第 1 章

ベクトル場の話

C^∞ 多様体 M 上の C^∞ 関数全体の集合のことを $C^\infty(M)$ と書く．

C^∞ 多様体の 1 つの極大 C^∞ アトラスを $\boldsymbol{C^\infty}$ **構造** (smooth structure)[*1] と呼ぶことにする．集合 M の上に C^∞ 構造を与えるには，例えば次のようにすればよい [?, p.21, Lemma 1.35]：

補題 1.1: C^∞ 構造の構成

- 集合 M
- M の部分集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$
- 写像の族 $\{\varphi_\lambda\colon U_\lambda \longrightarrow \mathbb{R}^n\}_{\lambda\in\Lambda}$

の 3 つ組であって以下の条件を充たすものを与える：

(DS-1) $\forall\lambda\in\Lambda$ に対して $\varphi_\lambda(U_\lambda)\subset\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合[a]であり，$\varphi_\lambda\colon U_\lambda\longrightarrow\varphi_\lambda(U_\lambda)$ は全単射である．

(DS-2) $\forall\alpha,\,\beta\in\Lambda$ に対して $\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta),\,\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)\subset\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である．

(DS-3) $\forall\alpha,\,\beta\in\Lambda$ に対して，$U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ ならば $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}\colon\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\longrightarrow\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$ は C^∞ 級である．

(DS-4) 添字集合 Λ の可算濃度の部分集合 $I\subset\Lambda$ が存在して $\{U_i\}_{i\in I}$ が M の被覆になる．

(DS-5) $p,\,q\in M$ が $p\neq q$ ならば，ある $\lambda\in\Lambda$ が存在して $p,\,q\in U_\lambda$ を充たすか，またはある $\alpha,\,\beta\in\Lambda$ が存在して $U_\alpha\cap U_\beta=\emptyset$ かつ $p\in U_\alpha,\ q\in U_\beta$ を充たす．

このとき，M の C^∞ 構造であって，$\forall\lambda\in\Lambda$ に対して $(U_\lambda,\,\varphi_\lambda)$ を C^∞ チャートとして持つものが一意的に存在する．

[a] いつものように，$\mathbb{R}^n$ には Euclid 位相を入れる．

証明 **位相の構成**

$\mathbb{R}^n$ の Euclid 位相を $\mathscr{O}_{\mathbb{R}^n}$ と表記する．集合

$$\mathscr{B}\coloneqq\left\{\,\varphi_\lambda^{-1}(U)\;\middle|\;\lambda\in\Lambda,\ U\in\mathscr{O}_{\mathbb{R}^n}\,\right\}$$

が開基の公理 **(B1)**, **(B2)** を充たすことを確認する．

[*1] **微分構造** (differential structure) ということもある．

(B1)　**(DS-4)** より明らか.

(B2)　$B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ を任意にとる．このとき $\mathscr{B}$ の定義から，ある $\alpha, \beta \in \Lambda$ および $U, V \in \mathscr{O}_{\mathbb{R}^n}$ が存在して $B_1 = \varphi_\alpha^{-1}(U)$, $B_2 = \varphi_\beta^{-1}(V)$ と書ける．故に

$$\begin{aligned} B_1 \cap B_2 &= \varphi_\alpha^{-1}(U) \cap \varphi_\beta^{-1}(V) \\ &= \varphi_\alpha^{-1}\bigl(U \cap (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(V)\bigr) \\ &= \varphi_\alpha^{-1}\bigl(U \cap (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1}(V)\bigr) \end{aligned}$$

が成り立つが，**(DS-3)** より $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ は連続なので $(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1}(V) \in \mathscr{O}_{\mathbb{R}^n}$ である．よって

$$B_1 \cap B_2 \in \mathscr{B}$$

であり，**(B2)** が示された.

従って $\mathscr{B}$ を開基とする M の位相 $\mathscr{O}_M$ が存在する.

φ_λ が同相写像であること

$\forall \lambda \in \Lambda$ を 1 つ固定する．$\mathscr{O}_M$ の構成と補題??-(4) より，$\forall V \in \mathscr{O}_{\mathbb{R}^n}$ に対して $\varphi_\lambda^{-1}\bigl(V \cap \varphi_\lambda(U_\lambda)\bigr) = \varphi_\lambda^{-1}(V) \cap U_\lambda$ は U_λ の開集合である[*2]．i.e. $\varphi_\lambda \colon U_\lambda \longrightarrow \varphi_\lambda(U_\lambda)$ は連続である.

$\forall B \in \mathscr{B}$ をとる．このとき $\varphi_\lambda(B \cap U_\lambda) = \varphi_\lambda(B) \cap \varphi_\lambda(U_\lambda)$ が成り立つが，$\mathscr{O}_M$ の定義より $\varphi_\lambda(B) \in \mathscr{O}_{\mathbb{R}^n}$ なので $\varphi_\lambda(B \cap U_\lambda)$ は $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ の開集合である．相対位相の定義と de Morgan 則より U_λ の任意の開集合は $B \cap U_\lambda$ の形をした部分集合の和集合で書けるので，位相空間の公理から φ_λ は U_λ の開集合を $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ の開集合に移す．i.e. $\varphi_\lambda \colon U_\lambda \longrightarrow \varphi_\lambda(U_\lambda)$ は連続な全単射でかつ開写像であるから同相写像である.

Hausdorff 性

位相空間 $(M, \mathscr{O}_M)$ が Hausdorff 空間であることを示す．M の異なる 2 点 p, q を勝手にとる．このとき **(DS-5)** より，

- ある $\lambda \in \Lambda$ が存在して $p, q \in U_\lambda$ を充たす
- ある $\alpha, \beta \in \Lambda$ が存在して $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ かつ $p \in U_\alpha$, $q \in U_\beta$ を充たす

のいずれかである．後者ならば証明することは何もない.

前者の場合を考える．このとき $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合だから，$\mathbb{R}^n$ の Hausdorff 性から $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ も Hausdorff 空間であり，従って $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ の開集合 $U, V \subset \varphi_\lambda(U_\lambda)$ であって $\varphi_\lambda(p) \in U$ かつ $\varphi_\lambda(q) \in V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ を充たすものが存在する．このとき $\varphi_\lambda^{-1}(U) \cap \varphi_\lambda^{-1}(V) = \varphi_\lambda^{-1}(U \cap V) = \emptyset$ で，かつ $\mathscr{O}_M$ の構成から $\varphi_\lambda^{-1}(U), \varphi_\lambda^{-1}(V) \subset M$ はどちらも M の開集合である．そのうえ $p \in \varphi_\lambda^{-1}(U)$ かつ $q \in \varphi_\lambda^{-1}(V)$ が成り立つので M は Hausdorff 空間である.

第 2 可算性

$\mathbb{R}^n$ は第 2 可算なので，$\forall \lambda \in \Lambda$ に対して $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ も第 2 可算である．$\varphi_\lambda \colon U_\lambda \longrightarrow \varphi_\lambda(U_\lambda)$ は同相写像なので，U_λ も第 2 可算である．従って **(DS-4)** から M も第 2 可算である.

以上の考察から，位相空間 $(M, \mathscr{O}_M)$ が位相多様体であることが示された．さらに **(DS-3)** より $\mathcal{A} := \bigl\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\bigr\}_{\lambda \in \Lambda}$ は $(M, \mathscr{O}_M)$ の C^∞ アトラスであることもわかる.

■

補題 1.1 とほとんど同じ手順で境界付き多様体を作ることもできる.

[*2] U_λ には $(M, \mathscr{O}_M)$ からの相対位相が，$\varphi_\lambda(U_\lambda)$ には $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ からの相対位相が入っている.

1.1 接束

境界あり/なし C^∞ 多様体 M を与える．M の**接束** (tangent bundle) とは集合

$$\boldsymbol{TM} := \coprod_{p\in M} T_pM$$

のことである．TM の任意の元は $p \in M,\ v \in T_pM$ を用いて $(p,\ v)$ と書かれる．このことから，**射影** (projection) と呼ばれる全射

$$\boldsymbol{\pi}\colon \boldsymbol{TM} \longrightarrow M,\ (p,\ v) \longmapsto p$$

が自然に定義できる．

命題 1.1: 接束の C^∞ 構造

任意の n 次元境界あり/なし C^∞ 多様体 M に対して，TM は π が C^∞ 級となるような自然な $2n$ 次元の C^∞ 構造を持つ．

<u>証明</u> M が境界を持たないとする．M の C^∞ 構造を $\{(U_\alpha,\ \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ と書く．写像の族

$$\left\{\tilde{\varphi}_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow \mathbb{R}^{2n},\ \left(p,\ v^\mu \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p\right) \longmapsto \left(x^1(p),\ \dots,\ x^n(p),\ v^1,\ \dots,\ v^n\right)\right\}_{\alpha\in\Lambda}$$

を定める．ただし (x^μ) はチャート $(U_\alpha,\ \varphi_\alpha)$ の座標関数である．このとき

- 集合 TM
- TM の部分集合族 $\left\{\pi^{-1}(U_\alpha)\right\}_{\alpha\in\Lambda}$
- 写像の族 $\left\{\tilde{\varphi}_\alpha\right\}_{\alpha\in\Lambda}$

の 3 つ組が補題 1.1 の 5 条件を充たすことを確認する．

(DS-1) $\forall\alpha \in \Lambda$ に対して $(U_\alpha,\ \varphi_\alpha)$ は M の C^∞ チャートなので $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である．ゆえに積位相の定義から $\tilde{\varphi}_\alpha\big(\pi^{-1}(U_\alpha)\big) = \varphi_\alpha(U_\alpha)\times\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ は $\mathbb{R}^{2n}$ の開集合．また，写像

$$\tilde{\varphi}_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha)\times\mathbb{R}^n,\ \left(p,\ v^\mu \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p\right) \longmapsto \left(x^1(p),\ \dots,\ x^n(p),\ v^1,\ \dots,\ v^n\right)$$

