

# 第 1 章

## 層状化空間・因子化ホモロジー

[?], [?] のレビュー

### 1.1 conically smooth な層状化空間

#### 1.1.1 層状化空間

##### 定義 1.1: 半順序集合の位相

$(P, \leq)$  を半順序集合とする.  $P$  上の位相  $\mathcal{O}_{\leq} \subset 2^P$  を以下で定義する:

$$U \in \mathcal{O}_{\leq} \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x \in U, \forall y \in P, [x \leq y \implies y \in U]$$

実際, 空集合の定義から  $\emptyset \in \mathcal{O}_{\leq}$  であり,  $\forall U_1, U_2 \in \mathcal{O}_{\leq}$  に対して  $x \in U_1 \cap U_2$  であることは

$$\forall y \in P, x \leq y \implies y \in U_1 \text{ かつ } y \in U_2$$

と同値なので  $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}_{\leq}$  であり, さらに勝手な開集合族  $\{U_{\lambda} \in \mathcal{O}_{\leq}\}_{\lambda \in \Lambda}$  に対して  $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_{\lambda}$  は

$$\exists \alpha \in \Lambda, \forall y \in P, x \leq y \implies y \in U_{\alpha} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_{\lambda}$$

と同値であるから  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_{\lambda} \in \mathcal{O}_{\leq}$  であり,  $\mathcal{O}_{\leq}$  は集合  $P$  の位相である.

##### 【例 1.1.1】 $[n]$ の位相

半順序集合  $[2] := \{0 \leq 1 \leq 2\}$  を考える. このとき, 位相  $\mathcal{O}_{\leq}$  とは

$$\mathcal{O}_{\leq} = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$$

のことである. 同様に, 半順序集合  $[n] := \{0 \leq 1 \leq \dots \leq n\}$  に対して

$$\mathcal{O}_{\leq} = \{\emptyset, \{n\}, \{n-1, n\}, \dots, \{0, \dots, n\}\}$$

が成り立つ.

## 定義 1.2: 層状化空間・層状化写像

$(P, \leq)$  を半順序集合とし、定義 1.1 の位相を入れて位相空間にする。

このとき、位相空間  $X$  が  **$P$ -層状化**されている ( $P$ -stratified) とは、連続写像  $s: X \rightarrow P$  が存在することを言う。組  $(X, s: X \rightarrow P)$  のことを  **$P$ -層状化空間** ( $P$ -stratified space) と呼ぶ。また、 $i \in P$  の逆像  $X_i := s^{-1}(\{i\}) \subset X$  のことを  **$i$ -層** ( $i$ -strata) と呼ぶ。

層状化空間  $(X, s: X \rightarrow P)$ ,  $(X', s': X' \rightarrow P')$  の間の**層状化写像** (stratified map) とは、連続写像の組  $(f: X \rightarrow X', \tilde{f}: P \rightarrow P')$  であって以下の図式を可換にするもののこと：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad f \quad} & X' \\ s \downarrow & & \downarrow s' \\ P & \xrightarrow{\quad \tilde{f} \quad} & P' \end{array}$$

### 【例 1.1.2】 $[n]$ -層状化空間

半順序集合  $[n] := \{0 \leq \dots \leq n\}$  に対して【例 1.1.1】の位相を入れる。まず、

$$X_0 = s^{-1}([n] \setminus \{1, \dots, n\})$$

でかつ  $\{1, \dots, n\}$  は  $[n]$  の開集合であるから、 $s$  の連続性から  $X$  の部分空間  $X_0 \subset X$  は閉集合だとわかる。さらに

$$\begin{aligned} X_0 \cup X_1 &= s^{-1}([n] \setminus \{2, \dots, n\}), \\ X_0 \cup X_1 \cup X_2 &= s^{-1}([n] \setminus \{3, \dots, n\}), \\ &\vdots \\ X_0 \cup \dots \cup X_n &= X \end{aligned}$$

が成り立つことから、 $s$  の連続性より  $X$  の部分空間  $X_0 \cup \dots \cup X_{m \leq n}$  は閉集合だと分かる。

### 【例 1.1.3】CW 複体

CW 複体  $X$  を与える。 $X_{\leq k}$  を  $X$  の  $k$ -骨格とすると、 $X_k \setminus X_{k-1}$  を  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  に写す写像  $s: X \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  は  $X$  の**層状化**を与える。

直観的には、層状化空間とは defect 付き  $C^\infty$  多様体の一般化である。特に  $X$  を  $C^\infty$  多様体とすると、 $[n]$ -層状化空間  $(X, s: X \rightarrow [n])$  の  $i$ -層  $X_i$  とは、多様体  $X$  上の余次元  $d - i$  の defect を全て集めてきたものだと見做せる。

### 定義 1.3: 層状化開埋め込み

**層状化写像**  $(f, \tilde{f}): (X, s: X \rightarrow P) \rightarrow (X', s': X' \rightarrow P')$  が**層状化開埋め込み** (stratified open embedding) であるとは、以下の2条件を満たすことを言う:

- (1) 連続写像  $f: X \rightarrow X'$  は位相的開埋め込みである<sup>a</sup>
- (2)  $\forall p \in P$  に対して,  $f$  の  $p$ -strata への制限<sup>b</sup>

$$f|_{X_p}: X_p \rightarrow X'_{\tilde{f}(p)}$$

は位相的開埋め込みである.

<sup>a</sup> i.e.  $f: X \rightarrow f(X)$  が同相写像かつ  $f(X) \subset Y$  が開集合

<sup>b</sup> **層状化写像**の定義に登場する図式の可換性より,  $\forall x \in X_p$  に対して  $s'(f(x)) = s' \circ f(x) = \tilde{f} \circ s(x) = \tilde{f}(p)$ , i.e.  $f(x) \in s'^{-1}(\{\tilde{f}(p)\}) = X'_{\tilde{f}(p)}$  が分かる.

!

以下では混乱が生じにくい場合, **層状化空間**  $(X, s: X \rightarrow P)$  のことを  $(X \xrightarrow{s} P)$  や  $(X \rightarrow P)$  と略記する. さらに, **層状化写像**  $(f, \tilde{f}): (X, s: X \rightarrow P) \rightarrow (X', s': X' \rightarrow P')$  のことを  $f: (X \rightarrow P) \rightarrow (X' \rightarrow P')$  と略記し, 連続写像  $\tilde{f}: P \rightarrow P'$  のことも  $f$  と書く場合がある.

圏 **StTop** を,

- 第2可算な Hausdorff 空間であるような**層状化空間**を対象とする
- **層状化開埋め込み**を射とする

ことで定義する.

#### 1.1.2 $C^0$ 級層状化空間

### 定義 1.4: コーン

**層状化空間**  $(X \xrightarrow{s} P)$  を与える.  $X$  の**コーン** (cone) とは, 以下のようにして構成される**層状化空間**  $(C(X), C(s): C(X) \rightarrow C(P))$  のこと:

- 位相空間  $C(X)$  を, 押し出し位相空間

$$C(X) := \{\text{pt}\} \amalg_{\{0\} \times X} (\mathbb{R}_{\geq 0} \times X)$$

と定義する:

$$\begin{array}{ccc} \{0\} \times X & \xhookrightarrow{\{0\} \times \text{id}_X} & \mathbb{R}_{\geq 0} \times X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{\text{pt}\} & \xhookrightarrow{\quad} & \{\text{pt}\} \amalg_{\{0\} \times X} (\mathbb{R}_{\geq 0} \times X) \end{array}$$

- 半順序集合  $C(P)$  を,  $P$  に最小の要素  $-\infty$  を付け足すことで定義する. これは半順序集合の

圏における押し出し

$$C(P) := \{-\infty\} \amalg_{\{0\} \times P} ([1] \times P)$$

である.

- 連続写像

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{\geq 0} \times X &\longrightarrow [1] \times P, \\ (t, x) &\longmapsto \begin{cases} (0, s(x)), & t = 0, \\ (1, s(x)), & t > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

が誘導する連続写像  $C(X) \longrightarrow C(P)$  を  $C(s)$  と書く.

位相空間の圏における押し出しの公式から, 位相空間  $C(X)$  とは

$$\begin{aligned} i_1: \{0\} \times X &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \times X, \quad x \longmapsto (0, x), \\ i_2: \{0\} \times X &\longrightarrow \{\text{pt}\}, \quad x \longmapsto \text{pt} \end{aligned}$$

とおいたときのコイコライザ

$$\{0\} \times X \xrightarrow[i_2]{i_1} \{\text{pt}\} \sqcup (\mathbb{R}_{\geq 0} \times X) \xrightarrow{q} C(X),$$

i.e. 商位相空間

$$\frac{\mathbb{R}_{\geq 0} \times X}{i_1(x) \sim i_2(x)} = \frac{\mathbb{R}_{\geq 0} \times X}{\{0\} \times X}$$

のこと. 従って  $C(s): C(X) \longrightarrow C(P)$  とは, 連続写像<sup>\*1</sup>

$$\frac{\mathbb{R}_{\geq 0} \times X}{\{0\} \times X} \longrightarrow C(P), \quad [(t, x)] \longmapsto \begin{cases} -\infty, & t = 0 \\ s(x), & t > 0 \end{cases}$$

のことである.



以下では, 混乱の恐れがない限り層状化空間  $(X \xrightarrow{s} P)$  の  $\text{コーン}$  を  $C(X \xrightarrow{s} P)$  と略記する.

<sup>\*1</sup>  $C(P)$  の位相  $\mathcal{O}_{C(P)}$  は,  $P$  の位相  $\mathcal{O}_P$  に 1 つの開集合  $\{-\infty\} \cup P$  を加えたものである.  $\forall U \in \mathcal{O}_P$  に対して  $C(s)^{-1}(U) = \mathbb{R}_{>0} \times s^{-1}(U) \in \mathcal{O}_{C(X)}$  で, かつ  $C(s)^{-1}(\{-\infty\} \cup P) = C(X) \in \mathcal{O}_{C(X)}$  なので  $C(s)$  は連続である.

