

第 1 章

モノイダル圏・フュージョン圏・高次群

この章では標数 0 の体 \mathbb{K} のみを考える.

1.1 加法圏

定義 1.1: 加法圏・アーベル圏

圏 \mathcal{C} が体 \mathbb{K} 上の**加法圏** (additive category) であるとは, 以下を充たすこと:

(add-1)

任意の Hom 集合 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が可換群の構造をもち, かつ射の合成

$$\circ: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

が群演算に関して双加法的である.

(add-2)

零対象^a (zero object) $\mathbf{0} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が存在し, $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{0}, X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(, \mathbf{0}) = 0$ を充たす^b.

(add-3)

有限の余積が常に存在する.

加法圏 \mathcal{C} は, $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に関して $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が \mathbb{K} -ベクトル空間の構造を持ち, かつ合成 \circ が \mathbb{K} -双線形写像でもあるとき, **\mathbb{K} -線形** (\mathbb{K} -linear) であると言われる.

^a 始対象かつ終対象

^b 最右辺は (add-1) の意味で零ベクトル空間.

加法圏 \mathcal{C} は, 以下の条件を充たすとき**アーベル圏** (abelian category) と呼ばれる:

(Ab-1)

任意の射 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が核 $\ker f: \text{Ker } f \longrightarrow X$ および余核 $\text{coker } f: Y \longrightarrow \text{Coker } f$ を持つ.

(Ab-2)

$\text{Ker } f = \mathbf{0}$ ならば $f = \ker(\text{coker } f)$, かつ $\text{Coker } f = \mathbf{0}$ ならば $f = \text{coker}(\ker f)$

定義 1.2: 加法的関手・完全関手

加法圏 \mathcal{C}, \mathcal{D} の間の関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が**加法的** (additive) であるとは, $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して定まる写像

$$F_{X,Y}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)), f \mapsto F(f)$$

が可換群の準同型であることを言う. 特に加法圏 \mathcal{C}, \mathcal{D} が **\mathbb{K} -線形** で, かつ $\forall X, Y \in \mathcal{C}$ に対して $F_{X,Y}$ が \mathbb{K} -線型写像でもあるとき, F は **\mathbb{K} -線形** (\mathbb{K} -linear) であると言う.

アーベル圏 \mathcal{C}, \mathcal{D} の間の加法的関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を与える.

- F が**左完全** (left exact) であるとは, \mathcal{C} の任意の短完全列 $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ に対して

$$0 \rightarrow F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z)$$

が \mathcal{D} の完全列になること.

- F が**右完全** (right exact) であるとは, \mathcal{C} の任意の短完全列 $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ に対して

$$F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z) \rightarrow 0$$

が \mathcal{D} の完全列になること.

- F が**完全** (exact) であるとは, F が右完全かつ左完全であること.

【例 1.1.1】表現の圏

G を群とする. このとき

- G の表現 (ρ, V) を対象とする
- G -同変な \mathbb{K} -線型写像 $(\rho, V) \xrightarrow{f} (\rho', V')$ を射とする

圏を $\mathbf{Rep}(G)$ と書く. $\mathbf{Rep}(G)$ は**アーベル圏**である.

定義 1.3: 単純・半単純

- アーベル圏 \mathcal{C} の対象 $X \in \mathcal{C}$ が**単純** (simple) であるとは、任意のモノ射 $i: U \hookrightarrow X$ が 0 であるか同型射であることを言う。
- アーベル圏 \mathcal{C} が**半単純** (semisimple) であるとは、 $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が単純対象の有限余積と同型であることを言う。 i.e. 単純対象の族 $\{V_i \in \text{Ob}(\mathcal{C})\}_{i \in I}$ および有限個を除いて 0 であるような非負整数の族 $\{N_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}_{i \in I}$ が存在して

$$X \cong \bigoplus_{i \in I} N_i X_i$$

が成り立つこと。

定義 1.4: 有限性

アーベル圏 \mathcal{C} とその対象 $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を与える。

- X が**有限長** (finite length) を持つとは、有限のフィルトレーション

$$0 = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_{n-1} \subset X_n = X$$

であって $X_i/X_{i-1} := \text{Coker}(X_{i-1} \hookrightarrow X_i)$ ($\forall i$) が**単純対象**であるようなもの (**Jordan-Hölder 列**と言う) が存在することを言う。このときの n を X の**長さ** (length) と呼ぶ^a。

以下、アーベル圏 \mathcal{C} は **\mathbb{K} -線形**であるとする。

- \mathcal{C} が**局所有限** (locally finite) であるとは、以下の 2 条件を充たすこと：
 - (IFin-1) $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して、 \mathbb{K} -ベクトル空間 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が有限次元
 - (IFin-2) $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が有限長を持つ。
- \mathcal{C} が**有限** (finite) であるとは、以下の 4 条件を充たすこと：
 - (Fin-1) $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して、 \mathbb{K} -ベクトル空間 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が有限次元
 - (Fin-2) $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が有限長を持つ。
 - (Fin-3) $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が射影的被覆^bを持つ。
 - (Fin-4) 単純対象の同型類が有限個である。

^a Jordan-Hölder の定理 [?, THEOREM 1.5.4, p.5] から、 X の任意の Jordan-Hölder 列は存在すれば同一の長さを持つ。

^b $P \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が**射影的** (projective) であるとは、関手 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, -)$ が完全関手であることを言う。 $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ の**射影的被覆** (projective cover) とは、射影的对象 $P_X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ とエビ射 $p_X: P_X \twoheadrightarrow X$ の組み (P_X, p_X) であって、任意の射影的对象 $P \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ およびエビ射 $p: P \twoheadrightarrow X$ に対してあるエビ射 $h: P \twoheadrightarrow P_X$ が存在して $p_X \circ h = p$ を充たすようなもののこと。

1.2 モノイダル圏

これまで何回か登場したが、モノイダル圏についてまとめておく：

定義 1.5: モノイダル圏

モノイダル圏 (monoidal category) は、以下の 5 つのデータからなる：

- 圏 \mathcal{C}
- テンソル積 (tensor product) と呼ばれる関手 $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$
- 単位対象 (unit object) $I \in \text{Ob}(\mathcal{C})$
- associator と呼ばれる自然同値

$$\{a_{X,Y,Z}: (X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{\cong} X \otimes (Y \otimes Z)\}_{X,Y,Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

- left/right unitors と呼ばれる自然同値

$$\{l_X: I \otimes X \xrightarrow{\cong} X\}_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})},$$

$$\{r_X: X \otimes I \xrightarrow{\cong} X\}_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは $\forall X, Y, Z, W \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ について以下の 2 つの図式を可換にする：

(triangle diagram)

$$\begin{array}{ccc} (X \otimes I) \otimes Y & \xrightarrow{a_{X,I,Y}} & X \otimes (I \otimes Y) \\ & \searrow r_X \otimes \text{Id}_Y & \swarrow \text{Id}_X \otimes l_Y \\ & X \otimes Y & \end{array}$$

(pentagon diagram)

$$\begin{array}{ccccc} & & ((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z & & \\ & \swarrow a_{W \otimes X, Y, Z} & & \searrow a_{W, X, Y \otimes \text{Id}_Z} & \\ (W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) & & & & (W \otimes (X \otimes Y)) \otimes Z \\ & \searrow a_{W, X, Y \otimes Z} & & \downarrow a_{W, X \otimes Y, Z} & \\ & & W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z)) & & W \otimes ((X \otimes Y) \otimes Z) \\ & & \swarrow \text{Id}_Z \otimes a_{X, Y, Z} & & \end{array}$$

モノイダル圏 \mathcal{C} が**厳密** (strict) であるとは、 $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$(X \otimes Y) \otimes Z = X \otimes (Y \otimes Z),$$

$$I \otimes X = X, \quad X \otimes I = X$$

が成り立ち、かつ $a_{X,Y,Z}$, l_X , r_X が恒等射であることを言う。

！ 定義 1.5 で言うモノイダル圏を、**弱いモノイダル圏** (weak monoidal category) と呼ぶこともある。

【例 1.2.1】 \mathbf{Cat} のモノイダル構造

\mathbf{Cat} を小圏と関手が成す圏とする。このとき、関手

$$\times: \mathbf{Cat} \times \mathbf{Cat} \longrightarrow \mathbf{Cat}$$

を $\text{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) := \text{Ob}(\mathcal{C}) \times \text{Ob}(\mathcal{D})$ により定めると、組み $(\mathbf{Cat}, \times, I)$ は厳密なモノイダル圏になる。
ただし I はただ 1 つの対象 \bullet を持ち、 $\text{Hom}_I(\bullet, \bullet) = \{\text{Id}_\bullet\}$ とする圏である^a

^a これは \mathbf{Cat} の終対象でもある。

定義 1.6: 双対

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ およびその任意の対象 $X, X^* \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を与える。 X^* が X の**左双対** (left dual) であるとは、

- **coevaluation** と呼ばれる射

$$\text{coev}_X^L: I \longrightarrow X \otimes X^*$$

- **evaluation** と呼ばれる射

$$\text{ev}_X^L: X^* \otimes X \longrightarrow I$$

が存在して以下の図式を可換にすることを言う：

(zig-zag equations)

$$\begin{array}{ccc}
 I \otimes X & \xrightarrow{\text{coev}_X^L \otimes \text{Id}_X} & (X \otimes X^*) \otimes X \\
 \downarrow r_X & & \downarrow a_{X, X^*, X} \\
 & & X \otimes (X^* \otimes X) \\
 & & \downarrow \text{Id}_X \otimes \text{ev}_X^L \\
 X & \xleftarrow{r_X} & X \otimes I
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
X^* \otimes I & \xrightarrow{\text{Id}_{X^*} \otimes \text{coev}_X^L} & X^* \otimes (X \otimes X^*) \\
\downarrow l_{X^*} & & \downarrow a_{X^*, X, X^*}^{-1} \\
& & (X^* \otimes X) \otimes X^* \\
& & \downarrow \text{ev}_X^L \otimes \text{Id}_{X^*} \\
X^* & \xleftarrow{l_{X^*}} & I \otimes X^*
\end{array}$$

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ およびその任意の対象 $X, {}^*X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を与える. *X が X の右双対 (right dual) であるとは,

- 射

$$\text{coev}_X^R: I \longrightarrow {}^*X \otimes X$$

- 射

$$\text{ev}_X^R: X \otimes {}^*X \longrightarrow I$$

が存在して以下の図式を可換にすることを言う：

(zig-zag equations)

$$\begin{array}{ccc}
X \otimes I & \xrightarrow{\text{Id}_X \otimes \text{coev}_X^R} & X \otimes ({}^*X \otimes X) \\
\downarrow l_X & & \downarrow a_{X, {}^*X, X}^{-1} \\
& & (X \otimes {}^*X) \otimes X \\
& & \downarrow \text{ev}_X^R \otimes \text{Id}_X \\
X & \xleftarrow{l_X} & I \otimes X
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
I \otimes {}^*X & \xrightarrow{\text{coev}_X^R \otimes \text{Id}_{{}^*X}} & ({}^*X \otimes X) \otimes {}^*X \\
\downarrow l_{X^*} & & \downarrow a_{{}^*X, X, {}^*X}^{-1} \\
& & {}^*X \otimes (X \otimes {}^*X) \\
& & \downarrow \text{Id}_{{}^*X} \otimes \text{ev}_X^R \\
{}^*X & \xleftarrow{r_{X^*}} & {}^*X \otimes I
\end{array}$$

ストリング図式で書くときは

$$\text{coev}_X^L := \text{diagram of a cup with an arrow pointing down} \quad \text{ev}_X^L := \text{diagram of a cap with an arrow pointing down} \quad \text{coev}_X^R := \text{diagram of a cup with an arrow pointing up} \quad \text{ev}_X^R := \text{diagram of a cap with an arrow pointing up}$$

とする. ストリング図式において $\text{coev}^L, \text{coev}^R$ に対する (zig-zag equations) は

$$\begin{array}{c} \text{diagram of a straight line with an upward arrow} \\ \text{diagram of a straight line with a downward arrow} \end{array} = \begin{array}{c} \text{diagram of a zig-zag line with an upward arrow} \\ \text{diagram of a zig-zag line with a downward arrow} \end{array}$$

$\text{coev}^R, \text{coev}^L$ に対する (zig-zag equations) は

$$\begin{array}{c} \text{diagram of a straight line with an upward arrow} \\ \text{diagram of a straight line with a downward arrow} \end{array} = \begin{array}{c} \text{diagram of a zig-zag line with an upward arrow} \\ \text{diagram of a zig-zag line with a downward arrow} \end{array}$$

と書ける.

