第 4 章

圏論とトポロジカル相

この節で登場する多様体は特に断らない限り常に C^∞ 多様体である．また，体 $\mathbb{K}$ と言ったら $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のいずれかを指すことにする．

4.1 gapped な量子液体の定義

この節では常に $d := D + 1$ 次元時空 $\mathcal{M}^{(d)} = \Sigma^{(D)} \times \mathbb{R}$ または $\Sigma^{(D)} \times S^1$ を考える[*1]．混乱が生じない時は時空点を $x := (\boldsymbol{x}, t) \in \Sigma^{(D)} \times \mathbb{R}$ と書く．境界を持たない D 次元多様体[*2] $\Sigma^{(D)}$ はノルム $\|\cdot\|$ を持つ距離空間であるとする．

- $\Sigma^{(D)}$ 上の D 次元**格子** (lattice) $\Lambda \subset \Sigma^{(D)}$ とは，$\Sigma^{(D)}$ の有限な[*3]離散部分集合のことである．
- 格子点 $\boldsymbol{x} \in \Lambda$ 上の Hilbert 空間を $\mathcal{H}_{\boldsymbol{x}}$ と書く．
- 全系の Hilbert 空間とは，合成系 $\mathcal{H}_{\mathrm{tot}} := \bigotimes_{\boldsymbol{x} \in \Lambda} \mathcal{H}_{\boldsymbol{x}}$ のことである．

定義 $^{\mathrm{ph}}$ 4.1: bosonic な格子模型

D 次元格子 $\Lambda \subset$ を 1 つ固定する．

- $\forall \boldsymbol{x} \in \Lambda$ を 1 つとる．別の格子点 $\boldsymbol{y} \in \Lambda$ が $\boldsymbol{x}$ についてレンジ $R > 0$ であるとは，$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \leq R$ が成り立つことを言う．$\boldsymbol{x}$ についてレンジ R な格子点全体の集合を $N_R(\boldsymbol{x}) \subset \Lambda$ と書く．
- 格子 Λ 上のレンジ $R > 0$ の **bosonic な格子模型** (bosonic lattice model) とは，エルミート演算子 $\hat{H}_\Lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Hilb}}(\mathcal{H}_{\mathrm{tot}}, \mathcal{H}_{\mathrm{tot}})$ であって以下の条件を充たすもののことを言う：

  (locality) $\forall \boldsymbol{x} \in \Lambda$ に対して，$\forall \boldsymbol{y} \in N_R(\boldsymbol{x})$ における局所的 Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{\boldsymbol{y}}$ にのみ非自明に作用するエルミート演算子 $\hat{h}_{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Hilb}}(\mathcal{H}_{\mathrm{tot}}, \mathcal{H}_{\mathrm{tot}})$ が存在して，

  $$\hat{H}_\Lambda = \sum_{\boldsymbol{x} \in \Lambda} \hat{h}_{\boldsymbol{x}}$$

  と書ける．

[*1] i.e. 時間方向は必要に応じてコンパクト化する
[*2] コンパクト性は仮定しない．
[*3] 空間多様体 $\Sigma^{(D)}$ や局所 Hilbert 空間に適当な境界条件を課して有限にする．

- D 次元の **bosonic な量子系** (bosonic quantum system) とは,
  - 格子の増大列[a] $\{\Lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$
  - bosonic な格子模型の列 $\{\hat{H}_{\Lambda_i}\}_{i=1}^{\infty}$

  の組のこと.

[a] i.e. $\Lambda_1 \subsetneq \Lambda_2 \subsetneq \cdots$ が成り立つ.

定義 $^{\mathrm{ph}}$ 4.2: gapped な量子系

bosonic な量子系 $\big(\{\Lambda_i\}_i,\, \{\hat{H}_{\Lambda_i}\}_i\big)$ が **gapped** であるとは，ある $\Delta > 0$ および E_0 が存在して以下の条件を充たすことを言う（図 4.1）：

(gap-1) $\forall E \in (E_0,\, E_0 + \Delta)$ に対してある $M_E \in \mathbb{N}$ が存在して,

$$i > N_E \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Spec}(\hat{H}_{\Lambda_i}) \cap (E_0,\, E_0 + \Delta) = \emptyset$$

が成り立つ.

