

第 4 章

圏論とトポロジカル秩序

この節で登場する多様体は特に断らない限り常に C^∞ 多様体である。また、体 \mathbb{K} と言ったら $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のいずれかを指すことにする。

4.1 トポロジカル秩序のミクロな定義

この節では常に $d := D + 1$ 次元時空 $\mathcal{M}^{(d)} = \Sigma^{(D)} \times \mathbb{R}$ または $\Sigma^{(D)} \times S^1$ を考える^{*1}。混乱が生じない時は時空点を $x := (x, t) \in \Sigma^{(D)} \times \mathbb{R}$ と書く。境界を持たない D 次元多様体^{*2} $\Sigma^{(D)}$ はノルム $\|\cdot\|$ を持つ距離空間であるとする。

- $\Sigma^{(D)}$ 上の D 次元格子 (lattice) $\Lambda \subset \Sigma^{(D)}$ とは、 $\Sigma^{(D)}$ の有限な^{*3} 離散部分集合のことである。
- 格子点 $x \in \Lambda$ 上の Hilbert 空間を \mathcal{H}_x と書く。
- 全系の Hilbert 空間とは、合成系 $\mathcal{H}_{\text{tot}} := \bigotimes_{x \in \Lambda} \mathcal{H}_x$ のことである。

定義^{ph} 4.1: bosonic な格子模型

D 次元格子 $\Lambda \subset \Sigma^{(D)}$ を 1 つ固定する。

- $\forall x \in \Lambda$ を 1 つとる。別の格子点 $y \in \Lambda$ が x についてレンジ $R > 0$ であるとは、 $\|x - y\| \leq R$ が成り立つことを言う。 x についてレンジ R な格子点全体の集合を $N_R(x) \subset \Lambda$ と書く。
- 格子 Λ 上の **bosonic な格子模型** (bosonic lattice model) とは、エルミート演算子 $\hat{H}_\Lambda \in \text{Hom}_{\text{Hilb}}(\mathcal{H}_{\text{tot}}, \mathcal{H}_{\text{tot}})$ のこと。bosonic な格子模型 \hat{H}_Λ が**局所的** (local) であるとは、ある有限の $R > 0$ が存在して以下の条件を充たすもののことを言う：

(locality)

$\forall x \in \Lambda$ に対して、 $\forall y \in N_R(x)$ における局所的 Hilbert 空間 \mathcal{H}_y にのみ非自明に作用す

^{*1} i.e. 時間方向は必要に応じてコンパクト化する

^{*2} コンパクト性は仮定しない。

^{*3} 空間多様体 $\Sigma^{(D)}$ や局所 Hilbert 空間に適当な境界条件を課して有限にする。

るエルミート演算子 $\hat{h}_x \in \text{Hom}_{\text{Hilb}}(\mathcal{H}_{\text{tot}}, \mathcal{H}_{\text{tot}})$ が存在して,

$$\hat{H}_\Lambda = \sum_{x \in \Lambda} \hat{h}_x$$

と書ける.

- D 次元の **bosonic な量子系** (bosonic quantum system) とは,
 - 格子の増大列^a $\{\Lambda_i\}_{i=1}^\infty$
 - bosonic な格子模型の列 $\{\hat{H}_{\Lambda_i}\}_{i=1}^\infty$
 の組のこと.
- bosonic な量子系 $(\{\Lambda_i\}_i, \{\hat{H}_{\Lambda_i}\}_i)$ の**熱力学極限** (thermodynamic limit) とは^b, D 次元格子 $\Lambda_\infty := \lim_{i \rightarrow \infty} \Lambda_i \subset \Sigma^{(D)}$ 上の bosonic な格子模型 $\hat{H}_{\Lambda_\infty} := \lim_{i \rightarrow \infty} \hat{H}_{\Lambda_i}$ のこと.

^a i.e. $\Lambda_1 \subsetneq \Lambda_2 \subsetneq \dots$ が成り立つ.

^b 厳密に言うと, 極限 $\lim_{i \rightarrow \infty}$ は, 格子の形状などの追加のデータを与えない限り ill-defined である.

4.1.1 ミクロな視点から量子相を定義する試み

この小節では, **格子模型の列**を直接用いて量子相を定義する試みを, [?] に倣って簡単に紹介する^{*4}. ここで紹介する定義は物理学者の直観に基づくものであり, 数学的には大部分が未完成であることを先に断っておく.

定義^{ph} 4.2: gapped な量子系

bosonic な量子系 $(\{\Lambda_i\}_i, \{\hat{H}_{\Lambda_i}\}_i)$ が **gapped** であるとは, ある $\Delta > 0$ および E_0 が存在して以下の条件を充たすことを言う (図 4.1):

(gap-1) $\forall E \in (E_0, E_0 + \Delta)$ に対してある $N_E \in \mathbb{N}$ が存在して,

$$i > N_E \implies \text{Spec}(\hat{H}_{\Lambda_i}) \cap (E_0, E_0 + \Delta) = \emptyset$$

が成り立つ.

(gap-2) $\forall \varepsilon > 0$ に対してある $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が存在して,

$$i > N_\varepsilon \implies \text{diam}(\text{Spec}(\hat{H}_{\Lambda_i}) \cap (-\infty, E_0]) < \varepsilon$$

が成り立つ.

特に, 十分大きな $i \in \mathbb{N}$ について定まる

$$\text{GSD}_{\Lambda_i}(\{\hat{H}_{\Lambda_i}\}) := |\text{Spec}(\hat{H}_{\Lambda_i}) \cap (-\infty, E_0]|$$

のことを**基底状態の縮退度** (ground state degeneracy) と呼ぶ.

^{*4} ミクロな視点というのは, 格子模型を用いるという意味である.

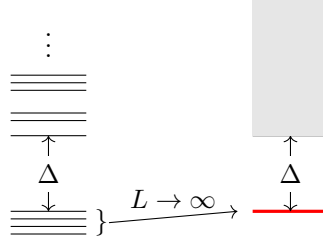


図 4.1: gapped な量子系のエネルギースペクトル $\text{Spec}(\hat{H}_{\Lambda_i})$

定義^{ph} 4.3: gapped quantum liquid

gapped かつ **bosonic な量子系** $(\{\Lambda_i\}_i, \{\hat{H}_{\Lambda_i}\}_i)$ が **gapped な量子液体** (gapped quantum liquid) であるとは、ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\text{GSD}_{\Lambda_N}(\{\hat{H}_{\Lambda_i}\}) = \text{GSD}_{\Lambda_{N+1}}(\{\hat{H}_{\Lambda_i}\}) = \text{GSD}_{\Lambda_{N+2}}(\{\hat{H}_{\Lambda_i}\}) = \cdots < \infty$$

が成り立つことを言う。



gapless quantum liquid の厳密な定義は、2025 年現在でもこれといったものがない。

【例 4.1.1】Haah コード

Haah コード [?] の基底状態の縮退度は

$$\ln(\text{GSD}_{\Lambda_i}) \sim |\Lambda_i|$$

と振る舞うことが知られており、**gapped** だが **gapped な量子液体** でない **bosonic な量子系** の例である。

gapped な量子相 (gapped quantum phase) とは、大雑把には $\Sigma^{(D)} = \mathbb{R}^D$ としたときの^{*5} **gapped な量子液体** の同値類のことである。特に、同値関係の定義で対称性を考慮しないもののことを**トポロジカル秩序** (topological order) と呼ぶ。この同値類の、物理的に妥当かつ数学的にも正確な定義を与える仕事は大変困難で、2025 年時点で未達成である。そのため、実際の量子相の研究の文脈では、物理的考察から等価であることが期待される別の（より扱いやすい）定義を用いて議論することが常である。

