第 1 章

層状化空間・因子化ホモロジー

[?], [?] のレビュー

1.1　多様体の層状化

1.1.1　層状化空間

定義 1.1: 半順序集合の位相

$(P, \leq)$ を半順序集合とする．P 上の位相 $\mathscr{O}_{\leq} \subset 2^P$ を以下で定義する：

$$U \in \mathscr{O}_{\leq} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall x \in U,\, \forall y \in P,\, \big[\, x \leq y \quad \Longrightarrow \quad y \in U \,\big]$$

実際，空集合の定義から $\emptyset \in \mathscr{O}_{\leq}$ であり，$\forall U_1,\, U_2 \in \mathcal{O}_{\leq}$ に対して $x \in U_1 \cap U_2$ であることは

$$\forall y \in P,\; x \leq y \quad \Longrightarrow \quad y \in U_1 \;\text{ かつ }\; y \in U_2$$

と同値なので $U_1 \cap U_2 \in \mathscr{O}_{\leq}$ であり，さらに勝手な開集合族 $\{U_\lambda \in \mathscr{O}_{\leq}\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ は

$$\exists \alpha \in \Lambda,\, \forall y \in P,\; x \leq y \quad \Longrightarrow \quad y \in U_\alpha \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

と同値であるから $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathscr{O}_{\leq}$ であり，$\mathscr{O}_{\leq}$ は集合 P の位相である．

【例 1.1.1】$[n]$ の位相

半順序集合 $[2] := \{0 \leq 1 \leq 2\}$ を考える．このとき，位相 $\mathscr{O}_{\leq}$ とは

$$\mathscr{O}_{\leq} = \big\{\, \emptyset,\, \{2\},\, \{1,\, 2\},\, \{0,\, 1,\, 2\} \,\big\}$$

のことである．同様に，半順序集合 $[n] := \{0 \leq 1 \leq \cdots \leq n\}$ に対して

$$\mathscr{O}_{\leq} = \big\{\, \emptyset,\, \{n\},\, \{n-1,\, n\},\, \ldots,\, \{0,\, \ldots,\, n\} \,\big\}$$

が成り立つ．

定義 1.2: 層状化空間・層状化写像

$(P, \le)$ を半順序集合とし，定義 1.1 の位相を入れて位相空間にする．
このとき，位相空間 X が ***P*-層状化**されている (P-stratified) とは，連続写像 $s\colon X \longrightarrow P$ が存在することを言う．組 $(X,\, s\colon X \longrightarrow P)$ のことを ***P*-層状化空間** (P-stratified space) と呼ぶ．

層状化空間 $(X,\, s\colon X \longrightarrow P)$, $(X',\, s'\colon X' \longrightarrow P')$ の間の**層状化写像** (stratified map) とは，連続写像の組み $(f\colon X \longrightarrow X',\, g\colon P \longrightarrow P')$ であって以下の図式を可換にするもののこと：

$$\begin{CD} X @>{f}>> X' \\ @V{s}VV @VV{s'}V \\ P @>>{g}> P' \end{CD}$$

【例 1.1.2】CW 複体

CW 複体 X を与える．$X_{\le k}$ を X の k-骨格とするとき，$X_k \setminus X_{k-1}$ を $k \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ に写す写像 $s\colon X \longrightarrow \mathbb{Z}_{\ge 0}$ は X の層状化を与える．

定義 1.3: 層状化埋め込み

層状化写像 $(f, g)\colon (X,\, s\colon X \longrightarrow P) \longrightarrow (X',\, s'\colon X' \longrightarrow P')$ が**層状化開埋め込み** (stratified open embedding) であるとは，以下の 2 条件を充たすことを言う：

(1) 連続写像 $f\colon X \longrightarrow X'$ は位相的埋め込みである[a]
(2) $\forall p \in P$ に対して，f の制限

$$f|_{s^{-1}(\{p\})}\colon s^{-1}\bigl(\{p\}\bigr) \longrightarrow s'^{-1}\bigl(\{g(p)\}\bigr)$$

は位相的埋め込みである．

[a] i.e. $f\colon X \longrightarrow f(X)$ が同相写像

! 以下では混乱が生じにくい場合，層状化写像 $(f, g)\colon (X,\, s\colon X \longrightarrow P) \longrightarrow (X',\, s'\colon X' \longrightarrow P')$ のことを $f\colon (X \to P) \longrightarrow (X' \to P')$ と略記し，連続写像 $g\colon P \longrightarrow P'$ のことも f と書く．

圏 **StTop** を，

- 第 2 可算な Hausdorff 空間の層状化空間を対象とする
- 層状化埋め込みを射とする

ことで定義する．

1.1.2 C^0 級層状化空間

定義 1.4: コーン

層状化空間 $(X, s\colon X \to P)$ を与える．X の**コーン** (cone) とは，以下のようにして構成される層状化空間 $\big(\mathsf{C}(X), \mathsf{C}(s) : \mathsf{C}(X) \longrightarrow \mathsf{C}(P)\big)$ のこと：

