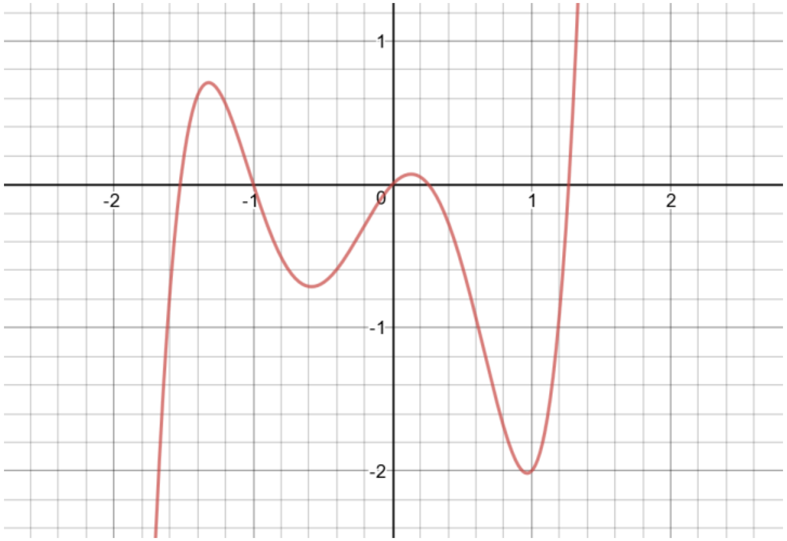


ESTUDIO DE FUNCIONES
PARTE 3

Puntos Críticos

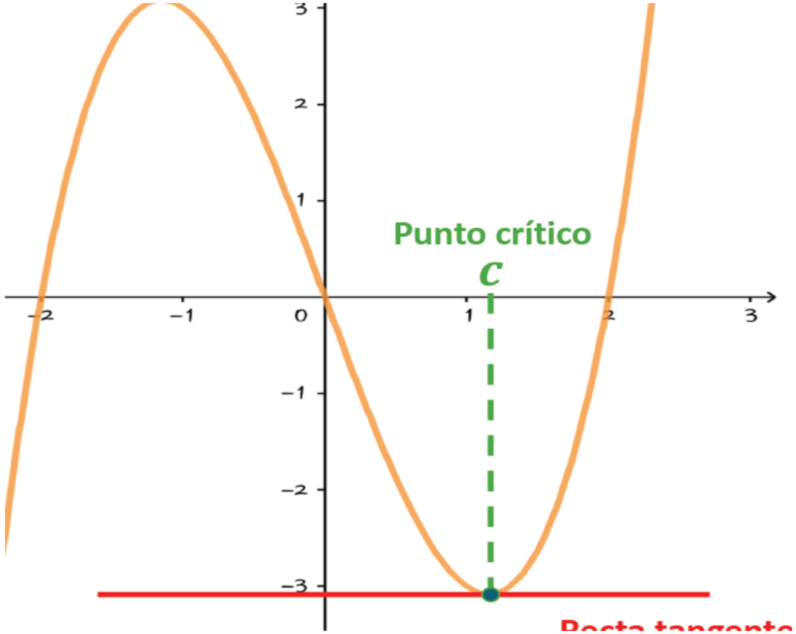
Todo valor c, en el eje x para el cual se cumpla que $f'(c) = 0$ o bien donde $f'(c)$ no exista, se le domina punto crítico de la función $f(x)$.

NOTA 1:

Los máximos relativos o mínimos relativos ocurren solo en los puntos críticos. Es decir, los puntos críticos son aquellos puntos donde se puede presentar un máximo relativo o un mínimo relativo.

NOTA 2 :

Si una recta horizontal es tangente a la curva de una función en un punto, entonces la primera derivada en ese punto es igual a cero.



EXTREMOS ABSOLUTOS

Los máximos y mínimos de una función son los valores extremos de la función. También reciben el nombre de máximo absoluto o mínimo absoluto.

Definición de Mínimo Absoluto

Si "c" es un punto crítico y pertenece al dominio de la función $f(x)$, entonces:

$f(c)$ es el **mínimo absoluto** de f si se cumple

que $f(c) \leq f(x)$ Para todo x perteneciente al dominio de f

Es el punto más bajo de la función donde $f'(c) = 0$.

Definición de Máximo Absoluto

Si "c" es un punto crítico y pertenece al dominio de la función $f(x)$, entonces:

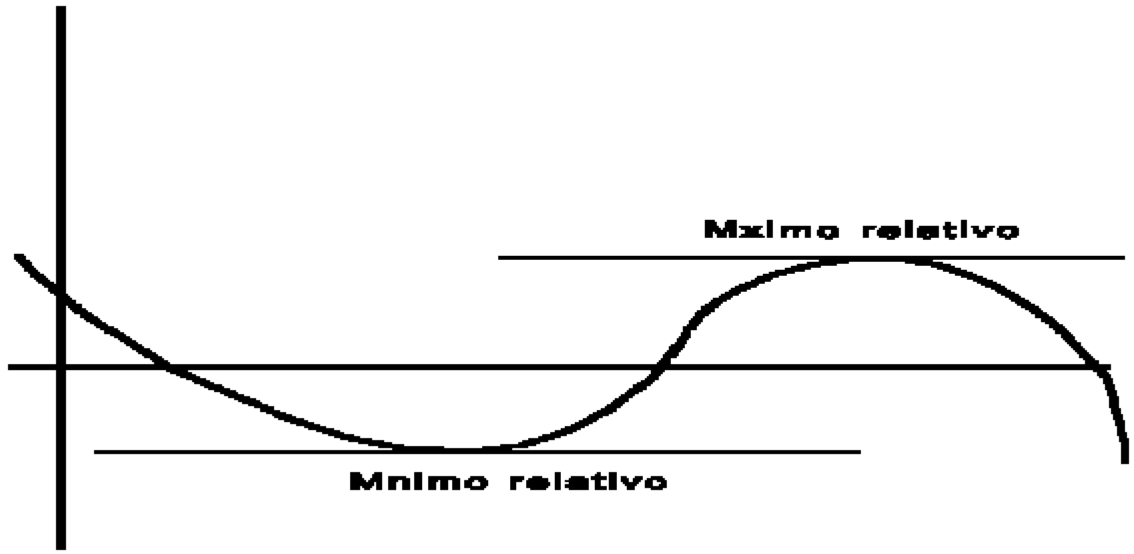
$f(c)$ es el **máximo absoluto** de f si cumple que

$f(c) \geq f(x)$ Para todo x perteneciente al dominio de f

Es el punto más alto de la función donde $f'(c) = 0$.

