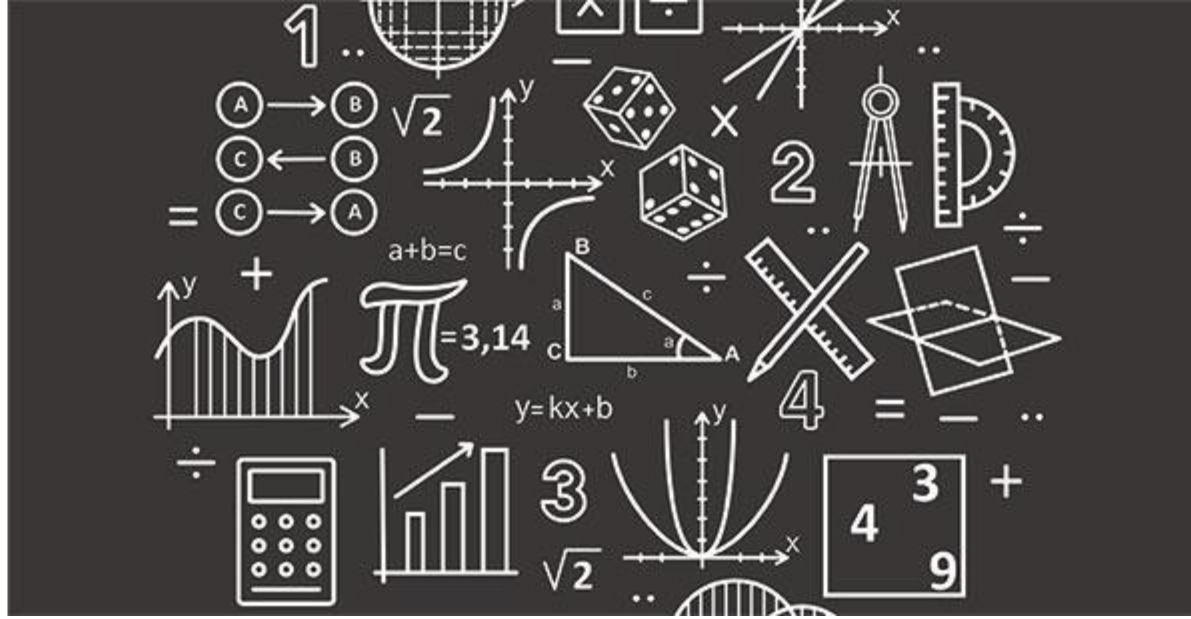


DERIVADA PARTE 2

Ejemplo de derivadas laterales

Vamos a calcular las derivadas laterales, de la función en *x* = *1*:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x\le 1 \\ 2x-1 & si \quad x>1 \end{cases}$$

- Calculamos la derivada por la izquierda:

Paso 1: $f(1+h) = (1+h)^2 = 1 + 2h + h^2$
Paso 2: $f(1) = 1^2 = 1$
Paso 3: $f(1+h) - f(1) = h^2 + 2h + 1 - 1 = h^2 + 2h$
Paso 4: $[f(1+h) - f(1)]/h = (h^2 + 2h)/h = h + 2$

Tomando el límite cuando h ->0 obtenemos:

✓ $f'_-(1) = 2$

- *Calculamos la derivada por la derecha:*
  Paso 1: $f(1+h) = 2\cdot(1+h) - 1 = 2 + 2h - 1 = 2h + 1$
  Paso 2: $f(1) = 1^2 = 1$
  Paso 3: $f(1+h) - f(1) = 2h + 1 - 1 = 2h$
  Paso 4: $[f(1+h) - f(1)]/h = (2h)/h = 2$
  Tomando el límite cuando h ->0 obtenemos:

✓ $\boldsymbol{f'_{+}(1) = 2}$

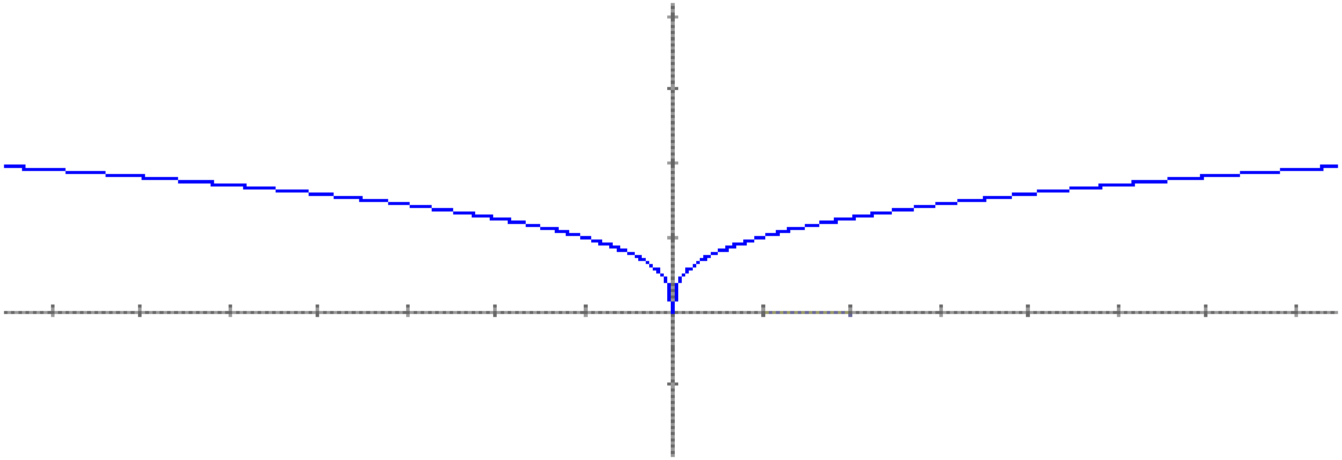
Como ambas derivadas existen, coinciden

Entonces la derivada de f(x) en x=1 es “2”

$f\,'(x)=2$

OBSERVACIÓN:

- Teniendo en cuenta el concepto de derivadas laterales, si éstas existen pero no coinciden, habrá dos "pendientes", lo que implica que la función no sea derivable. Estos serán puntos "angulosos" o de "picos".



DERIVADAS Y CONTINUIDAD.

- **TEOREMA** (DERIVABLE implica CONTINUA)

Si f es una función derivable en el punto x_0 , entonces f es continua en x_0

DEMOSTRACIÓN

Sabemos que f es derivable en x_0 por lo tanto existe y es finito

$$\lim_{x\to x0} \frac{f(x)-f(x_{0)}}{x-x_0}$$

$$f(x) = f(x_0)+\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)}(x-x_0)$$

$$\lim_{x\to x0} f(x) = \lim_{x\to x0}\left[\ f(x_0)+\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)}(x-x_0)\ \right]$$

aplicando el límite tenemos

$$\lim_{x\to x0} f(x) = \lim_{x\to x0} f(x_0)+\lim_{x\to x0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)}(x-x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\ .0 = f(x_0)$$

Esta propiedad evita el trabajo de estudiar la derivabilidad de una función en un punto donde ésta no sea continua.

- Otra forma tomemos
- $$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_{0})}{x - x_0}(x - x_0)$$

tomando límite

- Se tiene que:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_{0})}{x - x_0}(x - x_0)$$

por el algebra del límite

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_{0})}{x - x_0} \lim_{x \to x_0}(x - x_0)$$

Por lo tanto se tiene que: f´ (x).0=0

Observaciones:

- El recíproco de este teorema no siempre se cumple, es decir, existen funciones que son continuas en un punto x_0 y no son derivables en dicho punto .
- Considérese por ejemplo la función $|x|$ en $x=0$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & si \quad x < 0 \\ x & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Es $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, luego *f* es continua en *x = 0*.

Sin embargo
La derivada de la función en x=0 no exite ya que

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{|x|-|0|}{x} = 1$$

mientras que

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|-|0|}{x} = -1$$

es decir, las derivadas laterales no coinciden, y la función no es derivable en *x = 0*.

NOTA: Es muy útil el contra recíproco de nuestro teorema

Si no es continua en x_0 no es derivable en dicho punto

$$f(x) = \begin{cases} 2-3x, & x \le 2 \\ x^2-3, & x > 2 \end{cases} \quad \text{¿Es derivable en } x_0 = 2\text{?}$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (2-3x) = -4$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x^2-3) = 1$$

La función no es continua en $x = 2$, pues $\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x)$.