! X^* が X の左双対であるならば, X は X^* に関して $\text{ev}_{X^*}^R = \text{ev}_X^L, \text{coev}_{X^*}^R = \text{coev}_X^L$ とした右双対となっている. 従って, 左/右双対をもつ任意の X に対して $*(X^*) \cong X \cong X \cong (*X)^*$ が成り立つ.

定義 1.7: rigid なモノイダル圏

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ が **rigid** であるとは, $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が左・右双対を持つことを言う.

定義 1.8: 組紐付きモノイダル圏

組紐付きモノイダル圏 (braided monoidal category) とは, 以下の 2 つからなる:

- モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$
- 組紐 (braiding) と呼ばれる自然同型

$$\{b_{X,Y}: X \otimes Y \xrightarrow{\cong} Y \otimes X\}_{X,Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ について以下の図式を可換にする:

(hexagon diagrams)

$$\begin{array}{ccc} X \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{a_{X,Y,Z}^{-1}} (X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{b_{X,Y} \otimes \text{Id}_Z} (Y \otimes X) \otimes Z \\ \downarrow b_{X,Y \otimes Z} & & \downarrow a_{Y,X,Z} \\ (Y \otimes Z) \otimes X & \xleftarrow{a_{Y,Z,X}^{-1}} Y \otimes (Z \otimes X) & \xleftarrow{\text{Id}_X \otimes b_{X,Z}} Y \otimes (X \otimes Z) \\ \\ (X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{a_{X,Y,Z}} X \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{\text{Id}_X \otimes b_{Y,Z}} X \otimes (Z \otimes Y) \\ \downarrow b_{X \otimes Y, Z} & & \downarrow a_{X,Z,Y}^{-1} \\ Z \otimes (X \otimes Y) & \xleftarrow{a_{Z,X,Y}} (Z \otimes X) \otimes Y & \xleftarrow{b_{X,Z} \otimes \text{Id}_Y} (X \otimes Z) \otimes Y \end{array}$$

組紐付きモノイダル圏 \mathcal{C} であって, \mathcal{C} の組紐が $b_{X,Y} = b_{Y,X}^{-1}$ を満たすもののことを対称モノイダル圏 (symmetric monoidal category) と呼ぶ.

定義 1.9: モノイダル関手

2 つのモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, I_{\mathcal{C}}, a^{\mathcal{C}}, l^{\mathcal{C}}, r^{\mathcal{C}}), (\mathcal{D}, \otimes_{\mathcal{D}}, I_{\mathcal{D}}, a^{\mathcal{D}}, l^{\mathcal{D}}, r^{\mathcal{D}})$ の間の関手

$$F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

が弱いモノイダル関手 (lax monoidal functor) であるとは,

- 射

$$\varepsilon: I_{\mathcal{D}} \longrightarrow F(I_{\mathcal{C}})$$

- 自然変換

$$\{\mu_{X,Y}: F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y) \longrightarrow F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y)\}_{X,Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

があって, $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して以下の図式が可換になること:

(associativity)

$$\begin{array}{ccc}
(F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y)) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z) & \xrightarrow{a_{F(X), F(Y), F(Z)}^{\mathcal{D}}} & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} (F(Y) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z)) \\
\downarrow \mu_{X, Y} \otimes \text{Id}_{F(Z)} & & \downarrow \text{Id}_{F(X)} \otimes \mu_{Y, Z} \\
F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z) & & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y \otimes_{\mathcal{C}} Z) \\
\downarrow \mu_{X \otimes_{\mathcal{C}} Y, Z} & & \downarrow \mu_{X, Y \otimes_{\mathcal{C}} Z} \\
F((X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{C}} Z) & \xrightarrow{F(a_{X, Y, Z}^{\mathcal{C}})} & F(X \otimes_{\mathcal{C}} (Y \otimes_{\mathcal{C}} Z))
\end{array}$$

(unitality)

$$\begin{array}{ccc}
I_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathcal{D}} F(X) & \xrightarrow{\varepsilon \otimes \text{Id}_{F(X)}} & F(I_{\mathcal{C}}) \otimes_{\mathcal{D}} F(X) \\
\downarrow l_{F(X)}^{\mathcal{D}} & & \downarrow \mu_{I_{\mathcal{C}}, X} \\
F(X) & \xleftarrow{F(l_X^{\mathcal{C}})} & F(I_{\mathcal{C}} \otimes_{\mathcal{C}} X)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
F(X) \otimes_{\mathcal{D}} I_{\mathcal{D}} & \xrightarrow{\text{Id}_{F(X)} \otimes \varepsilon} & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(I_{\mathcal{C}}) \\
\downarrow r_{F(X)}^{\mathcal{D}} & & \downarrow \mu_{X, I_{\mathcal{C}}} \\
F(X) & \xleftarrow{F(r_X^{\mathcal{C}})} & F(X \otimes_{\mathcal{C}} I_{\mathcal{C}})
\end{array}$$

- 弱いモノイダル関手 F の ε と $\mu_{X, Y}$ が全て同型射ならば, F は**強いモノイダル関手** (strong monoidal functor) と呼ばれる.
- 弱いモノイダル関手 F の ε と $\mu_{X, Y}$ が全て恒等射ならば, F は**厳密なモノイダル関手** (strict monoidal functor) と呼ばれる.

定義 1.10: モノイダル自然変換

2つのモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, I_{\mathcal{C}}, a^{\mathcal{C}}, l^{\mathcal{C}}, r^{\mathcal{C}})$, $(\mathcal{D}, \otimes_{\mathcal{D}}, I_{\mathcal{D}}, a^{\mathcal{D}}, l^{\mathcal{D}}, r^{\mathcal{D}})$ の間の2つの弱いモノイダル関手 $(F_i: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, \varepsilon_i: I_{\mathcal{D}} \rightarrow F_i(I_{\mathcal{C}}), \{\mu_{iX,Y}: F_i(X) \otimes_{\mathcal{D}} F_i(Y) \rightarrow F_i(X \otimes_{\mathcal{C}} Y)\}_{X,Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})})$ $w/$ $i = 1, 2$ の間の自然変換

$$\begin{array}{ccc} & F_1 & \\ \curvearrowright & \downarrow \tau & \curvearrowleft \\ \mathcal{C} & & \mathcal{D} \\ \curvearrowleft & \downarrow F_2 & \end{array}$$

がモノイダル自然変換 (monoidal natural transformation) であるとは, $\forall X, Y \in \mathcal{C}$ に対して以下の図式が可換になること:

(テンソル積の保存)

$$\begin{array}{ccc} F_1(X) \otimes_{\mathcal{D}} F_1(Y) & \xrightarrow{\tau_X \otimes_{\mathcal{D}} \tau_Y} & F_2(X) \otimes_{\mathcal{D}} F_2(Y) \\ \mu_{1X,Y} \downarrow & & \downarrow \mu_{2X,Y} \\ F_1(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) & \xrightarrow{\tau_{X \otimes_{\mathcal{C}} Y}} & F_2(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \end{array}$$

(単位対象の保存)

$$\begin{array}{ccc} & I_{\mathcal{D}} & \\ \varepsilon_1 \swarrow & & \searrow \varepsilon_2 \\ F_1(I_{\mathcal{C}}) & \xrightarrow{\tau_{I_{\mathcal{C}}}} & F_2(I_{\mathcal{C}}) \end{array}$$

1.3 テンソル圏・フュージョン圏

! これまではモノイダル圏の対象を英大文字 X, Y, Z, \dots で, 単位対象を I と書いてきたが, 以下では対象を英小文字 x, y, z, \dots で, 単位対象を 1 と書くことにする.

定義 1.11: 環圏

圏 \mathcal{C} が多重環圏 (multiring category) であるとは, 以下の条件を満たすこと:

- (mR-1) \mathcal{C} は局所有有限な \mathbb{K} -線形アーベル圏
- (mR-2) \mathcal{C} はモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$
- (mR-3) 関手 $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ が \mathbb{K} -線形かつ双完全

圏 \mathcal{C} が環圏 (ring category) であるとは, 以下の条件を満たすこと:

- (R-1) \mathcal{C} は多重環圏
- (R-2) $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, 1) \cong \mathbb{K}$

定義 1.12: テンソル圏・フュージョン圏

圏 \mathcal{C} が多重テンソル圏 (multitensor category) であるとは、以下の条件を満たすこと：

(mT-1) \mathcal{C} は局所有限な \mathbb{K} -線形アーベル圏

(mT-2) \mathcal{C} は rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$

(mT-3) 関手 $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ が $\forall x, y, z, w \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して定める写像 $\otimes_{x,y,z,w}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x \otimes z, y \otimes w)$ が \mathbb{K} -双線形

圏 \mathcal{C} がテンソル圏 (tensor category) であるとは、以下の条件を満たすこと：

(T-1) \mathcal{C} は多重テンソル圏

(T-2) $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, 1) \cong \mathbb{K}$

圏 \mathcal{C} が多重フュージョン圏 (multifusion category) であるとは、以下の条件を満たすこと：

(mFus-1) \mathcal{C} は多重テンソル圏

(mFus-2) \mathcal{C} は \mathbb{K} -線形アーベル圏として有限かつ半単純

圏 \mathcal{C} がフュージョン圏 (fusion category) であるとは、以下の条件を満たすこと：

(Fus-1) \mathcal{C} はテンソル圏

(Fus-2) \mathcal{C} は \mathbb{K} -線形アーベル圏として有限かつ半単純

命題 1.1: 多重テンソル圏のテンソル積は双完全

多重テンソル圏 \mathcal{C} の関手 $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ は双完全である。

証明 [?, PROPOSITION 4.2.1., p.66] ■

命題 1.1 より,

$$(\text{多重}) \text{ テンソル圏} \implies (\text{多重}) \text{ 環圏}$$

が言える。

【例 1.3.1】 圏 \mathcal{C}_G と Vec_G

G を群とする。厳密なモノイダル圏 \mathcal{C}_G を,

- $\text{Ob}(\mathcal{C}_G) := G$
- $\forall g_1, g_2 \in G$ に対して

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_G}(g_1, g_2) := \begin{cases} \text{U}(1), & g_1 = g_2 \\ \emptyset, & g_1 \neq g_2 \end{cases}$$

- $g_1 \otimes g_2 := g_1 g_2$ かつ, $g_i \xrightarrow{\forall \theta_i} g_i$ に対して $\theta_1 \otimes \theta_2 := \theta_1 \theta_2$
- $1 := 1_G$

- $a_{g_1, g_2, g_3} := 1, l_g := 1, r_g := 1$

で定義する.

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ とする. 厳密なモノイダル圏 \mathbf{Vec}_G を,

- G -graded な \mathbb{K} -ベクトル空間

$$V = \bigoplus_{g \in G} V_g$$

を対象とする.

- grading を保存する \mathbb{K} -線型変換

$$f: \bigoplus_{g \in G} V_g \longrightarrow \bigoplus_{g \in G} W_g \quad \text{s.t.} \quad \forall g \in G, f(V_g) \subset W_g$$

を射とする.

- テンソル積 $\otimes: \mathbf{Vec}_G \times \mathbf{Vec}_G \longrightarrow \mathbf{Vec}_G$ は,

$$V \otimes W := \bigoplus_{g \in G} \left(\bigoplus_{\substack{x, y \in G, \\ xy = g}} V_x \otimes_{\mathbb{K}} W_y \right)$$

と定義する.

