位相的場の理論 ノート

高間俊至

2024 年 10 月 10 日

目次

第 1 章

粒子の統計性

この章は [1, Chapter3, 4] に相当する．この章では同種の多粒子系の経路積分による量子化を考察し，粒子の統計性と配位空間のホモトピー論の間の関係性を調べる．特に，プロパゲーターの合成則を充たす経路積分の測度と配位空間の基本群のユニタリ表現の対応を考察し，$2+1$ 次元の同種 N 粒子系においてエニオンの統計性が生じ得ることを確かめる．なお，本章ではまだ場の量子化は行わない．

1.1　1 粒子の経路積分

$\mathbb{R}^D$ 内を運動する非相対論的 1 粒子の軌跡 $\boldsymbol{x}(t)$ を与える．時刻 t_{i} に $\boldsymbol{x}_{\mathrm{i}}$ を出発し，時刻 t_{f} に $\boldsymbol{x}_{\mathrm{f}}$ に到達しているとする．

この系を量子力学的に捉えてみる．時刻 t_{i} に状態 $|\boldsymbol{x}_{\mathrm{i}}\rangle$ にあった系が時刻 t_{f} に状態 $|\boldsymbol{x}_{\mathrm{f}}\rangle$ にある遷移振幅は**プロパゲーター** (propagator) と呼ばれるが，それは系の時間発展を表すユニタリ演算子 $\hat{U}(t_{\mathrm{f}},\, t_{\mathrm{i}})$ を用いて

$$\langle \boldsymbol{x}_{\mathrm{f}} |\, \hat{U}(t_{\mathrm{f}},\, t_{\mathrm{i}})\, | \boldsymbol{x}_{\mathrm{i}} \rangle \tag{1.1.1}$$

と書かれる[*1]．プロパゲーターが計算されると，系の波動関数 $\psi(\boldsymbol{x},\, t) \coloneqq \langle \boldsymbol{x} | \psi(t) \rangle$ の時間発展が次のようにしてわかる：

$$\begin{aligned}
\psi(\boldsymbol{x}_{\mathrm{f}},\, t_{\mathrm{f}}) &= \langle \boldsymbol{x}_{\mathrm{f}} | \psi(t_{\mathrm{f}}) \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{x}_{\mathrm{f}} | \hat{U}(t_{\mathrm{f}},\, t_{\mathrm{i}}) | \psi(t_{\mathrm{i}}) \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^D} \mathrm{d}^D \boldsymbol{x}_{\mathrm{i}}\, \langle \boldsymbol{x}_{\mathrm{f}} |\, \hat{U}(t_{\mathrm{f}},\, t_{\mathrm{i}})\, | \boldsymbol{x}_{\mathrm{i}} \rangle\, \langle \boldsymbol{x}_{\mathrm{i}} | \psi(t_{\mathrm{i}}) \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^D} \mathrm{d}^D \boldsymbol{x}_{\mathrm{i}}\, \langle \boldsymbol{x}_{\mathrm{f}} |\, \hat{U}(t_{\mathrm{f}},\, t_{\mathrm{i}})\, | \boldsymbol{x}_{\mathrm{i}} \rangle\, \psi(\boldsymbol{x}_{\mathrm{i}},\, t_{\mathrm{i}})
\end{aligned}$$

従って，初期条件が与えられてかつ任意の時刻を繋ぐプロパゲーターが計算できれば系の時間発展が全てわかったことになる．そして Feynman の**経路積分** (path integral) による量子化とは，今考えている系の古典的作用

$$S[\boldsymbol{x}(t)] = \int_{t_{\mathrm{i}}}^{t_{\mathrm{f}}} \mathrm{d}t\, L[\boldsymbol{x}(t),\, \dot{\boldsymbol{x}}(t),\, t]$$

[*1] 状態ケット $|\boldsymbol{x}\rangle$ は Schrödinger 表示である．

と，量子的なプロパゲーター (1.1.1) との間に

$$\langle \boldsymbol{x}_\mathrm{f}|\, \hat{U}(t_\mathrm{f},\, t_\mathrm{i})\, |\boldsymbol{x}_\mathrm{i}\rangle = \mathcal{N} \sum_{\boldsymbol{x}(t)\ \mathrm{s.t.}\ \boldsymbol{x}(t_\mathrm{i})=\boldsymbol{x}_\mathrm{i},\, \boldsymbol{x}(t_\mathrm{f})=\boldsymbol{x}_\mathrm{f}} e^{\mathrm{i}S[\boldsymbol{x}(t)]/\hbar} \tag{1.1.2}$$

の関係があることを主張するものである．

いま考えている系のハミルトニアンが

$$\hat{H}(\hat{\boldsymbol{p}},\, \hat{\boldsymbol{x}}) = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m} + V(\hat{\boldsymbol{x}})$$

と書かれる場合に (1.1.2) が成り立っていることを確認する．Schrödinger 方程式より時間発展演算子は

$$\hat{U}(t_\mathrm{f},\, t_\mathrm{i}) = e^{-\mathrm{i}\hat{H}(t_\mathrm{f}-t_\mathrm{i})/\hbar}$$

である．十分大きな n に対して $\varepsilon \coloneqq (t_\mathrm{f} - t_\mathrm{i})/n$ とおくことで時間間隔 $[t_\mathrm{i},\, t_\mathrm{f}]$ を

$$[t_\mathrm{i},\, t_\mathrm{f}] = [t_\mathrm{i},\, t_\mathrm{i} + \varepsilon] \cup [t_\mathrm{i} + \varepsilon,\, t_\mathrm{i} + 2\varepsilon] \cup \cdots \cup [t_\mathrm{i} + (n-1)\varepsilon,\, t_\mathrm{f}]$$

のように分割し，$t_k \coloneqq t_\mathrm{i} + k\varepsilon$ $(k = 0,\, 1,\, \ldots,\, n)$ とおく[*2]．このとき ε は微小なので，$\forall \boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^D$ に対して

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{x}_{k+1}|\, \hat{U}(t_{k+1},\, t_k)\, |\boldsymbol{x}_k\rangle &= \langle \boldsymbol{x}_{k+1}|\, e^{-\mathrm{i}\hat{H}\varepsilon/\hbar}\, |\boldsymbol{x}_k\rangle \\
&\approx \langle \boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k\rangle - \frac{\mathrm{i}\varepsilon}{\hbar} \langle \boldsymbol{x}_{k+1}|\hat{H}|\boldsymbol{x}_k\rangle \\
&= \delta^D(\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_k) - \frac{\mathrm{i}\varepsilon}{\hbar} \left(\langle \boldsymbol{x}_{k+1}|\, \frac{\hat{\boldsymbol{p}}}{2m}\, |\boldsymbol{x}_k\rangle + V(\boldsymbol{x}_k)\delta^D(\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_k) \right) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^D\boldsymbol{p}}{(2\pi)^D} e^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k)/\hbar} \left(1 - \frac{\mathrm{i}\varepsilon}{\hbar} H(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{x}_k) \right) \\
&\approx \int \frac{\mathrm{d}^D\boldsymbol{p}}{(2\pi)^D} e^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k)/\hbar} e^{-\mathrm{i}\varepsilon H(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{x}_k)/\hbar}
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここに，4 行目以降に登場する $H(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{x}_k)$ は演算子ではなく c 数である．従って[*3]，

$$\begin{aligned}
&\langle \boldsymbol{x}_\mathrm{f}|\, \hat{U}(t_\mathrm{f},\, t_\mathrm{i})\, |\boldsymbol{x}_\mathrm{i}\rangle = \langle \boldsymbol{x}_\mathrm{f}|\, e^{-\mathrm{i}\hat{H}n\varepsilon/\hbar}\, |\boldsymbol{x}_\mathrm{i}\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \int \left(\prod_{k=1}^{n-1} \mathrm{d}^D\boldsymbol{x}_k \right) \prod_{k=1}^{n-1} \langle \boldsymbol{x}_{k+1}|\, e^{-\mathrm{i}\hat{H}\varepsilon/\hbar}\, |\boldsymbol{x}_k\rangle \\
&= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \text{i.e. } \varepsilon\to 0}} \int \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{\mathrm{d}^D\boldsymbol{x}_k\, \mathrm{d}^D\boldsymbol{p}_k}{(2\pi)^D} \right) \exp\left\{ \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\varepsilon \sum_{k=1}^{n-1} \left(\boldsymbol{p}_k \cdot \frac{\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_k}{\varepsilon} - H(\boldsymbol{p}_k,\, \boldsymbol{x}_k) \right) \right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \int \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{\mathrm{d}^D\boldsymbol{x}_k\, \mathrm{d}^D\boldsymbol{p}_k}{(2\pi)^D} \right) \exp\left\{ \frac{\mathrm{i}}{\hbar} \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} \mathrm{d}t\, \left(\boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{x}} - H(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{x}) \right) \right\} \\
&\eqqcolon \int [\mathrm{d}^D\boldsymbol{x}\, \mathrm{d}^D\boldsymbol{p}] \exp\left\{ \frac{\mathrm{i}}{\hbar} \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} \mathrm{d}t\, \left(\boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{x}} - H(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{x}) \right) \right\}
\end{aligned} \tag{1.1.3}$$

---

*2 定義から $t_\mathrm{i} = t_0,\, t_\mathrm{f} = t_n$ である．

*3 実は，(1.1.3) から次の行への移行は，厳密には単に記号的なものだと考えるべきである．というのも，$\boldsymbol{x}_k$ $(k = 1,\, \ldots,\, n-1)$ はそれぞれ独立に $\mathbb{R}^D$ を動くので，$(\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_k)/\varepsilon$ は発散しても良いのである．つまり，次の行の $\dot{\boldsymbol{x}} \coloneqq \lim_{\varepsilon\to 0}(\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_k)/\varepsilon$ は単に記号としてこう書いているだけに過ぎない．この件に関しては [2, 第 1 章, p.23] に言及がある．旧版には書いていないので注意．

ただし $\int[\mathrm{d}^D\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}^D\boldsymbol{p}] := \lim_{n\to\infty}\int\left(\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\mathrm{d}^D\boldsymbol{x}_k\mathrm{d}^D\boldsymbol{p}_k}{(2\pi)^D}\right)$ は経路積分の測度である．ハミルトニアンの $\boldsymbol{p}$ 依存性は運動項のみなので，(1.1.3) において $\boldsymbol{p}_k$ 積分を先に実行することができる：

$$
\begin{aligned}
\langle\boldsymbol{x}_\mathrm{f}|\,\hat{U}(t_\mathrm{f},\,t_\mathrm{i})\,|\boldsymbol{x}_\mathrm{i}\rangle &= \lim_{\substack{n\to\infty\\ \text{i.e. }\varepsilon\to 0}}\int\left(\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\mathrm{d}^D\boldsymbol{x}_k\,\mathrm{d}^D\boldsymbol{p}_k}{(2\pi)^D}\right)\\
&\qquad\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\varepsilon\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p}_k - m\frac{\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k}{\varepsilon}\right)^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k}{\varepsilon}\right)^2 - V(\boldsymbol{x}_k)\right)\right\}\\
&= \lim_{\substack{n\to\infty\\ \text{i.e. }\varepsilon\to 0}}\int\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{m\hbar}{2\pi\mathrm{i}\varepsilon}\right)^{D/2}\mathrm{d}^D\boldsymbol{x}_k\right)\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\varepsilon\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{m}{2}\left(\frac{\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k}{\varepsilon}\right)^2 - V(\boldsymbol{x}_k)\right)\right\}\\
&= \lim_{n\to\infty}\int\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{m\hbar}{2\pi\mathrm{i}\varepsilon}\right)^{D/2}\mathrm{d}^D\boldsymbol{x}_k\right)\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}}\mathrm{d}t\left(\frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^2 - V(\boldsymbol{x})\right)\right\}\\
&=: \int[\mathrm{d}^D\boldsymbol{x}]\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}}L[\boldsymbol{x}(t),\,\dot{\boldsymbol{x}}(t)]\right\}
\end{aligned}
$$

これがまさに求めたい形 (1.1.2) である．

1.2　2 つの同種粒子

次に，$D(\geq 2)$ 次元 Euclid 空間[*4] $\mathbb{R}^D$ 内に 2 つの同種粒子が存在する量子系 $\mathcal{H}$ を考える．簡単のためこの節では粒子の内部自由度はないとする．

1.2.1　粒子の配位

この系における粒子の配位 (configuration) を記述する方法を考察しよう．いま，***coincidences*** と呼ばれる集合を $\Delta := \left\{(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{x})\;\middle|\;\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^D\right\}$ で定義する．内部自由度がないという仮定により，勝手な 1 つの $(\boldsymbol{x}_1,\,\boldsymbol{x}_2)\in(\mathbb{R}^D)^2\setminus\Delta$ に対応する $\mathcal{H}$ の元が一意に定まる．それを $|\boldsymbol{x}_1,\,\boldsymbol{x}_2\rangle\in\mathcal{H}$ と書こう[*5]．ここで，いわゆる粒子の不可弁別性により 2 つのケット $|\boldsymbol{x}_1,\,\boldsymbol{x}_2\rangle$, $|\boldsymbol{x}_2,\,\boldsymbol{x}_1\rangle$ が同じ物理状態[*6]を表していることに注意する．このため，集合 $(\mathbb{R}^D)^2\setminus\Delta$ の上の同値関係 $\sim$ を

$$
\sim \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad (\boldsymbol{x}_1,\,\boldsymbol{x}_2)\sim(\boldsymbol{x}_2,\,\boldsymbol{x}_1)
$$

と定義し，**配位空間** (configuration space) $\mathcal{C}$ としては[*7]商集合 $\left((\mathbb{R}^D)^2\setminus\Delta\right)/\sim$ を選ぶのが良い[*8]．

---

*4 つまり，空間の Riemann 計量の成分は δ_{ij} であるとする．

*5 写像 $|\,,\rangle : (\mathbb{R}^D)^2 \longrightarrow \mathcal{H}$ は全単射ではある．

*6 すなわち，Hilbert 空間の元としては U(1) 位相がかかるという違いしかない．

*7 写像 $\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{H}$, $[(\boldsymbol{x}_1,\,\boldsymbol{x}_2)]\longmapsto|\boldsymbol{x}_1,\,\boldsymbol{x}_2\rangle$ は代表元の取り方に依存するので well-defined でないが，この写像は $\mathcal{C}$ から Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の**射線** (ray) 全体が成す集合への写像だと思うことで well-defined な全単射になる．$\mathcal{C}$ のことを配位空間と呼ぶのはこのためだと思われる．

*8 というよりも実は，位相幾何学においては位相空間 $\mathcal{C}$ のことを $\mathbb{R}^D$ の 2 次の **(unordered) configuration space** と呼ぶ (`https://en.wikipedia.org/wiki/Configuration_space_(mathematics)`)．$\mathbb{R}^D$ を一般の位相空間に置き換えても良い．

!

以降では，同値類[a] $[(\boldsymbol{x}_1,\, \boldsymbol{x}_2)] \in \mathcal{C}$ の代表元として

$$
\begin{aligned}
& {y_1}^1 < {y_2}^1 \\
\text{または}\quad & {y_1}^1 = {y_2}^1,\, {y_1}^2 < {y_2}^2 \\
\text{または}\quad & \cdots \\
\text{または}\quad & {y_1}^1 = {y_2}^1,\, \cdots {y_1}^{D-1} = {y_2}^{D-1},\, {y_1}^D < {y_2}^D
\end{aligned}
$$

を充たす $(\boldsymbol{y}_1,\, \boldsymbol{y}_2) \in [(\boldsymbol{x}_1,\, \boldsymbol{x}_2)]$ を使う．

[a] $(\boldsymbol{x}_1,\, \boldsymbol{x}_2) \in (\mathbb{R}^D)^2 \setminus \Delta$ の $\sim$ による同値類を $[(\boldsymbol{x}_1,\, \boldsymbol{x}_2)]$ と書く．

1.2.2　配位空間上の経路

この系を経路積分によって量子化する際，積分すべき経路とは配位空間 $\mathcal{C}$ 上の連続曲線，すなわち連続写像 $l\colon [t_{\mathrm{i}},\, t_{\mathrm{f}}] \longrightarrow \mathcal{C}$ のことである．始点 $l(t_{\mathrm{i}}) = [(\boldsymbol{x}_{1\mathrm{i}},\, \boldsymbol{x}_{2\mathrm{i}})] =: \boldsymbol{x}_{\mathrm{i}}$ および終点 $l(t_{\mathrm{f}}) = [(\boldsymbol{x}_{1\mathrm{f}},\, \boldsymbol{x}_{2\mathrm{f}})] =: \boldsymbol{x}_{\mathrm{f}}$ を固定した経路全体がなすホモトピー集合を $\Pi\mathcal{C}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{i}},\, \boldsymbol{x}_{\mathrm{f}})$ と書こう．$\forall \boldsymbol{x}_{\mathrm{i}},\, \boldsymbol{x}_{\mathrm{m}},\, \boldsymbol{x}_{\mathrm{f}} \in \mathcal{C}$ に対して，$\boldsymbol{x}_{\mathrm{i}}$ と $\boldsymbol{x}_{\mathrm{m}}$ を繋ぐ経路 l_0 と $\boldsymbol{x}_{\mathrm{m}}$ と $\boldsymbol{x}_{\mathrm{f}}$ を繋ぐ経路 l_1 の**積**と呼ばれる $\boldsymbol{x}_{\mathrm{i}}$ と $\boldsymbol{x}_{\mathrm{f}}$ を繋ぐ経路 $l_1 \cdot l_0$ を

$$
(l_1 \cdot l_0)(t) := \begin{cases} l_0(2t - t_{\mathrm{i}}), & t \in [t_{\mathrm{i}},\, \frac{t_{\mathrm{i}}+t_{\mathrm{f}}}{2}] \\ l_1(2t - t_{\mathrm{f}}), & t \in [\frac{t_{\mathrm{i}}+t_{\mathrm{f}}}{2},\, t_{\mathrm{f}}] \end{cases}
$$

と定義し，$\boldsymbol{x}_{\mathrm{f}}$ から $\boldsymbol{x}_{\mathrm{i}}$ へむかう**逆**の経路を

$$
(l^{-1})(t) := l(t_{\mathrm{i}} + t_{\mathrm{f}} - t)
$$

と定義する．このとき，ホモトピー類の well-defined な積が

$$
\begin{aligned}
*\colon \Pi\mathcal{C}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{m}},\, \boldsymbol{x}_{\mathrm{f}}) \times \Pi\mathcal{C}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{i}},\, \boldsymbol{x}_{\mathrm{m}}) &\longrightarrow \Pi\mathcal{C}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{i}},\, \boldsymbol{x}_{\mathrm{f}}), \\
([l_1],\, [l_0]) &\longmapsto [l_1 \cdot l_0]
\end{aligned}
$$

と定義され，以下の性質を充たす．

補題 1.1:

$\forall \boldsymbol{x}_{\mathrm{i}},\, \boldsymbol{x}_{\mathrm{m}},\, \boldsymbol{x}_{\mathrm{n}},\, \boldsymbol{x}_{\mathrm{f}} \in \mathcal{C}$ に対して以下が成り立つ：

(1) $\forall [l_0] \in \Pi\mathcal{C}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{i}},\, \boldsymbol{x}_{\mathrm{m}}),\, \forall [l_1] \in \Pi\mathcal{C}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{m}},\, \boldsymbol{x}_{\mathrm{n}}),\, \forall [l_2] \in \Pi\mathcal{C}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{n}},\, \boldsymbol{x}_{\mathrm{f}})$ に対して

$$
([l_2] * [l_1]) * [l_0] = [l_2] * ([l_1] * [l_0])
$$

(2) 定数写像 $[t_{\mathrm{i}},\, t_{\mathrm{f}}] \longrightarrow \mathcal{C},\, t \longmapsto \boldsymbol{x}$ のホモトピー類を $\mathbb{1}_{\boldsymbol{x}}$ と書くとき，$\forall [l] \in \Pi\mathcal{C}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{i}},\, \boldsymbol{x}_{\mathrm{f}})$ に対して

$$
[l] * \mathbb{1}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{i}}} = \mathbb{1}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{f}}} * [l]
$$

(3) $\forall [l] \in \Pi\mathcal{C}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{i}},\, \boldsymbol{x}_{\mathrm{f}})$ に対して

$$
[l^{-1}] * [l] = \mathbb{1}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{i}}}, \quad [l] * [l^{-1}] = \mathbb{1}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{f}}}
$$

つまり，始点と終点がつながっていさえすれば，集合 $\Pi\mathcal{C} := \bigcup_{\boldsymbol{x}_\mathrm{i},\,\boldsymbol{x}_\mathrm{f}\in\mathcal{C}} \Pi\mathcal{C}(\boldsymbol{x}_\mathrm{i},\,\boldsymbol{x}_\mathrm{f})$ は積 $*$ に関して群のように振る舞う[*9]．特に $\boldsymbol{x}_\mathrm{i} = \boldsymbol{x}_\mathrm{f} = \boldsymbol{x}$ のとき $\Pi\mathcal{C}(\boldsymbol{x}_\mathrm{i},\,\boldsymbol{x}_\mathrm{f})$ は**基本群** (fundamental group) または 1 次の**ホモトピー群**と呼ばれ，$\pi_1(\mathcal{C},\,\boldsymbol{x})$ と書かれる．

補題 1.2:

基本群は群である．

証明 始点と終点が一致しているので，$\forall[l_0],\,[l_1] \in \pi_1(\mathcal{C},\,\boldsymbol{x})$ に対して積 $[l_0] * [l_1]$ が定義されている． ■

今考えている系に関して言えば，群 $\pi_1(\mathcal{C},\,\boldsymbol{x})$ の位数は $\forall\boldsymbol{x}\in\mathcal{C}$ に対して常に 2 であり，$\mathbb{Z}_2$ と同型である．

1.2.3 経路積分による量子化

配位空間 $\mathcal{C}$ 上の始点と終点をそれぞれ $[(\boldsymbol{x}_{1\mathrm{i}},\,\boldsymbol{x}_{2\mathrm{i}})] =: \boldsymbol{x}_\mathrm{i}$，$[(\boldsymbol{x}_{1\mathrm{f}},\,\boldsymbol{x}_{2\mathrm{f}})] =: \boldsymbol{x}_\mathrm{f}$ に固定する．時刻 t_i から t_f までの系の時間発展演算子を $\hat{U}(t_\mathrm{f},\,t_\mathrm{i})$ と書くと，プロパゲーターは素朴に

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{x}_{1\mathrm{f}},\,\boldsymbol{x}_{2\mathrm{f}}|\,\hat{U}(t_\mathrm{f},\,t_\mathrm{i})\,|\boldsymbol{x}_{1\mathrm{i}},\,\boldsymbol{x}_{2\mathrm{i}}\rangle &= \mathcal{N} \sum_{l\in\{\,\mathrm{ct.\,maps}\,[t_\mathrm{i},\,t_\mathrm{f}]\to\mathcal{C}\,\}} e^{\mathrm{i}S[l]/\hbar} \\ &= \mathcal{N}\left(\sum_{l\,\mathrm{s.t.}[l]=+1} + \sum_{l\,\mathrm{s.t.}[l]=-1}\right) e^{\mathrm{i}S[l]/\hbar}\end{aligned} \tag{1.2.1}$$

と計算される．これは以下の 2 つの性質を充たさねばならない：

- $\hat{U}(t_\mathrm{f},\,t_\mathrm{i})$ はユニタリ演算子
- 時刻 $\forall t_\mathrm{m} \in [t_\mathrm{i},\,t_\mathrm{f}]$ に対して，

$$\langle \boldsymbol{x}_{1\mathrm{f}},\,\boldsymbol{x}_{2\mathrm{f}}|\,\hat{U}(t_\mathrm{f},\,t_\mathrm{i})\,|\boldsymbol{x}_{1\mathrm{i}},\,\boldsymbol{x}_{2\mathrm{i}}\rangle = \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}_{1\mathrm{m}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{2\mathrm{m}}\,\langle \boldsymbol{x}_{1\mathrm{f}},\,\boldsymbol{x}_{2\mathrm{f}}|\,\hat{U}(t_\mathrm{f},\,t_\mathrm{m})\,|\boldsymbol{x}_{1\mathrm{m}},\,\boldsymbol{x}_{2\mathrm{m}}\rangle\,\langle \boldsymbol{x}_{1\mathrm{m}},\,\boldsymbol{x}_{2\mathrm{m}}|\,\hat{U}(t_\mathrm{m},\,t_\mathrm{i})\,|\boldsymbol{x}_{1\mathrm{i}},\,\boldsymbol{x}_{2\mathrm{i}}\rangle \tag{1.2.2}$$

逆に (1), (2) を充たすような (1.2.1) の最右辺には他の可能性がある．それは例えば

$$\begin{aligned}&\langle \boldsymbol{x}_{1\mathrm{f}},\,\boldsymbol{x}_{2\mathrm{f}}|\,\hat{U}(t_\mathrm{f},\,t_\mathrm{i})\,|\boldsymbol{x}_{1\mathrm{i}},\,\boldsymbol{x}_{2\mathrm{i}}\rangle \\ &= \mathcal{N}\left(\sum_{l\,\mathrm{s.t.}[l]=+1} - \sum_{l\,\mathrm{s.t.}[l]=-1}\right) e^{\mathrm{i}S[l]/\hbar}\end{aligned} \tag{1.2.3}$$

[*9] $\Pi\mathcal{C}$ は位相空間 $\mathcal{C}$ の**基本亜群** (fundamental groupoid) と呼ばれる．

である．というのも，このとき $\Pi\mathcal{C}$ の積の性質（補題 1.1）および $\mathbb{Z}_2$ との類似から

$$
\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}\boldsymbol{x}_{1\mathrm{m}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{2\mathrm{m}}\,\langle \boldsymbol{x}_{1\mathrm{f}},\,\boldsymbol{x}_{2\mathrm{f}}|\,\hat{U}(t_{\mathrm{f}},\,t_{\mathrm{m}})\,|\boldsymbol{x}_{1\mathrm{m}},\,\boldsymbol{x}_{2\mathrm{m}}\rangle\,\langle \boldsymbol{x}_{1\mathrm{m}},\,\boldsymbol{x}_{2\mathrm{m}}|\,\hat{U}(t_{\mathrm{m}},\,t_{\mathrm{i}})\,|\boldsymbol{x}_{1\mathrm{i}},\,\boldsymbol{x}_{2\mathrm{i}}\rangle \\
&\propto \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}_{1\mathrm{m}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{2\mathrm{m}} \left(\sum_{l_{\mathrm{m}\to\mathrm{f}}\ \mathrm{s.t.}[l_{\mathrm{m}\to\mathrm{f}}]=+1} - \sum_{l_{\mathrm{m}\to\mathrm{f}}\ \mathrm{s.t.}[l_{\mathrm{m}\to\mathrm{f}}]=-1} \right) e^{\mathrm{i}S[l_{\mathrm{m}\to\mathrm{f}}]/\hbar} \left(\sum_{l_{\mathrm{i}\to\mathrm{m}}\ \mathrm{s.t.}[l_{\mathrm{i}\to\mathrm{m}}]=+1} - \sum_{l_{\mathrm{i}\to\mathrm{m}}\ \mathrm{s.t.}[l_{\mathrm{i}\to\mathrm{m}}]=-1} \right) e^{\mathrm{i}S[l_{\mathrm{i}\to\mathrm{m}}]/\hbar} \\
&= \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}_{1\mathrm{m}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{2\mathrm{m}} \left(\sum_{[l_{\mathrm{m}\to\mathrm{f}}]=+1} \sum_{[l_{\mathrm{i}\to\mathrm{m}}]=+1} e^{\mathrm{i}(S[l_{\mathrm{m}\to\mathrm{f}}]+S[l_{\mathrm{i}\to\mathrm{m}}])/\hbar} + \sum_{[l_{\mathrm{m}\to\mathrm{f}}]=-1} \sum_{[l_{\mathrm{i}\to\mathrm{m}}]=-1} e^{\mathrm{i}(S[l_{\mathrm{m}\to\mathrm{f}}]+S[l_{\mathrm{i}\to\mathrm{m}}])/\hbar} \right) \\
&\quad - \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}_{1\mathrm{m}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{2\mathrm{m}} \left(\sum_{[l_{\mathrm{m}\to\mathrm{f}}]=+1} \sum_{[l_{\mathrm{i}\to\mathrm{m}}]=-1} e^{\mathrm{i}(S[l_{\mathrm{m}\to\mathrm{f}}]+S[l_{\mathrm{i}\to\mathrm{m}}])/\hbar} + \sum_{[l_{\mathrm{m}\to\mathrm{f}}]=-1} \sum_{[l_{\mathrm{i}\to\mathrm{m}}]=+1} e^{\mathrm{i}(S[l_{\mathrm{m}\to\mathrm{f}}]+S[l_{\mathrm{i}\to\mathrm{m}}])/\hbar} \right) \\
&= \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}_{1\mathrm{m}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{2\mathrm{m}} \sum_{[l_{\mathrm{m}\to\mathrm{f}}\cdot l_{\mathrm{i}\to\mathrm{m}}]=+1} e^{\mathrm{i}S[l_{\mathrm{m}\to\mathrm{f}}\cdot l_{\mathrm{i}\to\mathrm{m}}]/\hbar} - \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}_{1\mathrm{m}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{2\mathrm{m}} \sum_{[l_{\mathrm{m}\to\mathrm{f}}\cdot l_{\mathrm{i}\to\mathrm{m}}]=-1} e^{\mathrm{i}S[l_{\mathrm{m}\to\mathrm{f}}\cdot l_{\mathrm{i}\to\mathrm{m}}]/\hbar} \\
&= \left(\sum_{l_{\mathrm{i}\to\mathrm{f}}\ \mathrm{s.t.}[l_{\mathrm{i}\to\mathrm{f}}]=+1} - \sum_{l_{\mathrm{i}\to\mathrm{f}}\ \mathrm{s.t.}[l_{\mathrm{i}\to\mathrm{f}}]=-1} \right) e^{\mathrm{i}S[l_{\mathrm{i}\to\mathrm{f}}]/\hbar}
\end{aligned}
$$

が成り立ち (2) が充たされるのである．ただし，2 つめの等号で $S[l_{\mathrm{m}\to\mathrm{f}}] + S[l_{\mathrm{i}\to\mathrm{m}}] = S[l_{\mathrm{m}\to\mathrm{f}} \cdot l_{\mathrm{i}\to\mathrm{m}}]$ を使った．(1.2.3) はフェルミオンの経路積分を表す．

1.3　同種粒子多体系

次に $D(\geq 2)$ 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^D$ 内に N 個の同種粒子が存在する量子系 $\mathcal{H}$ を考える．簡単のためこの節でも粒子の内部自由度はないとし，粒子の生成・消滅は考えない．

経路積分による量子化では，2 粒子の場合と同様の議論ができる．まず配位空間 $\mathcal{C}$ は，集合 $(\mathbb{R}^D)^N \setminus \Delta$ の上の同値関係

$$
\sim \quad \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \quad (\boldsymbol{x}_1,\,\boldsymbol{x}_2,\,\ldots,\,\boldsymbol{x}_N) \sim (\boldsymbol{x}_{\sigma(1)},\,\boldsymbol{x}_{\sigma(2)},\,\ldots,\,\boldsymbol{x}_{\sigma(N)}), \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_N
$$

による[*10]商集合 $\left((\mathbb{R}^D)^N \setminus \Delta\right) / \sim$ として定義される．積分すべき経路のホモトピー類は基本亜群 $\Pi\mathcal{C}$ をなす．また，経路の世界線[*11]を考えることでこれは $D+1$ 次元空間を動く，互いに交わらない N 本の曲線とみなすこともできる．適当な基点 $\boldsymbol{x} \in (\mathbb{R}^D)^N \setminus \Delta$ を取ってきて基本群 $\pi_1(\mathcal{C},\,\boldsymbol{x})$ を考えれば良い．

1.3.1　$D = 2$ の場合：組み紐群

*10 $\mathfrak{S}_N$ は N 次の対称群．従って一つの同値類は $N!$ 個の $(\mathbb{R}^D)^N \setminus \Delta$ の元からなる．$\mathfrak{S}_N$ の作用による軌道空間と見ても良い．

*11 つまり，$D+1$ 次元の粒子の軌跡．

空間次元が $D=2$ の場合，$\pi_1(\mathcal{C},\,\boldsymbol{x})$ は (Artin の) **組み紐群** (braid group) B_N と呼ばれる．

定義 1.1: 組み紐群（代数的）

語 (word) $\{\sigma_1,\,\ldots,\,\sigma_{N-1}\}$ で生成され，関係式

$$
\begin{aligned}
\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i &= \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} && 1 \le i \le N-2 \\
\sigma_i\sigma_j &= \sigma_j\sigma_i && |i-j|>1,\ 1 \le i,\, j \le N-1
\end{aligned}
$$

を充たす群を **Artin の組み紐群** (Artin braid group)，もしくは単に**組み紐群** (braid group) と呼ぶ．

B_N の代数的な定義 1.1 と，位相幾何学的な定義 $\pi_1(\mathcal{C},\,\boldsymbol{x})$ が同型であることは，例えば [3] に証明がある．生成元 σ_i を図として表示するとわかりやすい．この場合，B_N の積とは単に組み紐を下から上へ[*12]繋げることに他ならない．

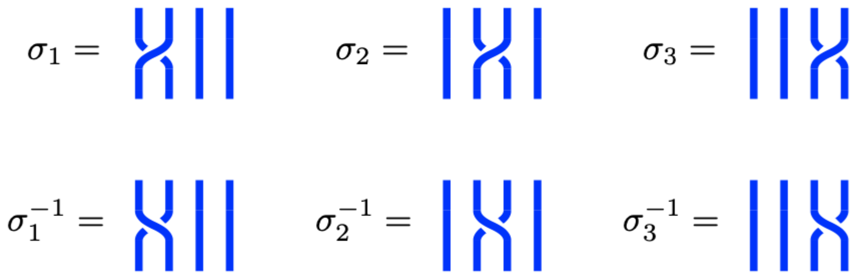


図 1.1: B_4 の生成元の表示．[1, p.29, Fig. 3.4] より引用．

組み紐不変量として特に重要なのが**巻き付き数** (winding number) である：

$$W \coloneqq (\#\,\text{of overcrossings}) - (\#\,\text{of undercrossings})$$

1.3.2　$D=3$ の場合：対称群

空間次元が $D=3$ の場合，$\pi_1(\mathcal{C},\,\boldsymbol{x})$ の様子は $D=2$ の場合と大きく異なる．

命題 1.1:

S^1 の $\mathbb{R}^3$ への任意の 2 つの埋め込みは，それらを $\mathbb{R}^4$ への埋め込みと見做すことで同位になる．

命題 1.1 により，$D=3$ のとき $\pi_1(\mathcal{C},\,\boldsymbol{x}) = \mathfrak{S}_N$ であることが分かる．

[*12] 文献によって上下がまちまちである．

1.3.3 経路積分の構成

$N = 2$ の場合と同様に考える．経路積分の終点と始点を $\{\boldsymbol{x}\}_{\mathrm{i}},\, \{\boldsymbol{x}\}_{\mathrm{f}} \in \mathcal{C}$ に固定する．まず簡単のため $\{\boldsymbol{x}\}_{\mathrm{i}} = \{\boldsymbol{x}\}_{\mathrm{f}} =: \{\boldsymbol{x}\}$ とすると，

$$\langle \{\boldsymbol{x}\}_{\mathrm{f}} |\, \hat{U}(t_{\mathrm{f}},\, t_{\mathrm{i}})\, | \{\boldsymbol{x}\}_{\mathrm{i}} \rangle = \mathcal{N} \sum_{[l] \in \pi_1(\mathcal{C},\, \{\boldsymbol{x}\})} \rho([l]) \sum_{m \in [l]} e^{\mathrm{i}S[m]/\hbar}$$

とすれば条件 (1.2.2) が充たされる．ただしユニタリ性の条件を充たすため，群準同型 $\rho\colon \pi_1(\mathcal{C},\, \{\boldsymbol{x}\}) \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ は基本群 $\pi_1(\mathcal{C},\, \{\boldsymbol{x}\})$ のユニタリ表現にとる．

1.3.4 1 次元表現（可換な例）

まず ρ が $\pi_1(\mathcal{C},\, \{\boldsymbol{x}\})$ の 1 次元ユニタリ表現である場合を考える．つまり，群準同型 $\rho\colon \pi_1(\mathcal{C},\, \{\boldsymbol{x}\}) \longrightarrow \mathrm{U}(1)$ としてあり得るものを全て列挙することを試みる．

【例 1.3.1】$2+1$ **次元の場合**

$\pi_1(\mathcal{C},\, \{\boldsymbol{x}\}) = B_N$ である．$N-1$ 個の $\mathrm{U}(1)$ の元の組 $\{g_1,\, \dots,\, g_{N-1}\}$ であって定義 1.1 の関係式を充たすものを見つければ良い．$\mathrm{U}(1)$ は可換群なので 2 つ目の関係式は常に成り立つ．1 つ目の関係式が成り立つ必要十分条件は $g_1 = g_2 = \cdots = g_{N-1} = e^{\mathrm{i}\theta}$（$\theta \in \mathbb{R}$ は任意）である．$1 \leq \forall i \leq N-1$ に対して $W(\sigma_i) = 1$ であることから，

$$\rho_\theta(g) := e^{\mathrm{i}\theta W(g)} \quad (\forall \theta \in \mathbb{R})$$

によって全ての表現が尽くされた．

- $\theta = 0$ のとき $\rho_\theta\colon g \longmapsto 1$ であり，**ボゾン**
- $\theta = \pi$ のとき $\rho_\theta\colon g \longmapsto (-1)^{W(g)}$ であり，**フェルミオン**
- 他の $\theta \in \mathbb{R}$ に対応する ρ_θ による統計性は**エニオン** (anyons)，もしくは**分数統計** (fractional statistics) と呼ばれる．特に $\mathrm{U}(1)$ が可換群なので**可換エニオン** (abelian anyons) という．

【例 1.3.2】$3+1$ **次元の場合**

$\pi_1(\mathcal{C},\, \{\boldsymbol{x}\}) = \mathfrak{S}_N$ である．定義 1.1 の関係式に $\sigma_i^2 = \mathbb{1}$ を追加したものが $\mathfrak{S}_N$ の Coxeter presentation となる．つまり，**【例 1.3.1】**において $\theta = 0,\, \pi$ の場合のみがあり得る．これはボゾンとフェルミオンであり，$N=2$ の場合に考察した例の一般化になっている．

1.3.5 より高次元の表現（非可換な場合）

粒子の内部自由度を考慮しよう．具体的には，$D(\geq 2)$ 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^D$ 内に N 個の同種粒子が存在する量子系 $\mathcal{H}$ において内部自由度を指定する添字集合 $\mathcal{I}$ が存在して，写像

$$|\,;\rangle : \big((\mathbb{R}^D)^N \setminus \Delta\big) \times \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{H},\; \big((\boldsymbol{x}),\, i\big) \longmapsto |\{\boldsymbol{x}\};\, i\rangle$$

が全単射となるような状況を考える[*13]．このとき $\forall\{\boldsymbol{x}\}_{\mathrm{i}},\,\{\boldsymbol{x}\}_{\mathrm{f}}\in\mathcal{C},\ \forall i,\,j\in\mathcal{I}$ に対するプロパゲーター

$$\langle\{\boldsymbol{x}\}_{\mathrm{f}};\,i|\,\hat{U}(t_{\mathrm{f}},\,t_{\mathrm{i}})\,|\{\boldsymbol{x}\}_{\mathrm{i}};\,j\rangle=\mathcal{N}\sum_{[l]\in\pi_1(\mathcal{C},\,\{\boldsymbol{x}\})}\big[\,\rho([l])\,\big]_{ij}\sum_{m\in[l]}e^{\mathrm{i}S[m]/\hbar}$$

を計算する必要がある．ここに，$\#\mathcal{I}=M<\infty$ のとき群準同型

$$\rho\colon\pi_1(\mathcal{C},\,\{\boldsymbol{x}\})\longrightarrow\mathrm{U}(M)\subset\mathrm{GL}(\mathbb{C},\,M)$$

は $\pi_1(\mathcal{C},\,\{\boldsymbol{x}\})$ の M 次元ユニタリ表現であり，$\big[\,\rho([l])\,\big]_{ij}$ というのは $M\times M$ ユニタリ行列 $\rho([l])$ の第 $(i,\,j)$ 成分という意味である．一方 $\#\mathcal{I}=\infty$ のとき ρ は無限次元表現となる．

【例 1.3.3】$2+1$ **次元の場合**

特に空間次元が $D=2$ のとき，ρ は B_N の M 次元ユニタリ表現である．このような統計性を持つ粒子のことを**非可換エニオン** (nonabelian anyon) と呼ぶ[a]．

[a] $\mathrm{U}(M)$ が非可換群なので

【例 1.3.4】$3+1$ **次元の場合**

特に空間次元が $D=3$ のとき，ρ は $\mathfrak{S}_N$ の M 次元ユニタリ表現である．このような統計性を持つ粒子のことを **parastatistics** と呼ぶが，実は暗に存在する付加的な制約のせいでボゾンかフェルミオン，もしくはいくつか内部自由度が追加されるかしか許されないことが示されている [4, Appendix B]．このことについては後述する．しかし，粒子の描像を捨てて弦を考えるなどすると「面白い」例が得られるかもしれない．

[*13] ややこしいが，定義域を同値関係で割る前なので $(\boldsymbol{x})$ と表記した．

第 2 章

Chern-Simons 理論の導入

この章は [1, Chapter4, 5] に相当する．

2.1 Charge-Flux composite

2.1.1 Aharonov-Bohm 効果

空間を表す多様体を Σ と書く．電荷 q を持つ 1 つの粒子からなる系を考えよう．この系に静磁場をかけたとき，粒子の古典的作用は自由粒子の項 S_0 と，粒子と場の結合を表す項とに分かれる：

$$S[l] = S_0[l] + q\int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} \mathrm{d}t\, \dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{A} = S_0[l] + q\int_l \mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{A}$$

ただし $l\colon [t_\mathrm{i},\, t_\mathrm{f}] \longrightarrow \Sigma$ は粒子の軌跡を表す．

ここで，いつもの 2 重スリットを導入する．粒子が $\boldsymbol{x}_\mathrm{i} = \boldsymbol{x}(t_\mathrm{i})$ から出発して $\boldsymbol{x}_\mathrm{f} = \boldsymbol{x}(t_\mathrm{f})$ に到達するとき，これらの 2 点を結ぶ経路全体の集合 $\mathcal{C}(\boldsymbol{x}_\mathrm{i},\, \boldsymbol{x}_\mathrm{t})$ のホモトピー類は，スリット 1, 2 を通る経路それぞれでちょうど 2 つある．i.e. プロパゲーターは経路積分によって

$$\sum_{l\in\mathcal{C}(\boldsymbol{x}_\mathrm{i},\,\boldsymbol{x}_\mathrm{t})\ \text{s.t. slit 1}} e^{\mathrm{i}S_0[l]/\hbar + \mathrm{i}(q/\hbar)\int_l \mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A}} + \sum_{l\in\mathcal{C}(\boldsymbol{x}_\mathrm{i},\,\boldsymbol{x}_\mathrm{t})\ \text{s.t. slit 2}} e^{\mathrm{i}S_0[l]/\hbar + \mathrm{i}(q/\hbar)\int_l \mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A}}$$

と計算される．第 1 項と第 2 項の位相差は，片方の経路の逆をもう片方に足すことでできる閉曲線 ∂S について

$$\exp\left[\frac{\mathrm{i}q}{\hbar}\oint_{\partial S} \mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A}\right] = \exp\left[\frac{\mathrm{i}q}{\hbar}\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\right] = \exp\left[\frac{\mathrm{i}q}{\hbar}\Phi_S\right]$$

となる[*1]．

(1) 磁束が $\Phi_0 = 2\pi\hbar/q$ の整数倍の時は，位相シフトがない場合と物理的に区別がつかない．
(2) 実は，静止した電荷の周りに磁束を動かしても全く同じ位相シフトが引き起こされる [5].

*1 粒子が侵入できない領域にのみ磁場がかかっているとする．なお，粒子の配位空間が単連結でないことが本質的に重要である．このとき，領域 S をホモトピーで 1 点に収縮することで，無限に細い管状の磁束 (flux tube) の概念に到達する．

2.1.2 Charge-Flux composite としてのエニオン

荷電粒子と無限に細い磁束管 (flux tube) が互いに束縛し合って近接しているものを考える．この対を 2 次元系における，(q, Φ) なるチャージを持つ 1 つの粒子と見做してみよう．

さて，粒子 $i(=1, 2)$ がチャージ (q, Φ) を持つとしよう．この 2 つの同種粒子の配位空間の基本群は前章の議論から $\mathbb{Z}_2$ であり，

(1) 粒子 1 を 2 の周りに 1 周させる操作
(2) 粒子の交換を2 回行う操作

の 2 つが同じホモトピー類に属すことがわかる．故に，これら 2 つの操作で得られる位相シフトは等しい．操作 (1) による位相シフトは AB 効果によるもので，$e^{2\mathrm{i}q\Phi/\hbar}$ である[*2]．故に，この粒子が1 回交換することによって得られる位相シフトは $e^{\mathrm{i}q\Phi/\hbar}$ であるが，これは $\theta = q\Phi/\hbar$ なる可換エニオンの統計性である．

次に，エニオンの**フュージョン** (fusion) を経験的に導入する．これは，エニオン $(q_1, \Phi_1), (q_2, \Phi_2)$ が「融合」してエニオン $(q_1 + q_2, \Phi_1 + \Phi_2)$ になる，と言うものであり，今回の場合だと電荷，磁束の保存則に由来すると考えることができる．エニオン (q, Φ) と $(-q, -\Phi)$ がフュージョンすると $I \coloneqq (0, 0)$ になるだろう．この I をエニオンの真空とみなし[*3]，$(-q, -\Phi)$ のことを (q, Φ) の反エニオン (anti-anyon) と見做す．反エニオンをエニオンの周りに一周させたときの位相シフトが $e^{-2\mathrm{i}\theta}$ になることには注意すべきである．

2.1.3 トーラス上のエニオンの真空

トーラス $T^1 \coloneqq S^1 \times S^1$ の上のエニオン系の基底状態（真空）を考える．

トーラスには非自明なサイクルがちょうど 2 つあるので，それらを C_1, C_2 とおく．そして系の時間発展演算子のうち，次のようなものを考える：

$\hat{T}_1$　ある時刻に C_1 の 1 点において粒子-反粒子対を生成し，それらを C_1 上お互いに反対向きに動かし，有限時間経過後に C_1 の対蹠点で対消滅させる．

$\hat{T}_2$　ある時刻に C_2 の 1 点において粒子-反粒子対を生成し，それらを C_2 上お互いに反対向きに動かし，有限時間経過後に C_2 の対蹠点で対消滅させる．

$\hat{T}_1, \hat{T}_2$ は非可換であり，基底状態への作用を考える限り，フュージョンダイアグラムと braiding の等式から

$$\hat{T}_2\hat{T}_1 = e^{-\mathrm{i}2\theta}\hat{T}_1\hat{T}_2 \tag{2.1.1}$$

が成り立つことが分かる．然るに，基底状態が張る部分空間に制限すると $[T_1, H] = [T_2, H] = 0$ なので[*4]，基底状態が縮退していることがわかる．

さて，T_i はユニタリなので，$T_1 \left|\alpha\right\rangle = e^{\mathrm{i}\alpha}\left|\alpha\right\rangle$ とおける．この時 (2.1.1) より

$$T_1(T_2\left|\alpha\right\rangle) = e^{\mathrm{i}(\alpha+2\theta)}T_2\left|\alpha\right\rangle$$

[*2] 2 がつくのは，粒子 1 の q が粒子 2 の Φ の周りを 1 周する AB 効果だけでなく，粒子 1 の Φ が粒子 2 の q の周りを 1 周する AB 効果の寄与があるからである．一般に，粒子 i のチャージが (q_i, Φ_i) ならば $e^{\mathrm{i}(q_1\Phi_2+q_2\Phi_1)/\hbar}$ の位相シフトが起こる．

[*3] しかし，I のことは粒子として捉える．

[*4] 基底状態 $\left|0\right\rangle$ と $\hat{T}_1\left|0\right\rangle$ は同じエネルギーである．

である．つまり，$|\alpha\rangle$ が基底状態ならば $|\alpha+2\theta\rangle = T_2\,|\alpha\rangle$ もまた基底状態である．この操作を続けて，基底状態 $|\alpha+2n\theta\rangle = (T_2)^n\,|\alpha\rangle$ $(n\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ を得る．特に $\theta=\pi p/m \quad (p,\, m$ は互いに素) である場合を考えると，基底状態は m 重縮退を示している．

2.2　可換 Chern-Simons 理論の経験的導入

ゲージ場[*5] $A_\alpha = (a_0,\, a_1,\, a_2)$ が印加された N 粒子 2 次元系であって，ラグランジアンが

$$L = L_0 + \int_\Sigma \mathrm{d}^2x \left(\frac{\mu}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}A_\alpha\partial_\beta A_\gamma - j^\alpha A_\alpha\right) =: L_0 + \int_\Sigma \mathrm{d}^2x\,\mathcal{L} \tag{2.2.1}$$

と書かれるものを考える．ただし，L_0 は場と粒子の結合を無視したときの粒子のラグランジアンであり，空間を表す多様体を Σ で書いた．粒子 n はチャージ q_n を持つものとし，$j^\alpha = (j^0,\, \boldsymbol{j})$ は

$$\begin{aligned} j^0(\boldsymbol{x}) &\coloneqq \sum_{n=1}^{N} q_n\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n), \\ \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) &\coloneqq \sum_{n=1}^{N} q_n\dot{\boldsymbol{x}}_n\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n) \end{aligned}$$

と定義される粒子のカレントである．ラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ の第 1 項は場自身を記述し，第 2 項は場と粒子の結合を記述する．

2.2.1　ゲージ不変性

ラグランジアン (2.2.1) のゲージ不変性は次のようにしてわかる：ゲージ変換

$$A_\alpha \longrightarrow A_\alpha + \partial_\alpha\chi$$

による $\mathcal{L}$ の変化は

$$\frac{\mu}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha\chi\partial_\beta A_\gamma + \cancel{\frac{\mu}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}A_\alpha\partial_\beta\partial_\gamma\chi + \frac{\mu}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha\chi\partial_\beta\partial_\gamma\chi} - j^\alpha\partial_\alpha\chi$$

であるから，空間積分を実行すると

$$\begin{aligned} &\int_\Sigma \mathrm{d}^2x\,\frac{\mu}{2}\partial_\alpha\big(\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\chi\partial_\beta A_\gamma\big) - \int_\Sigma \mathrm{d}^2x\,\cancel{\frac{\mu}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\chi\partial_\alpha\partial_\beta A_\gamma} - \int_\Sigma \mathrm{d}^2x\,\partial_\alpha\big(j^\alpha\chi\big) + \int_\Sigma \mathrm{d}^2x\,\cancel{\partial_\alpha}j^\alpha\chi \\ &= \int_{\partial\Sigma}\mathrm{d}S_\alpha\left(\frac{\mu}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\chi\partial_\beta A_\gamma - j^\alpha\chi\right) \end{aligned}$$

となる．ただしチャージの保存則 $\partial_\alpha j^\alpha = 0$ を使った．このことから，もし空間を表す多様体 Σ の境界が $\partial\Sigma = \emptyset$ ならば[*6]ラグランジアンはゲージ不変である．

---

*5 一般相対論に倣い，時空を表す多様体 $\mathcal{M}$ の座標のうち時間成分を x^0，空間成分を $x^1,\, x^2$ とする．

*6 このような多様体の中で重要なのが**閉多様体** (closed manifold) である．

2.2.2 運動方程式

ラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ から導かれる Euler-Lagrange 方程式は

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} = \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} \right)$$

である．

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} &= \frac{\mu}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\beta A_\gamma - j^\alpha, \\ \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} \right) &= \partial_\beta \left(\frac{\mu}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha \right) = -\frac{\mu}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\beta A_\gamma \end{aligned}$$

なのでこれは

$$j^\alpha = \mu\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\beta A_\gamma$$

となる．特に第 0 成分は，「磁場」$\boldsymbol{b} \coloneqq \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ を導入することで

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{q_n}{\mu}\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n) = b^0$$

となる．つまり，位置 $\boldsymbol{x}_n$ に強さ q_n/μ の磁束管が点在している，という描像になり，charge-flux composite を説明できている．

2.2.3 プロパゲーター

簡単のため，全ての粒子のチャージが等しく q であるとする．N 粒子の配位空間 $\mathcal{C}$ における初期配位と終了時の配位をそれぞれ $\{\boldsymbol{x}_\mathrm{i}\}$, $\{\boldsymbol{x}_\mathrm{f}\}$ とし，それらを繋ぐ経路全体の集合を $\mathcal{C}(\boldsymbol{x}_\mathrm{i}, \boldsymbol{x}_\mathrm{f})$ と書くと，プロパゲーターは経路積分によって

$$\sum_{l \in \mathcal{C}(\boldsymbol{x}_\mathrm{i}, \boldsymbol{x}_\mathrm{f})} e^{\mathrm{i}S_0[l]/\hbar} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}\big(A_\mu(x)\big)\, e^{\mathrm{i}S_{\mathrm{CS}}[A_\mu(x)]/\hbar} e^{\mathrm{i}(q/\hbar)\int_l \mathrm{d}x^\alpha A_\alpha(x)}$$

と計算される．ここに $\mathcal{D}\big(A_\mu(x)\big)$ は汎函数積分の測度を表す．詳細は後述するが，場に関する汎函数積分を先に実行してしまうと，実は

$$\sum_{l \in \mathcal{C}(\boldsymbol{x}_\mathrm{i}, \boldsymbol{x}_\mathrm{f})} e^{\mathrm{i}S_0[l]/\hbar + \mathrm{i}\theta W(l)}$$

の形になることが知られている．ここに $W(l)$ は，経路 l の巻きつき数である．経路に依存する位相因子 $e^{\mathrm{i}\theta W(l)}$ は前章で議論した $\pi_1\mathcal{C}$ の 1 次元ユニタリ表現そのものであり，エニオンの統計性が発現する機構が Chern-Simons 項により説明できることを示唆している．

2.2.4 真空中の可換 Chern-Simons 理論

粒子が存在しないとき，経路積分は

$$Z(\mathcal{M}) := \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}A_\mu(x)\, e^{\mathrm{i}S_{\mathrm{CS}}[A_\mu(x)]/\hbar}$$

の形をする．$Z(\mathcal{M})$ は $\mathcal{M}$ についてホモトピー不変であり，**分配関数** (partition function) と呼ばれる．$Z(\mathcal{M})$ が TQFT において重要な役割を果たすことを後の章で見る．

2.2.5　正準量子化

$A_0 = 0$ なるゲージをとると，ラグランジアン密度における Chern-Simons 項は $-A_1\partial_0 A_2 + A_2\partial_0 A_1$ の形になる．これは A_1（resp. A_2）が A_2（resp. A_1）の共役運動量であることを意味するので，正準量子化を行うならば

$$[A_1(\boldsymbol{x}), A_2(\boldsymbol{y})] = \frac{\mathrm{i}\hbar}{\mu}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$$

を要請する[*7]．

さて，このときトーラス T^2 上の 2 つのサイクル C_1, C_2 に対して Wilson ループ

$$W_j = \exp\left(\frac{\mathrm{i}q}{\hbar}\oint_{C_j} \mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A}\right)$$

を考える．$[A, B]$ が c 数である場合の BCH 公式から

$$W_1 W_2 = e^{\mathrm{i}q^2/(\mu\hbar)} W_2 W_1$$

を得るが，これは (2.1.1) を説明している．つまり，演算子 T_1, T_2 とは Wilson loop のことだったのである[*8]．

2.3　非可換 Chern-Simons 理論の経験的導入

この節では自然単位系を使う．前節を一般化して，ゲージ場 $A_\mu(x)$ がある Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に値をとるものとしよう．つまり，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底を $\sigma_a/(2\mathrm{i})$ とすると[*9]

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x)\frac{\sigma_a}{2\mathrm{i}}$$

と書かれるような状況を考える[*10]．$\sigma_a \in \mathfrak{g}$ が一般に非可換であることから，このような理論は非可換 Chern-Simons 理論と呼ばれる．

時空多様体 $\mathcal{M}$ 上の閉曲線 γ に沿った **Wilson loop** は，**経路順序積** (path ordering) $\mathcal{P}$ を用いて

$$W_\gamma := \mathrm{Tr}\left[\mathcal{P}\exp\left(\oint_\gamma \mathrm{d}x^\mu\, A_\mu(x)\right)\right]$$

と定義される．Aharonov-Bohm 位相の一般化という気持ちであるが，経路 γ の異なる 2 点 x, y を取ってきたときに $A_\mu(x)$ と $A_\mu(y)$ が一般に非可換であることが話をややこしくする．

---

*7 しかし，トーラス上の座標をどのように取るかと言うことは問題である．

*8 疑問：座標の時間成分はどこへ行ったのか？

*9 因子 $1/(2\mathrm{i})$ は物理学における慣習である．ややこしいことに，文献によってこの因子が異なる場合がある．

*10 ゲージ接続が Lie 代数に値をとる 1-形式である，ということ．

2.3.1　ゲージ不変性

非可換 Chern-Simons 理論におけるゲージ変換は，$U\colon \mathcal{M} \longrightarrow G$ を用いて

$$A_\mu(x) \longrightarrow U(x)\bigl(A_\mu(x)+\partial_\mu\bigr)U(x)^{-1} \tag{2.3.1}$$

の形をする．このゲージ変換が Wilson loop を不変に保つことを確認しておこう．

$\mathcal{M}$ の任意の 2 点 $x_{\mathrm{i}},\, x_{\mathrm{f}} \in \mathcal{M}$ を結ぶ曲線 $\gamma\colon [t_{\mathrm{i}},\, t_{\mathrm{f}}] \longrightarrow \mathcal{M}$ をとり，**Wilson line** を

$$\tilde{W}_\gamma(x,\, y) \coloneqq \mathcal{P}\exp\left(\int_\gamma \mathrm{d}x^\mu\, A_\mu(x)\right)$$

で定義する．$[t_{\mathrm{i}},\, t_{\mathrm{f}}]$ の分割 $t_{\mathrm{i}} =\colon t_0 < t_1 < \cdots < t_N \coloneqq t_{\mathrm{f}}$ を与えて $x_i \coloneqq \gamma(t_i)$，$\mathrm{d}x_i \coloneqq x_{i+1} - x_i$ とおく[*11]と，

$$\begin{aligned}
\tilde{W}_\gamma(x_{\mathrm{i}},\, x_{\mathrm{f}}) &= \mathcal{P}\exp\left(\int_{x_{\mathrm{i}}}^{x_1} \mathrm{d}x^\mu\, A_\mu(x) + \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x^\mu\, A_\mu(x) + \cdots + \int_{x_{N-1}}^{x_{\mathrm{f}}} \mathrm{d}x^\mu\, A_\mu(x)\right) \\
&\coloneqq \lim_{N\to\infty} \exp\left(\int_{x_{\mathrm{i}}}^{x_1} \mathrm{d}x^\mu\, A_\mu(x)\right) \exp\left(\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x^\mu\, A_\mu(x)\right) \cdots \exp\left(\int_{x_{N-1}}^{x_{\mathrm{f}}} \mathrm{d}x^\mu\, A_\mu(x)\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \tilde{W}_{\gamma|_{[t_{\mathrm{i}},\, t_1]}}(x_{\mathrm{i}},\, x_1)\tilde{W}_{\gamma|_{[t_1,\, t_2]}}(x_1,\, x_2)\cdots\tilde{W}_{\gamma|_{[t_{N-1},\, t_{\mathrm{f}}]}}(x_{N-1},\, x_{\mathrm{f}})
\end{aligned}$$

と書ける．N が十分大きい時は $0 \le \forall i \le N-1$ に対して $|\mathrm{d}x_i|$ が十分小さく，

$$\begin{aligned}
\tilde{W}_{\gamma|_{[t_i,\, t_{i+1}]}}(x_i,\, x_{i+1}) &\approx \exp\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathrm{d}x^\mu\, A_\mu(x)\right) \\
&\approx 1 + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathrm{d}x^\mu\, A_\mu(x) \\
&\approx 1 + A_\mu(x_i)\, \mathrm{d}x_i{}^\mu
\end{aligned}$$

と書ける[*12]．このときゲージ変換 (2.3.1) に伴って

$$\begin{aligned}
\tilde{W}_{\gamma|_{[t_i,\, t_{i+1}]}}(x_i,\, x_{i+1}) &\longrightarrow 1 + U(x_i)\bigl(A_\mu(x_i)+\partial_\mu\bigr)U(x_i)^{-1}\, \mathrm{d}x_i{}^\mu \\
&\approx U(x_i)\bigl(1 + A_\mu(x_i)\,\mathrm{d}x_i{}^\mu\bigr)\bigl(U(x_i)^{-1} + \partial_\mu(U(x_i)^{-1})\, \mathrm{d}x_i{}^\mu\bigr) \\
&\approx U(x_i)\tilde{W}_{\gamma|_{[t_i,\, t_{i+1}]}}(x_i,\, x_{i+1})U(x_{i+1})^{-1}
\end{aligned}$$

と変換するので，結局 $x_{\mathrm{i}},\, x_{\mathrm{f}} \in \mathcal{M}$ を繋ぐ Wlison line がゲージ変換 (2.3.1) に伴って

$$\tilde{W}_\gamma(x_{\mathrm{i}},\, x_{\mathrm{f}}) \longrightarrow U(x_{\mathrm{i}})\tilde{W}_\gamma(x_{\mathrm{i}},\, x_{\mathrm{f}})U(x_{\mathrm{f}})^{-1}$$

と変換することがわかった．Wlison loop の場合は $x_{\mathrm{i}} = x_{\mathrm{f}}$ でかつトレースをとるので，ゲージ不変になる．

[*11] $\mathrm{d}x_i$ は，厳密には 2 点 $x_i,\, x_{i+1}$ を含むある $\mathcal{M}$ のチャート $\bigl(U,\, (x^\mu)\bigr)$ をとってきた時の座標関数の値の差 $\mathrm{d}x_i{}^\mu \coloneqq x^\mu(x_{i+1}) - x^\mu(x_i)$ として理解する．

[*12] $N \to \infty$ の極限で等式になる．

2.3.2 Chern-Simons 作用

いささか天下り的だが，**Chern-Simons action** を

$$S_{\mathrm{CS}}[A_\mu] \coloneqq \frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^3x\, \epsilon^{\alpha\beta\gamma}\,\mathrm{Tr}\left[A_\alpha\partial_\beta A_\gamma + \frac{2}{3}A_\alpha A_\beta A_\gamma\right]$$

により定義する．第 2 項は可換な場合には必ず零になるので前節では登場しなかった．$S_{\mathrm{CS}}[A]$ が時空 $\mathcal{M}$ の計量によらない[*13]ことは，ゲージ場を Lie 代数値 1-形式 $A \in \Omega^1(\mathcal{M}) \otimes \mathfrak{g}$ として書き表したときに

$$S_{\mathrm{CS}}[A] = \frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{Tr}\left(A \wedge \mathrm{d}A + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A\right)$$

と書けることからわかる[*14].

$S_{\mathrm{CS}}[A]$ にゲージ変換 (2.3.1) を施した結果は

$$\begin{aligned} &S_{\mathrm{CS}}[A_\mu] \longrightarrow S_{\mathrm{CS}}[A_\mu] + 2\pi\nu k, \\ \text{w/ }\; &\nu \coloneqq \frac{1}{24\pi^2}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^3x\, \epsilon^{\alpha\beta\gamma}\,\mathrm{Tr}\big[(U^{-1}\partial_\alpha U)(U^{-1}\partial_\beta U)(U^{-1}\partial_\gamma U)\big] \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

となる．ν は写像 $U\colon \mathcal{M} \longrightarrow G$ の**巻きつき数** (winding number)，もしくは **Pontryagin index** と呼ばれ，常に整数値をとる．この極めて非自明な結果についても後述する．(2.3.2) から，$S_{\mathrm{CS}}[X]$ は厳密にはゲージ不変ではない．然るに，もし $k \in \mathbb{Z}$ ならば（このとき k の値は **level** と呼ばれる)，分配関数 $Z(\mathcal{M})$ がゲージ不変な形になってくれるので問題ない，と考える．$2+1$ 次元においては，1 つのゲージ場からなる作用であって

- トポロジカル不変性（i.e. 計量不変性）
- 上述の意味のゲージ不変性

の 2 つを充たすものは他にない．

2.4 古典的ゲージ理論の数学

時空の多様体を $\mathcal{M}$ と書く．

場[*15] $\varphi\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{K}^N,\ x \longmapsto \big(\varphi_1(x), \dots, \varphi_N(x)\big)$ が線型 Lie 群 $G \subset \mathrm{GL}(N, \mathbb{K})$ で記述される[*16]内部対称性を持っているような系を考える．つまり，ゲージ原理を要請し，任意の C^∞ 写像 $U\colon \mathcal{M} \longrightarrow G$ に対して[*17]，系のラグランジアン密度の場に関する項 $\mathcal{L}[\varphi_\mu(x)]$ が $\mathcal{L}\big[[U(x)]_i^{\,j}\varphi_j(x)\big] = \mathcal{L}[\varphi_i(x)]$ を充たすとする．もしくは，場 $\varphi\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{K}^N$ であって，時空の各点 $x \in \mathcal{M}$ および任意の C^∞ 写像 $U\colon \mathcal{M} \longrightarrow G$ に対して $\varphi(x) \longrightarrow U(x)\varphi(x)$ と変換する[*18] ものを考えると言っても良い．

*13 **計量不変** (metric invariant) であると言う．

*14 ... と言うのは微妙に的を外している．より正確には $2+1$ 次元多様体 $\mathcal{M}$ を境界に持つような 4 次元多様体 $\mathcal{N}$ を用意し，$\mathcal{N}$ の作用 $\mathcal{S}[A] \coloneqq k/(4\pi)\int_{\mathcal{N}} \mathrm{Tr}(F \wedge F)$ を部分積分することで $S_{\mathrm{CS}}[A]$ を定義する．

*15 この段階では，**場**とはその配位を記述する空間 F（これは C^∞ 多様体だったりベクトル空間だったりする）と C^∞ 写像 $\varphi\colon \mathcal{M} \longrightarrow F$ の組のことと考える．この描像は後にファイバー束の C^∞ 切断として定式化される．

*16 ここでは $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ としておく．

*17 内部対称性という言葉を使うのは，U が定数写像とは限らないことを意味する．

*18 一般相対論の数学的定式化におけるテンソル場の変換性は，時空の多様体 $\mathcal{M}$ 上の一般座標変換（i.e. チャートの取り替え）に由

この系を経路積分により量子化することを見据えて，このような変換性を充たす全ての場がなす空間の幾何学を考察すると見通しが良いだろう．そのため，まず時空上の無限小だけ離れた 2 点 $x_{\mathrm{i}},\, x_{\mathrm{f}} \in \mathcal{M}$ における場の配位 $\varphi(x_{\mathrm{i}}),\, \varphi(x_{\mathrm{f}})$ を比較しよう．内部自由度による変換性を議論したいので，$\varphi(x_{\mathrm{f}}) - \varphi(x_{\mathrm{i}})$ なる量を調べても意味がない．$x_{\mathrm{i}},\, x_{\mathrm{f}}$ を結ぶ C^∞ 曲線 $\gamma\colon [t_{\mathrm{i}},\, t_{\mathrm{f}}] \longrightarrow \mathcal{M}$ を持ってきて，γ に沿って $\varphi(x_{\mathrm{i}})$ を x_{f} まで流してやるのが良い．つまり，場の配位を記述する空間 $\mathbb{K}^N$ 上の C^∞ 曲線 $\varphi^{(\gamma)} \coloneqq \varphi \circ \gamma\colon [t_{\mathrm{i}},\, t_{\mathrm{f}}] \longrightarrow \mathbb{K}^N$ を考えれば，量 $\varphi(x_{\mathrm{f}}) - \varphi^{(\gamma)}(t_{\mathrm{f}})$ は $U(x_{\mathrm{f}}) \in G$ による変換を受けるはずである．$x_{\mathrm{i}},\, x_{\mathrm{f}}$ の両方を含む $\mathcal{M}$ のチャート $\bigl(V,\, (x^\mu)\bigr)$ を持ってきて成分計算すると，$\mathrm{d}x \coloneqq x_{\mathrm{f}} - x_{\mathrm{i}}$ が[*19]微小なので Taylor 展開において $\mathrm{d}x$ の 1 次の項まで残すことで

$$\varphi_i^{(\gamma)}(t_{\mathrm{f}}) =\colon \varphi_i(x_{\mathrm{i}}) - \bigl[\, A_\mu(x_{\mathrm{i}})\,\bigr]_i^{\ j} \varphi_j(x_{\mathrm{i}})\, \mathrm{d}x^\mu \tag{2.4.1}$$
$$\varphi(x_{\mathrm{f}}) = \varphi(x_{\mathrm{i}}) + \partial_\mu \varphi(x)\, \mathrm{d}x^\mu$$

と書けるはずである．ただし，式 (2.4.1) の右辺によって $\dim \mathcal{M}$ 個の成分を持つ新しい場 $A_\mu\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathrm{GL}(N,\, \mathbb{K})$ を定義した．この場は**ゲージ場**と呼ばれる．

ゲージ場 A_μ を時空の各点 $x \in \mathcal{M}$ における変換性によって特徴付けよう．そのためには，量

$$\varphi(x_{\mathrm{f}}) - \varphi^{(\gamma)}(t_{\mathrm{f}}) = \bigl(\partial_\mu \varphi(x_{\mathrm{i}}) + A_\mu(x_{\mathrm{i}}) \varphi(x_{\mathrm{i}})\bigr)\, \mathrm{d}x^\mu$$

が $U(x_{\mathrm{f}}) \in G$ による変換を受けることに注目すれば良い．つまり，**共変微分**と呼ばれる線型写像を $\mathcal{D}_\mu(x) \coloneqq \partial_\mu + A_\mu(x)$ で定義すると，$\forall x \in \mathcal{M}$ における，内部対称性による変換

$$\varphi(x) \longrightarrow \tilde{\varphi}(x) \coloneqq U(x) \varphi(x) \tag{2.4.2}$$

に伴って $\mathcal{D}_\mu(x)\varphi(x)$ は

$$\mathcal{D}_\mu(x)\varphi(x) \longrightarrow \tilde{\mathcal{D}_\mu}(x)\tilde{\varphi}(x) \coloneqq U(x)\mathcal{D}_\mu(x)\varphi(x)$$

の変換を受ける．このことから，場 φ の変換 (2.4.2) に伴う共変微分自身の変換則は

$$\mathcal{D}_\mu(x) \longrightarrow \tilde{D_\mu}(x) = U(x)\mathcal{D}_\mu(x)U(x)^{-1} \tag{2.4.3}$$

となる．従って場 $A_\mu\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathrm{GL}(N,\, \mathbb{K})$ の，場 φ の変換 (2.4.2) に伴う変換則が

$$A_\mu(x) \longrightarrow U(x)\bigl(\partial_\mu + A_\mu(x)\bigr)U(x)^{-1} \tag{2.4.4}$$

だと分かった．このような場の変換則を**ゲージ変換** (gauge transformation) と呼ぶ．

2.4.1 主束と内部対称性の定式化

ゲージ場は，主束の接続として定式化できる．特に，主束の同伴ベクトル束が重要である．

まずファイバー束と主束を定義し，内部対称性を持つ場の記述には主束の同伴ベクトル束が適していることを見る[*20]．C^∞ 多様体 M の**微分同相群** (diffeomorphism group) $\mathbf{Diff}\, M$ とは，

来するものであった．同じように，ここで考えている場の変換性はどのような数学的定式化に由来するのかということを考えると，時空 $\mathcal{M}$ を底空間とする主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ の同伴ベクトル束 $\mathbb{K}^N \hookrightarrow P \times_\rho \mathbb{K}^N \xrightarrow{q} \mathcal{M}$ における，$\mathcal{M}$ のチャートの取り替えに伴う局所自明化の取り替え（i.e. 変換関数のファイバーへの作用）の概念に行き着くのである．詳細は次の小節で議論する．

[*19] 厳密にはこれは座標関数の差 $\mathrm{d}x^\mu \coloneqq x^\mu(x_{\mathrm{f}}) - x^\mu(x_{\mathrm{i}})$ の絶対値が小さいことを主張している．

[*20] 従って，この小節で行うのはゲージ場が登場する舞台の定式化であって，ゲージ場自身の定式化は次の小節で行う．

- 台集合 $\mathrm{Diff}\, M \coloneqq \left\{\, f\colon M \longrightarrow M \,\middle|\, \text{微分同相写像} \,\right\}$
- 単位元を恒等写像
- 積を写像の合成

として構成される群のことを言う．

定義 2.1: Lie 群の作用

- Lie 群 G の C^∞ 多様体 M への**左作用**とは，群準同型 $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{Diff}\, M$ であって写像

$$\blacktriangleright\colon G \times M \longrightarrow M,\ (g,\, x) \longmapsto \rho(g)(x)$$

  が C^∞ 写像となるようなもののこと．$\boldsymbol{g} \blacktriangleright \boldsymbol{x} \coloneqq \blacktriangleright (g,\, x)$ と略記する．
- Lie 群 G の C^∞ 多様体 M への**右作用**とは，群準同型 $\rho\colon G^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Diff}\, M$ であって写像

$$\blacktriangleleft\colon M \times G \longrightarrow M,\ (x,\, g) \longmapsto \rho(g)(x)$$

  が C^∞ 写像となるようなもののこと．$\boldsymbol{x} \blacktriangleleft \boldsymbol{g} \coloneqq \blacktriangleleft (g,\, x)$ と略記する．
- Lie 群の左（resp. 右）作用が**自由** (free) であるとは，$\forall x \in X,\ \forall g \in G \setminus \{1_G\},\ g \blacktriangleright x \neq x$ (resp. $x \blacktriangleleft g \neq x$) を充たすことを言う．
- Lie 群の左（resp. 右）作用が**効果的** (effective) であるとは，$\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{Diff}\, M$ (resp. $\rho\colon G^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Diff}\, M$) が単射であることを言う．

定義 2.2: C^∞ ファイバー束

Lie 群 G が C^∞ 多様体 F に効果的に作用しているとする．**C^∞ ファイバー束** (fiber bundle) とは，

- C^∞ 多様体 $E,\, B,\, F$
- C^∞ の全射 $\pi\colon E \longrightarrow B$
- Lie 群 G と，G の F への左作用 $\blacktriangleright\colon G \times F \longrightarrow F$
- B の開被覆 $\left\{\, U_\lambda \,\right\}_{\lambda \in \Lambda}$
- 微分同相写像の族

$$\left\{\, \varphi_\lambda\colon \pi^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times F \,\right\}_{\lambda \in \Lambda}$$

  であって，$\forall \lambda \in \Lambda$ に対して図 2.1 を可換にするもの．

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_\lambda) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & U_\lambda \times F \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\ U_\lambda & \end{tikzcd}$$

図 2.1: 局所自明性

- C^∞ 写像の族

$$\left\{\, t_{\alpha\beta}\colon B \longrightarrow G \,\middle|\, \forall (p,\, f) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times F,\ \varphi_\beta^{-1}(p,\, f) = \varphi_\alpha^{-1}\bigl(p,\, t_{\alpha\beta}(p) \blacktriangleright f\bigr) \,\right\}_{\alpha,\, \beta \in \Lambda}$$

の 6 つのデータの組みのこと．記号としては $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{F})$ や $\boldsymbol{F} \hookrightarrow \boldsymbol{E} \xrightarrow{\pi} \boldsymbol{B}$ と書く．

以下ではファイバー束と言ったら C^∞ ファイバー束のことを指すようにする．ファイバー束 (E, π, B, F) に関して，

- E を**全空間** (total space)
- B を**底空間** (base space)
- F を**ファイバー** (fiber)
- π を**射影** (projection)
- φ_λ を**局所自明化** (local trivialization)
- $t_{\alpha\beta}$ を**変換関数** (transition map)

と呼ぶ[*21]．また，射影 π による 1 点集合 $\{b\}$ の逆像 $\pi^{-1}(\{b\}) \subset E$ のことを**点 $\boldsymbol{b}$ のファイバー** (fiber) と呼び，E_b と書く．

定義 2.3: ベクトル束

ファイバーを n 次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 V とし，構造群を $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ とするようなファイバー束 $V \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ であって，その局所自明化 $\left\{\varphi_\lambda \colon \pi^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times V\right\}_{\lambda \in \Lambda}$ が以下の条件を充たすもののことを**階数 $\boldsymbol{n}$ のベクトル束** (vector bundle of rank n) と呼ぶ：

(vect-1)

$\forall \lambda \in \Lambda$ および $\forall x \in U_\lambda$ に対して，$\mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\alpha|_{\pi^{-1}(\{x\})} \colon \pi^{-1}(\{x\}) \longrightarrow V$ は $\mathbb{K}$-ベクトル空間の同型写像である．

【例 2.4.1】接束

n 次元 C^∞ 多様体 M の接束は，構造群を $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ とするベクトル束 $\mathbb{R}^n \hookrightarrow TM \xrightarrow{\pi} M$ である．実際，M のチャート $\bigl(U_\lambda, (x^\mu)\bigr)$ に対して局所自明化は

$$\varphi_\lambda \colon \pi^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times \mathbb{R}^n,\ \left(p,\ v^\mu \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p\right) \longmapsto (p,\ \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix})$$

となり，チャート $\bigl(U_\alpha, (x^\mu)\bigr), \bigl(U_\beta, (y^\mu)\bigr)$ に対して

$$\varphi_\beta^{-1}\bigl(p, (v^1, \dots, v^n)\bigr) = \varphi_\alpha^{-1}(p, \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1}(p) & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial y^n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial y^1}(p) & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix})$$

[*21] 紛らわしくないとき，ファイバー束 (E, π, B, F) のことを $\pi \colon E \to B$，または単に E と略記することがある．

となる．故に変換関数は

$$t_{\alpha\beta}(p) := \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1}(p) & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial y^n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial y^1}(p) & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n}(p) \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$$

で，ファイバーへの構造群の左作用とはただ単に n 次元の数ベクトルに行列を左から掛けることである．

定義 2.4: 束写像

ファイバー F と構造群 G を共有する二つのファイバー束 $\xi_i = (E_i,\, \pi_i,\, B_i,\, F)$ を与える．

- ξ_1 から ξ_2 への**束写像** (bundle map) とは，二つの C^∞ 写像 $f\colon B_1 \to B_2$, $\tilde{f}\colon E_1 \to E_2$ の組であって図 2.2

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ B_1 \arrow[r, "f"] & B_2 \end{tikzcd}$$

図 2.2: 束写像

を可換にし，かつ底空間 B_1 の各点 b において，**点 b のファイバー $\pi_1^{-1}(\{b\})$** $\subset E_1$ への $\tilde{f}$ の制限

$$\tilde{f}|_{\pi_1^{-1}(\{b\})}\colon \pi_1^{-1}(\{b\}) \to \tilde{f}\bigl(\pi_1^{-1}(\{b\})\bigr) \subset E_2$$

が微分同相写像になっているもののことを言う．

- ファイバー束 ξ_1 と ξ_2 が**同型** (isomorphic) であるとは，$B_1 = B_2 = B$ であってかつ $f\colon B \to B$ が恒等写像となるような束写像 $\tilde{f}\colon E_1 \to E_2$ が存在することを言う．記号としては $\xi_1 \simeq \xi_2$ とかく．

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

図 2.3: ファイバー束の同型

- 積束 $(B \times F,\, \mathrm{proj}_1,\, B,\, F)$ と同型なファイバー束を**自明束** (trivial bundle) と呼ぶ．

ファイバー束 $(E,\, \pi,\, B,\, F)$ は，射影 π によってファイバー F の情報を失う．F を復元するためにも，$s\colon B \to E$ なる写像の存在が必要であろう．

定義 2.5: C^∞ 切断

ファイバー束 $\xi = (E,\, \pi,\, B,\, F)$ の C^∞ **切断** (cross section) とは，C^∞ 写像 $s\colon B \to E$ であって $\pi \circ s = \mathrm{id}_B$ となるもののことを言う．

ξ の切断全体の集合を $\boldsymbol{\Gamma(B,\, E)}$ あるいは $\boldsymbol{\Gamma(E)}$ と書く．

$\xi = (E,\, \pi,\, B,\, F)$ をファイバー束とする．底空間 B の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をとると，定義 2.2 から，どの $\alpha \in \Lambda$ に対しても局所自明性（図 2.4a）が成り立つ．ここでもう一つの $\beta \in \Lambda$ をとり，$U_\alpha \cap U_\beta$ に関して局所自明性の図式を横に並べることで，自明束 $\mathrm{proj}_1\colon (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \to U_\alpha \cap U_\beta$ の束の自己同型（図 2.4c）が得られる．

$$\begin{tikzcd} U_\alpha \times F \arrow[dr, "\mathrm{proj}_1"'] & \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[l, "\varphi_\alpha"'] \arrow[d, "\pi"] \\ & U_\alpha \end{tikzcd}$$

(a) U_α に関する局所自明性

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_\beta) \arrow[r, "\varphi_\beta"] \arrow[d, "\pi"'] & U_\beta \times F \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\ U_\beta & \end{tikzcd}$$

(b) U_β に関する局所自明性

$$\begin{tikzcd} (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \arrow[rr, "\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}"] \arrow[dr, "\mathrm{proj}_1"'] & & (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\ & U_\alpha \cap U_\beta & \end{tikzcd}$$

(c) 自明束 $(U_\alpha \cap U_\beta) \times F$ の自己同型

図 2.4: 局所自明性の結合

全ての $U_\alpha \cap U_\beta$ に関する変換関数の族 $\{t_{\alpha\beta}\}$ が $\forall b \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ に対して条件

$$t_{\alpha\beta}(b) t_{\beta\gamma}(b) = t_{\alpha\gamma}(b) \tag{2.4.5}$$

を充たすことは図式 2.4 より明かである．次の命題は，ファイバー束 $(E,\, \pi,\, B,\, F)$ を構成する「素材」には

- 底空間となる C^∞ 多様体 B
- ファイバーとなる C^∞ 多様体 F
- Lie 群 G と，その F への左作用 $\blacktriangleright\colon G \times F \longrightarrow F$
- B の開被覆 $\{U_\lambda\}$
- (2.4.5) を充たす C^∞ 写像の族 $\{t_{\alpha\beta}\colon U_\beta \cap U_\alpha \to G\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$

があれば十分であることを主張する：

命題 2.1: ファイバー束の構成

- C^∞ 多様体 B, F
- Lie 群 G と，G の F への左作用 $\blacktriangleright\colon G \times F \longrightarrow G$
- B の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$
- **コサイクル条件** (2.4.5) を充たす C^∞ 関数の族 $\{t_{\alpha\beta}\colon U_\beta \cap U_\alpha \to G\}$

を与える．このとき，構造群 G と変換関数 $\{t_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$ を持つファイバー束 $\xi = (E,\, \pi,\, B,\, F)$ が存在する．

証明 まず手始めに，cocycle 条件 (2.4.5) より

$$t_{\alpha\alpha}(b)t_{\alpha\alpha}(b) = t_{\alpha\alpha}(b), \quad \forall b \in U_\alpha$$

だから $t_{\alpha\alpha}(b) = 1_G$ であり，また

$$t_{\alpha\beta}(b)t_{\beta\alpha}(b) = t_{\alpha\alpha}(b) = 1_G, \quad \forall b \in U_\alpha \cap U_\beta$$

だから $t_{\beta\alpha}(b) = t_{\alpha\beta}(b)^{-1}$ である．

開被覆 $\{U_\lambda\}$ の添字集合を Λ とする．このとき $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して，$U_\lambda \subset B$ には底空間 B からの相対位相を入れ，$U_\lambda \times F$ にはそれと F の位相との積位相を入れることで，直和位相空間

$$\mathcal{E} \coloneqq \coprod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \times F$$

を作ることができる[*22]．$\mathcal{E}$ の任意の元は $(\lambda,\, b,\, f) \in \Lambda \times U_\lambda \times F$ と書かれる．

さて，$\mathcal{E}$ 上の二項関係 $\sim$ を以下のように定める：

$$(\alpha,\, b,\, f) \sim \bigl(\beta,\, b,\, t_{\alpha\beta}(b) \blacktriangleright f\bigr) \quad \forall b \in U_\alpha \cap U_\beta,\ \forall f \in F$$

$\sim$ が同値関係の公理を充たすことを確認する：

反射律 冒頭の議論から $t_{\alpha\alpha}(b) = 1_G$ なので良い．

対称律 冒頭の議論から $t_{\beta\alpha}(b) = t_{\alpha\beta}(b)^{-1}$ なので，

$$\begin{aligned}
&(\alpha,\, b,\, f) \sim (\beta,\, c,\, h) \\
\Longrightarrow \quad & b = c \in U_\alpha \cap U_\beta \text{ かつ } f = t_{\alpha\beta}(b) \blacktriangleright h \\
\Longrightarrow \quad & c = b \in U_\alpha \cap U_\beta \text{ かつ } h = t_{\alpha\beta}(b)^{-1} \blacktriangleright f = t_{\beta\alpha}(b) \blacktriangleright f \\
\Longrightarrow \quad & (\beta,\, c,\, h) \sim (\alpha,\, b,\, f).
\end{aligned}$$

推移律 cocycle 条件 (2.4.5) より

$$\begin{aligned}
&(\alpha,\, b,\, f) \sim (\beta,\, c,\, h) \text{ かつ } (\beta,\, c,\, h) \sim (\gamma,\, d,\, k) \\
\Longrightarrow \quad & b = c \in U_\alpha \cap U_\beta \text{ かつ } c = d \in U_\beta \cap U_\gamma \text{ かつ } f = t_{\alpha\beta}(b) \blacktriangleright h,\ h = t_{\beta\gamma}(c) \blacktriangleright k \\
\Longrightarrow \quad & b = d \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \text{ かつ } f = \bigl(t_{\alpha\beta}(b)t_{\beta\gamma}(b)\bigr) \blacktriangleright k = t_{\alpha\gamma}(b) \blacktriangleright k \\
\Longrightarrow \quad & (\alpha,\, b,\, f) \sim (\gamma,\, d,\, k).
\end{aligned}$$

[*22] $\mathcal{E}$ はいわば，「貼り合わせる前の互いにバラバラな素材（局所自明束 $U_\alpha \times F$）」である．証明の以降の部分では，これらの「素材」を $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ の部分に関して「良い性質 (2.4.5) を持った接着剤 $\{t_{\alpha\beta}\}$」を用いて「貼り合わせる」操作を，位相を気にしながら行う．

したがって $\sim$ は同値関係である．$\sim$ による $\mathcal{E}$ の商集合を E と書き，商写像を $\mathrm{pr}\colon \mathcal{E} \to E,\ (\alpha, b, f) \mapsto [(\alpha, b, f)]$ と書くことにする．

集合 E に商位相を入れて E を位相空間にする．このとき商位相の定義から開集合 $\{\alpha\} \times U_\alpha \times F \subset \mathcal{E}$ は pr によって E の開集合 $\mathrm{pr}(\{\alpha\} \times U_\alpha \times F) \subset E$ に移される．ゆえに E は $\{\mathrm{pr}(\{\alpha\} \times U_\alpha \times V_\beta)\}$ を座標近傍にもつ C^∞ 多様体である（ここに $\{V_\beta\}$ は，C^∞ 多様体 F の座標近傍である）．

次に C^∞ の全射 $\pi\colon E \longrightarrow B$ を

$$\pi\bigl([(\alpha, b, f)]\bigr) := b$$

と定義すると，これは $\forall\alpha \in \Lambda$ に対して微分同相写像[*23]

$$\varphi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times F,\ [(\alpha, b, f)] \longmapsto (b, f)$$

による局所自明性を持つ．従って組 $\xi := (E, \pi, B, F)$ は構造群 G，局所自明化 $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$，変換関数 $\{t_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$ を持つファイバー束になり，証明が終わる． ■

定義 2.6: 主束

構造群を G に持つファイバー束 $\xi = (P, \pi, M, G)$ が**主束** (principal bundle) であるとは，G の G 自身への左作用が自然な左作用[a]であることを言う．

[a] つまり，$g \blacktriangleright x := gx$（Lie 群の積）である．

次の命題は証明の構成が極めて重要である：

命題 2.2: 主束の全空間への右作用

$\xi = (P, \pi, M, G)$ を主束とする．このとき，G の全空間 P への自由な右作用が自然に定義され，その軌道空間 (orbit space) P/G が M になる．

証明 ξ の局所自明化を $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，変換関数を $\{t_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to G\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$ と書く．$\forall u \in P,\ \forall g \in G$ をとる．$\pi(u) \in U_\alpha$ となる $\alpha \in \Lambda$ を選び，対応する局所自明化 φ_α による u の像を $\varphi_\alpha(u) =: (p, h) \in U_\alpha \times G$ とおく[*24]．このとき G の P への右作用 $\blacktriangleleft\colon P \times G \longrightarrow P$ を次のように定義する[*25]：

$$u \blacktriangleleft g := \varphi_\alpha^{-1}(p, hg) \tag{2.4.6}$$

$\blacktriangleleft$ の well-definedness

$\beta \neq \alpha$ に対しても $\pi(u) \in U_\beta$ であるとする．このとき $\varphi_\beta(u) = (p, h') \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times G$ と書けて，また変換関数の定義から

$$h' = t_{\alpha\beta}(p)h \quad \bigl(t_{\alpha\beta}(p) \in G\bigr)$$

[*23] 逆写像は $\varphi_\alpha^{-1}\colon U_\alpha \times F \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha),\ (b, f) \longmapsto [(\alpha, b, f)]$ である．φ_α も φ_α^{-1} も C^∞ 写像の合成で書けるので C^∞ 写像である．

[*24] つまり，$p := \pi(u),\ h := \mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\alpha(u)$ と言うことである．

[*25] 右辺の hg は Lie 群の乗法である．

である．したがって

$$\varphi_\beta^{-1}(p,\, h'g) = \varphi_\beta^{-1}\Big(p,\, \big(t_{\alpha\beta}(p)h\big)g\Big) = \varphi_\beta^{-1}\big(p,\, t_{\alpha\beta}(p)hg\big) = \varphi_\beta^{-1} \circ (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(p,\, hg) = \varphi_\alpha^{-1}(p,\, hg)$$

が分かり，式 (2.4.6) の右辺は局所自明化の取り方によらない．

$\blacktriangleleft$ は右作用　写像 $\rho\colon G^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Diff}\, P,\ g \longmapsto (u \longmapsto u \blacktriangleleft g)$ が群準同型であることを示す．

(1) $u \blacktriangleleft 1_G = \varphi_\alpha^{-1}(p,\, h1_G) = \varphi_\alpha^{-1}(p,\, h) = u$

(2) $\forall g_1,\, g_2 \in G$ をとる．

$$u \blacktriangleleft (g_1 g_2) = \varphi_\alpha^{-1}\big(p,\, (hg_1)g_2\big) = \varphi_\alpha^{-1}(p,\, hg_1) \blacktriangleleft g_2 = (u \blacktriangleleft g_1) \blacktriangleleft g_2$$

$\blacktriangleleft$ は自由

$\forall \alpha \in \Lambda$ に対して $\forall u = (p,\, g) \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ をとる．$u \blacktriangleleft g' = u$ ならば

$$u \blacktriangleleft g' = \varphi_\alpha^{-1}(p,\, gg') = u = \varphi_\alpha^{-1}(p,\, g1_G)$$

が成り立つが，局所自明化は全単射なので $gg' = g$ が言える．g は任意なので $g' = 1_G$ が分かった．

軌道空間が M

$\forall \alpha \in \Lambda$ に対して，G の右作用 (2.4.6) による $U \times G$ の軌道空間は $(U \times G)/G = U \times \{1_G\} = U$ となる．故に P 全域に対しては $P/G = B$ となる．

■

定理 2.1:

コンパクト Hausdorff 空間 P と，P に自由に作用しているコンパクト Lie 群 G を与える．この時，軌道空間への商写像

$$\pi\colon P \longrightarrow P/G$$

は主束である．

証明 ■

構造群を G とするファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ が与えられたとき，命題 2.1 を使うと，変換関数が共通の主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{p} M$ が存在することがわかる．このようにして得られる主束をファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ に**同伴する** (associated) 主束と呼ぶ．

【例 2.4.2】フレーム束

変換関数 $\{t_{\alpha\beta}\colon M \longrightarrow \mathrm{GL}(N,\, \mathbb{K})\}$ を持つ階数 N のベクトル束 $\mathbb{K}^N \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ に同伴する主束は，例えば次のようにして構成できる：$\forall x \in M$ に対して

$$P_x \coloneqq \left\{\, f \in \mathrm{Hom}\,(\mathbb{K}^N,\, E_x) \;\middle|\; \text{同型写像} \,\right\}$$

とし，

$$P \coloneqq \coprod_{x \in M} P_x, \quad \varpi\colon P \longrightarrow M,\ (x,\, f) \longmapsto x$$

と定める. $\mathrm{GL}(N,\,\mathbb{K}) \hookrightarrow P \xrightarrow{\varpi} M$ に適切な局所自明化を入れて, 変換関数が $\{t_{\alpha\beta}\colon M \longrightarrow \mathrm{GL}(N,\,\mathbb{K})\}$ となるような主束を構成する.

$\forall (x,\,f) \in P_x$ をとる．このとき $\mathbb{K}^N$ の標準基底を $e_1,\,\dots,\,e_N$ とすると，$f \in \mathrm{Hom}\,(\mathbb{K}^n,\,E_x)$ は E_x の基底 $f(e_1),\,\dots,\,f(e_N)$ と同一視される[a]ことに注意しよう．このことに由来して，$f_\mu \coloneqq f(e_\mu)$ とおいて $f = (f_1,\,\dots,\,f_N) \in P_x$ と表すことにする．

E の局所自明化 $\{\varphi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{K}^n\}$ を与える．このとき，n 個の E の局所切断 $s_{\alpha 1},\,\dots s_{\alpha N} \in \Gamma(E|_{U_\alpha})$ を

$$s_{\alpha\mu}(x) \coloneqq \varphi_\alpha^{-1}(x,\,e_\mu)$$

と定義すると，$\forall x \in U_\alpha$ に対して $s_{\alpha 1}(x),\,\dots,\,s_{\alpha N}(x)$ が E_x の基底となる[b]．故に，P の局所切断 $p_\alpha \in \Gamma(P|_{U_\alpha})$ を

$$p_\alpha(x) \coloneqq \Big(x,\,\big(s_{\alpha 1}(x),\,\dots,\,s_{\alpha N}(x)\big)\Big) \in P_x$$

により定義できる．このとき，$\forall (x,\,f) = \big(x,\,(f_1,\,\dots,\,f_N)\big) \in \varpi^{-1}(U_\alpha)$ に対してある $g \in \mathrm{GL}(N,\,\mathbb{K})$ が存在して $f = p_\alpha(x) g$ と書ける．ただし g は基底の取り替え行列で，ただ単に行列の積として右から作用している．

ここで，目当ての P の局所自明化を

$$\psi_\alpha\colon \varpi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathrm{GL}(n,\,\mathbb{K}),\ (x,\,f) = \big(x,\,p_\alpha(x)g\big) \longmapsto (x,\,g)$$

と定義する．変換関数を計算すると

$$\begin{aligned}
\psi_\beta^{-1}(x,\,g) &= \big(x,\,p_\beta(x) g\big) \\
&= \Big(x,\,\big(s_{\beta 1}(x),\,\dots,\,s_{\beta N}(x)\big) g\Big) \\
&= \Big(x,\,\big(\varphi_\beta^{-1}(x,\,e_1),\,\dots,\,\varphi_\beta^{-1}(x,\,e_N)\big) g\Big) \\
&= \bigg(x,\,\Big(\varphi_\alpha^{-1}\big(x,\,t_{\alpha\beta}(x) e_1\big),\,\dots,\,\varphi_\alpha^{-1}\big(x,\,t_{\alpha\beta}(x) e_N\big)\Big) g\bigg)
\end{aligned}$$

となるが，e_μ が標準基底なので

$$t_{\alpha\beta}(x) e_\mu = \begin{bmatrix} t_{\alpha\beta}(x)^1{}_\mu \\ t_{\alpha\beta}(x)^2{}_\mu \\ \vdots \\ t_{\alpha\beta}(x)^n{}_\mu \end{bmatrix} = e_\nu t_{\alpha\beta}(x)^\nu{}_\mu$$

が成り立つこと，およびベクトル束の定義から $\mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\alpha|_{E_x}\colon E_x \longrightarrow \mathbb{K}^N$ が $\mathbb{K}$-ベクトル空間の同型

写像であることに注意すると

$$\begin{aligned}
&\Bigl(x,\, \bigl(\varphi_\alpha^{-1}(x,\, t_{\alpha\beta}(x)e_1),\, \dots,\, \varphi_\alpha^{-1}(x,\, t_{\alpha\beta}(x)e_N)\bigr)g\Bigr) \\
&= \Bigl(x,\, \bigl(\varphi_\alpha^{-1}(x,\, e_\nu)t_{\alpha\beta}(x)^\nu{}_1,\, \dots,\, \varphi_\alpha^{-1}(x,\, e_\nu)t_{\alpha\beta}(x)^\nu{}_N\bigr)g\Bigr) \\
&= \Bigl(x,\, \bigl(\varphi_\alpha^{-1}(x,\, e_1),\, \dots,\, \varphi_\alpha^{-1}(x,\, e_N)\bigr)t_{\alpha\beta}(x)g\Bigr) \\
&= \Bigl(x,\, (s_{\alpha 1}(x),\, \dots,\, s_{\alpha N}(x))t_{\alpha\beta}(x)g\Bigr) \\
&= (x,\, p_\alpha(x)t_{\alpha\beta}(x)g) \\
&= \psi_\alpha^{-1}(x,\, t_{\alpha\beta}(x)g)
\end{aligned}$$

だとわかり，目標が達成された．この $\mathrm{GL}(N,\, \mathbb{K}) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ のことを**フレーム束**と呼ぶ．

---

[a] 実際 $\forall v = v^\mu e_\mu \in \mathbb{K}^n$ に対して $f(v) = v^\mu f(e_\mu)$ が成り立つので，$f(e_1),\, \dots,\, f(e_N) \in E_x$ が指定されれば f が一意的に決まる．

[b] ベクトル束の定義から $\mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\alpha|_{E_x} \colon E_x \longrightarrow \mathbb{K}^N$ が $\mathbb{K}$-ベクトル空間の同型写像であるため．

逆に，与えられた主束を素材にして，変換関数を共有するファイバー束を構成することができる．

命題 2.3: Borel 構成

$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ を主束とし，Lie 群 G の C^∞ 多様体への左作用 $\blacktriangleright \colon G \times F \longrightarrow F$ を与える．(2.4.6) で定義された G の P への右作用を $\blacktriangleleft \colon P \times G \longrightarrow P$ と書く．

- 積多様体 $P \times F$ への G の新しい右作用 $\blacktriangleleft \colon (P \times F) \times G \longrightarrow P \times F$ を
$$(u,\, f) \blacktriangleleft g \coloneqq (u \blacktriangleleft g,\, g^{-1} \blacktriangleright f)$$
と定義し，この右作用による $P \times F$ の軌道空間を $\boldsymbol{P \times_G F} \coloneqq (P \times F)/G$ と書く．
- 商写像 $\varpi \colon P \times F \longrightarrow P \times_G F,\ (u,\, f) \longmapsto (u,\, f) \blacktriangleleft G$ による $(u,\, f) \in P \times F$ の像を $u \times_G f \in P \times_G F$ と書く．このとき写像
$$q \colon P \times_G F \longrightarrow M,\ u \times_G f \longmapsto \pi(u)$$
が well-defined になる．

このとき，$F \hookrightarrow P \times_G F \xrightarrow{q} M$ は構造群 G をもち，変換関数が $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ のそれと同じであるようなファイバー束である．

証明 q の well-definedness は，(2.4.6) で定義した右作用 $\blacktriangleleft$ が $\pi(u)$ を不変に保つので明らか．

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ の開被覆，局所自明化，変換関数をそれぞれ $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda},\, \{\varphi_\lambda \colon \pi^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times G\}_{\lambda\in\Lambda},\, \bigl\{t_{\alpha\beta} \colon M \longrightarrow G\bigr\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$ と書く．また，$\forall\lambda \in \Lambda$ に対して局所切断 $s_\lambda \in \Gamma(P|_{U_\alpha})$ を

$$s_\lambda \colon M \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha),\ x \longmapsto \varphi_\lambda^{-1}(x,\, 1_G)$$

と定義する．

このとき，$\forall\lambda \in \Lambda$ に対して C^∞ 写像

$$\psi_\lambda \colon q^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times F,\ s_\lambda(x) \times_G f \longmapsto \bigl(x,\ f\bigr) \tag{2.4.7}$$

が well-defined な[*26] 微分同相写像になる[*27] ので，族

$$\bigl\{\psi_\lambda \colon q^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times F\bigr\}_{\lambda\in\Lambda}$$

を $F \hookrightarrow P \times_G F \xrightarrow{q} M$ の局所自明化にとる．すると $\forall\alpha,\ \beta \in \Lambda,\ \forall(x,\ f) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$ に対して

$$\begin{aligned}
\psi_\beta^{-1}(x,\ f) &= s_\beta(x) \times_G f \\
&= \varphi_\beta^{-1}(x,\ 1_G) \times_G f \\
&= \varphi_\alpha^{-1}(x,\ t_{\alpha\beta}(x)1_G) \times_G f \\
&= \varphi_\alpha^{-1}(x,\ 1_G t_{\alpha\beta}(x)) \times_G f \\
&= \bigl(\varphi_\alpha^{-1}(x,\ 1_G) \blacktriangleleft t_{\alpha\beta}(x)\bigr) \times_G f \\
&= \bigl(s_\alpha(x) \blacktriangleleft t_{\alpha\beta}(x)\bigr) \times_G f \\
&= \Bigl(\bigl(s_\alpha(x) \blacktriangleleft t_{\alpha\beta}(x)\bigr) \blacktriangleleft t_{\alpha\beta}(x)^{-1}\Bigr) \times_G \bigl(t_{\alpha\beta}(x) \blacktriangleright f\bigr) \\
&= s_\alpha(x) \times_G \bigl(t_{\alpha\beta}(x) \blacktriangleright f\bigr) \\
&= \psi_\alpha^{-1}(x,\ t_{\alpha\beta}(x) \blacktriangleright f)
\end{aligned}$$

が成り立つので $F \hookrightarrow P \times_G F \xrightarrow{q} M$ の変換関数は

$$\bigl\{\, t_{\alpha\beta} \colon M \longrightarrow G \,\bigr\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$$

である． ■

【例 2.4.3】同伴ベクトル束

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ を任意に与える．Lie 群 G の，N 次元 $\mathbb{K}$ ベクトル空間 V への左作用とは，Lie 群 G の N 次元表現 $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ のことに他ならない[a]．このとき，命題 2.3 の方法によって構成される階数 N のベクトル束のことを $\boldsymbol{P \times_\rho V}$ と書き，**同伴ベクトル束** (associated vector bundle) と呼ぶ．

[a] $\mathrm{End}\, V$ に標準的な C^∞ 構造を入れて Lie 群と見做したものを $\mathrm{GL}(V)$ と書いた．

[*26] $\forall u \times_G f \in q^{-1}(U_\lambda)$ をとる．このとき $q(u \times_G f) = \pi(u) \in U_\lambda$ なので $u \in P$ に主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ の局所自明化 $\varphi_\lambda \colon \pi^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times F$ を作用させることができる．従って $g(u) \coloneqq \mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\lambda(u) \in G$ とおけば，G の P への右作用の定義 (2.4.6) から $u = \varphi_\lambda^{-1}\bigl(\pi(u),\ g(u)\bigr) = \varphi_\lambda^{-1}\bigl(\pi(u),\ 1_G\bigr) \blacktriangleleft g(u) = s_\lambda\bigl(\pi(u)\bigr) \blacktriangleleft g(u)$ が成り立ち，$u \times_G f = \Bigl(s_\lambda\bigl(\pi(u)\bigr) \blacktriangleleft g(u)\Bigr) \times_G f = s_\lambda\bigl(\pi(u)\bigr) \times_G \bigl(g(u) \blacktriangleright f\bigr)$ と書くことができる．よって ψ_λ **の定義** (2.4.7) **において** $\boldsymbol{\psi_\lambda(u \times_G f) = \bigl(\pi(u),\ g(u) \blacktriangleright f\bigr)}$ **であり**，全ての $q^{-1}(U_\lambda)$ の元の行き先が定義されていることがわかった．次に $u \times_G f = u' \times_G f' \in q^{-1}(U_\lambda)$ であるとする．このとき右作用 $\blacktriangleleft$ の定義からある $h \in G$ が存在して $u' = \varphi_\lambda^{-1}\bigl(\pi(u'),\ g(u')\bigr) = u \blacktriangleleft h = \varphi_\lambda^{-1}\bigl(\pi(u),\ g(u)h\bigr),\ f' = h^{-1} \blacktriangleright f$ が成り立つので，$\pi(u') = \pi(u),\ g(u') = g(u)h,\ f' = h^{-1} \blacktriangleright f$ が言える．従って $\psi_\lambda(u' \times_G f') = \bigl(\pi(u'),\ g(u') \blacktriangleright f'\bigr) = \Bigl(\pi(u),\ \bigl(g(u)h\bigr) \blacktriangleright \bigl(h^{-1} \blacktriangleright f\bigr)\Bigr) = \bigl(\pi(u),\ g(u) \blacktriangleright h \blacktriangleright h^{-1} \blacktriangleright f\bigr) = \bigl(\pi(u),\ g(u) \blacktriangleright f\bigr) = \psi_\lambda(u \times_G f)$ が成り立ち，ψ_λ が well-defined であることが示された．

[*27] $\pi\colon P \longrightarrow M,\ g \coloneqq \mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\lambda \colon q^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow G,\ \blacktriangleright\colon G \times F \longrightarrow F$ は全て C^∞ 写像の合成の形をしているので C^∞ 写像であり，$\psi_\lambda \coloneqq \bigl(\pi \times (\blacktriangleright \circ (g \times \mathrm{id}_F))\bigr)$ もこれらの合成として書けている（写像 $\times$, id_F はもちろん C^∞ 級である）ので C^∞ 写像である．well-definedness の証明と同じ議論で ψ_λ の単射性がわかる．全射性は定義 (2.4.7) より明らか．逆写像 $(x,\ f) \longmapsto s_\lambda(x) \times_G f$ も，C^∞ 写像たちの合成 $q \circ (s_\lambda \times \mathrm{id}_F)$ なので C^∞ 写像である．

これでゲージ場を導入する準備が整った．つまり，この節の冒頭で考えた内部対称性を持つ場 $\varphi\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{K}^N$ とは，厳密には主束

$$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$$

の，線型 Lie 群 G の N 次元表現

$$\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{K}^N),\ U \longmapsto (\boldsymbol{v} \longmapsto U\boldsymbol{v})$$

による同伴ベクトル束

$$\mathbb{K}^N \hookrightarrow P \times_\rho \mathbb{K}^N \xrightarrow{q} \mathcal{M}$$

の局所切断 $\phi\colon V_\alpha \longrightarrow P \times_\rho \mathbb{K}^N$ を，ある一つの局所自明化 $\sigma_\alpha\colon q^{-1}(V_\alpha) \longrightarrow V_\alpha \times \mathbb{K}^N$ によって座標表示したもの（の第 2 成分を取り出してきたもの）

$$\varphi = \mathrm{proj}_2 \circ \sigma_\alpha \circ \phi\colon V_\alpha \longrightarrow \mathbb{K}^N$$

のことだと見做せる．と言うのも，こう考えることで場の変換性 (2.4.2)

$$\varphi(x) \longrightarrow \tilde{\varphi}(x) := U(x)\varphi(x)$$

が，時空 $\mathcal{M}$ の 2 つのチャート $\big(V,\, (x^\mu)\big),\ \big(\tilde{V},\, (\tilde{x}^\mu)\big)$ の共通部分 $V \cap \tilde{V}$ 上における，局所自明化 $\sigma,\, \tilde{\sigma}\colon q^{-1}(V \cap \tilde{V}) \longrightarrow (V \cap \tilde{V}) \times \mathbb{K}^N$ の取り替え（内部自由度に関する一般座標変換のようなもの）に伴う変換関数 $U_{\tilde{V},\,V}\colon \mathcal{M} \longrightarrow G$ の作用

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} \circ \sigma^{-1}\colon (V \cap \tilde{V}) \times \mathbb{K}^N &\longrightarrow (V \cap \tilde{V}) \times \mathbb{K}^N, \\ \big(x,\, \boldsymbol{\varphi(x)}\big) &\longmapsto \Big(x,\, \rho\big(U_{\tilde{V},\,V}(x)\big)\big(\varphi(x)\big)\Big) = \Big(x,\, \boldsymbol{U_{\tilde{V},\,V}(x)\varphi(x)}\Big) \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

として上手く定式化できているのである[*28]．

2.4.2 Lie 群の指数写像と基本ベクトル場

主束の接続の話に入る前に，Lie 群の Lie 代数について考察する．この小節は [6, Chapter 20]，[7, 第 6 章] による．

Lie 群 G の上の微分同相写像[*29]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L_g}\colon G \longrightarrow G,\ x \longmapsto gx, \\ \boldsymbol{R_g}\colon G \longrightarrow G,\ x \longmapsto xg, \end{aligned}$$

のことをそれぞれ**左移動**，**右移動**と言う．

[*28] 物理では変換性によって場を定義するので，数学的定式化はこれで良い．なお，この定式化は主束の全空間 P の情報を一切使っていないが，これは命題 2.1 の表れである．実際，この節の冒頭の議論で顕に登場したのは時空 $\mathcal{M}$，場の配位を記述する空間 $\mathbb{K}^N$，内部対称性を表す Lie 群 G とその表現 $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(N,\, \mathbb{K})$，場の局所的変換を表す C^∞ 写像 $U\colon \mathcal{M} \longrightarrow G$ だけだったので，その数学的定式化が P によらないのは妥当だと思う．

[*29] 従って，命題 B.7 から $L_g,\, R_g$ によるベクトル場の押し出しが一意的に存在する．

定義 2.7: 左不変ベクトル場

Lie 群 G の**左不変ベクトル場** (left-invariant vector field) とは，$\mathbb{R}$-ベクトル空間

$$\boldsymbol{\mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)} \coloneqq \left\{ X \in \mathfrak{X}(G) \,\middle|\, \forall g \in G,\ (L_g)_* X = X \right\}$$

の元のこと．i.e. $\forall g \in G$ に対して自分自身と L_g-related な C^∞ ベクトル場のことを言う．

$\forall g \in G$ と $\forall X,\, Y \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ をとる．このとき $(L_g)_* X = X,\ (L_g)_* Y = Y$ なので，命題 B.9 の後半から

$$(L_g)_*[X, Y] = [(L_g)_* X, (L_g)_* Y] = [X, Y]$$

が言える．i.e. $\mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ は Lie ブラケットについて閉じるので，体 $\mathbb{R}$ 上の Lie 代数になる．

命題 2.4:

G を Lie 群とする．このとき評価写像

$$\mathrm{ev}_{1_G} \colon \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(M) \longrightarrow T_{1_G} G,\ X \longmapsto X_{1_G}$$

はベクトル空間の同型写像である．

証明 ev_{1_G} が $\mathbb{R}$-線型写像であることは明らか．

ev_{1_G} が単射

$\mathrm{Ker}\,\mathrm{ev}_{1_G} = \{0\}$ を示す．$\forall X \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{ev}_{1_G}$ に対して $\mathrm{ev}_{1_G}(X) = X_{1_G} = 0$ が成り立つ．一方 $X \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ でもあるので，$\forall g \in G$ に対して $X_g = X_{L_g(1_G)} = (T_{1_G} L_g)(X_{1_G}) = 0$ が言える[*30]．

ev_{1_G} が全射

$\forall v \in T_{1_G} G$ を 1 つとり，C^∞ ベクトル場 $v^{\mathrm{L}} \in \mathfrak{X}(G)$ を

$$v^{\mathrm{L}} \colon G \longrightarrow TG,\ g \longmapsto T_{1_G}(L_g)(v) \tag{2.4.9}$$

と定義する[*31]．$\forall g \in G$ に対して v^{L} が自分自身と L_g-related であることを示す．実際，$\forall h \in G$ に対して

$$T_h(L_g)(v^{\mathrm{L}}|_h) = T_h(L_g) \circ T_{1_G}(L_h)(v) = T_{1_G}(L_g \circ L_h)(v) = T_{1_G}(L_{gh})(v) = v^{\mathrm{L}}|_{gh} = v^{\mathrm{L}}|_{L_g(h)}$$

が言える．i.e. $v^{\mathrm{L}} \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ である．従って v^{L} に ev_{1_G} を作用させることができ，$\mathrm{ev}_{1_G}(v^{\mathrm{L}}) = v^{\mathrm{L}}|_{1_G} = T_{1_G} L_{1_G}(v) = v \in \mathrm{Im}\,\mathrm{ev}_{1_G}$ が言えた．

■

ここで $\mathfrak{g} \coloneqq T_{1_G} G$ とおき，命題 2.4 の (2.4.9) を使って $\mathfrak{g}$ 上の Lie ブラケットを

$$[X, Y] \coloneqq \left[X^{\mathrm{L}}, Y^{\mathrm{L}}\right]_{1_G} \in \mathfrak{g}$$

[*30] 2 つ目の等号で L_g-related の定義を使った．

[*31] v^{L} が C^∞ であることは次のようにしてわかる：$\forall f \in C^\infty(G)$ をとる．$\gamma(0) = 1_G,\ \dot{\gamma}(0) = v$ を充たす C^∞ 曲線 $\gamma \colon (-\delta,\, \delta) \longrightarrow G$ をとると，$\forall g \in G$ に対して $(v^{\mathrm{L}} f)(g) = v(f \circ L_g) = \dot{\gamma}(0)(f \circ L_g) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (f \circ L_g \circ \gamma)(t)$ と書ける．$f \circ L_g \circ \gamma \colon (-\delta,\, \delta) \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ と見做すとこれは C^∞ 写像の合成なので C^∞ 写像であり，右辺は g に関して C^∞ 級である．

と定義すれば ev_{1_G} は Lie 代数の同型写像となる．この意味で $\mathfrak{g}$ のことを **Lie 群 G の Lie 代数**と呼ぶ．

【例 2.4.4】一般線型群とその Lie 代数

一般線型群 $\mathrm{GL}(n,\,\mathbb{K})\subset \mathrm{M}(n,\,\mathbb{K})$ の Lie 代数 $\mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{K})\coloneqq T_{\mathbb{1}_n}\mathrm{GL}(n,\,\mathbb{K})$ を，$\mathrm{GL}(n,\,\mathbb{K})$ のチャート $\bigl(\mathrm{GL}(n,\,\mathbb{K}),\,(x^{\mu}{}_{\nu})\bigr)$ の下で考える．まず，$\mathbb{K}$-線型写像

$$
\begin{aligned}
\alpha\colon \mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathrm{M}(n,\,\mathbb{K}),\\
a^{\mu}{}_{\nu}\ \frac{\partial}{\partial x^{\mu}{}_{\nu}}\bigg|_{\mathbb{1}_n} &\longmapsto \bigl[\,a^{\mu}{}_{\nu}\,\bigr]_{1\le\mu,\,\nu\le n}
\end{aligned}
$$

は明らかに $\mathbb{K}$-ベクトル空間の同型写像である．$\forall a=a^{\mu}{}_{\nu}\ \frac{\partial}{\partial x^{\mu}{}_{\nu}}\Big|_{\mathbb{1}_n},\ b=b^{\mu}{}_{\nu}\ \frac{\partial}{\partial x^{\mu}{}_{\nu}}\Big|_{\mathbb{1}_n}\in\mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{K})$ をとる．このとき $\forall g=\bigl[\,g^{\mu}{}_{\nu}\bigr]_{1\le\mu,\,\nu\le n}\in\mathrm{GL}(n,\,\mathbb{K})$ に関する左移動は

$$
L_g\bigl(\bigl[\,x^{\mu}{}_{\nu}\,\bigr]_{1\le\mu,\,\nu\le n}\bigr)=\bigl[\,g^{\mu}{}_{\rho}x^{\rho}{}_{\nu}\,\bigr]_{1\le\mu,\,\nu\le n}
$$

なる C^{∞} 写像だから

$$
\begin{aligned}
a^{\mathrm{L}}{}_{g}=T_{1_G}(L_g)(a)&=a^{\mu}{}_{\nu}\,T_{1_G}(L_g)\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}{}_{\nu}}\bigg|_{\mathbb{1}_n}\right)\\
&=a^{\mu}{}_{\nu}\,\frac{\partial[\,L_g\,]^{\rho}{}_{\sigma}}{\partial x^{\mu}{}_{\nu}}(\mathbb{1}_n)\ \frac{\partial}{\partial x^{\rho}{}_{\sigma}}\bigg|_{L_g(\mathbb{1}_n)}\\
&=g^{\rho}{}_{\mu}a^{\mu}{}_{\nu}\ \frac{\partial}{\partial x^{\rho}{}_{\nu}}\bigg|_{g}
\end{aligned}
$$

と計算できる．i.e. 第 $(\mu,\,\nu)$ 成分を取り出す C^{∞} 関数を $\mathrm{pr}^{\mu}{}_{\nu}\colon \mathrm{GL}(n,\,\mathbb{K})\longrightarrow\mathbb{K}$ とおくと $\forall f\in C^{\infty}\bigl(\mathrm{GL}(n,\,\mathbb{K})\bigr)$ に対して $a^{\mathrm{L}}f\in C^{\infty}\bigl(\mathrm{GL}(n,\,\mathbb{K})\bigr)$ は

$$
a^{\mathrm{L}}f(g)=a^{\mu}{}_{\nu}\,\mathrm{pr}^{\rho}{}_{\mu}(g)\frac{\partial f}{\partial x^{\rho}{}_{\nu}}(g)
$$

と書ける．よって

$$
\begin{aligned}
[a,b]f&=\bigl[a^{\mathrm{L}},b^{\mathrm{L}}\bigr]f(\mathbb{1}_n)\\
&=a^{\mu}{}_{\nu}\,\mathrm{pr}^{\rho}{}_{\mu}(\mathbb{1}_n)\ \frac{\partial}{\partial x^{\rho}{}_{\nu}}\left(b^{\alpha}{}_{\beta}\,\mathrm{pr}^{\gamma}{}_{\alpha}\frac{\partial f}{\partial x^{\gamma}{}_{\beta}}\right)\bigg|_{\mathbb{1}_n}\\
&\quad-b^{\mu}{}_{\nu}\,\mathrm{pr}^{\rho}{}_{\mu}(\mathbb{1}_n)\ \frac{\partial}{\partial x^{\rho}{}_{\nu}}\left(a^{\alpha}{}_{\beta}\,\mathrm{pr}^{\gamma}{}_{\alpha}\frac{\partial f}{\partial x^{\gamma}{}_{\beta}}\right)\bigg|_{\mathbb{1}_n}\\
&=a^{\mu}{}_{\nu}b^{\nu}{}_{\beta}\,\frac{\partial f}{\partial x^{\mu}{}_{\beta}}(\mathbb{1}_n)+\cancel{a^{\mu}{}_{\nu}b^{\alpha}{}_{\beta}\frac{\partial^2 f}{\partial x^{\mu}{}_{\nu}\partial x^{\alpha}{}_{\beta}}(\mathbb{1}_n)}\\
&\quad-b^{\mu}{}_{\nu}a^{\nu}{}_{\beta}\frac{\partial f}{\partial x^{\mu}{}_{\beta}}(\mathbb{1}_n)-\cancel{b^{\mu}{}_{\nu}a^{\alpha}{}_{\beta}\frac{\partial^2 f}{\partial x^{\mu}{}_{\nu}\partial x^{\alpha}{}_{\beta}}(\mathbb{1}_n)}\\
&=\left(\bigl(a^{\mu}{}_{\rho}b^{\rho}{}_{\nu}-b^{\mu}{}_{\rho}a^{\rho}{}_{\nu}\bigr)\ \frac{\partial}{\partial x^{\mu}{}_{\nu}}\bigg|_{\mathbb{1}_n}\right)f
\end{aligned}
$$

であり，

$$
\alpha([a,b])=\bigl[\,a^{\mu}{}_{\rho}b^{\rho}{}_{\nu}-b^{\mu}{}_{\rho}a^{\rho}{}_{\nu}\,\bigr]_{1\le\mu,\,\nu\le n}
$$

i.e. α は Lie 代数の同型写像だと分かった．

定理 2.2: 誘導される Lie 代数の準同型

Lie 群 $G,\ H$ と Lie 群の準同型 $F\colon G \longrightarrow H$ を与える．

(1) このとき，$\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して $Y \in \mathfrak{h}$ がただ一つ存在して，X^{L} と Y^{L} が F-related になる．i.e. $Y^{\mathrm{L}} = F_* X^{\mathrm{L}}$ である．

(2) $T_{1_G}F\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h},\ X \longmapsto T_{1_G}F(X)$ は Lie 代数の準同型である．

証明 (1) $Y = T_{1_G}F(X) \in \mathfrak{h}$ に対して X^{L} と Y^{L} が F-related であることを示す．実際，F が Lie 群の準同型であることから $\forall g,\ h \in G$ について

$$F \circ L_g(h) = F(gh) = F(g)F(h) = L_{F(g)} \circ F(h)$$

が成り立つこと，i.e. $F \circ L_g = L_{F(g)} \circ F$ に注意すると $\forall g \in G$ に対して

$$\begin{aligned} T_gF(X^{\mathrm{L}}|_g) &= T_gF\bigl(T_{1_G}L_g(X)\bigr) \\ &= T_{1_G}(F \circ L_g)(X) \\ &= T_{1_G}(L_{F(g)} \circ F)(X) \\ &= T_{1_H}(L_{F(g)}) \circ T_{1_G}F(X) \\ &= T_{1_H}(L_{F(g)})(Y) \\ &= Y_{F(g)} \end{aligned}$$

が言える．系 B.1 より $F_* X^{\mathrm{L}} = Y^{\mathrm{L}}$ がわかるので Y は一意的に定まる．

(2) $\forall X,\ Y \in \mathfrak{g}$ をとる．(1) と命題 B.9-(1) より $\bigl[F_* X^{\mathrm{L}}, F_* Y^{\mathrm{L}}\bigr]$ は $\bigl[X^{\mathrm{L}}, Y^{\mathrm{L}}\bigr]$ と F-related であるが，(1) で示した一意性から

$$F_*\bigl[X^{\mathrm{L}}, Y^{\mathrm{L}}\bigr] = \bigl[F_* X^{\mathrm{L}}, F_* Y^{\mathrm{L}}\bigr]$$

が言える．両辺の $1_H \in H$ における値をとることで

$$T_{1_G}F([X,Y]) = (F_*\bigl[X^{\mathrm{L}}, Y^{\mathrm{L}}\bigr])_{1_G} = (\bigl[F_* X^{\mathrm{L}}, F_* Y^{\mathrm{L}}\bigr])_{1_G} = [X,Y]$$

が示された．

■

定義 2.8: 1 パラメータ部分群

Lie 群の準同型写像 $\mathbb{R} \longrightarrow G$ のことを Lie 群 G の **1 パラメータ部分群** (one-parameter subgroup) と呼ぶ[a]．

[a] 1 パラメータ部分群自身は部分 Lie 群ではない．

命題 2.5: 1 パラメータ部分群の特徴付け

Lie 群 G を与える．

(1) G の任意の 1 パラメータ部分群 $\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow G$ に対して，γ を初期条件 $\gamma(0) = 1_G$ を充たす極大積分曲線として持つ左不変ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ が一意的に存在する．

(2) $\forall X \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ に対して，初期条件 $\gamma(0) = 1_G$ を充たす唯一の X の極大積分曲線 $\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow G$ は G の 1 パラメータ部分群である．

上述の対応によって $X \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ から一意的に定まる 1 パラメータ部分群のことを ***X* が生成する 1 パラメータ部分群**と呼ぶ．

!

