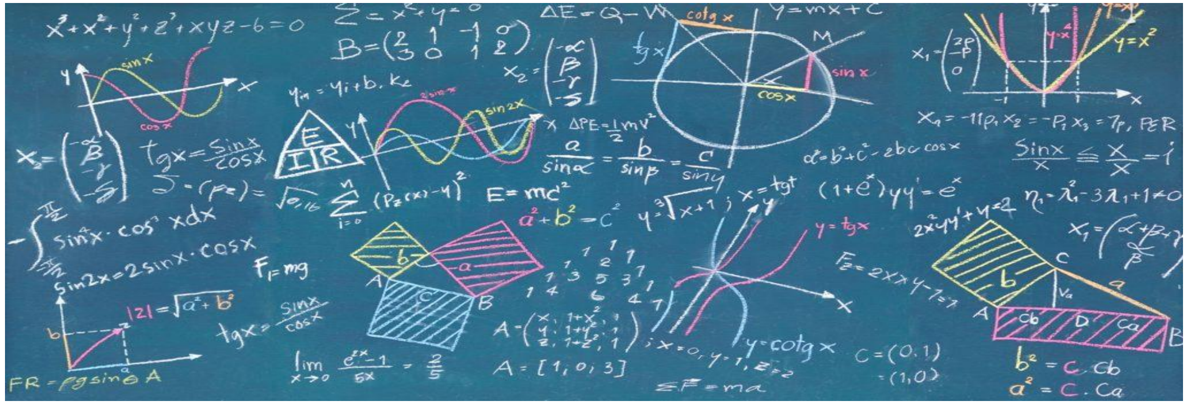


ESTUDIO DE FUNCIONES PARTE 1

Recordamos Definiciones :

❖Sea $f:D \to R$ / $f(x)=y$

✓El punto (c, f(c)) es un máximo absoluto de f si y solo si

$f(c) \geq f(x)$ para todo x perteneciente a D

✓El punto (c, f(c)) es un mínimo absoluto de f si y solo si

$f(c) \leq f(x)$ para todo x perteneciente a D

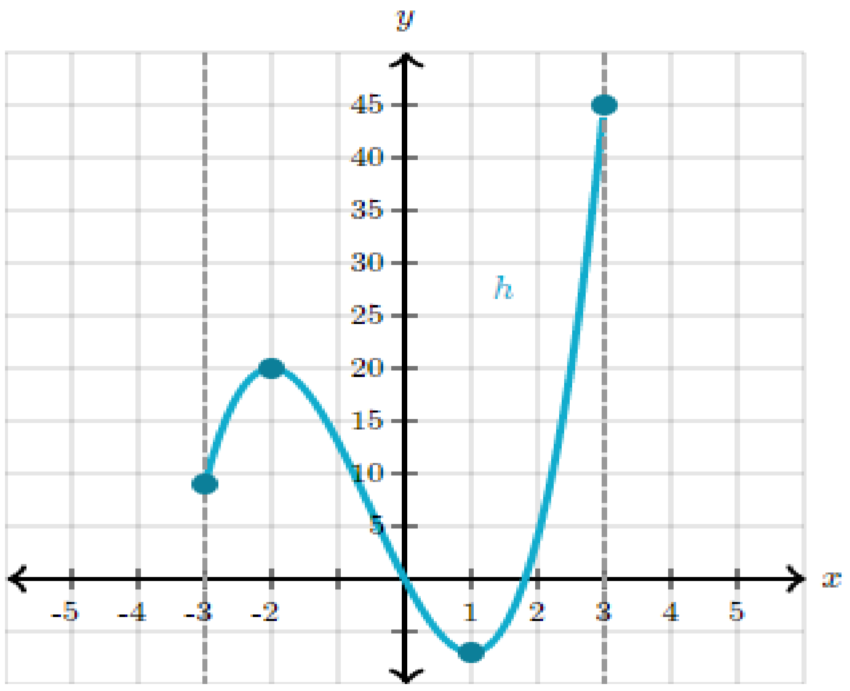
❖Un punto **máximo absoluto** es un punto en el que la función adquiere su valor máximo posible. De forma similar, un punto **mínimo absoluto** es un punto en el que la función adquiere su valor mínimo posible.

Ejemplo: Sea $f(x)= 2x^3+3x^2-12x$ en $[-3,3]$

En este gráfico los puntos (−3,9) (1,-7) (-2,20)(3,45) nos llaman la atención.

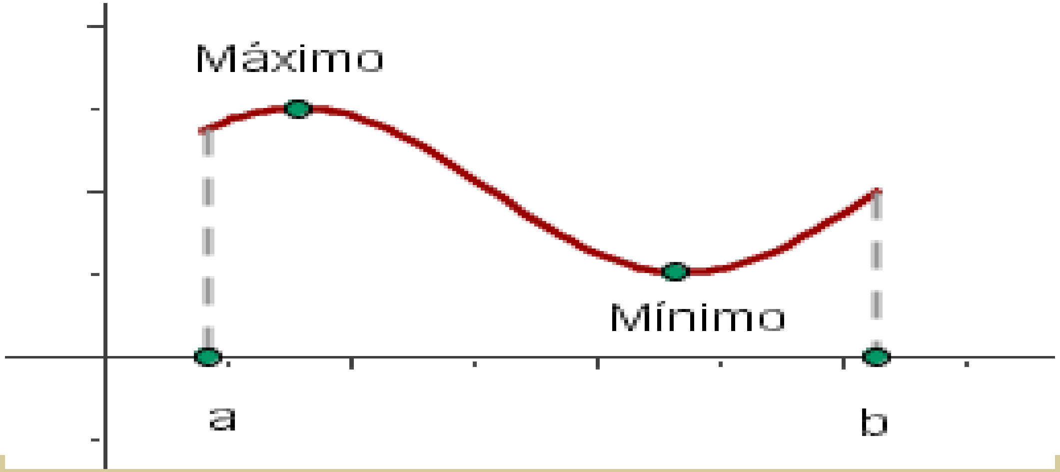
(3,45) y (-2,20) son máximos locales pero solo (3,45) es el máximo absoluto en dicho intervalo

lo mismo pasa con (-3,9) y (1,-7) son mínimos locales pero solo (1,-7) es el mínimo absoluto en dicho intervalo



Teorema de Weierstrass
(o teorema del máximo –mínimo o del valor extremo)

Si una función f(x) está definida y es continua en un intervalo cerrado [a, b], entonces f(x) alcanza al menos un máximo y un mínimo absolutos en el intervalo [a, b].



En la figura 7 se ilustra el teorema del valor extremo. Observe que un valor extremo se puede tomar más de una vez. Aun cuando el teorema del valor extremo es muy aceptable a nivel intuitivo, su demostración es difícil, por consiguiente, se omite.

