第 1 章

微分形式の話

C^∞ 級のベクトル束を構成する便利な補題から出発しよう [?, p.253]

補題 1.1: C^∞ ベクトル束の構成

- 境界あり/なし C^∞ 多様体 M
- n 次元実ベクトル空間の族 $\{E_p\}_{p\in M}$ と全射

$$\pi\colon \coprod_{p\in M} E_p \longrightarrow M,\ (p,\, v) \longmapsto p$$

- M の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$
- 全単射の族 $\{\psi_\lambda\colon \pi^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times \mathbb{R}^n\}_{\lambda\in\Lambda}$
- $\underline{C^\infty \text{ 写像}}$の族 $\{t_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{GL}(n,\, \mathbb{R})\}_{\alpha,\, \beta\in\Lambda}$

の 5 つ組であって以下の条件を充たすものを与える：

(DVS-1) $\forall\lambda \in \Lambda$ および $\forall p \in U_\lambda$ に対して，制限

$$\psi_\alpha|_{E_p}\colon E_p \longrightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$$

はベクトル空間の同型写像である．

(DVS-2) $\forall\alpha,\, \beta \in \Lambda$ および $\forall(p,\, v) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$ に対して

$$\psi_\beta^{-1}(p,\, v) = \psi_\alpha^{-1}\bigl(p,\, t_{\alpha\beta}(p)(v)\bigr)$$

が成り立つ．

このとき，集合 $E \coloneqq \coprod_{p\in M} E_p$ 上の C^∞ 構造が一意的に存在して，$\mathbb{R}^n \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ が局所自明化 $\{\psi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を持つ C^∞ ベクトル束になる．

<u>**証明**</u> $\forall p \in M$ を 1 つとる．すると $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は M の開被覆なので，ある $\alpha_p \in \Lambda$ が存在して $p \in U_{\alpha_p}$ となる．さらに U_{α_p} は開集合なので，C^∞ チャート $(V_p,\, \varphi_p)$ であって $p \in V_p \subset U_{\alpha_p}$ を充たすものが存在する．このとき，写像 $\tilde{\varphi}_p\colon \pi^{-1}(V_p) \longrightarrow \varphi_p(V_p) \times \mathbb{R}^n$ を

$$\tilde{\varphi}_p \coloneqq (\varphi_p \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) \circ \psi_{\alpha_p}|_{\pi^{-1}(V_p)}$$

と定義する．

まず，M が境界を持たない場合に

- 集合 E
- E の部分集合族 $\{\pi^{-1}(V_p)\}_{p\in M}$
- 写像の族 $\{\tilde{\varphi}_p\colon \pi^{-1}(V_p) \longrightarrow \varphi_p(V_p)\times\mathbb{R}^n\}_{p\in M}$

の 3 つ組が補題**??**の 5 条件を充たすこと，i.e. E が境界を持たない C^∞ 多様体になることを示そう．

(DS-1) $\forall p\in M$ に対して $\psi_p\bigl(\pi^{-1}(V_p)\bigr) = \varphi_p(V_p)\times\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{\dim M}\times\mathbb{R}^n$ であり，$\varphi_p(V_p)\subset\mathbb{R}^{\dim M}$ はチャートの定義から $\mathbb{R}^{\dim M}$ の開集合なので $\psi_p\bigl(\pi^{-1}(V_p)\bigr)$ は $\mathbb{R}^{\dim M}\times\mathbb{R}^n$ の開集合である．仮定より $\psi_{\alpha_p}\colon \pi^{-1}(V_p)\longrightarrow V_p\times\mathbb{R}^n$ は全単射であり，チャートの定義から $\varphi_p\times\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\colon V_p\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\varphi_p(V_p)\times\mathbb{R}^n$ は全単射なので $\psi_p = (\varphi_p\times\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})\circ\tilde{\varphi}_{\alpha_p}$ も全単射である．

(DS-2, 3) $\forall p,\, q\in M$ をとる．このとき

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_p\bigl(\pi^{-1}(V_p)\cap\pi^{-1}(V_q)\bigr) &= \varphi_p(V_p\cap V_q)\times\mathbb{R}^n\\ \tilde{\varphi}_q\bigl(\pi^{-1}(V_p)\cap\pi^{-1}(V_q)\bigr) &= \varphi_q(V_p\cap V_q)\times\mathbb{R}^n\end{aligned}$$

