第 1 章

QFT ミニマム

この章は [?] による．自然単位系を用いる．

1.1　経路積分

時空を表す多様体を $\mathcal{M}$ と書く．$\mathcal{M}$ は時間方向と空間方向に $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \Sigma$ と書けるとする．場とはベクトル束 $V \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ の切断 $\varphi \in \Gamma(E)$ のこととする．

系のラグランジアン密度 $\mathcal{L}\bigl(\varphi(x),\, \partial_\mu \varphi(x)\bigr)$ を与える．

- 時刻 t_i における古典場の配位が $\Psi_\mathrm{i} \in \Gamma(E|_{\{t_\mathrm{i}\}\times\Sigma})$ であることに対応する量子状態[*1] $|\Psi_\mathrm{i},\, t_\mathrm{i}\rangle$
- 時刻 t_f における古典場の配位が $\Psi_\mathrm{f} \in \Gamma(E|_{\{t_\mathrm{f}\}\times\Sigma})$ であることに対応する量子状態 $|\Psi_\mathrm{f},\, t_\mathrm{f}\rangle$

の間に

$$\langle \Psi_\mathrm{f},\, t_\mathrm{f} | \Psi_\mathrm{i},\, t_\mathrm{i} \rangle \propto \int [\mathrm{d}\varphi] \exp\left(\mathrm{i} \int_{[t_\mathrm{i},\, t_\mathrm{f}]\times\Sigma} \mathrm{d}^{D+1}x\, \mathcal{L}\bigl(\varphi(x),\, \partial_\mu \varphi(x)\bigr) \right)$$

を要請するのが経路積分による場の量子化である．

$\hat{\varphi}(x)$ $\;^{\mathrm{w}/}$ $x \in \mathcal{M}$ を場の演算子とする．与えられた時空点 $x_1,\, \dots,\, x_n \in \mathcal{M}$ および境界条件 $\Psi_\mathrm{i} \in \Gamma(E|_{\{t_\mathrm{i}\}\times\Sigma})$，$\Psi_\mathrm{f} \in \Gamma(E|_{\{t_\mathrm{f}\}\times\Sigma})$ に対して，**Green 関数**を

$$G^{(n)}(x_1,\, \dots,\, x_n;\, \Psi_\mathrm{f},\, t_\mathrm{f};\, \Psi_\mathrm{i},\, t_\mathrm{i}) \coloneqq \frac{\langle \Psi_\mathrm{f},\, t_\mathrm{f} | \mathcal{T}\bigl\{ \hat{\varphi}(x_1) \cdots \hat{\varphi}(x_n) \bigr\} | \Psi_\mathrm{i},\, t_\mathrm{i} \rangle}{\langle \Psi_\mathrm{f},\, t_\mathrm{f} | \Psi_\mathrm{i},\, t_\mathrm{i} \rangle} \tag{1.1.1}$$

で定義する．時刻 t における完全系 $\int_{\Gamma(E|_{\{t\}\times\Sigma})} [\mathrm{d}\varphi]\, \bigl|\varphi|_{\{t\}\times\Sigma}\bigr\rangle\bigl\langle\varphi|_{\{t\}\times\Sigma}\bigr| = 1$ を適当に挿入することで

$$\begin{aligned} G^{(n)}(x_1,\, \dots,\, x_n;\, \Psi_\mathrm{f},\, t_\mathrm{f};\, \Psi_\mathrm{i},\, t_\mathrm{i}) \propto \int [\mathrm{d}\varphi]\; & \Psi_\mathrm{f}\bigl[\varphi|_{\{t_\mathrm{f}\}\times\Sigma}\bigr]^* \Psi_\mathrm{i}\bigl[\varphi|_{\{t_\mathrm{i}\}\times\Sigma}\bigr] \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \\ & \exp\left(\mathrm{i} \int_{[t_\mathrm{i},\, t_\mathrm{f}]\times\Sigma} \mathrm{d}^{D+1}x\, \mathcal{L}\bigl(\varphi(x),\, \partial_\mu \varphi(x)\bigr) \right) \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