EXTREMOS RELATIVOS o LOCALES

Los máximos y mínimos relativos de una función son los valores extremos de la función en un intervalo abierto. También reciben el nombre de máximo local o mínimo local.



❖ Definición de Mínimo Relativo o Local

Sea f una función definida en un intervalo I, que contiene a c.

- $f(c)$ es el **mínimo relativo** de f en I, si $f(c) \leq f(x)$ para todo valor de x en I. Es el punto más bajo de la función un intervalo.

Definición de Máximo Relativo o Local

- $f(c)$ es el **máximo relativo** de f en I, si $f(c) \geq f(x)$ para todo valor de x en I. Es el punto más alto de la función un intervalo.

SENTIDO de VARIACIÓN

El sentido de variación de una función se refiere a los intervalos en donde una función es creciente o decreciente.

Se recurre a unos criterios particulares relacionados con la primera y la segunda derivada.

CRITERIO de la PRIMERA DERIVADA

- $f'(x) > 0$

Primera derivada es positiva, implica que la función es creciente.

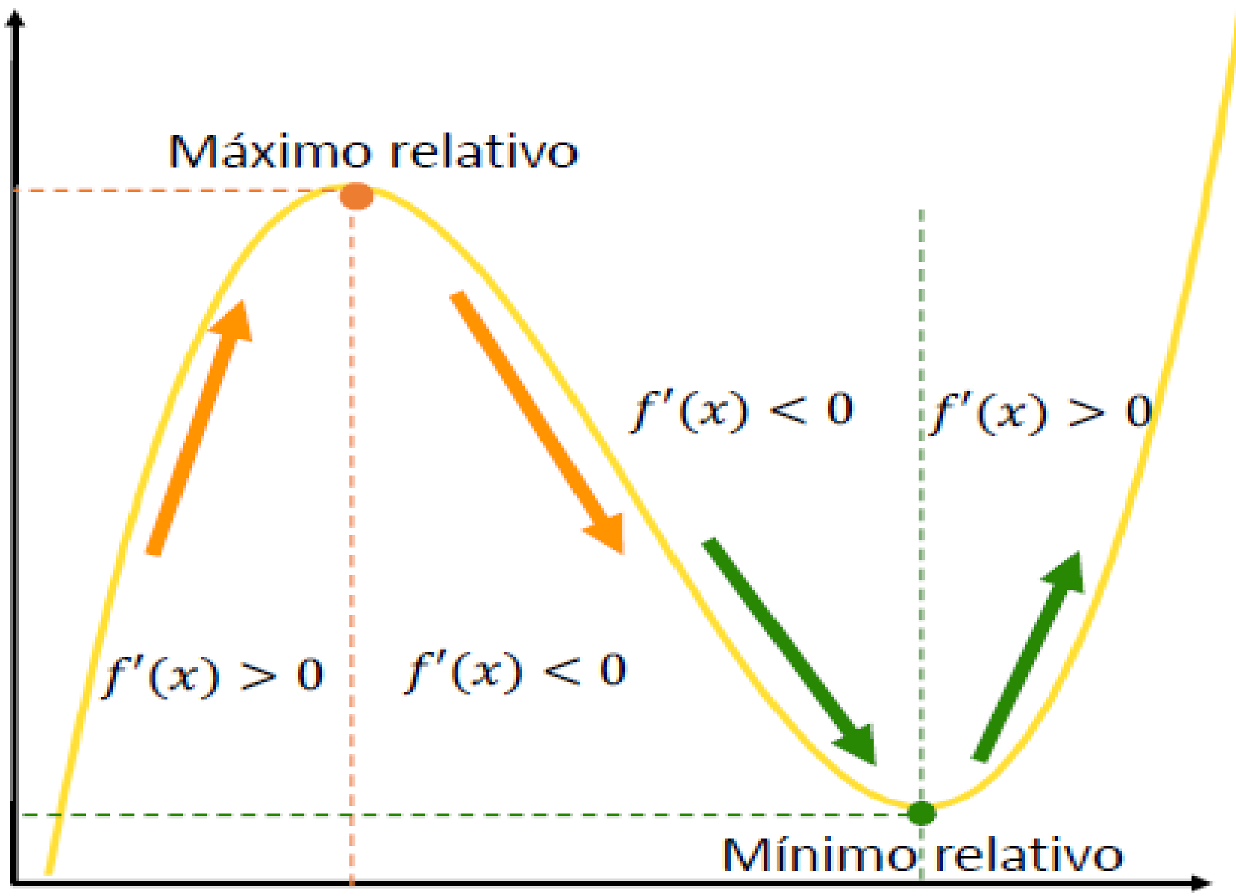
Es decir, la pendiente de la recta tangente a la curva es positiva.

- $f'(x) < 0$

La primera derivada es negativa, implica que la función es decreciente.

Es decir, el valor de la pendiente de la recta tangente es negativo.

Cabe destacar, que el punto donde cambia de dirección es un máximo o mínimo relativo.



Para que se presente un máximo o mínimo relativo, en el punto crítico se debe presentar un cambio de dirección de la curva.

