

## 第 1 章

# モノイダル圏・フュージョン圏・高次群

この章では標数 0 の体  $\mathbb{K}$  のみを考える.

### 1.1 加法圏

#### 定義 1.1: 加法圏・アーベル圏

圏  $\mathcal{C}$  が体  $\mathbb{K}$  上の**加法圏** (additive category) であるとは, 以下を充たすこと:

##### (add-1)

任意の Hom 集合  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  が可換群の構造をもち, かつ射の合成

$$\circ: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

が群演算に関して双加法的である.

##### (add-2)

**零対象**<sup>a</sup> (zero object)  $\mathbf{0} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  が存在し,  $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  に対して  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{0}, X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(, \mathbf{0}) = 0$  を充たす<sup>b</sup>.

##### (add-3)

有限の余積が常に存在する.

加法圏  $\mathcal{C}$  は,  $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  に関して  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  が  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間の構造を持ち, かつ合成  $\circ$  が  $\mathbb{K}$ -双線形写像でもあるとき,  **$\mathbb{K}$ -線形** ( $\mathbb{K}$ -linear) であると言われる.

<sup>a</sup> 始対象かつ終対象

<sup>b</sup> 最右辺は (add-1) の意味で零ベクトル空間.

加法圏  $\mathcal{C}$  は, 以下の条件を充たすとき**アーベル圏** (abelian category) と呼ばれる:

##### (Ab-1)

任意の射  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  が核  $\ker f: \text{Ker } f \longrightarrow X$  および余核  $\text{coker } f: Y \longrightarrow \text{Coker } f$  を持つ.

**(Ab-2)**

$\text{Ker } f = \mathbf{0}$  ならば  $f = \ker(\text{coker } f)$ , かつ  $\text{Coker } f = \mathbf{0}$  ならば  $f = \text{coker}(\ker f)$

**定義 1.2: 加法的関手・完全関手**

**加法圏**  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  の間の関手  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  が**加法的** (additive) であるとは,  $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  に対して定まる写像

$$F_{X,Y}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)), f \mapsto F(f)$$

が可換群の準同型であることを言う. 特に加法圏  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  が  **$\mathbb{K}$ -線形** で, かつ  $\forall X, Y \in \mathcal{C}$  に対して  $F_{X,Y}$  が  $\mathbb{K}$ -線型写像でもあるとき,  $F$  は  **$\mathbb{K}$ -線形** ( $\mathbb{K}$ -linear) であると言う.

**アーベル圏**  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  の間の加法的関手  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  を与える.

- $F$  が**左完全** (left exact) であるとは,  $\mathcal{C}$  の任意の短完全列  $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$  に対して

$$0 \rightarrow F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z)$$

が  $\mathcal{D}$  の完全列になること.

- $F$  が**右完全** (right exact) であるとは,  $\mathcal{C}$  の任意の短完全列  $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$  に対して

$$F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z) \rightarrow 0$$

が  $\mathcal{D}$  の完全列になること.

- $F$  が**完全** (exact) であるとは,  $F$  が右完全かつ左完全であること.

**【例 1.1.1】表現の圏**

$G$  を群とする. このとき

- $G$  の表現  $(\rho, V)$  を対象とする
- $G$ -同変な  $\mathbb{K}$ -線型写像  $(\rho, V) \xrightarrow{f} (\rho', V')$  を射とする

圏を  $\mathbf{Rep}(G)$  と書く.  $\mathbf{Rep}(G)$  は**アーベル圏**である.

### 定義 1.3: 単純・半単純

- アーベル圏  $\mathcal{C}$  の対象  $X \in \mathcal{C}$  が**単純** (simple) であるとは、任意のモノ射  $i: U \hookrightarrow X$  が 0 であるか同型射であることを言う。
- アーベル圏  $\mathcal{C}$  が**半単純** (semisimple) であるとは、 $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  が単純対象の有限余積と同型であることを言う。i.e. 単純対象の族  $\{V_i \in \text{Ob}(\mathcal{C})\}_{i \in I}$  および有限個を除いて 0 であるような非負整数の族  $\{N_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}_{i \in I}$  が存在して

$$X \cong \bigoplus_{i \in I} N_i X_i$$

が成り立つこと。

### 定義 1.4: 有限性

アーベル圏  $\mathcal{C}$  とその対象  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  を与える。

- $X$  が**有限長** (finite length) を持つとは、有限のフィルトレーション

$$0 = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_{n-1} \subset X_n = X$$

であって  $X_i/X_{i-1} := \text{Coker}(X_{i-1} \hookrightarrow X_i)$  ( $\forall i$ ) が**単純対象**であるようなもの (**Jordan-Hölder 列**と言う) が存在することを言う。このときの  $n$  を  $X$  の**長さ** (length) と呼ぶ<sup>a</sup>。

