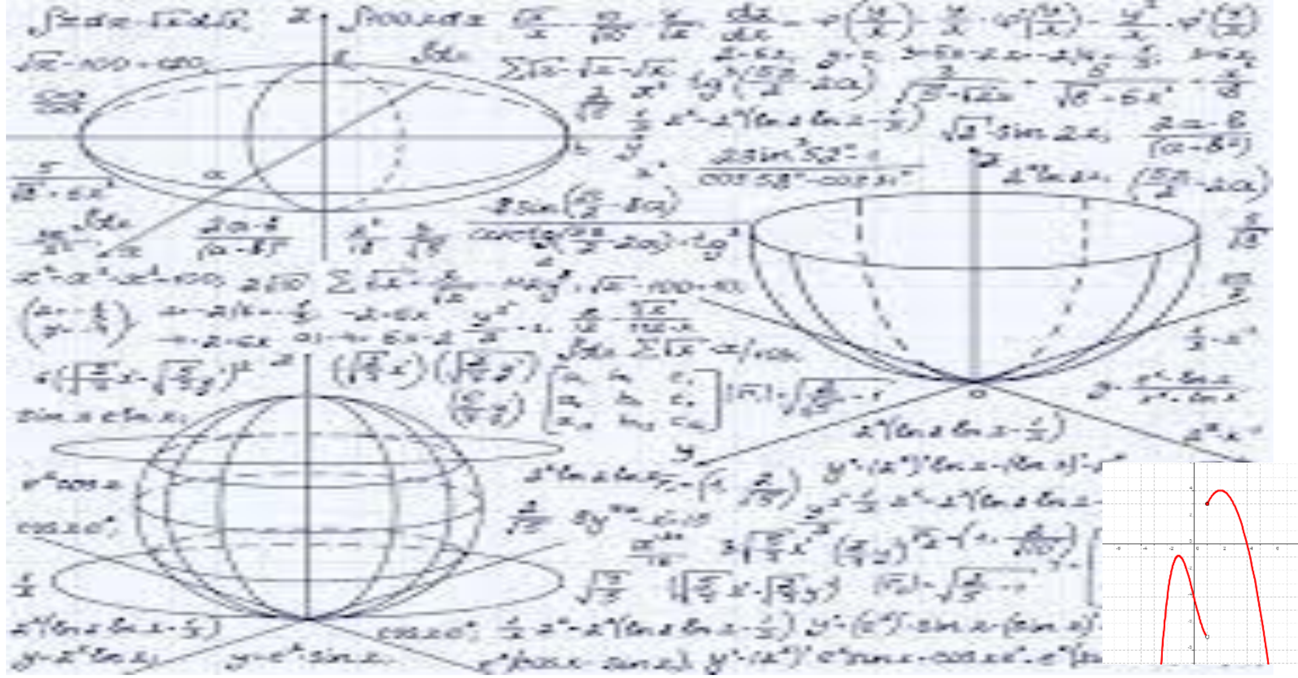
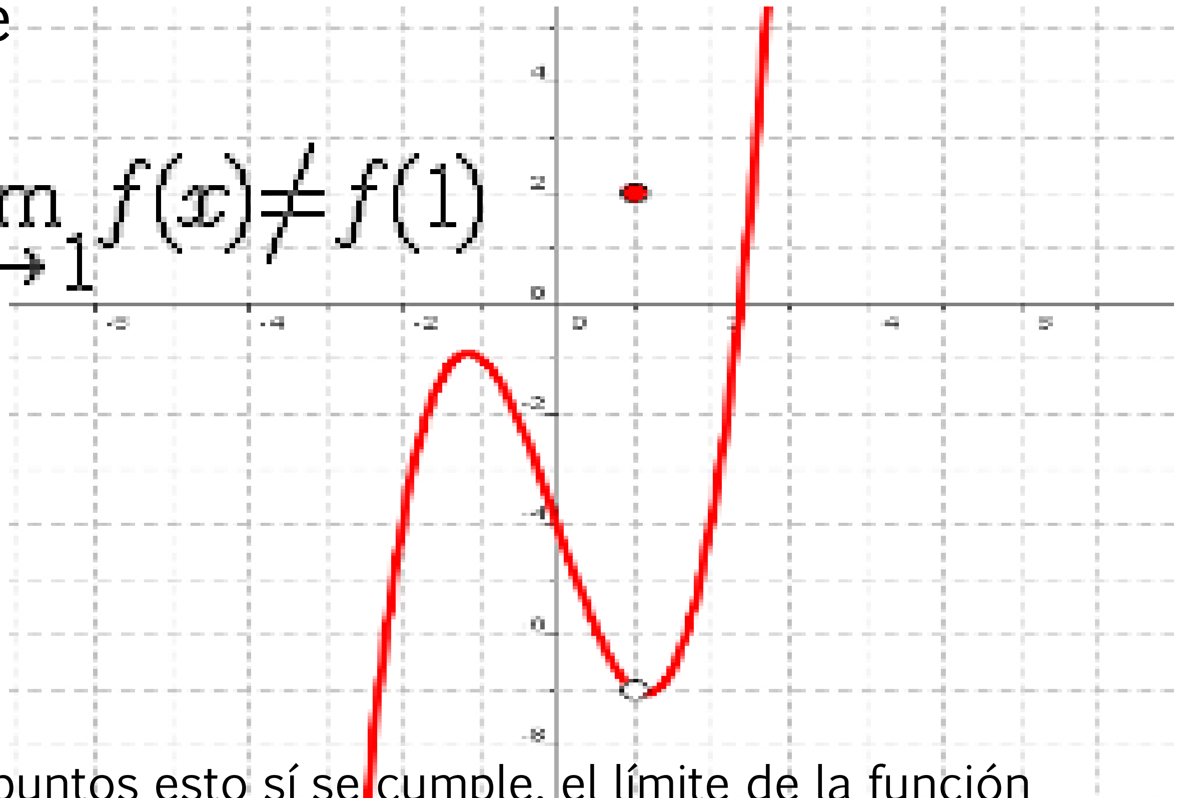