は写像

$$\tilde{\varphi_\alpha}^{-1}\colon \varphi_\alpha(U_\alpha)\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha),\ \left(x^1,\ \dots,\ x^n,\ v^1,\ \dots,\ v^n\right) \longmapsto \left(\varphi_\alpha^{-1}(x^1,\ \dots,\ x^n),\ v^\mu \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\varphi_\alpha^{-1}(x^1,\ \dots,\ x^n)}\right)$$

を逆写像に持つので全単射である．

(DS-2, 3) $\forall\alpha,\ \beta\in\Lambda$ に対して

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_\alpha\big(\pi^{-1}(U_\alpha)\cap\pi^{-1}(U_\beta)\big) &= \varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{R}^n,\\ \tilde{\varphi}_\beta\big(\pi^{-1}(U_\alpha)\cap\pi^{-1}(U_\beta)\big) &= \varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{R}^n\end{aligned}$$

はどちらも $\mathbb{R}^{2n}$ の開集合である．さらに自然基底の変換則より

$$\begin{aligned}&\tilde{\varphi}_\beta \circ \tilde{\varphi}_\alpha^{-1}(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n) \\ &= \left(y^1(x), \dots, y^n(x), \frac{\partial y^1}{\partial x^\mu}(x) v^\mu, \dots, \frac{\partial y^n}{\partial x^\mu}(x) v^\mu \right)\end{aligned}$$

なので $\tilde{\varphi}_\beta \circ \tilde{\varphi}_\alpha^{-1}$ は C^∞ 級である．ただしチャート $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)$ の座標関数をそれぞれ $(x^\mu), (y^\mu)$ と書き，$x \coloneqq \varphi_\alpha^{-1}(x^1, \dots, x^n)$ とおいた．

(DS-4) $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ は M のアトラスなので，可算濃度の部分集合 $I \subset \Lambda$ が存在して $\{U_i\}_{i \in I}$ が M の被覆になる．このとき

$$TM = \coprod_{p \in \bigcup_{i \in I} U_i} T_p M = \bigcup_{i \in I} \coprod_{p_i \in U_i} T_{p_i} M = \bigcup_{i \in I} \pi^{-1}(U_i)$$

が言える．

(DS-5) TM の任意の異なる 2 点 $(p, v), (q, w)$ をとる．$p = q$ ならば，$p \in U_\alpha$ を充たす $\alpha \in \Lambda$ に対して[*3] $(p, v), (q, w) \in \pi^{-1}(\{p\}) \subset \pi^{-1}(U_\alpha)$ が成り立つ．$p \neq q$ ならば，$U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ かつ $p \in U_\alpha, q \in U_\beta$ を充たすような $\alpha, \beta \in \Lambda$ が存在する[*4]．このとき，TM の定義から明らかに $\pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta) = \emptyset$ でかつ $(p, v) \in \pi^{-1}(U_\alpha), (q, w) \in \pi^{-1}(U_\beta)$ が成り立つ．

■

1.2 ベクトル場の定義

定義 1.1: ベクトル場

境界あり/なし C^∞ 多様体 M を与える．

- M 上の**ベクトル場** (vector field) とは，接束 TM の切断のことを言う．i.e. 連続写像[a] $X\colon M \longrightarrow TM$ であって $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$ を充たすもののこと．
- M 上の $\boldsymbol{C^\infty}$ **ベクトル場**とは，M 上のベクトル場 X であって，TM に命題 1.1 の C^∞ 構造を入れたときに C^∞ 写像となるもののこと．
- M 上のベクトル場 X の**台** (support) とは，閉集合[b]

$$\textbf{supp}\,\boldsymbol{X} \coloneqq \overline{\{ p \in M \mid X_p \neq 0 \}}$$

のこと．ただし $\overline{\cdot}$ は閉包を取ることを意味する．特に $\mathrm{supp}\,X$ がコンパクト集合であるとき，X は**コンパクト台を持つ** (compactly supported) と言う．
- M の任意のベクトル場 X および任意のチャート $(U, (x^\mu))$ を与える．このとき n 個の関数 $X^\mu\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$X_p \eqqcolon \boldsymbol{X^\mu(p)} \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p$$

によって定義し，X の**成分関数** (component function) と呼ぶ．

[*3] $\{U_\alpha\}$ は M の開被覆なので，このような α は必ず存在する．
[*4] M の極大アトラスをとっているため．

[a] TM の位相は命題 1.1 で構成したものを採用する．

[b] ここで言う 0 とは，厳密には $(p,\,0)\in TM$ のことである．一点集合 $\{(p,\,0)\}$ はコンパクトだが，TM は命題 1.1 より Hausdorff 空間なので $\{\,(p,\,0)\,\}$ は閉集合でもある．故に $TM\setminus\{(p,\,0)\}$ は開集合であり，$X\colon M\longrightarrow TM$ は連続写像なので $X^{-1}(TM\setminus\{0\})$ も開集合である．これの閉包を取ることで $\operatorname{supp}X$ が得られる．

境界あり/なし C^∞ 多様体 M 上の C^∞ ベクトル場全体の集合を $\boldsymbol{\mathfrak{X}(M)}$ と書く．

! ベクトル場 $X\colon M\longrightarrow TM$ による点 $p\in M$ の像を $X(p)$ と書く代わりに $\boldsymbol{X_p}$ と書く．さらに，混乱の恐れがないときは $X_p=(p,\,v)\quad(v\in T_pM)$ のとき v のことを X_p と書く場合がある．

命題 1.2: ベクトル場の C^∞ 性

境界あり/なし C^∞ 多様体 M と M の任意の C^∞ チャート $(U,\,(x^\mu))$ と M 上のベクトル場 X を与える．このとき，制限 $X|_U$ が C^∞ ベクトル場となる必要十分条件は X の U 上の成分関数が全て C^∞ 関数になることである．

証明 命題 1.1 の証明における TM の C^∞ チャートの構成より明らか． ■

【例 1.2.1】座標ベクトル場

C^∞ 多様体 M の任意のチャート $\bigl(U,\,(x^\mu)\bigr)$ に対して，写像

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\colon U\longrightarrow TM,\ p\longmapsto\left(p,\ \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p\right)$$

は U 上の C^∞ ベクトル場となる．C^∞ 性は，成分関数が $p\longmapsto\delta^\nu_\mu$ なる定数関数なので命題 1.2 から従う．

命題 1.3: $\mathfrak{X}(M)$ の加群としての構造

- $\mathfrak{X}(M)$ 上の加法とスカラー乗法を

$$\begin{aligned}(X+Y)_p &:= (p,\,X_p+Y_p)\\ (\lambda X)_p &:= (p,\,\lambda X_p)\end{aligned}$$

  と定義すると $\mathfrak{X}(M)$ は $\mathbb{R}$ ベクトル空間になる．
- $\mathfrak{X}(M)$ 上の $C^\infty(M)$ に関する加法とスカラー乗法を

$$\begin{aligned}(X+Y)_p &:= (p,\,X_p+Y_p)\\ (fX)_p &:= (p,\,f(p)X_p)\end{aligned}$$

  と定義すると $\mathfrak{X}(M)$ は左 $C^\infty(M)$ 加群になる．

証明 命題 1.2 および $C^\infty(M)$ が和と積

$$(f+g)(p) := f(p) + g(p)$$
$$(fg)(p) := f(p)g(p)$$

に関して環になることから従う．加法単位元はどちらの場合も関数 $p \longmapsto (p, 0)$ である． ■

さらに，後で述べるが，$\mathfrak{X}(M)$ は Lie ブラケットについて Lie 代数をなす．

定義 1.2: フレーム

n 次元 C^∞ 多様体 M を与える．

- ベクトル場[a]の順序付き k 対 $(X_1, \dots, X_k)$ が部分集合 $A \subset M$ 上**線型独立** (linearly independent) であるとは，$\forall p \in A$ において $(X_1|_p, \dots, X_k|_p)$ が $\mathbb{R}$ ベクトル空間 T_pM の元として線型独立であることを言う．
- M の開集合 $U \subset M$ 上の**局所フレーム** (local frame) とは，U 上線型独立なベクトル場[b]の n 対 $(E_1, \dots, E_n)$ であって，$\forall p \in U$ において $(E_1|_p, \dots, E_n|_p)$ が T_pM の基底となるもののこと．
- $U = M$ 上の局所フレームのことを**大域的フレーム** (global frame) と呼ぶ．
- 局所フレーム $(E_1, \dots, E_n)$ であって E_i が C^∞ ベクトル場であるもののことを $\boldsymbol{C^\infty}$ **フレーム** (smooth frame) と呼ぶ．

[a] C^∞ とは限らない

[b] C^∞ とは限らない

定義 1.3: 平行化可能性

n 次元 C^∞ 多様体 M が C^∞ の大域的フレームを持つとき，M は**平行化可能** (parallelizable) であると言う．

1.2.1 C^∞ 関数の微分としてのベクトル場

ベクトル場の定義に $C^\infty(M)$ に作用する微分作用素としての意味を持たせることができる．これによって，微分方程式とベクトル場の繋がりが明らかになる．

任意の M 上のベクトル場 X および M の開集合 $U \subset M$ 上定義された任意の C^∞ 関数 $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ を与える．このとき関数[*5]

$$Xf\colon U \longrightarrow \mathbb{R},\ p \longmapsto X_p f$$

を考えることができる．

[*5] この時点では C^∞ とは限らない．

命題 1.4: ベクトル場の C^∞ 性

境界あり/なし C^∞ 多様体 M と M の任意の C^∞ チャート $(U, (x^\mu))$ と M 上のベクトル場 X を与える．このとき以下の 3 つは同値である：

(1) X は C^∞ ベクトル場
(2) $\forall f \in C^\infty(M)$ に対して，関数 $Xf\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ は M 上 C^∞ 級である．
(3) 任意の開集合 $U \subset M$ および任意の $f \in C^\infty(U)$ に対して，関数 $Xf\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ は U 上 C^∞ 級である．

証明 [?, p.180, Proposition 8.14] を参照． ■

命題 1.4 より，$\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ は線型写像

$$X\colon C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M),\ f \longmapsto Xf$$

