# 第 2 章

# Chern-Simons 理論の導入

この章は [?, Chapter4, 5] に相当する．

## 2.1 Charge-Flux composite

### 2.1.1 Aharonov-Bohm 効果

空間を表す多様体を $\Sigma$ と書く．電荷 $q$ を持つ 1 つの粒子からなる系を考えよう．この系に静磁場をかけたとき，粒子の古典的作用は自由粒子の項 $S_0$ と，粒子と場の結合を表す項とに分かれる：

$$S[l] = S_0[l] + q\int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} \mathrm{d}t\,\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{A} = S_0[l] + q\int_l \mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A}$$

ただし $l\colon [t_\mathrm{i},\, t_\mathrm{f}] \longrightarrow \Sigma$ は粒子の軌跡を表す．

ここで，いつもの 2 重スリットを導入する．粒子が $\boldsymbol{x}_\mathrm{i} = \boldsymbol{x}(t_\mathrm{i})$ から出発して $\boldsymbol{x}_\mathrm{f} = \boldsymbol{x}(t_\mathrm{f})$ に到達するとき，これらの 2 点を結ぶ経路全体の集合 $\mathcal{C}(\boldsymbol{x}_\mathrm{i},\, \boldsymbol{x}_\mathrm{t})$ のホモトピー類は，スリット 1, 2 を通る経路それぞれでちょうど 2 つある．i.e. プロパゲーターは経路積分によって

$$\sum_{l\in\mathcal{C}(\boldsymbol{x}_\mathrm{i},\,\boldsymbol{x}_\mathrm{t})\text{ s.t. slit 1}} e^{\mathrm{i}S_0[l]/\hbar + \mathrm{i}(q/\hbar)\int_l \mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A}} + \sum_{l\in\mathcal{C}(\boldsymbol{x}_\mathrm{i},\,\boldsymbol{x}_\mathrm{t})\text{ s.t. slit 2}} e^{\mathrm{i}S_0[l]/\hbar + \mathrm{i}(q/\hbar)\int_l \mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A}}$$

と計算される．第 1 項と第 2 項の位相差は，片方の経路の逆をもう片方に足すことでできる閉曲線 $\partial S$ について

$$\exp\left[\frac{\mathrm{i}q}{\hbar}\oint_{\partial S}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A}\right] = \exp\left[\frac{\mathrm{i}q}{\hbar}\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\right] = \exp\left[\frac{\mathrm{i}q}{\hbar}\Phi_S\right]$$

となる[*1]．

(1) 磁束が $\Phi_0 = 2\pi\hbar/q$ の整数倍の時は，位相シフトがない場合と物理的に区別がつかない．

(2) 実は，静止した電荷の周りに磁束を動かしても全く同じ位相シフトが引き起こされる [?].

[*1] 粒子が侵入できない領域にのみ磁場がかかっているとする．なお，粒子の配位空間が単連結でないことが本質的に重要である．このとき，領域 $S$ をホモトピーで 1 点に収縮することで，無限に細い管状の磁束 (flux tube) の概念に到達する．

### 2.1.2 Charge-Flux composite としてのエニオン

荷電粒子と無限に細い磁束管 (flux tube) が互いに束縛し合って近接しているものを考える．この対を 2 次元系における，$(q,\,\Phi)$ なるチャージを持つ 1 つの粒子と見做してみよう．

さて，粒子 $i(=1,\,2)$ がチャージ $(q,\,\Phi)$ を持つとしよう．この 2 つの同種粒子の配位空間の基本群は前章の議論から $\mathbb{Z}_2$ であり，

(1) 粒子 1 を 2 の周りに 1 周させる操作

(2) 粒子の交換を2 回行う操作

の 2 つが同じホモトピー類に属すことがわかる．故に，これら 2 つの操作で得られる位相シフトは等しい．操作 (1) による位相シフトは AB 効果によるもので，$e^{2\mathrm{i}q\Phi/\hbar}$ である[*2]．故に，この粒子が1 回交換することによって得られる位相シフトは $e^{\mathrm{i}q\Phi/\hbar}$ であるが，これは $\theta = q\Phi/\hbar$ なる可換エニオンの統計性である．

次に，エニオンの**フュージョン** (fusion) を経験的に導入する．これは，エニオン $(q_1,\,\Phi_1),\,(q_2,\,\Phi_2)$ が「融合」してエニオン $(q_1+q_2,\,\Phi_1+\Phi_2)$ になる，と言うものであり，今回の場合だと電荷，磁束の保存則に由来すると考えることができる．エニオン $(q,\,\Phi)$ と $(-q,\,-\Phi)$ がフュージョンすると $I \coloneqq (0,\,0)$ になるだろう．この $I$ をエニオンの真空とみなし[*3]，$(-q,-\Phi)$ のことを $(q,\,\Phi)$ の反エニオン (anti-anyon) と見做す．反エニオンをエニオンの周りに一周させたときの位相シフトが $e^{-2\mathrm{i}\theta}$ になることには注意すべきである．

### 2.1.3 トーラス上のエニオンの真空

トーラス $T^1 \coloneqq S^1 \times S^1$ の上のエニオン系の基底状態（真空）を考える．

トーラスには非自明なサイクルがちょうど 2 つあるので，それらを $C_1, C_2$ とおく．そして系の時間発展演算子のうち，次のようなものを考える：

$\hat{T}_1$　ある時刻に $C_1$ の 1 点において粒子-反粒子対を生成し，それらを $C_1$ 上お互いに反対向きに動かし，有限時間経過後に $C_1$ の対蹠点で対消滅させる．

$\hat{T}_2$　ある時刻に $C_2$ の 1 点において粒子-反粒子対を生成し，それらを $C_2$ 上お互いに反対向きに動かし，有限時間経過後に $C_2$ の対蹠点で対消滅させる．

$\hat{T}_1, \hat{T}_2$ は非可換であり，基底状態への作用を考える限り，フュージョンダイアグラムと braiding の等式から

$$\hat{T}_2\hat{T}_1 = e^{-\mathrm{i}2\theta}\hat{T}_1\hat{T}_2 \tag{2.1.1}$$

が成り立つことが分かる．然るに，基底状態が張る部分空間に制限すると $[T_1, H] = [T_2, H] = 0$ なので[*4]，基底状態が縮退していることがわかる．

さて，$T_i$ はユニタリなので，$T_1\,|\alpha\rangle = e^{\mathrm{i}\alpha}\,|\alpha\rangle$ とおける．この時 (2.1.1) より

$$T_1(T_2\,|\alpha\rangle) = e^{\mathrm{i}(\alpha+2\theta)}T_2\,|\alpha\rangle$$

*2 2 がつくのは，粒子 1 の $q$ が粒子 2 の $\Phi$ の周りを 1 周する AB 効果だけでなく，粒子 1 の $\Phi$ が粒子 2 の $q$ の周りを 1 周する AB 効果の寄与があるからである．一般に，粒子 $i$ のチャージが $(q_i,\,\Phi_i)$ ならば $e^{\mathrm{i}(q_1\Phi_2+q_2\Phi_1)/\hbar}$ の位相シフトが起こる．

*3 しかし，$I$ のことは粒子として捉える．

*4 基底状態 $|0\rangle$ と $\hat{T}_1\,|0\rangle$ は同じエネルギーである．

である．つまり，$\lvert\alpha\rangle$ が基底状態ならば $\lvert\alpha+2\theta\rangle = T_2\lvert\alpha\rangle$ もまた基底状態である．この操作を続けて，基底状態 $\lvert\alpha+2n\theta\rangle = (T_2)^n\lvert\alpha\rangle$ $(n\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ を得る．特に $\theta = \pi p/m \quad (p,\, m$ は互いに素) である場合を考えると，基底状態は $m$ 重縮退を示している．

## 2.2 可換 Chern-Simons 理論の経験的導入

ゲージ場[*5] $A_\alpha = (a_0,\, a_1,\, a_2)$ が印加された $N$ 粒子 2 次元系であって，ラグランジアンが

$$L = L_0 + \int_\Sigma \mathrm{d}^2x\left(\frac{\mu}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}A_\alpha\partial_\beta A_\gamma - j^\alpha A_\alpha\right) =: L_0 + \int_\Sigma \mathrm{d}^2x\,\mathcal{L} \tag{2.2.1}$$

と書かれるものを考える．ただし，$L_0$ は場と粒子の結合を無視したときの粒子のラグランジアンであり，空間を表す多様体を $\Sigma$ で書いた．粒子 $n$ はチャージ $q_n$ を持つものとし，$j^\alpha = (j^0,\, \boldsymbol{j})$ は

$$\begin{aligned} j^0(\boldsymbol{x}) &\coloneqq \sum_{n=1}^N q_n\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n), \\ \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) &\coloneqq \sum_{n=1}^N q_n\dot{\boldsymbol{x}}_n\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n) \end{aligned}$$

と定義される粒子のカレントである．ラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ の第 1 項は場自身を記述し，第 2 項は場と粒子の結合を記述する．

### 2.2.1 ゲージ不変性

ラグランジアン (2.2.1) のゲージ不変性は次のようにしてわかる：ゲージ変換

$$A_\alpha \longrightarrow A_\alpha + \partial_\alpha\chi$$

による $\mathcal{L}$ の変化は

$$\frac{\mu}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha\chi\partial_\beta A_\gamma + \cancel{\frac{\mu}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}A_\alpha\partial_\beta\partial_\gamma\chi + \frac{\mu}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha\chi\partial_\beta\partial_\gamma\chi} - j^\alpha\partial_\alpha\chi$$

であるから，空間積分を実行すると

$$\begin{aligned} &\int_\Sigma \mathrm{d}^2x\,\frac{\mu}{2}\partial_\alpha\left(\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\chi\partial_\beta A_\gamma\right) - \int_\Sigma \mathrm{d}^2x\,\frac{\mu}{2}\cancel{\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\chi\partial_\alpha\partial_\beta A_\gamma} - \int_\Sigma \mathrm{d}^2x\,\partial_\alpha\left(j^\alpha\chi\right) + \int_\Sigma \mathrm{d}^2x\,\cancel{\partial_\alpha}j^\alpha\chi \\ &= \int_{\partial\Sigma}\mathrm{d}S_\alpha\left(\frac{\mu}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\chi\partial_\beta A_\gamma - j^\alpha\chi\right) \end{aligned}$$

となる．ただしチャージの保存則 $\partial_\alpha j^\alpha = 0$ を使った．このことから，もし空間を表す多様体 $\Sigma$ の境界が $\partial\Sigma = \emptyset$ ならば[*6]ラグランジアンはゲージ不変である．

---

[*5] 一般相対論に倣い，時空を表す多様体 $\mathcal{M}$ の座標のうち時間成分を $x^0$，空間成分を $x^1,\, x^2$ とする．

[*6] このような多様体の中で重要なのが**閉多様体** (closed manifold) である．

### 2.2.2　運動方程式

ラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ から導かれる Euler-Lagrange 方程式は

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} = \partial_\beta \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} \right)$$

である．

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} &= \frac{\mu}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\beta A_\gamma - j^\alpha, \\ \partial_\beta \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} \right) &= \partial_\beta \left( \frac{\mu}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha \right) = -\frac{\mu}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\beta A_\gamma \end{aligned}$$

なのでこれは

$$j^\alpha = \mu\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\beta A_\gamma$$

となる．特に第 0 成分は，「磁場」$\boldsymbol{b} \coloneqq \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ を導入することで

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{q_n}{\mu}\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n) = b^0$$

となる．つまり，位置 $\boldsymbol{x}_n$ に強さ $q_n/\mu$ の磁束管が点在している，という描像になり，charge-flux composite を説明できている．

### 2.2.3　プロパゲーター

簡単のため，全ての粒子のチャージが等しく $q$ であるとする．$N$ 粒子の配位空間 $\mathcal{C}$ における初期配位と終了時の配位をそれぞれ $\{\boldsymbol{x}_\mathrm{i}\}$, $\{\boldsymbol{x}_\mathrm{f}\}$ とし，それらを繋ぐ経路全体の集合を $\mathcal{C}(\boldsymbol{x}_\mathrm{i}, \boldsymbol{x}_\mathrm{f})$ と書くと，プロパゲーターは経路積分によって

$$\sum_{l \in \mathcal{C}(\boldsymbol{x}_\mathrm{i}, \boldsymbol{x}_\mathrm{f})} e^{\mathrm{i}S_0[l]/\hbar} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}\bigl(A_\mu(x)\bigr)\, e^{\mathrm{i}S_{\mathrm{CS}}[A_\mu(x)]/\hbar} e^{\mathrm{i}(q/\hbar)\int_l \mathrm{d}x^\alpha A_\alpha(x)}$$

と計算される．ここに $\mathcal{D}\bigl(A_\mu(x)\bigr)$ は汎函数積分の測度を表す．詳細は後述するが，場に関する汎函数積分を先に実行してしまうと，実は

$$\sum_{l \in \mathcal{C}(\boldsymbol{x}_\mathrm{i}, \boldsymbol{x}_\mathrm{f})} e^{\mathrm{i}S_0[l]/\hbar + \mathrm{i}\theta W(l)}$$

の形になることが知られている．ここに $W(l)$ は，経路 $l$ の巻きつき数である．経路に依存する位相因子 $e^{\mathrm{i}\theta W(l)}$ は前章で議論した $\pi_1\mathcal{C}$ の 1 次元ユニタリ表現そのものであり，エニオンの統計性が発現する機構が Chern-Simons 項により説明できることを示唆している．

### 2.2.4　真空中の可換 Chern-Simons 理論

粒子が存在しないとき，経路積分は

$$Z(\mathcal{M}) := \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}A_\mu(x)\, e^{\mathrm{i}S_{\mathrm{CS}}[A_\mu(x)]/\hbar}$$

の形をする．$Z(\mathcal{M})$ は $\mathcal{M}$ についてホモトピー不変であり，**分配関数** (partition function) と呼ばれる．$Z(\mathcal{M})$ が TQFT において重要な役割を果たすことを後の章で見る．

### 2.2.5　正準量子化

$A_0 = 0$ なるゲージをとると，ラグランジアン密度における Chern-Simons 項は $-A_1\partial_0 A_2 + A_2\partial_0 A_1$ の形になる．これは $A_1$（resp. $A_2$）が $A_2$（resp. $A_1$）の共役運動量であることを意味するので，正準量子化を行うならば

$$[A_1(\boldsymbol{x}), A_2(\boldsymbol{y})] = \frac{\mathrm{i}\hbar}{\mu}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$$

を要請する[*7]．

さて，このときトーラス $T^2$ 上の 2 つのサイクル $C_1, C_2$ に対して Wilson ループ

$$W_j = \exp\left(\frac{\mathrm{i}q}{\hbar}\oint_{C_j} \mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A}\right)$$

を考える．$[A, B]$ が c 数である場合の BCH 公式から

$$W_1 W_2 = e^{\mathrm{i}q^2/(\mu\hbar)} W_2 W_1$$

を得るが，これは (2.1.1) を説明している．つまり，演算子 $T_1, T_2$ とは Wilson loop のことだったのである[*8]．

## 2.3　非可換 Chern-Simons 理論の経験的導入

この節では自然単位系を使う．前節を一般化して，ゲージ場 $A_\mu(x)$ がある Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に値をとるものとしよう．つまり，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底を $\sigma_a/(2\mathrm{i})$ とすると[*9]

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x)\frac{\sigma_a}{2\mathrm{i}}$$

と書かれるような状況を考える[*10]．$\sigma_a \in \mathfrak{g}$ が一般に非可換であることから，このような理論は非可換 Chern-Simons 理論と呼ばれる．

時空多様体 $\mathcal{M}$ 上の閉曲線 $\gamma$ に沿った **Wilson loop** は，**経路順序積** (path ordering) $\mathcal{P}$ を用いて

$$W_\gamma := \mathrm{Tr}\left[\mathcal{P}\exp\left(\oint_\gamma \mathrm{d}x^\mu\, A_\mu(x)\right)\right]$$

と定義される．Aharonov-Bohm 位相の一般化という気持ちであるが，経路 $\gamma$ の異なる 2 点 $x, y$ を取ってきたときに $A_\mu(x)$ と $A_\mu(y)$ が一般に非可換であることが話をややこしくする．

---

*7 しかし，トーラス上の座標をどのように取るかと言うことは問題である．

*8 疑問：座標の時間成分はどこへ行ったのか？

*9 因子 $1/(2\mathrm{i})$ は物理学における慣習である．ややこしいことに，文献によってこの因子が異なる場合がある．

*10 ゲージ接続が Lie 代数に値をとる 1-形式である，ということ．

### 2.3.1　ゲージ不変性

非可換 Chern-Simons 理論におけるゲージ変換は，$U\colon \mathcal{M} \longrightarrow G$ を用いて

$$A_\mu(x) \longrightarrow U(x)\bigl(A_\mu(x) + \partial_\mu\bigr)U(x)^{-1} \tag{2.3.1}$$

の形をする．このゲージ変換が Wilson loop を不変に保つことを確認しておこう．

$\mathcal{M}$ の任意の 2 点 $x_\mathrm{i},\, x_\mathrm{f} \in \mathcal{M}$ を結ぶ曲線 $\gamma\colon [t_\mathrm{i},\, t_\mathrm{f}] \longrightarrow \mathcal{M}$ をとり，**Wilson line** を

$$\tilde{W}_\gamma(x,\, y) \coloneqq \mathcal{P}\exp\left(\int_\gamma \mathrm{d}x^\mu\, A_\mu(x)\right)$$

で定義する．$[t_\mathrm{i},\, t_\mathrm{f}]$ の分割 $t_\mathrm{i} \eqqcolon t_0 < t_1 < \cdots < t_N \coloneqq t_\mathrm{f}$ を与えて $x_i \coloneqq \gamma(t_i)$，$\mathrm{d}x_i \coloneqq x_{i+1} - x_i$ とおく[*11]と，

$$\begin{aligned}
\tilde{W}_\gamma(x_\mathrm{i},\, x_\mathrm{f}) &= \mathcal{P}\exp\left(\int_{x_\mathrm{i}}^{x_1} \mathrm{d}x^\mu\, A_\mu(x) + \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x^\mu\, A_\mu(x) + \cdots + \int_{x_{N-1}}^{x_\mathrm{f}} \mathrm{d}x^\mu\, A_\mu(x)\right) \\
&\coloneqq \lim_{N\to\infty} \exp\left(\int_{x_\mathrm{i}}^{x_1} \mathrm{d}x^\mu\, A_\mu(x)\right) \exp\left(\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x^\mu\, A_\mu(x)\right) \cdots \exp\left(\int_{x_{N-1}}^{x_\mathrm{f}} \mathrm{d}x^\mu\, A_\mu(x)\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \tilde{W}_{\gamma|_{[t_\mathrm{i},\, t_1]}}(x_\mathrm{i},\, x_1) \tilde{W}_{\gamma|_{[t_1,\, t_2]}}(x_1,\, x_2) \cdots \tilde{W}_{\gamma|_{[t_{N-1},\, t_\mathrm{f}]}}(x_{N-1},\, x_\mathrm{f})
\end{aligned}$$

と書ける．$N$ が十分大きい時は $0 \le \forall i \le N-1$ に対して $|\mathrm{d}x_i|$ が十分小さく，

$$\begin{aligned}
\tilde{W}_{\gamma|_{[t_i,\, t_{i+1}]}}(x_i,\, x_{i+1}) &\approx \exp\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathrm{d}x^\mu\, A_\mu(x)\right) \\
&\approx 1 + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathrm{d}x^\mu\, A_\mu(x) \\
&\approx 1 + A_\mu(x_i)\, \mathrm{d}x_i{}^\mu
\end{aligned}$$

と書ける[*12]．このときゲージ変換 (2.3.1) に伴って

$$\begin{aligned}
\tilde{W}_{\gamma|_{[t_i,\, t_{i+1}]}}(x_i,\, x_{i+1}) &\longrightarrow 1 + U(x_i)\bigl(A_\mu(x_i) + \partial_\mu\bigr)U(x_i)^{-1}\, \mathrm{d}x_i{}^\mu \\
&\approx U(x_i)\bigl(1 + A_\mu(x_i)\, \mathrm{d}x_i{}^\mu\bigr)\bigl(U(x_i)^{-1} + \partial_\mu(U(x_i)^{-1})\, \mathrm{d}x_i{}^\mu\bigr) \\
&\approx U(x_i)\tilde{W}_{\gamma|_{[t_i,\, t_{i+1}]}}(x_i,\, x_{i+1})U(x_{i+1})^{-1}
\end{aligned}$$

と変換するので，結局 $x_\mathrm{i},\, x_\mathrm{f} \in \mathcal{M}$ を繋ぐ Wlison line がゲージ変換 (2.3.1) に伴って

$$\tilde{W}_\gamma(x_\mathrm{i},\, x_\mathrm{f}) \longrightarrow U(x_\mathrm{i})\tilde{W}_\gamma(x_\mathrm{i},\, x_\mathrm{f})U(x_\mathrm{f})^{-1}$$

と変換することがわかった．Wlison loop の場合は $x_\mathrm{i} = x_\mathrm{f}$ でかつトレースをとるので，ゲージ不変になる．

[*11] $\mathrm{d}x_i$ は，厳密には 2 点 $x_i,\, x_{i+1}$ を含むある $\mathcal{M}$ のチャート $\bigl(U,\, (x^\mu)\bigr)$ をとってきた時の座標関数の値の差 $\mathrm{d}x_i{}^\mu \coloneqq x^\mu(x_{i+1}) - x^\mu(x_i)$ として理解する．

[*12] $N \to \infty$ の極限で等式になる．

### 2.3.2 Chern-Simons 作用

いささか天下り的だが，**Chern-Simons action** を

$$S_{\mathrm{CS}}[A_\mu] := \frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^3x\,\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\,\mathrm{Tr}\left[A_\alpha\partial_\beta A_\gamma + \frac{2}{3}A_\alpha A_\beta A_\gamma\right]$$

により定義する．第 2 項は可換な場合には必ず零になるので前節では登場しなかった．$S_{\mathrm{CS}}[A]$ が時空 $\mathcal{M}$ の計量によらない[*13]ことは，ゲージ場を Lie 代数値 1-形式 $A \in \Omega^1(\mathcal{M})\otimes\mathfrak{g}$ として書き表したときに

$$S_{\mathrm{CS}}[A] = \frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{M}}\mathrm{Tr}\left(A\wedge\mathrm{d}A + \frac{2}{3}A\wedge A\wedge A\right)$$

と書けることからわかる[*14]．

$S_{\mathrm{CS}}[A]$ にゲージ変換 (2.3.1) を施した結果は

$$\begin{aligned} &S_{\mathrm{CS}}[A_\mu] \longrightarrow S_{\mathrm{CS}}[A_\mu] + 2\pi\nu k, \\ \text{w/}\ \ &\nu := \frac{1}{24\pi^2}\int_{\mathcal{M}}\mathrm{d}^3x\,\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\,\mathrm{Tr}\big[(U^{-1}\partial_\alpha U)(U^{-1}\partial_\beta U)(U^{-1}\partial_\gamma U)\big] \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

となる．$\nu$ は写像 $U\colon \mathcal{M}\longrightarrow G$ の**巻きつき数** (winding number)，もしくは **Pontryagin index** と呼ばれ，常に整数値をとる．この極めて非自明な結果についても後述する．(2.3.2) から，$S_{\mathrm{CS}}[X]$ は厳密にはゲージ不変ではない．然るに，もし $k\in\mathbb{Z}$ ならば（このとき $k$ の値は **level** と呼ばれる)，分配関数 $Z(\mathcal{M})$ がゲージ不変な形になってくれるので問題ない，と考える．$2+1$ 次元においては，1 つのゲージ場からなる作用であって

- トポロジカル不変性（i.e. 計量不変性）
- 上述の意味のゲージ不変性

の 2 つを充たすものは他にない．

## 2.4 古典的ゲージ理論の数学

時空の多様体を $\mathcal{M}$ と書く．

場[*15] $\varphi\colon \mathcal{M}\longrightarrow\mathbb{K}^N,\ x\longmapsto\big(\varphi_1(x),\,\dots,\,\varphi_N(x)\big)$ が線型 Lie 群 $G\subset\mathrm{GL}(N,\mathbb{K})$ で記述される[*16]内部対称性を持っているような系を考える．つまり，ゲージ原理を要請し，任意の $C^\infty$ 写像 $U\colon\mathcal{M}\longrightarrow G$ に対して[*17]，系のラグランジアン密度の場に関する項 $\mathcal{L}[\varphi_\mu(x)]$ が $\mathcal{L}\big[[U(x)]_i^{\,j}\varphi_j(x)\big] = \mathcal{L}[\varphi_i(x)]$ を充たすとする．もしくは，場 $\varphi\colon\mathcal{M}\longrightarrow\mathbb{K}^N$ であって，時空の各点 $x\in\mathcal{M}$ および任意の $C^\infty$ 写像 $U\colon\mathcal{M}\longrightarrow G$ に対して $\varphi(x)\longrightarrow U(x)\varphi(x)$ と変換する[*18] ものを考えると言っても良い．

[*13] **計量不変** (metric invariant) であると言う．
[*14] ... と言うのは微妙に的を外している．より正確には $2+1$ 次元多様体 $\mathcal{M}$ を境界に持つような 4 次元多様体 $\mathcal{N}$ を用意し，$\mathcal{N}$ の作用 $\mathcal{S}[A] := k/(4\pi)\int_{\mathcal{N}}\mathrm{Tr}(F\wedge F)$ を部分積分することで $S_{\mathrm{CS}}[A]$ を定義する．
[*15] この段階では，**場**とはその配位を記述する空間 $F$（これは $C^\infty$ 多様体だったりベクトル空間だったりする）と $C^\infty$ 写像 $\varphi\colon\mathcal{M}\longrightarrow F$ の組のことと考える．この描像は後にファイバー束の $C^\infty$ 切断として定式化される．
[*16] ここでは $\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C}$ としておく．
[*17] 内部対称性という言葉を使うのは，$U$ が定数写像とは限らないことを意味する．
[*18] 一般相対論の数学的定式化におけるテンソル場の変換性は，時空の多様体 $\mathcal{M}$ 上の一般座標変換（i.e. チャートの取り替え）に由

この系を経路積分により量子化することを見据えて，このような変換性を充たす全ての場がなす空間の幾何学を考察すると見通しが良いだろう．そのため，まず時空上の無限小だけ離れた 2 点 $x_{\mathrm{i}},\, x_{\mathrm{f}} \in \mathcal{M}$ における場の配位 $\varphi(x_{\mathrm{i}}),\, \varphi(x_{\mathrm{f}})$ を比較しよう．内部自由度による変換性を議論したいので，$\varphi(x_{\mathrm{f}}) - \varphi(x_{\mathrm{i}})$ なる量を調べても意味がない．$x_{\mathrm{i}},\, x_{\mathrm{f}}$ を結ぶ $C^\infty$ 曲線 $\gamma\colon [t_{\mathrm{i}},\, t_{\mathrm{f}}] \longrightarrow \mathcal{M}$ を持ってきて，$\gamma$ に沿って $\varphi(x_{\mathrm{i}})$ を $x_{\mathrm{f}}$ まで流してやるのが良い．つまり，場の配位を記述する空間 $\mathbb{K}^N$ 上の $C^\infty$ 曲線 $\varphi^{(\gamma)} \coloneqq \varphi \circ \gamma\colon [t_{\mathrm{i}},\, t_{\mathrm{f}}] \longrightarrow \mathbb{K}^N$ を考えれば，量 $\varphi(x_{\mathrm{f}}) - \varphi^{(\gamma)}(t_{\mathrm{f}})$ は $U(x_{\mathrm{f}}) \in G$ による変換を受けるはずである．$x_{\mathrm{i}},\, x_{\mathrm{f}}$ の両方を含む $\mathcal{M}$ のチャート $\big(V,\, (x^\mu)\big)$ を持ってきて成分計算すると，$\mathrm{d}x \coloneqq x_{\mathrm{f}} - x_{\mathrm{i}}$ が*19微小なので Taylor 展開において $\mathrm{d}x$ の 1 次の項まで残すことで

$$
\begin{aligned}
\varphi_i^{(\gamma)}(t_{\mathrm{f}}) &=: \varphi_i(x_{\mathrm{i}}) - \big[\, A_\mu(x_{\mathrm{i}}) \,\big]^j{}_i \varphi_j(x_{\mathrm{i}})\, \mathrm{d}x^\mu \\
\varphi(x_{\mathrm{f}}) &= \varphi(x_{\mathrm{i}}) + \partial_\mu \varphi(x)\, \mathrm{d}x^\mu
\end{aligned}
\tag{2.4.1}
$$

と書けるはずである．ただし，式 (2.4.1) の右辺によって $\dim \mathcal{M}$ 個の成分を持つ新しい場 $A_\mu\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathrm{GL}(N,\, \mathbb{K})$ を定義した．この場は**ゲージ場**と呼ばれる．

ゲージ場 $A_\mu$ を時空の各点 $x \in \mathcal{M}$ における変換性によって特徴付けよう．そのためには，量

$$
\varphi(x_{\mathrm{f}}) - \varphi^{(\gamma)}(t_{\mathrm{f}}) = \big(\partial_\mu \varphi(x_{\mathrm{i}}) + A_\mu(x_{\mathrm{i}}) \varphi(x_{\mathrm{i}})\big)\, \mathrm{d}x^\mu
$$

が $U(x_{\mathrm{f}}) \in G$ による変換を受けることに注目すれば良い．つまり，**共変微分**と呼ばれる線型写像を $\mathcal{D}_\mu(x) \coloneqq \partial_\mu + A_\mu(x)$ で定義すると，$\forall x \in \mathcal{M}$ における，内部対称性による変換

$$
\varphi(x) \longrightarrow \tilde{\varphi}(x) \coloneqq U(x) \varphi(x) \tag{2.4.2}
$$

に伴って $\mathcal{D}_\mu(x) \varphi(x)$ は

$$
\mathcal{D}_\mu(x) \varphi(x) \longrightarrow \tilde{\mathcal{D}_\mu}(x) \tilde{\varphi}(x) \coloneqq U(x) \mathcal{D}_\mu(x) \varphi(x)
$$

の変換を受ける．このことから，場 $\varphi$ の変換 (2.4.2) に伴う共変微分自身の変換則は

$$
\mathcal{D}_\mu(x) \longrightarrow \tilde{D_\mu}(x) = U(x) \mathcal{D}_\mu(x) U(x)^{-1} \tag{2.4.3}
$$

となる．従って場 $A_\mu\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathrm{GL}(N,\, \mathbb{K})$ の，場 $\varphi$ の変換 (2.4.2) に伴う変換則が

$$
A_\mu(x) \longrightarrow U(x) \big(\partial_\mu + A_\mu(x)\big) U(x)^{-1} \tag{2.4.4}
$$

だと分かった．このような場の変換則を**ゲージ変換** (gauge transformation) と呼ぶ．

### 2.4.1 主束と内部対称性の定式化

ゲージ場は，主束の接続として定式化できる．特に，主束の同伴ベクトル束が重要である．

まずファイバー束と主束を定義し，内部対称性を持つ場の記述には主束の同伴ベクトル束が適していることを見る*20．$C^\infty$ 多様体 $M$ の**微分同相群** (diffeomorphism group) $\mathbf{Diff}\, M$ とは，

来するものであった．同じように，ここで考えている場の変換性はどのような数学的定式化に由来するのかということを考えると，時空 $\mathcal{M}$ を底空間とする主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ の同伴ベクトル束 $\mathbb{K}^N \hookrightarrow P \times_\rho \mathbb{K}^N \xrightarrow{q} \mathcal{M}$ における，$\mathcal{M}$ のチャートの取り替えに伴う局所自明化の取り替え（i.e. 変換関数のファイバーへの作用）の概念に行き着くのである．詳細は次の小節で議論する．

*19 厳密にはこれは座標関数の差 $\mathrm{d}x^\mu \coloneqq x^\mu(x_{\mathrm{f}}) - x^\mu(x_{\mathrm{i}})$ の絶対値が小さいことを主張している．

*20 従って，この小節で行うのはゲージ場が登場する舞台の定式化であって，ゲージ場自身の定式化は次の小節で行う．

- 台集合 $\mathrm{Diff}\, M := \{\, f\colon M \longrightarrow M \mid 微分同相写像 \,\}$
- 単位元を恒等写像
- 積を写像の合成

として構成される群のことを言う．

**定義 2.1: Lie 群の作用**

- Lie 群 $G$ の $C^\infty$ 多様体 $M$ への**左作用**とは，群準同型 $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{Diff}\, M$ であって写像

$$\blacktriangleright\colon G \times M \longrightarrow M,\ (g,\, x) \longmapsto \rho(g)(x)$$

  が $C^\infty$ 写像となるようなもののこと．$\boldsymbol{g \blacktriangleright x} := \blacktriangleright(g,\, x)$ と略記する．
- Lie 群 $G$ の $C^\infty$ 多様体 $M$ への**右作用**とは，群準同型 $\rho\colon G^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Diff}\, M$ であって写像

$$\blacktriangleleft\colon M \times G \longrightarrow M,\ (x,\, g) \longmapsto \rho(g)(x)$$

  が $C^\infty$ 写像となるようなもののこと．$\boldsymbol{x \blacktriangleleft g} := \blacktriangleleft(g,\, x)$ と略記する．
- Lie 群の左（resp. 右）作用が**自由** (free) であるとは，$\forall x \in X,\ \forall g \in G \setminus \{1_G\},\ g \blacktriangleright x \neq x$ (resp. $x \blacktriangleleft g \neq x$) を充たすことを言う．
- Lie 群の左（resp. 右）作用が**効果的** (effective) であるとは，$\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{Diff}\, M$ (resp. $\rho\colon G^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Diff}\, M$) が単射であることを言う．

**定義 2.2: $C^\infty$ ファイバー束**

Lie 群 $G$ が $C^\infty$ 多様体 $F$ に効果的に作用しているとする．**$C^\infty$ ファイバー束** (fiber bundle) とは，

- $C^\infty$ 多様体 $E,\, B,\, F$
- $C^\infty$ の全射 $\pi\colon E \longrightarrow B$
- Lie 群 $G$ と，$G$ の $F$ への左作用 $\blacktriangleright\colon G \times F \longrightarrow F$
- $B$ の開被覆 $\{\, U_\lambda \,\}_{\lambda \in \Lambda}$
- 微分同相写像の族

$$\{\, \varphi_\lambda\colon \pi^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times F \,\}_{\lambda \in \Lambda}$$

  であって，$\forall \lambda \in \Lambda$ に対して図 2.1 を可換にするもの．

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_\lambda) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & U_\lambda \times F \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\ U_\lambda & \end{tikzcd}$$

図 2.1: 局所自明性

- $C^\infty$ 写像の族

$$\{\, t_{\alpha\beta}\colon B \longrightarrow G \mid \forall (p,\, f) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times F,\ \varphi_\beta^{-1}(p,\, f) = \varphi_\alpha^{-1}\bigl(p,\, t_{\alpha\beta}(p) \blacktriangleright f\bigr) \,\}_{\alpha,\, \beta \in \Lambda}$$

の 6 つのデータの組みのこと．記号としては $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{F})$ や $\boldsymbol{F} \hookrightarrow \boldsymbol{E} \xrightarrow{\pi} \boldsymbol{B}$ と書く．

以下ではファイバー束と言ったら $C^\infty$ ファイバー束のことを指すようにする．ファイバー束 $(E, \pi, B, F)$ に関して，

- $E$ を**全空間** (total space)
- $B$ を**底空間** (base space)
- $F$ を**ファイバー** (fiber)
- $\pi$ を**射影** (projection)
- $\varphi_\lambda$ を**局所自明化** (local trivialization)
- $t_{\alpha\beta}$ を**変換関数** (transition map)

と呼ぶ[*21]．また，射影 $\pi$ による 1 点集合 $\{b\}$ の逆像 $\pi^{-1}(\{b\}) \subset E$ のことを**点 $\boldsymbol{b}$ のファイバー** (fiber) と呼び，$E_b$ と書く．

**定義 2.3: ベクトル束**

ファイバーを $n$ 次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V$ とし，構造群を $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ とするようなファイバー束 $V \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ であって，その局所自明化 $\left\{\varphi_\lambda \colon \pi^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times V\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ が以下の条件を充たすもののことを**階数 $\boldsymbol{n}$ のベクトル束** (vector bundle of rank $n$) と呼ぶ：

**(vect-1)**

$\forall \lambda \in \Lambda$ および $\forall x \in U_\lambda$ に対して，$\mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\alpha|_{\pi^{-1}(\{x\})} \colon \pi^{-1}(\{x\}) \longrightarrow V$ は $\mathbb{K}$-ベクトル空間の同型写像である．

**【例 2.4.1】接束**

$n$ 次元 $C^\infty$ 多様体 $M$ の接束は，構造群を $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ とするベクトル束 $\mathbb{R}^n \hookrightarrow TM \xrightarrow{\pi} M$ である．実際，$M$ のチャート $\left(U_\lambda, (x^\mu)\right)$ に対して局所自明化は

$$\varphi_\lambda \colon \pi^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times \mathbb{R}^n,\ \left(p,\ v^\mu \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p\right) \longmapsto (p, \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix})$$

となり，チャート $\left(U_\alpha, (x^\mu)\right), \left(U_\beta, (y^\mu)\right)$ に対して

$$\varphi_\beta^{-1}\left(p, (v^1, \dots, v^n)\right) = \varphi_\alpha^{-1}(p, \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1}(p) & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial y^n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial y^1}(p) & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix})$$

[*21] 紛らわしくないとき，ファイバー束 $(E, \pi, B, F)$ のことを $\pi \colon E \to B$，または単に $E$ と略記することがある．

となる．故に変換関数は

$$t_{\alpha\beta}(p) \coloneqq \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1}(p) & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial y^n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial y^1}(p) & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n}(p) \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$$

で，ファイバーへの構造群の左作用とはただ単に $n$ 次元の数ベクトルに行列を左から掛けることである．

**定義 2.4: 束写像**

ファイバー $F$ と構造群 $G$ を共有する二つのファイバー束 $\xi_i = (E_i,\, \pi_i,\, B_i,\, F)$ を与える．

- $\xi_1$ から $\xi_2$ への**束写像** (bundle map) とは，二つの $C^\infty$ 写像 $f\colon B_1 \to B_2$, $\tilde{f}\colon E_1 \to E_2$ の組であって図 2.2

$$\begin{CD} E_1 @>{\tilde{f}}>> E_2 \\ @V{\pi_1}VV @VV{\pi_2}V \\ B_1 @>{f}>> B_2 \end{CD}$$

図 2.2: 束写像

を可換にし，かつ底空間 $B_1$ の各点 $b$ において，**点 $b$ のファイバー $\pi_1^{-1}(\{b\})$** $\subset E_1$ への $\tilde{f}$ の制限

$$\tilde{f}|_{\pi_1^{-1}(\{b\})}\colon \pi_1^{-1}(\{b\}) \to \tilde{f}\bigl(\pi_1^{-1}(\{b\})\bigr) \subset E_2$$

が微分同相写像になっているもののことを言う．
- ファイバー束 $\xi_1$ と $\xi_2$ が**同型** (isomorphic) であるとは，$B_1 = B_2 = B$ であってかつ $f\colon B \to B$ が恒等写像となるような束写像 $\tilde{f}\colon E_1 \to E_2$ が存在することを言う．記号としては $\xi_1 \simeq \xi_2$ とかく．

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

図 2.3: ファイバー束の同型

- 積束 $(B \times F,\, \mathrm{proj}_1,\, B,\, F)$ と同型なファイバー束を**自明束** (trivial bundle) と呼ぶ．

ファイバー束 $(E,\, \pi,\, B,\, F)$ は，射影 $\pi$ によってファイバー $F$ の情報を失う．$F$ を復元するためにも，$s\colon B \to E$ なる写像の存在が必要であろう．

**定義 2.5: $C^\infty$ 切断**

ファイバー束 $\xi = (E,\, \pi,\, B,\, F)$ の $C^\infty$ **切断** (cross section) とは，$C^\infty$ 写像 $s\colon B \to E$ であって $\pi \circ s = \mathrm{id}_B$ となるもののことを言う．

$\xi$ の切断全体の集合を $\boldsymbol{\Gamma(B,\, E)}$ あるいは $\boldsymbol{\Gamma(E)}$ と書く．

$\xi = (E,\, \pi,\, B,\, F)$ をファイバー束とする．底空間 $B$ の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をとると，定義 2.2 から，どの $\alpha \in \Lambda$ に対しても局所自明性（図 2.4a）が成り立つ．ここでもう一つの $\beta \in \Lambda$ をとり，$U_\alpha \cap U_\beta$ に関して局所自明性の図式を横に並べることで，自明束 $\mathrm{proj}_1\colon (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \to U_\alpha \cap U_\beta$ の束の自己同型（図 2.4c）が得られる．

$$\begin{tikzcd} U_\alpha \times F \arrow[dr, "\mathrm{proj}_1"'] & \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[l, "\varphi_\alpha"'] \arrow[d, "\pi"] \\ & U_\alpha \end{tikzcd}$$

(a) $U_\alpha$ に関する局所自明性

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_\beta) \arrow[r, "\varphi_\beta"] \arrow[d, "\pi"'] & U_\beta \times F \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\ U_\beta & \end{tikzcd}$$

(b) $U_\beta$ に関する局所自明性

$$\begin{tikzcd} (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \arrow[rr, "\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}"] \arrow[dr, "\mathrm{proj}_1"'] & & (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\ & U_\alpha \cap U_\beta & \end{tikzcd}$$

(c) 自明束 $(U_\alpha \cap U_\beta) \times F$ の自己同型

図 2.4: 局所自明性の結合

全ての $U_\alpha \cap U_\beta$ に関する変換関数の族 $\{t_{\alpha\beta}\}$ が $\forall b \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ に対して条件

$$t_{\alpha\beta}(b) t_{\beta\gamma}(b) = t_{\alpha\gamma}(b) \tag{2.4.5}$$

を充たすことは図式 2.4 より明かである．次の命題は，ファイバー束 $(E,\, \pi,\, B,\, F)$ を構成する「素材」には

- 底空間となる $C^\infty$ 多様体 $B$
- ファイバーとなる $C^\infty$ 多様体 $F$
- Lie 群 $G$ と，その $F$ への左作用 $\blacktriangleright\colon G \times F \longrightarrow F$
- $B$ の開被覆 $\{U_\lambda\}$
- (2.4.5) を充たす $C^\infty$ 写像の族 $\{t_{\alpha\beta}\colon U_\beta \cap U_\alpha \to G\}_{\alpha,\, \beta\in\Lambda}$

があれば十分であることを主張する：

**命題 2.1: ファイバー束の構成**

- $C^\infty$ 多様体 $B,\ F$
- Lie 群 $G$ と，$G$ の $F$ への左作用 $\blacktriangleright\colon G\times F \longrightarrow G$
- $B$ の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$
- **コサイクル条件** (2.4.5) を充たす $C^\infty$ 関数の族 $\{t_{\alpha\beta}\colon U_\beta\cap U_\alpha \to G\}$

を与える．このとき，構造群 $G$ と変換関数 $\{t_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$ を持つファイバー束 $\xi = (E,\,\pi,\,B,\,F)$ が存在する．

