

位相的場の理論 ノート

高間俊至

2023 年 11 月 1 日

目次

第 1 章	粒子の統計性	3
1.1	1 粒子の経路積分	3
1.2	2 つの同種粒子	5
1.2.1	粒子の配位	5
1.2.2	配位空間上の経路	6
1.2.3	経路積分による量子化	7
1.3	同種粒子多体系	8
1.3.1	$D = 2$ の場合：組み紐群	9
1.3.2	$D = 3$ の場合：対称群	9
1.3.3	経路積分の構成	10
1.3.4	1 次元表現（可換な例）	10
1.3.5	より高次元の表現（非可換な場合）	10
第 2 章	Chern-Simons 理論の導入	12
2.1	Charge-Flux composite	12
2.1.1	Aharonov-Bohm 効果	12
2.1.2	Charge-Flux composite としてのエニオン	13
2.1.3	トーラス上のエニオンの真空	13
2.2	可換 Chern-Simons 理論の経験的導入	14
2.2.1	ゲージ不変性	14
2.2.2	運動方程式	15
2.2.3	プロパゲーター	15
2.2.4	真空中の可換 Chern-Simons 理論	16
2.2.5	正準量子化	16
2.3	非可換 Chern-Simons 理論の経験的導入	16
2.3.1	ゲージ不変性	17
2.3.2	Chern-Simons 作用	18
2.4	古典的ゲージ理論	18
2.4.1	主束と内部対称性の定式化	19
2.4.2	Lie 群の指数写像	29
2.4.3	主束の接続	39
2.5	特性類と Chern-Simons 形式	41

付録 A	結び目理論入門	42
付録 B	ベクトル場の話	43
B.1	接束	45
B.2	ベクトル場の定義	46
B.2.1	C^∞ 関数の微分としてのベクトル場	48
B.2.2	ベクトル場と C^∞ 写像	50
B.2.3	Lie ブラケット	52
B.3	積分曲線とフロー	53
B.3.1	積分曲線	53
B.3.2	フロー	57
B.3.3	完備なベクトル場	63
参考文献		65

第 1 章

粒子の統計性

この章は [1, Chapter3, 4] に相当する。この章では同種の多粒子系の経路積分による量子化を考察し、粒子の統計性と配位空間のホモトピー論の関係性を調べる。特に、プロパゲーターの合成則を充たす経路積分の測度と配位空間の基本群のユニタリ表現の対応を考察し、 $2+1$ 次元の同種 N 粒子系においてエニオンの統計性が生じ得ることを確かめる。なお、本章ではまだ場の量子化は行わない。

1.1 1 粒子の経路積分

\mathcal{R}^D 内を運動する非相対論的 1 粒子の軌跡 $\mathbf{x}(t)$ を与える。時刻 t_i に \mathbf{x}_i を出発し、時刻 t_f に \mathbf{x}_f に到達しているとする。

この系を量子力学的に捉えてみる。時刻 t_i に状態 $|\mathbf{x}_i\rangle$ にあった系が時刻 t_f に状態 $|\mathbf{x}_f\rangle$ にある遷移振幅はプロパゲーター (propagator) と呼ばれるが、それは系の時間発展を表すユニタリ演算子 $\hat{U}(t_f, t_i)$ を用いて

$$\langle \mathbf{x}_f | \hat{U}(t_f, t_i) | \mathbf{x}_i \rangle \quad (1.1.1)$$

と書かれる^{*1}。プロパゲーターが計算されると、系の波動関数 $\psi(\mathbf{x}, t) := \langle \mathbf{x} | \psi(t) \rangle$ の時間発展が次のようにしてわかる：

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}_f, t_f) &= \langle \mathbf{x}_f | \psi(t_f) \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}_f | \hat{U}(t_f, t_i) | \psi(t_i) \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^D} d^D \mathbf{x}_i \langle \mathbf{x}_f | \hat{U}(t_f, t_i) | \mathbf{x}_i \rangle \langle \mathbf{x}_i | \psi(t_i) \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^D} d^D \mathbf{x}_i \langle \mathbf{x}_f | \hat{U}(t_f, t_i) | \mathbf{x}_i \rangle \psi(\mathbf{x}_i, t_i) \end{aligned}$$

従って、初期条件が与えられてかつ任意の時刻を繋ぐプロパゲーターが計算できれば系の時間発展が全てわかったことになる。そして Feynman の経路積分 (path integral) による量子化とは、今考えている系の古典的作用

$$S[\mathbf{x}(t)] = \int_{t_i}^{t_f} dt L[\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t]$$

^{*1} 状態ケット $|\mathbf{x}\rangle$ は Schrödinger 表示である。

と、量子的なプロパゲーター (1.1.1) との間に

$$\langle \mathbf{x}_f | \hat{U}(t_f, t_i) | \mathbf{x}_i \rangle = \mathcal{N} \sum_{\mathbf{x}(t) \text{ s.t. } \mathbf{x}(t_i)=\mathbf{x}_i, \mathbf{x}(t_f)=\mathbf{x}_f} e^{iS[\mathbf{x}(t)]/\hbar} \quad (1.1.2)$$

の関係があることを主張するものである。

いま考えている系のハミルトニアンが

$$\hat{H}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{x}}) = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{x}})$$

と書かれる場合に (1.1.2) が成り立っていることを確認する。Schrödinger 方程式より時間発展演算子は

$$\hat{U}(t_f, t_i) = e^{-i\hat{H}(t_f-t_i)/\hbar}$$

である。十分大きな n に対して $\varepsilon := (t_f - t_i)/n$ とおくとことで時間間隔 $[t_i, t_f]$ を

$$[t_i, t_f] = [t_i, t_i + \varepsilon] \cup [t_i + \varepsilon, t_i + 2\varepsilon] \cup \cdots \cup [t_i + (n-1)\varepsilon, t_f]$$

のように分割し、 $t_k := t_i + k\varepsilon$ ($k = 0, 1, \dots, n$) とおく*2。このとき ε は微小なので、 $\forall \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^D$ に対して

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_{k+1} | \hat{U}(t_{k+1}, t_k) | \mathbf{x}_k \rangle &= \langle \mathbf{x}_{k+1} | e^{-i\hat{H}\varepsilon/\hbar} | \mathbf{x}_k \rangle \\ &\approx \langle \mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k \rangle - \frac{i\varepsilon}{\hbar} \langle \mathbf{x}_{k+1} | \hat{H} | \mathbf{x}_k \rangle \\ &= \delta^D(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) - \frac{i\varepsilon}{\hbar} \left(\langle \mathbf{x}_{k+1} | \frac{\hat{\mathbf{p}}}{2m} | \mathbf{x}_k \rangle + V(\mathbf{x}_k) \delta^D(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) \right) \\ &= \int \frac{d^D \mathbf{p}}{(2\pi)^D} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k)/\hbar} \left(1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar} H(\mathbf{p}, \mathbf{x}_k) \right) \\ &\approx \int \frac{d^D \mathbf{p}}{(2\pi)^D} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k)/\hbar} e^{-i\varepsilon H(\mathbf{p}, \mathbf{x}_k)/\hbar} \end{aligned}$$

が成り立つ。ここに、4 行目以降に登場する $H(\mathbf{p}, \mathbf{x}_k)$ は演算子ではなく c 数である。従って*3、

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_f | \hat{U}(t_f, t_i) | \mathbf{x}_i \rangle &= \langle \mathbf{x}_f | e^{-i\hat{H}n\varepsilon/\hbar} | \mathbf{x}_i \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \left(\prod_{k=1}^{n-1} d^D \mathbf{x}_k \right) \prod_{k=1}^{n-1} \langle \mathbf{x}_{k+1} | e^{-i\hat{H}\varepsilon/\hbar} | \mathbf{x}_k \rangle \\ &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \text{i.e. } \varepsilon \rightarrow 0}} \int \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{d^D \mathbf{x}_k d^D \mathbf{p}_k}{(2\pi)^D} \right) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \varepsilon \sum_{k=1}^{n-1} \left(\mathbf{p}_k \cdot \frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k}{\varepsilon} - H(\mathbf{p}_k, \mathbf{x}_k) \right) \right\} \quad (1.1.3) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{d^D \mathbf{x}_k d^D \mathbf{p}_k}{(2\pi)^D} \right) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - H(\mathbf{p}, \mathbf{x})) \right\} \\ &=: \int [d^D \mathbf{x} d^D \mathbf{p}] \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - H(\mathbf{p}, \mathbf{x})) \right\} \end{aligned}$$

*2 定義から $t_i = t_0, t_f = t_n$ である。

*3 実は、(1.1.3) から次の行への移行は、厳密には単に記号的なものだと考えるべきである。というのも、 \mathbf{x}_k ($k = 1, \dots, n-1$) はそれぞれ独立に \mathbb{R}^D を動くので、 $(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k)/\varepsilon$ は発散しても良いのである。つまり、次の行の $\dot{\mathbf{x}} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k)/\varepsilon$ は単に記号としてこう書いているだけに過ぎない。この件に関しては [2, 第 1 章, p.23] に言及がある。旧版には書いていないので注意。

ただし $\int [d^D \mathbf{x} d^D \mathbf{p}] := \lim_{n \rightarrow \infty} \int \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{d^D \mathbf{x}_k d^D \mathbf{p}_k}{(2\pi)^D} \right)$ は経路積分の測度である。ハミルトニアン \mathcal{H} の \mathbf{p} 依存性は運動項のみなので、(1.1.3) において \mathbf{p}_k 積分を先に実行することができる：

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_f | \hat{U}(t_f, t_i) | \mathbf{x}_i \rangle &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \text{i.e. } \varepsilon \rightarrow 0}} \int \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{d^D \mathbf{x}_k d^D \mathbf{p}_k}{(2\pi)^D} \right) \\ &\quad \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \varepsilon \sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{1}{2m} \left(\mathbf{p}_k - m \frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k}{\varepsilon} \right)^2 + \frac{m}{2} \left(\frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k}{\varepsilon} \right)^2 - V(\mathbf{x}_k) \right) \right\} \\ &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \text{i.e. } \varepsilon \rightarrow 0}} \int \left(\prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{m\hbar}{2\pi i \varepsilon} \right)^{D/2} d^D \mathbf{x}_k \right) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \varepsilon \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{m}{2} \left(\frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k}{\varepsilon} \right)^2 - V(\mathbf{x}_k) \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \left(\prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{m\hbar}{2\pi i \varepsilon} \right)^{D/2} d^D \mathbf{x}_k \right) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 - V(\mathbf{x}) \right) \right\} \\ &=: \int [d^D \mathbf{x}] \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} L[\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)] dt \right\} \end{aligned}$$

これがまさに求めたい形 (1.1.2) である。

1.2 2つの同種粒子

次に、 $D(\geq 2)$ 次元 Euclid 空間^{*4} \mathbb{R}^D 内に2つの同種粒子が存在する量子系 \mathcal{H} を考える。簡単のためこの節では粒子の内部自由度はないとする。

1.2.1 粒子の配位

この系における粒子の配位 (configuration) を記述する方法を考察しよう。いま、*coincidences* と呼ばれる集合を $\Delta := \{(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^D\}$ で定義する。内部自由度がないという仮定により、勝手な1つの $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in (\mathbb{R}^D)^2 \setminus \Delta$ に対応する \mathcal{H} の元が一意に定まる。それを $|\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\rangle \in \mathcal{H}$ と書こう^{*5}。ここで、いわゆる粒子の不可弁別性により2つのケット $|\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\rangle, |\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1\rangle$ が同じ物理状態^{*6}を表していることに注意する。このため、集合 $(\mathbb{R}^D)^2 \setminus \Delta$ の上の同値関係 \sim を

$$\sim \stackrel{\text{def}}{\iff} (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \sim (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)$$

と定義し、**配位空間** (configuration space) \mathcal{C} としては^{*7}商集合 $((\mathbb{R}^D)^2 \setminus \Delta) / \sim$ を選ぶのが良い^{*8}。

^{*4} つまり、空間の Riemann 計量の成分は δ_{ij} であるとする。

^{*5} 写像 $|\cdot\rangle : (\mathbb{R}^D)^2 \rightarrow \mathcal{H}$ は全単射ではある。

^{*6} すなわち、Hilbert 空間の元としては $U(1)$ 位相がかかるという違いしかない。

^{*7} 写像 $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{H}, [(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] \mapsto |\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\rangle$ は代表元の取り方に依存するので well-defined でないが、この写像は \mathcal{C} から Hilbert 空間 \mathcal{H} の射線 (ray) 全体が成す集合への写像だと思うことで well-defined な全単射になる。 \mathcal{C} のことを配位空間と呼ぶのはこのためだと思われる。

^{*8} というよりも実は、位相幾何学においては位相空間 \mathcal{C} のことを \mathbb{R}^D の2次の **(unordered) configuration space** と呼ぶ ([https://en.wikipedia.org/wiki/Configuration_space_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Configuration_space_(mathematics)))。 \mathbb{R}^D を一般の位相空間に置き換えても良い。

以降では、同値類^a $[(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] \in \mathcal{C}$ の代表元として

$$y_1^1 < y_2^1$$

$$\text{または } y_1^1 = y_2^1, y_1^2 < y_2^2$$

$$\text{または } \dots$$

$$\text{または } y_1^1 = y_2^1, \dots, y_1^{D-1} = y_2^{D-1}, y_1^D < y_2^D$$

を充たす $(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \in [(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)]$ を使う.

^a $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in (\mathbb{R}^D)^2 \setminus \Delta$ の \sim による同値類を $[(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)]$ と書く.

1.2.2 配位空間上の経路

この系を経路積分によって量子化する際、積分すべき経路とは配位空間 \mathcal{C} 上の連続曲線、すなわち連続写像 $l: [t_i, t_f] \rightarrow \mathcal{C}$ のことである. 始点 $l(t_i) = [(\mathbf{x}_{1i}, \mathbf{x}_{2i})] =: \mathbf{x}_i$ および終点 $l(t_f) = [(\mathbf{x}_{1f}, \mathbf{x}_{2f})] =: \mathbf{x}_f$ を固定した経路全体がなすホモトピー集合を $\Pi\mathcal{C}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_f)$ と書こう. $\forall \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_f \in \mathcal{C}$ に対して, \mathbf{x}_i と \mathbf{x}_m を繋ぐ経路 l_0 と \mathbf{x}_m と \mathbf{x}_f を繋ぐ経路 l_1 の積と呼ばれる \mathbf{x}_i と \mathbf{x}_f を繋ぐ経路 $l_1 \cdot l_0$ を

$$(l_1 \cdot l_0)(t) := \begin{cases} l_0(2t - t_i), & t \in [t_i, \frac{t_i+t_f}{2}] \\ l_1(2t - t_f), & t \in [\frac{t_i+t_f}{2}, t_f] \end{cases}$$

と定義し, \mathbf{x}_f から \mathbf{x}_i へむかう逆の経路を

$$(l^{-1})(t) := l(t_i + t_f - t)$$

と定義する. このとき, ホモトピー類の well-defined な積が

$$\begin{aligned} *: \Pi\mathcal{C}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_f) \times \Pi\mathcal{C}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_m) &\longrightarrow \Pi\mathcal{C}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_f), \\ ([l_1], [l_0]) &\longmapsto [l_1 \cdot l_0] \end{aligned}$$

と定義され, 以下の性質を充たす.

補題 1.1:

$\forall \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_f \in \mathcal{C}$ に対して以下が成り立つ:

(1) $\forall [l_0] \in \Pi\mathcal{C}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_m), \forall [l_1] \in \Pi\mathcal{C}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_n), \forall [l_2] \in \Pi\mathcal{C}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_f)$ に対して

$$([l_2] * [l_1]) * [l_0] = [l_2] * ([l_1] * [l_0])$$

(2) 定数写像 $[t_i, t_f] \rightarrow \mathcal{C}, t \mapsto \mathbf{x}$ のホモトピー類を $\mathbb{1}_{\mathbf{x}}$ と書くとき, $\forall [l] \in \Pi\mathcal{C}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_f)$ に対して

$$[l] * \mathbb{1}_{\mathbf{x}_i} = \mathbb{1}_{\mathbf{x}_f} * [l]$$

(3) $\forall [l] \in \Pi\mathcal{C}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_f)$ に対して

$$[l^{-1}] * [l] = \mathbb{1}_{\mathbf{x}_i}, \quad [l] * [l^{-1}] = \mathbb{1}_{\mathbf{x}_f}$$

つまり、始点と終点がつながっていさえすれば、集合 $\Pi C := \bigcup_{\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_f \in C} \Pi C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_f)$ は積 $*$ に関して群のように振る舞う^{*9}。特に $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_f = \mathbf{x}$ のとき $\Pi C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_f)$ は**基本群** (fundamental group) または 1 次**ホモトピー群**と呼ばれ、 $\pi_1(C, \mathbf{x})$ と書かれる。

補題 1.2:

基本群は群である。

証明 始点と終点が一致しているので、 $\forall [l_0], [l_1] \in \pi_1(C, \mathbf{x})$ に対して積 $[l_0] * [l_1]$ が定義されている。 ■

今考えている系に関して言えば、群 $\pi_1(C, \mathbf{x})$ の位数は $\forall \mathbf{x} \in C$ に対して常に 2 であり、 \mathbb{Z}_2 と同型である。

1.2.3 経路積分による量子化

配位空間 C 上の始点と終点をそれぞれ $[(\mathbf{x}_{1i}, \mathbf{x}_{2i})] =: \mathbf{x}_i$, $[(\mathbf{x}_{1f}, \mathbf{x}_{2f})] =: \mathbf{x}_f$ に固定する。時刻 t_i から t_f までの系の時間発展演算子を $\hat{U}(t_f, t_i)$ と書くと、プロパゲーターは素朴に

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_{1f}, \mathbf{x}_{2f} | \hat{U}(t_f, t_i) | \mathbf{x}_{1i}, \mathbf{x}_{2i} \rangle &= \mathcal{N} \sum_{l \in \{ \text{ct. maps } [t_i, t_f] \rightarrow C \}} e^{iS[l]/\hbar} \\ &= \mathcal{N} \left(\sum_{l \text{ s.t. } [l]=+1} + \sum_{l \text{ s.t. } [l]=-1} \right) e^{iS[l]/\hbar} \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

と計算される。これは以下の 2 つの性質を充たさねばならない：

- $\hat{U}(t_f, t_i)$ はユニタリ演算子
- 時刻 $\forall t_m \in [t_i, t_f]$ に対して、

$$\langle \mathbf{x}_{1f}, \mathbf{x}_{2f} | \hat{U}(t_f, t_i) | \mathbf{x}_{1i}, \mathbf{x}_{2i} \rangle = \int d\mathbf{x}_{1m} d\mathbf{x}_{2m} \langle \mathbf{x}_{1f}, \mathbf{x}_{2f} | \hat{U}(t_f, t_m) | \mathbf{x}_{1m}, \mathbf{x}_{2m} \rangle \langle \mathbf{x}_{1m}, \mathbf{x}_{2m} | \hat{U}(t_m, t_i) | \mathbf{x}_{1i}, \mathbf{x}_{2i} \rangle \quad (1.2.2)$$

逆に (1), (2) を充たすような (1.2.1) の最右辺には他の可能性もある。それは例えば

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{x}_{1f}, \mathbf{x}_{2f} | \hat{U}(t_f, t_i) | \mathbf{x}_{1i}, \mathbf{x}_{2i} \rangle \\ &= \mathcal{N} \left(\sum_{l \text{ s.t. } [l]=+1} - \sum_{l \text{ s.t. } [l]=-1} \right) e^{iS[l]/\hbar} \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

^{*9} ΠC は位相空間 C の**基本垂群** (fundamental groupoid) と呼ばれる。

である。というのも、このとき ΠC の積の性質（補題 1.1）および \mathbb{Z}_2 との類似から

$$\begin{aligned}
& \int d\mathbf{x}_{1m} d\mathbf{x}_{2m} \langle \mathbf{x}_{1f}, \mathbf{x}_{2f} | \hat{U}(t_f, t_m) | \mathbf{x}_{1m}, \mathbf{x}_{2m} \rangle \langle \mathbf{x}_{1m}, \mathbf{x}_{2m} | \hat{U}(t_m, t_i) | \mathbf{x}_{1i}, \mathbf{x}_{2i} \rangle \\
& \propto \int d\mathbf{x}_{1m} d\mathbf{x}_{2m} \left(\sum_{l_{m \rightarrow f} \text{ s.t. } [l_{m \rightarrow f}] = +1} - \sum_{l_{m \rightarrow f} \text{ s.t. } [l_{m \rightarrow f}] = -1} \right) e^{iS[l_{m \rightarrow f}]/\hbar} \left(\sum_{l_{i \rightarrow m} \text{ s.t. } [l_{i \rightarrow m}] = +1} - \sum_{l_{i \rightarrow m} \text{ s.t. } [l_{i \rightarrow m}] = -1} \right) e^{iS[l_{i \rightarrow m}]/\hbar} \\
& = \int d\mathbf{x}_{1m} d\mathbf{x}_{2m} \left(\sum_{[l_{m \rightarrow f}] = +1} \sum_{[l_{i \rightarrow m}] = -1} e^{i(S[l_{m \rightarrow f}] + S[l_{i \rightarrow m}])/\hbar} + \sum_{[l_{m \rightarrow f}] = -1} \sum_{[l_{i \rightarrow m}] = -1} e^{i(S[l_{m \rightarrow f}] + S[l_{i \rightarrow m}])/\hbar} \right) \\
& \quad - \int d\mathbf{x}_{1m} d\mathbf{x}_{2m} \left(\sum_{[l_{m \rightarrow f}] = +1} \sum_{[l_{i \rightarrow m}] = -1} e^{i(S[l_{m \rightarrow f}] + S[l_{i \rightarrow m}])/\hbar} + \sum_{[l_{m \rightarrow f}] = -1} \sum_{[l_{i \rightarrow m}] = +1} e^{i(S[l_{m \rightarrow f}] + S[l_{i \rightarrow m}])/\hbar} \right) \\
& = \int d\mathbf{x}_{1m} d\mathbf{x}_{2m} \sum_{[l_{m \rightarrow f} \cdot l_{i \rightarrow m}] = +1} e^{iS[l_{m \rightarrow f} \cdot l_{i \rightarrow m}]/\hbar} - \int d\mathbf{x}_{1m} d\mathbf{x}_{2m} \sum_{[l_{m \rightarrow f} \cdot l_{i \rightarrow m}] = -1} e^{iS[l_{m \rightarrow f} \cdot l_{i \rightarrow m}]/\hbar} \\
& = \left(\sum_{l_{i \rightarrow f} \text{ s.t. } [l_{i \rightarrow f}] = +1} - \sum_{l_{i \rightarrow f} \text{ s.t. } [l_{i \rightarrow f}] = -1} \right) e^{iS[l_{i \rightarrow f}]/\hbar}
\end{aligned}$$

が成り立ち (2) が充たされるのである。ただし、2 つめの等号で $S[l_{m \rightarrow f}] + S[l_{i \rightarrow m}] = S[l_{m \rightarrow f} \cdot l_{i \rightarrow m}]$ を使った。(1.2.3) はフェルミオンの経路積分を表す。

1.3 同種粒子多体系

次に $D(\geq 2)$ 次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^D 内に N 個の同種粒子が存在する量子系 \mathcal{H} を考える。簡単のためこの節でも粒子の内部自由度はないとし、粒子の生成・消滅は考えない。

経路積分による量子化では、2 粒子の場合と同様の議論ができる。まず配位空間 \mathcal{C} は、集合 $(\mathbb{R}^D)^N \setminus \Delta$ の上の同値関係

$$\sim \stackrel{\text{def}}{\iff} (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \sim (\mathbf{x}_{\sigma(1)}, \mathbf{x}_{\sigma(2)}, \dots, \mathbf{x}_{\sigma(N)}), \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_N$$

による^{*10}商集合 $((\mathbb{R}^D)^N \setminus \Delta) / \sim$ として定義される。積分すべき経路のホモトピー類は基本垂群 ΠC をなす。また、経路の世界線^{*11}を考えることでこれは $D+1$ 次元空間を動く、互いに交わらない N 本の曲線とみなすこともできる。適当な基点 $\mathbf{x} \in (\mathbb{R}^D)^N \setminus \Delta$ を取ってきて基本群 $\pi_1(\mathcal{C}, \mathbf{x})$ を考えれば良い。

1.3.1 $D = 2$ の場合：組み紐群

^{*10} \mathfrak{S}_N は N 次の対称群。従って一つの同値類は $N!$ 個の $(\mathbb{R}^D)^N \setminus \Delta$ の元からなる。 \mathfrak{S}_N の作用による軌道空間と見ても良い。

^{*11} つまり、 $D+1$ 次元の粒子の軌跡。

空間次元が $D = 2$ の場合, $\pi_1(\mathcal{C}, \mathbf{x})$ は (Artin の) **組み紐群** (braid group) B_N と呼ばれる.