### 定義 1.5: $C^0$ 級層状化空間

以下を充たす **StTop** の最小の充満部分圏を  $\mathbf{Snglr}^{C^0}$  と書き, 圏  $\mathbf{Snglr}^{C^0}$  の対象を  $C^0$  級層状化空間 ( $C^0$  stratified space) と呼ぶ:

**(Snglr-1)**  $(\emptyset \rightarrow \emptyset) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$

**(Snglr-2)**

$(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$  かつ  $X, P$  が位相空間としてコンパクト  
 $\implies C(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$

**(Snglr-3)**

$(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}) \implies (X \times \mathbb{R} \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})^a$

**(Snglr-4)**

$(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$  かつ  $\text{Hom}_{\mathbf{StTop}}((U \rightarrow P_U), (X \rightarrow P)) \neq \emptyset$   
 $\implies (U \rightarrow P_U) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$

**(Snglr-5)**

$(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{StTop})$  が開被覆  $\{(U_\lambda \rightarrow P_\lambda) \rightarrow (X \rightarrow P)\}_{\lambda \in \Lambda}^b$  を持ち, かつ  $\forall \lambda \in \Lambda$  に  
 対して  $(U_\lambda \rightarrow P_\lambda) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$   
 $\implies (X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$

<sup>a</sup>  $X \times \mathbb{R}$  の層状化は, 連続写像  $X \times \mathbb{R} \rightarrow X, (x, t) \mapsto x$  を前もって合成することにより定める.

<sup>b</sup> i.e.  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}, \{P_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  が, それぞれ位相空間  $X, P$  の開被覆を成す.

### 【例 1.1.4】 位相多様体は $C^0$ 級層状化空間

**(Snglr-1)** より,  $* := C(\emptyset \rightarrow \emptyset) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$  である. **(Snglr-3)** より,  $\forall n \geq 0$  に対して  $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n \rightarrow [0]) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$  であることが帰納的に分かる.  $\mathbb{R}^n$  の任意の開集合  $U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  に対して,

$$\begin{array}{ccc} U & \hookrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ [0] & \xrightarrow{=} & [0] \end{array}$$

は層状化埋め込みであり, 従って **(Snglr-4)** より  $U := (U \rightarrow [0]) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$  が分かる. 以上の考察と **(Snglr-5)** を併せて, 任意の位相多様体  $M$  は<sup>a</sup>圏  $\mathbf{Snglr}^{C^0}$  の対象である.

<sup>a</sup> より正確には,  $M$  を層状化空間  $(M \rightarrow [0])$  と同一視している.

### 1.1.3 $C^0$ basic

### 定義 1.6: $C^0$ basic

$C^0$  級層状化空間  $(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$  が  $C^0$ -basic であるとは, ある  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  およびコンパクトな  $C^0$  級層状化空間  $(Z \rightarrow Q) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$  が存在して  $(X \rightarrow P) = (\mathbb{R}^n \rightarrow [0]) \times C(Z \rightarrow Q)$  が成り立つことを言う.

いま,  $C^0$  basic な  $(U \rightarrow P_U) = (\mathbb{R}^n \rightarrow [0]) \times C(Z \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$  を 1 つとる. コーンの定義から,  $U$  の点を  $(v, [t, z]) \in \mathbb{R}^n \times \frac{\mathbb{R}_{\geq 0} \times Z}{\{0\} \times Z}$  と表示することができる. この表示の下で自己同相

$$\begin{aligned} \gamma: \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^n \times C(Z) &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^n \times C(Z), \\ (t, (v, p), [s, z]) &\longmapsto (t, (tv + p, p), [ts, z]) \end{aligned}$$

を考える<sup>\*2</sup>.

さらに, もう 1 つの  $C^0$  basic な  $(U' \rightarrow P_{U'}) = (\mathbb{R}^{n'} \rightarrow [0]) \times C(Z' \rightarrow P') \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$  および  $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}}((U \rightarrow P_U), (U' \rightarrow P_{U'}))$  をとる. ただし,  $f$  はコーンポイントをコーンポイントへ写す, i.e.  $\forall u \in \mathbb{R}^n$  に対して  $f(u, \text{pt}) \in \mathbb{R}^{n'} \times \{\text{pt}\}$  が成り立つことを仮定する.  $f|_{\mathbb{R}^n}: \mathbb{R}^n \times \{\text{pt}\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n'} \times \{\text{pt}\}$  を  $f$  のコーンポイントへの制限として,

$$\begin{aligned} f_{\Delta}: \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^n \times C(Z) &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^{n'} \times C(Z'), \\ (t, v, p, [s, z]) &\longmapsto (t, f|_{\mathbb{R}^n}(v), f(p, [ts, z])) \end{aligned}$$

とおこう.

#### 【例 1.1.5】

$Z = Z' = \emptyset$  のとき,  $f$  とは単に連続関数  $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n'}$  のことである. このとき,

$$\begin{aligned} (\gamma^{-1} \circ f_{\Delta} \circ \gamma)(t, v, p) &= \gamma^{-1} \circ f_{\Delta}(t, tv + p, p) \\ &= \gamma^{-1}(t, f(tv + p), f(p)) \\ &= \left( t, \frac{f(tv + p) - f(p)}{t}, f(p) \right) \end{aligned}$$

と計算できるため,  $f$  が  $C^1$  級であることと  $\forall (v, p) \in T\mathbb{R}^n$  に対して  $t \rightarrow +0$  の極限, i.e.  $v$  に沿った片側方向微分が存在することは同値である.

【例 1.1.5】をもとに,  $C^0$  basic な  $C^0$  級層状化空間の間の層状化開埋め込みの **conically smoothness** を定義する.  $C^\infty$  多様体の  $C^\infty$  構造の定義においては, チャート  $(U, \varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow U)$ ,  $(V, \psi: \mathbb{R}^n \rightarrow V)$  の間の変換関数  $\psi^{-1} \circ \varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  が  $C^\infty$  級であることを要請した. 次の小節で **conically smooth structure** の定義を行うが, その際にチャートに対応するものは **basic**  $U = \mathbb{R}^n \times C(Z)$  から着目している  $C^0$ -級層状化空間  $X$  への層状化開埋め込み  $\varphi: U \hookrightarrow X$  であり, 概ね<sup>\*3</sup>2 つのチャート  $\varphi: U \hookrightarrow X$ ,  $\psi: V \hookrightarrow X$  の間の変換関数  $\psi^{-1} \circ \varphi: U \longrightarrow V$  に対して **conically smooth (along  $\mathbb{R}^n$ )** であることを要請する.

<sup>\*2</sup> 接束  $T\mathbb{R}^n$  は  $\mathbb{R}^{2n}$  と微分同相である. [?, p.23] の記法に合わせて底空間  $\mathbb{R}^n$  の点を  $p$ ,  $p$  上のファイバーの元を  $v$  としたとき  $(v, p) \in T\mathbb{R}^n$  と書いた. 命題??の記法と順番が逆なので注意.

<sup>\*3</sup> コーンポイントをコーンポイントに写さない変換関数も存在しうるので, これだけではいけない.

### 定義 1.7: $\mathbb{R}^n$ に沿って conically smooth

- $C^0$  basic な  $(U \rightarrow P_U) = (\mathbb{R}^n \rightarrow [0]) \times C(Z \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$
- $C^0$  basic な  $(U' \rightarrow P_{U'}) = (\mathbb{R}^{n'} \rightarrow [0]) \times C(Z' \rightarrow P') \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$
- $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}}((U \rightarrow P_U), (U' \rightarrow P_{U'}))$  であって, コーンポイントを保存するもの

を与える. このとき,  $f$  が  $\mathbb{R}^n$  に沿って  $C^1$  級 ( $C^1$  along  $\mathbb{R}^n$ ) であるとは, 以下の図式を可換にする連続写像

$$\tilde{D}f: \mathbb{R}_{\geq 0} \times T\mathbb{R}^n \times C(Z) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \times T\mathbb{R}^{n'} \times C(Z')$$

が存在することを言う:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{\geq 0} \times T\mathbb{R}^n \times C(Z) & \xrightarrow{\tilde{D}f} & \mathbb{R}_{\geq 0} \times T\mathbb{R}^{n'} \times C(Z') \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{R}_{> 0} \times T\mathbb{R}^n \times C(Z) & \xrightarrow{\gamma^{-1} \circ f_{\Delta} \circ \gamma} & \mathbb{R}_{> 0} \times T\mathbb{R}^{n'} \times C(Z') \end{array}$$

このような拡張が存在するとき, 第一変数を  $t = 0$  に制限して得られる連続写像を

$$Df: T\mathbb{R}^n \times C(Z) \longrightarrow T\mathbb{R}^{n'} \times C(Z')$$

と書く.  $f$  が  $\mathbb{R}^n$  に沿って  $C^r$  級であるとは,  $Df$  が  $\mathbb{R}^n$  に沿って  $C^{r-1}$  級であることを言う.  $f$  が  $\mathbb{R}^n$  に沿って conically smooth であるとは,  $\forall r \geq 1$  について  $C^r$  級であることを言う.

#### 1.1.4 conically smooth な層状化空間

次に行うべきは, 与えられた  $C^0$  級層状化空間  $(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$  の上の conically smooth structure i.e. 変換関数が conically smooth であるような極大アトラスを定義することである. この手続きは, 次で定義する次元と深さに関する帰納法によって構成される.

### 定義 1.8: 被覆次元

$X$  を位相空間とする. 以下の条件を充たす最小の  $d \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$  のことを (存在すれば)  $X$  の被覆次元 (covering dimension) と呼び,  $\dim X$  と書く:

(covering)

$X$  の任意の開被覆  $\mathcal{U}$  に対して, 十分細かい細分  $\mathcal{V}_{\mathcal{U}} \prec \mathcal{U}$  が存在して, 任意の互いに異なる  $\forall m > d + 1$  個の開集合  $V_1, \dots, V_m \in \mathcal{V}_{\mathcal{U}}$  の共通部分が空になるようにできる. 特に,  $\emptyset$  の被覆次元は  $-1$  と定義する.

点  $x \in X$  における被覆次元を以下で定義する:

$$\dim_x X := \inf \{ \dim U \geq -1 \mid x \in U \underset{\text{open}}{\subset} X \}$$

### 定義 1.9: 次元と深さ

空でない  $C^0$  級層状化空間  $(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$  を与える.

