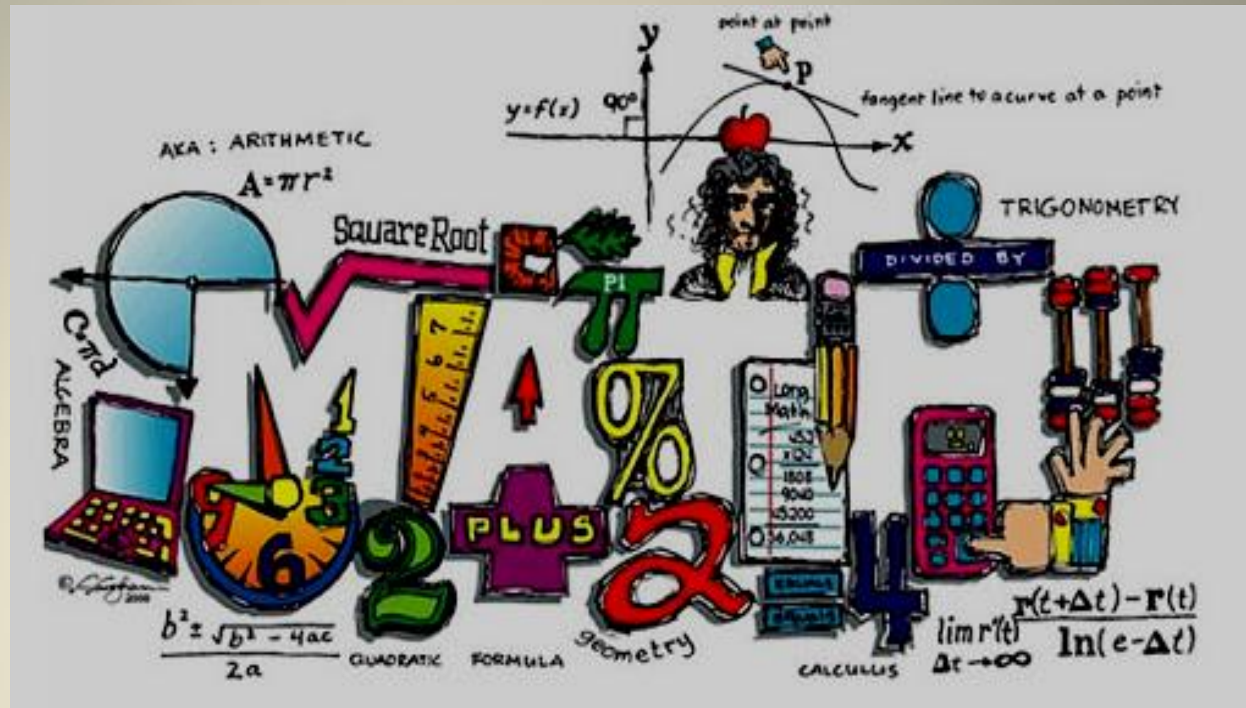


LÍMITE PARTE 3

Indeterminaciones

Las indeterminaciones son las 7 siguientes expresiones:

$$\frac{\infty}{\infty} \quad \frac{0}{0} \quad 1^{\infty} \quad \infty^{0}$$

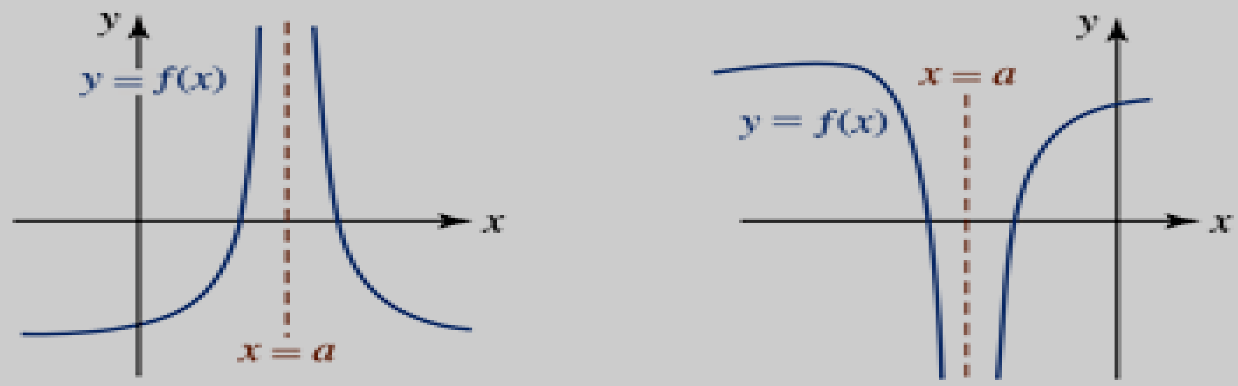
$$0 \cdot \infty \quad \infty - \infty \quad 0^{0}$$

Para las demás expresiones que involucran infinito o partido cero, existen reglas como las siguientes:

$$\frac{0}{\infty} = 0 \quad \infty \cdot \infty = \infty$$

LÍMITES de INFINITO

- Son aquellos cuando x tiende a un número “a” y los valores de la función crecen o decrecen indefinidamente .



