

第 1 章

モノイダル圏・フュージョン圏・高次群

この章では標数 0 の体 \mathbb{K} のみを考える.

1.1 加法圏

定義 1.1: 加法圏・アーベル圏

圏 \mathcal{C} が体 \mathbb{K} 上の**加法圏** (additive category) であるとは, 以下を充たすこと:

(add-1)

任意の Hom 集合 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が \mathbb{K} -ベクトル空間の構造をもち, かつ射の合成

$$\circ: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

が \mathbb{K} -双線形写像である.

(add-2)

零対象^a (zero object) $\mathbf{0} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が存在し, $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{0}, X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathbf{0}) = 0$ を充たす^b.

(add-3)

有限の余積が常に存在する.

^a 始対象かつ終対象

^b 最右辺は (add-1) の意味で零ベクトル空間.

加法圏 \mathcal{C} は, 以下の条件を充たすとき**アーベル圏** (abelian category) と呼ばれる:

(Ab-1)

任意の射 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が核 $\ker f: \text{Ker } f \longrightarrow X$ および余核 $\text{coker } f: Y \longrightarrow \text{Coker } f$ を持つ.

(Ab-2)

$\text{Ker } f = \mathbf{0}$ ならば $f = \ker(\text{coker } f)$, かつ $\text{Coker } f = \mathbf{0}$ ならば $f = \text{coker}(\ker f)$

以下では**加法圏** \mathcal{C}, \mathcal{D} の間の関手 $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ には, $F_{X, Y}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$, $f \longmapsto$

$F(f)$ が \mathbb{K} -線型写像となることを常に要請する.

【例 1.1.1】表現の圏

G を群とする. このとき

- G の表現 (ρ, V) を対象とする
- G -同変な \mathbb{K} -線型写像 $(\rho, V) \xrightarrow{f} (\rho', V')$ を射とする

圏を $\mathbf{Rep}(G)$ と書く. $\mathbf{Rep}(G)$ はアーベル圏である.

定義 1.2: 単純・半単純

- アーベル圏 \mathcal{C} の対象 $X \in \mathcal{C}$ が単純 (simple) であるとは, 任意のモノ射 $i: U \hookrightarrow X$ が 0 であるか同型射であることを言う.
- アーベル圏 \mathcal{C} が半単純 (semisimple) であるとは, $\forall X \in \mathcal{C}$ が単純対象の有限余積と同型であることを言う. i.e. 単純対象の族 $\{V_i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})\}_{i \in I}$ および有限個を除いて 0 であるような非負整数の族 $\{N_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}_{i \in I}$ が存在して

$$X \cong \bigoplus_{i \in I} N_i X_i$$

が成り立つこと.

1.2 モノイダル圏

これまでも何回か登場したが, モノイダル圏についてまとめておく:

定義 1.3: モノイダル圏

モノイダル圏 (monoidal category) は, 以下の 5 つのデータからなる:

- 圏 \mathcal{C}
- テンソル積 (tensor product) と呼ばれる関手 $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$
- 単位対象 (unit object) $I \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$
- associator と呼ばれる自然同値

$$\{a_{X,Y,Z}: (X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{\cong} X \otimes (Y \otimes Z)\}_{X,Y,Z \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})}$$

- left/right unitors と呼ばれる自然同値

$$\{l_X: I \otimes X \xrightarrow{\cong} X\}_{X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})},$$

$$\{r_X: X \otimes I \xrightarrow{\cong} X\}_{X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは $\forall X, Y, Z, W \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ について以下の 2 つの図式を可換にする:

(triangle diagram)

$$\begin{array}{ccc}
 (X \otimes I) \otimes Y & \xrightarrow{a_{X, I, Y}} & X \otimes (I \otimes Y) \\
 \searrow r_X \otimes \text{Id}_Y & & \swarrow \text{Id}_X \otimes l_Y \\
 & X \otimes Y &
 \end{array}$$