(gap-2) $\forall \varepsilon > 0$ に対してある $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して,

$$i > N_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{diam}\big(\mathrm{Spec}(\hat{H}_{\Lambda_i}) \cap (-\infty,\, E_0]\big) < \varepsilon$$

が成り立つ.

特に，十分大きな $i \in \mathbb{N}$ について定まる

$$\mathrm{GSD}_{\Lambda_i}\big(\{\hat{H}_{\Lambda_i}\}\big) \coloneqq \Big|\mathrm{Spec}(\hat{H}_{\Lambda_i}) \cap (-\infty,\, E_0]\Big|$$

のことを**基底状態の縮退度** (ground state degeneracy) と呼ぶ.

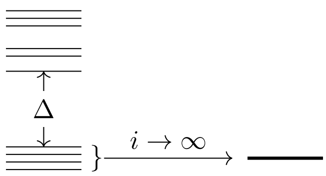

図 4.1: gapped な量子系のエネルギースペクトル $\mathrm{Spec}(\hat{H}_{\Lambda_i})$

定義 $^{\mathrm{ph}}$ 4.3: gapped quantum liquid

gapped かつ bosonic な量子系 $\big(\{\Lambda_i\}_i,\, \{\hat{H}_{\Lambda_i}\}_i\big)$ が **gapped な量子液体** (gapped quantum liquid) であるとは，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\mathrm{GSD}_{\Lambda_N}\big(\{\hat{H}_{\Lambda_i}\}\big) = \mathrm{GSD}_{\Lambda_{N+1}}\big(\{\hat{H}_{\Lambda_i}\}\big) = \mathrm{GSD}_{\Lambda_{N+2}}\big(\{\hat{H}_{\Lambda_i}\}\big) = \cdots < \infty$$

が成り立つことを言う.

gapless quantum liquid の定義は，2025 年現在でもこれといったものがない．

【例 4.1.1】Haah コード

Haah コード [?] の基底状態の縮退度は

$$\ln(\mathrm{GSD}_{\Lambda_i}) \sim |\Lambda_i|$$

と振る舞うことが知られており，gapped だが gapped な量子液体でない bosonic な量子系の例である．

量子相 (quantum phase) とは，大雑把には $\Sigma^{(D)} = \mathbb{R}^D$ としたときのgapped な量子液体の同値類のことである．この同値類の正確な定義を与えるのは大変困難だが，[?, p.3] に倣うと以下のようになる：

定義 $^{\mathrm{ph}}$ 4.4: bosonic な量子相

$\Sigma^{(D)} = \mathbb{R}^D$ における 2 つの gapped な量子液体 $\left(\{\Lambda_i\}_i,\, \{\hat{H}^{(0)}_{\Lambda_i}\}_i\right)$, $\left(\{\Lambda_i\}_i,\, \{\hat{H}^{(1)}_{\Lambda_i}\}_i\right)$ を与える．熱力学極限をとった gapped な量子液体全体がなす集合を $\mathrm{gQL}(\Sigma^{(D)})$ とおく．$\mathrm{gQL}(\Sigma^{(D)})$ には適切な位相を入れて位相空間にする．

このとき，$\hat{H}^{(0)}_{\Lambda_\infty}$ と $\hat{H}^{(1)}_{\Lambda_\infty}$ が同じ**量子相** (quantum phase) にあるとは，連続曲線 $\hat{H} \colon [0,\,1] \longrightarrow \mathrm{gQL}(\Sigma^{(D)})$ が存在して $\hat{H}(0) = \hat{H}^{(0)}_{\Lambda_\infty}$ かつ $\hat{H}(1) = \hat{H}^{(0)}_{\Lambda_\infty}$ を充たすことを言う．

4.1.1 SRE 状態と LRE 状態

まず，[?, p.3] に倣って **SRE 状態** (Short Range Entangled states) と **LRE 状態** (Long Range Entangled states) を定義する．[?, p.4]