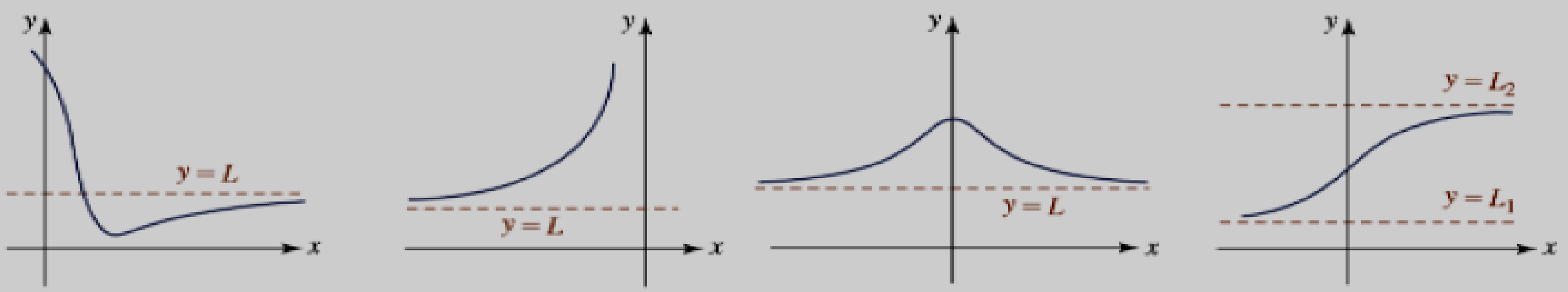
a) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ b) $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

FIGURA 2.5.1 Dos tipos de límites infinitos

LÍMITES AL INFINITO

Si una función *f* tiende a un valor constante *L* cuando la variable independiente *x* crece indefinidamente o cuando *x* decrece también indefinidamente.

$f(x) \to L$ cuando $x \to -\infty$ y $f(x) \to L$ cuando $x \to \infty$.



a) $f(x) \to L$ cuando $x \to \infty$ *b)* $f(x) \to L$ cuando $x \to -\infty$ *c)* $f(x) \to L$ cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to L$ cuando $x \to \infty$ *d)* $f(x) \to L_1$ cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to L_2$ cuando $x \to \infty$

FIGURA 2.5.6 $y = L$ es una asíntota horizontal en *a)*, *b)* y *c)*; $y = L_1$ y $y = L_2$ son asíntotas horizontales en *d)* solo se está demostrando de manera simbólica el comportamiento de una función.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty,$$

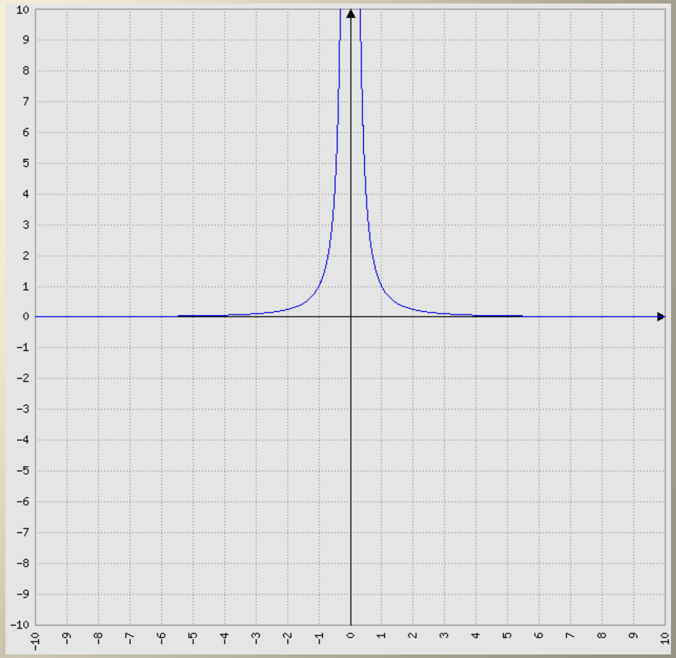
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty,$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to a} f(x) = \infty,$$

Límites Infinitos

- Que pasa cuando la función por ej. crece indefinidamente al **acercarme** al punto “a”
- Por Ejemplo en este caso,

Cuando me nos acercamos a cero



- Entonces sea f: $R - \{0\} \rightarrow R$ tal que $f(x)= 1/ x^2$
- ¿que pasa cuando nos **acercamos a 0?**
- A medida que **nos acercamos a 0** el valor de la función se hace cada vez mayor podemos hacer tabla para comprobar lo que decimos.
- Parece que cuando **tendemos a tomar** el valor **0** la función tiende a tomar valores muy grandes

Expresaremos

Esto esta diciendo que **la función no tiene** **<u>límite finito</u>, es decir nos dice que crece indefinidamente cuando se acerca a un punto**

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

Observación Importante

- Decir que el límite es infinito no significa que "infinito" sea un número. Se trata simplemente de una manera sencilla de expresar el hecho de que la función no se acerca a ningún valor concreto, pero su comportamiento en las cercanías del punto a está perfectamente definido: **toma valores tan grandes como se quiera**.