トポロジカル秩序を与える同値類の定義は、[?, p.3] に倣うと以下のようになる：

定義^{ph} 4.4: bosonic かつ gapped なトポロジカル秩序

空間多様体 $\Sigma^{(D)}$ 上の 2 つの **gapped な量子液体** $(\{\Lambda_i\}_i, \{\hat{H}_{\Lambda_i}^{(0)}\}_i)$, $(\{\Lambda_i\}_i, \{\hat{H}_{\Lambda_i}^{(1)}\}_i)$ を与える。**熱力学極限**をとった **gapped な量子液体** 全体がなす集合を $\text{gQL}(\Sigma^{(D)})$ とおく。 $\text{gQL}(\Sigma^{(D)})$ には適切な位相を入れて位相空間にする。

このとき、 $\hat{H}_{\Lambda_\infty}^{(0)}$ と $\hat{H}_{\Lambda_\infty}^{(1)}$ が同じ **gapped なトポロジカル秩序** (gapped topological order) にあるとは、連続曲線 $\hat{H}: [0, 1] \rightarrow \text{gQL}(\Sigma^{(D)})$ が存在して $\hat{H}(0) = \hat{H}_{\Lambda_\infty}^{(0)}$ かつ $\hat{H}(1) = \hat{H}_{\Lambda_\infty}^{(1)}$ を満たすこと

^{*5} 最初から**熱力学極限**により得られる無限系を念頭においている。

とを言う.

空間次元 D のトポロジカル秩序全体の集まりを \mathbf{TO}_D と書くことにする.

【例 4.1.2】自明相

\mathcal{H} を有限次元 Hilber 空間, $\hat{P} \in \text{End}(\mathcal{H})$ を, 唯一の基底状態 $|\text{gnd}\rangle \in \mathcal{H}$ を持つエルミート演算子とする. このとき任意の空間次元 D と格子 $\Lambda \subset \Sigma^{(D)}$ に対して, **bosonic な格子模型** $\hat{H}_\Lambda = \sum_{x \in \Lambda} \hat{h}_x$ を

- $\mathcal{H}_x := V$ とする.
- $\hat{h}_x := \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1} \otimes \underbrace{\hat{P}}_x \otimes \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}$ を局所的なハミルトニアンとする.

ことで定義する. この格子模型は一意的な基底状態 $\bigotimes_{x \in \Lambda} |\text{gnd}\rangle$ を持ち, **gapped な量子液体** を成し, **自明相** (trivial phase) と呼ばれる **bosonic なトポロジカル秩序** を定める. 空間次元 D の自明相を $\mathbf{1}_D$ と書く.

【例 4.1.3】トポロジカル秩序の積層

空間次元 D と格子 $\Lambda \subset \Sigma^{(D)}$ を与え, その上の2つの **bosonic な格子模型** $\hat{H}_\Lambda^{(0)} \in \text{End}(\mathcal{H}_{\text{tot}}^{(0)})$, $\hat{H}_\Lambda^{(1)} \in \text{End}(\mathcal{H}_{\text{tot}}^{(1)})$ を考える. このとき,

- $\mathcal{H}_{\text{tot}} := \mathcal{H}_{\text{tot}}^{(0)} \otimes \mathcal{H}_{\text{tot}}^{(1)}$
- $\hat{H}_\Lambda := \hat{H}_\Lambda^{(0)} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \hat{H}_\Lambda^{(1)}$

と定義することで, 新たな **bosonic な格子模型** $\hat{H}_\Lambda \in \text{End}(\mathcal{H}_{\text{tot}})$ を得る. この操作を格子模型の**積層** (stacking) と呼ぶ. 格子模型の積層を用いて, **gapped な量子液体** 及び **bosonic なトポロジカル秩序** の積層を定義することができる. 特に, 空間次元 D の2つの量子相 $\mathbf{C}_D, \mathbf{D}_D \in \mathbf{TO}_D$ に対して, その積層によって得られる新たな量子相を $\mathbf{C}_D \boxtimes \mathbf{D}_D \in \mathbf{TO}_D$ と書く.

命題 ^{ph} 4.1: トポロジカル秩序のモノイド構造

任意の空間次元 D において, 以下のデータの3つ組は**可換モノイド**を成す:

- **トポロジカル秩序** 全体の集合 \mathbf{TO}_D
- トポロジカル秩序の**積層** $\boxtimes: \mathbf{TO}_D \times \mathbf{TO}_D \longrightarrow \mathbf{TO}_D$
- **自明相** $\mathbf{1}_D \in \mathbf{TO}_D$

証明

■

4.1.2 重力アノマリー

トポロジカル相の文脈で**重力アノマリー** (gravitational anomaly) と呼ばれるものを導入しておこう [?]. これは文字通り量子重力を考えていると言うわけではなく、アノマリー流入に類似の概念である。

定義^{ph} 4.5: gapped な量子相のアノマリー

空間 D 次元の**量子相**が**アノマリーを持たない** (anomaly-free) とは、それが**局所的な格子模型**として実現できることを言う。

予想^{ph} 4.1: 重力アノマリーの仮説

空間次元 D の任意の **gapped な量子相** A_D に対して、ある空間次元 $D+1$ の**アノマリー**を持たない gapped な量子相 $\text{Bulk}(A_D)$ が一意的に存在して、 $\text{Bulk}(A_D)$ の境界として A_D が実現される。

予想 4.1 は、 A_D が**トポロジカル秩序**の場合には物理的な証明があるらしい [?, Lemma 2, p.19].

4.2 トポロジカル秩序のマクロな特徴付け

零温度における**量子相**を特徴付けるデータとは、くりこみ群のフローの IR 側においても生き残っているような物理量だと考えられる。もしくは、同じことだが、低エネルギー有効理論の長距離の振る舞いが零温度における量子相を特徴付けるという物理学者の期待がある。

もし量子相が gapless ならば、相関関数は典型的には長距離の振る舞い (algebraic decay) を示し、量子相を特徴付けるデータの一部であると考えられる。ところが、**gapped な量子相**に関してはそうはいかない。

定理 4.1: gapped な格子模型における相関関数の振る舞い

D 次元格子 $\Lambda \subset \Sigma^{(D)}$ 及びその上の **gapped な量子系** \hat{H}_Λ を考える。このとき、有限集合 $X, Y \subset \Lambda$ に台を持つ任意の演算子 \hat{A}_X, \hat{B}_Y について、ある定数 C, D, ξ_0 が存在して以下が成り立つ：

$$\begin{aligned} \langle \psi_0^a | \hat{A}_X \hat{B}_Y | \psi_0^a \rangle - \langle \psi_0^a | \hat{A}_X \hat{P}_0 \hat{B}_Y | \psi_0^a \rangle &\leq C \|\hat{A}_X\| \|\hat{B}_Y\| \left\{ e^{-\frac{\text{dist}(X, Y)}{\xi_0}} + \min(|X|, |Y|) g(\text{dist}(X, Y)) \right\} \\ &\quad + D \text{diam}(\text{Spec}(\hat{H}_{\Lambda_i}) \cap (-\infty, E_0]) \end{aligned}$$

