

第 1 章

層状化空間・因子化ホモロジー

[?], [?] のレビュー

1.1 conically smooth な層状化空間

1.1.1 層状化空間

定義 1.1: 半順序集合の位相

(P, \leq) を半順序集合とする. P 上の位相 $\mathcal{O}_\leq \subset 2^P$ を以下で定義する:

$$U \in \mathcal{O}_\leq \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x \in U, \forall y \in P, [x \leq y \implies y \in U]$$

実際, 空集合の定義から $\emptyset \in \mathcal{O}_\leq$ であり, $\forall U_1, U_2 \in \mathcal{O}_\leq$ に対して $x \in U_1 \cap U_2$ であることは

$$\forall y \in P, x \leq y \implies y \in U_1 \text{ かつ } y \in U_2$$

と同値なので $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}_\leq$ であり, さらに勝手な開集合族 $\{U_\lambda \in \mathcal{O}_\leq\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ は

$$\exists \alpha \in \Lambda, \forall y \in P, x \leq y \implies y \in U_\alpha \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

と同値であるから $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}_\leq$ であり, \mathcal{O}_\leq は集合 P の位相である.

【例 1.1.1】 $[n]$ の位相

半順序集合 $[2] := \{0 \leq 1 \leq 2\}$ を考える. このとき, 位相 \mathcal{O}_\leq とは

$$\mathcal{O}_\leq = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$$

のことである. 同様に, 半順序集合 $[n] := \{0 \leq 1 \leq \dots \leq n\}$ に対して

$$\mathcal{O}_\leq = \{\emptyset, \{n\}, \{n-1, n\}, \dots, \{0, \dots, n\}\}$$

が成り立つ.

定義 1.2: 層状化空間・層状化写像

(P, \leq) を半順序集合とし、定義 1.1 の位相を入れて位相空間にする。

このとき、位相空間 X が **P -層状化**されている (P -stratified) とは、連続写像 $s: X \rightarrow P$ が存在することを言う。組 $(X, s: X \rightarrow P)$ のことを **P -層状化空間** (P -stratified space) と呼ぶ。また、 $i \in P$ の逆像 $X_i := s^{-1}(\{i\}) \subset X$ のことを **i -層** (i -strata) と呼ぶ。

層状化空間 $(X, s: X \rightarrow P)$, $(X', s': X' \rightarrow P')$ の間の**層状化写像** (stratified map) とは、連続写像の組 $(f: X \rightarrow X', \tilde{f}: P \rightarrow P')$ であって以下の図式を可換にするもののこと：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad f \quad} & X' \\ s \downarrow & & \downarrow s' \\ P & \xrightarrow{\quad \tilde{f} \quad} & P' \end{array}$$

【例 1.1.2】 $[n]$ -層状化空間

半順序集合 $[n] := \{0 \leq \dots \leq n\}$ に対して【例 1.1.1】の位相を入れる。まず、

$$X_0 = s^{-1}([n] \setminus \{1, \dots, n\})$$

でかつ $\{1, \dots, n\}$ は $[n]$ の開集合であるから、 s の連続性から X の部分空間 $X_0 \subset X$ は閉集合だとわかる。さらに

$$\begin{aligned} X_0 \cup X_1 &= s^{-1}([n] \setminus \{2, \dots, n\}), \\ X_0 \cup X_1 \cup X_2 &= s^{-1}([n] \setminus \{3, \dots, n\}), \\ &\vdots \\ X_0 \cup \dots \cup X_n &= X \end{aligned}$$

が成り立つことから、 s の連続性より X の部分空間 $X_0 \cup \dots \cup X_{m \leq n}$ は閉集合だと分かる。

【例 1.1.3】CW 複体

CW 複体 X を与える。 $X_{\leq k}$ を X の k -骨格とすると、 $X_k \setminus X_{k-1}$ を $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に写す写像 $s: X \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は X の**層状化**を与える。

直観的には、層状化空間とは defect 付き C^∞ 多様体の一般化である。特に X を C^∞ 多様体とすると、 $[n]$ -層状化空間 $(X, s: X \rightarrow [n])$ の i -層 X_i とは、多様体 X 上の余次元 $d - i$ の defect を全て集めてきたものだと見做せる。

定義 1.3: 層状化開埋め込み

層状化写像 $(f, \tilde{f}): (X, s: X \rightarrow P) \rightarrow (X', s': X' \rightarrow P')$ が**層状化開埋め込み** (stratified open embedding) であるとは、以下の2条件を満たすことを言う:

- (1) 連続写像 $f: X \rightarrow X'$ は位相的開埋め込みである^a
- (2) $\forall p \in P$ に対して, f の p -strata への制限^b

$$f|_{X_p}: X_p \rightarrow X'_{\tilde{f}(p)}$$

は位相的開埋め込みである.

^a i.e. $f: X \rightarrow f(X)$ が同相写像かつ $f(X) \subset Y$ が開集合

^b **層状化写像**の定義に登場する図式の可換性より, $\forall x \in X_p$ に対して $s'(f(x)) = s' \circ f(x) = \tilde{f} \circ s(x) = \tilde{f}(p)$, i.e. $f(x) \in s'^{-1}(\{\tilde{f}(p)\}) = X'_{\tilde{f}(p)}$ が分かる.

!

以下では混乱が生じにくい場合, **層状化空間** $(X, s: X \rightarrow P)$ のことを $(X \xrightarrow{s} P)$ や $(X \rightarrow P)$ と略記する. さらに, **層状化写像** $(f, \tilde{f}): (X, s: X \rightarrow P) \rightarrow (X', s': X' \rightarrow P')$ のことを $f: (X \rightarrow P) \rightarrow (X' \rightarrow P')$ と略記し, 連続写像 $\tilde{f}: P \rightarrow P'$ のことも f と書く場合がある.

圏 **StTop** を,

- 第2可算な Hausdorff 空間であるような**層状化空間**を対象とする
- **層状化開埋め込み**を射とする

ことで定義する.

1.1.2 C^0 級層状化空間

定義 1.4: コーン

層状化空間 $(X \xrightarrow{s} P)$ を与える. X の**コーン** (cone) とは, 以下のようにして構成される**層状化空間** $(C(X), C(s): C(X) \rightarrow C(P))$ のこと:

- 位相空間 $C(X)$ を, 押し出し位相空間

$$C(X) := \{\text{pt}\} \amalg_{\{0\} \times X} (\mathbb{R}_{\geq 0} \times X)$$

と定義する:

$$\begin{array}{ccc} \{0\} \times X & \xhookrightarrow{\{0\} \times \text{id}_X} & \mathbb{R}_{\geq 0} \times X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{\text{pt}\} & \xhookrightarrow{\quad} & \{\text{pt}\} \amalg_{\{0\} \times X} (\mathbb{R}_{\geq 0} \times X) \end{array}$$

- 半順序集合 $C(P)$ を, P に最小の要素 $-\infty$ を付け足すことで定義する. これは半順序集合の

圏における押し出し

$$C(P) := \{-\infty\} \amalg_{\{0\} \times P} ([1] \times P)$$

である.

- 連続写像

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{\geq 0} \times X &\longrightarrow [1] \times P, \\ (t, x) &\longmapsto \begin{cases} (0, s(x)), & t = 0, \\ (1, s(x)), & t > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

が誘導する連続写像 $C(X) \longrightarrow C(P)$ を $C(s)$ と書く.