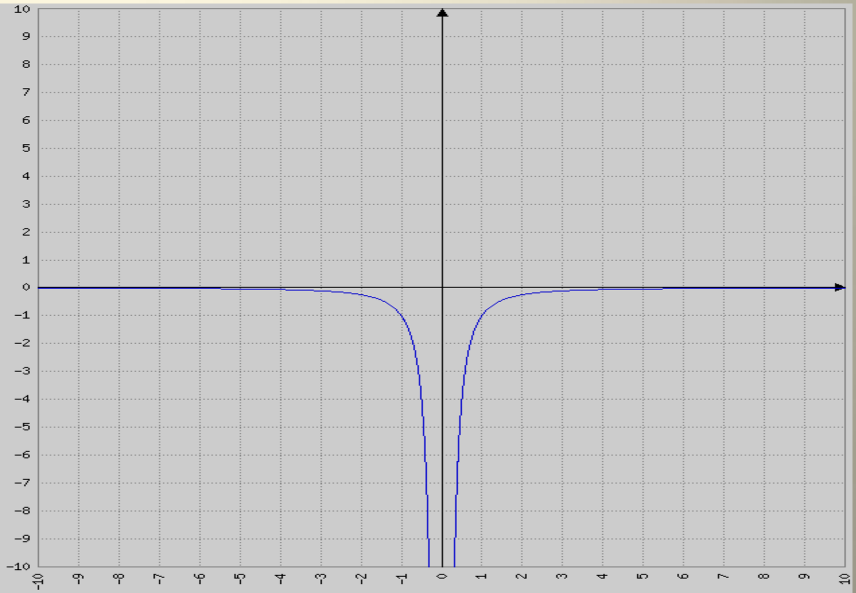
- ¿Que pasa cuando la función por ej.

Decrece indefinidamente al **acercarme** a “a”?

Por ejemplo tomemos la función $f : R - \{0\} \longrightarrow R$

tal que $f(x) = -1/x^2$

¿que pasa cuando nos **acercamos a 0?**



- A medida que **nos acercamos a 0** el valor de la función se hace cada vez menor, podemos hacemos una tabla para comprobar lo que decimos.
- Parece que cuando **tendemos a tomar** el valor **0** la función tiende a tomar valores muy pequeños
- Diremos que el límite de f(x) cuando x tiende al punto **0** es menos infinito. $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$
- Nota: Diremos, además, que la recta x = 0 (en este caso) es una asíntota vertical de la función

f(x)=-1/x^2

Expresamos

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Esto esta diciendo que la función no tiene limite finito, es decir nos dice que decrece indefinidamente cuando se acerca a un punto

OBSERVACIÓN

- De la misma forma que en la observación anterior ,decir que el límite es menos infinito no significa que "menos infinito" sea un número. Se trata simplemente de una manera sencilla de expresar el hecho de que la función **no se acerca** a ningún valor concreto, pero su comportamiento en **las cercanías del punto a** está perfectamente definido: toma **valores tan pequeños como se desee.**
- Nota: Cuando una función tiende a $+\infty$ o bien a $-\infty$ decimos que la función diverge o es divergente para un determinado valor -

Se estudiarán los siguientes límites:

$$1.\ \lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$

$$2.\ \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l$$

$$3.\ \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

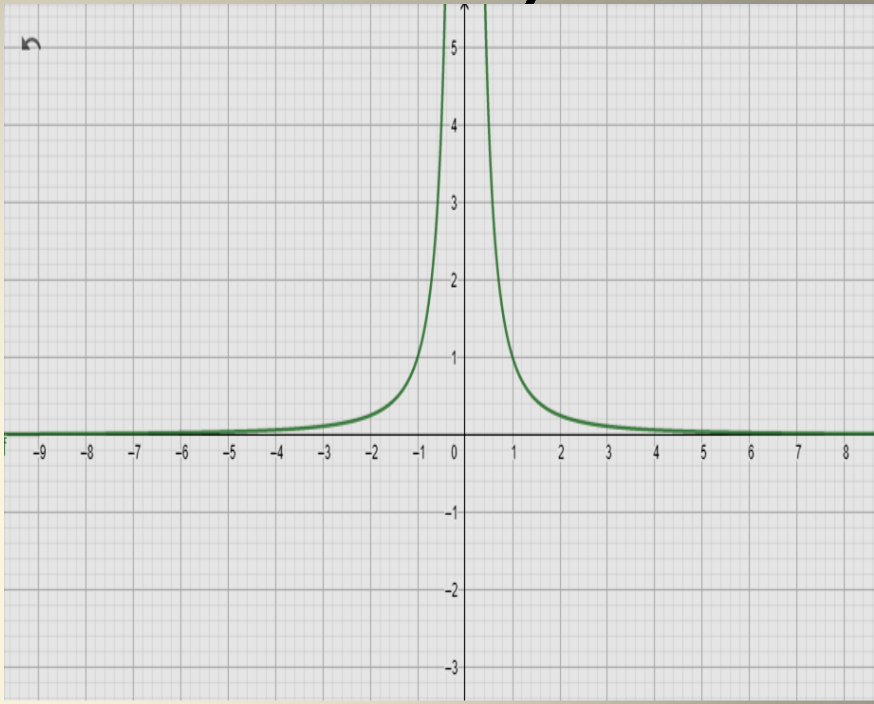
https://www.unadmexico.mx/sitios/aplicaciones-107/LITE_36/_Un_109_DefinicionFormalDeLimite_FuncionesNoContinuas/escenas/4_Cierre_1.html