CONTINUIDAD

- En esta gráfica, si nos **acercamos** a x=1, la función, tanto por la izquierda como por la derecha de 1, se acerca a -7.
- Pero el problema está en que **justo en** x=1, la función vale 2 en lugar de -7. Por tanto, lo que ocurre aquí es que límite e imagen de la función no coincide

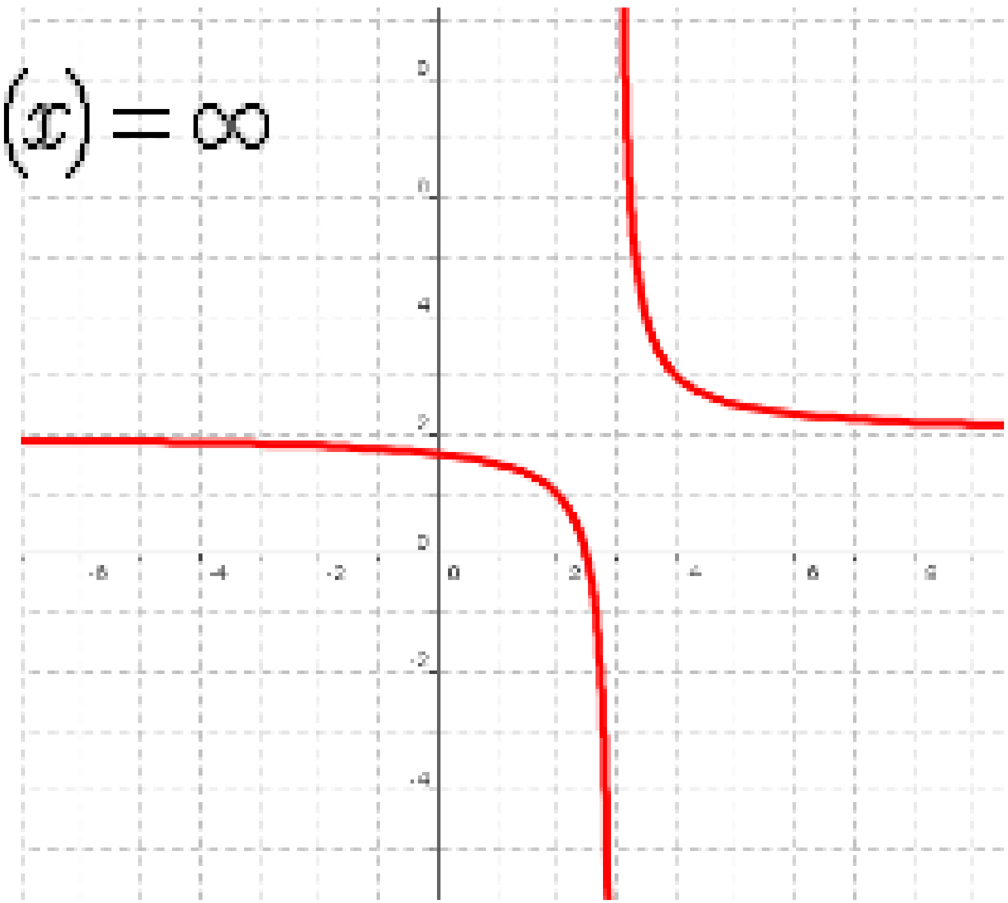
$$\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$$