Ejemplo

Determine el sentido de variación, máximos y mínimos de la función

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3$$

Paso 1

Obtener la primera derivada de la función

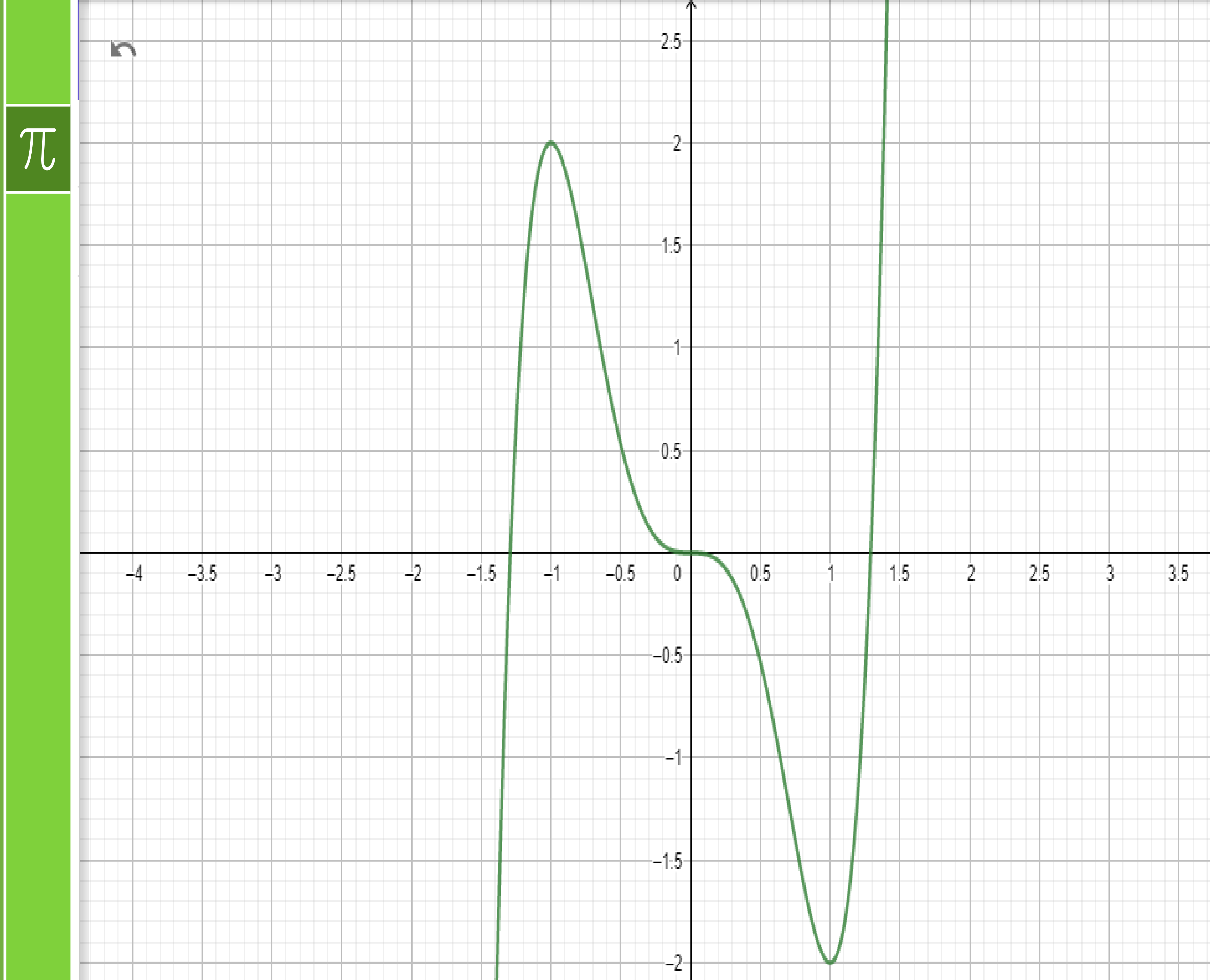
$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2$$

La función es polinómica por lo tanto su derivada siempre existe Entonces Para encontrar puntos críticos igualamos a cero

Paso 2

Igualar a cero la primera derivada

$$15x^4 - 15x^2 = 0$$



π
2.5
2
1.5
1
0.5
−0.5
−1
−1.5
−2
−4
−3.5
−3
−2.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5

Paso 3

Factorizar al máximo la expresión

$$15x^2(x^2 - 1) = 0$$

$$15x^2(x - 1)(x + 1) = 0$$

Paso 4

Igualar cada factor a cero y despejar la variable x, para determinar los puntos críticos.

$$15x^2 = 0 \qquad x - 1 = 0 \qquad x + 1 = 0$$

$$x = 0 \qquad x = 1 \qquad x = -1$$

Paso 5

Determinar los puntos críticos

$$x = 0 \qquad\qquad x = 1 \qquad\qquad x = -1$$

Es decir los puntos críticos son (0,0) (1, -2) y (-1 ,2)

Paso 6

Construir la tabla de signos

$$-\infty \qquad\quad -1 \qquad\quad 0 \qquad\quad 1 \qquad\quad +\infty$$

$15x^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x + 1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Según el criterio de la primera derivada determinamos máximos y mininos relativos

Paso 7

Determinar máximos y mínimos relativos

$-\infty \qquad -1 \qquad 0 \qquad 1 \qquad +\infty$

$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

En $x = -1$ hay un cambio de variación, es decir, crece hasta $x = -1$ y luego decrece. Por lo tanto hay un máximo relativo.

En $x = 1$ hay un cambio de variación, es decir, decrece hasta el punto $x = 1$ y luego crece. Por lo tanto hay un mínimo relativo.

Los intervalos donde la función es creciente:

$$f \nearrow: \,]-\infty, -1[\, \cup \,]1, +\infty[$$

Los intervalos donde la función es decreciente:

$$f \searrow: \,]-1, 0[\, \cup \,]0, 1[$$

En (-1,2) hay un Máximo relativo
En (1,-2) hay un mínimo relativo

CRITERIO de la SEGUNDA DERIVADA

Sea (c, f (c)) un punto critico de la función f entonces si :

- $f''(x) > 0$

Segunda derivada es positiva, implica que

(c, f (c)) hay un mínimo relativo

- $f''(x) < 0$

Segunda derivada es negativa, implica que

(c, f (c)) hay un Máximo relativo

Ejemplo

Estudiar la siguiente función

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

Paso 1: Hallamos dominio de la misma

Su dominio es R – { -2, 2}

Paso 2: Asíntotas de f

a.v.

$$\lim_{x \to 2+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} = \infty \qquad \lim_{x \to 2-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} = -\infty$$

luego en x=2 hay a.v.

$$\lim_{x \to -2+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} = -\infty \qquad \lim_{x \to -2-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} = \infty$$

Luego en x= -2 hay a.v.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2-4} = 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x^2-4} = 1$$

Tiene una asíntota horizontal en y=1

No tiene asíntotas oblicuas

Paso 3 : Hallamos los cortes con los ejes

$$f(0) = \frac{0^2+1}{0^2-4} = -\frac{1}{4}$$

Corta al eje y en y= -1/4

$$\frac{x^2+1}{x^2-4} = 0 \quad \textit{entonces}\ x^2+1=0\ \nexists\ x \in R$$

No corta al eje x

Paso 4 Paridad

Es par tiene una simetría axial de eje y

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4} \qquad f(-x) = \frac{x^2+1}{x^2-4}$$

