第 1 章

層状化空間・因子化ホモロジー

[?], [?] のレビュー

1.1 conically smooth な層状化空間

1.1.1 層状化空間

定義 1.1: 半順序集合の位相

$(P, \leq)$ を半順序集合とする．P 上の位相 $\mathscr{O}_{\leq} \subset 2^P$ を以下で定義する：

$$U \in \mathscr{O}_{\leq} \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \forall x \in U,\, \forall y \in P,\, \bigl[\, x \leq y \quad \Longrightarrow \quad y \in U \,\bigr]$$

実際，空集合の定義から $\emptyset \in \mathscr{O}_{\leq}$ であり，$\forall U_1,\, U_2 \in \mathcal{O}_{\leq}$ に対して $x \in U_1 \cap U_2$ であることは

$$\forall y \in P,\; x \leq y \quad \Longrightarrow \quad y \in U_1 \;\text{かつ}\; y \in U_2$$

と同値なので $U_1 \cap U_2 \in \mathscr{O}_{\leq}$ であり，さらに勝手な開集合族 $\bigl\{U_\lambda \in \mathscr{O}_{\leq}\bigr\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ は

$$\exists \alpha \in \Lambda,\, \forall y \in P,\; x \leq y \quad \Longrightarrow \quad y \in U_\alpha \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

と同値であるから $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathscr{O}_{\leq}$ であり，$\mathscr{O}_{\leq}$ は集合 P の位相である．

【例 1.1.1】$[n]$ の位相

半順序集合 $[2] \coloneqq \{0 \leq 1 \leq 2\}$ を考える．このとき，位相 $\mathscr{O}_{\leq}$ とは

$$\mathscr{O}_{\leq} = \bigl\{\, \emptyset,\, \{2\},\, \{1,\, 2\},\, \{0,\, 1,\, 2\} \,\bigr\}$$

のことである．同様に，半順序集合 $[n] \coloneqq \{0 \leq 1 \leq \cdots \leq n\}$ に対して

$$\mathscr{O}_{\leq} = \bigl\{\, \emptyset,\, \{n\},\, \{n-1,\, n\},\, \dots,\, \{0,\, \dots,\, n\} \,\bigr\}$$

が成り立つ．

定義 1.2: 層状化空間・層状化写像

$(P, \leq)$ を半順序集合とし，定義 1.1 の位相を入れて位相空間にする．
このとき，位相空間 X が ***P*-層状化**されている (P-stratified) とは，連続写像 $s\colon X \longrightarrow P$ が存在することを言う．組 $(X, s\colon X \longrightarrow P)$ のことを ***P*-層状化空間** (P-stratified space) と呼ぶ．また，$i \in P$ の逆像 $\boldsymbol{X_i} \coloneqq s^{-1}(\{i\}) \subset X$ のことを ***i*-層** (i-strata) と呼ぶ．

層状化空間 $(X, s\colon X \longrightarrow P)$, $(X', s'\colon X' \longrightarrow P')$ の間の**層状化写像** (stratified map) とは，連続写像の組み $(f\colon X \longrightarrow X', \tilde{f}\colon P \longrightarrow P')$ であって以下の図式を可換にするもののこと：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & X' \arrow[d, "s'"] \\ P \arrow[r, "\tilde{f}"'] & P' \end{tikzcd}$$

【例 1.1.2】$[n]$**-層状化空間**

半順序集合 $[n] \coloneqq \{0 \leq \cdots \leq n\}$ に対して**【例 1.1.1】**の位相を入れる．まず，

$$X_0 = s^{-1}\bigl([n] \setminus \{1, \ldots, n\}\bigr)$$

でかつ $\{1, \ldots, n\}$ は $[n]$ の開集合であるから，s の連続性から X の部分空間 $X_0 \subset X$ は閉集合だとわかる．さらに

$$\begin{aligned} X_0 \cup X_1 &= s^{-1}\bigl([n] \setminus \{2, \ldots, n\}\bigr), \\ X_0 \cup X_1 \cup X_2 &= s^{-1}\bigl([n] \setminus \{3, \ldots, n\}\bigr), \\ &\vdots \\ X_0 \cup \cdots \cup X_n &= X \end{aligned}$$

が成り立つことから，s の連続性より X の部分空間 $X_0 \cup \cdots \cup X_{m \leq n}$ は閉集合だと分かる．

【例 1.1.3】CW 複体

CW 複体 X を与える．$X_{\leq k}$ を X の k-骨格とするとき，$X_k \setminus X_{k-1}$ を $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に写す写像 $s\colon X \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は X の層状化を与える．

直観的には，層状化空間とは defect 付き位相多様体の一般化である．特に X を位相多様体とするとき，$[n]$-層状化空間 $(X, s\colon X \longrightarrow [n])$ の i-層 X_i とは，多様体 X 上の余次元 $d - i$ の defect を全て集めてきたものだと見做せる．

定義 1.3: 層状化開埋め込み

層状化写像 $(f, \tilde{f})\colon (X, s\colon X \longrightarrow P) \longrightarrow (X', s'\colon X' \longrightarrow P')$ が**層状化開埋め込み** (stratified open embedding) であるとは，以下の 2 条件を充たすことを言う：

(1) 連続写像 $f\colon X \longrightarrow X'$ は位相的開埋め込みである[a]

(2) $\forall p \in P$ に対して，f の p-strata への制限[b]

$$f|_{X_p}\colon X_p \longrightarrow X'_{\tilde{f}(p)}$$

は位相的開埋め込みである．

[a] i.e. $f\colon X \longrightarrow f(X)$ が同相写像かつ $f(X) \subset Y$ が開集合

[b] 層状化写像の定義に登場する図式の可換性より，$\forall x \in X_p$ に対して $s'\bigl(f(x)\bigr) = s' \circ f(x) = \tilde{f} \circ s(x) = \tilde{f}(p)$，i.e. $f(x) \in s'^{-1}\bigl(\{\tilde{f}(p)\}\bigr) = X'_{\tilde{f}(p)}$ が分かる．

! 以下では混乱が生じにくい場合，層状化空間 $(X, s\colon X \longrightarrow P)$ のことを $(X \xrightarrow{s} P)$ や $(X \to P)$ と略記する．さらに，層状化写像 $(f, \tilde{f})\colon (X, s\colon X \longrightarrow P) \longrightarrow (X', s'\colon X' \longrightarrow P')$ のことを $f\colon (X \to P) \longrightarrow (X' \to P')$ と略記し，連続写像 $\tilde{f}\colon P \longrightarrow P'$ のことも f と書く場合がある．

圏 **StTop** を，

- 第 2 可算な Hausdorff 空間であるような層状化空間を対象とする
- 層状化開埋め込みを射とする

ことで定義する．

1.1.2 C^0 級層状化空間

定義 1.4: コーン

層状化空間 $(X \xrightarrow{s} P)$ を与える．X の**コーン** (cone) とは，以下のようにして構成される層状化空間 $\bigl(\mathsf{C}(X), \mathsf{C}(s) : \mathsf{C}(X) \longrightarrow \mathsf{C}(P)\bigr)$ のこと：

- 位相空間 $\mathsf{C}(X)$ を，押し出し位相空間

$$\mathsf{C}(X) \coloneqq \{\mathrm{pt}\} \amalg_{\{0\} \times X} (\mathbb{R}_{\geq 0} \times X)$$

と定義する：

$$\begin{tikzcd} \{0\} \times X \arrow[r, hook, "\{0\}\times \mathrm{id}_X"] \arrow[d] & \mathbb{R}_{\geq 0} \times X \arrow[d] \\ \{\mathrm{pt}\} \arrow[r, hook] & \{\mathrm{pt}\} \amalg_{\{0\} \times X} (\mathbb{R}_{\geq 0} \times X) \end{tikzcd}$$

- 半順序集合 $\mathsf{C}(P)$ を，P に最小の要素 $-\infty$ を付け足すことで定義する．これは半順序集合の

圏における押し出し

$$\mathsf{C}\,(P) \coloneqq \{-\infty\} \amalg_{\{0\}\times P} \big([1]\times P\big)$$

である．

- 連続写像

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{\ge 0}\times X &\longrightarrow [1]\times P, \\ (t,\,x) &\longmapsto \begin{cases} \big(0,\,s(x)\big), & t=0, \\ \big(1,\,s(x)\big), & t>0 \end{cases} \end{aligned}$$

が誘導する連続写像 $\mathsf{C}\,(X) \longrightarrow \mathsf{C}\,(P)$ を $\mathsf{C}\,(s)$ と書く．

位相空間の圏における押し出しの公式から，位相空間 $\mathsf{C}\,(X)$ とは

$$\begin{aligned} &i_1\colon \{0\}\times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\ge 0}\times X,\ x \longmapsto (0,\,x), \\ &i_2\colon \{0\}\times X \longrightarrow \{\mathrm{pt}\},\ x \longmapsto \mathrm{pt} \end{aligned}$$

とおいたときのコイコライザ

$$\{0\}\times X \overset{i_1}{\underset{i_2}{\rightrightarrows}} \{\mathrm{pt}\} \sqcup (\mathbb{R}_{\ge 0}\times X) \xrightarrow{\ q\ } \mathsf{C}(X),$$

i.e. 商位相空間

$$\frac{\mathbb{R}_{\ge 0}\times X}{i_1(x)\sim i_2(x)} = \frac{\mathbb{R}_{\ge 0}\times X}{\{0\}\times X}$$

のこと．従って $\mathsf{C}\,(s) : \mathsf{C}\,(X) \longrightarrow \mathsf{C}\,(P)$ とは，連続写像[*1]

$$\frac{\mathbb{R}_{\ge 0}\times X}{\{0\}\times X} \longrightarrow \mathsf{C}\,(P)\,,\ [(t,\,x)] \longmapsto \begin{cases} -\infty, & t=0 \\ s(x), & t>0 \end{cases}$$

のことである．

! 以下では，混乱の恐れがない限り層状化空間 $(X \xrightarrow{s} P)$ のコーンを $\mathsf{C}\left(X \xrightarrow{s} P\right)$ と略記する．

[*1] $\mathsf{C}\,(P)$ の位相 $\mathscr{O}_{\mathsf{C}(P)}$ は，P の位相 $\mathscr{O}_P$ に 1 つの開集合 $\{-\infty\}\cup P$ を加えたものである．$\forall U\in\mathscr{O}_P$ に対して $\mathsf{C}\,(s)^{-1}\,(U) = \mathbb{R}_{>0}\times s^{-1}(U) \in \mathscr{O}_{\mathsf{C}(X)}$ で，かつ $\mathsf{C}\,(s)^{-1}\,(\{-\infty\}\cup P) = \mathsf{C}\,(X) \in \mathscr{O}_{\mathsf{C}(X)}$ なので $\mathsf{C}\,(s)$ は連続である．

定義 1.5: C^0 級層状化空間

以下を充たす $\mathbf{StTop}$ の最小の充満部分圏を $\mathbf{Snglr}^{C^0}$ と書き，圏 $\mathbf{Snglr}^{C^0}$ の対象を $\boldsymbol{C^0}$ **級層状化空間** (C^0 stratified space) と呼ぶ：

(Snglr-1) $(\emptyset \to \emptyset) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$

(Snglr-2)

$$(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}) \text{ かつ } X,\ P \text{ が位相空間としてコンパクト}$$
$$\Longrightarrow \quad \mathsf{C}\,(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$$

(Snglr-3)

$$(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}) \quad \Longrightarrow \quad (X \times \mathbb{R} \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$$ [a]

(Snglr-4)

$$(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}) \text{ かつ } \mathrm{Hom}_{\mathbf{StTop}}\big((U \to P_U),\ (X \to P)\big) \neq \emptyset$$
$$\Longrightarrow \quad (U \to P_U) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$$

(Snglr-5)

$(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{StTop})$ が開被覆 $\big\{(U_\lambda \to P_\lambda) \longrightarrow (X \to P)\big\}_{\lambda \in \Lambda}$ [b] を持ち，かつ $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して $(U_\lambda \to P_\lambda) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$

$$\Longrightarrow \quad (X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$$

---

[a] $X \times \mathbb{R}$ の層状化は，連続写像 $X \times \mathbb{R} \longrightarrow X,\ (x,\ t) \longmapsto x$ を前もって合成することにより定める．

[b] i.e. $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$，$\{P_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が，それぞれ位相空間 X, P の開被覆を成す．

【例 1.1.4】位相多様体は C^0 級層状化空間

(Snglr-1) より，$* \coloneqq \mathsf{C}\,(\emptyset \to \emptyset) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ である．**(Snglr-3)** より，$\forall n \geq 0$ に対して $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n \to [0]) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ であることが帰納的に分かる．$\mathbb{R}^n$ の任意の開集合 $U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ に対して，

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathbb{R}^n \arrow[d] \\ {[0]} \arrow[r, "="'] & {[0]} \end{tikzcd}$$

は層状化埋め込みであり，従って **(Snglr-4)** より $U \coloneqq (U \to [0]) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ が分かる．以上の考察と **(Snglr-5)** を併せて，任意の位相多様体 M は[a]圏 $\mathbf{Snglr}^{C^0}$ の対象である．

---

[a] より正確には，M を層状化空間 $(M \to [0])$ と同一視している．

【例 1.1.4】の意味で，C^0 級層状化空間は位相多様体の一般化と見做せる．しかしまだそこには C^∞ 構造を一般化した構造は入っておらず，C^∞ 多様体の一般化とは見做せない．

1.1.3 C^0 basic

定義 1.6: C^0 basic

$\boldsymbol{C^0}$ **級層状化空間** $(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ が $\boldsymbol{C^0}$**-basic** であるとは，ある $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ およびコンパクトな $\boldsymbol{C^0}$ **級層状化空間** $(Z \to Q) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ が存在して $(X \to P) = \bigl(\mathbb{R}^n \to [0]\bigr) \times \mathsf{C}\,(Z \to Q)$ が成り立つことを言う．

いま，C^0 basic な $(U \to P_U) = (\mathbb{R}^n \to [0]) \times \mathsf{C}\,(Z \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ を 1 つとる．コーンの定義から，U の点を $(v,\, [t,\, z]) \in \mathbb{R}^n \times \frac{\mathbb{R}_{\geq 0} \times Z}{\{0\} \times Z}$ と表示することができる．この表示の下で自己同相

$$\begin{aligned} \gamma\colon \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^n \times \mathsf{C}\,(Z) &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^n \times \mathsf{C}\,(Z), \\ \bigl(t,\, (v,\, p),\, [s,\, z]\bigr) &\longmapsto \bigl(t,\, (tv + p,\, p),\, [ts,\, z]\bigr) \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

を考える[*2]．

さらに，もう 1 つの C^0 basic な $(U' \to P_{U'}) = (\mathbb{R}^{n'} \to [0]) \times \mathsf{C}\,(Z' \to P') \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ および $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}}\bigl((U \to P_U),\, (U' \to P_{U'})\bigr)$ をとる．ただし，f はコーンポイントをコーンポイントへ写す，i.e. $\forall u \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(u,\, \mathrm{pt}) \in \mathbb{R}^{n'} \times \{\mathrm{pt}\}$ が成り立つことを仮定する．$f|_{\mathbb{R}^n}\colon \mathbb{R}^n \times \{\mathrm{pt}\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n'} \times \{\mathrm{pt}\}$ を f のコーンポイントへの制限として，

$$\begin{aligned} f_\Delta\colon \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^n \times \mathsf{C}\,(Z) &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^{n'} \times \mathsf{C}\,(Z'), \\ \bigl(t,\, v,\, p,\, [s,\, z]\bigr) &\longmapsto \bigl(t,\, f|_{\mathbb{R}^n}(v),\, f(p,\, [ts,\, z])\bigr) \end{aligned}$$

とおこう．

【例 1.1.5】

$Z = Z' = \emptyset$ のとき，f とは単に連続関数 $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n'}$ のことである．このとき，

$$\begin{aligned} (\gamma^{-1} \circ f_\Delta \circ \gamma)(t,\, v,\, p) &= \gamma^{-1} \circ f_\Delta(t,\, tv + p,\, p) \\ &= \gamma^{-1}\bigl(t,\, f(tv + p),\, f(p)\bigr) \\ &= \left(t,\, \frac{f(tv + p) - f(p)}{t},\, f(p)\right) \end{aligned}$$

と計算できるため，f が C^1 級であることと $\forall (v,\, p) \in T\mathbb{R}^n$ に対して $t \to +0$ の極限，i.e. v に沿った片側方向微分が存在することは同値である．

