# 第1章



この付録では、[?]、[?] に従って  $\infty$ -圏 $^{*1}$ 、および主  $\infty$ -束を導入する.

## 1.1 圏論の復習

## 1.1.1 圏と関手

#### 定義 1.1: 圏

圏 (category) C とは、以下の 4 種類のデータからなる:

• 対象 (object) と呼ばれる要素の集まり<sup>a</sup>

 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 

•  $\forall A, B \in Ob(\mathcal{C})$  に対して、A から B への $\mathbf{h}$  (morphism) と呼ばれる要素の集合

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$$

•  $\forall A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$  に対して、 $A \perp \mathcal{O}$  恒等射 (identity morphism) と呼ばれる射

$$\mathbf{Id}_{A} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$$

•  $\forall A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$  と  $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B), \forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$  に対して、f と g の合成 (composite) と呼ばれる射  $g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$  を対応させる集合の写像

$$\circ \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(A,\,B\right) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(B,\,C\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(A,\,C\right),\; (f,\,g) \longmapsto g \circ f$$

これらの構成要素は、次の2条件を満たさねばならない:

(1) (unitality): 任意の射  $f: A \longrightarrow B$  に対して

$$f \circ \operatorname{Id}_A = f$$
,  $\operatorname{Id}_B \circ f = f$ 

が成り立つ.

<sup>\*1 [?]</sup> 

(2) (associativity): 任意の射  $f: A \longrightarrow B, g: B \longrightarrow C, h: C \longrightarrow D$  に対して

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

が成り立つ.

a Ob(C) は、集合論では扱えないほど大きなものになっても良い.

### 定義 1.2: モノ・エピ・同型射

**圏** *C* を与える.

• 射  $f: A \longrightarrow B$  がモノ射 (monomorphism) であるとは、 $\forall X \in Ob(\mathcal{C})$  に対して写像

$$f_* \colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, B),$$
  
 $g \longmapsto f \circ g$ 

が集合の写像として単射であること.

• 射  $f: A \longrightarrow B$  が**エピ射** (epimorphism) であるとは、 $\forall X \in Ob(\mathcal{C})$  に対して写像

$$f^* \colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X),$$
  
 $g \longmapsto g \circ f$ 

が集合の写像として単射であること.

- 射  $f: A \longrightarrow B$  が同型射 (isomorphism) であるとは、射  $g: B \longrightarrow A$  が存在して  $g \circ f = \mathrm{Id}_A$  かつ  $f \circ g = \mathrm{Id}_B$  を充たすこと.このとき f と g は互いの逆射 (inverse) であると言い、 $g = \mathbf{f}^{-1}$ 、 $f = \mathbf{g}^{-1}$  と書く $^a$ .
- $A, B \in Ob(\mathcal{C})$  の間に同型射が存在するとき、対象  $A \ge B$  は同型 (isomorphic) であると言い、 $A \cong B$  と書く.

*a* 逆射は存在すれば一意である.

#### 定義 1.3: 関手

圏 C, D を与える. 圏 C から圏 D への関手 F とは、以下の 2 つの対応からなる:

- 圏  $\mathcal C$  における任意の対象  $X\in \mathrm{Ob}(\mathcal C)$  に対して、圏  $\mathcal D$  における対象  $F(X)\in \mathrm{Ob}(\mathcal D)$  を対応づける
- 圏  $\mathcal C$  における任意の射  $f\colon X\longrightarrow Y$  に対して、圏  $\mathcal D$  における射  $F(f)\colon F(X)\longrightarrow F(Y)$  を対応づける

これらの対応は以下の条件を充たさねばならない:

(fun-1) 圏 C における任意の射  $f: X \longrightarrow Y, g: Y \longrightarrow Z$  に対して,

$$F(g \circ f) \longrightarrow F(g) \circ F(f)$$

(fun-2) 圏  $\mathcal{C}$  における任意の対象  $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$  に対して、

$$F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$$

文脈上明らかなときは、圏 C から圏 D への関手 F のことを関手  $F: C \longrightarrow D$  と略記する.

#### 定義 1.4: 忠実・充満・本質的全射

関手  $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  を与える.

• F が忠実 (faithful) であるとは,  $\forall X, Y \in Ob(\mathcal{C})$  に対して写像

$$F: \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)), f \longmapsto F(f)$$

が単射であること.

• F が充満 (full) であるとは,  $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$  に対して写像

$$F: \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)), f \longmapsto F(f)$$

が全射であること.

• F が本質的全射 (essentially surjective) であるとは,  $\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$  に対して  $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$  が存在して F(X) が Y と同型になること.

忠実充満関手のことを**埋め込み**と呼ぶことがある.

## 定義 1.5: 自然変換

2 つの関手  $F,G:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$  を与える. F,G の間の自然変換 (natural transformation)  $\tau\colon F\Longrightarrow G$  とは、以下の対応からなる:

• 圏  $\mathcal C$  における任意の対象  $X\in \mathrm{Ob}(\mathcal C)$  に対して、圏  $\mathcal D$  における射  $\tau_X\colon F(X)\longrightarrow G(X)$  を対応づける

この対応は以下の条件を充たさねばならない:

(nat) 圏 C における任意の射  $f: X \longrightarrow Y$  に対して、以下の図式を可換にする:

$$F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y)$$

$$\downarrow^{\tau_X} \qquad \qquad \downarrow^{\tau_Y}$$

$$G(X) \xrightarrow{G(f)} G(Y)$$

自然変換  $\tau: F \Longrightarrow G$  であって、 $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$  に対して射  $\tau_X: F(X) \longrightarrow G(X)$  が同型射であるもののことを**自然同値** (natural equivalence) と呼ぶ.

自然変換  $\tau: F \Longrightarrow G$  を



と書くことがある.

## 1.1.2 極限と余極限

#### 定義 1.6: 図式

圏 C と小圏 I (**添字圏**と呼ばれる)を与える.

C における I 型の図式 (diagram of shape I) とは、関手

$$I \longrightarrow \mathcal{C}$$

のこと.

## 定義 1.7: 錐の圏

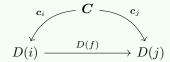
 $D: \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$  を図式とする.

- D 上の錐 (cone) とは,
  - $\mathcal{C}$  の対象  $\mathbf{C} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$

 $-\mathcal{C}$  の射の族  $\boldsymbol{c}_{ullet} \coloneqq \left\{ \boldsymbol{c}_i \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}} \left( \boldsymbol{C}, D(i) \right) \right\}_{i \in \operatorname{Ob}(\mathcal{I})}$ の組  $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{c}_{ullet})$  であって、 $orall i, j \in \operatorname{Ob}(\mathcal{I})$  および  $orall f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{I}}(i, j)$  に対して

$$c_j = c_i \circ D(f)$$

を充たす, i.e. 以下の図式を可換にするもののこと.



