第 1 章

∞-圏

この付録では，[?]，[?]，[?]，[?] に従って $(\infty, 1)$-圏[*1]を導入する．さらに，[?]，[?] をベースに (∞, n)-圏の構成を試みる．

1.1　圏論の復習

1.1.1　圏と関手

定義 1.1: 圏

圏 (category) $\mathcal{C}$ とは，以下の 4 種類のデータからなる：

- **対象** (object) と呼ばれる要素の集まり[a]
$$\mathbf{Ob}(\boldsymbol{\mathcal{C}})$$
- $\forall A,\, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，A から B への**射** (morphism) と呼ばれる要素の集合
$$\mathbf{Hom}_{\boldsymbol{\mathcal{C}}}\,(\boldsymbol{A},\, \boldsymbol{B})$$
- $\forall A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，A 上の**恒等射** (identity morphism) と呼ばれる射
$$\mathbf{Id}_{\boldsymbol{A}} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, A)$$
- $\forall A,\, B,\, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, B)$, $\forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(B,\, C)$ に対して，f と g の**合成** (composite) と呼ばれる射 $\boldsymbol{g \circ f} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, C)$ を対応させる集合の写像
$$\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(B,\, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, C),\; (f,\, g) \longmapsto g \circ f$$

これらの構成要素は，次の 2 条件を満たさねばならない：

(1) **(unitality)**：任意の射 $f\colon A \longrightarrow B$ に対して
$$f \circ \mathrm{Id}_A = f, \quad \mathrm{Id}_B \circ f = f$$

[*1] [?] は創始者本人によって運営されている web サイトのようだ．

が成り立つ．

(2) **(associativity)**：任意の射 $f\colon A \longrightarrow B,\ g\colon B \longrightarrow C,\ h\colon C \longrightarrow D$ に対して

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

が成り立つ．

[a] $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ は，集合論では扱えないほど大きなものになっても良い．

定義 1.2: モノ・エピ・同型射

圏 $\mathcal{C}$ を与える．

- 射 $f\colon A \longrightarrow B$ が**モノ射** (monomorphism) であるとは，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して写像

$$\begin{aligned} f_*\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ A) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ B), \\ g &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$$

が集合の写像として単射であること．

- 射 $f\colon A \longrightarrow B$ が**エピ射** (epimorphism) であるとは，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して写像

$$\begin{aligned} f^*\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,\ X) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\ X), \\ g &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

が集合の写像として単射であること．

- 射 $f\colon A \longrightarrow B$ が**同型射** (isomorphism) であるとは，射 $g\colon B \longrightarrow A$ が存在して $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ かつ $f \circ g = \mathrm{Id}_B$ を充たすこと．このとき f と g は互いの**逆射** (inverse) であると言い，$g = \boldsymbol{f^{-1}},\ f = \boldsymbol{g}^{-1}$ と書く[a]．
- $A,\ B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の間に同型射が存在するとき，対象 A と B は**同型** (isomorphic) であると言い，$\boldsymbol{A \cong B}$ と書く．

[a] 逆射は存在すれば一意である．

定義 1.3: 関手

圏 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ を与える．圏 $\mathcal{C}$ から圏 $\mathcal{D}$ への**関手** F とは，以下の 2 つの対応からなる：

- 圏 $\mathcal{C}$ における任意の対象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，圏 $\mathcal{D}$ における対象 $F(X) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ を対応づける
- 圏 $\mathcal{C}$ における任意の射 $f \colon X \longrightarrow Y$ に対して，圏 $\mathcal{D}$ における射 $F(f) \colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ を対応づける

これらの対応は以下の条件を充たさねばならない：

(fun-1) 圏 $\mathcal{C}$ における任意の射 $f \colon X \longrightarrow Y$, $g \colon Y \longrightarrow Z$ に対して，

$$F(g \circ f) \longrightarrow F(g) \circ F(f)$$

(fun-2) 圏 $\mathcal{C}$ における任意の対象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，

$$F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$$

文脈上明らかなときは，圏 $\mathcal{C}$ から圏 $\mathcal{D}$ への関手 F のことを関手 $\boldsymbol{F \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}}$ と略記する．

定義 1.4: 忠実・充満・本質的全射

関手 $F \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ を与える．

- F が**忠実** (faithful) であるとは，$\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して写像

$$F_{X,Y} \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\bigl(F(X), F(Y)\bigr),\ f \longmapsto F(f)$$

  が単射であること．
- F が**充満** (full) であるとは，$\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して写像

$$F_{X,Y} \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\bigl(F(X), F(Y)\bigr),\ f \longmapsto F(f)$$

  が全射であること．
- F が**本質的全射** (essentially surjective) であるとは，$\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ に対して $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が存在して $F(X)$ が Y と同型になること．

忠実充満関手のことを**埋め込み**と呼ぶ．

定義 1.5: 自然変換

2 つの関手 $F, G\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ を与える．F, G の間の**自然変換** (natural transformation) $\boldsymbol{\tau\colon F \Longrightarrow G}$ とは，以下の対応からなる：

- 圏 $\mathcal{C}$ における任意の対象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，圏 $\mathcal{D}$ における射 $\tau_X\colon F(X) \longrightarrow G(X)$ を対応づける

この対応は以下の条件を充たさねばならない：

(nat) 圏 $\mathcal{C}$ における任意の射 $f\colon X \longrightarrow Y$ に対して，以下の図式を可換にする：

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\tau_X"] & F(Y) \arrow[d, "\tau_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

自然変換 $\tau\colon F \Longrightarrow G$ であって，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して射 $\tau_X\colon F(X) \longrightarrow G(X)$ が同型射であるもののことを**自然同値** (natural equivalence)[a] と呼ぶ．

[a] **自然同型** (natural isomorphism) と言うこともある．

自然変換 $\tau\colon F \Longrightarrow G$ を

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\tau"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

と書くことがある．

1.1.2　極限と余極限

定義 1.6: 図式

圏 $\mathcal{C}$ と小圏 I（**添字圏**と呼ばれる）を与える．
$\mathcal{C}$ における $\boldsymbol{I}$ **型の図式** (diagram of shape I) とは，関手

$$I \longrightarrow \mathcal{C}$$

のこと．

定義 1.7: 錐の圏

$D\colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ を図式とする．

- D 上の**錐** (cone) とは，

– $\mathcal{C}$ の対象 $\boldsymbol{C} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$

– $\mathcal{C}$ の射の族 $\boldsymbol{c}_\bullet \coloneqq \bigl\{\boldsymbol{c}_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\bigl(\boldsymbol{C},\, D(i)\bigr)\bigr\}_{i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})}$

の組 $(\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{c}_\bullet)$ であって，$\forall i,\, j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ および $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i,\, j)$ に対して

$$\boldsymbol{c}_j = D(f) \circ \boldsymbol{c}_i$$

を充たす，i.e. 以下の図式を可換にするもののこと．

$$\begin{tikzcd} & \boldsymbol{C} \arrow[dl, bend right, "\boldsymbol{c}_i"'] \arrow[dr, bend left, "\boldsymbol{c}_j"] & \\ D(i) \arrow[rr, "D(f)"] & & D(j) \end{tikzcd}$$

- **錐の射** (morphism of cones)

$$(\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{c}_\bullet) \xrightarrow{\color{red}u} (\boldsymbol{C'},\, \boldsymbol{c'_\bullet})$$

とは，$\mathcal{C}$ の射 $\color{red}u$ $\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{C'})$ であって，$\forall i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ に対して

$$\boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{c'_i} \circ {\color{red}u}$$

を充たす，i.e. 以下の図式を可換にするもののこと．

$$\begin{tikzcd} & \boldsymbol{C} \arrow[d, red, "u"] \arrow[ddl, bend right, "\boldsymbol{c}_i"'] \\ & \boldsymbol{C'} \arrow[dl, bend right, "\boldsymbol{c'_i}"] \\ D(i) & \end{tikzcd}$$

D 上の錐と錐の射を全て集めたものは圏 $\mathbf{Cone}(D)$ を成す．

定義 1.8: 極限

図式 $D\colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ の**極限** (limit)[a]とは，圏 $\mathbf{Cone}(D)$ の終対象のこと．記号として $\bigl(\mathbf{lim}_{\mathcal{I}}\, \boldsymbol{D},\, \boldsymbol{p}_\bullet\bigr)$ と書く[b]．i.e. 極限 $\bigl(\mathbf{lim}_{\mathcal{I}}\, \boldsymbol{D},\, \boldsymbol{p}_\bullet\bigr) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cone}(D))$ は，以下の普遍性を充たす：

(極限の普遍性)

$\forall(\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{c}_\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cone}(D))$ に対して，錐の射 $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cone}(D)}\bigl((\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{c}_\bullet),\, \bigl(\mathbf{lim}_{\mathcal{I}}\, \boldsymbol{D},\, \boldsymbol{p}_\bullet\bigr)\bigr)$ が一意的に存在して，$\forall i,\, j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ および $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i,\, j)$ に対して図式を可換にする．

$$
\begin{tikzcd}
 & \forall \boldsymbol{C} \arrow[dl, bend right, "\boldsymbol{c}_i"'] \arrow[dr, bend left, "\boldsymbol{c}_j"] \arrow[d, dashed, "\exists! u"] & \\
 & \lim_{\mathcal{I}} \boldsymbol{D} \arrow[dl, bend right, "\boldsymbol{p}_i"'] \arrow[dr, bend left, "\boldsymbol{p}_j"] & \\
D(i) \arrow[rr, "D(f)"] & & D(j)
\end{tikzcd}
$$

図 1.1: 極限の普遍性

[a] **普遍錐** (universal cone) とも言う．

[b] $\varprojlim \boldsymbol{D}$ と書くこともある．

定義 1.9: 余錐の圏

$D\colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ を図式とする．

- D 上の**余錐** (cocone) とは，
  - $\mathcal{C}$ の対象 $\boldsymbol{C} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
  - $\mathcal{C}$ の射の族 $\boldsymbol{c}_\bullet := \left\{ \boldsymbol{c}_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}} \left(D(i),\, \boldsymbol{C} \right) \right\}_{i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})}$

  の組 $(\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{c}_\bullet)$ であって，$\forall i,\, j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ および $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i,\, j)$ に対して

  $$\boldsymbol{c}_i = D(f) \circ \boldsymbol{c}_j$$

  を充たす，i.e. 以下の図式を可換にするもののこと．

  $$
  \begin{tikzcd}
  D(i) \arrow[rr, "D(f)"] \arrow[dr, bend right, "\boldsymbol{c}_i"'] & & D(j) \arrow[dl, bend left, "\boldsymbol{c}_j"] \\
  & \boldsymbol{C} &
  \end{tikzcd}
  $$

- **余錐の射** (morphism of cocones)

  $$(\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{c}_\bullet) \xrightarrow{u} (\boldsymbol{C'},\, \boldsymbol{c'_\bullet})$$

  とは，$\mathcal{C}$ の射 $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{C'})$ であって，$\forall i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ に対して

  $$\boldsymbol{c'_i} = u \circ \boldsymbol{c}_i$$

  を充たす，i.e. 以下の図式を可換にするもののこと．

  $$
  \begin{tikzcd}
  D(i) \arrow[dr, bend right, "\boldsymbol{c}_i"] \arrow[ddr, bend right, "\boldsymbol{c}_j"'] & \\
  & \boldsymbol{C} \arrow[d, "u"] \\
  & \boldsymbol{C'}
  \end{tikzcd}
  $$

D 上の余錐と余錐の射を全て集めたものは圏 $\mathbf{Cone}(D)$ を成す．

定義 1.10: 余極限

図式 $D\colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ の**余極限** (colimit)[a]とは, 圏 $\mathbf{coCone}(D)$ の始対象のこと. 記号として $\left(\underset{\mathcal{I}}{\mathbf{colim}} D,\ \boldsymbol{p}_\bullet\right)$ と書く[b]. i.e. 余極限 $\left(\mathbf{colim}_{\mathcal{I}}\, \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{p}_\bullet\right) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{coCone}(D))$ は, 以下の普遍性を充たす：

(余極限の普遍性)

$\forall(\boldsymbol{C},\ \boldsymbol{c}_\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{coCone}(D))$ に対して, 余錐の射 $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{coCone}(D)}\left(\left(\mathbf{colim}_{\mathcal{I}}\, \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{p}_\bullet\right),\ (\boldsymbol{C},\ \boldsymbol{c}_\bullet)\right)$ が一意的に存在して, $\forall i,\ j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ および $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i,\ j)$ に対して図式を可換にする.

$$\begin{tikzcd}
D(i) \arrow[rr, "D(f)"] \arrow[dr, bend right, "\boldsymbol{p}_i"'] \arrow[ddr, bend right=60, "\boldsymbol{c}_i"'] & & D(j) \arrow[dl, bend left, "\boldsymbol{p}_i"] \arrow[ddl, bend left=60, "\boldsymbol{c}_i"] \\
& \mathbf{colim}_{\mathcal{I}}\, \boldsymbol{D} \arrow[d, dashed, "\exists! u"] & \\
& \forall \boldsymbol{C} &
\end{tikzcd}$$

図 1.2: 余極限の普遍性

[a] **普遍余錐** (universal cocone) とも言う.
[b] $\varinjlim \boldsymbol{D}$ と書くこともある.

【例 1.1.1】積と和

図式

$$D\colon \boxed{\overset{1}{\bullet} \qquad \overset{2}{\bullet}} \longrightarrow \mathcal{C}$$

の極限を（存在すれば）**積** (product) と呼び, $\boldsymbol{D(1)} \times \boldsymbol{D(2)}$ と書く. 同じ図式の余極限を（存在すれば）**和**[a] (coproduct) と呼び, $\boldsymbol{D(1)} \amalg \boldsymbol{D(2)}$ と書く.

より具体的には, 圏 $\mathcal{C}$ における 2 つの対象 $D(1),\ D(2) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の**積**とは,

- 圏 $\mathcal{C}$ における 1 つの対象 $D(1) \times D(2) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- 圏 $\mathcal{C}$ における 2 つの射 $p_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(D(1) \times D(2),\ D(i)\right)$ $^{\mathrm{w}/}$ $i = 1,\ 2$

の組であって, 任意の組 $\left(C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\ \{c_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(C,\ D(i)\right)\}_{i \in \{1,\ 2\}}\right)$ に対して以下の図式を可換にする圏 $\mathcal{C}$ の射 $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(C,\ D(1) \times D(2)\right)$ が<u>一意的</u>に存在するようなもののこと：

$$
\begin{tikzcd}
 & D(1) \times D(2) \arrow[dl, bend right, "p_1"'] \arrow[dr, bend left, "p_2"] & \\
D(1) & & D(2) \\
 & C \arrow[ul, bend left, "c_1"] \arrow[ur, bend right, "c_2"'] \arrow[uu, dashed, "\exists! u"] &
\end{tikzcd}
$$

具体的な圏における積は，例えば以下の通りである：

(1) 集合と写像の圏 **Sets** における積とは，直積集合と，直積因子への射影の組のこと．

(2) 位相空間の圏 **Top** における積とは，直積位相空間と，直積因子への連続な[b]射影の組みのこと．

(3) 体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間の圏 **Sets** における積とは，直積ベクトル空間と射影[c]の組みのこと．これは，特に元の図式の対象が有限個である場合は直和ベクトル空間と同型である．

同様に，圏 $\mathcal{C}$ における 2 つの対象 $D(1),\, D(2) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の**和**とは，

- 圏 $\mathcal{C}$ における 1 つの対象 $D(1) \amalg D(2) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- 圏 $\mathcal{C}$ における 2 つの射 $i_j \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(D(j),\, D(1) \amalg D(2)\big)$ w/ $j = 1,\, 2$

の組であって，任意の組 $\Big(C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\, \{c_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(D(i),\, C\big)\}_{i \in \{1,\, 2\}}\Big)$ に対して以下の図式を可換にする圏 $\mathcal{C}$ の射 $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(D(1) \amalg D(2),\, C\big)$ が一意的に存在するようなもののこと：

$$
\begin{tikzcd}
 & C & \\
D(1) \arrow[ur, bend left, "c_1"] \arrow[dr, bend right, "i_1"'] & & D(2) \arrow[ul, bend right, "c_2"'] \arrow[dl, bend left, "i_2"] \\
 & D(1) \amalg D(2) \arrow[uu, dashed, "\exists! u"] &
\end{tikzcd}
$$

具体的な圏における和は，例えば以下の通りである：

(1) 集合と写像の圏 **Sets** における和とは，disjoint union と，disjoint union の各成分への包含写像の組のこと．より具体的には，集合

$$
D(1) \amalg D(2) = \big\{\, (1,\, x) \bigm| x \in D(1) \,\big\} \cup \big\{\, (2, y) \bigm| y \in D(2) \,\big\}
$$

および写像

$$
\begin{aligned}
i_1 &\colon D(1) \longrightarrow D(1) \amalg D(2),\ x \longmapsto (1,\, x) \\
i_2 &\colon D(2) \longrightarrow D(1) \amalg D(2),\ y \longmapsto (2,\, y)
\end{aligned}
$$

の組のこと．

(2) 位相空間の圏 **Top** における和とは，disjoint union と，disjoint union の各成分への連続な[d]包含写像の組のこと．

(3) 体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間の圏 **Sets** における和とは，直和ベクトル空間のこと．これは，特に元の図式の対象が有限個である場合は直積ベクトル空間と同型である．

[a] **余積**と言うこともある．
[b] むしろ，直積位相とは射影という写像が連続になるような最弱の位相のことである．
[c] 定義から線型写像になるため，圏 $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の射である．
[d] むしろ，集合としての disjoint union の上に，包含写像 $i_j \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}\big(D(j),\, D(1) \amalg D(2)\big)$ が連続になるような最強の位相を入れている．

【例 1.1.2】イコライザとコイコライザ

図式

$$D\colon \boxed{\begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[r, shift left, "f_{12}"] \arrow[r, shift right, "g_{12}"'] & \overset{2}{\bullet} \end{tikzcd}} \longrightarrow \mathcal{C}$$

の極限を（存在すれば）**イコライザ** (equalizer) と呼び，$\mathbf{Eq}\big(\boldsymbol{D(1)},\, \boldsymbol{D(2)}\big)$ と書く．同じ図式の余極限を（存在すれば）**コイコライザ** (coequalizer) と呼び，$\mathbf{Coeq}\big(\boldsymbol{D(1)},\, \boldsymbol{D(2)}\big)$ と書く．具体的な圏における例は以下の通りである．ただし，$X \coloneqq D(1),\, Y \coloneqq D(2),\, f \coloneqq D(f_{12}),\, g \coloneqq D(g_{12})$ と書いている：

(1) 集合と写像の圏 **Sets** におけるイコライザとは，2 つの写像 $f,\, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(X,\, Y)$ によって定まる X の部分集合

$$\mathrm{Eq}(f,\, g) \coloneqq \big\{\, x \in X \bigm| f(x) = g(x) \,\big\}$$

と，包含写像 $i\colon \mathrm{Eq}(f,\, g) \longrightarrow X$ の組みである．直観的には方程式 $f(x) = g(x)$ の解空間のことである．

(2) 集合と写像の圏 **Sets** における 2 つの写像 $f,\, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(X,\, Y)$ の間のコイコライザとは，$f(x) \sim g(x)\ \forall x \in X$ を充たす Y の最小の同値関係 $\sim\, \subset Y \times Y$ による商集合

$$\mathrm{Coeq}(f,\, g) \coloneqq Y/{\sim}$$

および商写像 $q\colon Y \longrightarrow \mathrm{Coeq}(f,\, g)$ の組みである．直観的には，$\forall x \in X$ に対して方程式 $f(x) = g(x)$ が成立するように強引に Y に同値関係を入れて得られる商集合ということになる．

(3) 位相空間の圏 **Top** におけるイコライザとは **Sets** におけるイコライザ $\big(\mathrm{Eq}(f,\, g),\, i\big)$ に，i が連続写像になるような最弱の位相を入れて得られる位相空間のこと．**Top** におけるコイコライザとは，**Sets** におけるコイコライザ $\big(\mathrm{Coeq}(f,\, g),\, p\big)$ に，p が連続写像になるような最強の位相を入れて得られる位相空間のこと．

(4) 体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間の圏 $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ における，線型写像 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}}(V,\, W)$ と零射 $0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}}(V,\, W)$ の間のイコライザとは，線型写像 f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ および包含準同型 $i\colon \mathrm{Ker}\, f \hookrightarrow V$ の組みのこと．$\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ における，線型写像 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}}(V,\, W)$ と零射 $0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}}(V,\, W)$ の間のコイコライザとは，線型写像 f の余核 $\mathrm{Coker}\, f \coloneqq W/\operatorname{Im} f$ および標準的射影 $p\colon W \twoheadrightarrow \mathrm{Coker}\, f$ の組みのこと．