位相空間の圏における押し出しの公式から, 位相空間 $C(X)$ とは

$$\begin{aligned} i_1: \{0\} \times X &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \times X, \quad x \longmapsto (0, x), \\ i_2: \{0\} \times X &\longrightarrow \{\text{pt}\}, \quad x \longmapsto \text{pt} \end{aligned}$$

とおいたときのコイコライザ

$$\{0\} \times X \xrightarrow[i_2]{i_1} \{\text{pt}\} \sqcup (\mathbb{R}_{\geq 0} \times X) \xrightarrow{q} C(X)$$

である. i.e. 商位相空間

$$\frac{\mathbb{R}_{\geq 0} \times X}{i_1(x) \sim i_2(x)} = \frac{\mathbb{R}_{\geq 0} \times X}{\{0\} \times X}$$

のこと. 従って $C(s): C(X) \longrightarrow C(P)$ とは, 連続写像^{*1}

$$\frac{\mathbb{R}_{\geq 0} \times X}{\{0\} \times X} \longrightarrow C(P), \quad [(t, x)] \longmapsto \begin{cases} -\infty, & t = 0 \\ s(x), & t > 0 \end{cases}$$

のことである. また, コーンポイントのみからなる1点集合 $\{\text{pt}\} \subset X$ は $q^{-1}(\{\text{pt}\}) = \{0\} \times X$ を充たすが, $\{0\} \times X$ は



以下では, 混乱の恐れがない限り層状化空間 $(X \xrightarrow{s} P)$ のコーンを $C(X \xrightarrow{s} P)$ と略記する.

^{*1} $C(P)$ の位相 $\mathcal{O}_{C(P)}$ は, P の位相 \mathcal{O}_P に1つの開集合 $\{-\infty\} \cup P$ を加えたものである. $\forall U \in \mathcal{O}_P$ に対して $C(s)^{-1}(U) = \mathbb{R}_{>0} \times s^{-1}(U) \in \mathcal{O}_{C(X)}$ で, かつ $C(s)^{-1}(\{-\infty\} \cup P) = C(X) \in \mathcal{O}_{C(X)}$ なので $C(s)$ は連続である.

定義 1.5: C^0 級層状化空間

以下を充たす **StTop** の最小の充満部分圏を \mathbf{Snglr}^{C^0} と書き, 圏 \mathbf{Snglr}^{C^0} の対象を C^0 級層状化空間 (C^0 stratified space) と呼ぶ:

(Snglr-1) $(\emptyset \rightarrow \emptyset) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$

(Snglr-2)

$(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ かつ X, P が位相空間としてコンパクト
 $\implies C(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$

(Snglr-3)

$(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}) \implies (X \times \mathbb{R} \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})^a$

(Snglr-4)

$(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ かつ $\text{Hom}_{\mathbf{StTop}}((U \rightarrow P_U), (X \rightarrow P)) \neq \emptyset$
 $\implies (U \rightarrow P_U) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$

(Snglr-5)

$(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{StTop})$ が開被覆 $\{(U_\lambda \rightarrow P_\lambda) \rightarrow (X \rightarrow P)\}_{\lambda \in \Lambda}^b$ を持ち, かつ $\forall \lambda \in \Lambda$ に
 対して $(U_\lambda \rightarrow P_\lambda) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$
 $\implies (X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$

^a $X \times \mathbb{R}$ の層状化は, 連続写像 $X \times \mathbb{R} \rightarrow X, (x, t) \mapsto x$ を前もって合成することにより定める.

^b i.e. $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}, \{P_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が, それぞれ位相空間 X, P の開被覆を成す.

【例 1.1.4】位相多様体は C^0 級層状化空間

(Snglr-1) より, $* := C(\emptyset \rightarrow \emptyset) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ である. **(Snglr-3)** より, $\forall n \geq 0$ に対して $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n \rightarrow [0]) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ であることが帰納的に分かる. \mathbb{R}^n の任意の開集合 $U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ に対して,

$$\begin{array}{ccc} U & \hookrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ [0] & \xrightarrow{=} & [0] \end{array}$$

は層状化埋め込みであり, 従って **(Snglr-4)** より $U := (U \rightarrow [0]) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ が分かる. 以上の考察と **(Snglr-5)** を併せて, 任意の位相多様体 M は^a圏 \mathbf{Snglr}^{C^0} の対象である.

^a より正確には, M を層状化空間 $(M \rightarrow [0])$ と同一視している.

1.1.3 C^0 basic

定義 1.6: C^0 basic

C^0 級層状化空間 $(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ が C^0 -basic であるとは, ある $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ およびコンパクトな C^0 級層状化空間 $(Z \rightarrow Q) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ が存在して $(X \rightarrow P) = (\mathbb{R}^n \rightarrow [0]) \times C(Z \rightarrow Q)$ が成り立つことを言う.

いま, C^0 basic な $(U \rightarrow P_U) = (\mathbb{R}^n \rightarrow [0]) \times C(Z \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ を 1 つとる. コーンの定義から, U の点を $(v, [t, z]) \in \mathbb{R}^n \times \frac{\mathbb{R}_{\geq 0} \times Z}{\{0\} \times Z}$ と表示することができる. この表示の下で自己同相

$$\begin{aligned} \gamma: \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^n \times C(Z) &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^n \times C(Z), \\ (t, (v, p), [s, z]) &\longmapsto (t, (tv + p, p), [ts, z]) \end{aligned}$$

を考える^{*2}.

さらに, もう 1 つの C^0 basic な $(U' \rightarrow P_{U'}) = (\mathbb{R}^{n'} \rightarrow [0]) \times C(Z' \rightarrow P') \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ および $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}}((U \rightarrow P_U), (U' \rightarrow P_{U'}))$ をとる. ただし, f はコーンポイントをコーンポイントへ写す, i.e. $\forall u \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(u, \text{pt}) \in \mathbb{R}^{n'} \times \{\text{pt}\}$ が成り立つことを仮定する. $f|_{\mathbb{R}^n}: \mathbb{R}^n \times \{\text{pt}\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n'} \times \{\text{pt}\}$ を f のコーンポイントへの制限として,

$$\begin{aligned} f_{\Delta}: \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^n \times C(Z) &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^{n'} \times C(Z'), \\ (t, v, p, [s, z]) &\longmapsto (t, f|_{\mathbb{R}^n}(v), f(p, [ts, z])) \end{aligned}$$

とおこう.

【例 1.1.5】

$Z = Z' = \emptyset$ のとき, f とは単に連続関数 $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n'}$ のことである. このとき,

$$\begin{aligned} (\gamma^{-1} \circ f_{\Delta} \circ \gamma)(t, v, p) &= \gamma^{-1} \circ f_{\Delta}(t, tv + p, p) \\ &= \gamma^{-1}(t, f(tv + p), f(p)) \\ &= \left(t, \frac{f(tv + p) - f(p)}{t}, f(p) \right) \end{aligned}$$

と計算できるため, f が C^1 級であることと $\forall (v, p) \in T\mathbb{R}^n$ に対して $t \rightarrow +0$ の極限, i.e. v に沿った片側方向微分が存在することは同値である.

【例 1.1.5】をもとに, C^0 basic な C^0 級層状化空間の間の層状化開埋め込みの **conically smoothness** を定義する. C^∞ 多様体の C^∞ 構造の定義においては, チャート $(U, \varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow U)$, $(V, \psi: \mathbb{R}^n \rightarrow V)$ の間の変換関数 $\psi^{-1} \circ \varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が C^∞ 級であることを要請した. 次の小節で **conically smooth structure** の定義を行うが, その際にチャートに対応するものは **basic** $U = \mathbb{R}^n \times C(Z)$ から着目している C^0 -級層状化空間 X への層状化開埋め込み $\varphi: U \hookrightarrow X$ であり, 概ね^{*3}2 つのチャート $\varphi: U \hookrightarrow X$, $\psi: V \hookrightarrow X$ の間の変換関数 $\psi^{-1} \circ \varphi: U \longrightarrow V$ に対して **conically smooth (along \mathbb{R}^n)** であることを要請する.

^{*2} 接束 $T\mathbb{R}^n$ は \mathbb{R}^{2n} と微分同相である. [?, p.23] の記法に合わせて底空間 \mathbb{R}^n の点を p , p 上のファイバーの元を v としたとき $(v, p) \in T\mathbb{R}^n$ と書いた. 命題??の記法と順番が逆なので注意.

