

南部・ゴールドストーンボソンの統一的理解

渡辺 悠樹

〈カリフォルニア大学バークレー校物理学科 Berkeley, California 94720, USA e-mail: hwatanabe@berkeley.edu〉

村山 齊[†]

〈カリフォルニア大学バークレー校物理学科 Berkeley, California 94720, USA e-mail: hitoshi@berkeley.edu〉

自発的対称性の破れは素粒子物理から原子核、物性、冷却原子、天体、更には初期宇宙論、化学、生物まで幅広く適用される重要な考え方である。特に連続的な対称性の場合にはギャップのない励起、南部・ゴールドストーンボソンが現れ、長波長・低エネルギーの現象を決めている。しかし、何種類の南部・ゴールドストーンボソンがあるのか、エネルギーが運動量の何次で振る舞うか、という非常に基本的な問題に対して今まではケースバイケースで調べられていて、一般論がなかった。最近筆者らは南部・ゴールドストーンボソンを統一的に理解する一般論を提唱した。これはローレンツ不変な系で知られていた南部・ゴールドストーン定理を拡張したものになっている。今まで何がはっきりしていなかったのか、これで何が分かったのかを、磁性体、結晶等を例にできるだけ具体的に解説する。

1. はじめに

対称性は物理学の分野をまたがってとても重要な概念だ。例えば、エネルギー、運動量、角運動量が保存するのは私達の住む時間・空間の並進・回転対称性のおかげである。また電荷が保存するのは量子力学の波動関数の位相を自由に変えても確率が変わらないからである。特に強相関の系では対称性以外に頼りになる手法がないことも多く、対称性を考えずに物理現象を考えることはほとんどムリだと言っているくらい、物理学の中心となっている。

「自発的対称性の破れ」という考え方は、2008年に南部陽一郎氏がノーベル物理学賞を受賞されたこと、2012年7月にヒッグス粒子（とみられる）粒子がCERNのLHC加速器実験で見つかったことなどから、改めて注目されている。素粒子物理学のヒッグス機構や南部氏の提唱したカイラル対称性の破れだけでなく、物性物理でのスピン系や、超流動、超伝導、位相欠陥、原子核の対相関、中性子星の核物質、冷却原子系のボーズ・アインシュタイン凝縮、結晶化等の相転移はすべて対称性の自発的な破れに関わっている。ひいては宇宙初期のインフレーションや構造形成、生物が光学異性体を区別したり、人間の心臓が左にあり、右利きが多いのも自発的対称性の破れの例だと考えられる。現代の科学になくてはならない考え方であり、過去のノーベル物理学賞でも少なくとも10件以上が関係している。

自発的対称性の破れという考え方が特に強力な理由の一つは、系の長距離・低エネルギーでの振る舞いが完全に対称性だけで決まってしまう、高い予言能力があることである。例えば結晶では空間の並進対称性が自発的に破れているために、場所でわずかに違った並進、つまり格子の微小変形を考えると、それが音波（量子論ではフォノン）として伝わり、その統計力学で結晶の低温での比熱を説明する。磁石（強磁性体）では、そもそもどちらを向いても良かったはずの一つ一つの電子スピンの系全体で揃うことで回転対称性が自発的に破れ、スピン波（マグノン）が生まれ、

そのダイナミクスが自発磁化の相転移の理解に結びつく。もともと南部氏の理論では湯川秀樹が提唱したパイ中間子を自発的対称性の破れによって生まれた励起だと考える。強い相互作用という摂動論では手の届かない強相関の問題でありながら、この考え方によってパイ中間子同士の反応の低エネルギー極限での振る舞いを定量的に予言し、実験で確認されている。

このように自発的に対称性が破れるときに、対称性が連続的対称性の場合には、長距離・低エネルギーの自由度が生まれ、一般に「南部・ゴールドストーンボソン」と呼ばれる。南部・ゴールドストーンボソンはギャップ（相対論的には質量）がないため、絶対零度でもその揺らぎが重要になる。一方、多くの系では他の励起にはギャップがあり、有限温度でも充分低温なら南部・ゴールドストーンボソンだけを考えれば良いことになる。超伝導のBCS理論をきっかけに南部氏らによって場の理論を使って整備されたこの考え方は50年以上にわたって大成功を収めてきた。しかも数学的にも「等質空間」という美しい幾何学的な構造を持ち、さまざまな問題に応用されてきた。

しかし、対称性が同じように破れていても、全く違う振る舞いをする系があることは、これも50年以上知られていた。南部・ゴールドストーンボソンがいくつあるのか、エネルギーと運動量の分散関係の次数は何か、といった一歩踏み込んだ基本的な問題に対して、個別の例ごとにはよく調べられていても、一般的に当てはまる原理がなかったのである。特に近年、冷却電子系でのスピンを持つ原子のボーズ・アインシュタイン凝縮や、スピン系のスキルミオン²⁾の格子を作ることが実験的に可能になったり、原子核物理で超高密度の系の研究が進むに従って、一般論がないことが問題として強く認識されるようになってきた。

最近、筆者らはこうした基本的な問題を一つの枠組みで統一的に理解する手法を提案した。⁸⁾ この小文ではまず対称性の自発的な破れの一般的な紹介から始め、何が分かっていたのかを解説する。そして具体的な例を使いながら一般的な法則を予想し、最後にその証明を簡単に概観する。

[†] ローレンスバークレー国立研究所/東京大学カブリ数物連携宇宙研究機構 (WPI) 兼任 277-8583 柏市柏の葉5-1-5 e-mail: hitoshi.murayama@ipmu.jp

2. 自発的対称性の破れの謎

そもそも「自発的対称性の破れ」とは何か、具体的な例を見ながら説明する。

2.1 強磁性体のハイゼンベルク模型

身近な磁石を記述する強磁性体のハイゼンベルク模型は、電子のスピンが結晶の格子点の隣同士で相互作用し、スピンの同じ向きを向くとエネルギーを下げる形になっている。

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j, \quad J > 0. \quad (1)$$

ここで $\mathbf{s}_i = (\hbar/2)\boldsymbol{\sigma}_i$ が電子のスピン、 $\langle i,j \rangle$ は隣り合わせの格子点の組について足し上げている。(簡単のためここでは立方格子を考える。) スピンが内積の形で入っているため、ハミルトニアンは全てのスピンを同時に回転することで不変であり、回転の対称性を持っている。

しかし、低温 $kT \leq (\hbar^2/4)J$ ではスピンの相互作用のエネルギーを下げるため、どのスピンも隣のスピンの同じ向きを向こうとする。基底状態は全てのスピンの同じ向き、例えば z 軸の方向を向く。模式的に

$$|0\rangle = |\cdots \uparrow \uparrow \uparrow \cdots\rangle \quad (2)$$

と書くことにするが、一次元を考えている訳ではないことに注意いただきたい。本来回転対称性があり、どの方向を向いてもよかったのだが、基底状態を決めるには、特定の方向を向かないといけな。実際この状態を y 軸の回りに回転した状態 $|\theta\rangle$ を考えてみると、全てのスピンのそれぞれ

$$e^{iJ_y\theta/\hbar}|\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle \cos \frac{\theta}{2} + i|\downarrow\rangle \sin \frac{\theta}{2} \quad (3)$$