【例 1.1.3】引き戻しと押し出し

図式

$$D\colon \boxed{\begin{tikzcd} & \overset{2}{\bullet} \arrow[d, "f_{23}"] \\ \overset{1}{\bullet} \arrow[r, "f_{13}"'] & \overset{3}{\bullet} \end{tikzcd}} \longrightarrow \mathcal{C}$$

の極限を（存在すれば）**引き戻し**[a] (pullback) と呼び，$\boldsymbol{D(1)\times_{D(3)} D(2)}$ と書く．具体的な圏における例は以下の通りである．ただし，$X \coloneqq D(1)$, $Y \coloneqq D(2)$, $Z \coloneqq D(3)$, $f \coloneqq D(f_{13})$, $p \coloneqq D(f_{23})$ と書いている：

(1) 集合と写像の圏 **Sets** における引き戻しとは，2 つの写像 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{p} Y$ によって定まる，直積集合 $X \times Y$ の部分集合

$$X \times_Z Y = \left\{\, (x,\, y) \in X \times Y \;\middle|\; f(x) = p(y) \,\right\}$$

と，3 つの射影

$$\begin{aligned} p_1 &\colon X \times_Z Y \longrightarrow X,\ (x,\, y) \longmapsto x \\ p_2 &\colon X \times_Z Y \longrightarrow Y,\ (x,\, y) \longmapsto y \\ p_3 &\colon X \times_Z Y \longrightarrow Z,\ (x,\, y) \longmapsto f(x) = p(y) \end{aligned}$$

の 4 つ組のこと．イコライザを用いて $X \times_Z Y = \mathrm{Eq}\bigl(X \times Y,\, Z\bigr)$ と書くこともできる．特に，錐の定義から $p_3 = D(f_{13}) \circ p_1 = D(f_{23}) \circ p_2$ が常に成り立つため，p_3 は省略されることが多い．錐の可換図式を書くと次のようになる：

$$\begin{tikzcd} X \times_Z Y \arrow[r, bend left, "p_2"] \arrow[dr, bend left, "p_3"] \arrow[d, bend right, "p_1"'] & Y \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

この可換図式において p_3 を略記する際によく使われる記法は以下の通りである：

$$\begin{tikzcd} X \times_Z Y \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & Y \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

図式

$$
D\colon \boxed{\begin{tikzcd} & 2 \\ 1 & 3 \arrow[l, "f_{31}"] \arrow[u, "f_{32}"'] \end{tikzcd}} \longrightarrow \mathcal{C}
$$

の余極限を（存在すれば）**押し出し** (pushforward) と呼び，$\boldsymbol{D(1) \amalg_{D(3)} D(2)}$ と書く．具体的な圏における例は以下の通りである．ただし，$X \coloneqq D(1),\ Y \coloneqq D(2),\ Z \coloneqq D(3),\ f \coloneqq D(f_{31}),\ i \coloneqq D(f_{32})$ と書いている：

(1) 集合と写像の圏 **Sets** における押し出しとは，2 つの写像 $X \xleftarrow{f} Z \xrightarrow{i} Y$ によって定まる，直和集合 $X \amalg Y$ の商集合

$$X \amalg_Z Y = \frac{X \amalg Y}{\bigl(1,\ f(z)\bigr) \sim \bigl(2,\ i(z)\bigr)}$$

と，2 つの写像

$$
\begin{aligned}
c_1 &\colon X \longrightarrow X \amalg_Z Y,\ x \longmapsto [(1,\ x)] \\
c_2 &\colon Y \longrightarrow X \amalg_Z Y,\ y \longmapsto [(2,\ y)]
\end{aligned}
$$

の 3 つ組のこと[b]．コイコライザを用いて $X \amalg_Z Y = \mathrm{Coeq}\bigl(Z,\ X \amalg Y\bigr)$ と書くこともできる．

---

[a] **ファイバー積** (fiber product) と呼ぶこともある．

[b] 余錐の定義に登場する図式の可換性から，写像 $c_3\colon Z \longrightarrow X \amalg_Z Y$ は省略されることが多い．

定義 1.11: 完備な圏

圏 $\mathcal{C}$ が**完備**（resp. **余完備**）(complete resp. cocomplete) であるとは，$\mathcal{C}$ における任意の図式が極限（resp. 余極限）を持つことを言う．完備かつ余完備な圏は**双完備** (bicomplete) であると言われる．

Sets は双完備である．

命題 1.1: 極限と Hom の交換

圏 $\mathcal{C}$ の図式 $D\colon I \longrightarrow \mathcal{C}$ を与える．

(1) 圏 $\mathcal{C}$ は完備であるとする．このとき $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\bigl(X,\ \lim_I D\bigr) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ は **Sets** の図式

$$I \xrightarrow{D} \mathcal{C} \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\text{-})} \mathbf{Sets} \tag{1.1.1}$$

の極限である．i.e. 全単射

$$\lim_{i\in I}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X,\, D(i)\big)\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X,\, \lim_{I} D\big)$$

が存在する．

(2) 圏 $\mathcal{C}$ は余完備であるとする．このとき $\forall X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(\mathrm{colim}_I D,\, X\big)\in\mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ は $\mathbf{Sets}$ の図式

$$I\xrightarrow{D}\mathcal{C}\xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-},\, X)}\mathbf{Sets}$$

の余極限である．i.e. 全単射

$$\lim_{i\in I}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(D(i),\, X\big)\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(\mathrm{colim}_{I},\, X\big)$$

が存在する．

証明 (1) $\mathcal{C}$ が完備なので，図式 $D\colon I\longrightarrow\mathcal{C}$ の極限

$$\begin{tikzcd}
& \lim_I D \arrow[dl, bend right, "p_i"'] \arrow[dr, bend left, "p_j"] & \\
D(i) \arrow[rr, "D(f)"] & & D(j)
\end{tikzcd}$$

が存在する[*2]．示すべきは $\mathbf{Sets}$ の図式

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, \lim_I D) \arrow[dl, bend right, "p_{i*}"'] \arrow[dr, bend left, "p_{j*}"] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X,\, D(i)\big) \arrow[rr, "D(f)_*"] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X,\, D(j)\big)
\end{tikzcd}$$

が極限の普遍性を充たすことである[*3]．

$\mathbf{Sets}$ の図式 (1.1.1) の錐 $(Y,\, c_\bullet)$ を任意にとる．すると錐の定義および $(\text{-})_*$ の定義から，$\forall y\in Y$ に対して以下の図式が可換になる：

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, bend right, "c_i(y)"'] \arrow[dr, bend left, "c_j(y)"] & \\
D(i) \arrow[rr, "D(f)"] & & D(j)
\end{tikzcd}$$

i.e. 組 $\big(X,\, c_\bullet(y)\big)$ は $\mathcal{C}$ の図式 $D\colon I\longrightarrow\mathcal{C}$ の錐であるから，錐の射 $u_y\colon X\longrightarrow\lim_I D$ が一意的に存在する．ここで写像

$$u\colon Y\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, \lim_I D),\ y\longmapsto u_y$$

を考えると，これは $\forall y\in Y$ に対して $p_{\bullet *}\circ u(y)=p_\bullet\circ u_y=c_\bullet(y)$ を充たす．i.e. $\mathbf{Sets}$ の図式

[*2] $i,\, j\in\mathrm{Ob}(I)$ および $f_{ij}\in\mathrm{Hom}_I\,(i,\, j)$ は任意にとる．

[*3] $p_{i*}\colon\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X,\, \lim_I D)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X,\, D(i)\big)$，$f\longmapsto p_i\circ f$ などと定義する．このように射に下付きの $*$ を書いた時は post-compose を表す．上付きの $*$ は pre-compose である．

$$
\begin{tikzcd}
 & \forall \boldsymbol{Y} \arrow[d, "u"] \arrow[ddl, bend right, "\boldsymbol{c}_i"'] \arrow[ddr, bend left, "\boldsymbol{c}_j"] & \\
 & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X,\, \lim_I D\right) \arrow[dl, bend right, "\boldsymbol{p}_{i*}"'] \arrow[dr, bend left, "\boldsymbol{p}_{j*}"] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X,\, D(i)\big) \arrow[rr, "D(f)_*"] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X,\, D(j)\big)
\end{tikzcd}
$$

を可換にする. u_y の定義からこのような u は一意であるから, 図式 (1.1.1) の錐 $\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, \lim_I D),\, p_{\bullet *}\big)$ が極限の普遍性を充たすことが分かった．極限の一意性より

$$
\lim_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X,\, D(i)\big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X,\, \lim_I D\big)
$$

でなくてはいけない.

(2) $\mathcal{C}$ が余完備なので，図式 $D\colon I \longrightarrow \mathcal{C}$ の余極限

$$
\begin{tikzcd}
D(i) \arrow[rr, "D(f)"] \arrow[dr, bend right, "p_i"'] & & D(j) \arrow[dl, bend left, "p_j"] \\
 & \operatorname{colim}_I D &
\end{tikzcd}
$$

が存在する[*4]．示すべきは **Sets** の図式

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\operatorname{colim}_I D,\, X\right) \arrow[dl, bend right, "{p_i}^*"'] \arrow[dr, bend left, "{p_i}^*"] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(D(j),\, X\big) \arrow[rr, "D(f)^*"] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(D(i),\, X\big)
\end{tikzcd}
$$

が極限の普遍性を充たすことだが，以降の議論は (1) と同様である．

■

1.1.3　米田埋め込み

定義 1.12: 前層

圏 $\mathcal{C}$ 上の圏 $\mathcal{S}$ に値をとる**前層**とは，関手

$$
P\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}
$$

のこと.

前層の圏 $\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\, \mathcal{S})$ [*5]とは,

- 前層 $P\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}$ を対象とする

[*4] $i,\, j \in \mathrm{Ob}(I)$ および $f_{ij} \in \mathrm{Hom}_I\,(i,\, j)$ は任意にとる.

[*5] $[\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}]$ や $\mathcal{S}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ と書くこともある．なお，付録 A で登場したものはこれの一例である.

- 前層 $P,\, Q\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}$ の間の自然変換 $\tau\colon P \Longrightarrow Q$ を射とする

として構成される圏のこと[*6].

定義 1.13: 表現可能前層・米田埋め込み

圏 $\mathcal{C}$ を与える．$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，以下で定義する前層

$$\boldsymbol{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-}\,,\,X)}\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

のことを**表現可能前層** (representable presheaf) と呼ぶ：

- $\forall Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-}\,,\,X)(Y) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(Y,\,X) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$$

  を対応づける
- $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ における任意の射 $g\colon Y \longrightarrow Z$[a] に対して，

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-}\,,\,X)(g) \coloneqq g^{*}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(Y,\,X) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(Z,\,X),\\ h &\longmapsto h \circ g\end{aligned}$$

  を対応付ける

[a] つまり，これは $\mathcal{C}$ における射 $g\colon Z \longrightarrow Y$ である．

米田埋め込み (Yoneda embedding) とは，以下で定義する関手

$$よ\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{PSh}\,(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})$$

のこと[a]：

- $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ に対して表現可能前層 $よ(X) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-}\,,\,X) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{PSh}\,(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets}))$ を対応付ける
- $\mathcal{C}$ における任意の射 $f\colon X \longrightarrow Y$ に対して，以下で定義される自然変換 $よ(f)\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-}\,,\,X) \Longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-}\,,\,Y)$ を対応付ける：
  - $\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ に対して，圏 $\mathbf{Sets}$ における射

$$\begin{aligned}よ(f)_Z \coloneqq f_{*}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(Z,\,X) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(Z,\,Y),\\ g &\longmapsto f \circ g\end{aligned}$$

    を対応付ける．

[a] 実際，一部の数学者は米田埋め込みの記号に平仮名の「よ」を使っている．

[*6] $\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\,\mathcal{S})$ の恒等射は $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ に対して $\mathrm{Id}_X\colon X \longrightarrow X$ を対応づける自然変換である．

補題 1.1: 米田の補題

前層 $F\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ および圏 $\mathcal{C}$ の対象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を与える．このとき，写像

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh}(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})}\bigl(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-},\,X),\,F\bigr) &\longrightarrow F(X), \\ \tau &\longmapsto \tau_X(\mathrm{Id}_X) \end{aligned}$$

は全単射である．

米田の補題の主張は少し込み入っているが，次のように考えれば良い：
$\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh}(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})}\bigl(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-},\,X)\bigr)$ とは自然変換

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \arrow[r, bend left=60, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-},\,X)"{name=U}] \arrow[r, bend right=60, "F"'{name=D}] & \mathbf{Sets} \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "\tau"] \end{tikzcd}$$

のことであるから，表現可能前層の定義より $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ に対して圏 $\mathbf{Sets}$ における射（i.e. 写像）$\tau_X\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\,X) \longrightarrow F(X)$ が定まる．圏の定義より集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\,X)$ には必ず恒等射という元 $\mathrm{Id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\,X)$ が含まれるので，それを写像 τ_X で送った先は $\tau_X(\mathrm{Id}_X) \in F(X)$ として well-defined である．

<u>証明</u> 写像

$$\begin{aligned} \eta\colon F(X) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh}(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})}\bigl(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-},\,X),\,F\bigr), \\ s &\longmapsto \bigl\{\eta(s)_Y\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\,X) \longrightarrow F(Y),\ f \longmapsto F(f)(s)\bigr\}_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \end{aligned}$$

を考える．$\forall s \in F(X)$ を 1 つ固定する．このとき圏 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ における任意の射 $Y \longleftarrow Z\colon f$ および $\forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,\,X)$ に対して

$$\begin{aligned} \eta(s)_Y \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-},\,X)(f)(g) &= \eta(s)_Y(g \circ f) \\ &= F(g \circ f)(s) \\ &= F(f) \circ F(g)(s) \\ &= F(f) \circ \eta(s)_Z(g) \end{aligned}$$

が言える．i.e. $\eta(s)$ は自然変換であり，η は well-defined である．

ところで，$\forall \tau \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh}(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})}\bigl(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-},\,X),\,F\bigr)$ に対して

$$\begin{aligned} \eta(\tau_X(\mathrm{Id}_X)) &= \bigl\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\,X) \longrightarrow F(Y),\ f \longmapsto F(f)\bigl(\tau_X(\mathrm{Id}_X)\bigr)\bigr\}_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \\ &= \bigl\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\,X) \longrightarrow F(Y),\ f \longmapsto F(f) \circ \tau_X(\mathrm{Id}_X)\bigr\}_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \\ &= \bigl\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\,X) \longrightarrow F(Y),\ f \longmapsto \tau_Y \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-},\,X)(f)(\mathrm{Id}_X)\bigr\}_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \\ &= \bigl\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\,X) \longrightarrow F(Y),\ f \longmapsto \tau_Y(f \circ \mathrm{Id}_X)\bigr\}_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \\ &= \bigl\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\,X) \longrightarrow F(Y),\ f \longmapsto \tau_Y(f)\bigr\}_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \\ &= \tau \end{aligned}$$

が成り立ち，かつ

$$\eta(s)_X(\mathrm{Id}_X) = F(\mathrm{Id}_X)(s) = \mathrm{Id}_{F(X)}(s) = s$$

が成り立つので，η は題意の写像の逆写像である． ■

命題 1.2: 米田埋め込みは埋め込み

米田埋め込み $よ\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{PSh}\,(\mathcal{C},\, \mathbf{Sets})$ は埋め込みである．

<u>証明</u> $\forall X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を固定する．写像

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X,\, Y) &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\, \mathbf{Sets})}\,\bigl(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-},\, X),\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-},\, Y)\bigr), \\ f &\longmapsto よ(f) \end{aligned}$$

が全単射であることを示せば良い．米田埋め込みの定義から，$\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X,\, Y)$ に対して

$$\begin{aligned} よ(f) &= \bigl\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(Z,\, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(Z,\, Y),\ g \longmapsto f \circ g\bigr\}_{Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \\ &= \bigl\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(Z,\, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(Z,\, Y),\ g \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-},\, Y)(g)(f)\bigr\}_{Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \end{aligned}$$

が成り立つが，これは米田の補題において $F = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-},\, Y) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{PSh}\,(\mathcal{C},\, \mathbf{Sets}))$ としたときの逆写像であり，示された． ■

系 1.1: 同型と表現可能前層の自然同値

以下の 2 つは同値である：

(1) $X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ は同型

(2) 表現可能前層 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-},\, X),\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-},\, Y) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{PSh}\,(\mathcal{C},\, \mathbf{Sets}))$ が自然同型

<u>証明</u> **(1) $\Longrightarrow$ (2)**

$X \cong Y$ なので $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X,\, Y),\ g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(Y,\, X)$ が存在して $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ かつ $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ を充たす．このとき $\forall A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$\tau_A\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, Y),\ h \longmapsto f \circ h$$

と定義するとこれは $\eta_A\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, X),\ h \longmapsto g \circ h$ を逆射に持つので同型射であり，自然同値

$$\tau\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-},\, X) \Longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-},\, Y)$$

を定める．

(1) $\Longleftarrow$ (2)

$\mathrm{PSh}\,(\mathcal{C},\, \mathbf{Sets})$ における同型射とは，2 つの前層の間の自然同型である．関手は同型射を保つので，命題 1.2 より示された．

■

後の便宜のため，極限を捉え直そう．勝手な図式 $D\colon I^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{C}$ を 1 つ固定する．また，**定数関手** (constant functor)

$$\mathrm{pt}\colon I^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を以下のように定める：

- $\forall i \in \mathrm{Ob}(I^{\mathrm{op}})$ に対して，1 点集合[*7] $\{\mathrm{pt}\} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ を対応付ける．
- $\forall f \in \mathrm{Hom}_{I^{\mathrm{op}}}(i,\, j)$ に対して，恒等写像 $\mathrm{pt} \longmapsto \mathrm{pt}$ を対応付ける．

さらに，$\forall C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，**Sets** に値をとる前層

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(C,\, D(\text{-})\big) \colon I^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を，以下のように定義する：

- $\forall i \in \mathrm{Ob}(I^{\mathrm{op}})$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X, D(i)\big) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ を対応付ける．
- $\forall f \in \mathrm{Hom}_{I^{\mathrm{op}}}(i,\, j)$ に対して写像

$$\begin{aligned} D(f)_* \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X, D(i)\big) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X, D(j)\big), \\ g &\longmapsto F(f) \circ g \end{aligned}$$

  を対応付ける．

これを用いて，**Sets** に値をとる前層

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(I,\, \mathbf{Sets})}\Big(\mathrm{pt},\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(\text{-}\,,\, D(\text{-})\big)\Big) \colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を以下のように定義する：

- $\forall C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ に対して，集合

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(I,\, \mathbf{Sets})}\Big(\mathrm{pt},\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(C,\, D(\text{-})\big)\Big) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$$

  を対応付ける．
- $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X,\, Y)$ に対して，写像

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(I,\, \mathbf{Sets})}\Big(\mathrm{pt},\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X,\, D(\text{-})\big)\Big) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(I,\, \mathbf{Sets})}\Big(\mathrm{pt},\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(Y,\, D(\text{-})\big)\Big), \\ \tau &\longmapsto \tau \circ f \end{aligned}$$

  を対応付ける．

命題 1.3: 極限の特徴付け

$X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が図式 $D \colon I^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{C}$ の極限であるための必要十分条件は，**Sets** に値をとる前層

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(I,\, \mathbf{Sets})}\Big(\mathrm{pt},\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(\text{-}\,,\, D(\text{-})\big)\Big) \colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

が表現可能前層

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-}\,, X) \colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

と自然同型になることである．

[*7] 圏 **Sets** における終対象である．

証明 **($\Longleftarrow$)**

自然同型

$$\theta\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\text{-}, X\right) \Longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(I,\,\mathbf{Sets})}\Big(\mathrm{pt},\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\text{-},\, D(\text{-})\right)\Big)$$

を与える．$\forall C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を 1 つ固定する．

まず，集合 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(I,\,\mathbf{Sets})}\Big(\mathrm{pt},\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(C,\, D(\text{-})\right)\Big)$ が図式 D 上の C を頂点とする錐全体の集合と同一視できることに注意する．実際，$\forall \tau \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(I,\,\mathbf{Sets})}\Big(\mathrm{pt},\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(C,\, D(\text{-})\right)\Big)$ は写像の族

$$\left\{\tau_i\colon \{\mathrm{pt}\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(C,\, D(i)\right)\right\}_{i\in I}$$

からなるが，$\{\mathrm{pt}\}$ は 1 点集合なので τ_i を $\tau_i(\mathrm{pt})$ と同一視できる．i.e. $\tau_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(C,\, D(i)\right)$ である．さらに，τ が自然変換であることから $\forall f \in \mathrm{Hom}_{I^{\mathrm{op}}}\left(i,\, j\right)$ に対して以下の図式が可換になる：

$$\begin{tikzcd}
 & \{\mathrm{pt}\} \arrow[dl, "\tau_i"'] \arrow[dr, "\tau_j"] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(C,\, D(i)\right) \arrow[rr, "D(f)_*"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(C,\, D(j)\right)
\end{tikzcd}$$