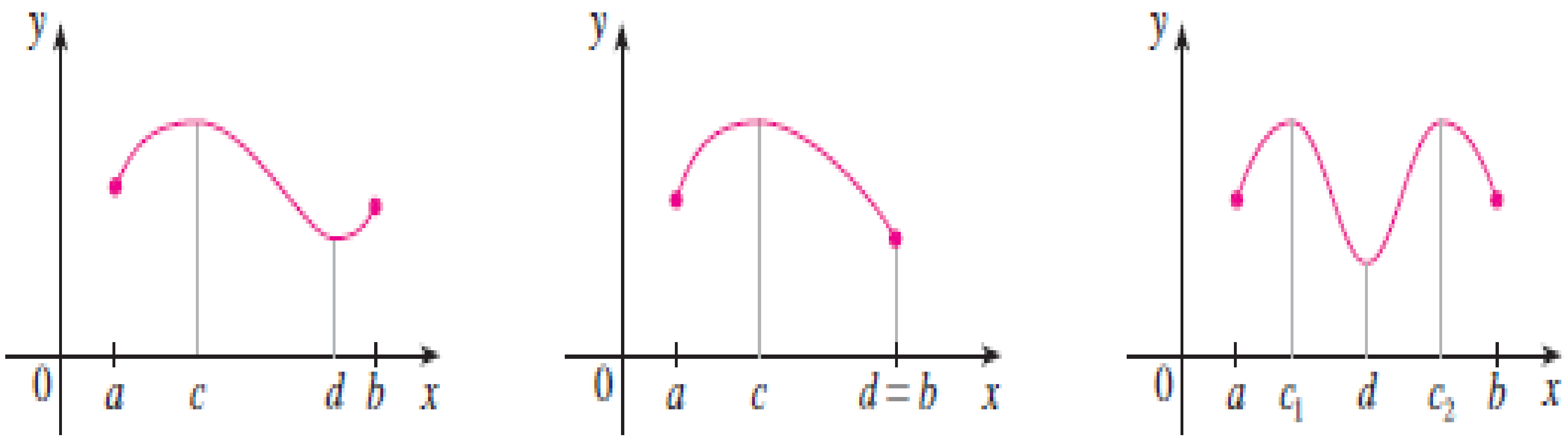
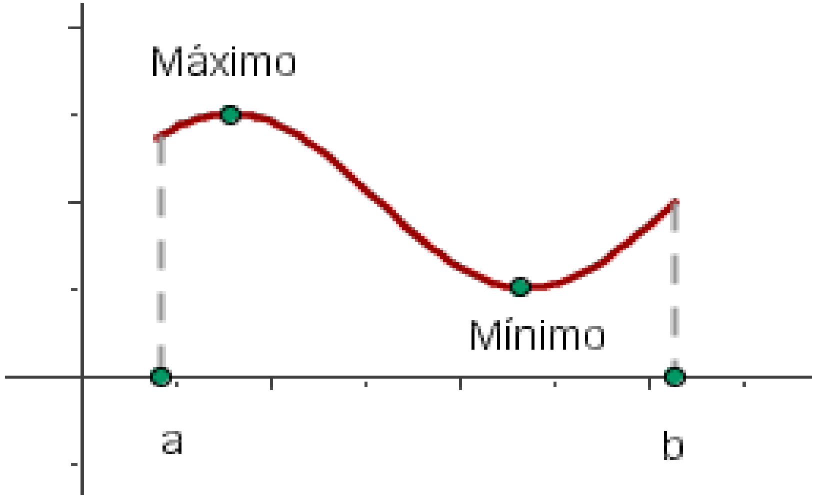


FIGURA 7

Es decir, que hay al menos dos puntos x_1, x_2 pertenecientes a [a, b] donde f alcanza valores extremos absolutos:

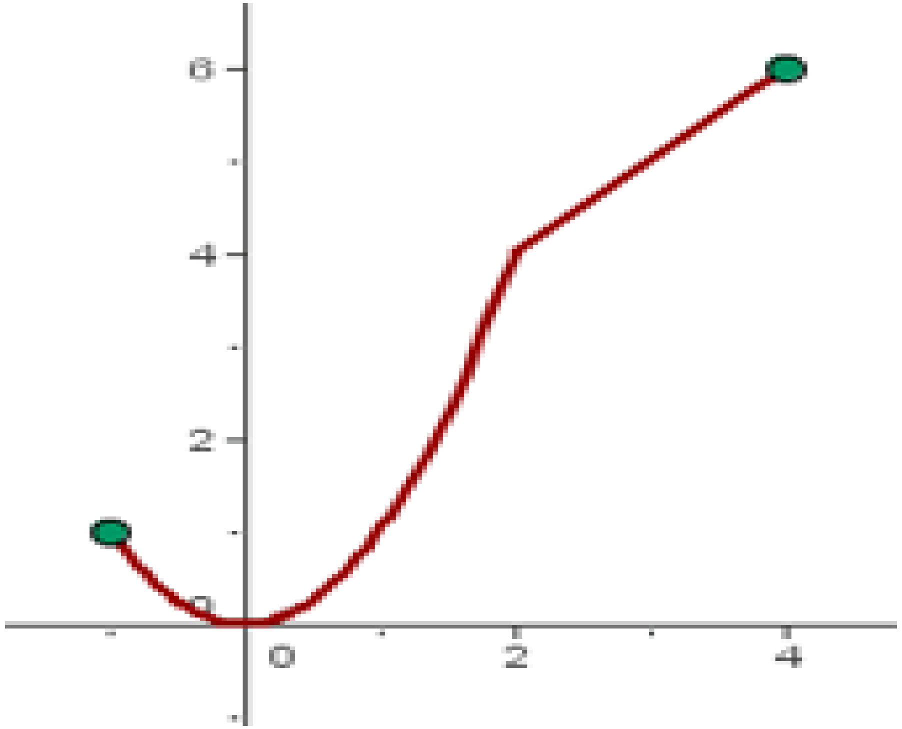
$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \qquad Si \ \ x \in [a,b]$$