<u>**証明**</u> まず手始めに，cocycle 条件 (2.4.5) より

$$t_{\alpha\alpha}(b)t_{\alpha\alpha}(b) = t_{\alpha\alpha}(b), \quad \forall b\in U_\alpha$$

だから $t_{\alpha\alpha}(b) = 1_G$ であり，また

$$t_{\alpha\beta}(b)t_{\beta\alpha}(b) = t_{\alpha\alpha}(b) = 1_G, \quad \forall b\in U_\alpha\cap U_\beta$$

だから $t_{\beta\alpha}(b) = t_{\alpha\beta}(b)^{-1}$ である．

開被覆 $\{U_\lambda\}$ の添字集合を $\Lambda$ とする．このとき $\forall\lambda\in\Lambda$ に対して，$U_\lambda\subset B$ には底空間 $B$ からの相対位相を入れ，$U_\lambda\times F$ にはそれと $F$ の位相との積位相を入れることで，直和位相空間

$$\mathcal{E} \coloneqq \coprod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda\times F$$

を作ることができる[*22]．$\mathcal{E}$ の任意の元は $(\lambda,\,b,\,f)\in\Lambda\times U_\lambda\times F$ と書かれる．

さて，$\mathcal{E}$ 上の二項関係 $\sim$ を以下のように定める：

$$(\alpha,\,b,\,f)\sim\bigl(\beta,\,b,\,t_{\alpha\beta}(b)\blacktriangleright f\bigr) \quad \forall b\in U_\alpha\cap U_\beta,\ \forall f\in F$$

$\sim$ が同値関係の公理を充たすことを確認する：

**反射律**　冒頭の議論から $t_{\alpha\alpha}(b) = 1_G$ なので良い．

**対称律**　冒頭の議論から $t_{\beta\alpha}(b) = t_{\alpha\beta}(b)^{-1}$ なので，

$$\begin{aligned}
&(\alpha,\,b,\,f)\sim(\beta,\,c,\,h)\\
\Longrightarrow\quad & b = c\in U_\alpha\cap U_\beta \ \text{かつ}\ f = t_{\alpha\beta}(b)\blacktriangleright h\\
\Longrightarrow\quad & c = b\in U_\alpha\cap U_\beta \ \text{かつ}\ h = t_{\alpha\beta}(b)^{-1}\blacktriangleright f = t_{\beta\alpha}(b)\blacktriangleright f\\
\Longrightarrow\quad & (\beta,\,c,\,h)\sim(\alpha,\,b,\,f).
\end{aligned}$$

**推移律**　cocycle 条件 (2.4.5) より

$$\begin{aligned}
&(\alpha,\,b,\,f)\sim(\beta,\,c,\,h)\ \text{かつ}\ (\beta,\,c,\,h)\sim(\gamma,\,d,\,k)\\
\Longrightarrow\quad & b = c\in U_\alpha\cap U_\beta \ \text{かつ}\ c = d\in U_\beta\cap U_\gamma\ \text{かつ}\ f = t_{\alpha\beta}(b)\blacktriangleright h,\ h = t_{\beta\gamma}(c)\blacktriangleright k\\
\Longrightarrow\quad & b = d\in U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma\ \text{かつ}\ f = \bigl(t_{\alpha\beta}(b)t_{\beta\gamma}(b)\bigr)\blacktriangleright k = t_{\alpha\gamma}(b)\blacktriangleright k\\
\Longrightarrow\quad & (\alpha,\,b,\,f)\sim(\gamma,\,d,\,k).
\end{aligned}$$

[*22] $\mathcal{E}$ はいわば，「貼り合わせる前の互いにバラバラな素材（局所自明束 $U_\alpha\times F$）」である．証明の以降の部分では，これらの「素材」を $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ の部分に関して「良い性質 (2.4.5) を持った接着剤 $\{t_{\alpha\beta}\}$」を用いて「貼り合わせる」操作を，位相を気にしながら行う．

したがって $\sim$ は同値関係である．$\sim$ による $\mathcal{E}$ の商集合を $E$ と書き，商写像を $\mathrm{pr}\colon \mathcal{E} \to E,\ (\alpha,\, b,\, f) \mapsto [(\alpha,\, b,\, f)]$ と書くことにする．

集合 $E$ に商位相を入れて $E$ を位相空間にする．このとき商位相の定義から開集合 $\{\alpha\} \times U_\alpha \times F \subset \mathcal{E}$ は pr によって $E$ の開集合 $\mathrm{pr}(\{\alpha\} \times U_\alpha \times F) \subset E$ に移される．ゆえに $E$ は $\big\{ \mathrm{pr}(\{\alpha\} \times U_\alpha \times V_\beta) \big\}$ を座標近傍にもつ $C^\infty$ 多様体である（ここに $\{V_\beta\}$ は，$C^\infty$ 多様体 $F$ の座標近傍である）．

次に $C^\infty$ の全射 $\pi\colon E \longrightarrow B$ を

$$\pi\big( [(\alpha,\, b,\, f)] \big) := b$$

と定義すると，これは $\forall \alpha \in \Lambda$ に対して微分同相写像[*23]

$$\varphi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times F,\ [(\alpha,\, b,\, f)] \longmapsto (b,\, f)$$

による局所自明性を持つ．従って組 $\xi := (E,\, \pi,\, B,\, F)$ は構造群 $G$，局所自明化 $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$，変換関数 $\{t_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\, \beta \in \Lambda}$ を持つファイバー束になり，証明が終わる． ■

**定義 2.6: 主束**

構造群を $G$ に持つファイバー束 $\xi = (P,\, \pi,\, M,\, G)$ が**主束** (principal bundle) であるとは，$G$ の $G$ 自身への左作用が自然な左作用[a]であることを言う．

[a] つまり，$g \blacktriangleright x := gx$（Lie 群の積）である．

次の命題は証明の構成が極めて重要である：

**命題 2.2: 主束の全空間への右作用**

$\xi = (P,\, \pi,\, M,\, G)$ を主束とする．このとき，$G$ の全空間 $P$ への自由な右作用が自然に定義され，その軌道空間 (orbit space) $P/G$ が $M$ になる．

<u>証明</u> $\xi$ の局所自明化を $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$，変換関数を $\{t_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to G\}_{\alpha,\, \beta \in \Lambda}$ と書く．$\forall u \in P,\, \forall g \in G$ をとる．$\pi(u) \in U_\alpha$ となる $\alpha \in \Lambda$ を選び，対応する局所自明化 $\varphi_\alpha$ による $u$ の像を $\varphi_\alpha(u) =: (p,\, h) \in U_\alpha \times G$ とおく[*24]．このとき $G$ の $P$ への右作用 $\blacktriangleleft\colon P \times G \longrightarrow P$ を次のように定義する[*25]：

$$u \blacktriangleleft g := \varphi_\alpha^{-1}(p,\, hg) \tag{2.4.6}$$

**$\blacktriangleleft$ の well-definedness**

$\beta \neq \alpha$ に対しても $\pi(u) \in U_\beta$ であるとする．このとき $\varphi_\beta(u) = (p,\, h') \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times G$ と書けて，また変換関数の定義から

$$h' = t_{\alpha\beta}(p) h \quad \big( t_{\alpha\beta}(p) \in G \big)$$

*23 逆写像は $\varphi_\alpha^{-1}\colon U_\alpha \times F \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha),\ (b,\, f) \longmapsto [(\alpha,\, b,\, f)]$ である．$\varphi_\alpha$ も $\varphi_\alpha^{-1}$ も $C^\infty$ 写像の合成で書けるので $C^\infty$ 写像である．

*24 つまり，$p := \pi(u)$，$h := \mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\alpha(u)$ と言うことである．

*25 右辺の $hg$ は Lie 群の乗法である．

である．したがって

$$\varphi_\beta^{-1}(p,\, h'g) = \varphi_\beta^{-1}\Bigl(p,\, \bigl(t_{\alpha\beta}(p)h\bigr)g\Bigr) = \varphi_\beta^{-1}\bigl(p,\, t_{\alpha\beta}(p)hg\bigr) = \varphi_\beta^{-1} \circ (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(p,\, hg) = \varphi_\alpha^{-1}(p,\, hg)$$

が分かり，式 (2.4.6) の右辺は局所自明化の取り方によらない．

**$\blacktriangleleft$ は右作用**　写像 $\rho\colon G^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Diff}\, P,\ g \longmapsto (u \longmapsto u \blacktriangleleft g)$ が群準同型であることを示す．

(1) $u \blacktriangleleft 1_G = \varphi_\alpha^{-1}(p,\, h1_G) = \varphi_\alpha^{-1}(p,\, h) = u$

(2) $\forall g_1,\, g_2 \in G$ をとる．

$$u \blacktriangleleft (g_1 g_2) = \varphi_\alpha^{-1}\bigl(p,\, (hg_1)g_2\bigr) = \varphi_\alpha^{-1}(p,\, hg_1) \blacktriangleleft g_2 = (u \blacktriangleleft g_1) \blacktriangleleft g_2$$

**$\blacktriangleleft$ は自由**

$\forall \alpha \in \Lambda$ に対して $\forall u = (p,\, g) \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ をとる．$u \blacktriangleleft g' = u$ ならば

$$u \blacktriangleleft g' = \varphi_\alpha^{-1}(p,\, gg') = u = \varphi_\alpha^{-1}(p,\, g1_G)$$

が成り立つが，局所自明化は全単射なので $gg' = g$ が言える．$g$ は任意なので $g' = 1_G$ が分かった．

**軌道空間が $M$**

$\forall \alpha \in \Lambda$ に対して，$G$ の右作用 (2.4.6) による $U \times G$ の軌道空間は $(U \times G)/G = U \times \{1_G\} = U$ となる．故に $P$ 全域に対しては $P/G = B$ となる．

■

**定理 2.1:**

コンパクト Hausdorff 空間 $P$ と，$P$ に自由に作用しているコンパクト Lie 群 $G$ を与える．この時，軌道空間への商写像

$$\pi\colon P \longrightarrow P/G$$

は主束である．

証明 ■

構造群を $G$ とするファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ が与えられたとき，命題 2.1 を使うと，変換関数が共通の主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{p} M$ が存在することがわかる．このようにして得られる主束をファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ に**同伴する** (associated) 主束と呼ぶ．

**【例 2.4.2】フレーム束**

変換関数 $\{t_{\alpha\beta}\colon M \longrightarrow \mathrm{GL}(N,\, \mathbb{K})\}$ を持つ階数 $N$ のベクトル束 $\mathbb{K}^N \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ に同伴する主束は，例えば次のようにして構成できる：$\forall x \in M$ に対して

$$P_x \coloneqq \bigl\{\, f \in \mathrm{Hom}\,(\mathbb{K}^N,\, E_x) \bigm| 同型写像 \,\bigr\}$$

とし，

$$P \coloneqq \coprod_{x \in M} P_x, \quad \varpi\colon P \longrightarrow M,\ (x,\, f) \longmapsto x$$

と定める. $\mathrm{GL}(N,\,\mathbb{K}) \hookrightarrow P \xrightarrow{\varpi} M$ に適切な局所自明化を入れて, 変換関数が $\{t_{\alpha\beta}\colon M \longrightarrow \mathrm{GL}(N,\,\mathbb{K})\}$ となるような主束を構成する.

$\forall (x,\,f) \in P_x$ をとる．このとき $\mathbb{K}^N$ の標準基底を $e_1,\,\dots,\,e_N$ とすると，$f \in \mathrm{Hom}\,(\mathbb{K}^n,\,E_x)$ は $E_x$ の基底 $f(e_1),\,\dots,\,f(e_N)$ と同一視される[a]ことに注意しよう．このことに由来して，$f_\mu \coloneqq f(e_\mu)$ とおいて $f = (f_1,\,\dots,\,f_N) \in P_x$ と表すことにする．

$E$ の局所自明化 $\{\varphi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{K}^n\}$ を与える．このとき，$n$ 個の $\underline{E\text{ の}}$局所切断 $s_{\alpha 1},\,\dots s_{\alpha N} \in \Gamma(E|_{U_\alpha})$ を

$$s_{\alpha\mu}(x) \coloneqq \varphi_\alpha^{-1}(x,\,e_\mu)$$

と定義すると，$\forall x \in U_\alpha$ に対して $s_{\alpha 1}(x),\,\dots,\,s_{\alpha N}(x)$ が $E_x$ の基底となる[b]．故に，$\underline{P\text{ の}}$局所切断 $p_\alpha \in \Gamma(P|_{U_\alpha})$ を

$$p_\alpha(x) \coloneqq \Bigl(x,\,\bigl(s_{\alpha 1}(x),\,\dots,\,s_{\alpha N}(x)\bigr)\Bigr) \in P_x$$

により定義できる．このとき，$\forall (x,\,f) = \bigl(x,\,(f_1,\,\dots,\,f_N)\bigr) \in \varpi^{-1}(U_\alpha)$ に対してある $g \in \mathrm{GL}(N,\,\mathbb{K})$ が存在して $f = p_\alpha(x)g$ と書ける．ただし $g$ は基底の取り替え行列で，ただ単に行列の積として右から作用している．

ここで，目当ての $\underline{P\text{ の}}$局所自明化を

$$\psi_\alpha\colon \varpi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathrm{GL}(n,\,\mathbb{K}),\ (x,\,f) = \bigl(x,\,p_\alpha(x)g\bigr) \longmapsto (x,\,g)$$

と定義する．変換関数を計算すると

$$\begin{aligned}
\psi_\beta^{-1}(x,\,g) &= \bigl(x,\,p_\beta(x)g\bigr) \\
&= \Bigl(x,\,\bigl(s_{\beta 1}(x),\,\dots,\,s_{\beta N}(x)\bigr)g\Bigr) \\
&= \Bigl(x,\,\bigl(\varphi_\beta^{-1}(x,\,e_1),\,\dots,\,\varphi_\beta^{-1}(x,\,e_N)\bigr)g\Bigr) \\
&= \biggl(x,\,\Bigl(\varphi_\alpha^{-1}\bigl(x,\,t_{\alpha\beta}(x)e_1\bigr),\,\dots,\,\varphi_\alpha^{-1}\bigl(x,\,t_{\alpha\beta}(x)e_N\bigr)\Bigr)g\biggr)
\end{aligned}$$

となるが，$e_\mu$ が標準基底なので

$$t_{\alpha\beta}(x)e_\mu = \begin{bmatrix} t_{\alpha\beta}(x)^1{}_\mu \\ t_{\alpha\beta}(x)^2{}_\mu \\ \vdots \\ t_{\alpha\beta}(x)^n{}_\mu \end{bmatrix} = e_\nu t_{\alpha\beta}(x)^\nu{}_\mu$$

が成り立つこと，およびベクトル束の定義から $\mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\alpha|_{E_x}\colon E_x \longrightarrow \mathbb{K}^N$ が $\mathbb{K}$-ベクトル空間の同型

写像であることに注意すると

$$
\begin{aligned}
&\Bigl(x,\ \bigl(\varphi_\alpha^{-1}(x,\ t_{\alpha\beta}(x)e_1),\ \dots,\ \varphi_\alpha^{-1}(x,\ t_{\alpha\beta}(x)e_N)\bigr)g\Bigr)\\
&=\Bigl(x,\ \bigl(\varphi_\alpha^{-1}(x,\ e_\nu)t_{\alpha\beta}(x)^\nu{}_1,\ \dots,\ \varphi_\alpha^{-1}(x,\ e_\nu)t_{\alpha\beta}(x)^\nu{}_N\bigr)g\Bigr)\\
&=\Bigl(x,\ \bigl(\varphi_\alpha^{-1}(x,\ e_1),\ \dots,\ \varphi_\alpha^{-1}(x,\ e_N)\bigr)t_{\alpha\beta}(x)g\Bigr)\\
&=\Bigl(x,\ (s_{\alpha 1}(x),\ \dots,\ s_{\alpha N}(x))t_{\alpha\beta}(x)g\Bigr)\\
&=(x,\ p_\alpha(x)t_{\alpha\beta}(x)g)\\
&=\psi_\alpha^{-1}(x,\ t_{\alpha\beta}(x)g)
\end{aligned}
$$

だとわかり，目標が達成された．この $\mathrm{GL}(N,\ \mathbb{K}) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ のことを**フレーム束**と呼ぶ．

[a] 実際 $\forall v = v^\mu e_\mu \in \mathbb{K}^n$ に対して $f(v) = v^\mu f(e_\mu)$ が成り立つので，$f(e_1),\ \dots,\ f(e_N) \in E_x$ が指定されれば $f$ が一意的に決まる．

[b] ベクトル束の定義から $\mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\alpha|_{E_x} \colon E_x \longrightarrow \mathbb{K}^N$ が $\mathbb{K}$-ベクトル空間の同型写像であるため．

逆に，与えられた主束を素材にして，変換関数を共有するファイバー束を構成することができる．

**命題 2.3: Borel 構成**

$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ を主束とし，Lie 群 $G$ の $C^\infty$ 多様体への左作用 $\blacktriangleright \colon G \times F \longrightarrow F$ を与える．(2.4.6) で定義された $G$ の $P$ への右作用を $\blacktriangleleft \colon P \times G \longrightarrow P$ と書く．

- 積多様体 $P \times F$ への $G$ の新しい右作用 $\blacktriangleleft \colon (P \times F) \times G \longrightarrow P \times F$ を

$$(u,\ f) \blacktriangleleft g := (u \blacktriangleleft g,\ g^{-1} \blacktriangleright f)$$

  と定義し，この右作用による $P \times F$ の軌道空間を $\boldsymbol{P \times_G F} := (P \times F)/G$ と書く．
- 商写像 $\varpi \colon P \times F \longrightarrow P \times_G F,\ (u,\ f) \longmapsto (u,\ f) \blacktriangleleft G$ による $(u,\ f) \in P \times F$ の像を $u \times_G f \in P \times_G F$ と書く．このとき写像

$$q \colon P \times_G F \longrightarrow M,\ u \times_G f \longmapsto \pi(u)$$

  が well-defined になる．

このとき，$F \hookrightarrow P \times_G F \xrightarrow{q} M$ は構造群 $G$ をもち，変換関数が $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ のそれと同じであるようなファイバー束である．

**証明** $q$ の well-definedness は，(2.4.6) で定義した右作用 $\blacktriangleleft$ が $\pi(u)$ を不変に保つので明らか．

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ の開被覆，局所自明化，変換関数をそれぞれ $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda},\ \{\varphi_\lambda \colon \pi^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times G\}_{\lambda\in\Lambda},\ \bigl\{t_{\alpha\beta} \colon M \longrightarrow G\bigr\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$ と書く．また，$\forall \lambda \in \Lambda$ に対して局所切断 $s_\lambda \in \Gamma(P|_{U_\alpha})$ を

$$s_\lambda \colon M \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha),\ x \longmapsto \varphi_\lambda^{-1}(x,\ 1_G)$$

と定義する．

このとき，$\forall \lambda \in \Lambda$ に対して $C^\infty$ 写像

$$\psi_\lambda \colon q^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times F,\ s_\lambda(x) \times_G f \longmapsto (x,\ f) \tag{2.4.7}$$

が well-defined な[*26] 微分同相写像になる[*27] ので，族

$$\left\{\psi_\lambda \colon q^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times F\right\}_{\lambda \in \Lambda}$$

を $F \hookrightarrow P \times_G F \xrightarrow{q} M$ の局所自明化にとる．すると $\forall \alpha,\ \beta \in \Lambda,\ \forall (x,\ f) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$ に対して

$$\begin{aligned}
\psi_\beta^{-1}(x,\ f) &= s_\beta(x) \times_G f \\
&= \varphi_\beta^{-1}(x,\ 1_G) \times_G f \\
&= \varphi_\alpha^{-1}(x,\ t_{\alpha\beta}(x) 1_G) \times_G f \\
&= \varphi_\alpha^{-1}(x,\ 1_G t_{\alpha\beta}(x)) \times_G f \\
&= \left(\varphi_\alpha^{-1}(x,\ 1_G) \blacktriangleleft t_{\alpha\beta}(x)\right) \times_G f \\
&= \left(s_\alpha(x) \blacktriangleleft t_{\alpha\beta}(x)\right) \times_G f \\
&= \Big(\left(s_\alpha(x) \blacktriangleleft t_{\alpha\beta}(x)\right) \blacktriangleleft t_{\alpha\beta}(x)^{-1}\Big) \times_G \left(t_{\alpha\beta}(x) \blacktriangleright f\right) \\
&= s_\alpha(x) \times_G \left(t_{\alpha\beta}(x) \blacktriangleright f\right) \\
&= \psi_\alpha^{-1}(x,\ t_{\alpha\beta}(x) \blacktriangleright f)
\end{aligned}$$

が成り立つので $F \hookrightarrow P \times_G F \xrightarrow{q} M$ の変換関数は

$$\left\{\, t_{\alpha\beta} \colon M \longrightarrow G \,\right\}_{\alpha,\, \beta \in \Lambda}$$

である． ■

**【例 2.4.3】同伴ベクトル束**

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ を任意に与える．Lie 群 $G$ の，$N$ 次元 $\mathbb{K}$ ベクトル空間 $V$ への左作用とは，Lie 群 $G$ の $N$ 次元表現 $\rho \colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ のことに他ならない[a]．このとき，命題 2.3 の方法によって構成される階数 $N$ のベクトル束のことを $\boldsymbol{P \times_\rho V}$ と書き，**同伴ベクトル束** (associated vector bundle) と呼ぶ．

[a] $\mathrm{End}\, V$ に標準的な $C^\infty$ 構造を入れて Lie 群と見做したものを $\mathrm{GL}(V)$ と書いた．

[*26] $\forall u \times_G f \in q^{-1}(U_\lambda)$ をとる．このとき $q(u \times_G f) = \pi(u) \in U_\lambda$ なので $u \in P$ に主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ の局所自明化 $\varphi_\lambda \colon \pi^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times F$ を作用させることができる．従って $g(u) \coloneqq \mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\lambda(u) \in G$ とおけば，$G$ の $P$ への右作用の定義 (2.4.6) から $u = \varphi_\lambda^{-1}\big(\pi(u),\, g(u)\big) = \varphi_\lambda^{-1}\big(\pi(u),\, 1_G\big) \blacktriangleleft g(u) = s_\lambda\big(\pi(u)\big) \blacktriangleleft g(u)$ が成り立ち，$u \times_G f = \Big(s_\lambda\big(\pi(u)\big) \blacktriangleleft g(u)\Big) \times_G f = s_\lambda\big(\pi(u)\big) \times_G \big(g(u) \blacktriangleright f\big)$ と書くことができる．よって $\psi_\lambda$ **の定義** (2.4.7) **において** $\boldsymbol{\psi_\lambda(u \times_G f) = \big(\pi(u),\, g(u) \blacktriangleright f\big)}$ **であり**，全ての $q^{-1}(U_\lambda)$ の元の行き先が定義されていることがわかった．次に $u \times_G f = u' \times_G f' \in q^{-1}(U_\lambda)$ であるとする．このとき右作用 $\blacktriangleleft$ の定義からある $h \in G$ が存在して $u' = \varphi_\lambda^{-1}\big(\pi(u'),\, g(u')\big) = u \blacktriangleleft h = \varphi_\lambda^{-1}\big(\pi(u),\, g(u)h\big),\ f' = h^{-1} \blacktriangleright f$ が成り立つので，$\pi(u') = \pi(u),\ g(u') = g(u)h,\ f' = h^{-1} \blacktriangleright f$ が言える．従って $\psi_\lambda(u' \times_G f') = \big(\pi(u'),\, g(u') \blacktriangleright f'\big) = \Big(\pi(u),\, \big(g(u)h\big) \blacktriangleright \big(h^{-1} \blacktriangleright f\big)\Big) = \big(\pi(u),\, g(u) \blacktriangleright h \blacktriangleright h^{-1} \blacktriangleright f\big) = \big(\pi(u),\, g(u) \blacktriangleright f\big) = \psi_\lambda(u \times_G f)$ が成り立ち，$\psi_\lambda$ が well-defined であることが示された．

[*27] $\pi \colon P \longrightarrow M,\ g \coloneqq \mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\lambda \colon q^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow G,\ \blacktriangleright \colon G \times F \longrightarrow F$ は全て $C^\infty$ 写像の合成の形をしているので $C^\infty$ 写像であり，$\psi_\lambda \coloneqq \big(\pi \times (\blacktriangleright \circ (g \times \mathrm{id}_F))\big)$ もこれらの合成として書けている（写像 $\times,\, \mathrm{id}_F$ はもちろん $C^\infty$ 級である）ので $C^\infty$ 写像である．well-definedness の証明と同じ議論で $\psi_\lambda$ の単射性がわかる．全射性は定義 (2.4.7) より明らか．逆写像 $(x,\ f) \longmapsto s_\lambda(x) \times_G f$ も，$C^\infty$ 写像たちの合成 $q \circ (s_\lambda \times \mathrm{id}_F)$ なので $C^\infty$ 写像である．

これでゲージ場を導入する準備が整った．つまり，この節の冒頭で考えた内部対称性を持つ場 $\varphi\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{K}^N$ とは，厳密には主束

$$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$$

の，線型 Lie 群 $G$ の $N$ 次元表現

$$\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{K}^N),\ U \longmapsto (\boldsymbol{v} \longmapsto U\boldsymbol{v})$$

による同伴ベクトル束

$$\mathbb{K}^N \hookrightarrow P \times_\rho \mathbb{K}^N \xrightarrow{q} \mathcal{M}$$

の局所切断 $\phi\colon V_\alpha \longrightarrow P \times_\rho \mathbb{K}^N$ を，ある一つの局所自明化 $\sigma_\alpha\colon q^{-1}(V_\alpha) \longrightarrow V_\alpha \times \mathbb{K}^N$ によって座標表示したもの（の第 2 成分を取り出してきたもの）

$$\varphi = \mathrm{proj}_2 \circ \sigma_\alpha \circ \phi\colon V_\alpha \longrightarrow \mathbb{K}^N$$

のことだと見做せる．と言うのも，こう考えることで場の変換性 (2.4.2)

$$\varphi(x) \longrightarrow \tilde{\varphi}(x) := U(x)\varphi(x)$$

が，時空 $\mathcal{M}$ の 2 つのチャート $\big(V,\,(x^\mu)\big)$, $\big(\tilde{V},\,(\tilde{x}^\mu)\big)$ の共通部分 $V \cap \tilde{V}$ 上における，局所自明化 $\sigma,\,\tilde{\sigma}\colon q^{-1}(V\cap\tilde{V}) \longrightarrow (V\cap\tilde{V}) \times \mathbb{K}^N$ の取り替え（内部自由度に関する一般座標変換のようなもの）に伴う変換関数 $U_{\tilde{V},\,V}\colon \mathcal{M} \longrightarrow G$ の作用

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}\circ\sigma^{-1}\colon (V\cap\tilde{V}) \times \mathbb{K}^N &\longrightarrow (V\cap\tilde{V}) \times \mathbb{K}^N, \\ (x,\,\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) &\longmapsto \Big(x,\,\rho\big(U_{\tilde{V},\,V}(x)\big)\big(\varphi(x)\big)\Big) = \Big(x,\,\boldsymbol{U_{\tilde{V},\,V}(x)\varphi(x)}\Big) \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

として上手く定式化できているのである[*28]．

### 2.4.2 Lie 群の指数写像と基本ベクトル場

主束の接続の話に入る前に，Lie 群の Lie 代数について考察する．この小節は [?, Chapter 20]，[?, 第 6 章] による．

Lie 群 $G$ の上の微分同相写像[*29]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L_g}\colon G \longrightarrow G,\ x \longmapsto gx, \\ \boldsymbol{R_g}\colon G \longrightarrow G,\ x \longmapsto xg, \end{aligned}$$

のことをそれぞれ**左移動**，**右移動**と言う．

---

*28 物理では変換性によって場を定義するので，数学的定式化はこれで良い．なお，この定式化は主束の全空間 $P$ の情報を一切使っていないが，これは命題 2.1 の表れである．実際，この節の冒頭の議論で顕に登場したのは時空 $\mathcal{M}$，場の配位を記述する空間 $\mathbb{K}^N$，内部対称性を表す Lie 群 $G$ とその表現 $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(N,\,\mathbb{K})$，場の局所的変換を表す $C^\infty$ 写像 $U\colon \mathcal{M} \longrightarrow G$ だけだったので，その数学的定式化が $P$ によらないのは妥当だと思う．

*29 従って，命題**??**から $L_g$, $R_g$ によるベクトル場の押し出しが一意的に存在する．

**定義 2.7: 左不変ベクトル場**

Lie 群 $G$ の**左不変ベクトル場** (left-invariant vector field) とは，$\mathbb{R}$-ベクトル空間

$$\boldsymbol{\mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)} \coloneqq \left\{ X \in \mathfrak{X}(G) \;\middle|\; \forall g \in G,\ (L_g)_* X = X \right\}$$

の元のこと．i.e. $\forall g \in G$ に対して自分自身と $L_g$-related な $C^\infty$ ベクトル場のことを言う．

$\forall g \in G$ と $\forall X,\, Y \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ をとる．このとき $(L_g)_* X = X,\ (L_g)_* Y = Y$ なので，命題**??**の後半から

$$(L_g)_*[X, Y] = [(L_g)_* X, (L_g)_* Y] = [X, Y]$$

が言える．i.e. $\mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ は Lie ブラケットについて閉じるので，体 $\mathbb{R}$ 上の Lie 代数になる．

**命題 2.4:**

$G$ を Lie 群とする．このとき評価写像

$$\mathrm{ev}_{1_G} \colon \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(M) \longrightarrow T_{1_G} G,\ X \longmapsto X_{1_G}$$

はベクトル空間の同型写像である．

**証明** $\mathrm{ev}_{1_G}$ が $\mathbb{R}$-線型写像であることは明らか．

**$\mathbf{ev}_{1_G}$ が単射**

Ker $\mathrm{ev}_{1_G} = \{0\}$ を示す．$\forall X \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{ev}_{1_G}$ に対して $\mathrm{ev}_{1_G}(X) = X_{1_G} = 0$ が成り立つ．一方 $X \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ でもあるので，$\forall g \in G$ に対して $X_g = X_{L_g(1_G)} = (T_{1_G} L_g)(X_{1_G}) = 0$ が言える[*30]．

**$\mathbf{ev}_{1_G}$ が全射**

$\forall v \in T_{1_G} G$ を 1 つとり，$C^\infty$ ベクトル場 $v^{\mathrm{L}} \in \mathfrak{X}(G)$ を

$$v^{\mathrm{L}} \colon G \longrightarrow TG,\ g \longmapsto T_{1_G}(L_g)(v) \tag{2.4.9}$$

と定義する[*31]．$\forall g \in G$ に対して $v^{\mathrm{L}}$ が自分自身と $L_g$-related であることを示す．実際，$\forall h \in G$ に対して

$$T_h(L_g)(v^{\mathrm{L}}|_h) = T_h(L_g) \circ T_{1_G}(L_h)(v) = T_{1_G}(L_g \circ L_h)(v) = T_{1_G}(L_{gh})(v) = v^{\mathrm{L}}|_{gh} = v^{\mathrm{L}}|_{L_g(h)}$$

が言える．i.e. $v^{\mathrm{L}} \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ である．従って $v^{\mathrm{L}}$ に $\mathrm{ev}_{1_G}$ を作用させることができ，$\mathrm{ev}_{1_G}(v^{\mathrm{L}}) = v^{\mathrm{L}}|_{1_G} = T_{1_G} L_{1_G}(v) = v \in \mathrm{Im}\,\mathrm{ev}_{1_G}$ が言えた．

■

ここで $\mathfrak{g} \coloneqq T_{1_G} G$ とおき，命題 2.4 の (2.4.9) を使って $\mathfrak{g}$ 上の Lie ブラケットを

$$[X, Y] \coloneqq \left[X^{\mathrm{L}}, Y^{\mathrm{L}}\right]_{1_G} \in \mathfrak{g}$$

*30 2 つ目の等号で $L_g$-related の定義を使った．

*31 $v^{\mathrm{L}}$ が $C^\infty$ であることは次のようにしてわかる：$\forall f \in C^\infty(G)$ をとる．$\gamma(0) = 1_G,\ \dot{\gamma}(0) = v$ を充たす $C^\infty$ 曲線 $\gamma \colon (-\delta,\, \delta) \longrightarrow G$ をとると，$\forall g \in G$ に対して $(v^{\mathrm{L}} f)(g) = v(f \circ L_g) = \dot{\gamma}(0)(f \circ L_g) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} (f \circ L_g \circ \gamma)(t)$ と書ける．$f \circ L_g \circ \gamma \colon (-\delta,\, \delta) \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ と見做すとこれは $C^\infty$ 写像の合成なので $C^\infty$ 写像であり，右辺は $g$ に関して $C^\infty$ 級である．

と定義すれば $\mathrm{ev}_{1_G}$ は Lie 代数の同型写像となる．この意味で $\mathfrak{g}$ のことを **Lie 群 $G$ の Lie 代数**と呼ぶ．

**【例 2.4.4】一般線型群とその Lie 代数**

一般線型群 $\mathrm{GL}(n,\,\mathbb{K}) \subset \mathrm{M}(n,\,\mathbb{K})$ の Lie 代数 $\mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{K}) \coloneqq T_{\mathbb{1}_n}\mathrm{GL}(n,\,\mathbb{K})$ を，$\mathrm{GL}(n,\,\mathbb{K})$ のチャート $\big(\mathrm{GL}(n,\,\mathbb{K}),\,(x^\mu{}_\nu)\big)$ の下で考える．まず，$\mathbb{K}$-線型写像

$$
\begin{aligned}
\alpha\colon \mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathrm{M}(n,\,\mathbb{K}),\\
a^\mu{}_\nu \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu{}_\nu}\right|_{\mathbb{1}_n} &\longmapsto \big[\,a^\mu{}_\nu\,\big]_{1\le\mu,\,\nu\le n}
\end{aligned}
$$

は明らかに $\mathbb{K}$-ベクトル空間の同型写像である．$\forall a = a^\mu{}_\nu \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu{}_\nu}\right|_{\mathbb{1}_n},\, b = b^\mu{}_\nu \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu{}_\nu}\right|_{\mathbb{1}_n} \in \mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{K})$ をとる．このとき $\forall g = \big[\,g^\mu{}_\nu\big]_{1\le\mu,\,\nu\le n} \in \mathrm{GL}(n,\,\mathbb{K})$ に関する左移動は

$$
L_g\big(\big[\,x^\mu{}_\nu\,\big]_{1\le\mu,\,\nu\le n}\big) = \big[\,g^\mu{}_\rho x^\rho{}_\nu\,\big]_{1\le\mu,\,\nu\le n}
$$

なる $C^\infty$ 写像だから

$$
\begin{aligned}
a^{\mathrm{L}}{}_g = T_{1_G}(L_g)(a) &= a^\mu{}_\nu\, T_{1_G}(L_g)\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu{}_\nu}\right|_{\mathbb{1}_n}\right)\\
&= a^\mu{}_\nu\, \frac{\partial [\,L_g\,]^\rho{}_\sigma}{\partial x^\mu{}_\nu}(\mathbb{1}_n)\, \left.\frac{\partial}{\partial x^\rho{}_\sigma}\right|_{L_g(\mathbb{1}_n)}\\
&= g^\rho{}_\mu a^\mu{}_\nu\, \left.\frac{\partial}{\partial x^\rho{}_\nu}\right|_g
\end{aligned}
$$

と計算できる．i.e. 第 $(\mu,\,\nu)$ 成分を取り出す $C^\infty$ 関数を $\mathrm{pr}^\mu{}_\nu\colon \mathrm{GL}(n,\,\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ とおくと $\forall f \in C^\infty\big(\mathrm{GL}(n,\,\mathbb{K})\big)$ に対して $a^{\mathrm{L}} f \in C^\infty\big(\mathrm{GL}(n,\,\mathbb{K})\big)$ は

$$
a^{\mathrm{L}} f(g) = a^\mu{}_\nu\, \mathrm{pr}^\rho{}_\mu(g) \frac{\partial f}{\partial x^\rho{}_\nu}(g)
$$

と書ける．よって

$$
\begin{aligned}
[a, b]f &= \big[a^{\mathrm{L}}, b^{\mathrm{L}}\big] f(\mathbb{1}_n)\\
&= a^\mu{}_\nu\, \mathrm{pr}^\rho{}_\mu(\mathbb{1}_n)\, \frac{\partial}{\partial x^\rho{}_\nu}\left.\left(b^\alpha{}_\beta\, \mathrm{pr}^\gamma{}_\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\gamma{}_\beta}\right)\right|_{\mathbb{1}_n}\\
&\quad - b^\mu{}_\nu\, \mathrm{pr}^\rho{}_\mu(\mathbb{1}_n)\, \frac{\partial}{\partial x^\rho{}_\nu}\left.\left(a^\alpha{}_\beta\, \mathrm{pr}^\gamma{}_\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\gamma{}_\beta}\right)\right|_{\mathbb{1}_n}\\
&= a^\mu{}_\nu b^\nu{}_\beta\, \frac{\partial f}{\partial x^\mu{}_\beta}(\mathbb{1}_n) + \cancel{a^\mu{}_\nu b^\alpha{}_\beta \frac{\partial^2 f}{\partial x^\mu{}_\nu \partial x^\alpha{}_\beta}(\mathbb{1}_n)}\\
&\quad - b^\mu{}_\nu a^\nu{}_\beta \frac{\partial f}{\partial x^\mu{}_\beta}(\mathbb{1}_n) - \cancel{b^\mu{}_\nu a^\alpha{}_\beta \frac{\partial^2 f}{\partial x^\mu{}_\nu \partial x^\alpha{}_\beta}(\mathbb{1}_n)}\\
&= \left( (a^\mu{}_\rho b^\rho{}_\nu - b^\mu{}_\rho a^\rho{}_\nu)\, \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu{}_\nu}\right|_{\mathbb{1}_n} \right) f
\end{aligned}
$$

であり，

$$
\alpha([a, b]) = \big[\,a^\mu{}_\rho b^\rho{}_\nu - b^\mu{}_\rho a^\rho{}_\nu\,\big]_{1\le\mu,\,\nu\le n}
$$

i.e. $\alpha$ は Lie 代数の同型写像だと分かった．

**定理 2.2: 誘導される Lie 代数の準同型**

Lie 群 $G, H$ と Lie 群の準同型 $F\colon G \longrightarrow H$ を与える．

(1) このとき，$\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して $Y \in \mathfrak{h}$ がただ一つ存在して，$X^{\mathrm{L}}$ と $Y^{\mathrm{L}}$ が $F$-related になる．i.e. $Y^{\mathrm{L}} = F_* X^{\mathrm{L}}$ である．

(2) $T_{1_G}F\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h},\ X \longmapsto T_{1_G}F(X)$ は Lie 代数の準同型である．

**証明** (1) $Y = T_{1_G}F(X) \in \mathfrak{h}$ に対して $X^{\mathrm{L}}$ と $Y^{\mathrm{L}}$ が $F$-related であることを示す．実際，$F$ が Lie 群の準同型であることから $\forall g, h \in G$ について

$$F \circ L_g(h) = F(gh) = F(g)F(h) = L_{F(g)} \circ F(h)$$

が成り立つこと，i.e. $F \circ L_g = L_{F(g)} \circ F$ に注意すると $\forall g \in G$ に対して

$$\begin{aligned} T_gF(X^{\mathrm{L}}|_g) &= T_gF\bigl(T_{1_G}L_g(X)\bigr) \\ &= T_{1_G}(F \circ L_g)(X) \\ &= T_{1_G}(L_{F(g)} \circ F)(X) \\ &= T_{1_H}(L_{F(g)}) \circ T_{1_G}F(X) \\ &= T_{1_H}(L_{F(g)})(Y) \\ &= Y_{F(g)} \end{aligned}$$

が言える．系**??**より $F_* X^{\mathrm{L}} = Y^{\mathrm{L}}$ がわかるので $Y$ は一意的に定まる．

(2) $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ をとる．(1) と命題**??**-(1) より $\bigl[F_*X^{\mathrm{L}}, F_*Y^{\mathrm{L}}\bigr]$ は $\bigl[X^{\mathrm{L}}, Y^{\mathrm{L}}\bigr]$ と $F$-related であるが，(1) で示した一意性から

$$F_*\bigl[X^{\mathrm{L}}, Y^{\mathrm{L}}\bigr] = \bigl[F_*X^{\mathrm{L}}, F_*Y^{\mathrm{L}}\bigr]$$

が言える．両辺の $1_H \in H$ における値をとることで

$$T_{1_G}F([X,Y]) = (F_*\bigl[X^{\mathrm{L}}, Y^{\mathrm{L}}\bigr])_{1_G} = (\bigl[F_*X^{\mathrm{L}}, F_*Y^{\mathrm{L}}\bigr])_{1_G} = [X, Y]$$

が示された．

■

**定義 2.8: 1 パラメータ部分群**

Lie 群の準同型写像 $\mathbb{R} \longrightarrow G$ のことを Lie 群 $G$ の **1 パラメータ部分群** (one-parameter subgroup) と呼ぶ[a]．

[a] 1 パラメータ部分群自身は部分 Lie 群ではない．

**命題 2.5: 1 パラメータ部分群の特徴付け**

Lie 群 $G$ を与える．

(1) $G$ の任意の 1 パラメータ部分群 $\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow G$ に対して，$\gamma$ を初期条件 $\gamma(0) = 1_G$ を充たす極大積分曲線として持つ左不変ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ が一意的に存在する．

(2) $\forall X \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ に対して，初期条件 $\gamma(0) = 1_G$ を充たす唯一の $X$ の極大積分曲線 $\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow G$ は $G$ の 1 パラメータ部分群である．

上述の対応によって $X \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ から一意的に定まる 1 パラメータ部分群のことを $\boldsymbol{X}$ **が生成する 1 パラメータ部分群**と呼ぶ．

!

