

第 3 章

位相的場の理論

この章は [?, Chapter7] および [?] に相当する．この節で登場する多様体は特に断らない限り常に C^∞ 多様体である．また，体 \mathbb{K} と言ったら $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のいずれかを指すことにしよう．

3.1 モノイダル圏

まず手始めに，モノイダル圏とストリング図式の準備をする．特に，コボルディズム圏と有限次元 Hilbert 空間の圏がコンパクト対称モノイダル圏であることの直感的な説明をする．

3.1.1 モノイダル圏の定義

定義 3.1: モノイダル圏

モノイダル圏 (monoidal category) は，以下の 5 つのデータからなる：

- 圏 \mathcal{C}
- テンソル積 (tensor product) と呼ばれる関手 $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$
- 単位対象 (unit object) $I \in \text{Ob}(\mathcal{C})$
- associator と呼ばれる自然同値

$$\{a_{X,Y,Z}: (X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{\cong} X \otimes (Y \otimes Z)\}_{X,Y,Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

- left/right unitors と呼ばれる自然同値

$$\{l_X: I \otimes X \xrightarrow{\cong} X\}_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})},$$

$$\{r_X: X \otimes I \xrightarrow{\cong} X\}_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは $\forall X, Y, Z, W \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ について以下の 2 つの図式を可換にする：

(triangle diagram)



定義 3.1 は，ストリング図式 (string diagram) で理解するのが良い．モノイダル圏の射 $f: X \rightarrow Y$, $f': X' \rightarrow Y'$ があったら，そのテンソル積 $f \otimes f': X \otimes X' \rightarrow Y \otimes Y'$ は，ストリング図式上では次のようになる．

また，単位対象 $I \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ は空白として表す．従って例えば射 $f: I \rightarrow X$ は次のようになる：

【例 3.1.1】コボルディズム圏

厳密な構成^aは後回しにして，コボルディズム圏 (cobordism category) を直感的に導入しよう．圏 Cob_{D+1} は，

- D 次元多様体を対象
- $D+1$ 次元のコボルディズム (cobordism) を射

とするような圏のことを言う． $D+1$ 次元のコボルディズム $\mathcal{M}: X \rightarrow Y$ と言うのは， $D+1$ 次元多様体 \mathcal{M} であって， $\partial\mathcal{M} = X \amalg Y$ となっているようなもの（の微分同相類）のことである：

射 $\mathcal{M}: X \rightarrow Y$, $\mathcal{N}: Y \rightarrow Z$ の合成 $\mathcal{N} \circ \mathcal{M}: X \rightarrow Y \rightarrow Z$ は次の図式が物語る：

圏 Cob_{D+1} は，disjoint union に関してモノイダル圏になる：

^a 例えば， (B, f) -structure の定義から始めるコボルディズムの統一的な扱いは [?, CHAPTER 1] などを参照．

【例 3.1.2】有限次元 Hilbert 空間の圏

有限次元 \mathbb{K} -Hilbert 空間の圏 **Hilb** とは,

- 有限次元 \mathbb{K} -Hilbert 空間を対象
- 線型写像を射
- 写像の合成を射の合成

に持つような圏のことを言う. **Hilb** はベクトル空間のテンソル積 $V_1 \otimes V_2$ の上に内積を

$$\langle v_1 \otimes v_2, w_1 \otimes w_2 \rangle := \langle v_1, w_1 \rangle_1 \langle v_2, w_2 \rangle_2$$

と定義することで**モノイダル圏**になる.

3.1.2 組紐付きモノイダル圏

定義 3.2: 組紐付きモノイダル圏

組紐付きモノイダル圏 (braided monoidal category) とは, 以下の 2 つからなる:

- **モノイダル圏** \mathcal{C}
- **組紐** (braiding) と呼ばれる自然同型

$$\{b_{X,Y}: X \otimes Y \xrightarrow{\cong} Y \otimes X\}_{X,Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ について以下の図式を可換にする:

(hexagon diagrams)

$$\begin{array}{ccccc} X \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{a_{X,Y,Z}^{-1}} & (X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{b_{X,Y} \otimes 1_Z} & (Y \otimes X) \otimes Z \\ \downarrow b_{X,Y \otimes Z} & & & & \downarrow a_{Y,X,Z} \\ (Y \otimes Z) \otimes X & \xleftarrow{a_{Y,Z,X}^{-1}} & Y \otimes (Z \otimes X) & \xleftarrow{1_X \otimes b_{X,Z}} & Y \otimes (X \otimes Z) \\ (X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{a_{X,Y,Z}} & X \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{1_X \otimes b_{Y,Z}} & X \otimes (Z \otimes Y) \\ \downarrow b_{X \otimes Y, Z} & & & & \downarrow a_{X,Z,Y}^{-1} \\ Z \otimes (X \otimes Y) & \xleftarrow{a_{Z,X,Y}} & (Z \otimes X) \otimes Y & \xleftarrow{b_{X,Z} \otimes 1_Y} & (X \otimes Z) \otimes Y \end{array}$$

組紐付きモノイダル圏 \mathcal{C} であって, \mathcal{C} の組紐が $b_{X,Y} = b_{Y,X}^{-1}$ を満たすもののことを**対称モノイダル圏** (symmetric monoidal category) と呼ぶ.