この図式における $\mathrm{pt} \in \{\mathrm{pt}\}$ の行き先を追跡することで

$$D(f) \circ \tau_i = \tau_j$$

が分かるが，これはまさに錐の定義である．

以上の考察から，自然同型 θ は図式 D の勝手な錐 $(C,\, \tau) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cone}(D))$ が与えられると，対応する $\theta_C^{-1}(\tau) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(C,\, X\right)$ を一意的に定めるが，これは極限の普遍性に他ならない．特に，米田の補題から自然同型 θ は $\theta_X(\mathrm{Id}_X) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(I,\,\mathbf{Sets})}\Big(\mathrm{pt},\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X,\, D(\text{-})\right)\Big)$ と対応付き，$\big(X,\, \theta_X(\mathrm{Id}_X)\big) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cone}(D))$ が図式 D の極限である．

($\Longrightarrow$)

上述の議論から明らか．

■

1.1.4 重み付き極限・エンド・コエンド

重み付き極限とは，命題 1.3 の一般化である．

定義 1.14: 重み付き極限

図式 $D\colon I^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{C}$ および **Sets** に値をとる任意の前層 $W\colon I^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ を与える．
図式 D の $\boldsymbol{W}$**-重み付き極限** (W-weighted limit) とは，（存在すれば）圏 $\mathcal{C}$ の対象 $\mathbf{lim}^{\boldsymbol{W}} \boldsymbol{D} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ であって，**Sets** に値をとる前層

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(I,\,\mathbf{Sets})}\Big(W,\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\text{-}\,,\, D(\text{-})\right)\Big)\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

と表現可能前層

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\text{-}\,,\, \lim{}^{W} D\right)\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

が自然同型となるもののこと．

Hom 関手

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を以下で定義する：

- $\forall (X,\, Y) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C})$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X,\, Y\right) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ を対応付ける．
- $\forall (f,\, g) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C}}\big((X,\, Y),\, (X',\, Y')\big)$ に対して，写像

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X,\, Y\right) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X',\, Y'\right), \\ h &\longmapsto g \circ h \circ f \end{aligned}$$

を対応付ける．

定義 1.15: エンド

関手 $F\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ の**エンド** (end) とは，（存在すれば）$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$-重み付き極限

$$\int_{C \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})} \boldsymbol{F(C,\, C)} \coloneqq \lim{}^{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}} F \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$$

のこと．

1.1.5 随伴

定義 1.16: 随伴

関手 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, $G\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ を与える．F が G の**左随伴** (left adjoint) であり，かつ G が F の**右随伴** (right adjoint) であるとは，２つの関手

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\bigl(F(\text{-}),\,\text{-}\bigr)\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{Sets},$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\bigl(\text{-},\,G(\text{-})\bigr)\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

の間に自然同型

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \arrow[r, bend left=50, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(F(\text{-}),\text{-}\right)"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\text{-},G(\text{-})\right)"'{name=L}] & \mathbf{Sets} \arrow[from=U, to=L, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

が存在することを言う．

F が G の左随伴である（全く同じことだが，G が F の右随伴である）ことを $\boldsymbol{F \dashv G}$ と書く．図式中では

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$$

のように書く．

さて，圏 $\mathcal{C}$ 上の図式 $D\colon I \longrightarrow \mathcal{C}$ が余極限を持つとする：

$$\begin{tikzcd} & D(\forall i) \arrow[dl, bend right] \arrow[dr, bend left] & \\ \operatorname{colim}_I D \arrow[rr, dashed, "\exists!"] & & \forall X \end{tikzcd}$$

このとき，$\mathcal{D}$ 上の図式として

$$\begin{tikzcd} & F\bigl(D(\forall i)\bigr) \arrow[dl, bend right] \arrow[dr, bend left] & \\ \operatorname{colim}_I F(D) \arrow[rr, dashed, "\exists! u"] & & F(\operatorname{colim}_I D) \end{tikzcd}$$

を考えることができる．特に，一意に定まる射 $u\colon \operatorname{colim}_I F(D) \longrightarrow F(\operatorname{colim}_I D)$ が同型のとき，関手 F は**余極限を保つ**という．

同様に，圏 $\mathcal{D}$ 上の図式 $D\colon I \longrightarrow \mathcal{C}$ が極限を持つとする：

$$\begin{tikzcd} \lim_I D \arrow[dr, bend right] & & \forall X \arrow[ll, dashed, "\exists!"] \arrow[dl, bend left] \\ & D(\forall i) & \end{tikzcd}$$

このとき，$\mathcal{D}$ 上の図式として

$$
\begin{tikzcd}
\lim_I F(D) \arrow[dr, bend right] & & F(\lim_I D) \arrow[ll, dashed, "\exists! u"'] \arrow[dl, bend left] \\
& F\bigl(D(\forall i)\bigr) &
\end{tikzcd}
$$

を考えることができる．特に，一意に定まる射 $u\colon F(\lim_I D) \longrightarrow \lim_I F(D)$ が同型のとき，関手 F は**極限を保つ**という．

命題 1.4: 随伴と極限・余極限

関手 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, $G\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ が $F \dashv G$ であるとする．このとき，F は余極限を保ち，G は極限を保つ．

証明 余極限を持つ任意の $\mathcal{C}$ の図式 $D\colon I \longrightarrow \mathcal{C}$ を 1 つ固定する．随伴の定義および命題 1.1 より，$\forall Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ に対して

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\bigl(F(\operatorname*{colim}_I D),\, Y\bigr) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\bigl(\operatorname*{colim}_I D,\, G(Y)\bigr) \\
&\cong \lim_I \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\bigl(D(i),\, G(Y)\bigr) \\
&\cong \lim_I \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\bigl(F(D(i)),\, Y\bigr) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\bigl(\operatorname*{colim}_I F(D),\, Y\bigr)
\end{aligned}
$$

が言える．i.e. 自然同型

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathcal{D} \arrow[r, bend left=50, "{\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(F(\mathrm{colim}_I D), -\right)}"] \arrow[r, bend right=50, "{\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(\mathrm{colim}_I F(D), -\right)}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \mathbf{Sets}
\end{tikzcd}
$$

があるので，米田の補題の系より

$$
F(\operatorname*{colim}_I D) \cong \operatorname*{colim}_I F(D)
$$

が示された． ■

1.1.6 Kan 拡張

定義 1.17: スライス圏

圏 $\mathcal{D}$ およびその対象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ を与える．**スライス圏** (slice category) $\boldsymbol{\mathcal{D}_{/X}}$ とは，以下のデータからなる圏のこと：

- $\mathcal{D}$ の対象と射の組 $(D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}),\ \alpha\colon D \longrightarrow X)$ を対象に持つ
- (D, α), (D', α') の間の射は，$\mathcal{D}$ における射 $\beta\colon D \longrightarrow D'$ であって $\mathcal{D}$ における図式

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & D' \arrow[dl, "\alpha'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

を可換にするものとする

双対スライス圏 (dual slice category) $\boldsymbol{\mathcal{D}_{X/}}$ とは，以下のデータからなる圏のこと：

- $\mathcal{D}$ の対象と射の組 $(D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}),\ \alpha\colon X \longrightarrow D)$ を対象に持つ
- (D, α), (D', α') の間の射は，$\mathcal{D}$ における射 $\beta\colon D \longrightarrow D'$ であって $\mathcal{D}$ における図式

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "\beta"] & & D' \\ & X \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[ur, "\alpha'"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にするものとする

関手[*8] $\mathcal{D}_{/X} \longrightarrow \mathcal{D},\ (D, \alpha) \longmapsto D$ のことを**標準的忘却関手** (canonical forgetful functor) と呼ぶ．標準的関手は図式中でも記号で明記しないことが多い．

関手 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ および圏 $\mathcal{D}$ における対象 $X \in \mathcal{D}$ を与える．このとき**関手 $\boldsymbol{F}$ に関するスライス圏**を，圏全体がなす圏 **Cat** における引き戻し

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{F_{/X}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{D}_{/X} \arrow[d] \\ \mathcal{C} \arrow[r, "F"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

として定義する．i.e. $F_{/X}$ の対象は $(C \in \mathcal{C},\ \alpha\colon F(C) \longrightarrow X)$ であり，(C, α), (C', α') の間の射とは，$\mathcal{C}$ における射 $\beta\colon C \longrightarrow C'$ であって $\mathcal{D}$ における図式

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[rr, "F(\beta)"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & F(C') \arrow[dl, "\alpha'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

を可換にするものである．

[*8] 対象の対応のみ明示した．

定理 1.2: density theorem

前層 $F\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ を与える．関手 $よ\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{PSh}\left(\mathcal{C},\, \mathbf{Sets}\right)$ を米田埋め込みとする．
このとき，前層の圏 $\mathrm{PSh}\left(\mathcal{C},\, \mathbf{Sets}\right)$ における同型

$$F \cong \operatorname*{colim}_{X \in よ_{/F}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\text{-},\, X\right)$$

が成り立つ．

<u>証明</u> 米田の補題の系により，示すべきは自然同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})}\left(\operatorname*{colim}_{X \in よ_{/F}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\text{-},\, X\right),\, \text{-}\right) \Longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})}\left(F,\, \text{-}\right)$$

である．このとき，$\forall G \in \mathrm{Ob}(\mathrm{PSh}\left(\mathcal{C},\, \mathbf{Sets}\right))$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})}\left(\operatorname*{colim}_{X \in よ_{/F}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\text{-},\, X\right),\, G\right) &\cong \lim_{X \in よ_{/F}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\text{-},\, X\right),\, G\right) && \because \text{ 命題 1.1} \\
&\cong \lim_{X \in よ_{/F}} G(X) && \because \text{ 米田の補題}
\end{aligned}$$

なる自然同型がある．さらに，命題 1.3 と同様の議論により定数関手 $\mathrm{pt} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{PSh}\left(よ_{/F},\, \mathbf{Sets}\right))$ による自然な同型

$$\lim_{X \in よ_{/F}} G(X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(よ_{/F},\,\mathbf{Sets})}\left(\mathrm{pt},\, G\right)$$

があることが分かる．よって自然な同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(よ_{/F},\,\mathbf{Sets})}\left(\mathrm{pt},\, G\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})}\left(F,\, G\right)$$

を示せば十分である．

ところで，自然変換 $\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(よ_{/F},\,\mathbf{Sets})}\left(\mathrm{pt},\, G\right)$ は，写像の族

$$\left\{\tau_{(X,\,\alpha)}\colon \{\mathrm{pt}\} \longrightarrow G(X)\right\}_{(X,\,\alpha) \in \mathrm{Ob}(よ_{/F})}$$

からなるが，$\{\mathrm{pt}\}$ は一点集合なので $\tau_{(X,\,\alpha)}$ と $\tau_{(X,\,\alpha)}(\mathrm{pt}) \in G(X)$ を同一視して良い．一方で $\forall (X,\, \alpha) \in \mathrm{Ob}(よ_{/F})$ について $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})}\left(よ(X),\, F\right) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\text{-}, X\right),\, F\right)$ であるから，米田の補題からこれは $\alpha_X(\mathrm{Id}_X) \in F(X)$ と一対一対応する．この対応により $\forall X \in \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ について写像

$$\eta(\tau)_X\colon F(X) \longrightarrow G(X),\ \alpha_X(\mathrm{Id}_X) \longmapsto \tau_{(X,\,\alpha)}$$

が得られる．α は自然変換なので $\eta(\tau)_X$ を全て集めたものは自然変換 $\eta(\tau)\colon F \Longrightarrow G$ になる．よって写像

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(よ_{/F},\,\mathbf{Sets})}\left(\mathrm{pt},\, G\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})}\left(F,\, G\right),\ \tau \longmapsto \eta(\tau)$$

は自然な同型であり，証明が完了した． ■

定義 1.18: Kan 拡張

$i\colon \mathcal{C}_0 \hookrightarrow \mathcal{C}$ を $\mathcal{C}$ の小部分圏, $\mathcal{D}$ を双完備な圏とする.

- 関手 $F\colon \mathcal{C}_0 \longrightarrow \mathcal{D}$ の, 関手 i に沿った**左 Kan 拡張** (left Kan extention) とは,

$$i_!(F)(x) := \operatorname*{colim}_{c \in (\mathcal{C}_0)_{/x}} F(c)$$

によって定義される関手

$$i_!\colon \mathrm{Fun}(\mathcal{C}_0, \mathcal{D}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$

によって定まる関手 $i_!(F)\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ のこと.

- 関手 $F\colon \mathcal{C}_0 \longrightarrow \mathcal{D}$ の, 関手 i に沿った**右 Kan 拡張** (right Kan extention) とは,

$$i_*(F)(x) := \lim_{c \in (\mathcal{C}_0)_{x/}} F(c)$$

によって定義される関手

$$i_*\colon \mathrm{Fun}(\mathcal{C}_0, \mathcal{D}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$

によって定まる関手 $i_*(F)\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ のこと.

制限関手

$$i^*\colon \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{C}_0, \mathcal{D})$$

について $i_! \dashv i^*$ かつ $i_* \vdash i^*$ である.

1.2 単体的集合

higher geometry において重要な役割を果たす単体的集合の圏を定義する.

定義 1.19: 単体圏

- $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して, 全順序付集合 $[\boldsymbol{n}] := \{0, 1, \dots, n\}$ のことを ***n*-単体** (n-simplex) と呼ぶ.
- **単体圏** (simplex category) Δ とは,
  - $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して, n-単体 $[n]$ を対象とする.
  - 順序を保つ写像を射とする

  圏のこと.

特に $\mathrm{Hom}_{\Delta}([n-1], [n])$ の元のうち

$$d_i^n\colon [n-1] \hookrightarrow [n],\ x \longmapsto \begin{cases} x, & x < i \\ x+1 & x \geq i \end{cases} \quad \text{w/} \quad i = 0, \dots, n$$

のことを**面写像** (face map) と呼び，$\mathrm{Hom}_{\Delta}([n+1],\,[n])$ の元のうち

$$s_i^n\colon [n+1] \twoheadrightarrow [n],\ x \longmapsto \begin{cases} x, & x \le i \\ x-1 & x > i \end{cases} \text{ w/ } i = 0,\,\dots,\,n$$

のことを**縮退写像** (degeneracy map) と呼ぶ.

定義 1.20: 単体的集合

- **単体的集合** (simplicial set) とは，前層

$$K\colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

  のこと．特に n-単体 $[n] \in \mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})$ の表現可能前層を $\boldsymbol{\Delta^n} \coloneqq \mathrm{Hom}_{\Delta}(\text{-},\,[n]) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{sSet})$ と書く.
- **余単体的集合** (cosimplicial set) とは，関手

$$K\colon \Delta \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

  のこと.
- 単体的集合 $S\colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ が単体的集合 $K\colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ の**単体的部分集合** (simplicial subset) であるとは，以下の 2 つの条件を充たすことを言う[a]：
  (sub-1) $\forall n \ge 0$ に対して $S([n]) \subset K([n])$
  (sub-2) 圏 Δ における任意の射 $\alpha\colon [n] \longrightarrow [m]$ に対して $K(\alpha)\bigl(S([m])\bigr) \subset S([n])$ で，かつ $S(\alpha) = K(\alpha)|_{S([m])}$ が成り立つ.
  誤解の恐れがないときは，単体的部分集合を $\boldsymbol{S \subset K}$ と書く.
- **単体的集合の圏 sSet** とは，前層の圏

$$\mathbf{sSet} \coloneqq \mathrm{PSh}\,(\Delta,\,\mathbf{Sets})$$

  のこと.

[a] 条件 **(sub-2)** により**包含写像** $i \coloneqq \bigl\{i_{[n]}\colon S([n]) \longrightarrow K([n]),\ x \longmapsto x\bigr\}_{n\ge 0}$ が自然変換になり，$i \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(S,\,K)$ と見做せる．このことから，以降では包含写像を $S \hookrightarrow K$ と略記する.

$K_n \coloneqq K([n])$ とおく.

- K_n の元のことを n**-単体** (n-simplex)
- $\partial_i \coloneqq K(d_i)\colon K_n \twoheadrightarrow K_{n-1}$ のことを**面写像** (face map)
- $\sigma_i \coloneqq K(s_i)\colon K_n \hookrightarrow K_{n+1}$ のことを**縮退写像** (degeneracy map) と呼ぶ.

と呼ぶ．これらは以下の**単体的恒等式** (simplicial identities) を充たす：

$$\partial_i^{n-1} \circ \partial_j^n = \partial_{j-1}^{n-1} \circ \partial_i^n \qquad (i < j), \tag{1.2.1}$$
$$\partial_i^{n+1} \circ \sigma_j^n = \sigma_{j-1}^{n-1} \circ \partial_i^n \qquad (i < j), \tag{1.2.2}$$
$$\partial_i^{n+1} \circ \sigma_j^n = \sigma_j^{n-1} \circ \partial_{i-1}^n \qquad (i > j+1), \tag{1.2.3}$$

$$
\begin{aligned}
&\partial_i^{n+1} \circ \sigma_j^n = \mathrm{id} && (i = j,\, j+1), \\
&\sigma_i^{n+1} \circ \sigma_j^n = \sigma_{j+1}^{n+1} \circ \sigma_i^n && (i \leq j)
\end{aligned}
\tag{1.2.4}
$$

逆に,

- 対象の族 $\{K_n\}_{n \geq 0}$
- 射の族 $\{\partial_i^n \colon K_n \longrightarrow K_{n-1}\}_{0 \leq i \leq n,\, n \geq 0}$
- 射の族 $\{\sigma_i^n \colon K_n \longrightarrow K_{n+1}\}_{0 \leq i \leq n,\, n \geq 0}$

の組であって単体的恒等式を充たすものは単体的集合を一意に定める [**?**, Tag 04FW].

単体的集合 $K \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ を図示する方法がある.

(1) K_0 の元（i.e. 0-単体）を点と見做し，$K_0 = \{\bullet, \ldots, \bullet\}$ のように書く.

(2) K_1 の元（i.e. 1-単体）$e \in K_1$ を

$$
\begin{tikzcd}
\partial_1^1(e) \arrow[rr, "e"] & & \partial_0^1(e)
\end{tikzcd}
$$

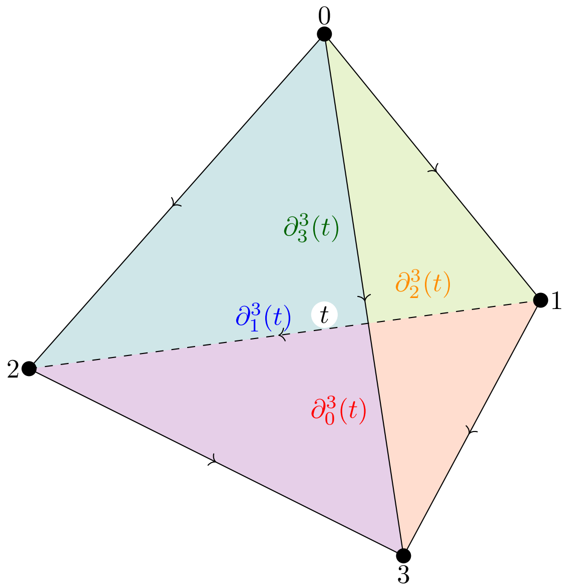
のように有向辺として図示する.

(3) K_2 の元（i.e. 2-単体）$\sigma \in K_2$ を

$$
\begin{tikzcd}
& \partial_0^1\partial_2^2(\sigma) = \partial_1^1\partial_0^2(\sigma) \arrow[dr, "\partial_0^2(\sigma)"] & \\
\partial_1^1\partial_1^2(\sigma) = \partial_1^1\partial_2^2(\sigma) \arrow[ur, "\partial_2^2(\sigma)"] \arrow[rr, "\partial_1^2(\sigma)"'] & \sigma & \partial_0^1\partial_1^2(\sigma) = \partial_0^1\partial_0^2(\sigma)
\end{tikzcd}
$$

のように向きづけられた三角形として図示する．この図は単体的恒等式 (1.2.1) を表している.