^{*3} コーンポイントをコーンポイントに写さない変換関数も存在しうるので, これだけではいけない.

定義 1.7: \mathbb{R}^n に沿って conically smooth

- C^0 basic な $(U \rightarrow P_U) = (\mathbb{R}^n \rightarrow [0]) \times C(Z \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$
- C^0 basic な $(U' \rightarrow P_{U'}) = (\mathbb{R}^{n'} \rightarrow [0]) \times C(Z' \rightarrow P') \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$
- $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}}((U \rightarrow P_U), (U' \rightarrow P_{U'}))$ であって, コーンポイントを保存するもの

を与える. このとき, f が \mathbb{R}^n に沿って C^1 級 (C^1 along \mathbb{R}^n) であるとは, 以下の図式を可換にする連続写像

$$\tilde{D}f: \mathbb{R}_{\geq 0} \times T\mathbb{R}^n \times C(Z) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \times T\mathbb{R}^{n'} \times C(Z')$$

が存在することを言う:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{\geq 0} \times T\mathbb{R}^n \times C(Z) & \xrightarrow{\tilde{D}f} & \mathbb{R}_{\geq 0} \times T\mathbb{R}^{n'} \times C(Z') \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{R}_{> 0} \times T\mathbb{R}^n \times C(Z) & \xrightarrow{\gamma^{-1} \circ f_{\Delta} \circ \gamma} & \mathbb{R}_{> 0} \times T\mathbb{R}^{n'} \times C(Z') \end{array}$$

このような拡張が存在するとき, 第一変数を $t = 0$ に制限して得られる連続写像を

$$Df: T\mathbb{R}^n \times C(Z) \longrightarrow T\mathbb{R}^{n'} \times C(Z')$$

と書く. f が \mathbb{R}^n に沿って C^r 級であるとは, Df が \mathbb{R}^n に沿って C^{r-1} 級であることを言う. f が \mathbb{R}^n に沿って conically smooth であるとは, $\forall r \geq 1$ について C^r 級であることを言う.

1.1.4 conically smooth な層状化空間

次に行うべきは, 与えられた C^0 級層状化空間 $(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ の上の conically smooth structure i.e. 変換関数が conically smooth であるような極大アトラスを定義することである. この手続きは, 次で定義する次元と深さに関する帰納法によって構成される.

定義 1.8: 被覆次元

X を位相空間とする. 以下の条件を充たす最小の $d \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$ のことを (存在すれば) X の被覆次元 (covering dimension) と呼び, $\dim X$ と書く:

(covering)

X の任意の開被覆 \mathcal{U} に対して, 十分細かい細分 $\mathcal{V}_{\mathcal{U}} \prec \mathcal{U}$ が存在して, 任意の互いに異なる $\forall m > d + 1$ 個の開集合 $V_1, \dots, V_m \in \mathcal{V}_{\mathcal{U}}$ の共通部分が空になるようにできる. 特に, \emptyset の被覆次元は -1 と定義する.

点 $x \in X$ における被覆次元を以下で定義する:

$$\dim_x X := \inf \{ \dim U \geq -1 \mid x \in U \underset{\text{open}}{\subset} X \}$$

定義 1.9: 次元と深さ

空でない C^0 級層状化空間 $(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ を与える.

- $(X \rightarrow P)$ の点 $x \in X$ における局所的次元 (local dimension) とは, 点 x における X の被覆次元 $\dim_x(X)$ のことを言う.
- $(X \rightarrow P)$ の次元 (dimension) とは

$$\dim(X \rightarrow P) := \sup_{x \in X} \dim_x(X)$$

のこと.

- $(X \xrightarrow{s} P)$ の点 $x \in X$ における局所的深さ (local depth) とは,

$$\text{depth}_x(X \rightarrow P) := \dim_x(X) - \dim_x(X_{s(x)})$$

のこと.

- $(X \rightarrow P)$ の深さ (depth) とは,

$$\text{depth}(X \rightarrow P) := \sup_{x \in X} \text{depth}_x(X \rightarrow P)$$

のこと. ただし, $\text{depth}(\emptyset) := -1$ と定義する.

【例 1.1.6】コーンの深さ

n 次元位相多様体 Z について, 定義から $\forall x \in Z$ に対して $\dim_x(Z) = n$ が成り立つ. Z を【例 1.1.4】により C^0 級層状化空間 $(Z \xrightarrow{s} [0]) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ と見做すと, このコーン $C(Z \xrightarrow{s} [0])$ について

$$\text{depth}_x(C(Z \xrightarrow{s} [0])) = \begin{cases} n+1, & x = \text{pt}, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

であることがわかる. 実際 $C(Z)_{C(s)(\text{pt})} = \{\text{pt}\}$ であるが³, 1 点からなる位相空間の被覆次元は 0 次元なので $\dim_{\text{pt}}(C(Z)_{C(s)(\text{pt})}) = 0$ である. 一方, コーンポイント以外の点 $x \in C(Z)$ に対して $C(s)(x)$ -層は $C(Z)_{C(s)(x)} = \mathbb{R}_{>0} \times Z \approx \mathbb{R} \times Z$ であるから, $\dim_x(C(Z)_{C(s)(x)}) = n+1$ と計算できる^a.

また, $\forall (X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ に対して

$$\begin{aligned} \dim((\mathbb{R}^m \rightarrow [0]) \times (X \rightarrow P)) &= m + \dim(X \rightarrow P), \\ \text{depth}((\mathbb{R}^m \rightarrow [0]) \times (X \rightarrow P)) &= \text{depth}(X \rightarrow P) \end{aligned}$$

が成り立つ. 従って, C^0 basic な $(U \rightarrow P_U) = (\mathbb{R}^n \rightarrow [0]) \times C(Z \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ に対して

$$\text{depth}(U \rightarrow P_U) = \text{depth}(Z \rightarrow P) + 1$$

が成り立つ.

^a さらに, $\forall x \in C(Z)$ に対して $\dim_x C(Z) = n+1$ である.

次元と深さに関する帰納法を実行する前に、構成したい圏を表す記号の整理をしておこう：

- conically smooth チャートの素材となる、**basic** が成す圏

$$\mathbf{Bsc}$$

これは、 C^∞ 多様体の圏 \mathbf{Mfd} において \mathbb{R}^n ($\forall n \geq -1$) 全体が成す充満部分圏に相当するものである。

- 与えられた C^0 級層状化空間 $(X \rightarrow P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ に対して、その上に入る極大アトラス^{*4}全体が成す集合を返す前層

$$\mathrm{Sm}: (\mathbf{Snglr}^{C^0})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

この対応が前層であることの直観は、層状化開埋め込み $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}}((X \rightarrow P), (Y \rightarrow Q))$ が与えられると、 $(X \rightarrow P)$ 上の極大アトラス $\mathrm{Sm}(X \rightarrow P)$ が $(Y \rightarrow Q)$ 上の極大アトラス $\mathrm{Sm}(Y \rightarrow Q)$ を「制限」する写像 $\mathrm{Sm}(f): \mathrm{Sm}(Y \rightarrow Q) \longrightarrow \mathrm{Sm}(X \rightarrow P)$ によって得られるということである。

- 深さが k 以下、かつ次元が n 以下であるような C^0 級層状化空間全体が成す \mathbf{Snglr}^{C^0} の充満部分圏を

$$\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\substack{\leq k, \\ \text{depth} \quad \text{dimension}}} \leq n$$

と書く。同様に

$$\mathbf{Bsc}_{\leq k, \leq n}, \quad \mathrm{Sm}_{\leq k, \leq n}: (\mathbf{Snglr}_{\leq k, \leq n}^{C^0})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

と書く。

- conically smooth な層状化空間の圏

$$\mathbf{Snglr}$$

これを作ることが本小節の最終目標である。

帰納法により、 $\forall k \geq -1$ に対して $\mathbf{Bsc}_{\leq k, \leq \infty}$ および $\mathrm{Sm}_{\leq k, \leq \infty}: (\mathbf{Snglr}_{\leq k, \leq \infty}^{C^0})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ が構成される。

定義 1.10: 帰納法の出発点

(**Snglr-1**) より $(\emptyset \rightarrow \emptyset) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}_{\leq -1, \leq \infty}^{C^0})$ である。

$$(1) \quad \mathbf{Bsc}_{\leq -1, \leq \infty} := \emptyset$$

$$(2) \quad \mathrm{Sm}_{\leq -1, \leq \infty}(\emptyset) := \{*\}$$

と定義する。

^{*4} 存在するか分からないし、存在したとして一意であるとは限らない。実際、例えば C^∞ 多様体の段階においてさえ \mathbb{R}^4 の上の極大アトラス (i.e. C^∞ 構造) は非可算無限個存在する [?].

