

第 1 章

コホモロジー

R を環とする.

定義 1.1: 良い被覆

位相空間 X の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ が**良い被覆** (good cover) であるとは, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Lambda$ に対して

$$U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_n} \neq \emptyset \implies U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_n} \text{ は可縮}$$

が成り立つこと.

以下では $U_{\alpha_1 \dots \alpha_n} := U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_n}$ と略記する.

1.1 導来関手

1.2 層係数コホモロジー

位相空間 X を 1 つ固定する. X 上の**開集合の圏** \mathbb{O}_X を,

- X の開集合を対象とする
- X の任意の開集合 $U, V \subset X$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{O}_X}(U, V) := \begin{cases} \{ \text{包含写像 } U \hookrightarrow V \}, & U \subset V \\ \emptyset, & U \not\subset V \end{cases}$$

と定義する.

定義 1.2: 前層

位相空間 X 上の, 小圏 \mathcal{S} に値をとる前層 (presheaf) とは, 関手

$$P: \mathbb{O}_X^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{S}$$

のこと^a.

^a 最も一般的には, 関手 $P: \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{S}$ のことを圏 \mathcal{C} 上の \mathcal{S} に値をとる前層と呼ぶ <https://ncatlab.org/nlab/show/presheaf>

位相空間 X 上の, 圏 \mathcal{S} に値をとる前層の圏 $\mathbf{PSh}(X, \mathcal{S})$ とは,

- \mathcal{S} に値をとる前層を対象とする.
- \mathcal{S} に値をとる前層 $P, Q: \mathbb{O}_X^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{S}$ に対して, 自然変換

$$F: P \Longrightarrow Q$$

を射とする

圏のこと.

【例 1.2.1】定数前層

圏 \mathcal{S} の対象 A に対して定まる前層

$$\begin{aligned}
A_X: \mathbb{O}_X^{\text{op}} &\longrightarrow \mathcal{S}, \\
U &\longmapsto A, \\
(U \hookrightarrow V) &\longmapsto \text{id}_A
\end{aligned}$$

のことを定数前層 (constant presheaf) と呼ぶ.

【例 1.2.2】微分形式のなす前層

X を C^∞ 多様体とする. このとき

$$\begin{aligned}
C_X^\infty: \mathbb{O}_X^{\text{op}} &\longrightarrow \mathbb{R}\text{-}\mathbf{Mod}, \\
U &\longmapsto C^\infty(U), \\
(\iota \circ U \hookrightarrow V) &\longmapsto (f \longmapsto f \circ \iota)
\end{aligned}$$

なる対応は前層である. 同様に, $\forall q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$\begin{aligned}
\Omega_X^q: \mathbb{O}_X^{\text{op}} &\longrightarrow \mathbb{R}\text{-}\mathbf{Mod}, \\
U &\longmapsto \Omega^q(U), \\
(\iota: U \hookrightarrow V) &\longmapsto (\omega \longmapsto \iota^* \omega)
\end{aligned}$$

なる対応は前層である.

定義 1.3: 層

前層 $P \in \text{Ob}(\text{PSh}(X, \mathcal{S}))$ が層 (sheaf) であるとは,

- X の任意の開集合 $U \subset X$ および U の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$
- 任意の族 $\{x_\alpha \in P(U_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ であって, $\forall \alpha, \beta \in \Lambda$ に対して

$$P(U_\alpha \cap U_\beta \hookrightarrow U_\alpha)(x_\alpha) = P(U_\alpha \cap U_\beta \hookrightarrow U_\beta)(x_\beta)$$

を充たすもの

に対して, $x \in P(U)$ が一意的存在して

$$\forall \alpha \in \Lambda, P(U_\alpha \hookrightarrow U)(x) = x_\alpha$$

を充たすこと.