Criterio de la 1° derivada

Paso 5 Puntos críticos

$$d\left(\frac{x^2+1}{x^2-4}\right) = \frac{2x(x^2-4)-(x^2+1)(2x)}{(x^2-4)^2} = \frac{2x(x^2-4-x^2-1)}{(x^2-4)^2} = \frac{-10x}{(x^2-4)^2}$$

En (0, -1/4) hay un pto. Crítico

$$\frac{-10x}{(x^2-4)^2} = 0 \;\; en\, x = 0$$

En x=-2 y x= 2 la derivada no existe

también hay puntos críticos , en este caso están las asíntotas verticales

Paso 6: Crecimiento y Decrecimiento de f

Los intervalos son (-∞,-2) (-2,0) (0,2) (2, ∞)

En (-∞,-2) la derivada es positiva

En (-2,0) la derivada es positiva

En (0,2) la derivada es negativa

En (2, ∞) la derivada es negativa

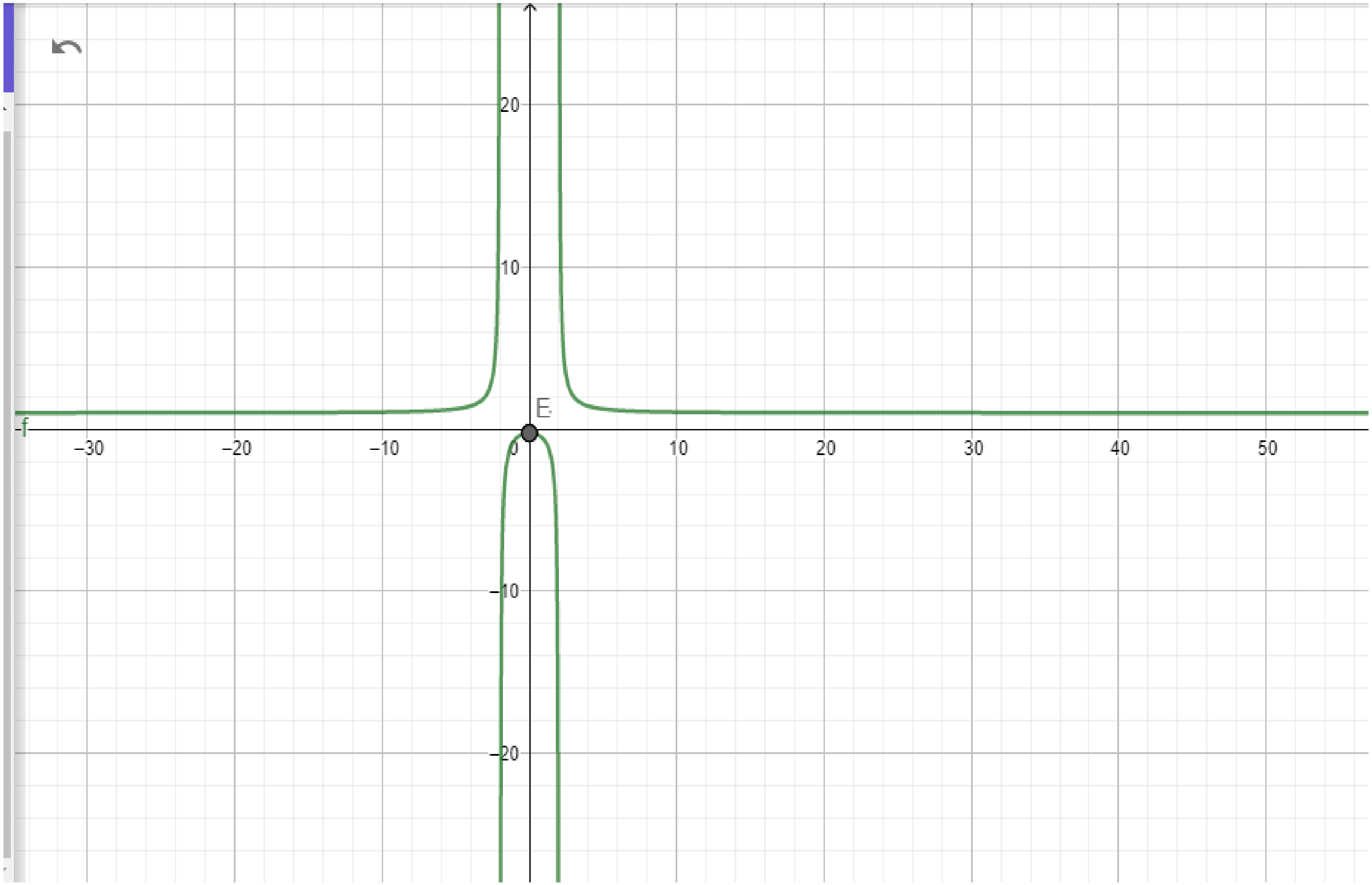
Criterio de la 2° derivada

$$d\frac{-10x}{(x^2-4)^2}=\frac{-10(x^2-4)^2+40x^2\,(x^2-4)}{(x^2-4)^{4}}=\frac{-10(-3x^2-4)}{(x^2-4)^{3}}$$