命題 2.4 の同型と併せると

$$\{\, G \text{ の 1 パラメータ部分群} \,\} \overset{*}{\longleftrightarrow} \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G) \overset{\mathrm{ev}_{1_G}}{\longleftrightarrow} T_{1_G}G$$

の 1 対 1 対応がある．i.e. $G$ の任意の 1 パラメータ部分群 $\gamma$ は，その初速度 $\dot{\gamma}(0) \in T_{1_G}G$ により完全に決定される．

<u>**証明**</u> (1) $G$ の 1 パラメータ部分群 $\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow G$ を与える．$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(\mathbb{R})$ なので，定理 2.2 より，$X := \gamma_*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ は $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ と $\gamma$-related な唯一の左不変ベクトル場である．このとき $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ に大して

$$X_{\gamma(t_0)} = T_{t_0}\gamma\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}\right) = \dot{\gamma}(t_0)$$

が成り立ち，$\gamma$ は初期条件 $\gamma(0) = 1_G$ を充たす $X$ の極大積分曲線である．

(2) 定理??より $\forall X \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ は完備なので，$X$ は大域的なフローを生成する．従って $\gamma(0) = 1_G$ を充たす $X$ の極大積分曲線 $\gamma$ が唯一存在し，その定義域が $\mathbb{R}$ になる．

$\forall g \in G$ をとる．左不変ベクトル場の定義より $X \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ は $X$ 自身と $L_g$-related なので，命題??から $L_g \circ \gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow G$ もまた $X$ の積分曲線である．従って $\forall s \in \mathbb{R}$ に対して曲線 $L_{\gamma(s)} \circ \gamma\colon t \longmapsto L_{\gamma(s)}\bigl(\gamma(t)\bigr) = \gamma(s)\gamma(t)$ は $t = 0$ において点 $\gamma(s) \in G$ を通過する $X$ の積分曲線である．然るに補題??-(2) より曲線 $t\colon t \longmapsto \gamma(s+t)$ もまた同一の初期条件を充たす $X$ の積分曲線なので，定理??よりこれらは $\forall t \in \mathbb{R}$ において一致しなくてはならない：

$$\gamma(s)\gamma(t) = \gamma(s+t)$$

i.e. $\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow G$ は 1 パラメータ部分群である．

■

**定義 2.9: 指数写像**

Lie 群 $G$ を与える．$\mathfrak{g}$ を $G$ の Lie 代数とする．$G$ の**指数写像** (exponential map) を

$$\exp\colon \mathfrak{g} \longrightarrow G,\ X \longmapsto \gamma_{(X)}(1)$$

と定義する．ただし，$\gamma_{(X)}\colon \mathbb{R} \longrightarrow G$ は $X^{\mathrm{L}} \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ が生成する 1 パラメータ部分群である．

**命題 2.6: 指数写像の性質**

Lie 群 $G$ を与える．$\mathfrak{g}$ を $G$ の Lie 代数とする．

(1) $\exp\colon \mathfrak{g} \longrightarrow G$ は $C^\infty$ 写像

(2) $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して，

$$\gamma_{(X)}\colon \mathbb{R} \longrightarrow G,\ t \longmapsto \exp(tX)$$

は $X^{\mathrm{L}} \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ が生成する 1 パラメータ部分群である．

(3) $\forall X \in \mathfrak{g},\ \forall s,\, t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\exp\bigl((s+t)X\bigr) = \exp(sX)\exp(tX)$$

(4) $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して

$$(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$$

(5) $H$ を別の Lie 群，$F\colon G \longrightarrow H$ を任意の Lie 群の準同型とするとき，以下の図式が可換になる：

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "T_{1_G}F"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{h} \arrow[d, "\exp"] \\ G \arrow[r, "F"] & H \end{tikzcd}$$

(6) $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して，左不変ベクトル場 $X^{\mathrm{L}} \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ が生成するフロー $\theta_{(X)}\colon \mathbb{R} \times G \longrightarrow G$ に対して

$$\theta_{(X)}(t,\, g) = g\exp(tX)\ \bigl(=: R_{\exp(tX)}(g)\bigr)$$

が成り立つ．

(7) $T_0(\exp)\colon T_0\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ は恒等写像である．

(8) 点 $0 \in \mathfrak{g}$ の近傍 $U \subset \mathfrak{g}$ および点 $1_G \in G$ の近傍 $V \subset G$ が存在して，$\exp|_U\colon U \longrightarrow V$ が微分同相写像になる．

**証明** (1) [**?**, p.519, Proposition 20.8-(1)]

(2) $\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow G$ を $X^{\mathrm{L}} \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ が生成する 1 パラメータ部分群とする．これは命題 2.5-(2) により $\gamma(0) = 1_G$ を充たす $X^{\mathrm{L}}$ の唯一の極大積分曲線である．

$\forall t \in \mathbb{R}$ をとる．このとき補題**??**-(1) より，$C^\infty$ 曲線 $\tilde{\gamma}\colon \mathbb{R} \longrightarrow G,\ s \longmapsto \gamma(ts)$ は初期条件 $\tilde{\gamma}(0) = 1_G$ を充たすベクトル場 $tX^{\mathrm{L}}$ の極大積分曲線なので，その一意性から

$$\gamma_{(X)}(t) = \exp(tX) = \tilde{\gamma}(1) = \gamma(t)$$

が成り立つ．i.e. $\gamma_{(X)} = \gamma$ が言えた．

(3) (2) より $\gamma_{(X)}$ が 1 パラメータ部分群なので

$$\exp\bigl((s+t)X\bigr) = \gamma_{(X)}(s+t) = \gamma_{(X)}(s)\gamma_{(X)}(t) = \exp(sX)\exp(tX)$$

(4) (2) より $\gamma_{(X)}$ が 1 パラメータ部分群なので

$$
\begin{aligned}
\exp X \exp(-X) &= \gamma_{(X)}(1)\gamma_{(X)}(-1) = \gamma_{(X)}(0) = 1_G \\
\exp(-X) \exp X &= \gamma_{(X)}(-1)\gamma_{(X)}(1) = \gamma_{(X)}(0) = 1_G
\end{aligned}
$$

が言える．i.e. $(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$ である．

(5) $\forall X \in \mathfrak{g}$ を 1 つ固定する．(2) より $C^\infty$ 写像 $t \longmapsto \exp\bigl(tT_{1_G}F(X)\bigr)$ は左不変ベクトル場 $\bigl(T_{1_G}F(X)\bigr)^{\mathrm{L}} = F_*(X^{\mathrm{L}}) \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ が生成する 1 パラメータ部分群である．ここで，$\sigma\colon \mathbb{R} \longrightarrow H,\ t \longmapsto F\bigl(\exp(tX)\bigr)$ とおいたとき

$$
\begin{aligned}
\dot\sigma(0) &= T_0\bigl(F \circ \exp(tX)\bigr)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right) \\
&= T_{1_G}F \circ T_0\bigl(\exp(tX)\bigr)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right) \\
&= T_{1_G}F\bigl(\dot{\gamma_{(X)}}(0)\bigr) \\
&= T_{1_G}F(X)
\end{aligned}
$$

が成り立つので $\sigma$ もまた左不変ベクトル場 $\bigl(T_{1_G}F(X)\bigr)^{\mathrm{L}} \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ が生成する 1 パラメータ部分群であり，その一意性から $\sigma(t) = \exp\bigl(tT_{1_G}F(X)\bigr)$ が言える．

(6) $\forall(t,\, g) \in \mathbb{R} \times G$ をとる．左不変ベクトル場の定義より $X^{\mathrm{L}} \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ は $X^{\mathrm{L}}$ 自身と $L_g$-related なので，命題??から $L_g \circ \gamma_{(X)}\colon \mathbb{R} \longrightarrow G,\ t \longmapsto \exp(tX)$ もまた $X^{\mathrm{L}}$ の極大積分曲線である．$L_g \circ \gamma_{(X)}(0) = g$ なので，極大積分曲線の一意性から $L_g \circ \gamma_{(X)} = \theta^{(g)}_{(X)}$ が言える．従って

$$
g\exp(tX) = L_g(\exp(tX)) = L_g \circ \gamma_{(X)}(t) = \theta^{(g)}_{(X)}(t) = \theta_{(X)}(t,\, g).
$$

(7) $\forall X \in T_0\mathfrak{g}$ を 1 つとる．$\mathfrak{g}$ 上の $C^\infty$ 曲線 $\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{g},\ t \longmapsto tX$ は $\dot\gamma(0) = X$ を充たすので

$$
\begin{aligned}
T_0(\exp)(X) &= T_0(\exp)\bigl(\dot\gamma(0)\bigr) \\
&= T_0(\exp) \circ T_0\gamma\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right) \\
&= T_0(\exp \circ \gamma)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \exp(tX) \\
&= X
\end{aligned}
$$

(8) (7) より点 $0 \in \mathfrak{g}$ において $T_0(\exp)\colon T_0\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} = T_{1_G}G$ が全単射なので，$C^\infty$ 多様体に関する逆関数定理が使える．

■

**定義 2.10: 微分表現**

$V$ を $\mathbb{K}$-ベクトル空間とする．Lie 群 $G$ の表現 $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ の，$1_G \in G$ における微分 $T_{1_G}\rho\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ は Lie 代数の表現である．この $T_{1_G}\rho$ のことを $\rho$ の**微分表現** (differential representation) と呼ぶ．

**【例 2.4.5】随伴表現**

$\forall g \in G$ に対して準同型 $F_g \colon G \longrightarrow G,\ x \longmapsto gxg^{-1}$ を考えると $F_{gh} = F_g \circ F_h$ が成り立つ．故に，$1_G \in G$ における微分

$$T_{1_G}(F_g) \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

は，$T_{1_G}$ の関手性から $T_{1_G}(F_{gh}) = T_{1_G}(F_g) \circ T_{1_G}(F_h)$ を充たす．よって

$$\mathrm{Ad} \colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g}),\ g \longmapsto T_{1_G}(F_g)$$

は Lie 群 $G$ の表現となる[a]．これを Lie 群 $G$ の**随伴表現** (adjoint representation) と呼ぶ．

Ad の微分表現を指数写像を使って計算してみよう．$\forall X \in \mathfrak{g}$ をとる．命題 2.6-(2) により曲線 $\gamma_{(X)} \colon t \longmapsto \exp(tX)$ は $X$ が生成する 1 パラメータ部分群なので，命題??から $\dot{\gamma_{(X)}}(0) = X$ である．従って $\forall Y \in \mathfrak{g}$ に大して

$$\begin{aligned}
\bigl(T_{1_G}(\mathrm{Ad})(X)\bigr)Y &= \Bigl(T_{1_G}(\mathrm{Ad})\bigl(\dot{\gamma_{(X)}}(0)\bigr)\Bigr)Y \\
&= T_{1_G}(\mathrm{Ad}) \circ T_0\gamma_{(X)} \left( \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \right) Y \\
&= T_0(\mathrm{Ad} \circ \gamma_{(X)}) \left( \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \right) Y \\
&= \left( \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}\bigl(\exp(tX)\bigr) \right) Y \\
&= \left( \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}\bigl(\exp(tX)\bigr)(Y) \right) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Bigl(T_{1_G}\bigl(F_{\exp(tX)}\bigr)(Y)\Bigr) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Bigl(T_{1_G}\bigl(R_{(\exp(tX))^{-1}} \circ L_{\exp(tX)}\bigr)(Y^{\mathrm{L}}_{1_G})\Bigr) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Bigl(T_{L_{\exp(tX)}(1_G)}\bigl(R_{\exp(-tX)}\bigr) \circ T_{1_G}\bigl(L_{\exp(tX)}\bigr)(Y^{\mathrm{L}}_{1_G})\Bigr) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Bigl(T_{\exp(tX)}\bigl(R_{\exp(-tX)}\bigr)\bigl(Y^{\mathrm{L}}_{\exp(tX)}\bigr)\Bigr)
\end{aligned}$$

ここで，命題 2.6-(6) より $X^{\mathrm{L}} \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ が生成するフローが $\theta_t(g) = R_{\exp(tX)}(g)$ と書かれることを思い出すと，

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Bigl(T_{\exp(tX)}\bigl(R_{\exp(-tX)}\bigr)\bigl(Y^{\mathrm{L}}_{\exp(tX)}\bigr)\Bigr) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} T_{\theta_t(1_G)}\bigl(\theta_{-t}\bigr)\bigl(Y^{\mathrm{L}}_{\theta_t(1_G)}\bigr) \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{T_{\theta_t(1_G)}\bigl(\theta_{-t}\bigr)\bigl(Y^{\mathrm{L}}_{\theta_t(1_G)}\bigr) - Y^{\mathrm{L}}_{1_G}}{t} \\
&= (\mathcal{L}_{X^{\mathrm{L}}} Y^{\mathrm{L}})_{1_G} \\
&= \bigl[X^{\mathrm{L}}, Y^{\mathrm{L}}\bigr]_{1_G} \\
&= [X, Y]
\end{aligned}$$

となる．ただし 3 つ目の等号で Lie 微分の定義を使った．結局

$$\mathrm{ad} \coloneqq T_{1_G}(\mathrm{Ad})\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}),\ X \longmapsto (Y \mapsto [X, Y])$$

であることが分かった．

[a] 厳密には Ad の $C^\infty$ 性を示さなくてはならない．証明は [?, p.534, Proposition 20.24] を参照．

**【例 2.4.6】一般線型群の随伴表現**

$G = \mathrm{GL}(n,\,\mathbb{K})$ としたときの随伴表現を考える．$\mathrm{GL}(n,\,\mathbb{K})$ のチャート $\bigl(\mathrm{GL}(n,\,\mathbb{K}),\,(x^\mu{}_\nu)\bigr)$ をとると $\forall g = \bigl[\,g^\mu{}_\nu\,\bigr]_{1\le\mu,\,\nu\le n} \in \mathrm{GL}(n,\,\mathbb{K})$ に関して $C^\infty$ 写像 $F_g\colon G \longrightarrow G$ は

$$F_g\bigl(\bigl[\,x^\mu{}_\nu\,\bigr]_{1\le\mu,\,\nu\le n}\bigr) = \bigl[\,g^\mu{}_\rho x^\rho{}_\sigma [g^{-1}]^\sigma{}_\nu\,\bigr]_{1\le\mu,\,\nu\le n}$$

と座標表示されるので，$\forall c^\mu{}_\nu \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu{}_\nu}\right|_{\mathbb{1}_n} \in \mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{K})$ の自然基底に関して

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(g)\left(c^\mu{}_\nu \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu{}_\nu}\right|_{\mathbb{1}_n}\right) &= c^\mu{}_\nu\, T_{\mathbb{1}_n}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu{}_\nu}\right|_{\mathbb{1}_n}\right)\\ &= c^\mu{}_\nu \frac{\partial [\,F_g\,]^\rho{}_\sigma}{\partial x^\mu{}_\nu}(\mathbb{1}_n) \left.\frac{\partial}{\partial x^\rho{}_\sigma}\right|_{F_g(\mathbb{1}_n)}\\ &= g^\rho{}_\mu c^\mu{}_\nu [g^{-1}]^\nu{}_\sigma \left.\frac{\partial}{\partial x^\rho{}_\sigma}\right|_{\mathbb{1}_n}\end{aligned}$$

がわかる．【例 2.4.4】の Lie 代数の同型写像 $\alpha\colon \mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{M}(n,\,\mathbb{K})$ を使うと，これは行列の積の意味で

$$\alpha \circ \mathrm{Ad}(g) \circ \alpha^{-1}(X) = gXg^{-1}$$

を意味する．以上の議論は $G$ が $\mathrm{GL}(n,\,\mathbb{K})$ の部分 Lie 群の場合にも成立するが，大抵の場合 Lie 代数の同型写像 $\alpha$ は省略される．

定理??によって，$C^\infty$ 多様体 $M$ 上の完備なベクトル場 $X$ が Lie 群 $\mathbb{R}$ の $M$ への作用 $\theta\colon \mathbb{R}\times M \longrightarrow M$ を一意に定めることが分かる．そしてこのような状況を指して，ベクトル場 $X$ は Lie 群 $\mathbb{R}$ の作用 $\theta$ の無限小生成子であると言うのだった．この考えを任意の Lie 群 $G$ の，任意の $M$ への右作用に拡張することができる．つまり，任意の Lie 群 $G$ の任意の右作用 $\blacktriangleleft\colon M\times G \longrightarrow M$ は，ただ一つの無限小生成子を持つ．

**定義 2.11: 基本ベクトル場**

Lie 群 $G$ が $C^\infty$ 多様体 $M$ に右から作用しているとする．この右作用を $\blacktriangleleft\colon M \times G \longrightarrow M$ と書く．

- $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して，**基本ベクトル場** (fundamental vector field) $\boldsymbol{X^\#} \in \mathfrak{X}(M)$ を次のように定める：

$$X^\#_x \coloneqq \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \bigl(x \blacktriangleleft \exp(tX)\bigr) \in T_xM$$

- 写像

$$\blacktriangleleft^\# \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(M),\ X \longmapsto X^\#$$

のことを**右作用 $\blacktriangleleft$ の無限小生成子**と呼ぶ．

上の状況下で

- $\forall g \in G$ に対して**右作用移動** $R_g\colon M \longrightarrow M$ を $R_g(x) \coloneqq x \blacktriangleleft g$ と定義する．
- $\forall x \in M$ に対して**右作用軌道** $R^{(x)}\colon G \longrightarrow M$ を $R^{(x)}(g) \coloneqq x \blacktriangleleft g$ と定義する．

$\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して，$C^\infty$ 写像[*32]

$$\theta_{(X)}\colon \mathbb{R} \times M \longrightarrow M,\ (t,\, x) \longmapsto x \blacktriangleleft \exp(tX) = R_{\exp(tX)}(x)$$

は大域的フローである[*33]．この大域的フローの無限小生成子はベクトル場

$$x \longmapsto \Bigl(x,\, \dot{\theta}^{(x)}_{(X)}(0)\Bigr) = \left(x,\, T_0\bigl(\theta^{(x)}_{(X)}\bigr)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right)\right)$$

であるが[*34]，これがまさに $X^\# \in \mathfrak{X}(M)$ になっている．つまり，基本ベクトル場は $\forall x \in M$ において，$\forall f \in C^\infty(M)$ に

$$X^\#_x f = T_0\bigl(\theta^{(x)}_{(X)}\bigr)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right) f = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \bigl(f \circ \theta^{(x)}_{(X)}\bigr)(t) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f\bigl(x \blacktriangleleft \exp(tX)\bigr)$$

と作用する．

---

*32 これは命題 2.6-(6) からの類推だと言える．

*33 実際，命題 2.6 から

$$\begin{aligned}
\theta_{(X)}(0,\, x) &= x \blacktriangleleft 1_G = x, \\
\theta_{(X)}(t+s,\, x) &= x \blacktriangleleft \exp\bigl((s+t)X\bigr) \\
&= x \blacktriangleleft \bigl(\exp(sX)\exp(tX)\bigr) \\
&= x \blacktriangleleft \exp(sX) \blacktriangleleft \exp(tX) \\
&= \theta_{(X)}\bigl(t,\, \theta_{(X)}(s,\, x)\bigr)
\end{aligned}$$

が成り立つ．

*34 強引に書くと $\theta^{(x)}_{(X)} = R^{(x)} \circ \exp(\text{-}X)\colon \mathbb{R} \longrightarrow M$ と言うことになる．

もしくは，次のように考えることもできる：曲線 $\gamma_{(X)}\colon t \longmapsto \exp(tX)$ は初速度 $\dot{\gamma_{(X)}}(0) = X$ なので，

$$\begin{aligned}
T_{1_G}(R^{(x)})(X) &= T_{1_G}(R^{(x)})\bigl(\dot{\gamma_{(X)}}(0)\bigr) \\
&= T_{1_G}(R^{(x)}) \circ T_0(\gamma_{(X)}) \left( \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \right) \\
&= T_0(R^{(x)} \circ \gamma_{(X)}) \left( \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \right) \\
&= T_0(\theta^{(x)}_{(X)}) \left( \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \right) \\
&= X^{\#}_x .
\end{aligned} \tag{2.4.10}$$

このことから $◀^{\#}$ が $\mathbb{R}$-線型写像だとわかる．なお，等式 (2.4.10) は主束の接続形式を調べる際に極めて重要な役割を果たす．

**補題 2.1:**

Lie 群 $G$ の $C^\infty$ 多様体 $M$ への右作用 $◀\colon M \times G \longrightarrow M$ を与える．
このとき $\forall x \in M$ および $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して，$X^{\mathrm{L}} \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ とその基本ベクトル場 $X^{\#}$ は $R^{(x)}$-related である

<u>**証明**</u> $\forall g,\, h \in G$ に対して

$$R^{(x◀g)}(h) = x ◀ g ◀ h = x ◀ (gh) = x ◀ L_g(h) = R^{(x)} \circ L_g(h)$$

が成り立つことに注意する．$\forall g \in G$ をとり，$y \coloneqq R^{(x)}(g) = x ◀ g$ とおく．$X^{\mathrm{L}}$ が左不変ベクトル場であることから

$$\begin{aligned}
X^{\#}_y &= T_{1_G}(R^{(y)})(X) \\
&= T_{1_G}(R^{(x◀g)})(X^{\mathrm{L}}_{1_G}) \\
&= T_{1_G}(R^{(x)} \circ L_g)(X^{\mathrm{L}}_{1_G}) \\
&= T_{L_g(1_G)}(R^{(x)}) \circ T_{1_G}(L_g)(X^{\mathrm{L}}_{1_G}) \\
&= T_g(R^{(x)})(X^{\mathrm{L}}_g)
\end{aligned}$$

が言えた． ■

**命題 2.7: $◀^{\#}$ は Lie 代数の準同型**

Lie 群 $G$ の $C^\infty$ 多様体 $M$ への右作用 $◀\colon M \times G \longrightarrow M$ を与える．このとき右作用 $◀$ の無限小生成子

$$◀^{\#}\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(M),\; X \longmapsto X^{\#}$$

は Lie 代数の準同型である．

<u>**証明**</u> $\forall X,\, Y \in \mathfrak{g}$ をとる．補題 2.1 と Lie ブラケットの自然性から $\forall x \in M$ に対して $\bigl[X^{\mathrm{L}}, Y^{\mathrm{L}}\bigr]$ と $\bigl[X^{\#}, Y^{\#}\bigr]$ が $R^{(x)}$-related だと分かる．i.e.

$$\bigl[X^{\#}, Y^{\#}\bigr]_x = \bigl[X^{\#}, Y^{\#}\bigr]_{R^{(x)}(1_G)} = T_{1_G}(R^{(x)})\bigl(\bigl[X^{\mathrm{L}}, Y^{\mathrm{L}}\bigr]_{1_G}\bigr) = T_{1_G}(R^{(x)})([X,Y]) = [X,Y]^{\#}_x$$

が言えた． ■

しばらくの間 Lie 群 $G$（もしくはその部分群）の Lie 代数を $\mathrm{Lie}(G) \coloneqq \mathfrak{g}$ と書くことにする[*35]．

**命題 2.8: 基本ベクトル場の零点**

Lie 群 $G$ の $C^\infty$ 多様体 $M$ への右作用 $◀ \colon M \times G \longrightarrow M$ を与える．このとき，以下の 2 つは同値である：

(1) $X \in \mathfrak{g}$ の基本ベクトル場 $X^\#$ が点 $x \in M$ において $X^\#_x = 0$ になる

(2) $X \in \mathrm{Lie}\bigl(\mathrm{Stab}(x)\bigr)$

ただし，$\mathrm{Stab}(x) \subset G$ は点 $x \in M$ の安定化部分群[a]である．

[a] つまり，$\mathrm{Stab}(x) \coloneqq \{\, g \in G \mid x ◀ g = x \,\}$

**証明** **(1) ⟸ (2)**

$X \in \mathrm{Lie}\bigl(\mathrm{Stab}(x)\bigr)$ ならば $\forall t \in \mathbb{R}$ に対して $\exp(tX) \in \mathrm{Stab}(x)$ である．従って $x \in M$ の近傍上で定義された任意の $C^\infty$ 関数 $f$ に対して

$$X^\#_x f = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f\bigl(x ◀ \exp(tX)\bigr) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(x) = 0.$$

と計算できる[*36]

**(1) ⟹ (2)**

$X^\#_x = 0$ とする．このとき定数写像 $\gamma \colon \mathbb{R} \longrightarrow M,\ t \longmapsto x$ が

$$\dot{\gamma}(t) = 0 = X^\#_{\gamma(t)}$$

を充たすので，初期条件 $\gamma(0) = x$ を充たす $X^\# \in \mathfrak{X}(M)$ の極大積分曲線となる．一方，$\theta^{(x)}_{(X)} \colon \mathbb{R} \longrightarrow M,\ t \longmapsto x ◀ \exp(tX)$ もまた同一の初期条件をみたす $X^\#$ の極大積分曲線だったので，その一意性から $\theta^{(x)}_{(X)} = \gamma \iff x ◀ \exp(tX) = x \quad \forall t \in \mathbb{R} \iff \exp(tX) \in \mathrm{Stab}(x) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ が言えた．従って $X \in \mathrm{Lie}(\mathrm{Stab}(x))$ である．

■

[*35] 例えば [?] では，$\mathrm{Lie}(G) \coloneqq \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ と定義しているので注意．同型なので然程問題にはならないが...

[*36] $f\bigl(x ◀ \exp(tX)\bigr)$ が $t$ に関して定数関数なので．

**系 2.3:**

Lie 群 $G$ の $C^\infty$ 多様体 $M$ への右作用 $\blacktriangleleft\colon M \times G \longrightarrow M$ を与える．
このとき，$\forall x \in M$ の右作用軌道 $R^{(x)}\colon G \longrightarrow M$ の微分

$$T_{1_G}(R^{(x)})\colon \mathfrak{g} \longrightarrow T_x M$$

に対して

$$\mathrm{Ker}\bigl(T_{1_G}(R^{(x)})\bigr) = \mathrm{Lie}\bigl(\mathrm{Stab}(x)\bigr)$$

が成り立つ．

**証明** $\forall X \in \mathfrak{g}$ をとる．(2.4.10) と命題 2.8 から

$$\begin{aligned} X \in \mathrm{Ker}\bigl(T_{1_G}(R^{(x)})\bigr) &\iff T_{1_G}(R^{(x)})(X) = 0 \\ &\iff X^{\#}_x = 0 \\ &\iff X \in \mathrm{Lie}\bigl(\mathrm{Stab}(x)\bigr) \end{aligned}$$

■

### 2.4.3 主束の接続

与えられた $C^\infty$ 多様体 $M$ 上の ***k*-形式** ($k$-form) とは，外積代数束（これはベクトル束になる）

$$\bigwedge^k T^* M := \coprod_{p \in M} \Bigl(\bigwedge^k T_p^* M\Bigr)$$

の $C^\infty$ 切断のことである．$k$-形式全体の集合を

$$\boldsymbol{\Omega^k(M)} := \Gamma\Bigl(\bigwedge^k T^* M\Bigr)$$

と書く．

任意の $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V, W$ に関して，自然な $\mathbb{K}$-ベクトル空間の同型

$$\underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{k} \otimes W \cong \Bigl\{\, f\colon \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \longrightarrow W \Bigm| \text{多重線型写像} \,\Bigr\}$$

がある．$M$ を底空間とする任意のベクトル束 $E \xrightarrow{\pi} M$ が与えられたとき，この同型を念頭において，***E* 値 *k*-形式** ($E$-valued $k$ form) をテンソル積束

$$\Bigl(\bigwedge^k T^* M\Bigr) \otimes E$$

の $C^\infty$ 切断として定義する．$E$ 値 $k$-形式全体の集合を

$$\boldsymbol{\Omega^k(M;\, E)} := \Gamma\Bigl(\Bigl(\bigwedge^k T^* M\Bigr) \otimes E\Bigr)$$

と書く[*37]．特に $E$ があるベクトル空間 $V$ に対して $E = M \times V$ の形をした自明束の場合，代わりに

$$\boldsymbol{\Omega^k(M;\, V)} \coloneqq \Omega^k(M;\, M \times V)$$

と書き，**$\boldsymbol{V}$ 値 $\boldsymbol{k}$-形式**と呼ぶ[*38]．

さて，Lie 群に関する準備が終わったのでいよいよ主束の接続を定義する．この小節の内容は [?, 第 6 章], [?, §28] が詳しい．

**定義 2.12: 主束の接続（Ehresmann 接続）**

$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ を主束とする．$\forall g \in G$ に対して，命題 2.2 の右作用によって右作用移動を $R_g \colon P \longrightarrow P,\ u \longmapsto u \blacktriangleleft g$ と定義する．

- 分布 $\left\{ H_u \subset T_u P \;\middle|\; u \in P \right\}$ が $P$ 上の**接続** (connection) であるとは，以下の 2 条件が成り立つことを言う：

  **(C-1)** $\forall u \in P$ に対して

  $$T_u P = \mathrm{Ker}(T_u \pi) \oplus H_u$$

  **(C-2)** $\forall u \in P,\ \forall g \in G$ に対して

  $$T_u(R_g)(H_u) = H_{R_g(u)}$$

  が成り立つ（分布 $\{H_u\}$ は **$G$-不変**）．

  $\mathrm{Ker}\, T_u(\pi),\ H_u$ をそれぞれ $T_u P$ の**垂直部分空間**, **水平部分空間**と呼ぶ．

- $\mathfrak{g}$ 値 1-形式 $\omega \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$ が**接続形式**であるとは，次の 2 条件を充たすことをいう：

  **(CF-1)** $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して

  $$\omega(X^{\#}) = X$$

  **(CF-2)** $\forall g \in G$ に対して

  $$(R_g)^* \omega = \mathrm{Ad}(g^{-1})(\omega)$$

  ただし $\mathrm{Ad} \colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ は Lie 群 $G$ の随伴表現である．

本題に入る前に，微分幾何学の風習への注意をしておく．境界あり/なし $C^\infty$ 多様体 $M$ とその部分多様体 $S \subset M$ を与える．このとき包含写像を $\iota \colon S \hookrightarrow M$ と書くと，$\forall p \in S \subset M$ に対して $T_p S$ を $T_p \iota(T_p S)$ と同一視する[*39] ことで $T_p M$ の部分ベクトル空間と見做すのである [?, p.116].

さて，主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ において $\forall u \in P$ を 1 つ固定する．$G_{\pi(u)} \coloneqq \pi^{-1}(\{\pi(u)\})$ とおいたとき，$\forall X \in T_u G_{\pi(u)} \subset T_u P$ (i.e. 点 $u \in \boldsymbol{P}$ におけるファイバー方向の接空間）の，$\pi \colon P \longrightarrow M$ の微分による像

*37 $\boldsymbol{\Omega^0(M;\, E) = \Gamma(E)}$ に注意．

*38 $V$ が有限次元ベクトル空間ならば，$\Omega^k(M;\, V) \cong \Omega^k(M) \otimes_{\mathbb{R}} V$ が成り立つ．

*39 つまり $\forall v \in T_p S$ は $\forall f \in C^\infty(S)$ に $v(f)$ として作用するが，$v \in T_p S \subset T_p M$ と見做す時は $\forall f \in C^\infty(M)$ に，$\boldsymbol{T_p \iota(v)} f = v(f \circ \iota) = v(f|_S)$ として作用する．

$T_u\pi(X) \in T_{\pi(u)}M$ は，上述の注意より勝手な $C^\infty$ 関数 $f \in C^\infty(M)$ に対して

$$T_u\pi(X)f = X(f \circ \pi|_{G_{\pi(u)}})$$

と作用する．然るに $C^\infty$ 写像 $f \circ \pi|_{G_{\pi(u)}}$ は常に値 $f(\pi(u))$ を返す定数写像なので，$T_u\pi(X)f = 0$ が言える[*40]．i.e. $X \in \mathrm{Ker}(T_u\pi)$ であり，

$$T_uG_{\pi(u)} \subset \mathrm{Ker}(T_u\pi)$$

が言えた．一方，$T_u\pi\colon T_uP \longrightarrow T_{\pi(u)}M$ は明らかに全射なので $\dim \mathrm{Im}(T_u\pi) = \dim T_{\pi(u)}M$ であり，故にファイバー束の局所自明性と階数-退化次元の定理から

$$\dim \mathrm{Ker}(T_u\pi) = \dim T_uP - \dim T_{\pi(u)}M = \dim T_uG_{\pi(u)} = \dim G \tag{2.4.11}$$

が言える．結局

$$T_uG_{\pi(u)} = \mathrm{Ker}(T_u\pi)$$

だと分かった．さらに次の非常に重要な補題がある．この補題のために基本ベクトル場を導入したと言っても過言ではない：

**補題 2.2:**

$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ を主束とする．命題 2.2 で与えた Lie 群 $G$ の全空間 $P$ への右作用 $\blacktriangleleft\colon P \times G \longrightarrow P$ の無限小生成子 $\blacktriangleleft^\#\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(P)$, $X \longmapsto X^\#$ について，

$$\forall u \in P, \quad \boldsymbol{\mathrm{Ker}(T_u\pi) = \left\{\, X_u^\# \in T_uP \;\middle|\; X \in \mathfrak{g} \,\right\}}$$

が成り立つ．

<u>証明</u> $\forall u \in P$ を 1 つ固定する．

$\boldsymbol{\mathrm{Ker}(T_u\pi) \supset \left\{\, X_u^\# \in T_uP \;\middle|\; X \in \mathfrak{g} \,\right\}}$

$\forall X \in \mathfrak{g}$ をとる．このとき (2.4.10) より $X_u^\# = T_{1_G}(R^{(u)})(X)$ だが，$\pi \circ R^{(u)}$ は定数写像なので

$$\begin{aligned} T_u\pi(X_u^\#) &= T_u\pi \circ T_{1_G}(R^{(u)})(X) \\ &= T_{1_G}(\pi \circ R^{(u)})(X) \\ &= 0 \end{aligned}$$

が分かる．i.e. $X_u^\# \in \mathrm{Ker}(T_u\pi)$ である．

$\boldsymbol{\mathrm{Ker}(T_u\pi) \subset \left\{\, X_u^\# \in T_uP \;\middle|\; X \in \mathfrak{g} \,\right\}}$

まず，$\mathbb{R}$-線型写像

$$T_{1_G}\big(R^{(u)}\big)\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Ker}(T_u\pi)$$

がベクトル空間の同型写像であることを示す．系 2.3 から $\mathrm{Ker}\,T_{1_G}\big(R^{(u)}\big) = \mathrm{Lie}\big(\mathrm{Stab}(u)\big)$ だが，命題 2.2 より右作用 $\blacktriangleleft$ は自由なので $\mathrm{Stab}(u) = \{1_G\}$ である．従って $\mathrm{Ker}\,T_{1_G}\big(R^{(u)}\big) = \{0\}$ であり，

[*40] 定数関数に接ベクトルを作用させると 0 になる：Leibniz 則より，定数関数 $1\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$, $p \longmapsto 1$ に対して $v(1) = v(1 \cdot 1) = v(1) + v(1) \implies v(1) = 0$. $v$ の線型性から一般の定数関数に対しても 0 になることが言える．

$T_{1_G}\big(R^{(u)}\big)$ は単射．(2.4.11) より $\dim \mathfrak{g} = \dim G = \dim \operatorname{Ker}(T_u\pi)$ なので $T_{1_G}\big(R^{(u)}\big)$ はベクトル空間の同型写像である．

以上より，$\forall v \in \operatorname{Ker}(T_u\pi)$ に対して $\big(T_{1_G}(R^{(u)})\big)^{-1}(v) \in \mathfrak{g}$ であり，(2.4.10) から

$$v = T_{1_G}(R^{(u)})\Big(\big(T_{1_G}(R^{(u)})\big)^{-1}(v)\Big) = \Big(\big(T_{1_G}(R^{(u)})\big)^{-1}(v)\Big)^{\#}_{u}$$

が言えた．

■

接続の定義は幾何学的イメージがわかりやすいが，計算は絶望的である．幸いにして主束の接続を与えることと，全空間上の接続形式を与えることは同値なのでなんとかなる：

**定理 2.4: 接続と接続形式の関係**

$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ を主束とする．

(1) $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ が接続形式ならば，分布

$$\big\{ \operatorname{Ker}\omega_u \subset T_uP \bigm| u \in P \big\}$$

は $P$ 上の接続である．

(2) (1) は $P$ 上の接続形式全体の集合から $P$ 上の接続全体の集合への 1 対 1 対応を与える．

**証明** (1) $\forall u \in P$ を 1 つ固定する．命題 2.2 で与えた Lie 群 $G$ の全空間 $P$ への右作用 $\blacktriangleleft\colon P \times G \longrightarrow P$ の無限小生成子 $\blacktriangleleft^{\#}\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(P),\ X \longmapsto X^{\#}$ を考える．

**(C-1)**

接続形式の定義から $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して $\omega(X^{\#}) = X$ が成り立つ．i.e. $\omega_u\colon T_uP \longrightarrow \mathfrak{g}$ は全射であり，$\mathbb{R}$-線型写像の系列[*41]

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}\omega_u \xrightarrow{i} T_uP \xrightarrow{\omega_u} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

は短完全列になる．さらにこれは補題 2.2 の証明で与えた線型写像 $T_{1_G}(R^{(u)})\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \operatorname{Ker}(T_u\pi) \subset T_uP$ によって分裂するので

$$T_u \cong \mathfrak{g} \oplus \operatorname{Ker}\omega_u \cong \operatorname{Ker}(T_u\pi) \oplus \operatorname{Ker}\omega_u$$

がわかる．

**(C-2)**

$\forall v \in \operatorname{Ker}\omega_u$ をとる．このとき **(CF-2)** より $\forall g \in G$ に対して

$$\omega_{u\blacktriangleleft g}\big(T_u(R_g)(v)\big) = ((R_g)^*\omega)_u(v) = \operatorname{Ad}(g^{-1})\big(\omega_u(v)\big) = 0$$

が従い，$T_u(R_g)(\operatorname{Ker}\omega_u) \subset \operatorname{Ker}\omega_{u\blacktriangleleft g}$ が言えた．両辺の次元が等しいので $T_u(R_g)(\operatorname{Ker}\omega_u) = \operatorname{Ker}\omega_{u\blacktriangleleft g}$ が言えた．

[*41] $i$ は包含準同型なので $\operatorname{Ker}\omega_u = \operatorname{Im} i$．$\omega_u$ が全射なので $\operatorname{Im}\omega_u = \mathfrak{g} = \operatorname{Ker} 0$．

(2)

**(単射性)**

接続形式 $\omega, \eta \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ に対して $\{\,\mathrm{Ker}\,\omega_u \mid u \in P\,\} = \{\,\mathrm{Ker}\,\eta_u \mid u \in P\,\}$ が成り立つとする．このとき $\forall u \in P$ に対して $\mathrm{Ker}\,\omega_u = \mathrm{Ker}\,\eta_u$ が成り立つ．補題 2.2 および (1) から $T_uP = \mathrm{Ker}(T_u\pi) \oplus \mathrm{Ker}\,\omega_u = \{\,X^{\#}_u \mid X \in \mathfrak{g}\,\} \oplus \mathrm{Ker}\,\omega_u$ の直和分解があり，$\forall v \in T_uP$ に対して $V \in \mathfrak{g}$, $v^H \in \mathrm{Ker}\,\omega_u = \mathrm{Ker}\,\eta_u$ が一意的に存在して $v = V^{\#}_u + v^H$ と書ける．よって **(CF-1)** から

$$\omega_u(v) = \omega_u(V^{\#}_u) = V = \eta_u(V^{\#}_u) = \eta_u(v)$$

が分かった．i.e. $\omega_u = \eta_u$ である．$u$ は任意だったので $\omega = \eta$ が言えた．

**(全射性)**

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ の接続 $\{\,H_u \subset T_uP \mid u \in P\,\}$ を与える．$\forall u \in P$ に対して直和分解 $T_uP = \mathrm{Ker}(T_u\pi) \oplus H_u$ の垂直，水平部分空間成分への射影をそれぞれ

$$\begin{aligned} &i_1 \colon T_uP \longrightarrow \mathrm{Ker}(T_u\pi),\ v^V + v^H \longmapsto v^V \\ &i_2 \colon T_uP \longrightarrow H_u,\ v^V + v^H \longmapsto v^H \end{aligned}$$

と書き，$\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ を，$\forall u \in P$ に対して補題 2.2 の証明で与えた同型写像 $T_{1_G}(R^{(u)}) \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Ker}(T_u\pi)$ を用いて

$$\omega_u := \bigl(T_{1_G}(R^{(u)})\bigr)^{-1} \circ i_1 \colon T_uP \xrightarrow{i_1} \mathrm{Ker}(T_u\pi) \xrightarrow{\left(T_{1_G}(R^{(u)})\right)^{-1}} \mathfrak{g}$$

と定義する．この $\omega$ が **(CF-1)**, **(CF-2)** を充たすことを示す：

**(CF-1)** $\forall u \in P$ を 1 つ固定する．$\forall X \in \mathfrak{g}$ をとる．補題 2.2 より $X^{\#}_u \in \mathrm{Ker}(T_u\pi)$ だから，(2.4.10) より

$$\begin{aligned} \omega_u(X^{\#}_u) &= \bigl(T_{1_G}(R^{(u)})\bigr)^{-1} \circ i_1(X^{\#}_u) \\ &= \bigl(T_{1_G}(R^{(u)})\bigr)^{-1}(X^{\#}_u) \\ &= \bigl(T_{1_G}(R^{(u)})\bigr)^{-1}\bigl(T_{1_G}(R^{(u)})(X)\bigr) \\ &= X \end{aligned} \tag{2.4.12}$$

が言えた．

**(CF-2)**

$\forall u \in P$ を 1 つ固定する．$\forall g \in G$ をとる．示すべきは $\forall v \in T_uP$ に対して

$$\bigl((R_g)^*\omega\bigr)_u(v) = \omega_{R_g(u)}\bigl(T_u(R_g)(v)\bigr) = \mathrm{Ad}(g^{-1})\bigl(\omega_u(v)\bigr)$$

が成り立つことである．実際 $i_1(v) \in \mathrm{Ker}(T_u\pi)$ に対しては，補題 2.2 からある $V \in \mathfrak{g}$ が一意的に存在して $i_1(v) = V^{\#}_u$ と書けるので

$$\begin{aligned} \omega_{R_g(u)}\Bigl(T_u(R_g)\bigl(i_1(v)\bigr)\Bigr) &= \omega_{u\blacktriangleleft g}\Bigl(T_u(R_g)(V^{\#}_u)\Bigr) \\ &= \omega_{u\blacktriangleleft g}\Bigl(T_u(R_g) \circ T_{1_G}(R^{(u)})(V)\Bigr) && \because\ (2.4.10) \\ &= \omega_{u\blacktriangleleft g}\Bigl(T_{1_G}(R_g \circ R^{(u)})(V)\Bigr) \end{aligned}$$

となるが，$\forall x \in G$ に対して

$$
\begin{aligned}
R_g \circ R^{(u)}(x) &= u \blacktriangleleft x \blacktriangleleft g = u \blacktriangleleft (xg) = u \blacktriangleleft (gg^{-1}xg) \\
&= (u \blacktriangleleft g) \blacktriangleleft (g^{-1}xg) = R^{(u \blacktriangleleft g)} \circ F_{g^{-1}}(x)
\end{aligned}
$$

が成り立つ[*42]ことから

$$
\begin{aligned}
\omega_{u \blacktriangleleft g}\Big(T_{1_G}(R_g \circ R^{(u)})(V)\Big) &= \omega_{u \blacktriangleleft g}\big(T_{F_{g^{-1}}(1_G)}(R^{(u \blacktriangleleft g)}) \circ T_{1_G}(F_{g^{-1}})(V)\big) \\
&= \omega_{u \blacktriangleleft g}\big(T_{1_G}(R^{(u \blacktriangleleft g)}) \circ \mathrm{Ad}(g^{-1})(V)\big) && \because \ \mathrm{Ad}\ \text{の定義} \\
&= \omega_{u \blacktriangleleft g}\Big(\big(\mathrm{Ad}(g^{-1})(V)\big)^{\#}_{u \blacktriangleleft g}\Big) && \because \ (2.4.10) \\
&= \big(T_{1_G}(R^{(u \blacktriangleleft g)})\big)^{-1} \circ T_{1_G}(R^{(u \blacktriangleleft g)}) \circ \mathrm{Ad}(g^{-1})(V) && \because \ (2.4.12) \\
&= \mathrm{Ad}(g^{-1})(V) \\
&= \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega_u(V^{\#}_u) && \because \ (2.4.12) \\
&= \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega_u\big(i_1(v)\big)
\end{aligned}
$$

が言える．$i_2(v) \in H_u$ に関しては，**(C-2)** から $T_u(R_g)\big(i_2(v)\big) \in H_{u \blacktriangleleft g}$ なので

$$
\begin{aligned}
\omega_{R_g(u)}\Big(T_u(R_g)\big(i_2(v)\big)\Big) &= \big(T_{1_G}(R^{(u \blacktriangleleft g)})\big)^{-1} \circ i_1\Big(T_u(R_g)\big(i_2(v)\big)\Big) \\
&= 0 \\
&= \mathrm{Ad}(g^{-1})\Big(\omega_u\big(i_2(v)\big)\Big)
\end{aligned}
$$

が言える．$v = i_1(v) + i_2(v)$ なので証明が完了した．

■

### 2.4.4 同伴ベクトル束上の共変微分

**定義 2.13: tensorial form**

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$
- 有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V$
- Lie 群 $G$ の有限次元表現 $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$

を与える．$\forall g \in G$ に対して，命題 2.2 の右作用によって右作用移動を $R_g\colon P \longrightarrow P,\ u \longmapsto u \blacktriangleleft g$ と定義する．全空間 $P$ 上の $V$-値 $k$ 形式 $\phi \in \Omega^k(P;\, V)$ を与える．

- $\phi$ が**水平** (horizontal) であるとは，$\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して

$$
i_{X^{\#}}(\phi) = 0
$$

[*42] 記号は【例 **2.4.5**】を参照

が成り立つことを言う[a].