定義 1.1: 組み紐群 (代数的)

語 (word) $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{N-1}\}$ で生成され, 関係式

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & 1 \leq i \leq N-2 \\ \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i & |i-j| > 1, 1 \leq i, j \leq N-1 \end{aligned}$$

を満たす群を **Artin の組み紐群** (Artin braid group), もしくは単に**組み紐群** (braid group) と呼ぶ.

B_N の代数的な定義 1.1 と, 位相幾何学的な定義 $\pi_1(\mathcal{C}, \mathbf{x})$ が同型であることは, 例えば [3] に証明がある. 生成元 σ_i を図として表示するとわかりやすい. この場合, B_N の積とは単に組み紐を下から上へ^{*12}繋げることに他ならない.

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \begin{array}{c} \text{Diagram of } \sigma_1: \text{Two strands crossing, with the left strand on top.} \end{array} & \sigma_2 &= \begin{array}{c} \text{Diagram of } \sigma_2: \text{Two strands crossing, with the right strand on top.} \end{array} & \sigma_3 &= \begin{array}{c} \text{Diagram of } \sigma_3: \text{Two strands crossing, with the left strand on top.} \end{array} \\ \sigma_1^{-1} &= \begin{array}{c} \text{Diagram of } \sigma_1^{-1}: \text{Two strands crossing, with the right strand on top.} \end{array} & \sigma_2^{-1} &= \begin{array}{c} \text{Diagram of } \sigma_2^{-1}: \text{Two strands crossing, with the left strand on top.} \end{array} & \sigma_3^{-1} &= \begin{array}{c} \text{Diagram of } \sigma_3^{-1}: \text{Two strands crossing, with the right strand on top.} \end{array} \end{aligned}$$

図 1.1: B_4 の生成元の表示. [1, p.29, Fig. 3.4] より引用.

組み紐不変量として特に重要なのが**巻き付き数** (winding number) である:

$$W := (\# \text{ of overcrossings}) - (\# \text{ of undercrossings})$$

1.3.2 $D = 3$ の場合: 対称群

空間次元が $D = 3$ の場合, $\pi_1(\mathcal{C}, \mathbf{x})$ の様子は $D = 2$ の場合と大きく異なる.

命題 1.1:

S^1 の \mathbb{R}^3 への任意の 2 つの埋め込みは, それらを \mathbb{R}^4 への埋め込みと見做すことで同位になる.

命題 1.1 により, $D = 3$ のとき $\pi_1(\mathcal{C}, \mathbf{x}) = \mathfrak{S}_N$ であることが分かる.

^{*12} 文献によって上下がまちまちである.

1.3.3 経路積分の構成

$N = 2$ の場合と同様に考える．経路積分の終点と始点を $\{\mathbf{x}\}_i, \{\mathbf{x}\}_f \in \mathcal{C}$ に固定する．まず簡単のため $\{\mathbf{x}\}_i = \{\mathbf{x}\}_f =: \{\mathbf{x}\}$ とすると,

$$\langle \{\mathbf{x}\}_f | \hat{U}(t_f, t_i) | \{\mathbf{x}\}_i \rangle = \mathcal{N} \sum_{[l] \in \pi_1(\mathcal{C}, \{\mathbf{x}\})} \rho([l]) \sum_{m \in [l]} e^{iS[m]/\hbar}$$

とすれば条件 (1.2.2) が充たされる．ただしユニタリ性の条件を充たすため, 群準同型 $\rho: \pi_1(\mathcal{C}, \{\mathbf{x}\}) \rightarrow \text{GL}(V)$ は基本群 $\pi_1(\mathcal{C}, \{\mathbf{x}\})$ の ユニタリ表現 にとる．

1.3.4 1次元表現 (可換な例)

まず ρ が $\pi_1(\mathcal{C}, \{\mathbf{x}\})$ の 1次元ユニタリ表現である場合を考える．つまり, 群準同型 $\rho: \pi_1(\mathcal{C}, \{\mathbf{x}\}) \rightarrow \text{U}(1)$ としてあり得るものを全て列挙することを試みる．

【例 1.3.1】2 + 1 次元の場合

$\pi_1(\mathcal{C}, \{\mathbf{x}\}) = B_N$ である． $N - 1$ 個の $\text{U}(1)$ の元の組 $\{g_1, \dots, g_{N-1}\}$ であって定義 1.1 の関係式を充たすものを見つければ良い． $\text{U}(1)$ は可換群なので 2 つ目の関係式は常に成り立つ．1 つ目の関係式が成り立つ必要十分条件は $g_1 = g_2 = \dots = g_{N-1} = e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$ は任意) である． $1 \leq \forall i \leq N - 1$ に対して $W(\sigma_i) = 1$ であることから,

$$\rho_\theta(g) := e^{i\theta W(g)} \quad (\forall \theta \in \mathbb{R})$$

によって全ての表現が尽くされた．

- $\theta = 0$ のとき $\rho_\theta: g \mapsto 1$ であり, **ボゾン**
- $\theta = \pi$ のとき $\rho_\theta: g \mapsto (-1)^{W(g)}$ であり, **フェルミオン**
- 他の $\theta \in \mathbb{R}$ に対応する ρ_θ による統計性は**エニオン** (anyons), もしくは**分数統計** (fractional statistics) と呼ばれる．特に $\text{U}(1)$ が可換群なので**可換エニオン** (abelian anyons) という．

【例 1.3.2】3 + 1 次元の場合

$\pi_1(\mathcal{C}, \{\mathbf{x}\}) = \mathfrak{S}_N$ である．定義 1.1 の関係式に $\sigma_i^2 = 1$ を追加したものが \mathfrak{S}_N の Coxeter presentation となる．つまり, 【例 1.3.1】において $\theta = 0, \pi$ の場合のみがあり得る．これはボゾンとフェルミオンであり, $N = 2$ の場合に考察した例の一般化になっている．

1.3.5 より高次元の表現 (非可換な場合)

粒子の内部自由度を考慮しよう．具体的には, $D(\geq 2)$ 次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^D 内に N 個の同種粒子が存在する量子系 \mathcal{H} において内部自由度を指定する添字集合 \mathcal{I} が存在して, 写像

$$|\cdot\rangle: ((\mathbb{R}^D)^N \setminus \Delta) \times \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{H}, ((\mathbf{x}), i) \longmapsto |\{\mathbf{x}\}; i\rangle$$

が全単射となるような状況を考える^{*13}。このとき $\forall \{\mathbf{x}\}_i, \{\mathbf{x}\}_f \in \mathcal{C}, \forall i, j \in \mathcal{I}$ に対するプロパゲーター

$$\langle \{\mathbf{x}\}_f; i | \hat{U}(t_f, t_i) | \{\mathbf{x}\}_i; j \rangle = \mathcal{N} \sum_{[l] \in \pi_1(\mathcal{C}, \{\mathbf{x}\})} [\rho([l])]_{ij} \sum_{m \in [l]} e^{iS[m]/\hbar}$$

を計算する必要がある。ここに、 $\#\mathcal{I} = M < \infty$ のとき群準同型

$$\rho: \pi_1(\mathcal{C}, \{\mathbf{x}\}) \longrightarrow \mathrm{U}(M) \subset \mathrm{GL}(\mathbb{C}, M)$$

は $\pi_1(\mathcal{C}, \{\mathbf{x}\})$ の M 次元ユニタリ表現であり、 $[\rho([l])]_{ij}$ というのは $M \times M$ ユニタリ行列 $\rho([l])$ の第 (i, j) 成分という意味である。一方 $\#\mathcal{I} = \infty$ のとき ρ は無限次元表現となる。

【例 1.3.3】2 + 1 次元の場合

特に空間次元が $D = 2$ のとき、 ρ は B_N の M 次元ユニタリ表現である。このような統計性を持つ粒子のことを**非可換エニオン** (nonabelian anyon) と呼ぶ^a。

^a $\mathrm{U}(M)$ が非可換群なので

【例 1.3.4】3 + 1 次元の場合

特に空間次元が $D = 3$ のとき、 ρ は \mathfrak{S}_N の M 次元ユニタリ表現である。このような統計性を持つ粒子のことを **parastatistics** と呼ぶが、実は暗に存在する付加的な制約のせいでボゾンかフェルミオン、もしくはいくつか内部自由度が追加されるかしか許されることが示されている [4, Appendix B]。このことについては後述する。しかし、粒子の描像を捨てて弦を考えるなどすると「面白い」例が得られるかもしれない。

^{*13} ややこしいが、定義域を同値関係で割る前なので (\mathbf{x}) と表記した。

第 2 章

Chern-Simons 理論の導入

この章は [1, Chapter4, 5] に相当する.

2.1 Charge-Flux composite

2.1.1 Aharonov-Bohm 効果

空間を表す多様体を Σ と書く. 電荷 q を持つ 1 つの粒子からなる系を考えよう. この系に静磁場をかけたとき, 粒子の古典的作用は自由粒子の項 S_0 と, 粒子と場の結合を表す項とに分かれる:

$$S[l] = S_0[l] + q \int_{t_i}^{t_f} dt \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A} = S_0[l] + q \int_l d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}$$

ただし $l: [t_i, t_f] \rightarrow \Sigma$ は粒子の軌跡を表す.

ここで, いつもの 2 重スリットを導入する. 粒子が $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}(t_i)$ から出発して $\mathbf{x}_f = \mathbf{x}(t_f)$ に到達するとき, これらの 2 点を結ぶ経路全体の集合 $\mathcal{C}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_t)$ のホモトピー類は, スリット 1, 2 を通る経路それぞれでちょうど 2 つある. i.e. プロパゲーターは経路積分によって

$$\sum_{l \in \mathcal{C}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_t) \text{ s.t. slit 1}} e^{iS_0[l]/\hbar + i(q/\hbar) \int_l d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}} + \sum_{l \in \mathcal{C}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_t) \text{ s.t. slit 2}} e^{iS_0[l]/\hbar + i(q/\hbar) \int_l d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}}$$

と計算される. 第 1 項と第 2 項の位相差は, 片方の経路の逆をもう片方に足すことでできる閉曲線 ∂S について

$$\exp \left[\frac{iq}{\hbar} \oint_{\partial S} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \right] = \exp \left[\frac{iq}{\hbar} \int_S d\mathbf{S} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \right] = \exp \left[\frac{iq}{\hbar} \Phi_S \right]$$

となる^{*1}.

- (1) 磁束が $\Phi_0 = 2\pi\hbar/q$ の整数倍の時は, 位相シフトがない場合と物理的に区別がつかない.
- (2) 実は, 静止した電荷の周りに磁束を動かしても全く同じ位相シフトが引き起こされる [5].

^{*1} 粒子が侵入できない領域にのみ磁場がかかっているとする. なお, 粒子の配位空間が単連結でないことが本質的に重要である. このとき, 領域 S をホモトピーで 1 点に収縮することで, 無限に細い管状の磁束 (flux tube) の概念に到達する.

2.1.2 Charge-Flux composite としてのエニオン

荷電粒子と無限に細い磁束管 (flux tube) が互いに束縛し合って近接しているものを考える。この対を 2 次元系における、 (q, Φ) なるチャージを持つ 1 つの粒子と見做してみよう。

さて、粒子 $i (= 1, 2)$ がチャージ (q, Φ) を持つとしよう。この 2 つの同種粒子の配位空間の基本群は前章の議論から \mathbb{Z}_2 であり、

- (1) 粒子 1 を 2 の周りに 1 周させる操作
- (2) 粒子の交換を 2 回行う操作

の 2 つが同じホモトピー類に属することがわかる。故に、これら 2 つの操作で得られる位相シフトは等しい。操作 (1) による位相シフトは AB 効果によるもので、 $e^{2iq\Phi/\hbar}$ である*2。故に、この粒子が 1 回交換することによって得られる位相シフトは $e^{iq\Phi/\hbar}$ であるが、これは $\theta = q\Phi/\hbar$ なる可換エニオンの統計性である。

次に、エニオンのフュージョン (fusion) を経験的に導入する。これは、エニオン $(q_1, \Phi_1), (q_2, \Phi_2)$ が「融合」してエニオン $(q_1 + q_2, \Phi_1 + \Phi_2)$ になる、と言うものであり、今回の場合だと電荷、磁束の保存則に由来すると考えることができる。エニオン (q, Φ) と $(-q, -\Phi)$ がフュージョンすると $I := (0, 0)$ になるだろう。この I をエニオンの真空とみなし*3、 $(-q, -\Phi)$ のことを (q, Φ) の反エニオン (anti-anyon) と見做す。反エニオンをエニオンの周りに一周させたときの位相シフトが $e^{-2i\theta}$ になることには注意すべきである。

2.1.3 トーラス上のエニオンの真空

トーラス $T^1 := S^1 \times S^1$ の上のエニオン系の基底状態 (真空) を考える。

トーラスには非自明なサイクルがちょうど 2 つあるので、それらを C_1, C_2 とおく。そして系の時間発展演算子のうち、次のようなものを考える：

\hat{T}_1 ある時刻に C_1 の 1 点において粒子-反粒子対を生成し、それらを C_1 上お互いに反対向きに動かし、有限時間経過後に C_1 の対蹠点で対消滅させる。

\hat{T}_2 ある時刻に C_2 の 1 点において粒子-反粒子対を生成し、それらを C_2 上お互いに反対向きに動かし、有限時間経過後に C_2 の対蹠点で対消滅させる。

\hat{T}_1, \hat{T}_2 は非可換であり、基底状態への作用を考える限り、フュージョンダイアグラムと braiding の等式から

$$\hat{T}_2 \hat{T}_1 = e^{-i2\theta} \hat{T}_1 \hat{T}_2 \quad (2.1.1)$$

が成り立つことが分かる。然るに、基底状態が張る部分空間に制限すると $[T_1, H] = [T_2, H] = 0$ なので*4、基底状態が縮退していることがわかる。

さて、 T_i はユニタリなので、 $T_1 |\alpha\rangle = e^{i\alpha} |\alpha\rangle$ とおける。この時 (2.1.1) より

$$T_1(T_2 |\alpha\rangle) = e^{i(\alpha+2\theta)} T_2 |\alpha\rangle$$

*2 2 がつくのは、粒子 1 の q が粒子 2 の Φ の周りを 1 周する AB 効果だけでなく、粒子 1 の Φ が粒子 2 の q の周りを 1 周する AB 効果の寄与があるからである。一般に、粒子 i のチャージが (q_i, Φ_i) ならば $e^{i(q_1\Phi_2 + q_2\Phi_1)/\hbar}$ の位相シフトが起こる。

*3 しかし、 I のことは粒子として捉える。

*4 基底状態 $|0\rangle$ と $\hat{T}_1 |0\rangle$ は同じエネルギーである。

である。つまり、 $|\alpha\rangle$ が基底状態ならば $|\alpha + 2\theta\rangle = T_2 |\alpha\rangle$ もまた基底状態である。この操作を続けて、基底状態 $|\alpha + 2n\theta\rangle = (T_2)^n |\alpha\rangle$ ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) を得る。特に $\theta = \pi p/m$ (p, m は互いに素) である場合を考えると、基底状態は m 重縮退を示している。

2.2 可換 Chern-Simons 理論の経験的導入

ゲージ場^{*5} $A_\alpha = (a_0, a_1, a_2)$ が印加された N 粒子 2 次元系であって、ラグランジアンが

$$L = L_0 + \int_{\Sigma} d^2x \left(\frac{\mu}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha \partial_\beta A_\gamma - j^\alpha A_\alpha \right) =: L_0 + \int_{\Sigma} d^2x \mathcal{L} \quad (2.2.1)$$

と書かれるものを考える。ただし、 L_0 は場と粒子の結合を無視したときの粒子のラグランジアンであり、空間を表す多様体を Σ で書いた。粒子 n はチャージ q_n を持つものとし、 $j^\alpha = (j^0, \mathbf{j})$ は

$$j^0(\mathbf{x}) := \sum_{n=1}^N q_n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n),$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) := \sum_{n=1}^N q_n \dot{\mathbf{x}}_n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)$$

と定義される粒子のカレントである。ラグランジアン密度 \mathcal{L} の第 1 項は場自身を記述し、第 2 項は場と粒子の結合を記述する。

2.2.1 ゲージ不変性

ラグランジアン (2.2.1) のゲージ不変性は次のようにしてわかる：ゲージ変換

$$A_\alpha \longrightarrow A_\alpha + \partial_\alpha \chi$$

による \mathcal{L} の変化は

$$\frac{\mu}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\alpha \chi \partial_\beta A_\gamma + \frac{\mu}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha \partial_\beta \partial_\gamma \chi + \cancel{\frac{\mu}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\alpha \chi \partial_\beta \partial_\gamma \chi} - j^\alpha \partial_\alpha \chi$$

であるから、空間積分を実行すると

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} d^2x \frac{\mu}{2} \partial_\alpha (\epsilon^{\alpha\beta\gamma} \chi \partial_\beta A_\gamma) - \int_{\Sigma} d^2x \frac{\mu}{2} \cancel{\epsilon^{\alpha\beta\gamma} \chi \partial_\alpha \partial_\beta A_\gamma} - \int_{\Sigma} d^2x \partial_\alpha (j^\alpha \chi) + \int_{\Sigma} d^2x \cancel{\partial_\alpha j^\alpha \chi} \\ &= \int_{\partial\Sigma} dS_\alpha \left(\frac{\mu}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \chi \partial_\beta A_\gamma - j^\alpha \chi \right) \end{aligned}$$

となる。ただしチャージの保存則 $\partial_\alpha j^\alpha = 0$ を使った。このことから、もし空間を表す多様体 Σ の境界が $\partial\Sigma = \emptyset$ ならば^{*6} ラグランジアンはゲージ不変である。

^{*5} 一般相対論に倣い、時空を表す多様体 \mathcal{M} の座標のうち時間成分を x^0 、空間成分を x^1, x^2 とする。

^{*6} このような多様体の中で重要なのが閉多様体 (closed manifold) である。

2.2.2 運動方程式

ラグランジアン密度 \mathcal{L} から導かれる Euler-Lagrange 方程式は

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} = \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta A_\alpha)} \right)$$

である.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} &= \frac{\mu}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta A_\gamma - j^\alpha, \\ \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta A_\alpha)} \right) &= \partial_\beta \left(\frac{\mu}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha \right) = -\frac{\mu}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta A_\gamma \end{aligned}$$

なのでこれは

$$j^\alpha = \mu \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta A_\gamma$$

となる. 特に第 0 成分は, 「磁場」 $\mathbf{b} := \nabla \times \mathbf{A}$ を導入することで

$$\sum_{n=1}^N \frac{q_n}{\mu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) = b^0$$

となる. つまり, 位置 \mathbf{x}_n に強さ q_n/μ の磁束管が点在している, という描像になり, charge-flux composite を説明できている.

2.2.3 プロパゲーター

簡単のため, 全ての粒子のチャージが等しく q であるとする. N 粒子の配位空間 \mathcal{C} における初期配位と終了時の配位をそれぞれ $\{\mathbf{x}_i\}, \{\mathbf{x}_f\}$ とし, それらを繋ぐ経路全体の集合を $\mathcal{C}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_f)$ と書くと, プロパゲーターは経路積分によって

$$\sum_{l \in \mathcal{C}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_f)} e^{iS_0[l]/\hbar} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}(A_\mu(x)) e^{iS_{CS}[A_\mu(x)]/\hbar} e^{i(q/\hbar) \int_l dx^\alpha A_\alpha(x)}$$

と計算される. ここに $\mathcal{D}(A_\mu(x))$ は汎関数積分の測度を表す. 詳細は後述するが, 場に関する汎関数積分を先に実行してしまうと, 実は

$$\sum_{l \in \mathcal{C}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_f)} e^{iS_0[l]/\hbar + i\theta W(l)}$$

の形になることが知られている. ここに $W(l)$ は, 経路 l の巻きつき数である. 経路に依存する位相因子 $e^{i\theta W(l)}$ は前章で議論した $\pi_1 \mathcal{C}$ の 1 次元ユニタリ表現そのものであり, エニオンの統計性が発現する機構が Chern-Simons 項により説明できることを示唆している.

2.2.4 真空中の可換 Chern-Simons 理論

粒子が存在しないとき、経路積分は

$$Z(\mathcal{M}) := \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}A_\mu(x) e^{iS_{CS}[A_\mu(x)]/\hbar}$$

の形をする。 $Z(\mathcal{M})$ は \mathcal{M} についてホモトピー不変であり、**分配関数** (partition function) と呼ばれる。 $Z(\mathcal{M})$ が TQFT において重要な役割を果たすことを後の章で見る。

2.2.5 正準量子化

$A_0 = 0$ なるゲージをとると、ラグランジアン密度における Chern-Simons 項は $-A_1\partial_0 A_2 + A_2\partial_0 A_1$ の形になる。これは A_1 (resp. A_2) が A_2 (resp. A_1) の共役運動量であることを意味するので、正準量子化を行うならば

$$[A_1(\mathbf{x}), A_2(\mathbf{y})] = \frac{i\hbar}{\mu} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

を要請する^{*7}。

さて、このときトーラス T^2 上の2つのサイクル C_1, C_2 に対して Wilson ループ

$$W_j = \exp \left(\frac{iq}{\hbar} \oint_{C_j} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \right)$$

を考える。 $[A, B]$ が c 数である場合の BCH 公式から

$$W_1 W_2 = e^{iq^2/(\mu\hbar)} W_2 W_1$$

を得るが、これは (2.1.1) を説明している。つまり、演算子 T_1, T_2 とは Wilson loop のことだったのである^{*8}。

2.3 非可換 Chern-Simons 理論の経験的導入

この節では自然単位系を使う。前節を一般化して、ゲージ場 $A_\mu(x)$ がある Lie 代数 \mathfrak{g} に値をとるものとしよう。つまり、Lie 代数 \mathfrak{g} の基底を $\sigma_a/(2i)$ とすると^{*9}

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x) \frac{\sigma_a}{2i}$$

と書かれるような状況を考える^{*10}。 $\sigma_a \in \mathfrak{g}$ が一般に非可換であることから、このような理論は非可換 Chern-Simons 理論と呼ばれる。

時空多様体 \mathcal{M} 上の閉曲線 γ に沿った **Wilson loop** は、**経路順序積** (path ordering) \mathcal{P} を用いて

$$W_\gamma := \text{Tr} \left[\mathcal{P} \exp \left(\oint_\gamma dx^\mu A_\mu(x) \right) \right]$$

と定義される。Aharonov-Bohm 位相の一般化という気持ちであるが、経路 γ の異なる2点 x, y を取ってきたときに $A_\mu(x)$ と $A_\mu(y)$ が一般に非可換であることが話をややこしくする。

^{*7} しかし、トーラス上の座標をどのように取るかと言うことは問題である。

^{*8} 疑問：座標の時間成分はどこへ行ったのか？

^{*9} 因子 $1/(2i)$ は物理学における慣習である。ややこしいことに、文献によってこの因子が異なる場合がある。

^{*10} ゲージ接続が Lie 代数に値をとる 1-形式である、ということ。

2.3.1 ゲージ不変性

非可換 Chern-Simons 理論におけるゲージ変換は, $U: \mathcal{M} \rightarrow G$ を用いて

$$A_\mu(x) \longrightarrow U(x)(A_\mu(x) + \partial_\mu)U(x)^{-1} \quad (2.3.1)$$

の形をする. このゲージ変換が Wilson loop を不変に保つことを確認しておこう.

