Tutoriat CDI 2025 - 2026

PARTE TEORIE C1 - C2

Def: Un șir de nr. reale este o funcție $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

$x_n = f(n) \leftarrow$ termen general al șirului

Not: $\{x_n\}$, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Teoremă: $\forall$ șir convergent este mărginit.

! Reciproca este FALSĂ

Teoremă (crit. comparației)

$\{x_n\}$ $\alpha_n \geq 0$ $\alpha_n \to 0$

Dacă $|x_n - x| \leq \alpha_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, at. $x_n \to x$.

Teoremă (Lema lui Cesaro)

$\forall$ șir mărginit admite <u>SUBȘIR</u> convergent.

Def: $\{x_n\}$ este șir Cauchy / fundamental dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $|x_n - x_m| < \varepsilon$, $\forall n, m \geq n_\varepsilon$

$\Downarrow$

$\forall$ $\{x_n\}$ convergent $\Rightarrow$ șir Cauchy

! Atenție: șir $\nearrow$ și nemărginit $\Rightarrow$ convergent la $+\infty$

șir $\searrow$ și nemărginit $\Rightarrow$ convergent la $-\infty$

Limite inferioare / superioare

- Supremul lui A ($\sup A$) $\to$ cel mai mic majorant

$A = [0,1) \Rightarrow \sup A = 1$

$A = [2,10] \Rightarrow \sup A = 10$

$A = (0,1) \Rightarrow \sup A = 1$

Obs! nu e obligatoriu ca $\sup A \in A$!

analog $\inf A \in A$

- Infimul lui A ($\inf A$) $\to$ cel mai mare minorant

Def: a) **limită superioară** $\{x_n\}$ șir, $y \in \overline{\mathbb{R}}$

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \sup \{x_k, k \geq n\}$$

Not: $y = \lim_{n\to\infty} \sup x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$

b) **limită inferioară** $\{x_n\}$ șir ; $z \in \overline{\mathbb{R}}$

$$z = \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \inf \{x_k, k \geq n\}$$

Not: $z = \lim_{n\to\infty} \inf x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$

Teoremă: un șir are limită dacă

$\{x_n\}$ șir $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf x_n = \lim_{n\to\infty} \sup x_n$

PARTE SEMINARE 1-2

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^\alpha}$, $a, \alpha > 0$

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & a \in (-1,1) \\ 1, & a = 1 \\ +\infty, & a \in (1,+\infty) \\ \nexists, & a \in (-\infty,-1) \end{cases}$$

$\boxed{a > 0}$

caz I : $a \in [0,1) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} \overset{[\frac{0}{\infty}]}{=\!=} 0$

caz II : $a = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1^n}{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$

caz III : $a > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=} ?$

○ CRITERIUL RAPORTULUI PT ŞIRURI CU TERMENI POZITIVI

Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir din $\mathbb{R}_+^*$ pentru care $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

- dacă $l<1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
- dacă $l>1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$
- dacă $l=1 \Rightarrow$ NU pot utiliza acest criteriu

Revenim la problema noastră...

$$x_n = \frac{a^n}{n^\alpha}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \cdot \frac{n^\alpha}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \cdot a = 1^\alpha \cdot a = a > 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ crit raportului $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$

○ CRITERIUL RADICALULUI PT ŞIRURI CU TERMENI POZITIVI

Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şir din $\mathbb{R}_+^*$, pt care $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

Ex: $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{\sqrt[n]{n^n}}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$; not $a_n = \frac{n^n}{n!}$ ...

○ LEMA LUI CESARO-STOLZ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\nearrow\infty}{a_n}}{\underset{\searrow\infty}{b_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$

! $b_{n+1} - b_n > 0$

EXERCIȚIU LIMITE INF/SUP

Se cer $\underline{\lim}\, x_n$ și $\overline{\lim}\, x_n$. $x_n = \frac{n(-1)^n}{2n+1} + \sin\frac{n\pi}{2}$

$$(-1)^n = \begin{cases} -1, & n = 2k+1 \\ 1, & n = 2k \end{cases}$$

! important la subșiruri

$$\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ 1, & n = 4k+1 \\ -1, & n = 4k+3 \end{cases}$$