1° Caso (límites de infinito)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$

Ejemplo : Sea f: R-{0}→R tal que

Sea la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.



Para calcular el límite de esta función en el punto $x_0 = 0$, hay que estudiar los valores que toman las imágenes de puntos próximos a 0. Como ya hemos visto de la observación de la gráfica de la función se deduce que:

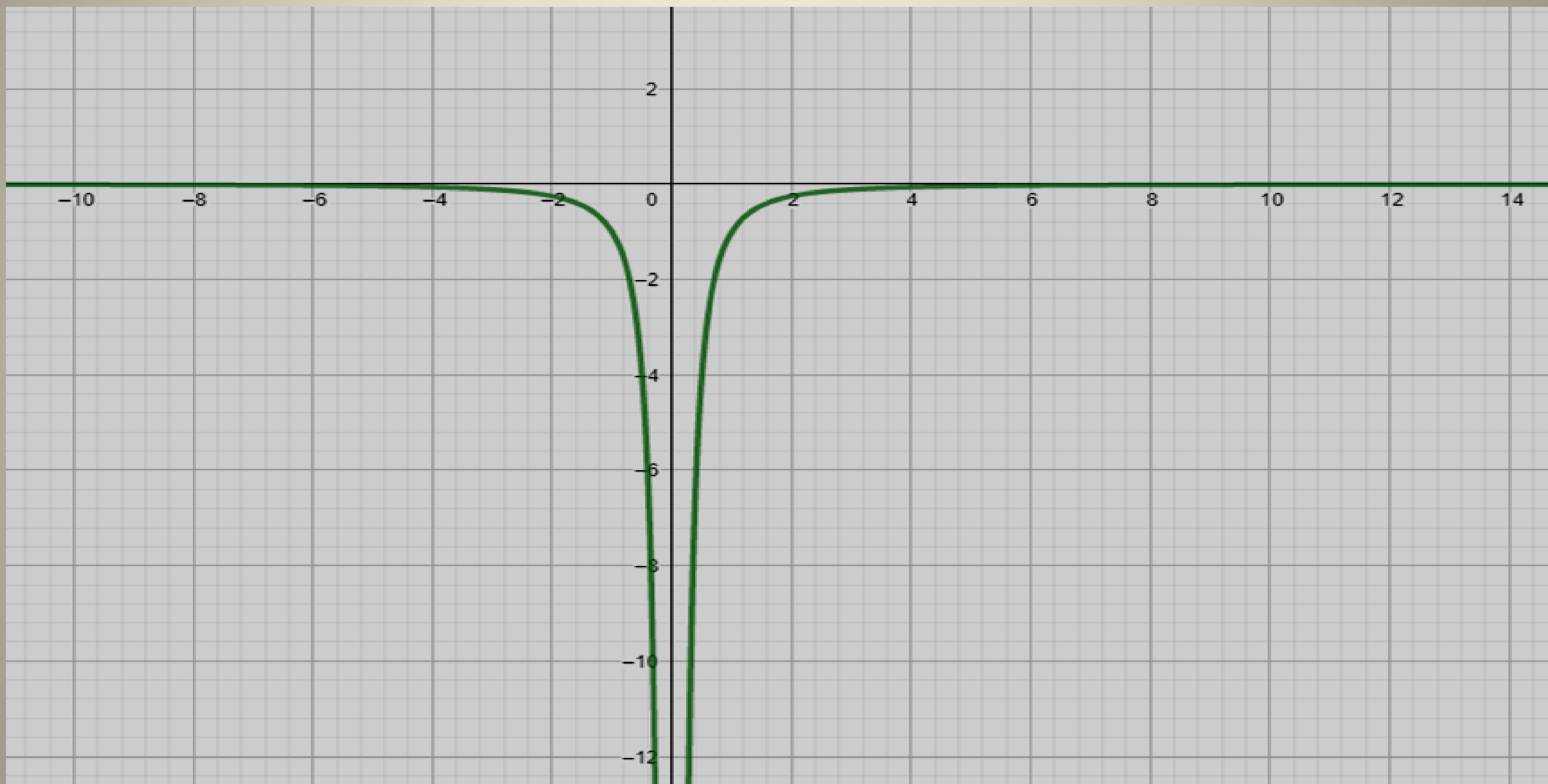
Para valores próximos a 0 por la derecha y a 0 por la izquierda, la función toma valores cada vez mas grandes.