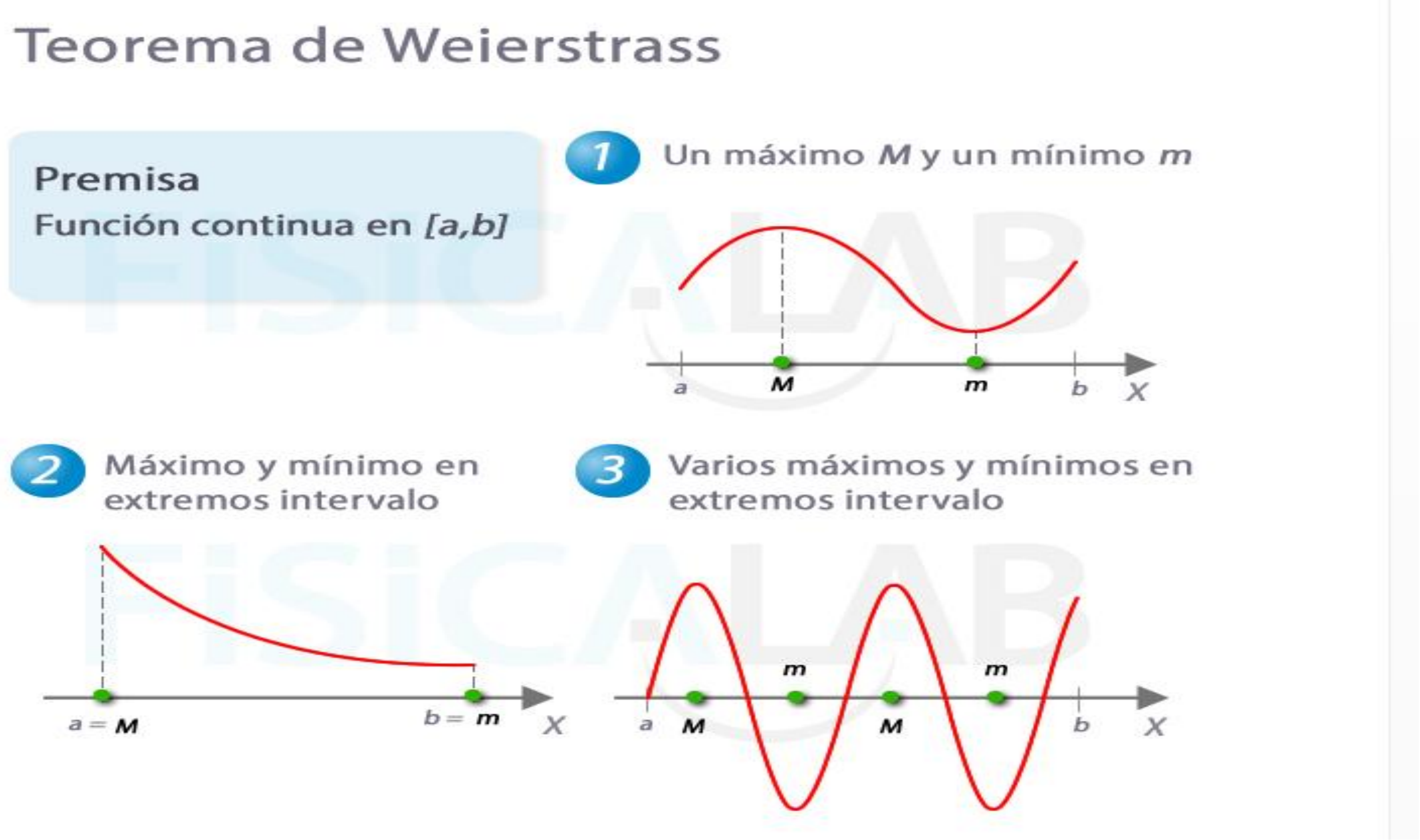
NOTA: El **teorema de Weierstrass** no nos indica donde se encuentra el máximo y el mínimo, sólo afirma que existen

Ejemplo

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & si \;\; x<2 \\ x+2 & si \;\; x\geq 2 \end{cases}$$



$$0\leq f(x)\leq 6 \qquad Si \;\; x\in[-1,4]$$



Cuando una función es continua en un intervalo, siempre alcanza, al menos, un máximo y un mínimo absolutos en él. En la gráfica tenemos casos diferentes de funciones continuas para ejemplificar el teorema.

Consecuencia del teorema : Dado que es continua en *[a, b]*, la función tomará todos los valores comprendidos entre el máximo absoluto y el mínimo absoluto. El **teorema de Weierstrass** permite asegurar, además, que la función *f* está acotada y por tanto existen un supremo (la menor de las cotas superiores) y un ínfimo (la mayor de las cotas inferiores).

❖ Formalmente:

Teorema **Weierstrass** de Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces el **teorema** establece que para cualquier $x \in (a, b)$ existen dos valores reales

$c \in (a, b)$ y $d \in (a, b)$ tales que $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$.

Decir si se cumple el teorema de Weierstrass en los siguientes ejemplos y encontrar el máximo absoluto y el mínimo absoluto en el último caso:

a) $f(x) = \sqrt{x}$ definida en el intervalo $[-2, 3.4]$

b) $f(x) = \dfrac{2^{\sqrt{x}-\ln x}}{4x^2+5+e^x}$ definida en el intervalo $[1, 4.666666\ldots]$

c) $f(x) = 3x^3 + x$ definida en el intervalo $(2, 4)$

d) $f(x) = x^2 + 1$ definida en el intervalo $[0, 1]$

Desarrollo:
a) Tenemos una función continua definida en un intervalo cerrado.

b) Tenemos una función continua ya que para los puntos que esta definida no hay ninguna división por cero y no evaluamos el logaritmo en puntos menores o iguales a zero y además está definida en un intervalo cerrado.

c) El intervalo no es cerrado.

d) Tenemos una función continua definida en un intervalo cerrado. Además, la función es estrictamente creciente en su intervalo de definición por lo que encontraremos los máximos y mínimos absolutos en los extremos.

Observamos pues que: $f(0) = 1$ y $f(1) = 2$, por lo que en $x = 0$ tenemos mínimo abosluto y en $x = 1$ tenemos máximo absoluto.

Solución:

a) Se cumple el teorema.

b) Se cumple el teorema.

c) No se cumple el teorema.

d) Se cumple el teorema y tenemos mínimo absoluto en $x = 0$ y máximo absoluto en $x = 1$.

Ejemplo

Demostrar que la siguiente función alcanza máximo y mínimo absolutos en el intervalo [-1, 1] y calcularlos.

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

- Definimos el dominio de f . El denominador de la función no se anula para ningún valor de x puesto que $1 + x^2 \geq 1$ .Por lo tanto el Df=R
- La función es continua en R .Por lo tanto, la función es continua en el intervalo [-1, 1] .
- Aplicando el teorema de Wierstrass la función alcanza máximo y mínimo absolutos en ese intervalo.

Para calcular los máximos y los mínimos de la función estudiamos entre que valores oscila la función para el intervalo dado.

$$-1 \leq x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq x^2 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \leq 1+x^2 \leq 2$$

$$\Rightarrow \quad 1 \geq \frac{1}{1+x^2} \geq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$$

Es decir, el valor mínimo de la función es 1/2 y el valor máximo 1 .

