

第 1 章

モノイダル圏・フュージョン圏・高次群

この章では標数 0 の体 \mathbb{K} のみを考える.

1.1 加法圏

定義 1.1: 加法圏・アーベル圏

圏 \mathcal{C} が体 \mathbb{K} 上の**加法圏** (additive category) であるとは, 以下を充たすこと:

(add-1)

任意の Hom 集合 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が可換群の構造をもち, かつ射の合成

$$\circ: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

が群演算に関して双加法的である.

(add-2)

零対象^a (zero object) $\mathbf{0} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が存在し, $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{0}, X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(, \mathbf{0}) = 0$ を充たす^b.

(add-3)

有限の余積が常に存在する.

加法圏 \mathcal{C} は, $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に関して $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が \mathbb{K} -ベクトル空間の構造を持ち, かつ合成 \circ が \mathbb{K} -双線形写像でもあるとき, **\mathbb{K} -線形** (\mathbb{K} -linear) であると言われる.

^a 始対象かつ終対象

^b 最右辺は (add-1) の意味で零ベクトル空間.

加法圏 \mathcal{C} は, 以下の条件を充たすとき**アーベル圏** (abelian category) と呼ばれる:

(Ab-1)

任意の射 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が核 $\ker f: \text{Ker } f \longrightarrow X$ および余核 $\text{coker } f: Y \longrightarrow \text{Coker } f$ を持つ.

(Ab-2)

$\text{Ker } f = \mathbf{0}$ ならば $f = \ker(\text{coker } f)$, かつ $\text{Coker } f = \mathbf{0}$ ならば $f = \text{coker}(\ker f)$

定義 1.2: 加法的関手・完全関手

加法圏 \mathcal{C}, \mathcal{D} の間の関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が**加法的** (additive) であるとは, $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して定まる写像

$$F_{X,Y}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)), f \mapsto F(f)$$

が可換群の準同型であることを言う. 特に加法圏 \mathcal{C}, \mathcal{D} が **\mathbb{K} -線形**で, かつ $\forall X, Y \in \mathcal{C}$ に対して $F_{X,Y}$ が \mathbb{K} -線型写像でもあるとき, F は **\mathbb{K} -線形** (\mathbb{K} -linear) であると言う.

アーベル圏 \mathcal{C}, \mathcal{D} の間の加法的関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を与える.

- F が**左完全** (left exact) であるとは, \mathcal{C} の任意の短完全列 $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ に対して

$$0 \rightarrow F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z)$$

が \mathcal{D} の完全列になること.

- F が**右完全** (right exact) であるとは, \mathcal{C} の任意の短完全列 $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ に対して

$$F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z) \rightarrow 0$$

が \mathcal{D} の完全列になること.

- F が**完全** (exact) であるとは, F が右完全かつ左完全であること.

【例 1.1.1】表現の圏

G を群とする. このとき

- G の表現 (ρ, V) を対象とする
- G -同変な \mathbb{K} -線型写像 $(\rho, V) \xrightarrow{f} (\rho', V')$ を射とする

圏を $\mathbf{Rep}(G)$ と書く. $\mathbf{Rep}(G)$ は**アーベル圏**である.

定義 1.3: 単純・半単純

- アーベル圏 \mathcal{C} の対象 $X \in \mathcal{C}$ が**単純** (simple) であるとは、任意のモノ射 $i: U \hookrightarrow X$ が 0 であるか同型射であることを言う。
- アーベル圏 \mathcal{C} が**半単純** (semisimple) であるとは、 $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が単純対象の有限余積と同型であることを言う。i.e. 単純対象の族 $\{V_i \in \text{Ob}(\mathcal{C})\}_{i \in I}$ および有限個を除いて 0 であるような非負整数の族 $\{N_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}_{i \in I}$ が存在して

$$X \cong \bigoplus_{i \in I} N_i X_i$$

が成り立つこと。

定義 1.4: 有限性

アーベル圏 \mathcal{C} とその対象 $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を与える。

- X が**有限長** (finite length) を持つとは、有限のフィルトレーション

$$0 = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_{n-1} \subset X_n = X$$

であって $X_i/X_{i-1} := \text{Coker}(X_{i-1} \hookrightarrow X_i)$ ($\forall i$) が**単純対象**であるようなもの (**Jordan-Hölder 列**と言う) が存在することを言う。このときの n を X の**長さ** (length) と呼ぶ^a。

以下、アーベル圏 \mathcal{C} は **\mathbb{K} -線形**であるとする。

- \mathcal{C} が**局所有限** (locally finite) であるとは、以下の 2 条件を充たすこと：
 - (IFin-1) $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して、 \mathbb{K} -ベクトル空間 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が有限次元
 - (IFin-2) $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が有限長を持つ。
- \mathcal{C} が**有限** (finite) であるとは、以下の 4 条件を充たすこと：
 - (Fin-1) $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して、 \mathbb{K} -ベクトル空間 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が有限次元
 - (Fin-2) $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が有限長を持つ。
 - (Fin-3) $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が射影的被覆^bを持つ。
 - (Fin-4) 単純対象の同型類が有限個である。

^a Jordan-Hölder の定理 [?, THEOREM 1.5.4, p.5] から、 X の任意の Jordan-Hölder 列は存在すれば同一の長さを持つ。

^b $P \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が**射影的** (projective) であるとは、関手 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, -)$ が完全関手であることを言う。 $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ の**射影的被覆** (projective cover) とは、射影的对象 $P_X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ とエビ射 $p_X: P_X \twoheadrightarrow X$ の組み (P_X, p_X) であって、任意の射影的对象 $P \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ およびエビ射 $p: P \twoheadrightarrow X$ に対してあるエビ射 $h: P \twoheadrightarrow P_X$ が存在して $p_X \circ h = p$ を充たすようなもののこと。

1.2 モノイダル圏

これまで何回か登場したが、モノイダル圏についてまとめておく：

定義 1.5: モノイダル圏

モノイダル圏 (monoidal category) は、以下の 5 つのデータからなる：

- 圏 \mathcal{C}
- テンソル積 (tensor product) と呼ばれる関手 $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$
- 単位対象 (unit object) $I \in \text{Ob}(\mathcal{C})$
- associator と呼ばれる自然同値

$$\{a_{X,Y,Z}: (X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{\cong} X \otimes (Y \otimes Z)\}_{X,Y,Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

- left/right unitors と呼ばれる自然同値

$$\{l_X: I \otimes X \xrightarrow{\cong} X\}_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})},$$

$$\{r_X: X \otimes I \xrightarrow{\cong} X\}_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは $\forall X, Y, Z, W \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ について以下の 2 つの図式を可換にする：

(triangle diagram)

$$\begin{array}{ccc} (X \otimes I) \otimes Y & \xrightarrow{a_{X,I,Y}} & X \otimes (I \otimes Y) \\ & \searrow r_X \otimes \text{Id}_Y & \swarrow \text{Id}_X \otimes l_Y \\ & X \otimes Y & \end{array}$$

(pentagon diagram)

$$\begin{array}{ccccc} & & ((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z & & \\ & \swarrow a_{W \otimes X, Y, Z} & & \searrow a_{W, X, Y \otimes \text{Id}_Z} & \\ (W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) & & & & (W \otimes (X \otimes Y)) \otimes Z \\ & \searrow a_{W, X, Y \otimes Z} & & \downarrow a_{W, X \otimes Y, Z} & \\ & & W \otimes ((X \otimes Y) \otimes Z) & & \\ & \swarrow \text{Id}_Z \otimes a_{X, Y, Z} & & & \\ & W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z)) & & & \end{array}$$

モノイダル圏 \mathcal{C} が**厳密** (strict) であるとは、 $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$(X \otimes Y) \otimes Z = X \otimes (Y \otimes Z),$$

$$I \otimes X = X, \quad X \otimes I = X$$

が成り立ち、かつ $a_{X,Y,Z}$, l_X , r_X が恒等射であることを言う。

! 定義 1.5 で言うモノイダル圏を、**弱いモノイダル圏** (weak monoidal category) と呼ぶこともある。

【例 1.2.1】 \mathbf{Cat} のモノイダル構造

\mathbf{Cat} を小圏と関手が成す圏とする。このとき、関手

$$\times: \mathbf{Cat} \times \mathbf{Cat} \longrightarrow \mathbf{Cat}$$

を $\text{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) := \text{Ob}(\mathcal{C}) \times \text{Ob}(\mathcal{D})$ により定めると、組み $(\mathbf{Cat}, \times, I)$ は厳密なモノイダル圏になる。
ただし I はただ 1 つの対象 \bullet を持ち、 $\text{Hom}_I(\bullet, \bullet) = \{\text{Id}_\bullet\}$ とする圏である^a

^a これは \mathbf{Cat} の終対象でもある。

定義 1.6: 双対

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ およびその任意の対象 $X, X^* \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を与える。 X^* が X の**左双対** (left dual) であるとは、

- **coevaluation** と呼ばれる射

$$\text{coev}_X^L: I \longrightarrow X \otimes X^*$$

- **evaluation** と呼ばれる射

$$\text{ev}_X^L: X^* \otimes X \longrightarrow I$$

が存在して以下の図式を可換にすることを言う：

(zig-zag equations)

$$\begin{array}{ccc}
 I \otimes X & \xrightarrow{\text{coev}_X^L \otimes \text{Id}_X} & (X \otimes X^*) \otimes X \\
 \downarrow r_X & & \downarrow a_{X, X^*, X} \\
 & & X \otimes (X^* \otimes X) \\
 & & \downarrow \text{Id}_X \otimes \text{ev}_X^L \\
 X & \xleftarrow{r_X} & X \otimes I
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
X^* \otimes I & \xrightarrow{\text{Id}_{X^*} \otimes \text{coev}_X^L} & X^* \otimes (X \otimes X^*) \\
\downarrow l_{X^*} & & \downarrow a_{X^*, X, X^*}^{-1} \\
& & (X^* \otimes X) \otimes X^* \\
& & \downarrow \text{ev}_X^L \otimes \text{Id}_{X^*} \\
X^* & \xleftarrow{l_{X^*}} & I \otimes X^*
\end{array}$$

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ およびその任意の対象 $X, {}^*X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を与える. *X が X の右双対 (right dual) であるとは,

- 射

$$\text{coev}_X^R: I \longrightarrow {}^*X \otimes X$$

- 射

$$\text{ev}_X^R: X \otimes {}^*X \longrightarrow I$$

が存在して以下の図式を可換にすることを言う：

(zig-zag equations)

$$\begin{array}{ccc}
X \otimes I & \xrightarrow{\text{Id}_X \otimes \text{coev}_X^R} & X \otimes ({}^*X \otimes X) \\
\downarrow l_X & & \downarrow a_{X, {}^*X, X}^{-1} \\
& & (X \otimes {}^*X) \otimes X \\
& & \downarrow \text{ev}_X^R \otimes \text{Id}_X \\
X & \xleftarrow{l_X} & I \otimes X
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
I \otimes {}^*X & \xrightarrow{\text{coev}_X^R \otimes \text{Id}_{{}^*X}} & ({}^*X \otimes X) \otimes {}^*X \\
\downarrow l_{{}^*X} & & \downarrow a_{{}^*X, X, {}^*X}^{-1} \\
& & {}^*X \otimes (X \otimes {}^*X) \\
& & \downarrow \text{Id}_{{}^*X} \otimes \text{ev}_X^R \\
{}^*X & \xleftarrow{r_{{}^*X}} & {}^*X \otimes I
\end{array}$$

ストリング図式で書くときは

$$\text{coev}_X^L := \text{diagram of a cup with an arrow pointing down} \quad \text{ev}_X^L := \text{diagram of a cap with an arrow pointing down} \quad \text{coev}_X^R := \text{diagram of a cup with an arrow pointing up} \quad \text{ev}_X^R := \text{diagram of a cap with an arrow pointing up}$$

とする. ストリング図式において $\text{coev}^L, \text{coev}^R$ に対する (zig-zag equations) は

$$\begin{aligned} \text{downward arrow} &= \text{zig-zag diagram with two cups and one cap} \\ \text{upward arrow} &= \text{zig-zag diagram with two caps and one cup} \end{aligned}$$

$\text{coev}^R, \text{coev}^L$ に対する (zig-zag equations) は

$$\begin{aligned} \text{downward arrow} &= \text{zig-zag diagram with two caps and one cup} \\ \text{upward arrow} &= \text{zig-zag diagram with two cups and one cap} \end{aligned}$$

と書ける.

! X^* が X の左双対であるならば, X は X^* に関して $\text{ev}_{X^*}^R = \text{ev}_X^L$, $\text{coev}_{X^*}^R = \text{coev}_X^L$ とした右双対となっている. 従って, 左/右双対をもつ任意の X に対して $*(X^*) \cong X \cong X \cong (*X)^*$ が成り立つ.

