第 1 章

層状化空間・因子化ホモロジー

[?], [?] のレビュー

1.1　多様体の層状化

1.1.1　層状化空間

定義 1.1: 半順序集合の位相

$(P, \leq)$ を半順序集合とする．P 上の位相 $\mathscr{O}_{\leq} \subset 2^P$ を以下で定義する：

$$U \in \mathscr{O}_{\leq} \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \forall x \in U, \forall y \in P, \left[x \leq y \quad \Longrightarrow \quad y \in U \right]$$

実際，空集合の定義から $\emptyset \in \mathscr{O}_{\leq}$ であり，$\forall U_1, U_2 \in \mathcal{O}_{\leq}$ に対して $x \in U_1 \cap U_2$ であることは

$$\forall y \in P, \ x \leq y \quad \Longrightarrow \quad y \in U_1 \text{ かつ } y \in U_2$$

と同値なので $U_1 \cap U_2 \in \mathscr{O}_{\leq}$ であり，さらに勝手な開集合族 $\{U_\lambda \in \mathscr{O}_{\leq}\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ は

$$\exists \alpha \in \Lambda, \ \forall y \in P, \ x \leq y \quad \Longrightarrow \quad y \in U_\alpha \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

と同値であるから $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathscr{O}_{\leq}$ であり，$\mathscr{O}_{\leq}$ は集合 P の位相である．

【例 1.1.1】$[n]$ の位相

半順序集合 $[2] \coloneqq \{0 \leq 1 \leq 2\}$ を考える．このとき，位相 $\mathscr{O}_{\leq}$ とは

$$\mathscr{O}_{\leq} = \left\{ \emptyset, \{2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\} \right\}$$

のことである．同様に，半順序集合 $[n] \coloneqq \{0 \leq 1 \leq \cdots \leq n\}$ に対して

$$\mathscr{O}_{\leq} = \left\{ \emptyset, \{n\}, \{n-1, n\}, \dots, \{0, \dots, n\} \right\}$$

が成り立つ．

定義 1.2: 層状化空間・層状化写像

$(P, \leq)$ を半順序集合とし，定義 1.1 の位相を入れて位相空間にする．
このとき，位相空間 X が ***P*-層状化**されている (P-stratified) とは，連続写像 $s\colon X \longrightarrow P$ が存在することを言う．組 $(X, s\colon X \longrightarrow P)$ のことを ***P*-層状化空間** (P-stratified space) と呼ぶ．

層状化空間 $(X, s\colon X \longrightarrow P)$, $(X', s'\colon X' \longrightarrow P')$ の間の**層状化写像** (stratified map) とは，連続写像の組み $(f\colon X \longrightarrow X', g\colon P \longrightarrow P')$ であって以下の図式を可換にするもののこと：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & X' \arrow[d, "s'"] \\ P \arrow[r, "g"'] & P' \end{tikzcd}$$

【例 1.1.2】CW 複体

CW 複体 X を与える．$X_{\leq k}$ を X の k-骨格とするとき，$X_k \setminus X_{k-1}$ を $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に写す写像 $s\colon X \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は X の層状化を与える．

定義 1.3: 層状化埋め込み

層状化写像 $(f, g)\colon (X, s\colon X \longrightarrow P) \longrightarrow (X', s'\colon X' \longrightarrow P')$ が**層状化開埋め込み** (stratified open embedding) であるとは，以下の 2 条件を充たすことを言う：

(1) 連続写像 $f\colon X \longrightarrow X'$ は位相的埋め込みである[a]
(2) $\forall p \in P$ に対して，f の制限

$$f|_{s^{-1}(\{p\})}\colon s^{-1}\bigl(\{p\}\bigr) \longrightarrow s'^{-1}\bigl(\{g(p)\}\bigr)$$

は位相的埋め込みである．

[a] i.e. $f\colon X \longrightarrow f(X)$ が同相写像

! 以下では混乱が生じにくい場合，層状化写像 $(f, g)\colon (X, s\colon X \longrightarrow P) \longrightarrow (X', s'\colon X' \longrightarrow P')$ のことを $f\colon (X \to P) \longrightarrow (X' \to P')$ と略記し，連続写像 $g\colon P \longrightarrow P'$ のことも f と書く．

