第 1 章

モノイダル圏・フュージョン圏・高次群

この章では標数 0 の体 $\mathbb{K}$ のみを考える．

1.1 加法圏

定義 1.1: 加法圏・アーベル圏

圏 $\mathcal{C}$ が体 $\mathbb{K}$ 上の**加法圏** (additive category) であるとは，以下を充たすこと：

(add-1)

任意の Hom 集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\,Y)$ が $\mathbb{K}$-ベクトル空間の構造をもち，かつ射の合成

$$\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\,Z)\times\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\,Y)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\,Z)$$

が $\mathbb{K}$-双線形写像である．

(add-2)

零対象[a] (zero object) $\mathbf{0}\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が存在し，$\forall X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{0},\,X)=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{X},\,0)=0$ を充たす[b]．

(add-3)

有限の余積が常に存在する．

[a] 始対象かつ終対象

[b] 最右辺は **(add-1)** の意味で零ベクトル空間．

加法圏 $\mathcal{C}$ は，以下の条件を充たすとき**アーベル圏** (abelian category) と呼ばれる：

(Ab-1)

任意の射 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\,Y)$ が核 $\ker f\colon \mathrm{Ker}\,f\longrightarrow X$ および余核 $\mathrm{coker}\,f\colon Y\longrightarrow\mathrm{Coker}\,f$ を持つ．

(Ab-2)

$\mathrm{Ker}\,f=\mathbf{0}$ ならば $f=\ker(\mathrm{coker}\,f)$，かつ $\mathrm{Coker}\,f=\mathbf{0}$ ならば $f=\mathrm{coker}(\ker f)$

以下では加法圏 $\mathcal{C},\,\mathcal{D}$ の間の関手 $F\colon\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ には，$F_{X,\,Y}\colon\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\,Y)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(X),\,F(Y)\big)$，$f\longmapsto$

$F(f)$ が $\mathbb{K}$-線型写像となることを常に要請する．

【例 1.1.1】表現の圏

G を群とする．このとき

- G の表現 (ρ, V) を対象とする
- G-同変な $\mathbb{K}$-線型写像 $(\rho, V) \xrightarrow{f} (\rho', V')$ を射とする

圏を $\mathbf{Rep}\,(G)$ と書く．$\mathbf{Rep}\,(G)$ はアーベル圏である．

定義 1.2: 単純・半単純

- アーベル圏 $\mathcal{C}$ の対象 $X \in \mathcal{C}$ が**単純** (simple) であるとは，任意のモノ射 $i\colon U \hookrightarrow X$ が 0 であるか同型射であることを言う．
- アーベル圏 $\mathcal{C}$ が**半単純** (semisimple) であるとは，$\forall X \in \mathcal{C}$ が単純対象の有限余積と同型であることを言う．i.e. 単純対象の族 $\{V_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})\}_{i\in I}$ および有限個を除いて 0 であるような非負整数の族 $\{N_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}_{i\in I}$ が存在して

$$X \cong \bigoplus_{i\in I} N_i X_i$$

が成り立つこと．

1.2 モノイダル圏

これまでも何回か登場したが，モノイダル圏についてまとめておく：

定義 1.3: モノイダル圏

モノイダル圏 (monidal category) は，以下の 5 つのデータからなる：

- 圏 $\mathcal{C}$
- **テンソル積** (tensor product) と呼ばれる関手 $\otimes\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$
- **単位対象** (unit object) $I \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- **associator** と呼ばれる自然同値

$$\{a_{X,\,Y,\,Z}\colon (X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{\cong} X \otimes (Y \otimes Z)\}_{X,\,Y,\,Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

- **left/right unitors** と呼ばれる自然同値

$$\{l_X\colon I \otimes X \xrightarrow{\cong} X\}_{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})},$$
$$\{r_X\colon X \otimes I \xrightarrow{\cong} X\}_{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは $\forall X,\,Y,\,Z,\,W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について以下の 2 つの図式を可換にする：

(triangle diagram)

$$
\begin{tikzcd}
(X \otimes I) \otimes Y \arrow[rr, "a_{X,\,I,\,Y}"] \arrow[dr, "r_X \otimes \mathrm{Id}_Y"'] & & X \otimes (I \otimes Y) \arrow[dl, "\mathrm{Id}_X \otimes l_Y"] \\
& X \otimes Y &
\end{tikzcd}
$$

(pentagon diagram)

$$
\begin{tikzcd}
& ((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z \arrow[dl, "a_{W \otimes X,\,Y,\,Z}"'] \arrow[dr, "a_{W,\,X,\,Y} \otimes \mathrm{Id}_Z"] & \\
(W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) \arrow[ddr, "a_{W,\,X,\,Y \otimes Z}"'] & & (W \otimes (X \otimes Y)) \otimes Z \arrow[d, "a_{W,\,X \otimes Y,\,Z}"] \\
& & W \otimes ((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[dl, "\mathrm{Id}_Z \otimes a_{X,\,Y,\,Z}"] \\
& W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z)) &
\end{tikzcd}
$$