ストリング図式で組紐を書く場合は次のようにする:

このとき **hexagon diagrams** はとてもわかりやすくなる:

対称モノイダル圏の条件も一目瞭然である：

【例 3.1.3】 \mathbf{Cob}_{D+1} の組紐

\mathbf{Cob}_{D+1} の組紐 $b_{X,Y}: X \otimes Y \longrightarrow Y \otimes X$ は、多様体 $(X \times [0, 1]) \amalg (Y \times [0, 1])$ と微分同相であるような $D+1$ 次元多様体のことを言う：図から、 \mathbf{Cob}_{D+1} は対称モノイダル圏である。

【例 3.1.4】 \mathbf{Hilb} の組紐

\mathbf{Hilb} の組紐は

$$\begin{aligned} b_{X,Y}: X \otimes Y &\longrightarrow Y \otimes X, \\ x \otimes y &\longmapsto y \otimes x \end{aligned}$$

である。これがベクトル空間の同型写像であることが示される。明らかに $b_{X,Y} = b_{Y,X}^{-1}$ なので \mathbf{Hilb} は対称モノイダル圏である。

3.1.3 閉圏・コンパクト圏・ダガー圏

圏 \mathcal{C} を与える。Hom 関手 (Hom functor) とは、関手

$$\mathrm{Hom}: \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

であって

$$\begin{aligned} (X, Y) &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \\ \left((f, g): (X', Y) \longrightarrow (X, Y') \right) &\longmapsto \left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y'), h \longmapsto g \circ h \circ f \right) \end{aligned}$$

なる対応を与えるもののこと。

定義 3.3: 閉圏

モノイダル圏 \mathcal{C} を与える。

- \mathcal{C} が左に閉じている (left closed) とは、internal hom functor と呼ばれる関手

$$\multimap: \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

と、currying と呼ばれる自然同型

$$\{c_{X,Y,Z}: \mathrm{Hom}(X \otimes Y, Z) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(X, Y \multimap Z)\}_{X,Y,Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

の 2 つが存在することを言う。

- \mathcal{C} が右に閉じている (right closed) とは、internal hom functor と呼ばれる関手と、currying と呼ばれる自然同型

$$\{c_{X,Y,Z}: \mathrm{Hom}(X \otimes Y, Z) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(Y, X \multimap Z)\}_{X,Y,Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

の 2 つが存在することを言う。

対称モノイダル圏しか考えないので、以降では右に閉じているかどうかは気にしないことにする。

定義 3.4: 双対

モノイダル圏 \mathcal{C} およびその任意の対象 $X, X^* \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を与える。 X^* が X の右双対 (right dual) であり、かつ X が X^* の左双対 (left dual) であるとは、

- **unit** と呼ばれる射

$$i_X: I \longrightarrow X^* \otimes X$$

- **counit** と呼ばれる射

$$e_X: X \otimes X^* \longrightarrow I$$

が存在して以下の図式を可換にすることを言う：

(zig-zag equations)

$$\begin{array}{ccc} X \otimes I & \xrightarrow{1_X \otimes i_X} & X \otimes (X^* \otimes X) \\ \downarrow r_X & & \downarrow a_{X, X^*, X}^{-1} \\ & & (X \otimes X^*) \otimes X \\ & & \downarrow e_X \otimes 1_X \\ X & \xleftarrow{l_X} & I \otimes X \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} I \otimes X^* & \xrightarrow{i_X \otimes 1_{X^*}} & (X^* \otimes X) \otimes X^* \\ \downarrow l_{X^*} & & \downarrow a_{X^*, X, X^*} \\ & & X^* \otimes (X \otimes X^*) \\ & & \downarrow 1_{X^*} \otimes e_X \\ X^* & \xleftarrow{r_{X^*}} & X^* \otimes I \end{array}$$

双対のストリング図式は、単に矢印を逆にすれば良い：

このとき zig-zag equations が本当にジグザグしていることがわかる：

定義 3.5: コンパクト圏

モノイダル圏 \mathcal{C} は、 $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が左・右双対を持つときコンパクト (compact) であると言われる。

【例 3.1.5】Cob の unit と counit

\mathbf{Cob}_{D+1} における $X \in \text{Ob}(\mathbf{Cob}_{D+1})$ の双対とは、向き付けを逆にした D 次元多様体 X のことである。特に \mathbf{Cob}_3 における unit, counit はそれぞれ U 字管とそれを逆にしたもののような見た目をしている：

internal hom functor を $X \multimap Y := X^* \otimes Y$ とすれば、図から \mathbf{Cob}_3 が閉圏であることを直接確認できる。

【例 3.1.6】Hilb の unit と counit

Hilb において $I = \mathbb{C}$ である。従って、 $X \in \text{Ob}(\mathbf{Hilb})$ の双対とは双対ベクトル空間 $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, \mathbb{C})$ のことである。ブラ空間のことだと言っても良い。特に、自然な同型 $X^* \otimes Y \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y)$ を使うと X の unit は

$$\begin{aligned} i_X: I &\longrightarrow X^* \otimes X, \\ c &\longmapsto c \text{id}_X \end{aligned}$$

で、counit は

$$\begin{aligned} e_X: X \otimes X^* &\longrightarrow I, \\ x \otimes f &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

であることがわかる。internal hom functor を $X \multimap Y := X^* \otimes Y \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y)$ とすれば Hilb が閉圏であることを直接確認できる。

実は、コンパクト圏は自動的に閉圏になる。これは

$$X \multimap Y := X^* \otimes Y$$

として internal hom functor を定義することで確認できる。

定義 3.6: ダガー圏

圏 \mathcal{C} がダガー圏 (dagger category) であるとは、関手

$$\dagger: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$$

が存在して以下を充たすことを言う：

- (1) $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $X^\dagger = X$ を充たす。
- (2) \mathcal{C} の任意の射 $f: X \longrightarrow Y$ に対して $(f^\dagger)^\dagger = f$ を充たす。

【例 3.1.7】Cob の dagger

\mathbf{Cob}_{D+1} における $M: X \longrightarrow Y$ のダガーは、上下を逆にしてから M の連結成分毎に向きを逆にすることで得られる。

【例 3.1.8】 Hilb の dagger

Hilb における $f: X \longrightarrow Y$ のダガーは、 $\forall \phi \in X, \forall \psi \in Y$ に対して

$$\langle f^\dagger(\psi), \phi \rangle := \langle \psi, f(\phi) \rangle$$

とすることで定義される。

3.1.4 モノイダル関手

モノイダル関手とは、ざっくり言うとモノイダル圏の構造を保存するような関手のことである：

定義 3.7: モノイダル関手

2つのモノイダル圏 \mathcal{C}, \mathcal{D} の間の関手

$$F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

が lax monoidal functor であるとは、

- 射

$$\varepsilon: I_{\mathcal{D}} \longrightarrow F(I_{\mathcal{C}})$$

- 自然変換

$$\{\mu_{X,Y}: F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y) \longrightarrow F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y)\}_{X,Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