仮定 1.1: 帰納法の仮定

与えられた $k \geq -1$ に対して以下の構成が完了していると仮定する：

- (1) 圏 $\mathbf{Bsc}_{\leq k, \leq \infty}$
- (2) 前層 $\mathbf{Sm}_{\leq k, \leq \infty} : (\mathbf{Snglr}_{\leq k, \leq \infty}^{C^0})^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$
- (3) 関手

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times (-) : \mathbf{Bsc}_{\leq k, \leq \infty} &\longrightarrow \mathbf{Bsc}_{\leq k, \leq \infty}, \\ U &\longmapsto \mathbb{R} \times U, \\ (U \xrightarrow{f} V) &\longmapsto (\mathbb{R} \times U \xrightarrow{\text{id} \times f} \mathbb{R} \times V) \end{aligned}$$

およびそれが誘導する自然変換^a

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\mathbf{Sm}_{\leq k, \leq \infty}(-)} & \\ & \downarrow & \\ (\mathbf{Snglr}_{\leq k, \leq \infty}^{C^0})^{\text{op}} & & \mathbf{Sets} \\ & \uparrow & \\ & \xrightarrow{\mathbf{Sm}_{\leq k, \leq \infty}(\mathbb{R} \times -)} & \end{array}$$

^a X の極大アトラス $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ に対して, $\{\mathbb{R} \times U_\alpha, \text{id} \times \varphi_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ を対応づける.

定義 1.11: 圏 $\mathbf{Bsc}_{\leq k+1, \leq \infty}$

帰納法の仮定 1.1 がある $k \geq -1$ において成立しているとする. また, C^0 basic を $U_Z^n := (\mathbb{R}^n \rightarrow [0]) \times C(Z \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}_{\leq k+1, \leq \infty}^{C^0})$ と書く. このとき, 圏 $\mathbf{Bsc}_{\leq k+1, \leq \infty}$ を以下で定義する：

(対象)

C^0 basic ^a $U_Z^n \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}_{\leq k+1, \leq \infty}^{C^0})$ および, 極大アトラス $\mathcal{A}_Z \in \mathbf{Sm}_{\leq k, \leq \infty}(Z \rightarrow P)$ の組み

$$(U_Z^n, \mathcal{A}_Z)$$

を対象とする.

(射)

任意の 2 つの対象 $(U_Z^n, \mathcal{A}_Z), (U_W^m, \mathcal{A}_W) \in \text{Ob}(\mathbf{Bsc}_{\leq k+1, \leq \infty})$ に対して, 以下の条件を満たす層状化開埋め込み $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Snglr}_{\leq k+1, \leq \infty}^{C^0}}(U_Z^n, U_W^m)$ を対象とする：

f がコーンポイントを保存しない場合

ある層状化開埋め込み $f_0 \in \text{Hom}_{\mathbf{Snglr}_{\leq k+1, \leq \infty}^{C^0}}(U_Z^n, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \times W)$ が存在して

$$f : U_Z^n \xrightarrow{f_0} \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}_{>0} \times W) \hookrightarrow U_W^m = \mathbb{R}^m \times C(W)$$

と書けて, かつ $(U_Z^n, f_0) \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \times W} \in \mathbf{Sm}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \times W)$

f がコーンポイントを保存する場合

f は \mathbb{R}^n に沿って conically smooth であって, かつ $Df : \mathbb{R}^n \times U_Z^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \times U_W^m$ が単射

であり, かつ

$$\mathcal{A}_{f^{-1}(U_W^m \setminus \mathbb{R}^m)} = \mathbf{Sm}_{\leq k, \leq \infty}(f|_{f^{-1}(U_W^m \setminus \mathbb{R}^m)})(\mathcal{A}_{U_W^m \setminus \mathbb{R}^m})$$

を充たす^b. ただし, $U_W^m \setminus \mathbb{R}^m := U_W^m \setminus (\mathbb{R}^m \times \{\text{pt}\}) = \mathbb{R}^{m+1} \times W$ と略記した.

^a 【例 1.1.6】より, $(Z \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}_{\leq k, \leq \infty}^{C^0})$ であることが分かる.

^b ここで帰納法の仮定 1.1-(3) を暗に使っている.

定義 1.12: 前層 $\mathbf{Sm}_{\leq k+1, \leq \infty}$

帰納法の仮定 1.1 がある $k \geq -1$ において成立しているとする. さらに定義 1.11 が完成しているとする.

- **C^0 級層状化空間** $\forall (X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}_{\leq k+1, \leq \infty}^{C^0})$ に対して, $X \rightarrow P$ のアトラス (atlas) を族

$$\mathcal{A} := \{(U_\alpha \in \text{Ob}(\mathbf{Bsc}_{\leq k+1, \leq \infty}), \varphi_\alpha: U_\alpha \hookrightarrow (X \rightarrow P))\}_{\alpha \in \Lambda} \in \mathbf{Sm}_{\leq k+1, \leq \infty}(X \rightarrow P)$$

であって以下の条件を充たすものとして定義する:

(Atlas-1)

\mathcal{A} は $(X \rightarrow P)$ の開被覆である.

(Atlas-2)

$\forall \alpha, \beta \in \Lambda$ および $\forall x \in \varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta)$ に対して, 圏 $\mathbf{Bsc}_{\leq k+1, \leq \infty}$ の可換図式

$$\begin{array}{ccc} \exists W & \xrightarrow{f_\beta} & U_\beta \\ f_\alpha \downarrow & & \downarrow \varphi_\beta \\ U_\alpha & \xrightarrow[\varphi_\alpha]{} & X \end{array}$$

が存在して $x \in \varphi_\alpha \circ f_\alpha(W) = \varphi_\beta \circ f_\beta(W)$ を充たす

アトラス \mathcal{A} の元 $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ のことをチャート (chart) と呼ぶ.

- **C^0 級層状化空間** $\forall (X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}_{\leq k+1, \leq \infty}^{C^0})$ の2つのアトラス \mathcal{A}, \mathcal{B} が同値であるとは, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ が $(X \rightarrow P)$ のアトラスであることを言う. これは $(X \rightarrow P)$ のアトラス全体の集合の上に同値関係を定める^a. $(X \rightarrow P)$ の極大アトラス (maximal atlas) とは, この同値関係によるアトラス \mathcal{A} の同値類 $[\mathcal{A}]$ のことを言う.
- 前層

$$\mathbf{Sm}_{\leq k+1, \leq \infty}: (\mathbf{Snglr}_{\leq k+1, \leq \infty}^{C^0})^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を以下のように定義する:

(対象)

任意の **C^0 級層状化空間** $(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}_{\leq k+1, \leq \infty}^{C^0})$ に対して

$$\mathbf{Sm}_{\leq k+1, \leq \infty}(X \rightarrow P) := \{[\mathcal{A}] \mid \mathcal{A} \text{ is an atlas of } (X \rightarrow P)\}$$

(射)

任意の層状化開埋め込み $f \in \text{Hom}_{\text{Snglr}^{C^0}_{\leq k+1, \leq \infty}}$ に対して, f によるアトラスの引き戻しを対応付ける.