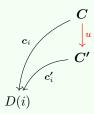
• 錐の射 (morphism of cones)

$$(C, c_{\bullet}) \xrightarrow{u} (C', c'_{\bullet})$$

とは、 $\mathcal{C}$  の射  $\mathbf{u} \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{C}, \mathbf{C'})$  であって、 $\forall i \in \operatorname{Ob}(\mathcal{I})$  に対して

$$oldsymbol{c}_i = oldsymbol{u} \circ oldsymbol{c}_i'$$

を充たす, i.e. 以下の図式を可換にするもののこと.



D 上の錐と錐の射を全て集めたものは圏  $\mathbf{Cone}(D)$  を成す.

## 定義 1.8: 極限

図式  $D: \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$  の極限 (limit)  ${}^a$ とは、圏  $\mathbf{Cone}(D)$  の終対象のこと、記号として ( $\mathbf{lim}_{\mathcal{I}} D, p_{\bullet}$ ) と 書く ${}^b$ . i.e. 極限 ( $\mathbf{lim}_{\mathcal{I}} D, p_{\bullet}$ )  $\in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cone}(D))$  は、以下の普遍性を充たす:

## (極限の普遍性)

 $\forall (C, c_{\bullet}) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cone}(D))$  に対して、錐の射  $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cone}(D)}\left((C, c_{\bullet}), \left(\lim_{\mathcal{I}} D, p_{\bullet}\right)\right)$  が一意的に存在して、 $\forall i, j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$  および  $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}\left(i, j\right)$  に対して図式を可換にする.



図 1.1: 極限の普遍性

#### 定義 1.9: 余錐の圏

 $D: \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$  を図式とする.

- *D* 上の余錐 (cocone) とは,
  - C の対象  $C \in Ob(C)$
  - C の射の族  $oldsymbol{c_{ullet}} \coloneqq \left\{ oldsymbol{c}_i \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}} \left( D(i), \, oldsymbol{C} 
    ight) 
    ight\}_{i \in \operatorname{Ob}(\mathcal{I})}$

の組  $(C, c_{\bullet})$  であって、 $\forall i, j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$  および  $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i, j)$  に対して

$$c_i = D(f) \circ c_j$$

を充たす, i.e. 以下の図式を可換にするもののこと.



• 余錐の射 (morphism of cocones)

$$(C, c_{ullet}) \xrightarrow{u} (C', c'_{ullet})$$

とは、 $\mathcal{C}$  の射  $\mathbf{u} \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{C}, \mathbf{C'})$  であって、 $\forall i \in \operatorname{Ob}(\mathcal{I})$  に対して

$$c_i' = \mathbf{u} \circ \mathbf{c}_i$$

を充たす, i.e. 以下の図式を可換にするもののこと.



D 上の余錐と余錐の射を全て集めたものは圏  $\mathbf{Cone}(D)$  を成す.

<sup>&</sup>lt;sup>a</sup> 普遍錐 (universal cone) とも言う.

 $<sup>^</sup>b$   $\lim D$  と書くこともある.

#### 定義 1.10: 余極限

図式  $D: \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$  の余極限  $(\operatorname{colimit})^a$ とは、圏  $\operatorname{coCone}(D)$  の始対象のこと. 記号として  $(\operatorname{colim}_{\mathcal{I}}D, p_{\bullet})$  と書く $^b$ . i.e. 余極限  $(\operatorname{colim}_{\mathcal{I}}D, p_{\bullet}) \in \operatorname{Ob}(\operatorname{coCone}(D))$  は、以下の普遍性を充たす:

#### (余極限の普遍性)

 $\forall (C, c_{\bullet})$   $\in$   $Ob(\mathbf{coCone}(D))$  に対して、余錐の射 u  $\in$   $Hom_{\mathbf{coCone}(D)}\left(\left(\mathbf{colim}_{\mathcal{I}}D, p_{\bullet}\right), (C, c_{\bullet})\right)$  が一意的に存在して、 $\forall i, j \in Ob(\mathcal{I})$  および  $\forall f \in Hom_{\mathcal{I}}(i, j)$  に対して図式を可換にする.

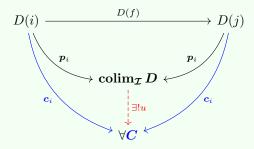


図 1.2: 余極限の普遍性

## 定義 1.11: 完備な圏

圏  $\mathcal{C}$  が完備 (resp. 余完備) (complete resp. cocomplete) であるとは、 $\mathcal{C}$  における任意の図式が極限 (resp. 余極限) を持つことを言う。完備かつ余完備な圏は双完備 (bicomplete) であると言われる。

Sets は双完備である.

#### 命題 1.1: 極限と Hom の交換

圏 C の図式  $D: I \longrightarrow C$  を与える.

(1) 圏  $\mathcal C$  は完備であるとする. このとき  $\forall X\in \mathrm{Ob}(\mathcal C)$  に対して、集合  $\mathrm{Hom}_{\mathcal C}\left(X,\lim_I D\right)\in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$  は  $\mathbf{Sets}$  の図式

$$I \xrightarrow{D} \mathcal{C} \xrightarrow{\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)} \mathbf{Sets}$$
 (1.1.1)

の極限である. i.e. 全単射

$$\lim_{i \in I} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}} \left( X, \, D(i) \right) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}} \left( X, \, \lim_{I} D \right)$$

が存在する.

(2) 圏  $\mathcal{C}$  は余完備であるとする. このとき  $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$  に対して、集合  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\mathrm{colim}_{I}\ D,\ X\right)$   $\in$ 

<sup>&</sup>lt;sup>a</sup> 普遍余錐 (universal cocone) とも言う.

 $<sup>^</sup>b \lim D$  と書くこともある.

Ob(Sets) は Sets の図式

$$I \xrightarrow{D} \mathcal{C} \xrightarrow{\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X)} \mathbf{Sets}$$

の余極限である. i.e. 全単射

$$\lim_{i \in I} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}} \left( D(i), \, X \right) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}} \left( \operatorname{colim}_{I}, \, X \right)$$

が存在する.

#### 証明 (1) C が完備なので、図式 $D: I \longrightarrow C$ の極限

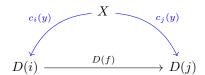


が存在する\*2. 示すべきは Sets の図式



が極限の普遍性を充たすことである\*3.

Sets の図式 (1.1.1) の錐  $(Y, c_{\bullet})$  を任意にとる.すると錐の定義および  $(-)_*$  の定義から, $\forall y \in Y$  に対して以下の図式が可換になる:



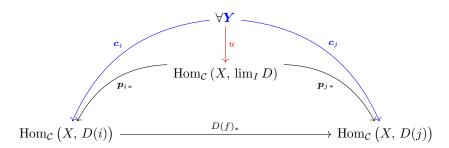
i.e. 組  $(X, c_{\bullet}(y))$  は  $\mathcal C$  の図式  $D: I \longrightarrow \mathcal C$  の錐であるから,錐の射  $u_y: X \longrightarrow \lim_I D$  が一意的に存在する.ここで写像

$$u: Y \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \lim_{I} D), \ y \longmapsto u_{y}$$

を考えると、これは  $\forall y \in Y$  に対して  $p_{\bullet *} \circ \mathbf{u}(y) = p_{\bullet} \circ u_y = c_{\bullet}(y)$  を充たす. i.e. **Sets** の図式

 $<sup>^{*2}</sup>$   $i, j \in \mathrm{Ob}(I)$  および  $f_{ij} \in \mathrm{Hom}_{I}\left(i, j\right)$  は任意にとる.