命題 2.4 の同型と併せると

$$\{\, G \text{ の 1 パラメータ部分群} \,\} \xleftrightarrow{\ *\ } \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G) \xleftrightarrow{\mathrm{ev}_{1_G}} T_{1_G}G$$

の 1 対 1 対応がある．i.e. G の任意の 1 パラメータ部分群 γ は，その初速度 $\dot{\gamma}(0) \in T_{1_G}G$ により完全に決定される．

証明 (1) G の 1 パラメータ部分群 $\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow G$ を与える．$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(\mathbb{R})$ なので，定理 2.2 より，$X := \gamma_*\big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big) \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ は $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ と γ-related な唯一の左不変ベクトル場である．このとき $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ に大して

$$X_{\gamma(t_0)} = T_{t_0}\gamma\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} \right) = \dot{\gamma}(t_0)$$

が成り立ち，γ は初期条件 $\gamma(0) = 1_G$ を充たす X の極大積分曲線である．

(2) 定理 B.6 より $\forall X \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ は完備なので，X は大域的なフローを生成する．従って $\gamma(0) = 1_G$ を充たす X の極大積分曲線 γ が唯一存在し，その定義域が $\mathbb{R}$ になる．

$\forall g \in G$ をとる．左不変ベクトル場の定義より $X \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ は X 自身と L_g-related なので，命題 B.11 から $L_g \circ \gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow G$ もまた X の積分曲線である．従って $\forall s \in \mathbb{R}$ に対して曲線 $L_{\gamma(s)} \circ \gamma\colon t \longmapsto L_{\gamma(s)}\big(\gamma(t)\big) = \gamma(s)\gamma(t)$ は $t = 0$ において点 $\gamma(s) \in G$ を通過する X の積分曲線である．然るに補題 B.3-(2) より曲線 $t\colon t \longmapsto \gamma(s+t)$ もまた同一の初期条件を充たす X の積分曲線なので，定理 B.2 よりこれらは $\forall t \in \mathbb{R}$ において一致しなくてはならない：

$$\gamma(s)\gamma(t) = \gamma(s+t)$$

i.e. $\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow G$ は 1 パラメータ部分群である．

■

定義 2.9: 指数写像

Lie 群 G を与える．$\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数とする．G の**指数写像** (exponential map) を

$$\exp\colon \mathfrak{g} \longrightarrow G,\ X \longmapsto \gamma_{(X)}(1)$$

と定義する．ただし，$\gamma_{(X)}\colon \mathbb{R} \longrightarrow G$ は $X^{\mathrm{L}} \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ が生成する 1 パラメータ部分群である．

命題 2.6: 指数写像の性質

Lie 群 G を与える．$\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数とする．

(1) $\exp\colon \mathfrak{g} \longrightarrow G$ は C^∞ 写像

(2) $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して，

$$\gamma_{(X)}\colon \mathbb{R} \longrightarrow G,\ t \longmapsto \exp(tX)$$

は $X^{\mathrm{L}} \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ が生成する 1 パラメータ部分群である．

(3) $\forall X \in \mathfrak{g}$, $\forall s,\, t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\exp\bigl((s+t)X\bigr) = \exp(sX)\exp(tX)$$

(4) $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して

$$(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$$

(5) H を別の Lie 群，$F\colon G \longrightarrow H$ を任意の Lie 群の準同型とするとき，以下の図式が可換になる：

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "T_{1_G}F"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{h} \arrow[d, "\exp"] \\ G \arrow[r, "F"] & H \end{tikzcd}$$

(6) $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して，左不変ベクトル場 $X^{\mathrm{L}} \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ が生成するフロー $\theta_{(X)}\colon \mathbb{R} \times G \longrightarrow G$ に対して

$$\theta_{(X)}(t,\, g) = g\exp(tX)\ \bigl(=: R_{\exp(tX)}(g)\bigr)$$

が成り立つ．

(7) $T_0(\exp)\colon T_0\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ は恒等写像である．

(8) 点 $0 \in \mathfrak{g}$ の近傍 $U \subset \mathfrak{g}$ および点 $1_G \in G$ の近傍 $V \subset G$ が存在して，$\exp|_U\colon U \longrightarrow V$ が微分同相写像になる．

<u>証明</u>　(1) [6, p.519, Proposition 20.8-(1)]

(2) $\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow G$ を $X^{\mathrm{L}} \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ が生成する 1 パラメータ部分群とする．これは命題 2.5-(2) により $\gamma(0) = 1_G$ を充たす X^{L} の唯一の極大積分曲線である．

$\forall t \in \mathbb{R}$ をとる．このとき補題 B.3-(1) より，C^∞ 曲線 $\tilde{\gamma}\colon \mathbb{R} \longrightarrow G,\ s \longmapsto \gamma(ts)$ は初期条件 $\tilde{\gamma}(0) = 1_G$ を充たすベクトル場 tX^{L} の極大積分曲線なので，その一意性から

$$\gamma_{(X)}(t) = \exp(tX) = \tilde{\gamma}(1) = \gamma(t)$$

が成り立つ．i.e. $\gamma_{(X)} = \gamma$ が言えた．

(3) (2) より $\gamma_{(X)}$ が 1 パラメータ部分群なので

$$\exp\bigl((s+t)X\bigr) = \gamma_{(X)}(s+t) = \gamma_{(X)}(s)\gamma_{(X)}(t) = \exp(sX)\exp(tX)$$

(4) (2) より $\gamma_{(X)}$ が 1 パラメータ部分群なので

$$\begin{aligned}\exp X \exp(-X) &= \gamma_{(X)}(1)\gamma_{(X)}(-1) = \gamma_{(X)}(0) = 1_G \\ \exp(-X)\exp X &= \gamma_{(X)}(-1)\gamma_{(X)}(1) = \gamma_{(X)}(0) = 1_G\end{aligned}$$

が言える．i.e. $(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$ である．

(5) $\forall X \in \mathfrak{g}$ を 1 つ固定する．(2) より C^∞ 写像 $t \longmapsto \exp\bigl(tT_{1_G}F(X)\bigr)$ は左不変ベクトル場 $\bigl(T_{1_G}F(X)\bigr)^{\mathrm{L}} = F_*(X^{\mathrm{L}}) \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ が生成する 1 パラメータ部分群である．ここで，$\sigma\colon \mathbb{R} \longrightarrow H,\ t \longmapsto F\bigl(\exp(tX)\bigr)$ とおいたとき

$$\begin{aligned}\dot\sigma(0) &= T_0\bigl(F\circ\exp(tX)\bigr)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right) \\ &= T_{1_G}F\circ T_0\bigl(\exp(tX)\bigr)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right) \\ &= T_{1_G}F\bigl(\dot\gamma_{(X)}(0)\bigr) \\ &= T_{1_G}F(X)\end{aligned}$$

が成り立つので σ もまた左不変ベクトル場 $\bigl(T_{1_G}F(X)\bigr)^{\mathrm{L}} \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ が生成する 1 パラメータ部分群であり，その一意性から $\sigma(t) = \exp\bigl(tT_{1_G}F(X)\bigr)$ が言える．

(6) $\forall(t,\, g) \in \mathbb{R}\times G$ をとる．左不変ベクトル場の定義より $X^{\mathrm{L}} \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ は X^{L} 自身と L_g-related なので，命題 B.11 から $L_g\circ\gamma_{(X)}\colon \mathbb{R} \longrightarrow G,\ t \longmapsto \exp(tX)$ もまた X^{L} の極大積分曲線である．$L_g\circ\gamma_{(X)}(0) = g$ なので，極大積分曲線の一意性から $L_g\circ\gamma_{(X)} = \theta_{(X)}^{(g)}$ が言える．従って

$$g\exp(tX) = L_g(\exp(tX)) = L_g\circ\gamma_{(X)}(t) = \theta_{(X)}^{(g)}(t) = \theta_{(X)}(t,\, g).$$

(7) $\forall X \in T_0\mathfrak{g}$ を 1 つとる．$\mathfrak{g}$ 上の C^∞ 曲線 $\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{g},\ t \longmapsto tX$ は $\dot\gamma(0) = X$ を充たすので

$$\begin{aligned}T_0(\exp)(X) &= T_0(\exp)\bigl(\dot\gamma(0)\bigr) \\ &= T_0(\exp)\circ T_0\gamma\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right) \\ &= T_0(\exp\circ\gamma)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right) \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\exp(tX) \\ &= X\end{aligned}$$

(8) (7) より点 $0 \in \mathfrak{g}$ において $T_0(\exp)\colon T_0\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} = T_{1_G}G$ が全単射なので，C^∞ 多様体に関する逆関数定理が使える．

■

定義 2.10: 微分表現

V を $\mathbb{K}$-ベクトル空間とする．Lie 群 G の表現 $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ の，$1_G \in G$ における微分 $T_{1_G}\rho\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ は Lie 代数の表現である．この $T_{1_G}\rho$ のことを ρ の**微分表現** (differential representation) と呼ぶ．

【例 2.4.5】随伴表現

$\forall g \in G$ に対して準同型 $F_g\colon G \longrightarrow G,\ x \longmapsto gxg^{-1}$ を考えると $F_{gh} = F_g \circ F_h$ が成り立つ．故に，$1_G \in G$ における微分

$$T_{1_G}(F_g)\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

は，T_{1_G} の関手性から $T_{1_G}(F_{gh}) = T_{1_G}(F_g) \circ T_{1_G}(F_h)$ を充たす．よって

$$\mathrm{Ad}\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g}),\ g \longmapsto T_{1_G}(F_g)$$

は Lie 群 G の表現となる[a]．これを Lie 群 G の**随伴表現** (adjoint representation) と呼ぶ．

Ad の微分表現を指数写像を使って計算してみよう．$\forall X \in \mathfrak{g}$ をとる．命題 2.6-(2) により曲線 $\gamma_{(X)}\colon t \longmapsto \exp(tX)$ は X が生成する 1 パラメータ部分群なので，命題 B.13 から $\dot{\gamma_{(X)}}(0) = X$ である．従って $\forall Y \in \mathfrak{g}$ に大して

$$\begin{aligned}
\big(T_{1_G}(\mathrm{Ad})(X)\big)Y &= \Big(T_{1_G}(\mathrm{Ad})\big(\dot{\gamma_{(X)}}(0)\big)\Big)Y \\
&= T_{1_G}(\mathrm{Ad}) \circ T_0\gamma_{(X)}\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right)Y \\
&= T_0(\mathrm{Ad} \circ \gamma_{(X)})\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right)Y \\
&= \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}\big(\exp(tX)\big)\right)Y \\
&= \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}\big(\exp(tX)\big)(Y)\right) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Big(T_{1_G}\big(F_{\exp(tX)}\big)(Y)\Big) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Big(T_{1_G}\big(R_{(\exp(tX))^{-1}} \circ L_{\exp(tX)}\big)(Y^{\mathrm{L}}_{1_G})\Big) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Big(T_{L_{\exp(tX)}(1_G)}\big(R_{\exp(-tX)}\big) \circ T_{1_G}\big(L_{\exp(tX)}\big)(Y^{\mathrm{L}}_{1_G})\Big) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Big(T_{\exp(tX)}\big(R_{\exp(-tX)}\big)\big(Y^{\mathrm{L}}_{\exp(tX)}\big)\Big)
\end{aligned}$$

ここで，命題 2.6-(6) より $X^{\mathrm{L}} \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ が生成するフローが $\theta_t(g) = R_{\exp(tX)}(g)$ と書かれることを思い出すと，

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Big(T_{\exp(tX)}\big(R_{\exp(-tX)}\big)\big(Y^{\mathrm{L}}_{\exp(tX)}\big)\Big) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} T_{\theta_t(1_G)}\big(\theta_{-t}\big)\big(Y^{\mathrm{L}}_{\theta_t(1_G)}\big) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{T_{\theta_t(1_G)}\big(\theta_{-t}\big)\big(Y^{\mathrm{L}}_{\theta_t(1_G)}\big) - Y^{\mathrm{L}}_{1_G}}{t} \\
&= (\mathcal{L}_{X^{\mathrm{L}}} Y^{\mathrm{L}})_{1_G} \\
&= \big[X^{\mathrm{L}}, Y^{\mathrm{L}}\big]_{1_G} \\
&= [X, Y]
\end{aligned}$$

となる．ただし 3 つ目の等号で Lie 微分の定義を使った．結局

$$\mathrm{ad} \coloneqq T_{1_G}(\mathrm{Ad})\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}),\ X \longmapsto (Y \mapsto [X, Y])$$

であることが分かった．

---

[a] 厳密には Ad の C^∞ 性を示さなくてはならない．証明は [6, p.534, Proposition 20.24] を参照．

【例 2.4.6】一般線型群の随伴表現

$G = \mathrm{GL}(n,\,\mathbb{K})$ としたときの随伴表現を考える．$\mathrm{GL}(n,\,\mathbb{K})$ のチャート $\bigl(\mathrm{GL}(n,\,\mathbb{K}),\,(x^\mu{}_\nu)\bigr)$ をとると $\forall g = \bigl[\,g^\mu{}_\nu\,\bigr]_{1\le\mu,\,\nu\le n} \in \mathrm{GL}(n,\,\mathbb{K})$ に関して C^∞ 写像 $F_g\colon G \longrightarrow G$ は

$$F_g\bigl(\bigl[\,x^\mu{}_\nu\,\bigr]_{1\le\mu,\,\nu\le n}\bigr) = \bigl[\,g^\mu{}_\rho x^\rho{}_\sigma [g^{-1}]^\sigma{}_\nu\,\bigr]_{1\le\mu,\,\nu\le n}$$

と座標表示されるので，$\forall c^\mu{}_\nu \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu{}_\nu}\right|_{\mathbb{1}_n} \in \mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{K})$ の自然基底に関して

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}(g)\left(c^\mu{}_\nu \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu{}_\nu}\right|_{\mathbb{1}_n}\right) &= c^\mu{}_\nu\, T_{\mathbb{1}_n}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu{}_\nu}\right|_{\mathbb{1}_n}\right) \\
&= c^\mu{}_\nu \frac{\partial [F_g]^\rho{}_\sigma}{\partial x^\mu{}_\nu}(\mathbb{1}_n) \left.\frac{\partial}{\partial x^\rho{}_\sigma}\right|_{F_g(\mathbb{1}_n)} \\
&= g^\rho{}_\mu c^\mu{}_\nu [g^{-1}]^\nu{}_\sigma \left.\frac{\partial}{\partial x^\rho{}_\sigma}\right|_{\mathbb{1}_n}
\end{aligned}$$

がわかる．**【例 2.4.4】**の Lie 代数の同型写像 $\alpha\colon \mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{M}(n,\,\mathbb{K})$ を使うと，これは行列の積の意味で

$$\alpha \circ \mathrm{Ad}(g) \circ \alpha^{-1}(X) = gXg^{-1}$$

を意味する．以上の議論は G が $\mathrm{GL}(n,\,\mathbb{K})$ の部分 Lie 群の場合にも成立するが，大抵の場合 Lie 代数の同型写像 α は省略される．

定理 B.2 によって，C^∞ 多様体 M 上の完備なベクトル場 X が Lie 群 $\mathbb{R}$ の M への作用 $\theta\colon \mathbb{R}\times M \longrightarrow M$ を一意に定めることが分かる．そしてこのような状況を指して，ベクトル場 X は Lie 群 $\mathbb{R}$ の作用 θ の無限小生成子であると言うのだった．この考えを任意の Lie 群 G の，任意の M への右作用に拡張することができる．つまり，任意の Lie 群 G の任意の右作用 $\blacktriangleleft\colon M\times G \longrightarrow M$ は，ただ一つの無限小生成子を持つ．

定義 2.11: 基本ベクトル場

Lie 群 G が C^∞ 多様体 M に右から作用しているとする．この右作用を $\blacktriangleleft\colon M \times G \longrightarrow M$ と書く．

- $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して，**基本ベクトル場** (fundamental vector field) $\boldsymbol{X^\#} \in \mathfrak{X}(M)$ を次のように定める：

$$X_x^\# \coloneqq \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \bigl(x \blacktriangleleft \exp(tX)\bigr) \in T_x M$$

- 写像

$$\blacktriangleleft^\#\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(M),\ X \longmapsto X^\#$$

のことを**右作用 $\blacktriangleleft$ の無限小生成子**と呼ぶ．

上の状況下で

- $\forall g \in G$ に対して**右作用移動** $R_g\colon M \longrightarrow M$ を $R_g(x) \coloneqq x \blacktriangleleft g$ と定義する．
- $\forall x \in M$ に対して**右作用軌道** $R^{(x)}\colon G \longrightarrow M$ を $R^{(x)}(g) \coloneqq x \blacktriangleleft g$ と定義する．

$\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して，C^∞ 写像[*32]

$$\theta_{(X)}\colon \mathbb{R} \times M \longrightarrow M,\ (t,\, x) \longmapsto x \blacktriangleleft \exp(tX) = R_{\exp(tX)}(x)$$

は大域的フローである[*33]．この大域的フローの無限小生成子はベクトル場

$$x \longmapsto \bigl(x,\, \dot{\theta}_{(X)}^{(x)}(0)\bigr) = \left(x,\, T_0\bigl(\theta_{(X)}^{(x)}\bigr)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right)\right)$$

であるが[*34]，これがまさに $X^\# \in \mathfrak{X}(M)$ になっている．つまり，基本ベクトル場は $\forall x \in M$ において，$\forall f \in C^\infty(M)$ に

$$X_x^\# f = T_0\bigl(\theta_{(X)}^{(x)}\bigr)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right) f = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \bigl(f \circ \theta_{(X)}^{(x)}\bigr)(t) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f\bigl(x \blacktriangleleft \exp(tX)\bigr)$$

と作用する．

[*32] これは命題 2.6-(6) からの類推だと言える．

[*33] 実際，命題 2.6 から

$$\begin{aligned}
\theta_{(X)}(0,\, x) &= x \blacktriangleleft 1_G = x, \\
\theta_{(X)}(t+s,\, x) &= x \blacktriangleleft \exp\bigl((s+t)X\bigr) \\
&= x \blacktriangleleft \bigl(\exp(sX)\exp(tX)\bigr) \\
&= x \blacktriangleleft \exp(sX) \blacktriangleleft \exp(tX) \\
&= \theta_{(X)}\bigl(t,\, \theta_{(X)}(s,\, x)\bigr)
\end{aligned}$$

が成り立つ．

[*34] 強引に書くと $\theta_{(X)}^{(x)} = R^{(x)} \circ \exp(\text{-}X)\colon \mathbb{R} \longrightarrow M$ と言うことになる．

もしくは，次のように考えることもできる：曲線 $\gamma_{(X)}\colon t \longmapsto \exp(tX)$ は初速度 $\dot{\gamma_{(X)}}(0) = X$ なので，

$$\begin{aligned} T_{1_G}(R^{(x)})(X) &= T_{1_G}(R^{(x)})\bigl(\dot{\gamma_{(X)}}(0)\bigr) \\ &= T_{1_G}(R^{(x)}) \circ T_0(\gamma_{(X)}) \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \right) \\ &= T_0(R^{(x)} \circ \gamma_{(X)}) \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \right) \\ &= T_0(\theta^{(x)}_{(X)}) \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \right) \\ &= X^{\#}_x. \end{aligned} \tag{2.4.10}$$

このことから $\blacktriangleleft^{\#}$ が $\mathbb{R}$-線型写像だとわかる．なお，等式 (2.4.10) は主束の接続形式を調べる際に極めて重要な役割を果たす．

補題 2.1:

Lie 群 G の C^∞ 多様体 M への右作用 $\blacktriangleleft\colon M \times G \longrightarrow M$ を与える．
このとき $\forall x \in M$ および $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して，$X^{\mathrm{L}} \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ とその基本ベクトル場 $X^{\#}$ は $R^{(x)}$-related である

<u>証明</u> $\forall g,\, h \in G$ に対して

$$R^{(x \blacktriangleleft g)}(h) = x \blacktriangleleft g \blacktriangleleft h = x \blacktriangleleft (gh) = x \blacktriangleleft L_g(h) = R^{(x)} \circ L_g(h)$$

が成り立つことに注意する．$\forall g \in G$ をとり，$y \coloneqq R^{(x)}(g) = x \blacktriangleleft g$ とおく．X^{L} が左不変ベクトル場であることから

$$\begin{aligned} X^{\#}_y &= T_{1_G}(R^{(y)})(X) \\ &= T_{1_G}(R^{(x \blacktriangleleft g)})(X^{\mathrm{L}}_{1_G}) \\ &= T_{1_G}(R^{(x)} \circ L_g)(X^{\mathrm{L}}_{1_G}) \\ &= T_{L_g(1_G)}(R^{(x)}) \circ T_{1_G}(L_g)(X^{\mathrm{L}}_{1_G}) \\ &= T_g(R^{(x)})(X^{\mathrm{L}}_g) \end{aligned}$$

が言えた． ■

命題 2.7: $\blacktriangleleft^{\#}$ は Lie 代数の準同型

Lie 群 G の C^∞ 多様体 M への右作用 $\blacktriangleleft\colon M \times G \longrightarrow M$ を与える．このとき右作用 $\blacktriangleleft$ の無限小生成子

$$\blacktriangleleft^{\#}\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(M),\ X \longmapsto X^{\#}$$

は Lie 代数の準同型である．

<u>証明</u> $\forall X,\, Y \in \mathfrak{g}$ をとる．補題 2.1 と Lie ブラケットの自然性から $\forall x \in M$ に対して $\bigl[X^{\mathrm{L}}, Y^{\mathrm{L}}\bigr]$ と $\bigl[X^{\#}, Y^{\#}\bigr]$ が $R^{(x)}$-related だと分かる．i.e.

$$\bigl[X^{\#}, Y^{\#}\bigr]_x = \bigl[X^{\#}, Y^{\#}\bigr]_{R^{(x)}(1_G)} = T_{1_G}(R^{(x)})(\bigl[X^{\mathrm{L}}, Y^{\mathrm{L}}\bigr]_{1_G}) = T_{1_G}(R^{(x)})([X, Y]) = [X, Y]^{\#}_x$$

が言えた． ■

しばらくの間 Lie 群 G（もしくはその部分群）の Lie 代数を $\mathrm{Lie}(G) \coloneqq \mathfrak{g}$ と書くことにする[*35]．

命題 2.8: 基本ベクトル場の零点

Lie 群 G の C^∞ 多様体 M への右作用 $\blacktriangleleft\colon M \times G \longrightarrow M$ を与える．このとき，以下の 2 つは同値である：

(1) $X \in \mathfrak{g}$ の基本ベクトル場 $X^\#$ が点 $x \in M$ において $X^\#_x = 0$ になる
(2) $X \in \mathrm{Lie}\bigl(\mathrm{Stab}(x)\bigr)$

ただし，$\mathrm{Stab}(x) \subset G$ は点 $x \in M$ の安定化部分群[a]である．

[a] つまり，$\mathrm{Stab}(x) \coloneqq \{\, g \in G \mid x \blacktriangleleft g = x \,\}$

<u>証明</u> **(1) $\Longleftarrow$ (2)**

$X \in \mathrm{Lie}\bigl(\mathrm{Stab}(x)\bigr)$ ならば $\forall t \in \mathbb{R}$ に対して $\exp(tX) \in \mathrm{Stab}(x)$ である．従って $x \in M$ の近傍上で定義された任意の C^∞ 関数 f に対して

$$X^\#_x f = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f\bigl(x \blacktriangleleft \exp(tX)\bigr) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(x) = 0.$$

と計算できる[*36]

(1) $\Longrightarrow$ (2)

$X^\#_x = 0$ とする．このとき定数写像 $\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow M,\ t \longmapsto x$ が

$$\dot{\gamma}(t) = 0 = X^\#_{\gamma(t)}$$

を充たすので，初期条件 $\gamma(0) = x$ を充たす $X^\# \in \mathfrak{X}(M)$ の極大積分曲線となる．一方，$\theta^{(x)}_{(X)}\colon \mathbb{R} \longrightarrow M,\ t \longmapsto x \blacktriangleleft \exp(tX)$ もまた同一の初期条件をみたす $X^\#$ の極大積分曲線だったので，その一意性から $\theta^{(x)}_{(X)} = \gamma \iff x \blacktriangleleft \exp(tX) = x \quad \forall t \in \mathbb{R} \iff \exp(tX) \in \mathrm{Stab}(x) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ が言えた．従って $X \in \mathrm{Lie}(\mathrm{Stab}(x))$ である．

■

[*35] 例えば [6] では，$\mathrm{Lie}(G) \coloneqq \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ と定義しているので注意．同型なので然程問題にはならないが...
[*36] $f\bigl(x \blacktriangleleft \exp(tX)\bigr)$ が t に関して定数関数なので．

系 2.3:

Lie 群 G の C^∞ 多様体 M への右作用 $\blacktriangleleft\colon M \times G \longrightarrow M$ を与える．
このとき，$\forall x \in M$ の右作用軌道 $R^{(x)}\colon G \longrightarrow M$ の微分

$$T_{1_G}(R^{(x)})\colon \mathfrak{g} \longrightarrow T_x M$$

に対して

$$\mathrm{Ker}\bigl(T_{1_G}(R^{(x)})\bigr) = \mathrm{Lie}\bigl(\mathrm{Stab}(x)\bigr)$$

が成り立つ．

<u>証明</u> $\forall X \in \mathfrak{g}$ をとる．(2.4.10) と命題 2.8 から

$$\begin{aligned} X \in \mathrm{Ker}\bigl(T_{1_G}(R^{(x)})\bigr) &\iff T_{1_G}(R^{(x)})(X) = 0 \\ &\iff X_x^{\#} = 0 \\ &\iff X \in \mathrm{Lie}\bigl(\mathrm{Stab}(x)\bigr) \end{aligned}$$

■

2.4.3 主束の接続

与えられた C^∞ 多様体 M 上の ***k*-形式** (k-form) とは，外積代数束（これはベクトル束になる）

$$\bigwedge^k T^* M \coloneqq \coprod_{p \in M} \Bigl(\bigwedge^k T_p^* M\Bigr)$$

の C^∞ 切断のことである．k-形式全体の集合を

$$\boldsymbol{\Omega^k(M)} \coloneqq \Gamma\Bigl(\bigwedge^k T^* M\Bigr)$$

と書く．

任意の $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V,\ W$ に関して，自然な $\mathbb{K}$-ベクトル空間の同型

$$\underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{k} \otimes W \cong \Bigl\{\, f\colon \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \longrightarrow W \Bigm| \text{多重線型写像} \,\Bigr\}$$

がある．M を底空間とする任意のベクトル束 $E \xrightarrow{\pi} M$ が与えられたとき，この同型を念頭において，***E* 値 *k*-形式** (E-valued k form) をテンソル積束

$$\Bigl(\bigwedge^k T^* M\Bigr) \otimes E$$

の C^∞ 切断として定義する．E 値 k-形式全体の集合を

$$\boldsymbol{\Omega^k(M;\ E)} \coloneqq \Gamma\Bigl(\Bigl(\bigwedge^k T^* M\Bigr) \otimes E\Bigr)$$

と書く[*37]．特に E があるベクトル空間 V に対して $E = M \times V$ の形をした自明束の場合，代わりに

$$\boldsymbol{\Omega^k(M;\, V)} \coloneqq \Omega^k(M;\, M \times V)$$

と書き，$\boldsymbol{V}$ **値** $\boldsymbol{k}$**-形式**と呼ぶ[*38]．

さて，Lie 群に関する準備が終わったのでいよいよ主束の接続を定義する．この小節の内容は [7, 第 6 章], [8, §28] が詳しい．

定義 2.12: 主束の接続（Ehresmann 接続）

$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ を主束とする．$\forall g \in G$ に対して，命題 2.2 の右作用によって右作用移動を $R_g \colon P \longrightarrow P,\ u \longmapsto u \blacktriangleleft g$ と定義する．

- 分布 $\left\{ H_u \subset T_uP \;\middle|\; u \in P \right\}$ が P 上の**接続** (connection) であるとは，以下の 2 条件が成り立つことを言う：

  (C-1)　$\forall u \in P$ に対して

  $$T_uP = \mathrm{Ker}(T_u\pi) \oplus H_u$$

  (C-2)　$\forall u \in P,\ \forall g \in G$ に対して

  $$T_u(R_g)(H_u) = H_{R_g(u)}$$

  が成り立つ（分布 $\{H_u\}$ は G**-不変**）．

  $\mathrm{Ker}\, T_u(\pi),\ H_u$ をそれぞれ T_uP の**垂直部分空間**, **水平部分空間**と呼ぶ．
- $\mathfrak{g}$ 値 1-形式 $\omega \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$ が**接続形式**であるとは，次の 2 条件を充たすことをいう：

  (CF-1)　$\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して

  $$\omega(X^{\#}) = X$$

  (CF-2)　$\forall g \in G$ に対して

  $$(R_g)^*\omega = \mathrm{Ad}(g^{-1})(\omega)$$

  ただし $\mathrm{Ad} \colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ は Lie 群 G の随伴表現である．

本題に入る前に，微分幾何学の風習への注意をしておく．境界あり/なし C^∞ 多様体 M とその部分多様体 $S \subset M$ を与える．このとき包含写像を $\iota \colon S \hookrightarrow M$ と書くと，$\forall p \in S \subset M$ に対して T_pS を $T_p\iota(T_pS)$ と同一視する[*39] ことで T_pM の部分ベクトル空間と見做すのである [6, p.116]．

さて，主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ において $\forall u \in P$ を 1 つ固定する．$G_{\pi(u)} \coloneqq \pi^{-1}(\{\pi(u)\})$ とおいたとき，$\forall X \in T_uG_{\pi(u)} \subset T_uP$ (i.e. 点 $u \in \boldsymbol{P}$ におけるファイバー方向の接空間）の，$\pi \colon P \longrightarrow M$ の微分による像

---

*37 $\boldsymbol{\Omega^0(M;\, E) = \Gamma(E)}$ に注意．

*38 V が有限次元ベクトル空間ならば，$\Omega^k(M;\, V) \cong \Omega^k(M) \otimes_{\mathbb{R}} V$ が成り立つ．

*39 つまり $\forall v \in T_pS$ は $\forall f \in C^\infty(S)$ に $v(f)$ として作用するが，$v \in T_pS \subset T_pM$ と見做す時は $\forall f \in C^\infty(M)$ に，$\boldsymbol{T_p\iota(v)}f = v(f \circ \iota) = v(f|_S)$ として作用する．

$T_u\pi(X) \in T_{\pi(u)}M$ は，上述の注意より勝手な C^∞ 関数 $f \in C^\infty(M)$ に対して

$$T_u\pi(X)f = X(f \circ \pi|_{G_{\pi(u)}})$$

と作用する．然るに C^∞ 写像 $f \circ \pi|_{G_{\pi(u)}}$ は常に値 $f(\pi(u))$ を返す定数写像なので，$T_u\pi(X)f = 0$ が言える[*40]．i.e. $X \in \operatorname{Ker}(T_u\pi)$ であり，

$$T_uG_{\pi(u)} \subset \operatorname{Ker}(T_u\pi)$$

が言えた．一方，$T_u\pi\colon T_uP \longrightarrow T_{\pi(u)}M$ は明らかに全射なので $\dim \operatorname{Im}(T_u\pi) = \dim T_{\pi(u)}M$ であり，故にファイバー束の局所自明性と階数-退化次元の定理から

$$\dim \operatorname{Ker}(T_u\pi) = \dim T_uP - \dim T_{\pi(u)}M = \dim T_uG_{\pi(u)} = \dim G \tag{2.4.11}$$

が言える．結局

$$T_uG_{\pi(u)} = \operatorname{Ker}(T_u\pi)$$

だと分かった．さらに次の非常に重要な補題がある．この補題のために基本ベクトル場を導入したと言っても過言ではない：

補題 2.2:

$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ を主束とする．命題 2.2 で与えた Lie 群 G の全空間 P への右作用 $\blacktriangleleft\colon P \times G \longrightarrow P$ の無限小生成子 $\blacktriangleleft^{\#}\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(P),\ X \longmapsto X^{\#}$ について，

$$\forall u \in P,\quad \boldsymbol{\operatorname{Ker}(T_u\pi) = \left\{\, X_u^{\#} \in T_uP \;\middle|\; X \in \mathfrak{g} \,\right\}}$$

が成り立つ．

<u>証明</u> $\forall u \in P$ を 1 つ固定する．

$\boldsymbol{\operatorname{Ker}(T_u\pi) \supset \left\{\, X_u^{\#} \in T_uP \;\middle|\; X \in \mathfrak{g} \,\right\}}$

$\forall X \in \mathfrak{g}$ をとる．このとき (2.4.10) より $X_u^{\#} = T_{1_G}(R^{(u)})(X)$ だが，$\pi \circ R^{(u)}$ は定数写像なので

$$\begin{aligned} T_u\pi(X_u^{\#}) &= T_u\pi \circ T_{1_G}(R^{(u)})(X) \\ &= T_{1_G}(\pi \circ R^{(u)})(X) \\ &= 0 \end{aligned}$$

が分かる．i.e. $X_u^{\#} \in \operatorname{Ker}(T_u\pi)$ である．

$\boldsymbol{\operatorname{Ker}(T_u\pi) \subset \left\{\, X_u^{\#} \in T_uP \;\middle|\; X \in \mathfrak{g} \,\right\}}$

まず，$\mathbb{R}$-線型写像

$$T_{1_G}\bigl(R^{(u)}\bigr)\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \operatorname{Ker}(T_u\pi)$$

がベクトル空間の同型写像であることを示す．系 2.3 から $\operatorname{Ker} T_{1_G}\bigl(R^{(u)}\bigr) = \operatorname{Lie}\bigl(\operatorname{Stab}(u)\bigr)$ だが，命題 2.2 より右作用 $\blacktriangleleft$ は自由なので $\operatorname{Stab}(u) = \{1_G\}$ である．従って $\operatorname{Ker} T_{1_G}\bigl(R^{(u)}\bigr) = \{0\}$ であり，

[*40] 定数関数に接ベクトルを作用させると 0 になる：Leibniz 則より，定数関数 $1\colon M \longrightarrow \mathbb{R},\ p \longmapsto 1$ に対して $v(1) = v(1 \cdot 1) = v(1) + v(1) \implies v(1) = 0$．$v$ の線型性から一般の定数関数に対しても 0 になることが言える．

$T_{1_G}\bigl(R^{(u)}\bigr)$ は単射．(2.4.11) より $\dim \mathfrak{g} = \dim G = \dim \mathrm{Ker}(T_u\pi)$ なので $T_{1_G}\bigl(R^{(u)}\bigr)$ はベクトル空間の同型写像である．

以上より，$\forall v \in \mathrm{Ker}(T_u\pi)$ に対して $\bigl(T_{1_G}(R^{(u)})\bigr)^{-1}(v) \in \mathfrak{g}$ であり，(2.4.10) から

$$v = T_{1_G}(R^{(u)})\Bigl(\bigl(T_{1_G}(R^{(u)})\bigr)^{-1}(v)\Bigr) = \Bigl(\bigl(T_{1_G}(R^{(u)})\bigr)^{-1}(v)\Bigr)^{\#}_{u}$$

が言えた．

■

接続の定義は幾何学的イメージがわかりやすいが，計算は絶望的である．幸いにして主束の接続を与えることと，全空間上の接続形式を与えることは同値なのでなんとかなる：

定理 2.4: 接続と接続形式の関係

$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ を主束とする．

(1) $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ が接続形式ならば，分布

$$\bigl\{\, \mathrm{Ker}\,\omega_u \subset T_uP \bigm| u \in P \,\bigr\}$$

は P 上の接続である．

(2) (1) は P 上の接続形式全体の集合から P 上の接続全体の集合への 1 対 1 対応を与える．

証明 (1) $\forall u \in P$ を 1 つ固定する．命題 2.2 で与えた Lie 群 G の全空間 P への右作用 $\blacktriangleleft\colon P \times G \longrightarrow P$ の無限小生成子 $\blacktriangleleft^{\#}\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(P),\ X \longmapsto X^{\#}$ を考える．

(C-1)

接続形式の定義から $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して $\omega(X^{\#}) = X$ が成り立つ．i.e. $\omega_u\colon T_uP \longrightarrow \mathfrak{g}$ は全射であり，$\mathbb{R}$-線型写像の系列[*41]

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\omega_u \xrightarrow{i} T_uP \xrightarrow{\omega_u} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

は短完全列になる．さらにこれは補題 2.2 の証明で与えた線型写像 $T_{1_G}(R^{(u)})\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Ker}(T_u\pi) \subset T_uP$ によって分裂するので

$$T_u \cong \mathfrak{g} \oplus \mathrm{Ker}\,\omega_u \cong \mathrm{Ker}(T_u\pi) \oplus \mathrm{Ker}\,\omega_u$$

がわかる．

(C-2)

$\forall v \in \mathrm{Ker}\,\omega_u$ をとる．このとき **(CF-2)** より $\forall g \in G$ に対して

$$\omega_{u\blacktriangleleft g}\bigl(T_u(R_g)(v)\bigr) = ((R_g)^*\omega)_u(v) = \mathrm{Ad}(g^{-1})\bigl(\omega_u(v)\bigr) = 0$$

が従い，$T_u(R_g)(\mathrm{Ker}\,\omega_u) \subset \mathrm{Ker}\,\omega_{u\blacktriangleleft g}$ が言えた．両辺の次元が等しいので $T_u(R_g)(\mathrm{Ker}\,\omega_u) = \mathrm{Ker}\,\omega_{u\blacktriangleleft g}$ が言えた．

[*41] i は包含準同型なので $\mathrm{Ker}\,\omega_u = \mathrm{Im}\,i$．$\omega_u$ が全射なので $\mathrm{Im}\,\omega_u = \mathfrak{g} = \mathrm{Ker}\,0$．

(2)

(単射性)

接続形式 $\omega, \eta \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ に対して $\{\operatorname{Ker}\omega_u \mid u \in P\} = \{\operatorname{Ker}\eta_u \mid u \in P\}$ が成り立つとする．このとき $\forall u \in P$ に対して $\operatorname{Ker}\omega_u = \operatorname{Ker}\eta_u$ が成り立つ．補題 2.2 および (1) から $T_uP = \operatorname{Ker}(T_u\pi) \oplus \operatorname{Ker}\omega_u = \{X_u^{\#} \mid X \in \mathfrak{g}\} \oplus \operatorname{Ker}\omega_u$ の直和分解があり，$\forall v \in T_uP$ に対して $V \in \mathfrak{g},\ v^H \in \operatorname{Ker}\omega_u = \operatorname{Ker}\eta_u$ が一意的に存在して $v = V_u^{\#} + v^H$ と書ける．よって **(CF-1)** から

$$\omega_u(v) = \omega_u(V_u^{\#}) = V = \eta_u(V_u^{\#}) = \eta_u(v)$$

が分かった．i.e. $\omega_u = \eta_u$ である．u は任意だったので $\omega = \eta$ が言えた．

(全射性)

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ の接続 $\{H_u \subset T_uP \mid u \in P\}$ を与える．$\forall u \in P$ に対して直和分解 $T_uP = \operatorname{Ker}(T_u\pi) \oplus H_u$ の垂直，水平部分空間成分への射影をそれぞれ

$$\begin{aligned} &i_1 \colon T_uP \longrightarrow \operatorname{Ker}(T_u\pi),\ v^V + v^H \longmapsto v^V \\ &i_2 \colon T_uP \longrightarrow H_u,\ v^V + v^H \longmapsto v^H \end{aligned}$$

と書き，$\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ を，$\forall u \in P$ に対して補題 2.2 の証明で与えた同型写像 $T_{1_G}(R^{(u)}) \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \operatorname{Ker}(T_u\pi)$ を用いて

$$\omega_u := \left(T_{1_G}(R^{(u)})\right)^{-1} \circ i_1 \colon T_uP \xrightarrow{i_1} \operatorname{Ker}(T_u\pi) \xrightarrow{\left(T_{1_G}(R^{(u)})\right)^{-1}} \mathfrak{g}$$

と定義する．この ω が **(CF-1)**, **(CF-2)** を充たすことを示す：

(CF-1) $\forall u \in P$ を 1 つ固定する．$\forall X \in \mathfrak{g}$ をとる．補題 2.2 より $X_u^{\#} \in \operatorname{Ker}(T_u\pi)$ だから，(2.4.10) より

$$\begin{aligned} \omega_u(X_u^{\#}) &= \left(T_{1_G}(R^{(u)})\right)^{-1} \circ i_1(X_u^{\#}) \\ &= \left(T_{1_G}(R^{(u)})\right)^{-1}(X_u^{\#}) \\ &= \left(T_{1_G}(R^{(u)})\right)^{-1}\left(T_{1_G}(R^{(u)})(X)\right) \\ &= X \end{aligned} \tag{2.4.12}$$

が言えた．

(CF-2)

$\forall u \in P$ を 1 つ固定する．$\forall g \in G$ をとる．示すべきは $\forall v \in T_uP$ に対して

$$\left((R_g)^*\omega\right)_u(v) = \omega_{R_g(u)}\left(T_u(R_g)(v)\right) = \operatorname{Ad}(g^{-1})\left(\omega_u(v)\right)$$

が成り立つことである．実際 $i_1(v) \in \operatorname{Ker}(T_u\pi)$ に対しては，補題 2.2 からある $V \in \mathfrak{g}$ が一意的に存在して $i_1(v) = V_u^{\#}$ と書けるので

$$\begin{aligned} \omega_{R_g(u)}\Big(T_u(R_g)\big(i_1(v)\big)\Big) &= \omega_{u\blacktriangleleft g}\Big(T_u(R_g)(V_u^{\#})\Big) \\ &= \omega_{u\blacktriangleleft g}\Big(T_u(R_g) \circ T_{1_G}(R^{(u)})(V)\Big) && \because\ (2.4.10) \\ &= \omega_{u\blacktriangleleft g}\Big(T_{1_G}(R_g \circ R^{(u)})(V)\Big) \end{aligned}$$

となるが，$\forall x \in G$ に対して

$$
\begin{aligned}
R_g \circ R^{(u)}(x) &= u \blacktriangleleft x \blacktriangleleft g = u \blacktriangleleft (xg) = u \blacktriangleleft (gg^{-1}xg) \\
&= (u \blacktriangleleft g) \blacktriangleleft (g^{-1}xg) = R^{(u \blacktriangleleft g)} \circ F_{g^{-1}}(x)
\end{aligned}
$$

が成り立つ[*42]ことから

$$
\begin{aligned}
\omega_{u \blacktriangleleft g}\Bigl(T_{1_G}(R_g \circ R^{(u)})(V)\Bigr) &= \omega_{u \blacktriangleleft g}\bigl(T_{F_{g^{-1}}(1_G)}(R^{(u \blacktriangleleft g)}) \circ T_{1_G}(F_{g^{-1}})(V)\bigr) \\
&= \omega_{u \blacktriangleleft g}\bigl(T_{1_G}(R^{(u \blacktriangleleft g)}) \circ \mathrm{Ad}(g^{-1})(V)\bigr) && \because \ \text{Ad の定義} \\
&= \omega_{u \blacktriangleleft g}\Bigl(\bigl(\mathrm{Ad}(g^{-1})(V)\bigr)^{\#}_{u \blacktriangleleft g}\Bigr) && \because \ (2.4.10) \\
&= \bigl(T_{1_G}(R^{(u \blacktriangleleft g)})\bigr)^{-1} \circ T_{1_G}(R^{(u \blacktriangleleft g)}) \circ \mathrm{Ad}(g^{-1})(V) && \because \ (2.4.12) \\
&= \mathrm{Ad}(g^{-1})(V) \\
&= \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega_u(V^{\#}_u) && \because \ (2.4.12) \\
&= \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega_u\bigl(i_1(v)\bigr)
\end{aligned}
$$

が言える．$i_2(v) \in H_u$ に関しては，**(C-2)** から $T_u(R_g)\bigl(i_2(v)\bigr) \in H_{u \blacktriangleleft g}$ なので

$$
\begin{aligned}
\omega_{R_g(u)}\Bigl(T_u(R_g)\bigl(i_2(v)\bigr)\Bigr) &= \bigl(T_{1_G}(R^{(u \blacktriangleleft g)})\bigr)^{-1} \circ i_1\Bigl(T_u(R_g)\bigl(i_2(v)\bigr)\Bigr) \\
&= 0 \\
&= \mathrm{Ad}(g^{-1})\Bigl(\omega_u\bigl(i_2(v)\bigr)\Bigr)
\end{aligned}
$$

が言える．$v = i_1(v) + i_2(v)$ なので証明が完了した．

■

2.4.4 同伴ベクトル束上の共変微分

定義 2.13: tensorial form

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$
- 有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 V
- Lie 群 G の有限次元表現 $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$

を与える．$\forall g \in G$ に対して，命題 2.2 の右作用によって右作用移動を $R_g\colon P \longrightarrow P,\ u \longmapsto u \blacktriangleleft g$ と定義する．全空間 P 上の V-値 k 形式 $\phi \in \Omega^k(P;\,V)$ を与える．

- ϕ が**水平** (horizontal) であるとは，$\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して

$$
i_{X^{\#}}(\phi) = 0
$$

[*42] 記号は【例 **2.4.5**】を参照

が成り立つことを言う[a].

- ϕ が **ρ 型の右同変**[b] (right equivalent of type ρ) であるとは，$\forall g \in G$ に対して

$$(R_g)^* \phi = \rho(g^{-1})(\phi)$$

が成り立つことを言う．

- ϕ が **ρ 型の tensorial k-form** (tensorial form of type ρ) であるとは，ϕ が水平かつ ρ 型の右同変であることを言う．

[a] $i_{X^\#} \colon \Omega^k(P;\, V) \longrightarrow \Omega^{k-1}(P;\, V)$ は微分形式の**内部積** (interior product) である．

[b] equivalent の訳語には**同変**があてられることが多い．何かしらの群作用を考えると言う意味があるようだ：http://pantodon.jp/index.rb?body=equivariant_topology

ρ 型の tensorial k-form 全体がなす $\mathbb{K}$-ベクトル空間を $\boldsymbol{\Omega^k_\rho(P;\, V)}$ と書く．

補題 2.1 より，$\phi \in \Omega^k(P;\, V)$ が水平であることは任意の k-個の C^∞ ベクトル場 $X_1,\, \dots,\, X_k \in \mathfrak{X}(P)$ に対して

$$\exists l \text{ s.t. } X_l \text{ が垂直} \implies \phi(X_1,\, \dots,\, X_k) = 0$$

が成り立つことと同値である．また，P 上の任意の 0-形式は引数を持たないので，自動的に水平ということになる．

補題 2.3: 同伴ベクトル束のファイバーの構造

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$
- 有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 V
- Lie 群 G の有限次元表現 $\rho \colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$
- 主束 P の同伴ベクトル束 $V \hookrightarrow P \times_\rho V \xrightarrow{q} M$

を与える．このとき，$\forall u \in P$ に対して $\mathbb{K}$-線型写像

$$f_u \colon V \longrightarrow q^{-1}(\{\pi(u)\}),\ v \longmapsto u \times_\rho v$$

はベクトル空間の同型写像である．

<u>**証明**</u> $v,\, w \in V$ について $u \times_\rho v = u \times_\rho w$ とする．このとき $\times_\rho$ の定義から，ある $g \in G$ が存在して $(u,\, w) = (u \blacktriangleleft g,\, g^{-1} \blacktriangleright v)$ とかける．右作用 $\blacktriangleleft$ は自由なので $u = u \blacktriangleleft g \implies g = 1_G$ が言える．従って $w = 1_G^{-1} \blacktriangleright v = v$ が言えた．i.e. f_u は単射である．

$\forall x \times_\rho w \in (P \times_\rho V)_{\pi(u)}$ を 1 つとる．このとき $x \in \pi^{-1}(\{\pi(u)\})$ でもあるので，ある $g \in G$ が存在して $x = u \blacktriangleleft g$ と書ける．従って

$$x \times_\rho w = (u \blacktriangleleft g) \times_\rho w = u \times_\rho g \blacktriangleright w = f_u(g \blacktriangleright w)$$

だとわかる．i.e. f_u は全射である． ■

命題 2.3 を思い出すと，主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ の開被覆，局所自明化，変換関数をそれぞれ

$\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, $\{\varphi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G\}_{\alpha\in\Lambda}$, $\{t_{\alpha\beta}\colon M \longrightarrow G\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$ とおき，P の局所切断の族

$$\{s_\alpha\colon U_\alpha \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha),\ x \longmapsto \varphi_\alpha^{-1}(x,\,1_G)\}_{\alpha\in\Lambda} \tag{2.4.13}$$

を与えてから，同伴ベクトル束 $V \hookrightarrow P \times_\rho V \xrightarrow{q} M$ の局所自明化を

$$\{\psi_\alpha\colon q^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times V,\ s_\alpha(x) \times_\rho v \longmapsto (x,\,v)\}_{\alpha\in\Lambda} \tag{2.4.14}$$

として定義するのだった．

命題 2.9: tensorial form と同伴ベクトル束上の微分形式の対応

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$
- 有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 V
- Lie 群 G の有限次元表現 $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$
- 主束 P の同伴ベクトル束 $V \hookrightarrow P \times_\rho V \xrightarrow{q} M$

を与える．$\forall \phi \in \Omega^k(M;\,P\times_\rho V)$ に対して $\phi^\sharp \in \Omega^k(P;\,V)$ を

$$\phi^\sharp\colon u \longmapsto f_u^{-1} \circ \pi^*\phi|_u$$

と定義する．また，$\forall \psi \in \Omega^k_\rho(P;\,V)$ に対して $\psi^\flat \in \Omega^k(M;\,P\times_\rho V)$ を，$\forall x \in M$，$\forall w_1,\,\dots,\,w_k \in T_xM$ に対して次のように定義する：

$$\psi^\flat|_x(w_1,\,\dots,\,w_k) \coloneqq u \times_\rho \psi_u(v_1,\,\dots,\,v_k) \tag{2.4.15}$$

ただし $u \in \pi^{-1}(\{x\})$ および $v_i \in (T_u\pi)^{-1}(\{w_i\})$ は任意にとって良い．

(1) $\phi^\sharp \in \Omega^k_\rho(P;\,V)$ である．

(2) 写像

$$\sharp\colon \Omega^k(M;\,P\times_\rho V) \longrightarrow \Omega^k_\rho(P;\,V),\ \phi \longmapsto \phi^\sharp$$

はベクトル空間の同型写像であり，その逆写像は

$$\flat\colon \Omega^k_\rho(P;\,V) \longrightarrow \Omega^k(M;\,P\times_\rho V),\ \psi \longmapsto \psi^\flat$$

である．

(3) $\forall s \in \Omega^k(M)$, $\forall \eta \in \Omega^l(M;\,P\times_\rho V)$ に対して

$$\sharp(s \wedge \eta) = (\pi^* s) \wedge \sharp\eta$$

が成り立つ．

(4) $\forall \phi \in \Omega^k(M;\,P\times_\rho V)$ に対して

$$\mathrm{proj}_2 \circ \psi_\alpha \circ \phi = s_\alpha^*(\phi^\sharp) \in \Omega^k(U_\alpha;\,V)$$

が成り立つ．ただし $\psi_\alpha\colon q^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times V$ は (2.4.14) で定義された局所自明化，$s_\alpha\colon M \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$ は (2.4.13) で定義された局所切断とする．

証明 $\forall \phi \in \Omega^k(M;\, P\times_\rho V)$ を 1 つ固定する．

(1) $\phi^\sharp$ が ρ 型の tensorial k-form であることを示す．

$\phi^\sharp$ が水平であること

$\forall u \in P$ を 1 つ固定すると，$\forall X \in \mathfrak{g}$ および $\forall v_2, \dots, v_k \in T_uP$ に対して

$$\begin{aligned}\bigl(i_{X^\#}(\phi^\sharp)\bigr)_u(v_2,\,\dots,\,v_k) &= f_u^{-1}\circ(\pi^*\phi)_u(X_u^\#,\,v_2,\,\dots,\,v_k)\\ &= f_u^{-1}\Bigl(\phi_u\bigl(T_u\pi(X_u^\#),\,T_u\pi(v_2),\,\dots,\,T_u\pi(v_k)\bigr)\Bigr)\\ &= f_u^{-1}\Bigl(\phi_u\bigl(0,\,T_u\pi(v_2),\,\dots,\,T_u\pi(v_k)\bigr)\Bigr) && \because\ \text{補題 } 2.2\end{aligned}$$

が成り立つが，ϕ_u は多重線型写像なので最右辺は 0 になる．よって $i_{X^\#}(\phi^\sharp) = 0$ が言えた．

$\phi^\sharp$ が ρ-型の右同変であること

$\forall u \in P$ を 1 つ固定し，$\forall v_1, v_2, \dots, v_k \in T_uP$ をとる．右作用移動の定義を思い出すと $\forall g \in G$ に対して $\pi\circ R_g = \pi$ が成り立つので

$$\begin{aligned}&\bigl((R_g)^*\phi^\sharp\bigr)_u(v_1,\,\dots,\,v_k)\\ &= (\phi^\sharp)_{R_g(u)}\bigl(T_u(R_g)(v_1),\,\dots,\,T_u(R_g)(v_k)\bigr)\\ &= f_{u\blacktriangleleft g}^{-1}\Bigl(\phi_{\pi(u\blacktriangleleft g)}\bigl(T_{u\blacktriangleleft g}\pi\circ T_u(R_g)(v_1),\,\dots,\,T_{u\blacktriangleleft g}\pi\circ T_u(R_g)(v_k)\bigr)\Bigr)\\ &= f_{u\blacktriangleleft g}^{-1}\Bigl(\phi_{\pi(u)}\bigl(T_u(\pi\circ R_g)(v_1),\,\dots,\,T_u(\pi\circ R_g)(v_k)\bigr)\Bigr)\\ &= f_{u\blacktriangleleft g}^{-1}\Bigl(\phi_{\pi(u)}\bigl(T_u\pi(v_1),\,\dots,\,T_u\pi(v_k)\bigr)\Bigr)\\ &= f_{u\blacktriangleleft g}^{-1}\bigl((\pi^*\phi)_u(v_1,\,\dots,\,v_k)\bigr)\\ &= f_{u\blacktriangleleft g}^{-1}\bigl(f_u\circ f_u^{-1}\circ(\pi^*\phi)_u(v_1,\,\dots,\,v_k)\bigr)\\ &= f_{u\blacktriangleleft g}^{-1}\Bigl(f_u\bigl(\phi_u^\sharp(v_1,\,\dots,\,v_k)\bigr)\Bigr) && \because\ \phi^\sharp\text{ の定義}\\ &= f_{u\blacktriangleleft g}^{-1}\bigl(u\times_\rho \phi_u^\sharp(v_1,\,\dots,\,v_k)\bigr) && \because\ f_u\text{ の定義}\\ &= f_{u\blacktriangleleft g}^{-1}\Bigl((u\blacktriangleleft g)\times_\rho \rho(g)^{-1}\bigl(\phi_u^\sharp(v_1,\,\dots,\,v_k)\bigr)\Bigr) && \because\ \times_\rho\text{ の定義}\\ &= \rho(g^{-1})\bigl(\phi_u^\sharp(v_1,\,\dots,\,v_k)\bigr) && \because\ f_u\text{ の定義}\end{aligned}$$

i.e. $(R_g)^*\phi^\sharp = \rho(g^{-1})(\phi^\sharp)$ が言えた．

(2) $\mathbb{K}$-線型写像 $\sharp\colon \Omega^k(M;\, P\times_\rho V) \longrightarrow \Omega^k_\rho(P;\, V)$ がベクトル空間の同型写像であることを示す．

$\sharp$ の単射性

$\phi, \eta \in \Omega^k(M;\, P\times_\rho V)$ に対して $\phi^\sharp = \eta^\sharp$ が成り立つとする．このとき $\forall u \in P$ を 1 つ固定すると，f_u は全単射なので $(\pi^*\phi)_u = (\pi^*\eta)_u$ が言える．i.e. $\forall v_1, \dots, v_k \in T_uP$ に対して

$$0 = \bigl(\pi^*(\phi - \eta)\bigr)_u(v_1,\,\dots,\,v_k) = (\phi_{\pi(u)} - \eta_{\pi(u)})\bigl(T_u\pi(v_1),\,\dots,\,T_u\pi(v_k)\bigr)$$

が成り立つ．$T_u\pi\colon T_uP \longrightarrow T_{\pi(u)}M$ は全射なので $\phi - \eta = 0 \iff \phi = \eta$ が言えた．

$\sharp$ の全射性

$\forall \psi \in \Omega^k_\rho(P;\, V)$ を 1 つ固定する．まず，$\psi^\flat \in \Omega^k(M;\, P\times_\rho V)$ が well-defined であることを示す．そのためには $\forall x \in M$, $\forall w_1, \dots, w_k \in T_xM$ を固定し，(2.4.15) の右辺が $u \in \pi^{-1}(\{x\})$ および $v_i \in (T_u\pi)^{-1}(\{w_i\})$ の取り方によらずに定まることを示せば良い．

$\psi^\flat$ は well-defined

まず $u \in \pi^{-1}(\{x\})$ を 1 つ固定する．このとき $v_i,\ v'_i \in (T_u\pi)^{-1}(\{w_i\})$ に対して $v'_i - v_i \in \mathrm{Ker}(T_u\pi)$ なので，$\psi \in \Omega^k_\rho(P;\ V)$ が水平であることおよび ψ_u の多重線型性から

$$\begin{aligned}\psi_u(v'_1,\ \ldots,\ v'_k) &= \psi_u\bigl(v_1 + (v'_1 - v_1),\ \ldots,\ v_k + (v'_k - v_k)\bigr)\\ &= \psi_u(v_1,\ \ldots,\ v_k) + (\text{少なくとも 1 つの } i \text{ について引数が } v'_i - v_i)\\ &= \psi_u(v_1,\ \ldots,\ v_k)\end{aligned}$$

が言える．i.e. ψ_u は v_i の取り方によらない．

次に，他の $u' \in \pi^{-1}(\{x\})$ をとる．このときある $h \in G$ が存在して $u' \blacktriangleleft h = u$ となる．[*43] $T_{u\blacktriangleleft h}\pi \circ T_u(R_h)(v_i) = T_u\pi(v_i) = w_i$ かつ ψ が v_i の取り方によらないこと，および ψ の右同変性を使うと

$$\begin{aligned}\psi_{u'}(v_1,\ \ldots,\ v_k) &= \psi_{u\blacktriangleleft h}\bigl(T_u(R_h)(v_1),\ \ldots,\ T_u(R_h)(v_k)\bigr)\\ &= \bigl((R_h)^*\psi\bigr)_u(v_1,\ \ldots,\ v_k)\\ &= \rho(h^{-1})\bigl(\psi_u(v_1,\ \ldots,\ v_k)\bigr)\end{aligned}$$

だとわかるので，$\times_\rho$ の定義から

$$\begin{aligned}u' \times_\rho \psi_{u'}(v_1,\ \ldots,\ v_k) &= u' \times_\rho \rho(h^{-1})\bigl(\psi_u(v_1,\ \ldots,\ v_k)\bigr)\\ &= (u' \blacktriangleleft h) \times_\rho \rho(h) \circ \rho(h^{-1})\bigl(\psi_u(v_1,\ \ldots,\ v_k)\bigr)\\ &= u \times_\rho \psi_u(v_1,\ \ldots,\ v_k)\end{aligned}$$

が言える．i.e. $\psi^\flat|_x$ は $u \in \pi^{-1}(\{x\})$ の取り方にもよらない．

f_u の定義および ϕ_x の well-definedness から，

$$\begin{aligned}&f_u\bigl(\psi_u(v_1,\ \ldots,\ v_k)\bigr) = \psi^\flat|_{\pi(u)}(w_1,\ \ldots,\ w_k) = \pi^*(\psi^\flat)|_u(v_1,\ \ldots,\ v_k)\\ \iff\ &\psi_u = f_u^{-1} \circ \pi^*(\psi^\flat)|_u = (\psi^\flat)^\sharp|_u\end{aligned}$$

i.e. $\psi = (\psi^\flat)^\sharp$ が言えた．

(3) $\forall u \in P$ および $\forall v_1,\ \ldots,\ v_{k+l} \in T_uP$ に対して

$$\begin{aligned}&\sharp(s \wedge \eta)_u(v_1,\ \ldots,\ v_{k+l})\\ &= f_u^{-1} \circ \bigl(\pi^*(s \wedge \eta)\bigr)_u(v_1,\ \ldots,\ v_{k+l})\\ &= f_u^{-1}\Bigl((\pi^*s \wedge \pi^*\eta)_u(v_1,\ \ldots,\ v_{k+l})\Bigr)\\ &= f_u^{-1}\left(\frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \operatorname{sgn}\sigma\ \underbrace{(\pi^*s)_u(v_{\sigma(1)},\ \ldots,\ v_{\sigma(k)})}_{\in \mathbb{K}} \otimes (\pi^*\eta)_u(v_{\sigma(k+1)},\ \ldots,\ v_{\sigma(k+l)})\right)\\ &= \frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \operatorname{sgn}\sigma\ (\pi^*s)_u(v_{\sigma(1)},\ \ldots,\ v_{\sigma(k)}) f_u^{-1}\bigl((\pi^*\eta)_u(v_{\sigma(k+1)},\ \ldots,\ v_{\sigma(k+l)})\bigr)\\ &= \bigl((\pi^*s) \wedge \sharp\eta\bigr)_u(v_1,\ \ldots,\ v_{k+l})\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし最後から 2 番目の等号では f_u^{-1} の $\mathbb{K}$-線型性を使った．

[*43] $x \in U_\alpha \subset M$ に対する P の局所自明化 φ_α について $g' := \mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\alpha(u')$，$g := \mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\alpha(u)$ とおけば，$h := g'^{-1}g \in G$ に対して $u' \blacktriangleleft h = u$ となる．

(4) $\forall x \in U_\alpha,\ \forall w_1, \dots, w_k \in T_x M$ に対して

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{proj}_2 \circ \psi_\alpha \circ \phi)_x(w_1, \dots, w_k) \\
&= f_{s_\alpha(x)}^{-1}\bigl(\phi_x(w_1, \dots, w_k)\bigr) && \because\ f_{s_\alpha(x)}\ \text{の定義} \\
&= f_{s_\alpha(x)}^{-1}\Bigl(\phi_x\bigl(T_x(\pi \circ s_\alpha)(w_1), \dots, T_x(\pi \circ s_\alpha)(w_k)\bigr)\Bigr) && \because\ \pi \circ s_\alpha = \mathrm{id}_{U_\alpha} \\
&= f_{s_\alpha(x)}^{-1}\Bigl(\phi_x\bigl(T_{s_\alpha(x)}\pi \circ T_x(s_\alpha)(w_1), \dots, T_{s_\alpha(x)}\pi \circ T_x(s_\alpha)(w_k)\bigr)\Bigr) \\
&= f_{s_\alpha(x)}^{-1} \circ (\pi^*\phi)_{s_\alpha(x)}\bigl(T_x(s_\alpha)(w_1), \dots, T_x(s_\alpha)(w_k)\bigr) \\
&= (\phi^\sharp)_{s_\alpha(x)}\bigl(T_x(s_\alpha)(w_1), \dots, T_x(s_\alpha)(w_k)\bigr) && \because\ \phi^\sharp\ \text{の定義} \\
&= \bigl(s_\alpha^*(\phi^\sharp)\bigr)_x(w_1, \dots, w_k)
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

■

定義 2.14: ベクトル束上の接続

$V \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ をベクトル束とする.

- ベクトル束 E 上の**接続** (connection) とは，$\mathbb{K}$-線型写像

$$\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{E}} \colon \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(M;\, E)$$

  であって，$\forall f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M),\ \forall s \in \Gamma(E) = \Omega^0(M;\, E)$ に対して Leibniz 則

$$\nabla^E(fs) = \mathrm{d}f \otimes s + f\nabla^E s$$

  を充たすもののこと.
- $X \in \Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$ に対して定まる $\mathbb{K}$-線型写像

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{X}} \colon \Gamma(E) &\longrightarrow \Gamma(E), \\
s &\longmapsto (\nabla^E s)(X)
\end{aligned}
$$

  のことを ***X* に沿った共変微分** (covariant derivative along X) と呼ぶ.
- $\forall \omega \in \Omega^\bullet(M),\ \forall s \in \Gamma(E)$ に対して

$$\mathrm{d}^{\nabla^E}(\omega \otimes s) \coloneqq \mathrm{d}\omega \otimes s + (-1)^{\deg \omega}\omega \wedge \nabla^E s$$

  と定義することで定まる写像

$$\mathbf{d}^{\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{E}}} \colon \Omega^\bullet(M;\, E) \longrightarrow \Omega^{\bullet+1}(M;\, E)$$

  のことを**共変外微分** (exterior covariant derivative) と呼ぶ.

【例 2.4.3】を思い出すと，主束に与えられた接続形式が自然に同伴ベクトル束上の接続と結び付くような気がしてくる．実際それは正しい [7, p.150, 命題 6.3.3]：

定理 2.5: 同伴ベクトル束上の接続

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$
- 接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$
- 有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 V と Lie 群 G の $\dim V$ 次元表現 $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$
- 同伴ベクトル束 $V \hookrightarrow P \times_\rho V \xrightarrow{q} M$

を与える．$\rho_* := T_{1_G}\rho\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ を ρ の微分表現とする．このとき，次が成り立つ：

(1)

$$\big(\mathrm{d} + \rho_*(\omega)\wedge\big)\Omega^k_\rho(P;\, V) \subset \Omega^{k+1}_\rho(P;\, V)$$

(2) $E := P \times_\rho V$ とおく．命題 2.9 で定めた同型写像 $\sharp\colon \Omega^k(M;\, E) \longrightarrow \Omega^k_\rho(P;\, V)$ を用いて定義した写像

$$\nabla^E := \sharp^{-1} \circ \big(\mathrm{d} + \rho_*(\omega)\big) \circ \sharp\colon \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(M;\, E)$$

はベクトル束 E 上の接続である．

(3) (2.4.14) によって定義された局所自明化 $\psi_\alpha\colon E|_{U_\alpha} \longrightarrow U_\alpha \times V$ に対して

$$\mathrm{proj}_2 \circ \psi_\alpha \circ \nabla^E = \mathrm{d} + \rho_*(s_\alpha^*\omega)$$

とかける．

(4) (2) の接続について共変外微分 $\mathrm{d}^{\nabla^E}\colon \Omega^k(M;\, E) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M;\, E)$ を考えると，以下の図式が可換になる：

$$\begin{tikzcd}
\Omega^k(M;\, E) \arrow[r, "\mathrm{d}^{\nabla^E}"] \arrow[d, "\sharp"'] & \Omega^{k+1}(M;\, E) \arrow[d, "\sharp"] \\
\Omega^k_\rho(P;\, V) \arrow[r, "\mathrm{d}+\rho_*(\omega)\wedge"'] & \Omega^{k+1}_\rho(P;\, V)
\end{tikzcd}$$

!

$\omega \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$, $\tilde{s} \in \Omega^k(P;\, V)$ に対して $\rho_*(\omega) \wedge \tilde{s} \in \Omega^{k+1}(P;\, V)$ の意味するところは，**通常の $\wedge$ とは微妙に異なる**ことに注意．正確には $\forall X_1,\, \dots,\, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(P)$ に対して

$$\big(\rho_*(\omega) \wedge \tilde{s}\big)(X_1,\, \dots,\, X_{k+1}) := \frac{1}{1!k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+1}} \operatorname{sgn}\sigma\, \underbrace{\rho_*\big(\omega(X_{\sigma(1)})\big)}_{\in \mathfrak{gl}(V)} \underbrace{\big(\tilde{s}(X_{\sigma(2)},\, \dots,\, X_{\sigma(k+1)})\big)}_{\in V}$$

として新しく定義したものである．

証明 (1) $\forall \tilde{s} \in \Omega^k_\rho(P;\, V)$ を 1 つ固定する．

$\big(\mathrm{d} + \rho_*(\omega)\wedge\big)\tilde{s}$ が水平

$\forall X \in \mathfrak{g}$ を 1 つとる．基本ベクトル場 $X^\# \in \Gamma(P)$ が生成するフローは $\theta\colon \mathbb{R} \times M \longrightarrow$

$M,\ (t,\ u) \longmapsto R_{\exp(tX)}(u)$ だったので，Lie 微分の定義から

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{X^\#}\tilde{s} &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (R_{\exp(tX)})^*\tilde{s} \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho\bigl(\exp(tX)^{-1}\bigr)(\tilde{s}) && \because\ \ \tilde{s}\ \text{の右同変性} \\ &= \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho\bigl(\exp(-tX)\bigr)\right)\tilde{s} \\ &= -T_{1_G}\rho(X)(\tilde{s}) \\ &= -\rho_*(X)(\tilde{s})\end{aligned}$$

がわかる．従って Lie 微分の公式 (Cartan magic formula) から

$$\begin{aligned}i_{X^\#}\Bigl(\bigl(\mathrm{d}+\rho_*(\omega)\wedge\bigr)\tilde{s}\Bigr) &= i_{X^\#}(\mathrm{d}\tilde{s}) + i_{X^\#}\bigl(\rho_*(\omega)\bigr)\wedge\tilde{s} + (-1)^{\deg\omega}\rho_*(\omega)\wedge\cancel{i_{X^\#}(\tilde{s})} \\ &= \mathcal{L}_{X^\#}\tilde{s} - \mathrm{d}\bigl(\cancel{i_{X^\#}(\tilde{s})}\bigr) + \rho_*\bigl(i_{X^\#}(\omega)\bigr)\wedge\tilde{s} \\ &= -\rho_*(X)(\tilde{s}) + \rho_*(X)(\tilde{s}) \\ &= 0\end{aligned}$$

が言える．

$\bigl(\mathrm{d}+\rho_*(\omega)\wedge\bigr)\tilde{s}$ が右同変

$\forall g \in G$ をとる．$\rho_*\bigl(\mathrm{Ad}(g^{-1})(\omega)\bigr) = \rho(g^{-1})\circ\rho_*(\omega)\circ\rho(g)$ なので[*44]

$$\begin{aligned}(R_g)^*\Bigl(\bigl(\mathrm{d}+\rho_*(\omega)\wedge\bigr)\tilde{s}\Bigr) &= (R_g)^*\mathrm{d}\tilde{s} + (R_g)^*\bigl(\rho_*(\omega)\wedge\tilde{s}\bigr) \\ &= \mathrm{d}\bigl((R_g)^*\tilde{s}\bigr) + \rho_*\bigl((R_g)^*\omega\bigr)\wedge(R_g)^*\tilde{s} \\ &= \mathrm{d}\bigl(\rho(g^{-1})\tilde{s}\bigr) + \rho_*\bigl(\mathrm{Ad}(g^{-1})(\omega)\bigr)\wedge\rho(g^{-1})\tilde{s} \\ &= \rho(g^{-1})\Bigl(\bigl(\mathrm{d}+\rho_*(\omega)\wedge\bigr)\tilde{s}\Bigr)\end{aligned}$$

が言える．

(2) $\forall f \in C^\infty(M),\ \forall s \in \Gamma(E) = \Omega^0(M;\ E)$ に対して Leibniz 則が成り立つことを示す．外微分と引き戻

[*44] 【例 2.10】と大体同じ議論をすれば良い：$\forall X \in \mathfrak{g}$ をとる．このとき命題 2.6-(2) より C^∞ 曲線 $\gamma\colon t \longmapsto \exp(tX)$ は X が生成する 1 パラメータ部分群なので，

$$\begin{aligned}\rho_*\bigl(\mathrm{Ad}(g^{-1})(X)\bigr) &= T_{1_G}\rho\Bigl(\mathrm{Ad}(g^{-1})\bigl(\dot{\gamma}(0)\bigr)\Bigr) \\ &= T_{1_G}\rho\circ T_{1_G}(F_{g^{-1}})\circ T_0\gamma\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right) \\ &= T_0(\rho\circ F_{g^{-1}}\circ\gamma)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right) \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\rho\bigl(g^{-1}\exp(tX)g\bigr) \\ &= \rho(g^{-1})\circ\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\Bigl(\rho\bigl(\exp(tX)\bigr)\Bigr)\circ\rho(g) \\ &= \rho(g^{-1})\circ\rho_*(X)\circ\rho(g)\end{aligned}$$

ただし最後から 2 番目の等号では $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ が Lie 群の準同型であることを使った．ω は $\mathfrak{g}$ に値を取るので示された．

しが可換であることに注意すると

$$
\begin{aligned}
\nabla^E(fs) &= \sharp^{-1}\circ\Bigl(\mathrm{d}\bigl(\sharp(fs)\bigr)+\rho_*(\omega)\bigl(\sharp(fs)\bigr)\Bigr) \\
&= \sharp^{-1}\circ\Bigl(\mathrm{d}\bigl((\pi^*f)\,\sharp s\bigr)+\rho_*(\omega)\bigl((\pi^*f)\,\sharp s\bigr)\Bigr) && \because\quad \text{命題 2.9-(3)} \\
&= \sharp^{-1}\circ\Bigl(\mathrm{d}(\pi^*f)\otimes\sharp s+(\pi^*f)\;\mathrm{d}(\sharp s)+(\pi^*f)\,\rho_*(\omega)(\sharp s)\Bigr) \\
&= \sharp^{-1}\circ\Bigl(\pi^*(\mathrm{d}f)\otimes\sharp s+(\pi^*f)\,\bigl(\mathrm{d}+\rho_*(\omega)\bigr)(\sharp s)\Bigr) \\
&= \sharp^{-1}\circ\Bigl(\sharp(\mathrm{d}f\otimes s)+(\pi^*f)\,\sharp\bigl(\nabla^E(s)\bigr)\Bigr) && \because\quad \text{命題 2.9-(3)} \\
&= \mathrm{d}f\otimes s+f\nabla^E s && \because\quad \text{命題 2.9-(3)}
\end{aligned}
$$

が言えた．

(3) $\forall s\in\Gamma(E)$ に対して，命題 2.9-(4) より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{proj}_2\circ\psi_\alpha\circ(\nabla^E s) &= s_\alpha^*\bigl(\sharp(\nabla^E s)\bigr) \\
&= s_\alpha^*\Bigl(\bigl(\mathrm{d}+\rho_*(\omega)\bigr)(\sharp s)\Bigr) \\
&= s_\alpha^*\bigl(\mathrm{d}(\sharp s)\bigr)+s_\alpha^*\bigl(\rho_*(\omega)(\sharp s)\bigr) \\
&= \mathrm{d}\bigl(s_\alpha^*(\sharp s)\bigr)+\rho_*\bigl(s_\alpha^*\omega\bigr)\bigl(s_\alpha^*(\sharp s)\bigr) \\
&= \bigl(\mathrm{d}+\rho_*(s_\alpha^*\omega)\bigr)s_\alpha^*(\sharp s) \\
&= \bigl(\mathrm{d}+\rho_*(s_\alpha^*\omega)\bigr)\bigl(\mathrm{proj}_2\circ\psi_\alpha(s)\bigr)
\end{aligned}
$$

が言える．

(4) $\forall s\in\Omega^k(M;\,E)$ をとる．局所自明化 $\psi_\alpha\colon E|_{U_\alpha}\longrightarrow U_\alpha\times V$ について，命題 2.9-(4) より

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{proj}_2\circ\psi_\alpha\circ\bigl(\sharp^{-1}\circ(\mathrm{d}+\rho_*(\omega)\wedge)\circ\sharp(s)\bigr) \\
&= s_\alpha^*\bigl((\mathrm{d}+\rho_*(\omega)\wedge)(\sharp s)\bigr) \\
&= s_\alpha^*\bigl(\mathrm{d}(\sharp s)\bigr)+s_\alpha^*\bigl(\rho_*(\omega)\wedge\sharp s\bigr) \\
&= \mathrm{d}\bigl(s_\alpha^*(\sharp s)\bigr)+\rho_*\bigl(s_\alpha^*(\omega)\bigr)\wedge s_\alpha^*(\sharp s) \\
&= \bigl(\mathrm{d}+\rho_*(s_\alpha^*\omega)\wedge\bigr)s_\alpha^*(\sharp s) \\
&= \bigl(\mathrm{d}+\rho_*(s_\alpha^*\omega)\wedge\bigr)\bigl(\mathrm{proj}_2\circ\psi_\alpha(s)\bigr)
\end{aligned}
$$

が言える．また，$\forall s\in\Omega^k(M)$, $\forall t\in\Gamma(E)$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{proj}_2\circ\psi_\alpha\bigl(\mathrm{d}s\otimes t+(-1)^{\deg s}s\wedge\nabla^E t\bigr) \\
&= s_\alpha^*\bigl(\sharp(\mathrm{d}s\otimes t)\bigr)+(-1)^{\deg s}s_\alpha^*\bigl(\sharp(s\wedge\nabla^E t)\bigr) \\
&= s_\alpha^*\bigl(\pi^*(\mathrm{d}s)\otimes\sharp t\bigr)+(-1)^{\deg s}s_\alpha^*\bigl(\pi^*(s)\wedge\sharp(\nabla^E t)\bigr) \qquad \because\quad \text{命題 2.9-(3)} \\
&= \mathrm{d}\bigl(s_\alpha^*(\pi^*s)\bigr)\otimes s_\alpha^*(\sharp t)+(-1)^{\deg s}s_\alpha^*(\pi^*s)\wedge s_\alpha^*\bigl(\sharp(\nabla^E t)\bigr) \\
&= \mathrm{d}\bigl(s_\alpha^*(\pi^*s)\bigr)\otimes s_\alpha^*(\sharp t)+(-1)^{\deg s}s_\alpha^*(\pi^*s)\wedge\mathrm{d}\bigl(s_\alpha^*(\sharp t)\bigr)+(-1)^{\deg s}s_\alpha^*(\pi^*s)\wedge\rho_*(s_\alpha^*\omega)(s_\alpha^*(\sharp t)) \\
&= \mathrm{d}\bigl(s_\alpha^*(\pi^*s)\otimes s_\alpha^*(\sharp t)\bigr)+\rho_*(s_\alpha^*\omega)\wedge\bigl(s_\alpha^*(\pi^*s)\otimes s_\alpha^*(\sharp t)\bigr) \\
&= \bigl(\mathrm{d}+\rho_*(s_\alpha^*\omega)\wedge\bigr)s_\alpha^*\bigl((\pi^*s)\otimes(\sharp t)\bigr) \\
&= \bigl(\mathrm{d}+\rho_*(s_\alpha^*\omega)\wedge\bigr)s_\alpha^*\bigl(\sharp(s\otimes t)\bigr) \qquad \because\quad \text{命題 2.9-(3)} \\
&= \bigl(\mathrm{d}+\rho_*(s_\alpha^*\omega)\wedge\bigr)\bigl(\mathrm{proj}_2\circ\psi_\alpha(s\otimes t)\bigr)
\end{aligned}
$$

であるが，共変外微分の定義から最左辺は $\mathrm{proj}_2 \circ \psi_\alpha \circ \mathrm{d}^{\nabla^E}(s \otimes t)$ と等しい．よって

$$\mathrm{d}^{\nabla^E}(s \otimes t) = \sharp^{-1} \circ \big(\mathrm{d} + \rho_*(\omega)\wedge\big) \circ \sharp(s \otimes t)$$

が言えた．共変外微分の定義から，d^{∇^E} が一般の $\Omega^k(M;\, E)$ の元に作用する場合についても示された．

■

命題 2.5-(3) がまさに我々の良く知るゲージ場になっていることを確認しよう．

まずは状況設定である．主束

$$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$$

は

- 開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$
- 局所自明化 $\{\varphi_\alpha \colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G\}_{\alpha\in\Lambda}$
- 変換関数 $\{t_{\alpha\beta} \colon U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$

を持つとする．P の局所切断 $\{s_\alpha \colon U_\alpha \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ を，(2.4.14) の通り $s_\alpha(x) \coloneqq \varphi_\alpha^{-1}(x,\, 1_G)$ と定義する．このとき主束 P の同伴ベクトル束

$$V \hookrightarrow P \times_\rho V \xrightarrow{q} M$$

はその構成から

- 開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$
- 変換関数 $\{t_{\alpha\beta} \colon U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$

を持ち，局所自明化 $\{\psi_\alpha \colon q^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times V\}_{\alpha\in\Lambda}$ は (2.4.14) の通りに $\psi_\alpha\big(s_\alpha(x) \times_\rho v\big) \coloneqq (x,\, v)$ と構成された．なお，命題 2.3 の証明の脚注で述べたようにこれは $\psi_\alpha(u \times_\rho v) \coloneqq \big(\pi(u),\, \mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\alpha(u) \blacktriangleright v\big)$ と定義することと同値である．以下では便宜上 $E \coloneqq P \times_\rho V$ とおく．

さて，主束 P 上の接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$ を任意に 1 つ与えよう．このとき定理 2.5-(2) により，同伴ベクトル束 E 上の接続 $\nabla^E \colon \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(M;\, E)$ が $\nabla^E \coloneqq \sharp^{-1} \circ \big(\mathrm{d} + \rho_*(\omega)\big) \circ \sharp$ として誘導される．

(2.4.8) が示すように，Lie 群 G で記述される内部対称性を持つ場 ϕ は E の切断 $\phi \in \Gamma(E)$ を局所自明化 ψ_α によって表示した $\phi_\alpha \coloneqq \mathrm{proj}_2 \circ \psi_\alpha \circ \phi \colon U_\alpha \longrightarrow V$ と同一視された．ここで，$\phi \in \Gamma(E) = \Omega^0(M;\, E)$ なので，ある M 上のベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$ に沿った共変微分 $\nabla^E_X \colon \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E),\ \phi \longmapsto \nabla^E\phi(X)$ を取ることができる．そして $\nabla^E_X\phi \in \Gamma(E)$ の局所自明化による表示 $(\nabla^E_X\phi)_\alpha \coloneqq \mathrm{proj}_2 \circ \psi_\alpha \circ \nabla^E_X\phi \colon U_\alpha \longrightarrow V$ もまた，$U_\alpha \cap U_\beta$ における ψ_α から ψ_β への局所自明化の取り替えに伴って (2.4.8) の変換を受ける：

$$\begin{aligned} &\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} \colon (U_\alpha \cap U_\beta) \times V \longrightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times V, \\ &\qquad \Big(x,\, \boldsymbol{(\nabla^E_X\phi)_\alpha(x)}\Big) \longmapsto \Big(x,\, \boldsymbol{(\nabla^E_X\phi)_\beta(x)}\Big) = \Big(x,\, \boldsymbol{\rho\big(t_{\beta\alpha}(x)\big)\big((\nabla^E_X\phi)_\alpha(x)\big)}\Big) \end{aligned}$$

一方で，定理 2.5-(3) から

$$(\nabla^E_X\phi)_\alpha = (\nabla^E\phi)_\alpha(X) = \big(\mathrm{d} + \rho_*(s_\alpha^*\omega)\big)(\phi_\alpha)(X)$$

なので，$\forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$ において

$$
\begin{aligned}
&(\nabla^E_X \phi)_\beta(x)\\
&= \big(\mathrm{d} + \rho_*(s_\beta^*\omega)\big)(\phi_\beta)\Big|_x (X_x)\\
&= \rho\big(t_{\beta\alpha}(x)\big) \circ \big(\mathrm{d} + \rho_*(s_\alpha^*\omega)\big)(\phi_\alpha)\Big|_x (X_x)\\
&= \rho\big(t_{\beta\alpha}(x)\big) \circ \big(\mathrm{d} + \rho_*(s_\alpha^*\omega)\big) \circ \rho\big(t_{\beta\alpha}(x)\big)^{-1}(\phi_\beta)\Big|_x (X_x)\\
&= \rho\big(t_{\beta\alpha}(x)\big) \circ \big(\mathrm{d} + \rho_*(s_\alpha^*\omega)\big) \circ \rho\big(t_{\beta\alpha}(x)^{-1}\big)(\phi_\beta)\Big|_x (X_x)
\end{aligned}
$$

だとわかる．i.e.

$$
\big(\mathrm{d} + \rho_*(s_\beta^*\omega)\big)_x = \rho\big(t_{\beta\alpha}(x)\big) \circ \big(\mathrm{d} + \rho_*(s_\alpha^*\omega)\big)_x \circ \rho\big(t_{\beta\alpha}(x)^{-1}\big)
$$

となって (2.4.3) の変換則を再現する．また，V の基底を $e_1, \dots e_{\dim V}$ として $\phi_\beta(x) = {\phi_\beta}^i(x) e_i$ と展開し，$\rho(t_{\beta\alpha}(x)^{-1}) \in \mathrm{GL}(V)$ をこの基底に関して $[\,\rho(t_{\beta\alpha}(x)^{-1})\,]^i{}_j$ と行列表示ときに

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d} \circ \rho\big(t_{\beta\alpha}(x)^{-1}\big)(\phi_\beta)\Big|_x &= \mathrm{d}\,\underbrace{\big([\,\rho(t_{\beta\alpha}(x)^{-1})\,]^i{}_j {\phi_\beta}^i(x)\big)}_{\in \Omega^0(M) = C^\infty(M)} e_i\\
&= \partial_\mu\big([\,\rho(t_{\beta\alpha}(x)^{-1})\,]^i{}_j\big){\phi_\beta}^i(x)\,\mathrm{d}x^\mu\, e_i + [\,\rho(t_{\beta\alpha}(x)^{-1})\,]^i{}_j \partial_\mu {\phi_\beta}^j(x)\,\mathrm{d}x^\mu\, e_i\\
&=: \Big(\mathrm{d}\big(\rho\big(t_{\beta\alpha}(x)^{-1}\big)\big) + \rho\big(t_{\beta\alpha}(x)^{-1}\big) \circ \mathrm{d}\Big)(\phi_\beta)\Big|_x
\end{aligned}
$$

が成り立つと言う意味で

$$
\rho_*(s_\beta^*\omega)\Big|_x = \rho\big(t_{\beta\alpha}(x)\big) \circ \mathrm{d}\big(\rho\big(t_{\beta\alpha}(x)^{-1}\big)\big) + \rho\big(t_{\beta\alpha}(x)\big) \circ \rho_*(s_\alpha\omega) \circ \rho\big(t_{\beta\alpha}(x)^{-1}\big)
$$

と書けてゲージ変換 (2.4.4) を再現する．つまり，**ゲージ場**とは，接続形式 ω の局所切断による引き戻し $s_\alpha^*\omega \in \Omega^1(U_\alpha; \mathfrak{g})$ のことだったのである．

2.4.5 局所接続形式とゲージ場

これまでの議論で主束，およびその同伴ベクトル束の接続を大域的な表式を得た．以降の小節では，物理の文脈で登場する接続の局所表示（それは**ゲージ場**と呼ばれる）および曲率とその局所表示（それは**場の強さ**と呼ばれる）を，主束およびその同伴ベクトル束の各々において，より直接的な形で定式化する．まず始めにゲージ場と局所ゲージ変換を主束上の接続の言葉で定式化しよう．

先に進む前に，Maurer-Cartan 形式についての注意をしておく．

定義 2.15: Maurer-Cartan 形式

Lie 群 G の **Maurer-Cartan 形式**とは，

$$
\theta_g := T_g(L_{g^{-1}}) \colon T_g G \longrightarrow \mathfrak{g}
$$

によって定義される<u>G 上の</u> $\mathfrak{g}$ 値 1-形式 $\theta \in \Omega^1(G; \mathfrak{g})$ のことを言う．

特に G が $\mathrm{GL}(V)$ の部分 Lie 群（行列 Lie 群）である場合，Maurer-Cartan 形式 $\theta\colon TG \longrightarrow \mathfrak{g}$ はよく $\boldsymbol{g^{-1}\mathrm{d}g}$ と略記される．これの解釈は次の通りである：まず $\forall g \in G$ と G 上の恒等写像 $\mathrm{id}_G\colon G \longrightarrow G,\ g \longmapsto g$ を同一視する．このとき $\mathrm{d}g\colon TG \longrightarrow TG$ は，$\forall g \in G$ に対して $T_g(\mathrm{id}_G) = \mathrm{id}_{T_gG}\colon T_gG \longrightarrow T_gG$ のことだと解釈する．すると，**【例 2.4.4】**，**【例 2.4.6】**の議論から行列 Lie 群の場合 $T_g(L_{g^{-1}}) = L_{g^{-1}}$ と見做して良いので，$\forall v \in T_gG$ に対して

$$\theta_g(v) = T_g(L_{g^{-1}})(v) = L_{g^{-1}} \circ \mathrm{id}_{T_gG}(v) = g^{-1}\mathrm{d}g(v)$$

と書けるのである．

さて，ここで任意の C^∞ 写像 $t\colon M \longrightarrow G$ をとる．このとき，G が $\mathrm{GL}(V)$ の部分 Lie 群ならば，Maurer-Cartan 形式の t による引き戻しが $t^*\theta = \boldsymbol{t^{-1}\mathrm{d}t} \in \Omega^1(M; \mathfrak{g})$ と表記できることを確認しよう．$\forall g \in G$ を 1 つ固定し，$\forall v \in T_pM$ をとる．すると

$$\begin{aligned}
(t^*\theta)_p(v) &= \theta_{t(p)}\bigl(T_pt(v)\bigr) \\
&= T_{t(p)}(L_{t(p)^{-1}}) \circ T_pt(v) \\
&= T_p(L_{t(p)^{-1}} \circ t)(v) \\
&= T_p(L_{t(p)^{-1}} \circ t)\bigl(\dot{\gamma}(0)\bigr) \\
&= T_p(L_{t(p)^{-1}} \circ t) \circ T_0\gamma\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\bigl(L_{t(p)^{-1}} \circ t \circ \gamma(t)\bigr) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} t(p)^{-1}t\bigl(\gamma(t)\bigr) \\
&= t(p)^{-1}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} t\bigl(\gamma(t)\bigr) \\
&= t(p)^{-1}T_pt(\dot{\gamma}(0)) \\
&= t(p)^{-1}\mathrm{d}t|_p(v)
\end{aligned}$$

ただし γ は v が生成する積分曲線である．

ここで，いくつかの技術的な補題を述べよう．

補題 2.4: 積多様体の接空間

C^∞ 多様体 M_1, M_2 およびその任意の点 $p_1 \in M_1,\ p_2 \in M_2$ を与え，C^∞ 写像

$$\begin{aligned}
\mathrm{proj}_1&\colon M_1 \times M_2 \longrightarrow M_1,\ (x_1, x_2) \longmapsto x_1, \\
\mathrm{proj}_2&\colon M_1 \times M_2 \longrightarrow M_2,\ (x_1, x_2) \longmapsto x_2, \\
\mathrm{inj}_1^{p_2}&\colon M_1 \longrightarrow M_1 \times M_2,\ x \longmapsto (x, p_2), \\
\mathrm{inj}_2^{p_1}&\colon M_2 \longrightarrow M_1 \times M_2,\ x \longmapsto (p_1, x)
\end{aligned}$$

を考える．このとき，$\mathbb{R}$-線型写像

$$\begin{aligned}
\alpha\colon T_{(p_1, p_2)}(M_1 \times M_2) &\longrightarrow T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2, \\
v &\longmapsto \bigl(T_{(p_1, p_2)}(\mathrm{proj}_1)(v),\ T_{(p_1, p_2)}(\mathrm{proj}_2)(v)\bigr)
\end{aligned}$$

と

$$
\begin{aligned}
\beta\colon T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2 &\longrightarrow T_{(p_1,\,p_2)}(M_1 \times M_2), \\
(v,\, w) &\longmapsto T_{p_1}(\mathrm{inj}_1^{p_2})(v) + T_{p_2}(\mathrm{inj}_2^{p_1})(w)
\end{aligned}
$$

は互いに逆写像である．i.e. $\mathbb{R}$-ベクトル空間の同型

$$
T_{(p_1,\,p_2)}(M_1 \times M_2) \cong T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2
$$

が成り立つ．

<u>**証明**</u> $\forall (v,\, w) \in T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\alpha\bigl(\beta(v,\, w)\bigr) \\
&= \bigl(T_{p_1}(\mathrm{proj}_1 \circ \mathrm{inj}_1^{p_2})(v) + \cancel{T_{p_2}(\mathrm{proj}_1 \circ \mathrm{inj}_2^{p_1})(w)},\, \cancel{T_{p_1}(\mathrm{proj}_2 \circ \mathrm{inj}_1^{p_2})(v)} + T_{p_2}(\mathrm{proj}_2 \circ \mathrm{inj}_2^{p_1})(w)\bigr) \\
&= \bigl(T_{p_1}(\mathrm{id}_{M_1})(v),\, T_{p_2}(\mathrm{id}_{M_2})(w)\bigr) \\
&= (v,\, w)
\end{aligned}
$$

が成り立つので α は全射である．さらに $\dim T_{(p_1,\,p_2)}(M_1 \times M_2) = \dim(T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2)$ なので，階数-退化次元の定理から α が同型写像であることがわかる． ■

補題 2.5: 積の微分の亜種

- C^∞ 多様体 $M_1,\, M_2,\, N_1,\, N_2,\, P$
- 任意の点 $p_i \in M_i$
- C^∞ 写像 $F_i\colon M_i \longrightarrow N_i$
- C^∞ 写像 $\mu\colon N_1 \times N_2 \longrightarrow P$

このとき，

$$
T_{(p_1,\,p_2)}\bigl(\mu \circ (F_1 \times F_2)\bigr) = T_{(p_1,\,p_2)}(\mu \circ \mathrm{inj}_1^{F_2(p_2)} \circ F_1 \circ \mathrm{proj}_1) + T_{(p_1,\,p_2)}(\mu \circ \mathrm{inj}_2^{F_1(p_1)} \circ F_2 \circ \mathrm{proj}_2)
$$

が成り立つ．

<u>**証明**</u> $\forall (x_1,\, x_2) \in M_1 \times M_2$ に対して

$$
\begin{aligned}
\mathrm{proj}_i \circ (F_1 \times F_2)(x_1,\, x_2) &= \mathrm{proj}_i\bigl(F_1(x_1),\, F_2(x_2)\bigr) \\
&= F_i(x_i) \\
&= F_i \circ \mathrm{proj}_i(x_1,\, x_2)
\end{aligned}
$$

i.e. $\mathrm{proj}_i \circ (F_1 \times F_2) = F_i \circ \mathrm{proj}_i$ が成り立つことに注意すると，補題 2.4 より $\forall v \in T_{(p_1,\,p_2)}(M_1 \times M_2)$ に

対して

$$
\begin{aligned}
&T_{(p_1,\, p_2)}\bigl(\mu\circ(F_1\times F_2)\bigr)(v)\\
&=T_{(F_1(p_1),\, F_2(p_2))}\mu\circ T_{(p_1,\, p_2)}(F_1\times F_2)(v)\\
&=T_{(F_1(p_1),\, F_2(p_2))}\mu\circ\beta\circ\alpha\circ T_{(p_1,\, p_2)}(F_1\times F_2)(v)\\
&=T_{(F_1(p_1),\, F_2(p_2))}\mu\circ\beta\Bigl(T_{(p_1,\, p_2)}\bigl(\mathrm{proj}_1\circ(F_1\times F_2)\bigr)(v),\, T_{(p_1,\, p_2)}\bigl(\mathrm{proj}_2\circ(F_1\times F_2)\bigr)(v)\Bigr)\\
&=T_{(F_1(p_1),\, F_2(p_2))}\mu\circ\beta\bigl(T_{(p_1,\, p_2)}(F_1\circ\mathrm{proj}_1)(v),\, T_{(p_1,\, p_2)}(F_2\circ\mathrm{proj}_2)(v)\bigr)\\
&=T_{(p_1,\, p_2)}(\mu\circ\mathrm{inj}_1^{F_2(p_2)}\circ F_1\circ\mathrm{proj}_1)(v)+T_{(p_1,\, p_2)}(\mu\circ\mathrm{inj}_2^{F_1(p_1)}\circ F_2\circ\mathrm{proj}_2)(v)
\end{aligned}
$$

がわかる． ■

補題 2.6: 局所切断の微分

主束 $G\hookrightarrow P\xrightarrow{\pi}M$ と，その開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$，局所自明化 $\{\varphi_\alpha\colon\pi^{-1}(U_\alpha)\longrightarrow U_\alpha\times G\}_{\alpha\in\Lambda}$，変換関数 $\{t_{\alpha\beta}\colon U_\alpha\cap U_\beta\longrightarrow G\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$ を与える．局所切断の族 $\{s_\alpha\colon U_\alpha\longrightarrow\pi^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ を (2.4.13) で定義する．$\theta\in\Omega^1(G;\,\mathfrak{g})$ を Maurer-Cartan 形式とする．
このとき，$\forall\alpha,\,\beta\in\Lambda$ および $\forall x\in U_\alpha\cap U_\beta$ に関して，$\forall v\in T_xM$ は[a]

$$
T_xs_\beta(v)=T_{s_\alpha(x)}(R_{t_{\alpha\beta}(x)})\circ T_xs_\alpha(v)+\bigl((t_{\alpha\beta}^*\theta)_x(v)\bigr)^{\#}\Big|_{s_\beta(x)}
$$