(4) K_3 の元（i.e. 3-単体）$t \in K_3$ を,



のように向き付けられた四面体として図示する．四面体の面の繋がり方が単体的恒等式 (1.2.1) を表している．

(5) K_n の元（i.e. n-単体）は，単体的恒等式 (1.2.1) によって帰納的に図示する．

命題 1.5: 単体的集合の圏の基本性質

よ: $\Delta \longrightarrow$ **sSet** を米田埋め込みとする．

(1) 任意の単体的集合 $K\colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ に対して，自然な同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(\Delta^n,\, K\right) \cong K_n$$

が成り立つ．

(2) 圏 **sSet** は双完備である．

(3) 任意の単体的集合 $K\colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ に対して，

$$K \cong \operatorname*{colim}_{[n]\in よ_{/K}} \Delta^n$$

が成り立つ．

命題 1.5-(1) によって，n-単体 $\sigma \in K_n$ を自然変換 $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(\Delta^n,\, K\right)$ と同一視できる！

証明 (1) 米田の補題より

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(\Delta^n,\, K\right) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\Delta,\,\mathbf{Sets})}\left(\mathrm{Hom}_{\Delta}\left(\text{-},\, [n]\right),\, K\right) \cong K([n]) = K_n$$

(2) 図式 $D\colon I \longrightarrow$ **sSet** を与える．**Sets** が双完備であることから，単体的集合

$$\begin{aligned} \lim_{I} D\colon \Delta^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathbf{Sets}, \\ [n] &\longmapsto \lim_{I} D(\text{-})([n]) \end{aligned}$$

が well-defined である．これがちょうど図式 D の極限を与える．

同様に，単体的集合

$$\begin{aligned}\operatorname{colim}_I D\colon \Delta^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathbf{Sets}, \\ [n] &\longmapsto \operatorname{colim}_I D(\text{-})([n])\end{aligned}$$

が図式 D の余極限を与える．

(3) 定理 1.2 より

$$K \cong \operatorname*{colim}_{[n]\in \text{よ}_{/K}} \mathrm{Hom}_{\Delta}(\text{-}, [n]) = \operatorname*{colim}_{[n]\in \text{よ}_{/K}} \Delta^n$$

■

1.2.1　幾何学的実現

定義 1.20 を再現する具体的な構成をする．

定義 1.21: 幾何学的 n-単体

- **幾何学的 n-単体** Δ^n_{top} とは，位相空間

$$\Delta^n_{\mathrm{top}} := \left\{ (x^0, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; x^i \geq 0,\ \sum_{i=0}^{n} x^i = 1 \right\}$$

  のこと．
- 余単体的集合

$$\Delta_{\mathrm{top}}\colon \Delta \longrightarrow \mathbf{Top}$$

  とは，
  - n-単体 $[n] \in \mathrm{Ob}(\Delta)$ に対して幾何学的 n-単体 Δ^n_{top} を対応づける
  - 圏 Δ における任意の射 $\alpha\colon [n] \longrightarrow [m]$ に対して，連続写像

$$\Delta_{\mathrm{top}}(\alpha)\colon \Delta^n_{\mathrm{top}} \longrightarrow \Delta^m_{\mathrm{top}},\ (x^0, \dots, x^n) \longmapsto \left(\sum_{j,\ \alpha(j)=0} x^j, \dots, \sum_{j,\ \alpha(j)=m} x^j \right)$$

    を対応付ける

  関手のこと．
- 位相空間 $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ の**特異単体** (singular simplicial set) とは，単体的集合

$$\begin{aligned}\mathrm{Sing}(X)\colon \Delta^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathbf{Sets}, \\ [n] &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^n_{\mathrm{top}}, X), \\ \left([m] \xrightarrow{\alpha} [n]\right) &\longmapsto \left(\mathrm{Sing}(X)_m \xrightarrow{\Delta_{\mathrm{top}}(\alpha)^*} \mathrm{Sing}(X)_n\right)\end{aligned}$$

  のこと．
- 特異複体とは，関手

$$\mathrm{Sing}\colon \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{sSet},$$

$$X \longmapsto \mathrm{Sing}(X),$$
$$\bigl(X \xrightarrow{f} Y\bigr) \longmapsto \bigl(\mathrm{Sing}(X) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Sing}(Y)\bigr)$$

のこと．

定義 1.22: 幾何学的実現

よ$\colon \Delta \longrightarrow \mathbf{sSet}$ を米田埋め込みとする．**幾何学的実現** (geometric realization) とは，余極限を保つ関手

$$|\text{-}|\colon \mathbf{sSet} \longrightarrow \mathbf{Top},\ K \longmapsto \operatorname*{colim}_{[n]\in よ/K} \Delta_{\mathrm{top}}([n])$$

のこと．

Top における colim の公式を使うと

$$|K| = \left(\coprod_{[n]\in \mathrm{Ob}(\Delta)} (K_n \times \Delta^n_{\mathrm{top}})\right) \Big/ \left\{ \bigl([m];\ \alpha^*(x),\ t\bigr) \sim \bigl([n];\ x,\ \Delta_{\mathrm{top}}(\alpha)(t)\bigr) \;\middle|\; {\scriptstyle x\in K_n,\, t\in \Delta^m_{\mathrm{top}},\atop \alpha\in \mathrm{Hom}_{\Delta}([m],\,[n])} \right\}$$

となる．

命題 1.6:

特異複体 $\mathrm{Sing}\colon \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{sSet},\ X \longmapsto S(X)$ は幾何学的実現 $|\text{-}|\colon \mathbf{sSet} \longrightarrow \mathbf{Top}$ の右随伴である．

証明 右随伴の定義を思い出すと，$\forall (K,\,X) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{sSet}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Top})$ に対して自然同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\,(|K|,\,X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\,\bigl(K,\,\mathrm{Sing}(X)\bigr)$$

が成り立つことを示せば良い．実際，命題 1.1 より

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\,(|K|,\,X) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\,\Bigl(\operatorname*{colim}_{[n]\in よ/K} \Delta^n_{\mathrm{top}},\,X\Bigr) \cong \lim_{[n]\in よ/K} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\,(\Delta^n_{\mathrm{top}},\,X)$$

が，命題 1.1 および命題 1.5-(3), (1) より

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\,\bigl(K,\,\mathrm{Sing}(X)\bigr) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\,\Bigl(\operatorname*{colim}_{[n]\in よ_K} \Delta^n,\,\mathrm{Sing}(X)\Bigr) \\
&\cong \lim_{[n]\in よ/K} \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\,\bigl(\Delta^n,\,\mathrm{Sing}(X)\bigr) \\
&\cong \lim_{[n]\in よ/K} \mathrm{Sing}(X)_n \\
&= \lim_{[n]\in よ/K} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\,(\Delta^n_{\mathrm{top}},\,X)
\end{aligned}$$

が言える． ■

1.2.2 境界・角・背骨

定義 1.23: 境界・角・背骨・骨格

- $\Delta^n \in \mathrm{Ob}(\mathbf{sSet})$ の**単体的境界** (simplicial boundary) $\boldsymbol{\partial\Delta^n}$ とは，Δ^n の単体的部分集合

$$\partial\Delta^n \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

であって

$$\partial\Delta^n([k]) \coloneqq \begin{cases} \Delta^n([k]), & k \neq n \\ \Delta^n([k]) \setminus \{\mathrm{Id}_{[n]}\}, & k = n \end{cases}$$

を充たすもののこと．

- 任意の部分集合 $S \subset [n]$ を与える．$\boldsymbol{S}$**-角** (S-horn) とは，Δ^n の単体的部分集合

$$\boldsymbol{\Lambda^n_S} \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

であって，

$$\Lambda^n_S([k]) \coloneqq \left\{ f \in \Delta^n([k]) \mid [n] \setminus \bigl(f([k]) \cup S\bigr) \neq \emptyset \right\}$$

を充たすもののこと．特に $\boldsymbol{\Lambda^n_j} \coloneqq \Lambda^n_{\{j\}}$ は $0 < j < n$ のとき**内部角** (inner horn)，$j = 0,\, n$ のとき**外部角** (outer horn) と呼ばれる．

- **背骨** (spine) とは，Δ^n の単体的部分集合

$$\boldsymbol{I^n} \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

であって，

$$I^n([k]) \coloneqq \left\{ f \in \Delta^n([k]) \mid f([k]) = \{j\} \text{ or } f([k]) = \{j,\, j+1\} \right\} \subset \Delta^n([k])$$

を充たすもののこと．

- 単体的集合 $K \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ の $\boldsymbol{n}$**-骨格** (n-skelton) とは，濃度 $n+1$ 以下の対象からなる Δ の充満部分圏 $i \colon \Delta_{\leq n} \hookrightarrow \Delta$ に沿った，関手 $i^*(K) \colon (\Delta_{\leq n})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ の左 Kan 拡張 $i_!\bigl(i^*(K)\bigr) \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ のこと．
- 単体的集合 $K \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ の $\boldsymbol{n}$**-余骨格** (n-coskelton) とは，濃度 $n+1$ 以下の対象からなる Δ の充満部分圏 $i \colon \Delta_{\leq n} \hookrightarrow \Delta$ に沿った，関手 $i^*(K) \colon (\Delta_{\leq n})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ の右 Kan 拡張 $i_*\bigl(i^*(K)\bigr) \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ のこと．

【例 1.2.1】角 Λ^2_j の構造

角 $\Lambda^2_0 \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ とはどのようなものだろうか．まず，表現可能前層 Δ^2 の定義から

$$\Lambda^2_0([0]) = \left\{ f \in \mathrm{Hom}_{\Delta}\left([0],\, [2]\right) \;\middle|\; [2] \setminus \bigl(f([0]) \cup \{0\}\bigr) \neq \emptyset \right\}$$

であるが，$\forall f \in \mathrm{Hom}_{\Delta}\left([0],\, [2]\right)$ は定数写像なので $\Lambda^2_0([0]) = \mathrm{Hom}_{\Delta}\left([0],\, [2]\right)$ である．これらを

$$\Lambda^2_0([0]) \eqqcolon \left\{ \underset{\{0\}}{\bullet},\, \underset{\{1\}}{\bullet},\, \underset{\{2\}}{\bullet} \right\}$$

と書く．次に

$$\Lambda^2_0([1]) = \left\{ f \in \mathrm{Hom}_{\Delta}\left([1],\, [2]\right) \;\middle|\; [2] \setminus \bigl(f([1]) \cup \{0\}\bigr) \neq \emptyset \right\}$$

を調べる．6 点集合 $\mathrm{Hom}_{\Delta}([1], [2])$ の元を全て書き出すと

$$\begin{aligned} f_0 &\colon 0 \longmapsto 0,\ 1 \longmapsto 0 \\ f_1 &\colon 0 \longmapsto 0,\ 1 \longmapsto 1 \\ f_2 &\colon 0 \longmapsto 0,\ 1 \longmapsto 2 \\ f_3 &\colon 0 \longmapsto 1,\ 1 \longmapsto 1 \\ f_4 &\colon 0 \longmapsto 1,\ 1 \longmapsto 2 \\ f_5 &\colon 0 \longmapsto 2,\ 1 \longmapsto 2 \end{aligned}$$

であるから，f_4 のみが除外される．さらに，

$$\begin{aligned} &\partial_1^1(f_0) = \partial_0^1(f_0) = \{0\}, \\ &\partial_1^1(f_1) = \{0\},\ \partial_0^1(f_1) = \{1\}, \\ &\partial_1^1(f_2) = \{0\},\ \partial_0^1(f_2) = \{2\}, \\ &\partial_1^1(f_3) = \partial_0^1(f_3) = \{1\}, \\ &\partial_1^1(f_4) = \{1\},\ \partial_0^1(f_4) = \{2\}, \\ &\partial_1^1(f_5) = \partial_0^1(f_5) = \{2\}, \end{aligned}$$

と計算できるため $f_0 = \sigma_0^0(\{0\})$, $f_3 = \sigma_0^0(\{1\})$, $f_5 = \sigma_0^0(\{2\})$ であり，図 (2) に則り

$$\Lambda_0^2([1]) = \sigma_0^0\big(\Lambda_0^2([0])\big) \cup \left\{ \{0\} \xrightarrow{f_1} \{1\},\ \{0\} \xrightarrow{f_2} \{2\} \right\}$$

と書ける．次に

$$\Lambda_0^2([2]) = \left\{ f \in \mathrm{Hom}_{\Delta}([2], [2]) \;\middle|\; [2] \setminus \big(f([2]) \cup \{0\}\big) \neq \emptyset \right\}$$

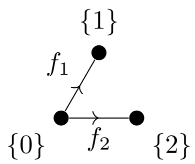
であるが，縮退写像の像に含まれない $\mathrm{Hom}_{\Delta}([2], [2])$ の元は $\mathrm{Id}_{[2]}$ のみであり，かつ $\mathrm{Id}_{[2]} \notin \Lambda_0^2([2])$ となっている．

$$\partial_0^2(\mathrm{Id}_{[2]}) = \big(0 \longmapsto 1,\ 1 \longmapsto 2\big) = f_4$$

となっていることに注目すべきである．ここから，$\Lambda_j^n([n-1]) \subset \mathrm{Hom}_{\Delta}([n-1], [n])$ において**除外される要素がちょうど $\partial_j^n(\mathrm{Id}_{[n-1]})$ なのではないかという予想**が立つのである．この予想は系 1.4 および米田の補題によって正当化される．

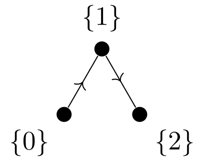
$k \geq 3$ に関する $\Lambda_0^2([k])$ は必ず縮退写像の像に入ってしまう．以上の考察より，図 (3) に則り Λ_0^2 を次のように図示する：

$\Lambda_0^2 =$

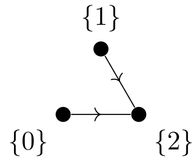


同様に，Λ^2_1, Λ^2_2 も次のように図示できる：

$\Lambda^2_1 =$



$\Lambda^2_2 =$



命題 1.7: コイコライザとしての境界

境界 $\partial\Delta^n$ は圏 **sSet** におけるコイコライザである：

$$\coprod_{0\le i<j\le n} \Delta^{n-2} \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} \coprod_{0\le k\le n} \Delta^{n-1} \xrightarrow{w} \partial\Delta^n$$

証明 $0 \le \forall k \le n$ に対して，圏 **sSet** における射（i.e. 自然変換）

$$u_k\colon \coprod_{0\le i<k} \Delta^{n-2} \longrightarrow \Delta^{n-1}$$
$$v_k\colon \coprod_{k<j\le n} \Delta^{n-2} \longrightarrow \Delta^{n-1}$$

を

$$u_k := \left\{ u_{k\,[m]}\colon \coprod_{0\le i<k} \Delta^{n-2}([m]) \longrightarrow \Delta^{n-2}([m]),\ (i,\,\alpha) \longmapsto d^{n-1}_i \circ \alpha \right\}_{[m]\in \mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})}$$
$$v_k := \left\{ u_{k\,[m]}\colon \coprod_{k<j\le n} \Delta^{n-2}([m]) \longrightarrow \Delta^{n-2}([m]),\ (j,\,\alpha) \longmapsto d^{n-1}_{j-1} \circ \alpha \right\}_{[m]\in \mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})}$$

により定義する[*9]．そして圏 **sSet** における 2 つの余積を

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{0\le i<j\le n} \Delta^{n-2} = \coprod_{0\le k\le n} \coprod_{0\le i<k} \Delta^{n-2} \arrow[r, dashed, "\exists! u"] & \coprod_{0\le k\le n} \Delta^{n-1} \\
\coprod_{0\le i<k} \Delta^{n-2} \arrow[u, hook] \arrow[r, "u_k"'] & \Delta^{n-1} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{0\le i<j\le n} \Delta^{n-2} = \coprod_{0\le k\le n} \coprod_{k<j\le n} \Delta^{n-2} \arrow[r, dashed, "\exists! v"] & \coprod_{0\le k\le n} \Delta^{n-1} \\
\coprod_{k<j\le n} \Delta^{n-2} \arrow[u, hook] \arrow[r, "v_k"'] & \Delta^{n-1} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

のようにとる．さらに射

$$w\colon \coprod_{0\le k\le n} \Delta^{n-1} \longrightarrow \partial\Delta^n$$

[*9] $\coprod_i \Delta^{n-2}([m]) = \coprod_i \mathrm{Hom}_\Delta([m],\,[n-2])$ は集合と写像の圏 **Sets** における余積なので，集合としては $\bigcup_i \{ (i,\,\alpha) \mid \alpha \in \mathrm{Hom}_\Delta([m],\,[n-2]) \}$ と 1 対 1 対応する．

を

$$w := \left\{ w_{[m]} \colon \coprod_{0\le k\le n} \Delta^{n-1}\bigl([m]\bigr) \longrightarrow \partial\Delta^n\bigl([m]\bigr),\ (k,\,\beta) \longmapsto d_k^n\circ\beta \right\}_{[m]\in\mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})}$$

で定義する[*10]．すると $\forall[m]\in\mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})$, $\forall\bigl((i<j),\,\alpha\bigr)\in\coprod_{0\le i<j\le n}\Delta^{n-2}\bigl([m]\bigr)$ に対して

$$\begin{aligned}
(w\circ u)_{[m]}\bigl((i<j),\,\alpha\bigr) &= w_{[m]}\Bigl(j,\,u_{j\,[m]}(i,\,\alpha)\Bigr)\\
&= d_j^n\circ d_i^{n-1}\circ\alpha,\\
(w\circ v)_{[m]}\bigl((i<j),\,\alpha\bigr) &= w_{[m]}\Bigl(i,\,v_{i\,[m]}(j,\,\alpha)\Bigr)\\
&= d_i^n\circ d_{j-1}^{n-1}\circ\alpha
\end{aligned}$$

が成り立ち，単体的恒等式 (1.2.1) より $w\circ u=w\circ v$ が分かる．よってコイコライザの普遍性から圏 **sSet** の可換図式

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{0\le i<j\le n}\Delta^{n-2} \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & \coprod_{0\le k\le n}\Delta^{n-1} \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "w"'] & \mathrm{Coeq}(u,\,v) \arrow[d, dashed, "\exists!\bar{w}"] \\
& & \partial\Delta^n
\end{tikzcd}$$

が成り立つ．後は $\bar{w}\colon\mathrm{Coeq}(u,\,v)\longrightarrow\partial\Delta^n$ が自然同値であることを示せば良い．

($\bar{w}$ はエピ射)

w がエピ射であることを示す．そのためには $\forall[m]\in\mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})$ を 1 つ固定し，写像 $w_{[m]}\colon\coprod_{0\le k\le n}\Delta^{n-1}\bigl([m]\bigr)\longrightarrow\partial\Delta^n\bigl([m]\bigr)$ が全射であることを示せば良い．

$\forall\gamma\in\partial\Delta^n\bigl([m]\bigr)$ を 1 つ固定する．このとき $\gamma\in\mathrm{Hom}_\Delta\bigl([m],\,[n]\bigr)$ は全射でない．i.e. ある $0\le i\le n$ が存在して，圏 Δ において γ は

$$\begin{tikzcd}
{[m]} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, dashed, "\exists!\bar{\gamma}"'] & {[n]} \\
& {[n]\setminus\{i\}} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

と一意的に分解する．$d_i^n\bigl([n-1]\bigr)=[n]\setminus\{i\}$ かつ d_i^n は単射なので，ある $(i,\,\beta_i)\in\coprod_{0\le k\le n}\Delta^{n-1}\bigl([m]\bigr)$ が一意的に存在して $\bar{\gamma}=d_i^n\circ\beta_i=w_{[m]}(i,\,\beta_i)$ が成り立つ．

($\bar{w}$ はモノ射)

$\forall[m]\in\mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})$ を 1 つ固定し，写像 $\bar{w}_{[m]}\colon\mathrm{Coeq}(u,\,v)\bigl([m]\bigr)\longrightarrow\partial\Delta^n\bigl([m]\bigr)$ が単射であることを示す．$\bar{w}_{[m]}(x)=\bar{w}_{[m]}(y)$ を仮定する．$q\colon\coprod_{0\le k\le n}\Delta^{n-1}\longrightarrow\mathrm{Coeq}(u,\,v)$ はエピなので，$x=q_{[m]}(i,\,\beta_i)$, $y=q_{[m]}(j,\,\beta_j)$ を充たす $(i,\,\beta_i),\,(j,\,\beta_j)\in\coprod_{0\le k\le n}\Delta^{n-1}\bigl([m]\bigr)$ が存在する．コイコライザの普遍性の図式の可換性から $w_{[m]}(i,\,\beta_i)=\bar{w}_{[m]}(x)=\bar{w}_{[m]}(y)=w_{[m]}(j,\,\beta_j)$ が分かる．

$i=j$ ならば $x=y$ は自明なので，$i<j$ とする．このとき，エピ射であることの証明から $\gamma:=w_{[m]}(i,\,\beta_i)=w_{[m]}(j,\,\beta_j)\in\partial\Delta^n\bigl([m]\bigr)$ の像は $[n]\setminus\{i<j\}$ に収まっている．i.e. γ は