- $(X \rightarrow P)$  の点  $x \in X$  における局所的次元 (local dimension) とは, 点  $x$  における  $X$  の被覆次元  $\dim_x(X)$  のことを言う.
- $(X \rightarrow P)$  の次元 (dimension) とは

$$\dim(X \rightarrow P) := \sup_{x \in X} \dim_x(X)$$

のこと.

- $(X \xrightarrow{s} P)$  の点  $x \in X$  における局所的深さ (local depth) とは,

$$\text{depth}_x(X \rightarrow P) := \dim_x(X) - \dim_x(X_{s(x)})$$

のこと.

- $(X \rightarrow P)$  の深さ (depth) とは,

$$\text{depth}(X \rightarrow P) := \sup_{x \in X} \text{depth}_x(X \rightarrow P)$$

のこと. ただし,  $\text{depth}(\emptyset) := -1$  と定義する.

#### 【例 1.1.6】コーンの深さ

$n$  次元位相多様体  $Z$  について, 定義から  $\forall x \in Z$  に対して  $\dim_x(Z) = n$  が成り立つ.  $Z$  を【例 1.1.4】により  $C^0$  級層状化空間  $(Z \xrightarrow{s} [0]) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$  と見做すと, このコーン  $C(Z \xrightarrow{s} [0])$  について

$$\text{depth}_x(C(Z \xrightarrow{s} [0])) = \begin{cases} n+1, & x = \text{pt}, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

であることがわかる. 実際  $C(Z)_{C(s)(\text{pt})} = \{\text{pt}\}$  であるが, 1 点からなる位相空間の被覆次元は 0 次元なので  $\dim_{\text{pt}}(C(Z)_{C(s)(\text{pt})}) = 0$  である. 一方, コーンポイント以外の点  $x \in C(Z)$  に対して  $C(s)(x)$ -層は  $C(Z)_{C(s)(x)} = \mathbb{R}_{>0} \times Z \approx \mathbb{R} \times Z$  であるから,  $\dim_x(C(Z)_{C(s)(x)}) = n+1$  と計算できる<sup>a</sup>.

また,  $\forall (X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$  に対して

$$\begin{aligned} \dim((\mathbb{R}^m \rightarrow [0]) \times (X \rightarrow P)) &= m + \dim(X \rightarrow P), \\ \text{depth}((\mathbb{R}^m \rightarrow [0]) \times (X \rightarrow P)) &= \text{depth}(X \rightarrow P) \end{aligned}$$

が成り立つ. 従って,  $C^0$  basic な  $(U \rightarrow P_U) = (\mathbb{R}^n \rightarrow [0]) \times C(Z \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$  に対して

$$\begin{aligned} \text{depth}(U \rightarrow P_U) &= \text{depth}(C(Z \rightarrow P)) \\ &= \dim(Z \rightarrow P) + 1 \end{aligned}$$

が成り立つ.

<sup>a</sup> さらに,  $\forall x \in C(Z)$  に対して  $\dim_x C(Z) = n+1$  である.



次元と深さに関する帰納法を実行する前に、構成したい圏を表す記号の整理をしておこう：

- conically smooth チャートの素材となる、**basic** が成す圏

$$\mathbf{Bsc}$$

これは、 $C^\infty$  多様体の圏  $\mathbf{Mfld}$  において  $\mathbb{R}^n$  ( $\forall n \geq -1$ ) 全体が成す充満部分圏に相当するものである。

- 与えられた  $C^0$  級層状化空間  $(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$  に対して、その上に入る極大アトラス<sup>\*4</sup>全体が成す集合を返す前層

$$\text{Sm}: (\mathbf{Snglr}^{C^0})^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

この対応が前層であることの直観は、層状化開埋め込み  $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}}((X \rightarrow P), (Y \rightarrow Q))$  が与えられると、 $(X \rightarrow P)$  上の極大アトラス  $\text{Sm}(X \rightarrow P)$  が  $(Y \rightarrow Q)$  上の極大アトラス  $\text{Sm}(Y \rightarrow Q)$  を「制限」する写像  $\text{Sm}(f): \text{Sm}(Y \rightarrow Q) \longrightarrow \text{Sm}(X \rightarrow P)$  によって得られるということである。

- 深さが  $k$  以下、かつ次元が  $n$  以下であるような  $C^0$  級層状化空間全体が成す  $\mathbf{Snglr}^{C^0}$  の充満部分圏を

$$\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\substack{\leq k, \\ \text{depth} \quad \text{dimension}}} \leq n$$

と書く。同様に

$$\mathbf{Bsc}_{\leq k, \leq n}, \quad \text{Sm}_{\leq k, \leq n}: (\mathbf{Snglr}_{\leq k, \leq n}^{C^0})^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

と書く。

- conically smooth な層状化空間の圏

$$\mathbf{Snglr}$$

これを作ることが本小節の最終目標である。

帰納法により、 $\forall k \geq -1$  に対して  $\mathbf{Bsc}_{\leq k, \leq \infty}$  および  $\text{Sm}_{\leq k, \leq \infty}: (\mathbf{Snglr}_{\leq k, \leq \infty}^{C^0})^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$  が構成される。

#### 定義 1.10: 帰納法の出発点

(**Snglr-1**) より  $(\emptyset \rightarrow \emptyset) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}_{\leq -1, \leq \infty}^{C^0})$  である。

$$(1) \mathbf{Bsc}_{\leq -1, \leq \infty} := \emptyset$$

$$(2) \text{Sm}_{\leq -1, \leq \infty}(\emptyset) := \{*\}$$

と定義する。

<sup>\*4</sup> 存在するか分からないし、存在したとして一意であるとは限らない。実際、例えば  $C^\infty$  多様体の段階においてさえ  $\mathbb{R}^4$  の上の極大アトラス (i.e.  $C^\infty$  構造) は非可算無限個存在する [?].

### 仮定 1.1: 帰納法の仮定

与えられた  $k \geq -1$  に対して以下の構成が完了していると仮定する：

- (1) 圏  $\mathbf{Bsc}_{\leq k, \leq \infty}$
- (2) 前層  $\mathbf{Sm}_{\leq k, \leq \infty} : (\mathbf{Snglr}_{\leq k, \leq \infty}^{C^0})^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$
- (3) 関手

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times (-) : \mathbf{Bsc}_{\leq k, \leq \infty} &\longrightarrow \mathbf{Bsc}_{\leq k, \leq \infty}, \\ U &\longmapsto \mathbb{R} \times U, \\ (U \xrightarrow{f} V) &\longmapsto (\mathbb{R} \times U \xrightarrow{\text{id} \times f} \mathbb{R} \times V) \end{aligned}$$

およびそれが誘導する自然変換<sup>a</sup>

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\mathbf{Sm}_{\leq k, \leq \infty}(-)} & \\ (\mathbf{Snglr}_{\leq k, \leq \infty}^{C^0})^{\text{op}} & \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \end{array} & \mathbf{Sets} \\ & \xleftarrow{\mathbf{Sm}_{\leq k, \leq \infty}(\mathbb{R} \times -)} & \end{array}$$

<sup>a</sup>  $X$  の極大アトラス  $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  に対して,  $\{\mathbb{R} \times U_\alpha, \text{id} \times \varphi_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  を対応づける.

### 定義 1.11: 圏 $\mathbf{Bsc}_{\leq k+1, \leq \infty}$

帰納法の仮定 1.1 がある  $k \geq -1$  において成立しているとする. また,  $C^0$  basic を  $U_Z^n := (\mathbb{R}^n \rightarrow [0]) \times C(Z \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}_{\leq k+1, \leq \infty}^{C^0})$  と書く. このとき, 圏  $\mathbf{Bsc}_{\leq k+1, \leq \infty}$  を以下で定義する：

(対象)

$C^0$  basic <sup>a</sup>  $U_Z^n \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}_{\leq k+1, \leq \infty}^{C^0})$  および, 極大アトラス  $\mathcal{A}_Z \in \text{Ob}(\mathbf{Sm}_{\leq k, \leq \infty}(Z \rightarrow P))$  の組み

$$(U_Z^n, \mathcal{A}_Z)$$

を対象とする.

(射)

任意の 2 つの対象  $(U_Z^n, \mathcal{A}_Z), (U_W^m, \mathcal{A}_W) \in \text{Ob}(\mathbf{Bsc}_{\leq k+1, \leq \infty})$  に対して, 以下の条件を満たす層状化開埋め込み  $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Snglr}_{\leq k+1, \leq \infty}^{C^0}}(U_Z^n, U_W^m)$  を射とする：

$f$  がコーンポイントを保存しない場合

ある層状化開埋め込み  $f_0 \in \text{Hom}_{\mathbf{Snglr}_{\leq k+1, \leq \infty}^{C^0}}(U_Z^n, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \times W)$  が存在して

$$f : U_Z^n \xrightarrow{f_0} \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}_{>0} \times W) \hookrightarrow U_W^m = \mathbb{R}^m \times C(W)$$

と書いて, かつ  $(U_Z^n, f_0) \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \times W} \in \mathbf{Sm}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \times W)$

$f$  がコーンポイントを保存する場合

$f$  は  $\mathbb{R}^n$  に沿って **conically smooth** であって、かつ  $Df: \mathbb{R}^n \times U_Z^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \times U_W^m$  が単射であり、かつ

$$\mathcal{A}_{f^{-1}(U_W^m \setminus \mathbb{R}^m)} = \text{Sm}_{\leq k, \leq \infty}(f|_{f^{-1}(U_W^m \setminus \mathbb{R}^m)})(\mathcal{A}_{U_W^m \setminus \mathbb{R}^m})$$

を充たす<sup>b</sup>。ただし、 $U_W^m \setminus \mathbb{R}^m := U_W^m \setminus (\mathbb{R}^m \times \{\text{pt}\}) = \mathbb{R}^{m+1} \times W$  と略記した。

<sup>a</sup> **depth** の定義から  $\text{depth}(Z \rightarrow P) \leq \dim(Z \rightarrow P)$  である。故に【例 1.1.6】から、 $\text{depth}(Z \rightarrow P) \leq \dim(Z \rightarrow P) = \text{depth } U_Z^n - 1 \leq k$  であること、i.e.  $(Z \rightarrow P) \in \text{Ob}(\text{Snglr}_{\leq k, \leq \infty}^{C^0})$  が分かる。