を誘導することが分かった．その上，接空間の元の Leibniz 則から

$$X(fg) = f\,Xg + g\,Xf$$

が成り立つこともわかる．このことから $\mathbb{R}$-線型写像 $X\colon C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ は**微分** (derivation) である．逆に，$C^\infty(M)$ に作用する任意の微分は次の意味であるベクトル場と同一視できる：

命題 1.5: 微分とベクトル場

写像 $D\colon C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ を与える．このとき以下の 2 つは同値である：

(1) D は微分である，i.e. $\mathbb{R}$-線型写像でかつ Leibniz 則を充たす．
(2) ある $X \in \mathfrak{X}(M)$ が存在して，$\forall f \in C^\infty(M)$ に対して $D(f) = Xf$ が成り立つ．

証明 (1) $\Longleftarrow$ (2) は既に示したので (1) $\Longrightarrow$ (2) を示す．
まず，写像

$$X\colon p \longmapsto \bigl(f \longmapsto D(f)(p)\bigr)$$

がベクトル場であることを示す．そのためには $\forall p \in M$ に対して $X_p \in T_pM$ であること，i.e. $X(p)$ が $\forall f,\, g \in C^\infty(M),\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} X_p(f+g) &= X_p(f) + X_p(g) \\ X_p(\lambda f) &= \lambda X_p(f) \\ X_p(fg) &= X_p(f)\,g(p) + f(p)\,X_p(g) \end{aligned}$$

を充たすことを示せば良いが，$D\colon C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ が微分であることからこれらは明らかである．D の定義から $\forall f \in C^\infty(M)$ に対して $Xf = Df \in C^\infty(M)$ なので，命題 1.4 から $X \in \mathfrak{X}(M)$ も言える． ■

1.2.2 ベクトル場と C^∞ 写像

$M,\, N$ を C^∞ 多様体，$F\colon M \longrightarrow N$ を C^∞ 写像とする．このとき F によって $\mathfrak{X}(M)$ と $\mathfrak{X}(N)$ の間の自然な対応が生まれる場合がある[*6]ことを見る．

まず，接ベクトルの微分を思いだそう．これは $\forall p \in M$ に対して定まる

$$T_pF\colon T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N,\ v \longmapsto \bigl(f \mapsto v(f \circ F)\bigr)$$

という対応であり，基点付き C^∞ 多様体の圏 $\mathbf{Diff}_0$ から $\mathbb{R}$-ベクトル空間の圏 $\mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$ への関手

$$T_p\colon \mathbf{Diff}_0 \longrightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$$

を構成するのだった．

定義 1.4: F-related

境界あり/なし C^∞ 多様体 $M,\, N$ と C^∞ 写像 $F\colon M \longrightarrow N$ を与える．
M 上のベクトル場[a] X と N 上のベクトル場[b] Y が ***F*-related** であるとは，$\forall p \in M$ に対して

$$T_pF(X_p) = Y_{F(p)}$$

が成り立つことと定義する．

[a] C^∞ でなくとも良い．
[b] C^∞ でなくとも良い．

【例 1.2.2】

C^∞ 写像 $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (\cos t,\, \sin t)$ を考える．このとき，$\mathbb{R}$ のチャート $\bigl(\mathbb{R},\, (t)\bigr)$ による座標ベクトル場

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$$

は，$\mathbb{R}^2$ のチャート $\bigl(\mathbb{R}^2,\, (x,\, y)\bigr)$ において

$$Y \coloneqq -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$$

と定義される[a] C^∞ ベクトル場 Y と F-related である．実際，$\forall t \in \mathbb{R}$ および $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ に対して

$$\begin{aligned}
T_tF\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_t\right)(f) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigl(f(\cos t,\, \sin t)\bigr) \\
&= \frac{\mathrm{d}(\cos t)}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial x}(\cos t,\, \sin t) + \frac{\mathrm{d}(\sin t)}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial y}(\cos t,\, \sin t) \\
&= -\sin t\,\frac{\partial f}{\partial x}\bigl(F(t)\bigr) + \cos t\,\frac{\partial f}{\partial y}\bigl(F(t)\bigr) \\
&= Y^1\bigl(F(t)\bigr)\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{F(t)}(f) + Y^2\bigl(F(t)\bigr)\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{F(t)}(f) \\
&= Y_{F(t)}(f)
\end{aligned}$$

[*6] しかし，いつでも自然に対応するとは限らない．

が成り立つ.

---

[a] 成分関数が それぞれ $Y^1\colon (x,\,y) \longmapsto -y,\ Y^2\colon (x,\,y) \longmapsto x$ だということ.

命題 1.6: F-related の特徴付け

境界あり/なし C^∞ 多様体 $M,\,N$ と C^∞ 写像 $F\colon M \longrightarrow N$ を与える.
$X \in \mathfrak{X}(M)$ と $Y \in \mathfrak{X}(N)$ が F-related である必要十分条件は, N の任意の開集合 $U \subset N$ に対して, $\forall f \in C^\infty(U)$ が

$$X(f \circ F) = (Yf) \circ F \in C^\infty(M)$$

を充たすことである.

証明 $\forall p \in M$ と, $F(p) \in N$ の任意の開近傍上で定義された任意の C^∞ 関数 f に対して

$$\begin{aligned} X(f \circ F)(p) &= X_p(f \circ F) = T_pF(X_p)(f), \\ \big((Yf) \circ F\big)(p) &= (Yf)\big(F(p)\big) = Y_{F(p)}(f) \end{aligned}$$

が成り立つ. ■

F-relrated なベクトル場は必ず存在するとは限らない.

命題 1.7: C^∞ ベクトル場の押し出し

$F\colon M \longrightarrow N$ が微分同相写像ならば, $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して F-related な $Y \in \mathfrak{X}(N)$ が一意的に存在する.

証明 図式

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "X"] \arrow[d, "F"'] & TM \arrow[d, "T_pF"] \\ N \arrow[r, dashed] & TN \end{tikzcd}$$

において $p = F^{-1}(q)$ とすることで,

$$Y\colon N \longrightarrow TN,\ q \longmapsto \Big(q,\, T_{F^{-1}(q)}F\big(X_{F^{-1}(q)}\big)\Big)$$

が所望の $Y \in \mathfrak{X}(N)$ となる. ■

! 命題 1.7 で得られた Y は F による X の**押し出し** (pushforward) と呼ばれ, よく $\boldsymbol{F_*X}$ と略記される.

系 1.1: 押し出しの計算

$$\big((F_*X)f\big) \circ F = X(f \circ F)$$

1.2.3 Lie ブラケット

定義 1.5: Lie ブラケット

境界あり/なし C^∞ 多様体 M を与える．$\forall X,\, Y \in \mathfrak{X}(M)$ の **Lie ブラケット** (Lie bracket) とは，微分

$$[X,Y]\colon C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M),\ f \longmapsto X(Yf) - Y(Xf) \tag{1.2.1}$$

のことを言う．

微分 $[X,Y]$ を命題 1.5 の意味で C^∞ ベクトル場と見做したものも $[X,Y] \in \mathfrak{X}(M)$ と書く．

(1.2.1) の写像 $[X,Y]$ が微分であることを確認しておく．線形性はほぼ自明なので Leibniz 則を確認しよう：

$$\begin{aligned}
[X,Y](fg) &= X\bigl(Y(fg)\bigr) - Y\bigl(X(fg)\bigr) \\
&= X(f\,Yg + g\,Yf) - Y(f\,Xg + g\,Xf) \\
&= f\,XYg + \cancel{Yg\,Xf} + g\,XYf + \cancel{Yf\,Xg} - f\,YXg - \cancel{Xg\,Yf} - g\,YXf - \cancel{Xf\,Yg} \\
&= f\,([X,Y]g) + g\,([X,Y]f)
\end{aligned}$$

この途中式から，$f \longmapsto XYf$ が微分でないこともわかる．つまり，$\mathbb{R}$ ベクトル空間 $\mathfrak{X}(M)$（命題 1.3）の上に，$f \longmapsto XYf$ によって定義される新たな積演算を入れようとしても上手くいかない．その代わりに Lie ブラケットが必要なのである．

命題 1.8: $\mathfrak{X}(M)$ の Lie 代数としての構造

$\mathfrak{X}(M)$ 上の Lie ブラケットは以下を充たす：

(双線型性) $\forall a,\, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}
[aX + bY, Z] &= a[X,Z] + b[Y,Z], \\
[Z, aX + bY] &= a[Z,X] + b[Z,Y]
\end{aligned}$$

(反対称性)

$$[X,Y] = -[Y,X]$$

(Jacobi 恒等式)

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$$

従って，$\mathfrak{X}(M)$ は $[\ ,\ ]$ について無限次元実 Lie 代数をなす．

命題 1.9: Lie ブラケットの自然性

境界あり/なし C^∞ 多様体 M, N と C^∞ 写像 $F\colon M \longrightarrow N$ を与える．このとき，以下が成り立つ：

(1) $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ がそれぞれ $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$ と F-related ならば，$[X_1, X_2] \in \mathfrak{X}(M)$ も $[Y_1, Y_2] \in \mathfrak{X}(N)$ と F-related である．

(2) F が微分同相写像ならば，$\forall X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$F_*[X_1, X_2] = [F_*X_1, F_*X_2]$$

証明 (1) X_i と Y_i が F-related ならば，命題 1.6 より N の任意の開集合 $U \subset N$ に対して $\forall f \in C^\infty(U)$ が

$$\begin{aligned} X_1X_2(f \circ F) &= X_1\bigl(X_2(f \circ F)\bigr) = X_1\bigl((Y_2f) \circ F\bigr) = (Y_1Y_2f) \circ F \in C^\infty(M), \\ X_2X_1(f \circ F) &= X_2\bigl(X_1(f \circ F)\bigr) = X_2\bigl((Y_1f) \circ F\bigr) = (Y_2Y_1f) \circ F \in C^\infty(M) \end{aligned}$$