\mathcal{M} の任意の 2 点 $x_i, x_f \in \mathcal{M}$ を結ぶ曲線 $\gamma: [t_i, t_f] \rightarrow \mathcal{M}$ をとり, **Wilson line** を

$$\tilde{W}_\gamma(x, y) := \mathcal{P} \exp \left(\int_C dx^\mu A_\mu(x) \right)$$

で定義する. $[t_i, t_f]$ の分割 $t_i := t_0 < t_1 < \dots < t_N := t_f$ を与えて $x_i := \gamma(t_i)$, $dx_i := x_{i+1} - x_i$ とおく^{*11}と,

$$\begin{aligned} \tilde{W}_\gamma(x_i, x_f) &= \mathcal{P} \exp \left(\int_{x_i}^{x_1} dx^\mu A_\mu(x) + \int_{x_1}^{x_2} dx^\mu A_\mu(x) + \dots + \int_{x_{N-1}}^{x_f} dx^\mu A_\mu(x) \right) \\ &:= \lim_{N \rightarrow \infty} \exp \left(\int_{x_i}^{x_1} dx^\mu A_\mu(x) \right) \exp \left(\int_{x_1}^{x_2} dx^\mu A_\mu(x) \right) \dots \exp \left(\int_{x_{N-1}}^{x_f} dx^\mu A_\mu(x) \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{W}_{\gamma|_{[t_i, t_1]}}(x_i, x_1) \tilde{W}_{\gamma|_{[t_1, t_2]}}(x_1, x_2) \dots \tilde{W}_{\gamma|_{[t_{N-1}, t_f]}}(x_{N-1}, x_f) \end{aligned}$$

と書ける. N が十分大きい時は $0 \leq \forall i \leq N-1$ に対して $|dx_i|$ が十分小さく,

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}}(x_i, x_{i+1}) &\approx \exp \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} dx^\mu A_\mu(x) \right) \\ &\approx 1 + \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx^\mu A_\mu(x) \\ &\approx 1 + A_\mu(x_i) dx_i^\mu \end{aligned}$$

と書ける^{*12}. このときゲージ変換 (2.3.1) に伴って

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}}(x_i, x_{i+1}) &\longrightarrow 1 + U(x_i)(A_\mu(x_i) + \partial_\mu)U(x_i)^{-1} dx_i^\mu \\ &\approx U(x_i)(1 + A_\mu(x_i) dx_i^\mu)(U(x_i)^{-1} + \partial_\mu(U(x_i)^{-1}) dx_i^\mu) \\ &\approx U(x_i)\tilde{W}_{\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}}(x_i, x_{i+1})U(x_{i+1})^{-1} \end{aligned}$$

と変換するので, 結局 $x_i, x_f \in \mathcal{M}$ を繋ぐ Wilson line がゲージ変換 (2.3.1) に伴って

$$\tilde{W}_\gamma(x_i, x_f) \longrightarrow U(x_i)\tilde{W}_\gamma(x_i, x_f)U(x_f)^{-1}$$

と変換することがわかった. Wilson loop の場合は $x_i = x_f$ でかつトレースをとるので, ゲージ不変になる.

^{*11} dx_i は, 厳密には 2 点 x_i, x_{i+1} を含むある \mathcal{M} のチャート $(U, (x^\mu))$ をとってきた時の座標関数の値の差 $dx_i^\mu := x^\mu(x_{i+1}) - x^\mu(x_i)$ として理解する.

^{*12} $N \rightarrow \infty$ の極限で等式になる.

2.3.2 Chern-Simons 作用

いささか天下りのだが、**Chern-Simons action** を

$$S_{\text{CS}}[A_\mu] := \frac{k}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} d^3x \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \text{Tr} \left[A_\alpha \partial_\beta A_\gamma + \frac{2}{3} A_\alpha A_\beta A_\gamma \right]$$

により定義する。第 2 項は可換な場合には必ず零になるので前節では登場しなかった。\$S_{\text{CS}}\$ が時空 \$\mathcal{M}\$ の計量によらない^{*13}ことは、ゲージ場を Lie 代数值 1-形式 \$A \in \Omega^1(\mathcal{M}) \otimes \mathfrak{g}\$ として書き表したときに

$$S_{\text{CS}}[A] = \frac{k}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} \text{Tr} \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right)$$

と書けることからわかる^{*14}。

\$S_{\text{CS}}\$ にゲージ変換 (2.3.1) を施した結果は

$$\begin{aligned} S_{\text{CS}}[A_\mu] &\longrightarrow S_{\text{CS}}[A_\mu] + 2\pi\nu k, \\ \text{w/ } \nu &:= \frac{1}{24\pi^2} \int_{\mathcal{M}} d^3x \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \text{Tr}[(U^{-1}\partial_\alpha U)(U^{-1}\partial_\beta U)(U^{-1}\partial_\gamma U)] \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

となる。\$\nu\$ は写像 \$U: \mathcal{M} \longrightarrow G\$ の**巻きつき数** (winding number), もしくは **Pontryagin index** と呼ばれ、常に整数値をとる。この極めて非自明な結果についても後述する。(2.3.2) から、\$S_{\text{CS}}\$ は厳密にはゲージ不変ではない。然るに、もし \$k \in \mathbb{Z}\$ ならば (このとき \$k\$ の値は **level** と呼ばれる), 分配関数 \$Z(\mathcal{M})\$ がゲージ不変な形になってくれるので問題ない、と考える。2+1 次元においては、1 つのゲージ場からなる作用であって

- トポロジカル不変性 (i.e. 計量不変性)
- 上述の意味のゲージ不変性

の 2 つを充たすものは他にない。

2.4 古典的ゲージ理論

時空の多様体を \$\mathcal{M}\$ と書く。

場^{*15} \$\varphi: \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{K}^N\$, \$x \longmapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_N(x))\$ が線型 Lie 群 \$G \subset \text{GL}(N, \mathbb{K})\$ で記述される^{*16}内部対称性を持っているような系を考える。つまり、ゲージ原理を要請し、任意の \$C^\infty\$ 写像 \$U: \mathcal{M} \longrightarrow G\$ に対して^{*17}, 系のラグランジアン密度の場に関する項 \$\mathcal{L}[\varphi_\mu(x)]\$ が \$\mathcal{L}[[U(x)]_i^j \varphi_j(x)] = \mathcal{L}[\varphi_i(x)]\$ を充たすとする。もしくは、場 \$\varphi: \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{K}^N\$ であって、時空の各点 \$x \in \mathcal{M}\$ および任意の \$C^\infty\$ 写像 \$U: \mathcal{M} \longrightarrow G\$ に対して \$\varphi(x) \longrightarrow U(x)\varphi(x)\$ と変換する^{*18} ものを考えるととっても良い。

^{*13} 計量不変 (metric invariant) であると言う。

^{*14} ... と言うのは微妙に的を外している。より正確には 2+1 次元多様体 \$\mathcal{M}\$ を境界に持つような 4 次元多様体 \$\mathcal{N}\$ を用意し、\$\mathcal{N}\$ の作用 \$S[A] := k/(4\pi) \int_{\mathcal{N}} \text{Tr}(F \wedge F)\$ を部分積分することで \$S_{\text{CS}}\$ の別の定義が与えられる。

^{*15} この段階では、場とはその配位を記述する空間 \$F\$ (これは \$C^\infty\$ 多様体だったりベクトル空間だったりする) と \$C^\infty\$ 写像 \$\varphi: \mathcal{M} \longrightarrow F\$ の組のことと考える。この描像は後にファイバー束の \$C^\infty\$ 切断として定式化される。

^{*16} ここでは \$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}\$ としておく。

^{*17} 内部対称性という言葉を使うのは、\$U\$ が定数写像とは限らないことを意味する。

^{*18} 一般相対論の数学的定式化におけるテンソル場の変換性は、時空の多様体 \$\mathcal{M}\$ 上の一般座標変換 (i.e. チャートの取り替え) に由

この系を経路積分により量子化することを見据えて、このような変換性を充たす全ての場がなす空間の幾何学を考察すると見通しが良いだろう。そのため、まず時空上の無限小だけ離れた2点 $x_i, x_f \in \mathcal{M}$ における場の配位 $\varphi(x_i), \varphi(x_f)$ を比較しよう。内部自由度による変換性を議論したいので、 $\varphi(x_f) - \varphi(x_i)$ なる量を調べても意味がない。 x_i, x_f を結ぶ C^∞ 曲線 $\gamma: [t_i, t_f] \rightarrow \mathcal{M}$ を持ってきて、 γ に沿って $\varphi(x_i)$ を x_f まで流してやるのが良い。つまり、場の配位を記述する空間 \mathbb{K}^N 上の C^∞ 曲線 $\varphi^{(\gamma)} := \varphi \circ \gamma: [t_i, t_f]$ を考えれば、量 $\varphi(x_f) - \varphi^{(\gamma)}(t_f)$ は $U(x_f) \in G$ による変換を受けるはずである。 x_i, x_f の両方を含む \mathcal{M} のチャート $(V, (x^\mu))$ を持ってきて成分計算すると、 $dx := x_f - x_i$ が^{*19}微小なので Taylor 展開において dx の1次の項まで残すことで

$$\begin{aligned}\varphi_i^{(\gamma)}(t_f) &:= \varphi_i(x_i) - [A_\mu(x)]_i^j \varphi_j(x) dx^\mu \\ \varphi(x_f) &= \varphi(x_i) + \partial_\mu \varphi(x) dx^\mu\end{aligned}\tag{2.4.1}$$

と書けるはずである。ただし、式 (2.4.1) の右辺によって $\dim \mathcal{M}$ 個の成分を持つ新しい場 $A_\mu: \mathcal{M} \rightarrow \text{GL}(N, \mathbb{K})$ を定義した。この場は**ゲージ場**と呼ばれる。

ゲージ場 A_μ を時空の各点 $x \in \mathcal{M}$ における変換性によって特徴付けよう。そのためには、量

$$\varphi(x_f) - \varphi^{(\gamma)}(t_f) = (\partial_\mu \varphi(x) + A_\mu(x) \varphi(x)) dx^\mu$$

が $U(x_f) \in G$ による変換を受けることに注目すれば良い。つまり、**共変微分**と呼ばれる線型写像を $\mathcal{D}_\mu(x) := \partial_\mu + A_\mu(x)$ で定義すると、 $\forall x \in \mathcal{M}$ における、内部対称性による変換

$$\varphi(x) \longrightarrow \tilde{\varphi}(x) := U(x) \varphi(x)\tag{2.4.2}$$

に伴って $\mathcal{D}_\mu(x) \varphi(x)$ は

$$\mathcal{D}_\mu(x) \varphi(x) \longrightarrow \tilde{\mathcal{D}}_\mu(x) \tilde{\varphi}(x) := U(x) \mathcal{D}_\mu(x) \varphi(x)$$

の変換を受ける。このことから、場 φ の変換 (2.4.2) に伴う共変微分自身の変換則は

$$\mathcal{D}_\mu(x) \longrightarrow \tilde{\mathcal{D}}_\mu(x) = U(x) \mathcal{D}_\mu(x) U(x)^{-1}$$

となる。従って場 $A_\mu: \mathcal{M} \rightarrow \text{GL}(N, \mathbb{K})$ の、場 φ の変換 (2.4.2) に伴う変換則が

$$A_\mu(x) \longrightarrow U(x) (\partial_\mu + A_\mu(x)) U(x)^{-1}$$

だと分かった。このような場の変換則を**ゲージ変換** (gauge transformation) と呼ぶ。

2.4.1 主束と内部対称性の定式化

ゲージ場は、主束の接続として定式化できる。特に、主束の同伴ベクトル束が重要である。

まずファイバー束と主束を定義し、内部対称性を持つ場の記述には主束の同伴ベクトル束が適していることを見る^{*20}。 C^∞ 多様体 M の微分同相群 (diffeomorphism group) $\text{Diff } M$ とは、

来するものであった。同じように、ここで考えている場の変換性はどのような数学的定式化に由来するのかということを考えると、時空 \mathcal{M} を底空間とする主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ の同伴ベクトル束 $\mathbb{K}^N \hookrightarrow P \times_P \mathbb{K}^N \xrightarrow{q} \mathcal{M}$ における、 \mathcal{M} のチャートの取り替えに伴う局所自明化の取り替え (i.e. 変換関数のファイバーへの作用) の概念に行き着くのである。詳細は次の小節で議論する。

^{*19} 厳密にはこれは座標関数の差 $dx^\mu := x^\mu(x_f) - x^\mu(x_i)$ の絶対値が小さいことを主張している。

^{*20} 従って、この小節で行うのはゲージ場が登場する舞台の定式化であって、ゲージ場自身の定式化は次の小節で行う。

- 台集合 $\text{Diff } M := \{ f: M \rightarrow M \mid \text{微分同相写像} \}$
- 単位元を恒等写像
- 積を写像の合成

として構成される群のことを言う。

定義 2.1: Lie 群の作用

- Lie 群 G の C^∞ 多様体 M への**左作用**とは、群準同型 $\rho: G \rightarrow \text{Diff } M$ であって写像

$$\blacktriangleright: G \times M \rightarrow M, (g, x) \mapsto \rho(g)(x)$$

が C^∞ 写像となるようなもののこと。 $g \blacktriangleright x := \blacktriangleright(g, x)$ と略記する。

- Lie 群 G の C^∞ 多様体 M への**右作用**とは、群準同型 $\rho: G^{\text{op}} \rightarrow \text{Diff } M$ であって写像

$$\blacktriangleleft: M \times G \rightarrow M, (x, g) \mapsto \rho(g)(x)$$

が C^∞ 写像となるようなもののこと。 $x \blacktriangleleft g := \blacktriangleleft(x, g)$ と略記する。

- Lie 群の左 (resp. 右) 作用が**自由** (free) であるとは、 $\forall x \in X, \forall g \in G \setminus \{1_G\}, g \blacktriangleright x \neq x$ (resp. $x \blacktriangleleft g \neq x$) を満たすことを言う。
- Lie 群の左 (resp. 右) 作用が**効果的** (effective) であるとは、 $\rho: G \rightarrow \text{Diff } M$ (resp. $\rho: G^{\text{op}} \rightarrow \text{Diff } M$) が単射であることを言う。

定義 2.2: C^∞ ファイバー束

Lie 群 G が C^∞ 多様体 F に**効果的に作用**しているとする。 C^∞ **ファイバー束** (fiber bundle) とは、

- C^∞ 多様体 E, B, F
- C^∞ の全射 $\pi: E \rightarrow B$
- Lie 群 G と、 G の F への**左作用** $\blacktriangleright: G \times F \rightarrow F$
- B の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$
- 微分同相写像の族

$$\{ \varphi_\lambda: \pi^{-1}(U_\lambda) \rightarrow U_\lambda \times F \}_{\lambda \in \Lambda}$$

であって、 $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して図 2.1 を可換にするもの。

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_\lambda) & \xrightarrow{\varphi} & U_\lambda \times F \\ \pi \downarrow & \swarrow \text{proj}_1 & \\ U_\lambda & & \end{array}$$

図 2.1: 局所自明性

- C^∞ 写像の族

$$\{ t_{\alpha\beta}: B \rightarrow G \mid \forall (p, f) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times F, \varphi_\beta^{-1}(p, f) = \varphi_\alpha^{-1}(p, t_{\alpha\beta}(p) \blacktriangleright f) \}_{\alpha, \beta \in \Lambda}$$

の6つのデータの組みのこと。記号としては (E, π, B, F) や $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ と書く。

以下ではファイバー束と言ったら C^∞ ファイバー束のことを指すようにする。ファイバー束 (E, π, B, F) に関して、

- E を全空間 (total space)
- B を底空間 (base space)
- F をファイバー (fiber)
- π を射影 (projection)
- φ_λ を局所自明化 (local trivialization)
- $t_{\alpha\beta}$ を変換関数 (transition map)

と呼ぶ^{*21}。また、射影 π による1点集合 $\{b\}$ の逆像 $\pi^{-1}(\{b\}) \subset E$ のことを点 b のファイバー (fiber) と呼び、 $F|_b$ と書く。

定義 2.3: ベクトル束

ファイバーを n 次元 \mathbb{K} -ベクトル空間とし、構造群を $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ とするようなファイバー束のことを階数 n のベクトル束 (vector bundle of rank n) と呼ぶ。

【例 2.4.1】接束

n 次元 C^∞ 多様体 M の接束は、ベクトル束 $(TM, \pi, M, \mathbb{R}^n)$ である。実際、 M のチャート $(U_\lambda, (x^\mu))$ に対して局所自明化は

$$\varphi_\lambda: \pi^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times \mathbb{R}^n, \left(p, v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_p \right) \longmapsto \left(p, \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix} \right)$$

となり、チャート $(U_\alpha, (x^\mu)), (U_\beta, (y^\mu))$ に対して

$$\varphi_\beta^{-1}(p, (v^1, \dots, v^n)) = \varphi_\alpha^{-1}\left(p, \begin{bmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix} \right)$$

となる。故に変換関数は

$$t_{\alpha\beta}(p) := \begin{bmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n}(p) \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$$

で、ファイバーへの構造群の左作用とはただ単に n 次元の数ベクトルに行列を掛けることである。

^{*21} 紛らわしくないとき、ファイバー束 (E, π, B, F) のことを $\pi: E \rightarrow B$ 、または単に E と略記することがある。

定義 2.4: 束写像

ファイバー F と構造群 G を共有する二つのファイバー束 $\xi_i = (E_i, \pi_i, B_i, F)$ を与える.

- ξ_1 から ξ_2 への**束写像** (bundle map) とは, 二つの C^∞ 写像 $f: B_1 \rightarrow B_2$, $\tilde{f}: E_1 \rightarrow E_2$ の組であって図 2.2

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\tilde{f}} & E_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array}$$

図 2.2: 束写像

を可換にし, かつ底空間 B_1 の各点 b において, 点 b のファイバー $\pi_1^{-1}(\{b\}) \subset E_1$ への \tilde{f} の制限

$$\tilde{f}|_{\pi_1^{-1}(\{b\})}: \pi_1^{-1}(\{b\}) \rightarrow \tilde{f}(\pi_1^{-1}(\{b\})) \subset E_2$$

が微分同相写像になっているものを言う.

- ファイバー束 ξ_1 と ξ_2 が**同型** (isomorphic) であるとは, $B_1 = B_2 = B$ であってかつ $f: B \rightarrow B$ が恒等写像となるような束写像 $\tilde{f}: E_1 \rightarrow E_2$ が存在することを言う. 記号としては $\xi_1 \simeq \xi_2$ とかく.

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\tilde{f}} & E_2 \\ \pi_1 \searrow & & \swarrow \pi_2 \\ & B & \end{array}$$

図 2.3: ファイバー束の同型

- 積束 $(B \times F, \text{proj}_1, B, F)$ と同型なファイバー束を**自明束** (trivial bundle) と呼ぶ.

ファイバー束 (E, π, B, F) は, 射影 π によってファイバー F の情報を失う. F を復元するためにも, $s: B \rightarrow E$ なる写像の存在が必要であろう.

定義 2.5: C^∞ 切断

ファイバー束 $\xi = (E, \pi, B, F)$ の C^∞ **切断** (cross section) とは, C^∞ 写像 $s: B \rightarrow E$ であって $\pi \circ s = \text{id}_B$ となるもののことを言う.

ξ の切断全体の集合を $\Gamma(B, E)$ あるいは $\Gamma(E)$ と書く.

$\xi = (E, \pi, B, F)$ を**ファイバー束**とする. 底空間 B の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ をとると, 定義 2.2 から, どの $\alpha \in \Lambda$ に対しても局所自明性 (図 2.4a) が成り立つ. ここでもう一つの $\beta \in \Lambda$ をとり, $U_\alpha \cap U_\beta$ に関して局所自明性の図式を横に並べることで, 自明束 $\text{proj}_1: (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \rightarrow U_\alpha \cap U_\beta$ の**束の自己同型** (図 2.4c) が

得られる.

$$\begin{array}{ccc}
 U_\alpha \times F & \xleftarrow{\varphi_\alpha} & \pi^{-1}(U_\alpha) \\
 & \searrow \text{proj}_1 & \downarrow \pi \\
 & & U_\alpha
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \pi^{-1}(U_\beta) & \xrightarrow{\varphi_\beta} & U_\beta \times F \\
 \downarrow \pi & \swarrow \text{proj}_1 & \\
 U_\beta & &
 \end{array}$$

(a) U_α に関する局所自明性

(b) U_β に関する局所自明性

$$\begin{array}{ccc}
 (U_\alpha \cap U_\beta) \times F & \xrightarrow{\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}} & (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \\
 \searrow \text{proj}_1 & & \swarrow \text{proj}_1 \\
 & U_\alpha \cap U_\beta &
 \end{array}$$

(c) 自明束 $(U_\alpha \cap U_\beta) \times F$ の自己同型

図 2.4: 局所自明性の結合

全ての $U_\alpha \cap U_\beta$ に関する変換関数の族 $\{t_{\alpha\beta}\}$ が $\forall b \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ に対して条件

$$t_{\alpha\beta}(b)t_{\beta\gamma}(b) = t_{\alpha\gamma}(b) \quad (2.4.3)$$

を充たすことは図式 2.4 より明かである. 次の命題は, ファイバー束 (E, π, B, F) を構成する「素材」には

- 底空間となる C^∞ 多様体 B
- ファイバーとなる C^∞ 多様体 F
- Lie 群 G と, その F への左作用 $\blacktriangleright: G \times F \longrightarrow F$
- B の開被覆 $\{U_\lambda\}$
- (2.4.3) を充たす C^∞ 写像の族 $\{t_{\alpha\beta}: U_\beta \cap U_\alpha \rightarrow G\}_{\alpha, \beta \in \Lambda}$

があれば十分であることを主張する:

命題 2.1: ファイバー束の構成

- C^∞ 多様体 B, F
- Lie 群 G と, G の F への左作用 $\blacktriangleright: G \times F \longrightarrow F$
- B の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$
- コサイクル条件 (2.4.3) を充たす C^∞ 関数の族 $\{t_{\alpha\beta}: U_\beta \cap U_\alpha \rightarrow G\}$

を与える. このとき, 構造群 G と変換関数 $\{t_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta \in \Lambda}$ を持つファイバー束 $\xi = (E, \pi, B, F)$ が存在する.

証明 まず手始めに, cocycle 条件 (2.4.3) より

$$t_{\alpha\alpha}(b)t_{\alpha\alpha}(b) = t_{\alpha\alpha}(b), \quad \forall b \in U_\alpha$$

だから $t_{\alpha\alpha}(b) = 1_G$ であり, また

$$t_{\alpha\beta}(b)t_{\beta\alpha}(b) = t_{\alpha\alpha}(b) = 1_G, \quad \forall b \in U_\alpha \cap U_\beta$$

だから $t_{\beta\alpha}(b) = t_{\alpha\beta}(b)^{-1}$ である.

開被覆 $\{U_\lambda\}$ の添字集合を Λ とする. このとき $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して, $U_\lambda \subset B$ には底空間 B からの相対位相を入れ, $U_\lambda \times F$ にはそれと F の位相との積位相を入れることで, 直和位相空間

$$\mathcal{E} := \coprod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \times F$$

を作ることができる^{*22}. \mathcal{E} の任意の元は $(\lambda, b, f) \in \Lambda \times U_\lambda \times F$ と書かれる.

さて, \mathcal{E} 上の二項関係 \sim を以下のように定める:

$$(\alpha, b, f) \sim (\beta, b, t_{\alpha\beta}(b) \blacktriangleright f) \quad \forall b \in U_\alpha \cap U_\beta, \forall f \in F$$

\sim が同値関係の公理を充たすことを確認する:

反射律 冒頭の議論から $t_{\alpha\alpha}(b) = 1_G$ なので良い.