<sup>b</sup> ここで帰納法の仮定 1.1-(3) を暗に使っている。

### 定義 1.12: 前層 $\text{Sm}_{\leq k+1, \leq \infty}$

帰納法の仮定 1.1 がある  $k \geq -1$  において成立しているとする。さらに定義 1.11 によって  $\text{Bsc}_{\leq k+1, \leq \infty}$  が完成しているとする。

- **$C^0$  級層状化空間**  $\forall (X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\text{Snglr}_{\leq k+1, \leq \infty}^{C^0})$  に対して、 $X \rightarrow P$  のアトラス (atlas) を族

$$\mathcal{A} := \left\{ (U_\alpha \in \text{Ob}(\text{Bsc}_{\leq k+1, \leq \infty}), \varphi_\alpha: U_\alpha \hookrightarrow (X \rightarrow P)) \right\}_{\alpha \in \Lambda} \in \text{Sm}_{\leq k+1, \leq \infty}(X \rightarrow P)$$

であって以下の条件を充たすものとして定義する：

#### (Atlas-1)

$\mathcal{A}$  は  $(X \rightarrow P)$  の開被覆である。

#### (Atlas-2)

$\forall \alpha, \beta \in \Lambda$  および  $\forall x \in \varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta)$  に対して、**圏**  $\text{Bsc}_{\leq k+1, \leq \infty}$  の可換図式

$$\begin{array}{ccc} \exists W & \xrightarrow{f_\beta} & U_\beta \\ f_\alpha \downarrow & & \downarrow \varphi_\beta \\ U_\alpha & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & X \end{array}$$

が存在して  $x \in \varphi_\alpha \circ f_\alpha(W) = \varphi_\beta \circ f_\beta(W)$  を充たす

アトラス  $\mathcal{A}$  の元  $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$  のことを**チャート** (chart) と呼ぶ。

- **$C^0$  級層状化空間**  $\forall (X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\text{Snglr}_{\leq k+1, \leq \infty}^{C^0})$  の2つのアトラス  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  が**同値**であるとは、 $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  が  $(X \rightarrow P)$  のアトラスであることを言う。これは  $(X \rightarrow P)$  のアトラス全体の集合の上に同値関係を定める<sup>a</sup>。  $(X \rightarrow P)$  の**極大アトラス** (maximal atlas) とは、この同値関係によるアトラス  $\mathcal{A}$  の同値類  $[\mathcal{A}]$  のことを言う。
- 前層

$$\text{Sm}_{\leq k+1, \leq \infty}: (\text{Snglr}_{\leq k+1, \leq \infty}^{C^0})^{\text{op}} \longrightarrow \text{Sets}$$

を以下のように定義する：

#### (対象)

任意の  **$C^0$  級層状化空間**  $(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\text{Snglr}_{\leq k+1, \leq \infty}^{C^0})$  に対して

$$\text{Sm}_{\leq k+1, \leq \infty}(X \rightarrow P) := \{ [\mathcal{A}] \mid \mathcal{A} \text{ is an atlas of } (X \rightarrow P) \}$$

(射)

任意の層状化開埋め込み  $f \in \text{Hom}_{\text{Snglr}^{C^0}_{\leq k+1, \leq \infty}}$  に対して,  $f$  によるアトラスの引き戻しを対応付ける.

<sup>a</sup> 同値関係であることの証明は [?, Lemma 3.2.11.] を参照.

以上の帰納法をまとめて, conically smooth な層状化空間と層状化開埋め込みの圏 **Snglr** を得る.

### 定義 1.13: 圏 **Snglr**

- **basic** のなす圏 **Bsc** を以下で定義する:

$$\mathbf{Bsc} := \bigcup_{k \geq -1} \mathbf{Bsc}_{\leq k, \leq \infty}$$

- 極大アトラスの集合を与える関手  $\text{Sm}: (\text{Snglr}^{C^0})^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$  を以下の右 Kan 拡張として定義する:

$$\begin{array}{ccc} (\text{Snglr}^{C^0}_{<\infty, \leq \infty})^{\text{op}} & \xrightarrow{\text{Sm}_{<\infty, \leq \infty}} & \mathbf{Sets} \\ \downarrow & \nearrow \text{Sm} & \\ (\text{Snglr}^{C^0})^{\text{op}} & & \end{array}$$

ただし,  $\text{Snglr}^{C^0}_{<\infty, \leq \infty} := \bigcup_{k \geq -1} \text{Snglr}^{C^0}_{\leq k, \leq \infty}$  とおいた.

- conically smooth な層状化空間 (conically smooth stratified space) と層状化開埋め込みの圏 **Snglr** を以下で定義する:

(対象)

$C^0$  級層状化空間  $(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\text{Snglr}^{C^0})$  およびその極大アトラス  $\mathcal{A}_X \in \text{Sm}(X \rightarrow P)$  の組み  $((X \rightarrow P), \mathcal{A}_X)$  を対象とする.

(射)

層状化開埋め込み  $f \in \text{Hom}_{\text{Snglr}^{C^0}}((X \rightarrow P), (Y \rightarrow Q))$  であって,  $f^* \mathcal{A}_Y = \mathcal{A}_X$  を充たすものを射とする.

### 1.1.5 conically smooth map

ここまでは層状化開埋め込みのみを考えていたため, 一般の層状化写像の conically smoothness を定義しなくてはならない.

### 定義 1.14: conically smooth map

2つの **basic**<sup>a</sup>  $X = (U_Z^n, \mathcal{A}_Z)$ ,  $Y = (U_W^m, \mathcal{A}_W) \in \text{Ob}(\mathbf{Bsc})$  の間の **層状化写像**  $f: U_Z^n \rightarrow U_W^m$  が **conically smooth** であることを, **depth**( $Y$ ) に関する帰納法によって定義する:

- (1) まず,  $\text{depth}(Y) = -1$  のときは  $X = Y = \emptyset$  であり, 一意的に定まる  $X, Y$  間の層状化写像が conically smooth であると定義する.
- (2) 深さ  $k \geq -1$  の basic に対して定義が完了しているとする.  $Y \in \text{Ob}(\mathbf{Bsc})$  の深さが高々  $k+1$  であるとき, 層状化写像  $f: X \rightarrow Y$  が conically smooth であることを以下で定義する:

**$f$  がコーンポイントを保存しない場合**

ある conically smooth な層状化写像  $f_0: X \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \times W$  が存在して

$$f: X \xrightarrow{f_0} \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}_{>0} \times W) \hookrightarrow Y = \mathbb{R}^m \times \mathbb{C}(W)$$

と書ける<sup>b</sup>.

**$f$  がコーンポイントを保存する場合**

$f$  は  $\mathbb{R}^n$  に沿って conically smooth であって, かつ制限

$$f|_{f^{-1}(Y \setminus \mathbb{R}^m)}: f^{-1}(Y \setminus \mathbb{R}^m) \rightarrow Y \setminus \mathbb{R}^m$$

が conically smooth. ただし,  $U_W^m \setminus \mathbb{R}^m := U_W^m \setminus (\mathbb{R}^m \times \{\text{pt}\}) = \mathbb{R}^{m+1} \times W$  と略記した.

<sup>a</sup>  $C^0$  basic を  $U_Z^n := (\mathbb{R}^n \rightarrow [0]) \times \mathbb{C}(Z \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$  と書く.

<sup>b</sup> 【例 1.1.6】より  $\text{depth}(W) < k+1$  であり, 帰納法の仮定が使える.

**conically smooth な層状化空間**  $((X \rightarrow P), \mathcal{A}_X), ((Y \rightarrow Q), \mathcal{A}_Y) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr})$  の間の **層状化写像**  $f: (X \rightarrow P) \rightarrow (Y \rightarrow Q)$  が **conically smooth** であるとは, 任意のチャートの組み合わせ  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_X, (V, \psi) \in \mathcal{A}_Y$  に対して

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi: U \rightarrow V$$

が conically smooth (for basics) であることを言う.

### 命題 1.1: conically smooth map の基本性質

2つの conically smooth map の合成も conically smooth である.

**証明** [?, Proposition 3.3.5] ■

命題 1.1 より, conically smooth な層状化空間の圏を定義できる.

### 定義 1.15: conically smooth な層状化空間の圏 $\mathbf{Strat}$

conically smooth な層状化空間の圏  $\mathbf{Strat}$  を以下で定義する：

(対象)

圏  $\mathbf{Snglr}$  と全く同じ対象を持つ：

$$\mathrm{Ob}(\mathbf{Strat}) := \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr})$$

(射)

conically smooth map を射とする.

定義から明らかに  $\mathbf{Snglr} \subset \mathbf{Strat}$  である. ここで, 圏  $\mathbf{Strat}$  における特別な射に名前をつけておこう：

### 定義 1.16: constructible bundle

- conically smooth な層状化写像  $\pi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}((E \rightarrow P), (B \rightarrow Q))$  が層状化ファイバー束 (conically smooth fiber bundle) であるとは, conically smooth な層状化開埋め込みの族  $\{U_\alpha \hookrightarrow B\}_{\alpha \in \Lambda}$ ,  $\{\varphi_\alpha: U_\alpha \times F_\alpha \hookrightarrow E\}_{\alpha \in \Lambda}$  が存在して以下を充たすことを言う：

(Bun-1)

$\forall \alpha \in \Lambda$  に対して, 圏  $\mathbf{Strat}$  における引き戻しの図式

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times F_\alpha & \xhookrightarrow{\varphi_\alpha} & E \\ \mathrm{proj}_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ U_\alpha & \hookrightarrow & B \end{array}$$

が成り立つ.

(Bun-2)

族  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  は  $B$  の開基である.

- conically smooth な層状化写像  $\pi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}((E \rightarrow P), (B \rightarrow Q))$  が弱構成可能束 (weakly constructible bundle) であるとは,  $\forall q \in Q$  に対して,  $\pi$  の  $q$ -層への制限

$$\pi|_{\pi^{-1}(B_q)}: \pi^{-1}(B_q) \longrightarrow B_q$$

が層状化ファイバー束であることを言う.

- conically smooth な層状化写像  $\pi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}((E \rightarrow P), (B \rightarrow Q))$  が構成可能束 (constructible bundle) であることを,  $\mathrm{depth}(E)$  に関する帰納法によって定義する：

(1)  $\mathrm{depth}(E) = 0$  のとき,  $\pi$  が構成可能束であるとは,  $\pi$  が  $C^\infty$  ファイバー束であることを言う.