【例 1.1.5】 をもとに，C^0 basic な C^0 級層状化空間の間の層状化開埋め込みの **conically smoothness** を定義する．C^∞ 多様体の C^∞ 構造の定義においては，チャート $(U,\, \varphi\colon \mathbb{R}^n \to U),\, (V,\, \psi\colon \mathbb{R}^n \to V)$ の間の変換関数 $\psi^{-1} \circ \varphi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が C^∞ 級であることを要請した．次の小節で **conically smooth structure** の定義を行うが，その際にチャートに対応するものは **basic** $U = \mathbb{R}^n \times \mathsf{C}\,(Z)$ から着目している C^0-級層状化空間 X への層状化開埋め込み $\varphi\colon U \hookrightarrow X$ であり，概ね[*3]2 つのチャート $\varphi\colon U \hookrightarrow X,\, \psi\colon V \hookrightarrow X$ の間の変換関数 $\psi^{-1} \circ \varphi\colon U \longrightarrow V$ に対して conically smooth (along $\mathbb{R}^n$) であることを要請する．

[*2] 接束 $T\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^{2n}$ と微分同相である．[?, p.23] の記法に合わせて底空間 $\mathbb{R}^n$ の点を p，p 上のファイバーの元を v としたとき $(v,\, p) \in T\mathbb{R}^n$ と書いた．命題??の記法と順番が逆なので注意．

[*3] コーンポイントをコーンポイントに写さない変換関数も存在しうるので，これだけではいけない．

定義 1.7: $\mathbb{R}^n$ に沿って conically smooth

- C^0 basic な $(U \to P_U) = (\mathbb{R}^n \to [0]) \times \mathsf{C}(Z \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$
- C^0 basic な $(U' \to P_{U'}) = (\mathbb{R}^{n'} \to [0]) \times \mathsf{C}(Z' \to P') \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$
- $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}}\big((U \to P_U), (U' \to P_{U'})\big)$ であって，コーンポイントを保存するもの

を与える．このとき，f が $\mathbb{R}^n$ **に沿って** C^1 **級** (C^1 along $\mathbb{R}^n$) であるとは，以下の図式を可換にする連続写像

$$\tilde{D}f \colon \mathbb{R}_{\geq 0} \times T\mathbb{R}^n \times \mathsf{C}(Z) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \times T\mathbb{R}^{n'} \times \mathsf{C}(Z')$$

が存在することを言う[a]：

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}_{\geq 0} \times T\mathbb{R}^n \times \mathsf{C}(Z) \arrow[r, dashed, "\tilde{D}f"] & \mathbb{R}_{\geq 0} \times T\mathbb{R}^{n'} \times \mathsf{C}(Z') \\
\mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^n \times \mathsf{C}(Z) \arrow[u] \arrow[r, "\gamma^{-1} \circ f_\Delta \circ \gamma"'] & \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^{n'} \times \mathsf{C}(Z') \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

[a] 写像 $\gamma^{-1} \circ f_\Delta \circ \gamma$ の連続性から，拡張 $\tilde{D}f$ は存在すれば一意かつ連続である．

このような拡張が存在するとき，第一変数を $t = 0$ に制限して得られる連続写像を

$$\boldsymbol{Df} \colon T\mathbb{R}^n \times \mathsf{C}(Z) \longrightarrow T\mathbb{R}^{n'} \times \mathsf{C}(Z')$$

と書く．f が $\mathbb{R}^n$ **に沿って** C^r **級** であるとは，Df が $\mathbb{R}^n$ に沿って C^{r-1} 級であることを言う．f が $\mathbb{R}^n$ **に沿って conically smooth** であるとは，$\forall r \geq 1$ について C^r 級であることを言う．

1.1.4 conically smooth な層状化空間

次に行うべきは，与えられた C^0 級層状化空間 $(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ の上の **conically smooth structure** i.e. 変換関数が conically smooth であるような**極大アトラス**を定義することである．この手続きは，次で定義する次元と深さに関する帰納法によって構成される．

定義 1.8: 被覆次元

X を位相空間とする．以下の条件を充たす最小の $d \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$ のことを（存在すれば）X の**被覆次元** (covering dimension) と呼び，$\boldsymbol{\dim X}$ と書く：

(covering)

X の任意の開被覆 $\mathscr{U}$ に対して，十分細かい細分 $\mathscr{V}_{\mathscr{U}} \prec \mathscr{U}$ が存在して，任意の互いに異なる $\forall m > d+1$ 個の開集合 $V_1, \dots, V_m \in \mathscr{V}_{\mathscr{U}}$ の共通部分が空になるようにできる．特に，$\emptyset$ の被覆次元は -1 と定義する．

点 $x \in X$ における**被覆次元**を以下で定義する：

$$\dim_x X \coloneqq \inf \left\{ \dim U \geq -1 \,\middle|\, x \in U \underset{\text{open}}{\subset} X \right\}$$

定義 1.9: 次元と深さ

空でない $\boldsymbol{C^0}$ 級層状化空間 $(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ を与える．

- $(X \to P)$ の点 $x \in X$ における**局所的次元** (local dimension) とは，点 x における X の被覆次元 $\boldsymbol{\dim_x(X)}$ のことを言う．
- $(X \to P)$ の**次元** (dimension) とは

$$\boldsymbol{\dim(X \to P)} \coloneqq \sup_{x \in X} \dim_x(X)$$

のこと．

- $(X \xrightarrow{s} P)$ の点 $x \in X$ における**局所的深さ** (local depth) とは，

$$\boldsymbol{\mathrm{depth}_x(X \to P)} \coloneqq \dim_x(X) - \dim_x(X_{s(x)})$$

のこと．

- $(X \to P)$ の**深さ** (depth) とは，

$$\boldsymbol{\mathrm{depth}(X \to P)} \coloneqq \sup_{x \in X} \mathrm{depth}_x(X \to P)$$

のこと．ただし，$\mathrm{depth}(\emptyset) \coloneqq -1$ と定義する．

【例 1.1.6】コーンの深さ

n 次元位相多様体 Z について，定義から $\forall x \in Z$ に対して $\dim_x(Z) = n$ が成り立つ．Z を【例 **1.1.4**】により C^0 級層状化空間 $(Z \xrightarrow{s} [0]) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ と見做すと，これのコーン $\mathsf{C}\left(Z \xrightarrow{s} [0]\right)$ について

$$\mathrm{depth}_x\left(\mathsf{C}\left(Z \xrightarrow{s} [0]\right)\right) = \begin{cases} n+1, & x = \mathrm{pt}, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

であることがわかる．実際 $\mathsf{C}(Z)_{\mathsf{C}(s)(\mathrm{pt})} = \{\mathrm{pt}\}$ であるが，1 点からなる位相空間の被覆次元は 0 次元なので $\dim_{\mathrm{pt}}(\mathsf{C}(Z)_{\mathsf{C}(s)(\mathrm{pt})}) = 0$ である．一方，コーンポイント以外の点 $x \in \mathsf{C}(Z)$ に対して $\mathsf{C}(s)(x)$-層は $\mathsf{C}(Z)_{\mathsf{C}(s)(x)} = \mathbb{R}_{>0} \times Z \approx \mathbb{R} \times Z$ であるから，$\dim_x(\mathsf{C}(Z)_{\mathsf{C}(s)(x)}) = n+1$ と計算できる[a]．

また，$\forall (X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ に対して

$$
\begin{aligned}
\dim\bigl((\mathbb{R}^m \to [0]) \times (X \to P)\bigr) &= m + \dim\bigl(X \to P\bigr), \\
\mathrm{depth}\bigl((\mathbb{R}^m \to [0]) \times (X \to P)\bigr) &= \mathrm{depth}\bigl(X \to P\bigr)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．従って，C^0 basic な $(U \to P_U) = (\mathbb{R}^n \to [0]) \times \mathsf{C}(Z \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ に対して

$$
\begin{aligned}
\mathrm{depth}(U \to P_U) &= \mathrm{depth}\bigl(\mathsf{C}(Z \to P)\bigr) \\
&= \dim(Z \to P) + 1
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

[a] さらに，$\forall x \in \mathsf{C}(Z)$ に対して $\dim_x \mathsf{C}(Z) = n+1$ である．

次元と深さに関する帰納法を実行する前に，構成したい (1, 1)-圏を表す記号の整理をしておこう：

- conically smooth チャートの素材となる，**basic** が成す圏

$$\mathbf{Bsc}$$

これは，C^∞ 多様体の圏 $\mathbf{Mfld}$ において $\mathbb{R}^n$ $(\forall n \geq -1)$ 全体が成す充満部分圏に相当するものである．

- 与えられた C^0 級層状化空間 $(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ に対して，その上に入る**極大アトラス**[*4]全体が成す集合を返す前層

$$\mathsf{Sm}\colon (\mathbf{Snglr}^{C^0})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

この対応が前層であることの直観は，層状化開埋め込み $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}}\bigl((X \to P), (Y \to Q)\bigr)$ が与えられると，$(X \to P)$ 上の極大アトラス $\mathsf{Sm}(X \to P)$ が $(Y \to Q)$ 上の極大アトラス $\mathsf{Sm}(Y \to Q)$ を「制限」する写像 $\mathsf{Sm}(f)\colon \mathsf{Sm}(Y \to Q) \longrightarrow \mathsf{Sm}(X \to P)$ によって得られるということである．

- 深さが k 以下，かつ次元が n 以下であるような C^0 級層状化空間全体が成す $\mathbf{Snglr}^{C^0}$ の充満部分圏を

$$\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\underbrace{\leq k}_{\text{depth}},\ \underbrace{\leq n}_{\text{dimension}}}$$

と書く．同様に

$$\mathbf{Bsc}_{\leq k,\, \leq n}, \qquad \mathsf{Sm}_{\leq k,\, \leq n}\colon (\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k,\, \leq n})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

と書く．

[*4] 存在するか分からないし，存在したとして一意であるとは限らない．実際，例えば C^∞ 多様体の段階においてさえ $\mathbb{R}^4$ の上の極大アトラス（i.e. C^∞ 構造）は非可算無限個存在する [?].

- **conically smooth な層状化空間**の圏

$$\mathbf{Snglr}$$

これを作ることが本小節の最終目標である．

帰納法により，$\forall k \geq -1$ に対して $\mathbf{Bsc}_{\leq k,\, \leq\infty}$ および $\mathsf{Sm}_{\leq k,\, \leq\infty} \colon (\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k,\, \leq\infty})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ が構成される．

定義 1.10: 帰納法の出発点

(Snglr-1) より $(\emptyset \to \emptyset) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq -1,\, \leq\infty})$ である．

(1) $\mathbf{Bsc}_{\leq -1,\, \leq\infty} := \emptyset$

(2) $\mathsf{Sm}_{\leq -1,\, \leq\infty}(\emptyset) := \{*\}$

と定義する．

仮定 1.1: 帰納法の仮定

与えられた $k \geq -1$ に対して以下の構成が完了していると仮定する：

(1) 圏 $\mathbf{Bsc}_{\leq k,\, \leq\infty}$

(2) 前層 $\mathsf{Sm}_{\leq k,\, \leq\infty} \colon (\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k,\, \leq\infty})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$

(3) 関手

$$\begin{aligned}\mathbb{R} \times (\text{-}) \colon \mathbf{Bsc}_{\leq k,\, \leq\infty} &\longrightarrow \mathbf{Bsc}_{\leq k,\, \leq\infty}, \\ U &\longmapsto \mathbb{R} \times U, \\ \big(U \xrightarrow{f} V\big) &\longmapsto \big(\mathbb{R} \times U \xrightarrow{\mathrm{id} \times f} \mathbb{R} \times V\big)\end{aligned}$$

およびそれが誘導する自然変換[a]

$$\begin{tikzcd} (\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k,\, \leq\infty})^{\mathrm{op}} \arrow[rr, bend left, "\mathsf{Sm}_{\leq k,\, \leq\infty}(\text{-})"] \arrow[rr, bend right, "\mathsf{Sm}_{\leq k,\, \leq\infty}(\mathbb{R}\times\text{-})"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow"] & & \mathbf{Sets} \end{tikzcd}$$

[a] X の極大アトラス $\{U_\alpha,\, \varphi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ に対して，$\{\mathbb{R} \times U_\alpha,\, \mathrm{id} \times \varphi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ を対応づける．

定義 1.11: 圏 $\mathbf{Bsc}_{\leq k+1,\, \leq\infty}$

帰納法の仮定 1.1 がある $k \geq -1$ において成立しているとする．また，C^0 basic を $U^n_Z := (\mathbb{R}^n \to [0]) \times \mathsf{C}\,(Z \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ と書く．このとき，圏 $\mathbf{Bsc}_{\leq k+1,\, \leq\infty}$ を以下で定義する：

(対象)

C^0 basic [a] $U^n_Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\le k+1,\,\le\infty})$ および，極大アトラス $\mathcal{A}_Z \in \mathsf{Sm}_{\le k,\,\le\infty}(Z \to P)$ の組み

$$(U^n_Z,\ \mathcal{A}_Z)$$

を対象とする．これを **basic** と呼ぶ．

(射)

任意の 2 つの対象 $(U^n_Z,\ \mathcal{A}_Z),\ (U^m_W,\ \mathcal{A}_W) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Bsc}_{\le k+1,\,\le\infty})$ に対して，以下の条件を充たす層状化開埋め込み $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\le k+1,\,\le\infty}}\bigl(U^n_Z,\ U^m_W\bigr)$ を射とする：

f がコーンポイントを保存しない場合

ある層状化開埋め込み $f_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\le k+1,\,\le\infty}}\bigl(U^n_Z,\ \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \times W\bigr)$ が存在して

$$f\colon U^n_Z \xrightarrow{f_0} \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}_{>0} \times W) \hookrightarrow U^m_W = \mathbb{R}^m \times \mathsf{C}\,(W)$$

と書けて，かつ $(U^n_Z,\ f_0) \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \times W} \in \mathsf{Sm}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \times W)$

f がコーンポイントを保存する場合

f は $\mathbb{R}^n$ に沿って conically smooth であって，かつ $Df\colon \mathbb{R}^n \times U^n_Z \longrightarrow \mathbb{R}^m \times U^m_W$ が単射であり，かつ

$$\mathcal{A}_{f^{-1}(U^m_W \setminus \mathbb{R}^m)} = \mathsf{Sm}_{\le k,\,\le\infty}\bigl(f|_{f^{-1}(U^m_W \setminus \mathbb{R}^m)}\bigr)\bigl(\mathcal{A}_{U^m_W \setminus \mathbb{R}^m}\bigr)$$

を充たす[b]．ただし，$U^m_W \setminus \mathbb{R}^m := U^m_W \setminus (\mathbb{R}^m \times \{\mathrm{pt}\}) = \mathbb{R}^{m+1} \times W$ と略記した．

---

[a] depth の定義から $\mathrm{depth}(Z \to P) \le \dim(Z \to P)$ である．故に【例 1.1.6】から，$\mathrm{depth}(Z \to P) \le \dim(Z \to P) = \mathrm{depth}\, U^n_Z - 1 \le k$ であること，i.e. $(Z \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\le k,\,\le\infty})$ が分かる．

[b] ここで帰納法の仮定 1.1-(3) を暗に使っている．

定義 1.12: 前層 $\mathsf{Sm}_{\le k+1,\,\le\infty}$

帰納法の仮定 1.1 がある $k \ge -1$ において成立しているとする．さらに定義 1.11 によって $\mathbf{Bsc}_{\le k+1,\,\le\infty}$ が完成しているとする．

- C^0 級層状化空間 $\forall (X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\le k+1,\,\le\infty})$ に対して，$X \to P$ の**アトラス** (atlas) を族

$$\mathcal{A} := \Bigl\{\bigl(U_\alpha \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Bsc}_{\le k+1,\,\le\infty}),\ \varphi_\alpha\colon U_\alpha \hookrightarrow (X \to P)\bigr)\Bigr\}_{\alpha \in \Lambda} \in \mathsf{Sm}_{\le k+1,\,\le\infty}(X \to P)$$

であって以下の条件を充たすものとして定義する：

(Atlas-1)

$\mathcal{A}$ は $(X \to P)$ の開被覆である．

(Atlas-2)

$\forall \alpha,\ \beta \in \Lambda$ および $\forall x \in \varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta)$ に対して，圏 $\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\le k+1,\,\le\infty}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd} \exists W \arrow[r, hook, "f_\beta"] \arrow[d, hook, "f_\alpha"'] & U_\beta \arrow[d, hook, "\varphi_\beta"] \\ U_\alpha \arrow[r, hook, "\varphi_\alpha"'] & X \end{tikzcd}$$

が存在して $x \in \varphi_\alpha \circ f_\alpha(W) = \varphi_\beta \circ f_\beta(W)$ を充たす．ただし，可換図式中の赤色の部分は全て圏 $\mathbf{Bsc}_{\leq k+1,\, \leq\infty}$ の対象および射からなる．

アトラス $\mathcal{A}$ の元 $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ のことを**チャート** (chart) と呼ぶ．