- 位相空間 $\mathsf{C}(X)$ を，押し出し位相空間

$$\mathsf{C}(X) \coloneqq \{\mathrm{pt}\} \amalg_{\{0\}\times X} (\mathbb{R}_{\geq 0} \times X)$$

  と定義する：

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \times X \arrow[r, hook, "\{0\}\times \mathrm{id}_X"] \arrow[d] & \mathbb{R}_{\geq 0} \times X \arrow[d] \\
\{\mathrm{pt}\} \arrow[r, hook] & \{\mathrm{pt}\} \amalg_{\{0\}\times X} (\mathbb{R}_{\geq 0} \times X)
\end{tikzcd}$$

- 半順序集合 $\mathsf{C}(P)$ を，P に最小の要素 $-\infty$ を付け足すことで定義する．これは半順序集合の圏における押し出し

$$\mathsf{C}(P) \coloneqq \{-\infty\} \amalg_{\{0\}\times P} \big([1] \times P\big)$$

  である．
- 連続写像

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}_{\geq 0} \times X &\longrightarrow [1] \times P, \\
(t, x) &\longmapsto \begin{cases} \big(0, s(x)\big), & t = 0, \\ \big(1, s(x)\big), & t > 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

  が誘導する連続写像 $\mathsf{C}(X) \longrightarrow \mathsf{C}(P)$ を $\mathsf{C}(s)$ と書く．

位相空間の圏における押し出しの公式から，位相空間 $\mathsf{C}(X)$ とは

$$\begin{aligned}
i_1 &\colon \{0\} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \times X,\ x \longmapsto (0, x), \\
i_2 &\colon \{0\} \times \mathbb{R} \longrightarrow \{\mathrm{pt}\},\ x \longmapsto \mathrm{pt}
\end{aligned}$$

とおいたときのコイコライザ

$$\{0\} \times X \overset{i_1}{\underset{i_2}{\rightrightarrows}} \{\mathrm{pt}\} \sqcup (\mathbb{R}_{\geq 0} \times X) \longrightarrow \mathsf{C}(X)$$

である．i.e. 商位相空間

$$\frac{\mathbb{R}_{\geq 0} \times X}{i_1(x) \sim i_2(x)} = \frac{\mathbb{R}_{\geq 0} \times X}{\{0\} \times X}$$

のこと．従って $\mathsf{C}(s) : \mathsf{C}(X) \longrightarrow \mathsf{C}(P)$ とは，連続写像[*1]

$$\frac{\mathbb{R}_{\geq 0} \times X}{\{0\} \times X} \longrightarrow \mathsf{C}(P),\ [(t,\,x)] \longmapsto \begin{cases} -\infty, & t = 0 \\ s(x), & t > 0 \end{cases}$$

のことである．

定義 1.5: C^0 級層状化空間

以下を充たす $\mathbf{StTop}$ の最小の充満部分圏を $\mathbf{Snglr}^{C^0}$ と書き，圏 $\mathbf{Snglr}^{C^0}$ の対象を **C^0 級層状化空間** (C^0 stratified space) と呼ぶ：

(Snglr-1) $(\emptyset \to \emptyset) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$

(Snglr-2)

$(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ かつ $X,\,P$ が位相空間としてコンパクト

$\implies \quad \mathsf{C}(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$

(Snglr-3)

$(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}) \quad \implies \quad (X \times \mathbb{R} \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$[a]

(Snglr-4)

$(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ かつ $\mathrm{Hom}_{\mathbf{StTop}}\big((U \to P_U),\,(X \to P)\big) \neq \emptyset$

$\implies \quad (U \to P_U) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$

(Snglr-5)

$(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{StTop})$ が開被覆 $\{(U_\lambda \to P_\lambda) \longrightarrow (X \to P)\}_{\lambda\in\Lambda}$[b] を持ち，かつ $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して $(U_\lambda \to P_\lambda) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$

$\implies \quad (X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$

[a] $X \times \mathbb{R}$ の層状化は，連続写像 $X \times \mathbb{R} \longrightarrow X,\ (x,\,t) \longmapsto x$ を前もって合成することにより定める．

[b] i.e. $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda},\ \{P_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が，それぞれ位相空間 $X,\,P$ の開被覆を成す．