モノイダル圏 $\mathcal{C}$ が**厳密** (strict) であるとは，$\forall X,\, Y,\, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$
\begin{aligned}
&(X \otimes Y) \otimes Z = X \otimes (Y \otimes Z), \\
&I \otimes X = X, \quad X \otimes I = X
\end{aligned}
$$

が成り立ち，かつ $a_{X,\,Y,\,Z}$，l_X，r_X が恒等射であることを言う．

定義 1.3 で言うモノイダル圏を，**弱いモノイダル圏** (weak monoidal category) と呼ぶこともある．

【例 1.2.1】Cat のモノイダル構造

Cat を小圏と関手が成す圏とする．このとき，関手

$$\times \colon \mathbf{Cat} \times \mathbf{Cat} \longrightarrow \mathbf{Cat}$$

を $\mathrm{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) := \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ により定めると，組み $(\mathbf{Cat},\, \times,\, I)$ は厳密なモノイダル圏になる．ただし I はただ 1 つの対象 $\bullet$ を持ち，$\mathrm{Hom}_I(\bullet,\, \bullet) = \{\mathrm{Id}_\bullet\}$ とする圏である[a]

[a] これは **Cat** の終対象でもある．

定義 1.4: 組紐付きモノイダル圏

組紐付きモノイダル圏 (braided monoidal category) とは，以下の 2 つからなる：

- モノイダル圏 $\mathcal{C}$
- **組紐** (braiding) と呼ばれる自然同型

$$\left\{b_{X,\,Y} \colon X \otimes Y \xrightarrow{\cong} Y \otimes X\right\}_{X,\,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは $\forall X,\, Y,\, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について以下の図式を可換にする：

(hexagon diagrams)

$$\begin{tikzcd}
X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "a^{-1}_{X,\,Y,\,Z}"] \arrow[d, "b_{X,\,Y \otimes Z}"] & (X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "b_{X,\,Y} \otimes \mathrm{Id}_Z"] & (Y \otimes X) \otimes Z \arrow[d, "a_{Y,\,X,\,Z}"] \\
(Y \otimes Z) \otimes X & Y \otimes (Z \otimes X) \arrow[l, "a^{-1}_{Y,\,Z,\,X}"] & Y \otimes (X \otimes Z) \arrow[l, "\mathrm{Id}_X \otimes b_{X,\,Z}"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "a_{X,\,Y,\,Z}"] \arrow[d, "b_{X \otimes Y,\,Z}"] & X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "\mathrm{Id}_X \otimes b_{Y,\,Z}"] & X \otimes (Z \otimes Y) \arrow[d, "a^{-1}_{X,\,Z,\,Y}"] \\
Z \otimes (X \otimes Y) & (Z \otimes X) \otimes Y \arrow[l, "a_{Z,\,X,\,Y}"] & (X \otimes Z) \otimes Y \arrow[l, "b_{X,\,Z} \otimes \mathrm{Id}_Y"]
\end{tikzcd}$$

組紐付きモノイダル圏 $\mathcal{C}$ であって，$\mathcal{C}$ の組紐が $b_{X,\,Y} = b^{-1}_{Y,\,X}$ を充たすもののことを**対称モノイダル圏** (symmetric monoidal category) と呼ぶ.

定義 1.5: 双対

モノイダル圏 $\mathcal{C}$ およびその任意の対象 $X,\, X^* \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を与える．X^* が X の**左双対** (left dual) であり，かつ X が X^* の**右双対** (right dual) であるとは,

- **coevaluation** と呼ばれる射

$$i_X \colon I \longrightarrow X \otimes X^*$$

- **evaluation** と呼ばれる射

$$e_X \colon X^* \otimes X \longrightarrow I$$

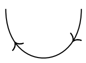
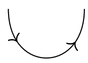
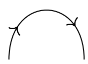
が存在して以下の図式を可換にすることを言う：

(zig-zag equations)

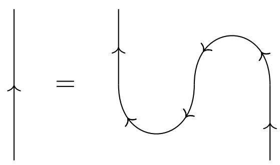
$$
\begin{tikzcd}
I \otimes X \arrow[r, "i_X \otimes \mathrm{Id}_X"] \arrow[dd, "r_X"'] & (X \otimes X^*) \otimes X \arrow[d, "a_{X,\, X^*,\, X}"] \\
& X \otimes (X^* \otimes X) \arrow[d, "\mathrm{Id}_X \otimes e_X"] \\
X & X \otimes I \arrow[l, "r_X"]
\end{tikzcd}
$$

