

# 第 1 章

## モノイダル圏・フュージョン圏・高次群

この章では標数 0 の体  $\mathbb{K}$  のみを考える.

### 1.1 加法圏

#### 定義 1.1: 加法圏・アーベル圏

圏  $\mathcal{C}$  が体  $\mathbb{K}$  上の**加法圏** (additive category) であるとは, 以下を充たすこと:

##### (add-1)

任意の Hom 集合  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  が  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間の構造をもち, かつ射の合成

$$\circ: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

が  $\mathbb{K}$ -双線形写像である.

##### (add-2)

**零対象**<sup>a</sup> (zero object)  $\mathbf{0} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  が存在し,  $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  に対して  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{0}, X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathbf{0}) = 0$  を充たす<sup>b</sup>.

##### (add-3)

有限の余積が常に存在する.

<sup>a</sup> 始対象かつ終対象

<sup>b</sup> 最右辺は (add-1) の意味で零ベクトル空間.

加法圏  $\mathcal{C}$  は, 以下の条件を充たすとき**アーベル圏** (abelian category) と呼ばれる:

##### (Ab-1)

任意の射  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  が核  $\ker f: \text{Ker } f \longrightarrow X$  および余核  $\text{coker } f: Y \longrightarrow \text{Coker } f$  を持つ.

##### (Ab-2)

$\text{Ker } f = \mathbf{0}$  ならば  $f = \ker(\text{coker } f)$ , かつ  $\text{Coker } f = \mathbf{0}$  ならば  $f = \text{coker}(\ker f)$

以下では**加法圏**  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  の間の関手  $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  には,  $F_{X,Y}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ ,  $f \longmapsto$

$F(f)$  が  $\mathbb{K}$ -線型写像となることを常に要請する.

### 【例 1.1.1】表現の圏

$G$  を群とする. このとき

- $G$  の表現  $(\rho, V)$  を対象とする
- $G$ -同変な  $\mathbb{K}$ -線型写像  $(\rho, V) \xrightarrow{f} (\rho', V')$  を射とする

圏を  $\mathbf{Rep}(G)$  と書く.  $\mathbf{Rep}(G)$  はアーベル圏である.

### 定義 1.2: 単純・半単純

- アーベル圏  $\mathcal{C}$  の対象  $X \in \mathcal{C}$  が単純 (simple) であるとは, 任意のモノ射  $i: U \hookrightarrow X$  が 0 であるか同型射であることを言う.
- アーベル圏  $\mathcal{C}$  が半単純 (semisimple) であるとは,  $\forall X \in \mathcal{C}$  が単純対象の有限余積と同型であることを言う. i.e. 単純対象の族  $\{V_i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})\}_{i \in I}$  および有限個を除いて 0 であるような非負整数の族  $\{N_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}_{i \in I}$  が存在して

$$X \cong \bigoplus_{i \in I} N_i X_i$$

が成り立つこと.

## 1.2 モノイダル圏

これまででも何回か登場したが, モノイダル圏についてまとめておく:

### 定義 1.3: モノイダル圏

モノイダル圏 (monoidal category) は, 以下の 5 つのデータからなる:

- 圏  $\mathcal{C}$
- テンソル積 (tensor product) と呼ばれる関手  $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$
- 単位対象 (unit object)  $I \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$
- associator と呼ばれる自然同値

$$\{a_{X,Y,Z}: (X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{\cong} X \otimes (Y \otimes Z)\}_{X,Y,Z \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})}$$

- left/right unitors と呼ばれる自然同値

$$\{l_X: I \otimes X \xrightarrow{\cong} X\}_{X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})},$$

$$\{r_X: X \otimes I \xrightarrow{\cong} X\}_{X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは  $\forall X, Y, Z, W \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$  について以下の 2 つの図式を可換にする:

(triangle diagram)

$$\begin{array}{ccc}
 (X \otimes I) \otimes Y & \xrightarrow{a_{X, I, Y}} & X \otimes (I \otimes Y) \\
 \searrow r_X \otimes \text{Id}_Y & & \swarrow \text{Id}_X \otimes l_Y \\
 & X \otimes Y &
 \end{array}$$

(pentagon diagram)

$$\begin{array}{ccccc}
 & & ((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z & & \\
 & \swarrow a_{W \otimes X, Y, Z} & & \searrow a_{W, X, Y \otimes \text{Id}_Z} & \\
 (W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) & & & & (W \otimes (X \otimes Y)) \otimes Z \\
 & \searrow a_{W, X, Y \otimes Z} & & \downarrow a_{W, X \otimes Y, Z} & \\
 & & W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z)) & & W \otimes ((X \otimes Y) \otimes Z) \\
 & & \swarrow \text{Id}_Z \otimes a_{X, Y, Z} & & \\
 & & & &
 \end{array}$$

モノイダル圏  $\mathcal{C}$  が**厳密** (strict) であるとは,  $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  に対して

$$\begin{aligned}
 (X \otimes Y) \otimes Z &= X \otimes (Y \otimes Z), \\
 I \otimes X &= X, \quad X \otimes I = X
 \end{aligned}$$

が成り立ち, かつ  $a_{X, Y, Z}, l_X, r_X$  が恒等射であることを言う.