(2) 深さ  $k \geq 0$  までの定義が完了しているとする.  $\mathrm{depth}(E) \leq k+1$  のとき,  $\pi$  が構成可能束であるとは, 以下の2条件を充たすことを言う：

(cBun-1)  $f$  は弱構成可能束である.

(cBun-2)  $\forall q \in Q$  に対して,  $\pi$  が誘導する層状化写像

$$\mathrm{Link}_{\pi^{-1}(B_q)}(E) \longrightarrow \pi^{-1}(B_q) \times_{B_q} \mathrm{Link}_{B_q}(B)$$

が構成可能束である.

### 1.1.6 管状近傍・ハンドル分解

## 1.2 層状化空間の接構造

### 1.2.1 Kan-豊穡化

圏  $\mathbf{Kan}$  を,

- Kan 複体を対象に持つ
- Kan 複体の間の自然変換を射に持つ

(1, 1)-圏とする.  $\mathbf{Kan}$  は単体的集合の圏  $\mathbf{sSet}$  の充満部分圏であり, 直積 (??) をテンソル積とするモノイダル圏になる.

#### 定義 1.17: 余単体的多様体

以下で定義する関手

$$\Delta_e: \Delta \longrightarrow \mathbf{Strat}$$

のことを余単体的多様体 (standard cosimplicial manifold) と呼ぶ<sup>a</sup>:

- $[n] \in \text{Ob}(\Delta)$  を, **conically smooth な層状化空間**

$$\Delta_e^n := \left\{ (x^0, \dots, x^n) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x^i = 1 \right\}$$

に対応付ける.

- $\alpha \in \text{Hom}_\Delta([m], [n])$  を, **conically smooth な層状化写像**

$$\begin{aligned} \Delta_e(\alpha): \Delta_e^m &\longrightarrow \Delta_e^n, \\ (x^0, \dots, x^m) &\longmapsto \left( \sum_{j, \alpha(j)=0} x^j, \dots, \sum_{j, \alpha(j)=n} x^j \right) \end{aligned}$$

に対応付ける.

<sup>a</sup> 余単体的集合に似ているが,  $x^i \geq 0$  の領域で切り取っていない.

$\mathbf{PSh}(\mathbf{Strat}^{\text{op}}, \mathbf{Sets})$  から  $\mathbf{sSet}$  への関手を

$$\begin{aligned} (-)|_\Delta: \mathbf{PSh}(\mathbf{Strat}^{\text{op}}, \mathbf{Sets}) &\longrightarrow \mathbf{sSet}, \\ F &\longmapsto F \circ \Delta_e \end{aligned}$$

で定義する. さらに,  $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathbf{Strat})$  に対して前層  $\widetilde{\text{Hom}}_{\mathbf{Strat}}(X, Y) \in \mathbf{PSh}(\mathbf{Strat}^{\text{op}}, \mathbf{Sets})$  を

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Hom}}_{\mathbf{Strat}}(X, Y): \mathbf{Strat}^{\text{op}} &\longrightarrow \mathbf{Sets}, \\ Z &\longmapsto \left\{ f \in \text{Hom}_{\mathbf{Strat}}(Z \times X, Z \times Y) \mid \text{proj}_Z \circ f = \text{proj}_Z \right\}, \end{aligned}$$

$$(Z \xrightarrow{\alpha} W) \mapsto (f \mapsto f \circ \alpha)$$

で定義する．ただし，**conically smooth な層状化写像**  $\text{proj}_Z \in \text{Hom}_{\mathbf{Strat}}(Z \times X, X)$  とは第一成分への射影のことである．同様にして前層  $\widetilde{\text{Hom}}_{\mathbf{Snglr}}(X, Y) \in \text{PSh}(\mathbf{Strat}^{\text{op}}, \mathbf{Sets})$  を

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Hom}}_{\mathbf{Snglr}}(X, Y) &: \mathbf{Strat}^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}, \\ Z &\mapsto \{ f \in \text{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(Z \times X, Z \times Y) \mid \text{proj}_Z \circ f = \text{proj}_Z \}, \\ (Z \xrightarrow{\alpha} W) &\mapsto (f \mapsto f \circ \alpha) \end{aligned}$$

で定義する．

#### 補題 1.1:

$\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathbf{Strat})$  に対して定まる単体的集合

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbf{Strat}}(X, Y) &:= \widetilde{\text{Hom}}_{\mathbf{Strat}}(X, Y) \circ (-)|_{\Delta}, \\ \text{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(X, Y) &:= \widetilde{\text{Hom}}_{\mathbf{Snglr}}(X, Y) \circ (-)|_{\Delta} \end{aligned}$$

は Kan 複体である．

**証明** [?, Lemma 4.1.4.]. ■

#### 定義 1.18: $(\infty, 1)$ -圏 $\mathbf{Strat}$ , $\mathbf{Snglr}$ , $\mathcal{B}\mathbf{sc}$

**Kan-豊稜圏**  $\mathbf{Strat}$  を以下で定義する：

- $\text{Ob}(\mathbf{Strat}) := \text{Ob}(\mathbf{Snglr})$
- 補題 1.1 で構成した  $\text{Hom}_{\mathbf{Strat}}(X, Y) \in \text{Ob}(\mathbf{Kan})$  を Hom 対象とする．

同様に，**Kan-豊稜圏**  $\mathbf{Snglr}$  を以下で定義する：

- $\text{Ob}(\mathbf{Snglr}) := \text{Ob}(\mathbf{Snglr})$
- 補題 1.1 で構成した  $\text{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(X, Y) \in \text{Ob}(\mathbf{Kan})$  を Hom 対象とする．

**Kan-豊稜圏**  $\mathbf{Snglr}$  の対象を **Ob(Bsc)** に制限して得られる充満部分圏を  $\mathcal{B}\mathbf{sc}$  と書く．

**!** **Kan-豊稜圏** を homotopy coherent nerve functor  $N_{\text{hc}}: \mathbf{Cat}_{\Delta} \longrightarrow \mathbf{sSet}$  で単体的集合の圏  $\mathbf{sSet}$  へ埋め込んだものは  $(\infty, 1)$ -圏である [?, Proposition 1.1.5.10.]. 故に以下では **Kan-豊稜圏**  $\mathbf{Strat}$ ,  $\mathbf{Snglr}$  と  $(\infty, 1)$ -圏  $N_{\text{hc}}(\mathbf{Strat})$ ,  $N_{\text{hc}}(\mathbf{Snglr})$  を区別しない．

### 1.2.2 $(\infty, 1)$ -圏におけるファイブレーション



### 定義 1.19: $(\infty, 1)$ -ファイブレーション

$p: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{B}$  を  $(\infty, 1)$ -圏の関手とする.

#### (lifting property)

包含  $\iota \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda_j^p, \Delta^n)$  に対して  $p \circ f_0 = f \circ \iota$  を満たす任意の  $(f_0, f) \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda_j^n, \mathcal{E}) \times \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta_j^n, \mathcal{B})$  に対して, 以下の図式を可換にする  $\bar{f} \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \mathcal{E})$  が存在する:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_j^n & \xrightarrow{\forall f_0} & \mathcal{E} \\ \downarrow \iota & \nearrow \exists \bar{f} & \downarrow p \\ \Delta^n & \xrightarrow{\forall f} & \mathcal{B} \end{array}$$

- $p$  が **内的ファイブレーション** (inner fibration) であるとは,  $0 < \forall j < \forall n$  に対して **(lifting property)** を満たすことを言う.
- $p$  が **右ファイブレーション** (right fibration) であるとは,  $0 < \forall j \leq \forall n$  に対して **(lifting property)** を満たすことを言う.
- $p$  が **左ファイブレーション** (left fibration) であるとは,  $0 \leq \forall j < \forall n$  に対して **(lifting property)** を満たすことを言う.
- $p$  が **Kan ファイブレーション** (Kan fibration) であるとは,  $0 \leq \forall j \leq \forall n$  に対して **(lifting property)** を満たすことを言う.

系??によると, **(lifting property)** は,  $(\infty, 1)$ -圏  $\mathcal{B}$  における角の図式  $(p_{[n-1]}(f_{00}), \dots, \underbrace{\bullet}_j, \dots, p_{[n-1]}(f_{0n})) \in (\mathcal{B}_{n-1})^{\times n}$  を  $n$ -射  $f \in \mathcal{B}_n$  が埋めているならば,  $(\infty, 1)$ -圏  $\mathcal{E}$  における角の図式  $(f_{00}, \dots, \underbrace{\bullet}_j, \dots, f_{0n}) \in (\mathcal{E}_{n-1})^{\times n}$  を埋める  $n$ -射  $\bar{f} \in \mathcal{E}_n$  が存在することを主張している.

2つの **右ファイブレーション**  $\mathcal{E} \xrightarrow{p} \mathcal{B}, \mathcal{E}' \xrightarrow{p'} \mathcal{B}$  が与えられたとき, これらの間の射とは集合

$$\text{Hom}_{\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}') := \{ f \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}') \mid p' \circ f = p \}$$

のことである.  $\text{Hom}_{\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$  の元を可換図式として表すと以下の通り:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{f} & \mathcal{E}' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & \mathcal{B} & \end{array}$$

$\text{Hom}_{\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}') \subset \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$  を【例??】の方法で単体的集合と見做せる. このようにして得られる単体的集合  $\text{Hom}_{\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$  の最大の部分 Kan 複体を  $\mathbf{Hom}_{\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$  と書く.

**定義 1.20: 右ファイブレーションの成す  $(\infty, 1)$ -圏**

$\mathcal{B}$  を  $(\infty, 1)$ -圏とする. **Kan-豊穠圏**  $\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}}$  を

- **右ファイブレーション**を対象とする
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$  を  $\mathrm{Hom}$  対象とする

ことで定義する. 以降では  $(\infty, 1)$ -圏  $\mathrm{N}_{\mathrm{hc}}(\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}}) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{sSet})$  のことも  $\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}}$  と書き, 区別しない.

**定理 1.1: unstraightening construction**

**Unstraightening construction** [?, Theorem 2.2.1.2.] は,  $(\infty, 1)$ -圏同値

$$\mathrm{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathcal{B}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}}$$

を与える.