- C^0 級層状化空間 $\forall(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k+1,\, \leq\infty})$ の 2 つのアトラス $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ が**同値**であるとは，$\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ が $(X \to P)$ のアトラスであることを言う．これは $(X \to P)$ のアトラス全体の集合の上に同値関係を定める[a]．$(X \to P)$ の**極大アトラス** (maximal atlas) とは，この同値関係によるアトラス $\mathcal{A}$ の同値類 $[\mathcal{A}]$ のことを言う．
- 前層

$$\mathsf{Sm}_{\leq k+1,\, \leq\infty} \colon (\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k+1,\, \leq\infty})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を以下のように定義する：

(対象)

任意の C^0 級層状化空間 $(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k+1,\, \leq\infty})$ に対して

$$\mathsf{Sm}_{\leq k+1,\, \leq\infty}(X \to P) \coloneqq \left\{ [\mathcal{A}] \;\middle|\; \mathcal{A} \text{ is an atlas of } (X \to P) \right\}$$

(射)

任意の層状化開埋め込み $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k+1,\, \leq\infty}}\big((X \to P), (Y \to Q)\big)$ に対して，f によるアトラスの引き戻しを対応付ける．

[a] 同値関係であることの証明は [**?**, Lemma 3.2.11.] を参照．

以上の帰納法をまとめて，conically smooth な層状化空間と層状化開埋め込みの圏 $\mathbf{Snglr}$ を得る．

定義 1.13: 圏 Snglr

- basic のなす圏 $\mathbf{Bsc}$ を以下で定義する：

$$\mathbf{Bsc} \coloneqq \bigcup_{k\geq -1} \mathbf{Bsc}_{\leq k,\, \leq\infty}$$

- 極大アトラスの集合を与える関手 $\mathsf{Sm}\colon (\mathbf{Snglr}^{C^0})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ を以下の右 Kan 拡張として定義する：

$$\begin{tikzcd} (\mathbf{Snglr}^{C^0}_{<\infty,\, \leq\infty})^{\mathrm{op}} \arrow[r, "\mathsf{Sm}_{<\infty,\, \leq\infty}"] \arrow[d, hook] & \mathbf{Sets} \\ (\mathbf{Snglr}^{C^0})^{\mathrm{op}} \arrow[ur, dashed, "\mathsf{Sm}"'] & \end{tikzcd}$$

ただし，$\mathbf{Snglr}^{C^0}_{<\infty,\, \leq\infty} \coloneqq \bigcup_{k\geq -1} \mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k,\, \leq\infty}$ とおいた．

- **conically smooth な層状化空間** (conically smooth stratified space) と層状化開埋め込みの圏 $\mathbf{Snglr}$ を以下で定義する：

(対象)

C^0 級層状化空間 $(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ およびその極大アトラス $\mathcal{A}_{\mathcal{X}} \in \mathsf{Sm}(X \to P)$ の組み $\big((X \to P),\, \mathcal{A}_X\big)$ を対象とする．

(射)

層状化開埋め込み $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}}\big((X \to P),\, (Y \to Q)\big)$ であって，$f^*\mathcal{A}_Y = \mathcal{A}_X$ を充たすものを射とする．

1.1.5 conically smooth map

ここまでは層状化開埋め込みのみを考えていたため，一般の層状化写像の conically smoothness を定義しなくてはいけない．

定義 1.14: conically smooth map

2 つのbasic[a] $X = (U^n_Z, \mathcal{A}_Z)$, $Y = (U^m_W, \mathcal{A}_W) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Bsc})$ の間の層状化写像 $f\colon U^n_Z \longrightarrow U^m_W$ が **conically smooth** であることを，depth(Y) に関する帰納法によって定義する：

(1) まず，$\mathrm{depth}(Y) = -1$ のときは $X = Y = \emptyset$ であり，一意的に定まる X, Y 間の層状化写像が conically smooth であると定義する．

(2) 深さ $k \geq -1$ の basic に対して定義が完了しているとする．$Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Bsc})$ の深さが高々 $k+1$ であるとき，層状化写像 $f\colon X \longrightarrow Y$ が conically smooth であることを以下で定義する：

f がコーンポイントを保存しない場合

ある conically smooth な層状化写像 $f_0\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \times W$ が存在して

$$f\colon X \xrightarrow{f_0} \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}_{>0} \times W) \hookrightarrow Y = \mathbb{R}^m \times \mathsf{C}(W)$$

と書ける[b]．

f がコーンポイントを保存する場合

f は $\mathbb{R}^n$ に沿って conically smooth であって，かつ制限

$$f|_{f^{-1}(Y \setminus \mathbb{R}^m)}\colon f^{-1}(Y \setminus \mathbb{R}^m) \longrightarrow Y \setminus \mathbb{R}^m$$

が conically smooth．ただし，$U^m_W \setminus \mathbb{R}^m := U^m_W \setminus (\mathbb{R}^m \times \{\mathrm{pt}\}) = \mathbb{R}^{m+1} \times W$ と略記した．

[a] C^0 basic を $U^n_Z := (\mathbb{R}^n \to [0]) \times \mathsf{C}(Z \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ と書く．

[b] 【例 1.1.6】より $\mathrm{depth}(W) < k+1$ であり，帰納法の仮定が使える．

conically smooth な層状化空間 $\big((X \to P), \mathcal{A}_X\big)$, $\big((Y \to Q), \mathcal{A}_Y\big) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr})$ の間の層状化写像 $f\colon (X \to P) \longrightarrow (Y \to Q)$ が **conically smooth** であるとは，任意のチャートの組み合わせ $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_X$, $(V, \psi) \in \mathcal{A}_Y$ に対して

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi\colon U \longrightarrow V$$

が conically smooth (for basics) であることを言う．

命題 1.1: conically smooth map の基本性質

2 つの conically smooth map の合成も conically smooth である．

証明 [?, Proposition 3.3.5] ■

命題 1.1 より，**conically smooth な層状化空間**の圏を定義できる．

定義 1.15: conically smooth な層状化空間の圏 Strat

conically smooth な層状化空間の圏 **Strat** を以下で定義する：

(対象)

圏 **Sniglr** と全く同じ対象を持つ：

$$\mathrm{Ob}(\mathbf{Strat}) \coloneqq \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr})$$

(射)

conically smooth map を射とする．

定義から明らかに $\mathbf{Snglr} \subset \mathbf{Strat}$ である．ここで，圏 **Strat** における特別な射に名前をつけておこう：

定義 1.16: constructuble bundle

- conically smooth な層状化写像 $\pi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}\big((E \to P),\, (B \to Q)\big)$ が**層状化ファイバー束** (conically smooth fiber bundle) であるとは，conically smooth な層状化開埋め込みの族 $\{U_\alpha \hookrightarrow B\}_{\alpha\in\Lambda}$, $\{\varphi_\alpha \colon U_\alpha \times F_\alpha \hookrightarrow E\}_{\alpha\in\Lambda}$ が存在して以下を充たすことを言う：

  (Bun-1)

  $\forall \alpha \in \Lambda$ に対して，圏 **Strat** における引き戻しの図式

$$\begin{tikzcd} U_\alpha \times F_\alpha \arrow[r, hook, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{proj}_1"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ U_\alpha \arrow[r, hook] & B \end{tikzcd}$$

  が成り立つ．

  (Bun-2)

  族 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ は B の開基である．

- conically smooth な層状化写像 $\pi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}\big((E \to P),\, (B \to Q)\big)$ が**弱構成可能束** (weakly constructuble bundle) であるとは，$\forall q \in Q$ に対して，π の q-層への制限

$$\pi|_{\pi^{-1}(B_q)} \colon \pi^{-1}(B_q) \longrightarrow B_q$$

  が層状化ファイバー束であることを言う．

- conically smooth な層状化写像 $\pi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}\big((E \to P),\, (B \to Q)\big)$ が**構成可能束** (constructuble bundle) であることを，depth(E) に関する帰納法によって定義する：

  (1) $\mathrm{depth}(E) = 0$ のとき，π が構成可能束であるとは，π が C^∞ ファイバー束であることを言う．

  (2) 深さ $k \geq 0$ までの定義が完了しているとする．$\mathrm{depth}(E) \leq k+1$ のとき，π が構成可能束であるとは，以下の 2 条件を充たすことを言う：

  (cBun-1) π は弱構成可能束である．

  (cBun-2) $\forall q \in Q$ に対して，π が誘導する層状化写像

$$\mathrm{Link}_{\pi^{-1}(B_q)}(E) \longrightarrow \pi^{-1}(B_q) \times_{B_q} \mathrm{Link}_{B_q}(B)$$

  が構成可能束である．

1.1.6 管状近傍・ハンドル分解

1.2 層状化空間の接構造

1.2.1 Kan-豊穣化

圏 **Kan** を,

- Kan 複体を対象に持つ
- Kan 複体の間の自然変換を射に持つ

(1, 1)-圏とする．**Kan** は単体的集合の圏 **sSet** の充満部分圏であり，直積 (**??**) をテンソル積とするモノイダル圏になる．

定義 1.17: 余単体的多様体

以下で定義する関手

$$\boldsymbol{\Delta_e} \colon \Delta \longrightarrow \mathbf{Strat}$$

のことを**余単体的多様体** (standard cosimplicial manifold) と呼ぶ[a]：

- $[n] \in \mathrm{Ob}(\Delta)$ を，conically smooth な層状化空間

$$\Delta_e^n \coloneqq \left\{ (x^0, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n} x^i = 1 \right\}$$

に対応付ける．

- $\alpha \in \mathrm{Hom}_\Delta([m], [n])$ を，conically smooth な層状化写像

$$\begin{aligned} \Delta_e(\alpha) \colon \Delta_e^m &\longrightarrow \Delta_e^n, \\ (x^0, \dots, x^m) &\longmapsto \Bigl(\sum_{j,\, \alpha(j)=0} x^j, \dots, \sum_{j,\, \alpha(j)=n} x^j \Bigr) \end{aligned}$$

に対応付ける．

[a] 幾何学的 n-単体に似ているが，$x^i \geq 0$ の領域で切り取っていない．

$\mathrm{PSh}(\mathbf{Strat}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Sets})$ から **sSet** への関手を

$$\begin{aligned} (\text{-})|_\Delta \colon \mathrm{PSh}(\mathbf{Strat}, \mathbf{Sets}) &\longrightarrow \mathbf{sSet}, \\ F &\longmapsto F \circ \Delta_e \end{aligned}$$

で定義する．さらに，$\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Strat})$ に対して前層 $\widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{trat}}}(X, Y) \in \mathrm{PSh}(\mathbf{Strat}, \mathbf{Sets})$ を

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{trat}}}(X, Y) \colon \mathbf{Strat}^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathbf{Sets}, \\ Z &\longmapsto \left\{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}(Z \times X, Z \times Y) \;\middle|\; \mathrm{proj}_Z \circ f = \mathrm{proj}_Z \right\}, \end{aligned}$$

$$(Z \xrightarrow{\alpha} W) \longmapsto \begin{pmatrix} \widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{trat}}}(X,Y)(Z) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{trat}}}(X,Y)(W), \\ f \longmapsto \Big((w,x) \mapsto \big(w, \mathrm{proj}_Y \circ f(\alpha(w),x)\big) \Big) \end{pmatrix}$$

で定義する．ただし，conically smooth な層状化写像 $\mathrm{proj}_Z \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}(Z \times X,\, Z)$ とは第一成分への射影のことである．同様にして前層 $\widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{nglr}}}(X,\, Y) \in \mathrm{PSh}(\mathbf{Strat},\, \mathbf{Sets})$ を

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{nglr}}}(X,\, Y) \colon \mathbf{Strat}^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathbf{Sets}, \\ Z &\longmapsto \{\, f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(Z \times X,\, Z \times Y) \mid \mathrm{proj}_Z \circ f = \mathrm{proj}_Z \,\}, \\ (Z \xrightarrow{\alpha} W) &\longmapsto \begin{pmatrix} \widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{nglr}}}(X,Y)(Z) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{nglr}}}(X,Y)(W), \\ f \longmapsto \Big((w,x) \mapsto \big(w, \mathrm{proj}_Y \circ f(\alpha(w),x)\big) \Big) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

で定義する．

補題 1.1:

$\forall X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Strat})$ に対して定まる単体的集合

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{trat}}(X,\, Y) \coloneqq \widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{trat}}}(X,\, Y)\Big|_{\Delta},$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{nglr}}(X,\, Y) \coloneqq \widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{nglr}}}(X,\, Y)\Big|_{\Delta}$$

は Kan 複体である．

証明　[?, Lemma 4.1.4.]. ■

定義 1.18: $(\infty,\, 1)$-圏 $\mathcal{S}\mathrm{trat}$, $\mathcal{S}\mathrm{nglr}$, $\mathcal{B}\mathrm{sc}$

Kan-豊穣圏 $\mathcal{S}\mathbf{trat}$ を以下で定義する：

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{S}\mathbf{trat}) \coloneqq \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr})$
- 補題 1.1 で構成した $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{trat}}(X,\, Y) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Kan})$ を Hom 対象とする．

同様に，**Kan-豊穣圏 $\mathcal{S}\mathbf{nglr}$** を以下で定義する：

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{S}\mathbf{nglr}) \coloneqq \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr})$
- 補題 1.1 で構成した $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{nglr}}(X,\, Y) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Kan})$ を Hom 対象とする．

Kan-豊穣圏 $\mathcal{S}\mathbf{nglr}$ の対象を $\mathrm{Ob}(\mathbf{Bsc})$ に制限して得られる充満部分圏を $\mathcal{B}\mathbf{sc}$ と書く．

> ! **Kan-豊穣圏**を homotopy coherent nerve functor $\mathrm{N_{hc}} \colon \mathbf{Cat}_{\boldsymbol{\Delta}} \longrightarrow \mathbf{sSet}$ で単体的集合の圏 $\mathbf{sSet}$ へ埋め込んだものは $(\infty,\, 1)$-圏である [?, Proposition 1.1.5.10.]．故に以下では **Kan-豊穣圏 $\mathcal{S}\mathbf{trat}$, $\mathcal{S}\mathbf{nglr}$** と $(\infty,\, 1)$-圏 $\mathrm{N_{hc}}(\mathcal{S}\mathbf{trat})$, $\mathrm{N_{hc}}(\mathcal{S}\mathbf{nglr})$ を区別しない．

1.2.2 $(\infty, 1)$-圏におけるファイブレーション

定義 1.19: $(\infty, 1)$-ファイブレーション

$p\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{B}$ を $(\infty, 1)$-圏の関手とする．

(lifting property)

包含 $\iota \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda^n_j, \Delta^n)$ に関して $p \circ f_0 = f \circ \iota$ を充たす任意の $(f_0, f) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda^n_j, \mathcal{E}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n_j, \mathcal{B})$ に対して，以下の図式を可換にする $\bar{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \mathcal{E})$ が存在する：

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_j \arrow[r, "\forall f_0"] \arrow[d, hook, "\iota"'] & \mathcal{E} \arrow[d, "p"] \\ \Delta^n \arrow[r, "\forall f"'] \arrow[ur, dashed, "\exists \bar{f}"] & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

- p が**内的ファイブレーション** (inner fibration) であるとは，$0 < \forall j < \forall n$ に対して **(lifting property)** を充たすことを言う．
- p が**右ファイブレーション** (right fibration) であるとは，$0 < \forall j \le \forall n$ に対して **(lifting property)** を充たすことを言う．
- p が**左ファイブレーション** (left fibration) であるとは，$0 \le \forall j < \forall n$ に対して **(lifting property)** を充たすことを言う．
- p が **Kan ファイブレーション** (Kan fibration) であるとは，$0 \le \forall j \le \forall n$ に対して **(lifting property)** を充たすことを言う．

系??によると，**(lifting property)** は，$(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{B}$ における角の図式 $\left(p_{[n-1]}(f_{00}), \dots, \underbrace{\bullet}_{j}, \dots, p_{[n-1]}(f_{0n})\right) \in (\mathcal{B}_{n-1})^{\times n}$ を n-射 $f \in \mathcal{B}_n$ が埋めているならば，$(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{E}$ における角の図式 $\left(f_{00}, \dots, \underbrace{\bullet}_{j}, \dots, f_{0n}\right) \in (\mathcal{E}_{n-1})^{\times n}$ を埋める n-射 $\bar{f} \in \mathcal{E}_n$ が存在することを主張している．

定義 1.20: 充満部分 $(\infty, 1)$-圏

- $(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}$ の**部分 $(\infty, 1)$-圏** (sub $(\infty, 1)$-category) とは，単体的部分集合 $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$ であって，その包含写像 $i\colon \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{C}$ が内的ファイブレーションであるようなもののこと[a]．
- 部分 $(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$ が**充満部分 $(\infty, 1)$-圏** (full sub $(\infty, 1)$-category) であるとは，$\forall n \ge 0$ に対して以下の条件を充たすことを言う：