になる。(ここで角運動量の演算子 $\mathbf{J} = \sum_i \mathbf{s}_i$ は回転の生成演算子でもあり、その指数関数は回転のユニタリー演算子である。) そこで元の状態との内積を計算すると

$$\langle 0|\theta\rangle = \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad (4)$$

と直交している。しかし回転の生成子はハミルトニアンと交換するのでエネルギー固有値は変えず、これも基底状態である。つまり、基底状態がスピンの全体の向きによって無限に縮退していることが分かる。こうして、 y 軸の回りの回転では基底状態は保たれないので、 y 軸回りの回転対称性は「自発的に破れている」という。同じように x 軸の回りの回転も $e^{iJ_x\theta/\hbar}|\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle \cos(\theta/2) + i|\downarrow\rangle \sin(\theta/2)$ と基底状態を変えるため、やはり自発的に破れている。しかし z 軸の回りの回転は $e^{iJ_z\theta/\hbar}|\uparrow\rangle = e^{i\theta/2}|\uparrow\rangle$ と基底状態を(位相を除いては)変えないので、この対称性は破れていない。

ここで、回転を場所によって少しずつ違っていくことを考えてみる。

$$S_y(\mathbf{k}) \equiv \sum_i s_{yi} e^{ik \cdot \mathbf{x}_i} \\ |\mathbf{k}\rangle = S_y(\mathbf{k})|0\rangle = \sum_i |\cdots \uparrow \uparrow \downarrow \uparrow \uparrow \cdots\rangle e^{ik \cdot \mathbf{x}_i} \quad (5)$$

これは運動量 $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ を持つ励起状態である。そもそも波数ベクトル $\mathbf{k} \rightarrow 0$ の極限では $S_y(0)$ は系全体の一様な回転になるので、 $S_y(0)$ はハミルトニアンと交換しエネルギーを変えず、 $S_y(0)|0\rangle$ は別の基底状態になる。つまりこの励起状態は運動量がゼロになる極限でエネルギーもゼロになる。このように「ギャップ」がない励起状態が「南部・ゴールドストーンボソン」であり、自発的に連続的対称性が破れた場合に生まれる特徴的な励起状態である。

2.2 反強磁性体と謎

同じように反強磁性体を考えてみる。この場合、ハミルトニアンは強磁性体と同じく回転対称

$$H = +J \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j. \quad (6)$$

だが、符号を変えることで隣り合わせのスピンは反対方向を向こうとし、ネール状態

$$|\cdots \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \cdots\rangle \quad (7)$$

になる。^{*1} この場合も安定な基底状態を書くには交番磁化をある特定の方向(例えば z 軸方向)に選ぶ必要がある。すると強磁性体の場合と同じく z 軸の回りの回転対称性は保たれているが、 x 軸と y 軸回りの回転対称性は自発的に破れている。そして励起状態はやはりギャップがない。

強磁性体と反強磁性体はこのように全く同じ対称性の破れのパターンを持つ。しかし一歩踏み込んで、「ギャップのない励起状態は何種類あるのか」「励起状態のエネルギーは運動量の何次(分散関係)で振る舞うか」という基本的な問題を考えてみる。まず上の例では y 軸の回りの無限小回転 $\sum_i s_{yi} e^{ik \cdot \mathbf{x}_i}$ を行って励起状態を考えたと、同じように自発的に破れている x 軸の回りの回転を考えても良い。反強磁性体の場合はこのように二種類の励起状態があり、破れた対称性の J_x と J_y に対応して二つの独立な南部・ゴールドストーンボソンがある(図1(a), (b))。一方強磁性体の場合、二つの励起状態が直交しておらず、南部・ゴールドストーンボソンは一つしかないことが分かる(図1(c))。また、南部・ゴールドストーンボソンのエネルギーは反強磁性体では小さい運動量の極限で $E \propto |\mathbf{p}|$ と一次で小さくなるが、強磁性体ではもっと速く $E \propto |\mathbf{p}|^2$ と二次で小さくなる。

このように同じ対称性の破れのパターンを持っていても、南部・ゴールドストーンボソンの個数、分散関係という非常に基本的な性質に大きな違いが出ている。勿論この二つの例は長年研究されており、それぞれは深く理解されているのだが、何か一般原理が欠けていると感じるのは筆者らだけではないはずだ。

^{*1} スピンの大きさが有限 ($s=1/2$) ではネール状態はハミルトニアンの固有状態にならない。ホルシュタイン・プリマコフ変換を用い、 $1/s$ で展開後ボゴリューボフ変換した近似的な基底状態を使うのがよく行われる。

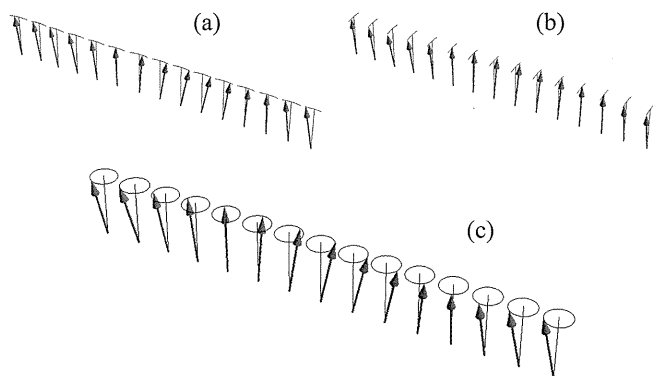


図1 スピンを場所場所で少しずつ違って回転するとスピン波を作ることができる。(a), (b) 反強磁性体のスピン波: J_x, J_y の二つの対称性の破れに対応して二つの独立な直線偏向の波が現れる。(c) 強磁性体のスピン波: 二つの波が合わさり、一つの円偏向のモードしか現れない。(a), (b) の矢印は交替磁化を、(c) の矢印は一樣磁化を表すことに注意。

2.3 格子とフォノン

もう一つ別の例を考えてみよう。分子が結晶化して格子を作ると、空間の並進対称性が自発的に破れる。空間並進は運動量 $\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i$ で生成され、並進のユニタリー演算子は $e^{i\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}/\hbar}$ で与えられる。結晶を並進すると結晶全体が違う場所に置かれ、同じ基底状態ではあるが、直交している。

スピンの場合と同じように、並進を場所によって少しずつ違うところで行うことを考えてみる。つまり

$$|k\rangle = \sum_i p_{ia} |0\rangle e^{ik \cdot x_i} \quad (8)$$

(a は並進の方向) という励起状態を考えると、やはり $k \rightarrow 0$ の極限では全体の無限小並進になるため、励起エネルギーはゼロになり、ギャップのない励起になっている。例えば二次元の格子を考えると、 x 方向と y 方向の二つの並進があり得るため、二つの南部・ゴールドストーンボソンがある。つまり、縦波と横波の二つの音波、量子化すると二つのフォノンがある。そして分散関係は $E \propto |\mathbf{p}|$ と運動量の一次になる。