対称律 冒頭の議論から $t_{\beta\alpha}(b) = t_{\alpha\beta}(b)^{-1}$ なので,

$$\begin{aligned} (\alpha, b, f) &\sim (\beta, c, h) \\ \implies b &= c \in U_\alpha \cap U_\beta \text{ かつ } f = t_{\alpha\beta}(b) \blacktriangleright h \\ \implies c &= b \in U_\alpha \cap U_\beta \text{ かつ } h = t_{\alpha\beta}(b)^{-1} \blacktriangleright f = t_{\beta\alpha}(b) \blacktriangleright f \\ \implies (\beta, c, h) &\sim (\alpha, b, f). \end{aligned}$$

推移律 cocycle 条件 (2.4.3) より

$$\begin{aligned} (\alpha, b, f) &\sim (\beta, c, h) \text{ かつ } (\beta, c, h) \sim (\gamma, d, k) \\ \implies b &= c \in U_\alpha \cap U_\beta \text{ かつ } c = d \in U_\beta \cap U_\gamma \text{ かつ } f = t_{\alpha\beta}(b) \blacktriangleright h, h = t_{\beta\gamma}(c) \blacktriangleright k \\ \implies b &= d \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \text{ かつ } f = (t_{\alpha\beta}(b)t_{\beta\gamma}(b)) \blacktriangleright k = t_{\alpha\gamma}(b) \blacktriangleright k \\ \implies (\alpha, b, f) &\sim (\gamma, d, k). \end{aligned}$$

したがって \sim は同値関係である. \sim による \mathcal{E} の商集合を E と書き, 商写像を $\text{pr}: \mathcal{E} \rightarrow E, (\alpha, b, f) \mapsto [(\alpha, b, f)]$ と書くことにする.

集合 E に商位相を入れて E を位相空間にする. このとき商位相の定義から開集合 $\{\alpha\} \times U_\alpha \times F \subset \mathcal{E}$ は pr によって E の開集合 $\text{pr}(\{\alpha\} \times U_\alpha \times F) \subset E$ に移される. ゆえに E は $\{\text{pr}(\{\alpha\} \times U_\alpha \times V_\beta)\}$ を座標近傍にもつ C^∞ 多様体である (ここに $\{V_\beta\}$ は, C^∞ 多様体 F の座標近傍である).

次に C^∞ の全射 $\pi: E \rightarrow B$ を

$$\pi([(\alpha, b, f)]) := b$$

と定義すると, これは $\forall \alpha \in \Lambda$ に対して微分同相写像^{*23}

$$\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F, [(\alpha, b, f)] \mapsto (b, f)$$

による**局所自明性**を持つ. 従って組 $\xi := (E, \pi, B, F)$ は構造群 G , 局所自明化 $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, 変換関数 $\{t_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta \in \Lambda}$ を持つ**ファイバー束**になり, 証明が終わる. ■

^{*22} \mathcal{E} はいわば, 「貼り合わせる前の互いにバラバラな素材 (局所自明束 $U_\alpha \times F$)」である. 証明の以降の部分では, これらの「素材」を $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ の部分に関して「良い性質 (2.4.3) を持った接着剤 $\{t_{\alpha\beta}\}$ 」を用いて「貼り合わせる」操作を, 位相を気にしながら行う.

^{*23} 逆写像は $\varphi_\alpha^{-1}: U_\alpha \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha), (b, f) \mapsto [(\alpha, b, f)]$ である. φ_α も φ_α^{-1} も C^∞ 写像の合成で書けるので C^∞ 写像である.

定義 2.6: 主束

構造群を G に持つ **ファイバー束** $\xi = (P, \pi, M, G)$ が**主束** (principal bundle) であるとは, G の G 自身への左作用が自然な**左作用**^aであることを言う.

^a つまり, $g \triangleright x := gx$ (Lie 群の積) である.

次の命題は証明の構成が極めて重要である:

命題 2.2: 主束の全空間への右作用

$\xi = (P, \pi, M, G)$ を**主束**とする. このとき, G の全空間 P への**自由な右作用**が自然に定義され, その軌道空間 (orbit space) P/G が M になる.

証明 ξ の**局所自明化**を $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, 変換関数を $\{t_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G\}_{\alpha, \beta \in \Lambda}$ と書く. $\forall u \in P, \forall g \in G$ をとる. $\pi(u) \in U_\alpha$ となる $\alpha \in \Lambda$ を選び, 対応する**局所自明化** φ_α による u の像を $\varphi_\alpha(u) =: (p, h) \in U_\alpha \times G$ とおく^{*24}. このとき G の P への右作用 $\triangleleft: P \times G \rightarrow P$ を次のように定義する^{*25}:

$$u \triangleleft g := \varphi_\alpha^{-1}(p, hg) \quad (2.4.4)$$

◀ の well-definedness

$\beta \neq \alpha$ に対しても $\pi(u) \in U_\beta$ であるとする. このとき $\varphi_\beta(u) = (p, h') \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times G$ と書いて, また変換関数の定義から

$$h' = t_{\alpha\beta}(p)h \quad (t_{\alpha\beta}(p) \in G)$$

である. したがって

$$\varphi_\beta^{-1}(p, h'g) = \varphi_\beta^{-1}(p, (t_{\alpha\beta}(p)h)g) = \varphi_\beta^{-1}(p, t_{\alpha\beta}(p)hg) = \varphi_\beta^{-1} \circ (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(p, hg) = \varphi_\alpha^{-1}(p, hg)$$

が分かり, 式 (2.4.4) の右辺は局所自明化の取り方によらない.

◀ は右作用 写像 $\rho: G^{\text{op}} \rightarrow \text{Diff } P, g \mapsto (u \mapsto u \triangleleft g)$ が群準同型であることを示す.

- (1) $u \triangleleft 1_G = \varphi_\alpha^{-1}(p, h1_G) = \varphi_\alpha^{-1}(p, h) = u$
- (2) $\forall g_1, g_2 \in G$ をとる.

$$u \triangleleft (g_1g_2) = \varphi_\alpha^{-1}(p, (hg_1)g_2) = \varphi_\alpha^{-1}(p, hg_1) \triangleleft g_2 = (u \triangleleft g_1) \triangleleft g_2$$

◀ は自由

$\forall \alpha \in \Lambda$ に対して $\forall u = (p, g) \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ をとる. $u \triangleleft g' = u$ ならば

$$u \triangleleft g' = \varphi_\alpha^{-1}(p, gg') = u = \varphi_\alpha^{-1}(p, g1_G)$$

が成り立つが, 局所自明化は全単射なので $gg' = g$ が言える. g は任意なので $g' = 1_G$ が分かった.

^{*24} つまり, $p := \pi(u), h := \text{proj}_2 \circ \varphi_\alpha(u)$ と言うことである.

^{*25} 右辺の hg は Lie 群の乗法である.

軌道空間が M

$\forall \alpha \in \Lambda$ に対して, G の右作用 (2.4.4) による $U \times G$ の軌道空間は $(U \times G)/G = U \times \{1_G\} = U$ となる. 故に P 全域に対しては $P/G = B$ となる.

■

定理 2.1:

コンパクト Hausdorff 空間 P と, P に自由に作用しているコンパクト Lie 群 G を与える. この時, 軌道空間への商写像

$$\pi: P \longrightarrow P/G$$

は主束である.

証明

■

構造群を G とするファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ が与えられたとき, 命題 2.1 を使うと, 変換関数が共通の主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{p} M$ が存在することがわかる. このようにして得られる主束をファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ に同伴する (associated) 主束と呼ぶ.

【例 2.4.2】 フレーム束

$\mathbb{K}^n \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ を, 変換関数 $\{t_{\alpha\beta}: M \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})\}$ を持つ階数 n のベクトル束とする. $\forall x \in M$ に対して

$$P_x := \{ f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, E_x) \mid \text{同型写像} \}$$

とし,

$$P := \coprod_{x \in M} P_x, \quad \pi: P \longrightarrow M, \quad (x, f) \longmapsto x$$

と定める. $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ に適切な局所自明化を入れて, 変換関数が $\{t_{\alpha\beta}: M \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})\}$ になるような主束を構成してみよう.

\mathbb{K}^n の標準基底を e_1, \dots, e_n とすると, $\forall f \in P_x$ に対して f は E_x の基底 $f(e_1), \dots, f(e_n)$ と同一視される. 実際, $\forall v = v^\mu e_\mu \in \mathbb{K}^n$ に対して

$$f(v) = v^\mu f(e_\mu)$$

である. よって $f_\mu := f(e_\mu)$ において $f = (f_1, \dots, f_n) \in P_x$ と表すことにする.

E の局所自明化 $\{\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{K}^n\}$ を与える. このとき, n 個の U_α 上の局所切断 $s_1, \dots, s_n \in \Gamma(E|_{U_\alpha})$ を

$$s_\mu(x) = \varphi_\alpha^{-1}(x, e_\mu)$$

と定義すると, $\forall x \in U_\alpha$ に対して $s_1(x), \dots, s_n(x)$ が E_x の基底となる^a. 故に, n 個の P の局所切断 $p_\alpha \in \Gamma(P|_{U_\alpha})$ を

$$p_\alpha(x) := (s_1(x), \dots, s_n(x)) \in P_x$$

により定義できる．このとき， $\forall (x, f) = (x, (f_1, \dots, f_n)) \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ に対してある $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ が存在して $f = p_\alpha(x)g$ と書ける．ただし g は基底の取り替え行列で，ただ単に右から行列の積として右から作用している．故に P の局所自明化を

$$\psi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}), (x, f) = (x, p_\alpha(x)g) \longmapsto (x, g)$$

と定義できる．変換関数を計算すると

$$\begin{aligned} \psi_\beta^{-1}(x, g) &= (x, p_\beta(x)g) \\ &= \left(x, (\varphi_\beta^{-1}(x, e_1), \dots, \varphi_\beta^{-1}(x, e_n))g\right) \\ &= \left(x, \left(\varphi_\alpha^{-1}(x, t_{\alpha\beta}(x)e_1), \dots, \varphi_\beta^{-1}(x, t_{\alpha\beta}(x)e_n)\right)g\right) \\ &= (x, p_\alpha(x)t_{\alpha\beta}(x)g) \\ &= \psi_\alpha^{-1}(x, t_{\alpha\beta}(x)g) \end{aligned}$$

となり，目標が達成された．この $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ のことを**フレーム束**と呼ぶ．

^a このような切断の組のことを**フレーム場**と呼ぶ．

命題 2.3: Borel 構成

$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ を**主束**とし，Lie 群 G の C^∞ 多様体への**左作用** $\blacktriangleright: G \times F \longrightarrow F$ を与える．(2.4.4) で定義された G の P への右作用を $\blacktriangleleft: P \times G \longrightarrow P$ と書く．

- 積多様体 $P \times F$ への G の新しい右作用 $\blacktriangleleft: (P \times F) \times G \longrightarrow P \times F$ を

$$(u, f) \blacktriangleleft g := (u \blacktriangleleft g, g^{-1} \blacktriangleright f)$$

と定義し，この右作用による $P \times F$ の軌道空間を $P \times_G F := (P \times F)/G$ と書く．

- 商写像 $\varpi: P \times F \longrightarrow P \times_G F$, $(u, f) \longmapsto (u, f) \blacktriangleleft G$ による $(u, f) \in P \times F$ の像を $u \times_G f \in P \times_G F$ と書く．このとき写像

$$q: P \times_G F \longrightarrow M, u \times_G f \longmapsto \pi(u)$$

が well-defined になる．

このとき， $F \hookrightarrow P \times_G F \xrightarrow{q} M$ は構造群 G をもち，変換関数が $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ のそれと同じであるような**ファイバー束**である．

逆に，与えられた主束を素材にして，変換関数を共有するファイバー束を構成することができる．

証明 q の well-definedness は，(2.4.4) で定義した右作用 \blacktriangleleft が $\pi(u)$ を不変に保つので明らか．

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ の開被覆，局所自明化，変換関数をそれぞれ $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, $\{\varphi_\lambda: \pi^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times G\}_{\lambda \in \Lambda}$, $\{t_{\alpha\beta}: M \longrightarrow G\}_{\alpha, \beta \in \Lambda}$ と書く．また， $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して**局所切断** $s_\lambda \in \Gamma(P|_{U_\lambda})$ を

$$s_\lambda: M \longrightarrow \pi^{-1}(U_\lambda), x \longmapsto \varphi_\lambda^{-1}(x, 1_G)$$

と定義する.

このとき, $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して C^∞ 写像

$$\psi_\lambda: q^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times F, s_\lambda(x) \times_G f \longmapsto (x, f) \quad (2.4.5)$$

が well-defined な^{*26} 微分同相写像になる^{*27} ので, 族

$$\{\psi_\lambda: q^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times F\}_{\lambda \in \Lambda}$$

を $F \hookrightarrow P \times_G F \xrightarrow{q} M$ の局所自明化にとる. すると $\forall \alpha, \beta \in \Lambda, \forall (x, f) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$ に対して

$$\begin{aligned} \psi_\beta^{-1}(x, f) &= s_\beta(x) \times_G f \\ &= \varphi_\beta^{-1}(x, 1_G) \times_G f \\ &= \varphi_\alpha^{-1}(x, t_{\alpha\beta}(x) 1_G) \times_G f \\ &= \varphi_\alpha^{-1}(x, 1_G t_{\alpha\beta}(x)) \times_G f \\ &= (\varphi_\alpha^{-1}(x, 1_G) \blacktriangleleft t_{\alpha\beta}(x)) \times_G f \\ &= (s_\alpha(x) \blacktriangleleft t_{\alpha\beta}(x)) \times_G f \\ &= \left((s_\alpha(x) \blacktriangleleft t_{\alpha\beta}(x)) \blacktriangleleft t_{\alpha\beta}(x)^{-1} \right) \times_G (t_{\alpha\beta}(x) \blacktriangleright f) \\ &= s_\alpha(x) \times_G (t_{\alpha\beta}(x) \blacktriangleright f) \\ &= \psi_\alpha^{-1}(x, t_{\alpha\beta}(x) \blacktriangleright f) \end{aligned}$$

が成り立つので $F \hookrightarrow P \times_G F \xrightarrow{q} M$ の変換関数は

$$\{t_{\alpha\beta}: M \longrightarrow G\}_{\alpha, \beta \in \Lambda}$$

である. ■

【例 2.4.3】 同伴ベクトル束

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ を任意に与える. Lie 群 G の, N 次元 \mathbb{K} ベクトル空間 V への**左作用**とは, Lie 群 G の表現 $\rho: G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ のことに他ならない^a. このとき, 命題 2.3 の方法によって構成される階数 N の**ベクトル束**のことを $P \times_\rho V$ と書き, **同伴ベクトル束** (associated vector bundle) と呼ぶ.

^a $\mathrm{End} V$ に標準的な C^∞ 構造を入れて Lie 群と見做したものを $\mathrm{GL}(V)$ と書いた.

^{*26} $\forall u \times_G f \in q^{-1}(U_\lambda)$ とする. このとき $q(u \times_G f) = \pi(u) \in U_\lambda$ なので $u \in P$ に主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ の局所自明化 $\varphi_\lambda: \pi^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times F$ を作用させることができる. 従って $g(u) := \mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\lambda(u) \in G$ とおけば, G の P への右作用の定義 (2.4.4) から $u = \varphi_\lambda^{-1}(\pi(u), g(u)) = \varphi_\lambda^{-1}(\pi(u), 1_G) \blacktriangleleft g(u) = s_\lambda(\pi(u)) \blacktriangleleft g(u)$ が成り立ち, $u \times_G f = (s_\lambda(\pi(u)) \blacktriangleleft g(u)) \times_G f = s_\lambda(\pi(u)) \times_G (g(u) \blacktriangleright f)$ と書くことができる. よって ψ_λ の定義 (2.4.5) において $\psi_\lambda(u \times_G f) = (\pi(u), g(u) \blacktriangleright f)$ であり, 全ての $q^{-1}(U_\lambda)$ の行き先が定義されていることがわかった. 次に $u \times_G f = u' \times_G f' \in q^{-1}(U_\lambda)$ であるとする. このとき右作用 \blacktriangleleft の定義からある $h \in G$ が存在して $u' = \varphi_\lambda^{-1}(\pi(u'), g(u')) = u \blacktriangleleft h = \varphi_\lambda^{-1}(\pi(u), g(u)h)$, $f' = h^{-1} \blacktriangleright f$ が成り立つので, $\pi(u') = \pi(u)$, $g(u') = g(u)h$, $f' = h^{-1} \blacktriangleright f$ が言える. 従って $\psi_\lambda(u' \times_G f') = (\pi(u'), g(u') \blacktriangleright f') = (\pi(u), (g(u)h) \blacktriangleright (h^{-1} \blacktriangleright f)) = (\pi(u), g(u) \blacktriangleright h \blacktriangleright h^{-1} \blacktriangleright f) = (\pi(u), g(u) \blacktriangleright f) = \psi_\lambda(u \times_G f)$ が成り立ち, ψ_λ が well-defined であることが示された.

^{*27} $\pi: P \longrightarrow M, g := \mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\lambda: q^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow G, \blacktriangleright: G \times F \longrightarrow F$ は全て C^∞ 写像の合成の形をしているので C^∞ 写像であり, $\psi_\lambda := (\pi \times (\blacktriangleright \circ (g \times \mathrm{id}_F)))$ もこれらの合成として書けている (写像 \times, id_F はもちろん C^∞ 級である) ので C^∞ 写像である. well-definedness の証明と同じ議論で ψ_λ の単射性がわかる. 全射性は定義 (2.4.5) より明らか. 逆写像 $(x, f) \longmapsto s_\lambda(x) \times_G f$ も, C^∞ 写像たちの合成 $q \circ (s_\lambda \times \mathrm{id}_F)$ なので C^∞ 写像である.

これでゲージ場を導入する準備が整った。つまり、この節の冒頭で考えた内部対称性を持つ場 $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{K}^N$ とは、厳密には主束

$$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$$

の、線型 Lie 群 G の N 次元表現

$$\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{K}^N), U \mapsto (v \mapsto Uv)$$

による同伴ベクトル束

$$\mathbb{K}^N \hookrightarrow P \times_{\rho} \mathbb{K}^N \xrightarrow{q} \mathcal{M}$$

の局所切断 $\phi: V_{\alpha} \rightarrow P \times_{\rho} \mathbb{K}^N$ を、ある一つの局所自明化 $\sigma_{\alpha}: q^{-1}(V_{\alpha}) \rightarrow V_{\alpha} \times \mathbb{K}^N$ によって座標表示したもの（の第 2 成分を取り出してきたもの）

$$\varphi = \mathrm{proj}_2 \circ \sigma_{\alpha} \circ \phi: V_{\alpha} \rightarrow \mathbb{K}^N$$

のことだと見做せる。と言うのも、こう考えることで場の変換性 (2.4.2)

$$\varphi(x) \rightarrow \tilde{\varphi}(x) := U(x)\varphi(x)$$

が、時空 \mathcal{M} の 2 つのチャート $(V, (x^{\mu}))$, $(\tilde{V}, (\tilde{x}^{\mu}))$ の共通部分 $V \cap \tilde{V}$ 上における、局所自明化 $\sigma, \tilde{\sigma}: q^{-1}(V \cap \tilde{V}) \rightarrow (V \cap \tilde{V}) \times \mathbb{K}^N$ の取り替え（内部自由度に関する一般座標変換のようなもの）に伴う変換関数 $U_{\tilde{V}, V}: \mathcal{M} \rightarrow G$ の作用

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} \circ \sigma^{-1}: (V \cap \tilde{V}) \times \mathbb{K}^N &\rightarrow (V \cap \tilde{V}) \times \mathbb{K}^N, \\ (x, \varphi(x)) &\mapsto \left(x, \rho(U_{\tilde{V}, V}(x))(\varphi(x)) \right) = \left(x, U_{\tilde{V}, V}(x)\varphi(x) \right) \end{aligned}$$

として上手く定式化できているのである*28。

2.4.2 Lie 群の指数写像

主束の接続の話に入る前に、Lie 群の Lie 代数について考察する。この小節は [6, Chapter 20], [7, 第 6 章] による。

Lie 群 G の上の微分同相写像*29

$$\begin{aligned} L_g: G &\rightarrow G, x \mapsto gx, \\ R_g: G &\rightarrow G, x \mapsto xg, \end{aligned}$$

のことをそれぞれ左移動、右移動と言う。

*28 変換性によって場を定義していたので、数学的定式化はこれで良い。なお、この定式化は主束の全空間 P の情報を一切使っていないが、これは命題 2.1 の表れである。実際、この節の冒頭の議論で顕に登場したのは時空 \mathcal{M} 、場の配位を記述する空間 \mathbb{K}^N 、内部対称性を表す Lie 群 G とその表現 $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(N, \mathbb{K})$ 、場の局所変換を表す C^{∞} 写像 $U: \mathcal{M} \rightarrow G$ だけだったので、その数学的定式化が P によらないのは妥当だと思う。

*29 従って、命題 B.7 から L_g, R_g によるベクトル場の押し出しが一意的に存在する。

定義 2.7: 左不変ベクトル場

Lie 群 G の左不変ベクトル場 (left-invariant vector field) とは, \mathbb{R} -ベクトル空間

$$\mathfrak{X}^L(G) := \{ X \in \mathfrak{X}(G) \mid \forall g \in G, (L_g)_* X = X \}$$

の元のこと. i.e. $\forall g \in G$ に対して自分自身と L_g -related な C^∞ ベクトル場のことを言う.

$\forall g \in G$ と $\forall X, Y \in \mathfrak{X}^L(G)$ をとる. このとき $(L_g)_* X = X$, $(L_g)_* Y = Y$ なので, 命題 B.9 の後半から

$$(L_g)_*[X, Y] = [(L_g)_* X, (L_g)_* Y] = [X, Y]$$

が言える. i.e. $\mathfrak{X}^L(G)$ は Lie ブラケットについて閉じるので, 体 \mathbb{R} 上の Lie 代数になる.

命題 2.4:

G を Lie 群とする. このとき評価写像

$$\text{ev}_{1_G}: \mathfrak{X}^L(M) \longrightarrow T_{1_G}G, X \longmapsto X_{1_G}$$

はベクトル空間の同型写像である.

証明 ev_{1_G} が \mathbb{R} -線型写像であることは明らか.

ev_{1_G} が単射

$\text{Ker ev}_{1_G} = \{0\}$ を示す. $\forall X \in \text{Ker ev}_{1_G}$ に対して $\text{ev}_{1_G}(X) = X_{1_G} = 0$ が成り立つ. 一方 $X \in \mathfrak{X}^L(G)$ でもあるので, $\forall g \in G$ に対して $X_g = X_{L_g(1_G)} = (T_{1_G}L_g)(X_{1_G}) = 0$ が言える^{*30}.

ev_{1_G} が全射

$\forall v \in T_{1_G}G$ を 1 つとり, C^∞ ベクトル場 $v^L \in \mathfrak{X}(G)$ を

$$v^L: G \longrightarrow TG, g \longmapsto T_{1_G}(L_g)(v) \quad (2.4.6)$$

と定義する^{*31}. $\forall g \in G$ に対して v^L が自分自身と L_g -related であることを示す. 実際, $\forall h \in G$ に対して

$$T_h(L_g)(v^L|_h) = T_h(L_g) \circ T_{1_G}(L_h)(v) = T_{1_G}(L_g \circ L_h)(v) = T_{1_G}(L_{gh})(v) = v^L|_{gh} = v^L|_{L_g(h)}$$

が言える. i.e. $v^L \in \mathfrak{X}^L(G)$ である. 従って v^L に ev_{1_G} を作用させることができ, $\text{ev}_{1_G}(v^L) = v^L|_{1_G} = T_{1_G}L_{1_G}(v) = v \in \text{Im ev}_{1_G}$ が言えた. ■

ここで $\mathfrak{g} := T_{1_G}G$ とおき, 命題 2.4 の (2.4.6) を使って \mathfrak{g} 上の Lie ブラケットを

$$[X, Y] := [X^L, Y^L]_{1_G} \in \mathfrak{g}$$

^{*30} 2 つ目の等号で L_g -related の定義を使った.