(pentagon diagram)

$$\begin{array}{ccccc}
 & & ((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z & & \\
 & \swarrow a_{W \otimes X, Y, Z} & & \searrow a_{W, X, Y \otimes \text{Id}_Z} & \\
 (W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) & & & & (W \otimes (X \otimes Y)) \otimes Z \\
 & \searrow a_{W, X, Y \otimes Z} & & \downarrow a_{W, X \otimes Y, Z} & \\
 & & W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z)) & & W \otimes ((X \otimes Y) \otimes Z) \\
 & & \swarrow \text{Id}_Z \otimes a_{X, Y, Z} & & \\
 & & & &
 \end{array}$$

モノイダル圏 \mathcal{C} が**厳密** (strict) であるとは, $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$\begin{aligned}
 (X \otimes Y) \otimes Z &= X \otimes (Y \otimes Z), \\
 I \otimes X &= X, \quad X \otimes I = X
 \end{aligned}$$

が成り立ち, かつ $a_{X, Y, Z}, l_X, r_X$ が恒等射であることを言う.

! 定義 1.3 で言うモノイダル圏を, **弱いモノイダル圏** (weak monoidal category) と呼ぶこともある.

【例 1.2.1】Cat のモノイダル構造

Cat を小圏と関手が成す圏とする. このとき, 関手

$$\times: \mathbf{Cat} \times \mathbf{Cat} \longrightarrow \mathbf{Cat}$$

を $\text{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) := \text{Ob}(\mathcal{C}) \times \text{Ob}(\mathcal{D})$ により定めると, 組み $(\mathbf{Cat}, \times, I)$ は厳密なモノイダル圏になる. ただし I はただ 1 つの対象 \bullet を持ち, $\text{Hom}_I(\bullet, \bullet) = \{\text{Id}_\bullet\}$ とする圏である^a

^a これは **Cat** の終対象でもある.

定義 1.4: 組紐付きモノイダル圏

組紐付きモノイダル圏 (braided monoidal category) とは、以下の 2 つからなる：

- モノイダル圏 \mathcal{C}
- 組紐 (braiding) と呼ばれる自然同型

$$\{b_{X,Y}: X \otimes Y \xrightarrow{\cong} Y \otimes X\}_{X,Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ について以下の図式を可換にする：

(hexagon diagrams)

$$\begin{array}{ccccc} X \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{a_{X,Y,Z}^{-1}} & (X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{b_{X,Y} \otimes \text{Id}_Z} & (Y \otimes X) \otimes Z \\ \downarrow b_{X,Y \otimes Z} & & & & \downarrow a_{Y,X,Z} \\ (Y \otimes Z) \otimes X & \xleftarrow{a_{Y,Z,X}^{-1}} & Y \otimes (Z \otimes X) & \xleftarrow{\text{Id}_X \otimes b_{X,Z}} & Y \otimes (X \otimes Z) \\ \\ (X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{a_{X,Y,Z}} & X \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{\text{Id}_X \otimes b_{Y,Z}} & X \otimes (Z \otimes Y) \\ \downarrow b_{X \otimes Y, Z} & & & & \downarrow a_{X,Z,Y}^{-1} \\ Z \otimes (X \otimes Y) & \xleftarrow{a_{Z,X,Y}} & (Z \otimes X) \otimes Y & \xleftarrow{b_{X,Z} \otimes \text{Id}_Y} & (X \otimes Z) \otimes Y \end{array}$$

組紐付きモノイダル圏 \mathcal{C} であって、 \mathcal{C} の組紐が $b_{X,Y} = b_{Y,X}^{-1}$ を満たすもののことを対称モノイダル圏 (symmetric monoidal category) と呼ぶ。

定義 1.5: 双対

モノイダル圏 \mathcal{C} およびその任意の対象 $X, X^* \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を与える。 X^* が X の左双対 (left dual) であり、かつ X が X^* の右双対 (right dual) であるとは、