一方、スピン系の位相欠陥(ソリトン解)であるスキルミオン解が二次元格子を作っている系が最近実験で調べられるようになったが、ギャップレスのフォノンは一つしかなく、また分散関係は $E \propto |\mathbf{p}|^2$ と運動量の二次になっている。²⁾ また、空間二次元・磁場中のウィグナー結晶においてもギャップレスのフォノンは一つしかないことが知られている。¹³⁾

このように、対称性が自発的にどのように破れたのか、という情報だけでは決まらない、基本的な問題がある。これを理解する一般論を作りたい、というのが筆者らの研究の動機であった。

3. 今までの一般論

前節で見たように、対称性が自発的に破れたときに、南部・ゴールドストーンボソンが何種類現れるのか、その分散関係は何か、という基本的な問題に対して、一般論が必

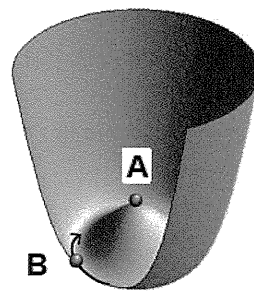


図2 回転対称性があるAの位置ではなく、よりエネルギーの低いBの位置に落ちると元の回転対称性が破れる。すると、底を回る方向に低エネルギー励起のモードができる。

要である。そこで、今まで知られていた大事な定理を復習することにする。なお、以降の結果は全て相互作用が長距離力でないこと、十分長距離のスケールでの空間の並進・回転対称性を仮定している。また考える対称性は内部対称性と並進対称性に限る。

3.1 南部・ゴールドストーンの定理

1960年代初頭、南部陽一郎氏、ゴールドストーン(J. Goldstone)らによって、次の南部・ゴールドストーンの定理が示された。³⁾

系にローレンツ対称性がある場合、系のグローバルな連続的対称性が自発的に破れると、破れた対称性一つにつき一つゼロ質量ボソンが現れる。

よく教科書にあるワインボトルタイプのポテンシャルの例を図2に示す。もともとあった軸周りの回転対称性 $G = U(1)$ が、 $H = |e|$ に破れると、ボトルの底を回る方向に低エネルギー励起のモードができる。一般には破れた対称性の数だけポテンシャルがフラットな方向ができるため、南部理論では南部・ゴールドストーンボソンの数 n_{NGB} は破れた対称性の数 n_{BG} と等しかったわけである。またローレンツ対称性がある場合には南部・ゴールドストーンボソンの分散関係は唯一 $E = c|\mathbf{p}|$ の可能性しかない。

一般に、元々のラグランジアンがリー群 G の対称性を持つにもかかわらず、基底状態がその部分群 H の対称性しか持たない場合には、対称性が G から H へ自発的に破れたといい、 G と H の生成子の数の差を破れた対称性の数 n_{BG} という。つまりローレンツ不変な理論では二つの予言がある。

$$n_{\text{NGB}} = n_{\text{BG}}, \quad (9)$$

$$E = c|\mathbf{p}|. \quad (10)$$

問題はローレンツ不変性がない系の場合である。物性系は基本的にローレンツ不変ではないし、相対論的な素粒子・原子核の系でも宇宙初期、天体の内部等、有限温度、有限密度ではローレンツ不変性を破っている。ローレンツ不変性を仮定せず、どこまで強い結果を証明できるのかが課題となる。

3.2 ニールセン・チャダの定理

ニールセン(H. B. Nielsen)とチャダ(S. Chadha)は、ロ

ーレンツ不変性を仮定せず、連続対称性が自発的に破れた場合、現れる南部・ゴールドストーンボソンの個数を定めようとした。そして相関関数 $\langle 0 | j_a^0(x), \phi_b(y) | 0 \rangle$ の解析性に基づく議論によって次の定理を示した。⁴⁾

分散関係 $E(\mathbf{p})$ が長波長極限で運動量の奇数次の冪に比例するもの ($E \propto |\mathbf{p}|^{2n-1}$) をタイプ I、偶数次の冪に比例するものをタイプ II ($E \propto |\mathbf{p}|^{2n}$) の南部・ゴールドストーンボソンと分類する。タイプ I (II) の南部・ゴールドストーンボソンの数を n_I (n_{II}) と書くと、次の不等式が成立する：

$$n_I + 2n_{II} \geq n_{BG}. \quad (11)$$

しかしこれは不等号であるため、対称性の破れのパターンを決めても、このままでは南部・ゴールドストーンボソンの個数を予言できない。更に分散関係の次数を元にしてはいるが、本来理論は分散関係が何次であるかを予言すべきである。

一方現在においても、物理的に興味がある系でこの式の等号が成立しない例は知られていない。実際以下に見るように、特殊な場合を除いてこの等号を示すことができる。すると、 n_{II} を二倍で数えて初めて n_{BG} と等しいのだから、南部・ゴールドストーンボソンの数 $n_{NGB} = n_I + n_{II}$ 自体は n_{BG} よりも少なくなってしまう。ポテンシャルがフラットな方向が n_{BG} 個あるにもかかわらず、南部・ゴールドストーンボソンの数が減ってしまうのは一体なぜなのだろうか？

3.3 シェーファーらの定理

シェーファー (T. Schäfer) らは、有限密度の (化学ポテンシャルがある) 系での原子核物理に興味を持って調べていたが、ここでも南部・ゴールドストーンボソンの数が破れた対称性の数よりも少なくなっている例が見つかった。その上で次の定理を示した。⁵⁾

破れた生成子 Q_a の全てのペアに対して $\langle 0 | [Q_a, Q_b] | 0 \rangle = 0$ ならば、南部・ゴールドストーンボソンの数は破れた対称性の数に等しい。

彼らの議論は次のようなものであった。生成子 Q_a はこの対称性に対応する南部・ゴールドストーンボソンの ($\mathbf{p}=0$ の状態の) 生成消滅演算子とみなすことができる。^{*2} そして $\langle 0 | [Q_a, Q_b] | 0 \rangle = 0$ を仮定し、 $Q_a | 0 \rangle$ ($a=1, 2, \dots, n_{BG}$) が互いに線形独立であることを示した。

すると問題は生成子が交換しない場合はどうなのか、そして分散関係との関係は何なのかに絞られてくる。

3.4 南部氏の議論

この Q_a がゼロモードの生成消滅演算子であるという議論は、2004 年の南部氏の論文で一層掘り下げられた。⁶⁾ もし、 $\langle 0 | [Q_a, Q_b] | 0 \rangle \neq 0$ であれば、それは変数 Q_a と Q_b の励起するゼロモードが互いに独立ではなく、正準共役の関係となることを意味するだろう。したがって南部・ゴールド

ストーンボソンの数はそのようなペアの数だけ減ることになるというのである。この直感的な議論は今回の我々の成果によって裏付けられることになった。

実際強磁性体の例を思い起こしてみると、破れた対称性の生成子 J_x と J_y が一見独立な南部・ゴールドストーンボソンを作るかと思われたが、実際には一種類しかない。交換関係を見てみると、

$$\langle 0 | [J_x, J_y] | 0 \rangle = i \langle 0 | J_z | 0 \rangle = iN \frac{\hbar}{2} \neq 0 \quad (12)$$