en todos los otros puntos esto sí se cumple, el límite de la función coincide con el valor de la imagen.

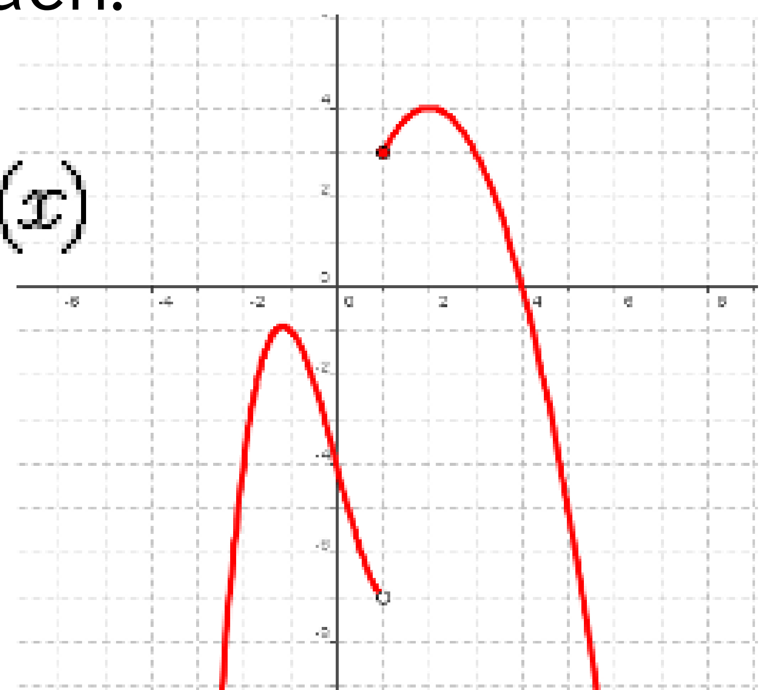
- En este caso, cuando nos acercamos a x=3, la función se va hacia infinito; a -∞ por la izquierda y a +∞ por la derecha, o sea, cuando al hacer el límite en el punto el resultado es infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$$



- Cuando nos acercamos a x=1, la función se acerca a cosas distintas según por el lado que lo hagamos, por la izquierda se acerca a -7 y por la derecha a 3. Luego, lo que ocurre, es que los dos límites laterales existen, son números reales, pero no coinciden. En todos los demás valores del dominio de f sí se cumple, los límites laterales coinciden.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$$



Sea f una función definida en un cierto dominio Df

<u>Definición</u> : Una función f es continua en un pto. x_0 si y solo si la función f esta definida en dicho punto (o sea existe $f(x_0)$),existe el limite finito de f cuando $x \to x_0$ y $\lim f(x)$ $x \to x_0$ coincide con el valor de $f(x_0)$

Por lo tanto:

Para que una función sea continua en x_0, se tienen que cumplir tres condiciones:

1. Existir el límite de la función cuando $x \to x_0$.

Y que este limite sea finito

2. Estar definida la función en x_0, es decir, existir $f(x_0)$.

3. Los dos valores anteriores han de coincidir: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Si alguna de las tres condiciones no se cumple, la función es **discontinua** en x_0.

Definición de continuidad en un abierto

- Se dice que una función es continua en un intervalo (a , b) cuando es continua en todos y cada uno los puntos del intervalo abierto.