- 単位対象は $1 := \mathbb{K}$ とする^a
- $a_{g_1, g_2, g_3} := 1, l_g := 1, r_g := 1$

によって定義する. G が有限群ならば \mathcal{C}_G はフュージョン圏である.

^a $1_G \in G$ 成分以外が全て 0

【例 1.3.2】 圏 \mathcal{C}_G^α と \mathbf{Vec}_G^α

G を群とする. 【例 1.3.1】 の associator と unitors を非自明にしてみよう. 今 $\alpha \in Z_{\text{Grp}}^3(G; \text{U}(1))$ を 1 つ固定する^a.

モノイダル圏 \mathcal{C}_G^α を,

$$\begin{aligned} a_{g_1, g_2, g_3} &:= \alpha(g_1, g_2, g_3), \\ l_g &:= \alpha(1, 1, g)^{-1}, \\ r_g &:= \alpha(g, 1, 1) \end{aligned}$$

とおくことにより定義する^b. 実際, コサイクル条件および $U(1)$ の可換性により

$$\begin{aligned}
& (\text{Id}_{g_4} \otimes a_{g_1, g_2, g_3}) \circ a_{g_4, g_1 \otimes g_2, g_3} \circ (a_{g_4, g_1, g_2} \otimes \text{Id}_{g_3}) \\
&= \alpha(g_1, g_2, g_3) \alpha(g_4, g_1 g_2, g_3) \alpha(g_4, g_1, g_2) \\
&= \alpha(g_4 g_1, g_2, g_3) \alpha(g_4, g_1, g_2 g_3) \\
&= \alpha(g_4, g_1, g_2 g_3) \alpha(g_4 g_1, g_2, g_3) \\
&= a_{g_4, g_1, g_2 g_3} \circ a_{g_4 \otimes g_1, g_2, g_3}
\end{aligned}$$

の通りに **(pentagon identity)** が成り立ち,

$$\begin{aligned}
(\text{Id}_{g_1} \otimes l_{g_2}) \circ a_{g_1, 1, g_2} &= \frac{\alpha(g_1, 1, g_2)}{\alpha(1, 1, g_2)} \\
&= \frac{\alpha(g_1, 1, 1) \alpha(g_1, 1, g_2) \alpha(1, 1, g_2)}{\alpha(g_1, 1, g_2) \alpha(1, 1, g_2)} \\
&= \alpha(g_1, 1, 1) \\
&= r_{g_1}
\end{aligned}$$

の通りに **(triangle identity)** が成り立つ. もし $l_g = r_g = \text{Id}_g$ にしたければ

$$\forall g, h \in G, \alpha(g, 1, h) = 1_G$$

を充たす $\alpha \in Z_{\text{Grp}}^3(G; U(1))$ をとることが必要十分である (正規化条件).

圏 \mathbf{Vec}_G^α は, $\alpha \in Z_{\text{Grp}}^3(G; \mathbb{K}^\times)$ に対して \mathcal{C}_G^α の構成を線形に拡張することで得られる. G が有限群ならば \mathbf{Vec}_G^α は **フュージョン圏** である.

^a i.e. 3-コサイクル

^b 他のデータは【例 1.3.1】と全く同じである

定義 1.13: テンソル関手・ファイバー関手

\mathcal{C}, \mathcal{D} を **多重環圏** とする. 関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を与える. F が **テンソル関手** (tensor functor) であるとは, 以下を充たすこと:

(TF-1) F は **\mathbb{K} -線形**

(TF-2) F は **強いモノイダル関手**

(TF-3) F は **完全かつ忠実**^a

特に $\mathcal{D} = \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ のとき, テンソル関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ は **ファイバー関手** (fiber functor) と呼ばれる.

^a この条件は [?, DEFINITION 4.2.5., p.66] に合わせて付けたものであり, テンソル関手と言った際には必要とされないことも多い.

【例 1.3.3】圏 \mathbf{Vec}_G^α のテンソル関手

G_1, G_2 を群, $\omega_i \in Z_{\text{Grp}}^3(G_i; \mathbf{U}(1))$ を 3-コサイクルとする. テンソル関手

$$F: \mathcal{C}_{G_1}^{\alpha_1} \longrightarrow \mathcal{C}_{G_2}^{\alpha_2}$$

とはどのようなものだろうか.

まず F は強いモノイダル関手であるから, 対象の対応について群準同型

$$f: G_1 \longrightarrow G_2$$

このとき強いモノイダル関手の持つ自然変換とは, ある $\mu \in C_{\text{Grp}}^2(G_1; \mathbf{U}(1))$ を用いて

$$\mu_{g_1, g_2} := \mu(g_1, g_2) \text{Id}_{f(g_1 g_2)}: f(g_1) f(g_2) \xrightarrow{\cong} f(g_1 g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G_1$$

と書けるが, (associativity) から

$$\mu(g_1, g_2 g_3) \mu(g_2, g_3) \alpha_2(f(g_1), f(g_2), f(g_3)) = \alpha_1(g_1, g_2, g_3) \mu(g_1 g_2, g_3) \mu(g_1, g_2)$$

でなくてはならない. i.e.

$$\alpha_1 = f^* \alpha_2 \cdot \delta \mu \quad (1.3.1)$$

である. 逆に群準同型 $f: G_1 \longrightarrow G_2$ および $\mu \in C_{\text{Grp}}^3(G_1; \mathbf{U}(1))$ の組 (f, μ) であって (1.3.1) を満たすものが与えられると, これらを素材にしてテンソル関手

$$F: \mathcal{C}_{G_1}^{\alpha_1} \longrightarrow \mathcal{C}_{G_2}^{\alpha_2}$$

を構成することができる. このような関手 F が圏同値になる必要十分条件は f が群の同型写像になることである.

【例 1.3.4】圏 \mathbf{Vec}_G^α のモノイダル自然変換

【例 1.3.3】の構成で得られるテンソル関手を $F_{f, \mu}$ と書く. このとき, モノイダル自然変換

$$\begin{array}{ccc} & F_{f, \mu} & \\ \text{Vec}_{G_1}^{\alpha_1} & \xrightarrow{\quad} & \text{Vec}_{G_2}^{\alpha_2} \\ & F_{f', \mu'} & \end{array} \quad \tau$$

を同定しよう. まず自然変換と言うからには $\forall g \in G_1$ に対して

$$\tau_g := \tau(g) \text{Id}_{f(g)}: f(g) \longrightarrow f'(g)$$

を定めないとはいけない. ただし $\tau \in C_{\text{Grp}}^1(G_1; \mathbf{U}(1))$ である. ところが, 【例 1.3.2】より $\text{Vec}_{G_2}^{\alpha_2}$ の射は $f(g) = f'(g)$, i.e. $f = f'$ でないと自然変換が存在しない.

(テンソル積の保存) の条件から, $\forall g_1, g_2 \in G_1$ に対して

$$\mu'(g_1, g_2)\tau(g_1)\tau(g_2) = \tau(g_1g_2)\mu(g_1, g_2)$$

でなくてはならない. i.e.

$$\mu = \mu' \cdot \delta\tau \quad (1.3.2)$$

である. 逆に (1.3.2) を満たす $\tau \in C_{\text{Grp}}^1$ からモノイダル自然変換 $\tau: F_{f, \mu} \Rightarrow F_{f, \mu'}$ を構成することができる.

1.3.1 量子次元

定義 1.14: 量子トレース

- rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$
- 対象 $x \in \mathcal{C}$
- $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x^{**}), g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, **x)$

を与える.

- f の左量子トレース (left quantum trace) を以下で定義する:

$$\text{Tr}^L(f): 1 \xrightarrow{\text{coev}_x^L} x \otimes x^* \xrightarrow{f \otimes \text{Id}_x} x^{**} \otimes x^* \xrightarrow{\text{ev}_{x^*}^L} 1$$

ストリング図式で書くと次のようになる^a:

$$\text{Tr}^L(f) := \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{---} \text{ } x^{**} \text{ ---} \\ \uparrow \\ \boxed{f} \\ \downarrow \\ \text{---} \text{ } x \text{ ---} \end{array} \end{array} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, 1)$$

- g の右量子トレース (right quantum trace) を以下で定義する:

$$\text{Tr}^R(g): 1 \xrightarrow{\text{coev}_x^R} *x \otimes x \xrightarrow{\text{Id}_{*x} \otimes g} *x \otimes **x \xrightarrow{\text{ev}_{**x}^R} 1$$

スtring図式で書くと次のようになる^b :

$$\mathrm{Tr}^L(g) := \begin{array}{c} \text{---}^*x \text{---} \\ | \\ \text{---}x \text{---} \end{array} \boxed{g} \begin{array}{c} \text{---}^{**}x \text{---} \\ | \\ \text{---}x \text{---} \end{array} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(1, 1)$$

^a $\mathrm{ev}_{V^*}^L = \mathrm{ev}_{V^{**}}^R$ を使った.
^b $\mathrm{ev}_{^{**}x}^R = \mathrm{ev}_{*x}^L$ を使った.

定義 1.15: 巡回構造

rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ を与える. \mathcal{C} の巡回構造 (pivotal structure) とは, モノイダル自然同型

のこと.

定義 1.16: 球状圏・量子次元

テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ が旋回構造 p を持つとする. 圏 \mathcal{C} が球状 (spherical) であるとは, $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$\text{Tr}^L(p_x) = \begin{array}{c} \text{---} x^{**} \text{---} \\ \uparrow \\ \boxed{p_x} \\ \downarrow \\ \text{---} x \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} x^* \text{---} \\ \uparrow \\ \boxed{p_x} \\ \downarrow \\ \text{---} x \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} **x \text{---} \\ \uparrow \\ \boxed{p_x} \\ \downarrow \\ \text{---} x \text{---} \end{array} = \text{Tr}^R(p_x)$$

が成り立つことを言う.

球状圏 \mathcal{C} の対象 $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ の量子次元 (quantum dimension) を以下で定義する：

$$\dim_p(x) := \text{Tr}^L(p_x) := \text{Tr}^R(p_x) = \text{Tr}(p_x) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, 1)$$

1.3.2 Deligne のテンソル積

定義 1.17: Deligne のテンソル積

\mathcal{C}, \mathcal{D} を局所有限な \mathbb{K} -線形アーベル圏とする. Deligne のテンソル積 (Deligne's tensor product) とは, 以下の性質をみたす \mathbb{K} -線形アーベル圏 $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ と双右完全関手 $\boxtimes: \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ の組み $(\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}, \boxtimes)$ のこと：

(普遍性)

任意の双右完全関手 $F: \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ に対し, ある双右完全関手 $\bar{F}: \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ が一意的に存在して $\bar{F} \circ \boxtimes = F$ を充たす.

命題 1.2: Deligne のテンソル積の基本性質

- (1) Deligne のテンソル積は存在し, それ自身が局所有限な \mathbb{K} -線形アーベル圏になる.
- (2) 関手 $\boxtimes: \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ は双完全であり,

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x_1, y_1) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}}(x_1 \boxtimes x_2, y_1 \boxtimes y_2)$$

を充たす.

- (3) \mathcal{C}, \mathcal{D} が (多重) 環圏/(多重) テンソル圏ならば $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ は (多重) 環圏/(多重) テンソル圏である.