を充たす．従って

$$\begin{aligned} [X_1, X_2](f \circ F) &= X_1X_2(f \circ F) - X_2X_1(f \circ F) \\ &= (Y_1Y_2f) \circ F - (Y_2Y_1f) \circ F \\ &= ([Y_1, Y_2]f) \circ F \in C^\infty(M) \end{aligned}$$

が成り立つので，命題 1.6 より $[X_1, X_2] \in \mathfrak{X}(M)$ は $[Y_1, Y_2] \in \mathfrak{X}(N)$ と F-related である．

(2) F が微分同相写像ならば，押し出しの定義より $F_*X_i \in \mathfrak{X}(N)$ は X_i と F-related である．よって (1) から $[X_1, X_2] \in \mathfrak{X}(M)$ と $[F_*X_1, F_*X_2] \in \mathfrak{X}(N)$ は F-related だが，命題 1.7 より $[X_1, X_2] \in \mathfrak{X}(M)$ と F-related な N 上の C^∞ ベクトル場は $F_*[X_1, X_2] \in \mathfrak{X}(N)$ ただ一つであるから

$$F_*[X_1, X_2] = [F_*X_1, F_*X_2] \in \mathfrak{X}(N)$$

である．

■

1.3 積分曲線とフロー

1.3.1 積分曲線

定義 1.6: 積分曲線

境界あり/なし C^∞ 多様体 M を与える．M 上のベクトル場[a] X の**積分曲線** (integral curve) とは，C^∞ 曲線[b] $\gamma\colon J \longrightarrow M$ であって，任意の時刻 $t \in J$ において

$$\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}$$

を充たすもののことを言う．

[a] C^∞ とは限らない

[b] よって，$J \subset \mathbb{R}$ である．

チャート $(U, \varphi) = \bigl(U, (x^\mu)\bigr)$ を取り，γ を $\varphi \circ \gamma(t) =: \bigl(\gamma^1(t), \dots, \gamma^{\dim M}(t)\bigr)$ のように座標表示すると，

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{\mathrm{d}\gamma^\mu}{\mathrm{d}t}(t) \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\gamma(t)},$$
$$X_{\gamma(t)} = X^\mu\bigl(\gamma(t)\bigr) \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\gamma(t)}$$

と書ける．つまり，積分曲線とは連立常微分方程式系

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\gamma^1}{\mathrm{d}t}(t) &= X^1\bigl(\gamma^1(t), \dots, \gamma^{\dim M}(t)\bigr), \\
&\vdots \\
\frac{\mathrm{d}\gamma^{\dim M}}{\mathrm{d}t}(t) &= X^{\dim M}\bigl(\gamma^1(t), \dots, \gamma^{\dim M}(t)\bigr)
\end{aligned}$$

の解 $\bigl(\gamma^1(t), \dots, \gamma^{\dim M}(t)\bigr)$ のことである．

【例 1.3.1】

$\mathbb{R}^2$ のチャート $\bigl(\mathbb{R}^2, (x, y)\bigr)$ において

$$Y := -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$$

と定義される C^∞ ベクトル場 Y の積分曲線 $\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto \bigl(\gamma^1(t), \gamma^2(t)\bigr)$ は連立常微分方程式

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\gamma^1}{\mathrm{d}t}(t) &= -\gamma^2(t), \\
\frac{\mathrm{d}\gamma^2}{\mathrm{d}t}(t) &= \gamma^1(t),
\end{aligned}$$

の解であり，積分定数 $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ を用いて

$$\begin{aligned}
\gamma^1(t) &= a\cos t - b\sin t, \\
\gamma^2(t) &= a\sin t + b\cos t
\end{aligned}$$

と書ける．このように，初期条件を指定しない限り積分曲線は一意に定まらない．

命題 1.10: 積分曲線の存在

境界あり/なし C^∞ 多様体 M と，その上の C^∞ ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ を与える．$\forall p \in M$ に対して，ある $\varepsilon > 0$ と C^∞ 曲線 $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ が存在して初期条件 $\gamma(0) = p$ を充たす X の積分曲線になる．

証明 常微分方程式の解の存在定理から従う． ■

命題 1.11: 積分曲線の自然性

境界あり/なし C^∞ 多様体 M, N と C^∞ 写像 $F\colon M \longrightarrow N$ を任意に与える．このとき，$\forall X \in \mathfrak{X}(M)$, $\forall Y \in \mathfrak{X}(N)$ に対して以下の 2 つは同値である：

(1) X, Y が F-related

(2) $\gamma\colon J \longrightarrow M$ が X の積分曲線 $\implies$ $F \circ \gamma\colon J \longrightarrow N$ は Y の積分曲線

証明 **(1) $\Longrightarrow$ (2)**

X, Y が F-related であるとする．$\gamma\colon J \longrightarrow M$ を X の積分曲線とする．このとき N の C^∞ 曲線 $\sigma := F \circ \gamma\colon J \longrightarrow N$ は $\forall t \in J$ において

$$
\begin{aligned}
\dot{\sigma}(t) &= T_0(F \circ \gamma)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_t\right) \\
&= T_{\gamma(t)}F \circ T_0\gamma\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_t\right) \\
&= T_{\gamma(t)}F\bigl(\dot{\gamma}(t)\bigr) \\
&= T_{\gamma(t)}F\bigl(X_{\gamma(t)}\bigr) \\
&= Y_{F(\gamma(t))} \\
&= Y_{\sigma(t)}
\end{aligned}
$$

を充たすので Y の積分曲線である[*7]．

(1) $\Longleftarrow$ (2)

X の積分曲線 γ が与えられたとき $F \circ \gamma$ が Y の積分曲線になるとする．$\forall p \in M$ を 1 つとり，$\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ を初期条件 $\gamma(0) = p$ を充たす X の積分曲線とする．命題??によりこのような γ が少なくとも 1 つ存在する．このとき仮定より $F \circ \gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow N$ が初期条件 $(F \circ \gamma)(0) = F(p)$ を充たす Y の積分曲線となるので

$$
\begin{aligned}
Y_{F(p)} &= (F \dot{\circ} \gamma)(0) \\
&= T_0(F \circ \gamma)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right) \\
&= T_{\gamma(0)}F \circ T_0\gamma\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right) \\
&= T_{\gamma(0)}F\bigl(\dot{\gamma}(0)\bigr) \\
&= T_{\gamma(0)}F(X_{\gamma(0)}) \\
&= T_pF(X_p)
\end{aligned}
$$

が成り立つので X, Y は F-related である．

■

技術的な補題を示しておく：

[*7] 2 つ目の等号で接ベクトルの微分の関手性を使った

補題 1.2: 定義域の affine 変換

境界あり/なし C^∞ 多様体 M と，その上の C^∞ ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ を与える．
X の任意の積分曲線 $\gamma\colon J \longrightarrow M$ を与える．このとき以下が成り立つ：

(1) $\forall a \in \mathbb{R}$ に対して

$$\tilde{J} \coloneqq \left\{\, t \in \mathbb{R} \;\middle|\; at \in J \,\right\}$$

とおくと，C^∞ 曲線

$$\tilde{\gamma}\colon \tilde{J} \longrightarrow M,\ t \longmapsto \gamma(at)$$

は C^∞ ベクトル場 $aX \in \mathfrak{X}(M)$ の積分曲線である．

(2) $\forall b \in \mathbb{R}$ に対して

$$\widehat{J} \coloneqq \left\{\, t \in \mathbb{R} \;\middle|\; t + b \in J \,\right\}$$

とおくと，C^∞ 曲線

$$\widehat{\gamma}\colon \widehat{J} \longrightarrow M,\ t \longmapsto \gamma(t+b)$$

は C^∞ ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ の積分曲線である．

証明 (1) C^∞ 写像 $\mu_a\colon \tilde{J} \longrightarrow J,\ t \longmapsto at$ を考えると，$\tilde{\gamma} = \gamma \circ \mu_a$ である．よって $\forall t_0 \in \tilde{J}$ および点 $\tilde{\gamma}(t_0) \in M$ の任意の開近傍上で定義された C^∞ 関数 f に対してとても丁寧に計算すると[*8]

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\gamma}}(t_0)f &= T_{t_0}\tilde{\gamma}\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}\right) f = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} (f \circ \tilde{\gamma})(t) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} (f \circ \gamma \circ \mu_a)(t) \\
&= T_{t_0}(\gamma \circ \mu_a)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}\right) f = T_{\mu_a(t_0)}\gamma \circ T_{t_0}\mu_a \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}\right) f \\
&= aT_{at_0}\gamma\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=at_0}\right) f = a\dot{\gamma}(at_0)f = aX_{\gamma(at_0)}f = \bigl(aX_{\tilde{\gamma}(t_0)}\bigr)f
\end{aligned}$$

(2) C^∞ 写像 $\tau_b\colon \tilde{J} \longrightarrow J,\ t \longmapsto t+b$ を考えると，$\widehat{\gamma} = \gamma \circ \tau_b$ である．よって $\forall t_0 \in \widehat{J}$ および点 $\widehat{\gamma}(t_0) \in M$

[*8] $\mathbb{R}$ の チャート $(\tilde{J}, \mathrm{id}) = (\tilde{J}, t)$ から $(\tilde{J}, \mu_a) = (\tilde{J}, (s)) = (\tilde{J}, (at))$ への座標変換と見做して，$T_{t_0}\mu_a\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}\right) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t_0)\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=at_0} = a\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=at_0}$

の任意の開近傍上で定義された C^∞ 関数 f に対してとても丁寧に計算すると[*9]

$$
\begin{aligned}
\dot{\widehat{\gamma}}(t_0)f &= T_{t_0}\widehat{\gamma}\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}\right)f = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}(f\circ\widehat{\gamma})(t) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}(f\circ\gamma\circ\tau_b)(t) \\
&= T_{t_0}(\gamma\circ\tau_b)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}\right)f = T_{\tau_b(t_0)}\gamma\circ T_{t_0}\tau_b\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}\right)f \\
&= T_{t_0+b}\gamma\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0+b}\right)f = \dot{\gamma}(t_0+b)f = X_{\gamma(t_0+b)}f = X_{\widehat{\gamma}(t_0)}f
\end{aligned}
$$

■

1.3.2 フロー

定義 1.7: 大域的なフロー

C^∞ 多様体 M への Lie 群[a] $\mathbb{R}$ の左作用

$$\theta\colon \mathbb{R}\times M \longrightarrow M$$

のことを M 上の**大域的フロー** (global flow) と呼ぶ.