を充たす．

[a] [9, p.36, 補題 10.1] には誤植がある

<u>**証明**</u> $\forall\alpha,\,\beta\in\Lambda$ を固定し，$\forall x\in U_\alpha\cap U_\beta$ を取る．$\forall v\in T_xM$ を 1 つ固定する．変換関数の定義および P への右作用 $\blacktriangleleft$ の定義から $s_\beta(x)=\varphi_\beta^{-1}(x,\,1_G)=\varphi_\alpha^{-1}\bigl(x,\,t_{\alpha\beta}(x)\bigr)=s_\alpha(x)\blacktriangleleft t_{\alpha\beta}(x)$ が成り立つ．i.e. C^∞ 写像 $\Delta\colon M\longrightarrow M\times M,\,x\longmapsto(x,\,x)$ を使って $s_\beta=\blacktriangleleft\circ(s_\alpha\times t_{\alpha\beta})\circ\Delta$ と書けるので，

$$
T_xs_\beta(v)=T_{(x,\,x)}\bigl(\blacktriangleleft\circ(s_\alpha\times t_{\alpha\beta})\bigr)\circ T_x\Delta(v)
$$

となる．最右辺に補題 2.5 を使うことで

$$
\begin{aligned}
T_xs_\beta(v)&=T_x(\blacktriangleleft\circ\mathrm{inj}_1^{t_{\alpha\beta}(x)}\circ s_\alpha\circ\mathrm{proj}_1\circ\Delta)(v)+T_x(\blacktriangleleft\circ\mathrm{inj}_2^{s_\alpha(x)}\circ t_{\alpha\beta}\circ\mathrm{proj}_2\circ\Delta)(v)\\
&=T_x(\blacktriangleleft\circ\mathrm{inj}_1^{t_{\alpha\beta}(x)}\circ s_\alpha)(v)+T_x(\blacktriangleleft\circ\mathrm{inj}_2^{s_\alpha(x)}\circ t_{\alpha\beta})(v)\\
&=T_x(R_{t_{\alpha\beta}(x)}\circ s_\alpha)(v)+T_x(R^{(s_\alpha(x))}\circ t_{\alpha\beta})(v)\\
&=T_{s_\alpha(x)}(R_{t_{\alpha\beta}(x)})\circ T_xs_\alpha(v)+T_x(R^{(s_\alpha(x))}\circ t_{\alpha\beta})(v)
\end{aligned}
$$

を得る．一方 (2.4.10) から

$$
\begin{aligned}
\bigl((t_{\alpha\beta}^*\theta)_x(v)\bigr)^{\#}|_{s_\beta(x)}&=\bigl(\theta_{t_{\alpha\beta}(x)}(T_xt_{\alpha\beta}v)\bigr)^{\#}|_{s_\alpha(x)\blacktriangleleft t_{\alpha\beta}(x)}\\
&=T_{1_G}(R^{(s_\alpha(x)\blacktriangleleft t_{\alpha\beta}(x))})\circ T_{t_{\alpha\beta}(x)}(L_{t_{\alpha\beta}(x)^{-1}})\circ T_xt_{\alpha\beta}(v)\\
&=T_x(R^{(s_\alpha(x))}\circ L_{t_{\alpha\beta}(x)}\circ L_{t_{\alpha\beta}(x)^{-1}}\circ t_{\alpha\beta})(v)\\
&=T_x(R^{(s_\alpha(x))}\circ t_{\alpha\beta})(v)
\end{aligned}
$$

と計算できる． ■

[9, 第 10 章-1] に倣って，先ほど導入したゲージ場をより扱いやすい形にしよう．

定理 2.6: 貼り合わせによる接続形式の構成

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ と，その開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$，局所自明化 $\{\varphi_\alpha \colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G\}_{\alpha\in\Lambda}$，変換関数 $\{t_{\alpha\beta} \colon U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$ を与える．局所切断の族 $\{s_\alpha \colon U_\alpha \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ を (2.4.13) で定義する．$\theta \in \Omega^1(G;\,\mathfrak{g})$ を Maurer-Cartan 形式とする．

(1) $\mathfrak{g}$ 値 1-形式の族 $\{A_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha;\,\mathfrak{g})\}_{\alpha\in\Lambda}$ が $\forall\alpha,\,\beta\in\Lambda$ について

$$A_\beta|_x = \mathrm{Ad}\big(t_{\alpha\beta}(x)^{-1}\big)\big(A_\alpha|_x\big) + (t_{\alpha\beta}^*\theta)_x, \quad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta \tag{2.4.16}$$

を充たすならば，$\forall\alpha\in\Lambda$ に対して $A_\alpha = s_\alpha^*\omega$ を充たす接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\,\mathfrak{g})$ が存在する．

(2) 任意の接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\,\mathfrak{g})$ に対して，$\mathfrak{g}$ 値 1-形式の族 $\{A_\alpha \coloneqq s_\alpha^*\omega \in \Omega^1(U_\alpha;\,\mathfrak{g})\}_{\alpha\in\Lambda}$ は $\forall\alpha,\,\beta\in\Lambda$ について

$$A_\beta|_x = \mathrm{Ad}\big(t_{\alpha\beta}(x)^{-1}\big)\big(A_\alpha|_x\big) + (t_{\alpha\beta}^*\theta)_x, \quad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$$

を充たす．

<u>証明</u>　(1) この証明では Lie 群の左移動，右移動[*45]，積をそれぞれ

$$\begin{aligned}\lambda_g &\colon G \longrightarrow G,\ x \longmapsto gx\\ \rho_g &\colon G \longrightarrow G,\ x \longmapsto xg\\ \mu &\colon G\times G \longrightarrow G,\ (x,\,y) \longmapsto xy\end{aligned}$$

と書くことにする．条件 (2.4.16) を充たす $\mathfrak{g}$ 値 1-形式の族 $\{A_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha;\,\mathfrak{g})\}_{\alpha\in\Lambda}$ を与える．$\forall\alpha\in\Lambda$ に対して

$$g_\alpha \coloneqq \mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\alpha \colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow G$$

とおく．このとき $\forall u \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ に対して $\varphi_\alpha(u) = \big(\pi(u),\,g_\alpha(u)\big) = s_\alpha\big(\pi(u)\big) \blacktriangleleft g_\alpha(u)$ が成り立つ．

$\forall\alpha\in\Lambda$ に対して，<u>P の座標近傍 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 上の</u> $\mathfrak{g}$ 値 1-形式 $\omega_\alpha \in \Omega^1\big(\pi^{-1}(U_\alpha);\,\mathfrak{g}\big)$ を

$$\omega_\alpha|_u \coloneqq \mathrm{Ad}\big(g_\alpha(u)^{-1}\big)\big((\pi^*A_\alpha)_u\big) + (g_\alpha^*\theta)_u \qquad {}^{\mathrm{w}/}\ \ \forall u \in \pi^{-1}(U_\alpha) \tag{2.4.17}$$

と定義する．$\forall x \in U_\alpha$ および $\forall v \in T_xM$ に対して

$$\begin{aligned}(s_\alpha^*\omega_\alpha)_x(v) &= \omega_\alpha|_{s_\alpha(x)}\big(T_xs_\alpha(v)\big)\\ &= \mathrm{Ad}\big(g_\alpha(s_\alpha(x))^{-1}\big)\big((\pi^*A_\alpha)_{s_\alpha(x)}(T_xs_\alpha(v))\big) + (g_\alpha^*\theta)_{s_\alpha(x)}\big(T_xs_\alpha(v)\big)\\ &= \mathrm{Ad}\big(1_G\big)\Big(A_\alpha|_x\big(T_{s_\alpha(x)}\pi \circ T_xs_\alpha(v)\big)\Big) + \theta_{g_\alpha(s_\alpha(x))}\big(T_{s_\alpha(x)}g_\alpha \circ T_xs_\alpha(v)\big)\\ &= A_\alpha|_x\big(T_x(\pi\circ s_\alpha)(v)\big) + \theta_{1_G}\big(\cancel{T_x(g_\alpha\circ s_\alpha)}(v)\big)\\ &= A_\alpha|_x(v)\end{aligned}$$

が成り立つので $s_\alpha^*\omega_\alpha = A_\alpha$ である．ただし，最後の等号で $\pi\circ s_\alpha = \mathrm{id}_{U_\alpha}$ であることと $g_\alpha \circ s_\alpha$ が常に 1_G を返す定数写像であることを使った．

[*45] 主束の全空間への右作用による右移動との混同を防ぐために R_g とは書かない．

ω_α が U_α 上で接続形式の公理を充たすこと

(CF-1)

$\forall X \in \mathfrak{g}$ を 1 つとる．補題 2.2 から，$\forall u \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ に対して $T_u\pi(X_u^\#) = 0$ である．右作用 ◀ の定義から $\forall g \in G$ に対して $L_{g_\alpha(u)^{-1}} \circ g_\alpha \circ R^{(u)}(g) = g_\alpha(u)^{-1} g_\alpha(u) g = g$ が成り立つ，i.e. $L_{g_\alpha(u)^{-1}} \circ g_\alpha \circ R^{(u)} = \mathrm{id}_G$ であることから

$$\begin{aligned}\omega_\alpha(X^\#) &= \mathrm{Ad}\big(g_\alpha(u)^{-1}\big)\Big(A_\alpha|_{\pi(u)}\big(\cancel{T_u\pi(X_u^\#)}\big)\Big) + \theta_{g_\alpha(u)}\big(T_u g_\alpha(X_u^\#)\big) \\ &= T_{g_\alpha(u)}(\lambda_{g_\alpha(u)^{-1}}) \circ T_u g_\alpha \circ T_{1_G}(R^{(u)})(X) && \because \quad (2.4.10) \\ &= T_{1_G}(\lambda_{g_\alpha(u)^{-1}} \circ g_\alpha \circ R^{(u)})(X) \\ &= X\end{aligned}$$

が言えた．

(CF-2)

$\forall u \in P$ を 1 つ固定する．$\forall v \in T_uP$, $\forall g \in G$ に対して

$$\begin{aligned}&(R_g^*\omega_\alpha)_u(v) \\ &= \omega_\alpha|_{R_g(u)}\big(T_u(R_g)(v)\big) \\ &= \mathrm{Ad}\big(g_\alpha(u \blacktriangleleft g)^{-1}\big)\Big(A_\alpha|_{\pi(u\blacktriangleleft g)}\big(T_{u\blacktriangleleft g}\pi \circ T_u(R_g)(v)\big)\Big) + \theta_{g_\alpha(u\blacktriangleleft g)}\big(T_{u\blacktriangleleft g} g_\alpha \circ T_u(R_g)(v)\big) \\ &= \mathrm{Ad}\big(g^{-1}g_\alpha(u)^{-1}\big)\Big(A_\alpha|_{\pi(u)}\big(T_u(\pi \circ R_g)(v)\big)\Big) + \theta_{g_\alpha(u)g}\big(T_u(g_\alpha \circ R_g)(v)\big) \\ &= \mathrm{Ad}\big(g^{-1}\big) \circ \mathrm{Ad}\big(g_\alpha(u)^{-1}\big)\Big(A_\alpha|_{\pi(u)}\big(T_u\pi(v)\big)\Big) + T_u(\lambda_{g^{-1}g_\alpha(u)^{-1}} \circ g_\alpha \circ R_g)(v) \\ &= \mathrm{Ad}\big(g^{-1}\big)\Big(\mathrm{Ad}\big(g_\alpha(u)^{-1}\big)\big((\pi^*A_\alpha)_u(v)\big)\Big) + T_u(\lambda_{g^{-1}g_\alpha(u)^{-1}} \circ g_\alpha \circ R_g)(v)\end{aligned}$$

一方，$\rho_g \circ g_\alpha(u) = g_\alpha(u)g = g_\alpha(u \blacktriangleleft g) = g_\alpha \circ R_g(u)$ に注意すると

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ad}(g^{-1})\big((g_\alpha^*\theta)_u(v)\big) \\ &= T_{1_G}(F_{g^{-1}}) \circ \theta_{g_\alpha(u)}\big(T_u g_\alpha(v)\big) \\ &= T_{1_G}(\lambda_{g^{-1}} \circ \rho_g) \circ T_{g_\alpha(u)}(\lambda_{g_\alpha(u)^{-1}}) \circ T_u g_\alpha(v) \\ &= T_u(\lambda_{g^{-1}} \circ \rho_g \circ \lambda_{g_\alpha(u)^{-1}} \circ g_\alpha)(v) \\ &= T_u(\lambda_{g^{-1}} \circ \lambda_{g_\alpha(u)^{-1}} \circ g_\alpha \circ R_g)(v) \\ &= T_u(\lambda_{g^{-1}g_\alpha(u)^{-1}} \circ g_\alpha \circ R_g)(v)\end{aligned}$$

がわかり，

$$R_g^*\omega_\alpha = \mathrm{Ad}\big(g^{-1}\big)(\omega_\alpha)$$

が示された．

$\omega_\alpha|_{\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)} = \omega_\beta|_{\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)}$

$\forall u \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ および $\forall v \in T_uP$ を 1 つ固定する．変換関数の定義から $g_\beta(u) = t_{\beta\alpha}\big(\pi(u)\big)g_\alpha(u)$ が成り立つ. i.e. C^∞ 写像 $\Delta\colon P \longrightarrow P \times P$ を用いて $g_\beta = \mu \circ \big((t_{\beta\alpha} \circ \pi) \times g_\alpha\big) \circ \Delta$ と書ける．よって補題 2.5 を使って

$$\begin{aligned}T_u g_\beta(v) &= T_u\big(\mu \circ \mathrm{inj}_1^{g_\alpha(u)} \circ t_{\beta\alpha} \circ \pi \circ \mathrm{proj}_1 \circ \Delta\big)(v) \\ &\quad + T_u\big(\mu \circ \mathrm{inj}_2^{t_{\beta\alpha}(u)} \circ g_\alpha \circ \mathrm{proj}_2 \circ \Delta\big)(v) \\ &= T_u(\rho_{g_\alpha(u)} \circ t_{\beta\alpha} \circ \pi)(v) + T_u(\lambda_{t_{\beta\alpha}(\pi(u))} \circ g_\alpha)(v)\end{aligned}$$

であり，Maurer-Cartan 形式の定義から

$$\begin{aligned}(g_\beta^*\theta)_u(v) &= T_{t_{\beta\alpha}(\pi(u))g_\alpha(u)}(\lambda_{g_\alpha(u)^{-1}t_{\beta\alpha}(\pi(u))^{-1}})\big(T_u g_\beta(v)\big)\\ &= T_u(\lambda_{g_\alpha(u)^{-1}} \circ \lambda_{t_{\beta\alpha}(\pi(u))^{-1}} \circ \rho_{g_\alpha(u)} \circ t_{\beta\alpha} \circ \pi)(v)\\ &\quad + T_{g_\alpha(u)}(\lambda_{g_\alpha(u)^{-1}})\big(T_u g_\alpha(v)\big)\\ &= \mathrm{Ad}\big(g_\alpha(u)^{-1}\big)\big(T_u(\lambda_{t_{\beta\alpha}(\pi(u))^{-1}})(v)\big) + (g_\alpha^*\theta)_u(v)\end{aligned}$$

と計算できる．従って，$\omega_\alpha \in \Omega^1\big(\pi^{-1}(U_\alpha); \mathfrak{g}\big)$ の定義 (2.4.17) および条件 (2.4.16) より

$$\begin{aligned}\omega_\beta|_u(v) &= \mathrm{Ad}\big(g_\beta(u)^{-1}\big)\big((\pi^*A_\beta)_u(v)\big) + (g_\beta^*\theta)_u(v)\\ &= \mathrm{Ad}\Big(g_\alpha(u)^{-1}t_{\beta\alpha}\big(\pi(u)\big)^{-1}\Big)\Big(\mathrm{Ad}\big(t_{\alpha\beta}(\pi(u))^{-1}\big)\big((\pi^*A_\alpha)_u(v)\big) + \big((t_{\alpha\beta}\circ\pi)^*\theta\big)_u(v)\Big)\\ &\quad + (g_\beta^*\theta)_u(v)\\ &= \mathrm{Ad}\big(g_\alpha(u)^{-1}\big)\big((\pi^*A_\alpha)_u(v)\big)\\ &\quad + \mathrm{Ad}\big(g_\alpha(u)^{-1}\big)\Big(\mathrm{Ad}\big(t_{\alpha\beta}(\pi(u))\big)\big(T_{t_{\alpha\beta}(\pi(u))}(\lambda_{t_{\alpha\beta}(\pi(u))^{-1}}) \circ T_u(t_{\alpha\beta}\circ\pi)(v)\big)\Big)\\ &\quad + \mathrm{Ad}\big(g_\alpha(u)^{-1}\big)\big(T_u(\lambda_{t_{\beta\alpha}(\pi(u))^{-1}})(v)\big) + (g_\alpha^*\theta)_u(v)\\ &= \omega_\alpha|_u(v)\\ &\quad + \mathrm{Ad}\big(g_\alpha(u)^{-1}\big)\Big(T_u\big(\rho_{t_{\beta\alpha}(\pi(u))} \circ t_{\alpha\beta} \circ \pi\big)(v) + T_u\big(\lambda_{t_{\alpha\beta}(\pi(u))} \circ t_{\beta\alpha} \circ \pi\big)(v)\Big)\\ &= \omega_\alpha|_u(v)\\ &\quad + \mathrm{Ad}\big(g_\alpha(u)^{-1}\big)\Big(T_u\big(\mu \circ \big((t_{\alpha\beta}\circ\pi) \times (t_{\beta\alpha}\circ\pi)\big) \circ \Delta\big)(v)\Big)\\ &= \omega_\alpha|_u(v)\end{aligned}$$

が言えた．ただし，最後から 3 つ目の等号ではコサイクル条件から従う $t_{\alpha\beta}(\pi(u))^{-1} = t_{\beta\alpha}(\pi(u))$ を使い，最後から 2 番目の等号では補題 2.5 を使い，最後の等号では $\mu \circ \big((t_{\alpha\beta}\circ\pi) \times (t_{\beta\alpha}\circ\pi)\big) \circ \Delta\colon P \longrightarrow G$ が常に 1_G を返す定数写像であることを使った．

ところで，$\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ は M の開被覆であったから $P = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \pi^{-1}(U_\alpha)$ が成り立つ．よって $\forall u \in P$ に対してある $\alpha \in \Lambda$ が存在して $u \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ を充たす．従って大域的な $\mathfrak{g}$ 値 1-形式 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ を

$$\omega_u := \omega_\alpha|_u$$

と定義すると，上で示したことからこれは well-defined な接続形式になり，かつ $\forall\alpha \in \Lambda$ に対して $s_\alpha^*\omega = A_\alpha$ を充たす．

(2) $\forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$ を 1 つ固定する．このとき接続形式の公理および補題 2.6 から，$\forall v \in T_xM$ に対して

$$\begin{aligned}s_\beta^*\omega|_x(v) &= \omega_{s_\beta(x)}\big(T_x s_\beta(v)\big)\\ &= \omega_{s_\alpha(x)\blacktriangleleft t_{\alpha\beta}(x)}\Big(T_{s_\alpha(x)}(R_{t_{\alpha\beta}(x)})\big(T_x s_\alpha(v)\big)\Big) + \omega_{s_\beta(x)}\Big(\big((t_{\alpha\beta}^*\theta)_x(v)\big)^{\#}|_{s_\beta(x)}\Big)\\ &= \big((R_{t_{\alpha\beta}(x)})^*\omega\big)_{s_\alpha(x)}\big(T_x s_\alpha(v)\big) + (t_{\alpha\beta}^*\theta)_x(v)\\ &= \mathrm{Ad}\big(t_{\alpha\beta}(x)^{-1}\big)\Big(\omega_{s_\alpha(x)}\big(T_x s_\alpha(v)\big)\Big) + (t_{\alpha\beta}^*\theta)_x(v)\\ &= \mathrm{Ad}\big(t_{\alpha\beta}(x)^{-1}\big)\big(s_\alpha^*\omega|_x(v)\big) + (t_{\alpha\beta}^*\theta)_x(v)\end{aligned}$$

が成り立つ．

■

2.4.6 水平持ち上げ

定義 2.16: C^∞ 曲線の水平持ち上げ

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ およびその接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$
- M 上の C^∞ 曲線 $\gamma\colon [0,\, 1] \longrightarrow M$

を与える．このとき，$\forall u \in \pi^{-1}(\{\gamma(0)\})$ に対して以下を充たす P 上の C^∞ 曲線 $\tilde{\gamma}\colon [0,\, 1] \longrightarrow P$ が一意的に存在し，γ の**水平持ち上げ** (horizontal lift) と呼ばれる：

(HC-1) $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$

(HC-2) $\tilde{\gamma}(0) = u$

(HC-3) $\forall t \in [0,\, 1]$ に対して

$$\dot{\tilde{\gamma}}(t) \in \operatorname{Ker} \omega_{\tilde{\gamma}(t)}$$

一意存在は本質的に常微分方程式の基本定理による：

補題 2.7: 水平持ち上げの公式

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ およびその接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$
- M 上の C^∞ 曲線 $\gamma\colon [0,\, 1] \longrightarrow M$
- $\forall u \in \pi^{-1}\bigl(\{\gamma(0)\}\bigr)$

を与える．このとき，γ の水平持ち上げ $\tilde{\gamma}\colon [0,\, 1] \longrightarrow P$ が一意的に存在して以下を充たす：

(1) $\forall t \in [0,\, 1]$ に対して

$$\dot{\tilde{\gamma}}(t) = T_{s_\alpha(\gamma(t))} R_{g(t)} \circ T_{\gamma(t)} s_\alpha\bigl(\dot{\gamma}(t)\bigr) - \Bigl(\operatorname{Ad}\bigl(g(t)^{-1}\bigr)\Bigl(s_\alpha^* \omega|_{\gamma(t)}\bigl(\dot{\gamma}(t)\bigr)\Bigr)\Bigr)^{\#}_{\tilde{\gamma}(t)}$$

(2) $\forall t \in [0,\, 1]$ に対して

$$\dot{g}(t) = -T_{1_G} \rho_{g(t)}\Bigl(s_\alpha^* \omega|_{\gamma(t)}\bigl(\dot{\gamma}(t)\bigr)\Bigr)$$

ただし G 上の C^∞ 曲線 $g\colon [0,\, 1] \longrightarrow G$ を

$$g \coloneqq \operatorname{proj}_2 \circ \varphi_\alpha \circ \tilde{\gamma}$$

で定義した．

証明 定理 2.6 と同様に

- 開被覆 $\bigl\{U_\alpha\bigr\}_{\alpha \in \Lambda}$
- 局所自明化 $\bigl\{\varphi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G\bigr\}_{\alpha \in \Lambda}$，変換関数 $\bigl\{t_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G\bigr\}_{\alpha,\, \beta \in \Lambda}$ を与える．
- (2.4.13) で定義される局所切断の族 $\bigl\{s_\alpha\colon U_\alpha \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)\bigr\}_{\alpha \in \Lambda}$

を与える．$[0,\, 1] \subset \mathbb{R}$ はコンパクト集合なので連続写像 $\gamma\colon [0,\, 1] \longrightarrow M$ による像 $\gamma([0,\, 1]) \subset M$ もまたコン

パクトである．よって $\gamma([0,1])$ を有限個の点で区切ることにより，ある $\alpha \in \Lambda$ が存在して $\gamma([0,1]) \subset U_\alpha$ が成り立つと仮定して良い．また，このとき $\tilde{\gamma}([0,1]) \subset \pi^{-1}(U_\alpha)$ を充たす任意の C^∞ 曲線 $\tilde{\gamma}\colon [0,1] \longrightarrow P$ に対して定義される

$$g := \mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\alpha \circ \tilde{\gamma}\colon [0,1] \longrightarrow G$$

は G 上の C^∞ 曲線であり，全空間 P への右作用の定義から $\forall t \in [0,1]$ に対して

$$\tilde{\gamma}(t) = \varphi_\alpha^{-1}\Bigl(\pi\bigl(\tilde{\gamma}(t)\bigr),\, g(t)\Bigr) = s_\alpha\Bigl(\pi\bigl(\tilde{\gamma}(t)\bigr)\Bigr) \blacktriangleleft g(t)$$

が成り立つ．C^∞ 写像 $\Delta\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]\times[0,1],\ t \longmapsto (t,t)$ を使うと

$$\tilde{\gamma} = \blacktriangleleft \circ \bigl((s_\alpha \circ \pi \circ \tilde{\gamma}) \times g\bigr) \circ \Delta \tag{2.4.18}$$

と書くこともできる．

ここで，$\tilde{\gamma}$ を γ の水平持ち上げとする．すると条件 **(HC-1)** より (2.4.18) は $\tilde{\gamma} = \blacktriangleleft \bigl((s_\alpha \circ \gamma) \times g\bigr) \circ \Delta$ となるから，補題 2.5 より

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\gamma}}(t) &= T_t\tilde{\gamma}\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t}\right) \\
&= T_{(t,t)}\Bigl(\blacktriangleleft \circ \bigl((s_\alpha \circ \gamma) \times g\bigr)\Bigr) \circ T_t\Delta\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t}\right) \\
&= T_{(t,t)}\Bigl(\blacktriangleleft \circ \bigl((s_\alpha \circ \gamma) \times g\bigr)\Bigr) \circ T_t\Delta\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t}\right) \\
&= T_t(\blacktriangleleft \circ \mathrm{inj}_1^{g(t)} \circ s_\alpha \circ \gamma)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t}\right) \\
&\quad + T_t(\blacktriangleleft \circ \mathrm{inj}_2^{s_\alpha(\gamma(t))} \circ g)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t}\right) \\
&= T_{s_\alpha(\gamma(t))}R_{g(t)} \circ T_{\gamma(t)}s_\alpha\bigl(\dot{\gamma}(t)\bigr) \\
&\quad + T_t\bigl(R^{(s_\alpha(\gamma(t)))} \circ g\bigr)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t}\right)
\end{aligned} \tag{2.4.19}$$

が分かった．補題 2.6 の証明と同様の計算により，Maurer-Cartan 形式 $\theta \in \Omega^1(G;\mathfrak{g})$ を使った等式

$$T_t\bigl(R^{(s_\alpha(\gamma(t)))} \circ g\bigr)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t}\right) = \left.\left((g^*\theta)_t\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t}\right)\right)^{\#}\right|_{\tilde{\gamma}(t)}$$

が成り立つ．よって条件 **(HC-2)** より

$$\begin{aligned}
0 &= \omega_{\tilde{\gamma}(t)}\bigl(\dot{\tilde{\gamma}}(t)\bigr) \\
&= (R_{g(t)}^*\omega)_{s_\alpha(\gamma(t))}\Bigl(T_{\gamma(t)}s_\alpha\bigl(\dot{\gamma}(t)\bigr)\Bigr) + (g^*\theta)_t\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t}\right) \\
&= \mathrm{Ad}\bigl(-g(t)\bigr)\Bigl(s_\alpha^*\omega|_{\gamma(t)}\bigl(\dot{\gamma}(t)\bigr)\Bigr) + \theta_{g(t)}\bigl(\dot{g}(t)\bigr)
\end{aligned} \tag{2.4.20}$$

が従い，

$$(g^*\theta)_t\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t}\right) = -\mathrm{Ad}\bigl(g(t)^{-1}\bigr)\Bigl(s_\alpha^*\omega|_{\gamma(t)}\bigl(\dot{\gamma}(t)\bigr)\Bigr) \tag{2.4.21}$$

が分かった．

(1) (2.4.19), (2.4.21) より

$$\dot{\tilde{\gamma}}(t) = T_{s_\alpha(\gamma(t))} R_{g(t)} \circ T_{\gamma(t)} s_\alpha\big(\dot{\gamma}(t)\big) + \Big(-\operatorname{Ad}\big(g(t)^{-1}\big)\Big(s_\alpha^* \omega|_{\gamma(t)}\big(\dot{\gamma}(t)\big)\Big)\Big)^{\#}_{\tilde{\gamma}(t)}$$

(2) Ad の定義と Maurer-Cartan 形式の定義より (2.4.20) は

$$\begin{aligned}0 &= T_{1_G}(\lambda_{g^{-1}(t)} \circ \rho_{g(t)})\Big(s_\alpha^* \omega|_{\gamma(t)}\big(\dot{\gamma}(t)\big)\Big) + T_{g(t)}(\lambda_{g(t)^{-1}})\big(\dot{g}(t)\big)\\ &= T_{1_G}(\lambda_{g^{-1}(t)})\Big(T_{1_G}\rho_{g(t)}\Big(s_\alpha^* \omega|_{\gamma(t)}\big(\dot{\gamma}(t)\big)\Big) + \dot{g}(t)\Big)\end{aligned}$$

とも書けるが，Lie 群の左移動が微分同相写像であることから $T_{1_G}(\lambda_{g^{-1}(t)})$ はベクトル空間の同型写像であり，

$$\dot{g}(t) = -T_{1_G}\rho_{g(t)}\Big(s_\alpha^* \omega|_{\gamma(t)}\big(\dot{\gamma}(t)\big)\Big)$$

が分かった．これは g に関する常微分方程式であり，与えられた初期条件 $g(0) = \operatorname{proj}_2\big(\varphi_\alpha(u)\big)$ に関して一意的な解を持つ．

(2) の証明より $\tilde{\gamma}$ の一意存在も言えた． ■

命題 2.10:

γ の 2 つの水平持ち上げ $\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}'$ が，ある $g \in G$ について $\tilde{\gamma}'(0) = \tilde{\gamma}(0) \blacktriangleleft g$ を充たすとする．このとき，$\forall t \in [0, 1]$ において $\tilde{\gamma}'(t) = \tilde{\gamma}(t) \blacktriangleleft g$ が成り立つ．

証明 C^∞ 曲線

$$\tilde{\gamma} \blacktriangleleft g \colon [0, 1] \longrightarrow P,\ t \longmapsto \tilde{\gamma}(t) \blacktriangleleft g$$

は，$\pi \circ \tilde{\gamma} \blacktriangleleft g = \gamma$，$\tilde{\gamma} \blacktriangleleft g(0) = \tilde{\gamma}(0) \blacktriangleleft g$ を充たし，

$$\begin{aligned}\omega_{\tilde{\gamma} \blacktriangleleft g}\big(\dot{(\tilde{\gamma} \blacktriangleleft g)}(t)\big) &= (R_g^* \omega)_{\tilde{\gamma}(t)}\big(\dot{\tilde{\gamma}}(t)\big)\\ &= \operatorname{Ad}(g^{-1})\Big(\omega_{\tilde{\gamma}(t)}\big(\dot{\tilde{\gamma}}(t)\big)\Big)\\ &= 0\end{aligned}$$

も充たすので，初期条件 $\tilde{\gamma} \blacktriangleleft g(0) = \tilde{\gamma}(0) \blacktriangleleft g = \tilde{\gamma}'(0)$ を充たす水平持ち上げである．故に水平持ち上げの一意性から

$$\tilde{\gamma}' = \tilde{\gamma} \blacktriangleleft g$$

が言える． ■

C^∞ 曲線のみならず，底空間上の C^∞ ベクトル場もまた全空間に持ち上がる．

定義 2.17: C^∞ ベクトル場の水平持ち上げ

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ およびその接続形式 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$
- $\underline{M\text{ 上の}}$ C^∞ ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$

このとき，$\forall u \in P$ に対して以下を充たす $\underline{P\text{ 上の}}$ C^∞ ベクトル場 $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(P)$ が一意的に存在し，X の**水平持ち上げ** (horizontal life) と呼ばれる：

(HV-1) $T_u\pi(\tilde{X}_u) = X_{\pi(u)}$
(HV-2) $\tilde{X}_u \in \operatorname{Ker}\omega_u$

定理 2.4 より $\forall u \in P$ に対して

$$T_u\pi|_{\operatorname{Ker}\omega_u} \colon \operatorname{Ker}\omega_u \longrightarrow T_{\pi(u)}M$$

はベクトル空間の同型写像であるから，与えられた $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して接束 TP の（C^∞ とは限らない）切断 $\tilde{X}$ を

$$\tilde{X}_u \coloneqq \left(T_u\pi|_{\operatorname{Ker}\omega_u}\right)^{-1}(X_{\pi(u)})$$

と定義すればこれは **(HV-1)**, **(HV-2)** を充たす．逆に性質 **(HV-1)**, **(HV-2)** を充たす接束 TP の（C^∞ とは限らない）任意の切断 $\tilde{Y}$ に対して，

$$\tilde{Y}_u = \left(T_u\pi|_{\operatorname{Ker}\omega_u}\right)^{-1}(X_{\pi(u)}) = \tilde{X}_u$$

が成り立つので，一意存在がわかった．あとはこのようにして構成した $\tilde{X}$ が C^∞ ベクトル場であることを確かめれば良い．そのためには，命題 B.4 より $\forall f \in C^\infty(P)$ に対して $\tilde{X}f$ が C^∞ 関数になっていることを示せば良い．

命題 2.11: 水平持ち上げの C^∞ 性

$\tilde{X}$ は C^∞ ベクトル場である．

証明 $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ および $\forall u \in P$ を 1 つ固定する．$X_{\pi(u)}$ は何らかの C^∞ 曲線 $\gamma\colon [0, 1] \longrightarrow M$ の $t = 0$ における速度ベクトルである．γ の水平持ち上げ $\tilde{\gamma}$ であって $\tilde{\gamma}(0) = u$ を充たすものをとる．このとき，一般に $\forall g \in G$ に対して $\pi \circ R_g = \pi$ が成り立つことに注意すると補題 2.3, 2.7 から

$$\begin{aligned}
T_u\pi\big(\dot{\tilde{\gamma}}(0)\big) &= T_u(\pi \circ R_{g(0)}) \circ T_{\gamma(0)}s_\alpha\big(\dot{\gamma}(0)\big) - T_u\pi\left(\operatorname{Ad}\big(g(0)^{-1}\big)\Big(s_\alpha^*\omega|_{\gamma(0)}\big(\dot{\gamma}(0)\big)\Big)\right)^{\#}_{\tilde{\gamma}(t)} \\
&= T_u(\pi \circ s_\alpha)(X_{\pi(u)}) \\
&= T_u(\mathrm{id}_{U_\alpha})(X_{\pi(u)}) \\
&= X
\end{aligned}$$

が従い，$\dot{\tilde{\gamma}}(0)$ は点 $u \in P$ において **(HV-1)**, **(HV-2)** を充たす．よって $\tilde{X}$ の一意性から

$$\tilde{X}_u = \dot{\tilde{\gamma}}(0)$$

である．

ここで $\forall f \in C^\infty(P)$ を 1 つ固定する．このとき

$$
\begin{aligned}
\tilde{X} f|_u &= \dot{\tilde{\gamma}}(0) f|_u \\
&= T_{s_\alpha(\gamma(0))} R_{g(0)} \circ T_{\gamma(0)} s_\alpha\big(X_{\pi(u)}\big) f - \Big(\mathrm{Ad}\big(g(0)^{-1}\big)\Big(s_\alpha^* \omega|_{\pi(u)}\big(X_{\pi(u)}\big)\Big)\Big)^{\#}_{u} f \\
&= X_{\pi(u)}(f \circ R_{g(0)} \circ s_\alpha) - \Big(\mathrm{Ad}\big(g(0)^{-1}\big)\Big(s_\alpha^* \omega|_{\pi(u)}\big(X\big)\Big)\Big)^{\#}_{u} f
\end{aligned}
$$

であるが，$f \circ R_{g(0)} \circ s_\alpha \in C^\infty(U_\alpha)$ であることおよび写像 $U_\alpha \longrightarrow \mathfrak{g},\ u \longmapsto \mathrm{Ad}\big(g(0)^{-1}\big)\Big(s_\alpha^* \omega|_{\pi(u)}\big(X\big)\Big)$ が C^∞ 写像であることから，あとは C^∞ 写像 $A\colon P \longrightarrow \mathfrak{g}$ に関して定まる関数 $P \longrightarrow \mathbb{R},\ u \longmapsto A(u)^{\#} f$ が C^∞ 級であることを言えば良い．

ところで基本ベクトル場の定義を思い出すと

$$
A(u)^{\#} f = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f\big(u \blacktriangleleft \exp(tA(u))\big) = T_0\big(R^{(u)} \circ \exp(\text{-}A(u))\big)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right)
$$

であるが，$R^{(u)} \circ \exp(\text{-}A(u))\colon [0,\,1] \longmapsto P$ は u に関しても C^∞ 級なので，$A(u)^{\#} f \in C^\infty(P)$ が言えた． ■

命題 2.12: ベクトル場の水平持ち上げは右不変

$\tilde{X}$ は右不変である．i.e. $\forall g \in G$ に対して自分自身と R_g-related である．

<u>証明</u> $\forall u \in P,\ \forall g \in G$ を 1 つ固定する．このとき

$$
\begin{aligned}
T_u \pi\big((R_{g*}\tilde{X})_u\big) &= T_u \pi \circ T_{u \blacktriangleleft g^{-1}}(R_g)(\tilde{X}_{u \blacktriangleleft g^{-1}}) \\
&= T_{u \blacktriangleleft g^{-1}}(\pi \circ R_g)(\tilde{X}_{u \blacktriangleleft g^{-1}}) \\
&= T_{u \blacktriangleleft g^{-1}} \pi(\tilde{X}_{u \blacktriangleleft g^{-1}}) \\
&= X_{\pi(u \blacktriangleleft g^{-1})} \\
&= X_{\pi(u)}
\end{aligned}
$$

かつ

$$
\begin{aligned}
\omega_u\big((R_{g*}\tilde{X})_u\big) &= \omega_u\big(T_{u \blacktriangleleft g^{-1}}(R_g)(\tilde{X}_{u \blacktriangleleft g^{-1}})\big) \\
&= (R_g^* \omega)_{u \blacktriangleleft g^{-1}}(\tilde{X}_{u \blacktriangleleft g^{-1}}) \\
&= \mathrm{Ad}(g^{-1})\big(\omega_{u \blacktriangleleft g^{-1}}(\tilde{X}_{u \blacktriangleleft g^{-1}})\big) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

なので，ベクトル場 $R_{g*}\tilde{X}$ は **(HV-1)**, **(HV-2)** を充たす．i.e. X の水平持ち上げである．水平持ち上げの一意性から

$$
R_{g*}\tilde{X}|_{u \blacktriangleleft g} = T_u(R_g)(\tilde{X}_u) = \tilde{X}_{u \blacktriangleleft g}
$$

でなくてはいけない． ■

2.4.7 主束上の曲率形式

この小節では主束上の曲率と主束上の共変微分を大域的な形で定義する．

定義 2.18: 曲率 2 形式

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ およびその接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$ を与える．
曲率 2 形式 (curvature 2 form) $\Omega \in \Omega^2(P;\, \mathfrak{g})$ を以下で定義する：

$$\Omega := \mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$$

Ω の定義の第 2 項は，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底 T^a w/ $a = 1, \ldots, \dim G$ をとったときに

$$\frac{1}{2}[\omega, \omega] := \frac{1}{2}\omega_a \wedge \omega_b \bigl[T^a, T^b\bigr]$$

という意味であって，$\mathfrak{g}$-値 1 形式のウェッジ積という意味ではない．

補題 2.8:

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ およびその接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$ を与える．$\forall u \in P$ において，

(1) $\forall v \in \operatorname{Ker} T_u\pi$ に対して，ある $V \in \mathfrak{g}$ が存在して $V^{\#}|_u = v$ を充たす．

(2) $\forall v \in \operatorname{Ker} \omega_u$ に対して，ある $H \in \mathfrak{X}(M)$ が存在して $\tilde{H}|_u = v$ を充たす．ただし $\tilde{H}$ は H の水平持ち上げである．

証明 (1) 補題 2.2 の証明より $T_{1_G}(R^{(u)})\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \operatorname{Ker} T_u\pi$ は全射だから，ある $V \in \mathfrak{g}$ が存在して $v = T_{1_G}(R^{(u)})(V) = V^{\#}|_u$ を充たす．ただし最後の等号で (2.4.10) を使った．

(2) $T_u\pi(v) \in T_{\pi(u)}M$ を $H \in \mathfrak{X}(M)$ に拡張すればよい．

■

定理 2.7: 曲率形式の性質

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ およびその接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$ を与える．$\Omega \in \Omega^2(P;\, \mathfrak{g})$ を曲率形式とする．

(1) $\forall u \in P$ および $\forall v,\, w \in T_uP$ において

$$\Omega_u(v,\, w) = \mathrm{d}\omega|_u\bigl(v^{\mathrm{H}},\, w^{\mathrm{H}}\bigr)$$

(2) $\forall g \in \Omega$ に対して

$$R_g^*\Omega = \mathrm{Ad}(g^{-1})\Omega$$

(3) **(Bianchi の第 2 恒等式)**

$$\mathrm{d}\Omega = [\Omega, \omega]$$

定理 2.7-(1) を曲率形式の定義とすることもある（ [9, p.43] など）．その場合，我々が採用した定義 2.18 は以下で与える証明と全く同じ議論によって導出され，**Cartan の構造方程式**と呼ばれる．

証明 (1) 引数を場合分けする．

$v,\ w \in \mathrm{Ker}\,\omega_u$

$$\begin{aligned}\Omega_u(v,\,w) &= \mathrm{d}\omega\,|_u(v,\,w) + \frac{1}{2}[\omega_u, \omega_u](v,\,w)\\ &= \mathrm{d}\omega\,|_u(v,\,w) + \frac{1}{2}\bigl([\omega_u(v), \omega_u(w)] - [\omega_u(w), \omega_u(v)]\bigr)\\ &= \mathrm{d}\omega\,|_u(v,\,w)\\ &= \mathrm{d}\omega\,|_u(v^{\mathrm{H}},\,w^{\mathrm{H}})\end{aligned}$$

$v \in \mathrm{Ker}\,T_u\pi,\ w \in \mathrm{Ker}\,\omega_u$

$[\omega_u, \omega_u](v,\,w) = 0$ である．補題 2.8 より v は基本ベクトル場 $A^{\#} \in \mathfrak{X}(P)$ に拡張し，w は水平持ち上げ $\tilde{B} \in \mathfrak{X}(P)$ に拡張する．外微分の公式から

$$\mathrm{d}\omega\,(A^{\#},\,\tilde{B}) = A^{\#}\omega(\tilde{B}) - \tilde{B}\omega(A^{\#}) - \omega(\bigl[A^{\#}, \tilde{B}\bigr])$$

第 1 項は ω の性質から 0 で，第 2 項は $\omega(A^{\#}) = A$ が[*46] P 上の定数関数なので 0 になる．第 3 項が 0 になることを示すためには $\bigl[A^{\#}, \tilde{B}\bigr]$ が水平であることを示せば十分である．実際，$A^{\#}$ の生成するフローが

$$\theta\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times M \longrightarrow M,\ (t,\,x) \longmapsto R_{\exp(tX)}(x)$$

であることを思い出すと，Lie 微分の定義と公式から

$$\bigl[A^{\sharp}, \tilde{B}\bigr]_u = \lim_{t\to 0}\frac{T_{u\blacktriangleleft\exp(tA)}(R_{\exp(-tA)})(\tilde{B}_{u\blacktriangleleft\exp(tA)}) - \tilde{B}_u}{t}$$

が言える．$\tilde{B}_u \in \mathrm{Ker}\,\omega_u$ は明らかで，接続形式の定義から

$$\begin{aligned}\omega_u\bigl(T_{u\blacktriangleleft\exp(tA)}(R_{\exp(-tA)})(\tilde{B}_{u\blacktriangleleft\exp(tA)})\bigr) &= \bigl(R^{*}_{\exp(-tA)}\omega\bigr)_{u\blacktriangleleft\exp(tA)}\bigl(\tilde{B}_{u\blacktriangleleft\exp(tA)}\bigr)\\ &= \mathrm{Ad}\bigl(\exp(tA)\bigr)\Bigl(\omega_{u\blacktriangleleft\exp(tA)}\bigl(\tilde{B}_{u\blacktriangleleft\exp(tA)}\bigr)\Bigr)\\ &= 0\end{aligned}$$

が言えるので $\bigl[A^{\sharp}, \tilde{B}\bigr]_u \in \mathrm{Ker}\,\omega_u$ が示された．

$v \in \mathrm{Ker}\,T_u\pi,\ w \in \mathrm{Ker}\,T_u\pi$

$v,\,w$ を補題 2.8 により拡張して $A^{\#},\,B^{\#}$ にする．このとき

$$\begin{aligned}\Omega(A^{\#},\,B^{\#}) &= \mathrm{d}\omega\,(A^{\#},\,B^{\#}) + [A, B]\\ &= A^{\#}\omega(B^{\#}) - B^{\#}\omega(A^{\#}) - \omega(\bigl[A^{\#}, B^{\#}\bigr]) + [A, B]\\ &= -\omega([A, B]^{\#}) + [A, B]\\ &= -\omega([A, B]) + [A, B]\\ &= 0\end{aligned}$$

が成り立つ．

---

*46 $\omega(A^{\#}) \in C^{\infty}(P)$ というのは，$\omega(A^{\#})\colon P \longrightarrow \mathbb{R},\ u \longmapsto \omega_u(A^{\#}|_u)$ という意味である．

(2) 引き戻しが外微分，wedge 積と可換なので

$$\begin{aligned}R_g^*\Omega &= \mathrm{d}R_g^*\omega + \frac{1}{2}\left[R_g^*\omega, R_g^*\omega\right] \\ &= \mathrm{Ad}(g^{-1})\Omega\end{aligned}$$

がわかる．

(3)

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Omega &= \frac{1}{2}\big([\mathrm{d}\omega\,,\omega] - [\omega, \mathrm{d}\omega]\big) \\ &= [\mathrm{d}\omega\,,\omega] \\ &= [\Omega, \omega] - \frac{1}{2}[[\omega, \omega], \omega]\end{aligned}$$

ところで，$\omega = \omega_a T^a$ と展開すると

$$\begin{aligned}[[\omega, \omega], \omega] &= \omega_a \wedge \omega_b \wedge \omega_c [[T_a, T_b], T_c] \\ &= -\omega_a \wedge \omega_b \wedge \omega_c [[T_b, T_c], T_a] - \omega_a \wedge \omega_b \wedge \omega_c [[T_c, T_a], T_b] \qquad \because \quad \text{Jacobi の恒等式} \\ &= -2\omega_a \wedge \omega_b \wedge \omega_c [[T_a, T_b], T_c] \\ &= -2[[\omega, \omega], \omega]\end{aligned}$$

i.e. $[[\omega, \omega], \omega] = 0$ が分かった．

■

定理 2.7 より，Ω は tensorial form of type Ad であることが分かった．記号としては $\Omega \in \Omega^2_{\mathrm{Ad}}(P;\, \mathfrak{g})$ ということである．定理 2.7-(1) は，主束上の共変微分の定義のヒントになっている．

定義 2.19: 主束上の共変微分

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ およびその接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$ を与える．
- 有限次元ベクトル空間 V

を与える．このとき，主束 P 上の**共変微分** $\mathrm{D} \colon \Omega^k(P;\, V) \longrightarrow \Omega^{k+1}(P;\, V)$ を

$$\mathrm{D}\phi|_u(v_1,\, \dots,\, v_{k+1}) \coloneqq \mathrm{d}\phi\,|_u({v_1}^{\mathrm{H}},\, \dots,\, {v_{k+1}}^{\mathrm{H}})$$

で定義する．ただし任意の $\phi \in \Omega^k(P;\, V)$, $u \in P$, $v_1,\, \dots,\, v_{k+1} \in T_uP$ をとった．

この定義はベクトル束上の共変微分の定義と見かけ上大きく異なっている．しかし，実は定理 2.5-(4) の意味で同じものだということが次の命題からわかる：

命題 2.13: 主束上の共変微分の公式

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ およびその接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$ を与える．
- 有限次元ベクトル空間 V
- Lie 群 G の表現 $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$

を与える．このとき，$\forall \phi \in \Omega^k_\rho(P;\, V)$ に対して以下が成り立つ：

$$\mathrm{D}\phi = \mathrm{d}\phi + \rho_*(\omega) \wedge \phi$$

定理 2.5 のときと同様に，

$$\bigl(\rho_*(\omega) \wedge \phi\bigr)_u(v_1,\, \dots,\, v_{k+1}) \coloneqq \frac{1}{1!k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+1}} \operatorname{sgn} \sigma\, T_u\rho\bigl(v_{\sigma(1)}\bigr)\bigl(\phi(v_{\sigma(2)},\, \dots,\, v_{\sigma(k+1)})\bigr) \tag{2.4.22}$$

という定義である．

証明 $\forall u \in P$ および $\forall v_1,\, \dots,\, v_{k+1} \in T_uP$ を固定する．示すべき式は全ての引数に関して線型だから，v_i は水平であるか垂直であるかのどちらかであるとして良い．さらに以下では補題 2.8 によって水平（resp. 垂直）な $v_i \in T_uP$ を水平（resp. 垂直）な $X_i \in \mathfrak{X}(P)$ に拡張する．具体的には，$v_i \in T_uP$ 水平（resp. 垂直）ならば X_i は水平持ち上げ $\tilde{B}_i$（resp. 基本ベクトル場 ${A_i}^{\#} \in \mathfrak{X}(P)$）である．

引数について場合分けする．

X_i が全て水平

$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_{k+1}$ に対して $\omega(X_{\sigma(1)}) = 0$ なので自明．

X_i のうち少なくとも 2 つが垂直

引数の入れ替えに関する反対称性より，$X_1 = {A_1}^{\#}$, $X_2 = {A_2}^{\#}$ を仮定しても一般性を損なわない．このとき命題 2.7 より $[X_1, X_2] = [A_1, A_2]^{\#}$ が成り立つので $[X_1, X_2]$ もまた垂直である．

まず，共変微分の定義から (2.4.22) の左辺は

$$\mathrm{D}\phi(X_1,\, \dots,\, X_{k+1}) = \mathrm{d}\phi\,(0,\, 0,\, \dots) = 0$$

である．よって (2.4.22) の右辺が 0 になることを示せば良い．実際，右辺第 1 項に関しては，外微分の公式より

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\phi\,(X_1,\, \dots,\, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} X_i \phi(\dots,\, \widehat{X_i},\, \dots) + \sum_{1 \le i < j \le k+1} (-1)^{i+j} \phi([X_i, X_j],\, \dots,\, \widehat{X_i},\, \widehat{X_j},\, \dots) \qquad (2.4.23)\\ &= 0 + 0\end{aligned}$$

が言える．さらに右辺第 2 項に関して，ϕ の引数のうち少なくとも 1 つが水平なので

$$\bigl(\rho_*(\omega) \wedge \phi\bigr)(X_1,\, \dots,\, X_{k+1}) = 0$$

がわかる．

X_i の 1 つのみが垂直で他が全て水平

引数の入れ替えに関する反対称性より，$X_1 = {A_1}^{\#}$ を仮定しても一般性を損なわない．

まず，共変微分の定義から (2.4.22) の左辺は

$$\mathrm{D}\phi(X_1,\,\dots,\,X_{k+1}) = \mathrm{d}\phi\,(0,\,\dots) = 0$$

である．よって (2.4.22) の右辺が 0 になることを示せば良い．
(2.4.22) の右辺第 1 項に関しては，外微分の公式 (2.4.23) より非ゼロな項が

$$X_1\phi(X_2,\,\dots) + \sum_{2\le j\le k+1} (-1)^{1+j}\phi([X_1, X_j],\,X_2,\,\dots,\,\widehat{X_j},\,\dots)$$

だとわかる．ところが，命題 2.12 より $X_2,\,\dots,\,X_{k+1}$ が右不変なので Lie 微分の公式より

$$\begin{aligned}
[X_1, X_j]_u &= \left[A_1{}^{\#}, X_j\right]_u \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{T_{u\blacktriangleleft\exp(tA_1)}(R_{\exp(-tA_1)})(X_j|_{u\blacktriangleleft\exp(tA_1)}) - X_j|_u}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{X_j|_{u\blacktriangleleft\exp(tA_1)\blacktriangleleft\exp(-tA_1)} - X_j|_u}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{X_j|_u - X_j|_u}{t} \\
&= 0
\end{aligned}$$

が言えて，結局

$$\mathrm{d}\phi\,(X_1,\,\dots,\,X_{k+1}) = X_1\phi(X_2,\,\dots) = A_1{}^{\#}\phi(X_2,\,\dots,\,X_{k+1})$$

が分かった．$f \in C^\infty(P)$ を $f(u) \coloneqq \phi_u(X_2|_u,\,\dots,\,X_{k+1}|_u)$ によって定義し，(2.4.10) を使ってさらに計算を進めると

$$\begin{aligned}
\big(A_1{}^{\#}\phi(X_2,\,\dots,\,X_{k+1})\big)|_u &= (A_1{}^{\#}f)(u) \\
&= T_{1_G}(R^{(u)})(A_1)f \\
&= A_1\big(f\circ R^{(u)}\big)
\end{aligned}$$

となるが，$\forall g\in G$ に対して

$$\begin{aligned}
f\circ R^{(u)}(g) &= \phi_{R^{(u)}(g)}\big(X_2|_{R^{(u)}(g)},\,\dots,\,X_{k+1}|_{R^{(u)}(g)}\big) \\
&= \phi_{u\blacktriangleleft g}\big(T_u(R_g)(X_2|_u),\,\dots,\,T_u(R_g)(X_{k+1}|_u)\big) && \because\ X_j \text{ の右不変性} \\
&= (R_g^*\phi)_u(X_2|_u,\,\dots,\,X_{k+1}|_u) \\
&= \rho(g^{-1})\big(\phi_u(X_2|_u,\,\dots,\,X_{k+1}|_u)\big) && \because\ \phi \text{ の右同変性} \\
&= \rho(g^{-1})\big(f(u)\big)
\end{aligned}$$

が成り立つので，

$$
\begin{aligned}
A_1\bigl(f\circ R^{(u)}\bigr) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\Bigl(\rho\bigl(\exp(tA_1)^{-1}\bigr)\bigl(f(u)\bigr)\Bigr) \\
&= \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\rho\bigl(\exp(tA_1)^{-1}\bigr)\right)\bigl(f(u)\bigr) && \because\ \text{補題 2.5} \\
&= \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\rho\bigl(\exp(-tA_1)\bigr)\right)\bigl(f(u)\bigr) && \because\ \text{命題 2.6} \\
&= -\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\rho\bigl(\exp(tA_1)\bigr)\right)\bigl(f(u)\bigr) \\
&= -T_0\bigl(\rho\circ\exp(\text{-}A_1)\bigr)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right)\bigl(f(u)\bigr) \\
&= -T_{1_G}\rho\circ T_0\bigl(\exp(\text{-}A_1)\bigr)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right)\bigl(f(u)\bigr) \\
&= -\rho_*(A_1)f(u)
\end{aligned}
$$

i.e. ${A_1}^{\#}\phi(X_2,\,\dots,\,X_{k+1}) = -\rho_*\bigl(A_1\bigr)\phi(X_2,\,\dots,\,X_{k+1})$ だと分かった．一方，右辺第 2 項の非ゼロな項は

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{k+1},\,\sigma(1)=1}\operatorname{sgn}\sigma\,\rho_*\bigl(\omega(X_1)\bigr)\bigl(\phi(X_{\sigma(2)},\,\dots,\,X_{\sigma(k+1)})\bigr) \\
&= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{k+1},\,\sigma(1)=1}\operatorname{sgn}\sigma\,\rho_*\bigl(A_1\bigr)\bigl(\phi(X_{\sigma(2)},\,\dots,\,X_{\sigma(k+1)})\bigr) \\
&= \rho_*\bigl(A_1\bigr)\phi(X_2,\,\dots,\,X_{k+1})
\end{aligned}
$$

であるから，これらは相殺して 0 になる．

■

特に $\Omega\in\Omega^2_{\mathrm{Ad}}(P;\,\mathfrak{g})$ なので，命題 2.13 から

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}\Omega &= \mathrm{d}\Omega + \mathrm{ad}(\omega)\wedge\Omega \\
&= \mathrm{d}\Omega + \omega_a\wedge\Omega_b\,\mathrm{ad}(T^a)(T^b) \\
&= \mathrm{d}\Omega + \omega_a\wedge\Omega_b\bigl[T^a, T^b\bigr] \\
&= \mathrm{d}\Omega + [\omega, \Omega]
\end{aligned}
$$

だとわかる．よって Bianchi の第 2 恒等式は共変微分を使って

$$
\mathrm{D}\Omega = 0
$$

と書くこともできる．

2.4.8　曲率形式の局所表示と場の強さ

この小説では，前小節で定義した主束上の曲率形式を局所表示し，それが物理側で**場の強さ**と呼ばれるものと同一視できることを確認する．

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ と，その開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$，局所自明化 $\{\varphi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G\}_{\alpha\in\Lambda}$，変換関数 $\{t_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$ を与える．局所切断の族 $\{s_\alpha\colon U_\alpha \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ を (2.4.13) で定義する．
定理 2.6 を参考に，曲率形式の局所表示を

$$F_\alpha \coloneqq s_\alpha^*\Omega \in \Omega^2(U_\alpha;\, \mathfrak{g})$$

で定義する．曲率形式の定義と，引き戻しと外微分，wedge 積が可換であることから

$$\begin{aligned} F_\alpha &= \mathrm{d}s_\alpha^*\omega + \frac{1}{2}[s_\alpha^*\omega, s_\alpha^*\omega] \\ &= \mathrm{d}A_\alpha + \frac{1}{2}[A_\alpha, A_\alpha] \end{aligned}$$

がわかる．F_α の，チャート $(U_\alpha(x^\mu))$ における成分表示 $F_\alpha = \frac{1}{2}F_{\alpha\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu$ を求めてみる：

$$\begin{aligned} 2F_\alpha &= F_{\alpha\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \\ &= 2\partial_\mu A_{\alpha\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \\ &\quad + A_{\alpha a\mu}A_{\alpha b\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu\,\left[T^a, T^b\right] \\ &= (\partial_\mu A_{\alpha\nu} - \partial_\nu A_{\alpha\mu})\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \\ &\quad + [A_{\alpha\mu}, A_{\alpha\nu}]\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \end{aligned}$$

より，

$$F_{\alpha\mu\nu} = (\partial_\mu A_{\alpha\nu} - \partial_\nu A_{\alpha\mu}) + [A_{\alpha\mu}, A_{\alpha\nu}]$$

と書くことができる．これは物理側で**場の強さ** (field strength) としてよく知られたものである．この意味で以降，$F_\alpha \in \Omega^2(U_\alpha;\, \mathfrak{g})$ のことを場の強さと呼ぶ．

定理 2.8: 場の強さの変換則

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ と，その開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$，局所自明化 $\{\varphi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G\}_{\alpha\in\Lambda}$，変換関数 $\{t_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$ を与える．局所切断の族 $\{s_\alpha\colon U_\alpha \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ を (2.4.13) で定義する．
このとき，$\forall\alpha,\, \beta \in \Lambda$ について

$$F_\beta|_x = \mathrm{Ad}\big(t_{\alpha\beta}(x)^{-1}\big)(F_\alpha|_x), \quad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$$

が成り立つ．

証明 $\forall x \in M,\ \forall v_1,\, v_2 \in T_xM$ を 1 つ固定する．定理 2.7-(1) より，

$$\begin{aligned} F_\beta|_x(v_1,\, v_2) &= s_\beta^*\Omega|_x(v_1,\, v_2) \\ &= \Omega|_{s_\beta(x)}\big(T_xs_\beta(v_1),\, T_xs_\beta(v_2)\big) \\ &= \mathrm{d}\omega\,|_{s_\beta(x)}\big(T_xs_\beta(v_1)^{\mathrm{H}},\, T_xs_\beta(v_2)^{\mathrm{H}}\big) \end{aligned}$$

ここで補題 2.6 および水平部分空間の右不変性から

$$T_xs_\beta(v_i)^{\mathrm{H}} = T_{s_\alpha(x)}(R_{t_{\alpha\beta}(x)})\big(T_xs_\alpha(v_i)^{\mathrm{H}}\big)$$

なので,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}\omega\,|_{s_\beta(x)}\bigl(T_x s_\beta(v_1)^{\mathrm{H}},\,T_x s_\beta(v_2)^{\mathrm{H}}\bigr)\\
&= \left(R^*_{t_{\alpha\beta}(x)}\,\mathrm{d}\omega\right)\Big|_{s_\alpha(x)}\bigl(T_x s_\alpha(v_1)^{\mathrm{H}},\,T_x s_\alpha(v_2)^{\mathrm{H}}\bigr)\\
&= \mathrm{d}\bigl(R^*_{t_{\alpha\beta}(x)}\omega\bigr)\Big|_{s_\alpha(x)}\bigl(T_x s_\alpha(v_1)^{\mathrm{H}},\,T_x s_\alpha(v_2)^{\mathrm{H}}\bigr)\\
&= \mathrm{d}\Bigl(\mathrm{Ad}\bigl(t_{\alpha\beta}(x)^{-1}\bigr)(\omega)\Bigr)\Big|_{s_\alpha(x)}\bigl(T_x s_\alpha(v_1)^{\mathrm{H}},\,T_x s_\alpha(v_2)^{\mathrm{H}}\bigr)\\
&= \mathrm{Ad}\bigl(t_{\alpha\beta}(x)^{-1}\bigr)\Bigl(\mathrm{d}\omega\,|_{s_\alpha(x)}\bigl(T_x s_\alpha(v_1)^{\mathrm{H}},\,T_x s_\alpha(v_2)^{\mathrm{H}}\bigr)\Bigr)\\
&= \mathrm{Ad}\bigl(t_{\alpha\beta}(x)^{-1}\bigr)\Bigl(\Omega|_{s_\alpha(x)}\bigl(T_x s_\alpha(v_1),\,T_x s_\alpha(v_2)\bigr)\Bigr)\\
&= \mathrm{Ad}\bigl(t_{\alpha\beta}(x)^{-1}\bigr)\bigl(s_\alpha^*\Omega|_x(v_1,\,v_2)\bigr)\\
&= \mathrm{Ad}\bigl(t_{\alpha\beta}(x)^{-1}\bigr)\bigl(F_\alpha|_x(v_1,\,v_2)\bigr)
\end{aligned}
$$

が言える. ■

2.4.9　同伴ベクトル束上の接続とその局所表示

この小節では同伴ベクトル束上の共変微分をゲージ場の言葉を使って局所表示し，物理において馴染み深い共変微分と同一視できることを顕に確認する．この小節では常に

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$
- 接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\,\mathfrak{g})$
- 有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 V と Lie 群 G の $\dim V$ 次元表現 $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$
- 同伴ベクトル束 $V \hookrightarrow P \times_\rho V \xrightarrow{q} M$

が与えられているものとする．$E \coloneqq P \times_\rho V$ とおく．定理 2.5-(2) より,

$$\nabla^E \coloneqq \sharp^{-1} \circ \mathrm{D} \circ \sharp\colon \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(M;\,E)$$

はベクトル束 E 上の接続であった．これを水平持ち上げによって表示してみよう．

定理 2.9: 同伴ベクトル束上の共変微分の表示

$\forall s \in \Gamma(E)$, $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ および $\forall p \in M$ を 1 つ固定する．このとき，<u>任意の</u>

- C^∞ 曲線 $\gamma\colon [0,\ 1] \longrightarrow M$ であって $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = X_p$ を充たすもの
- $u \in \pi^{-1}(\{x\})$
- γ の水平持ち上げ $\tilde{\gamma}\colon [0,\ 1] \longrightarrow P$ であって $\tilde{\gamma}(0) = u$ を充たすもの[a]

に対して

$$(\nabla^E_X s)|_p = \tilde{\gamma}(0) \times_\rho \dot{\eta}(0)$$

が成り立つ．特に右辺は γ, u の取り方によらない．ただし，C^∞ 曲線 $\eta\colon [0,\ 1] \longrightarrow V$ を

$$s\bigl(\gamma(t)\bigr) =: \tilde{\gamma}(t) \times_\rho \eta(t)$$

で定義した．

[a] γ, u が与えられると $\tilde{\gamma}$ は一意に決まるのだった．

<u>**証明**</u> γ, u を 1 つ固定する．命題 2.9-(2) より

$$\begin{aligned}
(\nabla^E_X s)|_p &= (\nabla^E s)(X)|_p \\
&= (\sharp^{-1} \circ \mathrm{D} \circ \sharp s)_p(X_p) \\
&= \Bigl(\flat\bigl(\mathrm{D}(\sharp s)\bigr)\Bigr)_{\gamma(0)}\bigl(\dot{\gamma}(0)\bigr) \\
&= \tilde{\gamma}(0) \times_\rho \bigl(\mathrm{D}(\sharp s)\bigr)_{\tilde{\gamma}(0)}\bigl(\dot{\tilde{\gamma}}(0)\bigr) \qquad \because\ \tilde{\gamma}(0) \in \pi^{-1}(\{\gamma(0)\}),\ \dot{\tilde{\gamma}}(0) \in (T_{\tilde{\gamma}(0)}\pi)^{-1}(\{\dot{\gamma}(0)\}) \\
&= \tilde{\gamma}(0) \times_\rho \Bigl[\mathrm{d}(\sharp s)\,|_{\tilde{\gamma}(0)}\bigl(\dot{\tilde{\gamma}}(0)\bigr) + \rho_*\Bigl(\cancel{\omega_{\tilde{\gamma}(0)}\bigl(\dot{\tilde{\gamma}}(0)\bigr)}\Bigr)\Bigl(\sharp s|_{\gamma(0)}\Bigr)\Bigr] \\
&= \tilde{\gamma}(0) \times_\rho T_0(\sharp s \circ \tilde{\gamma})\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right)
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで $\sharp$ の定義を思い出すと，$\forall t \in [0,\ 1]$ に対して

$$\begin{aligned}
\sharp s \circ \tilde{\gamma}(t) &= f^{-1}_{\tilde{\gamma}(t)}\Bigl(s \circ \pi\bigl(\tilde{\gamma}(t)\bigr)\Bigr) \\
&= f^{-1}_{\tilde{\gamma}(t)}\Bigl(s\bigl(\gamma(t)\bigr)\Bigr)
\end{aligned}$$

が成り立つことが分かる．$f^{-1}_{\tilde{\gamma}(t)}$ の定義から

$$\sharp s \circ \tilde{\gamma} = \eta$$

であり，

$$(\nabla^E_X s)|_p = \tilde{\gamma}(0) \times_\rho \dot{\eta}(0)$$

が示された． ■

定理 2.9 を使って，同伴ベクトル束上の共変微分の局所表示を定理 2.5-(3) よりもあからさまな形で求めよう．

定理 2.10: 同伴ベクトル束上の共変微分の局所表示

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ について

- M の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$
- P の局所自明化 $\{\varphi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G\}_{\alpha\in\Lambda}$
- P の局所切断の族 $\{s_\alpha\colon U_\alpha \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha),\ p \longmapsto \varphi_\alpha^{-1}(p,\, 1_G)\}_{\alpha\in\Lambda}$
- Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底 T^a ${}^{\mathrm{w}/}$ $a = 1,\, \dots,\, \dim G$

を与え，同伴ベクトル束 $V \hookrightarrow E := P \times_\rho V \xrightarrow{q} M$ について

- E の局所自明化 $\{\psi_\alpha\colon q^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times V,\ s_\alpha(p) \times_\rho v \longmapsto (p,\, v)\}_{\alpha\in\Lambda}$
- V の基底 e_i ${}^{\mathrm{w}/}$ $i = 1,\, \dots,\, \dim V$
- E の局所切断の族 $\{e_{\alpha i}\colon U_\alpha \longrightarrow q^{-1}(U_\alpha),\ x \longmapsto s_\alpha(x) \times_\rho e_i\}_{\alpha\in\Lambda}$

を与える．このとき M のチャート $\bigl(U_\alpha,\, (x^\mu)\bigr)$ においてゲージ場 $A_\alpha := s_\alpha^*\omega \in \Omega^1(U_\alpha;\, \mathfrak{g})$ を

$$A_\alpha =: A_{\alpha a} T^a = A_{\alpha a\mu}\, \mathrm{d}x^\mu\ T^a$$

と展開すると以下が成り立つ：

(1) $\forall X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \in \mathfrak{X}(M)$[a] に対して[b],

$$\nabla^E_X e_{\alpha i} = X^\mu A_{\alpha a\mu} \left[\rho_*(T^a)\right]^j{}_i\, e_{\alpha j}$$

(2) $\forall X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \in \mathfrak{X}(M)$ および $\forall s \in \Gamma(E)$ に対して

$$\nabla^E_X s = X^\mu \left(\frac{\partial \xi_\alpha{}^i}{\partial x^\mu} + A_{\alpha a\mu} \left[\rho_*(T^a)\right]^i{}_j\, \xi_\alpha{}^j \right) e_{\alpha i}$$

ただし，$\forall x \in U_\alpha$ に対して $s(x) =: s_\alpha(x) \times_\rho \xi_\alpha(x) = s_\alpha(x) \times_\rho \xi_\alpha(x)^i e_i = \xi_\alpha(x)^i e_{\alpha i}(x)$ と展開した．

[a] 厳密には $X \in \mathfrak{X}(U_\alpha)$ であるが，これを 1 の分割を使って拡張したと思えば良い．
[b] $\left[\rho_*(T^a)\right]^j{}_i$ というのは，線形変換 $\rho_*(T^a) \in \mathfrak{gl}(V)$ の，V の基底 e_i による表現行列の $(j,\, i)$ 成分という意味である．

<u>**証明**</u> $\forall p \in U_\alpha$ を 1 つ固定する．

(1) C^∞ 曲線 $\gamma\colon [0,\, 1] \longrightarrow M$ であって，$\gamma(0) = p,\ \dot{\gamma}(0) = X_p$ を充たすものをとる．γ の像は U_α に含まれているとし[*47]，γ の水平持ち上げを

$$\tilde{\gamma}(t) =: s_\alpha\bigl(\gamma(t)\bigr) \blacktriangleleft g_\alpha(t)$$

と書く．ただし補題 2.7 と同様に新しい C^∞ 曲線 $g_\alpha\colon U_\alpha \longrightarrow G$ を $g_\alpha := \mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\alpha \circ \tilde{\gamma}$ により定義した．

[*47] $\gamma([0,\, 1]) \subset M$ はコンパクト集合なので，有限個の点で区切ればこの要請を充たすことができる．

局所切断 $e_{\alpha i}$ の共変微分を求める．

$$
\begin{aligned}
e_{\alpha i}\bigl(\gamma(t)\bigr) &= s_\alpha\bigl(\gamma(t)\bigr) \times_\rho e_i \\
&= \Bigl(s_\alpha\bigl(\gamma(t)\bigr) \blacktriangleleft g_\alpha(t)\Bigr) \times_\rho \rho\bigl(g_\alpha(t)^{-1}\bigr)(e_i) \\
&= \tilde{\gamma}(t) \times_\rho \rho\bigl(g_\alpha(t)^{-1}\bigr)(e_i)
\end{aligned}
$$

であるから，定理 2.9 より

$$
(\nabla^E_X e_{\alpha i})|_p = \tilde{\gamma}(0) \times_\rho \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho\bigl(g_\alpha(t)^{-1}\bigr)(e_i)
$$

ここで $L^{(v)}\colon G \longrightarrow V,\ g \longrightarrow \rho(g)(v)$ を使って $\rho\bigl(g_\alpha(t)^{-1}\bigr)(e_i) = L^{(e_i)} \circ {}^{-1} \circ g_\alpha(t)$ と書けるので，

$$
\begin{aligned}
&\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho\bigl(g_\alpha(t)^{-1}\bigr)(e_i) \\
&= T_0(L^{(e_i)} \circ {}^{-1} \circ g_\alpha)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right) \\
&= T_{g_\alpha(0)^{-1}}(L^{(e_i)}) \circ T_{g_\alpha(0)}({}^{-1})\bigl(\dot{g_\alpha}(0)\bigr) \\
&= -T_{g_\alpha(0)}(L^{(e_i)} \circ \mathcal{L}_{g_\alpha(0)^{-1}} \circ \mathcal{R}_{g_\alpha(0)^{-1}})\bigl(\dot{g_\alpha}(0)\bigr) \\
&= -\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho\bigl(g_\alpha(0)^{-1} g_\alpha(t) g_\alpha(0)^{-1}\bigr)(e_i) \\
&= -\rho\bigl(g_\alpha(0)^{-1}\bigr) \circ \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho\bigl(g_\alpha(t)\bigr)\right) \circ \rho\bigl(g_\alpha(0)^{-1}\bigr)(e_i) \\
&= -\rho\bigl(g_\alpha(0)^{-1}\bigr) \circ \Bigl(T_{g_\alpha(0)}\rho\bigl(\dot{g_\alpha}(0)\bigr)\Bigr) \circ \rho\bigl(g_\alpha(0)^{-1}\bigr)(e_i) \\
&= \rho\bigl(g_\alpha(0)^{-1}\bigr) \circ \Bigl(T_{g_\alpha(0)}\rho \circ T_{1_G}\mathcal{R}_{g(0)}\bigl(A_\alpha|_{\gamma(0)}(X)\bigr)\Bigr) \circ \rho\bigl(g_\alpha(0)^{-1}\bigr)(e_i) && \because\ \text{補題 } 2.7 \\
&= \rho\bigl(g_\alpha(0)^{-1}\bigr) \circ \rho_*\bigl(A_\alpha|_{\gamma(0)}(X_p)\bigr)(e_i) && \because\ \text{補題 } 2.7
\end{aligned}
$$

である[*48]から，

$$
\begin{aligned}
(\nabla^E_X e_{\alpha i})|_p &= \bigl(\tilde{\gamma}(0) \blacktriangleleft g_\alpha(0)^{-1}\bigr) \times_\rho \rho_*\bigl(A_\alpha|_{\gamma(0)}(X)\bigr)(e_i) \\
&= s_\alpha\bigl(\gamma(0)\bigr) \times_\rho \rho_*\bigl(A_\alpha|_p(X)\bigr)(e_i)
\end{aligned}
$$

---

*48

$$
\begin{aligned}
0 &= T_g(\mu \circ (\mathrm{id}_G \times {}^{-1}) \circ \Delta)(X) \\
&= T_g(\mu \circ \mathrm{inj}_1^{g^{-1}})(X) + T_g(\mu \circ \mathrm{inj}_2^{g} \circ {}^{-1})(X) \\
&= T_g(\mathcal{R}_{g^{-1}})(X) + T_{g^{-1}}(\mathcal{L}_g) \circ T_g({}^{-1})(X)
\end{aligned}
$$

より

$$
T_g({}^{-1}) = -T_g(\mathcal{L}_{g^{-1}} \circ \mathcal{R}_{g^{-1}})
$$

が分かった．特にチャート $(U_\alpha(x^\mu))$ において $A_\alpha = A_{\alpha a\mu}\, \mathrm{d}x^\mu\, T^a$，$X = X^\mu(p)\, \frac{\partial}{\partial x^\mu}\big|_p$ と展開すると

$$
\begin{aligned}
(\nabla^E_X e_{\alpha i})|_p &= s_\alpha\big(\gamma(0)\big) \times_\rho X^\nu(p) A_{\alpha a\mu}(p)\, \mathrm{d}x^\mu\,|_p \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\bigg|_p \right) \rho_*(T^a)(e_i) \\
&= s_\alpha\big(\gamma(0)\big) \times_\rho X^\nu(p) A_{\alpha a\mu}(p) \delta^\mu_\nu \rho_*(T^a)(e_i) \\
&= s_\alpha\big(\gamma(0)\big) \times_\rho X^\mu(p) A_{\alpha a\mu}(p) \big[\, \rho_*(T^a) \,\big]^j{}_i\, e_j \\
&= X^\mu(p) A_{\alpha a\mu}(p) \big[\, \rho_*(T^a) \,\big]^j{}_i\, e_{\alpha j}|_p
\end{aligned}
$$

と成分表示が求まった．

(2) 一般の切断 $s \in \Gamma(E)$ の共変微分を求める．U_α 上で $s(x) = s_\alpha(x) \times_\rho \xi_\alpha(x) = s_\alpha(x) \times_\rho \xi_\alpha(x)^i e_i = \xi_\alpha(x)^i e_{\alpha i}(x)$ と展開できるので，ベクトル束上の共変微分の定義より

$$
\begin{aligned}
\nabla^E_X s &= \nabla^E s(X) \\
&= \mathrm{d}\xi_\alpha{}^i\,(X) \otimes e_{\alpha i} + \xi_\alpha{}^i \nabla^E e_{\alpha i}(X) \\
&= X^\nu \frac{\partial \xi_\alpha{}^i}{\partial x^\mu}\, \mathrm{d}x^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) e_{\alpha i} + \xi_\alpha{}^i X^\mu A_{\alpha a\mu} \big[\, \rho_*(T^a) \,\big]^j{}_i\, e_{\alpha j} \\
&= X^\mu \left(\frac{\partial \xi_\alpha{}^i}{\partial x^\mu} + A_{\alpha a\mu} \big[\, \rho_*(T^a) \,\big]^i{}_j \xi_\alpha{}^j \right) e_{\alpha i}
\end{aligned}
$$

と計算できる．

■

定理 2.10-(2) において，特に X として座標ベクトル場 $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ をとると

$$
\nabla^E_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} e_{\alpha i} = A_{\alpha a\mu} \big[\, \rho_*(T^a) \,\big]^j{}_i\, e_{\alpha j}
$$

となり，ゲージ場の成分 $A_{\alpha a\mu} \big[\, \rho_*(T^a) \,\big]^j{}_i$ が Riemann 幾何学における Christoffel 記号と同等の働きをすることが分かる．

2.4.10　同伴ベクトル束上の曲率とその局所表示

この小節ではまず一般のベクトル束上の曲率を大域的な形で定義し，同伴ベクトル束上の接続との関係を議論する．そして同伴ベクトル束上の曲率の局所表示が，主束上の曲率の局所表示と同一のものであることを確認する．

定義 2.20: ベクトル束上の曲率

- ベクトル束 $V \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$
- ベクトル束 E 上の接続 $\nabla^E : \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(M;\, E)$

を与える．ベクトル束 E 上の**曲率** (curvature) とは，

$$
R^\nabla := \mathrm{d}^{\nabla^E} \circ \nabla^E : \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^2(M;\, E)
$$

のこと．

命題 2.14: 曲率の $C^\infty(M)$ 線形性

$\forall f \in C^\infty(M),\ \forall s \in \Gamma(E)$ に対して

$$R^{\nabla^E}(fs) = f\, R^{\nabla^E}(s)$$

が成り立つ.

証明 ベクトル束上の接続の定義から

$$\begin{aligned}
R^{\nabla^E}(fs) &= \mathrm{d}^{\nabla^E}\bigl(\mathrm{d}f \otimes s + f\,\nabla^E s\bigr) \\
&= \cancel{\mathrm{d}^2 f} \otimes s - \mathrm{d}f \wedge \nabla^E s + \mathrm{d}^{\nabla^E}\bigl(f\,\nabla^E s\bigr) \\
&= \cancel{-\,\mathrm{d}f \wedge \nabla^E s + \mathrm{d}f \wedge \nabla^E s} + f\,\mathrm{d}^{\nabla^E}(\nabla^E s) \\
&= f\, R^{\nabla^E}(s)
\end{aligned}$$

が分かる[*49]. ■

この結果から,

$$R^{\nabla^E} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E),\ s \longmapsto \bigl(p \longmapsto R^{\nabla^E}(s)(p)\bigr)$$

と見做すとこれが $C^\infty(M)$-線形写像になっている. このようなとき, End 束 $\mathrm{End}(E) := \coprod_{p\in M} \mathrm{End}(E_p)$ の C^∞ 切断 $\underline{R^{\nabla^E}} \in \Gamma\bigl(\bigwedge^2 T^*M \otimes \mathrm{End}(E)\bigr)$ であって,

$$R^{\nabla^E}(s)(p) = \underline{R^{\nabla^E}}(p)\bigl(s(p)\bigr)$$

を充たすものが存在することが分かる[*50]. そのため, この $\underline{R^{\nabla^E}}$ と同一視して $R^{\nabla^E} \in \Omega^2\bigl(\mathrm{End}(E)\bigr)$ である

[*49] E の局所フレーム $e_i \in \Gamma(E)$ を使うと $\nabla^E s = (\nabla^E s)^i \otimes e_i$ $^{\text{w/}}$ $(\nabla^E s)^i \in \Omega^1(M)$ と書けるので, ベクトル束上の接続の定義から

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^{\nabla^E}\bigl(f\,\nabla^E s\bigr) &= \mathrm{d}\bigl(f\,(\nabla^E s)^i\bigr) \otimes e_i - f\,(\nabla^E s)^i \wedge \nabla^E e_i \\
&= \mathrm{d}f \wedge \nabla^E s + f\ \mathrm{d}(\nabla^E s)^i \otimes e_i - f\,(\nabla^E s)^i \wedge \nabla^E e_i \\
&= \mathrm{d}f \wedge \nabla^E s + f\,\mathrm{d}^{\nabla^E}(\nabla^E s)
\end{aligned}$$

だとわかる.

[*50] $\forall p \in M$ を 1 つ固定し, $s \in \Gamma(E)$ であって $s(p) = 0$ を充たすものをとる. p の開近傍(特に, 局所自明性を充たすもの)$p \in U \subset M$ とその上の局所フレーム (e_i) をとる. このとき U 上では $s = s^i e_i$ と展開できる. ところで, 多様体のパラコンパクト性から $p \in \overline{V} \subset U$ を充たす p の開近傍 $V \subset M$ が存在するので, M の開被覆 $\{U,\, M \setminus \overline{V}\}$ に従属する 1 の分割 $\{\psi_U,\, \psi_{M\setminus\overline{V}}\}$ をとることができる. 特に C^∞ 関数 $\psi_U : M \longrightarrow [0,\,1]$ は

$$\psi_U(x) = \begin{cases} 1, & x \in \overline{V} \\ 0, & x \in M \setminus U \end{cases}$$

を充たす. よって $\tilde{e}_i := \psi_U\, e_i \in \Gamma(E)$, $\tilde{s}^i := \psi_U\, s^i \in C^\infty(M)$ である. したがって

$$s = s + \psi_U^2(s - s) = (1 - \psi_U^2)s + \tilde{s}^i \tilde{e}_i$$

が分かった. したがって R^{∇^E} の C^∞-線形性から

$$R^{\nabla^E}(s)(p) = \bigl(1 - \psi_U^2(p)\bigr)\, R^{\nabla^E}(s)(p) + \tilde{s}^i(p)\, R^{\nabla^E}(\tilde{e}_i)(p) = 0$$

が言えた. このことから, $\underline{R^{\nabla^E}} \in \Gamma\bigl(\mathrm{End}(E)\bigr)$ を, $\forall p \in M,\ \forall v \in E_p$ について

$$\underline{R^{\nabla^E}}(p)(v) := R^{\nabla^E}(s)(p) \quad {}^{\text{w/}}\quad s \in \Gamma(E)\ \text{ s.t. } s\,(p) = v$$

と言う．

定理 2.11: 同伴ベクトル束上の曲率の表示

$$R^{\nabla^E} = \sharp^{-1} \circ \rho_*(\Omega) \circ \sharp$$

<u>**証明**</u> (1)

$$\begin{aligned}
R^{\nabla^E} &= \sharp^{-1} \circ D^2 \circ \sharp \\
&= \sharp^{-1} \circ \big(\mathrm{d} + \rho_*(\omega)\wedge\big) \circ \big(\mathrm{d} + \rho_*(\omega)\big) \circ \sharp \\
&= \sharp^{-1} \circ \big(\cancel{\mathrm{d}^2} + \rho_*(\omega) \wedge \mathrm{d} + \mathrm{d}\big(\rho_*(\omega)\big) + \rho_*(\omega) \wedge \rho_*(\omega)\big) \circ \sharp
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\big(\rho_*(\omega)(\sharp s)\big) &= \mathrm{d}\big(\rho_*(\omega_a T^a)(\sharp s)\big) \\
&= \mathrm{d}\big(\omega_a\, \rho_*(T^a)(\sharp s)\big) \\
&= \mathrm{d}\omega_a\ \rho_*(T^a)(\sharp s) - \omega_a \wedge \rho_*(T^a)\, \mathrm{d}(\sharp s) \\
&= \rho_*(\mathrm{d}\omega)(\sharp s) - \rho_*(\omega) \wedge \mathrm{d}(\sharp s)
\end{aligned}$$

なので，

$$R^{\nabla^E} = \sharp \circ \big(\rho_*(\mathrm{d}\omega) + \rho_*(\omega) \wedge \rho_*(\omega)\big) \circ \sharp$$

さらに

$$\begin{aligned}
\rho_*(\omega) \wedge \rho_*(\omega)(\sharp s) &= \omega_a \wedge \omega_b \rho_*(T^a)\big(\rho_*(T^b)(\sharp s)\big) \\
&= \frac{1}{2}\omega_a \wedge \omega_b \Big(\rho_*(T^a) \circ \rho_*(T^b) - \rho_*(T^b) \circ \rho_*(T^a)\Big)(\sharp s) \\
&= \frac{1}{2}\omega_a \wedge \omega_b \big[\rho_*(T^a), \rho_*(T^b)\big](\sharp s) \\
&= \frac{1}{2}\omega_a \wedge \omega_b \rho_*(\big[T^a, T^b\big])(\sharp s) \\
&= \frac{1}{2}\rho_*([\omega, \omega])(\sharp s)
\end{aligned}$$

であるから

$$R^{\nabla^E} = \sharp^{-1} \circ \rho_*(\Omega) \circ \sharp$$

が分かった．

■

と定義すると well-defiend である．

定理 2.12: 同伴ベクトル束上の曲率の局所表示

定理 2.10 と同様の記号を使って以下が成り立つ：

(1)

$$R^{\nabla^E} e_{\alpha i} = F_{\alpha a} \bigl[\, \rho_*(T^a) \,\bigr]^j{}_i \otimes e_{\alpha j}$$

(2) $\forall s = \xi_\alpha{}^i e_{\alpha i}$ に対して

$$R^{\nabla^E} s = F_{\alpha a} \bigl[\, \rho_*(T^a) \,\bigr]^j{}_i \xi_\alpha{}^i \otimes e_{\alpha j}$$

証明 (1) 定理 2.10 およびベクトル束上の共変外微分の定義より,

$$\begin{aligned}
R^{\nabla^E} e_{\alpha i} &= \mathrm{d}^{\nabla^E} \bigl(\bigl[\, \rho_*(A_\alpha) \,\bigr]^j{}_i \otimes e_{\alpha j} \bigr) \\
&= \bigl[\, \mathrm{d}\bigl(\rho_*(A_\alpha)\bigr) \,\bigr]^j{}_i - \bigl[\, \rho_*(A_\alpha) \,\bigr]^j{}_i \wedge \nabla^E e_{\alpha j} \\
&= \bigl[\, \rho_*(\mathrm{d}A_\alpha) \,\bigr]^j{}_i \otimes e_{\alpha j} - \bigl[\, \rho_*(A_\alpha) \,\bigr]^j{}_i \wedge \bigl[\, \rho_*(A_\alpha) \,\bigr]^k{}_j e_{\alpha k} \\
&= \bigl[\, \rho_*(\mathrm{d}A_\alpha) \,\bigr]^j{}_i \otimes e_{\alpha j} - A_{\alpha a} \wedge A_{\alpha b} \bigl[\, \rho_*(T^b) \,\bigr]^k{}_j \bigl[\, \rho_*(T^a) \,\bigr]^j{}_i e_{\alpha k} \\
&= \bigl[\, \rho_*(\mathrm{d}A_\alpha) \,\bigr]^j{}_i \otimes e_{\alpha j} + A_{\alpha a} \wedge A_{\alpha b} \bigl[\, \rho_*(T^a) \circ \rho_*(T^b) \,\bigr]^k{}_i e_{\alpha k} \\
&= F_{\alpha a} \bigl[\, \rho_*(T^a) \bigr]^j{}_i \otimes e_{\alpha j}
\end{aligned}$$

(2) 命題 2.14 より R^{∇^E} は $C^\infty(M)$-線形なので明らか.

■

2.4.11 ホロノミー

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ を与える．任意の $x \in M$ に対して

$$\Omega_x := \bigl\{\, \gamma \colon [0,\, 1] \longrightarrow M \bigm| \text{区分的}C^\infty\text{曲線},\ \gamma(0) = \gamma(1) \,\bigr\}$$

とおく.

命題 2.15: ホロノミー

- $\omega \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$ を接続形式とする．
- $x \in M$
- $u \in \pi^{-1}(\{x\})$

を与え，写像 $\Phi_u \colon \Omega_x \longrightarrow G$ を

$$\tilde{\gamma}(1) =: \tilde{\gamma}(0) \blacktriangleleft \Phi_u(\gamma) \quad ^{\mathrm{w}/} \quad \tilde{\gamma}(0) = u$$

で定義する．このとき以下が成り立つ：

(1) $\forall h \in G$ に対して

$$\Phi_{u \blacktriangleleft h}(\gamma) = h^{-1} \Phi_u(\gamma) h$$

(2) $\gamma_1,\, \gamma_2 \in \Omega_x$ に対して

$$\Phi_u(\gamma_1 * \gamma_2) = \Phi_u(\gamma_2)\Phi_u(\gamma_1)$$

ただし $*$ は道の積である．

<u>証明</u>　(1) 命題 2.10 より $\tilde{\gamma} \blacktriangleleft h$ は $u \blacktriangleleft h$ を始点とする γ の水平持ち上げであるから，

$$(u \blacktriangleleft h) \blacktriangleleft \Phi_{u \blacktriangleleft h}(\gamma) = \tilde{\gamma}(1) \blacktriangleleft h = \big(u \blacktriangleleft \Phi_u(\gamma)\big) \blacktriangleleft h = u \blacktriangleleft h \blacktriangleleft \big(h^{-1} \Phi_u(\gamma) h\big)$$

(2) 命題 2.10 より $\tilde{\gamma_2} \blacktriangleleft \Phi_u(\gamma_1)$ は $\tilde{\gamma_1}(1) = u \blacktriangleleft \Phi_u(\gamma_1)$ を始点，$u \blacktriangleleft \Phi_u(\gamma_2)\Phi_u(\gamma_1)$ とする γ_2 の水平持ち上げであるから，水平持ち上げの一意性から

$$u \blacktriangleleft \Phi_u(\gamma_1 * \gamma_2) = u \blacktriangleleft \Phi_u(\gamma_2)\Phi_u(\gamma_1)$$

が成り立つ．

■

定義 2.21: ホロノミー群

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ とその接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$ を与える．$\forall u \in P$ に対して，命題 2.15 より G の部分集合

$$\mathrm{Hol}_u(P,\, \omega) \coloneqq \Phi_u(\Omega_{\pi(u)})$$

は部分群をなす．この部分群のことを**ホロノミー群** (holonomy group) と呼ぶ．

2.4.12　ゲージ理論

2.5　特性類と Chern-Simons 形式

2.5.1　Lie 代数上の不変多項式

V を有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間，V^* をその双対空間とする．V の基底 $\{e_1, \dots, e_{\dim V}\} \subset V$ とその双対基底 $\{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^{\dim V}\} \subset V^*$ をとる．

定義 2.22: V 上の多項式

- 対称化テンソル積

$$\mathrm{Sym}^k(V^*) \coloneqq (V^*)^{\otimes k} / \langle v \otimes w - w \otimes v | v,\, w \in V^* \rangle$$

の元のことを ***V* 上の *k* 次多項式**と呼ぶ．

- 対称化テンソル代数[a]

$$\bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathrm{Sym}^k(V^*)$$

の元のことを ***V* 上の多項式**と呼ぶ．

[a] ベクトル空間の直和なので，その元は k 次多項式の有限和である．

関数 $f\colon V \longrightarrow \mathbb{K}$ が V 上の k-次多項式である必要十分条件は

$$f = f_{i_1 \dots i_k} \varepsilon^{i_1} \cdots \varepsilon^{i_k}$$

の表示を持つことである．

【例 2.5.1】 Tr と det

$V = \mathrm{M}(n, \mathbb{K})$ とする．V の基底として行列単位 ${e_i}^j$ をとる．このとき，関数

$$\mathrm{Tr}\colon V \longrightarrow \mathbb{K},\ {v^i}_j {e_i}^j \longmapsto {v^i}_i$$

は

$$\mathrm{Tr}(v) = \mathrm{Tr}\bigl({v^i}_j {e_i}^j\bigr) = {v^i}_i = {v^l}_j \delta_i^j \delta_l^i = {v^l}_j {\varepsilon^i}_i({e_l}^j) = {\varepsilon^i}_i(v)$$

を充たすので 1 次多項式である．一方，

$$\det\colon V \longrightarrow \mathbb{K},\ {v^i}_j {e_i}^j \longmapsto \epsilon_{i_1, \dots, i_n} {v^{i_1}}_1 \cdots {v^{i_n}}_n$$

は

$$\begin{aligned}
\det(v) &= \det\bigl(v^i{}_j e_i{}^j\bigr) \\
&= \epsilon_{i_1\dots i_n} v^{i_1}{}_1 \cdots v^{i_n}{}_n \\
&= \epsilon_{i_1\dots i_n} v^{j_1}{}_{l_1} \cdots v^{j_n}{}_{l_n} \delta^{i_1}_{j_1}\delta^{l_1}_1 \cdots \delta^{i_n}_{j_n}\delta^{l_n}_n \\
&= \epsilon_{i_1\dots i_n} v^{j_1}{}_{l_1} \cdots v^{j_n}{}_{l_n} \varepsilon^{i_1}{}_1(e_{j_1}{}^{l_1}) \cdots \varepsilon^{i_n}{}_n(e_{j_n}{}^{l_n}) \\
&= \epsilon_{i_1\dots i_n} \varepsilon^{i_1}{}_1(v) \cdots \varepsilon^{i_n}{}_n(v)
\end{aligned}$$

を充たすので n 次多項式である．

定義 2.23: 不変多項式

Lie 群 G の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ を与える．多項式 $f\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}$ が **$\mathrm{Ad}(G)$-不変**であるとは，$\forall g \in G$, $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して

$$f\bigl(\mathrm{Ad}(g)(X)\bigr) = f(X)$$

が成り立つことをいう．

$\mathrm{Ad}(G)$-不変多項式全体の集合を $\mathbf{Inv}(\mathfrak{g})$ と書く．$\mathrm{Inv}(\mathfrak{g})$ は結合代数である．

2.5.2 Chern-Weil 理論

- Lie 群 G の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とその基底 T^a
- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$
- 接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$
- 曲率形式 $\Omega \in \Omega^2(P;\, \mathfrak{g})$

を与える．T^a の双対基底を τ_a とおく．曲率形式を T^a で展開して $\Omega = \Omega_a T^a$ と書く．k 次多項式 $f\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ が基底 $\{T^a\}$ に関して $f = f^{a_1\dots a_{\dim G}} \tau_{a_1} \cdots \tau_{a_{\dim G}}$ の表示を持つとき，f への Ω の代入 $f(\Omega) \in \Omega^{2k}(P)$ を

$$f(\Omega) \coloneqq f^{a_1\dots a_{\dim G}} \Omega_{a_1} \wedge \cdots \wedge \Omega_{a_{\dim G}}$$

で定義する．この定義は $\mathfrak{g}$ の基底の取り方によらない．

定理 2.13: Chern-Weil の定理

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$
- 接続形式 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$
- 曲率形式 $\Omega \in \Omega^2(P; \mathfrak{g})$
- k 次不変多項式 $f: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$

を与える．このとき以下が成り立つ：

(1) ある $\Lambda \in \Omega^{2k}(M)$ が存在して $f(\Omega) = \pi^*\Lambda$ を充たす．

(2) (1) の Λ は閉形式である．i.e. $\mathrm{d}\Lambda = 0$

(3) de Rham コホモロジー類 $[\Lambda] \in H^{2k}_{\mathrm{dR}}(M)$ は ω の取り方によらない．したがって結合代数の準同型（**Chern-Weil 準同型**）

$$w: \mathrm{Inv}(\mathfrak{g}) \longrightarrow H^{\bullet}_{\mathrm{dR}}(M),\ f \longmapsto [\Lambda]$$

が定まる．

証明 (1) まず，補題を用意する．

補題 2.9:

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$
- 有限次元ベクトル空間 V

を与える．このとき，$\forall \psi \in \Omega^k(P; V)$ に対して以下の 2 つは同値である：

(a) ある $\phi \in \Omega^k(M; V)$ が存在して $\psi = \pi^*\phi$ を充たす．

(b) ψ は水平かつ $R_g^*\psi = \psi$ を[a]充たす．

[a] i.e. ψ は右不変である．

証明 自明表現 $\rho: G \longrightarrow \mathrm{GL}(V),\ g \longmapsto \mathbb{1}_V$ をとる．このとき主束 P の ρ による同伴ベクトル束 $V \hookrightarrow P \times_\rho V \xrightarrow{q} M$ は自明束 $V \hookrightarrow M \times V \xrightarrow{\mathrm{proj}_1} M$ に束同型であるから[*51]，$\Omega^k(M; P \times_\rho V) = \Omega^k(M; V)$ である．特に，$\forall u \in P$ に対して補題 2.3 で構成したベクトル空間の同型写像 $f_u: V \longmapsto q^{-1}(\{u\}),\ v \longmapsto u \times_\rho v$ は恒等写像になるので，命題 2.9 で構成した同型写像は

$$\sharp: \Omega^k(M; P \times_\rho V) = \Omega^k(M; V) \longrightarrow \Omega^k_\rho(P; V),\ \phi \longmapsto \pi^*\phi$$

になる．さらに，tensorial form of type ρ の定義から，$\forall \psi \in \Omega^k_\rho(P; V)$ は水平でかつ $\forall g \in G$ に対して $R_g^*\psi = \rho(g^{-1})(\psi) = \psi$ を充たす． ■

[*51] 具体的には，写像 $P \times_\rho V \longrightarrow M \times V,\ u \times_\rho v \longmapsto \big(\pi(u),\ v\big)$ が束同型写像を与える．

補題 2.9 より，$f(\Omega) \in \Omega^{2k}(P)$ が水平かつ右不変であることを示せば良い．Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底 T^a を 1 つ固定し，$\Omega = \Omega_a T^a$ と展開する．

水平

$\Omega \in \Omega^2_{\mathrm{Ad}}(P;\, \mathfrak{g})$ なので $\Omega_a \in \Omega^2(P)$ もまた水平である．

右不変

$\Omega \in \Omega^2_{\mathrm{Ad}}(P;\, \mathfrak{g})$ なので，$\forall g \in G$ に対して

$$\begin{aligned}
& R_g^* \Omega = \mathrm{Ad}(g^{-1})(\Omega) \\
\iff\quad & R_g^*(\Omega_a T^a) = (R_g^* \Omega_a) T^a = \big[\mathrm{Ad}(g^{-1})(\Omega)\big]_a T^a \\
\implies\quad & R_g^* \Omega_a = \big[\mathrm{Ad}(g^{-1})(\Omega)\big]_a \quad (1 \le \forall a \le \dim G)
\end{aligned}$$

が言える．よって f の $\mathrm{Ad}(G)$-不変性から

$$\begin{aligned}
R_g^*\big(f(\Omega)\big) &= f^{a_1 \cdots a_k} R_g^* \Omega_{a_1} \wedge \cdots \wedge R_g^* \Omega_{a_k} \\
&= f^{a_1 \cdots a_k} \big[\mathrm{Ad}(g^{-1})(\Omega)\big]_{a_1} \wedge \cdots \wedge \big[\mathrm{Ad}(g^{-1})(\Omega)\big]_{a_k} \\
&= f\big(\mathrm{Ad}(g^{-1})(\Omega)\big) \\
&= f(\Omega)
\end{aligned}$$

が示された．

(2) $\pi_* \colon T_u P \longrightarrow T_u M$ は全射なので $\pi^* \colon \Omega^\bullet(M) \longrightarrow \Omega^\bullet(P)$ は単射．よって

$$\pi^*(\mathrm{d}\Lambda) = 0 \quad \iff \quad \mathrm{d}\big(f(\Omega)\big) = 0$$

を示せば十分である．ところで主束上の共変微分の定義および (1) から，

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}\big(f(\Omega)\big) &= \mathrm{d}\big(f(\Omega)\big) \circ \mathrm{H} \\
&= \mathrm{d}(\pi^* \Lambda) \circ \mathrm{H} \\
&= \pi^*\, \mathrm{d}\Lambda \circ \mathrm{H} \\
&= \mathrm{d}\Lambda \circ \pi_* \circ \mathrm{H} \\
&= \mathrm{d}\Lambda \circ \pi_* \\
&= \pi^*\, \mathrm{d}\Lambda \\
&= \mathrm{d}(\pi^* \Lambda) \\
&= \mathrm{d}\big(f(\Omega)\big)
\end{aligned}$$

が言える．一方で

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}\big(f(\Omega)\big) &= f^{a_1 \cdots a_k} \mathrm{D}(\Omega_{a_1} \wedge \cdots \wedge \Omega_{a_k}) \\
&= f^{a_1 \cdots a_k} \sum_{j=1}^{k} \Omega_{a_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{D}\Omega_{a_j} \wedge \cdots \wedge \Omega_{a_k} \\
&= 0 \qquad \because \quad \text{Bianchi の第 2 恒等式}
\end{aligned}$$

である．

(3) P 上の 2 つの接続形式 $\omega_0, \omega_1 \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$ を与える．このとき $\forall t \in [0,\, 1]$ に対して，C^∞ 写像 $\mathrm{proj}_1 \colon P \times [0,\, 1] \longrightarrow P$ を使って $\tilde{\omega} \in \Omega^1(P \times I;\, \mathfrak{g})$ を

$$\tilde{\omega}_{(u,\, t)} \coloneqq (1-t)\,(\mathrm{proj}_1^* \omega_0)_{(u,\, t)} + t\,(\mathrm{proj}_1^* \omega_1)_{(u,\, t)}$$

は主束 $G \hookrightarrow P\times[0,\,1] \xrightarrow{\pi\times\mathrm{id}} M\times[0,\,1]$ の接続形式である．さらに，$i_t \coloneqq P \longrightarrow P\times[0,\,1],\ u \longmapsto (u,\,t)$ について $i_0^*\tilde{\omega} = \omega_0,\ i_1^*\tilde{\omega} = \omega_1$ が成り立つ．$\tilde{\omega}$ の曲率 $\tilde{\Omega} \in \Omega^2(P\times[0,\,1];\,\mathfrak{g})$ を

$$\tilde{\Omega} \coloneqq \mathrm{d}\tilde{\omega} + \frac{1}{2}[\tilde{\omega}, \tilde{\omega}]$$

により定めると $i_0^*\tilde{\Omega} = \Omega_1,\ i_1^*\tilde{\Omega} = \Omega_1$ が成り立つ．
ところで，Ad(G)-不変 k 次多項式 f について

$$i_0^* f(\tilde{\Omega}) = f(\Omega_0), \quad i_1^* f(\tilde{\Omega}) = f(\Omega_1)$$

が成り立つ．$i_0,\,i_1$ は互いにホモトピックなので，de Rham コホモロジーのホモトピー不変性から

$$[f(\Omega_0)] = [i_0^* f(\tilde{\Omega})] = [i_1^* f(\tilde{\Omega})] = [f(\Omega_1)]$$

が分かった．さらに，de Rham コホモロジーは反変関手なので

$$\pi^*[\Lambda_0] = [\pi^*\Lambda_0] = [f(\Omega_0)] = [f(\Omega_1)] = [\pi^*\Lambda_1] = \pi^*[\Lambda_1]$$

がわかる．π^* の単射性から $[\Lambda_0] = [\Lambda_1]$ が言えた．

■

定義 2.24: 特性類

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$
- 接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\,\mathfrak{g})$
- 曲率形式 $\Omega \in \Omega^2(P;\,\mathfrak{g})$
- k 次不変多項式 $f\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$

を与える．このとき定理 2.13 の $[\Lambda] \in H^{2k}_{\mathrm{dR}}(M)$ のことを，f による P の**特性類** (characteristic class) と呼ぶ．

特性類はその定義から局所表示によらないが，それを顕に確認することができる．$\{s_\alpha\colon U_\alpha \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ を P の勝手な局所切断とする．wedge 積と引き戻しは可換であることに注意すると，定理 2.13-(1) から

$$f(F_\alpha) = f(s_\alpha^*\Omega) = s_\alpha^* f(\Omega) = s_\alpha^*\pi^*\Lambda = (\pi\circ s_\alpha)^*\Lambda = \Lambda|_{U_\alpha} \in \Omega^{2k}(U_\alpha)$$

だと分かる．一方，定理 2.8 および f の Ad(G)-不変性から，他の $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ を充たす $\beta \in A$ に対して左辺は

$$f(F_\alpha) = f\big(\mathrm{Ad}(t_{\alpha\beta})(F_\beta)\big) = f(F_\beta)$$

を充たす．このことから，もし場の強さ $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ から大域的な特性類 $\Lambda \in \Omega^{2k}(M)$ を復元したければ，ただ単に

$$\Lambda_x \coloneqq f(F_\alpha)|_x \ \ ^{\mathrm{w}/}\ \ x \in U_\alpha$$

とすれば良いことが分かる．この事実は，例えば特性類を積分する際に非常に有用である．

2.5.3 主束とベクトル束

定理 2.13 は主束に関して示したが，ベクトル束についても全く同じ議論ができる．勝手なベクトル束

$$V \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$$

を与えると，それに同伴する主束はフレーム束

$$\mathrm{GL}(V) \hookrightarrow \mathrm{Fr}(E) \xrightarrow{\varpi} M$$

である．逆に，フレーム束に同伴するベクトル束

$$V \hookrightarrow \mathrm{Fr}(E) \times_{\mathrm{id}} V \xrightarrow{\pi} M$$

は元のベクトル束と束同型である．主束 $\mathrm{Fr}(E)$ 上の接続形式 $\omega \in \Omega^1\bigl(\mathfrak{Fr}(E);\, \mathfrak{gl}(V)\bigr)$ がベクトル束 E 上の接続 $\nabla^E \colon \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(M;\, E)$ を与えることは定理 2.5 で示した．実は逆が言えることも，これまでとほぼ同じ議論からわかる．

今，ベクトル束 E 上の接続 $\nabla^E \colon \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(M;\, E)$ が与えられたとする．このとき，開集合 $U \subset M$ 上の E の局所フレーム $e \coloneqq (e_1,\, \dots,\, e_{\dim V})$ に関する**接続行列** $\omega_e \colon \mathfrak{X}(U) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ を

$$\nabla^E_X e_i \eqqcolon [\omega_e(X)]^j{}_i e_j$$

で定義する．そして C^∞ 曲線 $\gamma\colon [0,\, 1] \longrightarrow M$ に沿った**平行切断** $s \in \Gamma(E)$ を

$$\nabla^E_{\dot\gamma(t)} s|_{\gamma(t)} = 0 \quad \forall t \in [0,\, 1]$$

で定義する．$\gamma([0,\, 1]) \subset U$ とすると $s = s^i e_i$ と展開できるので，これは

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla^E_{\dot\gamma(t)} s \\
&= \nabla^E (s^i e_i)|_{\gamma(t)}\bigl(\dot\gamma(t)\bigr) \\
&= \mathrm{d}s^i\,|_{\gamma(t)}\bigl(\dot\gamma(t)\bigr) \otimes e_i|_{\gamma(t)} + s^i\bigl(\gamma(t)\bigr)[\omega_e(\dot\gamma(t))]^j{}_i e_j|_{\gamma(t)} \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}(s^i\circ\gamma)}{\mathrm{d}t} + s^j\bigl(\gamma(t)\bigr)[\omega_e(\dot\gamma(t))]^i{}_j\right) \otimes e_i|_{\gamma(t)} \\
\iff \quad & \frac{\mathrm{d}(s^i\circ\gamma)}{\mathrm{d}t} + s^j\bigl(\gamma(t)\bigr)[\omega_e(\dot\gamma(t))]^i{}_j = 0
\end{aligned}$$

を意味し，常微分方程式の解の存在と一意性から s は一意に決まる．γ の $\mathrm{Fr}(E)$ への**水平持ち上げ** $\tilde\gamma\colon [0,\, 1] \longrightarrow \mathrm{Fr}(E)$ を，$\tilde\gamma(t) \eqqcolon \Bigl(\gamma(t),\, \bigl(\eta_1\circ\gamma(t),\, \dots,\, \eta_{\dim V}\circ\gamma(t)\bigr)\Bigr) \in \mathrm{Fr}(E)_{\gamma(t)}$ で定義した $\eta_i \in \Gamma(E)$ が平行切断になっているものと定義する．そして $e \in \varpi^{-1}(\{x\})$ における**水平な接ベクトル** $v \in T_e(\mathrm{Fr}(E))$ を，ある C^∞ 曲線 $\gamma\colon [0,\, 1] \longrightarrow M$ であって $\gamma(0) = x,\ \tilde\gamma(0) = e,\ \dot{\tilde\gamma}(0) = v$ を充たすものが存在することと定義するのである．

さて，ここで E の開被覆 $\bigl\{U_\alpha\bigr\}_{\alpha\in\Lambda}$，局所自明化 $\bigl\{\varphi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times V\bigr\}_{\alpha\in\Lambda}$ を与える．そして $\mathrm{Fr}(E)$ の局所切断 $s_\alpha\colon U_\alpha \longrightarrow \varpi^{-1}(U_\alpha)$ を

$$s_\alpha(x) \coloneqq \bigl(x,\, (\varphi_\alpha^{-1}(x,\, e_1),\, \dots,\, \varphi_\alpha^{-1}(x,\, e_{\dim V}))\bigr) \eqqcolon \bigl(x,\, (s_{\alpha 1}(x),\, \dots,\, s_{\alpha\dim V}(x))\bigr)$$

で定義しよう．【**例 2.4.2**】で議論した通り，このとき $\gamma([0,\, 1]) \subset U_\alpha$ だとすると，ある C^∞ 曲線 $g_\alpha\colon [0,\, 1] \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ を使って

$$\tilde\gamma(t) \eqqcolon s_\alpha\bigl(\gamma(t)\bigr) \blacktriangleleft g_\alpha(t)$$