^{*31} v^L が C^∞ であることは次のようにしてわかる: $\forall f \in C^\infty(G)$ をとる. $\gamma(0) = 1_G$, $\dot{\gamma}(0) = v$ を充たす C^∞ 曲線 $\gamma: (-\delta, \delta) \longrightarrow G$ をとると, $\forall g \in G$ に対して $(v^L f)(g) = v(f \circ L_g) = \dot{\gamma}(0)(f \circ L_g) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ L_g \circ \gamma)(t)$ と書ける. $f \circ L_g \circ \gamma: (-\delta, \delta) \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ と見做すとこれは C^∞ 写像の合成なので C^∞ 写像であり, 右辺は g に関して C^∞ 級である.

と定義すれば ev_{1_G} は Lie 代数の同型となる。この意味で \mathfrak{g} のことを **Lie 群 G の Lie 代数**と呼ぶ。

定理 2.2: 誘導される Lie 代数の準同型

Lie 群 G, H と Lie 群の準同型 $F: G \rightarrow H$ を与える。

- (1) このとき, $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して $Y \in \mathfrak{h}$ がただ一つ存在して, X^L と Y^L が **F-related** になる。 i.e. $Y^L = F_* X^L$ である。
- (2) $T_{1_G} F: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$, $X \mapsto T_{1_G} F(X)$ は Lie 代数の準同型である。

証明 (1) $Y = T_{1_G} F(X) \in \mathfrak{h}$ に対して X^L と Y^L が F -related であることを示す。実際, F が Lie 群の準同型であることから $\forall g, h \in G$ について

$$F \circ L_g(h) = F(gh) = F(g)F(h) = L_{F(g)} \circ F(h)$$

が成り立つこと, i.e. $F \circ L_g = L_{F(g)} \circ F$ に注意すると $\forall g \in G$ に対して

$$\begin{aligned} T_g F(X^L|_g) &= T_g F(T_{1_G} L_g(X)) \\ &= T_{1_G} (F \circ L_g)(X) \\ &= T_{1_G} (L_{F(g)} \circ F)(X) \\ &= T_{1_H} (L_{F(g)}) \circ T_{1_G} F(X) \\ &= T_{1_H} (L_{F(g)})(Y) \\ &= Y_{F(g)} \end{aligned}$$

が言える。系 B.1 より $F_* X^L = Y^L$ がわかるので Y は一意的に定まる。

- (2) $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ とする。(1) と命題 B.9-(1) より $[F_* X^L, F_* Y^L]$ は $[X^L, Y^L]$ と F -related であるが, (1) で示した一意性から

$$F_* [X^L, Y^L] = [F_* X^L, F_* Y^L]$$

が言える。両辺の $1_H \in H$ における値をとることで

$$T_{1_G} F([X, Y]) = (F_* [X^L, Y^L])_{1_G} = ([F_* X^L, F_* Y^L])_{1_G} = [X, Y]$$

が示された。 ■

定義 2.8: 1 パラメータ部分群

Lie 群の準同型写像 $\mathbb{R} \rightarrow G$ のことを Lie 群 G の **1 パラメータ部分群** (one-parameter subgroup) と呼ぶ^a。

^a 1 パラメータ部分群自身は部分 Lie 群ではない。

命題 2.5: 1 パラメータ部分群の特徴付け

Lie 群 G を与える.

- (1) G の任意の 1 パラメータ部分群 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow G$ に対して, γ を初期条件 $\gamma(0) = 1_G$ を充たす極大積分曲線として持つ左不変ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}^L(G)$ が一意に存在する.
- (2) $\forall X \in \mathfrak{X}^L(G)$ に対して, 初期条件 $\gamma(0) = 1_G$ を充たす唯一の X の極大積分曲線 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow G$ は G の 1 パラメータ部分群である.

上述の対応によって $X \in \mathfrak{X}^L(G)$ から一意に定まる 1 パラメータ部分群のことを X が生成する 1 パラメータ部分群と呼ぶ.

命題 2.4 の同型と併せると

$$\{ G \text{ の 1 パラメータ部分群 } \} \xleftrightarrow{*} \mathfrak{X}^L(G) \xleftrightarrow{\text{ev}_{1_G}} T_{1_G}G$$

の 1 対 1 対応がある. i.e. G の任意の 1 パラメータ部分群 γ は, その初速度 $\dot{\gamma}(0) \in T_{1_G}G$ により完全に決定される.

証明 (1) G の 1 パラメータ部分群 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow G$ を与える. $\frac{d}{dt} \in \mathfrak{X}^L(\mathbb{R})$ なので, 命題 2.2 より, $X := \gamma_*\left(\frac{d}{dt}\right) \in \mathfrak{X}^L(G)$ は $\frac{d}{dt}$ と γ -related な唯一の左不変ベクトル場である. このとき $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ に大して

$$X_{\gamma(t_0)} = T_{t_0}\gamma \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \right) = \dot{\gamma}(t_0)$$

が成り立ち, γ は初期条件 $\gamma(0) = 1_G$ を充たす X の極大積分曲線である.

- (2) 定理 B.6 より $\forall X \in \mathfrak{X}^L(G)$ は完備なので, X は大域的なフローを生成する. 従って $\gamma(0) = 1_G$ を充たす X の極大積分曲線 γ が唯一存在し, その定義域が \mathbb{R} になる.

$\forall g \in G$ をとる. 左不変ベクトル場の定義より $X \in \mathfrak{X}^L(G)$ は X 自身と L_g -related なので, 命題 B.11 から $L_g \circ \gamma: \mathbb{R} \rightarrow G$ もまた X の積分曲線である. 従って $\forall s \in \mathbb{R}$ に大して曲線 $L_{\gamma(s)} \circ \gamma: t \mapsto L_{\gamma(s)}(\gamma(t)) = \gamma(s)\gamma(t)$ は $t=0$ において点 $\gamma(s) \in G$ を通過する X の積分曲線である. 然るに補題 B.2-(2) より曲線 $t: t \mapsto \gamma(s+t)$ もまた同一の初期条件を充たす X の積分曲線なので, 定理 B.2 よりこれらは $\forall t \in \mathbb{R}$ において一致しなくてはならない:

$$\gamma(s)\gamma(t) = \gamma(s+t)$$

i.e. $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow G$ は 1 パラメータ部分群である. ■

定義 2.9: 指数写像

Lie 群 G を与える. \mathfrak{g} を G の Lie 代数とする. G の指数写像 (exponential map) を

$$\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G, X \mapsto \gamma_X(1)$$

と定義する. ただし, $\gamma_X: \mathbb{R} \rightarrow G$ は $X^L \in \mathfrak{X}^L(G)$ が生成する 1 パラメータ部分群である.

命題 2.6: 指数写像の性質

Lie 群 G を与える. \mathfrak{g} を G の Lie 代数とする.

- (1) $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ は C^∞ 写像
- (2) $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して,

$$\gamma_{(X)}: \mathbb{R} \rightarrow G, t \mapsto \exp(tX)$$

は $X^L \in \mathfrak{X}^L(G)$ が生成する 1 パラメータ部分群である.

- (3) $\forall X \in \mathfrak{g}, \forall s, t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\exp((s+t)X) = \exp(sX) \exp(tX)$$

- (4) $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して

$$(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$$

- (5) H を別の Lie 群, $F: G \rightarrow H$ を任意の Lie 群の準同型とすると, 以下の図式が可換になる:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{T_1 G F} & \mathfrak{h} \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{F} & H \end{array}$$

- (6) $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して, 左不変ベクトル場 $X^L \in \mathfrak{X}^L(G)$ が生成するフロー $\theta_{(X)}: \mathbb{R} \times G \rightarrow G$ に対して

$$\theta_{(X)}(t, g) = g \exp(tX) (= R_{\exp(tX)}(g))$$

が成り立つ.

証明 (1) [6, p.519, Proposition 20.8-(1)]

- (2) $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow G$ を $X^L \in \mathfrak{X}^L(G)$ が生成する 1 パラメータ部分群とする. これは命題 2.5-(2) により $\gamma(0) = 1_G$ を充たす X^L の唯一の極大積分曲線である.

$\forall t \in \mathbb{R}$ をとる. このとき補題 B.2-(1) より, C^∞ 曲線 $\tilde{\gamma}: \mathbb{R} \rightarrow G, s \mapsto \gamma(ts)$ は初期条件 $\tilde{\gamma}(0) = 1_G$ を充たすベクトル場 tX^L の極大積分曲線なので, その一意性から

$$\gamma_{(X)}(t) = \exp(tX) = \tilde{\gamma}(1) = \gamma(t)$$

が成り立つ. i.e. $\gamma_{(X)} = \gamma$ が言えた.

- (3) (2) より $\gamma_{(X)}$ が 1 パラメータ部分群なので

$$\exp((s+t)X) = \gamma_{(X)}(s+t) = \gamma_{(X)}(s)\gamma_{(X)}(t) = \exp(sX) \exp(tX)$$

- (4) (2) より $\gamma_{(X)}$ が 1 パラメータ部分群なので

$$\begin{aligned} \exp X \exp(-X) &= \gamma_{(X)}(1)\gamma_{(X)}(-1) = \gamma_{(X)}(0) = 1_G \\ \exp(-X) \exp X &= \gamma_{(X)}(-1)\gamma_{(X)}(1) = \gamma_{(X)}(0) = 1_G \end{aligned}$$

が言える. i.e. $(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$ である.

- (5) $\forall X \in \mathfrak{g}$ を 1 つ固定する. (2) より C^∞ 写像 $t \mapsto \exp(t T_{1_G} F(X))$ は左不変ベクトル場 $(T_{1_G} F(X))^L = F_*(X^L) \in \mathfrak{X}^L(G)$ が生成する 1 パラメータ部分群である. ここで, $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow H, t \mapsto F(\exp(tX))$ とおいたとき

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(0) &= T_0(F \circ \exp(tX)) \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \right) \\ &= T_{1_G} F \circ T_0(\exp(tX)) \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \right) \\ &= T_{1_G} F(\gamma_{(X)}(0)) \\ &= T_{1_G} F(X) \end{aligned}$$

が成り立つので σ もまた左不変ベクトル場 $(T_{1_G} F(X))^L \in \mathfrak{X}^L(G)$ が生成する 1 パラメータ部分群であり, その一意性から $\sigma(t) = \exp(t T_{1_G} F(X))$ が言える.

- (6) $\forall (t, g) \in \mathbb{R} \times G$ をとる. 左不変ベクトル場の定義より $X^L \in \mathfrak{X}^L(G)$ は X^L 自身と L_g -related なので, 命題 B.11 から $L_g \circ \gamma_{(X)}: \mathbb{R} \rightarrow G, t \mapsto \exp(tX)$ もまた X^L の極大積分曲線である. $L_g \circ \gamma_{(X)}(0) = g$ なので, 極大積分曲線の一意性から $L_g \circ \gamma_{(X)} = \theta_{(X)}^{(g)}$ が言える. 従って

$$g \exp(tX) = L_g(\exp(tX)) = L_g \circ \gamma_{(X)}(t) = \theta_{(X)}^{(g)}(t) = \theta_{(X)}(t, g).$$

■

定義 2.10: 微分表現

V を \mathbb{K} -ベクトル空間とする. Lie 群 G の表現 $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ の, $1_G \in G$ における微分 $T_{1_G} \rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ は Lie 代数の表現である. この $T_{1_G} \rho$ のことを ρ の微分表現 (differential representation) と呼ぶ.

【例 2.4.4】 随伴表現

$\forall g \in G$ に対して準同型 $F_g: G \rightarrow G, x \mapsto gxg^{-1}$ を考えると $F_{gh} = F_g \circ F_h$ が成り立つ. 故に, $1_G \in G$ における微分

$$T_{1_G}(F_g): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

は, T_{1_G} の関手性から $T_{1_G}(F_{gh}) = T_{1_G}(F_g) \circ T_{1_G}(F_h)$ を満たす. よって

$$\mathrm{Ad}: G \rightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g}), g \mapsto T_{1_G}(F_g)$$

は Lie 群 G の表現となる^a. これを Lie 群 G の随伴表現 (adjoint representation) と呼ぶ.

Ad の微分表現を指数写像を使って計算してみよう. $\forall X \in \mathfrak{g}$ をとる. 命題 2.6-(2) により曲線 $\gamma_{(X)}: t \mapsto \exp(tX)$ は X が生成する 1 パラメータ部分群なので, 命題 B.13 から $\gamma_{(X)}'(0) = X$ であ

る。従って $\forall Y \in \mathfrak{g}$ に大して

$$\begin{aligned}
(T_{1_G}(\text{Ad})(X))Y &= (T_{1_G}(\text{Ad})(\gamma(\dot{X})(0)))Y \\
&= T_{1_G}(\text{Ad}) \circ T_0\gamma(X) \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \right) Y \\
&= T_0(\text{Ad} \circ \gamma(X)) \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \right) Y \\
&= \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{Ad}(\exp(tX)) \right) Y \\
&= \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{Ad}(\exp(tX))(Y) \right) \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (T_{1_G}(F_{\exp(tX)})(Y)) \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (T_{1_G}(R_{(\exp(tX))^{-1}} \circ L_{\exp(tX)})(Y_{1_G}^L)) \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (T_{L_{\exp(tX)}(1_G)}(R_{\exp(-tX)}) \circ T_{1_G}(L_{\exp(tX)})(Y_{1_G}^L)) \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (T_{\exp(tX)}(R_{\exp(-tX)})(Y_{\exp(tX)}^L))
\end{aligned}$$

ここで、命題 2.6-(6) より $X^L \in \mathfrak{X}^L(G)$ が生成するフローが $\theta_{(X)t}(g) = R_{\exp(tX)}(g)$ と書けることを思い出すと、

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (T_{\exp(tX)}(R_{\exp(-tX)})(Y_{\exp(tX)}^L)) \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} T_{\theta_{(X)t}(1_G)}(\theta_{(X)-t})(Y_{\theta_{(X)t}(1_G)}^L) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_{\theta_{(X)t}(1_G)}(\theta_{(X)-t})(Y_{\theta_{(X)t}(1_G)}^L) - Y_{1_G}^L}{t} \\
&= (\mathcal{L}_{X^L} Y^L)_{1_G} \\
&= [X^L, Y^L] \\
&= [X, Y]
\end{aligned}$$

となる。ただし 3 つ目の等号で Lie 微分の定義を使った。結局

$$\text{ad} := T_{1_G}(\text{Ad}): \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), X \longmapsto (Y \mapsto [X, Y])$$

であることが分かった。

^a 厳密には Ad の C^∞ 性を示さなくてはならない。証明は [6, p.534, Proposition 20.24] を参照。

定理 B.2 によって、 C^∞ 多様体 M 上の完備なベクトル場 X が Lie 群 \mathbb{R} の M への作用 $\theta: \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ を一意に定めることが分かる。そしてこのような状況を指して、ベクトル場 X は Lie 群 \mathbb{R} の作用 θ の無限小生成子であると言うのだった。この考えを任意の Lie 群 G の、任意の M への作用に拡張することができる。つまり、任意の Lie 群 G の任意の右作用 $\blacktriangleleft: M \times G \longrightarrow M$ は、ただ一つの無限小生成子を持つ。

定義 2.11: 基本ベクトル場

Lie 群 G が C^∞ 多様体 M に右から作用しているとする. この右作用を $\blacktriangleleft: M \times G \longrightarrow M$ と書く.

- $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して, 基本ベクトル場 (fundamental vector field) $X^\# \in \mathfrak{X}(M)$ を次のように定める:

$$X_x^\# := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (x \blacktriangleleft \exp(tX)) \in T_x M$$

- 写像

$$\blacktriangleleft^\#: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(M), X \longmapsto X^\#$$

のことを右作用 \blacktriangleleft の無限小生成子と呼ぶ.

上の状況下で

- $\forall g \in G$ に対して右作用移動 $R_g: M \longrightarrow M$ を $R_g(x) := x \blacktriangleleft g$ と定義する.
- $\forall x \in M$ に対して右作用軌道 $R^{(x)}: G \longrightarrow M$ を $R^{(x)}(g) := x \blacktriangleleft g$ と定義する.

$\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して, C^∞ 写像^{*32}

$$\theta_{(X)}: \mathbb{R} \times M \longrightarrow M, (t, x) \longmapsto x \blacktriangleleft \exp(tX) = R_{\exp(tX)}(x)$$

は大域的フローである^{*33}. この大域的フローの無限小生成子はベクトル場

$$x \longmapsto \left(x, \dot{\theta}_{(X)}^{(x)}(0) \right) = \left(x, T_0(\theta_{(X)}^{(x)}) \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \right) \right)$$

であるが^{*34}, これがまさに $X^\# \in \mathfrak{X}(M)$ になっている. つまり, 基本ベクトル場は $\forall x \in M$ において, $\forall f \in C^\infty(M)$ に

$$X_x^\# f = T_0(\theta_{(X)}^{(x)}) \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \right) f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \theta_{(X)}^{(x)})(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x \blacktriangleleft \exp(tX))$$

と作用する.

^{*32} これは命題 2.6-(6) からの類推だと言える.

^{*33} 実際, 命題 2.6 から

$$\begin{aligned} \theta_{(X)}(0, x) &= x \blacktriangleleft 1_G = x, \\ \theta_{(X)}(t+s, x) &= x \blacktriangleleft \exp((s+t)X) \\ &= x \blacktriangleleft (\exp(sX) \exp(tX)) \\ &= x \blacktriangleleft \exp(sX) \blacktriangleleft \exp(tX) \\ &= \theta_{(X)}(t, \theta_{(X)}(s, x)) \end{aligned}$$

が成り立つ.

^{*34} 強引に書くと $\theta_{(X)}^{(x)} = R^{(x)} \circ \exp(-X): \mathbb{R} \longrightarrow M$ ということになる.

もしくは、次のように考えることもできる：曲線 $\gamma_{(X)}: t \mapsto \exp(tX)$ は初速度 $\gamma_{(X)}'(0) = X$ なので、

$$\begin{aligned}
 T_{1_G}(R^{(x)})(X) &= T_{1_G}(R^{(x)})(\gamma_{(X)}'(0)) \\
 &= T_{1_G}(R^{(x)}) \circ T_0(\gamma_{(X)}) \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \right) \\
 &= T_0(R^{(x)} \circ \gamma_{(X)}) \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \right) \\
 &= T_0(\theta_{(X)}^{(x)}) \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \right) \\
 &= X_x^\#.
 \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

このことから $\triangleleft^\#$ が \mathbb{R} -線型写像だとわかる。

補題 2.1:

Lie 群 G の C^∞ 多様体 M への右作用 $\triangleleft: M \times G \rightarrow M$ を与える。

このとき $\forall x \in M$ および $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して、 $X^L \in \mathfrak{X}^L(M)$ とその基本ベクトル場 $X^\#$ は $R^{(x)}$ -related である

証明 $\forall g, h \in G$ に対して

$$R^{(x \triangleleft g)}(h) = x \triangleleft g \triangleleft h = x \triangleleft (gh) = x \triangleleft L_g(h) = R^{(x)} \circ L_g(h)$$

が成り立つことに注意する。 $\forall g \in G$ をとり、 $y := R^{(x)}(g) = x \triangleleft g$ とおく。 X^L が左不変ベクトル場であることから

$$\begin{aligned}
 X_y^\# &= T_{1_G}(R^{(y)})(X) \\
 &= T_{1_G}(R^{(x \triangleleft g)})(X_{1_G}^L) \\
 &= T_{1_G}(R^{(x)} \circ L_g)(X_{1_G}^L) \\
 &= T_{L_g(1_G)}(R^{(x)}) \circ T_{1_G}(L_g)(X_{1_G}^L) \\
 &= T_g(R^{(x)})(X_g^L)
 \end{aligned}$$

が言えた。 ■

命題 2.7: $\triangleleft^\#$ は Lie 代数の準同型

Lie 群 G の C^∞ 多様体 M への右作用 $\triangleleft: M \times G \rightarrow M$ を与える。このとき右作用 $\triangleleft^\#$ の無限小生成子

$$\triangleleft^\#: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(M), X \mapsto X^\#$$

は Lie 代数の準同型である。

証明 $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ をとる。補題 2.1 と Lie ブラケットの自然性から $\forall x \in M$ に対して $[X^L, Y^L]$ と $[X^\#, Y^\#]$ が $R^{(x)}$ -related だと分かる。 i.e.

$$[X^\#, Y^\#]_x = [X^\#, Y^\#]_{R^{(x)}(1_G)} = T_{1_G}(R^{(x)})([X^L, Y^L]_{1_G}) = T_{1_G}(R^{(x)})([X, Y]) = [X, Y]_x^\#$$

が言えた. ■

しばらくの間 Lie 群 G (もしくはその部分群) の Lie 代数を $\text{Lie}(G)$ と書くことにする.

命題 2.8: 基本ベクトル場の零点

Lie 群 G の C^∞ 多様体 M への右作用 $\blacktriangleleft: M \times G \rightarrow M$ を与える. このとき, 以下の 2 つは同値である:

- (1) $X \in \mathfrak{g}$ の基本ベクトル場 $X^\#$ が点 $x \in M$ において $X_x^\# = 0$ になる
- (2) $X \in \text{Lie}(\text{Stab}(x))$

証明 (1) \Leftarrow (2)

$X \in \text{Lie}(\text{Stab}(x))$ ならば $\forall t \in \mathbb{R}$ に対して $\exp(tX) \in \text{Stab}(x)$ である. 従って

$$X_x^\# = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} x \blacktriangleleft \exp(tX) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} x = 0.$$

(1) \Rightarrow (2)

$X_x^\# = 0$ とする. このとき定数写像 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M, t \mapsto x$ が

$$\dot{\gamma}(t) = 0 = X_{\gamma(t)}^\#$$

を満たすので, 初期条件 $\gamma(0) = x$ を満たす $X^\# \in \mathfrak{X}(M)$ の極大積分曲線となる. 一方, $\theta_{(x)}^{(x)}: \mathbb{R} \rightarrow M, t \mapsto x \blacktriangleleft \exp(tX)$ もまた同一の初期条件を満たす $X^\#$ の極大積分曲線だったので, その一意性から $\theta_{(x)}^{(x)} = \gamma \iff x \blacktriangleleft \exp(tX) = x \quad \forall t \in \mathbb{R} \iff \exp(tX) \in \text{Stab}(x) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ が言えた. 従って $X \in \text{Lie}(\text{Stab}(x))$ である. ■

系 2.3:

Lie 群 G の C^∞ 多様体 M への右作用 $\blacktriangleleft: M \times G \rightarrow M$ を与える.

このとき, $\forall x \in M$ の右作用軌道 $R^{(x)}: G \rightarrow M$ の微分

$$T_{1_G}(R^{(x)}): \mathfrak{g} \rightarrow T_x M$$

に対して

$$\text{Ker}(T_{1_G}(R^{(x)})) = \text{Lie}(\text{Stab}(x))$$

が成り立つ.

証明 $\forall X \in \mathfrak{g}$ をとる. (2.4.7) と命題 2.8 から

$$\begin{aligned} X \in \text{Ker}(T_{1_G}(R^{(x)})) &\iff T_{1_G}(R^{(x)})(X) = 0 \\ &\iff X_x^\# = 0 \\ &\iff X \in \text{Lie}(\text{Stab}(x)) \end{aligned}$$

2.4.3 主束の接続

さて, Lie 群に関する準備が終わったのでいよいよ主束の接続を定義する.

定義 2.12: 主束の接続

$G \curvearrowright P \xrightarrow{\pi} M$ を主束とする. $\forall g \in G$ に対して, 命題 2.2 の右作用によって右作用移動を $R_g: P \rightarrow P, u \mapsto u \triangleleft g$ と定義する.