[a] $\mathbb{R}$ を加法に関して群と見做す.

大域的フロー $\theta\colon \mathbb{R}\times M \longrightarrow M$ が与えられたとき,

- $\forall t\in\mathbb{R}$ に対する連続写像 $\boldsymbol{\theta_t}\colon M\longrightarrow M$ を $\theta_t(q) := \theta(t,\,q)$ により定める.
- $\forall p\in M$ に対する連続曲線 $\boldsymbol{\theta^{(p)}}\colon \mathbb{R}\longrightarrow M$ を $\theta^{(p)}(s) := \theta(s,\,p)$ により定める.

命題 1.12: 大域的フローの無限小生成子

C^∞ 多様体 M 上の C^∞ 級の大域的フロー $\theta\colon \mathbb{R}\times M\longrightarrow M$ を与える. M 上のベクトル場

$$V\colon M\longrightarrow TM,\ p\longmapsto \left(p,\,\dot{\theta^{(p)}}(0)\right)$$

のことを θ の**無限小生成子** (infinitesimal generator) と呼ぼう.
このとき $V\in\mathfrak{X}(M)$ であり, $\forall p\in M$ に対して C^∞ 曲線 $\theta^{(p)}\colon \mathbb{R}\longrightarrow M$ は V の積分曲線である.

証明 $V\in\mathfrak{X}(M)$ を示すには, 命題 1.4 より任意の開集合 $U\subset M$ 上定義された任意の C^∞ 関数 $f\in C^\infty(U)$ に対して $Vf\in C^\infty(U)$ であることを示せば良い. 実際このとき $\forall p\in U$ に対して

$$Vf(p) = V_pf = \dot{\theta^{(p)}}(0)f = T_0\theta^{(p)}\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right)f = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f\left(\theta^{(p)}(t)\right) = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{(0,\,p)} f\left(\theta(t,\,p)\right)$$

[*9] $\mathbb{R}$ のチャート $(\widehat{J},\,\mathrm{id}) = (\widehat{J},\,t)$ から $(\widehat{J},\,\tau_b) = (\widehat{J},\,(s)) = (\widehat{J},\,(t+b))$ への座標変換と見做して, $T_{t_0}\tau_a\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}\right) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t_0)\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t_0+b} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t_0+b}$

が成り立つ[*10]．$f\bigl(\theta(t,\,p)\bigr)$ は C^∞ 写像の合成なので $\mathbb{R}\times U$ 上 C^∞ 級であり，その任意の偏導関数もまた C^∞ 級となる．

次に $\forall p \in M$ を 1 つ固定する．このとき C^∞ 曲線 $\theta^{(p)}\colon \mathbb{R}\longrightarrow M$ が，初期条件 $\theta^{(p)}(0)=p$ を充たす V の積分曲線であることを示す．i.e. 示すべきは $\forall t\in\mathbb{R}$ に対して $\dot{\theta^{(p)}}(t)=V_{\theta^{(p)}(t)}$ が成り立つことである．$\forall t\in\mathbb{R}$ を 1 つ固定して $q:=\theta^{(p)}(t)$ とおくと，$\forall s\in\mathbb{R}$ に対して

$$\theta^{(q)}(s)=\theta_s(q)=\theta(s,\,\theta(t,\,p))=\theta(s+t,\,p)=\theta^{(p)}(s+t)$$

である．従って q の任意の開近傍上で定義された任意の C^∞ 関数 f に対して

$$V_q f=\dot{\theta^{(q)}}(0)f=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} f\bigl(\theta^{(q)}(s)\bigr)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} f\bigl(\theta^{(p)}(s+t)\bigr)=\dot{\theta^{(p)}}(t)f$$

が言える．これが示すべきことであった． ■

【例 1.3.2】

C^∞ 写像

$$\theta\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2,\ \bigl(t,\,(x,\,y)\bigr)\longmapsto\bigl(x\cos t-y\sin t,\,x\sin t+y\sin t\bigr)$$

は $\forall t,\,s\in\mathbb{R},\ \forall(x,\,y)\in\mathbb{R}^2$ に対して

$$\begin{aligned}
&\theta\bigl(0,\,(x,\,y)\bigr)=(x,\,y),\\
&\theta\Bigl(s,\,\theta\bigl(t,\,(x,\,y)\bigr)\Bigr)\\
&=\Bigl((x\cos t-y\sin t)\cos s-(x\sin t+y\cos t)\sin s,\\
&\qquad(x\cos t-y\sin t)\sin s+(x\sin t+y\cos t)\cos s\Bigr)\\
&=\bigl(x\cos(s+t)-y\sin(s+t),\,x\sin(s+t)+y\cos(s+t)\bigr)\\
&=\theta\bigl(s+t,\,(x,\,y)\bigr)
\end{aligned}$$

を充たすので，多様体 $\mathbb{R}^2$ 上の大域的フローである．このとき $\forall(a,\,b)\in\mathbb{R}^2$ に対して

$$\theta^{\bigl((a,\,b)\bigr)}(t)=\bigl(a\cos t-b\sin t,\,a\sin t+b\sin t\bigr)$$

であるから

$$\begin{aligned}
\dot{\theta^{\bigl((a,\,b)\bigr)}}(0)&=T_0\theta^{\bigl((a,\,b)\bigr)}\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right)\\
&=\frac{\mathrm{d}(a\cos t-b\sin t)}{\mathrm{d}t}(0)\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{\theta^{((a,\,b))}(0)}+\frac{\mathrm{d}(a\sin t+b\cos t)}{\mathrm{d}t}(0)\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{\theta^{((a,\,b))}(t)}\\
&=-b\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{(a,\,b)}+a\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{(a,\,b)}
\end{aligned}$$

と計算できる．つまり，θ の無限小生成子はベクトル場

$$-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$$

[*10] ややこしいが，C^∞ 曲線 $\gamma\colon I\longrightarrow M$ の微分 $\dot\gamma(t_0)$ は，厳密には $\mathbb{R}$ の接ベクトル $\left.\mathrm{d}/\mathrm{d}t\right|_{t_0}$ の微分 $T_{t_0}\gamma\bigl(\left.\mathrm{d}/\mathrm{d}t\right|_{t_0}\bigr)\in T_{\gamma(t_0)}M$ のことだった．

である．実際【例 1.3.1】より，ベクトル場 $-y\,\partial/\partial x + x\,\partial/\partial y$ の積分曲線は $\theta^{\left((a,\,b)\right)}(t)$ そのものである．特に，$(a,\,b)$ は初期条件を表している．

命題 1.12 の逆に，$\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ が M 上の何かしらの大域的フローの無限小生成子になっていると言いたくなるが，必ずしもそうではない．つまり，積分曲線が $\mathbb{R}$ のある部分集合上で定義できないような C^∞ ベクトル場が存在する．

【例 1.3.3】

$M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ とし，標準的なチャート $\bigl(M,\,(x,\,y)\bigr)$ を取る．【例 1.2.1】の座標ベクトル場 $V := \frac{\partial}{\partial x}$ を考えよう．初期条件 $\gamma(0) = (-1,\,0) \in M$ を充たす V の積分曲線 γ は，常微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}\gamma^1}{\mathrm{d}t}(t) = 1,$$
$$\frac{\mathrm{d}\gamma^2}{\mathrm{d}t}(t) = 0$$

を解くことで一意に $\gamma(t) := (t-1,\,0)$ と求まる．しかるに γ は $\mathbb{R}$ の点 $t = 1$ 上定義不能である．

定義 1.8: 局所的フロー

M を C^∞ 多様体とする．

- **フローの定義域** (flow domain) とは，開集合 $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times M$ であって，$\forall p \in M$ に対して集合

$$\mathcal{D}^{(p)} := \left\{\, t \in \mathbb{R} \;\middle|\; (t,\,p) \in \mathcal{D} \,\right\} \subset \mathbb{R}$$

  が 0 を含む開区間[a]となっているようなもののことを言う．
- M 上の**局所的フロー** (local flow) とは，フローの定義域を定義域にもつ連続写像

$$\theta \colon \mathcal{D} \longrightarrow M$$

  であって，$\forall p \in M$ に対して以下が成り立つもののこと：

  (LF-1)

$$\theta(0,\,p) = p$$

  (LF-2) $\forall s \in \mathcal{D}^{(p)},\ \forall t \in \mathcal{D}^{(\theta(s,\,p))}$ に対して，

$$s + t \in \mathcal{D}^{(p)} \quad \Longrightarrow \quad \theta\bigl(t,\,\theta(s,\,p)\bigr) = \theta(t+s,\,p)$$

- **極大積分曲線** (maximal integral curve) とは，積分曲線であって定義域をこれ以上大きな開区間に延長できないようなもののこと．**極大局所フロー** (maximal local flow) とは，これ以上フローの定義域を拡張できないような局所的フローのこと．

[a] この条件が命題 1.13 の証明の鍵となる．

局所的フロー $\theta\colon \mathcal{D} \longrightarrow M$ が与えられたとき，

- $\forall t \in \mathbb{R}$ に対して，M の部分集合 $\boldsymbol{M_t} \subset M$ を
$$\boldsymbol{M_t} := \left\{ p \in M \;\middle|\; (t,\, p) \in \mathcal{D} \right\}$$
と定める[a]．
- $\forall (t,\, p) \in \mathcal{D}$ に対する連続写像[b] $\boldsymbol{\theta_t}\colon M_t \longrightarrow M$ および連続曲線 $\boldsymbol{\theta^{(p)}}\colon \mathcal{D}^{(p)} \longrightarrow M$ をそれぞれ
$$\theta_t(q) := \theta(t,\, q),$$
$$\theta^{(p)}(s) := \theta(s,\, p)$$
により定める．