Para calcular en que puntos se alcanzan el mínimo y el máximo, resolvemos las siguiente igualdades:

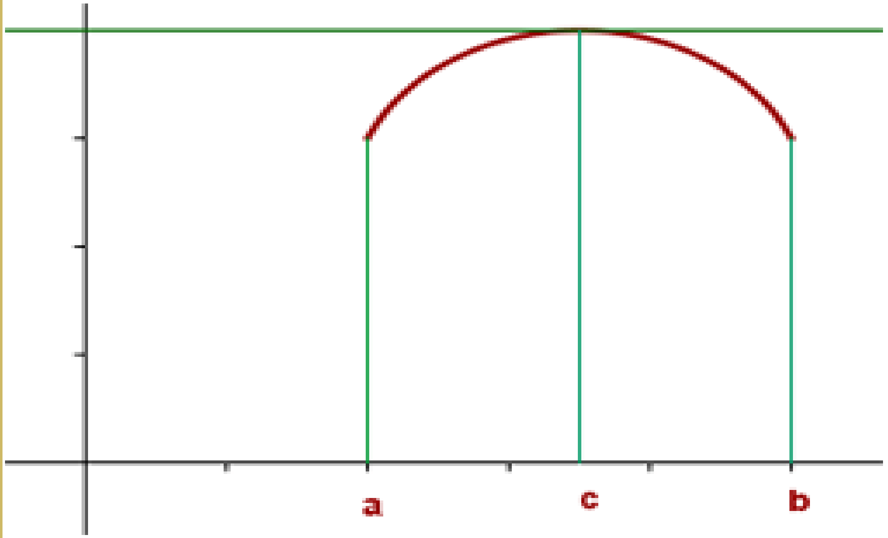
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad 2 = 1+x^2 \quad \Rightarrow \quad 1 = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{1} = \pm 1$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = 1+x^2 \quad \Rightarrow \quad 0 = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Por lo tanto la función alcanza un máximo absoluto en el punto (0, 1) y el mínimo absoluto lo alcanza en los puntos (-1, 1/2) y (1, 1/2) .

<u>Teorema de Rolle</u>: Si una función es continua en un intervalo cerrado y derivable en el abierto y toma valores iguales en sus extremos, existe un punto donde la derivada primera se anula.

La **interpretación gráfica del teorema de Rolle** nos dice que hay un punto en el que la tangente es paralela al eje de abscisas.



Si una función es:

Continua en [a, b]

Derivable en (a, b)

Y si **f(a) = f(b)**

❖Entonces, existe algún punto $c \in (a, b)$ en el que **f'(c) = 0**.

Ejemplos

- 1.Estudiar si se verifica el **teorema de Rolle** en el intervalo [0, 3] de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ -x+3 & si\ 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

- ✓En primer lugar comprobamos que la función es continua en x = 1.

$$f(1) = 2 \qquad \lim_{x \to 1^-} 2x = 2 \qquad \lim_{x \to 1^+} (-x+3) = 2$$

- ✓En segundo lugar comprobamos si la función es derivable en x = 1.

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & si\ 0 < x \leq 1 \\ -1 & si\ 1 < x < 3 \end{cases} \qquad f'(1^-) \neq f'(3^+)$$

Como las derivadas laterales no coinciden, la función no es derivable en el intervalo (0, 3) y por tanto no se cumple el teorema de Rolle.

- 2.¿Es aplicable el teorema de Rolle a la función $f(x) = \ln(5 - x^2)$ en el intervalo $[-2, 2]$?

- ✓ En primer lugar calculamos el dominio de la función.

$$5 - x^2 > 0 \qquad D = \left(-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right)$$

La función es continua en el intervalo $[-2, 2]$ y derivable en $(-2, 2)$, porque los intervalos están contenidos en

$$\left(-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right)$$

Además se cumple que $f(-2) = f(2)$, por tanto es aplicable el teorema de Rolle.

$$\frac{-2c}{5 - c^2} = 0 \qquad c = 0$$

- 3.Comprobar que la ecuación $x^7 + 3x + 3 = 0$ tiene una única solución real.

- ✓La función $f(x) = x^7 + 3x + 3$ es continua y derivable en $\mathcal{R}$·
  $f(-1) = -1$ $f(0) = 3$
- ✓Por tanto la ecuación tiene al menos una solución en el intervalo $(-1, 0)$.
- ✓$f'(x) = 7x^6 + 3$
- ✓Como la derivada no se anula en ningún valor está en contradicción con el **teorema de Rolle**, por tanto sólo tiene una raíz real.

4. ¿Es aplicable el **teorema de Rolle** a la función f(x) = |x - 1| en el intervalo [0, 2]?

$$f(x)=\begin{cases} -x+1 & Si\ x \in [0,1) \\ x-1 & Si\ x \in [1,2] \end{cases}$$

La función es continua en [0, 2].

No es aplicable el **teorema de Rolle** porque la solución no es derivable en el punto x = 1.

$$f'(x)=\begin{cases} -1 & Si\ x \in (0,1) \\ 1 & Si\ x \in [1,2) \end{cases} \quad f'(1^-) = -1 \qquad f'(1^+) = 1$$

5. Estudiar si la función $f(x) = x - x^3$ satisface las condiciones del **teorema de Rolle** en los intervalos [−1, 0] y [0, 1]. en caso afirmativo determinar los valores de c.

f(x) es una función continua en los intervalos [−1, 0] y [0, 1] y derivable en los intervalos abiertos (−1, 0) y (0, 1) por ser una función polinómica.

Además se cumple que:

$f(-1) = f(0) = f(1) = 0$

Por tanto es aplicable el **teorema de Rolle**.

$f'(c) = 0 \qquad 1 - 3c^2 = 0 \qquad c = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

$-\frac{\sqrt{3}}{3} \in (-1, 0) \qquad \frac{\sqrt{3}}{3} \in (0, 1)$

6.¿Satisface la función $f(x) = 1 - x$ las condiciones del **teorema de Rolle** en el intervalo $[-1, 1]$?

La función es continua en el intervalo $[-1, 1]$ y derivable en $(-1, 1)$ por ser una función polinómica.

No cumple **teorema de Rolle** porque $f(-1) \neq f(1)$.

7. Probar que la ecuación $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = 0$ tiene una única solución.

Vamos a demostrarlo por reducción al absurdo.

Si la función tuviera dos raíces distintas x_1 y x_2, siendo $x_1 < x_2$, tendríamos que:

$f(x_1) = f(x_2) = 0$

Y como la función es continua y derivable por ser una función polinómica, podemos aplica el **teorema del Rolle**, que diría que existe un $c \in (x_1, x_2)$ tal que $f'(c) = 0$.

$f'(x) = 2 + 6x + 12x^2$ $f'(x) = 2(1 + 3x + 6x^2)$.

Pero $f'(x) \neq 0$, no admite soluciones reales porque el discriminante es negativo:

$\Delta = 9 - 24 < 0$.

Como la derivada no se anula en ningún valor está en contradicción con el **teorema de Rolle**, por lo que la hipótesis de que existen dos raíces es falsa.