- coevaluation と呼ばれる射

$$i_X: I \longrightarrow X \otimes X^*$$

- evaluation と呼ばれる射

$$e_X: X^* \otimes X \longrightarrow I$$

が存在して以下の図式を可換にすることを言う：

(zig-zag equations)

$$\begin{array}{ccc}
I \otimes X & \xrightarrow{i_X \otimes \text{Id}_X} & (X \otimes X^*) \otimes X \\
\downarrow r_X & & \downarrow a_{X, X^*, X} \\
& & X \otimes (X^* \otimes X) \\
& & \downarrow \text{Id}_X \otimes e_X \\
X & \xleftarrow{r_X} & X \otimes I
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
X^* \otimes I & \xrightarrow{\text{Id}_{X^*} \otimes i_X} & X^* \otimes (X \otimes X^*) \\
\downarrow l_{X^*} & & \downarrow a_{X^*, X, X^*}^{-1} \\
& & (X^* \otimes X) \otimes X^* \\
& & \downarrow e_X \otimes \text{Id}_{X^*} \\
X^* & \xleftarrow{l_{X^*}} & I \otimes X^*
\end{array}$$

ストリング図式で書くときは

$$i_X := \text{cup} \quad e_X := \text{cap} \quad e_X^{-1} := \text{cup} \quad i_X^{-1} := \text{cap}$$

とする。ストリング図式において (zig-zag equations) は

$$\begin{array}{c}
\text{vertical line with upward arrow} \\
= \\
\text{zig-zag shape with upward arrows}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\text{vertical line with downward arrow} \\
= \\
\text{zig-zag shape with downward arrows}
\end{array}$$

と書ける。

定義 1.6: rigid なモノイダル圏

モノイダル圏 \mathcal{C} が **rigid** であるとは, $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が左・右双対を持つことを言う。

! これまでは圏 \mathcal{C} の対象を大文字で書いてきたが, 以下では文脈によっては小文字で書くことがある。

定義 1.7: モノイダル関手

2つのモノイダル圏 \mathcal{C}, \mathcal{D} の間の関手

$$F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

が**弱いモノイダル関手** (lax monoidal functor) であるとは,

- 射

$$\varepsilon: I_{\mathcal{D}} \longrightarrow F(I_{\mathcal{C}})$$

- 自然変換

$$\{\mu_{X,Y}: F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y) \longrightarrow F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y)\}_{X,Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

があって, $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して以下の図式が可換になること:

(associativity)

$$\begin{array}{ccc} (F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y)) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z) & \xrightarrow{a_{F(X), F(Y), F(Z)}^{\mathcal{D}}} & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} (F(Y) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z)) \\ \downarrow \mu_{X,Y} \otimes \text{Id}_{F(Z)} & & \downarrow \text{Id}_{F(X)} \otimes \mu_{Y,Z} \\ F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z) & & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y \otimes_{\mathcal{C}} Z) \\ \downarrow \mu_{X \otimes_{\mathcal{C}} Y, Z} & & \downarrow \mu_{X, Y \otimes_{\mathcal{C}} Z} \\ F((X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{C}} Z) & \xrightarrow{F(a_{X,Y,Z}^{\mathcal{C}})} & F(X \otimes_{\mathcal{C}} (Y \otimes_{\mathcal{C}} Z)) \end{array}$$

(unitality)

$$\begin{array}{ccc} I_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathcal{D}} F(X) & \xrightarrow{\varepsilon \otimes \text{Id}_{F(X)}} & F(I_{\mathcal{C}}) \otimes_{\mathcal{D}} F(X) \\ \downarrow l_{F(X)}^{\mathcal{D}} & & \downarrow \mu_{I_{\mathcal{C}}, X} \\ F(X) & \xleftarrow{F(l_X^{\mathcal{C}})} & F(I_{\mathcal{C}} \otimes_{\mathcal{C}} X) \\ \\ F(X) \otimes_{\mathcal{D}} I_{\mathcal{D}} & \xrightarrow{\text{Id}_{F(X)} \otimes \varepsilon} & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(I_{\mathcal{C}}) \\ \downarrow r_{F(X)}^{\mathcal{D}} & & \downarrow \mu_{X, I_{\mathcal{C}}} \\ F(X) & \xleftarrow{F(r_X^{\mathcal{C}})} & F(X \otimes_{\mathcal{C}} I_{\mathcal{C}}) \end{array}$$

- 弱いモノイダル関手 F の ε と $\mu_{X,Y}$ が全て同型射ならば, F は**強いモノイダル関手** (strong monoidal functor) と呼ばれる.
- 弱いモノイダル関手 F の ε と $\mu_{X,Y}$ が全て恒等射ならば, F は**厳密なモノイダル関手** (strict monoidal functor) と呼ばれる.