<sup>\*3</sup>  $p_{i*}$ :  $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \lim_{I} D) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, D(i)) f \longmapsto p_{i} \circ f$  などと定義する. このように射に下付きの \* を書いた時は post-compose を表す. 上付きの \* は pre-compose である.

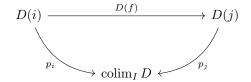


を可換にする.  $u_y$  の定義からこのような u は一意であるから, 図式 (1.1.1) の錐  $(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \lim_I D), p_{\bullet *})$ が極限の普遍性を充たすことが分かった. 極限の一意性より

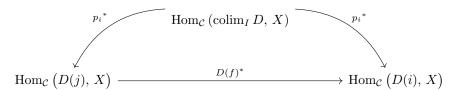
$$\lim_{i \in I} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X,\, D(i)\right) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X,\, \lim_{I} D\right)$$

でなくてはいけない.

(2) C が余完備なので、図式  $D: I \longrightarrow C$  の余極限



が存在する\*4. 示すべきは Sets の図式



が極限の普遍性を充たすことだが、以降の議論は(1)と同様である.

#### 1.1.3 米田埋め込み

## 定義 1.12: 前層

圏 C 上の圏 S に値をとる前層とは、関手

$$P \colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}$$

のこと.

前層の圏 PSh(C, S) \*5とは,

• 前層  $P: \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}$  を対象とする

 $<sup>^{*4}</sup>$   $i,j \in \mathrm{Ob}(I)$  および  $f_{ij} \in \mathrm{Hom}_I$  (i,j) は任意にとる。  $^{*5}$   $[\mathcal{C}^\mathrm{op},\mathcal{S}]$  や  $\mathcal{S}^{\mathcal{C}^\mathrm{op}}$  と書くこともある.なお,付録 A で登場したものはこれの一例である.

• 前層  $P, Q: \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}$  の間の自然変換  $\tau: P \Longrightarrow Q$  を射とする

として構成される圏のこと\*6.

#### 定義 1.13: 表現可能前層・米田埋め込み

圏 C を与える.

•  $\forall X \in Ob(C)$  に対して、以下で定義する前層

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\left({ ext{--}},X
ight){:}\ {\mathcal{C}}^{\operatorname{op}}\longrightarrow\operatorname{\mathbf{Sets}}$$

のことを表現可能前層 (representable presheaf) と呼ぶ:

 $- \forall Y \in Ob(\mathcal{C}^{op})$  に対して

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)(Y) := \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \in \operatorname{Ob}(\mathbf{Sets})$$

を対応づける

 $- \mathcal{C}^{\text{op}}$  における任意の射  $g: Y \longrightarrow Z^a$  に対して,

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)(g) \coloneqq g^* \colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X),$$
  
$$h \longmapsto h \circ g$$

を対応付ける

• 米田埋め込み (Yoneda embedding) とは、以下で定義する関手

$$Y\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{PSh}\left(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets}\right)$$

のこと:

- $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$  に対して表現可能前層  $\mathrm{Y}(X) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(-,X\right) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{PSh}\left(\mathcal{C},\mathbf{Sets}\right))$  を対応付ける
- C における任意の射  $f\colon X\longrightarrow Y$  に対して、以下で定義される自然変換  $Y(f)\colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}({\,\text{--}\,},X)\Longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}({\,\text{--}\,},Y)$  を対応付ける:
  - \*  $\forall Z \in \text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}})$  に対して、圏 **Sets** における射

$$Y(f)_Z := f_* : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y),$$
  
 $q \longmapsto f \circ q$ 

を対応付ける.

 $^a$  つまり,これは  $\mathcal C$  における射  $g\colon Z\longrightarrow Y$  である.

<sup>\*6</sup>  $\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\mathcal{S})$  の恒等射は  $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^\mathrm{op})$  に対して  $\mathrm{Id}_X \colon X \longrightarrow X$  を対応づける自然変換である.

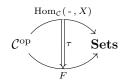
#### 補題 1.1: 米田の補題

前層  $F: \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$  および圏  $\mathcal{C}$  の対象  $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$  を与える. このとき, 写像

$$\operatorname{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets})} \left( \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}} \left( -, X \right), F \right) \longrightarrow F(X),$$
  
 $\tau \longmapsto \tau_X(\operatorname{Id}_X)$ 

は全単射である.

米田の補題の主張は少し込み入っているが、次のように考えれば良い:  $\tau \in \operatorname{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})}$  ( $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\,{\text{--}},\,X)$ ) とは自然変換



のことであるから、表現可能前層の定義より  $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$  に対して圏 **Sets** における射(i.e. 写像)  $\tau_X \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X) \longrightarrow F(X)$  が定まる。圏の定義より集合  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$  には必ず恒等射という元  $\mathrm{Id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$  が含まれるので、それを写像  $\tau_X$  で送った先は  $\tau_X(\mathrm{Id}_X) \in F(X)$  として well-defined である.

#### 証明 写像

$$\eta \colon F(X) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\operatorname{PSh}(\mathcal{C}, \operatorname{\mathbf{Sets}})} \left( \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}} \left( \operatorname{-}, X \right), F \right),$$

$$s \longmapsto \left\{ \eta(s)_Y \colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}} \left( Y, X \right) \longrightarrow F(Y), \ f \longmapsto F(f)(s) \right\}_{Y \in \operatorname{Oh}(\mathcal{C})}$$

を考える.  $\forall s \in F(X)$  を 1 つ固定する. このとき圏  $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$  における任意の射  $Y \longleftarrow Z$ : f および  $\forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,X)$  に対して

$$\eta(s)_{Y} \circ \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, X)(f)(g) = \eta(s)_{Y}(g \circ f)$$

$$= F(g \circ f)(s)$$

$$= F(f) \circ F(g)(s)$$

$$= F(f) \circ \eta(s)_{Z}(g)$$

が言える. i.e.  $\eta(s)$  は自然変換であり、 $\eta$  は well-defined である.

ところで、 $\forall \tau \in \operatorname{Hom}_{\operatorname{PSh}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets})} \left( \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}} \left( -, X \right), F \right)$  に対して

$$\begin{split} \eta(\tau_X(\operatorname{Id}_X)) &= \big\{ \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\,X) \longrightarrow F(Y), \ f \longmapsto F(f) \big(\tau_X(\operatorname{Id}_X)\big) \big\}_{Y \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})} \\ &= \big\{ \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\,X) \longrightarrow F(Y), \ f \longmapsto F(f) \circ \tau_X(\operatorname{Id}_X) \big\}_{Y \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})} \\ &= \big\{ \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\,X) \longrightarrow F(Y), \ f \longmapsto \tau_Y \circ \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\,\cdot\,,\,X)(f)(\operatorname{Id}_X) \big\}_{Y \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})} \\ &= \big\{ \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\,X) \longrightarrow F(Y), \ f \longmapsto \tau_Y(f \circ \operatorname{Id}_X) \big\}_{Y \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})} \\ &= \big\{ \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\,X) \longrightarrow F(Y), \ f \longmapsto \tau_Y(f) \big\}_{Y \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})} \\ &= \tau \end{split}$$

が成り立ち,かつ

$$\eta(s)_X(\mathrm{Id}_X) = F(\mathrm{Id}_X)(s) = \mathrm{Id}_{F(X)}(s) = s$$

が成り立つので、 $\eta$  は題意の写像の逆写像である.

