第 1 章

C^∞ 多様体の話

[?, Chapter4, 5, 6] の内容を自分用に纏める．

1.1　沈めこみ・はめ込み・埋め込み

$\mathbb{R}^n$ における逆関数定理から始める．まず距離空間に関する基本的な補題を用意する．

補題 1.1: Banach の不動点定理

空でない完備な距離空間 $(X,\ d)$ を与える．このとき，以下の条件を充たす任意の写像 $F\colon X \longrightarrow X$ はただ 1 つの固定点を持つ：

(contraction)　ある定数 $\lambda \in (0,\ 1)$ が存在し，$\forall x,\ y \in X$ に対して $d\bigl(F(x),\ F(y)\bigr) \le \lambda d(x,\ y)$

<u>証明</u>　まず固定点の存在を示す．$\forall x_0 \in X$ を 1 つとり，X の点列 $\bigl(x_i\bigr)_{i=0}^{\infty}$ を漸化式 $x_{i+1} = F(x_i)$ によって帰納的に定める．仮定より $\lambda \in (0,\ 1)$ なので，$\forall \varepsilon > 0$ に対して十分大きな $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ を取れば $\lambda^{N_\varepsilon} < \frac{1-\lambda}{d(x_1,\ x_0)}\varepsilon$ が成り立つようにできる．このとき $\forall m,\ n \ge N_\varepsilon$ $^{\text{w}/}$ $m \ge n$ に対して

$$
\begin{aligned}
d(x_m,\ x_n) &\le d(x_m,\ x_{m-1}) + \cdots + d(x_{n+1},\ x_n) && \because \text{三角不等式} \\
&\le \lambda^{m-1} d(x_1,\ x_0) + \cdots + \lambda^n d(x_1,\ x_0) && \because \text{条件 (contraction)} \\
&\le \lambda^n \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \right) d(x_1,\ x_0) \\
&\le \lambda^{N_\varepsilon} \frac{d(x_1,\ x_0)}{1-\lambda} < \varepsilon
\end{aligned}
$$

が成り立つ．i.e. 点列 $\bigl(x_i\bigr)_{i=0}^{\infty}$ は Cauchy 列であり，仮定より X は完備なのでその収束点 $x := \lim_{i\to\infty} x_i \in X$ が一意的に存在する．F は明らかに連続なので

$$
F(x) = F(\lim_{i\to\infty} x_i) = \lim_{i\to\infty} F(x_i) = x
$$

が成り立つ．i.e. x は固定点である．

次に固定点 x の一意性を示す．別の固定点 $x' \in X$ が存在したとする．このとき条件 **(contraction)** より

$$
d(x,\ x') = d\bigl(F(x),\ F(x')\bigr) \le \lambda d(x,\ x') \quad\Longleftrightarrow\quad (1-\lambda) d(x,\ x') \le 0
$$

が成り立つので $x = x'$ でなくてはいけない. ■

定理 1.1: $\mathbb{R}^n$ における逆関数定理

- 開集合[a] $U, V \in \mathbb{R}^n$
- C^∞ 関数[b] $F\colon U \longrightarrow V,\ x \longmapsto \bigl(F^1(x), \dots, F^n(x)\bigr)$

を与え, F の Jacobi 行列を返す C^∞ 写像

$$DF\colon U \longrightarrow \mathrm{M}(n, \mathbb{R}),\ x \longmapsto \left[\frac{\partial F^\mu}{\partial x^\nu}(x)\right]_{1\le\mu,\,\nu\le n}$$

を定める. このとき, ある点 $p \in U$ において $DF(p) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ならば,

- 点 $p \in U$ の<u>連結な</u>近傍 $p \in U_0 \subset U$
- 点 $F(p) \in V$ の<u>連結な</u>近傍 $F(p) \in V_0 \subset V$

が存在して $F|_{U_0}\colon U_0 \longrightarrow V_0$ が微分同相写像[c]になる.

[a] $\mathbb{R}^n$ には通常の Euclid 位相を入れる.
[b] $F = (F^1, \dots, F^n)$ の各成分 F^i が任意回偏微分可能.
[c] i.e. $F|_{U_0}$ は C^∞ 級の逆写像を持つ.

<u>**証明**</u> $U' \coloneqq \left\{\, x - p \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x \in U \,\right\}$, $V' \coloneqq \left\{\, x - F(p) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x \in V \,\right\}$ とおく. このとき写像

$$F_1\colon U' \longrightarrow V',\ x \longmapsto F(x+p) - F(p)$$

は C^∞ 級で, かつ $F_1(0) = 0,\ DF_1(0) = DF(p)$ を充たし, 0 の連結な近傍 $0 \in U'_0 \subset U'$, $0 \in V'_0 \subset V'$ が存在して $F_1|_{U'_0}\colon U'_0 \longrightarrow V'_0$ が微分同相写像になることと, 点 $p \in U$ の連結な近傍 $p \in U_0 \subset U$ と点 $F(p) \in V$ の連結な近傍 $F(p) \in V_0 \subset V$ が存在して $F|_{U_0}\colon U_0 \longrightarrow V_0$ が微分同相写像になることは同値である.