[a] $\mathcal{D}^{(p)}$ はフローの領域 $\mathcal{D}$ を，点 $(0,\, p)$ を通るように「横に切り」，M_t は「縦に切る」と言うイメージ．
[b] 極大局所フロー θ に関しては，θ_t の値域が実は M_{-t} であることが，定理 1.2-(2) によりわかる．

命題 1.13: 局所的フローの無限小生成子

C^∞ 多様体 M 上の C^∞ 級の局所的フロー $\theta\colon \mathcal{D} \longrightarrow M$ を与える．M 上のベクトル場
$$V\colon M \longrightarrow TM,\; p \longmapsto \left(p,\, \dot{\theta^{(p)}}(0)\right)$$
のことを[a] θ の**無限小生成子** (infinitesimal generator) と呼ぼう．
このとき $V \in \mathfrak{X}(M)$ であり，$\forall p \in M$ に対して C^∞ 曲線 $\theta^{(p)}\colon \mathcal{D}^{(p)} \longrightarrow M$ は V の積分曲線である．

[a] フローの定義域の定義から $M_0 = M$ であることに注意．このとき，接ベクトルの局所性から $\forall p \in M$ に対して $\dot{\theta^{(p)}}(0)$ が定義される．

証明 $V \in \mathfrak{X}(M)$ であることに関しては命題 1.12 の証明がそのまま適用できる．

$\forall p \in M$ を 1 つ固定する．$\forall t \in \mathcal{D}^{(p)}$ に対して，フローの定義域の定義より $\mathcal{D}^{(p)},\, \mathcal{D}^{\left(\theta^{(p)}(t)\right)} \subset \mathbb{R}$ はどちらも 0 を含む開区間であるから，十分小さい $\varepsilon > 0$ に対しては $(t-\varepsilon,\, t+\varepsilon) \subset \mathcal{D}^{(p)}$ かつ $(-\varepsilon,\, \varepsilon) \subset \mathcal{D}^{\left(\theta^{(p)}(t)\right)}$ が成り立つ．このとき $\forall s \in (-\varepsilon,\, \varepsilon) \subset \mathcal{D}^{\left(\theta^{(p)}(t)\right)}$ をとってくると $t + s \in (t-\varepsilon,\, t+\varepsilon) \subset \mathcal{D}^{(p)}$ であるから，局所的フローの定義の条件 **(LF-2)** より $\theta(s,\, \theta(t,\, p)) = \theta(s+t,\, p)$ が成り立つ．あとはこの s に対して命題 1.12 の証明を適用すれば良い． ■

極大局所フローに対しては命題 1.13 の逆も言える [?, p.212, Theorem 9.12]：

定理 1.2: フローの基本定理

M を境界なし C^∞ 多様体とする．$\forall V \in \mathfrak{X}(M)$ に対して，極大局所フロー $\theta\colon \mathcal{D} \longrightarrow M$ であって無限小生成子が V であるようなものが一意的に存在する．さらに，この θ は以下の性質をみたす：

(1) $\forall p \in M$ に対し，$\theta^{(p)}\colon \mathcal{D}^{(p)} \longrightarrow M$ は初期条件 $\theta^{(p)}(0) = p$ を充たす V の唯一の極大積分曲線である．

(2)

$$s \in \mathcal{D}^{(p)} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{D}^{(\theta(s,\, p))} = \left\{\, t - s \;\middle|\; t \in \mathcal{D}^{(p)} \,\right\} =: \mathcal{D}^{(p)} - s$$

(3) $\forall t \in \mathbb{R}$ に対して，集合 M_t は M の開集合であり，連続写像 $\theta_t \colon M_t \longrightarrow M_{-t}$ は θ_{-t} を逆にもつ微分同相写像である．

上述の極大局所フロー θ のことを，**V によって生成されたフロー** (flow generated by V) と呼ぶ．

証明 $\forall V \in \mathfrak{X}(M)$ を 1 つ固定する．

定義域を共有する 2 つの積分曲線が交差しないこと

命題 1.10 より，$J \subset \mathbb{R}$ を開区間として，V の積分曲線 $\gamma,\, \tilde{\gamma} \colon J \longrightarrow M$ をとることができる．ここで，ある $t_0 \in J$ において $\gamma(t_0) = \tilde{\gamma}(t_0)$ であると仮定する[*11]．このとき $\gamma = \tilde{\gamma}$ でなくてはならないことを示そう．

部分集合 $\mathcal{S} \subset J$ を

$$\mathcal{S} := \left\{\, t \in J \;\middle|\; \gamma(t) = \tilde{\gamma}(t) \,\right\}$$

と定義する．示すべきは $\mathcal{S} = J$ である．仮定より $t_0 \in \mathcal{S}$ なので $\mathcal{S}$ は空でない．また，積多様体 $M \times M$ 上の連続曲線 $\alpha \colon J \longrightarrow M \times M$ を $\alpha(t) := \bigl(\gamma(t),\, \tilde{\gamma}(t)\bigr)$ と定義すると，M の部分空間 $\Delta := \left\{\, (p,\, p) \in M \times M \,\right\}$ を使って $\mathcal{S} = \alpha^{-1}(\Delta)$ と書けるが，任意の C^∞ 多様体が Hausdorff 空間であることから Δ は閉集合であり[*12]，α が連続写像なので $\mathcal{S}$ も J の閉集合であることがわかる．一方で $\forall t_1 \in \mathcal{S}$ をとると，積分曲線の定義から $\gamma,\, \tilde{\gamma}$ は点 $\gamma(t_1) \in M$ を含むある C^∞ チャートの上の同一の常微分方程式の解であり，かつ初期条件 $\gamma(t_1) = \tilde{\gamma}(t_1)$ を充たす．故に常微分方程式の解の一意性から，ある t_1 を含む開区間 $I_{t_1} \subset \mathbb{R}$ 上で $\gamma|_{I_{t_1}} = \tilde{\gamma}|_{I_{t_1}}$ が成り立つ．i.e. $t_1 \in I_{t_1} \cap J \subset \mathcal{S}$ で，$t_1 \in \mathcal{S}$ は任意だったので $\mathcal{S}$ は J の開集合でもある．さらに J は連結なので，$J = \mathcal{S}$ が示された[*13]

極大局所フロー $\theta \colon \mathcal{D} \longrightarrow M$ の構成

$\forall p \in M$ を 1 つ固定する．初期条件 $\gamma(0) = p$ を充たす[*14] V の積分曲線 $\gamma \colon J_\gamma \longrightarrow M$ 全体の集合を $\mathcal{I}^{(p)}$ とおき，

$$\mathcal{D}^{(p)} := \bigcup_{\gamma \in \mathcal{I}^{(p)}} J_\gamma$$

と定義する．先述の議論から M の C^∞ 曲線

$$\theta^{(p)} \colon \mathcal{D}^{(p)} \longrightarrow M,\; t \longmapsto \Bigl(\gamma(t) \;\; \text{s.t.}\; \gamma \in \mathcal{I}^{(p)} \;\; \text{かつ} \;\; t \in J_\gamma\Bigr)$$

は well-defined であり，かつその構成から明らかに初期条件 $\theta^{(p)}(0) = p$ を充たす唯一の極大積分曲線である．

[*11] 時刻 $t_0 \in J$ において 2 つの積分曲線 $\gamma,\, \tilde{\gamma}$ が交差するということ．

[*12] $(M \times M) \setminus \Delta$ が開集合である $\iff$ $\forall (p,\, q) \in (M \times M) \setminus \Delta$ に対して $p,\, q \in M$ の開近傍 $p \in U \subset M,\; q \in V \subset M$ が存在して $U \times V \subset (M \times M) \setminus \Delta$ を充たす $\iff$ $\forall (p,\, q) \in (M \times M) \setminus \Delta$ に対して $p,\, q \in M$ の開近傍 $p \in U \subset M,\; q \in V \subset M$ が存在して $U \cap V = \emptyset$ を充たす $\iff$ M が Hausdorff 空間である

[*13] $\mathcal{S} \subset J$ が開かつ閉なので $J \setminus \mathcal{S} \subset J$ は開集合であり，$J = \mathcal{S} \cup (J \setminus \mathcal{S})$ かつ $\mathcal{S} \cap (J \setminus \mathcal{S}) = \emptyset$ が成り立つ．J は連結なので $\mathcal{S},\, J \setminus \mathcal{S}$ のどちらかが空でなくてはならないが $\mathcal{S} \neq \emptyset$ だったので $J \setminus \mathcal{S} = \emptyset$ $\iff$ $J = \mathcal{S}$ が言えた．

[*14] 従って $0 \in J_\gamma$ とする．

$p \in M$ は任意だったので，ここで

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{D} \coloneqq \left\{\, (t,\, p) \in \mathbb{R} \times M \;\middle|\; t \in \mathcal{D}^{(p)} \,\right\}, \\
&\theta \colon \mathcal{D} \longrightarrow M,\ (t,\, p) \longmapsto \theta^{(p)}(t)
\end{aligned}
$$

と定義する．これが局所フローの定義の条件 **(LF-1)**, **(LF-2)** を充たすことを確認する．

(LF-1)　構成より明らか．

(LF-2)　$\forall p \in M,\ \forall s \in \mathcal{D}^{(p)}$ をとり，$q \coloneqq \theta(s,\, p)$ とおく．このとき $\forall t \in \mathcal{D}^{(p)} - s$ に対して $s + t \in \mathcal{D}^{(p)}$ が成り立つ．ここで，C^∞ 曲線

$$\gamma \colon \mathcal{D}^{(p)} - s \longrightarrow M,\ t \longmapsto \theta(t + s,\, p) = \theta^{(p)}(t + s)$$