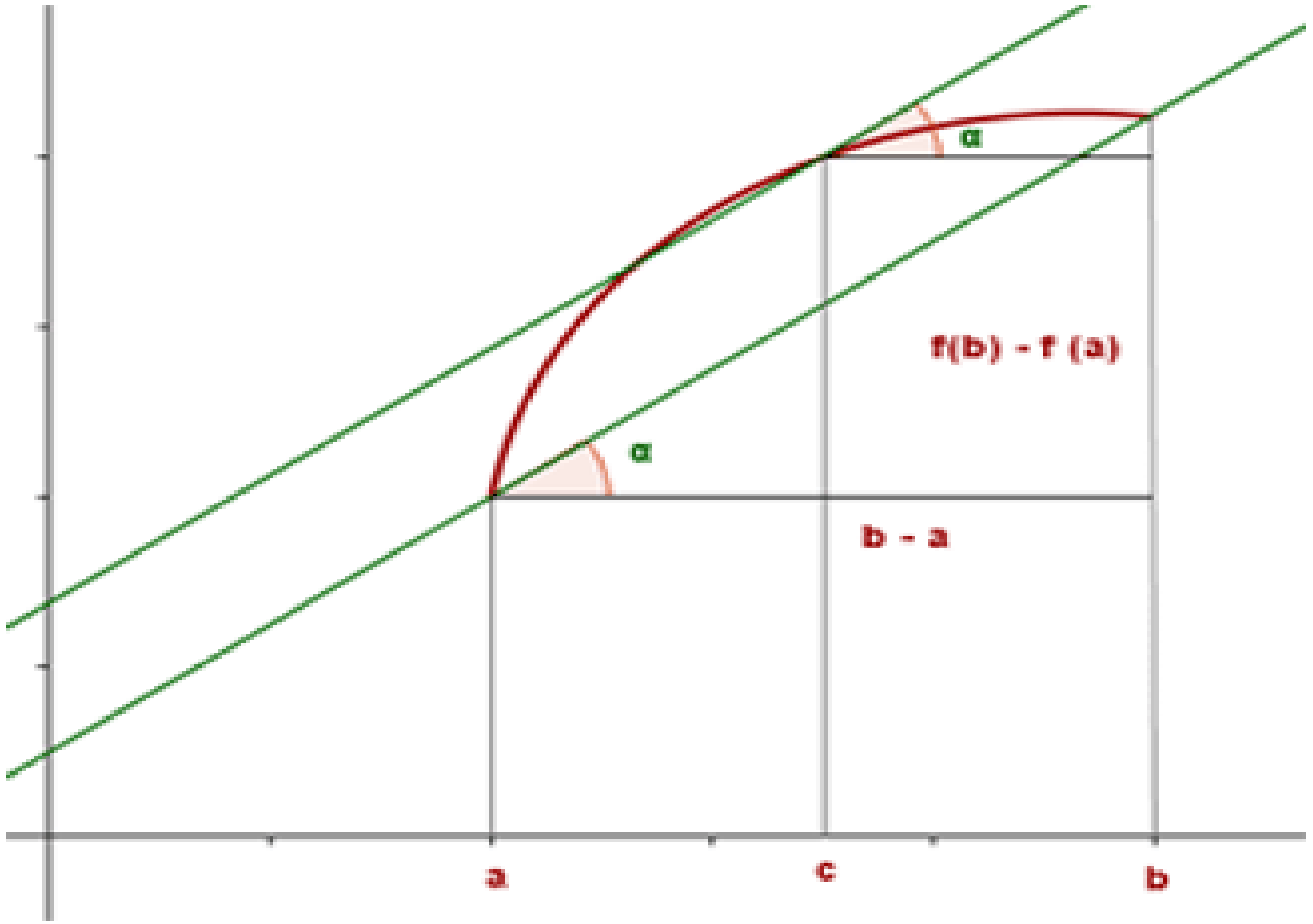
Teorema del Valor Medio o Teorema de Lagrange

- Si una función es:
  - ✓**Continua** en [a, b]
  - ✓**Derivable en (a, b)**

Entonces, existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



- La interpretación geométrica del **teorema de Lagrange** nos dice que hay un punto en el que la tangente es paralela a la secante.

- El teorema de Rolle es un caso particular del **teorema de Lagrange**, en el que **f(a) = f(b)**.

Formalmente:

❖ El **teorema del valor medio de Lagrange**, también denominado **teorema de Bonnet-Lagrange**, **teorema de los incrementos finitos**, **teoría del punto medio**, o simplemente **teorema del valor medio** establece que si:

Una función es continua en un intervalo *[a,b]*, y derivable en su interior *(a, b)*, entonces existe al menos un valor *cϵ(a, b)* tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Observación

- $f'(c)$ es la pendiente de la recta tangente a la función en el punto c,

- y f(b)–f(a)/b–a es la pendiente de la recta secante a la función, que une a y b.

✓Nuestras Hipótesis de partida son que la función *f(x)*...

...es continua en *[a, b]* y...

✓...derivable en *(a,b)*

› Nuestra Tesis

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demostración

- Para la demostración de este teorema vamos a recurrir a dos funciones auxiliares:

1. la función *s(x)*, recta que secante que une *a* y *b*. De ella sabemos que tiene pendiente

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

y que pasa por el punto *(a, f(a))*.

Si escribimos la recta en su forma

$s(x)-f(a)=m(x-a)$

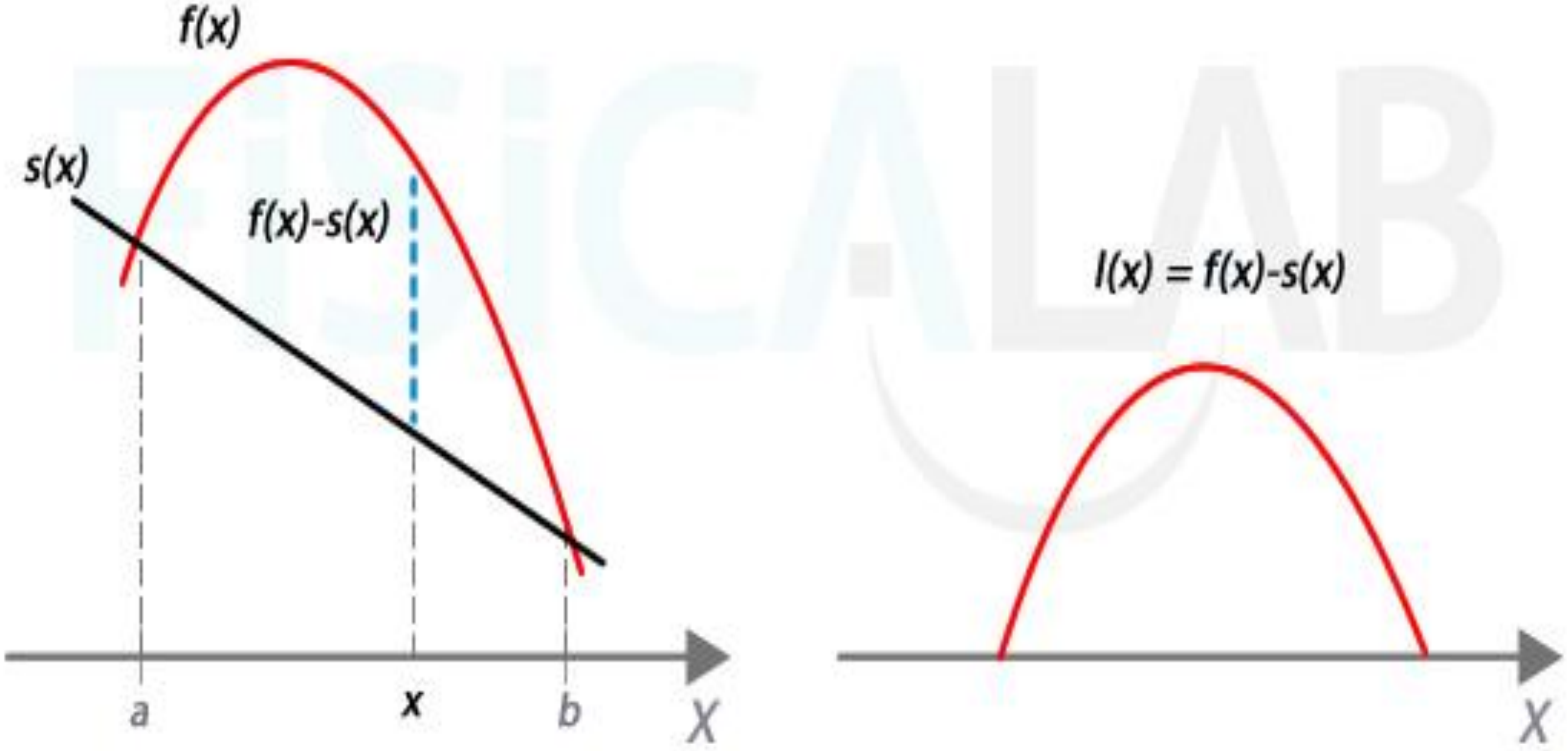
satisfacemos las condiciones anteriores.