さらに, $V'' \coloneqq \left\{\, DF_1(0)^{-1}(x) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x \in V' \,\right\}$, $V''_0 \coloneqq \left\{\, DF_1(0)^{-1}(x) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x \in V'_0 \,\right\}$ とおくと写像[*1]

$$F_2\colon U' \longrightarrow V'',\ x \longmapsto DF_1(0)^{-1}\bigl(F_1(x)\bigr)$$

は C^∞ 級で, $DF_2(0) = \mathbb{1}_n$ かつ $V''_0 \subset V''$ は 0 の連結な近傍であり[*2], $F_2|_{U'_0}\colon U'_0 \longrightarrow V''_0$ が微分同相写像になることと $F_1|_{U'_0}\colon U'_0 \longrightarrow V'_0$ が微分同相写像になることは同値である. 以上の考察から,

- $p = 0 \in U$
- $F(p) = 0 \in V$
- $DF(p) = \mathbb{1}_n$

を仮定しても一般性を失わないことが分かった.

ここで C^∞ 写像

$$H\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ x \longmapsto x - F(x)$$

[*1] $DF_1(0)^{-1}\bigl(F_1(x)\bigr)$ と言うのは, 列ベクトル $F_1(x) \in \mathbb{R}^n$ に $n \times n$ 行列 $DF_1(0)^{-1} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{R})$ を作用させると言う意味.
[*2] V'_0 が連結であり, 行列 $DF_1(0)^{-1}$ をかけると言う写像は連続なので.

を考える．まず $DH(0)=\mathbb{1}_n-\mathbb{1}_n=0$ が成り立つことがわかる．さらに写像 $DH\colon U\longrightarrow \mathrm{M}(n,\,\mathbb{R}),\ x\longmapsto DH(x)$ の連続性[*3]から，$B_\delta(0)\subset U$ を充たす $\delta>0$ が存在して，$\forall x\in\overline{B_\delta(0)}$ に対して[*4]

$$\|DH(x)-DH(0)\| = \|DH(x)\| \le \frac{1}{2}$$

が成り立つようにできる．

$\boldsymbol{F}$ は $\overline{\boldsymbol{B_\delta(0)}}$ 上単射

$\forall x,\,y\in\overline{B_\delta(0)}$ をとる．$\overline{B_\delta(0)}$ は凸集合なので $\forall t\in[0,\,1]$ に対して $x+t(y-x)\in\overline{B_\delta(0)}$ が成り立つ．よって

$$\begin{aligned}|H(y)-H(x)| &= \left|\int_0^1 \mathrm{d}t\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H\bigl(x+t(y-x)\bigr)\right|\\ &= \left|\int_0^1 \mathrm{d}t\,DH\bigl(x+t(y-x)\bigr)(y-x)\right|\\ &\le \int_0^1 \mathrm{d}t\,\bigl|DH\bigl(x+t(y-x)\bigr)(y-x)\bigr|\\ &\le \int_0^1 \mathrm{d}t\,\sup_{x\in\overline{B_\delta(0)}}\|DH(x)\||y-x|\\ &\le \frac{1}{2}|y-x| \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

が言える．故に

$$\begin{aligned}|y-x| &= |F(y)-F(x)+H(y)-H(x)|\\ &\le |F(y)-F(x)|+|H(y)-H(x)|\\ &\le |F(y)-F(x)|+\frac{1}{2}|y-x|\end{aligned}$$

が成り立ち，

$$\frac{1}{2}|y-x|\le|F(y)-F(x)| \tag{1.1.2}$$

が従う．故にノルムの正定値性から $\overline{B_\delta(0)}$ 上 F が単射だと分かった．

$\overline{\boldsymbol{B_{\delta/2}(0)}}\subset \boldsymbol{F}(\overline{\boldsymbol{B_\delta(0)}})$

$\forall y\in\overline{B_{\delta/2}(0)}$ に対してある $x_y\in\overline{B_\delta(0)}$ が存在して $F(x_y)=y$ を充たすことを示す．C^∞ 写像

$$G\colon U\longrightarrow\mathbb{R}^n,\ x\longmapsto y+H(x)=y+x-F(x)$$

を考える．不等式 (1.1.1) から $\forall x\in\overline{B_\delta(0)}$ に対して

$$|G(x)|\le|y|+|H(x)|\le\frac{\delta}{2}+\frac{1}{2}|x|\le\delta$$

が成り立つので $G\bigl(\overline{B_\delta(0)}\bigr)\subset\overline{B_{\delta(0)}}$ が分かった．その上再度 (1.1.1) から $\forall x,\,y\in\overline{B_\delta(0)}$ に対して

$$|G(x)-G(y)|=|H(x)-H(y)|\le\frac{1}{2}|x-y|$$

---

*3 H が C^∞ 級なので DH は連続.