【例 1.1.3】位相多様体は C^0 級層状化空間

(Snglr-1) より，$* \coloneqq \mathsf{C}(\emptyset \to \emptyset) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ である．**(Snglr-3)** より，$\forall n \geq 0$ に対して $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n \to [0]) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ であることが帰納的に分かる．$\mathbb{R}^n$ の任意の開集合 $U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ に対して，

$$\begin{CD} U @>>> \mathbb{R}^n \\ @VVV @VVV \\ [0] @>>{=}> [0] \end{CD}$$

は層状化埋め込みであり，従って **(Snglr-4)** より $U \coloneqq (U \to [0]) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ が分かる．以上の考察と **(Snglr-5)** を併せて，任意の位相多様体 M は[a]圏 $\mathbf{Snglr}^{C^0}$ の対象である．

[a] より正確には，M を層状化空間 $(M \to [0])$ と同一視している．

[*1] $\mathsf{C}(P)$ の位相 $\mathscr{O}_{\mathsf{C}(P)}$ は，P の位相 $\mathscr{O}_P$ に 1 つの開集合 $\{-\infty\} \cup P$ を加えたものである．$\forall U \in \mathscr{O}_P$ に対して $\mathsf{C}(s)^{-1}(U) = \mathbb{R}_{>0} \times s^{-1}(U) \in \mathscr{O}_{\mathsf{C}(X)}$ で，かつ $\mathsf{C}(s)^{-1}(\{-\infty\} \cup P) = \mathsf{C}(X) \in \mathscr{O}_{\mathsf{C}(X)}$ なので $\mathsf{C}(s)$ は連続である．

1.1.3 conically smoothness

定義 1.6: C^0 basic

C^0 級層状化空間 $(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ が ***C^0*-basic** であるとは，ある $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ およびコンパクトな ***C^0*** 級層状化空間 $(Z \to Q) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ が存在して $(X \to P) = (\mathbb{R}^n \to *) \times \mathsf{C}\,(Z \to Q)$ が成り立つことを言う．

定義 1.7: 次元と深さ

空でない ***C^0*** 級層状化空間 $(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ を与える．

- $(X \to P)$ の点 $x \in X$ における**局所的次元** (local dimension) とは，点 x における X の被覆次元[a] $\boldsymbol{\dim_x(X)}$ のことを言う．
- $(X \to P)$ の**次元** (dimension) とは

$$\boldsymbol{\dim(X \to P)} \coloneqq \sup_{x \in X} \dim_x(X)$$

- $(X \xrightarrow{s} P)$ の点 $x \in X$ における**局所的深さ** (local depth) とは，

$$\boldsymbol{\mathrm{depth}_x(X \to P)} \coloneqq \dim_x(X) - \dim_x\bigl(s^{-1}(\{s(x)\})\bigr)$$

  のこと．
- $(X \xrightarrow{s} P)$ の**深さ** (depth) とは，

$$\boldsymbol{\mathrm{depth}(X)} \coloneqq \sup_{x \in X} \mathrm{depth}_x(X)$$

  のこと．

[a] 以下の条件を充たす最小の $d \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$ のことを（存在すれば）X の**被覆次元** (covering dimension) と呼ぶ：X の任意の開被覆 $\mathscr{U}$ に対して，十分細かい細分 $\mathscr{V}_{\mathscr{U}} \prec \mathscr{U}$ をとると，任意の互いに異なる $\forall m > d+1$ 個の開集合 $V_1, \dots, V_m \in \mathscr{V}_{\mathscr{U}}$ の共通部分が空になるようにできる．特に，$\emptyset$ の被覆次元は -1 と定義する．

【例 1.1.4】コーンの深さ

n 次元位相多様体 Z について，定義から $\dim_x(Z) = n$ が成り立つ．これを【例 **1.1.3**】により C^0 級層状化空間 $(Z \to [0]) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ と見做すと，これのコーン $\mathsf{C}\,(Z \to [0])$ について

$$\mathrm{depth}_x\bigl(\mathsf{C}\,(Z \to [0])\bigr) = \begin{cases} n+1, & x = \mathrm{pt}, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

であることがわかる．実際，コーンポイントの逆像は 1 点なので 0 次元であり，かつ $\dim_x\bigl(\mathsf{C}\,(Z)\bigr) = n+1$ である．一方，コーンポイント以外の点の逆像は潰れておらず，$n+1$ 次元である．

また，$\forall (X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ に対して

$$\dim\bigl((\mathbb{R}^m \to [0]) \times (X \to P)\bigr) = m + \dim\bigl(X \to P\bigr),$$

$$\mathrm{depth}\big((\mathbb{R}^m \to [0]) \times (X \to P)\big) = \mathrm{depth}\big(X \to P\big)$$