と計算できる．ただし $\Psi_\mathrm{i}\bigl[\varphi|_{\{t_\mathrm{i}\}\times\Sigma}\bigr] \coloneqq \bigl\langle \varphi|_{\{t_\mathrm{i}\}\times\Sigma} \big| \Psi_\mathrm{i},\, t_\mathrm{i} \bigr\rangle$，$\Psi_\mathrm{f}\bigl[\varphi|_{\{t_\mathrm{f}\}\times\Sigma}\bigr] \coloneqq \bigl\langle \varphi|_{\{t_\mathrm{f}\}\times\Sigma} \big| \Psi_\mathrm{f},\, t_\mathrm{f} \bigr\rangle$ とおいた．煩雑なので以降では $\Psi_\mathrm{i},\, \Psi_\mathrm{f}$ と略記する．

[*1] Heisenberg 表示

与えられた境界条件 $\Psi_{\mathrm{i}} \in \Gamma(E|_{\{t_{\mathrm{i}}\}\times\Sigma})$, $\Psi_{\mathrm{f}} \in \Gamma(E|_{\{t_{\mathrm{f}}\}\times\Sigma})$ に対して，**Green 関数の生成汎函数**を

$$Z_{\mathrm{fi}}[J] \coloneqq \frac{\langle \Psi_{\mathrm{f}},\, t_{\mathrm{f}} | \mathcal{T} \exp\left(\mathrm{i} \int_{[t_{\mathrm{i}},\, t_{\mathrm{f}}]\times\Sigma} \mathrm{d}^{D+1}x\, J(x)\hat{\varphi}(x) \right) | \Psi_{\mathrm{i}},\, t_{\mathrm{i}} \rangle}{\langle \Psi_{\mathrm{f}},\, t_{\mathrm{f}} | \Psi_{\mathrm{i}},\, t_{\mathrm{i}} \rangle}$$

と定める．実際，

$$\left. \frac{\delta^n Z_{\mathrm{fi}}[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \right|_{J=0} = \mathrm{i}^n G^{(n)}(x_1,\, \dots,\, x_n;\, \Psi_{\mathrm{f}},\, t_{\mathrm{f}};\, \Psi_{\mathrm{i}},\, t_{\mathrm{i}})$$

が成り立つので

$$Z_{\mathrm{fi}}[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n!} \int_{([t_{\mathrm{i}},\, t_{\mathrm{f}}]\times\Sigma)^n} \mathrm{d}^{D+1}x_1 \cdots \mathrm{d}^{D+1}x_n\, J(x_1)\cdots J(x_n) G^{(n)}(x_1,\, \dots,\, x_n;\, \Psi_{\mathrm{f}},\, t_{\mathrm{f}};\, \Psi_{\mathrm{i}},\, t_{\mathrm{i}})$$

だと分かる．(1.1.2) より

$$Z_{\mathrm{fi}}[J] = \frac{\displaystyle\int [\mathrm{d}\varphi] \Psi_{\mathrm{f}}^* \Psi_{\mathrm{i}} \exp\left(\mathrm{i} \int_{[t_{\mathrm{i}},\, t_{\mathrm{f}}]\times\Sigma} \mathrm{d}^{D+1}x \left(\mathcal{L}(x) + J(x)\phi(x) \right) \right)}{\displaystyle\int_{[t_{\mathrm{i}},\, t_{\mathrm{f}}]\times\Sigma} [\mathrm{d}\varphi] \Psi_{\mathrm{f}}^* \Psi_{\mathrm{i}} \exp\left(\mathrm{i} \int \mathrm{d}^{D+1}x\, \mathcal{L}(x) \right)}$$