Por tanto, tampoco es derivable en $x = 2$.

ECUACION DE LA RECTA TANGENTE Y EC. DE LA RECTA NORMAL a A UNA CURVA EN UN PUNTO

Sea f una función derivable en un pto. "*a*".

La pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = a$ es $f'(a)$, luego la ecuación de la recta tangente será:

- $y - f(a) = f'(a)\,(x - a)$

Puesto que la perpendicular, de pendiente m', verifica que: $m' \cdot f'(a) = -1$, luego la ecuación de la recta normal a

$y = f(x)$ en $x = a$ será:

- $y - f(a) = [\,{}^{-1}/_{f'(a)}\,]\,(x - a)$

EJEMPLO

Hallar la ecuación de las rectas tangente y normal a la curva de ecuación :

$f(x) = x^2 - 3x + 2$ en el punto de abscisas $x = 4$.

Como $f(4) = 6$ y $f'(4) = 5$ es:

- Recta tangente: $y - 6 = 5 \cdot (x - 4)$ <=>
- **Rta.:** $5x - y - 14 = 0$
- Recta normal: $y - 6 = {}^{-1}/_{5} \cdot (x - 4)$ <=>

Rta.: $x + 5y - 34 = 0$

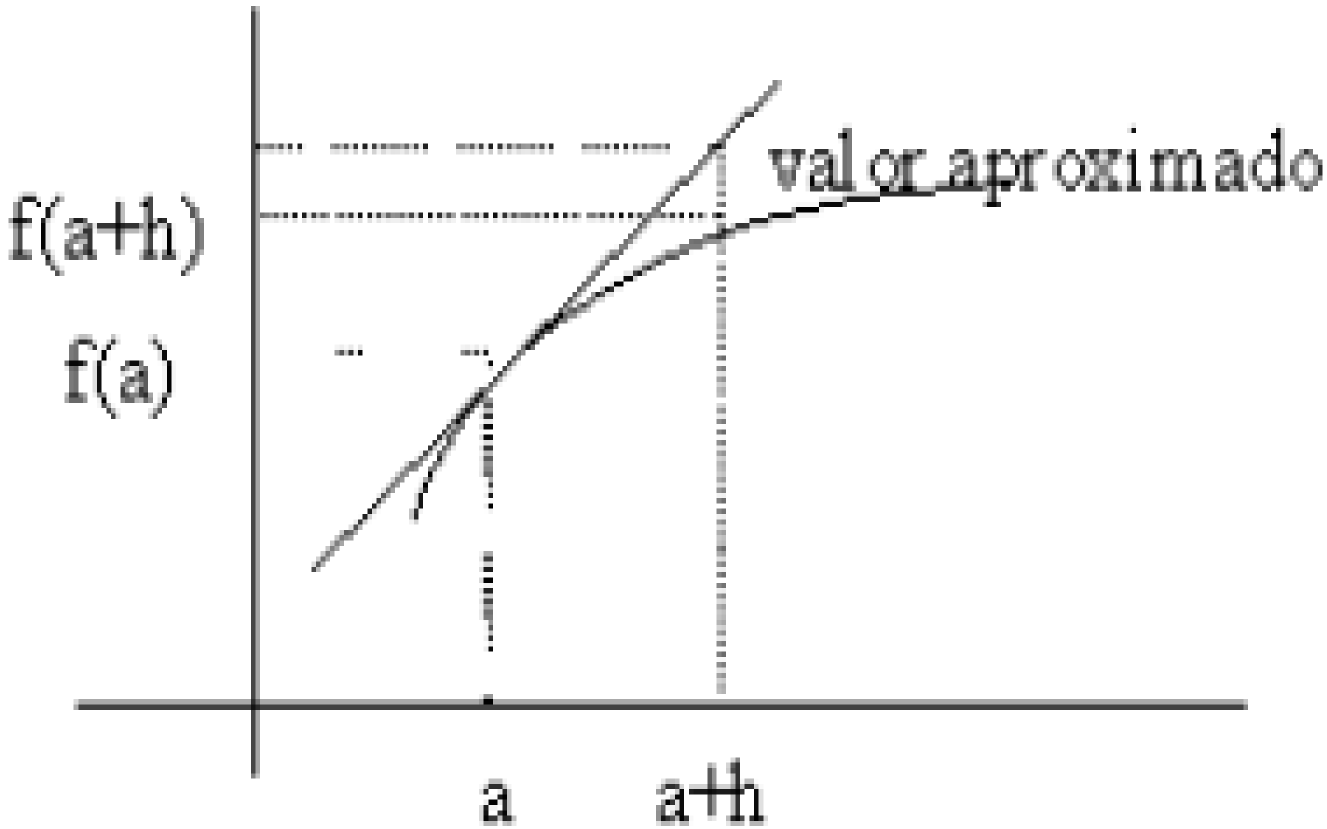
Resolver

- Hallar la recta tangente a la función
- $F(x) = x^2 + 3x - 8$ en el punto (3,-6)

Diferencial de una Función Derivable

Consideramos una función derivable de la que conocemos los valores *f(a)* y *f'(a)*. Supongamos que queremos hallar el

valor de *f* en un punto *a + h*, siendo *f(a+h)* difícil de calcular. Podemos obtener una aproximación de este valor si en lugar de hallarlo por *f* lo calculamos mediante la tangente a la curva en *a*.



valor aproximado
f(a+h)
f(a)
a
a+h

Construimos la recta tangente a $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$:

$$y = f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$$

El valor aproximado será:

$$y = f(a) + f'(a)\cdot(a+h-a) = f(a) + f'(a)\cdot h$$

Es decir:

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)\cdot h \iff f(a+h) - f(a) \approx f'(a)\cdot h$$

Al término $f'(a)\cdot h$ se le llama **diferencial de f en a con incremento h**.