定義 1.7: rigid なモノイダル圏

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ が **rigid** であるとは, $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が左・右双対を持つことを言う.

定義 1.8: 組紐付きモノイダル圏

組紐付きモノイダル圏 (braided monoidal category) とは, 以下の 2 つからなる:

- モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$
- 組紐 (braiding) と呼ばれる自然同型

$$\{b_{X,Y}: X \otimes Y \xrightarrow{\cong} Y \otimes X\}_{X,Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ について以下の図式を可換にする:

(hexagon diagrams)

$$\begin{array}{ccc} X \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{a_{X,Y,Z}^{-1}} (X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{b_{X,Y} \otimes \text{Id}_Z} (Y \otimes X) \otimes Z \\ \downarrow b_{X,Y \otimes Z} & & \downarrow a_{Y,X,Z} \\ (Y \otimes Z) \otimes X & \xleftarrow{a_{Y,Z,X}^{-1}} Y \otimes (Z \otimes X) & \xleftarrow{\text{Id}_X \otimes b_{X,Z}} Y \otimes (X \otimes Z) \\ \\ (X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{a_{X,Y,Z}} X \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{\text{Id}_X \otimes b_{Y,Z}} X \otimes (Z \otimes Y) \\ \downarrow b_{X \otimes Y, Z} & & \downarrow a_{X,Z,Y}^{-1} \\ Z \otimes (X \otimes Y) & \xleftarrow{a_{Z,X,Y}} (Z \otimes X) \otimes Y & \xleftarrow{b_{X,Z} \otimes \text{Id}_Y} (X \otimes Z) \otimes Y \end{array}$$

組紐付きモノイダル圏 \mathcal{C} であって, \mathcal{C} の組紐が $b_{X,Y} = b_{Y,X}^{-1}$ を満たすもののことを対称モノイダル圏 (symmetric monoidal category) と呼ぶ.

定義 1.9: モノイダル関手

2 つのモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, I_{\mathcal{C}}, a^{\mathcal{C}}, l^{\mathcal{C}}, r^{\mathcal{C}}), (\mathcal{D}, \otimes_{\mathcal{D}}, I_{\mathcal{D}}, a^{\mathcal{D}}, l^{\mathcal{D}}, r^{\mathcal{D}})$ の間の関手

$$F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

が弱いモノイダル関手 (lax monoidal functor) であるとは,

- 射

$$\varepsilon: I_{\mathcal{D}} \longrightarrow F(I_{\mathcal{C}})$$

- 自然変換

$$\{\mu_{X,Y}: F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y) \longrightarrow F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y)\}_{X,Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

があって, $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して以下の図式が可換になること:

(associativity)

$$\begin{array}{ccc}
(F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y)) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z) & \xrightarrow{a_{F(X), F(Y), F(Z)}^{\mathcal{D}}} & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} (F(Y) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z)) \\
\downarrow \mu_{X, Y} \otimes \text{Id}_{F(Z)} & & \downarrow \text{Id}_{F(X)} \otimes \mu_{Y, Z} \\
F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z) & & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y \otimes_{\mathcal{C}} Z) \\
\downarrow \mu_{X \otimes_{\mathcal{C}} Y, Z} & & \downarrow \mu_{X, Y \otimes_{\mathcal{C}} Z} \\
F((X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{C}} Z) & \xrightarrow{F(a_{X, Y, Z}^{\mathcal{C}})} & F(X \otimes_{\mathcal{C}} (Y \otimes_{\mathcal{C}} Z))
\end{array}$$

(unitality)

$$\begin{array}{ccc}
I_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathcal{D}} F(X) & \xrightarrow{\varepsilon \otimes \text{Id}_{F(X)}} & F(I_{\mathcal{C}}) \otimes_{\mathcal{D}} F(X) \\
\downarrow l_{F(X)}^{\mathcal{D}} & & \downarrow \mu_{I_{\mathcal{C}}, X} \\
F(X) & \xleftarrow{F(l_X^{\mathcal{C}})} & F(I_{\mathcal{C}} \otimes_{\mathcal{C}} X)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
F(X) \otimes_{\mathcal{D}} I_{\mathcal{D}} & \xrightarrow{\text{Id}_{F(X)} \otimes \varepsilon} & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(I_{\mathcal{C}}) \\
\downarrow r_{F(X)}^{\mathcal{D}} & & \downarrow \mu_{X, I_{\mathcal{C}}} \\
F(X) & \xleftarrow{F(r_X^{\mathcal{C}})} & F(X \otimes_{\mathcal{C}} I_{\mathcal{C}})
\end{array}$$

- 弱いモノイダル関手 F の ε と $\mu_{X, Y}$ が全て同型射ならば, F は**強いモノイダル関手** (strong monoidal functor) と呼ばれる.
- 弱いモノイダル関手 F の ε と $\mu_{X, Y}$ が全て恒等射ならば, F は**厳密なモノイダル関手** (strict monoidal functor) と呼ばれる.

定義 1.10: モノイダル自然変換

2つのモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, I_{\mathcal{C}}, a^{\mathcal{C}}, l^{\mathcal{C}}, r^{\mathcal{C}})$, $(\mathcal{D}, \otimes_{\mathcal{D}}, I_{\mathcal{D}}, a^{\mathcal{D}}, l^{\mathcal{D}}, r^{\mathcal{D}})$ の間の2つの弱いモノイダル関手 $(F_i: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, \varepsilon_i: I_{\mathcal{D}} \rightarrow F_i(I_{\mathcal{C}}), \{\mu_{iX,Y}: F_i(X) \otimes_{\mathcal{D}} F_i(Y) \rightarrow F_i(X \otimes_{\mathcal{C}} Y)\}_{X,Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})})$ $w/$ $i = 1, 2$ の間の自然変換

$$\begin{array}{ccc} & F_1 & \\ \curvearrowright & \downarrow \tau & \curvearrowleft \\ \mathcal{C} & & \mathcal{D} \\ \curvearrowleft & \downarrow F_2 & \end{array}$$

がモノイダル自然変換 (monoidal natural transformation) であるとは, $\forall X, Y \in \mathcal{C}$ に対して以下の図式が可換になること:

(テンソル積の保存)

$$\begin{array}{ccc} F_1(X) \otimes_{\mathcal{D}} F_1(Y) & \xrightarrow{\tau_X \otimes_{\mathcal{D}} \tau_Y} & F_2(X) \otimes_{\mathcal{D}} F_2(Y) \\ \mu_{1X,Y} \downarrow & & \downarrow \mu_{2X,Y} \\ F_1(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) & \xrightarrow{\tau_{X \otimes_{\mathcal{C}} Y}} & F_2(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \end{array}$$

(単位対象の保存)

$$\begin{array}{ccc} & I_{\mathcal{D}} & \\ \varepsilon_1 \swarrow & & \searrow \varepsilon_2 \\ F_1(I_{\mathcal{C}}) & \xrightarrow{\tau_{I_{\mathcal{C}}}} & F_2(I_{\mathcal{C}}) \end{array}$$

1.3 テンソル圏・フュージョン圏

! これまではモノイダル圏の対象を英大文字 X, Y, Z, \dots で, 単位対象を I と書いてきたが, 以下では対象を英小文字 x, y, z, \dots で, 単位対象を 1 と書くことにする.

定義 1.11: 環圏

圏 \mathcal{C} が多重環圏 (multiring category) であるとは, 以下の条件を満たすこと:

- (mR-1) \mathcal{C} は局所有有限な \mathbb{K} -線形アーベル圏
- (mR-2) \mathcal{C} はモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$
- (mR-3) 関手 $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ が \mathbb{K} -線形かつ双完全

圏 \mathcal{C} が環圏 (ring category) であるとは, 以下の条件を満たすこと:

- (R-1) \mathcal{C} は多重環圏
- (R-2) $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, 1) \cong \mathbb{K}$

定義 1.12: テンソル圏・フュージョン圏

圏 \mathcal{C} が多重テンソル圏 (multitensor category) であるとは、以下の条件を充たすこと：

(mT-1) \mathcal{C} は局所有限な \mathbb{K} -線形アーベル圏

(mT-2) \mathcal{C} は rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$

(mT-3) 関手 $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ が $\forall x, y, z, w \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して定める写像 $\otimes_{x,y,z,w}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x \otimes z, y \otimes w)$ が \mathbb{K} -双線形

圏 \mathcal{C} がテンソル圏 (tensor category) であるとは、以下の条件を充たすこと：

(T-1) \mathcal{C} は多重テンソル圏

(T-2) $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, 1) \cong \mathbb{K}$

圏 \mathcal{C} が多重フュージョン圏 (multifusion category) であるとは、以下の条件を充たすこと：

(mFus-1) \mathcal{C} は多重テンソル圏

(mFus-2) \mathcal{C} は \mathbb{K} -線形アーベル圏として有限かつ半単純

圏 \mathcal{C} がフュージョン圏 (fusion category) であるとは、以下の条件を充たすこと：

(Fus-1) \mathcal{C} はテンソル圏

(Fus-2) \mathcal{C} は \mathbb{K} -線形アーベル圏として有限かつ半単純

命題 1.1: 多重テンソル圏のテンソル積は双完全

多重テンソル圏 \mathcal{C} の関手 $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ は双完全である。

証明 [?, PROPOSITION 4.2.1., p.66] ■

命題 1.1 より,

$$(\text{多重}) \text{ テンソル圏} \implies (\text{多重}) \text{ 環圏}$$

が言える。

【例 1.3.1】 圏 \mathcal{C}_G と Vec_G

G を群とする。厳密なモノイダル圏 \mathcal{C}_G を,

- $\text{Ob}(\mathcal{C}_G) := G$
- $\forall g_1, g_2 \in G$ に対して

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_G}(g_1, g_2) := \begin{cases} \text{U}(1), & g_1 = g_2 \\ \emptyset, & g_1 \neq g_2 \end{cases}$$

- $g_1 \otimes g_2 := g_1 g_2$ かつ, $g_i \xrightarrow{\forall \theta_i} g_i$ に対して $\theta_1 \otimes \theta_2 := \theta_1 \theta_2$
- $1 := 1_G$

- $a_{g_1, g_2, g_3} := 1, l_g := 1, r_g := 1$

で定義する.

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ とする. 厳密なモノイダル圏 \mathbf{Vec}_G を,

- G -graded な \mathbb{K} -ベクトル空間

$$V = \bigoplus_{g \in G} V_g$$

を対象とする.

- grading を保存する \mathbb{K} -線型変換

$$f: \bigoplus_{g \in G} V_g \longrightarrow \bigoplus_{g \in G} W_g \quad \text{s.t.} \quad \forall g \in G, f(V_g) \subset W_g$$

を射とする.

- テンソル積 $\otimes: \mathbf{Vec}_G \times \mathbf{Vec}_G \longrightarrow \mathbf{Vec}_G$ は,

$$V \otimes W := \bigoplus_{g \in G} \left(\bigoplus_{\substack{x, y \in G, \\ xy = g}} V_x \otimes_{\mathbb{K}} W_y \right)$$

と定義する.

- 単位対象は $1 := \mathbb{K}$ とする^a
- $a_{g_1, g_2, g_3} := 1, l_g := 1, r_g := 1$

によって定義する. G が有限群ならば \mathcal{C}_G はフュージョン圏である.

^a $1_G \in G$ 成分以外が全て 0

【例 1.3.2】 圏 \mathcal{C}_G^α と \mathbf{Vec}_G^α

G を群とする. 【例 1.3.1】 の associator と unitors を非自明にしてみよう. 今 $\alpha \in Z_{\text{Grp}}^3(G; \text{U}(1))$ を 1 つ固定する^a.