! 定義 1.3 で言うモノイダル圏を, **弱いモノイダル圏** (weak monoidal category) と呼ぶこともある.

### 【例 1.2.1】 $\mathbf{Cat}$ のモノイダル構造

$\mathbf{Cat}$  を小圏と関手が成す圏とする. このとき, 関手

$$\times: \mathbf{Cat} \times \mathbf{Cat} \longrightarrow \mathbf{Cat}$$

を  $\text{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) := \text{Ob}(\mathcal{C}) \times \text{Ob}(\mathcal{D})$  により定めると, 組み  $(\mathbf{Cat}, \times, I)$  は厳密なモノイダル圏になる. ただし  $I$  はただ 1 つの対象  $\bullet$  を持ち,  $\text{Hom}_I(\bullet, \bullet) = \{\text{Id}_\bullet\}$  とする圏である<sup>a</sup>

<sup>a</sup> これは  $\mathbf{Cat}$  の終対象でもある.

#### 定義 1.4: 組紐付きモノイダル圏

組紐付きモノイダル圏 (braided monoidal category) とは, 以下の 2 つからなる:

- モノイダル圏  $\mathcal{C}$
- 組紐 (braiding) と呼ばれる自然同型

$$\{b_{X,Y}: X \otimes Y \xrightarrow{\cong} Y \otimes X\}_{X,Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは  $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  について以下の図式を可換にする:

(hexagon diagrams)

$$\begin{array}{ccccc} X \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{a_{X,Y,Z}^{-1}} & (X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{b_{X,Y} \otimes \text{Id}_Z} & (Y \otimes X) \otimes Z \\ \downarrow b_{X,Y \otimes Z} & & & & \downarrow a_{Y,X,Z} \\ (Y \otimes Z) \otimes X & \xleftarrow{a_{Y,Z,X}^{-1}} & Y \otimes (Z \otimes X) & \xleftarrow{\text{Id}_X \otimes b_{X,Z}} & Y \otimes (X \otimes Z) \\ \\ (X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{a_{X,Y,Z}} & X \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{\text{Id}_X \otimes b_{Y,Z}} & X \otimes (Z \otimes Y) \\ \downarrow b_{X \otimes Y, Z} & & & & \downarrow a_{X,Z,Y}^{-1} \\ Z \otimes (X \otimes Y) & \xleftarrow{a_{Z,X,Y}} & (Z \otimes X) \otimes Y & \xleftarrow{b_{X,Z} \otimes \text{Id}_Y} & (X \otimes Z) \otimes Y \end{array}$$

組紐付きモノイダル圏  $\mathcal{C}$  であって,  $\mathcal{C}$  の組紐が  $b_{X,Y} = b_{Y,X}^{-1}$  を満たすもののことを対称モノイダル圏 (symmetric monoidal category) と呼ぶ.

#### 定義 1.5: 双対

モノイダル圏  $\mathcal{C}$  およびその任意の対象  $X, X^* \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  を与える.  $X^*$  が  $X$  の左双対 (left dual) であり, かつ  $X$  が  $X^*$  の右双対 (right dual) であるとは,

- coevaluation と呼ばれる射

$$i_X: I \longrightarrow X \otimes X^*$$

- evaluation と呼ばれる射

$$e_X: X^* \otimes X \longrightarrow I$$

が存在して以下の図式を可換にすることを言う:

(zig-zag equations)

$$\begin{array}{ccc}
I \otimes X & \xrightarrow{i_X \otimes \text{Id}_X} & (X \otimes X^*) \otimes X \\
\downarrow r_X & & \downarrow a_{X, X^*, X} \\
& & X \otimes (X^* \otimes X) \\
& & \downarrow \text{Id}_X \otimes e_X \\
X & \xleftarrow{r_X} & X \otimes I
\end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccc}
X^* \otimes I & \xrightarrow{\text{Id}_{X^*} \otimes i_X} & X^* \otimes (X \otimes X^*) \\
\downarrow l_{X^*} & & \downarrow a_{X^*, X, X^*}^{-1} \\
& & (X^* \otimes X) \otimes X^* \\
& & \downarrow e_X \otimes \text{Id}_{X^*} \\
X^* & \xleftarrow{l_{X^*}} & I \otimes X^*
\end{array}$$

ストリング図式で書くときは

$$i_X := \text{cup} \quad e_X := \text{cap} \quad e_X^{-1} := \text{cup} \quad i_X^{-1} := \text{cap}$$

とする。ストリング図式において (zig-zag equations) は

$$\begin{array}{c}
\text{vertical line with upward arrow} \\
= \\
\text{zig-zag shape with upward arrows}
\end{array}$$
  

$$\begin{array}{c}
\text{vertical line with downward arrow} \\
= \\
\text{zig-zag shape with downward arrows}
\end{array}$$