証明 (1) [?, PROPOSITION 1.11.2., p.15]

(2) [?, PROPOSITION 1.11.2., p.15]

(3) [?, PROPOSITION 4.6.1., p.73]

■

1.4 加群圏

1.4.1 左/右加群圏

定義 1.18: 左/右加群圏

$(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r)$ をモノイダル圏とする。左 \mathcal{C} -加群圏 (left \mathcal{C} -module category) \mathcal{M} は、以下のデータからなる：

- 圏 \mathcal{M}
- 左加群積 (left module product) と呼ばれる関手 $^a \blacktriangleright: \mathcal{C} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$
- left actor と呼ばれる自然同型 $\{\alpha_{x,y,m}: (x \otimes y) \blacktriangleright m \longrightarrow x \blacktriangleright (y \blacktriangleright m)\}_{x,y \in \text{Ob}(\mathcal{C}), m \in \text{Ob}(\mathcal{M})}$
- left unitor と呼ばれる自然同型 $\{\lambda_m: 1 \blacktriangleright m \longrightarrow m\}_{m \in \text{Ob}(\mathcal{M})}$

これらは以下の条件を充たさねばならない：

(IMod-1) $\forall x, y, z \in \text{Ob}(\mathcal{C}), \forall m \in \text{Ob}(\mathcal{M})$ に対して以下の図式を可換にする：

$$\begin{array}{ccc}
 & ((x \otimes y) \otimes z) \blacktriangleright m & \\
 \swarrow a_{x,y,z} \blacktriangleright \text{Id}_m & & \searrow \alpha_{x \otimes y, z, m} \\
 (x \otimes (y \otimes z)) \blacktriangleright m & & (x \otimes y) \blacktriangleright (z \blacktriangleright m) \\
 \searrow \alpha_{x, y \otimes z, m} & & \downarrow \alpha_{x, y, z \blacktriangleright m} \\
 & x \blacktriangleright ((y \otimes z) \blacktriangleright m) & \\
 \nearrow \text{Id}_x \blacktriangleright \alpha_{y, z, m} & & \nearrow \\
 & x \blacktriangleright (y \blacktriangleright (z \blacktriangleright m)) &
 \end{array}$$

(IMod-2) $\forall x \in \mathcal{C}, \forall m \in \mathcal{M}$ に対して以下の図式を可換にする：

$$\begin{array}{ccc}
 (x \otimes 1) \blacktriangleright m & \xrightarrow{\alpha_{x, 1, m}} & x \blacktriangleright (1 \blacktriangleright m) \\
 \searrow r_x \blacktriangleright \text{Id}_m & & \swarrow \text{Id}_x \blacktriangleright \lambda_m \\
 & x \blacktriangleright m &
 \end{array}$$

^a 記号として \odot を使うこともある (参考：<https://ncatlab.org/nlab/show/action+of+a+monoidal+category>)。

$(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r)$ をモノイダル圏とする。右 \mathcal{C} -加群圏 \mathcal{M} は、以下のデータからなる：

- 圏 \mathcal{M}
- 右加群積 (right module product) と呼ばれる関手 $^a \blacktriangleright: \mathcal{C} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$
- right actor と呼ばれる自然同型 $\{\beta_{m,x,y}: m \blacktriangleleft (x \otimes y) \longrightarrow (m \blacktriangleleft x) \blacktriangleleft y\}_{x,y \in \text{Ob}(\mathcal{C}), m \in \text{Ob}(\mathcal{M})}$

- **right unitor** と呼ばれる自然同型 $\{\rho_m: m \blacktriangleleft 1 \longrightarrow m\}_{m \in \text{Ob}(\mathcal{M})}$

これらは以下の条件を充たさねばならない：

(rMod-1) $\forall x, y, z \in \text{Ob}(\mathcal{C}), \forall m \in \text{Ob}(\mathcal{M})$ に対して以下の図式を可換にする：

(rMod-2) $\forall x \in \mathcal{C}, \forall m \in \mathcal{M}$ に対して以下の図式を可換にする：

$$\begin{array}{ccc}
 m \blacktriangleleft (1 \otimes x) & \xrightarrow{\beta_{m,1,x}} & (m \blacktriangleleft 1) \blacktriangleleft x \\
 \searrow \text{Id}_m \blacktriangleleft l_x & & \swarrow \rho_m \blacktriangleleft \text{Id}_x \\
 & m \blacktriangleleft x &
 \end{array}$$

^a 記号として \odot を使うこともある（参考：<https://ncatlab.org/nlab/show/action+of+a+monoidal+category>）.

定義 1.19: 加群関手

$(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r)$ を **モノイダル圏**, $(\mathcal{M}_i, \blacktriangleright_i, \alpha_i, \lambda_i)$ ^{w/} $i = 1, 2$ を **左 \mathcal{C} -加群圏** とする. 左 \mathcal{C} -加群関手 (left \mathcal{C} -module functor) は, 以下のデータからなる：

- 関手 $F: \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$
- 自然同型 $\{s_{x,m}: F(x \blacktriangleright_1 m) \longrightarrow x \blacktriangleright_2 F(m)\}_{x \in \text{Ob}(\mathcal{C}), m \in \text{Ob}(\mathcal{M}_1)}$

これらは以下の条件を充たさねばならない：

(pentagon identity) $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C}), \forall m \in \text{Ob}(\mathcal{M}_1)$ に対して以下の図式を可換にする：

$$\begin{array}{ccccc}
 & & F((x \otimes y) \blacktriangleright_1 m) & & \\
 & \swarrow F(\alpha_{1x,y,m}) & \searrow s_{x \otimes y, m} & & \\
 & F(x \blacktriangleright_1 (y \blacktriangleright_1 m)) & & (x \otimes y) \blacktriangleright_2 F(m) & \\
 & \searrow s_{x,y \blacktriangleright_1 m} & & \downarrow \alpha_{2x,y,F(m)} & \\
 & x \blacktriangleright_2 F(y \blacktriangleright_1 m) & \nearrow \text{Id}_x \blacktriangleright_2 s_{y,m} & x \blacktriangleright_2 (y \blacktriangleright_2 F(m)) &
 \end{array}$$

(triangle identity) $\forall m \in \mathcal{M}_1$ に対して以下の図式を可換にする：

$$\begin{array}{ccc}
F(1 \blacktriangleright_1 m) & \xrightarrow{s_{1,m}} & 1 \otimes_2 F(m) \\
& \searrow F(\lambda_{1m}) & \swarrow \lambda_{2F(m)} \\
& F(m) &
\end{array}$$

定義 1.20: 加群圏の自然変換

$(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r)$ をモノイダル圏, $(\mathcal{M}_i, \blacktriangleright_i, \alpha_i, \lambda_i)$ $w/ i = 1, 2$ を左 \mathcal{C} -加群圏, $(F_i: \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2, s_i)$ $w/ i = 1, 2$ を \mathcal{C} -加群関手とする. このとき, 自然変換

$$\begin{array}{ccc}
& F_1 & \\
\mathcal{M}_1 & \xrightarrow{\quad \tau \quad} & \mathcal{M}_2 \\
& F_2 &
\end{array}$$

が \mathcal{C} -加群圏の自然変換であるとは, $\forall x \in \mathcal{C}, \forall m \in \mathcal{M}_1$ に対して以下の図式が可換になること:

$$\begin{array}{ccc}
F_1(x \blacktriangleright_1 m) & \xrightarrow{s_{1x,m}} & x \blacktriangleright_2 F_1(m) \\
\tau_{x \blacktriangleright_1 m} \downarrow & & \downarrow \tau_{x \blacktriangleright_2 \text{Id}_m} \\
F_2(x \blacktriangleright_1 m) & \xrightarrow{s_{2x,m}} & x \blacktriangleright_2 F_2(m)
\end{array}$$

(action の保存)

1.4.2 両側加群圏

定義 1.21: 両側加群圏

$(\mathcal{C}_i, \otimes_i, 1, a_i, l_i, r_i)$ $w/ i = 1, 2$ をモノイダル圏とする. $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ -両側加群圏 $((\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)\text{-bimodule category}) \mathcal{M}$ は, 以下のデータからなる:

- 圏 \mathcal{M}
- 左加群積と呼ばれる関手 $\blacktriangleright: \mathcal{C}_1 \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$
- 右加群積と呼ばれる関手 $\blacktriangleleft: \mathcal{M} \times \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{M}$
- left actor と呼ばれる自然同型

$$\{\alpha_{x_1, y_1, m}: (x_1 \otimes y_1) \blacktriangleright m \rightarrow x_1 \blacktriangleright (y_1 \blacktriangleright m)\}_{x_1, y_1 \in \text{Ob}(\mathcal{C}_1), m \in \text{Ob}(\mathcal{M})}$$

- left unitor と呼ばれる自然同型 $\{\lambda_m: 1 \blacktriangleright m \rightarrow m\}_{m \in \text{Ob}(\mathcal{M})}$
- right actor と呼ばれる自然同型

$$\{\beta_{m, x_2, y_2}: m \blacktriangleleft (x_2 \otimes y_2) \rightarrow (m \blacktriangleleft x_2) \blacktriangleleft y_2\}_{x_2, y_2 \in \text{Ob}(\mathcal{C}_2), m \in \text{Ob}(\mathcal{M})}$$

- right unitor と呼ばれる自然同型 $\{\rho_m: m \blacktriangleleft 1 \rightarrow m\}_{m \in \text{Ob}(\mathcal{M})}$
- middle actor と呼ばれる自然同型

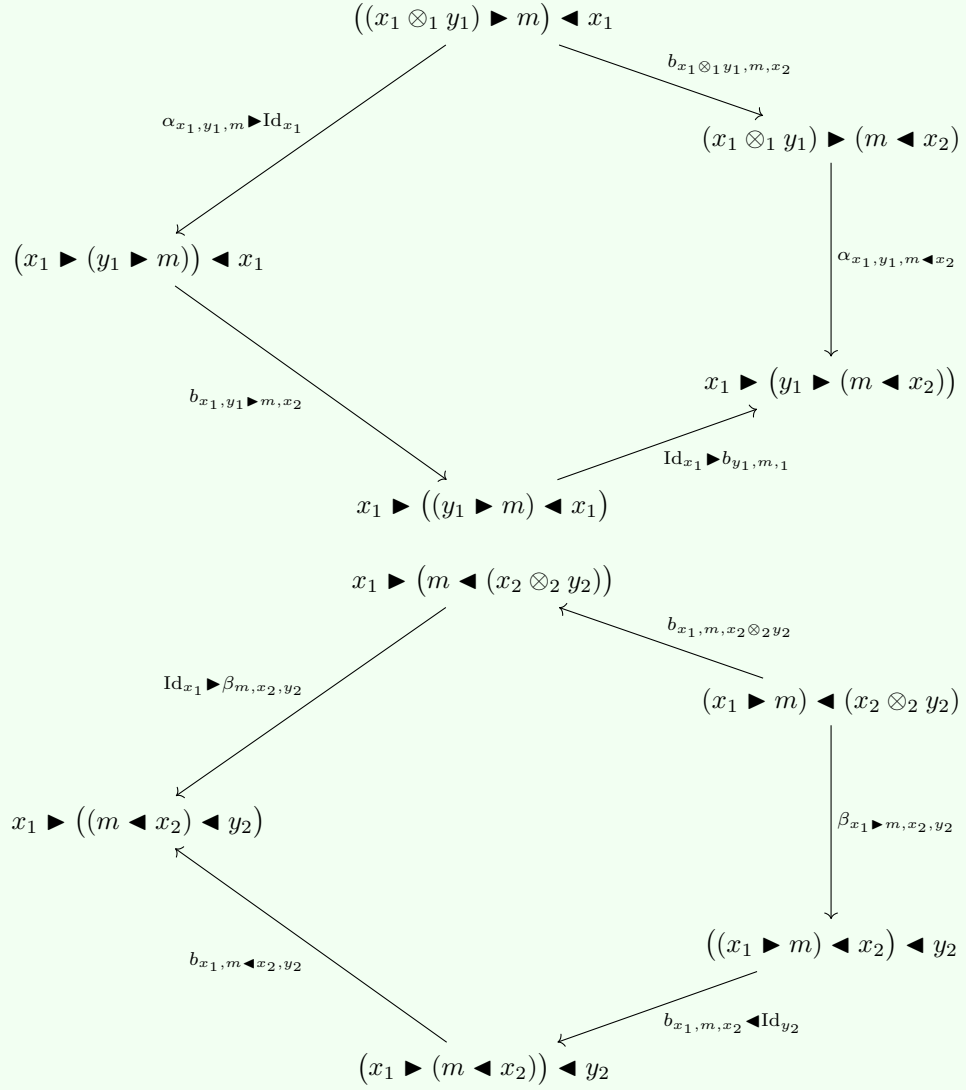
$$\{b_{x_1, m, x_2}: (x_1 \blacktriangleright m) \blacktriangleleft x_2 \rightarrow x_1 \blacktriangleright (m \blacktriangleleft x_2)\}_{x_1 \in \text{Ob}(\mathcal{C}_1), x_2 \in \text{Ob}(\mathcal{C}_2), m \in \text{Ob}(\mathcal{M})}$$

