

## 第 1 章

# 代数の小技巧集

### 1.0.1 ベクトル空間の小技巧

次数が  $n$  以下の 1 変数  $\mathbb{K}$ -係数多項式環を  $\mathbb{K}[t]^{\leq n}$  と書く.

#### 定義 1.1: 終結式

$\mathbb{K}$  を体とし,  $\mathbb{K}$ -係数多項式  $f, g \in \mathbb{K}[t]$  を与える.

- $f, g$  の **Sylvester 行列** (Sylvester matrix) とは,  $\mathbb{K}$ -線形写像

$$\varphi(f, g): \mathbb{K}[t]^{\leq \deg g} \times \mathbb{K}[t]^{\leq \deg f} \longrightarrow \mathbb{K}[t]^{\deg f + \deg g}, (P, Q) \longmapsto fP + gQ$$

の, 基底  $1, t, \dots, t^{\deg f + \deg g}$  に関する表現行列のこと.

- $f, g$  の **終結式** (resultant) とは, Sylvester 行列  $\varphi(f, g)$  の行列式

$$\mathbf{res}(f, g) := \det \varphi(f, g)$$

のこと.

#### 命題 1.1: 終結式の基本性質

$\mathbb{K}$  を体とし,  $\mathbb{K}$ -係数多項式  $f = \sum_{k=0}^{\deg f} f_k t^k, g = \sum_{k=0}^{\deg g} g_k t^k \in \mathbb{K}[t]$  を与える. このとき以下が成り立つ:

(1)

$$\text{res}(f, g) = \begin{vmatrix} f_0 & & & g_0 & & \\ f_1 & \ddots & & g_1 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & f_0 & \vdots & \ddots & \ddots \\ \vdots & & f_1 & g_{\deg g} & & g_0 \\ f_{\deg f} & & \vdots & & \ddots & g_1 \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & f_{\deg f} & & & g_{\deg g} \end{vmatrix}$$

(2)  $\mathbb{K}$  が代数閉体ならば,  $f, g$  の根を重複込みでそれぞれ  $\lambda_i, \mu_j$  と書くと

$$\text{res}(f, g) = (f_{\deg f})^{\deg g} (g_{\deg g})^{\deg f} \prod_{\substack{1 \leq i \leq \deg f \\ 1 \leq j \leq \deg g}} (\lambda_i - \mu_j)$$

が成り立つ.

証明 (1)  $P = \sum_{k=0}^{\deg g} P_k t^k, Q = \sum_{k=0}^{\deg f} Q_k t^k$  とすると,  $f, g$  の **Sylvester 行列**は

$$\varphi(f, g)(P, Q) = \sum_{k=0}^{\deg f} \sum_{l=0}^{\deg g} f_k P_l t^{k+l} + \sum_{l=0}^{\deg f} \sum_{k=0}^{\deg g} g_k Q_l t^{k+l}$$

であるから,  $P_l = \delta_l^i, Q_l = \delta_l^j$  w/  $1 \leq i \leq \deg g, 1 \leq j \leq \deg f$  のときを考えると

$$\varphi(f, g)(t^i, 0) = \sum_{k=0}^{\deg f} f_k t^{k+i}$$

$$\varphi(f, g)(0, t^j) = \sum_{k=0}^{\deg g} g_k t^{k+j}$$

となり,  $(t^i, 0) = t^i, (0, t^j) = t^{\deg g + j}$  と見做して  $\mathbb{K}[t]^{\leq \deg g} \times \mathbb{K}[t]^{\leq \deg f}$  の基底を  $\mathbb{K}[t]^{\deg f + \deg g}$  の基底と同一視することで  $[\text{res}(f, g)]^{k+i}_i = f_k, [\text{res}(f, g)]^{k+j}_{\deg g + j} = g_k$  が分かった.

(2) 解と係数の関係より,

$$A := \frac{1}{(f_{\deg f})^{\deg g} (g_{\deg g})^{\deg f}} \varphi(f, g)$$

の非ゼロな行列成分は 1 または  $\lambda_i$  の基本対称式または  $\mu_j$  の基本対称式である. i.e.  $A$  は  $\lambda_i, \mu_j$  の多項式である.

$1 \leq \forall i \leq \deg f, 1 \leq \forall j \leq \deg g$  を 1 つ固定する.  $\lambda_i = \mu_j =: \lambda$  ならば,

$$\mathbf{x} := \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{\deg f + \deg g} \end{bmatrix}$$

とおくと

■

### 1.0.2 環の小技

---