定義 1.8: モノイダル自然変換

2 つの **モノイダル圏** \mathcal{C}, \mathcal{D} の間の 2 つの **弱いモノイダル関手** $(F_i: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, \varepsilon_i: I_{\mathcal{D}} \rightarrow F(I_{\mathcal{C}}), \{\mu_{iX,Y}: F_i(X) \otimes F_i(Y) \rightarrow F_i(X \otimes Y)\}_{X,Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})})$ $w/ i = 1, 2$ の間の自然変換

$$\begin{array}{ccc} & F_1 & \\ \curvearrowright & \downarrow \tau & \curvearrowleft \\ \mathcal{C} & & \mathcal{D} \\ & F_2 & \end{array}$$

が **モノイダル自然変換** (monoidal natural transformation) であるとは, $\forall X, Y \in \mathcal{C}$ に対して以下の図式が可換になること:

(テンソル積の保存)

$$\begin{array}{ccc} F_1(X) \otimes_{\mathcal{D}} F_1(Y) & \xrightarrow{\tau_X \otimes_{\mathcal{D}} \tau_Y} & F_2(X) \otimes_{\mathcal{D}} F_2(Y) \\ \mu_{1X,Y} \downarrow & & \downarrow \mu_{2X,Y} \\ F_1(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) & \xrightarrow{\tau_{X \otimes_{\mathcal{C}} Y}} & F_2(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \end{array}$$

(単位対象の保存)

$$\begin{array}{ccc} & I_{\mathcal{D}} & \\ \varepsilon_1 \swarrow & & \searrow \varepsilon_2 \\ F_1(I_{\mathcal{C}}) & \xrightarrow{\tau_{I_{\mathcal{C}}}} & F_2(I_{\mathcal{C}}) \end{array}$$

1.3 フュージョン圏

定義 1.9: フュージョン圏

圏 \mathcal{C} が **フュージョン圏** (fusion category) であるとは,

- \mathcal{C} は **半単純な \mathbb{K} -上のアーベル圏**
- \mathcal{C} は **rigid なモノイダル圏**
- \mathcal{C} の **単純対象** の同型類が有限個
- 単位対象 $I \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ について, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(I, I) = \mathbb{K}$

が成り立つこと.

フュージョン圏 \mathcal{C} が **組紐付きフュージョン圏** (braided fusion category) であるとは, \mathcal{C} が **組紐付きモノイダル圏** でもあることを言う.

1.4 2-群

1.4.1 豊穠圏と厳密な 2-圏

まず、厳密な 2-圏 (strict 2-category) を導入する.

定義 1.10: 豊穠圏

モノイダル圏 (V, \otimes, I) を与える.

V -豊穠圏 (V -enriched category) \mathcal{C} は、以下のデータからなる:

- 集合 $\text{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して、**Hom 対象**と呼ばれる V の対象 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \in \text{Ob}(V)$ を持つ
- $\forall x, y, z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して、**合成射**と呼ばれる V の射 $\circ_{x, y, z}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$ を持つ
- $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して、**恒等素**と呼ばれる V の射 $j_x: I \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$ を持つ

これらは以下の図式を可換にしなければならない:

(associativity)

$\forall x, y, z, w \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ について^a

$$\begin{array}{ccc}
 (\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z)) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w) & \xrightarrow{\circ_{x, y, z} \otimes \text{Id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w)}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w) \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \circ_{x, z, w} \\
 & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, w) \\
 & & \uparrow \circ_{x, y, w} \\
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes (\text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w)) & \xrightarrow{\text{Id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)} \otimes \circ_{y, z, w}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, w)
 \end{array}$$

(unitality)

$\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ について^b

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) & \xrightarrow{\circ_{x, x, y}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) & \xleftarrow{\circ_{x, y, y}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, y) \\
 \uparrow j_x \otimes \text{Id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)} & \nearrow \cong & & \nwarrow \cong & \uparrow \text{Id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)} \otimes j_y \\
 I \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) & & & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes I
 \end{array}$$

^a \cong はモノイダル圏 V の associator

^b \cong はモノイダル圏 V の left/right unitor

定義 1.11: 豊穣関手

モノイダル圏 (V, \otimes, I) を与える.