となり、正準交換関係 $[x, p] = i\hbar$ と似ている。つまり、 J_x が励起したかもしれない南部・ゴールドストーンボソンと J_y のそれが正準共役になっているとすると、 x と p がそうであるように、ペアで一つの自由度を記述していることになる。一方反強磁性体の場合は交換関係は同じでも $\langle 0 | J_z | 0 \rangle = 0$ であるため、基底状態の期待値としては交換している。するとそれぞれの生成子が独立に南部・ゴールドストーンボソンを励起しても不思議はない。

3.5 渡辺・ブラウナーの予想

渡辺は当初、ブラウナー (T. Brauner) と共にニールセン・チャダの定理の等号を直接示そうと試みていたが、パラメータの fine-tuning の下で等号が成立しないような反例を見つけてしまった。そこで分散関係の冪で分類するよりも、 $\langle 0 | [Q_a, Q_b] | 0 \rangle$ を用いて議論するべきだという結論にいたり、以下の形にまとめた。⁷⁾

$$n_{BG} - n_{NGB} = \frac{1}{2} \text{rank} \rho, \quad (13)$$

$$\rho_{ab} \equiv \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\Omega} \langle 0 | [Q_a, Q_b] | 0 \rangle, \quad (14)$$

ここに Ω は空間体積を表す。^{*3}

いま $\rho=0$ のときを考えると $n_{BG} = n_{NGB}$ となり、シェーファーらの定理の拡張になっていることが分かる。同様に系にローレンツ対称性がある場合には、 $\langle 0 | [j_a^0(x), j_b^0(0)] | 0 \rangle = 0$ となることが分かる^{*4} のでやはり $\rho=0$ であり、南部・ゴールドストーンボソンの定理の拡張にもなっている。

この予想は南部氏の直感的な議論を定式化したものといってもよいだろう。と言うのも、 ρ は実反対称行列であり、適当に基底を取り換えることにより常に

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \lambda_1 & & & & \\ -\lambda_1 & 0 & & & & \\ & & 0 & \lambda_2 & & \\ & & -\lambda_2 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 & \lambda_m \\ & & & & & -\lambda_m & 0 \\ \hline & & & & & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (15)$$

^{*3} Ω で割り算しているのは、 Q_a, Q_b ともに空間積分を含むので、交換関係の分に加えてさらに Ω で割らないと有限にならないためである。

^{*4} $\langle 0 | [j_a^0(x), j_b^0(0)] | 0 \rangle \delta(x^0) = \partial_a \langle 0 | T j_b^0(x) j_b^0(0) | 0 \rangle$ はローレンツベクトルなので、ゼロでないでローレンツ対称性が破れていることになる。

^{*2} ここでは Q_a 自体には赤外発散がありうまく定義できないという問題を無視している。

という形に直せるからである。(行列の階数の定義から直ちに $2m = \text{rank } \rho$ が分かる。)すると正準共役なペアの数 = $(1/2)\text{rank } \rho$ となり、南部氏の議論に戻るのである。

以下で見るように、この予想が正しいことは量子場の理論を使って証明することができる。

4. 新しい統一的理解

上記を踏まえたうえで、筆者らが示したことは次のようにまとめられる。⁸⁾ 破れた対称性の生成子 Q_a ($a=1, 2, \dots, n_{\text{BG}}$) の中から $n_B \equiv (1/2)\text{rank } \rho$ 個の正準共役なペアができ、その各々のペアが一つずつ南部・ゴールドストーンボソンを生む(これらをタイプBと呼ぶ)。一方、ペアにならずに残った $n_A \equiv n_{\text{BG}} - \text{rank } \rho$ 個の生成子は各々がそのまま南部・ゴールドストーンボソンに対応する(これらをタイプAと呼ぶ)。したがって

$$n_{\text{NGB}} = n_A + n_B = n_{\text{BG}} - \frac{1}{2} \text{rank } \rho \quad (16)$$

であり、式(13)と、ニールセン・チャダの不等式の等号版

$$n_A + 2n_B = n_{\text{BG}} \quad (17)$$

が得られる。更に、特に fine-tuning が起こらない限りタイプAの南部・ゴールドストーンボソンは線形分散を持ち、タイプBの南部・ゴールドストーンボソンは二乗分散を持つことも示せるので、ニールセン・チャダの不等式との対応も分かる。

つまり、分散関係は理論の帰結として与えられ、ニールセン・チャダのような出発点ではない。そして渡辺が見つけた fine-tuning による例外もきちんと扱うことができる。

そしてタイプAとタイプBの区別の背後にある幾何学的な構造も明らかにした。この数学的な理解のおかげで、与えられた対称性の破れのパターンに対して、どのようなタイプAとタイプBの可能性があるのか、例外なく分類することができる。

4.1 証明の概観

我々はこの結果を得るために量子場の有効ラグランジアンの方法を用いた。以下ではこの導出の概略を説明する。

通常の問題設定では、まず系のハミルトニアンやラグランジアンがミクロな自由度に対して与えられ、その基底状態を調べることによって対称性の破れのパターンを議論するが、有効ラグランジアンの方法ではある意味でこの逆を考えることになる。つまり、対称性の破れのパターン $G \rightarrow H$ が与えられたとして、対称性の破れた系の低エネルギー・長波長の物理を記述する場の理論のラグランジアンは何かを考えるのである。この有効ラグランジアンに含まれる場は一般には元のミクロな理論の自由度の複合場となる。低エネルギー・長波長の物理に興味があるので、微分展開、すなわち $\partial_r \equiv \partial/\partial x^r$ ($r=1, \dots, d$) や $\partial_t \equiv \partial/\partial t$ の次数によって展開するが、その展開係数の詳細も一般にはミクロな理論から決定しなければならない。

ところが、実は系の対称性だけから有効ラグランジアンを大幅に制限することが可能なのである。というのも、有効ラグランジアンはミクロな理論と同じ対称性を持たなければならないからである。つまり、通常の問題設定を「上から攻める」やり方とすると、有効ラグランジアンの方法は「下から攻める」ことになり、対称性だけから低エネルギー・長波長の物理の可能性を分類することができる。

話を具体的にするために、実際に有効ラグランジアンを書き下してみよう。そのためには、破れた対称性の生成子 Q^a ($a=1, 2, \dots, n_{\text{BG}}$) に対応して、場 $\pi^a(x, t)$ を導入する。あとは対称性を持つようなラグランジアンにどのような可能性があるかをきちんと調べてやれば良い。

これは数学的にはっきりとした問題である。対称性 G がその部分群 H に破れると、基底状態は G で移り変わるが、 H では変わらないことになる。そこで基底状態の取りうる可能性は G の中で H で対応するものを同一視して得られるので、商空間 G/H で与えられることになる。これは「等質空間」と呼ばれ、空間のどの点も他の点と G の作用で行き来でき、つまり「同じ=等質」であることを意味している。そして π^a は G/H の原点(一つ選んだ基底状態)近傍での座標と考えることができる。

まずよく知られたローレンツ不変な場合を考えてみる。この場合、微分展開の最低次は

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{2} g_{ab}(\pi) \partial_\mu \pi^a \partial^\mu \pi^b \quad (18)$$

