第 1 章

フュージョン圏

この章では標数 0 の体 $\mathbb{K}$ のみを考える．

1.1 加法圏

定義 1.1: 加法圏・アーベル圏

圏 $\mathcal{C}$ が体 $\mathbb{K}$ 上の**加法圏** (additive category) であるとは，以下を充たすこと：

(add-1)

任意の Hom 集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が $\mathbb{K}$-ベクトル空間の構造をもち，かつ射の合成

$$\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

が $\mathbb{K}$-双線形写像である．

(add-2)

零対称[a] (zero object) $\mathbf{0} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が存在し，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{0}, X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{X}, 0) = 0$ を充たす[b]．

(add-3)

有限の余積が常に存在する．

[a] 始対象かつ終対象

[b] 最右辺は **(add-1)** の意味で零ベクトル空間．

加法圏 $\mathcal{C}$ は，以下の条件を充たすとき**アーベル圏** (abelian category) と呼ばれる：

(Ab-1)

任意の射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が核 $\ker f\colon \mathrm{Ker}\, f \longrightarrow X$ および余核 $\mathrm{coker}\, f\colon Y \longrightarrow \mathrm{Coker}\, f$ を持つ．

(Ab-2)

$\mathrm{Ker}\, f = \mathbf{0}$ ならば $f = \ker(\mathrm{coker}\, f)$，かつ $\mathrm{Coker}\, f = \mathbf{0}$ ならば $f = \mathrm{coker}(\ker f)$

以下では加法圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ の間の関手 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ には，$F_{X,Y}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(X), F(Y)\big)$，$f \longmapsto$

$F(f)$ が $\mathbb{K}$-線型写像となることを常に要請する．

【例 1.1.1】表現の圏

G を群とする．このとき

- G の表現 (ρ, V) を対象とする
- G-同変な $\mathbb{K}$-線型写像 $(\rho, V) \xrightarrow{f} (\rho', V')$ を射とする

圏を $\mathbf{Rep}\,(G)$ と書く．$\mathbf{Rep}\,(G)$ はアーベル圏である．

定義 1.2: 単純・半単純

- アーベル圏 $\mathcal{C}$ の対象 $X \in \mathcal{C}$ が**単純** (simple) であるとは，任意のモノ射 $i\colon U \hookrightarrow X$ が 0 であるか同型射であることを言う．
- アーベル圏 $\mathcal{C}$ が**半単純** (semisimple) であるとは，$\forall X \in \mathcal{C}$ が単純対象の有限余積と同型であることを言う．i.e. 単純対象の族 $\{V_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})\}_{i \in I}$ および有限個を除いて 0 であるような非負整数の族 $\{N_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}_{i \in I}$ が存在して

$$X \cong \bigoplus_{i \in I} N_i X_i$$

が成り立つこと．

1.2　モノイダル圏

これまでも何回か登場したが，モノイダル圏についてまとめておく：

定義 1.3: モノイダル圏

モノイダル圏 (monidal category) は，以下の 5 つのデータからなる：

- 圏 $\mathcal{C}$
- **テンソル積** (tensor product) と呼ばれる関手 $\otimes\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$
- **単位対象** (unit object) $I \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- **associator** と呼ばれる自然同値

$$\{a_{X,\,Y,\,Z}\colon (X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{\cong} X \otimes (Y \otimes Z)\}_{X,\,Y,\,Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

- **left/right unitors** と呼ばれる自然同値

$$\{l_X\colon I \otimes X \xrightarrow{\cong} X\}_{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{X})},$$
$$\{r_X\colon X \otimes I \xrightarrow{\cong} X\}_{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{X})}$$

これらは $\forall X,\,Y,\,Z,\,W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について以下の 2 つの図式を可換にする：

(triangle diagram)

$$
\begin{tikzcd}
(X \otimes I) \otimes Y \arrow[rr, "a_{X,\,I,\,Y}"] \arrow[dr, "r_X \otimes 1_Y"'] & & X \otimes (I \otimes Y) \arrow[dl, "1_X \otimes l_Y"] \\
& X \otimes Y &
\end{tikzcd}
$$

(pentagon diagram)

$$
\begin{tikzcd}
& ((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z \arrow[dl, "a_{W \otimes X,\,Y,\,Z}"'] \arrow[r, "a_{W,\,X,\,Y} \otimes 1_Z"] & (W \otimes (X \otimes Y)) \otimes Z \arrow[dd, "a_{W,\,X \otimes Y,\,Z}"] \\
(W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) \arrow[dr, "a_{W,\,X,\,Y \otimes Z}"'] & & \\
& W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z)) & W \otimes ((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[l, "1_Z \otimes a_{X,\,Y,\,Z}"]
\end{tikzcd}
$$