- $\phi$ が **$\rho$ 型の右同変**[b] (right equivalent of type $\rho$) であるとは，$\forall g \in G$ に対して

$$(R_g)^* \phi = \rho(g^{-1})(\phi)$$

が成り立つことを言う．

- $\phi$ が **$\rho$ 型の tensorial $k$-form** (tensorial form of type $\rho$) であるとは，$\phi$ が水平かつ $\rho$ 型の右同変であることを言う．

[a] $i_{X^\#} \colon \Omega^k(P;\, V) \longrightarrow \Omega^{k-1}(P;\, V)$ は微分形式の**内部積** (interior product) である．

[b] equivalent の訳語には**同変**があてられることが多い．何かしらの群作用を考えると言う意味があるようだ：http://pantodon.jp/index.rb?body=equivariant_topology

$\rho$ 型の tensorial $k$-form 全体がなす $\mathbb{K}$-ベクトル空間を $\boldsymbol{\Omega^k_\rho(P;\, V)}$ と書く．

!

補題 2.1 より，$\phi \in \Omega^k(P;\, V)$ が水平であることは任意の $k$-個の $C^\infty$ ベクトル場 $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(P)$ に対して

$$\exists l \text{ s.t. } X_l \text{ が垂直} \implies \phi(X_1, \dots, X_k) = 0$$

が成り立つことと同値である．また，$P$ 上の任意の 0-形式は引数を持たないので，自動的に水平ということになる．

**補題 2.3: 同伴ベクトル束のファイバーの構造**

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$
- 有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V$
- Lie 群 $G$ の有限次元表現 $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$
- 主束 $P$ の同伴ベクトル束 $V \hookrightarrow P \times_\rho V \xrightarrow{q} M$

を与える．このとき，$\forall u \in P$ に対して $\mathbb{K}$-線型写像

$$f_u \colon V \longrightarrow q^{-1}(\{\pi(u)\}),\ v \longmapsto u \times_\rho v$$

はベクトル空間の同型写像である．

<u>証明</u> $v, w \in V$ について $u \times_\rho v = u \times_\rho w$ とする．このとき $\times_\rho$ の定義から，ある $g \in G$ が存在して $(u, w) = (u \blacktriangleleft g,\, g^{-1} \blacktriangleright v)$ とかける．右作用 $\blacktriangleleft$ は自由なので $u = u \blacktriangleleft g \implies g = 1_G$ が言える．従って $w = 1_G^{-1} \blacktriangleright v = v$ が言えた．i.e. $f_u$ は単射である．

$\forall x \times_\rho w \in (P \times_\rho V)_{\pi(u)}$ を 1 つとる．このとき $x \in \pi^{-1}(\{\pi(u)\})$ でもあるので，ある $g \in G$ が存在して $x = u \blacktriangleleft g$ と書ける．従って

$$x \times_\rho w = (u \blacktriangleleft g) \times_\rho w = u \times_\rho g \blacktriangleright w = f_u(g \blacktriangleright w)$$

だとわかる．i.e. $f_u$ は全射である． ■

命題 2.3 を思い出すと，主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ の開被覆，局所自明化，変換関数をそれぞれ

$\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, $\{\varphi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha)\longrightarrow U_\alpha\times G\}_{\alpha\in\Lambda}$, $\{t_{\alpha\beta}\colon M\longrightarrow G\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$ とおき，$P$ の局所切断の族

$$\{s_\alpha\colon U_\alpha\longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha),\ x\longmapsto \varphi_\alpha^{-1}(x,\,1_G)\}_{\alpha\in\Lambda} \tag{2.4.13}$$

を与えてから，同伴ベクトル束 $V\hookrightarrow P\times_\rho V\xrightarrow{q} M$ の局所自明化を

$$\{\psi_\alpha\colon q^{-1}(U_\alpha)\longrightarrow U_\alpha\times V,\ s_\alpha(x)\times_\rho v\longmapsto (x,\,v)\}_{\alpha\in\Lambda} \tag{2.4.14}$$

として定義するのだった．

**命題 2.9: tensorial form と同伴ベクトル束上の微分形式の対応**

- 主束 $G\hookrightarrow P\xrightarrow{\pi} M$
- 有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V$
- Lie 群 $G$ の有限次元表現 $\rho\colon G\longrightarrow \mathrm{GL}(V)$
- 主束 $P$ の同伴ベクトル束 $V\hookrightarrow P\times_\rho V\xrightarrow{q} M$

を与える．$\forall\phi\in\Omega^k(M;\,P\times_\rho V)$ に対して $\phi^\sharp\in\Omega^k(P;\,V)$ を

$$\phi^\sharp\colon u\longmapsto f_u^{-1}\circ\pi^*\phi|_u$$

と定義する．また, $\forall\psi\in\Omega^k_\rho(P;\,V)$ に対して $\psi^\flat\in\Omega^k(M;\,P\times_\rho V)$ を, $\forall x\in M$, $\forall w_1,\,\dots,\,w_k\in T_xM$ に対して次のように定義する：

$$\psi^\flat|_x(w_1,\,\dots,\,w_k) := u\times_\rho \psi_u(v_1,\,\dots,\,v_k) \tag{2.4.15}$$

ただし $u\in\pi^{-1}(\{x\})$ および $v_i\in(T_u\pi)^{-1}(\{w_i\})$ は任意にとって良い．

(1) $\phi^\sharp\in\Omega^k_\rho(P;\,V)$ である．

(2) 写像

$$\sharp\colon \Omega^k(M;\,P\times_\rho V)\longrightarrow \Omega^k_\rho(P;\,V),\ \phi\longmapsto\phi^\sharp$$

はベクトル空間の同型写像であり，その逆写像は

$$\flat\colon \Omega^k_\rho(P;\,V)\longrightarrow \Omega^k(M;\,P\times_\rho V),\ \psi\longmapsto\psi^\flat$$

である．

(3) $\forall s\in\Omega^k(M)$, $\forall\eta\in\Omega^l(M;\,P\times_\rho V)$ に対して

$$\sharp(s\wedge\eta) = (\pi^*s)\wedge\sharp\eta$$

が成り立つ．

(4) $\forall\phi\in\Omega^k(M;\,P\times_\rho V)$ に対して

$$\mathrm{proj}_2\circ\psi_\alpha\circ\phi = s_\alpha^*(\phi^\sharp)\in\Omega^k(U_\alpha;\,V)$$

が成り立つ．ただし $\psi_\alpha\colon q^{-1}(U_\alpha)\longrightarrow U_\alpha\times V$ は (2.4.14) で定義された局所自明化, $s_\alpha\colon M\longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$ は (2.4.13) で定義された局所切断とする．

**証明** $\forall\phi \in \Omega^k(M;\, P\times_\rho V)$ を 1 つ固定する．

(1) $\phi^\sharp$ が $\rho$ 型の tensorial $k$-form であることを示す．

**$\phi^\sharp$ が水平であること**

$\forall u \in P$ を 1 つ固定すると，$\forall X \in \mathfrak{g}$ および $\forall v_2, \dots, v_k \in T_uP$ に対して

$$\begin{aligned}\bigl(i_{X^\#}(\phi^\sharp)\bigr)_u(v_2, \dots, v_k) &= f_u^{-1}\circ(\pi^*\phi)_u(X_u^\#, v_2, \dots, v_k)\\ &= f_u^{-1}\Bigl(\phi_u\bigl(T_u\pi(X_u^\#), T_u\pi(v_2), \dots, T_u\pi(v_k)\bigr)\Bigr)\\ &= f_u^{-1}\Bigl(\phi_u\bigl(0, T_u\pi(v_2), \dots, T_u\pi(v_k)\bigr)\Bigr) && \because \text{ 補題 2.2}\end{aligned}$$

が成り立つが，$\phi_u$ は多重線型写像なので最右辺は 0 になる．よって $i_{X^\#}(\phi^\sharp) = 0$ が言えた．

**$\phi^\sharp$ が $\rho$-型の右同変であること**

$\forall u \in P$ を 1 つ固定し，$\forall v_1, v_2, \dots, v_k \in T_uP$ をとる．右作用移動の定義を思い出すと $\forall g \in G$ に対して $\pi\circ R_g = \pi$ が成り立つので

$$\begin{aligned}&\bigl((R_g)^*\phi^\sharp\bigr)_u(v_1, \dots, v_k)\\ &= (\phi^\sharp)_{R_g(u)}\bigl(T_u(R_g)(v_1), \dots, T_u(R_g)(v_k)\bigr)\\ &= f_{u\blacktriangleleft g}^{-1}\Bigl(\phi_{\pi(u\blacktriangleleft g)}\bigl(T_{u\blacktriangleleft g}\pi\circ T_u(R_g)(v_1), \dots, T_{u\blacktriangleleft g}\pi\circ T_u(R_g)(v_k)\bigr)\Bigr)\\ &= f_{u\blacktriangleleft g}^{-1}\Bigl(\phi_{\pi(u)}\bigl(T_u(\pi\circ R_g)(v_1), \dots, T_u(\pi\circ R_g)(v_k)\bigr)\Bigr)\\ &= f_{u\blacktriangleleft g}^{-1}\Bigl(\phi_{\pi(u)}\bigl(T_u\pi(v_1), \dots, T_u\pi(v_k)\bigr)\Bigr)\\ &= f_{u\blacktriangleleft g}^{-1}\bigl((\pi^*\phi)_u(v_1, \dots, v_k)\bigr)\\ &= f_{u\blacktriangleleft g}^{-1}\bigl(f_u\circ f_u^{-1}\circ(\pi^*\phi)_u(v_1, \dots, v_k)\bigr)\\ &= f_{u\blacktriangleleft g}^{-1}\Bigl(f_u\bigl(\phi_u^\sharp(v_1, \dots, v_k)\bigr)\Bigr) && \because\ \phi^\sharp \text{ の定義}\\ &= f_{u\blacktriangleleft g}^{-1}\bigl(u\times_\rho \phi_u^\sharp(v_1, \dots, v_k)\bigr) && \because\ f_u \text{ の定義}\\ &= f_{u\blacktriangleleft g}^{-1}\Bigl((u\blacktriangleleft g)\times_\rho \rho(g)^{-1}\bigl(\phi_u^\sharp(v_1, \dots, v_k)\bigr)\Bigr) && \because\ \times_\rho \text{ の定義}\\ &= \rho(g^{-1})\bigl(\phi_u^\sharp(v_1, \dots, v_k)\bigr) && \because\ f_u \text{ の定義}\end{aligned}$$

i.e. $(R_g)^*\phi^\sharp = \rho(g^{-1})(\phi^\sharp)$ が言えた．

(2) $\mathbb{K}$-線型写像 $\sharp\colon \Omega^k(M;\, P\times_\rho V) \longrightarrow \Omega^k_\rho(P;\, V)$ がベクトル空間の同型写像であることを示す．

**$\sharp$ の単射性**

$\phi, \eta \in \Omega^k(M;\, P\times_\rho V)$ に対して $\phi^\sharp = \eta^\sharp$ が成り立つとする．このとき $\forall u \in P$ を 1 つ固定すると，$f_u$ は全単射なので $(\pi^*\phi)_u = (\pi^*\eta)_u$ が言える．i.e. $\forall v_1, \dots, v_k \in T_uP$ に対して

$$0 = \bigl(\pi^*(\phi-\eta)\bigr)_u(v_1, \dots, v_k) = (\phi_{\pi(u)} - \eta_{\pi(u)})\bigl(T_u\pi(v_1), \dots, T_u\pi(v_k)\bigr)$$

が成り立つ．$T_u\pi\colon T_uP \longrightarrow T_{\pi(u)}M$ は全射なので $\phi - \eta = 0 \iff \phi = \eta$ が言えた．

**$\sharp$ の全射性**

$\forall\psi \in \Omega^k_\rho(P;\, V)$ を 1 つ固定する．まず，$\psi^\flat \in \Omega^k(M;\, P\times_\rho V)$ が well-defined であることを示す．そのためには $\forall x \in M$, $\forall w_1, \dots, w_k \in T_xM$ を固定し，(2.4.15) の右辺が $u \in \pi^{-1}(\{x\})$ および $v_i \in (T_u\pi)^{-1}(\{w_i\})$ の取り方によらずに定まることを示せば良い．

**$\psi^\flat$ は well-defined**

まず $u \in \pi^{-1}(\{x\})$ を 1 つ固定する．このとき $v_i,\, v'_i \in (T_u\pi)^{-1}(\{w_i\})$ に対して $v'_i - v_i \in \mathrm{Ker}(T_u\pi)$ なので，$\psi \in \Omega^k_\rho(P;\, V)$ が水平であることおよび $\psi_u$ の多重線型性から

$$\begin{aligned}\psi_u(v'_1,\,\dots,\,v'_k) &= \psi_u\bigl(v_1 + (v'_1 - v_1),\,\dots,\,v_k + (v'_k - v_k)\bigr)\\ &= \psi_u(v_1,\,\dots,\,v_k) + (\text{少なくとも 1 つの } i \text{ について引数が } v'_i - v_i)\\ &= \psi_u(v_1,\,\dots,\,v_k)\end{aligned}$$

が言える．i.e. $\psi_u$ は $v_i$ の取り方によらない．

次に，他の $u' \in \pi^{-1}(\{x\})$ をとる．このときある $h \in G$ が存在して $u' \blacktriangleleft h = u$ となる．[*43] $T_{u\blacktriangleleft h}\pi \circ T_u(R_h)(v_i) = T_u\pi(v_i) = w_i$ かつ $\psi$ が $v_i$ の取り方によらないこと，および $\psi$ の右同変性を使うと

$$\begin{aligned}\psi_{u'}(v_1,\,\dots,\,v_k) &= \psi_{u\blacktriangleleft h}\bigl(T_u(R_h)(v_1),\,\dots,\,T_u(R_h)(v_k)\bigr)\\ &= \bigl((R_h)^*\psi\bigr)_u(v_1,\,\dots,\,v_k)\\ &= \rho(h^{-1})\bigl(\psi_u(v_1,\,\dots,\,v_k)\bigr)\end{aligned}$$

だとわかるので，$\times_\rho$ の定義から

$$\begin{aligned}u' \times_\rho \psi_{u'}(v_1,\,\dots,\,v_k) &= u' \times_\rho \rho(h^{-1})\bigl(\psi_u(v_1,\,\dots,\,v_k)\bigr)\\ &= (u' \blacktriangleleft h) \times_\rho \rho(h) \circ \rho(h^{-1})\bigl(\psi_u(v_1,\,\dots,\,v_k)\bigr)\\ &= u \times_\rho \psi_u(v_1,\,\dots,\,v_k)\end{aligned}$$

が言える．i.e. $\psi^\flat|_x$ は $u \in \pi^{-1}(\{x\})$ の取り方にもよらない．

$f_u$ の定義および $\phi_x$ の well-definedness から，

$$\begin{aligned}&f_u\bigl(\psi_u(v_1,\,\dots,\,v_k)\bigr) = \psi^\flat|_{\pi(u)}(w_1,\,\dots,\,w_k) = \pi^*(\psi^\flat)|_u(v_1,\,\dots,\,v_k)\\ \iff\ &\psi_u = f_u^{-1} \circ \pi^*(\psi^\flat)|_u = (\psi^\flat)^\sharp|_u\end{aligned}$$

i.e. $\psi = (\psi^\flat)^\sharp$ が言えた．

(3) $\forall u \in P$ および $\forall v_1,\,\dots,\,v_{k+l} \in T_uP$ に対して

$$\begin{aligned}&\sharp(s \wedge \eta)_u(v_1,\,\dots,\,v_{k+l})\\ &= f_u^{-1} \circ \bigl(\pi^*(s \wedge \eta)\bigr)_u(v_1,\,\dots,\,v_{k+l})\\ &= f_u^{-1}\Bigl((\pi^*s \wedge \pi^*\eta)_u(v_1,\,\dots,\,v_{k+l})\Bigr)\\ &= f_u^{-1}\left(\frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \operatorname{sgn}\sigma\, \underbrace{(\pi^*s)_u(v_{\sigma(1)},\,\dots,\,v_{\sigma(k)})}_{\in \mathbb{K}} \otimes (\pi^*\eta)_u(v_{\sigma(k+1)},\,\dots,\,v_{\sigma(k+l)})\right)\\ &= \frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \operatorname{sgn}\sigma\,(\pi^*s)_u(v_{\sigma(1)},\,\dots,\,v_{\sigma(k)}) f_u^{-1}\bigl((\pi^*\eta)_u(v_{\sigma(k+1)},\,\dots,\,v_{\sigma(k+l)})\bigr)\\ &= \bigl((\pi^*s) \wedge \sharp\eta\bigr)_u(v_1,\,\dots,\,v_{k+l})\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし最後から 2 番目の等号では $f_u^{-1}$ の $\mathbb{K}$-線型性を使った．

[*43] $x \in U_\alpha \subset M$ に対する $P$ の局所自明化 $\varphi_\alpha$ について $g' := \mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\alpha(u')$，$g := \mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\alpha(u)$ とおけば，$h := g'^{-1}g \in G$ に対して $u' \blacktriangleleft h = u$ となる．

(4) $\forall x \in U_\alpha,\ \forall w_1, \dots, w_k \in T_xM$ に対して

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{proj}_2 \circ \psi_\alpha \circ \phi)_x(w_1, \dots, w_k) \\
&= f^{-1}_{s_\alpha(x)}\big(\phi_x(w_1, \dots, w_k)\big) && \because\ f_{s_\alpha(x)}\ \text{の定義} \\
&= f^{-1}_{s_\alpha(x)}\Big(\phi_x\big(T_x(\pi \circ s_\alpha)(w_1), \dots, T_x(\pi \circ s_\alpha)(w_k)\big)\Big) && \because\ \pi \circ s_\alpha = \mathrm{id}_{U_\alpha} \\
&= f^{-1}_{s_\alpha(x)}\Big(\phi_x\big(T_{s_\alpha(x)}\pi \circ T_x(s_\alpha)(w_1), \dots, T_{s_\alpha(x)}\pi \circ T_x(s_\alpha)(w_k)\big)\Big) \\
&= f^{-1}_{s_\alpha(x)} \circ (\pi^*\phi)_{s_\alpha(x)}\big(T_x(s_\alpha)(w_1), \dots, T_x(s_\alpha)(w_k)\big) \\
&= (\phi^\sharp)_{s_\alpha(x)}\big(T_x(s_\alpha)(w_1), \dots, T_x(s_\alpha)(w_k)\big) && \because\ \phi^\sharp\ \text{の定義} \\
&= \big(s_\alpha^*(\phi^\sharp)\big)_x(w_1, \dots, w_k)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

■

**定義 2.14: ベクトル束上の接続**

$V \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ をベクトル束とする．

- ベクトル束 $E$ 上の**接続** (connection) とは，$\mathbb{K}$-線型写像

$$\boldsymbol{\nabla^E} : \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(M;\, E)$$

であって，$\forall f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M),\ \forall s \in \Gamma(E) = \Omega^0(M;\, E)$ に対して Leibniz 則

$$\nabla^E(fs) = \mathrm{d}f \otimes s + f\nabla^E s$$

を充たすもののこと．

- $X \in \Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$ に対して定まる $\mathbb{K}$-線型写像

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla^E_X} : \Gamma(E) &\longrightarrow \Gamma(E), \\
s &\longmapsto (\nabla^E s)(X)
\end{aligned}
$$

のことを $\boldsymbol{X}$ **に沿った共変微分** (covariant derivative along $X$) と呼ぶ．

- $\forall \omega \in \Omega^\bullet(M),\ \forall s \in \Gamma(E)$ に対して

$$\mathrm{d}^{\nabla^E}(\omega \otimes s) := \mathrm{d}\omega \otimes s + (-1)^{\deg \omega}\omega \wedge \nabla^E s$$

と定義することで定まる写像

$$\boldsymbol{\mathrm{d}^{\nabla^E}} : \Omega^\bullet(M;\, E) \longrightarrow \Omega^{\bullet+1}(M;\, E)$$

のことを**共変外微分** (exterior covariant derivative) と呼ぶ．

【**例 2.4.3**】を思い出すと，主束に与えられた接続形式が自然に同伴ベクトル束上の接続と結び付くような気がしてくる．実際それは正しい [**?**, p.150, 命題 6.3.3]：

**定理 2.5: 同伴ベクトル束上の接続**

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$
- 接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\,\mathfrak{g})$
- 有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V$ と Lie 群 $G$ の $\dim V$ 次元表現 $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$
- 同伴ベクトル束 $V \hookrightarrow P \times_\rho V \xrightarrow{q} M$

を与える．$\rho_* := T_{1_G}\rho\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ を $\rho$ の微分表現とする．このとき，次が成り立つ：

(1)

$$\bigl(\mathrm{d} + \rho_*(\omega)\wedge\bigr)\Omega^k_\rho(P;\,V) \subset \Omega^{k+1}_\rho(P;\,V)$$

(2) $E := P \times_\rho V$ とおく．命題 2.9 で定めた同型写像 $\sharp\colon \Omega^k(M;\,E) \longrightarrow \Omega^k_\rho(P;\,V)$ を用いて定義した写像

$$\nabla^E := \sharp^{-1} \circ \bigl(\mathrm{d} + \rho_*(\omega)\bigr) \circ \sharp\colon \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(M;\,E)$$

はベクトル束 $E$ 上の接続である．

(3) (2.4.14) によって定義された局所自明化 $\psi_\alpha\colon E|_{U_\alpha} \longrightarrow U_\alpha \times V$ に対して

$$\mathrm{proj}_2 \circ \psi_\alpha \circ \nabla^E = \mathrm{d} + \rho_*(s_\alpha^*\omega)$$

とかける．

(4) (2) の接続について共変外微分 $\mathrm{d}^{\nabla^E}\colon \Omega^k(M;\,E) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M;\,E)$ を考えると，以下の図式が可換になる：

$$\begin{tikzcd}
\Omega^k(M;\,E) \arrow[r, "\mathrm{d}^{\nabla^E}"] \arrow[d, "\sharp"'] & \Omega^{k+1}(M;\,E) \arrow[d, "\sharp"] \\
\Omega^k_\rho(P;\,V) \arrow[r, "\mathrm{d}+\rho_*(\omega)\wedge"'] & \Omega^{k+1}_\rho(P;\,V)
\end{tikzcd}$$

**!** $\omega \in \Omega^1(P;\,\mathfrak{g})$, $\tilde{s} \in \Omega^k(P;\,V)$ に対して $\rho_*(\omega) \wedge \tilde{s} \in \Omega^{k+1}(P;\,V)$ の意味するところは，**通常の $\wedge$ とは微妙に異なる**ことに注意．正確には $\forall X_1,\,\dots,\,X_{k+1} \in \mathfrak{X}(P)$ に対して

$$\bigl(\rho_*(\omega) \wedge \tilde{s}\bigr)(X_1,\,\dots,\,X_{k+1}) := \frac{1}{1!k!}\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+1}} \operatorname{sgn}\sigma\; \underbrace{\rho_*\bigl(\omega(X_{\sigma(1)})\bigr)}_{\in \mathfrak{gl}(V)}\underbrace{\bigl(\tilde{s}(X_{\sigma(2)},\,\dots,\,X_{\sigma(k+1)})\bigr)}_{\in V}$$

として新しく定義したものである．

**証明** (1) $\forall \tilde{s} \in \Omega^k_\rho(P;\,V)$ を 1 つ固定する．

**$\bigl(\mathrm{d} + \rho_*(\omega)\wedge\bigr)\tilde{s}$ が水平**

$\forall X \in \mathfrak{g}$ を 1 つとる．基本ベクトル場 $X^{\#} \in \Gamma(P)$ が生成するフローは $\theta\colon \mathbb{R} \times M \longrightarrow$

$M,\ (t,\ u) \longmapsto R_{\exp(tX)}(u)$ だったので，Lie 微分の定義から

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{X^\#}\tilde{s} &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (R_{\exp(tX)})^*\tilde{s} \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho\bigl(\exp(tX)^{-1}\bigr)(\tilde{s}) && \because \quad \tilde{s} \text{ の右同変性} \\
&= \left( \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho\bigl(\exp(-tX)\bigr) \right) \tilde{s} \\
&= -T_{1_G}\rho(X)(\tilde{s}) \\
&= -\rho_*(X)(\tilde{s})
\end{aligned}
$$

がわかる．従って Lie 微分の公式 (Cartan magic formula) から

$$
\begin{aligned}
i_{X^\#}\Bigl(\bigl(\mathrm{d} + \rho_*(\omega)\wedge\bigr)\tilde{s}\Bigr) &= i_{X^\#}(\mathrm{d}\tilde{s}) + i_{X^\#}\bigl(\rho_*(\omega)\bigr) \wedge \tilde{s} + (-1)^{\deg\omega}\rho_*(\omega) \wedge \cancel{i_{X^\#}(\tilde{s})} \\
&= \mathcal{L}_{X^\#}\tilde{s} - \mathrm{d}\bigl(\cancel{i_{X^\#}(\tilde{s})}\bigr) + \rho_*\bigl(i_{X^\#}(\omega)\bigr) \wedge \tilde{s} \\
&= -\rho_*(X)(\tilde{s}) + \rho_*(X)(\tilde{s}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

が言える．

**$\bigl(\mathrm{d} + \rho_*(\omega)\wedge\bigr)\tilde{s}$ が右同変**

$\forall g \in G$ をとる．$\rho_*\bigl(\mathrm{Ad}(g^{-1})(\omega)\bigr) = \rho(g^{-1}) \circ \rho_*(\omega) \circ \rho(g)$ なので[*44]

$$
\begin{aligned}
(R_g)^*\Bigl(\bigl(\mathrm{d} + \rho_*(\omega)\wedge\bigr)\tilde{s}\Bigr) &= (R_g)^*\mathrm{d}\tilde{s} + (R_g)^*\bigl(\rho_*(\omega) \wedge \tilde{s}\bigr) \\
&= \mathrm{d}\bigl((R_g)^*\tilde{s}\bigr) + \rho_*\bigl((R_g)^*\omega\bigr) \wedge (R_g)^*\tilde{s} \\
&= \mathrm{d}\bigl(\rho(g^{-1})\tilde{s}\bigr) + \rho_*\bigl(\mathrm{Ad}(g^{-1})(\omega)\bigr) \wedge \rho(g^{-1})\tilde{s} \\
&= \rho(g^{-1})\Bigl(\bigl(\mathrm{d} + \rho_*(\omega)\wedge\bigr)\tilde{s}\Bigr)
\end{aligned}
$$

が言える．

(2) $\forall f \in C^\infty(M),\ \forall s \in \Gamma(E) = \Omega^0(M;\ E)$ に対して Leibniz 則が成り立つことを示す．外微分と引き戻

[*44] **【例 2.10】**と大体同じ議論をすれば良い：$\forall X \in \mathfrak{g}$ をとる．このとき命題 2.6-(2) より $C^\infty$ 曲線 $\gamma\colon t \longmapsto \exp(tX)$ は $X$ が生成する 1 パラメータ部分群なので，

$$
\begin{aligned}
\rho_*\bigl(\mathrm{Ad}(g^{-1})(X)\bigr) &= T_{1_G}\rho\Bigl(\mathrm{Ad}(g^{-1})\bigl(\dot{\gamma}(0)\bigr)\Bigr) \\
&= T_{1_G}\rho \circ T_{1_G}(F_{g^{-1}}) \circ T_0\gamma \left( \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \right) \\
&= T_0(\rho \circ F_{g^{-1}} \circ \gamma) \left( \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \right) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho\bigl(g^{-1}\exp(tX)g\bigr) \\
&= \rho(g^{-1}) \circ \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Bigl(\rho\bigl(\exp(tX)\bigr)\Bigr) \circ \rho(g) \\
&= \rho(g^{-1}) \circ \rho_*(X) \circ \rho(g)
\end{aligned}
$$

ただし最後から 2 番目の等号では $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ が Lie 群の準同型であることを使った．$\omega$ は $\mathfrak{g}$ に値を取るので示された．

しが可換であることに注意すると

$$
\begin{aligned}
\nabla^E(fs) &= \sharp^{-1} \circ \Big( \mathrm{d}\big(\sharp(fs)\big) + \rho_*(\omega)\big(\sharp(fs)\big) \Big) \\
&= \sharp^{-1} \circ \Big( \mathrm{d}\big((\pi^* f)\, \sharp s\big) + \rho_*(\omega)\big((\pi^* f)\, \sharp s\big) \Big) && \because \quad \text{命題 2.9-(3)} \\
&= \sharp^{-1} \circ \Big( \mathrm{d}(\pi^* f) \otimes \sharp s + (\pi^* f)\ \mathrm{d}(\sharp s) + (\pi^* f)\, \rho_*(\omega)(\sharp s) \Big) \\
&= \sharp^{-1} \circ \Big( \pi^*(\mathrm{d}f) \otimes \sharp s + (\pi^* f)\ \big(\mathrm{d} + \rho_*(\omega)\big)(\sharp s) \Big) \\
&= \sharp^{-1} \circ \Big( \sharp(\mathrm{d}f \otimes s) + (\pi^* f)\, \sharp\big(\nabla^E(s)\big) \Big) && \because \quad \text{命題 2.9-(3)} \\
&= \mathrm{d}f \otimes s + f \nabla^E s && \because \quad \text{命題 2.9-(3)}
\end{aligned}
$$

が言えた．

(3) $\forall s \in \Gamma(E)$ に対して，命題 2.9-(4) より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{proj}_2 \circ \psi_\alpha \circ (\nabla^E s) &= s_\alpha^* \big(\sharp(\nabla^E s)\big) \\
&= s_\alpha^* \Big( \big(\mathrm{d} + \rho_*(\omega)\big)(\sharp s) \Big) \\
&= s_\alpha^* \big(\mathrm{d}(\sharp s)\big) + s_\alpha^* \big(\rho_*(\omega)(\sharp s)\big) \\
&= \mathrm{d}\big(s_\alpha^*(\sharp s)\big) + \rho_*\big(s_\alpha^* \omega\big)\big(s_\alpha^*(\sharp s)\big) \\
&= \big(\mathrm{d} + \rho_*(s_\alpha^* \omega)\big) s_\alpha^*(\sharp s) \\
&= \big(\mathrm{d} + \rho_*(s_\alpha^* \omega)\big) \big(\mathrm{proj}_2 \circ \psi_\alpha(s)\big)
\end{aligned}
$$

が言える．

(4) $\forall s \in \Omega^k(M; E)$ をとる．局所自明化 $\psi_\alpha \colon E|_{U_\alpha} \longrightarrow U_\alpha \times V$ について，命題 2.9-(4) より

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{proj}_2 \circ \psi_\alpha \circ \big(\sharp^{-1} \circ (\mathrm{d} + \rho_*(\omega)\wedge) \circ \sharp(s)\big) \\
&= s_\alpha^* \big((\mathrm{d} + \rho_*(\omega)\wedge)(\sharp s)\big) \\
&= s_\alpha^* \big(\mathrm{d}(\sharp s)\big) + s_\alpha^* \big(\rho_*(\omega) \wedge \sharp s\big) \\
&= \mathrm{d}\big(s_\alpha^*(\sharp s)\big) + \rho_*\big(s_\alpha^*(\omega)\big) \wedge s_\alpha^*(\sharp s) \\
&= \big(\mathrm{d} + \rho_*(s_\alpha^* \omega)\wedge\big) s_\alpha^*(\sharp s) \\
&= \big(\mathrm{d} + \rho_*(s_\alpha^* \omega)\wedge\big) \big(\mathrm{proj}_2 \circ \psi_\alpha(s)\big)
\end{aligned}
$$

が言える．また，$\forall s \in \Omega^k(M)$, $\forall t \in \Gamma(E)$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{proj}_2 \circ \psi_\alpha \big(\mathrm{d}s \otimes t + (-1)^{\deg s} s \wedge \nabla^E t\big) \\
&= s_\alpha^* \big(\sharp(\mathrm{d}s \otimes t)\big) + (-1)^{\deg s} s_\alpha^* \big(\sharp(s \wedge \nabla^E t)\big) \\
&= s_\alpha^* \big(\pi^*(\mathrm{d}s) \otimes \sharp t\big) + (-1)^{\deg s} s_\alpha^* \big(\pi^*(s) \wedge \sharp(\nabla^E t)\big) \qquad \because \quad \text{命題 2.9-(3)} \\
&= \mathrm{d}\big(s_\alpha^*(\pi^* s)\big) \otimes s_\alpha^*(\sharp t) + (-1)^{\deg s} s_\alpha^*(\pi^* s) \wedge s_\alpha^* \big(\sharp(\nabla^E t)\big) \\
&= \mathrm{d}\big(s_\alpha^*(\pi^* s)\big) \otimes s_\alpha^*(\sharp t) + (-1)^{\deg s} s_\alpha^*(\pi^* s) \wedge \mathrm{d}\big(s_\alpha^*(\sharp t)\big) + (-1)^{\deg s} s_\alpha^*(\pi^* s) \wedge \rho_*(s_\alpha^* \omega)(s_\alpha^*(\sharp t)) \\
&= \mathrm{d}\big(s_\alpha^*(\pi^* s) \otimes s_\alpha^*(\sharp t)\big) + \rho_*(s_\alpha^* \omega) \wedge (s_\alpha^*(\pi^* s) \otimes s_\alpha^*(\sharp t)) \\
&= \big(\mathrm{d} + \rho_*(s_\alpha^* \omega)\wedge\big) s_\alpha^* \big((\pi^* s) \otimes (\sharp t)\big) \\
&= \big(\mathrm{d} + \rho_*(s_\alpha^* \omega)\wedge\big) s_\alpha^* \big(\sharp(s \otimes t)\big) \qquad \because \quad \text{命題 2.9-(3)} \\
&= \big(\mathrm{d} + \rho_*(s_\alpha^* \omega)\wedge\big) \big(\mathrm{proj}_2 \circ \psi_\alpha(s \otimes t)\big)
\end{aligned}
$$

であるが，共変外微分の定義から最左辺は $\mathrm{proj}_2 \circ \psi_\alpha \circ \mathrm{d}^{\nabla^E}(s \otimes t)$ と等しい．よって

$$\mathrm{d}^{\nabla^E}(s \otimes t) = \sharp^{-1} \circ \big(\mathrm{d} + \rho_*(\omega)\wedge\big) \circ \sharp(s \otimes t)$$

が言えた．共変外微分の定義から，$d^{\nabla^E}$ が一般の $\Omega^k(M;\, E)$ の元に作用する場合についても示された．

■

命題 2.5-(3) がまさに我々の良く知るゲージ場になっていることを確認しよう．

まずは状況設定である．主束

$$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$$

は

- 開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$
- 局所自明化 $\{\varphi_\alpha \colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G\}_{\alpha\in\Lambda}$
- 変換関数 $\{t_{\alpha\beta} \colon U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$

を持つとする．$P$ の局所切断 $\{s_\alpha \colon U_\alpha \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ を，(2.4.14) の通り $s_\alpha(x) \coloneqq \varphi_\alpha^{-1}(x,\, 1_G)$ と定義する．このとき主束 $P$ の同伴ベクトル束

$$V \hookrightarrow P \times_\rho V \xrightarrow{q} M$$

はその構成から

- 開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$
- 変換関数 $\{t_{\alpha\beta} \colon U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$

を持ち，局所自明化 $\{\psi_\alpha \colon q^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times V\}_{\alpha\in\Lambda}$ は (2.4.14) の通りに $\psi_\alpha\big(s_\alpha(x) \times_\rho v\big) \coloneqq (x,\, v)$ と構成された．なお，命題 2.3 の証明の脚注で述べたようにこれは $\psi_\alpha(u \times_\rho v) \coloneqq \big(\pi(u),\, \mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\alpha(u) \blacktriangleright v\big)$ と定義することと同値である．以下では便宜上 $E \coloneqq P \times_\rho V$ とおく．

さて，主束 $P$ 上の接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$ を任意に 1 つ与えよう．このとき定理 2.5-(2) により，同伴ベクトル束 $E$ 上の接続 $\nabla^E \colon \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(M;\, E)$ が $\nabla^E \coloneqq \sharp^{-1} \circ \big(\mathrm{d} + \rho_*(\omega)\big) \circ \sharp$ として誘導される．

(2.4.8) が示すように，Lie 群 $G$ で記述される内部対称性を持つ場 $\phi$ は $E$ の切断 $\phi \in \Gamma(E)$ を局所自明化 $\psi_\alpha$ によって表示した $\phi_\alpha \coloneqq \mathrm{proj}_2 \circ \psi_\alpha \circ \phi \colon U_\alpha \longrightarrow V$ と同一視された．ここで，$\phi \in \Gamma(E) = \Omega^0(M;\, E)$ なので，ある $M$ 上のベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$ に沿った共変微分 $\nabla^E_X \colon \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E),\ \phi \longmapsto \nabla^E\phi(X)$ を取ることができる．そして $\nabla^E_X\phi \in \Gamma(E)$ の局所自明化による表示 $(\nabla^E_X\phi)_\alpha \coloneqq \mathrm{proj}_2 \circ \psi_\alpha \circ \nabla^E_X\phi \colon U_\alpha \longrightarrow V$ もまた，$U_\alpha \cap U_\beta$ における $\psi_\alpha$ から $\psi_\beta$ への局所自明化の取り替えに伴って (2.4.8) の変換を受ける：

$$\begin{aligned}\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} \colon (U_\alpha \cap U_\beta) \times V &\longrightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times V,\\ \Big(x,\, \boldsymbol{(\nabla^E_X\phi)_\alpha(x)}\Big) &\longmapsto \Big(x,\, \boldsymbol{(\nabla^E_X\phi)_\beta(x)}\Big) = \Big(x,\, \boldsymbol{\rho\big(t_{\beta\alpha}(x)\big)\big((\nabla^E_X\phi)_\alpha(x)\big)}\Big)\end{aligned}$$

一方で，定理 2.5-(3) から

$$(\nabla^E_X\phi)_\alpha = (\nabla^E\phi)_\alpha(X) = \big(\mathrm{d} + \rho_*(s_\alpha^*\omega)\big)(\phi_\alpha)(X)$$

なので，$\forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$ において

$$
\begin{aligned}
&(\nabla^E_X \phi)_\beta(x) \\
&= \bigl(\mathrm{d} + \rho_*(s_\beta^* \omega)\bigr)(\phi_\beta)\Big|_x (X_x) \\
&= \rho\bigl(t_{\beta\alpha}(x)\bigr) \circ \bigl(\mathrm{d} + \rho_*(s_\alpha^* \omega)\bigr)(\phi_\alpha)\Big|_x (X_x) \\
&= \rho\bigl(t_{\beta\alpha}(x)\bigr) \circ \bigl(\mathrm{d} + \rho_*(s_\alpha^* \omega)\bigr) \circ \rho\bigl(t_{\beta\alpha}(x)\bigr)^{-1}(\phi_\beta)\Big|_x (X_x) \\
&= \rho\bigl(t_{\beta\alpha}(x)\bigr) \circ \bigl(\mathrm{d} + \rho_*(s_\alpha^* \omega)\bigr) \circ \rho\bigl(t_{\beta\alpha}(x)^{-1}\bigr)(\phi_\beta)\Big|_x (X_x)
\end{aligned}
$$

だとわかる．i.e.

$$
\bigl(\mathrm{d} + \rho_*(s_\beta^* \omega)\bigr)_x = \rho\bigl(t_{\beta\alpha}(x)\bigr) \circ \bigl(\mathrm{d} + \rho_*(s_\alpha^* \omega)\bigr)_x \circ \rho\bigl(t_{\beta\alpha}(x)^{-1}\bigr)
$$

となって (2.4.3) の変換則を再現する．また，$V$ の基底を $e_1, \dots e_{\dim V}$ として $\phi_\beta(x) = {\phi_\beta}^i(x) e_i$ と展開し，$\rho(t_{\beta\alpha}(x)^{-1}) \in \mathrm{GL}(V)$ をこの基底に関して $[\,\rho(t_{\beta\alpha}(x)^{-1})\,]^i{}_j$ と行列表示ときに

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d} \circ \rho\bigl(t_{\beta\alpha}(x)^{-1}\bigr)(\phi_\beta)\Big|_x &= \mathrm{d}\,\underbrace{\Bigl([\,\rho(t_{\beta\alpha}(x)^{-1})\,]^i{}_j {\phi_\beta}^i(x)\Bigr)}_{\in \Omega^0(M) = C^\infty(M)} e_i \\
&= \partial_\mu \bigl([\,\rho(t_{\beta\alpha}(x)^{-1})\,]^i{}_j\bigr) {\phi_\beta}^i(x)\, \mathrm{d}x^\mu\, e_i + [\,\rho(t_{\beta\alpha}(x)^{-1})\,]^i{}_j \partial_\mu {\phi_\beta}^j(x)\, \mathrm{d}x^\mu\, e_i \\
&=: \Bigl(\mathrm{d}\bigl(\rho\bigl(t_{\beta\alpha}(x)^{-1}\bigr)\bigr) + \rho\bigl(t_{\beta\alpha}(x)^{-1}\bigr) \circ \mathrm{d}\Bigr)(\phi_\beta)\Big|_x
\end{aligned}
$$

が成り立つと言う意味で

$$
\rho_*(s_\beta^* \omega)\Big|_x = \rho\bigl(t_{\beta\alpha}(x)\bigr) \circ \mathrm{d}\bigl(\rho\bigl(t_{\beta\alpha}(x)^{-1}\bigr)\bigr) + \rho\bigl(t_{\beta\alpha}(x)\bigr) \circ \rho_*(s_\alpha \omega) \circ \rho\bigl(t_{\beta\alpha}(x)^{-1}\bigr)
$$

と書けてゲージ変換 (2.4.4) を再現する．つまり，**ゲージ場**とは，接続形式 $\omega$ の局所切断による引き戻し $s_\alpha^* \omega \in \Omega^1(U_\alpha; \mathfrak{g})$ のことだったのである．

### 2.4.5 局所接続形式とゲージ場

これまでの議論で主束，およびその同伴ベクトル束の接続を大域的な表式を得た．以降の小節では，物理の文脈で登場する接続の局所表示（それは**ゲージ場**と呼ばれる）および曲率とその局所表示（それは**場の強さ**と呼ばれる）を，主束およびその同伴ベクトル束の各々において，より直接的な形で定式化する．まず始めにゲージ場と局所ゲージ変換を主束上の接続の言葉で定式化しよう．