2つの V -豊穣圏 \mathcal{C}, \mathcal{D} の間の V -豊穣関手 (V -enriched functor)

$$F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

は, 以下のデータからなる:

- 写像 $F_0: \text{Ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{Ob}(\mathcal{D}), x \longmapsto F_0(x)$
- V の射の族

$$\{F_{x,y}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(x), F_0(y))\}_{x,y \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは以下の図式を可換にしなくてはならない:

(enriched-1)

$\forall x, y, z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して^a

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) & \xrightarrow{\circ_{x,y,z}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z) \\ \downarrow F_{x,y} \otimes F_{y,z} & & \downarrow F_{x,z} \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(x), F_0(y)) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(y), F_0(z)) & \xrightarrow{\circ_{F_0(x), F_0(y), F_0(z)}} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(x), F_0(z)) \end{array}$$

(enriched-2)

$\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して^b

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{j_x} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x) \\ & \searrow j_{F_0(x)} & \downarrow F_{x,x} \\ & & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(x), F_0(x)) \end{array}$$

^a これは, 通常の関手において射の合成が保存されることに対応する.

^b これは, 通常の関手において恒等射が保存されることに対応する.

与えられたモノイダル圏 V に対して, V -豊穣圏のなす圏を $V\text{-Cat}$ と書く. $V\text{-Cat}$ は

- V -豊穣圏を対象とする
- V -豊穣関手を射とする

ことで得られる圏である.

定義 1.12: 厳密な 2-圏

小圏と関手の圏 \mathbf{Cat} を【例 1.2.1】の方法でモノイダル圏と見做す. \mathbf{Cat} -豊穣圏のことを厳密な 2-圏 (strict 2-category) と呼ぶ.

定義 1.12 を解説しよう。まず、小圏と関手の圏 \mathbf{Cat} における対象とは小圏のことで、射とは関手のことである。さらに、 \mathbf{Cat} のテンソル積とは【例 1.2.1】より直積 \times のことである。よって豊稜圏の定義から、厳密な 2-圏 \mathcal{C} は

- 対象 (object)^{*1} 全体の集合 $\text{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ の間の 1-射 (1-morphism)^{*2} 全体が成す圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \in \text{Ob}(\mathbf{Cat})$.
- 合成 (composition) と呼ばれる関手 $\circ: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$
- 恒等素 (identity morphism) と呼ばれる関手 $j_x: 1 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$

の 4 つのデータからなる。従って 1-射 $f: x \rightarrow y$ とは圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ の対象 $f \in \text{Ob}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y))$ のことであるから、2 つの 1-射 $f, g \in \text{Ob}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y))$ が与えられると、圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ における、それらの間の射 $\alpha \in \text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)}(f, g)$ が存在する。このような α を 2-射 (2-morphism)^{*3} と呼び、混乱防止のため $\alpha: f \rightarrow g$ と書く代わりに $\alpha: f \Rightarrow g$ と書く。

2 つの 2-射 $\alpha \in \text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)}(f, g)$, $\beta \in \text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)}(g, h)$ は、圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ における射の合成 $*$ によって結合的かつ単位的に合成することができる：

$$\begin{array}{c} x \quad \xrightarrow{\quad f \quad} \quad y \\ \quad \quad \downarrow \beta * \alpha \quad \\ \quad \quad h \end{array} \quad := \quad \begin{array}{c} x \quad \xrightarrow{\quad f \quad} \quad y \\ \quad \quad \downarrow \alpha \\ x \quad \xrightarrow{\quad g \quad} \quad y \\ \quad \quad \downarrow \beta \\ \quad \quad h \end{array}$$

このような 2-射の合成を縦の合成 (vertical composition) と呼ぶ。一方、4 つの 1-射 $f, g: x \rightarrow y$, $f', g': y \rightarrow z$ および 2 つの 2-射 $\alpha: f \Rightarrow g$, $\alpha': f' \Rightarrow g'$ が与えられたとき、1-射の合成 \circ が関手であることによって、圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z)$ の射 $(\alpha, \alpha'): (f, f') \rightarrow (g, g')$ に対して圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$ の射、i.e. 2-射

$$\alpha' \circ \alpha := \circ(\alpha, \alpha'): f' \circ f \Rightarrow g' \circ g$$

