

位相的場の理論 ノート

高間俊至

最終更新：2025 年 4 月 27 日

0.0 前書き

本資料の最新版 L^AT_EX ソースコードは <https://github.com/T2sp/TQFT> から入手できます. 2025 年度現在ではかなり頻繁に更新しているため, 最終更新日に注意してください.

0.0 記号

定義^{ph} 0.1:

予想^{ph} 0.1:

命題^{ph} 0.1:

など, 囲み枠の見出しの肩に^{ph}が付いているものは, 物理学的に妥当だと考えられているが数学的に厳密な定式化・証明が完了していない主張である.

目次

第 1 章	粒子の統計性	8
1.1	1 粒子の経路積分	8
1.2	2 つの同種粒子	10
1.2.1	粒子の配位	10
1.2.2	配位空間上の経路	11
1.2.3	経路積分による量子化	12
1.3	同種粒子多体系	13
1.3.1	$D = 2$ の場合：組み紐群	13
1.3.2	$D = 3$ の場合：対称群	14
1.3.3	経路積分の構成	14
1.3.4	1 次元表現（可換な例）	14
1.3.5	より高次元の表現（非可換な場合）	15
第 2 章	Chern-Simons 理論の導入	17
2.1	Charge-Flux composite	17
2.1.1	Aharonov-Bohm 効果	17
2.1.2	Charge-Flux composite としてのエニオン	18
2.1.3	トーラス上のエニオンの真空	18
2.2	可換 Chern-Simons 理論の経験的導入	19
2.2.1	ゲージ不変性	19
2.2.2	運動方程式	20
2.2.3	プロパゲーター	20
2.2.4	真空中の可換 Chern-Simons 理論	21
2.2.5	正準量子化	21
2.3	非可換 Chern-Simons 理論の経験的導入	21
2.3.1	ゲージ不変性	22
2.3.2	Chern-Simons 作用	23
2.4	古典的ゲージ理論の数学	23
2.4.1	主束と内部対称性の定式化	24
2.4.2	Lie 群の指数写像と基本ベクトル場	35
2.4.3	主束の接続	47
2.4.4	同伴ベクトル束上の共変微分	52

2.4.5	局所接続形式とゲージ場	62
2.4.6	水平持ち上げ	69
2.4.7	主束上の曲率形式	73
2.4.8	曲率形式の局所表示と場の強さ	79
2.4.9	同伴ベクトル束上の接続とその局所表示	81
2.4.10	同伴ベクトル束上の曲率とその局所表示	85
2.4.11	ホロノミー	87
2.4.12	ゲージ理論	89
2.5	特性類と Chern-Simons 形式	89
2.5.1	Lie 代数上の不変多項式	89
2.5.2	Chern-Weil 理論	90
2.5.3	主束とベクトル束	94
2.5.4	不変多項式の代数構造	96
2.5.5	特性類のホモトピー論的扱い	102
第 3 章	位相的場の理論	103
3.1	モノイダル圏	103
3.1.1	モノイダル圏の定義	103
3.1.2	組紐付きモノイダル圏	106
3.1.3	閉圏・rigid なモノイダル圏・ダガー圏	108
3.1.4	モノイダル関手	113
3.2	TQFT の定義	114
3.2.1	Atiyah の公理系	114
3.3	連続な高次対称性	116
3.3.1	通常対称性	117
3.3.2	連続的高次対称性	122
3.3.3	対称性の自発的破れ	125
3.3.4	高次対称性の自発的破れ	130
3.3.5	高次対称性の Coleman-Mermin-Wagner の定理	131
3.3.6	対称性のアノマリー	132
3.3.7	高次対称性のアノマリー	136
3.4	Dijkgraaf-Witten 理論	137
3.4.1	普遍束	137
3.4.2	群コホモロジー	143
3.4.3	関手としての接続	146
3.4.4	トポロジカルなゲージ理論：Lie 群の場合	148
3.4.5	トポロジカルなゲージ理論：有限群の場合	150
3.5	離散的高次ゲージ理論	152
3.5.1	Deligne-Beilinson コサイクルとしての $U(1)$ ゲージ場	152
3.5.2	BF -理論	153

3.5.3	BF -理論の等価な形	155
3.5.4	BF -理論における 't Hooft operator	156
3.6	高次のゲージ理論-より厳密な定式化	156
3.6.1	0-form のまとめ	156
3.6.2	p -form への拡張	157
3.6.3	高次群の構造が自明な場合： ∞ -groupoid	158
3.6.4	2-群の場合：ホロノミー 2-関手	162
3.7	(1+1)-次元の有限 0-form 対称性のゲージ化	162
3.7.1	ユニタリフュージョン圏としての 0-form 対称性	163
3.7.2	代数対象とゲージ化	164
3.7.3	ゲージ化された理論の持つ対称性	167
3.7.4	等価なゲージ化	171
3.7.5	再ゲージ化	171
3.7.6	ゲージ化で移り合える対称性	172
3.8	Turaev-Viro 理論	172
3.8.1	球状圏に関する準備	172
3.8.2	PL 多様体に関する準備	184
3.8.3	Turaev-Viro 不変量の構成	189
3.8.4	state sum TQFT	198
3.9	離散的高次対称性	202
3.9.1	BF -理論における離散的高次対称性	202
3.9.2	中心対称性のゲージ化	204
3.9.3	有限部分群のゲージ化	205
第 4 章	圏論とトポロジカル秩序	206
4.1	トポロジカル秩序のミクロな定義	206
4.1.1	ミクロな視点から量子相を定義する試み	207
4.1.2	重力アノマリー	210
4.2	トポロジカル秩序のマクロな特徴付け	210
4.3	$0+1$ 次元のトポロジカル欠陥	214
4.3.1	アーベル圏としての構造	214
4.3.2	モノイダル圏としての構造	216
4.3.3	ユニタリティ	217
4.3.4	rigidity	218
4.3.5	組紐	220
4.3.6	リボン構造	220
4.3.7	UMTC	220
4.4	Levin-Wen 模型	225
付録 A	コホモロジー	226

A.1	導来関手	226
A.2	層係数コホモロジー	226
A.3	Čech コホモロジー	229
A.4	Deligne-Beilinson コホモロジー	230
付録 B	ベクトル場の話	232
B.1	接束	234
B.2	ベクトル場の定義	236
	B.2.1 C^∞ 関数の微分としてのベクトル場	238
	B.2.2 ベクトル場と C^∞ 写像	240
	B.2.3 Lie ブラケット	242
B.3	積分曲線とフロー	243
	B.3.1 積分曲線	243
	B.3.2 フロー	247
	B.3.3 完備なベクトル場	253
B.4	Lie 微分	254
B.5	C^∞ ベクトル束	257
付録 C	∞ -圏	259
C.1	圏論の復習	259
	C.1.1 圏と関手	259
	C.1.2 極限と余極限	262
	C.1.3 米田埋め込み	270
	C.1.4 重み付き極限・エンド・コエンド	275
	C.1.5 随伴	277
	C.1.6 Kan 拡張	279
C.2	単体的集合	281
	C.2.1 幾何学的実現	284
	C.2.2 境界・角・背骨	286
C.3	脈体・ ∞ -亜群・ $(\infty, 1)$ -圏	292
	C.3.1 脈体	292
	C.3.2 ∞ -亜群・ $(\infty, 1)$ -圏	296
C.4	単体的豊穡圏とホモトピー論	302
	C.4.1 単体的豊穡圏とホモトピーコヒーレントな脈体	302
	C.4.2 単体的ホモトピー	307
C.5	∞ -トポス	309
C.6	(∞, n) -圏	310
	C.6.1 因子化ホモロジー	310
	C.6.2 Complete Segal space	311
	C.6.3 Theta space	311

付録 D	C^∞ 多様体の話	312
D.1	沈めこみ・はめ込み・埋め込み	312
D.1.1	局所微分同相写像	317
D.1.2	ランク定理	319
D.1.3	C^∞ 埋め込み	325
D.2	部分多様体	326
D.3	Sard の定理	326
付録 E	代数の小技集	327
E.0.1	ベクトル空間の小技	327
E.0.2	環の小技	329
付録 F	モノイダル圏・フュージョン圏・高次群	330
F.1	アーベル圏	331
F.1.1	半単純性・有限性	333
F.1.2	ダガー構造・ユニタリ構造・ C^* -構造	334
F.2	モノイダル圏	334
F.2.1	rigid なモノイダル圏	339
F.2.2	組紐付きモノイダル圏	345
F.2.3	リボン構造	349
F.3	テンソル圏・フュージョン圏	349
F.3.1	巡回構造・球状構造・量子次元	355
F.3.2	フュージョン環・Frobenius-Perron 次元	360
F.3.3	F -シンボル	363
F.3.4	ユニタリフュージョン圏	364
F.3.5	ユニタリフュージョン圏における Frobenius-Perron 次元	366
F.3.6	Deligne のテンソル積	367
F.4	加群圏	367
F.4.1	左/右加群圏	367
F.4.2	両側加群圏	370
F.4.3	代数と加群	371
F.4.4	両側加群	378
F.4.5	森田同値	380
F.4.6	Frobenius 代数	380
F.4.7	加群圏における internal hom	382
F.5	組紐付きテンソル圏	382
F.5.1	リボン構造と巡回構造の関係	382
F.5.2	リボン構造と量子次元・ S -行列	384
F.6	2-群	390
F.6.1	豊稜圏と 2-圏	390

F.6.2	弱い 2-群・コヒーレントな 2-群・厳密な 2-群	396
F.6.3	交差加群との関係	399
F.6.4	2-群の分類	402
F.7	3-群	405
F.7.1	3-圏	405
F.7.2	2-crossed module と厳密な 3-群	405
参考文献		407

第 1 章

粒子の統計性

この章は [Sim21, Chapter3, 4] に相当する。この章では同種の多粒子系の経路積分による量子化を考察し、粒子の統計性と配位空間のホモトピー論の関係性を調べる。特に、プロパゲーターの合成則を充たす経路積分の測度と配位空間の基本群のユニタリ表現の対応を考察し、 $2+1$ 次元の同種 N 粒子系においてエニオンの統計性が生じ得ることを確かめる。なお、本章ではまだ場の量子化は行わない。

1.1 1 粒子の経路積分

\mathbb{R}^D 内を運動する非相対論的 1 粒子の軌跡 $\mathbf{x}(t)$ を与える。時刻 t_i に \mathbf{x}_i を出発し、時刻 t_f に \mathbf{x}_f に到達しているとする。

この系を量子力学的に捉えてみる。時刻 t_i に状態 $|\mathbf{x}_i\rangle$ にあった系が時刻 t_f に状態 $|\mathbf{x}_f\rangle$ にある遷移振幅はプロパゲーター (propagator) と呼ばれるが、それは系の時間発展を表すユニタリ演算子 $\hat{U}(t_f, t_i)$ を用いて

$$\langle \mathbf{x}_f | \hat{U}(t_f, t_i) | \mathbf{x}_i \rangle \quad (1.1.1)$$

と書かれる^{*1}。プロパゲーターが計算されると、系の波動関数 $\psi(\mathbf{x}, t) := \langle \mathbf{x} | \psi(t) \rangle$ の時間発展が次のようにしてわかる：

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}_f, t_f) &= \langle \mathbf{x}_f | \psi(t_f) \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}_f | \hat{U}(t_f, t_i) | \psi(t_i) \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^D} d^D \mathbf{x}_i \langle \mathbf{x}_f | \hat{U}(t_f, t_i) | \mathbf{x}_i \rangle \langle \mathbf{x}_i | \psi(t_i) \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^D} d^D \mathbf{x}_i \langle \mathbf{x}_f | \hat{U}(t_f, t_i) | \mathbf{x}_i \rangle \psi(\mathbf{x}_i, t_i) \end{aligned}$$

従って、初期条件が与えられてかつ任意の時刻を繋ぐプロパゲーターが計算できれば系の時間発展が全てわかったことになる。そして Feynman の経路積分 (path integral) による量子化とは、今考えている系の古典的作用

$$S[\mathbf{x}(t)] = \int_{t_i}^{t_f} dt L[\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t]$$

^{*1} 状態ケット $|\mathbf{x}\rangle$ は Schrödinger 表示である。

と、量子的なプロパゲーター (1.1.1) との間に

$$\langle \mathbf{x}_f | \hat{U}(t_f, t_i) | \mathbf{x}_i \rangle = \mathcal{N} \sum_{\mathbf{x}(t) \text{ s.t. } \mathbf{x}(t_i)=\mathbf{x}_i, \mathbf{x}(t_f)=\mathbf{x}_f} e^{iS[\mathbf{x}(t)]/\hbar} \quad (1.1.2)$$

の関係があることを主張するものである。

いま考えている系のハミルトニアンが

$$\hat{H}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{x}}) = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{x}})$$

と書かれる場合に (1.1.2) が成り立っていることを確認する。Schrödinger 方程式より時間発展演算子は

$$\hat{U}(t_f, t_i) = e^{-i\hat{H}(t_f-t_i)/\hbar}$$

である。十分大きな n に対して $\varepsilon := (t_f - t_i)/n$ とおくとことで時間間隔 $[t_i, t_f]$ を

$$[t_i, t_f] = [t_i, t_i + \varepsilon] \cup [t_i + \varepsilon, t_i + 2\varepsilon] \cup \cdots \cup [t_i + (n-1)\varepsilon, t_f]$$

のように分割し、 $t_k := t_i + k\varepsilon$ ($k = 0, 1, \dots, n$) とおく*2。このとき ε は微小なので、 $\forall \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^D$ に対して

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_{k+1} | \hat{U}(t_{k+1}, t_k) | \mathbf{x}_k \rangle &= \langle \mathbf{x}_{k+1} | e^{-i\hat{H}\varepsilon/\hbar} | \mathbf{x}_k \rangle \\ &\approx \langle \mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k \rangle - \frac{i\varepsilon}{\hbar} \langle \mathbf{x}_{k+1} | \hat{H} | \mathbf{x}_k \rangle \\ &= \delta^D(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) - \frac{i\varepsilon}{\hbar} \left(\langle \mathbf{x}_{k+1} | \frac{\hat{\mathbf{p}}}{2m} | \mathbf{x}_k \rangle + V(\mathbf{x}_k) \delta^D(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) \right) \\ &= \int \frac{d^D \mathbf{p}}{(2\pi)^D} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k)/\hbar} \left(1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar} H(\mathbf{p}, \mathbf{x}_k) \right) \\ &\approx \int \frac{d^D \mathbf{p}}{(2\pi)^D} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k)/\hbar} e^{-i\varepsilon H(\mathbf{p}, \mathbf{x}_k)/\hbar} \end{aligned}$$

が成り立つ。ここに、4 行目以降に登場する $H(\mathbf{p}, \mathbf{x}_k)$ は演算子ではなく c 数である。従って*3、

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_f | \hat{U}(t_f, t_i) | \mathbf{x}_i \rangle &= \langle \mathbf{x}_f | e^{-i\hat{H}n\varepsilon/\hbar} | \mathbf{x}_i \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \left(\prod_{k=1}^{n-1} d^D \mathbf{x}_k \right) \prod_{k=0}^{n-1} \langle \mathbf{x}_{k+1} | e^{-i\hat{H}\varepsilon/\hbar} | \mathbf{x}_k \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{d^D \mathbf{x}_k d^D \mathbf{p}_k}{(2\pi)^D} \right) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathbf{p}_k \cdot \frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k}{\varepsilon} - H(\mathbf{p}_k, \mathbf{x}_k) \right) \right\} \quad (1.1.3) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{d^D \mathbf{x}_k d^D \mathbf{p}_k}{(2\pi)^D} \right) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - H(\mathbf{p}, \mathbf{x})) \right\} \\ &=: \int [d^D \mathbf{x} d^D \mathbf{p}] \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - H(\mathbf{p}, \mathbf{x})) \right\} \end{aligned}$$

*2 定義から $t_i = t_0, t_f = t_n$ である。

*3 実は、(1.1.3) から次の行への移行は、厳密には単に記号的なものだと考えるべきである。というのも、 \mathbf{x}_k ($k = 1, \dots, n-1$) はそれぞれ独立に \mathbb{R}^D を動くので、 $(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k)/\varepsilon$ は発散しても良いのである。つまり、次の行の $\dot{\mathbf{x}} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k)/\varepsilon$ は単に記号としてこう書いているだけに過ぎない。この件に関しては [中原 18, 第 1 章, p.23] に言及がある。旧版には書いていないので注意。

ただし $\int [d^D \mathbf{x} d^D \mathbf{p}] := \lim_{n \rightarrow \infty} \int \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{d^D \mathbf{x}_k d^D \mathbf{p}_k}{(2\pi)^D} \right)$ は経路積分の測度である。ハミルトニアン \mathcal{H} の \mathbf{p} 依存性は運動項のみなので、(1.1.3) において \mathbf{p}_k 積分を先に実行することができる：

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_f | \hat{U}(t_f, t_i) | \mathbf{x}_i \rangle &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \text{i.e. } \varepsilon \rightarrow 0}} \int \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{d^D \mathbf{x}_k d^D \mathbf{p}_k}{(2\pi)^D} \right) \\ &\quad \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2m} \left(\mathbf{p}_k - m \frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k}{\varepsilon} \right)^2 + \frac{m}{2} \left(\frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k}{\varepsilon} \right)^2 - V(\mathbf{x}_k) \right) \right\} \\ &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \text{i.e. } \varepsilon \rightarrow 0}} \int \left(\prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{m\hbar}{2\pi i \varepsilon} \right)^{D/2} d^D \mathbf{x}_k \right) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{m}{2} \left(\frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k}{\varepsilon} \right)^2 - V(\mathbf{x}_k) \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \left(\prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{m\hbar}{2\pi i \varepsilon} \right)^{D/2} d^D \mathbf{x}_k \right) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 - V(\mathbf{x}) \right) \right\} \\ &=: \int [d^D \mathbf{x}] \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt L[\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)] \right\} \end{aligned}$$

これがまさに求めたい形 (1.1.2) である。

1.2 2つの同種粒子

次に、 $D(\geq 2)$ 次元 Euclid 空間^{*4} \mathbb{R}^D 内に2つの同種粒子が存在する量子系 \mathcal{H} を考える。簡単のためこの節では粒子の内部自由度はないとする。

1.2.1 粒子の配位

この系における粒子の配位 (configuration) を記述する方法を考察しよう。いま、*coincidences* と呼ばれる集合を $\Delta := \{(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^D\}$ で定義する。内部自由度がないという仮定により、勝手な1つの $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in (\mathbb{R}^D)^2 \setminus \Delta$ に対応する \mathcal{H} の元が一意に定まる。それを $|\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\rangle \in \mathcal{H}$ と書こう^{*5}。ここで、いわゆる粒子の不可弁別性により2つのケット $|\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\rangle, |\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1\rangle$ が同じ物理状態^{*6}を表していることに注意する。このため、集合 $(\mathbb{R}^D)^2 \setminus \Delta$ の上の同値関係 \sim を

$$\sim \stackrel{\text{def}}{\iff} (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \sim (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)$$

と定義し、**配位空間** (configuration space) \mathcal{C} としては^{*7}商集合 $((\mathbb{R}^D)^2 \setminus \Delta) / \sim$ を選ぶのが良い^{*8}。

^{*4} つまり、空間の Riemann 計量の成分は δ_{ij} であるとする。

^{*5} 写像 $|\cdot\rangle : (\mathbb{R}^D)^2 \rightarrow \mathcal{H}$ は全単射ではある。

^{*6} すなわち、Hilbert 空間の元としては $U(1)$ 位相がかかるという違いしかない。

^{*7} 写像 $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{H}, [(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] \mapsto |\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\rangle$ は代表元の取り方に依存するので well-defined でないが、この写像は \mathcal{C} から Hilbert 空間 \mathcal{H} の射線 (ray) 全体が成す集合への写像だと思うことで well-defined な全単射になる。 \mathcal{C} のことを配位空間と呼ぶのはこのためだと思われる。

^{*8} というよりも実は、位相幾何学においては位相空間 \mathcal{C} のことを \mathbb{R}^D の2次の **(unordered) configuration space** と呼ぶ ([https://en.wikipedia.org/wiki/Configuration_space_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Configuration_space_(mathematics)))。 \mathbb{R}^D を一般の位相空間に置き換えても良い。

以降では、同値類^a $[(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] \in \mathcal{C}$ の代表元として

$$y_1^1 < y_2^1$$

$$\text{または } y_1^1 = y_2^1, y_1^2 < y_2^2$$

$$\text{または } \dots$$

$$\text{または } y_1^1 = y_2^1, \dots, y_1^{D-1} = y_2^{D-1}, y_1^D < y_2^D$$

を充たす $(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \in [(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)]$ を使う.

^a $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in (\mathbb{R}^D)^2 \setminus \Delta$ の \sim による同値類を $[(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)]$ と書く.

1.2.2 配位空間上の経路

この系を経路積分によって量子化する際、積分すべき経路とは配位空間 \mathcal{C} 上の連続曲線、すなわち連続写像 $l: [t_i, t_f] \rightarrow \mathcal{C}$ のことである. 始点 $l(t_i) = [(\mathbf{x}_{1i}, \mathbf{x}_{2i})] =: \mathbf{x}_i$ および終点 $l(t_f) = [(\mathbf{x}_{1f}, \mathbf{x}_{2f})] =: \mathbf{x}_f$ を固定した経路全体がなすホモトピー集合を $\Pi\mathcal{C}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_f)$ と書こう. $\forall \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_f \in \mathcal{C}$ に対して, \mathbf{x}_i と \mathbf{x}_m を繋ぐ経路 l_0 と \mathbf{x}_m と \mathbf{x}_f を繋ぐ経路 l_1 の積と呼ばれる \mathbf{x}_i と \mathbf{x}_f を繋ぐ経路 $l_1 \cdot l_0$ を

$$(l_1 \cdot l_0)(t) := \begin{cases} l_0(2t - t_i), & t \in [t_i, \frac{t_i+t_f}{2}] \\ l_1(2t - t_f), & t \in [\frac{t_i+t_f}{2}, t_f] \end{cases}$$

と定義し, \mathbf{x}_f から \mathbf{x}_i へむかう逆の経路を

$$(l^{-1})(t) := l(t_i + t_f - t)$$

と定義する. このとき, ホモトピー類の well-defined な積が

$$\begin{aligned} *: \Pi\mathcal{C}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_f) \times \Pi\mathcal{C}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_m) &\longrightarrow \Pi\mathcal{C}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_f), \\ ([l_1], [l_0]) &\longmapsto [l_1 \cdot l_0] \end{aligned}$$

と定義され, 以下の性質を充たす.

補題 1.1:

$\forall \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_f \in \mathcal{C}$ に対して以下が成り立つ:

(1) $\forall [l_0] \in \Pi\mathcal{C}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_m), \forall [l_1] \in \Pi\mathcal{C}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_n), \forall [l_2] \in \Pi\mathcal{C}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_f)$ に対して

$$([l_2] * [l_1]) * [l_0] = [l_2] * ([l_1] * [l_0])$$

(2) 定数写像 $[t_i, t_f] \rightarrow \mathcal{C}, t \mapsto \mathbf{x}$ のホモトピー類を $\mathbb{1}_{\mathbf{x}}$ と書くとき, $\forall [l] \in \Pi\mathcal{C}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_f)$ に対して

$$[l] * \mathbb{1}_{\mathbf{x}_i} = \mathbb{1}_{\mathbf{x}_f} * [l]$$

(3) $\forall [l] \in \Pi\mathcal{C}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_f)$ に対して

$$[l^{-1}] * [l] = \mathbb{1}_{\mathbf{x}_i}, \quad [l] * [l^{-1}] = \mathbb{1}_{\mathbf{x}_f}$$

つまり、始点と終点がつながっていさえすれば、集合 $\Pi C := \bigcup_{\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_f \in C} \Pi C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_f)$ は積 $*$ に関して群のように振る舞う^{*9}。特に $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_f = \mathbf{x}$ のとき $\Pi C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_f)$ は**基本群** (fundamental group) または 1 次**のホモトピー群**と呼ばれ、 $\pi_1(C, \mathbf{x})$ と書かれる。

補題 1.2:

基本群は群である。

証明 始点と終点が一致しているので、 $\forall [l_0], [l_1] \in \pi_1(C, \mathbf{x})$ に対して積 $[l_0] * [l_1]$ が定義されている。 ■

今考えている系に関して言えば、群 $\pi_1(C, \mathbf{x})$ の位数は $\forall \mathbf{x} \in C$ に対して常に 2 であり、 \mathbb{Z}_2 と同型である。

1.2.3 経路積分による量子化

配位空間 C 上の始点と終点をそれぞれ $[(\mathbf{x}_{1i}, \mathbf{x}_{2i})] =: \mathbf{x}_i$, $[(\mathbf{x}_{1f}, \mathbf{x}_{2f})] =: \mathbf{x}_f$ に固定する。時刻 t_i から t_f までの系の時間発展演算子を $\hat{U}(t_f, t_i)$ と書くと、プロパゲーターは素朴に

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_{1f}, \mathbf{x}_{2f} | \hat{U}(t_f, t_i) | \mathbf{x}_{1i}, \mathbf{x}_{2i} \rangle &= \mathcal{N} \sum_{l \in \{ \text{ct. maps } [t_i, t_f] \rightarrow C \}} e^{iS[l]/\hbar} \\ &= \mathcal{N} \left(\sum_{l \text{ s.t. } [l]=+1} + \sum_{l \text{ s.t. } [l]=-1} \right) e^{iS[l]/\hbar} \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

と計算される。これは以下の 2 つの性質を充たさねばならない：

- (1) $\hat{U}(t_f, t_i)$ はユニタリ演算子
- (2) 時刻 $\forall t_m \in [t_i, t_f]$ に対して,

$$\langle \mathbf{x}_{1f}, \mathbf{x}_{2f} | \hat{U}(t_f, t_i) | \mathbf{x}_{1i}, \mathbf{x}_{2i} \rangle = \int d\mathbf{x}_{1m} d\mathbf{x}_{2m} \langle \mathbf{x}_{1f}, \mathbf{x}_{2f} | \hat{U}(t_f, t_m) | \mathbf{x}_{1m}, \mathbf{x}_{2m} \rangle \langle \mathbf{x}_{1m}, \mathbf{x}_{2m} | \hat{U}(t_m, t_i) | \mathbf{x}_{1i}, \mathbf{x}_{2i} \rangle \quad (1.2.2)$$

逆に (1), (2) を充たすような (1.2.1) の最右辺には他の可能性もある。それは例えば

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{x}_{1f}, \mathbf{x}_{2f} | \hat{U}(t_f, t_i) | \mathbf{x}_{1i}, \mathbf{x}_{2i} \rangle \\ &= \mathcal{N} \left(\sum_{l \text{ s.t. } [l]=+1} - \sum_{l \text{ s.t. } [l]=-1} \right) e^{iS[l]/\hbar} \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

である。というのも、このとき ΠC の積の性質（補題 1.1）および \mathbb{Z}_2 との類似から

$$\begin{aligned} &\int d\mathbf{x}_{1m} d\mathbf{x}_{2m} \langle \mathbf{x}_{1f}, \mathbf{x}_{2f} | \hat{U}(t_f, t_m) | \mathbf{x}_{1m}, \mathbf{x}_{2m} \rangle \langle \mathbf{x}_{1m}, \mathbf{x}_{2m} | \hat{U}(t_m, t_i) | \mathbf{x}_{1i}, \mathbf{x}_{2i} \rangle \\ &\propto \int d\mathbf{x}_{1m} d\mathbf{x}_{2m} \left(\sum_{l_{m \rightarrow f} \text{ s.t. } [l_{m \rightarrow f}]=+1} - \sum_{l_{m \rightarrow f} \text{ s.t. } [l_{m \rightarrow f}]=-1} \right) e^{iS[l_{m \rightarrow f}]/\hbar} \left(\sum_{l_{i \rightarrow m} \text{ s.t. } [l_{i \rightarrow m}]=+1} - \sum_{l_{i \rightarrow m} \text{ s.t. } [l_{i \rightarrow m}]=-1} \right) e^{iS[l_{i \rightarrow m}]/\hbar} \end{aligned}$$

^{*9} このような代数的構造を**亜群** (groupoid) と呼ぶ。 ΠC は位相空間 C の**基本亜群** (fundamental groupoid) と呼ばれる。

$$\begin{aligned}
&= \int d\mathbf{x}_{1m} d\mathbf{x}_{2m} \left(\sum_{[l_{m \rightarrow f}] = +1} \sum_{[l_{i \rightarrow m}] = +1} e^{i(S[l_{m \rightarrow f}] + S[l_{i \rightarrow m}])/\hbar} + \sum_{[l_{m \rightarrow f}] = -1} \sum_{[l_{i \rightarrow m}] = -1} e^{i(S[l_{m \rightarrow f}] + S[l_{i \rightarrow m}])/\hbar} \right) \\
&\quad - \int d\mathbf{x}_{1m} d\mathbf{x}_{2m} \left(\sum_{[l_{m \rightarrow f}] = +1} \sum_{[l_{i \rightarrow m}] = -1} e^{i(S[l_{m \rightarrow f}] + S[l_{i \rightarrow m}])/\hbar} + \sum_{[l_{m \rightarrow f}] = -1} \sum_{[l_{i \rightarrow m}] = +1} e^{i(S[l_{m \rightarrow f}] + S[l_{i \rightarrow m}])/\hbar} \right) \\
&= \int d\mathbf{x}_{1m} d\mathbf{x}_{2m} \sum_{[l_{m \rightarrow f} \cdot l_{i \rightarrow m}] = +1} e^{iS[l_{m \rightarrow f} \cdot l_{i \rightarrow m}]/\hbar} - \int d\mathbf{x}_{1m} d\mathbf{x}_{2m} \sum_{[l_{m \rightarrow f} \cdot l_{i \rightarrow m}] = -1} e^{iS[l_{m \rightarrow f} \cdot l_{i \rightarrow m}]/\hbar} \\
&= \left(\sum_{l_{i \rightarrow f} \text{ s.t. } [l_{i \rightarrow f}] = +1} - \sum_{l_{i \rightarrow f} \text{ s.t. } [l_{i \rightarrow f}] = -1} \right) e^{iS[l_{i \rightarrow f}]/\hbar}
\end{aligned}$$

が成り立ち (2) が満たされるのである。ただし、2 つめの等号で $S[l_{m \rightarrow f}] + S[l_{i \rightarrow m}] = S[l_{m \rightarrow f} \cdot l_{i \rightarrow m}]$ を使った。(1.2.3) はフェルミオンの経路積分を表す。

1.3 同種粒子多体系

次に $D(\geq 2)$ 次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^D 内に N 個の同種粒子が存在する量子系 \mathcal{H} を考える。簡単のためこの節でも粒子の内部自由度はないとし、粒子の生成・消滅は考えない。

経路積分による量子化では、2 粒子の場合と同様の議論ができる。まず配位空間 \mathcal{C} は、集合 $(\mathbb{R}^D)^N \setminus \Delta$ の上の同値関係

$$\sim \stackrel{\text{def}}{\iff} (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \sim (\mathbf{x}_{\sigma(1)}, \mathbf{x}_{\sigma(2)}, \dots, \mathbf{x}_{\sigma(N)}), \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_N$$

による^{*10}商集合 $((\mathbb{R}^D)^N \setminus \Delta) / \sim$ として定義される。積分すべき経路のホモトピー類は基本垂群 $\Pi\mathcal{C}$ をなす。また、経路の世界線^{*11}を考えることでこれは $D+1$ 次元空間を動く、互いに交わらない N 本の曲線とみなすこともできる。適当な基点 $\mathbf{x} \in (\mathbb{R}^D)^N \setminus \Delta$ を取ってきて基本群 $\pi_1(\mathcal{C}, \mathbf{x})$ を考えれば良い。

1.3.1 $D = 2$ の場合：組み紐群

空間次元が $D = 2$ の場合、 $\pi_1(\mathcal{C}, \mathbf{x})$ は (Artin の) **組み紐群** (braid group) B_N と呼ばれる。

定義 1.1: 組み紐群 (代数的)

語 (word) $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{N-1}\}$ で生成され、関係式

$$\begin{aligned}
\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & 1 \leq i \leq N-2 \\
\sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i & |i-j| > 1, 1 \leq i, j \leq N-1
\end{aligned}$$

を満たす群を **Artin の組み紐群** (Artin braid group)、もしくは単に**組み紐群** (braid group) と呼ぶ。

^{*10} \mathfrak{S}_N は N 次の対称群。従って一つの同値類は $N!$ 個の $(\mathbb{R}^D)^N \setminus \Delta$ の元からなる。 \mathfrak{S}_N の作用による軌道空間と見ても良い。

^{*11} つまり、 $D+1$ 次元の粒子の軌跡。

B_N の代数的な定義 1.1 と、位相幾何学的な定義 $\pi_1(\mathcal{C}, \mathbf{x})$ が同型であることは、例えば [FVB61] に証明がある。生成元 σ_i を図として表示することができる：

$$\begin{array}{ccc} \sigma_1 := \begin{array}{|c|c|c|} \hline \diagup & | & | \\ \hline \diagdown & | & | \\ \hline \end{array} & \sigma_2 := \begin{array}{|c|c|c|} \hline | & \diagup & | \\ \hline | & \diagdown & | \\ \hline \end{array} & \sigma_3 := \begin{array}{|c|c|c|} \hline | & | & \diagup \\ \hline | & | & \diagdown \\ \hline \end{array} \\ \sigma_1^{-1} := \begin{array}{|c|c|c|} \hline \diagdown & | & | \\ \hline \diagup & | & | \\ \hline \end{array} & \sigma_2^{-1} := \begin{array}{|c|c|c|} \hline | & \diagdown & | \\ \hline | & \diagup & | \\ \hline \end{array} & \sigma_3^{-1} := \begin{array}{|c|c|c|} \hline | & | & \diagdown \\ \hline | & | & \diagup \\ \hline \end{array} \end{array}$$

図において、 B_N の積とは単に組み紐を下から上へ*12繋げることに他ならない。

組み紐不変量として特に重要なのが**巻き付き数** (winding number) である：

$$W := (\# \text{ of overcrossings}) - (\# \text{ of undercrossings})$$

1.3.2 $D = 3$ の場合：対称群

空間次元が $D = 3$ の場合、 $\pi_1(\mathcal{C}, \mathbf{x})$ の様子は $D = 2$ の場合と大きく異なる。

命題 1.1:

S^1 の \mathbb{R}^3 への任意の 2 つの**位相的埋め込み**は、それらを \mathbb{R}^4 への位相的埋め込み埋め込みと見做すことで互いにアイソトピックになる。

命題 1.1 により、 $D = 3$ のとき $\pi_1(\mathcal{C}, \mathbf{x}) = \mathfrak{S}_N$ であることが分かる。

1.3.3 経路積分の構成

$N = 2$ の場合と同様に考える。経路積分の終点と始点を $\{\mathbf{x}\}_i, \{\mathbf{x}\}_f \in \mathcal{C}$ に固定する。まず簡単のため $\{\mathbf{x}\}_i = \{\mathbf{x}\}_f =: \{\mathbf{x}\}$ とすると、

$$\langle \{\mathbf{x}\}_f | \hat{U}(t_f, t_i) | \{\mathbf{x}\}_i \rangle = \mathcal{N} \sum_{[l] \in \pi_1(\mathcal{C}, \{\mathbf{x}\})} \rho([l]) \sum_{m \in [l]} e^{iS[m]/\hbar}$$

とすれば条件 (1.2.2) が満たされる。ただしユニタリ性の条件を満たすため、群準同型 $\rho: \pi_1(\mathcal{C}, \{\mathbf{x}\}) \rightarrow \text{GL}(V)$ は基本群 $\pi_1(\mathcal{C}, \{\mathbf{x}\})$ のユニタリ表現にとる。

1.3.4 1 次元表現 (可換な例)

まず ρ が $\pi_1(\mathcal{C}, \{\mathbf{x}\})$ の 1 次元ユニタリ表現である場合を考える。つまり、群準同型 $\rho: \pi_1(\mathcal{C}, \{\mathbf{x}\}) \rightarrow \text{U}(1)$ としてあり得るものを全て列挙することを試みる。

*12 文献によって上下がまちまちである。

【例 1.3.1】2 + 1 次元の場合

$\pi_1(\mathcal{C}, \{\mathbf{x}\}) = B_N$ である。 $N - 1$ 個の $U(1)$ の元の組 $\{g_1, \dots, g_{N-1}\}$ であって定義 1.1 の関係式を充たすものを見つければ良い。 $U(1)$ は可換群なので 2 つ目の関係式は常に成り立つ。 1 つ目の関係式が成り立つ必要十分条件は $g_1 = g_2 = \dots = g_{N-1} = e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$ は任意) である。 $1 \leq \forall i \leq N - 1$ に対して $W(\sigma_i) = 1$ であることから,

$$\rho_\theta(g) := e^{i\theta W(g)} \quad (\forall \theta \in \mathbb{R})$$

によって全ての表現が尽くされた。

- $\theta = 0$ のとき $\rho_\theta: g \mapsto 1$ であり, **ボゾン**
- $\theta = \pi$ のとき $\rho_\theta: g \mapsto (-1)^{W(g)}$ であり, **フェルミオン**
- 他の $\theta \in \mathbb{R}$ に対応する ρ_θ による統計性は**エニオン** (anyons), もしくは**分数統計** (fractional statistics) と呼ばれる。 特に $U(1)$ が可換群なので**可換エニオン** (abelian anyons) という。

【例 1.3.2】3 + 1 次元の場合

$\pi_1(\mathcal{C}, \{\mathbf{x}\}) = \mathfrak{S}_N$ である。 定義 1.1 の関係式に $\sigma_i^2 = 1$ を追加したものが \mathfrak{S}_N の Coxeter presentation となる。 つまり, 【例 1.3.1】において $\theta = 0, \pi$ の場合のみがあり得る。 これはボゾンとフェルミオンであり, $N = 2$ の場合に考察した例の一般化になっている。

1.3.5 より高次元の表現 (非可換な場合)

粒子の内部自由度を考慮しよう。 具体的には, $D(\geq 2)$ 次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^D 内に N 個の同種粒子が存在する量子系 \mathcal{H} において内部自由度を指定する添字集合 \mathcal{I} が存在して, 写像

$$|\cdot\rangle: ((\mathbb{R}^D)^N \setminus \Delta) \times \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{H}, ((\mathbf{x}), i) \longmapsto |\{\mathbf{x}\}; i\rangle$$

が全単射となるような状況を考える^{*13}。 このとき $\forall \{\mathbf{x}\}_i, \{\mathbf{x}\}_f \in \mathcal{C}, \forall i, j \in \mathcal{I}$ に対するプロパゲーター

$$\langle \{\mathbf{x}\}_f; i | \hat{U}(t_f, t_i) | \{\mathbf{x}\}_i; j \rangle = \mathcal{N} \sum_{[l] \in \pi_1(\mathcal{C}, \{\mathbf{x}\})} [\rho([l])]_{ij} \sum_{m \in [l]} e^{iS[m]/\hbar}$$

を計算する必要がある。 ここに, $\#\mathcal{I} = M < \infty$ のとき群準同型

$$\rho: \pi_1(\mathcal{C}, \{\mathbf{x}\}) \longrightarrow U(M) \subset GL(\mathbb{C}, M)$$

は $\pi_1(\mathcal{C}, \{\mathbf{x}\})$ の M 次元ユニタリ表現であり, $[\rho([l])]_{ij}$ というのは $M \times M$ ユニタリ行列 $\rho([l])$ の第 (i, j) 成分という意味である。 一方 $\#\mathcal{I} = \infty$ のとき ρ は無限次元表現となる。

^{*13} ややこしいが, 定義域を同値関係で割る前なので (\mathbf{x}) と表記した。

【例 1.3.3】 $2 + 1$ 次元の場合

特に空間次元が $D = 2$ のとき, ρ は B_N の M 次元ユニタリ表現である. このような統計性を持つ粒子のことを**非可換エニオン** (nonabelian anyon) と呼ぶ^a.

^a $U(M)$ が非可換群なので

【例 1.3.4】 $3 + 1$ 次元の場合

特に空間次元が $D = 3$ のとき, ρ は \mathfrak{S}_N の M 次元ユニタリ表現である. このような統計性を持つ粒子のことを **parastatistics** と呼ぶが, 実は暗に存在する付加的な制約のせいでボゾンかフェルミオン, もしくはいくつか内部自由度が追加されるかしか許されないことが示されている [HM06, Appendix B]. このことについては後述する. しかし, 粒子の描像を捨てて弦を考えるなどすると「面白い」例が得られるかもしれない.

第 2 章

Chern-Simons 理論の導入

この章は [Sim21, Chapter4, 5] に相当する.

2.1 Charge-Flux composite

2.1.1 Aharonov-Bohm 効果

空間を表す多様体を Σ と書く. 電荷 q を持つ 1 つの粒子からなる系を考えよう. この系に静磁場をかけたとき, 粒子の古典的作用は自由粒子の項 S_0 と, 粒子と場の結合を表す項とに分かれる:

$$S[l] = S_0[l] + q \int_{t_i}^{t_f} dt \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A} = S_0[l] + q \int_l d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}$$

ただし $l: [t_i, t_f] \rightarrow \Sigma$ は粒子の軌跡を表す.

ここで, いつもの 2 重スリットを導入する. 粒子が $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}(t_i)$ から出発して $\mathbf{x}_f = \mathbf{x}(t_f)$ に到達するとき, これらの 2 点を結ぶ経路全体の集合 $\mathcal{C}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_t)$ のホモトピー類は, スリット 1, 2 を通る経路それぞれでちょうど 2 つある. i.e. プロパゲーターは経路積分によって

$$\sum_{l \in \mathcal{C}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_t) \text{ s.t. slit 1}} e^{iS_0[l]/\hbar + i(q/\hbar) \int_l d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}} + \sum_{l \in \mathcal{C}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_t) \text{ s.t. slit 2}} e^{iS_0[l]/\hbar + i(q/\hbar) \int_l d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}}$$

と計算される. 第 1 項と第 2 項の位相差は, 片方の経路の逆をもう片方に足すことでできる閉曲線 ∂S について

$$\exp \left[\frac{iq}{\hbar} \oint_{\partial S} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \right] = \exp \left[\frac{iq}{\hbar} \int_S d\mathbf{S} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \right] = \exp \left[\frac{iq}{\hbar} \Phi_S \right]$$

となる^{*1}.

- (1) 磁束が $\Phi_0 = 2\pi\hbar/q$ の整数倍の時は, 位相シフトがない場合と物理的に区別がつかない.
- (2) 実は, 静止した電荷の周りに磁束を動かしても全く同じ位相シフトが引き起こされる [AC84].

^{*1} 粒子が侵入できない領域にのみ磁場がかかっているとする. なお, 粒子の配位空間が単連結でないことが本質的に重要である. このとき, 領域 S をホモトピーで 1 点に収縮することで, 無限に細い管状の磁束 (flux tube) の概念に到達する.

2.1.2 Charge-Flux composite としてのエニオン

荷電粒子と無限に細い磁束管 (flux tube) が互いに束縛し合って近接しているものを考える。この対を 2 次元系における、 (q, Φ) なるチャージを持つ 1 つの粒子と見做してみよう。

さて、粒子 $i (= 1, 2)$ がチャージ (q, Φ) を持つとしよう。この 2 つの同種粒子の配位空間の基本群は前章の議論から \mathbb{Z}_2 であり、

- (1) 粒子 1 を 2 の周りに 1 周させる操作
- (2) 粒子の交換を 2 回行う操作

の 2 つが同じホモトピー類に属することがわかる。故に、これら 2 つの操作で得られる位相シフトは等しい。操作 (1) による位相シフトは AB 効果によるもので、 $e^{2iq\Phi/\hbar}$ である^{*2}。故に、この粒子が 1 回交換することによって得られる位相シフトは $e^{iq\Phi/\hbar}$ であるが、これは $\theta = q\Phi/\hbar$ なる可換エニオンの統計性である。

次に、エニオンのフュージョン (fusion) を経験的に導入する。これは、エニオン $(q_1, \Phi_1), (q_2, \Phi_2)$ が「融合」してエニオン $(q_1 + q_2, \Phi_1 + \Phi_2)$ になる、と言うものであり、今回の場合だと電荷、磁束の保存則に由来すると考えることができる。エニオン (q, Φ) と $(-q, -\Phi)$ がフュージョンすると $I := (0, 0)$ になるだろう。この I をエニオンの真空とみなし^{*3}、 $(-q, -\Phi)$ のことを (q, Φ) の反エニオン (anti-anyon) と見做す。反エニオンをエニオンの周りに一周させたときの位相シフトが $e^{-2i\theta}$ になることには注意すべきである。

2.1.3 トーラス上のエニオンの真空

トーラス $T^1 := S^1 \times S^1$ の上のエニオン系の基底状態 (真空) を考える。

トーラスには非自明なサイクルがちょうど 2 つあるので、それらを C_1, C_2 とおく。そして系の時間発展演算子のうち、次のようなものを考える：

- \hat{T}_1 ある時刻に C_1 の 1 点において粒子-反粒子対を生成し、それらを C_1 上お互いに反対向きに動かし、有限時間経過後に C_1 の対蹠点で対消滅させる。
- \hat{T}_2 ある時刻に C_2 の 1 点において粒子-反粒子対を生成し、それらを C_2 上お互いに反対向きに動かし、有限時間経過後に C_2 の対蹠点で対消滅させる。

\hat{T}_1, \hat{T}_2 は非可換であり、基底状態への作用を考える限り、フュージョンダイアグラムと braiding の等式から

$$\hat{T}_2 \hat{T}_1 = e^{-i2\theta} \hat{T}_1 \hat{T}_2 \quad (2.1.1)$$

が成り立つことが分かる。然るに、基底状態が張る部分空間に制限すると $[T_1, H] = [T_2, H] = 0$ なので^{*4}、基底状態が縮退していることがわかる。

さて、 T_i はユニタリなので、 $T_1 |\alpha\rangle = e^{i\alpha} |\alpha\rangle$ とおける。この時 (2.1.1) より

$$T_1(T_2 |\alpha\rangle) = e^{i(\alpha+2\theta)} T_2 |\alpha\rangle$$

^{*2} 2 がつくのは、粒子 1 の q が粒子 2 の Φ の周りを 1 周する AB 効果だけでなく、粒子 1 の Φ が粒子 2 の q の周りを 1 周する AB 効果の寄与があるからである。一般に、粒子 i のチャージが (q_i, Φ_i) ならば $e^{i(q_1\Phi_2 + q_2\Phi_1)/\hbar}$ の位相シフトが起こる。

^{*3} しかし、 I のことは粒子として捉える。

^{*4} 基底状態 $|0\rangle$ と $\hat{T}_1 |0\rangle$ は同じエネルギーである。

である。つまり、 $|\alpha\rangle$ が基底状態ならば $|\alpha + 2\theta\rangle = T_2 |\alpha\rangle$ もまた基底状態である。この操作を続けて、基底状態 $|\alpha + 2n\theta\rangle = (T_2)^n |\alpha\rangle$ ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) を得る。特に $\theta = \pi p/m$ (p, m は互いに素) である場合を考えると、基底状態は m 重縮退を示している。

2.2 可換 Chern-Simons 理論の経験的導入

ゲージ場^{*5} $A_\alpha = (a_0, a_1, a_2)$ が印加された N 粒子 2 次元系であって、ラグランジアンが

$$L = L_0 + \int_{\Sigma} d^2x \left(\frac{\mu}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha \partial_\beta A_\gamma - j^\alpha A_\alpha \right) =: L_0 + \int_{\Sigma} d^2x \mathcal{L} \quad (2.2.1)$$

と書かれるものを考える。ただし、 L_0 は場と粒子の結合を無視したときの粒子のラグランジアンであり、空間を表す多様体を Σ で書いた。粒子 n はチャージ q_n を持つものとし、 $j^\alpha = (j^0, \mathbf{j})$ は

$$j^0(\mathbf{x}) := \sum_{n=1}^N q_n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n),$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) := \sum_{n=1}^N q_n \dot{\mathbf{x}}_n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)$$

と定義される粒子のカレントである。ラグランジアン密度 \mathcal{L} の第 1 項は場自身を記述し、第 2 項は場と粒子の結合を記述する。

2.2.1 ゲージ不変性

ラグランジアン (2.2.1) のゲージ不変性は次のようにしてわかる：ゲージ変換

$$A_\alpha \longrightarrow A_\alpha + \partial_\alpha \chi$$

による \mathcal{L} の変化は

$$\frac{\mu}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\alpha \chi \partial_\beta A_\gamma + \frac{\mu}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha \partial_\beta \partial_\gamma \chi + \cancel{\frac{\mu}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\alpha \chi \partial_\beta \partial_\gamma \chi} - j^\alpha \partial_\alpha \chi$$

であるから、空間積分を実行すると

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} d^2x \frac{\mu}{2} \partial_\alpha (\epsilon^{\alpha\beta\gamma} \chi \partial_\beta A_\gamma) - \int_{\Sigma} d^2x \frac{\mu}{2} \cancel{\epsilon^{\alpha\beta\gamma} \chi \partial_\alpha \partial_\beta A_\gamma} - \int_{\Sigma} d^2x \partial_\alpha (j^\alpha \chi) + \int_{\Sigma} d^2x \cancel{\partial_\alpha j^\alpha \chi} \\ &= \int_{\partial\Sigma} dS_\alpha \left(\frac{\mu}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \chi \partial_\beta A_\gamma - j^\alpha \chi \right) \end{aligned}$$

となる。ただしチャージの保存則 $\partial_\alpha j^\alpha = 0$ を使った。このことから、もし空間を表す多様体 Σ の境界が $\partial\Sigma = \emptyset$ ならば^{*6} ラグランジアンはゲージ不変である。

^{*5} 一般相対論に倣い、時空を表す多様体 \mathcal{M} の座標のうち時間成分を x^0 、空間成分を x^1, x^2 とする。

^{*6} このような多様体の中で重要なのが閉多様体 (closed manifold) である。

2.2.2 運動方程式

ラグランジアン密度 \mathcal{L} から導かれる Euler-Lagrange 方程式は

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} = \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta A_\alpha)} \right)$$

である。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} &= \frac{\mu}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta A_\gamma - j^\alpha, \\ \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta A_\alpha)} \right) &= \partial_\beta \left(\frac{\mu}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha \right) = -\frac{\mu}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta A_\gamma \end{aligned}$$

なのでこれは

$$j^\alpha = \mu \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta A_\gamma$$

となる。特に第 0 成分は、「磁場」 $\mathbf{b} := \nabla \times \mathbf{A}$ を導入することで

$$\sum_{n=1}^N \frac{q_n}{\mu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) = b^0$$

となる。つまり、位置 \mathbf{x}_n に強さ q_n/μ の磁束管が点在している、という描像になり、charge-flux composite を説明できている。

2.2.3 プロパゲーター

簡単のため、全ての粒子のチャージが等しく q であるとする。 N 粒子の配位空間 \mathcal{C} における初期配位と終了時の配位をそれぞれ $\{\mathbf{x}_i\}, \{\mathbf{x}_f\}$ とし、それらを繋ぐ経路全体の集合を $\mathcal{C}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_f)$ と書くと、プロパゲーターは経路積分によって

$$\sum_{l \in \mathcal{C}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_f)} e^{iS_0[l]/\hbar} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}(A_\mu(x)) e^{iS_{CS}[A_\mu(x)]/\hbar} e^{i(q/\hbar) \int_l dx^\alpha A_\alpha(x)}$$

と計算される。ここに $\mathcal{D}(A_\mu(x))$ は汎関数積分の測度を表す。詳細は後述するが、場に関する汎関数積分を先に実行してしまうと、実は

$$\sum_{l \in \mathcal{C}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_f)} e^{iS_0[l]/\hbar + i\theta W(l)}$$

の形になることが知られている。ここに $W(l)$ は、経路 l の巻きつき数である。経路に依存する位相因子 $e^{i\theta W(l)}$ は前章で議論した $\pi_1 \mathcal{C}$ の 1 次元ユニタリ表現そのものであり、エニオンの統計性が発現する機構が Chern-Simons 項により説明できることを示唆している。

2.2.4 真空中の可換 Chern-Simons 理論

粒子が存在しないとき、経路積分は

$$Z(\mathcal{M}) := \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}A_\mu(x) e^{iS_{CS}[A_\mu(x)]/\hbar}$$

の形をする。 $Z(\mathcal{M})$ は \mathcal{M} についてホモトピー不変であり、**分配関数** (partition function) と呼ばれる。 $Z(\mathcal{M})$ が TQFT において重要な役割を果たすことを後の章で見る。

2.2.5 正準量子化

$A_0 = 0$ なるゲージをとると、ラグランジアン密度における Chern-Simons 項は $-A_1\partial_0 A_2 + A_2\partial_0 A_1$ の形になる。これは A_1 (resp. A_2) が A_2 (resp. A_1) の共役運動量であることを意味するので、正準量子化を行うならば

$$[A_1(\mathbf{x}), A_2(\mathbf{y})] = \frac{i\hbar}{\mu} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

を要請する^{*7}。

さて、このときトーラス T^2 上の2つのサイクル C_1, C_2 に対して Wilson ループ

$$W_j = \exp \left(\frac{iq}{\hbar} \oint_{C_j} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \right)$$

を考える。 $[A, B]$ が c 数である場合の BCH 公式から

$$W_1 W_2 = e^{iq^2/(\mu\hbar)} W_2 W_1$$

を得るが、これは (2.1.1) を説明している。つまり、演算子 T_1, T_2 とは Wilson loop のことだったのである^{*8}。

2.3 非可換 Chern-Simons 理論の経験的導入

この節では自然単位系を使う。前節を一般化して、ゲージ場 $A_\mu(x)$ がある Lie 代数 \mathfrak{g} に値をとるものとしよう。つまり、Lie 代数 \mathfrak{g} の基底を $\sigma_a/(2i)$ とすると^{*9}

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x) \frac{\sigma_a}{2i}$$

と書かれるような状況を考える^{*10}。 $\sigma_a \in \mathfrak{g}$ が一般に非可換であることから、このような理論は非可換 Chern-Simons 理論と呼ばれる。

時空多様体 \mathcal{M} 上の閉曲線 γ に沿った **Wilson loop** は、**経路順序積** (path ordering) \mathcal{P} を用いて

$$W_\gamma := \text{Tr} \left[\mathcal{P} \exp \left(\oint_\gamma dx^\mu A_\mu(x) \right) \right]$$

と定義される。Aharonov-Bohm 位相の一般化という気持ちであるが、経路 γ の異なる2点 x, y を取ってきたときに $A_\mu(x)$ と $A_\mu(y)$ が一般に非可換であることが話をややこしくする。

^{*7} しかし、トーラス上の座標をどのように取るかと言うことは問題である。

^{*8} 疑問：座標の時間成分はどこへ行ったのか？

^{*9} 因子 $1/(2i)$ は物理学における慣習である。ややこしいことに、文献によってこの因子が異なる場合がある。

^{*10} ゲージ接続が Lie 代数に値をとる 1-形式である、ということ。

2.3.1 ゲージ不変性

非可換 Chern-Simons 理論におけるゲージ変換は, $U: \mathcal{M} \rightarrow G$ を用いて

$$A_\mu(x) \longrightarrow U(x)(A_\mu(x) + \partial_\mu)U(x)^{-1} \quad (2.3.1)$$

の形をする. このゲージ変換が Wilson loop を不変に保つことを確認しておこう.

\mathcal{M} の任意の 2 点 $x_i, x_f \in \mathcal{M}$ を結ぶ曲線 $\gamma: [t_i, t_f] \rightarrow \mathcal{M}$ をとり, **Wilson line** を

$$\tilde{W}_\gamma(x, y) := \mathcal{P} \exp \left(\int_\gamma dx^\mu A_\mu(x) \right)$$

で定義する. $[t_i, t_f]$ の分割 $t_i := t_0 < t_1 < \dots < t_N := t_f$ を与えて $x_i := \gamma(t_i)$, $dx_i := x_{i+1} - x_i$ とおく^{*11}と,

$$\begin{aligned} \tilde{W}_\gamma(x_i, x_f) &= \mathcal{P} \exp \left(\int_{x_i}^{x_1} dx^\mu A_\mu(x) + \int_{x_1}^{x_2} dx^\mu A_\mu(x) + \dots + \int_{x_{N-1}}^{x_f} dx^\mu A_\mu(x) \right) \\ &:= \lim_{N \rightarrow \infty} \exp \left(\int_{x_i}^{x_1} dx^\mu A_\mu(x) \right) \exp \left(\int_{x_1}^{x_2} dx^\mu A_\mu(x) \right) \dots \exp \left(\int_{x_{N-1}}^{x_f} dx^\mu A_\mu(x) \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{W}_{\gamma|_{[t_i, t_1]}}(x_i, x_1) \tilde{W}_{\gamma|_{[t_1, t_2]}}(x_1, x_2) \dots \tilde{W}_{\gamma|_{[t_{N-1}, t_f]}}(x_{N-1}, x_f) \end{aligned}$$

と書ける. N が十分大きい時は $0 \leq \forall i \leq N-1$ に対して $|dx_i|$ が十分小さく,

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}}(x_i, x_{i+1}) &\approx \exp \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} dx^\mu A_\mu(x) \right) \\ &\approx 1 + \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx^\mu A_\mu(x) \\ &\approx 1 + A_\mu(x_i) dx_i^\mu \end{aligned}$$

と書ける^{*12}. このときゲージ変換 (2.3.1) に伴って

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}}(x_i, x_{i+1}) &\longrightarrow 1 + U(x_i)(A_\mu(x_i) + \partial_\mu)U(x_i)^{-1} dx_i^\mu \\ &\approx U(x_i)(1 + A_\mu(x_i) dx_i^\mu)(U(x_i)^{-1} + \partial_\mu(U(x_i)^{-1}) dx_i^\mu) \\ &\approx U(x_i)\tilde{W}_{\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}}(x_i, x_{i+1})U(x_{i+1})^{-1} \end{aligned}$$

と変換するので, 結局 $x_i, x_f \in \mathcal{M}$ を繋ぐ Wilson line がゲージ変換 (2.3.1) に伴って

$$\tilde{W}_\gamma(x_i, x_f) \longrightarrow U(x_i)\tilde{W}_\gamma(x_i, x_f)U(x_f)^{-1}$$

と変換することがわかった. Wilson loop の場合は $x_i = x_f$ でかつトレースをとるので, ゲージ不変になる.

^{*11} dx_i は, 厳密には 2 点 x_i, x_{i+1} を含むある \mathcal{M} のチャート $(U, (x^\mu))$ をとってきた時の座標関数の値の差 $dx_i^\mu := x^\mu(x_{i+1}) - x^\mu(x_i)$ として理解する.

^{*12} $N \rightarrow \infty$ の極限で等式になる.

2.3.2 Chern-Simons 作用

いささか天下りのだが、**Chern-Simons action** を

$$S_{\text{CS}}[A_\mu] := \frac{k}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} d^3x \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \text{Tr} \left[A_\alpha \partial_\beta A_\gamma + \frac{2}{3} A_\alpha A_\beta A_\gamma \right]$$

により定義する．第 2 項は可換な場合には必ず零になるので前節では登場しなかった． $S_{\text{CS}}[A]$ が時空 \mathcal{M} の計量によらない^{*13}ことは、ゲージ場を Lie 代数値 1-形式 $A \in \Omega^1(\mathcal{M}) \otimes \mathfrak{g}$ として書き表したときに

$$S_{\text{CS}}[A] = \frac{k}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} \text{Tr} \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right)$$

と書けることからわかる^{*14}．

$S_{\text{CS}}[A]$ にゲージ変換 (2.3.1) を施した結果は

$$\begin{aligned} S_{\text{CS}}[A_\mu] &\longrightarrow S_{\text{CS}}[A_\mu] + 2\pi\nu k, \\ \text{w/ } \nu &:= \frac{1}{24\pi^2} \int_{\mathcal{M}} d^3x \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \text{Tr}[(U^{-1}\partial_\alpha U)(U^{-1}\partial_\beta U)(U^{-1}\partial_\gamma U)] \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

となる． ν は写像 $U: \mathcal{M} \longrightarrow G$ の**巻きつき数** (winding number), もしくは **Pontryagin index** と呼ばれ、常に整数値をとる．この極めて非自明な結果についても後述する．(2.3.2) から、 $S_{\text{CS}}[X]$ は厳密にはゲージ不変ではない．然るに、もし $k \in \mathbb{Z}$ ならば（このとき k の値は **level** と呼ばれる）、分配関数 $Z(\mathcal{M})$ がゲージ不変な形になってくれるので問題ない、と考える．2+1 次元においては、1 つのゲージ場からなる作用であって

- トポロジカル不変性 (i.e. 計量不変性)
- 上述の意味のゲージ不変性

の 2 つを充たすものは他にない．

2.4 古典的ゲージ理論の数学

時空の多様体を \mathcal{M} と書く．

場^{*15} $\varphi: \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{K}^N$, $x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_N(x))$ が線型 Lie 群 $G \subset \text{GL}(N, \mathbb{K})$ で記述される^{*16}内部対称性を持っているような系を考える．つまり、ゲージ原理を要請し、任意の C^∞ 写像 $U: \mathcal{M} \longrightarrow G$ に対して^{*17}、系のラグランジアン密度の場に関する項 $\mathcal{L}[\varphi_\mu(x)]$ が $\mathcal{L}[[U(x)]_i^j \varphi_j(x)] = \mathcal{L}[\varphi_i(x)]$ を充たすとする．もしくは、場 $\varphi: \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{K}^N$ であって、時空の各点 $x \in \mathcal{M}$ および任意の C^∞ 写像 $U: \mathcal{M} \longrightarrow G$ に対して $\varphi(x) \longrightarrow U(x)\varphi(x)$ と変換する^{*18} ものを考えるととっても良い．

^{*13} 計量不変 (metric invariant) であると言う．

^{*14} ... と言うのは微妙に的を外している．より正確には 2+1 次元多様体 \mathcal{M} を境界を持つような 4 次元多様体 \mathcal{N} を用意し、 \mathcal{N} の作用 $\mathcal{S}[A] := k/(4\pi) \int_{\mathcal{N}} \text{Tr}(F \wedge F)$ を部分積分することで $S_{\text{CS}}[A]$ を定義する．

^{*15} この段階では、場とはその配位を記述する空間 F （これは C^∞ 多様体だったりベクトル空間だったりする）と C^∞ 写像 $\varphi: \mathcal{M} \longrightarrow F$ の組のことと考える．この描像は後にファイバー束の C^∞ 切断として定式化される．

^{*16} ここでは $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ としておく．

^{*17} 内部対称性という言葉を使うのは、 U が定数写像とは限らないことを意味する．

^{*18} 一般相対論の数学的定式化におけるテンソル場の変換性は、時空の多様体 \mathcal{M} 上の一般座標変換 (i.e. チャートの取り替え) に由

この系を経路積分により量子化することを見据えて、このような変換性を満たす全ての場がなす空間の幾何学を考察すると見通しが良いだろう。そのため、まず時空上の無限小だけ離れた2点 $x_i, x_f \in \mathcal{M}$ における場の配位 $\varphi(x_i), \varphi(x_f)$ を比較しよう。内部自由度による変換性を議論したいので、 $\varphi(x_f) - \varphi(x_i)$ なる量を調べても意味がない。 x_i, x_f を結ぶ C^∞ 曲線 $\gamma: [t_i, t_f] \rightarrow \mathcal{M}$ を持ってきて、 γ に沿って $\varphi(x_i)$ を x_f まで流してやるのが良い。つまり、場の配位を記述する空間 \mathbb{K}^N 上の C^∞ 曲線 $\varphi^{(\gamma)} := \varphi \circ \gamma: [t_i, t_f] \rightarrow \mathbb{K}^N$ を考えれば、量 $\varphi(x_f) - \varphi^{(\gamma)}(t_f)$ は $U(x_f) \in G$ による変換を受けるはずである。 x_i, x_f の両方を含む \mathcal{M} のチャート $(V, (x^\mu))$ を持ってきて成分計算すると、 $dx := x_f - x_i$ が^{*19}微小なので Taylor 展開において dx の1次の項まで残すことで

$$\begin{aligned}\varphi_i^{(\gamma)}(t_f) &:= \varphi_i(x_i) - [A_\mu(x_i)]_i^j \varphi_j(x_i) dx^\mu \\ \varphi(x_f) &= \varphi(x_i) + \partial_\mu \varphi(x) dx^\mu\end{aligned}\tag{2.4.1}$$

と書けるはずである。ただし、式 (2.4.1) の右辺によって $\dim \mathcal{M}$ 個の成分を持つ新しい場 $A_\mu: \mathcal{M} \rightarrow \text{GL}(N, \mathbb{K})$ を定義した。この場は**ゲージ場**と呼ばれる。

ゲージ場 A_μ を時空の各点 $x \in \mathcal{M}$ における変換性によって特徴付けよう。そのためには、量

$$\varphi(x_f) - \varphi^{(\gamma)}(t_f) = (\partial_\mu \varphi(x_i) + A_\mu(x_i) \varphi(x_i)) dx^\mu$$

が $U(x_f) \in G$ による変換を受けることに注目すれば良い。つまり、**共変微分**と呼ばれる線型写像を $\mathcal{D}_\mu(x) := \partial_\mu + A_\mu(x)$ で定義すると、 $\forall x \in \mathcal{M}$ における、内部対称性による変換

$$\varphi(x) \longrightarrow \tilde{\varphi}(x) := U(x) \varphi(x)\tag{2.4.2}$$

に伴って $\mathcal{D}_\mu(x) \varphi(x)$ は

$$\mathcal{D}_\mu(x) \varphi(x) \longrightarrow \tilde{\mathcal{D}}_\mu(x) \tilde{\varphi}(x) := U(x) \mathcal{D}_\mu(x) \varphi(x)$$

の変換を受ける。このことから、場 φ の変換 (2.4.2) に伴う共変微分自身の変換則は

$$\mathcal{D}_\mu(x) \longrightarrow \tilde{\mathcal{D}}_\mu(x) = U(x) \mathcal{D}_\mu(x) U(x)^{-1}\tag{2.4.3}$$

となる。従って場 $A_\mu: \mathcal{M} \rightarrow \text{GL}(N, \mathbb{K})$ の、場 φ の変換 (2.4.2) に伴う変換則が

$$A_\mu(x) \longrightarrow U(x) (\partial_\mu + A_\mu(x)) U(x)^{-1}\tag{2.4.4}$$

だと分かった。このような場の変換則を**ゲージ変換** (gauge transformation) と呼ぶ。

2.4.1 主束と内部対称性の定式化

ゲージ場は、主束の接続として定式化できる。特に、主束の同伴ベクトル束が重要である。

まずファイバー束と主束を定義し、内部対称性を持つ場の記述には主束の同伴ベクトル束が適していることを見る^{*20}。 C^∞ 多様体 M の微分同相群 (diffeomorphism group) $\text{Diff } M$ とは、

来するものであった。同じように、ここで考えている場の変換性はどのような数学的定式化に由来するのかということを考えると、時空 \mathcal{M} を底空間とする主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ の同伴ベクトル束 $\mathbb{K}^N \hookrightarrow P \times_\rho \mathbb{K}^N \xrightarrow{q} \mathcal{M}$ における、 \mathcal{M} のチャートの取り替えに伴う局所自明化の取り替え (i.e. 変換関数のファイバーへの作用) の概念に行き着くのである。詳細は次の小節で議論する。

^{*19} 厳密にはこれは座標関数の差 $dx^\mu := x^\mu(x_f) - x^\mu(x_i)$ の絶対値が小さいことを主張している。

^{*20} 従って、この小節で行うのはゲージ場が登場する舞台の定式化であって、ゲージ場自身の定式化は次の小節で行う。

- 台集合 $\text{Diff } M := \{ f: M \longrightarrow M \mid \text{微分同相写像} \}$
- 単位元を恒等写像
- 積を写像の合成

として構成される群のことを言う.

定義 2.1: Lie 群の作用

- Lie 群 G の C^∞ 多様体 M への**左作用**とは, 群準同型 $\rho: G \longrightarrow \text{Diff } M$ であって写像

$$\blacktriangleright: G \times M \longrightarrow M, (g, x) \longmapsto \rho(g)(x)$$

が C^∞ 写像となるようなもののこと. $g \blacktriangleright x := \blacktriangleright(g, x)$ と略記する.

- Lie 群 G の C^∞ 多様体 M への**右作用**とは, 群準同型 $\rho: G^{\text{op}} \longrightarrow \text{Diff } M$ であって写像

$$\blacktriangleleft: M \times G \longrightarrow M, (x, g) \longmapsto \rho(g)(x)$$

が C^∞ 写像となるようなもののこと. $x \blacktriangleleft g := \blacktriangleleft(x, g)$ と略記する.

- Lie 群の左 (resp. 右) 作用が**自由** (free) であるとは, $\forall x \in X, \forall g \in G \setminus \{1_G\}, g \blacktriangleright x \neq x$ (resp. $x \blacktriangleleft g \neq x$) を満たすことを言う.
- Lie 群の左 (resp. 右) 作用が**効果的** (effective) であるとは, $\rho: G \longrightarrow \text{Diff } M$ (resp. $\rho: G^{\text{op}} \longrightarrow \text{Diff } M$) が単射であることを言う.

定義 2.2: C^∞ ファイバー束

Lie 群 G が C^∞ 多様体 F に**効果的に作用**しているとする. C^∞ **ファイバー束** (fiber bundle) とは,

- C^∞ 多様体 E, B, F
- C^∞ の全射 $\pi: E \longrightarrow B$
- Lie 群 G と, G の F への**左作用** $\blacktriangleright: G \times F \longrightarrow F$
- B の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$
- 微分同相写像の族

$$\{ \varphi_\lambda: \pi^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times F \}_{\lambda \in \Lambda}$$

であって, $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して図 2.1 を可換にするもの.

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_\lambda) & \xrightarrow{\varphi} & U_\lambda \times F \\ \pi \downarrow & \swarrow \text{proj}_1 & \\ U_\lambda & & \end{array}$$

図 2.1: 局所自明性

- C^∞ 写像の族

$$\{ t_{\alpha\beta}: B \longrightarrow G \mid \forall (p, f) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times F, \varphi_\beta^{-1}(p, f) = \varphi_\alpha^{-1}(p, t_{\alpha\beta}(p) \blacktriangleright f) \}_{\alpha, \beta \in \Lambda}$$

の6つのデータの組みのこと。記号としては (E, π, B, F) や $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ と書く。

以下ではファイバー束と言ったら C^∞ ファイバー束のことを指すようにする。ファイバー束 (E, π, B, F) に関して、

- E を全空間 (total space)
- B を底空間 (base space)
- F をファイバー (fiber)
- π を射影 (projection)
- φ_λ を局所自明化 (local trivialization)
- $t_{\alpha\beta}$ を変換関数 (transition map)

と呼ぶ^{*21}。また、射影 π による1点集合 $\{b\}$ の逆像 $\pi^{-1}(\{b\}) \subset E$ のことを点 b のファイバー (fiber) と呼び、 E_b と書く。

定義 2.3: ベクトル束

ファイバーを n 次元 \mathbb{K} -ベクトル空間 V とし、構造群を $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ とするようなファイバー束 $V \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ であって、その局所自明化 $\{\varphi_\lambda: \pi^{-1}(U_\lambda) \rightarrow U_\lambda \times V\}_{\lambda \in \Lambda}$ が以下の条件を満たすもののことを階数 n のベクトル束 (vector bundle of rank n) と呼ぶ：

(vect-1)

$\forall \lambda \in \Lambda$ および $\forall x \in U_\lambda$ に対して、 $\mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\lambda|_{\pi^{-1}(\{x\})}: \pi^{-1}(\{x\}) \rightarrow V$ は \mathbb{K} -ベクトル空間の同型写像である。

【例 2.4.1】 接束

n 次元 C^∞ 多様体 M の接束は、構造群を $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ とするベクトル束 $\mathbb{R}^n \hookrightarrow TM \xrightarrow{\pi} M$ である。実際、 M のチャート $(U_\lambda, (x^\mu))$ に対して局所自明化は

$$\varphi_\lambda: \pi^{-1}(U_\lambda) \rightarrow U_\lambda \times \mathbb{R}^n, \left(p, v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_p \right) \mapsto \left(p, \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix} \right)$$

となり、チャート $(U_\alpha, (x^\mu)), (U_\beta, (y^\mu))$ に対して

$$\varphi_\beta^{-1}(p, (v^1, \dots, v^n)) = \varphi_\alpha^{-1}\left(p, \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1}(p) & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial y^n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial y^1}(p) & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix}\right)$$

^{*21} 紛らわしくないとき、ファイバー束 (E, π, B, F) のことを $\pi: E \rightarrow B$ 、または単に E と略記することがある。

となる．故に変換関数は

$$t_{\alpha\beta}(p) := \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1}(p) & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial y^n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial y^1}(p) & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n}(p) \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$$

で，ファイバーへの構造群の左作用とはただ単に n 次元の数ベクトルに行列を左から掛けることである．

定義 2.4: 束写像

ファイバー F と構造群 G を共有する二つのファイバー束 $\xi_i = (E_i, \pi_i, B_i, F)$ を与える．

- ξ_1 から ξ_2 への**束写像** (bundle map) とは，二つの C^∞ 写像 $f: B_1 \rightarrow B_2$, $\tilde{f}: E_1 \rightarrow E_2$ の組であって図 2.2

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\tilde{f}} & E_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array}$$

図 2.2: 束写像

を可換にし，かつ底空間 B_1 の各点 b において，点 b のファイバー $\pi_1^{-1}(\{b\}) \subset E_1$ への \tilde{f} の制限

$$\tilde{f}|_{\pi_1^{-1}(\{b\})}: \pi_1^{-1}(\{b\}) \rightarrow \tilde{f}(\pi_1^{-1}(\{b\})) \subset E_2$$

が微分同相写像になっているものを言う．

- ファイバー束 ξ_1 と ξ_2 が**同型** (isomorphic) であるとは， $B_1 = B_2 = B$ であってかつ $f: B \rightarrow B$ が恒等写像となるような束写像 $\tilde{f}: E_1 \rightarrow E_2$ が存在することを言う．記号としては $\xi_1 \simeq \xi_2$ とかく．

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\tilde{f}} & E_2 \\ \pi_1 \searrow & & \swarrow \pi_2 \\ & B & \end{array}$$

図 2.3: ファイバー束の同型

- 積束 $(B \times F, \mathrm{proj}_1, B, F)$ と同型なファイバー束を**自明束** (trivial bundle) と呼ぶ．

ファイバー束 (E, π, B, F) は，射影 π によってファイバー F の情報を失う． F を復元するためにも， $s: B \rightarrow E$ なる写像の存在が必要であろう．

定義 2.5: C^∞ 切断

ファイバー束 $\xi = (E, \pi, B, F)$ の C^∞ 切断 (cross section) とは, C^∞ 写像 $s: B \rightarrow E$ であって $\pi \circ s = \text{id}_B$ となるもののことを言う.

ξ の切断全体の集合を $\Gamma(B, E)$ あるいは $\Gamma(E)$ と書く.

$\xi = (E, \pi, B, F)$ を **ファイバー束** とする. 底空間 B の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ をとると, 定義 2.2 から, どの $\alpha \in \Lambda$ に対しても局所自明性 (図 2.4a) が成り立つ. ここでもう一つの $\beta \in \Lambda$ をとり, $U_\alpha \cap U_\beta$ に関して局所自明性の図式を横に並べることで, 自明束 $\text{proj}_1: (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \rightarrow U_\alpha \cap U_\beta$ の **束の自己同型** (図 2.4c) が得られる.

$$\begin{array}{ccc}
 U_\alpha \times F & \xleftarrow{\varphi_\alpha} & \pi^{-1}(U_\alpha) \\
 \searrow \text{proj}_1 & & \downarrow \pi \\
 & & U_\alpha
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \pi^{-1}(U_\beta) & \xrightarrow{\varphi_\beta} & U_\beta \times F \\
 \downarrow \pi & \swarrow \text{proj}_1 & \\
 U_\beta & &
 \end{array}$$

(a) U_α に関する局所自明性

(b) U_β に関する局所自明性

$$\begin{array}{ccc}
 (U_\alpha \cap U_\beta) \times F & \xrightarrow{\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}} & (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \\
 \searrow \text{proj}_1 & & \swarrow \text{proj}_1 \\
 & U_\alpha \cap U_\beta &
 \end{array}$$

(c) 自明束 $(U_\alpha \cap U_\beta) \times F$ の自己同型

図 2.4: 局所自明性の結合

全ての $U_\alpha \cap U_\beta$ に関する変換関数の族 $\{t_{\alpha\beta}\}$ が $\forall b \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ に対して条件

$$t_{\alpha\beta}(b)t_{\beta\gamma}(b) = t_{\alpha\gamma}(b) \quad (2.4.5)$$

を満たすことは図式 2.4 より明かである. 次の命題は, ファイバー束 (E, π, B, F) を構成する「素材」には

- 底空間となる C^∞ 多様体 B
- ファイバーとなる C^∞ 多様体 F
- Lie 群 G と, その F への **左作用** $\blacktriangleright: G \times F \longrightarrow F$
- B の開被覆 $\{U_\lambda\}$
- (2.4.5) を満たす C^∞ 写像の族 $\{t_{\alpha\beta}: U_\beta \cap U_\alpha \rightarrow G\}_{\alpha, \beta \in \Lambda}$

があれば十分であることを主張する:

命題 2.1: ファイバー束の構成

- C^∞ 多様体 B, F
- Lie 群 G と, G の F への左作用 $\blacktriangleright: G \times F \longrightarrow G$
- B の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$
- コサイクル条件 (2.4.5) を満たす C^∞ 関数の族 $\{t_{\alpha\beta}: U_\beta \cap U_\alpha \rightarrow G\}$

を与える. このとき, 構造群 G と変換関数 $\{t_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta \in \Lambda}$ を持つファイバー束 $\xi = (E, \pi, B, F)$ が存在する.

証明 まず手始めに, cocycle 条件 (2.4.5) より

$$t_{\alpha\alpha}(b)t_{\alpha\alpha}(b) = t_{\alpha\alpha}(b), \quad \forall b \in U_\alpha$$

だから $t_{\alpha\alpha}(b) = 1_G$ であり, また

$$t_{\alpha\beta}(b)t_{\beta\alpha}(b) = t_{\alpha\alpha}(b) = 1_G, \quad \forall b \in U_\alpha \cap U_\beta$$

だから $t_{\beta\alpha}(b) = t_{\alpha\beta}(b)^{-1}$ である.

開被覆 $\{U_\lambda\}$ の添字集合を Λ とする. このとき $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して, $U_\lambda \subset B$ には底空間 B からの相対位相を入れ, $U_\lambda \times F$ にはそれと F の位相との積位相を入れることで, 直和位相空間

$$\mathcal{E} := \coprod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \times F$$

を作ることができる^{*22}. \mathcal{E} の任意の元は $(\lambda, b, f) \in \Lambda \times U_\lambda \times F$ と書かれる.

さて, \mathcal{E} 上の二項関係 \sim を以下のように定める:

$$(\alpha, b, f) \sim (\beta, b, t_{\alpha\beta}(b) \blacktriangleright f) \quad \forall b \in U_\alpha \cap U_\beta, \forall f \in F$$

\sim が同値関係の公理を満たすことを確認する:

反射律 冒頭の議論から $t_{\alpha\alpha}(b) = 1_G$ なので良い.

対称律 冒頭の議論から $t_{\beta\alpha}(b) = t_{\alpha\beta}(b)^{-1}$ なので,

$$\begin{aligned} & (\alpha, b, f) \sim (\beta, c, h) \\ \implies & b = c \in U_\alpha \cap U_\beta \text{ かつ } f = t_{\alpha\beta}(b) \blacktriangleright h \\ \implies & c = b \in U_\alpha \cap U_\beta \text{ かつ } h = t_{\alpha\beta}(b)^{-1} \blacktriangleright f = t_{\beta\alpha}(b) \blacktriangleright f \\ \implies & (\beta, c, h) \sim (\alpha, b, f). \end{aligned}$$

推移律 cocycle 条件 (2.4.5) より

$$\begin{aligned} & (\alpha, b, f) \sim (\beta, c, h) \text{ かつ } (\beta, c, h) \sim (\gamma, d, k) \\ \implies & b = c \in U_\alpha \cap U_\beta \text{ かつ } c = d \in U_\beta \cap U_\gamma \text{ かつ } f = t_{\alpha\beta}(b) \blacktriangleright h, h = t_{\beta\gamma}(c) \blacktriangleright k \\ \implies & b = d \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \text{ かつ } f = (t_{\alpha\beta}(b)t_{\beta\gamma}(b)) \blacktriangleright k = t_{\alpha\gamma}(b) \blacktriangleright k \\ \implies & (\alpha, b, f) \sim (\gamma, d, k). \end{aligned}$$

^{*22} \mathcal{E} はいわば, 「貼り合わせる前の互いにバラバラな素材 (局所自明束 $U_\alpha \times F$)」である. 証明の以降の部分では, これらの「素材」を $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ の部分に関して「良い性質 (2.4.5) を持った接着剤 $\{t_{\alpha\beta}\}$ 」を用いて「貼り合わせる」操作を, 位相を気にしながら行う.

したがって \sim は同値関係である． \sim による \mathcal{E} の商集合を E と書き，商写像を $\text{pr}: \mathcal{E} \rightarrow E$, $(\alpha, b, f) \mapsto [(\alpha, b, f)]$ と書くことにする．

集合 E に商位相を入れて E を位相空間にする．このとき商位相の定義から開集合 $\{\alpha\} \times U_\alpha \times F \subset \mathcal{E}$ は pr によって E の開集合 $\text{pr}(\{\alpha\} \times U_\alpha \times F) \subset E$ に移される．ゆえに E は $\{\text{pr}(\{\alpha\} \times U_\alpha \times V_\beta)\}$ を座標近傍にもつ C^∞ 多様体である（ここに $\{V_\beta\}$ は， C^∞ 多様体 F の座標近傍である）．

次に C^∞ の全射 $\pi: E \rightarrow B$ を

$$\pi([(\alpha, b, f)]) := b$$

と定義すると，これは $\forall \alpha \in \Lambda$ に対して微分同相写像^{*23}

$$\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F, [(\alpha, b, f)] \mapsto (b, f)$$

による局所自明性を持つ．従って組 $\xi := (E, \pi, B, F)$ は構造群 G ，局所自明化 $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ，変換関数 $\{t_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta \in \Lambda}$ を持つファイバー束になり，証明が終わる． ■

定義 2.6: 主束

構造群を G に持つファイバー束 $\xi = (P, \pi, M, G)$ が主束 (principal bundle) であるとは， G の G 自身への左作用が自然な左作用^aであることを言う．

^a つまり， $g \triangleright x := gx$ (Lie 群の積) である．

次の命題は証明の構成が極めて重要である：

命題 2.2: 主束の全空間への右作用

$\xi = (P, \pi, M, G)$ を主束とする．このとき， G の全空間 P への自由な右作用が自然に定義され，その軌道空間 (orbit space) P/G が M になる．

証明 ξ の局所自明化を $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ ，変換関数を $\{t_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G\}_{\alpha, \beta \in \Lambda}$ と書く． $\forall u \in P, \forall g \in G$ をとる． $\pi(u) \in U_\alpha$ となる $\alpha \in \Lambda$ を選び，対応する局所自明化 φ_α による u の像を $\varphi_\alpha(u) =: (p, h) \in U_\alpha \times G$ とおく^{*24}．このとき G の P への右作用 $\triangleleft: P \times G \rightarrow P$ を次のように定義する^{*25}：

$$u \triangleleft g := \varphi_\alpha^{-1}(p, hg) \quad (2.4.6)$$

◀ の well-definedness

$\beta \neq \alpha$ に対しても $\pi(u) \in U_\beta$ であるとする．このとき $\varphi_\beta(u) = (p, h') \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times G$ と書けて，また変換関数の定義から

$$h' = t_{\alpha\beta}(p)h \quad (t_{\alpha\beta}(p) \in G)$$

^{*23} 逆写像は $\varphi_\alpha^{-1}: U_\alpha \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$, $(b, f) \mapsto [(\alpha, b, f)]$ である． φ_α も φ_α^{-1} も C^∞ 写像の合成で書けるので C^∞ 写像である．

^{*24} つまり， $p := \pi(u)$, $h := \text{proj}_2 \circ \varphi_\alpha(u)$ ということである．

^{*25} 右辺の hg は Lie 群の乗法である．

である。したがって

$$\varphi_\beta^{-1}(p, h'g) = \varphi_\beta^{-1}(p, (t_{\alpha\beta}(p)h)g) = \varphi_\beta^{-1}(p, t_{\alpha\beta}(p)hg) = \varphi_\beta^{-1} \circ (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(p, hg) = \varphi_\alpha^{-1}(p, hg)$$

が分かり、式 (2.4.6) の右辺は局所自明化の取り方によらない。

◀ は右作用 写像 $\rho: G^{\text{op}} \rightarrow \text{Diff } P, g \mapsto (u \mapsto u \blacktriangleleft g)$ が群準同型であることを示す。

$$(1) \quad u \blacktriangleleft 1_G = \varphi_\alpha^{-1}(p, h1_G) = \varphi_\alpha^{-1}(p, h) = u$$

$$(2) \quad \forall g_1, g_2 \in G \text{ をとる.}$$

$$u \blacktriangleleft (g_1 g_2) = \varphi_\alpha^{-1}(p, (hg_1)g_2) = \varphi_\alpha^{-1}(p, hg_1) \blacktriangleleft g_2 = (u \blacktriangleleft g_1) \blacktriangleleft g_2$$

◀ は自由

$\forall \alpha \in \Lambda$ に対して $\forall u = (p, g) \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ をとる。 $u \blacktriangleleft g' = u$ ならば

$$u \blacktriangleleft g' = \varphi_\alpha^{-1}(p, gg') = u = \varphi_\alpha^{-1}(p, g1_G)$$

が成り立つが、局所自明化は全単射なので $gg' = g$ が言える。 g は任意なので $g' = 1_G$ が分かった。

軌道空間が M

$\forall \alpha \in \Lambda$ に対して、 G の右作用 (2.4.6) による $U \times G$ の軌道空間は $(U \times G)/G = U \times \{1_G\} = U$ となる。 故に P 全域に対しては $P/G = B$ となる。

■

定理 2.1:

コンパクト Hausdorff 空間 P と、 P に自由に作用しているコンパクト Lie 群 G を与える。 この時、軌道空間への商写像

$$\pi: P \longrightarrow P/G$$

は主束である。

証明

■

構造群を G とするファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ が与えられたとき、 命題 2.1 を使うと、 変換関数が共通の主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{p} M$ が存在することがわかる。 このようにして得られる主束をファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ に同伴する (associated) 主束と呼ぶ。

【例 2.4.2】 フレーム束

変換関数 $\{t_{\alpha\beta}: M \longrightarrow \text{GL}(N, \mathbb{K})\}$ を持つ階数 N のベクトル束 $\mathbb{K}^N \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ に同伴する主束は、例えば次のようにして構成できる： $\forall x \in M$ に対して

$$P_x := \{ f \in \text{Hom}(\mathbb{K}^N, E_x) \mid \text{同型写像} \}$$

とし、

$$P := \coprod_{x \in M} P_x, \quad \varpi: P \longrightarrow M, \quad (x, f) \longmapsto x$$

と定める. $\mathrm{GL}(N, \mathbb{K}) \hookrightarrow P \xrightarrow{\varpi} M$ に適切な局所自明化を入れて, 変換関数が $\{t_{\alpha\beta}: M \longrightarrow \mathrm{GL}(N, \mathbb{K})\}$ となるような主束を構成する.

$\forall (x, f) \in P_x$ をとる. このとき \mathbb{K}^N の標準基底を e_1, \dots, e_N とすると, $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, E_x)$ は E_x の基底 $f(e_1), \dots, f(e_N)$ と同一視される^aことに注意しよう. このことに由来して, $f_\mu := f(e_\mu)$ とおいて $f = (f_1, \dots, f_N) \in P_x$ と表すことにする.

E の局所自明化 $\{\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{K}^n\}$ を与える. このとき, n 個の \underline{E} の局所切断 $s_{\alpha 1}, \dots, s_{\alpha N} \in \Gamma(E|_{U_\alpha})$ を

$$s_{\alpha\mu}(x) := \varphi_\alpha^{-1}(x, e_\mu)$$

と定義すると, $\forall x \in U_\alpha$ に対して $s_{\alpha 1}(x), \dots, s_{\alpha N}(x)$ が E_x の基底となる^b. 故に, \underline{P} の局所切断 $p_\alpha \in \Gamma(P|_{U_\alpha})$ を

$$p_\alpha(x) := \left(x, (s_{\alpha 1}(x), \dots, s_{\alpha N}(x)) \right) \in P_x$$

により定義できる. このとき, $\forall (x, f) = (x, (f_1, \dots, f_N)) \in \varpi^{-1}(U_\alpha)$ に対してある $g \in \mathrm{GL}(N, \mathbb{K})$ が存在して $f = p_\alpha(x)g$ と書ける. ただし g は基底の取り替え行列で, ただ単に行列の積として右から作用している.

ここで, 目当ての \underline{P} の局所自明化を

$$\psi_\alpha: \varpi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}), (x, f) = (x, p_\alpha(x)g) \longmapsto (x, g)$$

と定義する. 変換関数を計算すると

$$\begin{aligned} \psi_\beta^{-1}(x, g) &= (x, p_\beta(x)g) \\ &= \left(x, (s_{\beta 1}(x), \dots, s_{\beta N}(x))g \right) \\ &= \left(x, (\varphi_\beta^{-1}(x, e_1), \dots, \varphi_\beta^{-1}(x, e_N))g \right) \\ &= \left(x, \left(\varphi_\alpha^{-1}(x, t_{\alpha\beta}(x)e_1), \dots, \varphi_\alpha^{-1}(x, t_{\alpha\beta}(x)e_N) \right)g \right) \end{aligned}$$

となるが, e_μ が標準基底なので

$$t_{\alpha\beta}(x)e_\mu = \begin{bmatrix} t_{\alpha\beta}(x)^1_\mu \\ t_{\alpha\beta}(x)^2_\mu \\ \vdots \\ t_{\alpha\beta}(x)^n_\mu \end{bmatrix} = e_\nu t_{\alpha\beta}(x)^\nu_\mu$$

が成り立つこと, およびベクトル束の定義から $\mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\alpha|_{E_x}: E_x \longrightarrow \mathbb{K}^N$ が \mathbb{K} -ベクトル空間の同型写像であることに注意すると

$$\begin{aligned} &\left(x, \left(\varphi_\alpha^{-1}(x, t_{\alpha\beta}(x)e_1), \dots, \varphi_\alpha^{-1}(x, t_{\alpha\beta}(x)e_N) \right)g \right) \\ &= \left(x, \left(\varphi_\alpha^{-1}(x, e_\nu) t_{\alpha\beta}(x)^\nu_1, \dots, \varphi_\alpha^{-1}(x, e_\nu) t_{\alpha\beta}(x)^\nu_N \right)g \right) \\ &= \left(x, \left(\varphi_\alpha^{-1}(x, e_1), \dots, \varphi_\alpha^{-1}(x, e_N) \right) t_{\alpha\beta}(x)g \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(x, (s_{\alpha 1}(x), \dots, s_{\alpha N}(x)) t_{\alpha \beta}(x) g \right) \\
&= (x, p_{\alpha}(x) t_{\alpha \beta}(x) g) \\
&= \psi_{\alpha}^{-1}(x, t_{\alpha \beta}(x) g)
\end{aligned}$$

だとわかり、目標が達成された。この $\mathrm{GL}(N, \mathbb{K}) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ のことを**フレーム束**と呼ぶ。

^a 実際 $\forall v = v^{\mu} e_{\mu} \in \mathbb{K}^n$ に対して $f(v) = v^{\mu} f(e_{\mu})$ が成り立つので、 $f(e_1), \dots, f(e_N) \in E_x$ が指定されれば f が一意に決まる。

^b **ベクトル束の定義**から $\mathrm{proj}_2 \circ \varphi_{\alpha}|_{E_x} : E_x \rightarrow \mathbb{K}^N$ が \mathbb{K} -ベクトル空間の同型写像であるため。

逆に、与えられた主束を素材にして、変換関数を共有するファイバー束を構成することができる。

命題 2.3: Borel 構成

$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ を**主束**とし、Lie 群 G の C^{∞} 多様体への**左作用** $\blacktriangleright: G \times F \rightarrow F$ を与える。(2.4.6) で定義された G の P への**右作用**を $\blacktriangleleft: P \times G \rightarrow P$ と書く。

- 積多様体 $P \times F$ への G の新しい右作用 $\blacktriangleleft: (P \times F) \times G \rightarrow P \times F$ を

$$(u, f) \blacktriangleleft g := (u \blacktriangleleft g, g^{-1} \blacktriangleright f)$$

と定義し、この右作用による $P \times F$ の軌道空間を $P \times_G F := (P \times F)/G$ と書く。

- 商写像 $\varpi: P \times F \rightarrow P \times_G F$, $(u, f) \mapsto (u, f) \blacktriangleleft G$ による $(u, f) \in P \times F$ の像を $u \times_G f \in P \times_G F$ と書く。このとき写像

$$q: P \times_G F \rightarrow M, u \times_G f \mapsto \pi(u)$$

が well-defined になる。

このとき、 $F \hookrightarrow P \times_G F \xrightarrow{q} M$ は構造群 G をもち、変換関数が $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ のそれと同じであるような**ファイバー束**である。

証明 q の well-definedness は、(2.4.6) で定義した右作用 \blacktriangleleft が $\pi(u)$ を不変に保つので明らか。

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ の開被覆、局所自明化、変換関数をそれぞれ $\{U_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$, $\{\varphi_{\lambda}: \pi^{-1}(U_{\lambda}) \rightarrow U_{\lambda} \times G\}_{\lambda \in \Lambda}$, $\{t_{\alpha \beta}: M \rightarrow G\}_{\alpha, \beta \in \Lambda}$ と書く。また、 $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して**局所切断** $s_{\lambda} \in \Gamma(P|_{U_{\lambda}})$ を

$$s_{\lambda}: M \rightarrow \pi^{-1}(U_{\lambda}), x \mapsto \varphi_{\lambda}^{-1}(x, 1_G)$$

と定義する。

このとき、 $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して C^{∞} 写像

$$\psi_{\lambda}: q^{-1}(U_{\lambda}) \rightarrow U_{\lambda} \times F, s_{\lambda}(x) \times_G f \mapsto (x, f) \quad (2.4.7)$$

が well-defined な^{*26} 微分同相写像になる^{*27} ので、族

$$\{\psi_\lambda: q^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times F\}_{\lambda \in \Lambda}$$

を $F \hookrightarrow P \times_G F \xrightarrow{q} M$ の局所自明化にとる. すると $\forall \alpha, \beta \in \Lambda, \forall (x, f) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$ に対して

$$\begin{aligned} \psi_\beta^{-1}(x, f) &= s_\beta(x) \times_G f \\ &= \varphi_\beta^{-1}(x, 1_G) \times_G f \\ &= \varphi_\alpha^{-1}(x, t_{\alpha\beta}(x) 1_G) \times_G f \\ &= \varphi_\alpha^{-1}(x, 1_G t_{\alpha\beta}(x)) \times_G f \\ &= (\varphi_\alpha^{-1}(x, 1_G) \blacktriangleleft t_{\alpha\beta}(x)) \times_G f \\ &= (s_\alpha(x) \blacktriangleleft t_{\alpha\beta}(x)) \times_G f \\ &= \left((s_\alpha(x) \blacktriangleleft t_{\alpha\beta}(x)) \blacktriangleleft t_{\alpha\beta}(x)^{-1} \right) \times_G (t_{\alpha\beta}(x) \blacktriangleright f) \\ &= s_\alpha(x) \times_G (t_{\alpha\beta}(x) \blacktriangleright f) \\ &= \psi_\alpha^{-1}(x, t_{\alpha\beta}(x) \blacktriangleright f) \end{aligned}$$

が成り立つので $F \hookrightarrow P \times_G F \xrightarrow{q} M$ の変換関数は

$$\{t_{\alpha\beta}: M \longrightarrow G\}_{\alpha, \beta \in \Lambda}$$

である. ■

【例 2.4.3】 同伴ベクトル束

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ を任意に与える. Lie 群 G の, N 次元 \mathbb{K} ベクトル空間 V への**左作用**とは, Lie 群 G の N 次元表現 $\rho: G \longrightarrow \text{GL}(V)$ のことに他ならない^a. このとき, 命題 2.3 の方法によって構成される階数 N の**ベクトル束**のことを $P \times_\rho V$ と書き, **同伴ベクトル束** (associated vector bundle) と呼ぶ.

^a $\text{End } V$ に標準的な C^∞ 構造を入れて Lie 群と見做したものを $\text{GL}(V)$ と書いた.

これでゲージ場を導入する準備が整った. つまり, この節の冒頭で考えた内部対称性を持つ場 $\varphi: M \longrightarrow \mathbb{K}^N$ とは, 厳密には**主束**

$$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$$

^{*26} $\forall u \times_G f \in q^{-1}(U_\lambda)$ と取る. このとき $q(u \times_G f) = \pi(u) \in U_\lambda$ なので $u \in P$ に主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ の局所自明化 $\varphi_\lambda: \pi^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times F$ を作用させることができる. 従って $g(u) := \text{proj}_2 \circ \varphi_\lambda(u) \in G$ とおけば, G の P への右作用の定義 (2.4.6) から $u = \varphi_\lambda^{-1}(\pi(u), g(u)) = \varphi_\lambda^{-1}(\pi(u), 1_G) \blacktriangleleft g(u) = s_\lambda(\pi(u)) \blacktriangleleft g(u)$ が成り立ち, $u \times_G f = (s_\lambda(\pi(u)) \blacktriangleleft g(u)) \times_G f = s_\lambda(\pi(u)) \times_G (g(u) \blacktriangleright f)$ と書くことができる. よって ψ_λ の定義 (2.4.7) において $\psi_\lambda(u \times_G f) = (\pi(u), g(u) \blacktriangleright f)$ であり, 全ての $q^{-1}(U_\lambda)$ の元の行き先が定義されていることがわかった. 次に $u \times_G f = u' \times_G f' \in q^{-1}(U_\lambda)$ であるとする. このとき右作用 \blacktriangleleft の定義からある $h \in G$ が存在して $u' = \varphi_\lambda^{-1}(\pi(u'), g(u')) = u \blacktriangleleft h = \varphi_\lambda^{-1}(\pi(u), g(u)h)$, $f' = h^{-1} \blacktriangleright f$ が成り立つので, $\pi(u') = \pi(u)$, $g(u') = g(u)h$, $f' = h^{-1} \blacktriangleright f$ が言える. 従って $\psi_\lambda(u' \times_G f') = (\pi(u'), g(u') \blacktriangleright f') = (\pi(u), (g(u)h) \blacktriangleright (h^{-1} \blacktriangleright f)) = (\pi(u), g(u) \blacktriangleright h \blacktriangleright h^{-1} \blacktriangleright f) = (\pi(u), g(u) \blacktriangleright f) = \psi_\lambda(u \times_G f)$ が成り立ち, ψ_λ が well-defined であることが示された.

^{*27} $\pi: P \longrightarrow M, g := \text{proj}_2 \circ \varphi_\lambda: q^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow G, \blacktriangleright: G \times F \longrightarrow F$ は全て C^∞ 写像の合成の形をしているので C^∞ 写像であり, $\psi_\lambda := (\pi \times (\blacktriangleright \circ (g \times \text{id}_F)))$ もこれらの合成として書けている (写像 \times, id_F はもちろん C^∞ 級である) ので C^∞ 写像である. well-definedness の証明と同じ議論で ψ_λ の単射性がわかる. 全射性は定義 (2.4.7) より明らか. 逆写像 $(x, f) \mapsto s_\lambda(x) \times_G f$ も, C^∞ 写像たちの合成 $q \circ (s_\lambda \times \text{id}_F)$ なので C^∞ 写像である.

の、線型 Lie 群 G の N 次元表現

$$\rho: G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{K}^N), U \longmapsto (v \longmapsto Uv)$$

による**同伴ベクトル束**

$$\mathbb{K}^N \hookrightarrow P \times_{\rho} \mathbb{K}^N \xrightarrow{q} \mathcal{M}$$

の**局所切断** $\phi: V_{\alpha} \longrightarrow P \times_{\rho} \mathbb{K}^N$ を、ある一つの**局所自明化** $\sigma_{\alpha}: q^{-1}(V_{\alpha}) \longrightarrow V_{\alpha} \times \mathbb{K}^N$ によって座標表示したもの（の第 2 成分を取り出してきたもの）

$$\varphi = \mathrm{proj}_2 \circ \sigma_{\alpha} \circ \phi: V_{\alpha} \longrightarrow \mathbb{K}^N$$

のことだと見做せる．と言うのも、こう考えることで場の変換性 (2.4.2)

$$\varphi(x) \longrightarrow \tilde{\varphi}(x) := U(x)\varphi(x)$$

が、時空 \mathcal{M} の 2 つのチャート $(V, (x^{\mu}))$, $(\tilde{V}, (\tilde{x}^{\mu}))$ の共通部分 $V \cap \tilde{V}$ 上における、局所自明化 $\sigma, \tilde{\sigma}: q^{-1}(V \cap \tilde{V}) \longrightarrow (V \cap \tilde{V}) \times \mathbb{K}^N$ の取り替え（内部自由度に関する一般座標変換のようなもの）に伴う変換関数 $U_{\tilde{V}, V}: \mathcal{M} \longrightarrow G$ の作用

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} \circ \sigma^{-1}: (V \cap \tilde{V}) \times \mathbb{K}^N &\longrightarrow (V \cap \tilde{V}) \times \mathbb{K}^N, \\ (x, \varphi(x)) &\longmapsto \left(x, \rho(U_{\tilde{V}, V}(x))(\varphi(x))\right) = \left(x, U_{\tilde{V}, V}(x)\varphi(x)\right) \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

として上手く定式化できているのである*28.

2.4.2 Lie 群の指数写像と基本ベクトル場

主束の接続の話に入る前に、Lie 群の Lie 代数について考察する．この小節は [Lee12, Chapter 20], [今野13, 第 6 章] による．

Lie 群 G の上の**微分同相写像***29

$$\begin{aligned} L_g: G &\longrightarrow G, x \longmapsto gx, \\ R_g: G &\longrightarrow G, x \longmapsto xg, \end{aligned}$$

のことをそれぞれ**左移動**、**右移動**と言う．

定義 2.7: 左不変ベクトル場

Lie 群 G の**左不変ベクトル場** (left-invariant vector field) とは、 \mathbb{R} -ベクトル空間

$$\mathfrak{X}^L(G) := \{ X \in \mathfrak{X}(G) \mid \forall g \in G, (L_g)_* X = X \}$$

の元のこと． i.e. $\forall g \in G$ に対して自分自身と L_g -related な C^{∞} ベクトル場のことを言う．

*28 物理では変換性によって場を定義するので、数学的定式化はこれで良い．なお、この定式化は主束の全空間 P の情報を一切使っていないが、これは命題 2.1 の表れである．実際、この節の冒頭の議論で顕に登場したのは時空 \mathcal{M} 、場の配位を記述する空間 \mathbb{K}^N 、内部対称性を表す Lie 群 G とその表現 $\rho: G \longrightarrow \mathrm{GL}(N, \mathbb{K})$ 、場の局所変換を表す C^{∞} 写像 $U: \mathcal{M} \longrightarrow G$ だけだったので、その数学的定式化が P によらないのは妥当だと思う．

*29 従って、命題 B.7 から L_g, R_g による**ベクトル場の押し出し**が一意的に存在する．

$\forall g \in G$ と $\forall X, Y \in \mathfrak{X}^L(G)$ をとる. このとき $(L_g)_*X = X$, $(L_g)_*Y = Y$ なので, 命題 B.9 の後半から

$$(L_g)_*[X, Y] = [(L_g)_*X, (L_g)_*Y] = [X, Y]$$

と言える. i.e. $\mathfrak{X}^L(G)$ は **Lie ブラケット** について閉じるので, 体 \mathbb{R} 上の Lie 代数になる.

命題 2.4:

G を Lie 群とする. このとき評価写像

$$\text{ev}_{1_G}: \mathfrak{X}^L(M) \longrightarrow T_{1_G}G, X \longmapsto X_{1_G}$$

はベクトル空間の同型写像である.

証明 ev_{1_G} が \mathbb{R} -線型写像であることは明らか.

ev_{1_G} が単射

$\text{Ker ev}_{1_G} = \{0\}$ を示す. $\forall X \in \text{Ker ev}_{1_G}$ に対して $\text{ev}_{1_G}(X) = X_{1_G} = 0$ が成り立つ. 一方 $X \in \mathfrak{X}^L(G)$ でもあるので, $\forall g \in G$ に対して $X_g = X_{L_g(1_G)} = (T_{1_G}L_g)(X_{1_G}) = 0$ と言える^{*30}.

ev_{1_G} が全射

$\forall v \in T_{1_G}G$ を 1 つとり, C^∞ ベクトル場 $v^L \in \mathfrak{X}(G)$ を

$$v^L: G \longrightarrow TG, g \longmapsto T_{1_G}(L_g)(v) \quad (2.4.9)$$

と定義する^{*31}. $\forall g \in G$ に対して v^L が自分自身と L_g -related であることを示す. 実際, $\forall h \in G$ に対して

$$T_h(L_g)(v^L|_h) = T_h(L_g) \circ T_{1_G}(L_h)(v) = T_{1_G}(L_g \circ L_h)(v) = T_{1_G}(L_{gh})(v) = v^L|_{gh} = v^L|_{L_g(h)}$$

と言える. i.e. $v^L \in \mathfrak{X}^L(G)$ である. 従って v^L に ev_{1_G} を作用させることができ, $\text{ev}_{1_G}(v^L) = v^L|_{1_G} = T_{1_G}L_{1_G}(v) = v \in \text{Im ev}_{1_G}$ が言えた. ■

ここで $\mathfrak{g} := T_{1_G}G$ とおき, 命題 2.4 の (2.4.9) を使って \mathfrak{g} 上の Lie ブラケットを

$$[X, Y] := [X^L, Y^L]_{1_G} \in \mathfrak{g}$$

と定義すれば ev_{1_G} は Lie 代数の同型写像となる. この意味で \mathfrak{g} のことを **Lie 群 G の Lie 代数** と呼ぶ.

【例 2.4.4】一般線型群とその Lie 代数

一般線型群 $\text{GL}(n, \mathbb{K}) \subset \text{M}(n, \mathbb{K})$ の Lie 代数 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) := T_{1_n}\text{GL}(n, \mathbb{K})$ を, $\text{GL}(n, \mathbb{K})$ のチャート

^{*30} 2 つ目の等号で L_g -related の定義を使った.

^{*31} v^L が C^∞ であることは次のようにしてわかる: $\forall f \in C^\infty(G)$ をとる. $\gamma(0) = 1_G$, $\dot{\gamma}(0) = v$ を充たす C^∞ 曲線 $\gamma: (-\delta, \delta) \longrightarrow G$ をとると, $\forall g \in G$ に対して $(v^L f)(g) = v(f \circ L_g) = \dot{\gamma}(0)(f \circ L_g) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ L_g \circ \gamma)(t)$ と書ける. $f \circ L_g \circ \gamma: (-\delta, \delta) \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ と見做すとこれは C^∞ 写像の合成なので C^∞ 写像であり, 右辺は g に関して C^∞ 級である.

$(\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}), (x^\mu)_\nu)$ の下で考える．まず， \mathbb{K} -線型写像

$$\begin{aligned} \alpha: \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) &\longrightarrow \mathrm{M}(n, \mathbb{K}), \\ a^\mu_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu_\nu} \Big|_{\mathbb{1}_n} &\longmapsto [a^\mu_\nu]_{1 \leq \mu, \nu \leq n} \end{aligned}$$

は明らかに \mathbb{K} -ベクトル空間の同型写像である． $\forall a = a^\mu_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu_\nu} \Big|_{\mathbb{1}_n}, b = b^\mu_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu_\nu} \Big|_{\mathbb{1}_n} \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ をとる．このとき $\forall g = [g^\mu_\nu]_{1 \leq \mu, \nu \leq n} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ に関する左移動は

$$L_g([x^\mu_\nu]_{1 \leq \mu, \nu \leq n}) = [g^\mu_\rho x^\rho_\nu]_{1 \leq \mu, \nu \leq n}$$

なる C^∞ 写像だから

$$\begin{aligned} a^L_g &= T_{1_G}(L_g)(a) = a^\mu_\nu T_{1_G}(L_g) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu_\nu} \Big|_{\mathbb{1}_n} \right) \\ &= a^\mu_\nu \frac{\partial [L_g]^\rho_\sigma}{\partial x^\mu_\nu}(\mathbb{1}_n) \frac{\partial}{\partial x^\rho_\sigma} \Big|_{L_g(\mathbb{1}_n)} \\ &= g^\rho_\mu a^\mu_\nu \frac{\partial}{\partial x^\rho_\nu} \Big|_g \end{aligned}$$

と計算できる．i.e. 第 (μ, ν) 成分を取り出す C^∞ 関数を $\mathrm{pr}^\mu_\nu: \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ とおくと $\forall f \in C^\infty(\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}))$ に対して $a^L f \in C^\infty(\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}))$ は

$$a^L f(g) = a^\mu_\nu \mathrm{pr}^\rho_\mu(g) \frac{\partial f}{\partial x^\rho_\nu}(g)$$

と書ける．よって

$$\begin{aligned} [a, b]f &= [a^L, b^L]f(\mathbb{1}_n) \\ &= a^\mu_\nu \mathrm{pr}^\rho_\mu(\mathbb{1}_n) \frac{\partial}{\partial x^\rho_\nu} \left(b^\alpha_\beta \mathrm{pr}^\gamma_\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\gamma_\beta} \right) \Big|_{\mathbb{1}_n} \\ &\quad - b^\mu_\nu \mathrm{pr}^\rho_\mu(\mathbb{1}_n) \frac{\partial}{\partial x^\rho_\nu} \left(a^\alpha_\beta \mathrm{pr}^\gamma_\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\gamma_\beta} \right) \Big|_{\mathbb{1}_n} \\ &= a^\mu_\nu b^\nu_\beta \frac{\partial f}{\partial x^\mu_\beta}(\mathbb{1}_n) + \cancel{a^\mu_\nu b^\alpha_\beta \frac{\partial^2 f}{\partial x^\mu_\nu \partial x^\alpha_\beta}(\mathbb{1}_n)} \\ &\quad - b^\mu_\nu a^\nu_\beta \frac{\partial f}{\partial x^\mu_\beta}(\mathbb{1}_n) - \cancel{b^\mu_\nu a^\alpha_\beta \frac{\partial^2 f}{\partial x^\mu_\nu \partial x^\alpha_\beta}(\mathbb{1}_n)} \\ &= \left((a^\mu_\rho b^\rho_\nu - b^\mu_\rho a^\rho_\nu) \frac{\partial}{\partial x^\mu_\nu} \Big|_{\mathbb{1}_n} \right) f \end{aligned}$$

であり，

$$\alpha([a, b]) = [a^\mu_\rho b^\rho_\nu - b^\mu_\rho a^\rho_\nu]_{1 \leq \mu, \nu \leq n}$$

i.e. α は Lie 代数の同型写像だと分かった．

定理 2.2: 誘導される Lie 代数の準同型

Lie 群 G, H と Lie 群の準同型 $F: G \rightarrow H$ を与える.

- (1) このとき, $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して $Y \in \mathfrak{h}$ がただ一つ存在して, X^L と Y^L が F -related になる. i.e. $Y^L = F_* X^L$ である.
- (2) $T_{1_G} F: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$, $X \mapsto T_{1_G} F(X)$ は Lie 代数の準同型である.

証明 (1) $Y = T_{1_G} F(X) \in \mathfrak{h}$ に対して X^L と Y^L が F -related であることを示す. 実際, F が Lie 群の準同型であることから $\forall g, h \in G$ について

$$F \circ L_g(h) = F(gh) = F(g)F(h) = L_{F(g)} \circ F(h)$$

が成り立つこと, i.e. $F \circ L_g = L_{F(g)} \circ F$ に注意すると $\forall g \in G$ に対して

$$\begin{aligned} T_g F(X^L|_g) &= T_g F(T_{1_G} L_g(X)) \\ &= T_{1_G} (F \circ L_g)(X) \\ &= T_{1_G} (L_{F(g)} \circ F)(X) \\ &= T_{1_H} (L_{F(g)}) \circ T_{1_G} F(X) \\ &= T_{1_H} (L_{F(g)})(Y) \\ &= Y_{F(g)} \end{aligned}$$

が言える. 系 B.1 より $F_* X^L = Y^L$ がわかるので Y は一意的に定まる.

- (2) $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ とする. (1) と命題 B.9-(1) より $[F_* X^L, F_* Y^L]$ は $[X^L, Y^L]$ と F -related であるが, (1) で示した一意性から

$$F_* [X^L, Y^L] = [F_* X^L, F_* Y^L]$$

が言える. 両辺の $1_H \in H$ における値をとることで

$$T_{1_G} F([X, Y]) = (F_* [X^L, Y^L])_{1_G} = ([F_* X^L, F_* Y^L])_{1_G} = [X, Y]$$

が示された. ■

定義 2.8: 1 パラメータ部分群

Lie 群の準同型写像 $\mathbb{R} \rightarrow G$ のことを Lie 群 G の **1 パラメータ部分群** (one-parameter subgroup) と呼ぶ^a.

^a 1 パラメータ部分群自身は部分 Lie 群ではない.

命題 2.5: 1 パラメータ部分群の特徴付け

Lie 群 G を与える.

- (1) G の任意の 1 パラメータ部分群 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow G$ に対して, γ を初期条件 $\gamma(0) = 1_G$ を充たす極大積分曲線として持つ左不変ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}^L(G)$ が一意に存在する.
- (2) $\forall X \in \mathfrak{X}^L(G)$ に対して, 初期条件 $\gamma(0) = 1_G$ を充たす唯一の X の極大積分曲線 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow G$ は G の 1 パラメータ部分群である.

上述の対応によって $X \in \mathfrak{X}^L(G)$ から一意に定まる 1 パラメータ部分群のことを X が生成する 1 パラメータ部分群と呼ぶ.

命題 2.4 の同型と併せると

$$\{ G \text{ の 1 パラメータ部分群 } \} \xleftrightarrow{*} \mathfrak{X}^L(G) \xleftrightarrow{\text{ev}_{1_G}} T_{1_G}G$$

の 1 対 1 対応がある. i.e. G の任意の 1 パラメータ部分群 γ は, その初速度 $\dot{\gamma}(0) \in T_{1_G}G$ により完全に決定される.

証明 (1) G の 1 パラメータ部分群 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow G$ を与える. $\frac{d}{dt} \in \mathfrak{X}^L(\mathbb{R})$ なので, 定理 2.2 より, $X := \gamma_*\left(\frac{d}{dt}\right) \in \mathfrak{X}^L(G)$ は $\frac{d}{dt}$ と γ -related な唯一の左不変ベクトル場である. このとき $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ に大して

$$X_{\gamma(t_0)} = T_{t_0}\gamma \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \right) = \dot{\gamma}(t_0)$$

が成り立ち, γ は初期条件 $\gamma(0) = 1_G$ を充たす X の極大積分曲線である.

- (2) 定理 B.6 より $\forall X \in \mathfrak{X}^L(G)$ は完備なので, X は大域的なフローを生成する. 従って $\gamma(0) = 1_G$ を充たす X の極大積分曲線 γ が唯一存在し, その定義域が \mathbb{R} になる.

$\forall g \in G$ をとる. 左不変ベクトル場の定義より $X \in \mathfrak{X}^L(G)$ は X 自身と L_g -related なので, 命題 B.11 から $L_g \circ \gamma: \mathbb{R} \rightarrow G$ もまた X の積分曲線である. 従って $\forall s \in \mathbb{R}$ に対して曲線 $L_{\gamma(s)} \circ \gamma: t \mapsto L_{\gamma(s)}(\gamma(t)) = \gamma(s)\gamma(t)$ は $t=0$ において点 $\gamma(s) \in G$ を通過する X の積分曲線である. 然るに補題 B.3-(2) より曲線 $t: t \mapsto \gamma(s+t)$ もまた同一の初期条件を充たす X の積分曲線なので, 定理 B.2 よりこれらは $\forall t \in \mathbb{R}$ において一致しなくてはならない:

$$\gamma(s)\gamma(t) = \gamma(s+t)$$

i.e. $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow G$ は 1 パラメータ部分群である. ■

定義 2.9: 指数写像

Lie 群 G を与える. \mathfrak{g} を G の Lie 代数とする. G の指数写像 (exponential map) を

$$\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G, X \mapsto \gamma_{(X)}(1)$$

と定義する. ただし, $\gamma_{(X)}: \mathbb{R} \rightarrow G$ は $X^L \in \mathfrak{X}^L(G)$ が生成する 1 パラメータ部分群である.

命題 2.6: 指数写像の性質

Lie 群 G を与える. \mathfrak{g} を G の Lie 代数とする.

- (1) $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ は C^∞ 写像
- (2) $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して,

$$\gamma_{(X)}: \mathbb{R} \rightarrow G, t \mapsto \exp(tX)$$

は $X^L \in \mathfrak{X}^L(G)$ が生成する 1 パラメータ部分群である.

- (3) $\forall X \in \mathfrak{g}, \forall s, t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\exp((s+t)X) = \exp(sX) \exp(tX)$$

- (4) $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して

$$(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$$

- (5) H を別の Lie 群, $F: G \rightarrow H$ を任意の Lie 群の準同型とすると, 以下の図式が可換になる:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{T_1 G F} & \mathfrak{h} \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{F} & H \end{array}$$

- (6) $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して, 左不変ベクトル場 $X^L \in \mathfrak{X}^L(G)$ が生成するフロー $\theta_{(X)}: \mathbb{R} \times G \rightarrow G$ に対して

$$\theta_{(X)}(t, g) = g \exp(tX) (= R_{\exp(tX)}(g))$$

が成り立つ.

- (7) $T_0(\exp): T_0 \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ は恒等写像である.
- (8) 点 $0 \in \mathfrak{g}$ の近傍 $U \subset \mathfrak{g}$ および点 $1_G \in G$ の近傍 $V \subset G$ が存在して, $\exp|_U: U \rightarrow V$ が微分同相写像になる.

証明 (1) [Lee12, p.519, Proposition 20.8-(1)]

- (2) $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow G$ を $X^L \in \mathfrak{X}^L(G)$ が生成する 1 パラメータ部分群とする. これは命題 2.5-(2) により $\gamma(0) = 1_G$ を充たす X^L の唯一の極大積分曲線である.

$\forall t \in \mathbb{R}$ をとる. このとき補題 B.3-(1) より, C^∞ 曲線 $\tilde{\gamma}: \mathbb{R} \rightarrow G, s \mapsto \gamma(ts)$ は初期条件 $\tilde{\gamma}(0) = 1_G$ を充たすベクトル場 tX^L の極大積分曲線なので, その一意性から

$$\gamma_{(X)}(t) = \exp(tX) = \tilde{\gamma}(1) = \gamma(t)$$

が成り立つ. i.e. $\gamma_{(X)} = \gamma$ が言えた.

- (3) (2) より $\gamma_{(X)}$ が 1 パラメータ部分群なので

$$\exp((s+t)X) = \gamma_{(X)}(s+t) = \gamma_{(X)}(s)\gamma_{(X)}(t) = \exp(sX)\exp(tX)$$

(4) (2) より $\gamma_{(X)}$ が 1 パラメータ部分群なので

$$\begin{aligned}\exp X \exp(-X) &= \gamma_{(X)}(1)\gamma_{(X)}(-1) = \gamma_{(X)}(0) = 1_G \\ \exp(-X) \exp X &= \gamma_{(X)}(-1)\gamma_{(X)}(1) = \gamma_{(X)}(0) = 1_G\end{aligned}$$

が言える. i.e. $(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$ である.

(5) $\forall X \in \mathfrak{g}$ を 1 つ固定する. (2) より C^∞ 写像 $t \mapsto \exp(tT_{1_G}F(X))$ は左不変ベクトル場 $(T_{1_G}F(X))^L = F_*(X^L) \in \mathfrak{X}^L(G)$ が生成する 1 パラメータ部分群である. ここで, $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow H, t \mapsto F(\exp(tX))$ とおいたとき

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}(0) &= T_0(F \circ \exp(tX)) \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \right) \\ &= T_{1_G}F \circ T_0(\exp(tX)) \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \right) \\ &= T_{1_G}F(\gamma_{(X)}(0)) \\ &= T_{1_G}F(X)\end{aligned}$$

が成り立つので σ もまた左不変ベクトル場 $(T_{1_G}F(X))^L \in \mathfrak{X}^L(G)$ が生成する 1 パラメータ部分群であり, その一意性から $\sigma(t) = \exp(tT_{1_G}F(X))$ が言える.

(6) $\forall (t, g) \in \mathbb{R} \times G$ をとる. 左不変ベクトル場の定義より $X^L \in \mathfrak{X}^L(G)$ は X^L 自身と L_g -related なので, 命題 B.11 から $L_g \circ \gamma_{(X)}: \mathbb{R} \rightarrow G, t \mapsto \exp(tX)$ もまた X^L の極大積分曲線である. $L_g \circ \gamma_{(X)}(0) = g$ なので, 極大積分曲線の一意性から $L_g \circ \gamma_{(X)} = \theta_{(X)}^{(g)}$ が言える. 従って

$$g \exp(tX) = L_g(\exp(tX)) = L_g \circ \gamma_{(X)}(t) = \theta_{(X)}^{(g)}(t) = \theta_{(X)}(t, g).$$

(7) $\forall X \in T_0\mathfrak{g}$ を 1 つとる. \mathfrak{g} 上の C^∞ 曲線 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{g}, t \mapsto tX$ は $\dot{\gamma}(0) = X$ を充たすので

$$\begin{aligned}T_0(\exp)(X) &= T_0(\exp)(\dot{\gamma}(0)) \\ &= T_0(\exp) \circ T_0\gamma \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \right) \\ &= T_0(\exp \circ \gamma) \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tX) \\ &= X\end{aligned}$$

(8) (7) より点 $0 \in \mathfrak{g}$ において $T_0(\exp): T_0\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} = T_{1_G}G$ が全単射なので, C^∞ 多様体に関する逆関数定理が使える. ■

定義 2.10: 微分表現

V を \mathbb{K} -ベクトル空間とする. Lie 群 G の表現 $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ の, $1_G \in G$ における微分 $T_{1_G}\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ は Lie 代数の表現である. この $T_{1_G}\rho$ のことを ρ の微分表現 (differential representation) と呼ぶ.

【例 2.4.5】 随伴表現

$\forall g \in G$ に対して準同型 $F_g: G \rightarrow G, x \mapsto gxg^{-1}$ を考えると $F_{gh} = F_g \circ F_h$ が成り立つ. 故に, $1_G \in G$ における微分

$$T_{1_G}(F_g): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

は, T_{1_G} の関手性から $T_{1_G}(F_{gh}) = T_{1_G}(F_g) \circ T_{1_G}(F_h)$ を満たす. よって

$$\text{Ad}: G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g}), g \mapsto T_{1_G}(F_g)$$

は Lie 群 G の表現となる^a. これを Lie 群 G の**随伴表現** (adjoint representation) と呼ぶ.

Ad の微分表現を**指数写像**を使って計算してみよう. $\forall X \in \mathfrak{g}$ をとる. 命題 2.6-(2) により曲線 $\gamma_{(X)}: t \mapsto \exp(tX)$ は X が生成する 1 パラメータ部分群なので, 命題 B.13 から $\gamma_{(X)}'(0) = X$ である. 従って $\forall Y \in \mathfrak{g}$ に大して

$$\begin{aligned} (T_{1_G}(\text{Ad})(X))Y &= \left(T_{1_G}(\text{Ad})(\gamma_{(X)}'(0)) \right) Y \\ &= T_{1_G}(\text{Ad}) \circ T_0 \gamma_{(X)} \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \right) Y \\ &= T_0(\text{Ad} \circ \gamma_{(X)}) \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \right) Y \\ &= \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}(\exp(tX)) \right) Y \\ &= \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}(\exp(tX))(Y) \right) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(T_{1_G}(F_{\exp(tX)})(Y) \right) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(T_{1_G}(R_{(\exp(tX))^{-1}} \circ L_{\exp(tX)})(Y_{1_G}^L) \right) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(T_{L_{\exp(tX)}(1_G)}(R_{\exp(-tX)}) \circ T_{1_G}(L_{\exp(tX)})(Y_{1_G}^L) \right) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(T_{\exp(tX)}(R_{\exp(-tX)})(Y_{\exp(tX)}^L) \right) \end{aligned}$$

ここで, 命題 2.6-(6) より $X^L \in \mathfrak{X}^L(G)$ が**生成するフロー**が $\theta_t(g) = R_{\exp(tX)}(g)$ と書かれることを思い出すと,

$$\begin{aligned} &\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(T_{\exp(tX)}(R_{\exp(-tX)})(Y_{\exp(tX)}^L) \right) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} T_{\theta_t(1_G)}(\theta_{-t})(Y_{\theta_t(1_G)}^L) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_{\theta_t(1_G)}(\theta_{-t})(Y_{\theta_t(1_G)}^L) - Y_{1_G}^L}{t} \\ &= (\mathcal{L}_{X^L} Y^L)_{1_G} \\ &= [X^L, Y^L]_{1_G} \end{aligned}$$

$$= [X, Y]$$

となる．ただし 3 つ目の等号で **Lie 微分の定義**を使った．結局

$$\text{ad} := T_{1_G}(\text{Ad}): \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), X \longmapsto (Y \mapsto [X, Y])$$

であることが分かった．

^a 厳密には Ad の C^∞ 性を示さなくてはならない．証明は [Lee12, p.534, Proposition 20.24] を参照．

【例 2.4.6】一般線型群の随伴表現

$G = \text{GL}(n, \mathbb{K})$ としたときの**随伴表現**を考える． $\text{GL}(n, \mathbb{K})$ のチャート $(\text{GL}(n, \mathbb{K}), (x^\mu)_\nu)$ をとると $\forall g = [g^\mu_\nu]_{1 \leq \mu, \nu \leq n} \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$ に関して C^∞ 写像 $F_g: G \longrightarrow G$ は

$$F_g([x^\mu_\nu]_{1 \leq \mu, \nu \leq n}) = [g^\mu_\rho x^\rho_\sigma [g^{-1}]^\sigma_\nu]_{1 \leq \mu, \nu \leq n}$$

と座標表示されるので, $\forall c^\mu_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu_\nu} \Big|_{\mathbf{1}_n} \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ の自然基底に関して

$$\begin{aligned} \text{Ad}(g) \left(c^\mu_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu_\nu} \Big|_{\mathbf{1}_n} \right) &= c^\mu_\nu T_{\mathbf{1}_n} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu_\nu} \Big|_{\mathbf{1}_n} \right) \\ &= c^\mu_\nu \frac{\partial [F_g]^\rho_\sigma}{\partial x^\mu_\nu} (\mathbf{1}_n) \frac{\partial}{\partial x^\rho_\sigma} \Big|_{F_g(\mathbf{1}_n)} \\ &= g^\rho_\mu c^\mu_\nu [g^{-1}]^\nu_\sigma \frac{\partial}{\partial x^\rho_\sigma} \Big|_{\mathbf{1}_n} \end{aligned}$$

がわかる．【例 2.4.4】の Lie 代数の同型写像 $\alpha: \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \longrightarrow \text{M}(n, \mathbb{K})$ を使うと, これは行列の積の意味で

$$\alpha \circ \text{Ad}(g) \circ \alpha^{-1}(X) = gXg^{-1}$$

を意味する．以上の議論は G が $\text{GL}(n, \mathbb{K})$ の部分 Lie 群の場合にも成立するが, 大抵の場合 Lie 代数の同型写像 α は省略される．

定理 B.2 によって, C^∞ 多様体 M 上の完備なベクトル場 X が Lie 群 \mathbb{R} の M への作用 $\theta: \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ を一意に定めることが分かる．そしてこのような状況を指して, ベクトル場 X は Lie 群 \mathbb{R} の作用 θ の無限小生成子であると言うのだった．この考えを任意の Lie 群 G の, 任意の M への右作用に拡張することができる．つまり, 任意の Lie 群 G の任意の右作用 $\blacktriangleleft: M \times G \longrightarrow M$ は, ただ一つの無限小生成子を持つ．

定義 2.11: 基本ベクトル場

Lie 群 G が C^∞ 多様体 M に **右から作用** しているとする. この右作用を $\blacktriangleleft: M \times G \longrightarrow M$ と書く.

- $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して, **基本ベクトル場** (fundamental vector field) $X^\# \in \mathfrak{X}(M)$ を次のように定める:

$$X_x^\# := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (x \blacktriangleleft \exp(tX)) \in T_x M$$

- 写像

$$\blacktriangleleft^\# : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(M), X \longmapsto X^\#$$

のことを**右作用 \blacktriangleleft の無限小生成子**と呼ぶ.

上の状況下で

- $\forall g \in G$ に対して**右作用移動** $R_g: M \longrightarrow M$ を $R_g(x) := x \blacktriangleleft g$ と定義する.
- $\forall x \in M$ に対して**右作用軌道** $R^{(x)}: G \longrightarrow M$ を $R^{(x)}(g) := x \blacktriangleleft g$ と定義する.

$\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して, C^∞ 写像^{*32}

$$\theta_{(X)}: \mathbb{R} \times M \longrightarrow M, (t, x) \longmapsto x \blacktriangleleft \exp(tX) = R_{\exp(tX)}(x)$$

は大域的フローである^{*33}. この大域的フローの無限小生成子はベクトル場

$$x \longmapsto \left(x, \dot{\theta}_{(X)}^{(x)}(0) \right) = \left(x, T_0(\theta_{(X)}^{(x)}) \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \right) \right)$$

であるが^{*34}, これがまさに $X^\# \in \mathfrak{X}(M)$ になっている. つまり, 基本ベクトル場は $\forall x \in M$ において, $\forall f \in C^\infty(M)$ に

$$X_x^\# f = T_0(\theta_{(X)}^{(x)}) \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \right) f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \theta_{(X)}^{(x)})(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x \blacktriangleleft \exp(tX))$$

と作用する.

もしくは, 次のように考えることもできる: 曲線 $\gamma_{(X)}: t \longmapsto \exp(tX)$ は初速度 $\dot{\gamma}_{(X)}(0) = X$ なので,

$$T_{1_G}(R^{(x)})(X) = T_{1_G}(R^{(x)})(\dot{\gamma}_{(X)}(0))$$

^{*32} これは命題 2.6-(6) からの類推だと言える.

^{*33} 実際, 命題 2.6 から

$$\begin{aligned} \theta_{(X)}(0, x) &= x \blacktriangleleft 1_G = x, \\ \theta_{(X)}(t+s, x) &= x \blacktriangleleft \exp((s+t)X) \\ &= x \blacktriangleleft (\exp(sX) \exp(tX)) \\ &= x \blacktriangleleft \exp(sX) \blacktriangleleft \exp(tX) \\ &= \theta_{(X)}(t, \theta_{(X)}(s, x)) \end{aligned}$$

が成り立つ.

^{*34} 強引に書くと $\theta_{(X)}^{(x)} = R^{(x)} \circ \exp(-X): \mathbb{R} \longrightarrow M$ と言うことになる.

$$\begin{aligned}
&= T_{1_G}(R^{(x)}) \circ T_0(\gamma_{(X)}) \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \right) \\
&= T_0(R^{(x)} \circ \gamma_{(X)}) \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \right) \\
&= T_0(\theta_{(X)}^{(x)}) \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \right) \\
&= X_x^\#.
\end{aligned} \tag{2.4.10}$$

このことから $\triangleleft^\#$ が \mathbb{R} -線型写像だとわかる。なお、等式 (2.4.10) は主束の接続形式を調べる際に極めて重要な役割を果たす。

補題 2.1:

Lie 群 G の C^∞ 多様体 M への右作用 $\triangleleft: M \times G \rightarrow M$ を与える。

このとき $\forall x \in M$ および $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して、 $X^L \in \mathfrak{X}^L(G)$ とその基本ベクトル場 $X^\#$ は $R^{(x)}$ -related である

証明 $\forall g, h \in G$ に対して

$$R^{(x \triangleleft g)}(h) = x \triangleleft g \triangleleft h = x \triangleleft (gh) = x \triangleleft L_g(h) = R^{(x)} \circ L_g(h)$$

が成り立つことに注意する。 $\forall g \in G$ をとり、 $y := R^{(x)}(g) = x \triangleleft g$ とおく。 X^L が左不変ベクトル場であることから

$$\begin{aligned}
X_y^\# &= T_{1_G}(R^{(y)})(X) \\
&= T_{1_G}(R^{(x \triangleleft g)})(X_{1_G}^L) \\
&= T_{1_G}(R^{(x)} \circ L_g)(X_{1_G}^L) \\
&= T_{L_g(1_G)}(R^{(x)}) \circ T_{1_G}(L_g)(X_{1_G}^L) \\
&= T_g(R^{(x)})(X_g^L)
\end{aligned}$$

が言えた。 ■

命題 2.7: $\triangleleft^\#$ は Lie 代数の準同型

Lie 群 G の C^∞ 多様体 M への右作用 $\triangleleft: M \times G \rightarrow M$ を与える。このとき右作用 \triangleleft の無限小生成子

$$\triangleleft^\#: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(M), X \mapsto X^\#$$

は Lie 代数の準同型である。

証明 $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ をとり。補題 2.1 と Lie ブラケットの自然性から $\forall x \in M$ に対して $[X^L, Y^L]$ と $[X^\#, Y^\#]$ が $R^{(x)}$ -related だと分かる。 i.e.

$$[X^\#, Y^\#]_x = [X^\#, Y^\#]_{R^{(x)}(1_G)} = T_{1_G}(R^{(x)})([X^L, Y^L]_{1_G}) = T_{1_G}(R^{(x)})([X, Y]) = [X, Y]_x^\#$$

が言えた。 ■

しばらくの間 Lie 群 G (もしくはその部分群) の Lie 代数を $\text{Lie}(G) := \mathfrak{g}$ と書くことにする^{*35}.

命題 2.8: 基本ベクトル場の零点

Lie 群 G の C^∞ 多様体 M への右作用 $\blacktriangleleft: M \times G \rightarrow M$ を与える. このとき, 以下の2つは同値である:

- (1) $X \in \mathfrak{g}$ の基本ベクトル場 $X^\#$ が点 $x \in M$ において $X_x^\# = 0$ になる
- (2) $X \in \text{Lie}(\text{Stab}(x))$

ただし, $\text{Stab}(x) \subset G$ は点 $x \in M$ の安定化部分群^aである.

^a つまり, $\text{Stab}(x) := \{g \in G \mid x \blacktriangleleft g = x\}$

証明 (1) \iff (2)

$X \in \text{Lie}(\text{Stab}(x))$ ならば $\forall t \in \mathbb{R}$ に対して $\exp(tX) \in \text{Stab}(x)$ である. 従って $x \in M$ の近傍上で定義された任意の C^∞ 関数 f に対して

$$X_x^\# f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x \blacktriangleleft \exp(tX)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x) = 0.$$

と計算できる^{*36}

(1) \implies (2)

$X_x^\# = 0$ とする. このとき定数写像 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M, t \mapsto x$ が

$$\dot{\gamma}(t) = 0 = X_{\gamma(t)}^\#$$

を満たすので, 初期条件 $\gamma(0) = x$ を満たす $X^\# \in \mathfrak{X}(M)$ の極大積分曲線となる. 一方, $\theta_{(X)}^{(x)}: \mathbb{R} \rightarrow M, t \mapsto x \blacktriangleleft \exp(tX)$ もまた同一の初期条件を満たす $X^\#$ の極大積分曲線だったので, その一意性から $\theta_{(X)}^{(x)} = \gamma \iff x \blacktriangleleft \exp(tX) = x \quad \forall t \in \mathbb{R} \iff \exp(tX) \in \text{Stab}(x) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ が言えた. 従って $X \in \text{Lie}(\text{Stab}(x))$ である. ■

系 2.3:

Lie 群 G の C^∞ 多様体 M への右作用 $\blacktriangleleft: M \times G \rightarrow M$ を与える.

このとき, $\forall x \in M$ の右作用軌道 $R^{(x)}: G \rightarrow M$ の微分

$$T_{1_G}(R^{(x)}): \mathfrak{g} \rightarrow T_x M$$

に対して

$$\text{Ker}(T_{1_G}(R^{(x)})) = \text{Lie}(\text{Stab}(x))$$

が成り立つ.

^{*35} 例えば [Lee12] では, $\text{Lie}(G) := \mathfrak{X}^L(G)$ と定義しているので注意. 同型なので然程問題にはならないが...

^{*36} $f(x \blacktriangleleft \exp(tX))$ が t に関して定数関数なので.

証明 $\forall X \in \mathfrak{g}$ をとる. (2.4.10) と命題 2.8 から

$$\begin{aligned} X \in \text{Ker}(T_{1_G}(R^{(x)})) &\iff T_{1_G}(R^{(x)})(X) = 0 \\ &\iff X_x^\# = 0 \\ &\iff X \in \text{Lie}(\text{Stab}(x)) \end{aligned}$$

■

2.4.3 主束の接続

与えられた C^∞ 多様体 M 上の **k -形式** (k -form) とは, 外積代数束 (これはベクトル束になる)

$$\bigwedge^k T^*M := \coprod_{p \in M} \left(\bigwedge^k T_p^*M \right)$$

の C^∞ 切断のことである. k -形式全体の集合を

$$\Omega^k(M) := \Gamma\left(\bigwedge^k T^*M\right)$$

と書く.

任意の \mathbb{K} -ベクトル空間 V, W に関して, 自然な \mathbb{K} -ベクトル空間の同型

$$\underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_k \otimes W \cong \left\{ f: \underbrace{V \times \cdots \times V}_k \longrightarrow W \mid \text{多重線型写像} \right\}$$

がある. M を底空間とする任意のベクトル束 $E \xrightarrow{\pi} M$ が与えられたとき, この同型を念頭において, **E 値 k -形式** (E -valued k form) をテンソル積束

$$\left(\bigwedge^k T^*M \right) \otimes E$$

の C^∞ 切断として定義する. E 値 k -形式全体の集合を

$$\Omega^k(M; E) := \Gamma\left(\left(\bigwedge^k T^*M\right) \otimes E\right)$$

と書く^{*37}. 特に E があるベクトル空間 V に対して $E = M \times V$ の形をした自明束の場合, 代わりに

$$\Omega^k(M; V) := \Omega^k(M; M \times V)$$

と書き, **V 値 k -形式** と呼ぶ^{*38}.

さて, Lie 群に関する準備が終わったのでいよいよ主束の接続を定義する. この小節の内容は [今野 13, 第 6 章], [Tu17, §28] が詳しい.

^{*37} $\Omega^0(M; E) = \Gamma(E)$ に注意.

^{*38} V が有限次元ベクトル空間ならば, $\Omega^k(M; V) \cong \Omega^k(M) \otimes_{\mathbb{R}} V$ が成り立つ.

定義 2.12: 主束の接続 (Ehresmann 接続)

$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ を主束とする. $\forall g \in G$ に対して, 命題 2.2 の右作用によって右作用移動を $R_g: P \rightarrow P, u \mapsto u \triangleleft g$ と定義する.

- 分布 $\{H_u \subset T_u P \mid u \in P\}$ が P 上の接続 (connection) であるとは, 以下の 2 条件が成り立つことを言う:

(C-1) $\forall u \in P$ に対して

$$T_u P = \text{Ker}(T_u \pi) \oplus H_u$$

(C-2) $\forall u \in P, \forall g \in G$ に対して

$$T_u(R_g)(H_u) = H_{R_g(u)}$$

が成り立つ (分布 $\{H_u\}$ は G -不変).

$\text{Ker } T_u(\pi), H_u$ をそれぞれ $T_u P$ の垂直部分空間, 水平部分空間と呼ぶ.

- \mathfrak{g} 値 1-形式 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ が接続形式であるとは, 次の 2 条件を充たすことをいう:

(CF-1) $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\omega(X^\#) = X$$

(CF-2) $\forall g \in G$ に対して

$$(R_g)^* \omega = \text{Ad}(g^{-1})(\omega)$$

ただし $\text{Ad}: G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$ は Lie 群 G の随伴表現である.

本題に入る前に, 微分幾何学の風習への注意をしておく. 境界あり/なし C^∞ 多様体 M とその部分多様体 $S \subset M$ を与える. このとき包含写像を $\iota: S \hookrightarrow M$ と書くと, $\forall p \in S \subset M$ に対して $T_p S$ を $T_p \iota(T_p S)$ と同一視する^{*39} ことで $T_p M$ の部分ベクトル空間と見做すのである [Lee12, p.116].

さて, 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ において $\forall u \in P$ を 1 つ固定する. $G_{\pi(u)} := \pi^{-1}(\{\pi(u)\})$ とおいたとき, $\forall X \in T_u G_{\pi(u)} \subset T_u P$ (i.e. 点 $u \in P$ におけるファイバー方向の接空間) の, $\pi: P \rightarrow M$ の微分による像 $T_u \pi(X) \in T_{\pi(u)} M$ は, 上述の注意より勝手な C^∞ 関数 $f \in C^\infty(M)$ に対して

$$T_u \pi(X)f = X(f \circ \pi|_{G_{\pi(u)}})$$

と作用する. 然るに C^∞ 写像 $f \circ \pi|_{G_{\pi(u)}}$ は常に値 $f(\pi(u))$ を返す定数写像なので, $T_u \pi(X)f = 0$ が言える^{*40}. i.e. $X \in \text{Ker}(T_u \pi)$ であり,

$$T_u G_{\pi(u)} \subset \text{Ker}(T_u \pi)$$

が言えた. 一方, $T_u \pi: T_u P \rightarrow T_{\pi(u)} M$ は明らかに全射なので $\dim \text{Im}(T_u \pi) = \dim T_{\pi(u)} M$ であり, 故に

^{*39} つまり $\forall v \in T_p S$ は $\forall f \in C^\infty(S)$ に $v(f)$ として作用するが, $v \in T_p S \subset T_p M$ と見做す時は $\forall f \in C^\infty(M)$ に, $T_p \iota(v)f = v(f \circ \iota) = v(f|_S)$ として作用する.

^{*40} 定数関数に接ベクトルを作用させると 0 になる: Leibniz 則より, 定数関数 $1: M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto 1$ に対して $v(1) = v(1 \cdot 1) = v(1) + v(1) \implies v(1) = 0$. v の線型性から一般の定数関数に対しても 0 になることが言える.