*4 $\|\cdot\|:\mathrm{M}(n,\,\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{R}_{\ge0}$ は Frobenius ノルム.

が成り立つので，空でない完備な距離空間 $\overline{B}_\delta(0)$ 上の写像 $G|_{\overline{B}_\delta(0)}\colon \overline{B}_\delta(0) \longrightarrow \overline{B}_\delta(0)$ は補題 1.1 の条件 **(contraction)** を充たし，G はただ 1 つの固定点 $x_y \in \overline{B}_\delta(0)$ を持つ．G の定義より $G(x_y) = x_y \implies F(x_y) = y$ である．

以上の議論から，$U_0 := \overline{B_\delta(0)} \cap F^{-1}\bigl(\overline{B_{\delta/2}(0)}\bigr)$, $V_0 := \overline{B_{\delta/2}(0)}$ とおくと $F|_{U_0}\colon U_0 \longrightarrow V_0$ が全単射になることが分かった．従って逆写像[*5] $F^{-1}\colon V_0 \longrightarrow U_0$ が存在する．さらに $\forall x', y' \in V_0$ をとり不等式 (1.1.2) において $x = F^{-1}(x')$, $y = F^{-1}(y')$ とおくことで F^{-1} が連続写像であることがわかる．i.e. $F|_{U_0}$ は同相写像である．よって V_0 が定義から連結なので U_0 も連結である．

F^{-1} が C^∞ 級

まず $F^{-1}\colon V_0 \longrightarrow U_0$ が C^1 級であることを示す．$\forall y \in V_0$ を 1 つ固定する．偏微分の連鎖律より $D(F^{-1})(y) = DF\bigl(F^{-1}(y)\bigr)^{-1}$ であるから，

$$\lim_{y' \to y} \frac{F^{-1}(y') - F^{-1}(y) - DF\bigl(F^{-1}(y)\bigr)^{-1}(y' - y)}{|y' - y|} = 0$$

を示せば良い．$\forall y' \in V_0 \setminus \{y\}$ を取り，$x := F^{-1}(y)$, $x' := F^{-1}(y') \in U_0 \setminus \{x\}$ とおく．すると

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{F^{-1}(y') - F^{-1}(y) - DF\bigl(F^{-1}(y)\bigr)^{-1}(y' - y)}{|y' - y|} \right| \\
&= \frac{\bigl|x' - x - DF(x)^{-1}(y' - y)\bigr|}{|y' - y|} \\
&= \frac{1}{|y' - y|} \bigl| DF(x)^{-1}\bigl(DF(x)(x' - x) - (y' - y)\bigr) \bigr| \\
&= \frac{|x' - x|}{|F(x') - F(x)|} \left| DF(x)^{-1} \left(\frac{F(x') - F(x) - DF(x)(x' - x)}{|x' - x|} \right) \right| \\
&\leq 2 \sup_{x \in U_0} \bigl\| DF(x)^{-1} \bigr\| \left| \frac{F(x') - F(x) - DF(x)(x' - x)}{|x' - x|} \right| && \because \text{不等式 (1.1.1)}
\end{aligned}$$

と評価できるが，F が C^∞ 級なので $\sup_{x \in U_0} \bigl\| DF(x)^{-1} \bigr\|$ は有限確定値である．F の連続性から $y' \to y$ のとき $x' \to x$ であり，仮定より F は C^∞ 級なので，この極限で最右辺が 0 に収束することが分かった．

次に F^{-1} が $\forall k \in \mathbb{N}$ について C^k 級であることを数学的帰納法により示す．$k = 1$ の場合は先ほど示した．$k > 1$ とする．$D(F^{-1}) = {}^{-1} \circ DF \circ F^{-1}$ であるから[*6]，帰納法の仮定より $D(F^{-1})$ は C^k 級関数の合成で書けているので C^k 級である．よって F^{-1} は C^{k+1} 級であり，帰納法が完成した．

■

[*5] 厳密には $(F|_{U_0})^{-1}$ と書くべきだが略記した．

[*6] ${}^{-1}\colon \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $X \longmapsto X^{-1}$ とおいた．Cramer の公式よりこれは C^∞ 級である．

系 1.2: 陰関数定理

$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ の座標を $(x,\, y) \coloneqq (x^1,\, \dots,\, x^n,\, y^1,\, \dots,\, y^k)$ と書く．

- 開集合 $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$
- C^∞ 関数 $\Phi\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^k,\ (x,\, y) \longmapsto \bigl(\Phi^1(x,\, y),\, \dots,\, \Phi^k(x,\, y)\bigr)$