予想 4.1: Chen-Gu-Wen の仮説

bosonic かつ gapped な 2 つの基底状態 $|\Phi_0\rangle$, $|\Phi_1\rangle$ が同じ量子相にあるならば，以下の条件を充たす bosonic な格子模型の族 $\left\{\hat{H}(t)\right\}_{t\in[0,\,1]}$ が存在する：

- $\forall t \in [0,\,1]$ に対して，$\hat{H}(t)$ の基底状態は熱力学極限を取った際に gapped である．
- $|\Phi_0\rangle$, $|\Phi_1\rangle$ はそれぞれ $\hat{H}(0)$, $\hat{H}(1)$ の基底状態である．

命題 4.1: LU transformation

以下の 2 つは同値である：

(1) bosonic かつ gapped な 2 つの基底状態 $|\Phi_0\rangle$, $|\Phi_1\rangle$ が同じ量子相にある

(2) bosonic な格子模型の族 $\left\{\hat{\tilde{H}}(t)\right\}_{t\in[0,\,1]}$ が存在して

$$|\Phi_1\rangle = \mathcal{T}\left[e^{-\mathrm{i}\int_0^1 \mathrm{d}t\,\hat{\tilde{H}}(t)}\right]|\Phi_0\rangle \tag{4.1.1}$$

を充たす．ただし $\mathcal{T}$ は経路順序積である．

証明 ($\Longrightarrow$)

仮説 4.1 による．

($\Longleftarrow$)

■

(4.1.1) を**局所ユニタリ発展** (local unitary evolution) と呼ぶ．

定義 4.1: SRE 状態

bosonic かつ gapped な基底状態 $|\Phi\rangle \in \mathrm{Gnd}\left(\Sigma^{(D)}\right)$ が **SRE 状態** (short range entangled state) であるとは，ある separable な状態

$$\bigotimes_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} |\psi_{\boldsymbol{x}}\rangle \quad {}^{\mathrm{w}/} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Lambda,\ |\psi_{\boldsymbol{x}}\rangle \in \mathcal{H}_{\boldsymbol{x}}$$

と $|\Psi\rangle$ との間に局所ユニタリ発展が存在すること．

SRE 状態でない基底状態のことを **LRE 状態** (long range entangled state) と呼ぶ．

定義から明らかに，任意の SRE 状態は同一の量子相に属する．

4.1.2 Bosonic SPT 相

SRE 状態の定義はそのままだと面白くないが，対称性を考慮すると話は変わってくる．位相群 G を与える．また，格子 Λ は空間群 S の対称性を持つ[*4]とする．

定義 4.2: 外部半直積

$N,\ H$ を群とし，$\phi\colon H \to \mathrm{Aut}\,N,\ h \mapsto \phi_h$ を準同型写像とする[a]．このとき，集合 $N \times H$ は次の二項演算 $\cdot\ \colon N \times H \to N \times H$ に関して群を成す：

$$(n_1,\ h_1) \cdot (n_2,\ h_2) \coloneqq \left(n_1 \phi_{h_1}(n_2),\ h_1 h_2\right)$$

この群 $\left(N \times H,\ \cdot\ ,\ (1_N,\ 1_H)\right)$ のことを $N,\ H$ の (外部) **半直積** (semidirect product) と呼び，$\boldsymbol{H} \ltimes_{\boldsymbol{\phi}} \boldsymbol{N}$ または $\boldsymbol{N} \rtimes_{\boldsymbol{\phi}} \boldsymbol{H}$ と書く．

[a] $\mathrm{Aut}\,N$ は，N から N 自身への同型写像全体の集合に，写像の合成を群の演算として群構造を入れたもので，**自己同型群** (automorphism group) と呼ばれる．

[*4] S の Λ への左作用を $\blacktriangleright\colon S \times \Lambda \longrightarrow \Lambda$ と書く．