En x=0   f'' < 0 entonces en (0,-1/4) hay un máximo relativo

En x=2 y x=-2 no existe

Paso 7 : Gráfico



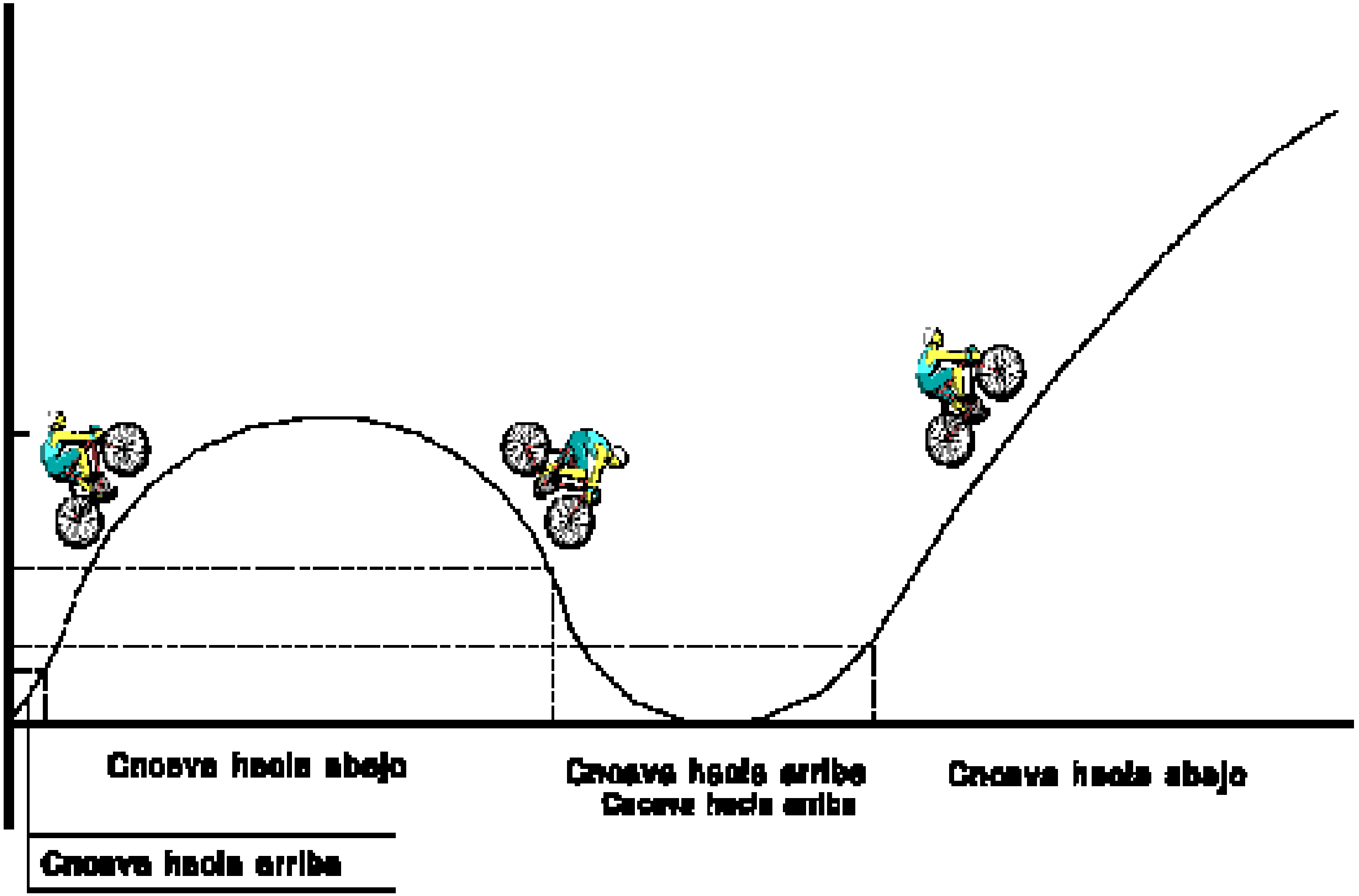
Concavidad

Hemos tomado el criterio de que el valle tiene forma convexa y la montaña forma cóncava.

Es posible encontrar textos en los que se define la concavidad y la convexidad de manera opuesta, usando el criterio de que el valle tiene forma cóncava y la montaña forma convexa.

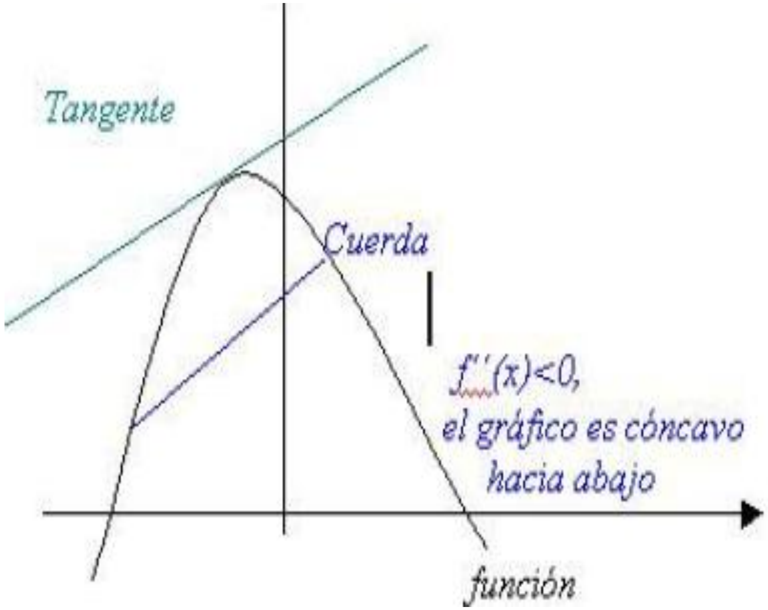
Pero esta definición que damos no sólo alude a un criterio visual que puede ser confuso desde el punto de vista del observador, sino que podemos dar una definición más precisa:

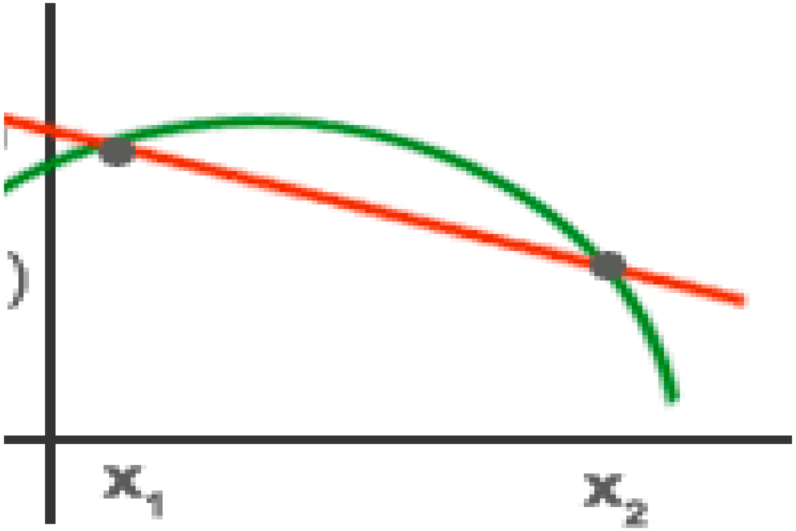
Una función es cóncava (cóncava abajo) en un intervalo de su dominio cuando:


Cncava hacia abajo
Cncava hacia arriba
Cncava hacia arriba
Cncava hacia abajo
Cncava hacia arriba

Cóncava abajo o Cóncava

- Dados dos puntos cualesquiera de dicho intervalo y , el segmento que une los puntos y siempre queda por debajo de la gráfica.