と書ける。

#### 定義 1.6: rigid なモノイダル圏

モノイダル圏  $\mathcal{C}$  が **rigid** であるとは,  $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  が左・右双対を持つことを言う。



これまでは圏  $\mathcal{C}$  の対象を大文字で書いてきたが、以下では文脈によっては小文字で書くことがある。

### 定義 1.7: モノイダル関手

2つのモノイダル圏  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  の間の関手

$$F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

が**弱いモノイダル関手** (lax monoidal functor) であるとは,

- 射

$$\varepsilon: I_{\mathcal{D}} \longrightarrow F(I_{\mathcal{C}})$$

- 自然変換

$$\{\mu_{X,Y}: F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y) \longrightarrow F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y)\}_{X,Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

があって,  $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  に対して以下の図式が可換になること:

**(associativity)**

$$\begin{array}{ccc} (F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y)) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z) & \xrightarrow{a_{F(X), F(Y), F(Z)}^{\mathcal{D}}} & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} (F(Y) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z)) \\ \downarrow \mu_{X,Y} \otimes \text{Id}_{F(Z)} & & \downarrow \text{Id}_{F(X)} \otimes \mu_{Y,Z} \\ F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z) & & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y \otimes_{\mathcal{C}} Z) \\ \downarrow \mu_{X \otimes_{\mathcal{C}} Y, Z} & & \downarrow \mu_{X, Y \otimes_{\mathcal{C}} Z} \\ F((X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{C}} Z) & \xrightarrow{F(a_{X,Y,Z}^{\mathcal{C}})} & F(X \otimes_{\mathcal{C}} (Y \otimes_{\mathcal{C}} Z)) \end{array}$$

**(unitality)**

$$\begin{array}{ccc} I_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathcal{D}} F(X) & \xrightarrow{\varepsilon \otimes \text{Id}_{F(X)}} & F(I_{\mathcal{C}}) \otimes_{\mathcal{D}} F(X) \\ \downarrow l_{F(X)}^{\mathcal{D}} & & \downarrow \mu_{I_{\mathcal{C}}, X} \\ F(X) & \xleftarrow{F(l_X^{\mathcal{C}})} & F(I_{\mathcal{C}} \otimes_{\mathcal{C}} X) \\ \\ F(X) \otimes_{\mathcal{D}} I_{\mathcal{D}} & \xrightarrow{\text{Id}_{F(X)} \otimes \varepsilon} & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(I_{\mathcal{C}}) \\ \downarrow r_{F(X)}^{\mathcal{D}} & & \downarrow \mu_{X, I_{\mathcal{C}}} \\ F(X) & \xleftarrow{F(r_X^{\mathcal{C}})} & F(X \otimes_{\mathcal{C}} I_{\mathcal{C}}) \end{array}$$

- 弱いモノイダル関手  $F$  の  $\varepsilon$  と  $\mu_{X,Y}$  が全て同型射ならば,  $F$  は**強いモノイダル関手** (strong monoidal functor) と呼ばれる.
- 弱いモノイダル関手  $F$  の  $\varepsilon$  と  $\mu_{X,Y}$  が全て恒等射ならば,  $F$  は**厳密なモノイダル関手** (strict monoidal functor) と呼ばれる.

### 定義 1.8: モノイダル自然変換

2 つの **モノイダル圏**  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  の間の 2 つの **弱いモノイダル関手**  $(F_i: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, \varepsilon_i: I_{\mathcal{D}} \rightarrow F(I_{\mathcal{C}}), \{\mu_{iX,Y}: F_i(X) \otimes F_i(Y) \rightarrow F_i(X \otimes Y)\}_{X,Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})})$   $w/ i = 1, 2$  の間の自然変換

$$\begin{array}{ccc} & F_1 & \\ \curvearrowright & \downarrow \tau & \curvearrowleft \\ \mathcal{C} & & \mathcal{D} \\ & F_2 & \end{array}$$

が **モノイダル自然変換** (monoidal natural transformation) であるとは,  $\forall X, Y \in \mathcal{C}$  に対して以下の図式が可換になること:

(テンソル積の保存)

$$\begin{array}{ccc} F_1(X) \otimes_{\mathcal{D}} F_1(Y) & \xrightarrow{\tau_X \otimes_{\mathcal{D}} \tau_Y} & F_2(X) \otimes_{\mathcal{D}} F_2(Y) \\ \mu_{1X,Y} \downarrow & & \downarrow \mu_{2X,Y} \\ F_1(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) & \xrightarrow{\tau_{X \otimes_{\mathcal{C}} Y}} & F_2(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \end{array}$$

(単位対象の保存)

$$\begin{array}{ccc} & I_{\mathcal{D}} & \\ \varepsilon_1 \swarrow & & \searrow \varepsilon_2 \\ F_1(I_{\mathcal{C}}) & \xrightarrow{\tau_{I_{\mathcal{C}}}} & F_2(I_{\mathcal{C}}) \end{array}$$

## 1.3 フュージョン圏

### 定義 1.9: フュージョン圏

圏  $\mathcal{C}$  が **フュージョン圏** (fusion category) であるとは,

- $\mathcal{C}$  は **半単純な  $\mathbb{K}$ -上のアーベル圏**
- $\mathcal{C}$  は **rigid なモノイダル圏**
- $\mathcal{C}$  の **単純対象** の同型類が有限個
- 単位対象  $I \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  について,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(I, I) = \mathbb{K}$

が成り立つこと.