**証明** [?, Proposition 2.2.3.11] ■

**1.2.3  $(\infty, 1)$ -圏におけるスライス圏**

**定義 1.21: 単体的集合の join**

2 つの単体的集合  $S, T \in \mathrm{Ob}(\mathbf{sSet})$  の **join** とは, 単体的集合

$$\begin{aligned} S \star T: \Delta^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathbf{Sets}, \\ [n] &\longmapsto \coprod_{-1 \leq i \leq n} (S_i \times T_{n-i-1}), \\ \left([m] \xrightarrow{\alpha} [n]\right) &\longmapsto \left( (i; (x, y)) \mapsto \left( \alpha^{-1}([i]); (S(\alpha|_{\alpha^{-1}([i])})(x), T(\alpha|_{\alpha^{-1}([m-i-1])})(y)) \right) \right) \end{aligned}$$

のこと. ただし  $S_{-1} = T_{-1} := \emptyset$  とおいた.

特に,  $d_j^n \in \mathrm{Hom}_{\Delta}([n-1], [n])$ ,  $s_j^n \in \mathrm{Hom}_{\Delta}([n+1], [n])$  に対して

$$\begin{aligned} (d_j^n)^{-1}([i]) &= \begin{cases} [i], & i < j \\ [i-1], & i \geq j \end{cases} \\ (s_j^n)^{-1}([i]) &= \begin{cases} [i], & i < j \\ [i+1], & i \geq j \end{cases} \end{aligned}$$

であるから,  $S \star T$  の面写像は

$$\begin{aligned} \partial_j^n: \coprod_{-1 \leq i \leq n} (S_i \times T_{n-i-1}) &\longrightarrow \coprod_{-1 \leq i \leq n-1} (S_i \times T_{n-i-2}), \\ (i; (x, y)) &\longmapsto \begin{cases} (i; (\partial_j^i x, y)), & j < i, i \neq 0 \\ (i-1; (\partial_j^i x, y)), & j = i \neq 0 \\ (-1; y), & j = i = 0 \\ (i-1; (x, \partial_{j-i-1}^{n-i-1} y)), & j > i > 0, n-i-1 \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

であり, 縮退写像は

$$\sigma_j^n: \coprod_{-1 \leq i \leq n} (S_i \times T_{n-i-1}) \longrightarrow \coprod_{-1 \leq i \leq n+1} (S_i \times T_{n-i}),$$

$$(i; (x, y)) \longmapsto \begin{cases} (i; (\sigma_j^i x, y)), & j < i, i \neq 0 \\ (i+1; (\sigma_j^i x, y)), & j = i \\ (i+1; (x, \sigma_{j-i-1}^{n-i-1} y)), & j > i, n-i-1 \neq 0 \end{cases}$$

となる.

【例 1.2.1】 join  $\Delta^0 \star \Delta^0$

$\Delta^0 \star \Delta^0$  を計算してみよう<sup>a</sup>. まず対象は

$$(\Delta^0 \star \Delta^0)_0 = \Delta^0_0 \sqcup \Delta^0_0 = \left\{ \begin{array}{c} \{0\} \\ \bullet \\ \bullet \\ \{0\} \end{array} \right\}$$

である. 1-射は

$$(\Delta^0 \star \Delta^0)_1 = \Delta^0_1 \sqcup (\Delta^0_0 \times \Delta^0_0) \sqcup \Delta^0_1$$

であるが, (1.2.1) より始点関数は

$$\partial_1^1|_{\Delta^0_0 \times \Delta^0_0}: \Delta^0_0 \times \Delta^0_0 \longrightarrow \Delta^0_0 \sqcup \Delta^0_0, \\ (\{0\}, \{0\}) \longmapsto \{0\}$$

終点関数は

$$\partial_0^1|_{\Delta^0_0 \times \Delta^0_0}: \Delta^0_0 \times \Delta^0_0 \longrightarrow \Delta^0_0 \sqcup \Delta^0_0, \\ (\{0\}, \{0\}) \longmapsto \{0\}$$

となるため,  $\Delta^0_1, \Delta^0_1$  が縮退していることを考慮すると

$$(\Delta^0 \star \Delta^0)_1 = \left\{ \begin{array}{c} \{0\} \\ \bullet \\ \downarrow \\ \bullet \\ \{0\} \end{array} \right\}$$

と図示できる.

---

<sup>a</sup> 左右の区別を付けるために色を付けた.

【例 1.2.2】  $\text{join } \Delta^1 \star \Delta^0$

$\Delta^1 \star \Delta^0$  を計算してみよう．まず対象は

$$(\Delta^1 \star \Delta^0)_0 = \Delta^1_0 \sqcup \Delta^0_0 = \left\{ \begin{array}{cc} \{0\} & \{1\} \\ \bullet & \bullet \\ & \bullet \\ & \{0\} \end{array} \right\}$$

である．1-射は

$$(\Delta^1 \star \Delta^0)_1 = \Delta^1_1 \sqcup (\Delta^1_0 \times \Delta^0_0) \sqcup \Delta^0_1$$

であるが，(1.2.1) より始点関数は

$$\begin{aligned} \partial_1^1|_{\Delta^1_0 \times \Delta^0_0} : \Delta^1_0 \times \Delta^0_0 &\longrightarrow \Delta^1_0 \sqcup \Delta^0_0, \\ (x, \{0\}) &\longmapsto x \end{aligned}$$

終点関数は

$$\begin{aligned} \partial_0^1|_{\Delta^1_0 \times \Delta^0_0} : \Delta^1_0 \times \Delta^0_0 &\longrightarrow \Delta^1_0 \sqcup \Delta^0_0, \\ (x, \{0\}) &\longmapsto \{0\} \end{aligned}$$

となるため，

$$\Delta^1 \star \Delta^0 = \left\{ \begin{array}{cc} \{0\} & \{1\} \\ \bullet & \bullet \\ & \bullet \\ & \{0\} \end{array} \right\}$$

と図示できる．ただし，三角形の内部は 2-射  $(\text{Id}_{[1]}, \{0\}) \in \Delta^1_1 \times \Delta^0_0 \subset (\Delta^1 \star \Delta^0)_2$  が埋めている．同様に

$$(\Delta^0 \star \Delta^1)_1 = \left\{ \begin{array}{cc} \{0\} & \{1\} \\ \bullet & \bullet \\ & \bullet \\ & \{0\} \end{array} \right\}$$

であることが分かる．

【例 1.2.3】  $\text{join } \Delta^2 \star \Delta^0$

$\Delta^2 \star \Delta^0$  を計算してみよう． まず

$$(\Delta^2 \star \Delta^0)_0 = \Delta^2_0 \sqcup \Delta^0_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \{1\} & & \{0\} \\ & \bullet & \\ & \{2\} & \\ & \bullet & \\ & \{0\} & \end{array} \right\}$$

である． 次に 1 射は

$$(\Delta^2 \star \Delta^0)_1 = \Delta^2_1 \sqcup (\Delta^2_0 \times \Delta^0_0) \sqcup \Delta^0_1$$

であるが， (1.2.1) より始点関数は

$$\begin{aligned} \partial_1^1|_{\Delta^2_0 \times \Delta^0_0} : \Delta^2_0 \times \Delta^0_0 &\longrightarrow \Delta^2_0 \sqcup \Delta^0_0, \\ (x, \text{Id}_{\{0\}}) &\longmapsto x \end{aligned}$$

となり， 終点関数は

$$\begin{aligned} \partial_0^1|_{\Delta^2_0 \times \Delta^0_0} : \Delta^2_0 \times \Delta^0_0 &\longrightarrow \Delta^2_0 \sqcup \Delta^0_0, \\ (x, \text{Id}_{\{0\}}) &\longmapsto \{0\} \end{aligned}$$

となる． 従って図式??に倣うと

$$(\Delta^2 \star \Delta^0)_1 = \Delta^2_1 \sqcup (\Delta^2_0 \times \Delta^0_0) \sqcup \Delta^0_1 = \left\{ \begin{array}{ccc} \{0\} & & \{2\} \\ & \nearrow & \searrow \\ & \{1\} & \\ & \downarrow & \\ & \{0\} & \end{array} \right\}$$

と図示できる． ただし， 四面体の内部は 3-射  $(\text{Id}_{[2]}, \{0\}) \in \Delta^2_2 \times \Delta^0_0 \subset (\Delta^1 \star \Delta^0)_3$  が埋めている． 同様に，  $\Delta^0 \star \Delta^2$  の 1-射を図示すると

$$(\Delta^0 \star \Delta^2)_1 = \Delta^0_1 \sqcup (\Delta^0_0 \times \Delta^2_0) \sqcup \Delta^2_1 = \left\{ \begin{array}{ccc} & \{0\} & \\ & \downarrow & \\ \{0\} & \{1\} & \{2\} \\ & \uparrow & \\ & \{0\} & \end{array} \right\}$$

のようになる．

**補題 1.2:**  $(\infty, 1)$ -圏同士の join は  $(\infty, 1)$ -圏

$(\infty, 1)$ -圏同士の join は  $(\infty, 1)$ -圏である。

証明 [?, Proposition 1.2.8.3] ■

**定義 1.22:** スライス  $(\infty, 1)$ -圏

$(\infty, 1)$ -圏  $\mathcal{D}, \mathcal{C}$  および  $(\infty, 1)$ -圏の関手  $p \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$  を与える。  $p$  に沿った  $\mathcal{C}$  のスライス圏 (overcategory)

$$\mathcal{C}_{/p}: \Delta^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を以下で定義する：

- $\forall [n] \in \text{Ob}(\Delta^{\text{op}})$  に対して、 集合

$$\text{Hom}_p(\Delta^n \star \mathcal{D}, \mathcal{C}) := \{ f \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n \star \mathcal{D}, \mathcal{C}) \mid f|_{\mathcal{D}} = p \}$$

を対応付ける<sup>a</sup>。

- $\forall \alpha \in \text{Hom}_{\Delta^{\text{op}}}([m], [n])$  に対して、 写像

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{/p}(\alpha): \text{Hom}_p(\Delta^m \star \mathcal{D}, \mathcal{C}) &\longrightarrow \text{Hom}_p(\Delta^n \star \mathcal{D}, \mathcal{C}), \\ f &\longmapsto f \circ (\alpha_* \star \text{Id}_{\mathcal{D}}) \end{aligned}$$

を対応付ける。

実際、単体的集合  $\mathcal{C}_{/p}$  は  $(\infty, 1)$ -圏である [?, Proposition 4.3.6.1].