先に進む前に，Maurer-Cartan 形式についての注意をしておく．

**定義 2.15: Maurer-Cartan 形式**

Lie 群 $G$ の **Maurer-Cartan 形式**とは，

$$
\theta_g := T_g(L_{g^{-1}}) \colon T_g G \longrightarrow \mathfrak{g}
$$

によって定義される<u>$G$ 上の</u> $\mathfrak{g}$ 値 1-形式 $\theta \in \Omega^1(G; \mathfrak{g})$ のことを言う．

特に $G$ が $\mathrm{GL}(V)$ の部分 Lie 群（行列 Lie 群）である場合，Maurer-Cartan 形式 $\theta\colon TG \longrightarrow \mathfrak{g}$ はよく $\boldsymbol{g^{-1}\mathrm{d}g}$ と略記される．これの解釈は次の通りである：まず $\forall g \in G$ と $G$ 上の恒等写像 $\mathrm{id}_G\colon G \longrightarrow G,\ g \longmapsto g$ を同一視する．このとき $\mathrm{d}g\colon TG \longrightarrow TG$ は，$\forall g \in G$ に対して $T_g(\mathrm{id}_G) = \mathrm{id}_{T_gG}\colon T_gG \longrightarrow T_gG$ のことだと解釈する．すると，**【例 2.4.4】**，**【例 2.4.6】**の議論から行列 Lie 群の場合 $T_g(L_{g^{-1}}) = L_{g^{-1}}$ と見做して良いので，$\forall v \in T_gG$ に対して

$$\theta_g(v) = T_g(L_{g^{-1}})(v) = L_{g^{-1}} \circ \mathrm{id}_{T_gG}(v) = g^{-1}\mathrm{d}g(v)$$

と書けるのである．

さて，ここで任意の $C^\infty$ 写像 $t\colon M \longrightarrow G$ をとる．このとき，$G$ が $\mathrm{GL}(V)$ の部分 Lie 群ならば，Maurer-Cartan 形式の $t$ による引き戻しが $t^*\theta = \boldsymbol{t^{-1}\mathrm{d}t} \in \Omega^1(M;\mathfrak{g})$ と表記できることを確認しよう．$\forall g \in G$ を 1 つ固定し，$\forall v \in T_pM$ をとる．すると

$$\begin{aligned}
(t^*\theta)_p(v) &= \theta_{t(p)}\bigl(T_pt(v)\bigr) \\
&= T_{t(p)}(L_{t(p)^{-1}}) \circ T_pt(v) \\
&= T_p(L_{t(p)^{-1}} \circ t)(v) \\
&= T_p(L_{t(p)^{-1}} \circ t)\bigl(\dot\gamma(0)\bigr) \\
&= T_p(L_{t(p)^{-1}} \circ t) \circ T_0\gamma\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\bigl(L_{t(p)^{-1}} \circ t \circ \gamma(t)\bigr) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} t(p)^{-1}t\bigl(\gamma(t)\bigr) \\
&= t(p)^{-1}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} t\bigl(\gamma(t)\bigr) \\
&= t(p)^{-1}T_pt(\dot\gamma(0)) \\
&= t(p)^{-1}\mathrm{d}t|_p(v)
\end{aligned}$$

ただし $\gamma$ は $v$ が生成する積分曲線である．

ここで，いくつかの技術的な補題を述べよう．

**補題 2.4: 積多様体の接空間**

$C^\infty$ 多様体 $M_1, M_2$ およびその任意の点 $p_1 \in M_1,\ p_2 \in M_2$ を与え，$C^\infty$ 写像

$$\begin{aligned}
\mathrm{proj}_1 &\colon M_1 \times M_2 \longrightarrow M_1,\ (x_1, x_2) \longmapsto x_1, \\
\mathrm{proj}_2 &\colon M_1 \times M_2 \longrightarrow M_2,\ (x_1, x_2) \longmapsto x_2, \\
\mathrm{inj}_1^{p_2} &\colon M_1 \longrightarrow M_1 \times M_2,\ x \longmapsto (x, p_2), \\
\mathrm{inj}_2^{p_1} &\colon M_2 \longrightarrow M_1 \times M_2,\ x \longmapsto (p_1, x)
\end{aligned}$$

を考える．このとき，$\mathbb{R}$-線型写像

$$\begin{aligned}
\alpha\colon T_{(p_1,\,p_2)}(M_1 \times M_2) &\longrightarrow T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2, \\
v &\longmapsto \bigl(T_{(p_1,\,p_2)}(\mathrm{proj}_1)(v),\ T_{(p_1,\,p_2)}(\mathrm{proj}_2)(v)\bigr)
\end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned}\beta\colon T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2 &\longrightarrow T_{(p_1,\,p_2)}(M_1\times M_2),\\ (v,\,w) &\longmapsto T_{p_1}(\mathrm{inj}_1^{p_2})(v) + T_{p_2}(\mathrm{inj}_2^{p_1})(w)\end{aligned}$$

は互いに逆写像である．i.e. $\mathbb{R}$-ベクトル空間の同型

$$T_{(p_1,\,p_2)}(M_1\times M_2) \cong T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2$$

が成り立つ．

証明 $\forall(v,\,w) \in T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2$ に対して

$$\begin{aligned}&\alpha\bigl(\beta(v,\,w)\bigr)\\ &= \bigl(T_{p_1}(\mathrm{proj}_1\circ \mathrm{inj}_1^{p_2})(v) + \cancel{T_{p_2}(\mathrm{proj}_1\circ \mathrm{inj}_2^{p_1})(w)},\, \cancel{T_{p_1}(\mathrm{proj}_2\circ \mathrm{inj}_1^{p_2})(v)} + T_{p_2}(\mathrm{proj}_2\circ \mathrm{inj}_2^{p_1})(w)\bigr)\\ &= \bigl(T_{p_1}(\mathrm{id}_{M_1})(v),\, T_{p_2}(\mathrm{id}_{M_2})(w)\bigr)\\ &= (v,\,w)\end{aligned}$$

が成り立つので $\alpha$ は全射である．さらに $\dim T_{(p_1,\,p_2)}(M_1\times M_2) = \dim(T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2)$ なので，階数-退化次元の定理から $\alpha$ が同型写像であることがわかる． ■

**補題 2.5: 積の微分の亜種**

- $C^\infty$ 多様体 $M_1,\, M_2,\, N_1,\, N_2,\, P$
- 任意の点 $p_i \in M_i$
- $C^\infty$ 写像 $F_i\colon M_i \longrightarrow N_i$
- $C^\infty$ 写像 $\mu\colon N_1\times N_2 \longrightarrow P$

このとき，

$$T_{(p_1,\,p_2)}\bigl(\mu\circ(F_1\times F_2)\bigr) = T_{(p_1,\,p_2)}(\mu\circ \mathrm{inj}_1^{F_2(p_2)}\circ F_1\circ \mathrm{proj}_1) + T_{(p_1,\,p_2)}(\mu\circ \mathrm{inj}_2^{F_1(p_1)}\circ F_2\circ \mathrm{proj}_2)$$

が成り立つ．

証明 $\forall(x_1,\,x_2) \in M_1\times M_2$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{proj}_i\circ(F_1\times F_2)(x_1,\,x_2) &= \mathrm{proj}_i\bigl(F_1(x_1),\, F_2(x_2)\bigr)\\ &= F_i(x_i)\\ &= F_i\circ \mathrm{proj}_i(x_1,\,x_2)\end{aligned}$$

i.e. $\mathrm{proj}_i\circ(F_1\times F_2) = F_i\circ \mathrm{proj}_i$ が成り立つことに注意すると，補題 2.4 より $\forall v \in T_{(p_1,\,p_2)}(M_1\times M_2)$ に

対して

$$
\begin{aligned}
&T_{(p_1,\,p_2)}\bigl(\mu\circ(F_1\times F_2)\bigr)(v)\\
&=T_{(F_1(p_1),\,F_2(p_2))}\mu\circ T_{(p_1,\,p_2)}(F_1\times F_2)(v)\\
&=T_{(F_1(p_1),\,F_2(p_2))}\mu\circ\beta\circ\alpha\circ T_{(p_1,\,p_2)}(F_1\times F_2)(v)\\
&=T_{(F_1(p_1),\,F_2(p_2))}\mu\circ\beta\Bigl(T_{(p_1,\,p_2)}\bigl(\mathrm{proj}_1\circ(F_1\times F_2)\bigr)(v),\,T_{(p_1,\,p_2)}\bigl(\mathrm{proj}_2\circ(F_1\times F_2)\bigr)(v)\Bigr)\\
&=T_{(F_1(p_1),\,F_2(p_2))}\mu\circ\beta\bigl(T_{(p_1,\,p_2)}(F_1\circ\mathrm{proj}_1)(v),\,T_{(p_1,\,p_2)}(F_2\circ\mathrm{proj}_2)(v)\bigr)\\
&=T_{(p_1,\,p_2)}(\mu\circ\mathrm{inj}_1^{F_2(p_2)}\circ F_1\circ\mathrm{proj}_1)(v)+T_{(p_1,\,p_2)}(\mu\circ\mathrm{inj}_2^{F_1(p_1)}\circ F_2\circ\mathrm{proj}_2)(v)
\end{aligned}
$$

がわかる． ■

**補題 2.6: 局所切断の微分**

主束 $G\hookrightarrow P\xrightarrow{\pi}M$ と，その開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$，局所自明化 $\{\varphi_\alpha\colon\pi^{-1}(U_\alpha)\longrightarrow U_\alpha\times G\}_{\alpha\in\Lambda}$，変換関数 $\{t_{\alpha\beta}\colon U_\alpha\cap U_\beta\longrightarrow G\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$ を与える．局所切断の族 $\{s_\alpha\colon U_\alpha\longrightarrow\pi^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ を (2.4.13) で定義する．$\theta\in\Omega^1(G;\,\mathfrak{g})$ を Maurer-Cartan 形式とする．
このとき，$\forall\alpha,\,\beta\in\Lambda$ および $\forall x\in U_\alpha\cap U_\beta$ に関して，$\forall v\in T_xM$ は[a]

$$
T_xs_\beta(v)=T_{s_\alpha(x)}(R_{t_{\alpha\beta}(x)})\circ T_xs_\alpha(v)+\bigl((t_{\alpha\beta}^*\theta)_x(v)\bigr)^{\#}\Big|_{s_\beta(x)}
$$

を充たす．

[a] [?, p.36, 補題 10.1] には誤植がある

**証明** $\forall\alpha,\,\beta\in\Lambda$ を固定し，$\forall x\in U_\alpha\cap U_\beta$ を取る．$\forall v\in T_xM$ を 1 つ固定する．変換関数の定義および $P$ への右作用 $\blacktriangleleft$ の定義から $s_\beta(x)=\varphi_\beta^{-1}(x,\,1_G)=\varphi_\alpha^{-1}\bigl(x,\,t_{\alpha\beta}(x)\bigr)=s_\alpha(x)\blacktriangleleft t_{\alpha\beta}(x)$ が成り立つ．i.e. $C^\infty$ 写像 $\Delta\colon M\longrightarrow M\times M,\ x\longmapsto(x,\,x)$ を使って $s_\beta=\blacktriangleleft\circ(s_\alpha\times t_{\alpha\beta})\circ\Delta$ と書けるので，

$$
T_xs_\beta(v)=T_{(x,\,x)}\bigl(\blacktriangleleft\circ(s_\alpha\times t_{\alpha\beta})\bigr)\circ T_x\Delta(v)
$$

となる．最右辺に補題 2.5 を使うことで

$$
\begin{aligned}
T_xs_\beta(v)&=T_x(\blacktriangleleft\circ\mathrm{inj}_1^{t_{\alpha\beta}(x)}\circ s_\alpha\circ\mathrm{proj}_1\circ\Delta)(v)+T_x(\blacktriangleleft\circ\mathrm{inj}_2^{s_\alpha(x)}\circ t_{\alpha\beta}\circ\mathrm{proj}_2\circ\Delta)(v)\\
&=T_x(\blacktriangleleft\circ\mathrm{inj}_1^{t_{\alpha\beta}(x)}\circ s_\alpha)(v)+T_x(\blacktriangleleft\circ\mathrm{inj}_2^{s_\alpha(x)}\circ t_{\alpha\beta})(v)\\
&=T_x(R_{t_{\alpha\beta}(x)}\circ s_\alpha)(v)+T_x(R^{(s_\alpha(x))}\circ t_{\alpha\beta})(v)\\
&=T_{s_\alpha(x)}(R_{t_{\alpha\beta}(x)})\circ T_xs_\alpha(v)+T_x(R^{(s_\alpha(x))}\circ t_{\alpha\beta})(v)
\end{aligned}
$$

を得る．一方 (2.4.10) から

$$
\begin{aligned}
\bigl((t_{\alpha\beta}^*\theta)_x(v)\bigr)^{\#}|_{s_\beta(x)}&=\bigl(\theta_{t_{\alpha\beta}(x)}(T_xt_{\alpha\beta}v)\bigr)^{\#}|_{s_\alpha(x)\blacktriangleleft t_{\alpha\beta}(x)}\\
&=T_{1_G}(R^{(s_\alpha(x)\blacktriangleleft t_{\alpha\beta}(x))})\circ T_{t_{\alpha\beta}(x)}(L_{t_{\alpha\beta}(x)^{-1}})\circ T_xt_{\alpha\beta}(v)\\
&=T_x(R^{(s_\alpha(x))}\circ L_{t_{\alpha\beta}(x)}\circ L_{t_{\alpha\beta}(x)^{-1}}\circ t_{\alpha\beta})(v)\\
&=T_x(R^{(s_\alpha(x))}\circ t_{\alpha\beta})(v)
\end{aligned}
$$

と計算できる． ■

[?, 第 10 章-1] に倣って，先ほど導入したゲージ場をより扱いやすい形にしよう．

**定理 2.6: 貼り合わせによる接続形式の構成**

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ と，その開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$，局所自明化 $\{\varphi_\alpha \colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G\}_{\alpha\in\Lambda}$，変換関数 $\{t_{\alpha\beta} \colon U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$ を与える．局所切断の族 $\{s_\alpha \colon U_\alpha \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ を (2.4.13) で定義する．$\theta \in \Omega^1(G;\,\mathfrak{g})$ を Maurer-Cartan 形式とする．

(1) $\mathfrak{g}$ 値 1-形式の族 $\{A_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha;\,\mathfrak{g})\}_{\alpha\in\Lambda}$ が $\forall\alpha,\,\beta\in\Lambda$ について

$$A_\beta|_x = \mathrm{Ad}\bigl(t_{\alpha\beta}(x)^{-1}\bigr)\bigl(A_\alpha|_x\bigr) + (t_{\alpha\beta}^*\theta)_x, \quad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta \tag{2.4.16}$$

を充たすならば，$\forall\alpha\in\Lambda$ に対して $A_\alpha = s_\alpha^*\omega$ を充たす接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\,\mathfrak{g})$ が存在する．

(2) 任意の接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\,\mathfrak{g})$ に対して，$\mathfrak{g}$ 値 1-形式の族 $\{A_\alpha \coloneqq s_\alpha^*\omega \in \Omega^1(U_\alpha;\,\mathfrak{g})\}_{\alpha\in\Lambda}$ は $\forall\alpha,\,\beta\in\Lambda$ について

$$A_\beta|_x = \mathrm{Ad}\bigl(t_{\alpha\beta}(x)^{-1}\bigr)\bigl(A_\alpha|_x\bigr) + (t_{\alpha\beta}^*\theta)_x, \quad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$$

を充たす．

**証明** (1) この証明では Lie 群の左移動，右移動[*45]，積をそれぞれ

$$\begin{aligned}\lambda_g &\colon G \longrightarrow G,\ x \longmapsto gx\\ \rho_g &\colon G \longrightarrow G,\ x \longmapsto xg\\ \mu &\colon G\times G \longrightarrow G,\ (x,\,y) \longmapsto xy\end{aligned}$$

と書くことにする．条件 (2.4.16) を充たす $\mathfrak{g}$ 値 1-形式の族 $\{A_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha;\,\mathfrak{g})\}_{\alpha\in\Lambda}$ を与える．$\forall\alpha\in\Lambda$ に対して

$$g_\alpha \coloneqq \mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\alpha \colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow G$$

とおく．このとき $\forall u \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ に対して $\varphi_\alpha(u) = \bigl(\pi(u),\,g_\alpha(u)\bigr) = s_\alpha\bigl(\pi(u)\bigr) \blacktriangleleft g_\alpha(u)$ が成り立つ．

$\forall\alpha\in\Lambda$ に対して，$P$ の座標近傍 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 上の $\mathfrak{g}$ 値 1-形式 $\omega_\alpha \in \Omega^1\bigl(\pi^{-1}(U_\alpha);\,\mathfrak{g}\bigr)$ を

$$\omega_\alpha|_u \coloneqq \mathrm{Ad}\bigl(g_\alpha(u)^{-1}\bigr)\bigl((\pi^*A_\alpha)_u\bigr) + (g_\alpha^*\theta)_u \quad {}^{\mathrm{w}/}\ \forall u \in \pi^{-1}(U_\alpha) \tag{2.4.17}$$

と定義する．$\forall x \in U_\alpha$ および $\forall v \in T_xM$ に対して

$$\begin{aligned}(s_\alpha^*\omega_\alpha)_x(v) &= \omega_\alpha|_{s_\alpha(x)}\bigl(T_xs_\alpha(v)\bigr)\\ &= \mathrm{Ad}\bigl(g_\alpha(s_\alpha(x))^{-1}\bigr)\bigl((\pi^*A_\alpha)_{s_\alpha(x)}(T_xs_\alpha(v))\bigr) + (g_\alpha^*\theta)_{s_\alpha(x)}\bigl(T_xs_\alpha(v)\bigr)\\ &= \mathrm{Ad}(1_G)\Bigl(A_\alpha|_x\bigl(T_{s_\alpha(x)}\pi\circ T_xs_\alpha(v)\bigr)\Bigr) + \theta_{g_\alpha(s_\alpha(x))}\bigl(T_{s_\alpha(x)}g_\alpha\circ T_xs_\alpha(v)\bigr)\\ &= A_\alpha|_x\bigl(T_x(\pi\circ s_\alpha)(v)\bigr) + \theta_{1_G}\bigl(\cancel{T_x(g_\alpha\circ s_\alpha)}(v)\bigr)\\ &= A_\alpha|_x(v)\end{aligned}$$

が成り立つので $s_\alpha^*\omega_\alpha = A_\alpha$ である．ただし，最後の等号で $\pi\circ s_\alpha = \mathrm{id}_{U_\alpha}$ であることと $g_\alpha\circ s_\alpha$ が常に $1_G$ を返す定数写像であることを使った．

*45 主束の全空間への右作用による右移動との混同を防ぐために $R_g$ とは書かない．

**$\omega_\alpha$ が $U_\alpha$ 上で接続形式の公理を充たすこと**

**(CF-1)**

$\forall X \in \mathfrak{g}$ を 1 つとる．補題 2.2 から，$\forall u \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ に対して $T_u\pi(X^{\#}_u) = 0$ である．右作用 ◀ の定義から $\forall g \in G$ に対して $L_{g_\alpha(u)^{-1}} \circ g_\alpha \circ R^{(u)}(g) = g_\alpha(u)^{-1} g_\alpha(u) g = g$ が成り立つ，i.e. $L_{g_\alpha(u)^{-1}} \circ g_\alpha \circ R^{(u)} = \mathrm{id}_G$ であることから

$$\begin{aligned}
\omega_\alpha(X^{\#}) &= \mathrm{Ad}\bigl(g_\alpha(u)^{-1}\bigr)\Bigl(A_\alpha|_{\pi(u)}\bigl(\cancel{T_u\pi(X^{\#}_u)}\bigr)\Bigr) + \theta_{g_\alpha(u)}\bigl(T_u g_\alpha(X^{\#}_u)\bigr) \\
&= T_{g_\alpha(u)}(\lambda_{g_\alpha(u)^{-1}}) \circ T_u g_\alpha \circ T_{1_G}(R^{(u)})(X) \qquad \because \quad (2.4.10) \\
&= T_{1_G}(\lambda_{g_\alpha(u)^{-1}} \circ g_\alpha \circ R^{(u)})(X) \\
&= X
\end{aligned}$$

が言えた．

**(CF-2)**

$\forall u \in P$ を 1 つ固定する．$\forall v \in T_uP$, $\forall g \in G$ に対して

$$\begin{aligned}
&(R_g^*\omega_\alpha)_u(v) \\
&= \omega_\alpha|_{R_g(u)}\bigl(T_u(R_g)(v)\bigr) \\
&= \mathrm{Ad}\bigl(g_\alpha(u \blacktriangleleft g)^{-1}\bigr)\Bigl(A_\alpha|_{\pi(u\blacktriangleleft g)}\bigl(T_{u\blacktriangleleft g}\pi \circ T_u(R_g)(v)\bigr)\Bigr) + \theta_{g_\alpha(u\blacktriangleleft g)}\bigl(T_{u\blacktriangleleft g} g_\alpha \circ T_u(R_g)(v)\bigr) \\
&= \mathrm{Ad}\bigl(g^{-1}g_\alpha(u)^{-1}\bigr)\Bigl(A_\alpha|_{\pi(u)}\bigl(T_u(\pi \circ R_g)(v)\bigr)\Bigr) + \theta_{g_\alpha(u)g}\bigl(T_u(g_\alpha \circ R_g)(v)\bigr) \\
&= \mathrm{Ad}\bigl(g^{-1}\bigr) \circ \mathrm{Ad}\bigl(g_\alpha(u)^{-1}\bigr)\Bigl(A_\alpha|_{\pi(u)}\bigl(T_u\pi(v)\bigr)\Bigr) + T_u(\lambda_{g^{-1}g_\alpha(u)^{-1}} \circ g_\alpha \circ R_g)(v) \\
&= \mathrm{Ad}\bigl(g^{-1}\bigr)\Bigl(\mathrm{Ad}\bigl(g_\alpha(u)^{-1}\bigr)\bigl((\pi^*A_\alpha)_u(v)\bigr)\Bigr) + T_u(\lambda_{g^{-1}g_\alpha(u)^{-1}} \circ g_\alpha \circ R_g)(v)
\end{aligned}$$

一方，$\rho_g \circ g_\alpha(u) = g_\alpha(u)g = g_\alpha(u \blacktriangleleft g) = g_\alpha \circ R_g(u)$ に注意すると

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ad}(g^{-1})\bigl((g_\alpha^*\theta)_u(v)\bigr) \\
&= T_{1_G}(F_{g^{-1}}) \circ \theta_{g_\alpha(u)}\bigl(T_u g_\alpha(v)\bigr) \\
&= T_{1_G}(\lambda_{g^{-1}} \circ \rho_g) \circ T_{g_\alpha(u)}(\lambda_{g_\alpha(u)^{-1}}) \circ T_u g_\alpha(v) \\
&= T_u(\lambda_{g^{-1}} \circ \rho_g \circ \lambda_{g_\alpha(u)^{-1}} \circ g_\alpha)(v) \\
&= T_u(\lambda_{g^{-1}} \circ \lambda_{g_\alpha(u)^{-1}} \circ g_\alpha \circ R_g)(v) \\
&= T_u(\lambda_{g^{-1}g_\alpha(u)^{-1}} \circ g_\alpha \circ R_g)(v)
\end{aligned}$$

がわかり，

$$R_g^*\omega_\alpha = \mathrm{Ad}\bigl(g^{-1}\bigr)(\omega_\alpha)$$

が示された．

**$\boldsymbol{\omega_\alpha}|_{\pi^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)} = \boldsymbol{\omega_\beta}|_{\pi^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)}$**

$\forall u \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ および $\forall v \in T_uP$ を 1 つ固定する．変換関数の定義から $g_\beta(u) = t_{\beta\alpha}\bigl(\pi(u)\bigr)g_\alpha(u)$ が成り立つ．i.e. $C^\infty$ 写像 $\Delta\colon P \longrightarrow P \times P$ を用いて $g_\beta = \mu \circ \bigl((t_{\beta\alpha} \circ \pi) \times g_\alpha\bigr) \circ \Delta$ と書ける．よって補題 2.5 を使って

$$\begin{aligned}
T_u g_\beta(v) &= T_u\bigl(\mu \circ \mathrm{inj}_1^{g_\alpha(u)} \circ t_{\beta\alpha} \circ \pi \circ \mathrm{proj}_1 \circ \Delta\bigr)(v) \\
&\quad + T_u\bigl(\mu \circ \mathrm{inj}_2^{t_{\beta\alpha}(u)} \circ g_\alpha \circ \mathrm{proj}_2 \circ \Delta\bigr)(v) \\
&= T_u(\rho_{g_\alpha(u)} \circ t_{\beta\alpha} \circ \pi)(v) + T_u(\lambda_{t_{\beta\alpha}(\pi(u))} \circ g_\alpha)(v)
\end{aligned}$$

であり，Maurer-Cartan 形式の定義から

$$
\begin{aligned}
(g_\beta^*\theta)_u(v) &= T_{t_{\beta\alpha}(\pi(u))g_\alpha(u)}(\lambda_{g_\alpha(u)^{-1}t_{\beta\alpha}(\pi(u))^{-1}})\bigl(T_u g_\beta(v)\bigr) \\
&= T_u(\lambda_{g_\alpha(u)^{-1}} \circ \lambda_{t_{\beta\alpha}(\pi(u))^{-1}} \circ \rho_{g_\alpha(u)} \circ t_{\beta\alpha} \circ \pi)(v) \\
&\quad + T_{g_\alpha(u)}(\lambda_{g_\alpha(u)^{-1}})\bigl(T_u g_\alpha(v)\bigr) \\
&= \mathrm{Ad}\bigl(g_\alpha(u)^{-1}\bigr)\bigl(T_u(\lambda_{t_{\beta\alpha}(\pi(u))^{-1}})(v)\bigr) + (g_\alpha^*\theta)_u(v)
\end{aligned}
$$

と計算できる．従って，$\omega_\alpha \in \Omega^1\bigl(\pi^{-1}(U_\alpha); \mathfrak{g}\bigr)$ の定義 (2.4.17) および条件 (2.4.16) より

$$
\begin{aligned}
\omega_\beta|_u(v) &= \mathrm{Ad}\bigl(g_\beta(u)^{-1}\bigr)\bigl((\pi^*A_\beta)_u(v)\bigr) + (g_\beta^*\theta)_u(v) \\
&= \mathrm{Ad}\Bigl(g_\alpha(u)^{-1}t_{\beta\alpha}\bigl(\pi(u)\bigr)^{-1}\Bigr)\Bigl(\mathrm{Ad}\bigl(t_{\alpha\beta}(\pi(u))^{-1}\bigr)\bigl((\pi^*A_\alpha)_u(v)\bigr) + \bigl((t_{\alpha\beta}\circ\pi)^*\theta\bigr)_u(v)\Bigr) \\
&\quad + (g_\beta^*\theta)_u(v) \\
&= \mathrm{Ad}\bigl(g_\alpha(u)^{-1}\bigr)\bigl((\pi^*A_\alpha)_u(v)\bigr) \\
&\quad + \mathrm{Ad}\bigl(g_\alpha(u)^{-1}\bigr)\Bigl(\mathrm{Ad}\bigl(t_{\alpha\beta}(\pi(u))\bigr)\bigl(T_{t_{\alpha\beta}(\pi(u))}(\lambda_{t_{\alpha\beta}(\pi(u))^{-1}}) \circ T_u(t_{\alpha\beta}\circ\pi)(v)\bigr)\Bigr) \\
&\quad + \mathrm{Ad}\bigl(g_\alpha(u)^{-1}\bigr)\bigl(T_u(\lambda_{t_{\beta\alpha}(\pi(u))^{-1}})(v)\bigr) + (g_\alpha^*\theta)_u(v) \\
&= \omega_\alpha|_u(v) \\
&\quad + \mathrm{Ad}\bigl(g_\alpha(u)^{-1}\bigr)\Bigl(T_u\bigl(\rho_{t_{\beta\alpha}(\pi(u))} \circ t_{\alpha\beta} \circ \pi\bigr)(v) + T_u\bigl(\lambda_{t_{\alpha\beta}(\pi(u))} \circ t_{\beta\alpha} \circ \pi\bigr)(v)\Bigr) \\
&= \omega_\alpha|_u(v) \\
&\quad + \mathrm{Ad}\bigl(g_\alpha(u)^{-1}\bigr)\Bigl(T_u\bigl(\mu \circ \bigl((t_{\alpha\beta}\circ\pi) \times (t_{\beta\alpha}\circ\pi)\bigr) \circ \Delta\bigr)(v)\Bigr) \\
&= \omega_\alpha|_u(v)
\end{aligned}
$$

が言えた．ただし，最後から 3 つ目の等号ではコサイクル条件から従う $t_{\alpha\beta}(\pi(u))^{-1} = t_{\beta\alpha}(\pi(u))$ を使い，最後から 2 番目の等号では補題 2.5 を使い，最後の等号では $\mu \circ \bigl((t_{\alpha\beta}\circ\pi) \times (t_{\beta\alpha}\circ\pi)\bigr) \circ \Delta\colon P \longrightarrow G$ が常に $1_G$ を返す定数写像であることを使った．

ところで，$\bigl\{U_\alpha\bigr\}_{\alpha\in\Lambda}$ は $M$ の開被覆であったから $P = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \pi^{-1}(U_\alpha)$ が成り立つ．よって $\forall u \in P$ に対してある $\alpha \in \Lambda$ が存在して $u \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ を充たす．従って大域的な $\mathfrak{g}$ 値 1-形式 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ を

$$
\omega_u \coloneqq \omega_\alpha|_u
$$

と定義すると，上で示したことからこれは well-defined な接続形式になり，かつ $\forall \alpha \in \Lambda$ に対して $s_\alpha^*\omega = A_\alpha$ を充たす．

(2) $\forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$ を 1 つ固定する．このとき接続形式の公理および補題 2.6 から，$\forall v \in T_xM$ に対して

$$
\begin{aligned}
s_\beta^*\omega|_x(v) &= \omega_{s_\beta(x)}\bigl(T_x s_\beta(v)\bigr) \\
&= \omega_{s_\alpha(x) \blacktriangleleft t_{\alpha\beta}(x)}\Bigl(T_{s_\alpha(x)}(R_{t_{\alpha\beta}(x)})\bigl(T_x s_\alpha(v)\bigr)\Bigr) + \omega_{s_\beta(x)}\Bigl(\bigl((t_{\alpha\beta}^*\theta)_x(v)\bigr)^{\#}|_{s_\beta(x)}\Bigr) \\
&= \bigl((R_{t_{\alpha\beta}(x)})^*\omega\bigr)_{s_\alpha(x)}\bigl(T_x s_\alpha(v)\bigr) + (t_{\alpha\beta}^*\theta)_x(v) \\
&= \mathrm{Ad}\bigl(t_{\alpha\beta}(x)^{-1}\bigr)\Bigl(\omega_{s_\alpha(x)}\bigl(T_x s_\alpha(v)\bigr)\Bigr) + (t_{\alpha\beta}^*\theta)_x(v) \\
&= \mathrm{Ad}\bigl(t_{\alpha\beta}(x)^{-1}\bigr)\bigl(s_\alpha^*\omega|_x(v)\bigr) + (t_{\alpha\beta}^*\theta)_x(v)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

■

### 2.4.6 水平持ち上げ

**定義 2.16: $C^\infty$ 曲線の水平持ち上げ**

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ およびその接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$
- $M$ 上の $C^\infty$ 曲線 $\gamma\colon [0,\, 1] \longrightarrow M$

を与える．このとき，$\forall u \in \pi^{-1}(\{\gamma(0)\})$ に対して以下を充たす $P$ 上の $C^\infty$ 曲線 $\tilde{\gamma}\colon [0,\, 1] \longrightarrow P$ が一意的に存在し，$\gamma$ の**水平持ち上げ** (horizontal lift) と呼ばれる：

**(HC-1)** $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$

**(HC-2)** $\tilde{\gamma}(0) = u$

**(HC-3)** $\forall t \in [0,\, 1]$ に対して

$$\dot{\tilde{\gamma}}(t) \in \operatorname{Ker} \omega_{\tilde{\gamma}(t)}$$

一意存在は本質的に常微分方程式の基本定理による：

**補題 2.7: 水平持ち上げの公式**

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ およびその接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$
- $M$ 上の $C^\infty$ 曲線 $\gamma\colon [0,\, 1] \longrightarrow M$
- $\forall u \in \pi^{-1}\bigl(\{\gamma(0)\}\bigr)$

を与える．このとき，$\gamma$ の水平持ち上げ $\tilde{\gamma}\colon [0,\, 1] \longrightarrow P$ が一意的に存在して以下を充たす：

(1) $\forall t \in [0,\, 1]$ に対して

$$\dot{\tilde{\gamma}}(t) = T_{s_\alpha(\gamma(t))} R_{g(t)} \circ T_{\gamma(t)} s_\alpha\bigl(\dot{\gamma}(t)\bigr) - \biggl(\operatorname{Ad}\bigl(g(t)^{-1}\bigr)\Bigl(s_\alpha^* \omega|_{\gamma(t)}\bigl(\dot{\gamma}(t)\bigr)\Bigr)\biggr)^{\#}_{\tilde{\gamma}(t)}$$

(2) $\forall t \in [0,\, 1]$ に対して

$$\dot{g}(t) = -T_{1_G} \rho_{g(t)}\Bigl(s_\alpha^* \omega|_{\gamma(t)}\bigl(\dot{\gamma}(t)\bigr)\Bigr)$$

ただし $G$ 上の $C^\infty$ 曲線 $g\colon [0,\, 1] \longrightarrow G$ を

$$g \coloneqq \mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\alpha \circ \tilde{\gamma}$$

で定義した．

**証明** 定理 2.6 と同様に

- 開被覆 $\bigl\{U_\alpha\bigr\}_{\alpha \in \Lambda}$
- 局所自明化 $\bigl\{\varphi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G\bigr\}_{\alpha \in \Lambda}$，変換関数 $\bigl\{t_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G\bigr\}_{\alpha,\, \beta \in \Lambda}$ を与える．
- (2.4.13) で定義される局所切断の族 $\bigl\{s_\alpha\colon U_\alpha \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)\bigr\}_{\alpha \in \Lambda}$

を与える．$[0,\, 1] \subset \mathbb{R}$ はコンパクト集合なので連続写像 $\gamma\colon [0,\, 1] \longrightarrow M$ による像 $\gamma([0,\, 1]) \subset M$ もまたコン

パクトである．よって $\gamma([0,\,1])$ を有限個の点で区切ることにより，ある $\alpha \in \Lambda$ が存在して $\gamma([0,\,1]) \subset U_\alpha$ が成り立つと仮定して良い．また，このとき $\tilde{\gamma}([0,\,1]) \subset \pi^{-1}(U_\alpha)$ を充たす任意の $C^\infty$ 曲線 $\tilde{\gamma}\colon [0,\,1] \longrightarrow P$ に対して定義される

$$g \coloneqq \mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\alpha \circ \tilde{\gamma}\colon [0,\,1] \longrightarrow G$$

は $G$ 上の $C^\infty$ 曲線であり，全空間 $P$ への右作用の定義から $\forall t \in [0,\,1]$ に対して

$$\tilde{\gamma}(t) = \varphi_\alpha^{-1}\Big(\pi\big(\tilde{\gamma}(t)\big),\, g(t)\Big) = s_\alpha\Big(\pi\big(\tilde{\gamma}(t)\big)\Big) \blacktriangleleft g(t)$$

が成り立つ．$C^\infty$ 写像 $\Delta\colon [0,\,1] \longrightarrow [0,\,1] \times [0,\,1],\ t \longmapsto (t,\,t)$ を使うと

$$\tilde{\gamma} = \blacktriangleleft \circ \big((s_\alpha \circ \pi \circ \tilde{\gamma}) \times g\big) \circ \Delta \tag{2.4.18}$$

と書くこともできる．

ここで，$\tilde{\gamma}$ を $\gamma$ の水平持ち上げとする．すると条件 **(HC-1)** より (2.4.18) は $\tilde{\gamma} = \blacktriangleleft \big((s_\alpha \circ \gamma) \times g\big) \circ \Delta$ となるから，補題 2.5 より

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\gamma}}(t) &= T_t\tilde{\gamma}\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t}\right) \\
&= T_{(t,\,t)}\Big(\blacktriangleleft \circ \big((s_\alpha \circ \gamma) \times g\big)\Big) \circ T_t\Delta\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t}\right) \\
&= T_{(t,\,t)}\Big(\blacktriangleleft \circ \big((s_\alpha \circ \gamma) \times g\big)\Big) \circ T_t\Delta\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t}\right) \\
&= T_t(\blacktriangleleft \circ \mathrm{inj}_1^{g(t)} \circ s_\alpha \circ \gamma)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t}\right) \\
&\quad + T_t(\blacktriangleleft \circ \mathrm{inj}_2^{s_\alpha(\gamma(t))} \circ g)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t}\right) \\
&= T_{s_\alpha(\gamma(t))}R_{g(t)} \circ T_{\gamma(t)}s_\alpha\big(\dot{\gamma}(t)\big) \\
&\quad + T_t\big(R^{\left(s_\alpha(\gamma(t))\right)} \circ g\big)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t}\right)
\end{aligned} \tag{2.4.19}$$

が分かった．補題 2.6 の証明と同様の計算により，Maurer-Cartan 形式 $\theta \in \Omega^1(G;\,\mathfrak{g})$ を使った等式

$$T_t\big(R^{\left(s_\alpha(\gamma(t))\right)} \circ g\big)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t}\right) = \left.\left((g^*\theta)_t\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t}\right)\right)^{\#}\right|_{\tilde{\gamma}(t)}$$

が成り立つ．よって条件 **(HC-2)** より

$$\begin{aligned}
0 &= \omega_{\tilde{\gamma}(t)}\big(\dot{\tilde{\gamma}}(t)\big) \\
&= (R_{g(t)}^*\omega)_{s_\alpha(\gamma(t))}\Big(T_{\gamma(t)}s_\alpha\big(\dot{\gamma}(t)\big)\Big) + (g^*\theta)_t\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t}\right) \\
&= \mathrm{Ad}\big(-g(t)\big)\Big(s_\alpha^*\omega|_{\gamma(t)}\big(\dot{\gamma}(t)\big)\Big) + \theta_{g(t)}\big(\dot{g}(t)\big)
\end{aligned} \tag{2.4.20}$$

が従い，

$$(g^*\theta)_t\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t}\right) = -\,\mathrm{Ad}\big(g(t)^{-1}\big)\Big(s_\alpha^*\omega|_{\gamma(t)}\big(\dot{\gamma}(t)\big)\Big) \tag{2.4.21}$$

が分かった．

(1) (2.4.19), (2.4.21) より

$$
\dot{\tilde{\gamma}}(t) = T_{s_\alpha(\gamma(t))} R_{g(t)} \circ T_{\gamma(t)} s_\alpha\bigl(\dot{\gamma}(t)\bigr) + \Bigl(-\operatorname{Ad}\bigl(g(t)^{-1}\bigr)\Bigl(s_\alpha^* \omega|_{\gamma(t)}\bigl(\dot{\gamma}(t)\bigr)\Bigr)\Bigr)^{\#}_{\tilde{\gamma}(t)}
$$

(2) Ad の定義と Maurer-Cartan 形式の定義より (2.4.20) は

$$
\begin{aligned}
0 &= T_{1_G}(\lambda_{g^{-1}(t)} \circ \rho_{g(t)})\Bigl(s_\alpha^* \omega|_{\gamma(t)}\bigl(\dot{\gamma}(t)\bigr)\Bigr) + T_{g(t)}(\lambda_{g(t)^{-1}})\bigl(\dot{g}(t)\bigr) \\
&= T_{1_G}(\lambda_{g^{-1}(t)})\Bigl(T_{1_G}\rho_{g(t)}\Bigl(s_\alpha^* \omega|_{\gamma(t)}\bigl(\dot{\gamma}(t)\bigr)\Bigr) + \dot{g}(t)\Bigr)
\end{aligned}
$$

とも書けるが，Lie 群の左移動が微分同相写像であることから $T_{1_G}(\lambda_{g^{-1}(t)})$ はベクトル空間の同型写像であり，

$$
\dot{g}(t) = -T_{1_G}\rho_{g(t)}\Bigl(s_\alpha^* \omega|_{\gamma(t)}\bigl(\dot{\gamma}(t)\bigr)\Bigr)
$$

が分かった．これは $g$ に関する常微分方程式であり，与えられた初期条件 $g(0) = \mathrm{proj}_2\bigl(\varphi_\alpha(u)\bigr)$ に関して一意的な解を持つ．

(2) の証明より $\tilde{\gamma}$ の一意存在も言えた． ■

**命題 2.10:**

$\gamma$ の 2 つの水平持ち上げ $\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}'$ が，ある $g \in G$ について $\tilde{\gamma}'(0) = \tilde{\gamma}(0) \blacktriangleleft g$ を充たすとする．このとき，$\forall t \in [0,\, 1]$ において $\tilde{\gamma}'(t) = \tilde{\gamma}(t) \blacktriangleleft g$ が成り立つ．

証明 $C^\infty$ 曲線

$$
\tilde{\gamma} \blacktriangleleft g \colon [0,\, 1] \longrightarrow P,\ t \longmapsto \tilde{\gamma}(t) \blacktriangleleft g
$$

は，$\pi \circ \tilde{\gamma} \blacktriangleleft g = \gamma$，$\tilde{\gamma} \blacktriangleleft g(0) = \tilde{\gamma}(0) \blacktriangleleft g$ を充たし，

$$
\begin{aligned}
\omega_{\tilde{\gamma} \blacktriangleleft g}\bigl(\dot{(\tilde{\gamma} \blacktriangleleft g)}(t)\bigr) &= (R_g^* \omega)_{\tilde{\gamma}(t)}\bigl(\dot{\tilde{\gamma}}(t)\bigr) \\
&= \operatorname{Ad}(g^{-1})\Bigl(\omega_{\tilde{\gamma}(t)}\bigl(\dot{\tilde{\gamma}}(t)\bigr)\Bigr) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

も充たすので，初期条件 $\tilde{\gamma} \blacktriangleleft g(0) = \tilde{\gamma}(0) \blacktriangleleft g = \tilde{\gamma}'(0)$ を充たす水平持ち上げである．故に水平持ち上げの一意性から

$$
\tilde{\gamma}' = \tilde{\gamma} \blacktriangleleft g
$$

が言える． ■

$C^\infty$ 曲線のみならず，底空間上の $C^\infty$ ベクトル場もまた全空間に持ち上がる．

**定義 2.17: $C^\infty$ ベクトル場の水平持ち上げ**

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ およびその接続形式 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$
- $M$ 上の $C^\infty$ ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$

このとき，$\forall u \in P$ に対して以下を充たす $P$ 上の $C^\infty$ ベクトル場 $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(P)$ が一意的に存在し，$X$ の**水平持ち上げ** (horizontal life) と呼ばれる：

**(HV-1)** $T_u\pi(\tilde{X}_u) = X_{\pi(u)}$

**(HV-2)** $\tilde{X}_u \in \operatorname{Ker}\omega_u$

定理 2.4 より $\forall u \in P$ に対して

$$T_u\pi|_{\operatorname{Ker}\omega_u} \colon \operatorname{Ker}\omega_u \longrightarrow T_{\pi(u)}M$$