と書けるので，水平持ち上げの初期条件が $\tilde{\gamma}(0) = s_\alpha(\gamma(0))$ だとすると補題 2.7 から

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\gamma}}(0) &= T_{s_\alpha(\gamma(0))}(R_{g_\alpha(0)}) \circ T_{\gamma(0)} s_\alpha\bigl(\dot{\gamma}(0)\bigr) + \bigl(\theta_{g_\alpha(0)}(\dot{g_\alpha}(0))\bigr)^{\#}|_{\tilde{\gamma}(0)} \\ &= T_{\gamma(0)} s_\alpha\bigl(\dot{\gamma}(0)\bigr) + \bigl(\dot{g_\alpha}(0)\bigr)^{\#}|_{\tilde{\gamma}(0)}\end{aligned}$$

がわかる．一方で水平切断の条件から

$$\begin{aligned}0 &= \nabla^E_{\dot{\gamma}(t)} \tilde{\gamma}_i(t) \\ &= \nabla^E_{\dot{\gamma}(t)} (s_j [g_\alpha(t)]^j{}_i) \\ &= [\dot{g_\alpha}(t)]^j{}_i s_j(\gamma(t)) + [g_\alpha(t)]^j{}_i \nabla^E_{\dot{\gamma}(t)} s_j|_{\gamma(t)}\end{aligned}$$

であるから，$t = 0$ を代入して

$$[\dot{g_\alpha}(0)]^j{}_i s_j(\gamma(0)) = -\nabla^E_{\dot{\gamma}(t)} s_j|_{\gamma(0)} = -[\omega_{s_\alpha}(\dot{\gamma}(0))]^j{}_i s_j(\gamma(0))$$

i.e. $\dot{g_\alpha}(0) = -\omega_{s_\alpha}(\dot{\gamma}(0))$ と求まる．よって

$$\dot{\tilde{\gamma}}(0) = T_{\gamma(0)} s_\alpha\bigl(\dot{\gamma}(0)\bigr) - \bigl(\omega_{s_\alpha}(\dot{\gamma}(0))\bigr)^{\#}|_{\tilde{\gamma}(0)} \tag{2.5.1}$$

である．このため，$e \in \varpi^{-1}(\{x\})$ における水平な接ベクトル全体の集合を H_e と書くと

$$T_e\varpi \colon H_e \longrightarrow T_x M,\ \dot{\tilde{\gamma}}(0) \longmapsto \dot{\gamma}(0)$$

がベクトル空間の同型写像であることが分かる．よって短完全列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} T_e\varpi \longrightarrow T_e P \xrightarrow{T_e\varpi} T_x M \longrightarrow 0$$

は分裂し，

$$T_e P = H_e \oplus \operatorname{Ker} T_e\varpi$$

が成り立つ．さらに $\forall g \in \mathrm{GL}(V)$ に対して，$\tilde{\gamma}(t) \blacktriangleleft g$ は明らかに $\gamma(t)$ の水平持ち上げだから，

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \tilde{\gamma}(t) \blacktriangleleft g = T_e R_g\bigl(\dot{\tilde{\gamma}}(0)\bigr) \in H_{e \blacktriangleleft g}$$

であり，$H_{e\blacktriangleleft g} = T_e R_g(H_e)$ が分かる．以上の議論からベクトル束の接続 ∇^E が主束 $\mathrm{Fr}(E)$ の接続 $\{H_e\}_{e \in \mathrm{Fr}(E)}$ を与えることが分かった．よって定理 2.4 から対応する接続形式 $\omega \in \Omega^1\bigl(\mathrm{Fr}(E);\, \mathfrak{g}\bigr)$ が存在し，(2.5.1) より ∇^E の接続行列を $s_\alpha^*\omega(X) = \omega_{s_\alpha}(X)$ の形で再現する．

以上の議論により，特性類はベクトル束 E の接続 $\nabla^E \colon \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(M;\, E)$ とそのフレーム束 $\mathrm{Fr}(E)$ の局所切断 $s_\alpha \colon U_\alpha \longrightarrow \varpi^{-1}\bigl(U_\alpha\bigr)$ が与えられたときに，U_α 上の**曲率行列** $\Omega_{s_\alpha} \colon \mathfrak{X}(U_\alpha) \times \mathfrak{X}(U_\alpha) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ を

$$R^{\nabla^E}(X,\, Y) s_{\alpha i} =: [\,\Omega_{s_\alpha}(X,\, Y)\,]^j{}_i\, s_{\alpha j}$$

と定義した上で $\Omega_{s_\alpha} \in \Omega^2\bigl(U_\alpha;\, \mathfrak{gl}(V)\bigr)$ と見做せば，

$$\Lambda := f\bigl(\Omega_{s_\alpha}\bigr) \in \Omega^{2k}(M)$$

として特性類が得られるのである．このことを踏まえて，特性類 Λ のことをしばしば $\chi(E)$ とか $\chi(R^{\nabla^E})$ などと書く．後にホモトピー論的扱いをする際に，特性類をベクトル束に対応づけることが本質的であることがわかる．

2.5.4 不変多項式の代数構造

定理 2.13 による主束，もしくはベクトル束上の特性類の構成は，結局のところ与えられた構造群 G に関して $\mathrm{Ad}(G)$-不変な多項式を見つける問題に帰着される．

今，$\mathbb{K}$ を任意の体としよう．そして集合

$$\mathrm{Fun}(\mathbb{K}^n,\, \mathbb{K}) \coloneqq \left\{\, f\colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K} \,\right\}$$

の上に $+,\, \cdot,\, \blacktriangleright$ を

$$\begin{aligned}(f+g)(x_1,\, \dots,\, x_n) &\coloneqq f(x_1,\, \dots,\, x_n) + g(x_1,\, \dots,\, x_n)\\ (f\cdot g)(x_1,\, \dots,\, x_n) &\coloneqq f(x_1,\, \dots,\, x_n)g(x_1,\, \dots,\, x_n)\\ (a \blacktriangleright f)(x_1,\, \dots,\, x_n) &\coloneqq af(x_1,\, \dots,\, x_n)\end{aligned}$$

と定義することで組 $\big(\mathrm{Fun}(\mathbb{K}^n,\, \mathbb{K}),\, +,\, \cdot\,,\, \blacktriangleright\big)$ を $\mathbb{K}$-結合代数と見做す．このとき，代入写像

$$\varepsilon\colon \mathbb{K}[t_1,\, \dots,\, t_n] \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathbb{K}^n,\, \mathbb{K}),\; P(t_1,\, \dots,\, t_n) \longmapsto \big((x_1,\, \dots,\, x_n) \longmapsto P(x_1,\, \dots,\, x_n)\big)$$

は $\mathbb{K}$-結合代数の準同型である．

補題 2.10: 多項式の評価写像

$\mathbb{K}$ が無限体ならば ε は単射になる．

証明 $\mathrm{Ker}\,\varepsilon = 0$ を示す．$\mathrm{Ker}\,\varepsilon \supset 0$ は自明．$\forall P \in \mathrm{Ker}\,\varepsilon$ をとると $P = 0$ であることを n に関する数学的帰納法により示す．$n = 1$ のとき，P は高々 $\deg P < \infty$ 個の根を持つが，$P \in \mathrm{Ker}\,\varepsilon$ より $\forall x \in \mathbb{K},\; P(x) = 0$ なので $\deg P > 0$ だと矛盾．よって $P = 0$ である．

次に，$n-1$ まで主張が示されているとする．このとき不定元 t_n について項を整理することで，$P \in \mathrm{Ker}\,\varepsilon \subset \mathbb{K}[t_1,\, \dots,\, t_n]$ を $\mathbb{K}[t_1,\, \dots,\, t_{n-1}][t_n]$ の元と見做すことができる：

$$P(t_1,\, \dots,\, t_n) \eqqcolon \sum_{k=0}^{\deg P} \underbrace{P_k(t_1,\, \dots,\, t_{n-1})}_{\in \mathbb{K}[t_1,\, \dots,\, t_{n-1}]}(t_n)^k$$

$P \in \mathrm{Ker}\,\varepsilon$ なので，$n = 1$ の場合の議論から $\forall (x_1,\, \dots,\, x_{n-1}) \in \mathbb{K}^{n-1}$ について 1 変数多項式 $\sum_{k=0}^{\deg P} P_k(x_1,\, \dots,\, x_{n-1})\,(t_n)^k = 0$, i.e. $\varepsilon\big(P_k(t_1,\, \dots,\, t_{n-1})\big) = 0$ である．よって帰納法の仮定から $P_k(t_1,\, \dots,\, t_{n-1}) = 0$, i.e. $P = 0$ が言えた． ■

補題 2.11: 係数体の拡大

$\mathbb{K}$ を標数 0 の体とする．
このとき $P(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n] \subset \mathbb{K}[t_1, \dots, t_n]$ について[a]

$$\varepsilon\big(P(t_1, \dots, t_n)\big) = 0$$

ならば，任意の標数 0 の可換環[b] R についても写像

$$R^n \longrightarrow R,\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto P(x_1, \dots, x_n)$$

はゼロ写像である．

[a] $\mathbb{K}$ の標数が 0 であることから単射になる体の準同型 $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{K},\ k \longmapsto k \cdot 1$ が誘導する $\mathbb{Z}$-代数の単射準同型 $\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n] \longrightarrow \mathbb{K}[t_1, \dots, t_n]$ によって $P(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{K}[t_1, \dots, t_n]$ と見做した．
[b] 乗法単位元 1 を持つ

証明 $\mathbb{K}$ は無限体だから，補題 2.10 より $\mathbb{Z}$-係数多項式として $P(t_1, \dots, t_n) = 0$ である．ここで単射な環準同型 $\mathbb{Z} \longrightarrow R,\ k \longmapsto k \cdot 1$ が誘導する単射 $\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n] \longrightarrow R[t_1, \dots, t_n]$ によって 0 は 0 に移るので，示された． ■

以降では $\mathbb{K}$ を標数 0 の体とする．$G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ の場合に $\mathrm{Ad}(G)$-不変多項式を探そう．$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) = \mathrm{M}(n, \mathbb{K})$ だから，$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ 上の多項式とは $\mathbb{K}$-結合代数 $\mathbb{K}[t^i{}_j] \cong \mathbb{K}[t_1, \dots, t_{n^2}]$ の元のことである．**【例 2.4.6】**より，$\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ の随伴表現は

$$\mathrm{Ad}\colon G \longrightarrow \mathfrak{gl}(n\,\mathbb{K}),\ g \longmapsto (X \longmapsto gXg^{-1})$$

と書ける．

補題 2.12:

- $\mathrm{Ad}(\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}))$-不変多項式 $P \in \mathbb{K}[t^i{}_j]$
- 単位的 $\mathbb{K}$-結合代数 R

を与える．このとき $\forall g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}),\ \forall X \in \mathrm{M}(n, R,)$ に対して

$$P\big(gXg^{-1}\big) = P(X)$$

証明 $\forall g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ について，不変多項式の定義および補題 2.10 から

$$P_g(t^i{}_j) := P([gtg^{-1}]^i{}_j) - P(t^i{}_j) \in \mathbb{K}[t^i{}_j]$$

はゼロ多項式である．よって単射 $\mathbb{K} \longrightarrow R,\ x \longmapsto x \cdot 1$ が誘導する埋め込み $\mathbb{K}[t^i{}_j] \hookrightarrow \mathbb{R}[t^i{}_j]$ によって $P_g(t^i{}_j) \in \mathbb{R}[t^i{}_j]$ と見做すと $P_g(t^i{}_j) = 0$ であり，補題 2.10 から

$$P_g(X) = P(gXg^{-1}) - P(X) = 0 \iff P(gXg^{-1}) = P(X)$$

が従う． ■

ここで，

$$f(t^i{}_j,\,\lambda) \coloneqq \det\bigl(\lambda\mathbb{1}_n + \bigl[\,t^i{}_j\,\bigr]\bigr) \in \mathbb{Z}[t^i{}_j,\,\lambda]$$

を考える．λ について項を整理することで r 個の $f_k(t^i{}_j) \in \mathbb{Z}[t^i{}_j]$

$$\begin{aligned} f(t^i{}_j,\,\lambda) &\eqqcolon \lambda^n + f_1(t^i{}_j)\lambda^{n-1} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{n} f_k(t^i{}_j)\lambda^{n-k} \end{aligned}$$

を得る．補題 2.11 により $f(t^i{}_j,\,\lambda) \in \mathbb{K}[t^i{}_j,\,\lambda]$, $f_k(t^i{}_j) \in \mathbb{K}[t^i{}_j]$ と見做してもこの等式は成り立つ．

命題 2.16: $f_k(t^i{}_j)$ は不変多項式

$\mathbb{K}$ を標数 0 の体とする．このとき $f_k(t^i{}_j) \in \mathbb{K}[t^i{}_j]$ は $\mathrm{Ad}(\mathrm{GL}(n,\,\mathbb{K}))$-不変多項式である．

証明 $R = \mathbb{K}[t^i{}_j,\,\lambda]$ の場合に命題 2.12 を使うと，$\forall g \in \mathrm{GL}(n,\,\mathbb{K})$ および $\forall X \in\coloneqq \mathrm{M}(n,\,\mathbb{K}[t^i{}_j,\,\lambda])$ に対して

$$\det\bigl(gXg^{-1}\bigr) = \det(X)$$

がわかる．$X = \bigl[\,\lambda\delta^i_j + t^i{}_j\bigr]$ の場合を考えれば

$$f(t^i{}_j,\,\lambda) = \det(X) = \det\bigl(gXg^{-1}\bigr) = c([\,gtg^{-1}\,]^i{}_j,\,\lambda)$$

がわかり，示された． ■

【例 2.5.2】複素の場合

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の場合を考える．$\mathbb{C}$ は無限体だから，補題 2.10 より $\mathbb{C}$-係数多項式と多項式函数を同一視できる．

$\mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{C})$ の部分集合

$$\mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{C})^{\mathrm{diag}} \coloneqq \bigl\{\,X \in \mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{C}) \bigm| \text{対角化可能}\,\bigr\}$$

を考える．

$$\begin{aligned} & X \in \mathfrak{gl}(n,\ \mathbb{C}) \setminus \mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{C})^{\mathrm{diag}} \\ \iff\ & f_X(\lambda) \coloneqq \det(\lambda\mathbb{1}_n - X)\,\text{とその微分}\,f'_X(\lambda)\,\text{が共通の根を持つ} \\ \iff\ & f_X,\,f'_X \in \mathbb{C}[\lambda]\,\text{の終結式}\,\mathrm{res}(f_X,\,f'_X) = 0 \end{aligned}$$

であるが，写像 $\varphi\colon \mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C},\ X \longmapsto \mathrm{res}(f_X,\,f'_X)$ は行列の成分に関する多項式函数なので C^∞ 関数であり，$\mathfrak{gl}(n,\ \mathbb{C}) \setminus \mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{C})^{\mathrm{diag}} = \varphi^{-1}(\{0\})$ が余次元 1 の部分多様体だと分かった．従って $\mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{C})^{\mathrm{diag}}$ は $\mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{C})$ 上稠密である．

命題 2.17:

n 変数の対称多項式の空間を $\mathbb{C}[t_1,\,\dots,\,t_n]^{\mathrm{Sym}}$ と書く．このとき，写像

$$\begin{aligned}\rho\colon \mathrm{Inv}\big(\mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{C})\big) &\longrightarrow \mathbb{C}[t_1,\,\dots,\,t_n]^{\mathrm{Sym}} \\ P({t^i}_j) &\longmapsto \left((\lambda_1,\,\dots,\,\lambda_n) \longmapsto P|_{\mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{C})^{\mathrm{diag}}}\left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}\right)\right)\end{aligned}$$

は $\mathbb{C}$-結合代数の同型写像である．

<u>**証明**</u> P が不変多項式であることから，対称群 $\mathfrak{S}_n$ の $\mathbb{C}^n$ への作用

$$\sigma \blacktriangleright (\lambda_1,\,\dots,\,\lambda_n) \coloneqq (\lambda_{\sigma(1)},\,\dots,\,\lambda_{\sigma(n)})$$

について $\mathrm{Im}\,\rho$ は不変である．よって ρ の値域を n 変数の対称多項式の空間 $\mathbb{C}[t_1,\,\dots,\,t_n]^{\mathrm{Sym}}$ に制限することができる．$\forall P \in \mathrm{Ker}\,\rho$ をとる．このとき $\forall X \in \mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{C})^{\mathrm{diag}}$ について $P(X) = 0$ であるが，$\mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{C})^{\mathrm{diag}}$ が稠密なので, 多項式函数 $P(X)$ の連続性から $\forall X \in \mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{C})$ に対して $P(X) = 0$ が言える. i.e. ρ は単射である. 一方, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ に関して, k 次の基本対称式 $\sigma_k \in \mathbb{Z}[t_1,\,\dots,\,t_n] \subset \mathbb{C}[t_1,\,\dots,\,t_n]$ を使って

$$\begin{aligned}\rho\big(f({t^i}_j,\,\lambda)\big)(\lambda_1,\,\dots,\,\lambda_n) &= \det\left(\lambda \mathbb{1}_n + \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} (\lambda + \lambda_i) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sigma_k(\lambda_1,\,\dots,\,\lambda_n)\lambda^{n-k}\end{aligned}$$

と書けるので

$$\rho\big(f_k({t^i}_j)\big) = \sigma_k$$

であり, $\mathbb{C}[t_1,\,\dots,\,t_n]^{\mathrm{Sym}}$ は $\sigma_1,\,\dots,\,\sigma_n$ によって生成されるので, ρ が全射であることが分かった． ■

結局,

$$\mathrm{Inv}\big(\mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{C})\big) = \mathbb{C}\big[f_1({t^i}_j),\,\dots,\,f_n({t^i}_j)\big]$$

が分かった．全く同様の議論により

$$\mathrm{Inv}\big(\mathfrak{u}(n,\,\mathbb{C})\big) = \mathbb{C}\big[f_1({t^i}_j),\,\dots,\,f_n({t^i}_j)\big]$$

もわかる．

【例 2.5.3】実の場合

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合を考える．$\mathbb{R}$ は無限体だから，補題 2.10 より $\mathbb{R}$-係数多項式と多項式函数を同一視できる．

補題 2.13:

k 次多項式 $f\colon \mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ は $\mathrm{Ad}\big(\mathrm{GL}(n,\,\mathbb{R})\big)$-不変ならば $\mathrm{Ad}\big(\mathrm{GL}(n,\,\mathbb{C})\big)$-不変である．

証明 $\forall A \in \mathrm{GL}(n,\,\mathbb{C})$ を 1 つ固定する．Cramer の公式より，A の余因子行列を $\tilde{A}$ と書くと $A^{-1} = \tilde{A}/\det A$ が成り立つ．f は k 次多項式なので

$$f(AXA^{-1}) = f(AX\tilde{A})/(\det A)^k \quad \Longleftrightarrow \quad f(AX\tilde{A}) = (\det A)^k f(AXA^{-1})$$

が分かった．ここで，多項式

$$q(A,\,X) \coloneqq f(AX\tilde{A}) - (\det A)^k f(X)$$

を考える．仮定より $\mathrm{GL}(n,\,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n^2}$ 上で $q(A,\,X) = 0$ であるが，多項式函数 $q\colon \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{R}$ は連続関数である．さらに $\mathbb{R}^{n^2} \setminus \mathrm{GL}(n,\,\mathbb{R}) = \det(\{0\})$ は $\mathbb{R}^{n^2}$ の余次元 1 の部分多様体だから $\mathrm{GL}(n,\,\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}^{n^2}$ 上稠密であり，$\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2}$ 上で $q(A,\,X) = 0$ が言える．$q(A,\,X)$ は $\mathbb{C}^{n^2} \times \mathbb{C}^{n^2}$ 上の多項式函数と見做すと正則関数なので，一致の定理から $\mathbb{C}^{n^2} \times \mathbb{C}^{n^2}$ 上でも $q(A,\,X) = 0$ が言える． ■

命題 2.18:

n 変数の対称多項式の空間を $\mathbb{R}[t_1,\,\ldots,\,t_n]^{\mathrm{Sym}}$ と書く．このとき，写像

$$\begin{aligned}\rho_{\mathbb{R}}\colon \mathrm{Inv}\big(\mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{R})\big) &\longrightarrow \mathbb{R}[t_1,\,\ldots,\,t_n]^{\mathrm{Sym}} \\ P({t^i}_j) &\longmapsto \left((\lambda_1,\,\ldots,\,\lambda_n) \longmapsto P|_{\mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{R})^{\mathrm{diag}}}\left(\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}\right)\right)\end{aligned}$$

は $\mathbb{R}$-結合代数の同型写像である．

証明 補題 2.13 より，可換図式

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Inv}\big(\mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{C})\big) & \xrightarrow{\ \rho\ } & \mathbb{C}[t_1,\,\ldots,\,t_n]^{\mathrm{Sym}} \\ \big\uparrow & & \big\uparrow \\ \mathrm{Inv}\big(\mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{R})\big) & \xrightarrow[\rho_{\mathbb{R}}]{} & \mathbb{R}[t_1,\,\ldots,\,t_n]^{\mathrm{Sym}}\end{array}$$

が成り立つ．よって $\rho_{\mathbb{R}}$ は単射．全射性は命題 2.17 と全く同様の議論から従う． ■

結局，

$$\mathrm{Inv}\big(\mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{R})\big) = \mathbb{R}\big[f_1({t^i}_j),\,\ldots,\,f_n({t^i}_j)\big]$$

が分かった．

【例 2.5.4】直交群の場合

次に，$\mathbb{K} = \mathbb{R},\ G = \mathrm{O}(n)$ の場合を考える．

補題 2.14:

$\forall X \in \mathfrak{o}(n)$ に対して

$$f_{2k+1}(X) = 0$$

<u>証明</u> $X \in \mathfrak{o}(n)$ だから $X = -X^{\mathsf{T}}$ が成り立つ．よって

$$\begin{aligned} f(X,\, \lambda) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f_k(X) \lambda^{n-k} \\ &= \det(\lambda \mathbb{1}_n + X) \\ &= \det\bigl(\lambda \mathbb{1}_n + X^{\mathsf{T}}\bigr) \\ &= \det(\lambda \mathbb{1}_n - X) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f_k(X) \lambda^{n-k} \end{aligned}$$

であり，示された． ■

以下では $p_k \coloneqq f_{2k}$ とおく．

命題 2.19:

$$\mathrm{Inv}\bigl(\mathfrak{o}(n)\bigr) \cong \mathbb{R}\bigl[p_1({t^i}_j),\, \dots,\, p_{\lfloor n/2 \rfloor}({t^i}_j)\bigr]$$

<u>証明</u> 自然な埋め込み $\rho\colon \mathbb{R}\bigl[p_1({t^i}_j),\, \dots,\, p_{\lfloor n/2 \rfloor}({t^i}_j)\bigr] \hookrightarrow \mathrm{Inv}\bigl(\mathfrak{o}(n)\bigr)$ が全単射であることを示す．

■

以下しばらくの間，命題 2.17, 2.18 を使って色々な特性類を定義していく．

Chern 類

Chern 類の構成は，命題 2.17 による．

定義 2.25: Chern 類

- 階数 n の複素ベクトル束 $V \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$
- E の接続 $\nabla^E\colon \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(M;\, E)$

を与える．

(1) **全 Chern 形式**とは,

$$\boldsymbol{c(R^{\nabla^E})} \coloneqq \det\left(\mathrm{id}_E + \frac{\mathrm{i}}{2\pi}R^{\nabla^E}\right) \in \Omega^{\bullet}(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

のこと．**第 $\boldsymbol{k}$-Chern 形式** (k-th Chern form) とは,

$$\boldsymbol{c_k(R^{\nabla^E})} \coloneqq f_k\left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}R^{\nabla^E}\right) \in \Omega^{2k}(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

のこと．

(2) **全 Chern 類** (total Chern class) とは,

$$\boldsymbol{c(E)} \coloneqq \left[c(R^{\nabla^E})\right] \in H^{\bullet}_{\mathrm{dR}}(M; \mathbb{C})$$

のこと．**第 $\boldsymbol{k}$-Chern 類** (k-th Chern class) とは,

$$\boldsymbol{c_k(E)} \coloneqq \left[c_k(R^{\nabla^E})\right] \in H^{2k}_{\mathrm{dR}}(M; \mathbb{C})$$

のこと．

Pontrjagin 類

Euler 類

2.5.5 特性類のホモトピー論的扱い

第 3 章

位相的場の理論

この章は [1, Chapter7] および [10] に相当する．この節で登場する多様体は特に断らない限り常に C^∞ 多様体である．また，体 $\mathbb{K}$ と言ったら $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のいずれかを指すことにしよう．

3.1　モノイダル圏

まず手始めに，モノイダル圏とストリング図式の準備をする．特に，コボルディズム圏と有限次元 Hilbert 空間の圏がコンパクト対称モノイダル圏であることの直感的な説明をする．

3.1.1　モノイダル圏の定義

定義 3.1: モノイダル圏

モノイダル圏 (monidal category) は，以下の 5 つのデータからなる：

- 圏 $\mathcal{C}$
- **テンソル積** (tensor product) と呼ばれる関手 $\otimes\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$
- **単位対象** (unit object) $I \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- **associator** と呼ばれる自然同値

$$\left\{a_{X,\,Y,\,Z}\colon (X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{\cong} X \otimes (Y \otimes Z)\right\}_{X,\,Y,\,Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

- **left/right unitors** と呼ばれる自然同値

$$\left\{l_X\colon I \otimes X \xrightarrow{\cong} X\right\}_{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{X})},$$
$$\left\{r_X\colon X \otimes I \xrightarrow{\cong} X\right\}_{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{X})}$$

これらは $\forall X,\, Y,\, Z,\, W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について以下の 2 つの図式を可換にする：

(triangle diagram)

$$
\begin{tikzcd}
(X \otimes I) \otimes Y \arrow[rr, "a_{X,\,I,\,Y}"] \arrow[dr, "r_X \otimes 1_Y"'] & & X \otimes (I \otimes Y) \arrow[dl, "1_X \otimes l_Y"] \\
& X \otimes Y &
\end{tikzcd}
$$

(pentagon diagram)

$$
\begin{tikzcd}
& ((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z \arrow[dl, "a_{W \otimes X,\,Y,\,Z}"'] \arrow[r, "a_{W,\,X,\,Y} \otimes 1_Z"] & (W \otimes (X \otimes Y)) \otimes Z \arrow[d, "a_{W,\,X \otimes Y,\,Z}"] \\
(W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) \arrow[dr, "a_{W,\,X,\,Y \otimes Z}"'] & & W \otimes ((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[dl, "1_Z \otimes a_{X,\,Y,\,Z}"] \\
& W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z)) &
\end{tikzcd}
$$

定義 3.1 は，ストリング図式 (string diagram) で理解するのが良い．モノイダル圏の射 $f\colon X \longrightarrow Y$, $f'\colon X' \longrightarrow Y'$ があったら，そのテンソル積 $f \otimes f'\colon X \otimes X' \longrightarrow Y \otimes Y'$ は，ストリング図式上では次のようになる．

また，単位対象 $I \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ は空白として表す．従って例えば射 $f\colon I \longrightarrow X$ は次のようになる：

【例 3.1.1】コボルディズム圏

厳密な構成[a]は後回しにして，**コボルディズム圏** (cobordism category) を直感的に導入しよう．圏 $\mathbf{Cob}_{D+1}$ は，

- D 次元多様体を対象
- $D+1$ 次元の**コボルディズム** (cobordism) を射

とするような圏のことを言う．$D+1$ 次元のコボルディズム $\mathcal{M}\colon X \longrightarrow Y$ と言うのは，$D+1$ 次元多様体 $\mathcal{M}$ であって，$\partial\mathcal{M} = X \amalg Y$ となっているようなもの（の微分同相類）のことである：

射 $\mathcal{M}\colon X \longrightarrow Y$, $\mathcal{N}\colon Y \longrightarrow Z$ の合成 $\mathcal{N} \circ \mathcal{M}\colon X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ は次の図式が物語る：

圏 $\mathbf{Cob}_{D+1}$ は，disjoint union に関してモノイダル圏になる：

[a] 例えば，$(B,\, f)$-structure の定義から始めるコボルディズムの統一的な扱いは [11, CHAPTER 1] などを参照.

【例 3.1.2】有限次元 Hilbert 空間の圏

有限次元 $\mathbb{K}$-Hilbert 空間の圏 **Hilb** とは,

- 有限次元 $\mathbb{K}$-Hilbert 空間を対象
- 線型写像を射
- 写像の合成を射の合成

に持つような圏のことを言う．**Hilb** はベクトル空間のテンソル積 $V_1 \otimes V_2$ の上に内積を

$$\langle v_1 \otimes v_2,\, w_1 \otimes w_2 \rangle \coloneqq \langle v_1,\, w_1 \rangle_1 \langle v_2,\, w_2 \rangle_2$$

と定義することでモノイダル圏になる．

3.1.2　組紐付きモノイダル圏

定義 3.2: 組紐付きモノイダル圏

組紐付きモノイダル圏 (braided monoidal category) とは，以下の 2 つからなる：

- モノイダル圏 $\mathcal{C}$
- **組紐** (braiding) と呼ばれる自然同型

$$\{ b_{X,\,Y} \colon X \otimes Y \xrightarrow{\cong} Y \otimes X \}_{X,\,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは $\forall X,\, Y,\, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について以下の図式を可換にする：

(hexagon diagrams)

$$\begin{tikzcd}
X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "a^{-1}_{X,\,Y,\,Z}"] \arrow[d, "b_{X,\,Y \otimes Z}"] & (X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "b_{X,\,Y} \otimes 1_Z"] & (Y \otimes X) \otimes Z \arrow[d, "a_{Y,\,X,\,Z}"] \\
(Y \otimes Z) \otimes X & Y \otimes (Z \otimes X) \arrow[l, "a^{-1}_{Y,\,Z,\,X}"] & Y \otimes (X \otimes Z) \arrow[l, "1_X \otimes b_{X,\,Z}"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "a_{X,\,Y,\,Z}"] \arrow[d, "b_{X \otimes Y,\,Z}"] & X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "1_X \otimes b_{Y,\,Z}"] & X \otimes (Z \otimes Y) \arrow[d, "a^{-1}_{X,\,Z,\,Y}"] \\
Z \otimes (X \otimes Y) & (Z \otimes X) \otimes Y \arrow[l, "a_{Z,\,X,\,Y}"] & (X \otimes Z) \otimes Y \arrow[l, "b_{X,\,Z} \otimes 1_Y"]
\end{tikzcd}$$

組紐付きモノイダル圏 $\mathcal{C}$ であって，$\mathcal{C}$ の組紐が $b_{X,\,Y} = b^{-1}_{Y,\,X}$ を充たすもののことを**対称モノイダル圏** (symmetric monoidal category) と呼ぶ．

ストリング図式で組紐を書く場合は次のようにする：
このとき hexagon diagrams はとてもわかりやすくなる：

対称モノイダル圏の条件も一目瞭然である：

【例 3.1.3】$\mathbf{Cob}_{D+1}$ の組紐

$\mathbf{Cob}_{D+1}$ の組紐 $b_{X,Y}\colon X\otimes Y\longrightarrow Y\otimes X$ は，多様体 $(X\times[0,1])\amalg(Y\times[0,1])$ と微分同相であるような $D+1$ 次元多様体のことを言う：図から，$\mathbf{Cob}_{D+1}$ は対称モノイダル圏である．

【例 3.1.4】Hilb の組紐

Hilb の組紐は

$$\begin{aligned} b_{X,Y}\colon X\otimes Y &\longrightarrow Y\otimes X, \\ x\otimes y &\longmapsto y\otimes x \end{aligned}$$

である．これがベクトル空間の同型写像であることが示される．明らかに $b_{X,Y}=b_{Y,X}^{-1}$ なので **Hilb** は対称モノイダル圏である．

3.1.3 閉圏・コンパクト圏・ダガー圏

圏 $\mathcal{C}$ を与える．**Hom 関手** (Hom functor) とは，関手

$$\mathrm{Hom}\colon\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C}\longrightarrow\mathbf{Sets}$$

であって

$$\begin{gathered} (X,Y)\longmapsto\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \\ \Big((f,g)\colon(X',Y)\longrightarrow(X,Y')\Big)\longmapsto\Big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X',Y'),\ h\longmapsto g\circ h\circ f\Big) \end{gathered}$$

なる対応を与えるもののこと．

定義 3.3: 閉圏

モノイダル圏 $\mathcal{C}$ を与える．

- $\mathcal{C}$ が**左に閉じている** (left closed) とは，**internal hom functor** と呼ばれる関手

  $$\multimap\colon\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C}\longrightarrow\mathbf{Sets}$$

  と，**currying** と呼ばれる自然同型

  $$\left\{c_{X,Y,Z}\colon\mathrm{Hom}(X\otimes Y,Z)\xrightarrow{\cong}\mathrm{Hom}(X,Y\multimap Z)\right\}_{X,Y,Z\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

  の 2 つが存在することを言う．
- $\mathcal{C}$ が**右に閉じている** (right closed) とは，**internal hom functor** と呼ばれる関手と，**currying** と呼ばれる自然同型

  $$\left\{c_{X,Y,Z}\colon\mathrm{Hom}(X\otimes Y,Z)\xrightarrow{\cong}\mathrm{Hom}(Y,X\multimap Z)\right\}_{X,Y,Z\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

  の 2 つが存在することを言う．

対称モノイダル圏しか考えないので，以降では右に閉じているかどうかしか気にしないことにする．

定義 3.4: 双対

モノイダル圏 $\mathcal{C}$ およびその任意の対象 $X, X^* \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を与える．X^* が X の**右双対** (right dual) であり，かつ X が X^* の**左双対** (left dual) であるとは，

- **unit** と呼ばれる射

$$i_X \colon I \longrightarrow X^* \otimes X$$

- **counit** と呼ばれる射

$$e_X \colon X \otimes X^* \longrightarrow I$$

が存在して以下の図式を可換にすることを言う：

(zig-zag equations)

$$\begin{tikzcd}
X \otimes I \arrow[r, "1_X \otimes i_X"] \arrow[dd, "r_X"'] & X \otimes (X^* \otimes X) \arrow[d, "a^{-1}_{X,\, X^*,\, X}"] \\
 & (X \otimes X^*) \otimes X \arrow[d, "e_X \otimes 1_X"] \\
X & I \otimes X \arrow[l, "l_X"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I \otimes X^* \arrow[r, "i_X \otimes 1_{X^*}"] \arrow[dd, "l_{X^*}"'] & (X^* \otimes X) \otimes X^* \arrow[d, "a_{X^*,\, X,\, X^*}"] \\
 & X^* \otimes (X \otimes X^*) \arrow[d, "1_{X^*} \otimes e_X"] \\
X^* & X^* \otimes I \arrow[l, "r_{X^*}"]
\end{tikzcd}$$

双対のストリング図式は，単に矢印を逆にすれば良い：
このとき zig-zag equations が本当にジグザグしていることがわかる：

定義 3.5: コンパクト圏

モノイダル圏 $\mathcal{C}$ は，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が左・右双対を持つとき**コンパクト** (compact) であると言われる．

【例 3.1.5】Cob の unit と counit

$\mathbf{Cob}_{D+1}$ における $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cob}_{D+1})$ の双対とは，向き付けを逆にした D 次元多様体 X のことである．特に $\mathbf{Cob}_3$ における unit, counit はそれぞれ U 字管とそれを逆さにしたもののような見た目をしている：
internal hom functor を $X \multimap Y \coloneqq X^* \otimes Y$ とすれば，図から $\mathbf{Cob}_3$ が閉圏であることを直接確認できる．

【例 3.1.6】Hilb の unit と counit

$\mathbf{Hilb}$ において $I = \mathbb{C}$ である．従って，$X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Hilb})$ の双対とは双対ベクトル空間 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X, \mathbb{C})$ のことである．ブラ空間のことだと言っても良い．特に，自然な同型 $X^* \otimes Y \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y)$ を使うと X の unit は

$$\begin{aligned} i_X\colon I &\longrightarrow X^* \otimes X, \\ c &\longmapsto c\,\mathrm{id}_X \end{aligned}$$

で，counit は

$$\begin{aligned} e_X\colon X \otimes X^* &\longrightarrow I, \\ x \otimes f &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

であることがわかる．internal hom functor を $X \multimap Y \coloneqq X^* \otimes Y \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y)$ とすれば $\mathbf{Hilb}$ が閉圏であることを直接確認できる．

実は，コンパクト圏は自動的に閉圏になる．これは

$$X \multimap Y \coloneqq X^* \otimes Y$$

として internal hom functor を定義することで確認できる．

定義 3.6: ダガー圏

圏 $\mathcal{C}$ が**ダガー圏** (dagger category) であるとは，関手

$$\dagger\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$$

が存在して以下を充たすことを言う：

(1) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $X^\dagger = X$ を充たす．
(2) $\mathcal{C}$ の任意の射 $f\colon X \longrightarrow Y$ に対して $(f^\dagger)^\dagger = f$ を充たす．

【例 3.1.7】Cob の dagger

$\mathbf{Cob}_{D+1}$ における $\mathcal{M}\colon X \longrightarrow Y$ のダガーは，上下を逆にしてから $\mathcal{M}$ の連結成分毎に向きを逆にすることで得られる．

【例 3.1.8】Hilb の dagger

Hilb における $f\colon X \longrightarrow Y$ のダガーは，$\forall \phi \in X,\ \forall \psi \in Y$ に対して

$$\langle f^{\dagger}(\psi),\ \phi\rangle \coloneqq \langle \psi,\ f(\phi)\rangle$$

とすることで定義される．

3.1.4 モノイダル関手

モノイダル関手とは，ざっくり言うとモノイダル圏の構造を保存するような関手のことである：

定義 3.7: モノイダル関手

2 つのモノイダル圏 $\mathcal{C},\ \mathcal{D}$ の間の関手

$$F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

が **lax monoidal functor** であるとは，

- 射

$$\varepsilon\colon I_{\mathcal{D}} \longrightarrow F(I_{\mathcal{C}})$$

- 自然変換

$$\bigl\{\mu_{X,\,Y}\colon F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y) \longrightarrow F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y)\bigr\}_{X,\,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

があって，$\forall X,\ Y,\ Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して以下の図式が可換になること：

(associatibity)

$$\begin{tikzcd}
(F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y)) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z) \arrow[r, "a^{\mathcal{D}}_{F(X),\,F(Y),\,F(Z)}"'] \arrow[d, "\mu_{X,\,Y} \otimes 1_{F(Z)}"'] & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} (F(Y) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z)) \arrow[d, "1_{F(X)} \otimes \mu_{Y,\,Z}"] \\
F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z) \arrow[d, "\mu_{X \otimes_{\mathcal{C}} Y,\,Z}"'] & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y \otimes_{\mathcal{C}} Z) \arrow[d, "\mu_{X,\,Y \otimes_{\mathcal{C}} Z}"] \\
F((X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{C}} Z) \arrow[r, "F(a^{\mathcal{C}}_{X,\,Y,\,Z})"'] & F(X \otimes_{\mathcal{C}} (Y \otimes_{\mathcal{C}} Z))
\end{tikzcd}$$

(unitality)

$$\begin{tikzcd}
I_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathcal{D}} F(X) \arrow[r, "\varepsilon \otimes 1_{F(X)}"] \arrow[d, "l^{\mathcal{D}}_{F(X)}"'] & F(I_{\mathcal{C}}) \otimes_{\mathcal{D}} F(X) \arrow[d, "\mu_{I_{\mathcal{C}},\,X}"] \\
F(X) & F(I_{\mathcal{C}} \otimes_{\mathcal{C}} X) \arrow[l, "F(l^{\mathcal{C}}_{X})"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F(X) \otimes_{\mathcal{D}} I_{\mathcal{D}} \arrow[r, "1_{F(X)} \otimes \varepsilon"] \arrow[d, "r^{\mathcal{D}}_{F(X)}"'] & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(I_{\mathcal{C}}) \arrow[d, "\mu_{X,\, I_{\mathcal{C}}}"] \\
F(X) & F(X \otimes_{\mathcal{C}} I_{\mathcal{C}}) \arrow[l, "F(r^{\mathcal{C}}_X)"]
\end{tikzcd}$$

- lax monoidal functor F の ε と $\mu_{X,Y}$ が全て同型射ならば，F は **strong monoidal functor** と呼ばれる．
- lax monoidal functor F の ε と $\mu_{X,Y}$ が全て恒等射ならば，F は **strict monoidal functor** と呼ばれる．

3.2 TQFT の定義

位相的場の理論 (Topological Quantum Field Theory; TQFT) の枠組みをトップダウンに導入する．

3.2.1 Atiyah の公理系

まず，全ての出発点として Atiyah の公理系 [12] というものがある：

公理 3.1: Atiyah の公理系（若干簡略版）

体 $\mathbb{K}$ 上の[a]，D 次元の**位相的場の理論** (Topological Quantum Field Theory; TQFT) とは，以下の 2 つのデータからなる：

(1) 向き付けられた (oriented) D 次元の閉多様体 (closed manifold) Σ に対応づけられた<u>有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間</u> $V(\Sigma)$

(2) 向き付けられた $D+1$ 次元の境界付き多様体 M に対応づけられたベクトル $Z(M) \in V(\partial M)$

これらのデータは以下の条件を充たす：

(TQFT-1)
Z は向きを保つ微分同相写像について**関手的** (functorial) に振る舞う．

(TQFT-2)
Z は**対合的** (involutory) である．

(TQFT-3)
Z は**モノイダル的** (multiplicative[b]) である．

[a] 原論文 [12] では環としていて，ベクトル空間の代わりに環上の有限生成加群を扱っている．今回は Hilbert 空間しか考えないので体 $\mathbb{K}$ としておいた．

[b] 「乗法的」というと語弊がありそうなのでモノイダル的と言った．

[12] に倣って公理の意味を精査していく．

(TQFT-1)

この公理は 2 つの要請を持つ：

(1) D 次元閉多様体 $\Sigma, \Sigma', \Sigma''$ の間の向きを保つ微分同相写像 $f\colon \Sigma \longrightarrow \Sigma'$, $g\colon \Sigma' \longrightarrow \Sigma''$ に対して, $V(f)\colon V(\Sigma) \longrightarrow V(\Sigma')$ はベクトル空間の同型写像で，$V(g \circ f) = V(g) \circ V(f)$ が成り立つ.

(2) 向きを保つ微分同相写像 $f\colon \Sigma \longrightarrow \Sigma'$ が, $D+1$ 次元多様体 M, M' であって $\Sigma = \partial M$, $\Sigma' = \partial M'$ を充たすものの上に $f\colon M \longrightarrow M'$ と拡張される場合に $V(f)\big(Z(M)\big) = Z(M')$ を充たす.

(TQFT-2)

Σ の向きを逆にして得られる D 次元閉多様体を Σ^* と書く[*1]とき，$V(\Sigma^*) = V(\Sigma)^*$ を充たす[*2].

(TQFT-3)

この公理は 5 つの要請を持つ：

(1) D 次元閉多様体 Σ_1, Σ_2 に対して

$$V(\Sigma_1 \amalg \Sigma_2) = V(\Sigma_1) \otimes V(\Sigma_2)$$

が成り立つこと.

(2) $D+1$ 次元多様体 M, M_1, M_2 に対して $\partial M_1 = \Sigma_1 \amalg \Sigma_3$, $\partial M_2 = \Sigma_2 \amalg \Sigma_3^*$, $M = M_1 \cup_{\Sigma_3} M_2$ が成り立つならば,

$$Z(M) = \langle Z(M_1) | Z(M_2) \rangle$$

ただし,

$$\langle\,|\,\rangle : V(\partial M_1) \otimes V(\partial M_2) = V(\Sigma_1) \otimes V(\Sigma_3) \otimes V(\Sigma_3)^* \otimes V(\Sigma_2) \longrightarrow V(\partial M) = V(\Sigma_1) \otimes V(\Sigma_2),$$
$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_3\rangle \otimes \langle\varphi_3| \otimes |\psi_2\rangle \longmapsto \langle\varphi_3|\psi_3\rangle\, |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$$

である.

(3) (2) において $\Sigma_3 = \emptyset$ ならば,

$$Z(M) = Z(M_1) \otimes Z(M_2)$$

(4) (1) から[*3],

$$V(\emptyset) = \mathbb{K}$$

(5) (3) から[*4],

$$Z(\emptyset) = 1$$

今や別の同値な定義ができる．$D+1$ 次元多様体 M の境界 ∂M を

$$\partial M = \Sigma_1^* \amalg \Sigma_2$$

---

*1 【例 3.1.5】の意味で，圏 $\mathbf{Cob}_{D+1}$ における $\Sigma \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cob}_{D+1})$ の双対となっている.

*2 $V(\Sigma)$ が有限次元なので，$V(\Sigma)^*$ はブラ空間と見做せる.

*3 $\mathbf{Cob}_{D+1}$ の単位対象は $\emptyset$ なので $\emptyset = \emptyset \amalg \emptyset$．よって (1) から $V(\emptyset) = V(\emptyset) \otimes V(\emptyset)$．これを充たすのは $V(\emptyset) = 0, \mathbb{K}$（モノイダル圏 $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の単位対象は $\mathbb{K}$ である）のどちらかしかないので，非自明な方を採用する.

*4 $\emptyset = \emptyset \amalg \emptyset$ なので (3) から $Z(\emptyset) = Z(\emptyset) \otimes Z(\emptyset)$．これを充たす $V(\emptyset) = \mathbb{K}$ の元は 0, 1 しかないので，非自明な方を採用する.

と分解すると[*5]，**(TQFT-3)**-(1) より $Z(M) \in V(\partial M) = Z(\Sigma_1)^* \otimes Z(\Sigma_2) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\big(Z(\Sigma_1),\, Z(\Sigma_2)\big)$ が言えるので，$Z(M)$ を線型写像 $Z(M)\colon V(\Sigma_1) \longrightarrow V(\Sigma_2)$ と同一視できるのである．**(TQFT-1)** もあわせると，結局これまで $V,\, Z$ と書いていたものは strong monoidal functor

$$Z\colon \mathbf{Cob}_{D+1} \longrightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$$

の 1 つに集約することができる．

定義 3.8: TQFT の定義

D 次元の**位相的場の理論** (Topological Quantum Field Theory; TQFT) とは，コボルディズム圏からある対称モノイダル圏 $\mathcal{D}$ への strict monoidal functor[a]

$$Z\colon \mathbf{Cob}_{D+1} \longrightarrow \mathcal{D}$$

のこと．

[a] strong monoidal functor とする場合もある（例えば https://ncatlab.org/nlab/show/cobordism）ようだが，原論文 [12] では strict monoidal functor になっていた．

興味があるのは $\mathcal{D} = \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}},\, \mathbf{Hilb}$ の場合なので，以下では TQFT と言ったら strict monoidal functor

$$Z\colon \mathbf{Cob}_{D+1} \longrightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}},\, \mathbf{Hilb}$$

を指すことにしよう．

3.3 連続な高次対称性

エニオンのフュージョン則を議論する前に少し寄り道をして，[13], [14] に倣って**一般化対称性** (generalized symmetry)[*6] の話をする．この節では自然単位系を使う．時空を表す $D+1$ 次元多様体を $\mathcal{M}$ と書き，$\mathcal{M}$ のチャートの座標関数を $(x^0,\, x^1,\, \dots,\, x^D) =: (t,\, \boldsymbol{x})$ と書く．特に D 次元多様体 Σ を使って $\mathcal{M} = \Sigma \times \mathbb{R}$ または $\Sigma \times S^1$ と書ける場合は $x^0 =: t$ で $\mathbb{R}$ または S^1 成分のチャート（時間）を表すことにし，Σ のことを時間一定面と呼ぶ．$\mathcal{M}$ として Minkowski 時空を考える場合，Minkowski 計量としては $[\eta_{\mu\nu}] \coloneqq (-1,\, +1,\, \dots,\, +1)$ を用いる．Minkowski 計量でない一般の計量テンソルは $g \coloneqq g_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu \in \Gamma(T^*\mathcal{M} \otimes T^*\mathcal{M})$ と表記し，共役計量テンソルを $g^{\mu\nu}\partial_\mu \otimes \partial_\nu \in \Gamma(T\mathcal{M} \otimes T\mathcal{M})$ と表記する．

$\mathcal{M}$ に計量 $g_{\mu\nu}$ が与えられたとき，**音楽同型** (musical isomorphism) を

$$\begin{aligned}
\flat\colon \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \longrightarrow \Omega^1(\mathcal{M}),\ X^\mu\partial_\mu \longmapsto g_{\mu\nu}X^\nu\, \mathrm{d}x^\mu\,, \\
\sharp\colon \Omega^1(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M}),\ \omega_\mu\, \mathrm{d}x^\mu \longmapsto g^{\mu\nu}\omega_\nu\partial_\mu
\end{aligned}$$

で定義する．Hodge star は

$$\begin{aligned}
\star\colon \Omega^p(\mathcal{M}) &\longrightarrow \Omega^{D+1-p}, \\
\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_p} &\longmapsto \frac{1}{(D+1-p)!} g^{\mu_1\nu_1} \cdots g^{\mu_p\nu_p} \epsilon_{\nu_1 \cdots \nu_p \mu_{p+1} \cdots \mu_{D+1}}\, \mathrm{d}x^{\mu_{p+1}} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_{D+1}}
\end{aligned}$$

[*5] どちらか一方が $\emptyset$ になっても良い

[*6] **高次対称性** (higher form symmetry) と呼ばれることもある．

を線型に拡張することで定義される．特に不変体積要素を

$$\mathrm{d}^{D+1}x \coloneqq \star 1 = \sqrt{|g|}\,\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{D+1}$$

と定義する．

$\mathcal{M}$ の p 次元部分多様体[*7] $\mathcal{N}^{(p)} \subset \mathcal{M}$ 上で p-形式 $\omega \in \Omega^p(\mathcal{M})$ を積分する場合，包含写像 $\iota\colon \mathcal{N}^{(p)} \hookrightarrow \mathcal{M}$ による引き戻し $\iota^*\colon \Omega^p(\mathcal{M}) \longrightarrow \Omega^p(\mathcal{N}^{(p)})$ を用いて

$$\int_{\mathcal{N}} \omega \coloneqq \int_{\mathcal{N}^{(p)}} \iota^* \omega$$

と定義する．このとき，Poincaré 双対を考えることで

$$\int_{\mathcal{N}} \omega = \int_{\mathcal{M}} \omega \wedge \delta(\mathcal{N}^{(p)})$$

を充たす $\delta(\mathcal{N}^{(p)}) \in \Omega^{D+1-p}(\mathcal{M})$（**デルタ関数 p-形式**と呼ぶ）の存在がわかる[*8]．さて，$\mathcal{N}^{(p)} = \partial\mathcal{M}^{(p+1)}$ の場合を考える．$\forall \omega \in \Omega^p(\mathcal{M})$ に対して Stokes の定理から

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{M}} \omega \wedge \delta(\partial\mathcal{M}^{(p+1)}) &= \int_{\partial\mathcal{M}^{(p+1)}} \omega = \int_{\mathcal{M}^{(p+1)}} \mathrm{d}\omega = \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}\omega \wedge \delta(\mathcal{M}^{(p+1)}) \\
&= \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}\big(\omega \wedge \delta(\mathcal{M}^{(p+1)})\big) + (-1)^{p+1} \int_{\mathcal{M}} \omega \wedge \mathrm{d}\Big(\delta(\mathcal{M}^{(p+1)})\Big) \\
&= (-1)^{p+1} \int_{\mathcal{M}} \omega \wedge \mathrm{d}\Big(\delta(\mathcal{M}^{(p+1)})\Big)
\end{aligned}$$

がわかるので，

$$\mathrm{d}\delta(\mathcal{M}^{(p+1)}) = (-1)^{p+1} \delta(\partial\mathcal{M}^{(p+1)})$$

が成り立つ．p 次元部分多様体 $\mathcal{M}^{(p)}$ と $D+1-p$ 次元部分多様体 $\mathcal{M}^{(D+1-p)}$ に対して，これらの向きを考慮した**交点数**を

$$\mathrm{I}(\mathcal{M}^{(p)},\, \mathcal{M}^{(D+1-p)}) \coloneqq \int_{\mathcal{M}} \delta(\mathcal{M}^{(p)}) \wedge \delta(\mathcal{M}^{(D+1-p)})$$

で定義する．$\mathcal{C}^{(p-1)} = \partial\mathcal{M}^{(p)}$ を充たす $\mathcal{C}^{(p-1)}$ と $\mathcal{M}^{(D+1-p)}$ の**絡み数**は

$$\mathrm{Link}(\mathcal{C}^{(p-1)},\, \mathcal{M}^{(p)}) \coloneqq \mathrm{I}(\mathcal{M}^{(p)},\, \mathcal{M}^{(D+1-p)})$$

と定義される．

3.3.1 通常の対称性

N 成分の場[*9] $\varphi\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{K}^N,\ x \longmapsto \big(\varphi_{\boldsymbol{i}}(x)\big)_{1 \le \boldsymbol{i} \le N}$ は，あるベクトル束 $\mathbb{K}^N \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ の切断と理解する．場の変換性はベクトル束の変換関数に由来する．

[*7] コンパクトな埋め込まれた C^∞ 多様体と仮定する．
[*8] 厳密な扱いは [15, p.270] を参照．ここでは雑に扱う．
[*9] 場 φ の成分を表す添字として $a, b, c, \ldots$ を使う．

局所的な場のラグランジアン密度 $\mathcal{L}\bigl(\varphi_a(x),\, \partial_\mu\varphi_a(x)\bigr)$ を持つ古典系を考える．この系の作用は

$$S[\varphi] \coloneqq \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}x\, \mathcal{L}\bigl(\varphi_a(x),\, \partial_\mu\varphi_a(x)\bigr)$$

と書かれる．場に関する作用の変分とは，勝手な「微小」切断 $\delta\psi \in \Gamma(E)$ による場の微小変換

$$\mathcal{T}_{\delta\varphi} \colon \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E),\ \varphi \longmapsto \varphi + \delta\psi$$

を用いて

$$\delta_{\delta\psi}S[\varphi] \coloneqq S[\mathcal{T}_{\delta\psi}(\varphi)] - S[\varphi]$$

と定義される．顕には Stokes の定理を使って

$$\begin{aligned}\delta_{\delta\psi}S[\varphi] &= \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\varphi_a(x)}\delta\psi_a(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bigl(\partial_\mu\varphi_a(x)\bigr)}\partial_\mu\bigl(\delta\psi_a(x)\bigr) \right) \\ &= \int_{\partial\mathcal{M}} \star\flat \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bigl(\partial_\mu\varphi_a(x)\bigr)}\delta\psi_a(x) \right) + \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}x \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bigl(\partial_\mu\varphi_a(x)\bigr)} \right) \right) \delta\psi_a(x)\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

と書けるが，境界条件 $\partial\mathcal{M} = \emptyset$ または $\delta\psi|_{\partial\mathcal{M}} = 0$ を要請して第 1 項を落とすのが普通である．

最小作用の原理とは，古典論で実現される場の配位（このような場の配位は **on shell** であると呼ばれる）$\varphi_{\text{on shell}} \in \Gamma(E)$ に対して，

$$\forall\delta\psi,\ \delta_{\delta\psi}S[\varphi_{\text{on shell}}] = 0 \tag{3.3.2}$$

を要請するものである．(3.3.1) から，on shell な場 $\varphi_{\text{on shell}} \in \Gamma(E)$ が充たすべき方程式として Euler-Lagrange 方程式

$$1 \le \forall i \le N,\ \forall x \in \mathcal{M},\ \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bigl(\partial_\mu\varphi_a(x)\bigr)} \right) \right] \Bigg|_{\varphi_{\text{on shell}}(x),\, \partial_\mu\varphi_{\text{on shell}}(x)} = 0 \tag{3.3.3}$$

が得られるのだった．煩雑なので以後 $\mathcal{L}$ の引数は適宜省略する．

対称性変換とは，場の間の変換

$$\mathcal{T} \colon \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$$

であって作用を不変にするもののことである．つまり，最小作用の原理 (3.3.2) とは異なり φ ではなく $\mathcal{T}$ が

$$\forall\varphi \in \Gamma(E),\ \delta_{\mathcal{T}}S[\varphi] = 0 \tag{3.3.4}$$

によって定義される．ここに $\delta_{\mathcal{T}}S[\varphi] \coloneqq S[\mathcal{T}(\varphi)] - S[\varphi]$ とおいた．定義 (3.3.4) は off shell な場も考慮していることに注意すべきである．特に対称性変換 $\mathcal{T}$ が大域的な微小パラメータ ε および $\partial_0\varphi$ に陽に依存しない[*10]

[*10] この仮定は (3.3.7) の導出で使うだけ（実はもっと条件を弱めることもできる）なので，Noether の定理の導出には必要ない．

$h \in \Gamma(E)$ を用いて $\mathcal{T}(\varphi) = \mathcal{T}_{\varepsilon h}(\varphi)$ と書かれる場合を考えよう．

$$
\begin{aligned}
0 = \delta_{\mathcal{T}} S[\varphi] &= \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a(x)} \varepsilon h_a(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \big(\partial_\mu \varphi_a(x)\big)} \partial_\mu \big(\varepsilon h_a(x)\big) \right) \\
&= \varepsilon \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \big(\partial_\mu \varphi_a(x)\big)} \right) \right) h_a(x) \\
&\quad + \varepsilon \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}x \left(\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \big(\partial_\mu \varphi_a(x)\big)} \right) h_a(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \big(\partial_\mu \varphi_a(x)\big)} \partial_\mu \big(h_a(x)\big) \right) \\
&= \varepsilon \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \big(\partial_\mu \varphi_a(x)\big)} \right) \right) h_a(x) \\
&\quad + \varepsilon \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}x \, \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \big(\partial_\mu \varphi_a(x)\big)} h_a(x) \right)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．i.e. **Noether カレント**を $D+1$ 個の $X^\mu|_{\partial\mathcal{M}} = 0$ を充たす C^∞ 関数 X^μ を用いて

$$
j^\mu(x) \coloneqq \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \big(\partial_\mu \varphi_a(x)\big)} h_a(x) - X^\mu(x) \tag{3.3.5}
$$

で定義すると，これが on shell とは限らない任意の $\varphi \in \Gamma(E)$ に対して

$$
\partial_\mu j^\mu(x) = - \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \big(\partial_\mu \varphi_a(x)\big)} \right) \right] \Bigg|_{\varphi(x),\, \partial_\mu \varphi(x)} h_a(x)
$$

を充たすことが分かった．特にon shell な任意の $\varphi_{\text{on shell}} \in \Gamma(E)$ に対しては (3.3.3) からカレント (3.3.5) の保存則

$$
\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \tag{3.3.6}
$$

が成り立つ．このように，対称性変換が存在するとそれに対応してon shell な保存則 (3.3.6) を充たすカレントが存在する（**Noether の定理**）．

ここで，$\mathcal{M} = \Sigma \times \mathbb{R}$ と書ける場合を考える．このとき **Noether チャージ**を

$$
Q(t) \coloneqq \int_\Sigma \mathrm{d}^D x \, j^0(t, \boldsymbol{x})
$$

と定義すると，保存則 (3.3.6) から $\partial\Sigma = \emptyset$ または $j^\mu|_{\partial\Sigma} = 0$ を要請すれば

$$
\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = - \int_\Sigma \mathrm{d}^D x \, \partial_i j^i(t, \boldsymbol{x}) = 0
$$

となって時間に依存しないことがわかる．さらに，$\pi^b(x) \coloneqq \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \varphi_b(x))}$ とおくと

$$
Q = \int_\Sigma \mathrm{d}^D x \left(\pi^a(x) h_a(x) - X^\mu(x) \right)
$$

であるから，Poisson 括弧が

$$
\begin{aligned}
\{\varphi_a(x), Q\}_{\mathrm{P}} &= \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}y \left(\frac{\partial \varphi_a(x)}{\partial \varphi_b(y)} \frac{\partial Q}{\partial \pi^b(y)} - \frac{\partial \varphi_a(x)}{\partial \pi^b(y)} \frac{\partial Q}{\partial \varphi_b(y)} \right) \\
&= \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}y \left(\delta_a^b \delta^{D+1}(x-y) \int_\Sigma \mathrm{d}^D z \, \delta_b^c \delta^D(z-y) h_c(z) - 0 \right) \\
&= h_a(x)
\end{aligned}
$$

と求まる．つまり，Q は対称性変換 $\mathcal{T}_{\varepsilon h}$ の無限小生成子[*11]である．従って，正準量子化を行うと

$$\left[-\mathrm{i}\hat{Q}, \hat{\varphi}_a(x)\right] = h_a(x) \tag{3.3.7}$$

となる．

【例 3.3.1】$D+1$ 次元自由フェルミオン系

時空 $\mathcal{M}$ を Minkowski 時空，場をスピン束 $\mathbb{C}^4 \hookrightarrow S \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ の切断 $\psi \in \Gamma(S)$ とする（Dirac 場）．作用はガンマ行列 γ^μ，Dirac 共役 $\overline{\psi} := \mathrm{i}\psi^\dagger\gamma^0$ を用いて

$$S[\psi] = -\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}x\, \overline{\psi}(x)(\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi(x)$$

と書かれる．Euler-Lagrange 方程式 (3.3.3) は，$\overline{\psi}$, ψ に関する変分によってそれぞれ

$$\begin{gathered}(\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi = 0,\\ \partial_\mu\overline{\psi}\gamma^\mu - m\overline{\psi} = 0\end{gathered}$$

となる．この系の対称性変換は，例えば $e^{\mathrm{i}\theta} \in \mathrm{U}(1)$ による

$$\mathcal{T}\colon \Gamma(S) \longrightarrow \Gamma(S),\ \psi \longmapsto e^{\mathrm{i}\theta}\psi$$

がある．$\mathcal{T}$ を生成する無限小変換は $e^{\mathrm{i}\theta}$ の Taylor 展開より $\mathcal{T}_{\mathrm{i}\theta\psi}\colon \psi \longmapsto \psi + \mathrm{i}\theta\psi$ である．つまり，先ほどの議論で登場した $h \in \Gamma(S)$ は今回の場合 $\mathrm{i}\psi$ に相当する．よって対称性変換 $\mathcal{T}$ に対応する Noether カレント (3.3.5) は

$$j^\mu(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\psi}\mathrm{i}\psi = -\mathrm{i}\overline{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{3.3.8}$$

と求まる．$\mathcal{M} = \mathbb{R}^D \times \mathbb{R}$ であるから，Noether チャージは

$$Q = -\mathrm{i}\int_{\mathbb{R}^D} \mathrm{d}^D x\, \overline{\psi}(x)\gamma^0\psi(x)$$

であり，正準量子化すると (3.3.7) より

$$\left[\mathrm{i}\hat{Q}, \hat{\psi}(x)\right] = -\mathrm{i}\hat{\psi}(x)$$

が成り立つ．ここから有限変換 $\mathcal{T}$ に戻すには，指数写像を用いれば良い．こうして

$$\exp\left(\mathrm{i}\theta\hat{Q}\right)\hat{\psi}(x)\exp\left(-\mathrm{i}\theta\hat{Q}\right) = e^{-\mathrm{i}\theta}\hat{\psi}(x) \tag{3.3.9}$$

だと分かった．ここで [14, p.6] に倣って $g := e^{\mathrm{i}\theta}$, $R_g := e^{-\mathrm{i}\theta}$, $\hat{U}_g(\mathbb{R}^D) := \exp\left(\mathrm{i}\theta\hat{Q}\right)$ とおく．

- $U_g(\mathbb{R}^D)$ を $\mathcal{M}$ の D 次元部分多様体 $\mathbb{R}^D$ に付随する**対称性演算子**
- $\hat{\psi}$ を**荷電物体** (charged object)

と呼ぼう．$\forall g,\, g' \in \mathrm{U}(1)$ に対して，対称性演算子は群のように振る舞う：

$$\hat{U}_g(\mathbb{R}^D)\hat{U}_{g'}(\mathbb{R}^D) = \hat{U}_{gg'}(\mathbb{R}^D)$$

[*11] Hamilton フローの意味である

時間一定面を $\mathbb{R}^D \subset \mathcal{M}$ にとったのは，正準量子化により (3.3.7) を導くためであった．しかるに，時間一定面を任意の D 次元部分多様体 $\mathcal{M}^{(D)} \subset \mathcal{M}$ にとれるのではないかと期待される．積分領域が複雑になるので微分形式を使うと見通しが良い．

$$\star j \coloneqq \star\flat(j^\mu \partial_\mu)$$

とおこう．このとき

$$\mathrm{d} \star j = \partial_\mu j^\mu \, \mathrm{d}^{D+1} x \tag{3.3.10}$$

が成り立つので，Noether カレントの保存則 (3.3.6) は単に $\mathrm{d} \star j = 0$ と書ける．Noether チャージは

$$Q = \int_{\mathcal{M}^{(D)}} \star j = \int_{\mathcal{M}} \star j \wedge \delta(\mathcal{M}^{(D)})$$

である．$\mathcal{M}^{(D)} \longrightarrow \mathcal{M}^{(D)} + \delta\mathcal{M}^{(D)} \ \text{w/} \ \delta\mathcal{M}^{(D)} = \partial X^{(D+1)}$ なる時間一定面の変形を考えると，Q の変化は保存則から

$$\delta Q = \int_{\delta\mathcal{M}^{(D)}} \star j = \int_{X^{(D)}} \mathrm{d} \star j = 0$$

だと分かった．i.e.

$$\hat{U}_{e^{\mathrm{i}\theta}}(\mathcal{M}^{(D)}) = \hat{U}_{e^{\mathrm{i}\theta}}(\mathcal{M}^{(D)} + \delta\mathcal{M}^{(D)})$$

である．この意味で対称性演算子は**トポロジカル演算子**とも呼ばれる．しかし，$\mathcal{M}$ 上に荷電物体が存在しているときは (3.3.9) に注意しなくてはいけない．

時間一定面の変形をするので，量子化を経路積分で行う方が見通しが良い．経路積分では，任意の観測可能量 $\hat{\mathcal{O}}$ の期待値が

$$\left\langle \hat{\mathcal{O}} \right\rangle = \int [\mathrm{d}\psi] e^{\mathrm{i}S[\psi]} \mathcal{O}$$

と計算される．今，勝手な場の演算子 $\mathcal{O}(z)$ に対して

$$\left\langle \hat{\psi}(y) \hat{\mathcal{O}}(z) \right\rangle = \int [\mathrm{d}\psi] e^{\mathrm{i}S[\psi]} \psi(y) \mathcal{O}(z)$$

を計算しよう．荷電物体 $\hat{\psi}(y)$ を囲むような時間一定面 $\mathcal{M}^{(D)} \subset \mathcal{M} \ \text{w/} \ y \in \mathcal{M}^{(D)}, z \notin \mathcal{M}^{(D)}$ をとり，$D+1$ 次元部分多様体 $\mathcal{M}^{(D+1)} \subset \mathbb{M}$ であって $\mathcal{M}^{(D)} = \partial\mathcal{M}^{(D+1)}$ を充たすようなものをとる．そして局所的な場の $\mathrm{U}(1)$ 変換

$$\begin{aligned} &\mathcal{T} \colon \Gamma(S) \longrightarrow \Gamma(S), \psi \longmapsto \left(x \mapsto e^{\mathrm{i}\theta(x)}\psi\right) \\ &\text{w/} \quad \theta(x) = \begin{cases} \theta, & x \in \mathcal{M}^{(D)}, \\ 0, & x \notin \mathcal{M}^{(D)} \end{cases} \end{aligned}$$

を行う．すると，Noether カレントの表式 (3.3.8) を用いて

$$
\begin{aligned}
S[\mathcal{T}(\psi)] - S[\psi] &= -\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}x\, \mathrm{i}\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\partial_\mu\theta(x) \\
&= \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}x\, \mathrm{i}\partial_\mu\big(\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\big)\theta(x) \\
&= -\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}x\, \partial_\mu j^\mu(x)\theta(x) \\
&= -\theta\int_{\mathcal{M}^{D+1}} \mathrm{d}\star j \\
&= -\theta\int_{\mathcal{M}^{D}} \star j
\end{aligned}
$$

であることがわかる．つまり，変換 $\mathcal{T}$ の下で

$$
\left\langle \hat{\psi}(y)\hat{\mathcal{O}}(z) \right\rangle = \int [\mathrm{d}\psi] e^{\mathrm{i}S[\psi]} \exp\left(-\mathrm{i}\theta\int_{\mathcal{M}^D}\star j\right) e^{\mathrm{i}\theta}\psi(y)\mathcal{O}(z)
$$

と計算される．

$$
\left\langle R_g\hat{\psi}(y)\hat{\mathcal{O}}(z) \right\rangle = \int [\mathrm{d}\psi] e^{\mathrm{i}S[\psi]} U_g(\mathcal{M}^{(D)})\psi(y)\mathcal{O}(z) \tag{3.3.11}
$$

と言うことである．

3.3.2 連続的高次対称性

【例 3.3.1】は，荷電物体が 0 次元に分布していた．これを p 次元部分多様体上に分布した物体に置き換えることで p-form symmetry の概念が得られる [14, p.10]：

! 以下で部分多様体といったときは，技術的な理由からコンパクトな埋め込まれた C^∞ 多様体を指すものとする．

定義 3.9: p-form symmetry

$D+1$ 次元の場の量子論が群 G による **p-form symmetry** を持つとは，時空 $\mathcal{M}$ の任意の $D-p$ 次元部分多様体 $\mathcal{M}^{(D-p)} \subset \mathcal{M}$ および $\forall g \in G$ に対して**対称性演算子 (トポロジカル演算子)** (topological operator) $U_g(\mathcal{M}^{(D-p)})$ が存在して以下を充たすことを言う：

- $U_g(\mathcal{M}^{(D-p)})$ は任意の p 次元部分多様体 $\mathcal{C}^{(p)} \subset \mathcal{M}$ の台を持つ**荷電物体（演算子）** (charged object, operator) $V(\mathcal{C}^{(p)})$ に作用する．
- $\forall g,\, g' \in G$ に対して**群の規則** (group law)
$$
U_g(\mathcal{M}^{(D-p)})U_{g'}(\mathcal{M}^{(D-p)}) = U_{gg'}(\mathcal{M}^{(D-p)})
$$
が成り立つ．
- 任意の p 次元部分多様体 $\mathcal{C}^{(p)} \subset \mathcal{M}$ と，それに「絡む」十分小さな $D-p$-球 $S^{D-p} \subset \mathcal{M}$ に対して，(3.3.11) と同じく経路積分の期待値の意味で
$$
U_g(S^{D-p})V(\mathcal{C}^{(p)}) = R_g\big(V(\mathcal{C}^{(p)})\big)
$$

が成り立つ．ただし $R\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(\{荷電物体\})$ は群 G の表現である．

【例 3.3.2】 $3+1$ **次元** $\mathrm{U}(1)$ **ゲージ理論**

物質場のない $\mathrm{U}(1)$ ゲージ理論を考える．ゲージ場を局所接続形式[a] $a = a_\mu \, \mathrm{d}x^\mu \in \Omega^1(\mathcal{M}; \mathfrak{u}(1))$ として与え，場の強さを $f \coloneqq \mathrm{d}a$ とおく．$f = f_{\mu\nu} \, \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu$ と成分表示すると $f_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu$ となる．

作用は

$$S[a] = -\frac{1}{2e^2} \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^4 x \, f \wedge \star f = -\frac{1}{4e^2} \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^4 x \, f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}$$

と書かれる．$\delta a \in \Omega^1(\mathcal{M}; \mathfrak{u}(1))$ を用いた作用の変分は

$$\begin{aligned} \delta_{\delta a} S[a] &= -\frac{1}{e^2} \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}(\delta a) \wedge \star f \\ &= -\frac{1}{e^2} \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}(\delta a \wedge \star f) - \frac{1}{e^2} \int_{\mathcal{M}} \delta a \wedge \mathrm{d} \star f \end{aligned}$$

なので，Euler-Lagrange 方程式と Bianchi 恒等式から

$$\begin{aligned} \mathrm{d} \star f &= 0, \\ \mathrm{d} f &= 0 \end{aligned}$$

が言える（Maxwell 方程式）．これをカレントの保存則と見做して，任意の $3-1=2$ 次元閉部分多様体 $\mathcal{M}^{(2)} \subset \mathcal{M}$ 上のトポロジカル演算子を

$$\begin{aligned} U^{\mathrm{E}}{}_{e^{\mathrm{i}\theta}}(\mathcal{M}^{(2)}) &\coloneqq \exp\left(\mathrm{i}\theta \int_{\mathcal{M}^{(2)}} \frac{\star f}{e^2}\right) \\ U^{\mathrm{M}}{}_{e^{\mathrm{i}\theta}}(\mathcal{M}^{(2)}) &\coloneqq \exp\left(\mathrm{i}\theta \int_{\mathcal{M}^{(2)}} \frac{f}{2\pi}\right) \end{aligned}$$

と定義しよう．$U^{\mathrm{E}}{}_{e^{\mathrm{i}\theta}}(\mathcal{M}^{(2)})$ が作用する荷電物体は **Wilson loop**

$$W(\mathcal{C}^{(1)}) \coloneqq \exp\left(\mathrm{i} \int_{\mathcal{C}^{(1)}} a\right)$$

である．このことを示そう．

簡単のため $S \coloneqq \mathcal{M}^{(2)}$, $C \coloneqq \mathcal{C}^{(1)}$ と略記する．今，絡み数が

$$\mathrm{Link}(S, C) = \int_{\mathcal{M}} \delta(C) \wedge \delta(V) = 1$$

となるように $C, V, S = \partial V$ をとる．ゲージ場の変換

$$\mathcal{T}\colon a \longmapsto a + \theta \delta(V)$$

の下で場の強さは $f \longmapsto f + \theta\, \mathrm{d}(\delta(V)) = f - \theta\delta(S)$ となり，作用は[b]

$$\begin{aligned} S[\mathcal{T}(a)] - S[a] &= -\frac{1}{2e^2}\int_{\mathcal{M}} \big(f - \theta\delta(S)\big) \wedge \star\big(f - \theta\delta(S)\big) - S[a] \\ &= \frac{\theta}{2e^2}\int_{\mathcal{M}} \big(\delta(S) \wedge \star f + f \wedge \star\delta(S) - \theta\delta(S) \wedge \star\delta(S)\big) \\ &= \frac{\theta}{e^2}\int_{\mathcal{M}} \big(\delta(S) \wedge \star f - \theta\delta(S) \wedge \star\delta(S)\big) \\ &= \theta \int_S \frac{\star f}{e^2} - \frac{\theta^2}{2e^2}\int_S \delta(S) \end{aligned}$$

と変換する．一方，Wilson ループは

$$\begin{aligned} W(C) \longmapsto \exp &\left(\mathrm{i}\int_C (a + \theta\delta(V))\right) \\ &= \exp\left(\mathrm{i}\int_C a + \mathrm{i}\theta\int_{\mathcal{M}} \delta(V) \wedge \delta(C)\right) \\ &= \exp\left(\mathrm{i}\int_C a - \mathrm{i}\theta\ \mathrm{Link}(S,\, C)\right) \\ &= e^{-\mathrm{i}\theta} \exp\left(\mathrm{i}\int_C a\right) \end{aligned}$$

と変換するので[c]，

$$\langle W(C)\mathcal{O}\rangle = \int [\mathrm{d}a] e^{\mathrm{i}S[a]} U^{\mathrm{E}}{}_{e^{\mathrm{i}\theta}}(S) e^{-\mathrm{i}\theta} W(C) O$$

i.e.

$$\left\langle e^{\mathrm{i}\theta} W(C)\mathcal{O}\right\rangle = \int [\mathrm{d}a] e^{\mathrm{i}S[a]} U^{\mathrm{E}}{}_{e^{\mathrm{i}\theta}}(S) W(C)\mathcal{O}$$

が分かった．

トポロジカル演算子を 2 次元閉部分多様体上で定義したが，境界を持つ場合，i.e. $C \coloneqq \partial\mathcal{M}_C^{(2)} \neq \emptyset$ の場合はどうなるのか．

$$H_\theta(\mathcal{M}_C^{(2)}) \coloneqq \exp\left(\mathrm{i}\theta \int_{\mathcal{M}_C^{(2)}} \frac{\star f}{e^2}\right)$$

を考える．境界を共有するもう 1 つの 2 次元部分多様体 $\mathcal{N}_C^{(2)}$ を持ってくると

$$H_\theta(\mathcal{M}_C^{(2)}) H_\theta(\mathcal{N}_C^{(2)})^{-1} = \exp\left(\mathrm{i}\theta \oint_{\mathcal{M}_C^{(2)} \cup_C \left(-\mathcal{N}_C^{(2)}\right)} \frac{\star f}{e^2}\right)$$

これは $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ のとき C にしかよらない．このことから，$U^{\mathrm{M}}{}_{e^{\mathrm{i}\eta}}(\mathcal{M}_C^{(2)})$ が作用する荷電物体（**'t Hooft ループ**）を Hodge dual なゲージ場 $\mathrm{d}b \coloneqq \frac{2\pi}{e^2} \star f$ によって

$$H_n(C) \coloneqq \exp\left(\mathrm{i}n \int_C b\right)$$

と定義できる．

[a] 厳密には $\mathcal{M}$ の開集合上の $\mathfrak{u}(1)$-値 1 形式
[b] $\omega \wedge \star\eta = \eta \wedge \star\omega$ に注意.
[c] トポロジカル演算子を $\exp\left[\mathrm{i}\theta\left(\int_S \frac{\star f}{e^2} - \frac{\theta^2}{2e^2}\int_S \delta(S)\right)\right]$ と再定義した.

3.3.3　対称性の自発的破れ

まずは通常の対称性(0-form symmetry)の場合を考える. 系が Lie 群 G で特徴付けられる 0-form symmetry を持つ場合を考えよう. ただし群は場へ表現 $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(N, \mathbb{K})$ として作用しているとする. このとき, 無限小な対称性変換は Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底 $T^A \in \mathfrak{g}$ および微分表現 $\rho_*\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(N, \mathbb{K})$ を用いて[*12] $\mathcal{T}_{\mathrm{i}\varepsilon_A \rho_*(T^A)(\varphi)}$ と書けるので, Noether の定理より on shell な保存則 (3.3.10) を充たす $\dim G$ 個の Noether カレント (3.3.5) $j_A \quad (A = 1, \ldots, \dim G)$ が存在し, それに付随して $\dim G$ 個の保存電荷 $Q_A(\mathcal{M}^{(D)}) = \int_{\mathcal{M}^{(D)}} \star j_A$ が存在して対称性変換の無限小生成子 (3.3.7) となるのだった.

さて, Noether の定理によって特徴付けられる対称性は必ずしも系の基底状態 $|0\rangle$ の対称性にならない. i.e. 形式的には

(1) $1 \leq \forall A \leq \dim G,\ \hat{Q}_A |0\rangle = 0$
(2) $1 \leq \exists A \leq \dim G,\ \hat{Q}_A |0\rangle \neq 0$

の 2 つの場合[*13]があり得る. (1) の場合, 系は対称性を実現している, または系は **Wigner 相** (Wigner phase) にあると言い, (2) の場合, 系の対称性が**自発的に破れた**, または系は **Nambu-Goldstone 相** (Nambu-Goldstone phase) にあると言う [16, p.1]. 0-form symmetry の言葉に翻訳すると, **対称性の自発的破れ** (spontaneous symmetry breaking; SSB) とは, 0-form symmetry を特徴付ける Lie 群 G がその部分群 $H \subset G$ に縮小していることを指す[*14]. SSB を特徴付けるには, 上述のように素朴には $\hat{Q}_A |0\rangle \neq 0$ を充たす $1 \leq A \leq \dim G$ が存在するかどうかを確認すれば良いように見えるが, $\langle 0|\hat{Q}_A \hat{Q}_A|0\rangle \propto \mathrm{vol}(\mathcal{M}^{(D)})$ なので[*15]熱力学極限において $\hat{Q}_A |0\rangle$ は定義できない. そこで, 代わりにある局所演算子 (i.e. compactly supported な演算子) $\hat{\mathcal{O}}(x)$ が存在して

$$\langle 0| \left[\mathrm{i}\hat{Q}_A, \hat{\mathcal{O}}(x)\right] |0\rangle \neq 0 \tag{3.3.12}$$

を充たすことと特徴付ける. (3.3.12) の左辺を系の**秩序変数** (order parameter) と呼ぶ.

では, 相対論的な系における Nambu-Goldstone の定理から出発しよう.

[*12] 苦肉の策だが, Lie 代数の添字を $A, B, C, \ldots$ とする.
[*13] もしくは, $U_g(\mathcal{M}^{(D)})|0\rangle = |0\rangle$ としても良い.
[*14] 考えている場が構造群 G を持つファイバー束として定式化されている場合, SSB は数学的には**構造群の収縮** (reduction of structure group) として定式化できる.
[*15] **Fabri – Picasso の定理** [17]

定理 3.1: Nambu-Goldstone（相対論的）

考えている系が Lie 群 G で特徴付けられる 0-form symmetry を持ち，さらに

(1) 並進対称性と Lorentz 共変性を持ち，
(2) 部分群 $H \subset G$ に対称性が自発的に破れている

とする．このとき，系は線形分散を持つ零質量の独立な励起（**NG モード**）をちょうど $\dim G - \dim H$ 個持つ．

定理 3.1 の条件 (1) は NG モードが互いに独立であり，かつ必ず線形分散を持つことの証明に使うのだが，かなりややこしい[*16]ので，ここでは NG モードが存在することだけの証明の概略を述べるに留める．

証明 系は場 $\varphi \in \Gamma(E)$ からなるとし，この系の作用を $S[\varphi]$ と書く．Green 関数の生成汎函数を

$$
\begin{aligned}
Z[J] = e^{\mathrm{i}W[J]} &\coloneqq \langle 0|\mathcal{T}\exp\left(\mathrm{i}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}x\, J(x)\varphi(x)\right)|0\rangle \\
&= \frac{\displaystyle\int [\mathrm{d}\varphi]\exp\left(S[\varphi] + \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}x\, J(x)\varphi(x)\right)}{\displaystyle\int [\mathrm{d}\varphi]\exp S[\varphi]}
\end{aligned}
$$

と定義し，有効作用を

$$
\Gamma[\psi] \coloneqq W[J] - \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}x\, J(x)\psi(x)
$$

と定義する．ただし

$$
\psi(x) \coloneqq \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \frac{\langle 0|\mathcal{T}\left\{\hat{\varphi}(x)\exp\left(\mathrm{i}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}x\, J(x)\varphi(x)\right)\right\}|0\rangle}{\langle 0|\mathcal{T}\left\{\exp\left(\mathrm{i}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}x\, J(x)\varphi(x)\right)\right\}|0\rangle}
$$

とおいた．さらに有効ポテンシャルを

$$
V(\varphi) \coloneqq -\frac{\Gamma[\varphi]|_{\varphi=\mathrm{const.}}}{\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}x}
$$

と定義する．QFT の一般論から，場の演算子の真空期待値 $\varphi_0 \coloneqq \langle 0|\hat{\varphi}(x)|0\rangle$ に対して $\varphi_0 = \mathrm{argmin}\, V(\varphi)$ であることが知られている．

簡単のため G が線型 Lie 群で，系の対称性変換が $\mathcal{T}_{\mathrm{i}\varepsilon_A \rho_*(T^A)(\varphi)}$ $(A = 1, \ldots, \dim G)$ と書ける場合を考える．(3.3.7) を思い出すと，このとき

$$
\left[\mathrm{i}\hat{Q}^A, \hat{\varphi}(x)\right] = \mathrm{i}\rho_*(T^A)\bigl(\hat{\varphi}(x)\bigr)
$$

*16 例えば [16, p.7] に漸近場を使った議論が載っている

が成り立つ．$\Gamma[\varphi]$, $V[\varphi]$ もこの変換の下で不変なので

$$\begin{aligned}
&V(\varphi+\mathrm{i}\varepsilon^A\rho_*(T^A)\varphi)=V(\varphi)\\
\Longrightarrow\quad&\frac{\partial V(\varphi)}{\partial\varphi_a}[\,\rho_*(T^A)\,]_a{}^b\varphi_b=0\\
\Longrightarrow\quad&\frac{\partial^2V(\varphi)}{\partial\varphi_a\partial\varphi_b}[\,\rho_*(T^A)\,]_b{}^c\varphi_c+\frac{\partial V(\varphi)}{\partial\varphi_b}[\,\rho_*(T^A)\,]_a{}^b\varphi_b=0\quad(1\le\forall a\le N)
\end{aligned}\tag{3.3.13}$$

ここで条件 (2) から

$$\langle 0|\Big[\mathrm{i}\hat{Q}_A,\hat{\varphi}(x)\Big]|0\rangle=\mathrm{i}\rho_*(T^A)(\,\langle 0|\hat{\varphi}(x)|0\rangle\,)\begin{cases}=0, & T^A\in\mathfrak{h},\\ \neq 0, & T^A\notin\mathfrak{h}\end{cases}$$

が成り立つので，$v:=\langle 0|\hat{\varphi}(x)|0\rangle$ とおくと，(3.3.13) より破れた対称性に対応する任意の $1\le A\le\dim G$ に対して

$$v\neq 0\ \ \text{かつ}\ \ \left.\frac{\partial^2V(\varphi)}{\partial\varphi_a\partial\varphi_b}\right|_{\varphi=v}[\,\rho_*(T^A)(v)\,]_b=0\quad(1\le\forall a\le N)\tag{3.3.14}$$

が成り立たねばならない．ところで，真空期待値が 0 になる場を $\tilde{\varphi}(x):=\varphi(x)-v$ で定義すると

$$V(\varphi)=V(v)+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2V(\varphi)}{\partial\varphi_a\partial\varphi_b}\right|_{\varphi=v}\tilde{\varphi}_a\tilde{\varphi}_b+\mathcal{O}(\tilde{\varphi}^3)$$

となるから，行列 $\left[\left.\frac{\partial^2V(\varphi)}{\partial\varphi_a\partial\varphi_b}\right|_{\varphi=v}\right]_{1\le a,\,b\le\dim G}$ を対角化した固有値が粒子の質量の 2 乗を与える．従って (3.3.14) から，$T^A\notin\mathfrak{h}$ ならば $\rho_*(T^A)(v)$ がこの行列の固有値 0 に対応する固有ベクトル，i.e. ゼロ質量の NG 粒子であることが分かった． ■

NG モードの存在がわかったので，次に NG 粒子を記述する有効ラグランジアンの構成法を考える．破れた対称性は Lie 群 G/H で特徴付けられるはずである．まず，$\mathrm{Lie}(G/H)\cong\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ に注意する[*17]．このとき $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ の基底を $X^A+\mathfrak{h}$ w/ $A=1,\,\dots,\,\dim G-\dim H$ と書くと，$X^A\in\mathfrak{g}\setminus\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ において線型独立であるように選べるから，T^A のうち $\mathfrak{h}$ に属さないものとすることができる．命題 2.6 より可換図式

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{g} & \xrightarrow{T_{1_G}p} & \mathrm{Lie}(G/H)\cong\mathfrak{g}/\mathfrak{h}\\
\Big\downarrow{\scriptstyle\exp_G} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\exp_{G/H}}\\
G & \xrightarrow{\quad p\quad} & G/H
\end{array}$$

が成り立つから，左剰余類 $gH\in G/H$ の代表元として

$$\exp_G\big(\mathrm{i}\pi_A(x)X^A\big)\in G$$

を選ぶことができる[*18]．この $\dim G-\dim H$ 成分場 $\pi\colon M\longrightarrow\mathrm{Lie}(G/H)$ のことを **NG ボゾン場**と呼ぶ．このとき，大域的な $\forall g\in G$ の作用に応じた場 π の変換 $\pi\longmapsto\pi'$ は

$$\exp_G\big(\mathrm{i}\pi_A(x)X^A\big)\,H\longmapsto g\exp_G\big(\mathrm{i}\pi_A(x)X^A\big)\,H=:\exp_G\big(\mathrm{i}\pi'_A(x)X^A\big)\,H$$

*17 標準的射影 $p\colon G\longrightarrow G/H$ について $T_{1_G}p\colon\mathfrak{g}\longrightarrow\mathrm{Lie}(G/H)$ は全射であるが，$X\in\mathfrak{h}\iff T_{1_G}p(X)=T_0(p\circ\exp_G)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right)=0$ なので $\mathfrak{h}\subset\mathrm{Ker}\,T_{1_G}p$ がわかり，次元を考えることで $\mathrm{Ker}\,T_{1_G}p=\mathfrak{h}$ が言える．よって準同型定理から $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}\cong\mathrm{Lie}(G/H)$ である．

*18 厳密には $\exp_G$ が全射とは限らないので，これは多様体 G/H の単位元 H 近傍のチャート $\big(U,\,(\pi_A)\big)$ だと考えるべきである．

となるから，顕にはある $h(g,\,\pi) \in H$ を使って

$$\exp_G\bigl(\mathrm{i}\pi'_A(x)X^A\bigr) = g\exp_G\bigl(\mathrm{i}\pi_A(x)X^A\bigr)h(g,\,\pi) \tag{3.3.15}$$

と書くことができる．$g \in H$ のときは任意の π について

$$\exp_G\bigl(\mathrm{i}\pi'_A(x)X^A\bigr)\,H = \exp_G\bigl(\mathrm{i}\pi_A(x)X^A\bigr)\,H$$

でなくてはいけないから $h(g,\,\pi) = g^{-1}$ であり，(3.3.15) を $0 \in \mathfrak{h}$ において微分することで $\pi(x)$ が

$$\pi'(x) = \mathrm{Ad}(g)\bigl(\pi(x)\bigr)$$

なる線形変換を受けることがわかる．一方で $g \in G \setminus H$ のときは変換則 (3.3.15) は $\pi(x)$ について非線形である．

NG ボゾン場の項を含むラグランジアンは，G-不変でなくてはいけない．そのためには Maurer-Cartan 形式 $\theta \in \Omega^1(G;\,g)$ を使う．これを C^∞ 写像 $\xi \coloneqq \exp_G\bigl(\mathrm{i}\pi(\text{-})\bigr)\colon \mathcal{M} \longrightarrow G$ で引き戻すことで左不変な $\xi^*\theta \in \Omega^1(\mathcal{M};\,\mathfrak{g})$ を得る．$\mathfrak{h}$ 成分と $\mathfrak{g}\setminus\mathfrak{h}$ 成分に分離して

$$\xi^*\theta = \underbrace{\xi^*\theta_\parallel}_{\in\mathfrak{h}} + \underbrace{\xi^*\theta_\perp}_{\in\mathfrak{g}\setminus\mathfrak{h}}$$

と書く．行列 Lie 群の場合に成分表示を求めると

$$\xi^*\theta|_x(\partial_\mu) = \theta_{\xi(x)}\left(T_x\xi(\partial_\mu)\right) = \xi(x)^{-1}\partial_\mu\xi(x)$$

である．変換則 (3.3.15) から，$\forall g \in G$ に関する大域的な変換について

$$\xi(x)^{-1}\partial_\mu\xi(x) \longmapsto h^{-1}(g,\,\pi)\xi(x)^{-1}\partial_\mu\xi(x)h(g,\,\pi) + \underbrace{h(g,\,\pi)^{-1}\partial_\mu h(g,\,\pi)}_{\in\mathfrak{h}}$$

となる．i.e. $\mathrm{Tr}(\xi^*\theta_\perp) \in \Omega^1(M)$ が NG ボゾン場の変換 (3.3.15) について整合的である．よって微分の次数が 2 次の Lagrangian が

$$\mathcal{L}_{\mathrm{NGB}} \coloneqq -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\xi^*\theta_\perp \wedge \star\xi^*\theta_\perp)$$

で与えられる[*19]．低エネルギーの時は π の最低次までとる．

$$\begin{aligned}
\xi(x)^{-1}\partial_\mu\xi(x) &= \frac{1 - e^{-\mathrm{i}\,\mathrm{ad}(\pi(x))}}{\mathrm{i}\,\mathrm{ad}(\pi(x))}\bigl(\partial_\mu\pi(x)\bigr) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^n}{(n+1)!}\,\mathrm{ad}\bigl(\pi(x)\bigr)^n\bigl(\partial_\mu\pi(x)\bigr) \\
&= \partial_\mu\pi(x) - \frac{\mathrm{i}}{2!}[\pi(x), \partial_\mu\pi(x)] + \mathcal{O}\bigl(\pi^2\partial_\mu\pi\bigr)
\end{aligned}$$

なので

$$\mathcal{L}_{\mathrm{NGB}} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\pi_A\partial^\mu\pi_B\,\mathrm{Tr}\bigl(X^AX^B\bigr)$$

[*19] このウェッジ積は普通のものではなく，$\omega = \omega_AT^A$, $\eta = \eta_AT^A$ と展開して $\omega \wedge \eta \coloneqq \frac{1}{2}\omega_A \wedge \eta_B\bigl[T^A, T^B\bigr] \in \Omega^{p+q}(M;\,\mathfrak{g})$ と定義した．

である．$g^{AB} \coloneqq \mathrm{Tr}\bigl(X^A X^B\bigr)$ は $\mathfrak{g}$ の規格化条件にもよるが，多様体 G/H の計量テンソルになっている．

次に物質場との結合を記述する方法を考える．物質場 ψ の値域は破れていない対称性 H の既約表現 $\rho_H \colon H \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ の表現空間 $\mathcal{H}$ だと考えて良い．$\forall g \in G$ による変換則は (3.3.15) の $h(g,\,\pi) \in H$ を使って

$$\psi(x) \longmapsto \rho_0\bigl(h(g,\,\pi)^{-1}\bigr)\bigl(\psi(x)\bigr)$$

と定義すると，前述の議論から $g = h \in H$ のときは $\psi \longmapsto \rho_0(h)(\psi)$ と変換するので整合的である．G の既約表現 $\rho \colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathcal{H}_{\mathrm{ext}})$ であって，H の表現と見做して既約表現の直和に分解した際に ρ_0 を直和因子の 1 つに持つようなものを与えたとき，標準的包含 $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}$ によって ψ を送った先を $\widehat{\psi}$ とおくと，新しい場

$$\chi(x) \coloneqq \rho\bigl(\xi(\pi)\bigr)\bigl(\widehat{\psi}(x)\bigr)$$

は，$\forall g \in G$ による大域的変換の下で

$$\begin{aligned}
\chi(x) \longmapsto & \rho\bigl(g\xi(\pi)h(g,\,\pi)\bigr)\bigl(\widehat{\rho_0(h(g,\,\pi)^{-1})(\psi)(x)}\bigr) \\
&= \rho(g) \circ \rho\bigl(\xi(\pi)\bigr) \circ \rho\bigl(h(g,\,\pi)\bigr) \circ \rho\bigl(h(g,\,\pi)\bigr)^{-1}\bigl(\widehat{\psi}(x)\bigr) \\
&= \rho(g)\bigl(\chi(x)\bigr)
\end{aligned}$$

の変換を受ける．ψ をそのまま扱うよりも $\chi \colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}$ について G-不変な Lagrangian を書き下す方が簡単であり，χ は NGB と物質場の相互作用も記述してくれる．最後に，これまで大域的対称性だと思っていた群 G の作用を局所的対称性にするために背景ゲージ場を導入する（**ゲージ化**）．そのためには Maurer-Cartan 形式の ∂_μ を共変微分に置き換えれば良く，NGB と背景ゲージ場との結合はそれで決まる．あからさまには

$$\xi(x)^{-1}\bigl(\partial_\mu + A_\mu(x)\bigr)\xi(x)$$

にすると言うことである．$A_{\mu A} T^A$ と展開すると

$$\begin{aligned}
\xi(x)^{-1} A_\mu(x) \xi(x) &= A_{\mu A}(x)\,\mathrm{Ad}\bigl(\exp_G(-\mathrm{i}\pi(x))\bigr)\bigl(T^A\bigr) \\
&= A_{\mu A}(x) \exp_{\mathrm{GL}(\mathfrak{g})}\bigl(-\mathrm{i}\pi_B(x)\,\mathrm{ad}(T^B)\bigr)\bigl(T^A\bigr) \\
&= A_{\mu A}(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i})^n}{n!} \pi_{B_1}(x) \cdots \pi_{B_n}(x)\,\mathrm{ad}(T^{B_1}) \circ \cdots \mathrm{ad}(T^{B_n})(T^A) \\
&= A_\mu(x) + \mathcal{O}(\pi)
\end{aligned}$$

となるので，π の最低次では Maurer-Cartan 形式の成分

$$\partial_\mu \pi + A_\mu$$

と書かれる．よってゲージ変換 $A \longmapsto A + \mathrm{d}\lambda_0$ は NG ボゾンに $\pi + \lambda_0$ のシフトを引き起こす．

余談だが，定理 3.1 の Lorentz 共変性の条件 (1) を外すと話はややこしくなる．まず，波数の小さいところにおいて分散関係が奇数冪であるような NG モードを **Type-I**，偶数冪で書けるような NG モードを **Type-II** と呼ぶ [18]．そして

- 破れた対称性の個数を $N_{\mathrm{BG}} \coloneqq \dim G - \dim H$
- NG モードの総数を N_{NGB}
- Type-I, Type-II の個数をそれぞれ $N_{\mathrm{I}},\ N_{\mathrm{II}}$

とおこう．[18] による結果は以下の通りである：

定理 3.2: Nielsen-Chadha

$$N_{\mathrm{I}} + 2N_{\mathrm{II}} \geq N_{\mathrm{BG}}$$

証明 ■

さらに，[19] によって以下が示された：

定理 3.3: Watanabe-Murayama

$\Omega := \int_\Sigma \mathrm{d}^D x$ とおき，$\rho_{AB} := \lim_{\Omega\to\infty} \frac{-\mathrm{i}}{\Omega} \langle 0|[Q_A, Q_B]|0\rangle$ と定義する．このとき以下が成り立つ：

$$N_{\mathrm{BG}} - N_{\mathrm{NGB}} = \frac{1}{2}\operatorname{rank}\rho$$

証明 ■

3.3.4 高次対称性の自発的破れ

この小節と次の小節では時空 $\mathcal{M}$ は境界を持たないと仮定する[*20]．0 次対称性の場合と同様に，p 次対称性の自発的破れを議論することができる．p-form symmetry の場合，トロポジカル演算子は $p+1$-form 背景ゲージ場と等価であった．0-form の場合からの類推で，NG ボゾン場は背景 $p+1$-form ゲージ場のゲージ変換によってシフトするはずだが，$p+1$-form ゲージ場 B_{p+1} のゲージ変換は p-form Λ_p により $B_{p+1} \longmapsto B_{p+1} + \mathrm{d}\Lambda_p$ の形をしているので，NG ボゾン場は p-form である．

p-form symmetry の秩序変数は荷電物体の真空期待値であり，一般に $\mathcal{C}^{(p)} \subset \mathcal{M}$ に依存する何らかの関数 $F(\mathcal{C}^{(p)})$ を使って

$$\left\langle V(\mathcal{C}^{(p)}) \right\rangle \sim e^{-F(\mathcal{C}^{(p)})}$$

の振る舞いをする．SSB を特徴づける典型的な振る舞いは

$$\lim_{\mathrm{vol}(\mathcal{C}^{(p)})\longrightarrow\infty} \mathrm{Re}\left[\frac{F(\mathcal{C}^{(p)})}{\mathrm{vol}(\mathcal{C}^{(p)})}\right] \begin{cases} <\infty, & \text{SSB} \\ =\infty, & \text{unbroken} \end{cases}$$

というものである．SSB が起こったと言うのは，荷電演算子を

$$\widehat{V}(\mathcal{C}^{(p)}) := e^{-c\int_{\mathcal{C}^{(p)}} \star_{\mathcal{C}^{(p)}} 1} V(\mathcal{C}^{(p)})$$

と正則化することで

$$\lim_{\mathrm{vol}(\mathcal{C}^{(p)})\longrightarrow\infty} \left\langle V(\mathcal{C}^{(p)}) \right\rangle \neq 0$$

[*20] 境界がある場合の取り扱いは [20] に書いてある．

を充たすようにできると言う意味である．

演算子形式ではどうなるのだろうか？ (3.3.12) の素朴な一般化は

$$\left\langle \left[\mathrm{i}\hat{Q}(\mathcal{M}^{(D-p)}), V(\mathcal{C}^{(p)}) \right] \right\rangle$$

であるが，これは $\mathcal{M}^{(D-p)}, \mathcal{C}^{(p)}$ が共に閉多様体だと微妙なところがある [20].

[20, p.5-6] に倣って，系が並進対称性を持つ場合にギャップレスな励起が存在することをざっと確認しよう．演算子形式で議論するので，時間一定面 $\mathcal{M}^{(D)} \subset \mathcal{M}$ を 1 つ固定し，微妙なことが起こらないように $\mathcal{M}^{(D-p)} \subset \mathcal{M}^{(D)}$ が境界を持つとする．保存則 $\mathrm{d} \star j = 0$ を充たすカレント $\star j$ および$\mathcal{M}^{(D)}$ に関するデルタ関数形式 $\delta^D(\mathcal{M}^{(D-p)})$ を使って $Q(\mathcal{M}^{(D-p)}) = \int_{\mathcal{M}^{(D)}} \star j \wedge \delta^D(\mathcal{M}^{(D-p)})$ と書ける．並進対称性から $\langle 0| \star\hat{j} \wedge \delta^D(\mathcal{M}^{(D-p)})(x) |n\rangle = e^{\mathrm{i}p_n \cdot x} \langle 0| \star\hat{j} \wedge \delta^D(\mathcal{M}^{(D-p)})(0) |n\rangle$ が成り立つので

$$\begin{aligned}
&\left\langle \left[\mathrm{i}\hat{Q}(\mathcal{M}^{(D-p)}), V(\mathcal{C}^{(p)}) \right] \right\rangle \\
&= \mathrm{i} \sum_n (2\pi)^D \delta^D(\boldsymbol{p}) \Big(\langle 0| \star\hat{j} \wedge \delta^D(\mathcal{M}^{(D-p)})(0) |n\rangle \langle n| V(\mathcal{C}^p) |0\rangle \, e^{-\mathrm{i}E_n x^0} \\
&\qquad - \langle 0| V(\mathcal{C}^p) |n\rangle \langle n| \star\hat{j} \wedge \delta^D(\mathcal{M}^{(D-p)})(0) |0\rangle \, e^{\mathrm{i}E_n x^0} \Big)
\end{aligned}$$

が言える．一方で左辺を $x^0 = t$ 方向に微分すると，保存則および Stokes の定理から

$$\begin{aligned}
\partial_0 \left\langle \left[\mathrm{i}\hat{Q}(\mathcal{M}^{(D-p)}), V(\mathcal{C}^{(p)}) \right] \right\rangle &= \int_{\mathcal{M}^{(D-p)}} \left\langle \left[\partial_0 \star j, V(\mathcal{C}^{(p)}) \right] \right\rangle \\
&= -\int_{\partial\mathcal{M}^{(D-p)} \subset \partial\mathcal{M}^{(D)}} \left\langle \left[\star_{\mathcal{M}^{(D)}} j, V(\mathcal{C}^{(p)}) \right] \right\rangle
\end{aligned}$$

となる．次元を数えることでいつでも $\mathcal{C}^{(p)} \cap \partial\mathcal{M}^{(D-p)} = \emptyset$ にできることがわかるので結局右辺は 0 だとわかる．よってもし $\left\langle \left[\mathrm{i}\hat{Q}(\mathcal{M}^{(D-p)}), V(\mathcal{C}^{(p)}) \right] \right\rangle \neq 0$ ならば $\boldsymbol{p} = 0$ のときに $E_n = 0$ となるような n が存在する．

【例 3.3.3】 $3+1$ **次元の Yang-Mills 理論**

【例 3.3.4】 U(1) **ゲージ理論**

3.3.5 高次対称性の Coleman-Mermin-Wagner の定理

通常の Coleman-Mermin-Wagner の定理は，連続的 0 次対称性が $1+1$ 次元以下では自発的に破れないことを主張する．これは p 次対称性に拡張することができる：

定理 3.4: 高次対称性についての Coleman-Mermin-Wagner の定理

$D+1$ 次元時空において，Lie 群 G で特徴付けられる $p \geq D-1$ 次対称性は自発的に破れない．

証明 より詳細な扱いは [20, p.23] を参照．ここではとても雑に示す．

$D+1$ 次元 Euclid 時空 $\mathcal{M}$ の自由かつ massless な p-form 場（これは p-form NG ボゾン場のつもりである）$B_p \in \Omega^p(\mathcal{M})$ の理論

$$S = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}B_p \wedge \star\, \mathrm{d}B_p$$

を考える．B_p の 2 点関数の長距離における振る舞いを見る．そのためには参照点を 1 つ固定し，その点を原点に持つ $D+1$ 次元極座標 $(r,\,\theta^1,\,\ldots,\,\theta^D)$ を r が十分大きいところでとる．このときの Green 関数の r 依存性を見ればよい：

$$\mathrm{d}\star\mathrm{d}G_p(r,\,\theta^\mu) = 0$$

外微分したときに $\partial_r\,\mathrm{d}r\wedge$ が生き残るのは $\mathrm{d}\theta^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\theta^{\mu_p}$ の項のみである．また，自然基底の規格化のために $r\,\mathrm{d}\theta^\mu$ を考えないといけないので，結局 p-form の

$${G_p}^{\mathrm{ang}}{}_{\mu_1,\,\ldots,\,\mu_p} r^p\,\mathrm{d}\theta^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\theta^{\mu_p}$$

の部分を見ないと意味がない．よって

$$\frac{1}{r^{D+1-p}}\partial_r\left(r^{D+1-(p+1)}\frac{1}{r^p}\partial_r\big(r^p\,G(r)\big)\right) = 0$$

と言うことであり，$G(r)\sim r^{-(d-p-1)}$ である．このことから，$d-p-1>0$ でないと 2 点関数が $r\to\infty$ で発散することになり，p-form NG ボゾン場が ill-defined である．i.e. $p\geq D-1$-form symmetry は自発的に破れない．

■

3.3.6 対称性のアノマリー

アノマリー[*21]には，大別して 3 種類ある [22]：

ゲージアノマリー

元の理論 $S[\psi]$ に**ゲージ化** $\partial_\mu \longmapsto \partial_\mu + a_\mu$ の操作を施して得られた理論 $S_{\mathrm{gauged}}[\psi,\,a]$ の[*22]分配関数

$$Z_{\mathrm{gauged}} = \int[\mathrm{d}a]\int[\mathrm{d}\psi]\,e^{-S_{\mathrm{gauged}}[\psi,\,a]-S_{\mathrm{kin}}[a]} =: \int[\mathrm{d}a]\,Z[A]\,e^{-S_{\mathrm{kin}}[a]}$$

について，ある $g\colon \mathcal{M}^{(D+1)} \longrightarrow G$ が存在してゲージ変換 $a \longmapsto a^g := g^{-1}ag + g^{-1}\,\mathrm{d}g$ の下で $Z[a]\neq Z[a^g]$ となること．このとき理論は矛盾している．と言うのも，汎函数積分 $\int[\mathrm{d}A]$ が ill-defined になるからである．

't Hooft アノマリー

元の理論 $S[\psi]$ に**ゲージ化** $\partial_\mu \longmapsto \partial_\mu + A_\mu$ の操作を施して得られた理論 $S_{\mathrm{gauged}}[\psi,\,A]$ について

$$Z[A] := \int[\mathrm{d}\psi]\,e^{-S_{\mathrm{gauged}}[\psi,\,A]}$$

*21 訳語だと**対称性の量子的破れ**と呼ぶこともある [21].