これらは以下の条件を充たす：

(Bimod-1) 組 $(\mathcal{M}, \blacktriangleright, \alpha, \lambda)$ は左 \mathcal{C}_1 -加群圏である。

(Bimod-2) 組 $(\mathcal{M}, \blacktriangleleft, \beta, \rho)$ は右 \mathcal{C}_2 -加群圏である。

(Bimod-3) $\forall x_i, y_i \in \text{Ob}(\mathcal{C}_i), \forall m \in \text{Ob}(\mathcal{M})$ に対して以下の図式を可換にする：



1.4.3 代数と加群

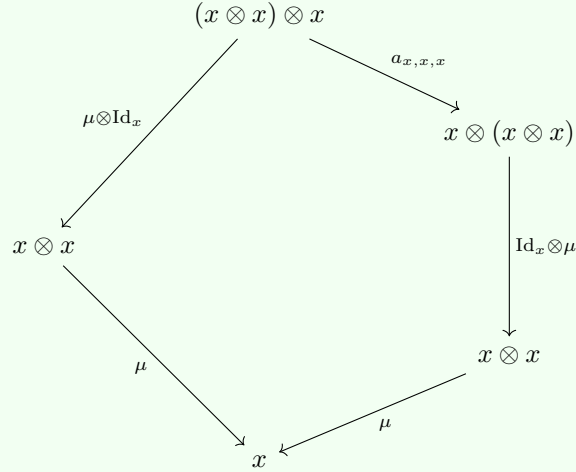
定義 1.22: 代数対象

多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ を与える. \mathcal{C} の代数対象 (algebra object) x とは, 以下のデータからなる:

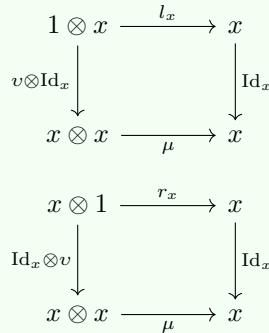
- \mathcal{C} の対象 $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$
- 乗法 (multiplication) と呼ばれる \mathcal{C} の射 $\mu: x \otimes x \rightarrow x$
- 単位 (unit) と呼ばれる \mathcal{C} の射 $v: 1 \rightarrow x$

これらは以下の条件を充たさねばならない:

(associativity)



(unitality)

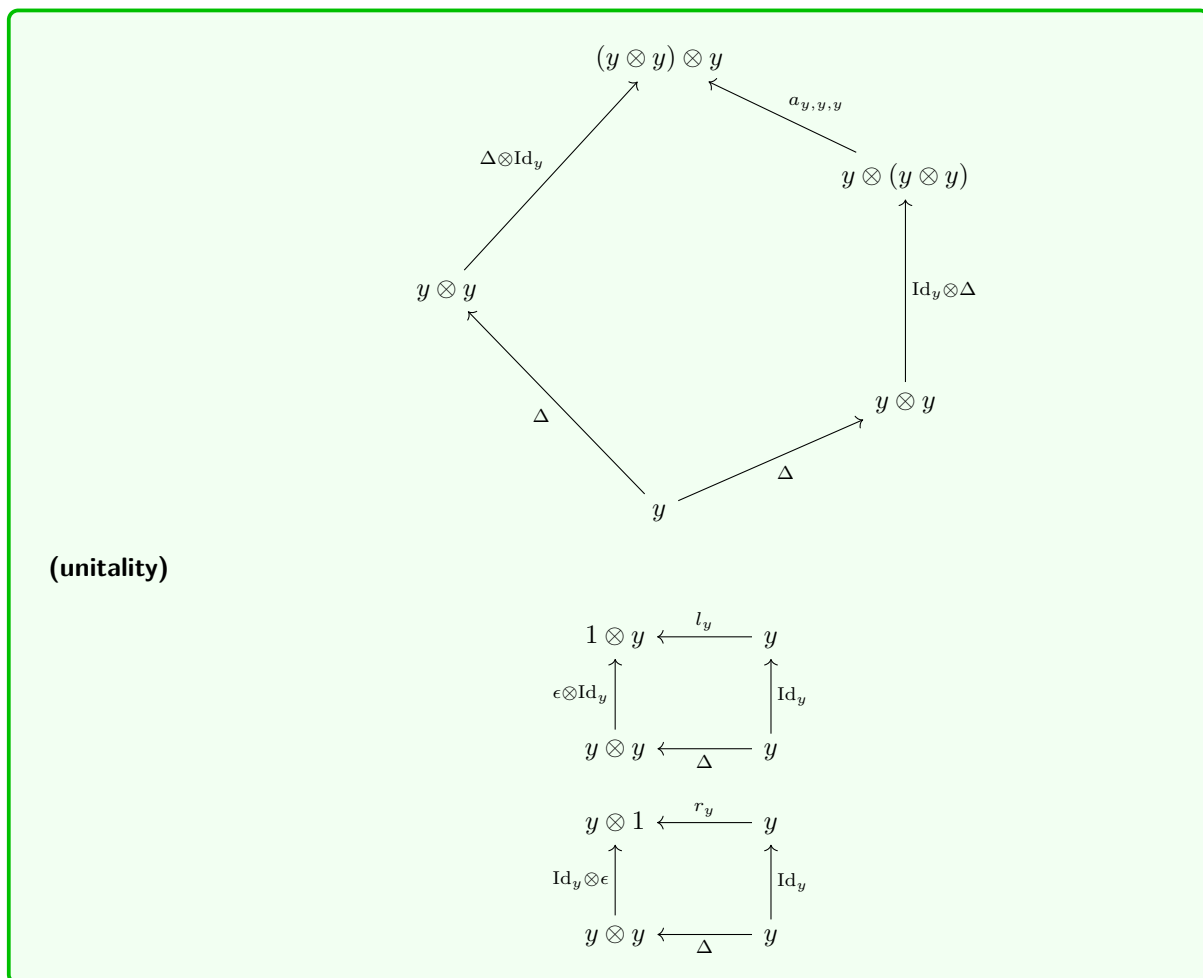


多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ を与える. \mathcal{C} の余代数対象 (coalgebra object) y とは, 以下のデータからなる:

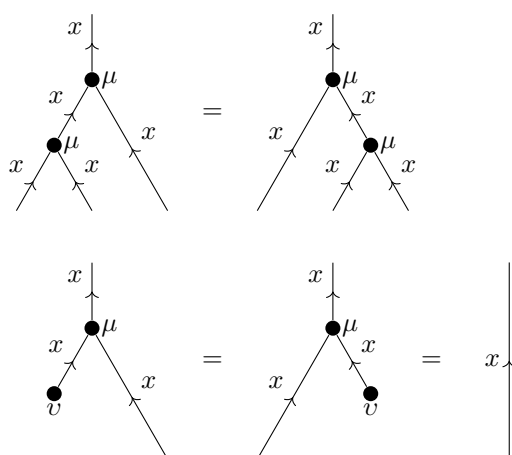
- \mathcal{C} の対象 $y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$
- 余乗法 (comultiplication) と呼ばれる \mathcal{C} の射 $\Delta: y \rightarrow y \otimes y$
- 余単位 (counit) と呼ばれる \mathcal{C} の射 $\epsilon: y \rightarrow 1$

これらは以下の条件を充たさねばならない:

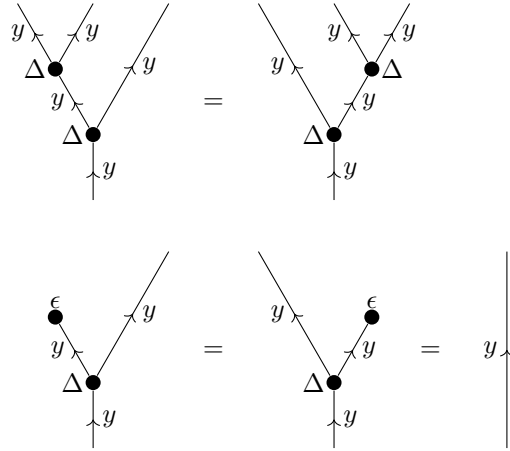
(coassociativity)



ストリング図式で代数対象 (x, μ, ν) の (associativity), (unitality) を書くと, それぞれ



となり, 余代数対象 (y, Δ, ϵ) の **(associativity)**, **(unitality)** を書くと



となる.

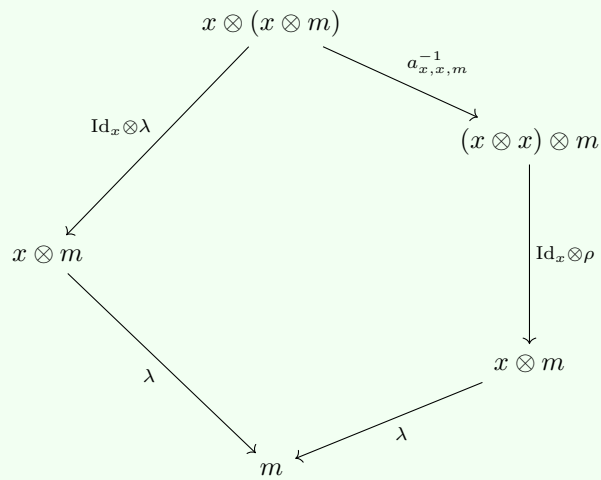
定義 1.23: 加群対象

多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ および \mathcal{C} の代数対象 (x, μ, ν) を与える. \mathcal{C} における, 左 x -加群対象 (right x -module object) m とは, 以下のデータからなる:

- \mathcal{C} の対象 $m \in \text{Ob}(\mathcal{C})$
- 左作用 (right action) と呼ばれる \mathcal{C} の射 $\lambda: m \otimes x \longrightarrow m$

これらは以下の条件を充たさねばならない:

(associativity)



(unitality)

$$\begin{array}{ccc}
1 \otimes m & \xrightarrow{l_m} & m \\
v \otimes \text{Id}_m \downarrow & & \downarrow \text{Id}_m \\
x \otimes m & \xrightarrow{\lambda} & m
\end{array}$$

多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ および \mathcal{C} の代数対象 (x, μ, v) を与える.
 \mathcal{C} における, 右 x -加群対象 (right x -module object) m とは, 以下のデータからなる:

- \mathcal{C} の対象 $m \in \text{Ob}(\mathcal{C})$
- 右作用 (right action) と呼ばれる \mathcal{C} の射 $\rho: m \otimes x \rightarrow m$

これらは以下の条件を満たさねばならない:

(associativity)

$$\begin{array}{ccccc}
& (m \otimes x) \otimes x & & & \\
& \swarrow \rho \otimes \text{Id}_x & & \searrow a_{m,x,x} & \\
m \otimes x & & & & m \otimes (x \otimes x) \\
& \searrow \rho & & \downarrow \text{Id}_x \otimes \rho & \\
& & m & \swarrow \rho & \\
& & & & m \otimes x
\end{array}$$

(unitarity)

$$\begin{array}{ccc}
m \otimes 1 & \xrightarrow{r_m} & m \\
\text{Id}_m \otimes v \downarrow & & \downarrow \text{Id}_m \\
m \otimes x & \xrightarrow{\rho} & m
\end{array}$$

定義 1.24: 代数および加群の準同型

多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ および \mathcal{C} の 2 つの代数対象 (x_i, μ_i, ν_i) w/ $i = 1, 2$ を与える.

このとき, \mathcal{C} の射 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x_1, x_2)$ が代数準同型 (algebra homomorphism) であるとは, 以下の条件を満たすことを言う:

(乗法の保存)

$$\begin{array}{ccc} x_1 \otimes x_1 & \xrightarrow{f \otimes f} & x_2 \otimes x_2 \\ \mu_1 \downarrow & & \downarrow \mu_2 \\ x_1 & \xrightarrow{f} & x_2 \end{array}$$

(単位の保存)

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\nu_1} & A_1 \\ & \searrow \nu_2 & \swarrow f \\ & A_2 & \end{array}$$

- 多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$
- \mathcal{C} の代数対象 (x, μ, ν)
- \mathcal{C} の 2 つの左 x -加群対象 (m_i, λ_i) w/ $i = 1, 2$

を与える.