  (fullsub) $\forall \sigma \in \mathcal{C}_n \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \mathcal{C})$ に対して，$\sigma_{[0]}(\Delta^n_0) \subset \mathcal{S}_0 \implies \sigma \in \mathcal{S}_n$ が成り立つ．

[a] このとき $\mathcal{S}$ は $(\infty, 1)$-圏になる [?, Tag 01CG]

2 つの右ファイブレーション $\mathcal{E} \xrightarrow{p} \mathcal{B}$, $\mathcal{E}' \xrightarrow{p'} \mathcal{B}$ が与えられたとき，これらの間の射とは集合

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}') := \left\{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}') \;\middle|\; p' \circ f = p \right\}$$

のことである．$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E},\,\mathcal{E}')$ の元を **sSet** における可換図式として表すと以下の通り：

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathcal{E}' \arrow[dl, "p'"] \\
& \mathcal{B} &
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E},\,\mathcal{E}') \subset \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\mathcal{E},\,\mathcal{E}')$ を【例??】の方法で単体的集合と見做せる．このようにして得られる単体的集合 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E},\,\mathcal{E}')$ の最大の部分 Kan 複体を $\boldsymbol{\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E},\,\mathcal{E}')}$ と書く．

定義 1.21: 右ファイブレーションの成す $(\infty,\,1)$-圏

$\mathcal{B}$ を $(\infty,\,1)$-圏とする．**Kan-豊穣圏** $\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}}$ を

- 右ファイブレーションを対象とする
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E},\,\mathcal{E}')$ を Hom 対象とする

ことで定義する．以降では $(\infty,\,1)$-圏 $\mathrm{N_{hc}}(\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}}) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{sSet})$ のことも $\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}}$ と書き，区別しない．

1.2.3 $(\infty,\,1)$-圏におけるスライス圏

定義 1.22: 単体的集合の join

2 つの単体的集合 $S,\,T \in \mathrm{Ob}(\mathbf{sSet})$ の **join** とは，単体的集合

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S \star T} \colon \Delta^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathbf{Sets}, \\
[n] &\longmapsto \coprod_{[i];\,-1\le i\le n} (S_i \times T_{n-i-1}), \\
\left([m] \xrightarrow{\alpha} [n]\right) &\longmapsto \left(\left([i];\,(x,\,y)\right) \mapsto \left(\alpha^{-1}([i]);\,\left(S(\alpha|_{\alpha^{-1}([i])})(x),\,T(\alpha|_{\alpha^{-1}([m]\setminus[i])})(y)\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

のこと．ただし $S_{-1} = T_{-1} \coloneqq \{*\}$, $[-1] \coloneqq \emptyset$ とおいた．

$d^n_j \in \mathrm{Hom}_{\Delta^{\mathrm{op}}}([n],\,[n-1])$ に対して

$$(d^n_j)^{-1}([i]) = \begin{cases} [i], & -1 \le i < j \\ [i-1], & j \le i \le n \end{cases}$$

$$(d^n_j)^{-1}([n]\setminus[i]) = \begin{cases} [n-1]\setminus[i], & -1 \le i < j \\ [n-1]\setminus[i-1], & j \le i \le n \end{cases}$$

であるから，$S \star T$ の面写像は $n \ge 1,\, 0 \le j \le n$ に対して

$$\partial^n_j \colon \coprod_{-1\le i\le n} (S_i \times T_{n-i-1}) \longrightarrow \coprod_{-1\le i\le n-1} (S_i \times T_{n-i-2}), \tag{1.2.1}$$

$$
\bigl([i];\,(x,\,y)\bigr) \longmapsto \begin{cases} \bigl([-1];\,(*,\,\partial_j^n y)\bigr), & i = -1 \\ \bigl([i];\,(x,\,\partial_{j-i-1}^{n-i-1} y)\bigr), & 0 \le i < j,\ (i,\,j) \neq (n-1,\,n) \\ \bigl([i-1];\,(\partial_j^i x,\,y)\bigr), & j \le i \le n-1,\ (i,\,j) \neq (0,\,0) \\ \bigl([n-1];\,(\partial_j^n x,\,*)\bigr), & i = n \\ \bigl([n-1];\,(x,\,*)\bigr), & (i,\,j) = (n-1,\,n) \\ \bigl([-1];\,(*,\,y)\bigr), & (i,\,j) = (0,\,0) \end{cases}
$$

となる．

【例 1.2.1】join $\Delta^0 \star \Delta^0$

$\Delta^0 \star \Delta^0$ を計算してみよう[a]．まず対象は

$$
(\Delta^0 \star \Delta^0)_0 = {\Delta^0}_0 \sqcup {\Delta^0}_0 = \left\{ \begin{array}{c} \{0\} \\ \bullet \\ \\ \bullet \\ \{0\} \end{array} \right\}
$$

である．1-射は

$$
(\Delta^0 \star \Delta^0)_1 = {\Delta^0}_1 \sqcup (\Delta^0_0 \times \Delta^0_0) \sqcup {\Delta^0}_1
$$

であるが，(1.2.1) より始点関数は

$$
\begin{aligned} \partial_1^1|_{\Delta^0_0 \times \Delta^0_0} \colon \Delta^0_0 \times \Delta^0_0 &\longrightarrow {\Delta^0}_0 \sqcup {\Delta^0}_0, \\ (\{0\},\,\{0\}) &\longmapsto \{0\} \end{aligned}
$$

終点関数は

$$
\begin{aligned} \partial_0^1|_{\Delta^0_0 \times \Delta^0_0} \colon \Delta^0_0 \times \Delta^0_0 &\longrightarrow {\Delta^0}_0 \sqcup {\Delta^0}_0, \\ (\{0\},\,\{0\}) &\longmapsto \{0\} \end{aligned}
$$

となるため，${\Delta^0}_1$, ${\Delta^0}_1$ が縮退していることを考慮すると

$$
(\Delta^0 \star \Delta^0)_1 = \left\{ \begin{array}{c} \{0\} \\ \bullet \\ \downarrow \\ \bullet \\ \{0\} \end{array} \right\}
$$

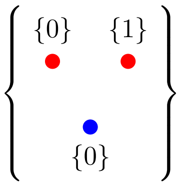
と図示できる．

[a] 左右の区別を付けるために色を付けた．

【例 1.2.2】join $\Delta^1 \star \Delta^0$

$\Delta^1 \star \Delta^0$ を計算してみよう．まず対象は

$$(\Delta^1 \star \Delta^0)_0 = {\Delta^1}_0 \sqcup {\Delta^0}_0 =$$



である．1-射は

$$(\Delta^1 \star \Delta^0)_1 = {\Delta^1}_1 \sqcup (\Delta^1_0 \times \Delta^0_0) \sqcup {\Delta^0}_1$$

であるが，(1.2.1) より始点関数は

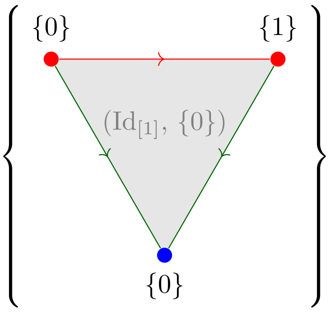
$$\begin{aligned} \partial^1_1|_{\Delta^1_0 \times \Delta^0_0} \colon \Delta^1_0 \times \Delta^0_0 &\longrightarrow {\Delta^1}_0 \sqcup {\Delta^0}_0, \\ (x,\, \{0\}) &\longmapsto x \end{aligned}$$

終点関数は

$$\begin{aligned} \partial^1_0|_{\Delta^1_0 \times \Delta^0_0} \colon \Delta^1_0 \times \Delta^0_0 &\longrightarrow {\Delta^1}_0 \sqcup {\Delta^0}_0, \\ (x,\, \{0\}) &\longmapsto \{0\} \end{aligned}$$

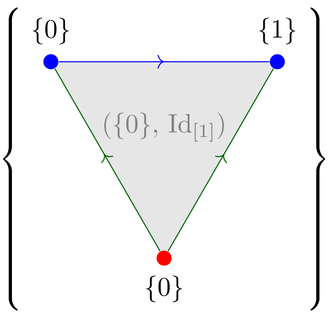
となるため，

$$\Delta^1 \star \Delta^0 =$$



と図示できる．ただし，三角形の内部は 2-射 $(\mathrm{Id}_{[1]},\, \{0\}) \in \Delta^1_1 \times \Delta^0_0 \subset (\Delta^1 \star \Delta^0)_2$ が埋めている．同様に

$$(\Delta^0 \star \Delta^1)_1 =$$

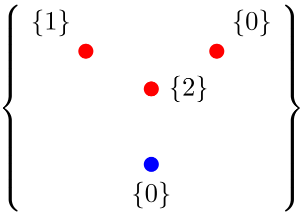


であることが分かる．

【例 1.2.3】join $\Delta^2 \star \Delta^0$

$\Delta^2 \star \Delta^0$ を計算してみよう．まず

$$(\Delta^2 \star \Delta^0)_0 = {\Delta^2}_0 \sqcup {\Delta^0}_0 =$$



である．次に 1 射は

$$(\Delta^2 \star \Delta^0)_1 = {\Delta^2}_1 \sqcup (\Delta^2_0 \times \Delta^0_0) \sqcup {\Delta^0}_1$$

であるが，(1.2.1) より始点関数は

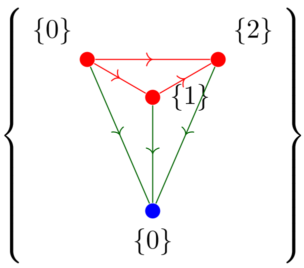
$$\begin{aligned} \partial^1_1|_{\Delta^2_0 \times \Delta^0_0} \colon \Delta^2_0 \times \Delta^0_0 &\longrightarrow {\Delta^2}_0 \sqcup {\Delta^0}_0, \\ (x, \mathrm{Id}_{\{0\}}) &\longmapsto x \end{aligned}$$

となり，終点関数は

$$\begin{aligned} \partial^1_0|_{\Delta^2_0 \times \Delta^0_0} \colon \Delta^2_0 \times \Delta^0_0 &\longrightarrow {\Delta^2}_0 \sqcup {\Delta^0}_0, \\ (x, \mathrm{Id}_{\{0\}}) &\longmapsto \{0\} \end{aligned}$$

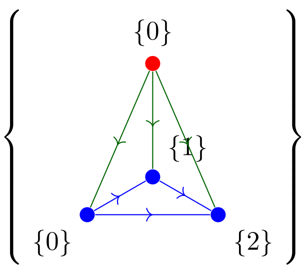
となる．従って図式**??**に倣うと

$$(\Delta^2 \star \Delta^0)_1 = {\Delta^2}_1 \sqcup (\Delta^2_0 \times \Delta^0_0) \sqcup {\Delta^0}_1 =$$



と図示できる．ただし，四面体の内部は 3-射 $(\mathrm{Id}_{[2]}, \{0\}) \in \Delta^2_2 \times \Delta^0_0 \subset (\Delta^1 \star \Delta^0)_3$ が埋めている．同様に，$\Delta^0 \star \Delta^2$ の 1-射を図示すると

$$(\Delta^0 \star \Delta^2)_1 = {\Delta^0}_1 \sqcup (\Delta^0_0 \times \Delta^2_0) \sqcup {\Delta^2}_1 =$$



のようになる．

補題 1.2: $(\infty, 1)$-圏同士の join は $(\infty, 1)$-圏

$(\infty, 1)$-圏同士の join は $(\infty, 1)$-圏である．

<u>**証明**</u> [?, Proposition 1.2.8.3] ■

定義 1.23: スライス $(\infty, 1)$-圏

$(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{D}, \mathcal{C}$ および $(\infty, 1)$-圏の関手 $p \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ を与える．p に沿った $\mathcal{C}$ の**スライス圏** (overcategory)

$$\mathcal{C}_{/p} \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を以下で定義する：

- $\forall [n] \in \mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})$ に対して，集合

$$\mathrm{Hom}_p(\Delta^n \star \mathcal{D}, \mathcal{C}) \coloneqq \left\{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n \star \mathcal{D}, \mathcal{C}) \;\middle|\; f|_{\mathcal{D}} = p \right\}$$

  を対応付ける[a]．
- $\forall \alpha \in \mathrm{Hom}_{\Delta^{\mathrm{op}}}([m], [n])$ に対して，写像

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{/p}(\alpha) \colon \mathrm{Hom}_p(\Delta^m \star \mathcal{D}, \mathcal{C}) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_p(\Delta^n \star \mathcal{D}, \mathcal{C}), \\ f &\longmapsto f \circ (\alpha_* \star \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}) \end{aligned}$$

  を対応付ける．

実際，単体的集合 $\mathcal{C}_{/p}$ は $(\infty, 1)$-圏である [?, Tag 018F]．

[a] $f|_{\mathcal{D}}$ というのは，join の定義における $(\Delta^n \star \mathcal{D})_k$ の disjoint union のうち，添字 $i = 0$ が振られている成分への制限を意味する．

---

p に沿った $\mathcal{C}$ の**コスライス圏** (undercategory)

$$\mathcal{C}_{p/} \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を以下で定義する：

- $\forall [n] \in \mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})$ に対して，集合

$$\mathrm{Hom}_p(\mathcal{D} \star \Delta^n, \mathcal{C}) \coloneqq \left\{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\mathcal{D} \star \Delta^n, \mathcal{C}) \;\middle|\; f|_{\mathcal{D}} = p \right\}$$

  を対応付ける[a]．
- $\forall \alpha \in \mathrm{Hom}_{\Delta^{\mathrm{op}}}([m], [n])$ に対して，写像

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{p/}(\alpha) \colon \mathrm{Hom}_p(\mathcal{D} \star \Delta^m, \mathcal{C}) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_p(\mathcal{D} \star \Delta^n, \mathcal{C}), \\ f &\longmapsto f \circ (\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \star \alpha_*) \end{aligned}$$

  を対応付ける．

[a] $f|_{\mathcal{D}}$ というのは，join の定義における $(\mathcal{D} \star \Delta^n)_k$ の disjoint union のうち，添字 $i = n$ が振られている成分への制限を意味する．

特に注目すべきは，$(\infty, 1)$-圏の関手 $p\colon \Delta^0 \longrightarrow \mathcal{C}$ をとった場合である．このとき $X \coloneqq p_{[0]}(\{0\}) \in \mathcal{C}_0$ とおいて $\boldsymbol{\mathcal{C}_{/X}}$, $\boldsymbol{\mathcal{C}_{X/}}$ などと書く．

まず，$(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}_{/X}$ の対象 $\varphi \in (\mathcal{C}_{/X})_0 = \mathrm{Hom}_p\,(\Delta^0 \star \Delta^0, \mathcal{C})$ をとる．すると**【例 1.2.1】**および $\varphi|_{\Delta^0} = p$ の条件から，$\varphi_{[1]}\colon (\Delta^0 \star \Delta^0)_1 \longrightarrow \mathcal{C}_1$ とは図式

$$\varphi = \quad \begin{tikzcd} \varphi_{[0]}|_{\Delta^0_0}(\{0\}) \arrow[d, "\varphi_{[1]}|_{\Delta^0_0 \times \Delta^0_0}(\{0\} \to \{0\})"] \\ X \end{tikzcd}$$

である．$n \geq 2$ 射に相当する $\varphi_{[n]}\colon (\Delta^0 \star \Delta^0)_n \longrightarrow \mathcal{C}_n$ のデータは縮退していて自明である．従って，φ は $(1, 1)$-圏における X 上のスライス圏の対象と等価なデータを与える．

同様に，$(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}_{/X}$ の 1-射 $f \in (\mathcal{C}_{/X})_1 = \mathrm{Hom}_p\,(\Delta^1 \star \Delta^0, \mathcal{C})$ とは，**【例 1.2.2】**より

$$f = \quad \begin{tikzcd} f_{[0]}|_{\Delta^1_0}(\{0\}) \arrow[rr] \arrow[dr] & \arrow[d, phantom, "f_{[2]}|_{\Delta^1_1 \times \Delta^0_0}(\mathrm{Id}_{[1]}, \{0\})"] & f_{[0]}|_{\Delta^1_0}(\{1\}) \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

のことである．ただし三角形の内部は 2-射 $f_{[2]}|_{\Delta^1_1 \times \Delta^0_0}(\mathrm{Id}_{[2]}, \{0\}) \in \mathcal{C}_2$ が埋めている．これは $(1, 1)$-圏における X 上のスライス圏の射のデータに対応しているが，横向きの矢印を決めるだけでは f が upto homotopy でしか定まらないという点で異なっている．