モノイダル圏 \mathcal{C}_G^α を,

$$\begin{aligned} a_{g_1, g_2, g_3} &:= \alpha(g_1, g_2, g_3), \\ l_g &:= \alpha(1, 1, g)^{-1}, \\ r_g &:= \alpha(g, 1, 1) \end{aligned}$$

とおくことにより定義する^b. 実際, コサイクル条件および $U(1)$ の可換性により

$$\begin{aligned}
& (\text{Id}_{g_4} \otimes a_{g_1, g_2, g_3}) \circ a_{g_4, g_1 \otimes g_2, g_3} \circ (a_{g_4, g_1, g_2} \otimes \text{Id}_{g_3}) \\
&= \alpha(g_1, g_2, g_3) \alpha(g_4, g_1 g_2, g_3) \alpha(g_4, g_1, g_2) \\
&= \alpha(g_4 g_1, g_2, g_3) \alpha(g_4, g_1, g_2 g_3) \\
&= \alpha(g_4, g_1, g_2 g_3) \alpha(g_4 g_1, g_2, g_3) \\
&= a_{g_4, g_1, g_2 g_3} \circ a_{g_4 \otimes g_1, g_2, g_3}
\end{aligned}$$

の通りに **(pentagon identity)** が成り立ち,

$$\begin{aligned}
(\text{Id}_{g_1} \otimes l_{g_2}) \circ a_{g_1, 1, g_2} &= \frac{\alpha(g_1, 1, g_2)}{\alpha(1, 1, g_2)} \\
&= \frac{\alpha(g_1, 1, 1) \alpha(g_1, 1, g_2) \alpha(1, 1, g_2)}{\alpha(g_1, 1, g_2) \alpha(1, 1, g_2)} \\
&= \alpha(g_1, 1, 1) \\
&= r_{g_1}
\end{aligned}$$

の通りに **(triangle identity)** が成り立つ. もし $l_g = r_g = \text{Id}_g$ にしたければ

$$\forall g, h \in G, \alpha(g, 1, h) = 1_G$$

を充たす $\alpha \in Z_{\text{Grp}}^3(G; U(1))$ をとることが必要十分である (正規化条件).

圏 \mathbf{Vec}_G^α は, $\alpha \in Z_{\text{Grp}}^3(G; \mathbb{K}^\times)$ に対して \mathcal{C}_G^α の構成を線形に拡張することで得られる. G が有限群ならば \mathbf{Vec}_G^α は **フュージョン圏** である.

^a i.e. 3-コサイクル

^b 他のデータは【例 1.3.1】と全く同じである

定義 1.13: テンソル関手・ファイバー関手

\mathcal{C}, \mathcal{D} を **多重環圏** とする. 関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を与える. F が **テンソル関手** (tensor functor) であるとは, 以下を充たすこと:

(TF-1) F は **\mathbb{K} -線形**

(TF-2) F は **強いモノイダル関手**

(TF-3) F は **完全かつ忠実**^a

特に $\mathcal{D} = \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ のとき, テンソル関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ は **ファイバー関手** (fiber functor) と呼ばれる.

^a この条件は [?, DEFINITION 4.2.5., p.66] に合わせて付けたものであり, テンソル関手と言った際には必要とされないことも多い.

【例 1.3.3】圏 \mathbf{Vec}_G^α のテンソル関手

G_1, G_2 を群, $\omega_i \in Z_{\text{Grp}}^3(G_i; \mathbf{U}(1))$ を 3-コサイクルとする. テンソル関手

$$F: \mathcal{C}_{G_1}^{\alpha_1} \longrightarrow \mathcal{C}_{G_2}^{\alpha_2}$$

とはどのようなものだろうか.

まず F は強いモノイダル関手であるから, 対象の対応について群準同型

$$f: G_1 \longrightarrow G_2$$

このとき強いモノイダル関手の持つ自然変換とは, ある $\mu \in C_{\text{Grp}}^2(G_1; \mathbf{U}(1))$ を用いて

$$\mu_{g_1, g_2} := \mu(g_1, g_2) \text{Id}_{f(g_1 g_2)}: f(g_1) f(g_2) \xrightarrow{\cong} f(g_1 g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G_1$$

と書けるが, (associativity) から

$$\mu(g_1, g_2 g_3) \mu(g_2, g_3) \alpha_2(f(g_1), f(g_2), f(g_3)) = \alpha_1(g_1, g_2, g_3) \mu(g_1 g_2, g_3) \mu(g_1, g_2)$$

でなくてはならない. i.e.

$$\alpha_1 = f^* \alpha_2 \cdot \delta \mu \quad (1.3.1)$$

である. 逆に群準同型 $f: G_1 \longrightarrow G_2$ および $\mu \in C_{\text{Grp}}^3(G_1; \mathbf{U}(1))$ の組 (f, μ) であって (1.3.1) を満たすものが与えられると, これらを素材にしてテンソル関手

$$F: \mathcal{C}_{G_1}^{\alpha_1} \longrightarrow \mathcal{C}_{G_2}^{\alpha_2}$$

を構成することができる. このような関手 F が圏同値になる必要十分条件は f が群の同型写像になることである.

【例 1.3.4】圏 \mathbf{Vec}_G^α のモノイダル自然変換

【例 1.3.3】の構成で得られるテンソル関手を $F_{f, \mu}$ と書く. このとき, モノイダル自然変換

$$\begin{array}{ccc} & F_{f, \mu} & \\ \text{Vec}_{G_1}^{\alpha_1} & \xrightarrow{\quad} & \text{Vec}_{G_2}^{\alpha_2} \\ & F_{f', \mu'} & \end{array} \quad \tau$$

を同定しよう. まず自然変換と言うからには $\forall g \in G_1$ に対して

$$\tau_g := \tau(g) \text{Id}_{f(g)}: f(g) \longrightarrow f'(g)$$

を定めないとはいけない. ただし $\tau \in C_{\text{Grp}}^1(G_1; \mathbf{U}(1))$ である. ところが, 【例 1.3.2】より $\text{Vec}_{G_2}^{\alpha_2}$ の射は $f(g) = f'(g)$, i.e. $f = f'$ でないと自然変換が存在しない.

(テンソル積の保存) の条件から, $\forall g_1, g_2 \in G_1$ に対して

$$\mu'(g_1, g_2)\tau(g_1)\tau(g_2) = \tau(g_1g_2)\mu(g_1, g_2)$$

でなくてはならない. i.e.

$$\mu = \mu' \cdot \delta\tau \quad (1.3.2)$$

である。逆に (1.3.2) を充たす $\tau \in C^1_{\text{Grp}}$ からモノイダル自然変換 $\tau: F_{f,\mu} \Longrightarrow F_{f,\mu'}$ を構成することができる。

1.3.1 量子次元

定義 1.14: 量子トレース

- **rigid なモノイダル圏** $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$
- 対象 $x \in \mathcal{C}$
- $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x^{**}), g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, **x)$

を与える.

- f の左量子トレース (left quantum trace) を以下で定義する：

$$\mathrm{Tr}^L(f): 1 \xrightarrow{\mathrm{coev}_x^L} x \otimes x^* \xrightarrow{f \otimes \mathrm{Id}_x} x^{**} \otimes x^* \xrightarrow{\mathrm{ev}_{x^*}^L} 1$$

string関式で書くと次のようになる^a：

$$\mathrm{Tr}^{\mathrm{L}}(f) := \begin{array}{c} \text{---} x^{**} \text{---} \\ \uparrow \\ \boxed{f} \\ \downarrow \\ \text{---} x \text{---} \end{array} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(1, 1)$$

- g の右量子トレース (right quantum trace) を以下で定義する：

$$\mathrm{Tr}^R(g): 1 \xrightarrow{\mathrm{coev}_{*x}^R} *x \otimes x \xrightarrow{\mathrm{Id}_{*x} \otimes g} *x \otimes **x \xrightarrow{\mathrm{ev}_{**x}^R} 1$$

string関式で書くと次のようになる^b：

$$\mathrm{Tr}^{\mathrm{L}}(g) := \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \downarrow \\ *x \end{array} \boxed{g} \begin{array}{c} **x \\ \uparrow \\ x \\ \uparrow \\ \curvearrowleft \end{array} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(1, 1)$$

$$^a \operatorname{ev}_{V^*}^L = \operatorname{ev}_{V^{**}}^R \text{ を使った.}$$

${}^b\mathrm{ev}_{**x}^{\mathrm{R}} = \mathrm{ev}_{*x}^{\mathrm{L}}$ を使った.

定義 1.15: 旋回構造

rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ を与える. \mathcal{C} の旋回構造 (pivotal structure) とは, モノイダル自然同型

A commutative diagram with two objects, \mathcal{C} , at the top and bottom. A curved arrow labeled $\text{Id}_{\mathcal{C}}$ points from the top \mathcal{C} to the bottom \mathcal{C} . A straight arrow labeled p points from the top \mathcal{C} to the bottom \mathcal{C} . A curved arrow labeled $(-)^{**}$ points from the top \mathcal{C} to the bottom \mathcal{C} . The straight arrow p is the diagonal of the triangle formed by these three arrows.

のこと.

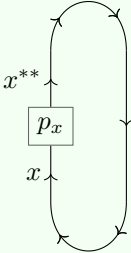
定義 1.16: 球狀圈・量子次元

テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ が**旋回構造** p を持つとする. 圏 \mathcal{C} が**球状** (spherical) であるとは, $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$\mathrm{Tr}^{\mathrm{L}}(p_x) = \begin{array}{c} \text{---} \curvearrowright \text{---} \\ \uparrow x^{**} \\ \boxed{p_x} \\ \downarrow x \\ \text{---} \curvearrowleft \text{---} \end{array} x^* = \begin{array}{c} \text{---} \curvearrowright \text{---} \\ \uparrow {}^*x \\ \boxed{p_x} \\ \downarrow x \\ \text{---} \curvearrowleft \text{---} \end{array} {}^*x = \mathrm{Tr}^{\mathrm{R}}(p_x)$$

が成り立つことを言う.

球状圏 \mathcal{C} の対象 $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ の量子次元 (quantum dimension) を以下で定義する：

$$\dim_p(x) := \text{Tr}^L(p_x) := \text{Tr}^R(p_x) = \text{Tr}(p_x) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, 1)$$


1.3.2 Deligne のテンソル積

定義 1.17: Deligne のテンソル積

\mathcal{C}, \mathcal{D} を局所有限な \mathbb{K} -線形アーベル圏とする. Deligne のテンソル積 (Deligne's tensor product) とは, 以下の性質をみたす \mathbb{K} -線形アーベル圏 $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ と双右完全関手 $\boxtimes: \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ の組み $(\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}, \boxtimes)$ のこと：

(普遍性)

任意の双右完全関手 $F: \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ に対し, ある双右完全関手 $\bar{F}: \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ が一意的に存在して $\bar{F} \circ \boxtimes = F$ を充たす.

命題 1.2: Deligne のテンソル積の基本性質

- (1) Deligne のテンソル積は存在し, それ自身が局所有限な \mathbb{K} -線形アーベル圏になる.
- (2) 関手 $\boxtimes: \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ は双完全であり,

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x_1, y_1) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}}(x_1 \boxtimes x_2, y_1 \boxtimes y_2)$$

を充たす.

- (3) \mathcal{C}, \mathcal{D} が (多重) 環圏/(多重) テンソル圏ならば $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ は (多重) 環圏/(多重) テンソル圏である.

証明 (1) [?, PROPOSITION 1.11.2., p.15]

(2) [?, PROPOSITION 1.11.2., p.15]

(3) [?, PROPOSITION 4.6.1., p.73]

■

1.4 加群圏

1.4.1 左/右加群圏

定義 1.18: 左/右加群圏

$(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r)$ をモノイダル圏とする。左 \mathcal{C} -加群圏 (left \mathcal{C} -module category) \mathcal{M} は、以下のデータからなる：

- 圏 \mathcal{M}
- 左加群積 (left module product) と呼ばれる関手^a $\blacktriangleright: \mathcal{C} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$
- left actor と呼ばれる自然同型 $\{\alpha_{x,y,m}: (x \otimes y) \blacktriangleright m \longrightarrow x \blacktriangleright (y \blacktriangleright m)\}_{x,y \in \text{Ob}(\mathcal{C}), m \in \text{Ob}(\mathcal{M})}$
- left unitor と呼ばれる自然同型 $\{\lambda_m: 1 \blacktriangleright m \longrightarrow m\}_{m \in \text{Ob}(\mathcal{M})}$

これらは以下の条件を充たさねばならない：

(IMod-1) $\forall x, y, z \in \text{Ob}(\mathcal{C}), \forall m \in \text{Ob}(\mathcal{M})$ に対して以下の図式を可換にする：

$$\begin{array}{ccc}
 & ((x \otimes y) \otimes z) \blacktriangleright m & \\
 \swarrow a_{x,y,z} \blacktriangleright \text{Id}_m & & \searrow \alpha_{x \otimes y, z, m} \\
 (x \otimes (y \otimes z)) \blacktriangleright m & & (x \otimes y) \blacktriangleright (z \blacktriangleright m) \\
 \searrow \alpha_{x, y \otimes z, m} & & \downarrow \alpha_{x, y, z \blacktriangleright m} \\
 & x \blacktriangleright ((y \otimes z) \blacktriangleright m) & \\
 & \swarrow \text{Id}_x \blacktriangleright \alpha_{y, z, m} & \\
 & x \blacktriangleright (y \blacktriangleright (z \blacktriangleright m)) &
 \end{array}$$