^a 同値関係であることの証明は [?, Lemma 3.2.11.] を参照.

以上の帰納法をまとめて, conically smooth な層状化空間と層状化開埋め込みの圏 **Snglr** を得る.

定義 1.13: 圏 **Snglr**

- **basic** のなす圏 **Bsc** を以下で定義する:

$$\mathbf{Bsc} := \bigcup_{k \geq -1} \mathbf{Bsc}_{\leq k, \leq \infty}$$

- 極大アトラスの集合を与える関手 $\text{Sm}: (\text{Snglr}^{C^0})^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ を以下の右 Kan 拡張として定義する:

$$\begin{array}{ccc} (\text{Snglr}^{C^0}_{<\infty, \leq \infty})^{\text{op}} & \xrightarrow{\text{Sm}_{<\infty, \leq \infty}} & \mathbf{Sets} \\ \downarrow & \nearrow \text{Sm} & \\ (\text{Snglr}^{C^0})^{\text{op}} & & \end{array}$$

ただし, $\text{Snglr}^{C^0}_{<\infty, \leq \infty} := \bigcup_{k \geq -1} \text{Snglr}^{C^0}_{\leq k, \leq \infty}$ とおいた.

- **conically smooth** な層状化空間 (conically smooth stratified space) と層状化開埋め込みの圏 **Snglr** を以下で定義する:

(対象)

C^0 級層状化空間 $(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\text{Snglr}^{C^0})$ およびその極大アトラス $\mathcal{A}_X \in \text{Sm}(X \rightarrow P)$ の組み $((X \rightarrow P), \mathcal{A}_X)$ を対象とする.

(射)

層状化開埋め込み $f \in \text{Hom}_{\text{Snglr}^{C^0}}((X \rightarrow P), (Y \rightarrow Q))$ であって, $f^* \mathcal{A}_Y = \mathcal{A}_X$ を充たすものを射とする.

1.1.5 conically smooth map

ここまでは層状化開埋め込みのみを考えていたため, 一般の層状化写像の conically smoothness を定義しなくてはならない.

定義 1.14: conically smooth map

2つの **basic**^a $X = (U_Z^n, \mathcal{A}_Z)$, $Y = (U_W^m, \mathcal{A}_W) \in \text{Ob}(\mathbf{Bsc})$ の間の **層状化写像** $f: U_Z^n \rightarrow U_W^m$ が **conically smooth** であることを, **depth**(Y) に関する帰納法によって定義する:

- (1) まず, $\text{depth}(Y) = -1$ のときは $X = Y = \emptyset$ であり, 一意的に定まる X, Y 間の層状化写像が conically smooth であると定義する.
- (2) 深さ $k \geq -1$ の basic に対して定義が完了しているとする. $Y \in \text{Ob}(\mathbf{Bsc})$ の深さが高々 $k+1$ であるとき, 層状化写像 $f: X \rightarrow Y$ が conically smooth であることを以下で定義する:

f がコーンポイントを保存しない場合

ある conically smooth な層状化写像 $f_0: X \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \times W$ が存在して

$$f: X \xrightarrow{f_0} \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}_{>0} \times W) \hookrightarrow Y = \mathbb{R}^m \times \mathbb{C}(W)$$

と書ける^b.

f がコーンポイントを保存する場合

f は \mathbb{R}^n に沿って conically smooth であって, かつ制限

$$f|_{f^{-1}(Y \setminus \mathbb{R}^m)}: f^{-1}(Y \setminus \mathbb{R}^m) \rightarrow Y \setminus \mathbb{R}^m$$

が conically smooth. ただし, $U_W^m \setminus \mathbb{R}^m := U_W^m \setminus (\mathbb{R}^m \times \{\text{pt}\}) = \mathbb{R}^{m+1} \times W$ と略記した.

^a C^0 basic を $U_Z^n := (\mathbb{R}^n \rightarrow [0]) \times \mathbb{C}(Z \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ と書く.

^b 【例 1.1.6】より $\text{depth}(W) < k+1$ であり, 帰納法の仮定が使える.

conically smooth な層状化空間 $((X \rightarrow P), \mathcal{A}_X), ((Y \rightarrow Q), \mathcal{A}_Y) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr})$ の間の **層状化写像** $f: (X \rightarrow P) \rightarrow (Y \rightarrow Q)$ が **conically smooth** であるとは, 任意のチャートの組み合わせ $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_X, (V, \psi) \in \mathcal{A}_Y$ に対して

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi: U \rightarrow V$$

が conically smooth (for basics) であることを言う.

命題 1.1: conically smooth map の基本性質

2つの **conically smooth map** の合成も conically smooth である.

証明 [?, Proposition 3.3.5] ■

命題 1.1 より, **conically smooth な層状化空間**の圏を定義できる.

定義 1.15: conically smooth な層状化空間の圏 \mathbf{Strat}

conically smooth な層状化空間の圏 \mathbf{Strat} を以下で定義する：

(対象)

圏 \mathbf{Snglr} と全く同じ対象を持つ：

$$\mathrm{Ob}(\mathbf{Strat}) := \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr})$$

(射)

conically smooth map を射とする．

定義から明らかに $\mathbf{Snglr} \subset \mathbf{Strat}$ である．ここで、圏 \mathbf{Strat} における特別な射に名前をつけておこう：

定義 1.16: constructible bundle

- conically smooth な層状化写像 $\pi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}((E \rightarrow P), (B \rightarrow Q))$ が層状化ファイバー束 (conically smooth fiber bundle) であるとは、conically smooth な層状化開埋め込みの族 $\{U_\alpha \hookrightarrow B\}_{\alpha \in \Lambda}$, $\{\varphi_\alpha: U_\alpha \times F_\alpha \hookrightarrow E\}_{\alpha \in \Lambda}$ が存在して以下を充たすことを言う：

(Bun-1)

$\forall \alpha \in \Lambda$ に対して、圏 \mathbf{Strat} における引き戻しの図式

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times F_\alpha & \xhookrightarrow{\varphi_\alpha} & E \\ \mathrm{proj}_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ U_\alpha & \hookrightarrow & B \end{array}$$

が成り立つ．

(Bun-2)

族 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ は B の開基である．

- conically smooth な層状化写像 $\pi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}((E \rightarrow P), (B \rightarrow Q))$ が弱構成可能束 (weakly constructible bundle) であるとは、 $\forall q \in Q$ に対して、 π の q -層への制限

$$\pi|_{\pi^{-1}(B_q)}: \pi^{-1}(B_q) \longrightarrow B_q$$

が層状化ファイバー束であることを言う．

- conically smooth な層状化写像 $\pi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}((E \rightarrow P), (B \rightarrow Q))$ が構成可能束 (constructible bundle) であることを、 $\mathrm{depth}(E)$ に関する帰納法によって定義する：

(1) $\mathrm{depth}(E) = 0$ のとき、 π が構成可能束であるとは、 π が C^∞ ファイバー束であることを言う．

(2) 深さ $k \geq 0$ までの定義が完了しているとする． $\mathrm{depth}(E) \leq k+1$ のとき、 π が構成可能束であるとは、以下の2条件を充たすことを言う：

(cBun-1) f は弱構成可能束である．

(cBun-2) $\forall q \in Q$ に対して、 π が誘導する層状化写像

$$\mathrm{Link}_{\pi^{-1}(B_q)}(E) \longrightarrow \pi^{-1}(B_q) \times_{B_q} \mathrm{Link}_{B_q}(B)$$

が構成可能束である．

1.1.6 管状近傍・ハンドル分解

1.2 層状化空間の接構造

1.2.1 Kan-豊穡化

圏 \mathbf{Kan} を,

- Kan 複体を対象に持つ
- Kan 複体の間の自然変換を射に持つ

(1, 1)-圏とする. \mathbf{Kan} は単体的集合の圏 \mathbf{sSet} の充満部分圏であり, 直積 (??) をテンソル積とするモノイダル圏になる.