Subșiruri: $(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(x_{4k+1})_{k\in\mathbb{N}}$, $(x_{4k+3})_{k\in\mathbb{N}}$

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k\cdot 1}{2\cdot 2k+1} + \sin 0 = \lim_{k\to\infty}\frac{2k}{4k+1} = \frac{1}{2}$$

← punct limită al șirului

$$\lim_{k\to\infty} x_{4k+1} = \lim_{k\to\infty}\frac{-1(4k+1)}{2(4k+1)+1} + 1 = \lim_{k\to\infty}\frac{-4k-1}{8k+3} + 1 = \frac{-4}{8} + 1 = \frac{-1}{2} + {}^{2)}1 = \frac{+1}{2}$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{4k+3} = \lim_{k\to\infty}\frac{-1(4k+3)}{2(4k+3)+1} - 1 = \frac{-1}{2} - {}^{2)}1 = \frac{-3}{2}$$

$$L = \left\{-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\} = \left\{-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{\lim}\, x_n &= \operatorname{Inf} L = -\frac{3}{2} \\ \overline{\lim}\, x_n &= \operatorname{Sup} L = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\operatorname{Inf} L \neq \operatorname{Sup} L \Rightarrow$ șirul x_n nu are limită

$\underline{\lim}\, x_n \neq \overline{\lim}\, x_n \Rightarrow \nexists \lim x_n$ $\square$

SERII DE NUMERE REALE

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir din $\mathbb{R}$ $\longrightarrow$ $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir din $\mathbb{R}$ $\Longrightarrow$

$s_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$, $n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow \left((x_n)_n, (s_n)_n\right) \overset{\text{not}}{=} \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ (serie de nr. reale)

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n \to$
- serie absolut convergentă (dc. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |x_n|$ este serie convergentă)
  $\Downarrow$ $\cancel{\Uparrow}$
- serie convergentă (dacă $(s_n)_n$ este șir convergent)
- serie divergentă (dacă $(s_n)_n$ este șir divergent)

Să se studieze natura seriei:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

$x_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$, $n\in\mathbb{N}^*$

$x_n > 0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$

! dacă seria are termeni poz/neg $\Rightarrow$ studiem convergența

$s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = 1$

din def $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ convergentă

b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{3\cdot 7\cdot 11\cdot\ldots\cdot(4n-1)}\right)^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{N}$, $x_n > 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = ??$ NOPE $\Rightarrow$ alegem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ / $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n+1)}{3\cdot 7\cdot 11\cdot\ldots\cdot(4n+2)}\right)^{\alpha}}{\left(\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots(3n-2)}{3\cdot 7\cdot\ldots(4n-1)}\right)^{\alpha}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{4n+2}\right)^{\alpha} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\alpha} = L$

I) $\alpha < 0 \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{\alpha} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \to$ divergentă

II) $\alpha > 0 \Rightarrow L < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \to$ convergentă

III) $\alpha = 0 \Rightarrow L = 1 \Rightarrow$ nu putem decide

$x_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

! CRITERIUL DE DIVERGENȚĂ pt serii de numere reale

Dacă $\exists \lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$ sau $\nexists \lim_{n\to\infty} x_n$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă

$\lim_{n\to\infty} x_n = 1 \neq 0 \Rightarrow$ seria este divergentă

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

$x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$\lim_{n\to\infty} x_n = ???$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{[(n+1)!]^2}^{\cancel{n!}\cancel{n!}(n+1)^2}}{\cancel{(2n+2)!}_{(2n+1)(2n+2)}} \cdot \frac{\cancel{(2n)!}}{\cancel{(n!)^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{\cancel{2}}}{2\cancel{(n+1)}(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ divergent}$$

SERII DE NUMERE REALE REMARCABILE

① seria armonică $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ $\longrightarrow$ convergent dc. $\alpha > 1$
$\searrow$ divergent dc. $\alpha \leq 1$

② seria puteri $\sum_{n=1}^{+\infty} a^n$ $\longrightarrow$ absolut convergentă dc. $a \in (-1, 1)$
$\searrow$ divergentă dc. $a \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

③ seria exponențială $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \to$ absolut convergentă $\forall a \in \mathbb{R}$

④ serii trigonometrice $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n}}{(2n)!}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\rangle$ absolut convergente $\forall a \in \mathbb{R}$