Esto significa que $\lim_{x \to 0^-} 1/x^2 = +\infty$.

Y por lo ya visto en limites laterales

Puesto que $\lim_{x \to 0^-} 1/x^2 = \lim_{x \to 0^+} 1/x^2 = +\infty$, entonces $\lim_{x \to 0} 1/x^2 = +\infty$.

En el caso de la función $g(x) = -1/x^2$, el límite de la función cuando x tiende a 0 es $-\infty$.



Tomemos el caso de la siguiente función :

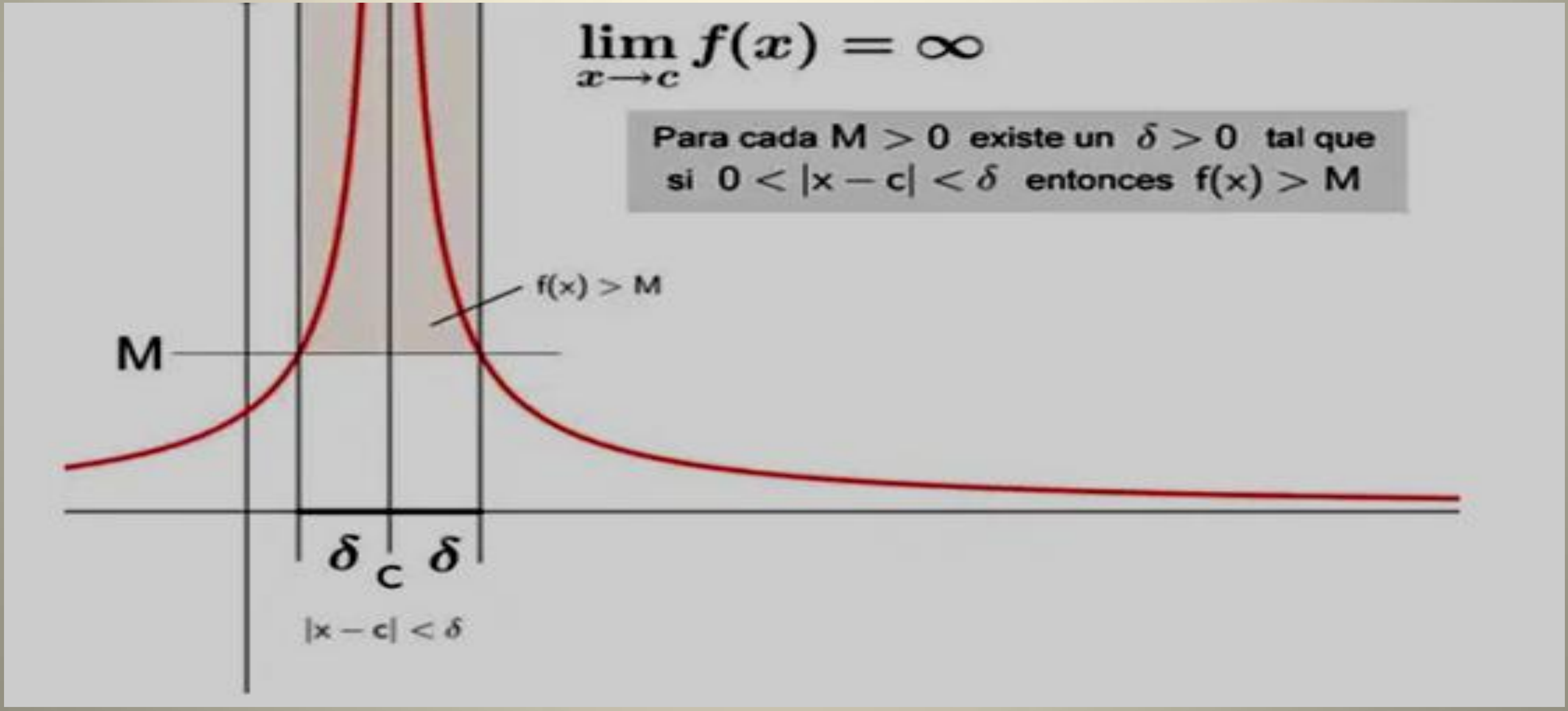
$f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ tiene dos asíntotas en x =0 e y = 1