フュージョン圏  $\mathcal{C}$  が **組紐付きフュージョン圏** (braided fusion category) であるとは,  $\mathcal{C}$  が **組紐付きモノイダル圏** でもあることを言う.

## 1.4 2-群

### 1.4.1 豊穠圏と2-圏

まず、厳密な 2-圏 (strict 2-category) を導入する.

#### 定義 1.10: 豊穠圏

モノイダル圏  $(V, \otimes, I)$  を与える.

$V$ -豊穠圏 ( $V$ -enriched category)  $\mathcal{C}$  は、以下のデータからなる:

- 集合  $\text{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  に対して、**Hom 対象**と呼ばれる  $V$  の対象  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \in \text{Ob}(V)$  を持つ
- $\forall x, y, z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  に対して、**合成射**と呼ばれる  $V$  の射  $\circ_{x, y, z}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$  を持つ
- $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  に対して、**恒等素**と呼ばれる  $V$  の射  $j_x: I \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$  を持つ

これらは以下の図式を可換にしなければならない:

(associativity)

$\forall x, y, z, w \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  について<sup>a</sup>

$$\begin{array}{ccc}
 (\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z)) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w) & \xrightarrow{\circ_{x, y, z} \otimes \text{Id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w)}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w) \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \circ_{x, z, w} \\
 & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, w) \\
 & & \uparrow \circ_{x, y, w} \\
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes (\text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w)) & \xrightarrow{\text{Id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)} \otimes \circ_{y, z, w}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, w)
 \end{array}$$

(unitality)

$\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  について<sup>b</sup>

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) & \xrightarrow{\circ_{x, x, y}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) & \xleftarrow{\circ_{x, y, y}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, y) \\
 \uparrow j_x \otimes \text{Id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)} & \nearrow \cong & & \nwarrow \cong & \uparrow \text{Id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)} \otimes j_y \\
 I \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) & & & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes I
 \end{array}$$

<sup>a</sup>  $\cong$  はモノイダル圏  $V$  の associator

<sup>b</sup>  $\cong$  はモノイダル圏  $V$  の left/right unitor



### 定義 1.11: 豊穣関手

モノイダル圏  $(V, \otimes, I)$  を与える.

2つの  $V$ -豊穣圏  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  の間の  $V$ -豊穣関手 ( $V$ -enriched functor)

$$F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

は, 以下のデータからなる:

- 写像  $F_0: \text{Ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{Ob}(\mathcal{D}), x \longmapsto F_0(x)$
- $V$  の射の族

$$\{F_{x,y}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(x), F_0(y))\}_{x,y \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは以下の図式を可換にしなくてはならない:

(enriched-1)

$\forall x, y, z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  に対して<sup>a</sup>

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) & \xrightarrow{\circ_{x,y,z}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z) \\ \downarrow F_{x,y} \otimes F_{y,z} & & \downarrow F_{x,z} \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(x), F_0(y)) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(y), F_0(z)) & \xrightarrow{\circ_{F_0(x), F_0(y), F_0(z)}} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(x), F_0(z)) \end{array}$$

(enriched-2)

$\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  に対して<sup>b</sup>

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{j_x} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x) \\ & \searrow j_{F_0(x)} & \downarrow F_{x,x} \\ & & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(x), F_0(x)) \end{array}$$

<sup>a</sup> これは, 通常の関手において射の合成が保存されることに対応する.

<sup>b</sup> これは, 通常の関手において恒等射が保存されることに対応する.

与えられたモノイダル圏  $V$  に対して,  $V$ -豊穣圏のなす圏を  $V\text{-Cat}$  と書く.  $V\text{-Cat}$  は

- $V$ -豊穣圏を対象とする
- $V$ -豊穣関手を射とする

ことで得られる圏である.

### 定義 1.12: 厳密な 2-圏

小圏と関手の圏  $\mathbf{Cat}$  を【例 1.2.1】の方法でモノイダル圏と見做す.  $\mathbf{Cat}$ -豊穣圏のことを厳密な 2-圏 (strict 2-category) と呼ぶ.