があって、 $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して以下の図式が可換になること：

(associativity)

$$\begin{array}{ccc} (F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y)) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z) & \xrightarrow{a_{F(X), F(Y), F(Z)}} & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} (F(Y) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z)) \\ \mu_{X,Y} \otimes 1_{F(Z)} \downarrow & & \downarrow 1_{F(X)} \otimes \mu_{Y,Z} \\ F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z) & & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y \otimes_{\mathcal{C}} Z) \\ \mu_{X \otimes_{\mathcal{C}} Y, Z} \downarrow & & \downarrow \mu_{X, Y \otimes_{\mathcal{C}} Z} \\ F((X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{C}} Z) & \xrightarrow{F(a_{X,Y,Z}^{\mathcal{C}})} & F(X \otimes_{\mathcal{C}} (Y \otimes_{\mathcal{C}} Z)) \end{array}$$

(unitality)

$$\begin{array}{ccc} I_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathcal{D}} F(X) & \xrightarrow{\varepsilon \otimes 1_{F(X)}} & F(I_{\mathcal{C}}) \otimes_{\mathcal{D}} F(X) \\ l_{F(X)}^{\mathcal{D}} \downarrow & & \downarrow \mu_{I_{\mathcal{C}}, X} \\ F(X) & \xleftarrow{F(l_X^{\mathcal{C}})} & F(I_{\mathcal{C}} \otimes_{\mathcal{C}} X) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
F(X) \otimes_{\mathcal{D}} I_{\mathcal{D}} & \xrightarrow{1_{F(X)} \otimes \varepsilon} & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(I_{\mathcal{C}}) \\
\downarrow r_{F(X)}^{\mathcal{D}} & & \downarrow \mu_{X, I_{\mathcal{C}}} \\
F(X) & \xleftarrow{F(r_X^{\mathcal{C}})} & F(X \otimes_{\mathcal{C}} I_{\mathcal{C}})
\end{array}$$

- lax monoidal functor F の ε と $\mu_{X,Y}$ が全て同型射ならば, F は **strong monoidal functor** と呼ばれる.
- lax monoidal functor F の ε と $\mu_{X,Y}$ が全て恒等射ならば, F は **strict monoidal functor** と呼ばれる.

3.2 TQFT の定義

位相的場の理論 (Topological Quantum Field Theory; TQFT) の枠組みをトップダウンに導入する.

3.2.1 Atiyah の公理系

まず, 全ての出発点として Atiyah の公理系 [?] というものがある:

公理 3.1: Atiyah の公理系 (若干簡略版)

体 \mathbb{K} 上の^a, D 次元の位相的場の理論 (Topological Quantum Field Theory; TQFT) とは, 以下の 2 つのデータからなる:

- (1) 向き付けられた (oriented) D 次元の閉多様体 (closed manifold) Σ に対応づけられた有限次元 \mathbb{K} -ベクトル空間 $V(\Sigma)$
- (2) 向き付けられた $D+1$ 次元の境界付き多様体 M に対応づけられたベクトル $Z(M) \in V(\partial M)$

これらのデータは以下の条件を充たす:

(TQFT-1)

Z は向きを保つ微分同相写像について関手的 (functorial) に振る舞う.

(TQFT-2)

Z は対合的 (involutory) である.

(TQFT-3)

Z はモノイダル的 (multiplicative^b) である.

^a 原論文 [?] では環としていて, ベクトル空間の代わりに環上の有限生成加群を扱っている. 今回は Hilbert 空間しか考えないので体 \mathbb{K} としておいた.

^b 「乗法的」というと語弊がありそうなのでモノイダル的と言った.

[?] に倣って公理の意味を精査していく.

(TQFT-1)

この公理は2つの要請を持つ：

- (1) D 次元閉多様体 $\Sigma, \Sigma', \Sigma''$ の間の向きを保つ微分同相写像 $f: \Sigma \rightarrow \Sigma', g: \Sigma' \rightarrow \Sigma''$ に対して、 $V(f): V(\Sigma) \rightarrow V(\Sigma')$ はベクトル空間の同型写像で、 $V(g \circ f) = V(g) \circ V(f)$ が成り立つ。
- (2) 向きを保つ微分同相写像 $f: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ が、 $D+1$ 次元多様体 M, M' であって $\Sigma = \partial M, \Sigma' = \partial M'$ を満たすものの上に $f: M \rightarrow M'$ と拡張される場合に $V(f)(Z(M)) = Z(M')$ を満たす。

(TQFT-2)

Σ の向きを逆にして得られる D 次元閉多様体を Σ^* と書く^{*1}とき、 $V(\Sigma^*) = V(\Sigma)^*$ を満たす^{*2}。

(TQFT-3)

この公理は5つの要請を持つ：

- (1) D 次元閉多様体 Σ_1, Σ_2 に対して

$$V(\Sigma_1 \amalg \Sigma_2) = V(\Sigma_1) \otimes V(\Sigma_2)$$

が成り立つこと。

- (2) $D+1$ 次元多様体 M, M_1, M_2 に対して $\partial M_1 = \Sigma_1 \amalg \Sigma_3, \partial M_2 = \Sigma_2 \amalg \Sigma_3^*, M = M_1 \cup_{\Sigma_3} M_2$ が成り立つならば、

$$Z(M) = \langle Z(M_1) | Z(M_2) \rangle$$

ただし、

$$\langle | \rangle : V(\partial M_1) \otimes V(\partial M_2) = V(\Sigma_1) \otimes V(\Sigma_3) \otimes V(\Sigma_3)^* \otimes V(\Sigma_2) \rightarrow V(\partial M) = V(\Sigma_1) \otimes V(\Sigma_2),$$

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_3\rangle \otimes \langle \varphi_3| \otimes |\psi_2\rangle \mapsto \langle \varphi_3 | \psi_3 \rangle |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$$