定義 1.17: 余単体的多様体

以下で定義する関手

$$\Delta_e: \Delta \longrightarrow \mathbf{Strat}$$

のことを余単体的多様体 (standard cosimplicial manifold) と呼ぶ^a:

- $[n] \in \text{Ob}(\Delta)$ を, **conically smooth な層状化空間**

$$\Delta_e^n := \left\{ (x^0, \dots, x^n) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x^i = 1 \right\}$$

に対応付ける.

- $\alpha \in \text{Hom}_\Delta([m], [n])$ を, **conically smooth な層状化写像**

$$\begin{aligned} \Delta_e(\alpha): \Delta_e^m &\longrightarrow \Delta_e^n, \\ (x^0, \dots, x^m) &\longmapsto \left(\sum_{j, \alpha(j)=0} x^j, \dots, \sum_{j, \alpha(j)=n} x^j \right) \end{aligned}$$

に対応付ける.

^a 余単体的集合に似ているが, $x^i \geq 0$ の領域で切り取っていない.

$\mathbf{PSh}(\mathbf{Strat}^{\text{op}}, \mathbf{Sets})$ から \mathbf{sSet} への関手を

$$\begin{aligned} (-)|_\Delta: \mathbf{PSh}(\mathbf{Strat}^{\text{op}}, \mathbf{Sets}) &\longrightarrow \mathbf{sSet}, \\ F &\longmapsto F \circ \Delta_e \end{aligned}$$

で定義する. さらに, $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathbf{Strat})$ に対して前層 $\widetilde{\text{Hom}}_{\mathbf{Strat}}(X, Y) \in \mathbf{PSh}(\mathbf{Strat}^{\text{op}}, \mathbf{Sets})$ を

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Hom}}_{\mathbf{Strat}}(X, Y): \mathbf{Strat}^{\text{op}} &\longrightarrow \mathbf{Sets}, \\ Z &\longmapsto \left\{ f \in \text{Hom}_{\mathbf{Strat}}(Z \times X, Z \times Y) \mid \text{proj}_Z \circ f = \text{proj}_Z \right\}, \end{aligned}$$

$$(Z \xrightarrow{\alpha} W) \mapsto (f \mapsto f \circ \alpha)$$

で定義する．ただし，**conically smooth な層状化写像** $\text{proj}_Z \in \text{Hom}_{\mathbf{Strat}}(Z \times X, X)$ とは第一成分への射影のことである．同様にして前層 $\widetilde{\text{Hom}}_{\mathbf{Snglr}}(X, Y) \in \text{PSh}(\mathbf{Strat}^{\text{op}}, \mathbf{Sets})$ を

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Hom}}_{\mathbf{Snglr}}(X, Y) &: \mathbf{Strat}^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}, \\ Z &\mapsto \{ f \in \text{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(Z \times X, Z \times Y) \mid \text{proj}_Z \circ f = \text{proj}_Z \}, \\ (Z \xrightarrow{\alpha} W) &\mapsto (f \mapsto f \circ \alpha) \end{aligned}$$

で定義する．

補題 1.1:

$\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathbf{Strat})$ に対して定まる単体的集合

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbf{Strat}}(X, Y) &:= \widetilde{\text{Hom}}_{\mathbf{Strat}}(X, Y) \circ (-)|_{\Delta}, \\ \text{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(X, Y) &:= \widetilde{\text{Hom}}_{\mathbf{Snglr}}(X, Y) \circ (-)|_{\Delta} \end{aligned}$$

は Kan 複体である．

証明 [?, Lemma 4.1.4]. ■

定義 1.18: $(\infty, 1)$ -圏 \mathbf{Strat} , \mathbf{Snglr} , $\mathcal{B}\mathbf{sc}$

Kan-豊稜圏 \mathbf{Strat} を以下で定義する：

- $\text{Ob}(\mathbf{Strat}) := \text{Ob}(\mathbf{Snglr})$
- 補題 1.1 で構成した $\text{Hom}_{\mathbf{Strat}}(X, Y) \in \text{Ob}(\mathbf{Kan})$ を Hom 対象とする．

同様に，**Kan-豊稜圏** \mathbf{Snglr} を以下で定義する：

- $\text{Ob}(\mathbf{Snglr}) := \text{Ob}(\mathbf{Snglr})$
- 補題 1.1 で構成した $\text{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(X, Y) \in \text{Ob}(\mathbf{Kan})$ を Hom 対象とする．

Kan-豊稜圏 \mathbf{Snglr} の対象を **Ob(Bsc)** に制限して得られる充満部分圏を $\mathcal{B}\mathbf{sc}$ と書く．

! **Kan-豊稜圏** を homotopy coherent nerve functor $N_{\text{hc}}: \mathbf{Cat}_{\Delta} \longrightarrow \mathbf{sSet}$ で単体的集合の圏 \mathbf{sSet} へ埋め込んだものは $(\infty, 1)$ -圏である [?, Proposition 1.1.5.10.]. 故に以下では **Kan-豊稜圏** \mathbf{Strat} , \mathbf{Snglr} と $(\infty, 1)$ -圏 $N_{\text{hc}}(\mathbf{Strat})$, $N_{\text{hc}}(\mathbf{Snglr})$ を区別しない．

1.2.2 $(\infty, 1)$ -圏におけるファイブレーション

定義 1.19: $(\infty, 1)$ -ファイブレーション

$p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ を $(\infty, 1)$ -圏の関手とする.

(lifting property)

包含 $\iota \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda_j^n, \Delta^n)$ に対して $p \circ f_0 = f \circ \iota$ を満たす任意の $(f_0, f) \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda_j^n, \mathcal{E}) \times \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \mathcal{B})$ に対して, 以下の図式を可換にする $\tilde{f} \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \mathcal{E})$ が存在する:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_j^n & \xrightarrow{\forall f_0} & \mathcal{E} \\ \downarrow \iota & \nearrow \exists \tilde{f} & \downarrow p \\ \Delta^n & \xrightarrow{\forall f} & \mathcal{B} \end{array}$$

- p が右ファイブレーション (right fibration) であるとは, $0 < \forall j \leq \forall n$ に対して (lifting property) を満たすことを言う.
- p が左ファイブレーション (left fibration) であるとは, $0 \leq \forall j < \forall n$ に対して (lifting property) を満たすことを言う.
- p が Kan ファイブレーション (Kan fibration) であるとは, $0 \leq \forall j \leq \forall n$ に対して (lifting property) を満たすことを言う.

系??によると, (lifting property) は, $(\infty, 1)$ -圏 \mathcal{B} における角の図式 $(p_{[n-1]}(f_{00}), \dots, \underbrace{\bullet}_j, \dots, p_{[n-1]}(f_{0n})) \in (\mathcal{B}_{n-1})^{\times n}$ を n -射 $f \in \mathcal{B}_n$ が埋めているならば, $(\infty, 1)$ -圏 \mathcal{E} における角の図式 $(f_{00}, \dots, \underbrace{\bullet}_j, \dots, f_{0n}) \in (\mathcal{E}_{n-1})^{\times n}$ を埋める n -射 $\tilde{f} \in \mathcal{E}_n$ が存在することを主張している.

2つの右ファイブレーション $\mathcal{E} \xrightarrow{p} \mathcal{B}$, $\mathcal{E}' \xrightarrow{p'} \mathcal{B}$ が与えられたとき, これらの間の射とは集合

$$\text{Hom}_{\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}') := \{ f \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}') \mid p' \circ f = p \}$$

のことである. $\text{Hom}_{\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ の元を可換図式として表すと以下の通り:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{f} & \mathcal{E}' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & \mathcal{B} & \end{array}$$

$\text{Hom}_{\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}') \subset \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ を【例??】の方法で単体的集合と見做せる. このようにして得られる単体的集合 $\text{Hom}_{\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ の最大の部分 Kan 複体を $\mathbf{Hom}_{\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ と書く.