位相空間 X 上の, 圏 \mathcal{S} に値をとる層の圏 $\text{Sh}(X, \mathcal{S})$ とは,

- \mathcal{S} に値をとる層を対象とする.
- \mathcal{S} に値をとる層 $P, Q: \mathbb{O}_X^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{S}$ に対して, 自然変換

$$F: P \Rightarrow Q$$

を射とする

圏のこと. \mathcal{S} がアーベル圏のとき, 圏 $\text{Sh}(X, \mathcal{S})$ もまたアーベル圏である [?, p.298, 命題 4.30].

X を位相空間とする. 加法的関手

$$A: \text{Sh}(X, R\text{-Mod}) \rightarrow R\text{-Mod} \quad (1.2.1)$$

を,

- 任意の層 $P \in \text{Ob}(\text{Sh}(X, R\text{-Mod}))$ に対して R -加群 $P(X) \in \text{Ob}(R\text{-Mod})$ を対応付ける
- 層 $P, Q \in \text{Ob}(\text{Sh}(X, R\text{-Mod}))$ の間の任意の自然変換 $F: P \Rightarrow Q$ に対して, R -加群の準同型 $F_X: P(X) \rightarrow Q(X)$ を対応付ける

関手として定義する.

定義 1.4: 層係数コホモロジー

加法的関手 (1.2.1) の右導来関手を $(H^n(X, -))_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ と書く. 層 $P \in \text{Ob}(\text{Sh}(X, R\text{-Mod}))$ を係数とする位相空間 X の層係数コホモロジー (sheaf cohomology) とは,

$$H^n(X, P)$$

のこと.

1.3 Čech コホモロジー

位相空間 X および前層 $P \in \text{Ob}(\text{PSh}(X, R\text{-Mod}))$ を与える.

X の開被覆 $\mathcal{U} := \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ をとる. $\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$\check{C}^n(\mathcal{U}, P) := \prod_{(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \Lambda^{n+1}} P(U_{\alpha_0 \dots \alpha_n})$$

と定義し,

$$\begin{aligned} \delta^{n+1}: \check{C}^n(\mathcal{U}, P) &\longrightarrow \check{C}^{n+1}(\mathcal{U}, P), \\ (x_{\alpha_0 \dots \alpha_n})_{(\alpha_0, \dots, \alpha_n)} &\longmapsto \left(\sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j P(U_{\alpha_0 \dots \alpha_{n+1}} \hookrightarrow U_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_j \dots \alpha_{n+1}})(x_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_j \dots \alpha_{n+1}}) \right)_{(\alpha_0, \dots, \alpha_{n+1})} \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

と定義すると $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$ であるから, $R\text{-Mod}$ の図式

$$\dots \xrightarrow{\delta^{n-1}} \check{C}^{n-1}(\mathcal{U}, P) \xrightarrow{\delta^n} \check{C}^n(\mathcal{U}, P) \xrightarrow{\delta^{n+1}} \check{C}^{n+1}(\mathcal{U}, P) \xrightarrow{\delta^{n+2}} \dots$$

はコチェイン複体である. この複体を **Čech 複体** と呼ぶ.

定義 1.5: Čech コホモロジー

Čech 複体 $(\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, P), \delta^\bullet)$ のコホモロジーのことを X の開被覆 \mathcal{U} に関する P 係数 **Čech コホモロジー** と呼び, $\check{H}^\bullet(\mathcal{U}, P)$ と書く.

【例 1.3.1】 Čech-de Rham 複体

X を C^∞ 多様体とし, X の開被覆 \mathcal{U} をとる. 【例 1.2.2】において導入した前層 $\Omega_X^q: \mathbb{O}_X^{\text{op}} \rightarrow R\text{-Mod}$ について, 複体 $(\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \Omega_X^q), \delta^\bullet)$ のことを **Čech-de Rham 複体** と呼ぶ. $\delta: \check{C}^n(\mathcal{U}, \Omega_X^l)$ の定義 (1.3.1) に $(-1)^l$ をつけることで, これは二重複体の構造^aを持つ:

$$\begin{array}{ccccccc} \check{C}^0(\mathcal{U}, \Omega_X^0) & \xrightarrow{d} & \check{C}^0(\mathcal{U}, \Omega_X^1) & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & \check{C}^0(\mathcal{U}, \Omega_X^{\dim X}) \longrightarrow 0 \\ \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & & & \downarrow \delta \\ \check{C}^1(\mathcal{U}, \Omega_X^0) & \xrightarrow{d} & \check{C}^1(\mathcal{U}, \Omega_X^1) & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & \check{C}^1(\mathcal{U}, \Omega_X^{\dim X}) \longrightarrow 0 \\ \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & & & \downarrow \delta \\ \check{C}^2(\mathcal{U}, \Omega_X^0) & \xrightarrow{d} & \check{C}^2(\mathcal{U}, \Omega_X^1) & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & \check{C}^2(\mathcal{U}, \Omega_X^{\dim X}) \longrightarrow 0 \\ \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & & & \downarrow \delta \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \end{array}$$

^a $(-1)^l$ の因子は $d\delta + \delta d = 0$ を成り立たせるために必要である.

命題 1.1: 良い被覆に関する Čech コホモロジー

定数前層 $\mathbb{R}_X: \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathbb{R}\text{-Mod}$ について, もし \mathcal{U} が良い被覆ならば

$$H_{\text{dR}}^\bullet(X; \mathbb{R}) \cong \check{H}^\bullet(\mathcal{U}; \mathbb{R}_X)$$

が成り立つ.

証明

1.4 Deligne-Beilinson コホモロジー

一般論には立ち入らず, [?, p.21, Appendix A] を参考に, 本文中で必要になる最小限だけ Deligne-Beilinson コホモロジーを導入する.

C^∞ 多様体 X とその開被覆 \mathcal{U} を一つ固定する. まず, Čech-de Rham 複体の de Rham 複体成分を次数 -1 に拡張する:

$$\check{C}^n(\mathcal{U}, \Omega_X^{-1}) := \check{C}^n(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_X)$$

ただし \mathbb{Z}_X は圏 $\mathbb{R}\text{-Mod}$ に値をとる定数前層である. そして

$$\begin{aligned} d_{-1}: \check{C}^n(\mathcal{U}, \Omega_X^{-1}) &\longrightarrow \check{C}^n(\mathcal{U}, \Omega_X^0), \\ (c_{\alpha_0 \dots \alpha_n})_{(\alpha_0, \dots, \alpha_n)} &\longmapsto ((x \longmapsto c_{\alpha_0 \dots \alpha_n}))_{(\alpha_0, \dots, \alpha_n)} \end{aligned}$$

と定義することで, 二重複体

$$\begin{array}{ccccccc} \check{C}^0(\mathcal{U}, \Omega_X^{-1}) & \xrightarrow{d_{-1}} & \check{C}^0(\mathcal{U}, \Omega_X^0) & \xrightarrow{d} & \check{C}^0(\mathcal{U}, \Omega_X^1) & \xrightarrow{d} & \dots \xrightarrow{d} \check{C}^0(\mathcal{U}, \Omega_X^{\dim X}) \longrightarrow 0 \\ \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta \\ \check{C}^1(\mathcal{U}, \Omega_X^{-1}) & \xrightarrow{d_{-1}} & \check{C}^1(\mathcal{U}, \Omega_X^0) & \xrightarrow{d} & \check{C}^1(\mathcal{U}, \Omega_X^1) & \xrightarrow{d} & \dots \xrightarrow{d} \check{C}^1(\mathcal{U}, \Omega_X^{\dim X}) \longrightarrow 0 \\ \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta \\ \check{C}^2(\mathcal{U}, \Omega_X^{-1}) & \xrightarrow{d_{-1}} & \check{C}^2(\mathcal{U}, \Omega_X^0) & \xrightarrow{d} & \check{C}^2(\mathcal{U}, \Omega_X^1) & \xrightarrow{d} & \dots \xrightarrow{d} \check{C}^2(\mathcal{U}, \Omega_X^{\dim X}) \longrightarrow 0 \\ \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