である。

- (3) (2) において $\Sigma_3 = \emptyset$ ならば、

$$Z(M) = Z(M_1) \otimes Z(M_2)$$

- (4) (1) から^{*3}、

$$V(\emptyset) = \mathbb{K}$$

- (5) (3) から^{*4}、

$$Z(\emptyset) = 1$$

今や別の同値な定義ができる。 $D+1$ 次元多様体 M の境界 ∂M を

$$\partial M = \Sigma_1^* \amalg \Sigma_2$$

^{*1} 【例 3.1.5】の意味で、圏 \mathbf{Cob}_{D+1} における $\Sigma \in \text{Ob}(\mathbf{Cob}_{D+1})$ の双対となっている。

^{*2} $V(\Sigma)$ が有限次元なので、 $V(\Sigma)^*$ はブラ空間と見做せる。

^{*3} \mathbf{Cob}_{D+1} の単位対象は \emptyset なので $\emptyset = \emptyset \amalg \emptyset$ 。よって (1) から $V(\emptyset) = V(\emptyset) \otimes V(\emptyset)$ 。これを満たすのは $V(\emptyset) = 0, \mathbb{K}$ (**モノイダル圏** $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の単位対象は \mathbb{K} である) のどちらかしかないので、非自明な方を採用する。

^{*4} $\emptyset = \emptyset \amalg \emptyset$ なので (3) から $Z(\emptyset) = Z(\emptyset) \otimes Z(\emptyset)$ 。これを満たす $V(\emptyset) = \mathbb{K}$ の元は $0, 1$ しかないので、非自明な方を採用する。

と分解すると*5, (TQFT-3)-(1) より $Z(M) \in V(\partial M) = Z(\Sigma_1)^* \otimes Z(\Sigma_2) \cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}(Z(\Sigma_1), Z(\Sigma_2))$ が言えるので, $Z(M)$ を線型写像 $Z(M): V(\Sigma_1) \rightarrow V(\Sigma_2)$ と同一視できるのである. (TQFT-1) もあわせると, 結局これまで V, Z と書いていたものは **strong monoidal functor**

$$Z: \mathbf{Cob}_{D+1} \rightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$$

の1つに集約することができる.

定義 3.8: TQFT の定義

D 次元の位相的場の理論 (Topological Quantum Field Theory; TQFT) とは, コボルディズム圏からある対称モノイダル圏 \mathcal{D} への **strict monoidal functor**^a

$$Z: \mathbf{Cob}_{D+1} \rightarrow \mathcal{D}$$

のこと.

^a strong monoidal functor とする場合もある (例えば <https://ncatlab.org/nlab/show/cobordism>) ようだが, 原論文 [?] では strict monoidal functor になっていた.

興味があるのは $\mathcal{D} = \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}, \mathbf{Hilb}$ の場合なので, 以下では **TQFT** と言ったら **strict monoidal functor**

$$Z: \mathbf{Cob}_{D+1} \rightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}, \mathbf{Hilb}$$

を指すことにしよう.

3.3 一般化対称性

エニオンのフュージョン則を議論する前に少し寄り道をして, [?], [?] に倣って**一般化対称性** (generalized symmetry)^{*6} の話をする. この節では自然単位系を使う. 時空を表す $D+1$ 次元多様体を \mathcal{M} と書き, \mathcal{M} のチャートの座標関数を $(x^0, x^1, \dots, x^D) =: (t, \mathbf{x})$ と書く. 特に D 次元多様体 Σ を使って $\mathcal{M} = \Sigma \times \mathbb{R}$ または $\Sigma \times S^1$ と書ける場合は $x^0 =: t$ で \mathbb{R} または S^1 成分のチャート (時間) を表すことにし, Σ のことを時間一定面と呼ぶ. \mathcal{M} として Minkowski 時空を考える場合, Minkowski 計量としては $[\eta_{\mu\nu}] := (-1, +1, \dots, +1)$ を用いる. Minkowski 計量でない一般の計量テンソルは $g := g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \in \Gamma(T^*\mathcal{M} \otimes T^*\mathcal{M})$ と表記し, 共役計量テンソルを $g^{\mu\nu} \partial_\mu \otimes \partial_\nu \in \Gamma(T\mathcal{M} \otimes T\mathcal{M})$ と表記する.

\mathcal{M} に計量 $g_{\mu\nu}$ が与えられたとき, **音楽同型** (musical isomorphism) を

$$\begin{aligned} \flat: \mathfrak{X}(\mathcal{M}) &\rightarrow \Omega^1(\mathcal{M}), X^\mu \partial_\mu \mapsto g_{\mu\nu} X^\nu dx^\mu, \\ \sharp: \Omega^1(\mathcal{M}) &\rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M}), \omega_\mu dx^\mu \mapsto g^{\mu\nu} \omega_\nu \partial_\mu \end{aligned}$$

で定義する. Hodge star は

$$\begin{aligned} \star: \Omega^p(\mathcal{M}) &\rightarrow \Omega^{D+1-p}, \\ dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} &\mapsto \frac{1}{(D+1-p)!} g^{\mu_1 \nu_1} \dots g^{\mu_p \nu_p} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_p \mu_{p+1} \dots \mu_{D+1}} dx^{\mu_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{D+1}} \end{aligned}$$

*5 どちらか一方が \emptyset になっても良い

*6 高次対称性 (higher form symmetry) と呼ばれることもある.

を線型に拡張することで定義される．特に不変体積要素を

$$d^{D+1}x := \star 1 = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{D+1}$$

と定義する．

\mathcal{M} の p 次元部分多様体^{*7} $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ 上で p -形式 $\omega \in \Omega^p(\mathcal{M})$ を積分する場合、包含写像 $\iota: \mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{M}$ による引き戻し $\iota^*: \Omega^p(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^p(\mathcal{N})$ を用いて

$$\int_{\mathcal{N}} \omega := \int_{\mathcal{N}} \iota^* \omega$$

と定義する．このとき、Poincaré 双対を考えることで

$$\int_{\mathcal{N}} \omega = \int_{\mathcal{M}} \omega \wedge \delta(\mathcal{N})$$

を満たす $\delta(\mathcal{N}) \in \Omega^{D+1-p}(\mathcal{M})$ (デルタ関数 p -形式と呼ぶ) の存在がわかる^{*8}．さて、 $\mathcal{N} = \partial\mathcal{M}^{(p+1)}$ の場合を考える． $\forall \omega \in \Omega^p(\mathcal{M})$ に対して Stokes の定理から