ただし、 $|\psi_0^a\rangle \in \text{Spec}(\hat{H}_{\Lambda_i}) \cap (-\infty, E_0]$ であり、 $\hat{P}_0 := \sum_a |\psi_0^a\rangle \langle \psi_0^a|$ は基底状態が成す部分空間への射影演算子である。また、 $g(x)$ は指数減衰する関数である。

証明 Lieb-Robinson bound を用いる。詳細は [?, Theorem 2, p.7] を参照。 ■

定理 4.1 により、gapped な量子系の相関関数は熱力学極限において指数減衰するため、量子相を特徴付けるデータとなり得ない。gapped な量子系を特徴付けるデータは、**トポロジカル欠陥**のデータだと考えられる。

定義^{ph} 4.6: p -次元のトポロジカル欠陥

空間多様体 $\Sigma^{(D)}$ 上の **gapped な量子液体** $(\{\Lambda_i\}_i, \{\hat{H}_{\Lambda_i}\}_i)$ を与える. $p < D$ について, p 次元の励起 (p -dimensional excitation) とは, $\hat{H}_\infty + \delta\hat{H}(M^{(p)})$ の **gapped** な基底状態が成す \mathcal{H}_{tot} の部分空間のこと [?, Definition 5., p.10]. ただし, $\delta\hat{H}(M^{(p)})$ は $\Sigma^{(D)}$ の p 次元部分多様体 $M^{(p)} \subset \Sigma^{(D)}$ の上に台を持つエルミート演算子のことである.

2つの p 次元の励起 $\hat{H}_\infty + \delta\hat{H}(M^{(p)})$, $\hat{H}_\infty + \delta\hat{H}(N^{(p)})$ が同値であるとは, ギャップを閉じない断熱変形で互いに移り合えることを言う [?, Definition 6., p.10]. この同値関係による同値類を**トポロジカル欠陥** (topological defect) と呼ぶ.

!

p 次元の励起を特徴付けるトラップハミルトニアン $\delta\hat{H}(M^{(p)})$ は, **格子模型**の p 次元部分多様体 $M^{(p)}$ 上における境界条件を定めていると見做すことができる. この意味で, p 次元のトポロジカル欠陥は**トポロジカルな境界条件** (topological boundary condition) と見做すことができる.

定義 4.6 より, 空間次元 D の**トポロジカル秩序** $C_D \in \text{TO}_D$ 内部における p 次元のトポロジカル欠陥はそれ自身が p 次元の**トポロジカル秩序**を成す.

【例 4.2.1】 toric code のトポロジカル欠陥-1

2次元正方格子 $\Lambda = (V(\Lambda), E(\Lambda))$ 上の **toric code 模型** [?] は, 以下のように構成されるスピン 1/2 模型である:

- $\forall e \in E(\Lambda)$ の上には Hilbert 空間 $\mathcal{H}_e := \mathbb{C}^2$ をアサインする.
- $\forall v \in V(\Lambda)$ に対して, \hat{A}_v を次のように定義する:

$$\hat{A}_v := \begin{array}{c} \hat{X} \\ | \\ \hat{X} \end{array} \quad \begin{array}{c} \hat{X} \\ \bullet \\ \hat{X} \end{array} \quad \begin{array}{c} \hat{X} \\ | \\ \hat{X} \end{array}$$

- 任意の面 p に対して, \hat{B}_p を次のように定義する:

$$\hat{B}_p := \begin{array}{c} \hat{Z} \\ \hat{Z} \quad \boxed{p} \quad \hat{Z} \\ \hat{Z} \end{array}$$

- ハミルトニアンを

$$\hat{H}_\Lambda := \sum_v (1 - \hat{A}_v) - \sum_p (1 - \hat{B}_p)$$

で定義する.

ただし

$$\hat{X} := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{Z} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

とおいた. 全ての \hat{A}_v, \hat{B}_p は可換なので同時対角化可能である. そのうえ $(\hat{A}_v)^2 = (\hat{B}_p)^2 = \mathbf{1}$ が成り立つ (このような模型を **commuting projector hamiltonian** と呼ぶ) ので, \hat{A}_v, \hat{B}_p の固有値はシステムサイズ $|\Lambda|$ に関係なくどちらも ± 1 である. 故にこの模型は **gapped なトポロジカル秩序 TC** を示す.

簡単のため, 2 次元 Euclid 空間上の無限系 $\Lambda = \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ を考える. toric code 模型の持つ 0 次元の **トポロジカル欠陥** を考えよう. \mathcal{H}_{tot} は \hat{A}_v, \hat{B}_p による固有空間分解を持つので, 任意の状態は \hat{A}_v, \hat{B}_p の同時固有状態で展開できる.

- (1) 基底状態が生成する **トポロジカル欠陥 1** が存在する.
- (2) 頂点 $v_0 \in V(\Lambda)$ 上に局在した励起を特徴付けるハミルトニアンとして $\delta \hat{H}(v_0) = 2\hat{A}_{v_0}$ を選ぶと,

$$\hat{A}_v |\psi_e\rangle = \begin{cases} -|\psi_e\rangle, & v = v_0, \\ |\psi_e\rangle, & v \neq v_0 \end{cases}, \quad \hat{B}_p |\psi_e\rangle = |\psi_e\rangle$$

なる状態 $|\psi_e\rangle$ が張る 1 次元部分空間 $\mathbb{C}|\psi_e\rangle \subset \mathcal{H}_{\text{tot}}$ が **0 次元の励起**だと分かる. ここで, 局所演算子

$$\hat{Z}_1 := v_0 \text{ --- } \hat{Z} \text{ --- } v_1$$

を $|\psi_e\rangle$ に作用させると, $\hat{A}_{v_0}, \hat{A}_{v_1}$ のみが \hat{Z}_1 と反交換することから

$$\hat{A}_v \hat{Z}_1 |\psi_e\rangle = \begin{cases} -\hat{Z}_1 |\psi_e\rangle, & v = v_1, \\ \hat{Z}_1 |\psi_e\rangle, & v \neq v_1 \end{cases}, \quad \hat{B}_p \hat{Z}_1 |\psi_e\rangle = \hat{Z}_1 |\psi_e\rangle$$

が成り立つ. i.e. $\delta \hat{H}(v_0), \delta \hat{H}(v_1)$ が特徴付ける 0 次元の励起は互いに **同値**である. 同様にして任意の頂点上に局在した 0 次元の励起が互いに同値になるので, これらは 1 つの **トポロジカル欠陥 e** を成す.