を得る. この 2 重複体を横方向に切り取り, かつ右斜め上方向に直和をとることで得られる複体を **Deligne-Beilinson 複体** と呼ぶ. あからさまには, ある $0 \leq p \leq \dim X + 1$ に対して

$$\mathbb{Z}(p)_D^q := \begin{cases} \bigoplus_{n+m=q-1} \check{C}^n(\mathcal{U}, \Omega_X^m), & 0 \leq q \leq p \\ \bigoplus_{\substack{n+m=p-1 \\ m \leq p-1}} \check{C}^n(\mathcal{U}, \Omega_X^m), & q > p \end{cases}$$

と定義し $D := d + (-1)^{\deg} \delta$ とおくと, 図式

$$\dots \xrightarrow{D} \mathbb{Z}(p)_D^q \xrightarrow{D} \mathbb{Z}(p)_D^{q+1} \xrightarrow{D} \dots$$

はコチェイン複体になる.

定義 1.6: Deligne-Beilinson コホモロジー

$0 \leq p \leq \dim X + 1$ を与える.

上述の複体 $(\mathcal{U}, \mathbb{Z}(p)_{\mathbb{D}}, D)$ を開被覆 \mathcal{U} に関する **Deligne-Beilinson 複体**, そのコホモロジーを **Deligne-Beilinson コホモロジー**と呼ぶ. 記号として $H_{\mathbb{D}}^{\bullet}(\mathcal{U}; \mathbb{Z}(p)_{\mathbb{D}})$ と書く.

標準的射影 $\pi^q: \mathbb{Z}(p)_{\mathbb{D}}^q \rightarrow \check{C}^q(\mathcal{U}, \Omega_X^{-1})$ はチェイン写像

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{D} & \mathbb{Z}(p)_{\mathbb{D}}^q & \xrightarrow{D} & \mathbb{Z}(p)_{\mathbb{D}}^{q+1} & \xrightarrow{D} & \cdots \\ & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi & & \\ \cdots & \xrightarrow{\delta} & \check{C}^q(\mathcal{U}; \mathbb{Z}_X) & \xrightarrow{\delta} & \check{C}^{q+1}(\mathcal{U}; \mathbb{Z}_X) & \xrightarrow{\delta} & \cdots \end{array}$$

となるので, 誘導準同型

$$H_{\mathbb{D}}^q(\mathcal{U}; \mathbb{Z}(p)_{\mathbb{D}}) \rightarrow \check{H}^q(\mathcal{U}; \mathbb{Z}_X)$$

がある.

命題 1.2: Deligne-Beilinson コホモロジーと Čech コホモロジー

$0 \leq p \leq \dim X + 1$ を与える.

(1) $q < p$ ならば

$$H_{\mathbb{D}}^q(\mathcal{U}; \mathbb{Z}(p)_{\mathbb{D}}) \cong \check{H}^{q-1}(\mathcal{U}, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$$

(2) $q > p$ ならば

$$H_{\mathbb{D}}^q(\mathcal{U}; \mathbb{Z}(p)_{\mathbb{D}}) \cong \check{H}^{q-1}(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$$

(3) $q = p$ ならば, \mathbb{Z} 加群の完全列

$$0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{closed global } (p-1)\text{-forms} \\ \text{with integral periods} \end{array} \right\} \rightarrow \Omega^{p-1}(X; \mathbb{R}) \rightarrow H_{\mathbb{D}}^p(\mathcal{U}; \mathbb{Z}(p)_{\mathbb{D}}) \rightarrow \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) \quad (\text{exact})$$

が成り立つ.

証明

(1)

■

命題 1.3: 良い被覆に関する Deligne-Beilinson コホモロジー

$H_{\mathbb{D}}^{\bullet}(\mathcal{U}; \mathbb{Z}(p)_{\mathbb{D}})$ は良い被覆 \mathcal{U} の取り方によらない.

証明

■