定義 1.20: 右ファイブレーションの成す $(\infty, 1)$ -圏

\mathcal{B} を $(\infty, 1)$ -圏とする. Kan-豊穠圏 $\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}$ を

- 右ファイブレーションを対象とする
- $\text{Hom}_{\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ を Hom 対象とする

ことで定義する. 以降では $(\infty, 1)$ -圏 $\mathbf{N}_{\text{hc}}(\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}) \in \text{Ob}(\mathbf{sSet})$ のことも $\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}$ と書き, 区別しない.

定理 1.1: unstraightening construction

Unstraightening construction [?, Theorem 2.2.1.2.] は, $(\infty, 1)$ -圏同値

$$\mathrm{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathcal{B}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{R}\mathrm{fib}_{\mathcal{B}}$$

を与える.

証明 [?, Proposition 2.2.3.11] ■

1.2.3 $(\infty, 1)$ -圏におけるスライス圏

定義 1.21: 単体的集合の join

2 つの単体的集合 $S, T \in \mathrm{Ob}(\mathbf{sSet})$ の **join** とは, 単体的集合

$$\begin{aligned} S \star T: \Delta^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathbf{Sets}, \\ [n] &\longmapsto \coprod_{-1 \leq i \leq n} (S_i \times T_{n-i-1}), \\ \left([m] \xrightarrow{\alpha} [n]\right) &\longmapsto \left((i; (x, y)) \mapsto \left(\alpha^{-1}([i]); (S(\alpha|_{\alpha^{-1}([i])})(x), T(\alpha|_{\alpha^{-1}([m-i-1])})(y)) \right) \right) \end{aligned}$$

のこと. ただし $S_{-1} = T_{-1} := \emptyset$ とおいた.

特に, $d_j^n \in \mathrm{Hom}_{\Delta}([n-1], [n])$, $s_j^n \in \mathrm{Hom}_{\Delta}([n+1], [n])$ に対して

$$\begin{aligned} (d_j^n)^{-1}([i]) &= \begin{cases} [i], & i < j \\ [i-1], & i \geq j \end{cases} \\ (s_j^n)^{-1}([i]) &= \begin{cases} [i], & i < j \\ [i+1], & i \geq j \end{cases} \end{aligned}$$

であるから, $S \star T$ の面写像は

$$\begin{aligned} \partial_j^n: \coprod_{-1 \leq i \leq n} (S_i \times T_{n-i-1}) &\longrightarrow \coprod_{-1 \leq i \leq n-1} (S_i \times T_{n-i-2}), \\ (i; (x, y)) &\longmapsto \begin{cases} (i; (\partial_j^i x, y)), & j < i, i \neq 0 \\ (i-1; (\partial_j^i x, y)), & j = i \neq 0 \\ (-1; y), & j = i = 0 \\ (i-1; (x, \partial_{j-i-1}^{n-i-1} y)), & j > i > 0, n-i-1 \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

であり, 縮退写像は

$$\begin{aligned} \sigma_j^n: \coprod_{-1 \leq i \leq n} (S_i \times T_{n-i-1}) &\longrightarrow \coprod_{-1 \leq i \leq n+1} (S_i \times T_{n-i}), \\ (i; (x, y)) &\longmapsto \begin{cases} (i; (\sigma_j^i x, y)), & j < i, i \neq 0 \\ (i+1; (\sigma_j^i x, y)), & j = i \\ (i+1; (x, \sigma_{j-i-1}^{n-i-1} y)), & j > i, n-i-1 \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

となる.

【例 1.2.1】 join $\Delta^0 \star \Delta^0$

$\Delta^0 \star \Delta^0$ を計算してみよう^a. まず対象は

$$(\Delta^0 \star \Delta^0)_0 = \Delta^0_0 \sqcup \Delta^0_0 = \left\{ \begin{array}{c} \{0\} \\ \bullet \\ \bullet \\ \{0\} \end{array} \right\}$$

である. 1-射は

$$(\Delta^0 \star \Delta^0)_1 = \Delta^0_1 \sqcup (\Delta^0_0 \times \Delta^0_0) \sqcup \Delta^0_1$$

であるが, (1.2.1) より始点関数は

$$\begin{aligned} \partial_1^1|_{\Delta^0_0 \times \Delta^0_0}: \Delta^0_0 \times \Delta^0_0 &\longrightarrow \Delta^0_0 \sqcup \Delta^0_0, \\ (\{0\}, \{0\}) &\longmapsto \{0\} \end{aligned}$$

終点関数は

$$\begin{aligned} \partial_0^1|_{\Delta^0_0 \times \Delta^0_0}: \Delta^0_0 \times \Delta^0_0 &\longrightarrow \Delta^0_0 \sqcup \Delta^0_0, \\ (\{0\}, \{0\}) &\longmapsto \{0\} \end{aligned}$$

となるため, Δ^0_1, Δ^0_1 が縮退していることを考慮すると

$$(\Delta^0 \star \Delta^0)_1 = \left\{ \begin{array}{c} \{0\} \\ \bullet \\ \downarrow \\ \bullet \\ \{0\} \end{array} \right\}$$

と図示できる.

^a 左右の区別を付けるために色を付けた.

【例 1.2.2】 join $\Delta^1 \star \Delta^0$

$\Delta^1 \star \Delta^0$ を計算してみよう. まず対象は

$$(\Delta^1 \star \Delta^0)_0 = \Delta^1_0 \sqcup \Delta^0_0 = \left\{ \begin{array}{cc} \{0\} & \{1\} \\ \bullet & \bullet \\ & \bullet \\ & \{0\} \end{array} \right\}$$

である．1-射は

$$(\Delta^1 \star \Delta^0)_1 = \Delta^1_1 \sqcup (\Delta^1_0 \times \Delta^0_0) \sqcup \Delta^0_1$$

であるが，(1.2.1) より始点関数は

$$\begin{aligned} \partial_1^1|_{\Delta^1_0 \times \Delta^0_0} : \Delta^1_0 \times \Delta^0_0 &\longrightarrow \Delta^1_0 \sqcup \Delta^0_0, \\ (x, \{0\}) &\longmapsto x \end{aligned}$$

終点関数は

$$\begin{aligned} \partial_0^1|_{\Delta^1_0 \times \Delta^0_0} : \Delta^1_0 \times \Delta^0_0 &\longrightarrow \Delta^1_0 \sqcup \Delta^0_0, \\ (x, \{0\}) &\longmapsto \{0\} \end{aligned}$$

となるため，

$$\Delta^1 \star \Delta^0 = \left\{ \begin{array}{cc} \{0\} & \{1\} \\ \bullet & \bullet \\ \swarrow & \searrow \\ & \bullet \\ \{0\} \end{array} \right\}$$

と図示できる．ただし，三角形の内部は 2-射 $(\text{Id}_{[1]}, \{0\}) \in \Delta^1_1 \times \Delta^0_0 \subset (\Delta^1 \star \Delta^0)_2$ が埋めている．同様に

$$(\Delta^0 \star \Delta^1)_1 = \left\{ \begin{array}{cc} \{0\} & \{1\} \\ \bullet & \bullet \\ \swarrow & \searrow \\ & \bullet \\ \{0\} \end{array} \right\}$$

であることが分かる．

【例 1.2.3】 join $\Delta^2 \star \Delta^0$

$\Delta^2 \star \Delta^0$ を計算してみよう．まず

$$(\Delta^2 \star \Delta^0)_0 = \Delta^2_0 \sqcup \Delta^0_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \{1\} & & \{0\} \\ & \bullet & \\ & & \bullet \\ & & \bullet \\ & \bullet & \{2\} \\ & & \bullet \\ & & \{0\} \end{array} \right\}$$