<sup>a</sup>  $f|_{\mathcal{D}}$  というのは、join の定義における  $(\Delta^n \star \mathcal{D})_k$  の disjoint union のうち、添字  $i = 0$  が振られている成分への制限を意味する。

$p$  に沿った  $\mathcal{C}$  のコスライス圏 (undercategory)

$$\mathcal{C}_{p/}: \Delta^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を以下で定義する：

- $\forall [n] \in \text{Ob}(\Delta^{\text{op}})$  に対して、 集合

$$\text{Hom}_p(\mathcal{D} \star \Delta^n, \mathcal{C}) := \{ f \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\mathcal{D} \star \Delta^n, \mathcal{C}) \mid f|_{\mathcal{D}} = p \}$$

を対応付ける<sup>a</sup>。

- $\forall \alpha \in \text{Hom}_{\Delta^{\text{op}}}([m], [n])$  に対して、 写像

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{p/}(\alpha): \text{Hom}_p(\mathcal{D} \star \Delta^m, \mathcal{C}) &\longrightarrow \text{Hom}_p(\mathcal{D} \star \Delta^n, \mathcal{C}), \\ f &\longmapsto f \circ (\text{Id}_{\mathcal{D}} \star \alpha_*) \end{aligned}$$

を対応付ける。

<sup>a</sup>  $f|_{\mathcal{D}}$  というのは, **join の定義**における  $(\mathcal{D} \star \Delta^n)_k$  の disjoint union のうち, 添字  $i = n$  が振られている成分への制限を意味する.

特に注目すべきは,  $(\infty, 1)$ -圏の関手  $p: \Delta^0 \rightarrow \mathcal{C}$  をとった場合である. このとき  $X := p_{[0]}(\{0\}) \in \mathcal{C}_0$  において  $\mathcal{C}_{/X}$ ,  $\mathcal{C}_{X/}$  などと書く.

まず,  $(\infty, 1)$ -圏  $\mathcal{C}_{/X}$  の対象  $\varphi \in (\mathcal{C}_{/X})_0 = \text{Hom}_p(\Delta^0 \star \Delta^0, \mathcal{C})$  をとる. すると【例 1.2.1】および  $\varphi|_{\Delta^0} = p$  の条件から,  $\varphi_{[1]}: (\Delta^0 \star \Delta^0)_1 \rightarrow \mathcal{C}_1$  とは図式

$$\varphi = \begin{array}{c} \varphi_{[0]}|_{\Delta_0^0}(\{0\}) \\ \bullet \\ \downarrow \varphi_{[1]}|_{\Delta_0^0 \times \Delta_0^0}(\{0\} \rightarrow \{0\}) \\ \bullet \\ X \end{array}$$

である.  $n \geq 2$  射に相当する  $\varphi_{[n]}: (\Delta^0 \star \Delta^0)_n \rightarrow \mathcal{C}_n$  のデータは縮退していて自明である. 従って,  $\varphi$  は  $(1, 1)$ -圏における  $X$  上のスライス圏の対象と等価なデータを与える.

同様に,  $(\infty, 1)$ -圏  $\mathcal{C}_{/X}$  の 1-射  $f \in (\mathcal{C}_{/X})_1 = \text{Hom}_p(\Delta^1 \star \Delta^0, \mathcal{C})$  とは, 【例 1.2.2】より

$$f = \begin{array}{c} f_{[0]}|_{\Delta_0^1}(\{0\}) \bullet \xrightarrow{\quad} \bullet f_{[0]}|_{\Delta_0^1}(\{1\}) \\ \searrow \quad \swarrow \\ f_{[2]}|_{\Delta_1^1 \times \Delta_0^0}(\text{Id}_{[1]}, \{0\}) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \\ X \end{array}$$

のことである. ただし三角形の内部は 2-射  $f_{[2]}|_{\Delta_1^1 \times \Delta_0^0}(\text{Id}_{[2]}, \{0\}) \in \mathcal{C}_2$  が埋めている. これは  $(1, 1)$ -圏における  $X$  上のスライス圏の射のデータに対応しているが, 横向きの矢印を決めるだけでは  $f$  が upto homotopy でしか定まらないという点で異なっている.

$(\infty, 1)$ -圏  $\mathcal{C}_{/X}$  の  $n$ -射も同様に図示できる.

#### 1.2.4 homotopy limit/colimit

後の議論のため, 先取りして  $(\infty, 1)$ -圏における limit/colimit を定義しておこう.  $(\infty, 1)$ -圏のモデルとして quasi-category を採用する場合, これは **homotopy limit/colimit** と呼ばれることもある.

### 定義 1.23: $(\infty, 1)$ -圏における始対象と終対象

- $(\infty, 1)$ -圏  $\mathcal{C}$  における対象  $x \in \mathcal{C}_0$  が**始対象** (initial object) であるとは, ホモトピー圏  $\mathrm{h}\mathcal{C}$  における始対象<sup>a</sup>であること.
- $(\infty, 1)$ -圏  $\mathcal{C}$  における対象  $x \in \mathcal{C}_0$  が**終対象** (final object) であるとは, ホモトピー圏  $\mathrm{h}\mathcal{C}$  における終対象<sup>b</sup>であること.

<sup>a</sup>  $(1, 1)$ -圏の**始対象**とは, 空の図式における余極限のこと.

<sup>b</sup>  $(1, 1)$ -圏の**終対象**とは, 空の図式における極限のこと.

### 定義 1.24: homotopy limit/colimit

$(\infty, 1)$ -圏の関手  $D: \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$  を与える<sup>a</sup>.

- $D$  の **homotopy limit** とは, **スライス  $(\infty, 1)$ -圏  $\mathcal{C}_{/D}$**  における**終対象**のこと.  $\mathrm{holim} D \in \mathcal{C}_0$  と書く.
- $D$  の **homotopy colimit** とは, **スライス  $(\infty, 1)$ -圏  $\mathcal{C}_{D/}$**  における**始対象**のこと.  $\mathrm{hocolim} D \in \mathcal{C}_0$  と書く.

<sup>a</sup>  $(1, 1)$ -圏の場合からのアナロジーで,  $D$  を図式と見做す.

### 【例 1.2.4】 homotopy pullback

単体的集合の積  $S \times T: \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$  における面写像とは

$$\begin{aligned} \partial_j^n: S_n \times T_n &\longrightarrow S_{n-1} \times T_{n-1}, \\ (x, y) &\longmapsto (\partial_j^n x, \partial_j^n y) \end{aligned}$$

のことであった. 故に, 単体的集合  $\Delta^1 \times \Delta^1$  は,  $\Delta_0^1 =: \{\bullet_0, \bullet_1\}$  とおくと

$$\Delta^1 \times \Delta^1 = \begin{array}{ccc} (0, 0) & \xrightarrow{\quad} & (1, 0) \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ (0, 1) & & (1, 1) \end{array}$$

と図示できる. ただし, 2-射以上は縮退して見えない.

$(\infty, 1)$ -圏の関手  $D: \Delta^1 \times \Delta^1 \longrightarrow \mathcal{C}$  の **homotopy limit** のことを (存在すれば) **homotopy pullback** と呼び,

$$D(0, 1) \times_{D(1, 1)}^{\mathrm{h}} D(1, 0) := \mathrm{holim} D \in \mathcal{C}_0$$

と書く.



### 1.2.5 層状化空間の接構造

#### 定義 1.25: $(\infty, 1)$ -圏の米田埋め込み (informal)

$\mathcal{C}$  を  $(\infty, 1)$ -圏とする.  $(\infty, 1)$ -圏の**米田埋め込み** (Yoneda embedding)

$$y: \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathcal{C})$$

とは,  $\mathcal{C}$  から  $(\infty, 1)$ -前層の成す  $(\infty, 1)$ -圏  $\mathrm{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathcal{C})$  への  $(\infty, 1)$ -圏の関手であって, 対象  $x \in \mathcal{C}_0$  に対して

$$\begin{aligned} y(x)_{[0]}: \mathcal{C}_0^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathbf{Spaces}_0, \\ y &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \end{aligned}$$

を充たす<sup>a</sup>ような  $(\infty, 1)$ -圏の関手  $y(x) \in \mathrm{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathcal{C})_0 = \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(K^{\mathrm{op}}, \mathbf{Spaces})$  を対応付けるもののこと<sup>b</sup>.

<sup>a</sup>  $(\infty, 1)$ -圏  $\mathcal{C}$  において, 対象  $x, y \in \mathcal{C}_0$  の間の 1-射全体の集合  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \subset \mathcal{C}_1$  は Kan 複体を成す [?, Proposition 4.6.1.10].

<sup>b</sup> 厳密な構成については [?, Definition 8.3.3.9] を参照.

#### 定義 1.26: enter-path category

**conically smooth な層状化空間**  $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Strat})$  の **enter-path  $(\infty, 1)$ -category** とは,  $(\infty, 1)$ -圏  $\mathbf{Bsc}$  のスライス圏

$$\mathcal{Entr}(X) := \mathbf{Bsc}_{/X}$$

のこと.

#### 定義 1.27: tangent classifier

$\iota: \mathbf{Bsc} \hookrightarrow \mathbf{Snglr}$  を包含とする. **tangent classifier** とは,  $(\infty, 1)$ -圏の関手

$$\tau: \mathbf{Snglr} \xrightarrow{y} \mathrm{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathbf{Snglr}) \xrightarrow{\iota^*} \mathrm{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathbf{Bsc})$$

のこと.

定義 1.25 より, **tangent classifier** は **conically smooth な層状化空間**  $X \in \mathbf{Snglr}_0$  に対して  $(\infty, 1)$ -圏の表現可能前層

$$\tau_{[0]}(X) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Bsc}}(-, X) \in \mathrm{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathbf{Bsc})_0 \quad (1.2.2)$$

を対応付ける.