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} \omega \wedge \delta(\partial\mathcal{M}^{(p+1)}) &= \int_{\partial\mathcal{M}^{(p+1)}} \omega = \int_{\mathcal{M}^{(p+1)}} d\omega = \int_{\mathcal{M}} d\omega \wedge \delta(\mathcal{M}^{(p+1)}) \\ &= \int_{\mathcal{M}} d(\omega \wedge \delta(\mathcal{M}^{(p+1)})) + (-1)^{p+1} \int_{\mathcal{M}} \omega \wedge d(\delta(\mathcal{M}^{(p+1)})) \\ &= (-1)^{p+1} \int_{\mathcal{M}} \omega \wedge d(\delta(\mathcal{M}^{(p+1)})) \end{aligned}$$

がわかるので、

$$d\delta(\mathcal{M}^{(p+1)}) = (-1)^{p+1} \delta(\partial\mathcal{M}^{(p+1)})$$

が成り立つ． p 次元部分多様体 $\mathcal{M}^{(p)}$ と $D+1-p$ 次元部分多様体 $\mathcal{M}^{(D+1-p)}$ に対して、これらの向きを考慮した交点数を

$$I(\mathcal{M}^{(p)}, \mathcal{M}^{(D+1-p)}) := \int_{\mathcal{M}} \delta(\mathcal{M}^{(p)}) \wedge \delta(\mathcal{M}^{(D+1-p)})$$

で定義する． $\mathcal{C}^{(p-1)} = \partial\mathcal{M}^{(p)}$ を満たす $\mathcal{C}^{(p-1)}$ と $\mathcal{M}^{(D+1-p)}$ の絡み数は

$$\text{Link}(\mathcal{C}^{(p-1)}, \mathcal{M}^{(p)}) := I(\mathcal{M}^{(p)}, \mathcal{M}^{(D+1-p)})$$

と定義される．

3.3.1 通常の対称性

N 成分の場^{*9} $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{K}^N$, $x \mapsto (\varphi_i(x))_{1 \leq i \leq N}$ は、あるベクトル束 $\mathbb{K}^N \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ の切断と理解する．場の変換性はベクトル束の変換関数に由来する．

^{*7} コンパクトかつ向き付け可能だとしておけば問題が起こりにくい．

^{*8} 厳密な扱いは [?, p.270] を参照．ここでは雑に扱う．

^{*9} 場 φ の成分を表す添字として a, b, c, \dots を使う．

局所的な場のラグランジアン密度 $\mathcal{L}(\varphi_a(x), \partial_\mu \varphi_a(x))$ を持つ古典系を考える。この系の作用は

$$S[\varphi] := \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \mathcal{L}(\varphi_a(x), \partial_\mu \varphi_a(x))$$

と書かれる。場に関する作用の変分とは、勝手な「微小」切断 $\delta\psi \in \Gamma(E)$ による場の微小変換

$$\mathcal{T}_{\delta\psi}: \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E), \varphi \longmapsto \varphi + \delta\psi$$

を用いて

$$\delta_{\delta\psi} S[\varphi] := S[\mathcal{T}_{\delta\psi}(\varphi)] - S[\varphi]$$

と定義される。頭には Stokes の定理を使って

$$\begin{aligned} \delta_{\delta\psi} S[\varphi] &= \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a(x)} \delta\psi_a(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a(x))} \partial_\mu (\delta\psi_a(x)) \right) \\ &= \int_{\partial \mathcal{M}} \star b \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a(x))} \delta\psi_a(x) \right) + \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a(x))} \right) \right) \delta\psi_a(x) \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

と書けるが、境界条件 $\partial \mathcal{M} = \emptyset$ または $\delta\psi|_{\partial \mathcal{M}} = 0$ を要請して第 1 項を落とすのが普通である。

最小作用の原理とは、古典論で実現される場の配位（このような場の配位は **on shell** であると呼ばれる） $\varphi_{\text{on shell}} \in \Gamma(E)$ に対して、

$$\forall \delta\psi, \delta_{\delta\psi} S[\varphi_{\text{on shell}}] = 0 \quad (3.3.2)$$

を要請するものである。(3.3.1) から, on shell な場 $\varphi_{\text{on shell}} \in \Gamma(E)$ が満たすべき方程式として Euler-Lagrange 方程式

$$1 \leq \forall i \leq N, \forall x \in \mathcal{M}, \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a(x))} \right) \right] \Big|_{\varphi_{\text{on shell}}(x), \partial_\mu \varphi_{\text{on shell}}(x)} = 0 \quad (3.3.3)$$

が得られるのだった。煩雑なので以後 \mathcal{L} の引数は適宜省略する。

対称性変換とは、場の間の変換

$$\mathcal{T}: \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$$

であって作用を不変にするもののことである。つまり、最小作用の原理 (3.3.2) とは異なり φ ではなく \mathcal{T} が

$$\forall \varphi \in \Gamma(E), \delta_{\mathcal{T}} S[\varphi] = 0 \quad (3.3.4)$$

によって定義される。ここに $\delta_{\mathcal{T}} S[\varphi] := S[\mathcal{T}(\varphi)] - S[\varphi]$ とおいた。定義 (3.3.4) は off shell な場も考慮していることに注意すべきである。特に対称性変換 \mathcal{T} が大域的な微小パラメータ ε および $\partial_0 \varphi$ に陽に依存しない^{*10}

^{*10} この仮定は (3.3.7) の導出で使うだけ（実はもっと条件を弱めることもできる）なので、Noether の定理の導出には必要ない。

$h \in \Gamma(E)$ を用いて $\mathcal{T}(\varphi) = \mathcal{T}_{\varepsilon h}(\varphi)$ と書かれる場合を考えよう.

$$\begin{aligned}
0 = \delta_{\mathcal{T}} S[\varphi] &= \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a(x)} \varepsilon h_a(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a(x))} \partial_\mu (\varepsilon h_a(x)) \right) \\
&= \varepsilon \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a(x))} \right) \right) h_a(x) \\
&\quad + \varepsilon \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \left(\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a(x))} \right) h_a(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a(x))} \partial_\mu (h_a(x)) \right) \\
&= \varepsilon \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a(x))} \right) \right) h_a(x) \\
&\quad + \varepsilon \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a(x))} h_a(x) \right)
\end{aligned}$$