が成り立つ．

$t_{\mathrm{i}} \to -\infty$, $t_{\mathrm{f}} \to \infty$ の極限を上手くとることで，Green 関数 (1.1.1) の境界条件への依存性を実質的に無くすことができる．このような極限としてよく使われるものに，$\mathrm{i}\epsilon$ 処方がある：簡単のため実スカラー場を考え，Lagrangian 密度の質量項が $-\frac{1}{2}\mu^2\varphi^2$ であるとする．このとき $\mu^2 \to \mu^2 - \mathrm{i}\epsilon$ と置き換えると，これは系の Hamiltonian を $H \to H - \mathrm{i}\epsilon \int_\Sigma \mathrm{d}^3x\, \frac{\varphi(x)^2}{2} \eqqcolon H^{(\epsilon)}$ に置き換えることに相当する．このとき $\hat{H}$ の固有値，固有状態をそれぞれ E_n, $|n\rangle$ とおき，$\hat{H^{(\epsilon)}}$ の固有値，固有状態をそれぞれ $E_n^{(\epsilon)}$, $|n\rangle^{(\epsilon)}$ とおくと，

$$\begin{aligned}
|\Psi_{\mathrm{i}},\, t_{\mathrm{i}}\rangle &= e^{\mathrm{i}\hat{H^{(\epsilon)}}t_{\mathrm{i}}} |\Psi_{\mathrm{i}}\rangle \\
&= \sum_n e^{\mathrm{i}E^{(\epsilon)}t_{\mathrm{i}}} |n\rangle^{(\epsilon)}\, {}^{(\epsilon)}\langle n|\Psi_{\mathrm{i}}\rangle \\
&\approx e^{\epsilon t_{\mathrm{i}} \langle 0| \int_\Sigma \mathrm{d}^3x \frac{\hat{\varphi}(x)^2}{2} |0\rangle} \left(|0\rangle^{(\epsilon)}\, {}^{(\epsilon)}\langle 0|\Psi_{\mathrm{i}}\rangle + \sum_{n\neq 0} e^{\epsilon t_{\mathrm{i}} (\langle n| \int_\Sigma \mathrm{d}^3x \frac{\hat{\varphi}(x)^2}{2} |n\rangle - \langle 0| \int_\Sigma \mathrm{d}^3x \frac{\hat{\varphi}(x)^2}{2} |0\rangle)} e^{\mathrm{i}E_n t_{\mathrm{i}}} |n\rangle^{(\epsilon)}\, {}^{(\epsilon)}\langle n|\Psi_{\mathrm{i}}\rangle \right) \\
&\xrightarrow[\epsilon\to+0]{t_{\mathrm{i}}\to-\infty,} |0\rangle \langle 0|\Psi_{\mathrm{i}}\rangle
\end{aligned}$$

同様に $\langle \Psi_{\mathrm{f}},\, t_{\mathrm{f}}| \xrightarrow[\epsilon\to+0]{t_{\mathrm{f}}\to+\infty,} \langle \Psi_{\mathrm{f}}|0\rangle \langle 0|$ もわかり，結局 (1.1.1) は

$$\lim_{\substack{t_{\mathrm{i}}\to-\infty,\\ t_{\mathrm{f}}\to+\infty}} G^{(n)}(x_1,\, \dots,\, x_n;\, \Psi_{\mathrm{f}},\, t_{\mathrm{f}};\, \Psi_{\mathrm{i}},\, t_{\mathrm{i}}) = \langle 0| \mathcal{T}\{\hat{\varphi}(x_1)\cdots\hat{\varphi}(x_n)\} |0\rangle \eqqcolon G^{(n)}(x_1,\, \dots,\, x_n)$$

となる．このとき (1.1.2) を

$$G^{(n)}(x_1,\, \dots,\, x_n) \propto \int [\mathrm{d}\varphi]\, \varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n) \exp\left(\mathrm{i} \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}x\, \mathcal{L}(x) \right)$$

と書く．