はベクトル空間の同型写像であるから，与えられた $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して接束 $TP$ の（$C^\infty$ とは限らない）切断 $\tilde{X}$ を

$$\tilde{X}_u := \left(T_u\pi|_{\operatorname{Ker}\omega_u}\right)^{-1}(X_{\pi(u)})$$

と定義すればこれは **(HV-1)**, **(HV-2)** を充たす．逆に性質 **(HV-1)**, **(HV-2)** を充たす接束 $TP$ の（$C^\infty$ とは限らない）任意の切断 $\tilde{Y}$ に対して，

$$\tilde{Y}_u = \left(T_u\pi|_{\operatorname{Ker}\omega_u}\right)^{-1}(X_{\pi(u)}) = \tilde{X}_u$$

が成り立つので，一意存在がわかった．あとはこのようにして構成した $\tilde{X}$ が $C^\infty$ ベクトル場であることを確かめれば良い．そのためには，命題??より $\forall f \in C^\infty(P)$ に対して $\tilde{X}f$ が $C^\infty$ 関数になっていることを示せば良い．

**命題 2.11: 水平持ち上げの $C^\infty$ 性**

$\tilde{X}$ は $C^\infty$ ベクトル場である．

**証明** $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ および $\forall u \in P$ を 1 つ固定する．$X_{\pi(u)}$ は何らかの $C^\infty$ 曲線 $\gamma\colon [0,\, 1] \longrightarrow M$ の $t=0$ における速度ベクトルである．$\gamma$ の水平持ち上げ $\tilde{\gamma}$ であって $\tilde{\gamma}(0) = u$ を充たすものをとる．このとき，一般に $\forall g \in G$ に対して $\pi \circ R_g = \pi$ が成り立つことに注意すると補題 2.3, 2.7 から

$$\begin{aligned}
T_u\pi\bigl(\dot{\tilde{\gamma}}(0)\bigr) &= T_u(\pi \circ R_{g(0)}) \circ T_{\gamma(0)}s_\alpha\bigl(\dot{\gamma}(0)\bigr) - T_u\pi\Biggl(\operatorname{Ad}\bigl(g(0)^{-1}\bigr)\Bigl(s_\alpha^*\omega|_{\gamma(0)}\bigl(\dot{\gamma}(0)\bigr)\Bigr)\Biggr)^{\#}_{\tilde{\gamma}(t)} \\
&= T_u(\pi \circ s_\alpha)(X_{\pi(u)}) \\
&= T_u(\mathrm{id}_{U_\alpha})(X_{\pi(u)}) \\
&= X
\end{aligned}$$

が従い，$\dot{\tilde{\gamma}}(0)$ は点 $u \in P$ において **(HV-1)**, **(HV-2)** を充たす．よって $\tilde{X}$ の一意性から

$$\tilde{X}_u = \dot{\tilde{\gamma}}(0)$$

である．

ここで $\forall f \in C^\infty(P)$ を 1 つ固定する．このとき

$$
\begin{aligned}
\tilde{X} f|_u &= \dot{\tilde{\gamma}}(0) f|_u \\
&= T_{s_\alpha(\gamma(0))} R_{g(0)} \circ T_{\gamma(0)} s_\alpha \bigl(X_{\pi(u)}\bigr) f - \biggl(\mathrm{Ad}\bigl(g(0)^{-1}\bigr)\Bigl(s_\alpha^* \omega|_{\pi(u)}\bigl(X_{\pi(u)}\bigr)\Bigr)\biggr)_u^{\#} f \\
&= X_{\pi(u)}(f \circ R_{g(0)} \circ s_\alpha) - \biggl(\mathrm{Ad}\bigl(g(0)^{-1}\bigr)\Bigl(s_\alpha^* \omega|_{\pi(u)}\bigl(X\bigr)\Bigr)\biggr)_u^{\#} f
\end{aligned}
$$

であるが，$f \circ R_{g(0)} \circ s_\alpha \in C^\infty(U_\alpha)$ であることおよび写像 $U_\alpha \longrightarrow \mathfrak{g},\ u \longmapsto \mathrm{Ad}\bigl(g(0)^{-1}\bigr)\Bigl(s_\alpha^* \omega|_{\pi(u)}\bigl(X\bigr)\Bigr)$ が $C^\infty$ 写像であることから，あとは $C^\infty$ 写像 $A\colon P \longrightarrow \mathfrak{g}$ に関して定まる関数 $P \longrightarrow \mathbb{R},\ u \longmapsto A(u)^{\#} f$ が $C^\infty$ 級であることを言えば良い．

ところで基本ベクトル場の定義を思い出すと

$$
A(u)^{\#} f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} f\bigl(u \blacktriangleleft \exp(tA(u))\bigr) = T_0\bigl(R^{(u)} \circ \exp(\text{-}A(u))\bigr)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}\right)
$$

であるが，$R^{(u)} \circ \exp(\text{-}A(u))\colon [0,1] \longmapsto P$ は $u$ に関しても $C^\infty$ 級なので，$A(u)^{\#} f \in C^\infty(P)$ が言えた． ■

**命題 2.12: ベクトル場の水平持ち上げは右不変**

$\tilde{X}$ は右不変である．i.e. $\forall g \in G$ に対して自分自身と $R_g$-related である．

**証明** $\forall u \in P,\ \forall g \in G$ を 1 つ固定する．このとき

$$
\begin{aligned}
T_u \pi\bigl((R_{g*}\tilde{X})_u\bigr) &= T_u \pi \circ T_{u \blacktriangleleft g^{-1}}(R_g)(\tilde{X}_{u \blacktriangleleft g^{-1}}) \\
&= T_{u \blacktriangleleft g^{-1}}(\pi \circ R_g)(\tilde{X}_{u \blacktriangleleft g^{-1}}) \\
&= T_{u \blacktriangleleft g^{-1}} \pi(\tilde{X}_{u \blacktriangleleft g^{-1}}) \\
&= X_{\pi(u \blacktriangleleft g^{-1})} \\
&= X_{\pi(u)}
\end{aligned}
$$

かつ

$$
\begin{aligned}
\omega_u\bigl((R_{g*}\tilde{X})_u\bigr) &= \omega_u\bigl(T_{u \blacktriangleleft g^{-1}}(R_g)(\tilde{X}_{u \blacktriangleleft g^{-1}})\bigr) \\
&= (R_g^* \omega)_{u \blacktriangleleft g^{-1}}(\tilde{X}_{u \blacktriangleleft g^{-1}}) \\
&= \mathrm{Ad}(g^{-1})\bigl(\omega_{u \blacktriangleleft g^{-1}}(\tilde{X}_{u \blacktriangleleft g^{-1}})\bigr) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

なので，ベクトル場 $R_{g*}\tilde{X}$ は **(HV-1)**, **(HV-2)** を充たす．i.e. $X$ の水平持ち上げである．水平持ち上げの一意性から

$$
R_{g*}\tilde{X}|_{u \blacktriangleleft g} = T_u(R_g)(\tilde{X}_u) = \tilde{X}_{u \blacktriangleleft g}
$$

でなくてはいけない． ■

### 2.4.7 主束上の曲率形式

この小節では主束上の曲率と主束上の共変微分を大域的な形で定義する．

**定義 2.18: 曲率 2 形式**

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ およびその接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\,\mathfrak{g})$ を与える．
**曲率 2 形式** (curvature 2 form) $\Omega \in \Omega^2(P;\,\mathfrak{g})$ を以下で定義する：

$$\Omega := \mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$$

!

$\Omega$ の定義の第 2 項は，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底 $T^a$ $^{\mathrm{w}/}$ $a = 1, \dots, \dim G$ をとったときに

$$\frac{1}{2}[\omega, \omega] := \frac{1}{2}\omega_a \wedge \omega_b \bigl[T^a, T^b\bigr]$$

という意味であって，$\mathfrak{g}$-値 1 形式のウェッジ積という意味ではない．

**補題 2.8:**

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ およびその接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\,\mathfrak{g})$ を与える．$\forall u \in P$ において，

(1) $\forall v \in \mathrm{Ker}\, T_u\pi$ に対して，ある $V \in \mathfrak{g}$ が存在して $V^{\#}|_u = v$ を充たす．

(2) $\forall v \in \mathrm{Ker}\, \omega_u$ に対して，ある $H \in \mathfrak{X}(M)$ が存在して $\tilde{H}|_u = v$ を充たす．ただし $\tilde{H}$ は $H$ の水平持ち上げである．

<u>証明</u>　(1) 補題 2.2 の証明より $T_{1_G}(R^{(u)})\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Ker}\, T_u\pi$ は全射だから，ある $V \in \mathfrak{g}$ が存在して $v = T_{1_G}(R^{(u)})(V) = V^{\#}|_u$ を充たす．ただし最後の等号で (2.4.10) を使った．

(2) $T_u\pi(v) \in T_{\pi(u)}M$ を $H \in \mathfrak{X}(M)$ に拡張すればよい．

■

**定理 2.7: 曲率形式の性質**

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ およびその接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\,\mathfrak{g})$ を与える．$\Omega \in \Omega^2(P;\,\mathfrak{g})$ を曲率形式とする．

(1) $\forall u \in P$ および $\forall v,\, w \in T_uP$ において

$$\Omega_u(v,\, w) = \mathrm{d}\omega|_u\bigl(v^{\mathrm{H}},\, w^{\mathrm{H}}\bigr)$$

(2) $\forall g \in \Omega$ に対して

$$R_g^*\Omega = \mathrm{Ad}(g^{-1})\Omega$$

(3) **(Bianchi の第 2 恒等式)**

$$\mathrm{d}\Omega = [\Omega, \omega]$$

!

定理 2.7-(1) を曲率形式の定義とすることもある（ [?, p.43] など）．その場合，我々が採用した定義 2.18 は以下で与える証明と全く同じ議論によって導出され，**Cartan の構造方程式**と呼ばれる．

<u>証明</u>　(1) 引数を場合分けする．

$\boldsymbol{v,\, w \in \mathrm{Ker}\,\omega_u}$

$$
\begin{aligned}
\Omega_u(v,\, w) &= \mathrm{d}\omega\,|_u(v,\, w) + \frac{1}{2}[\omega_u, \omega_u](v,\, w) \\
&= \mathrm{d}\omega\,|_u(v,\, w) + \frac{1}{2}\bigl([\omega_u(v), \omega_u(w)] - [\omega_u(w), \omega_u(v)]\bigr) \\
&= \mathrm{d}\omega\,|_u(v,\, w) \\
&= \mathrm{d}\omega\,|_u(v^{\mathrm{H}},\, w^{\mathrm{H}})
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{v \in \mathrm{Ker}\, T_u\pi,\, w \in \mathrm{Ker}\,\omega_u}$

$[\omega_u, \omega_u](v,\, w) = 0$ である．補題 2.8 より $v$ は基本ベクトル場 $A^{\#} \in \mathfrak{X}(P)$ に拡張し，$w$ は水平持ち上げ $\tilde{B} \in \mathfrak{X}(P)$ に拡張する．外微分の公式から

$$
\mathrm{d}\omega\,(A^{\#},\, \tilde{B}) = A^{\#}\omega(\tilde{B}) - \tilde{B}\omega(A^{\#}) - \omega(\bigl[A^{\#}, \tilde{B}\bigr])
$$

第 1 項は $\omega$ の性質から 0 で，第 2 項は $\omega(A^{\#}) = A$ が[*46] $P$ 上の定数関数なので 0 になる．第 3 項が 0 になることを示すためには $\bigl[A^{\#}, \tilde{B}\bigr]$ が水平であることを示せば十分である．実際，$A^{\#}$ の生成するフローが

$$
\theta \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M \longrightarrow M,\ (t,\, x) \longmapsto R_{\exp(tX)}(x)
$$

であることを思い出すと，Lie 微分の定義と公式から

$$
\bigl[A^{\sharp}, \tilde{B}\bigr]_u = \lim_{t \to 0} \frac{T_{u \blacktriangleleft \exp(tA)}(R_{\exp(-tA)})(\tilde{B}_{u \blacktriangleleft \exp(tA)}) - \tilde{B}_u}{t}
$$

が言える．$\tilde{B}_u \in \mathrm{Ker}\,\omega_u$ は明らかで，接続形式の定義から

$$
\begin{aligned}
\omega_u\bigl(T_{u \blacktriangleleft \exp(tA)}(R_{\exp(-tA)})(\tilde{B}_{u \blacktriangleleft \exp(tA)})\bigr) &= \bigl(R^*_{\exp(-tA)}\omega\bigr)_{u \blacktriangleleft \exp(tA)}\bigl(\tilde{B}_{u \blacktriangleleft \exp(tA)}\bigr) \\
&= \mathrm{Ad}\bigl(\exp(tA)\bigr)\Bigl(\omega_{u \blacktriangleleft \exp(tA)}\bigl(\tilde{B}_{u \blacktriangleleft \exp(tA)}\bigr)\Bigr) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

が言えるので $\bigl[A^{\sharp}, \tilde{B}\bigr]_u \in \mathrm{Ker}\,\omega_u$ が示された．

$\boldsymbol{v \in \mathrm{Ker}\, T_u\pi,\, w \in \mathrm{Ker}\, T_u\pi}$

$v,\, w$ を補題 2.8 により拡張して $A^{\#},\, B^{\#}$ にする．このとき

$$
\begin{aligned}
\Omega(A^{\#},\, B^{\#}) &= \mathrm{d}\omega\,(A^{\#},\, B^{\#}) + [A, B] \\
&= A^{\#}\omega(B^{\#}) - B^{\#}\omega(A^{\#}) - \omega(\bigl[A^{\#}, B^{\#}\bigr]) + [A, B] \\
&= -\omega([A, B]^{\#}) + [A, B] \\
&= -\omega([A, B]) + [A, B] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

[*46] $\omega(A^{\#}) \in C^{\infty}(P)$ というのは，$\omega(A^{\#}) \colon P \longrightarrow \mathbb{R},\ u \longmapsto \omega_u(A^{\#}|_u)$ という意味である．

(2) 引き戻しが外微分，wedge 積と可換なので

$$\begin{aligned} R_g^*\Omega &= \mathrm{d}R_g^*\omega + \frac{1}{2}\big[R_g^*\omega, R_g^*\omega\big] \\ &= \mathrm{Ad}(g^{-1})\Omega \end{aligned}$$

がわかる．

(3)

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Omega &= \frac{1}{2}\big([\mathrm{d}\omega\,, \omega] - [\omega, \mathrm{d}\omega]\big) \\ &= [\mathrm{d}\omega\,, \omega] \\ &= [\Omega, \omega] - \frac{1}{2}[[\omega, \omega], \omega] \end{aligned}$$

ところで，$\omega = \omega_a T^a$ と展開すると

$$\begin{aligned} [[\omega, \omega], \omega] &= \omega_a \wedge \omega_b \wedge \omega_c [[T_a, T_b], T_c] \\ &= -\omega_a \wedge \omega_b \wedge \omega_c [[T_b, T_c], T_a] - \omega_a \wedge \omega_b \wedge \omega_c [[T_c, T_a], T_b] \qquad \because \quad \text{Jacobi の恒等式} \\ &= -2\omega_a \wedge \omega_b \wedge \omega_c [[T_a, T_b], T_c] \\ &= -2[[\omega, \omega], \omega] \end{aligned}$$

i.e. $[[\omega, \omega], \omega] = 0$ が分かった．

■

定理 2.7 より，$\Omega$ は tensorial form of type Ad であることが分かった．記号としては $\Omega \in \Omega^2_{\mathrm{Ad}}(P; \mathfrak{g})$ ということである．定理 2.7-(1) は，主束上の共変微分の定義のヒントになっている．

**定義 2.19: 主束上の共変微分**

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ およびその接続形式 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ を与える．
- 有限次元ベクトル空間 $V$

を与える．このとき，主束 $P$ 上の**共変微分** $\mathrm{D}\colon \Omega^k(P; V) \longrightarrow \Omega^{k+1}(P; V)$ を

$$\mathrm{D}\phi|_u(v_1, \ldots, v_{k+1}) \coloneqq \mathrm{d}\phi\,|_u({v_1}^{\mathrm{H}}, \ldots, {v_{k+1}}^{\mathrm{H}})$$

で定義する．ただし任意の $\phi \in \Omega^k(P; V)$，$u \in P$，$v_1, \ldots, v_{k+1} \in T_uP$ をとった．

この定義はベクトル束上の共変微分の定義と見かけ上大きく異なっている．しかし，実は定理 2.5-(4) の意味で同じものだということが次の命題からわかる：

**命題 2.13: 主束上の共変微分の公式**

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ およびその接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$ を与える．
- 有限次元ベクトル空間 $V$
- Lie 群 $G$ の表現 $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$

を与える．このとき，$\forall \phi \in \Omega^k_\rho(P;\, V)$ に対して以下が成り立つ：

$$\mathrm{D}\phi = \mathrm{d}\phi + \rho_*(\omega) \wedge \phi$$

!

定理 2.5 のときと同様に，

$$\big(\rho_*(\omega) \wedge \phi\big)_u(v_1,\, \dots,\, v_{k+1}) \coloneqq \frac{1}{1!k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+1}} \operatorname{sgn}\sigma\, T_u\rho\big(v_{\sigma(1)}\big)\Big(\phi\big(v_{\sigma(2)},\, \dots,\, v_{\sigma(k+1)}\big)\Big) \tag{2.4.22}$$

という定義である．

<u>証明</u> $\forall u \in P$ および $\forall v_1,\, \dots,\, v_{k+1} \in T_uP$ を固定する．示すべき式は全ての引数に関して線型だから，$v_i$ は水平であるか垂直であるかのどちらかであるとして良い．さらに以下では補題 2.8 によって水平（resp. 垂直）な $v_i \in T_uP$ を水平（resp. 垂直）な $X_i \in \mathfrak{X}(P)$ に拡張する．具体的には，$v_i \in T_uP$ 水平（resp. 垂直）ならば $X_i$ は水平持ち上げ $\tilde{B}_i$（resp. 基本ベクトル場 $A_i{}^{\#} \in \mathfrak{X}(P)$）である．

引数について場合分けする．

**$X_i$ が全て水平**

$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_{k+1}$ に対して $\omega(X_{\sigma(1)}) = 0$ なので自明.

**$X_i$ のうち少なくとも 2 つが垂直**

引数の入れ替えに関する反対称性より，$X_1 = A_1{}^{\#}$, $X_2 = A_2{}^{\#}$ を仮定しても一般性を損なわない．このとき命題 2.7 より $[X_1, X_2] = [A_1, A_2]^{\#}$ が成り立つので $[X_1, X_2]$ もまた垂直である．

まず，共変微分の定義から (2.4.22) の左辺は

$$\mathrm{D}\phi(X_1,\, \dots,\, X_{k+1}) = \mathrm{d}\phi\,(0,\, 0,\, \dots) = 0$$

である．よって (2.4.22) の右辺が 0 になることを示せば良い．実際，右辺第 1 項に関しては，外微分の公式より

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\phi\,(X_1,\, \dots,\, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} X_i \phi(\dots,\, \widehat{X_i},\, \dots) + \sum_{1 \le i < j \le k+1} (-1)^{i+j} \phi([X_i, X_j],\, \dots,\, \widehat{X_i},\, \widehat{X_j},\, \dots) \\ &= 0 + 0\end{aligned} \tag{2.4.23}$$

が言える．さらに右辺第 2 項に関して，$\phi$ の引数のうち少なくとも 1 つが水平なので

$$\big(\rho_*(\omega) \wedge \phi\big)(X_1,\, \dots,\, X_{k+1}) = 0$$

がわかる．

**$X_i$ の 1 つのみが垂直で他が全て水平**

引数の入れ替えに関する反対称性より，$X_1 = A_1{}^{\#}$ を仮定しても一般性を損なわない．

まず，共変微分の定義から (2.4.22) の左辺は

$$\mathrm{D}\phi(X_1,\,\dots,\,X_{k+1}) = \mathrm{d}\phi\,(0,\,\dots) = 0$$

である．よって (2.4.22) の右辺が 0 になることを示せば良い．
(2.4.22) の右辺第 1 項に関しては，外微分の公式 (2.4.23) より非ゼロな項が

$$X_1\phi(X_2,\,\dots) + \sum_{2\le j\le k+1} (-1)^{1+j}\phi([X_1, X_j],\,X_2,\,\dots,\,\widehat{X_j},\,\dots)$$

だとわかる．ところが，命題 2.12 より $X_2,\,\dots,\,X_{k+1}$ が右不変なので Lie 微分の公式より

$$\begin{aligned}
[X_1, X_j]_u &= \left[{A_1}^{\#}, X_j\right]_u \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{T_{u\blacktriangleleft\exp(tA_1)}(R_{\exp(-tA_1)})(X_j|_{u\blacktriangleleft\exp(tA_1)}) - X_j|_u}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{X_j|_{u\blacktriangleleft\exp(tA_1)\blacktriangleleft\exp(-tA_1)} - X_j|_u}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{X_j|_u - X_j|_u}{t} \\
&= 0
\end{aligned}$$

が言えて，結局

$$\mathrm{d}\phi\,(X_1,\,\dots,\,X_{k+1}) = X_1\phi(X_2,\,\dots) = {A_1}^{\#}\phi(X_2,\,\dots,\,X_{k+1})$$

が分かった．$f\in C^\infty(P)$ を $f(u) \coloneqq \phi_u(X_2|_u,\,\dots,\,X_{k+1}|_u)$ によって定義し，(2.4.10) を使ってさらに計算を進めると

$$\begin{aligned}
\bigl({A_1}^{\#}\phi(X_2,\,\dots,\,X_{k+1})\bigr)|_u &= ({A_1}^{\#}f)(u) \\
&= T_{1_G}(R^{(u)})(A_1)f \\
&= A_1\bigl(f\circ R^{(u)}\bigr)
\end{aligned}$$

となるが，$\forall g\in G$ に対して

$$\begin{aligned}
f\circ R^{(u)}(g) &= \phi_{R^{(u)}(g)}\bigl(X_2|_{R^{(u)}(g)},\,\dots,\,X_{k+1}|_{R^{(u)}(g)}\bigr) \\
&= \phi_{u\blacktriangleleft g}\bigl(T_u(R_g)(X_2|_u),\,\dots,\,T_u(R_g)(X_{k+1}|_u)\bigr) && \because\ X_j \text{ の右不変性} \\
&= (R_g^*\phi)_u(X_2|_u,\,\dots,\,X_{k+1}|_u) \\
&= \rho(g^{-1})\bigl(\phi_u(X_2|_u,\,\dots,\,X_{k+1}|_u)\bigr) && \because\ \phi \text{ の右同変性} \\
&= \rho(g^{-1})\bigl(f(u)\bigr)
\end{aligned}$$

が成り立つので，

$$
\begin{aligned}
A_1\bigl(f \circ R^{(u)}\bigr) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Bigl(\rho\bigl(\exp(tA_1)^{-1}\bigr)\bigl(f(u)\bigr)\Bigr) \\
&= \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho\bigl(\exp(tA_1)^{-1}\bigr)\right)\bigl(f(u)\bigr) && \because \quad \text{補題 } 2.5 \\
&= \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho\bigl(\exp(-tA_1)\bigr)\right)\bigl(f(u)\bigr) && \because \quad \text{命題 } 2.6 \\
&= -\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho\bigl(\exp(tA_1)\bigr)\right)\bigl(f(u)\bigr) \\
&= -T_0\bigl(\rho \circ \exp(\text{-}A_1)\bigr)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right)\bigl(f(u)\bigr) \\
&= -T_{1_G}\rho \circ T_0\bigl(\exp(\text{-}A_1)\bigr)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right)\bigl(f(u)\bigr) \\
&= -\rho_*(A_1)f(u)
\end{aligned}
$$

i.e. $A_1{}^{\#}\phi(X_2,\,\dots,\,X_{k+1}) = -\rho_*\bigl(A_1\bigr)\phi(X_2,\,\dots,\,X_{k+1})$ だと分かった．一方，右辺第 2 項の非ゼロな項は

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{k+1},\,\sigma(1)=1} \operatorname{sgn}\sigma\,\rho_*\bigl(\omega(X_1)\bigr)\bigl(\phi(X_{\sigma(2)},\,\dots,\,X_{\sigma(k+1)})\bigr) \\
&= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{k+1},\,\sigma(1)=1} \operatorname{sgn}\sigma\,\rho_*\bigl(A_1\bigr)\bigl(\phi(X_{\sigma(2)},\,\dots,\,X_{\sigma(k+1)})\bigr) \\
&= \rho_*\bigl(A_1\bigr)\phi(X_2,\,\dots,\,X_{k+1})
\end{aligned}
$$

であるから，これらは相殺して 0 になる．

■

特に $\Omega \in \Omega^2_{\mathrm{Ad}}(P;\,\mathfrak{g})$ なので，命題 2.13 から

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}\Omega &= \mathrm{d}\Omega + \mathrm{ad}(\omega)\wedge\Omega \\
&= \mathrm{d}\Omega + \omega_a \wedge \Omega_b\,\mathrm{ad}(T^a)(T^b) \\
&= \mathrm{d}\Omega + \omega_a \wedge \Omega_b\bigl[T^a, T^b\bigr] \\
&= \mathrm{d}\Omega + [\omega, \Omega]
\end{aligned}
$$

だとわかる．よって Bianchi の第 2 恒等式は共変微分を使って

$$\mathrm{D}\Omega = 0$$

と書くこともできる．

### 2.4.8　曲率形式の局所表示と場の強さ

この小説では，前小節で定義した主束上の曲率形式を局所表示し，それが物理側で**場の強さ**と呼ばれるものと同一視できることを確認する．

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ と，その開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$，局所自明化 $\{\varphi_\alpha \colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G\}_{\alpha\in\Lambda}$，変換関数 $\{t_{\alpha\beta} \colon U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$ を与える．局所切断の族 $\{s_\alpha \colon U_\alpha \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ を (2.4.13) で定義する．

定理 2.6 を参考に，曲率形式の局所表示を

$$F_\alpha \coloneqq s_\alpha^*\Omega \in \Omega^2(U_\alpha;\, \mathfrak{g})$$

で定義する．曲率形式の定義と，引き戻しと外微分，wedge 積が可換であることから

$$\begin{aligned} F_\alpha &= \mathrm{d}s_\alpha^*\omega + \frac{1}{2}[s_\alpha^*\omega, s_\alpha^*\omega] \\ &= \mathrm{d}A_\alpha + \frac{1}{2}[A_\alpha, A_\alpha] \end{aligned}$$

がわかる．$F_\alpha$ の，チャート $(U_\alpha(x^\mu))$ における成分表示 $F_\alpha = \frac{1}{2}F_{\alpha\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu$ を求めてみる：

$$\begin{aligned} 2F_\alpha &= F_{\alpha\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \\ &= 2\partial_\mu A_{\alpha\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \\ &\quad + A_{\alpha a\mu} A_{\alpha b\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \left[T^a, T^b\right] \\ &= (\partial_\mu A_{\alpha\nu} - \partial_\nu A_{\alpha\mu})\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \\ &\quad + [A_{\alpha\mu}, A_{\alpha\nu}]\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \end{aligned}$$

より，

$$F_{\alpha\mu\nu} = (\partial_\mu A_{\alpha\nu} - \partial_\nu A_{\alpha\mu}) + [A_{\alpha\mu}, A_{\alpha\nu}]$$

と書くことができる．これは物理側で**場の強さ** (field strength) としてよく知られたものである．この意味で以降，$F_\alpha \in \Omega^2(U_\alpha;\, \mathfrak{g})$ のことを場の強さと呼ぶ．

**定理 2.8: 場の強さの変換則**

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ と，その開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$，局所自明化 $\{\varphi_\alpha \colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G\}_{\alpha\in\Lambda}$，変換関数 $\{t_{\alpha\beta} \colon U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$ を与える．局所切断の族 $\{s_\alpha \colon U_\alpha \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ を (2.4.13) で定義する．

このとき，$\forall \alpha,\, \beta \in \Lambda$ について

$$F_\beta|_x = \mathrm{Ad}\big(t_{\alpha\beta}(x)^{-1}\big)(F_\alpha|_x), \quad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$$

が成り立つ．

<u>**証明**</u> $\forall x \in M,\ \forall v_1,\, v_2 \in T_xM$ を 1 つ固定する．定理 2.7-(1) より，

$$\begin{aligned} F_\beta|_x(v_1,\, v_2) &= s_\beta^*\Omega|_x(v_1,\, v_2) \\ &= \Omega|_{s_\beta(x)}\big(T_x s_\beta(v_1),\, T_x s_\beta(v_2)\big) \\ &= \mathrm{d}\omega\,|_{s_\beta(x)}\big(T_x s_\beta(v_1)^{\mathrm{H}},\, T_x s_\beta(v_2)^{\mathrm{H}}\big) \end{aligned}$$

ここで補題 2.6 および水平部分空間の右不変性から

$$T_x s_\beta(v_i)^{\mathrm{H}} = T_{s_\alpha(x)}(R_{t_{\alpha\beta}(x)})\big(T_x s_\alpha(v_i)^{\mathrm{H}}\big)$$

なので,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}\omega\,|_{s_\beta(x)}\bigl(T_x s_\beta(v_1)^{\mathrm{H}},\,T_x s_\beta(v_2)^{\mathrm{H}}\bigr)\\
&= (R^*_{t_{\alpha\beta}(x)}\,\mathrm{d}\omega)\Big|_{s_\alpha(x)}\bigl(T_x s_\alpha(v_1)^{\mathrm{H}},\,T_x s_\alpha(v_2)^{\mathrm{H}}\bigr)\\
&= \mathrm{d}\bigl(R^*_{t_{\alpha\beta}(x)}\omega\bigr)\Big|_{s_\alpha(x)}\bigl(T_x s_\alpha(v_1)^{\mathrm{H}},\,T_x s_\alpha(v_2)^{\mathrm{H}}\bigr)\\
&= \mathrm{d}\Bigl(\mathrm{Ad}\bigl(t_{\alpha\beta}(x)^{-1}\bigr)(\omega)\Bigr)\Big|_{s_\alpha(x)}\bigl(T_x s_\alpha(v_1)^{\mathrm{H}},\,T_x s_\alpha(v_2)^{\mathrm{H}}\bigr)\\
&= \mathrm{Ad}\bigl(t_{\alpha\beta}(x)^{-1}\bigr)\Bigl(\mathrm{d}\omega\,|_{s_\alpha(x)}\bigl(T_x s_\alpha(v_1)^{\mathrm{H}},\,T_x s_\alpha(v_2)^{\mathrm{H}}\bigr)\Bigr)\\
&= \mathrm{Ad}\bigl(t_{\alpha\beta}(x)^{-1}\bigr)\Bigl(\Omega|_{s_\alpha(x)}\bigl(T_x s_\alpha(v_1),\,T_x s_\alpha(v_2)\bigr)\Bigr)\\
&= \mathrm{Ad}\bigl(t_{\alpha\beta}(x)^{-1}\bigr)\bigl(s_\alpha^*\Omega|_x(v_1,\,v_2)\bigr)\\
&= \mathrm{Ad}\bigl(t_{\alpha\beta}(x)^{-1}\bigr)\bigl(F_\alpha|_x(v_1,\,v_2)\bigr)
\end{aligned}
$$

が言える. ■

### 2.4.9 同伴ベクトル束上の接続とその局所表示

この小節では同伴ベクトル束上の共変微分をゲージ場の言葉を使って局所表示し,物理において馴染み深い共変微分と同一視できることを顕に確認する.この小節では常に

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$
- 接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\,\mathfrak{g})$
- 有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V$ と Lie 群 $G$ の $\dim V$ 次元表現 $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$
- 同伴ベクトル束 $V \hookrightarrow P \times_\rho V \xrightarrow{q} M$

が与えられているものとする.$E \coloneqq P \times_\rho V$ とおく.定理 2.5-(2) より,

$$\nabla^E \coloneqq \sharp^{-1} \circ \mathrm{D} \circ \sharp\colon \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(M;\,E)$$

はベクトル束 $E$ 上の接続であった.これを水平持ち上げによって表示してみよう.

**定理 2.9: 同伴ベクトル束上の共変微分の表示**

$\forall s \in \Gamma(E)$, $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ および $\forall p \in M$ を 1 つ固定する．このとき，任意の

- $C^\infty$ 曲線 $\gamma\colon [0,\, 1] \longrightarrow M$ であって $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = X_p$ を充たすもの
- $u \in \pi^{-1}(\{x\})$
- $\gamma$ の水平持ち上げ $\tilde{\gamma}\colon [0,\, 1] \longrightarrow P$ であって $\tilde{\gamma}(0) = u$ を充たすもの[a]

に対して

$$(\nabla^E_X s)|_p = \tilde{\gamma}(0) \times_\rho \dot{\eta}(0)$$

が成り立つ．特に右辺は $\gamma$, $u$ の取り方によらない．ただし，$C^\infty$ 曲線 $\eta\colon [0,\, 1] \longrightarrow V$ を

$$s\bigl(\gamma(t)\bigr) =: \tilde{\gamma}(t) \times_\rho \eta(t)$$

で定義した．

[a] $\gamma$, $u$ が与えられると $\tilde{\gamma}$ は一意に決まるのだった．

**証明** $\gamma$, $u$ を 1 つ固定する．命題 2.9-(2) より

$$\begin{aligned}
(\nabla^E_X s)|_p &= (\nabla^E s)(X)|_p \\
&= (\sharp^{-1} \circ \mathrm{D} \circ \sharp s)_p(X_p) \\
&= \Bigl(\flat\bigl(\mathrm{D}(\sharp s)\bigr)\Bigr)_{\gamma(0)}\bigl(\dot{\gamma}(0)\bigr) \\
&= \tilde{\gamma}(0) \times_\rho \bigl(\mathrm{D}(\sharp s)\bigr)_{\tilde{\gamma}(0)}\bigl(\dot{\tilde{\gamma}}(0)\bigr) \qquad \because \ \tilde{\gamma}(0) \in \pi^{-1}(\{\gamma(0)\}),\ \dot{\tilde{\gamma}}(0) \in (T_{\tilde{\gamma}(0)}\pi)^{-1}(\{\dot{\gamma}(0)\}) \\
&= \tilde{\gamma}(0) \times_\rho \Bigl[\mathrm{d}(\sharp s)\,|_{\tilde{\gamma}(0)}\bigl(\dot{\tilde{\gamma}}(0)\bigr) + \rho_*\Bigl(\cancel{\omega_{\tilde{\gamma}(0)}\bigl(\dot{\tilde{\gamma}}(0)\bigr)}\Bigr)\Bigl(\sharp s|_{\gamma(0)}\Bigr)\Bigr] \\
&= \tilde{\gamma}(0) \times_\rho T_0(\sharp s \circ \tilde{\gamma})\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right)
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで $\sharp$ の定義を思い出すと，$\forall t \in [0,\, 1]$ に対して

$$\begin{aligned}
\sharp s \circ \tilde{\gamma}(t) &= f_{\tilde{\gamma}(t)}^{-1}\Bigl(s \circ \pi\bigl(\tilde{\gamma}(t)\bigr)\Bigr) \\
&= f_{\tilde{\gamma}(t)}^{-1}\Bigl(s\bigl(\gamma(t)\bigr)\Bigr)
\end{aligned}$$

が成り立つことが分かる．$f_{\tilde{\gamma}(t)}^{-1}$ の定義から

$$\sharp s \circ \tilde{\gamma} = \eta$$

であり，

$$(\nabla^E_X s)|_p = \tilde{\gamma}(0) \times_\rho \dot{\eta}(0)$$

が示された． ■

定理 2.9 を使って，同伴ベクトル束上の共変微分の局所表示を定理 2.5-(3) よりもあからさまな形で求めよう．

**定理 2.10: 同伴ベクトル束上の共変微分の局所表示**

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ について

- $M$ の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$
- $P$ の局所自明化 $\{\varphi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G\}_{\alpha\in\Lambda}$
- $P$ の局所切断の族 $\{s_\alpha\colon U_\alpha \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha),\ p \longmapsto \varphi_\alpha^{-1}(p,\, 1_G)\}_{\alpha\in\Lambda}$
- Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底 $T^a$ ${}^{\mathrm{w}/}$ $a = 1, \dots, \dim G$

を与え，同伴ベクトル束 $V \hookrightarrow E := P \times_\rho V \xrightarrow{q} M$ について

- $E$ の局所自明化 $\{\psi_\alpha\colon q^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times V,\ s_\alpha(p) \times_\rho v \longmapsto (p,\, v)\}_{\alpha\in\Lambda}$
- $V$ の基底 $e_i$ ${}^{\mathrm{w}/}$ $i = 1, \dots, \dim V$
- $E$ の局所切断の族 $\{e_{\alpha i}\colon U_\alpha \longrightarrow q^{-1}(U_\alpha),\ x \longmapsto s_\alpha(x) \times_\rho e_i\}_{\alpha\in\Lambda}$

を与える．このとき $M$ のチャート $\big(U_\alpha,\, (x^\mu)\big)$ においてゲージ場 $A_\alpha := s_\alpha^*\omega \in \Omega^1(U_\alpha;\, \mathfrak{g})$ を

$$A_\alpha =: A_{\alpha a} T^a = A_{\alpha a\mu}\, \mathrm{d}x^\mu\ T^a$$

と展開すると以下が成り立つ：

(1) $\forall X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \in \mathfrak{X}(M)$[a] に対して[b],

$$\nabla^E_X e_{\alpha i} = X^\mu A_{\alpha a\mu} \big[\rho_*(T^a)\big]^j{}_i\, e_{\alpha j}$$

(2) $\forall X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \in \mathfrak{X}(M)$ および $\forall s \in \Gamma(E)$ に対して

$$\nabla^E_X s = X^\mu \left( \frac{\partial {\xi_\alpha}^i}{\partial x^\mu} + A_{\alpha a\mu} \big[\rho_*(T^a)\big]^i{}_j\, {\xi_\alpha}^j \right) e_{\alpha i}$$

ただし，$\forall x \in U_\alpha$ に対して $s(x) =: s_\alpha(x) \times_\rho \xi_\alpha(x) = s_\alpha(x) \times_\rho \xi_\alpha(x)^i e_i = \xi_\alpha(x)^i e_{\alpha i}(x)$ と展開した．

[a] 厳密には $X \in \mathfrak{X}(U_\alpha)$ であるが，これを 1 の分割を使って拡張したと思えば良い．

[b] $\big[\rho_*(T^a)\big]^j{}_i$ というのは，線形変換 $\rho_*(T^a) \in \mathfrak{gl}(V)$ の，$V$ の基底 $e_i$ による表現行列の $(j,\, i)$ 成分という意味である．

**証明** $\forall p \in U_\alpha$ を 1 つ固定する．

(1) $C^\infty$ 曲線 $\gamma\colon [0,\, 1] \longrightarrow M$ であって，$\gamma(0) = p,\ \dot{\gamma}(0) = X_p$ を充たすものをとる．$\gamma$ の像は $U_\alpha$ に含まれているとし[*47]，$\gamma$ の水平持ち上げを

$$\tilde{\gamma}(t) =: s_\alpha\big(\gamma(t)\big) \blacktriangleleft g_\alpha(t)$$

と書く．ただし補題 2.7 と同様に新しい $C^\infty$ 曲線 $g_\alpha\colon U_\alpha \longrightarrow G$ を $g_\alpha := \mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\alpha \circ \tilde{\gamma}$ により定義した．

[*47] $\gamma([0,\, 1]) \subset M$ はコンパクト集合なので，有限個の点で区切ればこの要請を充たすことができる．

局所切断 $e_{\alpha i}$ の共変微分を求める．

$$\begin{aligned} e_{\alpha i}\big(\gamma(t)\big) &= s_\alpha\big(\gamma(t)\big) \times_\rho e_i \\ &= \Big(s_\alpha\big(\gamma(t)\big) \blacktriangleleft g_\alpha(t)\Big) \times_\rho \rho\big(g_\alpha(t)^{-1}\big)\big(e_i\big) \\ &= \tilde{\gamma}(t) \times_\rho \rho\big(g_\alpha(t)^{-1}\big)\big(e_i\big) \end{aligned}$$

であるから，定理 2.9 より

$$(\nabla^E_X e_{\alpha i})|_p = \tilde{\gamma}(0) \times_\rho \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho\big(g_\alpha(t)^{-1}\big)\big(e_i\big)$$

ここで $L^{(v)} \colon G \longrightarrow V,\ g \longrightarrow \rho(g)(v)$ を使って $\rho\big(g_\alpha(t)^{-1}\big)\big(e_i\big) = L^{(e_i)} \circ {}^{-1} \circ g_\alpha(t)$ と書けるので，

$$\begin{aligned} &\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho\big(g_\alpha(t)^{-1}\big)\big(e_i\big) \\ &= T_0(L^{(e_i)} \circ {}^{-1} \circ g_\alpha)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right) \\ &= T_{g_\alpha(0)^{-1}}(L^{(e_i)}) \circ T_{g_\alpha(0)}({}^{-1})\big(\dot{g_\alpha}(0)\big) \\ &= -T_{g_\alpha(0)}(L^{(e_i)} \circ \mathcal{L}_{g_\alpha(0)^{-1}} \circ \mathcal{R}_{g_\alpha(0)^{-1}})\big(\dot{g_\alpha}(0)\big) \\ &= -\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho\big(g_\alpha(0)^{-1} g_\alpha(t) g_\alpha(0)^{-1}\big)\big(e_i\big) \\ &= -\rho\big(g_\alpha(0)^{-1}\big) \circ \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho\big(g_\alpha(t)\big)\right) \circ \rho\big(g_\alpha(0)^{-1}\big)\big(e_i\big) \\ &= -\rho\big(g_\alpha(0)^{-1}\big) \circ \Big(T_{g_\alpha(0)}\rho\big(\dot{g_\alpha}(0)\big)\Big) \circ \rho\big(g_\alpha(0)^{-1}\big)\big(e_i\big) \\ &= \rho\big(g_\alpha(0)^{-1}\big) \circ \Big(T_{g_\alpha(0)}\rho \circ T_{1_G}\mathcal{R}_{g(0)}\big(A_\alpha|_{\gamma(0)}(X)\big)\Big) \circ \rho\big(g_\alpha(0)^{-1}\big)\big(e_i\big) && \because \text{ 補題 } 2.7 \\ &= \rho\big(g_\alpha(0)^{-1}\big) \circ \rho_*\big(A_\alpha|_{\gamma(0)}(X_p)\big)\big(e_i\big) && \because \text{ 補題 } 2.7 \end{aligned}$$

である[*48]から，

$$\begin{aligned} (\nabla^E_X e_{\alpha i})|_p &= \big(\tilde{\gamma}(0) \blacktriangleleft g_\alpha(0)^{-1}\big) \times_\rho \rho_*\big(A_\alpha|_{\gamma(0)}(X)\big)\big(e_i\big) \\ &= s_\alpha\big(\gamma(0)\big) \times_\rho \rho_*\big(A_\alpha|_p(X)\big)\big(e_i\big) \end{aligned}$$

---

*48

$$\begin{aligned} 0 &= T_g(\mu \circ (\mathrm{id}_G \times {}^{-1}) \circ \Delta)(X) \\ &= T_g(\mu \circ \mathrm{inj}_1^{g^{-1}})(X) + T_g(\mu \circ \mathrm{inj}_2^{g} \circ {}^{-1})(X) \\ &= T_g(\mathcal{R}_{g^{-1}})(X) + T_{g^{-1}}(\mathcal{L}_g) \circ T_g({}^{-1})(X) \end{aligned}$$