ファイバー束の局所自明性と階数-退化次元の定理から

$$\dim \operatorname{Ker}(T_u \pi) = \dim T_u P - \dim T_{\pi(u)} M = \dim T_u G_{\pi(u)} = \dim G \quad (2.4.11)$$

が言える。結局

$$T_u G_{\pi(u)} = \operatorname{Ker}(T_u \pi)$$

だと分かった。さらに次の非常に重要な補題がある。この補題のために基本ベクトル場を導入したと言っても過言ではない：

補題 2.2:

$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ を主束とする。命題 2.2 で与えた Lie 群 G の全空間 P への右作用 $\blacktriangleleft: P \times G \longrightarrow P$ の無限小生成子 $\blacktriangleleft^\#: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(P)$, $X \longmapsto X^\#$ について,

$$\forall u \in P, \quad \operatorname{Ker}(T_u \pi) = \{ X_u^\# \in T_u P \mid X \in \mathfrak{g} \}$$

が成り立つ。

証明 $\forall u \in P$ を 1 つ固定する。

$$\operatorname{Ker}(T_u \pi) \supset \{ X_u^\# \in T_u P \mid X \in \mathfrak{g} \}$$

$\forall X \in \mathfrak{g}$ をとる。このとき (2.4.10) より $X_u^\# = T_{1_G}(R^{(u)})(X)$ だが, $\pi \circ R^{(u)}$ は定数写像なので

$$\begin{aligned} T_u \pi(X_u^\#) &= T_u \pi \circ T_{1_G}(R^{(u)})(X) \\ &= T_{1_G}(\pi \circ R^{(u)})(X) \\ &= 0 \end{aligned}$$

が分かる。i.e. $X_u^\# \in \operatorname{Ker}(T_u \pi)$ である。

$$\operatorname{Ker}(T_u \pi) \subset \{ X_u^\# \in T_u P \mid X \in \mathfrak{g} \}$$

まず, \mathbb{R} -線型写像

$$T_{1_G}(R^{(u)}): \mathfrak{g} \longrightarrow \operatorname{Ker}(T_u \pi)$$

がベクトル空間の同型写像であることを示す。系 2.3 から $\operatorname{Ker} T_{1_G}(R^{(u)}) = \operatorname{Lie}(\operatorname{Stab}(u))$ だが, 命題 2.2 より右作用 \blacktriangleleft は自由なので $\operatorname{Stab}(u) = \{1_G\}$ である。従って $\operatorname{Ker} T_{1_G}(R^{(u)}) = \{0\}$ であり, $T_{1_G}(R^{(u)})$ は単射。(2.4.11) より $\dim \mathfrak{g} = \dim G = \dim \operatorname{Ker}(T_u \pi)$ なので $T_{1_G}(R^{(u)})$ はベクトル空間の同型写像である。

以上より, $\forall v \in \operatorname{Ker}(T_u \pi)$ に対して $(T_{1_G}(R^{(u)}))^{-1}(v) \in \mathfrak{g}$ であり, (2.4.10) から

$$v = T_{1_G}(R^{(u)})\left((T_{1_G}(R^{(u)}))^{-1}(v)\right) = \left((T_{1_G}(R^{(u)}))^{-1}(v)\right)_u^\#$$

が言えた。

■

接続の定義は幾何学的イメージがわかりやすいが、計算は絶望的である。幸いにして主束の接続を与えることと、全空間上の**接続形式**を与えることは同値なのでなんとかなる：

定理 2.4: 接続と接続形式の関係

$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ を**主束**とする。

(1) $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ が**接続形式**ならば、分布

$$\{ \text{Ker } \omega_u \subset T_u P \mid u \in P \}$$

は P 上の**接続**である。

(2) (1) は P 上の接続形式全体の集合から P 上の接続全体の集合への 1 対 1 対応を与える。

証明 (1) $\forall u \in P$ を 1 つ固定する。命題 2.2 で与えた Lie 群 G の全空間 P への**右作用** $\triangleleft: P \times G \rightarrow P$ の**無限小生成子** $\triangleleft^\#: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(P)$, $X \mapsto X^\#$ を考える。

(C-1)

接続形式の定義から $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して $\omega(X^\#) = X$ が成り立つ。i.e. $\omega_u: T_u P \rightarrow \mathfrak{g}$ は全射であり、 \mathbb{R} -線型写像の系列^{*41}

$$0 \longrightarrow \text{Ker } \omega_u \xrightarrow{i} T_u P \xrightarrow{\omega_u} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

は短完全列になる。さらにこれは補題 2.2 の証明で与えた線型写像 $T_{1G}(R^{(u)}): \mathfrak{g} \rightarrow \text{Ker}(T_u \pi) \subset T_u P$ によって分裂するので

$$T_u \cong \mathfrak{g} \oplus \text{Ker } \omega_u \cong \text{Ker}(T_u \pi) \oplus \text{Ker } \omega_u$$

がわかる。

(C-2)

$\forall v \in \text{Ker } \omega_u$ をとる。このとき **(CF-2)** より $\forall g \in G$ に対して

$$\omega_{u \triangleleft g}(T_u(R_g)(v)) = ((R_g)^* \omega)_u(v) = \text{Ad}(g^{-1})(\omega_u(v)) = 0$$

が従い、 $T_u(R_g)(\text{Ker } \omega_u) \subset \text{Ker } \omega_{u \triangleleft g}$ が言えた。両辺の次元が等しいので $T_u(R_g)(\text{Ker } \omega_u) = \text{Ker } \omega_{u \triangleleft g}$ が言えた。

(2)

(単射性)

接続形式 $\omega, \eta \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ に対して $\{ \text{Ker } \omega_u \mid u \in P \} = \{ \text{Ker } \eta_u \mid u \in P \}$ が成り立つとする。このとき $\forall u \in P$ に対して $\text{Ker } \omega_u = \text{Ker } \eta_u$ が成り立つ。補題 2.2 および (1) から $T_u P = \text{Ker}(T_u \pi) \oplus \text{Ker } \omega_u = \{ X_u^\# \mid X \in \mathfrak{g} \} \oplus \text{Ker } \omega_u$ の直和分解があり、 $\forall v \in T_u P$ に対して $V \in \mathfrak{g}$, $v^H \in \text{Ker } \omega_u = \text{Ker } \eta_u$ が一意的に存在して $v = V_u^\# + v^H$ と書ける。よって **(CF-1)** から

$$\omega_u(v) = \omega_u(V_u^\#) = V = \eta_u(V_u^\#) = \eta_u(v)$$

が分かった。i.e. $\omega_u = \eta_u$ である。 u は任意だったので $\omega = \eta$ が言えた。

^{*41} i は包含準同型なので $\text{Ker } \omega_u = \text{Im } i$. ω_u が全射なので $\text{Im } \omega_u = \mathfrak{g} = \text{Ker } 0$.

(全射性)

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ の接続 $\{H_u \subset T_u P \mid u \in P\}$ を与える. $\forall u \in P$ に対して直和分解 $T_u P = \text{Ker}(T_u \pi) \oplus H_u$ の垂直, 水平部分空間成分への射影をそれぞれ

$$\begin{aligned} i_1: T_u P &\longrightarrow \text{Ker}(T_u \pi), v^V + v^H \longmapsto v^V \\ i_2: T_u P &\longrightarrow H_u, v^V + v^H \longmapsto v^H \end{aligned}$$

と書き, $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ を, $\forall u \in P$ に対して補題 2.2 の証明で与えた同型写像 $T_{1_G}(R^{(u)}): \mathfrak{g} \longrightarrow \text{Ker}(T_u \pi)$ を用いて

$$\omega_u := (T_{1_G}(R^{(u)}))^{-1} \circ i_1: T_u P \xrightarrow{i_1} \text{Ker}(T_u \pi) \xrightarrow{(T_{1_G}(R^{(u)}))^{-1}} \mathfrak{g}$$

と定義する. この ω が (CF-1), (CF-2) を満たすことを示す:

(CF-1) $\forall u \in P$ を 1 つ固定する. $\forall X \in \mathfrak{g}$ をとる. 補題 2.2 より $X_u^\# \in \text{Ker}(T_u \pi)$ だから, (2.4.10) より

$$\begin{aligned} \omega_u(X_u^\#) &= (T_{1_G}(R^{(u)}))^{-1} \circ i_1(X_u^\#) \\ &= (T_{1_G}(R^{(u)}))^{-1}(X_u^\#) \\ &= (T_{1_G}(R^{(u)}))^{-1}(T_{1_G}(R^{(u)})(X)) \\ &= X \end{aligned} \tag{2.4.12}$$

が言えた.

(CF-2)

$\forall u \in P$ を 1 つ固定する. $\forall g \in G$ をとる. 示すべきは $\forall v \in T_u P$ に対して

$$((R_g)^* \omega)_u(v) = \omega_{R_g(u)}(T_u(R_g)(v)) = \text{Ad}(g^{-1})(\omega_u(v))$$

が成り立つことである. 実際 $i_1(v) \in \text{Ker}(T_u \pi)$ に対しては, 補題 2.2 からある $V \in \mathfrak{g}$ が一意的に存在して $i_1(v) = V_u^\#$ と書けるので

$$\begin{aligned} \omega_{R_g(u)}(T_u(R_g)(i_1(v))) &= \omega_{u \blacktriangleleft g}(T_u(R_g)(V_u^\#)) \\ &= \omega_{u \blacktriangleleft g}(T_u(R_g) \circ T_{1_G}(R^{(u)})(V)) \quad \because (2.4.10) \\ &= \omega_{u \blacktriangleleft g}(T_{1_G}(R_g \circ R^{(u)})(V)) \end{aligned}$$

となるが, $\forall x \in G$ に対して

$$\begin{aligned} R_g \circ R^{(u)}(x) &= u \blacktriangleleft x \blacktriangleleft g = u \blacktriangleleft (xg) = u \blacktriangleleft (gg^{-1}xg) \\ &= (u \blacktriangleleft g) \blacktriangleleft (g^{-1}xg) = R^{(u \blacktriangleleft g)} \circ F_{g^{-1}}(x) \end{aligned}$$

が成り立つ^{*42}ことから

$$\omega_{u \blacktriangleleft g}(T_{1_G}(R_g \circ R^{(u)})(V)) = \omega_{u \blacktriangleleft g}(T_{F_{g^{-1}}(1_G)}(R^{(u \blacktriangleleft g)}) \circ T_{1_G}(F_{g^{-1}})(V))$$

^{*42} 記号は【例 2.4.5】を参照

$$= \omega_{u \blacktriangleleft g} (T_{1_G} (R^{(u \blacktriangleleft g)}) \circ \text{Ad}(g^{-1})(V)) \quad \because \text{Ad の定義}$$

$$= \omega_{u \blacktriangleleft g} \left((\text{Ad}(g^{-1})(V))_{u \blacktriangleleft g}^\# \right) \quad \because (2.4.10)$$

$$= (T_{1_G} (R^{(u \blacktriangleleft g)}))^{-1} \circ T_{1_G} (R^{(u \blacktriangleleft g)}) \circ \text{Ad}(g^{-1})(V) \quad \because (2.4.12)$$

$$\begin{aligned} &= \text{Ad}(g^{-1})(V) \\ &= \text{Ad}(g^{-1})\omega_u(V_u^\#) \quad \because (2.4.12) \end{aligned}$$

$$= \text{Ad}(g^{-1})\omega_u(i_1(v))$$

が言える. $i_2(v) \in H_u$ に関しては, (C-2) から $T_u(R_g)(i_2(v)) \in H_{u \blacktriangleleft g}$ なので

$$\begin{aligned} \omega_{R_g(u)}(T_u(R_g)(i_2(v))) &= (T_{1_G}(R^{(u \blacktriangleleft g)}))^{-1} \circ i_1(T_u(R_g)(i_2(v))) \\ &= 0 \\ &= \text{Ad}(g^{-1})(\omega_u(i_2(v))) \end{aligned}$$

が言える. $v = i_1(v) + i_2(v)$ なので証明が完了した. ■

2.4.4 同伴ベクトル束上の共変微分

定義 2.13: tensorial form

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$
- 有限次元 \mathbb{K} -ベクトル空間 V
- Lie 群 G の有限次元表現 $\rho: G \longrightarrow \text{GL}(V)$

を与える. $\forall g \in G$ に対して, 命題 2.2 の右作用によって右作用移動を $R_g: P \longrightarrow P, u \longmapsto u \blacktriangleleft g$ と定義する. 全空間 P 上の V -値 k 形式 $\phi \in \Omega^k(P; V)$ を与える.

- ϕ が水平 (horizontal) であるとは, $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して

$$i_{X^\#}(\phi) = 0$$

が成り立つことを言う^a.

- ϕ が ρ 型の右同変^b (right equivalent of type ρ) であるとは, $\forall g \in G$ に対して

$$(R_g)^*\phi = \rho(g^{-1})(\phi)$$

が成り立つことを言う.

- ϕ が ρ 型の tensorial k -form (tensorial form of type ρ) であるとは, ϕ が水平かつ ρ 型の右同変であることを言う.

^a $i_{X^\#}: \Omega^k(P; V) \longrightarrow \Omega^{k-1}(P; V)$ は微分形式の内部積 (interior product) である.

^b equivalent の訳語には**同変**があげられることが多い。何かしらの群作用を考えると意味があるようだ：http://pantodon.jp/index.rb?body=equivariant_topology

ρ 型の tensorial k -form 全体がなす \mathbb{K} -ベクトル空間を $\Omega_\rho^k(P; V)$ と書く。

補題 2.1 より, $\phi \in \Omega^k(P; V)$ が水平であることは任意の k -個の C^∞ ベクトル場 $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(P)$ に対して

!

$$\exists l \text{ s.t. } X_l \text{ が垂直} \implies \phi(X_1, \dots, X_k) = 0$$

が成り立つことと同値である。また, P 上の任意の 0-形式は引数を持たないので, 自動的に水平ということになる。

補題 2.3: 同伴ベクトル束のファイバーの構造

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$
- 有限次元 \mathbb{K} -ベクトル空間 V
- Lie 群 G の有限次元表現 $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$
- 主束 P の**同伴ベクトル束** $V \hookrightarrow P \times_\rho V \xrightarrow{q} M$

を与える。このとき, $\forall u \in P$ に対して \mathbb{K} -線型写像

$$f_u: V \rightarrow q^{-1}(\{\pi(u)\}), v \mapsto u \times_\rho v$$

はベクトル空間の同型写像である。

証明 $v, w \in V$ について $u \times_\rho v = u \times_\rho w$ とする。このとき \times_ρ の定義から, ある $g \in G$ が存在して $(u, w) = (u \triangleleft g, g^{-1} \triangleright v)$ とかける。右作用 \triangleleft は自由なので $u = u \triangleleft g \implies g = 1_G$ が言える。従って $w = 1_G^{-1} \triangleright v = v$ が言えた。i.e. f_u は単射である。

$\forall x \times_\rho w \in (P \times_\rho V)_{\pi(u)}$ を 1 つとる。このとき $x \in \pi^{-1}(\{\pi(u)\})$ でもあるので, ある $g \in G$ が存在して $x = u \triangleleft g$ と書ける。従って

$$x \times_\rho w = (u \triangleleft g) \times_\rho w = u \times_\rho g \triangleright w = f_u(g \triangleright w)$$

だとわかる。i.e. f_u は全射である。 ■

命題 2.3 を思い出すと, 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ の開被覆, 局所自明化, 変換関数をそれぞれ $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}, \{\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times G\}_{\alpha \in \Lambda}, \{t_{\alpha\beta}: M \rightarrow G\}_{\alpha, \beta \in \Lambda}$ とおき, P の**局所切断**の族

$$\{s_\alpha: U_\alpha \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha), x \mapsto \varphi_\alpha^{-1}(x, 1_G)\}_{\alpha \in \Lambda} \quad (2.4.13)$$

を与えてから, **同伴ベクトル束** $V \hookrightarrow P \times_\rho V \xrightarrow{q} M$ の局所自明化を

$$\{\psi_\alpha: q^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times V, s_\alpha(x) \times_\rho v \mapsto (x, v)\}_{\alpha \in \Lambda} \quad (2.4.14)$$

として定義するのだった。

命題 2.9: tensorial form と同伴ベクトル束上の微分形式の対応

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$
- 有限次元 \mathbb{K} -ベクトル空間 V
- Lie 群 G の有限次元表現 $\rho: G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$
- 主束 P の同伴ベクトル束 $V \hookrightarrow P \times_{\rho} V \xrightarrow{q} M$

を与える. $\forall \phi \in \Omega^k(M; P \times_{\rho} V)$ に対して $\phi^{\sharp} \in \Omega^k(P; V)$ を

$$\phi^{\sharp}: u \longmapsto f_u^{-1} \circ \pi^* \phi|_u$$

と定義する. また, $\forall \psi \in \Omega_{\rho}^k(P; V)$ に対して $\psi^{\flat} \in \Omega^k(M; P \times_{\rho} V)$ を, $\forall x \in M, \forall w_1, \dots, w_k \in T_x M$ に対して次のように定義する:

$$\psi^{\flat}|_x(w_1, \dots, w_k) := u \times_{\rho} \psi_u(v_1, \dots, v_k) \quad (2.4.15)$$

ただし $u \in \pi^{-1}(\{x\})$ および $v_i \in (T_u \pi)^{-1}(\{w_i\})$ は任意にとって良い.

- (1) $\phi^{\sharp} \in \Omega_{\rho}^k(P; V)$ である.
- (2) 写像

$$\sharp: \Omega^k(M; P \times_{\rho} V) \longrightarrow \Omega_{\rho}^k(P; V), \phi \longmapsto \phi^{\sharp}$$

はベクトル空間の同型写像であり, その逆写像は

$$\flat: \Omega_{\rho}^k(P; V) \longrightarrow \Omega^k(M; P \times_{\rho} V), \psi \longmapsto \psi^{\flat}$$

である.

- (3) $\forall s \in \Omega^k(M), \forall \eta \in \Omega^l(M; P \times_{\rho} V)$ に対して

$$\sharp(s \wedge \eta) = (\pi^* s) \wedge \sharp \eta$$

が成り立つ.

- (4) $\forall \phi \in \Omega^k(M; P \times_{\rho} V)$ に対して

$$\mathrm{proj}_2 \circ \psi_{\alpha} \circ \phi = s_{\alpha}^*(\phi^{\sharp}) \in \Omega^k(U_{\alpha}; V)$$

が成り立つ. ただし $\psi_{\alpha}: q^{-1}(U_{\alpha}) \longrightarrow U_{\alpha} \times V$ は (2.4.14) で定義された局所自明化, $s_{\alpha}: M \longrightarrow \pi^{-1}(U_{\alpha})$ は (2.4.13) で定義された局所切断とする.

証明 $\forall \phi \in \Omega^k(M; P \times_{\rho} V)$ を 1 つ固定する.

- (1) ϕ^{\sharp} が ρ 型の tensorial k -form であることを示す.

ϕ^{\sharp} が水平であること

$\forall u \in P$ を 1 つ固定すると, $\forall X \in \mathfrak{g}$ および $\forall v_2, \dots, v_k \in T_u P$ に対して

$$\begin{aligned} (i_{X^{\sharp}}(\phi^{\sharp}))_u(v_2, \dots, v_k) &= f_u^{-1} \circ (\pi^* \phi)_u(X_u^{\sharp}, v_2, \dots, v_k) \\ &= f_u^{-1} \left(\phi_u(T_u \pi(X_u^{\sharp}), T_u \pi(v_2), \dots, T_u \pi(v_k)) \right) \end{aligned}$$

$$= f_u^{-1}(\phi_u(0, T_u\pi(v_2), \dots, T_u\pi(v_k))) \quad \because \text{補題 2.2}$$

が成り立つが, ϕ_u は多重線型写像なので最右辺は 0 になる. よって $i_{X^\#}(\phi^\#) = 0$ が言えた.

$\phi^\#$ が ρ -型の右同変であること

$\forall u \in P$ を 1 つ固定し, $\forall v_1, v_2, \dots, v_k \in T_u P$ をとる. **右作用移動の定義**を思い出すと $\forall g \in G$ に対して $\pi \circ R_g = \pi$ が成り立つので

$$\begin{aligned} & ((R_g)^* \phi^\#)_u(v_1, \dots, v_k) \\ &= (\phi^\#)_{R_g(u)}(T_u(R_g)(v_1), \dots, T_u(R_g)(v_k)) \\ &= f_{u \triangleleft g}^{-1}(\phi_{\pi(u \triangleleft g)}(T_{u \triangleleft g} \pi \circ T_u(R_g)(v_1), \dots, T_{u \triangleleft g} \pi \circ T_u(R_g)(v_k))) \\ &= f_{u \triangleleft g}^{-1}(\phi_{\pi(u)}(T_u(\pi \circ R_g)(v_1), \dots, T_u(\pi \circ R_g)(v_k))) \\ &= f_{u \triangleleft g}^{-1}(\phi_{\pi(u)}(T_u\pi(v_1), \dots, T_u\pi(v_k))) \\ &= f_{u \triangleleft g}^{-1}((\pi^* \phi)_u(v_1, \dots, v_k)) \\ &= f_{u \triangleleft g}^{-1}(f_u \circ f_u^{-1} \circ (\pi^* \phi)_u(v_1, \dots, v_k)) \\ &= f_{u \triangleleft g}^{-1}(f_u(\phi_u^\#(v_1, \dots, v_k))) && \because \phi^\# \text{ の定義} \\ &= f_{u \triangleleft g}^{-1}(u \times_\rho \phi_u^\#(v_1, \dots, v_k)) && \because f_u \text{ の定義} \\ &= f_{u \triangleleft g}^{-1}((u \triangleleft g) \times_\rho \rho(g)^{-1}(\phi_u^\#(v_1, \dots, v_k))) && \because \times_\rho \text{ の定義} \\ &= \rho(g^{-1})(\phi_u^\#(v_1, \dots, v_k)) && \because f_u \text{ の定義} \end{aligned}$$

i.e. $(R_g)^* \phi^\# = \rho(g^{-1})(\phi^\#)$ が言えた.

(2) \mathbb{K} -線型写像 $\sharp: \Omega^k(M; P \times_\rho V) \longrightarrow \Omega_\rho^k(P; V)$ がベクトル空間の同型写像であることを示す.

\sharp の単射性

$\phi, \eta \in \Omega^k(M; P \times_\rho V)$ に対して $\phi^\# = \eta^\#$ が成り立つとする. このとき $\forall u \in P$ を 1 つ固定すると, f_u は全単射なので $(\pi^* \phi)_u = (\pi^* \eta)_u$ が言える. i.e. $\forall v_1, \dots, v_k \in T_u P$ に対して

$$0 = (\pi^*(\phi - \eta))_u(v_1, \dots, v_k) = (\phi_{\pi(u)} - \eta_{\pi(u)})(T_u\pi(v_1), \dots, T_u\pi(v_k))$$

が成り立つ. $T_u\pi: T_u P \longrightarrow T_{\pi(u)} M$ は全射なので $\phi - \eta = 0 \iff \phi = \eta$ が言えた.

\sharp の全射性

$\forall \psi \in \Omega_\rho^k(P; V)$ を 1 つ固定する. まず, $\psi^\flat \in \Omega^k(M; P \times_\rho V)$ が well-defined であることを示す. そのためには $\forall x \in M, \forall w_1, \dots, w_k \in T_x M$ を固定し, (2.4.15) の右辺が $u \in \pi^{-1}(\{x\})$ および $v_i \in (T_u\pi)^{-1}(\{w_i\})$ の取り方によらずに定まることを示せば良い.

ψ^\flat は well-defined

まず $u \in \pi^{-1}(\{x\})$ を 1 つ固定する. このとき $v_i, v'_i \in (T_u\pi)^{-1}(\{w_i\})$ に対して $v'_i - v_i \in \text{Ker}(T_u\pi)$ なので, $\psi \in \Omega_\rho^k(P; V)$ が**水平**であることおよび ψ_u の多重線型性から

$$\begin{aligned} \psi_u(v'_1, \dots, v'_k) &= \psi_u(v_1 + (v'_1 - v_1), \dots, v_k + (v'_k - v_k)) \\ &= \psi_u(v_1, \dots, v_k) + (\text{少なくとも 1 つの } i \text{ について引数が } v'_i - v_i) \\ &= \psi_u(v_1, \dots, v_k) \end{aligned}$$

が言える. i.e. ψ_u は v_i の取り方によらない.

次に、他の $u' \in \pi^{-1}(\{x\})$ をとる. このときある $h \in G$ が存在して $u' \triangleleft h = u$ となる. ^{*43}
 $T_{u \triangleleft h} \pi \circ T_u(R_h)(v_i) = T_u \pi(v_i) = w_i$ かつ ψ が v_i の取り方によらないこと, および ψ の右
同変性を使うと

$$\begin{aligned}\psi_{u'}(v_1, \dots, v_k) &= \psi_{u \triangleleft h}(T_u(R_h)(v_1), \dots, T_u(R_h)(v_k)) \\ &= ((R_h)^* \psi)_u(v_1, \dots, v_k) \\ &= \rho(h^{-1})(\psi_u(v_1, \dots, v_k))\end{aligned}$$

だとわかるので, \times_ρ の定義から

$$\begin{aligned}u' \times_\rho \psi_{u'}(v_1, \dots, v_k) &= u' \times_\rho \rho(h^{-1})(\psi_u(v_1, \dots, v_k)) \\ &= (u' \triangleleft h) \times_\rho \rho(h) \circ \rho(h^{-1})(\psi_u(v_1, \dots, v_k)) \\ &= u \times_\rho \psi_u(v_1, \dots, v_k)\end{aligned}$$

が言える. i.e. $\psi^b|_x$ は $u \in \pi^{-1}(\{x\})$ の取り方にもよらない.

f_u の定義および ϕ_x の well-definedness から,

$$\begin{aligned}f_u(\psi_u(v_1, \dots, v_k)) &= \psi^b|_{\pi(u)}(w_1, \dots, w_k) = \pi^*(\psi^b)|_u(v_1, \dots, v_k) \\ \iff \psi_u &= f_u^{-1} \circ \pi^*(\psi^b)|_u = (\psi^b)^\sharp|_u\end{aligned}$$

i.e. $\psi = (\psi^b)^\sharp$ が言えた.

(3) $\forall u \in P$ および $\forall v_1, \dots, v_{k+l} \in T_u P$ に対して

$$\begin{aligned}\sharp(s \wedge \eta)_u(v_1, \dots, v_{k+l}) &= f_u^{-1} \circ (\pi^*(s \wedge \eta))_u(v_1, \dots, v_{k+l}) \\ &= f_u^{-1} \left((\pi^* s \wedge \pi^* \eta)_u(v_1, \dots, v_{k+l}) \right) \\ &= f_u^{-1} \left(\frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \text{sgn } \sigma \underbrace{(\pi^* s)_u(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})}_{\in \mathbb{K}} \otimes (\pi^* \eta)_u(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \right) \\ &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \text{sgn } \sigma (\pi^* s)_u(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) f_u^{-1} \left((\pi^* \eta)_u(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \right) \\ &= ((\pi^* s) \wedge \sharp \eta)_u(v_1, \dots, v_{k+l})\end{aligned}$$

が成り立つ. ただし最後から 2 番目の等号では f_u^{-1} の \mathbb{K} -線型性を使った.

(4) $\forall x \in U_\alpha, \forall w_1, \dots, w_k \in T_x M$ に対して

$$\begin{aligned}(\text{proj}_2 \circ \psi_\alpha \circ \phi)_x(w_1, \dots, w_k) &= f_{s_\alpha(x)}^{-1}(\phi_x(w_1, \dots, w_k)) && \because f_{s_\alpha(x)} \text{ の定義} \\ &= f_{s_\alpha(x)}^{-1} \left(\phi_x(T_x(\pi \circ s_\alpha)(w_1), \dots, T_x(\pi \circ s_\alpha)(w_k)) \right) && \because \pi \circ s_\alpha = \text{id}_{U_\alpha} \\ &= f_{s_\alpha(x)}^{-1} \left(\phi_x(T_{s_\alpha(x)} \pi \circ T_x(s_\alpha)(w_1), \dots, T_{s_\alpha(x)} \pi \circ T_x(s_\alpha)(w_k)) \right) \\ &= f_{s_\alpha(x)}^{-1} \circ (\pi^* \phi)_{s_\alpha(x)}(T_x(s_\alpha)(w_1), \dots, T_x(s_\alpha)(w_k))\end{aligned}$$

^{*43} $x \in U_\alpha \subset M$ に対する P の局所自明化 φ_α について $g' := \text{proj}_2 \circ \varphi_\alpha(u')$, $g := \text{proj}_2 \circ \varphi_\alpha(u)$ とおけば, $h := g'^{-1}g \in G$ に対して $u' \triangleleft h = u$ となる.

$$\begin{aligned}
&= (\phi^\sharp)_{s_\alpha(x)}(T_x(s_\alpha)(w_1), \dots, T_x(s_\alpha)(w_k)) && \because \phi^\sharp \text{ の定義} \\
&= (s_\alpha^*(\phi^\sharp))_x(w_1, \dots, w_k)
\end{aligned}$$

が成り立つ.

■

定義 2.14: ベクトル束上の接続

$V \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ をベクトル束とする.

- ベクトル束 E 上の**接続** (connection) とは, \mathbb{K} -線型写像

$$\nabla^E: \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(M; E)$$

であって, $\forall f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$, $\forall s \in \Gamma(E) = \Omega^0(M; E)$ に対して Leibniz 則

$$\nabla^E(fs) = df \otimes s + f\nabla^E s$$

を満たすもののこと.

- $X \in \Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$ に対して定まる \mathbb{K} -線型写像

$$\begin{aligned}
\nabla_X^E: \Gamma(E) &\longrightarrow \Gamma(E), \\
s &\longmapsto (\nabla^E s)(X)
\end{aligned}$$

のことを X に沿った**共変微分** (covariant derivative along X) と呼ぶ.

- $\forall \omega \in \Omega^\bullet(M)$, $\forall s \in \Gamma(E)$ に対して

$$d^{\nabla^E}(\omega \otimes s) := d\omega \otimes s + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge \nabla^E s$$

と定義することで定まる写像

$$d^{\nabla^E}: \Omega^\bullet(M; E) \longrightarrow \Omega^{\bullet+1}(M; E)$$

のことを**共変外微分** (exterior covariant derivative) と呼ぶ.

【例 2.4.3】を思い出すと, 主束に与えられた**接続形式**が自然に同伴**ベクトル束上の接続**と結び付くような気がする. 実際それは正しい [今野 13, p.150, 命題 6.3.3]:

定理 2.5: 同伴ベクトル束上の接続

- 主束** $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$
- 接続形式** $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$
- 有限次元 \mathbb{K} -ベクトル空間 V と Lie 群 G の $\dim V$ 次元表現 $\rho: G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$
- 同伴ベクトル束** $V \hookrightarrow P \times_\rho V \xrightarrow{q} M$

を与える. $\rho_* := T_{1_G}\rho: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ を ρ の**微分表現**とする. このとき, 次が成り立つ:

(1)

$$(d + \rho_*(\omega) \wedge) \Omega_\rho^k(P; V) \subset \Omega_\rho^{k+1}(P; V)$$

(2) $E := P \times_\rho V$ とおく. 命題 2.9 で定めた同型写像 $\sharp: \Omega^k(M; E) \rightarrow \Omega_\rho^k(P; V)$ を用いて定義した写像

$$\nabla^E := \sharp^{-1} \circ (d + \rho_*(\omega)) \circ \sharp: \Gamma(E) \rightarrow \Omega^1(M; E)$$

はベクトル束 E 上の接続である.

(3) (2.4.14) によって定義された局所自明化 $\psi_\alpha: E|_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times V$ に対して

$$\text{proj}_2 \circ \psi_\alpha \circ \nabla^E = d + \rho_*(s_\alpha^* \omega)$$

とかける.

(4) (2) の接続について共変外微分 $d^{\nabla^E}: \Omega^k(M; E) \rightarrow \Omega^{k+1}(M; E)$ を考えると, 以下の図式が可換になる:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^k(M; E) & \xrightarrow{d^{\nabla^E}} & \Omega^{k+1}(M; E) \\ \sharp \downarrow & & \downarrow \sharp \\ \Omega_\rho^k(P; V) & \xrightarrow{d + \rho_*(\omega) \wedge} & \Omega_\rho^{k+1}(P; V) \end{array}$$

$\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$, $\tilde{s} \in \Omega^k(P; V)$ に対して $\rho_*(\omega) \wedge \tilde{s} \in \Omega^{k+1}(P; V)$ の意味するところは, 通常の \wedge とは微妙に異なることに注意. 正確には $\forall X_1, \dots, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(P)$ に対して

$$(\rho_*(\omega) \wedge \tilde{s})(X_1, \dots, X_{k+1}) := \frac{1}{1!k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+1}} \text{sgn } \sigma \underbrace{\rho_*(\omega(X_{\sigma(1)}))}_{\in \mathfrak{gl}(V)} \underbrace{(\tilde{s}(X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(k+1)}))}_{\in V}$$

として新しく定義したものである.

証明 (1) $\forall \tilde{s} \in \Omega_\rho^k(P; V)$ を 1 つ固定する.

$(d + \rho_*(\omega) \wedge) \tilde{s}$ が水平

$\forall X \in \mathfrak{g}$ を 1 つとる. 基本ベクトル場 $X^\# \in \Gamma(P)$ が生成するフローは $\theta: \mathbb{R} \times M \rightarrow M, (t, u) \mapsto R_{\exp(tX)}(u)$ だったので, Lie 微分の定義から

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X^\#} \tilde{s} &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (R_{\exp(tX)})^* \tilde{s} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \rho(\exp(tX)^{-1})(\tilde{s}) && \because \tilde{s} \text{ の右同変性} \\ &= \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \rho(\exp(-tX)) \right) \tilde{s} \\ &= -T_{1_G} \rho(X)(\tilde{s}) \\ &= -\rho_*(X)(\tilde{s}) \end{aligned}$$

がわかる．従って Lie 微分の公式 (Cartan magic formula) から

$$\begin{aligned}
i_{X\#}((d + \rho_*(\omega) \wedge) \tilde{s}) &= i_{X\#}(d\tilde{s}) + i_{X\#}(\rho_*(\omega)) \wedge \tilde{s} + (-1)^{\deg \omega} \rho_*(\omega) \wedge i_{X\#}(\tilde{s}) \\
&= \mathcal{L}_{X\#} \tilde{s} - d(i_{X\#}(\tilde{s})) + \rho_*(i_{X\#}(\omega)) \wedge \tilde{s} \\
&= -\rho_*(X)(\tilde{s}) + \rho_*(X)(\tilde{s}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

と言える．

$(d + \rho_*(\omega) \wedge) \tilde{s}$ が右同変

$\forall g \in G$ をとる． $\rho_*(\text{Ad}(g^{-1})(\omega)) = \rho(g^{-1}) \circ \rho_*(\omega) \circ \rho(g)$ なので^{*44}

$$\begin{aligned}
(R_g)^*((d + \rho_*(\omega) \wedge) \tilde{s}) &= (R_g)^*d\tilde{s} + (R_g)^*(\rho_*(\omega) \wedge \tilde{s}) \\
&= d((R_g)^*\tilde{s}) + \rho_*((R_g)^*\omega) \wedge (R_g)^*\tilde{s} \\
&= d(\rho(g^{-1})\tilde{s}) + \rho_*(\text{Ad}(g^{-1})(\omega)) \wedge \rho(g^{-1})\tilde{s} \\
&= \rho(g^{-1})((d + \rho_*(\omega) \wedge) \tilde{s})
\end{aligned}$$

と言える．

(2) $\forall f \in C^\infty(M)$, $\forall s \in \Gamma(E) = \Omega^0(M; E)$ に対して Leibniz 則が成り立つことを示す．外微分と引き戻しが可換であることに注意すると

$$\begin{aligned}
\nabla^E(fs) &= \sharp^{-1} \circ (d(\sharp(fs)) + \rho_*(\omega)(\sharp(fs))) \\
&= \sharp^{-1} \circ (d((\pi^*f) \sharp s) + \rho_*(\omega)((\pi^*f) \sharp s)) && \because \text{命題 2.9-(3)} \\
&= \sharp^{-1} \circ (d(\pi^*f) \otimes \sharp s + (\pi^*f) d(\sharp s) + (\pi^*f) \rho_*(\omega)(\sharp s)) \\
&= \sharp^{-1} \circ (\pi^*(df) \otimes \sharp s + (\pi^*f) (d + \rho_*(\omega))(\sharp s)) \\
&= \sharp^{-1} \circ (\sharp(df \otimes s) + (\pi^*f) \sharp(\nabla^E(s))) && \because \text{命題 2.9-(3)} \\
&= df \otimes s + f \nabla^E s && \because \text{命題 2.9-(3)}
\end{aligned}$$

が言えた．

^{*44} 【例 2.10】と大体同じ議論をすれば良い： $\forall X \in \mathfrak{g}$ をとる．このとき命題 2.6-(2) より C^∞ 曲線 $\gamma: t \mapsto \exp(tX)$ は X が生成する 1 パラメータ部分群なので，

$$\begin{aligned}
\rho_*(\text{Ad}(g^{-1})(X)) &= T_{1_G} \rho(\text{Ad}(g^{-1})(\dot{\gamma}(0))) \\
&= T_{1_G} \rho \circ T_{1_G}(F_{g^{-1}}) \circ T_0 \gamma \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \right) \\
&= T_0(\rho \circ F_{g^{-1}} \circ \gamma) \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \right) \\
&= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \rho(g^{-1} \exp(tX)g) \\
&= \rho(g^{-1}) \circ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\rho(\exp(tX))) \circ \rho(g) \\
&= \rho(g^{-1}) \circ \rho_*(X) \circ \rho(g)
\end{aligned}$$

ただし最後から 2 番目の等号では $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ が Lie 群の準同型であることを使った． ω は \mathfrak{g} に値を取るもので示された．

(3) $\forall s \in \Gamma(E)$ に対して, 命題 2.9-(4) より

$$\begin{aligned}
\text{proj}_2 \circ \psi_\alpha \circ (\nabla^E s) &= s_\alpha^*(\sharp(\nabla^E s)) \\
&= s_\alpha^*((d + \rho_*(\omega))(\sharp s)) \\
&= s_\alpha^*(d(\sharp s)) + s_\alpha^*(\rho_*(\omega)(\sharp s)) \\
&= d(s_\alpha^*(\sharp s)) + \rho_*(s_\alpha^*\omega)(s_\alpha^*(\sharp s)) \\
&= (d + \rho_*(s_\alpha^*\omega))s_\alpha^*(\sharp s) \\
&= (d + \rho_*(s_\alpha^*\omega))(\text{proj}_2 \circ \psi_\alpha(s))
\end{aligned}$$

が言える.

(4) $\forall s \in \Omega^k(M; E)$ をとる. 局所自明化 $\psi_\alpha: E|_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times V$ について, 命題 2.9-(4) より

$$\begin{aligned}
\text{proj}_2 \circ \psi_\alpha \circ (\sharp^{-1} \circ (d + \rho_*(\omega) \wedge) \circ \sharp(s)) &= s_\alpha^*((d + \rho_*(\omega) \wedge)(\sharp s)) \\
&= s_\alpha^*(d(\sharp s)) + s_\alpha^*(\rho_*(\omega) \wedge \sharp s) \\
&= d(s_\alpha^*(\sharp s)) + \rho_*(s_\alpha^*\omega) \wedge s_\alpha^*(\sharp s) \\
&= (d + \rho_*(s_\alpha^*\omega) \wedge)s_\alpha^*(\sharp s) \\
&= (d + \rho_*(s_\alpha^*\omega) \wedge)(\text{proj}_2 \circ \psi_\alpha(s))
\end{aligned}$$

が言える. また, $\forall s \in \Omega^k(M)$, $\forall t \in \Gamma(E)$ に対して

$$\begin{aligned}
&\text{proj}_2 \circ \psi_\alpha(ds \otimes t + (-1)^{\deg s} s \wedge \nabla^E t) \\
&= s_\alpha^*(\sharp(ds \otimes t)) + (-1)^{\deg s} s_\alpha^*(\sharp(s \wedge \nabla^E t)) \\
&= s_\alpha^*(\pi^*(ds) \otimes \sharp t) + (-1)^{\deg s} s_\alpha^*(\pi^*(s) \wedge \sharp(\nabla^E t)) \quad \because \text{命題 2.9-(3)} \\
&= d(s_\alpha^*(\pi^*s)) \otimes s_\alpha^*(\sharp t) + (-1)^{\deg s} s_\alpha^*(\pi^*s) \wedge s_\alpha^*(\sharp(\nabla^E t)) \\
&= d(s_\alpha^*(\pi^*s)) \otimes s_\alpha^*(\sharp t) + (-1)^{\deg s} s_\alpha^*(\pi^*s) \wedge d(s_\alpha^*(\sharp t)) + (-1)^{\deg s} s_\alpha^*(\pi^*s) \wedge \rho_*(s_\alpha^*\omega)(s_\alpha^*(\sharp t)) \\
&= d(s_\alpha^*(\pi^*s) \otimes s_\alpha^*(\sharp t)) + \rho_*(s_\alpha^*\omega) \wedge (s_\alpha^*(\pi^*s) \otimes s_\alpha^*(\sharp t)) \\
&= (d + \rho_*(s_\alpha^*\omega) \wedge)s_\alpha^*((\pi^*s) \otimes (\sharp t)) \\
&= (d + \rho_*(s_\alpha^*\omega) \wedge)s_\alpha^*(\sharp(s \otimes t)) \quad \because \text{命題 2.9-(3)} \\
&= (d + \rho_*(s_\alpha^*\omega) \wedge)(\text{proj}_2 \circ \psi_\alpha(s \otimes t))
\end{aligned}$$

であるが, 共変外微分の定義から最左辺は $\text{proj}_2 \circ \psi_\alpha \circ d^{\nabla^E}(s \otimes t)$ と等しい. よって

$$d^{\nabla^E}(s \otimes t) = \sharp^{-1} \circ (d + \rho_*(\omega) \wedge) \circ \sharp(s \otimes t)$$

が言えた. 共変外微分の定義から, d^{∇^E} が一般の $\Omega^k(M; E)$ の元に作用する場合についても示された. ■

命題 2.5-(3) がまさに我々の良く知るゲージ場になっていることを確認しよう.

まずは状況設定である. 主束

$$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$$

は

- 開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$
- 局所自明化 $\{\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G\}_{\alpha \in \Lambda}$
- 変換関数 $\{t_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G\}_{\alpha, \beta \in \Lambda}$

を持つとする. \underline{P} の局所切断 $\{s_\alpha: U_\alpha \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ を, (2.4.14) の通り $s_\alpha(x) := \varphi_\alpha^{-1}(x, 1_G)$ と定義する. このとき主束 P の同伴ベクトル束

$$V \hookrightarrow P \times_\rho V \xrightarrow{q} M$$

はその構成から

- 開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$
- 変換関数 $\{t_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G\}_{\alpha, \beta \in \Lambda}$

を持ち, 局所自明化 $\{\psi_\alpha: q^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times V\}_{\alpha \in \Lambda}$ は (2.4.14) の通りに $\psi_\alpha(s_\alpha(x) \times_\rho v) := (x, v)$ と構成された. なお, 命題 2.3 の証明の脚注で述べたようにこれは $\psi_\alpha(u \times_\rho v) := (\pi(u), \text{proj}_2 \circ \varphi_\alpha(u) \blacktriangleright v)$ と定義することと同値である. 以下では便宜上 $E := P \times_\rho V$ とおく.

さて, 主束 P 上の接続形式 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ を任意に 1 つ与えよう. このとき定理 2.5-(2) により, 同伴ベクトル束 E 上の接続 $\nabla^E: \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(M; E)$ が $\nabla^E := \sharp^{-1} \circ (\text{d} + \rho_*(\omega)) \circ \sharp$ として誘導される.

(2.4.8) が示すように, Lie 群 G で記述される内部対称性を持つ場 ϕ は E の切断 $\phi \in \Gamma(E)$ を局所自明化 ψ_α によって表示した $\phi_\alpha := \text{proj}_2 \circ \psi_\alpha \circ \phi: U_\alpha \longrightarrow V$ と同一視された. ここで, $\phi \in \Gamma(E) = \Omega^0(M; E)$ なので, ある M 上のベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$ に沿った共変微分 $\nabla_X^E: \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$, $\phi \mapsto \nabla^E \phi(X)$ を取ることができる. そして $\nabla_X^E \phi \in \Gamma(E)$ の局所自明化による表示 $(\nabla_X^E \phi)_\alpha := \text{proj}_2 \circ \psi_\alpha \circ \nabla_X^E \phi: U_\alpha \longrightarrow V$ もまた, $U_\alpha \cap U_\beta$ における ψ_α から ψ_β への局所自明化の取り替えに伴って (2.4.8) の変換を受ける:

$$\begin{aligned} \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}: (U_\alpha \cap U_\beta) \times V &\longrightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times V, \\ (x, (\nabla_X^E \phi)_\alpha(x)) &\longmapsto (x, (\nabla_X^E \phi)_\beta(x)) = (x, \rho(t_{\beta\alpha}(x))((\nabla_X^E \phi)_\alpha(x))) \end{aligned}$$

一方で, 定理 2.5-(3) から

$$(\nabla_X^E \phi)_\alpha = (\nabla^E \phi)_\alpha(X) = (\text{d} + \rho_*(s_\alpha^* \omega))(\phi_\alpha)(X)$$

なので, $\forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$ において

$$\begin{aligned} &(\nabla_X^E \phi)_\beta(x) \\ &= (\text{d} + \rho_*(s_\beta^* \omega))(\phi_\beta) \Big|_x (X_x) \\ &= \rho(t_{\beta\alpha}(x)) \circ (\text{d} + \rho_*(s_\alpha^* \omega))(\phi_\alpha) \Big|_x (X_x) \\ &= \rho(t_{\beta\alpha}(x)) \circ (\text{d} + \rho_*(s_\alpha^* \omega)) \circ \rho(t_{\beta\alpha}(x))^{-1} (\phi_\beta) \Big|_x (X_x) \\ &= \rho(t_{\beta\alpha}(x)) \circ (\text{d} + \rho_*(s_\alpha^* \omega)) \circ \rho(t_{\beta\alpha}(x))^{-1} (\phi_\beta) \Big|_x (X_x) \end{aligned}$$

だとわかる. i.e.

$$(\text{d} + \rho_*(s_\beta^* \omega))_x = \rho(t_{\beta\alpha}(x)) \circ (\text{d} + \rho_*(s_\alpha^* \omega))_x \circ \rho(t_{\beta\alpha}(x))^{-1}$$

となって (2.4.3) の変換則を再現する. また, V の基底を $e_1, \dots, e_{\dim V}$ として $\phi_\beta(x) = \phi_\beta^i(x)e_i$ と展開し, $\rho(t_{\beta\alpha}(x)^{-1}) \in \text{GL}(V)$ をこの基底に関して $[\rho(t_{\beta\alpha}(x)^{-1})]^i_j$ と行列表示ときに

$$\begin{aligned} d \circ \rho(t_{\beta\alpha}(x)^{-1})(\phi_\beta) \Big|_x &= d \left(\underbrace{[\rho(t_{\beta\alpha}(x)^{-1})]^i_j \phi_\beta^j(x)}_{\in \Omega^0(M) = C^\infty(M)} \right) e_i \\ &= \partial_\mu ([\rho(t_{\beta\alpha}(x)^{-1})]^i_j \phi_\beta^j(x) dx^\mu) e_i + [\rho(t_{\beta\alpha}(x)^{-1})]^i_j \partial_\mu \phi_\beta^j(x) dx^\mu e_i \\ &=: \left(d(\rho(t_{\beta\alpha}(x)^{-1})) + \rho(t_{\beta\alpha}(x)^{-1}) \circ d \right) (\phi_\beta) \Big|_x \end{aligned}$$

が成り立つと言う意味で

$$\rho_*(s_\beta^* \omega) \Big|_x = \rho(t_{\beta\alpha}(x)) \circ d(\rho(t_{\beta\alpha}(x)^{-1})) + \rho(t_{\beta\alpha}(x)) \circ \rho_*(s_\alpha \omega) \circ \rho(t_{\beta\alpha}(x)^{-1})$$

と書いてゲージ変換 (2.4.4) を再現する. つまり, **ゲージ場**とは, 接続形式 ω の局所切断による引き戻し $s_\alpha^* \omega \in \Omega^1(U_\alpha; \mathfrak{g})$ のことだったのである.

2.4.5 局所接続形式とゲージ場

これまでの議論で主束, およびその同伴ベクトル束の接続を大域的な表式を得た. 以降の小節では, 物理の文脈で登場する接続の局所表示 (それは**ゲージ場**と呼ばれる) および曲率とその局所表示 (それは**場の強さ**と呼ばれる) を, 主束およびその同伴ベクトル束の各々において, より直接的な形で定式化する. まず始めにゲージ場と局所ゲージ変換を**主束上の接続**の言葉で定式化しよう.

先に進む前に, Maurer-Cartan 形式についての注意しておく.

定義 2.15: Maurer-Cartan 形式

Lie 群 G の **Maurer-Cartan 形式**とは,

$$\theta_g := T_g(L_{g^{-1}}): T_g G \longrightarrow \mathfrak{g}$$

によって定義される G 上の \mathfrak{g} 値 1-形式 $\theta \in \Omega^1(G; \mathfrak{g})$ のことを言う.

特に G が $\text{GL}(V)$ の部分 Lie 群 (行列 Lie 群) である場合, Maurer-Cartan 形式 $\theta: TG \longrightarrow \mathfrak{g}$ はよく $g^{-1}dg$ と略記される. この解釈は次の通りである: まず $\forall g \in G$ と G 上の恒等写像 $\text{id}_G: G \longrightarrow G, g \longmapsto g$ を同一視する. このとき $dg: TG \longrightarrow TG$ は, $\forall g \in G$ に対して $T_g(\text{id}_G) = \text{id}_{T_g G}: T_g G \longrightarrow T_g G$ のことだと解釈する. すると, 【例 2.4.4】, 【例 2.4.6】の議論から行列 Lie 群の場合 $T_g(L_{g^{-1}}) = L_{g^{-1}}$ と見做して良いので, $\forall v \in T_g G$ に対して

$$\theta_g(v) = T_g(L_{g^{-1}})(v) = L_{g^{-1}} \circ \text{id}_{T_g G}(v) = g^{-1}dg(v)$$

と書けるのである.

さて, ここで任意の C^∞ 写像 $t: M \longrightarrow G$ をとる. このとき, G が $\text{GL}(V)$ の部分 Lie 群ならば, Maurer-Cartan 形式の t による引き戻しが $t^* \theta = t^{-1} dt \in \Omega^1(M; \mathfrak{g})$ と表記できることを確認しよう. $\forall g \in G$ を 1 つ固定し, $\forall v \in T_p M$ をとる. すると

$$(t^* \theta)_p(v) = \theta_{t(p)}(T_p t(v))$$

$$\begin{aligned}
&= T_{t(p)}(L_{t(p)^{-1}}) \circ T_p t(v) \\
&= T_p(L_{t(p)^{-1}} \circ t)(v) \\
&= T_p(L_{t(p)^{-1}} \circ t)(\dot{\gamma}(0)) \\
&= T_p(L_{t(p)^{-1}} \circ t) \circ T_0 \gamma \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \right) \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (L_{t(p)^{-1}} \circ t \circ \gamma(t)) \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} t(p)^{-1} t(\gamma(t)) \\
&= t(p)^{-1} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} t(\gamma(t)) \\
&= t(p)^{-1} T_p t(\dot{\gamma}(0)) \\
&= t(p)^{-1} dt|_p(v)
\end{aligned}$$

ただし γ は v が生成する積分曲線である.

ここで, いくつかの技術的な補題を述べよう.

補題 2.4: 積多様体の接空間

C^∞ 多様体 M_1, M_2 およびその任意の点 $p_1 \in M_1, p_2 \in M_2$ を与え, C^∞ 写像

$$\begin{aligned}
\text{proj}_1: M_1 \times M_2 &\longrightarrow M_1, (x_1, x_2) \longmapsto x_1, \\
\text{proj}_2: M_1 \times M_2 &\longrightarrow M_2, (x_1, x_2) \longmapsto x_2, \\
\text{inj}_1^{p_2}: M_1 &\longrightarrow M_1 \times M_2, x \longmapsto (x, p_2), \\
\text{inj}_2^{p_1}: M_2 &\longrightarrow M_1 \times M_2, x \longmapsto (p_1, x)
\end{aligned}$$

を考える. このとき, \mathbb{R} -線型写像

$$\begin{aligned}
\alpha: T_{(p_1, p_2)}(M_1 \times M_2) &\longrightarrow T_{p_1} M_1 \oplus T_{p_2} M_2, \\
v &\longmapsto (T_{(p_1, p_2)}(\text{proj}_1)(v), T_{(p_1, p_2)}(\text{proj}_2)(v))
\end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned}
\beta: T_{p_1} M_1 \oplus T_{p_2} M_2 &\longrightarrow T_{(p_1, p_2)}(M_1 \times M_2), \\
(v, w) &\longmapsto T_{p_1}(\text{inj}_1^{p_2})(v) + T_{p_2}(\text{inj}_2^{p_1})(w)
\end{aligned}$$

は互いに逆写像である. i.e. \mathbb{R} -ベクトル空間の同型

$$T_{(p_1, p_2)}(M_1 \times M_2) \cong T_{p_1} M_1 \oplus T_{p_2} M_2$$

が成り立つ.

証明 $\forall (v, w) \in T_{p_1} M_1 \oplus T_{p_2} M_2$ に対して

$$\begin{aligned}
&\alpha(\beta(v, w)) \\
&= (T_{p_1}(\text{proj}_1 \circ \text{inj}_1^{p_2})(v) + T_{p_2}(\text{proj}_1 \circ \text{inj}_2^{p_1})(w), T_{p_1}(\text{proj}_2 \circ \text{inj}_1^{p_2})(v) + T_{p_2}(\text{proj}_2 \circ \text{inj}_2^{p_1})(w)) \\
&= (T_{p_1}(\text{id}_{M_1})(v), T_{p_2}(\text{id}_{M_2})(w))
\end{aligned}$$

$$= (v, w)$$

が成り立つので α は全射である．さらに $\dim T_{(p_1, p_2)}(M_1 \times M_2) = \dim(T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2)$ なので，階数-退化次元の定理から α が同型写像であることがわかる． ■

補題 2.5: 積の微分の亜種

- C^∞ 多様体 M_1, M_2, N_1, N_2, P
- 任意の点 $p_i \in M_i$
- C^∞ 写像 $F_i: M_i \rightarrow N_i$
- C^∞ 写像 $\mu: N_1 \times N_2 \rightarrow P$

このとき，

$$T_{(p_1, p_2)}(\mu \circ (F_1 \times F_2)) = T_{(p_1, p_2)}(\mu \circ \text{inj}_1^{F_2(p_2)} \circ F_1 \circ \text{proj}_1) + T_{(p_1, p_2)}(\mu \circ \text{inj}_2^{F_1(p_1)} \circ F_2 \circ \text{proj}_2)$$

が成り立つ．

証明 $\forall (x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$ に対して

$$\begin{aligned} \text{proj}_i \circ (F_1 \times F_2)(x_1, x_2) &= \text{proj}_i(F_1(x_1), F_2(x_2)) \\ &= F_i(x_i) \\ &= F_i \circ \text{proj}_i(x_1, x_2) \end{aligned}$$

i.e. $\text{proj}_i \circ (F_1 \times F_2) = F_i \circ \text{proj}_i$ が成り立つことに注意すると，補題 2.4 より $\forall v \in T_{(p_1, p_2)}(M_1 \times M_2)$ に対して

$$\begin{aligned} &T_{(p_1, p_2)}(\mu \circ (F_1 \times F_2))(v) \\ &= T_{(F_1(p_1), F_2(p_2))}\mu \circ T_{(p_1, p_2)}(F_1 \times F_2)(v) \\ &= T_{(F_1(p_1), F_2(p_2))}\mu \circ \beta \circ \alpha \circ T_{(p_1, p_2)}(F_1 \times F_2)(v) \\ &= T_{(F_1(p_1), F_2(p_2))}\mu \circ \beta \left(T_{(p_1, p_2)}(\text{proj}_1 \circ (F_1 \times F_2))(v), T_{(p_1, p_2)}(\text{proj}_2 \circ (F_1 \times F_2))(v) \right) \\ &= T_{(F_1(p_1), F_2(p_2))}\mu \circ \beta \left(T_{(p_1, p_2)}(F_1 \circ \text{proj}_1)(v), T_{(p_1, p_2)}(F_2 \circ \text{proj}_2)(v) \right) \\ &= T_{(p_1, p_2)}(\mu \circ \text{inj}_1^{F_2(p_2)} \circ F_1 \circ \text{proj}_1)(v) + T_{(p_1, p_2)}(\mu \circ \text{inj}_2^{F_1(p_1)} \circ F_2 \circ \text{proj}_2)(v) \end{aligned}$$

がわかる． ■

補題 2.6: 局所切断の微分

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ と, その開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, 局所自明化 $\{\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G\}_{\alpha \in \Lambda}$, 変換関数 $\{t_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G\}_{\alpha, \beta \in \Lambda}$ を与える. **局所切断**の族 $\{s_\alpha: U_\alpha \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ を (2.4.13) で定義する. $\theta \in \Omega^1(G; \mathfrak{g})$ を **Maurer-Cartan 形式** とする.

このとき, $\forall \alpha, \beta \in \Lambda$ および $\forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$ に関して, $\forall v \in T_x M$ は^a

$$T_x s_\beta(v) = T_{s_\alpha(x)}(R_{t_{\alpha\beta}(x)}) \circ T_x s_\alpha(v) + ((t_{\alpha\beta}^* \theta)_x(v))^\# \Big|_{s_\beta(x)}$$

を満たす.

^a [中原 21, p.36, 補題 10.1] には誤植がある

証明 $\forall \alpha, \beta \in \Lambda$ を固定し, $\forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$ を取る. $\forall v \in T_x M$ を 1 つ固定する. **変換関数の定義** および P への右作用 \blacktriangleleft の定義から $s_\beta(x) = \varphi_\beta^{-1}(x, 1_G) = \varphi_\alpha^{-1}(x, t_{\alpha\beta}(x)) = s_\alpha(x) \blacktriangleleft t_{\alpha\beta}(x)$ が成り立つ. i.e. C^∞ 写像 $\Delta: M \longrightarrow M \times M$, $x \mapsto (x, x)$ を使って $s_\beta = \blacktriangleleft \circ (s_\alpha \times t_{\alpha\beta}) \circ \Delta$ と書けるので,

$$T_x s_\beta(v) = T_{(x, x)}(\blacktriangleleft \circ (s_\alpha \times t_{\alpha\beta})) \circ T_x \Delta(v)$$

となる. 最右辺に補題 2.5 を使うことで

$$\begin{aligned} T_x s_\beta(v) &= T_x(\blacktriangleleft \circ \text{inj}_1^{t_{\alpha\beta}(x)} \circ s_\alpha \circ \text{proj}_1 \circ \Delta)(v) + T_x(\blacktriangleleft \circ \text{inj}_2^{s_\alpha(x)} \circ t_{\alpha\beta} \circ \text{proj}_2 \circ \Delta)(v) \\ &= T_x(\blacktriangleleft \circ \text{inj}_1^{t_{\alpha\beta}(x)} \circ s_\alpha)(v) + T_x(\blacktriangleleft \circ \text{inj}_2^{s_\alpha(x)} \circ t_{\alpha\beta})(v) \\ &= T_x(R_{t_{\alpha\beta}(x)} \circ s_\alpha)(v) + T_x(R^{(s_\alpha(x))} \circ t_{\alpha\beta})(v) \\ &= T_{s_\alpha(x)}(R_{t_{\alpha\beta}(x)}) \circ T_x s_\alpha(v) + T_x(R^{(s_\alpha(x))} \circ t_{\alpha\beta})(v) \end{aligned}$$

を得る. 一方 (2.4.10) から

$$\begin{aligned} ((t_{\alpha\beta}^* \theta)_x(v))^\# \Big|_{s_\beta(x)} &= (\theta_{t_{\alpha\beta}(x)}(T_x t_{\alpha\beta} v))^\# \Big|_{s_\alpha(x) \blacktriangleleft t_{\alpha\beta}(x)} \\ &= T_{1_G}(R^{(s_\alpha(x) \blacktriangleleft t_{\alpha\beta}(x))}) \circ T_{t_{\alpha\beta}(x)}(L_{t_{\alpha\beta}(x)^{-1}}) \circ T_x t_{\alpha\beta}(v) \\ &= T_x(R^{(s_\alpha(x))} \circ L_{t_{\alpha\beta}(x)} \circ L_{t_{\alpha\beta}(x)^{-1}} \circ t_{\alpha\beta})(v) \\ &= T_x(R^{(s_\alpha(x))} \circ t_{\alpha\beta})(v) \end{aligned}$$

と計算できる. ■

[中原 21, 第 10 章-1] に倣って, 先ほど導入したゲージ場をより扱いやすい形にしよう.

定理 2.6: 貼り合わせによる接続形式の構成

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ と, その開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, 局所自明化 $\{\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times G\}_{\alpha \in \Lambda}$, 変換関数 $\{t_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G\}_{\alpha, \beta \in \Lambda}$ を与える. **局所切断**の族 $\{s_\alpha: U_\alpha \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ を (2.4.13) で定義する. $\theta \in \Omega^1(G; \mathfrak{g})$ を **Maurer-Cartan 形式** とする.

(1) \mathfrak{g} 値 1-形式の族 $\{A_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha; \mathfrak{g})\}_{\alpha \in \Lambda}$ が $\forall \alpha, \beta \in \Lambda$ について

$$A_\beta|_x = \text{Ad}(t_{\alpha\beta}(x)^{-1})(A_\alpha|_x) + (t_{\alpha\beta}^* \theta)_x, \quad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta \quad (2.4.16)$$

を満たすならば, $\forall \alpha \in \Lambda$ に対して $A_\alpha = s_\alpha^* \omega$ を満たす **接続形式** $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ が存在する.

(2) 任意の **接続形式** $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ に対して, \mathfrak{g} 値 1-形式の族 $\{A_\alpha := s_\alpha^* \omega \in \Omega^1(U_\alpha; \mathfrak{g})\}_{\alpha \in \Lambda}$ は $\forall \alpha, \beta \in \Lambda$ について

$$A_\beta|_x = \text{Ad}(t_{\alpha\beta}(x)^{-1})(A_\alpha|_x) + (t_{\alpha\beta}^* \theta)_x, \quad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$$

を満たす.

証明 (1) この証明では Lie 群の左移動, 右移動^{*45}, 積をそれぞれ

$$\begin{aligned} \lambda_g: G &\longrightarrow G, \quad x \longmapsto gx \\ \rho_g: G &\longrightarrow G, \quad x \longmapsto xg \\ \mu: G \times G &\longrightarrow G, \quad (x, y) \longmapsto xy \end{aligned}$$

と書くことにする. 条件 (2.4.16) を満たす \mathfrak{g} 値 1-形式の族 $\{A_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha; \mathfrak{g})\}_{\alpha \in \Lambda}$ を与える. $\forall \alpha \in \Lambda$ に対して

$$g_\alpha := \text{proj}_2 \circ \varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow G$$

とおく. このとき $\forall u \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ に対して $\varphi_\alpha(u) = (\pi(u), g_\alpha(u)) = s_\alpha(\pi(u)) \triangleleft g_\alpha(u)$ が成り立つ.

$\forall \alpha \in \Lambda$ に対して, P の座標近傍 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 上の \mathfrak{g} 値 1-形式 $\omega_\alpha \in \Omega^1(\pi^{-1}(U_\alpha); \mathfrak{g})$ を

$$\omega_\alpha|_u := \text{Ad}(g_\alpha(u)^{-1})((\pi^* A_\alpha)_u) + (g_\alpha^* \theta)_u \quad \text{w/} \quad \forall u \in \pi^{-1}(U_\alpha) \quad (2.4.17)$$

と定義する. $\forall x \in U_\alpha$ および $\forall v \in T_x M$ に対して

$$\begin{aligned} (s_\alpha^* \omega_\alpha)_x(v) &= \omega_\alpha|_{s_\alpha(x)}(T_x s_\alpha(v)) \\ &= \text{Ad}(g_\alpha(s_\alpha(x))^{-1})((\pi^* A_\alpha)_{s_\alpha(x)}(T_x s_\alpha(v))) + (g_\alpha^* \theta)_{s_\alpha(x)}(T_x s_\alpha(v)) \\ &= \text{Ad}(1_G) \left(A_\alpha|_x(T_{s_\alpha(x)} \pi \circ T_x s_\alpha(v)) \right) + \theta_{g_\alpha(s_\alpha(x))}(T_{s_\alpha(x)} g_\alpha \circ T_x s_\alpha(v)) \\ &= A_\alpha|_x(T_x(\pi \circ s_\alpha)(v)) + \theta_{1_G}(\overbrace{T_x(g_\alpha \circ s_\alpha)}(v)) \\ &= A_\alpha|_x(v) \end{aligned}$$

が成り立つので $s_\alpha^* \omega_\alpha = A_\alpha$ である. ただし, 最後の等号で $\pi \circ s_\alpha = \text{id}_{U_\alpha}$ であることと $g_\alpha \circ s_\alpha$ が常に 1_G を返す定数写像であることを使った.

ω_α が U_α 上で**接続形式の公理**を満たすこと

^{*45} 主束の全空間への右作用による右移動との混同を防ぐために R_g とは書かない.

(CF-1)

$\forall X \in \mathfrak{g}$ を 1 つとる. 補題 2.2 から, $\forall u \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ に対して $T_u \pi(X_u^\#) = 0$ である. 右作用 \blacktriangleleft の定義から $\forall g \in G$ に対して $L_{g_\alpha(u)^{-1}} \circ g_\alpha \circ R^{(u)}(g) = g_\alpha(u)^{-1} g_\alpha(u) g = g$ が成り立つ, i.e. $L_{g_\alpha(u)^{-1}} \circ g_\alpha \circ R^{(u)} = \text{id}_G$ であることから

$$\begin{aligned}\omega_\alpha(X^\#) &= \text{Ad}(g_\alpha(u)^{-1}) \left(A_\alpha|_{\pi(u)} (T_u \pi(X_u^\#)) \right) + \theta_{g_\alpha(u)} (T_u g_\alpha(X_u^\#)) \\ &= T_{g_\alpha(u)} (\lambda_{g_\alpha(u)^{-1}}) \circ T_u g_\alpha \circ T_{1_G} (R^{(u)})(X) \quad \because \quad (2.4.10) \\ &= T_{1_G} (\lambda_{g_\alpha(u)^{-1}} \circ g_\alpha \circ R^{(u)})(X) \\ &= X\end{aligned}$$

が言えた.

(CF-2)

$\forall u \in P$ を 1 つ固定する. $\forall v \in T_u P, \forall g \in G$ に対して

$$\begin{aligned}(R_g^* \omega_\alpha)_u(v) &= \omega_\alpha|_{R_g(u)} (T_u(R_g)(v)) \\ &= \text{Ad}(g_\alpha(u \blacktriangleleft g)^{-1}) \left(A_\alpha|_{\pi(u \blacktriangleleft g)} (T_u \pi \circ T_u(R_g)(v)) \right) + \theta_{g_\alpha(u \blacktriangleleft g)} (T_u \blacktriangleleft g g_\alpha \circ T_u(R_g)(v)) \\ &= \text{Ad}(g^{-1} g_\alpha(u)^{-1}) \left(A_\alpha|_{\pi(u)} (T_u(\pi \circ R_g)(v)) \right) + \theta_{g_\alpha(u)g} (T_u(g_\alpha \circ R_g)(v)) \\ &= \text{Ad}(g^{-1}) \circ \text{Ad}(g_\alpha(u)^{-1}) \left(A_\alpha|_{\pi(u)} (T_u \pi(v)) \right) + T_u(\lambda_{g^{-1} g_\alpha(u)^{-1}} \circ g_\alpha \circ R_g)(v) \\ &= \text{Ad}(g^{-1}) \left(\text{Ad}(g_\alpha(u)^{-1}) ((\pi^* A_\alpha)_u(v)) \right) + T_u(\lambda_{g^{-1} g_\alpha(u)^{-1}} \circ g_\alpha \circ R_g)(v)\end{aligned}$$

一方, $\rho_g \circ g_\alpha(u) = g_\alpha(u)g = g_\alpha(u \blacktriangleleft g) = g_\alpha \circ R_g(u)$ に注意すると

$$\begin{aligned}\text{Ad}(g^{-1})((g_\alpha^* \theta)_u(v)) &= T_{1_G}(F_{g^{-1}}) \circ \theta_{g_\alpha(u)} (T_u g_\alpha(v)) \\ &= T_{1_G}(\lambda_{g^{-1}} \circ \rho_g) \circ T_{g_\alpha(u)} (\lambda_{g_\alpha(u)^{-1}}) \circ T_u g_\alpha(v) \\ &= T_u(\lambda_{g^{-1}} \circ \rho_g \circ \lambda_{g_\alpha(u)^{-1}} \circ g_\alpha)(v) \\ &= T_u(\lambda_{g^{-1}} \circ \lambda_{g_\alpha(u)^{-1}} \circ g_\alpha \circ R_g)(v) \\ &= T_u(\lambda_{g^{-1} g_\alpha(u)^{-1}} \circ g_\alpha \circ R_g)(v)\end{aligned}$$

がわかり,

$$R_g^* \omega_\alpha = \text{Ad}(g^{-1})(\omega_\alpha)$$

が示された.

$$\omega_\alpha|_{\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)} = \omega_\beta|_{\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)}$$

$\forall u \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ および $\forall v \in T_u P$ を 1 つ固定する. 変換関数の定義から $g_\beta(u) = t_{\beta\alpha}(\pi(u))g_\alpha(u)$ が成り立つ. i.e. C^∞ 写像 $\Delta: P \longrightarrow P \times P$ を用いて $g_\beta = \mu \circ ((t_{\beta\alpha} \circ \pi) \times g_\alpha) \circ \Delta$ と書ける. よって補題 2.5 を使って

$$\begin{aligned}T_u g_\beta(v) &= T_u (\mu \circ \text{inj}_1^{g_\alpha(u)} \circ t_{\beta\alpha} \circ \pi \circ \text{proj}_1 \circ \Delta)(v) \\ &\quad + T_u (\mu \circ \text{inj}_2^{t_{\beta\alpha}(u)} \circ g_\alpha \circ \text{proj}_2 \circ \Delta)(v) \\ &= T_u(\rho_{g_\alpha(u)} \circ t_{\beta\alpha} \circ \pi)(v) + T_u(\lambda_{t_{\beta\alpha}(\pi(u))} \circ g_\alpha)(v)\end{aligned}$$

であり, **Maurer-Cartan 形式の定義**から

$$\begin{aligned}
(g_\beta^* \theta)_u(v) &= T_{t_{\beta\alpha}(\pi(u))g_\alpha(u)}(\lambda_{g_\alpha(u)^{-1}t_{\beta\alpha}(\pi(u))^{-1}})(T_u g_\beta(v)) \\
&= T_u(\lambda_{g_\alpha(u)^{-1}} \circ \lambda_{t_{\beta\alpha}(\pi(u))^{-1}} \circ \rho_{g_\alpha(u)} \circ t_{\beta\alpha} \circ \pi)(v) \\
&\quad + T_{g_\alpha(u)}(\lambda_{g_\alpha(u)^{-1}})(T_u g_\alpha(v)) \\
&= \text{Ad}(g_\alpha(u)^{-1})(T_u(\lambda_{t_{\beta\alpha}(\pi(u))^{-1}})(v)) + (g_\alpha^* \theta)_u(v)
\end{aligned}$$

と計算できる. 従って, $\omega_\alpha \in \Omega^1(\pi^{-1}(U_\alpha); \mathfrak{g})$ の定義 (2.4.17) および条件 (2.4.16) より

$$\begin{aligned}
\omega_\beta|_u(v) &= \text{Ad}(g_\beta(u)^{-1})((\pi^* A_\beta)_u(v)) + (g_\beta^* \theta)_u(v) \\
&= \text{Ad}(g_\alpha(u)^{-1}t_{\beta\alpha}(\pi(u))^{-1})\left(\text{Ad}(t_{\alpha\beta}(\pi(u))^{-1})((\pi^* A_\alpha)_u(v)) + ((t_{\alpha\beta} \circ \pi)^* \theta)_u(v)\right) \\
&\quad + (g_\beta^* \theta)_u(v) \\
&= \text{Ad}(g_\alpha(u)^{-1})((\pi^* A_\alpha)_u(v)) \\
&\quad + \text{Ad}(g_\alpha(u)^{-1})\left(\text{Ad}(t_{\alpha\beta}(\pi(u)))\left(T_{t_{\alpha\beta}(\pi(u))}(\lambda_{t_{\alpha\beta}(\pi(u))^{-1}} \circ T_u(t_{\alpha\beta} \circ \pi)(v))\right)\right) \\
&\quad + \text{Ad}(g_\alpha(u)^{-1})\left(T_u(\lambda_{t_{\beta\alpha}(\pi(u))^{-1}})(v)\right) + (g_\alpha^* \theta)_u(v) \\
&= \omega_\alpha|_u(v) \\
&\quad + \text{Ad}(g_\alpha(u)^{-1})\left(T_u(\rho_{t_{\beta\alpha}(\pi(u))} \circ t_{\alpha\beta} \circ \pi)(v) + T_u(\lambda_{t_{\alpha\beta}(\pi(u))} \circ t_{\beta\alpha} \circ \pi)(v)\right) \\
&= \omega_\alpha|_u(v) \\
&\quad + \text{Ad}(g_\alpha(u)^{-1})\left(T_u(\mu \circ ((t_{\alpha\beta} \circ \pi) \times (t_{\beta\alpha} \circ \pi)) \circ \Delta)(v)\right) \\
&= \omega_\alpha|_u(v)
\end{aligned}$$

が言えた. ただし, 最後から3つ目の等号では**コサイクル条件**から従う $t_{\alpha\beta}(\pi(u))^{-1} = t_{\beta\alpha}(\pi(u))$ を使い, 最後から2番目の等号では補題 2.5 を使い, 最後の等号では $\mu \circ ((t_{\alpha\beta} \circ \pi) \times (t_{\beta\alpha} \circ \pi)) \circ \Delta: P \rightarrow G$ が常に 1_G を返す定数写像であることを使った.

ところで, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ は M の開被覆であったから $P = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \pi^{-1}(U_\alpha)$ が成り立つ. よって $\forall u \in P$ に対してある $\alpha \in \Lambda$ が存在して $u \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ を満たす. 従って大域的な \mathfrak{g} 値 1-形式 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ を

$$\omega_u := \omega_\alpha|_u$$

と定義すると, 上で示したことからこれは well-defined な**接続形式**になり, かつ $\forall \alpha \in \Lambda$ に対して $s_\alpha^* \omega = A_\alpha$ を満たす.

(2) $\forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$ を1つ固定する. このとき**接続形式の公理**および補題 2.6 から, $\forall v \in T_x M$ に対して

$$\begin{aligned}
s_\beta^* \omega|_x(v) &= \omega_{s_\beta(x)}(T_x s_\beta(v)) \\
&= \omega_{s_\alpha(x) \blacktriangleleft t_{\alpha\beta}(x)}\left(T_{s_\alpha(x)}(R_{t_{\alpha\beta}(x)})(T_x s_\alpha(v))\right) + \omega_{s_\beta(x)}\left(\left((t_{\alpha\beta}^* \theta)_x(v)\right)^\#|_{s_\beta(x)}\right) \\
&= \left((R_{t_{\alpha\beta}(x)})^* \omega\right)_{s_\alpha(x)}(T_x s_\alpha(v)) + (t_{\alpha\beta}^* \theta)_x(v) \\
&= \text{Ad}(t_{\alpha\beta}(x)^{-1})\left(\omega_{s_\alpha(x)}(T_x s_\alpha(v))\right) + (t_{\alpha\beta}^* \theta)_x(v) \\
&= \text{Ad}(t_{\alpha\beta}(x)^{-1})\left(s_\alpha^* \omega|_x(v)\right) + (t_{\alpha\beta}^* \theta)_x(v)
\end{aligned}$$

が成り立つ. ■

2.4.6 水平持ち上げ

定義 2.16: C^∞ 曲線の水平持ち上げ

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ およびその接続形式 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$
- M 上の C^∞ 曲線 $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$

を与える. このとき, $\forall u \in \pi^{-1}(\{\gamma(0)\})$ に対して以下を満たす P 上の C^∞ 曲線 $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow P$ が一意的存在し, γ の水平持ち上げ (horizontal lift) と呼ばれる:

$$(HC-1) \quad \pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$$

$$(HC-2) \quad \tilde{\gamma}(0) = u$$

$$(HC-3) \quad \forall t \in [0, 1] \text{ に対して}$$

$$\dot{\tilde{\gamma}}(t) \in \text{Ker } \omega_{\tilde{\gamma}(t)}$$

一意存在は本質的に常微分方程式の基本定理による:

補題 2.7: 水平持ち上げの公式

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ およびその接続形式 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$
- M 上の C^∞ 曲線 $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$
- $\forall u \in \pi^{-1}(\{\gamma(0)\})$

を与える. このとき, γ の水平持ち上げ $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow P$ が一意的存在して以下を満たす:

$$(1) \quad \forall t \in [0, 1] \text{ に対して}$$

$$\dot{\tilde{\gamma}}(t) = T_{s_\alpha(\gamma(t))} R_{g(t)} \circ T_{\gamma(t)} s_\alpha(\dot{\gamma}(t)) - \left(\text{Ad}(g(t)^{-1}) \left(s_\alpha^* \omega|_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) \right) \right)^\#_{\tilde{\gamma}(t)}$$

$$(2) \quad \forall t \in [0, 1] \text{ に対して}$$

$$\dot{g}(t) = -T_{1_G} \rho_{g(t)} \left(s_\alpha^* \omega|_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) \right)$$

ただし G 上の C^∞ 曲線 $g: [0, 1] \rightarrow G$ を

$$g := \text{proj}_2 \circ \varphi_\alpha \circ \tilde{\gamma}$$

で定義した.

証明 定理 2.6 と同様に

- 開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$
- 局所自明化 $\{\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times G\}_{\alpha \in \Lambda}$, 変換関数 $\{t_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G\}_{\alpha, \beta \in \Lambda}$ を与える.
- (2.4.13) で定義される局所切断の族 $\{s_\alpha: U_\alpha \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$

を与える. $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ はコンパクト集合なので連続写像 $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ による像 $\gamma([0, 1]) \subset M$ もまたコン

コンパクトである。よって $\gamma([0, 1])$ を有限個の点で区切ることににより、ある $\alpha \in \Lambda$ が存在して $\gamma([0, 1]) \subset U_\alpha$ が成り立つと仮定して良い。また、このとき $\tilde{\gamma}([0, 1]) \subset \pi^{-1}(U_\alpha)$ を充たす任意の C^∞ 曲線 $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow P$ に対して定義される

$$g := \text{proj}_2 \circ \varphi_\alpha \circ \tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow G$$

は G 上の C^∞ 曲線であり、**全空間 P への右作用の定義** から $\forall t \in [0, 1]$ に対して

$$\tilde{\gamma}(t) = \varphi_\alpha^{-1}(\pi(\tilde{\gamma}(t)), g(t)) = s_\alpha(\pi(\tilde{\gamma}(t))) \blacktriangleleft g(t)$$

が成り立つ。 C^∞ 写像 $\Delta: [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$, $t \mapsto (t, t)$ を使うと

$$\tilde{\gamma} = \blacktriangleleft \circ ((s_\alpha \circ \pi \circ \tilde{\gamma}) \times g) \circ \Delta \quad (2.4.18)$$

と書くこともできる。

ここで、 $\tilde{\gamma}$ を γ の水平持ち上げとする。すると条件 **(HC-1)** より (2.4.18) は $\tilde{\gamma} = \blacktriangleleft ((s_\alpha \circ \gamma) \times g) \circ \Delta$ となるから、補題 2.5 より

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\gamma}}(t) &= T_t \tilde{\gamma} \left(\frac{d}{ds} \Big|_{s=t} \right) \\ &= T_{(t,t)} \left(\blacktriangleleft \circ ((s_\alpha \circ \gamma) \times g) \right) \circ T_t \Delta \left(\frac{d}{ds} \Big|_{s=t} \right) \\ &= T_{(t,t)} \left(\blacktriangleleft \circ ((s_\alpha \circ \gamma) \times g) \right) \circ T_t \Delta \left(\frac{d}{ds} \Big|_{s=t} \right) \\ &= T_t (\blacktriangleleft \circ \text{inj}_1^{g(t)} \circ s_\alpha \circ \gamma) \left(\frac{d}{ds} \Big|_{s=t} \right) \\ &\quad + T_t (\blacktriangleleft \circ \text{inj}_2^{s_\alpha(\gamma(t))} \circ g) \left(\frac{d}{ds} \Big|_{s=t} \right) \\ &= T_{s_\alpha(\gamma(t))} R_{g(t)} \circ T_{\gamma(t)} s_\alpha (\dot{\gamma}(t)) \\ &\quad + T_t (R^{(s_\alpha(\gamma(t)))} \circ g) \left(\frac{d}{ds} \Big|_{s=t} \right) \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

が分かった。補題 2.6 の証明と同様の計算により、**Maurer-Cartan** 形式 $\theta \in \Omega^1(G; \mathfrak{g})$ を使った等式

$$T_t (R^{(s_\alpha(\gamma(t)))} \circ g) \left(\frac{d}{ds} \Big|_{s=t} \right) = \left((g^* \theta)_t \left(\frac{d}{ds} \Big|_{s=t} \right) \right)^\# \Big|_{\tilde{\gamma}(t)}$$

が成り立つ。よって条件 **(HC-2)** より

$$\begin{aligned} 0 &= \omega_{\tilde{\gamma}(t)} (\dot{\tilde{\gamma}}(t)) \\ &= (R_{g(t)}^* \omega)_{s_\alpha(\gamma(t))} (T_{\gamma(t)} s_\alpha (\dot{\gamma}(t))) + (g^* \theta)_t \left(\frac{d}{ds} \Big|_{s=t} \right) \\ &= \text{Ad}(-g(t)) (s_\alpha^* \omega|_{\gamma(t)} (\dot{\gamma}(t))) + \theta_{g(t)} (\dot{g}(t)) \end{aligned} \quad (2.4.20)$$

が従い、

$$(g^* \theta)_t \left(\frac{d}{ds} \Big|_{s=t} \right) = -\text{Ad}(g(t)^{-1}) (s_\alpha^* \omega|_{\gamma(t)} (\dot{\gamma}(t))) \quad (2.4.21)$$

が分かった。

(1) (2.4.19), (2.4.21) より

$$\dot{\tilde{\gamma}}(t) = T_{s_\alpha(\gamma(t))} R_{g(t)} \circ T_{\gamma(t)} s_\alpha(\dot{\gamma}(t)) + \left(-\text{Ad}(g(t)^{-1}) \left(s_\alpha^* \omega|_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) \right) \right)^\#_{\tilde{\gamma}(t)}$$

(2) Ad の定義と Maurer-Cartan 形式の定義より (2.4.20) は

$$\begin{aligned} 0 &= T_{1_G}(\lambda_{g^{-1}(t)} \circ \rho_{g(t)}) \left(s_\alpha^* \omega|_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) \right) + T_{g(t)}(\lambda_{g(t)^{-1}})(\dot{g}(t)) \\ &= T_{1_G}(\lambda_{g^{-1}(t)}) \left(T_{1_G} \rho_{g(t)} \left(s_\alpha^* \omega|_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) \right) + \dot{g}(t) \right) \end{aligned}$$

とも書けるが, Lie 群の左移動が微分同相写像であることから $T_{1_G}(\lambda_{g^{-1}(t)})$ はベクトル空間の同型写像であり,

$$\dot{g}(t) = -T_{1_G} \rho_{g(t)} \left(s_\alpha^* \omega|_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) \right)$$

が分かった. これは g に関する常微分方程式であり, 与えられた初期条件 $g(0) = \text{proj}_2(\varphi_\alpha(u))$ に関して一意な解を持つ.

(2) の証明より $\tilde{\gamma}$ の一意存在も言えた. ■

命題 2.10:

γ の2つの水平持ち上げ $\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}'$ が, ある $g \in G$ について $\tilde{\gamma}'(0) = \tilde{\gamma}(0) \triangleleft g$ を満たすとする. このとき, $\forall t \in [0, 1]$ において $\tilde{\gamma}'(t) = \tilde{\gamma}(t) \triangleleft g$ が成り立つ.

証明 C^∞ 曲線

$$\tilde{\gamma} \triangleleft g: [0, 1] \longrightarrow P, t \longmapsto \tilde{\gamma}(t) \triangleleft g$$

は, $\pi \circ \tilde{\gamma} \triangleleft g = \gamma$, $\tilde{\gamma} \triangleleft g(0) = \tilde{\gamma}(0) \triangleleft g$ を満たし,

$$\begin{aligned} \omega_{\tilde{\gamma} \triangleleft g}(\dot{\tilde{\gamma}} \triangleleft g(t)) &= (R_g^* \omega)_{\tilde{\gamma}(t)}(\dot{\tilde{\gamma}}(t)) \\ &= \text{Ad}(g^{-1}) \left(\omega_{\tilde{\gamma}(t)}(\dot{\tilde{\gamma}}(t)) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

も満たすので, 初期条件 $\tilde{\gamma} \triangleleft g(0) = \tilde{\gamma}(0) \triangleleft g = \tilde{\gamma}'(0)$ を満たす水平持ち上げである. 故に水平持ち上げの一意性から

$$\tilde{\gamma}' = \tilde{\gamma} \triangleleft g$$

が言える. ■

C^∞ 曲線のみならず, 底空間上の C^∞ ベクトル場もまた全空間に持ち上がる.

定義 2.17: C^∞ ベクトル場の水平持ち上げ

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ およびその接続形式 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$
- M 上の C^∞ ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$

このとき, $\forall u \in P$ に対して以下を満たす P 上の C^∞ ベクトル場 $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(P)$ が一意的に存在し, X の水平持ち上げ (horizontal lift) と呼ばれる:

(HV-1) $T_u \pi(\tilde{X}_u) = X_{\pi(u)}$

(HV-2) $\tilde{X}_u \in \text{Ker } \omega_u$

定理 2.4 より $\forall u \in P$ に対して

$$T_u \pi|_{\text{Ker } \omega_u} : \text{Ker } \omega_u \longrightarrow T_{\pi(u)} M$$

はベクトル空間の同型写像であるから, 与えられた $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して接束 TP の (C^∞ とは限らない) 切断 \tilde{X} を

$$\tilde{X}_u := (T_u \pi|_{\text{Ker } \omega_u})^{-1}(X_{\pi(u)})$$

と定義すればこれは (HV-1), (HV-2) を満たす. 逆に性質 (HV-1), (HV-2) を満たす接束 TP の (C^∞ とは限らない) 任意の切断 \tilde{Y} に対して,

$$\tilde{Y}_u = (T_u \pi|_{\text{Ker } \omega_u})^{-1}(X_{\pi(u)}) = \tilde{X}_u$$

が成り立つので, 一意存在がわかった. あとはこのようにして構成した \tilde{X} が C^∞ ベクトル場であることを確かめれば良い. そのためには, 命題 B.4 より $\forall f \in C^\infty(P)$ に対して $\tilde{X}f$ が C^∞ 関数になっていることを示せば良い.

命題 2.11: 水平持ち上げの C^∞ 性

\tilde{X} は C^∞ ベクトル場である.

証明 $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ および $\forall u \in P$ を 1 つ固定する. $X_{\pi(u)}$ は何らかの C^∞ 曲線 $\gamma: [0, 1] \longrightarrow M$ の $t = 0$ における速度ベクトルである. γ の水平持ち上げ $\tilde{\gamma}$ であって $\tilde{\gamma}(0) = u$ を満たすものをとる. このとき, 一般に $\forall g \in G$ に対して $\pi \circ R_g = \pi$ が成り立つことに注意すると補題 2.3, 2.7 から

$$\begin{aligned} T_u \pi(\dot{\tilde{\gamma}}(0)) &= T_u(\pi \circ R_{g(0)}) \circ T_{\gamma(0)} s_\alpha(\dot{\gamma}(0)) - T_u \pi \left(\text{Ad}(g(0)^{-1}) \left(s_\alpha^* \omega|_{\gamma(0)}(\dot{\gamma}(0)) \right) \right)_{\tilde{\gamma}(t)}^\# \\ &= T_u(\pi \circ s_\alpha)(X_{\pi(u)}) \\ &= T_u(\text{id}_{U_\alpha})(X_{\pi(u)}) \\ &= X \end{aligned}$$

が従い, $\dot{\tilde{\gamma}}(0)$ は点 $u \in P$ において (HV-1), (HV-2) を満たす. よって \tilde{X} の一意性から

$$\tilde{X}_u = \dot{\tilde{\gamma}}(0)$$

である.

ここで $\forall f \in C^\infty(P)$ を 1 つ固定する. このとき

$$\begin{aligned}\tilde{X}f|_u &= \dot{\gamma}(0)f|_u \\ &= T_{s_\alpha(\gamma(0))}R_{g(0)} \circ T_{\gamma(0)}s_\alpha(X_{\pi(u)})f - \left(\text{Ad}(g(0)^{-1}) \left(s_\alpha^* \omega|_{\pi(u)}(X_{\pi(u)}) \right) \right)_u^\# f \\ &= X_{\pi(u)}(f \circ R_{g(0)} \circ s_\alpha) - \left(\text{Ad}(g(0)^{-1}) \left(s_\alpha^* \omega|_{\pi(u)}(X) \right) \right)_u^\# f\end{aligned}$$

であるが, $f \circ R_{g(0)} \circ s_\alpha \in C^\infty(U_\alpha)$ であることおよび写像 $U_\alpha \rightarrow \mathfrak{g}$, $u \mapsto \text{Ad}(g(0)^{-1}) \left(s_\alpha^* \omega|_{\pi(u)}(X) \right)$ が C^∞ 写像であることから, あとは C^∞ 写像 $A: P \rightarrow \mathfrak{g}$ に関して定まる関数 $P \rightarrow \mathbb{R}$, $u \mapsto A(u)^\# f$ が C^∞ 級であることを言えば良い.

ところで **基本ベクトル場の定義**を思い出すと

$$A(u)^\# f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(u \blacktriangleleft \exp(tA(u))) = T_0(R^{(u)} \circ \exp(-A(u))) \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \right)$$

であるが, $R^{(u)} \circ \exp(-A(u)): [0, 1] \rightarrow P$ は u に関しても C^∞ 級なので, $A(u)^\# f \in C^\infty(P)$ が言えた. ■

命題 2.12: ベクトル場の水平持ち上げは右不変

\tilde{X} は右不変である. i.e. $\forall g \in G$ に対して自分自身と R_g -related である.

証明 $\forall u \in P$, $\forall g \in G$ を 1 つ固定する. このとき

$$\begin{aligned}T_u \pi((R_g \tilde{X})_u) &= T_u \pi \circ T_{u \blacktriangleleft g^{-1}}(R_g)(\tilde{X}_{u \blacktriangleleft g^{-1}}) \\ &= T_{u \blacktriangleleft g^{-1}}(\pi \circ R_g)(\tilde{X}_{u \blacktriangleleft g^{-1}}) \\ &= T_{u \blacktriangleleft g^{-1}} \pi(\tilde{X}_{u \blacktriangleleft g^{-1}}) \\ &= X_{\pi(u \blacktriangleleft g^{-1})} \\ &= X_{\pi(u)}\end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned}\omega_u((R_g \tilde{X})_u) &= \omega_u(T_{u \blacktriangleleft g^{-1}}(R_g)(\tilde{X}_{u \blacktriangleleft g^{-1}})) \\ &= (R_g^* \omega)_{u \blacktriangleleft g^{-1}}(\tilde{X}_{u \blacktriangleleft g^{-1}}) \\ &= \text{Ad}(g^{-1})(\omega_{u \blacktriangleleft g^{-1}}(\tilde{X}_{u \blacktriangleleft g^{-1}})) \\ &= 0\end{aligned}$$

なので, ベクトル場 $R_g \tilde{X}$ は **(HV-1)**, **(HV-2)** を充たす. i.e. X の水平持ち上げである. 水平持ち上げの一意性から

$$R_g \tilde{X}|_{u \blacktriangleleft g} = T_u(R_g)(\tilde{X}_u) = \tilde{X}_{u \blacktriangleleft g}$$

でなくてはならない. ■

2.4.7 主束上の曲率形式

この小節では主束上の曲率と主束上の共変微分を大域的な形で定義する.

定義 2.18: 曲率 2 形式

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ およびその接続形式 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ を与える.

曲率 2 形式 (curvature 2 form) $\Omega \in \Omega^2(P; \mathfrak{g})$ を以下で定義する:

$$\Omega := d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$$

Ω の定義の第 2 項は, Lie 代数 \mathfrak{g} の基底 T^a w/ $a = 1, \dots, \dim G$ をとったときに

!

$$\frac{1}{2}[\omega, \omega] := \frac{1}{2}\omega_a \wedge \omega_b [T^a, T^b]$$

という意味であって, \mathfrak{g} -値 1 形式のウェッジ積という意味ではない.

補題 2.8:

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ およびその接続形式 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ を与える. $\forall u \in P$ において,

- (1) $\forall v \in \text{Ker } T_u \pi$ に対して, ある $V \in \mathfrak{g}$ が存在して $V^\#|_u = v$ を満たす.
- (2) $\forall v \in \text{Ker } \omega_u$ に対して, ある $H \in \mathfrak{X}(M)$ が存在して $\tilde{H}|_u = v$ を満たす. ただし \tilde{H} は H の水平持ち上げである.

証明 (1) 補題 2.2 の証明より $T_{1_G}(R^{(u)}): \mathfrak{g} \rightarrow \text{Ker } T_u \pi$ は全射だから, ある $V \in \mathfrak{g}$ が存在して $v = T_{1_G}(R^{(u)})(V) = V^\#|_u$ を満たす. ただし最後の等号で (2.4.10) を使った.
 (2) $T_u \pi(v) \in T_{\pi(u)} M$ を $H \in \mathfrak{X}(M)$ に拡張すればよい. ■

定理 2.7: 曲率形式の性質

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ およびその接続形式 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ を与える. $\Omega \in \Omega^2(P; \mathfrak{g})$ を曲率形式とする.

- (1) $\forall u \in P$ および $\forall v, w \in T_u P$ において

$$\Omega_u(v, w) = d\omega|_u(v^H, w^H)$$

- (2) $\forall g \in \Omega$ に対して

$$R_g^* \Omega = \text{Ad}(g^{-1}) \Omega$$

- (3) (Bianchi の第 2 恒等式)

$$d\Omega = [\Omega, \omega]$$

!

定理 2.7-(1) を曲率形式の定義とすることもある ([中原 21, p.43] など). その場合, 我々が採用した定義 2.18 は以下で与える証明と全く同じ議論によって導出され, Cartan の構造方程式と呼ばれる.

証明 (1) 引数の場合分けする.

$v, w \in \text{Ker } \omega_u$

$$\begin{aligned}\Omega_u(v, w) &= d\omega|_u(v, w) + \frac{1}{2}[\omega_u, \omega_u](v, w) \\ &= d\omega|_u(v, w) + \frac{1}{2}([\omega_u(v), \omega_u(w)] - [\omega_u(w), \omega_u(v)]) \\ &= d\omega|_u(v, w) \\ &= d\omega|_u(v^H, w^H)\end{aligned}$$

$v \in \text{Ker } T_u\pi, w \in \text{Ker } \omega_u$

$[\omega_u, \omega_u](v, w) = 0$ である。補題 2.8 より v は基本ベクトル場 $A^\# \in \mathfrak{X}(P)$ に拡張し、 w は水平持ち上げ $\tilde{B} \in \mathfrak{X}(P)$ に拡張する。外微分の公式から

$$d\omega(A^\#, \tilde{B}) = A^\#\omega(\tilde{B}) - \tilde{B}\omega(A^\#) - \omega([A^\#, \tilde{B}])$$

第1項は ω の性質から 0 で、第2項は $\omega(A^\#) = A$ が P 上の定数関数なので 0 になる。第3項が 0 になることを示すためには $[A^\#, \tilde{B}]$ が水平であることを示せば十分である。実際、 $A^\#$ の生成するフローが

$$\theta: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M \longrightarrow M, (t, x) \longmapsto R_{\exp(tX)}(x)$$

であることを思い出すと、Lie 微分の定義と公式から

$$[A^\#, \tilde{B}]_u = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_{u \leftarrow \exp(tA)}(R_{\exp(-tA)})(\tilde{B}_{u \leftarrow \exp(tA)}) - \tilde{B}_u}{t}$$

が言える。 $\tilde{B}_u \in \text{Ker } \omega_u$ は明らかで、接続形式の定義から

$$\begin{aligned}\omega_u(T_{u \leftarrow \exp(tA)}(R_{\exp(-tA)})(\tilde{B}_{u \leftarrow \exp(tA)})) &= (R_{\exp(-tA)}^*\omega)_{u \leftarrow \exp(tA)}(\tilde{B}_{u \leftarrow \exp(tA)}) \\ &= \text{Ad}(\exp(tA))(\omega_{u \leftarrow \exp(tA)}(\tilde{B}_{u \leftarrow \exp(tA)})) \\ &= 0\end{aligned}$$

が言えるので $[A^\#, \tilde{B}]_u \in \text{Ker } \omega_u$ が示された。

$v \in \text{Ker } T_u\pi, w \in \text{Ker } T_u\pi$

v, w を補題 2.8 により拡張して $A^\#, B^\#$ にする。このとき

$$\begin{aligned}\Omega(A^\#, B^\#) &= d\omega(A^\#, B^\#) + [A, B] \\ &= A^\#\omega(B^\#) - B^\#\omega(A^\#) - \omega([A^\#, B^\#]) + [A, B] \\ &= -\omega([A, B]^\#) + [A, B] \\ &= -\omega([A, B]) + [A, B] \\ &= 0\end{aligned}$$

が成り立つ。

^{*46} $\omega(A^\#) \in C^\infty(P)$ というのは、 $\omega(A^\#): P \longrightarrow \mathbb{R}, u \longmapsto \omega_u(A^\#|_u)$ という意味である。

(2) 引き戻しが外微分, wedge 積と可換なので

$$\begin{aligned} R_g^* \Omega &= dR_g^* \omega + \frac{1}{2} [R_g^* \omega, R_g^* \omega] \\ &= \text{Ad}(g^{-1}) \Omega \end{aligned}$$

がわかる.

(3)

$$\begin{aligned} d\Omega &= \frac{1}{2} ([d\omega, \omega] - [\omega, d\omega]) \\ &= [d\omega, \omega] \\ &= [\Omega, \omega] - \frac{1}{2} [[\omega, \omega], \omega] \end{aligned}$$

ところで, $\omega = \omega_a T^a$ と展開すると

$$\begin{aligned} [[\omega, \omega], \omega] &= \omega_a \wedge \omega_b \wedge \omega_c [[T_a, T_b], T_c] \\ &= -\omega_a \wedge \omega_b \wedge \omega_c [[T_b, T_c], T_a] - \omega_a \wedge \omega_b \wedge \omega_c [[T_c, T_a], T_b] \quad \because \text{Jacobi の恒等式} \\ &= -2\omega_a \wedge \omega_b \wedge \omega_c [[T_a, T_b], T_c] \\ &= -2[[\omega, \omega], \omega] \end{aligned}$$

i.e. $[[\omega, \omega], \omega] = 0$ が分かった.

■

定理 2.7 より, Ω は **tensorial form of type Ad** であることが分かった. 記号としては $\Omega \in \Omega_{\text{Ad}}^2(P; \mathfrak{g})$ ということである. 定理 2.7-(1) は, 主束上の共変微分の定義のヒントになっている.

定義 2.19: 主束上の共変微分

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ およびその**接続形式** $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ を与える.
- 有限次元ベクトル空間 V

を与える. このとき, 主束 P 上の**共変微分** $D: \Omega^k(P; V) \longrightarrow \Omega^{k+1}(P; V)$ を

$$D\phi|_u(v_1, \dots, v_{k+1}) := d\phi|_u(v_1^H, \dots, v_{k+1}^H)$$

で定義する. ただし任意の $\phi \in \Omega^k(P; V)$, $u \in P$, $v_1, \dots, v_{k+1} \in T_u P$ をとった.

この定義は**ベクトル束上の共変微分の定義**と見かけ上大きく異なっている. しかし, 実は定理 2.5-(4) の意味で同じものだということが次の命題からわかる:

命題 2.13: 主束上の共変微分の公式

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ およびその接続形式 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ を与える.
- 有限次元ベクトル空間 V
- Lie 群 G の表現 $\rho: G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$

を与える. このとき, $\forall \phi \in \Omega_\rho^k(P; V)$ に対して以下が成り立つ:

$$D\phi = d\phi + \rho_*(\omega) \wedge \phi$$

定理 2.5 のときと同様に,

!

$$(\rho_*(\omega) \wedge \phi)_u(v_1, \dots, v_{k+1}) := \frac{1}{1!k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+1}} \mathrm{sgn} \sigma T_u \rho(v_{\sigma(1)}) (\phi(v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(k+1)})) \quad (2.4.22)$$

という定義である.

証明 $\forall u \in P$ および $\forall v_1, \dots, v_{k+1} \in T_u P$ を固定する. 示すべき式は全ての引数に関して線型だから, v_i は水平であるか垂直であるかのどちらかであるとして良い. さらに以下では補題 2.8 によって水平 (resp. 垂直) な $v_i \in T_u P$ を水平 (resp. 垂直) な $X_i \in \mathfrak{X}(P)$ に拡張する. 具体的には, $v_i \in T_u P$ 水平 (resp. 垂直) ならば X_i は水平持ち上げ \tilde{B}_i (resp. 基本ベクトル場 $A_i^\# \in \mathfrak{X}(P)$) である.

引数について場合分けする.

X_i が全て水平

$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_{k+1}$ に対して $\omega(X_{\sigma(1)}) = 0$ なので自明.

X_i のうち少なくとも 2 つが垂直

引数の入れ替えに関する反対称性より, $X_1 = A_1^\#, X_2 = A_2^\#$ を仮定しても一般性を損なわない. このとき命題 2.7 より $[X_1, X_2] = [A_1, A_2]^\#$ が成り立つので $[X_1, X_2]$ もまた垂直である.

まず, 共変微分の定義から (2.4.22) の左辺は

$$D\phi(X_1, \dots, X_{k+1}) = d\phi(0, 0, \dots) = 0$$

である. よって (2.4.22) の右辺が 0 になることを示せば良い. 実際, 右辺第 1 項に関しては, 外微分の公式より

$$\begin{aligned} d\phi(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} X_i \phi(\dots, \widehat{X_i}, \dots) + \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \phi([X_i, X_j], \dots, \widehat{X_i}, \widehat{X_j}, \dots) \\ &= 0 + 0 \end{aligned} \quad (2.4.23)$$

が言える. さらに右辺第 2 項に関して, ϕ の引数のうち少なくとも 1 つが水平なので

$$(\rho_*(\omega) \wedge \phi)(X_1, \dots, X_{k+1}) = 0$$

がわかる.

X_i の 1 つのみが垂直で他が全て水平

引数の入れ替えに関する反対称性より, $X_1 = A_1^\#$ を仮定しても一般性を損なわない.

まず、共変微分の定義から (2.4.22) の左辺は

$$D\phi(X_1, \dots, X_{k+1}) = d\phi(0, \dots) = 0$$

である。よって (2.4.22) の右辺が 0 になることを示せば良い。

(2.4.22) の右辺第 1 項に関しては、外微分の公式 (2.4.23) より非ゼロな項が

$$X_1\phi(X_2, \dots) + \sum_{2 \leq j \leq k+1} (-1)^{1+j}\phi([X_1, X_j], X_2, \dots, \widehat{X_j}, \dots)$$

だとわかる。ところが、命題 2.12 より X_2, \dots, X_{k+1} が右不変なので Lie 微分の公式より

$$\begin{aligned} [X_1, X_j]_u &= [A_1^\#, X_j]_u \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_{u \leftarrow \exp(tA_1)}(R_{\exp(-tA_1)})(X_j|_{u \leftarrow \exp(tA_1)}) - X_j|_u}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{X_j|_{u \leftarrow \exp(tA_1)} \leftarrow \exp(-tA_1) - X_j|_u}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{X_j|_u - X_j|_u}{t} \\ &= 0 \end{aligned}$$

が言えて、結局

$$d\phi(X_1, \dots, X_{k+1}) = X_1\phi(X_2, \dots) = A_1^\#\phi(X_2, \dots, X_{k+1})$$

が分かった。 $f \in C^\infty(P)$ を $f(u) := \phi_u(X_2|_u, \dots, X_{k+1}|_u)$ によって定義し、(2.4.10) を使ってさらに計算を進めると

$$\begin{aligned} (A_1^\#\phi(X_2, \dots, X_{k+1}))|_u &= (A_1^\#f)(u) \\ &= T_{1_G}(R^{(u)})(A_1)f \\ &= A_1(f \circ R^{(u)}) \end{aligned}$$

となるが、 $\forall g \in G$ に対して

$$\begin{aligned} f \circ R^{(u)}(g) &= \phi_{R^{(u)}(g)}(X_2|_{R^{(u)}(g)}, \dots, X_{k+1}|_{R^{(u)}(g)}) \\ &= \phi_{u \leftarrow g}(T_u(R_g)(X_2|_u), \dots, T_u(R_g)(X_{k+1}|_u)) && \because X_j \text{ の右不変性} \\ &= (R_g^*\phi)_u(X_2|_u, \dots, X_{k+1}|_u) \\ &= \rho(g^{-1})(\phi_u(X_2|_u, \dots, X_{k+1}|_u)) && \because \phi \text{ の右同変性} \\ &= \rho(g^{-1})(f(u)) \end{aligned}$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned} A_1(f \circ R^{(u)}) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left(\rho(\exp(tA_1)^{-1})(f(u)) \right) \\ &= \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \rho(\exp(tA_1)^{-1}) \right) (f(u)) && \because \text{補題 2.5} \\ &= \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \rho(\exp(-tA_1)) \right) (f(u)) && \because \text{命題 2.6} \\ &= - \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \rho(\exp(tA_1)) \right) (f(u)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -T_0(\rho \circ \exp(-A_1)) \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \right) (f(u)) \\
&= -T_{1_G} \rho \circ T_0(\exp(-A_1)) \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \right) (f(u)) \\
&= -\rho_*(A_1) f(u)
\end{aligned}$$

i.e. $A_1^\# \phi(X_2, \dots, X_{k+1}) = -\rho_*(A_1) \phi(X_2, \dots, X_{k+1})$ だと分かった. 一方, 右辺第 2 項の非ゼロな項は

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+1}, \sigma(1)=1} \text{sgn } \sigma \rho_*(\omega(X_1)) (\phi(X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(k+1)})) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+1}, \sigma(1)=1} \text{sgn } \sigma \rho_*(A_1) (\phi(X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(k+1)})) \\
&= \rho_*(A_1) \phi(X_2, \dots, X_{k+1})
\end{aligned}$$

であるから, これらは相殺して 0 になる.

■

特に $\Omega \in \Omega_{\text{Ad}}^2(P; \mathfrak{g})$ なので, 命題 2.13 から

$$\begin{aligned}
D\Omega &= d\Omega + \text{ad}(\omega) \wedge \Omega \\
&= d\Omega + \omega_a \wedge \Omega_b \text{ad}(T^a)(T^b) \\
&= d\Omega + \omega_a \wedge \Omega_b [T^a, T^b] \\
&= d\Omega + [\omega, \Omega]
\end{aligned}$$

だとわかる. よって Bianchi の第 2 恒等式は共変微分を使って

$$D\Omega = 0$$

と書くこともできる.

2.4.8 曲率形式の局所表示と場の強さ

この小説では, 前小節で定義した主束上の曲率形式を局所表示し, それが物理側で場の強さと呼ばれるものと同一視できることを確認する.

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ と, その開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, 局所自明化 $\{\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G\}_{\alpha \in \Lambda}$, 変換関数 $\{t_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G\}_{\alpha, \beta \in \Lambda}$ を与える. 局所切断の族 $\{s_\alpha: U_\alpha \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ を (2.4.13) で定義する.

定理 2.6 を参考に, 曲率形式の局所表示を

$$F_\alpha := s_\alpha^* \Omega \in \Omega^2(U_\alpha; \mathfrak{g})$$

で定義する. 曲率形式の定義と, 引き戻しと外微分, wedge 積が可換であることから

$$\begin{aligned}
F_\alpha &= ds_\alpha^* \omega + \frac{1}{2} [s_\alpha^* \omega, s_\alpha^* \omega] \\
&= dA_\alpha + \frac{1}{2} [A_\alpha, A_\alpha]
\end{aligned}$$

がわかる． F_α の，チャート $(U_\alpha(x^\mu))$ における成分表示 $F_\alpha = \frac{1}{2}F_{\alpha\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ を求めてみる：

$$\begin{aligned} 2F_\alpha &= F_{\alpha\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= 2\partial_\mu A_{\alpha\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &\quad + A_{\alpha a\mu} A_{\alpha b\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu [T^a, T^b] \\ &= (\partial_\mu A_{\alpha\nu} - \partial_\nu A_{\alpha\mu}) dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &\quad + [A_{\alpha\mu}, A_{\alpha\nu}] dx^\mu \wedge dx^\nu \end{aligned}$$

より，

$$F_{\alpha\mu\nu} = (\partial_\mu A_{\alpha\nu} - \partial_\nu A_{\alpha\mu}) + [A_{\alpha\mu}, A_{\alpha\nu}]$$

と書くことができる．これは物理側で**場の強さ** (field strength) としてよく知られたものである．この意味で以降， $F_\alpha \in \Omega^2(U_\alpha; \mathfrak{g})$ のことを場の強さと呼ぶ．

定理 2.8: 場の強さの変換則

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ と，その開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ，局所自明化 $\{\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times G\}_{\alpha \in \Lambda}$ ，変換関数 $\{t_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G\}_{\alpha, \beta \in \Lambda}$ を与える．**局所切断**の族 $\{s_\alpha: U_\alpha \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ を (2.4.13) で定義する．

このとき， $\forall \alpha, \beta \in \Lambda$ について

$$F_\beta|_x = \text{Ad}(t_{\alpha\beta}(x)^{-1})(F_\alpha|_x), \quad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$$

が成り立つ．

証明 $\forall x \in M, \forall v_1, v_2 \in T_x M$ を1つ固定する．定理 2.7-(1) より，

$$\begin{aligned} F_\beta|_x(v_1, v_2) &= s_\beta^* \Omega|_x(v_1, v_2) \\ &= \Omega|_{s_\beta(x)}(T_x s_\beta(v_1), T_x s_\beta(v_2)) \\ &= d\omega|_{s_\beta(x)}(T_x s_\beta(v_1)^H, T_x s_\beta(v_2)^H) \end{aligned}$$

ここで補題 2.6 および**水平部分空間の右不変性**から

$$T_x s_\beta(v_i)^H = T_{s_\alpha(x)}(R_{t_{\alpha\beta}(x)})(T_x s_\alpha(v_i)^H)$$

なので，

$$\begin{aligned} &d\omega|_{s_\beta(x)}(T_x s_\beta(v_1)^H, T_x s_\beta(v_2)^H) \\ &= (R_{t_{\alpha\beta}(x)}^* d\omega) \Big|_{s_\alpha(x)}(T_x s_\alpha(v_1)^H, T_x s_\alpha(v_2)^H) \\ &= d(R_{t_{\alpha\beta}(x)}^* \omega) \Big|_{s_\alpha(x)}(T_x s_\alpha(v_1)^H, T_x s_\alpha(v_2)^H) \\ &= d(\text{Ad}(t_{\alpha\beta}(x)^{-1})(\omega)) \Big|_{s_\alpha(x)}(T_x s_\alpha(v_1)^H, T_x s_\alpha(v_2)^H) \\ &= \text{Ad}(t_{\alpha\beta}(x)^{-1}) \left(d\omega|_{s_\alpha(x)}(T_x s_\alpha(v_1)^H, T_x s_\alpha(v_2)^H) \right) \\ &= \text{Ad}(t_{\alpha\beta}(x)^{-1}) \left(\Omega|_{s_\alpha(x)}(T_x s_\alpha(v_1), T_x s_\alpha(v_2)) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{Ad}(t_{\alpha\beta}(x)^{-1})(s_{\alpha}^* \Omega|_x(v_1, v_2)) \\
&= \text{Ad}(t_{\alpha\beta}(x)^{-1})(F_{\alpha}|_x(v_1, v_2))
\end{aligned}$$

が言える. ■

2.4.9 同伴ベクトル束上の接続とその局所表示

この小節では**同伴ベクトル束上の共変微分**をゲージ場の言葉を使って局所表示し、物理において馴染み深い共変微分と同一視できることを顕に確認する。この小節では常に

- **主束** $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$
- **接続形式** $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$
- 有限次元 \mathbb{K} -ベクトル空間 V と Lie 群 G の $\dim V$ 次元表現 $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$
- **同伴ベクトル束** $V \hookrightarrow P \times_{\rho} V \xrightarrow{q} M$

が与えられているものとする。 $E := P \times_{\rho} V$ とおく。定理 2.5-(2) より、

$$\nabla^E := \sharp^{-1} \circ D \circ \sharp: \Gamma(E) \rightarrow \Omega^1(M; E)$$

は**ベクトル束 E 上の接続**であった。これを**水平持ち上げ**によって表示してみよう。

定理 2.9: 同伴ベクトル束上の共変微分の表示

$\forall s \in \Gamma(E)$, $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ および $\forall p \in M$ を 1 つ固定する。このとき、任意の

- C^{∞} 曲線 $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ であって $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = X_p$ を充たすもの
- $u \in \pi^{-1}(\{p\})$
- γ の**水平持ち上げ** $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow P$ であって $\tilde{\gamma}(0) = u$ を充たすもの^a

に対して

$$(\nabla_X^E s)|_p = \tilde{\gamma}(0) \times_{\rho} \dot{\gamma}(0)$$

が成り立つ。特に右辺は γ, u の取り方によらない。ただし、 C^{∞} 曲線 $\eta: [0, 1] \rightarrow V$ を

$$s(\gamma(t)) =: \tilde{\gamma}(t) \times_{\rho} \eta(t)$$

で定義した。

^a γ, u が与えられると $\tilde{\gamma}$ は一意に決まるのだった。

証明 γ, u を 1 つ固定する。命題 2.9-(2) より

$$\begin{aligned}
(\nabla_X^E s)|_p &= (\nabla^E s)(X)|_p \\
&= (\sharp^{-1} \circ D \circ \sharp s)_p(X_p) \\
&= \left(\flat(D(\sharp s)) \right)_{\gamma(0)}(\dot{\gamma}(0)) \\
&= \tilde{\gamma}(0) \times_{\rho} (D(\sharp s))_{\tilde{\gamma}(0)}(\dot{\gamma}(0)) \quad \because \tilde{\gamma}(0) \in \pi^{-1}(\{\gamma(0)\}), \dot{\gamma}(0) \in (T_{\tilde{\gamma}(0)}\pi)^{-1}(\{\dot{\gamma}(0)\})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \tilde{\gamma}(0) \times_{\rho} \left[d(\sharp s)|_{\tilde{\gamma}(0)}(\dot{\tilde{\gamma}}(0)) + \rho_* \left(\omega_{\tilde{\gamma}(0)}(\dot{\tilde{\gamma}}(0)) \right) (\sharp s|_{\tilde{\gamma}(0)}) \right] \\
&= \tilde{\gamma}(0) \times_{\rho} T_0(\sharp s \circ \tilde{\gamma}) \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \right)
\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで \sharp の定義を思い出すと、 $\forall t \in [0, 1]$ に対して

$$\begin{aligned}
\sharp s \circ \tilde{\gamma}(t) &= f_{\tilde{\gamma}(t)}^{-1} \left(s \circ \pi(\tilde{\gamma}(t)) \right) \\
&= f_{\tilde{\gamma}(t)}^{-1} \left(s(\gamma(t)) \right)
\end{aligned}$$

が成り立つことが分かる。 $f_{\tilde{\gamma}(t)}^{-1}$ の定義から

$$\sharp s \circ \tilde{\gamma} = \eta$$

であり、

$$(\nabla_X^E s)|_p = \tilde{\gamma}(0) \times_{\rho} \dot{\eta}(0)$$

が示された。 ■

定理 2.9 を使って、同伴ベクトル束上の共変微分の局所表示を定理 2.5-(3) よりもあからさまな形で求めよう。

定理 2.10: 同伴ベクトル束上の共変微分の局所表示

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ について

- M の開被覆 $\{U_{\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda}$
- P の局所自明化 $\{\varphi_{\alpha}: \pi^{-1}(U_{\alpha}) \rightarrow U_{\alpha} \times G\}_{\alpha \in \Lambda}$
- P の局所切断の族 $\{s_{\alpha}: U_{\alpha} \rightarrow \pi^{-1}(U_{\alpha}), p \mapsto \varphi_{\alpha}^{-1}(p, 1_G)\}_{\alpha \in \Lambda}$
- Lie 代数 \mathfrak{g} の基底 T^a w/ $a = 1, \dots, \dim G$

を与え、同伴ベクトル束 $V \hookrightarrow E := P \times_{\rho} V \xrightarrow{q} M$ について

- E の局所自明化 $\{\psi_{\alpha}: q^{-1}(U_{\alpha}) \rightarrow U_{\alpha} \times V, s_{\alpha}(p) \times_{\rho} v \mapsto (p, v)\}_{\alpha \in \Lambda}$
- V の基底 e_i w/ $i = 1, \dots, \dim V$
- E の局所切断の族 $\{e_{\alpha i}: U_{\alpha} \rightarrow q^{-1}(U_{\alpha}), x \mapsto s_{\alpha}(x) \times_{\rho} e_i\}_{\alpha \in \Lambda}$

を与える。このとき M のチャート $(U_{\alpha}, (x^{\mu}))$ においてゲージ場 $A_{\alpha} := s_{\alpha}^* \omega \in \Omega^1(U_{\alpha}; \mathfrak{g})$ を

$$A_{\alpha} =: A_{\alpha a} T^a = A_{\alpha a \mu} dx^{\mu} T^a$$

と展開すると以下が成り立つ：

- (1) $\forall X = X^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \in \mathfrak{X}(M)$ ^a に対して ^b,

$$\nabla_X^E e_{\alpha i} = X^{\mu} A_{\alpha a \mu} [\rho_*(T^a)]^j_i e_{\alpha j}$$

- (2) $\forall X = X^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \in \mathfrak{X}(M)$ および $\forall s \in \Gamma(E)$ に対して

$$\nabla_X^E s = X^{\mu} \left(\frac{\partial \xi_{\alpha}^i}{\partial x^{\mu}} + A_{\alpha a \mu} [\rho_*(T^a)]^i_j \xi_{\alpha}^j \right) e_{\alpha i}$$

ただし, $\forall x \in U_\alpha$ に対して $s(x) =: s_\alpha(x) \times_\rho \xi_\alpha(x) = s_\alpha(x) \times_\rho \xi_\alpha(x)^i e_i = \xi_\alpha(x)^i e_{\alpha i}(x)$ と展開した.

^a 厳密には $X \in \mathfrak{X}(U_\alpha)$ であるが, これを 1 の分割を使って拡張したと思えば良い.

^b $[\rho_*(T^a)]^j_i$ というのは, 線形変換 $\rho_*(T^a) \in \mathfrak{gl}(V)$ の, V の基底 e_i による表現行列の (j, i) 成分という意味である.

証明 $\forall p \in U_\alpha$ を 1 つ固定する.

- (1) C^∞ 曲線 $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ であって, $\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = X_p$ を満たすものにとる. γ の像は U_α に含まれているとし^{*47}, γ の水平持ち上げを

$$\tilde{\gamma}(t) =: s_\alpha(\gamma(t)) \blacktriangleleft g_\alpha(t)$$

と書く. ただし補題 2.7 と同様に新しい C^∞ 曲線 $g_\alpha: U_\alpha \rightarrow G$ を $g_\alpha := \text{proj}_2 \circ \varphi_\alpha \circ \tilde{\gamma}$ により定義した.

局所切断 $e_{\alpha i}$ の共変微分を求める.

$$\begin{aligned} e_{\alpha i}(\gamma(t)) &= s_\alpha(\gamma(t)) \times_\rho e_i \\ &= \left(s_\alpha(\gamma(t)) \blacktriangleleft g_\alpha(t) \right) \times_\rho \rho(g_\alpha(t)^{-1})(e_i) \\ &= \tilde{\gamma}(t) \times_\rho \rho(g_\alpha(t)^{-1})(e_i) \end{aligned}$$

であるから, 定理 2.9 より

$$(\nabla_X^E e_{\alpha i})|_p = \tilde{\gamma}(0) \times_\rho \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \rho(g_\alpha(t)^{-1})(e_i)$$

ここで $L^{(v)}: G \rightarrow V, g \rightarrow \rho(g)(v)$ を使って $\rho(g_\alpha(t)^{-1})(e_i) = L^{(e_i)} \circ^{-1} \circ g_\alpha(t)$ と書けるので,

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \rho(g_\alpha(t)^{-1})(e_i) \\ &= T_0(L^{(e_i)} \circ^{-1} \circ g_\alpha) \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \right) \\ &= T_{g_\alpha(0)^{-1}}(L^{(e_i)}) \circ T_{g_\alpha(0)}(^{-1})(\dot{g}_\alpha(0)) \\ &= -T_{g_\alpha(0)}(L^{(e_i)} \circ \mathcal{L}_{g_\alpha(0)^{-1}} \circ \mathcal{R}_{g_\alpha(0)^{-1}})(\dot{g}_\alpha(0)) \\ &= - \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \rho(g_\alpha(0)^{-1} g_\alpha(t) g_\alpha(0)^{-1})(e_i) \\ &= -\rho(g_\alpha(0)^{-1}) \circ \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \rho(g_\alpha(t)) \right) \circ \rho(g_\alpha(0)^{-1})(e_i) \\ &= -\rho(g_\alpha(0)^{-1}) \circ \left(T_{g_\alpha(0)} \rho(\dot{g}_\alpha(0)) \right) \circ \rho(g_\alpha(0)^{-1})(e_i) \\ &= \rho(g_\alpha(0)^{-1}) \circ \left(T_{g_\alpha(0)} \rho \circ T_{1_G} \mathcal{R}_{g(0)}(A_\alpha|_{\gamma(0)}(X)) \right) \circ \rho(g_\alpha(0)^{-1})(e_i) & \because \text{補題 2.7} \\ &= \rho(g_\alpha(0)^{-1}) \circ \rho_*(A_\alpha|_{\gamma(0)}(X_p))(e_i) & \because \text{補題 2.7} \end{aligned}$$

^{*47} $\gamma([0, 1]) \subset M$ はコンパクト集合なので, 有限個の点で区切ればこの要請を満たすことができる.

である*48から,

$$\begin{aligned} (\nabla_X^E e_{\alpha i})|_p &= (\tilde{\gamma}(0) \blacktriangleleft g_{\alpha}(0)^{-1}) \times_{\rho} \rho_*(A_{\alpha}|_{\gamma(0)}(X))(e_i) \\ &= s_{\alpha}(\gamma(0)) \times_{\rho} \rho_*(A_{\alpha}|_p(X))(e_i) \end{aligned}$$

が分かった. 特にチャート $(U_{\alpha}(x^{\mu}))$ において $A_{\alpha} = A_{\alpha a \mu} dx^{\mu} T^a$, $X = X^{\mu}(p) \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}|_p$ と展開すると

$$\begin{aligned} (\nabla_X^E e_{\alpha i})|_p &= s_{\alpha}(\gamma(0)) \times_{\rho} X^{\nu}(p) A_{\alpha a \mu}(p) dx^{\mu}|_p \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Big|_p \right) \rho_*(T^a)(e_i) \\ &= s_{\alpha}(\gamma(0)) \times_{\rho} X^{\nu}(p) A_{\alpha a \mu}(p) \delta_{\nu}^{\mu} \rho_*(T^a)(e_i) \\ &= s_{\alpha}(\gamma(0)) \times_{\rho} X^{\mu}(p) A_{\alpha a \mu}(p) [\rho_*(T^a)]^j{}_i e_j \\ &= X^{\mu}(p) A_{\alpha a \mu}(p) [\rho_*(T^a)]^j{}_i e_{\alpha j}|_p \end{aligned}$$

と成分表示が求まった.

- (2) 一般の切断 $s \in \Gamma(E)$ の共変微分を求める. U_{α} 上で $s(x) = s_{\alpha}(x) \times_{\rho} \xi_{\alpha}(x) = s_{\alpha}(x) \times_{\rho} \xi_{\alpha}(x)^i e_i = \xi_{\alpha}(x)^i e_{\alpha i}(x)$ と展開できるので, **ベクトル束上の共変微分の定義**より

$$\begin{aligned} \nabla_X^E s &= \nabla^E s(X) \\ &= d\xi_{\alpha}^i(X) \otimes e_{\alpha i} + \xi_{\alpha}^i \nabla^E e_{\alpha i}(X) \\ &= X^{\nu} \frac{\partial \xi_{\alpha}^i}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \right) e_{\alpha i} + \xi_{\alpha}^i X^{\mu} A_{\alpha a \mu} [\rho_*(T^a)]^j{}_i e_{\alpha j} \\ &= X^{\mu} \left(\frac{\partial \xi_{\alpha}^i}{\partial x^{\mu}} + A_{\alpha a \mu} [\rho_*(T^a)]^i{}_j \xi_{\alpha}^j \right) e_{\alpha i} \end{aligned}$$

と計算できる.

■

定理 2.10-(2) において, 特に X として座標ベクトル場 $\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ をとると

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}}^E e_{\alpha i} = A_{\alpha a \mu} [\rho_*(T^a)]^j{}_i e_{\alpha j}$$

となり, ゲージ場の成分 $A_{\alpha a \mu} [\rho_*(T^a)]^j{}_i$ が Riemann 幾何学における Christoffel 記号と同等の働きをすることが分かる.

*48

$$\begin{aligned} 0 &= T_g(\mu \circ (\text{id}_G \times {}^{-1}) \circ \Delta)(X) \\ &= T_g(\mu \circ \text{inj}_1^{g^{-1}})(X) + T_g(\mu \circ \text{inj}_2^g \circ {}^{-1})(X) \\ &= T_g(\mathcal{R}_{g^{-1}})(X) + T_{g^{-1}}(\mathcal{L}_g) \circ T_g({}^{-1})(X) \end{aligned}$$

より

$$T_g({}^{-1}) = -T_g(\mathcal{L}_{g^{-1}} \circ \mathcal{R}_{g^{-1}})$$

2.4.10 同伴ベクトル束上の曲率とその局所表示

この小節ではまず一般のベクトル束上の曲率を大域的な形で定義し、**同伴ベクトル束上の接続**との関係を議論する。そして同伴ベクトル束上の曲率の局所表示が、主束上の曲率の局所表示と同一のものであることを確認する。

定義 2.20: ベクトル束上の曲率

- ベクトル束 $V \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$
- **ベクトル束 E 上の接続** $\nabla^E: \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(M; E)$

を与える。ベクトル束 E 上の**曲率** (curvature) とは、

$$R^\nabla := d^{\nabla^E} \circ \nabla^E: \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^2(M; E)$$

のこと。

命題 2.14: 曲率の $C^\infty(M)$ 線形性

$\forall f \in C^\infty(M), \forall s \in \Gamma(E)$ に対して

$$R^{\nabla^E}(fs) = f R^{\nabla^E}(s)$$

が成り立つ。

証明 **ベクトル束上の接続**の定義から

$$\begin{aligned} R^{\nabla^E}(fs) &= d^{\nabla^E}(df \otimes s + f \nabla^E s) \\ &= \cancel{d^2 f} \otimes s - df \wedge \nabla^E s + d^{\nabla^E}(f \nabla^E s) \\ &= \cancel{-df \wedge \nabla^E s + df \wedge \nabla^E s} + f d^{\nabla^E}(\nabla^E s) \\ &= f R^{\nabla^E}(s) \end{aligned}$$

が分かる ^{*49}。 ■

この結果から、

$$R^{\nabla^E}: \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E), s \longmapsto (p \longmapsto R^{\nabla^E}(s)(p))$$

^{*49} E の局所フレーム $e_i \in \Gamma(E)$ を使うと $\nabla^E s = (\nabla^E s)^i \otimes e_i$ w/ $(\nabla^E s)^i \in \Omega^1(M)$ と書けるので、ベクトル束上の接続の定義から

$$\begin{aligned} d^{\nabla^E}(f \nabla^E s) &= d(f (\nabla^E s)^i) \otimes e_i - f (\nabla^E s)^i \wedge \nabla^E e_i \\ &= df \wedge \nabla^E s + f d(\nabla^E s)^i \otimes e_i - f (\nabla^E s)^i \wedge \nabla^E e_i \\ &= df \wedge \nabla^E s + f d^{\nabla^E}(\nabla^E s) \end{aligned}$$

だとわかる。

と見做すとこれが $C^\infty(M)$ -線形写像になっている．このようなとき， End 束 $\text{End}(E) := \coprod_{p \in M} \text{End}(E_p)$ の C^∞ 切断 $\underline{R}^{\nabla^E} \in \Gamma(\bigwedge^2 T^*M \otimes \text{End}(E))$ であって，

$$R^{\nabla^E}(s)(p) = \underline{R}^{\nabla^E}(p)(s(p))$$

を満たすものが存在することが分かる^{*50}．そのため，この \underline{R}^{∇^E} と同一視して $R^{\nabla^E} \in \Omega^2(\text{End}(E))$ であると言う．

定理 2.11: 同伴ベクトル束上の曲率の表示

$$R^{\nabla^E} = \sharp^{-1} \circ \rho_*(\Omega) \circ \sharp$$

証明 (1)

$$\begin{aligned} R^{\nabla^E} &= \sharp^{-1} \circ D^2 \circ \sharp \\ &= \sharp^{-1} \circ (d + \rho_*(\omega) \wedge) \circ (d + \rho_*(\omega)) \circ \sharp \\ &= \sharp^{-1} \circ (\cancel{d^2} + \rho_*(\omega) \wedge d + d(\rho_*(\omega)) + \rho_*(\omega) \wedge \rho_*(\omega)) \circ \sharp \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} d(\rho_*(\omega)(\sharp s)) &= d(\rho_*(\omega_a T^a)(\sharp s)) \\ &= d(\omega_a \rho_*(T^a)(\sharp s)) \\ &= d\omega_a \rho_*(T^a)(\sharp s) - \omega_a \wedge \rho_*(T^a) d(\sharp s) \\ &= \rho_*(d\omega)(\sharp s) - \rho_*(\omega) \wedge d(\sharp s) \end{aligned}$$

なので，

$$R^{\nabla^E} = \sharp \circ (\rho_*(d\omega) + \rho_*(\omega) \wedge \rho_*(\omega)) \circ \sharp$$

さらに

$$\rho_*(\omega) \wedge \rho_*(\omega)(\sharp s) = \omega_a \wedge \omega_b \rho_*(T^a)(\rho_*(T^b)(\sharp s))$$

^{*50} $\forall p \in M$ を 1 つ固定し， $s \in \Gamma(E)$ であって $s(p) = 0$ を満たすものをとる． p の開近傍（特に，局所自明性を満たすもの） $p \in U \subset M$ とその上の局所フレーム (e_i) をとる．このとき U 上では $s = s^i e_i$ と展開できる．ところで，多様体のパラコンパクト性から $p \in \bar{V} \subset U$ を満たす p の開近傍 $V \subset M$ が存在するので， M の開被覆 $\{U, M \setminus \bar{V}\}$ に従属する 1 の分割 $\{\psi_U, \psi_{M \setminus \bar{V}}\}$ をとることができる．特に C^∞ 関数 $\psi_U: M \rightarrow [0, 1]$ は

$$\psi_U(x) = \begin{cases} 1, & x \in \bar{V} \\ 0, & x \in M \setminus U \end{cases}$$

を満たす．よって $\tilde{e}_i := \psi_U e_i \in \Gamma(E)$ ， $\tilde{s}^i := \psi_U s^i \in C^\infty(M)$ である．したがって

$$s = s + \psi_U^2(s - s) = (1 - \psi_U^2)s + \tilde{s}^i \tilde{e}_i$$

が分かった．したがって R^{∇^E} の C^∞ -線形性から

$$R^{\nabla^E}(s)(p) = (1 - \psi_U^2(p)) R^{\nabla^E}(s)(p) + \tilde{s}^i(p) R^{\nabla^E}(\tilde{e}_i)(p) = 0$$

が言えた．このことから， $\underline{R}^{\nabla^E} \in \Gamma(\text{End}(E))$ を， $\forall p \in M, \forall v \in E_p$ について

$$\underline{R}^{\nabla^E}(p)(v) := R^{\nabla^E}(s)(p) \quad \text{w/} \quad s \in \Gamma(E) \text{ s.t. } s(p) = v$$

と定義すると well-defined である．

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \omega_a \wedge \omega_b \left(\rho_*(T^a) \circ \rho_*(T^b) - \rho_*(T^b) \circ \rho_*(T^a) \right) (\sharp s) \\
&= \frac{1}{2} \omega_a \wedge \omega_b [\rho_*(T^a), \rho_*(T^b)] (\sharp s) \\
&= \frac{1}{2} \omega_a \wedge \omega_b \rho_*([T^a, T^b]) (\sharp s) \\
&= \frac{1}{2} \rho_*([\omega, \omega]) (\sharp s)
\end{aligned}$$

であるから

$$R^{\nabla^E} = \sharp^{-1} \circ \rho_*(\Omega) \circ \sharp$$

が分かった。

■

定理 2.12: 同伴ベクトル束上の曲率の局所表示

定理 2.10 と同様の記号を使って以下が成り立つ：

(1)

$$R^{\nabla^E} e_{\alpha i} = F_{\alpha a} [\rho_*(T^a)]^j_i \otimes e_{\alpha j}$$

(2) $\forall s = \xi_{\alpha}^i e_{\alpha i}$ に対して

$$R^{\nabla^E} s = F_{\alpha a} [\rho_*(T^a)]^j_i \xi_{\alpha}^i \otimes e_{\alpha j}$$

証明 (1) 定理 2.10 およびベクトル束上の共変外微分の定義より、

$$\begin{aligned}
R^{\nabla^E} e_{\alpha i} &= d^{\nabla^E} ([\rho_*(A_{\alpha})]^j_i \otimes e_{\alpha j}) \\
&= [d(\rho_*(A_{\alpha}))]^j_i - [\rho_*(A_{\alpha})]^j_i \wedge \nabla^E e_{\alpha j} \\
&= [\rho_*(dA_{\alpha})]^j_i \otimes e_{\alpha j} - [\rho_*(A_{\alpha})]^j_i \wedge [\rho_*(A_{\alpha})]^k_j e_{\alpha k} \\
&= [\rho_*(dA_{\alpha})]^j_i \otimes e_{\alpha j} - A_{\alpha a} \wedge A_{\alpha b} [\rho_*(T^b)]^k_j [\rho_*(T^a)]^j_i e_{\alpha k} \\
&= [\rho_*(dA_{\alpha})]^j_i \otimes e_{\alpha j} + A_{\alpha a} \wedge A_{\alpha b} [\rho_*(T^a) \circ \rho_*(T^b)]^k_i e_{\alpha k} \\
&= F_{\alpha a} [\rho_*(T^a)]^j_i \otimes e_{\alpha j}
\end{aligned}$$

(2) 命題 2.14 より R^{∇^E} は $C^{\infty}(M)$ -線形なので明らか。

■

2.4.11 ホロノミー

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ を与える。任意の $x \in M$ に対して

$$\Omega_x := \{ \gamma: [0, 1] \longrightarrow M \mid \text{区分的 } C^{\infty} \text{ 曲線, } \gamma(0) = \gamma(1) \}$$

とおく。

命題 2.15: ホロノミー

- $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ を **接続形式** とする.
- $x \in M$
- $u \in \pi^{-1}(\{x\})$

を与え, 写像 $\Phi_u: \Omega_x \rightarrow G$ を

$$\tilde{\gamma}(1) =: \tilde{\gamma}(0) \blacktriangleleft \Phi_u(\gamma) \quad \text{w/} \quad \tilde{\gamma}(0) = u$$

で定義する. このとき以下が成り立つ:

- (1) $\forall h \in G$ に対して

$$\Phi_{u \blacktriangleleft h}(\gamma) = h^{-1} \Phi_u(\gamma) h$$

- (2) $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega_x$ に対して

$$\Phi_u(\gamma_1 * \gamma_2) = \Phi_u(\gamma_2) \Phi_u(\gamma_1)$$

ただし $*$ は道の積である.

証明 (1) 命題 2.10 より $\tilde{\gamma} \blacktriangleleft h$ は $u \blacktriangleleft h$ を始点とする γ の **水平持ち上げ** であるから,

$$(u \blacktriangleleft h) \blacktriangleleft \Phi_{u \blacktriangleleft h}(\gamma) = \tilde{\gamma}(1) \blacktriangleleft h = (u \blacktriangleleft \Phi_u(\gamma)) \blacktriangleleft h = u \blacktriangleleft h \blacktriangleleft (h^{-1} \Phi_u(\gamma) h)$$

- (2) 命題 2.10 より $\tilde{\gamma}_2 \blacktriangleleft \Phi_u(\gamma_1)$ は $\tilde{\gamma}_1(1) = u \blacktriangleleft \Phi_u(\gamma_1)$ を始点, $u \blacktriangleleft \Phi_u(\gamma_2) \Phi_u(\gamma_1)$ とする γ_2 の **水平持ち上げ** であるから, 水平持ち上げの一意性から

$$u \blacktriangleleft \Phi_u(\gamma_1 * \gamma_2) = u \blacktriangleleft \Phi_u(\gamma_2) \Phi_u(\gamma_1)$$

が成り立つ. ■

定義 2.21: ホロノミー群

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ とその **接続形式** $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ を与える. $\forall u \in P$ に対して, 命題 2.15 より G の部分集合

$$\text{Hol}_u(P, \omega) := \Phi_u(\Omega_{\pi(u)})$$

は部分群をなす. この部分群のことを **ホロノミー群** (holonomy group) と呼ぶ.

2.4.12 ゲージ理論

2.5 特性類と Chern-Simons 形式

2.5.1 Lie 代数上の不変多項式

V を有限次元 \mathbb{K} -ベクトル空間, V^* をその双対空間とする. V の基底 $\{e_1, \dots, e_{\dim V}\} \subset V$ とその双対基底 $\{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^{\dim V}\} \subset V^*$ をとる.

定義 2.22: V 上の多項式

- 対称化テンソル積

$$\mathrm{Sym}^k(V^*) := (V^*)^{\otimes k} / \langle v \otimes w - w \otimes v \mid v, w \in V^* \rangle$$

の元のことを V 上の k 次多項式と呼ぶ.

- 対称化テンソル代数^a

$$\bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathrm{Sym}^k(V^*)$$

の元のことを V 上の多項式と呼ぶ.

^a ベクトル空間の直和なので, その元は k 次多項式の有限和である.

関数 $f: V \rightarrow \mathbb{K}$ が V 上の k -次多項式である必要十分条件は

$$f = f_{i_1 \dots i_k} \varepsilon^{i_1} \dots \varepsilon^{i_k}$$

の表示を持つことである.

【例 2.5.1】 Tr と \det

$V = M(n, \mathbb{K})$ とする. V の基底として行列単位 e_i^j をとる. このとき, 関数

$$\mathrm{Tr}: V \rightarrow \mathbb{K}, v_i^j e_i^j \mapsto v_i^i$$

は

$$\mathrm{Tr}(v) = \mathrm{Tr}(v_i^j e_i^j) = v_i^i = v_j^l \delta_l^j \delta_i^i = v_j^l \varepsilon_i^i(e_l^j) = \varepsilon_i^i(v)$$

を充たすので 1 次多項式である. 一方,

$$\det: V \rightarrow \mathbb{K}, v_i^j e_i^j \mapsto \epsilon_{i_1, \dots, i_n} v^{i_1}_1 \dots v^{i_n}_n$$

は

$$\begin{aligned} \det(v) &= \det(v_i^j e_i^j) \\ &= \epsilon_{i_1 \dots i_n} v^{i_1}_1 \dots v^{i_n}_n \\ &= \epsilon_{i_1 \dots i_n} v^{j_1}_{l_1} \dots v^{j_n}_{l_n} \delta_{j_1}^{i_1} \delta_{l_1}^{j_1} \dots \delta_{j_n}^{i_n} \delta_{l_n}^{j_n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \epsilon_{i_1 \dots i_n} v^{j_1}_{l_1} \dots v^{j_n}_{l_n} \varepsilon^{i_1}_1(e_{j_1}^{l_1}) \dots \varepsilon^{i_n}_n(e_{j_n}^{l_n}) \\
&= \epsilon_{i_1 \dots i_n} \varepsilon^{i_1}_1(v) \dots \varepsilon^{i_n}_n(v)
\end{aligned}$$

を充たすので n 次多項式である.

定義 2.23: 不変多項式

Lie 群 G の Lie 代数 \mathfrak{g} を与える. 多項式 $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$ が **Ad(G)-不変**であるとは, $\forall g \in G, \forall X \in \mathfrak{g}$ に対して

$$f(\text{Ad}(g)(X)) = f(X)$$

が成り立つことをいう.

$\text{Ad}(G)$ -不変多項式全体の集合を $\text{Inv}(\mathfrak{g})$ と書く. $\text{Inv}(\mathfrak{g})$ は結合代数である.

2.5.2 Chern-Weil 理論

- Lie 群 G の Lie 代数 \mathfrak{g} とその基底 T^a
- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$
- 接続形式 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$
- 曲率形式 $\Omega \in \Omega^2(P; \mathfrak{g})$

を与える. T^a の双対基底を τ_a とおく. 曲率形式を T^a で展開して $\Omega = \Omega_a T^a$ と書く. k 次多項式 $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ が基底 $\{T^a\}$ に関して $f = f^{a_1 \dots a_{\dim G}} \tau_{a_1} \dots \tau_{a_{\dim G}}$ の表示を持つとき, f への Ω の代入 $f(\Omega) \in \Omega^{2k}(P)$ を

$$f(\Omega) := f^{a_1 \dots a_{\dim G}} \Omega_{a_1} \wedge \dots \wedge \Omega_{a_{\dim G}}$$

で定義する. この定義は \mathfrak{g} の基底の取り方によらない.

定理 2.13: Chern-Weil の定理

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$
- 接続形式 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$
- 曲率形式 $\Omega \in \Omega^2(P; \mathfrak{g})$
- k 次不変多項式 $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$

を与える. このとき以下が成り立つ:

- (1) ある $\Lambda \in \Omega^{2k}(M)$ が存在して $f(\Omega) = \pi^* \Lambda$ を満たす.
- (2) (1) の Λ は閉形式である. i.e. $d\Lambda = 0$
- (3) de Rham コホモロジー類 $[\Lambda] \in H_{\text{dR}}^{2k}(M)$ は ω の取り方によらない. したがって結合代数の準同型 (Chern-Weil 準同型)

$$w: \text{Inv}(\mathfrak{g}) \rightarrow H_{\text{dR}}^{\bullet}(M), f \mapsto [\Lambda]$$

が定まる.

証明 (1) まず, 補題を用意する.

補題 2.9:

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$
- 有限次元ベクトル空間 V

を与える. このとき, $\forall \psi \in \Omega^k(P; V)$ に対して以下の 2 つは同値である:

- ある $\phi \in \Omega^k(M; V)$ が存在して $\psi = \pi^* \phi$ を満たす.
- ψ は水平かつ $R_g^* \psi = \psi$ を^a満たす.

^a i.e. ψ は右不変である.

証明 自明表現 $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$, $g \mapsto 1_V$ をとる. このとき主束 P の ρ による **同伴ベクトル束** $V \hookrightarrow P \times_{\rho} V \xrightarrow{q} M$ は自明束 $V \hookrightarrow M \times V \xrightarrow{\text{proj}_1} M$ に **束同型** であるから^{*51}, $\Omega^k(M; P \times_{\rho} V) = \Omega^k(M; V)$ である. 特に, $\forall u \in P$ に対して補題 2.3 で構成したベクトル空間の同型写像 $f_u: V \rightarrow q^{-1}(\{u\})$, $v \mapsto u \times_{\rho} v$ は恒等写像になるので, 命題 2.9 で構成した同型写像は

$$\sharp: \Omega^k(M; P \times_{\rho} V) = \Omega^k(M; V) \rightarrow \Omega_{\rho}^k(P; V), \phi \mapsto \pi^* \phi$$

になる. さらに, **tensorial form of type ρ の定義** から, $\forall \psi \in \Omega_{\rho}^k(P; V)$ は水平でかつ $\forall g \in G$ に対して $R_g^* \psi = \rho(g^{-1})(\psi) = \psi$ を満たす. ■

^{*51} 具体的には, 写像 $P \times_{\rho} V \rightarrow M \times V$, $u \times_{\rho} v \mapsto (\pi(u), v)$ が束同型写像を与える.

補題 2.9 より, $f(\Omega) \in \Omega^{2k}(P)$ が水平かつ右不変であることを示せば良い. Lie 代数 \mathfrak{g} の基底 T^a を 1 つ固定し, $\Omega = \Omega_a T^a$ と展開する.

水平

$\Omega \in \Omega_{\text{Ad}}^2(P; \mathfrak{g})$ なので $\Omega_a \in \Omega^2(P)$ もまた水平である.

右不変

$\Omega \in \Omega_{\text{Ad}}^2(P; \mathfrak{g})$ なので, $\forall g \in G$ に対して

$$\begin{aligned} R_g^* \Omega &= \text{Ad}(g^{-1})(\Omega) \\ \iff R_g^*(\Omega_a T^a) &= (R_g^* \Omega_a) T^a = [\text{Ad}(g^{-1})(\Omega)]_a T^a \\ \implies R_g^* \Omega_a &= [\text{Ad}(g^{-1})(\Omega)]_a \quad (1 \leq a \leq \dim G) \end{aligned}$$

が言える. よって f の $\text{Ad}(G)$ -不変性から

$$\begin{aligned} R_g^*(f(\Omega)) &= f^{a_1 \dots a_k} R_g^* \Omega_{a_1} \wedge \dots \wedge R_g^* \Omega_{a_k} \\ &= f^{a_1 \dots a_k} [\text{Ad}(g^{-1})(\Omega)]_{a_1} \wedge \dots \wedge [\text{Ad}(g^{-1})(\Omega)]_{a_k} \\ &= f(\text{Ad}(g^{-1})(\Omega)) \\ &= f(\Omega) \end{aligned}$$

が示された.