定義 4.3: G-対称な格子模型

bosonic な格子模型 $\hat{H}$ が $\boldsymbol{G}$**-対称** [?, p.12] であるとは,

- 群準同型 $\rho_{\mathrm{spa}}\colon G \longrightarrow S$
- 群準同型 $\phi_{\mathrm{int}}\colon G \longrightarrow \{\pm 1\}$
- 群のユニタリ or 反ユニタリ表現 $\rho_{\mathrm{int}}\colon G \ltimes_{\blacktriangleright \circ \rho_{\mathrm{spa}}} S \longrightarrow \{\text{unitary or antiunitary operator } \mathcal{H}_{\mathrm{tot}} \to \mathcal{H}_{\mathrm{tot}}\}$

が存在して以下を充たすことを言う：

(Gsym-1)

$\forall g \in G$ に対し,

$$\phi_{\mathrm{int}}(g) = \begin{cases} +1, & \rho_{\mathrm{int}}(g) \text{ is unitary} \\ -1, & \rho_{\mathrm{int}}(g) \text{ is antiunitary} \end{cases}$$

(Gsym-2)

群 G の $\mathcal{H}_{\mathrm{tot}}$ への作用

$$\begin{aligned} \rho\colon G &\longrightarrow \mathrm{GL}(\mathcal{H}_{\mathrm{tot}}), \\ g &\longmapsto \left(\bigotimes_{\boldsymbol{x} \in \Lambda} |\psi_{\boldsymbol{x}}\rangle \longmapsto \bigotimes_{\boldsymbol{x} \in \Lambda} \rho_{\mathrm{int}}\big(g,\, \rho_{\mathrm{spa}}(g)^{-1} \blacktriangleright \boldsymbol{x}\big) \, |\psi_{\rho_{\mathrm{spa}}(g)^{-1} \blacktriangleright \boldsymbol{x}}\rangle \right) \end{aligned}$$

に関して,

$$\forall g \in G,\ \left[\hat{H}, \rho(g)\right] = 0$$

が成り立つ.

G-対称な格子模型全体の集合を $\mathbf{Lat}_{\boldsymbol{G}}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{(\boldsymbol{D})}\right) \subset \mathrm{Lat}\left(\Sigma^{(D)}\right)$ と書き[*5]. その基底状態全体の集合を $\mathbf{Gnd}_{\boldsymbol{G}}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{(\boldsymbol{D})}\right) \subset \mathrm{Gnd}\left(\Sigma^{(D)}\right)$ と書く.

定義 4.4: G-同変な量子相

2 つの bosonic かつ G-対称な格子模型 $\hat{H}_0, \hat{H}_1 \in \mathrm{Lat}_G(\Sigma^{(D)})$ を与える.

- $\hat{H}_0$ の基底状態 $|\Phi_0\rangle \in \mathrm{Gnd}_G\left(\Sigma^{(D)}\right)$ と $\hat{H}_1$ の基底状態 $|\Phi_1\rangle \in \mathrm{Gnd}_G\left(\Sigma^{(D)}\right)$ が同じ $\boldsymbol{G}$**-同変な量子相** (G-equivalent quantum phase) にあるとは, C^∞ 曲線 $\hat{H}\colon [0,\, 1] \longrightarrow \mathrm{Lat}_G(\Sigma^{(D)})$ が存在して $\hat{H}(0) = \hat{H}_0$ かつ $\hat{H}(1) = \hat{H}_1$ を充たすこと. これは $\mathrm{Gnd}_G\left(\Sigma^{(D)}\right)$ 上の同値関係を成す.
- 商集合 $\mathrm{Gnd}_G\left(\Sigma^{(D)}\right)/\sim$ の元のことを $\boldsymbol{G}$**-同変な量子相**と呼ぶ.

[*5] $\mathrm{Lat}\left(\Sigma^{(D)}\right)$ からの subspace topology を入れる.

定義 4.5: SPT 相 (Chen-Gu-Wen による)

bosonic かつ gapped かつ G-同変な量子相 $[\lvert\Phi\rangle] \in \mathrm{Gnd}_G\left(\Sigma^{(D)}\right)$ が **SPT 相** (symmetry protected topological phase[a]) であるとは，$\forall \lvert\Psi\rangle \in [\lvert\Phi\rangle]$ が SRE 状態であることを言う．

[a] **symmetry protected trivial phase** と呼ぶこともある [?].