- (3) 任意の面 p_0 に局在した励起を特徴付けるハミルトニアンとして $\delta \hat{H}(p_0) = 2\hat{B}_{p_0}$ を選ぶと,

$$\hat{A}_v |\psi_m\rangle = |\psi_m\rangle \quad \hat{B}_p |\psi_m\rangle = \begin{cases} -|\psi_m\rangle, & p = p_0 \\ |\psi_m\rangle, & p \neq p_0 \end{cases}$$

なる状態 $|\psi_m\rangle$ が張る 1 次元部分空間 $\mathbb{C}|\psi_m\rangle \subset \mathcal{H}_{\text{tot}}$ が **0 次元の励起**だと分かる. 今度は

$$\hat{X}_1 := \begin{array}{|c|c|} \hline p_0 & \hat{X} & p_1 \\ \hline \end{array}$$

なる局所演算子を $|\psi_m\rangle$ に作用させると, \hat{X}_1 と反交換するのは $\hat{B}_{p_0}, \hat{B}_{p_1}$ のみだから,

$$\hat{A}_v \hat{X}_1 |\psi_m\rangle = \hat{X}_1 |\psi_m\rangle \quad \hat{B}_p \hat{X}_1 |\psi_m\rangle = \begin{cases} -\hat{X}_1 |\psi_m\rangle, & p = p_1 \\ \hat{X}_1 |\psi_m\rangle, & p \neq p_1 \end{cases}$$

が成り立つ. 同様にして任意の面上に局在した 0 次元の励起は互いに同値なので, これらは 1 つの **トポロジカル欠陥 m** を成す.

- (4) 任意の点と面の組み (v_0, p_0) 上に局在した励起を特徴付けるハミルトニアンとして $\delta\hat{H}(\{v_0, p_0\}) = 2\hat{A}_{v_0} + 2\hat{B}_{p_0}$ を選ぶと,

$$\hat{A}_v |\psi_f\rangle = \begin{cases} -|\psi_f\rangle, & v = v_0, \\ |\psi_f\rangle, & v \neq v_0, \end{cases}, \quad \hat{B}_p |\psi_f\rangle = \begin{cases} -|\psi_f\rangle, & p = p_0 \\ |\psi_f\rangle, & p \neq p_0 \end{cases}$$

なる状態 $|\psi_f\rangle$ が張る 1 次元部分空間 $\mathbb{C}|\psi_f\rangle \subset \mathcal{H}_{\text{tot}}$ が **トポロジカル欠陥 f** を成すことがわかる.

このようにして, 互いに異なる 4 つのトポロジカル欠陥 $\{1, e, m, f\}$ が構成された.

可逆なトポロジカル秩序の積層を同一視するということは, 任意の局所演算子の作用に関して不変であることと等価である. 従って, 局所演算子が合成に関して成す結合代数 (**local operator algebra**) を \mathcal{A}_{loc} と書くと, トポロジカル欠陥を次のように特徴付けることもできる:



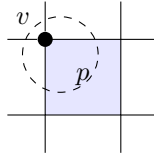
演算子の局所性の概念は, 系のスケールに依存する. 逆に言うと, トポロジカル欠陥は系のスケールに依存しない.

命題 4.1: トポロジカル欠陥の特徴付け

トポロジカル欠陥とは, \mathcal{A}_{loc} -加群のこと.

【例 4.2.2】 toric code のトポロジカル欠陥-2

【例 4.2.1】で得た 4 つのトポロジカル欠陥 $\{1, e, m, f\}$ を, \mathcal{A}_{loc} -加群として導出してみよう. まず, 演算子の局所性を次の図で定義する:



すると, local operator algebra \mathcal{A}_{loc} は生成元 \hat{A}_v, \hat{B}_p と関係式

$$(\hat{A}_v)^2 = (\hat{B}_p)^2 = 1, \quad \hat{A}_v \hat{B}_p = \hat{B}_p \hat{A}_v$$

で表現される. 故に $\mathcal{A}_{\text{loc}} \cong \mathbb{C}^4$ であり, \mathcal{A}_{loc} -加群が成す圏 $\mathcal{A}_{\text{loc}}\text{-Mod}_{\text{Vec}}$ は

$$\hat{P}_{\pm\pm} := \frac{1 \pm \hat{A}_v}{2} \frac{1 \pm \hat{B}_p}{2}$$

の 4 つの単純対象を持つが, これらはそれぞれ

- (1) P_{++} は **トポロジカル欠陥 1** への射影演算子
- (2) P_{-+} は点 v における **トポロジカル欠陥 e** への射影演算子
- (3) P_{+-} は面 p における **トポロジカル欠陥 m** への射影演算子

(4) P_{--} は組 (v, p) における **トポロジカル欠陥** f への射影演算子

に対応している.

系のスケールを大きくするにつれて \mathcal{A}_{loc} の生成元は複雑になるが, 異なるスケールの \mathcal{A}_{loc} 同士は森田同値であることが知られている [?]. つまり, **toric code 模型のトポロジカル欠陥** は系のスケールに依存しない.

C_D 内部の全ての **トポロジカル欠陥** (i.e. トポロジカル秩序) の集まりを **topological skelton** と呼び, $\text{sk}(C_D)$ と書くことにする [?]. 次に考えるべきなのは, topological skelton のどの構造が, 親となるトポロジカル秩序 C_D を完全に特徴付けるのか, という問題である. 2025 年現在では次のように予想されている [?, Conjecture 2, p.11]:

予想 ^{ph} 4.2: トポロジカル秩序の特徴付け

トポロジカル秩序 C_D を完全に特徴付けるのは, $\text{sk}(C_D)$ の組紐付き (高次) フュージョン圏としての構造, 及び chiral central charge である.

以下では, 特に $\text{sk}(C_D)$ の要素のうち空間次元が 0 であるものに焦点を当てて予想 (4.2) を解説する. 便宜上, $\text{sk}(C_D)$ の要素のうち $p+1$ 次元の **トポロジカル欠陥** であるもの全体を $\text{sk}_p(C_D)$ と書くことにする.

定義 4.1: エニオン

$\text{sk}(C_2)$ の要素のうち空間次元が 0 であるものを **エニオン** (anyon) と呼ぶ.

4.3 $0+1$ 次元のトポロジカル欠陥

4.3.1 アーベル圏としての構造

点 $\xi \in \Sigma^{(D)}$ に局在した $0+1$ 次元の **トポロジカル欠陥** $\forall x, y \in \text{sk}_0(C_D)$ をとる. 定義 4.6 よりこれらの代表元は全系の Hilbert 空間の部分空間であり, その間に作用する線形作用素 $f: x \rightarrow y$ を考えることができる. f が well-defined であるためには, 系の任意のスケールにおいて局所演算子と可換でなくてはならない. よって f は $0+0$ 次元の **トポロジカル欠陥** と見做すべきである. このような全ての f が成す集合を $\text{Hom}_{\text{sk}_0(C_D)}(x, y)$ と書く.

命題^{ph} 4.2: $\text{sk}_0(C_D)$ の圏としての構造

$\text{sk}_0(C_D)$ は,

- $0+1$ 次元の **トポロジカル欠陥** を対象
- $\text{Hom}_{\text{sk}_0(C_D)}(x, y)$ を Hom 集合

とする \mathbb{C} -線形な圏を成す. 特に, $\text{Id}_x \in \text{Hom}_{\text{sk}_0(C_D)}(x, x)$ は恒等作用素に対応する **自明**な $0+0$ 次元の **トポロジカル欠陥** である.

証明 Hom 集合の \mathbb{C} -線形性は, $f \in \text{Hom}_{\text{sk}_0(C_D)}(x, y)$ がミクロには線形作用素であったことによる. ■

命題 4.4 に合わせて, 以下では $0+1$ 次元の **トポロジカル欠陥** 全体が成す集まりを $\text{Ob}(\text{sk}_0(C_D))$ と書く. $\forall x, y \in \text{Ob}(\text{sk}_0(C_D))$ の代表元は全系の Hilbert 空間の部分空間であるから, その直和 $x \oplus y \in \text{Ob}(\text{sk}_0(C_D))$ を考えることができる.