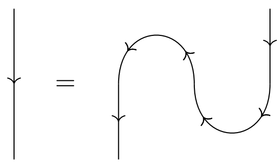
$$
\begin{tikzcd}
X^* \otimes I \arrow[r, "\mathrm{Id}_{X^*} \otimes i_X"] \arrow[dd, "l_{X^*}"'] & X^* \otimes (X \otimes X^*) \arrow[d, "a^{-1}_{X^*,\, X,\, X^*}"] \\
& (X^* \otimes X) \otimes X^* \arrow[d, "e_X \otimes \mathrm{Id}_{X^*}"] \\
X^* & I \otimes X^* \arrow[l, "l_{X^*}"]
\end{tikzcd}
$$

ストリング図式で書くときは

$i_X :=$  $e_X :=$  $e_X^{-1} :=$  $i_X^{-1} :=$ 

とする．ストリング図式において **(zig-zag equations)** は





と書ける．

定義 1.6: rigid なモノイダル圏

モノイダル圏 $\mathcal{C}$ が **rigid** であるとは，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が左・右双対を持つことを言う．

! これまでは圏 $\mathcal{C}$ の対象を大文字で書いてきたが，以下では文脈によっては小文字で書くことがある．

定義 1.7: モノイダル関手

2 つのモノイダル圏 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ の間の関手

$$F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

が**弱いモノイダル関手** (lax monoidal functor) であるとは,

- 射

$$\varepsilon\colon I_{\mathcal{D}} \longrightarrow F(I_{\mathcal{C}})$$

- 自然変換

$$\{\mu_{X,Y}\colon F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y) \longrightarrow F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y)\}_{X,\,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

があって, $\forall X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して以下の図式が可換になること：

(associatibity)

$$\begin{tikzcd}
(F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y)) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z) \arrow[r, "a^{\mathcal{D}}_{F(X),\,F(Y),\,F(Z)}"'] \arrow[d, "\mu_{X,\,Y} \otimes \mathrm{Id}_{F(Z)}"'] & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} (F(Y) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z)) \arrow[d, "\mathrm{Id}_{F(X)} \otimes \mu_{Y,\,Z}"] \\
F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z) \arrow[d, "\mu_{X \otimes_{\mathcal{C}} Y,\,Z}"'] & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y \otimes_{\mathcal{C}} Z) \arrow[d, "\mu_{X,\,Y \otimes_{\mathcal{C}} Z}"] \\
F((X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{C}} Z) \arrow[r, "F(a^{\mathcal{C}}_{X,\,Y,\,Z})"'] & F(X \otimes_{\mathcal{C}} (Y \otimes_{\mathcal{C}} Z))
\end{tikzcd}$$

(unitality)

$$\begin{tikzcd}
I_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathcal{D}} F(X) \arrow[r, "\varepsilon \otimes \mathrm{Id}_{F(X)}"] \arrow[d, "l^{\mathcal{D}}_{F(X)}"'] & F(I_{\mathcal{C}}) \otimes_{\mathcal{D}} F(X) \arrow[d, "\mu_{I_{\mathcal{C}},\,X}"] \\
F(X) & F(I_{\mathcal{C}} \otimes_{\mathcal{C}} X) \arrow[l, "F(l^{\mathcal{C}}_X)"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F(X) \otimes_{\mathcal{D}} I_{\mathcal{D}} \arrow[r, "\mathrm{Id}_{F(X)} \otimes \varepsilon"] \arrow[d, "r^{\mathcal{D}}_{F(X)}"'] & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(I_{\mathcal{C}}) \arrow[d, "\mu_{X,\,I_{\mathcal{C}}}"] \\
F(X) & F(X \otimes_{\mathcal{C}} I_{\mathcal{C}}) \arrow[l, "F(r^{\mathcal{C}}_X)"]
\end{tikzcd}$$

- 弱いモノイダル関手 F の ε と $\mu_{X,Y}$ が全て同型射ならば, F は**強いモノイダル関手** (strong monoidal functor) と呼ばれる.
- 弱いモノイダル関手 F の ε と $\mu_{X,Y}$ が全て恒等射ならば, F は**厳密なモノイダル関手** (strict monoidal functor) と呼ばれる.

定義 1.8: モノイダル自然変換

2 つのモノイダル圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ の間の 2 つの弱いモノイダル関手 $\left(F_i\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}, \varepsilon_i\colon I_{\mathcal{D}} \longrightarrow F(I_{\mathcal{C}}), \left\{\mu_{i\,X,Y}\colon F_i(X) \otimes F_i(Y) \longrightarrow F_i(X \otimes Y)\right\}_{X,\,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}\right)$ w/ $i = 1, 2$ の間の自然変換

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F_1"] \arrow[r, bend right, "F_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \tau"] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}
$$

が**モノイダル自然変換** (monidal natural transformation) であるとは，$\forall X, Y \in \mathcal{C}$ に対して以下の図式が可換になること：