より

$$T_g({}^{-1}) = -T_g(\mathcal{L}_{g^{-1}} \circ \mathcal{R}_{g^{-1}})$$

が分かった．特にチャート $(U_\alpha(x^\mu))$ において $A_\alpha = A_{\alpha a \mu}\,\mathrm{d}x^\mu\,T^a$，$X = X^\mu(p)\ \frac{\partial}{\partial x^\mu}\big|_p$ と展開すると

$$
\begin{aligned}
(\nabla^E_X e_{\alpha i})|_p &= s_\alpha\bigl(\gamma(0)\bigr) \times_\rho X^\nu(p) A_{\alpha a\mu}(p)\,\mathrm{d}x^\mu\,|_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p\right) \rho_*(T^a)(e_i) \\
&= s_\alpha\bigl(\gamma(0)\bigr) \times_\rho X^\nu(p) A_{\alpha a\mu}(p) \delta^\mu_\nu \rho_*(T^a)(e_i) \\
&= s_\alpha\bigl(\gamma(0)\bigr) \times_\rho X^\mu(p) A_{\alpha a\mu}(p) \bigl[\,\rho_*(T^a)\,\bigr]^j{}_i\, e_j \\
&= X^\mu(p) A_{\alpha a\mu}(p) \bigl[\,\rho_*(T^a)\,\bigr]^j{}_i\, e_{\alpha j}|_p
\end{aligned}
$$

と成分表示が求まった．

(2) 一般の切断 $s \in \Gamma(E)$ の共変微分を求める．$U_\alpha$ 上で $s(x) = s_\alpha(x) \times_\rho \xi_\alpha(x) = s_\alpha(x) \times_\rho \xi_\alpha(x)^i e_i = \xi_\alpha(x)^i e_{\alpha i}(x)$ と展開できるので，ベクトル束上の共変微分の定義より

$$
\begin{aligned}
\nabla^E_X s &= \nabla^E s(X) \\
&= \mathrm{d}\xi_\alpha{}^i\,(X) \otimes e_{\alpha i} + \xi_\alpha{}^i \nabla^E e_{\alpha i}(X) \\
&= X^\nu \frac{\partial \xi_\alpha{}^i}{\partial x^\mu}\,\mathrm{d}x^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) e_{\alpha i} + \xi_\alpha{}^i X^\mu A_{\alpha a\mu} \bigl[\,\rho_*(T^a)\,\bigr]^j{}_i\, e_{\alpha j} \\
&= X^\mu \left( \frac{\partial \xi_\alpha{}^i}{\partial x^\mu} + A_{\alpha a\mu} \bigl[\,\rho_*(T^a)\,\bigr]^i{}_j \xi_\alpha{}^j \right) e_{\alpha i}
\end{aligned}
$$

と計算できる．

■

定理 2.10-(2) において，特に $X$ として座標ベクトル場 $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ をとると

$$
\nabla^E_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} e_{\alpha i} = A_{\alpha a\mu} \bigl[\,\rho_*(T^a)\,\bigr]^j{}_i\, e_{\alpha j}
$$

となり，ゲージ場の成分 $A_{\alpha a\mu}\bigl[\,\rho_*(T^a)\,\bigr]^j{}_i$ が Riemann 幾何学における Christoffel 記号と同等の働きをすることが分かる．

### 2.4.10　同伴ベクトル束上の曲率とその局所表示

この小節ではまず一般のベクトル束上の曲率を大域的な形で定義し，同伴ベクトル束上の接続との関係を議論する．そして同伴ベクトル束上の曲率の局所表示が，主束上の曲率の局所表示と同一のものであることを確認する．

**定義 2.20: ベクトル束上の曲率**

- ベクトル束 $V \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$
- ベクトル束 $E$ 上の接続 $\nabla^E \colon \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(M;\, E)$

を与える．ベクトル束 $E$ 上の**曲率** (curvature) とは，

$$
R^\nabla := \mathrm{d}^{\nabla^E} \circ \nabla^E \colon \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^2(M;\, E)
$$

のこと．

**命題 2.14: 曲率の $C^\infty(M)$ 線形性**

$\forall f \in C^\infty(M),\ \forall s \in \Gamma(E)$ に対して

$$R^{\nabla^E}(fs) = f\,R^{\nabla^E}(s)$$

が成り立つ．

**証明** ベクトル束上の接続の定義から

$$\begin{aligned} R^{\nabla^E}(fs) &= \mathrm{d}^{\nabla^E}\big(\mathrm{d}f \otimes s + f\,\nabla^E s\big) \\ &= \cancel{\mathrm{d}^2 f} \otimes s - \mathrm{d}f \wedge \nabla^E s + \mathrm{d}^{\nabla^E}\big(f\,\nabla^E s\big) \\ &= \cancel{-\,\mathrm{d}f \wedge \nabla^E s + \mathrm{d}f \wedge \nabla^E s} + f\,\mathrm{d}^{\nabla^E}(\nabla^E s) \\ &= f\,R^{\nabla^E}(s) \end{aligned}$$

が分かる[*49]． ■

この結果から，

$$R^{\nabla^E} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E),\ s \longmapsto \big(p \longmapsto R^{\nabla^E}(s)(p)\big)$$

と見做すとこれが $C^\infty(M)$-線形写像になっている．このようなとき，End 束 $\mathrm{End}(E) := \coprod_{p\in M} \mathrm{End}(E_p)$ の $C^\infty$ 切断 $\underline{R^{\nabla^E}} \in \Gamma\big(\bigwedge^2 T^*M \otimes \mathrm{End}(E)\big)$ であって，

$$R^{\nabla^E}(s)(p) = \underline{R^{\nabla^E}}(p)\big(s(p)\big)$$

を充たすものが存在することが分かる[*50]．そのため，この $\underline{R^{\nabla^E}}$ と同一視して $R^{\nabla^E} \in \Omega^2\big(\mathrm{End}(E)\big)$ である

---

*49 $E$ の局所フレーム $e_i \in \Gamma(E)$ を使うと $\nabla^E s = (\nabla^E s)^i \otimes e_i$ w/ $(\nabla^E s)^i \in \Omega^1(M)$ と書けるので，ベクトル束上の接続の定義から

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^{\nabla^E}\big(f\,\nabla^E s\big) &= \mathrm{d}\big(f\,(\nabla^E s)^i\big) \otimes e_i - f\,(\nabla^E s)^i \wedge \nabla^E e_i \\ &= \mathrm{d}f \wedge \nabla^E s + f\,\mathrm{d}(\nabla^E s)^i \otimes e_i - f\,(\nabla^E s)^i \wedge \nabla^E e_i \\ &= \mathrm{d}f \wedge \nabla^E s + f\,\mathrm{d}^{\nabla^E}(\nabla^E s) \end{aligned}$$

だとわかる．

*50 $\forall p \in M$ を 1 つ固定し，$s \in \Gamma(E)$ であって $s(p) = 0$ を充たすものをとる．$p$ の開近傍（特に，局所自明性を充たすもの）$p \in U \subset M$ とその上の局所フレーム $(e_i)$ をとる．このとき $U$ 上では $s = s^i e_i$ と展開できる．ところで，多様体のパラコンパクト性から $p \in \overline{V} \subset U$ を充たす $p$ の開近傍 $V \subset M$ が存在するので，$M$ の開被覆 $\{U,\, M \setminus \overline{V}\}$ に従属する 1 の分割 $\{\psi_U,\, \psi_{M\setminus\overline{V}}\}$ をとることができる．特に $C^\infty$ 関数 $\psi_U : M \longrightarrow [0,\, 1]$ は

$$\psi_U(x) = \begin{cases} 1, & x \in \overline{V} \\ 0, & x \in M \setminus U \end{cases}$$

を充たす．よって $\tilde{e}_i := \psi_U\, e_i \in \Gamma(E)$, $\tilde{s}^i := \psi_U\, s^i \in C^\infty(M)$ である．したがって

$$s = s + \psi_U^2(s - s) = (1 - \psi_U^2)s + \tilde{s}^i \tilde{e}_i$$

が分かった．したがって $R^{\nabla^E}$ の $C^\infty$-線形性から

$$R^{\nabla^E}(s)(p) = \big(1 - \psi_U^2(p)\big)\,R^{\nabla^E}(s)(p) + \tilde{s}^i(p)\,R^{\nabla^E}(\tilde{e}_i)(p) = 0$$

が言えた．このことから，$\underline{R^{\nabla^E}} \in \Gamma\big(\mathrm{End}(E)\big)$ を，$\forall p \in M,\ \forall v \in E_p$ について

$$\underline{R^{\nabla^E}}(p)(v) := R^{\nabla^E}(s)(p) \quad \text{w/} \quad s \in \Gamma(E) \ \text{ s.t. } s\,(p) = v$$

と言う.

**定理 2.11: 同伴ベクトル束上の曲率の表示**

$$R^{\nabla^E} = \sharp^{-1} \circ \rho_*(\Omega) \circ \sharp$$

<u>**証明**</u> (1)

$$\begin{aligned}
R^{\nabla^E} &= \sharp^{-1} \circ D^2 \circ \sharp \\
&= \sharp^{-1} \circ \big(\mathrm{d} + \rho_*(\omega)\wedge\big) \circ \big(\mathrm{d} + \rho_*(\omega)\big) \circ \sharp \\
&= \sharp^{-1} \circ \big(\cancel{\mathrm{d}^2} + \rho_*(\omega) \wedge \mathrm{d} + \mathrm{d}\big(\rho_*(\omega)\big) + \rho_*(\omega) \wedge \rho_*(\omega)\big) \circ \sharp
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\big(\rho_*(\omega)(\sharp s)\big) &= \mathrm{d}\big(\rho_*(\omega_a T^a)(\sharp s)\big) \\
&= \mathrm{d}\big(\omega_a\, \rho_*(T^a)(\sharp s)\big) \\
&= \mathrm{d}\omega_a\ \rho_*(T^a)(\sharp s) - \omega_a \wedge \rho_*(T^a)\, \mathrm{d}(\sharp s) \\
&= \rho_*(\mathrm{d}\omega)(\sharp s) - \rho_*(\omega) \wedge \mathrm{d}(\sharp s)
\end{aligned}$$

なので,

$$R^{\nabla^E} = \sharp \circ \big(\rho_*(\mathrm{d}\omega) + \rho_*(\omega) \wedge \rho_*(\omega)\big) \circ \sharp$$

さらに

$$\begin{aligned}
\rho_*(\omega) \wedge \rho_*(\omega)(\sharp s) &= \omega_a \wedge \omega_b \rho_*(T^a)\big(\rho_*(T^b)(\sharp s)\big) \\
&= \frac{1}{2}\omega_a \wedge \omega_b \Big(\rho_*(T^a) \circ \rho_*(T^b) - \rho_*(T^b) \circ \rho_*(T^a)\Big)(\sharp s) \\
&= \frac{1}{2}\omega_a \wedge \omega_b \big[\rho_*(T^a), \rho_*(T^b)\big](\sharp s) \\
&= \frac{1}{2}\omega_a \wedge \omega_b \rho_*(\big[T^a, T^b\big])(\sharp s) \\
&= \frac{1}{2}\rho_*([\omega, \omega])(\sharp s)
\end{aligned}$$

であるから

$$R^{\nabla^E} = \sharp^{-1} \circ \rho_*(\Omega) \circ \sharp$$

が分かった.

■

と定義すると well-defiend である.

**定理 2.12: 同伴ベクトル束上の曲率の局所表示**

定理 2.10 と同様の記号を使って以下が成り立つ：

(1)

$$R^{\nabla^E} e_{\alpha i} = F_{\alpha a} \big[ \rho_*(T^a) \big]^j{}_i \otimes e_{\alpha j}$$

(2) $\forall s = \xi_\alpha{}^i e_{\alpha i}$ に対して

$$R^{\nabla^E} s = F_{\alpha a} \big[ \rho_*(T^a) \big]^j{}_i \xi_\alpha{}^i \otimes e_{\alpha j}$$

**証明**　(1) 定理 2.10 およびベクトル束上の共変外微分の定義より，

$$\begin{aligned}
R^{\nabla^E} e_{\alpha i} &= \mathrm{d}^{\nabla^E} \Big( \big[ \rho_*(A_\alpha) \big]^j{}_i \otimes e_{\alpha j} \Big) \\
&= \Big[ \mathrm{d}\big( \rho_*(A_\alpha) \big) \Big]^j{}_i - \big[ \rho_*(A_\alpha) \big]^j{}_i \wedge \nabla^E e_{\alpha j} \\
&= \big[ \rho_*(\mathrm{d}A_\alpha) \big]^j{}_i \otimes e_{\alpha j} - \big[ \rho_*(A_\alpha) \big]^j{}_i \wedge \big[ \rho_*(A_\alpha) \big]^k{}_j e_{\alpha k} \\
&= \big[ \rho_*(\mathrm{d}A_\alpha) \big]^j{}_i \otimes e_{\alpha j} - A_{\alpha a} \wedge A_{\alpha b} \big[ \rho_*(T^b) \big]^k{}_j \big[ \rho_*(T^a) \big]^j{}_i e_{\alpha k} \\
&= \big[ \rho_*(\mathrm{d}A_\alpha) \big]^j{}_i \otimes e_{\alpha j} + A_{\alpha a} \wedge A_{\alpha b} \big[ \rho_*(T^a) \circ \rho_*(T^b) \big]^k{}_i e_{\alpha k} \\
&= F_{\alpha a} \big[ \rho_*(T^a) \big]^j{}_i \otimes e_{\alpha j}
\end{aligned}$$

(2) 命題 2.14 より $R^{\nabla^E}$ は $C^\infty(M)$-線形なので明らか.

■

### 2.4.11　ホロノミー

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ を与える．任意の $x \in M$ に対して

$$\Omega_x := \big\{ \gamma \colon [0,\, 1] \longrightarrow M \;\big|\; \text{区分的} C^\infty \text{曲線},\ \gamma(0) = \gamma(1) \big\}$$

とおく.

**命題 2.15: ホロノミー**

- $\omega \in \Omega^1(P;\,\mathfrak{g})$ を接続形式とする．
- $x \in M$
- $u \in \pi^{-1}(\{x\})$

を与え，写像 $\Phi_u \colon \Omega_x \longrightarrow G$ を

$$\tilde{\gamma}(1) =: \tilde{\gamma}(0) \blacktriangleleft \Phi_u(\gamma) \quad {}^{\mathrm{w}/} \quad \tilde{\gamma}(0) = u$$

で定義する．このとき以下が成り立つ：

(1) $\forall h \in G$ に対して

$$\Phi_{u \blacktriangleleft h}(\gamma) = h^{-1}\Phi_u(\gamma)h$$

(2) $\gamma_1,\,\gamma_2 \in \Omega_x$ に対して

$$\Phi_u(\gamma_1 * \gamma_2) = \Phi_u(\gamma_2)\Phi_u(\gamma_1)$$

ただし $*$ は道の積である．

**証明** (1) 命題 2.10 より $\tilde{\gamma} \blacktriangleleft h$ は $u \blacktriangleleft h$ を始点とする $\gamma$ の水平持ち上げであるから，

$$(u \blacktriangleleft h) \blacktriangleleft \Phi_{u \blacktriangleleft h}(\gamma) = \tilde{\gamma}(1) \blacktriangleleft h = \bigl(u \blacktriangleleft \Phi_u(\gamma)\bigr) \blacktriangleleft h = u \blacktriangleleft h \blacktriangleleft \bigl(h^{-1}\Phi_u(\gamma)h\bigr)$$

(2) 命題 2.10 より $\tilde{\gamma_2} \blacktriangleleft \Phi_u(\gamma_1)$ は $\tilde{\gamma_1}(1) = u \blacktriangleleft \Phi_u(\gamma_1)$ を始点，$u \blacktriangleleft \Phi_u(\gamma_2)\Phi_u(\gamma_1)$ とする $\gamma_2$ の水平持ち上げであるから，水平持ち上げの一意性から

$$u \blacktriangleleft \Phi_u(\gamma_1 * \gamma_2) = u \blacktriangleleft \Phi_u(\gamma_2)\Phi_u(\gamma_1)$$

が成り立つ．

■

**定義 2.21: ホロノミー群**

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ とその接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\,\mathfrak{g})$ を与える．$\forall u \in P$ に対して，命題 2.15 より $G$ の部分集合

$$\mathrm{Hol}_u(P,\,\omega) \coloneqq \Phi_u(\Omega_{\pi(u)})$$

は部分群をなす．この部分群のことを**ホロノミー群** (holonomy group) と呼ぶ．

### 2.4.12 ゲージ理論

## 2.5　特性類と Chern-Simons 形式

### 2.5.1　Lie 代数上の不変多項式

$V$ を有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間，$V^*$ をその双対空間とする．$V$ の基底 $\{e_1, \ldots, e_{\dim V}\} \subset V$ とその双対基底 $\{\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^{\dim V}\} \subset V^*$ をとる．

**定義 2.22: $V$ 上の多項式**

- 対称化テンソル積

$$\mathrm{Sym}^k(V^*) \coloneqq (V^*)^{\otimes k} / \langle v \otimes w - w \otimes v | v,\, w \in V^* \rangle$$

の元のことを ***V* 上の $k$ 次多項式**と呼ぶ．

- 対称化テンソル代数[a]

$$\bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathrm{Sym}^k(V^*)$$

の元のことを ***V* 上の多項式**と呼ぶ．

[a] ベクトル空間の直和なので，その元は $k$ 次多項式の有限和である．

関数 $f \colon V \longrightarrow \mathbb{K}$ が $V$ 上の $k$-次多項式である必要十分条件は

$$f = f_{i_1 \ldots i_k} \varepsilon^{i_1} \cdots \varepsilon^{i_k}$$

の表示を持つことである．

**【例 2.5.1】** Tr と det

$V = \mathrm{M}(n, \mathbb{K})$ とする．$V$ の基底として行列単位 ${e_i}^j$ をとる．このとき，関数

$$\mathrm{Tr} \colon V \longrightarrow \mathbb{K},\ {v^i}_j {e_i}^j \longmapsto {v^i}_i$$

は

$$\mathrm{Tr}(v) = \mathrm{Tr}\big({v^i}_j {e_i}^j\big) = {v^i}_i = {v^l}_j \delta_i^j \delta_l^i = {v^l}_j {\varepsilon^i}_i({e_l}^j) = {\varepsilon^i}_i(v)$$

を充たすので 1 次多項式である．一方，

$$\det \colon V \longrightarrow \mathbb{K},\ {v^i}_j {e_i}^j \longmapsto \epsilon_{i_1,\, \ldots,\, i_n} {v^{i_1}}_1 \cdots {v^{i_n}}_n$$

は

$$\begin{aligned}\det(v) &= \det\left(v^i{}_j e_i{}^j\right) \\ &= \epsilon_{i_1\dots i_n} v^{i_1}{}_1 \cdots v^{i_n}{}_n \\ &= \epsilon_{i_1\dots i_n} v^{j_1}{}_{l_1} \cdots v^{j_n}{}_{l_n} \delta^{i_1}_{j_1}\delta^{l_1}_1 \cdots \delta^{i_n}_{j_n}\delta^{l_n}_n \\ &= \epsilon_{i_1\dots i_n} v^{j_1}{}_{l_1} \cdots v^{j_n}{}_{l_n} \varepsilon^{i_1}{}_1(e_{j_1}{}^{l_1}) \cdots \varepsilon^{i_n}{}_n(e_{j_n}{}^{l_n}) \\ &= \epsilon_{i_1\dots i_n} \varepsilon^{i_1}{}_1(v) \cdots \varepsilon^{i_n}{}_n(v)\end{aligned}$$

を充たすので $n$ 次多項式である．

**定義 2.23: 不変多項式**

Lie 群 $G$ の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ を与える．多項式 $f\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}$ が **Ad($G$)-不変**であるとは，$\forall g \in G$, $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して

$$f\left(\mathrm{Ad}(g)(X)\right) = f(X)$$

が成り立つことをいう．

$\mathrm{Ad}(G)$-不変多項式全体の集合を $\mathbf{Inv}(\mathfrak{g})$ と書く．$\mathrm{Inv}(\mathfrak{g})$ は結合代数である．

### 2.5.2 Chern-Weil 理論

- Lie 群 $G$ の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とその基底 $T^a$
- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$
- 接続形式 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$
- 曲率形式 $\Omega \in \Omega^2(P; \mathfrak{g})$

を与える．$T^a$ の双対基底を $\tau_a$ とおく．曲率形式を $T^a$ で展開して $\Omega = \Omega_a T^a$ と書く．$k$ 次多項式 $f\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ が基底 $\{T^a\}$ に関して $f = f^{a_1\dots a_{\dim G}} \tau_{a_1} \cdots \tau_{a_{\dim G}}$ の表示を持つとき，$f$ への $\Omega$ の代入 $f(\Omega) \in \Omega^{2k}(P)$ を

$$f(\Omega) \coloneqq f^{a_1\dots a_{\dim G}} \Omega_{a_1} \wedge \cdots \wedge \Omega_{a_{\dim G}}$$

で定義する．この定義は $\mathfrak{g}$ の基底の取り方によらない．

**定理 2.13: Chern-Weil の定理**

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$
- 接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$
- 曲率形式 $\Omega \in \Omega^2(P;\, \mathfrak{g})$
- $k$ 次不変多項式 $f\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$

を与える．このとき以下が成り立つ：

(1) ある $\Lambda \in \Omega^{2k}(M)$ が存在して $f(\Omega) = \pi^*\Lambda$ を充たす．

(2) (1) の $\Lambda$ は閉形式である．i.e. $\mathrm{d}\Lambda = 0$

(3) de Rham コホモロジー類 $[\Lambda] \in H^{2k}_{\mathrm{dR}}(M)$ は $\omega$ の取り方によらない．したがって結合代数の準同型（**Chern-Weil 準同型**）

$$w\colon \mathrm{Inv}(\mathfrak{g}) \longrightarrow H^{\bullet}_{\mathrm{dR}}(M),\ f \longmapsto [\Lambda]$$

が定まる．

**証明** (1) まず，補題を用意する．

---

**補題 2.9:**

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$
- 有限次元ベクトル空間 $V$

を与える．このとき，$\forall \psi \in \Omega^k(P;\, V)$ に対して以下の 2 つは同値である：

(a) ある $\phi \in \Omega^k(M;\, V)$ が存在して $\psi = \pi^*\phi$ を充たす．

(b) $\psi$ は水平かつ $R_g^*\psi = \psi$ を[a]充たす．

[a] i.e. $\psi$ は右不変である．

**証明** 自明表現 $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V),\ g \longmapsto \mathbb{1}_V$ をとる．このとき主束 $P$ の $\rho$ による同伴ベクトル束 $V \hookrightarrow P \times_\rho V \xrightarrow{q} M$ は自明束 $V \hookrightarrow M \times V \xrightarrow{\mathrm{proj}_1} M$ に束同型であるから[*51]，$\Omega^k(M;\, P \times_\rho V) = \Omega^k(M;\, V)$ である．特に，$\forall u \in P$ に対して補題 2.3 で構成したベクトル空間の同型写像 $f_u\colon V \longmapsto q^{-1}(\{u\}),\ v \longmapsto u \times_\rho v$ は恒等写像になるので，命題 2.9 で構成した同型写像は

$$\sharp\colon \Omega^k(M;\, P \times_\rho V) = \Omega^k(M;\, V) \longrightarrow \Omega^k_\rho(P;\, V),\ \phi \longmapsto \pi^*\phi$$

になる．さらに，tensorial form of type $\rho$ の定義から，$\forall \psi \in \Omega^k_\rho(P;\, V)$ は水平でかつ $\forall g \in G$ に対して $R_g^*\psi = \rho(g^{-1})(\psi) = \psi$ を充たす． ■

---

[*51] 具体的には，写像 $P \times_\rho V \longrightarrow M \times V,\ u \times_\rho v \longmapsto (\pi(u),\, v)$ が束同型写像を与える．

補題 2.9 より，$f(\Omega) \in \Omega^{2k}(P)$ が水平かつ右不変であることを示せば良い．Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底 $T^a$ を 1 つ固定し，$\Omega = \Omega_a T^a$ と展開する．

**水平**

$\Omega \in \Omega^2_{\mathrm{Ad}}(P;\, \mathfrak{g})$ なので $\Omega_a \in \Omega^2(P)$ もまた水平である．

**右不変**

$\Omega \in \Omega^2_{\mathrm{Ad}}(P;\, \mathfrak{g})$ なので，$\forall g \in G$ に対して

$$\begin{aligned}
& R_g^* \Omega = \mathrm{Ad}(g^{-1})(\Omega) \\
\iff\quad & R_g^*(\Omega_a T^a) = (R_g^* \Omega_a) T^a = \left[\mathrm{Ad}(g^{-1})(\Omega)\right]_a T^a \\
\implies\quad & R_g^* \Omega_a = \left[\mathrm{Ad}(g^{-1})(\Omega)\right]_a \quad (1 \leq \forall a \leq \dim G)
\end{aligned}$$

が言える．よって $f$ の $\mathrm{Ad}(G)$-不変性から

$$\begin{aligned}
R_g^*\bigl(f(\Omega)\bigr) &= f^{a_1 \cdots a_k} R_g^* \Omega_{a_1} \wedge \cdots \wedge R_g^* \Omega_{a_k} \\
&= f^{a_1 \cdots a_k} \left[\mathrm{Ad}(g^{-1})(\Omega)\right]_{a_1} \wedge \cdots \wedge \left[\mathrm{Ad}(g^{-1})(\Omega)\right]_{a_k} \\
&= f\bigl(\mathrm{Ad}(g^{-1})(\Omega)\bigr) \\
&= f(\Omega)
\end{aligned}$$

が示された．

(2) $\pi_* \colon T_u P \longrightarrow T_u M$ は全射なので $\pi^* \colon \Omega^\bullet(M) \longrightarrow \Omega^\bullet(P)$ は単射．よって

$$\pi^*(\mathrm{d}\Lambda) = 0 \quad\iff\quad \mathrm{d}\bigl(f(\Omega)\bigr) = 0$$

を示せば十分である．ところで主束上の共変微分の定義および (1) から，

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}\bigl(f(\Omega)\bigr) &= \mathrm{d}\bigl(f(\Omega)\bigr) \circ \mathrm{H} \\
&= \mathrm{d}(\pi^* \Lambda) \circ \mathrm{H} \\
&= \pi^* \,\mathrm{d}\Lambda \circ \mathrm{H} \\
&= \mathrm{d}\Lambda \circ \pi_* \circ \mathrm{H} \\
&= \mathrm{d}\Lambda \circ \pi_* \\
&= \pi^* \,\mathrm{d}\Lambda \\
&= \mathrm{d}(\pi^* \Lambda) \\
&= \mathrm{d}\bigl(f(\Omega)\bigr)
\end{aligned}$$

が言える．一方で

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}\bigl(f(\Omega)\bigr) &= f^{a_1 \cdots a_k} \mathrm{D}(\Omega_{a_1} \wedge \cdots \wedge \Omega_{a_k}) \\
&= f^{a_1 \cdots a_k} \sum_{j=1}^{k} \Omega_{a_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{D}\Omega_{a_j} \wedge \cdots \wedge \Omega_{a_k} \\
&= 0 \qquad \because \quad \text{Bianchi の第 2 恒等式}
\end{aligned}$$

である．

(3) $P$ 上の 2 つの接続形式 $\omega_0, \omega_1 \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$ を与える．このとき $\forall t \in [0,\, 1]$ に対して，$C^\infty$ 写像 $\mathrm{proj}_1 \colon P \times [0,\, 1] \longrightarrow P$ を使って $\tilde{\omega} \in \Omega^1(P \times I;\, \mathfrak{g})$ を

$$\tilde{\omega}_{(u,\, t)} \coloneqq (1-t)\,(\mathrm{proj}_1^* \omega_0)_{(u,\, t)} + t\,(\mathrm{proj}_1^* \omega_1)_{(u,\, t)}$$

は主束 $G \hookrightarrow P\times[0,\,1] \xrightarrow{\pi\times\mathrm{id}} M\times[0,\,1]$ の接続形式である．さらに，$i_t \coloneqq P \longrightarrow P\times[0,\,1],\ u \longmapsto (u,\,t)$ について $i_0^*\tilde{\omega} = \omega_0,\ i_1^*\tilde{\omega} = \omega_1$ が成り立つ． $\tilde{\omega}$ の曲率 $\tilde{\Omega} \in \Omega^2(P\times[0,\,1];\,\mathfrak{g})$ を

$$\tilde{\Omega} \coloneqq \mathrm{d}\tilde{\omega} + \frac{1}{2}[\tilde{\omega}, \tilde{\omega}]$$

により定めると $i_0^*\tilde{\Omega} = \Omega_1,\ i_1^*\tilde{\Omega} = \Omega_1$ が成り立つ．
ところで，Ad$(G)$-不変 $k$ 次多項式 $f$ について

$$i_0^* f(\tilde{\Omega}) = f(\Omega_0), \quad i_1^* f(\tilde{\Omega}) = f(\Omega_1)$$

が成り立つ． $i_0,\,i_1$ は互いにホモトピックなので，de Rham コホモロジーのホモトピー不変性から

$$[f(\Omega_0)] = [i_0^* f(\tilde{\Omega})] = [i_1^* f(\tilde{\Omega})] = [f(\Omega_1)]$$

が分かった．さらに，de Rham コホモロジーは反変関手なので

$$\pi^*[\Lambda_0] = [\pi^*\Lambda_0] = [f(\Omega_0)] = [f(\Omega_1)] = [\pi^*\Lambda_1] = \pi^*[\Lambda_1]$$

がわかる． $\pi^*$ の単射性から $[\Lambda_0] = [\Lambda_1]$ が言えた．

■

**定義 2.24: 特性類**

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$
- 接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\,\mathfrak{g})$
- 曲率形式 $\Omega \in \Omega^2(P;\,\mathfrak{g})$
- $k$ 次不変多項式 $f\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$

を与える．このとき定理 2.13 の $[\Lambda] \in H^{2k}_{\mathrm{dR}}(M)$ のことを，$f$ による $P$ の**特性類** (characteristic class) と呼ぶ．

特性類はその定義から局所表示によらないが，それを顕に確認することができる． $\{s_\alpha\colon U_\alpha \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ を $P$ の勝手な局所切断とする．wedge 積と引き戻しは可換であることに注意すると，定理 2.13-(1) から

$$f(F_\alpha) = f(s_\alpha^*\Omega) = s_\alpha^* f(\Omega) = s_\alpha^*\pi^*\Lambda = (\pi\circ s_\alpha)^*\Lambda = \Lambda|_{U_\alpha} \in \Omega^{2k}(U_\alpha)$$

だと分かる．一方，定理 2.8 および $f$ の Ad$(G)$-不変性から，他の $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ を充たす $\beta \in A$ に対して左辺は

$$f(F_\alpha) = f\bigl(\mathrm{Ad}(t_{\alpha\beta})(F_\beta)\bigr) = f(F_\beta)$$

を充たす．このことから，もし場の強さ $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ から大域的な特性類 $\Lambda \in \Omega^{2k}(M)$ を復元したければ，ただ単に

$$\Lambda_x \coloneqq f(F_\alpha)|_x \ ^{\mathrm{w}/}\ x \in U_\alpha$$

とすれば良いことが分かる．この事実は，例えば特性類を積分する際に非常に有用である．

### 2.5.3　主束とベクトル束

定理 2.13 は主束に関して示したが，ベクトル束についても全く同じ議論ができる．勝手なベクトル束

$$V \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$$

を与えると，それに同伴する主束はフレーム束

$$\mathrm{GL}(V) \hookrightarrow \mathrm{Fr}(E) \xrightarrow{\varpi} M$$

である．逆に，フレーム束に同伴するベクトル束

$$V \hookrightarrow \mathrm{Fr}(E) \times_{\mathrm{id}} V \xrightarrow{\pi} M$$

は元のベクトル束と束同型である．主束 $\mathrm{Fr}(E)$ 上の接続形式 $\omega \in \Omega^1\bigl(\mathfrak{Fr}(E);\, \mathfrak{gl}(V)\bigr)$ がベクトル束 $E$ 上の接続 $\nabla^E \colon \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(M;\, E)$ を与えることは定理 2.5 で示した．実は逆が言えることも，これまでとほぼ同じ議論からわかる．

今，ベクトル束 $E$ 上の接続 $\nabla^E \colon \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(M;\, E)$ が与えられたとする．このとき，開集合 $U \subset M$ 上の $E$ の局所フレーム $e := (e_1,\, \dots,\, e_{\dim V})$ に関する**接続行列** $\omega_e \colon \mathfrak{X}(U) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ を

$$\nabla^E_X e_i =: [\omega_e(X)]^j{}_i e_j$$

で定義する．そして $C^\infty$ 曲線 $\gamma\colon [0,\, 1] \longrightarrow M$ に沿った**平行切断** $s \in \Gamma(E)$ を

$$\nabla^E_{\dot{\gamma}(t)} s|_{\gamma(t)} = 0 \quad \forall t \in [0,\, 1]$$

で定義する．$\gamma([0,\, 1]) \subset U$ とすると $s = s^i e_i$ と展開できるので，これは

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla^E_{\dot{\gamma}(t)} s \\
&= \nabla^E(s^i e_i)|_{\gamma(t)}\bigl(\dot{\gamma}(t)\bigr) \\
&= \mathrm{d}s^i\,|_{\gamma(t)}\bigl(\dot{\gamma}(t)\bigr) \otimes e_i|_{\gamma(t)} + s^i\bigl(\gamma(t)\bigr)[\omega_e(\dot{\gamma}(t))]^j{}_i e_j|_{\gamma(t)} \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}(s^i \circ \gamma)}{\mathrm{d}t} + s^j\bigl(\gamma(t)\bigr)[\omega_e(\dot{\gamma}(t))]^i{}_j\right) \otimes e_i|_{\gamma(t)} \\
\iff \quad & \frac{\mathrm{d}(s^i \circ \gamma)}{\mathrm{d}t} + s^j\bigl(\gamma(t)\bigr)[\omega_e(\dot{\gamma}(t))]^i{}_j = 0
\end{aligned}$$

を意味し，常微分方程式の解の存在と一意性から $s$ は一意に決まる．$\gamma$ の $\mathrm{Fr}(E)$ への**水平持ち上げ** $\tilde{\gamma}\colon [0,\, 1] \longrightarrow \mathrm{Fr}(E)$ を，$\tilde{\gamma}(t) =: \Bigl(\gamma(t),\, \bigl(\eta_1 \circ \gamma(t),\, \dots,\, \eta_{\dim V} \circ \gamma(t)\bigr)\Bigr) \in \mathrm{Fr}(E)_{\gamma(t)}$ で定義した $\eta_i \in \Gamma(E)$ が平行切断になっているものと定義する．そして $e \in \varpi^{-1}(\{x\})$ における**水平な接ベクトル** $v \in T_e(\mathrm{Fr}(E))$ を，ある $C^\infty$ 曲線 $\gamma\colon [0,\, 1] \longrightarrow M$ であって $\gamma(0) = x,\ \tilde{\gamma}(0) = e,\ \dot{\tilde{\gamma}}(0) = v$ を充たすものが存在することと定義するのである．

さて，ここで $E$ の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$，局所自明化 $\{\varphi_\alpha \colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times V\}_{\alpha \in \Lambda}$ を与える．そして $\mathrm{Fr}(E)$ の局所切断 $s_\alpha \colon U_\alpha \longrightarrow \varpi^{-1}(U_\alpha)$ を

$$s_\alpha(x) := \bigl(x,\, \bigl(\varphi_\alpha^{-1}(x,\, e_1),\, \dots,\, \varphi_\alpha^{-1}(x,\, e_{\dim V})\bigr)\bigr) =: \bigl(x,\, \bigl(s_{\alpha 1}(x),\, \dots,\, s_{\alpha \dim V}(x)\bigr)\bigr)$$

で定義しよう．【例 2.4.2】で議論した通り，このとき $\gamma([0,\, 1]) \subset U_\alpha$ だとすると，ある $C^\infty$ 曲線 $g_\alpha \colon [0,\, 1] \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ を使って

$$\tilde{\gamma}(t) =: s_\alpha\bigl(\gamma(t)\bigr) \blacktriangleleft g_\alpha(t)$$

と書けるので，水平持ち上げの初期条件が $\tilde{\gamma}(0) = s_\alpha(\gamma(0))$ だとすると補題 2.7 から

$$
\begin{aligned}
\dot{\tilde{\gamma}}(0) &= T_{s_\alpha(\gamma(0))}(R_{g_\alpha(0)}) \circ T_{\gamma(0)} s_\alpha\big(\dot{\gamma}(0)\big) + \big(\theta_{g_\alpha(0)}(\dot{g_\alpha}(0))\big)^{\#}|_{\tilde{\gamma}(0)} \\
&= T_{\gamma(0)} s_\alpha\big(\dot{\gamma}(0)\big) + \big(\dot{g_\alpha}(0)\big)^{\#}|_{\tilde{\gamma}(0)}
\end{aligned}
$$

がわかる．一方で水平切断の条件から

$$
\begin{aligned}
0 &= \nabla^E_{\dot{\gamma}(t)} \tilde{\gamma}_i(t) \\
&= \nabla^E_{\dot{\gamma}(t)} (s_j [g_\alpha(t)]^j{}_i) \\
&= [\dot{g_\alpha}(t)]^j{}_i s_j(\gamma(t)) + [g_\alpha(t)]^j{}_i \nabla^E_{\dot{\gamma}(t)} s_j|_{\gamma(t)}
\end{aligned}
$$

であるから，$t=0$ を代入して

$$
[\dot{g_\alpha}(0)]^j{}_i s_j(\gamma(0)) = -\nabla^E_{\dot{\gamma}(t)} s_j|_{\gamma(0)} = -[\omega_{s_\alpha}(\dot{\gamma}(0))]^j{}_i s_j(\gamma(0))
$$

i.e. $\dot{g_\alpha}(0) = -\omega_{s_\alpha}(\dot{\gamma}(0))$ と求まる．よって

$$
\dot{\tilde{\gamma}}(0) = T_{\gamma(0)} s_\alpha\big(\dot{\gamma}(0)\big) - \big(\omega_{s_\alpha}(\dot{\gamma}(0))\big)^{\#}|_{\tilde{\gamma}(0)} \tag{2.5.1}
$$

である．このため，$e \in \varpi^{-1}(\{x\})$ における水平な接ベクトル全体の集合を $H_e$ と書くと

$$
T_e\varpi \colon H_e \longrightarrow T_xM,\ \dot{\tilde{\gamma}}(0) \longmapsto \dot{\gamma}(0)
$$

がベクトル空間の同型写像であることが分かる．よって短完全列

$$
0 \longrightarrow \operatorname{Ker} T_e\varpi \longrightarrow T_eP \xrightarrow{T_e\varpi} T_xM \longrightarrow 0
$$

は分裂し，

$$
T_eP = H_e \oplus \operatorname{Ker} T_e\varpi
$$

が成り立つ．さらに $\forall g \in \mathrm{GL}(V)$ に対して，$\tilde{\gamma}(t) \blacktriangleleft g$ は明らかに $\gamma(t)$ の水平持ち上げだから，

$$
\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \tilde{\gamma}(t) \blacktriangleleft g = T_eR_g\big(\dot{\tilde{\gamma}}(0)\big) \in H_{e\blacktriangleleft g}
$$

であり，$H_{e\blacktriangleleft g} = T_eR_g(H_e)$ が分かる．以上の議論からベクトル束の接続 $\nabla^E$ が主束 $\mathrm{Fr}(E)$ の接続 $\{H_e\}_{e\in\mathrm{Fr}(E)}$ を与えることが分かった．よって定理 2.4 から対応する接続形式 $\omega \in \Omega^1\big(\mathrm{Fr}(E);\, \mathfrak{g}\big)$ が存在し，(2.5.1) より $\nabla^E$ の接続行列を $s_\alpha^*\omega(X) = \omega_{s_\alpha}(X)$ の形で再現する．

以上の議論により，特性類はベクトル束 $E$ の接続 $\nabla^E \colon \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(M;\, E)$ とそのフレーム束 $\mathrm{Fr}(E)$ の局所切断 $s_\alpha \colon U_\alpha \longrightarrow \varpi^{-1}\big(U_\alpha\big)$ が与えられたときに，$U_\alpha$ 上の**曲率行列** $\Omega_{s_\alpha} \colon \mathfrak{X}(U_\alpha) \times \mathfrak{X}(U_\alpha) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ を

$$
R^{\nabla^E}(X,\, Y) s_{\alpha i} =: [\, \Omega_{s_\alpha}(X,\, Y)\, ]^j{}_i\, s_{\alpha j}
$$

と定義した上で $\Omega_{s_\alpha} \in \Omega^2\big(U_\alpha;\, \mathfrak{gl}(V)\big)$ と見做せば，

$$
\Lambda \coloneqq f\big(\Omega_{s_\alpha}\big) \in \Omega^{2k}(M)
$$

として特性類が得られるのである．このことを踏まえて，特性類 $\Lambda$ のことをしばしば $\chi(E)$ とか $\chi(R^{\nabla^E})$ などと書く．後にホモトピー論的扱いをする際に，特性類をベクトル束に対応づけることが本質的であることがわかる．

### 2.5.4 不変多項式の代数構造

定理 2.13 による主束，もしくはベクトル束上の特性類の構成は，結局のところ与えられた構造群 $G$ に関して $\mathrm{Ad}(G)$-不変な多項式を見つける問題に帰着される．

今，$\mathbb{K}$ を任意の体としよう．そして集合

$$\mathrm{Fun}(\mathbb{K}^n,\,\mathbb{K}) \coloneqq \left\{\, f\colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K} \,\right\}$$

の上に $+,\,\cdot,\,\blacktriangleright$ を

$$\begin{aligned}(f+g)(x_1,\,\dots,\,x_n) &\coloneqq f(x_1,\,\dots,\,x_n)+g(x_1,\,\dots,\,x_n)\\ (f\cdot g)(x_1,\,\dots,\,x_n) &\coloneqq f(x_1,\,\dots,\,x_n)g(x_1,\,\dots,\,x_n)\\ (a\blacktriangleright f)(x_1,\,\dots,\,x_n) &\coloneqq af(x_1,\,\dots,\,x_n)\end{aligned}$$

と定義することで組 $\bigl(\mathrm{Fun}(\mathbb{K}^n,\,\mathbb{K}),\,+,\,\cdot,\,\blacktriangleright\bigr)$ を $\mathbb{K}$-結合代数と見做す．このとき，代入写像

$$\varepsilon\colon \mathbb{K}[t_1,\,\dots,\,t_n] \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathbb{K}^n,\,\mathbb{K}),\; P(t_1,\,\dots,\,t_n) \longmapsto \bigl((x_1,\,\dots,\,x_n) \longmapsto P(x_1,\,\dots,\,x_n)\bigr)$$

は $\mathbb{K}$-結合代数の準同型である．

**補題 2.10: 多項式の評価写像**

$\mathbb{K}$ が無限体ならば $\varepsilon$ は単射になる．

**証明** $\mathrm{Ker}\,\varepsilon = 0$ を示す．$\mathrm{Ker}\,\varepsilon \supset 0$ は自明．$\forall P \in \mathrm{Ker}\,\varepsilon$ をとると $P=0$ であることを $n$ に関する数学的帰納法により示す．$n=1$ のとき，$P$ は高々 $\deg P < \infty$ 個の根を持つが，$P \in \mathrm{Ker}\,\varepsilon$ より $\forall x \in \mathbb{K},\ P(x)=0$ なので $\deg P > 0$ だと矛盾．よって $P=0$ である．

