## 第1章

# フュージョン圏

この章では標数 0 の体 账 のみを考える.

## 1.1 加法圏

## 定義 1.1: 加法圏・アーベル圏

圏  $\mathcal C$  が体  $\mathbb K$  上の加法圏 (additive category) であるとは、以下を充たすこと:

(add-1)

任意の  $\operatorname{Hom}$  集合  $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$  が  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間の構造をもち、かつ射の合成

$$\circ: \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

が 派-双線形写像である.

(add-2)

零対称<sup>a</sup> (zero object)  $\mathbf{0} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$  が存在し、 $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$  に対して  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{0}, X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{X}, 0) = 0$  を充たす<sup>b</sup>.

(add-3)

有限の余積が常に存在する.

加法圏 C は、以下の条件を充たすとき**アーベル圏** (abelian category) と呼ばれる:

(Ab-1)

任意の射  $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$  が核  $\ker f \colon \operatorname{Ker} f \longrightarrow X$  および余核  $\operatorname{coker} f \colon Y \longrightarrow \operatorname{Coker} f$  を持つ.

(Ab-2)

 $\operatorname{Ker} f = \mathbf{0}$  ならば  $f = \ker(\operatorname{coker} f)$ , かつ  $\operatorname{Coker} f = \mathbf{0}$  ならば  $f = \operatorname{coker}(\ker f)$ 

以下では加法圏  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$  の間の関手  $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  には,  $F_{X,Y}: \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))$ ,  $f \longmapsto$ 

<sup>&</sup>lt;sup>a</sup> 始対象かつ終対象

 $<sup>^</sup>b$  最右辺は (add-1) の意味で零ベクトル空間.

F(f) が  $\mathbb{K}$ -線型写像となることを常に要請する.

#### 【例 1.1.1】表現の圏

G を群とする. このとき

- G の表現 (ρ, V) を対象とする
- G-同変な  $\mathbb{K}$ -線型写像  $(\rho, V) \xrightarrow{f} (\rho', V')$  を射とする

圏を  $\mathbf{Rep}(G)$  と書く.  $\mathbf{Rep}(G)$  はアーベル圏である.

#### 定義 1.2: 単純・半単純

- アーベル圏  $\mathcal C$  の対象  $X\in\mathcal C$  が**単純** (simple) であるとは,任意のモノ射  $i\colon U\hookrightarrow X$  が 0 であるか同型射であることを言う.
- アーベル圏  $\mathcal C$  が**半単純** (semisimple) であるとは、 $\forall X\in\mathcal C$  が単純対象の有限余積と同型であることを言う。i.e. 単純対象の族  $\left\{V_i\in \mathrm{Ob}(\mathcal C)\right\}_{i\in I}$  および有限個を除いて 0 であるような非負整数の族  $\left\{N_i\in\mathbb Z_{\geq 0}\right\}_{i\in I}$  が存在して

$$X \cong \bigoplus_{i \in I} N_i X_i$$

が成り立つこと.

### 1.2 モノイダル圏

これまでも何回か登場したが、モノイダル圏についてまとめておく:

#### 定義 1.3: モノイダル圏

モノイダル圏 (monidal category) は、以下の5つのデータからなる:

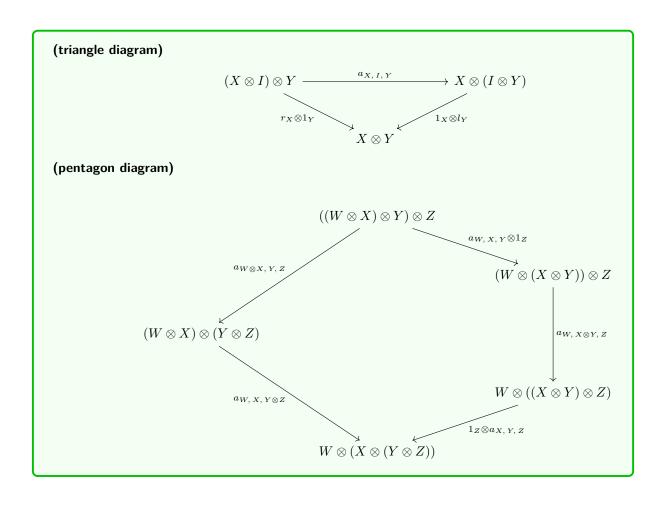
- 圏 C
- テンソル積 (tensor product) と呼ばれる関手  $\otimes$ :  $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$
- 単位対象 (unit object)  $I \in Ob(\mathcal{C})$
- associator と呼ばれる自然同値

$$\left\{a_{X,\,Y,\,Z}\colon (X\otimes Y)\otimes Z\xrightarrow{\cong} X\otimes (Y\otimes Z)\right\}_{X,\,Y,\,Z\in\operatorname{Ob}(\mathcal{C})}$$