[*10] $\forall(k,\,\beta)\in\coprod_{0\le k\le n}\Delta^{n-1}\bigl([m]\bigr)=\coprod_{0\le k\le n}\mathrm{Hom}_\Delta\bigl([m],\,[n-1]\bigr)$ に対して $w_{[m]}(k,\,\beta)=d_k^n\circ\beta\in\mathrm{Hom}_\Delta\bigl([m],\,[n]\bigr)=\Delta^n\bigl([m]\bigr)$ であり，$d_k^n\in\mathrm{Hom}_\Delta\bigl([n-1],\,[n]\bigr)$ は全射でないため $m=n$ のときも $w_{[m]}(k,\,\beta)\in\Delta^n\bigl([m]\bigr)\setminus\{\mathrm{Id}_{[n]}\}$ が言える．よって w の像は $\partial\Delta^n$ の単体的部分集合である．

$$\begin{tikzcd}
{[m]} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, dashed, red, "\tilde{\gamma}"'] & {[n]} \\
& {[n] \setminus \{i < j\}} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

と分解する．$d_j^n d_i^{n-1}\bigl([n-2]\bigr) = d_i^n d_{j-1}^{n-1}\bigl([n-2]\bigr) = [n] \setminus \{i < j\}$ なので，ある $\bigl((i<j),\, \alpha\bigr) \in \coprod_{0 \le k < l \le n} \Delta^{n-2}\bigl([m]\bigr)$ が存在して $(i,\, \beta_i) = u_{[m]}\bigl((i<j),\, \gamma\bigr)$，$(j,\, \beta_j) = v_{[m]}\bigl((i<j),\, \gamma\bigr)$ と書ける．よって

$$x = q_{[m]}(i,\, \beta_i) = (q \circ u)_{[m]}\bigl((i<j),\, \gamma\bigr) = (q \circ v)_{[m]}\bigl((i<j),\, \gamma\bigr) = q_{[m]}(j,\, \beta_j) = y$$

が言えた．

■

系 1.3: 境界の公式

$\forall K \in \mathrm{Ob}(\mathbf{sSet})$ に対して，写像

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\,(\partial\Delta^n,\, K) &\longrightarrow \left\{ (\sigma_0,\, \dots,\, \sigma_n) \in \prod_{0 \le k \le n} K_{n-1} \;\middle|\; 0 \le \forall i < j \le n,\ \partial_i^{n-1}(\sigma_j) = \partial_{j-1}^{n-1}(\sigma_i) \right\}, \\
f &\longmapsto \bigl(f_{[n-1]} \circ d_0^{n*}(\mathrm{Id}_{[n]}),\, \dots,\, f_{[n-1]} \circ d_n^{n*}(\mathrm{Id}_{[n]})\bigr)
\end{aligned}$$

は全単射である．

証明 命題 1.7 より，集合

$$\begin{aligned}
X &:= \left\{ \bar{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Bigl(\coprod_{0 \le k \le n} \Delta^{n-1},\, K\Bigr) \;\middle|\; \bar{f} \circ u = \bar{f} \circ v \right\} \\
&= \left\{ \bar{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Bigl(\coprod_{0 \le k \le n} \Delta^{n-1},\, K\Bigr) \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall [m] \in \mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}}),\, \forall \bigl((i<j),\, \alpha\bigr) \in \coprod_{0 \le k < l \le n} \Delta^{n-2}\bigl([m]\bigr), \\ \bar{f}_{[m]}\bigl(j,\, d_i^{n-1} \circ \alpha\bigr) = \bar{f}_{[m]}\bigl(i,\, d_{j-1}^{n-1} \circ \alpha\bigr) \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

の任意の元 $\bar{f}$ に対してコイコライザの普遍性の可換図式

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{0 \le i < j \le n} \Delta^{n-2} \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & \coprod_{0 \le k \le n} \Delta^{n-1} \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "\bar{f}"'] & \partial\Delta^n \arrow[d, dashed, red, "\exists!f"] \\
& & K
\end{tikzcd}$$

が成り立つ．i.e. 写像

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\,(\partial\Delta^n,\, K) &\longrightarrow X, \\
f &\longmapsto f \circ w = \left\{ \bigl((f_{[m]} \circ d_k^n)_*\bigr)_{0 \le k \le n} \colon \coprod_{0 \le k \le n} \Delta^{n-1}\bigl([m]\bigr) \longrightarrow K_m \right\}_{[m] \in \mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})}
\end{aligned}$$

は全単射である．命題 1.1-(2) と米田の補題から

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Bigl(\coprod_{0 \le k \le n} \Delta^{n-1},\, K\Bigr) \cong \prod_{0 \le k \le n} \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\,\bigl(\Delta^{n-1},\, K\bigr) \cong \prod_{0 \le k \le n} K_{n-1}$$

が言えるので，示された． ■

命題 1.8: コイコライザとしての角

角 Λ^n_i は圏 **sSet** におけるコイコライザである：

$$\coprod_{\substack{j,\, k\in[n]\setminus\{i\} \\ j<k}} \Delta^{n-2} \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} \coprod_{l\in[n]\setminus\{i\}} \Delta^{n-1} \xrightarrow{w} \Lambda^n_i$$

<u>証明</u> 命題 1.7 とほぼ同様である． ■

系 1.4: 角の公式

$\forall K \in \mathrm{Ob}(\mathbf{sSet})$ に対して，写像

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(\Lambda^n_i,\, K\right) &\longrightarrow \left\{ (\sigma_0,\, \dots,\, \sigma_{i-1},\, \sigma_{i+1},\, \dots,\, \sigma_n) \in \prod_{k\in[n]\setminus\{i\}} K_{n-1} \;\middle|\; \substack{\forall j,\, k\in[n]\setminus\{i\} \text{ s.t. } j<k, \\ \partial^{n-1}_j(\sigma_k)=\partial^{n-1}_{k-1}(\sigma_j)} \right\}, \\ f &\longmapsto \left(f_{[n-1]}\circ d^{n*}_0(\mathrm{Id}_{[n]}),\, \dots,\, \widehat{f_{[n-1]}\circ d^{n*}_i}(\mathrm{Id}_{[n]}),\, \dots,\, f_{[n-1]}\circ d^{n*}_n(\mathrm{Id}_{[n]})\right) \end{aligned}$$

は全単射である．ただし，$\widehat{\ }$ は $\cdot$ を除外することを意味する．

<u>証明</u> 系 1.3 と同様． ■

命題 1.9: 角と背骨の幾何学的実現

幾何学的実現は角，背骨を保つ．

<u>証明</u> $|\Delta^n| = \Delta^n_{\mathrm{top}}$ であることに注意する． ■

1.3 脈体・∞-亜群・(∞, 1)-圏

$[n] \in \mathrm{Ob}(\Delta)$ に対して，

- $\forall i \in [n]$ を対象とする
- Hom 集合は

$$\mathrm{Hom}_{[n]}\left(i,\, j\right) := \begin{cases} \{\mathrm{pt}_{ij}\}, & i \le j \\ \emptyset, & i > j \end{cases}$$

  とする．ただし，$\mathrm{pt}_{ii} = \mathrm{Id}_i$ である．
- 射の合成は $0 \le i \le j \le k \le n$ に対して

$$\mathrm{pt}_{jk} \circ \mathrm{pt}_{ij} := \mathrm{pt}_{ik}$$

  と定義する．

ことにより $[n]$ 自身が圏になる．

1.3.1　脈体

後に示す命題 1.11 により，通常の圏は単体的集合と同一視できる．

定義 1.24: 脈体

圏 $\mathcal{C}$ の**脈体** (nerve) とは，以下で定義される単体的集合

$$\mathrm{N}(\mathcal{C})\colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

のことを言う：

- $\forall [n] \in \mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})$ に対して

$$\mathrm{N}(\mathcal{C})([n]) = \mathrm{Fun}([n], \mathcal{C})$$

  を対応付ける
- 圏 Δ^{op} における任意の射 $[n] \xrightarrow{\alpha} [m]$ に対して写像

$$\begin{aligned} \mathrm{N}\left(\mathcal{C}\right)\left(\alpha\right) \coloneqq \alpha^* \colon \mathrm{Fun}([n], \mathcal{C}) &\longrightarrow \mathrm{Fun}([m], \mathcal{C}), \\ X &\longmapsto X \circ \alpha \end{aligned}$$

  を対応付ける

脈体関手 (nerve functor) とは，以下で定義される関手

$$\mathrm{N}\colon \mathbf{Cat} \longrightarrow \mathbf{sSet}$$

のことを言う：

- $\forall \mathcal{C} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $\mathrm{N}(\mathcal{C}) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{sSet})$ を対応づける．
- 任意の関手 $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ に対して自然変換

$$\begin{aligned} &\mathrm{N}\left(F\right) : \mathrm{N}\left(\mathcal{C}\right) \Longrightarrow \mathrm{N}\left(\mathcal{D}\right), \\ \text{w/}\quad &\mathrm{N}\left(F\right) \coloneqq \left\{\mathrm{N}(F)_{[n]} \colon \mathrm{Fun}([n], \mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Fun}([n], \mathcal{D}),\ X \longmapsto F \circ X\right\}_{[n] \in \mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})} \end{aligned}$$

  を対応付ける

定義 1.20 の略記に倣い，$\mathrm{N}(\mathcal{C})_n \coloneqq \mathrm{N}(\mathcal{C})([n]) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ と略記する．このとき，圏 $[n]$ の定義を思い出すと，集合の要素 $X \in \mathrm{N}(\mathcal{C})_n$ は以下のデータからなる：

- 圏 $\mathcal{C}$ の対象の族

$$\{X_i \coloneqq X(i) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})\}_{0 \le i \le n}$$

- 圏 $\mathcal{C}$ の射の族

$$\{f_{ij} \coloneqq X(\mathrm{pt}_{ij})\colon X(i) \longrightarrow X(j)\}_{0 \le i \le j \le n}$$

$X\colon [n] \longrightarrow \mathcal{C}$ は関手であるから，$0 \le i < j \le n$ に対して

$$\begin{aligned} f_{ii} &= X(\mathrm{Id}_i) = \mathrm{Id}_{X_i}, \\ f_{ij} &= X(\mathrm{pt}_{j-1,j} \circ \cdots \mathrm{pt}_{i+1,i+2} \circ \mathrm{pt}_{i,i+1}) \\ &= f_{j-1,j} \circ \cdots \circ f_{i+1,i+2} \circ f_{i,i+1} \end{aligned}$$

が成り立つ．故に，X を特徴付けるには，$f_i \coloneqq f_{i,i-1}$ とおいて $\mathcal{C}$ の図式

$$X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} X_n \tag{1.3.1}$$

を指定することが必要十分である．このことから，脈体の morphism-morphism 対応は図式の対応

$$(X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_n) \longmapsto (X_{\alpha(0)} \to X_{\alpha(1)} \to \cdots \to X_{\alpha(m)})$$

と理解できる．

【例 1.3.1】面写像

$\forall X \in \mathrm{N}(\mathcal{C})_n$ を $\mathcal{C}$ の図式

$$X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} X_n$$

として指定する．このとき面写像 $d_i^n \in \mathrm{Hom}_{\Delta^{\mathrm{op}}}([n],\, [n-1])$ は，脈体によって写像

$$N(\mathcal{C})(d_i^n)\colon X \longmapsto \bigl(X_0 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{i-1}} X_{i-1} \xrightarrow{f_{i+1} \circ f_i} X_{i+1} \xrightarrow{f_{i+2}} \cdots \xrightarrow{f_n} X_n\bigr)$$

と対応付く．

【例 1.3.2】縮退写像

$\forall X \in \mathrm{N}(\mathcal{C})_n$ を $\mathcal{C}$ の図式

$$X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} X_n$$

として指定する．このとき縮退写像 $s_i^n \in \mathrm{Hom}_{\Delta^{\mathrm{op}}}([n],\, [n+1])$ は，脈体によって写像

$$N(\mathcal{C})(s_i^n)\colon X \longmapsto \bigl(X_0 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_i} X_i \xrightarrow{\mathrm{Id}_{X_i}} X_i \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots \xrightarrow{f_n} X_n\bigr)$$

と対応付く．

命題 1.10: 脈体関手は忠実充満

脈体関手は忠実充満関手である．

証明

$$\theta\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathcal{C},\, \mathcal{D}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\bigl(\mathrm{N}(\mathcal{C}),\, \mathrm{N}(\mathcal{D})\bigr),\ F \longmapsto \mathrm{N}(F)$$

が全単射であることを示せば良い．

単射

関手 $F, G\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ が $\mathrm{N}(F) = \mathrm{N}(G)$ を充たすとする．(1.3.1) により $\mathcal{C}$ における任意の図式

$$X \xrightarrow{f} Y$$

を $\mathrm{N}(\mathcal{C})_1$ の元と見做すことができるが，仮定より圏 $\mathcal{D}$ において

$$\begin{aligned} &\mathrm{N}(F)_{[1]}(X \xrightarrow{f} Y) = \mathrm{N}(G)_{[1]}(X \xrightarrow{f} Y) \\ \iff \quad &\big(F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y)\big) = \big(G(X) \xrightarrow{G(f)} G(Y)\big) \end{aligned}$$

が成り立つ．i.e. $F = G$ である．

全射

$\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\mathrm{N}(\mathcal{C}), \mathrm{N}(\mathcal{D})\big)$ を 1 つ固定する．f は自然変換だから，$\forall n \geq 0$ に対して自然変換 $f_{[n]}\colon \mathrm{N}(\mathcal{C})_n \longrightarrow \mathrm{N}(\mathcal{D})_n$ が定まる．(1.3.1) より $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を $\mathrm{N}(\mathcal{C})_0$ の要素と見做し，圏 $\mathcal{C}$ における任意の射 $X \xrightarrow{u} Y$ を $\mathrm{N}(\mathcal{C})_1$ の要素と見做すことができる．すると自然変換 f により

$$f_{[0]}(X),\ f_{[0]}(Y) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$$

が対応付く．その上 f が自然変換であることから面写像 $d_i^1\colon [0] \longrightarrow [1]$ との間に可換図式

$$\begin{tikzcd} \mathrm{N}(\mathcal{C})_1 \arrow[r, "f_{[1]}"] \arrow[d, "\mathrm{N}(\mathcal{C})(d_i^1)=\partial_i^1"'] & \mathrm{N}(\mathcal{D})_1 \arrow[d, "\mathrm{N}(\mathcal{D})(d_i^1)=\partial_i^1"] \\ \mathrm{N}(\mathcal{C})_0 \arrow[r, "f_{[0]}"'] & \mathrm{N}(\mathcal{D})_0 \end{tikzcd}$$

が成り立つ．よって

$$\begin{aligned} \partial_0^1 \circ f_{[1]}\big(X \xrightarrow{u} Y\big) &= f_{[0]} \circ \partial_0^1\big(X \xrightarrow{u} Y\big) \\ &= f_{[0]}(Y), \\ \partial_1^1 \circ f_{[1]}\big(X \xrightarrow{u} Y\big) &= f_{[0]} \circ \partial_1^1\big(X \xrightarrow{u} Y\big) \\ &= f_{[0]}(X) \end{aligned}$$

が言える．i.e. $f_{[1]}(u)$ は圏 $\mathcal{D}$ における射 $f_{[0]}(X) \xrightarrow{f_{[1]}(u)} f_{[0]}(Y)$ である．ここで，対応 $F_f\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ を

- $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $f_{[0]}(X) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ を対応付ける
- $X \xrightarrow{\forall u} Y$ に対して $f_{[0]}(X) \xrightarrow{f_{[1]}(u)} f_{[0]}(Y)$ を対応付ける

ものとして定義する．もし F_f が関手ならば明らかに $\theta(F_f) = f$ であるから，F_f が関手であることを示せば良い：

(fun-1)

(1.3.1) により圏 $\mathcal{C}$ における図式

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$$

を $\mathrm{N}(\mathcal{C})_2$ の要素と見做すことができる．f は自然変換なので，面写像 $d_i^2\colon [2] \longrightarrow [1]$ について可換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{N}(\mathcal{C})_2 \arrow[r, "f_{[2]}"] \arrow[d, "\mathrm{N}(\mathcal{C})(d_i^2)=\partial_i^2"'] & \mathrm{N}(\mathcal{D})_2 \arrow[d, "\mathrm{N}(\mathcal{D})(d_i^2)=\partial_i^2"] \\
\mathrm{N}(\mathcal{C})_1 \arrow[r, "f_{[1]}"'] & \mathrm{N}(\mathcal{D})_1
\end{tikzcd}$$

が成り立つ．よって

$$\begin{aligned}
\partial_0^2 \circ f_{[2]}(X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z) &= f_{[1]} \circ \partial_0^2(X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z) \\
&= f_{[1]}(Y \xrightarrow{v} Z) \\
&= \big(F_f(Y) \xrightarrow{F_f(v)} F_f(Z)\big), \\
\partial_2^2 \circ f_{[2]}(X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z) &= f_{[1]} \circ \partial_2^2(X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z) \\
&= f_{[1]}(X \xrightarrow{u} Y) \\
&= \big(F_f(X) \xrightarrow{F_f(u)} F_f(Y)\big)
\end{aligned}$$

が分かった．i.e.

$$f_{[2]}(X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z) = \big(F_f(X) \xrightarrow{F_f(u)} F_f(Y) \xrightarrow{F_f(v)} F_f(Z)\big)$$

である．故に

$$\begin{aligned}
\big(F_f(X) \xrightarrow{F_f(v)\circ F_f(u)} F_f(Y)\big) &= \partial_1^2 \circ f_{[2]}\big(X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z\big) \\
&= f_{[1]} \circ \partial_1^2\big(X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z\big) \\
&= f_{[1]}\big(X \xrightarrow{v\circ u} Z\big) \\
&= \big(F_f(X) \xrightarrow{F_f(v\circ u)} F_f(Y)\big)
\end{aligned}$$

i.e.

$$F(v \circ u) = F(v) \circ F(u)$$

が示された．

(fun-2)

f が自然変換なので縮退写像 $s_0^0\colon [1] \longrightarrow [0]$ について可換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{N}(\mathcal{C})_1 \arrow[r, "f_{[1]}"] & \mathrm{N}(\mathcal{D})_1 \\
\mathrm{N}(\mathcal{C})_0 \arrow[r, "f_{[0]}"] \arrow[u, "\mathrm{N}(\mathcal{C})(s_0^0)=\sigma_0^0"] & \mathrm{N}(\mathcal{D})_0 \arrow[u, "\mathrm{N}(\mathcal{D})(s_0^0)=\sigma_0^0"']
\end{tikzcd}$$

が成り立つ．(1.3.1) を使うと，これは $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \mathrm{N}(\mathcal{C})_0$ に対して

$$\begin{aligned}
f_{[1]} \circ \sigma_0^0(X) &= f_{[1]}(X \xrightarrow{\mathrm{Id}_X} X) \\
&= \big(F_f(X) \xrightarrow{F_f(\mathrm{Id}_X)} F_f(X)\big) \\
&= \sigma_0^0 \circ f_{[0]}(X) \\
&= \big(F_f(X) \xrightarrow{\mathrm{Id}_{F_f(X)}} F_f(X)\big)
\end{aligned}$$

を意味するので

$$F_f(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$$

が示された．

■

1.3.2 ∞-亜群・$(\infty, 1)$-圏

定義 1.25: Kan 条件

Kan 複体 (Kan complex) とは，単体的集合

$$K\colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

であって以下の性質を充たすもののこと：

(Kan)

$\forall n \geq 1,\ 0 \leq \forall j \leq n$ および $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda^n_j, K)$ に対して，以下の図式を可換にする自然変換 $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, K)$ が存在する：

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_j \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & K \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed, "u"] & \end{tikzcd}$$

単体的集合であって，内部角 i.e. $\forall n \geq 2,\ 0 < \forall j < n$ についてのみ **(Kan)** を充たすもののことを**弱 Kan 複体** (weak Kan complex) と呼ぶ．

定義 1.26: $(\infty, 1)$**-圏**

- **$(\infty, 1)$-圏**[a]とは，弱 Kan 複体のこと．$(\infty, 1)$-圏の関手とは，**sSet** の射のこと．
- **∞-groupoid**[b]とは，Kan 複体のこと．

[a] **擬圏** (quasi-category) と呼ばれることもある．
[b] より現代的には**アニマ** (anima) と呼ばれることもある．

- $(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}$ の**対象**[a] (object) とは，$\mathcal{C}$ の 0-単体 $\mathcal{C}_0$ の元のこと．
- $(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}$ の**射**[b] (morphism) とは，$\mathcal{C}$ の 1-単体 $\mathcal{C}_1$ の元のこと．
- $(\infty, 1)$-圏の射 $f \in \mathcal{C}_1$ に対して定まる $(\infty, 1)$-圏の対象 $\partial^1_1(f),\ \partial^1_0(f) \in \mathcal{C}_0$ のことをそれぞれ f の**始点** (source)，**終点** (target) と呼ぶ．
- $(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ の間の**関手** $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ とは，自然変換 $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ のこと．

[a] **0-射**，**0-セル** (0-cell) とも言う．
[b] **1-射**，**1-セル** (1-cell) とも言う．同様に，n-単体 $\mathcal{C}_n$ の元のことを $\boldsymbol{n}$**-射** (n-morphism)，$\boldsymbol{n}$**-セル** (n-cell) と呼ぶ．

! 一般に，$(\infty, 1)$-圏のことを単に **∞-圏**と呼ぶことが多い．

【例 1.3.3】$(\infty, 1)$-圏の関手が成す $\infty, 1$-圏

$(\infty, 1)$-圏 K, L を与える．このとき，単体的集合

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\mathbf{un}(K, L) \colon \Delta^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathbf{Sets}, \\ [n] &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(\Delta^n \times K, L\right), \\ \big([m] \xrightarrow{\alpha} [n]\big) &\longmapsto \big(f \mapsto f \circ (\alpha_* \times \mathrm{Id}_K)\big)\end{aligned}$$

は $(\infty, 1)$-圏であることが知られている [?, Tag 0066].