で与えられる。この形はターゲット空間を G/H にとった非線形シグマモデルと呼ばれているものである。対称性の要請から $g_{ab}(\pi)$ は G/H 上の G -不変な計量であり、一般に可能な形はごく限られている。 $g_{ab}(\pi)$ を π でテイラー展開すると、最低次は質量ゼロの自由粒子に対応し、確かに n_{BG} 個の独立な粒子がある。テイラー展開の高次は南部・ゴールドストーンボソンの間の相互作用を表すが、 g_{ab} の形が対称性のために厳しく制限されていて、相互作用を定量的に予言する。この相互作用の影響については後でまた議論することにし、以下ではひとまず自由場の部分に注目しよう。

一方ローレンツ不変性を仮定しないと、一般的な形は微分の二次まででは次のようになる。

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = c_a(\pi) \dot{\pi}^a + \frac{1}{2} \bar{g}_{ab}(\pi) \dot{\pi}^a \dot{\pi}^b - \frac{1}{2} g_{ab}(\pi) \partial_r \pi^a \partial_r \pi^b \quad (19)$$

この有効ラグランジアンが記述する長距離での並進対称性の仮定から \mathcal{L}_{eff} はあらわには座標 (x, t) に依存しない。また同様に回転対称性によって空間添え字 r に関しては縮約をとっている。ここから \mathcal{L}_{eff} が元の対称性 G を持つことを要請して、係数 $c_a(\pi)$ や $g_{ab}(\pi)$ の一般形を制限していく。

Q_i ($i=1, \dots, d_G$) で生成される対称性操作の下で南部・ゴールドストーン場 π^a は $\delta_i \pi^a = h_i^a(\pi)$ と変換するとする。特に破れた対称性 Q_b ($a=1, \dots, n_{\text{BG}}$) については原点近傍で $\delta_b \pi^a = h_b^a(0) + O(\pi)$ となり変換によって原点が動く、つ

まり基底状態間を移り変わることが分かる。^{*5} 以下では一般性を失わずに $\hbar g(0) = \delta_g^0$ という規格化を取ることにする。

さて結論から先に述べると、 G -不変性の要求から一般的に

$$c_a(\pi) = \frac{1}{2} \rho_{ab} \pi^b + O(\pi^2) \quad (20)$$

であることが導かれる。^{*6} この ρ_{ab} は式(14)で定義され、式(15)の形に区対角化されている、つまり

$$c_a(\pi) \pi^a = \sum_{\alpha=1}^m \frac{1}{2} \lambda_{\alpha} (\pi^{2\alpha-1} \pi^{2\alpha} - \pi^{2\alpha} \pi^{2\alpha-1}) + O(\pi^3) \quad (21)$$

とする。時間の一次微分の項があれば低エネルギーでは時間微分の二次の項は無視できることに注意すると、この結果から直ちに $\pi^{2\alpha-1}$ と $\pi^{2\alpha}$ ($\alpha=1, 2, \dots, m=(1/2)\text{rank}\rho$) が互いに正準共役な自由度であり、二つの場で一つのタイプBの南部・ゴールドストーンボソンを表すことが分かる。これはラグランジアン $L = p_i \dot{q}^i - H(p, q)$ という形を思い出してみれば納得がいくだろう。この $c_a(\pi) \pi^a$ という項は一般に対称性 G の下で完全に不変ではなく、表面項の分だけ変化するという点も面白い。ラグランジアンは波動関数の位相に対応するため、これは量子力学のベリー位相の一般化と考えることができる。また結果的に $g_{ab}(\pi)$, $\bar{g}_{ab}(\pi)$ はローレンツ不変の場合と本質的に同じで、時間成分と空間成分の比が光速でなく、任意の音速でよいことが違う程度であることが分かる。^{*7}

分散関係についてもラグランジアン(19)から簡単に理解することができる。タイプBの南部・ゴールドストーンボソンについては時間の一次微分の項が支配的であるため分散関係は第一項と第三項から決まることになり、 $E \propto |\mathbf{p}|^2$ となる。一方で、 $\rho_{ab}=0$ となりペアにないタイプAの南部・ゴールドストーンモード π^a ($a=\text{rank}\rho+1, \dots, n_{\text{BG}}$) については第二項と第三項から線形分散のモードが一つずつ出てくることが分かる。^{*8} しかし fine-tuning によって $(1/2)g_{ab}(0)\partial_r\pi^a\partial_r\pi^b$ の項がなく、微分の四次から始まる特殊な場合はタイプAでも $E \propto |\mathbf{p}|^2$ となるため、分散関係の次数は系の詳細によってしまう。^{*9} ただ、一般的にはタイプAは一次、タイプBは二次の分散関係になることが分かる。

ここで簡単に式(20)を正当化してみよう。まず、 $\delta_c((1/2)\rho_{ab}\pi^a\pi^b) = \partial t((1/2)\rho_{ab}\pi^a\delta_c^b) + O(\pi^2)$ と高々表面項し

か変化しないので、この項は対称性から許されることが確認できる。また表面項の変化分に注意しながらネーターの定理により保存カレントを求めると $j_a^0 = \rho_{ab}\pi^b + O(\pi^2)$ が得られる。これと同時に正準交換関係 $[\pi^a(\mathbf{x}, 0), \rho_{bc}\pi^c(\mathbf{0}, 0)] = i\delta_g^a\delta^d(\mathbf{x})$ を合わせると、^{*10} 保存カレント間の交換関係

$$[j_a^0(\mathbf{x}, 0), j_b^0(\mathbf{0}, 0)] = \rho_{ac}[\pi^c(\mathbf{x}, 0), \rho_{bd}\pi^d(\mathbf{0}, 0)] + O(\pi) = i\rho_{ab}\delta^d(\mathbf{x}) + O(\pi) \quad (22)$$

が得られ、 ρ_{ab} と生成子の交換関係との対応(式(14))が確認できる。ここでは簡単のために最低次の議論で済ませたが、論文中ではより詳細に議論しているので興味のある方はそちらを参照していただきたい。

ちなみに有効ラグランジアン(19)は絶対零度でのものだが、有限温度は通常通り虚時間形式で扱えばよい。しかし微分で展開しているため、温度が高くなると微分の高次の項が同じ程度に重要になってしまい、展開が破綻してしまうことに注意しなければならない。

時間の一回微分の項は等質空間上の微分形式 $c = c_a(\pi) d\pi^a$ と考えることができるが、表面項だけ変化することを許しているため、本質的なのはその外微分 $\omega = dc$ であり、これは G -不変な閉じた二次微分形式になっている。この ω は数学では presymplectic 構造と呼ばれるもので、かなり一般的にシンプレクティックな等質空間に落とすことができる。¹⁰⁾ 一方、ラグランジアンは微分の二次の項は等質空間 G/H の上の G -不変な計量で決まる。このように有効ラグランジアンは基本的に等質空間の幾何学だけで決まってしまうため、非常に予言能力が高い。