(テンソル積の保存)

$$
\begin{tikzcd}
F_1(X) \otimes_{\mathcal{D}} F_1(Y) \arrow[r, "\tau_X \otimes_{\mathcal{D}} \tau_Y"] \arrow[d, "\mu_{1\,X,Y}"'] & F_2(X) \otimes_{\mathcal{D}} F_2(Y) \arrow[d, "\mu_{2\,X,Y}"] \\
F_1(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \arrow[r, "\tau_{X \otimes_{\mathcal{C}} Y}"'] & F_2(X \otimes_{\mathcal{C}} Y)
\end{tikzcd}
$$

(単位対象の保存)

$$
\begin{tikzcd}
& I_{\mathcal{D}} \arrow[dl, "\varepsilon_1"'] \arrow[dr, "\varepsilon_2"] & \\
F_1(I_{\mathcal{C}}) \arrow[rr, "\tau_{I_{\mathcal{C}}}"'] & & F_2(I_{\mathcal{C}})
\end{tikzcd}
$$

1.3 フュージョン圏

定義 1.9: フュージョン圏

圏 $\mathcal{C}$ が**フュージョン圏** (fusion category) であるとは，

- $\mathcal{C}$ は半単純な $\mathbb{K}$-上のアーベル圏
- $\mathcal{C}$ は rigid なモノイダル圏
- $\mathcal{C}$ の単純対象の同型類が有限個
- 単位対象 $I \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(I, I) = \mathbb{K}$

が成り立つこと．

フュージョン圏 $\mathcal{C}$ が**組紐付きフュージョン圏** (braided fusion category) であるとは，$\mathcal{C}$ が組紐付きモノイダル圏でもあることを言う．

1.4　2-群

1.4.1　豊穣圏と 2-圏

まず，**厳密な 2-圏** (strict 2-category) を導入する．

定義 1.10: 豊穣圏

モノイダル圏 $(V,\otimes,I)$ を与える．
V-豊穣圏 (V-enriched category) $\mathcal{C}$ は，以下のデータからなる：

- 集合 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall x,y\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，**Hom 対象**と呼ばれるV の対象 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)\in\mathrm{Ob}(V)$ を持つ
- $\forall x,y,z\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，**合成射**と呼ばれるV の射 $\circ_{x,y,z}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,z)\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,z)$ を持つ
- $\forall x\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，**恒等素**と呼ばれるV の射 $j_x\colon I\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,x)$ を持つ

これらは以下の図式を可換にしなくてはいけない：

(associativity)

$\forall x,y,z,w\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について[a]

$$\begin{tikzcd}
\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,z)\big)\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(z,w) \arrow[r, "\circ_{x,y,z}\otimes\mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(z,w)}"] \arrow[dd, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,z)\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(z,w) \arrow[d, "\circ_{x,z,w}"] \\
 & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,w) \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)\otimes\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,z)\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(z,w)\big) \arrow[r, "\mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)}\otimes\circ_{y,z,w}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,w) \arrow[u, "\circ_{x,y,w}"']
\end{tikzcd}$$

(unitality)

$\forall x,y\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について[b]

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,x)\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y) \arrow[r, "\circ_{x,x,y}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y) & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,y) \arrow[l, "\circ_{x,y,y}"'] \\
I\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y) \arrow[u, "j_x\otimes\mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)}"] \arrow[ur, "\cong"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)\otimes I \arrow[u, "\mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)}\otimes j_y"'] \arrow[ul, "\cong"]
\end{tikzcd}$$

[a] $\cong$ はモノイダル圏 V の associator
[b] $\cong$ はモノイダル圏 V の left/right unitor

定義 1.11: 豊穣関手

モノイダル圏 $(V, \otimes, I)$ を与える．
2 つの V-豊穣圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ の間の **V-豊穣関手** (V-enriched functor)

$$F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

は，以下のデータからなる：

- 写像 $F_0\colon \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathcal{D}),\ x \longmapsto F_0(x)$
- V の射の族

$$\left\{F_{x,\,y}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\,y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,\bigl(F_0(x),\,F_0(y)\bigr)\right\}_{x,\,y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは以下の図式を可換にしなくてはいけない：

(enriched-1)

$\forall x,\,y,\,z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して[a]

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\,y) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(y,\,z) \arrow[r, "\circ_{x,y,z}"] \arrow[d, "F_{x,y}\otimes F_{y,z}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\,z) \arrow[d, "F_{x,z}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,\bigl(F_0(x),\,F_0(y)\bigr) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,\bigl(F_0(y),\,F_0(z)\bigr) \arrow[r, "\circ_{F_0(x),F_0(y),F_0(z)}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,\bigl(F_0(x),\,F_0(z)\bigr)
\end{tikzcd}$$

(enriched-2)

$\forall x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して[b]

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "j_x"] \arrow[dr, "j_{F_0(x)}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\,x) \arrow[d, "F_{x,x}"] \\
& \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,\bigl(F_0(x),\,F_0(x)\bigr)
\end{tikzcd}$$