#### 命題 1.2: 米田埋め込みは埋め込み

米田埋め込み  $Y: \mathcal{C} \longrightarrow PSh(\mathcal{C}, \mathbf{Sets})$  は埋め込みである.

証明  $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$  を固定する. 写像

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longmapsto \operatorname{Hom}_{\operatorname{PSh}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets})} \left( \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\operatorname{-}, X), \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\operatorname{-}, Y) \right),$$

$$f \longmapsto \operatorname{Y}(f)$$

が全単射であることを示せば良い. 米田埋め込みの定義から、 $\forall s \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$  に対して

$$\begin{split} \mathbf{Y}(s) &= \left\{ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(Z,\,X\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(Z,\,Y\right), \; g \longmapsto s \circ g \right\}_{Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \\ &= \left\{ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(Z,\,X\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(Z,\,Y\right), \; g \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\,\text{-}\,,\,Y\right)\!\left(g\right)\!\left(s\right) \right\}_{Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \end{split}$$

が成り立つが、これは米田の補題において  $F = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y) \in \operatorname{Ob}(\operatorname{PSh}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets}))$  としたときの逆写像であり、示された.

## 系 1.1: 同型と表現可能前層の自然同値

以下の2つは同値である:

- (1)  $X, Y \in Ob(C)$  は同型
- (2) 表現可能前層  $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$ ,  $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y) \in \operatorname{Ob}(\operatorname{PSh}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets}))$  が自然同型

#### 証明 (1) ⇒ (2)

 $X\cong Y$  なので  $f\in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y),\ g\in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$  が存在して  $g\circ f=\operatorname{Id}_X$  かつ  $f\circ g=\operatorname{Id}_Y$  を充たす. このとき  $\forall A\in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$  に対して

$$\tau_A : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Y), \ h \longmapsto f \circ h$$

と定義するとこれは  $\eta_A$ :  $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A,Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A,X), \ h \longmapsto g \circ h$  を逆射に持つので同型射であり、自然同値

$$\tau : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) \Longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y)$$

を定める.

#### $(1) \Leftarrow (2)$

PSh(C, Sets) における同型射とは、2 つの前層の間の自然同型である。関手は同型射を保つので、命題 1.2 より示された。

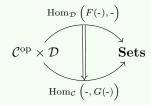
#### 1.1.4 随伴

#### 定義 1.14: 随伴

関手  $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}, \ G: \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$  を与える. F が G の左随伴 (left adjoint) であり, かつ G が F の右随伴 (right adjoint) であるとは, 2つの関手

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-), -) : \mathcal{C}^{\operatorname{op}} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{Sets},$$
  
 $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G(-)) : \mathcal{C}^{\operatorname{op}} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ 

の間に自然同型



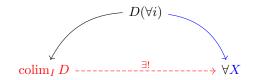
が存在することを言う.

F が G の左随伴である(全く同じことだが,G が F の右随伴である)ことを  $\mathbf{F} \dashv \mathbf{G}$  と書く.図式中では

$$\mathcal{C} \overset{F}{\underset{G}{\longleftarrow}} \mathcal{D}$$

のように書く.

さて、圏 C 上の図式  $D: I \longrightarrow C$  が余極限を持つとする:



このとき、 D 上の図式として



を考えることができる. 特に,一意に定まる射 u:  $\operatorname{colim}_I F(D) \longrightarrow F(\operatorname{colim}_I D)$  が同型のとき,関手 F は 余極限を保つという.

同様に、圏 D 上の図式  $D: I \longrightarrow C$  が極限を持つとする:



このとき、 D上の図式として



を考えることができる。特に,一意に定まる射  $\pmb{u}$ :  $F(\lim_I D) \longrightarrow \lim_I F(D)$  が同型のとき,関手 F は極限を保つという.

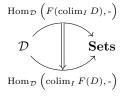
## 命題 1.3: 随伴と極限・余極限

関手  $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}, \ G: \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$  が  $F \dashv G$  であるとする. このとき, F は余極限を保ち, G は極限を保つ.

証明 余極限を持つ任意の  $\mathcal C$  の図式  $D\colon I\longrightarrow \mathcal C$  を 1 つ固定する. 随伴の定義および命題 1.1 より,  $\forall Y\in \mathrm{Ob}(\mathcal D)$  に対して

$$\begin{split} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\left(F(\operatorname{colim}D),\,Y\right) &\cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\operatorname{colim}D,\,G(Y)\right) \\ &\cong \lim_{I}\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\left(D(i),\,G(Y)\right) \\ &\cong \lim_{I}\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\left(F(D(i)),\,Y\right) \\ &\cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\left(\operatorname{colim}F(D),\,Y\right) \end{split}$$

が言える. i.e. 自然同型



があるので、米田の補題の系より

$$F(\operatorname*{colim}_ID)\cong\operatorname*{colim}_IF(D)$$

が示された.

## 1.1.5 Kan 拡張

#### 定義 1.15: スライス圏

圏  $\mathcal D$  およびその対象  $X\in \mathrm{Ob}(\mathcal D)$  を与える. **スライス圏** (slice category)  $\mathcal D_{/X}$  とは、以下のデータ からなる圏のこと:

- $\mathcal{D}$  の対象と射の組  $(D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}), \alpha \colon D \longrightarrow X)$  を対象に持つ
- $(D, \alpha), (D', \alpha')$  の間の射は, $\mathcal{D}$  における射  $\beta: D \longrightarrow D'$  であって  $\mathcal{D}$  における図式



を可換にするものとする

双対スライス圏 (dual slice category)  $\mathcal{D}_{X/}$  とは、以下のデータからなる圏のこと:

- $\mathcal{D}$  の対象と射の組  $(D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}), \alpha: X \longrightarrow D)$  を対象に持つ
- $(D, \alpha), (D', \alpha')$  の間の射は、 $\mathcal{D}$  における射  $\beta: D \longrightarrow D'$  であって  $\mathcal{D}$  における図式



を可換にするものとする

関手\* $^7$   $\mathcal{D}_{/X} \longrightarrow \mathcal{D}, \ (D, \alpha) \longmapsto D$  のことを**標準的関手忘却** (canonical forgetful functor) と呼ぶ. 標準的 関手は図式中でも記号で明記しないことが多い.