Hacer el grafico y una tabla de aproximación

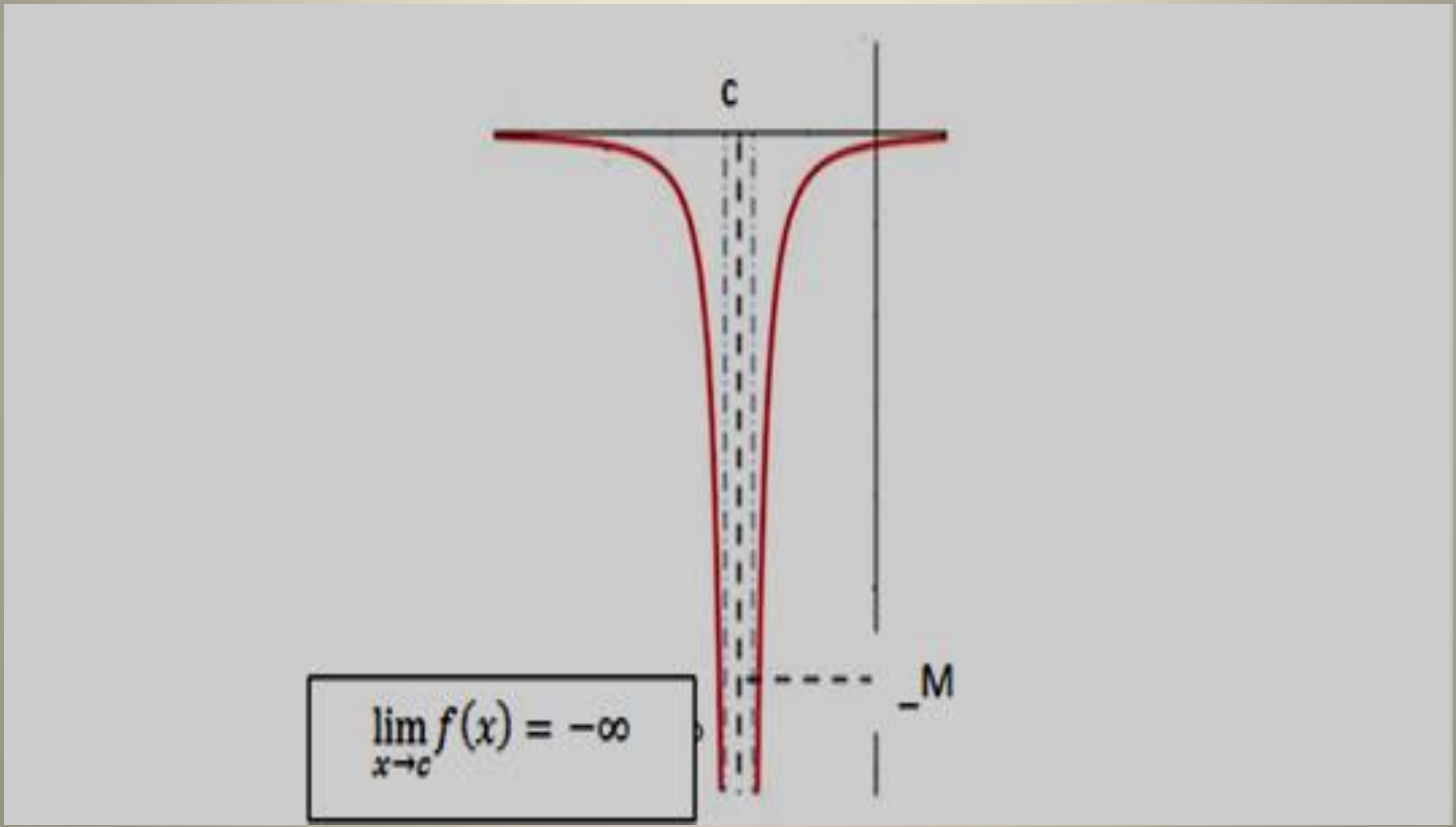
-0,16	-5,250000000	-5,250000000	-5,250000000	-5,250000000	-5,250000000	-5,250000000	-5,250000000	-5,250000000	-5,250000000	-5,250000000	-5,250000000
-0,15	-5,666666667	-5,666666667	-5,666666667	-5,666666667	-5,666666667	-5,666666667	-5,666666667	-5,666666667	-5,666666667	-5,666666667	-5,666666667
-0,14	-6,142857143	-6,142857143	-6,142857143	-6,142857143	-6,142857143	-6,142857143	-6,142857143	-6,142857143	-6,142857143	-6,142857143	-6,142857143
-0,13	-6,692307692	-6,692307692	-6,692307692	-6,692307692	-6,692307692	-6,692307692	-6,692307692	-6,692307692	-6,692307692	-6,692307692	-6,692307692
-0,12	-7,333333333	-7,333333333	-7,333333333	-7,333333333	-7,333333333	-7,333333333	-7,333333333	-7,333333333	-7,333333333	-7,333333333	-7,333333333
-0,11	-8,090909091	-8,090909091	-8,090909091	-8,090909091	-8,090909091	-8,090909091	-8,090909091	-8,090909091	-8,090909091	-8,090909091	-8,090909091
-0,10	-9,000000000	-9,000000000	-9,000000000	-9,000000000	-9,000000000	-9,000000000	-9,000000000	-9,000000000	-9,000000000	-9,000000000	-9,000000000
-0,09	-10,111111111	-10,111111111	-10,111111111	-10,111111111	-10,111111111	-10,111111111	-10,111111111	-10,111111111	-10,111111111	-10,111111111	-10,111111111
-0,08	-11,500000000	-11,500000000	-11,500000000	-11,500000000	-11,500000000	-11,500000000	-11,500000000	-11,500000000	-11,500000000	-11,500000000	-11,500000000
-0,07	-13,285714286	-13,285714286	-13,285714286	-13,285714286	-13,285714286	-13,285714286	-13,285714286	-13,285714286	-13,285714286	-13,285714286	-13,285714286
-0,06	-15,666666667	-15,666666667	-15,666666667	-15,666666667	-15,666666667	-15,666666667	-15,666666667	-15,666666667	-15,666666667	-15,666666667	-15,666666667
-0,05	-19,000000000	-19,000000000	-19,000000000	-19,000000000	-19,000000000	-19,000000000	-19,000000000	-19,000000000	-19,000000000	-19,000000000	-19,000000000
-0,04	-24,000000000	-24,000000000	-24,000000000	-24,000000000	-24,000000000	-24,000000000	-24,000000000	-24,000000000	-24,000000000	-24,000000000	-24,000000000
-0,03	-32,333333333	-32,333333333	-32,333333333	-32,333333333	-32,333333333	-32,333333333	-32,333333333	-32,333333333	-32,333333333	-32,333333333	-32,333333333
-0,02	-49,000000000	-49,000000000	-49,000000000	-49,000000000	-49,000000000	-49,000000000	-49,000000000	-49,000000000	-49,000000000	-49,000000000	-49,000000000
-0,01	-99,000000000	-99,000000000	-99,000000000	-99,000000000	-99,000000000	-99,000000000	-99,000000000	-99,000000000	-99,000000000	-99,000000000	-99,000000000
0,00	n/d	n/d	n/d	n/d	n/d	n/d	n/d	n/d	n/d	n/d	n/d
0,01	101,000000000	101,000000000	101,000000000	101,000000000	101,000000000	101,000000000	101,000000000	101,000000000	101,000000000	101,000000000	101,000000000
0,02	51,000000000	51,000000000	51,000000000	51,000000000	51,000000000	51,000000000	51,000000000	51,000000000	51,000000000	51,000000000	51,000000000
0,03	34,333333333	34,333333333	34,333333333	34,333333333	34,333333333	34,333333333	34,333333333	34,333333333	34,333333333	34,333333333	34,333333333
0,04	26,000000000	26,000000000	26,000000000	26,000000000	26,000000000	26,000000000	26,000000000	26,000000000	26,000000000	26,000000000	26,000000000
0,05	21,000000000	21,000000000	21,000000000	21,000000000	21,000000000	21,000000000	21,000000000	21,000000000	21,000000000	21,000000000	21,000000000
0,06	17,666666667	17,666666667	17,666666667	17,666666667	17,666666667	17,666666667	17,666666667	17,666666667	17,666666667	17,666666667	17,666666667
0,07	15,285714286	15,285714286	15,285714286	15,285714286	15,285714286	15,285714286	15,285714286	15,285714286	15,285714286	15,285714286	15,285714286
0,08	13,500000000	13,500000000	13,500000000	13,500000000	13,500000000	13,500000000	13,500000000	13,500000000	13,500000000	13,500000000	13,500000000