(IMod-2) $\forall x \in \mathcal{C}, \forall m \in \mathcal{M}$ に対して以下の図式を可換にする：

$$\begin{array}{ccc}
 (x \otimes 1) \blacktriangleright m & \xrightarrow{\alpha_{x, 1, m}} & x \blacktriangleright (1 \blacktriangleright m) \\
 \searrow r_x \blacktriangleright \text{Id}_m & & \swarrow \text{Id}_x \blacktriangleright \lambda_m \\
 & x \blacktriangleright m &
 \end{array}$$

^a 記号として \odot を使うこともある (参考：<https://ncatlab.org/nlab/show/action+of+a+monoidal+category>)。

$(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r)$ をモノイダル圏とする。右 \mathcal{C} -加群圏 \mathcal{M} は、以下のデータからなる：

- 圏 \mathcal{M}
- 右加群積 (left module product) と呼ばれる関手^a $\blacktriangleright: \mathcal{C} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$
- right actor と呼ばれる自然同型 $\{\beta_{m,x,y}: m \blacktriangleleft (x \otimes y) \longrightarrow (m \blacktriangleleft x) \blacktriangleleft y\}_{x,y \in \text{Ob}(\mathcal{C}), m \in \text{Ob}(\mathcal{M})}$

- **right unitor** と呼ばれる自然同型 $\{\rho_m: m \triangleleft 1 \longrightarrow m\}_{m \in \text{Ob}(\mathcal{M})}$

これらは以下の条件を充たさねばならない：

(rMod-1) $\forall x, y, z \in \text{Ob}(\mathcal{C}), \forall m \in \text{Ob}(\mathcal{M})$ に対して以下の図式を可換にする：

(rMod-2) $\forall x \in \mathcal{C}, \forall m \in \mathcal{M}$ に対して以下の図式を可換にする：

$$\begin{array}{ccc}
 m \triangleleft (1 \otimes x) & \xrightarrow{\beta_{m,1,x}} & (m \triangleleft 1) \triangleleft x \\
 \searrow \text{Id}_m \triangleleft l_x & & \swarrow \rho_m \triangleleft \text{Id}_x \\
 & m \triangleleft x &
 \end{array}$$

^a 記号として \odot を使うこともある（参考：<https://ncatlab.org/nlab/show/action+of+a+monoidal+category>）.

\mathcal{C} が多重テンソル圏である場合は、左/右加群積が射について \mathbb{K} -双線形であること、および両方の引数について完全関手になっていることを要請する^{*1}.

定義 1.19: 加群関手

$(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r)$ をモノイダル圏, $(\mathcal{M}_i, \triangleright_i, \alpha_i, \lambda_i) \text{ } ^w/ \text{ } i = 1, 2$ を左 \mathcal{C} -加群圏とする. 左 \mathcal{C} -加群関手 (left \mathcal{C} -module functor) は、以下のデータからなる：

- 関手 $F: \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$
- 自然同型 $\{s_{x,m}: F(x \triangleright_1 m) \longrightarrow x \triangleright_2 F(m)\}_{x \in \text{Ob}(\mathcal{C}), m \in \text{Ob}(\mathcal{M}_1)}$

これらは以下の条件を充たさねばならない：

(pentagon identity) $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C}), \forall m \in \text{Ob}(\mathcal{M}_1)$ に対して以下の図式を可換にする：

$$\begin{array}{ccccc}
 & & F((x \otimes y) \triangleright_1 m) & & \\
 & \swarrow F(\alpha_{1x,y,m}) & \searrow s_{x \otimes y, m} & & \\
 & F(x \triangleright_1 (y \triangleright_1 m)) & & (x \otimes y) \triangleright_2 F(m) & \\
 & \searrow s_{x,y \triangleright_1 m} & & \downarrow \alpha_{2x,y,F(m)} & \\
 & x \triangleright_2 F(y \triangleright_1 m) & \xrightarrow{\text{Id}_x \triangleright_2 s_{y,m}} & x \triangleright_2 (y \triangleright_2 F(m)) &
 \end{array}$$

^{*1} 実際には、第 1/第 2 引数について完全になっていさえいれば残りの引数についても自動的に完全になる [?, EXERCISE7.3.2, p.135]

(triangle identity) $\forall m \in \mathcal{M}_1$ に対して以下の図式を可換にする：

$$\begin{array}{ccc} F(1 \blacktriangleright_1 m) & \xrightarrow{s_{1,m}} & 1 \otimes_2 F(m) \\ & \searrow F(\lambda_{1m}) & \swarrow \lambda_{2F(m)} \\ & F(m) & \end{array}$$

定義 1.20: 加群圏の自然変換

$(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r)$ をモノイダル圏, $(\mathcal{M}_i, \blacktriangleright_i, \alpha_i, \lambda_i) \text{ w/ } i = 1, 2$ を左 \mathcal{C} -加群圏, $(F_i: \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2, s_i) \text{ w/ } i = 1, 2$ を \mathcal{C} -加群関手とする. このとき, 自然変換

$$\begin{array}{ccc} & F_1 & \\ \mathcal{M}_1 & \xrightarrow{\quad \tau \quad} & \mathcal{M}_2 \\ & F_2 & \end{array}$$

が \mathcal{C} -加群圏の自然変換であるとは, $\forall x \in \mathcal{C}, \forall m \in \mathcal{M}_1$ に対して以下の図式が可換になること：

$$\begin{array}{ccc} F_1(x \blacktriangleright_1 m) & \xrightarrow{s_{1x,m}} & x \blacktriangleright_2 F_1(m) \\ \tau_{x \blacktriangleright_1 m} \downarrow & & \downarrow \tau_{x \blacktriangleright_2 \text{Id}_m} \\ F_2(x \blacktriangleright_1 m) & \xrightarrow{s_{2x,m}} & x \blacktriangleright_2 F_2(m) \end{array}$$

(action の保存)

1.4.2 両側加群圏

定義 1.21: 両側加群圏

$(\mathcal{C}_i, \otimes_i, 1, a_i, l_i, r_i) \text{ w/ } i = 1, 2$ をモノイダル圏とする. $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ -両側加群圏 ($(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ -bimodule category) \mathcal{M} は, 以下のデータからなる：

- 圏 \mathcal{M}
- 左加群積と呼ばれる関手 $\blacktriangleright: \mathcal{C}_1 \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$
- 右加群積と呼ばれる関手 $\blacktriangleleft: \mathcal{M} \times \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{M}$
- left actor と呼ばれる自然同型

$$\{\alpha_{x_1, y_1, m}: (x_1 \otimes y_1) \blacktriangleright m \rightarrow x_1 \blacktriangleright (y_1 \blacktriangleright m)\}_{x_1, y_1 \in \text{Ob}(\mathcal{C}_1), m \in \text{Ob}(\mathcal{M})}$$

- left unitor と呼ばれる自然同型 $\{\lambda_m: 1 \blacktriangleright m \rightarrow m\}_{m \in \text{Ob}(\mathcal{M})}$
- right actor と呼ばれる自然同型

$$\{\beta_{m, x_2, y_2}: m \blacktriangleleft (x_2 \otimes y_2) \rightarrow (m \blacktriangleleft x_2) \blacktriangleleft y_2\}_{x_2, y_2 \in \text{Ob}(\mathcal{C}_2), m \in \text{Ob}(\mathcal{M})}$$

- right unitor と呼ばれる自然同型 $\{\rho_m: m \blacktriangleleft 1 \rightarrow m\}_{m \in \text{Ob}(\mathcal{M})}$

- **middle actor** と呼ばれる自然同型

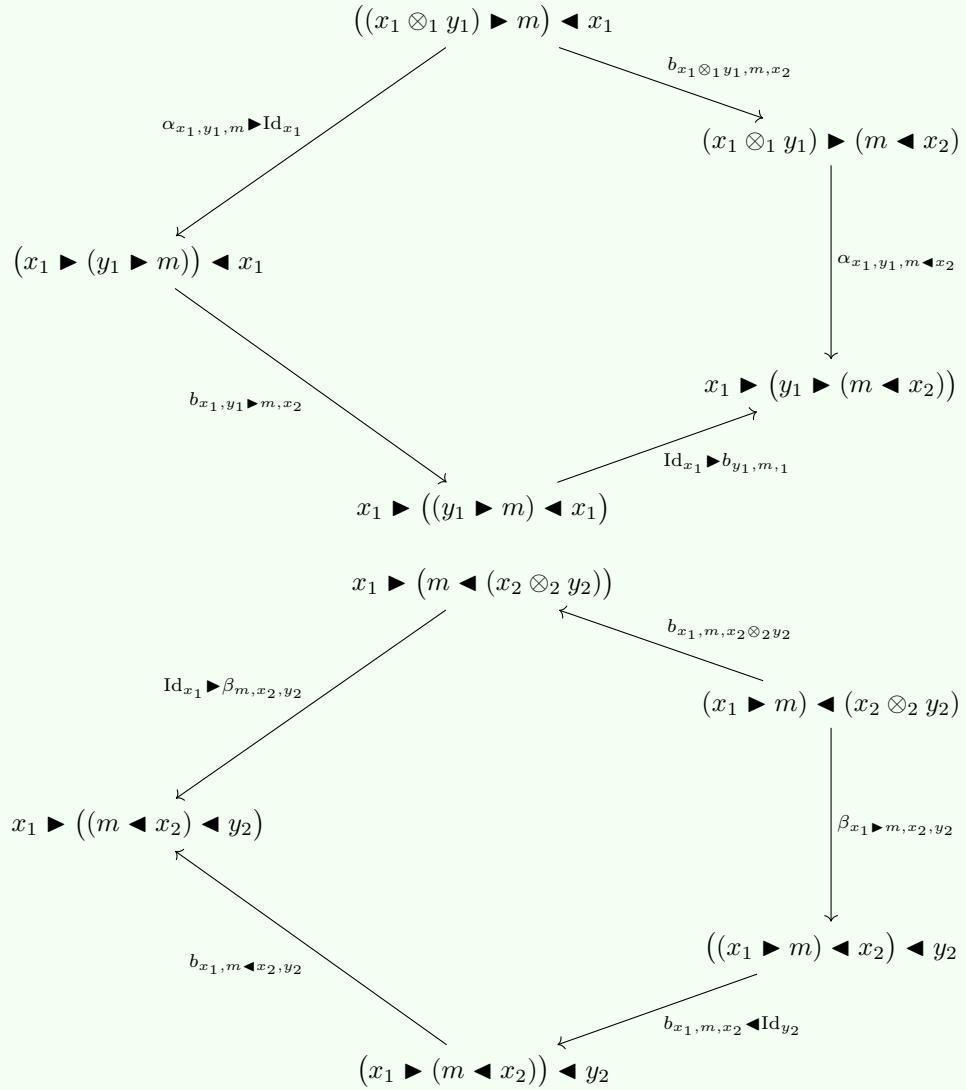
$$\{b_{x_1, m, x_2} : (x_1 \rhd m) \triangleleft x_2 \longrightarrow x_1 \rhd (m \triangleleft x_2)\}_{x_1 \in \text{Ob}(\mathcal{C}_1), x_2 \in \text{Ob}(\mathcal{C}_2) m \in \text{Ob}(\mathcal{M})}$$

これらは以下の条件を充たす：

(Bimod-1) 組 $(\mathcal{M}, \rhd, \alpha, \lambda)$ は左 \mathcal{C}_1 -加群圏である。

(Bimod-2) 組 $(\mathcal{M}, \triangleleft, \beta, \rho)$ は右 \mathcal{C}_2 -加群圏である。

(Bimod-3) $\forall x_i, y_i \in \text{Ob}(\mathcal{C}_i), \forall m \in \text{Ob}(\mathcal{M})$ に対して以下の図式を可換にする：



1.4.3 代数と加群

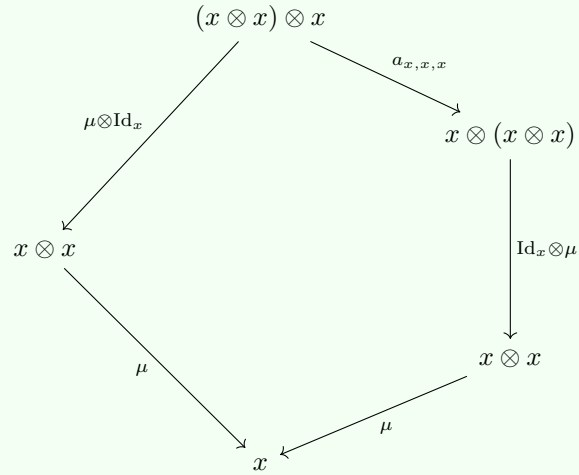
定義 1.22: 代数対象

多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ を与える. \mathcal{C} の代数対象 (algebra object) x とは, 以下のデータからなる:

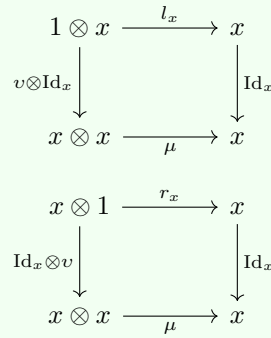
- \mathcal{C} の対象 $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$
- 乗法 (multiplication) と呼ばれる \mathcal{C} の射 $\mu: x \otimes x \rightarrow x$
- 単位 (unit) と呼ばれる \mathcal{C} の射 $v: 1 \rightarrow x$

これらは以下の条件を充たさねばならない:

(associativity)



(unitality)

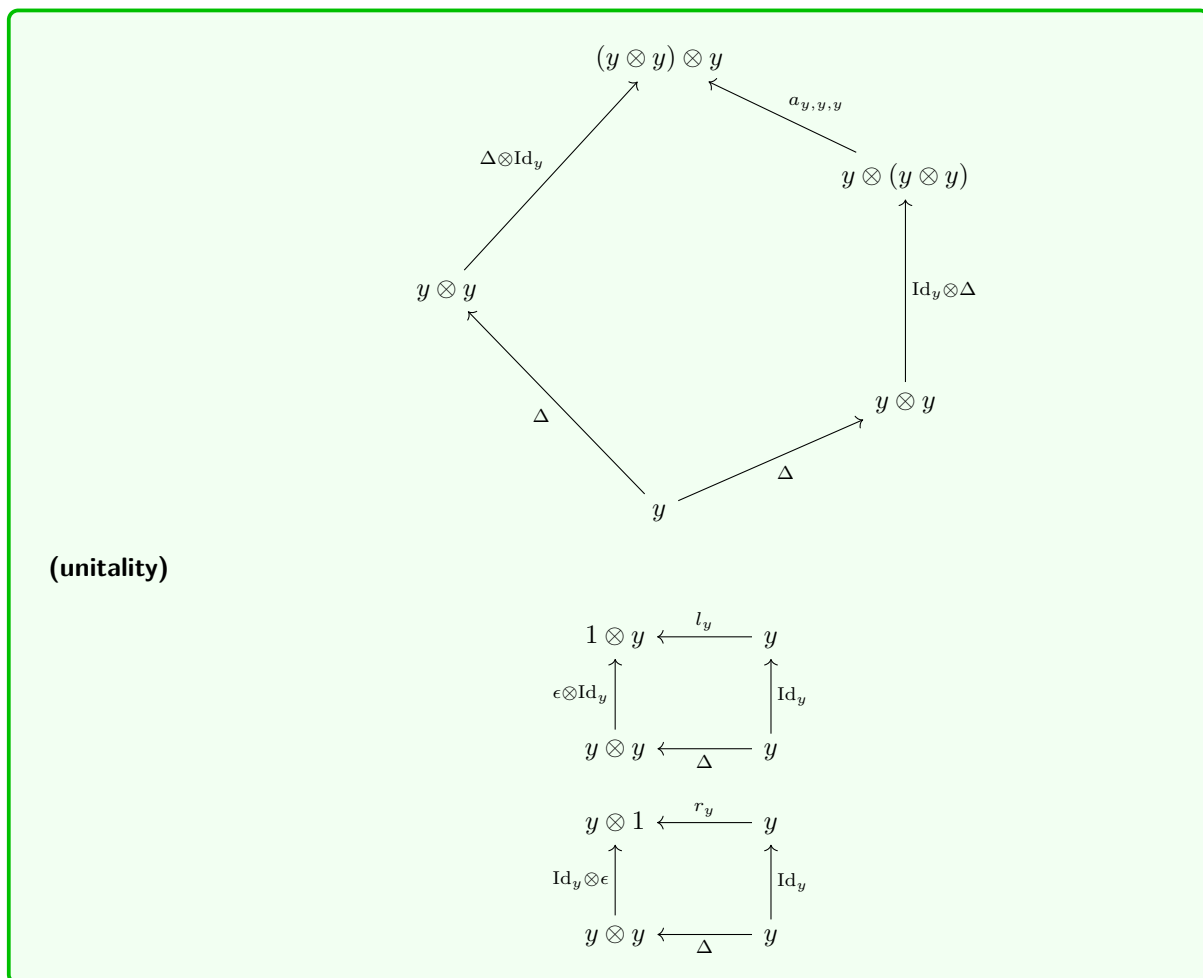


多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ を与える. \mathcal{C} の余代数対象 (coalgebra object) y とは, 以下のデータからなる:

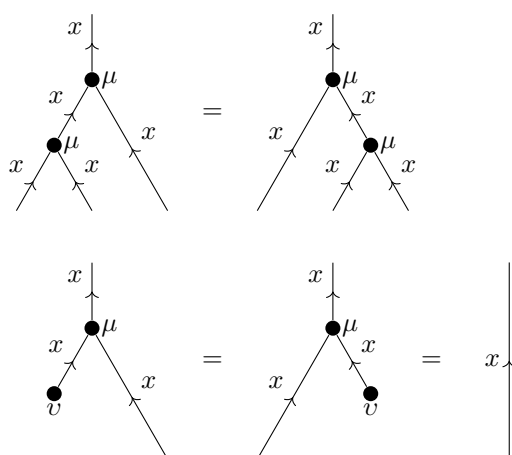
- \mathcal{C} の対象 $y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$
- 余乗法 (comultiplication) と呼ばれる \mathcal{C} の射 $\Delta: y \rightarrow y \otimes y$
- 余単位 (counit) と呼ばれる \mathcal{C} の射 $\epsilon: y \rightarrow 1$

これらは以下の条件を充たさねばならない:

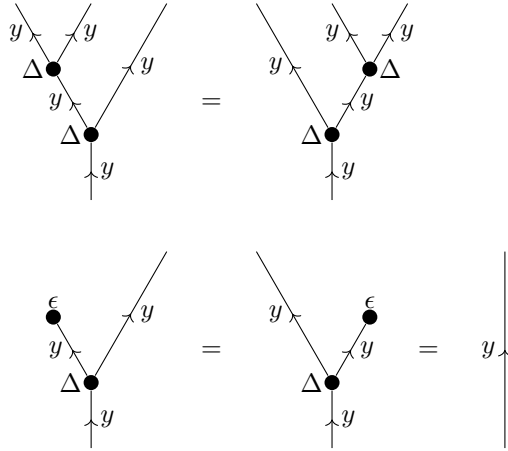
(coassociativity)



ストリング図式で代数対象 (x, μ, ν) の (associativity), (unitality) を書くと, それぞれ



となり, 余代数対象 (y, Δ, ϵ) の **(associativity)**, **(unitality)** を書くと



となる.

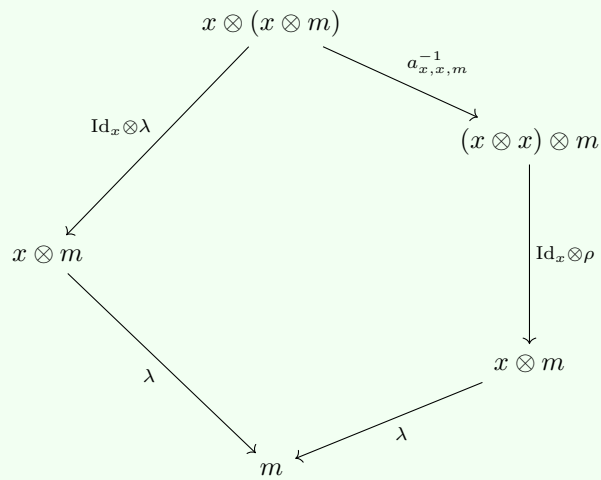
定義 1.23: 加群対象

多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ および \mathcal{C} の代数対象 (x, μ, ν) を与える.
 \mathcal{C} における, 左 x -加群対象 (right x -module object) m とは, 以下のデータからなる:

- \mathcal{C} の対象 $m \in \text{Ob}(\mathcal{C})$
- 左作用 (right action) と呼ばれる \mathcal{C} の射 $\lambda: m \otimes x \longrightarrow m$

これらは以下の条件を充たさねばならない:

(associativity)



(unitality)

$$\begin{array}{ccc}
 1 \otimes m & \xrightarrow{l_m} & m \\
 v \otimes \text{Id}_m \downarrow & & \downarrow \text{Id}_m \\
 x \otimes m & \xrightarrow{\lambda} & m
 \end{array}$$

多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ および \mathcal{C} の代数対象 (x, μ, v) を与える.
 \mathcal{C} における, 右 x -加群対象 (right x -module object) m とは, 以下のデータからなる:

- \mathcal{C} の対象 $m \in \text{Ob}(\mathcal{C})$
- 右作用 (right action) と呼ばれる \mathcal{C} の射 $\rho: m \otimes x \rightarrow m$

これらは以下の条件を満たさねばならない:

(associativity)

$$\begin{array}{ccccc}
 & (m \otimes x) \otimes x & & & \\
 & \swarrow \rho \otimes \text{Id}_x & \searrow a_{m,x,x} & & \\
 m \otimes x & & m \otimes (x \otimes x) & & \\
 & \searrow \rho & \downarrow \text{Id}_x \otimes \rho & \swarrow \rho & \\
 & m & m \otimes x & &
 \end{array}$$

(unitarity)

$$\begin{array}{ccc}
 m \otimes 1 & \xrightarrow{r_m} & m \\
 \text{Id}_m \otimes v \downarrow & & \downarrow \text{Id}_m \\
 m \otimes x & \xrightarrow{\rho} & m
 \end{array}$$

定義 1.24: 代数および加群の準同型

多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ および \mathcal{C} の 2 つの代数対象 (x_i, μ_i, ν_i) w/ $i = 1, 2$ を与える.

このとき, \mathcal{C} の射 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x_1, x_2)$ が代数準同型 (algebra homomorphism) であるとは, 以下の条件を満たすことを言う:

(乗法の保存)

$$\begin{array}{ccc} x_1 \otimes x_1 & \xrightarrow{f \otimes f} & x_2 \otimes x_2 \\ \mu_1 \downarrow & & \downarrow \mu_2 \\ x_1 & \xrightarrow{f} & x_2 \end{array}$$

(単位の保存)

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\nu_1} & A_1 \\ & \searrow \nu_2 & \swarrow f \\ & A_2 & \end{array}$$

- 多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$
- \mathcal{C} の代数対象 (x, μ, ν)
- \mathcal{C} の 2 つの左 x -加群対象 (m_i, λ_i) w/ $i = 1, 2$

を与える.

このとき, \mathcal{C} の射 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(m_1, m_2)$ が左 x -加群準同型 (left x -module homomorphism) であるとは, 以下の条件を満たすことを言う:

(左作用の保存)

$$\begin{array}{ccc} x \otimes m_1 & \xrightarrow{\text{Id}_x \otimes f} & x \otimes m_2 \\ \lambda_1 \downarrow & & \downarrow \lambda_2 \\ x_1 & \xrightarrow{f} & x_2 \end{array}$$

しばらくの間 多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ および \mathcal{C} の代数対象 (x, μ, ν) を 1 つ固定する.

2 つの左 x -加群対象 (m_i, λ_i) w/ $i = 1, 2$ の間の左 x -加群の準同型全体がなす集合を $\text{Hom}_x(m_1, m_2) \subset \text{Hom}_{\mathcal{C}}(m_1, m_2)$ と書くと, これは部分 \mathbb{K} -ベクトル空間をなす. さらに準同型の合成は準同型であるから, アーベル圏 $x\text{-Mod}_{\mathcal{C}}$ を次のようにして構成することができる:

- \mathcal{C} における左 x -加群対象を対象とする.
- 左 x -加群の準同型を射とする.

同様に \mathcal{C} における右 x -加群対象がなす圏 $\text{Mod}_{\mathcal{C}}\text{-}x$ を定義できる.