$(\infty, 1)$-圏が通常の圏の一般化であることは，次の定理（および命題 1.11）から分かる．

定理 1.5: Kan 条件と脈体

任意の単体的集合 $K \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ に対して以下は同値である：

(1) K はある圏の脈体と同型である．

(2) K は弱 Kan 条件を充たす<u>一意解</u>を持つ

証明 (1)$\Longrightarrow$(2)

ある圏 $\mathcal{C}$ が存在して $K \cong \mathrm{N}(\mathcal{C})$ だとする．$\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(\Lambda^n_j, \mathrm{N}(\mathcal{C})\right)$ を 1 つ与える．このとき $0 < \forall j < \forall n$ に対して f が $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(\Delta^n, \mathrm{N}(\mathcal{C})\right)$ へ一意的に拡張できることを示せば良い．

$0 \le \forall k \le n$ に対して $U_k := f_{[0]}(\{k\})$ とおく[*11]．さらに $0 < \forall k \le n$ に対して

$$g_k := f_{[1]}\Big(\underset{\{k-1\}}{\bullet} \longrightarrow \underset{\{k\}}{\bullet} \Big) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(U_{k-1}, U_k\right)$$

とおくと，$\mathcal{C}$ の図式

$$U_0 \xrightarrow{g_1} U_1 \xrightarrow{g_2} \cdots \xrightarrow{g_n} U_n$$

が定まる．ここから (1.3.1) の方法で $U \in \mathrm{N}(\mathcal{C})_n$ が一意的に定まり，米田の補題により対応する $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(\Delta^n, \mathrm{N}(\mathcal{C})\right)$ が一意的に定まるが，構成からこれが所望の u である [?, Tag 0032].

(1)$\Longleftarrow$(2)

圏 $\mathcal{C}$ を以下のように構成する：

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) := K_0$
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(C, D\right) := \left\{ f \in K_1 \;\middle|\; \partial^1_1(f) = C,\ \partial^1_0(f) = D \right\}$
- $\forall C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = K_0$ に対して[*12] $\mathrm{Id}_C := \sigma^0_0(C)$
- $\forall (g, f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(D, E\right) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(C, D\right)$ に対して射の合成を定義するために，弱 Kan 条件

[*11] 【例 1.2.1】より，$\{k\} \in \Lambda^n_j([0])$ である．

[*12] 単体的恒等式 (1.2.4) により $\mathrm{Id}_C \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(C, C\right)$ が分かる．

$$\begin{tikzcd} \Lambda^2_1 \arrow[r, "{(g,\, f)}"] \arrow[d, hook] & K \\ \Delta^2 \arrow[ur, dashed, "\exists u"] & \end{tikzcd}$$

および系 1.4 を用いる．具体的には次のようにする：

(STEP1)

$(g,\, f) \in K_1 \times K_1$ かつ $\partial^1_1(g) = \partial^1_0(f)$ が成り立つので系 1.4 が使えて，$(g,\, f) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(\Lambda^2_1,\, K\right)$ と見做せる．

(STEP2)

仮定より，$(g,\, f) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(\Lambda^2_1,\, K\right)$ に対する弱 Kan 条件の一意解 $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(\Delta^2,\, K\right) \cong K_2$ が存在する．

(STEP3)

$u|_{\Lambda^2_1}$ に対して再度系 1.4 を適用することで，弱 Kan 条件の図式の可換性は $\partial^2_0(u) = g,\ \partial^2_2(u) = f$ を意味していることがわかる．このことから，f と g の合成を $g \circ f \coloneqq \partial^2_1(u)$ と定義する[*13]．

このように構成したデータの組み $(\mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\text{-},\, \text{-}\right),\, \mathrm{Id},\, \circ)$ が圏になっていることを示そう．

(unitality)

$\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(C,\, D\right)$ をとる．ここで $u \coloneqq s^1_1(f) \in K_2$ に対して単体的恒等式 (1.2.2), (1.2.4) を用いると

$$\begin{aligned} \partial^2_0(u) &= \partial^2_0 s^1_1(f) = s^0_0 \partial^1_0(f) = \mathrm{Id}_D, \\ \partial^2_1(u) &= \partial^2_1 s^1_1(f) = f, \\ \partial^2_2(u) &= \partial^2_2 s^1_1(f) = f, \end{aligned}$$

が分かる．i.e. $\mathrm{Id}_D \circ f = f$ である．$v \coloneqq s^1_0(f) \in K_2$ に対して単体的恒等式 (1.2.3), (1.2.4) を用いると

$$\begin{aligned} \partial^2_0(u) &= \partial^2_0 s^1_0(f) = f, \\ \partial^2_1(u) &= \partial^2_1 s^1_0(f) = f, \\ \partial^2_2(u) &= \partial^2_2 s^1_0(f) = \mathrm{Id}_C \end{aligned}$$

が分かる．i.e. $f \circ \mathrm{Id}_C = f$ である．

(associativity)

$\forall (h,\, g,\, f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(E,\, F\right) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(D,\, E\right) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(C,\, D\right)$ を与える．系 1.4 を用いることで，弱 Kan 条件の 3 つの一意解を得る：

- $h \circ g \coloneqq \partial^2_1(u_0)$ を与える $u_0 \in K_2$：

$$\begin{tikzcd} \Lambda^2_1 \arrow[r, "{(h,\, g)}"] \arrow[d, hook] & K \\ \Delta^2 \arrow[ur, dashed, "\exists ! u_0"] & \end{tikzcd}$$

[*13] 単体的恒等式 (1.2.1) より，$g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(C,\, E\right)$ が分かる．

- $g \circ f \coloneqq \partial_1^2(u_3)$ を与える $u_3 \in K_2$：

$$\begin{tikzcd} \Lambda_1^2 \arrow[r, "{(g,\, f)}"] \arrow[d, hook] & K \\ \Delta^2 \arrow[ur, dashed, "\exists ! u_3"'] & \end{tikzcd}$$

- $(h \circ g) \circ f \coloneqq \partial_1^2(u_2)$ を与える $u_2 \in K_2$

$$\begin{tikzcd} \Lambda_1^2 \arrow[r, "{(h \circ g,\, f)}"] \arrow[d, hook] & K \\ \Delta^2 \arrow[ur, dashed, "\exists ! u_2"'] & \end{tikzcd}$$

さらに，$(u_0,\, u_2,\, u_3) \in K_2^{\times 3}$ は

$$\begin{aligned} \partial_1^2(u_0) &= h \circ g = \partial_0^2(u_2), \\ \partial_2^2(u_0) &= g = \partial_0^2(u_3), \\ \partial_2^2(u_2) &= f = \partial_2^2(u_3) \end{aligned}$$

を充たすため系 1.4 が使えて，$(u_0,\, u_2,\, u_3) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda_1^3,\, K)$ と見做せる．すると，仮定より弱 Kan 条件の一意解

$$\begin{tikzcd} \Lambda_1^3 \arrow[r, "{(u_0,\, u_2,\, u_3)}"] \arrow[d, hook] & K \\ \Delta^3 \arrow[ur, dashed, "\exists ! \tau"'] & \end{tikzcd}$$

が存在する．i.e. ある $\tau \in K_3$ が[*14]一意的に存在して，

$$u_0 = \partial_0^3(\tau), \qquad u_2 = \partial_2^3(\tau), \qquad u_3 = \partial_3^3(\tau)$$

を充たす．この 3-単体 τ を図 (4) に則り図示すると次のようになる：

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "g \circ f"'] \arrow[dd, "(h \circ g) \circ f" near end] \arrow[r, "f"] & D \arrow[dll, "g" near end] \arrow[dl, "h \circ g"] \\ E \arrow[dr, "h"'] & & \\ & F & \end{tikzcd}$$

ここで，$u_1 \coloneqq \partial_1^3(\tau) \in K_2$ とおく．これは τ の図式で言うと三角形 $C,\, E,\, F$ が指定する 2-単体である．図式から明らかなように，

$$\begin{aligned} \partial_0^2(u_1) &= h, \\ \partial_1^2(u_1) &= (h \circ g) \circ f, \\ \partial_2^2(u_1) &= g \circ f \end{aligned}$$

[*14] 米田の補題より $\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^3,\, K) \cong K_3$ である．

が成り立っている．i.e. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ が分かった．

さて，**sSet** の射

$$\theta \colon K \longrightarrow \mathrm{N}(\mathcal{C})$$

を構成しよう．θ は自然変換であるから，$\forall [n] \in$ に対して写像 $\theta_{[n]} \colon K_n \longrightarrow \mathrm{N}(\mathcal{C})_n$ を定めれば良い．命題 1.5-(1) より $\forall \sigma \in K_n$ は自然に $\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, K)$ の元と見做せるため，

$$\begin{aligned}\theta_{[n]} \colon K_n &\longrightarrow \mathrm{N}(\mathcal{C})_n, \\ \sigma &\longmapsto \Big(\sigma_{[0]}(\{0\}) \xrightarrow{\sigma_{[1]}(\{0,1\})} \cdots \xrightarrow{\sigma_{[1]}(\{n-1,n\})} \sigma_{[0]}(\{n\})\Big)\end{aligned}$$

と定義する．構成から $\theta_{[n]}$ は自然である．$\forall n \geq 0$ に対して $\theta_{[n]}$ が全単射であることを，n に関する数学的帰納法により示す．まず，圏 $\mathcal{C}$ の構成から $\theta_{[0]}, \theta_{[1]}$ が全単射であることは明らかである．$n > 1$ のとき，示すべきは命題 1.5-(1) より

$$\begin{aligned}\theta_* \colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, K) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^n, \mathrm{N}(\mathcal{C})\big), \\ \sigma &\longmapsto \theta \circ \sigma\end{aligned}$$

が全単射であることである．$0 < j < n$ を 1 つとる．$u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda^n_j, K)$ に対する弱 Kan 条件の解を $\overline{u} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, K)$ と書くと，解の一意性の仮定より写像

$$\begin{aligned}\phi_K \colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, K) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda^n_j, K), \\ \overline{u} &\longmapsto u\end{aligned}$$

は全単射である．$\mathrm{N}(\mathcal{C})$ にも同様の構成ができるため，可換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, K) \arrow[r, "\theta_*"] \arrow[d, "\phi_K"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Delta^n, \mathrm{N}(\mathcal{C})\big) \arrow[d, "\phi_{\mathrm{N}(\mathcal{C})}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda^n_j, K) \arrow[r, "\theta_*|_{\Lambda^n_j}"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\Lambda^n_j, \mathrm{N}(\mathcal{C})\big)
\end{tikzcd}$$

が書ける．縦の射は全単射なので，$\theta_*|_{\Lambda^n_j}$ が全単射であることを示せば良い．これは系 1.4 および帰納法の仮定から従う．

■

定義 1.27: 亜群

亜群 (groupoid) とは，小圏 $\mathcal{C}$ であって，任意の射が可逆であるもののこと．i.e. $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ に対して，ある $f^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ が存在して

$$\begin{aligned}f^{-1} \circ f &= \mathrm{Id}_X, \\ f \circ f^{-1} &= \mathrm{Id}_Y\end{aligned}$$

を充たすこと．

命題 1.11: 脈体が ∞-groupoid になる必要十分条件

圏 $\mathcal{C}$ の脈体 $\mathrm{N}(\mathcal{C})$ が ∞-groupoid になる必要十分条件は，$\mathcal{C}$ が groupoid であること．

証明 **($\Longrightarrow$)**

$\mathrm{N}(\mathcal{C})$ が ∞-groupoid だと仮定する．このとき，Kan 条件により，$\forall n \geq 1,\ 0 \leq \forall j \leq n$ に対して全射[*15]

$$\theta_j^n \colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(\Delta^n,\, \mathrm{N}(\mathcal{C})\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(\Lambda_j^n,\, \mathrm{N}(\mathcal{C})\right)$$

が存在する．

$\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, Y)$ を 1 つ固定し，これを (1.3.1) の方法により $\mathrm{N}(\mathcal{C})_1$ の元と見做す．このとき，$\left(f,\, \mathrm{Id}_Y = \sigma_0^0(Y)\right) \in \mathrm{N}(\mathcal{C})_1^{\times 2}$ は

$$\partial_0^1(f) = Y = \partial_0^1(\mathrm{Id}_Y)$$

を充たすため系 1.4 が使えて，$(f,\, \mathrm{Id}_Y) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(\Lambda_2^2,\, \mathrm{N}(\mathcal{C})\right)$ と見做せる．このとき θ_2^2 の全射性により，$\sigma \in \mathrm{N}(\mathcal{C})_2 \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(\Delta^2,\, \mathrm{N}(\mathcal{C})\right)$ が存在して $(f,\, \mathrm{Id}_Y) = \theta_2^2(\sigma)$ を充たす．θ_j^n の定義および系 1.4 から，これは

$$\partial_0^2(\sigma) = f,$$
$$\partial_1^2(\sigma) = \mathrm{Id}_Y$$

を意味する．故に命題 1.10 の証明から，$g \coloneqq \partial_2^2(\sigma) \in \mathrm{N}(\mathcal{C})_1 = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\, X)$ とおくことで，

$$f \circ g = \partial_1^2(\sigma) = \mathrm{Id}_Y$$

が成り立つことが分かった．同様に，$(\mathrm{Id}_X,\, f) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(\Lambda_0^2,\, \mathrm{N}(\mathcal{C})\right)$ と見做せること，および θ_0^2 の全射性から $h \in \mathrm{N}(\mathcal{C})_1 = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\, X)$ であって $h \circ f = \mathrm{Id}_X$ を充たすものが存在する．命題 1.10 の証明から，

$$g = \mathrm{Id}_X \circ g = (h \circ f) \circ g = h \circ (f \circ g) = h \circ \mathrm{Id}_Y = h$$

が言える．i.e. $f^{-1} = g = h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\, X)$ である．

($\Longleftarrow$)

$\mathcal{C}$ が groupoid だとする．定理 1.5 から，示すべきは $\forall n \geq 1,\, j = 0,\, n$ に対して Kan 条件が成立していることである．

$n = 1,\, j = 0$ とする．このとき $\Lambda_0^n = \left\{\{0\},\, \{1\}\right\}$ であるから，$\forall \sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(\Lambda_0^n,\, \mathrm{N}(\mathcal{C})\right)$ は $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の元である．よって，$\bar{\sigma} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(\Delta^1,\, \mathrm{N}(\mathcal{C})\right)$ として $\bar{\sigma} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, \sigma)$ をとれば $\partial_0^1(\bar{\sigma}) = \sigma$ を充たす．このことは系 1.4 より $\bar{\sigma}|_{\Lambda_0^n} = \sigma$ を意味する．

次に，$n = 2,\, j = 0$ とする．このとき $\forall \sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(\Lambda_0^n,\, \mathrm{N}(\mathcal{C})\right)$ は，系 1.4 より $\left(\sigma_1 \coloneqq \partial_1^2(\sigma),\, \sigma_2 \coloneqq \sigma_2^2(\sigma)\right) \in \mathrm{N}(\mathcal{C})_1^{\times 2}$ であって以下の図式として書けるものと同一視できる：

$$\begin{tikzcd} & Z \\ X \arrow[ur, "\sigma_2"] \arrow[rr, "\sigma_1"] & & Y \end{tikzcd}$$

$\mathcal{C}$ は groupoid なので，この図式に $\sigma_0 \coloneqq \sigma_1 \circ \sigma_2 \in \mathrm{N}(\mathcal{C})_1$ を付け足すことで所望の $\bar{\sigma} \in \mathrm{N}(\mathcal{C})_2 \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(\Delta^2,\, \mathrm{N}(\mathcal{C})\right)$ を得る．

[*15] 定理 1.5 の状況とは異なり，単射とは限らない！

次に，$n \geq 3$, $j = 0$ とする．このとき定理 1.5 の (1) $\Longrightarrow$ (2) の構成によって $\bar{\sigma} \in \mathrm{N}(\mathcal{C})_n$ を作ろうとする．この構成が可能なのは，勝手な $0 \leq i \leq j \leq k \leq n$ に対して $\sigma_{[1]}(\{j, k\}) \circ \sigma_{[1]}(\{i, j\}) = \sigma_{\{i, k\}}$ が成り立つときだが，これは 3 頂点 $\big\{\{i,\}\,\{j\},\,\{k\}\big\}$ が作る 2-単体 $\sigma_{ijk} \in \Delta^n([2])$ が $\Lambda^n_0([2])$ に含まれることと同値である．よって $n = 3$ のときのみが非自明である．$n = 3$ のときは，$\sigma_{ij} \coloneqq \sigma_{[1]}(\{j, k\})$ とおくと

$$
\begin{aligned}
(\sigma_{23} \circ \sigma_{12}) \circ \sigma_{01} &= \sigma_{23} \circ (\sigma_{12} \circ \sigma_{01}) \\
&= \sigma_{23} \circ \sigma_{02} \\
&= \sigma_{03} \\
&= \sigma_{13} \circ \sigma_{01}
\end{aligned}
$$

と計算できるが，$\mathcal{C}$ が groupoid なので両辺の右から σ_{01}^{-1} をかけることで $\sigma_{23} \circ \sigma_{12} = \sigma_{13}$ が示される．

$j = n$ の場合も同様である．

■

1.3.3 $(\infty, 1)$-圏の圏同値

定義 1.28: 1-射の間のホモトピー

K を $(\infty, 1)$-圏，$f, g \in K_1$ を始点と終点が同一であるような K の 1-射とする．
このとき，**f と g を繋ぐホモトピー**とは，2-射 $\sigma \in K_2$ であって以下を充たすもののこと：

- $\partial^2_0(\sigma) = \mathrm{Id}$
- $\partial^2_1(\sigma) = g$
- $\partial^2_2(\sigma) = f$

$\partial^1_1(f) =: X$, $\partial^1_0(f) =: Y$ とおいて図式 (3) を書くと以下の通り：

$$
\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dr, "\mathrm{Id}_Y"] \arrow[d, phantom, "\sigma"] & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g"'] & & Y
\end{tikzcd}
$$

補題 1.2: ホモトピックは同値関係

K を $(\infty, 1)$-圏，$\mathrm{Hom}_K(X, Y) \subset K_1$ を，対象 $X, Y \in K_0$ をそれぞれ始点，終点に持つような 1-射全体が成す集合とする．このとき，2 項関係

$$
f \simeq g \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad f, g \text{ を繋ぐホモトピーが存在}
$$

は $\mathrm{Hom}_K(X, Y)$ 上の同値関係である．

証明 ■

K を $(\infty, 1)$-圏とする．$\forall X, Y, Z \in K_0$ に対して

$$\mathbf{Hom}_{\mathbf{h}K}\left(X, Y\right) := \mathrm{Hom}_K\left(X, Y\right)/\simeq$$

とおき，さらに

$$\begin{aligned}\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{h}K}\left(Y, Z\right) \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{h}K}\left(X, Y\right) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{h}K}\left(X, Z\right), \\ \bigl([g], [f]\bigr) &\longmapsto [g \circ f]\end{aligned} \tag{1.3.2}$$

と定義する[*16]．

定義 1.29: $(\infty, 1)$-圏のホモトピー圏

$(\infty, 1)$-圏 K の**ホモトピー圏** (homotopy category) $\mathrm{h}K$ とは，次のように定義される $(1, 1)$-圏のこと：

- $\mathrm{Ob}(\mathrm{h}K) := K_0$
- $\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}K}\left(X, Y\right)$ を Hom 集合とする．
- (1.3.2) の写像 $\circ$ を射の合成とする．
- $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathrm{h}K)$ に対して $[\mathrm{Id}_X] \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{h}K}\left(X, X\right)$ を恒等射とする

定義 1.30: $(\infty, 1)$-圏における対象の同型

$(\infty, 1)$-圏 K を与える．

- 1-射 $f \in K_1$ が**同型射** (isomorphism) であるとは，K のホモトピー圏 $\mathrm{h}K$ において $[f]$ が同型射であることを言う．
- 対象 $X, Y \in K_0$ が**同型** (isomorphic) であるとは，X, Y をそれぞれ始点・終点に持つ K の同型射が存在することを言う．

定義 1.31: qCat のホモトピー圏

$(1, 1)$-圏 $\mathrm{h}(\mathbf{qCat})$ を以下で定義する：

- $(\infty, 1)$-圏を対象とする
- **【例 1.3.3】**で構成した $(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{F}\mathbf{un}(K, L)$ のホモトピー圏 $\mathrm{h}\bigl(\mathcal{F}\mathbf{un}(K, L)\bigr)$ における対象の同型類を射とする

定義 1.32: $(\infty, 1)$-圏の同値

$(\infty, 1)$-圏の関手 $F\colon K \longrightarrow L$ が **$(\infty, 1)$-圏同値** (equivalence) であるとは，$[F] \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{h}(\mathbf{qCat})}\left(K, L\right)$ が同型射であることを言う．

[*16] 角の図式 $(g, \bullet, f) \in K_1^{\times 2}$ を **(Kan)** によって埋める 2-射 $\sigma \in K_2$ に対して，$g \circ f := \partial_1^2(\sigma)$ とおいた．この写像は well-defined である．

1.3.4　射の空間

定義 1.33: 射の空間

$(\infty, 1)$-圏 K と，その対象 $x, y \in K_0$ を与える．x から y へ向かう**射の空間** (morphism space) を，$(1, 1)$-圏 **sSet** における引き戻し

$$\mathbf{Map}_{\boldsymbol{K}}\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\right) := \{x\} \times_{\mathcal{F}\mathbf{un}(\{0\}, K)} \mathcal{F}\mathbf{un}(\Delta^1, K) \times_{\mathcal{F}\mathbf{un}(\{1\}, K)} \{y\} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{sSet})$$

として定義する [?, Tag 01J5].