はどちらも $\mathbb{R}^{\dim M}\times\mathbb{R}^n$ の開集合である．さらに $\forall (x,\, v)\in\tilde{\varphi}_p^{-1}\bigl(\pi^{-1}(V_p)\cap\pi^{-1}(V_q)\bigr)$ に対して

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_q\circ\tilde{\varphi}_p^{-1}(x,\, v) &= \tilde{\varphi}_q\circ\psi_{\alpha_p}^{-1}\bigl(\varphi_p^{-1}(x),\, v\bigr)\\ &= \tilde{\varphi}_q\circ\psi_{\alpha_q}^{-1}\Bigl(\varphi_p^{-1}(x),\, t_{\alpha_q,\alpha_p}\bigl(\varphi_p^{-1}(x)\bigr)(v)\Bigr)\\ &= \Bigl(\varphi_q\circ\varphi_p^{-1}(x),\, t_{\alpha_q,\alpha_p}\bigl(\varphi_p^{-1}(x)\bigr)(v)\Bigr)\end{aligned}$$

が成り立つが，C^∞ チャートの定義から $\varphi_{\alpha_p},\, \varphi_{\alpha_q}$ は C^∞ 写像で，かつ仮定より t_{α_q,α_p} も C^∞ 写像なので，最右辺は C^∞ 写像の合成として書ける．よって $\tilde{\varphi}_q\circ\tilde{\varphi}_p^{-1}$ は C^∞ 写像である．

(DS-4) $\{(V_p,\, \varphi_p)\}_{p\in M}$ は M のアトラスなので，高々可算濃度の部分集合 $I\subset M$ が存在して $\{V_i\}_{i\in I}$ が M の開被覆になる．このとき

$$E = \coprod_{p\in\bigcup_{i\in I}V_i} E_p = \bigcup_{i\in I}\coprod_{p_i\in V_i} E_{p_i} = \bigcup_{i\in I}\pi^{-1}(V_i)$$

が言える．

(DS-5) 互いに相異なる $\xi = (p,\, v),\, \eta = (q,\, w)\in E$ をとる．もし $p = q$ ならば $\xi,\, \eta\in E_p\subset\pi^{-1}(V_p)$ である．$p\neq q$ ならば，$V_p,\, V_q\subset M$ を $V_p\cap V_q = \emptyset$ を充たすようにとれる．すると $\pi^{-1}(V_p)\cap\pi^{-1}(V_q) = \pi^{-1}(V_p\cap V_q) = \emptyset$ でかつ $\xi\in\pi^{-1}(V_p),\, \eta\in\pi^{-1}(V_q)$ が成り立つ．

次に，M が境界付き多様体である場合を考える．座標を入れ替える写像

$$\mathrm{swap}\colon \mathbb{R}^{\dim M}\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{\dim M},\ (x^1,\, \dots,\, x^{\dim M},\, v^1,\, \dots,\, v^n)\longmapsto(v^1,\, \dots,\, v^n,\, x^1,\, \dots,\, x^{\dim M})$$

は微分同相写像[*1]であり，境界チャート $(V_p,\, \varphi_p)$ に関して

$$\mathrm{swap}\circ\psi_p\bigl(\pi^{-1}(V_p)\bigr) = \mathbb{R}^n\times\varphi_p(V_p)\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{H}^{\dim M} = \mathbb{H}^{\dim M+n}$$

が成り立つ．よって

---

*1 $\mathbb{R}^{\dim M+n}$ には標準的な C^∞ 構造を入れる．

- 集合 E
- E の部分集合族 $\left\{\pi^{-1}(V_p)\right\}_{p\in M}$
- 写像の族 $\left\{\mathrm{swap}\circ\tilde{\varphi}_p\colon \pi^{-1}(V_p)\longrightarrow \mathbb{R}^n\times\varphi_p(V_p)\right\}_{p\in M}$

の 3 つ組が補題**??**の 5 条件を充たすことを示せば良いが，議論は M が境界を持たない場合と全く同様である． ■