が成り立つ. i.e. **Noether カレント**を $D+1$ 個の $X^\mu|_{\partial\mathcal{M}} = 0$ を充たす C^∞ 関数 X^μ を用いて

$$j^\mu(x) := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a(x))} h_a(x) - X^\mu(x) \quad (3.3.5)$$

で定義すると, これが on shell とは限らない任意の $\varphi \in \Gamma(E)$ に対して

$$\partial_\mu j^\mu(x) = - \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a(x))} \right) \right] \Big|_{\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)} h_a(x)$$

を充たすことが分かった. 特に on shell な任意の $\varphi_{\text{on shell}} \in \Gamma(E)$ に対しては (3.3.3) からカレント (3.3.5) の保存則

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \quad (3.3.6)$$

が成り立つ. このように, 対称性変換が存在するとそれに対応して on shell な保存則 (3.3.6) を充たすカレントが存在する (**Noether の定理**).

ここで, $\mathcal{M} = \Sigma \times \mathbb{R}$ と書ける場合を考える. このとき **Noether チャージ**を

$$Q(t) := \int_{\Sigma} d^D x j^0(t, \mathbf{x})$$

と定義すると, 保存則 (3.3.6) から $\partial\Sigma = \emptyset$ または $j^\mu|_{\partial\Sigma} = 0$ を要請すれば

$$\frac{dQ(t)}{dt} = - \int_{\Sigma} d^D x \partial_i j^i(t, \mathbf{x}) = 0$$

となって時間に依存しないことがわかる. さらに, $\pi^b(x) := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \varphi_b(x))}$ とおくと

$$Q = \int_{\Sigma} d^D x (\pi^a(x) h_a(x) - X^\mu(x))$$

であるから, Poisson 括弧が

$$\begin{aligned}
\{\varphi_a(x), Q\}_{\text{P}} &= \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}y \left(\frac{\partial \varphi_a(x)}{\partial \varphi_b(y)} \frac{\partial Q}{\partial \pi^b(y)} - \frac{\partial \varphi_a(x)}{\partial \pi^b(y)} \frac{\partial Q}{\partial \varphi_b(y)} \right) \\
&= \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}y \left(\delta_a^b \delta^{D+1}(x-y) \int_{\Sigma} d^D z \delta_b^c \delta^D(z-y) h_c(z) - 0 \right) \\
&= h_a(x)
\end{aligned}$$

と求まる．つまり， Q は対称性変換 $\mathcal{T}_{\varepsilon h}$ の無限小生成子^{*11}である．従って，正準量子化を行うと

$$\left[-i\hat{Q}, \hat{\varphi}_a(x) \right] = h_a(x) \quad (3.3.7)$$

となる．

【例 3.3.1】 $D+1$ 次元自由フェルミオン系

時空 \mathcal{M} を Minkowski 時空，場をスピン束 $\mathbb{C}^4 \hookrightarrow S \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ の切断 $\psi \in \Gamma(S)$ とする (Dirac 場)．作
用はガンマ行列 γ^μ ，Dirac 共役 $\bar{\psi} := i\psi^\dagger \gamma^0$ を用いて

$$S[\psi] = - \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \bar{\psi}(x) (\gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi(x)$$

と書かれる．Euler-Lagrange 方程式 (3.3.3) は， $\bar{\psi}$, ψ に関する変分によってそれぞれ

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi &= 0, \\ \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu - m \bar{\psi} &= 0 \end{aligned}$$

となる．

この系の on shell な対称性変換は，例えば $e^{i\theta} \in \mathrm{U}(1)$ による

$$\mathcal{T}: \Gamma(S) \longrightarrow \Gamma(S), \psi \longmapsto e^{i\theta} \psi$$

がある． \mathcal{T} を生成する無限小変換は $e^{i\theta}$ の Taylor 展開より $\mathcal{T}_{i\theta\psi}: \psi \longmapsto \psi + i\theta\psi$ である．つまり，
先ほどの議論で登場した $h \in \Gamma(S)$ は今回の場合 $i\psi$ に相当する．よって対称性変換 \mathcal{T} に対応する
Noether カレント (3.3.5) は

$$j^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi} i\psi = -i\bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (3.3.8)$$

と求まる． $\mathcal{M} = \mathbb{R}^D \times \mathbb{R}$ であるから，Noether チャージは

$$Q = -i \int_{\mathbb{R}^D} d^D x \bar{\psi}(x) \gamma^0 \psi(x)$$

であり，正準量子化すると (3.3.7) より

$$\left[i\hat{Q}, \hat{\psi}(x) \right] = -i\hat{\psi}(x)$$

が成り立つ．ここから有限変換 \mathcal{T} に戻すには，指数写像を用いれば良い．こうして

$$\exp(i\theta\hat{Q}) \hat{\psi}(x) \exp(-i\theta\hat{Q}) = e^{-i\theta} \hat{\psi}(x) \quad (3.3.9)$$

だと分かった．ここで [?, p.6] に倣って $g := e^{i\theta}$, $R_g := e^{-i\theta}$, $\hat{U}_g(\mathbb{R}^D) := \exp(i\theta\hat{Q})$ とおく．

- $U_g(\mathbb{R}^D)$ を \mathcal{M} の D 次元部分多様体 \mathbb{R}^D に付随する**対称性演算子**
- $\hat{\psi}$ を**荷電物体** (charged object)

と呼ぼう． $\forall g, g' \in \mathrm{U}(1)$ に対して，対称性演算子は群のように振る舞う：

$$\hat{U}_g(\mathbb{R}^D) \hat{U}_{g'}(\mathbb{R}^D) = \hat{U}_{gg'}(\mathbb{R}^D)$$