(2) $\pi_*: T_u P \rightarrow T_u M$ は全射なので $\pi^*: \Omega^\bullet(M) \rightarrow \Omega^\bullet(P)$ は単射. よって

$$\pi^*(d\Lambda) = 0 \iff d(f(\Omega)) = 0$$

を示せば十分である. ところで主束上の共変微分の定義および (1) から,

$$\begin{aligned} D(f(\Omega)) &= d(f(\Omega)) \circ H \\ &= d(\pi^* \Lambda) \circ H \\ &= \pi^* d\Lambda \circ H \\ &= d\Lambda \circ \pi_* \circ H \\ &= d\Lambda \circ \pi_* \\ &= \pi^* d\Lambda \\ &= d(\pi^* \Lambda) \\ &= d(f(\Omega)) \end{aligned}$$

が言える. 一方で

$$\begin{aligned} D(f(\Omega)) &= f^{a_1 \dots a_k} D(\Omega_{a_1} \wedge \dots \wedge \Omega_{a_k}) \\ &= f^{a_1 \dots a_k} \sum_{j=1}^k \Omega_{a_1} \wedge \dots \wedge D\Omega_{a_j} \wedge \dots \wedge \Omega_{a_k} \\ &= 0 \quad \because \text{ Bianchi の第 2 恒等式} \end{aligned}$$

である.

(3) P 上の 2 つの接続形式 $\omega_0, \omega_1 \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ を与える. このとき $\forall t \in [0, 1]$ に対して, C^∞ 写像 $\text{proj}_1: P \times [0, 1] \rightarrow P$ を使って $\tilde{\omega} \in \Omega^1(P \times I; \mathfrak{g})$ を

$$\tilde{\omega}_{(u,t)} := (1-t) (\text{proj}_1^* \omega_0)_{(u,t)} + t (\text{proj}_1^* \omega_1)_{(u,t)}$$

は主束 $G \hookrightarrow P \times [0, 1] \xrightarrow{\pi \times \text{id}} M \times [0, 1]$ の接続形式である。さらに, $i_t := P \longrightarrow P \times [0, 1], u \longmapsto (u, t)$ について $i_0^* \tilde{\omega} = \omega_0, i_1^* \tilde{\omega} = \omega_1$ が成り立つ。 $\tilde{\omega}$ の曲率 $\tilde{\Omega} \in \Omega^2(P \times [0, 1]; \mathfrak{g})$ を

$$\tilde{\Omega} := d\tilde{\omega} + \frac{1}{2}[\tilde{\omega}, \tilde{\omega}]$$

により定めると $i_0^* \tilde{\Omega} = \Omega_0, i_1^* \tilde{\Omega} = \Omega_1$ が成り立つ。

ところで, **Ad(G)-不変 k 次多項式 f** について

$$i_0^* f(\tilde{\Omega}) = f(\Omega_0), \quad i_1^* f(\tilde{\Omega}) = f(\Omega_1)$$

が成り立つ。 i_0, i_1 は互いにホモトピックなので, de Rham コホモロジーのホモトピー不変性から

$$[f(\Omega_0)] = [i_0^* f(\tilde{\Omega})] = [i_1^* f(\tilde{\Omega})] = [f(\Omega_1)]$$

が分かった。さらに, de Rham コホモロジーは反変関手なので

$$\pi^* [\Lambda_0] = [\pi^* \Lambda_0] = [f(\Omega_0)] = [f(\Omega_1)] = [\pi^* \Lambda_1] = \pi^* [\Lambda_1]$$

がわかる。 π^* の単射性から $[\Lambda_0] = [\Lambda_1]$ が言えた。

■

定義 2.24: 特性類

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$
- **接続形式** $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$
- **曲率形式** $\Omega \in \Omega^2(P; \mathfrak{g})$
- **k 次不変多項式** $f: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$

を与える。このとき定理 2.13 の $[\Lambda] \in H_{\text{dR}}^{2k}(M)$ のことを, f による P の**特性類** (characteristic class) と呼ぶ。

特性類はその定義から局所表示によらないが, それを顕に確認することができる。 $\{s_\alpha: U_\alpha \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ を P の勝手な局所切断とする。 wedge 積と引き戻しは可換であることに注意すると, 定理 2.13-(1) から

$$f(F_\alpha) = f(s_\alpha^* \Omega) = s_\alpha^* f(\Omega) = s_\alpha^* \pi^* \Lambda = (\pi \circ s_\alpha)^* \Lambda = \Lambda|_{U_\alpha} \in \Omega^{2k}(U_\alpha)$$

だと分かる。一方, 定理 2.8 および f の **Ad(G)-不変性** から, 他の $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ を充たす $\beta \in A$ に対して左辺は

$$f(F_\alpha) = f(\text{Ad}(t_{\alpha\beta})(F_\beta)) = f(F_\beta)$$

を充たす。このことから, もし場の強さ $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ から大域的な特性類 $\Lambda \in \Omega^{2k}(M)$ を復元したければ, ただ単に

$$\Lambda_x := f(F_\alpha)|_x \quad x \in U_\alpha$$

とすれば良いことが分かる。この事実は, 例えば特性類を積分する際に非常に有用である。

2.5.3 主束とベクトル束

定理 2.13 は主束に関して示したが、ベクトル束についても全く同じ議論ができる。勝手なベクトル束

$$V \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$$

を与えると、それに同伴する主束は **フレーム束**

$$\mathrm{GL}(V) \hookrightarrow \mathrm{Fr}(E) \xrightarrow{\varpi} M$$

である。逆に、フレーム束に **同伴するベクトル束**

$$V \hookrightarrow \mathrm{Fr}(E) \times_{\mathrm{id}} V \xrightarrow{\pi} M$$

は元のベクトル束と束同型である。主束 $\mathrm{Fr}(E)$ 上の接続形式 $\omega \in \Omega^1(\mathfrak{Fr}(E); \mathfrak{gl}(V))$ がベクトル束 E 上の接続 $\nabla^E: \Gamma(E) \rightarrow \Omega^1(M; E)$ を与えることは定理 2.5 で示した。実は逆が言えることも、これまでとほぼ同じ議論からわかる。

今、ベクトル束 E 上の接続 $\nabla^E: \Gamma(E) \rightarrow \Omega^1(M; E)$ が与えられたとする。このとき、開集合 $U \subset M$ 上の E の局所フレーム $e := (e_1, \dots, e_{\dim V})$ に関する接続行列 $\omega_e: \mathfrak{X}(U) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ を

$$\nabla_X^E e_i = [\omega_e(X)]^j_{\ i} e_j$$

で定義する。そして C^∞ 曲線 $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ に沿った平行切断 $s \in \Gamma(E)$ を

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)}^E s|_{\gamma(t)} = 0 \quad \forall t \in [0, 1]$$

で定義する。 $\gamma([0, 1]) \subset U$ とすると $s = s^i e_i$ と展開できるので、これは

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{\dot{\gamma}(t)}^E s \\ &= \nabla^E(s^i e_i)|_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) \\ &= ds^i|_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) \otimes e_i|_{\gamma(t)} + s^i(\gamma(t))[\omega_e(\dot{\gamma}(t))]^j_{\ i} e_j|_{\gamma(t)} \\ &= \left(\frac{d(s^i \circ \gamma)}{dt} + s^j(\gamma(t))[\omega_e(\dot{\gamma}(t))]^i_{\ j} \right) \otimes e_i|_{\gamma(t)} \\ &\iff \frac{d(s^i \circ \gamma)}{dt} + s^j(\gamma(t))[\omega_e(\dot{\gamma}(t))]^i_{\ j} = 0 \end{aligned}$$

を意味し、常微分方程式の解の存在と一意性から s は一意に決まる。 γ の $\mathrm{Fr}(E)$ への水平持ち上げ $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \mathrm{Fr}(E)$ を、 $\tilde{\gamma}(t) := (\gamma(t), (\eta_1 \circ \gamma(t), \dots, \eta_{\dim V} \circ \gamma(t))) \in \mathrm{Fr}(E)_{\gamma(t)}$ で定義した $\eta_i \in \Gamma(E)$ が平行切断になっているものと定義する。そして $e \in \varpi^{-1}(\{x\})$ における水平な接ベクトル $v \in T_e(\mathrm{Fr}(E))$ を、ある C^∞ 曲線 $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ であって $\gamma(0) = x$, $\tilde{\gamma}(0) = e$, $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = v$ を満たすものが存在することと定義するのである。

さて、ここで E の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 、局所自明化 $\{\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times V\}_{\alpha \in \Lambda}$ を与える。そして $\mathrm{Fr}(E)$ の局所切断 $s_\alpha: U_\alpha \rightarrow \varpi^{-1}(U_\alpha)$ を

$$s_\alpha(x) := (x, (\varphi_\alpha^{-1}(x, e_1), \dots, \varphi_\alpha^{-1}(x, e_{\dim V}))) = (x, (s_{\alpha 1}(x), \dots, s_{\alpha \dim V}(x)))$$

で定義しよう。【例 2.4.2】で議論した通り、このとき $\gamma([0, 1]) \subset U_\alpha$ だとすると、ある C^∞ 曲線 $g_\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ を使って

$$\tilde{\gamma}(t) =: s_\alpha(\gamma(t)) \blacktriangleleft g_\alpha(t)$$

と書けるので、水平持ち上げの初期条件が $\tilde{\gamma}(0) = s_\alpha(\gamma(0))$ だとすると補題 2.7 から

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\gamma}}(0) &= T_{s_\alpha(\gamma(0))}(R_{g_\alpha(0)}) \circ T_{\gamma(0)} s_\alpha(\dot{\gamma}(0)) + (\theta_{g_\alpha(0)}(\dot{g}_\alpha(0)))^\#|_{\tilde{\gamma}(0)} \\ &= T_{\gamma(0)} s_\alpha(\dot{\gamma}(0)) + (\dot{g}_\alpha(0))^\#|_{\tilde{\gamma}(0)}\end{aligned}$$

がわかる。一方で水平切断の条件から

$$\begin{aligned}0 &= \nabla_{\tilde{\gamma}(t)}^E \tilde{\gamma}_i(t) \\ &= \nabla_{\tilde{\gamma}(t)}^E (s_j[g_\alpha(t)]^j{}_i) \\ &= [\dot{g}_\alpha(t)]^j{}_i s_j(\gamma(t)) + [g_\alpha(t)]^j{}_i \nabla_{\tilde{\gamma}(t)}^E s_j|_{\gamma(t)}\end{aligned}$$

であるから、 $t = 0$ を代入して

$$[\dot{g}_\alpha(0)]^j{}_i s_j(\gamma(0)) = -\nabla_{\tilde{\gamma}(0)}^E s_j|_{\gamma(0)} = -[\omega_{s_\alpha}(\dot{\gamma}(0))]^j{}_i s_j(\gamma(0))$$

i.e. $\dot{g}_\alpha(0) = -\omega_{s_\alpha}(\dot{\gamma}(0))$ と求まる。よって

$$\dot{\tilde{\gamma}}(0) = T_{\gamma(0)} s_\alpha(\dot{\gamma}(0)) - (\omega_{s_\alpha}(\dot{\gamma}(0)))^\#|_{\tilde{\gamma}(0)} \quad (2.5.1)$$

である。このため、 $e \in \varpi^{-1}(\{x\})$ における水平な接ベクトル全体の集合を H_e と書く

$$T_e \varpi: H_e \longrightarrow T_x M, \quad \dot{\tilde{\gamma}}(0) \longmapsto \dot{\gamma}(0)$$

がベクトル空間の同型写像であることが分かる。よって短完全列

$$0 \longrightarrow \text{Ker } T_e \varpi \longrightarrow T_e P \xrightarrow{T_e \varpi} T_x M \longrightarrow 0$$

は分裂し、

$$T_e P = H_e \oplus \text{Ker } T_e \varpi$$

が成り立つ。さらに $\forall g \in \text{GL}(V)$ に対して、 $\tilde{\gamma}(t) \blacktriangleleft g$ は明らかに $\gamma(t)$ の水平持ち上げだから、

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \tilde{\gamma}(t) \blacktriangleleft g = T_e R_g(\dot{\tilde{\gamma}}(0)) \in H_e \blacktriangleleft g$$

であり、 $H_e \blacktriangleleft g = T_e R_g(H_e)$ が分かる。以上の議論からベクトル束の接続 ∇^E が主束 $\text{Fr}(E)$ の接続 $\{H_e\}_{e \in \text{Fr}(E)}$ を与えることが分かった。よって定理 2.4 から対応する接続形式 $\omega \in \Omega^1(\text{Fr}(E); \mathfrak{g})$ が存在し、(2.5.1) より ∇^E の接続行列を $s_\alpha^* \omega(X) = \omega_{s_\alpha}(X)$ の形で再現する。

以上の議論により、特性類はベクトル束 E の接続 $\nabla^E: \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(M; E)$ とそのフレーム束 $\text{Fr}(E)$ の局所切断 $s_\alpha: U_\alpha \longrightarrow \varpi^{-1}(U_\alpha)$ が与えられたときに、 U_α 上の曲率行列 $\Omega_{s_\alpha}: \mathfrak{X}(U_\alpha) \times \mathfrak{X}(U_\alpha) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ を

$$R^{\nabla^E}(X, Y)_{s_\alpha i} =: [\Omega_{s_\alpha}(X, Y)]^j{}_i s_{\alpha j}$$

と定義した上で $\Omega_{s_\alpha} \in \Omega^2(U_\alpha; \mathfrak{gl}(V))$ と見做せば、

$$\Lambda := f(\Omega_{s_\alpha}) \in \Omega^{2k}(M)$$

として特性類が得られるのである。このことを踏まえて、特性類 Λ のことをしばしば $\chi(E)$ とか $\chi(R^{\nabla^E})$ などと書く。後にホモトピー論的扱いをする際に、特性類をベクトル束に対応づけることが本質的であることがわかる。

2.5.4 不変多項式の代数構造

定理 2.13 による主束, もしくはベクトル束上の特性類の構成は, 結局のところ与えられた構造群 G に関して $\text{Ad}(G)$ -不変な多項式を見つける問題に帰着される.

今, \mathbb{K} を任意の体としよう. そして集合

$$\text{Fun}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}) := \{ f: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K} \}$$

の上に $+$, \cdot , \blacktriangleright を

$$\begin{aligned} (f+g)(x_1, \dots, x_n) &:= f(x_1, \dots, x_n) + g(x_1, \dots, x_n) \\ (f \cdot g)(x_1, \dots, x_n) &:= f(x_1, \dots, x_n)g(x_1, \dots, x_n) \\ (a \blacktriangleright f)(x_1, \dots, x_n) &:= af(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

と定義することで組 $(\text{Fun}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}), +, \cdot, \blacktriangleright)$ を \mathbb{K} -結合代数と見做す. このとき, 代入写像

$$\varepsilon: \mathbb{K}[t_1, \dots, t_n] \longrightarrow \text{Fun}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}), P(t_1, \dots, t_n) \longmapsto ((x_1, \dots, x_n) \longmapsto P(x_1, \dots, x_n))$$

は \mathbb{K} -結合代数の準同型である.

補題 2.10: 多項式の評価写像

\mathbb{K} が無限体ならば ε は単射になる.

証明 $\text{Ker } \varepsilon = 0$ を示す. $\text{Ker } \varepsilon \supset 0$ は自明. $\forall P \in \text{Ker } \varepsilon$ をとると $P = 0$ であることを n に関する数学的帰納法により示す. $n = 1$ のとき, P は高々 $\deg P < \infty$ 個の根を持つが, $P \in \text{Ker } \varepsilon$ より $\forall x \in \mathbb{K}, P(x) = 0$ なので $\deg P > 0$ だと矛盾. よって $P = 0$ である.

次に, $n-1$ まで主張が示されているとする. このとき不定元 t_n について項を整理することで, $P \in \text{Ker } \varepsilon \subset \mathbb{K}[t_1, \dots, t_n]$ を $\mathbb{K}[t_1, \dots, t_{n-1}][t_n]$ の元と見做することができる:

$$P(t_1, \dots, t_n) =: \sum_{k=0}^{\deg P} \underbrace{P_k(t_1, \dots, t_{n-1})}_{\in \mathbb{K}[t_1, \dots, t_{n-1}]} (t_n)^k$$

$P \in \text{Ker } \varepsilon$ なので, $n = 1$ の場合の議論から $\forall (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{K}^{n-1}$ について 1 変数多項式 $\sum_{k=0}^{\deg P} P_k(x_1, \dots, x_{n-1}) (t_n)^k = 0$, i.e. $\varepsilon(P_k(t_1, \dots, t_{n-1})) = 0$ である. よって帰納法の仮定から $P_k(t_1, \dots, t_{n-1}) = 0$, i.e. $P = 0$ が言えた. ■

補題 2.11: 係数体の拡大

\mathbb{K} を標数 0 の体とする.

このとき $P(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n] \subset \mathbb{K}[t_1, \dots, t_n]$ について^a

$$\varepsilon(P(t_1, \dots, t_n)) = 0$$

ならば, 任意の標数 0 の可換環^b R についても写像

$$R^n \longrightarrow R, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto P(x_1, \dots, x_n)$$

はゼロ写像である.

^a \mathbb{K} の標数が 0 であることから単射になる体の準同型 $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{K}, k \longmapsto k \cdot 1$ が誘導する \mathbb{Z} -代数の単射準同型 $\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n] \longrightarrow \mathbb{K}[t_1, \dots, t_n]$ によって $P(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{K}[t_1, \dots, t_n]$ と見做した.

^b 乗法単位元 1 を持つ

証明 \mathbb{K} は無限体だから, 補題 2.10 より \mathbb{Z} -係数多項式として $P(t_1, \dots, t_n) = 0$ である. ここで単射な環準同型 $\mathbb{Z} \longrightarrow R, k \longmapsto k \cdot 1$ が誘導する単射 $\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n] \longrightarrow R[t_1, \dots, t_n]$ によって 0 は 0 に移るので, 示された. ■

以降では \mathbb{K} を標数 0 の体とする. $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ の場合に $\mathrm{Ad}(G)$ -不変多項式を探そう. $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) = \mathrm{M}(n, \mathbb{K})$ だから, $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ 上の多項式とは \mathbb{K} -結合代数 $\mathbb{K}[t^i_j] \cong \mathbb{K}[t_1, \dots, t_{n^2}]$ の元のことである. 【例 2.4.6】より, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ の随伴表現は

$$\mathrm{Ad}: G \longrightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}), g \longmapsto (X \longmapsto gXg^{-1})$$

と書ける.

補題 2.12:

- $\mathrm{Ad}(\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}))$ -不変多項式 $P \in \mathbb{K}[t^i_j]$
- 単位的 \mathbb{K} -結合代数 R

を与える. このとき $\forall g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}), \forall X \in \mathrm{M}(n, R,)$ に対して

$$P(gXg^{-1}) = P(X)$$

証明 $\forall g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ について, 不変多項式の定義および補題 2.10 から

$$P_g(t^i_j) := P([gtg^{-1}]^i_j) - P(t^i_j) \in \mathbb{K}[t^i_j]$$

はゼロ多項式である. よって単射 $\mathbb{K} \longrightarrow R, x \longmapsto x \cdot 1$ が誘導する埋め込み $\mathbb{K}[t^i_j] \hookrightarrow \mathbb{K}[t^i_j]$ によって $P_g(t^i_j) \in \mathbb{K}[t^i_j]$ と見做すと $P_g(t^i_j) = 0$ であり, 補題 2.10 から

$$P_g(X) = P(gXg^{-1}) - P(X) = 0 \iff P(gXg^{-1}) = P(X)$$

が従う. ■

ここで,

$$f(t_j^i, \lambda) := \det(\lambda \mathbf{1}_n + [t_j^i]) \in \mathbb{Z}[t_j^i, \lambda]$$

を考える. λ について項を整理することで r 個の $f_k(t_j^i) \in \mathbb{Z}[t_j^i]$

$$\begin{aligned} f(t_j^i, \lambda) &=: \lambda^n + f_1(t_j^i)\lambda^{n-1} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^n f_k(t_j^i)\lambda^{n-k} \end{aligned}$$

を得る. 補題 2.11 により $f(t_j^i, \lambda) \in \mathbb{K}[t_j^i, \lambda]$, $f_k(t_j^i) \in \mathbb{K}[t_j^i]$ と見做してもこの等式は成り立つ.

命題 2.16: $f_k(t_j^i)$ は不変多項式

\mathbb{K} を標数 0 の体とする. このとき $f_k(t_j^i) \in \mathbb{K}[t_j^i]$ は $\text{Ad}(\text{GL}(n, \mathbb{K}))$ -不変多項式である.

証明 $R = \mathbb{K}[t_j^i, \lambda]$ の場合に命題 2.12 を使うと, $\forall g \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$ および $\forall X \in: M(n, \mathbb{K}[t_j^i, \lambda])$ に対して

$$\det(gXg^{-1}) = \det(X)$$

がわかる. $X = [\lambda\delta_j^i + t_j^i]$ の場合を考えれば

$$f(t_j^i, \lambda) = \det(X) = \det(gXg^{-1}) = c([gtg^{-1}]_j^i, \lambda)$$

がわかり, 示された. ■

【例 2.5.2】複素の場合

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の場合を考える. \mathbb{C} は無限体だから, 補題 2.10 より \mathbb{C} -係数多項式と多項式関数を同一視できる.

$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ の部分集合

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})^{\text{diag}} := \{ X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid \text{対角化可能} \}$$

を考える.

$$\begin{aligned} &X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \setminus \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})^{\text{diag}} \\ \iff &f_X(\lambda) := \det(\lambda \mathbf{1}_n - X) \text{ とその微分 } f'_X(\lambda) \text{ が共通の根を持つ} \\ \iff &f_X, f'_X \in \mathbb{C}[\lambda] \text{ の終結式 } \text{res}(f_X, f'_X) = 0 \end{aligned}$$

であるが, 写像 $\varphi: \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}, X \mapsto \text{res}(f_X, f'_X)$ は行列の成分に関する多項式関数なので C^∞ 関数であり, $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \setminus \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})^{\text{diag}} = \varphi^{-1}(\{0\})$ が余次元 1 の部分多様体だと分かった. 従って $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})^{\text{diag}}$ は $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ 上稠密である.

命題 2.17:

n 変数の対称多項式の空間を $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]^{\text{Sym}}$ と書く. このとき, 写像

$$\rho: \text{Inv}(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})) \longrightarrow \mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]^{\text{Sym}}$$

$$P(t_j^i) \longmapsto \left((\lambda_1, \dots, \lambda_n) \longmapsto P|_{\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})^{\text{diag}}} \left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \right) \right)$$

は \mathbb{C} -結合代数の同型写像である.

証明 P が不変多項式であることから, 対称群 \mathfrak{S}_n の \mathbb{C}^n への作用

$$\sigma \triangleright (\lambda_1, \dots, \lambda_n) := (\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(n)})$$

について $\text{Im } \rho$ は不変である. よって ρ の値域を n 変数の対称多項式の空間 $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]^{\text{Sym}}$ に制限することができる. $\forall P \in \text{Ker } \rho$ をとる. このとき $\forall X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})^{\text{diag}}$ について $P(X) = 0$ であるが, $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})^{\text{diag}}$ が稠密なので, 多項式関数 $P(X)$ の連続性から $\forall X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ に対して $P(X) = 0$ が言える. i.e. ρ は単射である. 一方, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ に関して, k 次の基本対称式 $\sigma_k \in \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n] \subset \mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]$ を使って

$$\begin{aligned} \rho(f(t_j^i, \lambda))(\lambda_1, \dots, \lambda_n) &= \det \left(\lambda \mathbf{1}_n + \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \right) \\ &= \prod_{i=1}^n (\lambda + \lambda_i) \\ &= \sum_{k=0}^n \sigma_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \lambda^{n-k} \end{aligned}$$

と書けるので

$$\rho(f_k(t_j^i)) = \sigma_k$$

であり, $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]^{\text{Sym}}$ は $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ によって生成されるので, ρ が全射であることが分かった. ■

結局,

$$\text{Inv}(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})) = \mathbb{C}[f_1(t_j^i), \dots, f_n(t_j^i)]$$

が分かった. 全く同様の議論により

$$\text{Inv}(\mathfrak{u}(n, \mathbb{C})) = \mathbb{C}[f_1(t_j^i), \dots, f_n(t_j^i)]$$

もわかる.

【例 2.5.3】実の場合

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合を考える. \mathbb{R} は無限体だから, 補題 2.10 より \mathbb{R} -係数多項式と多項式関数を同一視できる.

補題 2.13:

k 次多項式 $f: \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ は $\text{Ad}(\text{GL}(n, \mathbb{R}))$ -不変ならば $\text{Ad}(\text{GL}(n, \mathbb{C}))$ -不変である.

証明 $\forall A \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ を 1 つ固定する. Cramer の公式より, A の余因子行列を \tilde{A} と書くと $A^{-1} = \tilde{A} / \det A$ が成り立つ. f は k 次多項式なので

$$f(AXA^{-1}) = f(AX\tilde{A}) / (\det A)^k \iff f(AX\tilde{A}) = (\det A)^k f(AXA^{-1})$$

が分かった. ここで, 多項式

$$q(A, X) := f(AX\tilde{A}) - (\det A)^k f(X)$$

を考える. 仮定より $\text{GL}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n^2}$ 上で $q(A, X) = 0$ であるが, 多項式関数 $q: \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$ は連続関数である. さらに $\mathbb{R}^{n^2} \setminus \text{GL}(n, \mathbb{R}) = \det(\{0\})$ は \mathbb{R}^{n^2} の余次元 1 の部分多様体だから $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ は \mathbb{R}^{n^2} 上稠密であり, $\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2}$ 上で $q(A, X) = 0$ が言える. $q(A, X)$ は $\mathbb{C}^{n^2} \times \mathbb{C}^{n^2}$ 上の多項式関数と見做すと正則関数なので, 一致の定理から $\mathbb{C}^{n^2} \times \mathbb{C}^{n^2}$ 上でも $q(A, X) = 0$ が言える. ■

命題 2.18:

n 変数の対称多項式の空間を $\mathbb{R}[t_1, \dots, t_n]^{\text{Sym}}$ と書く. このとき, 写像

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbb{R}}: \text{Inv}(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})) &\longrightarrow \mathbb{R}[t_1, \dots, t_n]^{\text{Sym}} \\ P(t_j^i) &\longmapsto \left((\lambda_1, \dots, \lambda_n) \longmapsto P|_{\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})^{\text{diag}}} \left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \right) \right) \end{aligned}$$

は \mathbb{R} -結合代数の同型写像である.

証明 補題 2.13 より, 可換図式

$$\begin{array}{ccc} \text{Inv}(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})) & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]^{\text{Sym}} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Inv}(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})) & \xrightarrow{\rho_{\mathbb{R}}} & \mathbb{R}[t_1, \dots, t_n]^{\text{Sym}} \end{array}$$

が成り立つ. よって $\rho_{\mathbb{R}}$ は単射. 全射性は命題 2.17 と全く同様の議論から従う. ■

結局,

$$\text{Inv}(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})) = \mathbb{R}[f_1(t_j^i), \dots, f_n(t_j^i)]$$

が分かった.

【例 2.5.4】直交群の場合

次に, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $G = O(n)$ の場合を考える.

補題 2.14:

$\forall X \in \mathfrak{o}(n)$ に対して

$$f_{2k+1}(X) = 0$$

証明 $X \in \mathfrak{o}(n)$ だから $X = -X^T$ が成り立つ. よって

$$\begin{aligned} f(X, \lambda) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k f_k(X) \lambda^{n-k} \\ &= \det(\lambda \mathbb{1}_n + X) \\ &= \det(\lambda \mathbb{1}_n + X^T) \\ &= \det(\lambda \mathbb{1}_n - X) \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k f_k(X) \lambda^{n-k} \end{aligned}$$

であり, 示された. ■

以下では $p_k := f_{2k}$ とおく.

命題 2.19:

$$\text{Inv}(\mathfrak{o}(n)) \cong \mathbb{R}[p_1(t^i_j), \dots, p_{\lfloor n/2 \rfloor}(t^i_j)]$$

証明 自然な埋め込み $\rho: \mathbb{R}[p_1(t^i_j), \dots, p_{\lfloor n/2 \rfloor}(t^i_j)] \hookrightarrow \text{Inv}(\mathfrak{o}(n))$ が全単射であることを示す. ■

以下しばらくの間, 命題 2.17, 2.18 を使って色々な特性類を定義していく.

Chern 類

Chern 類の構成は, 命題 2.17 による.

定義 2.25: Chern 類

- 階数 n の複素ベクトル束 $V \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$
- E の接続 $\nabla^E: \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(M; E)$

を与える.

(1) **全 Chern 形式**とは,

$$c(R^{\nabla^E}) := \det \left(\text{id}_E + \frac{i}{2\pi} R^{\nabla^E} \right) \in \Omega^\bullet(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

のこと. **第 k -Chern 形式** (k -th Chern form) とは,

$$c_k(R^{\nabla^E}) := f_k \left(\frac{i}{2\pi} R^{\nabla^E} \right) \in \Omega^{2k}(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

のこと.

(2) **全 Chern 類** (total Chern class) とは,

$$c(E) := [c(R^{\nabla^E})] \in H_{\text{dR}}^\bullet(M; \mathbb{C})$$

のこと. **第 k -Chern 類** (k -th Chern class) とは,

$$c_k(E) := [c_k(R^{\nabla^E})] \in H_{\text{dR}}^{2k}(M; \mathbb{C})$$

のこと.

Pontrjagin 類

Euler 類

2.5.5 特性類のホモトピー論的扱い

第 3 章

位相的場の理論

この章で登場する多様体は特に断らない限り常に C^∞ 多様体である。また、体 \mathbb{K} と言ったら $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のいずれかを指すことにしよう。

また、グラフ G の頂点集合を $V(G)$ 、辺集合を $E(G)$ と書く。

3.1 モノイダル圏

まず手始めに、モノイダル圏とストリング図式の準備をする。特に、コボルディズム圏と有限次元 Hilbert 空間の圏が **rigid** な**対称モノイダル圏**であることの直感的な説明をする。

3.1.1 モノイダル圏の定義

定義 3.1: モノイダル圏

モノイダル圏 (monoidal category) は、以下の 5 つのデータからなる：

- 圏 \mathcal{C}
- テンソル積 (tensor product) と呼ばれる関手 $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$
- 単位対象 (unit object) $I \in \text{Ob}(\mathcal{C})$
- **associator** と呼ばれる自然同値

$$\{a_{X,Y,Z}: (X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{\cong} X \otimes (Y \otimes Z)\}_{X,Y,Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

- **left/right unitors** と呼ばれる自然同値

$$\{l_X: I \otimes X \xrightarrow{\cong} X\}_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})},$$

$$\{r_X: X \otimes I \xrightarrow{\cong} X\}_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは $\forall X, Y, Z, W \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ について以下の 2 つの図式を可換にする：

(triangle diagram)



定義 3.1 は、**ストリング図式** (string diagram) で理解すると分かりやすい。モノイダル圏の射 $f: X \rightarrow Y$, $f': X' \rightarrow Y'$ があったら、そのテンソル積 $f \otimes f': X \otimes X' \rightarrow Y \otimes Y'$ はストリング図式上では次のようになる^{*1}。

$$\begin{array}{c}
 \uparrow Y \otimes Y' \\
 \bullet \\
 \uparrow X \otimes X'
 \end{array}
 f \otimes f'
 =:
 \begin{array}{cc}
 \begin{array}{c} \uparrow Y \\ \bullet \\ \uparrow X \end{array} f &
 \begin{array}{c} \uparrow Y' \\ \bullet \\ \uparrow X' \end{array} f'
 \end{array}$$

また、単位対象 $I \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ は空白として表す。従って例えば射 $f: I \rightarrow X$ は次のようになる：

$$\begin{array}{c}
 \uparrow X \\
 \bullet \\
 \uparrow I \\
 \vdots
 \end{array}
 f
 =:
 \begin{array}{c}
 \uparrow X \\
 \bullet \\
 f
 \end{array}$$

^{*1} このように、ストリング図式におけるテンソル積とはただ図式を横に並べることであるから、(triangle diagram), (pentagon diagram) などが自明な等式であるように見えてしまうという欠点がある。

【例 3.1.1】コボルディズム圏

厳密な構成^aは後回しにして、コボルディズム圏 (cobordism category) を直感的に導入しよう。圏^b $\mathbf{Bord}_{\langle D, D+1 \rangle}$ は、

- D 次元多様体を対象
- $D+1$ 次元のコボルディズム (cobordism) を射

とするような圏のことを言う。 $D+1$ 次元のコボルディズム $\mathcal{M}: X \rightarrow Y$ と言うのは、 $D+1$ 次元多様体 \mathcal{M} であって、 $\partial\mathcal{M} = X \amalg Y$ となっているようなもの (の微分同相類) のことである。 $D=2$ の場合に直感的に^c図示すると次のようになる：



射 $\mathcal{M}: X \rightarrow Y$, $\mathcal{N}: Y \rightarrow Z$ の合成 $\mathcal{N} \circ \mathcal{M}: X \rightarrow Y \rightarrow Z$ とは、 Y に沿った貼り合わせ多様体 $\mathcal{M} \cup_Y \mathcal{N}$ である：



圏 $\mathbf{Bord}_{\langle D, D+1 \rangle}$ は、 disjoint union に関してモノイダル圏になる：

$$X \otimes Y := \text{disjoint union of } X \text{ and } Y, \\ I := \emptyset$$

^a 例えば、 (B, f) -structure の定義から始めるコボルディズムの統一的な扱いは [Koc96, CHAPTER 1] などを参照。

^b 記号は [FH21] に合わせた。 ボルディズム圏 (bordism category) と呼ぶこともある。

^c この図だと \mathcal{M} の「側面」が \mathcal{M} の境界になってしまっていて正確ではない。

【例 3.1.2】有限次元 Hilbert 空間の圏

有限次元 \mathbb{K} -Hilbert 空間の圏 **Hilb** とは,

- 有限次元 \mathbb{K} -Hilbert 空間を対象
- 線型写像を射
- 写像の合成を射の合成

に持つような圏のことを言う. **Hilb** はベクトル空間のテンソル積 $V_1 \otimes V_2$ の上に内積を

$$\langle v_1 \otimes v_2, w_1 \otimes w_2 \rangle := \langle v_1, w_1 \rangle_1 \langle v_2, w_2 \rangle_2$$

と定義することで**モノイダル圏**になる.

3.1.2 組紐付きモノイダル圏

定義 3.2: 組紐付きモノイダル圏

組紐付きモノイダル圏 (braided monoidal category) とは, 以下の 2 つからなる:

- **モノイダル圏** \mathcal{C}
- **組紐** (braiding) と呼ばれる自然同型

$$\{b_{X,Y}: X \otimes Y \xrightarrow{\cong} Y \otimes X\}_{X,Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ について以下の図式を可換にする:

(hexagon diagrams)

$$\begin{array}{ccccc} X \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{a_{X,Y,Z}^{-1}} & (X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{b_{X,Y} \otimes 1_Z} & (Y \otimes X) \otimes Z \\ \downarrow b_{X,Y \otimes Z} & & & & \downarrow a_{Y,X,Z} \\ (Y \otimes Z) \otimes X & \xleftarrow{a_{Y,Z,X}^{-1}} & Y \otimes (Z \otimes X) & \xleftarrow{1_Y \otimes b_{X,Z}} & Y \otimes (X \otimes Z) \\ \\ (X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{a_{X,Y,Z}} & X \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{1_X \otimes b_{Y,Z}} & X \otimes (Z \otimes Y) \\ \downarrow b_{X \otimes Y, Z} & & & & \downarrow a_{X,Z,Y}^{-1} \\ Z \otimes (X \otimes Y) & \xleftarrow{a_{Z,X,Y}} & (Z \otimes X) \otimes Y & \xleftarrow{b_{X,Z} \otimes 1_Y} & (X \otimes Z) \otimes Y \end{array}$$

組紐付きモノイダル圏 \mathcal{C} であって, \mathcal{C} の組紐が $b_{X,Y} = b_{Y,X}^{-1}$ を満たすもののことを**対称モノイダル圏** (symmetric monoidal category) と呼ぶ.

ストリング図式で組紐を書く場合は次のようにする：

$$b_{X,Y} =: \begin{array}{c} \text{diagram} \\ X \quad Y \end{array} \qquad b_{X,Y}^{-1} =: \begin{array}{c} \text{diagram} \\ X \quad Y \end{array}$$

このとき (hexagon diagrams) はとてもわかりやすくなる*2：



対称モノイダル圏の条件も一目瞭然である：



【例 3.1.3】 $\text{Bord}_{\langle D, D+1 \rangle}$ の組紐

Cob_{D+1} の組紐 $b_{X,Y}: X \otimes Y \longrightarrow Y \otimes X$ は、多様体 $(X \times [0, 1]) \amalg (Y \times [0, 1])$ と微分同相である

*2 associator を明示した.

ような $D + 1$ 次元多様体のことを言う：



図から, $\mathbf{Bord}_{\langle D, D+1 \rangle}$ は対称モノイダル圏である.

【例 3.1.4】 Hilb の組紐

Hilb の組紐は

$$b_{X,Y}: X \otimes Y \longrightarrow Y \otimes X, \\ x \otimes y \longmapsto y \otimes x$$

である. これがベクトル空間の同型写像であることが示される. 明らかに $b_{X,Y} = b_{Y,X}^{-1}$ なので Hilb は対称モノイダル圏である.

3.1.3 閉圏・rigid なモノイダル圏・ダガー圏

圏 \mathcal{C} を与える. **Hom 関手** (Hom functor) とは, 関手

$$\mathrm{Hom}: \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

であって

$$(X, Y) \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \\ \left((f, g): (X', Y) \longrightarrow (X, Y') \right) \longmapsto \left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y'), h \longmapsto g \circ h \circ f \right)$$

なる対応を与えるもののこと.

定義 3.3: 閉圏

モノイダル圏 \mathcal{C} を与える.

- \mathcal{C} が左に閉じている (left closed) とは, **internal hom functor** と呼ばれる関手

$$\multimap: \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

と, **currying** と呼ばれる自然同型

$$\{c_{X,Y,Z}: \mathrm{Hom}(X \otimes Y, Z) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(X, Y \multimap Z)\}_{X,Y,Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

の2つが存在することを言う.

- \mathcal{C} が右に閉じている (right closed) とは, **internal hom functor** と呼ばれる関手と, **currying** と呼ばれる自然同型

$$\{c_{X,Y,Z}: \text{Hom}(X \otimes Y, Z) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}(Y, X \multimap Z)\}_{X,Y,Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

の2つが存在することを言う.

定義 3.4: 双対

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ およびその任意の対象 $X, X^* \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を与える. X^* が X の**左双対** (left dual) であるとは,

- **coevaluation** と呼ばれる射

$$\text{coev}_X^L: I \longrightarrow X \otimes X^*$$

- **evaluation** と呼ばれる射

$$\text{ev}_X^L: X^* \otimes X \longrightarrow I$$

が存在して以下の図式を可換にすることを言う:

(zig-zag equations)

$$\begin{array}{ccc} I \otimes X & \xrightarrow{\text{coev}_X^L \otimes \text{Id}_X} & (X \otimes X^*) \otimes X \\ \downarrow r_X & & \downarrow a_{X, X^*, X} \\ & & X \otimes (X^* \otimes X) \\ & & \downarrow \text{Id}_X \otimes \text{ev}_X^L \\ X & \xleftarrow{r_X} & X \otimes I \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X^* \otimes I & \xrightarrow{\text{Id}_{X^*} \otimes \text{coev}_X^L} & X^* \otimes (X \otimes X^*) \\ \downarrow l_{X^*} & & \downarrow a_{X^*, X, X^*}^{-1} \\ & & (X^* \otimes X) \otimes X^* \\ & & \downarrow \text{ev}_X^L \otimes \text{Id}_{X^*} \\ X^* & \xleftarrow{l_{X^*}} & I \otimes X^* \end{array}$$

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ およびその任意の対象 $X, *X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を与える. $*X$ が X の**右双対** (right dual) であるとは,

- 射

$$\text{coev}_X^R: I \longrightarrow *X \otimes X$$

- 射

$$\text{ev}_X^R: X \otimes *X \longrightarrow I$$

が存在して以下の図式を可換にすることを言う：

(zig-zag equations)

$$\begin{array}{ccc} X \otimes I & \xrightarrow{\text{Id}_X \otimes \text{coev}_X^R} & X \otimes (*X \otimes X) \\ \downarrow l_X & & \downarrow a_{X, *X, X}^{-1} \\ & & (X \otimes *X) \otimes X \\ & & \downarrow \text{ev}_X^R \otimes \text{Id}_X \\ X & \xleftarrow{l_X} & I \otimes X \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} I \otimes *X & \xrightarrow{\text{coev}_X^R \otimes \text{Id}_{*X}} & (*X \otimes X) \otimes *X \\ \downarrow l_{X^*} & & \downarrow a_{*X, X, *X}^{-1} \\ & & *X \otimes (X \otimes *X) \\ & & \downarrow \text{Id}_{*X} \otimes \text{ev}_X^R \\ *X & \xleftarrow{r_{X^*}} & *X \otimes I \end{array}$$

双対は, 単に矢印を逆にすることで表現する：

$$\text{coev}_X^L =: \text{---} \curvearrowright \text{---}$$

$$\text{ev}_X^L =: \text{---} \curvearrowleft \text{---}$$

$$\text{coev}_X^R =: \text{---} \curvearrowright \text{---}$$

$$\text{ev}_X^R =: \text{---} \curvearrowleft \text{---}$$

$\text{coev}_X^L, \text{ev}_X^L$ に対する **(zig-zag equations)** は次のようになり, 本当にジグザグしている：

$$\text{---} \uparrow \text{---} = \text{---} \uparrow \curvearrowright \downarrow \curvearrowleft \uparrow \text{---}$$



$\text{coev}^R, \text{ev}^R$ に対する (zig-zag equations) は



である.

定義 3.5: rigid なモノイダル圏

モノイダル圏 \mathcal{C} は, $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が左・右双対を持つとき rigid であると言われる.

【例 3.1.5】 $\text{Bord}_{\langle D, D+1 \rangle}^{\text{SO}}$ の unit と counit

$\text{Bord}_{\langle D, D+1 \rangle}^{\text{SO}}$ と書いて, 向き付け可能な多様体が成すコボルディズム圏を表すことにする^a. このとき, $X \in \text{Ob}(\text{Bord}_{\langle D, D+1 \rangle}^{\text{SO}})$ の双対とは, 向き付けを逆にした D 次元多様体 $-X$ のことである. unit, counit はそれぞれ U 字管とそれを逆にしたもののような見た目をしている:



internal hom functor を $X \multimap Y := X^* \otimes Y$ とすれば, 図から $\text{Bord}_{\langle 2, 3 \rangle}^{\text{SO}}$ が閉圏であることを直接確認できる.

^a 一般に, $\text{Bord}_{\langle D, D+1 \rangle}$ の右肩には注目する接構造 (tangential structure) を指定する記号を書く.

【例 3.1.6】 Hilb の unit と counit

Hilb において $I = \mathbb{C}$ である。従って, $X \in \text{Ob}(\text{Hilb})$ の双対とは双対ベクトル空間 $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, \mathbb{C})$ のことである。ブラ空間のことだと言っても良い。特に, 自然な同型 $X^* \otimes Y \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y)$ を使うと X の unit は

$$\begin{aligned} \text{coev}_X^L: I &\longrightarrow X^* \otimes X, \\ c &\longmapsto c \text{id}_X \end{aligned}$$

で, counit は

$$\begin{aligned} \text{ev}_X^L: X \otimes X^* &\longrightarrow I, \\ x \otimes f &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

であることがわかる。internal hom functor を $X \multimap Y := X^* \otimes Y \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y)$ とすれば Hilb が閉圏であることを直接確認できる。

実は, rigid なモノイダル圏は自動的に閉圏になる。これは

$$X \multimap Y := X^* \otimes Y$$

として internal hom functor を定義することで確認できる。

定義 3.6: ダガー圏

圏 \mathcal{C} がダガー圏 (dagger category) であるとは, 関手

$$\dagger: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$$

が存在して以下を充たすことを言う:

- (1) $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $X^\dagger = X$ を充たす。
- (2) \mathcal{C} の任意の射 $f: X \longrightarrow Y$ に対して $(f^\dagger)^\dagger = f$ を充たす。

【例 3.1.7】 $\text{Bord}_{\langle D, D+1 \rangle}^{\text{SO}}$ の dagger

$\text{Bord}_{\langle D, D+1 \rangle}^{\text{SO}}$ における $\mathcal{M}: X \longrightarrow Y$ のダガーは, 上下を逆にしてから \mathcal{M} の連結成分毎に向きを逆にすることで得られる。

【例 3.1.8】 Hilb の dagger

Hilb における $f: X \longrightarrow Y$ のダガーは, $\forall \phi \in X, \forall \psi \in Y$ に対して

$$\langle f^\dagger(\psi), \phi \rangle := \langle \psi, f(\phi) \rangle$$

とすることで定義される。

3.1.4 モノイダル関手

モノイダル関手とは、ざっくり言うとモノイダル圏の構造を保存するような関手のことである：

定義 3.7: モノイダル関手

2つのモノイダル圏 \mathcal{C}, \mathcal{D} の間の関手

$$F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

が lax monoidal functor であるとは、

- 射

$$\varepsilon: I_{\mathcal{D}} \longrightarrow F(I_{\mathcal{C}})$$

- 自然変換

$$\{\mu_{X,Y}: F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y) \longrightarrow F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y)\}_{X,Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

があって、 $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して以下の図式が可換になること：

(associativity)

$$\begin{array}{ccc} (F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y)) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z) & \xrightarrow{a_{F(X), F(Y), F(Z)}} & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} (F(Y) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z)) \\ \mu_{X,Y} \otimes 1_{F(Z)} \downarrow & & \downarrow 1_{F(X)} \otimes \mu_{Y,Z} \\ F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z) & & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y \otimes_{\mathcal{C}} Z) \\ \mu_{X \otimes_{\mathcal{C}} Y, Z} \downarrow & & \downarrow \mu_{X, Y \otimes_{\mathcal{C}} Z} \\ F((X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{C}} Z) & \xrightarrow{F(a_{X,Y,Z}^{\mathcal{C}})} & F(X \otimes_{\mathcal{C}} (Y \otimes_{\mathcal{C}} Z)) \end{array}$$

(unitality)

$$\begin{array}{ccc} I_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathcal{D}} F(X) & \xrightarrow{\varepsilon \otimes 1_{F(X)}} & F(I_{\mathcal{C}}) \otimes_{\mathcal{D}} F(X) \\ l_{F(X)}^{\mathcal{D}} \downarrow & & \downarrow \mu_{I_{\mathcal{C}}, X} \\ F(X) & \xleftarrow{F(l_X^{\mathcal{C}})} & F(I_{\mathcal{C}} \otimes_{\mathcal{C}} X) \\ \\ F(X) \otimes_{\mathcal{D}} I_{\mathcal{D}} & \xrightarrow{1_{F(X)} \otimes \varepsilon} & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(I_{\mathcal{C}}) \\ r_{F(X)}^{\mathcal{D}} \downarrow & & \downarrow \mu_{X, I_{\mathcal{C}}} \\ F(X) & \xleftarrow{F(r_X^{\mathcal{C}})} & F(X \otimes_{\mathcal{C}} I_{\mathcal{C}}) \end{array}$$

- lax monoidal functor F の ε と $\mu_{X,Y}$ が全て同型射ならば, F は **strong monoidal functor** と呼ばれる.
- lax monoidal functor F の ε と $\mu_{X,Y}$ が全て恒等射ならば, F は **strict monoidal functor** と呼ばれる.

3.2 TQFT の定義

位相的場の理論 (Topological Quantum Field Theory; TQFT) の枠組みをトップダウンに導入する.

3.2.1 Atiyah の公理系

まず, 全ての出発点として Atiyah の公理系 [Ati88] というものがある:

公理 3.1: Atiyah の公理系 (若干簡略版)

体 \mathbb{K} 上の^a, D 次元の位相的場の理論 (Topological Quantum Field Theory; TQFT) とは, 以下の 2 つのデータからなる:

- (1) 向き付けられた (oriented) D 次元の閉多様体 (closed manifold) Σ に対応づけられた有限次元 \mathbb{K} -ベクトル空間 $V(\Sigma)$
- (2) 向き付けられた $D+1$ 次元の境界付き多様体 M に対応づけられたベクトル $Z(M) \in V(\partial M)$

これらのデータは以下の条件を充たす:

(TQFT-1)

Z は向きを保つ微分同相写像について関手的 (functorial) に振る舞う.

(TQFT-2)

Z は対合的 (involutory) である.

(TQFT-3)

Z はモノイダル的 (multiplicative^b) である.

^a 原論文 [Ati88] では環としていて, ベクトル空間の代わりに環上の有限生成加群を扱っている. 今回は Hilbert 空間しか考えないので体 \mathbb{K} としておいた.

^b 「乗法的」というと語弊がありそうなのでモノイダル的と言った.

[Ati88] に倣って公理の意味を精査していく.

(TQFT-1)

この公理は 2 つの要請を持つ:

- (1) D 次元閉多様体 $\Sigma, \Sigma', \Sigma''$ の間の向きを保つ微分同相写像 $f: \Sigma \rightarrow \Sigma', g: \Sigma' \rightarrow \Sigma''$ に対して, $V(f): V(\Sigma) \rightarrow V(\Sigma')$ はベクトル空間の同型写像で, $V(g \circ f) = V(g) \circ V(f)$ が成り立つ.

- (2) 向きを保つ微分同相写像 $f: \Sigma \longrightarrow \Sigma'$ が, $D+1$ 次元多様体 M, M' であって $\Sigma = \partial M, \Sigma' = \partial M'$ を充たすものの上に $f: M \longrightarrow M'$ と拡張される場合に $V(f)(Z(M)) = Z(M')$ を充たす.

(TQFT-2)

Σ の向きを逆にして得られる D 次元閉多様体を Σ^* と書く^{*3}とき, $V(\Sigma^*) = V(\Sigma)^*$ を充たす^{*4}.

(TQFT-3)

この公理は 5 つの要請を持つ:

- (1) D 次元閉多様体 Σ_1, Σ_2 に対して

$$V(\Sigma_1 \amalg \Sigma_2) = V(\Sigma_1) \otimes V(\Sigma_2)$$

が成り立つこと.

- (2) $D+1$ 次元多様体 M, M_1, M_2 に対して $\partial M_1 = \Sigma_1 \amalg \Sigma_3, \partial M_2 = \Sigma_2 \amalg \Sigma_3^*, M = M_1 \cup_{\Sigma_3} M_2$ が成り立つならば,

$$Z(M) = \langle Z(M_1) | Z(M_2) \rangle$$

ただし,

$$\langle | \rangle : V(\partial M_1) \otimes V(\partial M_2) = V(\Sigma_1) \otimes V(\Sigma_3) \otimes V(\Sigma_3)^* \otimes V(\Sigma_2) \longrightarrow V(\partial M) = V(\Sigma_1) \otimes V(\Sigma_2),$$

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_3\rangle \otimes \langle \varphi_3| \otimes |\psi_2\rangle \longmapsto \langle \varphi_3 | \psi_3 \rangle |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$$

である.

- (3) (2) において $\Sigma_3 = \emptyset$ ならば,

$$Z(M) = Z(M_1) \otimes Z(M_2)$$

- (4) (1) から^{*5},

$$V(\emptyset) = \mathbb{K}$$

- (5) (3) から^{*6},

$$Z(\emptyset) = 1$$

今や別の同値な定義ができる. $D+1$ 次元多様体 M の境界 ∂M を

$$\partial M = \Sigma_1^* \amalg \Sigma_2$$

と分解すると^{*7}, **(TQFT-3)**-(1) より $Z(M) \in V(\partial M) = Z(\Sigma_1)^* \otimes Z(\Sigma_2) \cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}(Z(\Sigma_1), Z(\Sigma_2))$ が言えるので, $Z(M)$ を線型写像 $Z(M): V(\Sigma_1) \longrightarrow V(\Sigma_2)$ と同一視できるのである. **(TQFT-1)** もあわせると, 結局これまで V, Z と書いていたものは **strong monoidal functor**

$$Z: \mathbf{Bord}_{\langle D, D+1 \rangle} \longrightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$$

^{*3} 【例 3.1.5】の意味で, 圏 \mathbf{Cob}_{D+1} における $\Sigma \in \text{Ob}(\mathbf{Cob}_{D+1})$ の双対となっている.

^{*4} $V(\Sigma)$ が有限次元なので, $V(\Sigma)^*$ はブラ空間と見做せる.

^{*5} \mathbf{Cob}_{D+1} の単位対象は \emptyset なので $\emptyset = \emptyset \amalg \emptyset$. よって (1) から $V(\emptyset) = V(\emptyset) \otimes V(\emptyset)$. これを充たすのは $V(\emptyset) = 0, \mathbb{K}$ (**モノイダル圏** $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の単位対象は \mathbb{K} である) のどちらかしかないので, 非自明な方を採用する.

^{*6} $\emptyset = \emptyset \amalg \emptyset$ なので (3) から $Z(\emptyset) = Z(\emptyset) \otimes Z(\emptyset)$. これを充たす $V(\emptyset) = \mathbb{K}$ の元は $0, 1$ しかないので, 非自明な方を採用する.

^{*7} どちらか一方が \emptyset になっても良い

の 1 つに集約することができる。

定義 3.8: TQFT の定義

D 次元の位相的場の理論 (Topological Quantum Field Theory; TQFT) とは, コボルディズム圏からある対称モノイダル圏 \mathcal{D} への strict monoidal functor^a

$$Z: \mathbf{Bord}_{\langle D, D+1 \rangle} \longrightarrow \mathcal{D}$$

のこと。

^a strong monoidal functor とする場合もある (例えば <https://ncatlab.org/nlab/show/cobordism>) ようだが, 原論文 [Ati88] では strict monoidal functor になっていた。

興味があるのは $\mathcal{D} = \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}, \mathbf{Hilb}$ の場合なので, 以下では TQFT と言ったら strict monoidal functor

$$Z: \mathbf{Bord}_{\langle D, D+1 \rangle} \longrightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}, \mathbf{Hilb}$$

を指すことにしよう。

3.3 連続な高次対称性

エニオンのフュージョン則を議論する前に少し寄り道をして, [日高 22], [GKSW15] に倣って高次対称性 (higher form symmetry) の話をする。この節では自然単位系を使う。時空を表す $D+1$ 次元多様体を \mathcal{M} と書き, \mathcal{M} のチャートの座標関数を $(x^0, x^1, \dots, x^D) =: (t, \mathbf{x})$ と書く。特に D 次元多様体 Σ を使って $\mathcal{M} = \Sigma \times \mathbb{R}$ または $\Sigma \times S^1$ と書ける場合は $x^0 =: t$ で \mathbb{R} または S^1 成分のチャート (時間) を表すことにし, Σ のことを時間一定面と呼ぶ。 \mathcal{M} として Minkowski 時空を考える場合, Minkowski 計量としては $[\eta_{\mu\nu}] := (-1, +1, \dots, +1)$ を用いる。Minkowski 計量でない一般の計量テンソルは $g := g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \in \Gamma(T^*\mathcal{M} \otimes T^*\mathcal{M})$ と表記し, 共役計量テンソルを $g^{\mu\nu} \partial_\mu \otimes \partial_\nu \in \Gamma(T\mathcal{M} \otimes T\mathcal{M})$ と表記する。

\mathcal{M} に計量 $g_{\mu\nu}$ が与えられたとき, 音楽同型 (musical isomorphism) を

$$\begin{aligned} \flat: \mathfrak{X}(\mathcal{M}) &\longrightarrow \Omega^1(\mathcal{M}), \quad X^\mu \partial_\mu \longmapsto g_{\mu\nu} X^\nu dx^\mu, \\ \sharp: \Omega^1(\mathcal{M}) &\longrightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M}), \quad \omega_\mu dx^\mu \longmapsto g^{\mu\nu} \omega_\nu \partial_\mu \end{aligned}$$

で定義する。Hodge star は

$$\begin{aligned} \star: \Omega^p(\mathcal{M}) &\longrightarrow \Omega^{D+1-p}, \\ dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} &\longmapsto \frac{1}{(D+1-p)!} g^{\mu_1\nu_1} \dots g^{\mu_p\nu_p} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_p \mu_{p+1} \dots \mu_{D+1}} dx^{\mu_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{D+1}} \end{aligned}$$

を線型に拡張することで定義される。特に不変体積要素を

$$d^{D+1}x := \star 1 = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{D+1}$$

と定義する。

\mathcal{M} の p 次元部分多様体^{*8} $\mathcal{N}^{(p)} \subset \mathcal{M}$ 上で p -形式 $\omega \in \Omega^p(\mathcal{M})$ を積分する場合、包含写像 $\iota: \mathcal{N}^{(p)} \hookrightarrow \mathcal{M}$ による引き戻し $\iota^*: \Omega^p(\mathcal{M}) \longrightarrow \Omega^p(\mathcal{N}^{(p)})$ を用いて

$$\int_{\mathcal{N}} \omega := \int_{\mathcal{N}^{(p)}} \iota^* \omega$$

と定義する。このとき、Poincaré 双対を考えることで

$$\int_{\mathcal{N}} \omega = \int_{\mathcal{M}} \omega \wedge \delta(\mathcal{N}^{(p)})$$

を充たす $\delta(\mathcal{N}^{(p)}) \in \Omega^{D+1-p}(\mathcal{M})$ (デルタ関数 p -形式と呼ぶ) の存在がわかる^{*9}。さて、 $\mathcal{N}^{(p)} = \partial\mathcal{M}^{(p+1)}$ の場合を考える。 $\forall \omega \in \Omega^p(\mathcal{M})$ に対して Stokes の定理から

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} \omega \wedge \delta(\partial\mathcal{M}^{(p+1)}) &= \int_{\partial\mathcal{M}^{(p+1)}} \omega = \int_{\mathcal{M}^{(p+1)}} d\omega = \int_{\mathcal{M}} d\omega \wedge \delta(\mathcal{M}^{(p+1)}) \\ &= \int_{\mathcal{M}} d(\omega \wedge \delta(\mathcal{M}^{(p+1)})) + (-1)^{p+1} \int_{\mathcal{M}} \omega \wedge d(\delta(\mathcal{M}^{(p+1)})) \\ &= (-1)^{p+1} \int_{\mathcal{M}} \omega \wedge d(\delta(\mathcal{M}^{(p+1)})) \end{aligned}$$

がわかるので、

$$d\delta(\mathcal{M}^{(p+1)}) = (-1)^{p+1} \delta(\partial\mathcal{M}^{(p+1)})$$

が成り立つ。 p 次元部分多様体 $\mathcal{M}^{(p)}$ と $D+1-p$ 次元部分多様体 $\mathcal{M}^{(D+1-p)}$ に対して、これらの向きを考慮した交点数を

$$I(\mathcal{M}^{(p)}, \mathcal{M}^{(D+1-p)}) := \int_{\mathcal{M}} \delta(\mathcal{M}^{(p)}) \wedge \delta(\mathcal{M}^{(D+1-p)})$$

で定義する。 $\mathcal{C}^{(p-1)} = \partial\mathcal{M}^{(p)}$ を充たす $\mathcal{C}^{(p-1)}$ と $\mathcal{M}^{(D+1-p)}$ の絡み数は

$$\text{Link}(\mathcal{C}^{(p-1)}, \mathcal{M}^{(p)}) := I(\mathcal{M}^{(p)}, \mathcal{M}^{(D+1-p)})$$

と定義される。

3.3.1 通常の対称性

N 成分の場^{*10} $\varphi: \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{K}^N$, $x \longmapsto (\varphi_i(x))_{1 \leq i \leq N}$ は、あるベクトル束 $\mathbb{K}^N \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ の切断と理解する。場の変換性はベクトル束の変換関数に由来する。

局所的な場のラグランジアン密度 $\mathcal{L}(\varphi_a(x), \partial_\mu \varphi_a(x))$ を持つ古典系を考える。この系の作用は

$$S[\varphi] := \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \mathcal{L}(\varphi_a(x), \partial_\mu \varphi_a(x))$$

と書かれる。場に関する作用の変分とは、勝手な「微小」切断 $\delta\psi \in \Gamma(E)$ による場の微小変換

$$\mathcal{T}_{\delta\varphi}: \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E), \varphi \longmapsto \varphi + \delta\psi$$

^{*8} コンパクトな埋め込まれた C^∞ 多様体と仮定する。

^{*9} 厳密な扱いは [Nic22, p.270] を参照。ここでは雑に扱う。

^{*10} 場 φ の成分を表す添字として a, b, c, \dots を使う。

を用いて

$$\delta_{\delta\psi} S[\varphi] := S[\mathcal{T}_{\delta\psi}(\varphi)] - S[\varphi]$$

と定義される．頭には Stokes の定理を使って

$$\begin{aligned} \delta_{\delta\psi} S[\varphi] &= \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a(x)} \delta\psi_a(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a(x))} \partial_\mu (\delta\psi_a(x)) \right) \\ &= \int_{\partial \mathcal{M}} \star b \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a(x))} \delta\psi_a(x) \right) + \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a(x))} \right) \right) \delta\psi_a(x) \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

と書けるが，境界条件 $\partial \mathcal{M} = \emptyset$ または $\delta\psi|_{\partial \mathcal{M}} = 0$ を要請して第 1 項を落とすのが普通である．

最小作用の原理とは，古典論で実現される場の配位（このような場の配位は **on shell** であると呼ばれる） $\varphi_{\text{on shell}} \in \Gamma(E)$ に対して，

$$\forall \delta\psi, \delta_{\delta\psi} S[\varphi_{\text{on shell}}] = 0 \quad (3.3.2)$$

を要請するものである．(3.3.1) から，on shell な場 $\varphi_{\text{on shell}} \in \Gamma(E)$ が満たすべき方程式として Euler-Lagrange 方程式

$$1 \leq \forall i \leq N, \forall x \in \mathcal{M}, \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a(x))} \right) \right]_{\varphi_{\text{on shell}}(x), \partial_\mu \varphi_{\text{on shell}}(x)} = 0 \quad (3.3.3)$$

が得られるのだった．煩雑なので以後 \mathcal{L} の引数は適宜省略する．

対称性変換とは，場の変換

$$\mathcal{T}: \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$$

であって作用を不変にするもののことである．つまり，最小作用の原理 (3.3.2) とは異なり φ ではなく \mathcal{T} が

$$\forall \varphi \in \Gamma(E), \delta_{\mathcal{T}} S[\varphi] = 0 \quad (3.3.4)$$

によって定義される．ここに $\delta_{\mathcal{T}} S[\varphi] := S[\mathcal{T}(\varphi)] - S[\varphi]$ とおいた．定義 (3.3.4) は off shell な場も考慮していることに注意すべきである．特に対称性変換 \mathcal{T} が大域的な微小パラメータ ε および $\partial_0 \varphi$ に陽に依存しない^{*11} $h \in \Gamma(E)$ を用いて $\mathcal{T}(\varphi) = \mathcal{T}_{\varepsilon h}(\varphi)$ と書かれる場合を考えよう．

$$\begin{aligned} 0 = \delta_{\mathcal{T}} S[\varphi] &= \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a(x)} \varepsilon h_a(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a(x))} \partial_\mu (\varepsilon h_a(x)) \right) \\ &= \varepsilon \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a(x))} \right) \right) h_a(x) \\ &\quad + \varepsilon \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \left(\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a(x))} \right) h_a(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a(x))} \partial_\mu (h_a(x)) \right) \\ &= \varepsilon \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a(x))} \right) \right) h_a(x) \end{aligned}$$

^{*11} この仮定は (3.3.7) の導出で使うだけ（実はもっと条件を弱めることもできる）なので，Noether の定理の導出には必要ない．

$$+ \varepsilon \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a(x))} h_a(x) \right)$$

が成り立つ. i.e. **Noether カレント**を $D+1$ 個の $X^\mu|_{\partial\mathcal{M}} = 0$ を充たす C^∞ 関数 X^μ を用いて

$$j^\mu(x) := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a(x))} h_a(x) - X^\mu(x) \quad (3.3.5)$$

で定義すると, これが on shell とは限らない任意の $\varphi \in \Gamma(E)$ に対して

$$\partial_\mu j^\mu(x) = - \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a(x))} \right) \right] \Big|_{\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)} h_a(x)$$

を充たすことが分かった. 特に on shell な任意の $\varphi_{\text{on shell}} \in \Gamma(E)$ に対しては (3.3.3) からカレント (3.3.5) の保存則

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \quad (3.3.6)$$

が成り立つ. このように, 対称性変換が存在するとそれに対応して on shell な保存則 (3.3.6) を充たすカレントが存在する (**Noether の定理**).

ここで, $\mathcal{M} = \Sigma \times \mathbb{R}$ と書ける場合を考える. このとき **Noether チャージ**を

$$Q(t) := \int_{\Sigma} d^D x j^0(t, \mathbf{x})$$

と定義すると, 保存則 (3.3.6) から $\partial\Sigma = \emptyset$ または $j^\mu|_{\partial\Sigma} = 0$ を要請すれば

$$\frac{dQ(t)}{dt} = - \int_{\Sigma} d^D x \partial_i j^i(t, \mathbf{x}) = 0$$

となって時間に依存しないことがわかる. さらに, $\pi^b(x) := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi_b(x))}$ とおくと

$$Q = \int_{\Sigma} d^D x (\pi^a(x) h_a(x) - X^\mu(x))$$

であるから, Poisson 括弧が³

$$\begin{aligned} \{\varphi_a(x), Q\}_{\text{P}} &= \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}y \left(\frac{\partial \varphi_a(x)}{\partial \varphi_b(y)} \frac{\partial Q}{\partial \pi^b(y)} - \frac{\partial \varphi_a(x)}{\partial \pi^b(y)} \frac{\partial Q}{\partial \varphi_b(y)} \right) \\ &= \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}y \left(\delta_a^b \delta^{D+1}(x-y) \int_{\Sigma} d^D z \delta_b^c \delta^D(z-y) h_c(z) - 0 \right) \\ &= h_a(x) \end{aligned}$$

と求まる. つまり, Q は対称性変換 $\mathcal{T}_{\varepsilon h}$ の無限小生成子^{*12}である. 従って, 正準量子化を行うと

$$[-i\hat{Q}, \hat{\varphi}_a(x)] = h_a(x) \quad (3.3.7)$$

となる.

^{*12} Hamilton フローの意味である

【例 3.3.1】 $D+1$ 次元自由フェルミオン系

時空 \mathcal{M} を Minkowski 時空, 場をスピン束 $\mathbb{C}^4 \hookrightarrow S \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ の切断 $\psi \in \Gamma(S)$ とする (Dirac 場). 作用はガンマ行列 γ^μ , Dirac 共役 $\bar{\psi} := i\psi^\dagger \gamma^0$ を用いて

$$S[\psi] = - \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \bar{\psi}(x) (\gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi(x)$$

と書かれる. Euler-Lagrange 方程式 (3.3.3) は, $\bar{\psi}, \psi$ に関する変分によってそれぞれ

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi &= 0, \\ \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu - m \bar{\psi} &= 0 \end{aligned}$$

となる. この系の対称性変換は, 例えば $e^{i\theta} \in U(1)$ による

$$\mathcal{T}: \Gamma(S) \longrightarrow \Gamma(S), \psi \longmapsto e^{i\theta} \psi$$

がある. \mathcal{T} を生成する無限小変換は $e^{i\theta}$ の Taylor 展開より $\mathcal{T}_{i\theta\psi}: \psi \longmapsto \psi + i\theta\psi$ である. つまり, 先ほどの議論で登場した $h \in \Gamma(S)$ は今回の場合 $i\psi$ に相当する. よって対称性変換 \mathcal{T} に対応する Noether カレント (3.3.5) は

$$j^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi} i\psi = -i\bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (3.3.8)$$

と求まる. $\mathcal{M} = \mathbb{R}^D \times \mathbb{R}$ であるから, Noether チャージは

$$Q = -i \int_{\mathbb{R}^D} d^D x \bar{\psi}(x) \gamma^0 \psi(x)$$

であり, 正準量子化すると (3.3.7) より

$$[i\hat{Q}, \hat{\psi}(x)] = -i\hat{\psi}(x)$$

が成り立つ. ここから有限変換 \mathcal{T} に戻すには, 指数写像を用いれば良い. こうして

$$\exp(i\theta\hat{Q}) \hat{\psi}(x) \exp(-i\theta\hat{Q}) = e^{-i\theta} \hat{\psi}(x) \quad (3.3.9)$$

だと分かった. ここで [GKSW15, p.6] に倣って $g := e^{i\theta}$, $R_g := e^{-i\theta}$, $\hat{U}_g(\mathbb{R}^D) := \exp(i\theta\hat{Q})$ とおく.

- $U_g(\mathbb{R}^D)$ を \mathcal{M} の D 次元部分多様体 \mathbb{R}^D に付随する対称性演算子
- $\hat{\psi}$ を荷電物体 (charged object)

と呼ぼう. $\forall g, g' \in U(1)$ に対して, 対称性演算子は群のように振る舞う:

$$\hat{U}_g(\mathbb{R}^D) \hat{U}_{g'}(\mathbb{R}^D) = \hat{U}_{gg'}(\mathbb{R}^D)$$

時間一定面を $\mathbb{R}^D \subset \mathcal{M}$ にとったのは, 正準量子化により (3.3.7) を導くためであった. しかるに, 時間一定面を任意の D 次元部分多様体 $\mathcal{M}^{(D)} \subset \mathcal{M}$ にとれるのではないかと期待される. 積分領域が複雑になるの

で微分形式を使うと見通しが良い。

$$\star j := \star b(j^\mu \partial_\mu)$$

とおこう。このとき

$$d \star j = \partial_\mu j^\mu d^{D+1}x \quad (3.3.10)$$

が成り立つので、Noether カレントの保存則 (3.3.6) は単に $d \star j = 0$ と書ける。Noether チャージは

$$Q = \int_{\mathcal{M}^{(D)}} \star j = \int_{\mathcal{M}} \star j \wedge \delta(\mathcal{M}^{(D)})$$

である。 $\mathcal{M}^{(D)} \longrightarrow \mathcal{M}^{(D)} + \delta\mathcal{M}^{(D)}$ w/ $\delta\mathcal{M}^{(D)} = \partial X^{(D+1)}$ なる時間一定面の変形を考えると、 Q の変化は保存則から

$$\delta Q = \int_{\delta\mathcal{M}^{(D)}} \star j = \int_{X^{(D)}} d \star j = 0$$

だと分かった。 i.e.

$$\hat{U}_{e^{i\theta}}(\mathcal{M}^{(D)}) = \hat{U}_{e^{i\theta}}(\mathcal{M}^{(D)} + \delta\mathcal{M}^{(D)})$$

である。この意味で対称性演算子は**トポロジカル演算子**とも呼ばれる。しかし、 \mathcal{M} 上に荷電物体が存在しているときは (3.3.9) に注意しなくてはならない。

時間一定面の変形をするので、量子化を経路積分で行う方が見通しが良い。経路積分では、任意の観測可能エネルギー $\hat{\mathcal{O}}$ の期待値が

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle = \int [d\psi] e^{iS[\psi]} \mathcal{O}$$

と計算される。今、勝手な場の演算子 $\mathcal{O}(z)$ に対して

$$\langle \hat{\psi}(y) \hat{\mathcal{O}}(z) \rangle = \int [d\psi] e^{iS[\psi]} \psi(y) \mathcal{O}(z)$$

を計算しよう。荷電物体 $\hat{\psi}(y)$ を囲むような時間一定面 $\mathcal{M}^{(D)} \subset \mathcal{M}$ w/ $y \in \mathcal{M}^{(D)}, z \notin \mathcal{M}^{(D)}$ をとり、 $D+1$ 次元部分多様体 $\mathcal{M}^{(D+1)} \subset \mathbb{M}$ であって $\mathcal{M}^{(D)} = \partial\mathcal{M}^{(D+1)}$ を充たすようなものをとる。そして局所的な場の $U(1)$ 変換

$$\begin{aligned} \mathcal{T}: \Gamma(S) &\longrightarrow \Gamma(S), \psi \longmapsto (x \mapsto e^{i\theta(x)} \psi) \\ \text{w/ } \theta(x) &= \begin{cases} \theta, & x \in \mathcal{M}^{(D)}, \\ 0, & x \notin \mathcal{M}^{(D)} \end{cases} \end{aligned}$$

を行う。すると、Noether カレントの表式 (3.3.8) を用いて

$$\begin{aligned} S[\mathcal{T}(\psi)] - S[\psi] &= - \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x i \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \partial_\mu \theta(x) \\ &= \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x i \partial_\mu (\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)) \theta(x) \\ &= - \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \partial_\mu j^\mu(x) \theta(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\theta \int_{\mathcal{M}^{D+1}} d \star j \\
&= -\theta \int_{\mathcal{M}^D} \star j
\end{aligned}$$

であることがわかる．つまり，変換 \mathcal{T} の下で

$$\langle \hat{\psi}(y) \hat{\mathcal{O}}(z) \rangle = \int [d\psi] e^{iS[\psi]} \exp \left(-i\theta \int_{\mathcal{M}^D} \star j \right) e^{i\theta \psi(y) \mathcal{O}(z)}$$

と計算される．

$$\langle R_g \hat{\psi}(y) \hat{\mathcal{O}}(z) \rangle = \int [d\psi] e^{iS[\psi]} U_g(\mathcal{M}^{(D)}) \psi(y) \mathcal{O}(z) \quad (3.3.11)$$

とすることである．

3.3.2 連続的高次対称性

【例 3.3.1】は，荷電物体が 0 次元に分布していた．これを p 次元部分多様体上に分布した物体に置き換えることで p -form symmetry の概念が得られる [GKS15, p.10]：

！ 以下で部分多様体といったときは，技術的な理由からコンパクトな埋め込まれた C^∞ 多様体を指すものとする．

定義 3.9: p -form symmetry

$D+1$ 次元の場の量子論が群 G による **p -form symmetry** を持つとは，時空 \mathcal{M} の任意の $D-p$ 次元部分多様体 $\mathcal{M}^{(D-p)} \subset \mathcal{M}$ および $\forall g \in G$ に対して**対称性演算子 (トポロジカル演算子)** (topological operator) $U_g(\mathcal{M}^{(D-p)})$ が存在して以下を充たすことを言う：

- $U_g(\mathcal{M}^{(D-p)})$ は任意の p 次元部分多様体 $\mathcal{C}^{(p)} \subset \mathcal{M}$ の台を持つ**荷電物体 (演算子)** (charged object, operator) $V(\mathcal{C}^{(p)})$ に作用する．
- $\forall g, g' \in G$ に対して**群の規則** (group law)

$$U_g(\mathcal{M}^{(D-p)}) U_{g'}(\mathcal{M}^{(D-p)}) = U_{gg'}(\mathcal{M}^{(D-p)})$$

が成り立つ．

- 任意の p 次元部分多様体 $\mathcal{C}^{(p)} \subset \mathcal{M}$ と，それに「絡む」十分小さな $D-p$ -球 $S^{D-p} \subset \mathcal{M}$ に対して，(3.3.11) と同じく経路積分の期待値の意味で

$$U_g(S^{D-p}) V(\mathcal{C}^{(p)}) = R_g(V(\mathcal{C}^{(p)}))$$

が成り立つ．ただし $R: G \rightarrow \text{GL}(\{\text{荷電物体}\})$ は群 G の表現である．

【例 3.3.2】 3 + 1 次元 U(1) ゲージ理論

物質場のない U(1) ゲージ理論を考える．ゲージ場を局所接続形式^a $a = a_\mu dx^\mu \in \Omega^1(\mathcal{M}; \mathfrak{u}(1))$ として与え，場の強さを $f := da$ とおく． $f = f_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ と成分表示すると $f_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu$ となる．

作用は

$$S[a] = -\frac{1}{2e^2} \int_{\mathcal{M}} d^4x f \wedge \star f = -\frac{1}{4e^2} \int_{\mathcal{M}} d^4x f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}$$

と書かれる． $\delta a \in \Omega^1(\mathcal{M}; \mathfrak{u}(1))$ を用いた作用の変分は

$$\begin{aligned} \delta_{\delta a} S[a] &= -\frac{1}{e^2} \int_{\mathcal{M}} d(\delta a) \wedge \star f \\ &= -\frac{1}{e^2} \int_{\mathcal{M}} d(\delta a \wedge \star f) - \frac{1}{e^2} \int_{\mathcal{M}} \delta a \wedge d \star f \end{aligned}$$

なので，Euler-Lagrange 方程式と Bianchi 恒等式から

$$\begin{aligned} d \star f &= 0, \\ df &= 0 \end{aligned}$$

が言える (Maxwell 方程式)．これをカレントの保存則と見做して，任意の $3 - 1 = 2$ 次元閉部分多様体 $\mathcal{M}^{(2)} \subset \mathcal{M}$ 上のトポロジカル演算子を

$$\begin{aligned} U^E_{e^{i\theta}}(\mathcal{M}^{(2)}) &:= \exp \left(i\theta \int_{\mathcal{M}^{(2)}} \frac{\star f}{e^2} \right) \\ U^M_{e^{i\theta}}(\mathcal{M}^{(2)}) &:= \exp \left(i\theta \int_{\mathcal{M}^{(2)}} \frac{f}{2\pi} \right) \end{aligned}$$

と定義しよう． $U^E_{e^{i\theta}}(\mathcal{M}^{(2)})$ が作用する荷電物体は **Wilson loop**

$$W(\mathcal{C}^{(1)}) := \exp \left(i \int_{\mathcal{C}^{(1)}} a \right)$$

である．このことを示そう．

簡単のため $S := \mathcal{M}^{(2)}$, $C := \mathcal{C}^{(1)}$ と略記する．今，絡み数が

$$\text{Link}(S, C) = \int_{\mathcal{M}} \delta(C) \wedge \delta(V) = 1$$

となるように $C, V, S = \partial V$ をとる．ゲージ場の変換

$$\mathcal{T}: a \mapsto a + \theta \delta(V)$$

の下で場の強さは $f \mapsto f + \theta d(\delta(V)) = f - \theta \delta(S)$ となり，作用は^b

$$\begin{aligned} S[\mathcal{T}(a)] - S[a] &= -\frac{1}{2e^2} \int_{\mathcal{M}} (f - \theta \delta(S)) \wedge \star (f - \theta \delta(S)) - S[a] \\ &= \frac{\theta}{2e^2} \int_{\mathcal{M}} (\delta(S) \wedge \star f + f \wedge \star \delta(S) - \theta \delta(S) \wedge \star \delta(S)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\theta}{e^2} \int_{\mathcal{M}} (\delta(S) \wedge \star f - \theta \delta(S) \wedge \star \delta(S)) \\
&= \theta \int_S \frac{\star f}{e^2} - \frac{\theta^2}{2e^2} \int_S \delta(S)
\end{aligned}$$

と変換する。一方, Wilson ループは

$$\begin{aligned}
W(C) &\mapsto \exp \left(i \int_C (a + \theta \delta(V)) \right) \\
&= \exp \left(i \int_C a + i\theta \int_{\mathcal{M}} \delta(V) \wedge \delta(C) \right) \\
&= \exp \left(i \int_C a - i\theta \text{Link}(S, C) \right) \\
&= e^{-i\theta} \exp \left(i \int_C a \right)
\end{aligned}$$

と変換するので^c,

$$\langle W(C) \mathcal{O} \rangle = \int [da] e^{iS[a]} U_{e^{i\theta}}^E(S) e^{-i\theta} W(C) \mathcal{O}$$

i.e.

$$\langle e^{i\theta} W(C) \mathcal{O} \rangle = \int [da] e^{iS[a]} U_{e^{i\theta}}^E(S) W(C) \mathcal{O}$$

が分かった。

トポロジカル演算子を 2 次元閉部分多様体上で定義したが, 境界を持つ場合, i.e. $C := \partial \mathcal{M}_C^{(2)} \neq \emptyset$ の場合はどうなるのか。

$$H_\theta(\mathcal{M}_C^{(2)}) := \exp \left(i\theta \int_{\mathcal{M}_C^{(2)}} \frac{\star f}{e^2} \right)$$

を考える。境界を共有するもう 1 つの 2 次元部分多様体 $\mathcal{N}_C^{(2)}$ を持ってくると

$$H_\theta(\mathcal{M}_C^{(2)}) H_\theta(\mathcal{N}_C^{(2)})^{-1} = \exp \left(i\theta \oint_{\mathcal{M}_C^{(2)} \cup_C (-\mathcal{N}_C^{(2)})} \frac{\star f}{e^2} \right)$$

これは $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ のとき C にしかよらない。このことから, $U_{e^{i\theta}}^M(\mathcal{M}_C^{(2)})$ が作用する荷電物体 (**t Hooft ループ**) を Hodge dual なゲージ場 $db := \frac{2\pi}{e^2} \star f$ によって

$$H_n(C) := \exp \left(i n \int_C b \right)$$

と定義できる。

^a 厳密には \mathcal{M} の開集合上の $\mathfrak{u}(1)$ -値 1 形式

^b $\omega \wedge \star \eta = \eta \wedge \star \omega$ に注意。

^c トポロジカル演算子を $\exp \left[i\theta \left(\int_S \frac{\star f}{e^2} - \frac{\theta^2}{2e^2} \int_S \delta(S) \right) \right]$ と再定義した。

3.3.3 対称性の自発的破れ

まずは通常の対称性 (0-form symmetry) の場合を考える。系が Lie 群 G で特徴付けられる 0-form symmetry を持つ場合を考えよう。ただし群は場へ表現 $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(N, \mathbb{K})$ として作用しているとする。このとき、無限小な対称性変換は Lie 代数 \mathfrak{g} の基底 $T^A \in \mathfrak{g}$ および微分表現 $\rho_*: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(N, \mathbb{K})$ を用いて^{*13} $\mathcal{T}_{i \in A \rho_*(T^A)(\varphi)}$ と書けるので、Noether の定理より on shell な保存則 (3.3.10) を充たす $\dim G$ 個の Noether カレント (3.3.5) j_A ($A = 1, \dots, \dim G$) が存在し、それに付随して $\dim G$ 個の保存電荷 $Q_A(\mathcal{M}^{(D)}) = \int_{\mathcal{M}^{(D)}} \star j_A$ が存在して対称性変換の無限小生成子 (3.3.7) となるのだった。

さて、Noether の定理によって特徴付けられる対称性は必ずしも系の基底状態 $|0\rangle$ の対称性にならない。i.e. 形式的には

- (1) $1 \leq \forall A \leq \dim G, \hat{Q}_A |0\rangle = 0$
- (2) $1 \leq \exists A \leq \dim G, \hat{Q}_A |0\rangle \neq 0$

の 2 つの場合^{*14} があり得る。(1) の場合、系は対称性を実現している、または系は **Wigner 相** (Wigner phase) にあると言い、(2) の場合、系の対称性が**自発的に破れた**、または系は **Nambu-Goldstone 相** (Nambu-Goldstone phase) にあると言う [九後 89, p.1]。0-form symmetry の言葉に翻訳すると、**対称性の自発的破れ** (spontaneous symmetry breaking; SSB) とは、0-form symmetry を特徴付ける Lie 群 G がその部分群 $H \subset G$ に縮小していることを指す^{*15}。SSB を特徴付けるには、上述のように素朴には $\hat{Q}_A |0\rangle \neq 0$ を充たす $1 \leq A \leq \dim G$ が存在するかどうかを確認すれば良いように見えるが、 $\langle 0 | \hat{Q}_A \hat{Q}_A | 0 \rangle \propto \mathrm{vol}(\mathcal{M}^{(D)})$ なので^{*16} 熱力学極限において $\hat{Q}_A |0\rangle$ は定義できない。そこで、代わりにある局所演算子 (i.e. compactly supported な演算子) $\hat{O}(x)$ が存在して

$$\langle 0 | [i\hat{Q}_A, \hat{O}(x)] | 0 \rangle \neq 0 \quad (3.3.12)$$

を充たすことと特徴付ける。(3.3.12) の左辺を系の**秩序変数** (order parameter) と呼ぶ。

では、相対論的な系における Nambu-Goldstone の定理から出発しよう。

定理 3.1: Nambu-Goldstone (相対論的)

考えている系が Lie 群 G で特徴付けられる 0-form symmetry を持ち、さらに

- (1) 並進対称性と Lorentz 共変性を持ち、
- (2) 部分群 $H \subset G$ に対称性が自発的に破れている

とする。このとき、系は線形分散を持つ零質量の独立な励起 (**NG モード**) をちょうど $\dim G - \dim H$ 個持つ。

定理 3.1 の条件 (1) は NG モードが互いに独立であり、かつ必ず線形分散を持つことの証明に使うのだが、

^{*13} 苦肉の策だが、Lie 代数の添字を A, B, C, \dots とする。

^{*14} もしくは、 $U_g(\mathcal{M}^{(D)}) |0\rangle = |0\rangle$ としても良い。

^{*15} 考えている場が構造群 G を持つ**ファイバー束**として定式化されている場合、SSB は数学的には**構造群の収縮** (reduction of structure group) として定式化できる。

^{*16} **Fabri - Picasso の定理** [FP66]

かなりややこしい^{*17}ので、ここでは NG モードが存在することだけの証明の概略を述べるに留める。

証明 系は場 $\varphi \in \Gamma(E)$ からなるとし、この系の作用を $S[\varphi]$ と書く。Green 関数の生成汎関数を

$$\begin{aligned} Z[J] &= e^{iW[J]} := \langle 0 | \mathcal{T} \exp \left(i \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x J(x) \varphi(x) \right) | 0 \rangle \\ &= \frac{\int [d\varphi] \exp \left(S[\varphi] + \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x J(x) \varphi(x) \right)}{\int [d\varphi] \exp S[\varphi]} \end{aligned}$$

と定義し、有効作用を

$$\Gamma[\psi] := W[J] - \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x J(x) \psi(x)$$

と定義する。ただし

$$\psi(x) := \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \frac{\langle 0 | \mathcal{T} \{ \hat{\varphi}(x) \exp \left(i \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x J(x) \varphi(x) \right) \} | 0 \rangle}{\langle 0 | \mathcal{T} \{ \exp \left(i \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x J(x) \varphi(x) \right) \} | 0 \rangle}$$

とおいた。さらに有効ポテンシャルを

$$V(\varphi) := - \frac{\Gamma[\varphi]|_{\varphi=\text{const.}}}{\int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x}$$

と定義する。QFT の一般論から、場の演算子の真空期待値 $\varphi_0 := \langle 0 | \hat{\varphi}(x) | 0 \rangle$ に対して $\varphi_0 = \text{argmin } V(\varphi)$ であることが知られている。

簡単のため G が線型 Lie 群で、系の対称性変換が $\mathcal{T}_{i\varepsilon_A \rho_*(T^A)(\varphi)}$ ($A = 1, \dots, \dim G$) と書ける場合を考える。^(3.3.7) を思い出すと、このとき

$$[i\hat{Q}^A, \hat{\varphi}(x)] = i\rho_*(T^A)(\hat{\varphi}(x))$$

が成り立つ。 $\Gamma[\varphi]$, $V[\varphi]$ もこの変換の下で不変なので

$$\begin{aligned} V(\varphi + i\varepsilon^A \rho_*(T^A)\varphi) &= V(\varphi) \\ \Rightarrow \frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi_a} [\rho_*(T^A)]_a^b \varphi_b &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 V(\varphi)}{\partial \varphi_a \partial \varphi_b} [\rho_*(T^A)]_b^c \varphi_c + \frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi_b} [\rho_*(T^A)]_a^b \varphi_b &= 0 \quad (1 \leq \forall a \leq N) \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

ここで条件 (2) から

$$\langle 0 | [i\hat{Q}_A, \hat{\varphi}(x)] | 0 \rangle = i\rho_*(T^A)(\langle 0 | \hat{\varphi}(x) | 0 \rangle) \begin{cases} = 0, & T^A \in \mathfrak{h}, \\ \neq 0, & T^A \notin \mathfrak{h} \end{cases}$$

^{*17} 例えば [九後 89, p.7] に漸近場を使った議論が載っている

が成り立つので, $v := \langle 0|\hat{\varphi}(x)|0\rangle$ とおくと, (3.3.13) より破れた対称性に対応する任意の $1 \leq A \leq \dim G$ に対して

$$v \neq 0 \text{ かつ } \left. \frac{\partial^2 V(\varphi)}{\partial \varphi_a \partial \varphi_b} \right|_{\varphi=v} [\rho_*(T^A)(v)]_b = 0 \quad (1 \leq \forall a \leq N) \quad (3.3.14)$$

が成り立たねばならない. ところで, 真空期待値が 0 になる場を $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(x) - v$ で定義すると

$$V(\varphi) = V(v) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V(\varphi)}{\partial \varphi_a \partial \varphi_b} \right|_{\varphi=v} \tilde{\varphi}_a \tilde{\varphi}_b + \mathcal{O}(\tilde{\varphi}^3)$$

となるから, 行列 $\left[\left. \frac{\partial^2 V(\varphi)}{\partial \varphi_a \partial \varphi_b} \right|_{\varphi=v} \right]_{1 \leq a, b \leq \dim G}$ を対角化した固有値が粒子の質量の 2 乗を与える. 従って (3.3.14) から, $T^A \notin \mathfrak{h}$ ならば $\rho_*(T^A)(v)$ がこの行列の固有値 0 に対応する固有ベクトル, i.e. ゼロ質量の NG 粒子であることが分かった. ■

NG モードの存在がわかったので, 次に NG 粒子を記述する有効ラグランジアン構成法を考える. 破れた対称性は Lie 群 G/H で特徴付けられるはずである. まず, $\text{Lie}(G/H) \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ に注意する^{*18}. このとき $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ の基底を $X^A + \mathfrak{h}$ $^w/$ $A = 1, \dots, \dim G - \dim H$ と書くと, $X^A \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ が \mathfrak{g} において線型独立であるように選べるから, T^A のうち \mathfrak{h} に属さないものとしてとることができる. 命題 2.6 より可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{T_{1_G} p} & \text{Lie}(G/H) \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \\ \downarrow \exp_G & & \downarrow \exp_{G/H} \\ G & \xrightarrow{p} & G/H \end{array}$$

が成り立つから, 左剰余類 $gH \in G/H$ の代表元として

$$\exp_G(i\pi_A(x)X^A) \in G$$

を選ぶことができる^{*19}. この $\dim G - \dim H$ 成分場 $\pi: M \rightarrow \text{Lie}(G/H)$ のことを **NG ボゾン場**と呼ぶ. このとき, 大域的な $\forall g \in G$ の作用に応じた場 π の変換 $\pi \mapsto \pi'$ は

$$\exp_G(i\pi_A(x)X^A) H \mapsto g \exp_G(i\pi_A(x)X^A) H =: \exp_G(i\pi'_A(x)X^A) H$$

となるから, 顕にはある $h(g, \pi) \in H$ を使って

$$\exp_G(i\pi'_A(x)X^A) = g \exp_G(i\pi_A(x)X^A) h(g, \pi) \quad (3.3.15)$$

と書くことができる. $g \in H$ のときは任意の π について

$$\exp_G(i\pi'_A(x)X^A) H = \exp_G(i\pi_A(x)X^A) H$$

でなくてはいけなから $h(g, \pi) = g^{-1}$ であり, (3.3.15) を $0 \in \mathfrak{h}$ において微分することで $\pi(x)$ が

$$\pi'(x) = \text{Ad}(g)(\pi(x))$$

^{*18} 標準的射影 $p: G \rightarrow G/H$ について $T_{1_G} p: \mathfrak{g} \rightarrow \text{Lie}(G/H)$ は全射であるが, $X \in \mathfrak{h} \iff T_{1_G} p(X) = T_0(p \circ \exp_G) \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \right) = 0$ なので $\mathfrak{h} \subset \text{Ker } T_{1_G} p$ がわかり, 次元を考えると $\text{Ker } T_{1_G} p = \mathfrak{h}$ が言える. よって準同型定理から $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \cong \text{Lie}(G/H)$ である.

^{*19} 厳密には \exp_G が全射とは限らないので, これは多様体 G/H の単位元 H 近傍のチャート $(U, (\pi_A))$ だと考えるべきである.

なる線形変換を受けることがわかる．一方で $g \in G \setminus H$ のときは変換則 (3.3.15) は $\pi(x)$ について非線形である．

NG ボゾン場の項を含むラグランジアンは， G -不変でなくては行けない．そのためには Maurer-Cartan 形式 $\theta \in \Omega^1(G; \mathfrak{g})$ を使う．これを C^∞ 写像 $\xi := \exp_G(i\pi(-)): \mathcal{M} \rightarrow G$ で引き戻すことで左不変な $\xi^*\theta \in \Omega^1(\mathcal{M}; \mathfrak{g})$ を得る． \mathfrak{h} 成分と $\mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ 成分に分離して

$$\xi^*\theta = \underbrace{\xi^*\theta_\parallel}_{\in \mathfrak{h}} + \underbrace{\xi^*\theta_\perp}_{\in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}}$$

と書く．行列 Lie 群の場合に成分表示を求めると

$$\xi^*\theta|_x(\partial_\mu) = \theta_{\xi(x)}(T_x\xi(\partial_\mu)) = \xi(x)^{-1}\partial_\mu\xi(x)$$

である．変換則 (3.3.15) から， $\forall g \in G$ に関する大域的な変換について

$$\xi(x)^{-1}\partial_\mu\xi(x) \mapsto h^{-1}(g, \pi)\xi(x)^{-1}\partial_\mu\xi(x)h(g, \pi) + \underbrace{h(g, \pi)^{-1}\partial_\mu h(g, \pi)}_{\in \mathfrak{h}}$$

となる．i.e. $\text{Tr}(\xi^*\theta_\perp) \in \Omega^1(M)$ が NG ボゾン場の変換 (3.3.15) について整合的である．よって微分の次数が 2 次の Lagrangian が

$$\mathcal{L}_{\text{NGB}} := -\frac{1}{2} \text{Tr}(\xi^*\theta_\perp \wedge \star \xi^*\theta_\perp)$$

で与えられる^{*20}．低エネルギーの時は π の最低次までとる．

$$\begin{aligned} \xi(x)^{-1}\partial_\mu\xi(x) &= \frac{1 - e^{-i\text{ad}(\pi(x))}}{i\text{ad}(\pi(x))}(\partial_\mu\pi(x)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{(n+1)!} \text{ad}(\pi(x))^n(\partial_\mu\pi(x)) \\ &= \partial_\mu\pi(x) - \frac{i}{2!}[\pi(x), \partial_\mu\pi(x)] + \mathcal{O}(\pi^2\partial_\mu\pi) \end{aligned}$$

なので

$$\mathcal{L}_{\text{NGB}} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\pi_A\partial^\mu\pi_B \text{Tr}(X^AX^B)$$

である． $g^{AB} := \text{Tr}(X^AX^B)$ は \mathfrak{g} の規格化条件にもよるが，多様体 G/H の計量テンソルになっている．

次に物質場との結合を記述する方法を考える．物質場 ψ の値域は破れていない対称性 H の既約表現 $\rho_H: H \rightarrow \text{GL}(\mathcal{H})$ の表現空間 \mathcal{H} だと考えて良い． $\forall g \in G$ による変換則は (3.3.15) の $h(g, \pi) \in H$ を使って

$$\psi(x) \mapsto \rho_0(h(g, \pi)^{-1})(\psi(x))$$

と定義すると，前述の議論から $g = h \in H$ のときは $\psi \mapsto \rho_0(h)(\psi)$ と変換するので整合的である． G の既約表現 $\rho: G \rightarrow \text{GL}(\mathcal{H}_{\text{ext}})$ であって， H の表現と見做して既約表現の直和に分解した際に ρ_0 を直和因子の 1 つに持つようなものを与えたとき，標準的包含 $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{H}_{\text{ext}}$ によって ψ を送った先を $\hat{\psi}$ とおくと，新しい場

$$\chi(x) := \rho(\xi(\pi))(\hat{\psi}(x))$$

^{*20} このウェッジ積は普通のものではなく， $\omega = \omega_A T^A$ ， $\eta = \eta_A T^A$ と展開して $\omega \wedge \eta := \frac{1}{2}\omega_A \wedge \eta_B [T^A, T^B] \in \Omega^{p+q}(M; \mathfrak{g})$ と定義した．

は, $\forall g \in G$ による大域的変換の下で

$$\begin{aligned}\chi(x) &\longmapsto \rho(g\xi(\pi)h(g, \pi))(\rho_0(\widehat{h(g, \pi)^{-1}})(\psi)(x)) \\ &= \rho(g) \circ \rho(\xi(\pi)) \circ \rho(h(g, \pi)) \circ \rho(h(g, \pi))^{-1}(\widehat{\psi}(x)) \\ &= \rho(g)(\chi(x))\end{aligned}$$

の変換を受ける. ψ をそのまま扱うよりも $\chi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}_{\text{ext}}$ について G -不変な Lagrangian を書き下す方が簡単であり, χ は NGB と物質場の相互作用も記述してくれる. 最後に, これまで大域的対称性だと思っていた群 G の作用を局所的対称性にするために背景ゲージ場を導入する (**ゲージ化**). そのためには Maurer-Cartan 形式の ∂_μ を共変微分に置き換えれば良く, NGB と背景ゲージ場との結合はそれで決まる. あからさまには

$$\xi(x)^{-1}(\partial_\mu + A_\mu(x))\xi(x)$$

にすると言うことである. $A_{\mu A}T^A$ と展開すると

$$\begin{aligned}\xi(x)^{-1}A_\mu(x)\xi(x) &= A_{\mu A}(x) \text{Ad}(\exp_G(-i\pi(x)))(T^A) \\ &= A_{\mu A}(x) \exp_{\text{GL}(\mathfrak{g})}(-i\pi_B(x) \text{ad}(T^B))(T^A) \\ &= A_{\mu A}(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \pi_{B_1}(x) \cdots \pi_{B_n}(x) \text{ad}(T^{B_1}) \circ \cdots \text{ad}(T^{B_n})(T^A) \\ &= A_\mu(x) + \mathcal{O}(\pi)\end{aligned}$$

となるので, π の最低次では Maurer-Cartan 形式の成分

$$\partial_\mu \pi + A_\mu$$

と書かれる. よってゲージ変換 $A \mapsto A + d\lambda_0$ は NG ボゾンに $\pi + \lambda_0$ のシフトを引き起こす.

余談だが, 定理 3.1 の Lorentz 共変性の条件 (1) を外すと話はややこしくなる. まず, 波数の小さいところにおいて分散関係が奇数幂であるような NG モードを **Type-I**, 偶数幂で書けるような NG モードを **Type-II** と呼ぶ [NC76]. そして

- 破れた対称性の個数を $N_{\text{BG}} := \dim G - \dim H$
- NG モードの総数を N_{NGB}
- Type-I, Type-II の個数をそれぞれ $N_{\text{I}}, N_{\text{II}}$

とおこう. [NC76] による結果は以下の通りである:

定理 3.2: Nielsen-Chadha

$$N_{\text{I}} + 2N_{\text{II}} \geq N_{\text{BG}}$$

証明

さらに, [WM12] によって以下が示された:

定理 3.3: Watanabe-Murayama

$\Omega := \int_{\Sigma} d^D x$ とおき, $\rho_{AB} := \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{-i}{\Omega} \langle 0 | [Q_A, Q_B] | 0 \rangle$ と定義する. このとき以下が成り立つ:

$$N_{\text{BG}} - N_{\text{NGB}} = \frac{1}{2} \text{rank } \rho$$

証明

■

3.3.4 高次対称性の自発的破れ

この小節と次の小節では時空 \mathcal{M} は境界を持たないと仮定する^{*21}. 0 次対称性の場合と同様に, p 次対称性の自発的破れを議論することができる. p -form symmetry の場合, トポジカル演算子は $p+1$ -form 背景ゲージ場と等価であった. 0-form の場合からの類推で, NG ボゾン場は背景 $p+1$ -form ゲージ場のゲージ変換によってシフトするはずだが, $p+1$ -form ゲージ場 B_{p+1} のゲージ変換は p -form Λ_p により $B_{p+1} \mapsto B_{p+1} + d\Lambda_p$ の形をしているので, NG ボゾン場は p -form である.

p -form symmetry の秩序変数は荷電物体の真空期待値であり, 一般に $\mathcal{C}^{(p)} \subset \mathcal{M}$ に依存する何らかの関数 $F(\mathcal{C}^{(p)})$ を使って

$$\langle V(\mathcal{C}^{(p)}) \rangle \sim e^{-F(\mathcal{C}^{(p)})}$$

の振る舞いをする. SSB を特徴づける典型的な振る舞いは

$$\lim_{\text{vol}(\mathcal{C}^{(p)}) \rightarrow \infty} \text{Re} \left[\frac{F(\mathcal{C}^{(p)})}{\text{vol}(\mathcal{C}^{(p)})} \right] \begin{cases} < \infty, & \text{SSB} \\ = \infty, & \text{unbroken} \end{cases}$$

というものである. SSB が起こったと言うのは, 荷電演算子を

$$\hat{V}(\mathcal{C}^{(p)}) := e^{-c \int_{\mathcal{C}^{(p)}} \star_{\mathcal{C}^{(p)}} 1} V(\mathcal{C}^{(p)})$$

と正則化することで

$$\lim_{\text{vol}(\mathcal{C}^{(p)}) \rightarrow \infty} \langle V(\mathcal{C}^{(p)}) \rangle \neq 0$$

を充たすようにできるという意味である.

演算子形式ではどうなるのだろうか? (3.3.12) の素朴な一般化は

$$\langle [i\hat{Q}(\mathcal{M}^{(D-p)}), V(\mathcal{C}^{(p)})] \rangle$$

であるが, これは $\mathcal{M}^{(D-p)}$, $\mathcal{C}^{(p)}$ が共に閉多様体だと微妙なところがある [Lak18].

[Lak18, p.5-6] に倣って, 系が並進対称性を持つ場合にギャップレスな励起が存在することをぎっと確認しよう. 演算子形式で議論するので, 時間一定面 $\mathcal{M}^{(D)} \subset \mathcal{M}$ を 1 つ固定し, 微妙なことが起こらないように $\mathcal{M}^{(D-p)} \subset \mathcal{M}^{(D)}$ が境界を持つとする. 保存則 $d \star j = 0$ を充たすカレント $\star j$ および $\mathcal{M}^{(D)}$ に関する

^{*21} 境界がある場合の取り扱い [Lak18] に書いてある.

デルタ関数形式 $\delta^D(\mathcal{M}^{(D-p)})$ を使って $Q(\mathcal{M}^{(D-p)}) = \int_{\mathcal{M}^{(D)}} \star j \wedge \delta^D(\mathcal{M}^{(D-p)})$ と書ける．並進対称性から $\langle 0 | \star \hat{j} \wedge \delta^D(\mathcal{M}^{(D-p)})(x) | n \rangle = e^{ip_n \cdot x} \langle 0 | \star \hat{j} \wedge \delta^D(\mathcal{M}^{(D-p)})(0) | n \rangle$ が成り立つので

$$\begin{aligned} & \left\langle \left[i\hat{Q}(\mathcal{M}^{(D-p)}), V(\mathcal{C}^{(p)}) \right] \right\rangle \\ &= i \sum_n (2\pi)^D \delta^D(\mathbf{p}) \left(\langle 0 | \star \hat{j} \wedge \delta^D(\mathcal{M}^{(D-p)})(0) | n \rangle \langle n | V(\mathcal{C}^{(p)}) | 0 \rangle e^{-iE_n x^0} \right. \\ & \quad \left. - \langle 0 | V(\mathcal{C}^{(p)}) | n \rangle \langle n | \star \hat{j} \wedge \delta^D(\mathcal{M}^{(D-p)})(0) | 0 \rangle e^{iE_n x^0} \right) \end{aligned}$$

が言える．一方で左辺を $x^0 = t$ 方向に微分すると，保存則および Stokes の定理から

$$\begin{aligned} \partial_0 \left\langle \left[i\hat{Q}(\mathcal{M}^{(D-p)}), V(\mathcal{C}^{(p)}) \right] \right\rangle &= \int_{\mathcal{M}^{(D-p)}} \left\langle \left[\partial_0 \star j, V(\mathcal{C}^{(p)}) \right] \right\rangle \\ &= - \int_{\partial \mathcal{M}^{(D-p)} \subset \partial \mathcal{M}^{(D)}} \left\langle \left[\star_{\mathcal{M}^{(D)}} j, V(\mathcal{C}^{(p)}) \right] \right\rangle \end{aligned}$$

となる．次元を数えることでいつでも $\mathcal{C}^{(p)} \cap \partial \mathcal{M}^{(D-p)} = \emptyset$ にできることがわかるので結局右辺は 0 だとわかる．よってもし $\left\langle \left[i\hat{Q}(\mathcal{M}^{(D-p)}), V(\mathcal{C}^{(p)}) \right] \right\rangle \neq 0$ ならば $\mathbf{p} = 0$ のときに $E_n = 0$ となるような n が存在する．

【例 3.3.3】 3 + 1 次元の Yang-Mills 理論

【例 3.3.4】 U(1) ゲージ理論

3.3.5 高次対称性の Coleman-Mermin-Wagner の定理

通常の Coleman-Mermin-Wagner の定理は，連続的 0 次対称性が 1 + 1 次元以下では自発的に破れないことを主張する．これは p 次対称性に拡張することができる：

定理^{ph} 3.1: 高次対称性についての Coleman-Mermin-Wagner の定理

$D + 1$ 次元時空において，Lie 群 G で特徴付けられる $p \geq D - 1$ 次対称性は自発的に破れない．

証明 より詳細な扱いは [Lak18, p.23] を参照．ここではとても雑に示す．

$D + 1$ 次元 Euclid 時空 \mathcal{M} の自由かつ massless な p -form 場（これは p -form NG ボゾン場のつもりである） $B_p \in \Omega^p(\mathcal{M})$ の理論

$$S = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} dB_p \wedge \star dB_p$$

を考える． B_p の 2 点関数の長距離における振る舞いを見る．そのためには参照点を 1 つ固定し，その点を原点に持つ $D + 1$ 次元極座標 $(r, \theta^1, \dots, \theta^D)$ を r が十分大きいところととる．このときの Green 関数の r 依存性を見ればよい：

$$d \star dG_p(r, \theta^\mu) = 0$$

外微分したときに $\partial_r dr \wedge$ が生き残るのは $d\theta^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge d\theta^{\mu_p}$ の項のみである。また、自然基底の規格化のために $r d\theta^\mu$ を考えないといけないので、結局 p -form の

$$G_p^{\text{ang}}{}_{\mu_1, \dots, \mu_p} r^p d\theta^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge d\theta^{\mu_p}$$

の部分を見ないと意味がない。よって

$$\frac{1}{r^{D+1-p}} \partial_r \left(r^{D+1-(p+1)} \frac{1}{r^p} \partial_r (r^p G(r)) \right) = 0$$

ということであり、 $G(r) \sim r^{-(d-p-1)}$ である。このことから、 $d-p-1 > 0$ でないと 2 点関数が $r \rightarrow \infty$ で発散することになり、 p -form NG ボゾン場が ill-defined である。i.e. $p \geq D-1$ -form symmetry は自発的に破れない。

■

3.3.6 対称性のアノマリー

アノマリー^{*22}には、大別して 3 種類ある [川平 24]：

ゲージアノマリー

元の理論 $S[\psi]$ にゲージ化 $\partial_\mu \mapsto \partial_\mu + a_\mu$ の操作を施して得られた理論 $S_{\text{gauged}}[\psi, a]$ の^{*23}分配関数

$$Z_{\text{gauged}} = \int [da] \int [d\psi] e^{-S_{\text{gauged}}[\psi, a] - S_{\text{kin}}[a]} =: \int [da] Z[A] e^{-S_{\text{kin}}[a]}$$

について、ある $g: \mathcal{M}^{(D+1)} \rightarrow G$ が存在してゲージ変換 $a \mapsto a^g := g^{-1} a g + g^{-1} dg$ の下で $Z[a] \neq Z[a^g]$ となること。このとき理論は矛盾している。と言うのも、汎関数積分 $\int [dA]$ が ill-defined になるからである。

't Hooft アノマリー

元の理論 $S[\psi]$ にゲージ化 $\partial_\mu \mapsto \partial_\mu + A_\mu$ の操作を施して得られた理論 $S_{\text{gauged}}[\psi, A]$ について

$$Z[A] := \int [d\psi] e^{-S_{\text{gauged}}[\psi, A]}$$

と定義したとき、ある $g \in G$ が存在してゲージ変換 $A \mapsto A^g := g^{-1} A g + g^{-1} dg$ の下で $Z[A] \neq Z[A^g]$ となること。 A は単なる外場なので、理論が矛盾したわけではない。また、 $Z[0] = Z$ となる。

今、 $Z_{\text{UV}}[A]$ が繰り込み群変換の下で $Z_{\text{IR}}[A]$ に流れるとする。このとき、のちに見るようにアノマリーは 1 つ次元が上の TQFT で記述されるが、TQFT は繰り込み群変換の下で不変なので、両者のアノマリーは一致していなくてはならない。つまり、理論 Z_{UV} が繰り込み群変換で Z_{IR} へ流れるための必要条件は、両者で 't Hooft アノマリーが一致することなのである。

ABJ アノマリー (Adler Bell Jackiw anomaly)

ゲージ群 G についてゲージアノマリーを持たない理論

$$Z = \int [da] \int [d\psi] e^{-S[\psi, a]} =: \int [da] Z[a]$$

^{*22} 訳語だと対称性の量子的破れと呼ぶこともある [藤川 01]。

^{*23} ゲージ場がダイナミカルなときは a, b, \dots で、単に外場であるときは A, B, \dots で書くことにする。

が別の Lie 群 H についても大域的対称性を持っているとき、外場 A を導入して H 対称性をゲージ化して

$$Z[a, A] = \int [d\psi] e^{-S[\psi, a, A]}$$

を得るが、この新しく加えた A についてゲージ変換 $A \mapsto A^h$ を施したときに $Z[a, A^h] \neq Z[a, A]$ となることである。摂動論的には、 $2n$ 次元の理論が持つ摂動アノマリーであって、対応する $n+1$ 角形の Feynman ダイアグラムの外線のうち 1 本が外場で、残りの n 本がダイナミカルなゲージ場であるようなものである。ABJ アノマリーの場合もまた、理論が矛盾しているわけではない。

ABJ アノマリーは Noether カレントの非保存と等価である。

$$S[\psi, a] := \int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} d^{D+1}x \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu + a_\mu) \psi$$

を考える。これが G によるゲージ変換以外に、 H による大域的対称性 $S[\psi, a] = S[\psi^h, a]$ を持っているとする。このとき $h: \mathcal{M}^{(D+1)} \rightarrow H$ による変換 $\rho(h)(\psi)$ を摂動的に扱い $h \sim 1 + \epsilon$ と思うと、

$$S[\psi^h, a] = S[\psi, a] - \int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} d^{D+1}x \epsilon \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)$$

になる。ここで、経路積分において測度が $[d\bar{\psi}^h d\psi^h] = J[d\bar{\psi} d\psi]$ と変換するならば

$$Z[a] = \int [d\bar{\psi}^h d\psi^h] e^{-S[\psi^h, a]} = \int [d\bar{\psi} d\psi] e^{-S[\psi, a]} J e^{\int d^{D+1}x \epsilon \partial_\mu j^\mu}$$

であり、 $J = e^{i \int d^{D+1}x \epsilon \mathbf{A}}$ と書くと

$$\partial_\mu j^\mu = i\mathbf{A}$$

が導かれるのだった (Fujikawa の方法)。一方、大域的対称性 H をゲージ化して

$$S[\psi, a, A] := \int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} d^{D+1}x \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu + a_\mu + A_\mu) \psi$$

にする。ゲージ不変性から $S[\psi^h, a, A^h] = S[\psi, a, A]$ なので、

$$S[\psi^h, a, A] = S[\psi^h, a, A^h] - \int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} d^{D+1}x \epsilon \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)$$

である。ABJ アノマリーは

$$\begin{aligned} Z[a, A^h] &= e^{i \int d^{D+1}x \epsilon \mathbf{B}} Z[a, A] \\ \iff \int [d\bar{\psi}^h d\psi^h] e^{-S[\psi^h, a, A^h]} &= e^{i \int d^{D+1}x \epsilon \mathbf{B}} \int [d\bar{\psi} d\psi] e^{-S[\psi, a, A]} \end{aligned}$$

を意味するから、

$$\partial_\mu j^\mu = -i\mathbf{B}$$

となる。

Lie 群 G で特徴づけられる 0-form symmetry の場合を考える．on shell な保存カレントを 't Hooft アノマリーの意味で 1-form 背景ゲージ場 A_1 に結合させることができる．このとき，ゲージ場はダイナミカルではないので，分配関数は

$$Z[A_1] = \int [d\psi] e^{-S[\psi, A_1]}$$

の形になっている．この 0-form symmetry がアノマリーを持つとは，ゲージ変換 $A_1 \mapsto A_1 + d\lambda_0$ の下で分配関数が不変にならないことである，と定義しよう．記号的には

$$Z[A_1 + d\lambda_0] = e^{i \int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} \mathcal{A}[A_1, \lambda_0]} Z[A_1]$$

ということである．ここで，この位相 $\mathcal{A}[A_1, \lambda_0]$ は $D+2$ 次元時空の TQFT の境界からの寄与だと考えてみよう^{*24}：

$$e^{i \int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} \mathcal{A}[A_1, \lambda_0]} = e^{i \int_{\partial \mathcal{N}^{(D+2)}} \mathcal{A}[A_1, \lambda_0]} = e^{i \int_{\mathcal{N}^{(D+2)}} d\mathcal{A}[A_1, \lambda_0]}$$

つまり， $d\mathcal{A}[A_1, \lambda_0]$ を $\widehat{\mathcal{A}}[A_1 + d\lambda_0] \in \Omega^{D+2}(\mathcal{N}^{(D+2)})$ と見做すのである．すると，元の理論の分配関数を

$$\widehat{Z}[A_1] := Z[A_1] e^{-i \int_{\mathcal{N}^{(D+2)}} \widehat{\mathcal{A}}[A_1]}$$

と正則化すれば，直上で定義した意味でのアノマリーを相殺できるのである．

【例 3.3.5】カイラルアノマリー

カイラルアノマリーを Fujikawa 法で計算した結果は

$$\mathcal{A}[A_1, \lambda_0] = \kappa \lambda_0 \frac{F_2 \wedge F_2}{8\pi^2}$$

であるが，

$$\widehat{\mathcal{A}}[A_1] = \kappa A_1 \wedge \frac{F_2 \wedge F_2}{8\pi^2}$$

とすれば

$$\begin{aligned} \widehat{Z}[A_1 + d\lambda_0] &= Z[A_1] e^{i\kappa \int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} \lambda_0 \frac{F_2 \wedge F_2}{8\pi^2}} e^{-i\kappa \int_{\mathcal{N}^{(D+2)}} (A_1 + d\lambda_0) \wedge \frac{F_2 \wedge F_2}{8\pi^2}} \\ &= \widehat{Z}[A_1] e^{\kappa \int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} \lambda_0 \frac{F_2 \wedge F_2}{8\pi^2} - i\kappa \int_{\partial \mathcal{N}^{(D+2)} = \mathcal{M}^{(D+1)}} \lambda_0 \frac{F_2 \wedge F_2}{8\pi^2}} \\ &= \widehat{Z}[A_1] \end{aligned}$$

となり，アノマリーが相殺されている．

しかるに，全てのゲージ変換について分配関数の不変性を調べるのは一般には難しい．そこで，アノマリーの定義を数学的により扱いやすい形に書き直そう [川平 24, p.41]．まず，アノマリー流入の仮説から出発する：

^{*24} この仮説は，フェルミオン系においては数学的に証明されている [DF94]

仮説 3.1: anomaly inflow

$d = D+1$ 次元時空 $\mathcal{M}^{(d)}$ の上の任意のゲージ場の理論 $Z[A; \mathcal{M}^{(d)}]$ を与える. このとき, ある $\mathcal{N}^{(d+1)}$ の上の **TQFT** $S^{\text{top}}[A; \mathcal{N}^{(d+1)}]$ が存在して, 任意の $d+1$ 次元時空 $\mathcal{N}^{(d+1)}$ であって $\partial\mathcal{N}^{(d+1)} = \mathcal{M}^{(d)}$ を充たすものについて

$$\widehat{Z}[A; \mathcal{M}^{(d)}, \mathcal{N}^{(d+1)}] := Z_{\mathcal{M}^{(d)}}[A] e^{-iS^{\text{top}}[A; \mathcal{N}^{(d+1)}]}$$

で定義される理論がゲージ不変であるようにできる.

ここから, d 次元のゲージ場の理論の分配関数をむしろ初めから $\widehat{Z}[A; \mathcal{M}^{(d)}, \mathcal{N}^{(d+1)}]$ として定義する.

定義 3.10: アノマリー

理論 $\widehat{Z}[A; \mathcal{M}^{(d)}, \mathcal{N}^{(d+1)}]$ が**アノマリー**を持つとは, ある2つの異なる $d+1$ 次元時空 $\mathcal{N}_1^{(d+1)}, \mathcal{N}_2^{(d+1)}$ であって $\partial\mathcal{N}_1^{(d+1)} = \partial\mathcal{N}_2^{(d+1)} = \mathcal{M}^{(d)}$ を充たすものが存在して

$$J[A; \mathcal{N}_1^{(d+1)}, \mathcal{N}_2^{(d+1)}] := \frac{\widehat{Z}[A; \mathcal{M}^{(d)}, \mathcal{N}_2^{(d+1)}]}{\widehat{Z}[A; \mathcal{M}^{(d)}, \mathcal{N}_1^{(d+1)}]} \neq 1$$

が成り立つことを言う.

定義 3.11: IFT

TQFT $\mathcal{Z}: \mathbf{Cob}_{d+1} \rightarrow \mathbf{Hilb}$ が**IFT** (invertible field theory) であるとは, $\forall \Sigma^{(d)} \in \text{Ob}(\mathbf{Cob}_{d+1})$ について

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Z}(\Sigma^{(d)}) = 1$$

が成り立つことを言う.

仮説 3.1 において, $S^{\text{top}}[A; \mathcal{N}^{(d+1)}]$ は TQFT であった. 特に **IFT** であることを仮定すると, **アノマリー**は

$$\begin{aligned} J[A; \mathcal{N}_1^{(d+1)}, \mathcal{N}_2^{(d+1)}] &= \frac{\widehat{Z}[A; \mathcal{M}^{(d)}, \mathcal{N}_2^{(d+1)}]}{\widehat{Z}[A; \mathcal{M}^{(d)}, \mathcal{N}_1^{(d+1)}]} \\ &= (e^{iS^{\text{top}}[A; \mathcal{N}_1^{(d+1)}]})^\dagger e^{iS^{\text{top}}[A; \mathcal{N}_2^{(d+1)}]} \\ &= \langle \mathcal{Z}(\mathcal{N}_1^{(d+1)}) | \mathcal{Z}(\mathcal{N}_2^{(d+1)}) \rangle \\ &= \mathcal{Z}((- \mathcal{N}_1^{(d+1)}) \cup_{\partial\mathcal{N}^{(d+1)}} \mathcal{N}_2^{(d+1)}) \end{aligned}$$

となる. i.e. $\mathcal{M}^{(d)}$ のアノマリーはある IFT $\mathcal{Z}: \mathbf{Cob}_{d+1} \rightarrow \mathbf{Hilb}$ の分配関数^{*25}である. この事実を**バルク-エッジ対応**と言う. 結局, アノマリーを列挙する問題は IFT を列挙する問題に帰着された, ということである.

^{*25} $d+1$ 次元閉多様体 $\mathcal{N}^{(d+1)}$ を $\mathcal{N}^{(d+1)} \in \text{Hom}_{\mathbf{Cob}_{d+1}}(\emptyset, \emptyset)$ と見做した際に, **TQFT** $\mathcal{Z}: \mathbf{Cob}_{d+1} \rightarrow \mathbf{Hilb}$ によって線型写像 $\mathcal{Z}(\mathcal{N}^{(d+1)}): \mathcal{Z}(\emptyset) \rightarrow \mathcal{Z}(\emptyset)$ が定まるが, $\mathcal{Z}(\emptyset) = \mathbb{C}$ と定義していたのでこの線型写像はある複素数 $\lambda_{\mathcal{Z}, \mathcal{N}^{(d+1)}} \in \mathbb{C}$ と $\mathcal{Z}(\mathcal{N}^{(d+1)})(|\psi\rangle) = \lambda_{\mathcal{Z}, \mathcal{N}^{(d+1)}} |\psi\rangle$ の関係で一対一対応する. この複素数 $\lambda_{\mathcal{Z}, \mathcal{N}^{(d+1)}}$ のことを $\mathcal{Z}(\mathcal{N}^{(d+1)})$ と書いて, **分配関数**と呼ぶ.

さらに、次の有名な予想がある [FH21] :

予想 3.1: Freed-Hopkins の予想

IFT $\mathbf{Cob}_{d+1} \rightarrow \mathbf{Hilb}$ の群構造は、 $d+2$ 次元の bordism 群の Anderson 双対

$$(I_{\mathbb{Z}}\Omega)^{d+2}$$

により与えられる。

3.3.7 高次対称性のアノマリー

高次対称性に関しても全く同様にアノマリーを判定できる。つまり、 p -form カレントを背景ゲージ場と結合させてゲージ変換を施した際の分配関数の変化が

$$Z[A_{p_i} + d\Lambda_{p_i-1}] = Z[A_{p_i}]e^{i \int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} \mathcal{A}[A_{p_i}, \Lambda_{p_i-1}]}$$

となり、 $\mathcal{A}[A_{p_i}, \Lambda_{p_i-1}] \neq 0$ ならば理論はアノマリーを持つと言う。特に $\mathcal{A}[A_{p_i}, \Lambda_{p_i-1} = 0 \forall i] = 0$ ならば **Hooft アノマリー**、そうでないならば **ABJ 型のアノマリー**を持つと言う。

【例 3.3.6】 p -form $U(1)$ ゲージ理論のアノマリー

作用が

$$S[A_p] = \frac{1}{2g^2} \int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} F_{p+1} \wedge \star F_{p+1}$$

で書かれる p -form $U(1)$ ゲージ場 A_p の理論を考えよう^a $U(1)$ -ゲージ変換は $A_p \mapsto A_p + d\Lambda_{p-1}$ と書け、運動方程式と Bianchi 恒等式はそれぞれ

$$\begin{aligned} d \star F_{p+1} &= 0, \\ dF_{p+1} &= 0 \end{aligned}$$

となり、これらに対応して2つの保存カレント

$$\begin{aligned} \star J^{(e)} &:= \frac{1}{g^2} \star F_{p+1} \\ \star J^{(m)} &:= \frac{1}{2\pi} F_{p+1} \end{aligned}$$

がある。背景ゲージ場 $B_{p+1}^{(e)}$, $B_{D-p}^{(m)}$ と結合させよう：

$$S[A_p, B_{p+1}^{(e)}, B_{D-p}^{(m)}] = \int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} \frac{1}{2g^2} (F_{p+1} - B_{p+1}^{(e)}) \wedge \star (F_{p+1} - B_{p+1}^{(e)}) + \frac{i}{2\pi} \int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} F_{p+1} \wedge B_{D-p}^{(m)}$$

ここで背景ゲージ場のゲージ変換 $\delta B_{p+1}^{(e)} = \Lambda_{p+1}^{(e)} \in B^{p+1}(\mathcal{M}^{(D+1)}; \mathbb{Z})$ を施す^b：

$$S[A_p, B_{p+1}^{(e)} + \Lambda_{p+1}^{(e)}, B_{D-p}^{(m)}]$$

$$= S[A_p, B_{p+1}^{(e)}, B_{D-p}^{(m)}] + \frac{i}{2\pi} \int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} \Lambda_{p+1}^{(e)} \wedge B_{D-p}^{(m)}$$

この 't Hooft アノマリーは、アノマリー流入

$$\widehat{A}[B_{p+1}^{(e)}, B_{D-p}^{(m)}] := \frac{i}{2\pi} B_{p+1}^{(e)} \wedge dB_{D-p}^{(m)}$$

により相殺される． と言うのも，

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{N}^{(D+2)}} \widehat{A}[B_{p+1}^{(e)} + \Lambda_{p+1}^{(e)}, B_{D-p}^{(m)}] &= \int_{\mathcal{N}^{(D+2)}} \widehat{A}[B_{p+1}^{(e)}, B_{D-p}^{(m)}] + \frac{i}{2\pi} \int_{\mathcal{N}^{(D+2)}} \Lambda_{p+1}^{(e)} \wedge dB_{D-p}^{(m)} \\ &= \int_{\mathcal{N}^{(D+2)}} \widehat{A}[B_{p+1}^{(e)}, B_{D-p}^{(m)}] + (-1)^{p+1} \frac{i}{2\pi} \int_{\partial\mathcal{N}^{(D+2)}=\mathcal{M}^{(D+1)}} \Lambda_{p+1}^{(e)} \wedge B_{D-p}^{(m)} \end{aligned}$$

となるので，分配関数を

$$\widehat{Z}[B_{p+1}^{(e)}, B_{D-p}^{(m)}] := Z[B_{p+1}^{(e)}, B_{D-p}^{(m)}] e^{(-1)^p \int_{\mathcal{N}^{(D+2)}} \widehat{A}[B_{p+1}^{(e)}, B_{D-p}^{(m)}]}$$

と正則化すれば良い．

^a この理論は ***p*-form electrodynamics** と呼ばれる．

^b $B^\bullet(\mathcal{M}^{(D+1)}) := \text{Im}(d : \Omega^{\bullet-1}(\mathcal{M}^{(D+1)}) \rightarrow \Omega^\bullet(\mathcal{M}^{(D+1)}))$ はバウンダリー．

3.4 Dijkgraaf-Witten 理論

離散的ゲージ理論^{*26}として知られる Dijkgraaf-Witten 理論 [DW90] を導入する．

3.4.1 普遍束

G を Lie 群とする．

^{*26} ゲージ場は 1 形式である．

定義 3.12: ファイバー束の引き戻し

- 構造群 G を持つファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$
- 連続写像 $f: B_1 \rightarrow B$

を与える. このとき

$$f^*(E) := \{ (b_1, u) \in B_1 \times E \mid f(b_1) = \pi(u) \}$$

と定めることで得られるファイバー束 $F \hookrightarrow f^*(E) \xrightarrow{\text{proj}_1} B_1$ のことを引き戻し束 (pullback bundle) と呼ぶ (図式 3.1).

$$\begin{array}{ccc} f^*(E) & \xrightarrow{\text{proj}_2} & E \\ \text{proj}_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

図 3.1: 引き戻し束

ファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ が

- B の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$
- 局所自明化 $\{\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\sim} U_\alpha \times F\}_{\alpha \in \Lambda}$
- 変換関数 $\{t_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G\}_{\alpha \in \Lambda}$

を持つとき, 引き戻し束 $F \hookrightarrow f^*(E) \xrightarrow{\text{proj}_1} B_1$ の構造は

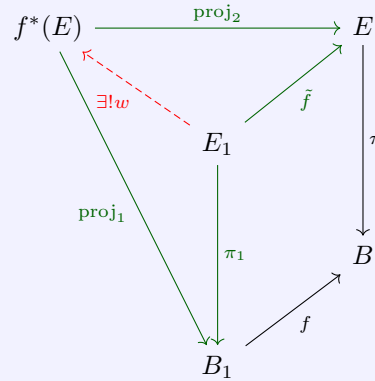
- B_1 の開被覆 $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$
- 局所自明化 $\{\tilde{\varphi}_\alpha: f^{-1}(U_\alpha) \times \pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\sim} f^{-1}(U_\alpha) \times F, (b_1, u) \mapsto (b_1, \text{proj}_2 \circ \varphi_\alpha(u))\}_{\alpha \in \Lambda}$
- 変換関数 $\{\tilde{t}_{\alpha\beta}: f^{-1}(U_\alpha) \cap f^{-1}(U_\beta) \rightarrow G, x \mapsto t_{\alpha\beta}(f(x))\}_{\alpha \in \Lambda}$

によって定まる.

命題 3.1: 引き戻し束の同型

- 2つのファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$, $F \hookrightarrow E_1 \xrightarrow{\pi_1} B_1$
- 束写像 $(f: B_1 \rightarrow B, \tilde{f}: E_1 \xrightarrow{\pi_1} E)$

を与える. このとき以下の図式を可換にする $w: E_1 \rightarrow f^*(E)$ が一意的存在し, E_1 と引き戻し束 $f^*(E)$ が束同型になる.



証明

$$w: E_1 \rightarrow f^*(E), u \mapsto (\pi_1(u), \tilde{f}(u))$$

と定義すると図式の緑色の部分が全て可換になり, 束同型を与える. 一意性は w の定義から明らか. ■

圏 **hoMfd** を,

- 多様体を対象とする
- 2つの多様体 X, Y の間のホモトピー集合 $[X, Y]$ を Hom 集合とする

ものとして定義する.

- $\forall X \in \text{Ob}(\mathbf{hoMfd})$ に対して集合

$$\text{Prin}_G(X) := \{ X \text{ 上の主束の束同型類} \}$$

を,

- $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathbf{hoMfd})$ の $\forall [f] \in \text{Hom}_{\mathbf{hoMfd}}(X, Y)$ に対して写像

$$\text{Prin}_G([f]): \text{Prin}_G(Y) \rightarrow \text{Prin}_G(X), [\xi] \mapsto [f^*(\xi)]$$

を

対応づける対応

$$\text{Prin}_G: \mathbf{hoMfd} \rightarrow \mathbf{Sets}$$

は反変関手である [Hus94, p.53, 10.1 Theorem].

定義 3.13: 普遍束

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} B$ が G の**普遍束** (universal bundle) であるとは, $\forall X \in \text{Ob}(\mathbf{hoMfd})$ について定まる写像

$$\phi_P(X): [X, B] \longrightarrow \text{Prin}_G(X), [f] \longmapsto [f^*P]$$

が全単射になること.

普遍束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} B$ において, B のことを G の**分類空間** (classifying space) と呼ぶ.

G の普遍束の全空間を EG , 分類空間を BG と書く慣習がある.

命題 3.2: 普遍束の特徴付け

主束 $G \hookrightarrow EG \xrightarrow{\pi_G} BG$ が G の**普遍束**であることは, 以下の2つが満たされることと同値である:

(univ-1) $\forall X \in \text{Ob}(\mathbf{hoMfd})$ および X を底空間にもつ任意の主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$ に対して, ある連続写像 $f: X \longrightarrow BG$ が存在して P と**引き戻し束** $f^*(EG)$ が束同型になる.

(univ-2) $\forall X \in \text{Ob}(\mathbf{hoMfd})$ および任意の連続写像 $f, g: X \longrightarrow BG$ に対して, $f^*(EG)$ と $g^*(EG)$ が束同型ならば f, g はホモトピックである.

証明 **(univ-1)** は写像 $\phi_{EG}(X)$ の全射性, **univ-2** は写像 $\phi_{EG}(X)$ の単射性を意味する. ■

命題 3.3: 普遍束の全空間の特徴付け

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} B$ が**普遍束**であるための必要十分条件は, $\forall n \geq 0$ に対して $\pi_n(P) = 0$ を満たすことである.

証明 [Ste51, p.102, 19.4] ■

命題 3.4:

G が離散群ならば $BG = K(G, 1)$

証明 命題 3.3 より, ホモトピー長完全列から $\pi_n(BG) \cong \pi_{n-1}(G)$ が言える. 離散群の場合は $\pi_0(G) = G$ かつ $\pi_{n>0}(G) = 0$ なので示された. ■

定義したは良いが, 与えられた G に対してその普遍束が存在しなければ意味がないので, 具体的に EG を構成しよう.

集合

$$EG_M := \{ (t_0g_0, t_1g_1, \dots) \mid t_i \in [0, 1], g_i \in G, \begin{array}{l} \text{高々有限個の } i \text{ のみ } t_i \neq 0 \\ \text{かつ } \sum_{i \geq 0} t_i = 1 \end{array} \}$$

を考える. $\langle g, t \rangle := (t_0g_0, t_1g_1, \dots)$ と書き, EG_M 上の等号を

$$\langle g, t \rangle = \langle g', t' \rangle \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall i \geq 0, t_i = t'_i \text{ かつ } \forall i \geq 0, t_i = t'_i > 0 \implies g_i = g'_i$$

と定義する。 EG_M への G の自由な右作用を

$$\blacktriangleleft: EG_M \times G \longrightarrow EG_M, ((t_0g_0, t_1g_1, \dots), g) \longmapsto (t_0g_0g, t_1g_1g, \dots)$$

で定義する。 EG_M には, $\forall i \geq 0$ について定まる写像

$$\begin{aligned} t_i: EG_M &\longrightarrow [0, 1], (t_0g_0, t_1g_1, \dots) \longmapsto t_i, \\ x_i: t_i^{-1}((0, 1]) &\longrightarrow G, (t_0g_0, t_1g_1, \dots) \longmapsto x_i \end{aligned}$$

が連続になるような最小の位相を入れる。右作用 \blacktriangleleft による EG_M の商位相空間を $BG_M := EG_M/G$ とおく。

定理 3.4: Milnor 構成

任意の Lie 群 G について $G \hookrightarrow EG_M \xrightarrow{p} BG_M$ は^a主束であり, 普遍束でもある。

^a $p: EG_M \longrightarrow BG_M$ は商写像。

証明 主束であること

$\forall i \geq 0$ に対して $U_i := p(t_i^{-1}((0, 1]))$ とおくと, 開集合族 $\{U_i\}_{i \geq 0}$ は BG_M の開被覆になる^{*27}。さらに, $\forall \langle g, t \rangle \in EG_M, \forall h \in G$ に対して $t_i(\langle g, t \rangle \blacktriangleleft h) = t_i(\langle g, t \rangle)$ が成り立つので $p^{-1}(U_i) = t_i^{-1}((0, 1])$ が言える^{*28}。

次に, $\forall i \geq 0$ を 1 つ固定し, U_i 上の局所自明化を構成する。連続写像

$$\sigma_i: p^{-1}(U_i) \longrightarrow p^{-1}(U_i), \langle g, t \rangle \longmapsto \langle g, t \rangle \blacktriangleleft (g_i(\langle g, t \rangle))^{-1}$$

を考える。 $\forall h \in G$ に対して

$$\begin{aligned} \sigma_i(\langle g, t \rangle \blacktriangleleft h) &= \langle g, t \rangle \blacktriangleleft (h g_i(\langle g, t \rangle \blacktriangleleft h)^{-1}) \\ &= \langle g, t \rangle \blacktriangleleft (h h^{-1} g_i(\langle g, t \rangle))^{-1} \\ &= \langle g, t \rangle \blacktriangleleft (g_i(\langle g, t \rangle))^{-1} \\ &= \sigma_i(\langle g, t \rangle) \end{aligned}$$

が成り立つから,

$$s_i: U_i \longrightarrow p^{-1}(U_i), p(\langle g, t \rangle) \longmapsto \sigma_i(\langle g, t \rangle)$$

は well-defined な連続写像である。さらに $\forall p(\langle g, t \rangle) \in U_i$ に対して $p \circ s_i(p(\langle g, t \rangle)) = p \circ \sigma_i(\langle g, t \rangle) = p(\langle g, t \rangle)$ が成り立つので s_i は局所切断である。ここで

$$\varphi_i: p^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times G, s_i(x) \blacktriangleleft g \longmapsto (x, g)$$

^{*27} U_i が BG_M の開集合であることは EG_M の位相の定義から明らか。 $\forall \langle g, t \rangle \in EG_M$ に対して, EG_M の定義から $\sum_{i \geq 0} t_i = 1$ なので $\exists i \geq 0, t_i \neq 0$ であり, $p(\langle g, t \rangle) \in U_i$ も言える。

^{*28}

$$\begin{aligned} \langle g, t \rangle \in p^{-1}(U_i) &\iff p(\langle g, t \rangle) \in U_i = p(t_i^{-1}((0, 1])) \\ &\iff \exists h \in G, \exists \langle g', t' \rangle \in t_i^{-1}((0, 1]), \langle g, t \rangle = \langle g', t' \rangle \blacktriangleleft h \\ &\implies t_i(\langle g, t \rangle) = t_i(\langle g', t' \rangle \blacktriangleleft h) = t_i(\langle g', t' \rangle) \in (0, 1] \\ &\iff \langle g, t \rangle \in t_i^{-1}((0, 1]) \end{aligned}$$

逆の包含は明らか。

と定義すると、 φ_i は well-defined な同相写像になっている^{*29} ので U_i 上の局所自明化である。別の $j \geq 0$ をとると、 $\forall p(\langle g, t \rangle) \in p^{-1}(U_i \cap U_j)$, $\forall h \in G$ に対して

$$\begin{aligned}\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(p(\langle g, t \rangle), h) &= \varphi_i(\sigma_j(\langle g, t \rangle) \blacktriangleleft h) \\ &= \varphi_i(\sigma_i(\langle g, t \rangle) \blacktriangleleft (g_i(\langle g, t \rangle)g_j(\langle g, t \rangle)^{-1}h)) \\ &= (p(\langle g, t \rangle), g_i(\langle g, t \rangle)g_j(\langle g, t \rangle)^{-1}h)\end{aligned}$$

が成り立つので、変換関数は

$$t_{ij}: U_i \cap U_j \longrightarrow G, p(\langle g, t \rangle) \longmapsto g_i(\langle g, t \rangle)g_j(\langle g, t \rangle)^{-1}$$

だと分かった^{*30}。

最後に EG_M が第 2 可算な Hausdorff 空間であることを示さないといけないが、技術的なのでここでは省略する。詳細は [Hus94, p.55, 11.2 Theorem] を参照。

普遍束であること

主束 $G \hookrightarrow EG_M \xrightarrow{p} BG_M$ が命題 3.2 の条件 **(univ-1)**, **(univ-2)** を充していることを示す。

(univ-1) 勝手な多様体 X を 1 つ固定する。

- X を底空間に持つ任意の主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$
- P の開被覆 $\mathcal{U} := \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ と局所自明化 $\{\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G\}_{\alpha \in \Lambda}$
- \mathcal{U} に従属する 1 の分割 $\{v_\alpha: X \longrightarrow [0, 1]\}_{\alpha \in \Lambda}$

を与える。1 の分割の定義から、 $\forall x \in X$ に対して、 \mathcal{U} の添字集合 Λ の部分集合

$$S(x) := \{i \in \Lambda \mid \text{supp } v_i \cap \{x\} \neq \emptyset\}$$

は有限集合である。また、 Λ の任意の有限部分集合 $I \subset \Lambda$ に対して X の部分集合

$$W(I) := \{x \in X \mid \forall i \in I, \forall \alpha \in \Lambda \setminus I, v_i(x) > v_\alpha(x)\}$$

および連続関数

$$u_I: X \longrightarrow [0, 1], x \longmapsto \max \left\{ 0, \min_{i \in I, \alpha \in \Lambda \setminus I} \{v_i(x) - v_\alpha(x)\} \right\}$$

を考える。 $W(I) = u_I^{-1}((0, 1])$ なので $W(I)$ は X の開集合である。このとき、互いに異なる Λ の任意の有限部分集合 $I, J \subset \Lambda$ に対して、 $\#I = \#J$ ならば $W(I) \cap W(J) = \emptyset$ になる^{*31}。よって、 $\forall m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$W_m := \bigcup_{\substack{I \subset \Lambda, \\ \text{finite} \\ \#I=m}} W(I),$$

^{*29} $\forall \langle g, t \rangle \in p^{-1}(U_i)$ を与える。このとき $s_i(p(\langle g, t \rangle)) = \langle g, t \rangle \blacktriangleleft (g_i(\langle g, t \rangle)^{-1})$ なので $\langle g, t \rangle = s_i(p(\langle g, t \rangle)) \blacktriangleleft g_i(\langle g, t \rangle)$ であり、 G の右作用 \blacktriangleleft は自由なのでこのような分解は一意である。よって $\varphi_i(\langle g, t \rangle) = (p(\langle g, t \rangle), g_i(\langle g, t \rangle))$ であり、 φ_i が well-defined な全単射だとわかった。同相写像であることは、連続写像の合成として書けているので明らか。

^{*30} $g_i(\langle g, t \rangle) \blacktriangleleft h = g_i(\langle g, t \rangle)h$ なので、 t_{ij} は well-defined である。

^{*31} $i \in I \setminus J$, $j \in J \setminus I$ をとる。このとき $\forall x \in W(I)$ に対して $v_i(x) > v_j(x)$ が成り立ち、かつ $\forall y \in W(J)$ に対して $v_j(y) > v_i(y)$ が成り立つので、 $W(I) \cap W(J) = \emptyset$ でないといけない。

$$u_m: X \longrightarrow [0, 1], x \longmapsto \frac{\sum_{\substack{I \subset \Lambda, \\ \text{finite} \\ \#I=m}} u_I(x)}{\sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{I \subset \Lambda, \\ \text{finite} \\ \#I=n}} u_I(x)}$$

と定義すると, u_m は連続関数なので $W_m = u_m^{-1}((0, 1])$ は X の開集合であり,

- X の開被覆 $\mathcal{W} := \{W_m\}_{m \geq 0}$
- \mathcal{W} に従属する 1 の分割 $\{u_m: X \longrightarrow [0, 1]\}_{m \geq 0}$

が得られた. 特に W_m は $W(I)$ の非交和であり, $P|_{W(I)}$ は定義から自明束と同型なので^{*32} $P|_{W_m}$ は自明束と同型である. この束同型写像を $h_m: \pi^{-1}(W_m) \xrightarrow{\cong} W_m \times G$ とおく.

今, 連続写像

$$\tilde{f}: P \longrightarrow EG_M, u \longmapsto \left((u_0 \circ \pi(u)) (\text{proj}_2 \circ h_0(u)), \dots, (u_m \circ \pi(u)) (\text{proj}_2 \circ h_m(u)), \dots \right)$$

を考える. $u \notin \pi^{-1}(W_m)$ のときは 1 の分割の定義から $u_m \circ \pi(u) = 0$ となるのでこの写像は well-defined であり, $\forall g \in G$ に対して^{*33}

$$\begin{aligned} \tilde{f}(u \blacktriangleleft g) &= \left((u_0 \circ \pi(u \blacktriangleleft g)) (\text{proj}_2 \circ h_0(u \blacktriangleleft g)), \dots, (u_m \circ \pi(u)) (\text{proj}_2 \circ h_m(u \blacktriangleleft g)), \dots \right) \\ &= \left((u_0 \circ \pi(u)) (\text{proj}_2 \circ h_0(u))g, \dots, (u_m \circ \pi(u)) (\text{proj}_2 \circ h_m(u))g, \dots \right) \\ &= \tilde{f}(u) \blacktriangleleft g \end{aligned}$$

が成り立つ. このとき連続写像

$$f: X \longrightarrow BG_M, \pi(u) \longmapsto p(\tilde{f}(u))$$

は well-defined であり, 図式

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\tilde{f}} & EG_M \\ \pi \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & BG_M \end{array}$$

を可換にする. i.e. 組 (f, \tilde{f}) は束写像である. よって命題 3.1 より P と $f^*(EG_M)$ が束同型だと分かった.

(univ-2)

■

3.4.2 群コホモロジー

先に進む前に, 特異ホモロジー・コホモロジーについて復習する. R を単項イデアル整域, M を R -加群とする.

^{*32} $W(I) \subset \bigcap_{i \in I} v_i^{-1}((0, 1]) \subset \bigcap_{i \in I} U_i$ なので.

^{*33} $u \blacktriangleleft g$ は命題 2.2 で与えた G の P への右作用である.

- R -係数特異ホモロジーとは, 関手

$$H_k(-; R): \mathbf{Top} \xrightarrow{S_\bullet(-; \mathbb{Z})} \mathbf{Chain} \xrightarrow{H_k} R\text{-Mod}$$

のこと.

- M -係数特異ホモロジーとは, 関手

$$H_k(-; M): \mathbf{Top} \xrightarrow{S_\bullet(-; \mathbb{Z})} \mathbf{Chain} \xrightarrow{\otimes_R M} \mathbf{Chain} \xrightarrow{H_k} R\text{-Mod}$$

のこと.

- 任意の位相空間 X に対して, $H_\bullet(X; R)$ と $H_\bullet(X; M)$ は普遍係数定理

$$0 \longrightarrow H_k(X; R) \otimes_R M \longrightarrow H_k(X; M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(H_{k-1}(X; R), M) \longrightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

によって互いに関係する.