左加群圏と $\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x}$ の間には関係がある．今， \mathcal{C} における任意の右 x -加群対象 (m, ρ) および \mathcal{C} の任意の対象 $y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を与える．すると， $y \otimes m \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ と

$$\rho_{y \otimes m} : (y \otimes m) \otimes x \xrightarrow{a_{y,m,x}} y \otimes (m \otimes x) \xrightarrow{\text{Id}_y \otimes \rho} y \otimes m$$

の組み $(y \otimes m, \rho_{y \otimes m})$ は右 x -加群になる．i.e. $(y \otimes m, \rho_{y \otimes m}) \in \text{Ob}(\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x})$ である．この構成により関手

$$\blacktriangleright : \mathcal{C} \times \mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x} \longrightarrow \mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x} \quad (1.4.1)$$

が定義できる．さらに， \mathcal{C} が元々持っていた associator と unitors に関しては， $\forall (m, \rho) \in \text{Ob}(\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x})$ ， $\forall y, z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$\begin{aligned} a_{y,z,m} : (y \otimes z) \blacktriangleright m &\longrightarrow y \blacktriangleright (z \blacktriangleright m) \\ l_y : 1 \blacktriangleright m &\longrightarrow m \end{aligned}$$

が自然な^{*2}右 x -加群の同型になる．

命題 1.3: $\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x}$ は左加群圏

多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ および \mathcal{C} の代数対象 (x, μ, ν) を1つ与える．

このとき，組み^a $(\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x}, \blacktriangleright, a, l)$ は左 \mathcal{C} -加群圏である．

^a $\blacktriangleright : \mathcal{C} \times \mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x} \longrightarrow \mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x}$ は (1.4.1) で定義した関手である．

証明 $\forall y, z, w \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ， $\forall (m, \rho) \in \text{Ob}(\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x})$ に対して (IMOD-1)，(IMOD-2) が成り立つことを示せば良い． ■

定義 1.25: 森田同値

多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ を与える．

\mathcal{C} の2つの代数対象 $(x_i, \mu_i, \nu_i) \quad w/ \quad i = 1, 2$ が森田同値 (Morita equivalent) であるとは，左 \mathcal{C} -加群圏として $x_1\text{-Mod}_{\mathcal{C}}$ と $x_2\text{-Mod}_{\mathcal{C}}$ が圏同値であることを言う．

定義 1.26: 代数上のテンソル積

- 多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ および \mathcal{C} の代数対象 (x, μ, ν)
- \mathcal{C} における右 x -加群対象 $(m, \rho) \in \text{Ob}(\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x})$
- \mathcal{C} における左 x -加群対象 $(n, \lambda) \in \text{Ob}(\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x})$

を与える．このとき， m と n の x 上のテンソル積 (tensor product over x) $m \otimes_x n \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を，以下の図式のコイコライザとして定義する：

$$m \otimes x \otimes n \xrightarrow[\text{Id}_m \otimes \lambda]{\rho \otimes \text{Id}_n} m \otimes n \xrightarrow{\pi} m \otimes_x n$$

^{*2} $a := \{a_{y,z,m}\}_{y,z \in \text{Ob}(\mathcal{C}), m \in \text{Ob}(\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x})}$ が自然同型．

1.4.4 両側加群

定義 1.27: 両側加群

多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ および \mathcal{C} の 2 つの代数対象 (x_i, μ_i, ν_i) を与える. \mathcal{C} における (x_1, x_2) -両側加群対象 $((x_1, x_2)\text{-bimodule object})$ とは, 以下のデータからなる:

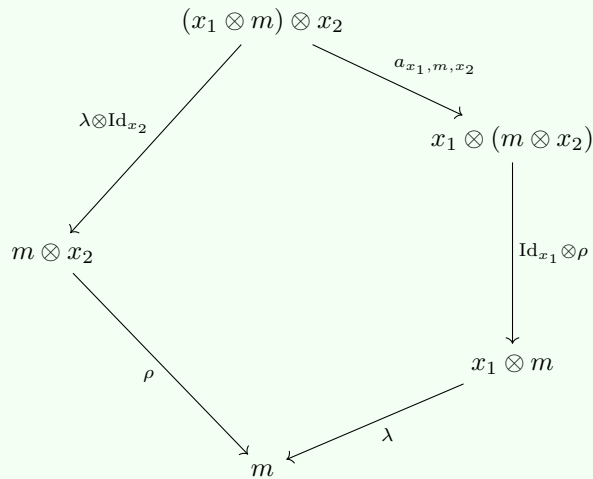
- \mathcal{C} の対象 $m \in \text{Ob}(\mathcal{C})$
- 左作用 (left action) と呼ばれる \mathcal{C} の射 $\lambda: x_1 \otimes m \rightarrow m$
- 右作用 (right action) と呼ばれる \mathcal{C} の射 $\rho: m \otimes x_2 \rightarrow m$

これらは以下の条件を充たさねばならない:

(bimod-1) 組 (m, λ) は \mathcal{C} の左 x_1 -加群対象

(bimod-2) 組 (m, ρ) は \mathcal{C} の右 x_2 -加群対象

(bimod-3) 以下の図式を可換にする:



定義 1.28: 両側加群の準同型

- 多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ および \mathcal{C} の 2 つの代数対象 (x_i, μ_i, ν_i)
- 2 つの (x_1, x_2) -両側加群対象 $(m_i, \lambda_i, \rho_i) \quad w/ \quad i = 1, 2$

を与える. このとき, \mathcal{C} の射 $f: m_1 \rightarrow m_2$ が (x_1, x_2) 両側加群の準同型であるとは, それが左 x_1 -加群の準同型かつ右 x_2 -加群の準同型であることを言う.

しばらくの間 多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ および \mathcal{C} の 2 つの代数対象 (x_i, μ_i, ν_i) を固定する.

2 つの (x_1, x_2) -両側加群対象 $(m_i, \lambda_i, \rho_i) \quad w/ \quad i = 1, 2$ の間の (x_1, x_2) -両側加群の準同型全体がなす集合を $\mathbf{Hom}_{x_1-x_2}(m_1, m_2) \subset \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(m_1, m_2)$ と書くと, これは部分 \mathbb{K} -ベクトル空間をなす. さらに準同型の

合成は準同型であるから、アーベル圏 $\mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(x_1, x_2)$ を次のようにして構成することができる：

- \mathcal{C} における (x_1, x_2) -両側加群対象を対象とする.
- (x_1, x_2) -両側加群の準同型を射とする.

同様に \mathcal{C} における右 x -両側加群対象がなす圏 $\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}}-x$ を定義できる.

補題 1.1: 両側加群のテンソル積

- 多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ および \mathcal{C} の 4 つの代数対象 (x_i, μ_i, ν_i) $w/ i = 1, \dots, 4$
- (x_1, x_2) -両側加群対象 $(m_1, \lambda_1, \rho_1) \in \text{Ob}(\mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(x_1, x_2))$
- (x_2, x_3) -両側加群対象 $(m_2, \lambda_2, \rho_2) \in \text{Ob}(\mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(x_2, x_3))$
- (x_3, x_4) -両側加群対象 $(m_3, \lambda_3, \rho_3) \in \text{Ob}(\mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(x_3, x_4))$

を与える. このとき以下が成り立つ：

- (1) $m_1 \otimes_{x_2} m_2$ は自然な (x_1, x_3) -両側加群対象の構造を持つ.
- (2) 自然な (x_1, x_4) -両側加群の同型

$$\begin{aligned} \bar{a}_{m_1, m_2, m_3} &: (m_1 \otimes_{x_2} m_2) \otimes_{x_3} m_3 \xrightarrow{\cong} m_1 \otimes_{x_2} (m_2 \otimes_{x_3} m_3) \\ \bar{l}_{m_1} &: x_1 \otimes_{x_1} m_1 \xrightarrow{\cong} m_1 \\ \bar{r}_{m_1} &: m_1 \otimes_{x_2} x_2 \xrightarrow{\cong} m_1 \end{aligned}$$

が存在する.

証明 (1)

■

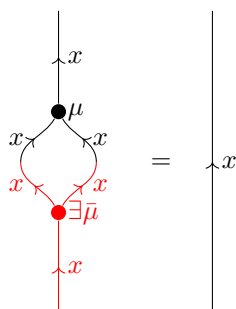
\mathcal{C} の任意の代数対象 (x, μ, ν) について, 明らかに $(x, \mu, \mu) \in \mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(x, x)$ である.

定義 1.29: 分離可能性

テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ の代数対象 (x, μ, ν) が分離可能 (separable) であるとは, ある (x, x) -両側加群の準同型 $\bar{\mu}: x \longrightarrow x \otimes x$ が存在して $\mu \circ \bar{\mu} = \text{Id}_x$ を満たすことを言う^a.

^a 補題 1.1-(1) によって $x \otimes x$ を (x, x) -両側加群対象と見做す.

分離可能性をストリング図式で表すと



となる.

命題 1.4: 分離可能性と半単純性

フュージョン圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ の代数対象 (x, μ, ν) を与える.
このときもし (x, μ, ν) が分離可能ならば, アーベル圏 $\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x}$ は半単純である.

証明 [?, PROPOSITION 7.8.30, p.146] ■

1.4.5 Frobenius 代数

定義 1.30: Frobenius 代数

多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ を与える.

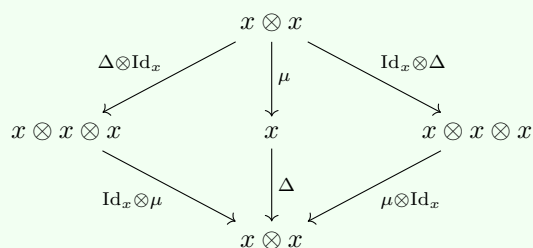
\mathcal{C} の代数対象 (x, μ, ν) が Frobenius 代数 (Frobenius algebra) であるとは,

- 余乗法 (comultiplication) と呼ばれる \mathcal{C} の射 $\Delta: x \longrightarrow x \otimes x$
- 余単位 (counit) と呼ばれる \mathcal{C} の射 $\epsilon: x \longrightarrow 1$

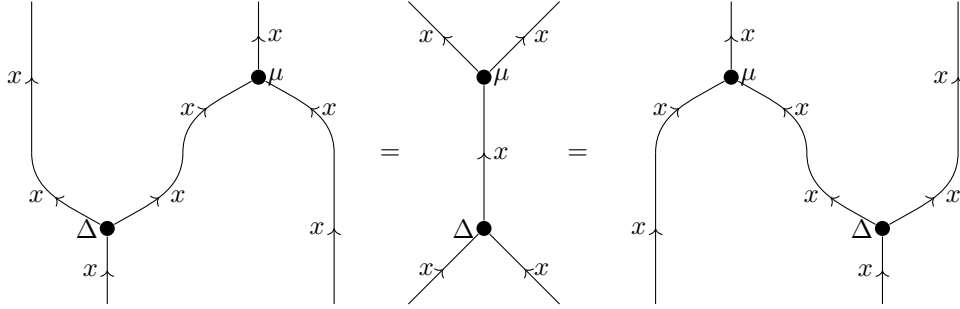
が存在して以下を満たすことを言う:

(Frob-1) (x, Δ, ϵ) は \mathcal{C} の余代数対象である.

(Frob-2) 以下の図式を可換にする:



ストリング図式で **(Frob-2)** を書くと次のようになる：



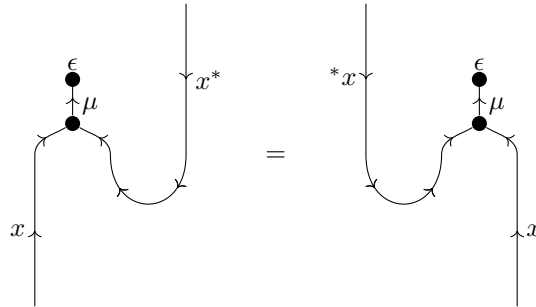
定義 1.31: 対称 Frobenius 代数

多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ を与える.

\mathcal{C} の **Frobenius 代数** $(x, \mu, \nu, \Delta, \epsilon)$ が**対称** (symmetric) であるとは、以下の図式を可換にすることを言う：

$$\begin{array}{ccc}
 x & \xrightarrow{\text{coev}_x^R \otimes \text{Id}_x} & {}^*x \otimes x \otimes x \\
 \text{Id}_x \otimes \text{coev}_x^L \downarrow & & \downarrow \text{Id}_{{}^*x} \otimes \mu \\
 x \otimes x \otimes x^* & & {}^*x \otimes x \\
 \mu \otimes \text{Id}_{x^*} \downarrow & & \downarrow \text{Id}_{{}^*x} \otimes \epsilon \\
 x \otimes x^* & \xrightarrow{\epsilon \otimes \text{Id}_{x^*}} & {}^*x
 \end{array}$$

ストリング図式では



となる.

1.4.6 加群圏における internal hom

定義 1.32: 加群圏における internal hom

$(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r)$ をモノイダル圏とする. 左 \mathcal{C} -加群圏 $(\mathcal{M}, \blacktriangleright, \alpha, \lambda)$ を与える. \mathcal{M} の internal hom とは, 以下のデータの組のこと:

- 関手

$$-\circ: \mathcal{M}^{\text{op}} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$$

- currying と呼ばれる自然同型

$$\{c_{x, m_1, m_2}: \text{Hom}(x \blacktriangleright m_1, m_2) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}(x, m_1 \multimap m_2)\}_{x \in \text{Ob}(\mathcal{C}), Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

1.5 2-群

1.5.1 豊穠圏と 2-圏

まず, 厳密な 2-圏 (strict 2-category) を導入する.

定義 1.33: 豊穠圏

モノイダル圏 (V, \otimes, I) を与える.