- 分布 $\{H_u \subset T_u P \mid u \in P\}$ が P 上の接続 (connection) であるとは, 以下の 2 条件が成り立つことを言う:

(C-1) $\forall u \in P$ に対して

$$T_u P = \text{Ker}(T_u \pi) \oplus H_u$$

(C-2) $\forall u \in P, \forall g \in G$ に対して

$$T_u(R_g)(H_u) = H_{R_g(u)}$$

が成り立つ (分布 $\{H_u\}$ は G -不変).

$\text{Ker } T_u(\pi), H_u$ をそれぞれ $T_u P$ の垂直部分空間, 水平部分空間と呼ぶ.

- \mathfrak{g} 値 1 形式 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ が接続形式であるとは, 次の 2 条件を充たすことをいう:

(CF-1) $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\omega(X^\#) = X$$

(CF-2) $\forall g \in G$ に対して

$$(R_g)^* \omega = \text{Ad}(g^{-1})(\omega)$$

本題に入る前に, 微分幾何学の風習への注意をしておく. 境界あり/なし C^∞ 多様体 M とその部分多様体 $S \subset M$ を与える. このとき包含写像を $\iota: S \hookrightarrow M$ と書くと, $\forall p \in S \subset M$ に対して $T_p S$ を $T_p \iota(T_p S)$ と同一視する^{*35} ことで $T_p M$ の部分ベクトル空間と見做すのである [6, p.116].

さて, 主束 $G \curvearrowright P \xrightarrow{\pi} M$ において $\forall u \in P$ を 1 つ固定する. $G_{\pi(u)} := \pi^{-1}(\{\pi(u)\})$ とおいたとき, $\forall X \in T_u G_{\pi(u)} \subset T_u P$ (i.e. 点 $u \in P$ におけるファイバー方向の接空間) の, $\pi: P \rightarrow M$ の微分による像 $T_u \pi(X) \in T_{\pi(u)} M$ は, 上述の注意より勝手な C^∞ 関数 $f \in C^\infty(M)$ に対して

$$T_u \pi(X)f = X(f \circ \pi|_{G_{\pi(u)}})$$

と作用する. 然るに C^∞ 写像 $f \circ \pi|_{G_{\pi(u)}}$ は常に値 $f(\pi(u))$ を返す定数写像なので, $T_u \pi(X)f = 0$ が言える^{*36}. i.e. $X \in \text{Ker}(T_u \pi)$ であり,

$$T_u G_{\pi(u)} \subset \text{Ker}(T_u \pi)$$

^{*35} つまり $\forall v \in T_p S$ は $\forall f \in C^\infty(S)$ に $v(f)$ として作用するが, $v \in T_p S \subset T_p M$ と見做す時は $\forall f \in C^\infty(M)$ に, $T_p \iota(v)f = v(f \circ \iota) = v(f|_S)$ として作用する.

^{*36} 定数関数に接ベクトルを作用させると 0 になる: Leibniz 則より, 定数関数 $1: M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto 1$ に対して $v(1) = v(1 \cdot 1) = v(1) + v(1) \implies v(1) = 0$. v の線型性から一般の定数関数に対しても 0 になることが言える.

が言えた．一方， $T_u\pi: T_uP \rightarrow T_{\pi(u)}M$ は明らかに全射なので $\dim \text{Im}(T_u\pi) = \dim T_{\pi(u)}M$ であり，故にファイバー束の局所自明性と階数-退化次元の定理から

$$\dim \text{Ker}(T_u\pi) = \dim T_uP - \dim T_{\pi(u)}M = \dim T_uG_{\pi(u)} = \dim G \quad (2.4.8)$$

が言える．結局

$$T_uG_{\pi(u)} = \text{Ker}(T_u\pi)$$

だと分かった．

定理 2.4: 接続と接続形式の関係

$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ を主束とする．

(1) $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ が接続形式ならば，分布

$$\{ \text{Ker } \omega_u \subset T_uP \mid u \in P \}$$

は P 上の接続である．

(2) (1) は P 上の接続形式全体の集合から P 上の接続全体の集合への 1 対 1 対応を与える．

証明 (1) $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ を接続形式とする．

(C-1)

$\forall u \in P$ を 1 つ固定する．まず $\text{Ker}(T_u\pi) = \{ X_u^\# \in T_uP \mid X \in \mathfrak{g} \}$ を示す．右作用の定義から $\forall g \in G$ に対して $\pi \circ R^{(u)}(g) = \pi(u \triangleleft g) = \pi(u)$ ，i.e. $\pi \circ R^{(u)}$ は定数写像であることに注意する．

$\forall X \in \mathfrak{g}$ をとる．このとき (2.4.7) より $X_u^\# = T_{1_G}(R^{(u)})(X)$ だが， $\pi \circ R^{(u)}$ は定数写像なので

$$\begin{aligned} T_u\pi(X_u^\#) &= T_u\pi \circ T_{1_G}(R^{(u)})(X) \\ &= T_{1_G}(\pi \circ R^{(u)})(X) \\ &= 0 \end{aligned}$$

が分かる．i.e. $X_u^\# \in \text{Ker}(T_u\pi)$ である．

次に

$$T_{1_G}(R^{(u)}): \mathfrak{g} \longrightarrow \text{Ker}(T_u\pi)$$

がベクトル空間の同型写像であることを示す．系 2.3 から， $\text{Ker } T_{1_G}(R^{(u)}) = \text{Lie}(\text{Stab}(u))$ だが，命題 2.2 より右作用 \triangleleft は自由なので $\text{Stab}(u) = \{1_G\}$ である．従って $\text{Ker } T_{1_G}(R^{(u)}) = \{0\}$ であり， $T_{1_G}(R^{(u)})$ は単射．(2.4.8) より $\dim \mathfrak{g} = \dim G = \dim \text{Ker}(T_u\pi)$ なので $T_{1_G}(R^{(u)})$ はベクトル空間の同型写像である．以上より， $\{ X_u^\# \in T_uP \mid X \in \mathfrak{g} \} = \text{Im } T_{1_G}(R^{(u)}) = \text{Ker}(T_u\pi)$ が示された．

接続形式の定義から $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して $\omega(X_u^\#) = X$ が成り立つ．よって $T_uP = \text{Ker}(T_u\pi) \oplus \text{Ker } \omega_u$ である．

(C-2)

$\forall v \in \text{Ker } \omega_u$ をとる．このとき (CF-2) より

$$\omega_{u \triangleleft g}(T_u(R_g)(v)) = ((R_g)^*\omega)_u(v) = \text{Ad}(g^{-1})(\omega_u(v)) = 0$$

が従い, $T_u(R_g)(\text{Ker } \omega_u) \subset \text{Ker } \omega_{u \blacktriangleleft g}$ である. 両辺の次元が等しいので $T_u(R_g)(\text{Ker } \omega_u) = \text{Ker } \omega_{u \blacktriangleleft g}$ が言えた.

(2)

■

定理 2.5: 同伴ベクトル束上の接続

2.5 特性類と Chern-Simons 形式

付録 A

結び目理論入門

定義 A.1: 結び目・絡み目

- **結び目** (knot) とは, 空間対 (S^3, S^1) であって S^1 が S^3 の滑らかな部分多様体になっているもののこと.
- n 成分**絡み目** (link) とは, 空間対 $(S^3, \underbrace{S^1 \amalg \cdots \amalg S^1}_n)$ であって $S^1 \amalg \cdots \amalg S^1$ が S^3 の滑らかな部分多様体になっているもののこと. n のことを**成分数**と呼ぶ.

定義 A.2: 結び目の同値

結び目 K_1, K_2 を与える. 以下の 2 つの定義は同値である.

- S^3 の向きを保つ自己同相写像 φ が存在して $\varphi(K_1) = K_2$ を満たすとき, K_1 と K_2 は**同値**であるという.
- S^3 の自己同相写像の族 $\{h_t: S^3 \rightarrow S^3\}_{t \in [0, 1]}$ が存在するとき, K_1 と K_2 は**全同位同値** (ambient isotopic) であるという:
 - $H: S^3 \times [0, 1] \rightarrow S^3, (x, t) \mapsto h_t(x)$ は連続写像
 - $h_0 = \text{id}_{S^3}$
 - $h_1(K_1) = K_2$

付録 B

ベクトル場の話

C^∞ 多様体 M 上の C^∞ 関数全体の集合のことを $C^\infty(M)$ と書く.

C^∞ 多様体の 1 つの極大 C^∞ アトラスを C^∞ 構造 (smooth structure)^{*1} と呼ぶことにする. 集合 M の上に C^∞ 構造を与えるには, 例えば次のようにすればよい [6, p.21, Lemma 1.35]:

補題 B.1: C^∞ 構造の構成

- 集合 M
- M の部分集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$
- 写像の族 $\{\varphi_\lambda: U_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^n\}_{\lambda \in \Lambda}$

の 3 つ組であって以下の条件を充たすものを与える:

(DS-1) $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して $\varphi_\lambda(U_\lambda) \subset \mathbb{R}^n$ は \mathbb{R}^n の開集合^aであり, $\varphi_\lambda: U_\lambda \rightarrow \varphi_\lambda(U_\lambda)$ は全単射である.

(DS-2) $\forall \alpha, \beta \in \Lambda$ に対して $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta), \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$ は \mathbb{R}^n の開集合である.

(DS-3) $\forall \alpha, \beta \in \Lambda$ に対して, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ならば $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ は C^∞ 級である.

(DS-4) 添字集合 Λ の可算濃度の部分集合 $I \subset \Lambda$ が存在して $\{U_i\}_{i \in I}$ が M の被覆になる.

(DS-5) $p, q \in M$ が $p \neq q$ ならば, ある $\lambda \in \Lambda$ が存在して $p, q \in U_\lambda$ を充たすか, またはある $\alpha, \beta \in \Lambda$ が存在して $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ かつ $p \in U_\alpha, q \in U_\beta$ を充たす.

このとき, M の C^∞ 構造であって, $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ を C^∞ チャートとして持つものが一意的に存在する.

^a いつものように, \mathbb{R}^n には Euclid 位相を入れる.

証明 位相の構成

\mathbb{R}^n の Euclid 位相を $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$ と表記する. 集合

$$\mathcal{B} := \{ \varphi_\lambda^{-1}(U) \mid \lambda \in \Lambda, U \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n} \}$$

が開基の公理 (B1), (B2) を充たすことを確認する.

^{*1} 微分構造 (differential structure) ということもある.

(B1) (DS-4) より明らか.

(B2) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ を任意にとる. このとき \mathcal{B} の定義から, ある $\alpha, \beta \in \Lambda$ および $U, V \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$ が存在して $B_1 = \varphi_\alpha^{-1}(U), B_2 = \varphi_\beta^{-1}(V)$ と書ける. 故に

$$\begin{aligned} B_1 \cap B_2 &= \varphi_\alpha^{-1}(U) \cap \varphi_\beta^{-1}(V) \\ &= \varphi_\alpha^{-1}(U \cap (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(V)) \\ &= \varphi_\alpha^{-1}(U \cap (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1}(V)) \end{aligned}$$

が成り立つが, (DS-3) より $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ は連続なので $(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1}(V) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$ である. よって

$$B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$$

であり, (B2) が示された.

従って \mathcal{B} を開基とする M の位相 \mathcal{O}_M が存在する.

φ_λ が同相写像であること

$\forall \lambda \in \Lambda$ を1つ固定する. \mathcal{O}_M の構成と補題??-(4) より, $\forall V \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$ に対して $\varphi_\lambda^{-1}(V \cap \varphi_\lambda(U_\lambda)) = \varphi_\lambda^{-1}(V) \cap U_\lambda$ は U_λ の開集合である*2. i.e. $\varphi_\lambda: U_\lambda \rightarrow \varphi_\lambda(U_\lambda)$ は連続である.

$\forall B \in \mathcal{B}$ をとる. このとき $\varphi_\lambda(B \cap U_\lambda) = \varphi_\lambda(B) \cap \varphi_\lambda(U_\lambda)$ が成り立つが, \mathcal{O}_M の定義より $\varphi_\lambda(B) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$ なので $\varphi_\lambda(B \cap U_\lambda)$ は $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ の開集合である. 相対位相の定義と de Morgan 則より U_λ の任意の開集合は $B \cap U_\lambda$ の形をした部分集合の和集合で書けるので, 位相空間の公理から φ_λ は U_λ の開集合を $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ の開集合に移す. i.e. $\varphi_\lambda: U_\lambda \rightarrow \varphi_\lambda(U_\lambda)$ は連続な全単射でかつ開写像であるから同相写像である.

Hausdorff 性

位相空間 (M, \mathcal{O}_M) が Hausdorff 空間であることを示す. M の異なる2点 p, q を勝手にとる. このとき (DS-5) より,

- ある $\lambda \in \Lambda$ が存在して $p, q \in U_\lambda$ を充たす
- ある $\alpha, \beta \in \Lambda$ が存在して $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ かつ $p \in U_\alpha, q \in U_\beta$ を充たす

のいずれかである. 後者ならば証明することは何もない.

前者の場合を考える. このとき $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ は \mathbb{R}^n の開集合だから, \mathbb{R}^n の Hausdorff 性から $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ も Hausdorff 空間であり, 従って $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ の開集合 $U, V \subset \varphi_\lambda(U_\lambda)$ であって $\varphi_\lambda(p) \in U$ かつ $\varphi_\lambda(q) \in V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ を充たすものが存在する. このとき $\varphi_\lambda^{-1}(U) \cap \varphi_\lambda^{-1}(V) = \varphi_\lambda^{-1}(U \cap V) = \emptyset$ で, かつ \mathcal{O}_M の構成から $\varphi_\lambda^{-1}(U), \varphi_\lambda^{-1}(V) \subset M$ はどちらも M の開集合である. そのうえ $p \in \varphi_\lambda^{-1}(U)$ かつ $q \in \varphi_\lambda^{-1}(V)$ が成り立つので M は Hausdorff 空間である.

第2可算性

\mathbb{R}^n は第2可算なので, $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ も第2可算である. $\varphi_\lambda: U_\lambda \rightarrow \varphi_\lambda(U_\lambda)$ は同相写像なので, U_λ も第2可算である. 従って (DS-4) から M も第2可算である.

以上の考察から, 位相空間 (M, \mathcal{O}_M) が位相多様体であることが示された. さらに (DS-3) より $\mathcal{A} := \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ は (M, \mathcal{O}_M) の C^∞ アトラスであることもわかる.

■

補題 B.1 とほとんど同じ手順で境界付き多様体を作ることもしける.

*2 U_λ には (M, \mathcal{O}_M) からの相対位相が, $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ には $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ からの相対位相が入っている.

B.1 接束

境界あり/なし C^∞ 多様体 M を与える. M の**接束** (tangent bundle) とは集合

$$TM := \coprod_{p \in M} T_p M$$

のことである. TM の任意の元は $p \in M, v \in T_p M$ を用いて (p, v) と書かれる. このことから, **射影** (projection) と呼ばれる全射

$$\pi: TM \longrightarrow M, (p, v) \longmapsto p$$

が自然に定義できる.

命題 B.1: 接束の C^∞ 構造

任意の n 次元境界あり/なし C^∞ 多様体 M に対して, TM は π が C^∞ 級となるような自然な $2n$ 次元の C^∞ 構造を持つ.

証明 M が境界を持たないとする. M の C^∞ 構造を $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ と書く. 写像の族

$$\left\{ \tilde{\varphi}_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}, \left(p, v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_p \right) \longmapsto (x^1(p), \dots, x^n(p), v^1, \dots, v^n) \right\}_{\alpha \in \Lambda}$$

を定める. ただし (x^μ) はチャート $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ の座標関数である. このとき

- 集合 TM
- TM の部分集合族 $\{\pi^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$
- 写像の族 $\{\tilde{\varphi}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$

の3つ組が補題 B.1 の5条件を充たすことを確認する.

(DS-1) $\forall \alpha \in \Lambda$ に対して $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ は M の C^∞ チャートなので $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ は \mathbb{R}^n の開集合である.

ゆえに積位相の定義から $\tilde{\varphi}_\alpha(\pi^{-1}(U_\alpha)) = \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ は \mathbb{R}^{2n} の開集合. また, 写像

$$\tilde{\varphi}_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n, \left(p, v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_p \right) \longmapsto (x^1(p), \dots, x^n(p), v^1, \dots, v^n)$$

は写像

$$\tilde{\varphi}_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha), (x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n) \longmapsto \left(\varphi_\alpha^{-1}(x^1, \dots, x^n), v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_{\varphi_\alpha^{-1}(x^1, \dots, x^n)} \right)$$

を逆写像に持つので全単射である.

(DS-2, 3) $\forall \alpha, \beta \in \Lambda$ に対して

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_\alpha(\pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta)) &= \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n, \\ \tilde{\varphi}_\beta(\pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta)) &= \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

はどちらも \mathbb{R}^{2n} の開集合である．さらに自然基底の変換則より

$$\begin{aligned} & \tilde{\varphi}_\beta \circ \tilde{\varphi}_\alpha^{-1}(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n) \\ &= \left(y^1(x), \dots, y^n(x), \frac{\partial y^1}{\partial x^\mu}(x)v^\mu, \dots, \frac{\partial y^n}{\partial x^\mu}(x)v^\mu \right) \end{aligned}$$

なので $\tilde{\varphi}_\beta \circ \tilde{\varphi}_\alpha^{-1}$ は C^∞ 級である．ただしチャート $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)$ の座標関数をそれぞれ $(x^\mu), (y^\mu)$ と書き, $x := \varphi_\alpha^{-1}(x^1, \dots, x^n)$ とおいた．

(DS-4) $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ は M のアトラスなので, 可算濃度の部分集合 $I \subset \Lambda$ が存在して $\{U_i\}_{i \in I}$ が M の被覆になる．このとき

$$TM = \coprod_{p \in \bigcup_{i \in I} U_i} T_p M = \bigcup_{i \in I} \coprod_{p_i \in U_i} T_{p_i} M = \bigcup_{i \in I} \pi^{-1}(U_i)$$

が言える．

(DS-5) TM の任意の異なる2点 $(p, v), (q, w)$ をとる． $p = q$ ならば, $p \in U_\alpha$ を充たす $\alpha \in \Lambda$ に対して^{*3} $(p, v), (q, w) \in \pi^{-1}(\{p\}) \subset \pi^{-1}(U_\alpha)$ が成り立つ． $p \neq q$ ならば, $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ かつ $p \in U_\alpha, q \in U_\beta$ を充たすような $\alpha, \beta \in \Lambda$ が存在する^{*4}．このとき, TM の定義から明らかに $\pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta) = \emptyset$ であつ $(p, v) \in \pi^{-1}(U_\alpha), (q, w) \in \pi^{-1}(U_\beta)$ が成り立つ．

■

B.2 ベクトル場の定義

定義 B.1: ベクトル場

境界あり/なし C^∞ 多様体 M を与える．

- M 上のベクトル場 (vector field) とは, 接束 TM の切断のことを言う． i.e. 連続写像^a $X: M \rightarrow TM$ であつて $\pi \circ X = \text{id}_M$ を充たすもののこと．
- M 上の C^∞ ベクトル場とは, M 上のベクトル場 X であつて, TM に命題 B.1 の C^∞ 構造を入れたときに C^∞ 写像となるもののこと．
- M 上のベクトル場 X の台 (support) とは, 閉集合^b

$$\text{supp } X := \overline{\{p \in M \mid X_p \neq 0\}}$$

のこと．ただし $\bar{\cdot}$ は閉包を取ることを意味する．特に $\text{supp } X$ がコンパクト集合であるとき, X はコンパクト台を持つ (compactly supported) と言う．

- M の任意のベクトル場 X および任意のチャート $(U, (x^\mu))$ を与える．このとき n 個の関数 $X^\mu: U \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$X_p =: X^\mu(p) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_p$$

によって定義し, X の成分関数 (component function) と呼ぶ．

^{*3} $\{U_\alpha\}$ は M の開被覆なので, このような α は必ず存在する．

^{*4} M の極大アトラスをとっているため．

^a TM の位相は命題 B.1 で構成したものを採用する.

^b ここで言う 0 とは, 厳密には $(p, 0) \in TM$ のことである. 一点集合 $\{(p, 0)\}$ はコンパクトだが, TM は命題 B.1 より Hausdorff 空間なので閉集合でもある. 故に $TM \setminus \{(p, 0)\}$ は開集合であり, $X: M \rightarrow TM$ は連続写像なので $X^{-1}(TM \setminus \{0\})$ も開集合である. これの閉包を取ることによって $\text{supp } X$ が得られる.

境界あり/なし C^∞ 多様体 M 上の C^∞ ベクトル場全体の集合を $\mathfrak{X}(M)$ と書く.



ベクトル場 $X: M \rightarrow TM$ による点 $p \in M$ の像を $X(p)$ と書く代わりに X_p と書く. さらに, 混乱の恐れがないときは $X_p = (p, v)$ ($v \in T_p M$) のとき v のことを X_p と書く場合がある.

命題 B.2: ベクトル場の C^∞ 性

境界あり/なし C^∞ 多様体 M と M の任意の C^∞ チャート $(U, (x^\mu))$ と M 上のベクトル場 X を与える. このとき, 制限 $X|_U$ が C^∞ ベクトル場となる必要十分条件は X の U 上の成分関数が全て C^∞ 関数になることである.

証明 命題 B.1 の証明における TM の C^∞ チャートの構成より明らか. ■

【例 B.2.1】座標ベクトル場

C^∞ 多様体 M の任意のチャート $(U, (x^\mu))$ に対して, 写像

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}: U \rightarrow TM, p \mapsto \left(p, \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_p \right)$$

は U 上の C^∞ ベクトル場となる. C^∞ 性は, 成分関数が $p \mapsto \delta_\mu^\nu$ なる定数関数なので命題 B.2 から従う.

命題 B.3: $\mathfrak{X}(M)$ の加群としての構造

- $\mathfrak{X}(M)$ 上の加法とスカラー乗法を

$$\begin{aligned} (X + Y)_p &:= (p, X_p + Y_p) \\ (\lambda X)_p &:= (p, \lambda X_p) \end{aligned}$$

と定義すると $\mathfrak{X}(M)$ は \mathbb{R} ベクトル空間になる.

- $\mathfrak{X}(M)$ 上の $C^\infty(M)$ に関する加法とスカラー乗法を

$$\begin{aligned} (X + Y)_p &:= (p, X_p + Y_p) \\ (fX)_p &:= (p, f(p)X_p) \end{aligned}$$

と定義すると $\mathfrak{X}(M)$ は左 $C^\infty(M)$ 加群になる.

証明 命題 B.2 および $C^\infty(M)$ が和と積

$$\begin{aligned}(f+g)(p) &:= f(p) + g(p) \\ (fg)(p) &:= f(p)g(p)\end{aligned}$$

に関して環になることから従う。加法単位元はどちらの場合も関数 $p \mapsto (p, 0)$ である。 ■

さらに、後で述べるが、 $\mathfrak{X}(M)$ は Lie ブラケットについて Lie 代数をなす。

定義 B.2: フレーム

n 次元 C^∞ 多様体 M を与える。

- **ベクトル場^a**の順序付き k 対 (X_1, \dots, X_k) が部分集合 $A \subset M$ 上**線型独立** (linearly independent) であるとは、 $\forall p \in A$ において $(X_1|_p, \dots, X_k|_p)$ が \mathbb{R} ベクトル空間 $T_p M$ の元として線型独立であることを言う。
- M の開集合 $U \subset M$ 上の**局所フレーム** (local frame) とは、 U 上線型独立なベクトル場^bの n 対 (E_1, \dots, E_n) であって、 $\forall p \in U$ において $(E_1|_p, \dots, E_n|_p)$ が $T_p M$ の基底となるもののこと。
- $U = M$ 上の局所フレームのことを**大域的フレーム** (global frame) と呼ぶ。
- 局所フレーム (E_1, \dots, E_n) であって E_i が C^∞ ベクトル場であるもののことを **C^∞ フレーム** (smooth frame) と呼ぶ。

^a C^∞ とは限らない

^b C^∞ とは限らない

定義 B.3: 平行化可能性

n 次元 C^∞ 多様体 M が C^∞ の大域的フレームを持つとき、 M は**平行化可能** (parallelizable) であると言う。

B.2.1 C^∞ 関数の微分としてのベクトル場

ベクトル場の定義に $C^\infty(M)$ に作用する微分作用素としての意味を持たせることができる。これによって、微分方程式とベクトル場の繋がりが明らかになる。

任意の M 上のベクトル場 X および M の開集合 $U \subset M$ 上定義された任意の C^∞ 関数 $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ を与える。このとき関数^{*5}

$$Xf: U \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto X_p f$$

を考えることができる。

^{*5} この時点では C^∞ とは限らない。

命題 B.4: ベクトル場の C^∞ 性

境界あり/なし C^∞ 多様体 M と M の任意の C^∞ チャート $(U, (x^\mu))$ と M 上のベクトル場 X を与える. このとき以下の3つは同値である:

- (1) X は C^∞ ベクトル場
- (2) $\forall f \in C^\infty(M)$ に対して, 関数 $Xf: M \rightarrow \mathbb{R}$ は M 上 C^∞ 級である.
- (3) 任意の開集合 $U \subset M$ および任意の $f \in C^\infty(U)$ に対して, 関数 $Xf: U \rightarrow \mathbb{R}$ は U 上 C^∞ 級である.