命題^{ph} 4.3: $\text{sk}_0(C_D)$ は半単純

$\text{sk}_0(C_D)$ は, 半単純かつ有限な \mathbb{C} -線形アーベル圏である.

【例 4.3.1】 toric code のトポロジカル欠陥の直和

toric code の **トポロジカル秩序** TC を考える. ブラケット p_0 に局在したトラップハミルトニアン $\delta \hat{H}(p_0) := \hat{B}_{p_0}$ によって特徴付けられる **トポロジカル欠陥** は

$$\hat{A}_v |\psi_{\pm}\rangle = |\psi_{\pm}\rangle \quad \hat{B}_p |\psi_{\pm}\rangle = \begin{cases} \pm |\psi_{\pm}\rangle, & p = p_0 \\ |\psi_{\pm}\rangle, & p \neq p_0 \end{cases}$$

を充たす, 元のハミルトニアン \hat{H} の 2 つの固有状態 $|\psi_{\pm}\rangle$ で貼られる 2 次元の部分空間 $\mathbb{C}|\psi_{+}\rangle \oplus \mathbb{C}|\psi_{-}\rangle$ である. 特に **【例 4.2.1】** で得た $1, e, m, f \in \text{Ob}(\text{sk}_0(\text{TC}))$ を用いると $\mathbb{C}|\psi_{+}\rangle = 1, \mathbb{C}|\psi_{-}\rangle = m$ と書ける. 同様に, トラップハミルトニアンを

$$\delta \hat{H}(\{v_1, p_1\}) := \hat{A}_{v_0} + \hat{B}_{p_0} + \hat{A}_{v_0} \hat{B}_{p_0}$$

で定義すると, 対応する **トポロジカル欠陥** は v_0 と p_0 において符号が逆にならねばならないので

$$e \oplus m$$

になる. トラップハミルトニアンを

$$\delta \hat{H}(\{v_1, p_1\}) := \hat{A}_{v_0} + \hat{B}_{p_0} - \hat{A}_{v_0} \hat{B}_{p_0}$$

で定義すると, 対応する **トポロジカル欠陥** は v_0 と p_0 において符号が同じにならねばならないので

$$1 \oplus f$$

になる.

一番最初のトラップハミルトニアンに摂動を加えて $\delta \hat{H}_{\varepsilon}(p_0) := (1 + \varepsilon) \hat{B}_{p_0}$ にしてみよう. このとき, 実現するトポロジカル欠陥は $\varepsilon = 0$ ならば $1 \oplus m$ だが, $\varepsilon < 0$ ならば 1 であり, $\varepsilon > 0$ ならば m である. このように, 直和の形で書けるトポロジカル欠陥は摂動に対して不安定である.

定義^{ph} 4.7: 安定なトポロジカル秩序

$D+1$ 次元のトポロジカル秩序 $C_D \in \text{TO}_D$ が安定 (stable) であるとは、 $\Sigma^{(D)} = \mathbb{R}^D$ のときに基底状態の縮退度が 1 になることを言う。もしくは、同じことだが、 $\Sigma^{(D)} = \mathbb{R}^D$ のときに自明なトポロジカル欠陥 $1_p \in \text{Ob}(\text{sk}_p(C_D))$ が単純対象であることを言う。

4.3.2 モノイダル圏としての構造

$\forall x, y \in \text{Ob}(\text{sk}_0(C_D))$ の代表元は全系の Hilbert 空間の部分空間であるから、そのテンソル積 $x \otimes y \in \text{Ob}(\text{sk}_0(C_D))$ を考えることができる。直観的には、系のスケールを変えて 2 つのトポロジカル欠陥を 1 つのトポロジカル欠陥と見做すと言うことである。トポロジカル欠陥をトポロジカル秩序と見做すと、積層を行っていると考えても良い。このような操作をフュージョン (fusion) と呼ぶ。

命題^{ph} 4.4: $\text{sk}_0(C_D)$ はモノイダル圏

$\text{sk}_0(C_D)$ はモノイダル圏である。

ところが、実はトポロジカル欠陥のフュージョンの厳密な定義には様々な困難が付きまとう。 x, y がそれぞれ互いに異なる点 $\xi, \eta \in \Sigma^{(D)}$ に局在しているとしよう。このとき、代表元の素朴なテンソル積は、トポロジカル欠陥のレベルでのテンソル積 $x \otimes_{(\xi, \eta)} y$ を定める。 i.e. $x, y \in \text{Ob}(\text{sk}_0(C_D))$ のテンソル積の定義には、集合 $\{(\xi, \eta) \in \Sigma^{(D)} \mid \xi \neq \eta\}$ だけの不定性存在し得る。定義 4.6 直下の注の方法で $\text{sk}_0(C_D)$ を、点 $\xi \in \Sigma^{(D)}$ におけるトポロジカルな境界条件が成す圏 $\text{sk}_0(C_D)_\xi$ と見做すと、 $\otimes_{(\xi, \eta)}$ は関手

$$\otimes_{(\xi, \eta)}: \text{sk}_0(C_D)_\xi \times \text{sk}_0(C_D)_\eta \longrightarrow \text{sk}_0(C_D)$$

を定める。

ところで、 $(\xi, \eta) \in \text{Conf}(\Sigma^{(D)})$ を連続曲線 $\gamma: [0, 1] \longrightarrow \text{Conf}(\Sigma^{(D)})$ に沿って (ξ', η') まで断熱的に^{*6} 移動することで、いつでも同型写像 $T_{x, y}^\gamma: x \otimes_{(\xi, \eta)} y \longrightarrow x \otimes_{(\xi', \eta')} y$ を作ることができる。この同型写像を $\forall x, y \in \text{Ob}(\text{sk}_0(C_D))$ に関して集めたものは自然変換

$$T^\gamma: \otimes_{(\xi, \eta)} \Longrightarrow \otimes_{(\xi', \eta')}$$

を定める。状況を簡略化するためにしばしば次の仮定をおく：

仮説 4.1:

2 つの互いにホモトピックな道 γ_1, γ_2 に対して、 $T^{\gamma_1} = T^{\gamma_2}$ が成り立つ。

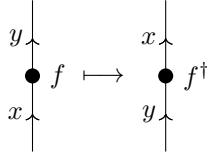
然るに、2 つの互いにホモトピックな道 γ_1, γ_2 をとったとしても、ギャップが有限だと $T^{\gamma_1}, T^{\gamma_2}$ が一致してくれる保証はない。このようなときには、テンソル積 $\otimes_{(\xi, \eta)}$ は高次のホモトピーに依存し、 $\text{sk}_0(C_D)$ の上に A_∞ -圏の構造を与える。

^{*6} i.e. 途中経過のトラップハミルトニアンギャップを閉じずに

このように、 $\text{sk}_0(\mathcal{C}_D)$ のテンソル積の構造は大きな不定性を持つ。トポロジカル秩序のミクロな定義から出発し、断熱変形を利用して構成することもできるが、そうするとモノイダル圏の同型類しか定まらない [?]. この意味で、 $\text{sk}_0(\mathcal{C}_D)$ のモノイダル構造は「ゲージ不変でない」などと言うことがある。

4.3.3 ユニタリティ

$\text{sk}_0(\mathcal{C}_D)$ における射とは、任意の局所演算子と可換な線形作用素のことであった。故に、そのエルミート共役が自然に定まる。ストリング図式で書く場合は次のようにする：