が対応付く：

$$\begin{array}{c} x \quad \xrightarrow{\quad f' \circ f \quad} \quad z \\ \quad \quad \downarrow \alpha' \circ \alpha \quad \\ \quad \quad g' \circ g \end{array} \quad := \quad \begin{array}{c} x \quad \xrightarrow{\quad f \quad} \quad y \quad \xrightarrow{\quad f' \quad} \quad z \\ \quad \quad \downarrow \alpha \quad \quad \downarrow \alpha' \\ x \quad \xrightarrow{\quad g \quad} \quad y \quad \xrightarrow{\quad g' \quad} \quad z \end{array}$$

このような 2-射の合成を横の合成 (horizontal composition) と呼ぶ。横の合成は、モノイダル圏 \mathbf{Cat} が厳密なモノイダル圏であること、および関手 \circ の (associativity), (unitality) によって結合的かつ単位的になる。

^{*1} 0-セル (0-cell) とも言う

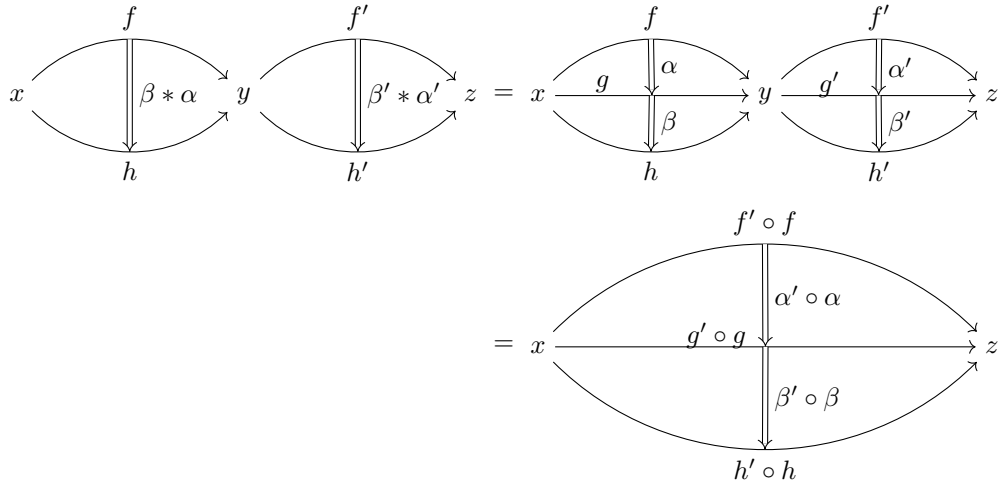
^{*2} 1-セル (1-cell) とも言う。正確には、圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ の対象のことを 1-射と呼ぶ。

^{*3} 2-セル (2-cell) とも言う

縦の合成と横の合成は、 \circ が関手であることによって交換する：

$$\begin{aligned} (\beta' * \alpha') \circ (\beta * \alpha) &= \circ((\beta, \beta') * (\alpha, \alpha')) \\ &= (\circ(\beta, \beta')) * (\circ(\alpha, \alpha')) \\ &= (\beta' \circ \beta) * (\alpha' \circ \alpha) \end{aligned}$$