Ejemplo

Queremos calcular $\sqrt{10}$ aproximadamente.

Consideramos la función $f(x)=\sqrt{x}$.

Su derivada es $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Si tomamos la diferencial de esta función para *a* = *9* y *h* = *1* tenemos:

$$f(10)=\sqrt{10}\approx f(9)+f'(9)\cdot(10-9)=3+\frac{1}{6}=3'16666\ldots$$

El valor real es: 3´1622776... con error menor de cinco milésimas

Para cada *x*, donde *f* es derivable, definimos:

$$\begin{aligned} df(x):\ & D' \to R \\ & h \mapsto f'(x)\cdot h \end{aligned}$$

Si calculamos la diferencial para la función identidad:

$$di(x) = d(x) = dx = (x)' \cdot h = 1 \cdot h = h$$

es decir, podemos escribir $h = dx$, y la diferencial queda: $df(x) = f'(x)\,dx$ llamada **diferencial de *f***, y al término ***dx*** se le denomina **diferencial de *x***.

Algebra de las Derivadas

- 1. **La derivada de la función constante es igual a cero**
- Sea una función constante *f(x)* = *k*.
- Su gráfica es, como se sabe, una recta paralela al eje de abscisas. Puesto que para cualquier valor de la abscisa su ordenada correspondiente es, constantemente, igual a *k*, si x_0 es un punto cualquiera del campo de definición de *f(x)*,

$f(x_0 + h) - f(x_0) = k - k = 0$, por lo que

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Luego la derivada de una constante es siempre cero.

❖2. **Derivada de la función lineal**

f(x)= mx+b es m

Sea una función lineal cualquiera $f(x) = mx + b$. Para un punto cualquiera x,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{m(x+h)+b-(mx+b)}{h} = \frac{m\,h}{h} = m, \text{ y}$$

$$\lim_{h \to 0} m = m = f'(x),$$

lo cual significa que la derivada de una recta coincide con la pendiente de ella misma y, en consecuencia, la tangente en un punto a una recta es la propia recta.