次に，$n-1$ まで主張が示されているとする．このとき不定元 $t_n$ について項を整理することで，$P \in \mathrm{Ker}\,\varepsilon \subset \mathbb{K}[t_1,\,\dots,\,t_n]$ を $\mathbb{K}[t_1,\,\dots,\,t_{n-1}][t_n]$ の元と見做すことができる：

$$P(t_1,\,\dots,\,t_n) \eqqcolon \sum_{k=0}^{\deg P} \underbrace{P_k(t_1,\,\dots,\,t_{n-1})}_{\in\mathbb{K}[t_1,\,\dots,\,t_{n-1}]}(t_n)^k$$

$P \in \mathrm{Ker}\,\varepsilon$ なので，$n=1$ の場合の議論から $\forall (x_1,\,\dots,\,x_{n-1}) \in \mathbb{K}^{n-1}$ について 1 変数多項式 $\sum_{k=0}^{\deg P} P_k(x_1,\,\dots,\,x_{n-1})\,(t_n)^k = 0$, i.e. $\varepsilon\bigl(P_k(t_1,\,\dots,\,t_{n-1})\bigr) = 0$ である．よって帰納法の仮定から $P_k(t_1,\,\dots,\,t_{n-1}) = 0$, i.e. $P=0$ が言えた． ■

**補題 2.11: 係数体の拡大**

$\mathbb{K}$ を標数 0 の体とする．
このとき $P(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n] \subset \mathbb{K}[t_1, \dots, t_n]$ について[a]

$$\varepsilon\bigl(P(t_1, \dots, t_n)\bigr) = 0$$

ならば，任意の標数 0 の可換環[b] $R$ についても写像

$$R^n \longrightarrow R,\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto P(x_1, \dots, x_n)$$

はゼロ写像である．

[a] $\mathbb{K}$ の標数が 0 であることから単射になる体の準同型 $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{K},\ k \longmapsto k \cdot 1$ が誘導する $\mathbb{Z}$-代数の単射準同型 $\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n] \longrightarrow \mathbb{K}[t_1, \dots, t_n]$ によって $P(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{K}[t_1, \dots, t_n]$ と見做した．
[b] 乗法単位元 1 を持つ

<u>証明</u> $\mathbb{K}$ は無限体だから，補題 2.10 より $\mathbb{Z}$-係数多項式として $P(t_1, \dots, t_n) = 0$ である．ここで単射な環準同型 $\mathbb{Z} \longrightarrow R,\ k \longmapsto k \cdot 1$ が誘導する単射 $\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n] \longrightarrow R[t_1, \dots, t_n]$ によって 0 は 0 に移るので，示された． ■

以降では $\mathbb{K}$ を標数 0 の体とする．$G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ の場合に $\mathrm{Ad}(G)$-不変多項式を探そう．$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) = \mathrm{M}(n, \mathbb{K})$ だから，$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ 上の多項式とは $\mathbb{K}$-結合代数 $\mathbb{K}[t^i{}_j] \cong \mathbb{K}[t_1, \dots, t_{n^2}]$ の元のことである．**【例 2.4.6】**より，$\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ の随伴表現は

$$\mathrm{Ad}\colon G \longrightarrow \mathfrak{gl}(n\,\mathbb{K}),\ g \longmapsto (X \longmapsto gXg^{-1})$$

と書ける．

**補題 2.12:**

- $\mathrm{Ad}(\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}))$-不変多項式 $P \in \mathbb{K}[t^i{}_j]$
- 単位的 $\mathbb{K}$-結合代数 $R$

を与える．このとき $\forall g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}),\ \forall X \in \mathrm{M}(n, R, )$ に対して

$$P\bigl(gXg^{-1}\bigr) = P(X)$$

<u>証明</u> $\forall g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ について，不変多項式の定義および補題 2.10 から

$$P_g(t^i{}_j) \coloneqq P([gtg^{-1}]^i{}_j) - P(t^i{}_j) \in \mathbb{K}[t^i{}_j]$$

はゼロ多項式である．よって単射 $\mathbb{K} \longrightarrow R,\ x \longmapsto x \cdot 1$ が誘導する埋め込み $\mathbb{K}[t^i{}_j] \hookrightarrow \mathbb{R}[t^i{}_j]$ によって $P_g(t^i{}_j) \in \mathbb{R}[t^i{}_j]$ と見做すと $P_g(t^i{}_j) = 0$ であり，補題 2.10 から

$$P_g(X) = P(gXg^{-1}) - P(X) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad P(gXg^{-1}) = P(X)$$

が従う． ■

ここで，

$$f(t^i{}_j,\,\lambda) \coloneqq \det\bigl(\lambda \mathbb{1}_n + \bigl[\,t^i{}_j\,\bigr]\bigr) \in \mathbb{Z}[t^i{}_j,\,\lambda]$$

を考える．$\lambda$ について項を整理することで $r$ 個の $f_k(t^i{}_j) \in \mathbb{Z}[t^i{}_j]$

$$\begin{aligned} f(t^i{}_j,\,\lambda) &\eqqcolon \lambda^n + f_1(t^i{}_j)\lambda^{n-1} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{n} f_k(t^i{}_j)\lambda^{n-k} \end{aligned}$$

を得る．補題 2.11 により $f(t^i{}_j,\,\lambda) \in \mathbb{K}[t^i{}_j,\,\lambda]$，$f_k(t^i{}_j) \in \mathbb{K}[t^i{}_j]$ と見做してもこの等式は成り立つ．

**命題 2.16: $f_k(t^i{}_j)$ は不変多項式**

$\mathbb{K}$ を標数 0 の体とする．このとき $f_k(t^i{}_j) \in \mathbb{K}[t^i{}_j]$ は $\mathrm{Ad}(\mathrm{GL}(n,\,\mathbb{K}))$-不変多項式である．

**証明** $R = \mathbb{K}[t^i{}_j,\,\lambda]$ の場合に命題 2.12 を使うと，$\forall g \in \mathrm{GL}(n,\,\mathbb{K})$ および $\forall X \in\coloneqq \mathrm{M}(n,\,\mathbb{K}[t^i{}_j,\,\lambda])$ に対して

$$\det\bigl(gXg^{-1}\bigr) = \det(X)$$

がわかる．$X = \bigl[\,\lambda\delta^i_j + t^i{}_j\bigr]$ の場合を考えれば

$$f(t^i{}_j,\,\lambda) = \det(X) = \det\bigl(gXg^{-1}\bigr) = c([\,gtg^{-1}\,]^i{}_j,\,\lambda)$$

がわかり，示された． ■

**【例 2.5.2】複素の場合**

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の場合を考える．$\mathbb{C}$ は無限体だから，補題 2.10 より $\mathbb{C}$-係数多項式と多項式函数を同一視できる．

$\mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{C})$ の部分集合

$$\mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{C})^{\mathrm{diag}} \coloneqq \bigl\{\, X \in \mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{C}) \bigm| \text{対角化可能} \,\bigr\}$$

を考える．

$$\begin{aligned} & X \in \mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{C}) \setminus \mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{C})^{\mathrm{diag}} \\ \iff\ & f_X(\lambda) \coloneqq \det(\lambda\mathbb{1}_n - X)\,\text{とその微分}\, f'_X(\lambda)\,\text{が共通の根を持つ} \\ \iff\ & f_X,\, f'_X \in \mathbb{C}[\lambda]\,\text{の終結式}\,\mathrm{res}(f_X,\,f'_X) = 0 \end{aligned}$$

であるが，写像 $\varphi\colon \mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C},\ X \longmapsto \mathrm{res}(f_X,\,f'_X)$ は行列の成分に関する多項式函数なので $C^\infty$ 関数であり，$\mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{C}) \setminus \mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{C})^{\mathrm{diag}} = \varphi^{-1}(\{0\})$ が余次元 1 の部分多様体だと分かった．従って $\mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{C})^{\mathrm{diag}}$ は $\mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{C})$ 上稠密である．

**命題 2.17:**

$n$ 変数の対称多項式の空間を $\mathbb{C}[t_1,\,\dots,\,t_n]^{\mathrm{Sym}}$ と書く．このとき，写像

$$\begin{aligned}\rho\colon \operatorname{Inv}\bigl(\mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{C})\bigr) &\longrightarrow \mathbb{C}[t_1,\,\dots,\,t_n]^{\mathrm{Sym}}\\ P({t^i}_j) &\longmapsto \left((\lambda_1,\,\dots,\,\lambda_n) \longmapsto P|_{\mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{C})^{\mathrm{diag}}}\left(\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}\right)\right)\end{aligned}$$

は $\mathbb{C}$-結合代数の同型写像である．

<u>**証明**</u> $P$ が不変多項式であることから，対称群 $\mathfrak{S}_n$ の $\mathbb{C}^n$ への作用

$$\sigma \blacktriangleright (\lambda_1,\,\dots,\,\lambda_n) \coloneqq (\lambda_{\sigma(1)},\,\dots,\,\lambda_{\sigma(n)})$$

について $\operatorname{Im}\rho$ は不変である．よって $\rho$ の値域を $n$ 変数の対称多項式の空間 $\mathbb{C}[t_1,\,\dots,\,t_n]^{\mathrm{Sym}}$ に制限することができる．$\forall P \in \operatorname{Ker}\rho$ をとる．このとき $\forall X \in \mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{C})^{\mathrm{diag}}$ について $P(X) = 0$ であるが，$\mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{C})^{\mathrm{diag}}$ が稠密なので，多項式函数 $P(X)$ の連続性から $\forall X \in \mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{C})$ に対して $P(X) = 0$ が言える．i.e. $\rho$ は単射である．一方，$\forall\lambda \in \mathbb{C}$ に関して，$k$ 次の基本対称式 $\sigma_k \in \mathbb{Z}[t_1,\,\dots,\,t_n] \subset \mathbb{C}[t_1,\,\dots,\,t_n]$ を使って

$$\begin{aligned}\rho\bigl(f({t^i}_j,\,\lambda)\bigr)(\lambda_1,\,\dots,\,\lambda_n) &= \det\left(\lambda\mathbb{1}_n + \begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}\right)\\ &= \prod_{i=1}^{n}(\lambda + \lambda_i)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\sigma_k(\lambda_1,\,\dots,\,\lambda_n)\lambda^{n-k}\end{aligned}$$

と書けるので

$$\rho\bigl(f_k({t^i}_j)\bigr) = \sigma_k$$

であり，$\mathbb{C}[t_1,\,\dots,\,t_n]^{\mathrm{Sym}}$ は $\sigma_1,\,\dots,\,\sigma_n$ によって生成されるので，$\rho$ が全射であることが分かった． ■

結局，

$$\operatorname{Inv}\bigl(\mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{C})\bigr) = \mathbb{C}\bigl[f_1({t^i}_j),\,\dots,\,f_n({t^i}_j)\bigr]$$

が分かった．全く同様の議論により

$$\operatorname{Inv}\bigl(\mathfrak{u}(n,\,\mathbb{C})\bigr) = \mathbb{C}\bigl[f_1({t^i}_j),\,\dots,\,f_n({t^i}_j)\bigr]$$

もわかる．

**【例 2.5.3】実の場合**

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合を考える．$\mathbb{R}$ は無限体だから，補題 2.10 より $\mathbb{R}$-係数多項式と多項式函数を同一視できる．

**補題 2.13:**

$k$ 次多項式 $f\colon \mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ は $\mathrm{Ad}\bigl(\mathrm{GL}(n,\,\mathbb{R})\bigr)$-不変ならば $\mathrm{Ad}\bigl(\mathrm{GL}(n,\,\mathbb{C})\bigr)$-不変である．

<u>**証明**</u> $\forall A \in \mathrm{GL}(n,\,\mathbb{C})$ を 1 つ固定する．Cramer の公式より，$A$ の余因子行列を $\tilde{A}$ と書くと $A^{-1} = \tilde{A}/\det A$ が成り立つ．$f$ は $k$ 次多項式なので

$$f(AXA^{-1}) = f(AX\tilde{A})/(\det A)^k \quad \Longleftrightarrow \quad f(AX\tilde{A}) = (\det A)^k f(AXA^{-1})$$

が分かった．ここで，多項式

$$q(A,\,X) \coloneqq f(AX\tilde{A}) - (\det A)^k f(X)$$

を考える．仮定より $\mathrm{GL}(n,\,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n^2}$ 上で $q(A,\,X) = 0$ であるが，多項式函数 $q\colon \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{R}$ は連続関数である．さらに $\mathbb{R}^{n^2} \setminus \mathrm{GL}(n,\,\mathbb{R}) = \det(\{0\})$ は $\mathbb{R}^{n^2}$ の余次元 1 の部分多様体だから $\mathrm{GL}(n,\,\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}^{n^2}$ 上稠密であり，$\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2}$ 上で $q(A,\,X) = 0$ が言える．$q(A,\,X)$ は $\mathbb{C}^{n^2} \times \mathbb{C}^{n^2}$ 上の多項式函数と見做すと正則関数なので，一致の定理から $\mathbb{C}^{n^2} \times \mathbb{C}^{n^2}$ 上でも $q(A,\,X) = 0$ が言える． ■

**命題 2.18:**

$n$ 変数の対称多項式の空間を $\mathbb{R}[t_1,\,\dots,\,t_n]^{\mathrm{Sym}}$ と書く．このとき，写像

$$\begin{aligned}\rho_{\mathbb{R}}\colon \mathrm{Inv}\bigl(\mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{R})\bigr) &\longrightarrow \mathbb{R}[t_1,\,\dots,\,t_n]^{\mathrm{Sym}} \\ P({t^i}_j) &\longmapsto \left( (\lambda_1,\,\dots,\,\lambda_n) \longmapsto P|_{\mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{R})^{\mathrm{diag}}}\left( \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \right) \right)\end{aligned}$$

は $\mathbb{R}$-結合代数の同型写像である．

<u>**証明**</u> 補題 2.13 より，可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Inv}\bigl(\mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{C})\bigr) & \xrightarrow{\ \rho\ } & \mathbb{C}[t_1,\,\dots,\,t_n]^{\mathrm{Sym}} \\ \big\uparrow & & \big\uparrow \\ \mathrm{Inv}\bigl(\mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{R})\bigr) & \xrightarrow[\ \rho_{\mathbb{R}}\ ]{} & \mathbb{R}[t_1,\,\dots,\,t_n]^{\mathrm{Sym}} \end{array}$$

が成り立つ．よって $\rho_{\mathbb{R}}$ は単射．全射性は命題 2.17 と全く同様の議論から従う． ■

結局，

$$\mathrm{Inv}\bigl(\mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{R})\bigr) = \mathbb{R}\bigl[f_1({t^i}_j),\,\dots,\,f_n({t^i}_j)\bigr]$$

が分かった．

**【例 2.5.4】直交群の場合**

次に，$\mathbb{K}=\mathbb{R},\ G=\mathrm{O}(n)$ の場合を考える．

**補題 2.14:**

$\forall X \in \mathfrak{o}(n)$ に対して

$$f_{2k+1}(X)=0$$

<u>証明</u> $X \in \mathfrak{o}(n)$ だから $X=-X^{\mathsf{T}}$ が成り立つ．よって

$$\begin{aligned} f(X,\,\lambda) &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k f_k(X)\lambda^{n-k} \\ &= \det(\lambda \mathbb{1}_n + X) \\ &= \det\bigl(\lambda \mathbb{1}_n + X^{\mathsf{T}}\bigr) \\ &= \det(\lambda \mathbb{1}_n - X) \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k f_k(X)\lambda^{n-k} \end{aligned}$$

であり，示された． ■

以下では $p_k \coloneqq f_{2k}$ とおく．

**命題 2.19:**

$$\mathrm{Inv}\bigl(\mathfrak{o}(n)\bigr) \cong \mathbb{R}\bigl[p_1({t^i}_j),\,\dots,\,p_{\lfloor n/2\rfloor}({t^i}_j)\bigr]$$

<u>証明</u> 自然な埋め込み $\rho\colon \mathbb{R}\bigl[p_1({t^i}_j),\,\dots,\,p_{\lfloor n/2\rfloor}({t^i}_j)\bigr] \hookrightarrow \mathrm{Inv}\bigl(\mathfrak{o}(n)\bigr)$ が全単射であることを示す．

■

以下しばらくの間，命題 2.17, 2.18 を使って色々な特性類を定義していく．

### Chern 類

Chern 類の構成は，命題 2.17 による．

**定義 2.25: Chern 類**

- 階数 $n$ の複素ベクトル束 $V \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$
- $E$ の接続 $\nabla^E\colon \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(M;\,E)$

を与える．

(1) **全 Chern 形式**とは,

$$\boldsymbol{c(R^{\nabla^E})} \coloneqq \det\left(\mathrm{id}_E + \frac{\mathrm{i}}{2\pi}R^{\nabla^E}\right) \in \Omega^{\bullet}(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

のこと．**第 $k$-Chern 形式** ($k$-th Chern form) とは,

$$\boldsymbol{c_k(R^{\nabla^E})} \coloneqq f_k\left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}R^{\nabla^E}\right) \in \Omega^{2k}(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

のこと．

(2) **全 Chern 類** (total Chern class) とは,

$$\boldsymbol{c(E)} \coloneqq \left[c(R^{\nabla^E})\right] \in H^{\bullet}_{\mathrm{dR}}(M; \mathbb{C})$$

のこと．**第 $k$-Chern 類** ($k$-th Chern class) とは,

$$\boldsymbol{c_k(E)} \coloneqq \left[c_k(R^{\nabla^E})\right] \in H^{2k}_{\mathrm{dR}}(M; \mathbb{C})$$

のこと．

Pontrjagin 類

Euler 類

### 2.5.5 特性類のホモトピー論的扱い

## 2.6 Dijkgraaf-Witten 理論

離散的ゲージ理論を [?] に従って議論する．

### 2.6.1 普遍束

$G$ を Lie 群とする．

**定義 2.26: ファイバー束の引き戻し**

- 構造群 $G$ を持つファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$
- 連続写像 $f \colon B_1 \longrightarrow B$

を与える．このとき

$$f^*(E) \coloneqq \left\{ (b_1, u) \in B_1 \times E \;\middle|\; f(b_1) = \pi(u) \right\}$$

と定めることで得られるファイバー束 $F \hookrightarrow f^*(E) \xrightarrow{\mathrm{proj}_1} B_1$ のことを**引き戻し束** (pullback bundle) と呼ぶ．

ファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ が

- $B$ の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$
- 局所自明化 $\{\varphi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\approx} U_\alpha \times F\}_{\alpha\in\Lambda}$
- 変換関数 $\{t_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G\}_{\alpha\in\Lambda}$

を持つとき，引き戻し束 $F \hookrightarrow f^*(E) \xrightarrow{\mathrm{proj}_1} B_1$ の構造は

- $B_1$ の開被覆 $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$
- 局所自明化 $\{\tilde{\psi}_\alpha\colon f^{-1}(U_\alpha) \times \pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\approx} f^{-1}(U_\alpha) \times F,\ (b_1,\, u) \longmapsto \bigl(b_1,\, \mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\alpha(u)\bigr)\}_{\alpha\in\Lambda}$
- 変換関数 $\{\tilde{t}_{\alpha\beta}\colon f^{-1}(U_\alpha) \cap f^{-1}(U_\beta) \longrightarrow G,\ x \longmapsto t_{\alpha\beta}\bigl(f(x)\bigr)\}_{\alpha\in\Lambda}$

によって定まる．

圏 **hoMfd** を，

- 多様体を対象とする
- 2 つの多様体 $X, Y$ の間のホモトピー集合 $[X, Y]$ を Hom 集合とする

ものとして定義する．

- $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{hoMfd})$ に対して集合

$$k_G(X) \coloneqq \{\, X \text{ 上の主束の束同型類} \,\}$$

 を，
- $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{hoMfd})$ の $\forall [f] \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{hoMfd}}(X, Y)$ に対して写像

$$k_G\bigl([f]\bigr)\colon k_G(Y) \longrightarrow k_G(X),\ [\xi] \longmapsto [f^*(\xi)]$$

 を

対応づける対応

$$k_G\colon \mathbf{hoMfd} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

は反変関手である [**?**, p.53, 10.1 Theorem].

**定義 2.27: 普遍束**

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} B$ が $G$ の**普遍束** (universal bundle) であるとは，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{hoMfd})$ について定まる写像

$$\phi_P(X)\colon [X, B] \longrightarrow k_G(X),\ [f] \longmapsto [f^*P]$$

が全単射になること．

普遍束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} B$ において，$B$ のことを $G$ の**分類空間** (classifying space) と呼ぶ．

$G$ の普遍束の全空間を $\boldsymbol{EG}$，分類空間を $\boldsymbol{BG}$ と書く慣習がある．

**命題 2.20: 普遍束の特徴付け**

主束 $G \hookrightarrow EG \xrightarrow{\pi_G} BG$ が $G$ の普遍束であることは，以下の 2 つが満たされることと同値である：

(1) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{hoMfd})$ および $X$ を底空間にもつ任意の主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$ に対して，ある連続写像 $f\colon X \longrightarrow BG$ が存在して $P$ と引き戻し束 $f^*(EG)$ が束同型になる．

(2) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{hoMfd})$ および任意の連続写像 $f,\, g\colon X \longrightarrow BG$ に対して，$f^*(EG)$ と $g^*(EG)$ が束同型ならば $f,\, g$ はホモトピックである．

<u>証明</u> (1) は写像 $\phi_{EG}(X)$ の全射性，(2) は写像 $\phi_{EG}(X)$ の単射性を意味する． ■

定義したは良いが，与えられた $G$ に対してその普遍束が存在しなければ意味がないので，具体的に $EG$ を構成しよう．

集合

$$EG_{\mathrm{M}} \coloneqq \left\{ (t_0 g_0,\, t_1 g_1,\, \dots) \;\middle|\; t_i \in [0,\, 1],\; g_i \in G,\; \substack{\text{高々有限個の } i \text{ のみ } t_i \neq 0 \\ \text{かつ } \sum_{i \geq 0} t_i = 1} \right\}$$

を考える．$\langle x,\, t\rangle \coloneqq (t_0 g_0,\, t_1 g_1,\, \dots)$ と書き，$EG_{\mathrm{M}}$ 上の等号を

$$\langle x,\, t\rangle = \langle x',\, t'\rangle \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall i \geq 0,\; t_i = t'_i \;\text{ かつ }\; \forall i \geq 0,\; t_i = t'_i > 0 \quad \Longrightarrow \quad x_i = x'_i$$

と定義する．$EG_{\mathrm{M}}$ への $G$ の右作用を

$$\blacktriangleleft\colon EG_{\mathrm{M}} \times G \longrightarrow EG_{\mathrm{M}},\; \big((t_0 g_0,\, t_1 g_1,\, \dots),\, g\big) \longmapsto (t_0 g_0 g,\, t_1 g_1 g,\, \dots)$$

で定義する．$EG_{\mathrm{M}}$ には，$\forall i \geq 0$ について定まる写像

$$t_i\colon EG_{\mathrm{M}} \longrightarrow [0,\, 1],\; (t_0 g_0,\, t_1 g_1,\, \dots) \longmapsto t_i,$$
$$x_i\colon t_i^{-1}\big((0,\, 1]\big) \longrightarrow G,\; (t_0 g_0,\, t_1 g_1,\, \dots) \longmapsto x_i$$

が連続になるような最小の位相を入れる．右作用 $\blacktriangleleft$ による $EG_{\mathrm{M}}$ の商位相空間を $BG_{\mathrm{M}} \coloneqq EG_{\mathrm{M}}/G$ とおく．

**定理 2.14: Milnor 構成**

任意の Lie 群 $G$ について $G \hookrightarrow EG_{\mathrm{M}} \longrightarrow BG_{\mathrm{M}}$ は主束であり，普遍束でもある．

<u>証明</u> 主束であることは [?, p.55, 11.2 Theorem]，普遍束であることは [?, p.57, 12.2 Theorem]，[?, p.58, 12.4 Theorem] を参照． ■

**命題 2.21:**

$BG = K(G,\, 1)$

<u>証明</u> ■

### 2.6.2 群コホモロジー

先に進む前に，特異ホモロジー・コホモロジーについて復習する．$R$ を単項イデアル整域，$M$ を $R$-加群とする．

- $R$-係数特異ホモロジーとは，関手

$$H_k(\text{-};\, R)\colon \mathbf{Top} \xrightarrow{S_\bullet(\text{-};\,\mathbb{Z})} \mathbf{Chain} \xrightarrow{H_k} R\text{-}\mathbf{Mod}$$

のこと．

- $M$-係数特異ホモロジーとは，関手

$$H_k(\text{-};\, M)\colon \mathbf{Top} \xrightarrow{S_\bullet(\text{-};\,\mathbb{Z})} \mathbf{Chain} \xrightarrow{\otimes_R M} \mathbf{Chain} \xrightarrow{H_k} R\text{-}\mathbf{Mod}$$

のこと．

- 任意の位相空間 $X$ に対して，$H_\bullet(X;\, R)$ と $H_\bullet(X;\, M)$ は普遍係数定理

$$0 \longrightarrow H_k(X;\, R) \otimes_R M \longrightarrow H_k(X;\, M) \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^R\bigl(H_{k-1}(X;\, R),\, M\bigr) \longrightarrow 0 \quad \text{(exact)} \tag{2.6.1}$$

によって互いに関係する．

特に，特異ホモロジーの場合は構成から $\forall k \in \mathbb{Z}$ に対して $S_k(X;\, R)$ が自由加群なのでこの短完全列は分裂し

$$H_k(X;\, M) \cong \bigl(H_k(X;\, R) \otimes_R M\bigr) \oplus \operatorname{Tor}_1^R\bigl(H_{k-1}(X;\, R),\, M\bigr)$$

が言える．

- $R$-係数特異コホモロジーとは，関手

$$H^k(\text{-};\, R)\colon \mathbf{Top} \xrightarrow{S_\bullet(\text{-};\,\mathbb{Z})} \mathbf{Chain} \xrightarrow{\operatorname{Hom}_R(\text{-};\, R)} \mathbf{Chain}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{H^k} R\text{-}\mathbf{Mod}$$

のこと．

- $M$-係数特異コホモロジーとは，関手

$$H^k(\text{-};\, M)\colon \mathbf{Top} \xrightarrow{S_\bullet(\text{-};\,\mathbb{Z})} \mathbf{Chain} \xrightarrow{\operatorname{Hom}_R(\text{-};\, R)} \mathbf{Chain} \xrightarrow{\otimes_R M} \mathbf{Chain}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{H^k} R\text{-}\mathbf{Mod}$$

のこと．

- 任意の位相空間 $X$ に対して，$H^\bullet(X;\, R)$ と $H^\bullet(X;\, M)$ は普遍係数定理

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^1\bigl(H_{k-1}(X;\, R),\, M\bigr) \longrightarrow H^k(X;\, M) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R\bigl(H_k(X;\, R),\, M\bigr) \longrightarrow 0 \quad \text{(exact)}$$

によって互いに関係する．

特に，特異コホモロジーの場合は構成から $\forall k \in \mathbb{Z}$ に対して $\operatorname{Hom}_R\bigl(S_k(X;\, R);\, R\bigr)$ が自由加群なのでこの短完全列は分裂し

$$H^k(X;\, M) \cong \operatorname{Hom}_R\bigl(H_k(X;\, R),\, M\bigr) \oplus \operatorname{Ext}_R^1\bigl(H_{k-1}(X;\, R),\, M\bigr)$$

が言える．

**公理 2.1: $G$ 加群**

可換群 $(M, +)$ と，群 $G$ の $M$ への左作用

$$\blacktriangleright : G \times M \longrightarrow M$$

の組み $(M, +, \blacktriangleright)$ であって，$\forall g, h \in G$, $\forall x, y \in M$ に対して以下の条件を充たすものを**左 $G$ 加群**と呼ぶ：

**(G-mod1)** $g \blacktriangleright (x + y) = g \blacktriangleright x + g \blacktriangleright y$

**(G-mod2)** $(gh) \blacktriangleright x = g \blacktriangleright (h \blacktriangleright x)$

**(G-mod3)** $1_G \blacktriangleright x = x$

---

**右 $G$ 加群**も同様に定義する．

$\mathbb{Z}$ 係数の $G$ の**群環**とは，可換群 $\mathbb{Z}^{\oplus G}$ に積

$$(a_g)_g \cdot (b_g)_g := \left( \sum_{hk=g} a_h b_k \right)_g$$

を定義してできる環 $(\mathbb{Z}^{\oplus G}, +, \cdot\,)$ のこと．記号として $\mathbb{Z}[\boldsymbol{G}]$ と書く．左 $G$ 加群と左 $\mathbb{Z}[G]$ 加群は同一視できる．

$$\epsilon \colon \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z},\ (a_g)_g \longmapsto \sum_{g \in G} a_g$$

を **augmentation** と呼ぶ．

**定義 2.28: 群コホモロジー（代数的）**

左 $G$ 加群 $M$ を与える．$\mathbb{Z}$ を自明な作用により左 $G$ 加群と見做す．

- **群 $G$ の $M$-係数ホモロジー**とは，

$$H_{\mathrm{Grp}\,k}(G; M) := \mathrm{Tor}_k^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$$

  のこと．
- **群 $G$ の $M$-係数コホモロジー**とは，

$$H^k_{\mathrm{Grp}}(G; M) := \mathrm{Ext}^k_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$$

  のこと．

右導来関手の一般論から，任意の $G$ 加群の短完全列 $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0 \quad \text{(exact)}$ に対応する長完全列

$$\begin{aligned} \cdots &\longrightarrow H^k_{\mathrm{Grp}}(G, M_1) \longrightarrow H^k_{\mathrm{Grp}}(G, M_2) \longrightarrow H^k_{\mathrm{Grp}}(G, M_3) \\ &\longrightarrow H^{k+1}_{\mathrm{Grp}}(G, M_1) \longrightarrow H^{k+1}_{\mathrm{Grp}}(G, M_2) \longrightarrow H^{k+1}_{\mathrm{Grp}}(G, M_3) \\ &\longrightarrow \cdots \end{aligned} \tag{2.6.2}$$

が成り立つ．

**定理 2.15: 群コホモロジー（位相空間論的）**

任意の群 $G$ および $G$ 加群 $M$ に対して

$$H^\bullet(BG;\, M) \cong H^\bullet_{\mathrm{Grp}}(G;\, M)$$

が成り立つ．

<u>証明</u> ■

いくつかの実用上有用な命題を紹介する：

**命題 2.22: 色々な群コホモロジー**

(1) 任意の有限群に対して

$$H^{k>0}_{\mathrm{Grp}}(G;\, \mathbb{R}) = 0$$

(2) 任意のコンパクト Lie 群に対して

$$H^{2k+1}_{\mathrm{Grp}}(G;\, \mathbb{R}) = 0$$

(3) 任意の Lie 群に対して

$$H^{2k}_{\mathrm{Grp}}(G;\, \mathbb{R}) \cong \mathrm{Inv}(\mathfrak{g})$$

<u>証明</u> (1)

■

命題 2.22-(1) と群コホモロジーの長完全列 (2.6.2) により，短完全列 $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathrm{U}(1) \longrightarrow 0$ から同型

$$H^k_{\mathrm{Grp}}(G;\, \mathbb{Z}) \cong H^{k-1}_{\mathrm{Grp}}(G;\, \mathrm{U}(1))$$

がわかる．

### 2.6.3 トポロジカルなゲージ理論：Lie 群の場合

時空が $2+1$ 次元の閉多様体 $\mathcal{M}^{(3)}$ であるとする．Lie 群 $G$ がコンパクトかつ単連結ならば，$\mathcal{M}^{(3)}$ 上の任意の主束は自明束と同型になり，Chern-Simons 形式を大域的に定義することができる．しかし，$G$ が一般のコンパクト Lie 群である場合にはそう上手くいかない．これを解決する方法としては，$\mathcal{M}^{(3)}$ を境界に持つ 4 次元多様体 $\mathcal{N}^{(4)}$ を持ってきて，

$$S[A] \coloneqq \int_{\mathcal{N}^{(4)}} \Omega(F) = \frac{k}{8\pi^2} \int_{\mathcal{N}^{(4)}} \mathrm{Tr}\bigl[F \wedge F\bigr]$$

と定義することが考えられる．この $S[A]$ は Chern 指標の積分なので整数値を取り，トポロジカルなゲージ場の理論になっている．4 次元多様体への拡張は一意ではないので作用は $\mod 1$ の不定性を持つが，分配関

数は well-defined になる．しかし，この構成が可能であるためには任意の $\mathcal{M}^{(3)}$ 上の主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}^{(3)}$ に対して，$\mathcal{N}^{(4)}$ 上の主束 $G \hookrightarrow P' \xrightarrow{\pi'} \mathcal{N}^{(4)}$ であって，$\partial\mathcal{N}^{(4)} = \mathcal{M}^{(3)}$ への制限 $P|_{\partial\mathcal{N}^{(4)}} = P$ を充たすようなものが存在しなくてはいけない．この拡張の障害となるのが，分類写像 $\gamma\colon \mathcal{M}^{(3)} \longrightarrow BG$ の誘導準同型による $\mathcal{M}^{(3)}$ の基本類 $[\mathcal{M}^{(3)}] \in H_3(\mathcal{M}^{(3)}; \mathbb{Z})$ の像 $\gamma_*[\mathcal{M}^{(3)}] \in H_3(BG; \mathbb{Z})$ である．もし $\gamma_*[\mathcal{M}^{(3)}] = 0$ なら拡張が可能だが，そうでないときは不可能ということになる．しかしながら，命題 2.22-(2) と普遍係数定理 (2.6.1) により $H_3(BG; \mathbb{Z}) \cong H_{\mathrm{Grp}3}(G; \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}\big(H_2(X; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}\big)$ であるから，ある $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して

$$n \cdot \gamma_*[\mathcal{M}^{(3)}] = 0$$

を充たす．よって素朴には

$$S[A] \coloneqq \frac{1}{n} \int_{\mathcal{N}^{(4)}} \Omega(F)$$

と修正すれば良いように思えるが，このままだと分配関数に $e^{2\mathrm{i}\pi m/n}$ の不定性が残り理論が well-defined でない．この不定性を排除するためには，$\Omega(F) \in H^4_{\mathrm{dR}}\left(\mathcal{M}^{(3)}\right) \cong H^4_{\mathrm{dR}}(BG) \cong H^4(BG; \mathbb{R})$ だが $\Omega(F)$ は特性類なので，自然な単射 $H^4(BG, \mathbb{Z}) \hookrightarrow H^4(BG; \mathbb{R})$ を使って $\Omega(F) \cong \rho([\omega])$ と書けるような $[\omega] \in H^4(BG, \mathbb{Z})$ が存在することを使い

$$S[A] \coloneqq \frac{1}{n} \left( \int_{\mathcal{N}^{(4)}} \Omega(F) - \left\langle \gamma^*\omega,\, \mathcal{N}^{(4)} \right\rangle \right)$$

とすれば良い．というのも，de Rham の定理からそもそも

$$\int_{\mathcal{N}^{(4)}} \Omega(F) = \left\langle \gamma^*\omega,\, \mathcal{N}^{(4)} \right\rangle$$

であり，$[\omega]$ の別の代表元 $\eta$ をとってきたとすると，その差分は $\epsilon \in C^3(BG; \mathbb{Z})$ を使って

$$\frac{1}{n} \left\langle \gamma^*\delta^4\epsilon,\, \mathcal{N}^{(4)} \right\rangle = \frac{1}{n} \left\langle \epsilon,\, \gamma_*\partial\mathcal{N}^{(4)} \right\rangle = \left\langle \epsilon,\, \gamma_*[\mathcal{M}^{(3)}] \right\rangle \in \mathbb{Z}$$

になるのである．

もしくは，**Cheegar Simons differential character** [?] $\alpha \in \widehat{H^3}\big(BG, \mathrm{U}(1)\big)$ を使って

$$S[A] = \left\langle \gamma^*\alpha_A,\, [\mathcal{M}^{(3)}] \right\rangle$$

と書くこともできる．

### 2.6.4 トポロジカルなゲージ理論：有限群の場合

ゲージ群 $G$ が有限群の場合，主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}^{(3)}$ の接続は平坦[*52]である．このことは，$\pi_1(\mathcal{M}^{(3)})$ の非自明な元に対応するホロノミーのみが非自明な値をとることを意味する．このとき，命題 2.21 から，分類写像 $\gamma\colon \mathcal{M}^{(3)} \longrightarrow BG$ は群準同型 $\gamma_*\colon \pi_1(\mathcal{M}^{(3)}) \longrightarrow \pi_1(BG) \cong G$ と 1 対 1 対応するので，分配関数は

$$Z(\mathcal{M}^{(3)}) =: \frac{1}{\#G} \sum_{\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\left(\pi_1(\mathcal{M}^{(3)}),\, G\right)} e^{2\pi\mathrm{i}S[\gamma]} \quad \text{w/} \quad S[\gamma] \coloneqq \left\langle \gamma^*\alpha,\, [\mathcal{M}^{(3)}] \right\rangle$$

[*52] i.e. 曲率が大域的に 0

と定義される．ただし今の場合 $\Omega(F)=0$ なので，単に $\alpha\in H^3(BG;\,\mathrm{U}(1))$ とすれば良い．

このままだと実用上不便なので，計算しやすい形に書きかえよう．$H^k(BG;\,\mathrm{U}(1))\cong H^k_{\mathrm{Grp}}(G;\,\mathrm{U}(1))$ であるから，結局群コホモロジーを具体的に計算することになる．

$M$ を $G$ 加群とする．Milnor 構成を思い出すと，群コホモロジーのコチェイン $C^k(G;\,M)$ を

$$C^k_{\mathrm{Grp}}(G;\,M):=\left\{\,\omega\colon G^{n+1}\longrightarrow M\;\middle|\;\forall g\in G,\ \forall g_0,\,\dots,\,g_n\in G,\ \omega(g_0,\,\dots,\,g_n)=\omega(gg_0,\,\dots,\,gg_n)\,\right\}$$

で定義し，余境界写像 $\delta^{k+1}\colon H^k_{\mathrm{Grp}}(G;\,M)\longrightarrow H^{k+1}_{\mathrm{Grp}}(G;\,M)$ を特異コホモロジーからのアナロジーで

$$(\delta^{k+1}\omega)(g_0,\,\dots,\,g_{n+1}):=\prod_{j=0}^{n+1}\omega(g_0,\,\dots,\,\widehat{g_j},\,\dots,\,g_{n+1})^{(-1)^j}$$

と定義してみる[*53]．すると $\delta^2=0$ が確認できるので系列

$$\cdots\xrightarrow{\delta^k}C^k_{\mathrm{Grp}}(G;\,M)\xrightarrow{\delta^{k+1}}C^{k+1}_{\mathrm{Grp}}(G;\,M)\xrightarrow{\delta^{k+2}}\cdots$$

はコチェイン複体を成す．この複体のコホモロジー類をとることで $H^k_{\mathrm{Grp}}(G;\,M)$ が得られる[*54]コチェインを別の表示で書くこともできる：

$$\alpha(g_1,\,\dots,\,g_n):=\omega(1,\,g_1,\,g_1g_2,\,\dots,\,g_1\cdots g_n)$$

このとき，余境界写像は

$$(\delta^{n+1}\alpha)(g_1,\,\dots,\,g_{n+1})=\alpha(g_2,\,\dots,\,g_{n+1})\prod_{j=1}^{n}\alpha(g_1,\,\dots,\,g_{j-1},\,g_jg_{j+1},\,g_{j+2},\,\dots,\,g_{n+1})^{(-1)^j}\alpha(g_1,\,\dots,\,g_n)^{(-1)^{n+1}}$$

と作用する．

群コホモロジーの表式を使って分配関数を計算するには，まず $\mathcal{M}^{(3)}$ の三角形分割 $|\mathcal{T}|\longrightarrow\mathcal{M}^{(3)}$ をとる．さらに $\mathcal{M}^{(3)}$ は連結[*55]だとしよう．すると，$BG$ の基点 $\mathrm{pt}\in BG$ を 1 つ固定することで，分類写像 $\gamma\colon M\longrightarrow BG$ をホモトピックに変形して，任意の 0 単体 $\sigma_0\in\mathcal{T}$ を $\gamma[\sigma_0]=\mathrm{pt}$ に写すようにできる．すると，任意の 1 単体 $\sigma_1\in\mathcal{T}$ は $\gamma(\sigma_1)\in\pi_1(BG,\,\mathrm{pt})$ と見做すことができるが，命題 2.21 より $\pi_1(BG,\,\mathrm{pt})\cong G$ であるから，結局分類写像 $\gamma$ によって $\forall\sigma_1\in\mathcal{T}$ と何かしらの $g_{\sigma_1}\in G$ が対応付く．この $g_{\sigma_1}$ は格子ゲージ理論におけるリンク変数（i.e. ゲージ場）と見做すと分かりやすい．しかるに，$G$ が有限群であることから主束の接続は平坦でなくてはいけない．そのため，もし $\sigma_1^{(1)},\,\sigma_1^{(2)},\,\sigma_1^{(3)}\in\mathcal{T}$ がある 2 単体 $\sigma_2$ について $\partial(\sigma_2)=\sigma_1^{(1)}\cup\sigma_1^{(2)}\cup\sigma_1^{(3)}$ をみたすならば

$$g_{\sigma_1^{(1)}}g_{\sigma_1^{(2)}}g_{\sigma_1^{(3)}}=\gamma(\sigma_1^{(1)}\cup\sigma_1^{(2)}\cup\sigma_1^{(3)})=1 \tag{2.6.3}$$

にならなくてはいけない．このとき任意の 3 単体 $\sigma_3\in\mathcal{T}$ に対して $\alpha\in H^3_{\mathrm{Grp}}(BG,\,\mathrm{U}(1))$ は $W(\sigma_3)\in\mathrm{U}(1)$ を対応づけることができる．つまり，任意の 3 単体 $\sigma_3^{(i)}$ を四面体と見做したとき，その 6 つある辺のうち 3 つが $\gamma$ によって $g_i,\,h_i,\,k_i\in G$ と同定されていれば (2.6.3) から残りの 3 辺も決定できるということであり，

*53 群 $G$ の演算は乗法的な表記を採用した．

*54 群コホモロジーの定義からこの表式を得ることもできるが，$\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}[G]$ 加群としての射影的分解を構成するのが少し手間である．

*55 このとき多様体なので弧状連結になる

$W(\sigma_3^{(i)}) \coloneqq \alpha(g_i, h_i, k_i) \in \mathrm{U}(1)$ として定まる．$|\mathcal{T}| = \bigcup_{\sigma_3 \in \mathcal{T}} \sigma_3$ であり，3 単体 $\sigma_3^{(i)}$ の向きを特徴付ける $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$ を使って

$$[M] = \sum_i \epsilon_i \gamma(\sigma_3^{(i)})$$

と書くことができる．よって，作用は

$$e^{2\pi \mathrm{i} S[\gamma]} = \prod_i W(\sigma_3^{(i)})^{\epsilon_i} = \prod_i \alpha(g_i, h_i, k_i)^{\epsilon_i}$$

と書かれる．