図式で書くと一目瞭然である：



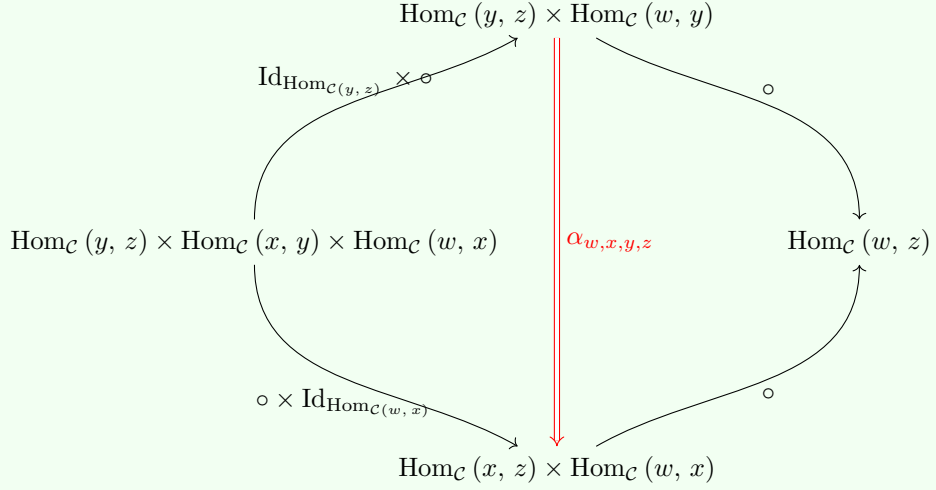
定義 1.13: 2-圏

厳密な 2-圏と同様の

- 対象 (object)^a 全体の集合 $\text{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ の間の 1-射 (1-morphism)^b 全体が成す圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \in \text{Ob}(\mathbf{Cat})$.
- 合成 (composition) と呼ばれる関手 $\circ: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$
- 恒等素 (identity morphism) と呼ばれる関手 $j_x: 1 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$

の 4 つのデータに加えて

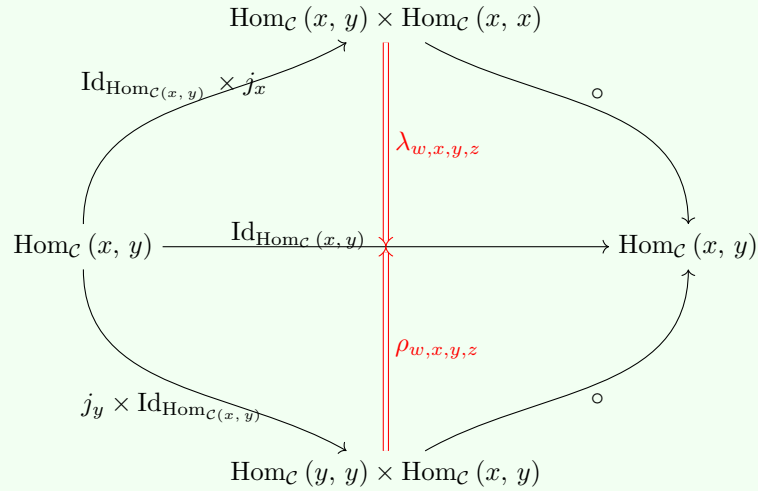
- $\forall x, y, z, w \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して **associator** と呼ばれる自然同型^c.



- $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して **left/right unitor** と呼ばれる自然同型

$$\lambda_{x,y} := \{l_{x,y}f: f \mapsto f \circ j_x(1)\}_{f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)}$$

$$\rho_{x,y} := \{l_{x,y}f: f \mapsto j_x(1) \circ f\}_{f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)}$$



を持ち,

- associator が **(pentagon identity)** を
- unitors が **(triangle identity)** を

満たす \mathcal{C} のことを **2-圏** (2-category) と呼ぶ.

^a **0-セル** (0-cell) とも言う

^b **1-セル** (1-cell) とも言う. 正確には, 圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ の対象のことを 1-射と呼ぶ.

^c これは圏 **Cat** における図式である.

要するに、**厳密な 2-圏**において合成 \circ の associativity および unitality を自然同型まで弱めたものが **2-圏** である。

【例 1.4.1】2-圏としてのモノイダル圏

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, \{a_{x,y,z}\}, \{l_x\}, \{r_y\})$ は **2-圏** である。実際、2-圏 \mathbf{BC} を

- $\text{Ob}(\mathbf{BC}) := \{\bullet\}$ (1 点集合)
- $\text{Hom}_{\mathbf{BC}}(\bullet, \bullet) := \mathcal{C}$
- $\circ := \otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$
- $j_x := \iota_I: I \hookrightarrow \mathcal{C}$
- $\alpha_{\bullet, \bullet, \bullet} := \{a_{x,y,z}\}$
- $\lambda_{\bullet, \bullet} := \{l_{x,y,z}\}, \quad \rho_{\bullet, \bullet} := \{r_{x,y,z}\}$