Definición de continuidad lateral

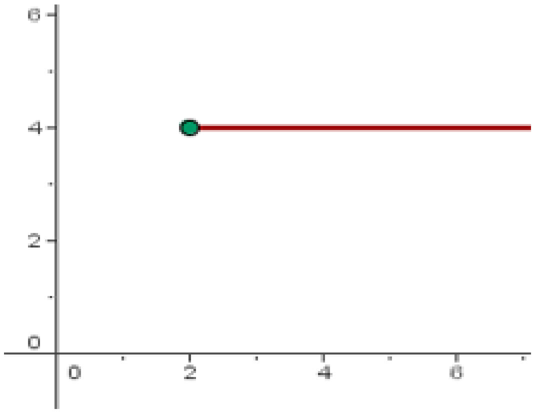
- Continuidad por derecha : Si la función esta definida en "a" es decir existe f(a) y limite para x→ a^{+} de f(x) existe y es finito y además ambos coinciden ,diremos que la función es continua por derecha
- Continuidad por izquierda : Si la función esta definida en “a" es decir existe f(a) y limite para x→ a^{-} de f(x) existe y es finito y además ambos coinciden ,diremos que la función es continua por izquierda.

Ejemplos

Continuidad por la derecha

Una función f(x) es **continua por la derecha** en el punto x = a si:

$$f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

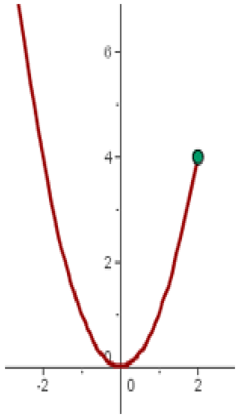


$$f(2) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$$

Continuidad por la izquierda

Una función f(x) es **continua por la izquierda** en el punto x = a si:

$$f(a) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

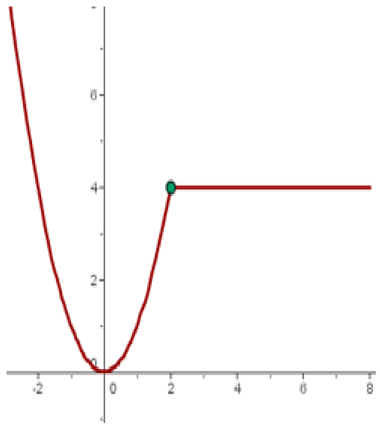


$$f(2) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = 4$$

Función continua

Una función f es continua en un punto si es continua por la izquierda y es continua por la derecha:

$$f(a) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$



$$f(2) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$$

Definición de continuidad en un cerrado

Definición : Se dice que una función es continua en el intervalo $[a, b]$ si es continua en todos y cada uno de los puntos del intervalo (a, b) y además es continua por derecha en a y continua por izquierda en b

Igualmente podemos definir la continuidad en los intervalos semiabiertos:

Una función es continua en un intervalo $(a,b]$ si es continua en todos los puntos del intervalo abierto (a,b) y, además, es continua a la izquierda en b.

Una función es continua en un intervalo $[a,b)$ si es continua en todos los puntos del intervalo abierto (a,b) y, además, es continua a la derecha en a.

Ejemplo.

1. La función $f(x)=x^2$ es continua en todo su dominio R y, por tanto, en cualquier intervalo abierto de R.

2. La función $f(x)=\frac{1}{x}$ no está definida en el punto $x=0$: su dominio de definición es

$$Dom(f)=R-\{0\}=R^*$$

Para cualquier intervalo abierto (a,b) que no contenga el 0, $f(x)$ es continua en todos sus puntos y diremos que la función es continua en el intervalo abierto (a,b), p.e. $(3,5)$. Sin

Sin embargo no será continua en ningún intervalo que contenga a 0

Ejemplos:

① Probar que la función definida por $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \leq 3 \\ -1, & \text{si } x > 3 \end{cases}$

es discontinua en el punto $x_0 = 3$.

Veremos cual de las tres condiciones de continuidad no se cumple

Estudiamos el limite por medio de los limites laterales.

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 2$$

Por tanto, la función es discontinua en $x_0 = 3$.

② Probar que la función definida por $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } x < 3 \\ x - 2, \text{ si } x > 3 \end{cases}$

es discontinua en x = 3

En este caso existe el límite de la función cuando *x* tiende a 3, y es 1; los dos límites laterales coinciden:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} 1 = 1$$
$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (x - 2) = 3 - 2 = 1$$

• Sin embargo, la función no está definida en *x* = 3; no existe *f* (3).

Por tanto, la función es discontinua en *x* = 3.

③ ¿Es la función definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \text{ si } x \neq 2 \\ 5, \text{ si } x = 2 \end{cases}$ discontinua en el punto $x_0 = 2$?

Existe el límite de la función cuando x tiende a 2, ya que los dos límites laterales coinciden:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2^2 - 1 = 3$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2^2 - 1 = 3$$

- La función está definida para $x = 2$ y vale 5: $f(2) = 5$.