V -豊穠圏 (V -enriched category) \mathcal{C} は, 以下のデータからなる:

- 集合 $\text{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して, **Hom 対象**と呼ばれる V の対象 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \in \text{Ob}(V)$ を持つ
- $\forall x, y, z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して, **合成射**と呼ばれる V の射 $\circ_{x, y, z}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$ を持つ
- $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して, **恒等素**と呼ばれる V の射 $j_x: I \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$ を持つ

これらは以下の図式を可換にしなければならない:

(associativity)

$\forall x, y, z, w \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ について^a

$$\begin{array}{ccc} (\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z)) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w) & \xrightarrow{\circ_{x, y, z} \otimes \text{Id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w)}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \circ_{x, z, w} \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes (\text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w)) & \xrightarrow{\text{Id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)} \otimes \circ_{y, z, w}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, w) \\ & & \uparrow \circ_{x, y, w} \end{array}$$

(unitality)

$\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ について^b

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) & \xrightarrow{\circ_{x, x, y}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) & \xleftarrow{\circ_{x, y, y}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, y) \\ j_x \otimes \text{Id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)} \uparrow & \nearrow \cong & & \nwarrow \cong & \uparrow \text{Id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)} \otimes j_y \\ I \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) & & & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes I \end{array}$$

$a \cong$ はモノイダル圏 V の associator
 $b \cong$ はモノイダル圏 V の left/right unitor

定義 1.34: 豊穣関手

モノイダル圏 (V, \otimes, I) を与える.

2 つの V -豊穣圏 \mathcal{C}, \mathcal{D} の間の V -豊穣関手 (V -enriched functor)

$$F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

は, 以下のデータからなる:

- 写像 $F_0: \text{Ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{Ob}(\mathcal{D}), x \longmapsto F_0(x)$
- V の射の族

$$\{F_{x,y}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(x), F_0(y))\}_{x,y \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは以下の図式を可換にしなければならない:

(enriched-1)

$\forall x, y, z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して^a

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) & \xrightarrow{\circ_{x,y,z}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z) \\ \downarrow F_{x,y} \otimes F_{y,z} & & \downarrow F_{x,z} \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(x), F_0(y)) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(y), F_0(z)) & \xrightarrow{\circ_{F_0(x), F_0(y), F_0(z)}} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(x), F_0(z)) \end{array}$$

(enriched-2)

$\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して^b

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{j_x} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x) \\ & \searrow j_{F_0(x)} & \downarrow F_{x,x} \\ & & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(x), F_0(x)) \end{array}$$

^a これは, 通常の関手において射の合成が保存されることに対応する.

^b これは, 通常の関手において恒等射が保存されることに対応する.

与えられたモノイダル圏 V に対して, V -豊穣圏のなす圏を $V\text{-Cat}$ と書く. $V\text{-Cat}$ は

- V -豊穣圏を対象とする
- V -豊穣関手を射とする

ことで得られる圏である.

定義 1.35: 厳密な 2-圏

小圏と関手の圏 **Cat** を【例 1.2.1】の方法でモノイダル圏と見做す. **Cat-豊穡圏**のことを**厳密な 2-圏** (strict 2-category) と呼ぶ.

定義 1.35 を解説しよう. まず, 小圏と関手の圏 **Cat** における対象とは小圏のことで, 射とは関手のことである. さらに, **Cat** のテンソル積とは【例 1.2.1】より直積 \times のことである. よって**豊穡圏の定義**から, 厳密な 2-圏 \mathcal{C} は

- **対象** (object)^{*3} 全体の集合 $\text{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ の間の **1-射** (1-morphism)^{*4} 全体が成す圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \in \text{Ob}(\mathbf{Cat})$.
- **合成** (composition) と呼ばれる関手 $\circ: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$
- **恒等素** (identity morphism) と呼ばれる関手 $j_x: 1 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$

の 4 つのデータからなる. 従って 1-射 $f: x \rightarrow y$ とは圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ の対象 $f \in \text{Ob}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y))$ のことであるから, 2 つの 1-射 $f, g \in \text{Ob}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y))$ が与えられると, 圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ における, それらの間の射 $\alpha \in \text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)}(f, g)$ が存在する. このような α を **2-射** (2-morphism)^{*5} と呼び, 混乱防止のため $\alpha: f \rightarrow g$ と書く代わりに $\alpha: f \Rightarrow g$ と書く.

2 つの 2-射 $\alpha \in \text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)}(f, g), \beta \in \text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)}(g, h)$ は, 圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ における射の合成 $*$ によって結合的かつ単位的に合成することができる:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & f & \\ x & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \downarrow \beta * \alpha \\ \curvearrowleft \end{array} & y \\ & h & \end{array} & := & \begin{array}{ccc} & f & \\ x & \begin{array}{c} \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \downarrow \alpha \\ \downarrow \beta \end{array} & \xrightarrow{\quad} \\ \curvearrowleft & & \curvearrowright \end{array} & y \\ & h & \end{array} \end{array}$$

このような 2-射の合成を**縦の合成** (vertical composition) と呼ぶ. 一方, 4 つの 1-射 $f, g: x \rightarrow y, f', g': y \rightarrow z$ および 2 つの 2-射 $\alpha: f \Rightarrow g, \alpha': f' \Rightarrow g'$ が与えられたとき, 1-射の合成 \circ が関手であることによって, 圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z)$ の射 $(\alpha, \alpha'): (f, f') \rightarrow (g, g')$ に対して圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$ の射, i.e. 2-射

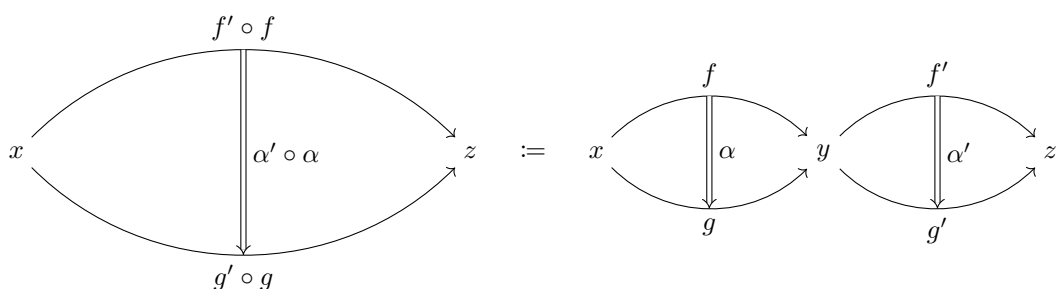
$$\alpha' \circ \alpha := \circ(\alpha, \alpha'): f' \circ f \Rightarrow g' \circ g$$

^{*3} **0-セル** (0-cell) とも言う

^{*4} **1-セル** (1-cell) とも言う. 正確には, 圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ の対象のことを 1-射と呼ぶ.

^{*5} **2-セル** (2-cell) とも言う

が対応付く：

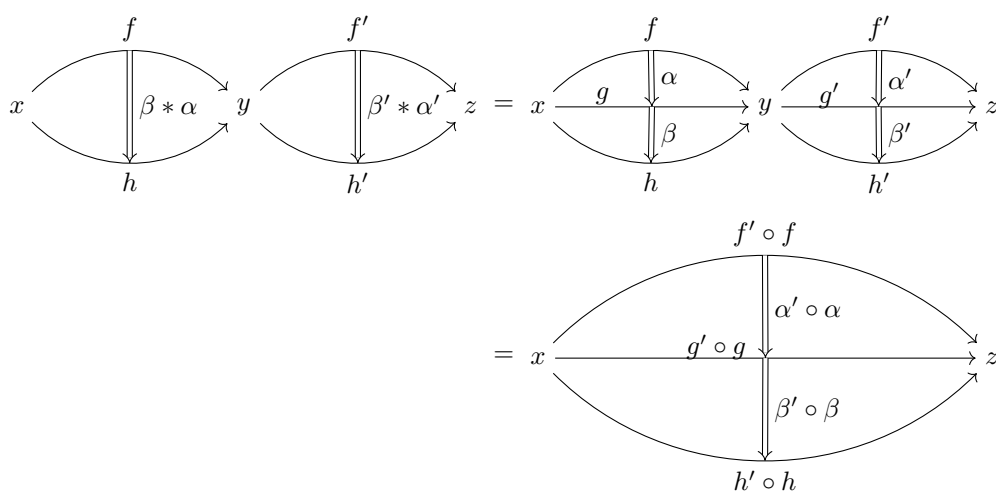


このような2-射の合成を**横の合成** (horizontal composition) と呼ぶ。横の合成は、モノイダル圏 **Cat** が**厳密なモノイダル圏**であること、および関手 \circ の (**associativity**), (**unitality**) によって結合的かつ単位的になる。

縦の合成と横の合成は、 \circ が関手であることによって交換する：

$$\begin{aligned} (\beta' * \alpha') \circ (\beta * \alpha) &= \circ((\beta, \beta') * (\alpha, \alpha')) \\ &= (\circ(\beta, \beta')) * (\circ(\alpha, \alpha')) \\ &= (\beta' \circ \beta) * (\alpha' \circ \alpha) \end{aligned}$$

図式で書くと一目瞭然である：



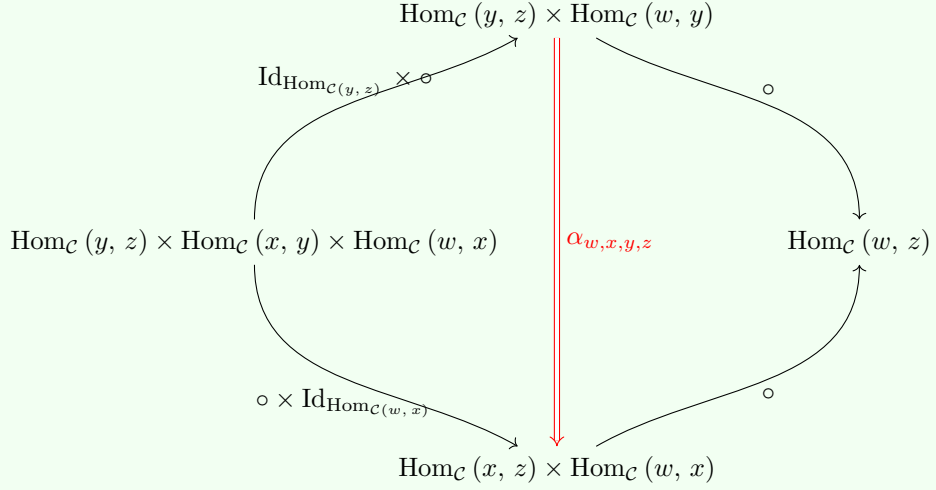
定義 1.36: 2-圏

厳密な 2-圏と同様の

- **対象** (object)^a 全体の集合 $\text{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ の間の **1-射** (1-morphism)^b 全体が成す圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \in \text{Ob}(\mathbf{Cat})$.
- **合成** (composition) と呼ばれる関手 $\circ: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$
- **恒等素** (identity morphism) と呼ばれる関手 $j_x: 1 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$

の4つのデータに加えて

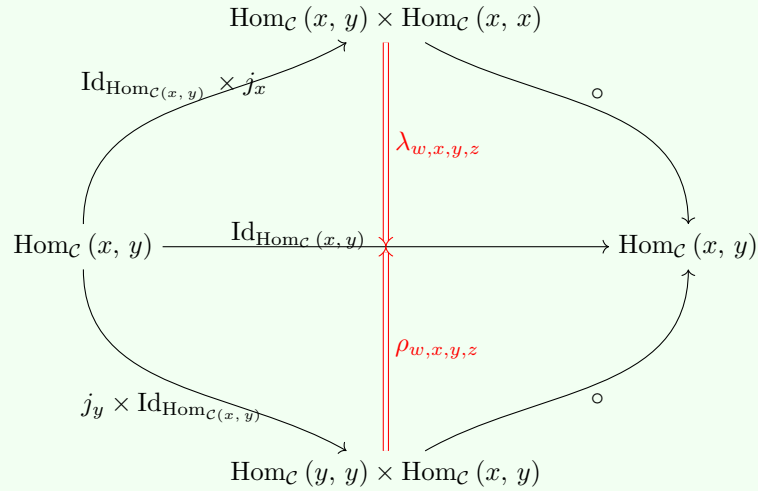
- $\forall x, y, z, w \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して **associator** と呼ばれる自然同型^c.



- $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して **left/right unitor** と呼ばれる自然同型

$$\lambda_{x,y} := \{l_{x,y}f: f \mapsto f \circ j_x(1)\}_{f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)}$$

$$\rho_{x,y} := \{l_{x,y}f: f \mapsto j_x(1) \circ f\}_{f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)}$$



を持ち,

- associator が **(pentagon identity)** を
- unitors が **(triangle identity)** を

満たす \mathcal{C} のことを **2-圏** (2-category) と呼ぶ.