を与える．このとき，点 $(a,\, b) \in U$ において

$$\left[\frac{\partial \Phi^\mu}{\partial y^\nu}(a,\, b)\right]_{1\le\mu,\,\nu\le k} \in \mathrm{GL}(k,\, \mathbb{R})$$

が成り立つならば，

- 点 a の近傍 $a \in V_0 \subset \mathbb{R}^n$
- 点 b の近傍 $b \in W_0 \subset \mathbb{R}^k$
- C^∞ 関数 $F\colon V_0 \longrightarrow W_0,\ x \longmapsto \bigl(F^1(x),\, \dots,\, F^k(x)\bigr)$

の 3 つ組であって

$$\Phi^{-1}(\{c\}) \cap (V_0 \times W_0) = \Bigl\{\, \bigl(x,\, F(x)\bigr) \in V_0 \times W_0 \,\Bigr\}$$

を充たすものが存在する．ただし $c \coloneqq \Phi(a,\, b) \in \mathbb{R}^k$ とおいた．

<u>証明</u> C^∞ 写像

$$\Psi\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k,\ (x,\, y) \longmapsto \bigl(x,\, \Phi(x,\, y)\bigr)$$

を考える．仮定より点 $(a,\, b) \in U$ において

$$D\Psi(a,\, b) = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_n & 0 \\ \left[\frac{\partial \Phi^\mu}{\partial x^\nu}(a,\, b)\right]_{1\le\mu\le k,\, 1\le\nu\le n} & \left[\frac{\partial \Phi^\mu}{\partial y^\nu}(a,\, b)\right]_{1\le\mu,\,\nu\le k} \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(n+k,\, \mathbb{R})$$

であるから，逆関数定理より点 $(a,\, b)$ の連結な近傍 $U_0 \subset U$ と点 $(a,\, c)$ の連結な近傍 $Y_0 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ が存在して $\Psi|_{U_0}\colon U_0 \longrightarrow Y_0$ が微分同相写像になる．$U_0,\, Y_0$ を適当に小さくとることで $U_0 = V \times W$ の形をしていると仮定して良い[*7]．

$\forall (x,\, y) \in Y_0$ に対して $\Psi^{-1}(x,\, y) = \bigl(A(x,\, y),\, B(x,\, y)\bigr)$ とおくと $A\colon Y_0 \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ B\colon Y_0 \longrightarrow \mathbb{R}^k$ はどちらも C^∞ 関数で，

$$\begin{aligned}(x,\, y) &= \Phi \circ \Psi^{-1}(x,\, y) \\ &= \Bigl(A(x,\, y),\, \Psi\bigl(A(x,\, y),\, B(x,\, y)\bigr)\Bigr)\end{aligned}$$

が成り立つ．よって

$$\begin{aligned}\Psi^{-1}(x,\, y) &= \bigl(x,\, B(x,\, y)\bigr), \\ y &= \Psi\bigl(x,\, B(x,\, y)\bigr)\end{aligned}$$

[*7] 開集合の直積は積位相の開基を成すので．

が従う．

ここで $V_0 \coloneqq \left\{ x \in V \mid (x,\, c) \in Y_0 \right\}$, $W_0 \coloneqq W$ とおき，

$$F\colon V_0 \longrightarrow W_0,\ x \longmapsto B(x,\, c)$$

と定義する．すると $\forall x \in V_0$ に対して

$$c = \Phi\bigl(x,\, B(x,\, c)\bigr) = \Psi\bigl(x,\, F(x)\bigr)$$

である. i.e. $\Phi^{-1}(\{c\}) \cap (V_0 \times W_0) \supset \left\{ \bigl(x,\, F(x)\bigr) \in V_0 \times W_0 \right\}$ が言えた. 逆に $\forall (x,\, y) \in \Phi^{-1}(\{c\}) \cap (V_0 \times W_0)$ をとる．このとき $\Phi(x,\, y) = c$ なので $\Psi(x,\, y) = \bigl(x,\, \Phi(x,\, y)\bigr) = (x,\, c)$ であり，

$$(x,\, y) = \Psi^{-1}(x,\, c) = \bigl(x,\, B(x,\, c)\bigr) = \bigl(x,\, F(x)\bigr)$$

が成り立つ．i.e. $\Phi^{-1}(\{c\}) \cap (V_0 \times W_0) \subset \left\{ \bigl(x,\, F(x)\bigr) \in V_0 \times W_0 \right\}$ が言えた．

■

1.1.1 局所微分同相写像

定義 1.1: 局所微分同相写像

境界なし/あり C^∞ 多様体 $M,\, N$ を与える．
C^∞ 写像 $F\colon M \longrightarrow N$ が**局所微分同相写像** (local diffeomorphism) であるとは，$\forall p \in M$ が以下の条件を充たす近傍 $p \in U_p \subset M$ を持つことを言う：