このとき, \mathcal{C} の射 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(m_1, m_2)$ が左 x -加群準同型 (left x -module homomorphism) であるとは, 以下の条件を満たすことを言う:

(左作用の保存)

$$\begin{array}{ccc} x \otimes m_1 & \xrightarrow{\text{Id}_x \otimes f} & x \otimes m_2 \\ \lambda_1 \downarrow & & \downarrow \lambda_2 \\ x_1 & \xrightarrow{f} & x_2 \end{array}$$

しばらくの間 多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ および \mathcal{C} の代数対象 (x, μ, ν) を 1 つ固定する.

2 つの左 x -加群対象 (m_i, λ_i) w/ $i = 1, 2$ の間の左 x -加群の準同型全体がなす集合を $\text{Hom}_x(m_1, m_2) \subset \text{Hom}_{\mathcal{C}}(m_1, m_2)$ と書くと, これは部分 \mathbb{K} -ベクトル空間をなす. さらに準同型の合成は準同型であるから, アーベル圏 $x\text{-Mod}_{\mathcal{C}}$ を次のようにして構成することができる:

- \mathcal{C} における左 x -加群対象を対象とする.
- 左 x -加群の準同型を射とする.

同様に \mathcal{C} における右 x -加群対象がなす圏 $\text{Mod}_{\mathcal{C}}\text{-}x$ を定義できる.

左加群圏と $\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x}$ の間には関係がある．今， \mathcal{C} における任意の右 x -加群対象 (m, ρ) および \mathcal{C} の任意の対象 $y \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ を与える．すると， $y \otimes m \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ と

$$\rho_{y \otimes m} : (y \otimes m) \otimes x \xrightarrow{a_{y, m, x}} y \otimes (m \otimes x) \xrightarrow{\mathrm{Id}_y \otimes \rho} y \otimes m$$

の組み $(y \otimes m, \rho_{y \otimes m})$ は右 x -加群になる．i.e. $(y \otimes m, \rho_{y \otimes m}) \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x})$ である．この構成により関手

$$\blacktriangleright : \mathcal{C} \times \mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x} \longrightarrow \mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x} \quad (1.4.1)$$

が定義できる．さらに， \mathcal{C} が元々持っていた associator と unitors に関しては， $\forall (m, \rho) \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x})$ ， $\forall y, z \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$\begin{aligned} a_{y, z, m} : (y \otimes z) \blacktriangleright m &\longrightarrow y \blacktriangleright (z \blacktriangleright m) \\ l_y : 1 \blacktriangleright m &\longrightarrow m \end{aligned}$$

が自然な^{*1}右 x -加群の同型になる．

命題 1.3: $\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x}$ は左加群圏

多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \mathrm{ev}^L, \mathrm{coev}^L, \mathrm{ev}^R, \mathrm{coev}^R)$ および \mathcal{C} の代数対象 (x, μ, v) を1つ与える．

このとき，組み^a $(\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x}, \blacktriangleright, a, l)$ は左 \mathcal{C} -加群圏である．

^a $\blacktriangleright : \mathcal{C} \times \mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x} \longrightarrow \mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x}$ は (1.4.1) で定義した関手である．

証明 $\forall y, z, w \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ ， $\forall (m, \rho) \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x})$ に対して (IMOD-1)，(IMOD-2) が成り立つことを示せば良い． ■

定義 1.25: 森田同値

多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \mathrm{ev}^L, \mathrm{coev}^L, \mathrm{ev}^R, \mathrm{coev}^R)$ を与える．

\mathcal{C} の2つの代数対象 $(x_i, \mu_i, v_i) \stackrel{w/}{i=1, 2}$ が森田同値 (Morita equivalent) であるとは，左 \mathcal{C} -加群圏として $x_1\text{-}\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}}$ と $x_2\text{-}\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}}$ が圏同値であることを言う．

定義 1.26: 代数上のテンソル積

- 多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \mathrm{ev}^L, \mathrm{coev}^L, \mathrm{ev}^R, \mathrm{coev}^R)$ および \mathcal{C} の代数対象 (x, μ, v)
- \mathcal{C} における右 x -加群対象 $(m, \rho) \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x})$
- \mathcal{C} における左 x -加群対象 $(n, \lambda) \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x})$

を与える．このとき， m と n の x 上のテンソル積 (tensor product over x) $m \otimes_x n \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ を，以下の図式のコイコライザとして定義する：

$$m \otimes x \otimes n \xrightarrow[\mathrm{Id}_m \otimes \lambda]{\rho \otimes \mathrm{Id}_n} m \otimes n \xrightarrow{\pi} m \otimes_x n$$

^{*1} $a := \{a_{y, z, m}\}_{y, z \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C}), m \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x})}$ が自然同型．

1.4.4 両側加群

定義 1.27: 両側加群

多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ および \mathcal{C} の 2 つの代数対象 (x_i, μ_i, ν_i) を与える. \mathcal{C} における (x_1, x_2) -両側加群対象 $((x_1, x_2)\text{-bimodule object})$ とは, 以下のデータからなる:

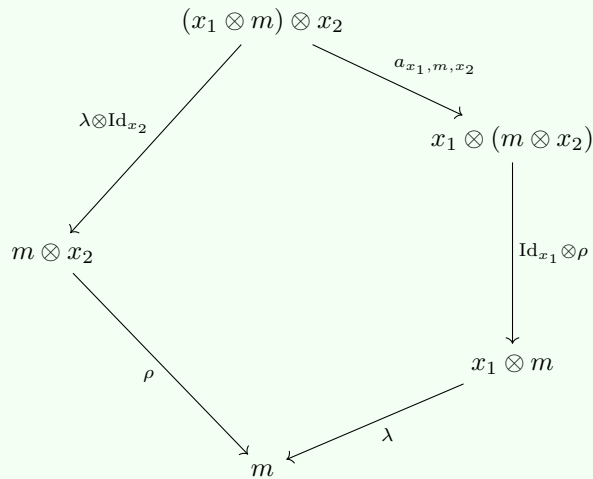
- \mathcal{C} の対象 $m \in \text{Ob}(\mathcal{C})$
- 左作用 (left action) と呼ばれる \mathcal{C} の射 $\lambda: x_1 \otimes m \rightarrow m$
- 右作用 (right action) と呼ばれる \mathcal{C} の射 $\rho: m \otimes x_2 \rightarrow m$

これらは以下の条件を充たさねばならない:

(bimod-1) 組 (m, λ) は \mathcal{C} の左 x_1 -加群対象

(bimod-2) 組 (m, ρ) は \mathcal{C} の右 x_2 -加群対象

(bimod-3) 以下の図式を可換にする:



定義 1.28: 両側加群の準同型

- 多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ および \mathcal{C} の 2 つの代数対象 (x_i, μ_i, ν_i)
- 2 つの (x_1, x_2) -両側加群対象 $(m_i, \lambda_i, \rho_i) \quad w/ \quad i = 1, 2$

を与える. このとき, \mathcal{C} の射 $f: m_1 \rightarrow m_2$ が (x_1, x_2) 両側加群の準同型であるとは, それが左 x_1 -加群の準同型かつ右 x_2 -加群の準同型であることを言う.

しばらくの間 多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ および \mathcal{C} の 2 つの代数対象 (x_i, μ_i, ν_i) を固定する.

2 つの (x_1, x_2) -両側加群対象 $(m_i, \lambda_i, \rho_i) \quad w/ \quad i = 1, 2$ の間の (x_1, x_2) -両側加群の準同型全体がなす集合を $\mathbf{Hom}_{x_1-x_2}(m_1, m_2) \subset \text{Hom}_{\mathcal{C}}(m_1, m_2)$ と書くと, これは部分 \mathbb{K} -ベクトル空間をなす. さらに準同型の

合成は準同型であるから、アーベル圏 $\mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(x_1, x_2)$ を次のようにして構成することができる：

- \mathcal{C} における (x_1, x_2) -加群対象を対象とする.
- (x_1, x_2) -両側加群の準同型を射とする.

同様に \mathcal{C} における右 x -加群対象がなす圏 $\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x}$ を定義できる.

補題 1.1: 両側加群のテンソル積

- 多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ および \mathcal{C} の 4 つの代数対象 (x_i, μ_i, ν_i) $w/ i = 1, \dots, 4$
- (x_1, x_2) -両側加群対象 $(m_1, \lambda_1, \rho_1) \in \text{Ob}(\mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(x_1, x_2))$
- (x_2, x_3) -両側加群対象 $(m_2, \lambda_2, \rho_2) \in \text{Ob}(\mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(x_2, x_3))$
- (x_3, x_4) -両側加群対象 $(m_3, \lambda_3, \rho_3) \in \text{Ob}(\mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(x_3, x_4))$

を与える. このとき以下が成り立つ：

- (1) $m_1 \otimes_{x_2} m_2$ は自然な (x_1, x_3) -両側加群対象の構造を持つ.
- (2) 自然な (x_1, x_4) -両側加群の同型

$$\begin{aligned} \bar{a}_{m_1, m_2, m_3} &: (m_1 \otimes_{x_2} m_2) \otimes_{x_3} m_3 \xrightarrow{\cong} m_1 \otimes_{x_2} (m_2 \otimes_{x_3} m_3) \\ \bar{l}_{m_1} &: x_1 \otimes_{x_1} m_1 \xrightarrow{\cong} m_1 \\ \bar{r}_{m_1} &: m_1 \otimes_{x_2} x_2 \xrightarrow{\cong} m_1 \end{aligned}$$

が存在する.

証明 (1)

■

\mathcal{C} の任意の代数対象 (x, μ, ν) について, 明らかに $(x, \mu, \mu) \in \mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(x, x)$ である.

定義 1.29: 分離可能性

テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ の代数対象 (x, μ, ν) が分離可能 (separable) であるとは, ある (x, x) -両側加群の準同型 $\bar{\mu}: x \longrightarrow x \otimes x$ が存在して $\mu \circ \bar{\mu} = \text{Id}_x$ を満たすことを言う^a.

^a 補題 1.1-(1) によって $x \otimes x$ を (x, x) -両側加群対象と見做す.

命題 1.4: 分離可能性と半単純性

フュージョン圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ の代数対象 (x, μ, ν) を与える. このときもし (x, μ, ν) が分離可能ならば, アーベル圏 $\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x}$ は半単純である.

証明 [?, PROPOSITION 7.8.30, p.146]

■

1.4.5 加群圏における internal hom

1.5 2-群

1.5.1 豊穠圏と 2-圏

まず、厳密な 2-圏 (strict 2-category) を導入する.

定義 1.30: 豊穠圏

モノイダル圏 (V, \otimes, I) を与える.

V -豊穠圏 (V -enriched category) \mathcal{C} は、以下のデータからなる:

- 集合 $\text{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して、**Hom 対象**と呼ばれる V の対象 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \in \text{Ob}(V)$ を持つ
- $\forall x, y, z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して、**合成射**と呼ばれる V の射 $\circ_{x, y, z}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$ を持つ
- $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して、**恒等素**と呼ばれる V の射 $j_x: I \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$ を持つ

これらは以下の図式を可換にしなければならない:

(associativity)

$\forall x, y, z, w \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ について^a

$$\begin{array}{ccc}
 (\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z)) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w) & \xrightarrow{\circ_{x, y, z} \otimes \text{Id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w)}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w) \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \circ_{x, z, w} \\
 & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, w) \\
 & & \uparrow \circ_{x, y, w} \\
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes (\text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w)) & \xrightarrow{\text{Id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)} \otimes \circ_{y, z, w}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, w)
 \end{array}$$

(unitality)

$\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ について^b

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) & \xrightarrow{\circ_{x, x, y}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) & \xleftarrow{\circ_{x, y, y}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, y) \\
 \uparrow j_x \otimes \text{Id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)} & \nearrow \cong & & \nwarrow \cong & \uparrow \text{Id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)} \otimes j_y \\
 I \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) & & & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes I
 \end{array}$$

^a \cong はモノイダル圏 V の associator

^b \cong はモノイダル圏 V の left/right unitor

定義 1.31: 豊穣関手

モノイダル圏 (V, \otimes, I) を与える.