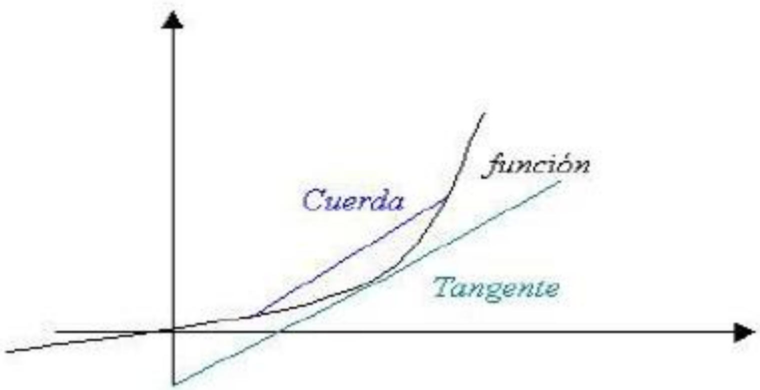




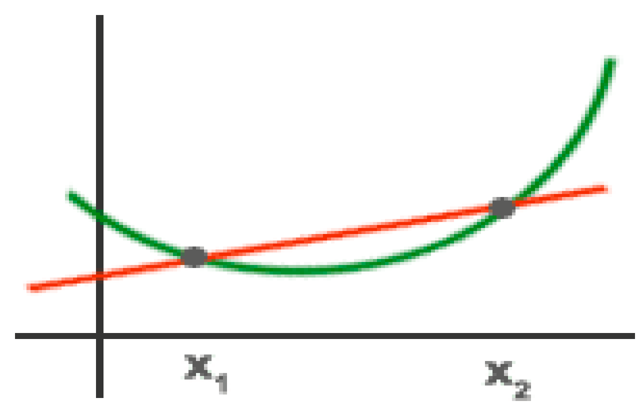
Cóncava arriba o convexa

Una función es convexa en un intervalo de su dominio cuando:

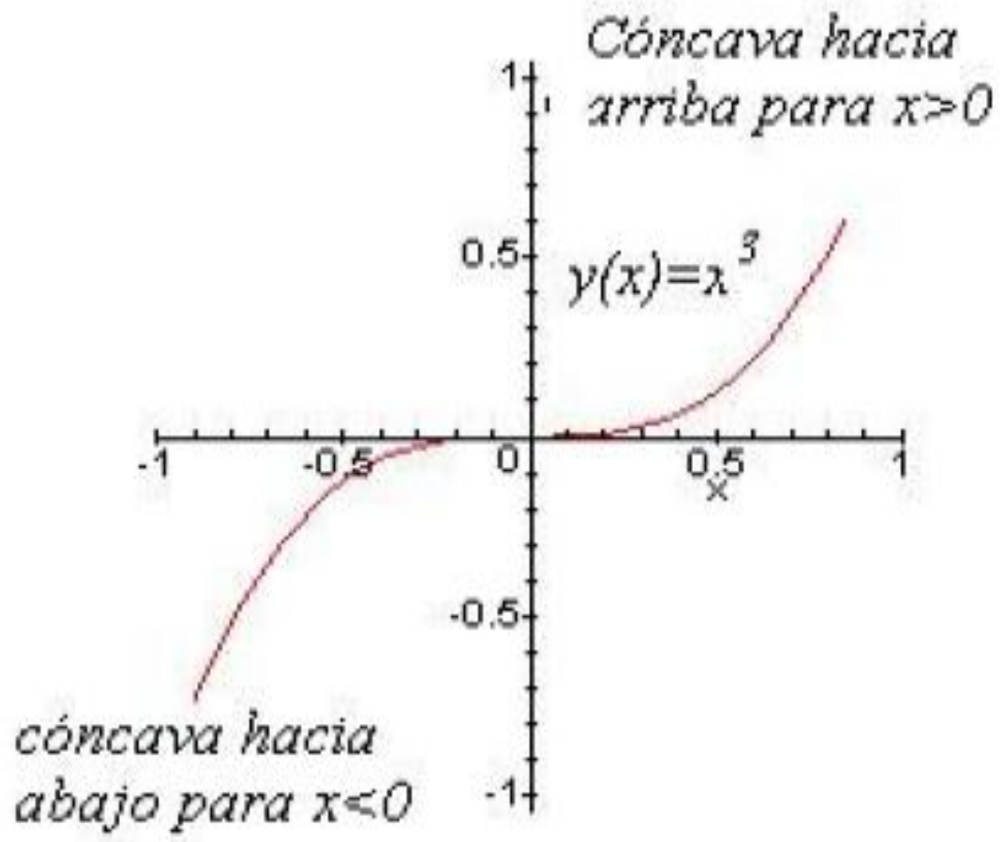
Dados dos puntos cualesquiera de dicho intervalo y , el segmento que une los puntos y siempre queda por encima de la gráfica.



Una curva cóncava hacia arriba esta por encima de las líneas tangentes, pero por debajo de las cuerdas de la curva.



Una función con ambas concavidades



Para calcular los intervalos la concavidad y convexidad de una función seguiremos los siguientes pasos:

- ✓ **1** Hallamos la derivada segunda y calculamos sus raíces.
- ✓ **2** Formamos intervalos abiertos con los ceros (raíces) de la derivada segunda y los puntos de discontinuidad (si los hubiese).
- ✓ **3** Tomamos un valor de cada intervalo, y hallamos el signo que tiene en la derivada segunda.