定義 4.2: ユニタリ構造

\mathcal{C} を \mathbb{C} -線形なアーベル圏とする。 \mathcal{C} の **ダガー構造** (dagger structure) とは、反線形な関手

$$\dagger: \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{C}$$

であって以下を充たすもののこと：

(dag-1) $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $x^\dagger = x$

(dag-2) $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, 及び $\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ に対して $(f^\dagger)^\dagger = f$

さらに、以下の条件を充たすダガー構造は**ユニタリ構造** (unitary structure) と呼ばれる：

(dag-3) $f^\dagger \circ f = 0 \iff f = 0$

ユニタリ圏 \mathcal{C} の射 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ が**ユニタリ** (unitary) であるとは、 $f^\dagger \circ f = \text{Id}_x$ かつ $f \circ f^\dagger = \text{Id}_y$ が成り立つことを言う。

命題 4.2: ユニタリ構造と \mathcal{C}^* 構造

\mathbb{C} -線形なアーベル圏 \mathcal{C} が \mathcal{C}^* -圏であることと、**ユニタリ圏**であることは同値である。

証明 [?, Proposition 2.1, p.5] ■

定義 4.3: ユニタリモノイダル圏

\mathbb{C} -線形なアーベル圏でもあるモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, a, l, r)$ が**ユニタリモノイダル圏**であるとは、**ユニタリ構造** $\dagger: \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{C}$ がモノイダル関手であることを言う。

4.3.4 rigidity

非自明な**トポロジカル欠陥**の単体を, 局所演算子によって生成・消滅させることはできない. トポロジカル欠陥の生成・消滅はその世界線を曲げることによって成される (図 4.2). この過程を, $0+0$ -次元のトポロジカル欠陥を用いてそれぞれ

$$\begin{aligned}\mathrm{coev}_x^L: 1 &\longrightarrow x \otimes x^*, \\ \mathrm{ev}_x^L: x^* \otimes x &\longrightarrow 1\end{aligned}$$

と表現する. ミクロには, このようなプロセスは**自明相** $1_0 \in \mathrm{Ob}(\mathrm{sk}_0(C_D))$ にストリング状の演算子を作用させることによって成される.



図 4.2: トポロジカル欠陥 $x \in \mathrm{Ob}(\mathrm{sk}_0(C_D))$ の生成と消滅

命題^{ph} 4.5: $\mathrm{sk}_0(C_D)$ はユニタリフュージョン圏

$\mathrm{sk}_0(C_D)$ は**ユニタリ**多重フュージョン圏である. 特に, C_D が**安定**ならばユニタリフュージョン圏である.

ユニタリ構造と旋回構造の間には密接な関係がある.

補題 4.1: ユニタリモノイダル圏における右双対

ユニタリモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \dagger)$ の対象 $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が左双対 $(x^*, \mathrm{coev}_x^L, \mathrm{ev}_x^L)$ を持つとする. このとき, $(x^*, \mathrm{ev}_x^{L\dagger}, \mathrm{coev}_x^{L\dagger})$ は x の右双対である.

証明 (zig-zag equations) を示す. 実際,

$$\begin{aligned}(\mathrm{coev}_x^{L\dagger} \otimes \mathrm{Id}_x) \circ (\mathrm{Id}_x \otimes \mathrm{ev}_x^{L\dagger}) &= (\mathrm{coev}_x^{L\dagger} \otimes \mathrm{Id}_x^\dagger) \circ (\mathrm{Id}_x^\dagger \otimes \mathrm{ev}_x^{L\dagger}) \\ &= (\mathrm{coev}_x^L \otimes \mathrm{Id}_x)^\dagger \circ (\mathrm{Id}_x \otimes \mathrm{ev}_x^L)^\dagger \\ &= ((\mathrm{Id}_x \otimes \mathrm{ev}_x^L) \circ (\mathrm{coev}_x^L \otimes \mathrm{Id}_x))^\dagger \\ &= \mathrm{Id}_x^\dagger = \mathrm{Id}_x, \\ (\mathrm{Id}_{x^*} \otimes \mathrm{coev}_x^{L\dagger}) \circ (\mathrm{ev}_x^{L\dagger} \otimes \mathrm{Id}_{x^*}) &= ((\mathrm{ev}_x^L \otimes \mathrm{Id}_{x^*}) \circ (\mathrm{Id}_{x^*} \otimes \mathrm{coev}_x^L))^\dagger \\ &= \mathrm{Id}_{x^*}\end{aligned}$$

が成り立つ. ■

命題 4.3: ユニタリテンソル圏における球状構造

ユニタリテンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{coev}^L, \text{ev}^L, \dagger)$ における巡回構造

$$p_x := (\text{coev}_x^{L\dagger} \otimes \text{Id}_{x^{**}}) \circ (\text{Id}_x \otimes \text{coev}_{x^*}^L): x \longrightarrow x^{**}$$

が球状構造になる必要十分条件は, $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

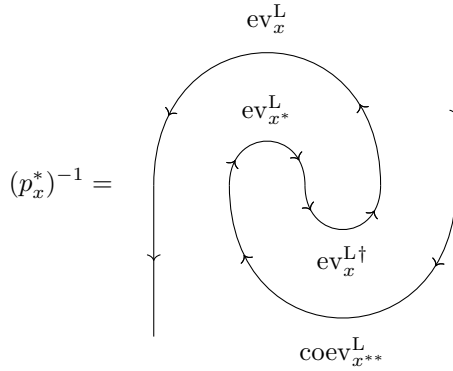
$$\text{coev}_x^{L\dagger} \circ \text{coev}_x^L = \text{ev}_x^L \circ \text{ev}_x^{L\dagger}$$

が成り立つことである.

証明

$$\begin{aligned} \dim_p(x) &= \text{ev}_{x^*}^L \circ (p_x \otimes \text{Id}_{x^*}) \circ \text{coev}_x^L \\ &= \text{coev}_x^{L\dagger} \circ \text{coev}_x^L \end{aligned}$$

ところで,



であるから,

$$\begin{aligned} \dim_p(x^*) &= \text{Tr}^L((p_x^*)^{-1}) && \because \text{補題??-(1)} \\ &= \text{ev}_x^L \circ \text{ev}_x^{L\dagger} \end{aligned}$$

と計算できる. よって

$$\dim_p(x) = \dim_p(x^*) \iff \text{coev}_x^{L\dagger} \circ \text{coev}_x^L = \text{ev}_x^L \circ \text{ev}_x^{L\dagger}$$

■

coevaluation/evaluation を適切に選ぶことで, いつでも命題 4.3 の条件を充たすようにできる. 実際, $\text{coev}_x^L, \text{ev}_x^L$ が $x, x^* \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に関する (co)evaluation ならば, $\forall \lambda \in \mathbb{C}^\times$ に対して $\lambda \text{coev}_x^L, \lambda^{-1} \text{ev}_x^L$ もまた **(zig-zag equations)** を充たすので x, x^* に関する (co)evaluation である. よって

$$|\lambda|^2 = \sqrt{\frac{\text{ev}_x^L \circ \text{ev}_x^{L\dagger}}{\text{coev}_x^{L\dagger} \circ \text{coev}_x^L}}$$

を充たすように λ を選べば良い [?, LEMMA 3.9., p.9].