2つの V -豊穣圏 \mathcal{C}, \mathcal{D} の間の V -豊穣関手 (V -enriched functor)

$$F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

は, 以下のデータからなる:

- 写像 $F_0: \text{Ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{Ob}(\mathcal{D}), x \longmapsto F_0(x)$
- V の射の族

$$\{F_{x,y}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(x), F_0(y))\}_{x,y \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは以下の図式を可換にしなければならない:

(enriched-1)

$\forall x, y, z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して^a

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) & \xrightarrow{\circ_{x,y,z}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z) \\ \downarrow F_{x,y} \otimes F_{y,z} & & \downarrow F_{x,z} \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(x), F_0(y)) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(y), F_0(z)) & \xrightarrow{\circ_{F_0(x), F_0(y), F_0(z)}} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(x), F_0(z)) \end{array}$$

(enriched-2)

$\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して^b

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{j_x} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x) \\ & \searrow j_{F_0(x)} & \downarrow F_{x,x} \\ & & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(x), F_0(x)) \end{array}$$

^a これは, 通常の関手において射の合成が保存されることに対応する.

^b これは, 通常の関手において恒等射が保存されることに対応する.

与えられたモノイダル圏 V に対して, V -豊穣圏のなす圏を $V\text{-Cat}$ と書く. $V\text{-Cat}$ は

- V -豊穣圏を対象とする
- V -豊穣関手を射とする

ことで得られる圏である.

定義 1.32: 厳密な 2-圏

小圏と関手の圏 \mathbf{Cat} を【例 1.2.1】の方法でモノイダル圏と見做す. \mathbf{Cat} -豊穣圏のことを厳密な 2-圏 (strict 2-category) と呼ぶ.

定義 1.32 を解説しよう。まず、小圏と関手の圏 \mathbf{Cat} における対象とは小圏のことで、射とは関手のことである。さらに、 \mathbf{Cat} のテンソル積とは【例 1.2.1】より直積 \times のことである。よって豊稜圏の定義から、厳密な 2-圏 \mathcal{C} は

- 対象 (object)^{*2} 全体の集合 $\text{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ の間の 1-射 (1-morphism)^{*3} 全体が成す圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \in \text{Ob}(\mathbf{Cat})$.
- 合成 (composition) と呼ばれる関手 $\circ: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$
- 恒等素 (identity morphism) と呼ばれる関手 $j_x: 1 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$

の 4 つのデータからなる。従って 1-射 $f: x \longrightarrow y$ とは圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ の対象 $f \in \text{Ob}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y))$ のことであるから、2 つの 1-射 $f, g \in \text{Ob}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y))$ が与えられると、圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ における、それらの間の射 $\alpha \in \text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)}(f, g)$ が存在する。このような α を 2-射 (2-morphism)^{*4} と呼び、混乱防止のため $\alpha: f \longrightarrow g$ と書く代わりに $\alpha: f \Longrightarrow g$ と書く。

2 つの 2-射 $\alpha \in \text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)}(f, g)$, $\beta \in \text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)}(g, h)$ は、圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ における射の合成 $*$ によって結合的かつ単位的に合成することができる：

$$\begin{array}{c} x \xrightarrow{\quad f \quad} y \\ \quad \downarrow \beta * \alpha \quad \\ x \xrightarrow{\quad h \quad} y \end{array} \quad := \quad \begin{array}{c} x \xrightarrow{\quad f \quad} y \\ \quad \downarrow \alpha \quad \\ x \xrightarrow{\quad g \quad} y \\ \quad \downarrow \beta \quad \\ x \xrightarrow{\quad h \quad} y \end{array}$$

このような 2-射の合成を縦の合成 (vertical composition) と呼ぶ。一方、4 つの 1-射 $f, g: x \longrightarrow y$, $f', g': y \longrightarrow z$ および 2 つの 2-射 $\alpha: f \Longrightarrow g$, $\alpha': f' \Longrightarrow g'$ が与えられたとき、1-射の合成 \circ が関手であることによって、圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z)$ の射 $(\alpha, \alpha'): (f, f') \longrightarrow (g, g')$ に対して圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$ の射、i.e. 2-射

$$\alpha' \circ \alpha := \circ(\alpha, \alpha'): f' \circ f \Longrightarrow g' \circ g$$

が対応付く：

$$\begin{array}{c} x \xrightarrow{\quad f' \circ f \quad} z \\ \quad \downarrow \alpha' \circ \alpha \quad \\ x \xrightarrow{\quad g' \circ g \quad} z \end{array} \quad := \quad \begin{array}{c} x \xrightarrow{\quad f \quad} y \xrightarrow{\quad f' \quad} z \\ \quad \downarrow \alpha \quad \quad \downarrow \alpha' \quad \\ x \xrightarrow{\quad g \quad} y \xrightarrow{\quad g' \quad} z \end{array}$$

このような 2-射の合成を横の合成 (horizontal composition) と呼ぶ。横の合成は、モノイダル圏 \mathbf{Cat} が厳密なモノイダル圏であること、および関手 \circ の (associativity), (unitality) によって結合的かつ単位的になる。

^{*2} 0-セル (0-cell) とも言う

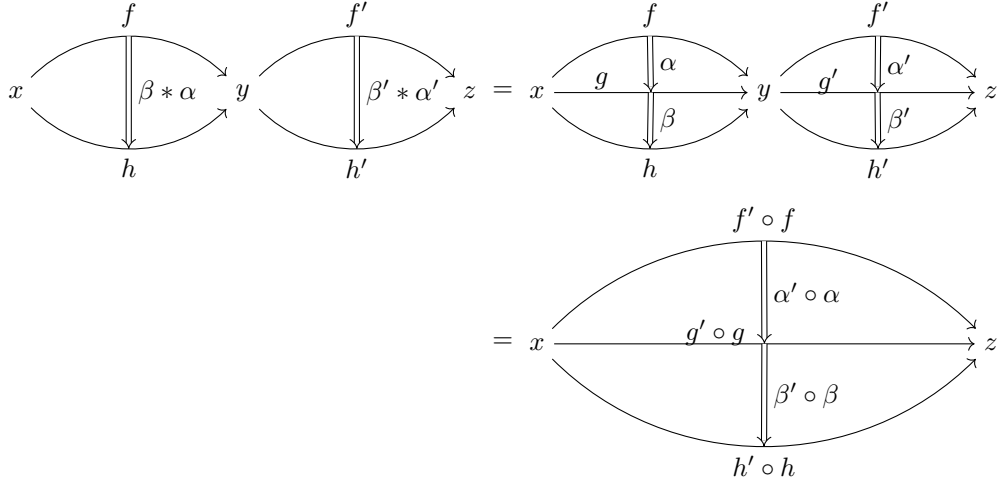
^{*3} 1-セル (1-cell) とも言う。正確には、圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ の対象のことを 1-射と呼ぶ。

^{*4} 2-セル (2-cell) とも言う

縦の合成と横の合成は、 \circ が関手であることによって交換する：

$$\begin{aligned} (\beta' * \alpha') \circ (\beta * \alpha) &= \circ((\beta, \beta') * (\alpha, \alpha')) \\ &= (\circ(\beta, \beta')) * (\circ(\alpha, \alpha')) \\ &= (\beta' \circ \beta) * (\alpha' \circ \alpha) \end{aligned}$$

図式で書くと一目瞭然である：



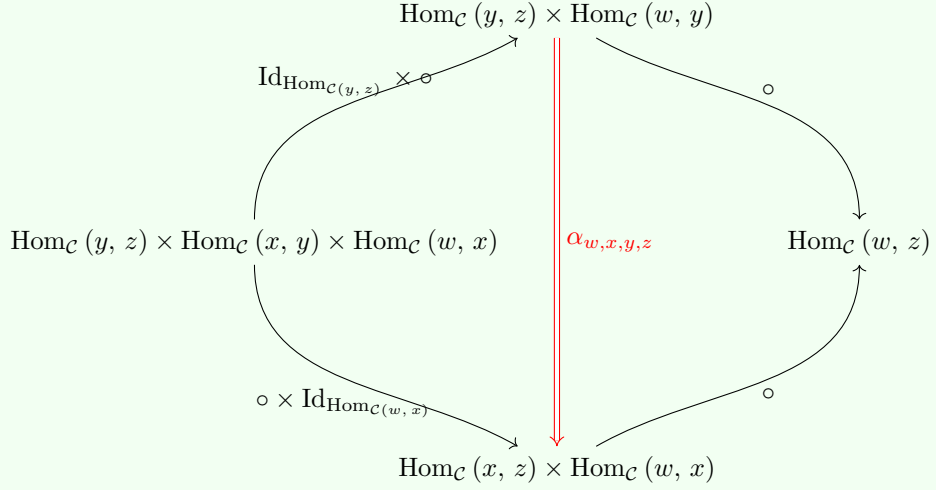
定義 1.33: 2-圏

厳密な 2-圏と同様の

- 対象 (object)^a 全体の集合 $\text{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ の間の 1-射 (1-morphism)^b 全体が成す圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \in \text{Ob}(\mathbf{Cat})$.
- 合成 (composition) と呼ばれる関手 $\circ: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$
- 恒等素 (identity morphism) と呼ばれる関手 $j_x: 1 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$

の 4 つのデータに加えて

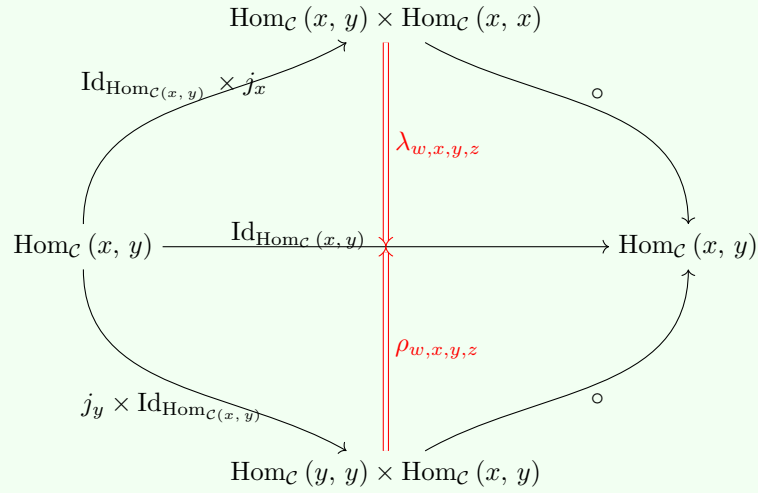
- $\forall x, y, z, w \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して **associator** と呼ばれる自然同型^c.



- $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して **left/right unitor** と呼ばれる自然同型

$$\lambda_{x,y} := \{l_{x,y}f: f \mapsto f \circ j_x(1)\}_{f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)}$$

$$\rho_{x,y} := \{l_{x,y}f: f \mapsto j_x(1) \circ f\}_{f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)}$$



を持ち,

- associator が **(pentagon identity)** を
- unitors が **(triangle identity)** を

満たす \mathcal{C} のことを **2-圏** (2-category) と呼ぶ.

^a **0-セル** (0-cell) とも言う

^b **1-セル** (1-cell) とも言う. 正確には, 圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ の対象のことを 1-射と呼ぶ.

^c これは圏 **Cat** における図式である.