4.2 磁性体の例

例として2.1節で取り上げた強磁性スピン波を有効ラグランジアンの方法で見直してみよう。この場合、スピンの三次元回転の対称性 $\text{SO}(3)$ が軸対称性 $\text{SO}(2)$ に破れており、等質空間 $\text{SO}(3)/\text{SO}(2)$ は二次元の球面 S^2 に他ならない。これを単位ベクトル $\mathbf{n}^2=1$ で記述する。すると等質空間の幾何学から直ちに分かることは、 $\text{SO}(3)$ -不変な計量は係数を除いて一意的に決まってしまう、 $d\mathbf{n} \otimes d\mathbf{n}$ しかない。更に S^2 には $\text{SO}(3)$ -不変なシンプレクティック構造が自然に入り、これも係数を除いて一意的に $\omega = \epsilon_{ijk} n^i dn^j \wedge dn^k$ と決まってしまう。その結果、

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = C_1 \frac{n_y \dot{n}_x - n_x \dot{n}_y}{1 + n_z} - C_2 \nabla \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{n} \quad (23)$$

が唯一可能な形である。原点 $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ の回りで展開すると、 n_x と n_y が正準共役になって二つで一つの南部・ゴールドストーンボソンを記述し、 $\hbar C_1 E(\mathbf{p}) = C_2 |\mathbf{p}|^2$ と二次の分散関係になる。しかもこのラグランジアンは $n_z = \sqrt{1 - n_x^2 - n_y^2}$ を展開すると n_x と n_y の高次も含み、相互作用

^{*10} この正準交換関係をラグランジアン(19)から求める際には少々注意が必要である。というのも π^a の正準運動量 $\partial \mathcal{L} / \partial \pi^a$ は $(1/2)\rho_{ab}\pi^b + O(\pi)$ となるが、これは系に拘束条件があることを表している。したがって正しい交換関係を求める際にはディラックの量子化の手続きを経なければならない。

^{*5} このような変換は一般に非線形表現として知られる。逆に線形表現とは $\delta_i \pi^a = [R_i]^a_b \pi^b$ の形のものをいう。一般に G がコンパクトであれば、破れた対称性は非線形表現で、破れていない対称性は線形表現で表現される。例えば $U(1)$ 対称性の破れの場合、位相は $\theta \rightarrow \theta + \epsilon$ と回転するがこれは $\delta\theta=1$ という非線形表現に他ならない。

^{*6} 実はこの $c_a(\pi)$ も一般にモレー・カルタン形式を用いて簡潔に表現することが可能である。⁹⁾

^{*7} π^a が H の既約表現でない場合は、いくつかの項が可能で、その間の比も違ってよい。

^{*8} 一般には $g_{ab}(0)$ や $\bar{g}_{ab}(0)$ の項は ρ_{ab} で区対角化されているブロック間を混ぜてしまうので、分散関係を導く議論はより複雑になる。この点についてもより詳しくは文献9を参照されたい。

^{*9} 対称性によって守られているなどのなにか理由が無い限り、一般には長波長に繰り込んでいく際に微分の二次の項が生成されるはずである。

が完全に決まっている。こうして本来のハミルトニアンに一度も戻ることなく、強磁性体の長波長の性質が対称性だけで、係数 C_1 と C_2 以外は完全に決まってしまった。このように幾何学的な解釈によってラグランジアンを簡単に書き下すことができるが、幾何学の知識はトポロジカルに非自明な配位の分類も可能にする、例えば二次元空間におけるスキルミオン解の存在は無限遠を同一視した空間 S^2 から等質空間 S^2 への写像のホモトピー群 $\pi^2(S^2) = \mathbb{Z}$ で分類される。

このラグランジアンの一項目はスピン一つ一つのベリー位相項

$$s\hbar(\cos\theta - 1)\dot{\phi} = s\hbar \frac{n_y\dot{n}_x - n_x\dot{n}_y}{1 + n_z} \quad (24)$$

に対応している。相互作用項 $-J\sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j$ について連続近似をとり、ベリー位相項と合わせれば、 $C_1 = (s\hbar/a^d)$ 、 $C_2 = (Js^2\hbar^2/2a^{d-2})$ だと読み取ることができる。 C_1 が磁化密度を表しており $\rho_{xy} = -\rho_{yx} = C_1$ であることに注意すれば、一般的な表式(20)との対応が分かる。

一方反強磁性体の場合は $\langle 0|[J_x, J_y]|0\rangle = i\langle 0|[J_z, 0] = 0$ のため一回微分の項がなく、時間微分は S^2 の計量 $\dot{\mathbf{n}} \cdot \dot{\mathbf{n}}$ が最低次の項になる。このため原点の回りで n_x と n_y が独立な自由度となり、分散関係は二つとも $E \propto |\mathbf{p}|$ となる。

4.3 結晶の例

ここでは二次元の結晶を考える。 x 軸と y 軸方向の並進対称性が破れているため、等質空間は $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = T^2$ である。平衡位置からの変位ベクトルを $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ とすると、一般的な並進の下で不変な計量は \mathbf{u} によらない対称行列 g_{ij} で $g_{ij}du_i \otimes du_j$ と決まる。ここではあとの応用例を念頭に三角格子に限って議論する。すると 60° の回転対称性があり、計量は $\delta_{ij}du_i \otimes du_j$ に比例する。一方、 T^2 上で閉じたシンプレクティック形式は normalization を除いて $\omega = du_x \wedge du_y$ しかなく、有効作用は二回微分までだと

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = C_1(u_y\dot{u}_x - u_x\dot{u}_y) + C_2\dot{u}_i\dot{u}_i - C_3(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 - C_4(\nabla \times \mathbf{u})^2 \quad (25)$$

が唯一可能な形である。

ここで、空間の並進は可換群であるのに、交換子 ρ_{ab} に対応する最初の項があり得るのは不思議に思われるだろう。これはリー代数(交換関係)に中心拡大が可能なのである。

一般に G が半単純でない場合は、リー代数のコホモロジー $H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ が非自明になることがあり、交換関係を

$$[Q_a, Q_b] = if_{ab}^c Q_c + ic_{ab}^a Z_a \quad (26)$$

のように中心拡大をすることが可能である。¹¹⁾ ここで中心 Z_a は全ての生成子と交換する演算子である。この結果、 ρ_{ab} には保存量の真空期待値 $f_{ab}^c \langle Q_c \rangle / \Omega$ だけでなく $c_{ab} \equiv c_{ab}^a \langle 0|Z_a|0 \rangle / \Omega$ の寄与が加わり正準共役なペアを作る。なお、半単純群の場合には中心拡大は自明なものしかなく電荷の再定義 $Q_a \rightarrow Q_a + \delta Q_a$ によって取り除くことができ

表1 Kaonと記したのはシェファード等によって論じられた K 中間子凝縮についてのモデル。⁵⁾ 有限密度を考えるために化学ポテンシャル μ を導入することで、ローレンツ対称性があらわに破られる。BECと記したのは $F=1$ のスピナー-BECのことで、強磁性相と planar 相がある。ウィグナー結晶は z 方向に磁場がかかっている場合について示した。

例	G/H	$n_{\text{BG}} - n_{\text{NGB}} = (1/2)\text{rank } \rho$
QCD	$SU(3) \times SU(3)/SU(3)$	8 8 0
反強磁性	$SO(3)/SO(2)$	2 2 0
強磁性	$SO(3)/SO(2)$	2 1 1
フェリ磁性	$SO(3)/SO(2)$	2 1 1
Kaon ($\mu=0$)	$U(2)/U(1)$	3 3 0
Kaon ($\mu>0$)	$U(2)/U(1)$	3 2 1
BEC (planar)	$SO(3) \times U(1)/U(1)$	3 3 0
BEC (ferro)	$SO(3) \times U(1)/U(1)'$	3 2 1
結晶 (2+1D)	T^2	2 2 0
Wigner 結晶	T^2	2 1 1
skyrmion 格子	T^2	2 1 1