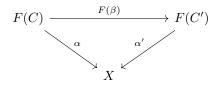
関手  $F:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$  および<u>圏  $\mathcal{D}$  における</u>対象  $X\in\mathcal{D}$  を与える. このとき**関手 F に関するスライス圏**を関手圏  $\mathbf{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})$  における引き戻し

$$F_{/X} \longrightarrow \mathcal{D}_{/X}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$\mathcal{C} \longrightarrow F \longrightarrow \mathcal{D}$$

として定義する. i.e.  $F_{/X}$  の対象は  $(C\in\mathcal{C},\,\alpha\colon F(C)\longrightarrow X)$  であり,  $(C,\,\alpha),\,(C',\,\alpha')$  の間の射とは,  $\mathcal{C}$  における射  $\beta\colon C\longrightarrow C'$  であって  $\mathcal{D}$  における図式



を可換にするものである.

<sup>\*7</sup> 対象の対応のみ明示した.

#### 定理 1.2: density theorem

前層  $F: \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$  を与える。関手  $Y: \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{PSh}\left(\mathcal{C}, \mathbf{Sets}\right)$  を米田埋め込みとする。 このとき、前層の圏  $\mathrm{PSh}\left(\mathcal{C}, \mathbf{Sets}\right)$  における同型

$$F \cong \underset{X \in \mathcal{Y}_{/F}}{\operatorname{colim}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}} (\text{-}, X)$$

が成り立つ.

#### 証明 米田の補題の系により、示すべきは自然同型

$$\operatorname{Hom}_{\operatorname{PSh}(\mathcal{C},\operatorname{\mathbf{Sets}})}\left(\operatorname*{colim}_{X\in \mathcal{Y}_{/F}}\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\text{-},\ X\right),\text{-}\right)\Longrightarrow\operatorname{Hom}_{\operatorname{PSh}(\mathcal{C},\operatorname{\mathbf{Sets}})}\left(F,\text{-}\right)$$

である. 実際,  $\forall G \in \mathrm{Ob}(\mathrm{PSh}\,(\mathcal{C},\mathbf{Sets}))$  に対して

$$\operatorname{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})}\left(\operatorname*{colim}_{X\in\mathcal{Y}_{/F}}\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\text{-},\,\,X\right),\,G\right)\cong \lim_{X\in\mathcal{Y}_{/F}}\operatorname{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})}\left(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\text{-},\,X\right),\,G\right)$$
 : 命題  $\mathbf{1}.\mathbf{1}$  
$$\cong \lim_{X\in\mathcal{Y}_{/F}}G(X)$$
 : 米田の補題

なる自然同型がある.

ここで  $\operatorname{pt}\in \operatorname{Ob}(\operatorname{PSh}\left(\mathbf{Y}_{/F},\operatorname{\mathbf{Sets}}\right))$  を  $\operatorname{pt}(X)\coloneqq \{*\}$  で定義する $^{*8}$ と、極限の定義から明らかに  $\lim_{X\in \mathbf{Y}_{/F}}G(X)\cong \operatorname{Hom}_{\operatorname{PSh}(\mathbf{Y}_{/F},\operatorname{\mathbf{Sets}})}(\operatorname{pt},G)$  が成り立つ。自然変換  $\forall \tau\in \operatorname{Hom}_{\operatorname{PSh}(\mathbf{Y}_{/F},\operatorname{\mathbf{Sets}})}(\operatorname{pt},G)$  は、 $\forall (X,\alpha)\in \operatorname{Ob}(\mathbf{Y}_{/F})$  に対して写像  $\{*\}\longrightarrow G(X)$ 、 $*\longmapsto \tau_{(X,\alpha)}$  を一意的に定める。一方で米田の補題より  $\forall (X,\alpha)\in \operatorname{Ob}(\mathbf{Y}_{/F})$  はある  $\alpha_X(\operatorname{Id}_X)\in F(X)$  と一対一対応する。この対応により  $\forall X\in\mathcal{C}^{\operatorname{op}}$  について写像

$$\eta(\tau)_X \colon F(X) \longrightarrow G(X), \ \alpha_X(\mathrm{Id}_X) \longmapsto \tau_{(X,\alpha)}$$

が得られる.  $\alpha$  は自然変換なので  $\eta(\tau)_X$  を全て集めたものは自然変換  $\eta(\tau): F \Longrightarrow G$  になる. よって写像

$$\operatorname{Hom}_{\operatorname{PSh}(Y_{/F}, \operatorname{\mathbf{Sets}})}(\operatorname{pt}, G) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\operatorname{PSh}(\mathcal{C}, \operatorname{\mathbf{Sets}})}(F, B), \ \tau \longmapsto \eta(\tau)$$

は自然な同型であり、証明が完了した.

<sup>\*8 {\*}</sup> は一点集合. **Sets** における終対象と言っても良い.

#### 定義 1.16: Kan 拡張

 $i: C_0 \hookrightarrow C$  を C の小部分圏, D を双完備な圏とする.

• 関手  $F: \mathcal{C}_i \longrightarrow \mathcal{D}$  の、関手 i に沿った**左 Kan 拡張** (left Kan extention) とは、

$$i_!(F)(x) \coloneqq \underset{c \in (C_0)_{/x}}{\operatorname{colim}} F(c)$$

によって定義される関手

$$i_! : \operatorname{Fun}(\mathcal{C}_0, \mathcal{D}) \longrightarrow \operatorname{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$

によって定まる関手  $i_!(F): \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  のこと.

• 関手  $F: \mathcal{C}_i \longrightarrow \mathcal{D}$  の、関手 i に沿った**右 Kan 拡張** (right Kan extention) とは、

$$i_*(F)(x) := \lim_{c \in (C_0)_{x/}} F(c)$$

によって定義される関手

$$i_* : \operatorname{Fun}(\mathcal{C}_0, \mathcal{D}) \longrightarrow \operatorname{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$

によって定まる関手  $i_*(F)$ :  $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  のこと.

制限関手

$$i^* : \operatorname{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \longrightarrow \operatorname{Fun}(\mathcal{C}_0, \mathcal{D})$$

について  $i_!$   $\dashv i^*$  かつ  $i_*$   $\vdash$   $i^*$  である.

## 1.2 単体圏

higher geometry において重要な役割を果たす単体的集合の圏を定義する.

#### 定義 1.17: 単体圏

- $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  に対して、全順序付集合  $[n] := \{0, 1, ..., n\}$  のことを n-単体 (n-simplex) と呼ぶ。
- 単体圏 (simplex category)  $\Delta$  とは,
  - $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  に対して, n-単体 [n] を対象とする.
  - 順序を保つ写像を射とする

圏のこと.

特に  $\operatorname{Hom}_{\Delta}([n-1],[n])$  の元のうち

$$d_i : [n-1] \hookrightarrow [n], \ x \longmapsto \begin{cases} x, & x < i \\ x+1 & x \ge i \end{cases} \quad i = 0, \dots, n$$

のことを**面写像** (face map) と呼び、 $\operatorname{Hom}_{\Delta}([n+1],[n])$  の元のうち

$$s_i \colon [n+1] \twoheadrightarrow [n], \ x \longmapsto \begin{cases} x, & x \le i & \text{w/} \\ x-1 & x > i \end{cases} \ i = 0, \dots, n$$

のことを縮退写像 (degeneracy map) と呼ぶ.