[a] これは，通常の関手において射の合成が保存されることに対応する．
[b] これは，通常の関手において恒等射が保存されることに対応する．

与えられたモノイダル圏 V に対して，**V-豊穣圏のなす圏**を V-**Cat** と書く．V-**Cat** は

- V-豊穣圏を対象とする
- V-豊穣関手を射とする

ことで得られる圏である．

定義 1.12: 厳密な 2-圏

小圏と関手の圏 **Cat** を【例 **1.2.1**】の方法でモノイダル圏と見做す．**Cat**-豊穣圏のことを**厳密な 2-圏** (strict 2-category) と呼ぶ．

定義 1.12 を解読しよう．まず，小圏と関手の圏 **Cat** における対象とは小圏のことで，射とは関手のことである．さらに，**Cat** のテンソル積とは【**例 1.2.1**】より直積 $\times$ のことである．よって豊穣圏の定義から，厳密な 2-圏 $\mathcal{C}$ は

- **対象** (object)[*1] 全体の集合 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の間の **1-射** (1-morphism)[*2]全体が成す圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cat})$.
- **合成** (composition) と呼ばれる関手 $\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$
- **恒等素** (identity morphism) と呼ばれる関手 $j_x\colon 1 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$

の 4 つのデータからなる．従って 1-射 $f\colon x \longrightarrow y$ とは圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ の対象 $f \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y))$ のことであるから，2 つの 1-射 $f, g \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y))$ が与えられると，圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ における，それらの間の射 $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)}(f, g)$ が存在する．このような α を **2-射** (2-morphism)[*3]と呼び，混乱防止のため $\alpha\colon f \longrightarrow g$ と書く代わりに $\boldsymbol{\alpha\colon f \Longrightarrow g}$ と書く．

2 つの 2-射 $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)}(f, g)$, $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)}(g, h)$ は，圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ における射の合成 $*$ によって結合的かつ単位的に合成することができる：

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=50, "f"{name=F}] \arrow[r, bend right=50, "h"'{name=H}] & y
\arrow[from=F, to=H, Rightarrow, "\beta * \alpha"]
\end{tikzcd}
\quad := \quad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=50, "f"{name=F}] \arrow[r, "g"{name=G}] \arrow[r, bend right=50, "h"'{name=H}] & y
\arrow[from=F, to=G, Rightarrow, "\alpha"]
\arrow[from=G, to=H, Rightarrow, "\beta"]
\end{tikzcd}
$$

このような 2-射の合成を**縦の合成** (vertical composition) と呼ぶ．一方，4 つの 1-射 $f, g\colon x \longrightarrow y$, $f', g'\colon y \longrightarrow z$ および 2 つの 2-射 $\alpha\colon f \Longrightarrow g$, $\alpha'\colon f' \Longrightarrow g'$ が与えられたとき，1-射の合成 $\circ$ が関手であることによって，圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z)$ の射 $(\alpha, \alpha')\colon (f, f') \longrightarrow (g, g')$ に対して圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$ の射，i.e. 2-射

$$\alpha' \circ \alpha := \circ(\alpha, \alpha')\colon f' \circ f \Longrightarrow g' \circ g$$

が対応付く：

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=50, "f' \circ f"{name=F}] \arrow[r, bend right=50, "g' \circ g"'{name=G}] & z
\arrow[from=F, to=G, Rightarrow, "\alpha' \circ \alpha"]
\end{tikzcd}
\quad := \quad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=50, "f"{name=F}] \arrow[r, bend right=50, "g"'{name=G}] & y \arrow[r, bend left=50, "f'"{name=F2}] \arrow[r, bend right=50, "g'"'{name=G2}] & z
\arrow[from=F, to=G, Rightarrow, "\alpha"]
\arrow[from=F2, to=G2, Rightarrow, "\alpha'"]
\end{tikzcd}
$$

このような 2-射の合成を**横の合成** (horizontal composition) と呼ぶ．横の合成は，モノイダル圏 **Cat** が厳密なモノイダル圏であること，および関手 $\circ$ の **(associativity)**, **(unitality)** によって結合的かつ単位的になる．

[*1] **0-セル** (0-cell) とも言う

[*2] **1-セル** (1-cell) とも言う．正確には，圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ の対象のことを 1-射と呼ぶ．

[*3] **2-セル** (2-cell) とも言う

縦の合成と横の合成は，$\circ$ が関手であることによって交換する：

$$
\begin{aligned}
(\beta' * \alpha') \circ (\beta * \alpha) &= \circ\big((\beta,\, \beta') * (\alpha,\, \alpha')\big) \\
&= \big(\circ(\beta,\, \beta')\big) * \big(\circ(\alpha,\, \alpha')\big) \\
&= (\beta' \circ \beta) * (\alpha' \circ \alpha)
\end{aligned}
$$