定義 1.4: 組紐付きモノイダル圏

組紐付きモノイダル圏 (braided monoidal category) とは，以下の 2 つからなる：

- モノイダル圏 $\mathcal{C}$
- **組紐** (braiding) と呼ばれる自然同型

$$\{b_{X,\,Y} \colon X \otimes Y \xrightarrow{\cong} Y \otimes X\}_{X,\,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは $\forall X,\, Y,\, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について以下の図式を可換にする：

(hexagon diagrams)

$$\begin{tikzcd}
X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "a^{-1}_{X,\,Y,\,Z}"] \arrow[d, "b_{X,\,Y \otimes Z}"] & (X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "b_{X,\,Y} \otimes 1_Z"] & (Y \otimes X) \otimes Z \arrow[d, "a_{Y,\,X,\,Z}"] \\
(Y \otimes Z) \otimes X & Y \otimes (Z \otimes X) \arrow[l, "a^{-1}_{Y,\,Z,\,X}"] & Y \otimes (X \otimes Z) \arrow[l, "1_X \otimes b_{X,\,Z}"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "a_{X,\,Y,\,Z}"] \arrow[d, "b_{X \otimes Y,\,Z}"] & X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "1_X \otimes b_{Y,\,Z}"] & X \otimes (Z \otimes Y) \arrow[d, "a^{-1}_{X,\,Z,\,Y}"] \\
Z \otimes (X \otimes Y) & (Z \otimes X) \otimes Y \arrow[l, "a_{Z,\,X,\,Y}"] & (X \otimes Z) \otimes Y \arrow[l, "b_{X,\,Z} \otimes 1_Y"]
\end{tikzcd}$$

組紐付きモノイダル圏 $\mathcal{C}$ であって，$\mathcal{C}$ の組紐が $b_{X,\,Y} = b^{-1}_{Y,\,X}$ を充たすもののことを**対称モノイダル圏** (symmetric monoidal category) と呼ぶ.

定義 1.5: 双対

モノイダル圏 $\mathcal{C}$ およびその任意の対象 $X,\, X^* \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を与える．X^* が X の**右双対** (right dual) であり，かつ X が X^* の**左双対** (left dual) であるとは,

- **unit** と呼ばれる射

$$i_X \colon I \longrightarrow X^* \otimes X$$

- **counit** と呼ばれる射

$$e_X \colon X \otimes X^* \longrightarrow I$$

が存在して以下の図式を可換にすることを言う：

(zig-zag equations)

$$\begin{tikzcd}
X \otimes I \arrow[r, "1_X \otimes i_X"] \arrow[dd, "r_X"'] & X \otimes (X^* \otimes X) \arrow[d, "a^{-1}_{X,\,X^*,\,X}"] \\
& (X \otimes X^*) \otimes X \arrow[d, "e_X \otimes 1_X"] \\
X & I \otimes X \arrow[l, "l_X"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I \otimes X^* \arrow[r, "i_X \otimes 1_{X^*}"] \arrow[dd, "l_{X^*}"'] & (X^* \otimes X) \otimes X^* \arrow[d, "a_{X^*,\,X,\,X^*}"] \\
& X^* \otimes (X \otimes X^*) \arrow[d, "1_{X^*} \otimes e_X"] \\
X^* & X^* \otimes I \arrow[l, "r_{X^*}"]
\end{tikzcd}$$

定義 1.6: rigid なモノイダル圏

モノイダル圏 $\mathcal{C}$ が **rigid** であるとは，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が左・右双対を持つことを言う．

1.3 フュージョン圏

定義 1.7: フュージョン圏

圏 $\mathcal{C}$ が**フュージョン圏** (fusion category) であるとは，

- $\mathcal{C}$ は半単純な $\mathbb{K}$-上のアーベル圏
- $\mathcal{C}$ は rigid なモノイダル圏
- $\mathcal{C}$ の単純対象の同型類が有限個
- 単位対象 $I \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(I,\, I) = \mathbb{K}$

が成り立つこと．

フュージョン圏 $\mathcal{C}$ が**組紐付きフュージョン圏** (braided fusion category) であるとは，$\mathcal{C}$ が組紐付きモノイダル圏でもあることを言う．