*22 ゲージ場がダイナミカルなときは $a,\,b,\,\ldots$ で，単に外場であるときは $A,\,B,\,\ldots$ で書くことにする．

と定義したとき, ある $g \in G$ が存在してゲージ変換 $A \longmapsto A^g := g^{-1}Ag + g^{-1}\,\mathrm{d}g$ の下で $Z[A] \neq Z[A^g]$ となること．A は単なる外場なので，理論が矛盾したわけではない．また，$Z[0] = Z$ となる．

今，$Z_{\mathrm{UV}}[A]$ が繰り込み群変換の下で $Z_{\mathrm{IR}}[A]$ に流れるとする．このとき，のちに見るようにアノマリーは 1 つ次元が上の TQFT で記述されるが，TQFT は繰り込み群変換の下で不変なので，両者のアノマリーは一致していなくてはいけない．つまり，理論 Z_{UV} が繰り込み群変換で Z_{IR} へ流れるための必要条件は，両者で 't Hooft アノマリーが一致することなのである．

ABJ アノマリー (Adler Bell Jackiw anomaly)

ゲージ群 G についてゲージアノマリーを持たない理論

$$Z = \int [\mathrm{d}a] \int [\mathrm{d}\psi]\, e^{-S[\psi,\, a]} =: \int [\mathrm{d}a]\, Z[a]$$

が別の Lie 群 H についても大域的対称性を持っているとき，外場 A を導入して H 対称性をゲージ化して

$$Z[a,\, A] = \int [\mathrm{d}\psi]\, e^{-S[\psi,\, a,\, A]}$$

を得るが，この新しく加えた A についてゲージ変換 $A \longmapsto A^h$ を施したときに $Z[a,\, A^h] \neq Z[a,\, A]$ となることである．摂動論的には，$2n$ 次元の理論が持つ摂動アノマリーであって，対応する $n+1$ 角形の Feynman ダイアグラムの外線のうち 1 本が外場で，残りの n 本がダイナミカルなゲージ場であるようなものである．ABJ アノマリーの場合もまた，理論が矛盾しているわけではない．

ABJ アノマリーは Noether カレントの非保存と等価である．

$$S[\psi,\, a] := \int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} \mathrm{d}^{D+1}x\, \bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + a_\mu)\psi$$

を考える．これが G によるゲージ変換以外に，H による<u>大域的</u>対称性 $S[\psi,\, a] = S[\psi^h,\, a]$ を持っているとする．このとき $h\colon \mathcal{M}^{(D+1)} \longrightarrow H$ による変換 $\rho\bigl(h\bigr)\bigl(\psi\bigr)$ を摂動的に扱い $h \sim 1 + \epsilon$ と思うと，

$$S[\psi^h,\, a] = S[\psi,\, a] - \int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} \mathrm{d}^{D+1}x\, \epsilon\, \partial_\mu(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi)$$

になる．ここで，経路積分において測度が $[\mathrm{d}\bar{\psi}^h\, \mathrm{d}\psi^h] = J[\mathrm{d}\bar{\psi}\, \mathrm{d}\psi]$ と変換するならば

$$Z[a] = \int [\mathrm{d}\bar{\psi}^h\, \mathrm{d}\psi^h] e^{-S[\psi^h,\, a]} = \int [\mathrm{d}\bar{\psi}\, \mathrm{d}\psi]\, e^{-S[\psi,\, a]} J e^{\int \mathrm{d}^{D+1}x \epsilon \partial_\mu j^\mu}$$

であり，$J = e^{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^{D+1}x \epsilon \boldsymbol{A}}$ と書くと

$$\partial_\mu j^\mu = \mathrm{i}\boldsymbol{A}$$

が導かれるのだった（Fujikawa の方法）．一方，大域的対称性 H をゲージ化して

$$S[\psi,\, a,\, A] := \int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} \mathrm{d}^{D+1}x\, \bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + a_\mu + A_\mu)\psi$$

にする．ゲージ不変性から $S[\psi^h,\, a,\, A^h] = S[\psi,\, a,\, A]$ なので，

$$S[\psi^h,\, a,\, A] = S[\psi^h,\, a,\, A^h] - \int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} \mathrm{d}^{D+1}x\, \epsilon\, \partial_\mu(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi)$$

である．ABJ アノマリーは

$$
\begin{aligned}
& Z[a,\, A^h] = e^{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^{D+1}\epsilon \boldsymbol{B}} Z[a,\, A] \\
\Longleftrightarrow \quad & \int [\mathrm{d}\bar{\psi}^h\, \mathrm{d}\psi^h] e^{-S[\psi^h,\, a,\, A^h]} = e^{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^{D+1}\epsilon \boldsymbol{B}} \int [\mathrm{d}\bar{\psi}\, \mathrm{d}\psi] e^{-S[\psi,\, a,\, A]}
\end{aligned}
$$

を意味するから,

$$
\partial_\mu j^\mu = -\mathrm{i}\boldsymbol{B}
$$

となる．

Lie 群 G で特徴づけられる 0-form symmetry の場合を考える．on shell な保存カレントを 't Hooft アノマリーの意味で 1-form 背景ゲージ場 A_1 に結合させることができる．このとき，ゲージ場はダイナミカルでないので，分配関数は

$$
Z[A_1] = \int [\mathrm{d}\psi]\, e^{-S[\psi,\, A_1]}
$$

の形になっている．この 0-form symmetry が**アノマリー**を持つとは，ゲージ変換 $A_1 \longmapsto A_1 + \mathrm{d}\lambda_0$ の下で分配関数が不変にならないことである，と定義しよう．記号的には

$$
Z[A_1 + \mathrm{d}\lambda_0] = e^{\mathrm{i}\int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} \mathcal{A}[A_1,\, \lambda_0]} Z[A_1]
$$

と言うことである．ここで，この位相 $\mathcal{A}[A_1,\, \lambda_0]$ は $D+2$ 次元時空の TQFT の境界からの寄与だと考えてみよう[*23]：

$$
e^{\mathrm{i}\int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} \mathcal{A}[A_1,\, \lambda_0]} = e^{\mathrm{i}\int_{\partial\mathcal{N}^{(D+2)}} \mathcal{A}[A_1,\, \lambda_0]} = e^{\mathrm{i}\int_{\mathcal{N}^{(D+2)}} \mathrm{d}\mathcal{A}[A_1,\, \lambda_0]}
$$

つまり，$\mathrm{d}\mathcal{A}[A_1,\, \lambda_0]$ を $\widehat{\mathcal{A}}[A_1 + \mathrm{d}\lambda_0] \in \Omega^{D+2}(\mathcal{N}^{(D+2)})$ と見做すのである．すると，元の理論の分配関数を

$$
\widehat{Z}[A_1] \coloneqq Z[A_1] e^{-\mathrm{i}\int_{\mathcal{N}^{(D+2)}} \widehat{\mathcal{A}}[A_1]}
$$

と正則化すれば，直上で定義した意味でのアノマリーを相殺できるのである．

【例 3.3.5】カイラルアノマリー

カイラルアノマリーを Fujikawa 法で計算した結果は

$$
\mathcal{A}[A_1,\, \lambda_0] = \kappa \lambda_0 \frac{F_2 \wedge F_2}{8\pi^2}
$$

であるが,

$$
\widehat{\mathcal{A}}[A_1] = \kappa A_1 \wedge \frac{F_2 \wedge F_2}{8\pi^2}
$$

[*23] この仮説は，フェルミオン系においては数学的に証明されている [23]

とすれば

$$\begin{aligned}\widehat{Z}[A_1+\mathrm{d}\lambda_0] &= Z[A_1]e^{\mathrm{i}\kappa\int_{\mathcal{M}^{(D+1)}}\lambda_0\frac{F_2\wedge F_2}{8\pi^2}}e^{-\mathrm{i}\kappa\int_{\mathcal{N}^{(D+2)}}(A_1+\mathrm{d}\lambda_0)\wedge\frac{F_2\wedge F_2}{8\pi^2}} \\ &= \widehat{Z}[A_1]e^{\kappa\int_{\mathcal{M}^{(D+1)}}\lambda_0\frac{F_2\wedge F_2}{8\pi^2}-\mathrm{i}\kappa\int_{\partial\mathcal{N}^{(D+2)}=\mathcal{M}^{(D+1)}}\lambda_0\frac{F_2\wedge F_2}{8\pi^2}} \\ &= \widehat{Z}[A_1]\end{aligned}$$

となり，アノマリーが相殺されている．

しかるに，全てのゲージ変換について分配関数の不変性を調べるのは一般には難しい．そこで，アノマリーの定義を数学的により扱いやすい形に書き直そう [22, p.41]．まず，アノマリー流入の仮説から出発する：

仮説 3.1: anomaly inflow

$d=D+1$ 次元時空 $\mathcal{M}^{(d)}$ の上の任意のゲージ場の理論 $Z[A;\,\mathcal{M}^{(d)}]$ を与える．このとき，ある $\mathcal{N}^{(d+1)}$ の上の TQFT $S^{\mathrm{top}}[A;\,\mathcal{N}^{(d+1)}]$ が存在して，任意の $d+1$ 次元時空 $\mathcal{N}^{(d+1)}$ であって $\partial\mathcal{N}^{(d+1)}=\mathcal{M}^{(d)}$ を充たすものについて

$$\widehat{Z}[A;\,\mathcal{M}^{(d)},\,\mathcal{N}^{(d+1)}] \coloneqq Z_{\mathcal{M}^{(d)}}[A]e^{-\mathrm{i}S^{\mathrm{top}}[A;\,\mathcal{N}^{(d+1)}]}$$

で定義される理論がゲージ不変であるようにできる．

ここから，d 次元のゲージ場の理論の分配関数をむしろ初めから $\widehat{Z}[A;\,\mathcal{M}^{(d)},\,\mathcal{N}^{(d+1)}]$ として定義する．

定義 3.10: アノマリー

理論 $\widehat{Z}[A;\,\mathcal{M}^{(d)},\,\mathcal{N}^{(d+1)}]$ が**アノマリー**を持つとは，ある 2 つの異なる $d+1$ 次元時空 $\mathcal{N}_1^{(d+1)},\,\mathcal{N}_2^{(d+1)}$ であって $\partial\mathcal{N}_1^{(d+1)}=\partial\mathcal{N}_2^{(d+1)}=\mathcal{M}^{(d)}$ を充たすものが存在して

$$J[A;\,\mathcal{N}_1^{(d+1)},\,\mathcal{N}_2^{(d+1)}] \coloneqq \frac{\widehat{Z}[A;\,\mathcal{M}^{(d)},\,\mathcal{N}_2^{(d+1)}]}{\widehat{Z}[A;\,\mathcal{M}^{(d)},\,\mathcal{N}_1^{(d+1)}]} \neq 1$$

が成り立つことを言う．

定義 3.11: IFT

TQFT $\mathcal{Z}\colon \mathbf{Cob}_{d+1}\longrightarrow\mathbf{Hilb}$ が **IFT** (invertible field theory) であるとは，$\forall\Sigma^{(d)}\in\mathrm{Ob}(\mathbf{Cob}_{d+1})$ について

$$\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{Z}(\Sigma^{(d)})=1$$

が成り立つことを言う．

仮説 3.1 において，$S^{\mathrm{top}}[A;\mathcal{N}^{(d+1)}]$ は TQFT であった．特に IFT であることを仮定すると，アノマリーは

$$\begin{aligned}
J[A;\mathcal{N}_1^{(d+1)},\mathcal{N}_2^{(d+1)}] &= \frac{\widehat{Z}[A;\mathcal{M}^{(d)},\mathcal{N}_2^{(d+1)}]}{\widehat{Z}[A;\mathcal{M}^{(d)},\mathcal{N}_1^{(d+1)}]} \\
&= (e^{\mathrm{i}S^{\mathrm{top}}[A;\mathcal{N}_1^{(d+1)}]})^\dagger e^{\mathrm{i}S^{\mathrm{top}}[A;\mathcal{N}_2^{(d+1)}]} \\
&= \left\langle \mathcal{Z}(\mathcal{N}_1^{(d+1)}) \middle| \mathcal{Z}(\mathcal{N}_2^{(d+1)}) \right\rangle \\
&= \mathcal{Z}\big((-\mathcal{N}_1^{(d+1)}) \cup_{\partial\mathcal{N}^{(d+1)}} \mathcal{N}_2^{(d+1)}\big)
\end{aligned}$$

となる．i.e. $\mathcal{M}^{(d)}$ のアノマリーはある IFT $\mathcal{Z}\colon \mathbf{Cob}_{d+1} \longrightarrow \mathbf{Hilb}$ の分配関数[*24]である．この事実を**バルク-エッジ対応**と言う．結局，アノマリーを列挙する問題は IFT を列挙する問題に帰着された，と言うことである．

さらに，次の有名な予想がある [24]：

予想 3.1: Freed-Hopkins の予想

IFT $\mathbf{Cob}_{d+1} \longrightarrow \mathbf{Hilb}$ の群構造は，$d+2$ 次元の bordism 群の Anderson 双対

$$(I_{\mathbb{Z}}\Omega)^{d+2}$$

により与えられる．

3.3.7 高次対称性のアノマリー

高次対称性に関しても全く同様にアノマリーを判定できる．つまり，p-form カレントを背景ゲージ場と結合させてゲージ変換を施した際の分配関数の変化が

$$Z[A_{p_i} + \mathrm{d}\Lambda_{p_i-1}] = Z[A_{p_i}]e^{\mathrm{i}\int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} \mathcal{A}[A_{p_i},\Lambda_{p_i-1}]}$$

となり，$\mathcal{A}[A_{p_i},\Lambda_{p_i-1}] \neq 0$ ならば理論はアノマリーを持つと言う．特に $\mathcal{A}[A_{p_i},\Lambda_{p_i-1} = 0\,\forall i] = 0$ ならば**'t Hooft アノマリー**，そうでないならば **ABJ 型のアノマリー**を持つと言う．

【例 3.3.6】p-form U(1) ゲージ理論のアノマリー

作用が

$$S[A_p] = \frac{1}{2g^2}\int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} F_{p+1} \wedge \star F_{p+1}$$

[*24] $d+1$ 次元閉多様体 $\mathcal{N}^{(d+1)}$ を $\mathcal{N}^{(d+1)} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cob}_{d+1}}(\emptyset,\emptyset)$ と見做した際に，TQFT $\mathcal{Z}\colon \mathbf{Cob}_{d+1} \longrightarrow \mathbf{Hilb}$ によって線型写像 $\mathcal{Z}(\mathcal{N}^{(d+1)})\colon \mathcal{Z}(\emptyset) \longrightarrow \mathcal{Z}(\emptyset)$ が定まるが，$\mathcal{Z}(\emptyset) = \mathbb{C}$ と定義していたのでこの線型写像はある複素数 $\lambda_{\mathcal{Z},\mathcal{N}^{(d+1)}} \in \mathbb{C}$ と $\mathcal{Z}(\mathcal{N}^{(d+1)})(|\psi\rangle) = \lambda_{\mathcal{Z},\mathcal{N}^{(d+1)}}\,|\psi\rangle$ の関係で一対一対応する．この複素数 $\lambda_{\mathcal{Z},\mathcal{N}^{(d+1)}}$ のことを $\mathcal{Z}(\mathcal{N}^{(d+1)})$ と書いて，**分配関数**と呼ぶ．

で書かれる p-form U(1) ゲージ場 A_p の理論を考えよう[a] U(1)-ゲージ変換は $A_p \longmapsto A_p + \mathrm{d}\Lambda_{p-1}$ と書け，運動方程式と Bianchi 恒等式はそれぞれ

$$\begin{aligned} \mathrm{d} \star F_{p+1} &= 0, \\ \mathrm{d}F_{p+1} &= 0 \end{aligned}$$

となり，これらに対応して 2 つの保存カレント

$$\begin{aligned} \star J^{(\mathrm{e})} &\coloneqq \frac{1}{g^2} \star F_{p+1} \\ \star J^{(\mathrm{m})} &\coloneqq \frac{1}{2\pi} F_{p+1} \end{aligned}$$

がある．背景ゲージ場 $B^{(\mathrm{e})}_{p+1},\, B^{(\mathrm{m})}_{D-p}$ と結合させよう：

$$S[A_p,\, B^{(\mathrm{e})}_{p+1},\, B^{(\mathrm{m})}_{D-p}] = \int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} \frac{1}{2g^2} (F_{p+1} - B^{(\mathrm{e})}_{p+1}) \wedge \star (F_{p+1} - B^{(\mathrm{e})}_{p+1}) + \frac{\mathrm{i}}{2\pi} \int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} F_{p+1} \wedge B^{(\mathrm{m})}_{D-p}$$

ここで背景ゲージ場のゲージ変換 $\delta B^{(\mathrm{e})}_{p+1} = \Lambda^{(\mathrm{e})}_{p+1} \in \mathrm{B}^{p+1}(\mathcal{M}^{(D+1)};\, \mathbb{Z})$ を施す[b]：

$$\begin{aligned} &S[A_p,\, B^{(\mathrm{e})}_{p+1} + \Lambda^{(\mathrm{e})}_{p+1},\, B^{(\mathrm{m})}_{D-p}] \\ &= S[A_p,\, B^{(\mathrm{e})}_{p+1},\, B^{(\mathrm{m})}_{D-p}] + \frac{\mathrm{i}}{2\pi} \int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} \Lambda^{(\mathrm{e})}_{p+1} \wedge B^{(\mathrm{m})}_{D-p} \end{aligned}$$

この 't Hooft アノマリーは，アノマリー流入

$$\widehat{A}[B^{(\mathrm{e})}_{p+1},\, B^{(\mathrm{m})}_{D-p}] \coloneqq \frac{\mathrm{i}}{2\pi} B^{(\mathrm{e})}_{p+1} \wedge \mathrm{d}B^{(\mathrm{m})}_{D-p}$$

により相殺される．と言うのも，

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{N}^{(D+2)}} \widehat{A}[B^{(\mathrm{e})}_{p+1} + \Lambda^{(\mathrm{e})}_{p+1},\, B^{(\mathrm{m})}_{D-p}] &= \int_{\mathcal{N}^{(D+2)}} \widehat{A}[B^{(\mathrm{e})}_{p+1},\, B^{(\mathrm{m})}_{D-p}] + \frac{\mathrm{i}}{2\pi} \int_{\mathcal{N}^{(D+2)}} \Lambda^{(\mathrm{e})}_{p+1} \wedge \mathrm{d}B^{(\mathrm{m})}_{D-p} \\ &= \int_{\mathcal{N}^{(D+2)}} \widehat{A}[B^{(\mathrm{e})}_{p+1},\, B^{(\mathrm{m})}_{D-p}] + (-1)^{p+1} \frac{\mathrm{i}}{2\pi} \int_{\partial\mathcal{N}^{(D+2)} = \mathcal{M}^{(D+1)}} \Lambda^{(\mathrm{e})}_{p+1} \wedge B^{(\mathrm{m})}_{D-p} \end{aligned}$$

となるので，分配関数を

$$\widehat{Z}[B^{(\mathrm{e})}_{p+1},\, B^{(\mathrm{m})}_{D-p}] \coloneqq Z[B^{(\mathrm{e})}_{p+1},\, B^{(\mathrm{m})}_{D-p}] e^{(-1)^p \int_{\mathcal{N}^{(D+2)}} \widehat{A}[B^{(\mathrm{e})}_{p+1},\, B^{(\mathrm{m})}_{D-p}]}$$

と正則化すれば良い．

[a] この理論は ***p*-form electrodynamics** と呼ばれる．

[b] $\mathrm{B}^\bullet(\mathcal{M}^{(D+1)}) \coloneqq \mathrm{Im}\big(\mathrm{d} : \Omega^{\bullet-1}(\mathcal{M}^{(D+1)}) \longrightarrow \Omega^\bullet(\mathcal{M}^{(D+1)})\big)$ はバウンダリー．

3.4 Dijkgraaf-Witten 理論

離散的ゲージ理論[*25]として知られる Dijkgraaf-Witten 理論 [25] を導入する．

3.4.1 普遍束

G を Lie 群とする．

定義 3.12: ファイバー束の引き戻し

- 構造群 G を持つファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$
- 連続写像 $f\colon B_1 \longrightarrow B$

を与える．このとき

$$f^*(E) \coloneqq \{\, (b_1,\, u) \in B_1 \times E \mid f(b_1) = \pi(u) \,\}$$

と定めることで得られるファイバー束 $F \hookrightarrow f^*(E) \xrightarrow{\mathrm{proj}_1} B_1$ のことを**引き戻し束** (pullback bundle) と呼ぶ（図式 3.1）．

$$\begin{tikzcd}
f^*(E) \arrow[r, "\mathrm{proj}_2"] \arrow[d, "\mathrm{proj}_1"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\
B_1 \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

図 3.1: 引き戻し束

ファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ が

- B の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$
- 局所自明化 $\{\varphi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\approx} U_\alpha \times F\}_{\alpha\in\Lambda}$
- 変換関数 $\{t_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G\}_{\alpha\in\Lambda}$

を持つとき，引き戻し束 $F \hookrightarrow f^*(E) \xrightarrow{\mathrm{proj}_1} B_1$ の構造は

- B_1 の開被覆 $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$
- 局所自明化 $\{\tilde{\varphi}_\alpha\colon f^{-1}(U_\alpha) \times \pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\approx} f^{-1}(U_\alpha) \times F,\ (b_1,\, u) \longmapsto \big(b_1,\, \mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\alpha(u)\big)\}_{\alpha\in\Lambda}$
- 変換関数 $\{\tilde{t}_{\alpha\beta}\colon f^{-1}(U_\alpha) \cap f^{-1}(U_\beta) \longrightarrow G,\ x \longmapsto t_{\alpha\beta}\big(f(x)\big)\}_{\alpha\in\Lambda}$

によって定まる．

[*25] ゲージ場は 1 形式である．

命題 3.1: 引き戻し束の同型

- 2 つのファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B,\ F \hookrightarrow E_1 \xrightarrow{\pi} B_1$
- 束写像 $(f\colon B_1 \longrightarrow B,\ \tilde{f}\colon E_1 \xrightarrow{\pi_1} E)$

を与える．このとき以下の図式を可換にする $w\colon E_1 \longrightarrow f^*(E)$ が一意的に存在し，E_1 と引き戻し束 $f^*(E)$ が束同型になる．

$$
\begin{tikzcd}
f^*(E) \arrow[rr, "\mathrm{proj}_2"] \arrow[dddr, "\mathrm{proj}_1"'] & & E \arrow[dd, "\pi"] \\
& E_1 \arrow[ul, dashed, "\exists ! w"'] \arrow[ur, "\tilde{f}"'] \arrow[dd, "\pi_1"] & \\
& & B \\
& B_1 \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
$$

証明

$$w\colon E_1 \longrightarrow f^*(E),\ u \longmapsto \bigl(\pi_1(u),\ \tilde{f}(u)\bigr)$$

と定義すると図式の緑色の部分が全て可換になり，束同型を与える．一意性は w の定義から明らか． ■

圏 **hoMfd** を，

- 多様体を対象とする
- 2 つの多様体 $X,\ Y$ の間のホモトピー集合 $[X, Y]$ を Hom 集合とする

ものとして定義する．

- $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{hoMfd})$ に対して集合

$$k_G(X) \coloneqq \{\, X \text{ 上の主束の束同型類} \,\}$$

を，

- $\forall X,\ Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{hoMfd})$ の $\forall [f] \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{hoMfd}}(X,\ Y)$ に対して写像

$$k_G\bigl([f]\bigr)\colon k_G(Y) \longrightarrow k_G(X),\ [\xi] \longmapsto [f^*(\xi)]$$

を

対応づける対応

$$k_G\colon \mathbf{hoMfd} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

は反変関手である [26, p.53, 10.1 Theorem].

定義 3.13: 普遍束

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} B$ が G の**普遍束** (universal bundle) であるとは，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{hoMfd})$ について定まる写像

$$\phi_P(X)\colon [X, B] \longrightarrow k_G(X),\ [f] \longmapsto [f^*P]$$

が全単射になること．

普遍束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} B$ において，B のことを G の**分類空間** (classifying space) と呼ぶ．

G の普遍束の全空間を $\boldsymbol{EG}$，分類空間を $\boldsymbol{BG}$ と書く慣習がある．

命題 3.2: 普遍束の特徴付け

主束 $G \hookrightarrow EG \xrightarrow{\pi_G} BG$ が G の普遍束であることは，以下の 2 つが満たされることと同値である：

(univ-1) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{hoMfd})$ および X を底空間にもつ任意の主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$ に対して，ある連続写像 $f\colon X \longrightarrow BG$ が存在して P と引き戻し束 $f^*(EG)$ が束同型になる．

(univ-2) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{hoMfd})$ および任意の連続写像 $f, g\colon X \longrightarrow BG$ に対して，$f^*(EG)$ と $g^*(EG)$ が束同型ならば f, g はホモトピックである．

証明 **(univ-1)** は写像 $\phi_{EG}(X)$ の全射性，**univ-2** は写像 $\phi_{EG}(X)$ の単射性を意味する． ■

命題 3.3: 普遍束の全空間の特徴付け

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} B$ が普遍束であるための必要十分条件は，$\forall n \geq 0$ に対して $\pi_n(EG) = 0$ を充たすことである．

証明 [27, p.102, 19.4] ■

命題 3.4:

G が離散群ならば $BG = K(G, 1)$

証明 命題 3.3 より，ホモトピー長完全列から $\pi_n(BG) \cong \pi_{n-1}(G)$ が言える．離散群の場合は $\pi_0(G) = G$ かつ $\pi_{n>0}(G) = 0$ なので示された． ■

定義したは良いが，与えられた G に対してその普遍束が存在しなければ意味がないので，具体的に EG を構成しよう．

集合

$$EG_{\mathrm{M}} \coloneqq \left\{ (t_0 g_0,\, t_1 g_1,\, \dots) \;\middle|\; t_i \in [0,\,1],\ g_i \in G,\ \substack{\text{高々有限個の } i \text{ のみ } t_i \neq 0 \\ \text{かつ } \sum_{i \geq 0} t_i = 1} \right\}$$

を考える．$\langle g,\, t \rangle \coloneqq (t_0 g_0,\, t_1 g_1,\, \dots)$ と書き，EG_{M} 上の等号を

$$\langle g,\, t \rangle = \langle g',\, t' \rangle \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall i \geq 0,\ t_i = t'_i \ \text{かつ}\ \forall i \geq 0,\ t_i = t'_i > 0 \quad \Longrightarrow \quad g_i = g'_i$$

と定義する．EG_{M} への G の自由な右作用を

$$\blacktriangleleft \colon EG_{\mathrm{M}} \times G \longrightarrow EG_{\mathrm{M}},\ \bigl((t_0 g_0,\, t_1 g_1,\, \dots),\, g\bigr) \longmapsto (t_0 g_0 g,\, t_1 g_1 g,\, \dots)$$

で定義する．EG_{M} には，$\forall i \geq 0$ について定まる写像

$$\begin{aligned} &t_i \colon EG_{\mathrm{M}} \longrightarrow [0,\, 1],\ (t_0 g_0,\, t_1 g_1,\, \dots) \longmapsto t_i, \\ &x_i \colon t_i^{-1}\bigl((0,\, 1]\bigr) \longrightarrow G,\ (t_0 g_0,\, t_1 g_1,\, \dots) \longmapsto x_i \end{aligned}$$

が連続になるような最小の位相を入れる．右作用 $\blacktriangleleft$ による EG_{M} の商位相空間を $BG_{\mathrm{M}} \coloneqq EG_{\mathrm{M}}/G$ とおく．

定理 3.5: Milnor 構成

任意の Lie 群 G について $G \hookrightarrow EG_{\mathrm{M}} \xrightarrow{p} BG_{\mathrm{M}}$ は[a]主束であり，普遍束でもある．

[a] $p\colon EG_{\mathrm{M}} \longrightarrow BG_{\mathrm{M}}$ は商写像．

証明　主束であること

$\forall i \geq 0$ に対して $U_i \coloneqq p\bigl(t_i^{-1}((0,\, 1])\bigr)$ とおくと，開集合族 $\{U_i\}_{i \geq 0}$ は BG_{M} の開被覆になる[*26]．さらに，$\forall \langle g,\, t\rangle \in EG_{\mathrm{M}}$，$\forall h \in G$ に対して $t_i(\langle g,\, t\rangle \blacktriangleleft h) = t_i(\langle g,\, t\rangle)$ が成り立つので $p^{-1}(U_i) = t_i^{-1}\bigl((0,\, 1]\bigr)$ が言える[*27]．

次に，$\forall i \geq 0$ を 1 つ固定し，U_i 上の局所自明化を構成する．連続写像

$$\sigma_i \colon p^{-1}(U_i) \longrightarrow p^{-1}(U_i),\ \langle g,\, t\rangle \longmapsto \langle g,\, t\rangle \blacktriangleleft \bigl(g_i(\langle g,\, t\rangle)^{-1}\bigr)$$

を考える．$\forall h \in G$ に対して

$$\begin{aligned} \sigma_i\bigl(\langle g,\, t\rangle \blacktriangleleft h\bigr) &= \langle g,\, t\rangle \blacktriangleleft \bigl(h\, g_i(\langle g,\, t\rangle \blacktriangleleft h)^{-1}\bigr) \\ &= \langle g,\, t\rangle \blacktriangleleft \bigl(hh^{-1} g_i(\langle g,\, t\rangle)^{-1}\bigr) \\ &= \langle g,\, t\rangle \blacktriangleleft \bigl(g_i(\langle g,\, t\rangle)^{-1}\bigr) \\ &= \sigma_i\bigl(\langle g,\, t\rangle\bigr) \end{aligned}$$

が成り立つから，

$$s_i \colon U_i \longrightarrow p^{-1}(U_i),\ p(\langle g,\, t\rangle) \longmapsto \sigma_i(\langle g,\, t\rangle)$$

は well-defined な連続写像である．さらに $\forall p(\langle g,\, t\rangle) \in U_i$ に対して $p \circ s_i\bigl(p(\langle g,\, t\rangle)\bigr) = p \circ \sigma_i(\langle g,\, t\rangle) = p(\langle g,\, t\rangle)$ が成り立つので s_i は局所切断である．ここで

$$\varphi_i \colon p^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times G,\ s_i(x) \blacktriangleleft g \longmapsto (x,\, g)$$

[*26] U_i が BG_{M} の開集合であることは EG_{M} の位相の定義から明らか．$\forall \langle g,\, t\rangle \in EG_{\mathrm{M}}$ に対して，EG_{M} の定義から $\sum_{i \geq 0} t_i = 1$ なので $\exists i \geq 0,\ t_i \neq 0$ であり，$p(\langle g,\, t\rangle) \in U_i$ も言える．

[*27]

$$\begin{aligned} \langle g,\, t\rangle \in p^{-1}(U_i) \quad &\Longleftrightarrow \quad p(\langle g,\, t\rangle) \in U_i = p\bigl(t_i^{-1}((0,\, 1])\bigr) \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists h \in G,\ \exists \langle g',\, t'\rangle \in t_i^{-1}\bigl((0,\, 1]\bigr),\ \langle g,\, t\rangle = \langle g',\, t'\rangle \blacktriangleleft h \\ &\Longrightarrow \quad t_i(\langle g,\, t\rangle) = t_i(\langle g',\, t'\rangle \blacktriangleleft h) = t_i(\langle g',\, t'\rangle) \in (0,\, 1] \\ &\Longleftrightarrow \quad \langle g,\, t\rangle \in t_i^{-1}\bigl((0,\, 1]\bigr) \end{aligned}$$

逆の包含は明らか．

と定義すると，φ_i は well-defined な同相写像になっている[*28] ので U_i 上の局所自明化である．別の $j \geq 0$ をとると，$\forall p(\langle g,\, t\rangle) \in p^{-1}(U_i \cap U_j)$, $\forall h \in G$ に対して

$$\begin{aligned}\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}\bigl(p(\langle g,\, t\rangle),\, h\bigr) &= \varphi_i\bigl(\sigma_j(\langle g,\, t\rangle) \blacktriangleleft h\bigr)\\ &= \varphi_i\Bigl(\sigma_i(\langle g,\, t\rangle) \blacktriangleleft \bigl(g_i(\langle g,\, t\rangle) g_j(\langle g,\, t\rangle)^{-1} h\bigr)\Bigr)\\ &= \bigl(p(\langle g,\, t\rangle),\, g_i(\langle g,\, t\rangle) g_j(\langle g,\, t\rangle)^{-1} h\bigr)\end{aligned}$$

が成り立つので，変換関数は

$$t_{ij} \colon U_i \cap U_j \longrightarrow G,\ p(\langle g,\, t\rangle) \longmapsto g_i(\langle g,\, t\rangle) g_j(\langle g,\, t\rangle)^{-1}$$

だと分かった[*29].

最後に EG_{M} が第 2 可算な Hausdorff 空間であることを示さないといけないが，技術的なのでここでは省略する．詳細は [26, p.55, 11.2 Theorem] を参照.

普遍束であること

主束 $G \hookrightarrow EG_{\mathrm{M}} \xrightarrow{p} BG_{\mathrm{M}}$ が命題 3.2 の条件 **(univ-1)**, **(univ-2)** を充していることを示す.

(univ-1) 勝手な多様体 X を 1 つ固定する.

- X を底空間に持つ任意の主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$
- P の開被覆 $\mathcal{U} \coloneqq \bigl\{U_\alpha\bigr\}_{\alpha\in\Lambda}$ と局所自明化 $\bigl\{\varphi_\alpha \colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G\bigr\}_{\alpha\in\Lambda}$
- $\mathcal{U}$ に従属する 1 の分割 $\bigl\{v_\alpha \colon X \longrightarrow [0,\, 1]\bigr\}_{\alpha\in\Lambda}$

を与える．1 の分割の定義から，$\forall x \in X$ に対して，$\mathcal{U}$ の添字集合 Λ の部分集合

$$S(x) \coloneqq \bigl\{\, i \in \Lambda \bigm| \operatorname{supp} v_i \cap \{x\} \neq \emptyset \,\bigr\}$$

は有限集合である．また，Λ の任意の有限部分集合 $I \subset \Lambda$ に対して X の部分集合

$$W(I) \coloneqq \bigl\{\, x \in X \bigm| \forall i \in I,\ \forall \alpha \in \Lambda \setminus I,\ v_i(x) > v_\alpha(x) \,\bigr\}$$

および連続関数

$$u_I \colon X \longrightarrow [0,\, 1],\ x \longmapsto \max\Bigl\{0,\ \min_{i\in I,\, \alpha\in\Lambda\setminus I}\bigl\{v_i(x) - v_\alpha(x)\bigr\}\Bigr\}$$

を考える．$W(I) = u_I\bigl((0,\, 1]\bigr)$ なので $W(I)$ は X の開集合である．このとき，互いに異なる Λ の任意の有限部分集合 $I,\, J \underset{\text{finite}}{\subset} \Lambda$ に対して，$\#I = \#J$ ならば $W(I) \cap W(J) = \emptyset$ になる[*30]．よっ

[*28] $\forall \langle g,\, t\rangle \in p^{-1}(U_i)$ を与える．このとき $s_i\bigl(p(\langle g,\, t\rangle)\bigr) = \langle g,\, t\rangle \blacktriangleleft \bigl(g_i(\langle g,\, t\rangle)^{-1}\bigr)$ なので $\langle g,\, t\rangle = s_i\bigl(p(\langle g,\, t\rangle)\bigr) \blacktriangleleft g_i(\langle g,\, t\rangle)$ であり，G の右作用 $\blacktriangleleft$ は自由なのでこのような分解は一意である．よって $\varphi_i(\langle g,\, t\rangle) = \bigl(p(\langle g,\, t\rangle),\, g_i(\langle g,\, t\rangle)\bigr)$ であり，φ_i が well-defined な全単射だとわかった．同相写像であることは，連続写像の合成として書けているので明らか.

[*29] $g_i(\langle g,\, t\rangle \blacktriangleleft h) = g_i(\langle g,\, t\rangle)h$ なので，t_{ij} は well-defined である.

[*30] $i \in I \setminus J$, $j \in J \setminus I$ をとる．このとき $\forall x \in W(I)$ に対して $v_i(x) > v_j(x)$ が成り立ち，かつ $\forall y \in W(J)$ に対して $v_j(y) > v_i(y)$ が成り立つので，$W(I) \cap W(J) = \emptyset$ でないといけない.

て，$\forall m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$
\begin{aligned}
&W_m \coloneqq \bigcup_{\substack{I \underset{\text{finite}}{\subset} \Lambda, \\ \# I = m}} W(I), \\
&u_m \colon X \longrightarrow [0,\,1],\ x \longmapsto \frac{\displaystyle\sum_{\substack{I \underset{\text{finite}}{\subset} \Lambda, \\ \# I = m}} u_I(x)}{\displaystyle\sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{I \underset{\text{finite}}{\subset} \Lambda, \\ \# I = n}} u_I(x)}
\end{aligned}
$$

と定義すると，u_m は連続関数なので $W_m = u_m^{-1}\bigl((0,\,1]\bigr)$ は X の開集合であり，

- X の開被覆 $\mathcal{W} \coloneqq \bigl\{W_m\bigr\}_{m \geq 0}$
- $\mathcal{W}$ に従属する 1 の分割 $\bigl\{u_m \colon X \longrightarrow [0,\,1]\bigr\}_{m \geq 0}$

が得られた．特に W_m は $W(I)$ の非交和であり，$P|_{W(I)}$ は定義から自明束と同型なので[*31] $P|_{W_m}$ は自明束と同型である．この束同型写像を $h_m \colon \pi^{-1}(W_m) \xrightarrow{\approx} W_m \times G$ とおく．

今，連続写像

$$
\tilde{f} \colon P \longrightarrow EG_{\mathrm{M}},\ u \longmapsto \Bigl(\bigl(u_0 \circ \pi(u)\bigr)\,\bigl(\mathrm{proj}_2 \circ h_0(u)\bigr),\,\dots,\,\bigl(u_m \circ \pi(u)\bigr)\,\bigl(\mathrm{proj}_2 \circ h_m(u)\bigr),\,\dots\Bigr)
$$

を考える．$u \notin \pi^{-1}(W_m)$ のときは 1 の分割の定義から $u_m \circ \pi(u) = 0$ となるのでこの写像は well-defined であり，$\forall g \in G$ に対して[*32]

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}(u \blacktriangleleft g) &= \Bigl(\bigl(u_0 \circ \pi(u \blacktriangleleft g)\bigr)\,\bigl(\mathrm{proj}_2 \circ h_0(u \blacktriangleleft g)\bigr),\,\dots,\,\bigl(u_m \circ \pi(u)\bigr)\,\bigl(\mathrm{proj}_2 \circ h_m(u \blacktriangleleft g)\bigr),\,\dots\Bigr) \\
&= \Bigl(\bigl(u_0 \circ \pi(u)\bigr)\,\bigl(\mathrm{proj}_2 \circ h_0(u)\bigr)g,\,\dots,\,\bigl(u_m \circ \pi(u)\bigr)\,\bigl(\mathrm{proj}_2 \circ h_m(u)\bigr)g,\,\dots\Bigr) \\
&= \tilde{f}(u) \blacktriangleleft g
\end{aligned}
$$

が成り立つ．このとき連続写像

$$
f \colon X \longrightarrow BG_{\mathrm{M}},\ \pi(u) \longmapsto p\bigl(\tilde{f}(u)\bigr)
$$

は well-defined であり，図式

$$
\begin{CD}
P @>{\tilde{f}}>> EG_{\mathrm{M}} \\
@V{\pi}VV @VV{p}V \\
X @>>{f}> BG_{\mathrm{M}}
\end{CD}
$$

を可換にする．i.e. 組 $(f,\,\tilde{f})$ は束写像である．よって命題 3.1 より P と $f^*(EG_{\mathrm{M}})$ が束同型だと分かった．

(univ-2)

■

[*31] $W(I) \subset \bigcap_{i \in I} v_i^{-1}\bigl((0,\,1]\bigr) \subset \bigcap_{i \in I} U_i$ なので．

[*32] $u \blacktriangleleft g$ は命題 2.2 で与えた G の P への右作用である．

3.4.2 群コホモロジー

先に進む前に，特異ホモロジー・コホモロジーについて復習する．R を単項イデアル整域，M を R-加群とする．

- R-係数特異ホモロジーとは，関手
$$H_k(\text{-};\, R)\colon \mathbf{Top} \xrightarrow{S_\bullet(\text{-};\,\mathbb{Z})} \mathbf{Chain} \xrightarrow{H_k} R\text{-}\mathbf{Mod}$$
のこと．
- M-係数特異ホモロジーとは，関手
$$H_k(\text{-};\, M)\colon \mathbf{Top} \xrightarrow{S_\bullet(\text{-};\,\mathbb{Z})} \mathbf{Chain} \xrightarrow{\otimes_R M} \mathbf{Chain} \xrightarrow{H_k} R\text{-}\mathbf{Mod}$$
のこと．
- 任意の位相空間 X に対して，$H_\bullet(X;\, R)$ と $H_\bullet(X;\, M)$ は普遍係数定理
$$0 \longrightarrow H_k(X;\, R) \otimes_R M \longrightarrow H_k(X;\, M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R\bigl(H_{k-1}(X;\, R),\, M\bigr) \longrightarrow 0 \quad \text{(exact)}$$
によって互いに関係する．

特に，特異ホモロジーの場合は構成から $\forall k \in \mathbb{Z}$ に対して $S_k(X;\, R)$ が自由加群なのでこの短完全列は分裂し
$$H_k(X;\, M) \cong \bigl(H_k(X;\, R) \otimes_R M\bigr) \oplus \mathrm{Tor}_1^R\bigl(H_{k-1}(X;\, R),\, M\bigr)$$
が言える．

- R-係数特異コホモロジーとは，関手
$$H^k(\text{-};\, R)\colon \mathbf{Top} \xrightarrow{S_\bullet(\text{-};\,\mathbb{Z})} \mathbf{Chain} \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R\,(\text{-};\, R)} \mathbf{Chain}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{H^k} R\text{-}\mathbf{Mod}$$
のこと．
- M-係数特異コホモロジーとは，関手
$$H^k(\text{-};\, M)\colon \mathbf{Top} \xrightarrow{S_\bullet(\text{-};\,\mathbb{Z})} \mathbf{Chain} \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R\,(\text{-};\, R)} \mathbf{Chain} \xrightarrow{\otimes_R M} \mathbf{Chain}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{H^k} R\text{-}\mathbf{Mod}$$
のこと．
- 任意の位相空間 X に対して，$H^\bullet(X;\, R)$ と $H^\bullet(X;\, M)$ は普遍係数定理
$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1\bigl(H_{k-1}(X;\, R),\, M\bigr) \longrightarrow H^k(X;\, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\bigl(H_k(X;\, R),\, M\bigr) \longrightarrow 0 \quad \text{(exact)}$$
によって互いに関係する．

特に，特異コホモロジーの場合は構成から $\forall k \in \mathbb{Z}$ に対して $\mathrm{Hom}_R\bigl(S_k(X;\, R);\, R\bigr)$ が自由加群なのでこの短完全列は分裂し
$$H^k(X;\, M) \cong \mathrm{Hom}_R\bigl(H_k(X;\, R),\, M\bigr) \oplus \mathrm{Ext}_R^1\bigl(H_{k-1}(X;\, R),\, M\bigr)$$
が言える．

公理 3.2: G 加群

可換群 $(M,\ +)$ と，群 G の M への左作用

$$\blacktriangleright\colon G \times M \longrightarrow M$$

の組み $(M,\ +,\ \blacktriangleright)$ であって，$\forall g,\ h \in G,\ \forall x,\ y \in M$ に対して以下の条件を充たすものを**左 G 加群**と呼ぶ：

(G-mod1) $g \blacktriangleright (x+y) = g \blacktriangleright x + g \blacktriangleright y$

(G-mod2) $(gh) \blacktriangleright x = g \blacktriangleright (h \blacktriangleright x)$

(G-mod3) $1_G \blacktriangleright x = x$

右 G 加群も同様に定義する．

$\mathbb{Z}$ 係数の G の**群環**とは，可換群 $\mathbb{Z}^{\oplus G}$ に積

$$(a_g)_g \cdot (b_g)_g \coloneqq \left(\sum_{hk=g} a_h b_k \right)_g$$

を定義してできる環 $(\mathbb{Z}^{\oplus G},\ +,\ \cdot\ )$ のこと．記号として $\mathbb{Z}[\boldsymbol{G}]$ と書く．左 G 加群と左 $\mathbb{Z}[G]$ 加群は同一視できる．

$$\epsilon\colon \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z},\ (a_g)_g \longmapsto \sum_{g \in G} a_g$$

を **augmentation** と呼ぶ．

定義 3.14: 群コホモロジー（代数的）

左 G 加群 M を与える．$\mathbb{Z}$ を自明な作用により左 G 加群と見做す．

- **群 G の M-係数ホモロジー**とは，

$$H_{\mathrm{Grp}\,k}(G;\ M) \coloneqq \mathrm{Tor}_k^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},\ M)$$

のこと．

- **群 G の M-係数コホモロジー**とは，

$$H^k_{\mathrm{Grp}}(G;\ M) \coloneqq \mathrm{Ext}^k_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},\ M)$$

のこと．

右導来関手の一般論から，任意の G 加群の短完全列 $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ (exact) に対応する長完全列

$$\begin{aligned} \cdots &\longrightarrow H^k_{\mathrm{Grp}}(G,\ M_1) \longrightarrow H^k_{\mathrm{Grp}}(G,\ M_2) \longrightarrow H^k_{\mathrm{Grp}}(G,\ M_3) \\ &\longrightarrow H^{k+1}_{\mathrm{Grp}}(G,\ M_1) \longrightarrow H^{k+1}_{\mathrm{Grp}}(G,\ M_2) \longrightarrow H^{k+1}_{\mathrm{Grp}}(G,\ M_3) \\ &\longrightarrow \cdots \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

が成り立つ．

定理 3.6: 群コホモロジー（位相空間論的）

任意の群 G および G 加群 M に対して

$$H^\bullet(BG;\, M) \cong H^\bullet_{\mathrm{Grp}}(G;\, M)$$

が成り立つ．

証明 ■

いくつかの実用上有用な命題を紹介する：

命題 3.5: 色々な群コホモロジー

(1) 任意の有限群に対して

$$H^{k>0}_{\mathrm{Grp}}(G;\, \mathbb{R}) = 0$$

(2) 任意のコンパクト Lie 群に対して

$$H^{2k+1}_{\mathrm{Grp}}(G;\, \mathbb{R}) = 0$$

(3) 任意の Lie 群に対して

$$H^{2k}_{\mathrm{Grp}}(G;\, \mathbb{R}) \cong \mathrm{Inv}(\mathfrak{g})$$

証明 (1)

■

群 G が有限群のとき，命題 3.5-(1) と群コホモロジーの長完全列 (3.4.1) により短完全列 $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathrm{U}(1) \longrightarrow 0$ から同型

$$H^k_{\mathrm{Grp}}(G;\, \mathbb{Z}) \cong H^{k-1}_{\mathrm{Grp}}(G;\, \mathrm{U}(1))$$

がわかる．

3.4.3 関手としての接続

$d = D + 1$ 次元時空 $\mathcal{M}^{(d)}$ を考える．圏 $\mathbf{P}_1\left(\mathcal{M}^{(d)}\right)$ を[*33]，

- $\mathcal{M}^{(d)}$ の点を対象とする．
- $\mathrm{Hom}_{\mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)})}(x,\, y) := \left\{ \sigma\colon [0,\, 1] \longrightarrow \mathcal{M}^{(d)} \;\middle|\; \sigma(0) = x,\, \sigma(1) = y \right\}$

によって定義する．

[*33] これは groupoid を成し，**path groupoid** と呼ばれる（https://ncatlab.org/nlab/show/path+groupoid）．

命題 3.6: 関手としての接続

- $\mathcal{M}^{(d)}$ 上の主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}^{(d)}$
- P の同伴ベクトル束 $V \hookrightarrow E \xrightarrow{q} \mathcal{M}^{(d)}$

を与える．このとき，任意の P の接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$ に対して

(1) $\forall x \in \mathrm{Ob}(\mathbf{P}_1\left(\mathcal{M}^{(d)}\right))$ に対して $\Gamma_\omega(x) := q^{-1}(\{x\})$
(2) $\forall x,\, y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{P}_1\left(\mathcal{M}^{(d)}\right))$, $\forall \sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}_1\left(\mathcal{M}^{(d)}\right)}(x,\, y)$ に対して[a] $\Gamma_\omega(\sigma) := \bigl(u =: \tilde{\sigma}(0) \longmapsto \tilde{\sigma}(1)\bigr)$

と定義される対応

$$\Gamma_\omega \colon \mathbf{P}_1\left(\mathcal{M}^{(d)}\right) \longrightarrow \mathbf{Vect}$$

は関手である．

[a] $\Phi_u(\sigma) \in G$ はループ σ のホロノミー．

逆に，関手

$$\Gamma \colon \mathbf{P}_1\left(\mathcal{M}^{(d)}\right) \longrightarrow \mathbf{Vect}$$

であって以下の条件を充たすものは P の接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$ を与える：

(1) 任意の単調増加関数 $f \colon [0,\, 1] \longrightarrow [0,\, 1]$ および $\forall \sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}_1\left(\mathcal{M}^{(d)}\right)}(x,\, y)$ に対して

$$\Gamma(\sigma) = \Gamma(\sigma \circ f)$$

(2) 任意の単調減少関数 $f \colon [0,\, 1] \longrightarrow [0,\, 1]$ および $\forall \sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}_1\left(\mathcal{M}^{(d)}\right)}(x,\, y)$ に対して

$$\Gamma(\sigma) = \Gamma(\sigma \circ f)$$

(3) Γ は σ について適切な C^∞ 性を充たす．

証明 前半は命題 2.15 より明らか．後半は [28], [29] を参照 ■

大域的切断 $s \colon \mathcal{M}^{(d)} \longrightarrow P$ を許容する主束 P およびその接続 $\omega \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$ を与え，2 点 $x,\, y \in \mathcal{M}^{(d)}$ を繋ぐ曲線 $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}_1\left(\mathcal{M}^{(d)}\right)}(x,\, y)$ であって，その水平持ち上げ $\tilde{\sigma}$ が $\tilde{\sigma}(0) = s(x)$ を充たすものをとる．するとこのとき $\tilde{\sigma}(1) = s(y) \blacktriangleleft g_\sigma$ を充たす $g_\sigma \in G$ が一意に定まる．さらに 2 点 $y,\, z \in \mathcal{M}^{(d)}$ を繋ぐ曲線 $\sigma' \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}_1\left(\mathcal{M}^{(d)}\right)}(y,\, z)$ であって，その水平持ち上げ $\tilde{\sigma'}$ が $\tilde{\sigma'}(0) = s(y)$ を充たすものをとると，水平持ち上げの一意性から $(\sigma' \,\tilde{*}\, \sigma)(1) = s(z) \blacktriangleleft g_\sigma g_{\sigma'}$ が成り立つ．従って，P が自明束ならば命題 3.6 の関手 $\Gamma_\omega \colon \mathbf{P}_1\left(\mathcal{M}^{(d)}\right) \longrightarrow \mathbf{Vect}$ は関手

$$\Gamma_\omega \colon \mathbf{P}_1\left(\mathcal{M}^{(d)}\right) \longrightarrow \boldsymbol{G}$$

と見做せる．ただし $\boldsymbol{G}$ は

- G のみを対象に持つ

- G の元を射に持つ

ことで構成される圏である．自明束 P におけるゲージ変換とは，大域的切断の取り替えに伴う変換関数によって特徴付けられる．変換関数は，大域的切断 $s_1,\, s_2 \colon M \longrightarrow P$ に対して $s_1(x) = s_2(x) \blacktriangleleft g_{12}(x)$ と定義することで定まる $g_{12} \colon M \longrightarrow G$ のことであり，$\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)})}(x,\, y)$ に対して

$$\Gamma_\omega(\sigma) \longmapsto \Gamma'_\omega(\sigma) = g_{12}(y)^{-1}\Gamma_\omega(\sigma) g_{12}(x) \tag{3.4.2}$$

なる変換を引き起こす[*34]．i.e. 変換関数 $g_{12} \colon M \longrightarrow P$ は，自然変換

$$\begin{tikzcd} \mathbf{P}_1\left(\mathcal{M}^{(d)}\right) \arrow[r, bend left=50, "\Gamma_\omega"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "\Gamma'_\omega"'{name=D}] & \boldsymbol{G} \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "g_{12}"] \end{tikzcd}$$

である．

定義 3.15: 平坦接続

$\mathcal{M}^{(d)}$ 上の主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}^{(d)}$ を与える．このとき P の関手としての接続

$$\Gamma \colon \mathbf{P}_1\left(\mathcal{M}^{(d)}\right) \longrightarrow \mathbf{Vect}$$

が**平坦接続** (flat connection) であるとは，互いにホモトピックな任意の $\sigma,\, \sigma' \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)})}$ に対して

$$\Gamma(\sigma) = \Gamma(\sigma')$$

が成り立つことを言う．

これまでの議論から，連結な $\mathcal{M}^{(d)}$ 上の平坦接続のモジュライ空間は

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}\left(\pi_1(\mathcal{M}^{(d)}),\, G\right)/G \tag{3.4.3}$$

であることが分かった．ただし G 作用 $g \longmapsto g^{-1}(\text{-})g$ によって商をとり，ゲージ変換 (3.4.2) の冗長性を排除した．

3.4.4 トポロジカルなゲージ理論：Lie 群の場合

時空が $2+1$ 次元の連結な閉多様体 $\mathcal{M}^{(3)}$ であるとする．Lie 群 G がコンパクトかつ単連結ならば，$\mathcal{M}^{(3)}$ 上の任意の主束は自明束と同型になり，Chern-Simons 作用

$$S[A] \coloneqq \frac{k}{8\pi^2}\int_{\mathcal{M}^{(3)}} \mathrm{Tr}\left(A \wedge A + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A\right)$$

は well-defined である．しかし，G が一般のコンパクト Lie 群である場合にはそう上手くいかない．

[*34] $\tilde{\sigma}(0) = s_1(x)$ とする．このとき $\tilde{\sigma} \blacktriangleleft g_{12}(x)$ は $s_2(x) = s_1(x) \blacktriangleleft g_{12}(x)$ を始点とする σ の水平持ち上げであるから，$s_2(y) \blacktriangleleft \Gamma'_\omega(\sigma) = \tilde{\sigma}(1) \blacktriangleleft g_{12}(x) = s_1(y) \blacktriangleleft \Gamma_\omega(\sigma) \blacktriangleleft g_{12}(x) = s_2(y) \blacktriangleleft \left(g_{12}(y)^{-1}\Gamma_\omega(\sigma)g_{12}(x)\right)$

これを解決する方法としては，$\mathcal{M}^{(3)}$ を境界に持つ 4 次元多様体 $\mathcal{N}^{(4)}$ を持ってきて，

$$S[A] \coloneqq \int_{\mathcal{N}^{(4)}} \Omega(F) = \frac{k}{8\pi^2} \int_{\mathcal{N}^{(4)}} \mathrm{Tr}\big[F \wedge F\big]$$

と定義することが考えられる．この $S[A]$ は Chern 指標[*35]の積分なので整数値を取り，トポロジカルなゲージ場の理論になっている．4 次元多様体への拡張は一意ではないので作用は　mod 1 の不定性を持つが，分配関数は well-defined になる．しかし，この構成が可能であるためには任意の $\mathcal{M}^{(3)}$ 上の主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}^{(3)}$ に対して，$\mathcal{N}^{(4)}$ 上の主束 $G \hookrightarrow P' \xrightarrow{\pi'} \mathcal{N}^{(4)}$ であって，$\partial\mathcal{N}^{(4)} = \mathcal{M}^{(3)}$ への制限 $P'|_{\partial\mathcal{N}^{(4)}} = P$ を充たすようなものが存在しなくてはいけない．この拡張の障害となるのが，分類写像 $\gamma\colon \mathcal{M}^{(3)} \longrightarrow BG$ の誘導準同型による $\mathcal{M}^{(3)}$ の基本類 $[\mathcal{M}^{(3)}] \in H_3(\mathcal{M}^{(3)};\, \mathbb{Z})$ の像 $\gamma_*[\mathcal{M}^{(3)}] \in H_3(BG;\, \mathbb{Z})$ である[*36]．もし $\gamma_*[\mathcal{M}^{(3)}] = 0$ なら拡張が可能だが，そうでないときは不可能ということになる．しかしながら，命題 3.5-(2) よりコンパクト Lie 群の奇数次のホモロジーは捻れ元 (torsion element) のみから成るので，ある $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して

$$n \cdot \gamma_*[\mathcal{M}^{(3)}] = 0$$

を充たす．よって素朴には

$$S[A] \coloneqq \frac{1}{n} \int_{\mathcal{N}^{(4)}} \Omega(F)$$

と修正すれば良いように思えるが，このままだと分配関数に $e^{2i\pi m/n}$ の不定性が残り理論が well-defined でない．この不定性を排除するためには，$\Omega(F) \in H^4_{\mathrm{dR}}\big(\mathcal{M}^{(3)}\big) \cong H^4_{\mathrm{dR}}(BG) \cong H^4(BG;\, \mathbb{R})$ だが $\Omega(F)$ は特性類なので，自然な単射 $H^4(BG,\, \mathbb{Z}) \hookrightarrow H^4(BG;\, \mathbb{R})$ を使って $\Omega(F) \cong \rho([\omega])$ と書けるような $[\omega] \in H^4(BG,\, \mathbb{Z})$ が存在することを使い

$$S[A] \coloneqq \frac{1}{n} \left(\int_{\mathcal{N}^{(4)}} \Omega(F) - \left\langle \gamma^*\omega,\, \mathcal{N}^{(4)} \right\rangle \right)$$

とすれば良い．というのも，de Rham の定理からそもそも

$$\int_{\mathcal{N}^{(4)}} \Omega(F) = \left\langle \gamma^*\omega,\, \mathcal{N}^{(4)} \right\rangle$$

であり，$[\omega]$ の別の代表元 η をとってきたとすると，その差分は $\epsilon \in C^3(BG;\, \mathbb{Z})$ を使って

$$\frac{1}{n} \left\langle \gamma^*\delta^4\epsilon,\, \mathcal{N}^{(4)} \right\rangle = \frac{1}{n} \left\langle \epsilon,\, \gamma_*\partial\mathcal{N}^{(4)} \right\rangle = \left\langle \epsilon,\, \gamma_*[\mathcal{M}^{(3)}] \right\rangle \in \mathbb{Z}$$

になるのである．

もしくは，**Cheegar Simons differential character** [30] $\alpha \in \widehat{H}^3\big(BG,\, \mathrm{U}(1)\big)$ を使って

$$S[A] = \left\langle \gamma^*\alpha_A,\, [\mathcal{M}^{(3)}] \right\rangle$$

と書くこともできる．

[*35] Chern-Weil の定理からこれは大域的に well-deifned である．
[*36] 厳密にはボルディズム群を考えなくてはいけない．

3.4.5 トポロジカルなゲージ理論：有限群の場合

ここからは d 次元の連結な時空 $\mathcal{M}^{(d)}$ を考える．ゲージ群 G が有限群[*37]の場合，主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}^{(d)}$ の接続は一意に決まる[*38]．さらにこの主束は被覆空間になるので，$\forall \sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)})}(x,\, x)$ は x のファイバー内の点 $u \in \pi^{-1}(\{x\})$ について一意的に $\tilde{\sigma} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)})}(u,\, \tilde{\sigma}(1))$ へ持ち上がり，$\tilde{\sigma}(1) =: \tilde{\gamma}(0) \blacktriangleleft \gamma_P(\sigma)$ を定める．$\mathcal{M}^{(d)}$ のホモトピーもまた P 上に持ち上がり，結果として群準同型 $\gamma_P \colon \pi_1(\mathcal{M}^{(d)}) \longrightarrow G$ が定まる．始点 $u \in \pi^{-1}(\{x\})$ を $u \blacktriangleleft h$ に取り替えることは $\gamma_P(\sigma) \longmapsto h^{-1}\gamma_P(\sigma)h$ の変換を引き起こす．ここから

$$\left[\mathcal{M}^{(d)}, BG\right] \xleftrightarrow{1:1} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}\left(\pi_1(\mathcal{M}^{(d)}),\, G\right)/G$$

を示すことができる [31, p.4]．(3.4.3) と比較すると，結局

$$\left\{\, \mathcal{M}^{(d)} \text{ 上の主束の同型類} \,\right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{\, \mathcal{M}^{(d)} \text{ 上の平坦接続全体の集合} \,\right\}$$

であることが分かった．

定義 3.16: Dijkgraaf-Witten 理論

Dijkgraaf-Witten 理論を

$$Z(\mathcal{M}^{(d)}) =: \frac{1}{\#G} \sum_{\gamma \in [\mathcal{M}^{(d)}, BG]} e^{2\pi \mathrm{i} S[\gamma]} \quad \text{w/} \quad S[\gamma] := \left\langle \gamma^* \alpha,\, [\mathcal{M}^{(d)}] \right\rangle \tag{3.4.4}$$

と定義する．ここに $\alpha \in H^d(BG;\, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ である．

このままだと実用上不便なので，計算しやすい形に書きかえよう．$H^k(BG;\, \mathrm{U}(1)) \cong H^k_{\mathrm{Grp}}(G;\, \mathrm{U}(1))$ であるから，結局群コホモロジーを具体的に計算することになる．

M を G 加群とする．Milnor 構成を思い出すと，群コホモロジーのコチェイン $C^k(G;\, M)$ を

$$C^k_{\mathrm{Grp}}(G;\, M) := \left\{\, \omega \colon G^{n+1} \longrightarrow M \;\middle|\; \forall g \in G,\, \forall g_0,\, \dots,\, g_n \in G,\, \omega(g_0,\, \dots,\, g_n) = \omega(gg_0,\, \dots,\, gg_n) \,\right\}$$

で定義し，余境界写像 $\delta^{k+1} \colon H^k_{\mathrm{Grp}}(G;\, M) \longrightarrow H^{k+1}_{\mathrm{Grp}}(G;\, M)$ を特異コホモロジーからのアナロジーで

$$(\delta^{k+1}\omega)(g_0,\, \dots,\, g_{n+1}) := \prod_{j=0}^{n+1} \omega(g_0,\, \dots,\, \widehat{g_j},\, \dots,\, g_{n+1})^{(-1)^j}$$

と定義してみる[*39]．すると $\delta^2 = 0$ が確認できるので系列

$$\cdots \xrightarrow{\delta^k} C^k_{\mathrm{Grp}}(G;\, M) \xrightarrow{\delta^{k+1}} C^{k+1}_{\mathrm{Grp}}(G;\, M) \xrightarrow{\delta^{k+2}} \cdots$$

はコチェイン複体を成す．この複体のコホモロジー類をとることで $H^k_{\mathrm{Grp}}(G;\, M)$ が得られる[*40]．コチェインを別の表示で書くこともできる：

$$\alpha(g_1,\, \dots,\, g_n) := \omega(1,\, g_1,\, g_1g_2,\, \dots,\, g_1 \cdots g_n)$$

*37 離散位相を入れて位相群と見做す．
*38 直観的には，ファイバー方向の接空間，i.e. 垂直部分空間が 0 次元になると考える．
*39 群 G の演算は乗法的な表記を採用した．
*40 群コホモロジーの定義からこの表式を得ることもできるが，$\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}[G]$ 加群としての射影的分解を構成するのが少し手間である．

このとき，余境界写像は

$$(\delta^{n+1}\alpha)(g_1,\,\ldots,\,g_{n+1}) = \alpha(g_2,\,\ldots,\,g_{n+1})\prod_{j=1}^{n}\alpha(g_1,\,\ldots,\,g_{j-1},\,g_jg_{j+1},\,g_{j+2},\,\ldots,\,g_{n+1})^{(-1)^j}\alpha(g_1,\,\ldots,\,g_n)^{(-1)^{n+1}}$$

と作用する．

群コホモロジーの表式を使って分配関数を計算するには，まず $\mathcal{M}^{(d)}$ の三角形分割 $|\mathcal{T}| \longrightarrow \mathcal{M}^{(d)}$ をとる．簡単のため $d=3$ とする．$\mathcal{M}^{(3)}$ は連結だとしていたので，BG の基点 $\mathrm{pt} \in BG$ を 1 つ固定することで，分類写像 $\gamma\colon M \longrightarrow BG$ をホモトピックに変形して，任意の 0 単体 $\sigma_0 \in \mathcal{T}$ を $\gamma[\sigma_0] = \mathrm{pt}$ に写すようにできる．すると，任意の 1 単体 $\sigma_1 \in \mathcal{T}$ は $\gamma(\sigma_1) \in \pi_1(BG,\,\mathrm{pt})$ と見做すことができるが，命題 3.4 より $\pi_1(BG,\,\mathrm{pt}) \cong G$ であるから，結局分類写像 γ によって $\forall\sigma_1 \in \mathcal{T}$ と何かしらの $g_{\sigma_1} \in G$ が対応付く．この g_{σ_1} は格子ゲージ理論におけるリンク変数（i.e. ゲージ場）と見做すと分かりやすい．しかるに，G が有限群であることから主束の接続は平坦でなくてはいけない．そのため，もし $\sigma_1^{(1)},\,\sigma_1^{(2)},\,\sigma_1^{(3)} \in \mathcal{T}$ がある 2 単体 σ_2 について $\partial(\sigma_2) = \sigma_1^{(1)} \cup \sigma_1^{(2)} \cup \sigma_1^{(3)}$ をみたすならば

$$g_{\sigma_1^{(1)}}g_{\sigma_1^{(2)}}g_{\sigma_1^{(3)}} = \gamma(\sigma_1^{(1)} \cup \sigma_1^{(2)} \cup \sigma_1^{(3)}) = 1 \tag{3.4.5}$$

にならなくてはいけない．このとき任意の 3 単体 $\sigma_3 \in \mathcal{T}$ に対して $\alpha \in H^3_{\mathrm{Grp}}(G,\,\mathrm{U}(1))$ は $W(\sigma_3) \in \mathrm{U}(1)$ を対応づけることができる．つまり，任意の 3 単体 $\sigma_3^{(i)}$ を四面体と見做したとき，その 6 つある辺のうち 3 つが γ によって $g_i,\,h_i,\,k_i \in G$ と同定されていれば (3.4.5) から残りの 3 辺も決定できるということであり，$W(\sigma_3^{(i)}) \coloneqq \alpha(g_i,\,h_i,\,k_i) \in \mathrm{U}(1)$ として定まる．$|\mathcal{T}| = \bigcup_{\sigma_3 \in \mathcal{T}}\sigma_3$ であり，3 単体 $\sigma_3^{(i)}$ の向きを特徴付ける $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$ を使って

$$[M] = \sum_i \epsilon_i\gamma(\sigma_3^{(i)})$$

と書くことができる．よって，作用は

$$e^{2\pi \mathrm{i} S[\gamma]} = \prod_i W(\sigma_3^{(i)})^{\epsilon_i} = \prod_i \alpha(g_i,\,h_i,\,k_i)^{\epsilon_i} \tag{3.4.6}$$

と書かれる．

【例 3.4.1】Riemann 面の次元

種数 g の Riemann 面 Σ_g に対して，TQFT(3.4.4) によって定まる Hilbert 空間 $Z(\Sigma_g)$ の実態は不明だが，その次元を計算することができる．というのも，

$$Z(\Sigma_g \times S^1) = \mathrm{Tr}\big(Z(\mathrm{id}_{\Sigma_g})\big) = \mathrm{Tr}\big(\mathrm{id}_{Z(\Sigma_g)}\big) = \dim Z(\Sigma_g)$$

であるが，最左辺は $\Sigma_g \times S^1$ の具体的な三角形分割をとることで (3.4.6) を使って計算できるのである．

3.5 離散的高次ゲージ理論

Dijkgraaf-Witten 理論は離散的ゲージ理論だが，そこで登場したゲージ場は依然として 1 形式のものだった．これを higher gauge theory に拡張するために，新たなゲージ場の表式を導入する．

3.5.1 Deligne-Beilinson コサイクルとしての $\mathrm{U}(1)$ ゲージ場

$d = D+1$ 次元時空 $\mathcal{M}^{(d)}$ を考える．$\mathcal{M}^{(d)}$ の良い被覆 $\mathcal{U} := \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ を 1 つ固定する．

$\mathcal{M}^{(d)}$ 上の $\mathrm{U}(1)$ 束 $\mathrm{U}(1) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}^{(d)}$ を考える．命題 2.1 より，P の同型類は変換関数の族 $\{g_{\alpha\beta}\colon U_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathrm{U}(1)\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$ であって，コサイクル条件

$$\forall x \in U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2},\ g_{\alpha_0\alpha_1}(x) g_{\alpha_1\alpha_2}(x) g_{\alpha_2\alpha_0}(x) = 1$$

を充たすものによって特徴づけられるのだった．ここで $g_{\alpha\beta}(x) =: e^{2\mathrm{i}\pi\Lambda_{\alpha\beta}(x)}$ によって $\{\Lambda_{\alpha\beta}\colon U_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathbb{R}\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$ を定義すると，コサイクル条件は

$$\forall x \in U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2},\ \Lambda_{\alpha_0\alpha_1}(x) + \Lambda_{\alpha_1\alpha_2}(x) + \Lambda_{\alpha_2\alpha_0}(x) =: n_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}(x) \in \mathbb{Z}$$

と同値である．今，$\{\Lambda_{\alpha_0\alpha_1}\}_{(\alpha_0,\,\alpha_1)\in\Lambda^2} \in \check{H}^1\left(\mathcal{U};\, \Omega^0_{\mathcal{M}^d}\right)$ と見做そう．

$\mathcal{U}$ が良い被覆であることと $n_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}\colon U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} \longrightarrow \mathbb{Z}$ が連続であることから[*41]$\forall(\alpha_0,\,\alpha_1,\,\alpha_2) \in \Lambda^3$ に対して $n_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}(x)$ は定数関数であり，故に $\{n_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}\}_{(\alpha_0,\,\alpha_1,\,\alpha_2)} \in \check{H}^2\left(\mathcal{U};\, \mathbb{Z}_{\mathcal{M}^{(d)}}\right)$ が分かった．特に

$$\forall x \in U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3},\ n_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} - n_{\alpha_0\alpha_1\alpha_3} + n_{\alpha_0\alpha_2\alpha_3} - n_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = 0$$

が成り立つが，左辺は Čech 複体の余境界写像 $\delta^3\colon \check{H}^2\left(\mathcal{U};\, \mathbb{Z}_{\mathcal{M}^{(d)}}\right) \longrightarrow \check{H}^3\left(\mathcal{U};\, \mathbb{Z}_{\mathcal{M}^{(d)}}\right)$ を使って $\delta^3\left(\{n_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}\}_{(\alpha_0,\,\alpha_1,\,\alpha_2)}\right)$ と等しいので

$$\{n_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}\}_{(\alpha_0,\,\alpha_1,\,\alpha_2)} \in \operatorname{Ker}\delta^3$$

i.e. **Čech 2-コサイクル**の元であることが分かった．

ところで命題 2.6 より，ゲージ場とは主束 P の接続形式を $\mathcal{U}$ に付随する局所切断によって引き戻して得られる族 $\{A_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha;\, \mathfrak{u}(1))\}_{\alpha\in\Lambda}$ のことであるが，$\mathfrak{u}(1) \cong \mathbb{R}$ なので $A_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha)$ と見做すことができる．よって $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \in \check{H}^0\left(\mathcal{U},\, \Omega^1_{\mathcal{M}^{(d)}}\right)$ と見做すことができる．そしてこのとき $\forall\alpha_0,\,\alpha_1 \in \Lambda$ に対して

$$\forall x \in U_{\alpha_0\alpha_1},\ A_{\alpha_1}(x) - A_{\alpha_0}(x) = g^{-1}_{\alpha_0\alpha_1}(x)\,\mathrm{d}g_{\alpha_0\alpha_1}(x) = 2\mathrm{i}\pi\,\mathrm{d}\Lambda_{\alpha_0\alpha_1}(x)$$

が言える．以上を図式にまとめると

$$\begin{tikzcd}
 & & \{A_{\alpha_0}\} \arrow[d, "-\delta"] \\
 & \{\Lambda_{\alpha_0\alpha_1}\} \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "\delta"] & {} \\
\{n_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}\} \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "\delta"] & {} & \\
0 & &
\end{tikzcd}$$

[*41] $\mathbb{Z}$ には離散位相を入れる．

が成り立っている．i.e.

$$\left(\{n_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}\},\, \{\Lambda_{\alpha_0\alpha_1}\},\, \{A_{\alpha_0}\}\right) \in \check{C}^2(\mathcal{U},\, \Omega_X^{-1}) \oplus \check{C}^1(\mathcal{U},\, \Omega_X^0) \oplus \check{C}^0(\mathcal{U},\, \Omega_X^1)$$

であり，Deligne-Beilinson コチェインの元であることが分かった．特に $C_{\mathrm{D}2}^{1}$ の元だと見做すとこれはコサイクルである．

3 つ組 $(\mathcal{U},\, P,\, \{A_\alpha\})$ が与えられたとき，対応する Deligne-Beilinson コサイクルは

$$\left(\mathrm{d}q^{(0,0)}\,,\, \delta q^{(0,0)} + \mathrm{d}_{-1}m^{1,-1},\, \delta m^{1,-1}\right) \quad \text{w/} \quad \left(m^{(1,-1)},\, q^{(0,0)}\right) \in \check{C}^1(\mathcal{U},\, \mathbb{Z}_{\mathcal{M}^{(d)}}) \oplus \check{C}^0(\mathcal{U},\, \Omega^0_{\mathcal{M}^{(d)}})$$

の不定性を持つが，この不定性は局所切断の取り替えに伴うゲージ変換に相当し，コバウンダリとして書けている．よって

$$(\mathcal{U},\, P,\, \{A_\alpha\}) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} H_{\mathrm{D}}^2\left(C_{\mathrm{D}\,2},\, \mathcal{U}\right)$$

なる一対一対応があることが分かった．

ゲージ場の強さは局所的に $F_\alpha := \mathrm{d}A_\alpha$ と定義されたが，今の場合

$$F_{\alpha_0} - F_{\alpha_1} = \mathrm{d}(A_{\alpha_0} - A_{\alpha_1}) = -2\mathrm{i}\pi\, \mathrm{d}^2\Lambda_{\alpha_0\alpha_1} = 0$$

となるので大域的に定義されていることが分かった．

higher gauge field に関しても同様である．p-form のゲージ場であれば

$$(\mathcal{U},\, P^{(p)},\, \{A_\alpha^{(p)}\}) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} H_{\mathrm{D}}^{p+1}\left(C_{\mathrm{D}\,p+1},\, \mathcal{U}\right) \tag{3.5.1}$$

の一対一対応がある．逆に，応急処置としてしばらくの間 (3.5.1) を p-form ゲージ場の定義として採用することにしよう．

3.5.2 BF-理論

$d = D + 1$ 次元時空 $\mathcal{M}^{(d)}$ を考える．

定義 3.17: BF-理論（U(1) ゲージ場の理論として）

p-form U(1) ゲージ場 $A^{(p)}$ および $(d-p-1)$-form U(1) ゲージ場 $B^{(d-p-1)}$ を与える．
このとき，***BF*-理論**を

$$\begin{aligned} Z_{\mathrm{BF}}[A^{(p)},\, B^{(d-p-1)}] &:= e^{-S_{\mathrm{BF}}[a^{(p)},\, B^{(d-p-1)}]} \\ \text{w/} \quad S_{\mathrm{BF}}[A^{(p)},\, B^{(d-p-1)}] &:= \frac{\mathrm{i}n}{2\pi}\int_{\mathcal{M}^{(d)}} B^{(d-p-1)} \wedge \mathrm{d}A^{(p)} \end{aligned}$$

と定義する[a]．ただし $n \in \mathbb{Z}$ とする．

[a] $\int_{\mathcal{M}^{(d)}}$ は Deligne-Beilinson コチェインの積分と解釈すべきであるが，形式的に de Rham コチェインの積分として扱っても問題は生じにくい．

$\mathcal{M}^{(d)}$ の良い被覆 $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ を 1 つ固定する．ゲージ変換は Deligne-Beilinson コサイクル

$$\left(\{n_{\alpha_0\ldots\alpha_{p+2}}\},\,\{\Lambda^{(1)}_{\alpha_0\ldots\alpha_{p+1}}\},\,\ldots,\,\{\Lambda^{(p-1)}_{\alpha_0\alpha_1}\},\,\{A^{(p)}_{\alpha_0}\}\right)\in\check{C}^{p+1}(\mathcal{U};\,\mathbb{Z})\oplus\bigoplus_{k=0}^{p}\check{C}^{p-k}(\mathcal{U};\,\Omega^k)$$
$$\left(\{m_{\alpha_0\ldots\alpha_{d-p}}\},\,\{\lambda^{(1)}_{\alpha_0\ldots\alpha_{d-p-1}}\},\,\ldots,\,\{\lambda^{(d-p-2)}_{\alpha_0\alpha_1}\},\,\{B^{(d-p-1)}_{\alpha_0}\}\right)\in\check{C}^{d-p-1}(\mathcal{U};\,\mathbb{Z})\oplus\bigoplus_{k=0}^{d-p-1}\check{C}^{d-p-k-1}(\mathcal{U};\,\Omega^k)$$

によって定義される．特に場の強さは $\forall\alpha_0,\,\alpha_1\in\Lambda$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{d}A^{(p)}_{\alpha_1}-\mathrm{d}A^{(p)}_{\alpha_0}&=\mathrm{d}\big(\delta A^{(p)}\big)_{\alpha_0\alpha_1}=\mathrm{d}\big(\mathrm{d}\Lambda^{(p-1)}_{\alpha_0\alpha_1}\big)=0,\\ \mathrm{d}B^{(d-p-1)}_{\alpha_1}-\mathrm{d}B^{(d-p-1)}_{\alpha_0}&=\mathrm{d}\big(\delta B^{(d-p-1)}\big)_{\alpha_0\alpha_1}=\mathrm{d}\big(\mathrm{d}\lambda^{(d-p-2)}_{\alpha_0\alpha_1}\big)=0\end{aligned}$$

を充たすので大域的に well-defined である．

BF-理論から発見法的に「ゲージ群」[*42]が $\mathbb{Z}_n$ であるような p-form ゲージ理論を得るトリックを説明する [32, p.6]，[33, p.9]．具体的には，2 つのゲージ場をダイナミカルにするだけで良い：

$$\begin{aligned}Z_{\mathrm{BF}}&:=\int[\mathrm{d}a^{(p)}]\int[\mathrm{d}b^{(d-p-1)}]\,Z_{\mathrm{BF}}[a^{(p)},\,b^{(d-p-1)}]\\&=\int[\mathrm{d}a^{(p)}]\int[\mathrm{d}b^{(d-p-1)}]\,e^{\frac{\mathrm{i}n}{2\pi}\int_{\mathcal{M}^{(d)}}b^{(d-p-1)}\wedge\mathrm{d}a^{(p)}}\\&=\int[\mathrm{d}a^{(p)}]\Big|_{\mathrm{d}a^{(p)}=0}\end{aligned}$$

ただし，最右辺の拘束条件 $\mathrm{d}a^{(p)}=0$ は Euler-Lagrange 方程式によるものである．この拘束条件により，$a^{(p)}$ についての和が平坦接続についてのものに制限されたということである．また，任意の閉部分多様体 $\Sigma^{(p+1)},\,\Sigma^{(d-p-2)}\subset\mathcal{M}^{(d)}$ に対するホロノミー

$$\begin{aligned}W(\Sigma^{(p)})&:=e^{\mathrm{i}\int_{\Sigma^{(p+1)}}a^{(p)}},\\ W(\Sigma^{(d-p-1)})&:=e^{\mathrm{i}\int_{\Sigma^{(d-p-2)}}b^{(d-p-1)}}\end{aligned}$$

は，

$$\begin{aligned}\left\langle W(\Sigma^{(p)})\right\rangle&=\int[\mathrm{d}a^{(p)}]\int[\mathrm{d}b^{(d-p-1)}]\,e^{\frac{\mathrm{i}n}{2\pi}\int_{\mathcal{M}^{(d)}}b^{(d-p-1)}\wedge a^{(p)}}e^{\mathrm{i}\int_{\mathcal{M}^{(d)}}a^{(p)}\wedge\delta(\Sigma^{(p+1)})}\\&=\int[\mathrm{d}B^{(d-p-1)}]\Big|_{\mathrm{d}b^{(d-p-1)}=\frac{2\pi}{n}\delta(\Sigma^{(d-p-2)})},\\ \left\langle W(\Sigma^{(d-p-1)})\right\rangle&=\int[\mathrm{d}a^{(p)}]\int[\mathrm{d}b^{(d-p-1)}]\,e^{\frac{\mathrm{i}n}{2\pi}\int_{\mathcal{M}^{(d)}}B^{(d-p-1)}\wedge a^{(p)}}e^{\mathrm{i}\int_{\mathcal{M}^{(d)}}b^{(d-p-1)}\wedge\delta(\Sigma^{(d-p-2)})}\\&=\int[\mathrm{d}a^{(p)}]\Big|_{\mathrm{d}a^{(p)}=\frac{2\pi}{n}\delta(\Sigma^{(p+1)})}\end{aligned}$$

となることから，$\Sigma^{(d-p-1)}$ の周りでは

$$W(\Sigma^{(p)})=e^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}\mathrm{Link}(\Sigma^{(p)},\,\Sigma^{(d-p-1)})}\in\mathbb{Z}_n$$

[*42] 主 p-束の観点からすると，p-form ゲージ場に対応する「ゲージ群」は ***p*-群**になるべきである．

$\Sigma^{(p)}$ の周りでは

$$W(\Sigma^{(p)}) = e^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}\,\mathrm{Link}(\Sigma^{(p)},\,\Sigma^{(d-p-1)})} \in \mathbb{Z}_n$$

のホロノミーがあることが分かる．このことから，BF-理論に登場する 2 つのゲージ場をダイナミカルにすることで得られる理論は，ホロノミーが $\mathbb{Z}_n$ に値をとる平坦接続のゲージ理論であること，i.e. $\mathbb{Z}_n$ ゲージ理論になっていると見做せるのである．

3.5.3　BF-理論の等価な形

前小節で導入したトリックは，いくつかの等価な形で述べることができる．補助場 $\tilde{a}^{(d-p-2)}$ を導入し，場の強さ $F^{(p+1)} \coloneqq \mathrm{d}A^{(p)}$ を独立な場と見做すことで

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{BF}}[F^{(p+1)},\, B^{(d-p-1)},\, \tilde{a}^{(p)}] &\coloneqq \frac{\mathrm{i}n}{2\pi} B^{(d-p-1)} \wedge F^{(p+1)} + \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\,\mathrm{d}\tilde{a}^{(d-p-2)} \wedge F^{(p+1)} \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2\pi} F^{(p+1)} \wedge (\mathrm{d}\tilde{a}^{(d-p-2)} + nB^{(d-p-1)}) \end{aligned}$$

とする．ここでゲージ場をダイナミカルにすることで

$$\begin{aligned} Z_{\mathrm{BF}} &= \int [\mathrm{d}f^{(p+1)}] \int [\mathrm{d}b^{(d-p-1)}] \int [\mathrm{d}\tilde{a}^{(d-p-2)}]\, e^{-\int_{\mathcal{M}^{(d)}} \left(\frac{\mathrm{i}n}{2\pi} b^{(d-p-1)} \wedge f^{(p+1)} + \frac{\mathrm{i}}{2\pi} \mathrm{d}\tilde{a}^{(d-p-2)} \wedge f^{(p+1)} \right)} \\ &= \int [\mathrm{d}f^{(p+1)}] \Big|_{\mathrm{d}f^{(p+1)}=0} \int [\mathrm{d}b^{(d-p-1)}]\, e^{-\int_{\mathcal{M}^{(d)}} \frac{\mathrm{i}n}{2\pi} b^{(d-p-1)} \wedge f^{(p+1)}} \\ &= \int [\mathrm{d}f^{(p+1)}] \Big|_{\mathrm{d}f^{(p+1)}=0,\; f^{(p+1)}=0} \end{aligned}$$

となる．汎函数積分において Bianchi 恒等式 $\mathrm{d}F^{(p+1)} = 0$ および平坦接続の拘束条件が付いてくれるのである．もしくは，

$$\begin{aligned} Z_{\mathrm{BF}} &= \int [\mathrm{d}b^{(d-p-1)}] \int [\mathrm{d}\tilde{a}^{(d-p-2)}] \int [\mathrm{d}f^{(p+1)}]\, e^{-\int_{\mathcal{M}^{(d)}} \frac{\mathrm{i}}{2\pi} F^{(p+1)} \wedge (\mathrm{d}\tilde{a}^{(d-p-2)} + nb^{(d-p-1)})} \\ &= \int [\mathrm{d}b^{(d-p-1)}] \int [\mathrm{d}\tilde{a}^{(d-p-2)}] \Big|_{\mathrm{d}\tilde{a}^{(d-p-2)} + nb^{(d-p-1)} = 0} \end{aligned} \tag{3.5.2}$$

と捉えても良い．$\tilde{a}^{(d-p-2)}$ は，$Z_{\mathrm{BF}}[F^{(p+1)},\, B^{(d-p-1)},\, \tilde{a}^{(p)}]$ に対するゲージ不変性の要請から

$$\tilde{a}^{(d-p-2)} \longmapsto \tilde{a}^{(d-p-2)} + \mathrm{d}\tilde{\lambda}^{(d-p-3)} - n\lambda^{(d-p-2)} \tag{3.5.3}$$

なるゲージ変換を受ける．

3.5.4　BF-理論における 't Hooft operator

't Hooft operator の素朴な定義は $\tilde{T}(\Sigma^{(d-p-2)}) \coloneqq \exp\left(\mathrm{i}\int_{\Sigma^{(d-p-2)}} \tilde{a}^{(d-p-2)}\right)$ とすることだが，これはゲージ変換 (3.5.3) の下で不変でない．ゲージ不変にするために，$\partial\Sigma^{(d-p-1)} = \Sigma^{(d-p-2)}$ を充たす $(d-p-1)$-次元部分多様体 $\Sigma^{(d-p-1)} \subset \mathcal{M}^{(d)}$ を用いて

$$T(\Sigma^{(d-p-2)};\, \Sigma^{(d-p-1)}) \coloneqq \exp\left(\mathrm{i}\int_{\Sigma^{(d-p-2)}} \tilde{a}^{(d-p-2)} + \mathrm{i}n\int_{\Sigma^{(d-p-1)}} b^{(d-p-1)}\right)$$

と定義する．然るに (3.5.2) から，これの期待値を計算すると

$$
\begin{aligned}
&\left\langle T(\Sigma^{(d-p-2)};\, \Sigma^{(d-p-1)}) \right\rangle \\
&= \int [\mathrm{d}b^{(d-p-1)}] \int [\mathrm{d}\tilde{a}^{(d-p-2)}] \Big|_{\mathrm{d}\tilde{a}^{(d-p-2)}+nb^{(d-p-1)}=0} \exp\left(\mathrm{i} \int_{\Sigma^{(d-p-2)}} \tilde{a}d-p-2^{(+)} \mathrm{i}n \int_{\Sigma^{(d-p-1)}} b^{(d-p-1)} \right) \\
&= \int [\mathrm{d}b^{(d-p-1)}] \int [\mathrm{d}\tilde{a}^{(d-p-2)}] \Big|_{\mathrm{d}\tilde{a}^{(d-p-2)}+nb^{(d-p-1)}=0} \exp\left(\mathrm{i} \int_{\Sigma^{(d-p-1)}} (\mathrm{d}\tilde{a}^{(d-p-2)} + nb^{(d-p-1)}) \right) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

となり消えてしまう．

3.6 高次のゲージ理論-より厳密な定式化

時空を $\mathcal{M}^{(d)}$ と書く．これまでは高次のゲージ場の配位空間[*43]について全く触れずに計算を進めてきた．しかるに，これらの計算は実質的に U(1) ゲージ場についての経路積分になっており，ill-defined である．特に平坦接続の拘束条件がどの程度厳密に課されているのかには疑問が残る．また，0-form の Dijkgraaf-Witten 理論の場合に見たように，トポロジカルなゲージ場の理論を考える際にはゲージ場の配位空間を真面目に考えないと自明な理論しか得られない可能性がある．この小節では，高次のゲージ場の配位空間の構造をできるだけ正確に記述することを試みる．参考文献は [34] である．

3.6.1 0-form のまとめ

一般化の前に 0-form（i.e. ゲージ場としては 1-form）の場合の結果をまとめておくのが有用である．

まずゲージ群 G が一般の位相群である場合，時空 $\mathcal{M}^{(d)}$ 上の主束は普遍束により分類された：

$$
\mathrm{Bun}_G(\mathcal{M}^{(d)})/\cong \xleftrightarrow{1:1} \left[\mathcal{M}^{(d)}, BG\right] \tag{3.6.1}
$$

ただし $\cong$ はファイバー束の同型である．これは圏 **Mfd** における引き戻し[*44]

$$
\begin{array}{ccc}
P & \longrightarrow & * \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
\mathcal{M}^{(d)} & \xrightarrow{\gamma} & BG
\end{array}
$$

と理解することができた．ただし命題 3.3 により普遍束の全空間は一点 $*$ と同じホモトピー型なので $*$ と書いた．一方で，接続としてのゲージ場はこの上に Deligne-Beilinson 2-コサイクルの情報を付加することに他ならない．概念的には，我々の求めたい接続付き主束の同型類全体と 1 対 1 対応がある空間を BG_{conn} と書いて

[*43] 物理では**モジュライ空間** (moduli space) とも言う．

[*44] 正確には全ての射が up to homotopy だとした，**homotopy pullback**（https://ncatlab.org/nlab/show/homotopy+pullback）の図式である．

$$
\begin{tikzcd}
 & BG_{\text{conn}} \arrow[d, "\text{forget}"] \\
\mathcal{M}^{(d)} \arrow[ur, "{(A,\, g)}"] \arrow[r, "\gamma"'] & BG
\end{tikzcd}
$$

のようになっている．ここに $(A,\, g) \in \mathrm{Del}^2(\mathcal{M}^{(d)},\, \Omega^\bullet(\text{-},\, \mathfrak{g}))$ である．また，平坦接続に話を限った BG_{flat} はより簡単な構造を持つ．これは接続を命題 3.6 により関手 $\mathbf{P}_1\left(\mathcal{M}^{(d)}\right) \longrightarrow BG$ と見做すことで，$\mathcal{M}^{(d)}$ が連結ならば

$$
BG_{\text{flat}} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}\left(\pi_1(\mathcal{M}^{(d)}),\, G\right)/G \tag{3.6.2}
$$

となることが分かった．

次にゲージ群 G が離散群の場合を考える．このとき接続の定義から自動的に平坦接続になってしまう：

$$
BG_{\text{conn}} = BG_{\text{flat}} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathrm{Bun}_G(\mathcal{M}^{(d)})/\cong \tag{3.6.3}
$$

さらに主束が自動的に被覆空間になることから

$$
\left[\mathcal{M}^{(d)}, BG\right] \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}\left(\pi_1(\mathcal{M}^{(d)}),\, G\right)/G
$$

が分かり，結局

$$
BG_{\text{conn}} = BG_{\text{flat}} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathrm{Bun}_G(\mathcal{M}^{(d)})/\cong \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left[\mathcal{M}^{(d)}, BG\right] \tag{3.6.4}
$$

が言えた．i.e. ゲージ場の配位空間は $\left[\mathcal{M}^{(d)}, BG\right]$ と求まった．

3.6.2　p-form への拡張

全小節の内容を素朴に p-form（i.e. $(p+1)$-form ゲージ場）の場合に拡張することを考えてみよう．まずは G を一般の位相群とする．このとき (3.6.1) の一般化として，ある「上手く定義された圏」（∞-トポス）H の上の homotopy pullback の図式

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] \\
\mathcal{M}^{(d)} \arrow[r, "\gamma"'] & \mathbf{B}G
\end{tikzcd}
$$

があると考えて，

$$
\mathrm{Bun}_G(\mathcal{M}^{(d)}) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathrm{H}}\left(\mathcal{M}^{(d)},\, \mathrm{B}G\right)
$$

とおいてみる．ただし $\mathrm{Bun}_G(\mathcal{M}^{(d)})$ と言うのは「主 p-束」とでも呼ぶべき構造であり，現時点では未定義である．次に「平坦接続」付き「主 p-束」のモジュライ空間 $\mathbf{B}G_{\text{flat}}$ であるが，これは path groupoid を十分うまく拡張した「path $(p+1)$-groupoid」$\mathbf{P}_{p+1}(\mathcal{M}^{(d)})$ があると考えて (3.6.2) の一般化

$$
\mathbf{B}G_{\text{flat}} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}\left(\mathbf{P}_{p+1}(\mathcal{M}^{(d)}),\, \mathrm{B}G\right)
$$

を仮定する．平坦でない場合というのは厄介だが，$\mathrm{B}G$ の方を上手く処理できたとして同様に考える．

次に，G が離散群である場合を考える．このとき問題になるのは，(3.6.3) の一般化

$$\mathbf{B}G_{\mathrm{conn}} = \mathbf{B}G_{\mathrm{flat}}$$

が成り立つのか不明であり，従って (3.6.4) の一般化

$$\mathbf{B}G_{\mathrm{conn}} = \mathbf{B}G_{\mathrm{flat}} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathrm{Bun}_G(\mathcal{M}^{(d)}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{H}}\left(\mathcal{M}^{(d)},\, \mathrm{B}G\right)$$

が成り立っているかが不明な点にある．実際，前節で行ったトリックは $\mathbf{B}G_{\mathrm{conn}}$ について和をとっていることになる．しかし，トポロジカル演算子を挿入することを考えるとむしろ $\mathrm{Bun}_G(\mathcal{M}^{(d)})/\cong$ の方が配位空間だと考える方が自然かもしれない．

3.6.3　高次群の構造が自明な場合：∞-groupoid

全小節の推測を真面目に扱うには，∞-圏の力を借りる必要がある．

定義 3.18: extended group

有限群の列 $\mathbb{G} = (G_1,\, G_2,\, \dots)$ であって，

- ある d が存在して $\forall q \geq d$ に対して $G_q = 1$ を充たす．
- $\forall p \geq 2$ に対して G_p は可換群

を充たすものを**拡張された群** (extended group) と呼ぶ [35].

時空 $\mathcal{M}^{(d)}$ の三角形分割を与える単体的集合 $T \in \mathrm{Ob}(\mathbf{SimpSet})$ をとり，勝手な d-単体 $\sigma \in T_d$ を 1 つ固定する．σ はちょうど $d+1$ 個の 0-単体 $\{0,\, 1,\, \dots,\, d\}$ からなる．σ の部分 p-単体は $\{0,\, 1,\, \dots,\, d\}$ から互いに相異なる $p+1$ 個を選んだ $\{l_0,\, \dots,\, l_p\} \subset \{0,\, 1,\, \dots,\, d\}$ からなる．i.e.

$$\binom{d+1}{p+1}$$

個存在する．d-単体 σ の部分 p-単体全体の集合を $\langle d : p \rangle$ と書く．p 単体の**向き**は常に $l_0 < \cdots < l_p$ を充たすようにとる．

定義 3.19:

- 自明な**高次群** (higher group) の構造を持つ σ 上の $\mathbb{G} = (G_1, G_2, \ldots)$-ゲージ場とは，$\forall p \geq 1$ に対して与えられた写像

$$A^{(p)}\colon \langle d : p\rangle \longrightarrow G_p \tag{3.6.5}$$

のこと[a].

- $\mathbb{G}$-ゲージ場 $\{\, A^{(p)}\colon \langle d : p\rangle \longrightarrow G_p \,\}_{p\geq 1}$ が**平坦** (flat) であるとは，$\forall p \geq 1$ および $\forall \tau \in \langle d : p+1\rangle$ に対して

$$\prod_{j=0}^{p+1} A\bigl(\partial_j^{p+1}(\tau)\bigr)^{(-1)^j} = 1_{G_p} \tag{3.6.6}$$

を充たすこと．

[a] $A^{(p)}$ の像の元をゲージ自由度と呼ぶ．

しばらくの間，$1 \leq p \leq d$ を 1 つ固定する．(3.6.6) により，独立なゲージ自由度は

$$\binom{d}{p}$$

個である．よって $\{1, \ldots, d\}$ の互いに相異なる p 点部分集合全体がなす集合を $[d : p] \subset \langle d : p\rangle$ と書くと，写像

$$g^{(p)}\colon [d : p] \longrightarrow G_p,\ \{q_1, \ldots, q_p\} \longmapsto g_{q_1 \ldots, q_p} \tag{3.6.7}$$

は独立なゲージ自由度を表している．表示 (3.6.5) と (3.6.7) の間の関係としては [35, p.8] に倣って

$$\forall \{l_0, \ldots, l_p\} \subset \{0, \ldots, d\}, \quad A\bigl(\{l_0, \ldots, l_p\}\bigr) = \prod_{q_1=l_0+1}^{l_1} \cdots \prod_{q_p=l_{p-1}+1}^{l_p} g_{q_1 \ldots q_p}$$

を仮定する．このとき面写像 $d_j^d \in \mathrm{Hom}_{\Delta}([d-1], [d])$ による p-form ゲージ場 $A^{(p)}$ の引き戻しは $\forall \{l_0, \ldots, l_p\} \subset \{0, \ldots, \boldsymbol{d-1}\}$ について

$$\begin{aligned}
&\prod_{q_1=l_0+1}^{l_1} \cdots \prod_{q_p=l_{p-1}+1}^{l_p} (d_j^{d*} g)_{q_1 \ldots q_p} \\
&:= d_j^{d*} A\bigl(\{l_0, \ldots, l_p\}\bigr) \\
&= A\Bigl(d_j^d\bigl(\{l_0, \ldots, l_p\}\bigr)\Bigr) \\
&= A\bigl(\{l_0, \ldots, l_{k-1}, l_k+1, \ldots, l_p+1\}\bigr) \qquad (l_{k-1} < j \leq l_k) \\
&= \prod_{q_1=l_0+1}^{l_1} \cdots \prod_{q_{k-1}=l_{k-2}+1}^{l_{k-1}} \prod_{q_k=l_{k-1}+1}^{l_k+1} \prod_{q_{k+1}=l_k+2}^{l_{k+1}+1} \cdots \prod_{q_p=l_{p-1}+2}^{l_p+1} g_{q_1 \ldots q_p}
\end{aligned}$$

と求まり，縮退写像 $s_j^d \in \mathrm{Hom}_{\Delta}\left([d+1],\,[d]\right)$ による引き戻しは[*45] $\forall\{l_0,\,\dots,\,l_p\} \subset \{0,\,\dots,\,\boldsymbol{d+1}\}$ について

$$
\begin{aligned}
&\prod_{q_1=l_0+1}^{l_1} \cdots \prod_{q_p=l_{p-1}+1}^{l_p} (s_j^{d*} g)_{q_1 \dots q_p} \\
&\coloneqq s_j^{d*} A\bigl(\{l_0,\,\dots,\,l_p\}\bigr) \\
&= A\Bigl(s_j^d\bigl(\{l_0,\,\dots,\,l_p\}\bigr)\Bigr) \\
&= A\bigl(\{l_0 \dots l_{k-1},\, l_k - 1,\, \dots,\, l_p - 1\}\bigr) \qquad (l_{k-1} \le j < l_k) \\
&= \begin{cases}
\displaystyle\prod_{q_1=l_0+1}^{l_1} \cdots \prod_{q_{k-1}=l_{k-2}+1}^{l_{k-1}} \prod_{q_k=l_{k-1}+1}^{l_k-1} \prod_{q_{k+1}=l_k}^{l_{k+1}-1} \cdots \prod_{q_p=l_{p-1}}^{l_p-1} g_{q_1 \dots q_p}, & l_{k-1} < j < l_k \\
1_{G_{\mathrm{p}}}, & l_{k-1} = j
\end{cases}
\end{aligned}
$$

となる．i.e.

$$
\begin{aligned}
(d_j^{d*} g)_{q_1 \dots q_p} &= \begin{cases}
g_{q_1 \dots q_\bullet,\, q_{\bullet+1}+1,\, \dots,\, q_{p+1}}, & q_\bullet < j < q_{\bullet+1} \\
g_{q_1 \dots q_\bullet,\, q_{\bullet+1}+1,\, \dots,\, q_{p+1}} g_{q_1 \dots q_\bullet+1,\, q_{\bullet+1}+1,\, \dots,\, q_{p+1}}, & q_\bullet = j
\end{cases} \\
(s_j^{d*} g)_{q_1 \dots q_p} &= \begin{cases}
g_{q_1 \dots q_\bullet,\, q_{\bullet+1}-1,\, \dots,\, q_p-1}, & q_\bullet < j+1 < q_{\bullet+1} \\
1_{G_p}, & j+1 \in \{q_1,\,\dots,\,q_p\}
\end{cases}
\end{aligned}
$$

が分かった．以上より，3 つ組

$$
\begin{aligned}
&\bigl\{X^{(p)}([d]) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}\left([d:p],\, G_p\right)\bigr\}_{d \ge 0}, \\
&\bigl\{\partial_j^d \colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}\left([d:p],\, G_p\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}\left([d-1:p],\, G_p\right),\; g \longmapsto d_j^{d*} g\bigr\}_{0 \le j \le d,\, d \ge 1}, && (3.6.8) \\
&\bigl\{\sigma_j^d \colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}\left([d:p],\, G_p\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}\left([d+1:p],\, G_p\right),\; g \longmapsto s_j^{d*} g\bigr\}_{0 \le j \le d,\, d \ge 1}, && (3.6.9)
\end{aligned}
$$

は単体的恒等式を満たし，単体的集合

$$X^{(p)} \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を成す．

定理 3.7:

単体的集合 $X^{(p)} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{SimpSet})$ は ∞-groupoid である．

証明 $\forall n \ge 0$ および $0 \le \forall i \le n$ を 1 つ固定する．勝手な圏 **SimpSet** の射

$$f \colon \Lambda_i^n \longrightarrow X^{(p)}$$

を 1 つ固定する．このとき，圏 **SimpSet** における可換図式

$$
\begin{tikzcd}
\Lambda_i^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "\iota"] & X^{(p)} \\
\Delta^n \arrow[ur, dashed, "\exists \tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}
$$

[*45] 部分単体の次数は相変わらず p であることに注意．

の存在を示せば良い．ところで系 C.4 から，射 $f,\ \iota$ はそれぞれ

$$(f_0,\ \dots,\ \widehat{f_i},\ \dots,\ f_n) \in \prod_{k\in[n]\setminus\{i\}} X^{(p)}\big([n-1]\big),$$
$$(d_0^n,\ \dots,\ \widehat{d_i^n},\ \dots,\ d_i^n) \in \prod_{k\in[n]\setminus\{i\}} \Delta^n\big([n-1]\big)$$

であって $\forall j,\ k \in [n]\setminus\{i\}$ s.t. $j<k$ について $\partial_j^{n-1}(f_k) = \partial_{k-1}^{n-1}(f_j)$ を充たすものと同一視できる．よって示すべきは $\partial_j^n(\bar{f}) = f_j \quad (\forall j \in [n]\setminus\{i\})$ を充たす $\bar{f} \in X^{(p)}\big([n-1]\big) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}\left([n-1:p],\ G_p\right)$ が存在することである[*46]．$n \geq p$ のときは自明なので $n<p$ を考える．

$\{q_1 < \dots < q_p\} \in [n-1:p]$ に含まれない最小の整数を j とおき，j に関する数学的帰納法によって写像 $\bar{f}$ の行き先 $\bar{f}(\{q_1,\ \dots,\ q_p\})$ を構成する．まず $j=1$ のときは

$$\bar{f}(\{q_1,\ \dots,\ q_p\}) \coloneqq f_0(\{q_1-1,\ \dots,\ q_p-1\})$$

とおく．$j>1$ のときは帰納法の仮定を使い

$$\begin{aligned}\bar{f}(\{q_1,\ \dots,\ q_p\}) \coloneqq{}& f_j(\{q_1,\ \dots,\ q_m,\ q_{m+1}-1,\ \dots,\ q_p-1\})\\ &\times \bar{f}(\{q_1+1,\ \dots,\ q_m+1,\ q_{m+1},\ \dots,\ q_p\})^{-1}\end{aligned}$$

（ただし $q_m = j$）とおくと，$j \leq i-1$ までの帰納法が完成する．

次に $\{q_1 < \dots < q_p\} \in [n-1:p]$ に含まれない最大の整数を j とおき，j に関する数学的帰納法によって写像 $\bar{f}$ の行き先 $\bar{f}(\{q_1,\ \dots,\ q_p\})$ を構成する．まず $j=n-1$ のときは

$$\bar{f}(\{q_1,\ \dots,\ q_p\}) \coloneqq f_n(\{q_1,\ \dots,\ q_p\})$$

とおく．$j<n-1$ のときは帰納法の仮定を使い

$$\begin{aligned}\bar{f}(\{q_1,\ \dots,\ q_p\}) \coloneqq{}& \bar{f}(\{q_1,\ \dots,\ q_m,\ q_{m+1}-1,\ \dots,\ q_p-1\})^{-1}\\ &\times f_j(\{q_1,\ \dots,\ q_m,\ q_{m+1}-1,\ \dots,\ q_p-1\})\end{aligned}$$

（ただし $q_m = j$）とおくと，$j \geq i+2$ までの帰納法が完成する．以上の 2 段階の帰納法により $\bar{f}$ が定まった．(3.6.9) を使うと $\partial_j^n(\bar{f}) = f_j$ が分かる．■

定理 3.8: $X^{(p)}$ は Eilenberg-MacLane 空間

$$\pi_n\left(\left|X^{(p)}\right|\right) = \begin{cases} G_p, & n=p \\ 1, & n\neq p \end{cases}$$

証明 定理 C.6 より，∞-groupoid $X^{(p)}$ の単体的ホモトピー群を計算すれば良い．$n=0$ のときと $n<p$ のときは $Z_n(X,\ *) \subset X_n = \{\emptyset\}$ なので $\pi_n^{\Delta}(X,\ *) = 1$ である．

$n>p$ とする．すると $\forall Q \coloneqq \{q_1 < \dots < q_p\} \in [n:p]$ に対してある $0 \leq j \leq n$ が存在して $j \notin Q$ を充たす．よって $\forall h \in Z_n(X,\ *)$ をとると (3.6.8) から

$$\partial_i^n h(Q) = h(\{q_1,\ \dots,\ q_\bullet,\ q_\bullet+1,\ \dots,\ q_{p+1}+1\}) = (\sigma_0)^{n-1}(*) = 1_{G_p}$$

[*46] このような $\bar{f}$ のことを角 Λ_i^n の **filler** と呼ぶ．

が分かる．i.e. $Z_n(X, *) = \{1\}$ であり，$\pi_n^{\Delta}(X, *) = 1$ が分かった．

$n = p$ とする．$[p : p]$ は一点集合で $[p+1 : p]$ は $p+1$ 点集合なので $X^{(p)}([n]) \cong G_p,\ X^{(p)}([n+1]) \cong G_p^{\times(p+1)}$ となる．よって $x \in X^{(p)}([n+1])$ を

$$x = (x_1, \dots, x_{p+1})$$

と書く．$\forall a, b \in Z_n(X^{(p)}, *)$ をとる．このとき a と b を繋ぐホモトピー $x \in X^{(p)}([n+1])$ は存在すれば

$$x_1 = x_2 x_1 = \cdots = x_p x_{p-1} = 1,\ x_{p+1} x_p = a,\ x_{p+1} = b$$

を充たすが，これの解は $a = b$ でないと存在しない．よって $a \sim b \iff a = b$ であり，$\pi_n^{\Delta}(X^{(p)}, *) \cong G_p$ が分かる． ■

3.6.4 2-群の場合：ホロノミー 2-関手

次に，ゲージ群が 2-群の場合を考えよう．[36] を参考に，ゲージ群が厳密な 2-Lie 群 $\mathcal{G}$ である場合から出発する．命題 F.1 より $\mathcal{G}$ は交差加群 $(G_2 \xrightarrow{t} G_1, \alpha)$ と等しい．G_1, G_2 の単位元における接空間をとることで，微分交差加群 $(\mathfrak{g}_2 \xrightarrow{\mathrm{d}t} \mathfrak{g}_1, \mathrm{d}\alpha)$ を得る．

時空の good cover $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ を 1 つ固定する．命題 3.6 のように，2-接続をホロノミーのなす関手として定義するところから始める．

定義 3.20: path 2-groupoid

M を d 次元 C^∞ 多様体とする．**path 2-groupoid** $\mathbf{P}_2(M)$ を以下のように定義する：

- $\mathrm{Ob}(\mathbf{P}_2(M)) := M$
- $\forall x, y \in M$ に対して
$$\mathrm{Ob}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{P}_2(M)}(x, y)) := \left\{ \gamma\colon [0, 1] \to M \;\middle|\; \gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y \right\} / \sim$$
- $\forall \gamma_0, \gamma_1 \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{P}_2(M)}(x, y))$ に対して
$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Hom}_{\mathbf{P}_2(M)}}(\gamma_0, \gamma_1) := \left\{ \Sigma\colon [0, 1] \longrightarrow M \;\middle|\; \substack{\Sigma(0, t) = \mathrm{const.},\ \Sigma(1, t) = \mathrm{const.},\\ \Sigma(-, 0) = \gamma_0,\ \Sigma(-, 1) = \gamma_1} \right\} \Big/ \sim$$

2-射は適切な縦の合成と横の合成を持つ [37, Definition20, p.20]．ただし $\sim$ は thin homotopy [37, Definition19, p.20] である．

定理 2.1 と同様に，主 2-束を変換関数によって特徴付ける．

3.7 離散的高次対称性

離散群によって特徴付けられる対称性に対しては，保存カレントを定義することはできないが，トポロジカル演算子と charged object ならば定義できる．

3.7.1　BF-理論における離散的高次対称性

BF-理論を考える．まず最初に，この理論が以下の変換の下で不変であることに注意する：

$$\begin{aligned}A^{(p)} &\longmapsto A^{(p)} + \frac{1}{n}\epsilon^{(p)},\\ B^{(d-p-1)} &\longmapsto B^{(d-p-1)} + \frac{1}{n}\epsilon^{(d-p-1)},\\ F^{(p+1)} &\longmapsto F^{(p+1)},\\ \tilde{A}^{(d-p-2)} &\longmapsto \tilde{A}^{(d-p-2)} - \tilde{\epsilon}^{(d-p-2)}\end{aligned}$$

ただし $\epsilon^{(p)}$, $\epsilon^{(d-p-1)}$ は閉形式であり，任意の閉部分多様体 $\Sigma^{(p)}$, $\Sigma^{(d-p-1)} \subset \mathcal{M}^{(d)}$ について

$$\int_{\Sigma^{(p)}} \epsilon^{(p)},\ \int_{\Sigma^{(d-p-1)}} \epsilon^{(d-p-1)} \in 2\pi\mathbb{Z}$$

を充たすとする．また，局所的に $\epsilon^{(d-p-1)} =: \mathrm{d}\tilde{\epsilon}^{(d-p-2)}$ と定義した．実際，この変換によって

$$\begin{aligned}Z_{\mathrm{BF}} &= \int [\mathrm{d}a^{(p)}] \int [\mathrm{d}b^{(d-p-1)}]\, e^{\frac{\mathrm{i}n}{2\pi}\int_{\mathcal{M}^{(d)}} b^{(d-p-1)}\wedge a^{(p)}}\\ \longmapsto & \int [\mathrm{d}a^{(p)}] \int [\mathrm{d}b^{(d-p-1)}]\, e^{\frac{\mathrm{i}n}{2\pi}\int_{\mathcal{M}^{(d)}} b^{(d-p-1)}\wedge a^{(p)}}\, e^{\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{\mathcal{M}^{(d)}} \epsilon^{(d-p-1)}\wedge \mathrm{d}a^{(p)}}\\ &= \int [\mathrm{d}a^{(p)}]\Big|_{\mathrm{d}a^{(p)}=0} e^{\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{\mathcal{M}^{(d)}} \epsilon^{(d-p-1)}\wedge a^{(p)}}\\ &= Z_{\mathrm{BF}}\end{aligned}$$

となる．トポロジカル演算子は

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{e^{2\pi \mathrm{i}k/n}}(\Sigma^{(p)}) &:= e^{\mathrm{i}k\int_{\Sigma^{(p)}} a^{(p)}}\\ U_{e^{2\pi \mathrm{i}k/n}}(\Sigma^{(d-p-1)}) &:= e^{\mathrm{i}k\int_{\Sigma^{(d-p-1)}} b^{(d-p-1)}}\end{aligned}$$

の 2 つあり，それぞれに対応する charged object は

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_n(\mathcal{C}^{(d-p-1)}) &:= e^{\mathrm{i}n\int_{\mathcal{C}^{(d-p-1)}} b^{(d-p-1)}}\\ W_n(\mathcal{C}^{(p)}) &:= e^{\mathrm{i}n\int_{\mathcal{C}^{(p)}} a^{(p)}}\end{aligned}$$

となっている．

【例 3.7.1】$(3+1)$-次元における $\mathbb{Z}_n$ ゲージ理論

$(3+1)$-次元時空 $\mathcal{M}^{(4)}$ におけるトポロジカルな $\mathbb{Z}_n$ ゲージ理論

$$\begin{aligned}S[a^{(1)}, b^{(2)}] &:= \frac{\mathrm{i}n}{2\pi}\int_{\mathcal{M}^{(4)}} b^{(2)}\wedge \mathrm{d}a^{(1)} + \frac{\mathrm{i}pn}{4\pi}\int_{\mathcal{M}^{(4)}} b^{(2)}\wedge b^{(2)}\\ &= \frac{\mathrm{i}n}{4\pi p}\int_{\mathcal{M}^{(4)}} (\mathrm{d}a^{(1)} + pb^{(2)})\wedge(\mathrm{d}a^{(1)} + pb^{(2)}) - \frac{\mathrm{i}n}{4\pi p}\int_{\mathcal{M}^{(4)}} \mathrm{d}a^{(1)}\wedge \mathrm{d}a^{(1)}\end{aligned}$$

を考える [33, p.21]．$a^{(1)}, b^{(2)}$ はダイナミカルなので，作用は　mod 2π でゲージ不変でなくてはいけない．よって $b^{(2)}$ のゲージ変換 $b^{(2)} \longmapsto b^{(2)} + \mathrm{d}\lambda^{(1)}$ は $a^{(1)}$ にも同時に変換を引き起こさなくては

いけない[a]：

$$a^{(1)} \longmapsto a^{(1)} - p\lambda^{(1)}$$

注意すべきなのは，$a^{(1)}, \lambda^{(1)}$ の両者が $\mathrm{U}(1)$ ゲージ場なので，その値が $\mod 2\pi$ でしか決まらないことである．よってこのゲージ変換における作用の非自明な変化は

$$-\pi \mathrm{i} pn \int_{\mathcal{M}^{(4)}} \frac{\mathrm{d}\lambda}{2\pi} \wedge \frac{\mathrm{d}\lambda}{2\pi}$$

で記述される．この項が $\mod 2\pi$ で消えるためには

$$\frac{pn}{2} \in \mathbb{Z}$$

が必要である[b]．

BF-理論の節で行った議論と同様にこの理論を補助場 $f^{(2)}$ および $\mathrm{U}(1)$ ゲージ場 $\widehat{a}^{(1)}$ を含む等価な形で述べることができる：

$$\begin{aligned} S[f^{(2)}, b^{(2)}, \widehat{a}^{(1)}] &\coloneqq \frac{\mathrm{i}n}{2\pi} \int_{\mathcal{M}^{(4)}} b^{(2)} \wedge f^{(2)} + \frac{\mathrm{i}pn}{4\pi} \int_{\mathcal{M}^{(4)}} b^{(2)} \wedge b^{(2)} + \frac{\mathrm{i}}{2\pi} \int_{\mathcal{M}^{(4)}} \mathrm{d}\widehat{a}^{(1)} \wedge f^{(2)} \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2\pi} \int_{\mathcal{M}^{(4)}} f^{(2)} \wedge (\mathrm{d}\widehat{a}^{(1)} + nb^{(2)}) + \frac{\mathrm{i}pn}{4\pi} \int_{\mathcal{M}^{(4)}} b^{(2)} \wedge b^{(2)} \end{aligned}$$

ただし，$b^{(2)}$ のゲージ変換 $b^{(2)} \longmapsto b^{(2)} + \mathrm{d}\lambda^{(1)}$ は $f^{(2)}, \widehat{a}^{(1)}$ にも同時に変換を引き起こさなくてはいけない：

$$\begin{aligned} f^{(2)} &\longmapsto f^{(2)} - p\,\mathrm{d}\lambda^{(1)}, \\ \widehat{a}^{(1)} &\longmapsto \widehat{a}^{(1)} - n\lambda^{(1)} \end{aligned}$$

$f^{(2)}, b^{(2)}$ に関する汎函数積分を実行することで

$$S[\widehat{a}^{(1)}] = \frac{\mathrm{i}p}{4\pi n} \mathrm{d}\widehat{a}^{(1)} \wedge \mathrm{d}\widehat{a}^{(1)} \tag{3.7.1}$$

とも等価である．

この理論の持つトポロジカル演算子を求めよう．$p=0$ のときは *BF*-理論のものと全く同じだが，$p \neq 0$ のときは運動方程式 $\mathrm{d}a^{(1)} + pb^{(2)} = 0$ および $\mathrm{d}\widehat{a}^{(1)} + nb^{(2)} = 0$ により

$$W(\mathcal{C}^{(2)}) \coloneqq e^{\mathrm{i}\int_{\mathcal{C}^{(2)}} b^{(2)}}$$

とおくと

$$\begin{aligned} \left\langle \left(W(\mathcal{C}^{(2)})^p \right) \right\rangle &= 1, \\ \left\langle \left(W(\mathcal{C}^{(2)})^N \right) \right\rangle &= 1 \end{aligned} \tag{3.7.2}$$

がわかる．i.e.

$$\left\langle \left(W(\mathcal{C}^{(2)})^{\gcd(n,\,p)} \right) \right\rangle = 1$$

である．もう 1 つの Wilson line は，ゲージ不変性の要請から

$$\tilde{\mathcal{W}}(\mathcal{C}^{(1)};\,\Sigma^{(2)}) \coloneqq e^{\mathrm{i}\int_{\mathcal{C}^{(1)}} a^{(1)}} e^{\mathrm{i}p\int_{\Sigma^{(2)}} b^{(2)}}$$

とせざるを得ない．これは $\pm^{(2)}$ に依存しているので genuine line operator でないが，(3.7.2) を使うと

$$\tilde{\mathcal{W}}(\mathcal{C}^{(1)};\,\Sigma^{(2)})^N = e^{\mathrm{i}\int_{\mathcal{C}^{(1)}}(Na^{(1)} - p\widehat{a}^{(1)})}$$

がわかる．ここから，

$$\mathcal{W}(\mathcal{C}^{(1)}) \coloneqq \tilde{\mathcal{W}}(\mathcal{C}^{(1)};\,\Sigma^{(2)})^{N/\gcd(n,\,p)}$$

がもう一つの line operator であることがわかり，$\mathbb{Z}_{\gcd(n,\,p)}$-チャージが導出された．

[a] $a^{(1)}$, $\lambda^{(1)}$ が共に U(1) ゲージ場であることから，$p \in \mathbb{Z}$ でなくてはいけない．
[b] この条件は $\mathcal{M}^{(4)}$ がスピン多様体ならば $p \in \mathbb{Z}$ と等価である．

3.7.2 中心対称性のゲージ化

$(3+1)$-次元の物質場を持たない $\mathrm{SU}(n)$ ゲージ理論をトポロジカルな $\mathbb{Z}_n$ ゲージ理論【例 **3.7.1**】と結合させることにより，$\mathrm{SU}(n)/\mathbb{Z}_n$ ゲージ理論が得られることを見よう．

今，$(3+1)$-次元の $\mathrm{SU}(n)$ 1-form ゲージ場を a と書く[*47]．ここで，天下り的だが U(1) 1-form ゲージ場 $\widehat{a}^{(1)}$ を用いて

$$\tilde{a} \coloneqq a + \frac{1}{n}\widehat{a}^{(1)}\mathbb{1}_n$$

と書く．すると，a は $\mathfrak{su}(n)$ に値をとることから

$$\mathrm{Tr}\,\tilde{a} = \cancel{\mathrm{Tr}\,a} + \widehat{a}^{(1)} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$$

となり，$\tilde{a}$ が $\mathfrak{u}(n)$ に値をとるように見える．よって $\tilde{a}$ を $\mathrm{U}(n)$ ゲージ場と見做すことができる．

ここで，理論に新たな U(1) 1-form ゲージ不変性 $\tilde{a} \longmapsto \tilde{a} - \lambda^{(1)}\mathbb{1}_n$ を要請する．ただし $\lambda^{(1)}$ は U(1) ゲージ場である．このゲージ変換は元々の $\mathrm{SU}(n)$ ゲージ場 a には作用しないが，新たに付け足した U(1) ゲージ場 $\widehat{a}^{(1)}$ に関しては

$$\widehat{a}^{(1)} \longmapsto \widehat{a}^{(1)} - n\lambda^{(1)} \tag{3.7.3}$$

のゲージ変換を引き起こす．変換 (3.7.3) に関する不変性を尊重するためには $\widehat{a}^{(1)}$ の運動項は許されないが，トポロジカル項

$$\frac{\mathrm{i}p}{4\pi n}\int_{\mathcal{M}^{(4)}} \widehat{a}^{(1)} \wedge \widehat{a}^{(1)}$$

を付け足すことは依然として許されている．この項はまさにトポロジカルな $\mathbb{Z}_n$ ゲージ理論 (3.7.1) である．

[*47] ダイナミカルである．

このようにして得られたゲージ理論の変換関数について考察する．$\mathcal{M}^{(4)}$ の良い被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ を 1 つ固定する．新たな U(1) ゲージ不変性の要請によって $\tilde{a}$ のゲージ変換は変換関数 $\{g_{\alpha\beta}\colon U_\alpha\cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{U}(n)\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$ によるものと，変換関数 $\{\lambda^{(1)}_{\alpha\beta}\colon U_\alpha\cap U_\beta \longrightarrow \Omega^1(U_\alpha\cap U_\beta,\, \mathfrak{u}(1))\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$ によるものが混ざった

$$\tilde{a}_\beta = g_{\beta\alpha}(\tilde{a}_\alpha - \mathrm{i}\,\mathrm{d}g_{\beta\alpha})g^{-1}_{\beta\alpha} - \lambda^{(1)}_{\alpha\beta}$$

になる．注意すべきなのは，$\lambda^{(1)}_{\alpha\beta}$ に対するゲージ変換 $\lambda^{(1)}_{\alpha\beta} \longmapsto \lambda^{(1)}_{\alpha\beta} + \mathrm{d}h^{(0)}_{\alpha\beta}$ が $g_{\beta\alpha}$ にも作用することである：

$$g_{\beta\alpha} \longmapsto e^{-\mathrm{i}h_{\alpha\beta}} g_{\beta\alpha} \tag{3.7.4}$$

ここで $\lambda^{(1)}_{\alpha\beta}$ の Deligne-Beilinson コチェインとしてのゲージ変換（i.e. $U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma$ における整合性条件）は，$\{f_{\alpha\beta\gamma}\colon U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma \longrightarrow \Omega^0(U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma;\, \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})\}_{\alpha,\,\beta,\,\gamma\in\Lambda}$ によって

$$\lambda^{(1)}_{\alpha\beta} + \lambda^{(1)}_{\beta\gamma} + \lambda^{(1)}_{\gamma\alpha} = \mathrm{d}f_{\alpha\beta\gamma}$$

となっているので，ゲージ変換 $\lambda^{(1)}_{\alpha\beta} \longmapsto \lambda^{(1)}_{\alpha\beta} + \mathrm{d}h^{(0)}_{\alpha\beta}$ に際しては

$$f_{\alpha\beta\gamma} \longmapsto f_{\alpha\beta\gamma} + h_{\alpha\beta} + h_{\beta\gamma} + h_{\gamma\alpha} \mod 2\pi$$

と言う変換を受ける．故に $g_{\alpha\beta}$ に要請するコサイクル条件であって (3.7.4) を尊重するものは

$$g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = e^{-\mathrm{i}f_{\alpha\beta\gamma}}\mathbb{1}_n \in \mathrm{U}(1) \tag{3.7.5}$$

だと考えられる [33, p.28]．一般化されたコサイクル条件 (3.7.5) の det をとることにより

$$f_{\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{n}\left(\log\det g_{\alpha\beta} + \log\det g_{\beta\gamma} + \log\det g_{\gamma\alpha}\right) =: \frac{2\pi m_{\alpha\beta\gamma}}{n} \in \frac{2\pi}{n}\mathbb{Z}$$

がわかる．$f_{\alpha\beta\gamma}$ の充たすべきコサイクル条件は

$$f_{\alpha\beta\gamma} + f_{\beta\gamma\delta} + f_{\gamma\delta\alpha} + f_{\delta\alpha\beta} = 0 \mod 2\pi$$

であるから，

$$m_{\alpha\beta\gamma} + m_{\beta\gamma\delta} + m_{\gamma\delta\alpha} + m_{\delta\alpha\beta} = 0 \mod n$$

がわかる．i.e. $m \coloneqq \{m_{\alpha\beta\gamma}\}_{\alpha,\,\beta,\,\gamma\in\Lambda} \in \check{H}^2\left(\mathcal{M}^{(d)};\, \mathbb{Z}_n\right)$ である．

3.7.3 有限部分群のゲージ化

中心対称性に関して議論する際，理論の持つ対称性 G の有限な正規部分群 A についてのみゲージ化すると言う操作が必要になった．ここでは有限部分群のゲージ化に関する一般論を述べる [38].