#### 定義 1.18: 単体的集合

単体的集合 (simplicial set) とは、前層

$$K \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

のこと.

 $K_n \coloneqq K([n])$  とおき, $\partial_i \coloneqq K(d_i) \colon K_n \twoheadrightarrow K_{n-1}$  のことを**面写像**, $\sigma_i \coloneqq K(s_i) \colon K_n \hookrightarrow K_{n+1}$  のことを縮退写像と呼ぶ.これらは以下の単体的恒等式(simplicial identities)を充たす:

$$\begin{aligned} \partial_i \circ \partial_i &= \partial_{j-1} \circ \partial_i & (i < j), \\ \partial_i \circ \sigma_j &= \sigma_{j-1} \circ \partial_i & (i < j), \\ \partial_i \circ \sigma_i &= \mathrm{id} & (0 \le i \le n), \\ \partial_{i+1} \circ \sigma_i &= \mathrm{id} & (0 \le i \le n), \\ \partial_i \circ \sigma_j &= \sigma_j \circ \partial_{i-1} & (i > j+1), \\ \sigma_i \circ \sigma_j &= \sigma_{j+1} \circ \sigma_i & (i \le j) \end{aligned}$$

#### 定義 1.19: 単体的集合の圏

単体的集合の圏 SimpSet とは、前層の圏

$$SimpSet := PSh(\Delta, Sets)$$

のこと. また, n-単体  $[n] \in \mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})$  の表現可能前層を  $\Delta^n \coloneqq \mathrm{Hom}_{\Delta}\left(-,\,[n]\right) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{SimpSet})$  と書く.

#### 命題 1.4: 単体的集合の圏の基本性質

 $Y: \Delta \longrightarrow SimpSet$  を米田埋め込みとする.

(1) 任意の単体的集合  $K: \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$  に対して、自然な同型

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}(\Delta^n, K) \cong K_n$$

が成り立つ.

- (2) 圏 SimpSet は双完備である.
- (3) 任意の単体的集合  $K: \Delta^{op} \longrightarrow \mathbf{Sets}$  に対して,

$$K \cong \operatorname{colim}_{[n] \in \mathcal{Y}_{/K}} \Delta^n$$

が成り立つ.

#### 証明 (1) 米田の補題より

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}(\Delta^n, K) = \operatorname{Hom}_{\operatorname{PSh}(\Delta, \mathbf{Sets})}(\operatorname{Hom}_{\Delta}(-, [n]), K) \cong K([n]) = K_n$$

(2)

(3) 定理 1.2 より

$$K \cong \operatorname*{colim}_{[n] \in \Delta_{/K}} \operatorname{Hom}_{\Delta} \left( \text{--}, \, [n] \right) = \operatorname*{colim}_{[n] \in \Delta_{/K}} \Delta^n$$

#### 定義 1.20: 幾何学的 n-単体

• 幾何学的 n-単体  $\Delta^n_{\mathrm{top}}$  とは,位相空間

$$\Delta_{\text{top}}^{n} := \{ (x^{0}, \dots, x^{n}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{i} \geq 0, \sum_{i=0}^{n} x_{i} = 1 \}$$

のこと.

• 余単体的集合

$$\Delta_{\mathrm{top}}^n \colon \Delta \longrightarrow \mathbf{Top}$$

とは,

- n-単体  $[n] \in \mathrm{Ob}(\Delta)$  に対して幾何学的 n-単体  $\Delta^n_{\mathrm{top}}$  を対応づける
- 圏  ${\color{red}\Delta}$  における任意の射  $\alpha\colon [n] \longrightarrow [m]$  に対して、連続写像

$$\alpha_* : \Delta_{\text{top}}^n \longrightarrow \Delta_{\text{top}}^m, (x_0, \dots, x_n) \longmapsto \left( \sum_{j, \alpha(j)=0} x_j, \dots, \sum_{j, \alpha(j)=m} x_j \right)$$

を対応付ける

関手のこと.

• 位相空間  $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$  の特異単体 (singular simplicial set) とは、単体的集合

$$S(X): \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}, [n] \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^n_{\mathrm{top}}, X)$$

のこと.

• 特異複体とは、関手  $S: \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{SimpSet}, X \longmapsto S(X)$  のこと.

#### 定義 1.21: 幾何学的実現

 $Y: \Delta \longrightarrow \mathbf{SimpSet}$  を米田埋め込みとする. 幾何学的実現 (geometric realization) とは、余極限を保つ関手

$$|\text{-}| \colon \mathbf{SimpSet} \longrightarrow \mathbf{Top}, \ K \longmapsto \operatorname*{colim}_{\Delta^n \in \mathcal{Y}_{/K}} \Delta^n_{\mathrm{top}}$$

のこと.

Top における colim の公式を使うと

$$|K| = \left( \prod_{[n] \in \text{Ob}(\Delta)} (K_n \times \Delta_{\text{top}}^n) \right) / \left\{ \left( \alpha^*(x), t \right) \sim \left( x, \, \alpha_*(t) \right) \mid x \in K_n, \, t \in \Delta_{\text{top}}^m, \, \alpha \in \text{Hom}_{\Delta} \left( [m], \, [n] \right) \right\}$$

となる.

#### 命題 1.5:

特異複体  $S: \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{SimpSet}, \ X \longmapsto S(X)$  は幾何学的実現  $|\cdot|: \mathbf{SimpSet} \longrightarrow \mathbf{Top}$  の右随伴である.

証明 右随伴の定義を思い出すと、 $\forall (K, X) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{SimpSet}^\mathrm{op} \times \mathbf{Top})$  に対して自然同型

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{Top}}(|K|, X) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{SimpSet}^{\operatorname{op}}}(K, S(X))$$

が成り立つことを示せば良い. 実際, 命題 1.1 より

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{Top}}\left(|K|,X\right) = \operatorname{Hom}_{\mathbf{Top}}\left(\operatorname*{colim}_{\Delta^n \in Y/K} \Delta^n_{\operatorname{top}},X\right) \cong \lim_{\Delta^n \in Y/K} \operatorname{Hom}_{\mathbf{Top}}\left(\Delta^n_{\operatorname{top}},X\right)$$

が, 命題 1.4-(3) より

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{SimpSet}^{\mathrm{op}}}\left(K,\,S(X)\right) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{SimpSet}^{\mathrm{op}}}\left(\underset{[n] \in \mathcal{Y}_{K}}{\operatorname{colim}}\Delta^{n},\,S(X)\right) \cong \lim_{[n] \in \mathcal{Y}_{/K}} \operatorname{Hom}_{\mathbf{Top}}\left(\Delta^{n},\,X\right)$$

が言える.