特に, 特異ホモロジーの場合は構成から $\forall k \in \mathbb{Z}$ に対して $S_k(X; R)$ が自由加群なのでこの短完全列は分裂し

$$H_k(X; M) \cong (H_k(X; R) \otimes_R M) \oplus \mathrm{Tor}_1^R(H_{k-1}(X; R), M)$$

が言える.

- R -係数特異コホモロジーとは, 関手

$$H^k(-; R): \mathbf{Top} \xrightarrow{S_\bullet(-; \mathbb{Z})} \mathbf{Chain} \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(-; R)} \mathbf{Chain}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{H^k} R\text{-Mod}$$

のこと.

- M -係数特異コホモロジーとは, 関手

$$H^k(-; M): \mathbf{Top} \xrightarrow{S_\bullet(-; \mathbb{Z})} \mathbf{Chain} \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(-; R)} \mathbf{Chain} \xrightarrow{\otimes_R M} \mathbf{Chain}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{H^k} R\text{-Mod}$$

のこと.

- 任意の位相空間 X に対して, $H^\bullet(X; R)$ と $H^\bullet(X; M)$ は普遍係数定理

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(H_{k-1}(X; R), M) \longrightarrow H^k(X; M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(H_k(X; R), M) \longrightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

によって互いに関係する.

特に, 特異コホモロジーの場合は構成から $\forall k \in \mathbb{Z}$ に対して $\mathrm{Hom}_R(S_k(X; R), R)$ が自由加群なのでこの短完全列は分裂し

$$H^k(X; M) \cong \mathrm{Hom}_R(H_k(X; R), M) \oplus \mathrm{Ext}_R^1(H_{k-1}(X; R), M)$$

が言える.

公理 3.2: G 加群

可換群 $(M, +)$ と, 群 G の M への左作用

$$\blacktriangleright: G \times M \longrightarrow M$$

の組み $(M, +, \blacktriangleright)$ であって, $\forall g, h \in G, \forall x, y \in M$ に対して以下の条件を充たすものを左 G 加群と呼ぶ:

$$\text{(G-mod1)} \quad g \blacktriangleright (x + y) = g \blacktriangleright x + g \blacktriangleright y$$

$$\text{(G-mod2)} \quad (gh) \blacktriangleright x = g \blacktriangleright (h \blacktriangleright x)$$

$$\text{(G-mod3)} \quad 1_G \blacktriangleright x = x$$

右 G 加群も同様に定義する.

\mathbb{Z} 係数の G の群環とは, 可換群 $\mathbb{Z}^{\oplus G}$ に積

$$(a_g)_g \cdot (b_g)_g := \left(\sum_{hk=g} a_h b_k \right)_g$$

を定義してできる環 $(\mathbb{Z}^{\oplus G}, +, \cdot)$ のこと. 記号として $\mathbb{Z}[G]$ と書く. 左 G 加群と左 $\mathbb{Z}[G]$ 加群は同一視できる.

$$\epsilon: \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z}, (a_g)_g \longmapsto \sum_{g \in G} a_g$$

を augmentation と呼ぶ.

定義 3.14: 群コホモロジー (代数的)

左 G 加群 M を与える. \mathbb{Z} を自明な作用により左 G 加群と見做す.

- 群 G の M -係数ホモロジーとは,

$$H_{\text{Grp}k}(G; M) := \text{Tor}_k^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$$

のこと.

- 群 G の M -係数コホモロジーとは,

$$H_{\text{Grp}}^k(G; M) := \text{Ext}_{\mathbb{Z}[G]}^k(\mathbb{Z}, M)$$

のこと.

右導来関手の一般論から, 任意の G 加群の短完全列 $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ (exact) に対応する長完全列

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H_{\text{Grp}}^k(G, M_1) &\longrightarrow H_{\text{Grp}}^k(G, M_2) \longrightarrow H_{\text{Grp}}^k(G, M_3) \\ &\longrightarrow H_{\text{Grp}}^{k+1}(G, M_1) \longrightarrow H_{\text{Grp}}^{k+1}(G, M_2) \longrightarrow H_{\text{Grp}}^{k+1}(G, M_3) \\ &\longrightarrow \cdots \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

が成り立つ.

定理 3.5: 群コホモロジー (位相空間論的)

任意の群 G および G 加群 M に対して

$$H^\bullet(BG; M) \cong H_{\text{Grp}}^\bullet(G; M)$$

が成り立つ.

証明

いくつかの実用上有用な命題を紹介する:

命題 3.5: 色々な群コホモロジー

(1) 任意の有限群に対して

$$H_{\text{Grp}}^{k>0}(G; \mathbb{R}) = 0$$

(2) 任意のコンパクト Lie 群に対して

$$H_{\text{Grp}}^{2k+1}(G; \mathbb{R}) = 0$$

(3) 任意の Lie 群に対して

$$H_{\text{Grp}}^{2k}(G; \mathbb{R}) \cong \text{Inv}(\mathfrak{g})$$

証明

(1)

群 G が有限群のとき, 命題 3.5-(1) と群コホモロジーの長完全列 (3.4.1) により短完全列 $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \text{U}(1) \rightarrow 0$ から同型

$$H_{\text{Grp}}^k(G; \mathbb{Z}) \cong H_{\text{Grp}}^{k-1}(G; \text{U}(1))$$

がわかる.

3.4.3 関手としての接続

$d = D + 1$ 次元時空 $\mathcal{M}^{(d)}$ を考える. 圏 $\mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)})$ を^{*34},

- $\mathcal{M}^{(d)}$ の点を対象とする.
- $\text{Hom}_{\mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)})}(x, y) := \{ \sigma: [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}^{(d)} \mid \sigma(0) = x, \sigma(1) = y \}$

によって定義する.

^{*34} これは groupoid を成し, path groupoid と呼ばれる (<https://ncatlab.org/nlab/show/path+groupoid>).

命題 3.6: 関手としての接続

- $\mathcal{M}^{(d)}$ 上の主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}^{(d)}$
- P の同伴ベクトル束 $V \hookrightarrow E \xrightarrow{q} \mathcal{M}^{(d)}$

を与える. このとき, 任意の P の接続形式 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ に対して

- (1) $\forall x \in \text{Ob}(\mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)}))$ に対して $\Gamma_\omega(x) := q^{-1}(\{x\})$
- (2) $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)})), \forall \sigma \in \text{Hom}_{\mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)})}(x, y)$ に対して^a $\Gamma_\omega(\sigma) := (u =: \tilde{\sigma}(0) \mapsto \tilde{\sigma}(1))$

と定義される対応

$$\Gamma_\omega: \mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)}) \longrightarrow \mathbf{Vect}$$

は関手である.

^a $\Phi_u(\sigma) \in G$ はループ σ のホロノミー.

逆に, 関手

$$\Gamma: \mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)}) \longrightarrow \mathbf{Vect}$$

であって以下の条件を満たすものは P の接続形式 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ を与える:

- (1) 任意の単調増加関数 $f: [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ および $\forall \sigma \in \text{Hom}_{\mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)})}(x, y)$ に対して

$$\Gamma(\sigma) = \Gamma(\sigma \circ f)$$

- (2) 任意の単調減少関数 $f: [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ および $\forall \sigma \in \text{Hom}_{\mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)})}(x, y)$ に対して

$$\Gamma(\sigma) = \Gamma(\sigma \circ f)$$

- (3) Γ は σ について適切な C^∞ 性を満たす.

証明 前半は命題 2.15 より明らか. 後半は [Bae], [Bar91] を参照 ■

大域的切断 $s: \mathcal{M}^{(d)} \longrightarrow P$ を許容する主束 P およびその接続 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ を与え, 2点 $x, y \in \mathcal{M}^{(d)}$ を繋ぐ曲線 $\sigma \in \text{Hom}_{\mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)})}(x, y)$ であって, その水平持ち上げ $\tilde{\sigma}$ が $\tilde{\sigma}(0) = s(x)$ を満たすものをとる. するとこのとき $\tilde{\sigma}(1) = s(y) \triangleleft g_\sigma$ を満たす $g_\sigma \in G$ が一意に定まる. さらに2点 $y, z \in \mathcal{M}^{(d)}$ を繋ぐ曲線 $\sigma' \in \text{Hom}_{\mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)})}(y, z)$ であって, その水平持ち上げ $\tilde{\sigma}'$ が $\tilde{\sigma}'(0) = s(y)$ を満たすものをとると, 水平持ち上げの一意性から $\widetilde{(\sigma' * \sigma)}(1) = s(z) \triangleleft g_\sigma g_{\sigma'}$ が成り立つ. 従って, P が自明束ならば命題 3.6 の関手 $\Gamma_\omega: \mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)}) \longrightarrow \mathbf{Vect}$ は関手

$$\Gamma_\omega: \mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)}) \longrightarrow \mathbf{BG}$$

と見做せる. ただし \mathbf{BG} は

- 一点のみを対象に持つ: $\text{Ob}(\mathbf{BG}) = \{*\}$

- G の元を射に持つ. 射の合成は G の積として定める

ことで構成される圏である. 自明束 P におけるゲージ変換とは, 大域的切断の取り替えに伴う変換関数によって特徴付けられる. 変換関数とは, 2つの大域的切断 $s_1, s_2: M \rightarrow P$ に対して $s_1(x) = s_2(x) \triangleleft g_{12}(x)$ と定義することで定まる $g_{12}: M \rightarrow G$ のことであり, $\sigma \in \text{Hom}_{\mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)})}(x, y)$ に対して

$$\Gamma_\omega(\sigma) \mapsto \Gamma'_\omega(\sigma) = g_{12}(y)^{-1} \Gamma_\omega(\sigma) g_{12}(x) \quad (3.4.2)$$

なる変換を引き起こす^{*35}. i.e. 変換関数 $g_{12}: M \rightarrow P$ は, 自然変換

$$\begin{array}{ccc} & \Gamma_\omega & \\ \text{P}_1(\mathcal{M}^{(d)}) & \begin{array}{c} \Downarrow g_{12} \\ \Downarrow \end{array} & \mathbf{B}G \\ & \Gamma'_\omega & \end{array}$$

である.

定義 3.15: 平坦接続

$\mathcal{M}^{(d)}$ 上の主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}^{(d)}$ を与える. このとき P の関手としての接続

$$\Gamma: \mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)}) \rightarrow \mathbf{Vect}$$

が平坦接続 (flat connection) であるとは, 互いにホモトピックな任意の $\sigma, \sigma' \in \text{Hom}_{\mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)})}$ に対して

$$\Gamma(\sigma) = \Gamma(\sigma')$$

が成り立つことを言う.

これまでの議論から, 連結な $\mathcal{M}^{(d)}$ 上の平坦接続のモジュライ空間は

$$\text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(\pi_1(\mathcal{M}^{(d)}), G)/G \quad (3.4.3)$$

であることが分かった. ただし G 作用 $g \mapsto g^{-1}(-)g$ によって商をとり, ゲージ変換 (3.4.2) の冗長性を排除した.

3.4.4 トポロジカルなゲージ理論: Lie 群の場合

時空が $2+1$ 次元の連結な閉多様体 $\mathcal{M}^{(3)}$ であるとする. Lie 群 G がコンパクトかつ単連結ならば, $\mathcal{M}^{(3)}$ 上の任意の主束は自明束と同型になり, Chern-Simons 作用

$$S[A] := \frac{k}{8\pi^2} \int_{\mathcal{M}^{(3)}} \text{Tr} \left(A \wedge A + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right)$$

は well-defined である. しかし, G が一般のコンパクト Lie 群である場合にはそう上手くいかない.

^{*35} $\tilde{\sigma}(0) = s_1(x)$ とする. このとき $\tilde{\sigma} \triangleleft g_{12}(x)$ は $s_2(x) = s_1(x) \triangleleft g_{12}(x)$ を始点とする σ の水平持ち上げであるから, $s_2(y) \triangleleft \Gamma'_\omega(\sigma) = \tilde{\sigma}(1) \triangleleft g_{12}(x) = s_1(y) \triangleleft \Gamma_\omega(\sigma) \triangleleft g_{12}(x) = s_2(y) \triangleleft (g_{12}(y)^{-1} \Gamma_\omega(\sigma) g_{12}(x))$

これを解決する方法としては、 $\mathcal{M}^{(3)}$ を境界を持つ 4 次元多様体 $\mathcal{N}^{(4)}$ を持ってきて、

$$S[A] := \int_{\mathcal{N}^{(4)}} \Omega(F) = \frac{k}{8\pi^2} \int_{\mathcal{N}^{(4)}} \text{Tr}[F \wedge F]$$

と定義することが考えられる．この $S[A]$ は Chern 指標^{*36}の積分なので整数値を取り、トポロジカルなゲージ場の理論になっている．4 次元多様体への拡張は一意ではないので作用は $\text{mod } 1$ の不定性を持つが、分配関数は well-defined になる．しかし、この構成が可能であるためには任意の $\mathcal{M}^{(3)}$ 上の主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}^{(3)}$ に対して、 $\mathcal{N}^{(4)}$ 上の主束 $G \hookrightarrow P' \xrightarrow{\pi'} \mathcal{N}^{(4)}$ であって、 $\partial\mathcal{N}^{(4)} = \mathcal{M}^{(3)}$ への制限 $P'|_{\partial\mathcal{N}^{(4)}} = P$ を満たすようなものが存在しなくてはならない．この拡張の障害となるのが、**分類写像** $\gamma: \mathcal{M}^{(3)} \rightarrow BG$ の誘導準同型による $\mathcal{M}^{(3)}$ の基本類 $[\mathcal{M}^{(3)}] \in H_3(\mathcal{M}^{(3)}; \mathbb{Z})$ の像 $\gamma_*[\mathcal{M}^{(3)}] \in H_3(BG; \mathbb{Z})$ である^{*37}．もし $\gamma_*[\mathcal{M}^{(3)}] = 0$ なら拡張が可能だが、そうでないときは不可能ということになる．しかしながら、命題 3.5-(2) よりコンパクト Lie 群の奇数次のホモロジーは捻れ元 (torsion element) のみから成るので、ある $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して

$$n \cdot \gamma_*[\mathcal{M}^{(3)}] = 0$$

を満たす．よって素朴には

$$S[A] := \frac{1}{n} \int_{\mathcal{N}^{(4)}} \Omega(F)$$

と修正すれば良いように思えるが、このままだと分配関数に $e^{2i\pi m/n}$ の不定性残り理論が well-defined でない．この不定性を排除するためには、 $\Omega(F) \in H_{\text{dR}}^4(\mathcal{M}^{(3)}) \cong H_{\text{dR}}^4(BG) \cong H^4(BG; \mathbb{R})$ だが $\Omega(F)$ は特性類なので、自然な単射 $H^4(BG, \mathbb{Z}) \hookrightarrow H^4(BG; \mathbb{R})$ を使って $\Omega(F) \cong \rho([\omega])$ と書けるような $[\omega] \in H^4(BG, \mathbb{Z})$ が存在することを使い

$$S[A] := \frac{1}{n} \left(\int_{\mathcal{N}^{(4)}} \Omega(F) - \langle \gamma^* \omega, \mathcal{N}^{(4)} \rangle \right)$$

とすれば良い．というのも、de Rham の定理からそもそも

$$\int_{\mathcal{N}^{(4)}} \Omega(F) = \langle \gamma^* \omega, \mathcal{N}^{(4)} \rangle$$

であり、 $[\omega]$ の別の代表元 η をとってきたとすると、その差分は $\epsilon \in C^3(BG; \mathbb{Z})$ を使って

$$\frac{1}{n} \langle \gamma^* \delta^4 \epsilon, \mathcal{N}^{(4)} \rangle = \frac{1}{n} \langle \epsilon, \gamma_* \partial \mathcal{N}^{(4)} \rangle = \langle \epsilon, \gamma_*[\mathcal{M}^{(3)}] \rangle \in \mathbb{Z}$$

になるのである．

もしくは、**Cheeger Simons differential character** [SS07] $\alpha \in \widehat{H}^3(BG, \text{U}(1))$ を使って

$$S[A] = \langle \gamma^* \alpha_A, [\mathcal{M}^{(3)}] \rangle$$

と書くこともできる．

^{*36} **Chern-Weil の定理**からこれは大域的に well-defined である．

^{*37} 厳密にはボルディズム群 $\Omega_3^{\text{SO}}(BG)$ を考えなくてはならない．

3.4.5 トポロジカルなゲージ理論：有限群の場合

ここからは d 次元の連結な時空 $\mathcal{M}^{(d)}$ を考える．ゲージ群 G が有限群^{*38}の場合，主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}^{(d)}$ の接続は一意に決まる^{*39}．さらにこの主束は被覆空間になるので， $\forall \sigma \in \text{Hom}_{\mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)})}(x, x)$ は x のファイバー内の点 $u \in \pi^{-1}(\{x\})$ について一意的に $\tilde{\sigma} \in \text{Hom}_{\mathbf{P}_1(P)}(u, \tilde{\sigma}(1))$ へ持ち上がり， $\tilde{\sigma}(1) =: \tilde{\sigma}(0) \triangleleft \gamma_P(\sigma)$ とおくことで，連続な群準同型

$$\begin{aligned} \gamma_P: \text{Hom}_{\mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)})}(x, x) &\longmapsto \text{Hom}_{\mathbf{B}G}(*, *) = G, \\ \sigma &\longmapsto \gamma_P(\sigma) \end{aligned}$$

を定める．さらに， $\mathcal{M}^{(d)}$ のホモトピーもまた P 上に持ち上がるため，群準同型 $\gamma_{[P]}: \pi_1(\mathcal{M}^{(d)}) \longrightarrow G$ が定まった．始点 $u \in \pi^{-1}(\{x\})$ を $u \triangleleft h$ に取り替えることは $\gamma_{[P]}(\sigma) \longmapsto h^{-1}\gamma_{[P]}(\sigma)h$ の変換を引き起こす．以上の議論より，写像

$$\begin{aligned} \text{Prin}_G(\mathcal{M}^{(d)}) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(\pi_1(\mathcal{M}^{(d)}), G)/G, \\ [P] &\longmapsto \gamma_{[P]} \end{aligned}$$

が全単射だと分かる [FQ93, p.4]. (3.4.3) と比較すると，結局

$$\text{Prin}_G(\mathcal{M}^{(d)}) \xleftarrow{1:1} \{ \mathcal{M}^{(d)} \text{ 上の平坦接続全体の集合 } \}$$

であることが分かった．

定義 3.16: Dijkgraaf-Witten 理論

Dijkgraaf-Witten 理論を

$$Z(\mathcal{M}^{(d)}) =: \frac{1}{\#G} \sum_{\gamma \in [\mathcal{M}^{(d)}, BG]} e^{2\pi i S[\gamma]} \quad \text{w/} \quad S[\gamma] := \langle \gamma^* \alpha, [\mathcal{M}^{(d)}] \rangle \quad (3.4.4)$$

と定義する^a．ここに $\alpha \in H^d(BG; \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ である．

^a BG の定義から，主束 P の同型類 $[P]$ は $[\mathcal{M}^{(d)}, BG]$ の元と 1 対 1 対応するので，左辺では $\mathcal{M}^{(d)}$ を底空間とする主束の同型類全体に渡って和（経路積分）をとっていることになる．

このままだと実用上不便なので，計算しやすい形に書きかえよう． $H^k(BG; \text{U}(1)) \cong H_{\text{Grp}}^k(G; \text{U}(1))$ であるから，結局群コホモロジーを具体的に計算することになる．

M を G 加群とする．Milnor 構成を思い出すと，群コホモロジーのコチェイン $C^k(G; M)$ を

$$C_{\text{Grp}}^k(G; M) := \{ \omega: G^{n+1} \longrightarrow M \mid \forall g \in G, \forall g_0, \dots, g_n \in G, \omega(g_0, \dots, g_n) = \omega(gg_0, \dots, gg_n) \}$$

で定義し，余境界写像 $\delta^{k+1}: H_{\text{Grp}}^k(G; M) \longrightarrow H_{\text{Grp}}^{k+1}(G; M)$ を特異コホモロジーからのアナロジーで

$$(\delta^{k+1}\omega)(g_0, \dots, g_{n+1}) := \prod_{j=0}^{n+1} \omega(g_0, \dots, \hat{g}_j, \dots, g_{n+1})^{(-1)^j}$$

^{*38} 離散位相を入れて位相群と見做す．

^{*39} 直観的には，ファイバー方向の接空間，i.e. 垂直部分空間が 0 次元になると考える．

と定義してみる^{*40}。すると $\delta^2 = 0$ が確認できるので系列

$$\cdots \xrightarrow{\delta^k} C_{\text{Grp}}^k(G; M) \xrightarrow{\delta^{k+1}} C_{\text{Grp}}^{k+1}(G; M) \xrightarrow{\delta^{k+2}} \cdots$$

はコチェイン複体を成す。この複体のコホモロジー類をとることで $H_{\text{Grp}}^k(G; M)$ が得られる^{*41}。コチェインを別の表示で書くこともできる：

$$\alpha(g_1, \dots, g_n) := \omega(1, g_1, g_1 g_2, \dots, g_1 \cdots g_n)$$

このとき、余境界写像は

$$(\delta^{n+1}\alpha)(g_1, \dots, g_{n+1}) = \alpha(g_2, \dots, g_{n+1}) \prod_{j=1}^n \alpha(g_1, \dots, g_{j-1}, g_j g_{j+1}, g_{j+2}, \dots, g_{n+1})^{(-1)^j} \alpha(g_1, \dots, g_n)^{(-1)^{n+1}}$$

と作用する。

群コホモロジーの表式を使って分配関数を計算するには、まず $\mathcal{M}^{(d)}$ の三角形分割 $|\mathcal{T}| \rightarrow \mathcal{M}^{(d)}$ をとる。簡単のため $d = 3$ とする。 $\mathcal{M}^{(3)}$ は連結だとしていたので、 BG の基点 $\text{pt} \in BG$ を1つ固定することで、**分類写像** $\gamma: M \rightarrow BG$ をホモトピックに変形して、任意の0単体 $\sigma_0 \in \mathcal{T}$ を $\gamma[\sigma_0] = \text{pt}$ に写すようにできる。すると、任意の1単体 $\sigma_1 \in \mathcal{T}$ は $\gamma(\sigma_1) \in \pi_1(BG, \text{pt})$ と見做することができるが、命題 3.4 より $\pi_1(BG, \text{pt}) \cong G$ であるから、結局分類写像 γ によって $\forall \sigma_1 \in \mathcal{T}$ と何かしらの $g_{\sigma_1} \in G$ が対応付く。この g_{σ_1} は格子ゲージ理論におけるリンク変数 (i.e. ゲージ場) と見做すと分かりやすい。しかるに、 G が有限群であることから主束の接続は平坦でなくてははいけない。そのため、もし $\sigma_1^{(1)}, \sigma_1^{(2)}, \sigma_1^{(3)} \in \mathcal{T}$ がある2単体 σ_2 について $\partial(\sigma_2) = \sigma_1^{(1)} \cup \sigma_1^{(2)} \cup \sigma_1^{(3)}$ をみたすならば

$$g_{\sigma_1^{(1)}} g_{\sigma_1^{(2)}} g_{\sigma_1^{(3)}} = \gamma(\sigma_1^{(1)} \cup \sigma_1^{(2)} \cup \sigma_1^{(3)}) = 1 \quad (3.4.5)$$

にならなくてははいけない。このとき任意の3単体 $\sigma_3 \in \mathcal{T}$ に対して $\alpha \in H_{\text{Grp}}^3(G, \text{U}(1))$ は $W(\sigma_3) \in \text{U}(1)$ を対応づけることができる。つまり、任意の3単体 $\sigma_3^{(i)}$ を四面体と見做したとき、その6つある辺のうち3つが γ によって $g_i, h_i, k_i \in G$ と同定されていれば (3.4.5) から残りの3辺も決定できるということであり、 $W(\sigma_3^{(i)}) := \alpha(g_i, h_i, k_i) \in \text{U}(1)$ として定まる。 $|\mathcal{T}| = \bigcup_{\sigma_3 \in \mathcal{T}} \sigma_3$ であり、3単体 $\sigma_3^{(i)}$ の向きを特徴付ける $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$ を使って

$$[M] = \sum_i \epsilon_i \gamma(\sigma_3^{(i)})$$

と書くことができる。よって、作用は

$$e^{2\pi i S[\gamma]} = \prod_i W(\sigma_3^{(i)})^{\epsilon_i} = \prod_i \alpha(g_i, h_i, k_i)^{\epsilon_i} \quad (3.4.6)$$

と書かれる。

^{*40} 群 G の演算は乗法的な表記を採用した。

^{*41} **群コホモロジーの定義**からこの表式を得ることもできるが、 \mathbb{Z} の $\mathbb{Z}[G]$ 加群としての射影的分解を構成するのが少し手間である。

【例 3.4.1】 Riemann 面の次元

種数 g の Riemann 面 Σ_g に対して, TQFT(3.4.4) によって定まる Hilbert 空間 $Z(\Sigma_g)$ の実態は不明だが, その次元を計算することができる. というのも,

$$Z(\Sigma_g \times S^1) = \text{Tr}(Z(\text{id}_{\Sigma_g})) = \text{Tr}(\text{id}_{Z(\Sigma_g)}) = \dim Z(\Sigma_g)$$

であるが, 最左辺は $\Sigma_g \times S^1$ の具体的な三角形分割をとることで (3.4.6) を使って計算できるのである.

3.5 離散的高次ゲージ理論

Dijkgraaf-Witten 理論は離散的ゲージ理論だが, そこで登場したゲージ場は依然として 1 形式のものだった. これを higher gauge theory に拡張するために, 新たなゲージ場の表式を導入する.

3.5.1 Deligne-Beilinson コサイクルとしての $U(1)$ ゲージ場

$d = D + 1$ 次元時空 $\mathcal{M}^{(d)}$ を考える. $\mathcal{M}^{(d)}$ の良い被覆 $\mathcal{U} := \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ を 1 つ固定する.

$\mathcal{M}^{(d)}$ 上の $U(1)$ 束 $U(1) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}^{(d)}$ を考える. 命題 2.1 より, P の同型類は変換関数の族 $\{g_{\alpha\beta}: U_{\alpha\beta} \rightarrow U(1)\}_{\alpha, \beta \in \Lambda}$ であって, コサイクル条件

$$\forall x \in U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}, g_{\alpha_0\alpha_1}(x)g_{\alpha_1\alpha_2}(x)g_{\alpha_2\alpha_0}(x) = 1$$

を満たすものによって特徴づけられるのだった. ここで $g_{\alpha\beta}(x) = e^{2i\pi\Lambda_{\alpha\beta}(x)}$ によって $\{\Lambda_{\alpha\beta}: U_{\alpha\beta} \rightarrow \mathbb{R}\}_{\alpha, \beta \in \Lambda}$ を定義すると, コサイクル条件は

$$\forall x \in U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}, \Lambda_{\alpha_0\alpha_1}(x) + \Lambda_{\alpha_1\alpha_2}(x) + \Lambda_{\alpha_2\alpha_0}(x) =: n_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}(x) \in \mathbb{Z}$$

と同値である. 今, $\{\Lambda_{\alpha_0\alpha_1}\}_{(\alpha_0, \alpha_1) \in \Lambda^2} \in \check{H}^1(\mathcal{U}; \Omega_{\mathcal{M}^{(d)}}^0)$ と見做そう.

\mathcal{U} が良い被覆であることと $n_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}: U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} \rightarrow \mathbb{Z}$ が連続であることから^{*42} $\forall (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in \Lambda^3$ に対して $n_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}(x)$ は定数関数であり, 故に $\{n_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}\}_{(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)} \in \check{H}^2(\mathcal{U}; \mathbb{Z}_{\mathcal{M}^{(d)}})$ が分かった. 特に

$$\forall x \in U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3}, n_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} - n_{\alpha_0\alpha_1\alpha_3} + n_{\alpha_0\alpha_2\alpha_3} - n_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = 0$$

が成り立つが, 左辺は Čech 複体の余境界写像 $\delta^3: \check{H}^2(\mathcal{U}; \mathbb{Z}_{\mathcal{M}^{(d)}}) \rightarrow \check{H}^3(\mathcal{U}; \mathbb{Z}_{\mathcal{M}^{(d)}})$ を使って $\delta^3(\{n_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}\}_{(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)})$ と等しいので

$$\{n_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}\}_{(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)} \in \text{Ker } \delta^3$$

i.e. Čech 2-コサイクルの元であることが分かった.

ところで命題 2.6 より, ゲージ場とは主束 P の接続形式を \mathcal{U} に付随する局所切断によって引き戻して得られる族 $\{A_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha; \mathfrak{u}(1))\}_{\alpha \in \Lambda}$ のことであるが, $\mathfrak{u}(1) \cong \mathbb{R}$ なので $A_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha)$ と見做することができる.

^{*42} \mathbb{Z} には離散位相を入れる.

よって $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \in \check{H}^0(\mathcal{U}, \Omega_{\mathcal{M}^{(d)}}^1)$ と見做すことができる. そしてこのとき $\forall \alpha_0, \alpha_1 \in \Lambda$ に対して

$$\forall x \in U_{\alpha_0 \alpha_1}, A_{\alpha_1}(x) - A_{\alpha_0}(x) = g_{\alpha_0 \alpha_1}^{-1}(x) dg_{\alpha_0 \alpha_1}(x) = 2i\pi d\Lambda_{\alpha_0 \alpha_1}(x)$$

が言える. 以上を図式にまとめると

$$\begin{array}{ccc} & & \{A_{\alpha_0}\} \\ & & \downarrow -\delta \\ & \{\Lambda_{\alpha_0 \alpha_1}\} & \xrightarrow{d} \\ & \downarrow \delta \\ \{n_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}\} & \xrightarrow{d} & \\ \downarrow \delta & & \\ 0 & & \end{array}$$

が成り立っている. i.e.

$$(\{n_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}\}, \{\Lambda_{\alpha_0 \alpha_1}\}, \{A_{\alpha_0}\}) \in \check{C}^2(\mathcal{U}, \Omega_X^{-1}) \oplus \check{C}^1(\mathcal{U}, \Omega_X^0) \oplus \check{C}^0(\mathcal{U}, \Omega_X^1)$$

であり, **Deligne-Beilinson コチェイン** の元であることが分かった. 特に $C_{D_2}^1$ の元だと見做すとこれはコサイクルである.

3 つ組 $(\mathcal{U}, P, \{A_\alpha\})$ が与えられたとき, 対応する Deligne-Beilinson コサイクルは

$$(\mathrm{d}q^{(0,0)}, \delta q^{(0,0)} + \mathrm{d}_{-1}m^{1,-1}, \delta m^{1,-1}) \text{ w/ } (m^{(1,-1)}, q^{(0,0)}) \in \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_{\mathcal{M}^{(d)}}) \oplus \check{C}^0(\mathcal{U}, \Omega_{\mathcal{M}^{(d)}}^0)$$

の不定性を持つが, この不定性は局所切断の取り替えに伴うゲージ変換に相当し, コバウンダリとして書けている. よって

$$(\mathcal{U}, P, \{A_\alpha\}) \xleftrightarrow{1:1} H_D^2(C_{D_2}, \mathcal{U})$$

なる一対一対応があることが分かった.

ゲージ場の強さは局所的に $F_\alpha := \mathrm{d}A_\alpha$ と定義されたが, 今の場合

$$F_{\alpha_0} - F_{\alpha_1} = \mathrm{d}(A_{\alpha_0} - A_{\alpha_1}) = -2i\pi \mathrm{d}^2 \Lambda_{\alpha_0 \alpha_1} = 0$$

となるので大域的に定義されていることが分かった.

higher gauge field に関しても同様である. p -form のゲージ場であれば

$$(\mathcal{U}, P^{(p)}, \{A_\alpha^{(p)}\}) \xleftrightarrow{1:1} H_D^{p+1}(C_{D_{p+1}}, \mathcal{U}) \quad (3.5.1)$$

の一対一対応がある. 逆に, 応急処置としてしばらくの間 (3.5.1) を p -form ゲージ場の定義として採用することにしよう.

3.5.2 BF-理論

$d = D + 1$ 次元時空 $\mathcal{M}^{(d)}$ を考える.

定義 3.17: BF -理論 (U(1) ゲージ場の理論として)

p -form U(1) ゲージ場 $A^{(p)}$ および $(d-p-1)$ -form U(1) ゲージ場 $B^{(d-p-1)}$ を与える.

このとき, **BF -理論**を

$$Z_{\text{BF}}[A^{(p)}, B^{(d-p-1)}] := e^{-S_{\text{BF}}[A^{(p)}, B^{(d-p-1)}]}$$

$$\text{w/ } S_{\text{BF}}[A^{(p)}, B^{(d-p-1)}] := \frac{in}{2\pi} \int_{\mathcal{M}^{(d)}} B^{(d-p-1)} \wedge dA^{(p)}$$

と定義する^a. ただし $n \in \mathbb{Z}$ とする.

^a $\int_{\mathcal{M}^{(d)}}$ は Deligne-Beilinson コチェインの積分と解釈すべきであるが, 形式的に de Rham コチェインの積分として扱っても問題は生じにくい.

$\mathcal{M}^{(d)}$ の **良い被覆** $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ を 1 つ固定する. ゲージ変換は Deligne-Beilinson コサイクル

$$(\{n_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+2}}\}, \{\Lambda_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+1}}^{(1)}\}, \dots, \{\Lambda_{\alpha_0 \alpha_1}^{(p-1)}\}, \{A_{\alpha_0}^{(p)}\}) \in \check{C}^{p+1}(\mathcal{U}; \mathbb{Z}) \oplus \bigoplus_{k=0}^p \check{C}^{p-k}(\mathcal{U}; \Omega^k)$$

$$(\{m_{\alpha_0 \dots \alpha_{d-p}}\}, \{\lambda_{\alpha_0 \dots \alpha_{d-p-1}}^{(1)}\}, \dots, \{\lambda_{\alpha_0 \alpha_1}^{(d-p-2)}\}, \{B_{\alpha_0}^{(d-p-1)}\}) \in \check{C}^{d-p-1}(\mathcal{U}; \mathbb{Z}) \oplus \bigoplus_{k=0}^{d-p-1} \check{C}^{d-p-k-1}(\mathcal{U}; \Omega^k)$$

によって定義される. 特に場の強さは $\forall \alpha_0, \alpha_1 \in \Lambda$ に対して

$$dA_{\alpha_1}^{(p)} - dA_{\alpha_0}^{(p)} = d(\delta A^{(p)})_{\alpha_0 \alpha_1} = d(d\Lambda_{\alpha_0 \alpha_1}^{(p-1)}) = 0,$$

$$dB_{\alpha_1}^{(d-p-1)} - dB_{\alpha_0}^{(d-p-1)} = d(\delta B^{(d-p-1)})_{\alpha_0 \alpha_1} = d(d\lambda_{\alpha_0 \alpha_1}^{(d-p-2)}) = 0$$

を充たすので大域的に well-defined である.

BF -理論から発見法的に「ゲージ群」^{*43}が \mathbb{Z}_n であるような p -form ゲージ理論を得るトリックを説明する [BS11, p.6], [KS14, p.9]. 具体的には, 2 つのゲージ場をダイナミカルにするだけで良い:

$$Z_{\text{BF}} := \int [da^{(p)}] \int [db^{(d-p-1)}] Z_{\text{BF}}[a^{(p)}, b^{(d-p-1)}]$$

$$= \int [da^{(p)}] \int [db^{(d-p-1)}] e^{\frac{in}{2\pi} \int_{\mathcal{M}^{(d)}} b^{(d-p-1)} \wedge da^{(p)}}$$

$$= \int [da^{(p)}] \Big|_{da^{(p)}=0}$$

ただし, 最右辺の拘束条件 $da^{(p)} = 0$ は Euler-Lagrange 方程式によるものである. この拘束条件により, $a^{(p)}$ についての和が**平坦接続**についてのものに制限されたということである. また, 任意の閉部分多様体 $\Sigma^{(p+1)}, \Sigma^{(d-p-2)} \subset \mathcal{M}^{(d)}$ に対するホロノミー

$$W(\Sigma^{(p)}) := e^{i \int_{\Sigma^{(p+1)}} a^{(p)}},$$

$$W(\Sigma^{(d-p-1)}) := e^{i \int_{\Sigma^{(d-p-2)}} b^{(d-p-1)}}$$

^{*43} 主 p -束の観点からすると, p -form ゲージ場に対応する「ゲージ群」は **p -群**になるべきである.

は,

$$\begin{aligned}
\langle W(\Sigma^{(p)}) \rangle &= \int [da^{(p)}] \int [db^{(d-p-1)}] e^{\frac{in}{2\pi} \int_{\mathcal{M}(d)} b^{(d-p-1)} \wedge a^{(p)}} e^{i \int_{\mathcal{M}(d)} a^{(p)} \wedge \delta(\Sigma^{(p+1)})} \\
&= \int [dB^{(d-p-1)}] \Big|_{db^{(d-p-1)} = \frac{2\pi}{n} \delta(\Sigma^{(d-p-2)})}, \\
\langle W(\Sigma^{(d-p-1)}) \rangle &= \int [da^{(p)}] \int [db^{(d-p-1)}] e^{\frac{in}{2\pi} \int_{\mathcal{M}(d)} B^{(d-p-1)} \wedge a^{(p)}} e^{i \int_{\mathcal{M}(d)} b^{(d-p-1)} \wedge \delta(\Sigma^{(d-p-2)})} \\
&= \int [da^{(p)}] \Big|_{da^{(p)} = \frac{2\pi}{n} \delta(\Sigma^{(p+1)})}
\end{aligned}$$

となることから, $\Sigma^{(d-p-1)}$ の周りでは

$$W(\Sigma^{(p)}) = e^{-\frac{2\pi i}{n} \text{Link}(\Sigma^{(p)}, \Sigma^{(d-p-1)})} \in \mathbb{Z}_n$$

$\Sigma^{(p)}$ の周りでは

$$W(\Sigma^{(p)}) = e^{-\frac{2\pi i}{n} \text{Link}(\Sigma^{(p)}, \Sigma^{(d-p-1)})} \in \mathbb{Z}_n$$

のホロノミーがあることが分かる. このことから, **BF-理論**に登場する2つのゲージ場をダイナミカルにすることで得られる理論は, ホロノミーが \mathbb{Z}_n に値をとる平坦接続のゲージ理論であること, i.e. \mathbb{Z}_n ゲージ理論になっていると見做せるのである.

3.5.3 BF-理論の等価な形

前小節で導入したトリックは, いくつかの等価な形で述べるができる. 補助場 $\tilde{a}^{(d-p-2)}$ を導入し, 場の強さ $F^{(p+1)} := dA^{(p)}$ を独立な場と見做すことで

$$\begin{aligned}
S_{\text{BF}}[F^{(p+1)}, B^{(d-p-1)}, \tilde{a}^{(p)}] &:= \frac{in}{2\pi} B^{(d-p-1)} \wedge F^{(p+1)} + \frac{i}{2\pi} d\tilde{a}^{(d-p-2)} \wedge F^{(p+1)} \\
&= \frac{i}{2\pi} F^{(p+1)} \wedge (d\tilde{a}^{(d-p-2)} + nB^{(d-p-1)})
\end{aligned}$$

とする. ここでゲージ場をダイナミカルにすることで

$$\begin{aligned}
Z_{\text{BF}} &= \int [df^{(p+1)}] \int [db^{(d-p-1)}] \int [d\tilde{a}^{(d-p-2)}] e^{-\int_{\mathcal{M}(d)} \left(\frac{in}{2\pi} b^{(d-p-1)} \wedge f^{(p+1)} + \frac{i}{2\pi} d\tilde{a}^{(d-p-2)} \wedge f^{(p+1)} \right)} \\
&= \int [df^{(p+1)}] \Big|_{df^{(p+1)}=0} \int [db^{(d-p-1)}] e^{-\int_{\mathcal{M}(d)} \frac{in}{2\pi} b^{(d-p-1)} \wedge f^{(p+1)}} \\
&= \int [df^{(p+1)}] \Big|_{df^{(p+1)}=0, f^{(p+1)}=0}
\end{aligned}$$

となる. 汎関数積分において Bianchi 恒等式 $dF^{(p+1)} = 0$ および平坦接続の拘束条件が付いてくれるのである. もしくは,

$$\begin{aligned}
Z_{\text{BF}} &= \int [db^{(d-p-1)}] \int [d\tilde{a}^{(d-p-2)}] \int [df^{(p+1)}] e^{-\int_{\mathcal{M}(d)} \frac{i}{2\pi} F^{(p+1)} \wedge (d\tilde{a}^{(d-p-2)} + nb^{(d-p-1)})} \\
&= \int [db^{(d-p-1)}] \int [d\tilde{a}^{(d-p-2)}] \Big|_{d\tilde{a}^{(d-p-2)} + nb^{(d-p-1)}=0}
\end{aligned} \tag{3.5.2}$$

と捉えても良い。 $\tilde{a}^{(d-p-2)}$ は、 $Z_{\text{BF}}[F^{(p+1)}, B^{(d-p-1)}, \tilde{a}^{(p)}]$ に対するゲージ不変性の要請から

$$\tilde{a}^{(d-p-2)} \mapsto \tilde{a}^{(d-p-2)} + d\tilde{\lambda}^{(d-p-3)} - n\lambda^{(d-p-2)} \quad (3.5.3)$$

なるゲージ変換を受ける。

3.5.4 BF-理論における 't Hooft operator

't Hooft operator の素朴な定義は $\tilde{T}(\Sigma^{(d-p-2)}) := \exp\left(i \int_{\Sigma^{(d-p-2)}} \tilde{a}^{(d-p-2)}\right)$ とすることだが、これはゲージ変換 (3.5.3) の下で不変でない。ゲージ不変にするために、 $\partial\Sigma^{(d-p-1)} = \Sigma^{(d-p-2)}$ を満たす $(d-p-1)$ -次元部分多様体 $\Sigma^{(d-p-1)} \subset \mathcal{M}^{(d)}$ を用いて

$$T(\Sigma^{(d-p-2)}; \Sigma^{(d-p-1)}) := \exp\left(i \int_{\Sigma^{(d-p-2)}} \tilde{a}^{(d-p-2)} + in \int_{\Sigma^{(d-p-1)}} b^{(d-p-1)}\right)$$

と定義する。然るに (3.5.2) から、この期待値を計算すると

$$\begin{aligned} & \left\langle T(\Sigma^{(d-p-2)}; \Sigma^{(d-p-1)}) \right\rangle \\ &= \int [db^{(d-p-1)}] \int [d\tilde{a}^{(d-p-2)}] \Big|_{d\tilde{a}^{(d-p-2)} + nb^{(d-p-1)}=0} \exp\left(i \int_{\Sigma^{(d-p-2)}} \tilde{a}^{(d-p-2)} + in \int_{\Sigma^{(d-p-1)}} b^{(d-p-1)}\right) \\ &= \int [db^{(d-p-1)}] \int [d\tilde{a}^{(d-p-2)}] \Big|_{d\tilde{a}^{(d-p-2)} + nb^{(d-p-1)}=0} \exp\left(i \int_{\Sigma^{(d-p-1)}} (d\tilde{a}^{(d-p-2)} + nb^{(d-p-1)})\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

となり消えてしまう。

3.6 高次のゲージ理論-より厳密な定式化

時空を $\mathcal{M}^{(d)}$ と書く。これまでは高次のゲージ場の配位空間^{*44}について全く触れずに計算を進めてきた。しかし、これらの計算は実質的に $U(1)$ ゲージ場についての経路積分になっており、ill-defined である。特に平坦接続の拘束条件がどの程度厳密に課されているのかには疑問が残る。また、0-form の **Dijkgraaf-Witten 理論** の場合に見たように、トポロジカルなゲージ場の理論を考える際にはゲージ場の配位空間を真面目に考えないと自明な理論しか得られない可能性がある。この小節では、高次のゲージ場の配位空間の構造をできるだけ正確に記述することを試みる。参考文献は [Alf23] である。

3.6.1 0-form のまとめ

一般化の前に 0-form (i.e. ゲージ場としては 1-form) の場合の結果をまとめておくのが有用である。

まずゲージ群 G が一般の位相群である場合、時空 $\mathcal{M}^{(d)}$ 上の主束は普遍束により分類された：

$$\text{Prin}_G(\mathcal{M}^{(d)}) / \cong \xrightarrow{1:1} [\mathcal{M}^{(d)}, BG] \quad (3.6.1)$$

^{*44} 物理ではモジュライ空間 (moduli space) とも言う。

ただし \cong はファイバー束の同型である．これは圏 \mathbf{Mfd} における引き戻し^{*45}

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}^{(d)} & \xrightarrow{\gamma} & BG \end{array}$$

と理解することができた．ただし命題 3.3 により普遍束の全空間は一点 $*$ と同じホモトピー型なので $*$ と書いた．一方で，接続としてのゲージ場はこの上に **Deligne-Beilinson 2-コサイクル** の情報を付加することに他ならない．概念的には，我々の求めたい接続付き主束の同型類全体と 1 対 1 対応がある空間を BG_{conn} と書いて

$$\begin{array}{ccc} & & BG_{\text{conn}} \\ & \nearrow (A, g) & \downarrow \text{forget} \\ \mathcal{M}^{(d)} & \xrightarrow{\gamma} & BG \end{array}$$

のようになっている．ここに $(A, g) \in \text{Del}^2(\mathcal{M}^{(d)}, \underline{\Omega}^\bullet(-, \mathfrak{g}))$ である．また，平坦接続に話を限った BG_{flat} はより簡単な構造を持つ．これは接続を命題 3.6 により関手 $\mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)}) \rightarrow BG$ と見做すことで， $\mathcal{M}^{(d)}$ が連結ならば

$$BG_{\text{flat}} \xleftarrow{1:1} \text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(\pi_1(\mathcal{M}^{(d)}), G)/G \quad (3.6.2)$$

となることが分かった．

次にゲージ群 G が離散群の場合を考える．このとき接続の定義から自動的に平坦接続になってしまう：

$$BG_{\text{conn}} = BG_{\text{flat}} \xleftarrow{1:1} \text{Prin}_G(\mathcal{M}^{(d)})/\cong \quad (3.6.3)$$

さらに主束が自動的に被覆空間になることから

$$[\mathcal{M}^{(d)}, BG] \xleftarrow{1:1} \text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(\pi_1(\mathcal{M}^{(d)}), G)/G$$

が分かり，結局

$$BG_{\text{conn}} = BG_{\text{flat}} \xleftarrow{1:1} \text{Prin}_G(\mathcal{M}^{(d)})/\cong \xleftarrow{1:1} [\mathcal{M}^{(d)}, BG] \quad (3.6.4)$$

が言えた．i.e. ゲージ場の配位空間は $[\mathcal{M}^{(d)}, BG]$ と求まった．

3.6.2 p -form への拡張

全小節の内容を素朴に p -form (i.e. $(p+1)$ -form ゲージ場) の場合に拡張することを考えてみよう．まずは G を一般の位相群とする．このとき (3.6.1) の一般化として，ある「上手く定義された圏」(∞ -トポス) \mathcal{H} の上の homotopy pullback の図式

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}^{(d)} & \xrightarrow{\gamma} & BG \end{array}$$

^{*45} 正確には全ての射が up to homotopy だとした，homotopy pullback (<https://ncatlab.org/nlab/show/homotopy+pullback>) の図式である．

があると考えて,

$$\mathrm{Prin}_G(\mathcal{M}^{(d)}) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(\mathcal{M}^{(d)}, BG)$$

とおいてみる. ただし $\mathrm{Prin}_G(\mathcal{M}^{(d)})$ と言うのは「主 p -束」とでも呼ぶべき構造であり, 現時点では未定義である. 次に「平坦接続」付き「主 p -束」のモジュライ空間 BG_{flat} であるが, これは path groupoid を十分うまく拡張した「path $(p+1)$ -groupoid」 $\mathbf{P}_{p+1}(\mathcal{M}^{(d)})$ があると考えて (3.6.2) の一般化

$$BG_{\mathrm{flat}} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(\mathbf{P}_{p+1}(\mathcal{M}^{(d)}), BG)$$

を仮定する. 平坦でない場合というのは厄介だが, BG の方を上手く処理できたとして同様に考える.

次に, G が離散群である場合を考える. このとき問題になるのは, (3.6.3) の一般化

$$BG_{\mathrm{conn}} = BG_{\mathrm{flat}}$$

が成り立つのか不明であり, 従って (3.6.4) の一般化

$$BG_{\mathrm{conn}} = BG_{\mathrm{flat}} \xleftarrow{1:1} \mathrm{Prin}_G(\mathcal{M}^{(d)}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(\mathcal{M}^{(d)}, BG)$$

が成り立っているかが不明な点にある. 実際, 前節で行ったトリックは BG_{conn} について和をとっていることになる. しかし, トポロジカル演算子を挿入することを考えるとむしろ $\mathrm{Prin}_G(\mathcal{M}^{(d)})/\cong$ の方が配位空間だと考える方が自然かもしれない.

3.6.3 高次群の構造が自明な場合: ∞ -groupoid

全小節の推測を真面目に扱うには, ∞ -圏の力を借りる必要がある.

定義 3.18: extended group

有限群の列 $\mathbb{G} = (G_1, G_2, \dots)$ であって,

- ある d が存在して $\forall q \geq d$ に対して $G_q = 1$ を満たす.
- $\forall p \geq 2$ に対して G_p は可換群

を満たすものを**拡張された群** (extended group) と呼ぶ [Che24].

時空 $\mathcal{M}^{(d)}$ の三角形分割を与える**単体的集合** $T \in \mathrm{Ob}(\mathbf{sSet})$ をとり, 勝手な d -単体 $\sigma \in T_d$ を 1 つ固定する. σ はちょうど $d+1$ 個の 0-単体 $\{0, 1, \dots, d\}$ からなる. σ の部分 p -単体は $\{0, 1, \dots, d\}$ から互いに相異なる $p+1$ 個を選んだ $\{l_0, \dots, l_p\} \subset \{0, 1, \dots, d\}$ からなる. i.e.

$$\binom{d+1}{p+1}$$

個存在する. d -単体 σ の部分 p -単体全体の集合を $\langle d: p \rangle$ と書く. p 単体の**向き**は常に $l_0 < \dots < l_p$ を満たすようにとる.

定義 3.19:

- 自明な高次群 (higher group) の構造を持つ σ 上の $\mathbb{G} = (G_1, G_2, \dots)$ -ゲージ場とは, $\forall p \geq 1$ に対して与えられた写像

$$A^{(p)}: \langle d: p \rangle \longrightarrow G_p \quad (3.6.5)$$

のこと^a.

- \mathbb{G} -ゲージ場 $\{A^{(p)}: \langle d: p \rangle \longrightarrow G_p\}_{p \geq 1}$ が平坦 (flat) であるとは, $\forall p \geq 1$ および $\forall \tau \in \langle d: p+1 \rangle$ に対して

$$\prod_{j=0}^{p+1} A(\partial_j^{p+1}(\tau))^{(-1)^j} = 1_{G_p} \quad (3.6.6)$$

を充たすこと.

^a $A^{(p)}$ の像の元をゲージ自由度と呼ぶ.

しばらくの間, $1 \leq p \leq d$ を 1 つ固定する. (3.6.6) により, 独立なゲージ自由度は

$$\binom{d}{p}$$

個である. よって $\{1, \dots, d\}$ の互いに相異なる p 点部分集合全体がなす集合を $[d: p] \subset \langle d: p \rangle$ と書くと, 写像

$$g^{(p)}: [d: p] \longrightarrow G_p, \{q_1, \dots, q_p\} \longmapsto g_{q_1 \dots q_p} \quad (3.6.7)$$

は独立なゲージ自由度を表している. 表示 (3.6.5) と (3.6.7) の間の関係としては [Che24, p.8] に倣って

$$\forall \{l_0, \dots, l_p\} \subset \{0, \dots, d\}, \quad A(\{l_0, \dots, l_p\}) = \prod_{q_1=l_0+1}^{l_1} \cdots \prod_{q_p=l_{p-1}+1}^{l_p} g_{q_1 \dots q_p}$$

を仮定する. このとき面写像 $d_j^d \in \text{Hom}_\Delta([d-1], [d])$ による p -form ゲージ場 $A^{(p)}$ の引き戻しは $\forall \{l_0, \dots, l_p\} \subset \{0, \dots, d-1\}$ について

$$\begin{aligned} & \prod_{q_1=l_0+1}^{l_1} \cdots \prod_{q_p=l_{p-1}+1}^{l_p} (d_j^{d*} g)_{q_1 \dots q_p} \\ &:= d_j^{d*} A(\{l_0, \dots, l_p\}) \\ &= A(d_j^d(\{l_0, \dots, l_p\})) \\ &= A(\{l_0, \dots, l_{k-1}, l_k+1, \dots, l_p+1\}) \quad (l_{k-1} < j \leq l_k) \\ &= \prod_{q_1=l_0+1}^{l_1} \cdots \prod_{q_{k-1}=l_{k-2}+1}^{l_{k-1}} \prod_{q_k=l_{k-1}+1}^{l_k+1} \prod_{q_{k+1}=l_k+2}^{l_{k+1}+1} \cdots \prod_{q_p=l_{p-1}+2}^{l_p+1} g_{q_1 \dots q_p} \end{aligned}$$

と求まり, 縮退写像 $s_j^d \in \text{Hom}_\Delta([d+1], [d])$ による引き戻しは^{*46} $\forall \{l_0, \dots, l_p\} \subset \{0, \dots, d+1\}$ について

$$\begin{aligned}
& \prod_{q_1=l_0+1}^{l_1} \cdots \prod_{q_p=l_{p-1}+1}^{l_p} (s_j^{d*} g)_{q_1 \dots q_p} \\
&:= s_j^{d*} A(\{l_0, \dots, l_p\}) \\
&= A(s_j^d(\{l_0, \dots, l_p\})) \\
&= A(\{l_0 \dots l_{k-1}, l_k - 1, \dots, l_p - 1\}) \quad (l_{k-1} \leq j < l_k) \\
&= \begin{cases} \prod_{q_1=l_0+1}^{l_1} \cdots \prod_{q_{k-1}=l_{k-2}+1}^{l_{k-1}} \prod_{q_k=l_{k-1}+1}^{l_k-1} \prod_{q_{k+1}=l_k}^{l_{k+1}-1} \cdots \prod_{q_p=l_{p-1}}^{l_p-1} g_{q_1 \dots q_p}, & l_{k-1} < j < l_k \\ 1_{G_p}, & l_{k-1} = j \end{cases}
\end{aligned}$$

となる. i.e.

$$\begin{aligned}
(d_j^{d*} g)_{q_1 \dots q_p} &= \begin{cases} g_{q_1 \dots q_\bullet, q_\bullet+1+1, \dots, q_{p+1}}, & q_\bullet < j < q_\bullet+1 \\ g_{q_1 \dots q_\bullet, q_\bullet+1+1, \dots, q_{p+1}} g_{q_1 \dots q_\bullet+1, q_\bullet+1+1, \dots, q_{p+1}}, & q_\bullet = j \end{cases} \\
(s_j^{d*} g)_{q_1 \dots q_p} &= \begin{cases} g_{q_1 \dots q_\bullet, q_\bullet+1-1, \dots, q_p-1}, & q_\bullet < j+1 < q_\bullet+1 \\ 1_{G_p}, & j+1 \in \{q_1, \dots, q_p\} \end{cases}
\end{aligned}$$

が分かった. 以上より, 3 つ組

$$\{X^{(p)}([d]) := \text{Hom}_{\mathbf{Sets}}([d : p], G_p)\}_{d \geq 0},$$

$$\{\partial_j^d : \text{Hom}_{\mathbf{Sets}}([d : p], G_p) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Sets}}([d-1 : p], G_p), g \longmapsto d_j^{d*} g\}_{0 \leq j \leq d, d \geq 1}, \quad (3.6.8)$$

$$\{\sigma_j^d : \text{Hom}_{\mathbf{Sets}}([d : p], G_p) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Sets}}([d+1 : p], G_p), g \longmapsto s_j^{d*} g\}_{0 \leq j \leq d, d \geq 1}, \quad (3.6.9)$$

は単体的恒等式を満たし, 単体的集合

$$X^{(p)} : \Delta^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を成す.

定理 3.6:

単体的集合 $X^{(p)} \in \text{Ob}(\mathbf{sSet})$ は ∞ -groupoid である.

証明 $\forall n \geq 0$ および $0 \leq i \leq n$ を 1 つ固定する. 勝手な圏 \mathbf{sSet} の射

$$f : \Lambda_i^n \longrightarrow X^{(p)}$$

を 1 つ固定する. このとき, 圏 \mathbf{sSet} における可換図式

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda_i^n & \xrightarrow{f} & X^{(p)} \\
\downarrow \iota & \nearrow \exists \bar{f} & \\
\Delta^n & &
\end{array}$$

^{*46} 部分単体の次数は相変わらず p であることに注意.

の存在を示せば良い．ところで系 C.4 から，射 f, ι はそれぞれ

$$(f_0, \dots, \widehat{f_i}, \dots, f_n) \in \prod_{k \in [n] \setminus \{i\}} X^{(p)}([n-1]),$$

$$(d_0^n, \dots, \widehat{d_i^n}, \dots, d_n^n) \in \prod_{k \in [n] \setminus \{i\}} \Delta^n([n-1])$$

であって $\forall j, k \in [n] \setminus \{i\}$ s.t. $j < k$ について $\partial_j^{n-1}(f_k) = \partial_{k-1}^{n-1}(f_j)$ を満たすものと同一視できる．よって示すべきは $\partial_j^n(\bar{f}) = f_j \quad (\forall j \in [n] \setminus \{i\})$ を満たす $\bar{f} \in X^{(p)}([n-1]) = \text{Hom}_{\mathbf{Sets}}([n-1:p], G_p)$ が存在することである^{*47}． $n \geq p$ のときは自明なので $n < p$ を考える．

$\{q_1 < \dots < q_p\} \in [n-1:p]$ に含まれない最小の整数を j とおき， j に関する数学的帰納法によって写像 \bar{f} の行き先 $\bar{f}(\{q_1, \dots, q_p\})$ を構成する．まず $j = 1$ のときは

$$\bar{f}(\{q_1, \dots, q_p\}) := f_0(\{q_1 - 1, \dots, q_p - 1\})$$

とおく． $j > 1$ のときは帰納法の仮定を使い

$$\begin{aligned} \bar{f}(\{q_1, \dots, q_p\}) &:= f_j(\{q_1, \dots, q_m, q_{m+1} - 1, \dots, q_p - 1\}) \\ &\quad \times \bar{f}(\{q_1 + 1, \dots, q_m + 1, q_{m+1}, \dots, q_p\})^{-1} \end{aligned}$$

(ただし $q_m = j$) とおくと， $j \leq i-1$ までの帰納法が完成する．

次に $\{q_1 < \dots < q_p\} \in [n-1:p]$ に含まれない最大の整数を j とおき， j に関する数学的帰納法によって写像 \bar{f} の行き先 $\bar{f}(\{q_1, \dots, q_p\})$ を構成する．まず $j = n-1$ のときは

$$\bar{f}(\{q_1, \dots, q_p\}) := f_n(\{q_1, \dots, q_p\})$$

とおく． $j < n-1$ のときは帰納法の仮定を使い

$$\begin{aligned} \bar{f}(\{q_1, \dots, q_p\}) &:= \bar{f}(\{q_1, \dots, q_m, q_{m+1} - 1, \dots, q_p - 1\})^{-1} \\ &\quad \times f_j(\{q_1, \dots, q_m, q_{m+1} - 1, \dots, q_p - 1\}) \end{aligned}$$

(ただし $q_m = j$) とおくと， $j \geq i+2$ までの帰納法が完成する．以上の 2 段階の帰納法により \bar{f} が定まった．(3.6.9) を使うと $\partial_j^n(\bar{f}) = f_j$ が分かる． ■

定理 3.7: $X^{(p)}$ は Eilenberg-MacLane 空間

$$\pi_n(|X^{(p)}|) = \begin{cases} G_p, & n = p \\ 1, & n \neq p \end{cases}$$

証明 定理 C.6 より， ∞ -groupoid $X^{(p)}$ の単体的ホモトピー群を計算すれば良い． $n = 0$ のときと $n < p$ のときは $Z_n(X, *) \subset X_n = \{\emptyset\}$ なので $\pi_n^\Delta(X, *) = 1$ である．

$n > p$ とする．すると $\forall Q := \{q_1 < \dots < q_p\} \in [n:p]$ に対してある $0 \leq j \leq n$ が存在して $j \notin Q$ を満たす．よって $\forall h \in Z_n(X, *)$ をとると (3.6.8) から

$$\partial_i^n h(Q) = h(\{q_1, \dots, q_\bullet, q_\bullet + 1, \dots, q_{p+1} + 1\}) = (\sigma_0)^{n-1}(*) = 1_{G_p}$$

^{*47} このような \bar{f} のことを角 Λ_i^n の **filler** と呼ぶ．

が分かる. i.e. $Z_n(X, *) = \{1\}$ であり, $\pi_n^\Delta(X, *) = 1$ が分かった.

$n = p$ とする. $[p : p]$ は一点集合で $[p+1 : p]$ は $p+1$ 点集合なので $X^{(p)}([n]) \cong G_p$, $X^{(p)}([n+1]) \cong G_p^{\times(p+1)}$ となる. よって $x \in X^{(p)}([n+1])$ を

$$x = (x_1, \dots, x_{p+1})$$

と書く. $\forall a, b \in Z_n(X^{(p)}, *)$ をとる. このとき a と b を繋ぐホモトピー $x \in X^{(p)}([n+1])$ は存在すれば

$$x_1 = x_2 x_1 = \dots = x_p x_{p-1} = 1, x_{p+1} x_p = a, x_{p+1} = b$$

を充たすが, この解は $a = b$ でないと存在しない. よって $a \sim b \iff a = b$ であり, $\pi_n^\Delta(X^{(p)}, *) \cong G_p$ が分かる. ■

3.6.4 2-群の場合：ホロノミー 2-関手

次に, ゲージ群が 2-群の場合を考えよう. [KT13] を参考に, ゲージ群が **厳密な 2-Lie 群** \mathcal{G} である場合から出発する. 命題 F.13 より \mathcal{G} は **交差加群** $(G_2 \xrightarrow{t} G_1, \alpha)$ と等しい. G_1, G_2 の単位元における接空間をとることとて, 微分交差加群 $(\mathfrak{g}_2 \xrightarrow{dt} \mathfrak{g}_1, d\alpha)$ を得る.

時空の **good cover** $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ を 1 つ固定する. 命題 3.6 のように, 2-接続をホロノミーのなす関手として定義するところから始める.

定義 3.20: path 2-groupoid

M を d 次元 C^∞ 多様体とする. **path 2-groupoid** $\mathbf{P}_2(M)$ を以下のように定義する:

- $\text{Ob}(\mathbf{P}_2(M)) := M$
- $\forall x, y \in M$ に対して

$$\text{Ob}(\text{Hom}_{\mathbf{P}_2(M)}(x, y)) := \{ \gamma : [0, 1] \rightarrow M \mid \gamma(0) = x, \gamma(1) = y \} / \sim$$

- $\forall \gamma_0, \gamma_1 \in \text{Ob}(\text{Hom}_{\mathbf{P}_2(M)}(x, y))$ に対して

$$\text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathbf{P}_2(M)}}(\gamma_0, \gamma_1) := \left\{ \Sigma : [0, 1] \longrightarrow M \mid \begin{array}{l} \Sigma(0, t) = \text{const.}, \Sigma(1, t) = \text{const.}, \\ \Sigma(-, 0) = \gamma_0, \Sigma(-, 1) = \gamma_1 \end{array} \right\} / \sim$$

2-射は適切な縦の合成と横の合成を持つ [BS05, Definition20, p.20]. ただし \sim は thin homotopy [BS05, Definition19, p.20] である.

定理 2.1 と同様に, 主 2-束を変換関数によって特徴付ける.

3.7 (1+1)-次元の有限 0-form 対称性のゲージ化

[BT18] に従って, $(1+1)$ -次元系の, フュージョン則がある種の有限性を充たすような 0-form symmetry をゲージ化する手続きを与える. この構成は, 具体例として非可換有限群 G の 0-form symmetry のゲージ化を含む.

3.7.1 ユニタリフュージョン圏としての 0-form 対称性

公理 3.3: $(1+1)$ -次元の有限 0-form 対称性

$(1+1)$ -次元系における有限の^a0-form symmetry は、ユニタリフュージョン圏として特徴付けられる。

^a 単純対象が有限個

公理 3.3 を解説する。ユニタリフュージョン圏 \mathcal{C} を 1 つ固定する。

まず、トポロジカル演算子は $a \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ によってラベルされる。 $C \subset M$ を向きづけられた 1 次元部分多様体 (i.e. 曲線) とすると、理論 T にトポロジカル演算子を挿入した際の分配関数は

$$\langle \cdots U_a(C) \cdots \rangle$$

となる。特に、単位対象 $1 \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対応するトポロジカル演算子は分配関数を変えない：

$$\langle \cdots U_1(C) \cdots \rangle = \langle \cdots \rangle$$

$f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b)$ は、トポロジカルな点状の演算子を表し、トポロジカル演算子のラベルを取り替える。



$\forall a, b \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対し、その直和

$$\langle \cdots U_{a \oplus b}(C) \cdots \rangle = \langle \cdots U_a(C) \cdots \rangle + \langle \cdots U_b(C) \cdots \rangle$$

が存在する。また、2 つのトポロジカル演算子はフュージョンすることができる：

$$\langle \cdots U_{a \otimes b}(C) \cdots \rangle = \sum_{c \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{ab}^c \langle \cdots U_c(C) \cdots \rangle$$

特に \mathcal{C} がフュージョン圏であることから、 $\text{Simp}(\mathcal{C})$ にはある種の有限性を要請していることになる。

\mathcal{C} は rigid なモノイダル圏でもあり、associator, evaluation, coevaluation に対応するデータも持つ。associator に対応するデータはしばしば F -symbol^{*48}と呼ばれる。

【例 3.7.1】圏 Vec_G^α とアノマリー

$\mathcal{C} = \text{Vec}_G^\alpha$ とする。このとき、 $\alpha \in H_{\text{Grp}}^3(G; \text{U}(1))$ は Dijkgraaf-Witten 理論を定める。i.e. Dijkgraaf-Witten 理論をアノマリー流入に持つ Hooft アノマリーを 1 つ指定している。

^{*48} F -symbol は、厳密には associator そのものではない。

【例 3.7.2】圏 Vec_G^α と G -SPT のスタック

$\mathcal{C} = \text{Vec}_G^\alpha$ とする. Vec_G^α の自己同型はモノイダル自然同型によって与えられるが, 【例 F.3.4】によりそれは 2 つ組 $(f, \tau) \in \text{Aut}(G) \times H_{\text{Grp}}^2(G; \text{U}(1))$ を指定する. これは 2 次元の理論 T に 2 次元のボゾニック G -SPT をスタックする操作に他ならない.

3.7.2 代数対象とゲージ化

(1 + 1)-次元系における有限の 0-form symmetry を公理 3.3 によりユニタリフュージョン圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ と見做す.

定義^{ph} 3.1: ゲージ化

(1 + 1)-次元時空 $M^{(2)}$ 上の場の理論 T が 0-form symmetry $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ を持つとする.

T のゲージ化 (gauging) とは, 圏 \mathcal{C} における特殊な対称 Frobenius 代数 $(A, \mu, \nu, \Delta, \epsilon)$ を 1 つ指定することを言う. ゲージ化された理論のことを T/A と書く.

定義 3.1 を解説する. まず (1 + 1)-次元時空 $M^{(2)}$ の任意の三角形分割 $K \in \text{Ob}(\text{sSet})$ をとり, その Poincaré 双対をとることで得られるグラフ $P^{(1)}(K)$ を考える (図 3.2)^{*49}. グラフ $P^{(1)}(K)$ の全ての辺にトポロジカル演算子 $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を置き, 頂点には射 $\mu: A \otimes A \rightarrow A$ または $\Delta: A \rightarrow A \otimes A$ を置くことで, グラフ $P^{(1)}(K)$ はストリング図式 $\mathbb{F}_A(K)$ を与える. 次の命題 3.7 より, A が特殊な対称 Frobenius 代数であることが, このストリング図式 $\mathbb{F}_A(K)$ が位相不変量であること (i.e. ゲージ不変性) を保証しているのだと分かる.

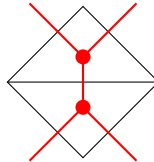


図 3.2: 2 次元多様体 $M^{(2)}$ の三角形分割 K の一部と, その Poincaré 双対グラフ $P^{(1)}$.

命題 3.7: ゲージ化は三角形分割の取り方によらない

ストリング図式 $\mathbb{F}_A(K)$ は, 時空多様体 $M^{(2)}$ の三角形分割 K の取り方によらない.

証明 $\mathbb{F}_A(K)$ が双星状移動に関して不変であることを示せば良い. 2 次元 PL 多様体の双星状移動は以下の 2 つである:

^{*49} グラフ $P^{(1)}$ は, 後述する多面体分割の一例となっている.

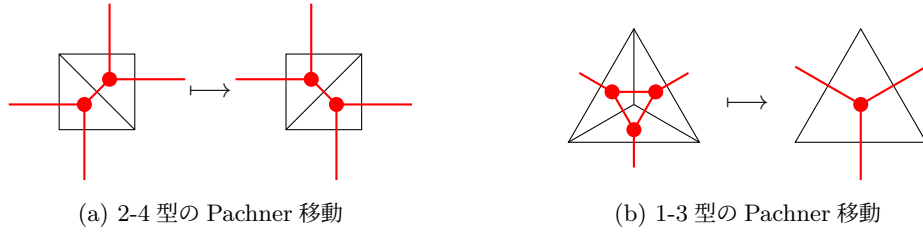
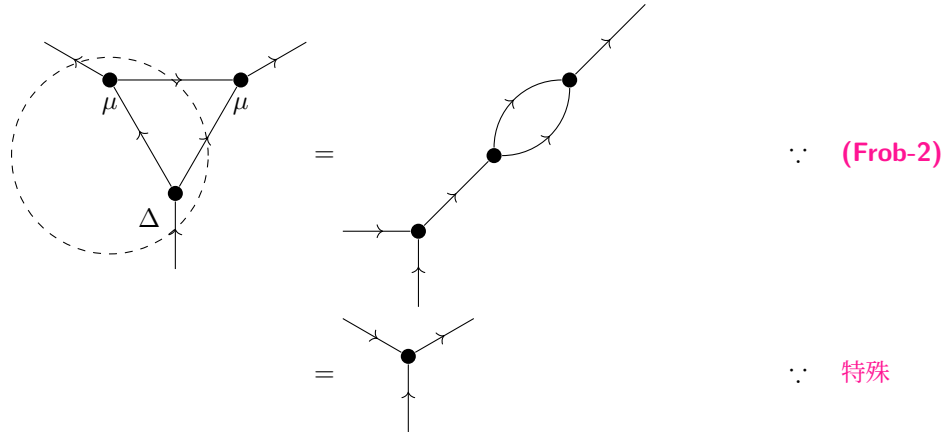


図 3.3: 2 次元 PL 多様体の双星状移動 (Pachner 移動)

Frobenius 代数の定義 (**Frob-2**) より, 2-4 型の双星状移動の下で $\mathbb{F}_A(K)$ は不変である. 1-3 型の双星状移動に関しては,



により不変であることがわかった. ■

従来のゲージ化の定義との対応は, 次の【例 3.7.4】によって分かる. 逆に言うと, 定義 3.1 は【例 3.7.4】を一般化したものである.

【例 3.7.3】 Vec_G におけるゲージ化

G を可換とは限らない有限群とし, 【例 F.3.1】で定義したユニタリフュージョン圏 $\mathcal{C} = \text{Vec}_G$ を考える.

$A := \bigoplus_{g \in G} \mathbb{K}g$ とおこう. ただし $\forall g \in G$ に対して $\mathbb{K}g$ は 1 次元 \mathbb{K} -ベクトル空間であり, その基底を e_g と書く. このとき

- Vec_G の射

$$\mu: A \otimes A \longrightarrow A, e_g \otimes e_h \longmapsto e_{gh}$$

- Vec_G の射

$$v: 1 \longrightarrow A, 1_G \longmapsto \sum_{g \in G} \delta_{1_G, g} e_g$$

は明らかに Vec_G の代数対象を成す. さらに

- \mathbf{Vec}_G の射

$$\Delta: A \longrightarrow A \otimes A, e_g \longmapsto \sum_{h \in G} e_h \otimes e_{h^{-1}g}$$

- \mathbf{Vec}_G の射

$$\epsilon: A \longrightarrow 1, e_g \longmapsto \delta_{1G,g} e_{1G}$$

は $\forall g \in G$ に対して

$$\begin{aligned} (\mathrm{Id}_A \otimes \Delta) \circ \Delta(e_g) &= (\mathrm{Id}_A \otimes \Delta) \left(\sum_{h \in G} e_h \otimes e_{h^{-1}g} \right) \\ &= \sum_{h, k \in G} e_h \otimes e_k \otimes e_{(hk)^{-1}g}, \\ (\Delta \otimes \mathrm{Id}_A) \circ \Delta(e_g) &= \sum_{h, k \in G} e_k \otimes e_{k^{-1}h} \otimes e_{h^{-1}g} \\ &= \sum_{k \in G} e_k \otimes \left(\sum_{h \in G} e_{k^{-1}h} \otimes e_{h^{-1}g} \right) \\ &= \sum_{k \in G} e_k \otimes \left(\sum_{h \in G} e_h \otimes e_{(kh)^{-1}g} \right) \\ &= (\mathrm{Id}_A \otimes \Delta) \circ \Delta(e_g), \\ (\epsilon \otimes \mathrm{Id}_A) \circ \Delta(e_g) &= \sum_{h \in G} \delta_{1G,h} e_{1G} \otimes e_{h^{-1}g} \\ &= e_{1G} \otimes e_g \\ &= l_A(e_g), \\ (\mathrm{Id}_A \otimes \epsilon) \circ \Delta(e_g) &= \sum_{h \in G} \delta_{1G,h^{-1}g} e_h \otimes e_{h^{-1}g} \\ &= e_g \otimes e_{1G} \\ &= r_A(e_g) \end{aligned}$$

を充たすので組 (A, Δ, ϵ) は余代数対称である。その上

$$\begin{aligned} (\mathrm{Id}_A \otimes \mu) \circ (\Delta \otimes \mathrm{Id}_A)(e_g \otimes e_h) &= (\mathrm{Id}_A \otimes \mu) \left(\sum_{k \in G} e_k \otimes e_{k^{-1}g} \otimes e_h \right) \\ &= \sum_{k \in G} e_k \otimes e_{k^{-1}gh}, \\ \Delta \circ \mu(e_g \otimes e_h) &= \sum_{k \in G} e_k \otimes e_{k^{-1}(gh)} \\ (\mu \otimes \mathrm{Id}_A) \circ (\mathrm{Id}_A \otimes \Delta)(e_g \otimes e_h) &= (\mu \otimes \mathrm{Id}_A) \left(\sum_{k \in G} e_g \otimes e_k \otimes e_{k^{-1}h} \right) \\ &= \sum_{k \in G} e_{gk} \otimes e_{k^{-1}h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k \in G} e_k \otimes e_{(g^{-1}k)^{-1}h} \\
&= \sum_{k \in G} e_k \otimes e_{k^{-1}gh}
\end{aligned}$$

が成り立つので **Frobenius 代数** であり,

$$\begin{aligned}
(\epsilon \otimes \text{Id}_{A^*}) \circ (\mu \otimes \text{Id}_{x^*}) \circ (\text{Id}_A \otimes \text{coev}_A^L)(e_g) &= (\epsilon \otimes \text{Id}_{A^*}) \circ (\mu \otimes \text{Id}_{x^*}) \left(e_g \otimes \left(\sum_{h \in G} e_h \otimes e_{h^{-1}} \right) \right) \\
&= \sum_{h \in G} \delta_{1_G, gh} e_{h^{-1}} \\
&= e_g, \\
(\text{Id}_{A^*} \otimes \epsilon) \circ (\text{Id}_{x^*} \otimes \mu) \circ (\text{coev}_A^R \otimes \text{Id}_A)(e_g) &= (\text{Id}_{A^*} \otimes \epsilon) \circ (\text{Id}_{x^*} \otimes \mu) \left(\left(\sum_{h \in G} e_{h^{-1}} \otimes e_h \right) \otimes e_g \right) \\
&= \sum_{h \in G} \delta_{1_G, hg} e_{h^{-1}} \\
&= e_g
\end{aligned}$$

が成り立つので **対称 Frobenius 代数** であり,

$$\begin{aligned}
\mu \circ \Delta(e_g) &= \mu \left(\sum_{h \in G} e_h \otimes e_{h^{-1}g} \right) \\
&= \sum_{h \in G} e_g \\
&= |G| \text{Id}_A(e_g)
\end{aligned}$$

が成り立つので組 $(A, \mu, \nu, \Delta, \epsilon)$ は **特殊 Frobenius 代数** であることが分かった. 以上の考察から, 組 $(A, \mu, \nu, \Delta, \epsilon)$ は定義 3.1 の意味で対称性 \mathbf{Vec}_G のゲージ化である.

従来の意味のゲージ化とは, 理論をゲージ場と結合させてゲージ場に関する経路積分を実行することであった. **0-form symmetry** の全てのトポロジカル演算子のあらゆる可能な配位に関する足し上げと言っても良い. 定義 3.1 の意味のゲージ化は, 今回の場合は時空の三角形分割から得られる双対グラフの全ての辺上に, 全てのトポロジカル演算子を足し上げることで構成されるトポロジカル演算子 $A = \bigoplus_{g \in G} \mathbb{K}g$ をアサインしているため, まさにトポロジカル演算子のあらゆる可能な配位に関する足し上げを実行したことに他ならない^a.

^a 暗に和をとる順序を変えている. 単純対象が有限個で, 三角形分割も有限であるから, 有限和の順序交換となって well-defined である.

3.7.3 ゲージ化された理論の持つ対称性

定義 3.1 に倣い, **ユニタリフュージョン圏** $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ の **特殊な対称 Frobenius 代数** $(A, \mu, \nu, \Delta, \epsilon)$ を 1 つ固定する. このとき, **ゲージ化**された理論 T/A の持つ **0-form symmetry** はどのようなユニタリフュージョン圏で特徴づけられるのだろうか?

命題^{ph} 3.1: ゲージ化された理論の持つ対称性

T/A の持つ対称性は、 \mathcal{C} における (A, A) -両側加群対象がなす圏 $\mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(A, A)$ である。

命題 3.1 を理解しよう。まず、 T/A の分配関数は、 T の分配関数に A でラベルされたトポロジカル演算子を、時空多様体 $M^{(2)}$ 上のメッシュに沿って挿入したものである：

$$Z_{T/A}(M^{(2)}) = Z_T \left(\begin{array}{c} \text{メッシュに沿ったトポロジカル演算子の挿入} \end{array} \right)$$

したがってトポロジカル演算子として $p \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ でラベルされるようなものを依然として考えることができるが、それが A の任意のメッシュの配位に対してトポロジカルであるためには、 p でラベルされたトポロジカル演算子と A でラベルされたトポロジカル演算子との間のフュージョン則にある種の整合性条件を課す必要がある。命題 3.1 は、その整合性条件がまさに (A, A) -両側加群対象の条件 (bimod-1)-(bimod-3) であることを主張している。物理的には、トポロジカル演算子の向きが逆になっていてもフュージョンできるべきである。幸いにして \mathcal{C} がユニタリフュージョン圏であることから、 $\text{coev}^L, \text{coev}^R$ を用いることで A -加群の構造の定義に登場する矢印の向きを全て逆転して、 A -余加群の構造を常に持たせることができる。

次に、2つの異なるトポロジカル演算子 $p, q \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を考える。これらの接合部となる点状のトポロジカル演算子 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(p, q)$ は、左右からの A の作用について可換でなくてはならない。i.e. (A, A) -両側加群の準同型ということになる。このことから、 $(1+1)$ -次元の理論 T/A の持つトポロジカル演算子全体が圏 $\mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(A, A)$ を成すことがわかる。

しかるに、圏 $\mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(A, A)$ が 0-form symmetry であるためにはそれがユニタリフュージョン圏にならなくてはならない。まず、テンソル積は代数 A 上のテンソル積 (\otimes_A, π) だと考えられる。実際、こうすることで $(p, \lambda_1, \rho_1), (q, \lambda_2, \rho_2) \in \text{Ob}(\mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(A, A))$ のフュージョン則が

$$\begin{array}{c} p \otimes_A q \\ \swarrow \quad \searrow \\ p \quad q \end{array} \quad \begin{array}{c} \bullet \pi \\ \swarrow \quad \searrow \\ p \quad q \end{array} \quad \begin{array}{c} \bullet \rho_1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ p \quad q \end{array} \quad \begin{array}{c} \bullet A \\ \swarrow \quad \searrow \\ p \quad q \end{array} \quad = \quad \begin{array}{c} p \otimes_A q \\ \swarrow \quad \searrow \\ p \quad q \end{array} \quad \begin{array}{c} \bullet \pi \\ \swarrow \quad \searrow \\ p \quad q \end{array} \quad \begin{array}{c} \bullet \lambda_2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ p \quad q \end{array} \quad \begin{array}{c} \bullet A \\ \swarrow \quad \searrow \\ p \quad q \end{array}$$

のようになるが、これはまさに p, q に挟まれた A のメッシュを p, q のフュージョンにおいて無視できることを意味する。 $\mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(A, A)$ の associator と unitors, left/right evaluation, coevaluation は

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{p,q,r} &:= \pi_{p,q \otimes_A r} \circ (\text{Id}_p \otimes \pi_{q,r}) \circ a_{p,q,r} \circ (\bar{\pi}_{p,q} \otimes \text{Id}_r) \circ \bar{\pi}_{p \otimes_A q, r}, \\ \bar{\text{ev}}_p^L &:= v \circ \text{ev}_p^L \circ \bar{\pi}_{p^*, p}, \\ \bar{\text{coev}}_p^L &:= \pi_{p, p^*} \circ \text{coev}_p^L \circ \Delta, \\ &\vdots \end{aligned}$$

のように定義する。こうして $(\mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(A, A), \otimes_A, 1, \bar{a}, \bar{l}, \bar{r}, \bar{\text{ev}}^L, \bar{\text{coev}}^L, \bar{\text{ev}}^R, \bar{\text{coev}}^R)$ がユニタリフュージョン圏になり、公理 3.3 の意味で T/A の 0-form symmetry を特徴付ける。

命題^{ph} 3.2: half-space gauging

時空多様体 M が 1 次元部分多様体 D によって 2 つの領域 M_1, M_2 に分割されているとする. 左側の M_1 には理論 T を, 右側の M_2 にはゲージ化された理論 T/A を置く (図 3.4)^a. このとき, ドメインウォール D が成す圏は $\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}}\text{-}\mathbf{A}$ であり, $(\mathcal{C}, \mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(\mathbf{A}, \mathbf{A}))$ -両側加群圏の構造を持つ.

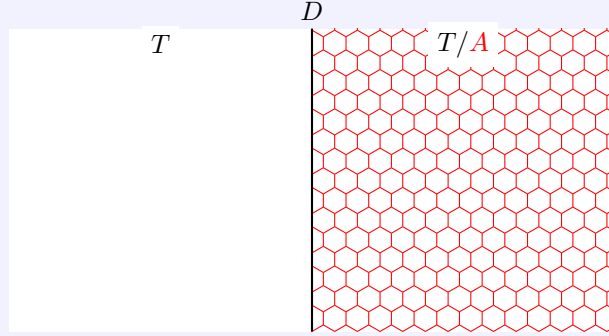


図 3.4: half-space gauging. ドメインウォール D には右から \mathbf{A} が作用するので右 \mathbf{A} -加群である. さらに, 左からは T のトポロジカル演算子が, 右からは T/A のトポロジカル演算子が作用するため, $(\mathcal{C}, \mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(\mathbf{A}, \mathbf{A}))$ -両側加群でもある.

^a この設定を half-space gauging と呼ぶ.

【例 3.7.4】 \mathbf{Vec}_G のゲージ化

G を有限群とする. 前小節と同様に, \mathbf{Vec}_G の対象 Frobenius 代数として

$$\begin{aligned} A &:= \bigoplus_{g \in G} \mathbb{K}\{e_g\} \\ \mu: A \otimes A &\longrightarrow A, e_g \otimes e_h \longmapsto e_{gh} \\ v: 1 &\longrightarrow A, 1_G \longmapsto \sum_{g \in G} \delta_{1_G, g} e_g \\ \Delta: A &\longrightarrow A \otimes A, e_g \longmapsto \sum_{h \in G} e_h \otimes e_{h^{-1}g} \\ \epsilon: A &\longrightarrow 1, e_g \longmapsto \delta_{1_G, g} e_{1_G} \end{aligned}$$

を選ぶ. \mathbf{Vec}_G の右 A -加群対象全体がなす圏 $\mathbf{Mod}_{\mathbf{Vec}_G}\text{-}A$ とはなんだろうか.

まず, $\forall m \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Vec}_G)$ に対してある非負整数の族 $\{N_g\}_{g \in G}$ が存在して $m = \bigoplus_{g \in G} N_g \mathbb{K}\{e_g\}$ と書くことができる. m が右 A -加群対象であるためには, (associativity), (unitarity) を満たす \mathbf{Vec}_G の射 $\rho \in \mathbf{Hom}_{\mathbf{Vec}_G}(m \otimes A, m)$ を見つけなくてはならない. 【例 F.3.1】から, \mathbf{Vec}_G のテンソル積は

$$m \otimes A = \bigoplus_{g \in G} \bigoplus_{h \in G} N_h \mathbb{K}e_h \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}e_{h^{-1}g}$$

と書けるから, 結局 $\forall g, h \in G$ に対して

$$\rho_{g,h}: N_g \mathbb{K}e_g \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}e_h \longrightarrow N_{gh} \mathbb{K}e_{gh}$$

を指定すれば ρ が定まる. **(associativity)** より $\forall g, h, k \in G$ に対して

$$\rho_{gh,k} \circ \rho_{g,h} = \rho_{g,hk}$$

が, **(unitarity)** より $\forall g \in G$ に対して

$$\rho_{g,1_G} = \text{Id}$$

がわかる. よって $\forall g, h \in G$ に対して

$$\rho_{g,h} \circ \rho_{gh,h^{-1}} = \rho_{gh,1_G} = \text{Id}$$

が言える. ここから

$$N_g = N_{1_G} =: N\rho_{g,h} = \rho_{1_G,gh} \circ \rho_{1_G,g}^{-1}$$

が分かる. i.e. $m = NA$ であり, ρ は線型同型写像の族 $\{\rho_{1_G,g}\}_{g \in G}$ によって完全に決定できる. ところが, $\forall (NA, \{\rho_{1_G,g}\}_{g \in G}) \in \text{Ob}(\mathbf{Mod}_{\mathbf{Vec}_G}\text{-}A)$ は明らかに $(NA, \{\text{Id}\}_{g \in G})$ と右 A -加群対象として同型である. よって $(NA, \{\text{Id}\}_{g \in G})$ のみ考えれば良い.

次に, 射 $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Mod}_{\mathbf{Vec}_G}\text{-}A}(NA, N'A)$ を考える. 右作用が自明なのでこれはただの線型写像である. 以上の考察から, まず $\mathbf{Mod}_{\mathbf{Vec}_G}\text{-}A \cong \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ が分かった.

同様の考察から, $(NA, \{\lambda_{g,1_G}\}_{g \in G}, \{\rho_{1_G,g}\}_{g \in G}) \in \text{Ob}(\mathbf{Bimod}_{\mathbf{Vec}_G}(A, A))$ と見做すことができる. 条件 **(bimod-3)** から $\forall g, h \in G$ に対して

$$\lambda_{g,1_G} \circ \lambda_{h,1_G} = x_{gh,1_G}$$

がわかるが, $\lambda_{g,1_G} \in \text{GL}(NA)$ であることから左作用のデータ $\{\lambda_{g,1_G}\}_{g \in G}$ は群 G の表現を与えることが分かる. $\mathbf{Bimod}_{\mathbf{Vec}_G}(A, A)$ の射は明らかに G -同変写像であるから, $\mathbf{Bimod}_{\mathbf{Vec}_G}(A, A) \cong \mathbf{Rep}(G)$ が分かった.

【例 3.7.5】 $\mathbf{Rep}(G)$ のゲージ化

G を有限群とする. $\mathbf{Rep}(G)$ の対象 **Frobenius 代数** としては, **正則表現** (regular representation)

$$A: G \longrightarrow \text{GL}\left(\bigoplus_{g \in G} \mathbb{K}\widehat{g}\right), g \longmapsto (\widehat{h} \longmapsto g\widehat{h})$$

をとってくる. 代数対象の乗法は G -同変写像

$$\mu: \left(\bigoplus_{g \in G} \mathbb{K}\widehat{g}\right) \otimes \left(\bigoplus_{g \in G} \mathbb{K}\widehat{g}\right) \longrightarrow \bigoplus_{g \in G} \mathbb{K}\widehat{g}, \widehat{g} \otimes \widehat{h} \longmapsto \delta_{g,h}\widehat{g}$$

で, unit は G -同変写像

$$v: 1 \longrightarrow \bigoplus_{g \in G} \mathbb{K}\widehat{g}, 1 \longmapsto \sum_{g \in G} \widehat{g}$$

である.

$\forall(r: G \longrightarrow \text{GL}(R)) \in \text{Ob}(\mathbf{Rep}(G))$ を 1 つ固定する．右 A -加群対象を指定するには右作用 $\rho: r \otimes A \longrightarrow r$ を指定せねばならない．

3.7.4 等価なゲージ化

時空多様体 $M^{(2)}$ のメッシュが同一だとすると、異なる **対称 Frobenius 代数** $(A, \mu, \nu, \Delta, \epsilon), (A', \mu', \nu', \Delta', \epsilon')$ はいつ同じ **ゲージ化**された理論 $T/A \cong T/A'$ を与えるのだろうか？ この \cong は、ゲージ化された理論の持つ **対称性**および**ドメインウォール**が等価であることを意味する．

定義 ^{ph} 3.2: 等価なゲージ化

$T/A \cong T/A'$ であるとは、**左 \mathcal{C} -加群圏の同値** $\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-A} \cong \mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-A'}$ が成り立つこと、i.e. A と A' が**森田同値**であることを言う．

定理 3.8: 加群圏の特徴付け

- **有限**な多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$
- 既約かつ**完全な左 \mathcal{C} -加群圏** $(\mathcal{M}, \blacktriangleright, \alpha, \lambda)^a$
- 勝手な \mathcal{M} の対象 $m \in \text{Ob}(\mathcal{M})$

を与える．このとき \mathcal{M} の **internal hom functor** $\multimap: \mathcal{M}^{\text{op}} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{C}$ に関して $m \multimap m$ は \mathcal{C} における**代数対象**になり、関手

$$F: \mathcal{M} \longrightarrow \mathbf{Mod}_{\mathcal{C}}(m \multimap m), n \longmapsto m \multimap n$$

は**左 \mathcal{C} -加群圏**の同値である．

^a [EGNO15, p.152]

証明 [EGNO15, THEOREM7.10.1, p.150] ■

定理 3.8 および定義 3.2 より、ゲージ化の同値類は既約かつ**完全な左 \mathcal{C} -加群圏** $(\mathcal{M}, \blacktriangleright, \alpha, \lambda)^{*50}$ と一対一対応する．このことから、ゲージ化された理論を T/A と書く代わりに T/\mathcal{M} と書く．さらに命題 3.2 より、その \mathcal{M} は元の理論 T とゲージ化された理論 T/\mathcal{M} の間のドメインウォールを記述する．

3.7.5 再ゲージ化

既約かつ**完全な左 \mathcal{C} -加群圏** $(\mathcal{M}, \blacktriangleright, \alpha, \lambda)$ を 1 つ固定する．命題 3.1, 3.2 および定理 3.8 から、ある **対称 Frobenius 代数対象** $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が存在して左 \mathcal{C} -加群圏の同値 $\mathcal{M} \cong \mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-A}$ が成り立ち、ゲージ化された理論 T/\mathcal{M} は $\mathcal{C}' := \mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(A, A)$ の対称性を持ち、 \mathcal{M} は自然に $(\mathcal{C}, \mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(A, A))$ -両側加群圏の構造を持つ．

^{*50} [EGNO15, p.152]

既約かつ完全な左 $\mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(A, A)$ -加群圏 $(\mathcal{M}', \blacktriangleright', \alpha', \lambda')'$ をとってきてこの操作を繰り返すことは, $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ -両側加群圏の構造を持つ Deligne のテンソル積 $\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}'} \mathcal{M}'$ によって $T/(\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}'} \mathcal{M}')$ とゲージ化することに等しい. 特に, \mathcal{M} の反対加群^{*51} \mathcal{M}_{op} を加群積の順序を逆にすることで定義する^{*52}と, \mathcal{M}_{op} は $(\mathcal{C}', \mathcal{C})$ -両側加群圏となり, $\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}'} \mathcal{M}_{\text{op}}$ によるゲージ化は対称性を元に戻す. i.e. 定義 3.2 の意味で $T \cong T/\mathcal{M}/\mathcal{M}_{\text{op}}$ が成り立つ.

3.7.6 ゲージ化で移り合える対称性

命題^{ph} 3.3: ゲージ化で互いに移り合える対称性

$(1+1)$ -次元の理論の対称性 $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ が適切なゲージ化によって互いに移り合える必要十分条件は, その Drinfeld センターが一致することである.

3.8 Turaev-Viro 理論

前節で見てきたように, $1+1$ 次元における有限対称性とは ユニタリフュージョン圏のことであった. 一方で, Turaev-Viro 理論とは, 与えられた球状フュージョン圏 \mathcal{C} のデータを素材にして構成される $2+1$ 次元の TQFT である [TV92]. $2+1$ 次元の symmetry TFT として Turaev-Viro 理論を採用することにより, 境界に \mathcal{C} の対称性を持つ理論を作ることができる [AFM20].

この節では [TV17], [KB10], [BK01] に従い Turaev-Viro 理論の構成を行う.

3.8.1 球状圏に関する準備

以下では, 代数閉体 \mathbb{K} 上の球状フュージョン圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{coev}^L, \text{ev}^L, \text{coev}^R, \text{ev}^R)$ と, その巡回構造 p を 1 つ固定する. \mathcal{C} の単純対象の同型類が成す有限集合を $\text{Simp}(\mathcal{C})$ と書く.

補題 3.1: 単純対象の Hom

半単純かつ有限な任意の \mathbb{K} -線形アーベル圏 \mathcal{C} において, 以下が成り立つ:

(1) $\forall a, b \in \text{Simp}(\mathcal{C})$ に対して

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b) = \delta_{ab} \mathbb{K}$$

が成り立つ.

(2) $\forall a \in \text{Simp}(\mathcal{C})$ および $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して, 以下の条件を満たす射の族

$$\{p_{\alpha}: x \longrightarrow a, i_{\alpha}: a \longrightarrow x\}_{\alpha \in \Lambda}$$

が存在する:

^{*51} 反対圏は op を上付きに書くことで区別する.

^{*52} より正確には, さらに left/right actor の逆写像をとる

- (part-1) $|\Lambda| = \dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, a) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, x)$
(part-2) $\{p_{\alpha}: x \rightarrow a\}_{\alpha \in \Lambda}$ は \mathbb{K} -ベクトル空間 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, a)$ の基底である.
(part-3) $\{i_{\alpha}: a \rightarrow x\}_{\alpha \in \Lambda}$ は \mathbb{K} -ベクトル空間 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, x)$ の基底である.
(part-4) $\forall \alpha, \beta \in \Lambda$ に対して, $p_{\alpha} \circ i_{\beta} = \delta_{\alpha\beta} \text{Id}_a$

証明 (1) **アーベル圏の定義**により, $\forall \varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b) \setminus \{0\}$ は核 $\ker \varphi: \text{Ker } \varphi \hookrightarrow a$ および余核 $\text{coker } \varphi: b \rightarrow \text{Coker } \varphi$ を持つ. いま a は**単純**だから, モノ射 $\ker \varphi$ は零射である. よって φ がモノ射だと分かった. 一方で, 再度**アーベル圏の定義**によりモノ射 $\ker(\text{coker } \varphi): \text{Ker}(\text{coker } \varphi) \hookrightarrow b$ が存在する^{*53}. b もまた**単純**でかつ $\varphi \neq 0$ より, モノ射 $\ker(\text{coker } \varphi)$ は同型射であり, 従って $\text{coker } \varphi = 0$, i.e. φ はエピ射だと分かった.

以上の考察から $\forall \varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b)$ は零射であるか同型射であるかのどちらかである^{*54}から, $a \neq b$ ならば $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b) = 0$ である. $a = b$ のとき, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b) =: \text{End}_{\mathcal{C}}(a)$ は射の合成に関して結合多元体 (division algebra) を成すが, **フュージョン圏** \mathcal{C} は**有限**なので $\text{End}_{\mathcal{C}}(a)$ は \mathbb{K} -ベクトル空間として有限次元であり, かつ \mathbb{K} が代数閉体であるから, $\text{End}_{\mathcal{C}}(a) = \mathbb{K}$ しかありえない.

(2) \mathcal{C} は**半単純**なので, x は有限の直和分解

$$x \cong \bigoplus_{b \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_b b$$

を持つ. **直和を特徴付ける射の族**^{*55}を $\{i_{\beta}^{(b)}: b \rightarrow x\}_{b \in \text{Simp}(\mathcal{C}), 1 \leq \beta \leq N_b}$ と書こう.

ここで $\forall a \in \text{Simp}(\mathcal{C})$ を1つ固定し, $\Lambda := \{1, \dots, N_a\}$ とおく. このとき**直和の普遍性**により, $\forall \alpha \in \Lambda$ に対して射 $p_{\alpha}^{(a)}: x \rightarrow a$ が一意的に存在して以下の図式を可換にする^{*56}:

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{i_{\beta}^{(a)}} & x \\ & \searrow \delta_{\alpha\beta} \text{Id}_a & \downarrow p_{\alpha}^{(a)} \\ & & a \end{array}$$

i.e. $p_{\alpha} := p_{\alpha}^{(a)}$, $i_{\alpha} := i_{\alpha}^{(a)}$ と選ぶことで **(part-4)** が充たされる. さらに, **極限・余極限と Hom の交換** および (1) から \mathbb{K} -ベクトル空間としての同型

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, a) &\cong \bigoplus_{b \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_b \text{Hom}_{\mathcal{C}}(b, a) = \mathbb{K}^{\oplus N_a}, \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, x) &\cong \bigoplus_{b \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_b \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b) = \mathbb{K}^{\oplus N_a} \end{aligned}$$

があるので **(part-1)-(part-3)** も充たされる. ■

^{*53} この2つ組 $(\text{Ker}(\text{coker } \varphi), \ker(\text{coker } \varphi))$ を射 φ の**像**と呼び, $(\text{Im } \varphi, \text{im } \varphi)$ と書くのだった.

^{*54} これを **Schur の補題**と呼ぶ.

^{*55} つまり, **余錐**のデータである.

^{*56} より正確には, $\forall \alpha \in \Lambda$ を1つ固定したとき, 組 $(a, \{\delta_{\alpha\beta} \delta_{ab} \text{Id}_a: b \rightarrow a\}_{b \in \text{Simp}(\mathcal{C}), 1 \leq \beta \leq N_b})$ が $\prod_{b \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_b$ 個の頂点だけから構成される**図式** (i.e. 直和の図式) の**余錐**であることを使っている.

\mathbb{K} を代数閉体とすると、アーベル圏の構造を使わずに **\mathbb{K} -線形な加法圏** における半単純性を特徴付ける方法が存在する [Mue02, p.6].

定義 3.21: Müger 半単純

\mathbb{K} -線形な加法圏 \mathcal{C} が **Müger 半単純** であるとは、

- (Muger1) 有限余積が常に存在する
- (Muger2) 任意の冪等射が分裂する (**冪等完全**; idempotent complete)
- (Muger3) 対象の部分集合 $\text{Simp}(\mathcal{C}) \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$ が存在して以下を充たす：
 - (1) $\forall a, b \in \text{Simp}(\mathcal{C})$ に対して

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b) = \delta_{ab}\mathbb{K}$$

- (2) $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して、 \mathbb{K} -線型写像

$$m_{x,y}: \bigoplus_{a \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, a) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y), \quad (3.8.1)$$

$$\sum_{a \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \varphi_a \otimes_{\mathbb{K}} \psi_a \longmapsto \sum_{a \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \psi_a \circ \varphi_a$$

は自然な \mathbb{K} -ベクトル空間の同型写像である。

半単純性の定義として 3.21 を採用すると、任意の対象が単純対象の直和に分解することが証明できる [Bai17, Proposition 28, p.7]. **アーベル圏における半単純性の定義** は **Müger 半単純** と等価でない点に注意しよう。具体的には、**アーベル圏における半単純性の定義** から (3.8.1) を示すことはできない。本資料では (3.8.1) を認めることにする。



以下では、混乱防止のため**厳密なモノイダル圏** $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ におけるテンソル積を $\otimes_{\mathbb{K}}$ と書き、 $\forall x \in \text{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ における恒等射を 1_x と書くことにする。

補題 3.2: Moore-Seiberg の欠片

$\forall x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して、以下の**自然同型**が存在する：

(Rotation isomorphism)

$$Z: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, x_n \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n-1})$$

(Gluing isomorphism)

$$\begin{aligned} G: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes z) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, z^* \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) \\ \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_n), \\ \varphi \otimes \psi \longmapsto \text{ev}_z^L \circ (\varphi \otimes \psi) \end{aligned}$$

証明 (1) **旋回構造** p の存在と補題 F.3 より、

$$Z: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n)$$

$$\begin{aligned}
& \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{Id}_1, \text{Id}_{x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n-1} \otimes p_{x_n}})} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, x_1 \otimes \cdots \otimes x_n^{**}) \\
& \xrightarrow{\alpha_{1, x_n^*, x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n-1}}^{-1}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x_n^*, x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n-1}) \\
& \xrightarrow{\beta_{x_n, 1, x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n-1}}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, x_n \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n-1})
\end{aligned}$$

と自然同型が構成できる.

- (2) \mathcal{C} は定義から半単純なので, $z = \bigoplus_{a \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_a a$ と書くことができる. さらに補題 F.2 により $(-)^*: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ は反変関手だが, 左随伴関手を持つので命題 C.4 より余極限 \bigoplus と交換し,

$$z^* = \bigoplus_{a \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_a a^*$$

と書ける. よって余極限と Hom の交換から自然同型

$$\begin{aligned}
& \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes z) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, z^* \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) \\
& \cong \bigoplus_{a \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes a) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, a^* \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_n)
\end{aligned}$$

が従う. さらに巡回構造 p と補題 F.3, Müger 半単純の自然同型 (3.8.1), および余極限と Hom の交換などを使うと自然同型

$$\begin{aligned}
& \bigoplus_{a \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes a) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, a^* \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) \\
& \cong \bigoplus_{a \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x_n^* \otimes \cdots \otimes x_1^*, a) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a^{**}, y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) \\
& \cong \bigoplus_{a \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x_n^* \otimes \cdots \otimes x_1^*, a) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) \\
& \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x_n^* \otimes \cdots \otimes x_1^*, y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) \\
& \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_n)
\end{aligned}$$

が分かる. ■

補題 3.2 のデータは, 本質的に Moore-Seiberg による RCFT の公理のデータの一部分である [BK01, THEOREM 5.3.8., p.111]. 関手

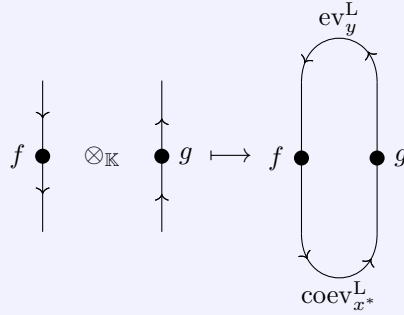
$$\begin{aligned}
\langle - \rangle : \mathcal{C}^{\times n} & \longrightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}, \\
(x_1, \dots, x_n) & \longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)
\end{aligned} \tag{3.8.2}$$

は共形ブロックのデータを与える. 以下では関手 (3.8.2) に準じた略記 $\langle x_1, \dots, x_n \rangle := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)$ を行う.

補題 3.3: 非退化な双線形形式

$\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ について, 双線形形式

$$\omega: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x^*, y^*) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \longrightarrow \mathbb{K}$$



は非退化であり, 自然同型

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)^* \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x^*, y^*)$$

を誘導する.

証明 $x = 1$ の場合に示す. 圏 \mathcal{C} は **フュージョン圏** なので, 補題 F.5 より $1 \in \text{Simp}(\mathcal{C})$ である. \mathcal{C} は **半単純** だから, $y = \bigoplus_{a \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_a a$ と書ける. このとき, **余極限と Hom の交換** および補題 3.1-(1) より

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, y) &\cong \bigoplus_{a \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_a \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, a) = \mathbb{K}^{\oplus N_1}, \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, 1) &\cong \bigoplus_{a \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_a \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, 1) = \mathbb{K}^{\oplus N_1} \end{aligned}$$

なので, 補題 3.1-(2) より $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, y), \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, 1)$ の基底 $\{p_j: 1 \longrightarrow y\}_{1 \leq j \leq N_1}, \{q_j: y \longrightarrow 1\}_{1 \leq j \leq N_1}$ であって $q_i \circ p_j = \delta_{ij} \text{Id}_1 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, 1) = \mathbb{K}$ を満たすものが存在する^{*57}. ここで, \mathbb{K} -線形写像

$$\alpha: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, y^*) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, 1), \psi \longmapsto \text{ev}_y^L \circ (\text{Id}_y \otimes \psi)$$

は逆写像

$$\beta: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, 1) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, y^*), \varphi \longmapsto (\text{Id}_{y^*} \otimes \varphi) \circ \text{coev}_{y^*}^L$$

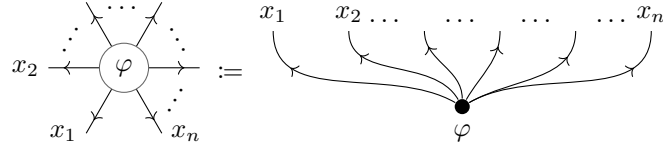
を持つので \mathbb{K} -ベクトル空間の同型写像であり, よって $\{\beta(q_j): 1 \longrightarrow y^*\}_{1 \leq j \leq N_1}$ は $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, y^*)$ の基底を成す. そして $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, y^*) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, y)$ の基底 $\{\beta(q_i) \otimes p_j\}_{1 \leq i, j \leq N_1}$ に関する ω の表現行列は

$$\omega(\beta(q_i) \otimes p_j) = \text{ev}_y^L \circ ((\text{Id}_{y^*} \otimes q_i) \otimes p_j) \circ (\text{coev}_{y^*}^L \otimes \text{Id}_1) = q_i \circ p_j = \delta_{ij}$$

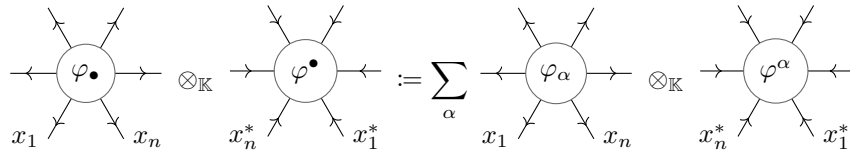
であるから, ω は非退化である. ■

^{*57} 要するに双対基底をとっている. なお, ここで圏 \mathcal{C} の **有限性** を使っている.

以下, $\varphi \in \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ のストリング図式を書く際には



のような略記をすることがある. さらに, 有限次元 \mathbb{K} -ベクトル空間 $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ の基底を $\{\varphi_\alpha\}$ と書くと, 補題 3.3 により, それの ω に関する双対基底 $\{\varphi^\alpha\}$ は同次元の \mathbb{K} -ベクトル空間 $\langle x_n^*, \dots, x_1^* \rangle$ の基底をなす. このことから, 以下のような略記を導入する:



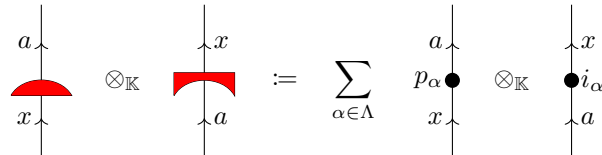
さらに, $\forall a \in \text{Simp}(\mathcal{C}), \forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が与えられたときに, 補題 3.1-(2) の射の族

$$\{p_\alpha: x \longrightarrow a, i_\alpha: a \longrightarrow x\}_{\alpha \in \Lambda}$$

を用いて構成される射

$$\sum_{\alpha \in \Lambda} p_\alpha \otimes i_\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, a) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, x)$$

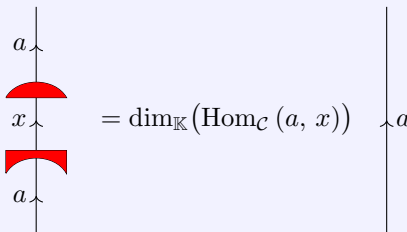
を次のような図式で表現する:



補題 3.4: 技術的な補題 1

$\forall a \in \text{Simp}(\mathcal{C}), \forall x, x_1, \dots, x_n \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して以下が成り立つ:

(1)



(2)

$$\sum_{a \in \text{Simp}(C)} \begin{array}{c} x \nearrow \\ \text{red cap} \\ a \nearrow \\ \text{red cup} \\ x \nearrow \end{array} = \begin{array}{c} x \nearrow \\ \text{vertical line} \\ x \nearrow \end{array}$$

(3)

$$\begin{array}{c} x \nearrow \\ \text{red cap} \\ \bullet \end{array} = \begin{array}{c} x \nearrow \\ \text{vertical line} \\ \bullet \end{array}, \quad \begin{array}{c} \bullet \\ x \nearrow \\ \text{red cap} \\ \text{red cup} \\ x \nearrow \\ \bullet \end{array} = \begin{array}{c} \bullet \\ x \nearrow \\ \text{vertical line} \\ x \nearrow \\ \bullet \end{array}$$

(4)

$$\begin{array}{c} a \nearrow \\ \text{red cup} \\ x \nearrow \end{array} \otimes_{\mathbb{K}} \begin{array}{c} x \nearrow \\ \text{red cap} \\ a \nearrow \end{array} = \dim_p(a) \begin{array}{c} a \nearrow \\ \text{blue cup} \\ x \nearrow \end{array} \otimes_{\mathbb{K}} \begin{array}{c} a \nearrow \\ \text{blue cap} \\ x \nearrow \end{array}$$

(5) 非退化な双線形形式 $\omega: \text{Hom}_C(1, x^*) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Hom}_C(1, x) \rightarrow \mathbb{K}$ について,

$$\Omega: \mathbb{K} \rightarrow \text{Hom}_C(1, x) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Hom}_C(1, x^*)$$

$$1_{\mathbb{K}} \mapsto \begin{array}{c} \text{vertical line} \\ \otimes_{\mathbb{K}} \\ \text{red cap} \end{array}$$

で定義される双線形形式は, 圏 $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ において (zig-zag equation) を満たす:

$$(\mathbb{1}_{x^*} \otimes_{\mathbb{K}} \omega) \circ (\Omega \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{1}_x) = \mathbb{1}_{x^*},$$

$$(\omega \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{1}_x) \circ (\mathbb{1}_x \otimes_{\mathbb{K}} \Omega) = \mathbb{1}_x$$

さらに, $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ の基底 $\{\varphi_{\bullet}\}$ の取り方によらず

$$\Omega(1_{\mathbb{K}}) = \begin{array}{c} \text{circle with } \varphi_{\bullet} \text{ and } n \text{ arrows} \\ x_2 \leftarrow \dots \rightarrow x_1 \end{array} \otimes_{\mathbb{K}} \begin{array}{c} \text{circle with } \varphi_{\bullet} \text{ and } n \text{ arrows} \\ x_n^* \leftarrow \dots \rightarrow x_1^* \end{array}$$

が成り立つ [TV17, Lemma 4.8, p. 82].

証明 補題 3.1-(2) の射の族

$$\{p_\alpha: x \longrightarrow a, i_\alpha: a \longrightarrow x\}_{\alpha \in \Lambda}$$

を 1 つ固定する.

(1) 補題 3.1-(2) より

$$\begin{array}{c} a \nearrow \\ \text{red cap} \\ x \nearrow \\ \text{red cup} \\ a \nearrow \end{array} := \sum_{\alpha \in \Lambda} \begin{array}{c} a \nearrow \\ \bullet p_\alpha \\ x \nearrow \\ \bullet i_\alpha \\ a \nearrow \end{array} = \sum_{\alpha \in \Lambda} a \nearrow = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, x)) \text{Id}_a$$

(2) $m := \sum_{\beta \in \Lambda} i_\beta \circ p_\beta \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$ とおく. このとき補題 3.1-(2) より $\forall \alpha \in \Lambda$ に対して

$$m \circ i_\alpha = i_\alpha$$

が成り立つ. i.e. 以下の図式が可換になる:

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{i_\alpha} & x \\ & \searrow i_\alpha & \downarrow m \\ & & x \end{array}$$

一方で, $\text{Id}_x \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$ もまた同じ図式を可換にする:

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{i_\alpha} & x \\ & \searrow i_\alpha & \downarrow \text{Id}_x \\ & & x \end{array}$$

然るに直和の普遍性より赤色の射は一意であるから, $m = \text{Id}_x$ である.

(3) 補題 3.1-(1) より $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, a) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, 1) = \delta_{a,1} \mathbb{K}$ なので, (2) において

$$\begin{array}{c} x \nearrow \\ \bullet \\ x \nearrow \end{array} = \sum_{a \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \begin{array}{c} x \nearrow \\ \text{red cap} \\ a \nearrow \\ \bullet \\ x \nearrow \\ \text{red cup} \\ a \nearrow \end{array} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, a) = \begin{array}{c} x \nearrow \\ \text{red cap} \\ x \nearrow \\ \bullet \\ x \nearrow \end{array}$$

$$\begin{array}{c} x \nearrow \\ \bullet \\ x \nearrow \end{array} = \sum_{a \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \begin{array}{c} x \nearrow \\ \bullet \\ x \nearrow \\ \text{red cap} \\ a \nearrow \\ \text{red cup} \\ x \nearrow \end{array} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, 1) = \begin{array}{c} x \nearrow \\ \bullet \\ x \nearrow \\ \text{red cap} \\ x \nearrow \end{array}$$

(4) 補題 3.1-(2) の射の族

$$\{P_\alpha: x \otimes a^* \longrightarrow 1, I_\alpha: 1 \longrightarrow x \otimes a^*\}_{\alpha \in \Lambda}$$

$$\begin{array}{c} \text{blue semi-circle} \\ \text{white semi-circle} \end{array} \quad \otimes \mathbb{K} \quad \begin{array}{c} \text{white semi-circle} \\ \text{blue semi-circle} \end{array} \quad x \quad a^* \quad := \sum_{\alpha \in \Lambda} P_{\alpha} \otimes \mathbb{K} I_{\alpha}$$

Figure 1 consists of two diagrams. The left diagram shows a vertex labeled $p_\alpha := \dim_p(a)$ with a loop labeled a and a path labeled x . The right diagram shows a vertex labeled $i_\alpha :=$ with a loop labeled a and a path labeled x .

$$\{\tilde{p}_\alpha: x \longrightarrow a, \quad \tilde{i}_\alpha: a \longrightarrow x\}_{\alpha \in \Lambda}$$

$\dim_p(a)A_{\alpha\beta} = \dim_p(a)$

$$\begin{array}{ccc}
& P_\alpha & \\
& \bullet & \\
= \dim_p(a) & x \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} a^* & \because \text{ (zig-zag equation) } \\
& \bullet & \\
& I_\beta & \\
= \dim_p(a) P_\alpha \circ I_\beta & & \\
= \dim_p(a) \delta_{\alpha\beta} & & \because \text{ (part-4) }
\end{array}$$

(5) (3) より, $\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, x)$ に対して

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{1} \otimes_{\mathbb{K}} \omega) \circ (\Omega \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1})(\mathbf{1}_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} f) &= (\mathbf{1} \otimes_{\mathbb{K}} \omega)(\Omega(\mathbf{1}_{\mathbb{K}}) \otimes_{\mathbb{K}} f) \\
 &= \text{diagram 1} \quad \text{diagram 2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
\text{---} \\
\uparrow \\
\text{---} \\
= \\
\text{---} \\
\uparrow \\
\bullet \xrightarrow{f} \\
= f
\end{array}$$

同様に, $\forall g \in \text{Hom}_C(1, x^*)$ に対して

$$\begin{aligned}
(\omega \otimes_{\mathbb{K}} 1_x) \circ (1_x \otimes_{\mathbb{K}} \Omega)(g \otimes_{\mathbb{K}} 1_{\mathbb{K}}) &= (\omega \otimes_{\mathbb{K}} 1_x)(g \otimes_{\mathbb{K}} \Omega(1_{\mathbb{K}})) \\
&= g \bullet \text{---} \text{---} \text{---} \\
&= g \bullet \text{---} \text{---} \text{---} \\
&= g
\end{aligned}$$

が成り立つので **(zig-zag equation)** が示された.

ここで, $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ の勝手な基底 $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ および ω に関する $\langle x_n^*, \dots, x_1^* \rangle$ の双対基底 $\{\varphi^\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ を1つとる. そして $\omega^\alpha_\beta := \omega(\varphi^\alpha \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_\beta)$, $\Omega^\alpha_\beta := ((\varphi_\alpha)^* \otimes_{\mathbb{K}} (\varphi^\beta)^*)(\Omega(1_{\mathbb{K}}))$ とおく. すると

$$\begin{aligned}
\omega^\alpha_\beta \Omega^\beta_\gamma &= \omega(\varphi^\alpha \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_\beta)((\varphi_\beta)^* \otimes_{\mathbb{K}} (\varphi^\gamma)^*)(\Omega(1_{\mathbb{K}})) \\
&= \omega\left((\varphi^\alpha \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_\beta)((\varphi_\beta)^* \otimes_{\mathbb{K}} (\varphi^\gamma)^*)(\Omega(1_{\mathbb{K}}))\right) \\
&= \omega\left((\varphi^\alpha \otimes_{\mathbb{K}} 1_{\langle x_1, \dots, x_n \rangle}) \circ (1_{\langle x_1, \dots, x_n \rangle} \otimes_{\mathbb{K}} (\varphi^\gamma)^*) \circ \Omega(1_{\mathbb{K}})\right) \\
&= (\varphi^\gamma)^*\left((\omega \otimes_{\mathbb{K}} 1_{\langle x_n^*, \dots, x_1^* \rangle}) \circ (1_{\langle x_n^*, \dots, x_1^* \rangle} \otimes_{\mathbb{K}} \Omega)(\varphi^\alpha \otimes_{\mathbb{K}} 1_{\mathbb{K}})\right) \\
&= (\varphi^\gamma)^*(\varphi^\alpha) \quad \because \textbf{(zig-zag equation)} \\
&= \delta^\alpha_\gamma
\end{aligned}$$

であるから, 双対基底の定義より $\omega^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta$ であることに注意すると*58

$$\begin{aligned}
\Omega(1_{\mathbb{K}}) &= \Omega^\alpha_\beta \varphi_\alpha \otimes_{\mathbb{K}} \varphi^\beta \\
&= [\omega^{-1}]^\alpha_\beta \varphi_\alpha \otimes_{\mathbb{K}} \varphi^\beta \\
&= \varphi_\alpha \otimes_{\mathbb{K}} \varphi^\alpha
\end{aligned}$$

が分かる. ■

*58 双対基底でなくとも, $[\omega^\alpha_\beta]$ が可逆行列ならばこの構成が有効である.

補題 3.5: 技術的な補題 2

補題 3.3 の双線形形式 ω を用いる.

(1) $\forall a \in \text{Simp}(\mathcal{C}), \forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ および $\forall \varphi \in \langle a, x \rangle, \forall \psi \in \langle x^*, a^* \rangle$ に対して

$$\begin{array}{c} a \\ \swarrow \quad \searrow \\ \varphi \quad \psi \\ \swarrow \quad \searrow \\ x \quad x^* \\ \searrow \quad \swarrow \\ a^* \end{array} = \frac{\omega(\varphi, \psi)}{\dim_p(a)} \begin{array}{c} a \\ \swarrow \quad \searrow \\ a^* \end{array}$$

(2) $\forall x_1, \dots, x_n \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$\sum_{a \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \dim_p(a) \begin{array}{c} x_n \\ \vdots \\ x_2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \varphi \quad \psi \\ \swarrow \quad \searrow \\ x_1 \quad x_1^* \end{array} \xrightarrow{\text{ev}_a^L} \begin{array}{c} x_n^* \\ \vdots \\ x_2^* \\ \swarrow \quad \searrow \\ \varphi \quad \psi \\ \swarrow \quad \searrow \\ x_1^* \quad x_1 \end{array} = \begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_n \quad x_n^* \quad x_2^* \quad x_1^* \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ \vdots \end{array}$$

(3)

$$\begin{array}{c} \text{Gray circle} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \vdots \\ \varphi \end{array} \xrightarrow{\text{ev}_a^L} \begin{array}{c} \varphi \end{array} \begin{array}{c} \swarrow \quad \searrow \\ \vdots \\ \swarrow \quad \searrow \end{array} = \begin{array}{c} \text{Gray circle} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \vdots \end{array}$$

証明 (1) 左辺は $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, a \otimes a^*)$ の元だが, 補題 F.3 の同型 $\alpha_{1,a,a}^{-1}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, a \otimes a^*) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, a) = \mathbb{K}$ から, ある定数 $A_a \in \mathbb{K}$ を用いて

$$\alpha_{1,a,a}^{-1} \left(\begin{array}{c} a \\ \swarrow \quad \searrow \\ \varphi \quad \psi \\ \swarrow \quad \searrow \\ x \quad x^* \\ \searrow \quad \swarrow \\ a^* \end{array} \right) = A_a \begin{array}{c} a \\ \swarrow \quad \searrow \\ a^* \end{array}$$

と書ける. 逆射 $\alpha_{1,a,a}$ を作用させることで

$$\begin{array}{c} a \\ \swarrow \quad \searrow \\ \varphi \quad \psi \\ \swarrow \quad \searrow \\ x \quad x^* \\ \searrow \quad \swarrow \\ a^* \end{array} = A_a \begin{array}{c} a \\ \swarrow \quad \searrow \\ a^* \end{array}$$

が分かるので, 両辺の量子トレースを取ることで

$$A_a = \frac{\omega(\varphi, \psi)}{\dim_p(a)}$$

と求まる.

(2)

$$\begin{aligned}
& \sum_{a \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \dim_p(a) \begin{array}{c} x_n \\ \vdots \\ x_2 \end{array} \begin{array}{c} \varphi \bullet \end{array} \begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_2 \end{array} \xrightarrow{\text{ev}_a^L} \begin{array}{c} x_n^* \\ \vdots \\ x_2^* \end{array} \begin{array}{c} \varphi \bullet \end{array} \begin{array}{c} x_1^* \\ \vdots \\ x_2^* \end{array} \\
&= \sum_{a \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \dim_p(a) \begin{array}{c} x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \Omega(1_{\mathbb{K}}) \end{array} \begin{array}{c} x_n^* \ \dots \ x_2^* \ x_1^* \\ \vdots \end{array} \quad \because \text{補題 3.4-(5)} \\
&= \sum_{a \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \dim_p(a^*) \begin{array}{c} x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} a \end{array} \begin{array}{c} x_n^* \ x_2^* \ x_1^* \\ \vdots \end{array} \\
&= \sum_{a \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \dim_p(a^*) \begin{array}{c} x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} a^* \end{array} \begin{array}{c} x_n^* \ x_2^* \ x_1^* \\ \vdots \end{array} \quad \because \text{補題 3.4-(4)} \\
&= \begin{array}{c} x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} x_n^* \ x_2^* \ x_1^* \\ \vdots \end{array} \quad \because \text{補題 3.4-(2)}
\end{aligned}$$

(3) (2) と補題 3.1-(1), および $\dim_p(1) = 1_{\mathbb{K}}$ より従う.

3.8.2 PL 多様体に関する準備

定義 3.22: PL 多様体

任意の座標変換が区分的線形であるようなアトラスを **PL 構造** (piecewise linear structure) と呼び、区分的線形構造を持つ位相多様体を **PL 多様体** (piecewise linear manifold) と呼ぶ。

2つの単体的複体 $K, L \in \text{Ob}(\mathbf{sSet})$ を取り、その幾何学的実現をそれぞれ $|K|, |L|$ と書く。

- 連続写像 $f: |K| \rightarrow |L|$ が **PL 写像** であるとは、 K, L の細分 K', L' が存在して、 f が K' の単体を L' の単体に写し、各単体への制限が線型写像になっていることを言う。
- 同相写像 $f: |K| \rightarrow |L|$ が **PL 同相写像** であるとは、それが PL 写像であることを言う。
- 勝手な単体 $A \in K$ に対し、

$$\begin{aligned}\text{St}(A) &:= \{ \sigma \in K \mid \sigma \cup A \in K \} \\ \text{Lk}(A) &:= \{ \sigma \in \text{St}(A) \mid \sigma \cap A = \emptyset \}\end{aligned}$$

とにおいてそれぞれ**星状複体** (star), **絡み複体** (link) と呼ぶ。

- 三角形分割された位相多様体 $(M, K, \psi: |K| \xrightarrow{\sim} M)$ が**組み合わせ多様体** (combinatorial manifold) であるとは、 $\forall v \in K_0$ に対して $|\text{Lk}(v)| \approx S^{\dim M - 1}$ が成り立つことを言う。また、位相多様体 M を組み合わせ多様体にする三角形分割 $(K, \psi: |K| \xrightarrow{\sim} M)$ のことを**組み合わせ三角形分割**と呼ぶ。

定理 3.9:

PL 多様体は組み合わせ三角形分割を持つ。逆に、組み合わせ多様体は PL 多様体である。

定理 3.9 により、以後 PL 多様体と組み合わせ多様体を区別しない。

星状同値

単体的複体 K, L が、互いに頂点を1つも共有していないとする。このとき、これらの **join** と呼ばれる単体的複体を

$$K * L := \{ \sigma \cup \tau \mid \sigma \in K \text{ かつ } \tau \in L \}$$

で定義する。また、 $\forall \sigma \in K$ に対して

$$\begin{aligned}\bar{\sigma} &:= \{ \tau \subset \sigma \}, \\ \partial \bar{\sigma} &:= \{ \tau \subsetneq \sigma \}\end{aligned}$$

と定義する。

単体的複体 K の**双星状移動** (bistellar move)^{*59} とは、次のような操作のことを言う：

^{*59} **Pachner move** とも言う。

- (1) まず, $\sigma \in K, \tau \notin K$ であって $\text{Lk}_K(\sigma) = \partial\tau, \text{St}_K(\sigma) = \bar{\sigma} * \tau$ を満たすものを持ってくる.
- (2) 次に,

$$K \mapsto (K \setminus (\bar{\sigma} * \partial\tau)) \cup (\partial\bar{\sigma} * \tau)$$

なる置き換えをして新たな単体的複体を得る.

2つの **PL 多様体** $(M, K, \psi), (N, L, \varphi)$ が**双星状同値** (bistellar equivalent) であるとは, K に有限回の双星状移動を施すことで L にすることができること.

定理 3.10: Pachner の定理

PL 同相 \iff 双星状同値

従って, PL 多様体の上に構成した量が位相不変量 (i.e. PL 不変量) であることを示すには, それが双星状移動に関して不変であることを示すだけで良い.

多面体分割

技術的な理由により, **多面体分割** (polytope decomposition) を導入する [KB10, p.11].

定義 3.23: 2-多面体

- 2次元コンパクト多様体^a P が**2-多面体** (2-polyhedra) であるとは, P の三角形分割 $\psi: |K| \xrightarrow{\sim} P$ であって, 任意の 0-単体および 1 単体がある 2-単体の面になっているものが存在することを言う.
- 2-多面体の**層状化** (stratification) とは, P に埋め込まれた無向グラフ^b $P^{(1)} \subset P$ であって $P \setminus \text{Int}(P) \subset P^{(1)}$ を満たすもののこと. **層状化された多面体** (stratified polyhedra) とは, 2-多面体 P とその層状化 $P^{(1)} \subset P$ の組み $(P, P^{(1)})$ のこと.

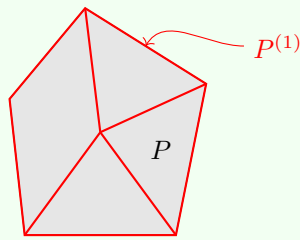


図 3.5: 層状化された多面体 $(P, P^{(1)})$

- 層状化された多面体 $(P, P^{(1)})$ において, $P \setminus P^{(1)}$ の連結成分の閉包を**領域** (region) と呼ぶ. $(P, P^{(1)})$ の領域を全て集めた集合を $\text{Reg}(P)$ と書くことにする.
領域 $R \in \text{Reg}(P)$ が**埋め込み可能**であるとは, 全射 $p: \partial(\overline{P \setminus P^{(1)}}) \twoheadrightarrow P^{(1)}$ の制限 $p|_{\partial R}: \partial R \rightarrow P^{(1)}$ が単射であることを言う.
- 層状化された多面体 $(P, P^{(1)})$ において, 頂点 $v \in V(P^{(1)})$ の**分岐**とは, 連続曲線 $\gamma: [0, 1] \rightarrow P$ であって $\gamma(0) = v$ かつ $\gamma((0, 1]) \subset P \setminus P^{(1)}$ を満たすもののホモトピー類のこと. 頂点 v

の分岐の総数を, 頂点 v の**配位数** (valence) と呼ぶ.

- 層状化された多面体 $(P, P^{(1)})$ において, 辺 $e \in E(P^{(1)})$ の**分岐**とは, 連続曲線 $\gamma: [0, 1] \rightarrow P$ であって $\gamma(0) \in \text{Int}(e)$ かつ $\gamma((0, 1]) \subset P \setminus P^{(1)}$ を満たすもののホモトピー類のこと. 辺 e の分岐がなす集合を $P_e^{(1)}$ と書き, $|P_e^{(1)}| \in \mathbb{N}$ を辺 e の**配位数** (valence) と呼ぶ.
- 層状化された多面体 $(P, P^{(1)})$ の**向き** (orientation) とは, 位相空間 $P \setminus P^{(1)}$ の向きのこと.

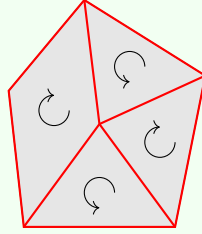


図 3.6: 層状化された多面体の向き

^a 位相多様体. 境界はついていてもいなくても良い.

^b ここでは, 位相空間としてのグラフを考えている.

定義 3.24: 境界グラフ

- **層状化された多面体** $(P, P^{(1)})$ の**境界** (boundary) とは, 無向グラフ

$$\partial P := \{ e \in E(P^{(1)}) \mid \text{配位数 } 1 \}$$

のこと. $(P, P^{(1)})$ の**向き**は, グラフ ∂P に (グラフとしての) 向き $\mathcal{O}_{\partial P}$ を一意的に誘導する.

- **層状化された多面体** $(P, P^{(1)})$ が**円筒境界を持つ**とは, $\forall v \in V(\partial P)$ に対して $e_v \in E(P^{(1)}) \setminus E(\partial P)$ がただ 1 つ存在し, 以下を満たすことを言う:
 - e_v の端点のうち 1 つは v で, もう 1 つは v でない.
 - v の全ての分岐に隣接する

このとき, 位相多様体 $\partial P \subset P$ は $\partial P \times [0, 1]$ と同相な近傍を持つ.

位相空間

$$\mathcal{B} := \{ (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 = 0 \} \cup \{ (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid x^1 = 0, x^3 > 0 \} \cup \{ (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 = 0, x^3 < 0 \}$$

を考える. 図示すると次のようになる:

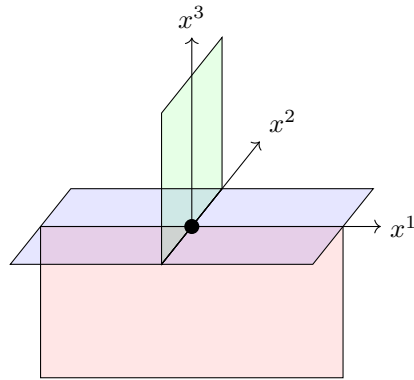


図 3.7: 位相空間 \mathcal{B}

定義 3.25: 2-多面体のクラス

- 層状化された多面体 $(P, P^{(1)})$ が正則 (regular) であるとは, P の部分空間 $\forall R \in \text{Reg}(P)$ が $R \approx D^2$ であかつ埋め込み可能であることを言う.
- 層状化された多面体 $(P, P^{(1)})$ が特殊 (special) であるとは, 以下の条件を充たすことを言う:
 - (1) $\forall p \in P$ に対してある開近傍 $p \in U \subset P$ および開部分集合 $V \subset \mathcal{B}$ が存在し, $U \approx V$ となる.
 - (2) P の各連結成分には, (1) の同相写像で \mathcal{B} の原点に移されるような点が少なくとも 1 つ存在する.
 - (3) $P \setminus \text{Int}(P)$ の各連結成分は S^1 と同相でない.

【例 3.8.1】4 面体の重心細分

4 面体の重心細分として得られる層状化された多面体は, 正則かつ特殊である.

定義 3.26: 多面体分割

向き付けられた 3 次元閉多様体 M の多面体分割とは、境界グラフが空の^a向き付けられ、層状化された多面体 $(P, P^{(1)})$ であって、 M に埋め込まれており、 $M \setminus P$ が開球の disjoint union になっているもののこと。

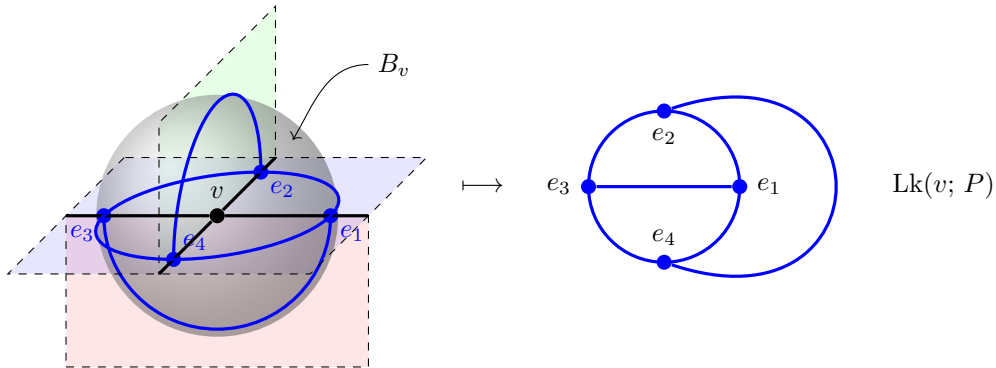
^a 従って、 $\forall e \in E(P^{(1)})$ の配位数は 2 以上である。

向き付けられた境界付き 3 次元コンパクト多様体 M 、およびその境界に埋め込まれた有向グラフ $G \subset \partial M$ を与える。 $\forall v \in V(G)$ の配位数は 2 以上であるとする^a。組 (M, G) の多面体分割とは、 ∂ -円筒境界を持つ、向き付けられ、層状化された 2-多面体 $(P, P^{(1)})$ であって、

- (1) P は M に埋め込まれている
- (2) 有向グラフとして $\partial P^{\circ \partial P} = G$ で、かつ $P \setminus \partial P \subset M \setminus \partial M$
- (3) $M \setminus P$ は 3-開球および 3 次元多様体 $(\partial M \setminus G) \times [0, 1]$ の disjoint union である。

^a 従って、境界の境界は考えない。

M の多面体分割 $(P, P^{(1)})$ の任意の頂点 $v \in V(P^{(1)})$ に対して、 v の閉球近傍 $B_v \subset M$ を十分小さく取る。すると、 v の分岐 $R_v \in \text{Reg}(P)$ と ∂B_v の共通部分 $R \cap \partial B_v$ を辺に持つグラフが得られる：



これを頂点 v の絡みグラフと呼び、 $\text{Lk}(v; P)$ と書くことにする。

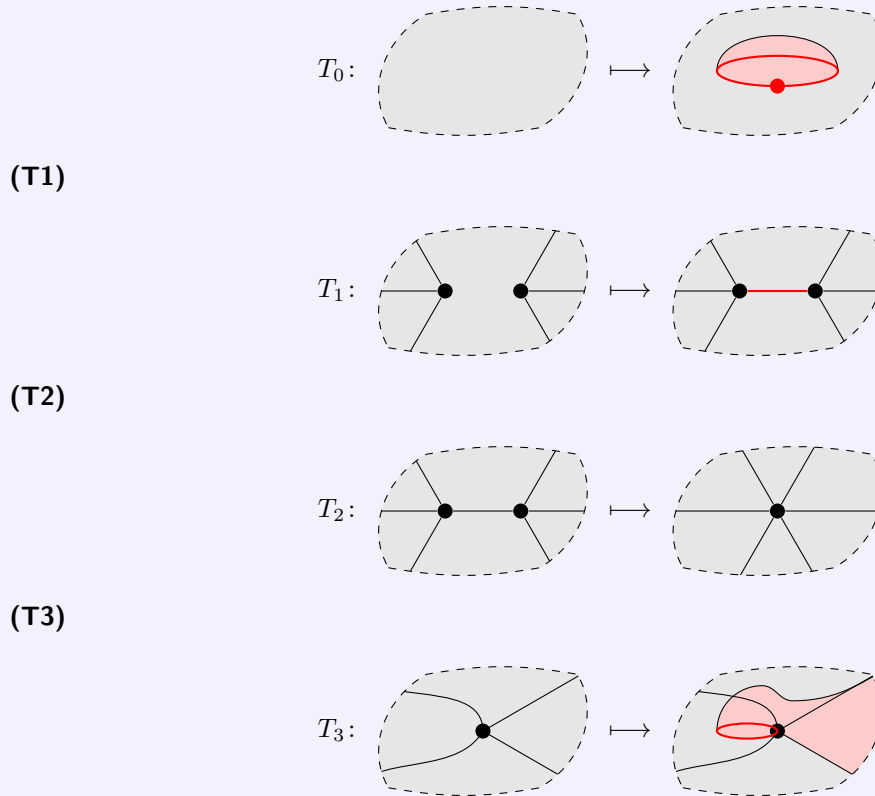
定理 3.11: 多面体分割の PL 不変性

向き付けられた境界付き 3 次元コンパクト多様体 M 、およびその境界に埋め込まれた有向グラフ $G \subset \partial M$ を与える。 $\forall v \in V(G)$ の配位数は 2 以上であるとする^a。

このとき、 (M, G) の任意の 2 つの多面体分割 $(P, P^{(1)})$, $(P', P'^{(1)})$ は、以下の操作 (Matveev-Piergallini move と呼ぶ) の有限回の組み合わせで互いに写り合う：

(T0) $\partial D^2 = D^2 \cap P \subset P \setminus P^{(1)}$ を充たすような 2 次元円板 D^2 を P に付け足す。さらにグラフ

$P^{(1)}$ に 1 つの頂点とループ辺 ∂D^2 を付け足す.



^a 従って, 境界の境界は考えない.

証明 [TV17, Theorem 11.5, p.250] ■

3.8.3 Turaev-Viro 不変量の構成

閉多様体の場合

向き付けられた 3 次元閉多様体 M の多面体分割 $(P, P^{(1)})$ を 1 つ固定する.

定義 3.27: 彩色

多面体分割 $(P, P^{(1)})$ の彩色 (coloring) とは, 写像

$$\Gamma: \text{Reg}(P) \longrightarrow \text{Simp}(\mathcal{C})$$

のこと.

彩色 $\Gamma: \text{Reg}(P) \longrightarrow \text{Simp}(\mathcal{C})$ を 1 つ固定したとき, 対応するアイソトピー不変量 $Z(\Gamma; P) \in \mathbb{K}$ を構成しよう. まず $V(P^{(1)}) = \emptyset$ のときは $Z(\Gamma; P) := 1_{\mathbb{K}}$ と定義する. $V(P^{(1)}) \neq \emptyset$ の場合を考える.

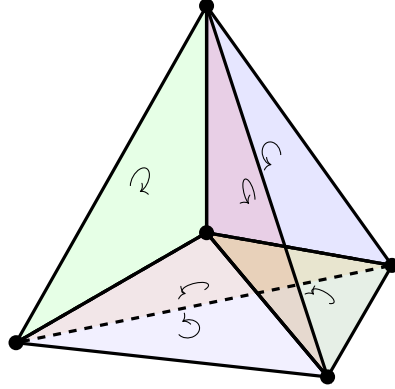


図 3.8: 多面体分割 $(P, P^{(1)})$ の一部. 各領域上に M から誘導される向きを図示した.

STEP1. 各辺に載せるベクトル空間の構成

まず, 無向グラフ $P^{(1)}$ に勝手な向き $\mathcal{O} \in \{\pm\}^{|E(P^{(1)})|}$ を与えて有向グラフ $P^{(1)\mathcal{O}}$ にする (図 3.9a).
 そして有向辺 $\tilde{e} \in E(P^{(1)\mathcal{O}})$ の分岐の集合 $P_{\tilde{e}}^{(1)}$ に, 右ネジの法則に従うサイクリックな順序 $<$ を与える (図 3.9b). さらに $\forall R \in P_{\tilde{e}}^{(1)}$ に対して, $\epsilon_R \in \{\pm\}$ を, M から誘導される向きと \tilde{e} の向きが整合しているならば $+$, 不整合ならば $-$ となるように定義する (図 3.9b) ことで, 有向辺 $\tilde{e} \in E(P^{(1)\mathcal{O}})$ 上の \mathbb{K} -ベクトル空間を

$$\mathcal{H}(\tilde{e}; \Gamma) := \langle \Gamma(R_1)^{\epsilon_{R_1}}, \dots, \Gamma(R_n)^{\epsilon_{R_n}} \rangle \text{ w/ } P_{\tilde{e}}^{(1)} = \{R_1 < \dots < R_n\}$$

と構成する.

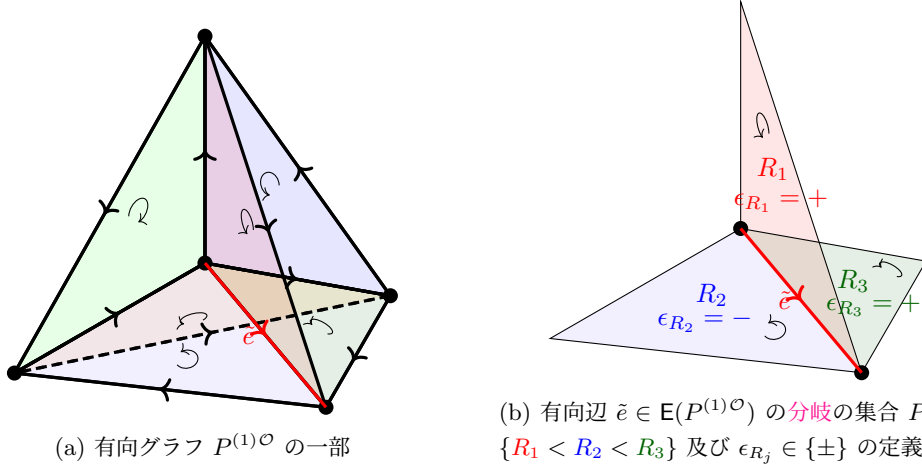


図 3.9: $\mathcal{H}(\tilde{e}; \Gamma)$ の構成

STEP2. 全系のベクトル空間の構成

全系の \mathbb{K} -ベクトル空間は、有向グラフとしてのテンソル積^{*60}

$$\mathcal{H}(\Gamma) := \bigotimes_{\emptyset} \bigotimes_{\tilde{e} \in E(P^{(1)} \circ)} \mathcal{H}(\tilde{e}; \Gamma)$$

として構成する.