$(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}_{/X}$ の n-射も同様に図示できる．

【例 1.2.4】スライス圏からの forgetful functor

$(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}$ の，$X\colon \Delta^0 \longrightarrow \mathcal{C}$ に沿ったスライス圏に対して，**忘却関手** (forgetful functor)

$$\mathrm{forget}\colon \mathcal{C}_{/X} \longrightarrow \mathcal{C}$$

を次のように定義する：

$$\begin{aligned} \mathrm{forget}_{[n]}\colon (\mathcal{C}_{/X})_n = \mathrm{Hom}_X\,(\Delta^n \star \Delta^0, \mathcal{C}) &\longrightarrow \mathcal{C}_n = \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\,(\Delta^n, \mathcal{C}), \\ f &\longmapsto f|_{\Delta^n} \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

$n = 0, 1, 2$ の場合，i.e. **【例 1.2.1】**, **【例 1.2.2】**, **【例 1.2.3】**の図式においては，ちょうど $X \in \mathcal{C}_0$ に対応する青色の頂点（コーンポイント）を除去する操作に対応している．(1.2.2) の定義は右ファイブレーションになっている．

1.2.4 $(\infty, 1)$-圏の limit/colimit

後の議論のため，先取りして $(\infty, 1)$-圏における limit/colimit を定義しておこう．$(\infty, 1)$-圏のモデルとして quasi-category を採用する場合，これは **homotopy limit/colimit** と呼ばれることもある．

定義 1.24: $(\infty, 1)$-圏における始対象と終対象

- $(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}$ における対象 $x \in \mathcal{C}_0$ が**始対象** (initial object) であるとは，ホモトピー圏 $\mathrm{h}\mathcal{C}$ における始対象[a]であること．
- $(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}$ における対象 $x \in \mathcal{C}_0$ が**終対象** (final object) であるとは，ホモトピー圏 $\mathrm{h}\mathcal{C}$ における終対象[b]であること．

[a] $(1, 1)$-圏の**始対象**とは，空の図式における余極限のこと．
[b] $(1, 1)$-圏の**終対象**とは，空の図式における極限のこと．

定義 1.25: $(\infty, 1)$-圏の limit/colimit

$(\infty, 1)$-圏の関手 $D\colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ を与える[a]．

- D の **limit** とは，スライス $(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}_{/D}$ における終対象のこと．$\boldsymbol{\lim D} \in \mathcal{C}_0$ と書く．
- D の **colimit** とは，スライス $(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}_{D/}$ における始対象のこと．$\boldsymbol{\mathrm{colim}\, D} \in \mathcal{C}_0$ と書く．

[a] $(1, 1)$-圏の場合からのアナロジーで，D を図式と見做す．

【例 1.2.5】pullback

単体的集合の積 $S \times T\colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ における面写像とは

$$\begin{aligned} \partial_j^n\colon S_n \times T_n &\longrightarrow S_{n-1} \times T_{n-1}, \\ (x, y) &\longmapsto (\partial_j^n x, \partial_j^n y) \end{aligned}$$

のことであった．故に，単体的集合 $\Delta^1 \times \Delta^1$ は，$\Delta^1_0 =: \{\bullet_0, \bullet_1\}$ とおくと

$$\Delta^1 \times \Delta^1 = \begin{tikzcd} (0, 0) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & (1, 0) \arrow[d] \\ (0, 1) \arrow[r] & (1, 1) \end{tikzcd}$$

と図示できる．ただし，2-射以上は縮退していて見えない．

$(\infty, 1)$-圏の関手 $D\colon \Delta^1 \times \Delta^1 \longrightarrow \mathcal{C}$ の limit のことを（存在すれば）**pullback** と呼び，

$$\boldsymbol{D(0, 1) \times_{D(1, 1)} D(1, 0)} \coloneqq \lim D \in \mathcal{C}_0$$

と書く．

1.2.5 Unstraightening construction

定理 1.1: unstraightening construction

$(\infty, 1)$-圏同値

$$\mathbf{PSh}_{(\infty,1)}(\mathcal{B}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}}$$

が存在する．

__証明__ $(\infty, 1)$-圏同値

$$\mathrm{Un}\colon \mathbf{PSh}_{(\infty,1)}(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}}$$

は，次のようにして構成される (**unstraightening construction**)：

対象 $F \in \mathbf{PSh}_{(\infty,1)}(\mathcal{B})_0$ に対して，$(\infty, 1)$-圏の pullback

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Un}(F) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}\mathbf{paces}_{/*} \arrow[d, "\mathrm{forget}"] \\
\mathcal{B} \arrow[r, "F"'] & \mathcal{S}\mathbf{paces}
\end{tikzcd}$$

により得られる右ファイブレーション $\mathrm{Un}(F) \longrightarrow \mathcal{B} \in (\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}})_0$ を対応付ける．

n-射

逆向きの $(\infty, 1)$-圏同値 (**straightning construction**)

$$\mathrm{St}\colon \mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}} \longrightarrow \mathbf{PSh}_{(\infty,1)}(\mathcal{B})$$

は難しい．詳細は [?, Proposition 2.2.3.11] を参照． ■

1.2.6 $(\infty, 1)$-圏における米田埋め込み

定義 1.26: twisted arrow category

$(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}$ を与える．このとき，$\mathcal{C}$ の **twisted arrow category** と呼ばれる $(\infty, 1)$-圏を以下で定義する：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tw}(\mathcal{C})\colon \Delta^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathbf{Sets}, \\
[n] &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big((\Delta^n)^{\mathrm{op}} \star \Delta^n, \mathcal{C}\big), \\
\big([m] \xrightarrow{\alpha} [n]\big) &\longmapsto \big(f \mapsto f \circ (\alpha_* \times \alpha_*)\big)
\end{aligned}$$

$(\infty, 1)$-圏の関手

$$\mathrm{pr}\colon \mathrm{Tw}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C}$$

を以下で定義すると，これは左ファイブレーションになる [?, Tag 03JQ]：

$$\mathrm{pr}_{[n]}\colon \mathrm{Tw}(\mathcal{C})_n \longrightarrow \mathcal{C}_n^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C}_n = \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \mathcal{C}^{\mathrm{op}}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \mathcal{C})$$

$$f \longmapsto \left(f|_{(\Delta^n)^{\mathrm{op}}},\, f|_{\Delta^n}\right)$$

$(\infty,\,1)$-圏における Hom 関手

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{S}}\mathbf{paces}$$

の自然な構成は，straightning construction を用いた

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tw}(\mathcal{C}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{pr}"'] & \boldsymbol{\mathcal{S}}\mathbf{paces}_{*/} \arrow[d, "\mathrm{forget}"] \\
\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \arrow[r, "\mathrm{Map}_{\mathcal{C}} := \mathrm{St}(\mathrm{pr})"'] & \boldsymbol{\mathcal{S}}\mathbf{paces}
\end{tikzcd}$$

である [?, I.26., p.19].

定義 1.27: $(\infty,\,1)$-圏の米田埋め込み (informal)

$\mathcal{C}$ を $(\infty,\,1)$-圏とする．$(\infty,\,1)$-圏の**米田埋め込み** (Yoneda embedding)

$$\text{よ} \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{PSh}_{(\boldsymbol{\infty},\,\mathbf{1})}(\mathcal{C})$$

とは，$\mathcal{C}$ から $(\infty,\,1)$-前層の成す $(\infty,\,1)$-圏 $\mathbf{PSh}_{(\boldsymbol{\infty},\,\mathbf{1})}(\mathcal{C})$ への $(\infty,\,1)$-圏の関手であって，対象 $x \in \mathcal{C}_0$ に対して

$$\begin{aligned}
\text{よ}_{[0]}(x)_{[0]} \colon \mathcal{C}_0^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{S}}\mathbf{paces}_0, \\
y &\longmapsto \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(x,\,y)
\end{aligned}$$

を充たす[a]ような $(\infty,\,1)$-圏の関手 $\text{よ}_{[0]}(x) \in \mathbf{PSh}_{(\boldsymbol{\infty},\,\mathbf{1})}(\mathcal{C})_0 = \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\,\boldsymbol{\mathcal{S}}\mathbf{paces})$ を対応付けるもののこと[b].

[a] $(\infty,\,1)$-圏 $\mathcal{C}$ において，対象 $x,\,y \in \mathcal{C}_0$ の間の射の空間 $\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(x,\,y)$ は Kan 複体を成すのだった [?, Tag 01JC].
[b] 厳密な構成については [?, Tag 03NF] を参照.

1.2.7 層状化空間の接構造

定義 1.28: enter-path category

conically smooth な層状化空間 $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Strat})$ の **enter-path $(\infty,\,1)$-category** とは，$(\infty,\,1)$-圏 $\boldsymbol{\mathcal{B}}\mathbf{sc}$ のスライス圏

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}\mathbf{ntr}(X) := \boldsymbol{\mathcal{B}}\mathbf{sc}_{/X}$$

のこと．

定義 1.29: tangent classifier

$\iota\colon \mathcal{B}\mathbf{sc} \hookrightarrow \mathcal{S}\mathbf{nglr}$ を包含とする．**tangent classifier** とは，$(\infty, 1)$-圏の関手

$$\boldsymbol{\tau}\colon \mathcal{S}\mathbf{nglr} \xrightarrow{\text{よ}} \mathbf{PSh}_{(\infty,1)}(\mathcal{S}\mathbf{nglr}) \xrightarrow{\iota^*} \mathbf{PSh}_{(\infty,1)}(\mathcal{B}\mathbf{sc})$$

のこと．

定義 1.27 より，tangent classifier は conically smooth な層状化空間 $X \in \mathcal{S}\mathbf{nglr}_0$ に対して $(\infty, 1)$-圏の表現可能前層

$$\tau_{[0]}(X) = \mathrm{Map}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}(\text{-}, X) \in \mathbf{PSh}_{(\infty,1)}(\mathcal{B}\mathbf{sc})_0 \tag{1.2.3}$$

を対応付ける．

> **!**
>
> 定理 1.1 により，tangent classifier τ のことを
>
> $$\tau\colon \mathcal{S}\mathbf{nglr} \xrightarrow{\text{よ}} \mathbf{PSh}_{(\infty,1)}(\mathcal{S}\mathbf{nglr}) \xrightarrow{\iota^*} \mathbf{PSh}_{(\infty,1)}(\mathcal{B}\mathbf{sc}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}$$
>
> と見做すこともできる．このとき，$\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}$ の構成および $(\infty, 1)$-前層 (1.2.3) に対する定理 1.1 の具体的構成から，conically smooth な層状化空間 $X \in \mathcal{S}\mathbf{nglr}_0$ に対して定まる $(\infty, 1)$-圏の右ファイブレーション $\tau_{[0]}(X) \in (\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}})_0$ とは忘却関手
>
> $$\tau_{[0]}(X)\colon \mathcal{E}\mathbf{ntr}(X) \longrightarrow \mathcal{B}\mathbf{sc}$$
>
> のことである．この忘却関手を以下では $\boldsymbol{\tau_X} \coloneqq \tau_{[0]}(X)$ と書く．

定義 1.30: $\mathcal{B}$-多様体

- **$(\mathcal{B}, f)$ 構造**[a]とは，$(\infty, 1)$-圏の右ファイブレーション $(\mathcal{B} \xrightarrow{f} \mathcal{B}\mathbf{sc}) \in (\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}})_0$ のこと．
- $(\mathcal{B}, f)$ 構造 $\mathcal{B} \xrightarrow{f} \mathcal{B}\mathbf{sc}$ を 1 つ固定する．このとき，**$\mathcal{B}$-多様体** ($\mathcal{B}$-manifold) の成す $(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{M}\mathbf{fld}(\mathcal{B})$ とは，$(\infty, 1)$-圏の pullback

  $$\begin{tikzcd} \mathcal{M}\mathbf{fld}(\mathcal{B}) \arrow[r] \arrow[d] & (\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}})_{/f} \arrow[d, "\text{forget}"] \\ \mathcal{S}\mathbf{nglr} \arrow[r, "\tau"'] & \mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}} \end{tikzcd}$$

  のこと．特に，$\mathcal{M}\mathbf{fld}(\mathcal{B})_0$ の元は以下の 2 つのデータから成り，**$\mathcal{B}$-多様体**と呼ばれる：
  - conically smooth な層状化空間 $X \in \mathcal{S}\mathbf{nglr}_0$
  - $(\infty, 1)$-圏の関手 $g\colon \mathcal{E}\mathbf{ntr}(X) \longrightarrow \mathcal{B}$

  これらは以下の条件を充たさねばならない：

  (lift of tangent classifier)

  sSet における以下の図式は可換である：

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B} \arrow[d, "f"] \\ \mathcal{E}\mathbf{ntr}(X) \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "\tau_X"'] & \mathcal{B}\mathbf{sc} \end{tikzcd}$$

[a] [?, Definition 1.1.6] では $(\infty, 1)$-**category of basics** と呼ばれている．

1.2.8 $\mathcal{B}$sc における Hom

しばらくの間，basic $U := \left((\mathbb{R}^n \to [0]) \times \mathsf{C}(Z \to P), \mathcal{A}_Z\right) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Bsc})$ を 1 つ固定する．これまでと同様に，層状化空間 $\mathsf{C}\left(Z \xrightarrow{s} P\right) = \left(\mathsf{C}(Z) \xrightarrow{\mathsf{C}(s)} \mathsf{C}(P)\right)$ のコーンポイントのことを $\mathrm{pt} \in \mathsf{C}(Z)$ と書き，$\mathbb{R}^n \times \{\mathrm{pt}\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathsf{C}(Z)$ のことを $\mathbb{R}^n$ と略記することにする．さらに，点 $(0, \mathrm{pt}) \in \mathbb{R}^n \times \mathsf{C}(Z)$ のことを $0 \in \mathbb{R}^n \times \mathsf{C}(Z)$ と略記し，U の**原点** (origin) と呼ぶことにする．

> ! 以下では，混乱が生じにくい場合は層状化空間 $(X \xrightarrow{s} P)$ の s と P を省略する．さらに，conically smooth atlas を明示しない．

いま，特異単体の変種として，conically smooth な層状化空間 $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Strat})$ の**滑らかな特異単体** (smooth singular simplicial set) と呼ばれる単体的集合を

$$\begin{aligned} \mathrm{Sing}^{\mathrm{sm}}(X) \colon \Delta^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathbf{Sets}, \\ [n] &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}\left(\Delta^n_e, X\right), \\ \left([m] \xrightarrow{\alpha} [n]\right) &\longmapsto \left(\mathrm{Sing}^{\mathrm{sm}}(X)_m \xrightarrow{\Delta_e(\alpha)^*} \mathrm{Sing}^{\mathrm{sm}}(X)_n\right) \end{aligned}$$

と定義する[*5]．これは Kan 複体になる．ここで (1.1.1) を思い出して，写像

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} \colon \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Bsc}}(U, U), \\ (t, p) &\longmapsto \Big(\big(v, [s, z]\big) \mapsto \big(tv + p, [ts, z]\big)\Big) =: \tilde{\gamma}_{t,p} \end{aligned}$$

を考える．これを Kan 複体の間の射（i.e. 自然変換）

$$\gamma \colon \mathrm{Sing}^{\mathrm{sm}}(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}(U, U) \tag{1.2.4}$$

へと格上げすることができる．実際，$\forall m \geq 0$ に対して，m-単体はそれぞれ

$$\begin{aligned} \mathrm{Sing}^{\mathrm{sm}}(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n)_m &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\left(\Delta^m_e, \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n\right)_{\mathrm{smooth}}, \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}(U, U)_m &= \left\{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}}\left(\Delta^m_e \times U, \Delta^m_e \times U\right) \,\middle|\, \mathrm{proj}_{\Delta^m_e} \circ f = \mathrm{proj}_{\Delta^m_e} \right\} \end{aligned}$$

であったから，

$$\begin{aligned} \gamma_{[m]} \colon \mathrm{Sing}^{\mathrm{sm}}(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n)_m &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}(U, U)_m, \\ \Big(x \mapsto \big(t(x), p(x)\big)\Big) &\longmapsto \Big(\big(x, u\big) \mapsto \big(x, \tilde{\gamma}_{t(x), p(x)}(u)\big)\Big) =: \gamma_{[m]\, t, p} \end{aligned}$$

[*5] 滑らかな特異単体と言ったときは幾何学的 n-単体を用いることが多く，このように定義することは稀だと思う．

と定義すればよい．

さらに，勝手な conically smooth な層状化空間 $Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr})$ に対して，その**自己同相群** (automorphism group)

$$\mathrm{Aut}(Z) \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を，Kan 複体 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{nglr}}(Z,\, Z)$ の部分 Kan 複体として次のように定義する：

$$\mathrm{Aut}(Z)_m := \left\{\, f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{nglr}}(Z,\, Z)_m \;\middle|\; \exists f^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(\Delta^m_e \times Z,\, \Delta^m_e \times Z) \,\right\}$$

なお，$\forall m \geq 0$ に対し集合 $\mathrm{Aut}(Z)_m$ は (1, 1)-圏 **Snglr** における 1-射の合成に関して群になるため，Kan 複体 $\mathrm{Aut}(Z)$ は**群的な Kan 複体** (group-like Kan complex)[*6]と見做すことができる．