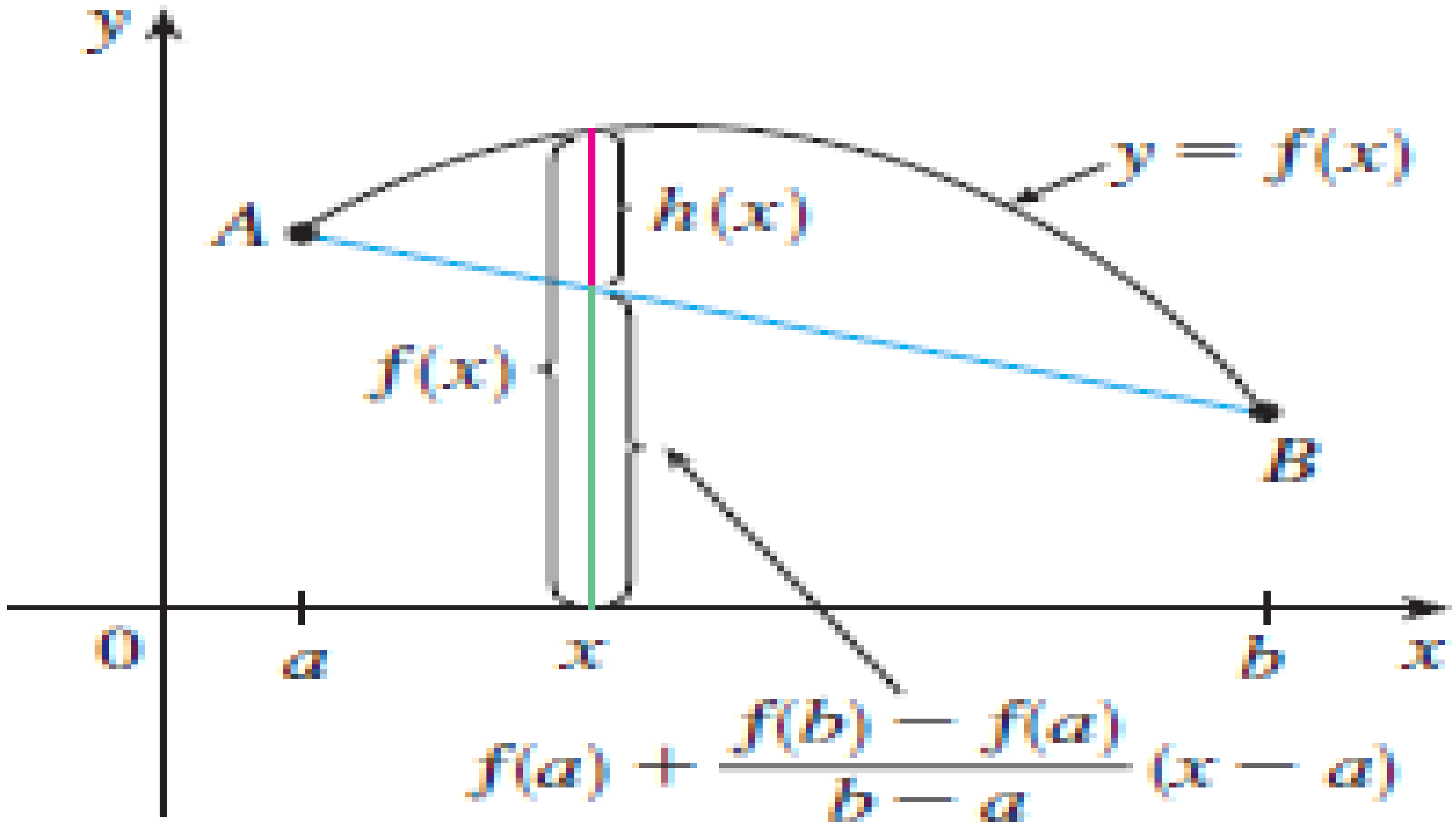
Podemos decir entonces que la función auxiliar buscada es:

$$s(x)= [f(b)–f(a)/b–a](x–a)+f(a)$$

2. De otro lado, la función $l(x)=f(x)-s(x)$, es decir, la función que, para cada valor de x devuelve la distancia que hay entre la función $f(x)$ y la recta secante $s(x)$ en el intervalo (tramo) considerado

Funciones auxiliares





y
$y = f(x)$
A
$h(x)$
$f(x)$
B
0
a
x
b
x
$f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$

La expresión de *l(x)=f(x)-s(x)*, sustituyendo en ella la expresión de *s(x)* es:

✓ l(x) = f(x)–[f(b)–f(a)]/b–a](x–a)-f(a)

❖Dicha función satisface las hipótesis del teorema de Rolle.

Observar:

❖Es continua en *[a, b]* por ser resta de funciones continuas (*f(x)* y *s(x)*)

❖Es derivable en *(a, b)*, al serlo l'(x)=f'(x)–[f(b)–f(a)]/b–a (la función existe para cualquier *x*ϵ*(a, b)*).

El valor de la función en los extremos del intervalo es el mismo:

$$\begin{cases} l(a)= f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)-f(a)=0 \\ l(b)= f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)-f(a)=0 \end{cases}$$

Como satisface el teorema de Rolle, podemos decir que existe un $c \in (a, b)$ tal que $l'(c)=0$,

$$l'(c)=0=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow \boxed{f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

...que es justo lo que queríamos demostrar.