証明 [6, p.180, Proposition 8.14] を参照. ■

命題 B.4 より, $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ は線型写像

$$X: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M), f \mapsto Xf$$

を誘導することが分かった. その上, 接空間の元の Leibniz 則から

$$X(fg) = fXg + gXf$$

が成り立つこともわかる. このことから \mathbb{R} -線型写像 $X: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ は微分 (derivation) である. 逆に, $C^\infty(M)$ に作用する任意の微分は次の意味であるベクトル場と同一視できる:

命題 B.5: 微分とベクトル場

写像 $D: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ を与える. このとき以下の2つは同値である:

- (1) D は微分である, i.e. \mathbb{R} -線型写像でかつ Leibniz 則を充たす.
- (2) ある $X \in \mathfrak{X}(M)$ が存在して, $\forall f \in C^\infty(M)$ に対して $D(f) = Xf$ が成り立つ.

証明 (1) \Leftarrow (2) は既に示したので (1) \Rightarrow (2) を示す.

まず, 写像

$$X: p \mapsto (f \mapsto D(f)(p))$$

がベクトル場であることを示す. そのためには $\forall p \in M$ に対して $X_p \in T_p M$ であること, i.e. $X(p)$ が $\forall f, g \in C^\infty(M), \forall \lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} X_p(f+g) &= X_p(f) + X_p(g) \\ X_p(\lambda f) &= \lambda X_p(f) \\ X_p(fg) &= X_p(f)g(p) + f(p)X_p(g) \end{aligned}$$

を充たすことを示せば良いが, $D: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ が微分であることからこれらは明らかである. D の定義から $\forall f \in C^\infty(M)$ に対して $Xf = Df \in C^\infty(M)$ なので, 命題 B.4 から $X \in \mathfrak{X}(M)$ も言える. ■

B.2.2 ベクトル場と C^∞ 写像

M, N を C^∞ 多様体, $F: M \rightarrow N$ を C^∞ 写像とする. このとき F によって $\mathfrak{X}(M)$ と $\mathfrak{X}(N)$ の間の自然な対応が生まれる場合がある^{*6} ことを見る.

まず, 接ベクトルの微分を思いだそう. これは $\forall p \in M$ に対して定まる

$$T_p F: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N, v \mapsto (f \mapsto v(f \circ F))$$

という対応であり, 基点付き C^∞ 多様体の圏 \mathbf{Diff}_0 から \mathbb{R} -ベクトル空間の圏 $\mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$ への関手

$$T_p: \mathbf{Diff}_0 \rightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$$

を構成するのだった.

定義 B.4:

境界あり/なし C^∞ 多様体 M, N と C^∞ 写像 $F: M \rightarrow N$ を与える.

M 上のベクトル場^a X と N 上のベクトル場^b Y が **F-related** であるとは, $\forall p \in M$ に対して

$$T_p F(X_p) = Y_{F(p)}$$

が成り立つことと定義する.

^a C^∞ でなくとも良い.

^b C^∞ でなくとも良い.

【例 B.2.2】

C^∞ 写像 $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos t, \sin t)$ を考える. このとき, \mathbb{R} のチャート $(\mathbb{R}, (t))$ による座標ベクトル場

$$\frac{d}{dt} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$$

は, \mathbb{R}^2 のチャート $(\mathbb{R}^2, (x, y))$ において

$$Y := -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$$

と定義される^a C^∞ ベクトル場 Y と **F-related** である. 実際, $\forall t \in \mathbb{R}$ および $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ に対して

$$\begin{aligned} T_t F \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right) (f) &= \frac{d}{dt} (f(\cos t, \sin t)) \\ &= \frac{d(\cos t)}{dt} \frac{\partial f}{\partial x} (\cos t, \sin t) + \frac{d(\sin t)}{dt} \frac{\partial f}{\partial y} (\cos t, \sin t) \\ &= -\sin t \frac{\partial f}{\partial x} (F(t)) + \cos t \frac{\partial f}{\partial y} (F(t)) \\ &= Y^1(F(t)) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{F(t)} (f) + Y^2(F(t)) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{F(t)} (f) \\ &= Y_{F(t)}(f) \end{aligned}$$

^{*6} しかし, いつでも自然に対応するとは限らない.

が成り立つ.

^a 成分関数がそれぞれ $Y^1: (x, y) \mapsto -y$, $Y^2: (x, y) \mapsto x$ だということ.

命題 B.6: F -related の特徴付け

境界あり/なし C^∞ 多様体 M, N と C^∞ 写像 $F: M \rightarrow N$ を与える.

$X \in \mathfrak{X}(M)$ と $Y \in \mathfrak{X}(N)$ が F -related である必要十分条件は, N の任意の開集合 $U \subset N$ に対して, $\forall f \in C^\infty(U)$ が

$$X(f \circ F) = (Yf) \circ F \in C^\infty(M)$$

を満たすことである.

証明 $\forall p \in M$ と, $F(p) \in N$ の任意の開近傍上で定義された任意の C^∞ 関数 f に対して

$$\begin{aligned} X(f \circ F)(p) &= X_p(f \circ F) = T_p F(X_p)(f), \\ ((Yf) \circ F)(p) &= (Yf)(F(p)) = Y_{F(p)}(f) \end{aligned}$$

が成り立つ. ■

F -related なベクトル場は必ず存在するとは限らない.

命題 B.7: C^∞ ベクトル場の押し出し

$F: M \rightarrow N$ が微分同相写像ならば, $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して F -related な $Y \in \mathfrak{X}(N)$ が一意的に存在する.

証明 図式

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{X} & TM \\ F \downarrow & & \downarrow T_p F \\ N & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & TN \end{array}$$

において $p = F^{-1}(q)$ とすることで,

$$Y: N \rightarrow TN, q \mapsto \left(q, T_{F^{-1}(q)} F(X_{F^{-1}(q)}) \right)$$

が所望の $Y \in \mathfrak{X}(N)$ となる. ■

! 命題 B.7 で得られた Y は F による X の押し出し (pushforward) と呼ばれ, よく $F_* X$ と略記される.

系 B.1: 押し出しの計算

$$((F_* X)f) \circ F = X(f \circ F)$$

B.2.3 Lie ブラケット

定義 B.5: Lie ブラケット

境界あり/なし C^∞ 多様体 M を与える. $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ の **Lie ブラケット** (Lie bracket) とは, 微分

$$[X, Y]: C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M), f \longmapsto X(Yf) - Y(Xf) \quad (\text{B.2.1})$$

のことを言う.

微分 $[X, Y]$ を命題 B.5 の意味で C^∞ ベクトル場と見做したのも $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ と書く.

(B.2.1) の写像 $[X, Y]$ が微分であることを確認しておく. 線形性はほぼ自明なので Leibniz 則を確認しよう:

$$\begin{aligned} [X, Y](fg) &= X(Y(fg)) - Y(X(fg)) \\ &= X(fYg + gYf) - Y(fXg + gXf) \\ &= fXYg + \cancel{YgXf} + gXYf + \cancel{YfXg} - fYXg - \cancel{gYXf} - gYXf - \cancel{XfYg} \\ &= f([X, Y]g) + g([X, Y]f) \end{aligned}$$

この途中式から, $f \mapsto XYf$ が微分でないこともわかる. つまり, \mathbb{R} ベクトル空間 $\mathfrak{X}(M)$ (命題 B.3) の上に, $f \mapsto XYf$ によって定義される新たな積演算を入れようとしても上手くいかない. その代わりに **Lie ブラケット**が必要なのである.

命題 B.8: $\mathfrak{X}(M)$ の Lie 代数としての構造

$\mathfrak{X}(M)$ 上の **Lie ブラケット** は以下を満たす:

(双線型性) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} [aX + bY, Z] &= a[X, Z] + b[Y, Z], \\ [Z, aX + bY] &= a[Z, X] + b[Z, Y] \end{aligned}$$

(反対称性)

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

(Jacobi 恒等式)

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

従って, $\mathfrak{X}(M)$ は $[\cdot, \cdot]$ について無限次元実 Lie 代数をなす.

命題 B.9: Lie ブラケットの自然性

境界あり/なし C^∞ 多様体 M, N と C^∞ 写像 $F: M \rightarrow N$ を与える. このとき, 以下が成り立つ:

- (1) $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ がそれぞれ $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$ と F -related ならば, $[X_1, X_2] \in \mathfrak{X}(M)$ も $[Y_1, Y_2] \in \mathfrak{X}(N)$ と F -related である.
- (2) F が微分同相写像ならば, $\forall X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$F_*[X_1, X_2] = [F_*X_1, F_*X_2]$$

証明 (1) X_i と Y_i が F -related ならば, 命題 B.6 より N の任意の開集合 $U \subset N$ に対して $\forall f \in C^\infty(U)$ が

$$\begin{aligned} X_1 X_2(f \circ F) &= X_1(X_2(f \circ F)) = X_1((Y_2 f) \circ F) = (Y_1 Y_2 f) \circ F \in C^\infty(M), \\ X_2 X_1(f \circ F) &= X_2(X_1(f \circ F)) = X_2((Y_1 f) \circ F) = (Y_2 Y_1 f) \circ F \in C^\infty(M) \end{aligned}$$

を充たす. 従って

$$\begin{aligned} [X_1, X_2](f \circ F) &= X_1 X_2(f \circ F) - X_2 X_1(f \circ F) \\ &= (Y_1 Y_2 f) \circ F - (Y_2 Y_1 f) \circ F \\ &= ([Y_1, Y_2] f) \circ F \in C^\infty(M) \end{aligned}$$

が成り立つので, 命題 B.6 より $[X_1, X_2] \in \mathfrak{X}(M)$ は $[Y_1, Y_2] \in \mathfrak{X}(N)$ と F -related である.

- (2) F が微分同相写像ならば, 押し出しの定義より $F_*X_i \in \mathfrak{X}(N)$ は X_i と F -related である. よって (1) から $[X_1, X_2] \in \mathfrak{X}(M)$ と $[F_*X_1, F_*X_2] \in \mathfrak{X}(N)$ は F -related だが, 命題 B.7 より $[X_1, X_2] \in \mathfrak{X}(M)$ と F -related な N 上の C^∞ ベクトル場は $F_*[X_1, X_2] \in \mathfrak{X}(N)$ ただ一つであるから

$$F_*[X_1, X_2] = [F_*X_1, F_*X_2] \in \mathfrak{X}(N)$$

である. ■

B.3 積分曲線とフロー

B.3.1 積分曲線

定義 B.6: 積分曲線

境界あり/なし C^∞ 多様体 M を与える. M 上のベクトル場^a X の積分曲線 (integral curve) とは, C^∞ 曲線^b $\gamma: J \rightarrow M$ であって, 任意の時刻 $t \in J$ において

$$\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}$$

を充たすもののことを言う.

^a C^∞ とは限らない

^b よって, $J \subset \mathbb{R}$ である.

チャート $(U, \varphi) = (U, (x^\mu))$ を取り, γ を $\varphi \circ \gamma(t) =: (\gamma^1(t), \dots, \gamma^{\dim M}(t))$ のように座標表示すると,

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(t) &= \frac{d\gamma^\mu}{dt}(t) \left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|_{\gamma(t)}, \\ X_{\gamma(t)} &= X^\mu(\gamma(t)) \left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|_{\gamma(t)}\end{aligned}$$

と書ける. つまり, 積分曲線とは連立常微分方程式系

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma^1}{dt}(t) &= X^1(\gamma^1(t), \dots, \gamma^{\dim M}(t)), \\ &\vdots \\ \frac{d\gamma^{\dim M}}{dt}(t) &= X^{\dim M}(\gamma^1(t), \dots, \gamma^{\dim M}(t))\end{aligned}$$

の解 $(\gamma^1(t), \dots, \gamma^{\dim M}(t))$ のことである.

【例 B.3.1】

\mathbb{R}^2 のチャート $(\mathbb{R}^2, (x, y))$ において

$$Y := -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$$

と定義される C^∞ ベクトル場 Y の積分曲線 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\gamma^1(t), \gamma^2(t))$ は連立常微分方程式

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma^1}{dt}(t) &= -\gamma^2(t), \\ \frac{d\gamma^2}{dt}(t) &= \gamma^1(t),\end{aligned}$$

の解であり, 積分定数 $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ を用いて

$$\begin{aligned}\gamma^1(t) &= a \cos t - b \sin t, \\ \gamma^2(t) &= a \sin t + b \cos t\end{aligned}$$

と書ける. このように, 初期条件を指定しない限り積分曲線は一意に定まらない.

命題 B.10: 積分曲線の存在

境界あり/なし C^∞ 多様体 M と, その上の C^∞ ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ を与える. $\forall p \in M$ に対して, ある $\varepsilon > 0$ と C^∞ 曲線 $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ が存在して初期条件 $\gamma(0) = p$ を満たす X の積分曲線になる.

証明 常微分方程式の解の存在定理から従う. ■

命題 B.11: 積分曲線の自然性

境界あり/なし C^∞ 多様体 M, N と C^∞ 写像 $F: M \rightarrow N$ を任意に与える. このとき, $\forall X \in \mathfrak{X}(M), \forall Y \in \mathfrak{X}(N)$ に対して以下の2つは同値である:

- (1) X, Y が F -related
- (2) $\gamma: J \rightarrow M$ が X の積分曲線 $\implies F \circ \gamma: J \rightarrow N$ は Y の積分曲線

証明 (1) \implies (2)

X, Y が F -related であるとする. $\gamma: J \rightarrow M$ を X の積分曲線とする. このとき N の C^∞ 曲線 $\sigma := F \circ \gamma: J \rightarrow N$ は $\forall t \in J$ において

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}(t) &= T_0(F \circ \gamma) \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_t \right) \\ &= T_{\gamma(t)} F \circ T_0 \gamma \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_t \right) \\ &= T_{\gamma(t)} F(\dot{\gamma}(t)) \\ &= T_{\gamma(t)} F(X_{\gamma(t)}) \\ &= Y_{F(\gamma(t))} \\ &= Y_{\sigma(t)}\end{aligned}$$

を充たすので Y の積分曲線である^{*7}.

(1) \Leftarrow (2)

X の積分曲線 γ が与えられたとき $F \circ \gamma$ が Y の積分曲線になるとする. $\forall p \in M$ を1つとり, $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ を初期条件 $\gamma(0) = p$ を充たす X の積分曲線とする. 命題??によりこのような γ が少なくとも1つ存在する. このとき仮定より $F \circ \gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$ が初期条件 $(F \circ \gamma)(0) = F(p)$ を充たす Y の積分曲線となるので

$$\begin{aligned}Y_{F(p)} &= (F \circ \dot{\gamma})(0) \\ &= T_0(F \circ \gamma) \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \right) \\ &= T_{\gamma(0)} F \circ T_0 \gamma \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \right) \\ &= T_{\gamma(0)} F(\dot{\gamma}(0)) \\ &= T_{\gamma(0)} F(X_{\gamma(0)}) \\ &= T_p F(X_p)\end{aligned}$$

が成り立つので X, Y は F -related である. ■

技術的な補題を示しておく:

^{*7} 2つ目の等号で接ベクトルの微分の手性を使った

補題 B.2: 定義域の affine 変換

境界あり/なし C^∞ 多様体 M と, その上の C^∞ ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ を与える.

X の任意の積分曲線 $\gamma: J \rightarrow M$ を与える. このとき以下が成り立つ:

(1) $\forall a \in \mathbb{R}$ に対して

$$\tilde{J} := \{t \in \mathbb{R} \mid at \in J\}$$

とおくと, C^∞ 曲線

$$\tilde{\gamma}: \tilde{J} \rightarrow M, t \mapsto \gamma(at)$$

は C^∞ ベクトル場 $aX \in \mathfrak{X}(M)$ の積分曲線である.

(2) $\forall b \in \mathbb{R}$ に対して

$$\hat{J} := \{t \in \mathbb{R} \mid t+b \in J\}$$

とおくと, C^∞ 曲線

$$\hat{\gamma}: \hat{J} \rightarrow M, t \mapsto \gamma(t+b)$$

は C^∞ ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ の積分曲線である.

証明 (1) C^∞ 写像 $\mu_a: \tilde{J} \rightarrow J, t \mapsto at$ を考えると, $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \mu_a$ である. よって $\forall t_0 \in \tilde{J}$ および点 $\tilde{\gamma}(t_0) \in M$ の任意の開近傍上で定義された C^∞ 関数 f に対してとても丁寧に計算すると^{*8}

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\gamma}}(t_0)f &= T_{t_0}\tilde{\gamma} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \right) f = \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} (f \circ \tilde{\gamma})(t) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} (f \circ \gamma \circ \mu_a)(t) \\ &= T_{t_0}(\gamma \circ \mu_a) \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \right) f = T_{\mu_a(t_0)}\gamma \circ T_{t_0}\mu_a \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \right) f \\ &= aT_{at_0}\gamma \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=at_0} \right) f = a\dot{\gamma}(at_0)f = aX_{\gamma(at_0)}f = (aX_{\tilde{\gamma}(t_0)})f \end{aligned}$$

(2) C^∞ 写像 $\tau_b: \hat{J} \rightarrow J, t \mapsto t+b$ を考えると, $\hat{\gamma} = \gamma \circ \tau_b$ である. よって $\forall t_0 \in \hat{J}$ および点 $\hat{\gamma}(t_0) \in M$

^{*8} \mathbb{R} のチャート $(\tilde{J}, \text{id}) = (\tilde{J}, t)$ から $(\tilde{J}, \mu_a) = (\tilde{J}, (s)) = (\tilde{J}, (at))$ への座標変換と見做して, $T_{t_0}\mu_a \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \right) = \frac{ds}{dt}(t_0) \frac{d}{ds} \Big|_{s=at_0} = a \frac{d}{ds} \Big|_{s=at_0}$

の任意の開近傍上で定義された C^∞ 関数 f に対してとても丁寧に計算すると^{*9}

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(t_0)f &= T_{t_0}\hat{\gamma}\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0}\right)f = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0}(f \circ \hat{\gamma})(t) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0}(f \circ \gamma \circ \tau_b)(t) \\ &= T_{t_0}(\gamma \circ \tau_b)\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0}\right)f = T_{\tau_b(t_0)}\gamma \circ T_{t_0}\tau_b\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0}\right)f \\ &= T_{t_0+b}\gamma\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0+b}\right)f = \dot{\gamma}(t_0+b)f = X_{\gamma(t_0+b)}f = X_{\hat{\gamma}(t_0)}f\end{aligned}$$

■

B.3.2 フロー

定義 B.7: 大域的なフロー

C^∞ 多様体 M への Lie 群^a \mathbb{R} の左作用

$$\theta: \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$$

のことを M 上の大域的フロー (global flow) と呼ぶ.

^a \mathbb{R} を加法に関して群と見做す.

大域的フロー $\theta: \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ が与えられたとき,

- $\forall t \in \mathbb{R}$ に対する連続写像 $\theta_t: M \longrightarrow M$ を $\theta_t(q) := \theta(t, q)$ により定める.
- $\forall p \in M$ に対する連続曲線 $\theta^{(p)}: \mathbb{R} \longrightarrow M$ を $\theta^{(p)}(s) := \theta(s, p)$ により定める.

命題 B.12: 大域的フローの無限小生成子

C^∞ 多様体 M 上の C^∞ 級の大域的フロー $\theta: \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ を与える. M 上のベクトル場

$$V: M \longrightarrow TM, p \longmapsto (p, \theta^{(p)}(0))$$

のことを θ の無限小生成子 (infinitesimal generator) と呼ぼう.

このとき $V \in \mathfrak{X}(M)$ であり, $\forall p \in M$ に対して C^∞ 曲線 $\theta^{(p)}: \mathbb{R} \longrightarrow M$ は V の積分曲線である.

証明 $V \in \mathfrak{X}(M)$ を示すには, 命題 B.4 より任意の開集合 $U \subset M$ 上定義された任意の C^∞ 関数 $f \in C^\infty(U)$ に対して $Vf \in C^\infty(U)$ であることを示せば良い. 実際このとき $\forall p \in U$ に対して

$$Vf(p) = V_p f = \theta^{(p)}(0)f = T_0\theta^{(p)}\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\right)f = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}f(\theta^{(p)}(t)) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{(0,p)}f(\theta(t, p))$$

^{*9} \mathbb{R} のチャート $(\hat{J}, \text{id}) = (\hat{J}, t)$ から $(\hat{J}, \tau_b) = (\hat{J}, (s)) = (\hat{J}, (t+b))$ への座標変換と見做して, $T_{t_0}\tau_b\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0}\right) = \frac{ds}{dt}(t_0)\frac{d}{ds}\Big|_{s=t_0+b} = \frac{d}{ds}\Big|_{s=t_0+b}$

が成り立つ^{*10}. $f(\theta(t, p))$ は C^∞ 写像の合成なので $\mathbb{R} \times U$ 上 C^∞ 級であり, その任意の偏導関数もまた C^∞ 級となる.

次に $\forall p \in M$ を 1 つ固定する. このとき C^∞ 曲線 $\theta^{(p)}: \mathbb{R} \rightarrow M$ が, 初期条件 $\theta^{(p)}(0) = p$ を充たす V の積分曲線であることを示す. i.e. 示すべきは $\forall t \in \mathbb{R}$ に対して $\dot{\theta}^{(p)}(t) = V_{\theta^{(p)}(t)}$ が成り立つことである. $\forall t \in \mathbb{R}$ を 1 つ固定して $q := \theta^{(p)}(t)$ とおくと, $\forall s \in \mathbb{R}$ に対して

$$\theta^{(q)}(s) = \theta_s(q) = \theta(s, \theta(t, p)) = \theta(s+t, p) = \theta^{(p)}(s+t)$$

である. 従って q の任意の開近傍上で定義された任意の C^∞ 関数 f に対して

$$V_q f = \dot{\theta}^{(q)}(0) f = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} f(\theta^{(q)}(s)) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} f(\theta^{(p)}(s+t)) = \dot{\theta}^{(p)}(t) f$$

が言える. これが示すべきことであつた. ■

【例 B.3.2】

C^∞ 写像

$$\theta: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (t, (x, y)) \mapsto (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t)$$

は $\forall t, s \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\begin{aligned} \theta(0, (x, y)) &= (x, y), \\ \theta(s, \theta(t, (x, y))) &= ((x \cos t - y \sin t) \cos s - (x \sin t + y \cos t) \sin s, (x \cos t - y \sin t) \sin s + (x \sin t + y \cos t) \cos s) \\ &= (x \cos(s+t) - y \sin(s+t), x \sin(s+t) + y \cos(s+t)) \\ &= \theta(s+t, (x, y)) \end{aligned}$$

を充たすので, 多様体 \mathbb{R}^2 上の大域的フローである. このとき $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\theta^{((a, b))}(t) = (a \cos t - b \sin t, a \sin t + b \cos t)$$

であるから

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^{((a, b))}(0) &= T_0 \theta^{((a, b))} \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \right) \\ &= \frac{d(a \cos t - b \sin t)}{dt}(0) \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_{\theta^{((a, b))}(0)} + \frac{d(a \sin t + b \cos t)}{dt}(0) \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_{\theta^{((a, b))}(0)} \\ &= -b \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_{(a, b)} + a \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_{(a, b)} \end{aligned}$$

と計算できる. つまり, θ の無限小生成子はベクトル場

$$-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$$

^{*10} ややこしいが, C^∞ 曲線 $\gamma: I \rightarrow M$ の微分 $\dot{\gamma}(t_0)$ は, 厳密には \mathbb{R} の接ベクトル $d/dt|_{t_0}$ の微分 $T_{t_0} \gamma(d/dt|_{t_0}) \in T_{\gamma(t_0)} M$ のことだった.