定義 4.4: balanced なユニタリテンソル圏

ユニタリテンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{coev}^L, \text{ev}^L, \dagger)$ が **balanced** であるとは, $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$\text{coev}_x^{L\dagger} \circ \text{coev}_x^L = \text{ev}_x^L \circ \text{ev}_x^{L\dagger}$$

が成り立つこと. このとき, 命題 4.3 の構成によって \mathcal{C} は球状圏になる.

4.3.5 組紐

トポロジカル欠陥 $x, y \in \text{sk}_0(\mathcal{C}_2)$ をとる. x が y の周りを断熱的に 1 周する過程は同型射 $x \otimes y \xrightarrow{\cong} x \otimes y$ で記述される (図 4.3a). 特に, 反時計方向に交換する過程は組紐 (braiding) と呼ばれる同型射 $b_{x,y}: x \otimes y \xrightarrow{\cong} y \otimes x$ で記述され, 時計方向の過程はその逆射 (anti-braiding) で与えられる (図 4.3b). 組紐を全ての x, y に関して集めたものは自然同型 $b: \otimes \Rightarrow \otimes \circ \tau$ を成す. ただし $\tau: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ は成分の互換である.

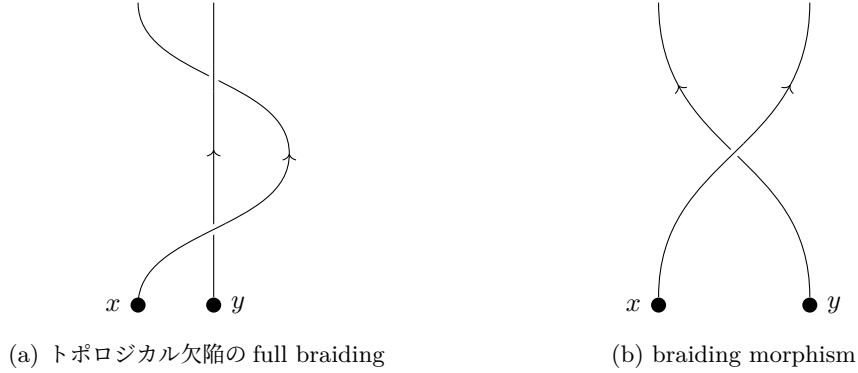


図 4.3: 組紐

命題^{ph} 4.6:

$\text{sk}_0(\mathcal{C}_D)$ は組紐付きユニタリ多重フュージョン圏である. 特に, \mathcal{C}_D が安定ならば組紐付きユニタリフュージョン圏である.

4.3.6 リボン構造

4.3.7 UMTc

トポロジカル秩序のアノマリーの有無と \mathcal{C}_D の組紐構造の間には重要な関係があると考えられている [?]:

予想^{ph} 4.3: remote-detectable

トポロジカル秩序がアノマリーを持たないことと, 余次元 2 以上のトポロジカル欠陥が braiding によって検出できることは等価である.

簡単のため $D = 2$ として考える． $D = 2$ 次元における余次元 2 のトポロジカル欠陥とは， $D - 2 + 1 = 1$ 次元の線状欠陥のことである．非自明なトポロジカル欠陥 $x \in \text{Ob}(\text{sk}_0(\mathcal{C}_D))$ が検出できるというのは，他の全てのトポロジカル欠陥 $y \in \text{Ob}(\text{sk}_0(\mathcal{C}_D))$ を x の周りに 1 周させたときに，非自明な位相を吐き出すような y が少なくとも 1 つは存在するという意味である．

定義 4.5: Müger 中心

$(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R, b)$ を組紐付きフュージョン圏とする． \mathcal{C} の **Müger 中心** (Müger center) とは，

$$\mathfrak{Z}_2(\mathcal{C}) := \{ x \in \text{Ob}(\mathcal{C}) \mid \forall y \in \text{Ob}(\mathcal{C}), b_{y,x} \circ b_{x,y} = \text{Id}_{x \otimes y} \}$$

を対象とする \mathcal{C} の充満部分圏 $\mathfrak{Z}_2(\mathcal{C})$ のこと．

$\mathfrak{Z}_2(\mathcal{C})$ は \mathcal{C} から組紐付きフュージョン圏の構造を引き継ぐが，定義から組紐構造は対称になる．

定義 4.6: 非退化な組紐付きフュージョン圏

組紐付きフュージョン圏が**非退化** (non-degenerate) であるとは，**Müger 中心**の単純対象が唯一であることを言う．

命題^{ph} 4.7:

安定な $2 + 1$ 次元のトポロジカル秩序 \mathcal{C}_2 がアノマリーを持たないことと，組紐付きユニタリフュージョン圏 $\text{sk}_0(\mathcal{C}_2)$ が**非退化**であることは同値である．

定義 4.7: MTC

モジュラーテンソル圏 (modular tensor category; MTC) とは，**非退化**な前モジュラー圏のこと．

命題^{ph} 4.8: $\text{sk}_0(\mathcal{C}_2)$ は MTC

空間多様体 \mathbb{R}^2 上に置かれた安定かつアノマリーを持たない $2+1$ 次元のトポロジカル秩序 \mathcal{C}_2 が持つ点状のトポロジカル欠陥全体 $\text{sk}_0(\mathcal{C}_2)$ はユニタリ**モジュラーテンソル圏**を成す．

なお， $2 + 1$ 次元のトポロジカル欠陥 \mathcal{C}_2 がアノマリーを持たないことと， \mathcal{C}_2 の低エネルギー有効理論である TQFT がアノマリーを持たないことは等価ではない．両者の間には**フレーミングアノマリー** (framing anomaly) の分だけ差異がある [?].

命題 4.4: MTC の性質

$(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R, b, \theta)$ が **MTC** ならば以下が成り立つ:

- (1) $S_{xy} = S_{yx} = S_{x^*y^*} = \bar{S}_{xy^*}, \quad S_{1x} = S_{x1} = \dim(x)$
- (2) $S_{xy}S_{xz} = \dim(x) \sum_{w \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{yz}^w S_{xw}$
- (3) 行列 C を $C_{xy} = \delta_{x^*,y}$ で定義すると, $S^2 = \dim(\mathcal{C})C$
- (4) **Verlinde formula**

$$\sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \frac{S_{xy}S_{xz}S_{xw^*}}{S_{x1}} = \dim(\mathcal{C})N_{yz}^w$$

- (5) **Gauss sum** を

$$\tau^\pm(\mathcal{C}) := \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \theta_x^{\pm 1} \dim(x)^2$$

で定義すると, $\tau^+(\mathcal{C})\tau^-(\mathcal{C}) = \dim(\mathcal{C})$ が成り立つ.

- (6) **加法的中心電荷** (additive central charge) を

$$e^{2\pi i c(\mathcal{C})/8} := \frac{\tau^+(\mathcal{C})}{\sqrt{\dim(\mathcal{C})}}$$

で定義すると, $c(\mathcal{C}) \in \mathbb{Q}/8\mathbb{Z}$ が成り立つ.