により定義すると $\mathcal{C} = \mathbf{BC}$ となる。

1.4.2 弱い 2-群・コヒーレントな 2-群・厳密な 2-群

[?] に倣い **2-群** (2-group) を導入する。

定義 1.14: 弱い逆対象

モノイダル圏 \mathcal{C} の対象 $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を 1 つとる。

- 対象 $y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が x の **弱い逆対象** (weak inverse) であるとは、対象の同型の意味で^a $x \otimes y \cong 1$ かつ $y \otimes x \cong 1$ が成り立つことを言う。
- x が **弱可逆** (weakly invertible) であるとは、 x が弱い逆対象を持つことを言う。

^a 自然同型ではない

定義 1.15: 弱い 2-群・コヒーレントな 2-群

- **弱い 2-群** (weak 2-group) とは、**モノイダル圏** \mathcal{G} であって、任意の対象が **弱可逆** かつ任意の射が同型射であるもののこと。
- **コヒーレントな 2-群** (coherent 2-group) とは、**モノイダル圏** \mathcal{G} であって、任意の対象 $x \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ が可逆な **unit**, **counit** (x, \bar{x}, i_x, e_x) を持ち、かつ任意の射が同型射であるもののこと。

定理 1.1: 弱い 2-群はコヒーレントな 2-群

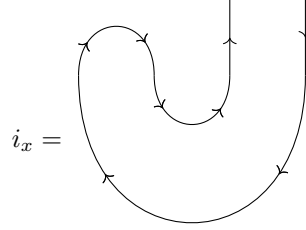
任意の **弱い 2-群** は **コヒーレントな 2-群** にすることができる。

証明 勝手な **弱い 2-群** \mathcal{G} を 1 つ固定する。このとき $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ に対してある $\bar{x} \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ および同型射 $i'_x: 1 \longrightarrow x \otimes \bar{x}, e'_x: \bar{x} \otimes x \longrightarrow 1$ が存在する。

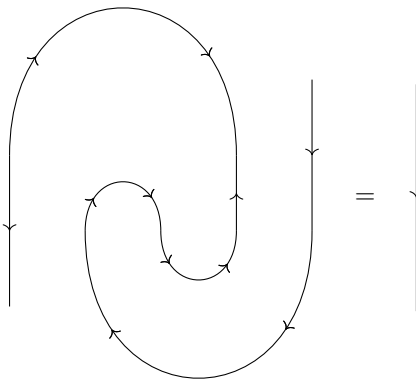
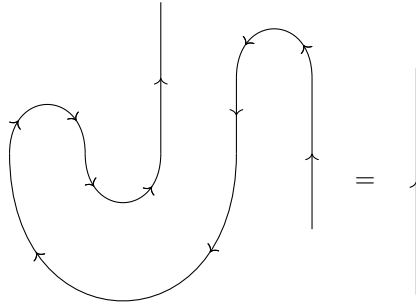
ここで $e_x := e'_x$ とおき,

$$i_x := (l_x \otimes \text{Id}_{\bar{x}}) \circ a_{1,x,\bar{x}}^{-1} \circ (i_x'^{-1} \otimes \text{Id}_{x \otimes \bar{x}}) \circ a_{x,\bar{x},x \otimes \bar{x}}^{-1} \circ (\text{Id}_x \otimes a_{\bar{x},x,\bar{x}}) \circ (\text{Id}_x \otimes e_x'^{-1} \otimes \text{Id}_{\bar{x}}) \circ (\text{Id}_x \otimes l_{\bar{x}}^{-1}) \circ i_x'$$

とおくと組 (x, \bar{x}, i_x, e_x) が **zig-zag equation** を満たすことを示す. 実際, i_x の定義をストリング図式で書くと



となるから,



が成り立つ. ■

! 定理 1.1 を踏まえ, 以下では**コヒーレントな 2-群**のことを単に **2-群** (2-group) と呼ぶ.

定義 1.16: 2-群の準同型

2-群 $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ の間の準同型とは, モノイダル関手 $f: \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ のこと.