#### 定義 1.22: 境界・角・背骨・骨格

•  $\Delta^n \in \mathrm{Ob}(\mathbf{SimpSet})$  の単体的境界 (simplicial boundary)  $\partial \Delta^n$  とは、単体的集合

$$\partial \Delta^n \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

であって

$$\partial \Delta^n([k]) := \Delta^n([k]) \setminus \{ \mathrm{Id}_{[n]} \} = \mathrm{Hom}_{\Delta}([k], [n]) \setminus \{ \mathrm{Id}_{[n]} \}$$

を充たすもののこと.

• 任意の部分集合  $S \subset [n]$  に対して、S-角 (S-horn) とは、単体的集合

$$\Lambda^n_S \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

であって,

$$\Lambda_S^n([k]) := \left\{ f \in \operatorname{Hom}_{\Delta}([k], [n]) \mid [n] \setminus \left( f([k]) \cup S \right) \neq \emptyset \right\} \subset \Delta^n([k])$$

を充たすもののこと.

 $\Lambda_j^n \coloneqq \Lambda_{\{j\}}^n$  は 0 < j < n のとき内部角 (inner horn), j=0, n のとき外部角 (outer horn) と呼ばれる.

• 背骨 (spine) とは, 単体的集合

$$I^n \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

であって,

$$I^{n}([k]) := \{ f \in \operatorname{Hom}_{\Delta}([k], [n]) \mid f([k]) = \{j\} \text{ or } f([k]) = \{j, j+1\} \} \subset \Delta^{n}([k])$$

- 単体的集合  $K: \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$  の n-骨格 (n-skelton) とは、濃度 n+1 以下の対象からなる  $\Delta$  の充満部分圏  $i: \Delta_{\leq n} \hookrightarrow \Delta$  に沿った、関手  $i^*(K): (\Delta_{\leq n})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$  の左 Kan 拡張  $i_!(i^*(K)): \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$  のこと.
- 単体的集合  $K: \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$  の n-余骨格 (n-coskelton) とは、濃度 n+1 以下の対象からなる  $\Delta$  の充満部分圏  $i: \Delta_{\leq n} \hookrightarrow \Delta$  に沿った、関手  $i^*(K): (\Delta_{\leq n})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$  の右 Kan 拡張  $i_*(i^*(K)): \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$  のこと.

## 命題 1.6: 角と背骨の幾何学的実現

幾何学的実現は角,背骨を保つ.

証明  $|\Delta^n| = \Delta_{\text{top}}^n$  であることに注意する.

## $oldsymbol{1.3}$ 脈体・ $oldsymbol{\mathrm{Kan}}$ 複体・ $(\infty,\,1)$ -圏

#### 定義 1.23: 脈体

圏  $\mathcal{C}$  の脈体 (nerve) とは、単体的集合

$$N(\mathcal{C}) \colon \Delta^{op} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

であって

$$N(C)([n]) = Fun([n], C)$$

を充たすもののこと.

#### 定義 1.24: Kan 複体

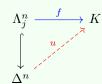
Kan 複体 (Kan complex) とは、単体的集合

$$K \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

であって以下の性質を充たすもののこと:

(Kan)

 $\forall n \geq 1, \ 0 \leq \forall j \leq n \$ および  $\forall f \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}\left(\Lambda_{j}^{n}, K\right)$  に対して、以下の図式を可換にする自然変換  $\mathbf{u} \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}\left(\Delta^{n}, K\right)$  が存在する:



単体的集合であって、内部角 i.e.  $\forall n \geq 2, \ 0 < \forall j < n$  についてのみ **(Kan)** を充たすもののことを**弱 Kan 複体** (weak Kan complex) と呼ぶ.

#### 定義 1.25: ∞-圏

- $(\infty, 1)$ -圏とは、単体的集合であって弱 Kan 複体になっているもののことを言う.  $(\infty, 1)$ -圏の 関手とは、SimpSet の射のこと.
- ∞-groupoid とは、単体的集合であって Kan 複体になっているもののこと

以下では  $(\infty, 1)$ -圏のことを  $\infty$ -圏と呼ぶ.

#### 定義 1.26: 単体的ホモトピー

•  $f, g \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}(X, Y)$  を繋ぐホモトピーとは、 $\mathbf{SimpSet}$  の射  $\eta \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}(X \times \Delta^1, Y)$  であって、以下の  $\mathbf{SimpSet}$  の図式を可換にするもののこと:

$$X \cong X \times \Delta^0 \xrightarrow{\operatorname{Id} \times \sigma_1} X \times \Delta^1 \xleftarrow{\operatorname{Id} \times \sigma_0} X \times \Delta^1 X \times \Delta^1 \cong X$$

f, g を繋ぐホモトピーが存在するとき, f, g は互いに**ホモトピック**であるという.

• 基点付き Kan 複体 (K, x) を与える. このとき n 次の単体的ホモトピー群 (simplicial homotopy group) を

$$\pi_n^{\Delta}(X, x) := \operatorname{Hom}_{\mathbf{SimpSet}_*} ((\Delta^n, \partial \Delta^n), (X, x)) / \simeq$$

と定義する.

より具体的には、f,g を繋ぐ単体的ホモトピー (simplicial homotopy) とは Sets の射の族

$$\{h_i\colon X_n\longrightarrow Y_{n+1}\}_{i=0,\,\ldots,\,n,\,n\geq 0}$$

であって以下を充たすもののこと:

$$\begin{split} \partial_0 \circ h_0 &= f_n, \\ \partial_{n+1} \circ h_n &= g_n, \\ \partial_i \circ h_j &= \begin{cases} h_{j-1} \circ \partial_i, & i < j \\ \partial_i \circ h_{i-1}, & i = j \neq 0 \\ h_j \circ \partial_{i-1}, & i > j+1 \end{cases} \\ \sigma_i \circ h_j &= \begin{cases} h_{j+1} \circ \sigma_i, & i \leq j \\ h_j \circ \sigma_{i-1}, & i > j \end{cases} \end{split}$$

一見するとホモトピーと単体的ホモトピーは別のものに見えるが、実は同じものである。単体的ホモトピー  $\left\{h_i\colon X_n\longrightarrow Y_{n+1}\right\}_{i=0,\,\dots,\,n,\,n\geq 0}$  が与えられたとする。このとき **SimpSet** の射  $\eta\in \operatorname{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}\left(X\times\Delta^1,\,Y\right)$  を

$$\eta_0 := \partial_0 \circ h_0, 
\eta_{n+1} := \partial_{n+1} \circ h_n, 
\eta_j := \partial_j \circ h_j \quad (1 \le j \le n)$$

と定義すると、和の普遍性の図式によって  $\eta \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}(X \times \Delta^1, Y)$  が定まる.

#### 定理 1.3: Kan 条件と脈体

任意の単体的集合  $K: \Delta^{op} \longrightarrow \mathbf{Sets}$  に対して以下は同値である:

- (1) K は **弱** Kan 条件を充たす一意解を持つ
- (2) K は背骨の包含  $I^n \hookrightarrow \Delta^n$  を一意に持ち上げる.
- (3) K はある圏の脈体と同型である.

証明 [?, p.20, Theorem 1.1.52] を参照.