STEP3. contraction vector の構成

無向辺 $\forall e \in E(P^{(1)})$ は、丁度 2 通りの方法で有向辺になる. こうして得られる 2 つの有向辺をそれぞれ \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 と書くと、STEP1. の構成により

$$\mathcal{H}(\tilde{e}_2; \Gamma) = \mathcal{H}(\tilde{e}_1; \Gamma)^*$$

が成り立つ (図 3.10). よって補題 3.3 の非退化な双線形形式 $\omega_{\Gamma, e}: \mathcal{H}(\tilde{e}_2; \Gamma) \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{H}(\tilde{e}_1; \Gamma) \rightarrow \mathbb{K}$ を考えることができ、補題 3.4(5) の構成によりその双対 $\Omega_{\Gamma, e}: \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{H}(\tilde{e}_1; \Gamma) \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{H}(\tilde{e}_2; \Gamma)$ を得る. 特に

$$\bigotimes_{e \in E(P^{(1)})} (\mathcal{H}(\tilde{e}_1; \Gamma) \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{H}(\tilde{e}_2; \Gamma)) = \bigotimes_{\emptyset} \bigotimes_{\tilde{e} \in E(P^{(1)} \circ)} \mathcal{H}(\tilde{e}; \Gamma) = \mathcal{H}(\Gamma)$$

に注意して,

$$\Omega_{\Gamma}(1_{\mathbb{K}}) := \bigotimes_{e \in E(P^{(1)})} \Omega_{\Gamma, e}(1_{\mathbb{K}}) \in \mathcal{H}(\Gamma) \quad (3.8.3)$$

のことを **contraction vector** と呼ぶ.

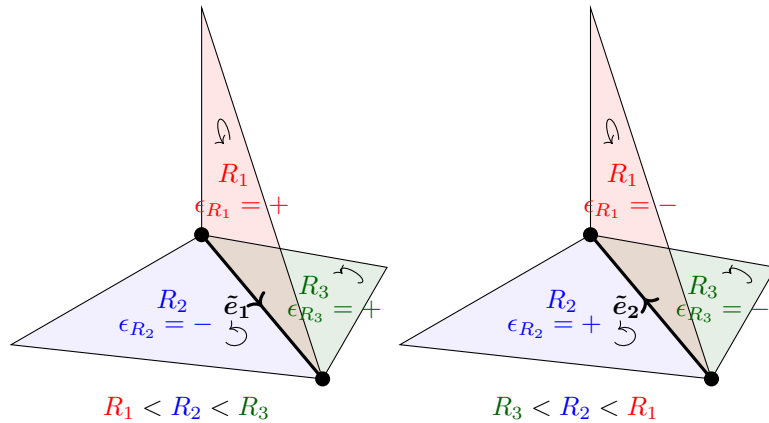


図 3.10: 有向辺 \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 と、それぞれの分岐の集合 $P_{\tilde{e}_1}^{(1)} = \{R_1 < R_2 < R_3\}$, $P_{\tilde{e}_2}^{(1)} = \{R_3 < R_2 < R_1\}$ 及び $\epsilon_{R_j} \in \{\pm\}$ の定義. ϵ_{R_j} は互いに逆符号であることに注意.

STEP4. 絡みグラフをストリング図式に読み替える

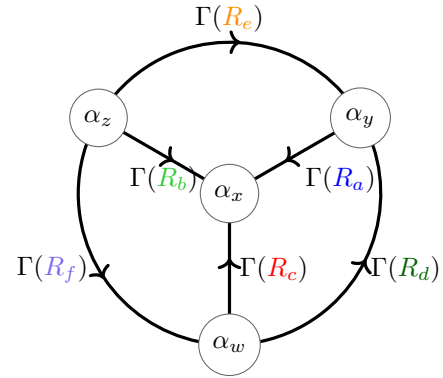
$\forall v \in V(P^{(1)})$ を 1 つ固定し、頂点 v の十分小さな開球近傍 B_v およびその絡みグラフ $\text{Lk}(v; P) \subset \partial B_v$ をとる. a には $R_a \setminus \text{Int}(B_a)$ から誘導される向きを入れることで、 $\text{Lk}(v; P)$ を有向グラフにする (図 3.11).

^{*60} より正確には、unordered tensor product を取っている [TV17, Appendix E, p.477].

ここで, $a \in E(\text{Lk}(v; P))$ はある 1 つの領域 $R_a \in \text{Reg}(P)$ に含まれているから, a には $\Gamma(R_a) \in \text{Simp}(\mathcal{C})$ を割り当てる. さらに $\forall x \in V(\text{Lk}(v; P))$ に対して勝手な $\alpha_x \in \langle \Gamma(R_{a_1})^{\varepsilon_{a_1}}, \dots, \Gamma(R_{a_m})^{\varepsilon_{a_m}} \rangle =: \mathcal{H}_x(\text{Lk}(v; P); \Gamma)$ を割り当てることで, 絡みグラフ $\text{Lk}(v; P)$ をストリング図式 $\mathbb{F}_{\mathcal{C}, \Gamma}(\text{Lk}(v; P))(\bigotimes_{x \in V(\text{Lk}(v; P))} \alpha_x)$ に読み替える. ただし, ε_{a_i} は有向辺 $a_i \in E(\text{Lk}(v; P))$ が $x \in V(\text{Lk}(v; P))$ を終点に持つならば $+$, 始点に持つならば $-$ を与える^{*61}. 例えば図 3.11 の絡みグラフ $\text{Lk}(v; P)$ に対応するストリング図式は,

$$\begin{aligned}\alpha_x &\in \langle \Gamma(R_a)^*, \Gamma(R_b)^*, \Gamma(R_c)^* \rangle, \\ \alpha_y &\in \langle \Gamma(R_a), \Gamma(R_d)^*, \Gamma(R_e)^* \rangle, \\ \alpha_z &\in \langle \Gamma(R_b), \Gamma(R_e), \Gamma(R_f) \rangle, \\ \alpha_w &\in \langle \Gamma(R_c), \Gamma(R_f)^*, \Gamma(R_d)^* \rangle\end{aligned}$$

について

$$\mathbb{F}_{\mathcal{C}, \Gamma}(\text{Lk}(v; P))(\alpha_x \otimes_{\mathbb{K}} \alpha_y \otimes_{\mathbb{K}} \alpha_z \otimes_{\mathbb{K}} \alpha_w) =$$


と読み取れる.

M が境界を持たないことから絡みグラフ $\text{Lk}(v; P)$ の配位数は 2 以上なので, このようにして得られたストリング図式は端点を持たない. i.e. $\mathbb{F}_{\mathcal{C}, \Gamma}(\text{Lk}(v; P))(\bigotimes_{x \in V(\text{Lk}(v; P))} \alpha_x) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, 1) = \mathbb{K}$ が成り立つ. これを \mathbb{K} -線形に拡張することで, \mathbb{K} -線型写像

$$\mathbb{F}_{\mathcal{C}, \Gamma}(\text{Lk}(v; P)) \in \text{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}} \left(\bigotimes_{x \in V(\text{Lk}(v; P))} \mathcal{H}_x(\text{Lk}(v; P)), \mathbb{K} \right)$$

を得る.

^{*61} つまり, 有向グラフ $\text{Lk}(v; P)$ の辺の向きと, ストリング図式 $\mathbb{F}_{\mathcal{C}, \Gamma}(\text{Lk}(v; P))(\bigotimes_{x \in V(\text{Lk}(v; P))} \alpha_x)$ の矢印の向きは逆向きである!



図 3.11: 有向グラフ $\text{Lk}(v; P)$

STEP5. アイソトピー不変量の構成

\mathbb{K} -ベクトル空間としての同型

$$\bigotimes_{x \in V(\text{Lk}(v; P))} \mathcal{H}_x(\text{Lk}(v; P)) \cong \bigotimes_{\tilde{e}_v; v \text{ を始点に持つ}} \mathcal{H}(\tilde{e}_v; \Gamma)$$

に注意すると

$$\begin{aligned} & \bigotimes_{v \in V(P^{(1)})} \text{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}} \left(\bigotimes_{x \in V(\text{Lk}(v; P))} \mathcal{H}_x(\text{Lk}(v; P)), \mathbb{K} \right) \\ & \cong \text{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}} \left(\bigotimes_{v \in V(P^{(1)})} \bigotimes_{\tilde{e}_v; v \text{ を始点に持つ}} \mathcal{H}(\tilde{e}_v; \Gamma), \mathbb{K} \right) \\ & \cong \text{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}} (\mathcal{H}(\Gamma), \mathbb{K}) \end{aligned}$$

が成り立つことが分かる. よって

$$z(\Gamma; P) := \bigotimes_{v \in V(P^{(1)})} \mathbb{F}_{\mathcal{C}, \Gamma}(\text{Lk}(v; P)) \in \text{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}} (\mathcal{H}(\Gamma), \mathbb{K})$$

だと分かった. これで (3.8.3) を写像することで

$$Z(\Gamma; P) := z(\Gamma; P) \circ \Omega_{\Gamma}(1_{\mathbb{K}}) \in \mathbb{K}$$

を得る.

定義 3.28: 閉多様体における TV 不変量

向き付けられた 3 次元閉多様体 M および多面体分割 $(P, P^{(1)})$ をとる. Turaev-Viro 不変量を

$$Z_{\text{TV}, \mathcal{C}}(M) := \dim(\mathcal{C})^{-|M \setminus P|} \sum_{\Gamma: \text{Reg}(P) \rightarrow \text{Simp}(\mathcal{C})} \left(Z(\Gamma; P) \prod_{R \in \text{Reg}(P)} \dim(\Gamma(R))^{\chi(R)} \right)$$

で定義する. ただし $M \setminus P$ は $M \setminus P$ の連結成分の個数で, $\chi(R)$ は領域 $R \in \text{Reg}(P)$ の Euler 標数である.

定理 3.12:

Turaev-Viro 不変量 $Z_{\text{TV},\mathcal{C}}(M)$ は多面体分割 $(P, P^{(1)})$ の取り方によらない。

証明 $Z_{\text{TV},\mathcal{C}}(M)$ が定理 3.11 の操作 (T0)-(T3) に関して不変であることを示せば良い。 ■

境界付き多様体の場合

向き付けられた 3 次元境界付き多様体 M と、その境界に埋め込まれた有向グラフ $G \subset \partial M$ を与える。組 (M, G) の多面体分割 $(P, P^{(1)})$ を 1 つ固定する。閉多様体の場合とは異なり、境界条件を設定する必要がある。

STEP0. 境界条件の設定

$e \in E(G)$ に対して勝手な $x_e \in \text{Simp}(\mathcal{C})$ をアサインする。

定義 3.29: 境界付き彩色

- 3 次元境界付き多様体 M
- ∂M に埋め込まれた有向グラフ G
- 組 (M, G) の多面体分割 $(P, P^{(1)})$
- 境界条件 $\{x_e \in \text{Simp}(\mathcal{C})\}_{e \in E(G)}$

を与える。4 つ組 $(G, P, P^{(1)}, \{x_e\})$ の彩色 (coloring) とは、写像

$$\Gamma: \text{Reg}(P) \longrightarrow \text{Simp}(\mathcal{C})$$

であって、 $\forall e \in E(G) = E(\partial P)$ に対して以下を充たすもののことを言う：

(彩色の境界条件)

e が一意的に隣接する^a領域 $R_e \in \text{Reg}(P)$ に対して、 $\Gamma(R_e) = x_e$

^a 境界グラフの定義

Turaev-Viro 不変量は、与えられた $(M, G, \{x_e\})$ に対してあるベクトル $Z_{\text{TV},\mathcal{C}}(M, G; \{x_e\}) \in \mathcal{H}(G; \{x_e\})$ を返す。TQFT と見做すときは、コボルディズム $M \in \text{Hom}_{\text{Bord}_{\langle 2, 3 \rangle}^{\text{SO}}}(\emptyset, \partial M)$ に対応する線型写像 $Z_{\text{TV},\mathcal{C}}(M)$ による $1 \in \mathbb{K} = Z_{\text{TV},\mathcal{C}}(\emptyset)$ の行き先を構成していると考えれば良い^{*62}。以下では境界条件 $\{x_e \in \text{Simp}(\mathcal{C})\}_{e \in E(G)}$ および境界付き彩色 Γ を 1 つ固定しよう。

STEP1. 境界に載せるベクトル空間の構成

有向グラフ G の辺のうち、 $v \in V(G)$ を端点に持つものが成す集合を E_v と書く。 E_v には、 ∂M の向きが定めるものとは逆向きのサイクリックな順序 $<$ を与える。そして $\forall e \in E_v$ に対して

$$\epsilon_e := \begin{cases} +, & e \text{ が } v \text{ へ向かう向き} \\ -, & e \text{ が } v \text{ から離れる向き} \end{cases}$$

^{*62} 正確には、規格化定数の違いがある。

と定義し、頂点 $v \in V(G) = V(\partial P)$ 上の \mathbb{K} -ベクトル空間を

$$\mathcal{H}_v(G; \{x_e\}) := \langle x_{e_1}^{\epsilon_{e_1}}, \dots, x_{e_n}^{\epsilon_{e_n}} \rangle \text{ w/ } E_v = \{e_1 < \dots < e_n\}$$

と構成する. ∂M 全体のベクトル空間は

$$\mathcal{H}(G; \{x_e\}) := \bigotimes_{v \in V(G)} \mathcal{H}_v(G; \{x_e\})$$

とする^{*63}.

STEP2. 内部グラフの向き付け

無向グラフ^{*64} $P^{(1)} \setminus \partial P$ に勝手な向き $\mathcal{O} \in \{\pm\}^{|E(P^{(1)} \setminus \partial P)|}$ を与えることで, $P^{(1)}$ を有向グラフ $P^{(1)\mathcal{O}}$ にする. そして

$$\begin{aligned} E_{\text{Int}}^{\mathcal{O}} &:= \{e \in E(P^{(1)\mathcal{O}} \setminus \partial P) \mid \text{始点} \notin G\} \\ E_{\partial}^{\mathcal{O}} &:= \{e \in E(P^{(1)\mathcal{O}} \setminus \partial P) \mid \text{始点} \in G\} \end{aligned}$$

とおくと, 与えられた有向辺の始点を返す関数 $s: e \mapsto s(e)$ によって集合 $\bigcup_{\mathcal{O}} E_{\partial}^{\mathcal{O}}$ と集合 $V(G)$ は 1 対 1 対応する. さらに, $v \in V(G)$ に対して, 集合 E_v が持つサイクリックな順序の定義は ∂M の内向き法線ベクトルに関して右ネジの法則を適用して得られるものであったから, **閉多様体の場合の STEP1.** より $\forall e \in \bigcup_{\mathcal{O}} E_{\partial}^{\mathcal{O}}$ に対して

$$\mathcal{H}_{s(e)}(G; \{x_e\}) = \mathcal{H}(e; \Gamma)$$

が成り立つ. ただし, $\mathcal{H}(e; \Gamma)$ は**閉多様体の場合の STEP1.** で構成したベクトル空間である. 以上の考察から,

$$\mathcal{H}(G; \{x_e\}) = \bigotimes_{\mathcal{O}} \bigotimes_{e \in E_{\partial}^{\mathcal{O}}} \mathcal{H}(e; \Gamma)$$

が分かった. 便宜上, 以下では

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\Gamma) &:= \bigotimes_{\mathcal{O}} \bigotimes_{e \in E(P^{(1)\mathcal{O}} \setminus \partial P)} \mathcal{H}(e; \Gamma), \\ \mathcal{H}_{\text{Int}}(\Gamma) &:= \bigotimes_{\mathcal{O}} \bigotimes_{e \in E_{\text{Int}}^{\mathcal{O}}} \mathcal{H}(e; \Gamma), \\ \mathcal{H}_{\partial}(\Gamma) &:= \bigotimes_{\mathcal{O}} \bigotimes_{e \in E_{\partial}^{\mathcal{O}}} \mathcal{H}(e; \Gamma) \end{aligned}$$

とおく. このとき

$$\mathcal{H}(\Gamma) = \mathcal{H}_{\text{Int}}(\Gamma) \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{H}_{\partial}(\Gamma) = \mathcal{H}_{\text{Int}}(\Gamma) \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{H}(G; \{x_e\})$$

が成り立つ.

^{*63} より正確には, **unordered tensor product** を取っている [TV17, Appendix E, p.477]

^{*64} 多面体分割の定義から, 境界グラフ ∂P は有向グラフとして常に G と等しい.

STEP3. contraction vector の構成

部分グラフ $P^{(1)} \setminus \partial P$ に対して, 閉多様体の場合の STEP3. と全く同様の構成によって **contraction vector**

$$\Omega_\Gamma(1_{\mathbb{K}}) \in \mathcal{H}(\Gamma) = \mathcal{H}_{\text{Int}}(\Gamma) \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{H}(G; \{x_e\}) \quad (3.8.4)$$

を得る.

STEP4. 絡みグラフをストリング図式に読み替える

閉多様体の場合の STEP4. と全く同様の構成によって, $\forall v \in V(P^{(1)} \setminus \partial P)$ における **絡みグラフ** $\text{Lk}(v; P)$ をストリング図式に読み替えることができ, \mathbb{K} -線型写像

$$\mathbb{F}_{\mathcal{C}, \Gamma}(\text{Lk}(v; P)) \in \text{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}} \left(\bigotimes_{x \in V(\text{Lk}(v; P))} \mathcal{H}_x(\text{Lk}(v; P)), \mathbb{K} \right)$$

を得る.

STEP5. アイソトピー不変量の構成

閉多様体の場合の STEP4. と全く同様に, \mathbb{K} -ベクトル空間の同型

$$\begin{aligned} & \bigotimes_{v \in V(P^{(1)} \setminus \partial P)} \text{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}} \left(\bigotimes_{x \in V(\text{Lk}(v; P))} \mathcal{H}_x(\text{Lk}(v; P)), \mathbb{K} \right) \\ & \cong \text{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}} \left(\bigotimes_{v \in V(P^{(1)} \setminus \partial P)} \bigotimes_{\substack{\tilde{e}_v; \\ v \text{ を始点に持つ}}} \mathcal{H}(\tilde{e}_v; \Gamma), \mathbb{K} \right) \\ & \cong \text{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}} (\mathcal{H}_{\text{Int}}(\Gamma), \mathbb{K}) \end{aligned}$$

がある. よって

$$z(\Gamma; P) := \left(\bigotimes_{v \in V(P^{(1)} \setminus \partial P)} \mathbb{F}_{\mathcal{C}, \Gamma}(\text{Lk}(v; P)) \right) \otimes_{\mathbb{K}} 1_{\mathcal{H}_{\partial}(\Gamma)}$$

と定義すると

$$z(\Gamma; P) \in \text{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}} (\mathcal{H}_{\text{Int}}(\Gamma), \mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}} (\mathcal{H}_{\partial}(\Gamma), \mathcal{H}_{\partial}(\Gamma)) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}} (\mathcal{H}(\Gamma), \mathcal{H}_{\partial}(\Gamma))$$

だと分かった. これで (3.8.4) を写像することで, アイソトピー不変量

$$Z(\Gamma; P) := z(\Gamma; P) \circ \Omega_\Gamma(1_{\mathbb{K}}) \in \mathcal{H}_{\partial}(\Gamma) = \mathcal{H}(G; \{x_e\})$$

を得る.

定義 3.30: 境界付き多様体における TV 不変量

- 3次元境界付き多様体 M
- ∂M に埋め込まれた有向グラフ G
- 組 (M, G) の多面体分割 $(P, P^{(1)})$
- 境界条件 $\{x_e \in \text{Simp}(\mathcal{C})\}_{e \in E(G)}$

を与える。このとき、Turaev-Viro 不変量を

$$Z_{\text{TV}, \mathcal{C}}(M, G) := \dim(\mathcal{C})^{-|M \setminus P|} \sum_{\substack{\Gamma: \text{Reg}(P) \rightarrow \text{Simp}(\mathcal{C}), \\ \Gamma|_{\partial P} = \{x_e\}}} \left(Z(\Gamma; P) \prod_{R \in \text{Reg}(P)} \dim(\Gamma(R))^{\chi(R)} \right) \\ \in \mathcal{H}(G; \{x_e\})$$

で定義する。ただし $|M \setminus P|$ は $M \setminus P$ の連結成分の個数で、 $\chi(R)$ は領域 $R \in \text{Reg}(P)$ の Euler 標数である。

定理 3.13:

- 3次元境界付き多様体 M
- ∂M に埋め込まれた有向グラフ G
- 組 (M, G) の多面体分割 $(P, P^{(1)})$
- 境界条件 $\{x_e \in \text{Simp}(\mathcal{C})\}_{e \in E(G)}$

を与える。このとき、以下が成り立つ：

- (1) Turaev-Viro 不変量 $Z_{\text{TV}, \mathcal{C}}(M, G)$ は多面体分割 $(P, P^{(1)})$ の取り方によらない。
- (2) 任意の向き付けを保つ同相写像 $f: M \rightarrow N$ に対して

$$Z_{\text{TV}, \mathcal{C}}(N, f(G)) = f_*(Z_{\text{TV}, \mathcal{C}}(M, G))$$

ただし $f_*: \mathcal{H}(G; \{x_e\}) \rightarrow \mathcal{H}(f(G); \{x_{f(e)}\})$ は f によって誘導される \mathbb{K} -ベクトル空間の同型写像である。

証明 (1) 定理 3.12 と同様。

(2) (1) および定理 3.10 より明らか。 ■

3.8.4 state sum TQFT

定義 3.31: 2 次元閉多様体の多面体分割

向きづけられた 2 次元閉多様体 $\Sigma \in \text{Ob}(\mathbf{Bord}_{\langle 2, 3 \rangle}^{\text{SO}})$ に埋め込まれたグラフ $G \subset \Sigma$ が**多面体分割**であるとは, $\forall v \in V(G)$ の**配位数**が 2 以上であり, かつ $\Sigma \setminus G$ が 2-開球の disjoint union であることを言う.

- 2 次元閉多様体 $\Sigma_0, \Sigma_1 \in \text{Ob}(\mathbf{Bord}_{\langle 2, 3 \rangle}^{\text{SO}})$
- 3 次元境界付き多様体 $M \in \text{Hom}_{\mathbf{Bord}_{\langle 2, 3 \rangle}^{\text{SO}}}(\Sigma_0, \Sigma_1)$
- **2 次元閉多様体の多面体分割** $G_0 \subset \Sigma_0, G_1 \subset \Sigma_1$
- 境界条件 $\{x_e^0 \in \text{Simp}(\mathcal{C})\}_{e \in E(G_0)}, \{x_e^1 \in \text{Simp}(\mathcal{C})\}_{e \in E(G_1)}$

を与えたとき, M のマッピングトーススを考えて

$$Z_{\text{preTV}}(M; G_0, G_1; \{x_e^0\}, \{x_e^1\}) := \frac{\sqrt{\dim(\mathcal{C})}^{|\Sigma_1 \setminus G_1|} \sqrt{\dim(\mathcal{C})}^{|\Sigma_0 \setminus G_0|}}{\prod_{e \in E(G_1)} \sqrt{\dim(x_e^1)} \prod_{e \in E(G_0)} \sqrt{\dim(x_e^0)}} Z_{\text{TV}, \mathcal{C}}(M, G_0^{\text{op}} \cup G_1) \quad (3.8.5)$$

とおく. ただし $|\Sigma_1 \setminus G_1|$ は $\Sigma_1 \setminus G_1$ の連結成分の個数である. $Z_{\text{preTV}}(M; G_0, G_1; \{x_e^0\}, \{x_e^1\})$ は

$$\mathcal{H}(G_0; \{x_e^0\})^* \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{H}(G_1; \{x_e^1\}) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}}(\mathcal{H}(G_0; \{x_e^0\}), \mathcal{H}(G_1; \{x_e^1\}))$$

の元である.

$Z_{\text{preTV}}(M; G_0, G_1; \{x_e^0\}, \{x_e^1\})$ の規格化定数には不定性がある. 例えば [TV17, p.282] では

$$Z_{\text{preTV}}(M; G_0, G_1; \{x_e^0\}, \{x_e^1\}) := \frac{\dim(\mathcal{C})^{|\Sigma_1 \setminus G_1|}}{\prod_{e \in E(G_1)} \dim(x_e^1)} Z_{\text{TV}, \mathcal{C}}(M, G_0^{\text{op}} \cup G_1)$$

と定義されている. 本資料では [KB10, Definition 4.2.], [AFM20, p.36] に合わせた.

補題 3.6: state sum TQFT の雛形

- 2 次元閉多様体 $\Sigma_0, \Sigma, \Sigma_1 \in \text{Ob}(\mathbf{Bord}_{\langle 2, 3 \rangle}^{\text{SO}})$
- 3 次元境界付き多様体 $M_0 \in \text{Hom}_{\mathbf{Bord}_{\langle 2, 3 \rangle}^{\text{SO}}}(\Sigma_0, \Sigma), M_1 \in \text{Hom}_{\mathbf{Bord}_{\langle 2, 3 \rangle}^{\text{SO}}}(\Sigma, \Sigma_1)$
- **2 次元閉多様体の多面体分割** $G_0 \subset \Sigma_0, G \subset \Sigma, G_1 \subset \Sigma_1$
- 境界条件 $\{x_e^0 \in \text{Simp}(\mathcal{C})\}_{e \in E(G_0)}, \{x_e^1 \in \text{Simp}(\mathcal{C})\}_{e \in E(G_1)}$

を与える. このとき,

$$\begin{aligned} & Z_{\text{preTV}}(M_1 \circ M_0; G_0, G_1; \{x_e^0\}, \{x_e^1\}) \\ &= \sum_{\{x_e\}_{e \in E(G)}} Z_{\text{preTV}}(M_1; G, G_1; \{x_e\}, \{x_e^1\}) \circ Z_{\text{preTV}}(M_0; G_0, G; \{x_e^0\}, \{x_e\}) \end{aligned}$$

が成り立つ.

証明 • 組 $(M_0, G_0^{\text{op}} \cup G)$ の**多面体分割** $(P_0, P_0^{(1)})$

- 組 $(M_1, G^{\text{op}} \cup G_1)$ の多面体分割 $(P_1, P_1^{(1)})$

を1つ固定する. このとき, 組 $(M, G^{\text{op}} \cup G_1)$ の多面体分割 $(P, P^{(1)})$ を次のように構成する:

頂点 グラフ $P^{(1)}$ の頂点集合は

$$\mathbf{V}(P^{(1)}) := (\mathbf{V}(P_0^{(1)}) \setminus \mathbf{V}(G)) \cup (\mathbf{V}(P_1^{(1)}) \setminus \mathbf{V}(G^{\text{op}}))$$

とする.

辺 多面体分割の定義より $(P_i, P_i^{(1)})$ は円筒境界を持つから, $\forall v \in \mathbf{V}(G)$ に対して, v を1つの端点に持つ $e_v^i \in \mathbf{E}(P_i^{(1)}) \setminus \mathbf{E}(\partial P)$ がただ1つ存在する. このとき, $P^{(1)}$ の辺集合を

$$\mathbf{E}(P^{(1)}) := (\mathbf{E}(P_0^{(1)}) \setminus \mathbf{E}(G)) \cup (\mathbf{E}(P_1^{(1)}) \setminus \mathbf{E}(G^{\text{op}})) \cup \{e_v^0 \cup e_v^1\}_{v \in \mathbf{V}(G)}$$

とする.

面 多面体分割の定義より $\partial P_0^{\mathcal{O}_{\partial P_0}} = G$, $\partial P_1^{\mathcal{O}_{\partial P_1}} = G^{\text{op}}$ が成り立つから, $\forall e \in \mathbf{E}(G)$ に対して, e の分岐 R_e^i がただ1つ存在する. このとき, 層状化された多面体 $(P, P^{(1)})$ の領域を

$$\text{Reg}(P) := (\text{Reg}(P_0) \setminus \text{Reg}(G)) \cup (\text{Reg}(P_1) \setminus \text{Reg}(G^{\text{op}})) \cup \{R_e := R_e^0 \cup R_e^1\}_{e \in G}$$

層状化された多面体 P_0, P_1 の向きは G 上で整合的だから, P の向きを一意的に誘導する. このように構成された多面体分割 $(P, P^{(1)})$ について

$$\begin{aligned} |M_1 \circ M_0 \setminus P| &= (|M_0 \setminus P_0| - |\Sigma \setminus G|) + (|M_1 \setminus P_1| - |\Sigma \setminus G^{\text{op}}|) + |\Sigma \setminus G| \\ &= |M_0 \setminus P_0| + |M_1 \setminus P_1| - |\Sigma \setminus G| \end{aligned} \quad (3.8.6)$$

が成り立つ. さらに, 勝手な境界付き彩色 $\Gamma: \text{Reg}(P) \rightarrow \text{Simp}(\mathcal{C})$ は

- G, G^{op} 上の境界条件 $\{\Gamma(R_e)\}_{e \in \mathbf{E}(G)}$
- 4つ組 $(G^{\text{op}} \cup G, P_0, P_0^{(1)}, \{x_e^0\} \cup \{\Gamma(R_e)\})$ の境界付き彩色

$$\Gamma_0 := \Gamma|_{(\text{Reg}(P_0) \setminus \text{Reg}(G)) \cup \{R_e\}}: \text{Reg}(P_0) \rightarrow \text{Simp}(\mathcal{C})$$

- 4つ組 $(G^{\text{op}} \cup G_1, P_1, P_1^{(1)}, \{\Gamma(R_e)\} \cup \{x_e^1\})$ の境界付き彩色

$$\Gamma_1 := \Gamma|_{(\text{Reg}(P_1) \setminus \text{Reg}(G^{\text{op}})) \cup \{R_e\}}: \text{Reg}(P_1) \rightarrow \text{Simp}(\mathcal{C})$$

を定め,

$$\prod_{R \in \text{Reg}(P)} \dim(\Gamma(R)) = \frac{\prod_{R_0 \in \text{Reg}(P_0)} \dim(\Gamma_0(R_0)) \prod_{R_1 \in \text{Reg}(P_1)} \dim(\Gamma_1(R_1))}{\prod_{e \in \mathbf{E}(G)} \dim(\Gamma(R_e))} \quad (3.8.7)$$

が成り立つ. $\chi(R_e) = \chi(R_e^0) + \chi(R_e^1) - 1$ に注意すると, (3.8.5), (3.8.6), (3.8.7) および Turaev-Viro 不変量の定義より

$$\begin{aligned} &Z_{\text{preTV}}(M_1 \circ M_0; G_0, G_1; \{x_e^0\}, \{x_e^1\}) \\ &= \frac{\sqrt{\dim(\mathcal{C})}^{|\Sigma_1 \setminus G_1|} \sqrt{\dim(\mathcal{C})}^{|\Sigma_0 \setminus G_0|}}{\prod_{e \in \mathbf{E}(G_1)} \sqrt{\dim(x_e^1)} \prod_{e \in \mathbf{E}(G_0)} \sqrt{\dim(x_e^0)}} \dim(\mathcal{C})^{-|M_1 \circ M_0 \setminus P|} \sum_{\substack{\Gamma: \text{Reg}(P) \rightarrow \text{Simp}(\mathcal{C}), \\ \Gamma|_{\partial P} = \{x_e^0\} \cup \{x_e^1\}}} \left(Z(\Gamma; P) \prod_{R \in \text{Reg}(P)} \dim(\Gamma(R))^{\chi(R)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{\dim(\mathcal{C})}^{|\Sigma_1 \setminus G_1|} \sqrt{\dim(\mathcal{C})}^{|\Sigma_0 \setminus G_0|}}{\prod_{e \in E(G_1)} \sqrt{\dim(x_e^1)} \prod_{e \in E(G_0)} \sqrt{\dim(x_e^0)}} \dim(\mathcal{C})^{-|M_0 \setminus P_0| - |M_1 \setminus P_1| + |\Sigma \setminus G|} \\
&\quad \times \sum_{\{\Gamma(R_e)\}} \sum_{\substack{\Gamma_0: \text{Reg}(P_0) \rightarrow \text{Simp}(\mathcal{C}), \\ \Gamma|_{\partial P_0} = \{x_e^0\} \cup \{\Gamma(R_e)\}}} \sum_{\substack{\Gamma_1: \text{Reg}(P_1) \rightarrow \text{Simp}(\mathcal{C}), \\ \Gamma|_{\partial P_1} = \{\Gamma(R_e)\} \cup \{x_e^1\}}} \\
&\quad \times \left(Z(\Gamma_1; P_1) \circ Z(\Gamma_0; P_0) \frac{\prod_{R_0 \in \text{Reg}(P_0)} \dim(\Gamma_0(R))^{x(R_0)} \prod_{R_1 \in \text{Reg}(P_1)} \dim(\Gamma_1(R))^{x(R_1)}}{\prod_{e \in E(G)} \sqrt{\dim(\Gamma(R_e))} \sqrt{\dim(\Gamma(R_e))}} \right) \\
&= \sum_{\{\Gamma(R_e)\}} \left(\frac{\sqrt{\dim(\mathcal{C})}^{|\Sigma_1 \setminus G_1|} \sqrt{\dim(\mathcal{C})}^{|\Sigma \setminus G|}}{\prod_{e \in E(G_1)} \sqrt{\dim(x_e^1)} \prod_{e \in E(G)} \sqrt{\dim(\Gamma(R_e))}} \dim(\mathcal{C})^{-|M_1 \setminus P_1|} \sum_{\Gamma_1} Z(\Gamma_1; P_1) \prod_{R_1 \in \text{Reg}(P_1)} \dim(\Gamma_1(R))^{x(R_1)} \right) \\
&\quad \circ \left(\frac{\sqrt{\dim(\mathcal{C})}^{|\Sigma \setminus G|} \sqrt{\dim(\mathcal{C})}^{|\Sigma_0 \setminus G_0|}}{\prod_{e \in E(G)} \sqrt{\dim(\Gamma(R_e))} \prod_{e \in E(G_0)} \sqrt{\dim(x_e^0)}} \dim(\mathcal{C})^{-|M_0 \setminus P_0|} \sum_{\Gamma_0} Z(\Gamma_0; P_0) \prod_{R_0 \in \text{Reg}(P_0)} \dim(\Gamma_0(R))^{x(R_0)} \right) \\
&= \sum_{\{x_e\}_{e \in E(G)}} Z_{\text{preTV}}(M_1; G, G_1; \{x_e\}, \{x_e^1\}) \circ Z_{\text{preTV}}(M_0; G_0, G; \{x_e^0\}, \{x_e\})
\end{aligned}$$

が言えた。 ■

補題 3.7: state sum TQFT の雛形

- 2次元閉多様体 $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma'_0, \Sigma'_1 \in \text{Ob}(\mathbf{Bord}_{\langle 2, 3 \rangle}^{\text{SO}})$
- 3次元境界付き多様体 $M \in \text{Hom}_{\mathbf{Bord}_{\langle 2, 3 \rangle}^{\text{SO}}}(\Sigma_0, \Sigma_1)$, $M' \in \text{Hom}_{\mathbf{Bord}_{\langle 2, 3 \rangle}^{\text{SO}}}(\Sigma'_0, \Sigma'_1)$
- 2次元閉多様体の多面体分割 $G \subset -\Sigma_0 \sqcup \Sigma_1$, $G' \subset -\Sigma'_0 \sqcup \Sigma'_1$
- 境界条件 $\{x_e \in \text{Simp}(\mathcal{C})\}_{e \in E(G)}$, $\{x'_e \in \text{Simp}(\mathcal{C})\}_{e \in E(G')}$

を与える。このとき、

$$Z_{\text{preTV}}(M \sqcup M'; G_0 \sqcup G'_0, G_1 \sqcup G'_1) = Z_{\text{preTV}}(M; G_0, G_1) \otimes_{\mathbb{K}} Z_{\text{preTV}}(M'; G'_0, G'_1)$$

が成り立つ^a。

^a 境界条件を略記した。

証明 Turaev-Viro 不変量の構成より明らか。 ■

さて、Turaev-Viro 不変量から作った (3.8.5) を TQFT

$$Z_{\text{TV}, \mathcal{C}}: \mathbf{Bord}_{\langle 2, 3 \rangle}^{\text{SO}} \longrightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$$

に昇華しよう。そのためには境界条件への依存性を無くす必要がある。素朴な方法は、 $\forall \Sigma \in \text{Ob}(\mathbf{Bord}_{\langle 2, 3 \rangle}^{\text{SO}})$ およびその多面体分割 $G \subset \Sigma$ に対して

$$\tilde{Z}_{\text{TV}, \mathcal{C}}(\Sigma, G) := \bigoplus_{\{x_e\}} \mathcal{H}(G; \{x_e\})$$

と定義することである。物理的には境界のゲージ場（トポロジカル演算子）に関する経路積分を実行することに相当する。このとき、 $\forall M \in \text{Hom}_{\mathbf{Bord}_{\langle 2, 3 \rangle}^{\text{SO}}}(\Sigma_0, \Sigma_1)$ およびその境界の多面体分割 $G_i \subset \Sigma_i$ に対して、直和の普遍性を利用して \mathbb{K} -線型写像 (3.8.5) を拡張した

$$\tilde{Z}_{\text{TV}, \mathcal{C}}(M; G_0, G_1): \tilde{Z}_{\text{TV}, \mathcal{C}}(\Sigma_0, G_0) \longrightarrow \tilde{Z}_{\text{TV}, \mathcal{C}}(\Sigma_1, G_1)$$

を考える．具体的には，直和の普遍性により $\forall \{x_e^0\}_{e \in E(G_0)} \in \text{Simp}(\mathcal{C})^{\times |E(G_0)|}$ および標準的包含 $\iota_{\{x_e^0\}}: \mathcal{H}(G_0; \{x_e\})$ について

$$\sum_{\{x_e^1\}_{e \in E(G_1)}} Z_{\text{preTV}}(M; G_0, G_1; \{x_e^0\}, \{x_e^1\}) = \tilde{Z}_{\text{TV},c}(M; G_0, G_1) \circ \iota_{\{x_e^0\}}$$

を充たす $\tilde{Z}_{\text{TV},c}(M; G_0, G_1)$ が唯一存在することが分かるのである．このとき，補題 3.6 より

$$\tilde{Z}_{\text{TV},c}(M_1 \circ M_0; G_0, G_1) = \tilde{Z}_{\text{TV},c}(M_1; G, G_1) \circ \tilde{Z}_{\text{TV},c}(M_0; G_0, G)$$

が成り立つこともわかる．

ところが，このままでは $\text{Id}_\Sigma \in \text{Hom}_{\text{Bord}_{\langle 2,3 \rangle}^{\text{SO}}}(\Sigma, \Sigma)$ に対応する線型写像が恒等写像になってくれるとは限らず，関手になっていない．この問題を解決するためには，境界の多面体分割依存性も無くす必要がある．そこで，2次元閉多様体 $\Sigma \in \text{Ob}(\text{Bord}_{\langle 2,3 \rangle}^{\text{SO}})$ の任意の多面体分割 $G, G' \subset \Sigma$ に対して

$$\begin{aligned} p(G, G') &:= \tilde{Z}_{\text{TV},c}(\text{Id}_\Sigma; G, G'): \tilde{Z}_{\text{TV},c}(\Sigma, G) \longrightarrow \tilde{Z}_{\text{TV},c}(\Sigma, G'), \\ Z_{\text{TV},c}(\Sigma, G) &:= \text{Im}(p(G, G')) \end{aligned}$$

と定義する．すると $(\{Z_{\text{TV},c}(\Sigma, G)\}_{G \subset \Sigma}, \{p(G, G')\}_{G, G' \subset \Sigma})$ は射影系を成し，射影極限

$$Z_{\text{TV},c}(\Sigma) := \varprojlim Z_{\text{TV},c}(\Sigma, G) \quad (3.8.8)$$

をとることができる．物理的には，境界の理論の連続極限を取ることに対応する．射影極限は極限なので，錐 $(Z_{\text{TV},c}(\Sigma), \{ \tau_G: Z_{\text{TV},c}(\Sigma) \xrightarrow{\cong} Z_{\text{TV},c}(\Sigma, G) \}_{G \subset \Sigma})$ が存在する．これを用いて $\forall M \in \text{Hom}_{\text{Bord}_{\langle 2,3 \rangle}^{\text{SO}}}(\Sigma_0, \Sigma_1)$ に対して

$$Z_{\text{TV},c}(M) := \tau_{G_1}^{-1} \circ \tilde{Z}_{\text{TV},c}(M; G_0, G_1) \circ \tau_{G_0}: Z_{\text{TV},c}(\Sigma_0) \longrightarrow Z_{\text{TV},c}(\Sigma_1) \quad (3.8.9)$$

と定義する．

定義 3.32: Turaev-Viro TQFT

Turaev-Viro TQFT を，以下のように定義する：

- $\forall \Sigma \in \text{Ob}(\text{Bord}_{\langle 2,3 \rangle}^{\text{SO}})$ に対して (3.8.8) で構成した \mathbb{K} -ベクトル空間 $Z_{\text{TV},c}(\Sigma)$ を対応づける．
- $\forall M \in \text{Hom}_{\text{Bord}_{\langle 2,3 \rangle}^{\text{SO}}}(\Sigma_0, \Sigma_1)$ に対して (3.8.9) で構成した \mathbb{K} -線型写像 $Z_{\text{TV},c}(M)$ を対応づける．

命題 3.8:

Turaev-Viro TQFT は TQFT

$$Z_{\text{TV},c}: \text{Bord}_{\langle 2,3 \rangle}^{\text{SO}} \longrightarrow \text{Vec}_{\mathbb{K}}$$

である．

証明 関手性は補題 3.6 から，強いモノイダル関手であることは補題 3.7 より従う． ■

3.9 離散的高次対称性

離散群によって特徴付けられる対称性に対しては、保存カレントを定義することはできないが、**トポロジカル演算子**と **charged object** ならば定義できる。

3.9.1 BF-理論における離散的高次対称性

BF-理論を考える。まず最初に、この理論が以下の変換の下で不変であることに注意する：

$$\begin{aligned} A^{(p)} &\longmapsto A^{(p)} + \frac{1}{n}\epsilon^{(p)}, \\ B^{(d-p-1)} &\longmapsto B^{(d-p-1)} + \frac{1}{n}\epsilon^{(d-p-1)}, \\ F^{(p+1)} &\longmapsto F^{(p+1)}, \\ \tilde{A}^{(d-p-2)} &\longmapsto \tilde{A}^{(d-p-2)} - \tilde{\epsilon}^{(d-p-2)} \end{aligned}$$

ただし $\epsilon^{(p)}, \epsilon^{(d-p-1)}$ は閉形式であり、任意の閉部分多様体 $\Sigma^{(p)}, \Sigma^{(d-p-1)} \subset \mathcal{M}^{(d)}$ について

$$\int_{\Sigma^{(p)}} \epsilon^{(p)}, \int_{\Sigma^{(d-p-1)}} \epsilon^{(d-p-1)} \in 2\pi\mathbb{Z}$$

を満たすとする。また、局所的に $\epsilon^{(d-p-1)} =: d\tilde{\epsilon}^{(d-p-2)}$ と定義した。実際、この変換によって

$$\begin{aligned} Z_{\text{BF}} &= \int [da^{(p)}] \int [db^{(d-p-1)}] e^{\frac{in}{2\pi} \int_{\mathcal{M}^{(d)}} b^{(d-p-1)} \wedge a^{(p)}} \\ &\longmapsto \int [da^{(p)}] \int [db^{(d-p-1)}] e^{\frac{in}{2\pi} \int_{\mathcal{M}^{(d)}} b^{(d-p-1)} \wedge a^{(p)}} e^{\frac{i}{2\pi} \int_{\mathcal{M}^{(d)}} \epsilon^{(d-p-1)} \wedge da^{(p)}} \\ &= \int [da^{(p)}] \Big|_{da^{(p)}=0} e^{\frac{i}{2\pi} \int_{\mathcal{M}^{(d)}} \epsilon^{(d-p-1)} \wedge a^{(p)}} \\ &= Z_{\text{BF}} \end{aligned}$$

となる。トポロジカル演算子は

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{e^{2\pi i k/n}}(\Sigma^{(p)}) &:= e^{ik \int_{\Sigma^{(p)}} a^{(p)}} \\ \mathcal{U}_{e^{2\pi i k/n}}(\Sigma^{(d-p-1)}) &:= e^{ik \int_{\Sigma^{(d-p-1)}} b^{(d-p-1)}} \end{aligned}$$

の2つあり、それぞれに対応する charged object は

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_n(\mathcal{C}^{(d-p-1)}) &:= e^{in \int_{\mathcal{C}^{(d-p-1)}} b^{(d-p-1)}} \\ \mathcal{W}_n(\mathcal{C}^{(p)}) &:= e^{in \int_{\mathcal{C}^{(p)}} a^{(p)}} \end{aligned}$$

となっている。

【例 3.9.1】 $(3+1)$ -次元における \mathbb{Z}_n ゲージ理論

$(3+1)$ -次元時空 $\mathcal{M}^{(4)}$ におけるトポロジカルな \mathbb{Z}_n ゲージ理論

$$\begin{aligned} S[a^{(1)}, b^{(2)}] &:= \frac{in}{2\pi} \int_{\mathcal{M}^{(4)}} b^{(2)} \wedge da^{(1)} + \frac{ipn}{4\pi} \int_{\mathcal{M}^{(4)}} b^{(2)} \wedge b^{(2)} \\ &= \frac{in}{4\pi p} \int_{\mathcal{M}^{(4)}} (da^{(1)} + pb^{(2)}) \wedge (da^{(1)} + pb^{(2)}) - \frac{in}{4\pi p} \int_{\mathcal{M}^{(4)}} da^{(1)} \wedge da^{(1)} \end{aligned}$$

を考える [KS14, p.21]. $a^{(1)}, b^{(2)}$ はダイナミカルなので、作用は $\bmod 2\pi$ でゲージ不変でなくてはいいけない。よって $b^{(2)}$ のゲージ変換 $b^{(2)} \mapsto b^{(2)} + d\lambda^{(1)}$ は $a^{(1)}$ にも同時に変換を引き起こさなくてはいいけない^a：

$$a^{(1)} \mapsto a^{(1)} - p\lambda^{(1)}$$

注意すべきなのは、 $a^{(1)}, \lambda^{(1)}$ の両者が $U(1)$ ゲージ場なので、その値が $\bmod 2\pi$ でしか決まらないことである。よってこのゲージ変換における作用の非自明な変化は

$$-\pi ipn \int_{\mathcal{M}^{(4)}} \frac{d\lambda}{2\pi} \wedge \frac{d\lambda}{2\pi}$$

で記述される。この項が $\bmod 2\pi$ で消えるためには

$$\frac{pn}{2} \in \mathbb{Z}$$

が必要である^b。

BF-理論の節で行った議論と同様にこの理論を補助場 $f^{(2)}$ および $U(1)$ ゲージ場 $\hat{a}^{(1)}$ を含む等価な形で述べることができる：

$$\begin{aligned} S[f^{(2)}, b^{(2)}, \hat{a}^{(1)}] &:= \frac{in}{2\pi} \int_{\mathcal{M}^{(4)}} b^{(2)} \wedge f^{(2)} + \frac{ipn}{4\pi} \int_{\mathcal{M}^{(4)}} b^{(2)} \wedge b^{(2)} + \frac{i}{2\pi} \int_{\mathcal{M}^{(4)}} d\hat{a}^{(1)} \wedge f^{(2)} \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{\mathcal{M}^{(4)}} f^{(2)} \wedge (d\hat{a}^{(1)} + nb^{(2)}) + \frac{ipn}{4\pi} \int_{\mathcal{M}^{(4)}} b^{(2)} \wedge b^{(2)} \end{aligned}$$

ただし、 $b^{(2)}$ のゲージ変換 $b^{(2)} \mapsto b^{(2)} + d\lambda^{(1)}$ は $f^{(2)}, \hat{a}^{(1)}$ にも同時に変換を引き起こさなくてはいいけない：

$$\begin{aligned} f^{(2)} &\mapsto f^{(2)} - p d\lambda^{(1)}, \\ \hat{a}^{(1)} &\mapsto \hat{a}^{(1)} - n\lambda^{(1)} \end{aligned}$$

$f^{(2)}, b^{(2)}$ に関する汎関数積分を実行することで

$$S[\hat{a}^{(1)}] = \frac{ip}{4\pi n} \int_{\mathcal{M}^{(4)}} d\hat{a}^{(1)} \wedge d\hat{a}^{(1)} \quad (3.9.1)$$

とも等価である。

この理論の持つトポロジカル演算子を求めよう。 $p = 0$ のときは **BF-理論** のものと全く同じだが、 $p \neq 0$ のときは運動方程式 $da^{(1)} + pb^{(2)} = 0$ および $d\hat{a}^{(1)} + nb^{(2)} = 0$ により

$$W(\mathcal{C}^{(2)}) := e^{i \int_{\mathcal{C}^{(2)}} b^{(2)}}$$

とおくと

$$\begin{aligned}\langle (W(\mathcal{C}^{(2)})^p) \rangle &= 1, \\ \langle (W(\mathcal{C}^{(2)})^N) \rangle &= 1\end{aligned}\tag{3.9.2}$$

がわかる. i.e.

$$\langle (W(\mathcal{C}^{(2)})^{\gcd(n,p)}) \rangle = 1$$

である. もう 1 つの Wilson line は, ゲージ不変性の要請から

$$\tilde{\mathcal{W}}(\mathcal{C}^{(1)}; \Sigma^{(2)}) := e^{i \int_{\mathcal{C}^{(1)}} a^{(1)}} e^{ip \int_{\Sigma^{(2)}} b^{(2)}}$$

とせざるを得ない. これは $\pm^{(2)}$ に依存しているので genuine line operator でないが, (3.9.2) を使
うと

$$\tilde{\mathcal{W}}(\mathcal{C}^{(1)}; \Sigma^{(2)})^N = e^{i \int_{\mathcal{C}^{(1)}} (Na^{(1)} - p\hat{a}^{(1)})}$$

がわかる. ここから,

$$\mathcal{W}(\mathcal{C}^{(1)}) := \tilde{\mathcal{W}}(\mathcal{C}^{(1)}; \Sigma^{(2)})^{N/\gcd(n,p)}$$

がもう一つの line operator であることがわかり, $\mathbb{Z}_{\gcd(n,p)}$ -チャージが導出された.

^a $a^{(1)}, \lambda^{(1)}$ が共に U(1) ゲージ場であることから, $p \in \mathbb{Z}$ でなくてはならない.

^b この条件は $\mathcal{M}^{(4)}$ がスピン多様体ならば $p \in \mathbb{Z}$ と等価である.

3.9.2 中心対称性のゲージ化

(3+1)-次元の物質場を持たない SU(n) ゲージ理論をトポロジカルな \mathbb{Z}_n ゲージ理論【例 3.9.1】と結合させることにより, SU(n)/ \mathbb{Z}_n ゲージ理論が得られることを見よう.

今, (3+1)-次元の SU(n) 1-form ゲージ場を a と書く^{*65}. ここで, 天下りのだが U(1) 1-form ゲージ場 $\hat{a}^{(1)}$ を用いて

$$\tilde{a} := a + \frac{1}{n} \hat{a}^{(1)} \mathbb{1}_n$$

と書く. すると, a は $\mathfrak{su}(n)$ に値をとることから

$$\mathrm{Tr} \tilde{a} = \mathrm{Tr} a + \hat{a}^{(1)} \in i\mathbb{R}$$

となり, \tilde{a} が $\mathfrak{u}(n)$ に値をとるように見える. よって \tilde{a} を U(n) ゲージ場と見做すことができる.

ここで, 理論に新たな U(1) 1-form ゲージ不変性 $\tilde{a} \mapsto \tilde{a} - \lambda^{(1)} \mathbb{1}_n$ を要請する. ただし $\lambda^{(1)}$ は U(1) ゲージ場である. このゲージ変換は元々の SU(n) ゲージ場 a には作用しないが, 新たに付け足した U(1) ゲージ

^{*65} ダイナミカルである.

場 $\hat{a}^{(1)}$ に関しては

$$\hat{a}^{(1)} \mapsto \hat{a}^{(1)} - n\lambda^{(1)} \quad (3.9.3)$$

のゲージ変換を引き起こす。変換 (3.9.3) に関する不変性を尊重するためには $\hat{a}^{(1)}$ の運動項は許されないが、トポロジカル項

$$\frac{ip}{4\pi n} \int_{\mathcal{M}^{(4)}} \hat{a}^{(1)} \wedge \hat{a}^{(1)}$$

を付け足すことは依然として許されている。この項はまさにトポロジカルな \mathbb{Z}_n ゲージ理論 (3.9.1) である。

このようにして得られたゲージ理論の変換関数について考察する。 $\mathcal{M}^{(4)}$ の良い被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ を 1 つ固定する。新たな $U(1)$ ゲージ不変性の要請によって \tilde{a} のゲージ変換は変換関数 $\{g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow U(n)\}_{\alpha, \beta \in \Lambda}$ によるものと、変換関数 $\{\lambda_{\alpha\beta}^{(1)}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \Omega^1(U_\alpha \cap U_\beta, \mathfrak{u}(1))\}_{\alpha, \beta \in \Lambda}$ によるものが混ざった

$$\tilde{a}_\beta = g_{\beta\alpha}(\tilde{a}_\alpha - i \mathrm{d}g_{\beta\alpha})g_{\beta\alpha}^{-1} - \lambda_{\alpha\beta}^{(1)}$$

になる。注意すべきなのは、 $\lambda_{\alpha\beta}^{(1)}$ に対するゲージ変換 $\lambda_{\alpha\beta}^{(1)} \mapsto \lambda_{\alpha\beta}^{(1)} + \mathrm{d}h_{\alpha\beta}^{(0)}$ が $g_{\beta\alpha}$ にも作用することである：

$$g_{\beta\alpha} \mapsto e^{-i h_{\alpha\beta}} g_{\beta\alpha} \quad (3.9.4)$$

ここで $\lambda_{\alpha\beta}^{(1)}$ の Deligne-Beilinson コチェインとしてのゲージ変換 (i.e. $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ における整合性条件) は、 $\{f_{\alpha\beta\gamma}: U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \rightarrow \Omega^0(U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma; \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})\}_{\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda}$ によって

$$\lambda_{\alpha\beta}^{(1)} + \lambda_{\beta\gamma}^{(1)} + \lambda_{\gamma\alpha}^{(1)} = \mathrm{d}f_{\alpha\beta\gamma}$$

となっているので、ゲージ変換 $\lambda_{\alpha\beta}^{(1)} \mapsto \lambda_{\alpha\beta}^{(1)} + \mathrm{d}h_{\alpha\beta}^{(0)}$ に際しては

$$f_{\alpha\beta\gamma} \mapsto f_{\alpha\beta\gamma} + h_{\alpha\beta} + h_{\beta\gamma} + h_{\gamma\alpha} \pmod{2\pi}$$

と言う変換を受ける。故に $g_{\alpha\beta}$ に要請するコサイクル条件であって (3.9.4) を尊重するものは

$$g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = e^{-i f_{\alpha\beta\gamma}} \mathbf{1}_n \in U(1) \quad (3.9.5)$$

だと考えられる [KS14, p.28]。一般化されたコサイクル条件 (3.9.5) の \det をとることにより

$$f_{\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{n} (\log \det g_{\alpha\beta} + \log \det g_{\beta\gamma} + \log \det g_{\gamma\alpha}) =: \frac{2\pi m_{\alpha\beta\gamma}}{n} \in \frac{2\pi}{n} \mathbb{Z}$$

がわかる。 $f_{\alpha\beta\gamma}$ の満たすべきコサイクル条件は

$$f_{\alpha\beta\gamma} + f_{\beta\gamma\delta} + f_{\gamma\delta\alpha} + f_{\delta\alpha\beta} = 0 \pmod{2\pi}$$

であるから、

$$m_{\alpha\beta\gamma} + m_{\beta\gamma\delta} + m_{\gamma\delta\alpha} + m_{\delta\alpha\beta} = 0 \pmod{n}$$

がわかる。i.e. $m := \{m_{\alpha\beta\gamma}\}_{\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda} \in \check{H}^2(\mathcal{M}^{(d)}; \mathbb{Z}_n)$ である。

3.9.3 有限部分群のゲージ化

中心対称性に関して議論する際、理論の持つ対称性 G の有限な正規部分群 A についてのみゲージ化するという操作が必要になった。ここでは有限部分群のゲージ化に関する一般論を述べる [Tac17].

第 4 章

圏論とトポロジカル秩序

この節で登場する多様体は特に断らない限り常に C^∞ 多様体である。また、体 \mathbb{K} と言ったら $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のいずれかを指すことにする。

4.1 トポロジカル秩序のミクロな定義

この節では常に $d := D + 1$ 次元時空 $\mathcal{M}^{(d)} = \Sigma^{(D)} \times \mathbb{R}$ または $\Sigma^{(D)} \times S^1$ を考える^{*1}。混乱が生じない時は時空点を $x := (x, t) \in \Sigma^{(D)} \times \mathbb{R}$ と書く。境界を持たない D 次元多様体^{*2} $\Sigma^{(D)}$ はノルム $\|\cdot\|$ を持つ距離空間であるとする。

- $\Sigma^{(D)}$ 上の D 次元格子 (lattice) $\Lambda \subset \Sigma^{(D)}$ とは、 $\Sigma^{(D)}$ の有限な^{*3} 離散部分集合のことである。
- 格子点 $x \in \Lambda$ 上の Hilbert 空間を \mathcal{H}_x と書く。
- 全系の Hilbert 空間とは、合成系 $\mathcal{H}_{\text{tot}} := \bigotimes_{x \in \Lambda} \mathcal{H}_x$ のことである。

定義^{ph} 4.1: bosonic な格子模型

D 次元格子 $\Lambda \subset \Sigma^{(D)}$ を 1 つ固定する。

- $\forall x \in \Lambda$ を 1 つとる。別の格子点 $y \in \Lambda$ が x についてレンジ $R > 0$ であるとは、 $\|x - y\| \leq R$ が成り立つことを言う。 x についてレンジ R な格子点全体の集合を $N_R(x) \subset \Lambda$ と書く。
- 格子 Λ 上の **bosonic な格子模型** (bosonic lattice model) とは、エルミート演算子 $\hat{H}_\Lambda \in \text{Hom}_{\text{Hilb}}(\mathcal{H}_{\text{tot}}, \mathcal{H}_{\text{tot}})$ のこと。bosonic な格子模型 \hat{H}_Λ が**局所的** (local) であるとは、ある有限の $R > 0$ が存在して以下の条件を充たすもののことを言う：

(locality)

$\forall x \in \Lambda$ に対して、 $\forall y \in N_R(x)$ における局所的 Hilbert 空間 \mathcal{H}_y にのみ非自明に作用す

^{*1} i.e. 時間方向は必要に応じてコンパクト化する

^{*2} コンパクト性は仮定しない。

^{*3} 空間多様体 $\Sigma^{(D)}$ や局所 Hilbert 空間に適当な境界条件を課して有限にする。

るエルミート演算子 $\hat{h}_x \in \text{Hom}_{\text{Hilb}}(\mathcal{H}_{\text{tot}}, \mathcal{H}_{\text{tot}})$ が存在して,

$$\hat{H}_\Lambda = \sum_{x \in \Lambda} \hat{h}_x$$

と書ける.

- D 次元の **bosonic な量子系** (bosonic quantum system) とは,
 - 格子の増大列^a $\{\Lambda_i\}_{i=1}^\infty$
 - bosonic な格子模型の列 $\{\hat{H}_{\Lambda_i}\}_{i=1}^\infty$
 の組のこと.
- bosonic な量子系 $(\{\Lambda_i\}_i, \{\hat{H}_{\Lambda_i}\}_i)$ の**熱力学極限** (thermodynamic limit) とは^b, D 次元格子 $\Lambda_\infty := \lim_{i \rightarrow \infty} \Lambda_i \subset \Sigma^{(D)}$ 上の bosonic な格子模型 $\hat{H}_{\Lambda_\infty} := \lim_{i \rightarrow \infty} \hat{H}_{\Lambda_i}$ のこと.

^a i.e. $\Lambda_1 \subsetneq \Lambda_2 \subsetneq \dots$ が成り立つ.

^b 厳密に言うと, 極限 $\lim_{i \rightarrow \infty}$ は, 格子の形状などの追加のデータを与えない限り ill-defined である.

4.1.1 ミクロな視点から量子相を定義する試み

この小節では, **格子模型の列**を直接用いて量子相を定義する試みを, [CGW10] に倣って簡単に紹介する^{*4}. ここで紹介する定義は物理学者の直観に基づくものであり, 数学的には大部分が未完成であることを先に断っておく.

定義^{ph} 4.2: gapped な量子系

bosonic な量子系 $(\{\Lambda_i\}_i, \{\hat{H}_{\Lambda_i}\}_i)$ が **gapped** であるとは, ある $\Delta > 0$ および E_0 が存在して以下の条件を充たすことを言う (図 4.1):

(gap-1) $\forall E \in (E_0, E_0 + \Delta)$ に対してある $N_E \in \mathbb{N}$ が存在して,

$$i > N_E \implies \text{Spec}(\hat{H}_{\Lambda_i}) \cap (E_0, E_0 + \Delta) = \emptyset$$

が成り立つ.

(gap-2) $\forall \varepsilon > 0$ に対してある $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して,

$$i > N_\varepsilon \implies \text{diam}(\text{Spec}(\hat{H}_{\Lambda_i}) \cap (-\infty, E_0]) < \varepsilon$$

が成り立つ.

特に, 十分大きな $i \in \mathbb{N}$ について定まる

$$\text{GSD}_{\Lambda_i}(\{\hat{H}_{\Lambda_i}\}) := |\text{Spec}(\hat{H}_{\Lambda_i}) \cap (-\infty, E_0]|$$

のことを**基底状態の縮退度** (ground state degeneracy) と呼ぶ.

^{*4} ミクロな視点というのは, 格子模型を用いるという意味である.

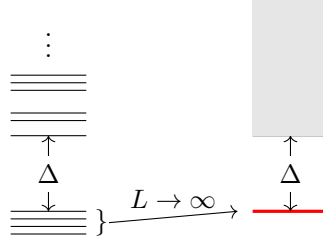


図 4.1: gapped な量子系のエネルギースペクトル $\text{Spec}(\hat{H}_{\Lambda_i})$

定義^{ph} 4.3: gapped quantum liquid

gapped かつ **bosonic な量子系** $(\{\Lambda_i\}_i, \{\hat{H}_{\Lambda_i}\}_i)$ が **gapped な量子液体** (gapped quantum liquid) であるとは、ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\text{GSD}_{\Lambda_N}(\{\hat{H}_{\Lambda_i}\}) = \text{GSD}_{\Lambda_{N+1}}(\{\hat{H}_{\Lambda_i}\}) = \text{GSD}_{\Lambda_{N+2}}(\{\hat{H}_{\Lambda_i}\}) = \cdots < \infty$$

が成り立つことを言う。



gapless quantum liquid の厳密な定義は、2025 年現在でもこれといったものがない。

【例 4.1.1】Haah コード

Haah コード [Haa11] の基底状態の縮退度は

$$\ln(\text{GSD}_{\Lambda_i}) \sim |\Lambda_i|$$

と振る舞うことが知られており、**gapped** だが **gapped な量子液体** でない **bosonic な量子系** の例である。

gapped な量子相 (gapped quantum phase) とは、大雑把には $\Sigma^{(D)} = \mathbb{R}^D$ としたときの^{*5} **gapped な量子液体** の同値類のことである。特に、同値関係の定義で対称性を考慮しないもののことを**トポロジカル秩序** (topological order) と呼ぶ。この同値類の、物理的に妥当かつ数学的にも正確な定義を与える仕事は大変困難で、2025 年時点で未達成である。そのため、実際の量子相の研究の文脈では、物理的考察から等価であることが期待される別の（より扱いやすい）定義を用いて議論することが常である。

トポロジカル秩序を与える同値類の定義は、[CGW10, p.3] に倣うと以下ようになる：

定義^{ph} 4.4: bosonic かつ gapped なトポロジカル秩序

空間多様体 $\Sigma^{(D)}$ 上の 2 つの **gapped な量子液体** $(\{\Lambda_i\}_i, \{\hat{H}_{\Lambda_i}^{(0)}\}_i)$, $(\{\Lambda_i\}_i, \{\hat{H}_{\Lambda_i}^{(1)}\}_i)$ を与える。**熱力学極限**をとった **gapped な量子液体** 全体がなす集合を $\text{gQL}(\Sigma^{(D)})$ とおく。 $\text{gQL}(\Sigma^{(D)})$ には適切な位相を入れて位相空間にする。

このとき、 $\hat{H}_{\Lambda_\infty}^{(0)}$ と $\hat{H}_{\Lambda_\infty}^{(1)}$ が同じ **gapped なトポロジカル秩序** (gapped topological order) にあるとは、連続曲線 $\hat{H}: [0, 1] \rightarrow \text{gQL}(\Sigma^{(D)})$ が存在して $\hat{H}(0) = \hat{H}_{\Lambda_\infty}^{(0)}$ かつ $\hat{H}(1) = \hat{H}_{\Lambda_\infty}^{(1)}$ を充たすこ

^{*5} 最初から**熱力学極限**により得られる無限系を念頭においている。

とを言う.

空間次元 D のトポロジカル秩序全体の集まりを \mathbf{TO}_D と書くことにする.

【例 4.1.2】 自明相

\mathcal{H} を有限次元 Hilber 空間, $\hat{P} \in \text{End}(\mathcal{H})$ を, 唯一の基底状態 $|\text{gnd}\rangle \in \mathcal{H}$ を持つエルミート演算子とする. このとき任意の空間次元 D と格子 $\Lambda \subset \Sigma^{(D)}$ に対して, **bosonic な格子模型** $\hat{H}_\Lambda = \sum_{x \in \Lambda} \hat{h}_x$ を

- $\mathcal{H}_x := V$ とする.
- $\hat{h}_x := \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1} \otimes \underbrace{\hat{P}}_x \otimes \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}$ を局所的なハミルトニアンとする.

ことで定義する. この格子模型は一意的な基底状態 $\bigotimes_{x \in \Lambda} |\text{gnd}\rangle$ を持ち, **gapped な量子液体** を成し, **自明相** (trivial phase) と呼ばれる **bosonic なトポロジカル秩序** を定める. 空間次元 D の自明相を $\mathbf{1}_D$ と書く.

【例 4.1.3】 トポロジカル秩序の積層

空間次元 D と格子 $\Lambda \subset \Sigma^{(D)}$ を与え, その上の2つの **bosonic な格子模型** $\hat{H}_\Lambda^{(0)} \in \text{End}(\mathcal{H}_{\text{tot}}^{(0)})$, $\hat{H}_\Lambda^{(1)} \in \text{End}(\mathcal{H}_{\text{tot}}^{(1)})$ を考える. このとき,

- $\mathcal{H}_{\text{tot}} := \mathcal{H}_{\text{tot}}^{(0)} \otimes \mathcal{H}_{\text{tot}}^{(1)}$
- $\hat{H}_\Lambda := \hat{H}_\Lambda^{(0)} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \hat{H}_\Lambda^{(1)}$

と定義することで, 新たな **bosonic な格子模型** $\hat{H}_\Lambda \in \text{End}(\mathcal{H}_{\text{tot}})$ を得る. この操作を格子模型の**積層** (stacking) と呼ぶ. 格子模型の積層を用いて, **gapped な量子液体** 及び **bosonic なトポロジカル秩序** の積層を定義することができる. 特に, 空間次元 D の2つの量子相 $\mathbf{C}_D, \mathbf{D}_D \in \mathbf{TO}_D$ に対して, その積層によって得られる新たな量子相を $\mathbf{C}_D \boxtimes \mathbf{D}_D \in \mathbf{TO}_D$ と書く.

命題 ^{ph} 4.1: トポロジカル秩序のモノイド構造

任意の空間次元 D において, 以下のデータの3つ組は**可換モノイド**を成す:

- **トポロジカル秩序** 全体の集合 \mathbf{TO}_D
- トポロジカル秩序の**積層** $\boxtimes: \mathbf{TO}_D \times \mathbf{TO}_D \longrightarrow \mathbf{TO}_D$
- **自明相** $\mathbf{1}_D \in \mathbf{TO}_D$

証明

■

4.1.2 重力アノマリー

トポロジカル相の文脈で**重力アノマリー** (gravitational anomaly) と呼ばれるものを導入しておく [KW14]. これは文字通り量子重力を考えていると言うわけではなく、アノマリー流入に類似の概念である。

定義^{ph} 4.5: gapped な量子相のアノマリー

空間 D 次元の**量子相**が**アノマリーを持たない** (anomaly-free) とは、それが**局所的な格子模型**として実現できることを言う。

予想^{ph} 4.1: 重力アノマリーの仮説

空間次元 D の任意の **gapped な量子相** A_D に対して、ある空間次元 $D+1$ の**アノマリー**を持たない **gapped な量子相** $\text{Bulk}(A_D)$ が一意的に存在して、 $\text{Bulk}(A_D)$ の境界として A_D が実現される。

予想 4.1 は、 A_D が**トポロジカル秩序**の場合には物理的な証明があるらしい [KW14, Lemma 2, p.19].

4.2 トポロジカル秩序のマクロな特徴付け

零温度における**量子相**を特徴付けるデータとは、くりこみ群のフローの IR 側においても生き残っているような物理量だと考えられる。もしくは、同じことだが、低エネルギー有効理論の長距離の振る舞いが零温度における量子相を特徴付けるという物理学者の期待がある。

もし量子相が gapless ならば、相関関数は典型的には長距離の振る舞い (algebraic decay) を示し、量子相を特徴付けるデータの一部であると考えられる。ところが、**gapped な量子相**に関してはそうはいかない。

定理 4.1: gapped な格子模型における相関関数の振る舞い

D 次元格子 $\Lambda \subset \Sigma^{(D)}$ 及びその上の **gapped な量子系** \hat{H}_Λ を考える。このとき、有限集合 $X, Y \subset \Lambda$ に台を持つ任意の演算子 \hat{A}_X, \hat{B}_Y について、ある定数 C, D, ξ_0 が存在して以下が成り立つ：

$$\begin{aligned} \langle \psi_0^a | \hat{A}_X \hat{B}_Y | \psi_0^a \rangle - \langle \psi_0^a | \hat{A}_X \hat{P}_0 \hat{B}_Y | \psi_0^a \rangle &\leq C \|\hat{A}_X\| \|\hat{B}_Y\| \left\{ e^{-\frac{\text{dist}(X, Y)}{\xi_0}} + \min(|X|, |Y|) g(\text{dist}(X, Y)) \right\} \\ &\quad + D \text{diam}(\text{Spec}(\hat{H}_{\Lambda_i}) \cap (-\infty, E_0]) \end{aligned}$$

ただし、 $|\psi_0^a\rangle \in \text{Spec}(\hat{H}_{\Lambda_i}) \cap (-\infty, E_0]$ であり、 $\hat{P}_0 := \sum_a |\psi_0^a\rangle \langle \psi_0^a|$ は基底状態が成す部分空間への射影演算子である。

証明 Lieb-Robinson bound を用いる。詳細は [Has10, Theorem 2, p.7] を参照。 ■

定理 4.1 により、gapped な量子系の相関関数は熱力学極限において指数減衰するため、量子相を特徴付けるデータとなり得ない。gapped な量子系を特徴付けるデータは、**トポロジカル欠陥**のデータだと考えられる。

定義^{ph} 4.6: p -次元のトポロジカル欠陥

空間多様体 $\Sigma^{(D)}$ 上の **gapped な量子液体** $(\{\Lambda_i\}_i, \{\hat{H}_{\Lambda_i}\}_i)$ を与える. $p < D$ について, p 次元の励起 (p -dimensional excitation) とは, $\hat{H}_\infty + \delta\hat{H}(M^{(p)})$ の **gapped** な基底状態が成す \mathcal{H}_{tot} の部分空間のこと [KW14, Definition 5., p.10]. ただし, $\delta\hat{H}(M^{(p)})$ は $\Sigma^{(D)}$ の p 次元部分多様体 $M^{(p)} \subset \Sigma^{(D)}$ の上に台を持つエルミート演算子のことである.

2つの p 次元の励起 $\hat{H}_\infty + \delta\hat{H}(M^{(p)})$, $\hat{H}_\infty + \delta\hat{H}(N^{(p)})$ が同値であるとは, ある可逆な^a **トポロジカル秩序** $C_p \in \text{TO}_p$ が存在して, C_p 及び C_p^{-1} を **積層** することによって互いに行き来できることを言う [KW14, Definition 6., p.10]. この同値関係による同値類を **トポロジカル欠陥** (topological defect) と呼ぶ.

^a **stacking** に関して可逆という意味.



p 次元の励起を特徴付けるトラップハミルトニアン $\delta\hat{H}(M^{(p)})$ は, **格子模型** の p 次元部分多様体 $M^{(p)}$ 上における境界条件を定めていると見做すことができる. この意味で, p 次元のトポロジカル欠陥は **トポロジカルな境界条件** (topological boundary condition) と見做すことができる.

定義 4.6 より, 空間次元 D の **トポロジカル秩序** $C_D \in \text{TO}_D$ 内部における p 次元のトポロジカル欠陥はそれ自身が p 次元の **トポロジカル秩序** を成す.

【例 4.2.1】 toric code のトポロジカル欠陥-1

2次元正方格子 $\Lambda = (V(\Lambda), E(\Lambda))$ 上の **toric code 模型** [Kit03] は, 以下のように構成されるスピン $1/2$ 模型である:

- $\forall e \in E(\Lambda)$ の上には Hilbert 空間 $\mathcal{H}_e := \mathbb{C}^2$ をアサインする.
- $\forall v \in V(\Lambda)$ に対して, \hat{A}_v を次のように定義する:

$$\hat{A}_v := \begin{array}{c} \hat{X} \\ \downarrow \\ \hat{X} - \bullet - \hat{X} \\ \uparrow \\ \hat{X} \end{array}$$

- 任意の面 p に対して, \hat{B}_p を次のように定義する:

$$\hat{B}_p := \begin{array}{c} \hat{Z} \\ \left| \begin{array}{c} \hat{Z} \quad p \quad \hat{Z} \\ \hat{Z} \end{array} \right. \end{array}$$

- ハミルトニアンを

$$\hat{H}_\Lambda := \sum_v (1 - \hat{A}_v) - \sum_p (1 - \hat{B}_p)$$

で定義する.

ただし

$$\hat{X} := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{Z} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

とおいた. 全ての \hat{A}_v, \hat{B}_p は可換なので同時対角化可能である. そのうえ $(\hat{A}_v)^2 = (\hat{B}_p)^2 = \mathbf{1}$ が成り立つ (このような模型を **commuting projector hamiltonian** と呼ぶ) ので, \hat{A}_v, \hat{B}_p の固有値は システムサイズ $|\Lambda|$ に関係なく どちらも ± 1 である. 故にこの模型は **gapped なトポロジカル秩序 TC** を示す.

簡単のため, 2 次元 Euclid 空間上の無限系 $\Lambda = \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ を考える. toric code 模型の持つ 0 次元の **トポロジカル欠陥** を考えよう. \mathcal{H}_{tot} は \hat{A}_v, \hat{B}_p による固有空間分解を持つので, 任意の状態は \hat{A}_v, \hat{B}_p の同時固有状態で展開できる.

- (1) 基底状態が生成する **トポロジカル欠陥 1** が存在する.
- (2) 頂点 $v_0 \in V(\Lambda)$ 上に局在した励起を特徴付けるハミルトニアンとして $\delta\hat{H}(v_0) = 2\hat{A}_{v_0}$ を選ぶと,

$$\hat{A}_v |\psi_e\rangle = \begin{cases} -|\psi_e\rangle, & v = v_0, \\ |\psi_e\rangle, & v \neq v_0, \end{cases}, \quad \hat{B}_p |\psi_e\rangle = |\psi_e\rangle$$

なる状態 $|\psi_e\rangle$ が張る 1 次元部分空間 $\mathbb{C}|\psi_e\rangle \subset \mathcal{H}_{\text{tot}}$ が **0 次元の励起**だと分かる. ここで, 局所演算子

$$\hat{Z}_1 := v_0 \bullet \text{---} \hat{Z} \text{---} v_1$$

を $|\psi_e\rangle$ に作用させると, $\hat{A}_{v_0}, \hat{A}_{v_1}$ のみが \hat{Z}_1 と反交換することから

$$\hat{A}_v \hat{Z}_1 |\psi_e\rangle = \begin{cases} -\hat{Z}_1 |\psi_e\rangle, & v = v_1, \\ \hat{Z}_1 |\psi_e\rangle, & v \neq v_1 \end{cases}, \quad \hat{B}_p \hat{Z}_1 |\psi_e\rangle = \hat{Z}_1 |\psi_e\rangle$$

が成り立つ. i.e. $\delta\hat{H}(v_0), \delta\hat{H}(v_1)$ が特徴付ける 0 次元の励起は互いに **同値**である. 同様にして任意の頂点上に局在した 0 次元の励起が互いに同値になるので, これらは 1 つの **トポロジカル欠陥 e** を成す.

- (3) 任意の面 p_0 に局在した励起を特徴付けるハミルトニアンとして $\delta\hat{H}(p_0) = 2\hat{B}_{p_0}$ を選ぶと,

$$\hat{A}_v |\psi_m\rangle = |\psi_m\rangle, \quad \hat{B}_p |\psi_m\rangle = \begin{cases} -|\psi_m\rangle, & p = p_0 \\ |\psi_m\rangle, & p \neq p_0 \end{cases}$$

なる状態 $|\psi_m\rangle$ が張る 1 次元部分空間 $\mathbb{C}|\psi_m\rangle \subset \mathcal{H}_{\text{tot}}$ が **0 次元の励起**だと分かる. 今度は

$$\hat{X}_1 := \begin{array}{|c|c|} \hline p_0 & p_1 \\ \hline \end{array}$$

なる局所演算子を $|\psi_m\rangle$ に作用させると, \hat{X}_1 と反交換するのは $\hat{B}_{p_0}, \hat{B}_{p_1}$ のみだから,

$$\hat{A}_v \hat{X}_1 |\psi_m\rangle = \hat{X}_1 |\psi_m\rangle, \quad \hat{B}_p \hat{X}_1 |\psi_m\rangle = \begin{cases} -\hat{X}_1 |\psi_m\rangle, & p = p_1 \\ \hat{X}_1 |\psi_m\rangle, & p \neq p_1 \end{cases}$$

が成り立つ．同様にして任意の面上に局在した 0 次元の励起は互いに同値なので，これらは 1 つの **トポロジカル欠陥** m を成す．

- (4) 任意の点と面の組み (v_0, p_0) 上に局在した励起を特徴付けるハミルトニアンとして $\delta\hat{H}(\{v_0, p_0\}) = 2\hat{A}_{v_0} + 2\hat{B}_{p_0}$ を選ぶと，

$$\hat{A}_v |\psi_f\rangle = \begin{cases} -|\psi_f\rangle, & v = v_0, \\ |\psi_f\rangle, & v \neq v_0, \end{cases}, \quad \hat{B}_p |\psi_f\rangle = \begin{cases} -|\psi_f\rangle, & p = p_0 \\ |\psi_f\rangle, & p \neq p_0 \end{cases}$$

なる状態 $|\psi_f\rangle$ が張る 1 次元部分空間 $\mathbb{C}|\psi_f\rangle \subset \mathcal{H}_{\text{tot}}$ が **トポロジカル欠陥** f を成すことがわかる．

このようにして，互いに異なる 4 つのトポロジカル欠陥 $\{1, e, m, f\}$ が構成された．

可逆なトポロジカル秩序の積層を同一視するということは，任意の局所演算子の作用に関して不変であることと等価である．従って，局所演算子が合成に関して成す結合代数 (**local operator algebra**) を \mathcal{A}_{loc} と書くと，トポロジカル欠陥を次のように特徴付けることもできる：



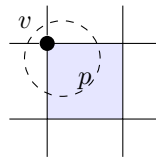
演算子の局所性の概念は，系のスケールに依存する．逆に言うと，トポロジカル欠陥は系のスケールに依存しない．

命題 4.1: トポロジカル欠陥の特徴付け

トポロジカル欠陥とは， \mathcal{A}_{loc} -加群のこと．

【例 4.2.2】 toric code のトポロジカル欠陥-2

【例 4.2.1】で得た 4 つのトポロジカル欠陥 $\{1, e, m, f\}$ を， \mathcal{A}_{loc} -加群として導出してみよう．まず，演算子の局所性を次の図で定義する：



すると，local operator algebra \mathcal{A}_{loc} は生成元 \hat{A}_v, \hat{B}_p と関係式

$$(\hat{A}_v)^2 = (\hat{B}_p)^2 = 1, \quad \hat{A}_v \hat{B}_p = \hat{B}_p \hat{A}_v$$

で表現される．故に $\mathcal{A}_{\text{loc}} \cong \mathbb{C}^4$ であり， \mathcal{A}_{loc} -**加群が成す圏** $\mathcal{A}_{\text{loc}}\text{-Mod}_{\text{vec}}$ は

$$\hat{P}_{\pm\pm} := \frac{1 \pm \hat{A}_v}{2} \frac{1 \pm \hat{B}_p}{2}$$

の 4 つの単純対象を持つが，これらはそれぞれ

- (1) P_{++} は **トポロジカル欠陥** 1 への射影演算子

- (2) P_{-+} は点 v におけるトポロジカル欠陥 e への射影演算子
- (3) P_{+-} は面 p におけるトポロジカル欠陥 m への射影演算子
- (4) P_{--} は組 (v, p) におけるトポロジカル欠陥 f への射影演算子

に対応している。

系のスケールを大きくするにつれて \mathcal{A}_{loc} の生成元は複雑になるが、異なるスケールの \mathcal{A}_{loc} 同士は森田同値であることが知られている [Kit03]。つまり、toric code 模型のトポロジカル欠陥は系のスケールに依存しない。

C_D 内部の全てのトポロジカル欠陥 (i.e. トポロジカル秩序) の集まりを **topological skelton** と呼び、 $\text{sk}(C_D)$ と書くことにする [KZ22]。次に考えるべきなのは、topological skelton のどの構造が、親となるトポロジカル秩序 C_D を完全に特徴付けるのか、と言う問題である。2025 年現在では次のように予想されている [KW14, Conjecture 2, p.11]：

予想 ^{ph} 4.2: トポロジカル秩序の特徴付け

トポロジカル秩序 C_D を完全に特徴付けるのは、 $\text{sk}(C_D)$ の組紐付き (高次) フュージョン圏としての構造、及び chiral central charge である。

以下では、特に $\text{sk}(C_D)$ の要素のうち空間次元が 0 であるものに焦点を当てて予想 (4.2) を解説する。便宜上、 $\text{sk}(C_D)$ の要素のうち $p+1$ 次元のトポロジカル欠陥であるもの全体を $\text{sk}_p(C_D)$ と書くことにする。

定義 4.1: エニオン

$\text{sk}(C_2)$ の要素のうち空間次元が 0 であるものを**エニオン** (anyon) と呼ぶ。

4.3 0 + 1 次元のトポロジカル欠陥

4.3.1 アーベル圏としての構造

点 $\xi \in \Sigma^{(D)}$ に局在した 0 + 1 次元のトポロジカル欠陥 $\forall x, y \in \text{sk}_0(C_D)$ をとる。定義 4.6 よりこれらの代表元は全系の Hilbert 空間の部分空間であり、その間に作用する線形作用素 $f: x \rightarrow y$ を考えることができる。 f が well-defined であるためには、系の任意のスケールにおいて局所演算子と可換でなくてはならない。よって f は 0 + 0 次元のトポロジカル欠陥と見做すべきである。このような全ての f が成す集合を $\text{Hom}_{\text{sk}_0(C_D)}(x, y)$ と書く。

命題^{ph} 4.2: $\text{sk}_0(C_D)$ の圏としての構造

$\text{sk}_0(C_D)$ は,

- $0+1$ 次元の **トポロジカル欠陥** を対象
- $\text{Hom}_{\text{sk}_0(C_D)}(x, y)$ を Hom 集合

とする **C-線形な圏** を成す. 特に, $\text{Id}_x \in \text{Hom}_{\text{sk}_0(C_D)}(x, x)$ は恒等作用素に対応する **自明な** $0+0$ 次元の **トポロジカル欠陥** である.

証明 Hom 集合の **C-線形性** は, $f \in \text{Hom}_{\text{sk}_0(C_D)}(x, y)$ がミクロには線形作用素であったことによる. ■

命題 4.4 に合わせて, 以下では $0+1$ 次元の **トポロジカル欠陥** 全体が成す集まりを $\text{Ob}(\text{sk}_0(C_D))$ と書く. $\forall x, y \in \text{Ob}(\text{sk}_0(C_D))$ の代表元は全系の Hilbert 空間の部分空間であるから, その直和 $x \oplus y \in \text{Ob}(\text{sk}_0(C_D))$ を考えることができる.

命題^{ph} 4.3: $\text{sk}_0(C_D)$ は半単純

$\text{sk}_0(C_D)$ は, **半単純かつ有限な C-線形アーベル圏** である.

【例 4.3.1】 toric code のトポロジカル欠陥の直和

toric code の **トポロジカル秩序** TC を考える. ブラケット p_0 に局在したトラップハミルトニアン $\delta \hat{H}(p_0) := \hat{B}_{p_0}$ によって特徴付けられる **トポロジカル欠陥** は

$$\hat{A}_v |\psi_{\pm}\rangle = |\psi_{\pm}\rangle \quad \hat{B}_p |\psi_{\pm}\rangle = \begin{cases} \pm |\psi_{\pm}\rangle, & p = p_0 \\ |\psi_{\pm}\rangle, & p \neq p_0 \end{cases}$$

を充たす, 元のハミルトニアン \hat{H} の 2 つの固有状態 $|\psi_{\pm}\rangle$ で貼られる 2 次元の部分空間 $\mathbb{C}|\psi_{+}\rangle \oplus \mathbb{C}|\psi_{-}\rangle$ である. 特に **【例 4.2.1】** で得た $1, e, m, f \in \text{Ob}(\text{sk}_0(\text{TC}))$ を用いると $\mathbb{C}|\psi_{+}\rangle = 1, \mathbb{C}|\psi_{-}\rangle = m$ と書ける. 同様に, トラップハミルトニアンを

$$\delta \hat{H}(\{v_1, p_1\}) := \hat{A}_{v_0} + \hat{B}_{p_0} + \hat{A}_{v_0} \hat{B}_{p_0}$$

で定義すると, 対応する **トポロジカル欠陥** は v_0 と p_0 において符号が逆にならねばならないので

$$e \oplus m$$

になる. トラップハミルトニアンを

$$\delta \hat{H}(\{v_1, p_1\}) := \hat{A}_{v_0} + \hat{B}_{p_0} - \hat{A}_{v_0} \hat{B}_{p_0}$$

で定義すると, 対応する **トポロジカル欠陥** は v_0 と p_0 において符号が同じにならねばならないので

$$1 \oplus f$$

になる.

一番最初のトラップハミルトニアンに摂動を加えて $\delta \hat{H}_{\varepsilon}(p_0) := (1 + \varepsilon) \hat{B}_{p_0}$ にしてみよう. このとき, 実現するトポロジカル欠陥は $\varepsilon = 0$ ならば $1 \oplus m$ だが, $\varepsilon < 0$ ならば 1 であり, $\varepsilon > 0$ ならば m である. このように, 直和の形で書けるトポロジカル欠陥は摂動に対して不安定である.

定義^{ph} 4.7: 安定なトポロジカル秩序

$D+1$ 次元のトポロジカル秩序 $C_D \in \text{TO}_D$ が安定 (stable) であるとは、 $\Sigma^{(D)} = \mathbb{R}^D$ のときに基底状態の縮退度が 1 になることを言う。もしくは、同じことだが、 $\Sigma^{(D)} = \mathbb{R}^D$ のときに自明なトポロジカル欠陥 $1_p \in \text{Ob}(\text{sk}_p(C_D))$ が単純対象であることを言う。

4.3.2 モノイダル圏としての構造

$\forall x, y \in \text{Ob}(\text{sk}_0(C_D))$ の代表元は全系の Hilbert 空間の部分空間であるから、そのテンソル積 $x \otimes y \in \text{Ob}(\text{sk}_0(C_D))$ を考えることができる。直観的には、系のスケールを変えて 2 つのトポロジカル欠陥を 1 つのトポロジカル欠陥と見做すと言うことである。トポロジカル欠陥をトポロジカル秩序と見做すと、積層を行っていると考えても良い。このような操作をフュージョン (fusion) と呼ぶ。

命題^{ph} 4.4: $\text{sk}_0(C_D)$ はモノイダル圏

$\text{sk}_0(C_D)$ はモノイダル圏である。

ところが、実はトポロジカル欠陥のフュージョンの厳密な定義には様々な困難が付きまとう。 x, y がそれぞれ互いに異なる点 $\xi, \eta \in \Sigma^{(D)}$ に局在しているとしよう。このとき、代表元の素朴なテンソル積は、トポロジカル欠陥のレベルでのテンソル積 $x \otimes_{(\xi, \eta)} y$ を定める。i.e. $x, y \in \text{Ob}(\text{sk}_0(C_D))$ のテンソル積の定義には、集合 $\{(\xi, \eta) \in \Sigma^{(D)} \mid \xi \neq \eta\}$ だけの不定性存在し得る。定義 4.6 直下の注の方法で $\text{sk}_0(C_D)$ を、点 $\xi \in \Sigma^{(D)}$ におけるトポロジカルな境界条件が成す圏 $\text{sk}_0(C_D)_\xi$ と見做すと、 $\otimes_{(\xi, \eta)}$ は関手

$$\otimes_{(\xi, \eta)}: \text{sk}_0(C_D)_\xi \times \text{sk}_0(C_D)_\eta \longrightarrow \text{sk}_0(C_D)$$

を定める。

ところで、 $(\xi, \eta) \in \text{Conf}(\Sigma^{(D)})$ を連続曲線 $\gamma: [0, 1] \longrightarrow \text{Conf}(\Sigma^{(D)})$ に沿って (ξ', η') まで断熱的に^{*6} 移動することで、いつでも同型写像 $T_{x, y}^\gamma: x \otimes_{(\xi, \eta)} y \longrightarrow x \otimes_{(\xi', \eta')} y$ を作ることができる。この同型写像を $\forall x, y \in \text{Ob}(\text{sk}_0(C_D))$ に関して集めたものは自然変換

$$T^\gamma: \otimes_{(\xi, \eta)} \Longrightarrow \otimes_{(\xi', \eta')}$$

を定める。状況を簡略化するためにしばしば次の仮定をおく：

仮説 4.1:

2 つの互いにホモトピックな道 γ_1, γ_2 に対して、 $T^{\gamma_1} = T^{\gamma_2}$ が成り立つ。

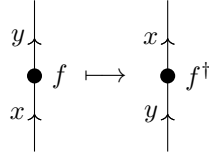
然るに、2 つの互いにホモトピックな道 γ_1, γ_2 をとったとしても、ギャップが有限だと $T^{\gamma_1}, T^{\gamma_2}$ が一致してくれる保証はない。このようなときには、テンソル積 $\otimes_{(\xi, \eta)}$ は高次のホモトピーに依存し、 $\text{sk}_0(C_D)$ の上に A_∞ -圏の構造を与える。

^{*6} i.e. 途中経過のトラップハミルトニアンギャップを閉じずに

このように, $\text{sk}_0(\mathcal{C}_D)$ のテンソル積の構造は大きな不定性を持つ. **トポロジカル秩序のミクロな定義**から出発し, 断熱変形を利用して構成することもできるが, そうするとモノイダル圏の同型類しか定まらない [KL20]. この意味で, $\text{sk}_0(\mathcal{C}_D)$ のモノイダル構造は「ゲージ不変でない」などと言うことがある.

4.3.3 ユニタリティ

$\text{sk}_0(\mathcal{C}_D)$ における射とは, 任意の局所演算子と可換な線形作用素のことであった. 故に, そのエルミート共役が自然に定まる. スtring図式で書く場合は次のようにする:



定義 4.2: ユニタリ構造

\mathcal{C} を \mathbb{C} -線形なアーベル圏とする. \mathcal{C} の**ダガー構造** (dagger structure) とは, 反線形な関手

$$\dagger: \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{C}$$

であって以下を充たすもののこと:

(dag-1) $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $x^\dagger = x$

(dag-2) $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, 及び $\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ に対して $(f^\dagger)^\dagger = f$

さらに, 以下の条件を充たすダガー構造は**ユニタリ構造** (unitary structure) と呼ばれる:

(dag-3) $f^\dagger \circ f = 0 \iff f = 0$

ユニタリ圏 \mathcal{C} の射 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ が**ユニタリ** (unitary) であるとは, $f^\dagger \circ f = \text{Id}_x$ かつ $f \circ f^\dagger = \text{Id}_y$ が成り立つことを言う.

命題 4.2: ユニタリ構造と \mathcal{C}^* 構造

\mathbb{C} -線形なアーベル圏 \mathcal{C} が \mathcal{C}^* -圏であることと, **ユニタリ圏**であることは同値である.

証明 [Mue98, Proposition 2.1, p.5] ■

定義 4.3: ユニタリモノイダル圏

\mathbb{C} -線形なアーベル圏でもあるモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, a, l, r)$ が**ユニタリモノイダル圏**であるとは, **ユニタリ構造** $\dagger: \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{C}$ が**モノイダル関手**であることを言う.

4.3.4 rigidity

非自明なトポロジカル欠陥の単体を，局所演算子によって生成・消滅させることはできない．トポロジカル欠陥の生成・消滅はその世界線を曲げることによって成される（図 4.2）．この過程を， $0+0$ -次元のトポロジカル欠陥を用いてそれぞれ

$$\begin{aligned}\mathrm{coev}_x^L: 1 &\longrightarrow x \otimes x^*, \\ \mathrm{ev}_x^L: x^* \otimes x &\longrightarrow 1\end{aligned}$$

と表現する．ミクロには，このようなプロセスは自明相 $1_0 \in \mathrm{Ob}(\mathrm{sk}_0(C_D))$ にストリング状の演算子を作用させることによって成される．



図 4.2: トポロジカル欠陥 $x \in \mathrm{Ob}(\mathrm{sk}_0(C_D))$ の生成と消滅

命題^{ph} 4.5: $\mathrm{sk}_0(C_D)$ はユニタリフュージョン圏

$\mathrm{sk}_0(C_D)$ はユニタリ多重フュージョン圏である．特に， C_D が安定ならばユニタリフュージョン圏である．

ユニタリ構造と巡回構造の間には密接な関係がある．

補題 4.1: ユニタリモノイダル圏における右双対

ユニタリモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \dagger)$ の対象 $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が左双対 $(x^*, \mathrm{coev}_x^L, \mathrm{ev}_x^L)$ を持つとする．このとき， $(x^*, \mathrm{ev}_x^{L\dagger}, \mathrm{coev}_x^{L\dagger})$ は x の右双対である．

証明 (zig-zag equations) を示す．実際，

$$\begin{aligned}(\mathrm{coev}_x^{L\dagger} \otimes \mathrm{Id}_x) \circ (\mathrm{Id}_x \otimes \mathrm{ev}_x^{L\dagger}) &= (\mathrm{coev}_x^{L\dagger} \otimes \mathrm{Id}_x^\dagger) \circ (\mathrm{Id}_x^\dagger \otimes \mathrm{ev}_x^{L\dagger}) \\ &= (\mathrm{coev}_x^L \otimes \mathrm{Id}_x)^\dagger \circ (\mathrm{Id}_x \otimes \mathrm{ev}_x^L)^\dagger \\ &= ((\mathrm{Id}_x \otimes \mathrm{ev}_x^L) \circ (\mathrm{coev}_x^L \otimes \mathrm{Id}_x))^\dagger \\ &= \mathrm{Id}_x^\dagger = \mathrm{Id}_x, \\ (\mathrm{Id}_{x^*} \otimes \mathrm{coev}_x^{L\dagger}) \circ (\mathrm{ev}_x^{L\dagger} \otimes \mathrm{Id}_{x^*}) &= ((\mathrm{ev}_x^L \otimes \mathrm{Id}_{x^*}) \circ (\mathrm{Id}_{x^*} \otimes \mathrm{coev}_x^L))^\dagger \\ &= \mathrm{Id}_{x^*}\end{aligned}$$

が成り立つ．

■

命題 4.3: ユニタリテンソル圏における球状構造

ユニタリテンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{coev}^L, \text{ev}^L, \dagger)$ における旋回構造

$$p_x := (\text{coev}_x^{L\dagger} \otimes \text{Id}_{x^{**}}) \circ (\text{Id}_x \otimes \text{coev}_{x^*}^L): x \longrightarrow x^{**}$$

が球状構造になる必要十分条件は, $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

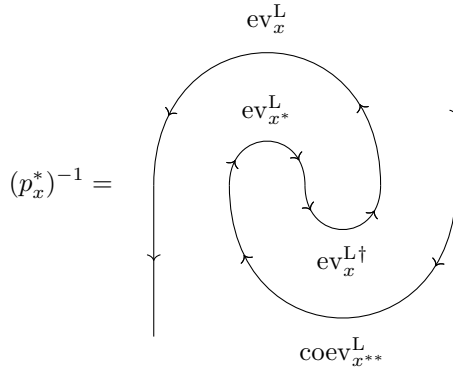
$$\text{coev}_x^{L\dagger} \circ \text{coev}_x^L = \text{ev}_x^L \circ \text{ev}_x^{L\dagger}$$

が成り立つことである.

証明

$$\begin{aligned} \dim_p(x) &= \text{ev}_{x^*}^L \circ (p_x \otimes \text{Id}_{x^*}) \circ \text{coev}_x^L \\ &= \text{coev}_x^{L\dagger} \circ \text{coev}_x^L \end{aligned}$$

ところで,



であるから,

$$\begin{aligned} \dim_p(x^*) &= \text{Tr}^L((p_x^*)^{-1}) & \because \text{補題 F.7-(1)} \\ &= \text{ev}_x^L \circ \text{ev}_x^{L\dagger} \end{aligned}$$

と計算できる. よって

$$\dim_p(x) = \dim_p(x^*) \iff \text{coev}_x^{L\dagger} \circ \text{coev}_x^L = \text{ev}_x^L \circ \text{ev}_x^{L\dagger}$$

■

coevaluation/evaluation を適切に選ぶことで, いつでも命題 4.3 の条件を充たすようにできる. 実際, $\text{coev}_x^L, \text{ev}_x^L$ が $x, x^* \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に関する (co)evaluation ならば, $\forall \lambda \in \mathbb{C}^\times$ に対して $\lambda \text{coev}_x^L, \lambda^{-1} \text{ev}_x^L$ もまた **(zig-zag equations)** を充たすので x, x^* に関する (co)evaluation である. よって

$$|\lambda|^2 = \sqrt{\frac{\text{ev}_x^L \circ \text{ev}_x^{L\dagger}}{\text{coev}_x^{L\dagger} \circ \text{coev}_x^L}}$$

を充たすように λ を選べば良い [Yam04, LEMMA 3.9., p.9].

定義 4.4: balanced なユニタリテンソル圏

ユニタリテンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{coev}^L, \text{ev}^L, \dagger)$ が **balanced** であるとは, $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$\text{coev}_x^{L\dagger} \circ \text{coev}_x^L = \text{ev}_x^L \circ \text{ev}_x^{L\dagger}$$

が成り立つこと. このとき, 命題 4.3 の構成によって \mathcal{C} は**球状圏**になる.

4.3.5 組紐

トポロジカル欠陥 $x, y \in \text{sk}_0(\mathcal{C}_2)$ をとる. x が y の周りを断熱的に1周する過程は同型射 $x \otimes y \xrightarrow{\cong} x \otimes y$ で記述される (図 4.3a). 特に, 反時計方向に交換する過程は**組紐** (braiding) と呼ばれる同型射 $b_{x,y}: x \otimes y \xrightarrow{\cong} y \otimes x$ で記述され, 時計方向の過程はその逆射 (anti-braiding) で与えられる (図 4.3b). 組紐を全ての x, y に関して集めたものは**自然同型** $b: \otimes \Rightarrow \otimes \circ \tau$ を成す. ただし $\tau: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ は成分の互換である.

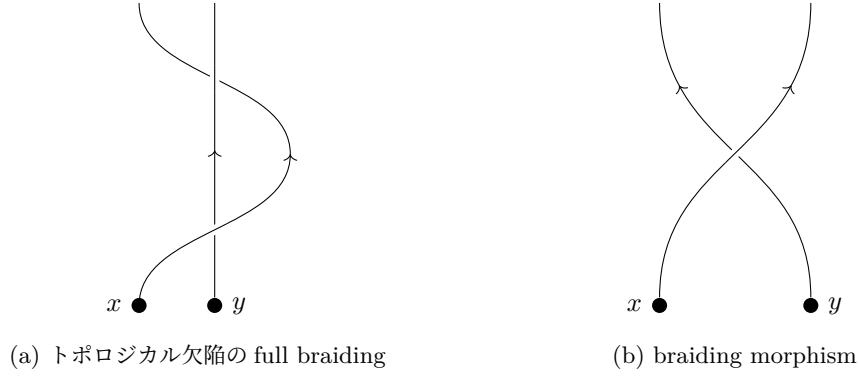


図 4.3: 組紐

命題^{ph} 4.6:

$\text{sk}_0(\mathcal{C}_D)$ は**組紐付き**ユニタリ多重フュージョン圏である. 特に, \mathcal{C}_D が**安定**ならば組紐付きユニタリフュージョン圏である.

4.3.6 リボン構造

4.3.7 UMTC

トポロジカル秩序のアノマリーの有無と \mathcal{C}_D の**組紐構造**の間には重要な関係があると考えられている [KW14]:

予想^{ph} 4.3: remote-detectable

トポロジカル秩序が**アノマリーを持たない**ことと、余次元 2 以上のトポロジカル欠陥が **braiding** によって検出できることは等価である。

簡単のため $D = 2$ として考える。 $D = 2$ 次元における余次元 2 のトポロジカル欠陥とは、 $D - 2 + 1 = 1$ 次元の線状欠陥のことである。非自明なトポロジカル欠陥 $x \in \text{Ob}(\text{sk}_0(\mathcal{C}_D))$ が検出できるというのは、他の全てのトポロジカル欠陥 $y \in \text{Ob}(\text{sk}_0(\mathcal{C}_D))$ を x の周りに 1 周させたときに、非自明な位相を吐き出すような y が少なくとも 1 つは存在するという意味である。

定義 4.5: Müger 中心

$(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R, b)$ を**組紐付きフュージョン圏**とする。 \mathcal{C} の **Müger 中心** (Müger center) とは、

$$\mathfrak{z}_2(\mathcal{C}) := \{ x \in \text{Ob}(\mathcal{C}) \mid \forall y \in \text{Ob}(\mathcal{C}), b_{y,x} \circ b_{x,y} = \text{Id}_{x \otimes y} \}$$

を対象とする \mathcal{C} の充満部分圏 $\mathfrak{z}_2(\mathcal{C})$ のこと。

$\mathfrak{z}_2(\mathcal{C})$ は \mathcal{C} から**組紐付きフュージョン圏**の構造を引き継ぐが、定義から組紐構造は**対称**になる。

定義 4.6: 非退化な組紐付きフュージョン圏

組紐付きフュージョン圏が**非退化** (non-degenerate) であるとは、**Müger 中心**の単純対象が唯一であることを言う。

命題^{ph} 4.7:

安定な $2 + 1$ 次元のトポロジカル秩序 \mathcal{C}_2 が**アノマリーを持たない**ことと、組紐付きユニタリフュージョン圏 $\text{sk}_0(\mathcal{C}_2)$ が**非退化**であることは同値である。

定義 4.7: MTC

モジュラーテンソル圏 (modular tensor category; MTC) とは、**非退化な前モジュラー圏**のこと。

命題^{ph} 4.8: $\text{sk}_0(\mathcal{C}_2)$ は MTC

空間多様体 \mathbb{R}^2 上に置かれた安定かつ**アノマリーを持たない** $2+1$ 次元のトポロジカル秩序 \mathcal{C}_2 が持つ点状のトポロジカル欠陥全体 $\text{sk}_0(\mathcal{C}_2)$ はユニタリ**モジュラーテンソル圏**を成す。

なお、 $2 + 1$ 次元のトポロジカル欠陥 \mathcal{C}_2 が**アノマリーを持たない**ことと、 \mathcal{C}_2 の低エネルギー有効理論である TQFT が**アノマリーを持たない**ことは等価ではない。両者の間には**フレーミングアノマリー** (framing anomaly) の分だけ差異がある [Tur10]。

命題 4.4: MTC の性質

$(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R, b, \theta)$ が **MTC** ならば以下が成り立つ:

- (1) $S_{xy} = S_{yx} = S_{x^*y^*} = \bar{S}_{xy^*}, \quad S_{1x} = S_{x1} = \dim(x)$
- (2) $S_{xy}S_{xz} = \dim(x) \sum_{w \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{yz}^w S_{xw}$
- (3) 行列 C を $C_{xy} = \delta_{x^*,y}$ で定義すると, $S^2 = \dim(\mathcal{C})C$
- (4) **Verlinde formula**

$$\sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \frac{S_{xy}S_{xz}S_{xw^*}}{S_{x1}} = \dim(\mathcal{C})N_{yz}^w$$

- (5) **Gauss sum** を

$$\tau^\pm(\mathcal{C}) := \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \theta_x^{\pm 1} \dim(x)^2$$

で定義すると, $\tau^+(\mathcal{C})\tau^-(\mathcal{C}) = \dim(\mathcal{C})$ が成り立つ.

- (6) **加法的中心電荷** (additive central charge) を

$$e^{2\pi i c(\mathcal{C})/8} := \frac{\tau^+(\mathcal{C})}{\sqrt{\dim(\mathcal{C})}}$$

で定義すると, $c(\mathcal{C}) \in \mathbb{Q}/8\mathbb{Z}$ が成り立つ.

- (7) **T-行列** (T -matrix) を

$$T_{xy} := \theta_x^{-1} \delta_{x,y}$$

で定義すると,

$$S^4 = \dim(\mathcal{C})^2 \mathbf{1}, \quad (ST)^3 = \tau^-(\mathcal{C})S^2$$

が成り立つ. 従って $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ の生成元と関係式

$$\langle \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \mid (\mathfrak{st})^3 = \mathfrak{s}^2, \mathfrak{s}^4 = 1 \rangle$$

を思い出すと, 群準同型

$$\mathfrak{s} \mapsto \frac{S}{\sqrt{\dim(\mathcal{C})}}, \quad \mathfrak{t} \mapsto T$$

は $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ のユニタリな射影表現を与える. 特に, この射影表現が表現になるための障害は $c(\mathcal{C}) \notin 8\mathbb{Z}$ となることである.

証明 (1) まず, **braiding** の存在により $x \otimes y \cong y \otimes x$ であるから, **米田の補題**により $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x \otimes y, z) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y \otimes x, z)$ が言える. よって

$$N_{xy}^z = \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x \otimes y, z) = \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y \otimes x, z) = N_{yx}^z$$

である。従って命題 F.12-(1) より

$$\begin{aligned} S_{xy} &= \theta_x^{-1} \theta_y^{-1} \sum_{z \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{xy}^z \theta_z \dim(z) \\ &= \theta_y^{-1} \theta_x^{-1} \sum_{z \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{yx}^z \theta_z \dim(z) \\ &= S_{yx} \end{aligned}$$

さらに,

$$N_{1x}^z = \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z) = \delta_{xz}$$

であるから

$$\begin{aligned} S_{1x} &= \theta_x^{-1} \sum_{z \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{1x}^z \theta_z \dim(z) \\ &= \dim(x) \end{aligned}$$

が成り立つ。

(2) 命題 F.12-(2)

(3) 命題 F.12-(3) より, $\forall x \in \text{Simp}(\mathcal{C})$ に対して定まる写像 $h_x: \text{Gr}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{C}, y \mapsto S_{xy}/\dim(x)$ は環準同型である。特に MTC は非退化なので S -行列も非退化であり, $h_y = h_z$ であるためには $y = z$ であることが必要十分である。

$y \neq z$ のとき, (1) および補題 F.9-(2) より

$$\begin{aligned} [S^2]_{yz^*} &= \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} S_{yx} S_{xz^*} \\ &= \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} S_{yx} S_{zx^*} \\ &= \dim(y) \dim(z) \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} h_y(x) h_z(x^*) \\ &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。一方で, $y = z$ のときは (1), (2) を使って

$$\begin{aligned} [S^2]_{yy^*} &= \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} S_{xy} S_{xy^*} \\ &= \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \dim(x) \sum_{w \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{yy^*}^w S_{xw} \\ &= \sum_{w \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{yy^*}^w \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \dim(x) S_{xw} \end{aligned}$$

と計算できる。ここで, 写像 $\dim: \text{Gr}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto \dim(x)$ は環準同型であるから, 補題 F.9-(2) より

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \dim(x) S_{xw} &= \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \dim(x^*) S_{wx} \\ &= \dim(w) \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \dim(x^*) h_w(x) \end{aligned}$$

$$= \delta_{w,1} \dim(\mathcal{C}) \quad (4.3.1)$$

が成り立つ。よって

$$[S^2]_{yy^*} = N_{yy^*}^1 \dim \mathcal{C} = \dim(\mathcal{C})$$

が分かった。

(4) (2), (3) より

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \frac{S_{xy} S_{xz} S_{xw^*}}{S_{x1}} &= \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \frac{S_{xw^*}}{S_{x1}} \dim(x) \sum_{u \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{yz}^u S_{xu} \\ &= \sum_{u \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{yz}^u \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} S_{ux} S_{xw^*} \\ &= \sum_{u \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{yz}^u [S^2]_{uw^*} \\ &= \dim(\mathcal{C}) N_{yz}^w \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} \tau^+(\mathcal{C}) \tau^-(\mathcal{C}) &= \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \theta_x^{-1} \dim(x) \sum_{y \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \dim(x) \dim(y) \theta_y \dim(y) \\ &= \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \theta_x^{-1} \dim(x) \sum_{y \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \dim(y^* \otimes x) \theta_y \dim(y) \\ &= \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \theta_x^{-1} \dim(x) \sum_{y \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \sum_{z \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{y^*x}^z \dim(z) \theta_y \dim(y) \\ &= \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \dim(x) \sum_{z \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \dim(z) \theta_z \left(\theta_x^{-1} \theta_z^{-1} \sum_{y \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{xz}^y \theta_y \dim(y) \right) \\ &= \sum_{z \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \dim(z) \theta_z \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \dim(x) S_{xz} \quad \because \text{命題 F.12-(1)} \\ &= \sum_{z \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \dim(z) \theta_z \delta_{z,1} \dim(\mathcal{C}) \quad \because (4.3.1) \\ &= \dim(\mathcal{C}) \end{aligned}$$

(6)

(7) $S^4 = \dim(\mathcal{C})^2 \mathbf{1}$ は (3) より従う。(2) より,

$$\begin{aligned} [STS]_{xy} &= \sum_{z \in \text{Simp}(\mathcal{C})} S_{xz} \theta_z^{-1} S_{zy} \\ &= \sum_{z \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \theta_z^{-1} S_{zx} S_{zy} \\ &= \sum_{w \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{xy}^w \sum_{z \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \theta_z^{-1} \dim(z) S_{zw} \end{aligned}$$

ところで,

$$\tau^+(\mathcal{C}) \sum_{z \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \theta_z^{-1} \dim(z) S_{z^*w}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \theta_x \dim(x) \sum_{z \in \text{Simp}(\mathcal{C})} S_{z^*w} \theta_z^{-1} \dim(x^* \otimes z) \\
&= \sum_{z \in \text{Simp}(\mathcal{C})} S_{z^*w} \theta_z^{-1} \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \theta_x \dim(x) \sum_{y \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{x^*z}^y \dim(y) \\
&= \sum_{z \in \text{Simp}(\mathcal{C})} S_{z^*w} \sum_{y \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \theta_y \dim(y) \left(\theta_z^{-1} \theta_y^{-1} \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{zy}^x \theta_x \dim(x) \right) \\
&= \sum_{z \in \text{Simp}(\mathcal{C})} S_{z^*w} \sum_{y \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \theta_y \dim(y) S_{zy} \\
&= \sum_{y \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \theta_y \dim(y) \sum_{z \in \text{Simp}(\mathcal{C})} S_{yz} S_{zw^*} \\
&= \dim(\mathcal{C}) \theta_w \dim(w) & \because (3) \\
&= \tau^+(\mathcal{C}) \tau^-(\mathcal{C}) \theta_w \dim(w) & \because (5)
\end{aligned}$$

であるから

$$\sum_{z \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \theta_z^{-1} \dim(z) S_{zw} = \theta_w \dim(w) \tau^-(\mathcal{C})$$

が分かる．故に

$$\begin{aligned}
[STS]_{xy} &= \tau^-(\mathcal{C}) \sum_{w \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{xy}^w \theta_w \dim(w) \\
&= \tau^-(\mathcal{C}) \theta_x \theta_y S_{xy} & \because \text{命題 F.12-(1)} \\
&= \tau^-(\mathcal{C}) [T^{-1}ST^{-1}]_{xy}
\end{aligned}$$

と計算できた．ここから $(ST)^3 = ST(STST) = ST(\tau^-(\mathcal{C})T^{-1}S) = \tau^-(\mathcal{C})S^2$ として所望の式を得る．

■

4.4 Levin-Wen 模型

付録 A

コホモロジー

R を環とする.

定義 A.1: 良い被覆

位相空間 X の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ が**良い被覆** (good cover) であるとは, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Lambda$ に対して

$$U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_n} \neq \emptyset \implies U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_n} \text{ は可縮}$$

が成り立つこと.

以下では $U_{\alpha_1 \dots \alpha_n} := U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_n}$ と略記する.

A.1 導来関手

A.2 層係数コホモロジー

位相空間 X を 1 つ固定する. X 上の**開集合の圏** \mathbb{O}_X を,

- X の開集合を対象とする
- X の任意の開集合 $U, V \subset X$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{O}_X}(U, V) := \begin{cases} \{ \text{包含写像 } U \hookrightarrow V \}, & U \subset V \\ \emptyset, & U \not\subset V \end{cases}$$

と定義する.

定義 A.2: 前層

位相空間 X 上の、小圏 \mathcal{S} に値をとる前層 (presheaf) とは、関手

$$P: \mathbb{O}_X^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{S}$$

のこと^a.

^a 最も一般的には、関手 $P: \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{S}$ のことを圏 \mathcal{C} 上の \mathcal{S} に値をとる前層と呼ぶ <https://ncatlab.org/nlab/show/presheaf>

位相空間 X 上の、圏 \mathcal{S} に値をとる前層の圏 $\mathbf{PSh}(X, \mathcal{S})$ とは、

- \mathcal{S} に値をとる前層を対象とする.
- \mathcal{S} に値をとる前層 $P, Q: \mathbb{O}_X^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{S}$ に対して、自然変換

$$F: P \Longrightarrow Q$$

を射とする

圏のこと.

【例 A.2.1】定数前層

圏 \mathcal{S} の対象 A に対して定まる前層

$$\begin{aligned} A_X: \mathbb{O}_X^{\text{op}} &\longrightarrow \mathcal{S}, \\ U &\longmapsto A, \\ (U \hookrightarrow V) &\longmapsto \text{id}_A \end{aligned}$$

のことを定数前層 (constant presheaf) と呼ぶ.

【例 A.2.2】微分形式のなす前層

X を C^∞ 多様体とする. このとき

$$\begin{aligned} C_X^\infty: \mathbb{O}_X^{\text{op}} &\longrightarrow \mathbf{R}\text{-}\mathbf{Mod}, \\ U &\longmapsto C^\infty(U), \\ (\iota \circ U \hookrightarrow V) &\longmapsto (f \longmapsto f \circ \iota) \end{aligned}$$

なる対応は前層である. 同様に, $\forall q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$\begin{aligned} \Omega_X^q: \mathbb{O}_X^{\text{op}} &\longrightarrow \mathbf{R}\text{-}\mathbf{Mod}, \\ U &\longmapsto \Omega^q(U), \\ (\iota: U \hookrightarrow V) &\longmapsto (\omega \longmapsto \iota^* \omega) \end{aligned}$$

なる対応は前層である.

定義 A.3: 層

前層 $P \in \text{Ob}(\text{PSh}(X, \mathcal{S}))$ が層 (sheaf) であるとは,

- X の任意の開集合 $U \subset X$ および U の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$
- 任意の族 $\{x_\alpha \in P(U_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ であって, $\forall \alpha, \beta \in \Lambda$ に対して

$$P(U_\alpha \cap U_\beta \hookrightarrow U_\alpha)(x_\alpha) = P(U_\alpha \cap U_\beta \hookrightarrow U_\beta)(x_\beta)$$

を充たすもの

に対して, $x \in P(U)$ が一意的存在して

$$\forall \alpha \in \Lambda, P(U_\alpha \hookrightarrow U)(x) = x_\alpha$$

を充たすこと.

位相空間 X 上の, 圏 \mathcal{S} に値をとる層の圏 $\text{Sh}(X, \mathcal{S})$ とは,

- \mathcal{S} に値をとる層を対象とする.
- \mathcal{S} に値をとる層 $P, Q: \mathbb{O}_X^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{S}$ に対して, 自然変換

$$F: P \Longrightarrow Q$$

を射とする

圏のこと. \mathcal{S} がアーベル圏のとき, 圏 $\text{Sh}(X, \mathcal{S})$ もまたアーベル圏である [志甫 16, p.298, 命題 4.30].

X を位相空間とする. 加法的関手

$$A: \text{Sh}(X, R\text{-Mod}) \rightarrow R\text{-Mod} \quad (\text{A.2.1})$$

を,

- 任意の層 $P \in \text{Ob}(\text{Sh}(X, R\text{-Mod}))$ に対して R -加群 $P(X) \in \text{Ob}(R\text{-Mod})$ を対応付ける
- 層 $P, Q \in \text{Ob}(\text{Sh}(X, R\text{-Mod}))$ の間の任意の自然変換 $F: P \Longrightarrow Q$ に対して, R -加群の準同型 $F_X: P(X) \rightarrow Q(X)$ を対応付ける

関手として定義する.

定義 A.4: 層係数コホモロジー

加法的関手 (A.2.1) の右導来関手を $(H^n(X, -))_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ と書く. 層 $P \in \text{Ob}(\text{Sh}(X, R\text{-Mod}))$ を係数とする位相空間 X の層係数コホモロジー (sheaf cohomology) とは,

$$H^n(X, P)$$

のこと.

A.3 Čech コホモロジー

位相空間 X および前層 $P \in \text{Ob}(\text{PSh}(X, R\text{-Mod}))$ を与える.

X の開被覆 $\mathcal{U} := \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ をとる. $\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$\check{C}^n(\mathcal{U}, P) := \prod_{(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \Lambda^{n+1}} P(U_{\alpha_0 \dots \alpha_n})$$

と定義し,

$$\begin{aligned} \delta^{n+1}: \check{C}^n(\mathcal{U}, P) &\longrightarrow \check{C}^{n+1}(\mathcal{U}, P), \\ (x_{\alpha_0 \dots \alpha_n})_{(\alpha_0, \dots, \alpha_n)} &\longmapsto \left(\sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j P(U_{\alpha_0 \dots \alpha_{n+1}} \hookrightarrow U_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_j \dots \alpha_{n+1}})(x_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_j \dots \alpha_{n+1}}) \right)_{(\alpha_0, \dots, \alpha_{n+1})} \end{aligned} \quad (\text{A.3.1})$$

と定義すると $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$ であるから, $R\text{-Mod}$ の図式

$$\dots \xrightarrow{\delta^{n-1}} \check{C}^{n-1}(\mathcal{U}, P) \xrightarrow{\delta^n} \check{C}^n(\mathcal{U}, P) \xrightarrow{\delta^{n+1}} \check{C}^{n+1}(\mathcal{U}, P) \xrightarrow{\delta^{n+2}} \dots$$

はコチェイン複体である. この複体を **Čech 複体** と呼ぶ.

定義 A.5: Čech コホモロジー

Čech 複体 $(\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, P), \delta^\bullet)$ のコホモロジーのことを X の開被覆 \mathcal{U} に関する P 係数 **Čech コホモロジー** と呼び, $\check{H}^\bullet(\mathcal{U}, P)$ と書く.

【例 A.3.1】 Čech-de Rham 複体

X を C^∞ 多様体とし, X の開被覆 \mathcal{U} をとる. 【例 A.2.2】において導入した前層 $\Omega_X^q: \mathbb{O}_X^{\text{op}} \rightarrow R\text{-Mod}$ について, 複体 $(\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \Omega_X^q), \delta^\bullet)$ のことを **Čech-de Rham 複体** と呼ぶ. $\delta: \check{C}^n(\mathcal{U}, \Omega_X^l)$ の定義 (A.3.1) に $(-1)^l$ をつけることで, これは二重複体の構造^aを持つ:

$$\begin{array}{ccccccc} \check{C}^0(\mathcal{U}, \Omega_X^0) & \xrightarrow{d} & \check{C}^0(\mathcal{U}, \Omega_X^1) & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & \check{C}^0(\mathcal{U}, \Omega_X^{\dim X}) \longrightarrow 0 \\ \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & & & \downarrow \delta \\ \check{C}^1(\mathcal{U}, \Omega_X^0) & \xrightarrow{d} & \check{C}^1(\mathcal{U}, \Omega_X^1) & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & \check{C}^1(\mathcal{U}, \Omega_X^{\dim X}) \longrightarrow 0 \\ \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & & & \downarrow \delta \\ \check{C}^2(\mathcal{U}, \Omega_X^0) & \xrightarrow{d} & \check{C}^2(\mathcal{U}, \Omega_X^1) & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & \check{C}^2(\mathcal{U}, \Omega_X^{\dim X}) \longrightarrow 0 \\ \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & & & \downarrow \delta \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \end{array}$$

^a $(-1)^l$ の因子は $d\delta + \delta d = 0$ を成り立たせるために必要である.

命題 A.1: 良い被覆に関する Čech コホモロジー

定数前層 $\mathbb{R}_X: \mathcal{O}_X \rightarrow \mathbb{R}\text{-Mod}$ について, もし \mathcal{U} が良い被覆ならば

$$H_{\text{dR}}^\bullet(X; \mathbb{R}) \cong \check{H}^\bullet(\mathcal{U}; \mathbb{R}_X)$$

が成り立つ.

証明

A.4 Deligne-Beilinson コホモロジー

一般論には立ち入らず, [BGST05, p.21, Appendix A] を参考に, 本文中で必要になる最小限だけ Deligne-Beilinson コホモロジーを導入する.

C^∞ 多様体 X とその開被覆 \mathcal{U} を一つ固定する. まず, Čech-de Rham 複体の de Rham 複体成分を次数 -1 に拡張する:

$$\check{C}^m(\mathcal{U}, \Omega_X^{-1}) := \check{C}^m(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_X)$$

ただし \mathbb{Z}_X は圏 $\mathbb{R}\text{-Mod}$ の定数前層である. そして

$$\begin{aligned} d_{-1}: \check{C}^m(\mathcal{U}, \Omega_X^{-1}) &\rightarrow \check{C}^m(\mathcal{U}, \Omega_X^0), \\ (c_{\alpha_0 \dots \alpha_n})_{(\alpha_0, \dots, \alpha_n)} &\mapsto ((x \mapsto c_{\alpha_0 \dots \alpha_n}))_{(\alpha_0, \dots, \alpha_n)} \end{aligned}$$

と定義することで, 二重複体

$$\begin{array}{ccccccc} \check{C}^0(\mathcal{U}, \Omega_X^{-1}) & \xrightarrow{d_{-1}} & \check{C}^0(\mathcal{U}, \Omega_X^0) & \xrightarrow{d} & \check{C}^0(\mathcal{U}, \Omega_X^1) & \xrightarrow{d} & \dots \xrightarrow{d} \check{C}^0(\mathcal{U}, \Omega_X^{\dim X}) \longrightarrow 0 \\ \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta \\ \check{C}^1(\mathcal{U}, \Omega_X^{-1}) & \xrightarrow{d_{-1}} & \check{C}^1(\mathcal{U}, \Omega_X^0) & \xrightarrow{d} & \check{C}^1(\mathcal{U}, \Omega_X^1) & \xrightarrow{d} & \dots \xrightarrow{d} \check{C}^1(\mathcal{U}, \Omega_X^{\dim X}) \longrightarrow 0 \\ \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta \\ \check{C}^2(\mathcal{U}, \Omega_X^{-1}) & \xrightarrow{d_{-1}} & \check{C}^2(\mathcal{U}, \Omega_X^0) & \xrightarrow{d} & \check{C}^2(\mathcal{U}, \Omega_X^1) & \xrightarrow{d} & \dots \xrightarrow{d} \check{C}^2(\mathcal{U}, \Omega_X^{\dim X}) \longrightarrow 0 \\ \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

を得る. ここから, ある $0 \leq p \leq \dim X + 1$ に対して

$$C_{D_p}^q := \begin{cases} \bigoplus_{n+m=q-1} \check{C}^n(\mathcal{U}, \Omega_X^m), & 0 \leq q \leq p \\ \bigoplus_{\substack{n+m=p-1 \\ m \leq p-1}} \check{C}^n(\mathcal{U}, \Omega_X^m), & 0 \leq q > p \end{cases}$$

と定義し $D := d + (-1)^{\deg} \delta$ とおくと, 図式

$$\dots \xrightarrow{D} C_{D_p}^q \xrightarrow{D} C_{D_p}^{q+1} \xrightarrow{D} \dots$$

はコチェイン複体になる.

定義 A.6: Deligne-Beilinson コホモロジー

$0 \leq p \leq \dim X + 1$ を与える.

上述の複体 $(C_{Dp}^\bullet, \mathcal{U}, D)$ を開被覆 \mathcal{U} に関する **Deligne-Beilinson 複体**, そのコホモロジーを **Deligne-Beilinson コホモロジー**と呼ぶ. 記号として $H_D^\bullet(C_{Dp}, \mathcal{U})$ と書く.

標準的射影 $\pi^q: C_{Dp}^q \rightarrow \check{C}^q(\mathcal{U}, \Omega_X^{-1})$ はチェイン写像

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{D} & C_{Dp}^q & \xrightarrow{D} & C_{Dp}^{q+1} & \xrightarrow{D} & \cdots \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi & & \\ \cdots & \xrightarrow{\delta} & C_{Dp}^q & \xrightarrow{\delta} & C_{Dp}^{q+1} & \xrightarrow{\delta} & \cdots \end{array}$$

となるので, 誘導準同型

$$H_D^q(C_{Dp}, \mathcal{U}) \rightarrow \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_X)$$

がある.

命題 A.2: Deligne-Beilinson コホモロジーと Čech コホモロジー

$0 \leq p \leq \dim X + 1$ を与える.

(1) $q < p$ ならば

$$H_D^q(C_{Dp}, \mathcal{U}) \cong \check{H}^{q-1}(\mathcal{U}, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$$

(2) $q > p$ ならば

$$H_D^q(C_{Dp}, \mathcal{U}) \cong \check{H}^{q-1}(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$$

(3) $q = p$ ならば, \mathbb{Z} 加群の完全列

$$0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{closed global } (p-1)\text{-forms} \\ \text{with integral periods} \end{array} \right\} \rightarrow \Omega^{p-1}(X; \mathbb{R}) \rightarrow H_D^p(C_{Dp}, \mathcal{U}) \rightarrow \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) \quad (\text{exact})$$

が成り立つ.

証明 (1)

■

命題 A.3: 良い被覆に関する Deligne-Beilinson コホモロジー

$H_D^\bullet(C_{Dp}, \mathcal{U})$ は良い被覆 \mathcal{U} の取り方によらない.

証明

■

付録 B

ベクトル場の話

C^∞ 多様体 M 上の C^∞ 関数全体の集合のことを $C^\infty(M)$ と書く.

C^∞ 多様体の 1 つの極大 C^∞ アトラスを C^∞ 構造 (smooth structure)^{*1} と呼ぶことにする. 集合 M の上に C^∞ 構造を与えるには, 例えば次のようにすればよい [Lee12, p.21, Lemma 1.35]:

補題 B.1: C^∞ 構造の構成

- 集合 M
- M の部分集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$
- 写像の族 $\{\varphi_\lambda: U_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^n\}_{\lambda \in \Lambda}$

の 3 つ組であって以下の条件を充たすものを与える:

(DS-1) $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して $\varphi_\lambda(U_\lambda) \subset \mathbb{R}^n$ は \mathbb{R}^n の開集合^aであり, $\varphi_\lambda: U_\lambda \rightarrow \varphi_\lambda(U_\lambda)$ は全単射である.

(DS-2) $\forall \alpha, \beta \in \Lambda$ に対して $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta), \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$ は \mathbb{R}^n の開集合である.

(DS-3) $\forall \alpha, \beta \in \Lambda$ に対して, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ならば $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ は C^∞ 級である.

(DS-4) 添字集合 Λ の可算濃度の部分集合 $I \subset \Lambda$ が存在して $\{U_i\}_{i \in I}$ が M の被覆になる.

(DS-5) $p, q \in M$ が $p \neq q$ ならば, ある $\lambda \in \Lambda$ が存在して $p, q \in U_\lambda$ を充たすか, またはある $\alpha, \beta \in \Lambda$ が存在して $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ かつ $p \in U_\alpha, q \in U_\beta$ を充たす.

このとき, M の C^∞ 構造であって, $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ を C^∞ チャートとして持つものが一意的に存在する.

^a いつものように, \mathbb{R}^n には Euclid 位相を入れる.

証明 位相の構成

\mathbb{R}^n の Euclid 位相を $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$ と表記する. 集合

$$\mathcal{B} := \{ \varphi_\lambda^{-1}(U) \mid \lambda \in \Lambda, U \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n} \}$$

が開基の公理 (B1), (B2) を充たすことを確認する.

^{*1} 微分構造 (differential structure) ということもある.

(B1) (DS-4) より明らか.

(B2) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ を任意にとる. このとき \mathcal{B} の定義から, ある $\alpha, \beta \in \Lambda$ および $U, V \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$ が存在して $B_1 = \varphi_\alpha^{-1}(U), B_2 = \varphi_\beta^{-1}(V)$ と書ける. 故に

$$\begin{aligned} B_1 \cap B_2 &= \varphi_\alpha^{-1}(U) \cap \varphi_\beta^{-1}(V) \\ &= \varphi_\alpha^{-1}(U \cap (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(V)) \\ &= \varphi_\alpha^{-1}(U \cap (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1}(V)) \end{aligned}$$

が成り立つが, (DS-3) より $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ は連続なので $(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1}(V) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$ である. よって

$$B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$$

であり, (B2) が示された.

従って \mathcal{B} を開基とする M の位相 \mathcal{O}_M が存在する.

φ_λ が同相写像であること

$\forall \lambda \in \Lambda$ を1つ固定する. \mathcal{O}_M の構成と補題??-(4) より, $\forall V \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$ に対して $\varphi_\lambda^{-1}(V \cap \varphi_\lambda(U_\lambda)) = \varphi_\lambda^{-1}(V) \cap U_\lambda$ は U_λ の開集合である*2. i.e. $\varphi_\lambda: U_\lambda \rightarrow \varphi_\lambda(U_\lambda)$ は連続である.

$\forall B \in \mathcal{B}$ をとる. このとき $\varphi_\lambda(B \cap U_\lambda) = \varphi_\lambda(B) \cap \varphi_\lambda(U_\lambda)$ が成り立つが, \mathcal{O}_M の定義より $\varphi_\lambda(B) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$ なので $\varphi_\lambda(B \cap U_\lambda)$ は $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ の開集合である. 相対位相の定義と de Morgan 則より U_λ の任意の開集合は $B \cap U_\lambda$ の形をした部分集合の和集合で書けるので, 位相空間の公理から φ_λ は U_λ の開集合を $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ の開集合に移す. i.e. $\varphi_\lambda: U_\lambda \rightarrow \varphi_\lambda(U_\lambda)$ は連続な全単射でかつ開写像であるから同相写像である.

Hausdorff 性

位相空間 (M, \mathcal{O}_M) が Hausdorff 空間であることを示す. M の異なる2点 p, q を勝手にとる. このとき (DS-5) より,

- ある $\lambda \in \Lambda$ が存在して $p, q \in U_\lambda$ を充たす
- ある $\alpha, \beta \in \Lambda$ が存在して $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ かつ $p \in U_\alpha, q \in U_\beta$ を充たす

のいずれかである. 後者ならば証明することは何もない.

前者の場合を考える. このとき $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ は \mathbb{R}^n の開集合だから, \mathbb{R}^n の Hausdorff 性から $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ も Hausdorff 空間であり, 従って $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ の開集合 $U, V \subset \varphi_\lambda(U_\lambda)$ であって $\varphi_\lambda(p) \in U$ かつ $\varphi_\lambda(q) \in V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ を充たすものが存在する. このとき $\varphi_\lambda^{-1}(U) \cap \varphi_\lambda^{-1}(V) = \varphi_\lambda^{-1}(U \cap V) = \emptyset$ で, かつ \mathcal{O}_M の構成から $\varphi_\lambda^{-1}(U), \varphi_\lambda^{-1}(V) \subset M$ はどちらも M の開集合である. そのうえ $p \in \varphi_\lambda^{-1}(U)$ かつ $q \in \varphi_\lambda^{-1}(V)$ が成り立つので M は Hausdorff 空間である.

第2可算性

\mathbb{R}^n は第2可算なので, $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ も第2可算である. $\varphi_\lambda: U_\lambda \rightarrow \varphi_\lambda(U_\lambda)$ は同相写像なので, U_λ も第2可算である. 従って (DS-4) から M も第2可算である.

以上の考察から, 位相空間 (M, \mathcal{O}_M) が位相多様体であることが示された. さらに (DS-3) より $\mathcal{A} := \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ は (M, \mathcal{O}_M) の C^∞ アトラスであることもわかる.

■

*2 U_λ には (M, \mathcal{O}_M) からの相対位相が, $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ には $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ からの相対位相が入っている.

補題 B.1 とほとんど同じ手順で境界付き多様体を作ることできる.

$$\mathbb{H}^n := \{ (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n \geq 0 \}$$

とおく.

補題 B.2: 境界付き多様体の C^∞ 構造の構成

- 集合 M
- M の部分集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$
- 写像の族 $\{\varphi_\lambda: U_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ or } \mathbb{H}^n\}_{\lambda \in \Lambda}$

の 3 つ組であって以下の条件を充たすものを与える:

(BDS-1) $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して $\varphi_\lambda(U_\lambda) \subset \mathbb{R}^n$ (resp. \mathbb{H}^n) は \mathbb{R}^n (resp. \mathbb{H}^n) の開集合^aであり, $\varphi_\lambda: U_\lambda \rightarrow \varphi_\lambda(U_\lambda)$ は全単射である.

(BDS-2) $\forall \alpha, \beta \in \Lambda$ に対して $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta), \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$ (resp. \mathbb{H}^n) は \mathbb{R}^n (resp. \mathbb{H}^n) の開集合である.

(BDS-3) $\forall \alpha, \beta \in \Lambda$ に対して, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ならば $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ は C^∞ 級である.

(BDS-4) 添字集合 Λ の可算濃度の部分集合 $I \subset \Lambda$ が存在して $\{U_i\}_{i \in I}$ が M の被覆になる.

(BDS-5) $p, q \in M$ が $p \neq q$ ならば, ある $\lambda \in \Lambda$ が存在して $p, q \in U_\lambda$ を充たすか, またはある $\alpha, \beta \in \Lambda$ が存在して $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ かつ $p \in U_\alpha, q \in U_\beta$ を充たす.

このとき, M の C^∞ 構造であって, $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ を C^∞ チャートとして持つものが一意に存在する.

^a いつものように, \mathbb{R}^n には Euclid 位相を入れ, $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^n$ には \mathbb{R}^n からの相対位相を入れる.

証明 補題 B.1 の証明において「 \mathbb{R}^n 」を「 \mathbb{R}^n または \mathbb{H}^n 」に置き換えれば良い. ■

B.1 接束

境界あり/なし C^∞ 多様体 M を与える. M の接束 (tangent bundle) とは集合

$$TM := \coprod_{p \in M} T_p M$$

のことである. TM の任意の元は $p \in M, v \in T_p M$ を用いて (p, v) と書かれる. このことから, 射影 (projection) と呼ばれる全射

$$\pi: TM \rightarrow M, (p, v) \mapsto p$$

が自然に定義できる.

命題 B.1: 接束の C^∞ 構造

任意の n 次元境界あり/なし C^∞ 多様体 M に対して, TM は π が C^∞ 級となるような自然な $2n$ 次元の C^∞ 構造を持つ.

証明 まず M が境界を持たないとする. M の C^∞ 構造を $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ と書く. 写像の族

$$\left\{ \tilde{\varphi}_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}, \left(p, v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_p \right) \longmapsto (x^1(p), \dots, x^n(p), v^1, \dots, v^n) \right\}_{\alpha \in \Lambda}$$

を定める. ただし (x^μ) はチャート $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ の座標関数である. このとき

- 集合 TM
- TM の部分集合族 $\{\pi^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$
- 写像の族 $\{\tilde{\varphi}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$

の 3 つ組が補題 B.1 の 5 条件を充たすことを確認する.

(DS-1) $\forall \alpha \in \Lambda$ に対して $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ は M の C^∞ チャートなので $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ は \mathbb{R}^n の開集合である.

ゆえに積位相の定義から $\tilde{\varphi}_\alpha(\pi^{-1}(U_\alpha)) = \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ は \mathbb{R}^{2n} の開集合. また, 写像

$$\tilde{\varphi}_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n, \left(p, v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_p \right) \longmapsto (x^1(p), \dots, x^n(p), v^1, \dots, v^n)$$

は写像

$$\tilde{\varphi}_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha), (x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n) \longmapsto \left(\varphi_\alpha^{-1}(x^1, \dots, x^n), v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_{\varphi_\alpha^{-1}(x^1, \dots, x^n)} \right)$$

を逆写像に持つので全単射である.

(DS-2, 3) $\forall \alpha, \beta \in \Lambda$ に対して

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_\alpha(\pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta)) &= \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n, \\ \tilde{\varphi}_\beta(\pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta)) &= \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

はどちらも \mathbb{R}^{2n} の開集合である. さらに自然基底の変換則より

$$\begin{aligned} &\tilde{\varphi}_\beta \circ \tilde{\varphi}_\alpha^{-1}(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n) \\ &= \left(y^1(x), \dots, y^n(x), \frac{\partial y^1}{\partial x^\mu}(x) v^\mu, \dots, \frac{\partial y^n}{\partial x^\mu}(x) v^\mu \right) \end{aligned}$$

なので $\tilde{\varphi}_\beta \circ \tilde{\varphi}_\alpha^{-1}$ は C^∞ 級である. ただしチャート $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)$ の座標関数をそれぞれ $(x^\mu), (y^\mu)$ と書き, $x := \varphi_\alpha^{-1}(x^1, \dots, x^n)$ とおいた.

(DS-4) $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ は M のアトラスなので, 高々可算濃度の部分集合 $I \subset \Lambda$ が存在して $\{U_i\}_{i \in I}$ が M の被覆になる. このとき

$$TM = \coprod_{p \in \bigcup_{i \in I} U_i} T_p M = \bigcup_{i \in I} \coprod_{p \in U_i} T_p M = \bigcup_{i \in I} \pi^{-1}(U_i)$$

が言える.

(DS-5) TM の任意の異なる 2 点 $(p, v), (q, w)$ をとる. $p = q$ ならば, $p \in U_\alpha$ を充たす $\alpha \in \Lambda$ に対して^{*3} $(p, v), (q, w) \in \pi^{-1}(\{p\}) \subset \pi^{-1}(U_\alpha)$ が成り立つ. $p \neq q$ ならば, $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ かつ $p \in U_\alpha, q \in U_\beta$ を充たすような $\alpha, \beta \in \Lambda$ が存在する^{*4}. このとき, TM の定義から明らかに $\pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta) = \emptyset$ であつ $(p, v) \in \pi^{-1}(U_\alpha), (q, w) \in \pi^{-1}(U_\beta)$ が成り立つ.

次に M が境界を持つとする. M の C^∞ 構造を $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ と書き, C^∞ チャート $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ のうち $\varphi_\alpha(U_\alpha) \approx \mathbb{R}^n$ であるものを**内部チャート**, $\varphi_\alpha(U_\alpha) \approx \mathbb{H}^n$ であるものを**境界チャート**と呼ぶ. 内部チャートに関しては M が境界を持たない場合と同様に $\tilde{\varphi}_\alpha$ を定義し, 境界チャートに関しては

$$\tilde{\varphi}_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{H}^n = \mathbb{H}^{2n}, \left(p, v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_p \right) \longmapsto (v^1, \dots, v^n, x^1(p), \dots, x^n(p))$$

と定義する^{*5}ことで得られる

- 集合 TM
- TM の部分集合族 $\{\pi^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$
- 写像の族 $\{\tilde{\varphi}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$

の 3 つ組が補題 B.2 の 5 条件を充たすことを示せば良いが, 議論は M が境界を持たない場合と同様である. ■

B.2 ベクトル場の定義

定義 B.1: ベクトル場

境界あり/なし C^∞ 多様体 M を与える.

- M 上の**ベクトル場** (vector field) とは, 接束 TM の切断のことを言う. i.e. 連続写像^a $X: M \longrightarrow TM$ であつて $\pi \circ X = \text{id}_M$ を充たすもののこと.
- M 上の C^∞ **ベクトル場**とは, M 上のベクトル場 X であつて, TM に命題 B.1 の C^∞ 構造を入れたときに C^∞ 写像となるもののこと.
- M 上のベクトル場 X の**台** (support) とは, 閉集合^b

$$\text{supp } X := \overline{\{p \in M \mid X_p \neq 0\}}$$

のこと. ただし $\bar{\cdot}$ は閉包を取ることを意味する. 特に $\text{supp } X$ がコンパクト集合であるとき, X は**コンパクト台を持つ** (compactly supported) と言う.

- M の任意のベクトル場 X および任意のチャート $(U, (x^\mu))$ を与える. このとき n 個の関数 $X^\mu: U \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$X_p =: X^\mu(p) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_p$$

^{*3} $\{U_\alpha\}$ は M の開被覆なので, このような α は必ず存在する.

^{*4} M の極大アトラスをとっているため.

^{*5} $p \in \partial M$ においても $T_p M \cong T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n$ (φ は境界チャートの局所座標) が成り立つことが証明できる.

によって定義し、 X の成分関数 (component function) と呼ぶ。

^a TM の位相は命題 B.1 で構成したものを採用する。

^b ここで言う 0 とは、厳密には $(p, 0) \in TM$ のことである。一点集合 $\{(p, 0)\}$ はコンパクトだが、 TM は命題 B.1 より Hausdorff 空間なので $\{(p, 0)\}$ は閉集合でもある。故に $TM \setminus \{(p, 0)\}$ は開集合であり、 $X: M \rightarrow TM$ は連続写像なので $X^{-1}(TM \setminus \{0\})$ も開集合である。これの閉包を取ることで $\text{supp } X$ が得られる。

境界あり/なし C^∞ 多様体 M 上の C^∞ ベクトル場全体の集合を $\mathfrak{X}(M)$ と書く。



ベクトル場 $X: M \rightarrow TM$ による点 $p \in M$ の像を $X(p)$ と書く代わりに X_p と書く。さらに、混乱の恐れがないときは $X_p = (p, v)$ ($v \in T_p M$) のとき v のことを X_p と書く場合がある。

命題 B.2: ベクトル場の C^∞ 性

境界あり/なし C^∞ 多様体 M と M の任意の C^∞ チャート $(U, (x^\mu))$ と M 上のベクトル場 X を与える。このとき、制限 $X|_U$ が C^∞ ベクトル場となる必要十分条件は X の U 上の成分関数が全て C^∞ 関数になることである。

証明 命題 B.1 の証明における TM の C^∞ チャートの構成より明らか。 ■

【例 B.2.1】座標ベクトル場

C^∞ 多様体 M の任意のチャート $(U, (x^\mu))$ に対して、写像

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}: U \rightarrow TM, p \mapsto \left(p, \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_p \right)$$

は U 上の C^∞ ベクトル場となる。 C^∞ 性は、成分関数が $p \mapsto \delta_\mu^\nu$ なる定数関数なので命題 B.2 から従う。

命題 B.3: $\mathfrak{X}(M)$ の加群としての構造

- $\mathfrak{X}(M)$ 上の加法とスカラー乗法を

$$\begin{aligned} (X + Y)_p &:= (p, X_p + Y_p) \\ (\lambda X)_p &:= (p, \lambda X_p) \end{aligned}$$

と定義すると $\mathfrak{X}(M)$ は \mathbb{R} ベクトル空間になる。

- $\mathfrak{X}(M)$ 上の $C^\infty(M)$ に関する加法とスカラー乗法を

$$\begin{aligned} (X + Y)_p &:= (p, X_p + Y_p) \\ (fX)_p &:= (p, f(p)X_p) \end{aligned}$$

と定義すると $\mathfrak{X}(M)$ は左 $C^\infty(M)$ 加群になる。

証明 命題 B.2 および $C^\infty(M)$ が和と積

$$\begin{aligned}(f+g)(p) &:= f(p) + g(p) \\ (fg)(p) &:= f(p)g(p)\end{aligned}$$

に関して環になることから従う。加法単位元はどちらの場合も関数 $p \mapsto (p, 0)$ である。 ■

さらに、後で述べるが、 $\mathfrak{X}(M)$ は Lie ブラケットについて Lie 代数をなす。

定義 B.2: フレーム

n 次元 C^∞ 多様体 M を与える。

- **ベクトル場^a**の順序付き k 対 (X_1, \dots, X_k) が部分集合 $A \subset M$ 上**線型独立** (linearly independent) であるとは、 $\forall p \in A$ において $(X_1|_p, \dots, X_k|_p)$ が \mathbb{R} ベクトル空間 $T_p M$ の元として線型独立であることを言う。
- M の開集合 $U \subset M$ 上の**局所フレーム** (local frame) とは、 U 上線型独立なベクトル場^bの n 対 (E_1, \dots, E_n) であって、 $\forall p \in U$ において $(E_1|_p, \dots, E_n|_p)$ が $T_p M$ の基底となるもののこと。
- $U = M$ 上の局所フレームのことを**大域的フレーム** (global frame) と呼ぶ。
- 局所フレーム (E_1, \dots, E_n) であって E_i が C^∞ ベクトル場であるもののことを **C^∞ フレーム** (smooth frame) と呼ぶ。

^a C^∞ とは限らない

^b C^∞ とは限らない

定義 B.3: 平行化可能性

n 次元 C^∞ 多様体 M が C^∞ の大域的フレームを持つとき、 M は**平行化可能** (parallelizable) であると言う。

B.2.1 C^∞ 関数の微分としてのベクトル場

ベクトル場の定義に $C^\infty(M)$ に作用する微分作用素としての意味を持たせることができる。これによって、微分方程式とベクトル場の繋がりが明らかになる。

任意の M 上のベクトル場 X および M の開集合 $U \subset M$ 上定義された任意の C^∞ 関数 $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ を与える。このとき関数^{*6}

$$Xf: U \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto X_p f$$

を考えることができる。

^{*6} この時点では C^∞ とは限らない。

命題 B.4: ベクトル場の C^∞ 性

境界あり/なし C^∞ 多様体 M と M の任意の C^∞ チャート $(U, (x^\mu))$ と M 上のベクトル場 X を与える. このとき以下の3つは同値である:

- (1) X は C^∞ ベクトル場
- (2) $\forall f \in C^\infty(M)$ に対して, 関数 $Xf: M \rightarrow \mathbb{R}$ は M 上 C^∞ 級である.
- (3) 任意の開集合 $U \subset M$ および任意の $f \in C^\infty(U)$ に対して, 関数 $Xf: U \rightarrow \mathbb{R}$ は U 上 C^∞ 級である.