定義 1.31: 層状化された一般線形群

勝手な basic $U := \mathbb{R}^n \times \mathsf{C}(Z) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Bsc})$ を与える．

Kan 複体 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{nglr}}(U,\, U)$ の部分 Kan 複体

$$\mathrm{GL}(U) \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を次のように定義し，**層状化された一般線形群**と呼ぶ：

$$\mathrm{GL}(U)_m := \left\{\, T \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{nglr}}(U,\, U)_m \;\middle|\; \forall (t,\, p) \in \mathrm{Sing}^{\mathrm{sm}}(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n)_m,\ T \circ \gamma_{[m]\, t,\, p} = \gamma_{[m]\, t,\, (Tp)_{\mathbb{R}^n}} \circ T \,\right\}$$

ただし，$(Tp)_{\mathbb{R}^n} := \mathrm{proj}_{\mathbb{R}^n} \circ T|_{\Delta^m_e \times \mathbb{R}^n \times \{0\}} \circ p \colon \Delta^m_e \longrightarrow \mathbb{R}^n$ と略記した．

Kan 複体 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{nglr}}(U,\, U)$ の部分 Kan 複体

$$\mathrm{O}(U) \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を次のように定義し，**層状化された直交群**と呼ぶ：

$$\mathrm{O}(U) := \mathrm{Sing}^{\mathrm{sm}}\big(\mathrm{O}(n)\big) \times \mathrm{Aut}(Z)$$

【例 1.2.6】通常の一般線形群

$Z = \emptyset$ の場合を考える．このとき $U = \mathbb{R}^n$ なので，Kan 複体の射 (1.2.4) とは単に

$$\gamma_{[m]} \colon \Big(x \mapsto \big(t(x),\, p(x)\big)\Big) \longmapsto \Big(\big(x,\, u\big) \mapsto \big(x,\, t(x)u + p(x)\big)\Big)$$

のことであり，$T \in \mathrm{GL}(U)_m$ とは $\forall (t,\, p) \in \mathrm{Sing}^{\mathrm{sm}}(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n)$ および $\forall (x,\, u) \in \Delta^m_e \times U = \Delta^m_e \times \mathbb{R}^n$ に対して

$$\begin{aligned}
T \circ \gamma_{[m]\, t,\, p}(x,\, u) &= T\big(x,\, t(x)u + p(x)\big) \\
&= \gamma_{[m]\, t,\, \mathrm{proj}_{\mathbb{R}^n} \circ T|_{\mathbb{R}^n}(p)} \circ T(x,\, u) \\
&= \Big(x,\, t(x)\, \mathrm{proj}_{\mathbb{R}^n} \circ T(x,\, u) + \mathrm{proj}_{\mathbb{R}^n} \circ T\big(x,\, p(x)\big)\Big)
\end{aligned}$$

[*6] Kan 複体であって，$\Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Grp}$ でもあるもの．従って，homotopy hypothesis より位相群と見做すことができる．

が成り立つことを意味する．i.e. $\forall x \in \Delta_e^m$ に対して，$\tilde{T}_x \coloneqq \mathrm{proj}_{\mathbb{R}^n} \circ T|_{\{x\}\times U} \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ とおくと

$$\tilde{T}_x\big(t(x)u + p(x)\big) = t(x)\,\tilde{T}_x u + \tilde{T}_x p(x)$$

が成り立つため，$\tilde{T}_x$ は線型写像である．(1, 1)-圏 **Snglr** の定義より T は開埋め込みであり，単射である．故に，有限次元ベクトル空間の間の単射線型写像 $\tilde{T}_x$ は全単射でもあり，$\tilde{T}_x \in \mathrm{GL}(n,\,\mathbb{R})$ だと分かった．この事実は，Kan 複体の同型 $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n) \cong \mathrm{Sing}^{\mathrm{sm}}\big(\mathrm{GL}(n,\,\mathbb{R})\big)$ を意味する．

さて，部分 Kan 複体 $\mathrm{Aut}^0(U) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}{}^0(U,\,U) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{nglr}}(U,\,U)$ を次のように定義しよう：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}{}^0(U,\,U)_m &\coloneqq \big\{\, f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{nglr}}(U,\,U)_m \;\big|\; \forall x \in \Delta_e^m,\; f(x,\,0) = (x,\,0) \,\big\},\\
\mathrm{Aut}^0(U)_m &\coloneqq \big\{\, f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}{}^0(U,\,U)_m \;\big|\; \forall x \in \Delta_e^m,\; \exists (f|_{\{x\}\times U})^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(U,\,U) \,\big\}
\end{aligned}$$

補題 1.3: 層状化された一般線形群は原点を保つ自己同相群

$$\mathrm{GL}(U) \subset \mathrm{Aut}^0(U) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}{}^0(U,\,U)$$

<u>**証明**</u> $\forall m \geq 0$ および $\forall T \in \mathrm{GL}(U)_m$ を 1 つ固定する．$\forall x \in \Delta_e^m$ および $\forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して $\gamma_{[m]\,t,\,0}(x,\,0) = (x,\,0)$ が成り立つので，

$$T(x,\,0) = T \circ \gamma_{[m]\,0,\,0}(x,\,0) = \gamma_{[m]\,0,\,0}\big(T(x,\,0)\big) = (x,\,0)$$

が言える．また，(1, 1)-圏 **Snglr** の定義より $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(\Delta_e^m \times U \longrightarrow \Delta_e^m \times U)$ は開埋め込みであるから単射である．故に T が全射であることを示せば良い． ■

補題 1.4: 層状化された直交群は一般線形群の部分 Kan 複体

$$\mathrm{O}(U) \subset \mathrm{GL}(U)$$

<u>**証明**</u> $\forall m \geq 0$ および $\forall T \coloneqq (A,\,f) \in \mathrm{O}(U)_m = \mathrm{Sing}^{\mathrm{sm}}\big(\mathrm{O}(n)\big)_m \times \mathrm{Aut}(Z)_m$ を 1 つ固定する．まず，$\forall\big(x,\,(v,\,[s,\,z])\big) \in \Delta_e^m \times U = \Delta_e^m \times \mathbb{R}^n \times \mathsf{C}(Z)$ に対して

$$T\big(x,\,(v,\,[s,\,z])\big) \coloneqq \Big(x,\,\big(A(x)v,\,[s,\,\mathrm{proj}_Z \circ f(x,\,z)]\big)\Big)$$

と定めることで $T \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}{}^0(U,\,U)_m$ と見做せる．このとき，$\forall (t,\,p) \in \mathrm{Sing}^{\mathrm{sm}}(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n)$ に対して

$$\begin{aligned}
T \circ \gamma_{[m]\,t,\,p}\big(x,\,(v,\,[s,\,z])\big) &= T\Big(x,\,\big(t(x)v + p(x),\,[t(x)s,\,z]\big)\Big)\\
&= \Big(x,\,\big(t(x)A(x)v + A(x)p(x),\,[t(x)s,\,\mathrm{proj}_Z \circ f(x,\,z)]\big)\Big)\\
&= \gamma_{[m]\,t,\,Ap}\Big(x,\,\big(A(x)v,\,[s,\,\mathrm{proj}_Z \circ f(x,\,z)]\big)\Big)\\
&= \gamma_{[m]\,t,\,(Tp)_{\mathbb{R}^n}} \circ T\big(x,\,(v,\,[s,\,z])\big)
\end{aligned}$$

が成り立つため $T \in \mathrm{GL}(U)_m$ が言えた． ■

命題 1.2:

Kan 複体の包含写像

$$\mathrm{O}(U) \overset{i_1}{\hookrightarrow} \mathrm{GL}(U) \overset{i_2}{\hookrightarrow} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}{}^{0}(U,\, U) \overset{i_3}{\hookrightarrow} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}(U,\, U)$$

は全て Kan 複体のホモトピー同値である．

<u>証明</u> **i_1 のホモトピー逆**

Gram-Schmidt の正規直交化を行う．

i_2 のホモトピー逆

$(\infty,\, 1)$-圏 $\mathcal{B}\mathbf{sc}$ の定義において登場する射は全て conically smooth なので，$\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}{}^{0}(U,\, U)_m$ の微分

$$Df\colon T(\Delta_e^m \times \mathbb{R}^n) \times \mathsf{C}(Z) \longrightarrow T(\Delta_e^m \times \mathbb{R}^n) \times \mathsf{C}(Z)$$

が存在する[*7]．このとき，$T(\Delta_e^m \times \mathbb{R}^n) \approx (\Delta_e^m \times \mathbb{R}^n) \times (\Delta_e^m \times \mathbb{R}^n)$ であり，底空間の勝手な元 $(x,\, p) \in \Delta_e^m \times \mathbb{R}^n$ に対して

$$D_{(x,\, p)}f \coloneqq Df|_{\Delta_e^m \times \mathbb{R}^n \times \{(x,\, p)\} \times \mathsf{C}(Z)} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}(U,\, U)_m \subset \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(\Delta_e^m \times U,\, \Delta_e^m \times U)$$

とおこう．特に，$D_{(x,\, 0)}f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}{}^{0}(U,\, U)_m$ であることに注意する．

$\forall x \in \Delta_e^m$ を 1 つ固定する．まずは $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}{}^{0}(U,\, U)_m$ に対して $D_{(x,\, 0)}f \in \mathrm{GL}(U)_m$ であること，i.e. Kan 複体の射

$$D_0\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}{}^{0}(U,\, U) \longrightarrow \mathrm{GL}(U)$$

が定まることを示そう．実際，$\forall (t,\, p) \in \mathrm{Sing}^{\mathrm{sm}}(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n)_m$ に対して

$$\begin{aligned} D_{(x,\, 0)}f \circ \gamma_{[m]t,\, p} &= \left(\lim_{s \to +0} \gamma_{\frac{1}{s},\, 0} \circ f \circ \gamma_{s,\, 0}\right) \circ \gamma_{t,\, p} \\ &= \cdots \\ &= \gamma_{[m]t,\, D_{(x,\, 0)}f(p)} \circ D_{(x,\, 0)}f \end{aligned}$$

と計算できる．

さらに，$\mathrm{GL}(U)$ の定義から $\forall T \in \mathrm{GL}(U)_m$ および $\forall t > 0$ に対して

$$\gamma_{[m]\frac{1}{t},\, 0} \circ T \circ \gamma_{[m]t,\, 0} = T$$

が成り立つので，微分の一意性より $D_0 T = T$ だと分かる．i.e. $D_0 \circ i_2 = \mathrm{Id}_{\mathrm{GL}(U)}$ である．

その上，

$$\begin{aligned} \mathrm{Sing}^{\mathrm{sm}}([0,\, 1]) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}{}^{0}(U,\, U) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}{}^{0}(U,\, U), \\ (s,\, f) &\longmapsto \gamma_{\frac{1}{s},\, 0} \circ f \circ \gamma_{s,\, 0} \end{aligned}$$

がちょうど $i_2 \circ D_0$ と $\mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}{}^{0}(U,\, U)}$ を繋ぐホモトピーになっており，i_2 のホモトピー逆が D_0 であることが示された．

[*7] $\Delta_e^m \approx \mathbb{R}^m$ である．

i_3 のホモトピー逆

γ により原点へ並行移動すれば良い．

■

1.2.9 $\mathcal{B}$sc の構造

補題 1.5:

2 つの basic $U := \mathbb{R}^n \times \mathsf{C}(Z),\, V := \mathbb{R}^m \times \mathsf{C}(W) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Bsc})$ であって，$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Bsc}}(U,\, V) \neq$ を充たすものをとる．このとき，以下の条件は全て同値である：

(1) $\mathrm{depth}(U) = \mathrm{depth}(V)$

(2) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Bsc}}(U,\, V)$ であって，$f(U) \cap \left(\mathbb{R}^m \times \{*\}\right) \neq$ を充たすものが存在する．

(3) (1, 1)-圏 $\mathbf{Bsc}$ における U から V への同型射全体を対象に持つ，Kan 複体 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}(U,\, V)$ の充満部分 Kan 複体 $\mathcal{I}\mathrm{so}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}(U,\, V) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}(U,\, V)$ について，その包含写像は Kan 複体の弱ホモトピー同値である．

(4) (1, 1)-圏 $\mathbf{Bsc}$ において U と V は同型である．

(5) $n = m$ かつ，(1, 1)-圏 $\mathbf{Strat}$ において Z と W は同型である．

証明 **(5)$\Longrightarrow$(4)**

明らか．

(4)$\Longrightarrow$(3)

命題 1.2 より従う．

(3)$\Longrightarrow$(2)

(2)$\Longrightarrow$(1)

開埋め込み $\mathbb{R}^n \times \mathsf{C}(Z) \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathsf{C}(W)$ の存在より $\dim(Z) = \dim(W)$ が言える．

(1)$\Longrightarrow$(5)

$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Bsc}}(U,\, V)$ を 1 つとる．すると，conically smoothness の定義より conically smooth な層状化開埋め込み $\tilde{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0} \times Z,\, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0} \times W)$ が存在する．$\tilde{f}$ を制限することで，conically smooth な層状化開埋め込み $\bar{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}}\left(\{0\} \times \{0\} \times Z,\, \{f(0)\} \times \{0\} \times W\right)$ を得る．然るにこのとき Z がコンパクトなので，$\bar{f}(Z) \subset W$ もまたコンパクトである．

■

(1, 1)-圏 $\mathbf{Bsc}$ における対象の同型類が成す集合を

$$\mathrm{Ob}([\mathcal{B}\mathbf{sc}]) := \left\{\, [U] \;\middle|\; U \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Bsc}) \,\right\}$$

と書く．この集合の上には二項関係

$$\leq := \left\{ \left([U],\, [V]\right) \in \mathrm{Ob}([\mathcal{B}\mathbf{sc}])^{\times 2} \;\middle|\; \mathrm{Hom}_{\mathbf{Bsc}}(U,\, V) \neq \emptyset \right\} \tag{1.2.5}$$

が定まる．

定理 1.2: Basics are easy

(1) $\forall U = \mathbb{R}^n \times \mathsf{C}(Z) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Bsc})$ に対して，Kan 複体の包含

$$\mathrm{O}(\mathbb{R}^n) \times \mathrm{Aut}(Z) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}(U, U)$$

は Kan 複体のホモトピー同値である[a].

(2) $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Bsc}}(U, V)$ に対して，以下のいずれかちょうど 1 つが真である：

(a) f は $(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{B}\mathbf{sc}$ における同型射である.

(b) $\mathrm{depth}(U) < \mathrm{depth}(V)$

(3) 集合 $\mathrm{Ob}([\mathcal{B}\mathbf{sc}])$ 上の二項関係 (1.2.5) は半順序である．半順序集合 $\big(\mathrm{Ob}([\mathcal{B}\mathbf{sc}]), \le\big)$ を $(1, 1)$-圏と見做し，それを $[\mathcal{B}\mathbf{sc}]$ と書く.

(4) $(\infty, 1)$-圏の関手

$$[\text{-}] \colon \mathcal{B}\mathbf{sc} \longrightarrow \mathrm{N}\big([\mathcal{B}\mathbf{sc}]\big)$$

は conservative である．i.e. $(U \xrightarrow{f} V) \in \mathcal{B}\mathbf{sc}_1$ が $(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{B}\mathbf{sc}$ における同型射であるためには，U, V が $(1, 1)$-圏 $\mathbf{Bsc}$ において同型であることが必要十分である.

(5) 写像

$$\mathrm{depth} \colon \mathrm{Ob}([\mathcal{B}\mathbf{sc}]) \longrightarrow \mathbb{Z}_{\ge 0}$$

は順序を保つ.

[a] 左辺を $\mathrm{Sing}^{\mathrm{sm}}\big(\mathrm{O}(n)\big) \times \mathrm{Aut}(Z)$ としても等価な主張である.

証明　(1)

■

1.2.10　tangent classifier の構造

1.3　Disk algebras

1.3.1　$(\infty, 1)$-オペラッド

本資料では，$(\infty, 1)$-圏を quasi-category として定義した．この小節では，quai-category における colored operad を定義する.