つまり，任意の代表元が G-対称性を破れば separable な状態に滑らかにつながるような量子相のことを SPT 相と呼ぶ．SPT 相の名前はこのことに由来する．

4.1.3 Fermionic SPT 相

4.2 Bosonic SPT 相の分類：群コホモロジーによる方法

[?, p.16, VIII] は，Dijkgraaf-Witten 理論を用いて[*6]かなり多くの SPT 相を書き下す系統的な方法を発明した．この節ではその方法を紹介する．

簡単のため，G-対称な格子模型のうち群準同型 ρ_{spa} が自明なもの[*7]のみ考える．また，G は局所コンパクト[*8]であるとする．このとき G は Haar 測度を持つのでそれを $\int_G \mathrm{d}g$ とおく．このとき，非ゼロな $\lvert\psi\rangle \in \mathcal{H}_{\boldsymbol{x}}$ を 1 つ固定して $\forall g \in G$ に対して

$$\lvert g\rangle \coloneqq \rho_{\mathrm{int}}(g)\lvert\psi\rangle$$

とおくと，Haar 測度の左右不変性から族 $\left\{\lvert g\rangle\right\}_{g\in G}$ は一般化コヒーレント状態を成す．ここで $\forall\left\{g_{\boldsymbol{x}}\right\}_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} \in \prod_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} G$ に対して

$$\left\lvert \left\{g_{\boldsymbol{x}}\right\}_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} \right\rangle \coloneqq \bigotimes_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} \lvert g_{\boldsymbol{x}}\rangle \in \mathcal{H}_{\mathrm{tot}}$$

とおこう．さらに以下では G は離散群であるとする．

[*6] 彼女らの論文においては Dijkgraaf-Witten 理論との関連は明示的に書かれていない．[?] には顕に書かれている．
[*7] i.e. $\forall g \in G$ に対して $\rho_{\mathrm{spa}}(g) = 1_S$
[*8] 任意の点がコンパクト近傍を持つ

命題 4.2: SPT 相の構成

- 空間多様体 Σ を境界にもつ $D+1$ 次元多様体 $\mathcal{N}^{(D+1)}$
- $\mathcal{N}^{(D+1)}$ の三角形分割 $|K| \xrightarrow{\approx} \mathcal{N}^{(D+1)}$ であって，その 0-単体（頂点）K_0 が $\partial\mathcal{N}^{(D+1)}$ において格子 Λ を再現するもの
- $\omega \in H^{D+1}_{\mathrm{Grp}}(G,\, \mathrm{U}(1))$

をとる．このとき

$$|\Psi\rangle_\omega \coloneqq \frac{1}{|G|^{|\Lambda|}} \sum_{\{g_j\}_{j\in K_0}} \prod_{\{j_0,\,\dots,\,j_{D+1}\}\in K_{D+1}} \omega(g_{j_0},\,\dots,\,g_{j_{D+1}})^{\epsilon_{\{j_0,\,\dots,\,j_{D+1}\}}} \left|\{g_{\boldsymbol{x}}\}_{\boldsymbol{x}\in\Lambda}\right\rangle$$

は SPT 相の代表元である．ただし $\epsilon_{\{j_0,\,\dots,\,j_{D+1}\}}$ は $D+1$-単体 $\{j_0,\,\dots,\,j_{D+1}\} \in K_{D+1}$ の向きである．