第 4 章

位相的場の理論の展開：SPT 相の分類

この節で登場する多様体は特に断らない限り常に C^∞ 多様体である．また，体 $\mathbb{K}$ と言ったら $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のいずれかを指す．

4.1 SPT 相の定義

この節では常に $d := D + 1$ 次元時空 $\mathcal{M}^{(d)} = \Sigma^{(D)} \times \mathbb{R}$ または[*1] $\Sigma^{(D)} \times S^1$ を考える．混乱が生じない時は時空点を $x := (\boldsymbol{x}, t) \in \Sigma^{(D)} \times \mathbb{R}$ と書く．D 次元多様体[*2] $\Sigma^{(D)}$ はノルム $\|\cdot\|$ を持つ距離空間であるとする．

- $\Sigma^{(D)}$ 上の D 次元**格子** (lattice) $\Lambda \subset \Sigma^{(D)}$ とは，$\Sigma^{(D)}$ の有限な[*3]離散部分集合のことである．
- 格子点 $\boldsymbol{x} \in \Lambda$ 上の Hilbert 空間を $\mathcal{H}_{\boldsymbol{x}}$ と書く．
- 全系の Hilbert 空間とは，合成系 $\mathcal{H}_{\text{tot}} := \bigotimes_{\boldsymbol{x} \in \Lambda} \mathcal{H}_{\boldsymbol{x}}$ のことである．

定義 4.1: bosonic な格子模型

- $\forall \boldsymbol{x} \in \Lambda$ を 1 つとる．別の格子点 $\boldsymbol{y} \in \Lambda$ が $\boldsymbol{x}$ についてレンジ $R > 0$ であるとは，$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \leq R$ が成り立つことを言う．$\boldsymbol{x}$ についてレンジ R な格子点全体の集合を $N_R(\boldsymbol{x}) \subset \Lambda$ と書く．
- 格子 Λ 上のレンジ $R > 0$ の（量子的）**bosonic な格子模型**とは，$\forall \boldsymbol{x} \in \Lambda$ に対して，$\forall \boldsymbol{y} \in N_R(\boldsymbol{x})$ における局所的 Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{\boldsymbol{y}}$ にのみ非自明に作用するエルミート演算子 $\hat{h}_{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Hilb}}(\mathcal{H}_{\text{tot}}, \mathcal{H}_{\text{tot}})$ が存在して，

$$\hat{H} = \sum_{\boldsymbol{x} \in \Lambda} \hat{h}_{\boldsymbol{x}}$$

と書かれるエルミート演算子 $\hat{H} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Hilb}}(\mathcal{H}_{\text{tot}}, \mathcal{H}_{\text{tot}})$ のこと．

bosonic な格子模型の基底状態を **bosonic な基底状態**と呼ぶ．

[*1] 時間方向は必要に応じてコンパクト化する

[*2] closed でなくとも良い．

[*3] 空間多様体 $\Sigma^{(D)}$ や局所 Hilbert 空間に適当な境界条件を課して有限にする．

定義 4.2: gapped な格子模型

bosonic な格子模型 $\hat{H}$ が **gapped** であるとは，熱力学極限を取った際に基底状態 E_0 と第一励起状態 E_1 の間に有限のエネルギーギャップ $\Delta := E_1 - E_0 > 0$ が存在し，かつ基底状態が一意であることを言う．

熱力学極限 $|\Lambda| \to \infty$ をとった $\Sigma^{(D)}$ 上の bosonic な格子模型全体の集合を $\mathbf{Lat}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{(D)}\right) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbf{Hilb}}\left(\mathcal{H}_{\mathrm{tot}}, \mathcal{H}_{\mathrm{tot}}\right)$ と書き，[4]$\mathrm{Lat}\left(\Sigma^{(D)}\right)$ の元の基底状態全体の集合を $\mathbf{Gnd}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{(D)}\right) \subset \mathcal{H}_{\mathrm{tot}}$ と書く．$\mathrm{Lat}\left(\Sigma^{(D)}\right)$ にコンパクト開位相[5]を入れて位相空間にする．[39, p.3] に倣い，**量子相** (quantum phase) を以下のように定義する：

定義 4.3: bosonic な量子相

2 つの bosonic な格子模型 $\hat{H}_0, \hat{H}_1 \in \mathrm{Lat}\left(\Sigma^{(D)}\right)$ を与える．

- $\hat{H}_0$ の基底状態 $|\Phi_0\rangle \in \mathrm{Gnd}\left(\Sigma^{(D)}\right)$ と $\hat{H}_1$ の基底状態 $|\Phi_1\rangle \in \mathrm{Gnd}\left(\Sigma^{(D)}\right)$ が同じ**量子相** (quantum phase) にあるとは，C^∞ 曲線 $\hat{H}\colon [0, 1] \longrightarrow \mathrm{Lat}\left(\Sigma^{(D)}\right)$ が存在して $\hat{H}(0) = \hat{H}_0$ かつ $\hat{H}(1) = \hat{H}_1$ を充たすこと．これは $\mathrm{Gnd}\left(\Sigma^{(D)}\right)$ 上の同値関係 $\sim$ をなす．
- 商集合 $\mathrm{Gnd}\left(\Sigma^{(D)}\right)/\sim$ の元のことを**量子相**と呼ぶ．

4.1.1 SRE 状態と LRE 状態

まず，[39, p.3] に倣って **SRE 状態** (Short Range Entangled states) と **LRE 状態** (Long Range Entangled states) を定義する．[39, p.4]

予想 4.1: Chen-Gu-Wen の仮説

bosonic かつ gapped な 2 つの基底状態 $|\Phi_0\rangle, |\Phi_1\rangle$ が同じ量子相にあるならば，以下の条件を充たす bosonic な格子模型の族 $\left\{\hat{H}(t)\right\}_{t\in[0,1]}$ が存在する：

- $\forall t \in [0, 1]$ に対して，$\hat{H}(t)$ の基底状態は熱力学極限を取った際に gapped である．
- $|\Phi_0\rangle, |\Phi_1\rangle$ はそれぞれ $\hat{H}(0), \hat{H}(1)$ の基底状態である．

[4] $\mathcal{H}_{\mathrm{tot}}$ は一般には熱力学極限の取り方に依存する．
[5] operator norm による距離位相としても良い．

命題 4.1: LU transformation

以下の 2 つは同値である：

(1) bosonic かつ gapped な 2 つの基底状態 $|\Phi_0\rangle$, $|\Phi_1\rangle$ が同じ量子相にある

(2) bosonic な格子模型の族 $\left\{\hat{\hat{H}}(t)\right\}_{t\in[0,\,1]}$ が存在して

$$|\Phi_1\rangle = \mathcal{T}\left[e^{-\mathrm{i}\int_0^1 \mathrm{d}t \hat{\hat{H}}(t)}\right] |\Phi_0\rangle \tag{4.1.1}$$

を充たす．ただし $\mathcal{T}$ は経路順序積である．

証明 ($\Longrightarrow$)

仮説 4.1 による．

($\Longleftarrow$)

■

(4.1.1) を**局所ユニタリ発展** (local unitary evolution) と呼ぶ．

定義 4.4: SRE 状態

bosonic かつ gapped な基底状態 $|\Phi\rangle \in \mathrm{Gnd}\left(\Sigma^{(D)}\right)$ が **SRE 状態** (short range entangled state) であるとは，ある separable な状態

$$\bigotimes_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} |\psi_{\boldsymbol{x}}\rangle \quad {}^{\mathrm{w}/} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Lambda,\ |\psi_{\boldsymbol{x}}\rangle \in \mathcal{H}_{\boldsymbol{x}}$$

と $|\Psi\rangle$ との間に局所ユニタリ発展が存在すること．

SRE 状態でない基底状態のことを **LRE 状態** (long range entangled state) と呼ぶ．

定義から明らかに，任意の SRE 状態は同一の量子相に属する．

4.1.2 Bosonic SPT 相

SRE 状態の定義はそのままだと面白くないが，対称性を考慮すると話は変わってくる．位相群 G を与える．また，格子 Λ は空間群 S の対称性を持つ[*6]とする．

[*6] S の Λ への左作用を $\blacktriangleright\colon S\times\Lambda \longrightarrow \Lambda$ と書く．

定義 4.5: 外部半直積

$N,\ H$ を群とし，$\phi\colon H \to \mathrm{Aut}\, N,\ h \mapsto \phi_h$ を準同型写像とする[a]．このとき，集合 $N \times H$ は次の二項演算 $\cdot : N \times H \to N \times H$ に関して群を成す：

$$(n_1,\, h_1) \cdot (n_2,\, h_2) \coloneqq \bigl(n_1 \phi_{h_1}(n_2),\, h_1 h_2\bigr)$$

この群 $\bigl(N\times H,\, \cdot\,,\, (1_N,\, 1_H)\bigr)$ のことを $N,\ H$ の (外部) **半直積** (semidirect product) と呼び，$\boldsymbol{H \ltimes_\phi N}$ または $\boldsymbol{N \rtimes_\phi H}$ と書く．

[a] $\mathrm{Aut}\, N$ は，N から N 自身への同型写像全体の集合に，写像の合成を群の演算として群構造を入れたもので，**自己同型群** (automorphism group) と呼ばれる．

定義 4.6: G-対称な格子模型

bosonic な格子模型 $\hat{H}$ が ***G*-対称** [40, p.12] であるとは，

- 群準同型 $\rho_{\mathrm{spa}}\colon G \longrightarrow S$
- 群準同型 $\phi_{\mathrm{int}}\colon G \longrightarrow \{\pm 1\}$
- 群のユニタリ or 反ユニタリ表現 $\rho_{\mathrm{int}}\colon G \ltimes_{\blacktriangleright \circ \rho_{\mathrm{spa}}} S \longrightarrow \bigl\{\text{unitary or antiunitary operator } \mathcal{H}_{\mathrm{tot}} \to \mathcal{H}_{\mathrm{tot}}\bigr\}$

が存在して以下を充たすことを言う：

(Gsym-1)

$\forall g \in G$ に対し，

$$\phi_{\mathrm{int}}(g) = \begin{cases} +1, & \rho_{\mathrm{int}}(g) \text{ is unitary} \\ -1, & \rho_{\mathrm{int}}(g) \text{ is antiunitary} \end{cases}$$

(Gsym-2)

群 G の $\mathcal{H}_{\mathrm{tot}}$ への作用

$$\begin{aligned} &\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathcal{H}_{\mathrm{tot}}), \\ &g \longmapsto \left(\bigotimes_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} |\psi_{\boldsymbol{x}}\rangle \longmapsto \bigotimes_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} \rho_{\mathrm{int}}\bigl(g,\, \rho_{\mathrm{spa}}(g)^{-1} \blacktriangleright \boldsymbol{x}\bigr) \bigl|\psi_{\rho_{\mathrm{spa}}(g)^{-1} \blacktriangleright \boldsymbol{x}}\bigr\rangle \right) \end{aligned}$$

に関して，

$$\forall g \in G,\ \left[\hat{H}, \rho(g)\right] = 0$$

が成り立つ．

G-対称な格子模型全体の集合を $\mathbf{Lat}_{\boldsymbol{G}}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{(\boldsymbol{D})}\right) \subset \mathrm{Lat}\left(\Sigma^{(D)}\right)$ と書き[*7]．その基底状態全体の集合を $\mathbf{Gnd}_{\boldsymbol{G}}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{(\boldsymbol{D})}\right) \subset \mathrm{Gnd}\left(\Sigma^{(D)}\right)$ と書く．

[*7] $\mathrm{Lat}\left(\Sigma^{(D)}\right)$ からの subspace topology を入れる．

定義 4.7: G-同変な量子相

2 つの bosonic かつ G-対称な格子模型 $\hat{H}_0, \hat{H}_1 \in \mathrm{Lat}_G(\Sigma^{(D)})$ を与える．

- $\hat{H}_0$ の基底状態 $|\Phi_0\rangle \in \mathrm{Gnd}_G\left(\Sigma^{(D)}\right)$ と $\hat{H}_1$ の基底状態 $|\Phi_1\rangle \in \mathrm{Gnd}_G\left(\Sigma^{(D)}\right)$ が同じ ***G*-同変な量子相** (G-equivalent quantum phase) にあるとは，C^∞ 曲線 $\hat{H} : [0, 1] \longrightarrow \mathrm{Lat}_G(\Sigma^{(D)})$ が存在して $\hat{H}(0) = \hat{H}_0$ かつ $\hat{H}(1) = \hat{H}_1$ を充たすこと．これは $\mathrm{Gnd}_G\left(\Sigma^{(D)}\right)$ 上の同値関係を成す．
- 商集合 $\mathrm{Gnd}_G\left(\Sigma^{(D)}\right)/\sim$ の元のことを ***G*-同変な量子相**と呼ぶ．

定義 4.8: SPT 相 (Chen-Gu-Wen による)

bosonic かつ gapped かつ G-同変な量子相 $[|\Phi\rangle] \in \mathrm{Gnd}_G\left(\Sigma^{(D)}\right)$ が **SPT 相** (symmetry protected topological phase[a]) であるとは，$\forall\,|\Psi\rangle \in [|\Phi\rangle]$ が SRE 状態であることを言う．

[a] **symmetry protected trivial phase** と呼ぶこともある [41].

つまり，任意の代表元が G-対称性を破れば separable な状態に滑らかにつながるような量子相のことを SPT 相と呼ぶ．SPT 相の名前はこのことに由来する．

4.1.3 Fermionic SPT 相

4.2 Bosonic SPT 相の分類：群コホモロジーによる方法

[42, p.16, VIII] は，Dijkgraaf-Witten 理論を用いて[*8]かなり多くの SPT 相を書き下す系統的な方法を発明した．この節ではその方法を紹介する．

簡単のため，G-対称な格子模型のうち群準同型 ρ_{spa} が自明なもの[*9]のみ考える．また，G は局所コンパクト[*10]であるとする．このとき G は Haar 測度を持つのでそれを $\int_G \mathrm{d}g$ とおく．このとき，非ゼロな $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{\boldsymbol{x}}$ を 1 つ固定して $\forall g \in G$ に対して

$$|g\rangle \coloneqq \rho_{\mathrm{int}}(g)\,|\psi\rangle$$

とおくと，Haar 測度の左右不変性から族 $\left\{|g\rangle\right\}_{g\in G}$ は一般化コヒーレント状態を成す．ここで $\forall\left\{g_{\boldsymbol{x}}\right\}_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} \in \prod_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} G$ に対して

$$\left|\left\{g_{\boldsymbol{x}}\right\}_{\boldsymbol{x}\in\Lambda}\right\rangle \coloneqq \bigotimes_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} |g_{\boldsymbol{x}}\rangle \in \mathcal{H}_{\mathrm{tot}}$$

とおこう．さらに以下では G は離散群であるとする．

[*8] 彼女らの論文においては Dijkgraaf-Witten 理論との関連は明示的に書かれていない．[41] には顕に書かれている．
[*9] i.e. $\forall g \in G$ に対して $\rho_{\mathrm{spa}}(g) = 1_S$
[*10] 任意の点がコンパクト近傍を持つ

命題 4.2: SPT 相の構成

- 空間多様体 Σ を境界にもつ $D+1$ 次元多様体 $\mathcal{N}^{(D+1)}$
- $\mathcal{N}^{(D+1)}$ の三角形分割 $|K| \xrightarrow{\approx} \mathcal{N}^{(D+1)}$ であって，その 0-単体（頂点）K_0 が $\partial\mathcal{N}^{(D+1)}$ において格子 Λ を再現するもの
- $\omega \in H^{D+1}_{\mathrm{Grp}}(G,\,\mathrm{U}(1))$

をとる．このとき

$$|\Psi\rangle_\omega := \frac{1}{|G|^{|\Lambda|}} \sum_{\{g_j\}_{j\in K_0}} \prod_{\{j_0,\,\dots,\,j_{D+1}\}\in K_{D+1}} \omega(g_{j_0},\,\dots,\,g_{j_{D+1}})^{\epsilon_{\{j_0,\,\dots,\,j_{D+1}\}}} \left|\{g_{\boldsymbol{x}}\}_{\boldsymbol{x}\in\Lambda}\right\rangle$$

は SPT 相の代表元である．ただし $\epsilon_{\{j_0,\,\dots,\,j_{D+1}\}}$ は $D+1$-単体 $\{j_0,\,\dots,\,j_{D+1}\} \in K_{D+1}$ の向きである．

証明 まず，$|\Psi\rangle_\omega$ が G-対称であることを示す．実際 $\forall\{g_{\boldsymbol{x}}\}_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} \in \prod_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} G$ および $\forall g\in G$ に対して

$$\begin{aligned}
\left\langle \{g_{\boldsymbol{x}}\}_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} \middle| \rho(g) \middle| \Psi \right\rangle_\omega &= \left\langle \{g_{\boldsymbol{x}}\}_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} \middle| \bigotimes_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} \rho_{\mathrm{int}}(g) \middle| \Psi \right\rangle_\omega \\
&= \left\langle \{g^{-1}g_{\boldsymbol{x}}\}_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} \middle| \Psi \right\rangle_\omega \\
&= \frac{1}{|G|^{|\Lambda|}} \sum_{\{g_j\}_{j\in K_0\setminus\Lambda}} \prod_{\{j_0,\,\dots,\,j_{D+1}\}\in K_{D+1}} \omega(g_{j_0},\,\dots,\,g_{j_{D+1}})^{\epsilon_{\{j_0,\,\dots,\,j_{D+1}\}}} \\
&= \left\langle \{g_{\boldsymbol{x}}\}_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} \middle| \Psi \right\rangle_\omega
\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし 3 つ目の等号でコサイクルの左不変性を使った．

次に，$|\Psi\rangle_\omega$ が SRE 状態であることを示す．簡単のため $\Sigma = S^D$, $\mathcal{N}^{(D+1)} = D^{D+1}$ の場合を考える[*11]．このとき $K_0\setminus\Lambda = \{*\}$ となるような三角形分割をとることができて，

$$\begin{aligned}
|\Psi\rangle_\omega &= \left(\sum_{\{g_{\boldsymbol{x}}\}_{\boldsymbol{x}\in\Lambda}} \prod_{\{j_0,\,\dots,\,j_D,\,*\}\in K_{D+1}} \omega(g_{j_0},\,\dots,\,g_{j_D},\,g_*) \left|\{g_{\boldsymbol{x}}\}_{\boldsymbol{x}\in\Lambda}\right\rangle\!\left\langle\{g_{\boldsymbol{x}}\}_{\boldsymbol{x}\in\Lambda}\right| \right) \bigotimes_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g_{\boldsymbol{x}}\in G} |g_{\boldsymbol{x}}\rangle \right) \\
&= \left(\prod_{\{j_0,\,\dots,\,j_D,\,*\}\in K_{D+1}} \sum_{\{g_{j_n}\}_{n=0}^{D}\in G^{D+1}} \omega(g_{j_0},\,\dots,\,g_{j_D},\,g_*) \left|\{g_{j_n}\}_{n=0}^{D}\right\rangle\!\left\langle\{g_{j_n}\}_{n=0}^{D}\right| \right) \bigotimes_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g_{\boldsymbol{x}}\in G} |g_{\boldsymbol{x}}\rangle \right)
\end{aligned}$$

と書けるので SRE 状態である．

最後に，$|\Psi\rangle$ が属する SPT 相が $\omega\in H^{D+1}_{\mathrm{Grp}}(G,\,\mathrm{U}(1))$ の代表元の取り方によらないことを示す．実際，D-コチェイン $\eta\in C^{D}_{\mathrm{Grp}}(G,\,\mathrm{U}(1))$ に対して $\omega \longmapsto \omega\cdot\delta\eta$ と取り替えると

$$|\Psi\rangle_{\omega\cdot\delta\eta} = \left(\prod_{\{j_0,\,\dots,\,j_D,\,*\}\in K_{D+1}} \sum_{\{g_{j_0},\,\dots,\,g_{j_D}\}\in G^{D+1}} \eta(g_{j_0},\,\dots,\,g_{j_D}) \left|\{g_{j_n}\}_{n=0}^{D}\right\rangle\!\left\langle\{g_{j_n}\}_{n=0}^{D}\right| \right) |\Psi\rangle_\omega$$

となるが，この変換は明らかに $\rho(g)$ と可換なので G-同変な局所ユニタリ発展である．■

[*11] 一般の場合でも，C^∞ 多様体は CW 複体の構造を持つので問題ないと思われる．

Dijkgraaf-Witten 理論との関係は，大域的 G-対称性をゲージ化することにより明らかになる [41, APPENDIX E]．ゲージ化によって，$\mathcal{N}^{(D+1)}$ の三角形分割の 1-単体（辺）$e \in K_1$ 上に G の元 h_e が指定される．ただし，G が離散群なので h_e は平坦接続でなくてはならない．よってもし 3 つの 1-単体 e_1, e_2, e_3 がある 2-単体 d について $\partial_i^2(d) = e_i$ を充たすならば

$$h_{e_1}h_{e_2}h_{e_3} = 1_G$$

が成り立たねばならない．また，「物質場」g_x とゲージ場 h_e のゲージ変換は，$\{k_x\}_{x\in K_0} \in G^{|K_0|}$ を用いてそれぞれ

$$\begin{aligned} g_x &\longmapsto k_x g_x, \\ h_e &\longmapsto k_{\partial_1^1(e)}^{-1} h_e k_{\partial_0^1(e)} \end{aligned}$$

のようになる．故に，命題 4.2 の構成で用いた「物質場」の分配関数

$$Z(\{g_i\}_{i\in K_0};\, \mathcal{N}^{(D+1)}) := \prod_{\{j_0,\,\dots,\,j_{D+1}\}\in K_{D+1}} \omega(g_{j_0},\, \dots,\, g_{j_{D+1}})^{\epsilon\{j_0,\,\dots,\,j_{D+1}\}}$$

は G-対称性のゲージ化によって

$$\begin{aligned} &Z_{\text{gauged}}(\{g_i\}_{i\in K_0},\, \{h_e\}_{e\in K_1};\, \mathcal{N}^{(D+1)}) \\ &= \frac{1}{|G|^{|\Lambda|}} \prod_{\{j_0,\,\dots,\,j_{D+1}\}\in K_{D+1}} \omega(g_{j_0},\, h_{j_0j_1}g_{j_1},\, h_{j_0j_1}h_{j_1j_2}g_{j_2}\,\dots,\, h_{j_0j_1}\cdots h_{j_Dj_{D+1}}g_{j_{D+1}})^{\epsilon\{j_0,\,\dots,\,j_{D+1}\}} \\ &= \frac{1}{|G|^{|\Lambda|}} \prod_{\{j_0,\,\dots,\,j_{D+1}\}\in K_{D+1}} \alpha(g_{j_0}^{-1}h_{j_0j_1}g_{j_1},\, g_{j_1}^{-1}h_{j_1j_2}g_{j_2},\, \dots,\, g_{j_D}^{-1}h_{j_Dj_{D+1}}g_{j_{D+1}})^{\epsilon\{j_0,\,\dots,\,j_{D+1}\}} \end{aligned}$$

になる[12]．ゲージ場を外場と見做すことにより Dijkgraaf-Witten 理論の作用が得られる：

$$\begin{aligned} &\sum_{\{g_j\}_{j\in K_1}} Z_{\text{gauged}}(\{g_i\}_{i\in K_0},\, \{h_e\}_{e\in K_1};\, \mathcal{N}^{(D+1)}) \\ &= \prod_{\{j_0,\,\dots,\,j_{D+1}\}\in K_{D+1}} \alpha(h_{j_0j_1},\, h_{j_1j_2},\, \dots,\, h_{j_Dj_{D+1}})^{\epsilon\{j_0,\,\dots,\,j_{D+1}\}} \\ &= e^{2\pi \mathrm{i}\langle \gamma^*\alpha,\, []\rangle} \end{aligned}$$

以上の議論により，D 次元の bosonic な[13]SPT 相の分類は $H_{\text{Grp}}^{D+1}(G,\, \mathrm{U}(1))$ によって成される，などと言う [42]．

4.3 Bosonic SPT 相の分類：Ω-スペクトラムによる方法

上述の群コホモロジーによる bosonic な SPT 相の分類は低次元においては十分有効だが，高次元だと不十分になったり，逆に細かくなり過ぎることが知られている [43]．現代的には一般コホモロジー理論によって分類することが多い [40]．その際には，そもそも局所ユニタリ発展は使わずに SPT 相を定義する．

[12] このゲージ化の方法は，理論のゲージ不変性を要請することによって得られる．
[13] より正確には G が離散群でかつ on site symmetry のとき

付録 A

コホモロジー

R を環とする．

定義 A.1: 良い被覆

位相空間 X の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ が**良い被覆** (good cover) であるとは，$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Lambda$ に対して

$$U_{\alpha_1} \cap \cdots \cap U_{\alpha_n} \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad U_{\alpha_1} \cap \cdots \cap U_{\alpha_n} \text{ は可縮}$$

が成り立つこと．

以下では $\boldsymbol{U_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}} \coloneqq U_{\alpha_1} \cap \cdots \cap U_{\alpha_n}$ と略記する．

A.1 導来関手

A.2 層係数コホモロジー

位相空間 X を 1 つ固定する．X 上の**開集合の圏** $\mathbb{O}_{\boldsymbol{X}}$ を，

- X の開集合を対象とする
- X の任意の開集合 $U, V \subset X$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{O}_X}(U, V) \coloneqq \begin{cases} \{\text{包含写像 } U \hookrightarrow V\}, & U \subset V \\ \emptyset, & U \not\subset V \end{cases}$$

と定義する．

定義 A.2: 前層

位相空間 X 上の，小圏 $\mathcal{S}$ に値をとる**前層** (presheaf) とは，関手

$$P\colon \mathbb{O}_X^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}$$

のこと[a].

[a] 最も一般的には，関手 $P\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}$ のことを圏 $\mathcal{C}$ 上の $\mathcal{S}$ に値をとる前層と呼ぶ https://ncatlab.org/nlab/show/presheaf

位相空間 X 上の，圏 $\mathcal{S}$ に値をとる**前層の圏 $\mathbf{PSh}(X, \mathcal{S})$** とは，

- $\mathcal{S}$ に値をとる前層を対象とする．
- $\mathcal{S}$ に値をとる前層 $P, Q\colon \mathbb{O}_X^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}$ に対して，自然変換

$$F\colon P \Longrightarrow Q$$

  を射とする

圏のこと．

【例 A.2.1】定数前層

圏 $\mathcal{S}$ の対象 A に対して定まる前層

$$\begin{aligned} A_X\colon \mathbb{O}_X^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathcal{S}, \\ U &\longmapsto A, \\ (U \hookrightarrow V) &\longmapsto \mathrm{id}_A \end{aligned}$$

のことを**定数前層** (constant presheaf) と呼ぶ．

【例 A.2.2】微分形式のなす前層

X を C^∞ 多様体とする．このとき

$$\begin{aligned} C_X^\infty\colon \mathbb{O}_X^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathbb{R}\text{-}\mathbf{Mod}, \\ U &\longmapsto C^\infty(U), \\ (\iota \circ U \hookrightarrow V) &\longmapsto \bigl(f \longmapsto f \circ \iota\bigr) \end{aligned}$$

なる対応は前層である．同様に，$\forall q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$\begin{aligned} \Omega_X^q\colon \mathbb{O}_X^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathbb{R}\text{-}\mathbf{Mod}, \\ U &\longmapsto \Omega^q(U), \\ (\iota\colon U \hookrightarrow V) &\longmapsto \bigl(\omega \longmapsto \iota^*\omega\bigr) \end{aligned}$$

なる対応は前層である．

定義 A.3: 層

前層 $P \in \mathrm{Ob}(\mathrm{PSh}(X, \mathcal{S}))$ が**層** (sheaf) であるとは,

- X の任意の開集合 $U \subset X$ および U の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$
- 任意の族 $\{x_\alpha \in P(U_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ であって，$\forall \alpha, \beta \in \Lambda$ に対して

  $$P(U_\alpha \cap U_\beta \hookrightarrow U_\alpha)(x_\alpha) = P(U_\alpha \cap U_\beta \hookrightarrow U_\beta)(x_\beta)$$

  を充たすもの

に対して，$x \in P(U)$ が一意的に存在して

$$\forall \alpha \in \Lambda,\ P(U_\alpha \hookrightarrow U)(x) = x_\alpha$$

を充たすこと．

位相空間 X 上の，圏 $\mathcal{S}$ に値をとる**層の圏 $\mathbf{Sh}(X, \mathcal{S})$** とは,

- $\mathcal{S}$ に値をとる層を対象とする．
- $\mathcal{S}$ に値をとる層 $P, Q\colon \mathbb{O}_X^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}$ に対して，自然変換

  $$F\colon P \Longrightarrow Q$$

  を射とする

圏のこと．$\mathcal{S}$ がアーベル圏のとき，圏 $\mathrm{Sh}(X, \mathcal{S})$ もまたアーベル圏である [44, p.298, 命題 4.30].

X を位相空間とする．加法的関手

$$A\colon \mathrm{Sh}(X, R\text{-}\mathbf{Mod}) \longrightarrow R\text{-}\mathbf{Mod} \tag{A.2.1}$$

を,

- 任意の層 $P \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Sh}(X, R\text{-}\mathbf{Mod}))$ に対して R-加群 $P(X) \in \mathrm{Ob}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ を対応付ける
- 層 $P, Q \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Sh}(X, R\text{-}\mathbf{Mod}))$ の間の任意の自然変換 $F\colon P \Longrightarrow Q$ に対して，R-加群の準同型 $F_X\colon P(X) \longrightarrow Q(X)$ を対応付ける

関手として定義する．

定義 A.4: 層係数コホモロジー

加法的関手 (A.2.1) の右導来関手を $\big(H^n(X, \text{-})\big)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ と書く．層 $P \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Sh}(X, R\text{-}\mathbf{Mod}))$ を係数とする位相空間 X の**層係数コホモロジー** (sheaf cohomology) とは,

$$H^n(X, P)$$

のこと．

A.3 Čech コホモロジー

位相空間 X および前層 $P \in \mathrm{Ob}(\mathrm{PSh}(X,\, R\text{-}\mathbf{Mod}))$ を与える．
X の開被覆 $\mathcal{U} \coloneqq \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ をとる．$\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$\check{C}^n(\mathcal{U},\, P) \coloneqq \prod_{(\alpha_0,\, \dots,\, \alpha_n)\in\Lambda^{n+1}} P(U_{\alpha_0\dots\alpha_n})$$

と定義し，

$$\begin{aligned}&\delta^{n+1}\colon \check{C}^n(\mathcal{U},\, P) \longrightarrow \check{C}^{n+1}(\mathcal{U},\, P),\\ &\left(x_{\alpha_0\dots\alpha_n}\right)_{(\alpha_0,\, \dots,\, \alpha_n)} \longmapsto \left(\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j P(U_{\alpha_0\dots\alpha_{n+1}} \hookrightarrow U_{\alpha_0\dots\hat{\alpha_j}\dots\alpha_{n+1}})(x_{\alpha_0\dots\hat{\alpha_j}\dots\alpha_{n+1}})\right)_{(\alpha_0,\, \dots,\, \alpha_{n+1})}\end{aligned} \tag{A.3.1}$$

と定義すると $\delta^{n+1}\circ\delta^n = 0$ であるから，$R\text{-}\mathbf{Mod}$ の図式

$$\cdots \xrightarrow{\delta^{n-1}} \check{C}^{n-1}(\mathcal{U},\, P) \xrightarrow{\delta^n} \check{C}^n(\mathcal{U},\, P) \xrightarrow{\delta^{n+1}} \check{C}^{n+1}(\mathcal{U},\, P) \xrightarrow{\delta^{n+2}} \cdots$$

はコチェイン複体である．この複体を **Čech 複体**と呼ぶ．

定義 A.5: Čech コホモロジー

Čech 複体 $\left(\check{C}^\bullet(\mathcal{U},\, P),\, \delta^\bullet\right)$ のコホモロジーのことを X の開被覆 $\mathcal{U}$ に関する P 係数 **Čech コホモロジー**と呼び，$\boldsymbol{\check{H}^\bullet(\mathcal{U},\, P)}$ と書く．

【例 A.3.1】Čech-de Rham 複体

X を C^∞ 多様体とし，X の開被覆 $\mathcal{U}$ をとる．**【例 A.2.2】**において導入した前層 $\Omega_X^q\colon \mathbb{O}_X^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbb{R}\text{-}\mathbf{Mod}$ について，複体 $\left(\check{C}^\bullet(\mathcal{U},\, \Omega_X^q),\ \delta^\bullet\right)$ のことを **Čech-de Rham 複体**と呼ぶ．$\delta\colon \check{C}^n(\mathcal{U},\, \Omega_X^l)$ の定義 (A.3.1) に $\underline{(-1)^l\ をつける}$ことで，これは二重複体の構造[a]を持つ：

$$\begin{array}{ccccccccc}
\check{C}^0(\mathcal{U},\, \Omega_X^0) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \check{C}^0(\mathcal{U},\, \Omega_X^1) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \check{C}^0(\mathcal{U},\, \Omega_X^{\dim X}) & \longrightarrow & 0\\
\downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \\
\check{C}^1(\mathcal{U},\, \Omega_X^0) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \check{C}^1(\mathcal{U},\, \Omega_X^1) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \check{C}^1(\mathcal{U},\, \Omega_X^{\dim X}) & \longrightarrow & 0\\
\downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \\
\check{C}^2(\mathcal{U},\, \Omega_X^0) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \check{C}^2(\mathcal{U},\, \Omega_X^1) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \check{C}^2(\mathcal{U},\, \Omega_X^{\dim X}) & \longrightarrow & 0\\
\downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & &
\end{array}$$

[a] $(-1)^l$ の因子は $\mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d} = 0$ を成り立たせるために必要である．

命題 A.1: 良い被覆に関する Čech コホモロジー

定数前層 $\mathbb{R}_X : \mathbb{O}_X \longrightarrow \mathbb{R}\textbf{-Mod}$ について，もし $\mathcal{U}$ が良い被覆ならば

$$H^{\bullet}_{\mathrm{dR}}(X;\,\mathbb{R}) \cong \check{H}^{\bullet}(\mathcal{U};\,\mathbb{R}_X)$$

が成り立つ．

証明 ■

A.4 Deligne-Beilinson コホモロジー

一般論には立ち入らず，[45, p.21, Appendix A] を参考に，本文中で必要になる最小限だけ Deligne-Beilinson コホモロジーを導入する．

C^{∞} 多様体 X とその開被覆 $\mathcal{U}$ を一つ固定する．まず，Čech-de Rham 複体の de Rham 複体成分を次数 -1 に拡張する：

$$\check{C}^n(\mathcal{U},\,\Omega_X^{-1}) \coloneqq \check{C}^n(\mathcal{U},\,\mathbb{Z}_X)$$

ただし $\mathbb{Z}_X$ は圏 $\mathbb{R}\textbf{-Mod}$ の定数前層である．そして

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_{-1} \colon \check{C}^n(\mathcal{U},\,\Omega_X^{-1}) &\longrightarrow \check{C}^n(\mathcal{U},\,\Omega_X^{0}), \\ \big(c_{\alpha_0\ldots\alpha_n}\big)_{(\alpha_0,\,\ldots,\,\alpha_n)} &\longmapsto \big((x \longmapsto c_{\alpha_0\ldots\alpha_n})\big)_{(\alpha_0,\,\ldots,\,\alpha_n)} \end{aligned}$$

と定義することで，二重複体

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\check{C}^0(\mathcal{U},\,\Omega_X^{-1}) & \xrightarrow{\mathrm{d}_{-1}} & \check{C}^0(\mathcal{U},\,\Omega_X^{0}) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \check{C}^0(\mathcal{U},\,\Omega_X^{1}) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \check{C}^0(\mathcal{U},\,\Omega_X^{\dim X}) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \\
\check{C}^1(\mathcal{U},\,\Omega_X^{-1}) & \xrightarrow{\mathrm{d}_{-1}} & \check{C}^1(\mathcal{U},\,\Omega_X^{0}) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \check{C}^1(\mathcal{U},\,\Omega_X^{1}) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \check{C}^1(\mathcal{U},\,\Omega_X^{\dim X}) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \\
\check{C}^2(\mathcal{U},\,\Omega_X^{-1}) & \xrightarrow{\mathrm{d}_{-1}} & \check{C}^2(\mathcal{U},\,\Omega_X^{0}) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \check{C}^2(\mathcal{U},\,\Omega_X^{1}) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \check{C}^2(\mathcal{U},\,\Omega_X^{\dim X}) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & &
\end{array}$$

を得る．ここから，ある $0 \le p \le \dim X + 1$ に対して

$$C_{\mathrm{D}}{}_p^q \coloneqq \begin{cases} \bigoplus_{n+m=q-1} \check{C}^n(\mathcal{U},\,\Omega_X^m), & 0 \le q \le p \\ \bigoplus_{\substack{n+m=p-1,\\ m \le p-1}} \check{C}^n(\mathcal{U},\,\Omega_X^m), & 0 \le q > p \end{cases}$$

と定義し $D \coloneqq \mathrm{d} + (-1)^{\deg}\delta$ とおくと，図式

$$\cdots \xrightarrow{D} C_{\mathrm{D}}{}_p^q \xrightarrow{D} C_{\mathrm{D}}{}_p^{q+1} \xrightarrow{D} \cdots$$

はコチェイン複体になる．

定義 A.6: Deligne-Beilinson コホモロジー

$0 \leq p \leq \dim X + 1$ を与える．

上述の複体 $\left(C_{\mathrm{D}}{}^{\bullet}_{p},\ \mathcal{U},\ D\right)$ を開被覆 $\mathcal{U}$ に関する **Deligne-Beilinson 複体**，そのコホモロジーを **Deligne-Beilinson コホモロジー**と呼ぶ．記号として $\boldsymbol{H_{\mathrm{D}}^{\bullet}\left(C_{\mathrm{D}p}, \mathcal{U}\right)}$ と書く．

標準的射影 $\pi^q \colon C_{\mathrm{D}}{}^q_p \longrightarrow \check{C}^q(\mathcal{U},\ \Omega_X^{-1})$ はチェイン写像

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\pi"] & C_{\mathrm{D}}{}^q_p \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\pi"] & C_{\mathrm{D}}{}^{q+1}_p \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\pi"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\delta"] & C_{\mathrm{D}}{}^q_p \arrow[r, "\delta"] & C_{\mathrm{D}}{}^{q+1}_p \arrow[r, "\delta"] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

となるので，誘導準同型

$$
H_{\mathrm{D}}^{q}\left(C_{\mathrm{D}p}, \mathcal{U}\right) \longrightarrow \check{H}^{q}\left(\mathcal{U},\ \mathbb{Z}_X\right)
$$

がある．

命題 A.2: Deligne-Beilinson コホモロジーと Čech コホモロジー

$0 \leq p \leq \dim X + 1$ を与える．

(1) $q < p$ ならば

$$
H_{\mathrm{D}}^{q}\left(C_{\mathrm{D}p}, \mathcal{U}\right) \cong \check{H}^{q-1}\left(\mathcal{U},\ \mathbb{R}/\mathbb{Z}\right)
$$

(2) $q > p$ ならば

$$
H_{\mathrm{D}}^{q}\left(C_{\mathrm{D}p}, \mathcal{U}\right) \cong \check{H}^{q-1}\left(\mathcal{U},\ \mathbb{Z}\right)
$$

(3) $q = p$ ならば，$\mathbb{Z}$ 加群の完全列

$$
0 \longrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{closed global } (p-1)\text{-forms} \\ \text{with integral periods}\end{matrix}\right\} \longrightarrow \Omega^{p-1}(X;\, \mathbb{R}) \longrightarrow H_{\mathrm{D}}^{p}\left(C_{\mathrm{D}p}, \mathcal{U}\right) \longrightarrow \check{H}^{p}\left(\mathcal{U},\ \mathbb{Z}\right) \quad (\text{exact})
$$

が成り立つ．

証明　(1)

■

命題 A.3: 良い被覆に関する Deligne-Beilinson コホモロジー

$H_{\mathrm{D}}^{\bullet}\left(C_{\mathrm{D}p}, \mathcal{U}\right)$ は良い被覆 $\mathcal{U}$ の取り方によらない．

証明 ■

付録 B

ベクトル場の話

C^∞ 多様体 M 上の C^∞ 関数全体の集合のことを $C^\infty(M)$ と書く．

C^∞ 多様体の 1 つの極大 C^∞ アトラスを $\boldsymbol{C^\infty}$ **構造** (smooth structure)[*1] と呼ぶことにする．集合 M の上に C^∞ 構造を与えるには，例えば次のようにすればよい [6, p.21, Lemma 1.35]：

補題 B.1: C^∞ 構造の構成

- 集合 M
- M の部分集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$
- 写像の族 $\{\varphi_\lambda\colon U_\lambda \longrightarrow \mathbb{R}^n\}_{\lambda\in\Lambda}$

の 3 つ組であって以下の条件を充たすものを与える：

(DS-1) $\forall\lambda \in \Lambda$ に対して $\varphi_\lambda(U_\lambda) \subset \mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合[a]であり，$\varphi_\lambda\colon U_\lambda \longrightarrow \varphi_\lambda(U_\lambda)$ は全単射である．

(DS-2) $\forall\alpha, \beta \in \Lambda$ に対して $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta), \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である．

(DS-3) $\forall\alpha, \beta \in \Lambda$ に対して，$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ならば $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}\colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ は C^∞ 級である．

(DS-4) 添字集合 Λ の可算濃度の部分集合 $I \subset \Lambda$ が存在して $\{U_i\}_{i\in I}$ が M の被覆になる．

(DS-5) $p, q \in M$ が $p \neq q$ ならば，ある $\lambda \in \Lambda$ が存在して $p, q \in U_\lambda$ を充たすか，またはある $\alpha, \beta \in \Lambda$ が存在して $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ かつ $p \in U_\alpha$, $q \in U_\beta$ を充たす．

このとき，M の C^∞ 構造であって，$\forall\lambda \in \Lambda$ に対して $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ を C^∞ チャートとして持つものが一意的に存在する．

[a] いつものように，$\mathbb{R}^n$ には Euclid 位相を入れる．

証明 **位相の構成**

$\mathbb{R}^n$ の Euclid 位相を $\mathscr{O}_{\mathbb{R}^n}$ と表記する．集合

$$\mathscr{B} := \left\{ \varphi_\lambda^{-1}(U) \;\middle|\; \lambda \in \Lambda,\ U \in \mathscr{O}_{\mathbb{R}^n} \right\}$$

が開基の公理 **(B1)**, **(B2)** を充たすことを確認する．

[*1] **微分構造** (differential structure) ということもある．

(B1)　**(DS-4)** より明らか．

(B2)　$B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ を任意にとる．このとき $\mathscr{B}$ の定義から，ある $\alpha, \beta \in \Lambda$ および $U, V \in \mathscr{O}_{\mathbb{R}^n}$ が存在して $B_1 = \varphi_\alpha^{-1}(U)$, $B_2 = \varphi_\beta^{-1}(V)$ と書ける．故に

$$\begin{aligned} B_1 \cap B_2 &= \varphi_\alpha^{-1}(U) \cap \varphi_\beta^{-1}(V) \\ &= \varphi_\alpha^{-1}\bigl(U \cap (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(V)\bigr) \\ &= \varphi_\alpha^{-1}\bigl(U \cap (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1}(V)\bigr) \end{aligned}$$

が成り立つが，**(DS-3)** より $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ は連続なので $(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1}(V) \in \mathscr{O}_{\mathbb{R}^n}$ である．よって

$$B_1 \cap B_2 \in \mathscr{B}$$

であり，**(B2)** が示された．

従って $\mathscr{B}$ を開基とする M の位相 $\mathscr{O}_M$ が存在する．

φ_λ が同相写像であること

$\forall \lambda \in \Lambda$ を 1 つ固定する．$\mathscr{O}_M$ の構成と補題??-(4) より，$\forall V \in \mathscr{O}_{\mathbb{R}^n}$ に対して $\varphi_\lambda^{-1}\bigl(V \cap \varphi_\lambda(U_\lambda)\bigr) = \varphi_\lambda^{-1}(V) \cap U_\lambda$ は U_λ の開集合である[*2]．i.e. $\varphi_\lambda \colon U_\lambda \longrightarrow \varphi_\lambda(U_\lambda)$ は連続である．

$\forall B \in \mathscr{B}$ をとる．このとき $\varphi_\lambda(B \cap U_\lambda) = \varphi_\lambda(B) \cap \varphi_\lambda(U_\lambda)$ が成り立つが，$\mathscr{O}_M$ の定義より $\varphi_\lambda(B) \in \mathscr{O}_{\mathbb{R}^n}$ なので $\varphi_\lambda(B \cap U_\lambda)$ は $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ の開集合である．相対位相の定義と de Morgan 則より U_λ の任意の開集合は $B \cap U_\lambda$ の形をした部分集合の和集合で書けるので，位相空間の公理から φ_λ は U_λ の開集合を $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ の開集合に移す．i.e. $\varphi_\lambda \colon U_\lambda \longrightarrow \varphi_\lambda(U_\lambda)$ は連続な全単射でかつ開写像であるから同相写像である．

Hausdorff 性

位相空間 $(M, \mathscr{O}_M)$ が Hausdorff 空間であることを示す．M の異なる 2 点 p, q を勝手にとる．このとき **(DS-5)** より，

- ある $\lambda \in \Lambda$ が存在して $p, q \in U_\lambda$ を充たす
- ある $\alpha, \beta \in \Lambda$ が存在して $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ かつ $p \in U_\alpha,\ q \in U_\beta$ を充たす

のいずれかである．後者ならば証明することは何もない．

前者の場合を考える．このとき $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合だから，$\mathbb{R}^n$ の Hausdorff 性から $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ も Hausdorff 空間であり，従って $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ の開集合 $U, V \subset \varphi_\lambda(U_\lambda)$ であって $\varphi_\lambda(p) \in U$ かつ $\varphi_\lambda(q) \in V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ を充たすものが存在する．このとき $\varphi_\lambda^{-1}(U) \cap \varphi_\lambda^{-1}(V) = \varphi_\lambda^{-1}(U \cap V) = \emptyset$ で，かつ $\mathscr{O}_M$ の構成から $\varphi_\lambda^{-1}(U), \varphi_\lambda^{-1}(V) \subset M$ はどちらも M の開集合である．そのうえ $p \in \varphi_\lambda^{-1}(U)$ かつ $q \in \varphi_\lambda^{-1}(V)$ が成り立つので M は Hausdorff 空間である．

第 2 可算性

$\mathbb{R}^n$ は第 2 可算なので，$\forall \lambda \in \Lambda$ に対して $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ も第 2 可算である．$\varphi_\lambda \colon U_\lambda \longrightarrow \varphi_\lambda(U_\lambda)$ は同相写像なので，U_λ も第 2 可算である．従って **(DS-4)** から M も第 2 可算である．

以上の考察から，位相空間 $(M, \mathscr{O}_M)$ が位相多様体であることが示された．さらに **(DS-3)** より $\mathcal{A} \coloneqq \bigl\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\bigr\}_{\lambda \in \Lambda}$ は $(M, \mathscr{O}_M)$ の C^∞ アトラスであることもわかる．

■

[*2] U_λ には $(M, \mathscr{O}_M)$ からの相対位相が，$\varphi_\lambda(U_\lambda)$ には $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ からの相対位相が入っている．

補題 B.1 とほとんど同じ手順で境界付き多様体を作ることもできる．

$$\mathbb{H}^n := \{ (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n \geq 0 \}$$

とおく．

補題 B.2: 境界付き多様体の C^∞ 構造の構成

- 集合 M
- M の部分集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$
- 写像の族 $\{\varphi_\lambda \colon U_\lambda \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ or } \mathbb{H}^n\}_{\lambda \in \Lambda}$

の 3 つ組であって以下の条件を充たすものを与える：

(BDS-1) $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して $\varphi_\lambda(U_\lambda) \subset \mathbb{R}^n$（resp. $\mathbb{H}^n$）は $\mathbb{R}^n$（resp. $\mathbb{H}^n$）の開集合[a]であり，$\varphi_\lambda \colon U_\lambda \longrightarrow \varphi_\lambda(U_\lambda)$ は全単射である．

(BDS-2) $\forall \alpha, \beta \in \Lambda$ に対して $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta), \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$（resp. $\mathbb{H}^n$）は $\mathbb{R}^n$（resp. $\mathbb{H}^n$）の開集合である．

(BDS-3) $\forall \alpha, \beta \in \Lambda$ に対して，$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ならば $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ は C^∞ 級である．

(BDS-4) 添字集合 Λ の可算濃度の部分集合 $I \subset \Lambda$ が存在して $\{U_i\}_{i \in I}$ が M の被覆になる．

(BDS-5) $p, q \in M$ が $p \neq q$ ならば，ある $\lambda \in \Lambda$ が存在して $p, q \in U_\lambda$ を充たすか，またはある $\alpha, \beta \in \Lambda$ が存在して $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ かつ $p \in U_\alpha$, $q \in U_\beta$ を充たす．

このとき，M の C^∞ 構造であって，$\forall \lambda \in \Lambda$ に対して $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ を C^∞ チャートとして持つものが一意的に存在する．

[a] いつものように，$\mathbb{R}^n$ には Euclid 位相を入れ，$\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^n$ には $\mathbb{R}^n$ からの相対位相を入れる．

証明 補題 B.1 の証明において「$\mathbb{R}^n$」を「$\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{H}^n$」に置き換えれば良い． ■

B.1 接束

境界あり/なし C^∞ 多様体 M を与える．M の**接束** (tangent bundle) とは集合

$$\boldsymbol{TM} := \coprod_{p \in M} T_p M$$

のことである．TM の任意の元は $p \in M$, $v \in T_p M$ を用いて (p, v) と書かれる．このことから，**射影** (projection) と呼ばれる全射

$$\boldsymbol{\pi} \colon \boldsymbol{TM} \longrightarrow M,\ (p, v) \longmapsto p$$

が自然に定義できる．

命題 B.1: 接束の C^∞ 構造

任意の n 次元境界あり/なし C^∞ 多様体 M に対して，TM は π が C^∞ 級となるような自然な $2n$ 次元の C^∞ 構造を持つ．

<u>証明</u> まず M が境界を持たないとする．M の C^∞ 構造を $\{(U_\alpha,\,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ と書く．写像の族

$$\left\{\tilde{\varphi}_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow \mathbb{R}^{2n},\ \left(p,\, v^\mu \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p\right) \longmapsto \bigl(x^1(p),\,\dots,\,x^n(p),\,v^1,\,\dots,\,v^n\bigr)\right\}_{\alpha\in\Lambda}$$

を定める．ただし (x^μ) はチャート $(U_\alpha,\,\varphi_\alpha)$ の座標関数である．このとき

- 集合 TM
- TM の部分集合族 $\left\{\,\pi^{-1}(U_\alpha)\,\right\}_{\alpha\in\Lambda}$
- 写像の族 $\left\{\,\tilde{\varphi}_\alpha\,\right\}_{\alpha\in\Lambda}$

の 3 つ組が補題 B.1 の 5 条件を充たすことを確認する．

(DS-1) $\forall\alpha\in\Lambda$ に対して $(U_\alpha,\,\varphi_\alpha)$ は M の C^∞ チャートなので $\varphi_\alpha(U_\alpha)\subset\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である．ゆえに積位相の定義から $\tilde{\varphi}_\alpha\bigl(\pi^{-1}(U_\alpha)\bigr)=\varphi_\alpha(U_\alpha)\times\mathbb{R}^n\subset\mathbb{R}^{2n}$ は $\mathbb{R}^{2n}$ の開集合．また，写像

$$\tilde{\varphi}_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha)\longrightarrow\varphi_\alpha(U_\alpha)\times\mathbb{R}^n,\ \left(p,\, v^\mu \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p\right) \longmapsto \bigl(x^1(p),\,\dots,\,x^n(p),\,v^1,\,\dots,\,v^n\bigr)$$

は写像

$$\tilde{\varphi_\alpha}^{-1}\colon \varphi_\alpha(U_\alpha)\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\pi^{-1}(U_\alpha),\ \bigl(x^1,\,\dots,\,x^n,\,v^1,\,\dots,\,v^n\bigr)\longmapsto\left(\varphi_\alpha^{-1}(x^1,\,\dots,\,x^n),\,v^\mu\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\varphi_\alpha^{-1}(x^1,\,\dots,\,x^n)}\right)$$

を逆写像に持つので全単射である．

(DS-2, 3) $\forall\alpha,\,\beta\in\Lambda$ に対して

$$\tilde{\varphi}_\alpha\bigl(\pi^{-1}(U_\alpha)\cap\pi^{-1}(U_\beta)\bigr)=\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{R}^n,$$
$$\tilde{\varphi}_\beta\bigl(\pi^{-1}(U_\alpha)\cap\pi^{-1}(U_\beta)\bigr)=\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{R}^n$$

はどちらも $\mathbb{R}^{2n}$ の開集合である．さらに自然基底の変換則より

$$\begin{aligned}&\tilde{\varphi}_\beta\circ\tilde{\varphi}_\alpha^{-1}(x^1,\,\dots,\,x^n,\,v^1,\,\dots,\,v^n)\\&=\left(y^1(x),\,\dots,\,y^n(x),\,\frac{\partial y^1}{\partial x^\mu}(x)v^\mu,\,\dots,\,\frac{\partial y^n}{\partial x^\mu}(x)v^\mu\right)\end{aligned}$$

なので $\tilde{\varphi}_\beta\circ\tilde{\varphi}_\alpha^{-1}$ は C^∞ 級である．ただしチャート $(U_\alpha,\,\varphi_\alpha),\,(U_\beta,\,\varphi_\beta)$ の座標関数をそれぞれ $(x^\mu),\,(y^\mu)$ と書き，$x\coloneqq\varphi_\alpha^{-1}(x^1,\,\dots,\,x^n)$ とおいた．

(DS-4) $\{(U_\alpha,\,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ は M のアトラスなので，高々可算濃度の部分集合 $I\subset\Lambda$ が存在して $\{\,U_i\,\}_{i\in I}$ が M の被覆になる．このとき

$$TM=\coprod_{p\in\bigcup_{i\in I}U_i}T_pM=\bigcup_{i\in I}\coprod_{p_i\in U_i}T_{p_i}M=\bigcup_{i\in I}\pi^{-1}(U_i)$$

が言える．

(DS-5) TM の任意の異なる 2 点 $(p,\, v),\, (q,\, w)$ をとる．$p = q$ ならば，$p \in U_\alpha$ を充たす $\alpha \in \Lambda$ に対して[*3] $(p,\, v),\, (q,\, w) \in \pi^{-1}(\{p\}) \subset \pi^{-1}(U_\alpha)$ が成り立つ．$p \neq q$ ならば，$U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ かつ $p \in U_\alpha,\, q \in U_\beta$ を充たすような $\alpha,\, \beta \in \Lambda$ が存在する[*4]．このとき，TM の定義から明らかに $\pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta) = \emptyset$ でかつ $(p,\, v) \in \pi^{-1}(U_\alpha),\, (q,\, w) \in \pi^{-1}(U_\beta)$ が成り立つ．

次に M が境界を持つとする．M の C^∞ 構造を $\{(U_\alpha,\, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ と書き，C^∞ チャート $(U_\alpha,\, \varphi_\alpha)$ のうち $\varphi_\alpha(U_\alpha) \approx \mathbb{R}^n$ であるものを**内部チャート**，$\varphi_\alpha(U_\alpha) \approx \mathbb{H}^n$ であるものを**境界チャート**と呼ぶ．内部チャートに関しては M が境界を持たない場合と同様に $\tilde{\varphi}_\alpha$ を定義し，境界チャートに関しては

$$\tilde{\varphi}_\alpha \colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{H}^n = \mathbb{H}^{2n},\quad \left(p,\, v^\mu \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p\right) \longmapsto \bigl(v^1,\, \dots,\, v^n,\, x^1(p),\, \dots,\, x^n(p)\bigr)$$

と定義する[*5]ことで得られる

- 集合 TM
- TM の部分集合族 $\left\{\pi^{-1}(U_\alpha)\right\}_{\alpha \in \Lambda}$
- 写像の族 $\{\tilde{\varphi}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$

の 3 つ組が補題 B.2 の 5 条件を充たすことを示せば良いが，議論は M が境界を持たない場合と同様である． ■

B.2　ベクトル場の定義

定義 B.1: ベクトル場

境界あり/なし C^∞ 多様体 M を与える．

- M 上の**ベクトル場** (vector field) とは，接束 TM の切断のことを言う．i.e. 連続写像[a] $X \colon M \longrightarrow TM$ であって $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$ を充たすもののこと．
- M 上の **C^∞ ベクトル場**とは，M 上のベクトル場 X であって，TM に命題 B.1 の C^∞ 構造を入れたときに C^∞ 写像となるもののこと．
- M 上のベクトル場 X の**台** (support) とは，閉集合[b]

$$\mathbf{supp}\, \boldsymbol{X} \coloneqq \overline{\left\{\, p \in M \;\middle|\; X_p \neq 0 \,\right\}}$$

  のこと．ただし $\bar{\cdot}$ は閉包を取ることを意味する．特に $\mathrm{supp}\, X$ がコンパクト集合であるとき，X は**コンパクト台を持つ** (compactly supported) と言う．
- M の任意のベクトル場 X および任意のチャート $\bigl(U,\, (x^\mu)\bigr)$ を与える．このとき n 個の関数 $X^\mu \colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$X_p \eqqcolon \boldsymbol{X^\mu(p)} \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p$$

---

*3 $\{U_\alpha\}$ は M の開被覆なので，このような α は必ず存在する．
*4 M の極大アトラスをとっているため．
*5 $p \in \partial M$ においても $T_pM \cong T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$（$\varphi$ は境界チャートの局所座標）が成り立つことが証明できる．

によって定義し，X の**成分関数** (component function) と呼ぶ．

[a] TM の位相は命題 B.1 で構成したものを採用する．

[b] ここで言う 0 とは，厳密には $(p,\, 0) \in TM$ のことである．一点集合 $\{(p,\, 0)\}$ はコンパクトだが，TM は命題 B.1 より Hausdorff 空間なので $\{\,(p,\, 0)\,\}$ は閉集合でもある．故に $TM \setminus \{(p,\, 0)\}$ は開集合であり，$X\colon M \longrightarrow TM$ は連続写像なので $X^{-1}(TM \setminus \{0\})$ も開集合である．これの閉包を取ることで $\operatorname{supp} X$ が得られる．

境界あり/なし C^∞ 多様体 M 上の C^∞ ベクトル場全体の集合を $\boldsymbol{\mathfrak{X}(M)}$ と書く．

！ ベクトル場 $X\colon M \longrightarrow TM$ による点 $p \in M$ の像を $X(p)$ と書く代わりに $\boldsymbol{X_p}$ と書く．さらに，混乱の恐れがないときは $X_p = (p,\, v)\quad (v \in T_pM)$ のとき v のことを X_p と書く場合がある．

命題 B.2: ベクトル場の C^∞ 性

境界あり/なし C^∞ 多様体 M と M の任意の C^∞ チャート $(U,\, (x^\mu))$ と M 上のベクトル場 X を与える．このとき，制限 $X|_U$ が C^∞ ベクトル場となる必要十分条件は X の U 上の成分関数が全て C^∞ 関数になることである．

証明 命題 B.1 の証明における TM の C^∞ チャートの構成より明らか． ■

【例 B.2.1】座標ベクトル場

C^∞ 多様体 M の任意のチャート $\bigl(U,\, (x^\mu)\bigr)$ に対して，写像

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \colon U \longrightarrow TM,\; p \longmapsto \left(p,\; \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p\right)$$

は U 上の C^∞ ベクトル場となる．C^∞ 性は，成分関数が $p \longmapsto \delta_\mu^\nu$ なる定数関数なので命題 B.2 から従う．

命題 B.3: $\mathfrak{X}(M)$ の加群としての構造

- $\mathfrak{X}(M)$ 上の加法とスカラー乗法を

$$(X+Y)_p \coloneqq (p,\, X_p + Y_p)$$
$$(\lambda X)_p \coloneqq (p,\, \lambda X_p)$$

と定義すると $\mathfrak{X}(M)$ は $\mathbb{R}$ ベクトル空間になる．

- $\mathfrak{X}(M)$ 上の $C^\infty(M)$ に関する加法とスカラー乗法を

$$(X+Y)_p \coloneqq (p,\, X_p + Y_p)$$
$$(fX)_p \coloneqq (p,\, f(p)X_p)$$

と定義すると $\mathfrak{X}(M)$ は左 $C^\infty(M)$ 加群になる．

証明 命題 B.2 および $C^\infty(M)$ が和と積

$$(f+g)(p) := f(p)+g(p)$$
$$(fg)(p) := f(p)g(p)$$

に関して環になることから従う．加法単位元はどちらの場合も関数 $p \longmapsto (p,\, 0)$ である． ■

さらに，後で述べるが，$\mathfrak{X}(M)$ は Lie ブラケットについて Lie 代数をなす．

定義 B.2: フレーム

n 次元 C^∞ 多様体 M を与える．

- ベクトル場[a]の順序付き k 対 $(X_1,\, \dots,\, X_k)$ が部分集合 $A \subset M$ 上**線型独立** (linearly independent) であるとは，$\forall p \in A$ において $(X_1|_p,\, \dots,\, X_k|_p)$ が $\mathbb{R}$ ベクトル空間 T_pM の元として線型独立であることを言う．
- M の開集合 $U \subset M$ 上の**局所フレーム** (local frame) とは，U 上線型独立なベクトル場[b]の n 対 $(E_1,\, \dots,\, E_n)$ であって，$\forall p \in U$ において $(E_1|_p,\, \dots,\, E_n|_p)$ が T_pM の基底となるもののこと．
- $U = M$ 上の局所フレームのことを**大域的フレーム** (global frame) と呼ぶ．
- 局所フレーム $(E_1,\, \dots,\, E_n)$ であって E_i が C^∞ ベクトル場であるもののことを $\boldsymbol{C^\infty}$ **フレーム** (smooth frame) と呼ぶ．

[a] C^∞ とは限らない
[b] C^∞ とは限らない

定義 B.3: 平行化可能性

n 次元 C^∞ 多様体 M が C^∞ の大域的フレームを持つとき，M は**平行化可能** (parallelizable) であると言う．

B.2.1 C^∞ 関数の微分としてのベクトル場

ベクトル場の定義に $C^\infty(M)$ に作用する微分作用素としての意味を持たせることができる．これによって，微分方程式とベクトル場の繋がりが明らかになる．

任意の M 上のベクトル場 X および M の開集合 $U \subset M$ 上定義された任意の C^∞ 関数 $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ を与える．このとき関数[*6]

$$Xf\colon U \longrightarrow \mathbb{R},\; p \longmapsto X_p f$$

を考えることができる．

[*6] この時点では C^∞ とは限らない．

命題 B.4: ベクトル場の C^∞ 性

境界あり/なし C^∞ 多様体 M と M の任意の C^∞ チャート $(U, (x^\mu))$ と M 上のベクトル場 X を与える．このとき以下の 3 つは同値である：

(1) X は C^∞ ベクトル場
(2) $\forall f \in C^\infty(M)$ に対して，関数 $Xf\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ は M 上 C^∞ 級である．
(3) 任意の開集合 $U \subset M$ および任意の $f \in C^\infty(U)$ に対して，関数 $Xf\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ は U 上 C^∞ 級である．

証明 [6, p.180, Proposition 8.14] を参照． ■

命題 B.4 より，$\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ は線型写像

$$X\colon C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M),\ f \longmapsto Xf$$

を誘導することが分かった．その上，接空間の元の Leibniz 則から

$$X(fg) = f\,Xg + g\,Xf$$

が成り立つこともわかる．このことから $\mathbb{R}$-線型写像 $X\colon C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ は**微分** (derivation) である．逆に，$C^\infty(M)$ に作用する任意の微分は次の意味であるベクトル場と同一視できる：

命題 B.5: 微分とベクトル場

写像 $D\colon C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ を与える．このとき以下の 2 つは同値である：

(1) D は微分である，i.e. $\mathbb{R}$-線型写像でかつ Leibniz 則を充たす．
(2) ある $X \in \mathfrak{X}(M)$ が存在して，$\forall f \in C^\infty(M)$ に対して $D(f) = Xf$ が成り立つ．

証明 (1) $\Longleftarrow$ (2) は既に示したので (1) $\Longrightarrow$ (2) を示す．

まず，写像

$$X\colon p \longmapsto \bigl(f \longmapsto D(f)(p)\bigr)$$

がベクトル場であることを示す．そのためには $\forall p \in M$ に対して $X_p \in T_pM$ であること，i.e. $X(p)$ が $\forall f, g \in C^\infty(M),\ \forall\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} X_p(f+g) &= X_p(f) + X_p(g) \\ X_p(\lambda f) &= \lambda X_p(f) \\ X_p(fg) &= X_p(f)\,g(p) + f(p)\,X_p(g) \end{aligned}$$

を充たすことを示せば良いが，$D\colon C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ が微分であることからこれらは明らかである．D の定義から $\forall f \in C^\infty(M)$ に対して $Xf = Df \in C^\infty(M)$ なので，命題 B.4 から $X \in \mathfrak{X}(M)$ も言える． ■

B.2.2 ベクトル場と C^∞ 写像

$M,\, N$ を C^∞ 多様体，$F\colon M \longrightarrow N$ を C^∞ 写像とする．このとき F によって $\mathfrak{X}(M)$ と $\mathfrak{X}(N)$ の間の自然な対応が生まれる場合がある[*7]ことを見る．

まず，接ベクトルの微分を思いだそう．これは $\forall p \in M$ に対して定まる

$$T_pF\colon T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N,\ v \longmapsto \bigl(f \mapsto v(f \circ F)\bigr)$$

という対応であり，基点付き C^∞ 多様体の圏 $\mathbf{Diff}_0$ から $\mathbb{R}$-ベクトル空間の圏 $\mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$ への関手

$$T_p\colon \mathbf{Diff}_0 \longrightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$$

を構成するのだった．

定義 B.4: F-related

境界あり/なし C^∞ 多様体 $M,\, N$ と C^∞ 写像 $F\colon M \longrightarrow N$ を与える．
M 上のベクトル場[a] X と N 上のベクトル場[b] Y が **F-related** であるとは，$\forall p \in M$ に対して

$$T_pF(X_p) = Y_{F(p)}$$

が成り立つことと定義する．

[a] C^∞ でなくとも良い．
[b] C^∞ でなくとも良い．

【例 B.2.2】

C^∞ 写像 $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (\cos t,\, \sin t)$ を考える．このとき，$\mathbb{R}$ のチャート $\bigl(\mathbb{R},\, (t)\bigr)$ による座標ベクトル場

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$$

は，$\mathbb{R}^2$ のチャート $\bigl(\mathbb{R}^2,\, (x,\, y)\bigr)$ において

$$Y \coloneqq -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$$

と定義される[a] C^∞ ベクトル場 Y と F-related である．実際，$\forall t \in \mathbb{R}$ および $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ に対して

$$\begin{aligned}
T_tF\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_t\right)(f) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigl(f(\cos t,\, \sin t)\bigr) \\
&= \frac{\mathrm{d}(\cos t)}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial x}(\cos t,\, \sin t) + \frac{\mathrm{d}(\sin t)}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial y}(\cos t,\, \sin t) \\
&= -\sin t\,\frac{\partial f}{\partial x}\bigl(F(t)\bigr) + \cos t\,\frac{\partial f}{\partial y}\bigl(F(t)\bigr) \\
&= Y^1\bigl(F(t)\bigr)\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{F(t)}(f) + Y^2\bigl(F(t)\bigr)\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{F(t)}(f) \\
&= Y_{F(t)}(f)
\end{aligned}$$

[*7] しかし，いつでも自然に対応するとは限らない．

が成り立つ．

---

[a] 成分関数が それぞれ $Y^1 \colon (x,\, y) \longmapsto -y,\ Y^2 \colon (x,\, y) \longmapsto x$ だということ．

命題 B.6: F-related の特徴付け

境界あり/なし C^∞ 多様体 $M,\, N$ と C^∞ 写像 $F \colon M \longrightarrow N$ を与える．
$X \in \mathfrak{X}(M)$ と $Y \in \mathfrak{X}(N)$ が F-related である必要十分条件は，N の任意の開集合 $U \subset N$ に対して，$\forall f \in C^\infty(U)$ が

$$X(f \circ F) = (Yf) \circ F \in C^\infty(M)$$

を充たすことである．

証明 $\forall p \in M$ と，$F(p) \in N$ の任意の開近傍上で定義された任意の C^∞ 関数 f に対して

$$X(f \circ F)(p) = X_p(f \circ F) = T_pF(X_p)(f),$$
$$\bigl((Yf) \circ F\bigr)(p) = (Yf)\bigl(F(p)\bigr) = Y_{F(p)}(f)$$

が成り立つ． ■

F-relrated なベクトル場は必ず存在するとは限らない．

命題 B.7: C^∞ ベクトル場の押し出し

$F \colon M \longrightarrow N$ が微分同相写像ならば，$\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して F-related な $Y \in \mathfrak{X}(N)$ が一意的に存在する．

証明 図式

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "X"] \arrow[d, "F"'] & TM \arrow[d, "T_pF"] \\
N \arrow[r, dashed] & TN
\end{tikzcd}$$

において $p = F^{-1}(q)$ とすることで，

$$Y \colon N \longrightarrow TN,\ q \longmapsto \Bigl(q,\, T_{F^{-1}(q)}F\bigl(X_{F^{-1}(q)}\bigr)\Bigr)$$

が所望の $Y \in \mathfrak{X}(N)$ となる． ■

命題 B.7 で得られた Y は F による X の**押し出し** (pushforward) と呼ばれ，よく $\boldsymbol{F_* X}$ と略記される．

系 B.1: 押し出しの計算

$$\bigl((F_*X)f\bigr) \circ F = X(f \circ F)$$

B.2.3 Lie ブラケット

定義 B.5: Lie ブラケット

境界あり/なし C^∞ 多様体 M を与える．$\forall X,\, Y \in \mathfrak{X}(M)$ の **Lie ブラケット** (Lie bracket) とは，微分

$$[X,Y]\colon C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M),\ f \longmapsto X(Yf) - Y(Xf) \tag{B.2.1}$$

のことを言う．

微分 $[X,Y]$ を命題 B.5 の意味で C^∞ ベクトル場と見做したものも $[X,Y] \in \mathfrak{X}(M)$ と書く．

(B.2.1) の写像 $[X,Y]$ が微分であることを確認しておく．線形性はほぼ自明なので Leibniz 則を確認しよう：

$$\begin{aligned}
[X,Y](fg) &= X\big(Y(fg)\big) - Y\big(X(fg)\big) \\
&= X(f\,Yg + g\,Yf) - Y(f\,Xg + g\,Xf) \\
&= f\,XYg + \cancel{Yg\,Xf} + g\,XYf + \cancel{Yf\,Xg} - f\,YXg - \cancel{Xg\,Yf} - g\,YXf - \cancel{Xf\,Yg} \\
&= f\,([X,Y]g) + g\,([X,Y]f)
\end{aligned}$$

この途中式から，$f \longmapsto XYf$ が微分でないこともわかる．つまり，$\mathbb{R}$ ベクトル空間 $\mathfrak{X}(M)$（命題 B.3）の上に，$f \longmapsto XYf$ によって定義される新たな積演算を入れようとしても上手くいかない．その代わりに Lie ブラケットが必要なのである．

命題 B.8: $\mathfrak{X}(M)$ の Lie 代数としての構造

$\mathfrak{X}(M)$ 上の Lie ブラケットは以下を充たす：

(双線型性) $\forall a,\, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}
[aX + bY, Z] &= a[X,Z] + b[Y,Z], \\
[Z, aX + bY] &= a[Z,X] + b[Z,Y]
\end{aligned}$$

(反対称性)

$$[X,Y] = -[Y,X]$$

(Jacobi 恒等式)

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$$

従って，$\mathfrak{X}(M)$ は $[\ ,\ ]$ について無限次元実 Lie 代数をなす．

命題 B.9: Lie ブラケットの自然性

境界あり/なし C^∞ 多様体 M, N と C^∞ 写像 $F\colon M \longrightarrow N$ を与える．このとき，以下が成り立つ：

(1) $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ がそれぞれ $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$ と F-related ならば，$[X_1, X_2] \in \mathfrak{X}(M)$ も $[Y_1, Y_2] \in \mathfrak{X}(N)$ と F-related である．

(2) F が微分同相写像ならば，$\forall X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$F_*[X_1, X_2] = [F_*X_1, F_*X_2]$$

<u>証明</u> (1) X_i と Y_i が F-related ならば，命題 B.6 より N の任意の開集合 $U \subset N$ に対して $\forall f \in C^\infty(U)$ が

$$X_1X_2(f \circ F) = X_1\bigl(X_2(f \circ F)\bigr) = X_1\bigl((Y_2 f) \circ F\bigr) = (Y_1Y_2 f) \circ F \in C^\infty(M),$$
$$X_2X_1(f \circ F) = X_2\bigl(X_1(f \circ F)\bigr) = X_2\bigl((Y_1 f) \circ F\bigr) = (Y_2Y_1 f) \circ F \in C^\infty(M)$$

を充たす．従って

$$\begin{aligned}[X_1, X_2](f \circ F) &= X_1X_2(f \circ F) - X_2X_1(f \circ F)\\ &= (Y_1Y_2 f) \circ F - (Y_2Y_1 f) \circ F\\ &= ([Y_1, Y_2]f) \circ F \in C^\infty(M)\end{aligned}$$

が成り立つので，命題 B.6 より $[X_1, X_2] \in \mathfrak{X}(M)$ は $[Y_1, Y_2] \in \mathfrak{X}(N)$ と F-related である．

(2) F が微分同相写像ならば，押し出しの定義より $F_*X_i \in \mathfrak{X}(N)$ は X_i と F-related である．よって (1) から $[X_1, X_2] \in \mathfrak{X}(M)$ と $[F_*X_1, F_*X_2] \in \mathfrak{X}(N)$ は F-related だが，命題 B.7 より $[X_1, X_2] \in \mathfrak{X}(M)$ と F-related な N 上の C^∞ ベクトル場は $F_*[X_1, X_2] \in \mathfrak{X}(N)$ ただ一つであるから

$$F_*[X_1, X_2] = [F_*X_1, F_*X_2] \in \mathfrak{X}(N)$$

である．

■

B.3 積分曲線とフロー

B.3.1 積分曲線

定義 B.6: 積分曲線

境界あり/なし C^∞ 多様体 M を与える．M 上のベクトル場[a] X の**積分曲線** (integral curve) とは，C^∞ 曲線[b] $\gamma\colon J \longrightarrow M$ であって，任意の時刻 $t \in J$ において

$$\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}$$

を充たすもののことを言う．

[a] C^∞ とは限らない

[b] よって，$J \subset \mathbb{R}$ である．

チャート $(U, \varphi) = \bigl(U, (x^\mu)\bigr)$ を取り，γ を $\varphi \circ \gamma(t) =: \bigl(\gamma^1(t), \dots, \gamma^{\dim M}(t)\bigr)$ のように座標表示すると，

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(t) &= \frac{\mathrm{d}\gamma^\mu}{\mathrm{d}t}(t) \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\gamma(t)},\\ X_{\gamma(t)} &= X^\mu\bigl(\gamma(t)\bigr) \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\gamma(t)}\end{aligned}$$

と書ける．つまり，積分曲線とは連立常微分方程式系

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\gamma^1}{\mathrm{d}t}(t) &= X^1\bigl(\gamma^1(t), \dots, \gamma^{\dim M}(t)\bigr),\\ &\vdots\\ \frac{\mathrm{d}\gamma^{\dim M}}{\mathrm{d}t}(t) &= X^{\dim M}\bigl(\gamma^1(t), \dots, \gamma^{\dim M}(t)\bigr)\end{aligned}$$

の解 $\bigl(\gamma^1(t), \dots, \gamma^{\dim M}(t)\bigr)$ のことである．

【例 B.3.1】

$\mathbb{R}^2$ のチャート $\bigl(\mathbb{R}^2, (x, y)\bigr)$ において

$$Y := -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$$

と定義される C^∞ ベクトル場 Y の積分曲線 $\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto \bigl(\gamma^1(t), \gamma^2(t)\bigr)$ は連立常微分方程式

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\gamma^1}{\mathrm{d}t}(t) &= -\gamma^2(t),\\ \frac{\mathrm{d}\gamma^2}{\mathrm{d}t}(t) &= \gamma^1(t),\end{aligned}$$

の解であり，積分定数 $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ を用いて

$$\begin{aligned}\gamma^1(t) &= a\cos t - b\sin t,\\ \gamma^2(t) &= a\sin t + b\cos t\end{aligned}$$

と書ける．このように，初期条件を指定しない限り積分曲線は一意に定まらない．

命題 B.10: 積分曲線の存在

境界あり/なし C^∞ 多様体 M と，その上の C^∞ ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ を与える．$\forall p \in M$ に対して，ある $\varepsilon > 0$ と C^∞ 曲線 $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ が存在して初期条件 $\gamma(0) = p$ を充たす X の積分曲線になる．

証明 常微分方程式の解の存在定理から従う． ■

命題 B.11: 積分曲線の自然性

境界あり/なし C^∞ 多様体 $M,\ N$ と C^∞ 写像 $F\colon M \longrightarrow N$ を任意に与える．このとき，$\forall X \in \mathfrak{X}(M),\ \forall Y \in \mathfrak{X}(N)$ に対して以下の 2 つは同値である：

(1) $X,\ Y$ が F-related

(2) $\gamma\colon J \longrightarrow M$ が X の積分曲線 $\implies$ $F\circ\gamma\colon J \longrightarrow N$ は Y の積分曲線

証明 **(1) $\implies$ (2)**

$X,\ Y$ が F-related であるとする．$\gamma\colon J \longrightarrow M$ を X の積分曲線とする．このとき N の C^∞ 曲線 $\sigma := F\circ\gamma\colon J \longrightarrow N$ は $\forall t \in J$ において

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}(t) &= T_0(F\circ\gamma)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_t\right) \\
&= T_{\gamma(t)}F \circ T_0\gamma\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_t\right) \\
&= T_{\gamma(t)}F\bigl(\dot{\gamma}(t)\bigr) \\
&= T_{\gamma(t)}F\bigl(X_{\gamma(t)}\bigr) \\
&= Y_{F(\gamma(t))} \\
&= Y_{\sigma(t)}
\end{aligned}$$

を充たすので Y の積分曲線である[*8]．

(1) $\impliedby$ (2)

X の積分曲線 γ が与えられたとき $F\circ\gamma$ が Y の積分曲線になるとする．$\forall p \in M$ を 1 つとり，$\gamma\colon (-\varepsilon,\ \varepsilon) \longrightarrow M$ を初期条件 $\gamma(0) = p$ を充たす X の積分曲線とする．命題**??**によりこのような γ が少なくとも 1 つ存在する．このとき仮定より $F\circ\gamma\colon (-\varepsilon,\ \varepsilon) \longrightarrow N$ が初期条件 $(F\circ\gamma)(0) = F(p)$ を充たす Y の積分曲線となるので

$$\begin{aligned}
Y_{F(p)} &= (F\dot{\circ}\gamma)(0) \\
&= T_0(F\circ\gamma)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right) \\
&= T_{\gamma(0)}F \circ T_0\gamma\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right) \\
&= T_{\gamma(0)}F\bigl(\dot{\gamma}(0)\bigr) \\
&= T_{\gamma(0)}F(X_{\gamma(0)}) \\
&= T_pF(X_p)
\end{aligned}$$

が成り立つので $X,\ Y$ は F-related である．

■

技術的な補題を示しておく：

[*8] 2 つ目の等号で接ベクトルの微分の関手性を使った

補題 B.3: 定義域の affine 変換

境界あり/なし C^∞ 多様体 M と，その上の C^∞ ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ を与える．
X の任意の積分曲線 $\gamma\colon J \longrightarrow M$ を与える．このとき以下が成り立つ：

(1) $\forall a \in \mathbb{R}$ に対して

$$\tilde{J} \coloneqq \left\{ t \in \mathbb{R} \mid at \in J \right\}$$

とおくと，C^∞ 曲線

$$\tilde{\gamma}\colon \tilde{J} \longrightarrow M,\ t \longmapsto \gamma(at)$$

は C^∞ ベクトル場 $aX \in \mathfrak{X}(M)$ の積分曲線である．

(2) $\forall b \in \mathbb{R}$ に対して

$$\widehat{J} \coloneqq \left\{ t \in \mathbb{R} \mid t + b \in J \right\}$$

とおくと，C^∞ 曲線

$$\widehat{\gamma}\colon \widehat{J} \longrightarrow M,\ t \longmapsto \gamma(t+b)$$

は C^∞ ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ の積分曲線である．

証明　(1) C^∞ 写像 $\mu_a\colon \tilde{J} \longrightarrow J,\ t \longmapsto at$ を考えると，$\tilde{\gamma} = \gamma \circ \mu_a$ である．よって $\forall t_0 \in \tilde{J}$ および点 $\tilde{\gamma}(t_0) \in M$ の任意の開近傍上で定義された C^∞ 関数 f に対してとても丁寧に計算すると[*9]

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\gamma}}(t_0)f &= T_{t_0}\tilde{\gamma}\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}\right)f = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}(f\circ\tilde{\gamma})(t) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}(f\circ\gamma\circ\mu_a)(t) \\
&= T_{t_0}(\gamma\circ\mu_a)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}\right)f = T_{\mu_a(t_0)}\gamma\circ T_{t_0}\mu_a\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}\right)f \\
&= aT_{at_0}\gamma\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=at_0}\right)f = a\dot{\gamma}(at_0)f = aX_{\gamma(at_0)}f = \bigl(aX_{\tilde{\gamma}(t_0)}\bigr)f
\end{aligned}$$

(2) C^∞ 写像 $\tau_b\colon \tilde{J} \longrightarrow J,\ t \longmapsto t+b$ を考えると，$\widehat{\gamma} = \gamma\circ\tau_b$ である．よって $\forall t_0 \in \widehat{J}$ および点 $\widehat{\gamma}(t_0) \in M$

*9 $\mathbb{R}$ のチャート $(\tilde{J}, \mathrm{id}) = (\tilde{J}, t)$ から $(\tilde{J}, \mu_a) = (\tilde{J}, (s)) = (\tilde{J}, (at))$ への座標変換と見做して，$T_{t_0}\mu_a\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}\right) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t_0)\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=at_0} = a\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=at_0}$

の任意の開近傍上で定義された C^∞ 関数 f に対してとても丁寧に計算すると[*10]

$$\begin{aligned}\dot{\widehat{\gamma}}(t_0)f &= T_{t_0}\widehat{\gamma}\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}\right)f = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}(f\circ\widehat{\gamma})(t) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}(f\circ\gamma\circ\tau_b)(t)\\ &= T_{t_0}(\gamma\circ\tau_b)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}\right)f = T_{\tau_b(t_0)}\gamma\circ T_{t_0}\tau_b\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}\right)f\\ &= T_{t_0+b}\gamma\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0+b}\right)f = \dot{\gamma}(t_0+b)f = X_{\gamma(t_0+b)}f = X_{\widehat{\gamma}(t_0)}f\end{aligned}$$

■

B.3.2 フロー

定義 B.7: 大域的なフロー

C^∞ 多様体 M への Lie 群[a] $\mathbb{R}$ の左作用

$$\theta\colon \mathbb{R}\times M \longrightarrow M$$

のことを M 上の**大域的フロー** (global flow) と呼ぶ.

[a] $\mathbb{R}$ を加法に関して群と見做す.

大域的フロー $\theta\colon \mathbb{R}\times M \longrightarrow M$ が与えられたとき,

- $\forall t\in\mathbb{R}$ に対する連続写像 $\boldsymbol{\theta_t}\colon M\longrightarrow M$ を $\theta_t(q) := \theta(t,\,q)$ により定める.
- $\forall p\in M$ に対する連続曲線 $\boldsymbol{\theta^{(p)}}\colon \mathbb{R}\longrightarrow M$ を $\theta^{(p)}(s) := \theta(s,\,p)$ により定める.

命題 B.12: 大域的フローの無限小生成子

C^∞ 多様体 M 上の C^∞ 級の大域的フロー $\theta\colon\mathbb{R}\times M\longrightarrow M$ を与える. M 上のベクトル場

$$V\colon M\longrightarrow TM,\ p\longmapsto \left(p,\,\dot{\theta^{(p)}}(0)\right)$$

のことを θ の**無限小生成子** (infinitesimal generator) と呼ぼう.
このとき $V\in\mathfrak{X}(M)$ であり, $\forall p\in M$ に対して C^∞ 曲線 $\theta^{(p)}\colon\mathbb{R}\longrightarrow M$ は V の積分曲線である.

<u>**証明**</u> $V\in\mathfrak{X}(M)$ を示すには, 命題 B.4 より任意の開集合 $U\subset M$ 上定義された任意の C^∞ 関数 $f\in C^\infty(U)$ に対して $Vf\in C^\infty(U)$ であることを示せば良い. 実際このとき $\forall p\in U$ に対して

$$Vf(p) = V_pf = \dot{\theta^{(p)}}(0)f = T_0\theta^{(p)}\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right)f = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}f\bigl(\theta^{(p)}(t)\bigr) = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{(0,\,p)}f\bigl(\theta(t,\,p)\bigr)$$

[*10] $\mathbb{R}$ の チャート $(\widehat{J},\,\mathrm{id}) = (\widehat{J},\,t)$ から $(\widehat{J},\,\tau_b) = (\widehat{J},\,(s)) = (\widehat{J},\,(t+b))$ への座標変換と見做して, $T_{t_0}\tau_a\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}\right) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t_0)\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t_0+b} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t_0+b}$

が成り立つ[*11]．$f\bigl(\theta(t,\,p)\bigr)$ は C^∞ 写像の合成なので $\mathbb{R}\times U$ 上 C^∞ 級であり，その任意の偏導関数もまた C^∞ 級となる．

次に $\forall p\in M$ を 1 つ固定する．このとき C^∞ 曲線 $\theta^{(p)}\colon \mathbb{R}\longrightarrow M$ が，初期条件 $\theta^{(p)}(0)=p$ を充たす V の積分曲線であることを示す．i.e. 示すべきは $\forall t\in\mathbb{R}$ に対して $\dot{\theta^{(p)}}(t)=V_{\theta^{(p)}(t)}$ が成り立つことである．$\forall t\in\mathbb{R}$ を 1 つ固定して $q:=\theta^{(p)}(t)$ とおくと，$\forall s\in\mathbb{R}$ に対して

$$\theta^{(q)}(s)=\theta_s(q)=\theta(s,\,\theta(t,\,p))=\theta(s+t,\,p)=\theta^{(p)}(s+t)$$

である．従って q の任意の開近傍上で定義された任意の C^∞ 関数 f に対して

$$V_q f=\dot{\theta^{(q)}}(0)f=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}f\bigl(\theta^{(q)}(s)\bigr)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}f\bigl(\theta^{(p)}(s+t)\bigr)=\dot{\theta^{(p)}}(t)f$$

が言える．これが示すべきことであった． ■

【例 B.3.2】

C^∞ 写像

$$\theta\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2,\ \bigl(t,\,(x,\,y)\bigr)\longmapsto\bigl(x\cos t-y\sin t,\,x\sin t+y\sin t\bigr)$$

は $\forall t,\,s\in\mathbb{R},\ \forall(x,\,y)\in\mathbb{R}^2$ に対して

$$\begin{aligned}
&\theta\bigl(0,\,(x,\,y)\bigr)=(x,\,y),\\
&\theta\Bigl(s,\,\theta\bigl(t,\,(x,\,y)\bigr)\Bigr)\\
&=\Bigl((x\cos t-y\sin t)\cos s-(x\sin t+y\cos t)\sin s,\\
&\qquad(x\cos t-y\sin t)\sin s+(x\sin t+y\cos t)\cos s\Bigr)\\
&=\bigl(x\cos(s+t)-y\sin(s+t),\,x\sin(s+t)+y\cos(s+t)\bigr)\\
&=\theta\bigl(s+t,\,(x,\,y)\bigr)
\end{aligned}$$

を充たすので，多様体 $\mathbb{R}^2$ 上の大域的フローである．このとき $\forall(a,\,b)\in\mathbb{R}^2$ に対して

$$\theta^{\bigl((a,\,b)\bigr)}(t)=\bigl(a\cos t-b\sin t,\,a\sin t+b\sin t\bigr)$$

であるから

$$\begin{aligned}
\dot{\theta^{\bigl((a,\,b)\bigr)}}(0)&=T_0\theta^{\bigl((a,\,b)\bigr)}\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right)\\
&=\frac{\mathrm{d}(a\cos t-b\sin t)}{\mathrm{d}t}(0)\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{\theta^{((a,\,b))}(0)}+\frac{\mathrm{d}(a\sin t+b\cos t)}{\mathrm{d}t}(0)\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{\theta^{((a,\,b))}(t)}\\
&=-b\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{(a,\,b)}+a\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{(a,\,b)}
\end{aligned}$$

と計算できる．つまり，θ の無限小生成子はベクトル場

$$-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$$

[*11] ややこしいが，C^∞ 曲線 $\gamma\colon I\longrightarrow M$ の微分 $\dot\gamma(t_0)$ は，厳密には $\mathbb{R}$ の接ベクトル $\mathrm{d}/\mathrm{d}t\,\bigl|_{t_0}$ の微分 $T_{t_0}\gamma\bigl(\mathrm{d}/\mathrm{d}t\,\bigl|_{t_0}\bigr)\in T_{\gamma(t_0)}M$ のことだった．

である．実際【例 B.3.1】より，ベクトル場 $-y\,\partial/\partial x + x\,\partial/\partial y$ の積分曲線は $\theta^{\left((a,\,b)\right)}(t)$ そのものである．特に，$(a,\,b)$ は初期条件を表している．

命題 B.12 の逆に，$\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ が M 上の何かしらの大域的フローの無限小生成子になっていると言いたくなるが，必ずしもそうではない．つまり，積分曲線が $\mathbb{R}$ のある部分集合上で定義できないような C^∞ ベクトル場が存在する．

【例 B.3.3】

$M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ とし，標準的なチャート $\bigl(M,\,(x,\,y)\bigr)$ を取る．【例 B.2.1】の座標ベクトル場 $V := \frac{\partial}{\partial x}$ を考えよう．初期条件 $\gamma(0) = (-1,\,0) \in M$ を充たす V の積分曲線 γ は，常微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}\gamma^1}{\mathrm{d}t}(t) = 1,$$
$$\frac{\mathrm{d}\gamma^2}{\mathrm{d}t}(t) = 0$$

を解くことで一意に $\gamma(t) := (t-1,\,0)$ と求まる．しかるに γ は $\mathbb{R}$ の点 $t = 1$ 上定義不能である．

定義 B.8: 局所的フロー

M を C^∞ 多様体とする．

- **フローの定義域** (flow domain) とは，開集合 $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times M$ であって，$\forall p \in M$ に対して集合

$$\mathcal{D}^{(p)} := \left\{\, t \in \mathbb{R} \;\middle|\; (t,\,p) \in \mathcal{D} \,\right\} \subset \mathbb{R}$$

  が 0 を含む開区間[a]となっているようなもののことを言う．
- M 上の**局所的フロー** (local flow) とは，フローの定義域を定義域にもつ連続写像

$$\theta\colon \mathcal{D} \longrightarrow M$$

  であって，$\forall p \in M$ に対して以下が成り立つもののこと：

  (LF-1)

$$\theta(0,\,p) = p$$

  (LF-2) $\forall s \in \mathcal{D}^{(p)},\ \forall t \in \mathcal{D}^{(\theta(s,\,p))}$ に対して，

$$s + t \in \mathcal{D}^{(p)} \quad \Longrightarrow \quad \theta\bigl(t,\,\theta(s,\,p)\bigr) = \theta(t+s,\,p)$$

- **極大積分曲線** (maximal integral curve) とは，積分曲線であって定義域をこれ以上大きな開区間に延長できないようなもののこと．**極大局所フロー** (maximal local flow) とは，これ以上フローの定義域を拡張できないような局所的フローのこと．

[a] この条件が命題 B.13 の証明の鍵となる．

局所的フロー $\theta\colon \mathcal{D} \longrightarrow M$ が与えられたとき，

- $\forall t \in \mathbb{R}$ に対して，M の部分集合 $\boldsymbol{M_t} \subset M$ を

$$\boldsymbol{M_t} := \{\, p \in M \mid (t,\, p) \in \mathcal{D} \,\}$$

と定める[a].

- $\forall (t,\, p) \in \mathcal{D}$ に対する連続写像[b] $\boldsymbol{\theta_t}\colon M_t \longrightarrow M$ および連続曲線 $\boldsymbol{\theta^{(p)}}\colon \mathcal{D}^{(p)} \longrightarrow M$ をそれぞれ

$$\theta_t(q) := \theta(t,\, q),$$
$$\theta^{(p)}(s) := \theta(s,\, p)$$

により定める.

[a] $\mathcal{D}^{(p)}$ はフローの領域 $\mathcal{D}$ を，点 $(0,\, p)$ を通るように「横に切り」，M_t は「縦に切る」と言うイメージ.

[b] 極大局所フロー θ に関しては，θ_t の値域が実は M_{-t} であることが，定理 B.2-(2) によりわかる.

命題 B.13: 局所的フローの無限小生成子

C^∞ 多様体 M 上の C^∞ 級の局所的フロー $\theta\colon \mathcal{D} \longrightarrow M$ を与える．M 上のベクトル場

$$V\colon M \longrightarrow TM,\ p \longmapsto \left(p,\, \dot{\theta^{(p)}}(0)\right)$$

のことを[a] θ の**無限小生成子** (infinitesimal generator) と呼ぼう.

このとき $V \in \mathfrak{X}(M)$ であり，$\forall p \in M$ に対して C^∞ 曲線 $\theta^{(p)}\colon \mathcal{D}^{(p)} \longrightarrow M$ は V の積分曲線である.

[a] フローの定義域の定義から $M_0 = M$ であることに注意．このとき，接ベクトルの局所性から $\forall p \in M$ に対して $\dot{\theta^{(p)}}(0)$ が定義される.

<u>**証明**</u> $V \in \mathfrak{X}(M)$ であることに関しては命題 B.12 の証明がそのまま適用できる.

$\forall p \in M$ を 1 つ固定する．$\forall t \in \mathcal{D}^{(p)}$ に対して，フローの定義域の定義より $\mathcal{D}^{(p)},\, \mathcal{D}^{\left(\theta^{(p)}(t)\right)} \subset \mathbb{R}$ はどちらも 0 を含む開区間であるから，十分小さい $\varepsilon > 0$ に対しては $(t-\varepsilon,\, t+\varepsilon) \subset \mathcal{D}^{(p)}$ かつ $(-\varepsilon,\, \varepsilon) \subset \mathcal{D}^{\left(\theta^{(p)}(t)\right)}$ が成り立つ．このとき $\forall s \in (-\varepsilon,\, \varepsilon) \subset \mathcal{D}^{\left(\theta^{(p)}(t)\right)}$ をとってくると $t + s \in (t-\varepsilon,\, t+\varepsilon) \subset \mathcal{D}^{(p)}$ であるから，局所的フローの定義の条件 **(LF-2)** より $\theta(s,\, \theta(t,\, p)) = \theta(s+t,\, p)$ が成り立つ．あとはこの s に対して命題 B.12 の証明を適用すれば良い. ■

極大局所フローに対しては命題 B.13 の逆も言える [6, p.212, Theorem 9.12]：

定理 B.2: フローの基本定理

M を<u>境界なし</u> C^∞ 多様体とする．$\forall V \in \mathfrak{X}(M)$ に対して，極大局所フロー $\theta\colon \mathcal{D} \longrightarrow M$ であって無限小生成子が V であるようなものが一意的に存在する．さらに，この θ は以下の性質をみたす：

(1) $\forall p \in M$ に対し，$\theta^{(p)}\colon \mathcal{D}^{(p)} \longrightarrow M$ は初期条件 $\theta^{(p)}(0) = p$ を充たす V の唯一の極大積分曲線である.

