Teorie → $\boxed{\text{TOT !}}$

Șiruri de numere reale

$(x_n)_n$ → șir de numere reale

Def.:

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$. Spunem că șirul $(x_n)_n$ este:

1) convergent, dacă $(\exists)\ l \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$

2) divergent, altfel $\begin{cases} (x_n)_n \text{ nu are limită} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \pm\infty \end{cases}$ sau

Def.:

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$. Spunem că șirul $(x_n)_n$ este:

1) (strict) crescător, dacă $x_n \boxed{\leq} x_{n+1}$

2) (strict) descrescător, dacă $x_n \boxed{\geq} x_{n+1}$

3) monoton, dacă $(x_n)_n$ este 1) sau 2)

4) mărginit, dacă $(\exists)\ a, b \in \mathbb{R}$ a.î. $a \leq x_n \leq b$

$(\forall)\ n \in \mathbb{N}$

$\boxed{T}$

(Clește) Fie $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ și $(z_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $(\forall)\ n \geq n_0$, avem $x_n \leq y_n \leq z_n$. Presupunem că $(\exists)\ l \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = l$. Atunci $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = l$.

(Weierstrass) Orice șir de nr reale monoton și $\boxed{\text{mărginit}}$ este convergent. Reciproca nu e valabilă.

este ce se aplică la reciprocă!!

III Notație (*)

$\mathcal{L}((x_n)_n) \to \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x = \text{punct limită al lui } (x_n)_n\}$

Def.: Există un „cel mai mare element" și un „cel mai mic element" al mulțimii $\mathcal{L}((x_n)_n)$. (finit sau infinit)

Acestea s.n. limită superioară $\stackrel{not}{=} \limsup\limits_{n\to+\infty} x_n$ sau $\overline{\lim}\, x_n$ și limită inferioară $\stackrel{not}{=} \liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ sau $\underline{\lim}\, x_n$.

- $\underline{\lim}\, x_n \le \overline{\lim}\, x_n$
- Șirul $(x_n)_n$ are limită $\Leftrightarrow \overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n$, iar în care $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n$.

(*) Criteriul raportului — șiruri cu termeni strict pozitivi

- Fie $(x_n)_n \subset (0,\infty)$ a.î. $(\exists) \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \stackrel{not}{=} l \in [0,+\infty]$
  1) $l<1$, at $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$
  2) $l>1$, at $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$
  3) $l=1$, crit. nu decide

Criteriul radicalului

- Fie $(x_n)_n \subset [0,+\infty)$ a.î. $(\exists) \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} \stackrel{not}{=} l \in [0,+\infty]$
  1) $l<1$, at $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$
  2) $l>1$, at $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$
  3) $l=1$, at crit. nu decide

! Fie $(x_n)_n \subset (0,+\infty)$ a.î. $(\exists) \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \stackrel{not}{=} l \in [0,+\infty]$.
Atunci $(\exists) \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$.

Serii de numere reale

$\sum_n x_n \to$ serie de numere reale (notație pt perechea $(x_n)_n$, $(s_n)_n$)
($n \geq 0$ sau 1 de obicei)

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie de numere reale și $s_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$

- Elementele $(x_n)_n \to$ termenii seriei
- Elementele $(s_n)_n \to$ sumele parțiale ale seriei
- Dacă $(\exists) \lim_{n \to +\infty} s_n \overset{not}{=} \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, α s.n. suma seriei

și $\sum_n x_n = \alpha$

- ! $(s_n)_n$ convergent (div) $\to \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ convergentă (div)

~~• Dacă $\sum_n x_n$ convergentă, at $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$.~~

! Dacă $\lim_{n \to +\infty} x_n \neq 0$, at. $\sum_n x_n$ este divergentă.

Obs:

$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ → convergentă pt $q \in (-1, 1)$; → divergentă pt $q \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ } serie geometrică

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ → convergentă pt $\alpha = 1$; → divergentă pt $\alpha \leq 1$ } serie armonică generalizată

TTI

Criterii de convergență pt serii cu termeni pozitivi

1) Crit raportului

Fie $\sum_n x_n$, $x_n > 0$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$ a.î. $(\exists) \lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \overset{not}{=} l$

a) Dacă $l < 1$, $\sum_n x_n$ convergentă.

b) Dacă $l > 1$, $\sum_n x_n$ divergentă.

c) Dacă $l = 1$, acest crit nu decide.

2) Crit. radicalului:

Fie $\sum_n x_n$, $x_n \geq 0$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$ a.î. $(\exists) \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} \overset{not}{=} l$

a) Dacă $l < 1$, at $\sum_n x_n$ este conv

b) Dacă $l > 1$, at $\sum_n x_n$ este div

c) Dacă $l = 1$, acest crit nu decide

3) Crit Raabe-Duhamel

Fie $\sum_n x_n$, $x_n > 0$ a.î. $(\exists) \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \overset{not}{=} l$

a) Dacă $l < 1$, $\sum_n x_n$ este div

b) Dacă $l > 1$ $\sum_n x_n$ este conv.

c) Dacă $l = 1$ ~~este~~ crit nu decide

4) Crit Condensării:

Fie $(x_n)_n \subset [0, +\infty)$ un șir descr. Atunci $\sum_n x_n$ și $\sum_n 2^n \cdot x_{2^n}$ au aceeași convergență (ambele conv sau ambele div)

5) Crit de comp cu inegalități

Fie $\sum_n x_n$ și $\sum_n y_n$ a.î. $x_n \geq 0, (\forall) n \in \mathbb{N}, y_n \geq 0, (\forall) n \in \mathbb{N}$ și $(\exists)$ $n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)$ $n \geq n_0$ avem $x_n \leq y_n$.

- Dacă $\sum_n y_n$ conv, atunci $\sum_n x_n$ conv.
- Dacă $\sum_n x_n$ div, atunci $\sum_n y_n$ div.

6) Crit de comp cu limită

Fie $\sum_n x_n$ și $\sum_n y_n$ a.î. $x_n \geq 0, (\forall) n \in \mathbb{N}, y_n \geq 0,$ $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}$ și $(\exists)$ $\lim_{n \to +\infty} \frac{x_n}{y_n} \overset{not}{=} l$

- Dacă $l \in (0, +\infty)$, at $\sum_n x_n \sim \sum_n y_n$ (au aceeași convergență)
- Dacă $l = 0$ și $\sum_n y_n$ conv, at $\sum_n x_n$ conv
- Dacă $l = +\infty$ și $\sum_n y_n$ div, at $\sum_n x_n$ div.

Criterii pt șiruri cu termeni oarecare

- $\sum_n x_n$ absolut conv $\Leftrightarrow$ $\sum_n |x_n|$ conv

1) Crit Abel-Dirichlet

I Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ a.î.:

a) $(x_n)_n$ descr și $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$

b) $(\exists)$ $M > 0$ a.î. $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}$ $|\underbrace{y_0 + y_1 + \ldots + y_n}_{\sum_{k=0}^{n} y_k}| \leq M$

Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot y_n$ conv

II Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $(y_n)_n \subset \mathbb{R}$ a.î.

a) $(x_n)_n$ monoton și mărginit

b) $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ conv

Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot y_n$ conv

2) Crit lui Leibniz

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ un șir descr a.î. $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$, at

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x_n$ conv