Si $f'' < 0$ es cóncava o cóncava abajo

Si $f'' > 0$ es convexa. O cóncava arriba

Ejemplo

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

Calculamos el dominio

$$(x-1)^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 1 \quad \Rightarrow \quad D = \mathbb{R} - \{1\}$$

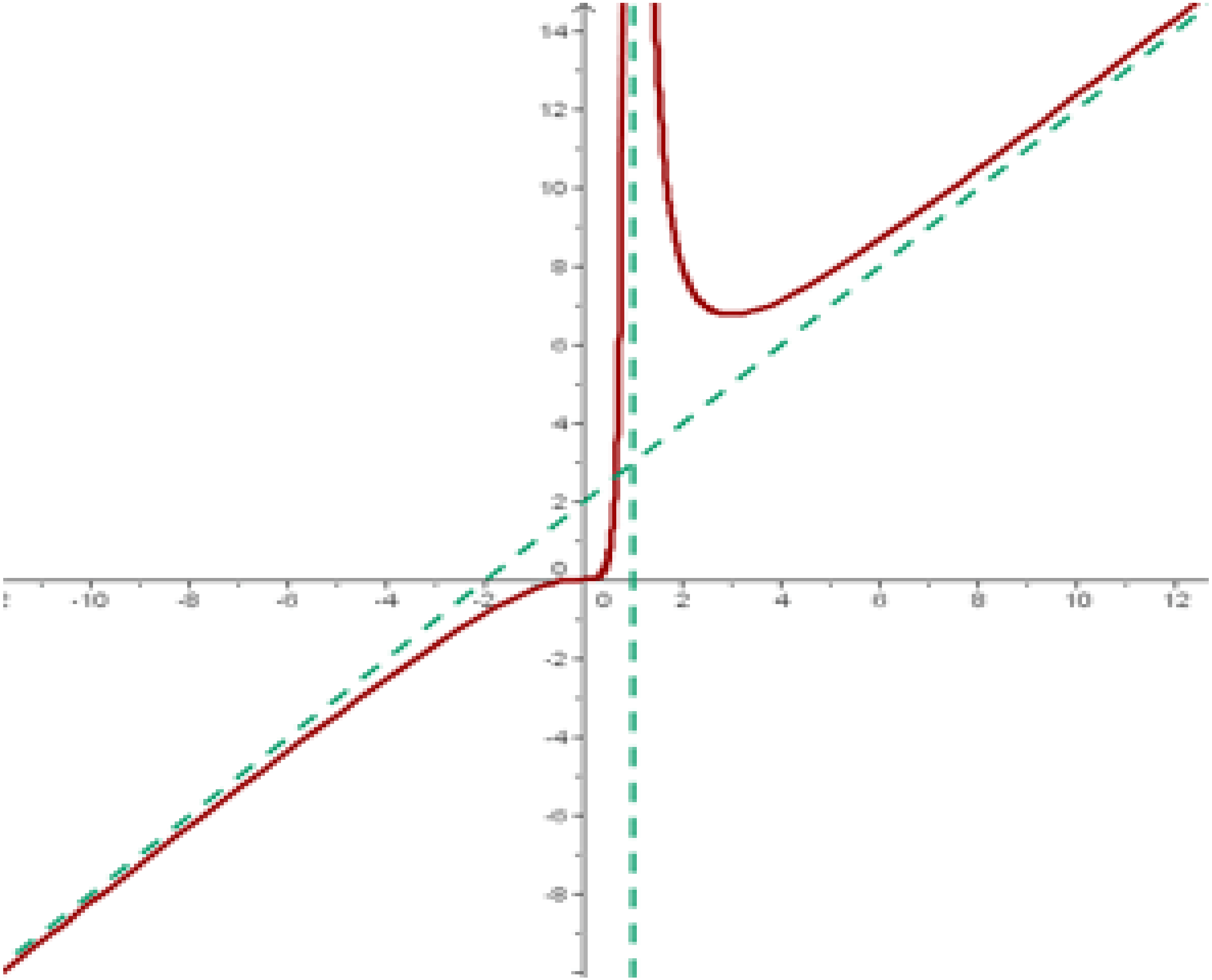
$$f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} \qquad \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} = 0$$

$$f''(x) = \frac{6x}{(x-1)^4} \qquad \frac{6x}{(x-1)^4} = 0$$

$$\begin{array}{cccc} x & (-\infty, 0) & (0,1) & (1,\infty) \\ f''(x) & - & + & + \\ & \cap & \cup & \cup \end{array}$$