定義 1.12 を解説しよう．まず，小圏と関手の圏  $\mathbf{Cat}$  における対象とは小圏のことで，射とは関手のことである．さらに， $\mathbf{Cat}$  のテンソル積とは【例 1.2.1】より直積  $\times$  のことである．よって豊稜圏の定義から，厳密な 2-圏  $\mathcal{C}$  は

- 対象 (object)<sup>\*1</sup> 全体の集合  $\text{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  の間の 1-射 (1-morphism)<sup>\*2</sup> 全体が成す圏  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \in \text{Ob}(\mathbf{Cat})$ .
- 合成 (composition) と呼ばれる関手  $\circ: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$
- 恒等素 (identity morphism) と呼ばれる関手  $j_x: 1 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$

の 4 つのデータからなる．従って 1-射  $f: x \rightarrow y$  とは圏  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$  の対象  $f \in \text{Ob}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y))$  のことであるから，2 つの 1-射  $f, g \in \text{Ob}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y))$  が与えられると，圏  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$  における，それらの間の射  $\alpha \in \text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)}(f, g)$  が存在する．このような  $\alpha$  を 2-射 (2-morphism)<sup>\*3</sup> と呼び，混乱防止のため  $\alpha: f \rightarrow g$  と書く代わりに  $\alpha: f \Rightarrow g$  と書く．

2 つの 2-射  $\alpha \in \text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)}(f, g)$ ,  $\beta \in \text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)}(g, h)$  は，圏  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$  における射の合成  $*$  によって結合的かつ単位的に合成することができる：

$$\begin{array}{c} x \quad \xrightarrow{\quad f \quad} \quad y \\ \quad \quad \downarrow \beta * \alpha \quad \\ \quad \quad h \end{array} \quad := \quad \begin{array}{c} x \quad \xrightarrow{\quad f \quad} \quad y \\ \quad \quad \downarrow \alpha \quad \\ \quad \quad g \quad \xrightarrow{\quad \quad} \quad y \\ \quad \quad \downarrow \beta \quad \\ \quad \quad h \end{array}$$

このような 2-射の合成を縦の合成 (vertical composition) と呼ぶ．一方，4 つの 1-射  $f, g: x \rightarrow y$ ,  $f', g': y \rightarrow z$  および 2 つの 2-射  $\alpha: f \Rightarrow g$ ,  $\alpha': f' \Rightarrow g'$  が与えられたとき，1-射の合成  $\circ$  が関手であることによって，圏  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z)$  の射  $(\alpha, \alpha'): (f, f') \rightarrow (g, g')$  に対して圏  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$  の射，i.e. 2-射

$$\alpha' \circ \alpha := \circ(\alpha, \alpha'): f' \circ f \Rightarrow g' \circ g$$

が対応付く：

$$\begin{array}{c} x \quad \xrightarrow{\quad f' \circ f \quad} \quad z \\ \quad \quad \downarrow \alpha' \circ \alpha \quad \\ \quad \quad g' \circ g \end{array} \quad := \quad \begin{array}{c} x \quad \xrightarrow{\quad f \quad} \quad y \quad \xrightarrow{\quad f' \quad} \quad z \\ \quad \quad \downarrow \alpha \quad \quad \downarrow \alpha' \quad \\ \quad \quad g \quad \quad \quad g' \end{array}$$

このような 2-射の合成を横の合成 (horizontal composition) と呼ぶ．横の合成は，モノイダル圏  $\mathbf{Cat}$  が厳密なモノイダル圏であること，および関手  $\circ$  の (associativity), (unitality) によって結合的かつ単位的になる．

<sup>\*1</sup> 0-セル (0-cell) とも言う

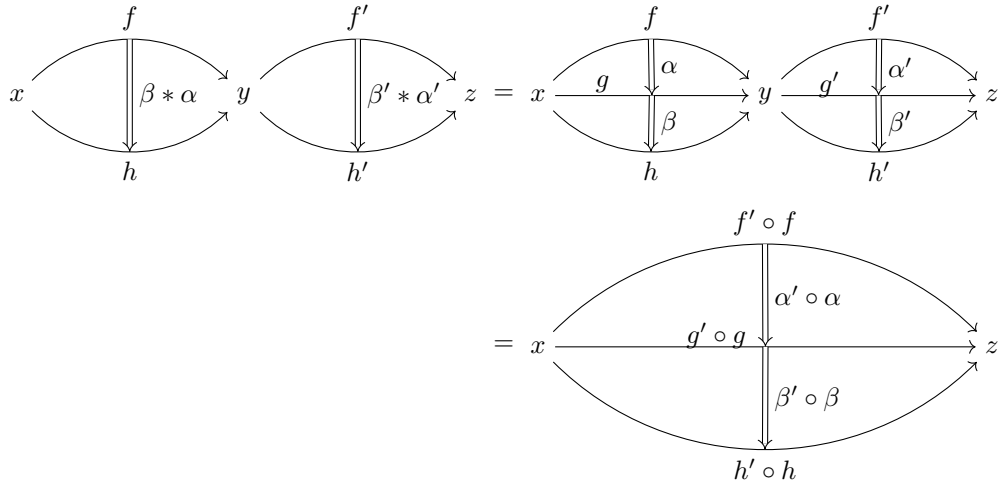
<sup>\*2</sup> 1-セル (1-cell) とも言う．正確には，圏  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$  の対象のことを 1-射と呼ぶ．