図式で書くと一目瞭然である：

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=50, "f"{name=F}] \arrow[r, bend right=50, "h"'{name=H}] & y \arrow[r, bend left=50, "f'"{name=F2}] \arrow[r, bend right=50, "h'"'{name=H2}] & z
\arrow[Rightarrow, from=F, to=H, "\beta * \alpha"]
\arrow[Rightarrow, from=F2, to=H2, "\beta' * \alpha'"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=50, "f"{name=F}] \arrow[r, "g"{name=G}] \arrow[r, bend right=50, "h"'{name=H}] & y \arrow[r, bend left=50, "f'"{name=F2}] \arrow[r, "g'"{name=G2}] \arrow[r, bend right=50, "h'"'{name=H2}] & z
\arrow[Rightarrow, from=F, to=G, "\alpha"]
\arrow[Rightarrow, from=G, to=H, "\beta"]
\arrow[Rightarrow, from=F2, to=G2, "\alpha'"]
\arrow[Rightarrow, from=G2, to=H2, "\beta'"]
\end{tikzcd}
$$

$$
=
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=50, "f' \circ f"{name=F}] \arrow[r, "g' \circ g"{name=G}] \arrow[r, bend right=50, "h' \circ h"'{name=H}] & z
\arrow[Rightarrow, from=F, to=G, "\alpha' \circ \alpha"]
\arrow[Rightarrow, from=G, to=H, "\beta' \circ \beta"]
\end{tikzcd}
$$

定義 1.13: 2-圏

厳密な 2-圏と同様の

- **対象** (object)[a] 全体の集合 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall x,\, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の間の **1-射** (1-morphism)[b]全体が成す圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cat})$.
- **合成** (composition) と呼ばれる関手 $\circ \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,\, z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, z)$
- **恒等素** (identity morphism) と呼ばれる関手 $j_x \colon 1 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, x)$

の 4 つのデータに加えて

- $\forall x,\, y,\, z,\, w \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して **associator** と呼ばれる自然同型[c].

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,\, z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(w,\, y) \arrow[dr, bend left, "\circ"] \arrow[dd, Rightarrow, "\alpha_{w,x,y,z}"] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,\, z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(w,\, x) \arrow[ur, bend left, "\mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,\, z)} \times \circ"] \arrow[dr, bend right, "\circ \times \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(w,\, x)}"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(w,\, z) \\
 & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(w,\, x) \arrow[ur, bend right, "\circ"'] &
\end{tikzcd}
$$

- $\forall x,\, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して **left/right unitor** と呼ばれる自然同型

$$
\begin{aligned}
\lambda_{x,y} &:= \left\{ l_{x,y\,f} \colon f \longmapsto f \circ j_x(1) \right\}_{f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)} \\
\rho_{x,y} &:= \left\{ l_{x,y\,f} \colon f \longmapsto j_x(1) \circ f \right\}_{f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, x) \arrow[dr, bend left, "\circ"] \arrow[d, Rightarrow, "\lambda_{w,x,y,z}"] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) \arrow[ur, bend left, "\mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)} \times j_x"] \arrow[dr, bend right, "j_y \times \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)}"'] \arrow[rr, "\mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)}"] & {} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) \\
 & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,\, y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) \arrow[ur, bend right, "\circ"'] \arrow[u, Rightarrow, "\rho_{w,x,y,z}"'] &
\end{tikzcd}
$$

を持ち,

- associator が **(pentagon identity)** を
- unitors が **(triangle identity)** を

充たす $\mathcal{C}$ のことを **2-圏** (2-category) と呼ぶ.

---

[a] **0-セル** (0-cell) とも言う

[b] **1-セル** (1-cell) とも言う. 正確には, 圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)$ の対象のことを 1-射と呼ぶ.

[c] これは圏 **Cat** における図式である.

要するに，厳密な 2-圏において合成 $\circ$ の associativity および unitality を自然同型まで弱めたものが 2-圏である．

【例 1.4.1】2-圏としてのモノイダル圏

モノイダル圏 $\left(\mathcal{C},\, \otimes,\, I,\, \{a_{x,y,z}\},\, \{l_x\},\, \{l_y\}\right)$ は 2-圏である．実際，2-圏 $\mathbf{B}\mathcal{C}$ を

- $\mathrm{Ob}(\mathbf{B}\mathcal{C}) \coloneqq \{\bullet\}$（1 点集合）
- $\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}\mathcal{C}}(\bullet,\, \bullet) \coloneqq \mathcal{C}$
- $\circ \coloneqq \otimes \colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$
- $j_x \coloneqq \iota_I \colon I \hookrightarrow \mathcal{C}$
- $\alpha_{\bullet,\bullet,\bullet} \coloneqq \{a_{x,y,z}\}$
- $\lambda_{\bullet,\bullet} \coloneqq \{l_{x,y,z}\}, \quad \rho_{\bullet,\bullet} \coloneqq \{r_{x,y,z}\}$

により定義すると $\mathcal{C} = \mathbf{B}\mathcal{C}$ となる．

1.4.2 弱い 2-群・コヒーレントな 2-群・厳密な 2-群

[?] に倣い **2-群** (2-group) を導入する．

定義 1.14: 弱い逆対象

モノイダル圏 $(\mathcal{C},\, \otimes,\, 1)$ の対象 $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を 1 つとる．