• left/right unitors と呼ばれる自然同値

$$\begin{aligned} & \big\{ l_X \colon I \otimes X \xrightarrow{\cong} X \big\}_{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{X})}, \\ & \big\{ r_X \colon X \otimes I \xrightarrow{\cong} X \big\}_{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{X})} \end{aligned}$$

これらは  $\forall X, Y, Z, W \in Ob(\mathcal{C})$  について以下の 2 つの図式を可換にする:



#### 定義 1.4: 組紐付きモノイダル圏

組紐付きモノイダル圏 (braided monoidal category) とは、以下の2つからなる:

- モノイダル圏 C
- 組紐 (braiding) と呼ばれる自然同型

$$\{b_{X,Y}\colon X\otimes Y\xrightarrow{\cong} Y\otimes X\}_{X,Y\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは  $\forall X, Y, Z \in Ob(\mathcal{C})$  について以下の図式を可換にする:

(hexagon diagrams)

$$X \otimes (Y \otimes Z) \xrightarrow{a_{X,Y,Z}^{-1}} (X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{b_{X,Y} \otimes 1_{Z}} (Y \otimes X) \otimes Z$$

$$\downarrow^{b_{X,Y \otimes Z}} \qquad \qquad \downarrow^{a_{Y,X,Z}}$$

$$(Y \otimes Z) \otimes X \xleftarrow{a_{Y,Z,X}^{-1}} Y \otimes (Z \otimes X) \xrightarrow{1_{X} \otimes b_{X,Z}} Y \otimes (X \otimes Z)$$

$$(X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{a_{X,Y,Z}} X \otimes (Y \otimes Z) \xrightarrow{1_{X} \otimes b_{Y,Z}} X \otimes (Z \otimes Y)$$

$$\downarrow^{b_{X \otimes Y,Z}} \qquad \qquad \downarrow^{a_{X,Z,Y}^{-1}}$$

$$Z \otimes (X \otimes Y) \xleftarrow{a_{Z,X,Y}} (Z \otimes X) \otimes Y \xleftarrow{b_{X,Z} \otimes 1_{Y}} (X \otimes Z) \otimes Y$$

組紐付きモノイダル圏 C であって,C の組紐が  $b_{X,Y}=b_{Y,X}^{-1}$  を充たすもののことを**対称モノイダル**圏 (symmetric monoidal category) と呼ぶ.

#### 定義 1.5: 双対

モノイダル圏  $\mathcal C$  およびその任意の対象  $X, X^* \in \mathrm{Ob}(\mathcal C)$  を与える.  $X^*$  が X の**右双対** (right dual) であり、かつ X が  $X^*$  の**左双対** (left dual) であるとは、

• unit と呼ばれる射

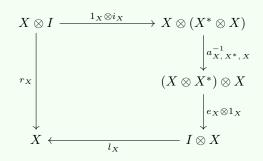
$$i_X: I \longrightarrow X^* \otimes X$$

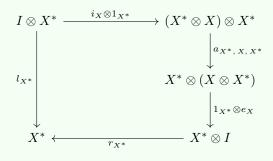
• counit と呼ばれる射

$$e_X : X \otimes X^* \longrightarrow I$$

が存在して以下の図式を可換にすることを言う:

(zig-zag equations)





#### 定義 1.6: rigid なモノイダル圏

モノイダル圏  $\mathcal{C}$  が **rigid** であるとは、 $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$  が左・右双対を持つことを言う.

## 1.3 フュージョン圏

#### 定義 1.7: フュージョン圏

圏 C がフュージョン圏 (fusion category) であるとは,

- C は半単純な K-上のアーベル圏
- C は rigid なモノイダル圏
- C の単純対象の同型類が有限個
- 単位対象  $I \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$  について,  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(I,\,I\right) = \mathbb{K}$

が成り立つこと.

フュージョン圏  $\mathcal C$  が組紐付きフュージョン圏 (braided fusion category) であるとは,  $\mathcal C$  が組紐付き モノイダル圏でもあることを言う.