$(1, 1)$-圏 **sSet** における引き戻しとは，命題 1.5-(2) の証明より，n-単体毎に **Sets における引き戻し**を取ることで構成される．さらに，**【例 1.3.3】**より $\mathcal{F}\mathbf{un}(\Delta^1, K)_n = \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(\Delta^n \times \Delta^1, K\right)$ であるから，単体的集合 $\mathrm{Map}_K\left(x, y\right)$ の n-単体とは，集合として具体的に

$$\mathrm{Map}_K\left(x, y\right)_n = \left\{\, f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(\Delta^n \times \Delta^1, K\right) \;\middle|\; f|_{\Delta^n \times \{0\}} = x,\ f|_{\Delta^n \times \{1\}} = y \,\right\}$$

と書ける[*17]．特に $\mathrm{Map}_K\left(x, y\right)_0 \subset K_1$ と見做すことができるが，これは始点，終点をそれぞれ $x, y \in K_0$ に持つような 1-射全体の集合と一致する．この意味で $\mathrm{Map}_K\left(x, y\right)$ は，$(1, 1)$-圏における Hom 集合の $(\infty, 1)$-圏における対応物である．

命題 1.12: 射の空間は Kan 複体

$(\infty, 1)$-圏 K における射の空間 $\mathrm{Map}_K\left(x, y\right) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{sSet})$ は Kan 複体である．

<u>**証明**</u>　[?, Tag 01JC] ■

[*17] 右辺に登場する $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(\Delta^n \times \{0\}, K\right)$, $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(\Delta^n \times \{1\}, K\right)$ は記号の濫用である．正確には，米田の補題による全単射 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(\Delta^n \times \{i\}, K\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(\Delta^n, K\right) \cong K_n$ を用いて $\sigma_0^n \circ \cdots \circ \sigma_0^0(x)$, $\sigma_0^n \circ \cdots \circ \sigma_0^0(y) \in K_n$ を送った先を意味する．図示すると，全ての頂点に x, y が載り，全ての部分単体上に Id_x, Id_y が載った標準 n-単体になっている．

定義 1.34: 忠実充満・本質的全射な $(\infty, 1)$-圏の関手

$(\infty, 1)$-圏の関手

$$F\colon K \longrightarrow L$$

を与える．

- F が**忠実充満** (fully faithful) であるとは，$\forall x,\, y \in K_0$ に対して，F が誘導する射の空間の間の関手

$$\mathrm{Map}_K(x,\, y) \longrightarrow \mathrm{Map}_L\big(F_{[0]}(x),\, F_{[0]}(y)\big)$$

が $(\infty, 1)$-圏同値であることを言う．
- F の**本質的像** (essential image) とは，$F(x) \in L_0$ の形で書ける L の対象と同型であるような L の対象全体によって生成される L の充満部分 $(\infty, 1)$-圏のこと．
- F が**本質的全射** (essentially surgective) であるとは，F の本質的像が L と一致すること．

命題 1.13: 忠実充満かつ本質的全射

$(\infty, 1)$-圏の関手

$$F\colon K \longrightarrow L$$

が $(\infty, 1)$-圏同値である必要十分条件は，それが忠実充満かつ本質的全射であること．

証明 [?, Tag 01JX] ■

1.4 単体的豊穣圏とホモトピー論

1.4.1 単体的豊穣圏とホモトピーコヒーレントな脈体

定義 1.35: 豊穣圏

モノイダル圏 $(V,\, \otimes,\, I)$ を与える．

V-豊穣圏 (V-enriched category) $\mathcal{C}$ は，以下のデータからなる：

- 集合 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，**Hom 対象**と呼ばれる V の対象 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) \in \mathrm{Ob}(V)$ を持つ
- $\forall x, y,\, z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，**合成射**と呼ばれる V の射 $\circ_{z,\,y,\,x}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,\, z) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, z)$ を持つ
- $\forall x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，**恒等素**と呼ばれる V の射 $j_x\colon I \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, x)$ を持つ

これらは以下の図式を可換にしなくてはいけない：

(associativity)

$\forall w,\, x,\, y,\, z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について[a]

$$
\begin{tikzcd}
\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,\, z) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)\big) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(w,\, x) \arrow[r, "\circ_{z,y,x}\otimes \mathrm{Id}"] \arrow[dd, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, z) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(w,\, x) \arrow[d, "\circ_{z,x,w}"] \\
 & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(w,\, z) \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,\, z) \otimes \big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(w,\, x)\big) \arrow[r, "\mathrm{Id}\otimes\circ_{y,x,w}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,\, z) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(w,\, y) \arrow[u, "\circ_{z,y,w}"']
\end{tikzcd}
$$

(unitality)

$\forall x,\, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について[b]

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,\, y) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) \arrow[r, "\circ_{y,y,x}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, x) \arrow[l, "\circ_{y,x,x}"'] \\
I \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) \arrow[u, "j_y \otimes \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)}"] \arrow[ur, "\cong"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) \otimes I \arrow[u, "\mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)} \otimes j_x"'] \arrow[ul, "\cong"]
\end{tikzcd}
$$

---

[a] $\cong$ はモノイダル圏 V の associator

[b] $\cong$ はモノイダル圏 V の left/right unitor

定義 1.36: 豊穣関手

モノイダル圏 $(V,\, \otimes,\, I)$ を与える．
2 つの V-豊穣圏 $\mathcal{C},\, \mathcal{D}$ の間の V-**豊穣関手** (V-enriched functor)

$$F \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

は，以下のデータからなる：

- 写像 $F_0 \colon \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathcal{D}),\ x \longmapsto F_0(x)$
- V の射の族

$$\big\{F_{x,\,y} \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F_0(x),\, F_0(y)\big)\big\}_{x,\, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは以下の図式を可換にしなくてはいけない：

(enriched-1)

$\forall x,\, y,\, z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して[a]

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,\, z) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) \arrow[r, "\circ_{z,y,x}"] \arrow[d, "F_{y,z}\otimes F_{x,y}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, z) \arrow[d, "F_{x,z}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F_0(y),\, F_0(z)\big) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F_0(x),\, F_0(y)\big) \arrow[r, "\circ_{F_0(z),F_0(y),F_0(x)}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F_0(x),\, F_0(z)\big)
\end{tikzcd}
$$

(enriched-2)

$\forall x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して[b]

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "j_x"] \arrow[dr, "j_{F_0(x)}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, x) \arrow[d, "F_{x,x}"] \\
& \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\bigl(F_0(x),\, F_0(x)\bigr)
\end{tikzcd}
$$

[a] これは，通常の関手において射の合成が保存されることに対応する．
[b] これは，通常の関手において恒等射が保存されることに対応する．

単体的集合の圏 **sSet** はモノイダル圏の構造を持つ．実際，命題 1.5-(2) より，単体的集合 $S,\,T\colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow$ **Sets** に対してその直積

$$
\begin{aligned}
S\times T\colon \Delta^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathbf{Sets}, \\
[n] &\longmapsto S_n \times T_n, \\
\bigl([n] \xrightarrow{\alpha} [m]\bigr) &\longmapsto \bigl(S_n \times T_n \xrightarrow{(S(\alpha),\,T(\alpha))} S_m \times T_m\bigr)
\end{aligned}
\tag{1.4.1}
$$

がテンソル積 $\times\colon \mathbf{sSet} \times \mathbf{sSet} \longrightarrow \mathbf{sSet}$ を定めている．

定義 1.37: 単体的豊穣圏

単体的集合の圏 **sSet** を (1.4.1) によりモノイダル圏と見做す．このとき，**sSet**-豊穣圏のことを**単体的豊穣圏** (simplicially enriched category) と呼ぶ．

単体的豊穣圏と **sSet**-豊穣関手全体が成す圏のことを $\mathbf{Cat}_{\mathbf{\Delta}}$ と書く．

つまり，単体的豊穣圏 $\mathcal{C}$ とは以下のデータからなる：

- 集合 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，単体的集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, Y) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{sSet})$
- $\forall X,\, Y,\, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，自然変換

$$
\circ_{Z,\,Y,\,X} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\bigl(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, Y),\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, Z)\bigr)
$$

- $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，0-単体 $j_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, X)_0 \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\bigl(\Delta^0,\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, X)\bigr)$

【例 1.4.1】Kan 複体の圏

(1, 1)-圏 **Kan** を，

- Kan 複体を対象に持つ
- Kan 複体の間の自然変換を射に持つ

で定義する．**Kan** は単体的集合の圏 **sSet** の充満部分圏であり，直積 (1.4.1) をテンソル積とするモノイダル圏になる．

さらに，**Kan** は【例 1.3.3】と同様の方法で単体的豊穣圏と見做すこともできる．実際，任意の

Kan 複体 $X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Kan})$ に対して

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\mathbf{un}(X,\, Y)\colon \Delta^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathbf{Sets}, \\
[n] &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(X \times \Delta^n,\, Y\right), \\
\left([m] \xrightarrow{\alpha} [n]\right) &\longmapsto \left(f \mapsto f \circ (\mathrm{Id}_X \times \alpha_*)\right)
\end{aligned}
$$

なる対応は単体的集合を成しているため，

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{K}\mathbf{an}) := \mathrm{Ob}(\mathbf{Kan})$
- Hom 対象を $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}\mathbf{an}}\left(X,\, Y\right) := \mathcal{F}\mathbf{un}(X,\, Y) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{sSet})$

と定義することで単体的豊穣圏 $\mathcal{K}\mathbf{an}$ が構成できた．特に，

$$
\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}\mathbf{an}}\left(X,\, Y\right)_0 = \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(X \times \Delta^0,\, Y\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(X,\, Y\right) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Kan}}\left(X,\, Y\right)
$$

が成り立つ．

定義 1.38: 単体的豊穣圏 $\mathfrak{C}[Q]$

$(Q,\, \le)$ を半順序集合とする．このとき単体的豊穣圏 $\mathfrak{C}[Q] \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cat}_{\mathbf{\Delta}})$ を以下で定義する：

- $\mathrm{Ob}(\mathfrak{C}[Q]) := Q$
- $\forall i,\, j \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C}[Q])$ に対して，

$$
\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}[Q]}\left(i,\, j\right) := \begin{cases} \mathrm{N}(P_{ij}), & i \le j \\ \emptyset, & i > j \end{cases}
$$

  ただし，集合 $P_{ij} := \left\{\, K \subset Q \;\middle|\; K = \{\, i = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = j \,\},\, m \ge 0 \,\right\}$ を
  - $\forall K \in P_{ij}$ を対象と見做す．
  - Hom 集合を次のように定義する：

$$
\mathrm{Hom}_{P_{ij}}\left(K,\, L\right) := \begin{cases} \{\mathrm{pt}_{K,L}\}, & K \supset L \\ \emptyset, & K \subsetneq L \end{cases}
$$

  とすることで圏と見做し[a]，それの脈体を取った．
- $\forall i,\, j,\, k \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C}[Q]),\ i \le j \le k$ に対して，自然変換

$$
\circ_{kji}\colon \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}[Q]}\left(j,\, k\right) \times \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}[Q]}\left(i,\, j\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}[Q]}\left(i,\, k\right)
$$

  を次で定義する：

$$
\begin{aligned}
\circ_{kji\,[n]}\colon\ \mathrm{N}(P_{jk})_n \times \mathrm{N}(P_{ij})_n &\longrightarrow \mathrm{N}(P_{ij})_n, \\
(\sigma,\, \tau) &\longmapsto \sigma \cup \tau
\end{aligned}
$$

  ただし $\sigma \cup \tau$ とは，n-単体 $\sigma,\, \tau$ の，頂点のレベルで和集合をとることによって一意的に定まる n-単体のことである．

[a] 集合 P_{ij} の上に順序関係

$$K \le L \overset{\text{def}}{\iff} K \supset L$$

を入れて半順序集合 $(P_{ij}, \le)$ を作り，それを (1, 1)-圏と見做した．順序関係が包含の逆向きであるが，i から j を辿る経路の細分 (subdivision) をとったと考えると憶えやすい．

単体的豊穣圏 $\mathfrak{C}(Q)$ における合成射のイメージを掴むために，具体例を見よう．

【例 1.4.2】単体的豊穣圏 $\mathfrak{C}[2]$

圏 $\mathfrak{C}[2]$ の構造を調べよう．定義 1.38 の記号に倣うと

$$\begin{aligned}
P_{ii} &= \mathrm{N}(P_{ii})_0 = \{\,\{i\}\,\} \qquad (i = 0,\, 1,\, 2),\\
P_{01} &= \mathrm{N}(P_{01})_0 = \{\,\{0<1\}\,\},\\
P_{02} &= \mathrm{N}(P_{02})_0 = \{\,\{0<2\},\, \{0<1<2\}\,\},\\
P_{12} &= \mathrm{N}(P_{12})_0 = \{\,\{1<2\}\,\}
\end{aligned}$$

であるから，(1.3.1) の記法に則ると

$$\begin{aligned}
&\mathrm{N}(P_{ii})_n = \mathrm{Fun}([n],\, P_{ii}) = \Big\{ \underbrace{\{i\} \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\{i\}}} \{i\} \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\{i\}}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\{i\}}} \{i\}}_{n\text{ 個の頂点}} \Big\},\\
&\mathrm{N}(P_{01})_n = \mathrm{Fun}([n],\, P_{01}) = \Big\{ \{0<1\} \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\{0<1\}}} \{0<1\} \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\{0<1\}}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\{0<1\}}} \{0<1\} \Big\},\\
&\mathrm{N}(P_{12})_n = \mathrm{Fun}([n],\, P_{12}) = \Big\{ \{1<2\} \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\{1<2\}}} \{1<2\} \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\{1<2\}}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\{1<2\}}} \{1<2\} \Big\},\\
&\mathrm{N}(P_{02})_n = \mathrm{Fun}([n],\, P_{02})\\
&\quad = \Big\{ \underbrace{\{0<1<2\} \xrightarrow{\mathrm{Id}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{Id}} \{0<1<2\}}_{i\text{ 個の頂点}} \xrightarrow{\mathrm{pt}_{\{0<1<2\},\{0<2\}}} \underbrace{\{0<2\} \xrightarrow{\mathrm{Id}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{Id}} \{0<2\}}_{n-i\text{ 個の頂点}} \;\Big|\; 0 \le i \le n \Big\}
\end{aligned}$$

だと分かる．非自明な合成射は自然変換

$$\circ_{210}\colon\ \mathrm{N}(P_{12}) \times \mathrm{N}(P_{01}) \longrightarrow \mathrm{N}(P_{02})$$

のみである．これはまず 0-単体に関して

$$\begin{aligned}
\circ_{210[0]}\colon\ \mathrm{N}(P_{12})_0 \times \mathrm{N}(P_{01})_0 &\longrightarrow \mathrm{N}(P_{02})_0,\\
\big(\{1<2\},\, \{0<1\}\big) &\longmapsto \{0<1<2\}
\end{aligned}$$

と振る舞う．1-単体に関しては，頂点毎に和集合をとることで

$$\begin{aligned}
\circ_{210[1]}\colon\ \mathrm{N}(P_{12})_1 \times \mathrm{N}(P_{01})_1 &\longrightarrow \mathrm{N}(P_{02})_1,\\
\big(\{1<2\} \to \{1<2\},\, \{0<1\} \to \{0<2\}\big) &\longmapsto \big(\{0<1<2\} \to \{0<1<2\}\big)
\end{aligned}$$

と定まっている．全く同様に n-単体に関して，写像

$$\circ_{210[n]}\colon\ \mathrm{N}(P_{12})_n \times \mathrm{N}(P_{01})_n \longrightarrow \mathrm{N}(P_{02})_n$$

とは常に

$$\underbrace{\{0 < 1 < 2\} \xrightarrow{\mathrm{Id}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{Id}} \{0 < 1 < 2\}}_{n\text{ 個の頂点}} \in \mathrm{N}(P_{02})_n$$

を返す写像である．

後に紹介する定理 1.6 と併せて，次に定義する homotopy coherent nerve は非自明な[*18]$(\infty, 1)$-圏を構成する非常に便利なツールとなる．

定義 1.39: homotopy coherent な脈体

単体的豊穣圏 $\mathcal{C} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cat_\Delta})$ の **homotopy coherent nerve**

$$\mathrm{N_{hc}}(\mathcal{C})\colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を以下で定義する：

- $\forall [n] \in \mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})$ に対して

$$\mathrm{N_{hc}}(\mathcal{C})_n := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat_\Delta}}\left(\mathfrak{C}[n],\, \mathcal{C}\right)$$

  を対応づける．
- $\forall \alpha \in \mathrm{Hom}_{\Delta^{\mathrm{op}}}\left([n],\, [m]\right)$ に対して，写像

$$\begin{aligned}\mathrm{N_{hc}}(\mathcal{C})(\alpha) := \alpha^*\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat_\Delta}}\left(\mathfrak{C}[n],\, \mathcal{C}\right) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat_\Delta}}\left(\mathfrak{C}[m],\, \mathcal{C}\right), \\ X &\longmapsto X \circ \alpha\end{aligned}$$

  を対応付ける．

homotopy coherent nerve functor

$$\mathrm{N_{hc}}\colon \mathbf{Cat_\Delta} \longrightarrow \mathbf{sSet}$$

を以下で定義する：

- $\forall \mathcal{C} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cat_\Delta})$ に対して $\mathrm{N_{hc}}(\mathcal{C}) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{sSet})$ を対応付ける．
- 任意の **sSet**-豊穣関手 $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ に対して，自然変換

$$\mathrm{N_{hc}}(F) := \left\{\mathrm{N_{hc}}(F)_{[n]}\colon X \longmapsto F \circ X\right\}_{[n] \in \mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})}$$

  を対応付ける．

homotopy coherent nerve の n-射および射の合成がどうなっているかを調べよう．単体的豊穣圏 $\mathcal{C} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cat_\Delta})$ を 1 つ固定する．

[*18] 命題 1.10 の適用範囲外（i.e. 本質的に $(1, 1)$-圏とは異なる）であるような $(\infty, 1)$-圏という意味である．

【例 1.4.3】homotopy coherent nerve の 0-単体

まず，$\mathrm{N_{hc}}(\mathcal{C})$ の 0-単体とは

$$F \in \mathrm{N_{hc}}(\mathcal{C})_0 = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat_\Delta}}\left(\mathfrak{C}[0],\, \mathcal{C}\right)$$

のことであった．単体的豊穣圏 $\mathfrak{C}[0]$ について $\mathrm{Ob}(\mathfrak{C}[0]) = \{0\}$ で，かつ非自明な Hom 対象は $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}[0]}(0,\, 0) = \mathrm{N}\big(\{\,\{0\}\,\}\big)$ のみであるから，**sSet-豊穣関手の定義**より F は

$$\begin{aligned}
x &:= F_0(0) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\\
F_{0,0} &\in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Big(\mathrm{N}\big(\{\,\{0\}\,\}\big),\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, x)\Big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, x)_0
\end{aligned}$$