(2)

$$s \in \mathcal{D}^{(p)} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{D}^{(\theta(s,\,p))} = \left\{\, t - s \;\middle|\; t \in \mathcal{D}^{(p)} \,\right\} =: \mathcal{D}^{(p)} - s$$

(3) $\forall t \in \mathbb{R}$ に対して，集合 M_t は M の開集合であり，連続写像 $\theta_t \colon M_t \longrightarrow M_{-t}$ は θ_{-t} を逆にもつ微分同相写像である．

上述の極大局所フロー θ のことを，**V によって生成されたフロー** (flow generated by V) と呼ぶ．

<u>証明</u> $\forall V \in \mathfrak{X}(M)$ を 1 つ固定する．

定義域を共有する 2 つの積分曲線が交差しないこと

命題 B.10 より，$J \subset \mathbb{R}$ を開区間として，V の積分曲線 $\gamma,\, \tilde{\gamma} \colon J \longrightarrow M$ をとることができる．ここで，ある $t_0 \in J$ において $\gamma(t_0) = \tilde{\gamma}(t_0)$ であると仮定する[*12]．このとき $\gamma = \tilde{\gamma}$ でなくてはならないことを示そう．

部分集合 $\mathcal{S} \subset J$ を

$$\mathcal{S} := \left\{\, t \in J \;\middle|\; \gamma(t) = \tilde{\gamma}(t) \,\right\}$$

と定義する．示すべきは $\mathcal{S} = J$ である．仮定より $t_0 \in \mathcal{S}$ なので $\mathcal{S}$ は空でない．また，積多様体 $M \times M$ 上の連続曲線 $\alpha \colon J \longrightarrow M \times M$ を $\alpha(t) := \bigl(\gamma(t),\, \tilde{\gamma}(t)\bigr)$ と定義すると，M の部分空間 $\Delta := \left\{\, (p,\, p) \in M \times M \,\right\}$ を使って $\mathcal{S} = \alpha^{-1}(\Delta)$ と書けるが，任意の C^∞ 多様体が Hausdorff 空間であることから Δ は閉集合であり[*13]，α が連続写像なので $\mathcal{S}$ も J の閉集合であることがわかる．一方で $\forall t_1 \in \mathcal{S}$ をとると，積分曲線の定義から $\gamma,\, \tilde{\gamma}$ は点 $\gamma(t_1) \in M$ を含むある C^∞ チャートの上の同一の常微分方程式の解であり，かつ初期条件 $\gamma(t_1) = \tilde{\gamma}(t_1)$ を充たす．故に常微分方程式の解の一意性から，ある t_1 を含む開区間 $I_{t_1} \subset \mathbb{R}$ 上で $\gamma|_{I_{t_1}} = \tilde{\gamma}|_{I_{t_1}}$ が成り立つ．i.e. $t_1 \in I_{t_1} \cap J \subset \mathcal{S}$ で，$t_1 \in \mathcal{S}$ は任意だったので $\mathcal{S}$ は J の開集合でもある．さらに J は連結なので，$J = \mathcal{S}$ が示された[*14]

極大局所フロー $\theta \colon \mathcal{D} \longrightarrow M$ の構成

$\forall p \in M$ を 1 つ固定する．初期条件 $\gamma(0) = p$ を充たす[*15] V の積分曲線 $\gamma \colon J_\gamma \longrightarrow M$ 全体の集合を $\mathcal{I}^{(p)}$ とおき，

$$\mathcal{D}^{(p)} := \bigcup_{\gamma \in \mathcal{I}^{(p)}} J_\gamma$$

と定義する．先述の議論から M の C^∞ 曲線

$$\theta^{(p)} \colon \mathcal{D}^{(p)} \longrightarrow M,\; t \longmapsto \Bigl(\gamma(t) \;\; \text{s.t.}\; \gamma \in \mathcal{I}^{(p)} \;\; \text{かつ} \;\; t \in J_\gamma\Bigr)$$

は well-defined であり，かつその構成から明らかに初期条件 $\theta^{(p)}(0) = p$ を充たす唯一の極大積分曲線である．

[*12] 時刻 $t_0 \in J$ において 2 つの積分曲線 $\gamma,\, \tilde{\gamma}$ が交差するということ．

[*13] $(M \times M) \setminus \Delta$ が開集合である $\iff$ $\forall (p,\, q) \in (M \times M) \setminus \Delta$ に対して $p,\, q \in M$ の開近傍 $p \in U \subset M,\; q \in V \subset M$ が存在して $U \times V \subset (M \times M) \setminus \Delta$ を充たす $\iff$ $\forall (p,\, q) \in (M \times M) \setminus \Delta$ に対して $p,\, q \in M$ の開近傍 $p \in U \subset M,\; q \in V \subset M$ が存在して $U \cap V = \emptyset$ を充たす $\iff$ M が Hausdorff 空間である

[*14] $\mathcal{S} \subset J$ が開かつ閉なので $J \setminus \mathcal{S} \subset J$ は開集合であり，$J = \mathcal{S} \cup (J \setminus \mathcal{S})$ かつ $\mathcal{S} \cap (J \setminus \mathcal{S}) = \emptyset$ が成り立つ．J は連結なので $\mathcal{S},\, J \setminus \mathcal{S}$ のどちらかが空でなくてはならないが $\mathcal{S} \neq \emptyset$ だったので $J \setminus \mathcal{S} = \emptyset \iff J = \mathcal{S}$ が言えた．

[*15] 従って $0 \in J_\gamma$ とする．

$p \in M$ は任意だったので，ここで

$$\mathcal{D} := \left\{ (t,\, p) \in \mathbb{R} \times M \;\middle|\; t \in \mathcal{D}^{(p)} \right\},$$
$$\theta \colon \mathcal{D} \longrightarrow M,\ (t,\, p) \longmapsto \theta^{(p)}(t)$$

と定義する．これが局所フローの定義の条件 **(LF-1)**, **(LF-2)** を充たすことを確認する．

(LF-1)　構成より明らか．

(LF-2)　$\forall p \in M,\ \forall s \in \mathcal{D}^{(p)}$ をとり，$q := \theta(s,\, p)$ とおく．このとき $\forall t \in \mathcal{D}^{(p)} - s$ に対して $s + t \in \mathcal{D}^{(p)}$ が成り立つ．ここで，C^∞ 曲線

$$\gamma \colon \mathcal{D}^{(p)} - s \longrightarrow M,\ t \longmapsto \theta(t+s,\, p) = \theta^{(p)}(t+s)$$

は補題 B.3-(2) より初期条件 $\gamma(0) = q$ を充たす V の積分曲線であるが，常微分方程式の解の一意性から $\gamma = \theta^{(q)}|_{\mathcal{D}^{(p)}-s}$ が成り立つ．あとは $\mathcal{D}^{(p)} - s = \mathcal{D}^{(q)}$ を示せば，$\forall t \in \mathcal{D}^{(q)}$ に対して

$$\theta\bigl(t,\, \theta(s,\, p)\bigr) = \theta(t,\, q) = \theta^{(q)}(t) = \gamma(t) = \theta(t+s,\, p)$$

となって **(LF-2)** の証明が完了する．

$\theta^{(q)}$ が極大積分曲線なので $\mathcal{D}^{(p)} - s \subset \mathcal{D}^{(q)}$ が言える．$\mathcal{D}^{(p)} - s \supset \mathcal{D}^{(q)}$ を示そう．まず $0 \in \mathcal{D}^{(p)}$ なので $-s \in \mathcal{D}^{(p)} - s \subset \mathcal{D}^{(q)}$ が言える．従って $\theta(-s,\, q) = \theta^{(q)}(-s) = \gamma(-s) = \theta^{(p)}(0) = p$ であり，$\forall t \in \mathcal{D}^{(q)} + s$ に対して $-s + t \in \mathcal{D}^{(p)}$ が成り立つ．C^∞ 曲線

$$\gamma \colon \mathcal{D}^{(q)} + s \longrightarrow M,\ t \longmapsto \theta(t-s,\, q) = \theta^{(q)}(t-s)$$

は補題 B.3-(2) より初期条件 $\gamma(0) = p$ を充たす V の積分曲線なので，常微分方程式の解の一意性から $\gamma = \theta^{(p)}|_{\mathcal{D}^{(q)}+s}$ が言えて，$\theta^{(p)}$ の極大性から $\mathcal{D}^{(q)} + s \subset \mathcal{D}^{(p)} \iff \mathcal{D}^{(p)} - s \supset \mathcal{D}^{(q)}$ が示された．

$\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times M$ が開集合かつ θ が C^∞ 級

部分集合 $W \subset \mathcal{D}$ を

$$W := \left\{ (t,\, p) \in \mathcal{D} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{以下を充たす開近傍 } (t,p) \in J \times U \subset \mathcal{D} \text{ が存在：} \\ \quad (1)\ J \subset \mathbb{R} \text{ は開区間で } 0, t \in J \\ \quad (2)\ U \subset M \text{ は } p \text{ の開近傍} \\ \quad (3)\ \theta|_{J \times U} \text{ が } C^\infty \text{ 級} \end{array} \right\}$$

と定義する．$W = \mathcal{D}$ を背理法により示す．まず $\exists (\tau,\, p_0) \in \mathcal{D} \setminus W$ を仮定する．常微分方程式の解の存在定理より $(0,\, p_0) \in W$ なので，$\tau > 0$ としよう．$\tau < 0$ のときも議論は全く同様である．

$t_0 := \sup\left\{ t \in \mathbb{R} \;\middle|\; (t,\, p_0) \in W \right\}$ とする．このとき $0 < t_0 < \tau$ でかつ $0, \tau \in \mathcal{D}^{(p_0)}$ なので $t_0 \in \mathcal{D}^{(p_0)}$ が言える．$q_0 := \theta^{(p_0)}(t_0)$ とおこう．常微分方程式の解の存在定理から，ある $\varepsilon > 0$ と q_0 の開近傍 $q_0 \in U_0 \subset M$ が存在して $(-\varepsilon,\, \varepsilon) \times U_0 \subset W$ となる．ここで $t_1 \in (t_0 - \varepsilon,\, t_0)$ を $\theta^{(p_0)}(t_1) \in U_0$ を充たすようにとる．このとき $t_1 < t_0$ なので $(t_1,\, p_0) \in W$ であり，故にある $\delta > 0$ と p_0 の開近傍 $p_0 \in U_1 \subset M$ が存在して $(t_1 - \delta,\, t_1 + \delta) \times U_1 \subset W$ となる．従って W の定義から，θ は $[0,\, t_1 + \delta) \times U_1$ 上で C^∞ 級である．$\theta(t_1,\, p_0) \in U_0$ なので，$\theta(\{t_1\} \times U_1) \subset U_0$ を充たすような U_1 をとることができる．さて，

$$\begin{aligned} &\tilde{\theta} \colon [0,\, t_1 + \varepsilon) \times U_1 \longrightarrow M, \\ &\qquad (t,\, p) \longmapsto \begin{cases} \theta_t(p), & (t,\, p) \in [0,\, t_1) \times U_1 \\ \theta_{t-t_1} \circ \theta_{t_1}(p), & (t,\, p) \in (t_1 - \varepsilon,\, t_1 + \varepsilon) \times U_1 \end{cases} \end{aligned}$$

と定義した写像 $\tilde{\theta}$ は，θ が条件 **(LF-2)** を充たすことから $(t_1-\varepsilon,\, t_1)\times U_1$ 上 $\theta_t(p)=\theta_{t-t_1}\circ\theta_{t_1}(p)$ となり well-defined で，かつ $U_1,\, t_1,\, \varepsilon$ の取り方から C^∞ 級である．その上 $\forall p\in U_1$ に対して C^∞ 曲線 $t\longmapsto\tilde{\theta}(t,\, p)$ は V の積分曲線なので，$\tilde{\theta}$ は $(t_0,\, p_0)\notin W$ への θ の C^∞ 級の延長である．しかるにこのことは t_0 の取り方に矛盾する．

(1) $\mathcal{D}^{(p)},\ \theta^{(p)}$ の構成から明らか．

(2) **(LF-2)** の確認で示した．

(3) $\mathcal{D}$ が $\mathbb{R}\times M$ の開集合なので，$\forall t\in\mathbb{R}$ に対して $M_t:=\left\{p\in M \mid (t,\, p)\in\mathcal{D}\right\}$ は開集合である．[*16]．また，(2) から

$$\begin{aligned} p\in M_t \quad &\Longrightarrow \quad t\in\mathcal{D}^{(p)} \\ &\Longrightarrow \quad \mathcal{D}^{(\theta_t(p))}=\mathcal{D}^{(p)}-t \\ &\Longrightarrow \quad -t\in\mathcal{D}^{(\theta_t(p))} \\ &\Longrightarrow \quad \theta_t(p)\in M_{-t} \end{aligned}$$

が言えるので $\theta_t(M_t)\subset M_{-t}$ である．さらに **(LF-2)** から $\theta_{-t}\circ\theta_t=\mathrm{id}_{M_t},\ \theta_t\circ\theta_{-t}=\mathrm{id}_{M_{-t}}$ が言える．θ が C^∞ 級なので $\theta_t,\, \theta_{-t}$ も C^∞ 級であるから $\theta_t\colon M_t\longrightarrow M_{-t}$ は微分同相写像である．

■

定理 B.3: 境界付き多様体におけるフローの基本定理

M を境界付き多様体とし，$V\in\mathfrak{X}(M)$ は ∂M に接する[a]とする．このとき定理 B.2 と全く同じ結果が V に対して成り立つ．

[a] i.e. $\forall p\in\partial M$ において $V_p\in T_p(\partial M)\subset T_pM$ が成り立つ．

証明　[6, p.227, Theorem 9.34] ■

B.3.3　完備なベクトル場

定義 B.9: ベクトル場の完備性

C^∞ ベクトル場 $X\in\mathfrak{X}(M)$ が**完備** (complete) であるとは，それが大域的なフローを生成することを言う．

補題 B.4: uniform time lemma

C^∞ 多様体 M およびその上の C^∞ ベクトル場 $V\in\mathfrak{X}(M)$ を与える．$\theta\colon\mathcal{D}\longrightarrow M$ を V が生成するフローとする．
このとき，ある $\varepsilon>0$ が存在して $\forall p\in M$ に対して $(-\varepsilon,\, \varepsilon)\subset\mathcal{D}^{(p)}$ を充たすならば，V は完備である．

[*16] 写像 $\iota_t\colon M\longrightarrow\mathbb{R}\times M,\ p\longmapsto(t,\, p)$ は，開区間と開集合の直積 $J\times U\subset\mathbb{R}\times M$ に対して $t\in J$ なら $\iota_t^{-1}(J\times U)=U$，$t\notin J$ なら $\iota_t^{-1}(J\times U)=\emptyset$ となるので連続写像である．従って $M_t=\iota_t^{-1}(\mathcal{D})\subset M$ は M の開集合．

証明 主張の仮定が満たされているとする．このとき V が完備であることを背理法により示す．そのためにまずある $p \in M$ が存在して，$\mathcal{D}^{(p)}$ が上に有界であると仮定する．下に有界な場合も同様の議論ができる．

$b := \sup \mathcal{D}^{(p)}$ とおき，$t_0 \in (b-\varepsilon,\, b)$ を 1 つとる．$q := \theta^{(p)}(t_0)$ とおく．仮定より V の積分曲線 $\theta^{(p)}$ は少なくとも $(-\varepsilon,\, \varepsilon)$ 上では定義されている．ここで C^∞ 曲線

$$\gamma\colon (-\varepsilon,\, t_0+\varepsilon) \longrightarrow M,\ t \longmapsto \begin{cases} \theta^{(p)}(t), & t \in (-\varepsilon,\, b) \\ \theta^{(q)}(t-t_0), & t \in (t_0-\varepsilon,\, t_0+\varepsilon) \end{cases}$$

と定義すると，これは $\forall t \in (t_0-\varepsilon,\, b)$ に対して **(LF-2)** より $\theta^{(q)}(t-t_0) = \theta_{t-t_0}(q) = \theta(t-t_0) \circ \theta_{t_0}(p) = \theta_t(p) = \theta^{(p)}(t)$ が成り立つので well-defined である．特に補題 B.3-(2) より γ は初期条件 $\gamma(0) = p$ を充たす V の積分曲線なので $(-\varepsilon,\, t_0+\varepsilon) \subset \mathcal{D}^{(p)}$ ということになるが，$t_0+\varepsilon > b$ より b の取り方に矛盾する． ■

定理 B.4: コンパクト台を持つベクトル場は完備

C^∞ ベクトル場 X がコンパクト台を持つならば，X は完備である．

証明 [6, p.216, Theorem 9.16] ■

系 B.5: コンパクト多様体のベクトル場は完備

コンパクトな C^∞ 多様体上の任意の C^∞ ベクトル場は完備である．

定理 B.6: Lie 群の左不変ベクトル場は完備

Lie 群 G を与える．このとき $\forall X \in \mathfrak{X}^L(G)$ は完備である．

証明 左不変ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(G)$ の定義は，$\forall g \in G$ に対して X が自分自身と L_g-related であることだった．

さて，$\theta\colon \mathcal{D} \longrightarrow G$ を X が生成するフローとする．このとき $\theta^{(1_G)}\colon \mathcal{D}^{(1_G)} \longrightarrow G$ に関して $\mathcal{D}^{(1_G)}$ は開区間なので，十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して $(-\varepsilon,\, \varepsilon) \subset \mathcal{D}^{(1_G)}$ を充たすようにできる．

$\forall g \in G$ を 1 つとる．X は自分自身と L_g-related なので，命題 B.11 より $L_g \circ \theta^{(1_g)}\colon \mathcal{D}^{(}1_G) \longrightarrow G$ は初期条件 $(L_g \circ \theta^{(1_G)})(0) = g$ を充たす X の積分曲線である．よって定理 B.2-(1) から，少なくとも $(-\varepsilon,\, \varepsilon)$ 上で $\theta^{(g)} = L_g \circ \theta^{(1_G)}$ が言える．i.e. $(-\varepsilon,\, \varepsilon) \subset \mathcal{D}^{(g)}$ であるから，補題 B.4 から X は完備である． ■

B.4 Lie 微分

Euclid 空間 $\mathbb{R}^d$ の点 $p \in \mathbb{R}^d$ におけるベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^d)$ の方向微分とは，数ベクトル $v \in \mathbb{R}^d$ を一つ指定して

$$D_v X(p) := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right| X_{p+tv} = \lim_{t\to 0} \frac{X_{p+tv} - X_p}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{X^\mu(p+tv) - X^\mu(p)}{t} \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p \tag{B.4.1}$$

と定義するのが妥当だろう．しかし，この定義は $\mathbb{R}^d$ が $\mathbb{R}$-ベクトル空間であることを使ってしまっており，一般の C^∞ 多様体 M 上で同じことをやろうとしても上手くいかない．この問題を，ベクトル場の積分曲線を使って上手く解決したものが **Lie 微分**である．

定義 B.10: ベクトル場の Lie 微分

境界あり/なし C^∞ 多様体 M を与える．
ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ の，$\boldsymbol{V} \in \mathfrak{X}(M)$ **に沿った Lie 微分** (Lie derivative of X with respect to V) とは，$\forall p \in M$ において

$$(\mathcal{L}_{\boldsymbol{V}} X)_p := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} T_{\theta_t(p)}(\theta_{-t})(X_{\theta_t(p)}) = \lim_{t\to 0} \frac{T_{\theta_t(p)}(\theta_{-t})(X_{\theta_t(p)}) - X_p}{t}$$

と定義される C^∞ ベクトル場 $\boldsymbol{\mathcal{L}_V X} \in \mathfrak{X}(M)$ のこと．ただし θ は V が生成するフローである．

命題 B.14:

境界あり/なし C^∞ 多様体 M と，その上の C^∞ ベクトル場 $V, X \in \mathfrak{X}(M)$ を与える．もし $\partial M \neq \emptyset$ のときは V は ∂M に接する[a]とする．
このとき，$\forall p \in M$ において接ベクトル $(\mathcal{L}_V X)_p \in T_pM$ が存在し，$\mathcal{L}_V X$ は C^∞ ベクトル場になる．

[a] i.e. $\forall p \in \partial M$ において $V_p \in T_p(\partial M) \subset T_pM$ が成り立つ．

証明 $\mathfrak{D}$ をフローの定義域，$\theta\colon \mathcal{D} \longrightarrow M$ を V が生成するフローとする．$\forall p \in M$ を 1 つ固定し，p を含む M のチャート $(U, \varphi) = \bigl(U, (x^\mu)\bigr)$ をとる．開区間 $0 \in J_0 \subset \mathbb{R}$ と開集合 $p \in U_0 \subset U$ を，$J_0 \times U_0 \subset \mathcal{D}$ でかつ $\theta(J_0 \times U_0) \subset U$ を充たすようにとる[*17]．このとき $\forall t \in J_0$ および $\forall f \in C^\infty(U_0)$ に対して

$$\begin{aligned}
T_{\theta_t(p)}(\theta_{-t})(X_{\theta_t(p)})f &= X_{\theta_t(p)}(f \circ \theta_{-t}) \\
&= X^\mu(\theta_t(p)) \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\theta_t(p)} (f \circ \theta_{-t}) \\
&= X^\mu(\theta_t(p)) \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\varphi(\theta_t(p))} (f \circ \theta_{-t} \circ \varphi^{-1}) \\
&= X^\mu(\theta_t(p)) \left.\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right|_{\varphi(\theta_{-t}(\theta_t(p)))} (f \circ \varphi^{-1}) \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\varphi(\theta_t(p))} (x^\nu \circ \theta_{-t} \circ \varphi^{-1}) \\
&= X^\mu(\theta_t(p)) \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\varphi(\theta_t(p))} (x^\nu \circ \theta_{-t} \circ \varphi^{-1}) \left.\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi^{-1}) \\
&= \left(X^\mu(\theta_t(p)) \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\varphi(\theta_t(p))} (x^\nu \circ \theta_{-t} \circ \varphi^{-1}) \left.\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right|_{p} \right) f
\end{aligned}$$

と計算できる．$X^\mu\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$, $\theta_t\colon M_t \longrightarrow M_{-t}$, $x^\nu \circ \theta_{-t} \circ \varphi^{-1}\colon \mathbb{R}^{\dim M} \longrightarrow \mathbb{R}$ の全てが C^∞ 写像なので $\left.\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right|_p \in T_pM$ の係数は $p \in U_0$ に関して C^∞ 級である．よって命題 B.2 から写像 $M \longrightarrow T_pM$, $p \longmapsto T_{\theta_t(p)}(\theta_{-t})(X_{\theta_t(p)})$ は C^∞ 級ベクトル場であり[*18]，示された． ■

[*17] θ は C^∞ 写像なのでこのような J_0, U_0 をいつでもとることができる．
[*18] 従って $X_p \in T_pM$ との差をとることができる．

【例 B.4.1】

$M=\mathbb{R}^d$ とし，M のチャート $\bigl(\mathbb{R}^d,\,(x^\mu)\bigr)$ をとる．このとき C^∞ ベクトル場

$$V := v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad {}^{\text{w/}} \quad v^\mu = \text{const.}$$

の生成するフローは

$$\theta\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d,\ \bigl(t,\,(p^1,\,\dots,\,p^d)\bigr) \longmapsto (p^1+v^1t,\,\dots,\,p^d+v^dt)$$

と書ける．故に，$X\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ の V に沿った Lie 微分は

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_V X)_p &= \lim_{t\to 0}\frac{T_{\theta_t(p)}(\theta_{-t})(X_{\theta_t}(p)) - X_p}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{T_{p+vt}(\theta_{-t})(X_{p+vt}) - X_p}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(X^\mu(p+vt)\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu}(p+vt)\left.\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right|_p - X^\mu(p)\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p\right)\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{X^\mu(p+tv) - X^\nu(p)}{t}\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p\\
&= D_v X(p)
\end{aligned}$$

となって (B.4.1) を再現する．

定理 B.7: Lie 微分の計算

M を境界あり/なし C^∞ 多様体とする．このとき，$\forall V,\,X\in\mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\mathcal{L}_V X = [V, X]$$

が成り立つ．

<u>**証明**</u> $\theta\colon \mathcal{D}\longrightarrow M$ を V が生成するフローとする．$\forall p\in M$ を 1 つ固定する．十分小さい t を取れば $(t,\,p)\in\mathcal{D}^{(p)}$ を充たすようにできる．このとき $\forall f\in C^\infty(M)$ に対して Taylor の定理から

$$f\circ\theta_t(p) = f\bigl(\theta^{(p)}(t)\bigr) = f(p) + t\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f\bigl(\theta^{(p)}(t)\bigr) + \mathcal{O}\bigl(t^2\bigr) = f(p) + t\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{(0,\,p)} f\bigl(\theta(t,\,p)\bigr) + \mathcal{O}\bigl(t^2\bigr)$$

と書ける．一方，無限小生成子の定義から

$$Vf(p) = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{(0,\,p)} f\bigl(\theta(t,\,p)\bigr)$$

が成り立つので

$$\lim_{t\to 0}\frac{f\circ\theta_t - f}{t} = Vf \tag{B.4.2}$$

が言える．

さて，定理 B.2-(3) より $\theta_{-t}\colon M_{-t} \longrightarrow M_t$ は微分同相写像なので，ベクトル場 $X|_{M_{-t}}$ の押し出し $(\theta_{-t})_* X$ が一意的に存在し，

$$T_{\theta_t(p)}(\theta_{-t})(X_{\theta_t(p)}) = \bigl((\theta_{-t})_* X\bigr)_{\theta_{-t}(\theta_t(p))} = \bigl((\theta_{-t})_* X\bigr)_p$$

を充たす．よって (B.4.2) と系 B.1 から

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_V X)f &= \lim_{t\to 0} \frac{\bigl((\theta_{-t})_* X\bigr)f - Xf}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{X(f\circ\theta_{-t})\circ\theta_t - Xf}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{X(f\circ\theta_{-t})\circ\theta_t - Xf\circ\theta_t + Xf\circ\theta_t - Xf}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} X\left(\frac{f\circ\theta_{-t} - f}{t}\right)\circ\theta_t + \lim_{t\to 0}\frac{Xf\circ\theta_t - Xf}{t} \\
&= X(-V)f + V(Xf) \\
&= [V, X]f
\end{aligned}$$

が言える． ■

B.5 C^∞ ベクトル束

C^∞ 級のベクトル束を構成する便利な補題から出発しよう [6, p.253]

補題 B.5: C^∞ ベクトル束の構成

- 境界あり/なし C^∞ 多様体 M
- n 次元実ベクトル空間の族 $\{E_p\}_{p\in M}$ と全射

$$\pi\colon \coprod_{p\in M} E_p \longrightarrow M,\ (p,\, v) \longmapsto p$$

- M の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$
- 全単射の族 $\{\psi_\lambda\colon \pi^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times \mathbb{R}^n\}_{\lambda\in\Lambda}$
- C^∞ 写像の族 $\{t_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{GL}(n,\, \mathbb{R})\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$

の 5 つ組であって以下の条件を充たすものを与える：

(DVS-1) $\forall\lambda\in\Lambda$ および $\forall p\in U_\lambda$ に対して，制限

$$\psi_\alpha|_{E_p}\colon E_p \longrightarrow \{p\}\times\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$$

はベクトル空間の同型写像である．

(DVS-2) $\forall\alpha,\,\beta\in\Lambda$ および $\forall(p,\,v)\in(U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{R}^n$ に対して

$$\psi_\beta^{-1}(p,\,v) = \psi_\alpha^{-1}\bigl(p,\, t_{\alpha\beta}(p)(v)\bigr)$$

が成り立つ．

このとき，集合 $E \coloneqq \coprod_{p\in M} E_p$ 上の C^∞ 構造が一意的に存在して，$\mathbb{R}^n \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ が局所自明化 $\{\psi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を持つ C^∞ ベクトル束になる．

<u>**証明**</u> $\forall p \in M$ を 1 つとる．すると $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は M の開被覆なので，ある $\alpha_p \in \Lambda$ が存在して $p \in U_{\alpha_p}$ となる．さらに U_{α_p} は開集合なので，C^∞ チャート $(V_p,\, \varphi_p)$ であって $p \in V_p \subset U_{\alpha_p}$ を充たすものが存在する．このとき，写像 $\tilde{\varphi}_p \colon \pi^{-1}(V_p) \longrightarrow \varphi_p(V_p) \times \mathbb{R}^n$ を

$$\tilde{\varphi}_p \coloneqq (\varphi_p \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) \circ \psi_{\alpha_p}|_{\pi^{-1}(V_p)}$$

と定義する．

まず，M が境界を持たない場合に

- 集合 E
- E の部分集合族 $\{\pi^{-1}(V_p)\}_{p\in M}$
- 写像の族 $\{\tilde{\varphi}_p \colon \pi^{-1}(V_p) \longrightarrow \varphi_p(V_p) \times \mathbb{R}^n\}_{p\in M}$

の 3 つ組が補題 B.1 の 5 条件を充たすこと，i.e. E が境界を持たない C^∞ 多様体になることを示そう．

(DS-1) $\forall p \in M$ に対して $\psi_p\bigl(\pi^{-1}(V_p)\bigr) = \varphi_p(V_p) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{\dim M} \times \mathbb{R}^n$ であり，$\varphi_p(V_p) \subset \mathbb{R}^{\dim M}$ はチャートの定義から $\mathbb{R}^{\dim M}$ の開集合なので $\psi_p\bigl(\pi^{-1}(V_p)\bigr)$ は $\mathbb{R}^{\dim M} \times \mathbb{R}^n$ の開集合である．仮定より $\psi_{\alpha_p} \colon \pi^{-1}(V_p) \longrightarrow V_p \times \mathbb{R}^n$ は全単射であり，チャートの定義から $\varphi_p \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \colon V_p \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \varphi_p(V_p) \times \mathbb{R}^n$ は全単射なので $\psi_p = (\varphi_p \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) \circ \tilde{\varphi}_{\alpha_p}$ も全単射である．

(DS-2, 3) $\forall p,\, q \in M$ をとる．このとき

$$\tilde{\varphi}_p\bigl(\pi^{-1}(V_p) \cap \pi^{-1}(V_q)\bigr) = \varphi_p(V_p \cap V_q) \times \mathbb{R}^n$$
$$\tilde{\varphi}_q\bigl(\pi^{-1}(V_p) \cap \pi^{-1}(V_q)\bigr) = \varphi_q(V_p \cap V_q) \times \mathbb{R}^n$$

はどちらも $\mathbb{R}^{\dim M} \times \mathbb{R}^n$ の開集合である．さらに $\forall (x,\, v) \in \tilde{\varphi}_p^{-1}\bigl(\pi^{-1}(V_p) \cap \pi^{-1}(V_q)\bigr)$ に対して

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}_q \circ \tilde{\varphi}_p^{-1}(x,\, v) &= \tilde{\varphi}_q \circ \psi_{\alpha_p}^{-1}\bigl(\varphi_p^{-1}(x),\, v\bigr) \\
&= \tilde{\varphi}_q \circ \psi_{\alpha_q}^{-1}\Bigl(\varphi_p^{-1}(x),\, t_{\alpha_q,\alpha_p}\bigl(\varphi_p^{-1}(x)\bigr)(v)\Bigr) \\
&= \Bigl(\varphi_q \circ \varphi_p^{-1}(x),\, t_{\alpha_q,\alpha_p}\bigl(\varphi_p^{-1}(x)\bigr)(v)\Bigr)
\end{aligned}$$

が成り立つが，C^∞ チャートの定義から $\varphi_{\alpha_p},\, \varphi_{\alpha_q}$ は C^∞ 写像で，かつ仮定より t_{α_q,α_p} も C^∞ 写像なので，最右辺は C^∞ 写像の合成として書ける．よって $\tilde{\varphi}_q \circ \tilde{\varphi}_p^{-1}$ は C^∞ 写像である．

(DS-4) $\{(V_p,\, \varphi_p)\}_{p\in M}$ は M のアトラスなので，高々可算濃度の部分集合 $I \subset M$ が存在して $\{V_i\}_{i\in I}$ が M の開被覆になる．このとき

$$E = \coprod_{p \in \bigcup_{i\in I} V_i} E_p = \bigcup_{i\in I} \coprod_{p_i \in V_i} E_{p_i} = \bigcup_{i\in I} \pi^{-1}(V_i)$$

が言える．

(DS-5) 互いに相異なる $\xi = (p,\, v),\, \eta = (q,\, w) \in E$ をとる．もし $p = q$ ならば $\xi,\, \eta \in E_p \subset \pi^{-1}(V_p)$ である．$p \neq q$ ならば，$V_p,\, V_q \subset M$ を $V_p \cap V_q = \emptyset$ を充たすようにとれる．すると $\pi^{-1}(V_p) \cap \pi^{-1}(V_q) = \pi^{-1}(V_p \cap V_q) = \emptyset$ でかつ $\xi \in \pi^{-1}(V_p),\, \eta \in \pi^{-1}(V_q)$ が成り立つ．

次に，M が境界付き多様体である場合を考える．座標を入れ替える写像

$$\mathrm{swap}\colon \mathbb{R}^{\dim M}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{\dim M},\ (x^1,\,\dots,\,x^{\dim M},\,v^1,\,\dots,\,v^n)\longmapsto(v^1,\,\dots,\,v^n,\,x^1,\,\dots,\,x^{\dim M})$$

は微分同相写像[*19]であり，境界チャート $(V_p,\,\varphi_p)$ に関して

$$\mathrm{swap}\circ\psi_p\bigl(\pi^{-1}(V_p)\bigr)=\mathbb{R}^n\times\varphi_p(V_p)\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{H}^{\dim M}=\mathbb{H}^{\dim M+n}$$

が成り立つ．よって

- 集合 E
- E の部分集合族 $\bigl\{\pi^{-1}(V_p)\bigr\}_{p\in M}$
- 写像の族 $\bigl\{\mathrm{swap}\circ\tilde{\varphi}_p\colon\pi^{-1}(V_p)\longrightarrow\mathbb{R}^n\times\varphi_p(V_p)\bigr\}_{p\in M}$

の 3 つ組が補題 B.2 の 5 条件を充たすことを示せば良いが，議論は M が境界を持たない場合と全く同様である． ■

*19 $\mathbb{R}^{\dim M+n}$ には標準的な C^∞ 構造を入れる．

付録 C

∞-圏

この付録では，[46]，[34]，[47] に従って ∞-圏[*1]，および主 ∞-束を導入する．

C.1 圏論の復習

C.1.1 圏と関手

定義 C.1: 圏

圏 (category) $\mathcal{C}$ とは，以下の 4 種類のデータからなる：

- **対象** (object) と呼ばれる要素の集まり[a]

$$\mathbf{Ob}(\mathcal{C})$$

- $\forall A,\, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，A から B への**射** (morphism) と呼ばれる要素の集合

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\boldsymbol{A},\, \boldsymbol{B})$$

- $\forall A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，A 上の**恒等射** (identity morphism) と呼ばれる射

$$\mathbf{Id}_{\boldsymbol{A}} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, A)$$

- $\forall A,\, B,\, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, B),\, \forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(B,\, C)$ に対して，f と g の**合成** (composite) と呼ばれる射 $\boldsymbol{g \circ f} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, C)$ を対応させる集合の写像

$$\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(B,\, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, C),\ (f,\, g) \longmapsto g \circ f$$

これらの構成要素は，次の 2 条件を満たさねばならない：

(1) **(unitality)**：任意の射 $f\colon A \longrightarrow B$ に対して

$$f \circ \mathrm{Id}_A = f, \quad \mathrm{Id}_B \circ f = f$$

が成り立つ．

[*1] [48] が源流にある．[47] は創始者本人によって運営されている web サイトのようだ．

(2) **(associativity)**：任意の射 $f\colon A \longrightarrow B,\ g\colon B \longrightarrow C,\ h\colon C \longrightarrow D$ に対して

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

が成り立つ．

[a] $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ は，集合論では扱えないほど大きなものになっても良い．

定義 C.2: モノ・エピ・同型射

圏 $\mathcal{C}$ を与える．

- 射 $f\colon A \longrightarrow B$ が**モノ射** (monomorphism) であるとは，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して写像

$$\begin{aligned} f_*\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, A) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, B), \\ g &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$$

  が集合の写像として単射であること．
- 射 $f\colon A \longrightarrow B$ が**エピ射** (epimorphism) であるとは，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して写像

$$\begin{aligned} f^*\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,\, X) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\, X), \\ g &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

  が集合の写像として単射であること．
- 射 $f\colon A \longrightarrow B$ が**同型射** (isomorphism) であるとは，射 $g\colon B \longrightarrow A$ が存在して $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ かつ $f \circ g = \mathrm{Id}_B$ を充たすこと．このとき f と g は互いの**逆射** (inverse) であると言い，$g = \boldsymbol{f^{-1}},\ f = \boldsymbol{g}^{-1}$ と書く[a]．
- $A,\, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の間に同型射が存在するとき，対象 A と B は**同型** (isomorphic) であると言い，$\boldsymbol{A \cong B}$ と書く．

[a] 逆射は存在すれば一意である．

定義 C.3: 関手

圏 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ を与える．圏 $\mathcal{C}$ から圏 $\mathcal{D}$ への**関手** F とは，以下の 2 つの対応からなる：

- 圏 $\mathcal{C}$ における任意の対象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，圏 $\mathcal{D}$ における対象 $F(X) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ を対応づける
- 圏 $\mathcal{C}$ における任意の射 $f\colon X \longrightarrow Y$ に対して，圏 $\mathcal{D}$ における射 $F(f)\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ を対応づける

これらの対応は以下の条件を充たさねばならない：

(fun-1) 圏 $\mathcal{C}$ における任意の射 $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon Y \longrightarrow Z$ に対して，

$$F(g \circ f) \longrightarrow F(g) \circ F(f)$$

(fun-2) 圏 $\mathcal{C}$ における任意の対象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，

$$F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$$

文脈上明らかなときは，圏 $\mathcal{C}$ から圏 $\mathcal{D}$ への関手 F のことを関手 $\boldsymbol{F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}}$ と略記する．

定義 C.4: 忠実・充満・本質的全射

関手 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ を与える．

- F が**忠実** (faithful) であるとは，$\forall X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して写像

$$F\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(X),\, F(Y)\big),\ f \longmapsto F(f)$$

  が単射であること．
- F が**充満** (full) であるとは，$\forall X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して写像

$$F\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(X),\, F(Y)\big),\ f \longmapsto F(f)$$

  が全射であること．
- F が**本質的全射** (essentially surjective) であるとは，$\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ に対して $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が存在して $F(X)$ が Y と同型になること．

忠実充満関手のことを**埋め込み**と呼ぶことがある．

定義 C.5: 自然変換

2 つの関手 $F, G\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ を与える．F, G の間の**自然変換** (natural transformation) $\boldsymbol{\tau\colon F \Longrightarrow G}$ とは，以下の対応からなる：

- 圏 $\mathcal{C}$ における任意の対象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，圏 $\mathcal{D}$ における射 $\tau_X\colon F(X) \longrightarrow G(X)$ を対応づける

この対応は以下の条件を充たさねばならない：

(nat) 圏 $\mathcal{C}$ における任意の射 $f\colon X \longrightarrow Y$ に対して，以下の図式を可換にする：

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\tau_X"] & F(Y) \arrow[d, "\tau_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

自然変換 $\tau\colon F \Longrightarrow G$ であって，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して射 $\tau_X\colon F(X) \longrightarrow G(X)$ が同型射であるもののことを**自然同値** (natural equivalence) と呼ぶ.

自然変換 $\tau\colon F \Longrightarrow G$ を

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, bend right=50, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\tau"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

と書くことがある.

C.1.2 極限と余極限

定義 C.6: 図式

圏 $\mathcal{C}$ と小圏 I（**添字圏**と呼ばれる）を与える.
$\mathcal{C}$ における $\boldsymbol{I}$ **型の図式** (diagram of shape I) とは，関手

$$I \longrightarrow \mathcal{C}$$

のこと.

定義 C.7: 錐の圏

$D\colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ を図式とする.

- D 上の**錐** (cone) とは,
  - $\mathcal{C}$ の対象 $\boldsymbol{C} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$

– $\mathcal{C}$ の射の族 $\boldsymbol{c}_\bullet \coloneqq \left\{\boldsymbol{c}_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\boldsymbol{C},\, D(i)\right)\right\}_{i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})}$

の組 $(\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{c}_\bullet)$ であって，$\forall i,\, j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ および $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i,\, j)$ に対して

$$\boldsymbol{c}_j = \boldsymbol{c}_i \circ D(f)$$

を充たす，i.e. 以下の図式を可換にするもののこと．

$$\begin{tikzcd} & \boldsymbol{C} \arrow[dl, bend right, "\boldsymbol{c}_i"'] \arrow[dr, bend left, "\boldsymbol{c}_j"] & \\ D(i) \arrow[rr, "D(f)"] & & D(j) \end{tikzcd}$$

- **錐の射** (morphism of cones)

$$(\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{c}_\bullet) \xrightarrow{u} (\boldsymbol{C'},\, \boldsymbol{c'_\bullet})$$

とは，$\mathcal{C}$ の射 $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{C'})$ であって，$\forall i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ に対して

$$\boldsymbol{c}_i = u \circ \boldsymbol{c}'_i$$

を充たす，i.e. 以下の図式を可換にするもののこと．

$$\begin{tikzcd} & \boldsymbol{C} \arrow[d, "u"] \arrow[ddl, bend right, "\boldsymbol{c}_i"'] \\ & \boldsymbol{C'} \arrow[dl, bend right, "\boldsymbol{c}'_i"] \\ D(i) & \end{tikzcd}$$

D 上の錐と錐の射を全て集めたものは圏 $\mathbf{Cone}(D)$ を成す．

定義 C.8: 極限

図式 $D \colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ の**極限** (limit)[a]とは，圏 $\mathbf{Cone}(D)$ の終対象のこと．記号として $\left(\lim_{\mathcal{I}} \boldsymbol{D},\, \boldsymbol{p}_\bullet\right)$ と書く[b]．i.e. 極限 $\left(\lim_{\mathcal{I}} \boldsymbol{D},\, \boldsymbol{p}_\bullet\right) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cone}(D))$ は，以下の普遍性を充たす：

(極限の普遍性)

$\forall(\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{c}_\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cone}(D))$ に対して，錐の射 $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cone}(D)}\left((\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{c}_\bullet),\, \left(\lim_{\mathcal{I}} \boldsymbol{D},\, \boldsymbol{p}_\bullet\right)\right)$ が一意的に存在して，$\forall i,\, j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ および $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i,\, j)$ に対して図式を可換にする．

$$
\begin{tikzcd}
 & \forall \boldsymbol{C} \arrow[d, dashed, "\exists ! u"] \arrow[ddl, bend right, "\boldsymbol{c}_i"'] \arrow[ddr, bend left, "\boldsymbol{c}_j"] & \\
 & \lim_{\mathcal{I}} \boldsymbol{D} \arrow[dl, bend right, "\boldsymbol{p}_i"] \arrow[dr, bend left, "\boldsymbol{p}_j"'] & \\
D(i) \arrow[rr, "D(f)"] & & D(j)
\end{tikzcd}
$$

図 C.1: 極限の普遍性

[a] **普遍錐** (universal cone) とも言う.
[b] $\varprojlim \boldsymbol{D}$ と書くこともある.

定義 C.9: 余錐の圏

$D : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ を図式とする.

- D 上の**余錐** (cocone) とは,
  - $\mathcal{C}$ の対象 $\boldsymbol{C} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
  - $\mathcal{C}$ の射の族 $\boldsymbol{c}_\bullet := \left\{ \boldsymbol{c}_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}} \left(D(i),\, \boldsymbol{C} \right) \right\}_{i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})}$

  の組 $(\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{c}_\bullet)$ であって, $\forall i,\, j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ および $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}\,(i,\, j)$ に対して

$$
\boldsymbol{c}_i = D(f) \circ \boldsymbol{c}_j
$$

  を充たす, i.e. 以下の図式を可換にするもののこと.

$$
\begin{tikzcd}
D(i) \arrow[rr, "D(f)"] \arrow[dr, bend right, "\boldsymbol{c}_i"'] & & D(j) \arrow[dl, bend left, "\boldsymbol{c}_j"] \\
 & \boldsymbol{C} &
\end{tikzcd}
$$

- **余錐の射** (morphism of cocones)

$$
(\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{c}_\bullet) \xrightarrow{u} (\boldsymbol{C}',\, \boldsymbol{c}'_\bullet)
$$

  とは, $\mathcal{C}$ の射 $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{C}')$ であって, $\forall i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ に対して

$$
\boldsymbol{c}'_i = u \circ \boldsymbol{c}_i
$$

  を充たす, i.e. 以下の図式を可換にするもののこと.

$$
\begin{tikzcd}
D(i) \arrow[dr, bend right, "\boldsymbol{c}_i"] \arrow[ddr, bend right, "\boldsymbol{c}_j"'] & \\
 & \boldsymbol{C} \arrow[d, "u"] \\
 & \boldsymbol{C}'
\end{tikzcd}
$$

D 上の余錐と余錐の射を全て集めたものは圏 $\mathbf{Cone}(D)$ を成す.

定義 C.10: 余極限

図式 $D\colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ の**余極限** (colimit)[a]とは, 圏 $\mathbf{coCone}(D)$ の始対象のこと. 記号として $\bigl(\mathop{\mathbf{colim}}\limits_{\mathcal{I}} D,\, \boldsymbol{p}_\bullet\bigr)$ と書く[b]. i.e. 余極限 $\bigl(\mathbf{colim}_{\mathcal{I}}\, \boldsymbol{D},\, \boldsymbol{p}_\bullet\bigr) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{coCone}(D))$ は, 以下の普遍性を充たす：

(余極限の普遍性)

$\forall(\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{c}_\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{coCone}(D))$ に対して, 余錐の射 $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{coCone}(D)}\bigl(\bigl(\mathbf{colim}_{\mathcal{I}}\, \boldsymbol{D},\, \boldsymbol{p}_\bullet\bigr),\, (\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{c}_\bullet)\bigr)$ が一意的に存在して, $\forall i,\, j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ および $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i,\, j)$ に対して図式を可換にする.

$$
\begin{tikzcd}
D(i) \arrow[rr, "D(f)"] \arrow[dr, bend right, "\boldsymbol{p}_i"] \arrow[ddr, bend right, "\boldsymbol{c}_i"'] & & D(j) \arrow[dl, bend left, "\boldsymbol{p}_i"'] \arrow[ddl, bend left, "\boldsymbol{c}_i"] \\
& \mathbf{colim}_{\mathcal{I}}\, \boldsymbol{D} \arrow[d, dashed, "\exists! u"] & \\
& \forall \boldsymbol{C} &
\end{tikzcd}
$$

図 C.2: 余極限の普遍性

[a] **普遍余錐** (universal cocone) とも言う.
[b] $\varinjlim \boldsymbol{D}$ と書くこともある.

【例 C.1.1】積と和

図式

$$
D\colon \boxed{\overset{1}{\bullet} \qquad\qquad \overset{2}{\bullet}} \longrightarrow \mathcal{C}
$$

の極限を（存在すれば）**積** (product) と呼び, $\boldsymbol{D}(\mathbf{1}) \times \boldsymbol{D}(\mathbf{2})$ と書く. 同じ図式の余極限を（存在すれば）**和**[a] (coproduct) と呼び, $\boldsymbol{D}(\mathbf{1}) \amalg \boldsymbol{D}(\mathbf{2})$ と書く.

[a] **余積**と言うこともある.

【例 C.1.2】引き戻しと押し出し

図式

$$D\colon \boxed{\begin{tikzcd} & 3 \arrow[d, "p"] \\ 1 \arrow[r, "f"'] & 2 \end{tikzcd}} \longrightarrow \mathcal{C}$$

の極限を（存在すれば）**引き戻し**[a] (pullback) と呼び，$\boldsymbol{D(1) \times_{D(3)} D(2)}$ と書く．

図式

$$D\colon \boxed{\begin{tikzcd} & 3 \\ 1 & 2 \arrow[l, "f"] \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}} \longrightarrow \mathcal{C}$$

の余極限を（存在すれば）**押し出し**と呼び，$\boldsymbol{D(1) \amalg_{D(3)} D(2)}$ と書く．

[a] **ファイバー積** (fiber product) と呼ぶこともある．

定義 C.11: 完備な圏

圏 $\mathcal{C}$ が**完備**（resp. **余完備**）(complete resp. cocomplete) であるとは，$\mathcal{C}$ における任意の図式が極限（resp. 余極限）を持つことを言う．完備かつ余完備な圏は**双完備** (bicomplete) であると言われる．

Sets は双完備である．

命題 C.1: 極限と Hom の交換

圏 $\mathcal{C}$ の図式 $D\colon I \longrightarrow \mathcal{C}$ を与える．

(1) 圏 $\mathcal{C}$ は完備であるとする．このとき $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X,\, \lim_I D\right) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ は **Sets** の図式

$$I \xrightarrow{D} \mathcal{C} \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, \text{-})} \mathbf{Sets} \tag{C.1.1}$$

の極限である．i.e. 全単射

$$\lim_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X,\, D(i)\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X,\, \lim_I D\right)$$

が存在する．

(2) 圏 $\mathcal{C}$ は余完備であるとする．このとき $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\mathrm{colim}_I\, D,\, X\right) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ は $\mathbf{Sets}$ の図式

$$I \xrightarrow{D} \mathcal{C} \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-},\, X)} \mathbf{Sets}$$

の余極限である．i.e. 全単射

$$\lim_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(D(i),\, X\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\operatorname*{colim}_{I},\, X\right)$$

が存在する．

<u>**証明**</u> (1) $\mathcal{C}$ が完備なので，図式 $D\colon I \longrightarrow \mathcal{C}$ の極限

$$\begin{tikzcd}
 & \lim_I D \arrow[dl, bend right, "p_i"'] \arrow[dr, bend left, "p_j"] & \\
D(i) \arrow[rr, "D(f)"] & & D(j)
\end{tikzcd}$$

が存在する[*2]．示すべきは $\mathbf{Sets}$ の図式

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, \lim_I D) \arrow[dl, bend right, "p_{i*}"'] \arrow[dr, bend left, "p_{j*}"] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X,\, D(i)\right) \arrow[rr, "D(f)_*"] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X,\, D(j)\right)
\end{tikzcd}$$

が極限の普遍性を充たすことである[*3]．

$\mathbf{Sets}$ の図式 (C.1.1) の錐 $(Y,\, c_\bullet)$ を任意にとる．すると錐の定義および $(\text{-})_*$ の定義から，$\forall y \in Y$ に対して以下の図式が可換になる：

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, bend right, "c_i(y)"'] \arrow[dr, bend left, "c_j(y)"] & \\
D(i) \arrow[rr, "D(f)"] & & D(j)
\end{tikzcd}$$

i.e. 組 $\left(X,\, c_\bullet(y)\right)$ は $\mathcal{C}$ の図式 $D\colon I \longrightarrow \mathcal{C}$ の錐であるから，錐の射 $u_y\colon X \longrightarrow \lim_I D$ が一意的に存在する．ここで写像

$$u\colon Y \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, \lim_I D),\ y \longmapsto u_y$$

を考えると，これは $\forall y \in Y$ に対して $p_{\bullet *} \circ u(y) = p_\bullet \circ u_y = c_\bullet(y)$ を充たす．i.e. $\mathbf{Sets}$ の図式

[*2] $i,\, j \in \mathrm{Ob}(I)$ および $f_{ij} \in \mathrm{Hom}_I\,(i,\, j)$ は任意にとる．

[*3] $p_{i*}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X,\, \lim_I D) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X,\, D(i)\right) f \longmapsto p_i \circ f$ などと定義する．このように射に下付きの $*$ を書いた時は post-compose を表す．上付きの $*$ は pre-compose である．

$$\begin{tikzcd}
 & \forall \boldsymbol{Y} \arrow[d, "u"] \arrow[ddl, bend right, "\boldsymbol{c}_i"'] \arrow[ddr, bend left, "\boldsymbol{c}_j"] & \\
 & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X,\, \lim_I D\right) \arrow[dl, bend right, "\boldsymbol{p}_{i*}"'] \arrow[dr, bend left, "\boldsymbol{p}_{j*}"] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X,\, D(i)\big) \arrow[rr, "D(f)_*"] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X,\, D(j)\big)
\end{tikzcd}$$

を可換にする. u_y の定義からこのような u は一意であるから, 図式 (C.1.1) の錐 $\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X,\, \lim_I D\right),\, p_{\bullet *}\big)$ が極限の普遍性を充たすことが分かった．極限の一意性より

$$\lim_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X,\, D(i)\big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X,\, \lim_I D\big)$$

でなくてはいけない.

(2) $\mathcal{C}$ が余完備なので，図式 $D\colon I \longrightarrow \mathcal{C}$ の余極限

$$\begin{tikzcd}
D(i) \arrow[rr, "D(f)"] \arrow[dr, bend right, "p_i"'] & & D(j) \arrow[dl, bend left, "p_j"] \\
 & \operatorname{colim}_I D &
\end{tikzcd}$$

が存在する[*4]．示すべきは **Sets** の図式

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\operatorname{colim}_I D,\, X\right) \arrow[dl, bend right, "{p_i}^*"'] \arrow[dr, bend left, "{p_i}^*"] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(D(j),\, X\big) \arrow[rr, "D(f)^*"] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(D(i),\, X\big)
\end{tikzcd}$$

が極限の普遍性を充たすことだが，以降の議論は (1) と同様である.

■

C.1.3 米田埋め込み

定義 C.12: 前層

圏 $\mathcal{C}$ 上の圏 $\mathcal{S}$ に値をとる**前層**とは，関手

$$P\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}$$

のこと.

前層の圏 $\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\, \mathcal{S})$ [*5]とは,

- 前層 $P\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}$ を対象とする

---

*4 $i,\, j \in \mathrm{Ob}(I)$ および $f_{ij} \in \mathrm{Hom}_I\,(i,\, j)$ は任意にとる.

*5 $[\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}]$ や $\mathcal{S}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ と書くこともある．なお，付録 A で登場したものはこれの一例である.

- 前層 $P, Q\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}$ の間の自然変換 $\tau\colon P \Longrightarrow Q$ を射とする

として構成される圏のこと[*6].

定義 C.13: 表現可能前層・米田埋め込み

圏 $\mathcal{C}$ を与える.

- $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，以下で定義する前層

$$\boldsymbol{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-}, X)}\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

  のことを**表現可能前層** (representable presheaf) と呼ぶ：
  - $\forall Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-}, X)(Y) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$$

    を対応づける
  - $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ における任意の射 $g\colon Y \longrightarrow Z$[a] に対して，

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-}, X)(g) \coloneqq g^*\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X), \\ h &\longmapsto h \circ g \end{aligned}$$

    を対応付ける
- **米田埋め込み** (Yoneda embedding) とは，以下で定義する関手

$$\mathrm{Y}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{PSh}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets})$$

  のこと：
  - $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ に対して表現可能前層 $\mathrm{Y}(X) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-}, X) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{PSh}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets}))$ を対応付ける
  - $\mathcal{C}$ における任意の射 $f\colon X \longrightarrow Y$ に対して，以下で定義される自然変換 $\mathrm{Y}(f)\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-}, X) \Longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-}, Y)$ を対応付ける：
    - $\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ に対して，圏 $\mathbf{Sets}$ における射

$$\begin{aligned} \mathrm{Y}(f)_Z \coloneqq f_*\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y), \\ g &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$$

      を対応付ける.

[a] つまり，これは $\mathcal{C}$ における射 $g\colon Z \longrightarrow Y$ である.

[*6] $\mathrm{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{S})$ の恒等射は $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ に対して $\mathrm{Id}_X\colon X \longrightarrow X$ を対応づける自然変換である.

補題 C.1: 米田の補題

前層 $F\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ および圏 $\mathcal{C}$ の対象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を与える．このとき，写像

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh}(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})}\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-},\,X),\,F\big) &\longrightarrow F(X),\\ \tau &\longmapsto \tau_X(\mathrm{Id}_X)\end{aligned}$$

は全単射である．

米田の補題の主張は少し込み入っているが，次のように考えれば良い：
$\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh}(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})}\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-},\,X)\big)$ とは自然変換

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \arrow[r, bend left=50, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-},\,X)", ""{name=U, below}] \arrow[r, bend right=50, "F"', ""{name=D, above}] & \mathbf{Sets} \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\tau"] \end{tikzcd}$$

のことであるから，表現可能前層の定義より $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ に対して圏 $\mathbf{Sets}$ における射（i.e. 写像）$\tau_X\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\,X) \longrightarrow F(X)$ が定まる．圏の定義より集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\,X)$ には必ず恒等射という元 $\mathrm{Id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\,X)$ が含まれるので，それを写像 τ_X で送った先は $\tau_X(\mathrm{Id}_X) \in F(X)$ として well-defined である．

証明 写像

$$\begin{aligned}\eta\colon F(X) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh}(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})}\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-},\,X),\,F\big),\\ s &\longmapsto \big\{\eta(s)_Y\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\,X) \longrightarrow F(Y),\ f \longmapsto F(f)(s)\big\}_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}\end{aligned}$$

を考える．$\forall s \in F(X)$ を 1 つ固定する．このとき圏 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ における任意の射 $Y \longleftarrow Z\colon f$ および $\forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,\,X)$ に対して

$$\begin{aligned}\eta(s)_Y \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-},\,X)(f)(g) &= \eta(s)_Y(g \circ f)\\ &= F(g \circ f)(s)\\ &= F(f) \circ F(g)(s)\\ &= F(f) \circ \eta(s)_Z(g)\end{aligned}$$

が言える．i.e. $\eta(s)$ は自然変換であり，η は well-defined である．
ところで，$\forall \tau \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh}(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})}\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-},\,X),\,F\big)$ に対して

$$\begin{aligned}\eta(\tau_X(\mathrm{Id}_X)) &= \big\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\,X) \longrightarrow F(Y),\ f \longmapsto F(f)\big(\tau_X(\mathrm{Id}_X)\big)\big\}_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}\\ &= \big\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\,X) \longrightarrow F(Y),\ f \longmapsto F(f) \circ \tau_X(\mathrm{Id}_X)\big\}_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}\\ &= \big\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\,X) \longrightarrow F(Y),\ f \longmapsto \tau_Y \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-},\,X)(f)(\mathrm{Id}_X)\big\}_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}\\ &= \big\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\,X) \longrightarrow F(Y),\ f \longmapsto \tau_Y(f \circ \mathrm{Id}_X)\big\}_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}\\ &= \big\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\,X) \longrightarrow F(Y),\ f \longmapsto \tau_Y(f)\big\}_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}\\ &= \tau\end{aligned}$$

が成り立ち，かつ

$$\eta(s)_X(\mathrm{Id}_X) = F(\mathrm{Id}_X)(s) = \mathrm{Id}_{F(X)}(s) = s$$

が成り立つので，η は題意の写像の逆写像である． ■

命題 C.2: 米田埋め込みは埋め込み

米田埋め込み $\mathrm{Y} \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{PSh}\,(\mathcal{C},\, \mathbf{Sets})$ は埋め込みである．

<u>証明</u> $\forall X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を固定する．写像

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X,\, Y) &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})}\,\bigl(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-}\,,\, X),\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-}\,,\, Y)\bigr), \\ f &\longmapsto \mathrm{Y}(f)\end{aligned}$$

が全単射であることを示せば良い．米田埋め込みの定義から，$\forall s \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X,\, Y)$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{Y}(s) &= \bigl\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(Z,\, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(Z,\, Y),\ g \longmapsto s \circ g\bigr\}_{Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \\ &= \bigl\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(Z,\, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(Z,\, Y),\ g \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-}\,,\, Y)(g)(s)\bigr\}_{Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}\end{aligned}$$

が成り立つが，これは米田の補題において $F = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-}\,,\, Y) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{PSh}\,(\mathcal{C},\, \mathbf{Sets}))$ としたときの逆写像であり，示された． ■

系 C.1: 同型と表現可能前層の自然同値

以下の 2 つは同値である：

(1) $X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ は同型

(2) 表現可能前層 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-},\, X),\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-},\, Y) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{PSh}\,(\mathcal{C},\, \mathbf{Sets}))$ が自然同型

<u>証明</u> **(1) $\Longrightarrow$ (2)**

$X \cong Y$ なので $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X,\, Y),\ g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(Y,\, X)$ が存在して $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ かつ $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ を充たす．このとき $\forall A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$\tau_A \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, Y),\ h \longmapsto f \circ h$$

と定義するとこれは $\eta_A \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, X),\ h \longmapsto g \circ h$ を逆射に持つので同型射であり，自然同値

$$\tau \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-},\, X) \Longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-},\, Y)$$

を定める．

(1) $\Longleftarrow$ (2)

$\mathrm{PSh}\,(\mathcal{C},\, \mathbf{Sets})$ における同型射とは，2 つの前層の間の自然同型である．関手は同型射を保つので，命題 C.2 より示された．

■

C.1.4 随伴

定義 C.14: 随伴

関手 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, $G\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ を与える．F が G の**左随伴** (left adjoint) であり，かつ G が F の**右随伴** (right adjoint) であるとは，２つの関手

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(\text{-}),\,\text{-}\big)\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} &\longrightarrow \mathbf{Sets},\\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(\text{-},\,G(\text{-})\big)\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} &\longrightarrow \mathbf{Sets}\end{aligned}$$

の間に自然同型

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \arrow[r, bend left=50, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(F(\text{-}),\,\text{-}\right)", ""{name=U, below}] \arrow[r, bend right=50, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\text{-},\,G(\text{-})\right)"', ""{name=L, above}] & \mathbf{Sets} \arrow[Rightarrow, from=U, to=L] \end{tikzcd}$$

が存在することを言う．

F が G の左随伴である（全く同じことだが，G が F の右随伴である）ことを $\boldsymbol{F \dashv G}$ と書く．図式中では

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$$

のように書く．

さて，圏 $\mathcal{C}$ 上の図式 $D\colon I \longrightarrow \mathcal{C}$ が余極限を持つとする：

$$\begin{tikzcd} & D(\forall i) \arrow[dl, bend right] \arrow[dr, bend left] & \\ \mathrm{colim}_I\, D \arrow[rr, dashed, "\exists!"] & & \forall X \end{tikzcd}$$

このとき，$\mathcal{D}$ 上の図式として

$$\begin{tikzcd} & F\big(D(\forall i)\big) \arrow[dl, bend right] \arrow[dr, bend left] & \\ \mathrm{colim}_I\, F(D) \arrow[rr, dashed, "\exists! u"] & & F(\mathrm{colim}_I\, D) \end{tikzcd}$$

を考えることができる．特に，一意に定まる射 $u\colon \mathrm{colim}_I\, F(D) \longrightarrow F(\mathrm{colim}_I\, D)$ が同型のとき，関手 F は**余極限を保つ**という．

同様に，圏 $\mathcal{D}$ 上の図式 $D\colon I \longrightarrow \mathcal{C}$ が極限を持つとする：

$$\begin{tikzcd} \lim_I D \arrow[dr, bend right] & & \forall X \arrow[ll, dashed, "\exists!"'] \arrow[dl, bend left] \\ & D(\forall i) & \end{tikzcd}$$

このとき，$\mathcal{D}$ 上の図式として

$$
\begin{tikzcd}
\lim_I F(D) \arrow[dr, bend right] & & F(\lim_I D) \arrow[ll, dashed, "\exists ! u"'] \arrow[dl, bend left] \\
& F\big(D(\forall i)\big) &
\end{tikzcd}
$$

を考えることができる．特に，一意に定まる射 $u \colon F(\lim_I D) \longrightarrow \lim_I F(D)$ が同型のとき，関手 F は**極限を保つ**という．

> **命題 C.3: 随伴と極限・余極限**
>
> 関手 $F \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, $G \colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ が $F \dashv G$ であるとする．このとき，F は余極限を保ち，G は極限を保つ．

証明 余極限を持つ任意の $\mathcal{C}$ の図式 $D \colon I \longrightarrow \mathcal{C}$ を 1 つ固定する．随伴の定義および命題 C.1 より，$\forall Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ に対して

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(\operatorname*{colim}_I D),\, Y\big) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(\operatorname*{colim}_I D,\, G(Y)\big) \\
&\cong \lim_I \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(D(i),\, G(Y)\big) \\
&\cong \lim_I \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(D(i)),\, Y\big) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(\operatorname*{colim}_I F(D),\, Y\big)
\end{aligned}
$$

が言える．i.e. 自然同型

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[r, bend left=50, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(F(\mathrm{colim}_I D),\text{-}\right)"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(\mathrm{colim}_I F(D),\text{-}\right)"'{name=L}] & \mathbf{Sets} \arrow[from=U, to=L, Rightarrow]
\end{tikzcd}
$$

があるので，米田の補題の系より

$$
F(\operatorname*{colim}_I D) \cong \operatorname*{colim}_I F(D)
$$

が示された． ■

C.1.5 Kan 拡張

定義 C.15: スライス圏

圏 $\mathcal{D}$ およびその対象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ を与える．**スライス圏** (slice category) $\boldsymbol{\mathcal{D}_{/X}}$ とは，以下のデータからなる圏のこと：

- $\mathcal{D}$ の対象と射の組 $(D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}),\ \alpha\colon D \longrightarrow X)$ を対象に持つ
- $(D,\ \alpha),\ (D',\ \alpha')$ の間の射は，$\mathcal{D}$ における射 $\beta\colon D \longrightarrow D'$ であって $\mathcal{D}$ における図式

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & D' \arrow[dl, "\alpha'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

を可換にするものとする

双対スライス圏 (dual slice category) $\boldsymbol{\mathcal{D}_{X/}}$ とは，以下のデータからなる圏のこと：

- $\mathcal{D}$ の対象と射の組 $(D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}),\ \alpha\colon X \longrightarrow D)$ を対象に持つ
- $(D,\ \alpha),\ (D',\ \alpha')$ の間の射は，$\mathcal{D}$ における射 $\beta\colon D \longrightarrow D'$ であって $\mathcal{D}$ における図式

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "\beta"] & & D' \\ & X \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[ur, "\alpha'"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にするものとする

関手[*7] $\mathcal{D}_{/X} \longrightarrow \mathcal{D},\ (D,\ \alpha) \longmapsto D$ のことを**標準的忘却関手** (canonical forgetful functor) と呼ぶ．標準的関手は図式中でも記号で明記しないことが多い．

関手 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ および圏 $\mathcal{D}$ における対象 $X \in \mathcal{D}$ を与える．このとき**関手 $\boldsymbol{F}$ に関するスライス圏**を関手圏 $\mathbf{Fun}(\boldsymbol{\mathcal{C}},\ \boldsymbol{\mathcal{D}})$ における引き戻し

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{F_{/X}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{D}_{/X} \arrow[d] \\ \mathcal{C} \arrow[r, "F"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

として定義する．i.e. $F_{/X}$ の対象は $(C \in \mathcal{C},\ \alpha\colon F(C) \longrightarrow X)$ であり，$(C,\ \alpha),\ (C',\ \alpha')$ の間の射とは，$\mathcal{C}$ における射 $\beta\colon C \longrightarrow C'$ であって $\mathcal{D}$ における図式

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[rr, "F(\beta)"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & F(C') \arrow[dl, "\alpha'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

を可換にするものである．

[*7] 対象の対応のみ明示した．

定理 C.2: density theorem

前層 $F\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ を与える．関手 $\mathrm{Y}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{PSh}\,(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})$ を米田埋め込みとする．
このとき，前層の圏 $\mathrm{PSh}\,(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})$ における同型

$$F \cong \operatorname*{colim}_{X \in \mathrm{Y}_{/F}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-},\ X)$$

が成り立つ．

<u>証明</u> 米田の補題の系により，示すべきは自然同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})}\left(\operatorname*{colim}_{X \in \mathrm{Y}_{/F}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-},\ X),\,\text{-}\right) \Longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})}\left(F,\,\text{-}\right)$$

である．実際，$\forall G \in \mathrm{Ob}(\mathrm{PSh}\,(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets}))$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})}\left(\operatorname*{colim}_{X \in \mathrm{Y}_{/F}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-},\ X),\,G\right) &\cong \lim_{X \in \mathrm{Y}_{/F}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-},\,X),\,G\right) && \because\ \text{命題 C.1} \\ &\cong \lim_{X \in \mathrm{Y}_{/F}} G(X) && \because\ \text{米田の補題}\end{aligned}$$

なる自然同型がある．

ここで $\mathrm{pt} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{PSh}\left(\mathrm{Y}_{/F},\,\mathbf{Sets}\right))$ を $\mathrm{pt}(X) \coloneqq \{*\}$ で定義する[*8]と，極限の定義から明らかに $\lim_{X \in \mathrm{Y}_{/F}} G(X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathrm{Y}_{/F},\,\mathbf{Sets})}\,(\mathrm{pt},\,G)$ が成り立つ．自然変換 $\forall \tau \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathrm{Y}_{/F},\,\mathbf{Sets})}\,(\mathrm{pt},\,G)$ は，$\forall (X,\,\alpha) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Y}_{/F})$ に対して写像 $\{*\} \longrightarrow G(X),\ * \longmapsto \tau_{(X,\,\alpha)}$ を一意的に定める．一方で米田の補題より $\forall (X,\,\alpha) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Y}_{/F})$ はある $\alpha_X(\mathrm{Id}_X) \in F(X)$ と一対一対応する．この対応により $\forall X \in \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ について写像

$$\eta(\tau)_X\colon F(X) \longrightarrow G(X),\ \alpha_X(\mathrm{Id}_X) \longmapsto \tau_{(X,\,\alpha)}$$

が得られる．α は自然変換なので $\eta(\tau)_X$ を全て集めたものは自然変換 $\eta(\tau)\colon F \Longrightarrow G$ になる．よって写像

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathrm{Y}_{/F},\,\mathbf{Sets})}\,(\mathrm{pt},\,G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})}\,(F,\,B),\ \tau \longmapsto \eta(\tau)$$

は自然な同型であり，証明が完了した． ■

[*8] $\{*\}$ は一点集合．$\mathbf{Sets}$ における終対象と言っても良い．

定義 C.16: Kan 拡張

$i\colon \mathcal{C}_0 \hookrightarrow \mathcal{C}$ を $\mathcal{C}$ の小部分圏，$\mathcal{D}$ を双完備な圏とする．

- 関手 $F\colon \mathcal{C}_0 \longrightarrow \mathcal{D}$ の，関手 i に沿った**左 Kan 拡張** (left Kan extention) とは，
$$i_!(F)(x) := \operatorname*{colim}_{c \in (\mathcal{C}_0)_{/x}} F(c)$$
によって定義される関手
$$i_!\colon \mathrm{Fun}(\mathcal{C}_0, \mathcal{D}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$
によって定まる関手 $i_!(F)\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ のこと．
- 関手 $F\colon \mathcal{C}_0 \longrightarrow \mathcal{D}$ の，関手 i に沿った**右 Kan 拡張** (right Kan extention) とは，
$$i_*(F)(x) := \lim_{c \in (\mathcal{C}_0)_{x/}} F(c)$$
によって定義される関手
$$i_*\colon \mathrm{Fun}(\mathcal{C}_0, \mathcal{D}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$
によって定まる関手 $i_*(F)\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ のこと．

制限関手
$$i^*\colon \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{C}_0, \mathcal{D})$$
について $i_! \dashv i^*$ かつ $i_* \vdash i^*$ である．

C.2 単体圏

higher geometry において重要な役割を果たす単体的集合の圏を定義する．

定義 C.17: 単体圏

- $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して，全順序付集合 $[\boldsymbol{n}] := \{0, 1, \dots, n\}$ のことを $\boldsymbol{n}$**-単体** (n-simplex) と呼ぶ.
- **単体圏** (simplex category) Δ とは，
  - $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して，n-単体 $[n]$ を対象とする．
  - 順序を保つ写像を射とする

  圏のこと．

特に $\mathrm{Hom}_{\Delta}([n-1], [n])$ の元のうち
$$d_i^n\colon [n-1] \hookrightarrow [n],\ x \longmapsto \begin{cases} x, & x < i \\ x+1 & x \geq i \end{cases} \quad \text{w/} \quad i = 0, \dots, n$$

のことを**面写像** (face map) と呼び，$\mathrm{Hom}_{\Delta}([n+1],\, [n])$ の元のうち

$$s_i^n\colon [n+1] \twoheadrightarrow [n],\; x \longmapsto \begin{cases} x, & x \le i \\ x-1 & x > i \end{cases} \text{ w/ } \; i = 0,\, \dots,\, n$$

のことを**縮退写像** (degeneracy map) と呼ぶ．

定義 C.18: 単体的集合

- **単体的集合** (simplicial set) とは，前層

$$K\colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

のこと．特に n-単体 $[n] \in \mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})$ の表現可能前層を $\boldsymbol{\Delta^n} \coloneqq \mathrm{Hom}_{\Delta}(\text{-},\, [n]) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{SimpSet})$ と書く．
余単体的集合 (cosimplicial set) とは，関手

$$K\colon \Delta \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

のこと．
- 単体的集合 $S\colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ が単体的集合 $K\colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ の**単体的部分集合** (simplicial subset) であるとは，以下の 2 条件を充たすことを言う：
(sub-1) $\forall n \ge 0$ に対して $S([n]) \subset K([n])$
(sub-2) 圏 Δ における任意の射 $\alpha\colon [n] \longrightarrow [m]$ に対して $K(\alpha)\bigl(S([m])\bigr) \subset S([n])$
誤解の恐れがないときは，単体的部分集合を $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{K}$ と書く．
- **単体的集合の圏 SimpSet** とは，前層の圏

$$\mathbf{SimpSet} \coloneqq \mathrm{PSh}\,(\Delta,\, \mathbf{Sets})$$

のこと．

$K_n \coloneqq K([n])$ とおく．

- K_n の元のことを **n-単体** (n-simplex)
- $\partial_i \coloneqq K(d_i)\colon K_n \twoheadrightarrow K_{n-1}$ のことを**面写像** (face map)
- $\sigma_i \coloneqq K(s_i)\colon K_n \hookrightarrow K_{n+1}$ のことを**縮退写像** (degeneracy map) と呼ぶ．

と呼ぶ．これらは以下の**単体的恒等式** (simplicial identities) を充たす：

$$\begin{aligned} \partial_i^{n-1} \circ \partial_j^n &= \partial_{j-1}^{n-1} \circ \partial_i^n && (i < j), \\ \partial_i^{n+1} \circ \sigma_j^n &= \sigma_{j-1}^{n-1} \circ \partial_i^n && (i < j), \\ \partial_i^{n+1} \circ \sigma_j^n &= \sigma_j^{n-1} \circ \partial_{i-1}^n && (i > j+1), \\ \partial_i^{n+1} \circ \sigma_j^n &= \mathrm{id} && (i = j,\, j+1), \\ \sigma_i^{n+1} \circ \sigma_j^n &= \sigma_{j+1}^{n+1} \circ \sigma_i^n && (i \le j) \end{aligned} \tag{C.2.1}$$

逆に，

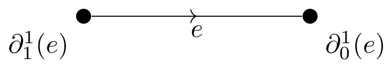
- 対象の族 $\{K_n\}_{n\geq 0}$
- 射の族 $\{\partial_i^n \colon K_n \longrightarrow K_{n-1}\}_{0\leq i\leq n,\, n\geq 0}$
- 射の族 $\{\sigma_i^n \colon K_n \longrightarrow K_{n+1}\}_{0\leq i\leq n,\, n\geq 0}$

の組であって単体的恒等式を充たすものは単体的集合を一意に定める [47, Proposition 1.1.2.14].

単体的集合 $K\colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ を図示する方法がある．

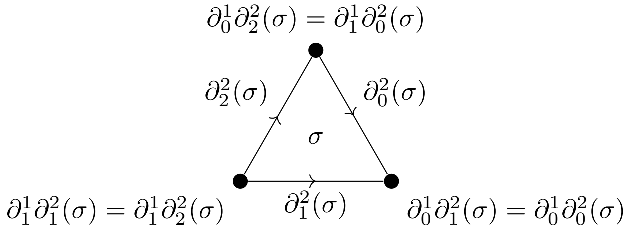
(1) K_0 の元（i.e. 0-単体）を点と見做し，$K_0 = \{\bullet, \ldots, \bullet\}$ のように書く．

(2) K_1 の元（i.e. 1-単体）$e \in K_1$ を



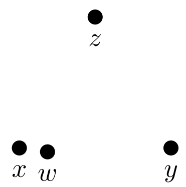
のように有向辺として図示する．

(3) K_2 の元（i.e. 2-単体）$\sigma \in K_2$ を



のように向きづけられた三角形として図示する．この図は単体的恒等式 (C.2.1) を表している．

(4) K_3 の元（i.e. 3-単体）$t \in K_3$ を



(5) K_n の元（i.e. n-単体）は，単体的恒等式 (C.2.1) によって帰納的に図示する．

命題 C.4: 単体的集合の圏の基本性質

$\mathrm{Y}\colon \Delta \longrightarrow \mathbf{SimpSet}$ を米田埋め込みとする．

(1) 任意の単体的集合 $K\colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ に対して，自然な同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}\left(\Delta^n,\, K\right) \cong K_n$$

が成り立つ．

(2) 圏 **SimpSet** は双完備である．

(3) 任意の単体的集合 $K\colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ に対して，

$$K \cong \operatorname*{colim}_{[n]\in \mathrm{Y}_{/K}} \Delta^n$$

が成り立つ．

命題 C.4-(1) によって，n-単体 $\sigma \in K_n$

<u>**証明**</u> (1) 米田の補題より

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}\left(\Delta^n,\, K\right) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\Delta,\, \mathbf{Sets})}\left(\mathrm{Hom}_{\Delta}\left(\text{-},\, [n]\right),\, K\right) \cong K([n]) = K_n$$

(2)

(3) 定理 C.2 より

$$K \cong \operatorname*{colim}_{[n]\in \mathrm{Y}_{/K}} \mathrm{Hom}_{\Delta}\left(\text{-},\, [n]\right) = \operatorname*{colim}_{[n]\in \mathrm{Y}_{/K}} \Delta^n$$

■

定義 C.18 を再現する具体的な構成をする．

定義 C.19: 幾何学的 n-単体

- **幾何学的 n-単体** Δ^n_{top} とは，位相空間

$$\Delta^n_{\mathrm{top}} := \left\{\, (x^0,\, \dots,\, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; x_i \geq 0,\, \sum_{i=0}^{n} x_i = 1 \,\right\}$$

  のこと．

- 余単体的集合

$$\Delta_{\mathrm{top}}\colon \Delta \longrightarrow \mathbf{Top}$$

  とは，
  - n-単体 $[n] \in \mathrm{Ob}(\Delta)$ に対して幾何学的 n-単体 Δ^n_{top} を対応づける
  - 圏 Δ における任意の射 $\alpha\colon [n] \longrightarrow [m]$ に対して，連続写像

$$\Delta_{\mathrm{top}}(\alpha)\colon \Delta^n_{\mathrm{top}} \longrightarrow \Delta^m_{\mathrm{top}},\ (x_0,\, \dots,\, x_n) \longmapsto \left(\sum_{j,\, \alpha(j)=0} x_j,\, \dots,\, \sum_{j,\, \alpha(j)=m} x_j \right)$$

    を対応付ける

関手のこと．

- 位相空間 $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ の**特異単体** (singular simplicial set) とは，単体的集合

$$S(X)\colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets},\ [n] \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\left(\Delta^n_{\mathrm{top}},\, X\right)$$

のこと．

- 特異複体とは，関手 $S\colon \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{SimpSet},\ X \longmapsto S(X)$ のこと．

定義 C.20: 幾何学的実現

$\mathrm{Y}\colon \Delta \longrightarrow \mathbf{SimpSet}$ を米田埋め込みとする．**幾何学的実現** (geometric realization) とは，余極限を保つ関手

$$|\text{-}|\colon \mathbf{SimpSet} \longrightarrow \mathbf{Top},\ K \longmapsto \operatorname*{colim}_{[n]\in \mathrm{Y}_{/K}} \Delta_{\mathrm{top}}([n])$$

のこと．

$\mathbf{Top}$ における colim の公式を使うと

$$|K| = \left(\coprod_{[n]\in\mathrm{Ob}(\Delta)} (K_n \times \Delta^n_{\mathrm{top}})\right) \Big/ \left\{ \left(\alpha^*(x),\, t\right) \sim \left(x,\, \Delta_{\mathrm{top}}(\alpha)(t)\right) \;\middle|\; {\scriptstyle x\in K_n,\, t\in\Delta^m_{\mathrm{top}},\atop \alpha\in\mathrm{Hom}_\Delta([m],\,[n])} \right\}$$

となる．

命題 C.5:

特異複体 $S\colon \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{SimpSet},\ X \longmapsto S(X)$ は幾何学的実現 $|\text{-}|\colon \mathbf{SimpSet} \longrightarrow \mathbf{Top}$ の右随伴である．

証明 右随伴の定義を思い出すと，$\forall (K,\, X) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{SimpSet}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Top})$ に対して自然同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\left(|K|,\, X\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}^{\mathrm{op}}}\left(K,\, S(X)\right)$$

が成り立つことを示せば良い．実際，命題 C.1 より

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\left(|K|,\, X\right) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\left(\operatorname*{colim}_{[n]\in\mathrm{Y}_{/K}} \Delta^n_{\mathrm{top}},\, X\right) \cong \lim_{[n]\in\mathrm{Y}_{/K}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\left(\Delta^n_{\mathrm{top}},\, X\right)$$

が，命題 C.4-(3) より

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}^{\mathrm{op}}}\left(K,\, S(X)\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}^{\mathrm{op}}}\left(\operatorname*{colim}_{[n]\in\mathrm{Y}_K} \Delta^n,\, S(X)\right) \cong \lim_{[n]\in\mathrm{Y}_{/K}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\left(\Delta^n,\, X\right)$$

が言える． ■

定義 C.21: 境界・角・背骨・骨格

- $\Delta^n \in \mathrm{Ob}(\mathbf{SimpSet})$ の**単体的境界** (simplicial boundary) $\boldsymbol{\partial\Delta^n}$ とは，Δ^n の単体的部分集合

$$\partial\Delta^n\colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

であって

$$\partial\Delta^n([k]) \coloneqq \begin{cases} \Delta^n([k]), & k \neq n \\ \Delta^n([k]) \setminus \{\mathrm{Id}_{[n]}\}, & k = n \end{cases}$$

を充たすもののこと．

- 任意の部分集合 $S \subset [n]$ を与える．**S-角** (S-horn) とは，Δ^n の単体的部分集合

$$\boldsymbol{\Lambda^n_S} \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

であって，

$$\Lambda^n_S([k]) \coloneqq \left\{ f \in \Delta^n([k]) \;\middle|\; [n] \setminus \bigl(f([k]) \cup S\bigr) \neq \emptyset \right\}$$

を充たすもののこと．特に $\boldsymbol{\Lambda^n_j} \coloneqq \Lambda^n_{\{j\}}$ は $0 < j < n$ のとき**内部角** (inner horn)，$j = 0, n$ のとき**外部角** (outer horn) と呼ばれる．

- **背骨** (spine) とは，Δ^n の単体的部分集合

$$\boldsymbol{I^n} \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

であって，

$$I^n([k]) \coloneqq \left\{ f \in \Delta^n([k]) \;\middle|\; f([k]) = \{j\} \,\mathrm{or}\, f([k]) = \{j, j+1\} \right\} \subset \Delta^n([k])$$

を充たすもののこと．

- 単体的集合 $K \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ の **n-骨格** (n-skelton) とは，濃度 $n+1$ 以下の対象からなる Δ の充満部分圏 $i \colon \Delta_{\leq n} \hookrightarrow \Delta$ に沿った，関手 $i^*(K) \colon (\Delta_{\leq n})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ の左 Kan 拡張 $i_!\bigl(i^*(K)\bigr) \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ のこと．
- 単体的集合 $K \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ の **n-余骨格** (n-coskelton) とは，濃度 $n+1$ 以下の対象からなる Δ の充満部分圏 $i \colon \Delta_{\leq n} \hookrightarrow \Delta$ に沿った，関手 $i^*(K) \colon (\Delta_{\leq n})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ の右 Kan 拡張 $i_*\bigl(i^*(K)\bigr) \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ のこと．

命題 C.6: コイコライザとしての境界

境界 $\partial\Delta^n$ は圏 **SimpSet** におけるコイコライザである：

$$\coprod_{0 \leq i < j \leq n} \Delta^{n-2} \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} \coprod_{0 \leq k \leq n} \Delta^{n-1} \xrightarrow{\quad w \quad} \partial\Delta^n$$

<u>**証明**</u> $0 \leq \forall k \leq n$ に対して，圏 **SimpSet** における射（i.e. 自然変換）

$$u_k \colon \coprod_{0 \leq i < k} \Delta^{n-2} \longrightarrow \Delta^{n-1}$$
$$v_k \colon \coprod_{k < j \leq n} \Delta^{n-2} \longrightarrow \Delta^{n-1}$$

を

$$
\begin{aligned}
u_k &:= \left\{ u_{k\,[m]} \colon \coprod_{0\le i<k} \Delta^{n-2}\big([m]\big) \longrightarrow \Delta^{n-2}\big([m]\big),\ (i,\,\alpha) \longmapsto d^{n-1}_i \circ \alpha \right\}_{[m]\in \mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})} \\
v_k &:= \left\{ u_{k\,[m]} \colon \coprod_{k<j\le n} \Delta^{n-2}\big([m]\big) \longrightarrow \Delta^{n-2}\big([m]\big),\ (j,\,\alpha) \longmapsto d^{n-1}_{j-1} \circ \alpha \right\}_{[m]\in \mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})}
\end{aligned}
$$

により定義する[*9]．そして圏 **SimpSet** における 2 つの余積を

$$
\begin{tikzcd}
\coprod_{0\le i<j\le n} \Delta^{n-2} = \coprod_{0\le k\le n}\coprod_{0\le i<k} \Delta^{n-2} \arrow[r, dashed, "\exists! u"] & \coprod_{0\le k\le n} \Delta^{n-1} \\
\coprod_{0\le i<k} \Delta^{n-2} \arrow[u, hook] \arrow[r, "u_k"'] & \Delta^{n-1} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\coprod_{0\le i<j\le n} \Delta^{n-2} = \coprod_{0\le k\le n}\coprod_{k<j\le n} \Delta^{n-2} \arrow[r, dashed, "\exists! v"] & \coprod_{0\le k\le n} \Delta^{n-1} \\
\coprod_{k<j\le n} \Delta^{n-2} \arrow[u, hook] \arrow[r, "v_k"'] & \Delta^{n-1} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}
$$

のようにとる．さらに射

$$
w\colon \coprod_{0\le k\le n} \Delta^{n-1} \longrightarrow \partial\Delta^n
$$

を

$$
w := \left\{ w_{[m]} \colon \coprod_{0\le k\le n} \Delta^{n-1}\big([m]\big) \longrightarrow \partial\Delta^{n}\big([m]\big),\ (k,\,\beta) \longmapsto d^{n}_k \circ \beta \right\}_{[m]\in \mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})}
$$

で定義する[*10]．すると $\forall [m] \in \mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})$, $\forall \big((i<j),\,\alpha\big) \in \coprod_{0\le i<j\le n} \Delta^{n-2}\big([m]\big)$ に対して

$$
\begin{aligned}
(w\circ u)_{[m]}\big((i<j),\,\alpha\big) &= w_{[m]}\Big(j,\, u_{j\,[m]}\big(i,\,\alpha\big)\Big) \\
&= d^n_j \circ d^{n-1}_i \circ \alpha, \\
(w\circ v)_{[m]}\big((i<j),\,\alpha\big) &= w_{[m]}\Big(i,\, v_{i\,[m]}\big(j,\,\alpha\big)\Big) \\
&= d^n_i \circ d^{n-1}_{j-1} \circ \alpha
\end{aligned}
$$

が成り立ち，単体的恒等式 (C.2.1) より $w\circ u = w\circ v$ が分かる．よってコイコライザの普遍性から圏 **SimpSet** の可換図式

$$
\begin{tikzcd}
\coprod_{0\le i<j\le n} \Delta^{n-2} \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & \coprod_{0\le k\le n} \Delta^{n-1} \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "w"'] & \mathrm{Coeq}(u,\,v) \arrow[d, dashed, "\exists!\bar{w}"] \\
& & \partial\Delta^n
\end{tikzcd}
$$

[*9] $\coprod_i \Delta^{n-2}\big([m]\big) = \coprod_i \mathrm{Hom}_\Delta\big([m],\,[n-2]\big)$ は集合と写像の圏 **Sets** における余積なので，集合としては $\bigcup_i \big\{ (i,\,\alpha) \bigm| \alpha \in \mathrm{Hom}_\Delta\big([m],\,[n-2]\big) \big\}$ と 1 対 1 対応する．

[*10] $\forall (k,\,\beta) \in \coprod_{0\le k\le n} \Delta^{n-1}\big([m]\big) = \coprod_{0\le k\le n} \mathrm{Hom}_\Delta\big([m],\,[n-1]\big)$ に対して $w_{[m]}(k,\,\beta) = d^n_k \circ \beta \in \mathrm{Hom}_\Delta\big([m],\,[n]\big) = \Delta^n\big([m]\big)$ であり，$d^n_k \in \mathrm{Hom}_\Delta\big([n-1],\,[n]\big)$ は全射でないため $m=n$ のときも $w_{[m]}(k,\,\beta) \in \Delta^n\big([m]\big) \setminus \{\mathrm{Id}_{[n]}\}$ が言える．よって w の像は $\partial\Delta^n$ の単体的部分集合である．

が成り立つ．後は $\bar{w}\colon \mathrm{Coeq}(u,\, v) \longrightarrow \partial\Delta^n$ が自然同値であることを示せば良い．

($\bar{w}$ はエピ射)

w がエピ射であることを示す．そのためには $\forall [m] \in \mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})$ を 1 つ固定し，写像 $w_{[m]}\colon \coprod_{0\le k\le n} \Delta^{n-1}\bigl([m]\bigr) \longrightarrow \partial\Delta^n\bigl([m]\bigr)$ が全射であることを示せば良い．

$\forall \gamma \in \partial\Delta^n\bigl([m]\bigr)$ を 1 つ固定する．このとき $\gamma \in \mathrm{Hom}_{\Delta}\bigl([m],\, [n]\bigr)$ は全射でない．i.e. ある $0 \le i \le n$ が存在して，圏 Δ において γ は

$$\begin{tikzcd}
{[m]} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, dashed, "\exists!\bar{\gamma}"'] & {[n]} \\
& {[n]\setminus\{i\}} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

と一意的に分解する．$d^n_i\bigl([n-1]\bigr) = [n]\setminus\{i\}$ かつ d^n_i は単射なので，ある $(i,\, \beta_i) \in \coprod_{0\le k\le n} \Delta^{n-1}\bigl([m]\bigr)$ が一意的に存在して $\bar{\gamma} = d^n_i \circ \beta_i = w_{[m]}(i,\, \beta_i)$ が成り立つ．

($\bar{w}$ はモノ射)

$\forall [m] \in \mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})$ を 1 つ固定し，写像 $\bar{w}_{[m]}\colon \mathrm{Coeq}(u,\, v)\bigl([m]\bigr) \longrightarrow \partial\Delta^n\bigl([m]\bigr)$ が全射であることを示す．

$\bar{w}_{[m]}(x) = \bar{w}_{[m]}(y)$ を仮定する．$q\colon \coprod_{0\le k\le n} \Delta^{n-1} \longrightarrow \mathrm{Coeq}(u,\, v)$ はエピなので，$x = q_{[m]}(i,\, \beta_i),\, y = q_{[m]}(j,\, \beta_j)$ を充たす $(i,\, \beta_i),\, (j,\, \beta_j) \in \coprod_{0\le k\le n} \Delta^{n-1}\bigl([m]\bigr)$ が存在する．コイコライザの普遍性の図式の可換性から $w_{[m]}(i,\, \beta_i) = \bar{w}_{[m]}(x) = \bar{w}_{[m]}(y) = w_{[m]}(j,\, \beta_j)$ が分かる．

$i = j$ ならば $x = y$ は自明なので，$i < j$ とする．このとき，エピ射であることの証明から $\gamma \coloneqq w_{[m]}(i,\, \beta_i) = w_{[m]}(j,\, \beta_j) \in \partial\Delta^n\bigl([m]\bigr)$ の像は $[n]\setminus\{i<j\}$ に収まっている．i.e. γ は

$$\begin{tikzcd}
{[m]} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, dashed, "\bar{\gamma}"'] & {[n]} \\
& {[n]\setminus\{i<j\}} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

と分解する．$d^n_j d^{n-1}_i\bigl([n-2]\bigr) = d^n_i d^{n-1}_{j-1}\bigl([n-2]\bigr) = [n]\setminus\{i<j\}$ なので，ある $\bigl((i<j),\, \alpha\bigr) \in \coprod_{0\le k<l\le n} \Delta^{n-2}\bigl([m]\bigr)$ が存在して $(i,\, \beta_i) = u_{[m]}\bigl((i<j),\, \gamma\bigr)$，$(j,\, \beta_j) = v_{[m]}\bigl((i<j),\, \gamma\bigr)$ と書ける．よって

$$x = q_{[m]}(i,\, \beta_i) = (q\circ u)_{[m]}\bigl((i<j),\, \gamma\bigr) = (q\circ v)_{[m]}\bigl((i<j),\, \gamma\bigr) = q_{[m]}(j,\, \beta_j) = y$$

が言えた．

■

系 C.3: 境界の公式

$\forall K \in \mathrm{Ob}(\mathbf{SimpSet})$ に対して，写像

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}\left(\partial\Delta^n,\, K\right) &\longrightarrow \left\{ (\sigma_0,\, \dots,\, \sigma_n) \in \prod_{0\le k\le n} K_{n-1} \;\middle|\; 0 \le \forall i < j \le n,\ \partial_i^{n-1}(\sigma_j) = \partial_{j-1}^{n-1}(\sigma_i) \right\}, \\
f &\longmapsto \left(f \circ d_0^n,\, \dots,\, f \circ d_n^n\right)
\end{aligned}
$$

は全単射である．

<u>**証明**</u> 命題 C.6 より，集合

$$
\begin{aligned}
X &:= \left\{ \bar{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}\left(\coprod_{0\le k\le n} \Delta^{n-1},\, K \right) \;\middle|\; \bar{f} \circ u = \bar{f} \circ v \right\} \\
&= \left\{ \bar{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}\left(\coprod_{0\le k\le n} \Delta^{n-1},\, K \right) \;\middle|\; \begin{matrix} \forall [m] \in \mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}}),\, \forall \big((i<j),\, \alpha\big) \in \coprod_{0\le k<l\le n} \Delta^{n-2}\big([m]\big), \\ \bar{f}_{[m]}\big(j,\, d_i^{n-1}\circ\alpha\big) = \bar{f}_{[m]}\big(i,\, d_{j-1}^{n-1}\circ\alpha\big) \end{matrix} \right\}
\end{aligned}
$$

の任意の元 $\bar{f}$ に対してコイコライザの普遍性の可換図式

$$
\begin{tikzcd}
\coprod_{0\le i<j\le n} \Delta^{n-2} \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & \coprod_{0\le k\le n} \Delta^{n-1} \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "\bar{f}"'] & \partial\Delta^n \arrow[d, dashed, red, "\exists! f"] \\
& & K
\end{tikzcd}
$$

が成り立つ．i.e. 写像

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}\left(\partial\Delta^n,\, K\right) &\longrightarrow X, \\
f &\longmapsto f \circ w = \left\{ \left((f_{[m]} \circ d_k^n)_*\right)_{0\le k\le n} \colon \prod_{0\le k\le n} \Delta^{n-1}\big([m]\big) \longrightarrow K_m \right\}_{[m]\in\mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})}
\end{aligned}
$$

は全単射である．命題 C.1-(2) と米田の補題から

$$
\mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}\left(\coprod_{0\le k\le n} \Delta^{n-1},\, K \right) \cong \prod_{0\le k\le n} \mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}\left(\Delta^{n-1},\, K\right) \cong \prod_{0\le k\le n} K_{n-1}
$$

が言えるので，示された． ■

命題 C.7: コイコライザとしての角

角 Λ_i^n は圏 **SimpSet** におけるコイコライザである：

$$
\coprod_{\substack{j,\, k\in[n]\setminus\{i\} \\ j<k}} \Delta^{n-2} \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} \coprod_{l\in[n]\setminus\{i\}} \Delta^{n-1} \xrightarrow{\ w\ } \Lambda_i^n
$$

<u>**証明**</u> 命題 C.6 とほぼ同様である． ■

系 C.4: 角の公式

$\forall K \in \mathrm{Ob}(\mathbf{SimpSet})$ に対して，写像

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}(\Lambda^n_i,\, K) &\longrightarrow \left\{ (\sigma_0,\, \dots,\, \sigma_{i-1},\, \sigma_{i+1},\, \dots,\, \sigma_n) \in \prod_{k \in [n] \setminus \{i\}} K_{n-1} \;\middle|\; {\scriptstyle \forall j,\, k \in [n] \setminus \{i\} \text{ s.t. } j<k, \atop \partial^{n-1}_j(\sigma_k) = \partial^{n-1}_{k-1}(\sigma_j)} \right\}, \\
f &\longmapsto (f \circ d^n_0,\, \dots,\, f \circ d^n_{i-1},\, f \circ d^n_{i+1},\, \dots,\, f \circ d^n_n)
\end{aligned}
$$

は全単射である．

<u>証明</u> ■

命題 C.8: 角と背骨の幾何学的実現

幾何学的実現は角，背骨を保つ．

<u>証明</u> $|\Delta^n| = \Delta^n_{\mathrm{top}}$ であることに注意する． ■

C.3 脈体・Kan 複体・$(\infty,\, 1)$-圏

$[n] \in \mathrm{Ob}(\Delta)$ に対して，

- $\forall i \in [n]$ を対象とする
- Hom 集合は

$$
\mathrm{Hom}_{[n]}(i,\, j) := \begin{cases} \{*\}, & i \le j \\ \emptyset, & i > j \end{cases}
$$

 とする

ことにより $[n]$ 自身が圏になる．

定義 C.22: 脈体

- 圏 $\mathcal{C}$ の**脈体** (nerve) とは，以下で定義される単体的集合

$$\mathrm{N}(\mathcal{C})\colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

  のこと：
  - $\forall [n] \in \mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})$ に対して

$$\mathrm{N}(\mathcal{C})([n]) = \mathrm{Fun}([n],\, \mathcal{C})$$

    を対応付ける
  - 圏 Δ^{op} における任意の射 $[n] \xrightarrow{\alpha} [m]$ に対して写像

$$\mathrm{N}\left(\mathcal{C}\right)\left(\alpha\right) \coloneqq \alpha^{*}\colon \mathrm{Fun}([n],\, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Fun}([m],\, \mathcal{C}),\ G_n \longmapsto G_n \circ \alpha$$

    を対応付ける
- **脈体関手** (nerve functor) とは，以下で定義される関手

$$\mathrm{N}\colon \mathbf{Cat} \longrightarrow \mathbf{SimpSet}$$

  のこと．
  - $\forall \mathcal{C} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $\mathrm{N}(\mathcal{C}) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{SimpSet})$ を対応づける．
  - 任意の関手 $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ に対して自然変換

$$\begin{aligned} &\mathrm{N}\left(F\right) : \mathrm{N}\left(\mathcal{C}\right) \Longrightarrow \mathrm{N}\left(\mathcal{D}\right), \\ {}^{\mathrm{w}/}\ &\mathrm{N}\left(F\right) \coloneqq \left\{\mathrm{N}(F)_{[n]}\colon \mathrm{Fun}([n],\, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Fun}([n],\, \mathcal{D}),\ G_n \longmapsto F \circ G_n\right\}_{[n]\in\mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})} \end{aligned}$$

    を対応付ける

圏 $[n]$ の射の定義を思い出すと，$\mathrm{N}(\mathcal{C})_n \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ の要素は $\mathcal{C}$ における図式

$$X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} X_n \tag{C.3.1}$$

により同定されることがわかる．このことから，脈体の morphism-morphism 対応は図式の対応

$$(X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_n) \longmapsto (X_{\alpha(0)} \to X_{\alpha(1)} \to \cdots \to X_{\alpha(m)})$$

と理解できる．

命題 C.9: 脈体関手は忠実充満

脈体関手は忠実充満関手である．

<u>**証明**</u>

$$\theta\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}\left(\mathcal{C},\, \mathcal{D}\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}\left(\mathrm{N}(\mathcal{C}),\, \mathrm{N}(\mathcal{D})\right),\ F \longmapsto \mathrm{N}(F)$$

が全単射であることを示せば良い．

単射

関手 $F, G\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ が $\mathrm{N}(F) = \mathrm{N}(G)$ を充たすとする．(C.3.1) により $\mathcal{C}$ における任意の図式

$$X \xrightarrow{f} Y$$

を $\mathrm{N}(\mathcal{C})_1$ の元と見做すことができるが，仮定より圏 $\mathcal{D}$ において

$$\begin{aligned} & \mathrm{N}(F)_{[1]}(X \xrightarrow{f} Y) = \mathrm{N}(G)_{[1]}(X \xrightarrow{f} Y) \\ \iff & \big(F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y)\big) = \big(G(X) \xrightarrow{G(f)} G(Y)\big) \end{aligned}$$

が成り立つ．i.e. $F = G$ である．

全射

$\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}\big(\mathrm{N}(\mathcal{C}), \mathrm{N}(\mathcal{D})\big)$ を 1 つ固定する．f は自然変換だから，$\forall n \geq 0$ に対して自然変換 $f_{[n]}\colon \mathrm{N}(\mathcal{C})_n \longrightarrow \mathrm{N}(\mathcal{D})_n$ が定まる．(C.3.1) より $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を $\mathrm{N}(\mathcal{C})_0$ の要素と見做し，圏 $\mathcal{C}$ における任意の射 $X \xrightarrow{u} Y$ を $\mathrm{N}(\mathcal{C})_1$ の要素と見做すことができる．すると自然変換 f により

$$f_{[0]}(X),\ f_{[0]}(Y) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$$

が対応付く．その上 f が自然変換であることから面写像 $d_i^1\colon [0] \longrightarrow [1]$ との間に可換図式

$$\begin{tikzcd} \mathrm{N}(\mathcal{C})_1 \arrow[r, "f_{[1]}"] \arrow[d, "\mathrm{N}(\mathcal{C})(d_i^1)=\partial_i^1"'] & \mathrm{N}(\mathcal{D})_1 \arrow[d, "\mathrm{N}(\mathcal{D})(d_i^1)=\partial_i^1"] \\ \mathrm{N}(\mathcal{C})_0 \arrow[r, "f_{[0]}"'] & \mathrm{N}(\mathcal{D})_0 \end{tikzcd}$$

が成り立つ．よって

$$\begin{aligned} \partial_0^1 \circ f_{[1]}\big(X \xrightarrow{u} Y\big) &= f_{[0]} \circ \partial_0^1\big(X \xrightarrow{u} Y\big) \\ &= f_{[0]}(Y), \\ \partial_1^1 \circ f_{[1]}\big(X \xrightarrow{u} Y\big) &= f_{[0]} \circ \partial_1^1\big(X \xrightarrow{u} Y\big) \\ &= f_{[0]}(X) \end{aligned}$$

が言える．i.e. $f_{[1]}(u)$ は圏 $\mathcal{D}$ における射 $f_{[0]}(X) \xrightarrow{f_{[1]}(u)} f_{[0]}(Y)$ である．ここで，対応 $F_f\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ を

- $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $f_{[0]}(X) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ を対応付ける
- $X \xrightarrow{\forall u} Y$ に対して $f_{[0]}(X) \xrightarrow{f_{[1]}(u)} f_{[0]}(Y)$ を対応付ける

ものとして定義する．もし F_f が関手ならば明らかに $\theta(F_f) = f$ であるから，F_f が関手であることを示せば良い：

(fun-1)

(C.3.1) により圏 $\mathcal{C}$ における図式

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$$

を $\mathrm{N}(\mathcal{C})_2$ の要素と見做すことができる．f は自然変換なので，面写像 $d_i^2\colon [2] \longrightarrow [1]$ について可換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{N}(\mathcal{C})_2 \arrow[r, "f_{[2]}"] \arrow[d, "\mathrm{N}(\mathcal{C})(d^2_i)=\partial^2_i"'] & \mathrm{N}(\mathcal{D})_2 \arrow[d, "\mathrm{N}(\mathcal{D})(d^2_i)=\partial^2_i"] \\
\mathrm{N}(\mathcal{C})_1 \arrow[r, "f_{[1]}"'] & \mathrm{N}(\mathcal{D})_1
\end{tikzcd}$$

が成り立つ．よって

$$\begin{aligned}
\partial^2_0 \circ f_{[2]}(X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z) &= f_{[1]} \circ \partial^2_0(X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z) \\
&= f_{[1]}(Y \xrightarrow{v} Z) \\
&= \bigl(F_f(Y) \xrightarrow{F_f(v)} F_f(Z)\bigr), \\
\partial^2_2 \circ f_{[2]}(X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z) &= f_{[1]} \circ \partial^2_2(X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z) \\
&= f_{[1]}(X \xrightarrow{u} Y) \\
&= \bigl(F_f(X) \xrightarrow{F_f(u)} F_f(Y)\bigr)
\end{aligned}$$

が分かった．i.e.

$$f_{[2]}(X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z) = \bigl(F_f(X) \xrightarrow{F_f(u)} F_f(Y) \xrightarrow{F_f(v)} F_f(Z)\bigr)$$

である．故に

$$\begin{aligned}
\bigl(F_f(X) \xrightarrow{F_f(v)\circ F_f(u)} F_f(Y)\bigr) &= \partial^2_1 \circ f_{[2]}\bigl(X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z\bigr) \\
&= f_{[1]} \circ \partial^2_1\bigl(X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z\bigr) \\
&= f_{[1]}\bigl(X \xrightarrow{v\circ u} Z\bigr) \\
&= \bigl(F_f(X) \xrightarrow{F_f(v\circ u)} F_f(Y)\bigr)
\end{aligned}$$

i.e.

$$F(v \circ u) = F(v) \circ F(u)$$

が示された．

(fun-2)

f が自然変換なので縮退写像 $s^0_0\colon [1] \longrightarrow [0]$ について可換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{N}(\mathcal{C})_1 \arrow[r, "f_{[1]}"] & \mathrm{N}(\mathcal{D})_1 \\
\mathrm{N}(\mathcal{C})_0 \arrow[r, "f_{[0]}"] \arrow[u, "\mathrm{N}(\mathcal{C})(s^0_0)=\sigma^0_0"] & \mathrm{N}(\mathcal{D})_0 \arrow[u, "\mathrm{N}(\mathcal{D})(s^0_0)=\sigma^0_0"']
\end{tikzcd}$$

が成り立つ．(C.3.1) を使うと，これは $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \mathrm{N}(\mathcal{C})_0$ に対して

$$\begin{aligned}
f_{[1]} \circ \sigma^0_0(X) &= f_{[1]}(X \xrightarrow{\mathrm{Id}_X} X) \\
&= \bigl(F_f(X) \xrightarrow{F_f(\mathrm{Id}_X)} F_f(X)\bigr) \\
&= \sigma^0_0 \circ f_{[0]}(X) \\
&= \bigl(F_f(X) \xrightarrow{\mathrm{Id}_{F_f(X)}} F_f(X)\bigr)
\end{aligned}$$

を意味するので

$$F_f(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$$

が示された．

■

定義 C.23: Kan 複体

Kan 複体 (Kan complex) とは，単体的集合

$$K \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

であって以下の性質を充たすもののこと：

(Kan)

$\forall n \geq 1,\ 0 \leq \forall j \leq n$ および $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}(\Lambda^n_j,\ K)$ に対して，以下の図式を可換にする自然変換 $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}(\Delta^n,\ K)$ が存在する：

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_j \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & K \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed, "u"'] & \end{tikzcd}$$

単体的集合であって，内部角 i.e. $\forall n \geq 2,\ 0 < \forall j < n$ についてのみ **(Kan)** を充たすもののことを**弱 Kan 複体** (weak Kan complex) と呼ぶ．

定義 C.24: ∞-圏

- **$(\infty, 1)$-圏**とは，単体的集合であって弱 Kan 複体になっているもののことを言う．$(\infty, 1)$-圏の関手とは，**SimpSet** の射のこと．
- **∞-groupoid** とは，単体的集合であって Kan 複体になっているもののこと

以下では $(\infty, 1)$-圏のことを **∞-圏**と呼ぶ．

定理 C.5: Kan 条件と脈体

任意の単体的集合 $K \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ に対して以下は同値である：

(1) K は弱 Kan 条件を充たす一意解を持つ

(2) K は背骨の包含 $I^n \hookrightarrow \Delta^n$ を一意に持ち上げる．

(3) K はある圏の脈体と同型である．

<u>**証明**</u> [46, p.20, Theorem 1.1.52] を参照．■

命題 C.10: 脈体が ∞-groupoid になる必要十分条件

圏 $\mathcal{C}$ の脈体が ∞-groupoid になる必要十分条件は，$\mathcal{C}$ が groupoid であること．

証明 [46, p.23, Lemma 1.1.54] ■

C.3.1 単体的ホモトピー

単体的集合の圏 **SimpSet** はモノイダル圏の構造を持つ．実際，単体的集合 $S, T\colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ に対して，新たな単体的集合

$$S \otimes T\colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets},\ [n] \longmapsto S_n \times T_n$$

がテンソル積 $\otimes\colon \mathbf{SimpSet} \times \mathbf{SimpSet} \longrightarrow \mathbf{SimpSet}$ を定めている．

定義 C.25: 単体的ホモトピー

$X, Y, K \in \mathrm{Ob}(\mathbf{SimpSet})$ を，K が X の単体的部分集合となるようにとる．包含射 $i\colon K \hookrightarrow X$ をとる．

- $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}(X, Y)$ を繋ぐ**ホモトピー**とは，**SimpSet の射** $\eta \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}(X \times \Delta^1, Y)$ であって，以下の **SimpSet** の図式を可換にするもののこと：

$$\begin{tikzcd} X \cong X \times \Delta^0 \arrow[r, "\mathrm{Id} \times d^1_{1*}"] \arrow[dr, "f"'] & X \times \Delta^1 \arrow[d, "\eta"] & X \times \Delta^0 \arrow[l, "\mathrm{Id} \times d^1_{0*}"'] \arrow[dl, "g"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

  f, g を繋ぐホモトピーが存在するとき，f, g は互いに**ホモトピック**であるという．
- $f \circ i = gcirci =: \alpha$ とおく．ホモトピー $\eta \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}(X \times \Delta^1, Y)$ が f と g の間の $\boldsymbol{K}$ **に関する相対ホモトピー** (homotopy from f to g (rel K)) であるとは，上の可換図式に加えて

$$\begin{tikzcd} K \times \Delta^1 \arrow[r, hook, "i \times \mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}"'] & X \times \Delta^1 \arrow[d, "\eta"] \\ K \arrow[r, "\alpha"'] & Y \end{tikzcd}$$

  が成り立つことを言う．

より具体的には，f, g を繋ぐ**単体的ホモトピー** (simplicial homotopy) とは **Sets** の射の族

$$\left\{h_i\colon X_n \longrightarrow Y_{n+1}\right\}_{i=0,\ldots,n,\, n \geq 0}$$

であって以下を充たすもののこと：

$$
\begin{aligned}
\partial_0 \circ h_0 &= f_n, \\
\partial_{n+1} \circ h_n &= g_n, \\
\partial_i \circ h_j &= \begin{cases} h_{j-1} \circ \partial_i, & i < j \\ \partial_i \circ h_{i-1}, & i = j \neq 0 \\ h_j \circ \partial_{i-1}, & i > j+1 \end{cases} \\
\sigma_i \circ h_j &= \begin{cases} h_{j+1} \circ \sigma_i, & i \le j \\ h_j \circ \sigma_{i-1}, & i > j \end{cases}
\end{aligned}
$$

一見するとホモトピーと単体的ホモトピーは別のものに見えるが，実は同じものである．単体的ホモトピー $\bigl\{h_i \colon X_n \longrightarrow Y_{n+1}\bigr\}_{i=0,\,\dots,\,n,\,n\ge 0}$ が与えられたとする．このとき **SimpSet** の射 $\eta \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}\,(X \times \Delta^1,\, Y)$ を

$$
\begin{aligned}
\eta_0 &\coloneqq \partial_0 \circ h_0, \\
\eta_{n+1} &\coloneqq \partial_{n+1} \circ h_n, \\
\eta_j &\coloneqq \partial_j \circ h_j \quad (1 \le j \le n)
\end{aligned}
$$

と定義すると，和の普遍性の図式によって $\eta \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}\,(X \times \Delta^1,\, Y)$ が定まる．

命題 C.11: ∞-groupoid とホモトピー

$X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{SimpSet})$ が ∞-groupoid ならば，ホモトピックは $\mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}\,(X,\, Y)$ の上の同値関係になる．ホモトピック $(\mathrm{rel}\ K \subset X)$ も同値関係である．

証明 [49, p.26, COROLLARY 6.2] ■

∞-groupoid X を与え，$* \in X_0$ を 1 つ固定する．このとき集合としての同型

$$
\mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}\,\bigl((\Delta^n,\, \partial\Delta^n),\, (X,\, *)\bigr) \cong \bigl\{\, x \in X_n \bigm| 0 \le \forall i \le n,\ \partial_i^n(x) = \sigma_0^{n-2} \circ \cdots \circ \sigma_0^0(*) \,\bigr\} \eqqcolon Z_n(X,\, *)
$$

がある [35]．$a,\, b \in X_n$ を繋ぐ**ホモトピー**とは，この場合 $y \in X_{n+1}$ であって

$$
\partial_i^{n+1}(y) = \begin{cases} \sigma_0^{n-1} \circ \cdots \circ \sigma_0^0(*), & i < n \\ a, & i = n \\ b, & i = n+1 \end{cases}
$$

を充たすもののことである．ホモトピック $\sim$ は $Z_n(X,\, *)$ 上の同値関係になる [35, p.27, Lemma 3.28]．

$a,\, b \in Z_n(X,\, *)$ に対して，系 C.4，命題 C.4-(1) および Kan 条件によって

$$
\begin{tikzcd}
\Lambda_n^{n+1} \arrow[r, "\bigl((\sigma_0)^n(*),\, \dots,\, (\sigma_0)^n(*),\, a,\, b\bigr)"] \arrow[d, hook] & X \\
\Delta^{n+1} \arrow[ur, dashed, "\exists a \star b"'] &
\end{tikzcd}
$$

として $a \star b \in X_{n+1}$ をとってくる．

$$\boldsymbol{\pi_n^{\Delta}(X,\,*)} \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}\big((\Delta^n,\,\partial\Delta^n),\,(X,\,*)\big)/\simeq\,\cong Z_n(X,\,*)/\sim$$

とおく．

命題 C.12: 単体的ホモトピー群

写像

$$\pi_n^{\Delta}(X,\,*) \times \pi_n^{\Delta}(X,\,*) \longrightarrow \pi_n^{\Delta}(X,\,*),\ ([a],\,[b]) \longmapsto [\partial_n^{n+1}(a \star b)]$$

によって $\pi_n^{\Delta}(X,\,*)$ は群になる．これを**単体的ホモトピー群**と呼ぶ．

証明 ■

定理 C.6: 単体的ホモトピー群と幾何学的実現

$$\pi_n^{\Delta}(X,\,*) \cong \pi_n(|X|,\,|*|)$$

証明 [49, p.64, PROPOSITION 11.1] ■

定義 C.26: homotopy coherent な脈体

C.3.2 ∞-トポス

∞-groupoid のなす圏を $\boldsymbol{\infty}\mathbf{Grpd}$ と書く．

定義 C.27: ∞-前層

K を $(\infty,\,1)$-圏とする．K 上の $(\infty,\,1)$-**前層**とは，$(\infty,\,1)$-圏の関手

$$P\colon K^{\mathrm{op}} \longrightarrow \boldsymbol{\infty}\mathbf{Grpd}$$

のこと．$(\infty,\,1)$-前層のなす $(\infty,\,1)$-圏とは，$(\infty,\,1)$-圏の関手の圏

$$\mathrm{PSh}_{(\infty,\,1)}(K) \coloneqq \mathrm{Fun}_{(\infty,\,1)}(K^{\mathrm{op}},\,\boldsymbol{\infty}\mathbf{Grpd})$$

のこと．

! 以降では，$(\infty,\,1)$-前層のことを ∞-前層と呼ぶ．

命題 C.13: ∞-前層の圏のモデル

$\mathcal{C}$ を **SimpSet**-豊穣圏であって，Kan 複体を Hom 対象に持つものとする．
このとき homotopy coherent な脈体 $\mathrm{N_{hc}}$ に対して

$$\mathrm{PSh}_{(\infty,1)}\left(\mathrm{N_{hc}}(\mathcal{C})\right) \cong \mathrm{N_{hc}}\left([\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{SimpSet}_{\mathrm{Quillen}}]^{\circ}_{\mathrm{proj}}\right)$$

が成り立つ．

<u>証明</u> https://ncatlab.org/nlab/show/%28infinity%2C1%29-category+of+%28infinity%2C1%29-presheaves を参照． ■

[50]，[51, p.9] に従い $(\infty, 1)$-トポスの定義を概観する[*11]．

[*11] ここでの定義は不完全なので，詳細は [50]，[48] などを参照．

定義 C.28: ∞-トポス

K を $(\infty, 1)$-圏とする.