(1) $F(U_p) \subset N$ が開集合
(2) $F|_U : U \longrightarrow F(U)$ が微分同相写像

定理 1.3: 境界を持たない多様体における逆関数定理

- 境界を持たない C^∞ 多様体 $M,\, N$
- C^∞ 写像 $F\colon M \longrightarrow N$

を与える．このとき，ある点 $p \in M$ において $T_pF\colon T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ が全単射ならば，

- 点 $p \in M$ の連結な近傍 $p \in U_0 \subset M$
- 点 $F(p) \in N$ の連結な近傍 $p \in V_0 \subset N$

が存在して $F|_{U_0} : U_0 \longrightarrow V_0$ が微分同相写像になる．

証明 T_pF が全単射なので，$\dim M = \dim N \eqqcolon n$ である．p を含むチャート $(U,\, \varphi)$ と $F(p)$ を含むチャート $(V,\, \psi)$ を，$F(U) \subset V$ を充たすようにとる．すると

- $\mathbb{R}^n$ の開集合 $\varphi(U),\, \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$
- C^∞ 関数 $\widehat{F} \coloneqq \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \psi(V)$

の 2 つ組は，仮定より点 $\varphi(p) \in \varphi(U)$ において $T_{\varphi(p)}\widehat{F} = T_{F(p)}\psi \circ T_pF \circ T_{\varphi(p)}(\varphi^{-1}) \in \mathrm{GL}(n,\, \mathbb{R})$ を充たすので，$\mathbb{R}^n$ の逆関数定理が使えて

- 点 $\varphi(p) \in \varphi(U)$ の連結な近傍 $\varphi(p) \in \widehat{U_0} \subset \varphi(U)$
- 点 $\widehat{F}\bigl(\varphi(p)\bigr) = \psi\bigl(F(p)\bigr) \in \varphi(U)$ の連結な近傍 $\widehat{F}\bigl(\varphi(p)\bigr) \in \widehat{V_0} \subset \varphi(V)$

であって $\widehat{F}|_{\widehat{U_0}} \colon \widehat{U_0} \longrightarrow \widehat{V_0}$ が微分同相写像となるようなものがある．従って $U_0 \coloneqq \varphi^{-1}(\widehat{U_0}) \subset M,\, V_0 \coloneqq \psi^{-1}(\widehat{V_0}) \subset N$ とおけばこれらはそれぞれ点 $p,\, F(p)$ の連結な近傍で，かつ $F|_{U_0} = \psi^{-1}|_{V_0} \circ \widehat{F}|_{\widehat{U_0}} \circ \varphi|_{U_0} \colon U_0 \longrightarrow V_0$ は微分同相写像の合成なので微分同相写像である． ■

1.1.2　ランク定理

定義 1.2: C^∞ 写像のランク

C^∞ 写像 $F \colon M \longrightarrow N$ を与える．

- 点 $p \in M$ における F の**ランク** (rank) とは，線型写像 $T_pF \colon T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ のランク，i.e. $\dim\bigl(\mathrm{Im}(T_pF)\bigr) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ のこと．$\forall p \in M$ における F のランクが等しいとき，F は**定ランク** (constant rank) であると言い，$\boldsymbol{\mathrm{rank}\, F} \coloneqq \dim\bigl(\mathrm{Im}(T_pF)\bigr)$ と書く．
- 点 $p \in M$ における F のランクが $\min\bigl\{\dim M,\, \dim N\bigr\}$ に等しいとき，F は**点 $\boldsymbol{p}$ においてフルランク** (full rank at p) であると言う．$\mathrm{rank}\, F = \min\bigl\{\dim M,\, \dim N\bigr\}$ ならば F は**フルランク** (full rank) であると言う．

定義 1.3: C^∞ 沈めこみ・はめ込み

定ランクの C^∞ 写像 $F \colon M \longrightarrow N$ を与える．

- F が **$\boldsymbol{C^\infty}$ 沈め込み** (smooth submersion) であるとは，$\forall p \in M$ において $T_pF \colon T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ が全射である，i.e. $\mathrm{rank}\, F = \dim N$ であることを言う．
- F が **$\boldsymbol{C^\infty}$ はめ込み** (smooth immersion) であるとは，$\forall p \in M$ において $T_pF \colon T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ が単射である，i.e. $\mathrm{rank}\, F = \dim M$ であること[a]を言う．

[a] 階数・退化次元の定理から $\dim(\mathrm{Ker}\, T_pF) + \dim(\mathrm{Im}\, T_pF) = \dim M$ なので，$\mathrm{rank}\, F = \dim(\mathrm{Im}\, T_pF) = \dim M \implies \dim(\mathrm{Ker}\, T_pF) = 0 \iff \mathrm{Ker}\, T_pF = 0$