である．次に 1 射は

$$(\Delta^2 \star \Delta^0)_1 = \Delta^2_1 \sqcup (\Delta^2_0 \times \Delta^0_0) \sqcup \Delta^0_1$$

であるが、(1.2.1) より始点関数は

$$\begin{aligned} \partial_1^1|_{\Delta_0^2 \times \Delta_0^0} : \Delta_0^2 \times \Delta_0^0 &\longrightarrow \Delta^2_0 \sqcup \Delta^0_0, \\ (x, \text{Id}_{\{0\}}) &\longmapsto x \end{aligned}$$

となり、終点関数は

$$\begin{aligned} \partial_0^1|_{\Delta_0^2 \times \Delta_0^0} : \Delta_0^2 \times \Delta_0^0 &\longrightarrow \Delta^2_0 \sqcup \Delta^0_0, \\ (x, \text{Id}_{\{0\}}) &\longmapsto \{0\} \end{aligned}$$

となる．従って図式??に倣うと

$$(\Delta^2 \star \Delta^0)_1 = \Delta^2_1 \sqcup (\Delta_0^2 \times \Delta_0^0) \sqcup \Delta^0_1 = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \{0\} & & \{2\} \\ & \nearrow & \searrow \\ & \{1\} & \\ & \nwarrow & \nearrow \\ \{0\} & & \{0\} \end{array} \end{array} \right\}$$

と図示できる．ただし、四面体の内部は 3-射 $(\text{Id}_{[2]}, \{0\}) \in \Delta_2^2 \times \Delta_0^0 \subset (\Delta^1 \star \Delta^0)_2$ が埋めている．同様に、 $\Delta^0 \star \Delta^2$ の 1-射を図示すると

$$(\Delta^0 \star \Delta^2)_1 = \Delta^0_1 \sqcup (\Delta_0^0 \times \Delta_0^2) \sqcup \Delta^2_1 = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \{0\} & \\ & \downarrow & \\ \{0\} & \{1\} & \{2\} \\ & \uparrow & \\ & \{0\} & \end{array} \end{array} \right\}$$

のようになる．

補題 1.2: $(\infty, 1)$ -圏同士の join は $(\infty, 1)$ -圏

$(\infty, 1)$ -圏同士の join は $(\infty, 1)$ -圏である．

証明 [?, Proposition 1.2.8.3] ■

定義 1.22: スライス $(\infty, 1)$ -圏

$(\infty, 1)$ -圏 \mathcal{D}, \mathcal{C} および $(\infty, 1)$ -圏の開手 $p \in \text{Hom}_{\text{sSet}}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ を与える． p に沿った \mathcal{C} のスライス圏 (overcategory)

$$\mathcal{C}_{/p} : \Delta^{\text{op}} \longrightarrow \text{Sets}$$

を以下で定義する：

- $\forall [n] \in \text{Ob}(\Delta^{\text{op}})$ に対して, 集合

$$\text{Hom}_p(\Delta^n \star \mathcal{D}, \mathcal{C}) := \{ f \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n \star \mathcal{D}, \mathcal{C}) \mid f|_{\mathcal{D}} = p \}$$

を対応付ける^a.

- $\forall \alpha \in \text{Hom}_{\Delta^{\text{op}}}([m], [n])$ に対して, 写像

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{/p}(\alpha): \text{Hom}_p(\Delta^m \star \mathcal{D}, \mathcal{C}) &\longrightarrow \text{Hom}_p(\Delta^n \star \mathcal{D}, \mathcal{C}), \\ f &\longmapsto f \circ (\alpha_* \star \text{Id}_{\mathcal{D}}) \end{aligned}$$

を対応付ける.

実際, 単体的集合 $\mathcal{C}_{/p}$ は $(\infty, 1)$ -圏である [?, Proposition 4.3.6.1].

^a $f|_{\mathcal{D}}$ というのは, **join の定義**における $(\Delta^n \star \mathcal{D})_k$ の disjoint union のうち, 添字 $i = 0$ が振られている成分への制限を意味する.

p に沿った \mathcal{C} のコスライス圏 (undercategory)

$$\mathcal{C}_{p/}: \Delta^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を以下で定義する:

- $\forall [n] \in \text{Ob}(\Delta^{\text{op}})$ に対して, 集合

$$\text{Hom}_p(\mathcal{D} \star \Delta^n, \mathcal{C}) := \{ f \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\mathcal{D} \star \Delta^n, \mathcal{C}) \mid f|_{\mathcal{D}} = p \}$$

を対応付ける^a.

- $\forall \alpha \in \text{Hom}_{\Delta^{\text{op}}}([m], [n])$ に対して, 写像

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{p/}(\alpha): \text{Hom}_p(\mathcal{D} \star \Delta^m, \mathcal{C}) &\longrightarrow \text{Hom}_p(\mathcal{D} \star \Delta^n, \mathcal{C}), \\ f &\longmapsto f \circ (\text{Id}_{\mathcal{D}} \star \alpha_*) \end{aligned}$$

を対応付ける.

^a $f|_{\mathcal{D}}$ というのは, **join の定義**における $(\mathcal{D} \star \Delta^n)_k$ の disjoint union のうち, 添字 $i = n$ が振られている成分への制限を意味する.

特に注目すべきは, $(\infty, 1)$ -圏の関手 $p: \Delta^0 \longrightarrow \mathcal{C}$ をとった場合である. このとき $X := p_{[0]}(\{0\}) \in \mathcal{C}_0$ とおいて $\mathcal{C}_{/X}, \mathcal{C}_{X/}$ などと書く.

まず, $(\infty, 1)$ -圏 $\mathcal{C}_{/X}$ の対象 $\varphi \in (\mathcal{C}_{/X})_0 = \text{Hom}_p(\Delta^0 \star \Delta^0, \mathcal{C})$ をとる. すると【例 1.2.1】および $\varphi|_{\Delta^0} = p$ の条件から, $\varphi_{[1]}: (\Delta^0 \star \Delta^0)_1 \longrightarrow \mathcal{C}_1$ とは図式

$$\varphi = \begin{array}{c} \varphi_{[0]}|_{\Delta^0_0}(\{0\}) \\ \bullet \\ \downarrow \\ \varphi_{[1]}|_{\Delta^0_0 \times \Delta^0_0}(\{0\} \rightarrow \{0\}) \\ \bullet \\ X \end{array}$$

である． $n \geq 2$ 射に相当する $\varphi_{[n]}: (\Delta^0 \star \Delta^0)_n \longrightarrow \mathcal{C}_n$ のデータは縮退していて自明である．従って， φ は $(1, 1)$ -圏における X 上のスライス圏の対象と等価なデータを与える．

同様に， $(\infty, 1)$ -圏 $\mathcal{C}_{/X}$ の 1-射 $f \in (\mathcal{C}_{/X})_0 = \text{Hom}_p(\Delta^1 \star \Delta^0, \mathcal{C})$ とは，【例 1.2.2】より

$$f = \begin{array}{c} f_{[0]|\Delta_0^1}(\{0\}) \bullet \xrightarrow{\quad} \bullet f_{[0]|\Delta_0^1}(\{1\}) \\ \searrow \quad \swarrow \\ \bullet \\ X \end{array}$$

のことである．ただし三角形の内部は 2-射 $f_{[2]}(\text{Id}_{[2]}, \{0\}) \in \mathcal{C}_2$ が埋めている．これは $(1, 1)$ -圏における X 上のスライス圏の射のデータに対応しているが，横向き矢印を決めるだけでは f が upto homotopy でしか定まらないという点で異なっている．

$(\infty, 1)$ -圏 $\mathcal{C}_{/X}$ の n -射も同様に図示できる．

1.2.4 \mathcal{B}_{Sc} の構造

1.2.5 接構造