圏 **StTop** を，

- 第 2 可算な Hausdorff 空間の層状化空間を対象とする
- 層状化埋め込みを射とする

ことで定義する．

1.1.2　C^0 級層状化空間

定義 1.4: コーン

層状化空間 $(X,\, s\colon X \to P)$ を与える．X の**コーン** (cone) とは，以下のようにして構成される層状化空間 $\bigl(\mathsf{C}(X),\, \mathsf{C}(s) : \mathsf{C}(X) \longrightarrow \mathsf{C}(P)\bigr)$ のこと：

- 位相空間 $\mathsf{C}(X)$ を，押し出し位相空間

$$\mathsf{C}(X) \coloneqq \{\mathrm{pt}\} \amalg_{\{0\}\times X} (\mathbb{R}_{\geq 0} \times X)$$

  と定義する：

$$\begin{tikzcd} \{0\} \times X \arrow[r, hook, "\{0\}\times \mathrm{id}_X"] \arrow[d] & \mathbb{R}_{\geq 0} \times X \arrow[d] \\ \{\mathrm{pt}\} \arrow[r, hook] & \{\mathrm{pt}\} \amalg_{\{0\}\times X} (\mathbb{R}_{\geq 0} \times X) \end{tikzcd}$$

- 半順序集合 $\mathsf{C}(P)$ を，P に最小の要素 $-\infty$ を付け足すことで定義する．これは半順序集合の圏における押し出し

$$\mathsf{C}(P) \coloneqq \{-\infty\} \amalg_{\{0\}\times X} \bigl([1] \times P\bigr)$$

  である．
- 連続写像

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{\geq 0} \times X &\longrightarrow [1] \times P, \\ (t,\, x) &\longmapsto \begin{cases} \bigl(0,\, s(x)\bigr), & t = 0, \\ \bigl(1,\, s(x)\bigr), & t > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

  が押し出しの普遍性により誘導する連続写像 $\mathsf{C}(X) \longrightarrow \mathsf{C}(P)$ を $\mathsf{C}(s)$ と書く．

定義 1.5: C^0 級層状化空間

以下を充たす $\mathbf{StTop}$ の最小の充満部分圏を $\mathbf{Snglr}^{C^0}$ と書き，圏 $\mathbf{Snglr}^{C^0}$ の対象を $\boldsymbol{C^0}$ **級層状化空間** (C^0 stratified space) と呼ぶ：

(Snglr-1) $(\emptyset \to \emptyset) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$

(Snglr-2)

$(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ かつ $X,\ P$ が位相空間としてコンパクト

$\implies \quad \mathsf{C}\,(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$

(Snglr-3)

$(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}) \quad \implies \quad (X \times \mathbb{R} \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$[a]

(Snglr-4)

$(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ かつ $\mathrm{Hom}_{\mathbf{StTop}}\big((U \to P_U),\ (X \to P)\big) \neq \emptyset$

$\implies \quad (U \to P_U) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$

(Snglr-5)

$(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{StTop})$ が開被覆 $\{(U_\lambda \to P_\lambda) \longrightarrow (X \to P)\}_{\lambda \in \Lambda}$[b] を持ち，かつ $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して $(U_\lambda \to P_\lambda) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$

$\implies \quad (X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$

---

[a] $X \times \mathbb{R}$ の層状化は，連続写像 $X \times \mathbb{R} \longrightarrow X,\ (x,\ t) \longmapsto x$ を前もって合成することにより定める．

[b] i.e. $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda},\ \{P_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が，それぞれ位相空間 $X,\ P$ の開被覆を成す．

【例 1.1.3】位相多様体は C^0 級層状化空間

(Snglr-1) より，$* \coloneqq \mathsf{C}\,(\emptyset \to \emptyset) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ である．**(Snglr-3)** より，$\forall n \geq 0$ に対して $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n \to [0]) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ であることが帰納的に分かる．$\mathbb{R}^n$ の任意の開集合 $U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ に対して，

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathbb{R}^n \arrow[d] \\ {[0]} \arrow[r, "="'] & {[0]} \end{tikzcd}$$

は層状化埋め込みであり，従って **(Snglr-4)** より $U \coloneqq (U \to [0]) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ が分かる．以上の考察と **(Snglr-5)** を併せて，任意の位相多様体 M は[a]圏 $\mathbf{Snglr}^{C^0}$ の対象である．

---

[a] より正確には，M を層状化空間 $(M \to [0])$ と同一視している．