定義 1.32: (1, 1)-圏 Fin, $\mathbf{Fin}_*$

(1, 1)-圏 **Fin** を以下で定義する：

- 有限集合および空集合を対象に持つ．
- $I,\ J \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Fin})$ の間の写像を射とする．

(1, 1)-圏 $\mathbf{Fin}_*$ を以下で定義する：

- 基点付き有限集合

  $$\langle n \rangle \coloneqq \{*,\ 1,\ \dots,\ n\}$$

  を対象に持つ．i.e.

  $$\mathrm{Ob}(\mathbf{Fin}_*) \coloneqq \left\{\, \langle n \rangle \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \,\right\}.$$

- $\forall \langle m \rangle, \langle n \rangle \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Fin}_*)$ に対して，それらの間の基点を保つ写像を射とする．i.e.

  $$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}\big(\langle m \rangle, \langle n \rangle\big) \coloneqq \left\{\, f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}\big(\langle m \rangle, \langle n \rangle\big) \;\middle|\; f(*) = * \,\right\}.$$

定義 1.33: inert/active morphism

- 圏 $\mathbf{Fin}_*$ における射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m \rangle, \langle n \rangle)$ が **inert** であるとは，$\forall i \in \langle n \rangle \setminus \{*\}$ に対して $f^{-1}\big(\{i\}\big) \subset \langle m \rangle$ が 1 点集合であることを言う．
- 圏 $\mathbf{Fin}_*$ における射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m \rangle, \langle n \rangle)$ が **active** であるとは，$f^{-1}\big(\{*\}\big) = \{*\} \subset \langle m \rangle$ であることを言う．

【例 1.3.1】inert な射 ρ^i

$1 \leq \forall i \leq \forall n$ を 1 つ固定する．このとき，写像

$$\begin{aligned} \rho^i \colon \langle n \rangle &\longrightarrow \langle 1 \rangle, \\ j &\longmapsto \begin{cases} 1, & j = i \\ *, & j \neq i \end{cases} \end{aligned}$$

は圏 $\mathbf{Fin}_*$ における inert な射である．

【例 1.3.2】active な射 α_n

$\forall n \geq 1$ を 1 つ固定する．このとき，写像

$$\begin{aligned} \alpha_n \colon \langle n \rangle &\longrightarrow \langle 1 \rangle, \\ j &\longmapsto \begin{cases} 1, & j \neq * \\ *, & j = * \end{cases} \end{aligned}$$

は圏 $\mathbf{Fin}_*$ における active な射である．なお，α_n は射の集合 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}\big(\langle n\rangle, \langle 1\rangle\big)$ の元のうち，唯一の active な射である．

脈体の定義において $[n] \in \mathrm{Ob}(\Delta)$ を (1, 1)-圏と見做した方法と同様にして，半順序集合 $\{n-1 \le n\}$ を (1, 1)-圏と見做す．このとき，

$$\mathrm{N}\big(\{n-1 \le n\}\big) = \left(\underset{n-1}{\bullet} \longrightarrow \underset{n}{\bullet} \right) \cong \Delta^1$$

と図示できる．同様に，

$$\mathrm{N}\big(\{0 \le 1\}\big) = \left(\underset{0}{\bullet} \longrightarrow \underset{1}{\bullet} \right) \cong \Delta^1$$

である．

定義 1.34: p-Cartesian morphism

$p\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{B}$ を内的ファイブレーションとする．

- $\mathcal{E}$ の 1-射 $(x \xrightarrow{f} y) \in \mathcal{E}_1$ が以下の条件を充たすとき，f は **p-Cartesian** であると言う：

 (Cartesian) $\forall n \ge 2$ に対して，以下の **sSet** の図式を可換にする $\mathcal{E}$ の n-射 $\bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \mathcal{E}) \cong \mathcal{E}_n$ が存在する：

$$\begin{tikzcd} \mathrm{N}\big(\{n-1 \le n\}\big) \cong \Delta^1 \arrow[d, hook] \arrow[dr, "f"] & \\ \Lambda^n_n \arrow[r, "\forall \varphi_0"] \arrow[d, hook] & \mathcal{E} \arrow[d, "p"] \\ \Delta^n \arrow[r, "\forall \varphi"'] \arrow[ur, dashed, "\exists \bar{\varphi}"] & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

 ただし，**sSet** の射 $f\colon \mathrm{N}\big(\{n-1 \le n\}\big) \longrightarrow \mathcal{E}$ とは

$$f_{[1]}\left(\underset{n-1}{\bullet} \longrightarrow \underset{n}{\bullet} \right) = \underset{x}{\bullet} \xrightarrow{f} \underset{y}{\bullet}$$

 を充たす唯一の自然変換である．

- $\mathcal{E}$ の 1-射 $(x \xrightarrow{f} y) \in \mathcal{E}_1$ が以下の条件を充たすとき，f は **p-coCartesian** であると言う：

 (coCartesian) $\forall n \ge 2$ に対して，以下の **sSet** の図式を可換にする $\mathcal{E}$ の n-射 $\bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \mathcal{E}) \cong \mathcal{E}_n$ が存在する：

$$\begin{tikzcd} \mathrm{N}\big(\{0 \le 1\}\big) \cong \Delta^1 \arrow[d, hook] \arrow[dr, "f"] & \\ \Lambda^n_0 \arrow[r, "\forall \varphi_0"] \arrow[d, hook] & \mathcal{E} \arrow[d, "p"] \\ \Delta^n \arrow[r, "\forall \varphi"'] \arrow[ur, dashed, "\exists \bar{\varphi}"] & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

ただし，$\mathbf{sSet}$ の射 $f\colon \mathrm{N}\bigl(\{0 \le 1\}\bigr) \longrightarrow \mathcal{E}$ とは

$$f_{[1]}\left(\begin{tikzcd} \underset{n-1}{\bullet} \arrow[r] & \underset{n}{\bullet} \end{tikzcd} \right) = \begin{tikzcd} \underset{x}{\bullet} \arrow[r, "f"] & \underset{y}{\bullet} \end{tikzcd}$$

を充たす唯一の自然変換である．

$n = 2$ の場合の **(coCartesian)** の可換図式の意味を，系??を用いて解読しよう．まず，包含 $\mathrm{N}\bigl(\{0 \le 1\}\bigr) \hookrightarrow \Lambda^2_0$ というのは，系??による角 Λ^2_0 の図示

$$\begin{tikzcd} & \overset{\{1\}}{\bullet} & \\ \underset{\{0\}}{\bullet} \arrow[ur] \arrow[rr] & & \underset{\{2\}}{\bullet} \end{tikzcd}$$

のうち辺 $\{0\} \longrightarrow \{1\}$ への埋め込みであるから，可換図式の

$$\begin{tikzcd} \mathrm{N}\bigl(\{0 \le 1\}\bigr) \cong \Delta^1 \arrow[d, hook] \arrow[dr, "f"] & \\ \Lambda^2_0 \arrow[r, "\forall \varphi_0"] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

の部分は勝手な角の図式 $\varphi_0 = (\bullet,\ f,\ \varphi_{02}) \in \mathcal{E}_1^{\times 2}$ を与えることに対応する．図示すると

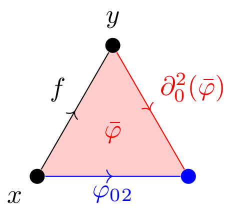
$$\varphi_0 = \begin{tikzcd} & \overset{y}{\bullet} & \\ \underset{x}{\bullet} \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\varphi_{02}"'] & & \bullet \end{tikzcd} \tag{1.3.1}$$

となる．従って，**(coCart-2)** の主張は次のような意味を持つ：

$(\infty,\ 1)$-圏 $\mathcal{B}$ において角の図式が 2-射 $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\,(\Delta^2,\ \mathcal{B}) \cong \mathcal{B}_2$ によって

$$\begin{tikzcd} & p_{[0]}(y) \arrow[dr, "\partial^2_0(\varphi)"] & \\ p_{[0]}(x) \arrow[ur, "p_{[1]}(f)"] \arrow[rr, "p_{[1]}(\varphi_{02})"'] \arrow[r, phantom, shift left=4, "\varphi"] & & \bullet \end{tikzcd}$$

と埋められているならば，$\mathcal{E}$ において角の図式 (1.3.1) を



のように埋める 2-射 $\bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^2, \mathcal{E}) \cong \mathcal{E}_2$ が存在する．

定義 1.35: デカルトファイブレーション

$p \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{B}$ を内的ファイブレーションとする．

- p が**デカルトファイブレーション** (Cartesian fibration) であるとは，
  - $\mathcal{B}$ の任意の 1 射 $(x \xrightarrow{f} y) \in \mathcal{B}_1$
  - $p_{[0]}(\bar{y}) = y$ を充たす $\mathcal{E}$ の任意の対象 $\bar{y} \in \mathcal{E}_0$

  に対して，以下の条件を充たす $\mathcal{E}$ の 1-射 $(z \xrightarrow{\bar{f}} \bar{y}) \in \mathcal{E}_1$ が存在することを言う：

  (Cart-1)

  $\bar{f}$ は f の持ち上げである．i.e. $p_{[1]}(\bar{f}) = f$ が成り立つ．

  (Cart-2)

  $\bar{f}$ は p-Cartesian である．
- p が**余デカルトファイブレーション** (coCartesian fibration) であるとは，
  - $\mathcal{B}$ の任意の 1 射 $(x \xrightarrow{f} y) \in \mathcal{B}_1$
  - $p_{[0]}(\bar{x}) = x$ を充たす $\mathcal{E}$ の任意の対象 $\bar{x} \in \mathcal{E}_0$

  に対して，以下の条件を充たす $\mathcal{E}$ の 1-射 $(\bar{x} \xrightarrow{\bar{f}} z) \in \mathcal{E}_1$ が存在することを言う：

  (coCart-1)

  $\bar{f}$ は f の持ち上げである．i.e. $p_{[1]}(\bar{f}) = f$ が成り立つ．

  (coCart-2)

  $\bar{f}$ は p-coCartesian である．

定義 1.36: $(\infty, 1)$-オペラッド

$(\infty, 1)$-オペラッド ($(\infty, 1)$-operad)[a] とは，$(\infty, 1)$-圏の関手

$$p \colon \mathcal{O}^{\otimes} \longrightarrow \mathrm{N}(\mathbf{Fin}_*)$$

であって以下の条件を充たすもののこと [?, Definition 2.1.1.10.]：

(Op-1)

任意の inert な射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m \rangle, \langle n \rangle)$ および $\forall c \in (\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle m \rangle})_0$ に対して，$\mathcal{O}^{\otimes}$ における p-coCartesian な 1-射 $\bar{f} \colon c \longrightarrow c'$ が存在して $p_{[1]}(\bar{f}) = f$ を充たす．

(Op-2)

$\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m \rangle, \langle n \rangle)$ および $\forall c \in (\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle m \rangle})_0$, $\forall c' \in (\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n \rangle})_0$ に対して，**【例 1.3.1】**の inert な射の族 $\left\{\rho^i \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle n \rangle, \langle 1 \rangle)\right\}_{1 \le i \le n}$ に **(Op-1)** を適用して得られる p-coCartesian な

1-射の族 $\left\{c' \xrightarrow{\bar{\rho}^i} c'_i \in (\mathcal{O}^{\otimes})_1\right\}_{1\le i\le n}$ が誘導する Kan 複体の関手[b]

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c,\, c')_f \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Map}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c,\, c'_i)_{\rho^i \circ f}$$

は，$(\infty,\,1)$-圏 $\boldsymbol{\mathcal{S}\mathrm{paces}}$ における同型射である．

(Op-3)

$\forall c_1,\, \dots,\, c_n \in (\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle 1\rangle})_0$ に対して，ある $c \in (\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n\rangle})_0$ および p-coCartesian な 1-射 $\widehat{\rho}_i \in \left(\mathrm{Map}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c,\, c_i)_{\rho^i}\right)_0$ が存在する．

ただし，以下の記法を採用した：

- 点 $\langle n\rangle \in \mathrm{N}(\mathbf{Fin}_*)_0$ における $(\infty,\,1)$-圏の関手 $p\colon \mathcal{O}^{\otimes} \longrightarrow \mathrm{N}(\mathbf{Fin}_*)$ の**ファイバー** $\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n\rangle}$ を，$(\infty,\,1)$-圏の pullback

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n\rangle} \arrow[r] \arrow[d] & \Delta^0 \arrow[d, hook, "\langle n\rangle"] \\ \mathcal{O}^{\otimes} \arrow[r, "p"'] & \mathrm{N}(\mathbf{Fin}_*) \end{tikzcd}$$

  と定義した[c]．

- $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}\left(\langle m\rangle,\, \langle n\rangle\right)$ および $c \in (\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle m\rangle})_0,\ c' \in (\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n\rangle})_0$ に対して，$\bar{f} \in \mathrm{Map}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c,\, c')_0$ であって $p_{[1]}(\bar{f}) = f$ を充たすもの全体から定まる，$\mathrm{Map}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c,\, c') \in \boldsymbol{\mathcal{S}\mathrm{paces}}_0$ の充満部分 Kan 複体を

$$\boldsymbol{\mathrm{Map}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c,\, c')_f} \hookrightarrow \mathrm{Map}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c,\, c')$$

  と書いた．

---

[a] ∞-operad とも呼ばれる．

[b] 対象の対応としては $\bar{f} \longmapsto (\bar{\rho}^1 \circ \bar{f},\, \dots,\, \bar{\rho}^n \circ \bar{f})$ であるが，右辺の $(\infty,\,1)$-圏 $\mathcal{O}^{\otimes}$ における 1-射の合成は up to homotopy でしか定まらないため，この関手は up to homotopy でしか決まらない．

[c] これ自体が $(\infty,\,1)$-圏である．なお，ファイバーは $(\infty,\,1)$-圏の pullback なので一見すると非常に計算が難しいが，幸いにしてこの場合は $(1,\,1)$-圏 **sSet** における pullback と一致する．

補題 1.6: Segal 条件

$(\infty,1)$-圏の関手

$$p\colon \mathcal{O}^{\otimes} \longrightarrow \mathrm{N}(\mathbf{Fin}_*)$$

であって条件 **(Op-1)**, **(Op-2)** を充たすものを与える．このとき，条件 **(Op-3)** は以下と同値である[a]：

(Segal)

$\forall n \geq 0$ に対して，【例 1.3.1】の inert な射の族 $\{\rho^i \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle n\rangle, \langle 1\rangle)\}_{1\leq i\leq n}$ が条件 **(Op-1)** により誘導する $(\infty,1)$-圏の関手の族 $\{\rho^i_!\colon \mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n\rangle} \longrightarrow \mathcal{O}^{\otimes}_{\langle 1\rangle}\}_{1\leq i\leq n}$ は，$(\infty,1)$-圏同値

$$(\rho^1_!,\,\dots,\,\rho^n_!)\colon \mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n\rangle} \xrightarrow{\simeq} \left(\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle 1\rangle}\right)^{\times n} \tag{1.3.2}$$

を与える．

[a] 一般に Segal 条件というと n-fold pullback のことだが，現在は $\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle 0\rangle}$ が contractible なので n-fold product になっている．

<u>証明</u> **(OP-3) $\Longrightarrow$ (Segal)**

(OP-3) を仮定する．命題??より，$(\infty,1)$-圏の関手 (1.3.2) が忠実充満かつ本質的全射であることを示せば良い．

$\forall n \geq 0$ および $\forall c,\, c' \in (\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n\rangle})_0$ を固定する．このとき $\mathrm{Id}_{\langle n\rangle} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle n\rangle, \langle n\rangle)$ に対して **(OP-2)** を用いることで，ホモトピー同値

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n\rangle}}(c,\,c') \simeq \mathrm{Map}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c,\,c')_{\mathrm{Id}_{\langle n\rangle}} \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Map}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c,\,c'_i)_{\rho^i}$$

が得られる．さらに，p-coCartesian な射の定義からホモトピー同値

$$\prod_{i=1}^{n} \mathrm{Map}_{\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle 1\rangle}}\left(\rho^i_{![0]}(c),\, \rho^i_{![0]}(c')\right) \simeq \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Map}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c_i,\,c'_i)_{\mathrm{Id}_{\langle 1\rangle}} \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Map}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c,\,c'_i)_{\rho^i}$$

が得られる[*8]ため，(1.3.2) が忠実充満だと分かった．本質的全射であることは **(OP-3)** より従う．

(OP-3) $\Longleftarrow$ (Segal)　明らか．

■

[*8] **(OP-2)** における $c'_i \in (\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle 1\rangle})_0$ とは，ちょうど $\rho^i_{![0]}(c')$ のことである．

定義 1.37: $(\infty, 1)$-オペラッドの射

$(\infty, 1)$-オペラッド $p\colon \mathcal{O}^{\otimes} \longrightarrow \mathrm{N}(\mathbf{Fin}_*)$ を与える．このとき，$(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{O}^{\otimes}$ の 1-射 $f \in (\mathcal{O}^{\otimes})_1$ が **inert** であるとは，以下の 2 条件を充たすことを言う：