3. Derivada de una constante por una función es la constante por la derivada de la función

Si k es una constante y *f(x)* una función, la derivada de la nueva función $k \cdot f(x)$ será:

$$\lim_{h\to 0} \frac{k\cdot f(x+h) - k\cdot f(x)}{h} = \text{(Sacando factor común } k\text{, ya que no depende de } h.\text{)}$$

$$= k\cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k\cdot f'(x)$$

Se ha demostrado que

$$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$$

Así, para derivar una expresión de la forma $k \cdot f(x)$, basta derivar la función *f(x)* y multiplicar después por la constante *k*.

- 4. **La derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas de dichas funciones**

Si f y g son dos funciones derivables en un mismo punto x de un intervalo, la derivada de la función suma en dicho punto se obtiene calculando

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h}=\text{(descomponiendo en suma de dos límites)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x)$$

La derivada de una suma es igual a la suma de las derivadas.

$$[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)$$

5. La derivada de una resta de funciones es la resta de las derivadas de dichas funciones

$$f - g = f + (-g), \text{ por lo que } [f(x) + (-g(x))]' = f'(x) + (-g(x))'$$

Pero $-g(x) = (-1) \cdot g(x)$ y la derivada de una constante por una función es igual al producto de la constante por la derivada de la función:

$$[-g(x)]' = [(-1) \cdot g(x)]' = (-1) \cdot g'(x) = -g'(x)$$

En consecuencia,

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$$

6. **La derivada de un producto de dos funciones es igual al primer factor por la derivada del segundo más el segundo factor por la derivada del primero.**

- Es decir:

$$\boxed{\text{Si } y = f(x)\cdot g(x) \Longrightarrow y' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)}$$

Sean f y g dos funciones definidas y derivables en un mismo punto x.

$$\frac{(f \cdot g)\,(x+h) - (f \cdot g)\,(x)}{h} = \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} = (1)$$

Si se suma y se resta en el numerador $f(x) \cdot g(x+h)$, la fracción anterior no varía,

$$(1) = \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} = (2)$$

Sacando $g(x+h)$ factor común en los dos primeros sumandos, y $f(x)$ en los otros dos,

$$(2) = \frac{g(x+h)\left[f(x+h) - f(x)\right] + f(x)\left[g(x+h) - g(x)\right]}{h} =$$

$$= g(x+h) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Si ahora se toman límites cuando h tiende a cero,

$\lim\limits_{h \to 0} g(x+h) = g(x)$, pues g es continua en x ya que es derivable en x.

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$ por definición de derivada.

$\lim\limits_{h \to 0} f(x) = f(x)$, al no depender $f(x)$ de h.

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$ por definición.

Por tanto, $(f \cdot g)'\ (x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(f \cdot g)\,(x+h) - (f \cdot g)\,(x)}{h} = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$(f \cdot g)'\ (x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

❖7. **La derivada de un cociente de dos funciones es igual a la derivada del numerador por el denominador menos la derivada del denominador por el numerador, divididas por el cuadrado del denominador.**

$$\boxed{\text{Si } y = \frac{f(x)}{g(x)} \Longrightarrow y' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - g'(x)\cdot f(x)}{[g(x)]^2}}$$

› **A partir de la regla del producto**

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

$$g(x) = f(x)h(x)$$
$$g'(x) = f'(x)h(x) + f(x)h'(x)$$

El resto consiste al aplicar las reglas del álgebra para hacer que $f'(x)$ sea el único término del miembro izquierdo de la ecuación y para eliminar $f(x)$ del miembro derecho de la ecuación.

$$f'(x) = \frac{g'(x) - f(x)h'(x)}{h(x)} = \frac{g'(x) - \frac{g(x)}{h(x)} \cdot h'(x)}{h(x)}$$

$$f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{(h(x))^2}$$

- 8. La derivada de $f(x) = x^m$,

Donde m es un numero natural . La derivada de esta función es

$$f'(x) = m\,x^{m-1}$$

❖9 Derivadas de la función seno y coseno

La derivada de la función $f(x) = sen\ x$ es $f'(x) = cos\ x$

La derivada de la función $g(x) = cos\ x$ es $g'(x) = -\ sen\ x$

❖10. **La derivada de la función logaritmo**

$$\text{Si } f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

❖11. La derivada de las funciones exponenciales

a^x; e^x.

$$\text{Si } f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

$$\text{Si } g(x) = e^x \Rightarrow g'(x) = e^x$$