Observando que cuanto mas se acerca es x a cero por la derecha la función toma valores mas y mas grandes, mientras que si nos acercamos a cero por la izquierda los valores que toma la función f(x) son cada vez mas y mas pequeños

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in Df \; 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$



$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in Df \; 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$$



Propiedad 1: Si n es un número entero positivo par $\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{(x - x_0)^n} = \infty$

Propiedad 2: Si n es un número entero positivo impar $\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{1}{(x - x_0)^n} = -\infty$

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{1}{(x - x_0)^n} = +\infty$$

2° Caso(límites al infinito)

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l$$

Sea f: R-{1}→R tal que f(x)= x/(x-1)

x	-10	-9.5	-8,5	-7.5	←	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	→	8	9	10
f(x)	0.909	0.905	0,89	0,82		0.33	0	-1		3	2	1.66	1.5		1.14	1.12	1.11

- Observando la gráfica (y la tabla) de la función, se ve como a medida que *x* toma valores cada vez mayores, la función se aproxima más a 1. Por lo tanto, el límite de la función cuando *x* tiende a +∞ es 1.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

- De la observación de la gráfica se deduce que a medida que *x* toma valores cada vez menores, la función se aproxima más a 1. Por lo tanto, el límite de la función cuando *x* tiende a menos infinito es también 1

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

Definición:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\, N_{(\varepsilon)} > 0 : \forall x \in Df\ \ x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\, N < 0 : \forall x \in Df\ \ x < N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

3° Caso

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

Sea la función $f(x) = x + 5$.

Observando la gráfica se ve claramente que cuando x tiende a más infinito, la función también tiende a más infinito. Es decir, a valores cada vez mayores de x, corresponden valores cada vez mayores de la función.

Por tanto, $\lim_{x \to \infty} (x + 5) = +\infty$.