<sup>\*3</sup> 2-セル (2-cell) とも言う

縦の合成と横の合成は、 $\circ$  が関手であることによって交換する：

$$\begin{aligned} (\beta' * \alpha') \circ (\beta * \alpha) &= \circ((\beta, \beta') * (\alpha, \alpha')) \\ &= (\circ(\beta, \beta')) * (\circ(\alpha, \alpha')) \\ &= (\beta' \circ \beta) * (\alpha' \circ \alpha) \end{aligned}$$

図式で書くと一目瞭然である：



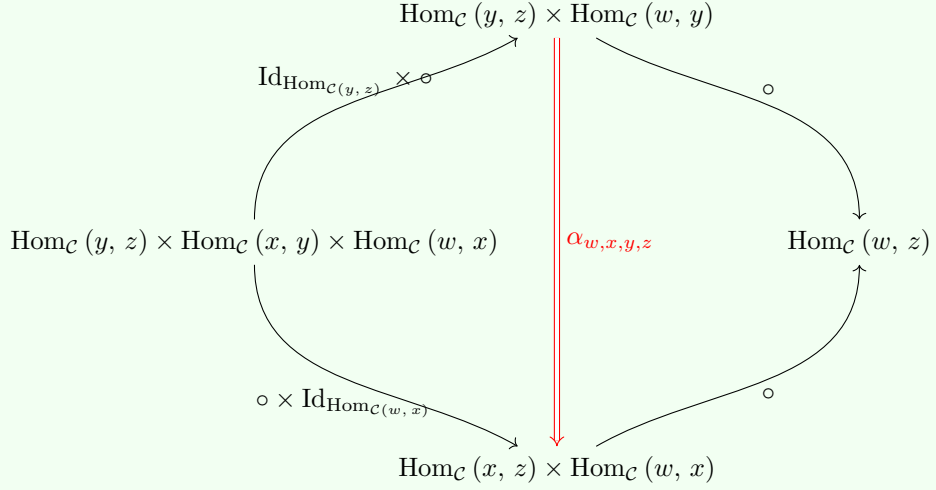
### 定義 1.13: 2-圏

厳密な 2-圏と同様の

- 対象 (object)<sup>a</sup> 全体の集合  $\text{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  の間の 1-射 (1-morphism)<sup>b</sup> 全体が成す圏  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \in \text{Ob}(\mathbf{Cat})$ .
- 合成 (composition) と呼ばれる関手  $\circ: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$
- 恒等素 (identity morphism) と呼ばれる関手  $j_x: 1 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$

の 4 つのデータに加えて

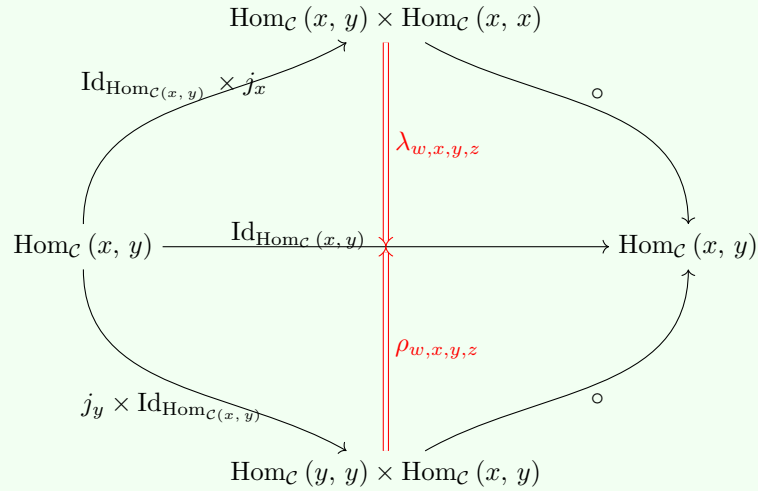
- $\forall x, y, z, w \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  に対して **associator** と呼ばれる自然同型<sup>c</sup>.



- $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  に対して **left/right unitor** と呼ばれる自然同型

$$\lambda_{x,y} := \{l_{x,y}f: f \mapsto f \circ j_x(1)\}_{f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)}$$

$$\rho_{x,y} := \{l_{x,y}f: f \mapsto j_x(1) \circ f\}_{f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)}$$



を持ち,

- associator が **(pentagon identity)** を
- unitors が **(triangle identity)** を

満たす  $\mathcal{C}$  のことを **2-圏** (2-category) と呼ぶ.

<sup>a</sup> **0-セル** (0-cell) とも言う

<sup>b</sup> **1-セル** (1-cell) とも言う. 正確には, 圏  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$  の対象のことを 1-射と呼ぶ.

<sup>c</sup> これは圏 **Cat** における図式である.