定理 1.4: 局所的ランク定理（境界なし）

- 境界を持たない C^∞ 多様体 $M,\ N$
- 定ランクの C^∞ 写像 $F\colon M \longrightarrow N$

を与える．このとき $\forall p \in M$ に対して

- 点 $p \in M$ を含む M の C^∞ チャート $(U_0,\ \Phi)$ であって $\Phi(p) = 0 \in \mathbb{R}^{\dim M}$ を充たすもの
- 点 $F(p) \in N$ を含む N の C^∞ チャート $(V_0,\ \Psi)$ であって $\Psi\bigl(F(p)\bigr) = 0 \in \mathbb{R}^{\dim N}$ かつ $F(U) \subset V$ を充たすもの

が存在して，$\forall (x^1,\ \dots,\ x^{\dim M}) \in \Phi(U) \subset \mathbb{R}^{\dim M}$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\Psi \circ F \circ \Phi^{-1}(x^1,\ \dots,\ x^{\operatorname{rank} F},\ x^{\operatorname{rank} F+1},\ \dots,\ x^{\dim M}) \\
&\quad = (x^1,\ \dots,\ x^{\operatorname{rank} F},\ \underbrace{0,\ \dots,\ 0}_{\dim N - \operatorname{rank} F}) \in \Psi(V) \subset \mathbb{R}^{\dim N}
\end{aligned}
\tag{1.1.3}
$$

を充たす．

特に F が C^∞ 沈め込みならば (1.1.3) は

$$
\Psi \circ F \circ \Phi^{-1}(x^1,\ \dots,\ x^{\dim N},\ x^{\dim N+1},\ \dots,\ x^{\dim M}) = (x^1,\ \dots,\ x^{\dim N})
$$

の形になり，F が C^∞ はめ込みならば (1.1.3) は

$$
\Psi \circ F \circ \Phi^{-1}(x^1,\ \dots,\ x^{\dim M}) = (x^1,\ \dots,\ x^{\dim M},\ 0,\ \dots,\ 0)
$$

の形になる．

証明 $\forall p \in M$ を 1 つ固定する．以降では p を含む M の任意の C^∞ チャート $(U,\ \varphi) = \bigl(U,\ (x^\mu)\bigr)$ および $F(p)$ を含む N の任意の C^∞ チャート $(V,\ \psi) = \bigl(V,\ (y'^\mu)\bigr)$ に対して

$$
\begin{aligned}
\widehat{U} &:= \varphi(U) \subset \mathbb{R}^{\dim M}, \\
\widehat{V} &:= \psi(V) \subset \mathbb{R}^{\dim N}, \\
\widehat{F} &:= \psi \circ F \circ \varphi^{-1}\colon \widehat{U} \longrightarrow \widehat{V}, \\
\widehat{p} &:= \varphi(p) \in \widehat{U}
\end{aligned}
$$

とおく．

仮定より F は定ランクなので，点 $\widehat{p} \in \widehat{U}$ において線型写像 $T_{\widehat{p}}\widehat{F}\colon T_{\widehat{p}}\widehat{U} \longrightarrow T_{\widehat{F}(\widehat{p})}\widehat{V}$ の表現行列のランクは $\operatorname{rank} F$ である．従って $T_{\widehat{p}}\widehat{U},\ T_{\widehat{F}(\widehat{p})}\widehat{V}$ の自然基底の順番を入れ替える，i.e. 局所座標の順番を入れ替える[*8]ことで $T_{\widehat{p}}\widehat{F}$ の表現行列（これは C^∞ 関数 $\widehat{F}$ の Jacobi 行列 $D\widehat{F}(\widehat{p})$ である）の $\operatorname{rank} F$ 次首座小行列が正則になるように，i.e.

$$
\left[\frac{\partial \widehat{F}^\mu}{\partial x^\nu}(\widehat{p}) \right]_{1 \le \mu,\, \nu \le \operatorname{rank} F} \in \mathrm{GL}(\operatorname{rank} F,\ \mathbb{R})
\tag{1.1.4}
$$

[*8] 座標を入れ替える写像は微分同相写像なので，$M,\ N$ の C^∞ 構造の中には座標の入れ替えによって互いに移り合えるような C^∞ チャートたちが含まれている．

が成り立つようにできる．このような C^∞ チャートの取り方に合わせて $\widehat{U}$ の座標を

$$(x,\, y) = (x^1,\, \ldots,\, x^{\mathrm{rank}\, F},\, y^1,\, \ldots,\, y^{\dim M - \mathrm{rank}\, F}) \coloneqq (x^1,\, \ldots,\, x^{\dim M})$$

とおき，$\widehat{V}$ の座標を

$$(v^1,\, \ldots,\, v^{\mathrm{rank}\, F},\, w^1,\, \ldots,\, w^{\dim N - \mathrm{rank}\, F}) \coloneqq (x'^1,\, \ldots,\, x'^{\dim N})$$