るので中心拡大からの寄与はない。また、コンパクトでゲージ可能な対称性の場合には通常中心拡大は現れない。

実際スキルミオンの二次元格子の場合には、背景となる各スピンのベリー位相項が中心 Z を生み出す。²⁾ 我々の一般論通りギャップレスの励起が一つだけとなり、 $\omega \propto k^2$ と二次の分散を持つ。

次に二次元ウィグナー結晶について考えてみよう。これは長距離力があるが、微分展開と正準共役の議論はそのまま使うことができる。 z 軸方向に一樣磁場がかかっていると、量子ホール系でおなじみのように並進が非可換になり、 $Z = eBN$ (N は粒子数) という中心拡大が生まれる。長距離力のために有効ラグランジアンはもはや局所的ではなく、

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}(\mathbf{x}, t) = -\frac{en}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \times \dot{\mathbf{u}} + \frac{nm}{2} \dot{\mathbf{u}}^2 - \frac{nm}{2} v_t^2 (\nabla \times \mathbf{u})^2 - \frac{n^2}{2} \int d^2 y \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \frac{e^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{y}, t) \quad (27)$$

のように式(19)を一般化しなければならない。まず $B=0$ の場合には縦波、横波はそれぞれ $\omega_\ell(k) = \sqrt{2\pi n e^2 k/m} \propto \sqrt{k}$ 、 $\omega_t(k) = v_t k$ というよく知られた分散関係を持つ。次に $B_z > 0$ とすると、ラグランジアンの一項目 $eB_z n/2 (\dot{u}_x u_y - \dot{u}_y u_x)$ のために縦波・横波は互いに独立でなくなり、 $\omega(k) = \omega_\ell(k)\omega_t(k)/\omega_c \propto k^{3/2}$ という楕円偏向のモードが生まれるのである。¹³⁾ (反対周りの円偏向を持つモードはギャップ $\omega_c \equiv eB_z/m$ を持つ。)*¹¹⁾

ここまでの一般論の適用例を表1にまとめた。QCDのカイラル対称性の破れの例は、元々南部氏が議論された π 中間子についてのもので、ローレンツ対称性のために $n_{\text{NGB}} = n_{\text{BG}}$ となっているが、一般には両者は等しいとは限らない。つまり、対称性の破れのパターンが同じでも現れる南部・ゴールドストーンボソンの数が一定となっていないのが見て取れる。そして我々の一般的な式(13)、すなわち

*¹¹⁾ 磁場の有無に関わらず分散関係が一般論からずれる特異的になるのは長距離力のためである。一般に長距離力は系の長波長の振る舞いを大きく変えてしまい、三次元クーロン力の場合のようにギャップが開いてしまうこともある。

$n_{\text{NB}} = n_{\text{BG}} - (1/2)\text{rank } \rho$ はこれら全てを統一的に説明しているのを目で確認していただきたい。

5. スケーリング

最後に南部・ゴールドストーンボソン間の相互作用について考察しよう。先にも述べたように、我々の有効ラグランジアンは南部・ゴールドストーンボソンの数、分散関係のみならずそれらの間の相互作用をも記述する。そこで疑問となるのは、果たして相互作用による自己エネルギー補正で分散関係にギャップが開いてしまったりしないのか、ということである。

まずよく知られているタイプAの南部・ゴールドストーンボソンについて調べよう。時空を $x' = \alpha x$, $t' = \alpha t$ とリスケールするに伴って、場を $\pi^a(\alpha x, \alpha t) = \alpha^{(1-d)/2} \pi^a(x, t)$ と変換すれば自由なモードを記述する部分 $d^d x dt ((1/2)g_{ab}(0) \dot{\pi}^a \dot{\pi}^b - (1/2)g_{ab}(0) \partial_r \pi^a \partial_r \pi^b)$ は不変に保たれる。この時、例えば $\partial_r \pi^a \partial_r \pi^b \pi^c$ という相互作用項は $\alpha^{-(d+1)/2}$ とスケールすることが分かる（より多くの微分や場を含む項はより早く落ちる。）従って空間次元が $d > 1$ であれば長波長・低エネルギー理論は本質的に自由であるということになり、特に $k \rightarrow 0$ にギャップは開かない。 $d=1$ の場合には相互作用にマージナルなものがあり、相互作用の結果対称性が回復しギャップが開いてしまうということがあり得、整数スピン1次元鎖のハルデン相はこのもっとも有名な例である。この事情は1+1次元では連続的対称性の破れは起こらないというコールマンの定理とコンシステントである。

一方、タイプBの南部・ゴールドストーンボソンの場合には、 $d^d x dt ((1/2)\rho_{ab} \dot{\pi}^a \dot{\pi}^b - (1/2)g_{ab}(0) \partial_r \pi^a \partial_r \pi^b)$ という部分を不変に保つために $x' = \alpha x$, $t' = \alpha^2 t$, $\pi^a(\alpha x, \alpha^2 t) = \alpha^{-(d/2)} \pi^a(x, t)$ とスケールする必要がある。すると相互作用のうち支配的な $\dot{\pi}^a \dot{\pi}^b \pi^c$ や $\partial_r \pi^a \partial_r \pi^b \pi^c$ といった項は $\alpha^{-(d/2)}$ という因子で小さくなっていくので、1+1次元においても全ての相互作用が有意でなくなる。つまりタイプBの型の対称性の破れは空間が1+1次元でも起こりうる。^{*12}

このように空間三次元では長波長・低エネルギーで相互作用が小さくなっていくことにより、自由ボソンの集団として計算した結晶のデバイの T^3 則、磁性体のブロッホの法則 ($M(0) - M(T) \propto T^{3/2}$) などが正当化されるのである。

有限温度の松原形式で記述する場合には、十分長距離で見ると虚時間微分は全てなくなってしまう。このため特にタイプA, Bの区別はなくなり、どちらの場合にも $d > 2$ が「相互作用が有意でなくなり、かつ揺らぎが収束する」条件であることが分かる。これはマーミン・ワグナーの定

理として知られる。

6. 終わりに

ここまで有効ラグランジアンの方法に基づいて南部・ゴールドストーンボソンの一般論を展開してきたが、別のアプローチとしては演算子形式による議論が考えられる。実際、筆者らの論文とほぼ同時期に理化学研究所の日高義将氏によってより演算子形式に近い別の導出が提案されている。¹⁴⁾