Ejemplos

1. ¿Se puede aplicar el **teorema de Lagrange** a

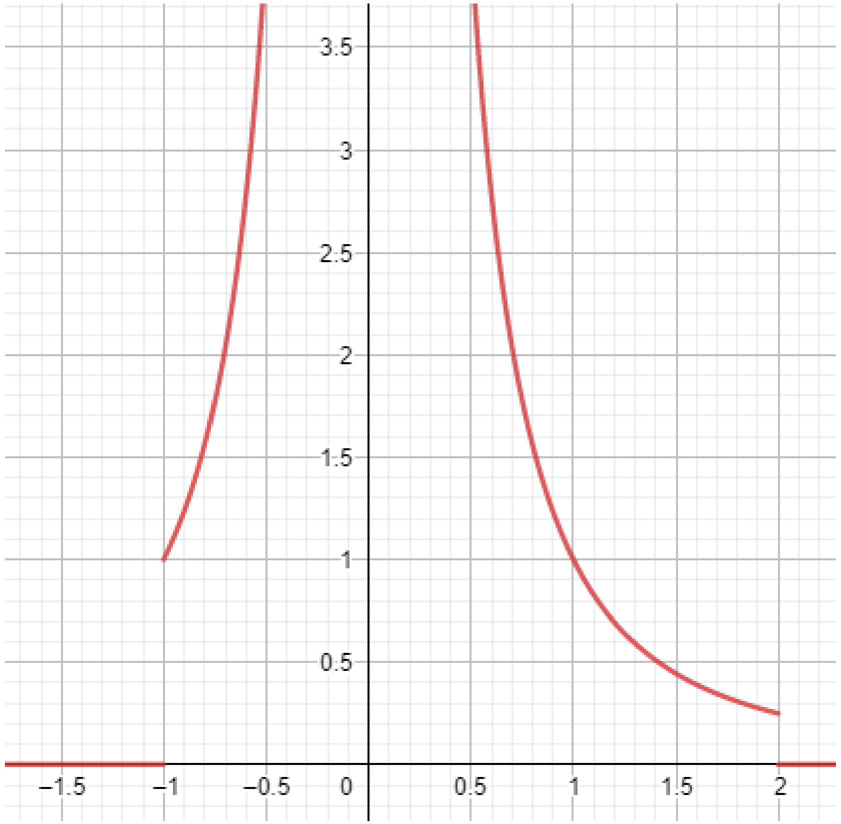
   $f(x) = x^3$ en $[-1, 2]$?

❖ $f(x)$ es continua en $[-1, 2]$ y derivable en $(-1, 2)$ por tanto se puede aplicar el **teorema del valor medio**:

$$\frac{8-(-1)}{2-(-1)} = f'(c) \qquad f'(c) = 3 \qquad 3c^2 = 3$$

$$c = 1 \in (-1, 2) \qquad c = -1 \notin (-1, 2)$$

2. ¿Se puede aplicar el **teorema de Lagrange** a $f(x) = 1/\ x^2$ en $[0, 2]$?



La función no es continua en $[-1, 2]$ ya que no definida en $x = 0$.

V EJEMPLO 3 Para ilustrar el teorema del valor medio con una función específica, consideremos $f(x) = x^3 - x$, $a = 0$, $b = 2$. Puesto que f es una función polinomial, es continua y derivable para toda x, así que es ciertamente continua sobre $[0, 2]$ y derivable sobre $(0, 2)$. Por tanto, por el teorema del valor medio, existe un número $x = c$ en $(0, 2)$ tal que

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

Ahora, $f(2) = 6$, $f(0) = 0$ y $f'(x) = 3x^2 - 1$, así que la ecuación resulta

$$6 = (3c^2 - 1)2 = 6c^2 - 2$$

que da $c^2 = \frac{4}{3}$, esto es, $c = \pm 2/\sqrt{3}$. Pero $x = c$ debe estar en $(0, 2)$, así que $c = 2/\sqrt{3}$. La figura 6 ilustra este cálculo: la recta tangente en este valor de $x = c$ es paralela a la recta secante OB.

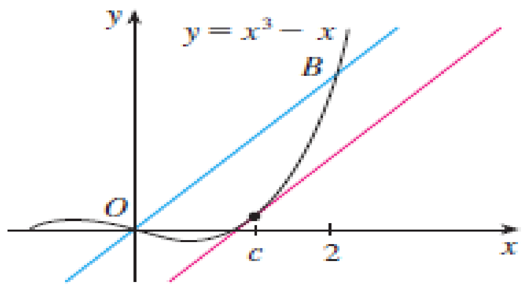


FIGURA 6

4.En el segmento de la parábola comprendido entre los puntos A = (1, 1) y B = (3, 0) hallar un punto cuya tangente sea paralela la cuerda.

Los puntos A = (1, 1) y B = (3, 0) pertenecen a la parábola de ecuación $y = x^2 + bx + c$.

Los puntos A = (1, 1) y B = (3, 0) pertenecen a la parábola de ecuación $y = x^2 + bx + c$.

$$\begin{cases} 1 = 1 + b + c \\ 0 = 9 + 3b + c \end{cases} \qquad b = -\frac{9}{2} \qquad c = \frac{9}{2} \quad y = x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{9}{2}$$

Por ser la función polinómica se puede aplicar el teorema del valor medio en el intervalo [1, 3].

$$f'(c) = 2c - \frac{9}{2} \quad \frac{9 - \frac{27}{2} + \frac{9}{2} - 1 + \frac{9}{2} - \frac{9}{2}}{2} = 2c - \frac{9}{2}$$

$$-\frac{1}{2} = 2c - \frac{9}{2} \qquad c = 2 \qquad f(c) = 4 - 9 + \frac{9}{2} = -\frac{1}{2} \quad \left(1, -\frac{1}{2}\right)$$

5.Determinar a y b para que la función

$$f(x)=\begin{cases} ax-3 & Si\ x<4 \\ -x^2+10x-b & Si\ x\geq 4 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del **teorema de Lagrange** en el intervalo [2, 6].

En primer lugar se debe cumplir que la función sea continua en [2, 6].

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x)$$

$$4a-3=-16+40-b \qquad a+b=27$$

En segundo lugar se debe cumplir que la función sea derivable en (2, 6).

$$f'(4^-)=f'(4^+) \qquad a=-2\cdot 4+10 \qquad a=2 \qquad b=19$$

Teorema de Cauchy o del valor medio generalizado

El **teorema del valor medio de Cauchy** es una generalización del teorema del valor medio de Lagrange, de ahí que se le llame **teorema del valor medio generalizado**, y establece que:

- ❖ Sean dos funciones contínuas en un intervalo *[a,b]*...
- ❖ Que son derivables en *(a,b)*, es decir, no presentan puntos angulosos...

Entonces podemos afirmar que existe un valor $c \in (a, b)$ que verifica que:

$$(f(b)-f(a))\cdot g'(c)=(g(b)-g(a))\cdot f'(c)$$

En el caso de que $g(b)\neq g(a)$ y $g'(c)\neq 0$ podemos escribir:

$$\boxed{\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}}$$

Es decir, el cociente de las derivadas en el algún punto intermedio *c* es igual al cociente de las diferencias en l

extremos del intervalo *(a, b)* considerado.