Convexa: $(0,1) \cup (1,\infty)$

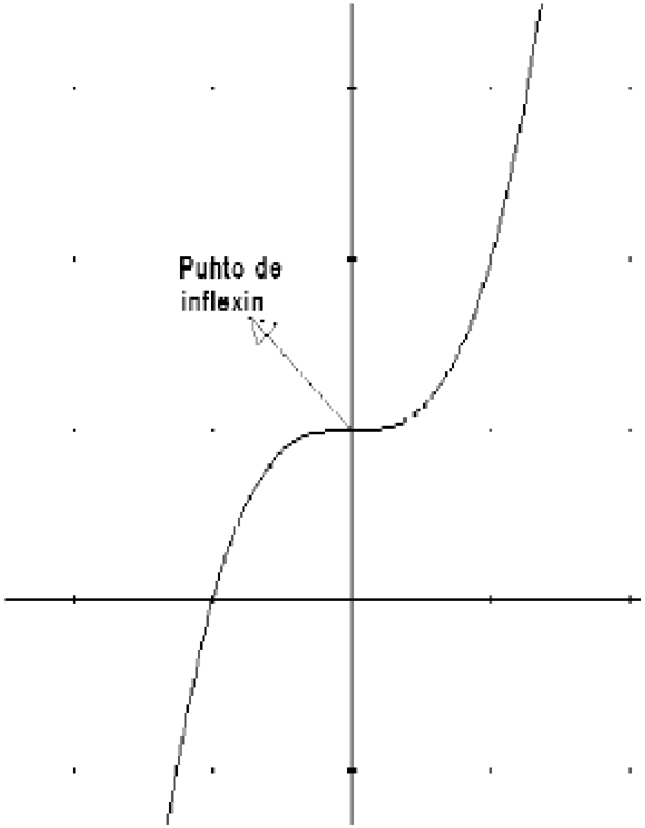
Cóncava: $(-\infty, 0)$



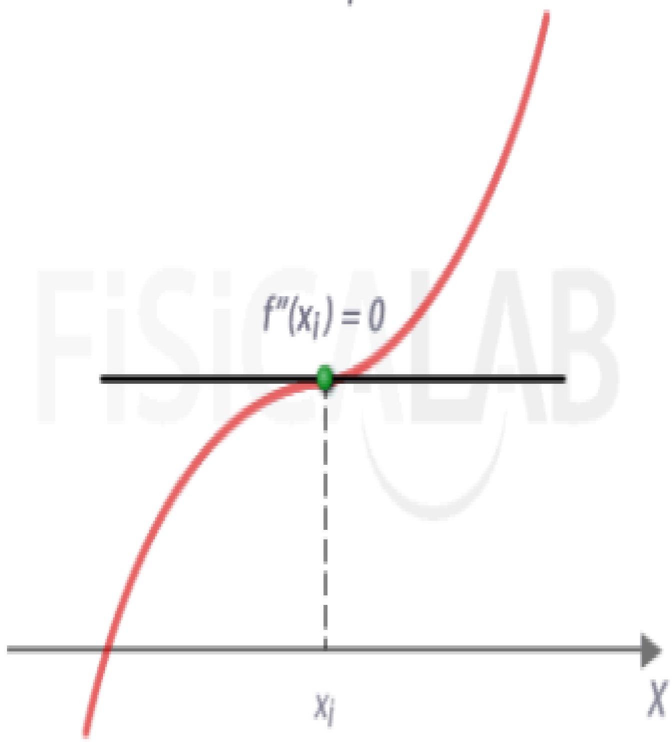
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
12

Punto de Inflexión

- **<u>Definición:</u>** Un punto se llama de *inflexión* si en él la función cambia el sentido de la concavidad, por tanto en los puntos de inflexión la segunda derivada tiene que cambiar de signo y por tanto en él la segunda derivada tiene que ser cero.



Punto de inflexión x_i



Punto de inflexión

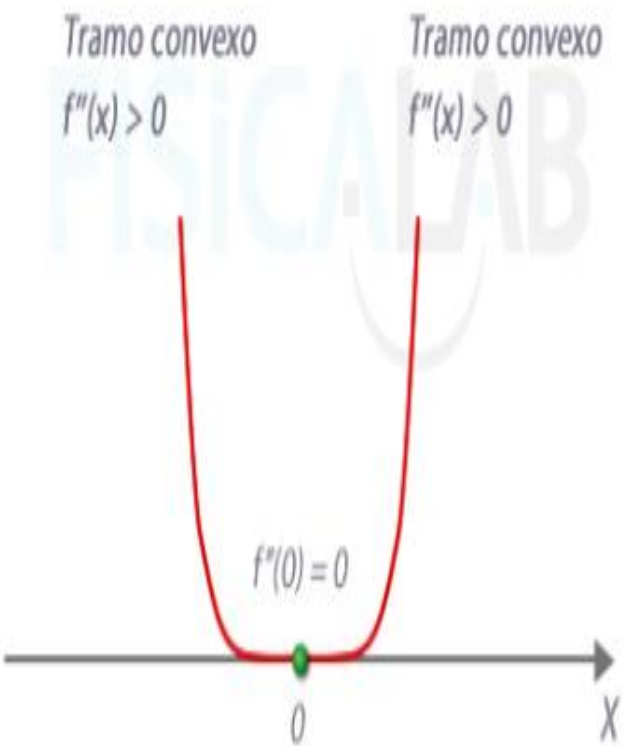
En $x=x_i$ tenemos un punto en el que cambia la curvatura de la función. Es por tanto un **punto de infléxión.** Observa que en él la recta tangente queda por encima de la función en un lado, y por debajo en otro, es decir, la "atraviesa". Además, el signo de la segunda derivada es diferente a la izquierda y a la derecha del punto, siendo $f''(x_i)=0$.

Para determinar los puntos de Inflexión

- Se determinan los intervalos de concavidad, si en uno de esos intervalos la función es cóncava hacia arriba o hacia abajo y en el siguiente cambia el sentido de la concavidad, siendo el extremo del intervalo un punto del dominio de definición en el que la función es continua, tendremos un punto de inflexión.
  Por tanto para determinar si uno de los ceros de la segunda derivada es un punto de inflexión se calcula la tercera derivada y se evalúa en ese punto, si el resultado es distinto de cero se tiene un punto de inflexión. Si el resultado sale cero tenemos que calcular la cuarta derivada, si al evaluar en ese punto el resultado es distinto de cero no es un punto de inflexión (es un máximo o un mínimo) si sale cero tenemos que calcular la siguiente derivada y reiterar el proceso y así sucesivamente. **Con esto concluimos que si f´´(a) =0 pasamos a la próxima si esta es cero seguimos con la siguiente derivada y así sucesivamente hasta encontrar una que no sea cero en "a" si el orden de la derivada es impar entonces en (a,f(a)) hay un punto de inflexión y si el orden es par hay un máximo o un mínimo en (a,f(a)) según si la derivada de orden n sea >0 o < 0**

Función $f(x)=x^6$

- $f''(x_i)=0$ no implica p. inflexión



Punto de inflexión y segunda derivada

La función $f(x)=x^6$ representada en la figura cumple que $f''(0)=0$, sin embargo puedes ver que en $x=0$ no cambia su curvatura (que es la misma en todo su dominio). Así, el signo de f'' es el mismo en ambos lados de 0.

- En nuestro ejemplo f(x)= x^6
- Vemos que en (0,0) no hay punto de inflexión porque no hay cambio de concavidad , pero seguimos derivando para saber si hay algo en ese punto
- Su derivada primera f ´(x)=6 x^5 en x=0 f ´ (0)=0 orden de la derivada impar
- Su derivada segunda f ´´ (x) = 30 x^4 en x=0 f´´ (0)=0 orden de la derivada par
- Su derivada tercera f´´´ (x) = 120 x^3 en x=0 f´´´(0)=0 orden de la derivada impar
- Su derivada cuarta f´´´´ (x) = 360 x^2 en x=0 f´´´´ (0)=0 orden de la derivada par
- Su derivada quinta f´´´´´(x) = 720 x en x=0 f´´´´´ (0)=0 orden de la derivada impar
- Su derivada sexta f´´´´´´ (x) =720 en x=0 f´´´´´´(0) orden de la derivada par
- Como la derivada es de orden par f´´´´´´(0) pero ademas f´´´´´´ (x) =720 >0 con lo que podemos decir que en (0,0) hay un minimo relativo