要するに、**厳密な 2-圏**において合成  $\circ$  の associativity および unitality を自然同型まで弱めたものが **2-圏** である。

#### 【例 1.4.1】2-圏としてのモノイダル圏

**モノイダル圏**  $(\mathcal{C}, \otimes, I, \{a_{x,y,z}\}, \{l_x\}, \{r_y\})$  は **2-圏** である。実際、2-圏  $\mathbf{BC}$  を

- $\text{Ob}(\mathbf{BC}) := \{\bullet\}$  (1 点集合)
- $\text{Hom}_{\mathbf{BC}}(\bullet, \bullet) := \mathcal{C}$
- $\circ := \otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$
- $j_x := \iota_I: I \hookrightarrow \mathcal{C}$
- $\alpha_{\bullet,\bullet,\bullet} := \{a_{x,y,z}\}$
- $\lambda_{\bullet,\bullet} := \{l_{x,y,z}\}, \quad \rho_{\bullet,\bullet} := \{r_{x,y,z}\}$

により定義すると  $\mathcal{C} = \mathbf{BC}$  となる。

### 1.4.2 弱い 2-群・コヒーレントな 2-群・厳密な 2-群

[?] に倣い **2-群** (2-group) を導入する。

#### 定義 1.14: 弱い逆対象

**モノイダル圏**  $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$  の対象  $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  を 1 つとる。

- 対象  $y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  が  $x$  の **弱い逆対象** (weak inverse) であるとは、対象の同型の意味で<sup>a</sup>  $x \otimes y \cong 1$  かつ  $y \otimes x \cong 1$  が成り立つことを言う。
- $x$  が **弱可逆** (weakly invertible) であるとは、 $x$  が弱い逆対象を持つことを言う。

<sup>a</sup> 自然同型ではない

#### 定義 1.15: 弱い 2-群・コヒーレントな 2-群・厳密な 2-群

- **弱い 2-群** (weak 2-group) とは、**モノイダル圏**  $\mathcal{G}$  であって、任意の対象が**弱可逆**でかつ任意の射が同型射であるもののこと。
- **コヒーレントな 2-群** (coherent 2-group) とは、**モノイダル圏**  $\mathcal{G}$  であって、任意の対象  $x \in \text{Ob}(\mathcal{G})$  が可逆な **unit**, **counit**  $(x, \bar{x}, i_x, e_x)$  を持ち、かつ任意の射が同型射であるもののこと。
- **厳密な 2-群** (strict 2-group) とは、**モノイダル圏**  $\mathcal{G}$  であって、任意の対象が可逆<sup>a</sup>でかつ任意の射が同型射であるもののこと。

<sup>a</sup>  $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  に対して  $x^{-1} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  が存在して、厳密に  $x \otimes x^{-1} = 1, x^{-1} \otimes x = 1$  が成り立つ。

**定義 1.16: 2-群の準同型**

2-群  $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$  の間の準同型とは, モノイダル関手  $f: \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$  のこと.

**定理 1.1: 弱い 2-群はコヒーレントな 2-群**

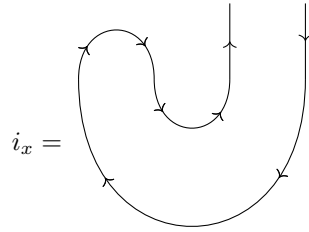
任意の弱い 2-群はコヒーレントな 2-群にすることができる.

証明 勝手な弱い 2-群  $\mathcal{G}$  を 1 つ固定する. このとき  $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{G})$  に対してある  $\bar{x} \in \text{Ob}(\mathcal{G})$  および同型射  $i'_x: 1 \longrightarrow x \otimes \bar{x}$ ,  $e'_x: \bar{x} \otimes x \longrightarrow 1$  が存在する.

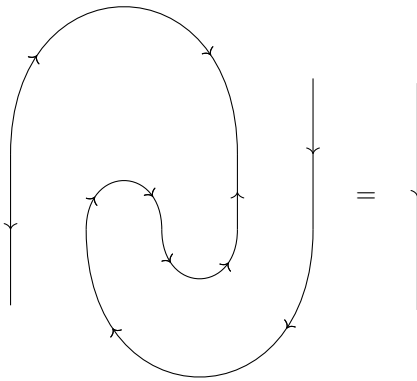
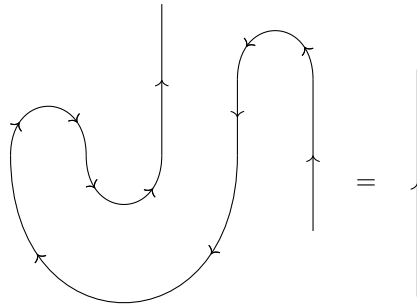
ここで  $e_x := e'_x$  とおき,

$$i_x := (l_x \otimes \text{Id}_{\bar{x}}) \circ a_{1, x, \bar{x}}^{-1} \circ (i'_x)^{-1} \otimes \text{Id}_{x \otimes \bar{x}} \circ a_{x, \bar{x}, x \otimes \bar{x}}^{-1} \circ (\text{Id}_x \otimes a_{\bar{x}, x, \bar{x}}) \circ (\text{Id}_x \otimes e'_x)^{-1} \otimes \text{Id}_{\bar{x}} \circ (\text{Id}_x \otimes l_{\bar{x}}^{-1}) \circ i'_x$$