定理 1.1 により, **tangent classifier**  $\tau$  のことを

$$\tau: \mathbf{Snglr} \xrightarrow{y} \mathrm{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathbf{Snglr}) \xrightarrow{\iota^*} \mathrm{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathbf{Bsc}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{R}\mathrm{fib}_{\mathbf{Bsc}}$$

と見做すこともできる。このとき、 $\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}$  の構成および  $(\infty, 1)$ -前層 (1.2.2) に対する定理 1.1 の具体的構成から、conically smooth な層状化空間  $X \in \mathbf{Snglr}_0$  に対して定まる  $(\infty, 1)$ -圏の右ファイブレーション  $\tau_{[0]}(X) \in (\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}})_0$  とは忘却関手

$$\tau_{[0]}(X): \mathcal{E}\mathbf{nt}\mathbf{r}(X) \longrightarrow \mathcal{B}\mathbf{sc}$$

のことである。この忘却関手を以下では  $\tau_X := \tau_{[0]}(X)$  と書く。

### 定義 1.28: $\mathcal{B}$ -多様体

- $(\mathcal{B}, f)$  構造<sup>a</sup>とは,  $(\infty, 1)$ -圏の右ファイブレーション  $(\mathcal{B} \xrightarrow{f} \mathcal{B}\mathbf{sc}) \in (\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}})_0$  のこと.
- $(\mathcal{B}, f)$  構造  $\mathcal{B} \xrightarrow{f} \mathcal{B}\mathbf{sc}$  を 1 つ固定する. このとき,  $\mathcal{B}$ -多様体 ( $\mathcal{B}$ -manifold) の成す  $(\infty, 1)$ -圏  $\mathcal{M}\mathbf{fld}(\mathcal{B})$  とは,  $\mathbf{qCat}^b$  における homotopy pullback

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}\mathbf{fld}(\mathcal{B}) & \longrightarrow & (\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}})/f \\ \downarrow & & \downarrow \text{forget} \\ \mathbf{Snglr} & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}} \end{array}$$

のこと. 特に,  $\mathcal{M}\mathbf{fld}(\mathcal{B})_0$  の元は以下の 2 つのデータから成り,  $\mathcal{B}$ -多様体と呼ばれる:

- conically smooth な層状化空間  $X \in \mathbf{Snglr}_0$
- $(\infty, 1)$ -圏の関手  $g: \mathcal{E}\mathbf{nt}\mathbf{r}(X) \longrightarrow \mathcal{B}$

これらは以下の条件を充たさねばならない:

(lift of tangent classifier)

$\mathbf{sSet}$  における以下の図式は可換である:

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{B} \\ & \nearrow g & \downarrow f \\ \mathcal{E}\mathbf{nt}\mathbf{r}(X) & \xrightarrow{\tau_X} & \mathcal{B}\mathbf{sc} \end{array}$$

<sup>a</sup> [?, Definition 1.1.6] では  $(\infty, 1)$ -category of basics と呼ばれている.

<sup>b</sup> quasi-category 全体のなす  $(\infty, 1)$ -圏

## 1.2.6 $C^\infty$ -多様体の接構造との比較

## 1.3 Disk algebras

### 1.3.1 対称モノイダル $(\infty, 1)$ -圏

本資料では,  $(\infty, 1)$ -圏を quasi-category として定義した. この小節では, quai-category における対称モノイダル構造を定義する.

### 定義 1.29: 圏 $\mathbf{Fin}_*$

$(1, 1)$ -圏  $\mathbf{Fin}_*$  を以下で定義する：

- 基点付き有限集合

$$\langle n \rangle := \{*, 1, \dots, n\}$$

を対象に持つ. i.e.

$$\mathrm{Ob}(\mathbf{Fin}_*) := \{ \langle n \rangle \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \}.$$

- $\forall \langle m \rangle, \langle n \rangle \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Fin}_*)$  に対して, それらの間の基点を保つ写像を射とする. i.e.

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m \rangle, \langle n \rangle) := \{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(\langle m \rangle, \langle n \rangle) \mid f(*) = * \}.$$

脈体の定義において  $[n] \in \mathrm{Ob}(\Delta)$  を  $(1, 1)$ -圏と見做した方法と同様にして, 半順序集合  $\{n-1 \leq n\}$  を  $(1, 1)$ -圏と見做す. このとき,

$$N(\{n-1 \leq n\}) = \left( \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ n-1 & & n \end{array} \right) \cong \Delta^1$$

と図示できる. 同様に,

$$N(\{0 \leq 1\}) = \left( \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ 0 & & 1 \end{array} \right) = \Delta^1$$

である.

### 定義 1.30: デカルトファイブレーション

$p: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{B}$  を内的ファイブレーションとする.

- $p$  がデカルトファイブレーション (Cartesian fibration) であるとは,
  - $\mathcal{B}$  の任意の 1 射  $(x \xrightarrow{f} y) \in \mathcal{B}_1$
  - $p_{[0]}(\bar{y}) = y$  を充たす  $\mathcal{E}$  の任意の対象  $\bar{y} \in \mathcal{E}_0$
 に対して, 以下の条件を充たす  $\mathcal{E}$  の 1-射  $(z \xrightarrow{\bar{f}} \bar{y}) \in \mathcal{E}_1$  が存在すること：

**(Cart-1)**

$\bar{f}$  は  $f$  の持ち上げである. i.e.  $p_{[1]}(\bar{f}) = f$  が成り立つ.

**(Cart-2)**

$\forall n \geq 2$  に対して, 以下の図式を可換にする  $\mathcal{E}$  の  $n$ -射  $\bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \mathcal{E}) \cong \mathcal{E}_n$  が存在する：

$$\begin{array}{ccc}
N(\{n-1 \leq n\}) \cong \Delta^1 & & \\
\downarrow & \searrow \bar{f} & \\
\Lambda_n^n & \xrightarrow{\forall \varphi_0} & \mathcal{E} \\
\downarrow & \nearrow \exists \bar{\varphi} & \downarrow p \\
\Delta^n & \xrightarrow{\forall \varphi} & \mathcal{B}
\end{array}$$

ただし,  $\mathbf{sSet}$  の射  $\bar{f}: N(\{n-1 \leq n\}) \rightarrow \mathcal{E}$  とは

$$\bar{f}_{[1]} \left( \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ n-1 & & n \end{array} \right) = \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\bar{f}} & \bullet \\ z & & \bar{y} \end{array}$$

を充たす唯一の自然変換である.

- $p$  が余デカルトファイブレーション (coCartesian fibration) であるとは,

- $\mathcal{B}$  の任意の 1 射  $(x \xrightarrow{f} y) \in \mathcal{B}_1$
- $p_{[0]}(\bar{x}) = x$  を充たす  $\mathcal{E}$  の任意の対象  $\bar{x} \in \mathcal{E}_0$

に対して, 以下の条件を充たす  $\mathcal{E}$  の 1-射  $(\bar{x} \xrightarrow{\bar{f}} z) \in \mathcal{E}_1$  が存在すること:

**(coCart-1)**

$\bar{f}$  は  $f$  の持ち上げである. i.e.  $p_{[1]}(\bar{f}) = f$  が成り立つ.

**(coCart-2)**

$\forall n \geq 2$  に対して, 以下の図式を可換にする  $\mathcal{E}$  の  $n$ -射  $\bar{\varphi} \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \mathcal{E}) \cong \mathcal{E}_n$  が存在する:

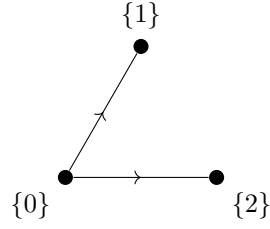
$$\begin{array}{ccc}
N(\{0 \leq 1\}) \cong \Delta^1 & & \\
\downarrow & \searrow \bar{f} & \\
\Lambda_0^n & \xrightarrow{\forall \varphi_0} & \mathcal{E} \\
\downarrow & \nearrow \exists \bar{\varphi} & \downarrow p \\
\Delta^n & \xrightarrow{\forall \varphi} & \mathcal{B}
\end{array}$$

ただし,  $\mathbf{sSet}$  の射  $\bar{f}: N(\{0 \leq 1\}) \rightarrow \mathcal{E}$  とは

$$\bar{f}_{[1]} \left( \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ n-1 & & n \end{array} \right) = \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\bar{f}} & \bullet \\ \bar{x} & & z \end{array}$$

を充たす唯一の自然変換である.

$n = 2$  の場合の **(coCart-2)** の可換図式を系??を用いて書き直そう. まず, 包含  $N(\{0 \leq 1\}) \hookrightarrow \Lambda_0^2$  というのは, 系??による角  $\Lambda_0^2$  の図示



のうち、辺  $\{0\} \rightarrow \{1\}$  への埋め込みである．従って可換図式の

$$\begin{array}{ccc} N(\{0 \leq 1\}) \cong \Delta^1 & & \\ \downarrow & \searrow \bar{f} & \\ \Lambda_0^n & \xrightarrow{\forall \varphi_0} & \mathcal{E} \end{array}$$

の部分は角の図式  $\varphi_0 = (\bullet, \bar{f}, \varphi_{02}) \in \mathcal{E}_1^{\times 2}$  に対応する．図示すると

$$\varphi_0 = \begin{array}{c} z \\ \nearrow \bar{f} \\ \bar{x} \quad \xrightarrow{\varphi_{02}} \bullet \end{array} \quad (1.3.1)$$

となる．従って、**(coCart-2)** の主張は次のように言い換えられる：

$(\infty, 1)$ -圏  $\mathcal{B}$  において角の図式が 2-射  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^2, \mathcal{B}) \cong \mathcal{B}_2$  によって

$$\begin{array}{c} y \\ \nearrow p_{[1]}(\bar{f}) = f \\ x \quad \xrightarrow{p_{[1]}(\varphi_{02})} \bullet \end{array} \quad \begin{array}{c} \partial_0^2(\varphi) \\ \varphi \end{array}$$

と埋められているならば、 $\mathcal{E}$  において角の図式 (1.3.1) を

$$\begin{array}{c} z \\ \nearrow \bar{f} \\ \bar{x} \quad \xrightarrow{\varphi_{02}} \bullet \end{array} \quad \begin{array}{c} \partial_0^2(\bar{\varphi}) \\ \bar{\varphi} \end{array}$$

のように埋める 2-射  $\bar{\varphi} \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^2, \mathcal{E}) \cong \mathcal{E}_2$  が存在する．