Nota: Cuando g(x)=x el teorema de Cauchy se convierte en el teorema de Lagrange

Demostración

Partiremos de una función auxiliar *h(x)* en la que podremos aplicar el teorema de Rolle:

$$h(x)= g(x)\cdot(f(b)-f(a))-f(x)\cdot(g(b)-g(a))$$

Observa que dicha función tiene igual valor en *x=a* y en *x=b*:

$$h(a)= h(b)= g(a)\cdot f(b)-f(a)\cdot g(b)$$

Además, es continua en *[a, b]* y derivable en *(a, b)*, por ser suma/resta de funciones continuas/derivables, con lo que por el teorema de Rolle podemos afirmar que existirá un *c* en dicho intervalo en el que *h'(c)=0*:

$$h'(c)= g'(c)\cdot(f(b)-f(a))-f'(c)\cdot(g(b)-g(a))= 0$$

O, pasando todo al mismo miembro...

$$g'(c)\cdot(f(b)-f(a))= f'(c)\cdot(g(b)-g(a))$$

...que es justo lo que queríamos demostrar.

Ejemplos

1. Analizar si el teorema de Cauchy es aplicable en el intervalo [1, 4] a las funciones:

$f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$.

En caso afirmativo, aplicarlo.

π

✓Las funciones f(x) y g(x) son continuas y derivables en $\mathcal{R}$ por ser polinómincas, luego, en particular, son continuas en [1, 4] y derivables en (1, 4).

✓Además se cumple que g(1) ≠ g(4).

Por lo tanto se verifica el teorema de Cauchy:

$$\frac{f(4)-f(1)}{g(4)-g(1)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad \frac{11-2}{27-9}=\frac{2c-2}{3c^2-14c+20}$$

$$3c^2-14c+20=4c-4 \qquad 3c^2-18c+24=0 \qquad c^2-6c+8=0$$

$$c=2\in(1,4) \qquad c=4\notin(1,4)$$

$$g'(c)\neq 0 \qquad 3\cdot 2^2-14\cdot 2+20\neq 0$$

2. Analizar si el el teorema de Cauchy es aplicable a las funciones $f(x) = \text{sen } x$ y $g(x) = \cos x$ en el intervalo $[0, \pi/2]$.

Las funciones $f(x) = \text{sen } x$ y $g(x) = \cos x$ son continuas y derivables en toda la recta real.

Y en particular son continuas en el intervalo $[0, \pi/2]$ y derivables en $(0, \pi/2)$.

Por lo tanto podemos aplicar el teorema de Cauchy:

$$c = \frac{\pi}{4} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{sen\left(\frac{\pi}{2}\right) - sen\,0}{cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - cos\,0} = \frac{cos\,c}{-sen\,c}$$

$$\frac{1-0}{0-1} = -\frac{1}{tg\,c}$$

$$tg\,c = 1$$

g' (c) ≠ 0 −sen(π/4) ≠ 0.

Repasando:

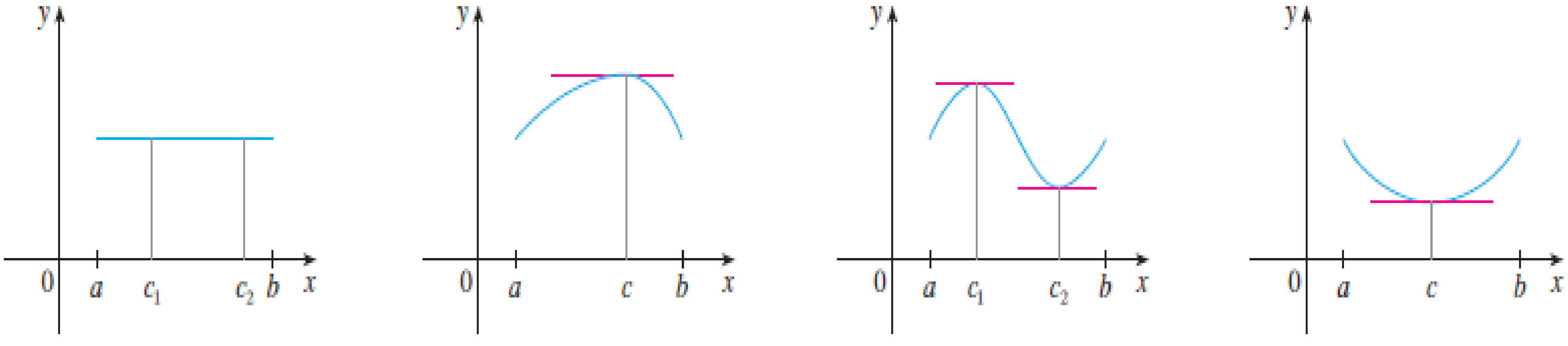
1 Definición Sea c un número en el dominio D de una función f. Entonces $f(c)$ es el

- valor máximo absoluto de f sobre D si $f(c) \geq f(x)$ para toda x en D.
- valor mínimo absoluto de f sobre D si $f(c) \leq f(x)$ para toda x en D.

Teorema de Rolle Si f es una función que satisface las siguientes tres hipótesis:

1. f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$
2. f es derivable sobre el intervalo abierto (a, b)
3. $f(a) = f(b)$

entonces hay un número c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$.



a) b) c) d)

Teorema de Weierstrass o del valor extremo

3 Teorema del valor extremo Si f es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza un valor máximo absoluto $f(c)$ y un valor mínimo absoluto $f(d)$ en algunos números c y d en $[a, b]$.

En la figura 7 se ilustra el teorema del valor extremo. Observe que un valor extremo se puede tomar más de una vez. Aun cuando el teorema del valor extremo es muy aceptable a nivel intuitivo, su demostración es difícil, por consiguiente, se omite.

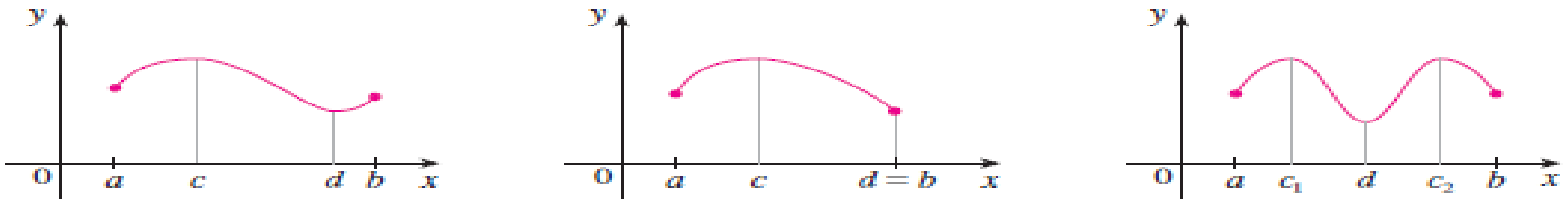


FIGURA 7

π

Teorema del valor medio Si f es una función que satisface las siguientes hipótesis

1. f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$
2. f es derivable sobre el intervalo abierto (a, b)

entonces existe un número $x = c$ en (a, b) tal que

$$\boxed{1} \qquad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

o, equivalentemente,

$$\boxed{2} \qquad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$