- (7) **T-行列** (T -matrix) を

$$T_{xy} := \theta_x^{-1} \delta_{x,y}$$

で定義すると,

$$S^4 = \dim(\mathcal{C})^2 \mathbf{1}, \quad (ST)^3 = \tau^-(\mathcal{C})S^2$$

が成り立つ. 従って $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ の生成元と関係式

$$\langle \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \mid (\mathfrak{st})^3 = \mathfrak{s}^2, \mathfrak{s}^4 = 1 \rangle$$

を思い出すと, 群準同型

$$\mathfrak{s} \mapsto \frac{S}{\sqrt{\dim(\mathcal{C})}}, \quad \mathfrak{t} \mapsto T$$

は $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ のユニタリな射影表現を与える. 特に, この射影表現が表現になるための障害は $c(\mathcal{C}) \notin 8\mathbb{Z}$ となることである.

証明 (1) まず, braiding の存在により $x \otimes y \cong y \otimes x$ であるから, 米田の補題により $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x \otimes y, z) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y \otimes x, z)$ が言える. よって

$$N_{xy}^z = \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x \otimes y, z) = \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y \otimes x, z) = N_{yx}^z$$

である．従って命題??-(1) より

$$\begin{aligned} S_{xy} &= \theta_x^{-1} \theta_y^{-1} \sum_{z \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{xy}^z \theta_z \dim(z) \\ &= \theta_y^{-1} \theta_x^{-1} \sum_{z \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{yx}^z \theta_z \dim(z) \\ &= S_{yx} \end{aligned}$$

さらに,

$$N_{1x}^z = \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z) = \delta_{xz}$$

であるから

$$\begin{aligned} S_{1x} &= \theta_x^{-1} \sum_{z \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{1x}^z \theta_z \dim(z) \\ &= \dim(x) \end{aligned}$$

が成り立つ．

(2) 命題??-(2)

(3) 命題??-(3) より, $\forall x \in \text{Simp}(\mathcal{C})$ に対して定まる写像 $h_x: \text{Gr}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{C}$, $y \mapsto S_{xy}/\dim(x)$ は環準同型である．特に **MTC** は**非退化**なので S -行列も非退化であり, $h_y = h_z$ であるためには $y = z$ であることが必要十分である．

$y \neq z$ のとき, (1) および補題??-(2) より

$$\begin{aligned} [S^2]_{yz^*} &= \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} S_{yx} S_{xz^*} \\ &= \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} S_{yx} S_{zx^*} \\ &= \dim(y) \dim(z) \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} h_y(x) h_z(x^*) \\ &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ．一方で, $y = z$ のときは (1), (2) を使って

$$\begin{aligned} [S^2]_{yy^*} &= \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} S_{xy} S_{xy^*} \\ &= \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \dim(x) \sum_{w \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{yy^*}^w S_{xw} \\ &= \sum_{w \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{yy^*}^w \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \dim(x) S_{xw} \end{aligned}$$

と計算できる．ここで, 写像 $\dim: \text{Gr}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto \dim(x)$ は環準同型であるから, 補題??-(2) より

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \dim(x) S_{xw} &= \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \dim(x^*) S_{wx} \\ &= \dim(w) \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \dim(x^*) h_w(x) \end{aligned}$$

$$= \delta_{w,1} \dim(\mathcal{C}) \quad (4.3.1)$$

が成り立つ. よって

$$[S^2]_{yy^*} = N_{yy^*}^1 \dim \mathcal{C} = \dim(\mathcal{C})$$

が分かった.

(4) (2), (3) より

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \frac{S_{xy} S_{xz} S_{xw^*}}{S_{x1}} &= \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \frac{S_{xw^*}}{S_{x1}} \dim(x) \sum_{u \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{yz}^u S_{xu} \\ &= \sum_{u \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{yz}^u \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} S_{ux} S_{xw^*} \\ &= \sum_{u \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{yz}^u [S^2]_{uw^*} \\ &= \dim(\mathcal{C}) N_{yz}^w \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} \tau^+(\mathcal{C}) \tau^-(\mathcal{C}) &= \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \theta_x^{-1} \dim(x) \sum_{y \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \dim(x) \dim(y) \theta_y \dim(y) \\ &= \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \theta_x^{-1} \dim(x) \sum_{y \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \dim(y^* \otimes x) \theta_y \dim(y) \\ &= \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \theta_x^{-1} \dim(x) \sum_{y \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \sum_{z \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{y^*x}^z \dim(z) \theta_y \dim(y) \\ &= \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \dim(x) \sum_{z \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \dim(z) \theta_z \left(\theta_x^{-1} \theta_z^{-1} \sum_{y \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{xz}^y \theta_y \dim(y) \right) \\ &= \sum_{z \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \dim(z) \theta_z \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \dim(x) S_{xz} \quad \because \text{命題??-(1)} \\ &= \sum_{z \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \dim(z) \theta_z \delta_{z,1} \dim(\mathcal{C}) \quad \because (4.3.1) \\ &= \dim(\mathcal{C}) \end{aligned}$$

(6)

(7) $S^4 = \dim(\mathcal{C})^2 \mathbf{1}$ は (3) より従う. (2) より,

$$\begin{aligned} [STS]_{xy} &= \sum_{z \in \text{Simp}(\mathcal{C})} S_{xz} \theta_z^{-1} S_{zy} \\ &= \sum_{z \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \theta_z^{-1} S_{zx} S_{zy} \\ &= \sum_{w \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{xy}^w \sum_{z \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \theta_z^{-1} \dim(z) S_{zw} \end{aligned}$$

ところで,

$$\tau^+(\mathcal{C}) \sum_{z \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \theta_z^{-1} \dim(z) S_{z^*w}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \theta_x \dim(x) \sum_{z \in \text{Simp}(\mathcal{C})} S_{z^*w} \theta_z^{-1} \dim(x^* \otimes z) \\
&= \sum_{z \in \text{Simp}(\mathcal{C})} S_{z^*w} \theta_z^{-1} \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \theta_x \dim(x) \sum_{y \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{x^*z}^y \dim(y) \\
&= \sum_{z \in \text{Simp}(\mathcal{C})} S_{z^*w} \sum_{y \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \theta_y \dim(y) \left(\theta_z^{-1} \theta_y^{-1} \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{zy}^x \theta_x \dim(x) \right) \\
&= \sum_{z \in \text{Simp}(\mathcal{C})} S_{z^*w} \sum_{y \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \theta_y \dim(y) S_{zy} \\
&= \sum_{y \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \theta_y \dim(y) \sum_{z \in \text{Simp}(\mathcal{C})} S_{yz} S_{zw^*} \\
&= \dim(\mathcal{C}) \theta_w \dim(w) \quad \because (3) \\
&= \tau^+(\mathcal{C}) \tau^-(\mathcal{C}) \theta_w \dim(w) \quad \because (5)
\end{aligned}$$

であるから

$$\sum_{z \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \theta_z^{-1} \dim(z) S_{zw} = \theta_w \dim(w) \tau^-(\mathcal{C})$$

が分かる．故に

$$\begin{aligned}
[STS]_{xy} &= \tau^-(\mathcal{C}) \sum_{w \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{xy}^w \theta_w \dim(w) \\
&= \tau^-(\mathcal{C}) \theta_x \theta_y S_{xy} \quad \because \text{命題??-(1)} \\
&= \tau^-(\mathcal{C}) [T^{-1} S T^{-1}]_{xy}
\end{aligned}$$

と計算できた．ここから $(ST)^3 = ST(STST) = ST(\tau^-(\mathcal{C}) T^{-1} S) = \tau^-(\mathcal{C}) S^2$ として所望の式を得る．

■

4.4 Levin-Wen 模型