<u>証明</u> まず，$|\Psi\rangle_\omega$ が G-対称であることを示す．実際 $\forall\{g_{\boldsymbol{x}}\}_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} \in \prod_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} G$ および $\forall g \in G$ に対して

$$\begin{aligned}
\left\langle \{g_{\boldsymbol{x}}\}_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} \middle| \rho(g) \middle| \Psi \right\rangle_\omega &= \left\langle \{g_{\boldsymbol{x}}\}_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} \middle| \bigotimes_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} \rho_{\mathrm{int}}(g) \middle| \Psi \right\rangle_\omega \\
&= \left\langle \{g^{-1}g_{\boldsymbol{x}}\}_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} \middle| \Psi \right\rangle_\omega \\
&= \frac{1}{|G|^{|\Lambda|}} \sum_{\{g_j\}_{j\in K_0\setminus\Lambda}} \prod_{\{j_0,\,\dots,\,j_{D+1}\}\in K_{D+1}} \omega(g_{j_0},\,\dots,\,g_{j_{D+1}})^{\epsilon_{\{j_0,\,\dots,\,j_{D+1}\}}} \\
&= \left\langle \{g_{\boldsymbol{x}}\}_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} \middle| \Psi \right\rangle_\omega
\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし 3 つ目の等号でコサイクルの左不変性を使った．

次に，$|\Psi\rangle_\omega$ が SRE 状態であることを示す．簡単のため $\Sigma = S^D$, $\mathcal{N}^{(D+1)} = D^{D+1}$ の場合を考える[*9]．このとき $K_0 \setminus \Lambda = \{*\}$ となるような三角形分割をとることができて，

$$\begin{aligned}
|\Psi\rangle_\omega &= \left(\sum_{\{g_{\boldsymbol{x}}\}_{\boldsymbol{x}\in\Lambda}} \prod_{\{j_0,\,\dots,\,j_D,\,*\}\in K_{D+1}} \omega(g_{j_0},\,\dots,\,g_{j_D},\,g_*) \left|\{g_{\boldsymbol{x}}\}_{\boldsymbol{x}\in\Lambda}\right\rangle\!\left\langle\{g_{\boldsymbol{x}}\}_{\boldsymbol{x}\in\Lambda}\right| \right) \bigotimes_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g_{\boldsymbol{x}}\in G} |g_{\boldsymbol{x}}\rangle \right) \\
&= \left(\prod_{\{j_0,\,\dots,\,j_D,\,*\}\in K_{D+1}} \sum_{\{g_{j_n}\}_{n=0}^{D}\in G^{D+1}} \omega(g_{j_0},\,\dots,\,g_{j_D},\,g_*) \left|\{g_{j_n}\}_{n=0}^{D}\right\rangle\!\left\langle\{g_{j_n}\}_{n=0}^{D}\right| \right) \bigotimes_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g_{\boldsymbol{x}}\in G} |g_{\boldsymbol{x}}\rangle \right)
\end{aligned}$$

と書けるので SRE 状態である．

最後に，$|\Psi\rangle$ が属する SPT 相が $\omega \in H^{D+1}_{\mathrm{Grp}}(G,\, \mathrm{U}(1))$ の代表元の取り方によらないことを示す．実際，D-コチェイン $\eta \in C^D_{\mathrm{Grp}}(G,\, \mathrm{U}(1))$ に対して $\omega \longmapsto \omega\cdot\delta\eta$ と取り替えると

$$|\Psi\rangle_{\omega\cdot\delta\eta} = \left(\prod_{\{j_0,\,\dots,\,j_D,\,*\}\in K_{D+1}} \sum_{\{g_{j_0},\,\dots,\,g_{j_D}\}\in G^{D+1}} \eta(g_{j_0},\,\dots,\,g_{j_D}) \left|\{g_{j_n}\}_{n=0}^{D}\right\rangle\!\left\langle\{g_{j_n}\}_{n=0}^{D}\right| \right) |\Psi\rangle_\omega$$