- 対象 $y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が x の**弱い逆対象** (weak inverse) であるとは，対象の同型の意味で[a] $x \otimes y \cong 1$ かつ $y \otimes x \cong 1$ が成り立つことを言う．
- x が**弱可逆** (weakly invertible) であるとは，x が弱い逆対象を持つことを言う．

[a] 自然同型ではない

定義 1.15: 弱い 2-群・コヒーレントな 2-群・厳密な 2-群

- **弱い 2-群** (weak 2-group) とは，モノイダル圏 $\mathcal{G}$ であって，任意の対象が弱可逆でかつ任意の射が同型射であるもののこと．
- **コヒーレントな 2-群** (coherent 2-group) とは，モノイダル圏 $\mathcal{G}$ であって，任意の対象 $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$ が可逆な unit，counit $(x,\, \bar{x},\, i_x,\, e_x)$ を持ち，かつ任意の射が同型射であるもののこと．
- **厳密な 2-群** (strict 2-group) とは，モノイダル圏 $\mathcal{G}$ であって，任意の対象が可逆[a]でかつ任意の射が同型射であるもののこと．

[a] $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $x^{-1} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が存在して，厳密に $x \otimes x^{-1} = 1$，$x^{-1} \otimes x = 1$ が成り立つ．

定義 1.16: 2-群の準同型

2-群 $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ の間の**準同型**とは，モノイダル関手 $f\colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ のこと．

定理 1.1: 弱い 2-群はコヒーレントな 2-群

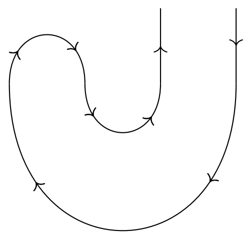
任意の弱い 2-群はコヒーレントな 2-群にすることができる．

証明 勝手な弱い 2-群 $\mathcal{G}$ を 1 つ固定する．このとき $\forall x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$ に対してある $\bar{x} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$ および同型射 $i'_x\colon 1 \longrightarrow x \otimes \bar{x},\ e'_x\colon \bar{x} \otimes x \longrightarrow 1$ が存在する．

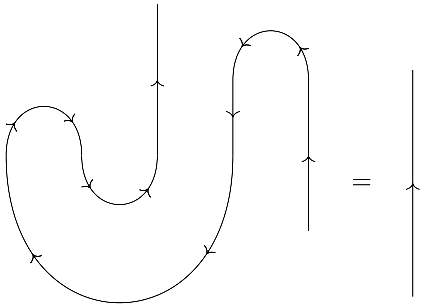
ここで $e_x \coloneqq e'_x$ とおき，

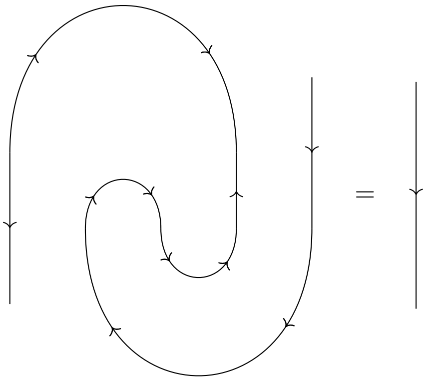
$$i_x \coloneqq (l_x \otimes \mathrm{Id}_{\bar{x}}) \circ a^{-1}_{1,x,\bar{x}} \circ ({i'_x}^{-1} \otimes \mathrm{Id}_{x\otimes\bar{x}}) \circ a^{-1}_{x,\bar{x},x\otimes\bar{x}} \circ (\mathrm{Id}_x \otimes a_{\bar{x},x,\bar{x}}) \circ (\mathrm{Id}_x \otimes {e'_x}^{-1} \otimes \mathrm{Id}_{\bar{x}}) \circ (\mathrm{Id}_x \otimes l^{-1}_{\bar{x}}) \circ i'_x$$

とおくと組 $(x, \bar{x}, i_x, e_x)$ が zig-zag equation を充たすことを示す．実際，i_x の定義をストリング図式で書くと

$i_x =$ 

となるから，





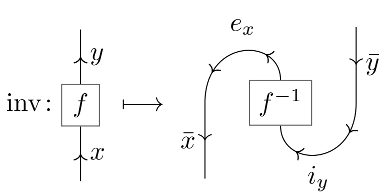
が言える． ■

! 定理 1.1 を踏まえ，以下ではコヒーレントな 2-群のことを単に **2-群** (2-group) と呼ぶ．

2-群 $\mathcal{G}$ において，弱い逆対象を対応づける関手

$$\mathrm{inv}\colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G},\ x \longmapsto \bar{x} \tag{1.4.1}$$