Cuando x toma valores cada vez menores, la función también toma valores cada vez menores. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to -\infty} (x + 5) = -\infty.$$

Otro ejemplo

$$\lim_{x \to \infty} -(x+5) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} -(x+5) = +\infty$$

Es decir, cuando *x* toma valores cada vez mayores, la función toma valores cada vez menores,

Y cuando x toma valores cada vez menores, la función toma valores cada vez mayores

Definición

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall\ K \in R\ \exists\ H \in R:\ x > H \Rightarrow f(x) > K$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \iff \forall\ :K \in R\ \exists\ H \in R\ x > H \Rightarrow f(x) < K$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall\ K \in R\ \exists\ H \in R:\ x < H \Rightarrow f(x) > K$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \iff \forall\ :K \in R\ \exists\ H \in R:x < H \Rightarrow f(x) < K$$

Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

El límite de una función racional cuando x ±∞, es igual al límite del cociente de los términos de mayor grado del numerador y denominador.

$$\text{Si: } P(x) = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + \dots + a_n.x^n$$
$$Q(x) = b_0 + b_1.x + b_2.x^2 + \dots + b_m.x^m$$

$\lim_{x\to\infty} P(x)/Q(x) = \lim_{x\to\infty} (a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + \dots + a_n.x^n)/(b_0 + b_1.x + b_2.x^2 + \dots + b_m.x^m) = \lim_{x\to\infty} (a_n.x^n)/(b_m.x^m)$

El valor de este límite depende del valor que tengan n y m:

- Si el grado del numerador es mayor que el grado del denominador ($n > m$), el límite es ± ∞, dependiendo de que los signos de los cocientes a_n y b_m sean iguales o distintos.

- Si el grado del numerador es igual que el grado del denominador ($n = m$), el límite es el cociente a_n/ b_m.

- Si el grado del numerador es menor que el grado del denominador ($n< m$),el límite es 0.

Ejercicios: Calculo del límite de funciones racionales cuando x⟶∞

1) Calcular el límite de la función f(x) = $\dfrac{3x^2-2x-5}{x-4}$ cuando x→ ∞

Resolución:

En este caso, el grado del numerador, 2, es mayor que el grado del denominador, 1, por tanto el límite es ∞.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-2x-5}{x-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{1} = +\infty$$

2) Calcular el límite de la función g(x) = $\frac{x^3-5}{-x^2-4}$, cuando x → ∞

Resolución:

El grado del numerador es mayor que el grado del denominador, y los términos de mayor grado tienen signos distintos, por tanto:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3-5}{-x^2-4} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{-x^2} = \lim_{x \to \infty} = \frac{x}{-1} = -\infty$$

3) Calcular $\lim_{x\to\infty} \dfrac{-3x^2-2x+5}{4x^2-1} =$

Resolución:

El grado del numerador es igual que el grado del denominador, por tanto:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2-2x+5}{4x^2-1} == \lim_{x\to\infty} (-3.x^2)/(4.x^2)\ \frac{-3x^2}{4x^2} = -3/4$$

4) Calcular $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2-x+1}{x^3-4x+3} =$

Resolución:

El grado del numerador es menor que el grado del denominador, por tanto:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1}{x^3-4x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Cálculo de funciones irracionales

Una función es irracional cuando la variable independiente aparece bajo el signo de raíz.

Son funciones irracionales las siguientes:

$f(x) = \sqrt{x} - 3$

$g(x) = 3.x - \sqrt{x^2 + 5}$

$h(x) = \sqrt{x} - 1/\sqrt{x} + 1$

$k(x) = x/\sqrt{x}$

El modo de calcular el límite de una función irracional es análogo al cálculo del límite de una sucesión irracional.

Cálculo del límite de una función irracional en el infinito

- Límite indeterminado de la forma ∞/∞

Ejercicio: cálculo de límites indeterminados de la forma ∞/∞

1) Calcular el límite de la función f(x) = (4.x³ - 2)/(√x - 3), cuando x → ∞

Resolución:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x^3 - 2}{\sqrt{x} - 3} = \infty/\infty$$, indeterminación.

- Haciendo uso de la regla mencionada, resulta:

Grado del numerador = 3

Grado del denominador = 1/2, (puesto que $\sqrt{x} = x^{1/2}$)

Por lo tanto, $\lim_{x \to \infty} \frac{4x^3 - 2}{\sqrt{x} - 3} = \infty$

2) Calcular el límite de la función f(x) = $\dfrac{5x-3}{\sqrt{4x^2+3x-1}}$, cuando x $\to\infty$

Resolución:

- Calculando el límite del numerador y del denominador se obtiene:

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x-3}{\sqrt{4x^2+3x-1}} = \infty/\infty$, indeterminación.

- Estudiando los grados:

Grado del numerador = 1

Grado del denominador = 1 (puesto que $\sqrt{x^2}$ = |x| y este es de grado uno

Por lo tanto, el límite es:

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x-3}{\sqrt{4x^2+3x-1}} = 5/\sqrt{4} = 5/2$

3) Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^5+2x-6}}{x^3-4x+2}$

Resolución:

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^5+2x-6}}{x^3-4x+2} = \infty/\infty$, indeterminación.

Grado del numerador: 5/2
Grado del denominador: 3

5/2 < 3

Por lo tanto, el límite es:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^5+2x-6}}{x^3-4x+2} = 0$$