とおき直す．するとある C^∞ 写像 $Q\colon \widehat{U} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathrm{rank}\, F}$, $R\colon \widehat{U} \longrightarrow \mathbb{R}^{\dim N - \mathrm{rank}\, F}$ を使って $\widehat{F} = (Q,\, R)$ と書くことができる．さらに，$\widehat{U}$, $\widehat{V}$ の原点を平行移動することでいつでも $\widehat{p} = (0,\, 0) \in \mathbb{R}^{\dim M}$, $\widehat{F}(\widehat{p}) = (0,\, 0) \in \mathbb{R}^{\dim N}$ が成り立つようにできる[*9]ので，以降常にそのような C^∞ チャートをとることにする．以上の準備の下で，仮定 (1.1.4) は

$$\left[\frac{\partial Q^\mu}{\partial x^\nu}(0,\, 0) \right]_{1 \leq \mu,\, \nu \leq \mathrm{rank}\, F} \in \mathrm{GL}(\mathrm{rank}\, F,\, \mathbb{R}) \tag{1.1.5}$$

と同値である．

ここまでの議論の要請を満たす M, N の任意の C^∞ チャート $(U,\, \varphi)$, $(V,\, \psi)$ をとり，C^∞ 写像

$$\Phi\colon \widehat{U} \longrightarrow \mathbb{R}^{\dim M},\ (x,\, y) \longmapsto \bigl(Q(x,\, y),\, y\bigr)$$

を考える．点 $(0,\, 0) \in \widehat{U}$ における Ψ の Jacobi 行列は

$$D\Psi(0,\, 0) = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial Q^\mu}{\partial x^\nu}(0,\, 0)\right]_{1 \leq \mu,\, \nu \leq \mathrm{rank}\, F} & \left[\frac{\partial Q^\mu}{\partial y^\nu}(0,\, 0)\right]_{1 \leq \mu \leq \mathrm{rank}\, F,\, 1 \leq \nu \leq \dim M - \mathrm{rank}\, F} \\ 0 & \mathbb{1}_{\dim M - \mathrm{rank}\, F} \end{bmatrix}$$

となるが，仮定 (1.1.5) よりこれは正則行列である．よって $\mathbb{R}^{\dim M}$ における逆関数定理から

- 点 $(0,\, 0) \in \widehat{U}$ の連結な近傍 $\tilde{U}_0 \subset \widehat{U}$
- 点 $(0,\, 0) \in \mathbb{R}^{\dim M}$ の連結な近傍 $\widehat{U_0} \subset \mathbb{R}^{\dim M}$

が存在して $\Phi|_{\tilde{U}_0}\colon \tilde{U}_0 \longrightarrow \widehat{U_0}$ が微分同相写像になる．$\tilde{U}_0$, $\widehat{U_0}$ を適当に小さくとることで $\widehat{U_0}$ が開区間の直積であると仮定して良い．$\Phi|_{\tilde{U}_0}$ の逆写像を $\Phi^{-1}\colon \widehat{U_0} \longrightarrow \tilde{U}_0,\ (x,\, y) \longmapsto \bigl(A(x,\, y),\, B(x,\, y)\bigr)$ と書くと $A\colon \widehat{U_0} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathrm{rank}\, F}$, $B\colon \widehat{U_0} \longrightarrow \mathbb{R}^{\dim M - \mathrm{rank}\, F}$ はどちらも C^∞ 写像で，$\forall (x,\, y) \in \widehat{U_0}$ に対して

$$(x,\, y) = \Phi \circ \Phi^{-1}(x,\, y) = \Bigl(Q\bigl(A(x,\, y),\, B(x,\, y)\bigr),\, B(x,\, y)\Bigr)$$

が成り立つ．よって

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(x,\, y) &= \bigl(A(x,\, y),\, y\bigr), \\ x &= Q\bigl(A(x,\, y),\, y\bigr) \end{aligned}$$

であり，

$$\begin{aligned} \widehat{F} \circ \Phi^{-1}(x,\, y) &= \widehat{F}\bigl(A(x,\, y),\, y\bigr) \\ &= \Bigl(Q\bigl(A(x,\, y),\, y\bigr),\, R\bigl(A(x,\, y),\, y\bigr)\Bigr) \\ &= \Bigl(x,\, R\bigl(A(x,\, y),\, y\bigr)\Bigr) \end{aligned}$$