要するに、**厳密な 2-圏**において合成 \circ の associativity および unitality を自然同型まで弱めたものが **2-圏** である。

【例 1.5.1】2-圏としてのモノイダル圏

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, \{a_{x,y,z}\}, \{l_x\}, \{r_y\})$ は **2-圏** である。実際、2-圏 \mathbf{BC} を

- $\text{Ob}(\mathbf{BC}) := \{\bullet\}$ (1 点集合)
- $\text{Hom}_{\mathbf{BC}}(\bullet, \bullet) := \mathcal{C}$
- $\circ := \otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$
- $j_x := \iota_I: I \hookrightarrow \mathcal{C}$
- $\alpha_{\bullet,\bullet,\bullet} := \{a_{x,y,z}\}$
- $\lambda_{\bullet,\bullet} := \{l_{x,y,z}\}, \quad \rho_{\bullet,\bullet} := \{r_{x,y,z}\}$

により定義すると $\mathcal{C} = \mathbf{BC}$ となる。

1.5.2 弱い 2-群・コヒーレントな 2-群・厳密な 2-群

[?] に倣い **2-群** (2-group) を導入する。

定義 1.34: 弱い逆対象

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ の対象 $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を 1 つとる。

- 対象 $y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が x の **弱い逆対象** (weak inverse) であるとは、対象の同型の意味で^a $x \otimes y \cong 1$ かつ $y \otimes x \cong 1$ が成り立つことを言う。
- x が **弱可逆** (weakly invertible) であるとは、 x が弱い逆対象を持つことを言う。

^a 自然同型ではない

定義 1.35: 弱い 2-群・コヒーレントな 2-群・厳密な 2-群

- **弱い 2-群** (weak 2-group) とは、**モノイダル圏** \mathcal{G} であって、任意の対象が **弱可逆** であかつ任意の射が同型射であるもののこと。
- **コヒーレントな 2-群** (coherent 2-group) とは、**モノイダル圏** \mathcal{G} であって、任意の対象 $x \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ が可逆な **unit**, **counit** (x, \bar{x}, i_x, e_x) を持ち、かつ任意の射が同型射であるもののこと。
- **厳密な 2-群** (strict 2-group) とは、**モノイダル圏** \mathcal{G} であって、任意の対象が可逆^a であかつ任意の射が同型射であるもののこと。

^a $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $x^{-1} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が存在して、厳密に $x \otimes x^{-1} = 1, x^{-1} \otimes x = 1$ が成り立つ。

定義 1.36: 2-群の準同型

2-群 $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ の間の準同型とは, モノイダル関手 $f: \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ のこと.

定理 1.1: 弱い 2-群はコヒーレントな 2-群

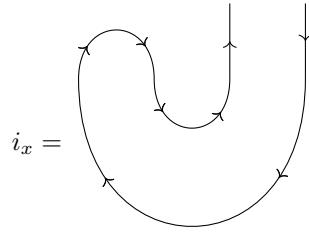
任意の弱い 2-群はコヒーレントな 2-群にすることができる.

証明 勝手な弱い 2-群 \mathcal{G} を 1 つ固定する. このとき $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ に対してある $\bar{x} \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ および同型射 $i'_x: 1 \longrightarrow x \otimes \bar{x}$, $e'_x: \bar{x} \otimes x \longrightarrow 1$ が存在する.

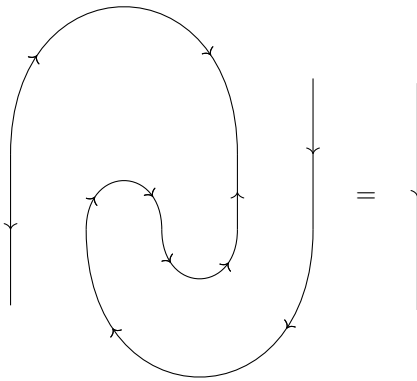
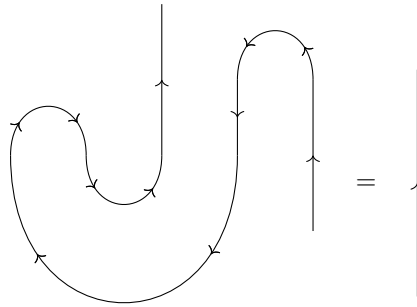
ここで $e_x := e'_x$ とおき,

$$i_x := (l_x \otimes \text{Id}_{\bar{x}}) \circ a_{1, x, \bar{x}}^{-1} \circ (i'_x)^{-1} \otimes \text{Id}_{x \otimes \bar{x}} \circ a_{x, \bar{x}, x \otimes \bar{x}}^{-1} \circ (\text{Id}_x \otimes a_{\bar{x}, x, \bar{x}}) \circ (\text{Id}_x \otimes e'_x)^{-1} \otimes \text{Id}_{\bar{x}} \circ (\text{Id}_x \otimes l_{\bar{x}}^{-1}) \circ i'_x$$

とおくと組 (x, \bar{x}, i_x, e_x) が zig-zag equation を満たすことを示す. 実際, i_x の定義をストリング図式で書くと



となるから,



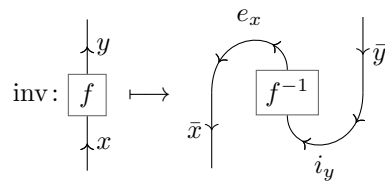
が言える.

！ 定理 1.1 を踏まえ, 以下では**コヒーレントな 2-群**のことを単に **2-群** (2-group) と呼ぶ.

2-群 \mathcal{G} において, 弱い逆対象を対応づける関手

$$\text{inv}: \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}, x \longmapsto \bar{x} \quad (1.5.1)$$

を考えたいが, 射の対応は少々厄介である. [?, p.34] に倣うと



とすれば良いことがわかる^{*5}.

以上より, 2-群 \mathcal{G} を【例 1.5.1】により 2 圏 \mathbf{BG} の言葉で表現すると

- ただ 1 つの対象を持つ: $\text{Ob}(\mathbf{BG}) = \{\bullet\}$

^{*5} 定義から**コヒーレントな 2 群**は rigid なモノイダル圏であり, zigzag identity を使えることが肝になる.

- 任意の 1-射 $x \in \text{Ob}(\text{Hom}_{\mathbf{BG}}(\bullet, \bullet)) = \text{Ob}(\mathcal{G})$ が弱可逆であり, その弱い逆対象 \bar{x} は関手 (1.5.1) によって与えられる.
- 任意の 2-射 $\alpha \in \text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathbf{BG}}(\bullet, \bullet)}(x, y) = \text{Hom}_{\mathcal{G}}(x, y)$ が同型射

ということになる. 特に厳密な 2-群とは, 全ての $\alpha, \lambda, \rho, i, e$ が \mathcal{G} の恒等射となっていることを言う.

1.5.3 交差加群との関係

定義 1.37: 交差加群

交差加群 (crossed module) とは,

- 群準同型 $G_2 \xrightarrow{t} G_1$
- G_1 の左作用 $\alpha: G_1 \rightarrow \text{Aut}(G_2)$

の組であって, 以下の条件を満たすもののこと:

(cr-1) 以下の図式を可換にする:

$$\begin{array}{ccc} G_2 \times G_2 & \xrightarrow{t \times \text{Id}} & G_1 \times G_2 \\ & \searrow \text{Ad} & \swarrow \alpha \\ & G_2 & \end{array}$$

あるいは同じことだが, $\forall g_i \in G_i$ に対して

$$t(\alpha(g_1)(g_2)) = g_1 t(g_2) g_1^{-1}$$

を充たす.

(cr-2) 以下の図式を可換にする:

$$\begin{array}{ccc} G_1 \times G_2 & \xrightarrow{\alpha} & G_2 \\ \text{Id} \times t \downarrow & & \downarrow t \\ G_1 \times G_1 & \xrightarrow{\text{Ad}} & G_1 \end{array}$$

あるいは同じことだが, $\forall g_2, g'_2 \in G_2$ に対して

$$\alpha(t(g_2))(g'_2) = g_2 g'_2 g_2^{-1}$$

を充たす (Peiffer identity).

命題 1.5: 交差加群と厳密な 2-群

- (1) 交差加群 $(G_2 \xrightarrow{t} G_1, \alpha)$ が与えられたとする. このとき
- 1-射の集合 $\mathcal{G}_0 := G_1$
 - 2-射の集合 $\mathcal{G}_1 := G_1 \ltimes_{\alpha} G_2$ (外部半直積)
 - 始点射 $\sigma: \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_0, (g_1, g_2) \mapsto g_1$
 - 終点射 $\tau: \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_0, (g_1, g_2) \mapsto t(g_2)g_1$
 - 恒等素 $j: \mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{G}_1, g_1 \mapsto (g_1, 1_{G_2})$
 - 2-射の合成 $\circ: \mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_1, ((g_1, g_2), (g'_1, g'_2)) \mapsto (g_1, g_2 g'_2)$
- とおくと, 圏 \mathcal{G} は厳密な 2-群になる.
- (2) 逆に厳密な 2-群 \mathcal{G} が与えられたとき,
- $G_1 := \mathcal{G}_0$
 - $G_2 := \text{Ker } \sigma \subset \mathcal{G}_1$
 - $t := \tau|_{G_2}: G_2 \rightarrow G_1$
 - $\alpha: G_1 \rightarrow \text{Aut}(G_2), g_1 \mapsto (g_2 \mapsto j(g_1)g_2j(g_1)^{-1})$
- とおくことで交差加群 $(G_2 \xrightarrow{t} G_1, \alpha)$ が得られる.

証明 (1)

■

1.6 3-群

1.6.1 3-圏

一般の 3-圏は associator, unitors のせいで扱いが難しいので, まずは厳密な 3-圏 (strict 3-group) を考える. Cat を【例 1.2.1】の方法でモノイダル圏と見做す. 定義 1.32 から, 2-圏としての同値

$$\text{Str2Cat} \cong \text{Cat-Cat}$$

が成り立つ. さらに Cat-Cat は直積に関してモノイダル圏になる.

定義 1.38: 厳密な 3-圏

厳密な 2-圏が成す 2-圏 Cat-Cat をモノイダル圏と見做す. このとき Cat-Cat -豊穡圏のことを厳密な 3-圏 (strict 3-category) と呼ぶ.

1.6.2 2-crossed module と厳密な 3-群

定義 1.39: 厳密な 3-群

厳密な 3-圏 \mathcal{G} であって、ただ 1 つの対象を持ち、1-射、2-射、3-射が厳密に可逆であるものを**厳密な 3-群** (strict 3-category) と呼ぶ。

定義 1.40: 2-交差加群

2-交差加群 (2-crossed module) とは、以下のデータからなる：

- 群の正規複体 $G_3 \xrightarrow{\partial_2} G_2 \xrightarrow{\partial_1} G_1$
- 群の左作用 $\alpha_1: G_1 \rightarrow \text{Aut}(G_2)$, $\alpha_2: G_1 \rightarrow \text{Aut}(G_3)$
- **Pfeiffer lifting** と呼ばれる写像 $\{-, -\}: G_2 \times G_2 \rightarrow G_3$

これらは以下の条件を充たす：

(2CM1) ∂_1, ∂_2 は G_1 -同変

(2CM2) $\forall g_2, h_2 \in G_2$ に対して

$$\partial_2\{g_2, h_2\} = \alpha_1(g_2)(h_2)g_2h_2^{-1}g_2^{-1}$$

(2CM3) $\forall g_3, h_3 \in G_3$ に対して

$$\{\partial_2g_3, \partial_2h_3\} = [h_3, g_3]$$

(2CM4) $\forall g_2 \in G_2, g_3 \in G_3$ に対して

$$\{g_2, \partial_2g_3\}\{\partial_2g_3, g_2\} = \alpha_2(\partial_1(g_2))(g_3)g_3^{-1}$$

(2CM5) $\forall g_2, h_2, k_2 \in G_2$ に対して

$$\begin{aligned}\{g_2, h_2k_2\} &= \{g_2, h_2\}\{\partial_2\{g_2, k_2\}, g_2h_2g_2^{-1}\}\{g_2, k_2\} \\ \{g_2h_2, k_2\} &= \alpha_2(\partial_1(g_2))(\{h_2, k_2\})\{g_2, h_2k_2h_2^{-1}\}\end{aligned}$$

(2CM6) $\forall g_1 \in G_1, \forall g_2, h_2 \in G_2$ に対して

$$\alpha_2(g_1)(\{g_2, h_2\}) = \{\alpha_1(g_1)(g_2), \alpha_1(g_1)(h_2)\}$$