#### 命題 1.7: 脈体が $\infty$ -groupoid になる必要十分条件

圏 C の脈体が  $\infty$ -groupoid になる必要十分条件は、C が groupoid であること.

証明 [?, p.23, Lemma 1.1.54]

## 1.3.1 SimpSet-豊穣化と単体的ホモトピー

単体的集合の圏 SimpSet はモノイダル圏の構造を持つ. 実際,単体的集合  $S,T:\Delta^{\mathrm{op}}\longrightarrow \mathbf{Sets}$  に対して,新たな単体的集合

$$S \otimes T : \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}, [n] \longmapsto S_n \times T_n$$

がテンソル積  $\otimes$ : SimpSet  $\times$  SimpSet  $\longrightarrow$  SimpSet を定めている.

#### 定義 1.27: 豊穣圏

モノイダル圏  $(V, \otimes, I)$  を与える.

V-豊穣圏 (V-enriched category) C は、以下のデータからなる:

- 集合 Ob(C)
- $\forall x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$  に対して, **Hom 対象**と呼ばれるV の対象  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \in \mathrm{Ob}(V)$  を持つ
- $\forall x,y,z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$  に対して、**合成射**と呼ばれる<u>V の</u>射  $\circ_{x,y,z}$ :  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,z)$  を持つ
- $\forall x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$  に対して、恒等素と呼ばれるV の射  $j_x \colon I \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,x)$  を持つ

これらは以下の図式を可換にしなくてはいけない:

#### (associativity)

 $\forall x, y, z, w \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$  について<sup>a</sup>

$$\left(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z)\right) \otimes \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \left(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \otimes \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \otimes \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)\right)$$

$$\left(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(y, y) \otimes \operatorname{Ho$$

## (unitality)

 $\forall x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \ \&cont$ 

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x) \otimes \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \xrightarrow{\circ_{x, x, y}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \underset{\cong}{\swarrow_{x, y, y}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(y, y)$$

$$i_{x} \otimes \operatorname{Id}_{\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)} \uparrow \underset{\cong}{\swarrow} \operatorname{Id}_{\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)} \otimes i_{y}$$

$$I \otimes \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes I$$

2 つの V-豊穣圏  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$  の間の V-豊穣関手 (V-enriched functor)  $F:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$  は、以下のデータからなる:

- F\$ $f: Ob(C) \longrightarrow Ob(D), x \longmapsto f(x)$
- $\forall x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$  に対して、V における射  $f_{x,y}$ :  $\mathrm{Hom}_{CatC}(x,y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(f(x),f(y))$

これらは以下の図式を可換にしなくてはいけない:

## (enriched-1)

 $\forall x, y, z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$  に対して

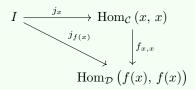
$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \xrightarrow{\circ_{x,y,z}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$$

$$f_{x,y} \otimes f_{y,z} \downarrow \qquad \qquad \downarrow f_{x,z}$$

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\left(f(x), f(y)\right) \otimes \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\left(f(y), f(z)\right) \xrightarrow{\circ_{x,y,z}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\left(f(x), f(z)\right)$$

#### (enriched-2)

 $\forall x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$  に対して



与えられたモノイダル圏 V に対して、V-豊穣圏のなす圏を  $\mathbf{Cat}_V$  と書く.

#### 定義 1.28: homotopy coherent な脈体

## 1.3.2 ∞-トポス

∞-groupoid のなす圏を ∞Grpd と書く.

 $<sup>^</sup>b\cong \wr \sharp \text{ left/right unitor}$ 

## 定義 1.29: ∞-前層

K を  $(\infty, 1)$ -圏とする. K 上の  $(\infty, 1)$ -前層とは,  $(\infty, 1)$ -圏の関手

$$P \colon K^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{\infty}\mathbf{Grpd}$$

のこと.  $(\infty, 1)$ -前層のなす  $(\infty, 1)$ -圏とは、 $(\infty, 1)$ -圏の関手の圏

$$\operatorname{PSh}_{(\infty,\,1)}\left(K\right)\coloneqq\operatorname{Fun}_{(\infty,\,1)}(K^{\operatorname{op}},\,\infty\mathbf{Grpd})$$

のこと.

】 以降では、 $(\infty, 1)$ -前層のことを ∞-前層と呼ぶ.

## 命題 1.8: ∞-前層の圏のモデル

 $\mathcal C$  を SimpSet-豊穣圏であって、Kan 複体を Hom 対象に持つものとする.

このとき homotopy coherent な脈体  $N_{hc}$  に対して

$$\mathrm{PSh}_{(\infty,\,1)}\left(N_{hc}(\mathcal{C})\right) \cong N\big([\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\mathbf{SimpSet}_{\mathrm{Quillen}}]_{\mathrm{proj}}\big)^{\circ}$$

が成り立つ.

証明 https://ncatlab.org/nlab/show/%28infinity%2C1%29-category+of+%28infinity%2C1%29-presheaves を参照.

[?], [?, p.9] に従い  $(\infty, 1)$ -トポスの定義を概観する\*9.

<sup>\*9</sup> ここでの定義は不完全なので、詳細は [?]、[?] などを参照.

## 定義 1.30: ∞-トポス

K を  $(\infty, 1)$ -圏とする.

K 上の  $(\infty, 1)$ -トポスとは、 $(\infty, 1)$ -前層のなす  $(\infty, 1)$ -圏  $PSh_{(\infty, 1)}(K)$  の部分  $(\infty, 1)$ -圏

$$i: \mathbf{H} \hookrightarrow \mathrm{PSh}_{(\infty, 1)}(K)$$

であって、包含  $(\infty, 1)$ -関手 i が有限極限を保つ左随伴  $(\infty, 1)$ -関手

$$\mathbf{H} \xrightarrow{\mathsf{T}} \overset{i}{\mathrm{PSh}}_{(\infty, 1)}(K)$$

を持つようなもののこと.

もしくは、余完全 $^a$ な $(\infty, 1)$ -圏  ${\bf H}$ であって以下の公理を充たすもののこと [?, p.9, Definition 5.4]:

(T1)  $\forall f \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{H}}(X,Y)$  および  $\mathbf{H}$  における図式  $D \colon I \longrightarrow \mathbf{H}_{/Y}$  において、自然な同型

$$\operatorname{colim}_{i \in I} (X \times_Y D(i)) \cong X \times_Y \operatorname{colim}_{i \in I} D(i)$$

がある<sup>b</sup>.

(T2)  $\forall X, Y \in Ob(\mathbf{H})$  に対して、図式  $Y \leftarrow \emptyset \longrightarrow X$  の押し出し



は図式  $Y \longrightarrow X \coprod Y \longleftarrow X$  の引き戻しでもある. i.e. 任意の和が disjoint である.

(T3) H における任意の groupoid object は delooping を持つ.

[?] は命題 1.8 を使って  $\infty$ -トポスを定義している.

 $<sup>^</sup>a$  正確には **presentable** [?, p.372, Def5.5.0.18]

 $<sup>^</sup>b \times_Y$  は引き戻し