は補題 1.2-(2) より初期条件 $\gamma(0) = q$ を充たす V の積分曲線であるが，常微分方程式の解の一意性から $\gamma = \theta^{(q)}|_{\mathcal{D}^{(p)} - s}$ が成り立つ．あとは $\mathcal{D}^{(p)} - s = \mathcal{D}^{(q)}$ を示せば，$\forall t \in \mathcal{D}^{(q)}$ に対して

$$\theta\bigl(t,\, \theta(s,\, p)\bigr) = \theta(t,\, q) = \theta^{(q)}(t) = \gamma(t) = \theta(t + s,\, p)$$

となって **(LF-2)** の証明が完了する．

　$\theta^{(q)}$ が極大積分曲線なので $\mathcal{D}^{(p)} - s \subset \mathcal{D}^{(q)}$ が言える．$\mathcal{D}^{(p)} - s \supset \mathcal{D}^{(q)}$ を示そう．まず $0 \in \mathcal{D}^{(p)}$ なので $-s \in \mathcal{D}^{(p)} - s \subset \mathcal{D}^{(q)}$ が言える．従って $\theta(-s,\, q) = \theta^{(q)}(-s) = \gamma(-s) = \theta^{(p)}(0) = p$ であり，$\forall t \in \mathcal{D}^{(q)} + s$ に対して $-s + t \in \mathcal{D}^{(p)}$ が成り立つ．C^∞ 曲線

$$\gamma \colon \mathcal{D}^{(q)} + s \longrightarrow M,\ t \longmapsto \theta(t - s,\, q) = \theta^{(q)}(t - s)$$

は補題 1.2-(2) より初期条件 $\gamma(0) = p$ を充たす V の積分曲線なので，常微分方程式の解の一意性から $\gamma = \theta^{(p)}|_{\mathcal{D}^{(q)} + s}$ が言えて，$\theta^{(p)}$ の極大性から $\mathcal{D}^{(q)} + s \subset \mathcal{D}^{(p)} \iff \mathcal{D}^{(p)} - s \supset \mathcal{D}^{(q)}$ が示された．

$\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times M$ が開集合かつ θ が C^∞ 級

部分集合 $W \subset \mathcal{D}$ を

$$W \coloneqq \left\{ (t,\, p) \in \mathcal{D} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{以下を充たす開近傍 } (t, p) \in J \times U \subset \mathcal{D} \text{ が存在：} \\ \quad (1)\ J \subset \mathbb{R} \text{ は開区間で } 0, t \in J \\ \quad (2)\ U \subset M \text{ は } p \text{ の開近傍} \\ \quad (3)\ \theta|_{J \times U} \text{ が } C^\infty \text{ 級} \end{array} \right\}$$

と定義する．$W = \mathcal{D}$ を背理法により示す．まず $\exists (\tau,\, p_0) \in \mathcal{D} \setminus W$ を仮定する．常微分方程式の解の存在定理より $(0,\, p_0) \in W$ なので，$\tau > 0$ としよう．$\tau < 0$ のときも議論は全く同様である．

　$t_0 \coloneqq \sup\left\{\, t \in \mathbb{R} \;\middle|\; (t,\, p_0) \in W \,\right\}$ とする．このとき $0 < t_0 < \tau$ でかつ $0, \tau \in \mathcal{D}^{(p_0)}$ なので $t_0 \in \mathcal{D}^{(p_0)}$ が言える．$q_0 \coloneqq \theta^{(p_0)}(t_0)$ とおこう．常微分方程式の解の存在定理から，ある $\varepsilon > 0$ と q_0 の開近傍 $q_0 \in U_0 \subset M$ が存在して $(-\varepsilon,\, \varepsilon) \times U_0 \subset W$ となる．ここで $t_1 \in (t_0 - \varepsilon,\, t_0)$ を $\theta^{(p_0)}(t_1) \in U_0$ を充たすようにとる．このとき $t_1 < t_0$ なので $(t_1,\, p_0) \in W$ であり，故にある $\delta > 0$ と p_0 の開近傍 $p_0 \in U_1 \subset M$ が存在して $(t_1 - \delta,\, t_1 + \delta) \times U_1 \subset W$ となる．従って W の定義から，θ は $[0,\, t_1 + \delta) \times U_1$ 上で C^∞ 級である．$\theta(t_1,\, p_0) \in U_0$ なので，$\theta(\{t_1\} \times U_1) \subset U_0$ を充たすような U_1 をとることができる．さて，

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\theta} \colon [0,\, t_1 + \varepsilon) \times U_1 \longrightarrow M, \\
&\qquad (t,\, p) \longmapsto \begin{cases} \theta_t(p), & (t,\, p) \in [0,\, t_1) \times U_1 \\ \theta_{t - t_1} \circ \theta_{t_1}(p), & (t,\, p) \in (t_1 - \varepsilon,\, t_1 + \varepsilon) \times U_1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

と定義した写像 $\tilde{\theta}$ は，θ が条件 **(LF-2)** を充たすことから $(t_1-\varepsilon,\, t_1)\times U_1$ 上 $\theta_t(p)=\theta_{t-t_1}\circ\theta_{t_1}(p)$ となり well-defined で，かつ $U_1,\, t_1,\, \varepsilon$ の取り方から C^∞ 級である．その上 $\forall p\in U_1$ に対して C^∞ 曲線 $t\longmapsto\tilde{\theta}(t,\, p)$ は V の積分曲線なので，$\tilde{\theta}$ は $(t_0,\, p_0)\notin W$ への θ の C^∞ 級の延長である．しかるにこのことは t_0 の取り方に矛盾する．

(1) $\mathcal{D}^{(p)}$, $\theta^{(p)}$ の構成から明らか．

(2) **(LF-2)** の確認で示した．

(3) $\mathcal{D}$ が $\mathbb{R}\times M$ の開集合なので，$\forall t\in\mathbb{R}$ に対して $M_t\coloneqq\{\, p\in M \mid (t,\, p)\in\mathcal{D}\,\}$ は開集合である．[*15]．また，(2) から

$$
\begin{aligned}
p\in M_t &\implies t\in\mathcal{D}^{(p)}\\
&\implies \mathcal{D}^{(\theta_t(p))}=\mathcal{D}^{(p)}-t\\
&\implies -t\in\mathcal{D}^{(\theta_t(p))}\\
&\implies \theta_t(p)\in M_{-t}
\end{aligned}
$$

が言えるので $\theta_t(M_t)\subset M_{-t}$ である．さらに **(LF-2)** から $\theta_{-t}\circ\theta_t=\mathrm{id}_{M_t}$, $\theta_t\circ\theta_{-t}=\mathrm{id}_{M_{-t}}$ が言える．θ が C^∞ 級なので $\theta_t,\,\theta_{-t}$ も C^∞ 級であるから $\theta_t\colon M_t\longrightarrow M_{-t}$ は微分同相写像である．

■

定理 1.3: 境界付き多様体におけるフローの基本定理

M を境界付き多様体とし，$V\in\mathfrak{X}(M)$ は ∂M に接する[a]とする．このとき定理 1.2 と全く同じ結果が V に対して成り立つ．

[a] i.e. $\forall p\in\partial M$ において $V_p\in T_p(\partial M)\subset T_pM$ が成り立つ．

__証明__ [?, p.227, Theorem 9.34] ■

1.3.3 完備なベクトル場

定義 1.9: ベクトル場の完備性

C^∞ ベクトル場 $X\in\mathfrak{X}(M)$ が**完備** (complete) であるとは，それが大域的なフローを生成することを言う．

補題 1.3: uniform time lemma

C^∞ 多様体 M およびその上の C^∞ ベクトル場 $V\in\mathfrak{X}(M)$ を与える．$\theta\colon\mathcal{D}\longrightarrow M$ を V が生成するフローとする．

このとき，ある $\varepsilon>0$ が存在して $\forall p\in M$ に対して $(-\varepsilon,\,\varepsilon)\subset\mathcal{D}^{(p)}$ を充たすならば，V は完備である．

[*15] 写像 $\iota_t\colon M\longrightarrow\mathbb{R}\times M,\ p\longmapsto(t,\, p)$ は，開区間と開集合の直積 $J\times U\subset\mathbb{R}\times M$ に対して $t\in J$ なら $\iota_t^{-1}(J\times U)=U$, $t\notin J$ なら $\iota_t^{-1}(J\times U)=\emptyset$ となるので連続写像である．従って $M_t=\iota_t^{-1}(\mathcal{D})\subset M$ は M の開集合．

証明 主張の仮定が満たされているとする．このとき V が完備であることを背理法により示す．そのためにまずある $p \in M$ が存在して，$\mathcal{D}^{(p)}$ が上に有界であると仮定する．下に有界な場合も同様の議論ができる．

$b \coloneqq \sup \mathcal{D}^{(p)}$ とおき，$t_0 \in (b-\varepsilon,\, b)$ を 1 つとる．$q \coloneqq \theta^{(p)}(t_0)$ とおく．仮定より V の積分曲線 $\theta^{(p)}$ は少なくとも $(-\varepsilon,\, \varepsilon)$ 上では定義されている．ここで C^∞ 曲線

$$\gamma\colon (-\varepsilon,\, t_0+\varepsilon) \longrightarrow M,\ t \longmapsto \begin{cases} \theta^{(p)}(t), & t \in (-\varepsilon,\, b) \\ \theta^{(q)}(t-t_0), & t \in (t_0-\varepsilon,\, t_0+\varepsilon) \end{cases}$$

と定義すると，これは $\forall t \in (t_0-\varepsilon,\, b)$ に対して **(LF-2)** より $\theta^{(q)}(t-t_0) = \theta_{t-t_0}(q) = \theta(t-t_0) \circ \theta_{t_0}(p) = \theta_t(p) = \theta^{(p)}(t)$ が成り立つので well-defined である．特に補題 1.2-(2) より γ は初期条件 $\gamma(0)=p$ を充たす V の積分曲線なので $(-\varepsilon,\, t_0+\varepsilon) \subset \mathcal{D}^{(p)}$ ということになるが，$t_0+\varepsilon > b$ より b の取り方に矛盾する． ■