^a **0-セル** (0-cell) とも言う

^b **1-セル** (1-cell) とも言う. 正確には, 圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ の対象のことを 1-射と呼ぶ.

^c これは圏 **Cat** における図式である.

要するに、**厳密な 2-圏**において合成 \circ の associativity および unitality を自然同型まで弱めたものが **2-圏** である。

【例 1.5.1】2-圏としてのモノイダル圏

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, \{a_{x,y,z}\}, \{l_x\}, \{r_y\})$ は **2-圏** である。実際、2-圏 \mathbf{BC} を

- $\text{Ob}(\mathbf{BC}) := \{\bullet\}$ (1 点集合)
- $\text{Hom}_{\mathbf{BC}}(\bullet, \bullet) := \mathcal{C}$
- $\circ := \otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$
- $j_x := \iota_I: I \hookrightarrow \mathcal{C}$
- $\alpha_{\bullet,\bullet,\bullet} := \{a_{x,y,z}\}$
- $\lambda_{\bullet,\bullet} := \{l_{x,y,z}\}, \quad \rho_{\bullet,\bullet} := \{r_{x,y,z}\}$

により定義すると $\mathcal{C} = \mathbf{BC}$ となる。

1.5.2 弱い 2-群・コヒーレントな 2-群・厳密な 2-群

[?] に倣い **2-群** (2-group) を導入する。

定義 1.37: 弱い逆対象

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ の対象 $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を 1 つとる。

- 対象 $y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が x の **弱い逆対象** (weak inverse) であるとは、対象の同型の意味で^a $x \otimes y \cong 1$ かつ $y \otimes x \cong 1$ が成り立つことを言う。
- x が **弱可逆** (weakly invertible) であるとは、 x が弱い逆対象を持つことを言う。

^a 自然同型ではない

定義 1.38: 弱い 2-群・コヒーレントな 2-群・厳密な 2-群

- **弱い 2-群** (weak 2-group) とは、**モノイダル圏** \mathcal{G} であって、任意の対象が**弱可逆**でかつ任意の射が同型射であるもののこと。
- **コヒーレントな 2-群** (coherent 2-group) とは、**モノイダル圏** \mathcal{G} であって、任意の対象 $x \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ が可逆な **unit**, **counit** (x, \bar{x}, i_x, e_x) を持ち、かつ任意の射が同型射であるもののこと。
- **厳密な 2-群** (strict 2-group) とは、**モノイダル圏** \mathcal{G} であって、任意の対象が可逆^aでかつ任意の射が同型射であるもののこと。

^a $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $x^{-1} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が存在して、厳密に $x \otimes x^{-1} = 1, x^{-1} \otimes x = 1$ が成り立つ。

定義 1.39: 2-群の準同型

2-群 $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ の間の準同型とは, モノイダル関手 $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ のこと.

定理 1.1: 弱い 2-群はコヒーレントな 2-群

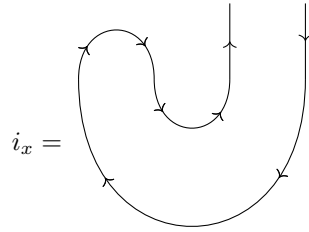
任意の弱い 2-群はコヒーレントな 2-群にすることができる.

証明 勝手な弱い 2-群 \mathcal{G} を 1 つ固定する. このとき $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ に対してある $\bar{x} \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ および同型射 $i'_x: 1 \rightarrow x \otimes \bar{x}$, $e'_x: \bar{x} \otimes x \rightarrow 1$ が存在する.

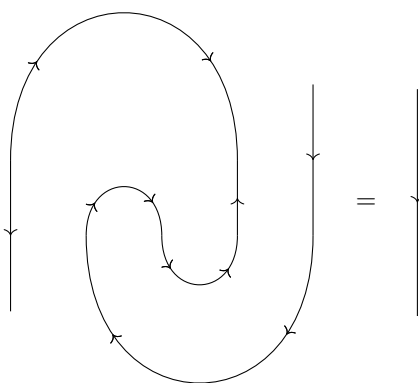
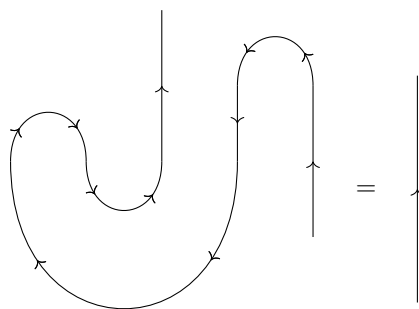
ここで $e_x := e'_x$ とおき,

$$i_x := (l_x \otimes \text{Id}_{\bar{x}}) \circ a_{1, x, \bar{x}}^{-1} \circ (i'_x)^{-1} \otimes \text{Id}_{x \otimes \bar{x}} \circ a_{x, \bar{x}, x \otimes \bar{x}}^{-1} \circ (\text{Id}_x \otimes a_{\bar{x}, x, \bar{x}}) \circ (\text{Id}_x \otimes e'_x)^{-1} \otimes \text{Id}_{\bar{x}} \circ (\text{Id}_x \otimes l_{\bar{x}}^{-1}) \circ i'_x$$

とおくと組 (x, \bar{x}, i_x, e_x) が zig-zag equation を満たすことを示す. 実際, i_x の定義をストリング図式で書くと



となるから,



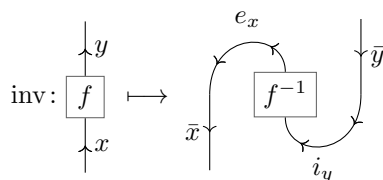
が言える.

! 定理 1.1 を踏まえ, 以下では**コヒーレントな 2-群**のことを単に **2-群** (2-group) と呼ぶ.

2-群 \mathcal{G} において, 弱い逆対象を対応づける関手

$$\text{inv}: \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}, x \longmapsto \bar{x} \quad (1.5.1)$$

を考えたいが, 射の対応は少々厄介である. [?, p.34] に倣うと



とすれば良いことがわかる^{*6}.

以上より, 2-群 \mathcal{G} を【例 1.5.1】により 2 圏 \mathbf{BG} の言葉で表現すると

- ただ 1 つの対象を持つ: $\text{Ob}(\mathbf{BG}) = \{\bullet\}$

^{*6} 定義からコヒーレントな 2 群は rigid なモノイダル圏であり, zigzag identity を使えることが肝になる.

- 任意の 1-射 $x \in \text{Ob}(\text{Hom}_{\mathbf{BG}}(\bullet, \bullet)) = \text{Ob}(\mathcal{G})$ が弱可逆であり, その弱い逆対象 \bar{x} は関手 (1.5.1) によって与えられる.
- 任意の 2-射 $\alpha \in \text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathbf{BG}}(\bullet, \bullet)}(x, y) = \text{Hom}_{\mathcal{G}}(x, y)$ が同型射

ということになる. 特に厳密な 2-群とは, 全ての $\alpha, \lambda, \rho, i, e$ が \mathcal{G} の恒等射となっていることを言う.

1.5.3 交差加群との関係

定義 1.40: 交差加群

交差加群 (crossed module) とは,

- 群準同型 $G_2 \xrightarrow{t} G_1$
- G_1 の左作用 $\alpha: G_1 \rightarrow \text{Aut}(G_2)$

の組であって, 以下の条件を満たすもののこと:

(cr-1) 以下の図式を可換にする:

$$\begin{array}{ccc} G_2 \times G_2 & \xrightarrow{t \times \text{Id}} & G_1 \times G_2 \\ & \searrow \text{Ad} & \swarrow \alpha \\ & G_2 & \end{array}$$

あるいは同じことだが, $\forall g_i \in G_i$ に対して

$$t(\alpha(g_1)(g_2)) = g_1 t(g_2) g_1^{-1}$$

を充たす.

(cr-2) 以下の図式を可換にする:

$$\begin{array}{ccc} G_1 \times G_2 & \xrightarrow{\alpha} & G_2 \\ \text{Id} \times t \downarrow & & \downarrow t \\ G_1 \times G_1 & \xrightarrow{\text{Ad}} & G_1 \end{array}$$

あるいは同じことだが, $\forall g_2, g'_2 \in G_2$ に対して

$$\alpha(t(g_2))(g'_2) = g_2 g'_2 g_2^{-1}$$

を充たす (Peiffer identity).

命題 1.5: 交差加群と厳密な 2-群

- (1) 交差加群 $(G_2 \xrightarrow{t} G_1, \alpha)$ が与えられたとする. このとき
- 1-射の集合 $\mathcal{G}_0 := G_1$
 - 2-射の集合 $\mathcal{G}_1 := G_1 \rtimes_{\alpha} G_2$ (外部半直積)
 - 始点射 $\sigma: \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_0, (g_1, g_2) \mapsto g_1$
 - 終点射 $\tau: \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_0, (g_1, g_2) \mapsto t(g_2)g_1$
 - 恒等素 $j: \mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{G}_1, g_1 \mapsto (g_1, 1_{G_2})$
 - 2-射の合成 $\circ: \mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_1, ((g_1, g_2), (g'_1, g'_2)) \mapsto (g_1, g_2 g'_2)$
- とおくと, 圏 \mathcal{G} は厳密な 2-群になる.
- (2) 逆に厳密な 2-群 \mathcal{G} が与えられたとき,
- $G_1 := \mathcal{G}_0$
 - $G_2 := \text{Ker } \sigma \subset \mathcal{G}_1$
 - $t := \tau|_{G_2}: G_2 \rightarrow G_1$
 - $\alpha: G_1 \rightarrow \text{Aut}(G_2), g_1 \mapsto (g_2 \mapsto j(g_1)g_2j(g_1)^{-1})$
- とおくことで交差加群 $(G_2 \xrightarrow{t} G_1, \alpha)$ が得られる.

証明 (1)

■

1.6 3-群

1.6.1 3-圏

一般の 3-圏は associator, unitors のせいで扱いが難しいので, まずは厳密な 3-圏 (strict 3-group) を考える. Cat を【例 1.2.1】の方法でモノイダル圏と見做す. 定義 1.35 から, 2-圏としての同値

$$\text{Str2Cat} \cong \text{Cat-Cat}$$

が成り立つ. さらに Cat-Cat は直積に関してモノイダル圏になる.

定義 1.41: 厳密な 3-圏

厳密な 2-圏が成す 2-圏 Cat-Cat をモノイダル圏と見做す. このとき Cat-Cat -豊稜圏のことを厳密な 3-圏 (strict 3-category) と呼ぶ.

1.6.2 2-crossed module と厳密な 3-群

定義 1.42: 厳密な 3-群

厳密な 3-圏 \mathcal{G} であって、ただ 1 つの対象を持ち、1-射、2-射、3-射が厳密に可逆であるものを**厳密な 3-群** (strict 3-category) と呼ぶ。

定義 1.43: 2-交差加群

2-交差加群 (2-crossed module) とは、以下のデータからなる：

- 群の正規複体 $G_3 \xrightarrow{\partial_2} G_2 \xrightarrow{\partial_1} G_1$
- 群の左作用 $\alpha_1: G_1 \rightarrow \text{Aut}(G_2)$, $\alpha_2: G_1 \rightarrow \text{Aut}(G_3)$
- **Peiffer lifting** と呼ばれる写像 $\{-, -\}: G_2 \times G_2 \rightarrow G_3$

これらは以下の条件を充たす：

(2CM1) ∂_1, ∂_2 は G_1 -同変

(2CM2) $\forall g_2, h_2 \in G_2$ に対して

$$\partial_2\{g_2, h_2\} = \alpha_1(g_2)(h_2)g_2h_2^{-1}g_2^{-1}$$

(2CM3) $\forall g_3, h_3 \in G_3$ に対して

$$\{\partial_2g_3, \partial_2h_3\} = [h_3, g_3]$$

(2CM4) $\forall g_2 \in G_2, g_3 \in G_3$ に対して

$$\{g_2, \partial_2g_3\}\{\partial_2g_3, g_2\} = \alpha_2(\partial_1(g_2))(g_3)g_3^{-1}$$

(2CM5) $\forall g_2, h_2, k_2 \in G_2$ に対して

$$\begin{aligned}\{g_2, h_2k_2\} &= \{g_2, h_2\}\{\partial_2\{g_2, k_2\}, g_2h_2g_2^{-1}\}\{g_2, k_2\} \\ \{g_2h_2, k_2\} &= \alpha_2(\partial_1(g_2))(\{h_2, k_2\})\{g_2, h_2k_2h_2^{-1}\}\end{aligned}$$

(2CM6) $\forall g_1 \in G_1, \forall g_2, h_2 \in G_2$ に対して

$$\alpha_2(g_1)(\{g_2, h_2\}) = \{\alpha_1(g_1)(g_2), \alpha_1(g_1)(h_2)\}$$