となるが，この変換は明らかに $\rho(g)$ と可換なので G-同変な局所ユニタリ発展である． ■

[*9] 一般の場合でも，C^∞ 多様体は CW 複体の構造を持つので問題ないと思われる．

Dijkgraaf-Witten 理論との関係は，大域的 G-対称性をゲージ化することにより明らかになる [?, APPENDIX E]．ゲージ化によって，$\mathcal{N}^{(D+1)}$ の三角形分割の 1-単体（辺）$e \in K_1$ 上に G の元 h_e が指定される．ただし，G が離散群なので h_e は平坦接続でなくてはならない．よってもし 3 つの 1-単体 e_1, e_2, e_3 がある 2-単体 d について $\partial_i^2(d) = e_i$ を充たすならば

$$h_{e_1} h_{e_2} h_{e_3} = 1_G$$

が成り立たねばならない．また，「物質場」g_x とゲージ場 h_e のゲージ変換は，$\{k_x\}_{x\in K_0} \in G^{|K_0|}$ を用いてそれぞれ

$$\begin{aligned} g_x &\longmapsto k_x g_x, \\ h_e &\longmapsto k_{\partial_1^1(e)}^{-1} h_e k_{\partial_0^1(e)} \end{aligned}$$

のようになる．故に，命題 4.2 の構成で用いた「物質場」の分配関数

$$Z(\{g_i\}_{i\in K_0}; \mathcal{N}^{(D+1)}) \coloneqq \prod_{\{j_0,\,\dots,\,j_{D+1}\}\in K_{D+1}} \omega(g_{j_0}, \dots, g_{j_{D+1}})^{\epsilon\{j_0,\,\dots,\,j_{D+1}\}}$$

は G-対称性のゲージ化によって

$$\begin{aligned} &Z_{\mathrm{gauged}}(\{g_i\}_{i\in K_0}, \{h_e\}_{e\in K_1}; \mathcal{N}^{(D+1)}) \\ &= \frac{1}{|G|^{|\Lambda|}} \prod_{\{j_0,\,\dots,\,j_{D+1}\}\in K_{D+1}} \omega(g_{j_0}, h_{j_0 j_1} g_{j_1}, h_{j_0 j_1} h_{j_1 j_2} g_{j_2} \dots, h_{j_0 j_1} \cdots h_{j_D j_{D+1}} g_{j_{D+1}})^{\epsilon\{j_0,\,\dots,\,j_{D+1}\}} \\ &= \frac{1}{|G|^{|\Lambda|}} \prod_{\{j_0,\,\dots,\,j_{D+1}\}\in K_{D+1}} \alpha(g_{j_0}^{-1} h_{j_0 j_1} g_{j_1}, g_{j_1}^{-1} h_{j_1 j_2} g_{j_2}, \dots, g_{j_D}^{-1} h_{j_D j_{D+1}} g_{j_{D+1}})^{\epsilon\{j_0,\,\dots,\,j_{D+1}\}} \end{aligned}$$

になる[*10]．ゲージ場を外場と見做すことにより Dijkgraaf-Witten 理論の作用が得られる：

$$\begin{aligned} &\sum_{\{g_j\}_{j\in K_1}} Z_{\mathrm{gauged}}(\{g_i\}_{i\in K_0}, \{h_e\}_{e\in K_1}; \mathcal{N}^{(D+1)}) \\ &= \prod_{\{j_0,\,\dots,\,j_{D+1}\}\in K_{D+1}} \alpha(h_{j_0 j_1}, h_{j_1 j_2}, \dots, h_{j_D j_{D+1}})^{\epsilon\{j_0,\,\dots,\,j_{D+1}\}} \\ &= e^{2\pi \mathrm{i} \langle \gamma^* \alpha, [] \rangle} \end{aligned}$$

以上の議論により，D 次元の bosonic な[*11]SPT 相の分類は $H^{D+1}_{\mathrm{Grp}}(G, \mathrm{U}(1))$ によって成される，などと言う [?].

4.3 Bosonic SPT 相の分類：Ω-スペクトラムによる方法

上述の群コホモロジーによる bosonic な SPT 相の分類は低次元においては十分有効だが，高次元だと不十分になったり，逆に細かくなり過ぎることが知られている [?]．現代的には一般コホモロジー理論によって分類することが多い [?]．その際には，そもそも局所ユニタリ発展は使わずに SPT 相を定義する．

---

*10 このゲージ化の方法は，理論のゲージ不変性を要請することによって得られる．

*11 より正確には G が離散群でかつ on site symmetry のとき

4.4 Levin-Wen 模型