証明 [Lee12, p.180, Proposition 8.14] を参照. ■

命題 B.4 より, $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ は線型写像

$$X: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M), f \mapsto Xf$$

を誘導することが分かった. その上, 接空間の元の Leibniz 則から

$$X(fg) = fXg + gXf$$

が成り立つこともわかる. このことから \mathbb{R} -線型写像 $X: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ は微分 (derivation) である. 逆に, $C^\infty(M)$ に作用する任意の微分は次の意味であるベクトル場と同一視できる:

命題 B.5: 微分とベクトル場

写像 $D: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ を与える. このとき以下の2つは同値である:

- (1) D は微分である, i.e. \mathbb{R} -線型写像でかつ Leibniz 則を充たす.
- (2) ある $X \in \mathfrak{X}(M)$ が存在して, $\forall f \in C^\infty(M)$ に対して $D(f) = Xf$ が成り立つ.

証明 (1) \Leftarrow (2) は既に示したので (1) \Rightarrow (2) を示す.

まず, 写像

$$X: p \mapsto (f \mapsto D(f)(p))$$

がベクトル場であることを示す. そのためには $\forall p \in M$ に対して $X_p \in T_p M$ であること, i.e. $X(p)$ が $\forall f, g \in C^\infty(M), \forall \lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} X_p(f+g) &= X_p(f) + X_p(g) \\ X_p(\lambda f) &= \lambda X_p(f) \\ X_p(fg) &= X_p(f)g(p) + f(p)X_p(g) \end{aligned}$$

を充たすことを示せば良いが, $D: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ が微分であることからこれらは明らかである. D の定義から $\forall f \in C^\infty(M)$ に対して $Xf = Df \in C^\infty(M)$ なので, 命題 B.4 から $X \in \mathfrak{X}(M)$ も言える. ■

B.2.2 ベクトル場と C^∞ 写像

M, N を C^∞ 多様体, $F: M \rightarrow N$ を C^∞ 写像とする. このとき F によって $\mathfrak{X}(M)$ と $\mathfrak{X}(N)$ の間の自然な対応が生まれる場合がある*7 ことを見る.

まず, 接ベクトルの微分を思いだそう. これは $\forall p \in M$ に対して定まる

$$T_p F: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N, v \mapsto (f \mapsto v(f \circ F))$$

という対応であり, 基点付き C^∞ 多様体の圏 \mathbf{Diff}_0 から \mathbb{R} -ベクトル空間の圏 $\mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$ への関手

$$T_p: \mathbf{Diff}_0 \rightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$$

を構成するのだった.

定義 B.4: F -related

境界あり/なし C^∞ 多様体 M, N と C^∞ 写像 $F: M \rightarrow N$ を与える.

M 上のベクトル場^a X と N 上のベクトル場^b Y が **F -related** であるとは, $\forall p \in M$ に対して

$$T_p F(X_p) = Y_{F(p)}$$

が成り立つことと定義する.

^a C^∞ でなくとも良い.

^b C^∞ でなくとも良い.

【例 B.2.2】

C^∞ 写像 $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos t, \sin t)$ を考える. このとき, \mathbb{R} のチャート $(\mathbb{R}, (t))$ による座標ベクトル場

$$\frac{d}{dt} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$$

は, \mathbb{R}^2 のチャート $(\mathbb{R}^2, (x, y))$ において

$$Y := -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$$

と定義される^a C^∞ ベクトル場 Y と F -related である. 実際, $\forall t \in \mathbb{R}$ および $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ に対して

$$\begin{aligned} T_t F \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right) (f) &= \frac{d}{dt} (f(\cos t, \sin t)) \\ &= \frac{d(\cos t)}{dt} \frac{\partial f}{\partial x}(\cos t, \sin t) + \frac{d(\sin t)}{dt} \frac{\partial f}{\partial y}(\cos t, \sin t) \\ &= -\sin t \frac{\partial f}{\partial x}(F(t)) + \cos t \frac{\partial f}{\partial y}(F(t)) \\ &= Y^1(F(t)) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{F(t)} (f) + Y^2(F(t)) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{F(t)} (f) \\ &= Y_{F(t)}(f) \end{aligned}$$

*7 しかし, いつでも自然に対応するとは限らない.

が成り立つ.

^a 成分関数がそれぞれ $Y^1: (x, y) \mapsto -y$, $Y^2: (x, y) \mapsto x$ だということ.

命題 B.6: F -related の特徴付け

境界あり/なし C^∞ 多様体 M, N と C^∞ 写像 $F: M \rightarrow N$ を与える.

$X \in \mathfrak{X}(M)$ と $Y \in \mathfrak{X}(N)$ が F -related である必要十分条件は, N の任意の開集合 $U \subset N$ に対して, $\forall f \in C^\infty(U)$ が

$$X(f \circ F) = (Yf) \circ F \in C^\infty(M)$$

を満たすことである.

証明 $\forall p \in M$ と, $F(p) \in N$ の任意の開近傍上で定義された任意の C^∞ 関数 f に対して

$$\begin{aligned} X(f \circ F)(p) &= X_p(f \circ F) = T_p F(X_p)(f), \\ ((Yf) \circ F)(p) &= (Yf)(F(p)) = Y_{F(p)}(f) \end{aligned}$$

が成り立つ. ■

F -related なベクトル場は必ず存在するとは限らない.

命題 B.7: C^∞ ベクトル場の押し出し

$F: M \rightarrow N$ が微分同相写像ならば, $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して F -related な $Y \in \mathfrak{X}(N)$ が一意的に存在する.

証明 図式

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{X} & TM \\ F \downarrow & & \downarrow T_p F \\ N & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & TN \end{array}$$

において $p = F^{-1}(q)$ とすることで,

$$Y: N \rightarrow TN, q \mapsto \left(q, T_{F^{-1}(q)} F(X_{F^{-1}(q)}) \right)$$

が所望の $Y \in \mathfrak{X}(N)$ となる. ■

! 命題 B.7 で得られた Y は F による X の押し出し (pushforward) と呼ばれ, よく $F_* X$ と略記される.

系 B.1: 押し出しの計算

$$((F_* X)f) \circ F = X(f \circ F)$$

B.2.3 Lie ブラケット

定義 B.5: Lie ブラケット

境界あり/なし C^∞ 多様体 M を与える. $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ の **Lie ブラケット** (Lie bracket) とは, 微分

$$[X, Y]: C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M), f \longmapsto X(Yf) - Y(Xf) \quad (\text{B.2.1})$$

のことを言う.

微分 $[X, Y]$ を命題 B.5 の意味で C^∞ ベクトル場と見做したのも $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ と書く.

(B.2.1) の写像 $[X, Y]$ が微分であることを確認しておく. 線形性はほぼ自明なので Leibniz 則を確認しよう:

$$\begin{aligned} [X, Y](fg) &= X(Y(fg)) - Y(X(fg)) \\ &= X(fYg + gYf) - Y(fXg + gXf) \\ &= fXYg + \cancel{YgXf} + gXYf + \cancel{YfXg} - fYXg - \cancel{gYXf} - gYXf - \cancel{XfYg} \\ &= f([X, Y]g) + g([X, Y]f) \end{aligned}$$

この途中式から, $f \mapsto XYf$ が微分でないこともわかる. つまり, \mathbb{R} ベクトル空間 $\mathfrak{X}(M)$ (命題 B.3) の上に, $f \mapsto XYf$ によって定義される新たな積演算を入れようとしても上手くいかない. その代わりに **Lie ブラケット**が必要なのである.

命題 B.8: $\mathfrak{X}(M)$ の Lie 代数としての構造

$\mathfrak{X}(M)$ 上の **Lie ブラケット** は以下を満たす:

(双線型性) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} [aX + bY, Z] &= a[X, Z] + b[Y, Z], \\ [Z, aX + bY] &= a[Z, X] + b[Z, Y] \end{aligned}$$

(反対称性)

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

(Jacobi 恒等式)

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

従って, $\mathfrak{X}(M)$ は $[\cdot, \cdot]$ について無限次元実 Lie 代数をなす.

命題 B.9: Lie ブラケットの自然性

境界あり/なし C^∞ 多様体 M, N と C^∞ 写像 $F: M \rightarrow N$ を与える. このとき, 以下が成り立つ:

- (1) $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ がそれぞれ $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$ と F -related ならば, $[X_1, X_2] \in \mathfrak{X}(M)$ も $[Y_1, Y_2] \in \mathfrak{X}(N)$ と F -related である.
- (2) F が微分同相写像ならば, $\forall X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$F_*[X_1, X_2] = [F_*X_1, F_*X_2]$$

証明 (1) X_i と Y_i が F -related ならば, 命題 B.6 より N の任意の開集合 $U \subset N$ に対して $\forall f \in C^\infty(U)$ が

$$\begin{aligned} X_1 X_2(f \circ F) &= X_1(X_2(f \circ F)) = X_1((Y_2 f) \circ F) = (Y_1 Y_2 f) \circ F \in C^\infty(M), \\ X_2 X_1(f \circ F) &= X_2(X_1(f \circ F)) = X_2((Y_1 f) \circ F) = (Y_2 Y_1 f) \circ F \in C^\infty(M) \end{aligned}$$

を充たす. 従って

$$\begin{aligned} [X_1, X_2](f \circ F) &= X_1 X_2(f \circ F) - X_2 X_1(f \circ F) \\ &= (Y_1 Y_2 f) \circ F - (Y_2 Y_1 f) \circ F \\ &= ([Y_1, Y_2] f) \circ F \in C^\infty(M) \end{aligned}$$

が成り立つので, 命題 B.6 より $[X_1, X_2] \in \mathfrak{X}(M)$ は $[Y_1, Y_2] \in \mathfrak{X}(N)$ と F -related である.

- (2) F が微分同相写像ならば, **押し出しの定義**より $F_*X_i \in \mathfrak{X}(N)$ は X_i と F -related である. よって (1) から $[X_1, X_2] \in \mathfrak{X}(M)$ と $[F_*X_1, F_*X_2] \in \mathfrak{X}(N)$ は F -related だが, 命題 B.7 より $[X_1, X_2] \in \mathfrak{X}(M)$ と F -related な N 上の C^∞ ベクトル場は $F_*[X_1, X_2] \in \mathfrak{X}(N)$ ただ一つであるから

$$F_*[X_1, X_2] = [F_*X_1, F_*X_2] \in \mathfrak{X}(N)$$

である. ■

B.3 積分曲線とフロー

B.3.1 積分曲線

定義 B.6: 積分曲線

境界あり/なし C^∞ 多様体 M を与える. M 上のベクトル場^a X の積分曲線 (integral curve) とは, C^∞ 曲線^b $\gamma: J \rightarrow M$ であって, 任意の時刻 $t \in J$ において

$$\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}$$

を充たすもののことを言う.

^a C^∞ とは限らない

^b よって, $J \subset \mathbb{R}$ である.

チャート $(U, \varphi) = (U, (x^\mu))$ を取り, γ を $\varphi \circ \gamma(t) =: (\gamma^1(t), \dots, \gamma^{\dim M}(t))$ のように座標表示すると,

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(t) &= \frac{d\gamma^\mu}{dt}(t) \left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|_{\gamma(t)}, \\ X_{\gamma(t)} &= X^\mu(\gamma(t)) \left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|_{\gamma(t)}\end{aligned}$$

と書ける. つまり, 積分曲線とは連立常微分方程式系

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma^1}{dt}(t) &= X^1(\gamma^1(t), \dots, \gamma^{\dim M}(t)), \\ &\vdots \\ \frac{d\gamma^{\dim M}}{dt}(t) &= X^{\dim M}(\gamma^1(t), \dots, \gamma^{\dim M}(t))\end{aligned}$$

の解 $(\gamma^1(t), \dots, \gamma^{\dim M}(t))$ のことである.

【例 B.3.1】

\mathbb{R}^2 のチャート $(\mathbb{R}^2, (x, y))$ において

$$Y := -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$$

と定義される C^∞ ベクトル場 Y の積分曲線 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\gamma^1(t), \gamma^2(t))$ は連立常微分方程式

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma^1}{dt}(t) &= -\gamma^2(t), \\ \frac{d\gamma^2}{dt}(t) &= \gamma^1(t),\end{aligned}$$

の解であり, 積分定数 $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ を用いて

$$\begin{aligned}\gamma^1(t) &= a \cos t - b \sin t, \\ \gamma^2(t) &= a \sin t + b \cos t\end{aligned}$$

と書ける. このように, 初期条件を指定しない限り積分曲線は一意に定まらない.

命題 B.10: 積分曲線の存在

境界あり/なし C^∞ 多様体 M と, その上の C^∞ ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ を与える. $\forall p \in M$ に対して, ある $\varepsilon > 0$ と C^∞ 曲線 $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ が存在して初期条件 $\gamma(0) = p$ を満たす X の積分曲線になる.

証明 常微分方程式の解の存在定理から従う. ■

命題 B.11: 積分曲線の自然性

境界あり/なし C^∞ 多様体 M, N と C^∞ 写像 $F: M \rightarrow N$ を任意に与える. このとき, $\forall X \in \mathfrak{X}(M), \forall Y \in \mathfrak{X}(N)$ に対して以下の2つは同値である:

- (1) X, Y が F -related
- (2) $\gamma: J \rightarrow M$ が X の積分曲線 $\implies F \circ \gamma: J \rightarrow N$ は Y の積分曲線

証明 (1) \implies (2)

X, Y が F -related であるとする. $\gamma: J \rightarrow M$ を X の積分曲線とする. このとき N の C^∞ 曲線 $\sigma := F \circ \gamma: J \rightarrow N$ は $\forall t \in J$ において

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}(t) &= T_0(F \circ \gamma) \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_t \right) \\ &= T_{\gamma(t)} F \circ T_0 \gamma \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_t \right) \\ &= T_{\gamma(t)} F(\dot{\gamma}(t)) \\ &= T_{\gamma(t)} F(X_{\gamma(t)}) \\ &= Y_{F(\gamma(t))} \\ &= Y_{\sigma(t)}\end{aligned}$$

を充たすので Y の積分曲線である*8.

(1) \Leftarrow (2)

X の積分曲線 γ が与えられたとき $F \circ \gamma$ が Y の積分曲線になるとする. $\forall p \in M$ を1つとり, $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ を初期条件 $\gamma(0) = p$ を充たす X の積分曲線とする. 命題??によりこのような γ が少なくとも1つ存在する. このとき仮定より $F \circ \gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$ が初期条件 $(F \circ \gamma)(0) = F(p)$ を充たす Y の積分曲線となるので

$$\begin{aligned}Y_{F(p)} &= (F \circ \dot{\gamma})(0) \\ &= T_0(F \circ \gamma) \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \right) \\ &= T_{\gamma(0)} F \circ T_0 \gamma \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \right) \\ &= T_{\gamma(0)} F(\dot{\gamma}(0)) \\ &= T_{\gamma(0)} F(X_{\gamma(0)}) \\ &= T_p F(X_p)\end{aligned}$$

が成り立つので X, Y は F -related である. ■

技術的な補題を示しておく:

*8 2つ目の等号で接ベクトルの微分の関手性を使った

補題 B.3: 定義域の affine 変換

境界あり/なし C^∞ 多様体 M と, その上の C^∞ ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ を与える.

X の任意の積分曲線 $\gamma: J \rightarrow M$ を与える. このとき以下が成り立つ:

(1) $\forall a \in \mathbb{R}$ に対して

$$\tilde{J} := \{t \in \mathbb{R} \mid at \in J\}$$

とおくと, C^∞ 曲線

$$\tilde{\gamma}: \tilde{J} \rightarrow M, t \mapsto \gamma(at)$$

は C^∞ ベクトル場 $aX \in \mathfrak{X}(M)$ の積分曲線である.

(2) $\forall b \in \mathbb{R}$ に対して

$$\hat{J} := \{t \in \mathbb{R} \mid t+b \in J\}$$

とおくと, C^∞ 曲線

$$\hat{\gamma}: \hat{J} \rightarrow M, t \mapsto \gamma(t+b)$$

は C^∞ ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ の積分曲線である.

証明 (1) C^∞ 写像 $\mu_a: \tilde{J} \rightarrow J, t \mapsto at$ を考えると, $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \mu_a$ である. よって $\forall t_0 \in \tilde{J}$ および点 $\tilde{\gamma}(t_0) \in M$ の任意の開近傍上で定義された C^∞ 関数 f に対してとても丁寧に計算すると^{*9}

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\gamma}}(t_0)f &= T_{t_0}\tilde{\gamma} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \right) f = \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} (f \circ \tilde{\gamma})(t) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} (f \circ \gamma \circ \mu_a)(t) \\ &= T_{t_0}(\gamma \circ \mu_a) \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \right) f = T_{\mu_a(t_0)}\gamma \circ T_{t_0}\mu_a \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \right) f \\ &= aT_{at_0}\gamma \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=at_0} \right) f = a\dot{\gamma}(at_0)f = aX_{\gamma(at_0)}f = (aX_{\tilde{\gamma}(t_0)})f \end{aligned}$$

(2) C^∞ 写像 $\tau_b: \hat{J} \rightarrow J, t \mapsto t+b$ を考えると, $\hat{\gamma} = \gamma \circ \tau_b$ である. よって $\forall t_0 \in \hat{J}$ および点 $\hat{\gamma}(t_0) \in M$ の任意の開近傍上で定義された C^∞ 関数 f に対してとても丁寧に計算すると^{*10}

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\gamma}}(t_0)f &= T_{t_0}\hat{\gamma} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \right) f = \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} (f \circ \hat{\gamma})(t) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} (f \circ \gamma \circ \tau_b)(t) \\ &= T_{t_0}(\gamma \circ \tau_b) \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \right) f = T_{\tau_b(t_0)}\gamma \circ T_{t_0}\tau_b \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \right) f \end{aligned}$$

^{*9} \mathbb{R} のチャート $(\tilde{J}, \text{id}) = (\tilde{J}, t)$ から $(\tilde{J}, \mu_a) = (\tilde{J}, (s)) = (\tilde{J}, (at))$ への座標変換と見做して, $T_{t_0}\mu_a \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \right) = \frac{ds}{dt}(t_0) \frac{d}{ds} \Big|_{s=at_0} = a \frac{d}{ds} \Big|_{s=at_0}$

^{*10} \mathbb{R} のチャート $(\hat{J}, \text{id}) = (\hat{J}, t)$ から $(\hat{J}, \tau_b) = (\hat{J}, (s)) = (\hat{J}, (t+b))$ への座標変換と見做して, $T_{t_0}\tau_b \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \right) = \frac{ds}{dt}(t_0) \frac{d}{ds} \Big|_{s=t_0+b} = \frac{d}{ds} \Big|_{s=t_0+b}$

$$= T_{t_0+b}\gamma \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0+b} \right) f = \dot{\gamma}(t_0+b)f = X_{\gamma(t_0+b)}f = X_{\hat{\gamma}(t_0)}f$$

■

B.3.2 フロー

定義 B.7: 大域的なフロー

C^∞ 多様体 M への Lie 群^a \mathbb{R} の左作用

$$\theta: \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$$

のことを M 上の大域的フロー (global flow) と呼ぶ.

^a \mathbb{R} を加法に関して群と見做す.

大域的フロー $\theta: \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ が与えられたとき,

- $\forall t \in \mathbb{R}$ に対する連続写像 $\theta_t: M \longrightarrow M$ を $\theta_t(q) := \theta(t, q)$ により定める.
- $\forall p \in M$ に対する連続曲線 $\theta^{(p)}: \mathbb{R} \longrightarrow M$ を $\theta^{(p)}(s) := \theta(s, p)$ により定める.

命題 B.12: 大域的フローの無限小生成子

C^∞ 多様体 M 上の C^∞ 級の大域的フロー $\theta: \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ を与える. M 上のベクトル場

$$V: M \longrightarrow TM, p \longmapsto (p, \theta^{(p)}(0))$$

のことを θ の無限小生成子 (infinitesimal generator) と呼ぼう.

このとき $V \in \mathfrak{X}(M)$ であり, $\forall p \in M$ に対して C^∞ 曲線 $\theta^{(p)}: \mathbb{R} \longrightarrow M$ は V の積分曲線である.

証明 $V \in \mathfrak{X}(M)$ を示すには, 命題 B.4 より任意の開集合 $U \subset M$ 上定義された任意の C^∞ 関数 $f \in C^\infty(U)$ に対して $Vf \in C^\infty(U)$ であることを示せば良い. 実際このとき $\forall p \in U$ に対して

$$Vf(p) = V_p f = \theta^{(p)}(0)f = T_0\theta^{(p)} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \right) f = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\theta^{(p)}(t)) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(0,p)} f(\theta(t, p))$$

が成り立つ^{*11}. $f(\theta(t, p))$ は C^∞ 写像の合成なので $\mathbb{R} \times U$ 上 C^∞ 級であり, その任意の偏導関数もまた C^∞ 級となる.

次に $\forall p \in M$ を 1 つ固定する. このとき C^∞ 曲線 $\theta^{(p)}: \mathbb{R} \longrightarrow M$ が, 初期条件 $\theta^{(p)}(0) = p$ を充たす V の積分曲線であることを示す. i.e. 示すべきは $\forall t \in \mathbb{R}$ に対して $\theta^{(p)}(t) = V_{\theta^{(p)}(t)}$ が成り立つことである. $\forall t \in \mathbb{R}$ を 1 つ固定して $q := \theta^{(p)}(t)$ とおくと, $\forall s \in \mathbb{R}$ に対して

$$\theta^{(q)}(s) = \theta_s(q) = \theta(s, \theta(t, p)) = \theta(s+t, p) = \theta^{(p)}(s+t)$$

^{*11} ややこしいが, C^∞ 曲線 $\gamma: I \longrightarrow M$ の微分 $\dot{\gamma}(t_0)$ は, 厳密には \mathbb{R} の接ベクトル $d/dt|_{t_0}$ の微分 $T_{t_0}\gamma(d/dt|_{t_0}) \in T_{\gamma(t_0)}M$ のことだった.

である。従って q の任意の開近傍上で定義された任意の C^∞ 関数 f に対して

$$V_q f = \theta(\dot{q})(0)f = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} f(\theta^{(q)}(s)) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} f(\theta^{(\dot{p})}(s+t)) = \theta(\dot{p})(t)f$$

が言える。これが示すべきことであった。 ■

【例 B.3.2】

C^∞ 写像

$$\theta: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, (x, y)) \longmapsto (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \sin t)$$

は $\forall t, s \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\begin{aligned} \theta(0, (x, y)) &= (x, y), \\ \theta(s, \theta(t, (x, y))) &= ((x \cos t - y \sin t) \cos s - (x \sin t + y \cos t) \sin s, \\ &\quad (x \cos t - y \sin t) \sin s + (x \sin t + y \cos t) \cos s) \\ &= (x \cos(s+t) - y \sin(s+t), x \sin(s+t) + y \cos(s+t)) \\ &= \theta(s+t, (x, y)) \end{aligned}$$

を充たすので、多様体 \mathbb{R}^2 上の大域的フローである。このとき $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\theta^{((a, b))}(t) = (a \cos t - b \sin t, a \sin t + b \sin t)$$

であるから

$$\begin{aligned} \theta^{(\dot{(a, b)})}(0) &= T_0 \theta^{((a, b))} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \right) \\ &= \frac{d(a \cos t - b \sin t)}{dt} (0) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\theta^{((a, b))}(0)} + \frac{d(a \sin t + b \cos t)}{dt} (0) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\theta^{((a, b))}(0)} \\ &= -b \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{(a, b)} + a \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{(a, b)} \end{aligned}$$

と計算できる。つまり、 θ の無限小生成子はベクトル場

$$-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$$

である。実際【例 B.3.1】より、ベクトル場 $-y \partial/\partial x + x \partial/\partial y$ の積分曲線は $\theta^{((a, b))}(t)$ そのものである。特に、 (a, b) は初期条件を表している。

命題 B.12 の逆に、 $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ が M 上の何かしらの大域的フローの無限小生成子になっていると言いたくなるが、必ずしもそうではない。つまり、積分曲線が \mathbb{R} のある部分集合上で定義できないような C^∞ ベクトル場が存在する。

【例 B.3.3】

$M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ とし、標準的なチャート $(M, (x, y))$ を取る. 【例 B.2.1】 の座標ベクトル場 $V := \frac{\partial}{\partial x}$ を考えよう. 初期条件 $\gamma(0) = (-1, 0) \in M$ を充たす V の積分曲線 γ は, 常微分方程式

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma^1}{dt}(t) &= 1, \\ \frac{d\gamma^2}{dt}(t) &= 0\end{aligned}$$

を解くことで一意に $\gamma(t) := (t - 1, 0)$ と求まる. しかしに γ は \mathbb{R} の点 $t = 1$ 上定義不能である.

定義 B.8: 局所的フロー

M を C^∞ 多様体とする.

- **フローの定義域** (flow domain) とは, 開集合 $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times M$ であって, $\forall p \in M$ に対して集合

$$\mathcal{D}^{(p)} := \{t \in \mathbb{R} \mid (t, p) \in \mathcal{D}\} \subset \mathbb{R}$$

が 0 を含む開区間^aとなっているようなものを言う.

- M 上の**局所的フロー** (local flow) とは, フローの定義域を定義域にもつ連続写像

$$\theta: \mathcal{D} \longrightarrow M$$

であって, $\forall p \in M$ に対して以下が成り立つもののこと:

(LF-1)

$$\theta(0, p) = p$$

(LF-2) $\forall s \in \mathcal{D}^{(p)}, \forall t \in \mathcal{D}^{(\theta(s, p))}$ に対して,

$$s + t \in \mathcal{D}^{(p)} \implies \theta(t, \theta(s, p)) = \theta(t + s, p)$$

- **極大積分曲線** (maximal integral curve) とは, **積分曲線** であって定義域をこれ以上大きな開区間に延長できないようなもののこと. **極大局所フロー** (maximal local flow) とは, これ以上フローの定義域を拡張できないような局所的フローのこと.

^a この条件が命題 B.13 の証明の鍵となる.

局所的フロー $\theta: \mathcal{D} \longrightarrow M$ が与えられたとき,

- $\forall t \in \mathbb{R}$ に対して, M の部分集合 $M_t \subset M$ を

$$M_t := \{p \in M \mid (t, p) \in \mathcal{D}\}$$

と定める^a.

- $\forall (t, p) \in \mathcal{D}$ に対する連続写像^b $\theta_t: M_t \longrightarrow M$ および連続曲線 $\theta^{(p)}: \mathcal{D}^{(p)} \longrightarrow M$ をそれぞれ

$$\theta_t(q) := \theta(t, q),$$

$$\theta^{(p)}(s) := \theta(s, p)$$

により定める.

^a $\mathcal{D}^{(p)}$ はフローの領域 \mathcal{D} を、点 $(0, p)$ を通るように「横に切り」、 M_t は「縦に切る」と言うイメージ.

^b 極大局所フロー θ に関しては、 θ_t の値域が実は M_{-t} であることが、定理 B.2-(2) によりわかる.

命題 B.13: 局所的フローの無限小生成子

C^∞ 多様体 M 上の C^∞ 級の局所的フロー $\theta: \mathcal{D} \rightarrow M$ を与える. M 上のベクトル場

$$V: M \rightarrow TM, p \mapsto (p, \theta^{(p)}(0))$$

のことを^a θ の無限小生成子 (infinitesimal generator) と呼ぼう.

このとき $V \in \mathfrak{X}(M)$ であり、 $\forall p \in M$ に対して C^∞ 曲線 $\theta^{(p)}: \mathcal{D}^{(p)} \rightarrow M$ は V の積分曲線である.

^a フローの定義域の定義から $M_0 = M$ であることに注意. このとき、接ベクトルの局所性から $\forall p \in M$ に対して $\theta^{(p)}(0)$ が定義される.

証明 $V \in \mathfrak{X}(M)$ であることに関しては命題 B.12 の証明がそのまま適用できる.

$\forall p \in M$ を 1 つ固定する. $\forall t \in \mathcal{D}^{(p)}$ に対して、フローの定義域の定義より $\mathcal{D}^{(p)}, \mathcal{D}^{(\theta^{(p)}(t))} \subset \mathbb{R}$ はどちらも 0 を含む開区間であるから、十分小さい $\varepsilon > 0$ に対しては $(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \subset \mathcal{D}^{(p)}$ かつ $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathcal{D}^{(\theta^{(p)}(t))}$ が成り立つ. このとき $\forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathcal{D}^{(\theta^{(p)}(t))}$ をとってくると $t + s \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \subset \mathcal{D}^{(p)}$ であるから、局所的フローの定義の条件 (LF-2) より $\theta(s, \theta(t, p)) = \theta(s + t, p)$ が成り立つ. あとはこの s に対して命題 B.12 の証明を適用すれば良い. ■

極大局所フローに対しては命題 B.13 の逆も言える [Lee12, p.212, Theorem 9.12]:

定理 B.2: フローの基本定理

M を境界なし C^∞ 多様体とする. $\forall V \in \mathfrak{X}(M)$ に対して、極大局所フロー $\theta: \mathcal{D} \rightarrow M$ であって無限小生成子が V であるようなものが一意的存在する. さらに、この θ は以下の性質をみたす:

- (1) $\forall p \in M$ に対し、 $\theta^{(p)}: \mathcal{D}^{(p)} \rightarrow M$ は初期条件 $\theta^{(p)}(0) = p$ を充たす V の唯一の極大積分曲線である.
- (2)

$$s \in \mathcal{D}^{(p)} \implies \mathcal{D}^{(\theta(s, p))} = \{t - s \mid t \in \mathcal{D}^{(p)}\} =: \mathcal{D}^{(p)} - s$$

- (3) $\forall t \in \mathbb{R}$ に対して、集合 M_t は M の開集合であり、連続写像 $\theta_t: M_t \rightarrow M_{-t}$ は θ_{-t} を逆にもつ微分同相写像である.

上述の極大局所フロー θ のことを、 V によって生成されたフロー (flow generated by V) と呼ぶ.

証明 $\forall V \in \mathfrak{X}(M)$ を 1 つ固定する.

定義域を共有する2つの積分曲線が交差しないこと

命題 B.10 より, $J \subset \mathbb{R}$ を开区間として, V の積分曲線 $\gamma, \tilde{\gamma}: J \rightarrow M$ をとることができる. ここで, ある $t_0 \in J$ において $\gamma(t_0) = \tilde{\gamma}(t_0)$ であると仮定する^{*12}. このとき $\gamma = \tilde{\gamma}$ でなくてはならないことを示そう.

部分集合 $S \subset J$ を

$$S := \{t \in J \mid \gamma(t) = \tilde{\gamma}(t)\}$$

と定義する. 示すべきは $S = J$ である. 仮定より $t_0 \in S$ なので S は空でない. また, 積多様体 $M \times M$ 上の連続曲線 $\alpha: J \rightarrow M \times M$ を $\alpha(t) := (\gamma(t), \tilde{\gamma}(t))$ と定義すると, M の部分空間 $\Delta := \{(p, p) \in M \times M\}$ を使って $S = \alpha^{-1}(\Delta)$ と書けるが, 任意の C^∞ 多様体が Hausdorff 空間であることから Δ は閉集合であり^{*13}, α が連続写像なので S も J の閉集合であることがわかる. 一方で $\forall t_1 \in S$ をとると, **積分曲線の定義** から $\gamma, \tilde{\gamma}$ は点 $\gamma(t_1) \in M$ を含むある C^∞ チャートの上の同一の常微分方程式の解であり, かつ初期条件 $\gamma(t_1) = \tilde{\gamma}(t_1)$ を充たす. 故に常微分方程式の解の一意性から, ある t_1 を含む开区間 $I_{t_1} \subset \mathbb{R}$ 上で $\gamma|_{I_{t_1}} = \tilde{\gamma}|_{I_{t_1}}$ が成り立つ. i.e. $t_1 \in I_{t_1} \cap J \subset S$ で, $t_1 \in S$ は任意だったので S は J の開集合でもある. さらに J は連結なので, $J = S$ が示された^{*14}.

極大局所フロー $\theta: \mathcal{D} \rightarrow M$ の構成

$\forall p \in M$ を1つ固定する. 初期条件 $\gamma(0) = p$ を充たす^{*15} V の積分曲線 $\gamma: J_\gamma \rightarrow M$ 全体の集合を $\mathcal{I}^{(p)}$ とおき,

$$\mathcal{D}^{(p)} := \bigcup_{\gamma \in \mathcal{I}^{(p)}} J_\gamma$$

と定義する. 先述の議論から M の C^∞ 曲線

$$\theta^{(p)}: \mathcal{D}^{(p)} \rightarrow M, t \mapsto \left(\gamma(t) \text{ s.t. } \gamma \in \mathcal{I}^{(p)} \text{ かつ } t \in J_\gamma \right)$$

は well-defined であり, かつその構成から明らかに初期条件 $\theta^{(p)}(0) = p$ を充たす唯一の**極大積分曲線**である.

$p \in M$ は任意だったので, ここで

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &:= \{(t, p) \in \mathbb{R} \times M \mid t \in \mathcal{D}^{(p)}\}, \\ \theta: \mathcal{D} &\rightarrow M, (t, p) \mapsto \theta^{(p)}(t) \end{aligned}$$

と定義する. これが**局所フローの定義**の条件 **(LF-1)**, **(LF-2)** を充たすことを確認する.

(LF-1) 構成より明らか.

(LF-2) $\forall p \in M, \forall s \in \mathcal{D}^{(p)}$ をとり, $q := \theta(s, p)$ とおく. このとき $\forall t \in \mathcal{D}^{(p)} - s$ に対して $s+t \in \mathcal{D}^{(p)}$ が成り立つ. ここで, C^∞ 曲線

$$\gamma: \mathcal{D}^{(p)} - s \rightarrow M, t \mapsto \theta(t+s, p) = \theta^{(p)}(t+s)$$

^{*12} 時刻 $t_0 \in J$ において2つの積分曲線 $\gamma, \tilde{\gamma}$ が交差するということ.

^{*13} $(M \times M) \setminus \Delta$ が開集合である $\iff \forall (p, q) \in (M \times M) \setminus \Delta$ に対して $p, q \in M$ の開近傍 $U \subset M, V \subset M$ が存在して $U \times V \subset (M \times M) \setminus \Delta$ を充たす $\iff \forall (p, q) \in (M \times M) \setminus \Delta$ に対して $p, q \in M$ の開近傍 $U \subset M, V \subset M$ が存在して $U \cap V = \emptyset$ を充たす $\iff M$ が Hausdorff 空間である

^{*14} $S \subset J$ が開かつ閉なので $J \setminus S \subset J$ は開集合であり, $J = S \cup (J \setminus S)$ かつ $S \cap (J \setminus S) = \emptyset$ が成り立つ. J は連結なので $S, J \setminus S$ のどちらかが空でなくてはならないが $S \neq \emptyset$ だったので $J \setminus S = \emptyset \iff J = S$ が言えた.

^{*15} 従って $0 \in J_\gamma$ とする.

は補題 B.3-(2) より初期条件 $\gamma(0) = q$ を満たす V の積分曲線であるが、常微分方程式の解の一意性から $\gamma = \theta^{(q)}|_{\mathcal{D}^{(p)}-s}$ が成り立つ。あとは $\mathcal{D}^{(p)} - s = \mathcal{D}^{(q)}$ を示せば、 $\forall t \in \mathcal{D}^{(q)}$ に対して

$$\theta(t, \theta(s, p)) = \theta(t, q) = \theta^{(q)}(t) = \gamma(t) = \theta(t + s, p)$$

となって (LF-2) の証明が完了する。

$\theta^{(q)}$ が極大積分曲線なので $\mathcal{D}^{(p)} - s \subset \mathcal{D}^{(q)}$ が言える。 $\mathcal{D}^{(p)} - s \supset \mathcal{D}^{(q)}$ を示そう。まず $0 \in \mathcal{D}^{(p)}$ なので $-s \in \mathcal{D}^{(p)} - s \subset \mathcal{D}^{(q)}$ が言える。従って $\theta(-s, q) = \theta^{(q)}(-s) = \gamma(-s) = \theta^{(p)}(0) = p$ であり、 $\forall t \in \mathcal{D}^{(q)} + s$ に対して $-s + t \in \mathcal{D}^{(p)}$ が成り立つ。 C^∞ 曲線

$$\gamma: \mathcal{D}^{(q)} + s \longrightarrow M, t \longmapsto \theta(t - s, q) = \theta^{(q)}(t - s)$$

は補題 B.3-(2) より初期条件 $\gamma(0) = p$ を満たす V の積分曲線なので、常微分方程式の解の一意性から $\gamma = \theta^{(p)}|_{\mathcal{D}^{(q)}+s}$ が言えて、 $\theta^{(p)}$ の極大性から $\mathcal{D}^{(q)} + s \subset \mathcal{D}^{(p)} \iff \mathcal{D}^{(p)} - s \supset \mathcal{D}^{(q)}$ が示された。

$\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times M$ が開集合かつ θ が C^∞ 級

部分集合 $W \subset \mathcal{D}$ を

$$W := \left\{ (t, p) \in \mathcal{D} \left| \begin{array}{l} \text{以下を満たす開近傍 } (t, p) \in J \times U \subset \mathcal{D} \text{ が存在:} \\ (1) J \subset \mathbb{R} \text{ は開区間で } 0, t \in J \\ (2) U \subset M \text{ は } p \text{ の開近傍} \\ (3) \theta|_{J \times U} \text{ が } C^\infty \text{ 級} \end{array} \right. \right\}$$

と定義する。 $W = \mathcal{D}$ を背理法により示す。まず $\exists(\tau, p_0) \in \mathcal{D} \setminus W$ を仮定する。常微分方程式の解の存在定理より $(0, p_0) \in W$ なので、 $\tau > 0$ としよう。 $\tau < 0$ のときも議論は全く同様である。

$t_0 := \sup\{t \in \mathbb{R} \mid (t, p_0) \in W\}$ とする。このとき $0 < t_0 < \tau$ かつ $0, \tau \in \mathcal{D}^{(p_0)}$ なので $t_0 \in \mathcal{D}^{(p_0)}$ が言える。 $q_0 := \theta^{(p_0)}(t_0)$ とおこう。常微分方程式の解の存在定理から、ある $\varepsilon > 0$ と q_0 の開近傍 $q_0 \in U_0 \subset M$ が存在して $(-\varepsilon, \varepsilon) \times U_0 \subset W$ となる。ここで $t_1 \in (t_0 - \varepsilon, t_0)$ を $\theta^{(p_0)}(t_1) \in U_0$ を満たすようにとる。このとき $t_1 < t_0$ なので $(t_1, p_0) \in W$ であり、故にある $\delta > 0$ と p_0 の開近傍 $p_0 \in U_1 \subset M$ が存在して $(t_1 - \delta, t_1 + \delta) \times U_1 \subset W$ となる。従って W の定義から、 θ は $[0, t_1 + \delta) \times U_1$ 上で C^∞ 級である。 $\theta(t_1, p_0) \in U_0$ なので、 $\theta(\{t_1\} \times U_1) \subset U_0$ を満たすような U_1 をとることができる。さて、

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}: [0, t_1 + \varepsilon) \times U_1 &\longrightarrow M, \\ (t, p) &\longmapsto \begin{cases} \theta_t(p), & (t, p) \in [0, t_1) \times U_1 \\ \theta_{t-t_1} \circ \theta_{t_1}(p), & (t, p) \in (t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon) \times U_1 \end{cases} \end{aligned}$$

と定義した写像 $\tilde{\theta}$ は、 θ が条件 (LF-2) を満たすことから $(t_1 - \varepsilon, t_1) \times U_1$ 上 $\theta_t(p) = \theta_{t-t_1} \circ \theta_{t_1}(p)$ となり well-defined で、かつ U_1, t_1, ε の取り方から C^∞ 級である。その上 $\forall p \in U_1$ に対して C^∞ 曲線 $t \mapsto \tilde{\theta}(t, p)$ は V の積分曲線なので、 $\tilde{\theta}$ は $(t_0, p_0) \notin W$ への θ の C^∞ 級の延長である。しかるにこのことは t_0 の取り方に矛盾する。

- (1) $\mathcal{D}^{(p)}$, $\theta^{(p)}$ の構成から明らか。
- (2) (LF-2) の確認で示した。
- (3) \mathcal{D} が $\mathbb{R} \times M$ の開集合なので、 $\forall t \in \mathbb{R}$ に対して $M_t := \{p \in M \mid (t, p) \in \mathcal{D}\}$ は開集合である。^{*16}

^{*16} 写像 $\iota_t: M \longrightarrow \mathbb{R} \times M, p \longmapsto (t, p)$ は、開区間と開集合の直積 $J \times U \subset \mathbb{R} \times M$ に対して $t \in J$ なら $\iota_t^{-1}(J \times U) = U$, $t \notin J$ なら $\iota_t^{-1}(J \times U) = \emptyset$ となるので連続写像である。従って $M_t = \iota_t^{-1}(\mathcal{D}) \subset M$ は M の開集合。

また, (2) から

$$\begin{aligned}
 p \in M_t &\implies t \in \mathcal{D}^{(p)} \\
 &\implies \mathcal{D}^{(\theta_t(p))} = \mathcal{D}^{(p)} - t \\
 &\implies -t \in \mathcal{D}^{(\theta_t(p))} \\
 &\implies \theta_t(p) \in M_{-t}
 \end{aligned}$$

が言えるので $\theta_t(M_t) \subset M_{-t}$ である. さらに (LF-2) から $\theta_{-t} \circ \theta_t = \text{id}_{M_t}$, $\theta_t \circ \theta_{-t} = \text{id}_{M_{-t}}$ が言える. θ が C^∞ 級なので θ_t, θ_{-t} も C^∞ 級であるから $\theta_t: M_t \rightarrow M_{-t}$ は微分同相写像である. ■

定理 B.3: 境界付き多様体におけるフローの基本定理

M を境界付き多様体とし, $V \in \mathfrak{X}(M)$ は ∂M に接する^aとする. このとき定理 B.2 と全く同じ結果が V に対して成り立つ.

^a i.e. $\forall p \in \partial M$ において $V_p \in T_p(\partial M) \subset T_p M$ が成り立つ.

証明 [Lee12, p.227, Theorem 9.34] ■

B.3.3 完備なベクトル場

定義 B.9: ベクトル場の完備性

C^∞ ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ が完備 (complete) であるとは, それが大域的なフローを生成することを言う.

補題 B.4: uniform time lemma

C^∞ 多様体 M およびその上の C^∞ ベクトル場 $V \in \mathfrak{X}(M)$ を与える. $\theta: \mathcal{D} \rightarrow M$ を V が生成するフローとする.

このとき, ある $\varepsilon > 0$ が存在して $\forall p \in M$ に対して $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathcal{D}^{(p)}$ を満たすならば, V は完備である.

証明 主張の仮定が満たされているとする. このとき V が完備であることを背理法により示す. そのためにまずある $p \in M$ が存在して, $\mathcal{D}^{(p)}$ が上に有界であると仮定する. 下に有界な場合も同様の議論ができる.

$b := \sup \mathcal{D}^{(p)}$ とおき, $t_0 \in (b - \varepsilon, b)$ を1つとる. $q := \theta^{(p)}(t_0)$ とおく. 仮定より V の積分曲線 $\theta^{(p)}$ は少なくとも $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 上では定義されている. ここで C^∞ 曲線

$$\gamma: (-\varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow M, t \mapsto \begin{cases} \theta^{(p)}(t), & t \in (-\varepsilon, b) \\ \theta^{(q)}(t - t_0), & t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \end{cases}$$

と定義すると, これは $\forall t \in (t_0 - \varepsilon, b)$ に対して (LF-2) より $\theta^{(q)}(t - t_0) = \theta_{t-t_0}(q) = \theta(t - t_0) \circ \theta_{t_0}(p) = \theta_t(p) = \theta^{(p)}(t)$ が成り立つので well-defined である. 特に補題 B.3-(2) より γ は初期条件 $\gamma(0) = p$ を満たす V の積分曲線なので $(-\varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset \mathcal{D}^{(p)}$ ということになるが, $t_0 + \varepsilon > b$ より b の取り方に矛盾する. ■

定理 B.4: コンパクト台を持つベクトル場は完備

C^∞ ベクトル場 X がコンパクト台を持つならば, X は完備である.

証明 [Lee12, p.216, Theorem 9.16] ■

系 B.5: コンパクト多様体のベクトル場は完備

コンパクトな C^∞ 多様体上の任意の C^∞ ベクトル場は完備である.

定理 B.6: Lie 群の左不変ベクトル場は完備

Lie 群 G を与える. このとき $\forall X \in \mathfrak{X}^L(G)$ は完備である.

証明 左不変ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(G)$ の定義は, $\forall g \in G$ に対して X が自分自身と L_g -related であることだった.

さて, $\theta: \mathcal{D} \rightarrow G$ を X が生成するフローとする. このとき $\theta^{(1_G)}: \mathcal{D}^{(1_G)} \rightarrow G$ に関して $\mathcal{D}^{(1_G)}$ は開区間なので, 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathcal{D}^{(1_G)}$ を満たすようにできる.

$\forall g \in G$ を1つとる. X は自分自身と L_g -related なので, 命題 B.11 より $L_g \circ \theta^{(1_g)}: \mathcal{D}^{(1_G)} \rightarrow G$ は初期条件 $(L_g \circ \theta^{(1_G)})(0) = g$ を満たす X の積分曲線である. よって定理 B.2-(1) から, 少なくとも $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 上で $\theta^{(g)} = L_g \circ \theta^{(1_G)}$ が言える. i.e. $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathcal{D}^{(g)}$ であるから, 補題 B.4 から X は完備である. ■

B.4 Lie 微分

Euclid 空間 \mathbb{R}^d の点 $p \in \mathbb{R}^d$ におけるベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^d)$ の方向微分とは, 数ベクトル $v \in \mathbb{R}^d$ を一つ指定して

$$D_v X(p) := \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} X_{p+tv} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{X_{p+tv} - X_p}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{X^\mu(p+tv) - X^\mu(p)}{t} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_p \quad (\text{B.4.1})$$

と定義するのが妥当だろう. しかし, この定義は \mathbb{R}^d が \mathbb{R} -ベクトル空間であることを使ってしまうっており, 一般の C^∞ 多様体 M 上で同じことをやろうとしても上手くいかない. この問題を, ベクトル場の積分曲線を使って上手く解決したものが Lie 微分である.

定義 B.10: ベクトル場の Lie 微分

境界あり/なし C^∞ 多様体 M を与える.

ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ の, $V \in \mathfrak{X}(M)$ に沿った Lie 微分 (Lie derivative of X with respect to V) とは, $\forall p \in M$ において

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_V X)_p &:= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} T_{\theta_t(p)}(\theta_{-t})(X_{\theta_t(p)}) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_{\theta_t(p)}(\theta_{-t})(X_{\theta_t(p)}) - X_p}{t} \end{aligned}$$

と定義される C^∞ ベクトル場 $\mathcal{L}_V X \in \mathfrak{X}(M)$ のこと. ただし θ は V が生成するフローである.

命題 B.14:

境界あり/なし C^∞ 多様体 M と, その上の C^∞ ベクトル場 $V, X \in \mathfrak{X}(M)$ を与える. もし $\partial M \neq \emptyset$ のときは V は ∂M に接する^aとする.

このとき, $\forall p \in M$ において接ベクトル $(\mathcal{L}_V X)_p \in T_p M$ が存在し, $\mathcal{L}_V X$ は C^∞ ベクトル場になる.

^a i.e. $\forall p \in \partial M$ において $V_p \in T_p(\partial M) \subset T_p M$ が成り立つ.

証明 \mathcal{D} を **フローの定義域**, $\theta: \mathcal{D} \rightarrow M$ を V が**生成するフロー**とする. $\forall p \in M$ を1つ固定し, p を含む M のチャート $(U, \varphi) = (U, (x^\mu))$ をとる. 開区間 $0 \in J_0 \subset \mathbb{R}$ と開集合 $p \in U_0 \subset U$ を, $J_0 \times U_0 \subset \mathcal{D}$ でかつ $\theta(J_0 \times U_0) \subset U$ を満たすようにとる^{*17}. このとき $\forall t \in J_0$ および $\forall f \in C^\infty(U_0)$ に対して

$$\begin{aligned} T_{\theta_t(p)}(\theta_{-t})(X_{\theta_t(p)})f &= X_{\theta_t(p)}(f \circ \theta_{-t}) \\ &= X^\mu(\theta_t(p)) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_{\theta_t(p)} (f \circ \theta_{-t}) \\ &= X^\mu(\theta_t(p)) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_{\varphi(\theta_t(p))} (f \circ \theta_{-t} \circ \varphi^{-1}) \\ &= X^\mu(\theta_t(p)) \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Big|_{\varphi(\theta_{-t}(\theta_t(p)))} (f \circ \varphi^{-1}) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_{\varphi(\theta_t(p))} (x^\nu \circ \theta_{-t} \circ \varphi^{-1}) \\ &= X^\mu(\theta_t(p)) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_{\varphi(\theta_t(p))} (x^\nu \circ \theta_{-t} \circ \varphi^{-1}) \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Big|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi^{-1}) \\ &= \left(X^\mu(\theta_t(p)) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_{\varphi(\theta_t(p))} (x^\nu \circ \theta_{-t} \circ \varphi^{-1}) \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Big|_p \right) f \end{aligned}$$

と計算できる. $X^\mu: M \rightarrow \mathbb{R}, \theta_t: M_t \rightarrow M_{-t}, x^\nu \circ \theta_{-t} \circ \varphi^{-1}: \mathbb{R}^{\dim M} \rightarrow \mathbb{R}$ の全てが C^∞ 写像なので $\frac{\partial}{\partial x^\nu} \Big|_p \in T_p M$ の係数は $p \in U_0$ に関して C^∞ 級である. よって命題 B.2 から写像 $M \rightarrow T_p M, p \mapsto T_{\theta_t(p)}(\theta_{-t})(X_{\theta_t(p)})$ は C^∞ 級ベクトル場であり^{*18}, 示された. ■

【例 B.4.1】

$M = \mathbb{R}^d$ とし, M のチャート $(\mathbb{R}^d, (x^\mu))$ をとる. このとき C^∞ ベクトル場

$$V := v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \text{w/} \quad v^\mu = \text{const.}$$

の**生成するフロー**は

$$\theta: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, (t, (p^1, \dots, p^d)) \mapsto (p^1 + v^1 t, \dots, p^d + v^d t)$$

と書ける. 故に, $X \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ の V に沿った **Lie 微分**は

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_V X)_p &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_{\theta_t(p)}(\theta_{-t})(X_{\theta_t(p)}) - X_p}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_{p+vt}(\theta_{-t})(X_{p+vt}) - X_p}{t} \end{aligned}$$

^{*17} θ は C^∞ 写像なのでこのような J_0, U_0 をいつでもとることができる.

^{*18} 従って $X_p \in T_p M$ との差をとることができる.

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(X^\mu(p+vt) \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu}(p+vt) \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Big|_p - X^\mu(p) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_p \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{X^\mu(p+tv) - X^\mu(p)}{t} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_p \\
&= D_v X(p)
\end{aligned}$$

となって (B.4.1) を再現する.

定理 B.7: Lie 微分の計算

M を境界あり/なし C^∞ 多様体とする. このとき, $\forall V, X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\mathcal{L}_V X = [V, X]$$

が成り立つ.

証明 $\theta: \mathcal{D} \rightarrow M$ を V が生成するフローとする. $\forall p \in M$ を 1 つ固定する. 十分小さい t を取れば $(t, p) \in \mathcal{D}^{(p)}$ を満たすようにできる. このとき $\forall f \in C^\infty(M)$ に対して Taylor の定理から

$$f \circ \theta_t(p) = f(\theta^{(p)}(t)) = f(p) + t \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\theta^{(p)}(t)) + \mathcal{O}(t^2) = f(p) + t \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(0,p)} f(\theta(t, p)) + \mathcal{O}(t^2)$$

と書ける. 一方, 無限小生成子の定義から

$$Vf(p) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(0,p)} f(\theta(t, p))$$

が成り立つので

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f \circ \theta_t - f}{t} = Vf \tag{B.4.2}$$

が言える.

さて, 定理 B.2-(3) より $\theta_{-t}: M_{-t} \rightarrow M_t$ は微分同相写像なので, ベクトル場 $X|_{M_{-t}}$ の押し出し $(\theta_{-t})_* X$ が一意的に存在し,

$$T_{\theta_t(p)}(\theta_{-t})(X_{\theta_t(p)}) = ((\theta_{-t})_* X)_{\theta_{-t}(\theta_t(p))} = ((\theta_{-t})_* X)_p$$

を満たす. よって (B.4.2) と系 B.1 から

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_V X)f &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{((\theta_{-t})_* X)f - Xf}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{X(f \circ \theta_{-t}) \circ \theta_t - Xf}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{X(f \circ \theta_{-t}) \circ \theta_t - Xf \circ \theta_t + Xf \circ \theta_t - Xf}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} X \left(\frac{f \circ \theta_{-t} - f}{t} \right) \circ \theta_t + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Xf \circ \theta_t - Xf}{t} \\
&= X(-V)f + V(Xf) \\
&= [V, X]f
\end{aligned}$$

が言える. ■

B.5 C^∞ ベクトル束

C^∞ 級のベクトル束を構成する便利な補題から出発しよう [Lee12, p.253]

補題 B.5: C^∞ ベクトル束の構成

- 境界あり/なし C^∞ 多様体 M
- n 次元実ベクトル空間の族 $\{E_p\}_{p \in M}$ と全射

$$\pi: \coprod_{p \in M} E_p \longrightarrow M, (p, v) \longmapsto p$$

- M の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$
- 全単射の族 $\{\psi_\lambda: \pi^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times \mathbb{R}^n\}_{\lambda \in \Lambda}$
- C^∞ 写像の族 $\{t_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})\}_{\alpha, \beta \in \Lambda}$

の5つ組であって以下の条件を充たすものを与える：

(DVS-1) $\forall \lambda \in \Lambda$ および $\forall p \in U_\lambda$ に対して、制限

$$\psi_\lambda|_{E_p}: E_p \longrightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$$

はベクトル空間の同型写像である。

(DVS-2) $\forall \alpha, \beta \in \Lambda$ および $\forall (p, v) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$ に対して

$$\psi_\beta^{-1}(p, v) = \psi_\alpha^{-1}(p, t_{\alpha\beta}(p)(v))$$

が成り立つ。

このとき、集合 $E := \coprod_{p \in M} E_p$ 上の C^∞ 構造が一意的に存在して、 $\mathbb{R}^n \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ が局所自明化 $\{\psi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を持つ C^∞ ベクトル束になる。

証明 $\forall p \in M$ を1つとる。すると $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は M の開被覆なので、ある $\alpha_p \in \Lambda$ が存在して $p \in U_{\alpha_p}$ となる。さらに U_{α_p} は開集合なので、 C^∞ チャート (V_p, φ_p) であって $p \in V_p \subset U_{\alpha_p}$ を充たすものが存在する。このとき、写像 $\tilde{\varphi}_p: \pi^{-1}(V_p) \longrightarrow \varphi_p(V_p) \times \mathbb{R}^n$ を

$$\tilde{\varphi}_p := (\varphi_p \times \text{id}_{\mathbb{R}^n}) \circ \psi_{\alpha_p}|_{\pi^{-1}(V_p)}$$

と定義する。

まず、 M が境界を持たない場合に

- 集合 E
- E の部分集合族 $\{\pi^{-1}(V_p)\}_{p \in M}$
- 写像の族 $\{\tilde{\varphi}_p: \pi^{-1}(V_p) \longrightarrow \varphi_p(V_p) \times \mathbb{R}^n\}_{p \in M}$

の3つ組が補題 B.1 の5条件を充たすこと、i.e. E が境界を持たない C^∞ 多様体になることを示そう。

(DS-1) $\forall p \in M$ に対して $\psi_p(\pi^{-1}(V_p)) = \varphi_p(V_p) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{\dim M} \times \mathbb{R}^n$ であり、 $\varphi_p(V_p) \subset \mathbb{R}^{\dim M}$ は

チャートの定義から $\mathbb{R}^{\dim M}$ の開集合なので $\psi_p(\pi^{-1}(V_p))$ は $\mathbb{R}^{\dim M} \times \mathbb{R}^n$ の開集合である。仮定より $\psi_{\alpha_p}: \pi^{-1}(V_p) \rightarrow V_p \times \mathbb{R}^n$ は全単射であり、チャートの定義から $\varphi_p \times \text{id}_{\mathbb{R}^n}: V_p \times \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi_p(V_p) \times \mathbb{R}^n$ は全単射なので $\psi_p = (\varphi_p \times \text{id}_{\mathbb{R}^n}) \circ \tilde{\varphi}_{\alpha_p}$ も全単射である。

(DS-2, 3) $\forall p, q \in M$ をとる。このとき

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_p(\pi^{-1}(V_p) \cap \pi^{-1}(V_q)) &= \varphi_p(V_p \cap V_q) \times \mathbb{R}^n \\ \tilde{\varphi}_q(\pi^{-1}(V_p) \cap \pi^{-1}(V_q)) &= \varphi_q(V_p \cap V_q) \times \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

はどちらも $\mathbb{R}^{\dim M} \times \mathbb{R}^n$ の開集合である。さらに $\forall (x, v) \in \tilde{\varphi}_p^{-1}(\pi^{-1}(V_p) \cap \pi^{-1}(V_q))$ に対して

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_q \circ \tilde{\varphi}_p^{-1}(x, v) &= \tilde{\varphi}_q \circ \psi_{\alpha_p}^{-1}(\varphi_p^{-1}(x), v) \\ &= \tilde{\varphi}_q \circ \psi_{\alpha_q}^{-1}(\varphi_p^{-1}(x), t_{\alpha_q, \alpha_p}(\varphi_p^{-1}(x))(v)) \\ &= (\varphi_q \circ \varphi_p^{-1}(x), t_{\alpha_q, \alpha_p}(\varphi_p^{-1}(x))(v))\end{aligned}$$

が成り立つが、 C^∞ チャートの定義から $\varphi_{\alpha_p}, \varphi_{\alpha_q}$ は C^∞ 写像で、かつ仮定より t_{α_q, α_p} も C^∞ 写像なので、最右辺は C^∞ 写像の合成として書ける。よって $\tilde{\varphi}_q \circ \tilde{\varphi}_p^{-1}$ は C^∞ 写像である。

(DS-4) $\{(V_p, \varphi_p)\}_{p \in M}$ は M のアトラスなので、高々可算濃度の部分集合 $I \subset M$ が存在して $\{V_i\}_{i \in I}$ が M の開被覆になる。このとき

$$E = \coprod_{p \in \bigcup_{i \in I} V_i} E_p = \bigcup_{i \in I} \coprod_{p_i \in V_i} E_{p_i} = \bigcup_{i \in I} \pi^{-1}(V_i)$$

が言える。

(DS-5) 互いに相異なる $\xi = (p, v), \eta = (q, w) \in E$ をとる。もし $p = q$ ならば $\xi, \eta \in E_p \subset \pi^{-1}(V_p)$ である。 $p \neq q$ ならば、 $V_p, V_q \subset M$ を $V_p \cap V_q = \emptyset$ を満たすようにとれる。すると $\pi^{-1}(V_p) \cap \pi^{-1}(V_q) = \pi^{-1}(V_p \cap V_q) = \emptyset$ であつ $\xi \in \pi^{-1}(V_p), \eta \in \pi^{-1}(V_q)$ が成り立つ。

次に、 M が境界付き多様体である場合を考える。座標を入れ替える写像

$$\text{swap}: \mathbb{R}^{\dim M} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\dim M}, (x^1, \dots, x^{\dim M}, v^1, \dots, v^n) \mapsto (v^1, \dots, v^n, x^1, \dots, x^{\dim M})$$

は微分同相写像^{*19}であり、境界チャート (V_p, φ_p) に関して

$$\text{swap} \circ \psi_p(\pi^{-1}(V_p)) = \mathbb{R}^n \times \varphi_p(V_p) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{H}^{\dim M} = \mathbb{H}^{\dim M + n}$$

が成り立つ。よって

- 集合 E
- E の部分集合族 $\{\pi^{-1}(V_p)\}_{p \in M}$
- 写像の族 $\{\text{swap} \circ \tilde{\varphi}_p: \pi^{-1}(V_p) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \varphi_p(V_p)\}_{p \in M}$

の3つ組が補題 B.2 の5条件を満たすことを示せば良いが、議論は M が境界を持たない場合と全く同様である。 ■

^{*19} $\mathbb{R}^{\dim M + n}$ には標準的な C^∞ 構造を入れる。

付録 C

∞ -圏

この付録では, [Lur08], [Lur], [Lan21], [Alf23] に従って $(\infty, 1)$ -圏^{*1}を導入する. さらに, [BSP20], [AFR20] をベースに (∞, n) -圏の構成を試みる.

C.1 圏論の復習

C.1.1 圏と関手

定義 C.1: 圏

圏 (category) \mathcal{C} とは, 以下の 4 種類のデータからなる:

- 対象 (object) と呼ばれる要素の集まり^a

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$$

- $\forall A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して, A から B への射 (morphism) と呼ばれる要素の集合

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$$

- $\forall A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して, A 上の恒等射 (identity morphism) と呼ばれる射

$$\mathrm{Id}_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$$

- $\forall A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B), \forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ に対して, f と g の合成 (composite) と呼ばれる射 $g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$ を対応させる集合の写像

$$\circ: \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C), (f, g) \longmapsto g \circ f$$

これらの構成要素は, 次の 2 条件を満たさねばならない:

- (1) (unitality): 任意の射 $f: A \longrightarrow B$ に対して

$$f \circ \mathrm{Id}_A = f, \quad \mathrm{Id}_B \circ f = f$$

^{*1} [Lur] は創始者本人によって運営されている web サイトのようだ.

が成り立つ.

(2) (**associativity**): 任意の射 $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, $h: C \rightarrow D$ に対して

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

が成り立つ.

^a $\text{Ob}(\mathcal{C})$ は, 集合論では扱えないほど大きなものになっても良い.

定義 C.2: モノ・エピ・同型射

圏 \mathcal{C} を与える.

- 射 $f: A \rightarrow B$ が**モノ射** (monomorphism) であるとは, $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して写像

$$\begin{aligned} f_*: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, B), \\ g &\mapsto f \circ g \end{aligned}$$

が集合の写像として単射であること.

- 射 $f: A \rightarrow B$ が**エピ射** (epimorphism) であるとは, $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して写像

$$\begin{aligned} f^*: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X), \\ g &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

が集合の写像として単射であること.

- 射 $f: A \rightarrow B$ が**同型射** (isomorphism) であるとは, 射 $g: B \rightarrow A$ が存在して $g \circ f = \text{Id}_A$ かつ $f \circ g = \text{Id}_B$ を満たすこと. このとき f と g は互いの**逆射** (inverse) であると言い, $g = f^{-1}$, $f = g^{-1}$ と書く^a.
- $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ の間に同型射が存在するとき, 対象 A と B は**同型** (isomorphic) であると言い, $A \cong B$ と書く.

^a 逆射は存在すれば一意である.

定義 C.3: 関手

圏 \mathcal{C} , \mathcal{D} を与える. 圏 \mathcal{C} から圏 \mathcal{D} への関手 F とは, 以下の2つの対応からなる:

- 圏 \mathcal{C} における任意の対象 $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して, 圏 \mathcal{D} における対象 $F(X) \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ を対応づける
- 圏 \mathcal{C} における任意の射 $f: X \rightarrow Y$ に対して, 圏 \mathcal{D} における射 $F(f): F(X) \rightarrow F(Y)$ を対応づける

これらの対応は以下の条件を満たさねばならない:

(fun-1) 圏 \mathcal{C} における任意の射 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ に対して,

$$F(g \circ f) \rightarrow F(g) \circ F(f)$$

(fun-2) 圏 \mathcal{C} における任意の対象 $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して,

$$F(\text{Id}_X) = \text{Id}_{F(X)}$$

文脈上明らかなきは, 圏 \mathcal{C} から圏 \mathcal{D} への関手 F のことを関手 $\mathbf{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ と略記する.

定義 C.4: 忠実・充満・本質的全射

関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を与える.

- F が忠実 (faithful) であるとは, $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して写像

$$F_{X,Y}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)), f \mapsto F(f)$$

が単射であること.

- F が充満 (full) であるとは, $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して写像

$$F_{X,Y}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)), f \mapsto F(f)$$

が全射であること.

- F が本質的全射 (essentially surjective) であるとは, $\forall Z \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ に対して $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が存在して $F(X)$ が Z と同型になること.

忠実充満関手のことを埋め込みと呼ぶ.

定義 C.5: 自然変換

2つの関手 $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を与える. F, G の間の自然変換 (natural transformation) $\tau: F \Rightarrow G$ とは, 以下の対応からなる:

- 圏 \mathcal{C} における任意の対象 $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して, 圏 \mathcal{D} における射 $\tau_X: F(X) \rightarrow G(X)$ を対応づける

この対応は以下の条件を充たさねばならない:

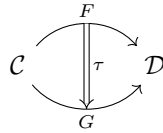
(nat) 圏 \mathcal{C} における任意の射 $f: X \rightarrow Y$ に対して, 以下の図式を可換にする:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \downarrow \tau_X & & \downarrow \tau_Y \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \end{array}$$

自然変換 $\tau: F \Rightarrow G$ であって, $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して射 $\tau_X: F(X) \rightarrow G(X)$ が同型射であるものを自然同値 (natural equivalence)^a と呼ぶ.

^a 自然同型 (natural isomorphism) ということもある.

自然変換 $\tau: F \Rightarrow G$ を



と書くことがある.

C.1.2 極限と余極限

定義 C.6: 図式

圏 \mathcal{C} と小圏 I (添字圏と呼ばれる) を与える.

\mathcal{C} における I 型の図式 (diagram of shape I) とは, 関手

$$I \rightarrow \mathcal{C}$$

のこと.

定義 C.7: 錐の圏

$D: I \rightarrow \mathcal{C}$ を図式とする.

- D 上の錐 (cone) とは,

- \mathcal{C} の対象 $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$
 - \mathcal{C} の射の族 $\mathbf{c}_\bullet := \{c_i \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D(i))\}_{i \in \text{Ob}(\mathcal{I})}$
- の組 (C, \mathbf{c}_\bullet) であって, $\forall i, j \in \text{Ob}(\mathcal{I})$ および $\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{I}}(i, j)$ に対して

$$c_j = D(f) \circ c_i$$

を充たす, i.e. 以下の図式を可換にするもののこと.

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ c_i \swarrow & & \searrow c_j \\ D(i) & \xrightarrow{D(f)} & D(j) \end{array}$$

- 錐の射 (morphism of cones)

$$(C, \mathbf{c}_\bullet) \xrightarrow{u} (C', \mathbf{c}'_\bullet)$$

とは, \mathcal{C} の射 $u \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$ であって, $\forall i \in \text{Ob}(\mathcal{I})$ に対して

$$c_i = c'_i \circ u$$

を充たす, i.e. 以下の図式を可換にするもののこと.

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ c_i \swarrow & & \searrow u \\ & C' & \\ c'_i \swarrow & & \searrow \\ D(i) & & \end{array}$$

D 上の錐と錐の射を全て集めたものは圏 $\mathbf{Cone}(D)$ を成す.

定義 C.8: 極限

図式 $D: \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ の極限 (limit)^aとは, 圏 $\mathbf{Cone}(D)$ の終対象のこと. 記号として $(\lim_{\mathcal{I}} D, p_\bullet)$ と書く^b. i.e. 極限 $(\lim_{\mathcal{I}} D, p_\bullet) \in \text{Ob}(\mathbf{Cone}(D))$ は, 以下の普遍性を充たす:

(極限の普遍性)

$\forall (C, \mathbf{c}_\bullet) \in \text{Ob}(\mathbf{Cone}(D))$ に対して, 錐の射 $u \in \text{Hom}_{\mathbf{Cone}(D)}((C, \mathbf{c}_\bullet), (\lim_{\mathcal{I}} D, p_\bullet))$ が一意的に存在して, $\forall i, j \in \text{Ob}(\mathcal{I})$ および $\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{I}}(i, j)$ に対して図式を可換にする.

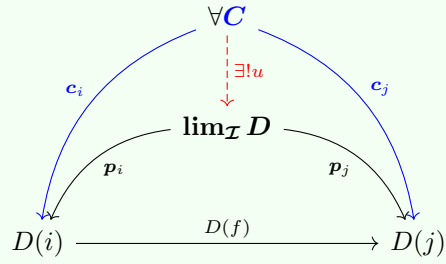


図 C.1: 極限の普遍性

^a 普遍錐 (universal cone) とも言う.

^b $\varprojlim D$ と書くこともある.

定義 C.9: 余錐の圏

$D: \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ を図式とする.

- D 上の余錐 (cocone) とは,
 - \mathcal{C} の対象 $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$
 - \mathcal{C} の射の族 $c_{\bullet} := \{c_i \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(D(i), C)\}_{i \in \text{Ob}(\mathcal{I})}$
- の組 (C, c_{\bullet}) であって, $\forall i, j \in \text{Ob}(\mathcal{I})$ および $\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{I}}(i, j)$ に対して

$$c_i = D(f) \circ c_j$$

を充たす, i.e. 以下の図式を可換にするものこと.

$$\begin{array}{ccc} D(i) & \xrightarrow{D(f)} & D(j) \\ & \searrow c_i & \swarrow c_j \\ & C & \end{array}$$

- 余錐の射 (morphism of cocones)

$$(C, c_{\bullet}) \xrightarrow{u} (C', c'_{\bullet})$$

とは, \mathcal{C} の射 $u \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$ であって, $\forall i \in \text{Ob}(\mathcal{I})$ に対して

$$c'_i = u \circ c_i$$

を充たす, i.e. 以下の図式を可換にするものこと.

$$\begin{array}{ccc} D(i) & & \\ \searrow c_i & & \searrow c_j \\ & C & \\ & \downarrow u & \\ & C' & \end{array}$$

D 上の余錐と余錐の射を全て集めたものは圏 $\mathbf{Cone}(D)$ を成す.

定義 C.10: 余極限

図式 $D: \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ の余極限 (colimit)^a とは, 圏 $\mathbf{coCone}(D)$ の始対象のこと. 記号として $(\mathbf{colim}_{\mathcal{I}} D, p_{\bullet})$ と書く^b. i.e. 余極限 $(\mathbf{colim}_{\mathcal{I}} D, p_{\bullet}) \in \mathbf{Ob}(\mathbf{coCone}(D))$ は, 以下の普遍性を充たす:

(余極限の普遍性)

$\forall (\mathcal{C}, c_{\bullet}) \in \mathbf{Ob}(\mathbf{coCone}(D))$ に対して, 余錐の射 $u \in \mathbf{Hom}_{\mathbf{coCone}(D)}((\mathbf{colim}_{\mathcal{I}} D, p_{\bullet}), (\mathcal{C}, c_{\bullet}))$ が一意的に存在して, $\forall i, j \in \mathbf{Ob}(\mathcal{I})$ および $\forall f \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{I}}(i, j)$ に対して図式を可換にする.

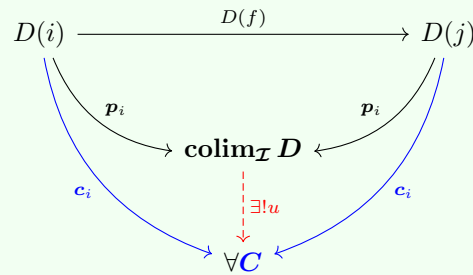


図 C.2: 余極限の普遍性

^a 普遍余錐 (universal cocone) とも言う.

^b $\varinjlim D$ と書くこともある.

【例 C.1.1】積と和

図式

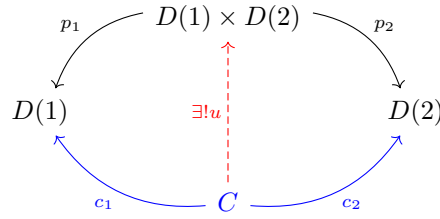
$$D: \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \longrightarrow \mathcal{C}$$

の極限を (存在すれば) 積 (product) と呼び, $D(1) \times D(2)$ と書く. 同じ図式の余極限を (存在すれば) 和^a (coproduct) と呼び, $D(1) \amalg D(2)$ と書く.

より具体的には, 圏 \mathcal{C} における 2 つの対象 $D(1), D(2) \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ の積とは,

- 圏 \mathcal{C} における 1 つの対象 $D(1) \times D(2) \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$
- 圏 \mathcal{C} における 2 つの射 $p_i \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(D(1) \times D(2), D(i)) \quad \forall i = 1, 2$

の組であって, 任意の組 $(\mathcal{C} \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C}), \{c_i \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}, D(i))\}_{i \in \{1, 2\}})$ に対して以下の図式を可換にする圏 \mathcal{C} の射 $u \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}, D(1) \times D(2))$ が一意的に存在するようなもののこと:



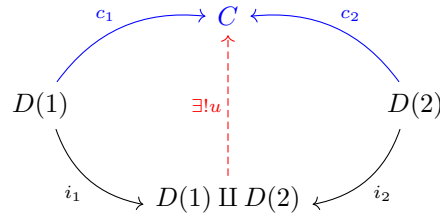
具体的な圏における積は，例えば以下の通りである：

- (1) 集合と写像の圏 **Sets** における積とは，直積集合と，直積因子への射影の組のこと．
- (2) 位相空間の圏 **Top** における積とは，直積位相空間と，直積因子への連続な^b射影の組のこと．
- (3) 体 \mathbb{K} 上のベクトル空間の圏 **Sets** における積とは，直積ベクトル空間と射影^cの組のこと．これは，特に元の図式の対象が有限個である場合は直和ベクトル空間と同型である．

同様に，圏 \mathcal{C} における 2 つの対象 $D(1), D(2) \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ の和とは，

- 圏 \mathcal{C} における 1 つの対象 $D(1) \amalg D(2) \in \text{Ob}(\mathcal{C})$
- 圏 \mathcal{C} における 2 つの射 $i_j \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(D(1) \amalg D(2), D(j))$ $\text{w/ } j = 1, 2$

の組であって，任意の組 $(C \in \text{Ob}(\mathcal{C}), \{c_i \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(D(i), C)\}_{i \in \{1, 2\}})$ に対して以下の図式を可換にする圏 \mathcal{C} の射 $u \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(D(1) \amalg D(2), C)$ が一意的存在するようなものこと：



具体的な圏における和は，例えば以下の通りである：

- (1) 集合と写像の圏 **Sets** における積とは，disjoint union と，disjoint union の各成分への包含写像の組のこと．
- (2) 位相空間の圏 **Top** における積とは，disjoint union
- (3) 体 \mathbb{K} 上のベクトル空間の圏 **Sets** における積とは，直積ベクトル空間のこと．これは，特に元の図式の対象が有限個である場合は直和ベクトル空間と同型である．

^a 余積と言うこともある．

^b むしろ，直積位相とは射影という写像が連続になるような最弱の位相のことである．

^c 定義から線型写像になるため，圏 $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の射である．

【例 C.1.2】イコライザとコイコライザ

図式

$$D: \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & \xrightleftharpoons[g]{f} & 2 \end{array}} \longrightarrow C$$

の極限を（存在すれば）イコライザ (equalizer) と呼び、 $\mathbf{Eq}(D(1), D(2))$ と書く．同じ図式の余極限を（存在すれば）コイコライザ (coequalizer) と呼び、 $\mathbf{Coeq}(D(1), D(2))$ と書く．具体的な圏における例は以下の通り：

- (1) 集合と写像の圏 **Sets** におけるイコライザとは、2つの写像 $f, g \in \mathbf{Hom}_{\mathbf{Sets}}(X, Y)$ によって定まる X の部分集合

$$\mathbf{Eq}(f, g) := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

と、包含写像 $i: \mathbf{Eq}(f, g) \longrightarrow X$ の組みである．直観的には方程式 $f(x) = g(x)$ の解空間のことである．

- (2) 集合と写像の圏 **Sets** における2つの写像 $f, g \in \mathbf{Hom}_{\mathbf{Sets}}(X, Y)$ の間のコイコライザとは、 $f(x) \sim g(x) \forall x \in X$ を満たす Y の最小の同値関係 $\sim \subset Y \times Y$ による商集合

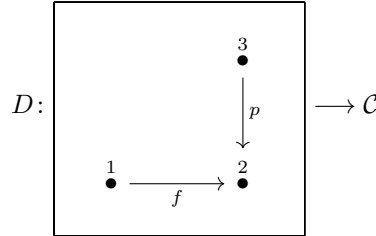
$$\mathbf{Coeq}(f, g) := Y/\sim$$

および商写像 $q: Y \longrightarrow \mathbf{Coeq}(f, g)$ の組みである．直観的には、 $\forall x \in X$ に対して方程式 $f(x) = g(x)$ が成立するように強引に Y に同値関係を入れて得られる商集合ということになる．

- (3) 位相空間の圏 **Top** におけるイコライザとは **Sets** におけるイコライザ $(\mathbf{Eq}(f, g), i)$ に、 i が連続写像になるような最弱の位相を入れて得られる位相空間のこと．**Top** におけるコイコライザとは、**Sets** におけるコイコライザ $(\mathbf{Coeq}(f, g), p)$ に、 p が連続写像になるような最強の位相を入れて得られる位相空間のこと．
- (4) 体 \mathbb{K} 上のベクトル空間の圏 $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ における、線型写像 $f \in \mathbf{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}}(V, W)$ と零射 $0 \in \mathbf{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}}(V, W)$ の間のイコライザとは、線型写像 f の核 $\text{Ker } f$ および包含準同型 $i: \text{Ker } f \hookrightarrow V$ の組みのこと． $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ における、線型写像 $f \in \mathbf{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}}(V, W)$ と零射 $0 \in \mathbf{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}}(V, W)$ の間のコイコライザとは、線型写像 f の余核 $\text{Coker } f := W/\text{Im } f$ および標準的射影 $p: W \twoheadrightarrow \text{Coker } f$ の組みのこと．

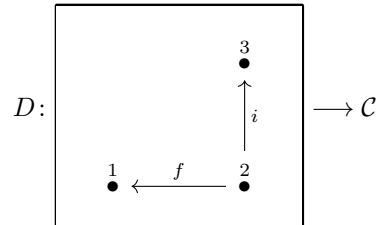
【例 C.1.3】引き戻しと押し出し

図式



の極限を（存在すれば）引き戻し^a (pullback) と呼び、 $D(1) \times_{D(3)} D(2)$ と書く。

図式



の余極限を（存在すれば）押し出しと呼び、 $D(1) \amalg_{D(3)} D(2)$ と書く。

^a ファイバー積 (fiber product) と呼ぶこともある。

定義 C.11: 完備な圏

圏 \mathcal{C} が完備 (resp. 余完備) (complete resp. cocomplete) であるとは、 \mathcal{C} における任意の図式が極限 (resp. 余極限) を持つことを言う。完備かつ余完備な圏は双完備 (bicomplete) であると言われる。

Sets は双完備である。

命題 C.1: 極限と Hom の交換

圏 \mathcal{C} の図式 $D: I \longrightarrow \mathcal{C}$ を与える。

- (1) 圏 \mathcal{C} は完備であるとする。このとき $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して、集合 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \lim_I D) \in \text{Ob}(\mathbf{Sets})$ は **Sets** の図式

$$I \xrightarrow{D} \mathcal{C} \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)} \mathbf{Sets} \quad (\text{C.1.1})$$

の極限である。i.e. 全単射

$$\lim_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, D(i)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \lim_I D)$$

が存在する。

- (2) 圏 \mathcal{C} は余完備であるとする。このとき $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して、集合 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{colim}_I D, X) \in$

$\text{Ob}(\mathbf{Sets})$ は \mathbf{Sets} の図式

$$I \xrightarrow{D} \mathcal{C} \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)} \mathbf{Sets}$$

の余極限である. i.e. 全単射

$$\lim_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(D(i), X) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{colim}_I D, X)$$

が存在する.

証明 (1) \mathcal{C} が完備なので, 図式 $D: I \longrightarrow \mathcal{C}$ の極限

$$\begin{array}{ccc} & \lim_I D & \\ p_i \swarrow & & \searrow p_j \\ D(i) & \xrightarrow{D(f)} & D(j) \end{array}$$

が存在する^{*2}. 示すべきは \mathbf{Sets} の図式

$$\begin{array}{ccc} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \lim_I D) & \\ p_{i*} \swarrow & & \searrow p_{j*} \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, D(i)) & \xrightarrow{D(f)_*} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, D(j)) \end{array}$$

が極限の普遍性を満たすことである^{*3}.

\mathbf{Sets} の図式 (C.1.1) の錐 (Y, c_{\bullet}) を任意にとる. すると錐の定義および $(-)_*$ の定義から, $\forall y \in Y$ に対して以下の図式が可換になる:

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ c_i(y) \swarrow & & \searrow c_j(y) \\ D(i) & \xrightarrow{D(f)} & D(j) \end{array}$$

i.e. 組 $(X, c_{\bullet}(y))$ は \mathcal{C} の図式 $D: I \longrightarrow \mathcal{C}$ の錐であるから, 錐の射 $u_y: X \longrightarrow \lim_I D$ が一意に存在する. ここで写像

$$u: Y \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \lim_I D), y \longmapsto u_y$$

を考えると, これは $\forall y \in Y$ に対して $p_{\bullet*} \circ u(y) = p_{\bullet} \circ u_y = c_{\bullet}(y)$ を満たす. i.e. \mathbf{Sets} の図式

^{*2} $i, j \in \text{Ob}(I)$ および $f_{ij} \in \text{Hom}_I(i, j)$ は任意にとる.

^{*3} $p_{i*}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \lim_I D) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, D(i))$, $f \longmapsto p_i \circ f$ などと定義する. このように射に下付きの $*$ を書いた時は post-compose を表す. 上付きの $*$ は pre-compose である.

$$\begin{array}{ccc}
& \forall Y & \\
& \downarrow u & \\
\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \lim_I D) & & \\
\swarrow p_{i*} \quad \searrow p_{j*} & & \\
\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, D(i)) & \xrightarrow{D(f)_*} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, D(j))
\end{array}$$

(Blue curved arrows are labeled c_i and c_j .)

を可換にする. u_y の定義からこのような u は一意であるから, 図式 (C.1.1) の錐 $(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \lim_I D), p_{\bullet*})$ が**極限の普遍性**を充たすことが分かった. 極限の一意性より

$$\lim_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, D(i)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \lim_I D)$$

でなくてはならない.

(2) \mathcal{C} が余完備なので, 図式 $D: I \rightarrow \mathcal{C}$ の余極限

$$\begin{array}{ccc}
D(i) & \xrightarrow{D(f)} & D(j) \\
& \searrow p_i \quad \swarrow p_j & \\
& \text{colim}_I D &
\end{array}$$

が存在する^{*4}. 示すべきは **Sets** の図式

$$\begin{array}{ccc}
& \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{colim}_I D, X) & \\
\swarrow p_i^* \quad \searrow p_j^* & & \\
\text{Hom}_{\mathcal{C}}(D(j), X) & \xrightarrow{D(f)^*} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(D(i), X)
\end{array}$$

が**極限の普遍性**を充たすことだが, 以降の議論は (1) と同様である. ■

C.1.3 米田埋め込み

定義 C.12: 前層

圏 \mathcal{C} 上の圏 \mathcal{S} に値をとる**前層**とは, **関手**

$$P: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{S}$$

のこと.

前層の圏 $\text{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{S})$ ^{*5}とは,

- **前層** $P: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{S}$ を対象とする

^{*4} $i, j \in \text{Ob}(I)$ および $f_{ij} \in \text{Hom}_I(i, j)$ は任意にとる.

^{*5} $[\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathcal{S}]$ や $\mathcal{S}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ と書くこともある. なお, **付録 A** で登場したものはこれの一例である.

- 前層 $P, Q: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{S}$ の間の自然変換 $\tau: P \Rightarrow Q$ を射とする

として構成される圏のこと^{*6}.

定義 C.13: 表現可能前層・米田埋め込み

圏 \mathcal{C} を与える. $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して, 以下で定義する前層

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X): \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$$

のことを表現可能前層 (representable presheaf) と呼ぶ:

- $\forall Y \in \text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}})$ に対して

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)(Y) := \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \in \text{Ob}(\mathbf{Sets})$$

を対応づける

- \mathcal{C}^{op} における任意の射 $g: Y \rightarrow Z^a$ に対して,

$$\begin{aligned} \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)(g) &:= g^*: \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X), \\ h &\mapsto h \circ g \end{aligned}$$

を対応付ける

^a つまり, これは \mathcal{C} における射 $g: Z \rightarrow Y$ である.

米田埋め込み (Yoneda embedding) とは, 以下で定義する関手

$$\mathbf{y}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{PSh}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets})$$

のこと^a:

- $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}})$ に対して表現可能前層 $\mathbf{y}(X) := \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) \in \text{Ob}(\mathbf{PSh}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets}))$ を対応付ける
- \mathcal{C} における任意の射 $f: X \rightarrow Y$ に対して, 以下で定義される自然変換 $\mathbf{y}(f): \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) \Rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y)$ を対応付ける:
 - $\forall Z \in \text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}})$ に対して, 圏 \mathbf{Sets} における射

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(f)_Z &:= f_*: \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y), \\ g &\mapsto f \circ g \end{aligned}$$

を対応付ける.

^a 実際, 一部の数学者は米田埋め込みの記号に平仮名の「よ」を使っている.

^{*6} $\mathbf{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{S})$ の恒等射は $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}})$ に対して $\text{Id}_X: X \rightarrow X$ を対応づける自然変換である.

補題 C.1: 米田の補題

前層 $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ および圏 \mathcal{C} の対象 $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を与える. このとき, 写像

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\text{PSh}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets})}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X), F) &\longrightarrow F(X), \\ \tau &\longmapsto \tau_X(\text{Id}_X) \end{aligned}$$

は全単射である.

米田の補題の主張は少し込み入っているが, 次のように考えれば良い:

$\tau \in \text{Hom}_{\text{PSh}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets})}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X))$ とは **自然変換**

$$\begin{array}{ccc} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) & \\ \text{C}^{\text{op}} & \begin{array}{c} \downarrow \tau \\ \downarrow F \end{array} & \mathbf{Sets} \end{array}$$

のことであるから, **表現可能前層** の定義より $X \in \text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}})$ に対して圏 \mathbf{Sets} における射 (i.e. 写像) $\tau_X: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) \rightarrow F(X)$ が定まる. **圏の定義** より集合 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ には必ず恒等射という元 $\text{Id}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ が含まれるので, それを写像 τ_X で送った先は $\tau_X(\text{Id}_X) \in F(X)$ として well-defined である.

証明 写像

$$\begin{aligned} \eta: F(X) &\longrightarrow \text{Hom}_{\text{PSh}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets})}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X), F), \\ s &\longmapsto \{\eta(s)_Y: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \rightarrow F(Y), f \longmapsto F(f)(s)\}_{Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})} \end{aligned}$$

を考える. $\forall s \in F(X)$ を 1 つ固定する. このとき圏 \mathcal{C}^{op} における任意の射 $Y \leftarrow Z: f$ および $\forall g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$ に対して

$$\begin{aligned} \eta(s)_Y \circ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)(f)(g) &= \eta(s)_Y(g \circ f) \\ &= F(g \circ f)(s) \\ &= F(f) \circ F(g)(s) \\ &= F(f) \circ \eta(s)_Z(g) \end{aligned}$$

が言える. i.e. $\eta(s)$ は自然変換であり, η は well-defined である.

ところで, $\forall \tau \in \text{Hom}_{\text{PSh}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets})}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X), F)$ に対して

$$\begin{aligned} \eta(\tau_X(\text{Id}_X)) &= \{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \rightarrow F(Y), f \longmapsto F(f)(\tau_X(\text{Id}_X))\}_{Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})} \\ &= \{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \rightarrow F(Y), f \longmapsto F(f) \circ \tau_X(\text{Id}_X)\}_{Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})} \\ &= \{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \rightarrow F(Y), f \longmapsto \tau_Y \circ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)(f)(\text{Id}_X)\}_{Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})} \\ &= \{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \rightarrow F(Y), f \longmapsto \tau_Y(f \circ \text{Id}_X)\}_{Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})} \\ &= \{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \rightarrow F(Y), f \longmapsto \tau_Y(f)\}_{Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})} \\ &= \tau \end{aligned}$$

が成り立ち, かつ

$$\eta(s)_X(\text{Id}_X) = F(\text{Id}_X)(s) = \text{Id}_{F(X)}(s) = s$$

が成り立つので、 η は題意の写像の逆写像である。 ■

命題 C.2: 米田埋め込みは埋め込み

米田埋め込み $y: \mathcal{C} \longrightarrow \text{PSh}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets})$ は埋め込みである。

証明 $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を固定する。写像

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) &\longmapsto \text{Hom}_{\text{PSh}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets})}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X), \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y)), \\ f &\longmapsto y(f) \end{aligned}$$

が全単射であることを示せば良い。米田埋め込みの定義から、 $\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ に対して

$$\begin{aligned} y(f) &= \{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y), g \longmapsto f \circ g\}_{Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})} \\ &= \{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y), g \longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y)(g)(f)\}_{Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})} \end{aligned}$$

が成り立つが、これは米田の補題において $F = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y) \in \text{Ob}(\text{PSh}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets}))$ としたときの逆写像であり、示された。 ■

系 C.1: 同型と表現可能前層の自然同値

以下の2つは同値である：

- (1) $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ は同型
- (2) 表現可能前層 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X), \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y) \in \text{Ob}(\text{PSh}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets}))$ が自然同型

証明 (1) \implies (2)

$X \cong Y$ なので $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ が存在して $g \circ f = \text{Id}_X$ かつ $f \circ g = \text{Id}_Y$ を満たす。このとき $\forall A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$\tau_A: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Y), h \longmapsto f \circ h$$

と定義するとこれは $\eta_A: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X), h \longmapsto g \circ h$ を逆射に持つので同型射であり、自然同値

$$\tau: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) \Longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y)$$

を定める。

(1) \Longleftarrow (2)

$\text{PSh}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets})$ における同型射とは、2つの前層の間の自然同型である。関手は同型射を保つので、命題 C.2 より示された。 ■

後の便宜のため、極限を捉え直そう。勝手な図式 $D: I^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{C}$ を1つ固定する。また、定数関手 (constant functor)

$$\text{pt}: I^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を以下のように定める：

- $\forall i \in \text{Ob}(I^{\text{op}})$ に対して, 1 点集合^{*7} $\{\text{pt}\} \in \text{Ob}(\mathbf{Sets})$ を対応付ける.
- $\forall f \in \text{Hom}_{I^{\text{op}}}(i, j)$ に対して, 恒等写像 $\text{pt} \mapsto \text{pt}$ を対応付ける.

さらに, $\forall C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して, \mathbf{Sets} に値をとる前層

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D(-)): I^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を, 以下のように定義する:

- $\forall i \in \text{Ob}(I^{\text{op}})$ に対して $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, D(i)) \in \text{Ob}(\mathbf{Sets})$ を対応付ける.
- $\forall f \in \text{Hom}_{I^{\text{op}}}(i, j)$ に対して写像

$$\begin{aligned} D(f)_*: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, D(i)) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, D(j)), \\ g &\longmapsto F(f) \circ g \end{aligned}$$

を対応付ける.

これを用いて, \mathbf{Sets} に値をとる前層

$$\text{Hom}_{\text{PSh}(I, \mathbf{Sets})}(\text{pt}, \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, D(-))): \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を以下のように定義する:

- $\forall C \in \text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}})$ に対して, 集合

$$\text{Hom}_{\text{PSh}(I, \mathbf{Sets})}(\text{pt}, \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D(-))) \in \text{Ob}(\mathbf{Sets})$$

を対応付ける.

- $\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(X, Y)$ に対して, 写像

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\text{PSh}(I, \mathbf{Sets})}(\text{pt}, \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, D(-))) &\longrightarrow \text{Hom}_{\text{PSh}(I, \mathbf{Sets})}(\text{pt}, \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, D(-))), \\ \tau &\longmapsto \tau \circ f \end{aligned}$$

を対応付ける.

命題 C.3: 極限の特徴付け

$X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が図式 $D: I^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{C}$ の極限であるための必要十分条件は, \mathbf{Sets} に値をとる前層

$$\text{Hom}_{\text{PSh}(I, \mathbf{Sets})}(\text{pt}, \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, D(-))): \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

が表現可能前層

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X): \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

と自然同型になることである.

^{*7} 圏 \mathbf{Sets} における終対象である.

証明 (⇐)

自然同型

$$\theta: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) \Longrightarrow \text{Hom}_{\text{PSh}(I, \mathbf{Sets})}(\text{pt}, \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, D(-)))$$

を与える. $\forall C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を 1 つ固定する.

まず, 集合 $\text{Hom}_{\text{PSh}(I, \mathbf{Sets})}(\text{pt}, \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D(-)))$ が図式 D 上の C を頂点とする **錐** 全体の集合と同一視できることに注意する. 実際, $\forall \tau \in \text{Hom}_{\text{PSh}(I, \mathbf{Sets})}(\text{pt}, \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D(-)))$ は写像の族

$$\{\tau_i: \{\text{pt}\} \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D(i))\}_{i \in I}$$

からなるが, $\{\text{pt}\}$ は 1 点集合なので τ_i を $\tau_i(\text{pt})$ と同一視できる. i.e. $\tau_i \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D(i))$ である. さらに, τ が **自然変換** であることから $\forall f \in \text{Hom}_{I^{\text{op}}}(i, j)$ に対して以下の図式が可換になる:

$$\begin{array}{ccc} & \{\text{pt}\} & \\ \tau_i \swarrow & & \searrow \tau_j \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D(i)) & \xrightarrow{D(f)_*} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D(j)) \end{array}$$

この図式における $\text{pt} \in \{\text{pt}\}$ の行き先を追跡することで

$$D(f) \circ \tau_i = \tau_j$$

が分かるが, これはまさに **錐の定義** である.

以上の考察から, 自然同型 θ は, 図式 D の勝手な錐 $(C, \tau) \in \text{Ob}(\mathbf{Cone}(D))$ が与えられると, 対応する $\theta_X^{-1}(\tau) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, X)$ を一意的に定めるが, これは **極限の普遍性** に他ならない. 特に, **米田の補題** から自然同型 θ は $\theta_X(\text{Id}_X) \in \text{Hom}_{\text{PSh}(I, \mathbf{Sets})}(\text{pt}, \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, D(-)))$ と対応付き, $(X, \theta_X(\text{Id}_X)) \in \text{Ob}(\mathbf{Cone}(D))$ が図式 D の極限である.

(⇒)

上述の議論から明らか.

■

C.1.4 重み付き極限・エンド・コエンド

重み付き極限とは, 命題 **C.3** の一般化である.

定義 C.14: 重み付き極限

図式 $D: I^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$ および **Sets** に値をとる任意の前層 $W: I^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ を与える.

図式 D の **W -重み付き極限** (W -weighted limit) とは, (存在すれば) 圏 \mathcal{C} の対象 $\lim^W D \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ であって, **Sets** に値をとる前層

$$\text{Hom}_{\text{PSH}(I, \mathbf{Sets})} \left(W, \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, D(-)) \right): \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$$

と **表現可能前層**

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \lim^W D): \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$$

が **自然同型** となるもののこと.

Hom 関手

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}: \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$$

を以下で定義する:

- $\forall (X, Y) \in \text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C})$ に対して $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \in \text{Ob}(\mathbf{Sets})$ を対応付ける.
- $\forall (f, g) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C}}((X, Y), (X', Y'))$ に対して, 写像

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y'), \\ h &\longmapsto g \circ h \circ f \end{aligned}$$

を対応付ける.

定義 C.15: エンド

関手 $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ の **エンド** (end) とは, (存在すれば) **$\text{Hom}_{\mathcal{C}}$ -重み付き極限**

$$\int_{C \in \text{Ob}(\mathcal{C})} F(C, C) := \lim^{\text{Hom}_{\mathcal{C}}} F \in \text{Ob}(\mathcal{D})$$

のこと.

C.1.5 随伴

定義 C.16: 随伴

関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ を与える. F が G の左随伴 (left adjoint) であり, かつ G が F の右随伴 (right adjoint) であるとは, 2つの関手

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-), -) &: \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Sets}, \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G(-)) &: \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Sets}\end{aligned}$$

の間に自然同型

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-), -) & \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-), -) \swarrow & \Downarrow & \searrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-), -) \\ \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} & & \mathbf{Sets} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G(-)) \swarrow & \Downarrow & \searrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G(-)) \\ & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G(-)) & \end{array}$$

が存在することを言う.

F が G の左随伴である (全く同じことだが, G が F の右随伴である) ことを $F \dashv G$ と書く. 図式中では

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{D} \\ & \perp & \\ & G & \end{array}$$

のように書く.

さて, 圏 \mathcal{C} 上の図式 $D: I \rightarrow \mathcal{C}$ が余極限を持つとする:

$$\begin{array}{ccc} & D(\forall i) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \mathrm{colim}_I D & \xrightarrow{\exists!} & \forall X \end{array}$$

このとき, \mathcal{D} 上の図式として

$$\begin{array}{ccc} & F(D(\forall i)) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \mathrm{colim}_I F(D) & \xrightarrow{\exists! u} & F(\mathrm{colim}_I D) \end{array}$$

を考えることができる. 特に, 一意に定まる射 $u: \mathrm{colim}_I F(D) \rightarrow F(\mathrm{colim}_I D)$ が同型するとき, 関手 F は余極限を保つという.

同様に, 圏 \mathcal{D} 上の図式 $D: I \rightarrow \mathcal{C}$ が極限を持つとする:

$$\begin{array}{ccc} \lim_I D & \xleftarrow{\exists!} & \forall X \\ \swarrow & & \searrow \\ & D(\forall i) & \end{array}$$

このとき、 \mathcal{D} 上の図式として

$$\begin{array}{ccc} \lim_I F(D) & \xleftarrow{\exists! u} & F(\lim_I D) \\ & \searrow & \swarrow \\ & F(D(\forall i)) & \end{array}$$

を考えることができる。特に、一意に定まる射 $u: F(\lim_I D) \rightarrow \lim_I F(D)$ が同型るとき、関手 F は極限を保つという。

命題 C.4: 随伴と極限・余極限

関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ が $F \dashv G$ であるとする。このとき、 F は余極限を保ち、 G は極限を保つ。

証明 余極限を持つ任意の \mathcal{C} の図式 $D: I \rightarrow \mathcal{C}$ を 1 つ固定する。随伴の定義および命題 C.1 より、 $\forall Y \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ に対して

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(\text{colim}_I D), Y) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{colim}_I D, G(Y)) \\ &\cong \lim_I \text{Hom}_{\mathcal{C}}(D(i), G(Y)) \\ &\cong \lim_I \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(D(i)), Y) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\text{colim}_I F(D), Y) \end{aligned}$$

が言える。i.e. 自然同型

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(\text{colim}_I D), -) & & \\ \mathcal{D} & \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} & \mathbf{Sets} \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\text{colim}_I F(D), -) & & \end{array}$$

があるので、米田の補題の系より

$$F(\text{colim}_I D) \cong \text{colim}_I F(D)$$

が示された。■

C.1.6 Kan 拡張

定義 C.17: スライス圏

圏 \mathcal{D} およびその対象 $X \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ を与える. スライス圏 (slice category) $\mathcal{D}_{/X}$ とは, 以下のデータからなる圏のこと:

- \mathcal{D} の対象と射の組 $(D \in \text{Ob}(\mathcal{D}), \alpha: D \rightarrow X)$ を対象に持つ
- $(D, \alpha), (D', \alpha')$ の間の射は, \mathcal{D} における射 $\beta: D \rightarrow D'$ であって \mathcal{D} における図式

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\beta} & D' \\ & \searrow \alpha & \swarrow \alpha' \\ & X & \end{array}$$

を可換にするものとする

双対スライス圏 (dual slice category) $\mathcal{D}_{X/}$ とは, 以下のデータからなる圏のこと:

- \mathcal{D} の対象と射の組 $(D \in \text{Ob}(\mathcal{D}), \alpha: X \rightarrow D)$ を対象に持つ
- $(D, \alpha), (D', \alpha')$ の間の射は, \mathcal{D} における射 $\beta: D \rightarrow D'$ であって \mathcal{D} における図式

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\beta} & D' \\ & \swarrow \alpha & \searrow \alpha' \\ & X & \end{array}$$

を可換にするものとする

関手^{*8} $\mathcal{D}_{/X} \rightarrow \mathcal{D}, (D, \alpha) \mapsto D$ のことを標準的忘却関手 (canonical forgetful functor) と呼ぶ. 標準的関手は図式中でも記号で明記しないことが多い.

関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ および圏 \mathcal{D} における対象 $X \in \mathcal{D}$ を与える. このとき関手 F に関するスライス圏を, 圏全体がなす圏 Cat における引き戻し

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{/X} & \longrightarrow & \mathcal{D}_{/X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \end{array}$$

として定義する. i.e. $\mathcal{F}_{/X}$ の対象は $(C \in \mathcal{C}, \alpha: F(C) \rightarrow X)$ であり, $(C, \alpha), (C', \alpha')$ の間の射とは, \mathcal{C} における射 $\beta: C \rightarrow C'$ であって \mathcal{D} における図式

$$\begin{array}{ccc} F(C) & \xrightarrow{F(\beta)} & F(C') \\ & \searrow \alpha & \swarrow \alpha' \\ & X & \end{array}$$

を可換にするものである.

^{*8} 対象の対応のみ明示した.

定理 C.2: density theorem

前層 $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ を与える. 関手 $\mathfrak{y}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{PSh}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets})$ を米田埋め込みとする.

このとき, 前層の圏 $\mathbf{PSh}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets})$ における同型

$$F \cong \operatorname{colim}_{X \in \mathfrak{y}/F} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$$

が成り立つ.

証明 米田の補題の系により, 示すべきは自然同型

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{PSh}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets})}(\operatorname{colim}_{X \in \mathfrak{y}/F} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X), -) \Longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbf{PSh}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets})}(F, -)$$

である. このとき, $\forall G \in \operatorname{Ob}(\mathbf{PSh}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets}))$ に対して

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathbf{PSh}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets})}(\operatorname{colim}_{X \in \mathfrak{y}/F} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X), G) &\cong \lim_{X \in \mathfrak{y}/F} \operatorname{Hom}_{\mathbf{PSh}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets})}(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X), G) && \because \text{命題 C.1} \\ &\cong \lim_{X \in \mathfrak{y}/F} G(X) && \because \text{米田の補題} \end{aligned}$$

なる自然同型がある. さらに, 命題 C.3 と同様の議論により定数関手 $\text{pt} \in \operatorname{Ob}(\mathbf{PSh}(\mathfrak{y}/F, \mathbf{Sets}))$ による自然な同型

$$\lim_{X \in \mathfrak{y}/F} G(X) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{PSh}(\mathfrak{y}/F, \mathbf{Sets})}(\text{pt}, G)$$

があることが分かる. よって自然な同型

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{PSh}(\mathfrak{y}/F, \mathbf{Sets})}(\text{pt}, G) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{PSh}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets})}(F, G)$$

を示せば十分である.

ところで, 自然変換 $\tau \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{PSh}(\mathfrak{y}/F, \mathbf{Sets})}(\text{pt}, G)$ は, 写像の族

$$\{\tau_{(X, \alpha)}: \{\text{pt}\} \rightarrow G(X)\}_{(X, \alpha) \in \operatorname{Ob}(\mathfrak{y}/F)}$$

からなるが, $\{\text{pt}\}$ は一点集合なので $\tau_{(X, \alpha)}$ と $\tau_{(X, \alpha)}(\text{pt}) \in G(X)$ を同一視して良い. 一方で $\forall (X, \alpha) \in \operatorname{Ob}(\mathfrak{y}/F)$ について $\alpha \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{PSh}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets})}(\mathfrak{y}(X), F) = \operatorname{Hom}_{\mathbf{PSh}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets})}(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X), F)$ であるから, 米田の補題からこれは $\alpha_X(\operatorname{Id}_X) \in F(X)$ と一対一対応する. この対応により $\forall X \in \mathcal{C}^{\text{op}}$ について写像

$$\eta(\tau)_X: F(X) \rightarrow G(X), \alpha_X(\operatorname{Id}_X) \mapsto \tau_{(X, \alpha)}$$

が得られる. α は自然変換なので $\eta(\tau)_X$ を全て集めたものは自然変換 $\eta(\tau): F \Rightarrow G$ になる. よって写像

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{PSh}(\mathfrak{y}/F, \mathbf{Sets})}(\text{pt}, G) \rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbf{PSh}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets})}(F, G), \tau \mapsto \eta(\tau)$$

は自然な同型であり, 証明が完了した. ■

定義 C.18: Kan 拡張

$i: \mathcal{C}_0 \hookrightarrow \mathcal{C}$ を \mathcal{C} の小部分圏, \mathcal{D} を **双完備** な圏とする.

- 関手 $F: \mathcal{C}_0 \longrightarrow \mathcal{D}$ の, 関手 i に沿った **左 Kan 拡張** (left Kan extention) とは,

$$i_!(F)(x) := \operatorname{colim}_{c \in (\mathcal{C}_0)_{/x}} F(c)$$

によって定義される関手

$$i_!: \operatorname{Fun}(\mathcal{C}_0, \mathcal{D}) \longrightarrow \operatorname{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$

によって定まる関手 $i_!(F): \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ のこと.

- 関手 $F: \mathcal{C}_0 \longrightarrow \mathcal{D}$ の, 関手 i に沿った **右 Kan 拡張** (right Kan extention) とは,

$$i_*(F)(x) := \lim_{c \in (\mathcal{C}_0)_{x/}} F(c)$$

によって定義される関手

$$i_*: \operatorname{Fun}(\mathcal{C}_0, \mathcal{D}) \longrightarrow \operatorname{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$

によって定まる関手 $i_*(F): \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ のこと.

制限関手

$$i^*: \operatorname{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \longrightarrow \operatorname{Fun}(\mathcal{C}_0, \mathcal{D})$$

について $i_! \dashv i^*$ かつ $i_* \vdash i^*$ である.

C.2 単体的集合

higher geometry において重要な役割を果たす **単体的集合の圏** を定義する.

定義 C.19: 単体圏

- $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して, 全順序付集合 $[n] := \{0, 1, \dots, n\}$ のことを **n -単体** (n -simplex) と呼ぶ.
- 単体圏** (simplex category) Δ とは,
 - $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して, n -単体 $[n]$ を対象とする.
 - 順序を保つ写像を射とする
 圏のこと.

特に $\operatorname{Hom}_\Delta([n-1], [n])$ の元のうち

$$d_i^n: [n-1] \hookrightarrow [n], x \mapsto \begin{cases} x, & x < i \\ x+1 & x \geq i \end{cases} \quad \text{w/ } i = 0, \dots, n$$

のことを面写像 (face map) と呼び, $\text{Hom}_\Delta([n+1], [n])$ の元のうち

$$s_i^n: [n+1] \rightarrow [n], x \mapsto \begin{cases} x, & x \leq i \\ x-1 & x > i \end{cases} \quad \text{w/ } i = 0, \dots, n$$

のことを縮退写像 (degeneracy map) と呼ぶ.

定義 C.20: 単体的集合

- 単体的集合 (simplicial set) とは, 前層

$$K: \Delta^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

のこと. 特に n -単体 $[n] \in \text{Ob}(\Delta^{\text{op}})$ の表現可能前層を $\Delta^n := \text{Hom}_\Delta(-, [n]) \in \text{Ob}(\mathbf{sSet})$ と書く.

- 余単体的集合 (cosimplicial set) とは, 関手

$$K: \Delta \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

のこと.

- 単体的集合 $S: \Delta^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ が単体的集合 $K: \Delta^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ の単体的部分集合 (simplicial subset) であるとは, 以下の 2 条件を満たすことを言う:

(sub-1) $\forall n \geq 0$ に対して $S([n]) \subset K([n])$

(sub-2) 圏 Δ における任意の射 $\alpha: [n] \longrightarrow [m]$ に対して $K(\alpha)(S([m])) \subset S([n])$

誤解の恐れがないときは, 単体的部分集合を $S \subset K$ と書く.

- 単体的集合の圏 \mathbf{sSet} とは, 前層の圏

$$\mathbf{sSet} := \text{PSh}(\Delta, \mathbf{Sets})$$

のこと.

$K_n := K([n])$ とおく.

- K_n の元のことを n -単体 (n -simplex)
- $\partial_i := K(d_i): K_n \rightarrow K_{n-1}$ のことを面写像 (face map)
- $\sigma_i := K(s_i): K_n \hookrightarrow K_{n+1}$ のことを縮退写像 (degeneracy map) と呼ぶ.

と呼ぶ. これらは以下の単体的恒等式 (simplicial identities) を満たす:

$$\partial_i^{n-1} \circ \partial_j^n = \partial_{j-1}^{n-1} \circ \partial_i^n \quad (i < j), \quad (\text{C.2.1})$$

$$\partial_i^{n+1} \circ \sigma_j^n = \sigma_{j-1}^{n-1} \circ \partial_i^n \quad (i < j), \quad (\text{C.2.2})$$

$$\partial_i^{n+1} \circ \sigma_j^n = \sigma_j^{n-1} \circ \partial_{i-1}^n \quad (i > j+1), \quad (\text{C.2.3})$$

$$\partial_i^{n+1} \circ \sigma_j^n = \text{id} \quad (i = j, j+1), \quad (\text{C.2.4})$$

$$\sigma_i^{n+1} \circ \sigma_j^n = \sigma_{j+1}^{n+1} \circ \sigma_i^n \quad (i \leq j)$$

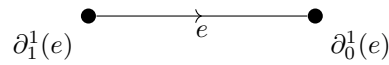
逆に,

- 対象の族 $\{K_n\}_{n \geq 0}$
- 射の族 $\{\partial_i^n: K_n \longrightarrow K_{n-1}\}_{0 \leq i \leq n, n \geq 0}$
- 射の族 $\{\sigma_i^n: K_n \longrightarrow K_{n+1}\}_{0 \leq i \leq n, n \geq 0}$

の組であって単体的恒等式を充たすものは単体的集合を一意に定める [Lur, Proposition 1.1.2.14].

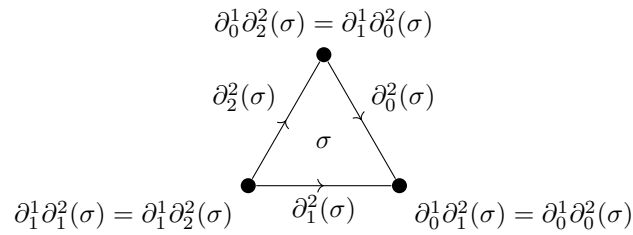
単体的集合 $K: \Delta^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ を図示する方法がある.

- (1) K_0 の元 (i.e. 0-単体) を点と見做し, $K_0 = \{\bullet, \dots, \bullet\}$ のように書く.
- (2) K_1 の元 (i.e. 1-単体) $e \in K_1$ を



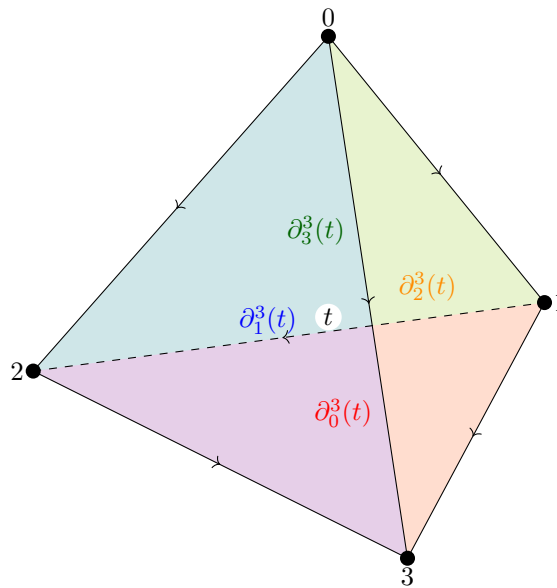
のように有向辺として図示する.

- (3) K_2 の元 (i.e. 2-単体) $\sigma \in K_2$ を



のように向きづけられた三角形として図示する. この図は単体的恒等式 (C.2.1) を表している.

- (4) K_3 の元 (i.e. 3-単体) $t \in K_3$ を,



のように向き付けられた四面体として図示する. 四面体の面の繋がり方が単体的恒等式 (C.2.1) を表し

ている.

(5) K_n の元 (i.e. n -単体) は, 単体的恒等式 (C.2.1) によって帰納的に図示する.

命題 C.5: 単体的集合の圏の基本性質

よ: $\Delta \rightarrow \mathbf{sSet}$ を **米田埋め込み** とする.

(1) 任意の **単体的集合** $K: \Delta^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ に対して, **自然な同型**

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, K) \cong K_n$$

が成り立つ.

(2) 圏 **sSet** は **双完備** である.

(3) 任意の **単体的集合** $K: \Delta^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ に対して,

$$K \cong \mathrm{colim}_{[n] \in \mathbf{k}/K} \Delta^n$$

が成り立つ.



命題 C.5-(1) によって, n -単体 $\sigma \in K_n$ を **自然変換** $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, K)$ と同一視できる!

証明 (1) **米田の補題** より

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, K) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh}(\Delta, \mathbf{Sets})}(\mathrm{Hom}_{\Delta}(-, [n]), K) \cong K([n]) = K_n$$

(2) **図式** $D: I \rightarrow \mathbf{sSet}$ を与える. **Sets** が双完備であることから, **単体的集合**

$$\begin{aligned} \lim_I D: \Delta^{\mathrm{op}} &\rightarrow \mathbf{Sets}, \\ [n] &\mapsto \lim_I D(-)([n]) \end{aligned}$$

が well-defined である. これがちょうど図式 D の **極限** を与える.

同様に, **単体的集合**

$$\begin{aligned} \mathrm{colim}_I D: \Delta^{\mathrm{op}} &\rightarrow \mathbf{Sets}, \\ [n] &\mapsto \mathrm{colim}_I D(-)([n]) \end{aligned}$$

が図式 D の **余極限** を与える.

(3) 定理 C.2 より

$$K \cong \mathrm{colim}_{[n] \in \mathbf{k}/K} \mathrm{Hom}_{\Delta}(-, [n]) = \mathrm{colim}_{[n] \in \mathbf{k}/K} \Delta^n$$

■

C.2.1 幾何学的実現

定義 C.20 を再現する具体的な構成をする.

定義 C.21: 幾何学的 n -単体

- 幾何学的 n -単体 Δ_{top}^n とは, 位相空間

$$\Delta_{\text{top}}^n := \left\{ (x^0, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \geq 0, \sum_{i=0}^n x_i = 1 \right\}$$

のこと.

- 余単体的集合

$$\Delta_{\text{top}}: \Delta \longrightarrow \mathbf{Top}$$

とは,

- n -単体 $[n] \in \text{Ob}(\Delta)$ に対して幾何学的 n -単体 Δ_{top}^n を対応づける
- 圏 Δ における任意の射 $\alpha: [n] \longrightarrow [m]$ に対して, 連続写像

$$\Delta_{\text{top}}(\alpha): \Delta_{\text{top}}^n \longrightarrow \Delta_{\text{top}}^m, (x_0, \dots, x_n) \longmapsto \left(\sum_{j, \alpha(j)=0} x_j, \dots, \sum_{j, \alpha(j)=m} x_j \right)$$

を対応付ける

関手のこと.

- 位相空間 $X \in \text{Ob}(\mathbf{Top})$ の特異単体 (singular simplicial set) とは, 単体的集合

$$S(X): \Delta^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}, [n] \longmapsto \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta_{\text{top}}^n, X)$$

のこと.

- 特異複体とは, 関手 $S: \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{sSet}, X \longmapsto S(X)$ のこと.

定義 C.22: 幾何学的実現

よ: $\Delta \longrightarrow \mathbf{sSet}$ を米田埋め込みとする. 幾何学的実現 (geometric realization) とは, 余極限を保つ関手

$$|-|: \mathbf{sSet} \longrightarrow \mathbf{Top}, K \longmapsto \text{colim}_{[n] \in \mathbf{k}/K} \Delta_{\text{top}}([n])$$

のこと.

\mathbf{Top} における colim の公式を使うと

$$|K| = \left(\coprod_{[n] \in \text{Ob}(\Delta)} (K_n \times \Delta_{\text{top}}^n) \right) / \left\{ (\alpha^*(x), t) \sim (x, \Delta_{\text{top}}(\alpha)(t)) \mid \begin{array}{l} x \in K_n, t \in \Delta_{\text{top}}^m, \\ \alpha \in \text{Hom}_{\Delta}([m], [n]) \end{array} \right\}$$

となる.

命題 C.6:

特異複体 $S: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{sSet}$, $X \mapsto S(X)$ は幾何学的実現 $|-|: \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{Top}$ の右随伴である.

証明 右随伴の定義を思い出すと, $\forall (K, X) \in \text{Ob}(\mathbf{sSet}^{\text{op}} \times \mathbf{Top})$ に対して自然同型

$$\text{Hom}_{\mathbf{Top}}(|K|, X) \cong \text{Hom}_{\mathbf{sSet}^{\text{op}}}(K, S(X))$$

が成り立つことを示せば良い. 実際, 命題 C.1 より

$$\text{Hom}_{\mathbf{Top}}(|K|, X) = \text{Hom}_{\mathbf{Top}}\left(\text{colim}_{[n] \in \mathbf{J}_K} \Delta^n_{\text{top}}, X\right) \cong \lim_{[n] \in \mathbf{J}_K} \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^n_{\text{top}}, X)$$

が, 命題 C.5-(3) より

$$\text{Hom}_{\mathbf{sSet}^{\text{op}}}(K, S(X)) \cong \text{Hom}_{\mathbf{sSet}^{\text{op}}}\left(\text{colim}_{[n] \in \mathbf{J}_K} \Delta^n, S(X)\right) \cong \lim_{[n] \in \mathbf{J}_K} \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^n, X)$$

が言える. ■

C.2.2 境界・角・背骨

定義 C.23: 境界・角・背骨・骨格

- $\Delta^n \in \text{Ob}(\mathbf{sSet})$ の単体的境界 (simplicial boundary) $\partial\Delta^n$ とは, Δ^n の単体的部分集合

$$\partial\Delta^n: \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$$

であって

$$\partial\Delta^n([k]) := \begin{cases} \Delta^n([k]), & k \neq n \\ \Delta^n([k]) \setminus \{\text{Id}_{[n]}\}, & k = n \end{cases}$$

を充たすもののこと.

- 任意の部分集合 $S \subset [n]$ を与える. **S-角** (S-horn) とは, Δ^n の単体的部分集合

$$\Lambda_S^n: \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$$

であって,

$$\Lambda_S^n([k]) := \{f \in \Delta^n([k]) \mid [n] \setminus (f([k]) \cup S) \neq \emptyset\}$$

を充たすもののこと. 特に $\Lambda_j^n := \Lambda_{\{j\}}^n$ は $0 < j < n$ のとき**内部角** (inner horn), $j = 0, n$ のとき**外部角** (outer horn) と呼ばれる.

- 背骨** (spine) とは, Δ^n の単体的部分集合

$$I^n: \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$$

であって,

$$I^n([k]) := \{f \in \Delta^n([k]) \mid f([k]) = \{j\} \text{ or } f([k]) = \{j, j+1\}\} \subset \Delta^n([k])$$

を充たすもののこと.

- 単体的集合 $K: \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ の n -骨格 (n -skelton) とは, 濃度 $n+1$ 以下の対象からなる Δ の充満部分圏 $i: \Delta_{\leq n} \hookrightarrow \Delta$ に沿った, 関手 $i^*(K): (\Delta_{\leq n})^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ の左 Kan 拡張 $i_!(i^*(K)): \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ のこと.
- 単体的集合 $K: \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ の n -余骨格 (n -coskelton) とは, 濃度 $n+1$ 以下の対象からなる Δ の充満部分圏 $i: \Delta_{\leq n} \hookrightarrow \Delta$ に沿った, 関手 $i^*(K): (\Delta_{\leq n})^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ の右 Kan 拡張 $i_*(i^*(K)): \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ のこと.

【例 C.2.1】角 Λ_j^2 の構造

角 $\Lambda_0^2: \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ とはどのようなものだろうか. まず, 表現可能前層 Δ^2 の定義から

$$\Lambda_0^2([0]) = \left\{ f \in \text{Hom}_{\Delta}([0], [2]) \mid [2] \setminus (f([0]) \cup \{0\}) \right\}$$

であるが, $\forall f \in \text{Hom}_{\Delta}([0], [2])$ は定数写像なので $\Lambda_0^2([0]) = \text{Hom}_{\Delta}([0], [2])$ である. これらを

$$\Lambda_0^2([0]) =: \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \{0\} \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \{1\} \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \{2\} \end{array} \right\}$$

と書く. 次に

$$\Lambda_0^2([1]) = \left\{ f \in \text{Hom}_{\Delta}([1], [2]) \mid [2] \setminus (f([1]) \cup \{0\}) \right\}$$

を調べる. 6 点集合 $\text{Hom}_{\Delta}([1], [2])$ の元を全て書き出すと

$$\begin{aligned} f_0: 0 &\mapsto 0, 1 \mapsto 0 \\ f_1: 0 &\mapsto 0, 1 \mapsto 1 \\ f_2: 0 &\mapsto 0, 1 \mapsto 2 \\ f_3: 0 &\mapsto 1, 1 \mapsto 1 \\ f_4: 0 &\mapsto 1, 1 \mapsto 2 \\ f_5: 0 &\mapsto 2, 1 \mapsto 2 \end{aligned}$$

であるから, f_4 のみが除外される. さらに,

$$\begin{aligned} \partial_1^1(f_0) &= \partial_0^1(f_0) = \{0\}, \\ \partial_1^1(f_1) &= \{0\}, \partial_0^1(f_1) = \{1\}, \\ \partial_1^1(f_2) &= \{0\}, \partial_0^1(f_2) = \{2\}, \\ \partial_1^1(f_3) &= \partial_0^1(f_3) = \{1\}, \\ \partial_1^1(f_4) &= \{1\}, \partial_0^1(f_4) = \{2\}, \\ \partial_1^1(f_5) &= \partial_0^1(f_5) = \{2\}, \end{aligned}$$

と計算できるため $f_0 = \sigma_0^0(\{0\})$, $f_3 = \sigma_0^0(\{1\})$, $f_5 = \sigma_0^0(\{2\})$ であり, 図 (2) に則り

$$\Lambda_0^2([1]) = \sigma_0^0(\Lambda_0^2([0])) \cup \left\{ \begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{f_1} \bullet \\ \{0\} \quad \{1\} \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{f_2} \bullet \\ \{0\} \quad \{2\} \end{array} \right\}$$

と書ける。次に

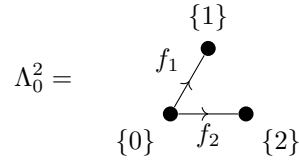
$$\Lambda_0^2([2]) = \left\{ f \in \text{Hom}_\Delta([2], [2]) \mid [2] \setminus (f([2]) \cup \{0\}) \right\}$$

であるが, 縮退写像の像に含まれない $\text{Hom}_\Delta([2], [2])$ の元は $\text{Id}_{[2]}$ のみであり, 明らかに $\text{Id}_{[2]} \notin \Lambda_0^2([2])$ となっている。

$$\partial_0^2(\text{Id}_{[2]}) = (0 \mapsto 1, 1 \mapsto 2) = f_4$$

となっていることに注目すべきである。ここから, $\Lambda_j^n([n-1]) \subset \text{Hom}_\Delta([n-1], [n])$ において除外される要素がちょうど $\partial_j^n(\text{Id}_{[n-1]})$ なのではないかという予想が立つのである。この予想は系 C.4 および米田の補題によって正当化される。

$k \geq 3$ に関する $\Lambda_0^2([k])$ は必ず縮退写像の像に入ってしまう。以上の考察より, 図 (3) に則り Λ_0^2 を次のように図示する:



同様に, Λ_1^2, Λ_2^2 も次のように図示できる:



命題 C.7: コイコライザとしての境界

境界 $\partial\Delta^n$ は圏 **sSet** における **コイコライザ** である:

$$\coprod_{0 \leq i < j \leq n} \Delta^{n-2} \xrightleftharpoons[v]{u} \coprod_{0 \leq k \leq n} \Delta^{n-1} \xrightarrow{w} \partial\Delta^n$$

証明 $0 \leq \forall k \leq n$ に対して, 圏 **sSet** における射 (i.e. **自然変換**)

$$u_k: \coprod_{0 \leq i < k} \Delta^{n-2} \longrightarrow \Delta^{n-1}$$

$$v_k: \coprod_{k < j \leq n} \Delta^{n-2} \longrightarrow \Delta^{n-1}$$

を

$$u_k := \left\{ u_{k[m]}: \coprod_{0 \leq i < k} \Delta^{n-2}([m]) \longrightarrow \Delta^{n-2}([m]), (i, \alpha) \mapsto d_i^{n-1} \circ \alpha \right\}_{[m] \in \text{Ob}(\Delta^{\text{op}})}$$

$$v_k := \left\{ v_{k[m]}: \coprod_{k < j \leq n} \Delta^{n-2}([m]) \longrightarrow \Delta^{n-2}([m]), (j, \alpha) \mapsto d_{j-1}^{n-1} \circ \alpha \right\}_{[m] \in \text{Ob}(\Delta^{\text{op}})}$$

により定義する^{*9}．そして圏 \mathbf{sSet} における 2 つの余積を

$$\begin{array}{ccccc}
\coprod_{0 \leq i < j \leq n} \Delta^{n-2} & = & \coprod_{0 \leq k \leq n} \coprod_{0 \leq i < k} \Delta^{n-2} & \xrightarrow{\exists! u} & \coprod_{0 \leq k \leq n} \Delta^{n-1} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
& & \coprod_{0 \leq i < k} \Delta^{n-2} & \xrightarrow{u_k} & \Delta^{n-1} \\
\coprod_{0 \leq i < j \leq n} \Delta^{n-2} & = & \coprod_{0 \leq k \leq n} \coprod_{k < j \leq n} \Delta^{n-2} & \xrightarrow{\exists! v} & \coprod_{0 \leq k \leq n} \Delta^{n-1} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
& & \coprod_{k < j \leq n} \Delta^{n-2} & \xrightarrow{v_k} & \Delta^{n-1}
\end{array}$$

のようにとる．さらに射

$$w: \coprod_{0 \leq k \leq n} \Delta^{n-1} \longrightarrow \partial \Delta^n$$

を

$$w := \left\{ w_{[m]}: \coprod_{0 \leq k \leq n} \Delta^{n-1}([m]) \longrightarrow \partial \Delta^n([m]), (k, \beta) \longmapsto d_k^n \circ \beta \right\}_{[m] \in \text{Ob}(\Delta^{\text{op}})}$$

で定義する^{*10}．すると $\forall [m] \in \text{Ob}(\Delta^{\text{op}}), \forall ((i < j), \alpha) \in \coprod_{0 \leq i < j \leq n} \Delta^{n-2}([m])$ に対して

$$\begin{aligned}
(w \circ u)_{[m]}((i < j), \alpha) &= w_{[m]}(j, u_{[m]}(i, \alpha)) \\
&= d_j^n \circ d_i^{n-1} \circ \alpha, \\
(w \circ v)_{[m]}((i < j), \alpha) &= w_{[m]}(i, v_{[m]}(j, \alpha)) \\
&= d_i^n \circ d_{j-1}^{n-1} \circ \alpha
\end{aligned}$$

が成り立ち，単体的恒等式 (C.2.1) より $w \circ u = w \circ v$ が分かる．よってコイコライザの普遍性から圏 \mathbf{sSet} の可換図式

$$\begin{array}{ccc}
\coprod_{0 \leq i < j \leq n} \Delta^{n-2} & \xrightarrow[u]{u} \coprod_{0 \leq k \leq n} \Delta^{n-1} & \xrightarrow{q} \text{Coeq}(u, v) \\
& & \searrow w \quad \downarrow \exists! \bar{w} \\
& & \partial \Delta^n
\end{array}$$

が成り立つ．後は $\bar{w}: \text{Coeq}(u, v) \longrightarrow \partial \Delta^n$ が自然同値であることを示せば良い．

(\bar{w} はエピ射)

w がエピ射であることを示す．そのためには $\forall [m] \in \text{Ob}(\Delta^{\text{op}})$ を 1 つ固定し，写像 $w_{[m]}: \coprod_{0 \leq k \leq n} \Delta^{n-1}([m]) \longrightarrow \partial \Delta^n([m])$ が全射であることを示せば良い．

$\forall \gamma \in \partial \Delta^n([m])$ を 1 つ固定する．このとき $\gamma \in \text{Hom}_\Delta([m], [n])$ は全射でない．i.e. ある $0 \leq i \leq n$ が存在して，圏 Δ において γ は

^{*9} $\coprod_i \Delta^{n-2}([m]) = \coprod_i \text{Hom}_\Delta([m], [n-2])$ は集合と写像の圏 \mathbf{Sets} における余積なので，集合としては $\bigcup_i \{(i, \alpha) \mid \alpha \in \text{Hom}_\Delta([m], [n-2])\}$ と 1 対 1 対応する．

^{*10} $\forall (k, \beta) \in \coprod_{0 \leq k \leq n} \Delta^{n-1}([m]) = \coprod_{0 \leq k \leq n} \text{Hom}_\Delta([m], [n-1])$ に対して $w_{[m]}(k, \beta) = d_k^n \circ \beta \in \text{Hom}_\Delta([m], [n]) = \Delta^n([m])$ であり， $d_k^n \in \text{Hom}_\Delta([n-1], [n])$ は全射でないため $m = n$ のときも $w_{[m]}(k, \beta) \in \Delta^n([m]) \setminus \{\text{Id}_{[n]}\}$ が言える．よって w の像は $\partial \Delta^n$ の単体的部分集合である．

$$\begin{array}{ccc}
[m] & \xrightarrow{\gamma} & [n] \\
& \searrow \text{red dashed } \exists! \bar{\gamma} & \uparrow \\
& & [n] \setminus \{i\}
\end{array}$$

と一意的に分解する. $d_i^n([n-1]) = [n] \setminus \{i\}$ かつ d_i^n は単射なので, ある $(i, \beta_i) \in \prod_{0 \leq k \leq n} \Delta^{n-1}([m])$ が一意的に存在して $\bar{\gamma} = d_i^n \circ \beta_i = w_{[m]}(i, \beta_i)$ が成り立つ.

(\bar{w} はモノ射)

$\forall [m] \in \text{Ob}(\Delta^{\text{op}})$ を 1 つ固定し, 写像 $\bar{w}_{[m]}: \text{Coeq}(u, v)([m]) \rightarrow \partial \Delta^n([m])$ が単射であることを示す. $\bar{w}_{[m]}(x) = \bar{w}_{[m]}(y)$ を仮定する. $q: \prod_{0 \leq k \leq n} \Delta^{n-1} \rightarrow \text{Coeq}(u, v)$ はエビなので, $x = q_{[m]}(i, \beta_i)$, $y = q_{[m]}(j, \beta_j)$ を充たす $(i, \beta_i), (j, \beta_j) \in \prod_{0 \leq k \leq n} \Delta^{n-1}([m])$ が存在する. コイコライザの普遍性の図式の可換性から $w_{[m]}(i, \beta_i) = \bar{w}_{[m]}(x) = \bar{w}_{[m]}(y) = w_{[m]}(j, \beta_j)$ が分かる.

$i = j$ ならば $x = y$ は自明なので, $i < j$ とする. このとき, エビ射であることの証明から $\gamma := w_{[m]}(i, \beta_i) = w_{[m]}(j, \beta_j) \in \partial \Delta^n([m])$ の像は $[n] \setminus \{i < j\}$ に収まっている. i.e. γ は

$$\begin{array}{ccc}
[m] & \xrightarrow{\gamma} & [n] \\
& \searrow \text{red dashed } \bar{\gamma} & \uparrow \\
& & [n] \setminus \{i < j\}
\end{array}$$

と分解する. $d_j^n d_i^{n-1}([n-2]) = d_i^n d_{j-1}^{n-1}([n-2]) = [n] \setminus \{i < j\}$ なので, ある $((i < j), \alpha) \in \prod_{0 \leq k < l \leq n} \Delta^{n-2}([m])$ が存在して $(i, \beta_i) = u_{[m]}((i < j), \gamma)$, $(j, \beta_j) = v_{[m]}((i < j), \gamma)$ と書ける. よって

$$x = q_{[m]}(i, \beta_i) = (q \circ u)_{[m]}((i < j), \gamma) = (q \circ v)_{[m]}((i < j), \gamma) = q_{[m]}(j, \beta_j) = y$$

が言えた. ■

系 C.3: 境界の公式

$\forall K \in \text{Ob}(\mathbf{sSet})$ に対して, 写像

$$\begin{aligned}
\text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\partial \Delta^n, K) &\longrightarrow \left\{ (\sigma_0, \dots, \sigma_n) \in \prod_{0 \leq k \leq n} K_{n-1} \mid 0 \leq \forall i < j \leq n, \partial_i^{n-1}(\sigma_j) = \partial_{j-1}^{n-1}(\sigma_i) \right\}, \\
f &\longmapsto (f_{[n-1]} \circ d_0^{n*}(\text{Id}_{[n]}), \dots, f_{[n-1]} \circ d_n^{n*}(\text{Id}_{[n]}))
\end{aligned}$$

は全単射である.

証明 命題 C.7 より, 集合

$$\begin{aligned}
X &:= \left\{ \bar{f} \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}} \left(\prod_{0 \leq k \leq n} \Delta^{n-1}, K \right) \mid \bar{f} \circ u = \bar{f} \circ v \right\} \\
&= \left\{ \bar{f} \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}} \left(\prod_{0 \leq k \leq n} \Delta^{n-1}, K \right) \mid \begin{array}{l} \forall [m] \in \text{Ob}(\Delta^{\text{op}}), \forall ((i < j), \alpha) \in \prod_{0 \leq k < l \leq n} \Delta^{n-2}([m]), \\ \bar{f}_{[m]}(j, d_i^{n-1} \circ \alpha) = \bar{f}_{[m]}(i, d_{j-1}^{n-1} \circ \alpha) \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

の任意の元 \bar{f} に対してコイコライザの普遍性の可換図式

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{0 \leq i < j \leq n} \Delta^{n-2} & \xrightarrow[u]{v} & \coprod_{0 \leq k \leq n} \Delta^{n-1} \xrightarrow{q} \partial \Delta^n \\ & & \searrow \bar{f} \quad \downarrow \exists! f \\ & & K \end{array}$$

が成り立つ. i.e. 写像

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\partial \Delta^n, K) \longrightarrow X,$$

$$f \longmapsto f \circ w = \left\{ ((f_{[m]} \circ d_k^n)_*)_{0 \leq k \leq n} : \prod_{0 \leq k \leq n} \Delta^{n-1}([m]) \longrightarrow K_m \right\}_{[m] \in \mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})}$$

は全単射である. 命題 C.1-(2) と米田の補題から

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(\prod_{0 \leq k \leq n} \Delta^{n-1}, K\right) \cong \prod_{0 \leq k \leq n} \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^{n-1}, K) \cong \prod_{0 \leq k \leq n} K_{n-1}$$

が言えるので, 示された. ■

命題 C.8: コイコライザとしての角

角 Λ_i^n は圏 \mathbf{sSet} におけるコイコライザである:

$$\coprod_{\substack{j, k \in [n] \setminus \{i\} \\ j < k}} \Delta^{n-2} \xrightarrow[u]{v} \coprod_{l \in [n] \setminus \{i\}} \Delta^{n-1} \xrightarrow{w} \Lambda_i^n$$

証明 命題 C.7 とほぼ同様である. ■

系 C.4: 角の公式

$\forall K \in \mathrm{Ob}(\mathbf{sSet})$ に対して, 写像

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda_i^n, K) &\longrightarrow \left\{ (\sigma_0, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n) \in \prod_{k \in [n] \setminus \{i\}} K_{n-1} \mid \begin{array}{l} \forall j, k \in [n] \setminus \{i\} \text{ s.t. } j < k, \\ \partial_j^{n-1}(\sigma_k) = \partial_{k-1}^{n-1}(\sigma_j) \end{array} \right\}, \\ f &\longmapsto (f_{[n-1]} \circ d_0^{n*}(\mathrm{Id}_{[n]}), \dots, f_{[n-1]} \circ \widehat{d_i^{n*}(\mathrm{Id}_{[n]})}, \dots, f_{[n-1]} \circ d_n^{n*}(\mathrm{Id}_{[n]})) \end{aligned}$$

は全単射である. ただし, $\widehat{\cdot}$ は \cdot を除外することを意味する.

証明 系 C.3 と同様. ■

命題 C.9: 角と背骨の幾何学的実現

幾何学的実現は角, 背骨を保つ.

証明 $|\Delta^n| = \Delta_{\mathrm{top}}^n$ であることに注意する. ■

C.3 脈体・ ∞ -亜群・ $(\infty, 1)$ -圏

$[n] \in \text{Ob}(\Delta)$ に対して,

- $\forall i \in [n]$ を対象とする
- Hom 集合は

$$\text{Hom}_{[n]}(i, j) := \begin{cases} \{\text{pt}_{ij}\}, & i \leq j \\ \emptyset, & i > j \end{cases}$$

とする. ただし, $\text{pt}_{ii} = \text{Id}_i$ である.

- 射の合成は $0 \leq i \leq j \leq k \leq n$ に対して

$$\text{pt}_{jk} \circ \text{pt}_{ij} := \text{pt}_{ik}$$

と定義する.

ことにより $[n]$ 自身が圏になる.

C.3.1 脈体

後に示す命題 C.11 により, 通常の圏は単体的集合と同一視できる.

定義 C.24: 脈体

圏 \mathcal{C} の脈体 (nerve) とは, 以下で定義される単体的集合

$$N(\mathcal{C}): \Delta^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

のことを言う:

- $\forall [n] \in \text{Ob}(\Delta^{\text{op}})$ に対して

$$N(\mathcal{C})([n]) = \text{Fun}([n], \mathcal{C})$$

を対応付ける

- 圏 Δ^{op} における任意の射 $[n] \xrightarrow{\alpha} [m]$ に対して写像

$$N(\mathcal{C})(\alpha) := \alpha^*: \text{Fun}([n], \mathcal{C}) \longrightarrow \text{Fun}([m], \mathcal{C}), \\ X \longmapsto X \circ \alpha$$

を対応付ける

脈体関手 (nerve functor) とは, 以下で定義される関手

$$N: \mathbf{Cat} \longrightarrow \mathbf{sSet}$$

のことを言う:

- $\forall \mathcal{C} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $N(\mathcal{C}) \in \text{Ob}(\mathbf{sSet})$ を対応づける.
- 任意の関手 $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ に対して **自然変換**

$$N(F) : N(\mathcal{C}) \Longrightarrow N(\mathcal{D}),$$

$$\text{w/ } N(F) := \{N(F)_{[n]} : \text{Fun}([n], \mathcal{C}) \longrightarrow \text{Fun}([n], \mathcal{D}), X \longmapsto F \circ X\}_{[n] \in \text{Ob}(\Delta^{\text{op}})}$$

を対応付ける

定義 C.20 の略記に倣い, $N(\mathcal{C})_n := N(\mathcal{C})([n]) \in \text{Ob}(\mathbf{Sets})$ と略記する. このとき, 圏 $[n]$ の定義を思い出すと, 集合の要素 $X \in N(\mathcal{C})_n$ は以下のデータからなる:

- 圏 \mathcal{C} の対象の族

$$\{X_i := X(i) \in \text{Ob}(\mathcal{C})\}_{0 \leq i \leq n}$$

- 圏 \mathcal{C} の射の族

$$\{f_{ij} := X(\text{pt}_{ij}) : X(i) \longrightarrow X(j)\}_{0 \leq i \leq j \leq n}$$

$X : [n] \longrightarrow \mathcal{C}$ は関手であるから, $0 \leq i < j \leq n$ に対して

$$\begin{aligned} f_{ii} &= X(\text{Id}_i) = \text{Id}_{X_i}, \\ f_{ij} &= X(\text{pt}_{j-1,j} \circ \cdots \circ \text{pt}_{i+1,i+2} \circ \text{pt}_{i,i+1}) \\ &= f_{j-1,j} \circ \cdots \circ f_{i+1,i+2} \circ f_{i,i+1} \end{aligned}$$

が成り立つ. 故に, X を特徴付けるには, $f_i := f_{i,i-1}$ とおいて \mathcal{C} の図式

$$X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} X_n \quad (\text{C.3.1})$$

を指定することが必要十分である. このことから, 脈体の morphism-morphism 対応は図式の対応

$$(X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \cdots \rightarrow X_n) \longmapsto (X_{\alpha(0)} \rightarrow X_{\alpha(1)} \rightarrow \cdots \rightarrow X_{\alpha(m)})$$

と理解できる.

【例 C.3.1】面写像

$\forall X \in N(\mathcal{C})_n$ を \mathcal{C} の図式

$$X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} X_n$$

として指定する. このとき **面写像** $d_i^n \in \text{Hom}_{\Delta^{\text{op}}}([n], [n-1])$ は, **脈体**によって写像

$$N(\mathcal{C})(d_i^n) : X \longmapsto (X_0 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{i-1}} X_{i-1} \xrightarrow{f_{i+1} \circ f_i} X_{i+1} \xrightarrow{f_{i+2}} \cdots \xrightarrow{f_n} X_n)$$

と対応付く.

【例 C.3.2】縮退写像

$\forall X \in \mathbf{N}(\mathcal{C})_n$ を \mathcal{C} の図式

$$X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} X_n$$

として指定する. このとき縮退写像 $s_i^n \in \text{Hom}_{\Delta^{\text{op}}}([n], [n+1])$ は, 脈体によって写像

$$N(\mathcal{C})(s_i^n): X \longmapsto (X_0 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_i} X_i \xrightarrow{\text{Id}_{X_i}} X_i \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots \xrightarrow{f_n} X_n)$$

と対応付く.

命題 C.10: 脈体関手は忠実充満

脈体関手は忠実充満関手である.

証明

$$\theta: \text{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(N(\mathcal{C}), N(\mathcal{D})), F \longmapsto N(F)$$

が全単射であることを示せば良い.