^{*11} Hamilton フローの意味である

時間一定面を $\mathbb{R}^D \subset \mathcal{M}$ にとったのは、正準量子化により (3.3.7) を導くためであった。しかるに、時間一定面を任意の D 次元部分多様体 $\mathcal{M}^{(D)} \subset \mathcal{M}$ にとれるのではないかと期待される。積分領域が複雑になるので微分形式を使うと見通しが良い。

$$\star j := \star b(j^\mu \partial_\mu)$$

とおこう。このとき

$$d \star j = \partial_\mu j^\mu d^{D+1}x$$

が成り立つので、Noether カレントの保存則 (3.3.6) は単に $d \star j = 0$ と書ける。Noether チャージは

$$Q = \int_{\mathcal{M}^{(D)}} \star j = \int_{\mathcal{M}} \star j \wedge \delta(\mathcal{M}^{(D)})$$

である。 $\mathcal{M}^{(D)} \rightarrow \mathcal{M}^{(D)} + \delta \mathcal{M}^{(D)}$ w/ $\delta \mathcal{M}^{(D)} = \partial X^{(D+1)}$ なる時間一定面の変形を考えると、 Q の変化は保存則から

$$\delta Q = \int_{\delta \mathcal{M}^{(D)}} \star j = \int_{X^{(D)}} d \star j = 0$$

だと分かった。i.e.

$$\hat{U}_{e^{i\theta}}(\mathcal{M}^{(D)}) = \hat{U}_{e^{i\theta}}(\mathcal{M}^{(D)} + \delta \mathcal{M}^{(D)})$$

である。この意味で対称性演算子は**トポロジカル演算子**とも呼ばれる。しかし、 \mathcal{M} 上に荷電物体が存在しているときは (3.3.9) に注意しなくてはいいない。

時間一定面の変形をするので、量子化を経路積分で行う方が見通しが良い。経路積分では、任意の観測可能量 $\hat{\mathcal{O}}$ の期待値が

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle = \int [d\psi] e^{iS[\psi]} \mathcal{O}$$

と計算される。今、勝手な場の演算子 $\mathcal{O}(z)$ に対して

$$\langle \hat{\psi}(y) \hat{\mathcal{O}}(z) \rangle = \int [d\psi] e^{iS[\psi]} \psi(y) \mathcal{O}(z)$$

を計算しよう。荷電物体 $\hat{\psi}(y)$ を囲むような時間一定面 $\mathcal{M}^{(D)} \subset \mathcal{M}$ w/ $y \in \mathcal{M}^{(D)}, z \notin \mathcal{M}^{(D)}$ をとり、 $D+1$ 次元部分多様体 $\mathcal{M}^{(D+1)} \subset \mathbb{M}$ であって $\mathcal{M}^{(D)} = \partial \mathcal{M}^{(D+1)}$ を充たすようなものをとる。そして局所的な場の $U(1)$ 変換

$$\begin{aligned} \mathcal{T}: \Gamma(S) &\rightarrow \Gamma(S), \psi \mapsto (x \mapsto e^{i\theta(x)} \psi) \\ \text{w/ } \theta(x) &= \begin{cases} \theta, & x \in \mathcal{M}^{(D)}, \\ 0, & x \notin \mathcal{M}^{(D)} \end{cases} \end{aligned}$$

を行う。すると、Noether カレントの表式 (3.3.8) を用いて

$$\begin{aligned}
S[\mathcal{T}(\psi)] - S[\psi] &= - \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \, i \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \partial_\mu \theta(x) \\
&= \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \, i \partial_\mu (\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)) \theta(x) \\
&= - \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \, \partial_\mu j^\mu(x) \theta(x) \\
&= -\theta \int_{\mathcal{M}^{D+1}} d \star j \\
&= -\theta \int_{\mathcal{M}^D} \star j
\end{aligned}$$

であることがわかる。つまり、変換 \mathcal{T} の下で

$$\langle \hat{\psi}(y) \hat{\mathcal{O}}(z) \rangle = \int [d\psi] e^{iS[\psi]} \exp \left(-i\theta \int_{\mathcal{M}^D} \star j \right) e^{i\theta} \psi(y) \mathcal{O}(z)$$

と計算される。

$$\langle \hat{\psi}(y) \hat{\mathcal{O}}(z) \rangle = \int [d\psi] e^{iS[\psi]} U_g(\mathcal{M}^{(D)}) \psi(y) \mathcal{O}(z) \quad (3.3.10)$$

とすることである。

3.3.2 高次対称性

【例 3.3.1】は、荷電物体が 0 次元に分布していた。これを p 次元に分布した物体に置き換えることで p -form symmetry の概念が得られる [?, p.10] :

定義 3.9: p -form symmetry

$D+1$ 次元の場の量子論が群 G による **p -form symmetry** を持つとは、時空 \mathcal{M} の任意の $D-p$ 次元部分多様体 $\mathcal{M}^{(D-p)} \subset \mathcal{M}$ および $\forall g \in G$ に対して**対称性演算子 (トポロジカル演算子)** (topological operator) $U_g(\mathcal{M}^{(D-p)})$ が存在して以下を充たすことを言う :

- $U_g(\mathcal{M}^{(D-p)})$ は任意の p 次元部分多様体 $\mathcal{C}^{(p)} \subset \mathcal{M}$ の台を持つ**荷電物体 (演算子)** (charged object, operator) $V(\mathcal{C}^{(p)})$ に作用する。
- $\forall g, g' \in G$ に対して群の規則 (group law)

$$U_g(\mathcal{M}^{(D-p)}) U_{g'}(\mathcal{M}^{(D-p)}) = U_{gg'}(\mathcal{M}^{(D-p)})$$

が成り立つ。

- 任意の p 次元部分多様体 $\mathcal{C}^{(p)} \subset \mathcal{M}$ に対して、それに「絡む」十分小さな $D-p$ -球 $S^{D-p} \subset \mathcal{M}$ に対して、(3.3.10) と同じく経路積分の期待値の意味で

$$U_g(S^{D-p}) V(\mathcal{C}^{(p)}) = R_g(V) V(\mathcal{C}^{(p)})$$

が成り立つ。ただし $R: G \longrightarrow \text{GL}(\{\text{荷電物体}\})$ は群 G の表現である。

【例 3.3.2】 3 + 1 次元 U(1) ゲージ理論

物質場のない U(1) ゲージ理論を考える．ゲージ場を局所接続形式^a $a = a_\mu dx^\mu \in \Omega^1(\mathcal{M}; \mathfrak{u}(1))$ として与え，場の強さを $f := da$ とおく． $f = f_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ と成分表示すると $f_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu$ となる．