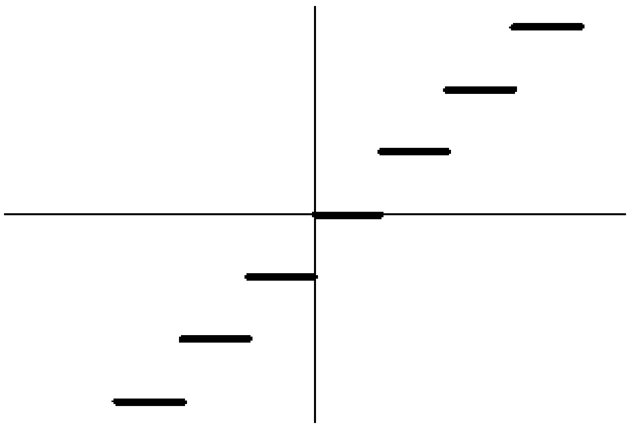
- Sin embargo, el valor del límite de la función cuando $x \to 2$ no coincide con $f(2)$:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 3 \neq f(2) = 5$$

Mas ejemplos

- **Estudiar la continuidad de la función $f(x) = Ent(x) = [x]$ (función parte entera de un número) en cualquier punto de abscisa entera.**

Si tenemos en cuenta la gráfica de la *función parte entera*



podemos observar que en cualquier punto de abscisa entera "n" se verifica

1. $f(n) = Ent(n) = [n] = n$

2. $\lim_{x \to n^-} f(x) = \lim_{x \to n^-} Ent(x) = n - 1$

   $\lim_{x \to n^+} f(x) = \lim_{x \to n^+} Ent(x) = n$

Por tanto, no existe $\lim_{x \to n} Ent(x)$ por ser los límites laterales distintos.

En consecuencia, la función $f(x) = Ent(x) = [x]$ no es continua en ningún punto de

CONSECUENCIAS DE LA CONTINUIDAD EN UN PUNTO.

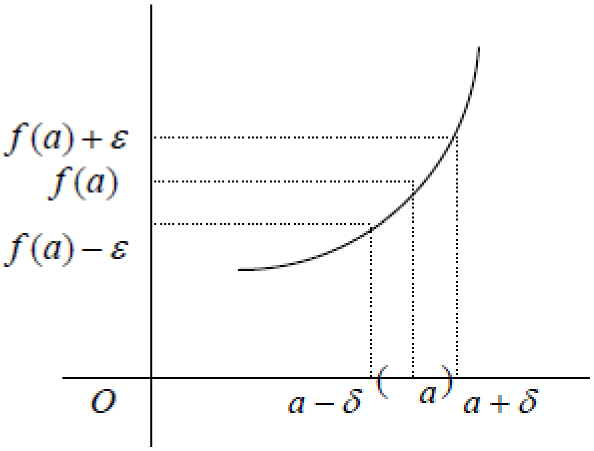
✓1 **Si una función es continua en un punto, entonces tiene límite en dicho punto.**

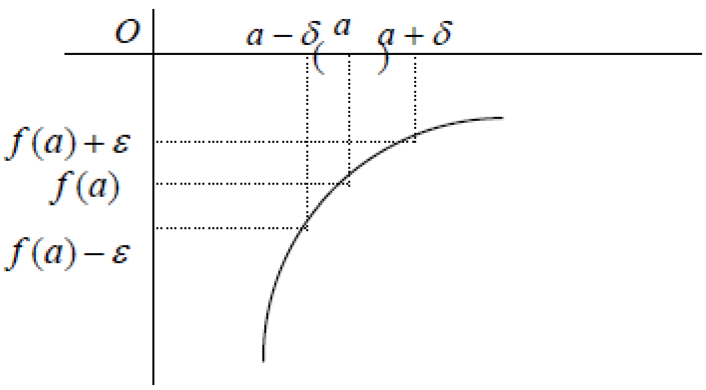
Esta propiedad es consecuencia directa de la definición de la continuidad.

✓ 2

Continuidad y signo de una función.

Si f es continua en un punto $x = a$ y $f(a) \neq 0$, entonces existe un entorno de $x = a$ en el cual los valores de f tienen el mismo signo que $f(a)$.





✓ 3

Continuidad y anulación de una función.

Si una función es continua en un punto $x = a$ y toma valores positivos y negativos en cualquier entorno simétrico de $x = a$, la función se anula en él.