単射

関手 $F, G: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ が $N(F) = N(G)$ を満たすとする. (C.3.1) により \mathcal{C} における任意の図式

$$X \xrightarrow{f} Y$$

を $N(\mathcal{C})_1$ の元と見做すことができるが, 仮定より圏 \mathcal{D} において

$$\begin{aligned} N(F)_{[1]}(X \xrightarrow{f} Y) &= N(G)_{[1]}(X \xrightarrow{f} Y) \\ \iff (F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y)) &= (G(X) \xrightarrow{G(f)} G(Y)) \end{aligned}$$

が成り立つ. i.e. $F = G$ である.

全射

$\forall f \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(N(\mathcal{C}), N(\mathcal{D}))$ を 1 つ固定する. f は自然変換だから, $\forall n \geq 0$ に対して自然変換 $f_{[n]}: N(\mathcal{C})_n \longrightarrow N(\mathcal{D})_n$ が定まる. (C.3.1) より $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を $N(\mathcal{C})_0$ の要素と見做し, 圏 \mathcal{C} における任意の射 $X \xrightarrow{u} Y$ を $N(\mathcal{C})_1$ の要素と見做すことができる. すると自然変換 f により

$$f_{[0]}(X), f_{[0]}(Y) \in \text{Ob}(\mathcal{D})$$

が対応付く. その上 f が自然変換であることから面写像 $d_i^1: [0] \longrightarrow [1]$ との間に可換図式

$$\begin{array}{ccc} N(\mathcal{C})_1 & \xrightarrow{f_{[1]}} & N(\mathcal{D})_1 \\ \downarrow N(\mathcal{C})(d_i^1) = \partial_i^1 & & \downarrow N(\mathcal{D})(d_i^1) = \partial_i^1 \\ N(\mathcal{C})_0 & \xrightarrow{f_{[0]}} & N(\mathcal{D})_0 \end{array}$$

が成り立つ。よって

$$\begin{aligned}\partial_0^1 \circ f_{[1]}(X \xrightarrow{u} Y) &= f_{[0]} \circ \partial_0^1(X \xrightarrow{u} Y) \\ &= f_{[0]}(Y), \\ \partial_1^1 \circ f_{[1]}(X \xrightarrow{u} Y) &= f_{[0]} \circ \partial_1^1(X \xrightarrow{u} Y) \\ &= f_{[0]}(X)\end{aligned}$$

が言える。i.e. $f_{[1]}(u)$ は圏 \mathcal{D} における射 $f_{[0]}(X) \xrightarrow{f_{[1]}(u)} f_{[0]}(Y)$ である。ここで、対応 $F_f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を

- $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $f_{[0]}(X) \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ を対応付ける
- $X \xrightarrow{u} Y$ に対して $f_{[0]}(X) \xrightarrow{f_{[1]}(u)} f_{[0]}(Y)$ を対応付ける

ものとして定義する。もし F_f が関手ならば明らかに $\theta(F_f) = f$ であるから、 F_f が関手であることを示せば良い：

(fun-1)

(C.3.1) により圏 \mathcal{C} における図式

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$$

を $N(\mathcal{C})_2$ の要素と見做すことができる。 f は自然変換なので、面写像 $d_i^2: [2] \rightarrow [1]$ について可換図式

$$\begin{array}{ccc} N(\mathcal{C})_2 & \xrightarrow{f_{[2]}} & N(\mathcal{D})_2 \\ N(\mathcal{C})(d_i^2) = \partial_i^2 \downarrow & & \downarrow N(\mathcal{D})(d_i^2) = \partial_i^2 \\ N(\mathcal{C})_1 & \xrightarrow{f_{[1]}} & N(\mathcal{D})_1 \end{array}$$

が成り立つ。よって

$$\begin{aligned}\partial_0^2 \circ f_{[2]}(X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z) &= f_{[1]} \circ \partial_0^2(X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z) \\ &= f_{[1]}(Y \xrightarrow{v} Z) \\ &= (F_f(Y) \xrightarrow{F_f(v)} F_f(Z)), \\ \partial_2^2 \circ f_{[2]}(X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z) &= f_{[1]} \circ \partial_2^2(X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z) \\ &= f_{[1]}(X \xrightarrow{u} Y) \\ &= (F_f(X) \xrightarrow{F_f(u)} F_f(Y))\end{aligned}$$

が分かった。i.e.

$$f_{[2]}(X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z) = (F_f(X) \xrightarrow{F_f(u)} F_f(Y) \xrightarrow{F_f(v)} F_f(Z))$$

である。故に

$$\begin{aligned}(F_f(X) \xrightarrow{F_f(v) \circ F_f(u)} F_f(Y)) &= \partial_1^2 \circ f_{[2]}(X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z) \\ &= f_{[1]} \circ \partial_1^2(X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z) \\ &= f_{[1]}(X \xrightarrow{v \circ u} Z)\end{aligned}$$

$$= (F_f(X) \xrightarrow{F_f(v \circ u)} F_f(Y))$$

i.e.

$$F(v \circ u) = F(v) \circ F(u)$$

が示された.

(fun-2)

f が自然変換なので縮退写像 $s_0^0: [1] \rightarrow [0]$ について可換図式

$$\begin{array}{ccc} N(\mathcal{C})_1 & \xrightarrow{f_{[1]}} & N(\mathcal{D})_1 \\ \uparrow N(\mathcal{C})(s_0^0) = \sigma_0^0 & & \uparrow N(\mathcal{D})(s_0^0) = \sigma_0^0 \\ N(\mathcal{C})_0 & \xrightarrow{f_{[0]}} & N(\mathcal{D})_0 \end{array}$$

が成り立つ. (C.3.1) を使うと, これは $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C}) = N(\mathcal{C})_0$ に対して

$$\begin{aligned} f_{[1]} \circ \sigma_0^0(X) &= f_{[1]}(X \xrightarrow{\text{Id}_X} X) \\ &= (F_f(X) \xrightarrow{F_f(\text{Id}_X)} F_f(X)) \\ &= \sigma_0^0 \circ f_{[0]}(X) \\ &= (F_f(X) \xrightarrow{\text{Id}_{F_f(X)}} F_f(X)) \end{aligned}$$

を意味するので

$$F_f(\text{Id}_X) = \text{Id}_{F_f(X)}$$

が示された.

■

C.3.2 ∞ -群 $(\infty, 1)$ -圏

定義 C.25: Kan 条件

Kan 複体 (Kan complex) とは, 単体的集合

$$K: \Delta^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

であって以下の性質を満たすもののこと:

(Kan)

$\forall n \geq 1, 0 \leq j \leq n$ および $\forall f \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda_j^n, K)$ に対して, 以下の図式を可換にする自然変換 $u \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, K)$ が存在する:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_j^n & \xrightarrow{f} & K \\ \downarrow & \nearrow u & \\ \Delta^n & & \end{array}$$

単体的集合であって、**内部角** i.e. $\forall n \geq 2, 0 < \forall j < n$ についてのみ **(Kan)** を満たすもののことを**弱 Kan 複体** (weak Kan complex) と呼ぶ.

定義 C.26: $(\infty, 1)$ -圏

- $(\infty, 1)$ -圏^aとは、**弱 Kan 複体**のこと. $(\infty, 1)$ -圏の関手とは、**sSet** の射のこと.
- ∞ -groupoid とは、**Kan 複体**のこと.

^a 擬圏 (quasi-category) と呼ばれることもある.

! 一般に、 $(\infty, 1)$ -圏のことを単に ∞ -圏と呼ぶことが多い.

$(\infty, 1)$ -圏が通常の圏の一般化であることは、次の定理 (および命題 C.11) から分かる.

定理 C.5: Kan 条件と脈体

任意の**単体的集合** $K: \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ に対して以下は同値である:

- (1) K はある圏の**脈体**と**同型**である.
- (2) K は**弱 Kan 条件**を満たす**一意解**を持つ

証明 (1) \implies (2)

ある圏 \mathcal{C} が存在して $K \cong N(\mathcal{C})$ だとする. $\forall f \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda_j^n, N(\mathcal{C}))$ を 1 つ与える. このとき $0 < \forall j < \forall n$ に対して f が $u \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, N(\mathcal{C}))$ へ一意的に拡張できることを示せば良い.

$0 \leq \forall k \leq n$ に対して $U_k := f_{[0]}(\{k\})$ とおく^{*11}. さらに $0 < \forall k \leq n$ に対して

$$g_k := f_{[1]} \left(\begin{array}{c} \bullet \longrightarrow \bullet \\ \{k-1\} \quad \{k\} \end{array} \right) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U_{k-1}, U_k)$$

とおくと、 \mathcal{C} の図式

$$U_0 \xrightarrow{g_1} U_1 \xrightarrow{g_2} \cdots \xrightarrow{g_n} U_n$$

が定まる. ここから (C.3.1) の方法で $U \in N(\mathcal{C})_n$ が一意的に定まり、**米田の補題**により対応する $u \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, N(\mathcal{C}))$ が一意的に定まるが、構成からこれが所望の u である [Lur, Lemma1.3.4.2].

(1) \Longleftarrow (2)

圏 \mathcal{C} を以下のように構成する:

- $\text{Ob}(\mathcal{C}) := K_0$
- $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D) := \{ f \in K_1 \mid \partial_1^1(f) = C, \partial_0^1(f) = D \}$
- $\forall C \in \text{Ob}(\mathcal{C}) = K_0$ に対して^{*12} $\text{Id}_C := \sigma_0^0(C)$
- $\forall (g, f) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(D, E) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$ に対して射の合成を定義するために、**弱 Kan 条件**

^{*11} 【例 C.2.1】より、 $\{k\} \in \Lambda_j^n([0])$ である.

^{*12} 単体的恒等式 (C.2.4) により $\text{Id}_C \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C)$ が分かる.

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda_1^2 & \xrightarrow{(g, f)} & K \\
\downarrow & \nearrow \exists u & \\
\Delta^2 & &
\end{array}$$

および系 C.4 を用いる．具体的には次のようにする：

(STEP1)

$(g, f) \in K_1 \times K_1$ かつ $\partial_1^1(g) = \partial_0^1(f)$ が成り立つので系 C.4 が使えて, $(g, f) \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda_1^2, K)$ と見做せる．

(STEP2)

仮定より, $(g, f) \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda_1^2, K)$ に対する弱 Kan 条件の一意解 $u \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^2, K) \cong K_2$ が存在する．

(STEP3)

$u|_{\Lambda_1^2}$ に対して再度系 C.4 を適用することで, 弱 Kan 条件の図式の可換性は $\partial_0^2(u) = g$, $\partial_2^2(u) = f$ を意味していることがわかる．このことから, f と g の合成を $g \circ f := \partial_1^2(u)$ と定義する^{*13}．

このように構成したデータの組み $(\text{Ob}(\mathcal{C}), \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -), \text{Id}, \circ)$ が圏になっていることを示そう．

(unitality)

$\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$ をとる．ここで $u := s_1^1(f) \in K_2$ に対して単体的恒等式 (C.2.2), (C.2.4) を用いると

$$\begin{aligned}
\partial_0^2(u) &= \partial_0^2 s_1^1(f) = s_0^0 \partial_0^1(f) = \text{Id}_D, \\
\partial_1^2(u) &= \partial_1^2 s_1^1(f) = f, \\
\partial_2^2(u) &= \partial_2^2 s_1^1(f) = f,
\end{aligned}$$

が分かる．i.e. $\text{Id}_D \circ f = f$ である． $v := s_0^1(f) \in K_2$ に対して単体的恒等式 (C.2.3), (C.2.4) を用いると

$$\begin{aligned}
\partial_0^2(u) &= \partial_0^2 s_0^1(f) = f, \\
\partial_1^2(u) &= \partial_1^2 s_0^1(f) = f, \\
\partial_2^2(u) &= \partial_2^2 s_0^1(f) = \text{Id}_C
\end{aligned}$$

が分かる．i.e. $f \circ \text{Id}_C = f$ である．

(associativity)

$\forall (h, g, f) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(E, F) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(D, E) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$ を与える．系 C.4 を用いることで, 弱 Kan 条件の 3 つの一意解を得る：

- $h \circ g := \partial_1^2(u_0)$ を与える $u_0 \in K_2$ ：

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda_1^2 & \xrightarrow{(h, g)} & K \\
\downarrow & \nearrow \exists! u_0 & \\
\Delta^2 & &
\end{array}$$

^{*13} 単体的恒等式 (C.2.1) より, $g \circ f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, E)$ が分かる．

- $g \circ f := \partial_1^2(u_3)$ を与える $u_3 \in K_2$:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_1^2 & \xrightarrow{(g, f)} & K \\ \downarrow & \nearrow \exists! u_3 & \\ \Delta^2 & & \end{array}$$

- $(h \circ g) \circ f := \partial_1^2(u_2)$ を与える $u_2 \in K_2$

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_1^2 & \xrightarrow{(h \circ g, f)} & K \\ \downarrow & \nearrow \exists! u_2 & \\ \Delta^2 & & \end{array}$$

さらに, $(u_0, u_2, u_3) \in K_2^{\times 3}$ は

$$\begin{aligned} \partial_1^2(u_0) &= h \circ g = \partial_0^2(u_2), \\ \partial_2^2(u_0) &= g = \partial_0^2(u_3), \\ \partial_2^2(u_2) &= f = \partial_2^2(u_3) \end{aligned}$$

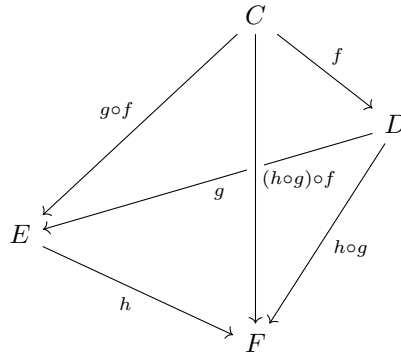
を充たすため系 C.4 が使えて, $(u_0, u_2, u_3) \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda_1^3, K)$ と見做せる. すると, 仮定より弱 Kan 条件の一意解

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_1^3 & \xrightarrow{(u_0, u_2, u_3)} & K \\ \downarrow & \nearrow \exists! \tau & \\ \Delta^3 & & \end{array}$$

が存在する. i.e. ある $\tau \in K_3$ が^{*14}一意的に存在して,

$$u_0 = \partial_0^3(\tau), \quad u_2 = \partial_2^3(\tau), \quad u_3 = \partial_3^3(\tau)$$

を充たす. この 3-単体 τ を図 (4) に則り図示すると次のようになる:



ここで, $u_1 := \partial_1^3(\tau) \in K_2$ とおく. これは τ の図式で言うと三角形 C, E, F が指定する 2-単体である. 図式から明らかなように,

$$\begin{aligned} \partial_0^2(u_1) &= h, \\ \partial_1^2(u_1) &= (h \circ g) \circ f, \\ \partial_2^2(u_1) &= g \circ f \end{aligned}$$

^{*14} 米田の補題より $\tau \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^3, K) \cong K_3$ である.

が成り立っている． i.e. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ が分かった．
さて， \mathbf{sSet} の射

$$\theta: K \longrightarrow N(\mathcal{C})$$

を構成しよう． θ は自然変換であるから， $\forall [n] \in$ に対して写像 $\theta_{[n]}: K_n \longrightarrow N(\mathcal{C})_n$ を定めれば良い．
命題 C.5-(1) より $\forall \sigma \in K_n$ は自然に $\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, K)$ の元と見做せるため，

$$\begin{aligned} \theta_{[n]}: K_n &\longrightarrow N(\mathcal{C})_n, \\ \sigma &\longmapsto (\sigma_{[0]}(\{0\}) \xrightarrow{\sigma_{[1]}(\{0,1\})} \dots \xrightarrow{\sigma_{[n]}(\{n-1,n\})} \sigma_{[n]}(\{n\})) \end{aligned}$$

と定義する． 構成から $\theta_{[n]}$ は自然である． $\forall n \geq 0$ に対して $\theta_{[n]}$ が全単射であることを， n に関する数学的帰納法により示す． まず， 圏 \mathcal{C} の構成から $\theta_{[0]}, \theta_{[1]}$ が全単射であることは明らかである． $n > 1$ のとき， 示すべきは命題 C.5-(1) より

$$\begin{aligned} \theta_*: \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, K) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, N(\mathcal{C})), \\ \sigma &\longmapsto \theta \circ \sigma \end{aligned}$$

が全単射であることである． $0 < j < n$ を 1 つとる． $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda_j^n, K)$ に対する弱 Kan 条件の解を $\bar{u} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, K)$ と書くと， 解の一意性の仮定より写像

$$\begin{aligned} \phi_K: \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, K) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda_j^n, K), \\ \bar{u} &\longmapsto u \end{aligned}$$

は全単射である． $N(\mathcal{C})$ にも同様の構成ができるため， 可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, K) & \xrightarrow{\theta_*} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, N(\mathcal{C})) \\ \phi_K \downarrow & & \downarrow \phi_{N(\mathcal{C})} \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda_j^n, K) & \xrightarrow{\theta_*|_{\Lambda_j^n}} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda_j^n, N(\mathcal{C})) \end{array}$$

が書ける． 縦の射は全単射なので， $\theta_*|_{\Lambda_j^n}$ が全単射であることを示せば良い． これは系 C.4 および帰納法の仮定から従う．

■

定義 C.27: 亜群

亜群 (groupoid) とは， 小圏 \mathcal{C} であって， 任意の射が可逆であるもののこと． i.e. $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ に対して， ある $f^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ が存在して

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f &= \mathrm{Id}_X, \\ f \circ f^{-1} &= \mathrm{Id}_Y \end{aligned}$$

を満たすこと．

命題 C.11: 脈体が ∞ -groupoid になる必要十分条件

圏 \mathcal{C} の脈体 $N(\mathcal{C})$ が ∞ -groupoid になる必要十分条件は， \mathcal{C} が groupoid であること．

証明 (⇒)

$N(\mathcal{C})$ が ∞ -groupoid だと仮定する. このとき, Kan 条件により, $\forall n \geq 1, 0 \leq \forall j \leq n$ に対して全射^{*15}

$$\theta_j^n : \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, N(\mathcal{C})) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda_j^n, N(\mathcal{C}))$$

が存在する.

$\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ を 1 つ固定し, これを (C.3.1) の方法により $N(\mathcal{C})_1$ の元と見做す. このとき, $(f, \text{Id}_Y = \sigma_0^0(Y)) \in N(\mathcal{C})_1^{\times 2}$ は

$$\partial_0^1(f) = Y = \partial_0^1(\text{Id}_Y)$$

を充たすため系 C.4 が使えて, $(f, \text{Id}_Y) \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda_2^2, N(\mathcal{C}))$ と見做せる. このとき θ_2^2 の全射性により, $\sigma \in N(\mathcal{C})_2 \cong \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^2, N(\mathcal{C}))$ が存在して $(f, \text{Id}_Y) = \theta_2^2(\sigma)$ を充たす. θ_j^n の定義および系 C.4 から, これは

$$\begin{aligned}\partial_0^2(\sigma) &= f, \\ \partial_1^2(\sigma) &= \text{Id}_Y\end{aligned}$$

を意味する. 故に命題 C.10 の証明から, $g := \partial_2^2(\sigma) \in N(\mathcal{C})_1 = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ とおくことで,

$$f \circ g = \partial_1^2(\sigma) = \text{Id}_Y$$

が成り立つことが分かった. 同様に, $(\text{Id}_X, f) \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda_0^2, N(\mathcal{C}))$ と見做せること, および θ_0^2 の全射性から $h \in N(\mathcal{C})_1 = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ であって $h \circ f = \text{Id}_X$ を充たすものが存在する. 命題 C.10 の証明から,

$$g = \text{Id}_X \circ g = (h \circ f) \circ g = h \circ (f \circ g) = h \circ \text{Id}_Y = h$$

が言える. i.e. $f^{-1} = g = h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ である.

(⇐)

\mathcal{C} が groupoid だとする. 定理 C.5 から, 示すべきは $\forall n \geq 1, j = 0, n$ に対して Kan 条件が成立していることである.

$n = 1, j = 0$ とする. このとき $\Lambda_0^1 = \{\{0\}, \{1\}\}$ であるから, $\forall \sigma \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda_0^1, N(\mathcal{C}))$ は $\text{Ob}(\mathcal{C})$ の元である. よって, $\bar{\sigma} \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^1, N(\mathcal{C}))$ として $\bar{\sigma} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \sigma)$ をとれば $\partial_0^1(\bar{\sigma}) = \sigma$ を充たす. このことは系 C.4 より $\bar{\sigma}|_{\Lambda_0^1} = \sigma$ を意味する.

次に, $n = 2, j = 0$ とする. このとき $\forall \sigma \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda_0^2, N(\mathcal{C}))$ は, 系 C.4 より $(\sigma_1 := \partial_1^2(\sigma), \sigma_2 := \sigma_2^2(\sigma)) \in N(\mathcal{C})_1^{\times 2}$ であって以下の図式として書けるものと同一視できる:

$$\begin{array}{ccc} & & Z \\ & \nearrow^{\sigma_2} & \\ X & \xrightarrow{\sigma_1} & Y\end{array}$$

\mathcal{C} は groupoid なので, この図式に $\sigma_0 := \sigma_1 \circ \sigma_2 \in N(\mathcal{C})_1$ を付け足すことで所望の $\bar{\sigma} \in N(\mathcal{C})_2 \cong \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^2, N(\mathcal{C}))$ を得る.

^{*15} 定理 C.5 の状況とは異なり, 単射とは限らない!

次に, $n \geq 3, j = 0$ とする. このとき定理 C.5 の (1) \implies (2) の構成によって $\bar{\sigma} \in N(\mathcal{C})_n$ を作ろうとする. この構成が可能なのは, 勝手な $0 \leq i \leq j \leq k \leq n$ に対して $\sigma_{[1]}(\{j, k\}) \circ \sigma_{[1]}(\{i, j\}) = \sigma_{\{i, k\}}$ が成り立つときだが, これは 3 頂点 $\{\{i, \}, \{j, \}, \{k, \}\}$ が作る 2-単体 $\sigma_{ijk} \in \Delta^n([2])$ が $\Lambda_0^n([2])$ に含まれることと同値である. よって $n = 3$ のときのみが非自明である. $n = 3$ のときは, $\sigma_{ij} := \sigma_{[1]}(\{j, k\})$ とおくと

$$\begin{aligned} (\sigma_{23} \circ \sigma_{12}) \circ \sigma_{01} &= \sigma_{23} \circ (\sigma_{12} \circ \sigma_{01}) \\ &= \sigma_{23} \circ \sigma_{02} \\ &= \sigma_{03} \\ &= \sigma_{13} \circ \sigma_{01} \end{aligned}$$

と計算できるが, \mathcal{C} が groupoid なので両辺の右から σ_{01}^{-1} をかけることで $\sigma_{23} \circ \sigma_{12} = \sigma_{13}$ が示される. $j = n$ の場合も同様である. ■

C.4 単体的豊穡圏とホモトピー論

C.4.1 単体的豊穡圏とホモトピーコヒーレントな脈体

定義 C.28: 豊穡圏

モノイダル圏 (V, \otimes, I) を与える.

V -豊穡圏 (V -enriched category) \mathcal{C} は, 以下のデータからなる:

- 集合 $\text{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して, **Hom 対象**と呼ばれる V の対象 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \in \text{Ob}(V)$ を持つ
- $\forall x, y, z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して, **合成射**と呼ばれる V の射 $\circ_{x, y, z}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$ を持つ
- $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して, **恒等素**と呼ばれる V の射 $j_x: I \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$ を持つ

これらは以下の図式を可換にしなくてはならない:

(associativity)

$\forall x, y, z, w \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ について^a

$$\begin{array}{ccc} (\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z)) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w) & \xrightarrow{\circ_{x, y, z} \otimes \text{Id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w)}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \circ_{x, z, w} \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes (\text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w)) & \xrightarrow{\text{Id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)} \otimes \circ_{y, z, w}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, w) \end{array}$$

(unitality)

$\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ について^b

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) & \xrightarrow{\circ_{x,x,y}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) & \xleftarrow{\circ_{x,y,y}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, y) \\
 \uparrow j_x \otimes \text{Id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)} & \nearrow \cong & & \nwarrow \cong & \uparrow \text{Id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)} \otimes j_y \\
 I \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) & & & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes I
 \end{array}$$

^a \cong はモノイダル圏 V の **associator**

^b \cong はモノイダル圏 V の **left/right unitor**

定義 C.29: 豊穣関手

モノイダル圏 (V, \otimes, I) を与える.

2つの V -**豊穣圏** \mathcal{C}, \mathcal{D} の間の V -**豊穣関手** (V -enriched functor)

$$F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

は, 以下のデータからなる:

- 写像 $F_0: \text{Ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{Ob}(\mathcal{D}), x \longmapsto F_0(x)$
- V の射の族

$$\{F_{x,y}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(x), F_0(y))\}_{x,y \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは以下の図式を可換にしなければならない:

(enriched-1)

$\forall x, y, z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して^a

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) & \xrightarrow{\circ_{x,y,z}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z) \\
 \downarrow F_{x,y} \otimes F_{y,z} & & \downarrow F_{x,z} \\
 \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(x), F_0(y)) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(y), F_0(z)) & \xrightarrow{\circ_{F_0(x), F_0(y), F_0(z)}} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(x), F_0(z))
 \end{array}$$

(enriched-2)

$\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して^b

$$\begin{array}{ccc}
 I & \xrightarrow{j_x} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x) \\
 \searrow j_{F_0(x)} & & \downarrow F_{x,x} \\
 & & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(x), F_0(x))
 \end{array}$$

^a これは, 通常の関手において射の合成が保存されることに対応する.

^b これは, 通常の関手において恒等射が保存されることに対応する.

単体的集合の圏 \mathbf{sSet} はモノイダル圏の構造を持つ。実際、命題 C.5-(2) より、単体的集合 $S, T: \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ に対してその直積

$$\begin{aligned} S \times T: \Delta^{\text{op}} &\longrightarrow \mathbf{Sets}, \\ [n] &\longmapsto S_n \times T_n, \\ ([n] \xrightarrow{\alpha} [m]) &\longmapsto (S_n \times T_n \xrightarrow{(S(\alpha), T(\alpha))} S_m \times T_m) \end{aligned} \quad (\text{C.4.1})$$

がテンソル積 $\times: \mathbf{sSet} \times \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{sSet}$ を定めている。

定義 C.30: 単体的豊稜圏

単体的集合の圏 \mathbf{sSet} を (C.4.1) によりモノイダル圏と見做す。このとき、 \mathbf{sSet} -豊稜圏のことを単体的豊稜圏 (simplicially enriched category) と呼ぶ。

単体的豊稜圏と \mathbf{sSet} -豊稜関手全体が成す圏のことを \mathbf{Cat}_{Δ} と書く。

つまり、単体的豊稜圏 \mathcal{C} とは以下のデータからなる：

- 集合 $\text{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して、単体的集合 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \in \text{Ob}(\mathbf{sSet})$
- $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して、自然変換

$$\circ_{X, Y, Z} \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z))$$

- $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して、0-単体 $j_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)_0 \cong \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^0, \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X))$

定義 C.31: 単体的豊稜圏 $\mathfrak{C}[Q]$

(Q, \leq) を半順序集合とする. このとき単体的豊稜圏 $\mathfrak{C}[Q] \in \text{Ob}(\mathbf{Cat}_\Delta)$ を以下で定義する:

- $\text{Ob}(\mathcal{C}) := Q$
- $\forall i, j \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して,

$$\text{Hom}_{\mathfrak{C}[Q]}(i, j) := \begin{cases} N(P_{ij}), & i \leq j \\ \emptyset, & i > j \end{cases}$$

ただし, 半順序集合 $P_{ij} := \{k \in Q \mid i \leq k \leq j\}$ を

- $\forall k \in P_{ij}$ を対象とする.
- Hom 集合は

$$\text{Hom}_{P_{ij}}(k, l) := \begin{cases} \{\text{pt}_{kl}\}, & k \leq l \\ \emptyset, & k > l \end{cases}$$

で定義する.

ことで圏と見做し, 脈体を取った.

- $\forall i, j, k \in \text{Ob}(\mathcal{C}), i \leq j \leq k$ に対して, 自然変換

$$\circ_{ijk}: \text{Hom}_{\mathfrak{C}[Q]}(j, k) \times \text{Hom}_{\mathfrak{C}[Q]}(i, j) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{C}[Q]}(i, k)$$

を次で定義する:

$$\begin{aligned} \circ_{ijk[n]}: N(P_{jk})_n \times N(P_{ij})_n &\longrightarrow N(P_{ik})_n, \\ (\sigma, \tau) &\longmapsto \sigma \cup \tau \end{aligned}$$

【例 C.4.1】 単体的豊稜圏 $\mathfrak{C}[2]$

圏 $\mathfrak{C}[2]$ の構造を調べよう. 定義 C.31 の記号に倣うと

$$\begin{aligned} P_{ii} &= \{i\}, \\ P_{01} &= \{0 \leq 1\}, \\ P_{02} &= \{0 \leq 1 \leq 2\}, \\ P_{12} &= \{1 \leq 2\} \end{aligned}$$

であるから, 脈体の定義により

$$\begin{aligned} N(P_{ii})_1 &= \text{Fun}([n], P_{ii}) = \{\text{const}_i: k \mapsto i\}, \\ N(P_{01})_1 &= \text{Fun}([n], P_{01}) = \left\{ f_x: k \mapsto \begin{cases} 0, & k < x, \\ 1, & k \geq x \end{cases} \mid 0 \leq x \leq n+1 \right\}, \\ N(P_{12})_n &= \text{Fun}([n], P_{12}) = \left\{ f_x: k \mapsto \begin{cases} 1, & k < x, \\ 2, & k \geq x \end{cases} \mid 0 \leq x \leq n+1 \right\}, \end{aligned}$$

$$N(P_{02})_n = \text{Fun}([n], P_{02}) = \left\{ f_{xy}: k \mapsto \begin{cases} 0, & k < x, \\ 1, & x \leq k < y, \\ 2, & k \geq y \end{cases} \mid 0 \leq x \leq y \leq n+1 \right\}$$

だと分かる．特に,

$$\circ_{012}[n]: N(P_{12})_n \times N(P_{01}) \longrightarrow N(P_{02})$$

である．

定義 C.32: homotopy coherent な脈体

単体的豊稜圏 $\mathcal{C} \in \text{Ob}(\mathbf{Cat}_{\Delta})$ の homotopy coherent nerve

$$N_{\text{hc}}(\mathcal{C}): \Delta^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を以下で定義する：

- $\forall [n] \in \text{Ob}(\Delta^{\text{op}})$ に対して

$$N_{\text{hc}}(\mathcal{C})_n := \text{Hom}_{\mathbf{Cat}_{\Delta}}(\mathfrak{C}[n], \mathcal{C})$$

を対応づける．

- $\forall \alpha \in \text{Hom}_{\Delta^{\text{op}}}([n], [m])$ に対して, 写像

$$N_{\text{hc}}(\mathcal{C})(\alpha) := \alpha^*: \text{Hom}_{\mathbf{Cat}_{\Delta}}(\mathfrak{C}[n], \mathcal{C}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Cat}_{\Delta}}(\mathfrak{C}[m], \mathcal{C}), \\ X \mapsto X \circ \alpha$$

を対応付ける．

homotopy coherent nerve functor

$$N_{\text{hc}}: \mathbf{Cat}_{\Delta} \longrightarrow \mathbf{sSet}$$

を以下で定義する：

- $\forall \mathcal{C} \in \text{Ob}(\mathbf{Cat}_{\Delta})$ に対して $N_{\text{hc}}(\mathcal{C}) \in \text{Ob}(\mathbf{sSet})$ を対応付ける．
- 任意の \mathbf{sSet} -豊稜関手 $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ に対して, 自然変換

$$N_{\text{hc}}(F) := \{N_{\text{hc}}(F)_{[n]}: X \mapsto F \circ X\}_{[n] \in \text{Ob}(\Delta^{\text{op}})}$$

を対応付ける．

C.4.2 単体的ホモトピー

定義 C.33: 単体的ホモトピー

$X, Y, K \in \text{Ob}(\mathbf{sSet})$ を, K が X の単体的部分集合となるようにとる. 包含射 $i: K \hookrightarrow X$ をとる.

- $f, g \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(X, Y)$ を繋ぐホモトピーとは, \mathbf{sSet} の射 $\eta \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(X \times \Delta^1, Y)$ であって, 以下の \mathbf{sSet} の図式を可換にするもののこと:

$$\begin{array}{ccccc} X \cong X \times \Delta^0 & \xrightarrow{\text{Id} \times d_1^1} & X \times \Delta^1 & \xleftarrow{\text{Id} \times d_0^1} & X \times \Delta^0 \\ & \searrow f & \downarrow \eta & \swarrow g & \\ & & Y & & \end{array}$$

f, g を繋ぐホモトピーが存在するとき, f, g は互いにホモトピックであるという.

- $f \circ i = g \circ i =: \alpha$ とおく. ホモトピー $\eta \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(X \times \Delta^1, Y)$ が f と g の間の K に関する相対ホモトピー (homotopy from f to g (rel K)) であるとは, 上の可換図式に加えて

$$\begin{array}{ccc} K \times \Delta^1 & \xrightarrow{i \times \text{Id}} & X \times \Delta^1 \\ \text{pr} \downarrow & & \downarrow \eta \\ K & \xrightarrow{\alpha} & Y \end{array}$$

が成り立つことを言う.

より具体的には, f, g を繋ぐ単体的ホモトピー (simplicial homotopy) とは \mathbf{Sets} の射の族

$$\{h_i: X_n \longrightarrow Y_{n+1}\}_{i=0, \dots, n, n \geq 0}$$

であって以下を満たすもののこと:

$$\begin{aligned} \partial_0 \circ h_0 &= f_n, \\ \partial_{n+1} \circ h_n &= g_n, \\ \partial_i \circ h_j &= \begin{cases} h_{j-1} \circ \partial_i, & i < j \\ \partial_i \circ h_{i-1}, & i = j \neq 0 \\ h_j \circ \partial_{i-1}, & i > j + 1 \end{cases} \\ \sigma_i \circ h_j &= \begin{cases} h_{j+1} \circ \sigma_i, & i \leq j \\ h_j \circ \sigma_{i-1}, & i > j \end{cases} \end{aligned}$$

一見するとホモトピーと単体的ホモトピーは別のものに見えるが, 実は同じものである. 単体的ホモトピー $\{h_i: X_n \longrightarrow Y_{n+1}\}_{i=0, \dots, n, n \geq 0}$ が与えられたとする. このとき \mathbf{sSet} の射 $\eta \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(X \times \Delta^1, Y)$ を

$$\begin{aligned} \eta_0 &:= \partial_0 \circ h_0, \\ \eta_{n+1} &:= \partial_{n+1} \circ h_n, \\ \eta_j &:= \partial_j \circ h_j \quad (1 \leq j \leq n) \end{aligned}$$

と定義すると, 和の普遍性の図式によって $\eta \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(X \times \Delta^1, Y)$ が定まる.

命題 C.12: ∞ -groupoid とホモトピー

$X, Y \in \text{Ob}(\mathbf{sSet})$ が ∞ -groupoid ならば, ホモトピックは $\text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(X, Y)$ の上の同値関係になる. ホモトピック (rel $K \subset X$) も同値関係である.

証明 [GJ09, p.26, COROLLARY 6.2]

∞ -groupoid X を与え, $* \in X_0$ を 1 つ固定する. このとき集合としての同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}((\Delta^n, \partial\Delta^n), (X, *)) \cong \{x \in X_n \mid 0 \leq \forall i \leq n, \partial_i^n(x) = \sigma_0^{n-2} \circ \cdots \circ \sigma_0^0(*)\} =: Z_n(X, *)$$

がある [Che24]. $a, b \in X_n$ を繋ぐホモトピーとは, この場合 $y \in X_{n+1}$ であって

$$\partial_i^{n+1}(y) = \begin{cases} \sigma_0^{n-1} \circ \cdots \circ \sigma_0^0(*), & i < n \\ a, & i = n \\ b, & i = n+1 \end{cases}$$

を満たすもののことである. ホモトピック \sim は $Z_n(X, *)$ 上の同値関係になる [Che24, p.27, Lemma 3.28].

$a, b \in Z_n(X, *)$ に対して, 系 C.4, 命題 C.5-(1) および Kan 条件によって

$$\begin{array}{ccc} ((\sigma_0)^n(*), \dots, (\sigma_0)^n(*), a, b) & & \\ \Lambda_n^{n+1} \xrightarrow{\quad} & X & \\ \downarrow & \nearrow \text{ } \exists a \star b & \\ \Delta^{n+1} & & \end{array}$$

として $a \star b \in X_{n+1}$ をとってくる.

$$\pi_n^\Delta(X, *) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}((\Delta^n, \partial\Delta^n), (X, *)) / \simeq \cong Z_n(X, *) / \sim$$

とおく.

命題 C.13: 単体的ホモトピー群

写像

$$\pi_n^\Delta(X, *) \times \pi_n^\Delta(X, *) \longrightarrow \pi_n^\Delta(X, *), ([a], [b]) \longmapsto [\partial_n^{n+1}(a \star b)]$$

によって $\pi_n^\Delta(X, *)$ は群になる. これを単体的ホモトピー群と呼ぶ.

証明 ■

定理 C.6: 単体的ホモトピー群と幾何学的実現

$$\pi_n^\Delta(X, *) \cong \pi_n(|X|, |*|)$$

証明 [GJ09, p.64, PROPOSITION 11.1] ■

C.5 ∞ -トポス

∞ -groupoid のなす $(\infty, 1)$ -圏を $\infty\mathbf{Grpd}$ と書く.

定義 C.34: ∞ -前層

K を $(\infty, 1)$ -圏とする. K 上の $(\infty, 1)$ -前層とは, $(\infty, 1)$ -圏の関手

$$P: K^{\mathrm{op}} \longrightarrow \infty\mathbf{Grpd}$$

のこと. $(\infty, 1)$ -前層のなす $(\infty, 1)$ -圏とは, $(\infty, 1)$ -圏の関手の圏

$$\mathrm{PSh}_{(\infty, 1)}(K) := \mathrm{Fun}_{(\infty, 1)}(K^{\mathrm{op}}, \infty\mathbf{Grpd})$$

のこと.

以降では, $(\infty, 1)$ -前層のことを ∞ -前層と呼ぶ.

命題 C.14: ∞ -前層の圏のモデル

\mathcal{C} を \mathbf{sSet} -豊穡圏であって, Kan 複体を Hom 対象に持つものとする.

このとき homotopy coherent な脈体 N_{hc} に対して

$$\mathrm{PSh}_{(\infty, 1)}(N_{\mathrm{hc}}(\mathcal{C})) \cong N_{\mathrm{hc}}([\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{sSet}_{\mathrm{Quillen}}]_{\mathrm{proj}}^{\circ})$$

が成り立つ.

証明 <https://ncatlab.org/nlab/show/%28infinity%2C1%29-category+of+%28infinity%2C1%29-presheaves> を参照. ■

[nLa], [NSS12, p.9] に従い $(\infty, 1)$ -トポスの定義を概観する^{*16}.

^{*16} ここでの定義は不完全なので, 詳細は [nLa], [Lur08]などを参照.

定義 C.35: ∞ -トポス

K を $(\infty, 1)$ -圏とする.

K 上の $(\infty, 1)$ -トポスとは, $(\infty, 1)$ -前層のなす $(\infty, 1)$ -圏 $\mathrm{PSh}_{(\infty, 1)}(K)$ の部分 $(\infty, 1)$ -圏

$$i: \mathbf{H} \hookrightarrow \mathrm{PSh}_{(\infty, 1)}(K)$$

であって, 包含 $(\infty, 1)$ -関手 i が有限極限を保つ左随伴 $(\infty, 1)$ -関手

$$\begin{array}{ccc} & i & \\ \mathbf{H} & \xrightarrow{\quad} & \mathrm{PSh}_{(\infty, 1)}(K) \\ & \text{lex} & \end{array}$$

を持つようなもののこと.

もしくは, 余完全^aな $(\infty, 1)$ -圏 \mathbf{H} であって以下の公理を充たすもののこと [NSS12, p.9, Definition 5.4]:

(T1) $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(X, Y)$ および \mathbf{H} における図式 $D: I \longrightarrow \mathbf{H}_Y$ において, 自然な同型

$$\mathrm{colim}_{i \in I} (X \times_Y D(i)) \cong X \times_Y \mathrm{colim}_{i \in I} D(i)$$

がある^b.

(T2) $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{H})$ に対して, 図式 $Y \longleftarrow \emptyset \longrightarrow X$ の押し出し

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \amalg Y \end{array}$$

は図式 $Y \longrightarrow X \amalg Y \longleftarrow X$ の引き戻しでもある. i.e. 任意の和が disjoint である.

(T3) \mathbf{H} における任意の groupoid object は delooping を持つ.

^a 正確には **presentable** [Lur08, p.372, Def 5.5.0.18]

^b \times_Y は引き戻し

[Alf23] は命題 C.14 を使って ∞ -トポスを定義している.

C.6 (∞, n) -圏

C.6.1 因子化ホモロジー

C.6.2 Complete Segal space

C.6.3 Theta space

付録 D

C^∞ 多様体の話

[Lee12, Chapter4, 5, 6] の内容を自分用に纏める.

D.1 沈めこみ・はめ込み・埋め込み

\mathbb{R}^n における逆関数定理から始める. まず距離空間に関する基本的な補題を用意する.

補題 D.1: Banach の不動点定理

空でない完備な距離空間 (X, d) を与える. このとき, 以下の条件を充たす任意の写像 $F: X \rightarrow X$ はただ 1 つの固定点を持つ:

(contraction) ある定数 $\lambda \in (0, 1)$ が存在し, $\forall x, y \in X$ に対して $d(F(x), F(y)) \leq \lambda d(x, y)$

証明 まず固定点の存在を示す. $\forall x_0 \in X$ を 1 つとり, X の点列 $(x_i)_{i=0}^\infty$ を漸化式 $x_{i+1} = F(x_i)$ によって帰納的に定める. 仮定より $\lambda \in (0, 1)$ なので, $\forall \varepsilon > 0$ に対して十分大きな $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ を取れば $\lambda^{N_\varepsilon} < \frac{1-\lambda}{d(x_1, x_0)} \varepsilon$ が成り立つようにできる. このとき $\forall m, n \geq N_\varepsilon$ $^w/$ $m \geq n$ に対して

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) && \because \text{三角不等式} \\ &\leq \lambda^{m-1} d(x_1, x_0) + \cdots + \lambda^n d(x_1, x_0) && \because \text{条件 (contraction)} \\ &\leq \lambda^n \left(\sum_{i=0}^\infty \lambda^i \right) d(x_1, x_0) \\ &\leq \lambda^{N_\varepsilon} \frac{d(x_1, x_0)}{1-\lambda} < \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ. i.e. 点列 $(x_i)_{i=0}^\infty$ は Cauchy 列であり, 仮定より X は完備なのでその収束点 $x := \lim_{i \rightarrow \infty} x_i \in X$ が一意的に存在する. F は明らかに連続なので

$$F(x) = F(\lim_{i \rightarrow \infty} x_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} F(x_i) = x$$

が成り立つ. i.e. x は固定点である.

次に固定点 x の一意性を示す. 別の固定点 $x' \in X$ が存在したとする. このとき条件 **(contraction)** より

$$d(x, x') = d(F(x), F(x')) \leq \lambda d(x, x') \iff (1-\lambda)d(x, x') \leq 0$$

が成り立つので $x = x'$ でなくてははいけない. ■

定理 D.1: \mathbb{R}^n における逆関数定理

- 開集合^a $U, V \in \mathbb{R}^n$
- C^∞ 関数^b $F: U \rightarrow V, x \mapsto (F^1(x), \dots, F^n(x))$

を与え, F の Jacobi 行列を返す C^∞ 写像

$$DF: U \rightarrow M(n, \mathbb{R}), x \mapsto \left[\frac{\partial F^\mu}{\partial x^\nu}(x) \right]_{1 \leq \mu, \nu \leq n}$$

を定める. このとき, ある点 $p \in U$ において $DF(p) \in GL(n, \mathbb{R})$ ならば,

- 点 $p \in U$ の連結な近傍 $U_0 \subset U$
- 点 $F(p) \in V$ の連結な近傍 $V_0 \subset V$

が存在して $F|_{U_0}: U_0 \rightarrow V_0$ が微分同相写像^cになる.

^a \mathbb{R}^n には通常の Euclid 位相を入れる.

^b $F = (F^1, \dots, F^n)$ の各成分 F^i が任意回偏微分可能.

^c i.e. $F|_{U_0}$ は C^∞ 級の逆写像を持つ.

証明 $U' := \{x - p \in \mathbb{R}^n \mid x \in U\}, V' := \{x - F(p) \in \mathbb{R}^n \mid x \in V\}$ とおく. このとき写像

$$F_1: U' \rightarrow V', x \mapsto F(x + p) - F(p)$$

は C^∞ 級で, かつ $F_1(0) = 0, DF_1(0) = DF(p)$ を充たし, 0 の連結な近傍 $0 \in U'_0 \subset U', 0 \in V'_0 \subset V'$ が存在して $F_1|_{U'_0}: U'_0 \rightarrow V'_0$ が微分同相写像になることと, 点 $p \in U$ の連結な近傍 $p \in U_0 \subset U$ と点 $F(p) \in V$ の連結な近傍 $F(p) \in V_0 \subset V$ が存在して $F|_{U_0}: U_0 \rightarrow V_0$ が微分同相写像になることは同値である.

さらに, $V'' := \{DF_1(0)^{-1}(x) \in \mathbb{R}^n \mid x \in V'\}, V''_0 := \{DF_1(0)^{-1}(x) \in \mathbb{R}^n \mid x \in V'_0\}$ とおくと写像^{*1}

$$F_2: U' \rightarrow V'', x \mapsto DF_1(0)^{-1}(F_1(x))$$

は C^∞ 級で, $DF_2(0) = \mathbb{1}_n$ かつ $V''_0 \subset V''$ は 0 の連結な近傍であり^{*2}, $F_2|_{U'_0}: U'_0 \rightarrow V''_0$ が微分同相写像になることと $F_1|_{U'_0}: U'_0 \rightarrow V'_0$ が微分同相写像になることは同値である. 以上の考察から,

- $p = 0 \in U$
- $F(p) = 0 \in V$
- $DF(p) = \mathbb{1}_n$

を仮定しても一般性を失わないことが分かった.

ここで C^∞ 写像

$$H: U \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto x - F(x)$$

^{*1} $DF_1(0)^{-1}(F_1(x))$ と言うのは, 列ベクトル $F_1(x) \in \mathbb{R}^n$ に $n \times n$ 行列 $DF_1(0)^{-1} \in M(n, \mathbb{R})$ を作用させると言う意味.

^{*2} V''_0 が連結であり, 行列 $DF_1(0)^{-1}$ をかけると言う写像は連続なので.

を考える．まず $DH(0) = \mathbb{1}_n - \mathbb{1}_n = 0$ が成り立つことがわかる．さらに写像 $DH: U \rightarrow M(n, \mathbb{R})$, $x \mapsto DH(x)$ の連続性^{*3}から, $B_\delta(0) \subset U$ を充たす $\delta > 0$ が存在して, $\forall x \in \overline{B_\delta(0)}$ に対して^{*4}

$$\|DH(x) - DH(0)\| = \|DH(x)\| \leq \frac{1}{2}$$

が成り立つようにできる．

F は $\overline{B_\delta(0)}$ 上単射

$\forall x, y \in \overline{B_\delta(0)}$ をとる． $\overline{B_\delta(0)}$ は凸集合なので $\forall t \in [0, 1]$ に対して $x + t(y - x) \in \overline{B_\delta(0)}$ が成り立つ．
よって

$$\begin{aligned} |H(y) - H(x)| &= \left| \int_0^1 dt \frac{d}{dt} H(x + t(y - x)) \right| \\ &= \left| \int_0^1 dt DH(x + t(y - x))(y - x) \right| \\ &\leq \int_0^1 dt |DH(x + t(y - x))(y - x)| \\ &\leq \int_0^1 dt \sup_{x \in \overline{B_\delta(0)}} \|DH(x)\| |y - x| \\ &\leq \frac{1}{2} |y - x| \end{aligned} \tag{D.1.1}$$

が言える．故に

$$\begin{aligned} |y - x| &= |F(y) - F(x) + H(y) - H(x)| \\ &\leq |F(y) - F(x)| + |H(y) - H(x)| \\ &\leq |F(y) - F(x)| + \frac{1}{2} |y - x| \end{aligned}$$

が成り立ち,

$$\frac{1}{2} |y - x| \leq |F(y) - F(x)| \tag{D.1.2}$$

が従う．故にノルムの正定値性から $\overline{B_\delta(0)}$ 上 F が単射だと分かった．

$\overline{B_{\delta/2}(0)} \subset F(\overline{B_\delta(0)})$

$\forall y \in \overline{B_{\delta/2}(0)}$ に対してある $x_y \in \overline{B_\delta(0)}$ が存在して $F(x_y) = y$ を充たすことを示す． C^∞ 写像

$$G: U \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto y + H(x) = y + x - F(x)$$

を考える．不等式 (D.1.1) から $\forall x \in \overline{B_\delta(0)}$ に対して

$$|G(x)| \leq |y| + |H(x)| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2} |x| \leq \delta$$

が成り立つので $G(\overline{B_\delta(0)}) \subset \overline{B_\delta(0)}$ が分かった．その上再度 (D.1.1) から $\forall x, y \in \overline{B_\delta(0)}$ に対して

$$|G(x) - G(y)| = |H(x) - H(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|$$

^{*3} H が C^∞ 級なので DH は連続．

^{*4} $\|\cdot\|: M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ は Frobenius ノルム．

が成り立つので、空でない完備な距離空間 $\overline{B}_\delta(0)$ 上の写像 $G|_{\overline{B}_\delta(0)}: \overline{B}_\delta(0) \rightarrow \overline{B}_\delta(0)$ は補題 D.1 の条件 **(contraction)** を充たし、 G はただ 1 つの固定点 $x_y \in \overline{B}_\delta(0)$ を持つ。 G の定義より $G(x_y) = x_y \implies F(x_y) = y$ である。

以上の議論から、 $U_0 := \overline{B}_\delta(0) \cap F^{-1}(\overline{B}_{\delta/2}(0))$, $V_0 := \overline{B}_{\delta/2}(0)$ とおくと $F|_{U_0}: U_0 \rightarrow V_0$ が全単射になることが分かった。従って逆写像^{*5} $F^{-1}: V_0 \rightarrow U_0$ が存在する。さらに $\forall x', y' \in V_0$ をとり不等式 (D.1.2) において $x = F^{-1}(x')$, $y = F^{-1}(y')$ とおくことで F^{-1} が連続写像であることがわかる。 i.e. $F|_{U_0}$ は同相写像である。よって V_0 が定義から連結なので U_0 も連結である。

F^{-1} が C^∞ 級

まず $F^{-1}: V_0 \rightarrow U_0$ が C^1 級であることを示す。 $\forall y \in V_0$ を 1 つ固定する。偏微分の連鎖律より $D(F^{-1})(y) = DF(F^{-1}(y))^{-1}$ であるから、

$$\lim_{y' \rightarrow y} \frac{F^{-1}(y') - F^{-1}(y) - DF(F^{-1}(y))^{-1}(y' - y)}{|y' - y|} = 0$$

を示せば良い。 $\forall y' \in V_0 \setminus \{y\}$ を取り、 $x := F^{-1}(y)$, $x' := F^{-1}(y') \in U_0 \setminus \{x\}$ とおく。すると

$$\begin{aligned} & \left| \frac{F^{-1}(y') - F^{-1}(y) - DF(F^{-1}(y))^{-1}(y' - y)}{|y' - y|} \right| \\ &= \frac{|x' - x - DF(x)^{-1}(y' - y)|}{|y' - y|} \\ &= \frac{1}{|y' - y|} |DF(x)^{-1}(DF(x)(x' - x) - (y' - y))| \\ &= \frac{|x' - x|}{|F(x') - F(x)|} \left| DF(x)^{-1} \left(\frac{F(x') - F(x) - DF(x)(x' - x)}{|x' - x|} \right) \right| \\ &\leq 2 \sup_{x \in U_0} \|DF(x)^{-1}\| \left| \frac{F(x') - F(x) - DF(x)(x' - x)}{|x' - x|} \right| \quad \because \text{不等式 (D.1.1)} \end{aligned}$$

と評価できるが、 F が C^∞ 級なので $\sup_{x \in U_0} \|DF(x)^{-1}\|$ は有限確定値である。 F の連続性から $y' \rightarrow y$ のとき $x' \rightarrow x$ であり、仮定より F は C^∞ 級なので、この極限で最右辺が 0 に収束することが分かった。

次に F^{-1} が $\forall k \in \mathbb{N}$ について C^k 級であることを数学的帰納法により示す。 $k = 1$ の場合は先ほど示した。 $k > 1$ とする。 $D(F^{-1}) = {}^{-1} \circ DF \circ F^{-1}$ であるから^{*6}、帰納法の仮定より $D(F^{-1})$ は C^k 級関数の合成で書けているので C^k 級である。よって F^{-1} は C^{k+1} 級であり、帰納法が完成した。

■

^{*5} 厳密には $(F|_{U_0})^{-1}$ と書くべきだが略記した。

^{*6} ${}^{-1}: \text{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$, $X \mapsto X^{-1}$ とおいた。Cramer の公式よりこれは C^∞ 級である。

系 D.2: 陰関数定理

$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ の座標を $(x, y) := (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^k)$ と書く.

- 開集合 $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$
- C^∞ 関数 $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}^k, (x, y) \mapsto (\Phi^1(x, y), \dots, \Phi^k(x, y))$

を与える. このとき, 点 $(a, b) \in U$ において

$$\left[\frac{\partial \Phi^\mu}{\partial y^\nu}(a, b) \right]_{1 \leq \mu, \nu \leq k} \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$$

が成り立つならば,

- 点 a の近傍 $a \in V_0 \subset \mathbb{R}^n$
- 点 b の近傍 $b \in W_0 \subset \mathbb{R}^k$
- C^∞ 関数 $F: V_0 \rightarrow W_0, x \mapsto (F^1(x), \dots, F^k(x))$

の 3 つ組であって

$$\Phi^{-1}(\{c\}) \cap (V_0 \times W_0) = \{ (x, F(x)) \in V_0 \times W_0 \}$$

を満たすものが存在する. ただし $c := \Phi(a, b) \in \mathbb{R}^k$ とおいた.

証明 C^∞ 写像

$$\Psi: U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, (x, y) \mapsto (x, \Phi(x, y))$$

を考える. 仮定より点 $(a, b) \in U$ において

$$D\Psi(a, b) = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_n & 0 \\ \left[\frac{\partial \Phi^\mu}{\partial x^\nu}(a, b) \right]_{1 \leq \mu \leq k, 1 \leq \nu \leq n} & \left[\frac{\partial \Phi^\mu}{\partial y^\nu}(a, b) \right]_{1 \leq \mu, \nu \leq k} \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(n+k, \mathbb{R})$$

であるから, [逆関数定理](#)より点 (a, b) の連結な近傍 $U_0 \subset U$ と点 (a, c) の連結な近傍 $Y_0 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ が存在して $\Psi|_{U_0}: U_0 \rightarrow Y_0$ が微分同相写像になる. U_0, Y_0 を適当に小さくすることで $U_0 = V \times W$ の形をしていると仮定して良い^{*7}.

$\forall (x, y) \in Y_0$ に対して $\Psi^{-1}(x, y) = (A(x, y), B(x, y))$ とおくと $A: Y_0 \rightarrow \mathbb{R}^n, B: Y_0 \rightarrow \mathbb{R}^k$ はどちらも C^∞ 関数で,

$$\begin{aligned} (x, y) &= \Phi \circ \Psi^{-1}(x, y) \\ &= \left(A(x, y), \Psi(A(x, y), B(x, y)) \right) \end{aligned}$$

が成り立つ. よって

$$\begin{aligned} \Psi^{-1}(x, y) &= (x, B(x, y)), \\ y &= \Psi(x, B(x, y)) \end{aligned}$$

^{*7} 開集合の直積は積位相の開基を成すので.

が従う.

ここで $V_0 := \{x \in V \mid (x, c) \in Y_0\}$, $W_0 := W$ とおき,

$$F: V_0 \longrightarrow W_0, x \longmapsto B(x, c)$$

と定義する. すると $\forall x \in V_0$ に対して

$$c = \Phi(x, B(x, c)) = \Psi(x, F(x))$$

である. i.e. $\Phi^{-1}(\{c\}) \cap (V_0 \times W_0) \supset \{(x, F(x)) \in V_0 \times W_0\}$ が言えた. 逆に $\forall (x, y) \in \Phi^{-1}(\{c\}) \cap (V_0 \times W_0)$ をとる. このとき $\Phi(x, y) = c$ なので $\Psi(x, y) = (x, \Phi(x, y)) = (x, c)$ であり,

$$(x, y) = \Psi^{-1}(x, c) = (x, B(x, c)) = (x, F(x))$$

が成り立つ. i.e. $\Phi^{-1}(\{c\}) \cap (V_0 \times W_0) \subset \{(x, F(x)) \in V_0 \times W_0\}$ が言えた. ■

D.1.1 局所微分同相写像

定義 D.1: 局所微分同相写像

境界なし/あり C^∞ 多様体 M, N を与える.

C^∞ 写像 $F: M \longrightarrow N$ が局所微分同相写像 (local diffeomorphism) であるとは, $\forall p \in M$ が以下の条件を満たす近傍 $p \in U_p \subset M$ を持つことを言う:

- (1) $F(U_p) \subset N$ が開集合
- (2) $F|_{U_p}: U_p \longrightarrow F(U_p)$ が微分同相写像

定理 D.3: 境界を持たない C^∞ 多様体における逆関数定理

- 境界を持たない C^∞ 多様体 M, N
- C^∞ 写像 $F: M \longrightarrow N$

を与える. このとき, ある点 $p \in M$ において $T_p F: T_p M \longrightarrow T_{F(p)} N$ が全単射ならば,

- 点 $p \in M$ の連結な近傍 $p \in U_0 \subset M$
- 点 $F(p) \in N$ の連結な近傍 $p \in V_0 \subset N$

が存在して $F|_{U_0}: U_0 \longrightarrow V_0$ が微分同相写像になる.

証明 $T_p F$ が全単射なので, $\dim M = \dim N =: n$ である. p を含むチャート (U, φ) と $F(p)$ を含むチャート (V, ψ) を, $F(U) \subset V$ を満たすようにとる. すると

- \mathbb{R}^n の開集合 $\varphi(U), \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$
- C^∞ 関数 $\hat{F} := \psi \circ F \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \longrightarrow \psi(V)$

の2つ組は, 仮定より点 $\varphi(p) \in \varphi(U)$ において $T_{\varphi(p)} \hat{F} = T_{F(p)} \psi \circ T_p F \circ T_{\varphi(p)}(\varphi^{-1}) \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ を満たすので, \mathbb{R}^n の逆関数定理が使えて

- 点 $\varphi(p) \in \varphi(U)$ の連結な近傍 $\varphi(p) \in \widehat{U}_0 \subset \varphi(U)$
- 点 $\widehat{F}(\varphi(p)) = \psi(F(p)) \in \varphi(U)$ の連結な近傍 $\widehat{F}(\varphi(p)) \in \widehat{V}_0 \subset \varphi(V)$

であって $\widehat{F}|_{\widehat{U}_0}: \widehat{U}_0 \rightarrow \widehat{V}_0$ が微分同相写像となるようなものがある。従って $U_0 := \varphi^{-1}(\widehat{U}_0) \subset M$, $V_0 := \psi^{-1}(\widehat{V}_0) \subset N$ とおけばこれらはそれぞれ点 $p, F(p)$ の連結な近傍で、かつ $F|_{U_0} = \psi^{-1}|_{V_0} \circ \widehat{F}|_{\widehat{U}_0} \circ \varphi|_{U_0}: U_0 \rightarrow V_0$ は微分同相写像の合成なので微分同相写像である。 ■

定理 D.3 を、値域の C^∞ 多様体が境界を持つ場合に拡張できる*8。鍵となるのは次の補題である：

補題 D.2:

- 境界を持たない C^∞ 多様体 M
- 境界付き C^∞ 多様体 N
- C^∞ 写像 $F: M \rightarrow N$

を与える。このとき、点 $p \in M$ において $T_p F: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ が単射ならば $F(p) \in \text{Int } N$ である。

証明 $F(p) \in \partial N$ だと仮定し、点 $p \in M$ を含むチャート $(U, \varphi) = (U, (x^\mu))$ および点 $F(p) \in \partial N$ の境界チャート $(V, \psi) = (V, (y^\mu))$ をとる。このとき F の座標表示 $\widehat{F} := \psi \circ F \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$, $x \mapsto (\widehat{F}^1(x), \dots, \widehat{F}^{\dim N}(x))$ は $\widehat{F}^{\dim N}(\varphi(p)) = 0$ を充たす。ところで $\psi(V) \subset \mathbb{H}^n$ なので $\forall x \in \varphi(U)$ に対して $\widehat{F}^{\dim N}(x) \geq 0$ であり、 C^∞ 関数 $\widehat{F}^{\dim N}: \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ は点 $\varphi(p) \in \varphi(U)$ において最小値をとることが分かった。従って $\partial \widehat{F}^{\dim N} / \partial x^\nu (\varphi(p)) = 0$ ($1 \leq \nu \leq \dim N$) であり、点 $\varphi(p) \in \varphi(U)$ における \widehat{F} の Jacobi 行列の第 $\dim N$ 行が全て 0 だということになるが、これは $T_p F$ が単射であることに矛盾。よって背理法から $F(p) \notin \partial N \iff F(p) \in \text{Int } N$ が示された。 ■

定理 D.4: C^∞ 多様体における逆関数定理

- 境界を持たない C^∞ 多様体 M
- 境界あり/なし C^∞ 多様体 N
- C^∞ 写像 $F: M \rightarrow N$

を与える。このとき、ある点 $p \in M$ において $T_p F: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ が全単射ならば、

- 点 $p \in M$ の連結な近傍 $p \in U_0 \subset M$
- 点 $F(p) \in N$ の連結な近傍 $p \in V_0 \subset N$

が存在して $F|_{U_0}: U_0 \rightarrow V_0$ が微分同相写像になる。

証明 N が境界を持たない場合は定理 D.3 が使える。

N が境界付き C^∞ 多様体だとする。仮定より $T_p F$ は単射なので補題 D.2 から $F(p) \in \text{Int } N$ が分かる。 $\text{Int } N$ は境界を持たない C^∞ 多様体なので定理 D.3 の証明がそのまま成り立つ。 ■

*8 定義域の C^∞ 多様体が境界を持つ場合は上手くいかない。

D.1.2 ランク定理

定義 D.2: C^∞ 写像のランク

境界あり/なし C^∞ 多様体 M, N および C^∞ 写像 $F: M \rightarrow N$ を与える.

- 点 $p \in M$ における F の**ランク** (rank) とは, 線型写像 $T_p F: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ のランク, i.e. $\dim(\text{Im}(T_p F)) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ のこと. $\forall p \in M$ における F のランクが等しいとき, F は**定ランク** (constant rank) であると言い, $\text{rank } F := \dim(\text{Im}(T_p F))$ と書く.
- 点 $p \in M$ における F のランクが $\min\{\dim M, \dim N\}$ に等しいとき, F は**点 p においてフルランク** (full rank at p) であると言う. $\text{rank } F = \min\{\dim M, \dim N\}$ ならば F は**フルランク** (full rank) であると言う.

位相空間 M, N を与える. 連続写像 $F: M \rightarrow N$ が**位相的埋め込み** (topological embedding) であると
は, $F(M) \subset N$ に N からの相対位相を入れたときに写像 $F: M \rightarrow F(M)$ が同相写像になることを言う.

定義 D.3: C^∞ 沈めこみ・ C^∞ はめ込み・ C^∞ 埋め込み

境界あり/なし C^∞ 多様体 M, N および**定ランク**の C^∞ 写像 $F: M \rightarrow N$ を与える.

- F が C^∞ **沈め込み** (smooth submersion) であるとは, $\forall p \in M$ において $T_p F: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ が全射である, i.e. $\text{rank } F = \dim N$ であることを言う.
- F が C^∞ **はめ込み** (smooth immersion) であるとは, $\forall p \in M$ において $T_p F: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ が単射である, i.e. $\text{rank } F = \dim M$ であること^aを言う.
- F が C^∞ **埋め込み** (smooth embedding) であるとは, F が C^∞ はめ込みであってかつ位相的埋め込みであることを言う.

^a 階数・退化次元の定理から $\dim(\text{Ker } T_p F) + \dim(\text{Im } T_p F) = \dim M$ なので, $\text{rank } F = \dim(\text{Im } T_p F) = \dim M \implies \dim(\text{Ker } T_p F) = 0 \iff \text{Ker } T_p F = 0$

命題 D.1: 局所微分同相写像と C^∞ 沈めこみ・ C^∞ はめ込み

- 境界を持たない C^∞ 多様体 M
- 境界あり/なし C^∞ 多様体 N
- 写像 $F: M \rightarrow N$

を与える. このとき以下が成り立つ:

- (1) F が**局所微分同相写像** $\iff F$ は C^∞ **沈め込み**かつ C^∞ **はめ込み**
- (2) $\dim M = \dim N$ かつ F が C^∞ **沈め込み**または C^∞ **はめ込み** $\implies F$ は**局所微分同相**

証明 (1) \implies

F が局所微分同相だとする. $\forall p \in M$ を 1 つ固定する. 仮定よりこのとき p の近傍 $p \in U \subset M$ であって $F|_U: U \rightarrow F(U)$ が微分同相写像となるようなものがある.

特に局所微分同相写像の定義から $U, F(U)$ はそれぞれ M, N の開集合なので, 包含写像 $\iota_U: U \hookrightarrow M, \iota_{F(U)}: F(U) \hookrightarrow N$ の微分 $T_p(\iota_U): T_p U \rightarrow T_p M, T_{F(p)}(\iota_{F(U)}): T_{F(p)}(F(U)) \rightarrow T_{F(p)}N$ はベクトル空間の同型写像である. さらに $F|_U$ が微分同相写像なので $T_p(F|_U): T_p U \rightarrow T_{F(p)}(F(U)) \cong T_{F(p)}N$ はベクトル空間の同型写像だが, $T_p(F|_U) = T_p(F \circ \iota_U) = T_p F \circ T_p(\iota_U)$ なので, $T_p F: T_p M \rightarrow T_p N$ 自身もベクトル空間の同型写像である. 故に $\text{rank } F = \dim M = \dim N$ が言える.

⇐

F が C^∞ 沈め込みかつ C^∞ はめ込みであるとする. すると $\forall p \in M$ に対して $T_p F \rightarrow T_p M \rightarrow T_{F(p)}N$ は全単射なので, C^∞ 多様体における逆関数定理が使える.

- (2) $\forall p \in M$ をとる. $\dim M = \dim N$ かつ $T_p F: T_p M \rightarrow T_{F(p)}N$ が単射ならば, 階数-退化次元の定理より $\dim(\text{Im } T_p F) = \dim M - \dim(\text{Ker } T_p F) = \dim M = \dim N$ なので $T_p F$ が全単射だとわかる. $\dim M = \dim N$ かつ $T_p F: T_p M \rightarrow T_{F(p)}N$ が全射ならば, 階数-退化次元の定理より $\dim(\text{Ker } T_p F) = \dim M - \dim(\text{Im } T_p F) = \dim M - \dim N = 0$ なので $T_p F$ が全単射だとわかる. よってどちらの場合も C^∞ 多様体における逆関数定理が使える.

■

定理 D.5: 局所的ランク定理 (境界を持たない場合)

- 境界を持たない C^∞ 多様体 M, N
- 定ランクの C^∞ 写像 $F: M \rightarrow N$

を与える. このとき $\forall p \in M$ に対して

- 点 $p \in M$ を含む M の C^∞ チャート (U_0, Φ) であって $\Phi(p) = 0 \in \mathbb{R}^{\dim M}$ を満たすもの
- 点 $F(p) \in N$ を含む N の C^∞ チャート (V_0, Ψ) であって $\Psi(F(p)) = 0 \in \mathbb{R}^{\dim N}$ かつ $F(U) \subset V$ を満たすもの

が存在して, $\forall (x^1, \dots, x^{\dim M}) \in \Phi(U) \subset \mathbb{R}^{\dim M}$ に対して

$$\begin{aligned} \Psi \circ F \circ \Phi^{-1}(x^1, \dots, x^{\text{rank } F}, x^{\text{rank } F+1}, \dots, x^{\dim M}) \\ = (x^1, \dots, x^{\text{rank } F}, \underbrace{0, \dots, 0}_{\dim N - \text{rank } F}) \in \Psi(V) \subset \mathbb{R}^{\dim N} \end{aligned} \quad (\text{D.1.3})$$

を満たす.

特に F が C^∞ 沈め込みならば (D.1.3) は

$$\Psi \circ F \circ \Phi^{-1}(x^1, \dots, x^{\dim N}, x^{\dim N+1}, \dots, x^{\dim M}) = (x^1, \dots, x^{\dim N})$$

の形になり, F が C^∞ はめ込みならば (D.1.3) は

$$\Psi \circ F \circ \Phi^{-1}(x^1, \dots, x^{\dim M}) = (x^1, \dots, x^{\dim M}, 0, \dots, 0)$$

の形になる.

証明 $\forall p \in M$ を 1 つ固定する. 以降では p を含む M の任意の C^∞ チャート $(U, \varphi) = (U, (x^\mu))$ および

$F(p)$ を含む N の任意の C^∞ チャート $(V, \psi) = (V, (x'^\mu))$ に対して

$$\begin{aligned}\widehat{U} &:= \varphi(U) \subset \mathbb{R}^{\dim M}, \\ \widehat{V} &:= \psi(V) \subset \mathbb{R}^{\dim N}, \\ \widehat{F} &:= \psi \circ F \circ \varphi^{-1}: \widehat{U} \longrightarrow \widehat{V}, \\ \widehat{p} &:= \varphi(p) \in \widehat{U}\end{aligned}$$

とおく. 便宜上 C^∞ チャート $(U, (x^\mu)), (V, (x'^\mu))$ の座標関数をそれぞれ

$$\begin{aligned}(x, y) &= (x^1, \dots, x^{\text{rank } F}, y^1, \dots, y^{\dim M - \text{rank } F}) := (x^1, \dots, x^{\dim M}) \\ (v, w) &= (v^1, \dots, v^{\text{rank } F}, w^1, \dots, w^{\dim N - \text{rank } F}) := (x'^1, \dots, x'^{\dim N})\end{aligned}$$

とおき直す. また, 2つの C^∞ 写像を

$$\begin{aligned}Q: \widehat{U} &\longrightarrow \mathbb{R}^{\text{rank } F}, (x, y) \longmapsto (\widehat{F}^1(x, y), \dots, \widehat{F}^{\text{rank } F}(x, y)) \\ R: \widehat{U} &\longrightarrow \mathbb{R}^{\dim N - \text{rank } F}, (x, y) \longmapsto (\widehat{F}^{\text{rank } F+1}(x, y), \dots, \widehat{F}^{\dim N}(x, y))\end{aligned}$$

と定義する. このとき $\widehat{F} = (Q, R)$ と書ける.

仮定より F は **定ランク**なので, 点 $\widehat{p} \in \widehat{U}$ において線型写像 $T_{\widehat{p}}\widehat{F}: T_{\widehat{p}}\widehat{U} \longrightarrow T_{\widehat{F}(\widehat{p})}\widehat{V}$ の表現行列のランクは $\text{rank } F$ である. 必要ならば M, N の C^∞ チャートを取り替えることで座標関数の順番を好きなように入れ替えることができる^{*9}ので, $T_{\widehat{p}}\widehat{F}$ の表現行列^{*10}の $\text{rank } F$ 次首座小行列に対して

$$\left[\frac{\partial \widehat{F}^\mu}{\partial x^\nu}(\widehat{p}) \right]_{1 \leq \mu, \nu \leq \text{rank } F} = \left[\frac{\partial Q^\mu}{\partial x^\nu}(0, 0) \right]_{1 \leq \mu, \nu \leq \text{rank } F} \in \text{GL}(\text{rank } F, \mathbb{R}) \quad (\text{D.1.4})$$

が成り立つような C^∞ チャート $(U, (x, y)), (V, (v, w))$ が存在する. さらに, \widehat{U}, \widehat{V} の原点を平行移動することですべて $\widehat{p} = (0, 0) \in \mathbb{R}^{\dim M}, \widehat{F}(\widehat{p}) = (0, 0) \in \mathbb{R}^{\dim N}$ が成り立つようにできる^{*11}.

ここまでの議論の要請を満たす M, N の任意の C^∞ チャート $(U, \varphi), (V, \psi)$ をとり, C^∞ 写像

$$\widehat{\Phi}: \widehat{U} \longrightarrow \mathbb{R}^{\dim M}, (x, y) \longmapsto (Q(x, y), y)$$

を考える. 点 $(0, 0) \in \widehat{U}$ における Ψ の Jacobi 行列は

$$D\Psi(0, 0) = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial Q^\mu}{\partial x^\nu}(0, 0) \right]_{1 \leq \mu, \nu \leq \text{rank } F} & \left[\frac{\partial Q^\mu}{\partial y^\nu}(0, 0) \right]_{1 \leq \mu \leq \text{rank } F, 1 \leq \nu \leq \dim M - \text{rank } F} \\ 0 & \mathbf{1}_{\dim M - \text{rank } F} \end{bmatrix}$$

となるが, 仮定 (D.1.4) よりこれは正則行列である. よって $\mathbb{R}^{\dim M}$ における逆関数定理から

- 点 $(0, 0) \in \widehat{U}$ の連結な近傍 $\widehat{U}_0 \subset \widehat{U}$
- 点 $(0, 0) \in \mathbb{R}^{\dim M}$ の連結な近傍 $\widehat{U}_0 \subset \mathbb{R}^{\dim M}$

^{*9} 座標を入れ替える写像は微分同相写像なので, M, N の C^∞ 構造の中には座標の入れ替えによって互いに移り合えるような C^∞ チャートたちが含まれている.

^{*10} これは C^∞ 関数 \widehat{F} の **Jacobi 行列** $D\widehat{F}(\widehat{p})$ である.

^{*11} 平行移動は微分同相写像なので, M, N の C^∞ 構造には平行移動によって互いに移り合えるような C^∞ チャートたちが含まれている.

が存在して $\widehat{\Phi}|_{\widehat{U}_0}: \widehat{U}_0 \rightarrow \tilde{U}_0$ が微分同相写像になる. $\widehat{U}_0, \tilde{U}_0$ を適当に小さくとり直すことで \tilde{U}_0 が開区間の直積であると仮定して良い. $\widehat{\Phi}|_{\widehat{U}_0}$ の逆写像を $\widehat{\Phi}^{-1}: \tilde{U}_0 \rightarrow \widehat{U}_0, (x, y) \mapsto (A(x, y), B(x, y))$ と書くと $A: \tilde{U}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{\text{rank } F}, B: \tilde{U}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{\dim M - \text{rank } F}$ はどちらも C^∞ 写像で, $\forall (x, y) \in \tilde{U}_0$ に対して

$$(x, y) = \widehat{\Phi} \circ \widehat{\Phi}^{-1}(x, y) = (Q(A(x, y), B(x, y)), B(x, y))$$

が成り立つ. よって

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}^{-1}(x, y) &= (A(x, y), y), \\ x &= Q(A(x, y), y) \end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned} \widehat{F} \circ \widehat{\Phi}^{-1}(x, y) &= \widehat{F}(A(x, y), y) \\ &= (Q(A(x, y), y), R(A(x, y), y)) \\ &= (x, R(A(x, y), y)) \end{aligned}$$

が分かった. 従って C^∞ 写像 $\tilde{R}: \tilde{U}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{\dim N - \text{rank } F}, (x, y) \mapsto R(A(x, y), y)$ と定義すると, $\forall (x, y) \in \tilde{U}_0$ における $\widehat{F} \circ \widehat{\Phi}^{-1}$ の Jacobi 行列は

$$\begin{aligned} D(\widehat{F} \circ \Psi^{-1})(x, y) &= \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{\text{rank } F} & 0 \\ \left[\frac{\partial \tilde{R}^\mu}{\partial x^\nu}(x, y) \right]_{1 \leq \mu \leq \dim N - \text{rank } F, 1 \leq \nu \leq \text{rank } F} & \left[\frac{\partial \tilde{R}^\mu}{\partial y^\nu}(x, y) \right]_{1 \leq \mu \leq \dim N - \text{rank } F, 1 \leq \nu \leq \dim M - \text{rank } F} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と計算できる. ところが, 仮定より行列 $D(\widehat{F})(x, y)$ のランクは $\text{rank } F$ で, かつ $\widehat{\Phi}^{-1}$ は微分同相写像なので $D(\widehat{\Phi}^{-1})(x, y) \in \text{GL}(\dim M, \mathbb{R})$ であり, 行列 $D(\widehat{F} \circ \widehat{\Phi}^{-1})(x, y) = D(\widehat{F})(x, y) \circ D(\widehat{\Phi}^{-1})(x, y)$ のランクは $\text{rank } F$ に等しい. よって $\forall (x, y) \in \tilde{U}_0$ において

$$\left[\frac{\partial \tilde{R}^\mu}{\partial y^\nu}(x, y) \right]_{1 \leq \mu \leq \dim N - \text{rank } F, 1 \leq \nu \leq \dim M - \text{rank } F} = 0$$

でなくてはならない. \tilde{U}_0 は開区間の直積なので, このことから \tilde{R} が $(y^1, \dots, y^{\dim M - \text{rank } F})$ によらないことが分かった. よって $S(x) := \tilde{R}(x, 0)$ とおくと

$$\widehat{F} \circ \widehat{\Phi}^{-1}(x, y) = (x, S(x)) \quad (\text{D.1.5})$$

と書けることが分かった.

最後に, 点 $\widehat{F}(\hat{p}) = (0, 0) \in \widehat{V}$ の適当な近傍を構成する. 開集合^{*12} $\widehat{V}_0 \subset \widehat{V}$ を

$$\widehat{V}_0 := \{ (v, w) \in \widehat{V} \mid (v, 0) \in \tilde{U}_0 \}$$

と定義すると, $\widehat{F}(\hat{p}) = (0, 0) \in \widehat{V}_0$ なので \widehat{V}_0 は点 $\widehat{F}(\hat{p})$ の近傍であり, \tilde{U}_0 は開区間の直積なので (D.1.5) から $\widehat{F} \circ \widehat{\Phi}^{-1}(\tilde{U}_0) \subset \widehat{V}_0$ が成り立つ. そして C^∞ 写像

$$\widehat{\Psi}: \widehat{V}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{\dim N}, (v, w) \mapsto (v, w - S(v))$$

^{*12} 写像 $f: \widehat{V} \rightarrow \mathbb{R}^{\dim M}, (v, w) \mapsto (v, 0)$ は連続で, $\tilde{U}_0 \subset \mathbb{R}^{\dim M}$ は開集合なので, $V_0 = \widehat{V} \cap f^{-1}(\tilde{U}_0) \subset \widehat{V}$ もまた開集合.

を考える. $\widehat{\Psi}: \widehat{V}_0 \longrightarrow \widehat{\Psi}(\widehat{V}_0)$ は C^∞ 写像

$$\widehat{\Psi}^{-1}: \widehat{\Psi}(\widehat{V}_0) \longrightarrow \widehat{V}_0, (s, t) \longmapsto (s, t + S(s))$$

を逆写像に持つので微分同相写像であり, $(V_0, \widehat{\Psi})$ は N の C^∞ チャートである. その上 (D.1.5) から $\forall (x, y) \in \tilde{U}_0$ に対して

$$\widehat{\Psi} \circ \widehat{F} \circ \widehat{\Phi}^{-1}(x, y) = \widehat{\Psi}(x, S(x)) = (x, 0) \quad (\text{D.1.6})$$

となる.

以上をまとめると,

$$\begin{aligned} U_0 &:= \varphi^{-1}(\widehat{U}_0) \subset M, \\ V_0 &:= \psi^{-1}(\widehat{V}_0) \subset N, \\ \Phi &:= \widehat{\Phi} \circ \varphi: U_0 \longrightarrow \Phi(U_0), \\ \Psi &:= \widehat{\Psi} \circ \psi: V_0 \longrightarrow \Psi(V_0) \end{aligned}$$

とおくと Φ, Ψ は微分同相写像であり,

- 点 $p \in M$ を含む M の C^∞ チャート (U_0, Φ)
- 点 $F(p) \in N$ を含む N の C^∞ チャート (V_0, Ψ)

の2つ組は (D.1.6) から $\forall (x, y) \in \Phi(U_0) = \tilde{U}_0$ に対して

$$\Psi \circ F \circ \Phi(x, y) = \widehat{\Psi} \circ \widehat{F} \circ \widehat{\Phi}^{-1}(x, y) = (x, 0)$$

を充たすので証明が完了する. ■

系 D.6:

境界を持たない C^∞ 多様体 M, N と C^∞ 写像 $F: M \longrightarrow N$ を与える. このとき M が連結ならば以下の2つは同値である:

- (1) F は定ランク
- (2) $\forall p \in M$ において, $p, F(p)$ を含む M, N の C^∞ チャート $(U, \varphi), (V, \psi)$ であって F の座標表示 $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \longrightarrow \psi(V)$ が線型写像となるようなものが存在する.

証明 (1) \implies (2)

定理 D.5 の (D.1.3) は F の座標表示が線型写像であることを意味する.

(1) \impliedby (2)

任意の線型写像のランクは一意に定まるので, $\forall p \in M$ の近傍において F のランクは一定だが, 仮定より M は連結なので F は定ランクである. ■

定理 D.7: 大域的ランク定理 (境界を持たない場合)

- 境界を持たない C^∞ 多様体 M, N
- 定ランクの C^∞ 写像 $F: M \rightarrow N$

を与える. このとき以下が成り立つ:

- (1) F が全射 $\implies F$ は C^∞ 沈め込み
- (2) F が単射 $\implies F$ は C^∞ はめ込み
- (3) F が全単射 $\implies F$ は微分同相写像

証明 (1) F が全射だとする. もし $\text{rank } F < \dim N$ ならば, **局所的ランク定理**により $\forall p \in M$ に対して

- 点 $p \in M$ を含む M の C^∞ チャート (U_p, Φ) であって $\Phi(p) = 0 \in \mathbb{R}^{\dim M}$ を充たすもの
- 点 $F(p) \in N$ を含む N の C^∞ チャート (V_p, Ψ) であって $\Psi(F(p)) = 0 \in \mathbb{R}^{\dim N}$ かつ $F(U_p) \subset V_p$ を充たすもの

が存在して, F の座標表示 $\Psi \circ F \circ \Phi^{-1}: \Phi(U_p) \rightarrow \Psi(V_p)$ が (D.1.3) の形になる. 必要なら U_p を適当に小さくとることで $\exists r > 0, \Phi(U_p) = B_r(0) \subset \mathbb{R}^{\dim M}$ で, かつ $F(\overline{U_p}) \subset V_p$ が成り立つと仮定して良い. このとき $F(\overline{U_p})$ は Hausdorff 空間 $\{y \in V_p \mid \Psi(y) = (y^1, \dots, y^{\text{rank } F}, 0, \dots, 0)\}$ のコンパクト部分集合なので, N の閉集合でかつ N の開集合を部分集合として持たない. i.e. N 上疎 (nowhere dense) である. 多様体の第 2 可算性より任意の多様体の開被覆は高々可算な部分被覆を持つから, M の開被覆 $\{U_p\}_{p \in M}$ および $F(M)$ の開被覆 $\{V_p\}_{p \in M}$ はそれぞれ高々可算な部分被覆 $\{U_i\}_{i \in I}, \{V_i\}_{i \in I}$ を持つ. i.e. $F(M)$ は高々可算個の疎集合 $F(\overline{U_i})$ たちの和集合なので, Baire のカテゴリー定理から $F(M)$ の N における内部は空集合ということになるが, これは F が全射であることに矛盾する. よって背理法から $\text{rank } F = \dim N$ が言えた.

(2) F が単射だとする. もし $\text{rank } F < \dim M$ ならば, **局所的ランク定理**により $\forall p \in M$ に対して

- 点 $p \in M$ を含む M の C^∞ チャート (U_p, Φ) であって $\Phi(p) = 0 \in \mathbb{R}^{\dim M}$ を充たすもの
- 点 $F(p) \in N$ を含む N の C^∞ チャート (V_p, Ψ) であって $\Psi(F(p)) = 0 \in \mathbb{R}^{\dim N}$ かつ $F(U_p) \subset V_p$ を充たすもの

が存在して, F の座標表示 $\Psi \circ F \circ \Phi^{-1}: \Phi(U_p) \rightarrow \Psi(V_p)$ が (D.1.3) を充たす. このことから, 十分小さな任意の $\varepsilon \in \mathbb{R}^{\dim M - \text{rank } F}$ に対して $\Psi \circ F \circ \Phi^{-1}(0, \dots, 0, \varepsilon) = \Psi \circ F \circ \Phi^{-1}(0, \dots, 0)$ が成り立つことになり F の単射性に矛盾.

(3) (1), (2) より F が全単射なら F は C^∞ 沈め込みかつ C^∞ はめ込みであるから, 命題 D.1 より F は全単射な**局所微分同相写像**である. よって F は微分同相写像である. ■

定理 D.8: はめ込みに関する局所的ランク定理 (境界付き)

- 境界付き C^∞ 多様体 M
- 境界を持たない C^∞ 多様体 N
- C^∞ はめ込みの C^∞ 写像 $F: M \rightarrow N$

を与える. このとき $\forall p \in \partial M$ に対して

- 点 $p \in M$ を含む M の C^∞ 境界チャート (U_0, Φ) であって $\Phi(p) = 0 \in \mathbb{H}^{\dim M}$ を満たすもの
- 点 $F(p) \in N$ を含む N の C^∞ チャート (V_0, Ψ) であって $\Psi(F(p)) = 0 \in \mathbb{R}^{\dim N}$ かつ $F(U) \subset V$ を満たすもの

が存在して, $\forall (x^1, \dots, x^{\dim M}) \in \Phi(U) \subset \mathbb{H}^{\dim M}$ に対して

$$\Psi \circ F \circ \Phi^{-1}(x^1, \dots, x^{\dim M}) = (x^1, \dots, x^{\dim M}, \underbrace{0, \dots, 0}_{\dim N - \text{rank } M}) \in \Psi(V) \subset \mathbb{R}^{\dim N}$$

を満たす.

証明

D.1.3 C^∞ 埋め込み

命題 D.2:

境界あり/なし C^∞ 多様体 M, N および単射な C^∞ はめ込み $F: M \rightarrow N$ を与える. このとき, 以下のいずれかの条件が満たされれば F は C^∞ 埋め込みである:

- (1) F は開写像または閉写像
- (2) F は固有写像 (**proper map**^a)
- (3) M はコンパクト
- (4) $\partial M = \emptyset$ かつ $\dim M = \dim N$

^a Y の任意のコンパクト部分集合の逆像が X のコンパクト部分集合

証明 (1) F が開写像だとする. $F: M \rightarrow F(M)$ は全単射なので, 逆写像 $F^{-1}: F(M) \rightarrow M$ が存在する. このとき, X の任意の開集合 $U \subset X$ に対して $(F^{-1})^{-1}(U) = F(U) \subset Y$ は仮定より Y の開集合であるから, 相対位相の定義より $F(M)$ においても開集合である. i.e. F^{-1} は連続写像であり, $F: M \rightarrow F(M)$ が同相写像だと分かった. i.e. F は位相的埋め込みである. F が閉写像の場合も同様.

(2)

■ D.2 部分多様体

■ D.3 Sard の定理

付録 E

代数の小技巧集

E.0.1 ベクトル空間の小技巧

次数が n 以下の 1 変数 \mathbb{K} -係数多項式環を $\mathbb{K}[t]^{\leq n}$ と書く.

定義 E.1: 終結式

\mathbb{K} を体とし, \mathbb{K} -係数多項式 $f, g \in \mathbb{K}[t]$ を与える.

- f, g の **Sylvester 行列** (Sylvester matrix) とは, \mathbb{K} -線形写像

$$\varphi(f, g): \mathbb{K}[t]^{\leq \deg g} \times \mathbb{K}[t]^{\leq \deg f} \longrightarrow \mathbb{K}[t]^{\deg f + \deg g}, (P, Q) \longmapsto fP + gQ$$

の, 基底 $1, t, \dots, t^{\deg f + \deg g}$ に関する表現行列のこと.

- f, g の **終結式** (resultant) とは, Sylvester 行列 $\varphi(f, g)$ の行列式

$$\mathbf{res}(f, g) := \det \varphi(f, g)$$

のこと.

命題 E.1: 終結式の基本性質

\mathbb{K} を体とし, \mathbb{K} -係数多項式 $f = \sum_{k=0}^{\deg f} f_k t^k, g = \sum_{k=0}^{\deg g} g_k t^k \in \mathbb{K}[t]$ を与える. このとき以下が成り立つ:

(1)

$$\text{res}(f, g) = \begin{vmatrix} f_0 & & & g_0 & & \\ f_1 & \ddots & & g_1 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & f_0 & \vdots & \ddots & \ddots \\ \vdots & & f_1 & g_{\deg g} & & g_0 \\ f_{\deg f} & & \vdots & & \ddots & g_1 \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & f_{\deg f} & & & g_{\deg g} \end{vmatrix}$$

(2) \mathbb{K} が代数閉体ならば, f, g の根を重複込みでそれぞれ λ_i, μ_j と書くと

$$\text{res}(f, g) = (f_{\deg f})^{\deg g} (g_{\deg g})^{\deg f} \prod_{\substack{1 \leq i \leq \deg f \\ 1 \leq j \leq \deg g}} (\lambda_i - \mu_j)$$

が成り立つ.

証明 (1) $P = \sum_{k=0}^{\deg g} P_k t^k$, $Q = \sum_{k=0}^{\deg f} Q_k t^k$ とすると, f, g の **Sylvester 行列**は

$$\varphi(f, g)(P, Q) = \sum_{k=0}^{\deg f} \sum_{l=0}^{\deg g} f_k P_l t^{k+l} + \sum_{l=0}^{\deg f} \sum_{k=0}^{\deg g} g_k Q_l t^{k+l}$$

であるから, $P_l = \delta_l^i$, $Q_l = \delta_l^j$ w/ $1 \leq i \leq \deg g$, $1 \leq j \leq \deg f$ のときを考えると

$$\begin{aligned} \varphi(f, g)(t^i, 0) &= \sum_{k=0}^{\deg f} f_k t^{k+i} \\ \varphi(f, g)(0, t^j) &= \sum_{k=0}^{\deg g} g_k t^{k+j} \end{aligned}$$

となり, $(t^i, 0) = t^i$, $(0, t^j) = t^{\deg g + j}$ と見做して $\mathbb{K}[t]^{\leq \deg g} \times \mathbb{K}[t]^{\leq \deg f}$ の基底を $\mathbb{K}[t]^{\deg f + \deg g}$ の基底と同一視することで $[\text{res}(f, g)]^{k+i}_i = f_k$, $[\text{res}(f, g)]^{k+j}_{\deg g + j} = g_k$ が分かった.

(2) 解と係数の関係より,

$$A := \frac{1}{(f_{\deg f})^{\deg g} (g_{\deg g})^{\deg f}} \varphi(f, g)$$

の非ゼロな行列成分は 1 または λ_i の基本対称式または μ_j の基本対称式である. i.e. A は λ_i, μ_j の多項式である.

$1 \leq \forall i \leq \deg f$, $1 \leq \forall j \leq \deg g$ を固定する. $\lambda_i = \mu_j =: \lambda$ ならば,

$$\mathbf{x} := \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{\deg f + \deg g} \end{bmatrix}$$

とおくと $A^T \mathbf{x} = 0$ かつ $\mathbf{x} \neq 0$, i.e. $\text{Ker } \varphi(f, g) \neq \{0\}$ であることが分かった. 従って λ_i, μ_j の多項式として $\lambda_i = \mu_j$ ならば $\text{res}(f, g) = \det \varphi(f, g) = 0$ となるから, 因数定理より

$$\text{res}(f, g) = (f_{\deg f})^{\deg g} (g_{\deg g})^{\deg f} \prod_{\substack{1 \leq i \leq \deg f \\ 1 \leq j \leq \deg g}} (\lambda_i - \mu_j)$$

が示された. ■

E.0.2 環の小技

付録 F

モノイダル圏・フュージョン圏・高次群

この章では標数 0 の体 \mathbb{K} のみを考える.

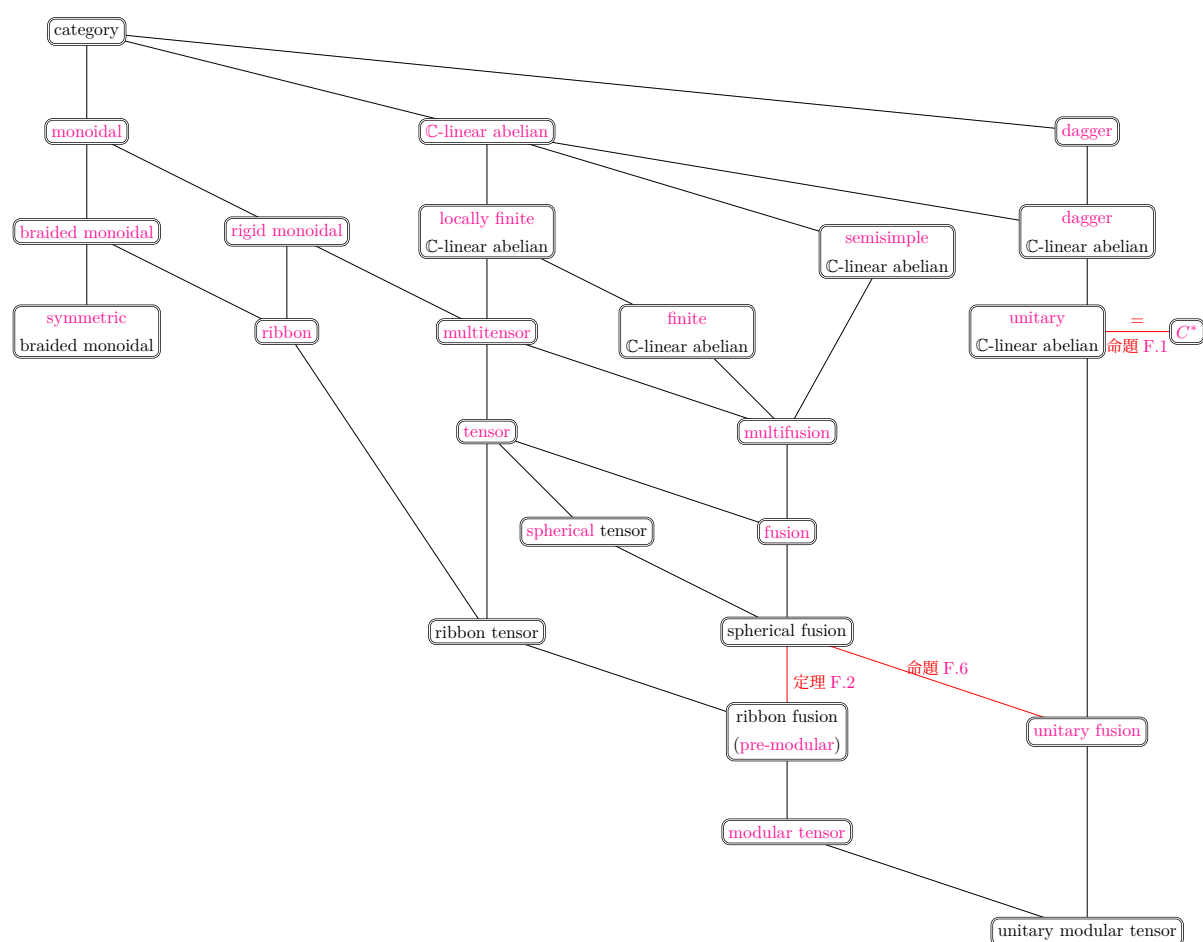


図 F.1: フュージョン圏の構造ガイドマップ. 定義でない部分は赤色で示した.

F.1 アーベル圏

定義 F.1: 加法圏・アーベル圏

圏 \mathcal{C} が体 \mathbb{K} 上の**加法圏** (additive category) であるとは、以下を充たすこと：

(add-1)

任意の Hom 集合 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が可換群の構造をもち、かつ射の合成

$$\circ: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

が群演算に関して双加法的である。

(add-2)

零対象^a (zero object) $\mathbf{0} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が存在し、 $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{0}, X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathbf{0}) = 0$ を充たす^b。

(add-3)

有限の**余積**が常に存在する。

加法圏 \mathcal{C} は、 $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に関して $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が \mathbb{K} -ベクトル空間の構造を持ち、かつ合成 \circ が \mathbb{K} -双線形写像でもあるとき、 **\mathbb{K} -線形** (\mathbb{K} -linear) であると言われる。

^a 始対象かつ終対象

^b 最右辺は (add-1) の意味で零ベクトル空間。

加法圏 \mathcal{C} は、以下の条件を充たすとき**アーベル圏** (abelian category) と呼ばれる：

(Ab-1)

任意の射 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が核 $\ker f: \text{Ker } f \longrightarrow X$ および余核 $\text{coker } f: Y \longrightarrow \text{Coker } f$ を持つ。

(Ab-2)

$\text{Ker } f = \mathbf{0}$ ならば $f = \ker(\text{coker } f)$ 、かつ $\text{Coker } f = \mathbf{0}$ ならば $f = \text{coker}(\ker f)$

定義 F.2: 加法的関手・完全関手

加法圏 \mathcal{C}, \mathcal{D} の間の関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が**加法的** (additive) であるとは, $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して定まる写像

$$F_{X,Y}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)), f \mapsto F(f)$$

が可換群の準同型であることを言う. 特に加法圏 \mathcal{C}, \mathcal{D} が **\mathbb{K} -線形**で, かつ $\forall X, Y \in \mathcal{C}$ に対して $F_{X,Y}$ が \mathbb{K} -線型写像でもあるとき, F は **\mathbb{K} -線形** (\mathbb{K} -linear) であると言う.

アーベル圏 \mathcal{C}, \mathcal{D} の間の加法的関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を与える.

- F が**左完全** (left exact) であるとは, \mathcal{C} の任意の短完全列 $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ に対して

$$0 \rightarrow F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z)$$

が \mathcal{D} の完全列になること.

- F が**右完全** (right exact) であるとは, \mathcal{C} の任意の短完全列 $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ に対して

$$F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z) \rightarrow 0$$

が \mathcal{D} の完全列になること.

- F が**完全** (exact) であるとは, F が右完全かつ左完全であること.

【例 F.1.1】表現の圏

G を群とする. このとき

- G の表現 (ρ, V) を対象とする
- G -同変な \mathbb{K} -線型写像 $(\rho, V) \xrightarrow{f} (\rho', V')$ を射とする

圏を $\text{Rep}(G)$ と書く. $\text{Rep}(G)$ は**アーベル圏**である.

F.1.1 半単純性・有限性

定義 F.3: 単純・半単純

- アーベル圏 \mathcal{C} の対象 $X \in \mathcal{C}$ が**単純** (simple) であるとは、任意のモノ射 $i: U \hookrightarrow X$ が 0 であるか同型射であることを言う。
- アーベル圏 \mathcal{C} が**半単純** (semisimple) であるとは、 $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が単純対象の有限余積と同型であることを言う。 i.e. 単純対象の族 $\{X_i \in \text{Ob}(\mathcal{C})\}_{i \in I}$ および有限個を除いて 0 であるような非負整数の族 $\{N_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}_{i \in I}$ が存在して

$$X \cong \bigoplus_{i \in I} N_i X_i$$

が成り立つこと。

定義 F.4: 有限性

アーベル圏 \mathcal{C} とその対象 $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を与える。

- X が**有限長** (finite length) を持つとは、有限のフィルトレーション

$$0 = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_{n-1} \subset X_n = X$$

であって $X_i/X_{i-1} := \text{Coker}(X_{i-1} \hookrightarrow X_i)$ ($\forall i$) が**単純対象**であるようなもの (**Jordan-Hölder 列**と言う) が存在することを言う。このときの n を X の**長さ** (length) と呼ぶ^a。

以下、アーベル圏 \mathcal{C} は **\mathbb{K} -線形**であるとする。

- \mathcal{C} が**局所有限** (locally finite) であるとは、以下の 2 条件を充たすこと：
 - (IFin-1) $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して、 \mathbb{K} -ベクトル空間 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が有限次元
 - (IFin-2) $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が有限長を持つ。
- \mathcal{C} が**有限** (finite) であるとは、以下の 4 条件を充たすこと：
 - (Fin-1) $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して、 \mathbb{K} -ベクトル空間 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が有限次元
 - (Fin-2) $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が有限長を持つ。
 - (Fin-3) $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が射影的被覆^bを持つ。
 - (Fin-4) 単純対象の同型類が有限個である。

^a Jordan-Hölder の定理 [EGNO15, THEOREM 1.5.4, p.5] から、 X の任意の Jordan-Hölder 列は存在すれば同一の長さを持つ。

^b $P \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が**射影的** (projective) であるとは、関手 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, -)$ が完全関手であることを言う。 $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ の**射影的被覆** (projective cover) とは、射影的对象 $P_X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ とエビ射 $p_X: P_X \twoheadrightarrow X$ の組み (P_X, p_X) であって、任意の射影的对象 $P \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ およびエビ射 $p: P \twoheadrightarrow X$ に対してあるエビ射 $h: P \twoheadrightarrow P_X$ が存在して $p_X \circ h = p$ を充たすようなもののこと。

F.1.2 ダガー構造・ユニタリ構造・ C^* -構造

定義 F.5: ダガー構造・ユニタリ構造

圏 \mathcal{C} の**ダガー構造** (dagger structure) とは, 関手

$$\dagger: \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{C}$$

であって以下を満たすもののこと:

(dag-1) $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $X^\dagger = X$

(dag-2) $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, 及び $\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ に対して $(f^\dagger)^\dagger = f$

\mathcal{C} を \mathbb{C} -線形なアーベル圏とする. \mathcal{C} の**ユニタリ構造** (unitary structure) とは, 以下の条件を満たすダガー構造

$$\dagger: \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{C}$$

のこと:

(uni-1) \dagger は反線形である.

(uni-2) $f^\dagger \circ f = 0 \iff f = 0$

定義 F.6: C^* -圏

以下の条件を満たす**ダガー圏** (\mathcal{C}, \dagger) が C^* -圏と呼ぶ [Reu23, p.5]:

(Cstar-1) \dagger は反線形である.

(Cstar-2) $\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ に対して, ある $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$ が存在して $f^\dagger \circ f = g^\dagger \circ g$ と書ける.

(Cstar-3) $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して, \mathbb{C} -ベクトル空間 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ は以下のノルムによって完備なノルム空間になる:

$$\|f\| := \sqrt{\sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathbb{C} \text{ s.t. } f^\dagger \circ f - \lambda \text{Id}_x \text{ が可逆でない}\}}$$

命題 F.1: ユニタリ構造と C^* 構造

\mathbb{C} -線形なアーベル圏 \mathcal{C} が C^* -圏であることと, **ユニタリ圏**であることは同値である.

証明 [Mue98, Proposition 2.1, p.5] ■

F.2 モノイダル圏

これまでも何回か登場したが, モノイダル圏についてまとめておく:

定義 F.7: モノイダル圏

モノイダル圏 (monoidal category) は、以下の 5 つのデータからなる：

- 圏 \mathcal{C}
- テンソル積 (tensor product) と呼ばれる関手 $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$
- 単位対象 (unit object) $I \in \text{Ob}(\mathcal{C})$
- associator と呼ばれる **自然同値**

$$\{a_{X,Y,Z}: (X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{\cong} X \otimes (Y \otimes Z)\}_{X,Y,Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

- left/right unitors と呼ばれる **自然同値**

$$\begin{aligned} \{l_X: I \otimes X &\xrightarrow{\cong} X\}_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})}, \\ \{r_X: X \otimes I &\xrightarrow{\cong} X\}_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})} \end{aligned}$$

これらは $\forall X, Y, Z, W \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ について以下の 2 つの図式を可換にする：

(triangle diagram)

$$\begin{array}{ccc} (X \otimes I) \otimes Y & \xrightarrow{a_{X,I,Y}} & X \otimes (I \otimes Y) \\ & \searrow r_X \otimes \text{Id}_Y & \swarrow \text{Id}_X \otimes l_Y \\ & X \otimes Y & \end{array}$$

(pentagon diagram)

$$\begin{array}{ccccc} & & ((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z & & \\ & \swarrow a_{W \otimes X, Y, Z} & & \searrow a_{W, X, Y} \otimes \text{Id}_Z & \\ & (W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) & & (W \otimes (X \otimes Y)) \otimes Z & \\ & \searrow a_{W, X, Y \otimes Z} & & \downarrow a_{W, X \otimes Y, Z} & \\ & & W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z)) & & W \otimes ((X \otimes Y) \otimes Z) \\ & & \swarrow \text{Id}_Z \otimes a_{X, Y, Z} & & \end{array}$$

モノイダル圏 \mathcal{C} が**厳密** (strict) であるとは、 $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$\begin{aligned} (X \otimes Y) \otimes Z &= X \otimes (Y \otimes Z), \\ I \otimes X &= X, \quad X \otimes I = X \end{aligned}$$

が成り立ち、かつ $a_{X,Y,Z}$, l_X , r_X が恒等射であることを言う。

! 定義 F.7 で言うモノイダル圏を、**弱いモノイダル圏** (weak monoidal category) と呼ぶこともある。

【例 F.2.1】Cat のモノイダル構造

Cat を小圏と関手が成す圏とする。このとき、関手

$$\times: \mathbf{Cat} \times \mathbf{Cat} \longrightarrow \mathbf{Cat}$$

を $\text{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) := \text{Ob}(\mathcal{C}) \times \text{Ob}(\mathcal{D})$ により定めると、組み $(\mathbf{Cat}, \times, I)$ は厳密なモノイダル圏になる。
ただし I はただ 1 つの対象 \bullet を持ち、 $\text{Hom}_I(\bullet, \bullet) = \{\text{Id}_\bullet\}$ とする圏である^a

^a これは Cat の終対象でもある。

定義 F.8: モノイダル関手

2 つのモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, I_{\mathcal{C}}, a^{\mathcal{C}}, l^{\mathcal{C}}, r^{\mathcal{C}})$, $(\mathcal{D}, \otimes_{\mathcal{D}}, I_{\mathcal{D}}, a^{\mathcal{D}}, l^{\mathcal{D}}, r^{\mathcal{D}})$ の間の関手

$$F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

が**弱いモノイダル関手** (lax monoidal functor) であるとは、

- 射

$$\varepsilon: I_{\mathcal{D}} \longrightarrow F(I_{\mathcal{C}})$$

- 自然変換

$$\{\mu_{X,Y}: F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y) \longrightarrow F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y)\}_{X,Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

があつて、 $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して以下の図式が可換になること：

(associativity)

$$\begin{array}{ccc} (F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y)) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z) & \xrightarrow{a_{F(X), F(Y), F(Z)}^{\mathcal{D}}} & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} (F(Y) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z)) \\ \mu_{X,Y} \otimes \text{Id}_{F(Z)} \downarrow & & \downarrow \text{Id}_{F(X)} \otimes \mu_{Y,Z} \\ F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z) & & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y \otimes_{\mathcal{C}} Z) \\ \mu_{X \otimes_{\mathcal{C}} Y, Z} \downarrow & & \downarrow \mu_{X,Y} \otimes_{\mathcal{C}} Z \\ F((X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{C}} Z) & \xrightarrow{F(a_{X,Y,Z}^{\mathcal{C}})} & F(X \otimes_{\mathcal{C}} (Y \otimes_{\mathcal{C}} Z)) \end{array}$$

(unitality)

$$\begin{array}{ccc}
I_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathcal{D}} F(X) & \xrightarrow{\varepsilon \otimes \text{Id}_{F(X)}} & F(I_{\mathcal{C}}) \otimes_{\mathcal{D}} F(X) \\
\downarrow l_{F(X)}^{\mathcal{D}} & & \downarrow \mu_{I_{\mathcal{C}}, X} \\
F(X) & \xleftarrow{F(l_X^{\mathcal{C}})} & F(I_{\mathcal{C}} \otimes_{\mathcal{C}} X) \\
\\
F(X) \otimes_{\mathcal{D}} I_{\mathcal{D}} & \xrightarrow{\text{Id}_{F(X)} \otimes \varepsilon} & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(I_{\mathcal{C}}) \\
\downarrow r_{F(X)}^{\mathcal{D}} & & \downarrow \mu_{X, I_{\mathcal{C}}} \\
F(X) & \xleftarrow{F(r_X^{\mathcal{C}})} & F(X \otimes_{\mathcal{C}} I_{\mathcal{C}})
\end{array}$$

- 弱いモノイダル関手 F の ε と $\mu_{X,Y}$ が全て同型射ならば, F は強いモノイダル関手 (strong monoidal functor) と呼ばれる.
- 弱いモノイダル関手 F の ε と $\mu_{X,Y}$ が全て恒等射ならば, F は厳密なモノイダル関手 (strict monoidal functor) と呼ばれる.

定義 F.9: モノイダル自然変換

2つのモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, I_{\mathcal{C}}, a^{\mathcal{C}}, l^{\mathcal{C}}, r^{\mathcal{C}})$, $(\mathcal{D}, \otimes_{\mathcal{D}}, I_{\mathcal{D}}, a^{\mathcal{D}}, l^{\mathcal{D}}, r^{\mathcal{D}})$ の間の2つの弱いモノイダル関手 $(F_i: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, \varepsilon_i: I_{\mathcal{D}} \rightarrow F_i(I_{\mathcal{C}}), \{\mu_{iX,Y}: F_i(X) \otimes F_i(Y) \rightarrow F_i(X \otimes Y)\}_{X,Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})})$ $w/$ $i = 1, 2$ の間の自然変換

$$\begin{array}{ccc}
& F_1 & \\
\curvearrowright & \downarrow \tau & \curvearrowleft \\
\mathcal{C} & & \mathcal{D} \\
& F_2 &
\end{array}$$

がモノイダル自然変換 (monoidal natural transformation) であるとは, $\forall X, Y \in \mathcal{C}$ に対して以下の図式が可換になること:

(テンソル積の保存)

$$\begin{array}{ccc}
F_1(X) \otimes_{\mathcal{D}} F_1(Y) & \xrightarrow{\tau_X \otimes_{\mathcal{D}} \tau_Y} & F_2(X) \otimes_{\mathcal{D}} F_2(Y) \\
\downarrow \mu_{1X,Y} & & \downarrow \mu_{2X,Y} \\
F_1(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) & \xrightarrow{\tau_{X \otimes_{\mathcal{C}} Y}} & F_2(X \otimes_{\mathcal{C}} Y)
\end{array}$$

(単位対象の保存)

$$\begin{array}{ccc}
& I_{\mathcal{D}} & \\
\varepsilon_1 \swarrow & & \searrow \varepsilon_2 \\
F_1(I_{\mathcal{C}}) & \xrightarrow{\tau_{I_{\mathcal{C}}}} & F_2(I_{\mathcal{C}})
\end{array}$$

命題 F.2: 単位対象に関する技術的な等式

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ を与える. このとき $\forall X, Y \in \mathcal{C}$ に対して以下が成り立つ:

(1) 以下の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc} (I \otimes X) \otimes Y & \xrightarrow{a_{I,X,Y}} & I \otimes (X \otimes Y) \\ & \searrow l_X \otimes \text{Id}_Y & \swarrow l_{X \otimes Y} \\ & X \otimes Y & \end{array}$$

(2) 以下の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc} (X \otimes Y) \otimes I & \xrightarrow{a_{X,Y,I}} & X \otimes (Y \otimes I) \\ & \searrow r_{X \otimes Y} & \swarrow \text{Id}_X \otimes r_Y \\ & X \otimes Y & \end{array}$$

(3)

$$\begin{aligned} \text{Id}_I \otimes l_X &= (r_I \otimes \text{Id}_I) \circ a_{I,I,X}^{-1}, \\ r_X \otimes \text{Id}_I &= (\text{Id}_X \otimes l_I) \circ a_{X,I,I} \end{aligned}$$

(4)

$$l_I = r_I$$

証明 (1) 次の図式を考える:

$$\begin{array}{ccccc} ((X \otimes I) \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{a_{X,I,Y} \otimes \text{Id}_Z} & (X \otimes (I \otimes Y)) \otimes Z & & \\ & \searrow (r_X \otimes \text{Id}_Y) \otimes \text{Id}_Z & \swarrow (\text{Id}_X \otimes l_Y) \otimes \text{Id}_Z & & \\ & (X \otimes Y) \otimes Z & & & \\ & \downarrow a_{X,Y,Z} & & & \\ & X \otimes (Y \otimes Z) & & & \\ & \uparrow \text{Id}_X \otimes l_{Y \otimes Z} & & & \\ (X \otimes I) \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{a_{X,I,Y \otimes Z}} & X \otimes ((I \otimes Y) \otimes Z) & \xrightarrow{\text{Id}_X \otimes a_{I,Y,Z}} & X \otimes (I \otimes (Y \otimes Z)) \\ & \swarrow r_X \otimes \text{Id}_{Y \otimes Z} & \nwarrow \text{Id}_X \otimes (l_Y \otimes \text{Id}_Z) & & \end{array}$$

青色の部分は (pentagon diagram) により可換であり, 最上部と左下の三角形は (triangle diagram) により可換である. 左の赤色の部分は, 圏 $\mathcal{C}^{\times 3}$ における $(r_X, \text{Id}_Y, \text{Id}_Z)$ という射に対して $a: (- \otimes -) \otimes - \Rightarrow - \otimes (- \otimes -)$ の自然性を用いることで可換だと分かる. 同様に右の赤色の部分は, 圏 $\mathcal{C}^{\times 3}$ における $(\text{Id}_X, l_Y, \text{Id}_Z)$ という射に対して a の自然性を使うことで可換だと分かる. 以上より図式全体が可換

なので、残った右下の三角形もまた可換である。

(2) (1) と同様。

(3) (triangle diagram) において $X = I$ とおくことで第一式が, $Y = I$ とおくことで第二式が示される。

(4)

$$\begin{aligned}
 l_I \otimes \text{Id}_I &= l_{I \otimes I} \circ a_{I, I, I} && \because (1) \\
 &= (\text{Id}_I \otimes l_I) \circ a_{I, I, I} && \because l \text{ の自然性} \\
 &= r_I \otimes \text{Id}_I && \because (3)
 \end{aligned}$$

より示された。

■

定義 F.10: ユニタリモノイダル圏

\mathcal{C} -線形なアーベル圏でもあるモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, a, l, r)$ がユニタリモノイダル圏であるとは, ユニタリ構造 $\dagger: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$ がモノイダル関手であることを言う。

F.2.1 rigid なモノイダル圏

定義 F.11: 双対

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ およびその任意の対象 $X, X^* \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を与える。 X^* が X の左双対 (left dual) であるとは,

- coevaluation と呼ばれる射

$$\text{coev}_X^L: I \rightarrow X \otimes X^*$$

- evaluation と呼ばれる射

$$\text{ev}_X^L: X^* \otimes X \rightarrow I$$

が存在して以下の図式を可換にすることを言う：

(zig-zag equations)

$$\begin{array}{ccc}
 I \otimes X & \xrightarrow{\text{coev}_X^L \otimes \text{Id}_X} & (X \otimes X^*) \otimes X \\
 \downarrow l_X & & \downarrow a_{X, X^*, X} \\
 & & X \otimes (X^* \otimes X) \\
 & & \downarrow \text{Id}_X \otimes \text{ev}_X^L \\
 X & \xleftarrow{r_X} & X \otimes I
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
X^* \otimes I & \xrightarrow{\text{Id}_{X^*} \otimes \text{coev}_X^L} & X^* \otimes (X \otimes X^*) \\
\downarrow r_{X^*} & & \downarrow a_{X^*, X, X^*}^{-1} \\
& & (X^* \otimes X) \otimes X^* \\
& & \downarrow \text{ev}_X^L \otimes \text{Id}_{X^*} \\
X^* & \xleftarrow{l_{X^*}} & I \otimes X^*
\end{array}$$

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ およびその任意の対象 $X, {}^*X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を与える. *X が X の右双対 (right dual) であるとは,

- 射

$$\text{coev}_X^R: I \longrightarrow {}^*X \otimes X$$

- 射

$$\text{ev}_X^R: X \otimes {}^*X \longrightarrow I$$

が存在して以下の図式を可換にすることを言う：

(zig-zag equations)

$$\begin{array}{ccc}
X \otimes I & \xrightarrow{\text{Id}_X \otimes \text{coev}_X^R} & X \otimes ({}^*X \otimes X) \\
\downarrow r_X & & \downarrow a_{X, {}^*X, X}^{-1} \\
& & (X \otimes {}^*X) \otimes X \\
& & \downarrow \text{ev}_X^R \otimes \text{Id}_X \\
X & \xleftarrow{l_X} & I \otimes X
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
I \otimes {}^*X & \xrightarrow{\text{coev}_X^R \otimes \text{Id}_{{}^*X}} & ({}^*X \otimes X) \otimes {}^*X \\
\downarrow l_{{}^*X} & & \downarrow a_{{}^*X, X, {}^*X}^{-1} \\
& & {}^*X \otimes (X \otimes {}^*X) \\
& & \downarrow \text{Id}_{{}^*X} \otimes \text{ev}_X^R \\
{}^*X & \xleftarrow{r_{{}^*X}} & {}^*X \otimes I
\end{array}$$

ストリング図式で書くときは

$$\text{coev}_X^L =: \text{diagram}, \quad \text{ev}_X^L =: \text{diagram}, \quad \text{coev}_X^R =: \text{diagram}, \quad \text{ev}_X^R =: \text{diagram}$$

とする. ストリング図式において $\text{coev}^L, \text{ev}^L$ に対する (zig-zag equations) は

$$\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \text{diagram} \end{array} = \begin{array}{c} \text{diagram} \\ \text{diagram} \end{array}$$

$\text{coev}^R, \text{ev}^R$ に対する (zig-zag equations) は

$$\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \text{diagram} \end{array} = \begin{array}{c} \text{diagram} \\ \text{diagram} \end{array}$$

と書ける.

補題 F.1: 双対の基本性質

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ およびその対象 $X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を与える.

- (1) Y が X の左双対ならば, X は Y の右双対である.
- (2) Z が X の右双対ならば, X は Z の左双対である.
- (3) X が左・右双対を持つならば, $*(X^*) \cong X \cong (*X)^*$ が成り立つ.

証明 (1) 仮定より, $\text{coev}_X^L: I \rightarrow X \otimes Y, \text{ev}_X^L: Y \otimes X \rightarrow I$ が存在して左双対の (zig-zag-equations) を満たす. よって $\text{coev}_Y^R := \text{coev}_X^L, \text{ev}_Y^R := \text{ev}_X^L$ と定めれば, 組 $(Y, X, \text{coev}_Y^R, \text{ev}_Y^R)$ は右双対の (zig-zag-equations) を満たす.

(2) 仮定より, $\text{coev}_X^R: I \rightarrow Z \otimes X, \text{ev}_X^R: X \otimes Z \rightarrow I$ が存在して右双対の (zig-zag-equations) を満たす. よって $\text{coev}_Z^L := \text{coev}_X^R, \text{ev}_Z^L := \text{ev}_X^R$ と定めれば, 組 $(Z, X, \text{coev}_Z^L, \text{ev}_Z^L)$ は左双対の (zig-zag-equations) を満たす.

(3) 射 $\alpha: X \rightarrow {}^*(X^*)$, $\beta: {}^*(X^*) \rightarrow X$ をそれぞれ

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \uparrow \\ \bullet \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} {}^*(X^*) \\ X \end{array} \quad := \quad \begin{array}{c} \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} {}^*(X^*) \\ X^* \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} {}^*(X^*) \\ X \end{array} \\
 \text{coev}_{X^*}^R \quad \text{ev}_X^L
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \uparrow \\ \bullet \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} X \\ {}^*(X^*) \end{array} \quad := \quad \begin{array}{c} \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} X \\ X^* \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} {}^*(X^*) \\ X^* \end{array} \\
 \text{coev}_X^L \quad \text{ev}_{X^*}^R
 \end{array}$$

と定義すれば、**(zig-zag-equations)** により $\alpha \circ \beta = \text{Id}_{X^*}$, $\beta \circ \alpha = \text{Id}_X$ が言える. $({}^*X)^*$ についても同様である. ■

定義 F.12: rigid なモノイダル圏

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ が **rigid** であるとは, $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が **左・右双対** を持つことを言う.

rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ において, 対応

$$(-)^*: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

を次のように構成する:

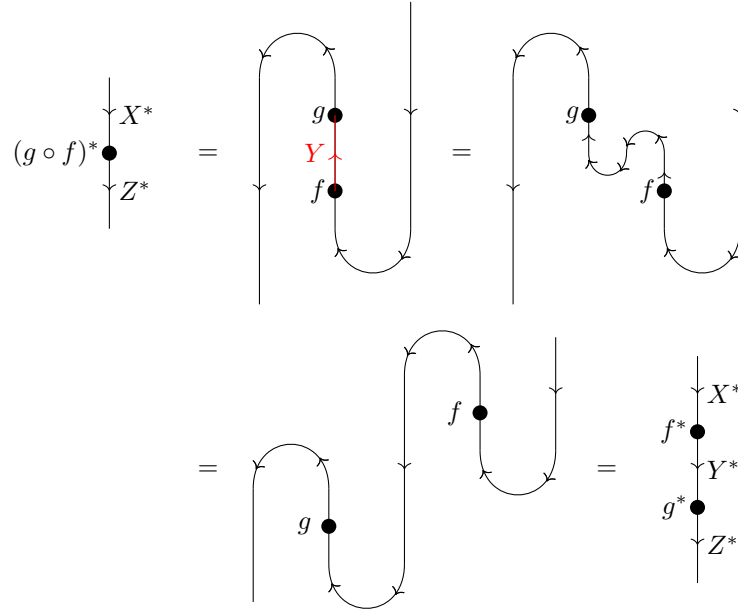
- $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対してその **左双対** $X^* \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を対応づける.
- $f: X \rightarrow Y$ に対して,

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \uparrow \\ \bullet \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} X^* \\ Y^* \end{array} \quad := \quad \begin{array}{c} \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} Y^* \\ X^* \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} Y \\ X \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} Y^* \\ X^* \end{array} \\
 \text{coev}_X^L \quad \text{ev}_Y^L
 \end{array}
 \tag{F.2.1}$$

補題 F.2: 左双対の関手性

- (1) 対応 $(-)^*: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ は反変関手である.
- (2) $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $(X \otimes Y)^* = Y^* \otimes X^*$ が成り立つ.

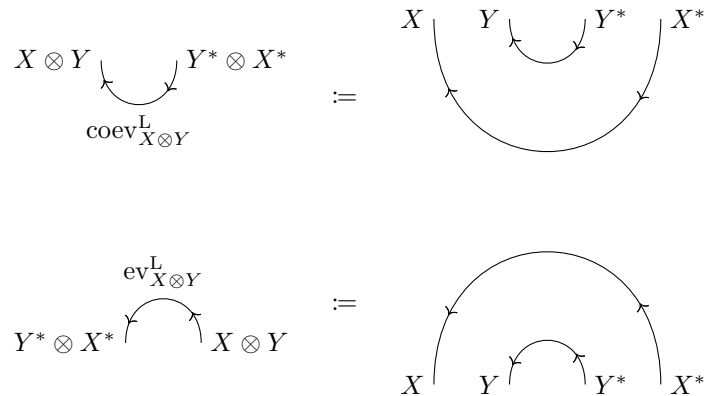
証明 (1) 任意の射 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ をとる. (zig-zag-equations) により,



(2) $X \otimes Y$ に関する coevaluation, evaluation をそれぞれ

$$\begin{aligned} \text{coev}_{X \otimes Y}^L: I &\xrightarrow{\text{coev}_X^L} X \otimes X^* \xrightarrow{l_X^{-1}} (X \otimes I) \otimes X^* \xrightarrow{(\text{Id}_X \otimes \text{coev}_Y^L) \otimes \text{Id}_{X^*}} (X \otimes (Y \otimes Y^*)) \otimes X^* \\ &\xrightarrow{a} (X \otimes Y) \otimes (Y^* \otimes X^*) \\ \text{ev}_{X \otimes Y}^L: (Y^* \otimes X^*) \otimes (X \otimes Y) &\xrightarrow{a} (Y^* \otimes (X^* \otimes X)) \otimes Y \xrightarrow{(\text{Id}_{Y^*} \otimes \text{ev}_X^L) \otimes \text{Id}_Y} (Y^* \otimes I) \otimes Y \\ &\xrightarrow{l_{Y^*}} Y^* \otimes Y \xrightarrow{\text{ev}_Y^L} I \end{aligned}$$

で定義し, 組 $(X \otimes Y, Y^* \otimes X^*, \text{coev}_{X \otimes Y}^L, \text{ev}_{X \otimes Y}^L)$ が (zig-zag-equations) を満たすことを示せば良い. スtring図式で書くと



なので明らか. ■

全く同様にして, 反変関手

$$*(-): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

を作ることができる.

【例 F.2.2】 双対関手

補題 F.2 より, rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ において関手

$$\begin{aligned} (-)^{**} : \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{C} \\ **(-) : \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{C} \end{aligned}$$

は厳密なモノイダル関手である.

補題 F.3: rigidity isomorphism

rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ に対し, 以下が成り立つ:

- (1) $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して自然な同型

$$\begin{aligned} \alpha_{X,Y,Z} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes Y, Z) &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z \otimes Y^*) \\ \beta_{Y,X,Z} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y^* \otimes X, Z) &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y \otimes Z) \end{aligned}$$

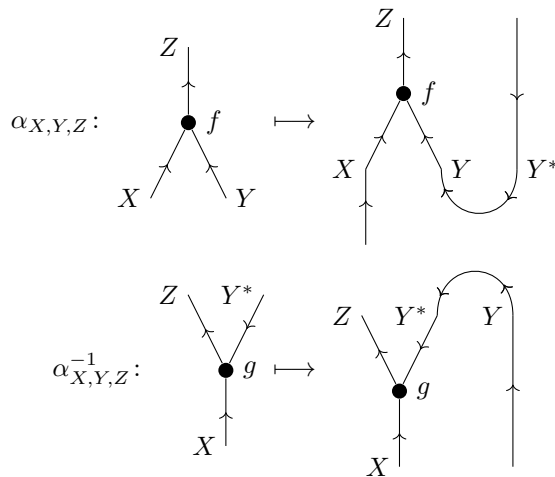
が存在する.

- (2) $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して自然な同型

$$\begin{aligned} \gamma_{X,Y,Z} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes {}^*Y, Z) &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z \otimes Y) \\ \gamma_{Y,X,Z} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y \otimes X, Z) &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, {}^*Y \otimes Z) \end{aligned}$$

が存在する.

証明 (1) 最初の同型は



である. 他も同様.

- (2) (1) と同様.

■

F.2.2 組紐付きモノイダル圏

定義 F.13: 組紐付きモノイダル圏

組紐付きモノイダル圏 (braided monoidal category) とは、以下の2つからなる：

- モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$
- 組紐 (braiding) と呼ばれる自然同型

$$\{b_{X,Y}: X \otimes Y \xrightarrow{\cong} Y \otimes X\}_{X,Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ について以下の図式を可換にする：

(hexagon diagrams)

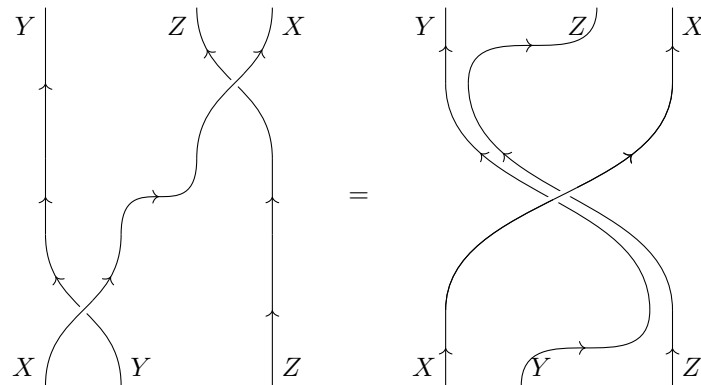
$$\begin{array}{ccccc} X \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{a_{X,Y,Z}^{-1}} & (X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{b_{X,Y} \otimes \text{Id}_Z} & (Y \otimes X) \otimes Z \\ \downarrow b_{X,Y \otimes Z} & & & & \downarrow a_{Y,X,Z} \\ (Y \otimes Z) \otimes X & \xleftarrow{a_{Y,Z,X}^{-1}} & Y \otimes (Z \otimes X) & \xleftarrow{\text{Id}_Y \otimes b_{X,Z}} & Y \otimes (X \otimes Z) \\ \\ (X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{a_{X,Y,Z}} & X \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{\text{Id}_X \otimes b_{Y,Z}} & X \otimes (Z \otimes Y) \\ \downarrow b_{X \otimes Y, Z} & & & & \downarrow a_{X,Z,Y}^{-1} \\ Z \otimes (X \otimes Y) & \xleftarrow{a_{Z,X,Y}} & (Z \otimes X) \otimes Y & \xleftarrow{b_{X,Z} \otimes \text{Id}_Y} & (X \otimes Z) \otimes Y \end{array}$$

組紐付きモノイダル圏 \mathcal{C} であって、 \mathcal{C} の組紐が $b_{Y,X} \circ b_{X,Y} = \text{Id}_{X \otimes Y}$ を満たすもののことを対称モノイダル圏 (symmetric monoidal category) と呼ぶ。

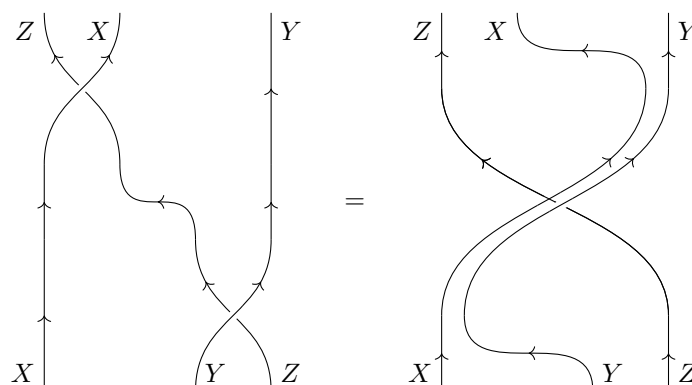
ストリング図式で書く場合は

$$b_{X,Y} =: \begin{array}{c} \text{X} \quad \text{Y} \\ \text{X} \text{---} \text{Y} \end{array} \quad b_{X,Y}^{-1} =: \begin{array}{c} \text{X} \quad \text{Y} \\ \text{Y} \text{---} \text{X} \end{array}$$

とする。(hexagon diagrams) をストリング図式で表すと

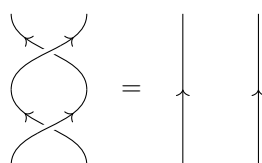


および



のようになる。ただし、**associator** を明示的に描いた。この図式から、**組紐**を含むストリング図式がアイソトピーに関して不変であることが分かる。

組紐付きモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r, b)$ が**対称**であるとき、ストリング図式において



が成り立つ。

定義 F.14: 組紐付きモノイダル関手

2つの**組紐付きモノイダル圏** $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, I_{\mathcal{C}}, a^{\mathcal{C}}, l^{\mathcal{C}}, r^{\mathcal{C}}, b^{\mathcal{C}})$, $(\mathcal{D}, \otimes_{\mathcal{D}}, I_{\mathcal{D}}, a^{\mathcal{D}}, l^{\mathcal{D}}, r^{\mathcal{D}}, b^{\mathcal{D}})$ の間の**弱いモノイダル関手** $(F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, \varepsilon, \mu)$ が**弱い組紐付きモノイダル関手** (lax braided monoidal functor) であるとは、 $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して以下の図式が可換になること：

$$\begin{array}{ccc} F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y) & \xrightarrow{b_{F(X), F(Y)}^{\mathcal{D}}} & F(Y) \otimes_{\mathcal{D}} F(X) \\ \mu_{X, Y} \downarrow & & \downarrow \mu_{Y, X} \\ F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) & \xrightarrow{F(b_{X, Y}^{\mathcal{C}})} & F(Y \otimes_{\mathcal{C}} X) \end{array}$$

命題 F.3: Yang-Baxter 方程式

組紐付きモノイダル圏 $(\mathcal{C}, I, a, l, r, b)$ を与える。このとき、 $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して以下が成り立つ：

$$\begin{aligned} & a_{Y, Z, X} \circ (b_{Y, Z} \otimes \text{Id}_X) \circ a_{Y, Z, X}^{-1} \circ (\text{Id}_Y \otimes b_{X, Z}) \circ a_{Y, X, Z} \circ (b_{X, Y} \otimes \text{Id}_Z) \\ &= (\text{Id}_Z \otimes b_{X, Y}) \circ a_{Z, X, Y} \circ (b_{X, Z} \otimes \text{Id}_Y) \circ a_{X, Z, Y}^{-1} \circ (\text{Id}_X \otimes b_{Y, Z}) \circ a_{X, Y, Z} \end{aligned}$$

証明 圏 \mathcal{C} における図式

$$\begin{array}{ccccc}
X \otimes (Y \otimes Z) & \xleftarrow{\cong} & (X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{b_{X,Y} \otimes \text{Id}_Z} & (Y \otimes X) \otimes Z & \xleftarrow{\cong} & Y \otimes (X \otimes Z) \\
\text{Id}_X \otimes b_{Y,Z} \downarrow & & \downarrow b_{(X \otimes Y), Z} & & \downarrow b_{(Y \otimes X), Z} & & \downarrow \text{Id}_X \otimes b_{X,Z} \\
X \otimes (Z \otimes Y) & & & & & & Y \otimes (Z \otimes X) \\
\cong \downarrow & & & & & & \downarrow \cong \\
(X \otimes Z) \otimes Y & & & & & & (Y \otimes Z) \otimes X \\
b_{X,Z} \otimes \text{Id}_Y \downarrow & & & & & & \downarrow b_{Y,Z} \otimes \text{Id}_X \\
(Z \otimes X) \otimes Y & \xrightarrow{\cong} & Z \otimes (X \otimes Y) & \xrightarrow{\text{Id}_Z \otimes b_{X,Y}} & Z \otimes (Y \otimes X) & \xleftarrow{\cong} & (Z \otimes Y) \otimes X
\end{array}$$

を考える。ただし \cong は associator を表す。赤色の部分は (hexagon diagrams) そのものなので可換である。また、中央の四角形は b が自然変換であることから可換である。故に図式の外周部は可換であり、示された。 ■

！ 以降、原則としてストリング図式においては associator を描画しない。

命題 F.3 をストリング図式で書くと次のようになる：

補題 F.4: dual と組紐

組紐付き rigid モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R, b)$ を与える。このとき、 $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して以下が成り立つ：

(1)

$$l_X \circ b_{X,I} = r_X, \quad r_X \circ b_{I,X} = l_X, \quad b_{I,X} \circ b_{X,I} = \text{Id}_{X \otimes I}$$

(2)

$$(\text{coev}_X^L \otimes \text{Id}_Y) \circ l_Y^{-1} = b_{Y, X \otimes X^*} \circ (\text{Id}_Y \otimes \text{coev}_X^L) \circ r_Y^{-1}$$

(3)

$$r_Y \circ (\text{Id}_Y \otimes \text{ev}_X^L) = l_Y \circ (\text{ev}_X^L \otimes \text{Id}_Y) \circ b_{Y, X^* \otimes X}$$

証明 (1) [EGNO15, EXERCISE 8.1.6, p.196]

(2) 以下の図式を考える：

$$\begin{array}{ccccc}
& & I \otimes Y & \xrightarrow{\text{coev}_X^L \otimes \text{Id}_Y} & (X \otimes X^*) \otimes Y \\
& \nearrow l_Y^{-1} & \uparrow b_{Y,I} & & \uparrow b_{Y,X \otimes X^*} \\
Y & & & & \\
& \searrow r_Y^{-1} & Y \otimes I & \xrightarrow{\text{Id}_Y \otimes \text{coev}_X^L} & Y \otimes (X \otimes X^*)
\end{array}$$

左端の三角形は (1) より可換である．四角形は，圏 $\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ における射 $(\text{Id}_Y, \text{coev}_X^L)$ に対して $b: \otimes \Rightarrow \otimes \circ \tau$ の自然性を用いることで可換だとわかる．よって外周部も可換であり，示された．

(3) (1) と同様．

■

補題 F.4-(2), (3) をストリング図式で書くと次のようになる：

ただし **left/right unitor** を省略した．つまり，端で折り返している組紐は，下を潜らせることができる．

F.2.3 リボン構造

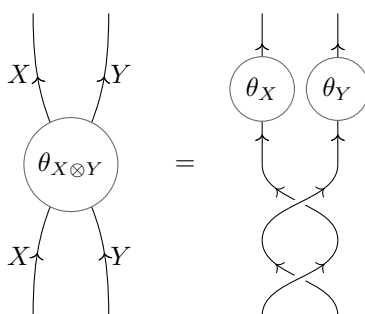
定義 F.15: リボン構造

組紐付き rigid モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R, b)$ のリボン構造 (ribbon structure) とは, 自然同型 $\theta: \text{Id}_{\mathcal{C}} \implies \text{Id}_{\mathcal{C}}$ であって以下を充たすもののこと:

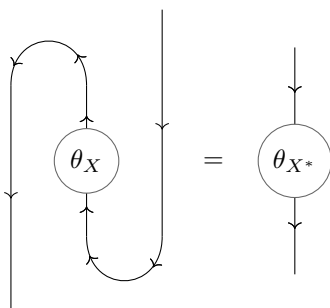
(Rib-1) $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $\theta_{X \otimes Y} = (\theta_X \otimes \theta_Y) \circ b_{Y, X} \circ b_{X, Y}$ が成り立つ.

(Rib-2) $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $(\theta_X)^* = \theta_{X^*}$

ストリング図式で **(Rib-1)** を書くと



となり, **(Rib-2)** は



となる.

F.3 テンソル圏・フュージョン圏



これまではモノイダル圏の対象を英大文字 X, Y, Z, \dots で, 単位対象を I と書いてきたが, 以下では対象を英小文字 x, y, z, \dots で, 単位対象を 1 と書くことにする.

定義 F.16: 環圏

圏 \mathcal{C} が多重環圏 (multiring category) であるとは、以下の条件を満たすこと：

- (mR-1) \mathcal{C} は局所有有限な \mathbb{K} -線形アーベル圏
- (mR-2) \mathcal{C} はモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r)$
- (mR-3) 関手 $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ が \mathbb{K} -双線形かつ双完全

圏 \mathcal{C} が環圏 (ring category) であるとは、以下の条件を満たすこと：

- (R-1) \mathcal{C} は多重環圏
- (R-2) $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, 1) \cong \mathbb{K}$

補題 F.5: 環圏における 1 の単純性

- (1) 左双対を持つ多重環圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{coev}^L, \text{ev}^L)$ において、左双対関手 $(-)^*: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ は完全である。
- (2) 左双対を持つ環圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{coev}^L, \text{ev}^L)$ において、 $1 \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ は単純対象である。

証明 (1) 完全列 $0 \rightarrow x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z \rightarrow 0$ を与える。示すべきは $0 \rightarrow z^* \xrightarrow{g^*} y^* \xrightarrow{f^*} x^* \rightarrow 0$ が完全であることである。 $\forall w \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を 1 つとり、圏 \mathcal{C} における図式

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(w, z^*) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(w, g^*)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(w, y^*) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(w, f^*)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(w, x^*)$$

を考える。補題 F.3-(1) の自然同型によりこれは

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(w \otimes z, 1) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(w \otimes y, 1) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(w \otimes x, 1)$$

と書けるが、多重環圏の定義より \otimes は完全で、かつ $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, 1)$ は左完全関手なので、これは完全列である。よって $0 \rightarrow z^* \xrightarrow{g^*} y^* \xrightarrow{f^*} x^* \rightarrow 0$ は完全である。同様の議論から $z^* \xrightarrow{g^*} y^* \xrightarrow{f^*} x^* \rightarrow 0$ の完全性も従う。

- (2) 任意のゼロでない単純な部分対象 $x \xrightarrow{i} 1$ を 1 つとる^{*1}。 \mathcal{C} はアーベル圏なので i の余核が存在し、

$$0 \rightarrow x \xrightarrow{i} 1 \xrightarrow{\text{coker } i} \text{Coker } i \rightarrow 0$$

は完全列になる。(1) より

$$0 \rightarrow (\text{Coker } i)^* \rightarrow 1 \rightarrow x^* \rightarrow 0$$

は完全列である。さらに、環圏の定義より \otimes は完全なので

$$0 \rightarrow x \otimes (\text{Coker } i)^* \rightarrow x \rightarrow x \otimes x^* \rightarrow 0 \quad (\text{F.3.1})$$

も完全列だが、 x は単純でかつ $x \otimes x^* \neq 0$ (evaluation が零射でないため) なので^{*2} $x \otimes x^* \cong x$ が分かった。よってエピソード $1 \xrightarrow{\text{coev}_x^L} x \otimes x^* \rightarrow x$ を得る。よって零射でない $1 \rightarrow x \xrightarrow{i} 1$ を得るが、 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, 1) = \mathbb{K}$ なので $x = 1$ でなくてははいけない。

^{*1} アーベル圏 \mathcal{C} の有限性から、このような x は存在する。

^{*2} (F.3.1) は完全列なので $x \otimes (\text{Coker } i)^* \rightarrow x$ はモノ射であり、かつ $x \neq 0$ なので $\text{Coker } i \neq 1$ であるから、 $x \otimes (\text{Coker } i)^* = 0$ と言える。

定義 F.17: テンソル圏・フュージョン圏

圏 \mathcal{C} が多重テンソル圏 (multitensor category) であるとは、以下の条件を満たすこと：

(mT-1) \mathcal{C} は局所有限な \mathbb{K} -線形アーベル圏

(mT-2) \mathcal{C} は rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$

(mT-3) 関手 $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ が $\forall x, y, z, w \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して定める写像 $\otimes_{x,y,z,w}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x \otimes z, y \otimes w)$ が \mathbb{K} -双線形

圏 \mathcal{C} がテンソル圏 (tensor category) であるとは、以下の条件を満たすこと：

(T-1) \mathcal{C} は多重テンソル圏

(T-2) $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, 1) \cong \mathbb{K}$

圏 \mathcal{C} が多重フュージョン圏 (multifusion category) であるとは、以下の条件を満たすこと：

(mFus-1) \mathcal{C} は多重テンソル圏

(mFus-2) \mathcal{C} は \mathbb{K} -線形アーベル圏として有限かつ半単純

圏 \mathcal{C} がフュージョン圏 (fusion category) であるとは、以下の条件を満たすこと：

(Fus-1) \mathcal{C} はテンソル圏

(Fus-2) \mathcal{C} は \mathbb{K} -線形アーベル圏として有限かつ半単純

命題 F.4: 多重テンソル圏のテンソル積は双完全

多重テンソル圏 \mathcal{C} の関手 $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ は双完全である。

証明 [EGNO15, PROPOSITION 4.2.1., p.66]

命題 F.4 より、

$$(\text{多重}) \text{ テンソル圏} \implies (\text{多重}) \text{ 環圏}$$

が言える。

命題 F.5: テンソル圏における 1 の単純性

テンソル圏において 1 は単純である。

証明 命題 F.4 と補題 F.5 とテンソル圏の定義から従う。

【例 F.3.1】 圏 \mathcal{C}_G と Vec_G

G を群とする。厳密なモノイダル圏 \mathcal{C}_G を、

- $\text{Ob}(\mathcal{C}_G) := G$
- $\forall g_1, g_2 \in G$ に対して

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_G}(g_1, g_2) := \begin{cases} \text{U}(1), & g_1 = g_2 \\ \emptyset, & g_1 \neq g_2 \end{cases}$$

- $g_1 \otimes g_2 := g_1 g_2$ かつ, $g_i \xrightarrow{\forall \theta_i} g_i$ に対して $\theta_1 \otimes \theta_2 := \theta_1 \theta_2$
- $1 := 1_G$
- $a_{g_1, g_2, g_3} := 1, l_g := 1, r_g := 1$

で定義する.

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ とする. 厳密なモノイダル圏 \mathbf{Vec}_G を,

- G -graded な \mathbb{K} -ベクトル空間

$$V = \bigoplus_{g \in G} V_g$$

を対象とする.