作用は

$$S[a] = -\frac{1}{2e^2} \int_{\mathcal{M}} d^4x f \wedge \star f = -\frac{1}{4e^2} \int_{\mathcal{M}} d^4x f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}$$

と書かれる． $\delta a \in \Omega^1(\mathcal{M}; \mathfrak{u}(1))$ を用いた作用の変分は

$$\begin{aligned} \delta_{\delta a} S[a] &= -\frac{1}{e^2} \int_{\mathcal{M}} d(\delta a) \wedge \star f \\ &= -\frac{1}{e^2} \int_{\mathcal{M}} d(\delta a \wedge \star f) - \frac{1}{e^2} \int_{\mathcal{M}} \delta a \wedge d \star f \end{aligned}$$

なので，Euler-Lagrange 方程式と Bianchi 恒等式から

$$\begin{aligned} d \star f &= 0, \\ df &= 0 \end{aligned}$$

が言える (Maxwell 方程式)．これをカレントの保存則と見做して，任意の $3-1=2$ 次元閉部分多様体 $\mathcal{M}^{(2)} \subset \mathcal{M}$ 上のトポロジカル演算子を

$$\begin{aligned} U^E_{e^{i\theta}}(\mathcal{M}^{(2)}) &:= \exp \left(i\theta \int_{\mathcal{M}^{(2)}} \frac{\star f}{e^2} \right) \\ U^M_{e^{i\theta}}(\mathcal{M}^{(2)}) &:= \exp \left(i\theta \int_{\mathcal{M}^{(2)}} \frac{f}{2\pi} \right) \end{aligned}$$

と定義しよう． $U^E_{e^{i\theta}}(\mathcal{M}^{(2)})$ が作用する荷電物体は **Wilson loop**

$$W(\mathcal{C}^{(1)}) := \exp \left(i \int_{\mathcal{C}^{(1)}} a \right)$$

である．このことを示そう．

簡単のため $S := \mathcal{M}^{(2)}$, $C := \mathcal{C}^{(1)}$ と略記する．今，**絡み数**が

$$\text{Link}(S, C) = \int_{\mathcal{M}} \delta(C) \wedge \delta(V) = 1$$

となるように $C, V, S = \partial V$ をとる．ゲージ場の変換

$$\mathcal{T}: a \mapsto a + \theta \delta(V)$$

の下で場の強さは $f \mapsto f + \theta d(\delta(V)) = f - \theta \delta(S)$ となり，作用は^b

$$\begin{aligned} S[\mathcal{T}(a)] - S[a] &= -\frac{1}{2e^2} \int_{\mathcal{M}} (f - \theta \delta(S)) \wedge \star (f - \theta \delta(S)) - S[a] \\ &= \frac{\theta}{2e^2} \int_{\mathcal{M}} (\delta(S) \wedge \star f + f \wedge \star \delta(S) - \theta \delta(S) \wedge \star \delta(S)) \\ &= \frac{\theta}{e^2} \int_{\mathcal{M}} (\delta(S) \wedge \star f - \theta \delta(S) \wedge \star \delta(S)) \\ &= \theta \int_S \frac{\star f}{e^2} - \frac{\theta^2}{2e^2} \int_S \delta(S) \end{aligned}$$

と変換する。一方, Wilson ループは

$$\begin{aligned}
W(C) &\mapsto \exp \left(i \int_C (a + \theta \delta(V)) \right) \\
&= \exp \left(i \int_C a + i\theta \int_{\mathcal{M}} \delta(V) \wedge \delta(C) \right) \\
&= \exp \left(i \int_C a - i\theta \text{Link}(S, C) \right) \\
&= e^{-i\theta} \exp \left(i \int_C a \right)
\end{aligned}$$

と変換するので^c,

$$\langle W(C) \mathcal{O} \rangle = \int [da] e^{iS[a]} U_{e^{i\theta}}^E(S) e^{-i\theta} W(C) \mathcal{O}$$

i.e.

$$\langle e^{i\theta} W(C) \mathcal{O} \rangle = \int [da] e^{iS[a]} U_{e^{i\theta}}^E(S) W(C) \mathcal{O}$$

が分かった。

トポロジカル演算子を 2 次元閉部分多様体上で定義したが, 境界を持つ場合, i.e. $C := \partial \mathcal{M}_C^{(2)} \neq \emptyset$ の場合はどうなるのか。

$$H_\theta(\mathcal{M}_C^{(2)}) := \exp \left(i\theta \int_{\mathcal{M}_C^{(2)}} \frac{\star f}{e^2} \right)$$

を考える。境界を共有するもう 1 つの 2 次元部分多様体 $\mathcal{N}_C^{(2)}$ を持ってくると

$$H_\theta(\mathcal{M}_C^{(2)}) H_\theta(\mathcal{N}_C^{(2)})^{-1} = \exp \left(i\theta \oint_{\mathcal{M}_C^{(2)} \cup_C (-\mathcal{N}_C^{(2)})} \frac{\star f}{e^2} \right)$$

これは $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ のとき C にしかよらない。このことから, $U_{e^{i\theta}}^M(\mathcal{M}_C^{(2)})$ が作用する荷電物体 (**t Hooft ループ**) を Hodge dual なゲージ場 $db := \frac{2\pi}{e^2} \star f$ によって

$$H_n(C) := \exp \left(i n \int_C b \right)$$

と定義できる。

^a 厳密には \mathcal{M} の開集合上の $\mathfrak{u}(1)$ -値 1 形式

^b $\omega \wedge \star \eta = \eta \wedge \star \omega$ に注意。

^c トポロジカル演算子を $\exp \left[i\theta \left(\int_S \frac{\star f}{e^2} - \frac{\theta^2}{2e^2} \int_S \delta(S) \right) \right]$ と再定義した。