*

› Si f es una función continua en [a, b] entonces la función

$$F(x)= \int_a^x f(t)dt$$

donde $a \leq x \leq b$ es derivable y verifica

$F'(x) = f(x)$ para todo x del intervalo.

❖ *Segunda Parte*

Si f es una función continua en el intervalo [a, b] y F una primitiva cualquiera, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Demostración:

Según la primera parte del teorema F(x)= $\int_a^x f(t)dt$

Demostración de la regla de Barrow:

Dada al función continua $f(x)$ en $[a, b]$, si $G(x)$ es una primitiva de $f(x)$ en $[a, b]$ tendremos que, dado que $F(x)$ definida anteriormente también lo es, ambas deben diferenciarse tan sólo en una constante C, de esta forma:

$$G(x) - F(x) = C \quad , \quad \forall x \in [a, b]$$

En particular:

$$G(a) - F(a) = C \Rightarrow G(a) - \int_a^a f(x)dx = C$$

$$G(b) - F(b) = C \Rightarrow G(b) - \int_a^b f(x)dx = C$$

restando ambas expresiones, y considerando que $\int_a^a f(x)dx = 0$, tendremos:

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

Q.E.D.

Ejemplo

1.

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x-1)^3}$$

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x-1)^3} = \left[\frac{-1}{2(x-1)^2}\right]_{-2}^{-1} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(-2)^2} - \frac{1}{(-3)^2}\right] = -\frac{5}{72}$$

2.

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$$

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \left[2\sqrt{1-x}\,\right]_0^3 = 2(2-1) = 2$$

Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral. Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$, entonces existe en $[a,b]$ al menos un punto c tal que se verifica:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

Nota: al número real $\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ se le llama valor medio o valor promedio de $f(x)$ en $[a,b]$.