- grading を保存する \mathbb{K} -線型変換

$$f: \bigoplus_{g \in G} V_g \longrightarrow \bigoplus_{g \in G} W_g \quad \text{s.t.} \quad \forall g \in G, f(V_g) \subset W_g$$

を射とする.

- テンソル積 $\otimes: \mathbf{Vec}_G \times \mathbf{Vec}_G \longrightarrow \mathbf{Vec}_G$ は,

$$V \otimes W := \bigoplus_{g \in G} \left(\bigoplus_{\substack{x, y \in G, \\ xy = g}} V_x \otimes_{\mathbb{K}} W_y \right)$$

と定義する.

- 単位対象は $1 := \mathbb{K}$ とする^a
- $a_{g_1, g_2, g_3} := 1, l_g := 1, r_g := 1$

によって定義する. G が有限群ならば \mathcal{C}_G はフュージョン圏である.

^a $1_G \in G$ 成分以外が全て 0

【例 F.3.2】 圏 \mathcal{C}_G^α と \mathbf{Vec}_G^α

G を群とする. 【例 F.3.1】 の associator と unitors を非自明にしてみよう. 今 $\alpha \in Z_{\text{Grp}}^3(G; \text{U}(1))$ を 1 つ固定する^a.

モノイダル圏 \mathcal{C}_G^α を,

$$a_{g_1, g_2, g_3} := \alpha(g_1, g_2, g_3),$$

$$l_g := \alpha(1, 1, g)^{-1},$$

$$r_g := \alpha(g, 1, 1)$$

とおくことにより定義する^b. 実際, コサイクル条件および $U(1)$ の可換性により

$$\begin{aligned} & (\text{Id}_{g_4} \otimes a_{g_1, g_2, g_3}) \circ a_{g_4, g_1 \otimes g_2, g_3} \circ (a_{g_4, g_1, g_2} \otimes \text{Id}_{g_3}) \\ &= \alpha(g_1, g_2, g_3) \alpha(g_4, g_1 g_2, g_3) \alpha(g_4, g_1, g_2) \\ &= \alpha(g_4 g_1, g_2, g_3) \alpha(g_4, g_1, g_2 g_3) \\ &= \alpha(g_4, g_1, g_2 g_3) \alpha(g_4 g_1, g_2, g_3) \\ &= a_{g_4, g_1, g_2 g_3} \circ a_{g_4 \otimes g_1, g_2, g_3} \end{aligned}$$

の通りに **(pentagon identity)** が成り立ち,

$$\begin{aligned} (\text{Id}_{g_1} \otimes l_{g_2}) \circ a_{g_1, 1, g_2} &= \frac{\alpha(g_1, 1, g_2)}{\alpha(1, 1, g_2)} \\ &= \frac{\alpha(g_1, 1, 1) \alpha(g_1, 1, g_2) \alpha(1, 1, g_2)}{\alpha(g_1, 1, g_2) \alpha(1, 1, g_2)} \\ &= \alpha(g_1, 1, 1) \\ &= r_{g_1} \end{aligned}$$

の通りに **(triangle identity)** が成り立つ. もし $l_g = r_g = \text{Id}_g$ にしたければ

$$\forall g, h \in G, \alpha(g, 1, h) = 1_G$$

を充たす $\alpha \in Z_{\text{Grp}}^3(G; U(1))$ をとることが必要十分である (**正規化条件**).

圏 \mathbf{Vec}_G^α は, $\alpha \in Z_{\text{Grp}}^3(G; \mathbb{K}^\times)$ に対して \mathcal{C}_G^α の構成を線形に拡張することで得られる. G が有限群ならば \mathbf{Vec}_G^α は **フュージョン圏** である.

^a i.e. 3-コサイクル

^b 他のデータは【例 F.3.1】と全く同じである

定義 F.18: テンソル関手・ファイバー関手

\mathcal{C}, \mathcal{D} を **多重環圏** とする. 関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を与える. F が **テンソル関手** (tensor functor) であるとは, 以下を充たすこと:

(TF-1) F は **\mathbb{K} -線形**

(TF-2) F は **強いモノイダル関手**

(TF-3) F は **完全かつ忠実**^a

特に $\mathcal{D} = \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ のとき, テンソル関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ は **ファイバー関手** (fiber functor) と呼ばれる.

^a この条件は [EGNO15, DEFINITION 4.2.5., p.66] に合わせて付けたものであり, テンソル関手と言った際には必要とされないことも多い.

【例 F.3.3】圏 \mathbf{Vec}_G^α のテンソル関手

G_1, G_2 を群, $\alpha_i \in Z_{\text{Grp}}^3(G_i; \mathbf{U}(1))$ を 3-コサイクルとする. **テンソル関手**

$$F: \mathcal{C}_{G_1}^{\alpha_1} \longrightarrow \mathcal{C}_{G_2}^{\alpha_2}$$

とはどのようなものだろうか.

まず F は**強いモノイダル関手**であるから, 対象の対応について群準同型

$$f: G_1 \longrightarrow G_2$$

を成す. このとき**強いモノイダル関手**の持つ自然変換とは, ある $\mu \in C_{\text{Grp}}^2(G_1; \mathbf{U}(1))$ を用いて

$$\mu_{g_1, g_2} := \mu(g_1, g_2) \text{Id}_{f(g_1 g_2)}: f(g_1) f(g_2) \xrightarrow{\cong} f(g_1 g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G_1$$

と書けるが, **(associativity)** から

$$\mu(g_1, g_2 g_3) \mu(g_2, g_3) \alpha_2(f(g_1), f(g_2), f(g_3)) = \alpha_1(g_1, g_2, g_3) \mu(g_1 g_2, g_3) \mu(g_1, g_2)$$

でなくてはならない. i.e.

$$\alpha_1 = f^* \alpha_2 \cdot \delta \mu \quad (\text{F.3.2})$$

である. 逆に群準同型 $f: G_1 \longrightarrow G_2$ および $\mu \in C_{\text{Grp}}^2(G_1; \mathbf{U}(1))$ の組 (f, μ) であって **(F.3.2)** を満たすものが与えられると, これらを素材にして**テンソル関手**

$$F: \mathcal{C}_{G_1}^{\alpha_1} \longrightarrow \mathcal{C}_{G_2}^{\alpha_2}$$

を構成することができる. このような関手 F が圏同値になる必要十分条件は f が群の同型写像になることである.

【例 F.3.4】圏 \mathbf{Vec}_G^α のモノイダル自然変換

【例 F.3.3】の構成で得られる**テンソル関手**を $F_{f, \mu}$ と書く. このとき, **モノイダル自然変換**

$$\begin{array}{ccc} & F_{f, \mu} & \\ \text{Vec}_{G_1}^{\alpha_1} & \xrightarrow{\quad} & \text{Vec}_{G_2}^{\alpha_2} \\ & F_{f', \mu'} & \end{array} \quad \tau$$

を同定しよう. まず自然変換と言うからには $\forall g \in G_1$ に対して

$$\tau_g := \tau(g) \text{Id}_{f(g)}: f(g) \longrightarrow f'(g)$$

を定めないとはいけない. ただし $\tau \in C_{\text{Grp}}^1(G_1; \mathbf{U}(1))$ である. ところが, 【例 F.3.2】より $\text{Vec}_{G_2}^{\alpha_2}$ の射は $f(g) = f'(g)$, i.e. $f = f'$ でないと自然変換が存在しない.

(テンソル積の保存) の条件から, $\forall g_1, g_2 \in G_1$ に対して

$$\mu'(g_1, g_2)\tau(g_1)\tau(g_2) = \tau(g_1g_2)\mu(g_1, g_2)$$

でなくてはならない. i.e.

$$\mu = \mu' \cdot \delta\tau \quad (\text{F.3.3})$$

である. 逆に (F.3.3) を満たす $\tau \in C_{\text{Grp}}^1(G_1; \text{U}(1))$ からモノイダル自然変換 $\tau: F_{f,\mu} \Rightarrow F_{f,\mu'}$ を構成することができる.

F.3.1 旋回構造・球状構造・量子次元

定義 F.19: 量子トレース

- rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$
- 対象 $x \in \mathcal{C}$
- $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x^{**}), g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, **x)$

を与える.

- f の左量子トレース (left quantum trace) を以下で定義する:

$$\text{Tr}^L(f): 1 \xrightarrow{\text{coev}_x^L} x \otimes x^* \xrightarrow{f \otimes \text{Id}_x} x^{**} \otimes x^* \xrightarrow{\text{ev}_{x^*}^L} 1$$

ストリング図式で書くと次のようになる^a:

$$\text{Tr}^L(f) := \begin{array}{c} \text{---} x^{**} \text{---} \\ \text{---} f \bullet \text{---} \\ \text{---} x \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} x^* \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, 1)$$

- g の右量子トレース (right quantum trace) を以下で定義する:

$$\text{Tr}^R(g): 1 \xrightarrow{\text{coev}_x^R} *x \otimes x \xrightarrow{\text{Id}_{*x} \otimes g} *x \otimes **x \xrightarrow{\text{coev}_{**x}^R} 1$$

ストリング図式で書くと次のようになる：

^a $\text{ev}_{V*}^L = \text{ev}_{V**}^R$ を使った.

補題 F.6: 左量子トレースと右量子トレースの関係

rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ を与える. このとき, $\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x^{**})$ について

$$\text{Tr}^L(f) = \text{Tr}^R(f^*)$$

が成り立つ.

$$\mathrm{Tr}^{\mathrm{L}}(f) = \mathrm{Tr}^{\mathrm{R}}(f^*)$$

証明

$$\mathrm{Tr}^{\mathrm{L}}(f) = \text{feynman diagram: a circle with four arrows pointing clockwise, and a black dot on the left side with the label } f \text{ to its left.}$$

A diagram of a genus-2 surface, which is a torus with two holes. A marked point is indicated by a black dot on the inner boundary of the first hole, labeled f^* .

$$= \begin{array}{c} \curvearrowright \\ f^* \\ \curvearrowleft \end{array}$$

∴ (zig-zag equations)

ここで、補題 F.1 より $\text{ev}_{x^*}^L = \text{ev}_{x^{**}}^R$, $\text{coev}_{x^{**}}^L = \text{coev}_{x^{***}}^R$ が成り立つので、最右辺は $\text{Tr}^R(f^*)$ に等しい. ■

定義 F.20: 旋回構造

rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ を与える. \mathcal{C} の旋回構造 (pivotal structure) とは, モノイダル自然同型

$$\begin{array}{ccc} & \text{Id}_{\mathcal{C}} & \\ \mathcal{C} & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ p \\ \curvearrowleft \end{array} & \mathcal{C} \\ & (-)^{**} & \end{array}$$

のこと. ただし $(-)^{**}$ は【例 F.2.2】で構成したモノイダル関手である.

左量子トレースは $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x^{**})$ に対してしか定義されておらず, 不便なことがある. $f \in \text{End}_{\mathcal{C}}(x)$ に対してトレースを定義するためには旋回構造が必要である.

定義 F.21: トレース

rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ の旋回構造 p を与える. このとき, $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$ のトレース (trace) を以下で定義する:

$$\text{Tr}(f): 1 \xrightarrow{\text{coev}_x^L} x \otimes x^* \xrightarrow{(p \circ f) \otimes \text{Id}_{x^*}} x^{**} \otimes x^* \xrightarrow{\text{ev}_{x^*}^L} 1$$

補題 F.7: 旋回構造と双対

rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ の旋回構造 p を与える. このとき $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して以下が成り立つ:

- (1) $p_{x^*} = (p_x)^{*-1}$
- (2) $p_{x^{**}} = (p_x)^{**}$

証明 $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を1つ固定する.

- (1) $\text{Id}_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ は厳密なモノイダル関手であり, 【例 F.2.2】より $(-)^{**}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ もまた厳密なモノイダル関手であるから, $p: \text{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow (-)^{**}$ がモノイダル自然同型であることより $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ について以下の図式は可換になる:

$$\begin{array}{ccc}
x^* \otimes x & \xrightarrow{p_{x^*} \otimes p_x} & x^{***} \otimes x^{**} \\
= \downarrow & & \downarrow = \\
x^* \otimes x & \xrightarrow{p_{x^*} \otimes x} & (x^* \otimes x)^{**}
\end{array}$$

さらに, p の自然性から図式

$$\begin{array}{ccc}
x^* \otimes x & \xrightarrow{p_{x^*} \otimes x} & (x^* \otimes x^{**}) \\
\searrow \text{ev}_x^L & & \swarrow \text{ev}_{x^{**}}^L \\
& 1 &
\end{array}$$

も可換であるから,

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc}
& \curvearrowright & \\
p_{x^*} \bullet & & \bullet p_x \\
\downarrow x^* & & \downarrow x
\end{array}
=
\begin{array}{c}
\curvearrowright \\
\downarrow
\end{array}
\end{array}$$

が成り立つことが分かった. よって

$$\begin{aligned}
(p_x)^* \circ p_{x^*} &= \begin{array}{c} \downarrow \\ p_{x^*} \bullet \\ \downarrow \\ \begin{array}{c} \curvearrowright \\ p_x \bullet \\ \downarrow \end{array} \end{array} \\
&= \begin{array}{c} \begin{array}{c} \downarrow \\ \bullet \end{array} \curvearrowright \begin{array}{c} \bullet \\ \downarrow \end{array} \\ \downarrow \end{array} \\
&= \begin{array}{c} \downarrow \\ \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \downarrow \end{array} \end{array} \\
&= \text{Id}_{x^*}
\end{aligned}
\quad \because \text{ (zig-zag equations) }$$

と言える. $p_{x^*} \circ (p_x)^* = \text{Id}_{x^{***}}$ も同様.

(2) p の自然性より

$$(p_x)^{**} \circ p_x = p_{x^{**}} \circ p_x$$

と言える. $p_x: x \rightarrow x^{**}$ は同型射だから示された.

■

非常に重要な予想がある [ENO02, Conjecture 2.8., p.5]:

予想 F.1: フュージョン圏は pivotal

任意の半単純なテンソル圏は旋回構造を持つ.

本資料ではこの予想を認める.

定義 F.22: 量子次元

旋回構造 p を持つ rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ を与える. \mathcal{C} の対象 $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ の, p に関する量子次元 (quantum dimension) を以下で定義する:

$$\dim_p(x) := \text{Tr}^L(p_x) := \left(\begin{array}{c} x^{**} \\ \downarrow \\ p_x \bullet \\ \uparrow \\ x \end{array} \right) x^* \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, 1)$$

補題 F.1-(2) の証明より

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} x \\ \downarrow \\ \text{coev}_x^L \\ \uparrow \\ x^* \end{array} \right)^* &= \begin{array}{c} \text{ } \\ \downarrow \\ x^{**} \\ \downarrow \\ x^* \end{array} \begin{array}{c} \text{ } \\ \downarrow \\ x \\ \downarrow \\ x^* \end{array} \\ &= \begin{array}{c} \text{ev}_{x^*}^L \\ \downarrow \\ x^{**} \\ \downarrow \\ x^* \end{array} \\ &= \begin{array}{c} \text{ev}_x^L \\ \downarrow \\ x^* \\ \downarrow \\ x \end{array} \\ &= \begin{array}{c} x^* \\ \downarrow \\ \text{coev}_{x^*}^L \\ \uparrow \\ x^{**} \end{array} \end{aligned}$$

であるから, $(-)^{**}$ の関手性および補題 F.7-(2) により

$$\dim_p(x^{**}) = \begin{array}{c} x^{****} \\ \downarrow \\ p_{x^{**}} \bullet \\ \uparrow \\ x^{**} \end{array} x^{***} = \left(\begin{array}{c} x^{**} \\ \downarrow \\ p_x \bullet \\ \uparrow \\ x^* \end{array} x \right)^{**} = \dim_p(x)$$

が言える. ただし, $(-)^*$ の定義 (F.2.1) より $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, 1)$ に対して^{*3} $f^* = (l_1 \otimes \text{Id}_1) \circ (\text{Id}_1 \otimes f \otimes \text{Id}_1) \circ (\text{Id}_1 \otimes l_1^{-1}) = f$ が成り立つことを使った.

^{*3} $1^* = *1 = 1$ である.

定義 F.23: 球状圏

テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \mathrm{ev}^L, \mathrm{coev}^L, \mathrm{ev}^R, \mathrm{coev}^R)$ の **巡回構造** p が **球状** (spherical) であるとは, $\forall x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$\dim_p(x) = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \bullet p_x \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \end{array} x^* = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \bullet p_{x^*} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \end{array} x^{**} = \dim_p(x^*)$$

が成り立つことを言う.

定理 F.1: 球状圏における左/右量子トレース

球状圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R, p)$ およびその対象 $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を 1 つとる。
 このとき, $\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$ に対して以下が成り立つ:

$$\mathrm{Tr}^{\mathrm{L}}(p_x \circ f) = \mathrm{Tr}^{\mathrm{R}}(f \circ p_x^{-1})$$

証明 $f = \text{Id}_x$ の場合は補題 F.6 および補題 F.7-(1) から従う. 一般の f については [EGNO15, THEOREM 4.7.15] を参照. ■

F.3.2 フュージョン環・Frobenius-Perron 次元

$(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{coev}^L, \text{ev}^L, \text{coev}^R, \text{ev}^R)$ を体 \mathbb{K} 上の半単純多重フュージョン圏とする. \mathcal{C} の単純対象の同型類が成す有限集合を $\mathbf{Simp}(\mathcal{C})$ と書く.

このとき, $\text{Simp}(\mathcal{C})$ が生成する自由 \mathbb{Z} -加群 $\mathbb{Z}^{\oplus \text{Simp}(\mathcal{C})}$ の上に次のようにして積を入れることができる:

$$x \star y := [x \otimes y] \quad \forall x, y \in \text{Simp}(\mathcal{C}) \quad (\text{F.3.4})$$

\mathcal{C} は半単純なので、右辺に対して非負整数の族 $\{N_{xy}^c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}_{c \in \text{Simp}(\mathcal{C})}$ が存在して

$$x \star y = \sum_{c \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{xy}^c c \quad (\text{F.3.5})$$

と書ける．式 (F.3.5) のことを**フュージョン則** (fusion rule) と呼ぶ． $\mathbb{Z}^{\oplus \text{Simp}(\mathcal{C})}$ 上の積 (F.3.4) は明らかに結合則を充たし，単位元 $[1]$ を持つ^{*4}．このようにしてできる環 $(\mathbb{Z}^{\oplus \text{Simp}(\mathcal{C})}, \star, [1])$ のことを **Grothendieck 環** (Grothendieck ring) と呼び，**Gr**(\mathcal{C}) と書く．次の定義は，この構成を一般化したものである：

*4 命題 F.5 より C がテンソル圏ならば $1 \in \text{Simp}(C)$ であるが, 多重テンソル圏においては必ずしもそうではない. しかし, $1 \notin \text{Simp } C$ であったとしても C の半単純性から $[1] \in \mathbb{Z}^{\oplus \text{Simp}(C)}$ は成り立つ.

定義 F.24: \mathbb{Z}_+ -環・フュージョン環

$(\mathbb{Z}^{\oplus I}, \star, 1)$ を環とする. $A := \mathbb{Z}^{\oplus I}$ とおく. また, 部分集合 $I_0 \subset I$ を $1 := \sum_{i \in I_0} x_i b_i$ で定義する.

- (1) A の基底 $\{b_i\}_{i \in I}$ が \mathbb{Z}_+ -基底 (\mathbb{Z}_+ -basis) であるとは, $\forall i, j \in I$ に対してある非負整数の族 $\{N_{ij}^c \in \mathbb{Z}_+\}_{c \in I}$ が存在して

$$b_i \star b_j = \sum_{c \in I} N_{ij}^c b_c$$

を充たすことを言う.

- (2) 環 $(A, \star, 1)$ とその \mathbb{Z}_+ 基底の組 $(A, \star, 1, \{b_i\}_{i \in I})$ が \mathbb{Z}_+ -環 (\mathbb{Z}_+ -ring) であるとは, $1 \in A$ が $\{b_i\}_{i \in I}$ の非負係数線型結合で書けることを言う.
- (3) \mathbb{Z}_+ -環 $(A, \star, 1, \{b_i\}_{i \in I})$ が単位的 (unital) であるとは, $1 \in A$ が \mathbb{Z}_+ -基底であることを言う.
- (4) \mathbb{Z}_+ -環 $(A, \star, 1, \{b_i\}_{i \in I})$ が底的 (based) であるとは, 以下の2つの条件を充たすことを言う:

(based-1) ある対合射^a $(-)^*: I \longrightarrow I, i \longmapsto i^*$ が存在して, それに誘導される写像

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow A, \\ \sum_{i \in I} x_i b_i &\longmapsto \sum_{i \in I} x_i b_{i^*} \end{aligned}$$

が環の反対合準同型になる.

(based-2) 可換群の準同型

$$\begin{aligned} \tau: A &\longrightarrow \mathbb{Z}, \\ b_i &\longmapsto \begin{cases} 1, & i \in I_0 \\ 0, & i \notin I_0 \end{cases} \end{aligned}$$

が, $\forall i, j \in I$ に対して以下を充たす:

$$\tau(b_i \star b_j) = \delta_{i, j^*}$$

- (5) 多重フュージョン環 (multifusion ring) とは, 底的な \mathbb{Z}_+ -環 $(A, \star, 1, \{b_i\}_{i \in I})$ であって I が有限集合であるもののこと.
- (6) フュージョン環 (fusion ring) とは, 単位的な多重フュージョン環のこと.

^a i.e. $(-)^{**} = \text{Id}_I$

補題 F.8: Grothendieck 環は底的な \mathbb{Z}_+ -環

- (1) \mathcal{C} が半単純な多重テンソル圏 $\implies \text{Gr}(\mathcal{C})$ は底的な \mathbb{Z}_+ -環
- (2) \mathcal{C} が半単純なテンソル圏 $\implies \text{Gr}(\mathcal{C})$ は底的な単位的 \mathbb{Z}_+ -環
- (3) \mathcal{C} が多重フュージョン圏 $\implies \text{Gr}(\mathcal{C})$ は多重フュージョン環
- (4) \mathcal{C} がフュージョン圏 $\implies \text{Gr}(\mathcal{C})$ はフュージョン環

証明 (1)

補題 F.9: フュージョン環の性質

$(A, \star, 1, \{b_i\}_{i \in I})$ を **底的な \mathbb{Z}_+ -環** とする. また, \mathbb{K} を標数 0 の代数閉体とする. このとき, 以下が成り立つ:

(1) $\forall i, j, k \in I$ に対して,

$$N_{i,j}^{k*} = N_{ki}^{j*} = N_{jk}^{i*}$$

(2) 2 つの異なる環準同型 $\chi_1, \chi_2: A \rightarrow \mathbb{K}$ に対して,

$$\sum_{i \in I} \chi_1(b_i) \chi_2(b_{i*}) = 0$$

証明 (1)

$$\tau(b_i \star b_j \star b_k) = \sum_{l \in I} N_{ij}^l \tau(b_l \star b_k) = N_{ij}^{k*}$$

である. さらに, $(-)^*: I \rightarrow I$ が対合射であることから

$$\tau(b_i \star b_j) = \delta_{i,j*} = \delta_{j**,i*} = \delta_{j,i*} = \tau(b_j \star b_i)$$

が言えるので, 示された.

(2) $P := \sum_{i \in I} \chi_1(b_i) b_{i*} \in A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{K}$ とおく. このとき $\forall j \in I$ に対して

$$\begin{aligned} b_j \star P &= \sum_{i \in I} \chi_1(b_i) b_j \star b_{i*} \\ &= \sum_{i, k \in I} \chi_1(b_i) N_{ji*}^k b_k \\ &= \sum_{i, k \in I} \chi_1(b_i) N_{k*j}^i b_k && \because (1) \\ &= \sum_{k \in I} \chi_1 \left(\sum_{i \in I} N_{k*j}^i b_i \right) b_k \\ &= \sum_{k \in I} \chi_1(b_{k*} \star b_j) b_k \\ &= \chi_1(b_j) P \end{aligned}$$

が成り立つ. 両辺に χ_2 を作用させることで, $\forall j \in I$ に対して

$$\chi_2(b_j) \left(\sum_{i \in I} \chi_1(b_i) \chi_2(b_{i*}) \right) = \chi_1(b_j) \left(\sum_{i \in I} \chi_1(b_i) \chi_2(b_{i*}) \right)$$

が成り立たねばならないことが分かる. ところが $\chi_1 \neq \chi_2$ なので,

$$\sum_{i \in I} \chi_1(b_i) \chi_2(b_{i*}) = 0$$

である。

■

定義 F.25: Frobenius-Perron 次元

$x \in \text{Simp}(\mathcal{C})$ の **Frobenius-Perron 次元** (Frobenius-Perron dimension) とは, 非負整数値行列 $[N_{xb}^c]_{1 \leq b, c \leq |\text{Simp}(\mathcal{C})|}$ の最大の実固有値 $\mathbf{FPdim}_{\mathcal{C}}(x) \in \mathbb{C}$ のこと。

F.3.3 F -シンボル

多重フュージョン圏は半単純かつ有限なので, 補題 3.1-(1) および極限・余極限と Hom の交換, フュージョン則 (F.3.5) から

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x \otimes y, z) \cong \bigoplus_{w \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{xy}^w \text{Hom}_{\mathcal{C}}(w, z) \cong \mathbb{K}^{\oplus N_{xy}^z}$$

が $\forall x, y, z \in \text{Simp } \mathcal{C}$ に対して成り立つ. i.e. $\dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x \otimes y, z) = N_{xy}^z$ である*5. よって

$$\begin{aligned} (x \otimes y) \otimes z &\cong \bigoplus_{w, u \in \text{Simp } \mathcal{C}} N_{xy}^w N_{wz}^u u \\ &\cong \bigoplus_{w, u \in \text{Simp } \mathcal{C}} \dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x \otimes y, w) \dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(w \otimes z, u) u \\ x \otimes (y \otimes z) &\cong \bigoplus_{w, u \in \text{Simp } \mathcal{C}} N_{wx}^u N_{yz}^w u \\ &\cong \bigoplus_{w, u \in \text{Simp } \mathcal{C}} \dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(w \otimes x, u) \dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y \otimes z, w) u \end{aligned}$$

が成り立つが, associator による自然同型 $(x \otimes y) \otimes z \cong x \otimes (y \otimes z)$ により

$$\begin{aligned} &\sum_{w \in \text{Simp } \mathcal{C}} \dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x \otimes y, w) \dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(w \otimes z, u) \\ &= \sum_{w \in \text{Simp } \mathcal{C}} \dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(w \otimes x, u) \dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y \otimes z, w) \end{aligned}$$

と言える. ここから \mathbb{K} -ベクトル空間としての同型

$$\Phi_u^{xyz}: \bigoplus_w \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x \otimes y, w) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(w \otimes z, u) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_w \text{Hom}_{\mathcal{C}}(w \otimes x, u) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y \otimes z, w) \quad (\text{F.3.6})$$

が存在することが分かる. この同型写像の第 (a, b) 成分

$$(\Phi_u^{xyz})_{ab}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x \otimes y, a) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a \otimes z, u) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(b \otimes x, u) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y \otimes z, b)$$

のことを **6j-シンボル** (6j-symbol) と呼ぶ.

特に \mathbb{K} が代数閉体のときは, Müger 半単純性および補題 F.3 より, (F.3.6) の同型写像は

$$F_u^{xyz}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}((x \otimes y) \otimes z, u) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x \otimes (y \otimes z), u)$$

*5 この次元は \mathbb{K} -ベクトル空間としての次元である.

と等価である．この同型写像の行列要素を **F-シンボル** (F -symbol) と呼ぶ．ストリング図式として書くと， F -シンボルとは次のようにして定義される $(F_u^{xyz})_{(a; v_1, v_2), (b; v_3, v_4)} \in \mathbb{K}$ のことである：

$$=: \sum_{\substack{b \in \text{Simp}(\mathcal{C}), \\ v_3 \in \text{Basis}(y \otimes z, b), \\ v_4 \in \text{Basis}(x \otimes b, u)}} (F_u^{xyz})_{(a; v_1, v_2), (b; v_3, v_4)}$$

ただし， $\forall x, y, z \in \text{Simp}(\mathcal{C})$ に対して定まる \mathbb{K} -ベクトル空間 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x \otimes y, z)$ の基底を $\text{Basis}(x \otimes y, z)$ と書いた．

F.3.4 ユニタリフュージョン圏

定義 F.26: ユニタリフュージョン圏

ユニタリフュージョン圏 (unitary fusion category) とは，**フュージョン圏**であって**ユニタリモノイダル圏**でもあるもののことを言う．

ユニタリ構造の定義と**モノイダル圏**のテンソル積 \otimes は定義のレベルでは全く別のものであるが，**左/右双対**に関して強く相互作用する．特に，以下で示す命題 F.6 により，**ユニタリテンソル圏**は自動的に**球状テンソル圏**になる．

補題 F.10: ユニタリモノイダル圏における右双対

rigid な**ユニタリモノイダル圏** $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \dagger)$ の対象 $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が**左双対** $(x^*, \text{coev}_x^L, \text{ev}_x^L)$ を持つとする．このとき， $(x^*, \text{ev}_x^{L\dagger}, \text{coev}_x^{L\dagger})$ は x の右双対である．

証明 (**zig-zag equations**) を示す．実際，

$$\begin{aligned} (\text{coev}_x^{L\dagger} \otimes \text{Id}_x) \circ (\text{Id}_x \otimes \text{ev}_x^{L\dagger}) &= (\text{coev}_x^{L\dagger} \otimes \text{Id}_x^\dagger) \circ (\text{Id}_x^\dagger \otimes \text{ev}_x^{L\dagger}) \\ &= (\text{coev}_x^L \otimes \text{Id}_x)^\dagger \circ (\text{Id}_x \otimes \text{ev}_x^L)^\dagger \\ &= ((\text{Id}_x \otimes \text{ev}_x^L) \circ (\text{coev}_x^L \otimes \text{Id}_x))^\dagger \\ &= \text{Id}_x^\dagger = \text{Id}_x, \\ (\text{Id}_{x^*} \otimes \text{coev}_x^{L\dagger}) \circ (\text{ev}_x^{L\dagger} \otimes \text{Id}_{x^*}) &= ((\text{ev}_x^L \otimes \text{Id}_{x^*}) \circ (\text{Id}_{x^*} \otimes \text{coev}_x^L))^\dagger \\ &= \text{Id}_{x^*} \end{aligned}$$

が成り立つ． ■

命題 F.6: ユニタリテンソル圏における球状構造

ユニタリテンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{coev}^L, \text{ev}^L, \dagger)$ における旋回構造

$$p_x := (\text{coev}_x^{L\dagger} \otimes \text{Id}_{x^{**}}) \circ (\text{Id}_x \otimes \text{coev}_{x^*}^L): x \longrightarrow x^{**}$$

が球状構造になる必要十分条件は, $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

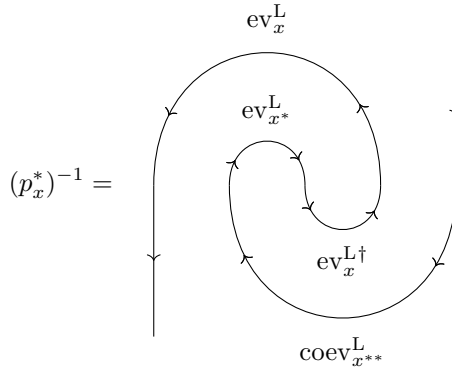
$$\text{coev}_x^{L\dagger} \circ \text{coev}_x^L = \text{ev}_x^L \circ \text{ev}_x^{L\dagger}$$

が成り立つことである.

証明

$$\begin{aligned} \dim_p(x) &= \text{ev}_{x^*}^L \circ (p_x \otimes \text{Id}_{x^*}) \circ \text{coev}_x^L \\ &= \text{coev}_x^{L\dagger} \circ \text{coev}_x^L \end{aligned}$$

ところで,



であるから,

$$\begin{aligned} \dim_p(x^*) &= \text{Tr}^L((p_x^*)^{-1}) && \because \text{補題 F.7-(1)} \\ &= \text{ev}_x^L \circ \text{ev}_x^{L\dagger} \end{aligned}$$

と計算できる. よって

$$\dim_p(x) = \dim_p(x^*) \iff \text{coev}_x^{L\dagger} \circ \text{coev}_x^L = \text{ev}_x^L \circ \text{ev}_x^{L\dagger}$$

■

coevaluation/evaluation を適切に選ぶことで, いつでも命題 F.6 の条件を充たすようにできる. 実際, $\text{coev}_x^L, \text{ev}_x^L$ が $x, x^* \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に関する (co)evaluation ならば, $\forall \lambda \in \mathbb{C}^\times$ に対して $\lambda \text{coev}_x^L, \lambda^{-1} \text{ev}_x^L$ もまた **(zig-zag equations)** を充たすので x, x^* に関する (co)evaluation である. よって

$$|\lambda|^2 = \sqrt{\frac{\text{ev}_x^L \circ \text{ev}_x^{L\dagger}}{\text{coev}_x^{L\dagger} \circ \text{coev}_x^L}}$$

を充たすように λ を選べば良い [Yam04, LEMMA 3.9., p.9].

定義 F.27: balanced なユニタリテンソル圏

ユニタリテンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{coev}^L, \text{ev}^L, \dagger)$ が **balanced** であるとは, $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$\text{coev}_x^{L\dagger} \circ \text{coev}_x^L = \text{ev}_x^L \circ \text{ev}_x^{L\dagger}$$

が成り立つこと. このとき, 命題 F.6 の構成によって \mathcal{C} は球状圏になる.

F.3.5 ユニタリフュージョン圏における Frobenius-Perron 次元

標数 0 の代数閉体 \mathbb{K} 上のフュージョン圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{coev}^L, \text{ev}^L, \text{coev}^R, \text{ev}^R)$ とその上の旋回構造 p を考える. 圏 \mathcal{C} の圏論的次元 (categorical dimension) を

$$\dim(\mathcal{C}) := \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \text{Tr}^L(p_x) \circ \text{Tr}^L((p_x^{-1})^*) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, 1) = \mathbb{K}$$

で定義し^{*6}, Frobenius-Perron 次元について

$$\text{FPdim}(\mathcal{C}) := \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \text{FPdim}(x)^2$$

とおく.

定義 F.28: 擬ユニタリフュージョン圏

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ とする. このときフュージョン圏 \mathcal{C} が擬ユニタリ (pseudo-unitary) であるとは,

$$\dim(\mathcal{C}) = \text{FPdim}(\mathcal{C})$$

が成り立つことを言う [EGNO15, DEFINITION 9.4.4., p.283].

命題 F.7: 擬ユニタリフュージョン圏における球状構造

擬ユニタリフュージョン圏 \mathcal{C} は一意的な球状構造 p を持つ.

さらに, その球状構造 p は $\forall x \in \text{Simp}(\mathcal{C})$ に対して $\dim_p(x) = \text{FPdim}_{\mathcal{C}}(x)$ を満たす.

証明 [EGNO15, PROPOSITION 9.5.1., p.284] ■

命題 F.8: ユニタリフュージョン圏は擬ユニタリ

ユニタリフュージョン圏は擬ユニタリである.

証明 ■

! 一般のフュージョン圏においては, 量子次元と Frobenius-Perron 次元が一致するとは限らない. 命題 F.7 および F.8 によって, ユニタリフュージョン圏においては一致することが保証されている.

^{*6} 右辺は旋回構造の取り方に依存しない [EGNO15, p.179].

F.3.6 Deligne のテンソル積

定義 F.29: Deligne のテンソル積

\mathcal{C}, \mathcal{D} を局所有限な \mathbb{K} -線形アーベル圏とする. Deligne のテンソル積 (Deligne's tensor product) とは, 以下の性質をみたす \mathbb{K} -線形アーベル圏 $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ と双右完全関手 $\boxtimes: \mathcal{C} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ の組み $(\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}, \boxtimes)$ のこと:

(普遍性)

任意の双右完全関手 $F: \mathcal{C} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{A}$ に対し, ある双右完全関手 $\bar{F}: \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{A}$ が一意的に存在して $\bar{F} \circ \boxtimes = F$ を充たす.

命題 F.9: Deligne のテンソル積の基本性質

- (1) Deligne のテンソル積は存在し, それ自身が局所有限な \mathbb{K} -線形アーベル圏になる.
- (2) 関手 $\boxtimes: \mathcal{C} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ は双完全であり,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x_1, y_1) \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}}(x_1 \boxtimes x_2, y_1 \boxtimes y_2)$$

を充たす.

- (3) \mathcal{C}, \mathcal{D} が (多重) 環圏/(多重) テンソル圏ならば $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ は (多重) 環圏/(多重) テンソル圏である.

証明 (1) [EGNO15, PROPOSITION 1.11.2., p.15]

(2) [EGNO15, PROPOSITION 1.11.2., p.15]

(3) [EGNO15, PROPOSITION 4.6.1., p.73]

■

F.4 加群圏

F.4.1 左/右加群圏

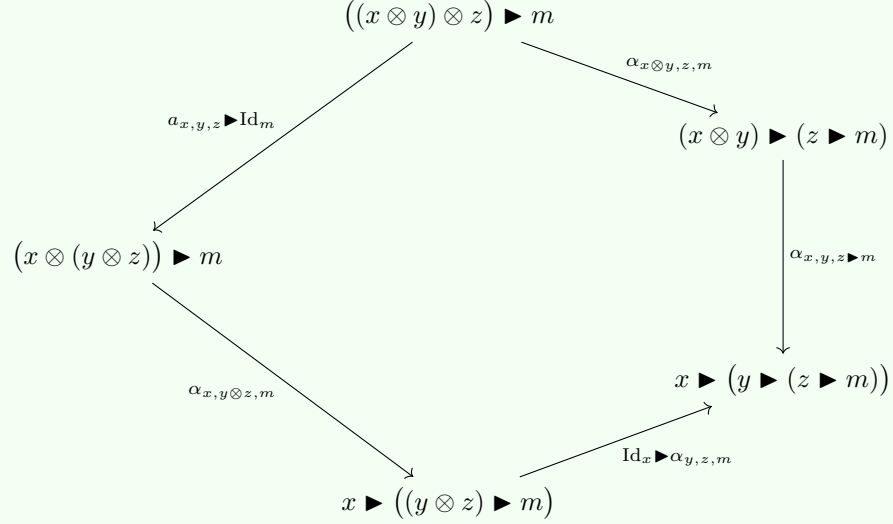
定義 F.30: 左/右加群圏

$(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r)$ をモノイダル圏とする. 左 \mathcal{C} -加群圏 (left \mathcal{C} -module category) \mathcal{M} は, 以下のデータからなる:

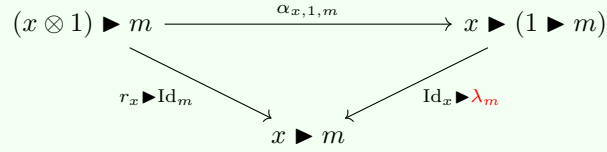
- 圏 \mathcal{M}
- 左加群積 (left module product) と呼ばれる関手 $\blacktriangleright: \mathcal{C} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$
- left actor と呼ばれる自然同型 $\{\alpha_{x, y, m}: (x \otimes y) \blacktriangleright m \longrightarrow x \blacktriangleright (y \blacktriangleright m)\}_{x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}), m \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})}$
- left unitor と呼ばれる自然同型 $\{\lambda_m: 1 \blacktriangleright m \longrightarrow m\}_{m \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})}$

これらは以下の条件を充たさねばならない:

(IMod-1) $\forall x, y, z \in \text{Ob}(\mathcal{C}), \forall m \in \text{Ob}(\mathcal{M})$ に対して以下の図式を可換にする：



(IMod-2) $\forall x \in \mathcal{C}, \forall m \in \mathcal{M}$ に対して以下の図式を可換にする：



^a 記号として \circ を使うこともある (参考：<https://ncatlab.org/nlab/show/action+of+a+monoidal+category>).

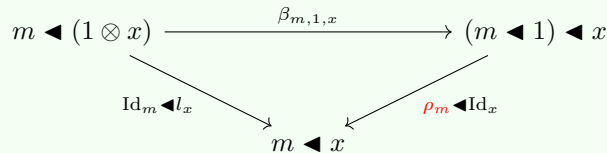
$(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r)$ をモノイダル圏とする. 右 \mathcal{C} -加群圏 \mathcal{M} は, 以下のデータからなる：

- 圏 \mathcal{M}
- 右加群積 (left module product) と呼ばれる関手^a $\blacktriangleright: \mathcal{C} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$
- right actor と呼ばれる自然同型 $\{\beta_{m, x, y}: m \blacktriangleleft (x \otimes y) \longrightarrow (m \blacktriangleleft x) \blacktriangleleft y\}_{x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C}), m \in \text{Ob}(\mathcal{M})}$
- right unitor と呼ばれる自然同型 $\{\rho_m: m \blacktriangleleft 1 \longrightarrow m\}_{m \in \text{Ob}(\mathcal{M})}$

これらは以下の条件を充たさねばならない：

(rMod-1) $\forall x, y, z \in \text{Ob}(\mathcal{C}), \forall m \in \text{Ob}(\mathcal{M})$ に対して以下の図式を可換にする：

(rMod-2) $\forall x \in \mathcal{C}, \forall m \in \mathcal{M}$ に対して以下の図式を可換にする：



^a 記号として \circ を使うこともある (参考：<https://ncatlab.org/nlab/show/action+of+a+monoidal+category>).

\mathcal{C} が多重テンソル圏である場合は, 左/右加群積が射について \mathbb{K} -双線形であること, および両方の引数につ

いて完全関手になっていることを要請する*7.

定義 F.31: 加群関手

$(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r)$ をモノイダル圏, $(\mathcal{M}_i, \blacktriangleright_i, \alpha_i, \lambda_i)$ $w/ i = 1, 2$ を左 \mathcal{C} -加群圏とする. 左 \mathcal{C} -加群関手 (left \mathcal{C} -module functor) は, 以下のデータからなる:

- 関手 $F: \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$
- 自然同型 $\{s_{x,m}: F(x \blacktriangleright_1 m) \rightarrow x \blacktriangleright_2 F(m)\}_{x \in \text{Ob}(\mathcal{C}), m \in \text{Ob}(\mathcal{M}_1)}$

これらは以下の条件を充たさねばならない:

(pentagon identity) $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C}), \forall m \in \text{Ob}(\mathcal{M}_1)$ に対して以下の図式を可換にする:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & F((x \otimes y) \blacktriangleright_1 m) & & \\
 & \swarrow F(\alpha_{1x,y,m}) & \searrow s_{x \otimes y, m} & & \\
 & F(x \blacktriangleright_1 (y \blacktriangleright_1 m)) & & (x \otimes y) \blacktriangleright_2 F(m) & \\
 & \searrow s_{x,y \blacktriangleright_1 m} & & \downarrow \alpha_{2x,y,F(m)} & \\
 & x \blacktriangleright_2 F(y \blacktriangleright_1 m) & \xrightarrow{\text{Id}_x \blacktriangleright_2 s_{y,m}} & x \blacktriangleright_2 (y \blacktriangleright_2 F(m)) &
 \end{array}$$

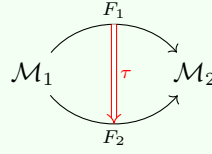
(triangle identity) $\forall m \in \mathcal{M}_1$ に対して以下の図式を可換にする:

$$\begin{array}{ccc}
 F(1 \blacktriangleright_1 m) & \xrightarrow{s_{1,m}} & 1 \otimes_2 F(m) \\
 \searrow F(\lambda_{1m}) & & \swarrow \lambda_{2F(m)} \\
 & F(m) &
 \end{array}$$

定義 F.32: 加群圏の自然変換

$(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r)$ をモノイダル圏, $(\mathcal{M}_i, \blacktriangleright_i, \alpha_i, \lambda_i)$ $w/ i = 1, 2$ を左 \mathcal{C} -加群圏, $(F_i: \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2, s_i)$ $w/ i = 1, 2$ を \mathcal{C} -加群関手とする. このとき, 自然変換

*7 実際には, 第 1/第 2 引数について完全になっていさえいれば残りの引数についても自動的に完全になる [EGNO15, EXERCISE7.3.2, p.135]



が \mathcal{C} -加群圏の自然変換であるとは, $\forall x \in \mathcal{C}, \forall m \in \mathcal{M}_1$ に対して以下の図式が可換になること:

$$\begin{array}{ccc}
 F_1(x \blacktriangleright_1 m) & \xrightarrow{s_{1x,m}} & x \blacktriangleright_2 F_1(m) \\
 \tau_x \blacktriangleright_1 m \downarrow & & \downarrow \tau_x \blacktriangleright_2 \text{Id}_m \\
 F_2(x \blacktriangleright_1 m) & \xrightarrow{s_{2x,m}} & x \blacktriangleright_2 F_2(m)
 \end{array}$$

(action の保存)

定義 F.33: 加群圏の完全性

十分射影的対象を持つ多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ を与える.

局所有限な左 \mathcal{C} -加群圏 $(\mathcal{M}, \blacktriangleright, \alpha, \lambda)$ が完全 (exact) であるとは, 任意の射影的対象 $p \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ および任意の対象 $m \in \mathcal{M}$ に対して $p \blacktriangleright m$ が \mathcal{M} の射影的対象になることを言う.

F.4.2 両側加群圏

定義 F.34: 両側加群圏

$(\mathcal{C}_i, \otimes_i, 1, a_i, l_i, r_i)$ $w/ i = 1, 2$ をモノイダル圏とする. $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ -両側加群圏 $((\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)\text{-bimodule category}) \mathcal{M}$ は, 以下のデータからなる:

- 圏 \mathcal{M}
- 左加群積と呼ばれる関手 $\blacktriangleright: \mathcal{C}_1 \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$
- 右加群積と呼ばれる関手 $\blacktriangleleft: \mathcal{M} \times \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{M}$
- left actor と呼ばれる自然同型

$$\{\alpha_{x_1, y_1, m}: (x_1 \otimes y_1) \blacktriangleright m \rightarrow x_1 \blacktriangleright (y_1 \blacktriangleright m)\}_{x_1, y_1 \in \text{Ob}(\mathcal{C}_1), m \in \text{Ob}(\mathcal{M})}$$

- left unitor と呼ばれる自然同型 $\{\lambda_m: 1 \blacktriangleright m \rightarrow m\}_{m \in \text{Ob}(\mathcal{M})}$
- right actor と呼ばれる自然同型

$$\{\beta_{m, x_2, y_2}: m \blacktriangleleft (x_2 \otimes y_2) \rightarrow (m \blacktriangleleft x_2) \blacktriangleleft y_2\}_{x_2, y_2 \in \text{Ob}(\mathcal{C}_2), m \in \text{Ob}(\mathcal{M})}$$

- right unitor と呼ばれる自然同型 $\{\rho_m: m \blacktriangleleft 1 \rightarrow m\}_{m \in \text{Ob}(\mathcal{M})}$
- middle actor と呼ばれる自然同型

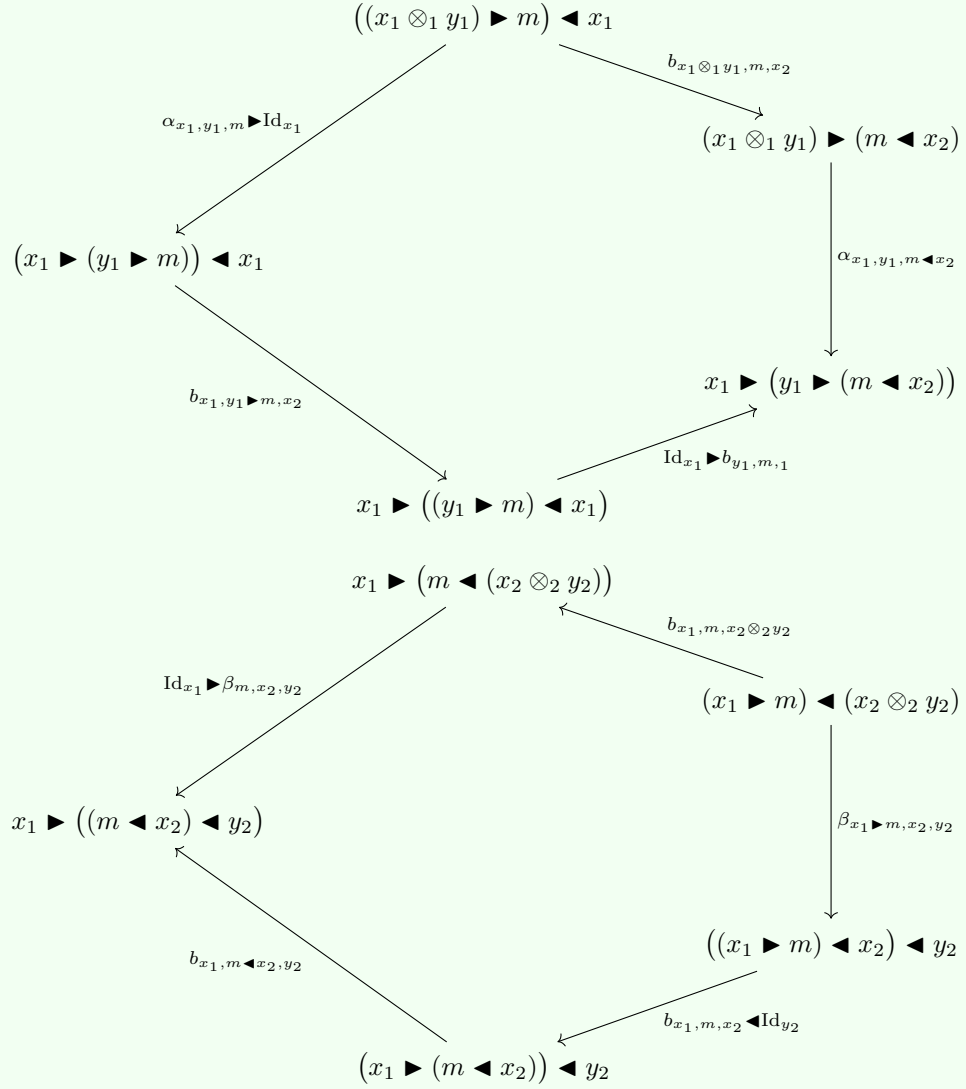
$$\{b_{x_1, m, x_2}: (x_1 \blacktriangleright m) \blacktriangleleft x_2 \rightarrow x_1 \blacktriangleright (m \blacktriangleleft x_2)\}_{x_1 \in \text{Ob}(\mathcal{C}_1), x_2 \in \text{Ob}(\mathcal{C}_2), m \in \text{Ob}(\mathcal{M})}$$

これらは以下の条件を満たす:

(Bimod-1) 組 $(\mathcal{M}, \blacktriangleright, \alpha, \lambda)$ は左 \mathcal{C}_1 -加群圏である.

(Bimod-2) 組 $(\mathcal{M}, \blacktriangleleft, \beta, \rho)$ は右 \mathcal{C}_2 -加群圏である.

(Bimod-3) $\forall x_i, y_i \in \text{Ob}(\mathcal{C}_i), \forall m \in \text{Ob}(\mathcal{M})$ に対して以下の図式を可換にする：



F.4.3 代数と加群

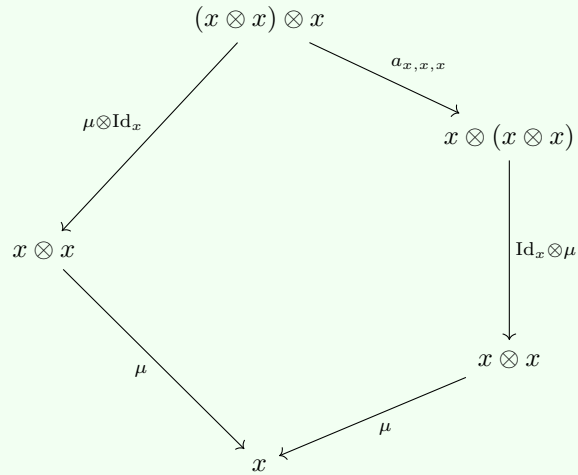
定義 F.35: 代数対象

多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ を与える. \mathcal{C} の代数対象 (algebra object) x とは, 以下のデータからなる：

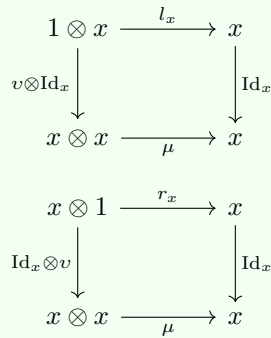
- \mathcal{C} の対象 $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$
- 乗法 (multiplication) と呼ばれる \mathcal{C} の射 $\mu: x \otimes x \longrightarrow x$
- 単位 (unit) と呼ばれる \mathcal{C} の射 $v: 1 \longrightarrow x$

これらは以下の条件を充たさねばならない：

(associativity)



(unitality)

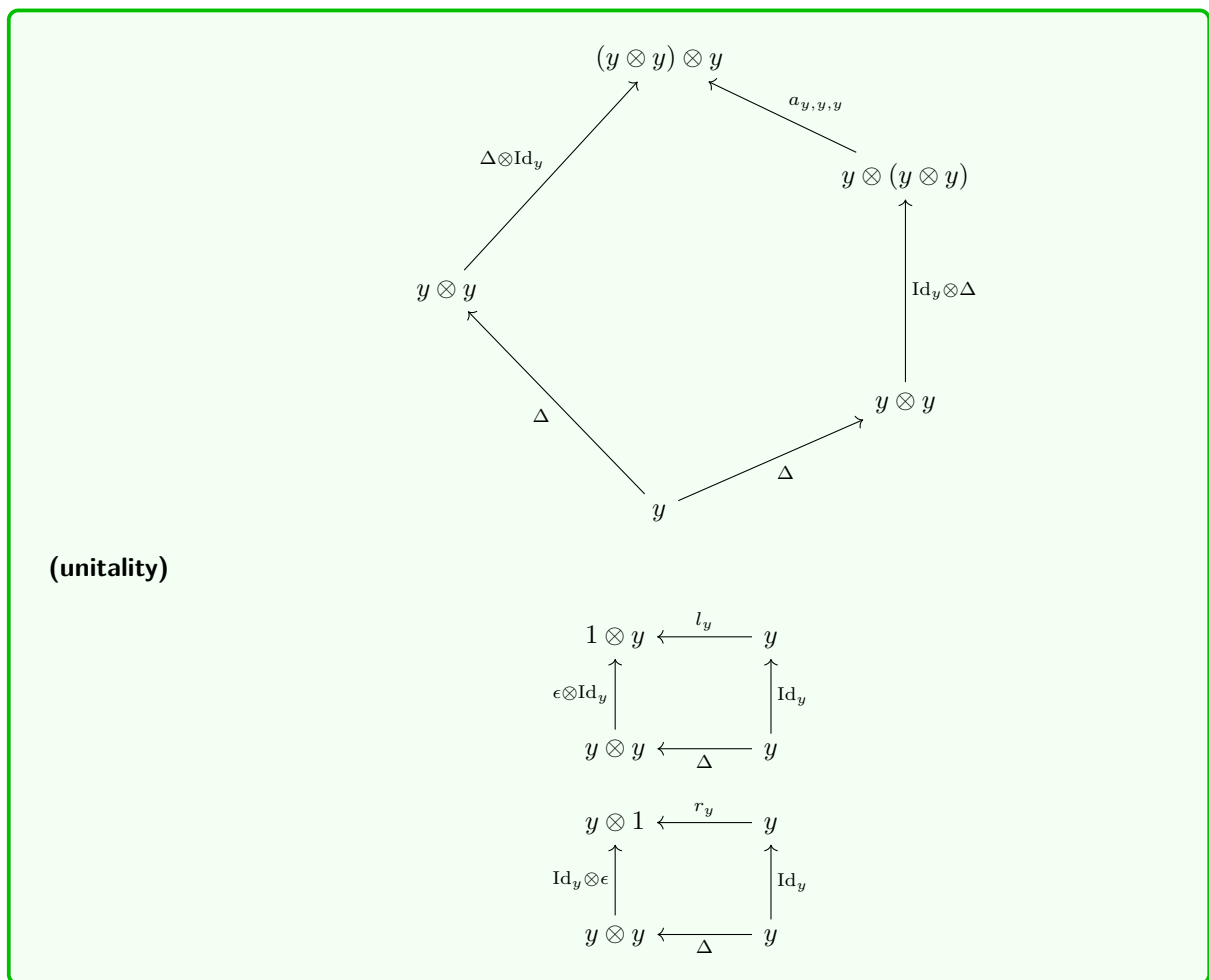


多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ を与える. \mathcal{C} の余代数対象 (coalgebra object) y とは, 以下のデータからなる：

- \mathcal{C} の対象 $y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$
- 余乗法 (comultiplication) と呼ばれる \mathcal{C} の射 $\Delta: y \longrightarrow y \otimes y$
- 余単位 (counit) と呼ばれる \mathcal{C} の射 $\epsilon: y \longrightarrow 1$

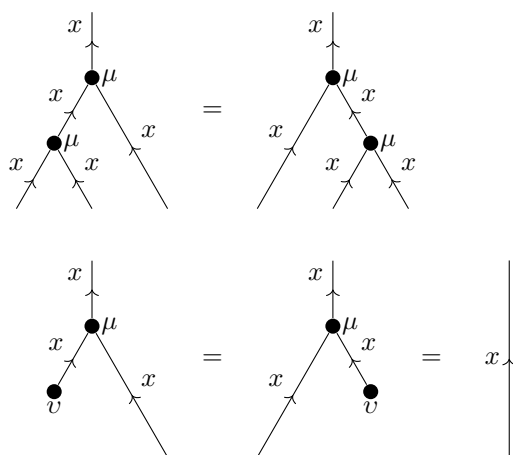
これらは以下の条件を充たさねばならない：

(coassociativity)

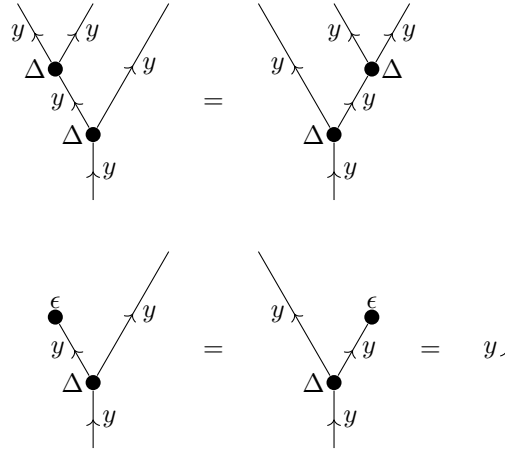


(unitality)

ストリング図式で代数対象 (x, μ, ν) の (associativity), (unitality) を書くと, それぞれ



となり, 余代数対象 (y, Δ, ϵ) の **(associativity)**, **(unitality)** を書くと



となる.

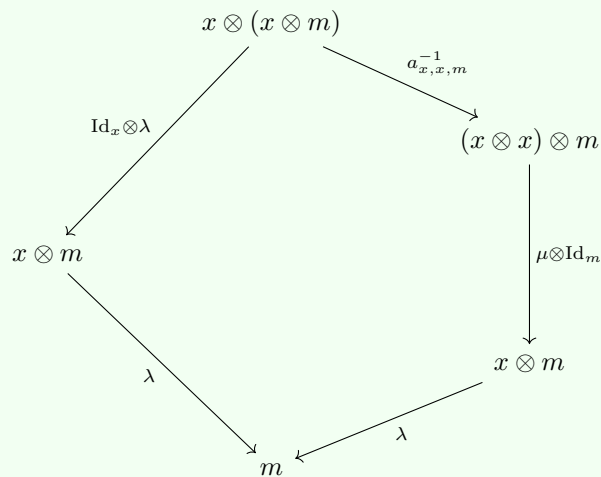
定義 F.36: 加群対象

多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ および \mathcal{C} の代数対象 (x, μ, ν) を与える.
 \mathcal{C} における, 左 x -加群対象 (right x -module object) m とは, 以下のデータからなる:

- \mathcal{C} の対象 $m \in \text{Ob}(\mathcal{C})$
- 左作用 (right action) と呼ばれる \mathcal{C} の射 $\lambda: x \otimes m \longrightarrow m$

これらは以下の条件を充たさねばならない:

(associativity)



(unitality)

$$\begin{array}{ccc}
 1 \otimes m & \xrightarrow{l_m} & m \\
 v \otimes \text{Id}_m \downarrow & & \downarrow \text{Id}_m \\
 x \otimes m & \xrightarrow{\lambda} & m
 \end{array}$$

多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ および \mathcal{C} の代数対象 (x, μ, v) を与える.
 \mathcal{C} における, 右 x -加群対象 (right x -module object) m とは, 以下のデータからなる:

- \mathcal{C} の対象 $m \in \text{Ob}(\mathcal{C})$
- 右作用 (right action) と呼ばれる \mathcal{C} の射 $\rho: m \otimes x \rightarrow m$

これらは以下の条件を満たさねばならない:

(associativity)

$$\begin{array}{ccccc}
 & (m \otimes x) \otimes x & & & \\
 & \swarrow \rho \otimes \text{Id}_x & & \searrow a_{m,x,x} & \\
 m \otimes x & & & & m \otimes (x \otimes x) \\
 & \searrow \rho & & \downarrow \text{Id}_x \otimes \rho & \\
 & m & & m \otimes x & \\
 & \swarrow \rho & & \swarrow \rho & \\
 & m & & &
 \end{array}$$

(unitarity)

$$\begin{array}{ccc}
 m \otimes 1 & \xrightarrow{r_m} & m \\
 \text{Id}_m \otimes v \downarrow & & \downarrow \text{Id}_m \\
 m \otimes x & \xrightarrow{\rho} & m
 \end{array}$$

定義 F.37: 代数および加群の準同型

多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ および \mathcal{C} の 2 つの代数対象 (x_i, μ_i, ν_i) $w/ i = 1, 2$ を与える.

このとき, \mathcal{C} の射 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x_1, x_2)$ が代数準同型 (algebra homomorphism) であるとは, 以下の条件を満たすことを言う:

(乗法の保存)

$$\begin{array}{ccc} x_1 \otimes x_1 & \xrightarrow{f \otimes f} & x_2 \otimes x_2 \\ \mu_1 \downarrow & & \downarrow \mu_2 \\ x_1 & \xrightarrow{f} & x_2 \end{array}$$

(単位の保存)

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\nu_1} & A_1 \\ & \searrow \nu_2 & \swarrow f \\ & A_2 & \end{array}$$

- 多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$
- \mathcal{C} の代数対象 (x, μ, ν)
- \mathcal{C} の 2 つの左 x -加群対象 (m_i, λ_i) $w/ i = 1, 2$

を与える.

このとき, \mathcal{C} の射 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(m_1, m_2)$ が左 x -加群準同型 (left x -module homomorphism) であるとは, 以下の条件を満たすことを言う:

(左作用の保存)

$$\begin{array}{ccc} x \otimes m_1 & \xrightarrow{\text{Id}_x \otimes f} & x \otimes m_2 \\ \lambda_1 \downarrow & & \downarrow \lambda_2 \\ x_1 & \xrightarrow{f} & x_2 \end{array}$$

しばらくの間 多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ および \mathcal{C} の代数対象 (x, μ, ν) を 1 つ固定する.

2 つの左 x -加群対象 (m_i, λ_i) $w/ i = 1, 2$ の間の左 x -加群の準同型全体がなす集合を $\text{Hom}_x(m_1, m_2) \subset \text{Hom}_{\mathcal{C}}(m_1, m_2)$ と書くと, これは部分 \mathbb{K} -ベクトル空間をなす. さらに準同型の合成は準同型であるから, アーベル圏 $x\text{-Mod}_{\mathcal{C}}$ を次のようにして構成することができる:

- \mathcal{C} における左 x -加群対象を対象とする.
- 左 x -加群の準同型を射とする.

同様に \mathcal{C} における右 x -加群対象がなす圏 $\text{Mod}_{\mathcal{C}}\text{-}x$ を定義できる.

左加群圏と $\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x}$ の間には関係がある．今， \mathcal{C} における任意の右 x -加群対象 (m, ρ) および \mathcal{C} の任意の対象 $y \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ を与える．すると， $y \otimes m \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ と

$$\rho_{y \otimes m} : (y \otimes m) \otimes x \xrightarrow{a_{y,m,x}} y \otimes (m \otimes x) \xrightarrow{\mathrm{Id}_y \otimes \rho} y \otimes m$$

の組み $(y \otimes m, \rho_{y \otimes m})$ は右 x -加群になる．i.e. $(y \otimes m, \rho_{y \otimes m}) \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x})$ である．この構成により関手

$$\blacktriangleright : \mathcal{C} \times \mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x} \longrightarrow \mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x} \quad (\text{F.4.1})$$

が定義できる．さらに， \mathcal{C} が元々持っていた associator と unitors に関しては， $\forall (m, \rho) \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x})$ ， $\forall y, z \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$\begin{aligned} a_{y,z,m} : (y \otimes z) \blacktriangleright m &\longrightarrow y \blacktriangleright (z \blacktriangleright m) \\ l_y : 1 \blacktriangleright m &\longrightarrow m \end{aligned}$$

が自然な^{*8}右 x -加群の同型になる．

命題 F.10: $\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x}$ は左加群圏

多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \mathrm{ev}^L, \mathrm{coev}^L, \mathrm{ev}^R, \mathrm{coev}^R)$ および \mathcal{C} の代数対象 (x, μ, ν) を1つ与える．

このとき，組み^a $(\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x}, \blacktriangleright, a, l)$ は左 \mathcal{C} -加群圏である．

^a $\blacktriangleright : \mathcal{C} \times \mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x} \longrightarrow \mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x}$ は (F.4.1) で定義した関手である．

証明 $\forall y, z, w \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ ， $\forall (m, \rho) \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x})$ に対して (IMOD-1)，(IMOD-2) が成り立つことを示せば良い． ■

定義 F.38: 代数上のテンソル積

- 多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \mathrm{ev}^L, \mathrm{coev}^L, \mathrm{ev}^R, \mathrm{coev}^R)$ および \mathcal{C} の代数対象 (x, μ, ν)
- \mathcal{C} における右 x -加群対象 $(m, \rho) \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x})$
- \mathcal{C} における左 x -加群対象 $(n, \lambda) \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}x})$

を与える．このとき， m と n の x 上のテンソル積 (tensor product over x) $m \otimes_x n \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ を，以下の図式のコイコライザとして定義する：

$$m \otimes x \otimes n \xrightarrow[\mathrm{Id}_m \otimes \lambda]{\rho \otimes \mathrm{Id}_n} m \otimes n \xrightarrow{\pi} m \otimes_x n$$

F.4.4 両側加群

^{*8} $a := \{a_{y,z,m}\}_{y,z \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C}), m \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x})}$ が自然同型．

定義 F.39: 両側加群

多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ および \mathcal{C} の 2 つの代数対象 (x_i, μ_i, ν_i) を与える. \mathcal{C} における (x_1, x_2) -両側加群対象 $((x_1, x_2)\text{-bimodule object})$ とは, 以下のデータからなる:

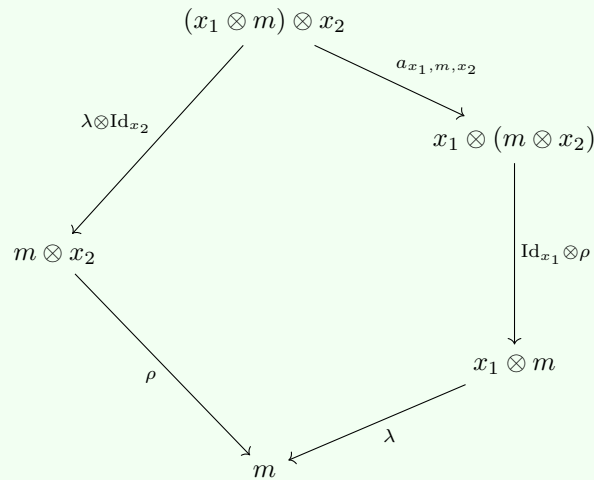
- \mathcal{C} の対象 $m \in \text{Ob}(\mathcal{C})$
- 左作用 (left action) と呼ばれる \mathcal{C} の射 $\lambda: x_1 \otimes m \rightarrow m$
- 右作用 (right action) と呼ばれる \mathcal{C} の射 $\rho: m \otimes x_2 \rightarrow m$

これらは以下の条件を充たさねばならない:

(bimod-1) 組 (m, λ) は \mathcal{C} の左 x_1 -加群対象

(bimod-2) 組 (m, ρ) は \mathcal{C} の右 x_2 -加群対象

(bimod-3) 以下の図式を可換にする:



定義 F.40: 両側加群の準同型

- 多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ および \mathcal{C} の 2 つの代数対象 (x_i, μ_i, ν_i)
- 2 つの (x_1, x_2) -両側加群対象 (m_i, λ_i, ρ_i) $\text{w/ } i = 1, 2$

を与える. このとき, \mathcal{C} の射 $f: m_1 \rightarrow m_2$ が (x_1, x_2) 両側加群の準同型であるとは, それが左 x_1 -加群の準同型かつ右 x_2 -加群の準同型であることを言う.

しばらくの間 多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ および \mathcal{C} の 2 つの代数対象 (x_i, μ_i, ν_i) を固定する.

2 つの (x_1, x_2) -両側加群対象 (m_i, λ_i, ρ_i) $\text{w/ } i = 1, 2$ の間の (x_1, x_2) -両側加群の準同型全体がなす集合を $\text{Hom}_{x_1-x_2}(m_1, m_2) \subset \text{Hom}_{\mathcal{C}}(m_1, m_2)$ と書くと, これは部分 \mathbb{K} -ベクトル空間をなす. さらに準同型の合成は準同型であるから, アーベル圏 $\text{Bimod}_{\mathcal{C}}(x_1, x_2)$ を次のようにして構成することができる:

- \mathcal{C} における (x_1, x_2) -加群対象を対象とする.
- (x_1, x_2) -両側加群の準同型を射とする.

同様に \mathcal{C} における右 x -加群対象がなす圏 $\text{Mod}_{\mathcal{C}-x}$ を定義できる.

補題 F.11: 両側加群のテンソル積

- 多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ および \mathcal{C} の 4 つの代数対象 $(x_i, \mu_i, \nu_i) \text{ } ^w/ \text{ } i = 1, \dots, 4$
- (x_1, x_2) -両側加群対象 $(m_1, \lambda_1, \rho_1) \in \text{Ob}(\mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(x_1, x_2))$
- (x_2, x_3) -両側加群対象 $(m_2, \lambda_2, \rho_2) \in \text{Ob}(\mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(x_2, x_3))$
- (x_3, x_4) -両側加群対象 $(m_3, \lambda_3, \rho_3) \in \text{Ob}(\mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(x_3, x_4))$

を与える. このとき以下が成り立つ:

- (1) $m_1 \otimes_{x_2} m_2$ は自然な (x_1, x_3) -両側加群対象の構造を持つ.
- (2) 自然な (x_1, x_4) -両側加群の同型

$$\begin{aligned}\bar{a}_{m_1, m_2, m_3} &: (m_1 \otimes_{x_2} m_2) \otimes_{x_3} m_3 \xrightarrow{\cong} m_1 \otimes_{x_2} (m_2 \otimes_{x_3} m_3) \\ \bar{l}_{m_1} &: x_1 \otimes_{x_1} m_1 \xrightarrow{\cong} m_1 \\ \bar{r}_{m_1} &: m_1 \otimes_{x_2} x_2 \xrightarrow{\cong} m_1\end{aligned}$$

が存在する.

証明 (1)

■

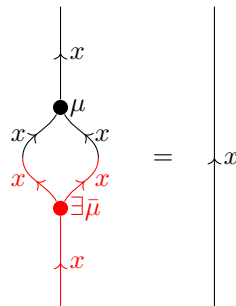
\mathcal{C} の任意の代数対象 (x, μ, ν) について, 明らかに $(x, \mu, \mu) \in \mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(x, x)$ である.

定義 F.41: 分離可能性

テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ の代数対象 (x, μ, ν) が分離可能 (separable) であるとは, ある (x, x) -両側加群の準同型 $\bar{\mu}: x \longrightarrow x \otimes x$ が存在して $\mu \circ \bar{\mu} = \text{Id}_x$ を満たすことを言う^a.

^a 補題 F.11-(1) によって $x \otimes x$ を (x, x) -両側加群対象と見做す.

分離可能性をストリング図式で表すと



となる.

命題 F.11: 分離可能性と半単純性

フュージョン圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ の代数対象 (x, μ, ν) を与える.
このときもし (x, μ, ν) が分離可能ならば, アーベル圏 $\text{Mod}_{\mathcal{C}}\text{-}x$ は半単純である.

証明 [EGNO15, PROPOSITION 7.8.30, p.146] ■

F.4.5 森田同値

定義 F.42: 森田同値

多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ を与える.
 \mathcal{C} の2つの代数対象 $(x_i, \mu_i, \nu_i) \text{ } ^w/ \text{ } i = 1, 2$ が森田同値 (Morita equivalent) であるとは, 左 \mathcal{C} -加群圏として $x_1\text{-Mod}_{\mathcal{C}}$ と $x_2\text{-Mod}_{\mathcal{C}}$ が圏同値であることを言う.

F.4.6 Frobenius 代数

定義 F.43: Frobenius 代数

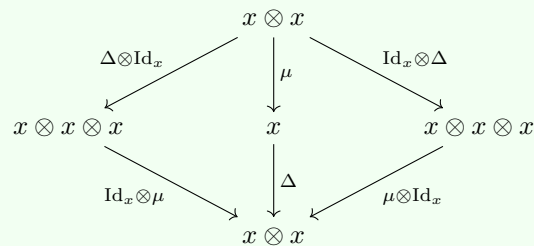
多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ を与える.
 \mathcal{C} の代数対象 (x, μ, ν) が Frobenius 代数 (Frobenius algebra) であるとは,

- 余乗法 (comultiplication) と呼ばれる \mathcal{C} の射 $\Delta: x \longrightarrow x \otimes x$
- 余単位 (counit) と呼ばれる \mathcal{C} の射 $\epsilon: x \longrightarrow 1$

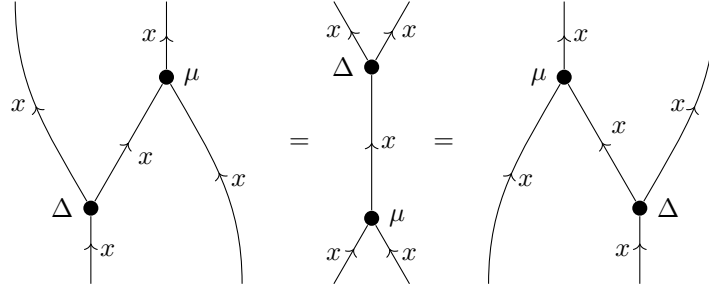
が存在して以下を充たすことを言う:

(Frob-1) (x, Δ, ϵ) は \mathcal{C} の余代数対象である.

(Frob-2) 以下の図式を可換にする:



ストリング図式で **(Frob-2)** を書くと次のようになる：



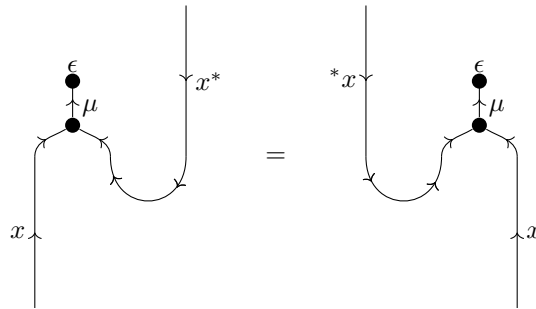
定義 F.44: 対称 Frobenius 代数

多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ を与える.

\mathcal{C} の Frobenius 代数 $(x, \mu, \nu, \Delta, \epsilon)$ が対称 (symmetric) であるとは, 以下の図式を可換にすることを言う：

$$\begin{array}{ccc}
 x & \xrightarrow{\text{coev}_x^R \otimes \text{Id}_x} & {}^*x \otimes x \otimes x \\
 \text{Id}_x \otimes \text{coev}_x^L \downarrow & & \downarrow \text{Id}_{{}^*x} \otimes \mu \\
 x \otimes x \otimes x^* & & {}^*x \otimes x \\
 \mu \otimes \text{Id}_{x^*} \downarrow & & \downarrow \text{Id}_{{}^*x} \otimes \epsilon \\
 x \otimes x^* & \xrightarrow{\epsilon \otimes \text{Id}_{x^*}} & {}^*x
 \end{array}$$

ストリング図式では



となる.

定義 F.45: 特殊 Frobenius 代数

多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ を与える.

\mathcal{C} の Frobenius 代数 $(x, \mu, \nu, \Delta, \epsilon)$ が特殊 (special) であるとは, \mathcal{C} の代数対象 (x, μ, ν) が余積 $\Delta: x \rightarrow x \otimes x$ によって分離可能であることを言う^a. i.e. $\mu \circ \Delta = \text{Id}_x$ が成り立つこと.

^a これは [CP08, p.17] に倣った定義である. ある $\beta_x, \beta_1 \in \mathbb{K}^\times$ が存在して $\mu \circ \Delta = \beta_x \text{Id}_x$, $\epsilon \circ \nu = \beta_1 \text{Id}_1$ が成り立つことを, special Frobenius algebra の定義とする場合もある [FRS02, Definition 3.4-(i)]

F.4.7 加群圏における internal hom

定義 F.46: 加群圏における internal hom

$(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r)$ をモノイダル圏とする. 左 \mathcal{C} -加群圏 $(\mathcal{M}, \blacktriangleright, \alpha, \lambda)$ を与える. \mathcal{M} の internal hom とは, 以下のデータの組のこと:

- 関手

$$\multimap: \mathcal{M}^{\text{op}} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$$

- currying と呼ばれる自然同型

$$\{c_{x, m_1, m_2}: \text{Hom}(x \blacktriangleright m_1, m_2) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}(x, m_1 \multimap m_2)\}_{x \in \text{Ob}(\mathcal{C}), Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

F.5 組紐付きテンソル圏

F.5.1 リボン構造と旋回構造の関係

補題 F.12: テンソル圏における組紐と旋回構造

rigid な組紐付きモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R, b)$ を与え, $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して射 $u_x: x \longrightarrow x^{**}$ を以下で定義する^a:

$$x \xrightarrow{\text{Id}_x \otimes \text{coev}_x^L} x \otimes x^* \otimes x^{**} \xrightarrow{b_{x, x^*} \otimes \text{Id}_{x^{**}}} x^* \otimes x \otimes x^{**} \xrightarrow{\text{ev}_x^L \otimes \text{Id}_{x^{**}}} x^{**}$$

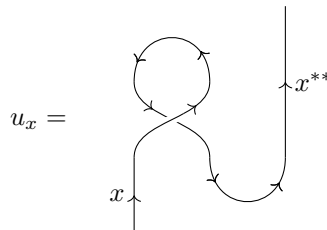
- (1) $u := \{u_x: x \longrightarrow x^{**}\}_{x \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$ は自然変換 $u: \text{Id}_{\mathcal{C}} \Longrightarrow (-)^{**}$ を成し, $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して以下を満たす:

$$u_x \otimes u_y = u_{x \otimes y} \circ b_{y, x} \circ b_{x, y}$$

- (2) \mathcal{C} がテンソル圏ならば u は自然同型になる.

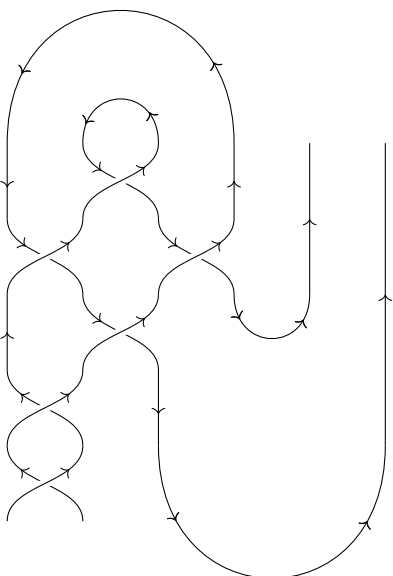
^a Drinfeld morphism と呼ぶ [EGNO15, DEFINITION 8.9.4., p.215]

ストリング図式では

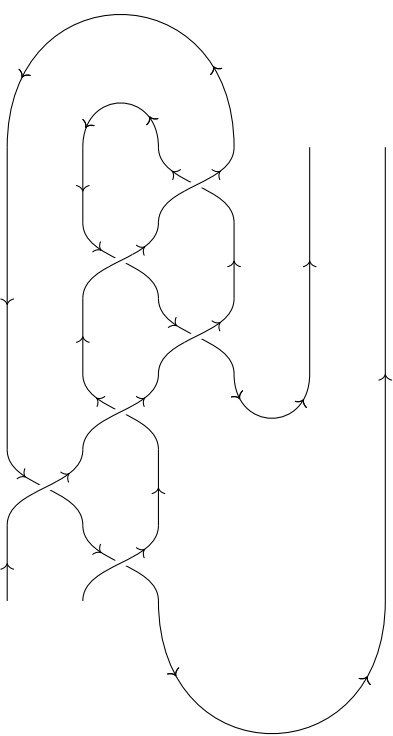


と書ける.

証明 (1) u が自然変換であることは明らか.

$$u_{x \otimes y} \circ b_{y, x} \circ b_{x, y} =$$


∴ (hexagon diagrams)

$$=$$


∴ 命題 F.3 \times 3

$$= u_x \otimes u_y$$

∴ 補題 F.4-(3)

(2) $\forall x \in \text{Simp}(\mathcal{C})$ に対して示せば十分である.

■

補題 F.12 より, テンソル圏における任意の自然同型 $p: \text{Id}_C \Rightarrow (-)^{**}$ は, ある自然同型 $\theta: \text{Id}_C \Rightarrow \text{Id}_C$ を用いて

$$p = u \circ \theta$$

と書ける. このような p が旋回構造になるのは θ が (Rib-1) を満たすときのみである.

定理 F.2: 球状構造とリボン構造

組紐付きフュージョン圏 $(C, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R, b)$ を与える. このとき, C の旋回構造 $p: \text{Id}_C \Rightarrow (-)^{**}$ が球状構造であるためには, 自然同型 $u^{-1} \circ p: \text{Id}_C \Rightarrow \text{Id}_C$ がリボン構造であることが必要十分である.

証明 [EGNO15, PROPOSITION 8.10.12, p.220] ■

!

以下では, 特に断らない限りリボン付き組紐付きフュージョン圏 $(C, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R, b, \theta)$ の球状構造 p は定理 F.2 によって定まる $p := u \circ \theta$ を選び, 明示しない.

F.5.2 リボン構造と量子次元・S-行列

補題 F.13: リボン構造と量子次元

リボン構造付き組紐付きテンソル圏 $(C, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R, b, \theta)$ を与える. このとき, $\forall x \in \text{Ob}(C)$ に対して以下が成り立つ:

$$\dim_{u \circ \theta}(x) = \text{ev}_x^L \circ b_{x, x^*} \circ (\theta_x \otimes \text{Id}_{x^*}) \circ \text{coev}_x^L$$

$$=$$

証明 $x \in \text{Simp}(C)$ の場合に示せば十分である. このとき Schur の補題より $\theta_x \in \text{Hom}_C(x, x) = \mathbb{K}$ なので,

ある $\theta_x \in \mathbb{K}$ が存在して $\theta_x = \theta_x \text{Id}_x$ と書ける. 故に

(zig-zag equations)

$$\begin{aligned}
 &= \theta_x \text{Tr}^L(u_x) \\
 &= \text{Tr}^L(u_x \circ \theta_x) \\
 &= \dim_p(x)
 \end{aligned}$$

が言えた. ■

定義 F.47: 前モジュラー圏

前モジュラー圏 (pre-modular category) とは, リボン構造付き組紐付きフュージョン圏のこと.

定義 F.48: S -行列

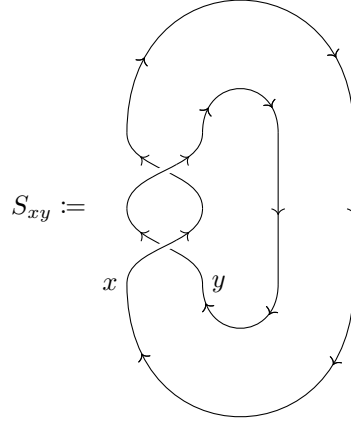
$(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{coev}^L, \text{ev}^L, b, \theta)$ を前モジュラー圏とする. $\forall x, y \in \text{Simp}(\mathcal{C})$ に対して, S -行列 (S -matrix) 要素を

$$S_{xy} := \text{Tr}(b_{y,x} \circ b_{x,y})$$

で定義する^a.

^a 左量子トレースではなくトレースである! 定理 F.2 の球状構造を使っている.

S -行列の定義をストリング図式で書くと次のようになる：



命題 F.12: S -行列の性質

S 行列は $\forall x, y, z \in \text{Simp}(\mathcal{C})$ について以下を充たす：

(1)

$$S_{xy} = \theta_x^{-1} \theta_y^{-1} \sum_{z \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{xy}^z \theta_z \dim_{u \circ \theta}(z)$$

(2)

$$S_{xy} S_{xz} = \dim_{u \circ \theta}(x) \sum_{w \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{yz}^w S_{xw}$$

(3) $\forall x \in \text{Simp}(\mathcal{C})$ に対して定まる写像

$$h_x: \text{Simp}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbb{K},$$

$$y \longmapsto \frac{S_{xy}}{\dim_{u \circ \theta}(x)}$$

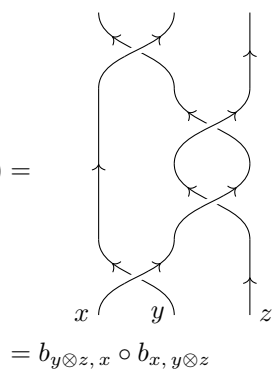
は, Grothendieck 環 $\text{Gr}(\mathcal{C})$ から \mathbb{K} への環準同型を定める.

証明 (1) **(Rib-1)** の **トレース**をとると, $x, y \in \text{Simp}(\mathcal{C})$ であることから

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\theta_{x \otimes y}) &= \sum_{z \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{xy}^z \text{Tr}(\theta_z) = \sum_{z \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{xy}^z \theta_z \dim(z) \\ &= \theta_x \theta_y \text{Tr}(b_{y, x} \circ b_{x, y}) = \theta_x \theta_y S_{xy} \end{aligned}$$

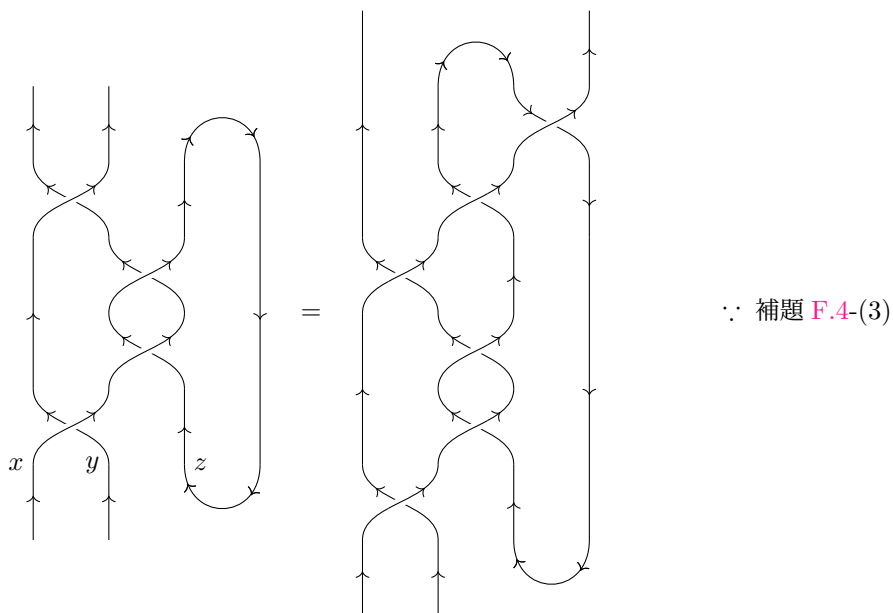
(2) (hexagon diagrams) から従う等式

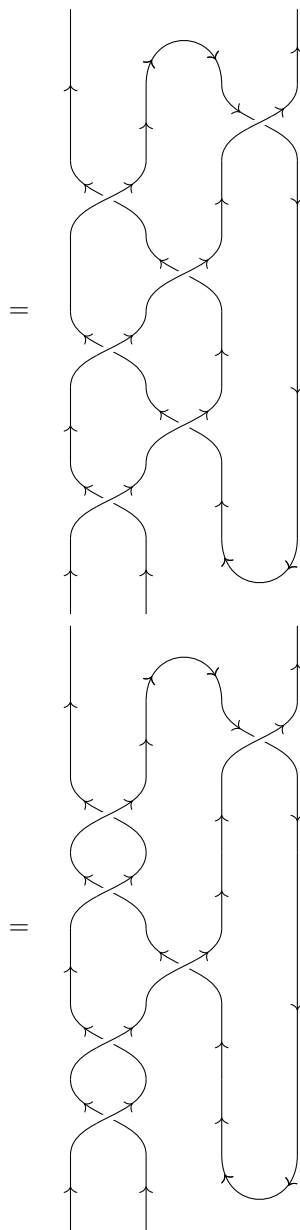
$$(b_{y,x} \otimes \text{Id}_z) \circ (\text{Id}_y \otimes (b_{z,x} \circ b_{x,z})) \circ (b_{x,y} \otimes \text{Id}_z) = \quad (\text{F.5.1})$$



に注目し、この式の両辺のトレースを計算する.

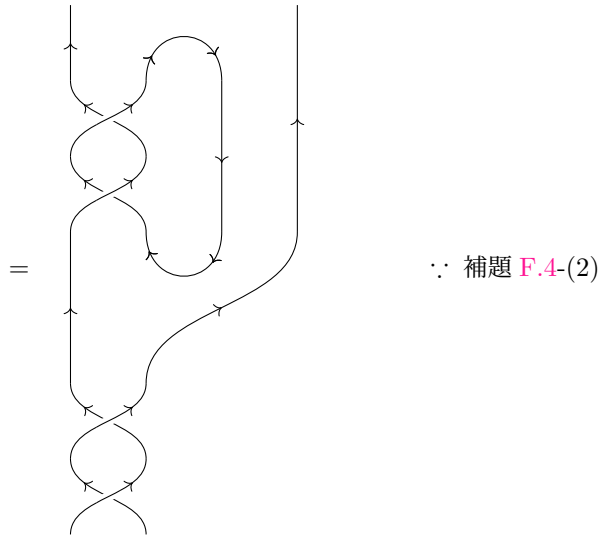
まず左辺の z についてのみトレースをとると、





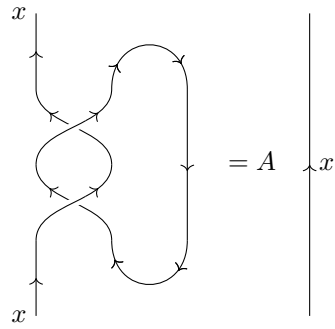
\therefore 命題 F.3

\therefore 命題 F.3



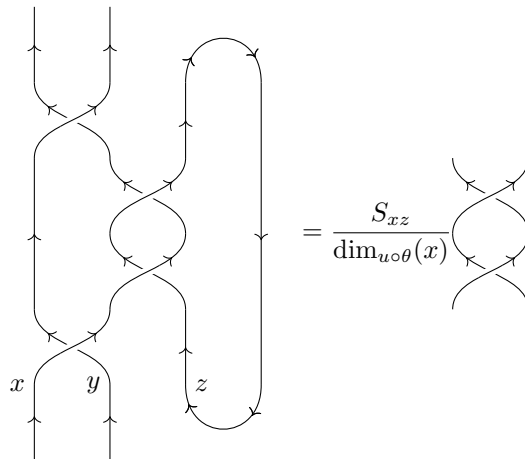
$$= \quad \because \text{補題 F.4(2)}$$

ここで, 補題 3.1 より $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x) = \mathbb{K}$ であることに注意すると, ある $A \in \mathbb{K}$ が存在して



$$= A \quad x$$

が成り立つ. 両辺の **トレース** をとることで $A = S_{xz} / \dim_{u \circ \theta}(x)$ と求まる. 以上の考察から,



$$= \frac{S_{xz}}{\dim_{u \circ \theta}(x)}$$

が分かった. 両辺のトレースをとることで, (F.5.1) の左辺のトレースが $S_{xy}S_{xz} / \dim_{u \circ \theta}(x)$ と求まった.

次に, (F.5.1) の右辺のトレースを計算すると

$$\text{Tr}(b_{y \otimes z} \circ b_{x, y \otimes z}) = \sum_{w \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{yz}^w \text{Tr}(b_{w, x} \circ b_{x, w})$$

$$= \sum_{w \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{yz}^w S_{xw}$$

となる．よって示された．

(3)

$$h_x(y \star z) = h_x \left(\sum_{w \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{yz}^w w \right) := \sum_{w \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{yz}^w h_x(w)$$

として h_x を **フュージョン環** $\mathbb{Z}^{\oplus \text{Simp}(\mathcal{C})}$ 全体へ拡張する．このとき，(2) より

$$\begin{aligned} h_x(y \star z) &= \sum_{w \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{yz}^w h_x(w) \\ &= \sum_{w \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{yz}^w \frac{S_{xw}}{\dim_{u \circ \theta}(x)} \\ &= \frac{S_{xy} S_{xz}}{\dim_{u \circ \theta}(x)^2} \\ &= h_x(y) h_x(z) \end{aligned}$$

が成り立つ．

■

F.6 2-群

F.6.1 豊穠圏と 2-圏

まず，厳密な 2-圏 (strict 2-category) を導入する．

定義 F.49: 豊穠圏

モノイダル圏 (V, \otimes, I) を与える．

V-豊穠圏 (V -enriched category) \mathcal{C} は，以下のデータからなる：

- 集合 $\text{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，**Hom 対象**と呼ばれる V の対象 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \in \text{Ob}(V)$ を持つ
- $\forall x, y, z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，**合成射**と呼ばれる V の射 $\circ_{x, y, z}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$ を持つ
- $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，**恒等素**と呼ばれる V の射 $j_x: I \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$ を持つ

これらは以下の図式を可換にしなくてはならない：

(associativity)

$$\forall x, y, z, w \in \text{Ob}(\mathcal{C}) \text{ について }^a$$

$$\begin{array}{ccc}
(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z)) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w) & \xrightarrow{\circ_{x, y, z} \otimes \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w)}} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w) \\
\downarrow \cong & & \downarrow \circ_{x, z, w} \\
& & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, w) \\
& & \uparrow \circ_{x, y, w} \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes (\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w)) & \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)} \otimes \circ_{y, z, w}} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, w)
\end{array}$$

(unitality)

$\forall x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について^{*b*}

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) & \xrightarrow{\circ_{x, x, y}} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) & \xleftarrow{\circ_{x, y, y}} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, y) \\
j_x \otimes \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)} \uparrow & \nearrow \cong & & \nwarrow \cong & \uparrow \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)} \otimes j_y \\
I \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) & & & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes I
\end{array}$$

^{*a*} \cong はモノイダル圏 V の **associator**

^{*b*} \cong はモノイダル圏 V の **left/right unitor**

定義 F.50: 豊穠関手

モノイダル圏 (V, \otimes, I) を与える.

2つの V -豊穠圏 \mathcal{C}, \mathcal{D} の間の V -豊穠関手 (V -enriched functor)

$$F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

は, 以下のデータからなる:

- 写像 $F_0: \text{Ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{Ob}(\mathcal{D}), x \longmapsto F_0(x)$
- V の射の族

$$\{F_{x,y}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(x), F_0(y))\}_{x,y \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは以下の図式を可換にしなくてはならない:

(enriched-1)

$\forall x, y, z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して^a

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) & \xrightarrow{\circ_{x,y,z}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z) \\ \downarrow F_{x,y} \otimes F_{y,z} & & \downarrow F_{x,z} \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(x), F_0(y)) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(y), F_0(z)) & \xrightarrow{\circ_{F_0(x), F_0(y), F_0(z)}} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(x), F_0(z)) \end{array}$$

(enriched-2)

$\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して^b

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{j_x} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x) \\ & \searrow j_{F_0(x)} & \downarrow F_{x,x} \\ & & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(x), F_0(x)) \end{array}$$

^a これは, 通常の関手において射の合成が保存されることに対応する.

^b これは, 通常の関手において恒等射が保存されることに対応する.

与えられたモノイダル圏 V に対して, V -豊穠圏のなす圏を $V\text{-Cat}$ と書く. $V\text{-Cat}$ は

- V -豊穠圏を対象とする
- V -豊穠関手を射とする

ことで得られる圏である.

定義 F.51: 厳密な 2-圏

小圏と関手の圏 Cat を【例 F.2.1】の方法でモノイダル圏と見做す. Cat -豊穠圏のことを厳密な 2-圏 (strict 2-category) と呼ぶ.

定義 F.51 を解説しよう。まず、小圏と関手の圏 \mathbf{Cat} における対象とは小圏のことで、射とは関手のことである。さらに、 \mathbf{Cat} のテンソル積とは【例 F.2.1】より直積 \times のことである。よって豊稜圏の定義から、厳密な 2-圏 \mathcal{C} は

- 対象 (object)^{*9} 全体の集合 $\text{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ の間の 1-射 (1-morphism)^{*10} 全体が成す圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \in \text{Ob}(\mathbf{Cat})$.
- 合成 (composition) と呼ばれる関手 $\circ: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$
- 恒等素 (identity morphism) と呼ばれる関手 $j_x: 1 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$

の 4 つのデータからなる。従って 1-射 $f: x \longrightarrow y$ とは圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ の対象 $f \in \text{Ob}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y))$ のことであるから、2 つの 1-射 $f, g \in \text{Ob}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y))$ が与えられると、圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ における、それらの間の射 $\alpha \in \text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)}(f, g)$ が存在する。このような α を 2-射 (2-morphism)^{*11} と呼び、混乱防止のため $\alpha: f \longrightarrow g$ と書く代わりに $\alpha: f \Longrightarrow g$ と書く。

2 つの 2-射 $\alpha \in \text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)}(f, g)$, $\beta \in \text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)}(g, h)$ は、圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ における射の合成 $*$ によって結合的かつ単位的に合成することができる：

$$\begin{array}{c} x \quad \xrightarrow{\quad f \quad} \quad y \\ \quad \quad \downarrow \beta * \alpha \quad \\ \quad \quad h \end{array} \quad := \quad \begin{array}{c} x \quad \xrightarrow{\quad f \quad} \quad y \\ \quad \quad \downarrow \alpha \\ x \quad \xrightarrow{\quad g \quad} \quad y \\ \quad \quad \downarrow \beta \\ \quad \quad h \end{array}$$

このような 2-射の合成を縦の合成 (vertical composition) と呼ぶ。一方、4 つの 1-射 $f, g: x \longrightarrow y$, $f', g': y \longrightarrow z$ および 2 つの 2-射 $\alpha: f \Longrightarrow g$, $\alpha': f' \Longrightarrow g'$ が与えられたとき、1-射の合成 \circ が関手であることによって、圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z)$ の射 $(\alpha, \alpha'): (f, f') \longrightarrow (g, g')$ に対して圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$ の射、i.e. 2-射

$$\alpha' \circ \alpha := \circ(\alpha, \alpha'): f' \circ f \Longrightarrow g' \circ g$$

が対応付く：

$$\begin{array}{c} x \quad \xrightarrow{\quad f' \circ f \quad} \quad z \\ \quad \quad \downarrow \alpha' \circ \alpha \quad \\ \quad \quad g' \circ g \end{array} \quad := \quad \begin{array}{c} x \quad \xrightarrow{\quad f \quad} \quad y \quad \xrightarrow{\quad f' \quad} \quad z \\ \quad \quad \downarrow \alpha \quad \quad \downarrow \alpha' \\ x \quad \xrightarrow{\quad g \quad} \quad y \quad \xrightarrow{\quad g' \quad} \quad z \end{array}$$

このような 2-射の合成を横の合成 (horizontal composition) と呼ぶ。横の合成は、モノイダル圏 \mathbf{Cat} が厳密なモノイダル圏であること、および関手 \circ の (associativity), (unitality) によって結合的かつ単位的になる。

^{*9} 0-セル (0-cell) とも言う

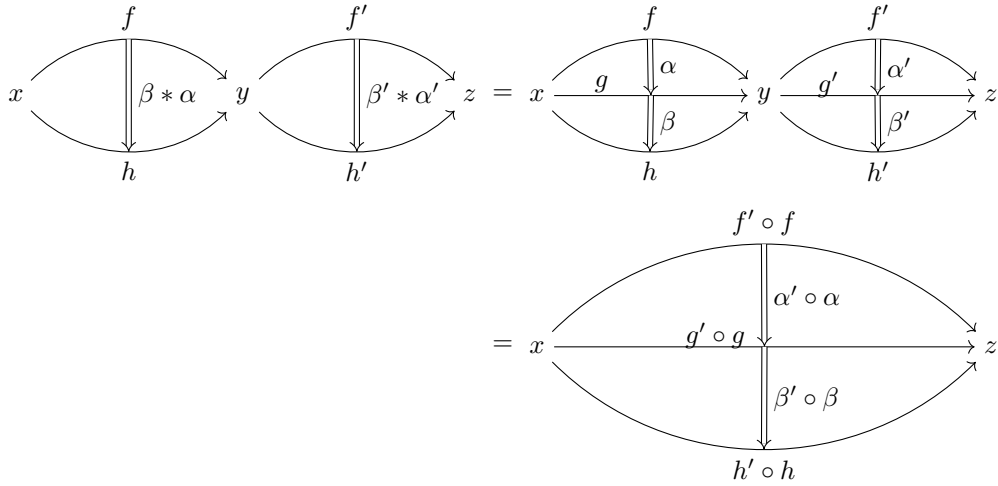
^{*10} 1-セル (1-cell) とも言う。正確には、圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ の対象のことを 1-射と呼ぶ。

^{*11} 2-セル (2-cell) とも言う

縦の合成と横の合成は、 \circ が関手であることによって交換する：

$$\begin{aligned} (\beta' * \alpha') \circ (\beta * \alpha) &= \circ((\beta, \beta') * (\alpha, \alpha')) \\ &= (\circ(\beta, \beta')) * (\circ(\alpha, \alpha')) \\ &= (\beta' \circ \beta) * (\alpha' \circ \alpha) \end{aligned}$$

図式で書くと一目瞭然である：



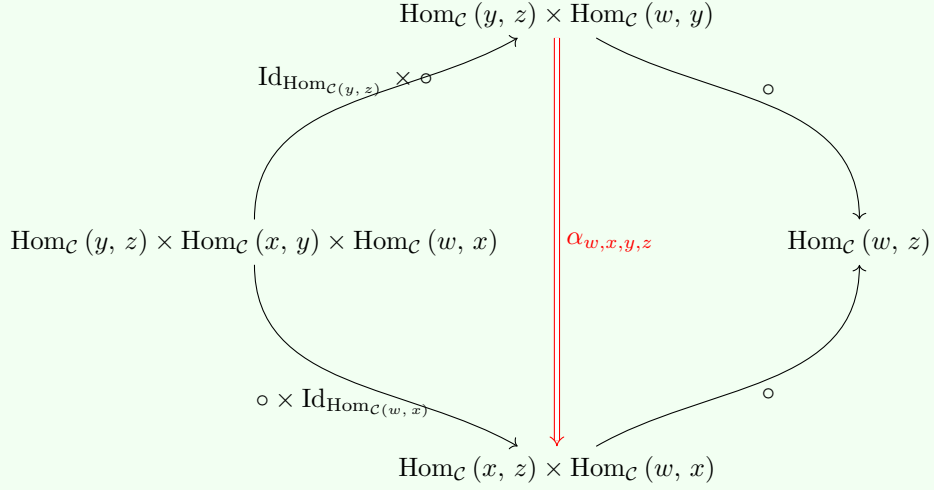
定義 F.52: 2-圏

厳密な 2-圏と同様の

- 対象 (object)^a 全体の集合 $\text{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ の間の 1-射 (1-morphism)^b 全体が成す圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \in \text{Ob}(\mathbf{Cat})$.
- 合成 (composition) と呼ばれる関手 $\circ: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$
- 恒等素 (identity morphism) と呼ばれる関手 $j_x: 1 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$

の 4 つのデータに加えて

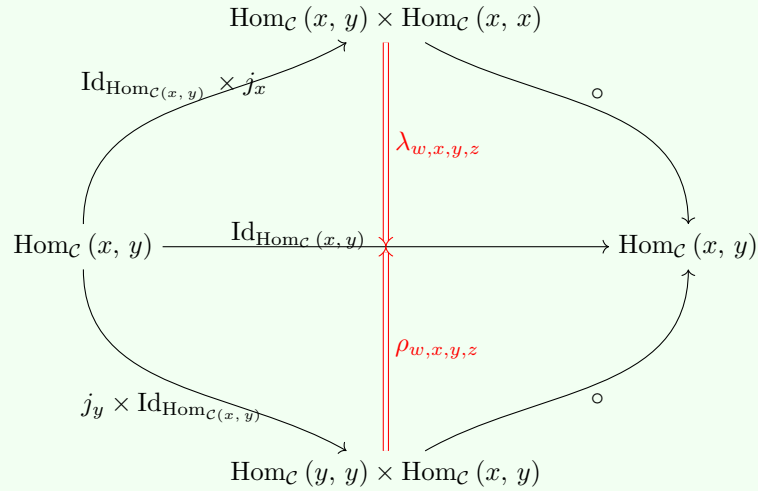
- $\forall x, y, z, w \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して **associator** と呼ばれる **自然同型^c**.



- $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して **left/right unitor** と呼ばれる **自然同型**

$$\lambda_{x,y} := \{l_{x,y}f: f \mapsto f \circ j_x(1)\}_{f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)}$$

$$\rho_{x,y} := \{l_{x,y}f: f \mapsto j_x(1) \circ f\}_{f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)}$$



を持ち,

- associator が **(pentagon identity)** を
- unitors が **(triangle identity)** を

満たす \mathcal{C} のことを **2-圏** (2-category) と呼ぶ.

^a **0-セル** (0-cell) とも言う

^b **1-セル** (1-cell) とも言う. 正確には, 圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ の対象のことを 1-射と呼ぶ.

^c これは圏 **Cat** における図式である.

要するに、**厳密な 2-圏**において合成 \circ の associativity および unitality を自然同型まで弱めたものが **2-圏** である。

【例 F.6.1】 2-圏としてのモノイダル圏

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, \{a_{x,y,z}\}, \{l_x\}, \{r_y\})$ は **2-圏** である。実際、2-圏 \mathbf{BC} を

- $\text{Ob}(\mathbf{BC}) := \{\bullet\}$ (1 点集合)
- $\text{Hom}_{\mathbf{BC}}(\bullet, \bullet) := \mathcal{C}$
- $\circ := \otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$
- $j_x := \iota_I: I \hookrightarrow \mathcal{C}$
- $\alpha_{\bullet, \bullet, \bullet} := \{a_{x,y,z}\}$
- $\lambda_{\bullet, \bullet} := \{l_{x,y,z}\}, \quad \rho_{\bullet, \bullet} := \{r_{x,y,z}\}$

により定義すると $\mathcal{C} = \mathbf{BC}$ となる。

F.6.2 弱い 2-群・コヒーレントな 2-群・厳密な 2-群

[BL04] に倣い **2-群** (2-group) を導入する。

定義 F.53: 弱い逆対象

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ の対象 $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を 1 つとる。

- 対象 $y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が x の **弱い逆対象** (weak inverse) であるとは、**対象の同型**の意味で^a $x \otimes y \cong 1$ かつ $y \otimes x \cong 1$ が成り立つことを言う。
- x が **弱可逆** (weakly invertible) であるとは、 x が弱い逆対象を持つことを言う。

^a 自然同型ではない

定義 F.54: 弱い 2-群・コヒーレントな 2-群・厳密な 2-群

- **弱い 2-群** (weak 2-group) とは、**モノイダル圏** \mathcal{G} であって、任意の対象が**弱可逆**でかつ任意の射が**同型射**であるもののこと。
- **コヒーレントな 2-群** (coherent 2-group) とは、**モノイダル圏** \mathcal{G} であって、任意の対象 $x \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ が**可逆な unit**, **counit** (x, \bar{x}, i_x, e_x) を持ち、かつ任意の射が**同型射**であるもののこと。
- **厳密な 2-群** (strict 2-group) とは、**モノイダル圏** \mathcal{G} であって、任意の対象が**可逆**^aでかつ任意の射が**同型射**であるもののこと。

^a $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $x^{-1} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が存在して、厳密に $x \otimes x^{-1} = 1, x^{-1} \otimes x = 1$ が成り立つ。

定義 F.55: 2-群の準同型

2-群 $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ の間の準同型とは, モノイダル関手 $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ のこと.

定理 F.3: 弱い 2-群はコヒーレントな 2-群

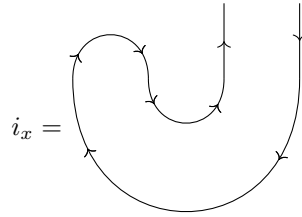
任意の弱い 2-群はコヒーレントな 2-群にすることができる.

証明 勝手な弱い 2-群 \mathcal{G} を 1 つ固定する. このとき $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ に対してある $\bar{x} \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ および同型射 $i'_x: 1 \rightarrow x \otimes \bar{x}$, $e'_x: \bar{x} \otimes x \rightarrow 1$ が存在する.

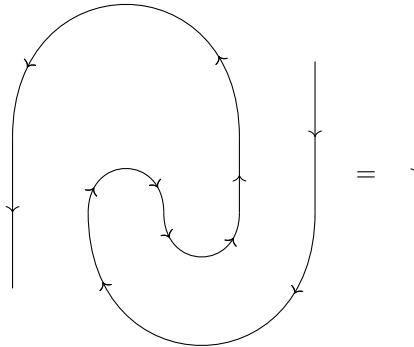
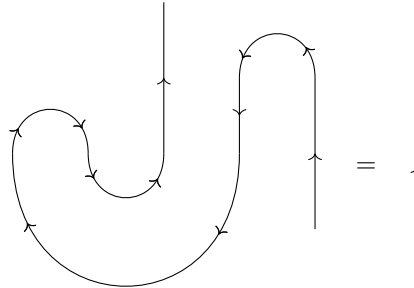
ここで $e_x := e'_x$ とおき,

$$i_x := (l_x \otimes \text{Id}_{\bar{x}}) \circ a_{1,x,\bar{x}}^{-1} \circ (i'_x)^{-1} \otimes \text{Id}_{x \otimes \bar{x}} \circ a_{x,\bar{x},x \otimes \bar{x}}^{-1} \circ (\text{Id}_x \otimes a_{\bar{x},x,\bar{x}}) \circ (\text{Id}_x \otimes e'_x)^{-1} \otimes \text{Id}_{\bar{x}} \circ (\text{Id}_x \otimes l_{\bar{x}}^{-1}) \circ i'_x$$

とおくと組 (x, \bar{x}, i_x, e_x) が zig-zag equation を満たすことを示す. 実際, i_x の定義をストリング図式で書くと



となるから,



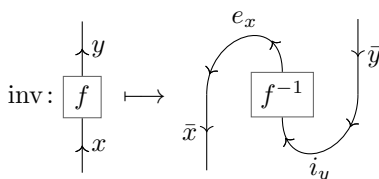
が言える。 ■

! 定理 F.3 を踏まえ、以下ではコヒーレントな 2-群のことを単に 2-群 (2-group) と呼ぶ。

2-群 \mathcal{G} において、弱い逆対象を対応づける関手

$$\text{inv}: \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}, x \longmapsto \bar{x} \quad (\text{F.6.1})$$

を考えたいが、射の対応は少々厄介である。[BL04, p.34] に倣うと



とすれば良いことがわかる^{*12}。

以上より、2-群 \mathcal{G} を【例 F.6.1】により 2 圏 \mathbf{BG} の言葉で表現すると

- ただ 1 つの対象を持つ: $\text{Ob}(\mathbf{BG}) = \{\bullet\}$
- 任意の 1-射 $x \in \text{Ob}(\text{Hom}_{\mathbf{BG}}(\bullet, \bullet)) = \text{Ob}(\mathcal{G})$ が弱可逆であり、その弱い逆対象 \bar{x} は関手 (F.6.1) によって与えられる。
- 任意の 2-射 $\alpha \in \text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathbf{BG}}(\bullet, \bullet)}(x, y) = \text{Hom}_{\mathcal{G}}(x, y)$ が同型射

ということになる。特に厳密な 2-群とは、全ての $\alpha, \lambda, \rho, i, e$ が \mathcal{G} の恒等射となっていることを言う。

F.6.3 交差加群との関係

^{*12} 定義からコヒーレントな 2 群は rigid なモノイダル圏であり、zigzag identity を使えることが肝になる。

定義 F.56: 交差加群

交差加群 (crossed module) とは,

- 群準同型 $G_2 \xrightarrow{t} G_1$
- G_1 の左作用 $\alpha: G_1 \rightarrow \text{Aut}(G_2)$

の組であって, 以下の条件を満たすもののこと:

(cr-1) 以下の図式を可換にする:

$$\begin{array}{ccc} G_2 \times G_2 & \xrightarrow{t \times \text{Id}} & G_1 \times G_2 \\ & \searrow \text{Ad} & \swarrow \alpha \\ & G_2 & \end{array}$$

あるいは同じことだが, $\forall g_i \in G_i$ に対して

$$t(\alpha(g_1)(g_2)) = g_1 t(g_2) g_1^{-1}$$

を満たす.

(cr-2) 以下の図式を可換にする:

$$\begin{array}{ccc} G_1 \times G_2 & \xrightarrow{\alpha} & G_2 \\ \text{Id} \times t \downarrow & & \downarrow t \\ G_1 \times G_1 & \xrightarrow{\text{Ad}} & G_1 \end{array}$$

あるいは同じことだが, $\forall g_2, g'_2 \in G_2$ に対して

$$\alpha(t(g_2))(g'_2) = g_2 g'_2 g_2^{-1}$$

を満たす (Peiffer identity).

命題 F.13: 交差加群と厳密な 2-群

- (1) 交差加群 $(G_2 \xrightarrow{t} G_1, \alpha)$ が与えられたとする. このとき
- 1-射の集合 $\mathcal{G}_0 := G_1$
 - 2-射の集合 $\mathcal{G}_1 := G_1 \ltimes_{\alpha} G_2$ (外部半直積)
 - 始点射 $\sigma: \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_0, (g_1, g_2) \mapsto g_1$
 - 終点射 $\tau: \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_0, (g_1, g_2) \mapsto t(g_2)g_1$
 - 恒等素 $j: \mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{G}_1, g_1 \mapsto (g_1, 1_{G_2})$
 - 2-射の合成 $\circ: \mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_1, ((g_1, g_2), (g'_1, g'_2)) \mapsto (g'_1, g_2 g'_2)$
- とおくと, 圏 \mathcal{G} は厳密な 2-群になる.
- (2) 逆に厳密な 2-群 $(\mathcal{G}, \otimes, 1)$ が与えられたとき,
- $G_1 := \mathcal{G}_0$
 - $G_2 := \text{Ker } \sigma \subset \mathcal{G}_1$
 - $t := \tau|_{G_2}: G_2 \rightarrow G_1$
 - $\alpha: G_1 \rightarrow \text{Aut}(G_2), g_1 \mapsto (g_2 \mapsto j(g_1) \otimes g_2 \otimes j(g_1)^{-1})$
- とおくことで交差加群 $(G_2 \xrightarrow{t} G_1, \alpha)$ が得られる.

証明 (1) 圏 \mathcal{G} を

- 対象が成す集合を $\text{Ob}(\mathcal{G}) := \mathcal{G}_0$ と定義する.
- $\forall g, h \in \text{Ob}(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_0$ に対して, その間の射が成す集合を

$$\text{Hom}_{\mathcal{G}}(g, h) := \{ (f_1, f_2) \in \mathcal{G}_1 \mid \sigma(f_1, f_2) = g, \tau(f_1, f_2) = h \}$$

と定義する.

- $\forall g, h, k \in \mathcal{G}$ に対して, 射の合成を

$$\begin{aligned} \circ_{g,h,k}: \text{Hom}_{\mathcal{G}}(h, k) \times \text{Hom}_{\mathcal{G}}(g, h) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{G}}(g, k), \\ ((l_1, l_2), (m_1, m_2)) &\mapsto (m_1, l_2 m_2) \end{aligned}$$

と定義する. なお,

$$\begin{aligned} \sigma(m_1, l_2 m_2) &= m_1 = \sigma(m_1, m_2) = g, \\ \tau(m_1, l_2 m_2) &= t(l_2 m_2) m_1 \\ &= t(l_2)(t(m_2) m_1) \\ &= t(l_2)h \\ &= t(l_2)\sigma(l_1, l_2) \\ &= t(l_2)l_1 \\ &= \tau(l_1, l_2) \\ &= k \end{aligned}$$

が成り立つので写像 $\circ_{g,h,k}$ は well-defined である.

として構成する. 実際, $\forall (f_1, f_2) \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(g, h)$ に対して^{*13}

$$(f_1, f_2) \circ (g, 1_{G_2}) = (g, f_2) = (f_1, f_2),$$

^{*13} Hom 集合の定義より $f_1 = \sigma(f_1, f_2) = g$ が自動的に成り立つ.

$$(h, 1_{G_2}) \circ (f_1, f_2) = (f_1, f_2)$$

が成り立つので $\text{Id}_g = (g, 1_{G_2}) = j(g) \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(g, g)$ であり, かつ $\forall (f_1, f_2) \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(g, h), \forall (g_1, g_2) \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(h, k), \forall (h_1, h_2) \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(k, l)$ に対して

$$\begin{aligned} ((h_1, h_2) \circ (g_1, g_2)) \circ (f_1, f_2) &= (g_1, h_2 g_2) \circ (f_1, f_2) \\ &= (f_1, h_2 g_2 f_2) \\ &= (h_1, h_2) \circ (f_1, g_2 f_2) \\ &= (h_1, h_2) \circ ((g_1, g_2) \circ (f_1, f_2)) \end{aligned}$$

が成り立つので, \mathcal{G} は圏の公理を充たす.

さて, \mathcal{G}_1 の積を $(g_1, g_2) \cdot (h_1, h_2) := (g_1 h_1, g_2 \alpha(g_1)(h_2))$ と書こう. そして関手

$$\otimes: \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$$

を次のように定義する:

- $\forall (g, h) \in \text{Ob}(\mathcal{G} \times \mathcal{G}) = \mathcal{G}_0 \times \mathcal{G}_0$ に対して

$$g \otimes h := gh \in \text{Ob}(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_0$$

を対応付ける

- $\forall ((f_1, f_2), (g_1, g_2)) \in \text{Hom}_{\mathcal{G} \times \mathcal{G}}((g, h), (g', h'))$ に対して

$$(f_1, f_2) \otimes (g_1, g_2) := (f_1, f_2) \cdot (g_1, g_2) \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(gh, g'h')$$

を対応付ける. なお,

$$\begin{aligned} \sigma((f_1, f_2) \cdot (g_1, g_2)) &= f_1 g_1 \\ &= \sigma(f_1, f_2) \sigma(g_1, g_2) \\ &= gh, \\ \tau((f_1, f_2) \cdot (g_1, g_2)) &= t(f_2 \alpha(f_1)(g_2)) f_1 g_1 \\ &= t(f_2) t(\alpha(f_1)(g_2)) f_1 g_1 \\ &= t(f_2) f_1 t(g_2) g_1 && \because \text{Crossed module の定義} \\ &= \tau(f_1, f_2) \tau(g_1, g_2) \\ &= g' h' \end{aligned}$$

なのでこの対応は well-defined である.

群演算の結合則より \otimes に関する associator は全て恒等射で, かつ $1 := 1_{G_1}$ とおくと left/right unitor も恒等射になる. よって $(\mathcal{G}, \otimes, 1_{G_1}, \{\text{Id}\}, \{\text{Id}\}, \{\text{Id}\})$ は厳密なモノイダル圏を成す. $\forall g \in \mathcal{G}_0$ に対して明らかに $g \otimes g^{-1} = g^{-1} \otimes g = 1$ であり, かつ $\forall (f_1, f_2) \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(g, h)$ に対して $(h, f_2^{-1}) \in \text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathcal{G}}(\bullet, \bullet)}(h, g)$ は

$$\begin{aligned} (f_1, f_2) \circ (h, f_2^{-1}) &= (h, 1_{G_2}) = \text{Id}_h \\ (h, f_2^{-1}) \circ (f_1, f_2) &= (g, 1_{G_2}) = \text{Id}_g \end{aligned}$$

を充たすので, \mathcal{G} は厳密な 2 群である.

- (2) 始めに、**厳密な 2-群の定義**から 1-射の集合 $\mathcal{G}_0 := \text{Ob}(\mathcal{G})$ は \otimes を積とする群を成し、2-射全体がなす集合 $\mathcal{G}_1 := \bigcup_{g, h \in \mathcal{G}_0} \text{Hom}_{\mathcal{G}}(g, h)$ もまたテンソル積 \otimes について群を成すことに注意する^{*14}。恒等素は

$$j: \mathcal{G}_0 \longrightarrow \mathcal{G}_1, g \longmapsto \text{Id}_g$$

と定義され、始点射および終点射は

$$\begin{aligned} \sigma: \mathcal{G}_1 &\longrightarrow \mathcal{G}_0, \underbrace{\varphi}_{\in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(g, h)} \longmapsto g \\ \tau: \mathcal{G}_1 &\longrightarrow \mathcal{G}_0, \underbrace{\varphi}_{\in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(g, h)} \longmapsto h \end{aligned}$$

のように定義される。特に $\forall \varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(g, h), \forall \psi \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(g', h')$ に対して

$$\begin{aligned} \sigma(\psi \otimes \varphi) &= g \otimes g' = \sigma(\psi) \otimes \sigma(\varphi) \\ \tau(\psi \otimes \varphi) &= h \otimes h' = \tau(\psi) \otimes \tau(\varphi) \end{aligned}$$

が成り立つので σ, τ は群準同型である。

交差加群の定義 **(cr-1)**, **(cr-2)** を確認する。

(cr-1) $\forall g_1 \in G_1, \forall g_2 \in G_2$ に対して

$$\begin{aligned} t(\alpha(g_1)(g_2)) &= t(\text{Id}_{g_1} \otimes g_2 \otimes \text{Id}_{g_1^{-1}}) \\ &= g_1 \otimes t(g_2) \otimes g_1^{-1} \end{aligned}$$

(cr-2) $\forall g_2, g'_2 \in G_2$ に対して

$$\begin{aligned} \alpha(t(g_2))(g'_2) &= \text{Id}_{t(g_2)} \otimes g'_2 \otimes \text{Id}_{t(g_2)^{-1}} \\ &= \text{Id}_{\tau(g_2)} \otimes g'_2 \otimes \text{Id}_{\tau(g_2)^{-1}} \\ &= g_2 \otimes g'_2 \otimes g_2^{-1} \end{aligned}$$

ただし $\sigma(g_2) = 1$ であることを使った。

■

F.6.4 2-群の分類

定義 F.57: 骨格的

コヒーレントな 2 群 $(\mathcal{G}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L)$ が**骨格的** (skeltal) であるとは、任意の同型な 1-射が等しいことを言う。

^{*14} まず、 $\forall \varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(g, h)$ に対して $\varphi \otimes \text{Id}_1 = \varphi$ であるから、単位元は $\text{Id}_1 \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(1, 1)$ である。逆元を見つけるのは少し難しい。 $\forall \varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(g, h)$ を 1 つ固定しよう。 \mathcal{G} が厳密な 2-群であることから、 $g \otimes g^{-1} = 1$ を充たす $g^{-1} \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ が存在する。よって \otimes が関手なので $\text{Id}_g \otimes \text{Id}_{g^{-1}} = \text{Id}_{g \otimes g^{-1}} = \text{Id}_1$ であり、任意の恒等射が逆元を持つことが分かった。さらに、 \otimes が関手であることにより $\forall \varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(g, h), \forall \psi \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(g', h')$ に対して

$$\varphi \otimes \psi = (\text{Id}_h \circ \varphi) \otimes (\psi \circ \text{Id}_{g'}) = (\text{Id}_h \otimes \psi) \circ (\varphi \otimes \text{Id}_{g'})$$

が成り立つので、 φ の \otimes に関する逆元は $\psi := \text{Id}_{h^{-1}} \otimes \varphi^{-1} \otimes \text{Id}_{g^{-1}}$ であることが分かる。

骨格的であるとは、同型射が自己同型しか存在しないことを意味する。[BL04, p.55] に倣って特別な 2 群を定義する。

定義 F.58: 特別な 2 群

コヒーレントな 2 群 $(\mathcal{G}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L)$ が特別 (special) であるとは、骨格的でかつ $l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L$ が恒等自然変換であることを言う。

命題 F.14:

任意のコヒーレントな 2 群 $(\mathcal{G}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L)$ は、ある特別な 2 群と同型である。

証明 コヒーレントな 2 群 \mathcal{G} から、それと 2 群として同型な特別な 2 群 $(\mathcal{G}, \tilde{\otimes}, 1, \tilde{a}, \tilde{l}, \tilde{r}, \text{ev}^L, \text{coev}^L)$ を構成する^{*15}。そのためにまず、 $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ に対してある対象 $x \tilde{\otimes} y \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ および同型射 $\gamma_{x,y} \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(x \tilde{\otimes} y, x \otimes y)$ を選べたとしてよう。このとき、 $\gamma_{x,y}$ の可逆性により

- 関手 $\text{id}: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$
- 射 $\text{Id}_1: 1 \rightarrow \text{id}(1) = 1$
- 射の族 $\{\gamma_{x,y}: \text{id}(x \tilde{\otimes} y) \rightarrow \text{id}(x) \otimes \text{id}(y)\}_{x,y \in \text{Ob}(\mathcal{G})}$

の 3 つ組がモノイダル関手になるように関手 $\tilde{\otimes}: \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ および自然変換 $\tilde{a}, \tilde{l}, \tilde{r}$ を構成することができる。 $\text{ev}^L, \text{coev}^L$ は、以下の可換図式が成り立つように決めれば良い：

$$\begin{array}{ccc}
 \text{id}(x \tilde{\otimes} x^*) & \xrightarrow{\gamma_{x,x^*}} & \text{id}(x) \otimes \text{id}(x^*) \\
 \text{id}(\text{coev}_x^L) \uparrow & & \uparrow \text{coev}_{\text{id}(x)}^L \\
 \text{id}(1) & \xleftarrow{\text{Id}_1} & 1 \\
 \text{id}(x \tilde{\otimes} x^*) & \xrightarrow{\gamma_{x,x^*}} & \text{id}(x) \otimes \text{id}(x^*) \\
 \text{id}(\text{ev}_x^L) \downarrow & & \downarrow \text{ev}_{\text{id}(x)}^L \\
 \text{id}(1) & \xleftarrow{\text{Id}_1} & 1
 \end{array}$$

このようにして得られる rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{G}, \tilde{\otimes}, 1, \tilde{a}, \tilde{l}, \tilde{r}, \text{ev}^L, \text{coev}^L)$ は明らかにコヒーレントな 2 群であり、2 群の準同型 $(\text{id}, \text{Id}_1, \{\gamma_{x,y}\})$ がもとのコヒーレントな 2 群 $(\mathcal{G}, \tilde{\otimes}, 1, \tilde{a}, \tilde{l}, \tilde{r}, \text{ev}^L, \text{coev}^L)$ との同型を与える。具体的に

$$x \tilde{\otimes} y := \begin{cases} y, & x = 1 \\ x, & y = 1 \\ 1, & x = y^* \\ 1, & y = x^* \\ x \otimes y, & \text{otherwise} \end{cases}$$

^{*15} 下地になる圏 \mathcal{G} と単位対象 1 は同じものをとる。

$$\gamma_{x,y} := \begin{cases} l_y^{-1}, & x = 1 \\ r_x^{-1}, & y = 1 \\ \text{ev}_y^L, & x = y^* \\ \text{coev}_x^L, & y = x^* \\ \text{Id}_{x \otimes y}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

と選ぶことで、上述の構成で $\tilde{l}, \tilde{r}, \text{ev}^L, \text{coev}^L$ を全て恒等自然変換にすることができる。

ところで、選択公理を認めると、任意の圏 \mathcal{G} は骨格的な充満部分圏 $\text{sk}(\mathcal{G})$ を持つ。 \mathcal{G} を $\text{sk}(\mathcal{G})$ と同一視することで証明が完了する。 ■

命題 F.14 より、コヒーレントな 2 群の分類は特別な 2 群の分類と一致する。

命題 F.15: 2 群の分類

特別な 2 群 $(\mathcal{G}, \otimes, 1, a)$ は以下のデータの組 (G, H, α, a) と 1 対 1 対応する：

- 群 G
- 可換群 H
- 群作用 $\alpha: G \longrightarrow H$
- 正規化された 3-コサイクル $a \in Z_{\text{Grp}}^3(G; H)$

証明 特別な 2 群 $(\mathcal{G}, \otimes, 1, a)$ を与える。 \mathcal{G} は骨格的なので、その 1-射の集合は \otimes に関して群をなす。

$$G := \text{Ob}(\mathcal{G})$$

とおく。

$\forall h, h' \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(1, 1)$ に対して、 \otimes の関手性から

$$\begin{aligned} h \otimes h' &= (h \circ \text{Id}_1) \otimes (\text{Id}_1 \circ h') \\ &= (h \otimes \text{Id}_1) \circ (\text{Id}_1 \otimes h') \\ &= h \circ h' \\ &= (\text{Id}_1 \otimes h) \circ (h' \otimes \text{Id}_1) \\ &= (\text{Id}_1 \circ h') \otimes (h \circ \text{Id}_1) \\ &= h' \otimes h \end{aligned}$$

が成り立つ。 命題 F.13-(2) の証明と同様の議論により \otimes に関する逆元も存在するので、

$$H := \text{Hom}_{\mathcal{G}}(1, 1)$$

は \otimes に関して可換群をなす。

ここで、写像

$$\alpha: G \longrightarrow \text{Aut}(H), \quad g \longmapsto (h \longmapsto (\text{Id}_g \otimes h) \otimes \text{Id}_{g^*})$$

を考える。 \otimes の関手性により α は群準同型である。

最後に、 \mathcal{G} が骨格的であることから associator が

$$a_{g_1, g_2, g_3} \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(g_1 \otimes g_2 \otimes g_3, g_1 \otimes g_2 \otimes g_3)$$

のように自己同型になることに注意する。ここから

$$a: G^{\times 3} \longrightarrow H, (g_1, g_2, g_3) \longmapsto a_{g_1, g_2, g_3} \otimes (\text{Id}_{(g_1 \otimes g_2 \otimes g_3)^*})$$

のように定義すると, pentagon identity から $a \in Z_{\text{Grp}}^3(G; H)$ が分かり, triangle identity から g_1, g_2, g_3 のうち少なくとも 1 つが 1 であるときに $a(g_1, g_2, 1) = \text{Id}_1$ が成り立つことが分かる。■

F.7 3-群

F.7.1 3-圏

一般の 3-圏は associator, unitors のせいで扱いが難しいので, まずは**厳密な 3-圏** (strict 3-group) を考える。Cat を【例 F.2.1】の方法で**モノイダル圏**と見做す。定義 F.51 から, **2-圏**としての同値

$$\text{Str2Cat} \cong \text{Cat-Cat}$$

が成り立つ。さらに Cat-Cat は直積に関して**モノイダル圏**になる。

定義 F.59: 厳密な 3-圏

厳密な 2-圏が成す 2-圏 Cat-Cat を**モノイダル圏**と見做す。このとき **Cat-Cat-豊稜圏**のことを**厳密な 3-圏** (strict 3-category) と呼ぶ。

F.7.2 2-crossed module と厳密な 3-群

定義 F.60: 厳密な 3-群

厳密な 3-圏 \mathcal{G} であって, ただ 1 つの対象を持ち, 1-射, 2-射, 3-射が厳密に可逆であるものを**厳密な 3-群** (strict 3-group) と呼ぶ。

定義 F.61: 2-交差加群

2-交差加群 (2-crossed module) とは, 以下のデータからなる:

- 群の正規複体 $G_3 \xrightarrow{\partial_2} G_2 \xrightarrow{\partial_1} G_1$
- 群の左作用 $\alpha_1: G_1 \rightarrow \text{Aut}(G_2)$, $\alpha_2: G_1 \rightarrow \text{Aut}(G_3)$
- **Pfeiffer lifting** と呼ばれる写像 $\{-, -\}: G_2 \times G_2 \rightarrow G_3$

これらは以下の条件を満たす:

(2CM1) ∂_1, ∂_2 は G_1 -同変

(2CM2) $\forall g_2, h_2 \in G_2$ に対して

$$\partial_2\{g_2, h_2\} = \alpha_1(g_2)(h_2)g_2h_2^{-1}g_2^{-1}$$

(2CM3) $\forall g_3, h_3 \in G_3$ に対して

$$\{\partial_2g_3, \partial_2h_3\} = [h_3, g_3]$$

(2CM4) $\forall g_2 \in G_2, g_3 \in G_3$ に対して

$$\{g_2, \partial_2g_3\}\{\partial_2g_3, g_2\} = \alpha_2(\partial_1(g_2))(g_3)g_3^{-1}$$

(2CM5) $\forall g_2, h_2, k_2 \in G_2$ に対して

$$\begin{aligned}\{g_2, h_2k_2\} &= \{g_2, h_2\}\{\partial_2\{g_2, k_2\}, g_2h_2g_2^{-1}\}\{g_2, k_2\} \\ \{g_2h_2, k_2\} &= \alpha_2(\partial_1(g_2))(\{h_2, k_2\})\{g_2, h_2k_2h_2^{-1}\}\end{aligned}$$

(2CM6) $\forall g_1 \in G_1, \forall g_2, h_2 \in G_2$ に対して

$$\alpha_2(g_1)(\{g_2, h_2\}) = \{\alpha_1(g_1)(g_2), \alpha_1(g_1)(h_2)\}$$

参考文献

- [AC84] Y. Aharonov and A. Casher. *Topological quantum effects for neutral particles*, Phys. Rev. Lett. **53** 319 (1984).
- [AFM20] David Aasen, Paul Fendley, and Roger S. K. Mong. *Topological Defects on the Lattice: Dualities and Degeneracies* (2020), [2008.08598].
- [AFR20] David Ayala, John Francis, and Nick Rozenblyum. *Factorization homology i: higher categories* (2020), [1504.04007].
- [Alf23] Luigi Alfonsi. *Higher geometry in physics* (2023), [2312.07308].
- [Ati88] Michael F. Atiyah. *Topological quantum field theory*, Publications Mathématiques de l’IHÉS **68** 175 (1988).
- [Bae] John C. Baez. connections as functors. Available at <https://math.ucr.edu/home/baez/qg-fall2004/connection.pdf>.
- [Bai17] James Bailie. Semisimple Categories, 2017. available at <https://jameshbailie.github.io/Papers/papers/Semisimple.pdf>.
- [Bar91] John W Barrett. *Holonomy and path structures in general relativity and yang-mills theory*, International journal of theoretical physics **30** 1171 (1991).
- [BGST05] Michel Bauer, Georges Girardi, Ramond Stora, and Frank Thuillier. *A class of topological actions*, Journal of High Energy Physics **2005** (8), 027 (2005), [hep-th/0406221].
- [BK01] Bojko Bakalov and Alexander A Kirillov. *Lectures on tensor categories and modular functors*. American Mathematical Soc., 2001.
- [BL04] John C. Baez and Aaron D. Lauda. *Higher-dimensional algebra v: 2-groups* (2004), [math/0307200].
- [BS05] John C. Baez and Urs Schreiber. *Higher Gauge Theory* (2005), [math/0511710].
- [BS11] Tom Banks and Nathan Seiberg. *Symmetries and strings in field theory and gravity*, Phys. Rev. D **83** (8), 084019 (2011), [1011.5120].
- [BSP20] Clark Barwick and Christopher Schommer-Pries. *On the unicity of the homotopy theory of higher categories* (2020), [1112.0040].
- [BT18] Lakshya Bhardwaj and Yuji Tachikawa. *On finite symmetries and their gauging in two dimensions*, Journal of High Energy Physics **2018** (3) (2018), [1704.02330].
- [CGW10] Xie Chen, Zheng-Cheng Gu, and Xiao-Gang Wen. *Local unitary transformation, long-range quantum entanglement, wave function renormalization, and topological order*, Phys. Rev. B **82** (15), 155138 (2010), [1004.3835].

- [Che24] Shi Chen. *Anomaly and invertible field theory with higher-form symmetry: Extended group cohomology* (2024), [[2404.18921](#)].
- [CP08] Bob Coecke and Dusko Pavlovic. *Quantum measurements without sums* (2008), [[quant-ph/0608035](#)].
- [DF94] Xianzhe Dai and Daniel S. Freed. *η -invariants and determinant lines*, Journal of Mathematical Physics **35** (10), 5155â 5194 (1994).
- [DW90] Robbert Dijkgraaf and Edward Witten. *Topological Gauge Theories and Group Cohomology*, Commun. Math. Phys. **129** 393 (1990).
- [EGNO15] Pavel Etingof, Shlomo Gelaki, Dmitri Nikshych, and Victor Ostrik. *Tensor categories*. American Mathematical Soc., 2015.
- [ENO02] Pavel Etingof, Dmitri Nikshych, and Viktor Ostrik. *On fusion categories* (2002), [[math/0203060](#)].
- [FH21] Daniel S Freed and Michael J Hopkins. *Reflection positivity and invertible topological phases*, Geometry; Topology **25** (3), 1165â 1330 (2021).
- [FP66] E. Fabri and L. E. Picasso. *Quantum field theory and approximate symmetries*, Phys. Rev. Lett. **16** 408 (1966).
- [FQ93] Daniel S. Freed and Frank Quinn. *Chern-simons theory with finite gauge group*, Communications in Mathematical Physics **156** (3), 435â 472 (1993), [[hep-th/9111004](#)].
- [FRS02] Jurgen Fuchs, Ingo Runkel, and Christoph Schweigert. *TFT construction of RCFT correlators 1. Partition functions*, Nucl. Phys. B **646** 353 (2002), [[hep-th/0204148](#)].
- [FVB61] Edward Fadell and James Van Buskirk. *On the braid groups of e_2 and s_2* , Bull. Amer. Math. Soc **67** 211 (1961).
- [GJ09] Paul G Goerss and John F Jardine. *Simplicial homotopy theory*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [GKSW15] Davide Gaiotto, Anton Kapustin, Nathan Seiberg, and Brian Willett. *Generalized global symmetries*, Journal of High Energy Physics **2015** 172 (2015), [[1412.5148](#)].
- [Haa11] Jeongwan Haah. *Local stabilizer codes in three dimensions without string logical operators*, Phys. Rev. A **83** (4), 042330 (2011), [[1101.1962](#)].
- [Has10] M. B. Hastings. *Locality in quantum systems* (2010), [[1008.5137](#)].
- [HM06] Hans Halvorson and Michael Mueger. *Algebraic Quantum Field Theory* (2006), [[math-ph/0602036](#)].
- [Hus94] Dale Husem ller. *Fibre bundles*. Springer-Verlag, 1994.
- [KB10] Alexander Kirillov, Jr. and Benjamin Balsam. *Turaev-Viro invariants as an extended TQFT* (2010), [[1004.1533](#)].
- [Kit03] A. Yu. Kitaev. *Fault-tolerant quantum computation by anyons*, Annals of Physics (1), 2 (2003), [[quant-ph/9707021](#)].
- [KL20] Kyle Kawagoe and Michael Levin. *Microscopic definitions of anyon data*, Phys. Rev. B (11), 115113 (2020), [[1910.11353](#)].
- [Koc96] Stanley O Kochman. *Bordism, stable homotopy and Adams spectral sequences*. American Mathematical Soc., 1996.

- [KS14] Anton Kapustin and Nathan Seiberg. *Coupling a QFT to a TQFT and duality*, Journal of High Energy Physics **2014** 1 (2014), [[1401.0740](#)].
- [KT13] Anton Kapustin and Ryan Thorngren. *Higher symmetry and gapped phases of gauge theories* (2013), [[1309.4721](#)].
- [KW14] Liang Kong and Xiao-Gang Wen. *Braided fusion categories, gravitational anomalies, and the mathematical framework for topological orders in any dimensions* (2014), [[1405.5858](#)].
- [KZ22] Liang Kong and Zhi-Hao Zhang. *An invitation to topological orders and category theory* (2022), [[2205.05565](#)].
- [Lak18] Ethan Lake. *Higher-form symmetries and spontaneous symmetry breaking* (2018), [[1802.07747](#)].
- [Lan21] Markus Land. *introduction to Infinity-Categories*. Springer International Publishing, 2021.
- [Lee12] John. M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2012.
- [Lur] Jacob Lurie. <https://kerodon.net/>.
- [Lur08] Jacob Lurie. *Higher topos theory* (2008), [[math/0608040](#)].
- [Mue98] Michael Mueger. *Galois Theory for Braided Tensor Categories and the Modular Closure* (1998), [[math/9812040](#)].
- [Mue02] Michael Mueger. *From subfactors to categories and topology i. frobenius algebras in and morita equivalence of tensor categories* (2002), [[math/0111204](#)].
- [NC76] H.B. Nielsen and S. Chadha. *On how to count Goldstone bosons*, Nuclear Physics B **105** (3), 445 (1976).
- [Nic22] Liviu I. Nicolaescu. *Lectures on the Geometry of Manifolds*, 2022. Available at <https://www3.nd.edu/~lnicolae/Lectures.pdf>.
- [nLa] nLab. <https://ncatlab.org/nlab/show/HomePage>.
- [NSS12] Thomas Nikolaus, Urs Schreiber, and Danny Stevenson. *Principal infinity-bundles – General theory* (2012), [[1207.0248](#)].
- [Reu23] David Reutter. *Uniqueness of Unitary Structure for Unitarizable Fusion Categories*, Communications in Mathematical Physics **397** (1), 37 (2023), [[1906.09710](#)].
- [Sim21] Steven Simon. *Topological Quantum: Lecture Notes and Proto-Book*, 2021. Available at <http://www-thphys.physics.ox.ac.uk/people/SteveSimon/topological2021/TopoBook-Sep28-2021.pdf>.
- [SS07] James Simons and Dennis Sullivan. *Axiomatic characterization of ordinary differential cohomology*, Journal of Topology **1** (1), 45â 56 (2007).
- [Ste51] Norman Steenrod. *The Topology of Fibre Bundles. (PMS-14), Volume 14*. Princeton University Press, Princeton, 1951.
- [Tac17] Yuji Tachikawa. *On gauging finite subgroups* (2017), [[1712.09542](#)].
- [Tu17] Loring W Tu. *Differential geometry: connections, curvature, and characteristic classes*. Springer, 2017.
- [Tur10] Vladimir G Turaev. *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*. de Gruyter, 2010.
- [TV92] Vladimir G Turaev and Oleg Ya Viro. *State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols*, Topology (4) (1992).

- [TV17] Vladimir Turaev and Alexis Virelizier. *Monoidal Categories and Topological Field Theory*. Progress in Mathematics. Birkhäuser, 2017.
- [WM12] Haruki Watanabe and Hitoshi Murayama. *Unified Description of Nambu-Goldstone Bosons without Lorentz Invariance*, Phys. Rev. Lett. **108** (25), 251602 (2012), [1203.0609].
- [Yam04] Shigeru Yamagami. *Frobenius duality in c^* -tensor categories*, Journal of Operator Theory 3 (2004).
- [九後 89] 九後汰一郎. ゲージ場の量子論 II. 1989.
- [今野 13] 今野宏. 微分幾何学. 東京大学出版会, 2013.
- [志甫 16] 志甫淳. 層とホモロジー代数. 共立出版, 2016.
- [川平 24] 川平将志. アノマリーの数学的基礎から現象論的応用まで, 2024. Available at <https://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~soken.editorial/author.html?author=%E5%B7%9D%E5%B9%B3%20%E5%B0%86%E5%BF%97>.
- [中原 18] 中原幹夫, 佐久間一浩. 理論物理学のための幾何学とトポロジー I 原著第 2 版. 日本評論社, 2018.
- [中原 21] 中原幹夫, 久木田真吾, 佐久間一浩, 綿村尚毅. 理論物理学のための幾何学とトポロジー II 原著第 2 版. 日本評論社, 2021.
- [藤川 01] 藤川和男. 経路積分と対称性の量子的破れ. 岩波書店, 2001.
- [日高 22] 日高義将. 高次対称性入門, 2022. Available at https://ribf.riken.jp/~hidaka/yh/slide/hidaka_higher_form.pdf.