K 上の **$(\infty, 1)$-トポス**とは, $(\infty, 1)$-前層のなす $(\infty, 1)$-圏 $\mathrm{PSh}_{(\infty, 1)}(K)$ の部分 $(\infty, 1)$-圏

$$i\colon \mathbf{H} \hookrightarrow \mathrm{PSh}_{(\infty, 1)}(K)$$

であって, 包含 $(\infty, 1)$-関手 i が有限極限を保つ左随伴 $(\infty, 1)$-関手

$$\begin{tikzcd} \mathbf{H} \arrow[r, bend left, hook, "i"] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathrm{PSh}_{(\infty, 1)}(K) \arrow[l, bend left, "\mathrm{lex}"] \end{tikzcd}$$

を持つようなもののこと.

もしくは, 余完全[a]な $(\infty, 1)$-圏 $\mathbf{H}$ であって以下の公理を充たすもののこと [51, p.9, Definition5.4]:

(T1) $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(X, Y)$ および $\mathbf{H}$ における図式 $D\colon I \longrightarrow \mathbf{H}_{/Y}$ において, 自然な同型

$$\mathrm{colim}_{i\in I}\big(X \times_Y D(i)\big) \cong X \times_Y \mathrm{colim}_{i\in I} D(i)$$

がある[b].

(T2) $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{H})$ に対して, 図式 $Y \longleftarrow \emptyset \longrightarrow X$ の押し出し

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & X \amalg Y \end{tikzcd}$$

は図式 $Y \longrightarrow X \amalg Y \longleftarrow X$ の引き戻しでもある. i.e. 任意の和が disjoint である.

(T3) $\mathbf{H}$ における任意の groupoid object は delooping を持つ.

---

[a] 正確には **presentable** [48, p.372, Def5.5.0.18]

[b] $\times_Y$ は引き戻し

[34] は命題 C.13 を使って ∞-トポスを定義している.

付録 D

C^∞ 多様体の話

[6, Chapter4, 5, 6] の内容を自分用に纏める．

D.1　沈めこみ・はめ込み・埋め込み

$\mathbb{R}^n$ における逆関数定理から始める．まず距離空間に関する基本的な補題を用意する．

補題 D.1: Banach の不動点定理

空でない完備な距離空間 $(X,\,d)$ を与える．このとき，以下の条件を充たす任意の写像 $F\colon X \longrightarrow X$ はただ 1 つの固定点を持つ：

(contraction)　ある定数 $\lambda \in (0,\,1)$ が存在し，$\forall x,\,y \in X$ に対して $d\bigl(F(x),\,F(y)\bigr) \le \lambda d(x,\,y)$

証明　まず固定点の存在を示す．$\forall x_0 \in X$ を 1 つとり，X の点列 $\bigl(x_i\bigr)_{i=0}^{\infty}$ を漸化式 $x_{i+1} = F(x_i)$ によって帰納的に定める．仮定より $\lambda \in (0,\,1)$ なので，$\forall \varepsilon > 0$ に対して十分大きな $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ を取れば $\lambda^{N_\varepsilon} < \frac{1-\lambda}{d(x_1,\,x_0)}\varepsilon$ が成り立つようにできる．このとき $\forall m,\,n \ge N_\varepsilon$ ${}^{\mathrm{w}/}$ $m \ge n$ に対して

$$\begin{aligned}
d(x_m,\,x_n) &\le d(x_m,\,x_{m-1}) + \cdots + d(x_{n+1},\,x_n) && \because \text{三角不等式} \\
&\le \lambda^{m-1} d(x_1,\,x_0) + \cdots + \lambda^n d(x_1,\,x_0) && \because \text{条件 (contraction)} \\
&\le \lambda^n \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i\right) d(x_1,\,x_0) \\
&\le \lambda^{N_\varepsilon} \frac{d(x_1,\,x_0)}{1-\lambda} < \varepsilon
\end{aligned}$$

が成り立つ. i.e. 点列 $\bigl(x_i\bigr)_{i=0}^{\infty}$ は Cauchy 列であり，仮定より X は完備なのでその収束点 $x := \lim_{i\to\infty} x_i \in X$ が一意的に存在する．F は明らかに連続なので

$$F(x) = F(\lim_{i\to\infty} x_i) = \lim_{i\to\infty} F(x_i) = x$$

が成り立つ．i.e. x は固定点である．

次に固定点 x の一意性を示す．別の固定点 $x' \in X$ が存在したとする．このとき条件 **(contraction)** より

$$d(x,\,x') = d\bigl(F(x),\,F(x')\bigr) \le \lambda d(x,\,x') \quad \Longleftrightarrow \quad (1-\lambda) d(x,\,x') \le 0$$

が成り立つので $x = x'$ でなくてはいけない. ■

定理 D.1: $\mathbb{R}^n$ における逆関数定理

- 開集合[a] $U,\ V \in \mathbb{R}^n$
- C^∞ 関数[b] $F\colon U \longrightarrow V,\ x \longmapsto \bigl(F^1(x),\ \ldots,\ F^n(x)\bigr)$

を与え, F の Jacobi 行列を返す C^∞ 写像

$$DF\colon U \longrightarrow \mathrm{M}(n,\ \mathbb{R}),\ x \longmapsto \left[\frac{\partial F^\mu}{\partial x^\nu}(x)\right]_{1\le\mu,\,\nu\le n}$$

を定める. このとき, ある点 $p \in U$ において $DF(p) \in \mathrm{GL}(n,\ \mathbb{R})$ ならば,

- 点 $p \in U$ の<u>連結な</u>近傍 $p \in U_0 \subset U$
- 点 $F(p) \in V$ の<u>連結な</u>近傍 $F(p) \in V_0 \subset V$

が存在して $F|_{U_0}\colon U_0 \longrightarrow V_0$ が微分同相写像[c]になる.

[a] $\mathbb{R}^n$ には通常の Euclid 位相を入れる.
[b] $F = (F^1,\ \ldots,\ F^n)$ の各成分 F^i が任意回偏微分可能.
[c] i.e. $F|_{U_0}$ は C^∞ 級の逆写像を持つ.

<u>**証明**</u> $U' \coloneqq \left\{\, x - p \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x \in U \,\right\},\ V' \coloneqq \left\{\, x - F(p) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x \in V \,\right\}$ とおく. このとき写像

$$F_1\colon U' \longrightarrow V',\ x \longmapsto F(x+p) - F(p)$$

は C^∞ 級で, かつ $F_1(0) = 0,\ DF_1(0) = DF(p)$ を充たし, 0 の連結な近傍 $0 \in U_0' \subset U',\ 0 \in V_0' \subset V'$ が存在して $F_1|_{U_0'}\colon U_0' \longrightarrow V_0'$ が微分同相写像になることと, 点 $p \in U$ の連結な近傍 $p \in U_0 \subset U$ と点 $F(p) \in V$ の連結な近傍 $F(p) \in V_0 \subset V$ が存在して $F|_{U_0}\colon U_0 \longrightarrow V_0$ が微分同相写像になることは同値である.

さらに, $V'' \coloneqq \left\{\, DF_1(0)^{-1}(x) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x \in V' \,\right\},\ V_0'' \coloneqq \left\{\, DF_1(0)^{-1}(x) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x \in V_0' \,\right\}$ とおくと写像[*1]

$$F_2\colon U' \longrightarrow V'',\ x \longmapsto DF_1(0)^{-1}\bigl(F_1(x)\bigr)$$

は C^∞ 級で, $DF_2(0) = \mathbb{1}_n$ かつ $V_0'' \subset V''$ は 0 の連結な近傍であり[*2], $F_2|_{U_0'}\colon U_0' \longrightarrow V_0''$ が微分同相写像になることと $F_1|_{U_0'}\colon U_0' \longrightarrow V_0'$ が微分同相写像になることは同値である. 以上の考察から,

- $p = 0 \in U$
- $F(p) = 0 \in V$
- $DF(p) = \mathbb{1}_n$

を仮定しても一般性を失わないことが分かった.

ここで C^∞ 写像

$$H\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ x \longmapsto x - F(x)$$

[*1] $DF_1(0)^{-1}\bigl(F_1(x)\bigr)$ と言うのは, 列ベクトル $F_1(x) \in \mathbb{R}^n$ に $n \times n$ 行列 $DF_1(0)^{-1} \in \mathrm{M}(n,\ \mathbb{R})$ を作用させると言う意味.
[*2] V_0' が連結であり, 行列 $DF_1(0)^{-1}$ をかけると言う写像は連続なので.

を考える．まず $DH(0) = \mathbb{1}_n - \mathbb{1}_n = 0$ が成り立つことがわかる．さらに写像 $DH\colon U \longrightarrow \mathrm{M}(n,\,\mathbb{R}),\ x \longmapsto DH(x)$ の連続性[*3]から，$B_\delta(0) \subset U$ を充たす $\delta > 0$ が存在して，$\forall x \in \overline{B_\delta(0)}$ に対して[*4]

$$\|DH(x) - DH(0)\| = \|DH(x)\| \leq \frac{1}{2}$$

が成り立つようにできる．

$\boldsymbol{F}$ は $\overline{\boldsymbol{B_\delta(0)}}$ 上単射

$\forall x,\,y \in \overline{B_\delta(0)}$ をとる．$\overline{B_\delta(0)}$ は凸集合なので $\forall t \in [0,\,1]$ に対して $x + t(y-x) \in \overline{B_\delta(0)}$ が成り立つ．よって

$$\begin{aligned}
|H(y) - H(x)| &= \left| \int_0^1 \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H\bigl(x + t(y-x)\bigr) \right| \\
&= \left| \int_0^1 \mathrm{d}t\, DH\bigl(x + t(y-x)\bigr)(y-x) \right| \\
&\leq \int_0^1 \mathrm{d}t\, \bigl|DH\bigl(x + t(y-x)\bigr)(y-x)\bigr| \\
&\leq \int_0^1 \mathrm{d}t \sup_{x \in \overline{B_\delta(0)}} \|DH(x)\| |y-x| \\
&\leq \frac{1}{2}|y-x|
\end{aligned} \tag{D.1.1}$$

が言える．故に

$$\begin{aligned}
|y-x| &= |F(y) - F(x) + H(y) - H(x)| \\
&\leq |F(y) - F(x)| + |H(y) - H(x)| \\
&\leq |F(y) - F(x)| + \frac{1}{2}|y-x|
\end{aligned}$$

が成り立ち，

$$\frac{1}{2}|y-x| \leq |F(y) - F(x)| \tag{D.1.2}$$

が従う．故にノルムの正定値性から $\overline{B_\delta(0)}$ 上 F が単射だと分かった．

$\overline{\boldsymbol{B_{\delta/2}(0)}} \subset \boldsymbol{F}\bigl(\overline{\boldsymbol{B_\delta(0)}}\bigr)$

$\forall y \in \overline{B_{\delta/2}(0)}$ に対してある $x_y \in \overline{B_\delta(0)}$ が存在して $F(x_y) = y$ を充たすことを示す．C^∞ 写像

$$G\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ x \longmapsto y + H(x) = y + x - F(x)$$

を考える．不等式 (D.1.1) から $\forall x \in \overline{B_\delta(0)}$ に対して

$$|G(x)| \leq |y| + |H(x)| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2}|x| \leq \delta$$

が成り立つので $G\bigl(\overline{B_\delta(0)}\bigr) \subset \overline{B_{\delta(0)}}$ が分かった．その上再度 (D.1.1) から $\forall x,\,y \in \overline{B_\delta(0)}$ に対して

$$|G(x) - G(y)| = |H(x) - H(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|$$

[*3] H が C^∞ 級なので DH は連続.
[*4] $\|\cdot\| : \mathrm{M}(n,\,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ は Frobenius ノルム.

が成り立つので，空でない完備な距離空間 $\overline{B}_\delta(0)$ 上の写像 $G|_{\overline{B}_\delta(0)} \colon \overline{B}_\delta(0) \longrightarrow \overline{B}_\delta(0)$ は補題 D.1 の条件 **(contraction)** を充たし，G はただ 1 つの固定点 $x_y \in \overline{B}_\delta(0)$ を持つ．G の定義より $G(x_y) = x_y \implies F(x_y) = y$ である．

以上の議論から，$U_0 := \overline{B_\delta(0)} \cap F^{-1}\bigl(\overline{B_{\delta/2}(0)}\bigr)$, $V_0 := \overline{B_{\delta/2}(0)}$ とおくと $F|_{U_0} \colon U_0 \longrightarrow V_0$ が全単射になることが分かった．従って逆写像[*5] $F^{-1} \colon V_0 \longrightarrow U_0$ が存在する．さらに $\forall x',\, y' \in V_0$ をとり不等式 (D.1.2) において $x = F^{-1}(x')$, $y = F^{-1}(y')$ とおくことで F^{-1} が連続写像であることがわかる．i.e. $F|_{U_0}$ は同相写像である．よって V_0 が定義から連結なので U_0 も連結である．

F^{-1} が C^∞ 級

まず $F^{-1} \colon V_0 \longrightarrow U_0$ が C^1 級であることを示す．$\forall y \in V_0$ を 1 つ固定する．偏微分の連鎖律より $D(F^{-1})(y) = DF\bigl(F^{-1}(y)\bigr)^{-1}$ であるから，

$$\lim_{y' \to y} \frac{F^{-1}(y') - F^{-1}(y) - DF\bigl(F^{-1}(y)\bigr)^{-1}(y' - y)}{|y' - y|} = 0$$

を示せば良い．$\forall y' \in V_0 \setminus \{y\}$ を取り，$x := F^{-1}(y)$, $x' := F^{-1}(y') \in U_0 \setminus \{x\}$ とおく．すると

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{F^{-1}(y') - F^{-1}(y) - DF\bigl(F^{-1}(y)\bigr)^{-1}(y' - y)}{|y' - y|} \right| \\
&= \frac{\bigl|x' - x - DF(x)^{-1}(y' - y)\bigr|}{|y' - y|} \\
&= \frac{1}{|y' - y|} \bigl| DF(x)^{-1}\bigl(DF(x)(x' - x) - (y' - y)\bigr) \bigr| \\
&= \frac{|x' - x|}{|F(x') - F(x)|} \left| DF(x)^{-1} \left(\frac{F(x') - F(x) - DF(x)(x' - x)}{|x' - x|} \right) \right| \\
&\le 2 \sup_{x \in U_0} \bigl\| DF(x)^{-1} \bigr\| \left| \frac{F(x') - F(x) - DF(x)(x' - x)}{|x' - x|} \right| && \because \text{ 不等式 (D.1.1)}
\end{aligned}$$

と評価できるが，F が C^∞ 級なので $\sup_{x \in U_0} \bigl\|DF(x)^{-1}\bigr\|$ は有限確定値である．F の連続性から $y' \to y$ のとき $x' \to x$ であり，仮定より F は C^∞ 級なので，この極限で最右辺が 0 に収束することが分かった．

次に F^{-1} が $\forall k \in \mathbb{N}$ について C^k 級であることを数学的帰納法により示す．$k = 1$ の場合は先ほど示した．$k > 1$ とする．$D(F^{-1}) = {}^{-1} \circ DF \circ F^{-1}$ であるから[*6]，帰納法の仮定より $D(F^{-1})$ は C^k 級関数の合成で書けているので C^k 級である．よって F^{-1} は C^{k+1} 級であり，帰納法が完成した．

■

[*5] 厳密には $(F|_{U_0})^{-1}$ と書くべきだが略記した．

[*6] ${}^{-1} \colon \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $X \longmapsto X^{-1}$ とおいた．Cramer の公式よりこれは C^∞ 級である．

系 D.2: 陰関数定理

$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ の座標を $(x,\, y) \coloneqq (x^1,\, \dots,\, x^n,\, y^1,\, \dots,\, y^k)$ と書く．

- 開集合 $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$
- C^∞ 関数 $\Phi\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^k,\ (x,\, y) \longmapsto \bigl(\Phi^1(x,\, y),\, \dots,\, \Phi^k(x,\, y)\bigr)$

を与える．このとき，点 $(a,\, b) \in U$ において

$$\left[\frac{\partial \Phi^\mu}{\partial y^\nu}(a,\, b)\right]_{1 \leq \mu,\, \nu \leq k} \in \mathrm{GL}(k,\, \mathbb{R})$$

が成り立つならば，

- 点 a の近傍 $a \in V_0 \subset \mathbb{R}^n$
- 点 b の近傍 $b \in W_0 \subset \mathbb{R}^k$
- C^∞ 関数 $F\colon V_0 \longrightarrow W_0,\ x \longmapsto \bigl(F^1(x),\, \dots,\, F^k(x)\bigr)$

の 3 つ組であって

$$\Phi^{-1}(\{c\}) \cap (V_0 \times W_0) = \Bigl\{\, \bigl(x,\, F(x)\bigr) \in V_0 \times W_0 \,\Bigr\}$$

を充たすものが存在する．ただし $c \coloneqq \Phi(a,\, b) \in \mathbb{R}^k$ とおいた．

証明 C^∞ 写像

$$\Psi\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k,\ (x,\, y) \longmapsto \bigl(x,\, \Phi(x,\, y)\bigr)$$

を考える．仮定より点 $(a,\, b) \in U$ において

$$D\Psi(a,\, b) = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_n & 0 \\ \left[\frac{\partial \Phi^\mu}{\partial x^\nu}(a,\, b)\right]_{1 \leq \mu \leq k,\, 1 \leq \nu \leq n} & \left[\frac{\partial \Phi^\mu}{\partial y^\nu}(a,\, b)\right]_{1 \leq \mu,\, \nu \leq k} \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(n+k,\, \mathbb{R})$$

であるから，逆関数定理より点 $(a,\, b)$ の連結な近傍 $U_0 \subset U$ と点 $(a,\, c)$ の連結な近傍 $Y_0 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ が存在して $\Psi|_{U_0}\colon U_0 \longrightarrow Y_0$ が微分同相写像になる．$U_0,\, Y_0$ を適当に小さくとることで $U_0 = V \times W$ の形をしていると仮定して良い[*7]．

$\forall (x,\, y) \in Y_0$ に対して $\Psi^{-1}(x,\, y) = \bigl(A(x,\, y),\, B(x,\, y)\bigr)$ とおくと $A\colon Y_0 \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ B\colon Y_0 \longrightarrow \mathbb{R}^k$ はどちらも C^∞ 関数で，

$$\begin{aligned}(x,\, y) &= \Phi \circ \Psi^{-1}(x,\, y) \\ &= \Bigl(A(x,\, y),\, \Psi\bigl(A(x,\, y),\, B(x,\, y)\bigr)\Bigr)\end{aligned}$$

が成り立つ．よって

$$\begin{aligned}\Psi^{-1}(x,\, y) &= \bigl(x,\, B(x,\, y)\bigr), \\ y &= \Psi\bigl(x,\, B(x,\, y)\bigr)\end{aligned}$$

[*7] 開集合の直積は積位相の開基を成すので．

が従う．

ここで $V_0 := \left\{ x \in V \mid (x,\, c) \in Y_0 \right\}$, $W_0 := W$ とおき，

$$F\colon V_0 \longrightarrow W_0,\ x \longmapsto B(x,\, c)$$

と定義する．すると $\forall x \in V_0$ に対して

$$c = \Phi\bigl(x,\, B(x,\, c)\bigr) = \Psi\bigl(x,\, F(x)\bigr)$$

である．i.e. $\Phi^{-1}(\{c\}) \cap (V_0 \times W_0) \supset \left\{ \bigl(x,\, F(x)\bigr) \in V_0 \times W_0 \right\}$ が言えた．逆に $\forall (x,\, y) \in \Phi^{-1}(\{c\}) \cap (V_0 \times W_0)$ をとる．このとき $\Phi(x,\, y) = c$ なので $\Psi(x,\, y) = \bigl(x,\, \Phi(x,\, y)\bigr) = (x,\, c)$ であり，

$$(x,\, y) = \Psi^{-1}(x,\, c) = \bigl(x,\, B(x,\, c)\bigr) = \bigl(x,\, F(x)\bigr)$$

が成り立つ．i.e. $\Phi^{-1}(\{c\}) \cap (V_0 \times W_0) \subset \left\{ \bigl(x,\, F(x)\bigr) \in V_0 \times W_0 \right\}$ が言えた．

■

D.1.1 局所微分同相写像

定義 D.1: 局所微分同相写像

境界なし/あり C^∞ 多様体 $M,\, N$ を与える．

C^∞ 写像 $F\colon M \longrightarrow N$ が**局所微分同相写像** (local diffeomorphism) であるとは，$\forall p \in M$ が以下の条件を充たす近傍 $p \in U_p \subset M$ を持つことを言う：

(1) $F(U_p) \subset N$ が開集合

(2) $F|_{U_p}\colon U_p \longrightarrow F(U_p)$ が微分同相写像

定理 D.3: 境界を持たない C^∞ 多様体における逆関数定理

- 境界を持たない C^∞ 多様体 $M,\, N$
- C^∞ 写像 $F\colon M \longrightarrow N$

を与える．このとき，ある点 $p \in M$ において $T_pF\colon T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ が全単射ならば，

- 点 $p \in M$ の連結な近傍 $p \in U_0 \subset M$
- 点 $F(p) \in N$ の連結な近傍 $p \in V_0 \subset N$

が存在して $F|_{U_0}\colon U_0 \longrightarrow V_0$ が微分同相写像になる．

証明 T_pF が全単射なので，$\dim M = \dim N =: n$ である．p を含むチャート $(U,\, \varphi)$ と $F(p)$ を含むチャート $(V,\, \psi)$ を，$F(U) \subset V$ を充たすようにとる．すると

- $\mathbb{R}^n$ の開集合 $\varphi(U),\, \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$
- C^∞ 関数 $\widehat{F} := \psi \circ F \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \longrightarrow \psi(V)$

の 2 つ組は，仮定より点 $\varphi(p) \in \varphi(U)$ において $T_{\varphi(p)}\widehat{F} = T_{F(p)}\psi \circ T_pF \circ T_{\varphi(p)}(\varphi^{-1}) \in \mathrm{GL}(n,\, \mathbb{R})$ を充たすので，$\mathbb{R}^n$ の逆関数定理が使えて

- 点 $\varphi(p) \in \varphi(U)$ の連結な近傍 $\varphi(p) \in \widehat{U_0} \subset \varphi(U)$
- 点 $\widehat{F}\big(\varphi(p)\big) = \psi\big(F(p)\big) \in \varphi(U)$ の連結な近傍 $\widehat{F}\big(\varphi(p)\big) \in \widehat{V_0} \subset \varphi(V)$

であって $\widehat{F}|_{\widehat{U_0}} \colon \widehat{U_0} \longrightarrow \widehat{V_0}$ が微分同相写像となるようなものがある．従って $U_0 \coloneqq \varphi^{-1}(\widehat{U_0}) \subset M$, $V_0 \coloneqq \psi^{-1}(\widehat{V_0}) \subset N$ とおけばこれらはそれぞれ点 p, $F(p)$ の連結な近傍で，かつ $F|_{U_0} = \psi^{-1}|_{V_0} \circ \widehat{F}|_{\widehat{U_0}} \circ \varphi|_{U_0} \colon U_0 \longrightarrow V_0$ は微分同相写像の合成なので微分同相写像である． ■

定理 D.3 を，値域の C^∞ 多様体が境界を持つ場合に拡張できる[*8]．鍵となるのは次の補題である：

補題 D.2:

- 境界を持たない C^∞ 多様体 M
- 境界付き C^∞ 多様体 N
- C^∞ 写像 $F \colon M \longrightarrow N$

を与える．このとき，点 $p \in M$ において $T_pF \colon T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ が単射ならば $F(p) \in \operatorname{Int} N$ である．

証明 $F(p) \in \partial N$ だと仮定し，点 $p \in M$ を含むチャート $(U, \varphi) = \big(U, (x^\mu)\big)$ および点 $F(p) \in \partial N$ の境界チャート $(V, \psi) = \big(V, (y^\mu)\big)$ をとる．このとき F の座標表示 $\widehat{F} \coloneqq \psi \circ F \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U) \longrightarrow \psi(V)$, $x \longmapsto \big(\widehat{F}^1(x), \dots, \widehat{F}^{\dim N}(x)\big)$ は $\widehat{F}^{\dim N}\big(\varphi(p)\big) = 0$ を充たす．ところで $\psi(V) \subset \mathbb{H}^n$ なので $\forall x \in \varphi(U)$ に対して $\widehat{F}^{\dim N}(x) \geq 0$ であり，C^∞ 関数 $\widehat{F}^{\dim N} \colon \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ は点 $\varphi(p) \in \varphi(U)$ において最小値をとることが分かった．従って $\partial \widehat{F}^{\dim N} \big/ \partial x^\nu \ \big(\varphi(p)\big) = 0 \quad (1 \leq \forall \nu \leq \dim N)$ であり，点 $\varphi(p) \in \varphi(U)$ における $\widehat{F}$ の Jacobi 行列の第 $\dim N$ 行が全て 0 だと言うことになるが，これは T_pF が単射であることに矛盾．よって背理法から $F(p) \notin \partial N \iff F(p) \in \operatorname{Int} N$ が示された． ■

定理 D.4: C^∞ 多様体における逆関数定理

- 境界を持たない C^∞ 多様体 M
- 境界あり/なし C^∞ 多様体 N
- C^∞ 写像 $F \colon M \longrightarrow N$

を与える．このとき，ある点 $p \in M$ において $T_pF \colon T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ が全単射ならば，

- 点 $p \in M$ の連結な近傍 $p \in U_0 \subset M$
- 点 $F(p) \in N$ の連結な近傍 $p \in V_0 \subset N$

が存在して $F|_{U_0} \colon U_0 \longrightarrow V_0$ が微分同相写像になる．

証明 N が境界を持たない場合は定理 D.3 が使える．

N が境界付き C^∞ 多様体だとする．仮定より T_pF は単射なので補題 D.2 から $F(p) \in \operatorname{Int} N$ が分かる．$\operatorname{Int} N$ は境界を持たない C^∞ 多様体なので定理 D.3 の証明がそのまま成り立つ．

■

[*8] 定義域の C^∞ 多様体が境界を持つ場合は上手くいかない．

D.1.2　ランク定理

定義 D.2: C^∞ 写像のランク

境界あり/なし C^∞ 多様体 $M,\ N$ および C^∞ 写像 $F\colon M \longrightarrow N$ を与える．

- 点 $p \in M$ における F の**ランク** (rank) とは，線型写像 $T_pF\colon T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ のランク，i.e. $\dim\bigl(\mathrm{Im}(T_pF)\bigr) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ のこと．$\forall p \in M$ における F のランクが等しいとき，F は**定ランク** (constant rank) であると言い，$\boldsymbol{\mathrm{rank}\, F} \coloneqq \dim\bigl(\mathrm{Im}(T_pF)\bigr)$ と書く．
- 点 $p \in M$ における F のランクが $\min\bigl\{\dim M,\ \dim N\bigr\}$ に等しいとき，F は**点 $\boldsymbol{p}$ においてフルランク** (full rank at p) であると言う．$\mathrm{rank}\, F = \min\bigl\{\dim M,\ \dim N\bigr\}$ ならば F は**フルランク** (full rank) であると言う．

位相空間 $M,\ N$ を与える．連続写像 $F\colon M \longrightarrow N$ が**位相的埋め込み** (topological embedding) であるとは，$F(M) \subset N$ に N からの相対位相を入れたときに写像 $F\colon M \longrightarrow F(M)$ が同相写像になることを言う．

定義 D.3: C^∞ 沈めこみ・C^∞ はめ込み・C^∞ 埋め込み

境界あり/なし C^∞ 多様体 $M,\ N$ および定ランクの C^∞ 写像 $F\colon M \longrightarrow N$ を与える．

- F が $\boldsymbol{C^\infty}$ **沈め込み** (smooth submersion) であるとは，$\forall p \in M$ において $T_pF\colon T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ が全射である，i.e. $\mathrm{rank}\, F = \dim N$ であることを言う．
- F が $\boldsymbol{C^\infty}$ **はめ込み** (smooth immersion) であるとは，$\forall p \in M$ において $T_pF\colon T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ が単射である，i.e. $\mathrm{rank}\, F = \dim M$ であること[a]を言う．
- F が $\boldsymbol{C^\infty}$ **埋め込み** (smooth embedding) であるとは，F が C^∞ はめ込みであってかつ位相的埋め込みであることを言う．

[a] 階数・退化次元の定理から $\dim(\mathrm{Ker}\, T_pF) + \dim(\mathrm{Im}\, T_pF) = \dim M$ なので，$\mathrm{rank}\, F = \dim(\mathrm{Im}\, T_pF) = \dim M \implies \dim(\mathrm{Ker}\, T_pF) = 0 \iff \mathrm{Ker}\, T_pF = 0$

命題 D.1: 局所微分同相写像と C^∞ 沈めこみ・C^∞ はめ込み

- 境界を持たない C^∞ 多様体 M
- 境界あり/なし C^∞ 多様体 N
- 写像 $F\colon M \longrightarrow N$

を与える．このとき以下が成り立つ：

(1) F が局所微分同相写像 $\iff$ F は C^∞ 沈め込みかつ C^∞ はめ込み

(2) $\dim M = \dim N$ かつ F が C^∞ 沈め込みまたは C^∞ はめ込み $\implies$ F は局所微分同相

証明 (1) $\implies$

F が局所微分同相だとする．$\forall p \in M$ を 1 つ固定する．仮定よりこのとき p の近傍 $p \in U \subset M$ であって $F|_U\colon U \longrightarrow F(U)$ が微分同相写像となるようなものがある．

特に局所微分同相写像の定義から U, $F(U)$ はそれぞれ M, N の開集合なので，包含写像 $\iota_U\colon U \hookrightarrow M$, $\iota_{F(U)}\colon F(U) \hookrightarrow N$ の微分 $T_p(\iota_U)\colon T_pU \longrightarrow T_pM$, $T_{F(p)}\bigl(\iota_{F(U)}\bigr)\colon T_{F(p)}\bigl(F(U)\bigr) \longrightarrow T_{F(p)}N$ はベクトル空間の同型写像である．さらに $F|_U$ が微分同相写像なので $T_p(F|_U)\colon T_pU \longrightarrow T_{F(p)}\bigl(F(U)\bigr) \cong T_{F(p)}N$ はベクトル空間の同型写像だが，$T_p(F|_U) = T_p(F\circ\iota_U) = T_pF \circ T_p(\iota_U)$ なので，$T_pF\colon T_pM \longrightarrow T_pN$ 自身もベクトル空間の同型写像である．故に $\operatorname{rank} F = \dim M = \dim N$ が言える．

$\Longleftarrow$

F が C^∞ 沈め込みかつ C^∞ はめ込みであるとする．すると $\forall p \in M$ に対して $T_pF \longrightarrow T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ は全単射なので，C^∞ 多様体における逆関数定理が使える．

(2) $\forall p \in M$ をとる．$\dim M = \dim N$ かつ $T_pF\colon T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ が単射ならば，階数-退化次元の定理より $\dim(\operatorname{Im} T_pF) = \dim M - \dim(\operatorname{Ker} T_pF) = \dim M = \dim N$ なので T_pF が全単射だとわかる．$\dim M = \dim N$ かつ $T_pF\colon T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ が全射ならば，階数-退化次元の定理より $\dim(\operatorname{Ker} T_pF) = \dim M - \dim(\operatorname{Im} T_pF) = \dim M - \dim N = 0$ なので T_pF が全単射だとわかる．よってどちらの場合も C^∞ 多様体における逆関数定理が使える．

■

定理 D.5: 局所的ランク定理（境界を持たない場合）

- 境界を持たない C^∞ 多様体 M, N
- 定ランクの C^∞ 写像 $F\colon M \longrightarrow N$

を与える．このとき $\forall p \in M$ に対して

- 点 $p \in M$ を含む M の C^∞ チャート $(U_0,\, \Phi)$ であって $\Phi(p) = 0 \in \mathbb{R}^{\dim M}$ を充たすもの
- 点 $F(p) \in N$ を含む N の C^∞ チャート $(V_0,\, \Psi)$ であって $\Psi\bigl(F(p)\bigr) = 0 \in \mathbb{R}^{\dim N}$ かつ $F(U) \subset V$ を充たすもの

が存在して，$\forall (x^1,\, \dots,\, x^{\dim M}) \in \Phi(U) \subset \mathbb{R}^{\dim M}$ に対して

$$\begin{aligned}\Psi \circ F \circ \Phi^{-1}&(x^1,\, \dots,\, x^{\operatorname{rank} F},\, x^{\operatorname{rank} F+1},\, \dots,\, x^{\dim M}) \\ &= (x^1,\, \dots,\, x^{\operatorname{rank} F},\, \underbrace{0,\, \dots,\, 0}_{\dim N - \operatorname{rank} F}) \in \Psi(V) \subset \mathbb{R}^{\dim N}\end{aligned} \tag{D.1.3}$$

を充たす．

特に F が C^∞ 沈め込みならば (D.1.3) は

$$\Psi \circ F \circ \Phi^{-1}(x^1,\, \dots,\, x^{\dim N},\, x^{\dim N+1},\, \dots,\, x^{\dim M}) = (x^1,\, \dots,\, x^{\dim N})$$

の形になり，F が C^∞ はめ込みならば (D.1.3) は

$$\Psi \circ F \circ \Phi^{-1}(x^1,\, \dots,\, x^{\dim M}) = (x^1,\, \dots,\, x^{\dim M},\, 0,\, \dots,\, 0)$$

の形になる．

証明 $\forall p \in M$ を 1 つ固定する．以降では p を含む M の任意の C^∞ チャート $(U,\, \varphi) = \bigl(U,\, (x^\mu)\bigr)$ および

$F(p)$ を含む N の任意の C^∞ チャート $(V,\,\psi) = \bigl(V,\,(x'^\mu)\bigr)$ に対して

$$\begin{aligned}
&\widehat{U} \coloneqq \varphi(U) \subset \mathbb{R}^{\dim M},\\
&\widehat{V} \coloneqq \psi(V) \subset \mathbb{R}^{\dim N},\\
&\widehat{F} \coloneqq \psi \circ F \circ \varphi^{-1} \colon \widehat{U} \longrightarrow \widehat{V},\\
&\widehat{p} \coloneqq \varphi(p) \in \widehat{U}
\end{aligned}$$

とおく．便宜上 C^∞ チャート $\bigl(U,\,(x^\mu)\bigr),\,\bigl(V,\,(x'^\mu)\bigr)$ の座標関数をそれぞれ

$$\begin{aligned}
(x,\,y) &= (x^1,\,\dots,\,x^{\operatorname{rank} F},\,y^1,\,\dots,\,y^{\dim M - \operatorname{rank} F}) \coloneqq (x^1,\,\dots,\,x^{\dim M})\\
(v,\,w) &= (v^1,\,\dots,\,v^{\operatorname{rank} F},\,w^1,\,\dots,\,w^{\dim N - \operatorname{rank} F}) \coloneqq (x'^1,\,\dots,\,x'^{\dim N})
\end{aligned}$$

とおき直す．また，2 つの C^∞ 写像を

$$\begin{aligned}
&Q \colon \widehat{U} \longrightarrow \mathbb{R}^{\operatorname{rank} F},\ (x,\,y) \longmapsto \bigl(\widehat{F}^1(x,\,y),\,\dots,\,\widehat{F}^{\operatorname{rank} F}(x,\,y)\bigr)\\
&R \colon \widehat{U} \longrightarrow \mathbb{R}^{\dim N - \operatorname{rank} F},\ (x,\,y) \longmapsto \bigl(\widehat{F}^{\operatorname{rank} F + 1}(x,\,y),\,\dots,\,\widehat{F}^{\dim N}(x,\,y)\bigr)
\end{aligned}$$

と定義する．このとき $\widehat{F} = (Q,\,R)$ と書ける．

仮定より F は定ランクなので，点 $\widehat{p} \in \widehat{U}$ において線型写像 $T_{\widehat{p}}\widehat{F} \colon T_{\widehat{p}}\widehat{U} \longrightarrow T_{\widehat{F}(\widehat{p})}\widehat{V}$ の表現行列のランクは $\operatorname{rank} F$ である．必要ならば $M,\,N$ の C^∞ チャートを取り替えることで座標関数の順番を好きなように入れ替えることができる[*9]ので，$T_{\widehat{p}}\widehat{F}$ の表現行列[*10]の $\operatorname{rank} F$ 次首座小行列に対して

$$\left[\frac{\partial \widehat{F}^\mu}{\partial x^\nu}(\widehat{p})\right]_{1 \le \mu,\,\nu \le \operatorname{rank} F} = \left[\frac{\partial Q^\mu}{\partial x^\nu}(0,\,0)\right]_{1 \le \mu,\,\nu \le \operatorname{rank} F} \in \mathrm{GL}(\operatorname{rank} F,\,\mathbb{R}) \tag{D.1.4}$$

が成り立つような C^∞ チャート $\bigl(U,\,(x,\,y)\bigr),\,\bigl(V,\,(v,\,w)\bigr)$ が存在する．さらに，$\widehat{U},\,\widehat{V}$ の原点を平行移動することでいつでも $\widehat{p} = (0,\,0) \in \mathbb{R}^{\dim M},\ \widehat{F}(\widehat{p}) = (0,\,0) \in \mathbb{R}^{\dim N}$ が成り立つようにできる[*11]．

ここまでの議論の要請を満たす $M,\,N$ の任意の C^∞ チャート $(U,\,\varphi),\,(V,\,\psi)$ をとり，C^∞ 写像

$$\widehat{\Phi} \colon \widehat{U} \longrightarrow \mathbb{R}^{\dim M},\ (x,\,y) \longmapsto \bigl(Q(x,\,y),\,y\bigr)$$

を考える．点 $(0,\,0) \in \widehat{U}$ における Ψ の Jacobi 行列は

$$D\Psi(0,\,0) = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial Q^\mu}{\partial x^\nu}(0,\,0)\right]_{1 \le \mu,\,\nu \le \operatorname{rank} F} & \left[\frac{\partial Q^\mu}{\partial y^\nu}(0,\,0)\right]_{1 \le \mu \le \operatorname{rank} F,\,1 \le \nu \le \dim M - \operatorname{rank} F} \\ 0 & \mathbb{1}_{\dim M - \operatorname{rank} F} \end{bmatrix}$$

となるが，仮定 (D.1.4) よりこれは正則行列である．よって $\mathbb{R}^{\dim M}$ における逆関数定理から

- 点 $(0,\,0) \in \widehat{U}$ の連結な近傍 $\widehat{U_0} \subset \widehat{U}$
- 点 $(0,\,0) \in \mathbb{R}^{\dim M}$ の連結な近傍 $\tilde{U}_0 \subset \mathbb{R}^{\dim M}$

[*9] 座標を入れ替える写像は微分同相写像なので，$M,\,N$ の C^∞ 構造の中には座標の入れ替えによって互いに移り合えるような C^∞ チャートたちが含まれている．

[*10] これは C^∞ 関数 $\widehat{F}$ の Jacobi 行列 $D\widehat{F}(\widehat{p})$ である．

[*11] 平行移動は微分同相写像なので，$M,\,N$ の C^∞ 構造には平行移動によって互いに移り合えるような C^∞ チャートたちが含まれている．

が存在して $\widehat{\Phi}|_{\widehat{U_0}}\colon \widehat{U_0} \longrightarrow \tilde{U}_0$ が微分同相写像になる．$\widehat{U_0},\, \tilde{U}_0$ を適当に小さくとり直すことで $\tilde{U}_0$ が開区間の直積であると仮定して良い．$\widehat{\Phi}|_{\widehat{U_0}}$ の逆写像を $\widehat{\Phi}^{-1}\colon \tilde{U}_0 \longrightarrow \widehat{U_0},\ (x,\, y) \longmapsto \bigl(A(x,\, y),\, B(x,\, y)\bigr)$ と書くと $A\colon \tilde{U}_0 \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathrm{rank}\, F},\, B\colon \tilde{U}_0 \longrightarrow \mathbb{R}^{\dim M - \mathrm{rank}\, F}$ はどちらも C^∞ 写像で，$\forall (x,\, y) \in \tilde{U}_0$ に対して

$$(x,\, y) = \widehat{\Phi} \circ \widehat{\Phi}^{-1}(x,\, y) = \Bigl(Q\bigl(A(x,\, y),\, B(x,\, y)\bigr),\, B(x,\, y)\Bigr)$$

が成り立つ．よって

$$\begin{aligned}\widehat{\Phi}^{-1}(x,\, y) &= \bigl(A(x,\, y),\, y\bigr), \\ x &= Q\bigl(A(x,\, y),\, y\bigr)\end{aligned}$$

であり，

$$\begin{aligned}\widehat{F} \circ \widehat{\Phi}^{-1}(x,\, y) &= \widehat{F}\bigl(A(x,\, y),\, y\bigr) \\ &= \Bigl(Q\bigl(A(x,\, y),\, y\bigr),\, R\bigl(A(x,\, y),\, y\bigr)\Bigr) \\ &= \Bigl(x,\, R\bigl(A(x,\, y),\, y\bigr)\Bigr)\end{aligned}$$

が分かった．従って C^∞ 写像 $\tilde{R}\colon \tilde{U}_0 \longrightarrow \mathbb{R}^{\dim N - \mathrm{rank}\, F},\, (x,\, y) \longmapsto R\bigl(A(x,\, y),\, y\bigr)$ と定義すると，$\forall (x,\, y) \in \tilde{U}_0$ における $\widehat{F} \circ \widehat{\Phi}^{-1}$ の Jacobi 行列は

$$\begin{aligned}&D(\widehat{F} \circ \Psi^{-1})(x,\, y) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{\mathrm{rank}\, F} & 0 \\ \left[\frac{\partial \tilde{R}^\mu}{\partial x^\nu}(x,\, y)\right]_{1 \le \mu \le \dim N - \mathrm{rank}\, F,\, 1 \le \nu \le \mathrm{rank}\, F} & \left[\frac{\partial \tilde{R}^\mu}{\partial y^\nu}(x,\, y)\right]_{1 \le \mu \le \dim N - \mathrm{rank}\, F,\, 1 \le \nu \le \dim M - \mathrm{rank}\, F} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

と計算できる．ところが，仮定より行列 $D(\widehat{F})(x,\, y)$ のランクは $\mathrm{rank}\, F$ で，かつ $\widehat{\Phi}^{-1}$ は微分同相写像なので $D(\widehat{\Phi}^{-1})(x,\, y) \in \mathrm{GL}(\dim M,\, \mathbb{R})$ であり，行列 $D(\widehat{F} \circ \widehat{\Phi}^{-1})(x,\, y) = D(\widehat{F})(x,\, y) \circ D(\widehat{\Phi}^{-1})(x,\, y)$ のランクは $\mathrm{rank}\, F$ に等しい．よって $\forall (x,\, y) \in \tilde{U}_0$ において

$$\left[\frac{\partial \tilde{R}^\mu}{\partial y^\nu}(x,\, y)\right]_{1 \le \mu \le \dim N - \mathrm{rank}\, F,\, 1 \le \nu \le \dim M - \mathrm{rank}\, F} = 0$$

でなくてはいけない．$\tilde{U}_0$ は開区間の直積なので，このことから $\tilde{R}$ が $(y^1,\, \dots,\, y^{\dim M - \mathrm{rank}\, F})$ によらないことが分かった．よって $S(x) \coloneqq \tilde{R}(x,\, 0)$ とおくと

$$\widehat{F} \circ \widehat{\Phi}^{-1}(x,\, y) = \bigl(x,\, S(x)\bigr) \tag{D.1.5}$$

と書けることが分かった．

最後に，点 $\widehat{F}(\widehat{p}) = (0,\, 0) \in \widehat{V}$ の適当な近傍を構成する．開集合[*12] $\widehat{V_0} \subset \widehat{V}$ を

$$\widehat{V_0} \coloneqq \left\{\, (v,\, w) \in \widehat{V} \;\middle|\; (v,\, 0) \in \tilde{U}_0 \,\right\}$$

と定義すると，$\widehat{F}(\widehat{p}) = (0,\, 0) \in \widehat{V_0}$ なので $\widehat{V_0}$ は点 $\widehat{F}(\widehat{p})$ の近傍であり，$\tilde{U}_0$ は開区間の直積なので (D.1.5) から $\widehat{F} \circ \widehat{\Phi}^{-1}(\tilde{U}_0) \subset \widehat{V_0}$ が成り立つ．そして C^∞ 写像

$$\widehat{\Psi}\colon \widehat{V_0} \longrightarrow \mathbb{R}^{\dim N},\ (v,\, w) \longmapsto \bigl(v,\, w - S(v)\bigr)$$

---

*12 写像 $f\colon \widehat{V} \longrightarrow \mathbb{R}^{\dim M},\ (v,\, w) \longmapsto (v,\, 0)$ は連続で，$\tilde{U}_0 \subset \mathbb{R}^{\dim M}$ は開集合なので，$V_0 = \widehat{V} \cap f^{-1}(\tilde{U}_0) \subset \widehat{V}$ もまた開集合．

を考える．$\widehat{\Psi}\colon \widehat{V_0} \longrightarrow \widehat{\Psi}(\widehat{V_0})$ は C^∞ 写像

$$\widehat{\Psi}^{-1}\colon \widehat{\Psi}(\widehat{V_0}) \longrightarrow \widehat{V_0},\ (s,\, t) \longmapsto \bigl(s,\, t + S(s)\bigr)$$

を逆写像に持つので微分同相写像であり，$(V_0,\, \widehat{\Psi})$ は N の C^∞ チャートである．その上 (D.1.5) から $\forall (x,\, y) \in \tilde{U}_0$ に対して

$$\widehat{\Psi} \circ \widehat{F} \circ \widehat{\Phi}^{-1}(x,\, y) = \widehat{\Psi}\bigl(x,\, S(x)\bigr) = (x,\, 0) \tag{D.1.6}$$

となる．

以上をまとめると，

$$\begin{aligned}
U_0 &:= \varphi^{-1}(\widehat{U_0}) \subset M, \\
V_0 &:= \psi^{-1}(\widehat{V_0}) \subset N, \\
\Phi &:= \widehat{\Phi} \circ \varphi\colon U_0 \longrightarrow \Phi(U_0), \\
\Psi &:= \widehat{\Psi} \circ \psi\colon V_0 \longrightarrow \Psi(V_0)
\end{aligned}$$

とおくと $\Phi,\, \Psi$ は微分同相写像であり，

- 点 $p \in M$ を含む M の C^∞ チャート $(U_0,\, \Phi)$
- 点 $F(p) \in N$ を含む N の C^∞ チャート $(V_0,\, \Psi)$

の 2 つ組は (D.1.6) から $\forall (x,\, y) \in \Phi(U_0) = \tilde{U}_0$ に対して

$$\Psi \circ F \circ \Phi(x,\, y) = \widehat{\Psi} \circ \widehat{F} \circ \widehat{\Phi}^{-1}(x,\, y) = (x,\, 0)$$

を充たすので証明が完了する． ■

系 D.6:

境界を持たない C^∞ 多様体 $M,\, N$ と C^∞ 写像 $F\colon M \longrightarrow N$ を与える．このとき M が連結ならば以下の 2 つは同値である：

(1) F は定ランク

(2) $\forall p \in M$ において，$p,\, F(p)$ を含む $M,\, N$ の C^∞ チャート $(U,\, \varphi),\, (V,\, \psi)$ であって F の座標表示 $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \longrightarrow \psi(V)$ が線型写像となるようなものが存在する．

証明 (1) $\Longrightarrow$ (2)

定理 D.5 の (D.1.3) は F の座標表示が線型写像であることを意味する．

(1) $\Longleftarrow$ (2)

任意の線型写像のランクは一意に定まるので，$\forall p \in M$ の近傍において F のランクは一定だが，仮定より M は連結なので F は定ランクである．

■

定理 D.7: 大域的ランク定理（境界を持たない場合）

- 境界を持たない C^∞ 多様体 $M,\ N$
- 定ランクの C^∞ 写像 $F\colon M \longrightarrow N$

を与える．このとき以下が成り立つ：

(1) F が全射 $\implies$ F は C^∞ 沈め込み
(2) F が単射 $\implies$ F は C^∞ はめ込み
(3) F が全単射 $\implies$ F は微分同相写像

証明 (1) F が全射だとする．もし $\operatorname{rank} F < \dim N$ ならば，局所的ランク定理により $\forall p \in M$ に対して

- 点 $p \in M$ を含む M の C^∞ チャート $(U_p,\ \Phi)$ であって $\Phi(p) = 0 \in \mathbb{R}^{\dim M}$ を充たすもの
- 点 $F(p) \in N$ を含む N の C^∞ チャート $(V_p,\ \Psi)$ であって $\Psi\bigl(F(p)\bigr) = 0 \in \mathbb{R}^{\dim N}$ かつ $F(U_p) \subset V_p$ を充たすもの

が存在して，F の座標表示 $\Psi \circ F \circ \Phi^{-1}\colon \Phi(U_p) \longrightarrow \Psi(V_p)$ が (D.1.3) の形になる．必要なら U_p を適当に小さくとることで $\exists r > 0,\ \Phi(U_p) = B_r(0) \subset \mathbb{R}^{\dim M}$ で，かつ $F(\overline{U_p}) \subset V_p$ が成り立つと仮定して良い．このとき $F(\overline{U_p})$ は Hausdorff 空間 $\bigl\{\, y \in V_p \bigm| \Psi(y) = (y^1,\ \dots,\ y^{\operatorname{rank} F},\ 0,\ \dots,\ 0) \,\bigr\}$ のコンパクト部分集合なので，N の閉集合でかつ N の開集合を部分集合として持たない．i.e. N 上**疎** (nowhere dense) である．多様体の第 2 可算性より任意の多様体の開被覆は高々可算な部分被覆を持つから，M の開被覆 $\bigl\{U_p\bigr\}_{p\in M}$ および $F(M)$ の開被覆 $\bigl\{V_p\bigr\}_{p\in M}$ はそれぞれ高々可算な部分被覆 $\bigl\{U_i\bigr\}_{i\in I},\ \bigl\{V_i\bigr\}_{i\in I}$ を持つ．i.e. $F(M)$ は高々可算個の疎集合 $F(\overline{U_i})$ たちの和集合なので，Baire のカテゴリー定理から $F(M)$ の N における内部は空集合ということになるが，これは F が全射であることに矛盾する．よって背理法から $\operatorname{rank} F = \dim N$ が言えた．

(2) F が単射だとする．もし $\operatorname{rank} F < \dim M$ ならば，局所的ランク定理により $\forall p \in M$ に対して

- 点 $p \in M$ を含む M の C^∞ チャート $(U_p,\ \Phi)$ であって $\Phi(p) = 0 \in \mathbb{R}^{\dim M}$ を充たすもの
- 点 $F(p) \in N$ を含む N の C^∞ チャート $(V_p,\ \Psi)$ であって $\Psi\bigl(F(p)\bigr) = 0 \in \mathbb{R}^{\dim N}$ かつ $F(U_p) \subset V_p$ を充たすもの

が存在して，F の座標表示 $\Psi \circ F \circ \Phi^{-1}\colon \Phi(U_p) \longrightarrow \Psi(V_p)$ が (D.1.3) を充たす．このことから，十分小さな任意の $\varepsilon \in \mathbb{R}^{\dim M - \operatorname{rank} F}$ に対して $\Psi \circ F \circ \Phi^{-1}(0,\ \dots,\ 0,\ \varepsilon) = \Psi \circ F \circ \Phi^{-1}(0,\ \cdots,\ 0)$ が成り立つことになり F の単射性に矛盾．

(3) (1), (2) より F が全単射なら F は C^∞ 沈め込みかつ C^∞ はめ込みであるから，命題 D.1 より F は全単射な局所微分同相写像である．よって F は微分同相写像である．

■

定理 D.8: はめ込みに関する局所的ランク定理（境界付き）

- 境界付き C^∞ 多様体 M
- 境界を持たない C^∞ 多様体 N
- C^∞ はめ込みの C^∞ 写像 $F\colon M \longrightarrow N$

を与える．このとき $\forall p \in \partial M$ に対して

- 点 $p \in M$ を含む M の C^∞ 境界チャート $(U_0,\,\Phi)$ であって $\Phi(p) = 0 \in \mathbb{H}^{\dim M}$ を充たすもの
- 点 $F(p) \in N$ を含む N の C^∞ チャート $(V_0,\,\Psi)$ であって $\Psi\bigl(F(p)\bigr) = 0 \in \mathbb{R}^{\dim N}$ かつ $F(U) \subset V$ を充たすもの

が存在して，$\forall (x^1,\,\dots,\,x^{\dim M}) \in \Phi(U) \subset \mathbb{H}^{\dim M}$ に対して

$$\Psi \circ F \circ \Phi^{-1}(x^1,\,\dots,\,x^{\dim M}) = (x^1,\,\dots,\,x^{\dim M},\,\underbrace{0,\,\dots,\,0}_{\dim N - \operatorname{rank} M}) \in \Psi(V) \subset \mathbb{R}^{\dim N}$$

を充たす．

証明 ■

D.1.3 C^∞ 埋め込み

命題 D.2:

境界あり/なし C^∞ 多様体 $M,\,N$ および単射な C^∞ はめ込み $F\colon M \longrightarrow N$ を与える．このとき，以下のいずれかの条件が充たされれば F は C^∞ 埋め込みである：

(1) F は開写像または閉写像
(2) F は固有写像 (**proper map**[a])
(3) M はコンパクト
(4) $\partial M = \emptyset$ かつ $\dim M = \dim N$

[a] Y の任意のコンパクト部分集合の逆像が X のコンパクト部分集合

証明 (1) F が開写像だとする．$F\colon M \longrightarrow F(M)$ は全単射なので，逆写像 $F^{-1}\colon F(M) \longrightarrow M$ が存在する．このとき，X の任意の開集合 $U \subset X$ に対して $(F^{-1})^{-1}(U) = F(U) \subset Y$ は仮定より Y の開集合であるから，相対位相の定義より $F(M)$ においても開集合である．i.e. F^{-1} は連続写像であり，$F\colon M \longrightarrow F(M)$ が同相写像だと分かった．i.e. F は位相的埋め込みである．F が閉写像の場合も同様．

(2)

■

D.2　部分多様体

D.3　Sard の定理

付録 E

代数の小技集

E.0.1 ベクトル空間の小技

次数が n 以下の 1 変数 $\mathbb{K}$-係数多項式環を $\mathbb{K}[t]^{\leq n}$ と書く．

定義 E.1: 終結式

$\mathbb{K}$ を体とし，$\mathbb{K}$-係数多項式 $f,\ g \in \mathbb{K}[t]$ を与える．

- $f,\ g$ の **Sylvester 行列** (Sylvester matrix) とは，$\mathbb{K}$-線形写像

$$\varphi(f,\ g)\colon \mathbb{K}[t]^{\leq \deg g} \times \mathbb{K}[t]^{\leq \deg f} \longrightarrow \mathbb{K}[t]^{\deg f + \deg g},\ (P,\ Q) \longmapsto fP + gQ$$

  の，基底 $1,\ t,\ \dots,\ t^{\deg f + \deg g}$ に関する表現行列のこと．
- $f,\ g$ の**終結式** (resultant) とは，Sylvester 行列 $\varphi(f,\ g)$ の行列式

$$\boldsymbol{\mathrm{res}(f,\ g)} := \det \varphi(f,\ g)$$

  のこと．

命題 E.1: 終結式の基本性質

$\mathbb{K}$ を体とし，$\mathbb{K}$-係数多項式 $f = \sum_{k=0}^{\deg f} f_k t^k,\ g = \sum_{k=0}^{\deg g} g_k t^k \in \mathbb{K}[t]$ を与える．このとき以下が成り立つ：

(1)

$$\operatorname{res}(f,\,g)=\begin{vmatrix}
f_0 & & & g_0 & & & \\
f_1 & \ddots & & g_1 & \ddots & & \\
\vdots & \ddots & f_0 & \vdots & \ddots & \ddots & \\
\vdots & & f_1 & g_{\deg g} & & \ddots & g_0 \\
f_{\deg f} & & \vdots & & \ddots & & g_1 \\
& \ddots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\
& & f_{\deg f} & & & & g_{\deg g}
\end{vmatrix}$$

(2) $\mathbb{K}$ が代数閉体ならば，$f,\,g$ の根を重複込みでそれぞれ $\lambda_i,\,\mu_j$ と書くと

$$\operatorname{res}(f,\,g)=(f_{\deg f})^{\deg g}(g_{\deg g})^{\deg f}\prod_{\substack{1\le i\le\deg f\\1\le j\le\deg g}}(\lambda_i-\mu_j)$$

が成り立つ．

<u>証明</u>　(1) $P=\sum_{k=0}^{\deg g}P_kt^k,\ Q=\sum_{k=0}^{\deg f}Q_kt^k$ とすると，$f,\,g$ の Sylvester 行列は

$$\varphi(f,\,g)(P,\,Q)=\sum_{k=0}^{\deg f}\sum_{l=0}^{\deg g}f_kP_lt^{k+l}+\sum_{l=0}^{\deg f}\sum_{k=0}^{\deg g}g_kQ_lt^{k+l}$$

であるから，$P_l=\delta^i_l,\ Q_l=\delta^j_l$ w/ $1\le i\le\deg g,\ 1\le j\le\deg f$ のときを考えると

$$\varphi(f,\,g)(t^i,\,0)=\sum_{k=0}^{\deg f}f_kt^{k+i}$$
$$\varphi(f,\,g)(0,\,t^j)=\sum_{k=0}^{\deg g}g_kt^{k+j}$$

となり，$(t^i,\,0)=t^i,\ (0,\,t^j)=t^{\deg g+j}$ と見做して $\mathbb{K}[t]^{\le\deg g}\times\mathbb{K}[t]^{\le\deg f}$ の基底を $\mathbb{K}[t]^{\deg f+\deg g}$ の基底と同一視することで $[\operatorname{res}(f,\,g)]^{k+i}{}_i=f_k,\ [\operatorname{res}(f,\,g)]^{k+j}{}_{\deg g+j}=g_k$ が分かった．

(2) 解と係数の関係より，

$$A:=\frac{1}{(f_{\deg f})^{\deg g}(g_{\deg g})^{\deg f}}\varphi(f,\,g)$$

の非ゼロな行列成分は 1 または λ_i の基本対称式または μ_j の基本対称式である．i.e. A は $\lambda_i,\,\mu_j$ の多項式である．

$1\le\forall i\le\deg f,\ 1\le\forall j\le\deg g$ を固定する．$\lambda_i=\mu_j=:\lambda$ ならば，

$$\boldsymbol{x}:=\begin{bmatrix}1\\\lambda\\\vdots\\\lambda^{\deg f+\deg g}\end{bmatrix}$$

とおくと $A^\mathsf{T}\boldsymbol{x} = 0$ かつ $\boldsymbol{x} \neq 0$, i.e. $\operatorname{Ker}\varphi(f, g) \neq \{0\}$ であることが分かった．従って λ_i, μ_j の多項式として $\lambda_i = \mu_j$ ならば $\operatorname{res}(f, g) = \det\varphi(f, g) = 0$ となるから，因数定理より

$$\operatorname{res}(f, g) = (f_{\deg f})^{\deg g}(g_{\deg g})^{\deg f} \prod_{\substack{1 \le i \le \deg f \\ 1 \le j \le \deg g}} (\lambda_i - \mu_j)$$

が示された.

■

E.0.2 環の小技

付録 F

モノイダル圏・フュージョン圏・高次群

この章では標数 0 の体 $\mathbb{K}$ のみを考える.

F.1 加法圏

定義 F.1: 加法圏・アーベル圏

圏 $\mathcal{C}$ が体 $\mathbb{K}$ 上の**加法圏** (additive category) であるとは，以下を充たすこと：

(add-1)
任意の Hom 集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が $\mathbb{K}$-ベクトル空間の構造をもち，かつ射の合成

$$\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

が $\mathbb{K}$-双線形写像である.

(add-2)
零対象[a] (zero object) $\mathbf{0} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が存在し，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{0}, X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{X}, 0) = 0$ を充たす[b].

(add-3)
有限の余積が常に存在する.

[a] 始対象かつ終対象
[b] 最右辺は **(add-1)** の意味で零ベクトル空間.

加法圏 $\mathcal{C}$ は，以下の条件を充たすとき**アーベル圏** (abelian category) と呼ばれる：

(Ab-1)
任意の射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が核 $\ker f\colon \mathrm{Ker}\, f \longrightarrow X$ および余核 $\mathrm{coker}\, f\colon Y \longrightarrow \mathrm{Coker}\, f$ を持つ.

(Ab-2)
$\mathrm{Ker}\, f = \mathbf{0}$ ならば $f = \ker(\mathrm{coker}\, f)$，かつ $\mathrm{Coker}\, f = \mathbf{0}$ ならば $f = \mathrm{coker}(\ker f)$

以下では加法圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ の間の関手 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ には，$F_{X,Y}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(X), F(Y)\big)$，$f \longmapsto$

$F(f)$ が $\mathbb{K}$-線型写像となることを常に要請する．

【例 F.1.1】表現の圏

G を群とする．このとき

- G の表現 (ρ, V) を対象とする
- G-同変な $\mathbb{K}$-線型写像 $(\rho, V) \xrightarrow{f} (\rho', V')$ を射とする

圏を $\mathbf{Rep}\,(G)$ と書く．$\mathbf{Rep}\,(G)$ はアーベル圏である．

定義 F.2: 単純・半単純

- アーベル圏 $\mathcal{C}$ の対象 $X \in \mathcal{C}$ が**単純** (simple) であるとは，任意のモノ射 $i\colon U \hookrightarrow X$ が 0 であるか同型射であることを言う．
- アーベル圏 $\mathcal{C}$ が**半単純** (semisimple) であるとは，$\forall X \in \mathcal{C}$ が単純対象の有限余積と同型であることを言う．i.e. 単純対象の族 $\{V_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})\}_{i\in I}$ および有限個を除いて 0 であるような非負整数の族 $\{N_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}_{i\in I}$ が存在して

$$X \cong \bigoplus_{i\in I} N_i X_i$$

が成り立つこと．

F.2 モノイダル圏

これまでも何回か登場したが，モノイダル圏についてまとめておく：

定義 F.3: モノイダル圏

モノイダル圏 (monidal category) は，以下の 5 つのデータからなる：

- 圏 $\mathcal{C}$
- **テンソル積** (tensor product) と呼ばれる関手 $\otimes\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$
- **単位対象** (unit object) $I \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- **associator** と呼ばれる自然同値

$$\{a_{X,Y,Z}\colon (X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{\cong} X \otimes (Y \otimes Z)\}_{X,Y,Z\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

- **left/right unitors** と呼ばれる自然同値

$$\{l_X\colon I \otimes X \xrightarrow{\cong} X\}_{X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})},$$
$$\{r_X\colon X \otimes I \xrightarrow{\cong} X\}_{X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは $\forall X, Y, Z, W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について以下の 2 つの図式を可換にする：

(triangle diagram)

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes I) \otimes Y \arrow[rr, "a_{X,\,I,\,Y}"] \arrow[dr, "r_X \otimes \mathrm{Id}_Y"'] & & X \otimes (I \otimes Y) \arrow[dl, "\mathrm{Id}_X \otimes l_Y"] \\
& X \otimes Y &
\end{tikzcd}$$

(pentagon diagram)

$$\begin{tikzcd}
& ((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z \arrow[dl, "a_{W \otimes X,\,Y,\,Z}"'] \arrow[dr, "a_{W,\,X,\,Y} \otimes \mathrm{Id}_Z"] & \\
(W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) \arrow[ddr, "a_{W,\,X,\,Y \otimes Z}"'] & & (W \otimes (X \otimes Y)) \otimes Z \arrow[d, "a_{W,\,X \otimes Y,\,Z}"] \\
& & W \otimes ((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[dl, "\mathrm{Id}_Z \otimes a_{X,\,Y,\,Z}"] \\
& W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z)) &
\end{tikzcd}$$

モノイダル圏 $\mathcal{C}$ が**厳密** (strict) であるとは，$\forall X,\, Y,\, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$\begin{aligned}
&(X \otimes Y) \otimes Z = X \otimes (Y \otimes Z), \\
&I \otimes X = X, \quad X \otimes I = X
\end{aligned}$$

が成り立ち，かつ $a_{X,\,Y,\,Z}$, l_X, r_X が恒等射であることを言う．

定義 F.3 で言うモノイダル圏を，**弱いモノイダル圏** (weak monoidal category) と呼ぶこともある．

【例 F.2.1】Cat のモノイダル構造

Cat を小圏と関手が成す圏とする．このとき，関手

$$\times \colon \mathbf{Cat} \times \mathbf{Cat} \longrightarrow \mathbf{Cat}$$

を $\mathrm{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) := \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ により定めると，組み $(\mathbf{Cat},\, \times,\, I)$ は厳密なモノイダル圏になる．ただし I はただ 1 つの対象 $\bullet$ を持ち，$\mathrm{Hom}_I(\bullet,\, \bullet) = \{\mathrm{Id}_\bullet\}$ とする圏である[a]

[a] これは **Cat** の終対象でもある．

定義 F.4: 組紐付きモノイダル圏

組紐付きモノイダル圏 (braided monoidal category) とは，以下の 2 つからなる：

- モノイダル圏 $\mathcal{C}$
- **組紐** (braiding) と呼ばれる自然同型

$$\left\{b_{X,\,Y} \colon X \otimes Y \xrightarrow{\cong} Y \otimes X\right\}_{X,\,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは $\forall X,\, Y,\, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について以下の図式を可換にする：

(hexagon diagrams)

$$\begin{tikzcd}
X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "a^{-1}_{X,\,Y,\,Z}"] \arrow[d, "b_{X,\,Y \otimes Z}"] & (X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "b_{X,\,Y} \otimes \mathrm{Id}_Z"] & (Y \otimes X) \otimes Z \arrow[d, "a_{Y,\,X,\,Z}"] \\
(Y \otimes Z) \otimes X & Y \otimes (Z \otimes X) \arrow[l, "a^{-1}_{Y,\,Z,\,X}"] & Y \otimes (X \otimes Z) \arrow[l, "\mathrm{Id}_X \otimes b_{X,\,Z}"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "a_{X,\,Y,\,Z}"] \arrow[d, "b_{X \otimes Y,\,Z}"] & X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "\mathrm{Id}_X \otimes b_{Y,\,Z}"] & X \otimes (Z \otimes Y) \arrow[d, "a^{-1}_{X,\,Z,\,Y}"] \\
Z \otimes (X \otimes Y) & (Z \otimes X) \otimes Y \arrow[l, "a_{Z,\,X,\,Y}"] & (X \otimes Z) \otimes Y \arrow[l, "b_{X,\,Z} \otimes \mathrm{Id}_Y"]
\end{tikzcd}$$

組紐付きモノイダル圏 $\mathcal{C}$ であって，$\mathcal{C}$ の組紐が $b_{X,\,Y} = b^{-1}_{Y,\,X}$ を充たすもののことを**対称モノイダル圏** (symmetric monoidal category) と呼ぶ.

定義 F.5: 双対

モノイダル圏 $\mathcal{C}$ およびその任意の対象 $X,\, X^* \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を与える．X^* が X の**左双対** (left dual) であり，かつ X が X^* の**右双対** (right dual) であるとは,

- **coevaluation** と呼ばれる射

$$i_X \colon I \longrightarrow X \otimes X^*$$

- **evaluation** と呼ばれる射

$$e_X \colon X^* \otimes X \longrightarrow I$$

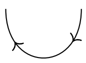
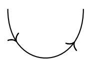
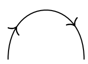
が存在して以下の図式を可換にすることを言う：

(zig-zag equations)

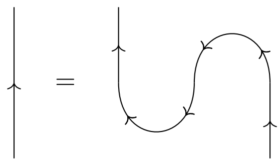
$$
\begin{tikzcd}
I \otimes X \arrow[r, "i_X \otimes \mathrm{Id}_X"] \arrow[dd, "r_X"'] & (X \otimes X^*) \otimes X \arrow[d, "a_{X,\, X^*,\, X}"] \\
 & X \otimes (X^* \otimes X) \arrow[d, "\mathrm{Id}_X \otimes e_X"] \\
X & X \otimes I \arrow[l, "r_X"]
\end{tikzcd}
$$

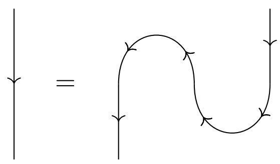
$$
\begin{tikzcd}
X^* \otimes I \arrow[r, "\mathrm{Id}_{X^*} \otimes i_X"] \arrow[dd, "l_{X^*}"'] & X^* \otimes (X \otimes X^*) \arrow[d, "a^{-1}_{X^*,\, X,\, X^*}"] \\
 & (X^* \otimes X) \otimes X^* \arrow[d, "e_X \otimes \mathrm{Id}_{X^*}"] \\
X^* & I \otimes X^* \arrow[l, "l_{X^*}"]
\end{tikzcd}
$$

ストリング図式で書くときは

$i_X :=$  $e_X :=$  $e_X^{-1} :=$  $i_X^{-1} :=$ 

とする．ストリング図式において **(zig-zag equations)** は





と書ける．

定義 F.6: rigid なモノイダル圏

モノイダル圏 $\mathcal{C}$ が **rigid** であるとは，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が左・右双対を持つことを言う．

これまでは圏 $\mathcal{C}$ の対象を大文字で書いてきたが，以下では文脈によっては小文字で書くことがある．

定義 F.7: モノイダル関手

2 つのモノイダル圏 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ の間の関手

$$F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

が**弱いモノイダル関手** (lax monoidal functor) であるとは,

- 射

$$\varepsilon\colon I_{\mathcal{D}} \longrightarrow F(I_{\mathcal{C}})$$

- 自然変換

$$\left\{\mu_{X,\,Y}\colon F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y) \longrightarrow F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y)\right\}_{X,\,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

があって, $\forall X,\,Y,\,Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して以下の図式が可換になること：

(associatibity)

$$\begin{tikzcd}
(F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y)) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z) \arrow[r, "a^{\mathcal{D}}_{F(X),\,F(Y),\,F(Z)}"'] \arrow[d, "\mu_{X,\,Y} \otimes \mathrm{Id}_{F(Z)}"'] & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} (F(Y) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z)) \arrow[d, "\mathrm{Id}_{F(X)} \otimes \mu_{Y,\,Z}"] \\
F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z) \arrow[d, "\mu_{X \otimes_{\mathcal{C}} Y,\,Z}"'] & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y \otimes_{\mathcal{C}} Z) \arrow[d, "\mu_{X,\,Y \otimes_{\mathcal{C}} Z}"] \\
F((X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{C}} Z) \arrow[r, "F(a^{\mathcal{C}}_{X,\,Y,\,Z})"'] & F(X \otimes_{\mathcal{C}} (Y \otimes_{\mathcal{C}} Z))
\end{tikzcd}$$

(unitality)

$$\begin{tikzcd}
I_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathcal{D}} F(X) \arrow[r, "\varepsilon \otimes \mathrm{Id}_{F(X)}"] \arrow[d, "l^{\mathcal{D}}_{F(X)}"'] & F(I_{\mathcal{C}}) \otimes_{\mathcal{D}} F(X) \arrow[d, "\mu_{I_{\mathcal{C}},\,X}"] \\
F(X) & F(I_{\mathcal{C}} \otimes_{\mathcal{C}} X) \arrow[l, "F(l^{\mathcal{C}}_X)"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F(X) \otimes_{\mathcal{D}} I_{\mathcal{D}} \arrow[r, "\mathrm{Id}_{F(X)} \otimes \varepsilon"] \arrow[d, "r^{\mathcal{D}}_{F(X)}"'] & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(I_{\mathcal{C}}) \arrow[d, "\mu_{X,\,I_{\mathcal{C}}}"] \\
F(X) & F(X \otimes_{\mathcal{C}} I_{\mathcal{C}}) \arrow[l, "F(r^{\mathcal{C}}_X)"]
\end{tikzcd}$$

- 弱いモノイダル関手 F の ε と $\mu_{X,Y}$ が全て同型射ならば, F は**強いモノイダル関手** (strong monoidal functor) と呼ばれる.
- 弱いモノイダル関手 F の ε と $\mu_{X,Y}$ が全て恒等射ならば, F は**厳密なモノイダル関手** (strict monoidal functor) と呼ばれる.

定義 F.8: モノイダル自然変換

2 つのモノイダル圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ の間の 2 つの弱いモノイダル関手 $\Big(F_i \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D},\, \varepsilon_i \colon I_{\mathcal{D}} \longrightarrow F(I_{\mathcal{C}}),\, \big\{\mu_{i\,X,\,Y} \colon F_i(X) \otimes F_i(Y) \longrightarrow F_i(X \otimes Y)\big\}_{X,\,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}\Big)$ w/ $i = 1, 2$ の間の自然変換

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F_1"] \arrow[r, bend right, "F_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\tau"] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}
$$

が**モノイダル自然変換** (monidal natural transformation) であるとは，$\forall X,\, Y \in \mathcal{C}$ に対して以下の図式が可換になること：

(テンソル積の保存)

$$
\begin{tikzcd}
F_1(X) \otimes_{\mathcal{D}} F_1(Y) \arrow[r, "\tau_X \otimes_{\mathcal{D}} \tau_Y"] \arrow[d, "\mu_{1\,X,Y}"'] & F_2(X) \otimes_{\mathcal{D}} F_2(Y) \arrow[d, "\mu_{2\,X,Y}"] \\
F_1(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \arrow[r, "\tau_{X \otimes_{\mathcal{C}} Y}"'] & F_2(X \otimes_{\mathcal{C}} Y)
\end{tikzcd}
$$

(単位対象の保存)

$$
\begin{tikzcd}
& I_{\mathcal{D}} \arrow[dl, "\varepsilon_1"'] \arrow[dr, "\varepsilon_2"] & \\
F_1(I_{\mathcal{C}}) \arrow[rr, "\tau_{I_{\mathcal{C}}}"'] & & F_2(I_{\mathcal{C}})
\end{tikzcd}
$$

F.3 フュージョン圏

定義 F.9: フュージョン圏

圏 $\mathcal{C}$ が**フュージョン圏** (fusion category) であるとは，

- $\mathcal{C}$ は半単純な $\mathbb{K}$-上のアーベル圏
- $\mathcal{C}$ は rigid なモノイダル圏
- $\mathcal{C}$ の単純対象の同型類が有限個
- 単位対象 $I \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(I,\, I) = \mathbb{K}$

が成り立つこと．

フュージョン圏 $\mathcal{C}$ が**組紐付きフュージョン圏** (braided fusion category) であるとは，$\mathcal{C}$ が組紐付きモノイダル圏でもあることを言う．

F.4　2-群

F.4.1　豊穣圏と 2-圏

まず，**厳密な 2-圏** (strict 2-category) を導入する．

定義 F.10: 豊穣圏

モノイダル圏 $(V,\otimes,I)$ を与える．
V-豊穣圏 (V-enriched category) $\mathcal{C}$ は，以下のデータからなる：

- 集合 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall x,y\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，**Hom 対象**と呼ばれる V の対象 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\,y)\in\mathrm{Ob}(V)$ を持つ
- $\forall x,y,\,z\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，**合成射**と呼ばれる V の射 $\circ_{x,\,y,\,z}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\,y)\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,\,z)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\,z)$ を持つ
- $\forall x\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，**恒等素**と呼ばれる V の射 $j_x\colon I\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\,x)$ を持つ

これらは以下の図式を可換にしなくてはいけない：

(associativity)

$\forall x,\,y,\,z,\,w\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について[a]

$$
\begin{tikzcd}
\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\,y)\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,\,z)\big)\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(z,\,w) \arrow[r, "\circ_{x,y,z}\otimes\mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(z,\,w)}"] \arrow[dd, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\,z)\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(z,\,w) \arrow[d, "\circ_{x,z,w}"] \\
 & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\,w) \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\,y)\otimes\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,\,z)\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(z,\,w)\big) \arrow[r, "\mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\,y)}\otimes\circ_{y,z,w}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\,y)\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,\,w) \arrow[u, "\circ_{x,y,w}"']
\end{tikzcd}
$$

(unitality)

$\forall x,\,y\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について[b]

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\,x)\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\,y) \arrow[r, "\circ_{x,x,y}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\,y) & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\,y)\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,\,y) \arrow[l, "\circ_{x,y,y}"'] \\
I\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\,y) \arrow[u, "j_x\otimes\mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\,y)}"] \arrow[ur, "\cong"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\,y)\otimes I \arrow[u, "\mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\,y)}\otimes j_y"'] \arrow[ul, "\cong"]
\end{tikzcd}
$$

[a] $\cong$ はモノイダル圏 V の associator
[b] $\cong$ はモノイダル圏 V の left/right unitor

定義 F.11: 豊穣関手

モノイダル圏 $(V, \otimes, I)$ を与える．
2 つの V-豊穣圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ の間の V**-豊穣関手** (V-enriched functor)

$$F \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

は，以下のデータからなる：

- 写像 $F_0 \colon \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathcal{D}),\ x \longmapsto F_0(x)$
- V の射の族

$$\left\{F_{x,y} \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F_0(x), F_0(y)\big)\right\}_{x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは以下の図式を可換にしなくてはいけない：

(enriched-1)

$\forall x, y, z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して[a]

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \arrow[r, "\circ_{x,y,z}"] \arrow[d, "F_{x,y} \otimes F_{y,z}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z) \arrow[d, "F_{x,z}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F_0(x), F_0(y)\big) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F_0(y), F_0(z)\big) \arrow[r, "\circ_{F_0(x), F_0(y), F_0(z)}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F_0(x), F_0(z)\big)
\end{tikzcd}$$

(enriched-2)

$\forall x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して[b]

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "j_x"] \arrow[dr, "j_{F_0(x)}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x) \arrow[d, "F_{x,x}"] \\
& \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F_0(x), F_0(x)\big)
\end{tikzcd}$$

[a] これは，通常の関手において射の合成が保存されることに対応する．
[b] これは，通常の関手において恒等射が保存されることに対応する．

与えられたモノイダル圏 V に対して，V**-豊穣圏のなす圏**を V-**Cat** と書く．V-**Cat** は

- V-豊穣圏を対象とする
- V-豊穣関手を射とする

ことで得られる圏である．

定義 F.12: 厳密な 2-圏

小圏と関手の圏 **Cat** を【例 **F.2.1**】の方法でモノイダル圏と見做す．**Cat**-豊穣圏のことを**厳密な 2-圏** (strict 2-category) と呼ぶ.

定義 F.12 を解読しよう．まず，小圏と関手の圏 **Cat** における対象とは小圏のことで，射とは関手のことである．さらに，**Cat** のテンソル積とは【**例 F.2.1**】より直積 $\times$ のことである．よって豊穣圏の定義から，厳密な 2-圏 $\mathcal{C}$ は

- **対象** (object)[*1] 全体の集合 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall x,\, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の間の **1-射** (1-morphism)[*2]全体が成す圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cat})$.
- **合成** (composition) と呼ばれる関手 $\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,\, z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, z)$
- **恒等素** (identity morphism) と呼ばれる関手 $j_x\colon 1 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, x)$

の 4 つのデータからなる．従って 1-射 $f\colon x \longrightarrow y$ とは圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)$ の対象 $f \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y))$ のことであるから，2 つの 1-射 $f,\, g \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y))$ が与えられると，圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)$ における，それらの間の射 $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)}(f,\, g)$ が存在する．このような α を **2-射** (2-morphism)[*3]と呼び，混乱防止のため $\alpha\colon f \longrightarrow g$ と書く代わりに $\boldsymbol{\alpha\colon f \Longrightarrow g}$ と書く．

2 つの 2-射 $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)}(f,\, g)$，$\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)}(g,\, h)$ は，圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)$ における射の合成 $*$ によって結合的かつ単位的に合成することができる：

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[rr, bend left=50, "f"] \arrow[rr, bend right=50, "h"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \beta * \alpha"] & & y
\end{tikzcd}
\quad \coloneqq \quad
\begin{tikzcd}
x \arrow[rr, bend left=60, "f"] \arrow[rr, "g" description] \arrow[rr, bend right=60, "h"'] \arrow[rr, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow \alpha"] \arrow[rr, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow \beta"] & & y
\end{tikzcd}
$$

このような 2-射の合成を**縦の合成** (vertical composition) と呼ぶ．一方，4 つの 1-射 $f,\, g\colon x \longrightarrow y$，$f',\, g'\colon y \longrightarrow z$ および 2 つの 2-射 $\alpha\colon f \Longrightarrow g$，$\alpha'\colon f' \Longrightarrow g'$ が与えられたとき，1-射の合成 $\circ$ が関手であることによって，圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,\, z)$ の射 $(\alpha,\, \alpha')\colon (f,\, f') \longrightarrow (g,\, g')$ に対して圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, z)$ の射，i.e. 2-射

$$
\alpha' \circ \alpha \coloneqq \circ(\alpha,\, \alpha')\colon f' \circ f \Longrightarrow g' \circ g
$$

が対応付く：

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[rr, bend left=50, "f' \circ f"] \arrow[rr, bend right=50, "g' \circ g"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \alpha' \circ \alpha"] & & z
\end{tikzcd}
\quad \coloneqq \quad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=50, "f"] \arrow[r, bend right=50, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & y \arrow[r, bend left=50, "f'"] \arrow[r, bend right=50, "g'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha'"] & z
\end{tikzcd}
$$

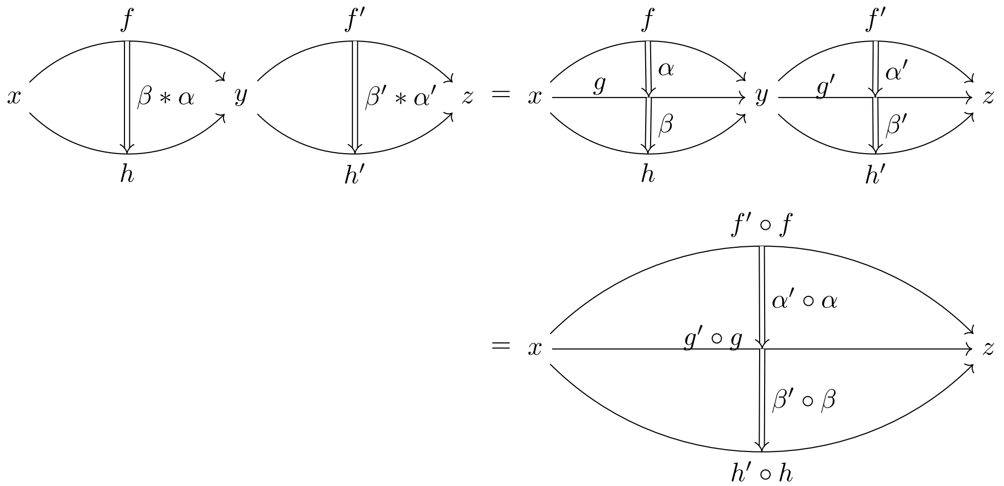
このような 2-射の合成を**横の合成** (horizontal composition) と呼ぶ．横の合成は，モノイダル圏 **Cat** が厳密なモノイダル圏であること，および関手 $\circ$ の **(associativity)**，**(unitality)** によって結合的かつ単位的になる．

[*1] **0-セル** (0-cell) とも言う
[*2] **1-セル** (1-cell) とも言う．正確には，圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)$ の対象のことを 1-射と呼ぶ．
[*3] **2-セル** (2-cell) とも言う

縦の合成と横の合成は，$\circ$ が関手であることによって交換する：

$$
\begin{aligned}
(\beta' * \alpha') \circ (\beta * \alpha) &= \circ\bigl((\beta,\, \beta') * (\alpha,\, \alpha')\bigr) \\
&= \bigl(\circ(\beta,\, \beta')\bigr) * \bigl(\circ(\alpha,\, \alpha')\bigr) \\
&= (\beta' \circ \beta) * (\alpha' \circ \alpha)
\end{aligned}
$$

図式で書くと一目瞭然である：



定義 F.13: 2-圏

厳密な 2-圏と同様の

- **対象** (object)[a] 全体の集合 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall x,\, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の間の **1-射** (1-morphism)[b]全体が成す圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, y) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cat})$.
- **合成** (composition) と呼ばれる関手 $\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(y,\, z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, z)$
- **恒等素** (identity morphism) と呼ばれる関手 $j_x\colon 1 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, x)$

の 4 つのデータに加えて

- $\forall x,\, y,\, z,\, w \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して **associator** と呼ばれる自然同型[c].

$$
\begin{tikzcd}
& \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(y,\, z\right) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(w,\, y\right) \arrow[dr, bend left, "\circ"] \arrow[dd, Rightarrow, "\alpha_{w,x,y,z}"] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(y,\, z\right) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(x,\, y\right) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(w,\, x\right) \arrow[ur, bend left, "\mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(y,\, z)}} \times \circ"] \arrow[dr, bend right, "\circ \times \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(w,\, x)}}"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(w,\, z\right) \\
& \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(x,\, z\right) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(w,\, x\right) \arrow[ur, bend right, "\circ"'] &
\end{tikzcd}
$$

- $\forall x,\, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して **left/right unitor** と呼ばれる自然同型

$$
\begin{aligned}
\lambda_{x,y} &\coloneqq \left\{ l_{x,y\,f} \colon f \longmapsto f \circ j_x(1) \right\}_{f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, y)} \\
\rho_{x,y} &\coloneqq \left\{ l_{x,y\,f} \colon f \longmapsto j_x(1) \circ f \right\}_{f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, y)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(x,\, y\right) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(x,\, x\right) \arrow[dr, bend left, "\circ"] \arrow[d, Rightarrow, "\lambda_{w,x,y,z}"] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(x,\, y\right) \arrow[ur, bend left, "\mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(x,\, y)}} \times j_x"] \arrow[rr, "\mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, y)}"] \arrow[dr, bend right, "j_y \times \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(x,\, y)}}"'] & {} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(x,\, y\right) \\
& \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(y,\, y\right) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(x,\, y\right) \arrow[ur, bend right, "\circ"'] \arrow[u, Rightarrow, "\rho_{w,x,y,z}"'] &
\end{tikzcd}
$$

を持ち，

- associator が **(pentagon identity)** を
- unitors が **(triangle identity)** を

充たす $\mathcal{C}$ のことを **2-圏** (2-category) と呼ぶ．

[a] **0-セル** (0-cell) とも言う

[b] **1-セル** (1-cell) とも言う．正確には，圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, y)$ の対象のことを 1-射と呼ぶ．

[c] これは圏 **Cat** における図式である．

要するに，厳密な 2-圏において合成 $\circ$ の associativity および unitality を自然同型まで弱めたものが 2-圏である．

【例 F.4.1】2-圏としてのモノイダル圏

モノイダル圏 $\left(\mathcal{C},\, \otimes,\, I,\, \{a_{x,y,z}\},\, \{l_x\},\, \{l_y\}\right)$ は 2-圏である．実際，2-圏 $\mathbf{B}\mathcal{C}$ を

- $\mathrm{Ob}(\mathbf{B}\mathcal{C}) \coloneqq \{\bullet\}$（1 点集合）
- $\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}\mathcal{C}}\,(\bullet,\, \bullet) \coloneqq \mathcal{C}$
- $\circ \coloneqq \otimes \colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$
- $j_x \coloneqq \iota_I \colon I \hookrightarrow \mathcal{C}$
- $\alpha_{\bullet,\bullet,\bullet} \coloneqq \{a_{x,y,z}\}$
- $\lambda_{\bullet,\bullet} \coloneqq \{l_{x,y,z}\}, \quad \rho_{\bullet,\bullet} \coloneqq \{r_{x,y,z}\}$

により定義すると $\mathcal{C} = \mathbf{B}\mathcal{C}$ となる．

F.4.2　弱い 2-群・コヒーレントな 2-群・厳密な 2-群

[52] に倣い **2-群** (2-group) を導入する．

定義 F.14: 弱い逆対象

モノイダル圏 $(\mathcal{C},\, \otimes,\, 1)$ の対象 $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を 1 つとる．

- 対象 $y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が x の**弱い逆対象** (weak inverse) であるとは，対象の同型の意味で[a] $x \otimes y \cong 1$ かつ $y \otimes x \cong 1$ が成り立つことを言う．
- x が**弱可逆** (weakly invertible) であるとは，x が弱い逆対象を持つことを言う．

[a] 自然同型ではない

定義 F.15: 弱い 2-群・コヒーレントな 2-群・厳密な 2-群

- **弱い 2-群** (weak 2-group) とは，モノイダル圏 $\mathcal{G}$ であって，任意の対象が弱可逆でかつ任意の射が同型射であるもののこと．
- **コヒーレントな 2-群** (coherent 2-group) とは，モノイダル圏 $\mathcal{G}$ であって，任意の対象 $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$ が可逆な unit，counit $(x,\, \bar{x},\, i_x,\, e_x)$ を持ち，かつ任意の射が同型射であるもののこと．
- **厳密な 2-群** (strict 2-group) とは，モノイダル圏 $\mathcal{G}$ であって，任意の対象が可逆[a]でかつ任意の射が同型射であるもののこと．

[a] $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $x^{-1} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が存在して，厳密に $x \otimes x^{-1} = 1$，$x^{-1} \otimes x = 1$ が成り立つ．

定義 F.16: 2-群の準同型

2-群 $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ の間の**準同型**とは，モノイダル関手 $f\colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ のこと．

定理 F.1: 弱い 2-群はコヒーレントな 2-群

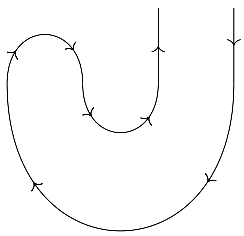
任意の弱い 2-群はコヒーレントな 2-群にすることができる．

証明 勝手な弱い 2-群 $\mathcal{G}$ を 1 つ固定する．このとき $\forall x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$ に対してある $\bar{x} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$ および同型射 $i'_x\colon 1 \longrightarrow x \otimes \bar{x}$, $e'_x\colon \bar{x} \otimes x \longrightarrow 1$ が存在する．

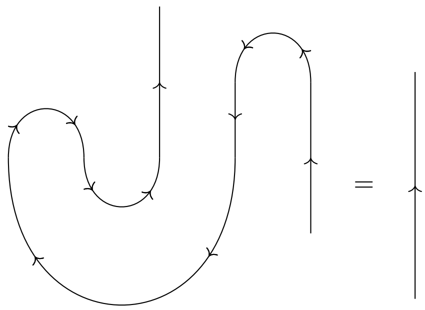
ここで $e_x \coloneqq e'_x$ とおき，

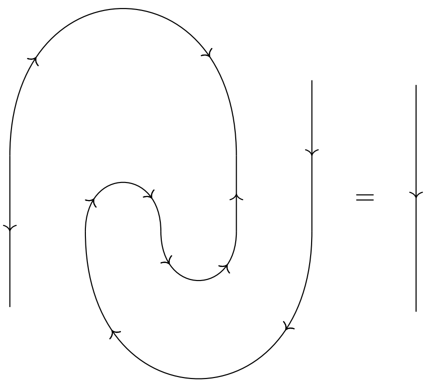
$$i_x \coloneqq (l_x \otimes \mathrm{Id}_{\bar{x}}) \circ a^{-1}_{1,x,\bar{x}} \circ ({i'_x}^{-1} \otimes \mathrm{Id}_{x\otimes\bar{x}}) \circ a^{-1}_{x,\bar{x},x\otimes\bar{x}} \circ (\mathrm{Id}_x \otimes a_{\bar{x},x,\bar{x}}) \circ (\mathrm{Id}_x \otimes {e'_x}^{-1} \otimes \mathrm{Id}_{\bar{x}}) \circ (\mathrm{Id}_x \otimes l^{-1}_{\bar{x}}) \circ i'_x$$

とおくと組 $(x, \bar{x}, i_x, e_x)$ が zig-zag equation を充たすことを示す．実際，i_x の定義をストリング図式で書くと

$i_x =$ 

となるから,





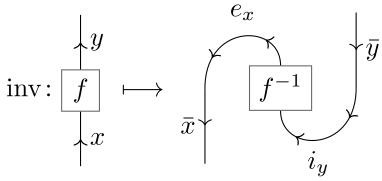
が言える. ■

定理 F.1 を踏まえ,以下ではコヒーレントな 2-群のことを単に **2-群** (2-group) と呼ぶ.

2-群 $\mathcal{G}$ において,弱い逆対象を対応づける関手

$$\mathrm{inv}\colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G},\ x \longmapsto \bar{x} \tag{F.4.1}$$

を考えたいが,射の対応は少々厄介である.[52, p.34] に倣うと



とすれば良いことがわかる[*4].

以上より,2-群 $\mathcal{G}$ を【例 **F.4.1**】により 2 圏 $\mathbf{B}\mathcal{G}$ の言葉で表現すると

- ただ 1 つの対象を持つ:$\mathrm{Ob}(\mathbf{B}\mathcal{G}) = \{\bullet\}$

[*4] 定義からコヒーレントな 2 群は rigid なモノイダル圏であり,zigzag identity を使えることが肝になる.

- 任意の 1-射 $x \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}\mathcal{G}}(\bullet, \bullet)) = \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$ が弱可逆であり，その弱い逆対象 $\bar{x}$ は関手 (F.4.1) によって与えられる．
- 任意の 2-射 $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}\mathcal{G}}(\bullet, \bullet)}(x, y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(x, y)$ が同型射

と言うことになる．特に厳密な 2-群とは，全ての $\alpha, \lambda, \rho, i, e$ が $\mathcal{G}$ の恒等射となっていることを言う．

F.4.3 交差加群との関係

定義 F.17: 交差加群

交差加群 (crossed module) とは，

- 群準同型 $G_2 \xrightarrow{t} G_1$
- G_1 の左作用 $\alpha\colon G_1 \longrightarrow \mathrm{Aut}(G_2)$

の組であって，以下の条件を満たすもののこと：

(cr-1) 以下の図式を可換にする：

$$\begin{tikzcd} G_2 \times G_2 \arrow[rr, "t \times \mathrm{Id}"] \arrow[dr, "\mathrm{Ad}"'] & & G_1 \times G_2 \arrow[dl, "\alpha"] \\ & G_2 & \end{tikzcd}$$

あるいは同じことだが，$\forall g_i \in G_i$ に対して

$$t\bigl(\alpha(g_1)(g_2)\bigr) = g_1 t(g_2) g_1^{-1}$$

を充たす．

(cr-2) 以下の図式を可換にする：

$$\begin{tikzcd} G_1 \times G_2 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{Id} \times t"'] & G_2 \arrow[d, "t"] \\ G_1 \times G_1 \arrow[r, "\mathrm{Ad}"'] & G_1 \end{tikzcd}$$

あるいは同じことだが，$\forall g_2, g_2' \in G_2$ に対して

$$\alpha\bigl(t(g_2)\bigr)\bigl(g_2'\bigr) = g_2 g_2' g_2^{-1}$$

を充たす (**Peiffer identity**)．

命題 F.1: 交差加群と厳密な 2-群

(1) 交差加群 $(G_2 \xrightarrow{t} G_1,\ \alpha)$ が与えられたとする．このとき

- 1-射の集合 $\mathcal{G}_0 \coloneqq G_1$
- 2-射の集合 $\mathcal{G}_1 \coloneqq G_1 \ltimes_\alpha G_2$（外部半直積）
- 始点射 $\sigma\colon \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_0,\ (g_1,\ g_2) \longrightarrow g_1$
- 終点射 $\tau\colon \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_0,\ (g_1,\ g_2) \longrightarrow t(g_2)g_1$
- 恒等素 $j\colon \mathcal{G}_0 \longrightarrow \mathcal{G}_1,\ g_1 \longrightarrow (g_1,\ 1_{G_2})$
- 2-射の合成 $\circ\colon \mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_1,\ \big((g_1,\ g_2),\ (g_1',\ g_2')\big) \longmapsto (g_1,\ g_2 g_2')$

とおくと，圏 $\mathcal{G}$ は厳密な 2-群になる．

(2) 逆に厳密な 2-群 $\mathcal{G}$ が与えられたとき，

- $G_1 \coloneqq \mathcal{G}_0$
- $G_2 \coloneqq \operatorname{Ker}\sigma \subset \mathcal{G}_1$
- $t \coloneqq \tau|_{G_2}\colon G_2 \longrightarrow G_1$
- $\alpha\colon G_1 \longrightarrow \operatorname{Aut}(G_2),\ g_1 \longmapsto \big(g_2 \longmapsto j(g_1)g_2 j(g_1)^{-1}\big)$

とおくことで交差加群 $(G_2 \xrightarrow{t} G_1,\ \alpha)$ が得られる．

<u>証明</u>　(1)

■

F.5 3-群

F.5.1 3-圏

一般の 3-圏は associator, unitors のせいで扱いが難しいので，まずは**厳密な 3-圏** (strict 3-group) を考える．**Cat** を【例 **F.2.1**】の方法でモノイダル圏と見做す．定義 F.12 から，2-圏としての同値

$$\mathbf{Str2Cat} \cong \mathbf{Cat}\text{-}\mathbf{Cat}$$

が成り立つ．さらに **Cat-Cat** は直積に関してモノイダル圏になる．

定義 F.18: 厳密な 3-圏

厳密な 2-圏が成す 2-圏 **Cat-Cat** をモノイダル圏と見做す．このとき **Cat-Cat-豊穣圏**のことを**厳密な 3-圏** (strict 3-category) と呼ぶ．

F.5.2 2-crossed module と厳密な 3-群

定義 F.19: 厳密な 3-群

厳密な 3-圏 $\mathcal{G}$ であって，ただ 1 つの対象を持ち，1-射，2-射，3-射が厳密に可逆であるものを**厳密な 3-群** (strict 3-category) と呼ぶ．

定義 F.20: 2-交差加群

2-交差加群 (2-crossed module) とは，以下のデータからなる：

- 群の正規複体 $G_3 \xrightarrow{\partial_2} G_2 \xrightarrow{\partial_1} G_1$
- 群の左作用 $\alpha_1 \colon G_1 \longrightarrow \mathrm{Aut}(G_2)$, $\alpha_2 \colon G_1 \longrightarrow \mathrm{Aut}(G_3)$
- **Peiffer lifting** と呼ばれる写像 $\{\text{-}, \text{-}\} \colon G_2 \times G_2 \longrightarrow G_3$

これらは以下の条件を充たす：

(2CM1) ∂_1, ∂_2 は G_1-同変

(2CM2) $\forall g_2,\ h_2 \in G_2$ に対して

$$\partial_2\{g_2, h_2\} = \alpha_1(g_2)(h_2) g_2 h_2^{-1} g_2^{-1}$$

(2CM3) $\forall g_3,\ h_3 \in G_3$ に対して

$$\{\partial_2 g_3, \partial_2 h_3\} = [h_3, g_3]$$

(2CM4) $\forall g_2 \in G_2,\ g_3 \in G_3$ に対して

$$\{g_2, \partial_2 g_3\}\{\partial_2 g_3, g_2\} = \alpha_2\bigl(\partial_1(g_2)\bigr)(g_3) g_3^{-1}$$

(2CM5) $\forall g_2,\ h_2,\ k_2 \in G_2$ に対して

$$\{g_2, h_2 k_2\} = \{g_2, h_2\}\bigl\{\partial_2\{g_2, k_2\}, g_2 h_2 g_2^{-1}\bigr\}\{g_2, k_2\}$$
$$\{g_2 h_2, k_2\} = \alpha_2\bigl(\partial_1(g_2)\bigr)\bigl(\{h_2, k_2\}\bigr)\bigl\{g_2, h_2 k_2 h_2^{-1}\bigr\}$$

(2CM6) $\forall g_1 \in G_1,\ \forall g_2,\ h_2 \in G_2$ に対して

$$\alpha_2(g_1)(\{g_2, h_2\}) = \{\alpha_1(g_1)(g_2), \alpha_1(g_1)(h_2)\}$$

参考文献

[1] S. Simon, Topological quantum: Lecture notes and proto-book, 2021, Available at http://www-thphys.physics.ox.ac.uk/people/SteveSimon/topological2021/TopoBook-Sep28-2021.pdf.

[2] 中原幹夫 and 佐久間一浩, 理論物理学のための幾何学とトポロジー I 原著第 2 版 (日本評論社, 2018).

[3] E. Fadell and J. Van Buskirk, Bull. Amer. Math. Soc **67**, 211 (1961).

[4] H. Halvorson and M. Mueger, arXiv e-prints , math (2006), [math-ph/0602036].

[5] Y. Aharonov and A. Casher, Phys. Rev. Lett. **53**, 319 (1984).

[6] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds* (Springer, 2012).

[7] 今野宏, **微分幾何学** (東京大学出版会, 2013).

[8] L. W. Tu, *Differential geometry: connections, curvature, and characteristic classes* (Springer, 2017).

[9] 中原幹夫, 久木田真吾, 佐久間一浩, and 綿村尚毅, **理論物理学のための幾何学とトポロジー** II 原著第 2 版 (日本評論社, 2021).

[10] J. Baez and M. Stay, *Physics, topology, logic and computation: a Rosetta Stone* (Springer, 2011).

[11] S. O. Kochman, *Bordism, stable homotopy and Adams spectral sequences* (American Mathematical Soc., 1996).

[12] M. F. Atiyah, Publications Mathématiques de l'IHÉS **68**, 175 (1988).

[13] 日高義将, 高次対称性入門, 2022, Available at https://ribf.riken.jp/~hidaka/yh/slide/hidaka_higher_form.pdf.

[14] D. Gaiotto, A. Kapustin, N. Seiberg, and B. Willett, Journal of High Energy Physics **2015**, 172 (2015), [1412.5148].

[15] L. I. Nicolaescu, Lectures on the geometry of manifolds, 2022, Available at https://www3.nd.edu/~lnicolae/Lectures.pdf.

[16] 九後汰一郎, **ゲージ場の量子論** II (, 1989).

[17] E. Fabri and L. E. Picasso, Phys. Rev. Lett. **16**, 408 (1966).

[18] H. Nielsen and S. Chadha, Nuclear Physics B **105**, 445 (1976).

[19] H. Watanabe and H. Murayama, Physical Review Letters **108**, 251602 (2012), [1203.0609].

[20] E. Lake, arXiv e-prints , arXiv:1802.07747 (2018), [1802.07747].

[21] 藤川和男, **経路積分と対称性の量子的破れ** (岩波書店, 2001).

[22] 川平将志, アノマリーの数学的基礎から現象論的応用まで, 2024, Available at https://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~soken.editorial/author.html?author=%E5%B7%9D%E5%B9%B3%20%E5%B0%86%E5%BF%97.

[23] X. Dai and D. S. Freed, Journal of Mathematical Physics **35**, 5155â 5194 (1994).
[24] D. S. Freed and M. J. Hopkins, Geometry; Topology **25**, 1165â 1330 (2021).
[25] R. Dijkgraaf and E. Witten, Commun. Math. Phys. **129**, 393 (1990).
[26] D. Husemöller, *Fibre bundles* (Springer-Verlag, 1994).
[27] N. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles. (PMS-14), Volume 14* (Princeton University Press, Princeton, 1951), https://doi.org/10.1515/9781400883875.
[28] J. C. Baez, connections as functors, Available at https://math.ucr.edu/home/baez/qg-fall2004/connection.pdf.
[29] J. W. Barrett, International journal of theoretical physics **30**, 1171 (1991).
[30] J. Simons and D. Sullivan, Journal of Topology **1**, 45â 56 (2007).
[31] D. S. Freed and F. Quinn, Communications in Mathematical Physics **156**, 435â 472 (1993), [hep-th/9111004].
[32] T. Banks and N. Seiberg, Physical Review D **83**, 084019 (2011), [1011.5120].
[33] A. Kapustin and N. Seiberg, Journal of High Energy Physics **2014**, 1 (2014), [1401.0740].
[34] L. Alfonsi, (2023), [2312.07308].
[35] S. Chen, arXiv e-prints , arXiv:2404.18921 (2024), [2404.18921].
[36] A. Kapustin and R. Thorngren, arXiv e-prints , arXiv:1309.4721 (2013), [1309.4721].
[37] J. C. Baez and U. Schreiber, arXiv Mathematics e-prints , math/0511710 (2005), [math/0511710].
[38] Y. Tachikawa, arXiv e-prints , arXiv:1712.09542 (2017), [1712.09542].
[39] X. Chen, Z.-C. Gu, and X.-G. Wen, Phys. Rev. B **82**, 155138 (2010), [1004.3835].
[40] C. Zhaoxi Xiong, arXiv e-prints , arXiv:1906.02892 (2019), [1906.02892].
[41] X.-G. Wen, Phys. Rev. B **89**, 035147 (2014), [1301.7675].
[42] X. Chen, Z.-C. Gu, Z.-X. Liu, and X.-G. Wen, Phys. Rev. B **87**, 155114 (2013), [1106.4772].
[43] A. Kapustin, arXiv e-prints , arXiv:1403.1467 (2014), [1403.1467].
[44] 志甫淳, **層とホモロジー代数** (共立出版, 2016).
[45] M. Bauer, G. Girardi, R. Stora, and F. Thuillier, Journal of High Energy Physics **2005**, 027 (2005), [hep-th/0406221].
[46] M. Land, *introduction to Infinity-Categories* (Springer International Publishing, 2021), https://doi.org/10.1007/978-3-030-61524-6_1.
[47] J. Lurie, https://kerodon.net/.
[48] J. Lurie, (2008), [math/0608040].
[49] P. G. Goerss and J. F. Jardine, *Simplicial homotopy theory* (Springer Science & Business Media, 2009).
[50] nLab, https://ncatlab.org/nlab/show/HomePage.
[51] T. Nikolaus, U. Schreiber, and D. Stevenson, arXiv e-prints , arXiv:1207.0248 (2012), [1207.0248].
[52] J. C. Baez and A. D. Lauda, (2004), [math/0307200].