また、以上は内部対称性の破れを念頭に置いた議論だったが、並進や回転などの時空の対称性が破れる場合には状況は複雑になる。この場合、上記の「正準共役のペアができる」という機構の他にも別の理由によって南部・ゴールドストーンボソンの数が減ることが頻繁に起こるのだ。例えば結晶の場合、並進対称性の破れのみに着目すればこれまでの議論が当てはまるが、実際には回転対称性やガリレイ対称性も同時に自発的に破れている。結晶中でなぜフォノンのみが観測され、回転対称性・ガリレイ対称性の破れによる南部・ゴールドストーンボソンが独立に現れないのかには、保存カレントの間に成り立つ関係式が関係していると考えられる。実際、角運動量密度 L^i やガリレイ変換の保存量の密度 B^i は、

$$L^i = \epsilon^{ijk} x^j p^k, \quad B^i = t p^i - m x^i N \quad (28)$$

のように並進の演算子 P^i や数密度 N と結びついており、 L^i , B^i が励起する揺らぎは P^i のそれと独立でないことが示唆される。^{15, 16)} 有効ラグランジアンの方法の空間対称性の破れへの拡張は重要な今後の課題と言えるだろう。

参考文献

- 1) I. Coddington, P. Engels, V. Schweikhard and E. A. Cornell: Phys. Rev. Lett. **91** (2003) 100402; G. Baym: *ibid.* **91** (2003) 110402.
- 2) J. Zang, M. Mostovoy, J. H. Han and N. Nagaosa: Phys. Rev. Lett. **107** (2011) 136804; Y. Onose, Y. Okamura, S. Seki, S. Ishiwata and Y. Tokura: *ibid.* **109** (2012) 037603.
- 3) Y. Nambu and G. Jona-Lasinio: Phys. Rev. **122** (1961) 345; J. Goldstone: Nuovo Cimento **19** (1961) 154; J. Goldstone, A. Salam and S. Weinberg: Phys. Rev. **127** (1962) 965.
- 4) H. B. Nielsen and S. Chadha: Nucl. Phys. B **105** (1976) 445.
- 5) T. Schäfer, D. T. Son, M. A. Stephanov, D. Toublan and J. J. M. Verbaarschot: Phys. Lett. B **522** (2001) 67.
- 6) Y. Nambu: J. Stat. Phys. **115** (2004) 7.
- 7) H. Watanabe and T. Brauner: Phys. Rev. D **84** (2011) 125013.
- 8) H. Watanabe and H. Murayama: Phys. Rev. Lett. **75** (2012) 251602.
- 9) H. Watanabe and H. Murayama: in preparation.
- 10) B.-Y. Chu: Trans. Amer. Math. Soc. **197** (1974) 145; A. Weinstein: private communications.
- 11) N. M. J. Woodhouse: *Geometrical Quantization* (Clarendon Press, Oxford, 1991).
- 12) C. Pethick and H. Smith: *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, England, 2008) 2nd ed.
- 13) H. Fukuyama: Solid State Commun. **17** (1975) 1323.
- 14) Y. Hidaka: Phys. Rev. Lett. **110** (2013) 091601.
- 15) I. Low and A. V. Manohar: Phys. Rev. Lett. **88** (2002) 101602.
- 16) H. Watanabe and H. Murayama: arXiv: 1302.4800 (2013).

^{*12} 揺らぎを計算してもタイプAなら $d > 1$, タイプBなら $d > 0$ で収束し、特に問題ないことが分かる。このことは強磁性体の例では通常、強磁性基底状態はハミルトニアンの固有状態であり量子揺らぎがないから、と説明される。実際タイプBの南部・ゴールドストーンボソンのみが現れる場合には $[Q_a, Q_b]$ というハミルトニアンと交換する量を秩序変数に選ぶことができ、同様の議論を展開することができる。

非会員著者の紹介

村山 斉氏： 1964年生まれ、1986年東大物理卒、同大学院博士課程修了後、東北大学助手後に渡米し現在カリフォルニア大学バークレイ校教授。2007年より東大カブリ数物連携宇宙研究機構機構長を兼任。専門は素粒子理論、初期宇宙論。2002年西宮湯川記念賞受賞。

(2012年10月17日原稿受付)

Unified Understanding of Nambu-Goldstone Bosons

Haruki Watanabe and Hitoshi Murayama

abstract: Spontaneous symmetry breaking is an important concept that applies to particle physics to nuclear, condensed matter, cold atomic, astrophysics, to even early universe cosmology, chemistry, and biology. In particular, continuous symmetries produce Nambu-Goldstone bosons that govern the phenomena at long wavelengths and small energies. However, answers to truly basic questions, such as the number of Nambu-Goldstone bosons or their dispersion relations, had been answered on case-by-case basis without a general framework. The authors recently proposed a framework to understand Nambu-Goldstone bosons in a unified fashion. This work extends the celebrated Nambu-Goldstone theorem in Lorentz-invariant systems. We demonstrate what had not been clear and what is now using explicit examples of magnets and crystals.

日本物理学会誌 第68巻 第5号(2013年5月号) 予定目次

口絵：今月号の記事から

巻頭言

アジアの時代……………本林 透

解説

固体量子情報の長距離移送と量子電子光学実験への挑戦

……………山本倫久、高田真太郎、樽茶清悟

ジャイロ運動論による磁化プラズマ乱流の研究—核融合から

宇宙まで— ……洲鎌英雄、渡邊智彦

最近の研究から

シリセン：ケイ素で出来たグラフェン？

……………高村由起子、アントワヌ・フロランス、
ライナー・フリードライン、尾崎泰助

ナノカーボンの原子スケールの剥離と接着

……………三浦浩治、佐々木成朗

相変化光記録膜材料のコヒーレントフォノン分光と超高速

光誘起構造変化……………長谷宗明、牧野孝太郎、富永淳二

強磁性遷移金属における磁性の電界制御…千葉大地、小野輝男

JPSJの最近の注目論文から 1月の編集委員会より

……………安藤恒也

談話室

統計力学の新しい教え方……………佐宗哲郎

質問する学生達を育てる、英語版本を海外出版する…八木浩輔

新著紹介

『大学の物理教育』誌定期購読のすすめ

『大学の物理教育』は、年3回(3月、7月、11月)発行で年間購読料(個人)は1,000円です。購読ご希望の方は、お電話(03-3816-6201)またはFax(03-3816-6208)でご連絡下さい。

また、本誌ホームページのURLは次の通りですので、どうぞご覧下さい。

<http://www.jps.or.jp/book/kyoikushi/>

『大学の物理教育』編集委員会

Vol. 19-1 (3月15日発行) 目次

宿題のすすめ……………嘉規香織

講義室

学部講義についての疑問・要望への返事……………清水 明

日本数学会教育委員会「大学生数学基本調査」について

—記述式入試の大切さが再認識された調査—……………真島秀行

教育報告

総合入試と学習サポート……………竹山幸作、前田展希

大学教養課程での放射線講義の取り組み……………鳥居寛之

中学生および大学生の電流と電圧理解に関する調査結果

……………平島由美子、市川裕介

物理教育における数値の丸め方の扱い…大多喜重明、長井清香

医学部における物理教育の現状……………高須雄一

若者の未来につながる物理普及活動を目指して

—物理プレチャレンジを例に—……………原田 勲

海外の動向

韓国的高校物理教育視察報告……………山崎敏昭

図書室

『科学をどう教えるか』……………笠 耐

『ヒッグス粒子の見つけ方』……………並木雅俊

教育に関する一言……………山田弘明/寛具博義/森 篤史/北原和夫

開催情報

編集後記