とおくと組  $(x, \bar{x}, i_x, e_x)$  が zig-zag equation を満たすことを示す. 実際,  $i_x$  の定義をストリング図式で書くと



となるから,



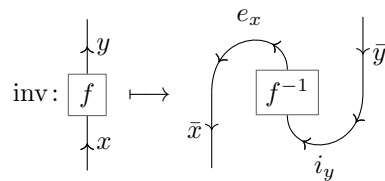
が言える. ■

**!** 定理 1.1 を踏まえ, 以下では**コヒーレントな 2-群**のことを単に**2-群** (2-group) と呼ぶ.

**2-群**  $\mathcal{G}$  において, **弱い逆対象**を対応づける関手

$$\text{inv}: \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}, x \longmapsto \bar{x} \quad (1.4.1)$$

を考えたいが, 射の対応は少々厄介である. [?, p.34] に倣うと



とすれば良いことがわかる <sup>\*4</sup>.

以上より, **2-群**  $\mathcal{G}$  を【例 1.4.1】により **2 圏**  $\mathbf{BG}$  の言葉で表現すると

- ただ 1 つの対象を持つ:  $\text{Ob}(\mathbf{BG}) = \{\bullet\}$

<sup>\*4</sup> 定義から**コヒーレントな 2 群**は **rigid なモノイダル圏**であり, zigzag identity を使えることが肝になる.

- 任意の 1-射  $x \in \text{Ob}(\text{Hom}_{\mathbf{BG}}(\bullet, \bullet)) = \text{Ob}(\mathcal{G})$  が弱可逆であり, その弱い逆対象  $\bar{x}$  は関手 (1.4.1) によって与えられる.
- 任意の 2-射  $\alpha \in \text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathbf{BG}}(\bullet, \bullet)}(x, y) = \text{Hom}_{\mathcal{G}}(x, y)$  が同型射

ということになる. 特に厳密な 2-群とは, 全ての  $\alpha, \lambda, \rho, i, e$  が  $\mathcal{G}$  の恒等射となっていることを言う.

### 1.4.3 交差加群との関係

#### 定義 1.17: 交差加群

交差加群 (crossed module) とは,

- 群準同型  $G_2 \xrightarrow{t} G_1$
- $G_1$  の左作用  $\alpha: G_1 \rightarrow \text{Aut}(G_2)$

の組であって, 以下の条件を満たすもののこと:

(cr-1) 以下の図式を可換にする:

$$\begin{array}{ccc} G_2 \times G_2 & \xrightarrow{t \times \text{Id}} & G_1 \times G_2 \\ & \searrow \text{Ad} & \swarrow \alpha \\ & G_2 & \end{array}$$

あるいは同じことだが,  $\forall g_i \in G_i$  に対して

$$t(\alpha(g_1)(g_2)) = g_1 t(g_2) g_1^{-1}$$

を充たす.

(cr-2) 以下の図式を可換にする:

$$\begin{array}{ccc} G_1 \times G_2 & \xrightarrow{\alpha} & G_2 \\ \text{Id} \times t \downarrow & & \downarrow t \\ G_1 \times G_1 & \xrightarrow{\text{Ad}} & G_1 \end{array}$$

あるいは同じことだが,  $\forall g_2, g'_2 \in G_2$  に対して

$$\alpha(t(g_2))(g'_2) = g_2 g'_2 g_2^{-1}$$

を充たす (Peiffer identity).



命題 1.1: 交差加群と厳密な 2-群

(1) 交差加群  $(G_2 \xrightarrow{t} G_1, \alpha)$  が与えられたとする. このとき

- 1-射の集合  $\mathcal{G}_0 := G_1$
- 2-射の集合  $\mathcal{G}_1 := G_1 \ltimes_{\alpha} G_2$  (外部半直積)
- 始点射  $\sigma: \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_0, (g_1, g_2) \rightarrow g_1$
- 終点射  $\tau: \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_0, (g_1, g_2) \rightarrow t(g_2)g_1$
- 恒等素  $j: \mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{G}_1, g_1 \rightarrow (g_1, 1_{G_2})$
- 2-射の合成  $\circ: \mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_1, ((g_1, g_2), (g'_1, g'_2)) \mapsto (g_1, g_2 g'_2)$

とおくと, 圏  $\mathcal{G}$  は厳密な 2-群になる.

(2) 逆に厳密な 2-群  $\mathcal{G}$  が与えられたとき,

- $G_1 := \mathcal{G}_0$
- $G_2 := \text{Ker } \sigma \subset \mathcal{G}_1$
- $t := \tau|_{G_2}: G_2 \rightarrow G_1$
- $\alpha: G_1 \rightarrow \text{Aut}(G_2), g_1 \mapsto (g_2 \mapsto j(g_1)g_2j(g_1)^{-1})$

とおくことで交差加群  $(G_2 \xrightarrow{t} G_1, \alpha)$  が得られる.

証明 (1)

■