が成り立つ．従って，C^0 basic な $(U \to P_U) = (\mathbb{R}^n \to [0]) \times \mathsf{C}\,(Z \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ に対して

$$\mathrm{depth}(U \to P_U) = \mathrm{depth}(Z \to P) + 1$$

が成り立つ．

いま，C^0 basic な $(U \to P_U) = (\mathbb{R}^n \to [0]) \times \mathsf{C}\,(Z \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ を 1 つとる．コーンの定義から，U の点を $(v,\, [t,\, z]) \in \mathbb{R}^n \times \frac{\mathbb{R}_{\geq 0} \times Z}{\{0\} \times Z}$ と表示することができる．自己同相

$$\begin{aligned} \gamma\colon \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^n \times \mathsf{C}\,(Z) &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^n \times \mathsf{C}\,(Z)\,, \\ \big(t,\, (v,\, p),\, [s,\, z]\big) &\longmapsto \big(t,\, (tv + p,\, p),\, [ts,\, z]\big) \end{aligned}$$

を考える[*2]．

さらに，もう 1 つの C^0 basic な $(U' \to P_{U'}) = (\mathbb{R}^{n'} \to [0]) \times \mathsf{C}\,(Z' \to P') \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ および $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}}\big((U \to P_U),\, (U' \to P_{U'})\big)$ をとる．ただし，$\forall u \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(u,\, \mathrm{pt}) = f(u,\, \mathrm{pt})$ が成り立つことを仮定する．$f|_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \times \{\mathrm{pt}\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \{\mathrm{pt}\}$ を f のコーンポイントへの制限として，

$$\begin{aligned} f_\Delta \colon \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^n \times \mathsf{C}\,(Z) &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^{n'} \times \mathsf{C}\,(Z')\,, \\ \big(t,\, v,\, p,\, [s,\, z]\big) &\longmapsto \big(t,\, f|_{\mathbb{R}^n}(v),\, f(p,\, [ts,\, z])\big) \end{aligned}$$

とおこう．

【例 1.1.5】

$Z = Z' = \emptyset$ のとき，f とは単に連続関数 $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n'}$ のことである．このとき，

$$\begin{aligned} (\gamma^{-1} \circ f_\Delta \circ \gamma)(t,\, v,\, p) &= \gamma^{-1} \circ f_\Delta(t,\, tv + p,\, p) \\ &= \gamma^{-1}\big(t,\, f(tv + p),\, f(p)\big) \\ &= \left(t,\, \frac{f(tv + p) - f(p)}{t},\, f(p)\right) \end{aligned}$$

と計算できるため，f が C^1 級であることと $\forall (v,\, p) \in T\mathbb{R}^n$ に対して $t \to +0$ の極限，i.e. v に沿った片側方向微分が存在することは同値である．

[*2] 接束 $T\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^{2n}$ と微分同相である．[**?**, p.23] の記法に合わせて底空間 $\mathbb{R}^n$ の点を p，p 上のファイバーの元を v としたとき $(v,\, p) \in T\mathbb{R}^n$ と書いた．命題**??**の記法と順番が逆なので注意．

定義 1.8: $\mathbb{R}^n$ に沿って conically smooth

- C^0 basic な $(U \to P_U) = (\mathbb{R}^n \to [0]) \times \mathsf{C}(Z \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$
- C^0 basic な $(U' \to P_{U'}) = (\mathbb{R}^{n'} \to [0]) \times \mathsf{C}(Z' \to P') \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$
- $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}}\big((U \to P_U),\, (U' \to P_{U'})\big)$ であって，コーンポイントを保存するもの

を与える．このとき，f が $\mathbb{R}^n$ **に沿って** C^1 **級** (C^1 along $\mathbb{R}^n$) であるとは，以下の図式を可換にする連続写像

$$\tilde{D}f \colon \mathbb{R}_{\geq 0} \times T\mathbb{R}^n \times \mathsf{C}(Z) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \times T\mathbb{R}^{n'} \times \mathsf{C}(Z')$$

が存在することを言う：

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}_{\geq 0} \times T\mathbb{R}^n \times \mathsf{C}(Z) \arrow[r, dashed, "\tilde{D}f"] & \mathbb{R}_{\geq 0} \times T\mathbb{R}^{n'} \times \mathsf{C}(Z') \\
\mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^n \times \mathsf{C}(Z) \arrow[u] \arrow[r, "\gamma^{-1} \circ f_\Delta \circ \gamma"'] & \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^{n'} \times \mathsf{C}(Z') \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

このような拡張が存在するとき，第一変数を $t = 0$ に制限して得られる連続写像を

$$\boldsymbol{Df} \colon T\mathbb{R}^n \times \mathsf{C}(Z) \longrightarrow T\mathbb{R}^{n'} \times \mathsf{C}(Z')$$

と書く．f が $\mathbb{R}^n$ **に沿って** C^r **級** であるとは，Df が $\mathbb{R}^n$ に沿って C^{r-1} 級であることを言う．f が $\mathbb{R}^n$ **に沿って conically smooth** であるとは，$\forall r \geq 1$ について C^r 級であることを言う．