である。実際【例 B.3.1】より、ベクトル場 $-y \partial/\partial x + x \partial/\partial y$ の積分曲線は $\theta^{(a,b)}(t)$ そのものである。特に、 (a, b) は初期条件を表している。

命題 B.12 の逆に、 $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ が M 上の何かしらの大域的フローの無限小生成子になっていると言いたくなるが、必ずしもそうではない。つまり、積分曲線が \mathbb{R} のある部分集合上で定義できないような C^∞ ベクトル場が存在する。

【例 B.3.3】

$M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ とし、標準的なチャート $(M, (x, y))$ を取る。【例 B.2.1】の座標ベクトル場 $V := \frac{\partial}{\partial x}$ を考えよう。初期条件 $\gamma(0) = (-1, 0) \in M$ を充たす V の積分曲線 γ は、常微分方程式

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma^1}{dt}(t) &= 1, \\ \frac{d\gamma^2}{dt}(t) &= 0\end{aligned}$$

を解くことで一意に $\gamma(t) := (t - 1, 0)$ と求まる。しかるに γ は \mathbb{R} の点 $t = 1$ 上定義不能である。

定義 B.8: 局所的フロー

M を C^∞ 多様体とする。

- フローの定義域 (flow domain) とは、開集合 $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times M$ であって、 $\forall p \in M$ に対して集合

$$\mathcal{D}^{(p)} := \{t \in \mathbb{R} \mid (t, p) \in \mathcal{D}\} \subset \mathbb{R}$$

が 0 を含む開区間^aとなっているようなものを言う。

- M 上の局所的フロー (local flow) とは、フローの定義域を定義域にもつ連続写像

$$\theta: \mathcal{D} \longrightarrow M$$

であって、 $\forall p \in M$ に対して以下が成り立つもののこと：

(LF-1)

$$\theta(0, p) = p$$

(LF-2) $\forall s \in \mathcal{D}^{(p)}, \forall t \in \mathcal{D}^{(\theta(s, p))}$ に対して、

$$s + t \in \mathcal{D}^{(p)} \implies \theta(t, \theta(s, p)) = \theta(t + s, p)$$

- 極大積分曲線 (maximal integral curve) とは、積分曲線であって定義域をこれ以上大きな開区間に延長できないようなもののこと。極大局所フロー (maximal local flow) とは、これ以上フローの定義域を拡張できないような局所的フローのこと。

^a この条件が命題 B.13 の証明の鍵となる。

局所的フロー $\theta: \mathcal{D} \rightarrow M$ が与えられたとき,

- $\forall t \in \mathbb{R}$ に対して, M の部分集合 $M_t \subset M$ を

$$M_t := \{ p \in M \mid (t, p) \in \mathcal{D} \}$$

と定める^a.

- $\forall (t, p) \in \mathcal{D}$ に対する連続写像^b $\theta_t: M_t \rightarrow M$ および連続曲線 $\theta^{(p)}: \mathcal{D}^{(p)} \rightarrow M$ をそれぞれ

$$\begin{aligned}\theta_t(q) &:= \theta(t, q), \\ \theta^{(p)}(s) &:= \theta(s, p)\end{aligned}$$

により定める.

^a $\mathcal{D}^{(p)}$ はフローの領域 \mathcal{D} を, 点 $(0, p)$ を通るように「横に切り」, M_t は「縦に切る」と言うイメージ.

^b 極大局所フロー θ に関しては, θ_t の値域が実は M_{-t} であることが, 定理 B.2-(2) によりわかる.

命題 B.13: 局所的フローの無限小生成子

C^∞ 多様体 M 上の C^∞ 級の局所的フロー $\theta: \mathcal{D} \rightarrow M$ を与える. M 上のベクトル場

$$V: M \rightarrow TM, p \mapsto (p, \theta^{(p)}(0))$$

のことを^a θ の無限小生成子 (infinitesimal generator) と呼ぼう.

このとき $V \in \mathfrak{X}(M)$ であり, $\forall p \in M$ に対して C^∞ 曲線 $\theta^{(p)}: \mathcal{D}^{(p)} \rightarrow M$ は V の積分曲線である.

^a フローの定義域の定義から $M_0 = M$ であることに注意. このとき, 接ベクトルの局所性から $\forall p \in M$ に対して $\theta^{(p)}(0)$ が定義される.

証明 $V \in \mathfrak{X}(M)$ であることに関しては命題 B.12 の証明がそのまま適用できる.

$\forall p \in M$ を 1 つ固定する. $\forall t \in \mathcal{D}^{(p)}$ に対して, フローの定義域の定義より $\mathcal{D}^{(p)}, \mathcal{D}^{(\theta^{(p)}(t))} \subset \mathbb{R}$ はどちらも 0 を含む開区間であるから, 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対しては $(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \subset \mathcal{D}^{(p)}$ かつ $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathcal{D}^{(\theta^{(p)}(t))}$ が成り立つ. このとき $\forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathcal{D}^{(\theta^{(p)}(t))}$ をとってくると $t + s \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \subset \mathcal{D}^{(p)}$ であるから, 局所的フローの定義の条件 (LF-2) より $\theta(s, \theta(t, p)) = \theta(s + t, p)$ が成り立つ. あとはこの s に対して命題 B.12 の証明を適用すれば良い. ■

極大局所フローに対しては命題 B.13 の逆も言える [6, p.212, Theorem 9.12]:

定理 B.2: フローの基本定理

M を境界なし C^∞ 多様体とする. $\forall V \in \mathfrak{X}(M)$ に対して, 極大局所フロー $\theta: \mathcal{D} \rightarrow M$ であって無限小生成子が V であるようなものが一意に存在する. さらに, この θ は以下の性質をみたす:

- (1) $\forall p \in M$ に対し, $\theta^{(p)}: \mathcal{D}^{(p)} \rightarrow M$ は初期条件 $\theta^{(p)}(0) = p$ を満たす V の唯一の極大積分曲線である.

(2)

$$s \in \mathcal{D}^{(p)} \implies \mathcal{D}^{(\theta(s, p))} = \{t - s \mid t \in \mathcal{D}^{(p)}\} =: \mathcal{D}^{(p)} - s$$

(3) $\forall t \in \mathbb{R}$ に対して, 集合 M_t は M の開集合であり, 連続写像 $\theta_t: M_t \longrightarrow M_{-t}$ は θ_{-t} を逆にもつ微分同相写像である.

上述の極大局所フロー θ のことを, V によって生成されたフロー (flow generated by V) と呼ぶ.

証明 $\forall V \in \mathfrak{X}(M)$ を1つ固定する.

定義域を共有する2つの積分曲線が交差しないこと

命題 B.10 より, $J \subset \mathbb{R}$ を开区間として, V の積分曲線 $\gamma, \tilde{\gamma}: J \longrightarrow M$ をとることができる. ここで, ある $t_0 \in J$ において $\gamma(t_0) = \tilde{\gamma}(t_0)$ であると仮定する^{*11}. このとき $\gamma = \tilde{\gamma}$ でなくてはならないことを示そう.

部分集合 $S \subset J$ を

$$S := \{t \in J \mid \gamma(t) = \tilde{\gamma}(t)\}$$

と定義する. 示すべきは $S = J$ である. 仮定より $t_0 \in S$ なので S は空でない. また, 積多様体 $M \times M$ 上の連続曲線 $\alpha: J \longrightarrow M \times M$ を $\alpha(t) := (\gamma(t), \tilde{\gamma}(t))$ と定義すると, M の部分空間 $\Delta := \{(p, p) \in M \times M\}$ を使って $S = \alpha^{-1}(\Delta)$ と書けるが, 任意の C^∞ 多様体が Hausdorff 空間であることから Δ は閉集合であり^{*12}, α が連続写像なので S も J の閉集合であることがわかる. 一方で $\forall t_1 \in S$ をとると, 積分曲線の定義から $\gamma, \tilde{\gamma}$ は点 $\gamma(t_1) \in M$ を含むある C^∞ チャートの上の同一の常微分方程式の解であり, かつ初期条件 $\gamma(t_1) = \tilde{\gamma}(t_1)$ を充たす. 故に常微分方程式の解の一意性から, ある t_1 を含む开区間 $I_{t_1} \subset \mathbb{R}$ 上で $\gamma|_{I_{t_1}} = \tilde{\gamma}|_{I_{t_1}}$ が成り立つ. i.e. $t_1 \in I_{t_1} \cap J \subset S$ で, $t_1 \in S$ は任意だったので S は J の開集合でもある. さらに J は連結なので, $J = S$ が示された^{*13}

極大局所フロー $\theta: \mathcal{D} \longrightarrow M$ の構成

$\forall p \in M$ を1つ固定する. 初期条件 $\gamma(0) = p$ を充たす^{*14} V の積分曲線 $\gamma: J_\gamma \longrightarrow M$ 全体の集合を $\mathcal{I}^{(p)}$ とおき,

$$\mathcal{D}^{(p)} := \bigcup_{\gamma \in \mathcal{I}^{(p)}} J_\gamma$$

と定義する. 先述の議論から M の C^∞ 曲線

$$\theta^{(p)}: \mathcal{D}^{(p)} \longrightarrow M, t \longmapsto \left(\gamma(t) \text{ s.t. } \gamma \in \mathcal{I}^{(p)} \text{ かつ } t \in J_\gamma \right)$$

は well-defined であり, かつその構成から明らかに初期条件 $\theta^{(p)}(0) = p$ を充たす唯一の極大積分曲線である.

^{*11} 時刻 $t_0 \in J$ において2つの積分曲線 $\gamma, \tilde{\gamma}$ が交差するということ.

^{*12} $(M \times M) \setminus \Delta$ が開集合である $\iff \forall (p, q) \in (M \times M) \setminus \Delta$ に対して $p, q \in M$ の開近傍 $U \subset M, V \subset M$ が存在して $U \times V \subset (M \times M) \setminus \Delta$ を充たす $\iff \forall (p, q) \in (M \times M) \setminus \Delta$ に対して $p, q \in M$ の開近傍 $U \subset M, V \subset M$ が存在して $U \cap V = \emptyset$ を充たす $\iff M$ が Hausdorff 空間である

^{*13} $S \subset J$ が開かつ閉なので $J \setminus S \subset J$ は開集合であり, $J = S \cup (J \setminus S)$ かつ $S \cap (J \setminus S) = \emptyset$ が成り立つ. J は連結なので $S, J \setminus S$ のどちらかが空でなくてはならないが $S \neq \emptyset$ だったので $J \setminus S = \emptyset \iff J = S$ が言えた.

^{*14} 従って $0 \in J_\gamma$ とする.

$p \in M$ は任意だったので、ここで

$$\mathcal{D} := \{ (t, p) \in \mathbb{R} \times M \mid t \in \mathcal{D}^{(p)} \},$$

$$\theta: \mathcal{D} \longrightarrow M, (t, p) \longmapsto \theta^{(p)}(t)$$

と定義する。これが**局所フローの定義**の条件 **(LF-1)**, **(LF-2)** を満たすことを確認する。

(LF-1) 構成より明らか。

(LF-2) $\forall p \in M, \forall s \in \mathcal{D}^{(p)}$ をとり, $q := \theta(s, p)$ とおく。このとき $\forall t \in \mathcal{D}^{(p)} - s$ に対して $s+t \in \mathcal{D}^{(p)}$ が成り立つ。ここで, C^∞ 曲線

$$\gamma: \mathcal{D}^{(p)} - s \longrightarrow M, t \longmapsto \theta(t+s, p) = \theta^{(p)}(t+s)$$

は補題 B.2-(2) より初期条件 $\gamma(0) = q$ を満たす V の積分曲線であるが, 常微分方程式の解の一意性から $\gamma = \theta^{(q)}|_{\mathcal{D}^{(p)}-s}$ が成り立つ。あとは $\mathcal{D}^{(p)} - s = \mathcal{D}^{(q)}$ を示せば, $\forall t \in \mathcal{D}^{(q)}$ に対して

$$\theta(t, \theta(s, p)) = \theta(t, q) = \theta^{(q)}(t) = \gamma(t) = \theta(t+s, p)$$

となって **(LF-2)** の証明が完了する。

$\theta^{(q)}$ が極大積分曲線なので $\mathcal{D}^{(p)} - s \subset \mathcal{D}^{(q)}$ が言える。 $\mathcal{D}^{(p)} - s \supset \mathcal{D}^{(q)}$ を示そう。まず $0 \in \mathcal{D}^{(p)}$ なので $-s \in \mathcal{D}^{(p)} - s \subset \mathcal{D}^{(q)}$ が言える。従って $\theta(-s, q) = \theta^{(q)}(-s) = \gamma(-s) = \theta^{(p)}(0) = p$ であり, $\forall t \in \mathcal{D}^{(q)} + s$ に対して $-s+t \in \mathcal{D}^{(p)}$ が成り立つ。 C^∞ 曲線

$$\gamma: \mathcal{D}^{(q)} + s \longrightarrow M, t \longmapsto \theta(t-s, q) = \theta^{(q)}(t-s)$$

は補題 B.2-(2) より初期条件 $\gamma(0) = p$ を満たす V の積分曲線なので, 常微分方程式の解の一意性から $\gamma = \theta^{(p)}|_{\mathcal{D}^{(q)}+s}$ が言えて, $\theta^{(p)}$ の極大性から $\mathcal{D}^{(q)} + s \subset \mathcal{D}^{(p)} \iff \mathcal{D}^{(p)} - s \supset \mathcal{D}^{(q)}$ が示された。

$\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times M$ が開集合かつ θ が C^∞ 級

部分集合 $W \subset \mathcal{D}$ を

$$W := \left\{ (t, p) \in \mathcal{D} \mid \begin{array}{l} \text{以下を満たす開近傍 } (t, p) \in J \times U \subset \mathcal{D} \text{ が存在:} \\ (1) J \subset \mathbb{R} \text{ は開区間で } 0, t \in J \\ (2) U \subset M \text{ は } p \text{ の開近傍} \\ (3) \theta|_{J \times U} \text{ が } C^\infty \text{ 級} \end{array} \right\}$$

と定義する。 $W = \mathcal{D}$ を背理法により示す。まず $\exists(\tau, p_0) \in \mathcal{D} \setminus W$ を仮定する。常微分方程式の解の存在定理より $(0, p_0) \in W$ なので, $\tau > 0$ としよう。 $\tau < 0$ のときも議論は全く同様である。

$t_0 := \sup\{t \in \mathbb{R} \mid (t, p_0) \in W\}$ とする。このとき $0 < t_0 < \tau$ であつ $0, \tau \in \mathcal{D}^{(p_0)}$ なので $t_0 \in \mathcal{D}^{(p_0)}$ が言える。 $q_0 := \theta^{(p_0)}(t_0)$ とおこう。常微分方程式の解の存在定理から, ある $\varepsilon > 0$ と q_0 の開近傍 $q_0 \in U_0 \subset M$ が存在して $(-\varepsilon, \varepsilon) \times U_0 \subset W$ となる。ここで $t_1 \in (t_0 - \varepsilon, t_0)$ を $\theta^{(p_0)}(t_1) \in U_0$ を満たすようにとる。このとき $t_1 < t_0$ なので $(t_1, p_0) \in W$ であり, 故にある $\delta > 0$ と p_0 の開近傍 $p_0 \in U_1 \subset M$ が存在して $(t_1 - \delta, t_1 + \delta) \times U_1 \subset W$ となる。従って W の定義から, θ は $[0, t_1 + \delta) \times U_1$ 上で C^∞ 級である。 $\theta(t_1, p_0) \in U_0$ なので, $\theta(\{t_1\} \times U_1) \subset U_0$ を満たすような U_1 をとることができる。さて,

$$\tilde{\theta}: [0, t_1 + \varepsilon) \times U_1 \longrightarrow M,$$

$$(t, p) \longmapsto \begin{cases} \theta_t(p), & (t, p) \in [0, t_1) \times U_1 \\ \theta_{t-t_1} \circ \theta_{t_1}(p), & (t, p) \in (t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon) \times U_1 \end{cases}$$

と定義した写像 $\tilde{\theta}$ は, θ が条件 **(LF-2)** を満たすことから $(t_1 - \varepsilon, t_1) \times U_1$ 上 $\theta_t(p) = \theta_{t-t_1} \circ \theta_{t_1}(p)$ となり well-defined で, かつ U_1, t_1, ε の取り方から C^∞ 級である. その上 $\forall p \in U_1$ に対して C^∞ 曲線 $t \mapsto \tilde{\theta}(t, p)$ は V の積分曲線なので, $\tilde{\theta}$ は $(t_0, p_0) \notin W$ への θ の C^∞ 級の延長である. しかるにこのことは t_0 の取り方に矛盾する.

- (1) $\mathcal{D}^{(p)}, \theta^{(p)}$ の構成から明らか.
- (2) **(LF-2)** の確認で示した.
- (3) \mathcal{D} が $\mathbb{R} \times M$ の開集合なので, $\forall t \in \mathbb{R}$ に対して $M_t := \{p \in M \mid (t, p) \in \mathcal{D}\}$ は開集合である.^{*15}. また, (2) から

$$\begin{aligned}
 p \in M_t &\implies t \in \mathcal{D}^{(p)} \\
 &\implies \mathcal{D}^{(\theta_t(p))} = \mathcal{D}^{(p)} - t \\
 &\implies -t \in \mathcal{D}^{(\theta_t(p))} \\
 &\implies \theta_t(p) \in M_{-t}
 \end{aligned}$$

が言えるので $\theta_t(M_t) \subset M_{-t}$ である. さらに **(LF-2)** から $\theta_{-t} \circ \theta_t = \text{id}_{M_t}$, $\theta_t \circ \theta_{-t} = \text{id}_{M_{-t}}$ が言える. θ が C^∞ 級なので θ_t, θ_{-t} も C^∞ 級であるから $\theta_t: M_t \rightarrow M_{-t}$ は微分同相写像である.

■

定理 B.3: 境界付き多様体におけるフローの基本定理

M を境界付き多様体とし, $V \in \mathfrak{X}(M)$ は ∂M に接する^aとする. このとき定理 B.2 と全く同じ結果が V に対して成り立つ.

^a i.e. $\forall p \in \partial M$ において $V_p \in T_p(\partial M) \subset T_p M$ が成り立つ.

証明 [6, p.227, Theorem 9.34]

■

B.3.3 完備なベクトル場

定義 B.9: ベクトル場の完備性

C^∞ ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ が完備 (complete) であるとは, それが大域的なフローを生成することを言う.

補題 B.3: uniform time lemma

C^∞ 多様体 M およびその上の C^∞ ベクトル場 $V \in \mathfrak{X}(M)$ を与える. $\theta: \mathcal{D} \rightarrow M$ を V が生成するフローとする.

このとき, ある $\varepsilon > 0$ が存在して $\forall p \in M$ に対して $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathcal{D}^{(p)}$ を満たすならば, V は完備である.

^{*15} 写像 $\iota_t: M \rightarrow \mathbb{R} \times M, p \mapsto (t, p)$ は, 开区間と開集合の直積 $J \times U \subset \mathbb{R} \times M$ に対して $t \in J$ なら $\iota_t^{-1}(J \times U) = U$, $t \notin J$ なら $\iota_t^{-1}(J \times U) = \emptyset$ となるので連続写像である. 従って $M_t = \iota_t^{-1}(\mathcal{D}) \subset M$ は M の開集合.

証明 主張の仮定が満たされているとする。このとき V が完備であることを背理法により示す。そのためにまずある $p \in M$ が存在して、 $\mathcal{D}^{(p)}$ が上に有界であると仮定する。下に有界な場合も同様の議論ができる。

$b := \sup \mathcal{D}^{(p)}$ とおき、 $t_0 \in (b - \varepsilon, b)$ を1つとる。 $q := \theta^{(p)}(t_0)$ とおく。仮定より V の積分曲線 $\theta^{(p)}$ は少なくとも $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 上では定義されている。ここで C^∞ 曲線

$$\gamma: (-\varepsilon, t_0 + \varepsilon) \longrightarrow M, t \longmapsto \begin{cases} \theta^{(p)}(t), & t \in (-\varepsilon, b) \\ \theta^{(q)}(t - t_0), & t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \end{cases}$$

と定義すると、これは $\forall t \in (t_0 - \varepsilon, b)$ に対して (LF-2) より $\theta^{(q)}(t - t_0) = \theta_{t-t_0}(q) = \theta(t - t_0) \circ \theta_{t_0}(p) = \theta_t(p) = \theta^{(p)}(t)$ が成り立つので well-defined である。特に補題 B.2-(2) より γ は初期条件 $\gamma(0) = p$ を充たす V の積分曲線なので $(-\varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset \mathcal{D}^{(p)}$ ということになるが、 $t_0 + \varepsilon > b$ より b の取り方に矛盾する。 ■

定理 B.4: コンパクト台を持つベクトル場は完備

C^∞ ベクトル場 X がコンパクト台を持つならば、 X は完備である。

証明 [6, p.216, Theorem 9.16] ■

系 B.5: コンパクト多様体のベクトル場は完備

コンパクトな C^∞ 多様体上の任意の C^∞ ベクトル場は完備である。

定理 B.6: Lie 群の左不変ベクトル場は完備

Lie 群 G を与える。このとき $\forall X \in \mathfrak{X}^L(G)$ は完備である。

証明 左不変ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(G)$ の定義は、 $\forall g \in G$ に対して X が自分自身と L_g -related であることだった。

さて、 $\theta: \mathcal{D} \longrightarrow G$ を X が生成するフローとする。このとき $\theta^{(1_G)}: \mathcal{D}^{(1_G)} \longrightarrow G$ に関して $\mathcal{D}^{(1_G)}$ は開区間なので、十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathcal{D}^{(1_G)}$ を充たすようにできる。

$\forall g \in G$ を1つとる。 X は自分自身と L_g -related なので、命題 B.11 より $L_g \circ \theta^{(1_g)}: \mathcal{D}^{(1_g)} \longrightarrow G$ は初期条件 $(L_g \circ \theta^{(1_g)})(0) = g$ を充たす X の積分曲線である。よって定理 B.2-(1) から、少なくとも $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 上で $\theta^{(g)} = L_g \circ \theta^{(1_g)}$ が言える。 i.e. $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathcal{D}^{(g)}$ であるから、補題 B.3 から X は完備である。 ■

参考文献

- [1] S. Simon, Topological quantum: Lecture notes and proto-book, 2021, Available at <http://www-thphys.physics.ox.ac.uk/people/SteveSimon/topological2021/TopoBook-Sep28-2021.pdf>.
- [2] 中原幹夫 and 佐久間一浩, 理論物理学のための幾何学とトポロジー I 原著第 2 版 (日本評論社, 2018).
- [3] E. Fadell and J. Van Buskirk, Bull. Amer. Math. Soc **67**, 211 (1961).
- [4] H. Halvorson and M. Mueger, arXiv e-prints , math (2006), [[math-ph/0602036](#)].
- [5] Y. Aharonov and A. Casher, Phys. Rev. Lett. **53**, 319 (1984).
- [6] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds* (Springer, 2012).
- [7] 今野宏, 微分幾何学 (東京大学出版会, 2013).