第 1 章

代数の小技集

1.0.1 ベクトル空間の小技

次数が n 以下の 1 変数 $\mathbb{K}$-係数多項式環を $\mathbb{K}[t]^{\leq n}$ と書く．

定義 1.1: 終結式

$\mathbb{K}$ を体とし，$\mathbb{K}$-係数多項式 $f,\, g \in \mathbb{K}[t]$ を与える．

- $f,\, g$ の **Sylvester 行列** (Sylvester matrix) とは，$\mathbb{K}$-線形写像

$$\varphi(f,\, g)\colon \mathbb{K}[t]^{\leq \deg g} \times \mathbb{K}[t]^{\leq \deg f} \longrightarrow \mathbb{K}[t]^{\deg f + \deg g},\ (P,\, Q) \longmapsto fP + gQ$$

  の，基底 $1,\, t,\, \dots,\, t^{\deg f + \deg g}$ に関する表現行列のこと．
- $f,\, g$ の**終結式** (resultant) とは，Sylvester 行列 $\varphi(f,\, g)$ の行列式

$$\boldsymbol{\mathrm{res}(f,\, g)} \coloneqq \det \varphi(f,\, g)$$

  のこと．

命題 1.1: 終結式の基本性質

$\mathbb{K}$ を体とし，$\mathbb{K}$-係数多項式 $f = \sum_{k=0}^{\deg f} f_k t^k,\ g = \sum_{k=0}^{\deg g} g_k t^k \in \mathbb{K}[t]$ を与える．このとき以下が成り立つ：

(1)

$$
\mathrm{res}(f,\,g) = \begin{vmatrix}
f_0 & & & g_0 & & & \\
f_1 & \ddots & & g_1 & \ddots & & \\
\vdots & \ddots & f_0 & \vdots & \ddots & \ddots & \\
\vdots & & f_1 & g_{\deg g} & & \ddots & g_0 \\
f_{\deg f} & & \vdots & & \ddots & & g_1 \\
& \ddots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\
& & f_{\deg f} & & & & g_{\deg g}
\end{vmatrix}
$$

(2) $\mathbb{K}$ が代数閉体ならば，$f,\,g$ の根を重複込みでそれぞれ $\lambda_i,\,\mu_j$ と書くと

$$
\mathrm{res}(f,\,g) = (f_{\deg f})^{\deg g}(g_{\deg g})^{\deg f} \prod_{\substack{1\le i\le \deg f\\ 1\le j\le \deg g}} (\lambda_i - \mu_j)
$$

が成り立つ．

<u>証明</u>　(1) $P = \sum_{k=0}^{\deg g} P_k t^k$, $Q = \sum_{k=0}^{\deg f} Q_k t^k$ とすると，$f,\,g$ の Sylvester 行列は

$$
\varphi(f,\,g)(P,\,Q) = \sum_{k=0}^{\deg f}\sum_{l=0}^{\deg g} f_k P_l t^{k+l} + \sum_{l=0}^{\deg f}\sum_{k=0}^{\deg g} g_k Q_l t^{k+l}
$$

であるから，$P_l = \delta^i_l$, $Q_l = \delta^j_l$ w/ $1 \le i \le \deg g$, $1 \le j \le \deg f$ のときを考えると

$$
\varphi(f,\,g)(t^i,\,0) = \sum_{k=0}^{\deg f} f_k t^{k+i}
$$

$$
\varphi(f,\,g)(0,\,t^j) = \sum_{k=0}^{\deg g} g_k t^{k+j}
$$

となり，$(t^i,\,0) = t^i$, $(0,\,t^j) = t^{\deg g + j}$ と見做して $\mathbb{K}[t]^{\le \deg g} \times \mathbb{K}[t]^{\le \deg f}$ の基底を $\mathbb{K}[t]^{\deg f + \deg g}$ の基底と同一視することで $[\mathrm{res}(f,\,g)]^{k+i}{}_i = f_k$, $[\mathrm{res}(f,\,g)]^{k+j}{}_{\deg g + j} = g_k$ が分かった．

(2) 解と係数の関係より，

$$
A \coloneqq \frac{1}{(f_{\deg f})^{\deg g}(g_{\deg g})^{\deg f}}\varphi(f,\,g)
$$

の非ゼロな行列成分は 1 または λ_i の基本対称式または μ_j の基本対称式である．i.e. A は $\lambda_i,\,\mu_j$ の多項式である．

$1 \le \forall i \le \deg f$, $1 \le \forall j \le \deg g$ を固定する．$\lambda_i = \mu_j \eqqcolon \lambda$ ならば，

$$
\boldsymbol{x} \coloneqq \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{\deg f + \deg g} \end{bmatrix}
$$

とおくと $A^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x} = 0$ かつ $\boldsymbol{x} \neq 0$，i.e. $\operatorname{Ker}\varphi(f,\, g) \neq \{0\}$ であることが分かった．従って $\lambda_i,\, \mu_j$ の多項式として $\lambda_i = \mu_j$ ならば $\operatorname{res}(f,\, g) = \det\varphi(f,\, g) = 0$ となるから，因数定理より

$$\operatorname{res}(f,\, g) = (f_{\deg f})^{\deg g}(g_{\deg g})^{\deg f} \prod_{\substack{1\leq i\leq \deg f \\ 1\leq j\leq \deg g}} (\lambda_i - \mu_j)$$

が示された．

■

1.0.2　環の小技