(inert-1) $p_{[1]}(f)$ は $(1, 1)$-圏 $\mathbf{Fin}_*$ における inner な射である．

(inert-2) f は p-coCartesian な 1-射である．

---

2 つの $(\infty, 1)$-オペラッド $p\colon \mathcal{O}^{\otimes} \longrightarrow \mathrm{N}(\mathbf{Fin}_*)$, $p'\colon \mathcal{O}'^{\otimes} \longrightarrow \mathrm{N}(\mathbf{Fin}_*)$ を与える．このとき，$(\infty, 1)$-圏の関手 $f\colon \mathcal{O}^{\otimes} \longrightarrow \mathcal{O}'^{\otimes}$ が **$(\infty, 1)$-オペラッドの射** (∞-operad map) であるとは，以下の 2 つの条件を充たすことを言う：

(Opmap-1) $(1, 1)$-圏 **sSet** の図式

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}^{\otimes} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathcal{O}'^{\otimes} \arrow[dl, "p'"] \\
& \mathrm{N}(\mathbf{Fin}_*) &
\end{tikzcd}$$

は可換である．

(Opmap-2) 1-射の間の写像 $f_{[1]}\colon (\mathcal{O}^{\otimes})_1 \longrightarrow (\mathcal{O}'^{\otimes})_1$ により，inert な 1-射が保存される[a]．

[a] 条件 **(Opmap-1)** より，inert な 1-射の $p_{[1]}$ による像が条件 **(inert-1)** を充たすことは明らかである．

定義 1.36 がオペラッドと呼ぶにふさわしいことを示すために，次の小節では $(1, 1)$-圏の文脈で対応物を考えよう．

1.3.2 色付きオペラッドと $(1, 1)$-圏の coCartesian fibration

定義 1.38: colored operad

色付きオペラッド[a] (colored operad) $\mathcal{O}$ は，以下の 4 つのデータから成る：

- **対象**[b] (object) の集まり

$$\mathbf{Ob}(\mathcal{O})$$

- $\forall I \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Fin})$, $\forall \{x_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O})\}_{i\in I}$, $\forall y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O})$ の 3 つ組に対して定まっている，$\{x_i\}_{i\in I}$ から y へ向かう**多射** (multimorphism) の集合

$$\mathbf{Mul}_{\mathcal{O}}\bigl(\{x_i\}_{i\in I},\, y\bigr) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$$

- $\forall \alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}}(I, J)$, $\forall \bigl\{x_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O})\bigr\}_{i\in I}$, $\bigl\{y_j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O})\bigr\}_{j\in J}$, $\forall z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O})$ の 4 つ組に対して定まっている，多射の**合成** (composition map) と呼ばれる写像

$$\begin{aligned}\circ_{\boldsymbol{\alpha}}\colon \mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}\bigl(\{y_j\}_{j\in J},\, z\bigr) \times \prod_{j\in J} \mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}\bigl(\{x_i\}_{i\in\alpha^{-1}(\{j\})},\, y_j\bigr) &\longrightarrow \mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}\bigl(\{x_i\}_{i\in I},\, z\bigr), \\ \bigl(G,\, (F_j)_{j\in J}\bigr) &\longmapsto G \circ_{\alpha} (F_j)_{j\in J}\end{aligned}$$

- **恒等射** (identitiy) と呼ばれる多射の族 $\left\{\mathrm{Id}_x \in \mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}\bigl(\{x\},\, x\bigr)\right\}_{x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O})}$

これらは以下の条件を充たさねばならない：

(cOp-1)
恒等射は合成に関して単位元として振る舞う．

(cOp-2)
多射の合成は結合則を充たす．i.e. $\forall \alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}}(I,\, J)$，$\forall \beta \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}}(J,\, K)$，$\forall \bigl\{x_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O})\bigr\}_{i \in I}$，$\forall \bigl\{y_j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O})\bigr\}_{j \in J}$，$\forall \bigl\{z_k \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O})\bigr\}_{k \in K}$，$\forall w \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O})$ に対して，(1, 1)-圏 **Sets** の図式

$$
\begin{tikzcd}
& \mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}\bigl(\{z_k\}_{k\in K},\, w\bigr) \times \prod_{k\in K} \mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}\bigl(\{y_j\}_{j\in\beta^{-1}(\{k\})},\, z_k\bigr) \times \prod_{j\in J} \mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}\bigl(\{x_i\}_{i\in\alpha^{-1}(\{j\})},\, y_j\bigr) \arrow[dl, "\circ_\beta \times \mathrm{Id}"'] \arrow[ddr, "\mathrm{Id}\times\left(\circ_{\alpha|_{\alpha^{-1}(\beta^{-1}(\{k\}))}}\right)_{k\in K}"] & \\
\mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}\bigl(\{y_j\}_{j\in J},\, w\bigr) \times \prod_{j\in J} \mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}\bigl(\{x_i\}_{i\in\alpha^{-1}(\{j\})},\, y_j\bigr) \arrow[ddr, "\circ_\alpha"'] & & \\
& & \mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}\bigl(\{z_k\}_{k\in K},\, w\bigr) \times \prod_{k\in K} \mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}\bigl(\{x_i\}_{i\in(\beta\circ\alpha)^{-1}(\{k\})},\, z_k\bigr) \arrow[dl, "\circ_{\beta\circ\alpha}"] \\
& \mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}\bigl(\{x_i\}_{i\in I},\, z\bigr) &
\end{tikzcd}
$$

は可換である．

---

[a] いわゆる**対称色付きオペラッド** (symmetric colored operad) である．
[b] **色** (color) と呼ばれることもある．

色付きオペラッドの定義において，写像 $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}}(I,\, J)$ が多射の合成の「型」を規定している．

定義 1.39: (1, 1)-圏における coCartesian fibration

$p\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{B}$ を (1, 1)-圏の関手とする．

- $\mathcal{E}$ の射 $\bar{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\bar{x},\, \bar{y})$ が以下の条件を充たすとき，$\bar{f}$ は ***p*-coCartesian** であると言う：

(coCart-ord) (1, 1)-圏 $\mathcal{B}$ の図式

$$
\begin{tikzcd}
& p(\bar{y}) \arrow[dr, "\forall\varphi"] & \\
p(\bar{x}) \arrow[ur, "p(\bar{f})"] \arrow[rr, "p(\forall\varphi_0)"'] & & p(\forall\bar{z})
\end{tikzcd}
$$

を可換にする勝手な 2 つの射 $\varphi_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\bar{x},\, \bar{z})$，$\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\bigl(p(\bar{y}),\, p(\bar{z})\bigr)$ に対して，射 $\bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\bar{y},\, \bar{z})$ が一意的に存在して (1, 1)-圏 $\mathcal{E}$ の図式

$$
\begin{tikzcd}
& \bar{y} \arrow[dr, "\exists!\bar{\varphi}"] & \\
\bar{x} \arrow[ur, "\bar{f}"] \arrow[rr, "\varphi_0"'] & & \bar{z}
\end{tikzcd}
$$

を可換にする．

- p が **coCartesian fibration** であるとは，
  - $(1, 1)$-圏 $\mathcal{B}$ の任意の射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(x, y)$
  - $p(\bar{x}) = x$ を充たす $(1, 1)$-圏 $\mathcal{E}$ の対象 $\bar{x} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E})$

  に対して，以下の条件を充たす $(1, 1)$-圏 $\mathcal{E}$ の射 $\bar{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\bar{x}, z)$ が存在することを言う：

  (coCart-ord-1)

  $\bar{f}$ は f の持ち上げである．i.e. $p(\bar{f}) = f$ が成り立つ．

  (coCart-ord-2)

  $\bar{f}$ は p-coCartesian である．

定義 1.36 に合わせて，$(1, 1)$-圏の関手

$$p\colon \mathcal{O}^{\otimes} \longrightarrow \mathbf{Fin}_* \tag{1.3.3}$$

であって以下の 3 条件を充たすものを考えてみる：

(OP-ord-1)

任意の inert な射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m\rangle, \langle n\rangle)$ および $\forall c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O}^{\otimes}{}_{\langle m\rangle})$ に対して，$\mathcal{O}^{\otimes}$ における p-coCartesian な射 $\bar{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c, c')$ が存在して $p(\bar{f}) = f$ を充たす．

(OP-ord-2)

$\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m\rangle, \langle n\rangle)$ および $\forall c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle m\rangle}), \forall c' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n\rangle})$ に対して，inert な射 $\rho^i \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle n\rangle, \langle 1\rangle)$ に **(Op-ord-1)** を適用して得られる p-coCartesian な射の族 $\left\{\bar{\rho}^i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c', c'_i)\right\}_{1\le i\le n}$ が誘導する写像

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c, c')_f &\longrightarrow \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c, c'_i)_{\rho^i\circ f}, \\
\varphi &\longmapsto (\bar{\rho}^1\circ\varphi, \dots, \bar{\rho}^n\circ\varphi)
\end{aligned}$$

は，$(1, 1)$-圏 **Sets** における同型射（i.e. 全単射）である．

(OP-ord-3)

$\forall c_1, \dots, c_n \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle 1\rangle})$ に対して，ある $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n\rangle})_0$ および p-coCartesian な射 $\widehat{\rho_i} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c, c_i)_{\rho^i}$ が存在する．

ここで，**Cat** における引き戻し

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n\rangle} \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d, hook, "\langle n\rangle"] \\
\mathcal{O}^{\otimes} \arrow[r, "p"'] & \mathbf{Fin}_*
\end{tikzcd}$$

により $(1, 1)$-圏 $\mathcal{O}^{\otimes}$ を定義している．具体的には

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n\rangle}) = \left\{ c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O}^{\otimes}) \;\middle|\; p(c) = \langle n\rangle \right\}$$

である．さらに，$\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m\rangle, \langle n\rangle)$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c, c')_f \coloneqq \left\{ \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c, c') \;\middle|\; p(\varphi) = f \right\}$$

と定義した．

命題 1.3: 色付きオペラッドの再構成

条件 **(Op-ord-1)-(Op-ord-3)** を充たす $(1, 1)$-圏の関手 (1.3.3) から次のように構成されたデータの組み $\mathcal{O}$ は色付きオペラッドを成す：

- 対象の集まりを $\mathrm{Ob}(\mathcal{O}) \coloneqq \mathrm{Ob}(\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle 1\rangle})$ と定義する．
- $\forall x_1, \dots, x_n, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O})$ に対して，以下の 3 つ組全体が成す集合を $\mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}\big((x_1, \dots, x_n), y\big)$ と定義する．
  (1) $x_1, \dots, x_n$ に対して **(Op-ord-3)** を適用することにより定まる $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n\rangle})$
  (2) $x_1, \dots, x_n$ に対して **(Op-ord-3)** を適用することにより定まる p-coCartesian な射の族 $\big\{\widehat{\rho_i} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(X, x_i)_{\rho^i}\big\}_{1\le i\le n}$
  (3)【例 **1.3.2**】の active な射 $\alpha_n \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}\big(\langle n\rangle, \langle 1\rangle\big)$ およびその上の $\mathcal{O}^{\otimes}$ の射 $F \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(X, y)_{\alpha_n}$
- n 個の多射

$$(X^1, \{\widehat{\rho_i}^1\}_{1\le i\le m_1}, F^1) \in \mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}\big((x_1^1, \dots, x_{m_1}^1), y_1\big),$$
$$\vdots$$
$$(X^n, \{\widehat{\rho_i}^n\}_{1\le i\le m_n}, F^n) \in \mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}\big((x_1^n, \dots, x_{m_n}^n), y_n\big)$$

と 1 つの多射 $(Y, \{\widehat{\rho_j}\}_{1\le j\le n}, G) \in \mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}\big((y_1, \dots, y_n), z\big)$ の合成

$$\big(X, \{\widehat{\rho_i}\}_{1\le i\le m_1+\dots+m_n}, G\circ(F^1; \dots; F^n)\big) \in \mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}\big((x_1^1, \dots, x_{m_1}^1; \dots; x_1^n, \dots, x_{m_n}^n), z\big)$$

を次のように定義する：

(1) $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle m_1+\dots+m_n\rangle})$ は，$x_1^1, \dots, x_{m_n}^n \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O})$ に対して **(Op-ord-3)** を適用することにより定める．

(2) p-coCartesian な射の族 $\Big\{\widehat{\rho_i^j} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(X, x_i^j)_{\rho^{i+m_1+\dots+m_{j-1}}}\Big\}_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le i\le m_j}}$ は $x_1^1, \dots, x_{m_n}^n \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O})$ に対して **(Op-ord-3)** を適用することにより定める．

(3) $\mathcal{O}^{\otimes}$ の射 $G\circ(F^1; \dots; F^n) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(X, z)_{\alpha_{m_1+\dots+m_n}}$ は以下の手順に従って構成する：

(STEP-1)

まず，$1 \le \forall j \le n$ に対して inert な射 $\pi_j \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}\big(\langle m_1+\dots+m_n\rangle, \langle m_j\rangle\big)$ を

$$\pi_j \colon \langle m_1+\dots+m_n\rangle \longrightarrow \langle m_j\rangle,$$
$$k \longmapsto \begin{cases} k-(m_1+\dots+m_{j-1}), & 1\le k-(m_1+\dots+m_{j-1}) \le m_j \\ *, & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定義する．

(STEP-2)

inert な射 $\pi_j \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}\big(\langle m_1+\dots+m_n\rangle, \langle m_j\rangle\big)$ に対して **(Op-ord-1)** を適用することにより，p-coCartesian な射 $\overline{\pi}_j \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(X, X^j)_{\pi_j}$ を取得する．

(STEP-3)

$$(F^1 \circ \bar{\pi}_1,\, \ldots,\, F^n \circ \bar{\pi}_n) \in \prod_{j=1}^{n} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}\left(X,\, y_j\right)_{\alpha_{m_j} \circ \pi_j}$$

に対して **(Op-ord-2)** を適用することで，対応する

$$F \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}\left(X,\, Y\right)_{\pi}$$

が一意的に定まる．これに $G \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}\left(Y,\, z\right)_{\alpha_n}$ を合成して

$$G \circ_{\pi} \left(F^1;\, \ldots\,;\, F^n\right) := G \circ F \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}\left(X,\, z\right)_{\alpha_{m_1+\cdots+m_n}}$$

と定義する．ただし，$\pi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}\left(\langle m_1 + \cdots + m_n \rangle,\, \langle n \rangle\right)$ は

$$\pi(k) := \begin{cases} j, & m_{j-1} < k \leq m_j \\ *, & k = * \end{cases}$$

と定義される active な射である[a]．

[a] $1 \leq \forall j \leq n$ に対して $\rho^j \circ \pi = \alpha_{m_j} \circ \pi_j$ が成り立つ．

証明 ■

逆の対応を作ることもできる．

定義 1.40: Category of operators

いま，colored operad $\mathcal{O}$ が与えられたとする．このとき **category of operators** と呼ばれる $(1, 1)$-圏 $\mathcal{O}^{\otimes}$ を次のように定義する：

- $\mathcal{O}$ の対象の有限列 $x_1, \dots, x_n \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O})$ を対象に持つ．
- $\forall (x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_n) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O}^{\otimes})$ に対して，以下の 2 つ組を全て集めて得られる集合を $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}\left(\{x_i\}_{1\le i\le m}, \{y_j\}_{1\le j\le n}\right)$ とする．

  (1) $\mathbf{Fin}_*$ の射

  $$\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}\left(\langle m\rangle, \langle n\rangle\right)$$

  (2) 多射の族

  $$\left\{\phi_j \in \mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}\left(\{x_i\}_{i\in\alpha^{-1}(\{j\})}, y_j\right)\right\}_{1\le j\le n}$$

  より具体的には，

  $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}\left(\{x_i\}_{1\le i\le m}, \{y_j\}_{1\le j\le n}\right) := \coprod_{\alpha\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}\left(\langle m\rangle, \langle n\rangle\right)} \prod_{j=1}^{n} \mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}\left(\{x_i\}_{i\in\alpha^{-1}(\{j\})}, y_j\right)$$

  である．
- 射の合成は，$\mathbf{Fin}_*$ における射の合成および $\mathcal{O}$ における多射の合成によって定める．

$\mathcal{O}^{\otimes}$ から $\mathbf{Fin}_*$ への忘却関手を

$$\begin{aligned} p\colon \mathcal{O}^{\otimes} &\longrightarrow \mathbf{Fin}_*, \\ \{x_i\}_{1\le i\le n} &\longmapsto \langle n\rangle, \\ \left(\alpha, \{\phi_j\}_{1\le j\le n}\right) &\longmapsto \alpha \end{aligned}$$

と定義する．

命題 1.4: 色付きオペラッドと category of operators

$(1, 1)$-圏の関手

$$p\colon \mathcal{O}^{\otimes} \longrightarrow \mathbf{Fin}_*$$

において，$\mathcal{O}^{\otimes}$ がある色付きオペラッド $\mathcal{O}$ の category of operators と圏同値になる必要十分条件は，p が条件 **(Op-ord-1)-(Op-ord-3)** を充たすことである．

証明 [?, Proposition 2.2.II.] ■

1.3.3 $(\infty, 1)$-圏の構成

話を $(\infty, 1)$-オペラッドに戻そう．