定理 1.4: コンパクト台を持つベクトル場は完備

C^∞ ベクトル場 X がコンパクト台を持つならば，X は完備である．

証明 [?, p.216, Theorem 9.16] ■

系 1.5: コンパクト多様体のベクトル場は完備

コンパクトな C^∞ 多様体上の任意の C^∞ ベクトル場は完備である．

定理 1.6: Lie 群の左不変ベクトル場は完備

Lie 群 G を与える．このとき $\forall X \in \mathfrak{X}^L(G)$ は完備である．

証明 左不変ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(G)$ の定義は，$\forall g \in G$ に対して X が自分自身と L_g-related であることだった．

さて，$\theta\colon \mathcal{D} \longrightarrow G$ を X が生成するフローとする．このとき $\theta^{(1_G)}\colon \mathcal{D}^{(1_G)} \longrightarrow G$ に関して $\mathcal{D}^{(1_G)}$ は開区間なので，十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して $(-\varepsilon,\, \varepsilon) \subset \mathcal{D}^{(1_G)}$ を充たすようにできる．

$\forall g \in G$ を 1 つとる．X は自分自身と L_g-related なので，命題 1.11 より $L_g \circ \theta^{(1_g)}\colon \mathcal{D}^{(}1_G) \longrightarrow G$ は初期条件 $(L_g \circ \theta^{(1_G)})(0) = g$ を充たす X の積分曲線である．よって定理 1.2-(1) から，少なくとも $(-\varepsilon,\, \varepsilon)$ 上で $\theta^{(g)} = L_g \circ \theta^{(1_G)}$ が言える．i.e. $(-\varepsilon,\, \varepsilon) \subset \mathcal{D}^{(g)}$ であるから，補題 1.3 から X は完備である． ■

1.4 Lie 微分

Euclid 空間 $\mathbb{R}^d$ の点 $p \in \mathbb{R}^d$ におけるベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^d)$ の方向微分とは，数ベクトル $v \in \mathbb{R}^d$ を一つ指定して

$$D_v X(p) \coloneqq \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right| X_{p+tv} = \lim_{t\to 0} \frac{X_{p+tv} - X_p}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{X^\mu(p+tv) - X^\mu(p)}{t} \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p \tag{1.4.1}$$

と定義するのが妥当だろう．しかし，この定義は $\mathbb{R}^d$ が $\mathbb{R}$-ベクトル空間であることを使ってしまっており，一般の C^∞ 多様体 M 上で同じことをやろうとしても上手くいかない．この問題を，ベクトル場の積分曲線を使って上手く解決したものが **Lie 微分**である．

定義 1.10: ベクトル場の Lie 微分

境界あり/なし C^∞ 多様体 M を与える．
ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ の，$\boldsymbol{V} \in \mathfrak{X}(M)$ **に沿った Lie 微分** (Lie derivative of X with respect to V) とは，$\forall p \in M$ において

$$(\mathcal{L}_{\boldsymbol{V}} X)_p \coloneqq \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} T_{\theta_t(p)}(\theta_{-t})(X_{\theta_t(p)}) \\ = \lim_{t\to 0} \frac{T_{\theta_t(p)}(\theta_{-t})(X_{\theta_t(p)}) - X_p}{t}$$

と定義される C^∞ ベクトル場 $\boldsymbol{\mathcal{L}_V X} \in \mathfrak{X}(M)$ のこと．ただし θ は V が生成するフローである．

命題 1.14:

境界あり/なし C^∞ 多様体 M と，その上の C^∞ ベクトル場 $V, X \in \mathfrak{X}(M)$ を与える．もし $\partial M \neq \emptyset$ のときは V は ∂M に接する[a]とする．
このとき，$\forall p \in M$ において接ベクトル $(\mathcal{L}_V X)_p \in T_pM$ が存在し，$\mathcal{L}_V X$ は C^∞ ベクトル場になる．

[a] i.e. $\forall p \in \partial M$ において $V_p \in T_p(\partial M) \subset T_pM$ が成り立つ．

<u>**証明**</u> $\mathfrak{D}$ をフローの定義域，$\theta\colon \mathcal{D} \longrightarrow M$ を V が生成するフローとする．$\forall p \in M$ を 1 つ固定し，p を含む M のチャート $(U, \varphi) = \big(U, (x^\mu)\big)$ をとる．開区間 $0 \in J_0 \subset \mathbb{R}$ と開集合 $p \in U_0 \subset U$ を，$J_0 \times U_0 \subset \mathcal{D}$ でかつ $\theta(J_0 \times U_0) \subset U$ を充たすようにとる[*16]．このとき $\forall t \in J_0$ および $\forall f \in C^\infty(U_0)$ に対して

$$\begin{aligned}
T_{\theta_t(p)}(\theta_{-t})(X_{\theta_t(p)})f &= X_{\theta_t(p)}(f \circ \theta_{-t}) \\
&= X^\mu(\theta_t(p)) \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\theta_t(p)} (f \circ \theta_{-t}) \\
&= X^\mu(\theta_t(p)) \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\varphi(\theta_t(p))} (f \circ \theta_{-t} \circ \varphi^{-1}) \\
&= X^\mu(\theta_t(p)) \left.\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right|_{\varphi(\theta_{-t}(\theta_t(p)))} (f \circ \varphi^{-1}) \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\varphi(\theta_t(p))} (x^\nu \circ \theta_{-t} \circ \varphi^{-1}) \\
&= X^\mu(\theta_t(p)) \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\varphi(\theta_t(p))} (x^\nu \circ \theta_{-t} \circ \varphi^{-1}) \left.\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi^{-1}) \\
&= \left(X^\mu(\theta_t(p)) \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\varphi(\theta_t(p))} (x^\nu \circ \theta_{-t} \circ \varphi^{-1}) \left.\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right|_p \right) f
\end{aligned}$$

と計算できる．$X^\mu\colon M \longrightarrow \mathbb{R},\ \theta_t\colon M_t \longrightarrow M_{-t},\ x^\nu \circ \theta_{-t} \circ \varphi^{-1}\colon \mathbb{R}^{\dim M} \longrightarrow \mathbb{R}$ の全てが C^∞ 写像なので $\left.\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right|_p \in T_pM$ の係数は $p \in U_0$ に関して C^∞ 級である．よって命題 1.2 から写像 $M \longrightarrow T_pM,\ p \longmapsto T_{\theta_t(p)}(\theta_{-t})(X_{\theta_t(p)})$ は C^∞ 級ベクトル場であり[*17]，示された． ■

[*16] θ は C^∞ 写像なのでこのような J_0, U_0 をいつでもとることができる．
[*17] 従って $X_p \in T_pM$ との差をとることができる．

【例 1.4.1】

$M=\mathbb{R}^d$ とし，M のチャート $\bigl(\mathbb{R}^d,\,(x^\mu)\bigr)$ をとる．このとき C^∞ ベクトル場

$$V := v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \text{w/} \quad v^\mu = \mathrm{const}.$$

の生成するフローは

$$\theta\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d,\ \bigl(t,\,(p^1,\,\dots,\,p^d)\bigr) \longmapsto (p^1+v^1t,\,\dots,\,p^d+v^dt)$$

と書ける．故に，$X\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ の V に沿った Lie 微分は

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_V X)_p &= \lim_{t\to 0}\frac{T_{\theta_t(p)}(\theta_{-t})(X_{\theta_t}(p)) - X_p}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{T_{p+vt}(\theta_{-t})(X_{p+vt}) - X_p}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(X^\mu(p+vt)\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu}(p+vt)\left.\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right|_p - X^\mu(p)\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p\right) \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{X^\mu(p+tv)-X^\nu(p)}{t}\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p \\
&= D_v X(p)
\end{aligned}$$

となって (1.4.1) を再現する．

定理 1.7: Lie 微分の計算

M を境界あり/なし C^∞ 多様体とする．このとき，$\forall V,\,X\in\mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\mathcal{L}_V X = [V, X]$$

が成り立つ．

証明 $\theta\colon \mathcal{D}\longrightarrow M$ を V が生成するフローとする．$\forall p\in M$ を 1 つ固定する．十分小さい t を取れば $(t,\,p)\in\mathcal{D}^{(p)}$ を充たすようにできる．このとき $\forall f\in C^\infty(M)$ に対して Taylor の定理から

$$f\circ\theta_t(p) = f\bigl(\theta^{(p)}(t)\bigr) = f(p) + t\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f\bigl(\theta^{(p)}(t)\bigr) + \mathcal{O}\bigl(t^2\bigr) = f(p) + t\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{(0,\,p)} f\bigl(\theta(t,\,p)\bigr) + \mathcal{O}\bigl(t^2\bigr)$$

と書ける．一方，無限小生成子の定義から

$$Vf(p) = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{(0,\,p)} f\bigl(\theta(t,\,p)\bigr)$$

が成り立つので

$$\lim_{t\to 0}\frac{f\circ\theta_t - f}{t} = Vf \tag{1.4.2}$$

が言える．

さて，定理 1.2-(3) より $\theta_{-t}\colon M_{-t} \longrightarrow M_t$ は微分同相写像なので，ベクトル場 $X|_{M_{-t}}$ の押し出し $(\theta_{-t})_*X$ が一意的に存在し，

$$T_{\theta_t(p)}(\theta_{-t})(X_{\theta_t(p)}) = \big((\theta_{-t})_*X\big)_{\theta_{-t}(\theta_t(p))} = \big((\theta_{-t})_*X\big)_p$$

を充たす．よって (1.4.2) と系 1.1 から

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_V X)f &= \lim_{t\to 0} \frac{\big((\theta_{-t})_*X\big)f - Xf}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{X(f\circ\theta_{-t})\circ\theta_t - Xf}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{X(f\circ\theta_{-t})\circ\theta_t - Xf\circ\theta_t + Xf\circ\theta_t - Xf}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} X\left(\frac{f\circ\theta_{-t} - f}{t}\right)\circ\theta_t + \lim_{t\to 0}\frac{Xf\circ\theta_t - Xf}{t} \\
&= X(-V)f + V(Xf) \\
&= [V, X]f
\end{aligned}$$

が言える． ■