の 2 つのデータにより完全に特徴付けられる[a]．然るに $\mathrm{N}\big(\{\,\{0\}\,\}\big) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{sSet})$ はモノイダル圏 **sSet** における単位対象であるから，**(enriched-2)** より $F_{0,\,0} = j_x$ でなくてはいけない．恒等素は $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が与えられると一意的に定まるため，F を構成する 2 つのデータのうち本質的なものは x のみである．i.e. 写像

$$\begin{aligned}
\mathrm{N_{hc}}(\mathcal{C})_0 &\longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\\
F &\longmapsto x = F_0(0)
\end{aligned}$$

は全単射である．

以上の考察より，$\mathrm{N_{hc}}(\mathcal{C})$ の 0-単体を

$$F = \underset{x}{\bullet} \in \mathrm{N_{hc}}(\mathcal{C})_0$$

と書くことにする．

[a] $\mathrm{N}\big(\{\,\{0\}\,\}\big) \cong \Delta^0$ が成り立つ．

【例 1.4.4】homotopy coherent nerve の 1-単体

次に，$\mathrm{N_{hc}}(\mathcal{C})$ の 1-単体とは

$$F \in \mathrm{N_{hc}}(\mathcal{C})_1 = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat_\Delta}}\left(\mathfrak{C}[1],\, \mathcal{C}\right)$$

のことであった．単体的豊穣圏 $\mathfrak{C}[0]$ について $\mathrm{Ob}(\mathfrak{C}[1]) = \{0,\, 1\}$ で，かつ非自明な Hom 対象が 3 つ存在し，それぞれ

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}[1]}(0,\, 0) &= \mathrm{N}\big(\{\,\{0\}\,\}\big),\\
\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}[1]}(0,\, 1) &= \mathrm{N}\big(\{\,\{0 < 1\}\,\}\big),\\
\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}[1]}(1,\, 1) &= \mathrm{N}\big(\{\,\{1\}\,\}\big)
\end{aligned}$$

と書ける．しかるにこれら 3 つは全てモノイダル圏 **sSet** における単位対象である．従って **sSet**-豊穣関手 F を完全に特徴付けるデータとは

$$x := F_0(0) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}),$$

$$
\begin{aligned}
y &\coloneqq F_0(1) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\\
F_{0,1} &\in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\Big(\mathrm{N}\big(\{\,\{0<1\}\,\}\big),\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)\Big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)_0
\end{aligned}
$$

の 3 つ組である．i.e. 写像

$$
\begin{aligned}
\mathrm{N}_{\mathrm{hc}}(\mathcal{C})_1 &\longrightarrow \bigcup_{x,\, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)_0,\\
F &\longmapsto F_{0,\,1}
\end{aligned}
$$

は全単射である．

ところで，**【例 1.4.3】** より $x,\, y \in \mathrm{N}_{\mathrm{hc}}(\mathcal{C})_0$ と見做せる．さらに面写像は

$$
\begin{aligned}
\partial^1_1\colon\ \mathrm{N}_{\mathrm{hc}}(\mathcal{C})_1 &\longrightarrow \mathrm{N}_{\mathrm{hc}}(\mathcal{C})_0,\\
F &\longmapsto F \circ d^1_1 = \big(0 \mapsto F_0(0)\big)
\end{aligned}
$$

および

$$
\begin{aligned}
\partial^1_0\colon\ \mathrm{N}_{\mathrm{hc}}(\mathcal{C})_1 &\longrightarrow \mathrm{N}_{\mathrm{hc}}(\mathcal{C})_0,\\
F &\longmapsto F \circ d^1_0 = \big(0 \mapsto F_0(1)\big)
\end{aligned}
$$

となるので，図 (2) に則り

$$
\underset{x}{\bullet} \xrightarrow{F_{0,1}} \underset{y}{\bullet} \quad \in \mathrm{N}_{\mathrm{hc}}(\mathcal{C})_1
$$

と図示する．

【例 1.4.5】homotopy coherent nerve の 2-単体

$\mathrm{N}_{\mathrm{hc}}(\mathcal{C})$ の 2-単体とは

$$
F \in \mathrm{N}_{\mathrm{hc}}(\mathcal{C})_2 = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}_{\Delta}}\big(\mathfrak{C}[2],\, \mathcal{C}\big)
$$

のことである．**【例 1.4.2】** より，**sSet**-豊穣関手 F を完全に特徴付けるデータとは

$$
\begin{aligned}
x &\coloneqq F_0(0) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\\
y &\coloneqq F_0(1) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\\
z &\coloneqq F_0(2) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\\
F_{0,1} &\in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\mathrm{N}(P_{01}),\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)\big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)_0\\
F_{1,2} &\in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\mathrm{N}(P_{12}),\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,\, z)\big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,\, z)_0\\
F_{0,2} &\in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big(\mathrm{N}(P_{02}),\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, z)\big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, z)_1
\end{aligned}
$$

の 6 つ組である．再び **【例 1.4.2】** より，$\mathrm{N}(P_{12}),\, \mathrm{N}(P_{01})$ はそれぞれ $\{1<2\},\, \{0<1\}$ が張る 1 点集合であるから，$F_{1,2},\, F_{0,1}$ はそれぞれ

$$
f_{1,2} \coloneqq F_{1,2\,[0]}\big(\{1<2\}\big) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,\, z)_0,
$$

$$f_{0,1} \coloneqq F_{0,1\,[0]}\bigl(\{0<1\}\bigr) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\,y)_0$$

と同一視できる．さらに，$F_{0,2}$ を完全に特徴付けるには

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{0,2} &\coloneqq F_{0,2[0]}\bigl(\{0<1<2\}\bigr) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\,z)_0,\\
f_{0,2} &\coloneqq F_{0,2[0]}\bigl(\{0<2\}\bigr) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\,z)_0,\\
\varphi_{0,2} &\coloneqq F_{0,2[1]}\bigl(\{0<1<2\} \xrightarrow{\mathrm{pt}_{\{0<1<2\},\{0<2\}}} \{0<2\}\bigr) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\,z)_1
\end{aligned}$$

の 3 つ組を与えることが必要十分だと分かる．特に，単体的集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\,z) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{sSet})$ の面写像は

$$\begin{aligned}
\partial_1^1(\varphi_{0,2}) &= \tilde{f}_{0,2},\\
\partial_0^1(\varphi_{0,2}) &= f_{0,2}
\end{aligned} \tag{1.4.2}$$

を充たし，かつ単体的集合 $\mathrm{N_{hc}}(\mathcal{C}) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{sSet})$ の面写像は

$$\begin{aligned}
\partial_0^2(F) &= f_{1,2},\\
\partial_1^2(F) &= f_{0,2},\\
\partial_2^2(F) &= f_{0,1}
\end{aligned}$$

を充たすことが見て取れる．

ところで，**(enriched-1)** より，(1, 1)-圏 **sSet** における図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{N}(P_{12}) \times \mathrm{N}(P_{01}) \arrow[r, "\circ_{210}"] \arrow[d, "F_{1,2}\times F_{0,1}"'] & \mathrm{N}(P_{02}) \arrow[d, "F_{0,2}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(y,\,z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\,y) \arrow[r, "\circ_{z,y,x}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\,z)
\end{tikzcd}$$

が可換にならなくてはいけない．$\{1<2\} \circ_{210\ [0]} \{0<1\} = \{0<1<2\}$ であるから，この条件は

$$\tilde{f}_{0,2} = F_{0,2[0]}\bigl(\{0<1<2\}\bigr) = f_{1,2} \circ_{z,y,x\ [0]} f_{0,1} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\,z)_0$$

と等価である．(1.4.2) と併せると，$\varphi_{0,2} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\,z)_1$ は $f_{1,2} \circ f_{0,1}$ と $f_{0,2}$ を繋ぐホモトピーだと見做せる．

以上の考察を踏まえて，図 (3) に則り

$$F = \begin{tikzcd}
 & y \arrow[dr, "f_{1,2}"] & \\
x \arrow[ur, "f_{0,1}"] \arrow[rr, "f_{0,2}"'] & \arrow[u, phantom, "\varphi_{0,2}"] & z
\end{tikzcd} \in \mathrm{N_{hc}}(\mathcal{C})_2$$

と図示する．(1, 1)-圏の脈体の場合と異なり，一般に $f_{1,2} \circ f_{0,1} \neq f_{0,2}$ である点に注意すべきである．i.e. homotopy coherent nerve $\mathrm{N_{hc}}(\mathcal{C})$ において1-射の合成は upto homotopy でしか定まらない．

定理 1.6: Kan-豊穣圏は $(\infty, 1)$-圏

Kan-豊穣圏[a] $\mathcal{C} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cat}_{\boldsymbol{\Delta}})$ の homotopy coherent nerve $\mathrm{N}_{\mathrm{hc}}(\mathcal{C}) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{sSet})$ は $(\infty, 1)$-圏である．

[a] **Kan** は **sSet** の充満部分圏であるから，**Kan**-豊穣圏は単体的豊穣圏と見做せる．

証明 [?, Tag 00LJ] ■

【例 1.4.6】空間の成す $(\infty, 1)$-圏

【例 1.4.1】単体的豊穣圏 $\mathcal{K}\mathbf{an}$ を homotopy coherent nerve で **sSet** に埋め込んだものを**空間の成す $(\infty, 1)$-圏** (∞-category of spaces)[a] と呼び，

$$\mathcal{S}\mathbf{paces} \coloneqq \mathrm{N}_{\mathrm{hc}}(\mathcal{K}\mathbf{an})$$

と書く．実際，単体的集合 $\mathcal{S}\mathbf{paces} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{sSet})$ は $(\infty, 1)$-圏である [?, Tag 01YY]．$(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{S}\mathbf{paces}$ は，$(1, 1)$-圏論における **Sets** の，$(\infty, 1)$-圏論における対応物である．

[a] より現代的には，**$(\infty, 1)$-category of anima** と呼ばれることがある．

1.4.2 単体的ホモトピー

定義 1.40: 単体的ホモトピー

$X, Y, K \in \mathrm{Ob}(\mathbf{sSet})$ を，K が X の単体的部分集合となるようにとる．包含射 $i\colon K \hookrightarrow X$ をとる．

- $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(X, Y)$ を繋ぐ**ホモトピー**とは，**sSet の射** $\eta \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(X \times \Delta^1, Y)$ であって，以下の **sSet** の図式を可換にするもののこと：

$$\begin{tikzcd} X \cong X \times \Delta^0 \arrow[r, "\mathrm{Id}\times d^1_{1*}"] \arrow[dr, "f"'] & X \times \Delta^1 \arrow[d, "\eta"] & X \times \Delta^0 \arrow[l, "\mathrm{Id}\times d^1_{0*}"'] \arrow[dl, "g"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

f, g を繋ぐホモトピーが存在するとき，f, g は互いに**ホモトピック**であるという．

- $f \circ i = g \circ i \eqqcolon \alpha$ とおく．ホモトピー $\eta \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(X \times \Delta^1, Y)$ が f と g の間の ***K* に関する相対ホモトピー** (homotopy from f to g (rel K)) であるとは，上の可換図式に加えて

$$\begin{tikzcd} K \times \Delta^1 \arrow[r, hook, "i\times\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}"'] & X \times \Delta^1 \arrow[d, "\eta"] \\ K \arrow[r, "\alpha"'] & Y \end{tikzcd}$$

が成り立つことを言う．

より具体的には，$f,\, g$ を繋ぐ**単体的ホモトピー** (simplicial homotopy) とは **Sets** の射の族

$$\left\{h_i\colon X_n \longrightarrow Y_{n+1}\right\}_{i=0,\, \dots,\, n,\, n\geq 0}$$

であって以下を充たすもののこと：

$$\begin{aligned}
\partial_0 \circ h_0 &= f_n, \\
\partial_{n+1} \circ h_n &= g_n, \\
\partial_i \circ h_j &= \begin{cases} h_{j-1} \circ \partial_i, & i < j \\ \partial_i \circ h_{i-1}, & i = j \neq 0 \\ h_j \circ \partial_{i-1}, & i > j+1 \end{cases} \\
\sigma_i \circ h_j &= \begin{cases} h_{j+1} \circ \sigma_i, & i \leq j \\ h_j \circ \sigma_{i-1}, & i > j \end{cases}
\end{aligned}$$

一見するとホモトピーと単体的ホモトピーは別のものに見えるが，実は同じものである．単体的ホモトピー $\left\{h_i\colon X_n \longrightarrow Y_{n+1}\right\}_{i=0,\, \dots,\, n,\, n\geq 0}$ が与えられたとする．このとき **sSet** の射 $\eta \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(X \times \Delta^1,\, Y\right)$ を

$$\begin{aligned}
\eta_0 &\coloneqq \partial_0 \circ h_0, \\
\eta_{n+1} &\coloneqq \partial_{n+1} \circ h_n, \\
\eta_j &\coloneqq \partial_j \circ h_j \quad (1 \leq j \leq n)
\end{aligned}$$

と定義すると，和の普遍性の図式によって $\eta \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(X \times \Delta^1,\, Y\right)$ が定まる．

命題 1.14: ∞-groupoid とホモトピー

$X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{sSet})$ が ∞-groupoid ならば，ホモトピックは $\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(X,\, Y\right)$ の上の同値関係になる．ホモトピック $(\mathrm{rel}\ K \subset X)$ も同値関係である．

<u>証明</u>　[?, p.26, COROLLARY 6.2] ■

∞-groupoid X を与え，$* \in X_0$ を 1 つ固定する．このとき集合としての同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left((\Delta^n,\, \partial\Delta^n),\, (X,\, *)\right) \cong \left\{\, x \in X_n \;\middle|\; 0 \leq \forall i \leq n,\ \partial_i^n(x) = \sigma_0^{n-2} \circ \cdots \circ \sigma_0^0(*) \,\right\} \eqqcolon Z_n(X,\, *)$$

がある [?]．$a,\, b \in X_n$ を繋ぐ**ホモトピー**とは，この場合 $y \in X_{n+1}$ であって

$$\partial_i^{n+1}(y) = \begin{cases} \sigma_0^{n-1} \circ \cdots \circ \sigma_0^0(*), & i < n \\ a, & i = n \\ b, & i = n+1 \end{cases}$$

を充たすもののことである．ホモトピック $\sim$ は $Z_n(X,\, *)$ 上の同値関係になる [?, p.27, Lemma 3.28].

$a,\, b \in Z_n(X,\, *)$ に対して，系 1.4，命題 1.5-(1) および Kan 条件によって

$$\begin{tikzcd}
\Lambda_n^{n+1} \arrow[r, "{\left((\sigma_0)^n(*),\, \dots,\, (\sigma_0)^n(*),\, a,\, b\right)}"] \arrow[d, hook] & X \\
\Delta^{n+1} \arrow[ur, dashed, "\exists a \star b"'] &
\end{tikzcd}$$

として $a \star b \in X_{n+1}$ をとってくる．

$$\boldsymbol{\pi_n^{\Delta}(X,\, *)} \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big((\Delta^n,\, \partial\Delta^n),\, (X,\, *)\big)/{\simeq} \cong Z_n(X,\, *)/{\sim}$$

とおく．

命題 1.15: 単体的ホモトピー群

写像

$$\pi_n^{\Delta}(X,\, *) \times \pi_n^{\Delta}(X,\, *) \longrightarrow \pi_n^{\Delta}(X,\, *),\ ([a],\, [b]) \longmapsto [\partial_n^{n+1}(a \star b)]$$

によって $\pi_n^{\Delta}(X,\, *)$ は群になる．これを**単体的ホモトピー群**と呼ぶ．

証明 ■

定理 1.7: 単体的ホモトピー群と幾何学的実現

$$\pi_n^{\Delta}(X,\, *) \cong \pi_n(|X|,\, |*|)$$

証明 [?, p.64, PROPOSITION 11.1] ■

1.5 ∞-トポス

単体圏 Δ 上の関手

$$\begin{aligned} \mathrm{OP}\colon \Delta &\longrightarrow \Delta, \\ [n] &\longmapsto [n], \\ \big([m] \xrightarrow{\alpha} [n]\big) &\longmapsto (j \mapsto n - \alpha(m-j)) \end{aligned}$$

を考える．

定義 1.41: $(\infty,\, 1)$-圏の逆

$(\infty,\, 1)$-圏 K の**反対** (opposite) とは，単体的集合

$$\boldsymbol{K^{\mathrm{op}}}\colon \Delta^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathrm{OP}} \Delta^{\mathrm{op}} \xrightarrow{K} \mathbf{Sets}$$

のことを言う．K^{op} もまた $(\infty,\, 1)$-圏である [?, Tag 003S]．

反対圏 K^{op} における面写像・縮退写像はそれぞれ

$$\begin{aligned} (\partial_i^n\colon K_n^{\mathrm{op}} \longrightarrow K_{n-1}^{\mathrm{op}}) &= (\partial_{n-i}^n\colon K_n \longrightarrow K_{n-1}), \\ (\sigma_i^n\colon K_n^{\mathrm{op}} \longrightarrow K_{n+1}^{\mathrm{op}}) &= (\sigma_{n-i}^n\colon K_n \longrightarrow K_{n+1}) \end{aligned}$$

となる．従って，$(\infty,\, 1)$-圏 K の射の始点と終点が入れ替わっている．

定義 1.42: $(\infty, 1)$-前層

- K を $(\infty, 1)$-圏とする．K 上の **$(\infty, 1)$-前層**とは，自然変換[a]

$$P\colon K^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}\mathbf{paces}$$

のこと．

- K 上の **$(\infty, 1)$-前層が成す $(\infty, 1)$-圏**とは，$(\infty, 1)$-前層全体の集合 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(K^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathbf{paces}\right)$ を【例 1.3.3】の構成と全く同じ方法で単体的集合と見做した

$$\mathbf{PSh}_{(\infty, 1)}(K) := \mathcal{F}\mathbf{un}(K^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathbf{paces}) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{sSet})$$

のこと．$\mathbf{PSh}_{(\infty, 1)}(K)$ は $(\infty, 1)$-圏である [?, Tag 0066] [b]

[a] i.e. これは $(\infty, 1)$-圏の関手である．

[b] $\mathbf{PSh}_{(\infty, 1)}(K)_0 = \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(K^{\mathrm{op}} \times \Delta^0, \mathcal{S}\mathbf{paces}\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(K^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathbf{paces}\right)$ より，$\mathbf{PSh}_{(\infty, 1)}(K)$ の対象 (0-セル) がまさに K 上の $(\infty, 1)$-前層となっている．

以降では，$(\infty, 1)$-前層のことを ∞-前層と呼ぶ．

[?]，[?, p.9] に従い $(\infty, 1)$-トポスの定義を概観する[*19]．

定義 1.43: ∞-トポス

K を $(\infty, 1)$-圏とする．
K 上の **$(\infty, 1)$-トポス**とは，$(\infty, 1)$-圏 $\mathbf{PSh}_{(\infty, 1)}(K)$ の部分 $(\infty, 1)$-圏

$$i\colon \mathbf{H} \hookrightarrow \mathbf{PSh}_{(\infty, 1)}(K)$$

であって，包含 $(\infty, 1)$-関手 i が有限極限を保つ左随伴 $(\infty, 1)$-関手

$$\begin{tikzcd} \mathbf{H} \arrow[r, bend left, "i"] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{PSh}_{(\infty, 1)}(K) \arrow[l, bend left, "\mathrm{lex}"] \end{tikzcd}$$

を持つようなもののこと．

もしくは，余完全[a]な $(\infty, 1)$-圏 $\mathbf{H}$ であって以下の公理を充たすもののこと [?, p.9, Definition 2.1]：

(T1) $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(X, Y)$ および $\mathbf{H}$ における任意の小さい図式 $D\colon I \longrightarrow \mathbf{H}_{/Y}$ において，自然な同型

$$\mathrm{colim}_{i \in I}\bigl(X \times_Y D(i)\bigr) \cong X \times_Y \mathrm{colim}_{i \in I} D(i)$$

がある[b]．

(T2) $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{H})$ に対して，図式 $Y \longleftarrow \emptyset \longrightarrow X$ の押し出し

[*19] ここでの定義は不完全なので，詳細は [?]，[?] などを参照．

$$
\begin{array}{ccc}
\emptyset & \longrightarrow & X \\
\downarrow & & \downarrow \\
Y & \longrightarrow & X \amalg Y
\end{array}
$$

は図式 $Y \longrightarrow X \amalg Y \longleftarrow X$ の引き戻しでもある．i.e. 任意の和が disjoint である．

(T3) $\mathbf{H}$ における任意の groupoid object は delooping を持つ．

[a] 正確には **presentable** [**?**, p.372, Def5.5.0.18]

[b] $\times_Y$ は引き戻し

1.6 (∞, n)-圏

1.6.1 Complete Segal space

1.6.2 Theta space