[*9] 平行移動は微分同相写像なので，M, N の C^∞ 構造には平行移動によって互いに移り合えるような C^∞ チャートたちが含まれている．

が分かった．従って C^∞ 写像 $\tilde{R}\colon \widehat{U_0} \longrightarrow \mathbb{R}^{\dim N - \operatorname{rank} F},\ (x,\, y) \longmapsto R\bigl(A(x,\, y),\, y\bigr)$ と定義すると，$\forall (x,\, y) \in \widehat{U_0}$ における $\widehat{F} \circ \Phi^{-1}$ の Jacobi 行列は

$$D(\widehat{F} \circ \Psi^{-1})(x,\, y) = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{\operatorname{rank} F} & 0 \\ \left[\frac{\partial \tilde{R}^\mu}{\partial x^\nu}(x,\, y)\right]_{1 \le \mu \le \dim N - \operatorname{rank} F,\, 1 \le \nu \le \operatorname{rank} F} & \left[\frac{\partial \tilde{R}^\mu}{\partial y^\nu}(x,\, y)\right]_{1 \le \mu \le \dim N - \operatorname{rank} F,\, 1 \le \nu \le \dim M - \operatorname{rank} F} \end{bmatrix}$$

と計算できる．ところが，Φ^{-1} は微分同相写像なので $D(\Phi^{-1})(x,\, y) \in \mathrm{GL}(\dim M,\, \mathbb{R})$ であり，行列 $D(\widehat{F} \circ \Phi^{-1})(x,\, y) = D(\widehat{F})(x,\, y) \circ D(\Phi^{-1})(x,\, y)$ のランクは $\operatorname{rank} F$ に等しい．よって $\forall (x,\, y) \in \tilde{U_0}$ において

$$\left[\frac{\partial \tilde{R}^\mu}{\partial y^\nu}(x,\, y)\right]_{1 \le \mu \le \dim N - \operatorname{rank} F,\, 1 \le \nu \le \dim M - \operatorname{rank} F} = 0$$

でなくてはいけない．$\widehat{U_0}$ は開区間の直積の形で書けたので，このことから $\tilde{R}$ が $(y^1,\, \dots,\, y^{\dim M - \operatorname{rank} F})$ によらないことが分かった．よって $S(x) \coloneqq \tilde{R}(x,\, 0)$ とおくと

$$\widehat{F} \circ \Phi^{-1}(x,\, y) = \bigl(x,\, S(x)\bigr) \tag{1.1.6}$$

と書けることが分かった．

最後に，点 $\widehat{F}(\widehat{p}) = (0,\, 0) \in \widehat{V}$ の適当な近傍を構成する．開集合[*10]$\widehat{V_0} \subset \widehat{V}$ を

$$\widehat{V_0} \coloneqq \left\{\, (v,\, w) \in \widehat{V} \;\middle|\; (v,\, 0) \in \widehat{U_0} \,\right\}$$

と定義すると，$\widehat{F}(\widehat{p}) = (0,\, 0) \in \widehat{V_0}$ なので $\widehat{V_0}$ は点 $\widehat{F}(\widehat{p})$ の近傍であり，$\widehat{U_0}$ は開区間の直積なので (1.1.6) から $\widehat{F} \circ \Phi^{-1}(\widehat{U_0}) \subset \widehat{V_0}$ が成り立つ．そして C^∞ 写像を

$$\Psi\colon \widehat{V_0} \longrightarrow \mathbb{R}^{\dim N},\ (v,\, w) \longmapsto \bigl(v,\, w - S(v)\bigr)$$

で定義する．$\Psi\colon \widehat{V_0} \longrightarrow \Psi(\widehat{V_0})$ は C^∞ 写像

$$\Psi^{-1}\colon \Psi(\widehat{V_0}) \longrightarrow \widehat{V_0},\ (s,\, t) \longmapsto \bigl(s,\, t + S(s)\bigr)$$

を逆写像に持つので微分同相写像であり，$(V_0,\, \Psi)$ は N の C^∞ チャートである．その上 (1.1.6) から $\forall (x,\, y) \in \widehat{U_0}$ に対して

$$\Psi \circ \widehat{F} \circ \Phi^{-1}(x,\, y) = \Psi\bigl(x,\, S(x)\bigr) = (x,\, 0)$$

となる．

以上より，$U_0 \coloneqq \varphi^{-1}(\widehat{U_0}),\ V_0 \coloneqq \psi^{-1}(\widehat{V_0})$ とおくと

- 点 $p \in M$ を含む M のチャート $(U_0,\, \Phi \circ \varphi)$
- 点 $F(p) \in N$ を含む N のチャート $(V_0,\, \Psi \circ \psi)$

の 2 つ組は，$\forall (x,\, y) \in U_0$ に対して ■

[*10] 写像 $f\colon \widehat{V} \longrightarrow \mathbb{R}^{\dim M},\ (v,\, w) \longmapsto (v,\, 0)$ は連続で，$\widehat{U_0} \subset \mathbb{R}^{\dim M}$ は開集合なので，$V_0 = \widehat{V} \cap f^{-1}(\widehat{U_0}) \subset \widehat{V}$ もまた開集合．

1.2　部分多様体

1.3　Sard の定理