を考えたいが，射の対応は少々厄介である．[?, p.34] に倣うと



とすれば良いことがわかる[*4]．

以上より，2-群 $\mathcal{G}$ を【例 **1.4.1**】により 2 圏 $\mathbf{B}\mathcal{G}$ の言葉で表現すると

- ただ 1 つの対象を持つ：$\mathrm{Ob}(\mathbf{B}\mathcal{G}) = \{\bullet\}$

*4 定義からコヒーレントな 2 群は rigid なモノイダル圏であり，zigzag identity を使えることが肝になる．

- 任意の 1-射 $x \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}\mathcal{G}}(\bullet, \bullet)) = \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$ が弱可逆であり，その弱い逆対象 $\bar{x}$ は関手 (1.4.1) によって与えられる．
- 任意の 2-射 $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}\mathcal{G}}(\bullet, \bullet)}(x, y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(x, y)$ が同型射

と言うことになる．特に厳密な 2-群とは，全ての $\alpha, \lambda, \rho, i, e$ が $\mathcal{G}$ の恒等射となっていることを言う．

1.4.3 交差加群との関係

定義 1.17: 交差加群

交差加群 (crossed module) とは，

- 群準同型 $G_2 \xrightarrow{t} G_1$
- G_1 の左作用 $\alpha \colon G_1 \longrightarrow \mathrm{Aut}(G_2)$

の組であって，以下の条件を満たすもののこと：

(cr-1) 以下の図式を可換にする：

$$\begin{tikzcd} G_2 \times G_2 \arrow[rr, "t\times\mathrm{Id}"] \arrow[dr, "\mathrm{Ad}"'] & & G_1 \times G_2 \arrow[dl, "\alpha"] \\ & G_2 & \end{tikzcd}$$

あるいは同じことだが，$\forall g_i \in G_i$ に対して

$$t\bigl(\alpha(g_1)(g_2)\bigr) = g_1 t(g_2) g_1^{-1}$$

を充たす．

(cr-2) 以下の図式を可換にする：

$$\begin{tikzcd} G_1 \times G_2 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{Id}\times t"'] & G_2 \arrow[d, "t"] \\ G_1 \times G_1 \arrow[r, "\mathrm{Ad}"'] & G_1 \end{tikzcd}$$

あるいは同じことだが，$\forall g_2, g_2' \in G_2$ に対して

$$\alpha\bigl(t(g_2)\bigr)\bigl(g_2'\bigr) = g_2 g_2' g_2^{-1}$$

を充たす (**Peiffer identity**).

命題 1.1: 交差加群と厳密な 2-群

(1) 交差加群 $(G_2 \xrightarrow{t} G_1,\, \alpha)$ が与えられたとする．このとき

- 1-射の集合 $\mathcal{G}_0 \coloneqq G_1$
- 2-射の集合 $\mathcal{G}_1 \coloneqq G_1 \ltimes_\alpha G_2$（外部半直積）
- 始点射 $\sigma \colon \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_0,\ (g_1,\, g_2) \longrightarrow g_1$
- 終点射 $\tau \colon \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_0,\ (g_1,\, g_2) \longrightarrow t(g_2)g_1$
- 恒等素 $j \colon \mathcal{G}_0 \longrightarrow \mathcal{G}_1,\ g_1 \longrightarrow (g_1,\, 1_{G_2})$
- 2-射の合成 $\circ \colon \mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_1,\ \big((g_1,\, g_2),\, (g_1',\, g_2')\big) \longmapsto (g_1,\, g_2 g_2')$

とおくと，圏 $\mathcal{G}$ は厳密な 2-群になる．

(2) 逆に厳密な 2-群 $\mathcal{G}$ が与えられたとき，

- $G_1 \coloneqq \mathcal{G}_0$
- $G_2 \coloneqq \operatorname{Ker} \sigma \subset \mathcal{G}_1$
- $t \coloneqq \tau|_{G_2} \colon G_2 \longrightarrow G_1$
- $\alpha \colon G_1 \longrightarrow \operatorname{Aut}(G_2),\ g_1 \longmapsto \big(g_2 \longmapsto j(g_1) g_2 j(g_1)^{-1}\big)$

とおくことで交差加群 $(G_2 \xrightarrow{t} G_1,\, \alpha)$ が得られる．

<u>証明</u>　(1)

■

1.5　3-群

1.5.1　3-圏

一般の 3-圏は associator, unitors のせいで扱いが難しいので，まずは**厳密な 3-圏** (strict 3-group) を考える．**Cat** を【例 **1.2.1**】の方法でモノイダル圏と見做す．定義 1.12 から，2-圏としての同値

$$\mathbf{Str2Cat} \cong \mathbf{Cat}\text{-}\mathbf{Cat}$$

が成り立つ．さらに **Cat-Cat** は直積に関してモノイダル圏になる．

定義 1.18: 厳密な 3-圏

厳密な 2-圏が成す 2-圏 **Cat-Cat** をモノイダル圏と見做す．このとき **Cat-Cat-豊穣圏**のことを**厳密な 3-圏** (strict 3-category) と呼ぶ．