以下、アーベル圏  $\mathcal{C}$  は  **$\mathbb{K}$ -線形**であるとする。

- $\mathcal{C}$  が**局所有限** (locally finite) であるとは、以下の 2 条件を充たすこと：
  - (IFin-1)  $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  に対して、 $\mathbb{K}$ -ベクトル空間  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  が有限次元
  - (IFin-2)  $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  が有限長を持つ。
- $\mathcal{C}$  が**有限** (finite) であるとは、以下の 4 条件を充たすこと：
  - (Fin-1)  $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  に対して、 $\mathbb{K}$ -ベクトル空間  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  が有限次元
  - (Fin-2)  $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  が有限長を持つ。
  - (Fin-3)  $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  が射影的被覆<sup>b</sup>を持つ。
  - (Fin-4) 単純対象の同型類が有限個である。

<sup>a</sup> Jordan-Hölder の定理 [?, THEOREM 1.5.4, p.5] から、 $X$  の任意の Jordan-Hölder 列は存在すれば同一の長さを持つ。

<sup>b</sup>  $P \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  が**射影的** (projective) であるとは、関手  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, -)$  が完全関手であることを言う。 $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  の**射影的被覆** (projective cover) とは、射影的对象  $P_X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  とエビ射  $p_X: P_X \twoheadrightarrow X$  の組み  $(P_X, p_X)$  であって、任意の射影的对象  $P \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  およびエビ射  $p: P \twoheadrightarrow X$  に対してあるエビ射  $h: P \twoheadrightarrow P_X$  が存在して  $p_X \circ h = p$  を充たすようなもののこと。

## 1.2 モノイダル圏

これまで何回か登場したが、モノイダル圏についてまとめておく：

### 定義 1.5: モノイダル圏

モノイダル圏 (monoidal category) は、以下の 5 つのデータからなる：

- 圏  $\mathcal{C}$
- テンソル積 (tensor product) と呼ばれる関手  $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$
- 単位対象 (unit object)  $I \in \text{Ob}(\mathcal{C})$
- associator と呼ばれる自然同値

$$\{a_{X,Y,Z}: (X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{\cong} X \otimes (Y \otimes Z)\}_{X,Y,Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

- left/right unitors と呼ばれる自然同値

$$\{l_X: I \otimes X \xrightarrow{\cong} X\}_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})},$$

$$\{r_X: X \otimes I \xrightarrow{\cong} X\}_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは  $\forall X, Y, Z, W \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  について以下の 2 つの図式を可換にする：

(triangle diagram)

$$\begin{array}{ccc} (X \otimes I) \otimes Y & \xrightarrow{a_{X,I,Y}} & X \otimes (I \otimes Y) \\ & \searrow r_X \otimes \text{Id}_Y & \swarrow \text{Id}_X \otimes l_Y \\ & X \otimes Y & \end{array}$$

(pentagon diagram)

$$\begin{array}{ccccc} & & ((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z & & \\ & \swarrow a_{W \otimes X, Y, Z} & & \searrow a_{W, X, Y \otimes \text{Id}_Z} & \\ (W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) & & & & (W \otimes (X \otimes Y)) \otimes Z \\ & \searrow a_{W, X, Y \otimes Z} & & \downarrow a_{W, X \otimes Y, Z} & \\ & & W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z)) & & W \otimes ((X \otimes Y) \otimes Z) \\ & & \swarrow \text{Id}_Z \otimes a_{X, Y, Z} & & \\ & & & & \end{array}$$

モノイダル圏  $\mathcal{C}$  が**厳密** (strict) であるとは、 $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  に対して

$$(X \otimes Y) \otimes Z = X \otimes (Y \otimes Z),$$

$$I \otimes X = X, \quad X \otimes I = X$$

が成り立ち、かつ  $a_{X,Y,Z}$ ,  $l_X$ ,  $r_X$  が恒等射であることを言う。

！ 定義 1.5 で言うモノイダル圏を，**弱いモノイダル圏** (weak monoidal category) と呼ぶこともある。

### 【例 1.2.1】 $\mathbf{Cat}$ のモノイダル構造

$\mathbf{Cat}$  を小圏と関手が成す圏とする。このとき、関手

$$\times: \mathbf{Cat} \times \mathbf{Cat} \longrightarrow \mathbf{Cat}$$

を  $\text{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) := \text{Ob}(\mathcal{C}) \times \text{Ob}(\mathcal{D})$  により定めると、組み  $(\mathbf{Cat}, \times, I)$  は厳密なモノイダル圏になる。  
ただし  $I$  はただ 1 つの対象  $\bullet$  を持ち、 $\text{Hom}_I(\bullet, \bullet) = \{\text{Id}_\bullet\}$  とする圏である<sup>a</sup>

<sup>a</sup> これは  $\mathbf{Cat}$  の終対象でもある。

### 定義 1.6: 双対

モノイダル圏  $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$  およびその任意の対象  $X, X^* \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  を与える。 $X^*$  が  $X$  の**左双対** (left dual) であるとは、

- **coevaluation** と呼ばれる射

$$\text{coev}_X^L: I \longrightarrow X \otimes X^*$$

- **evaluation** と呼ばれる射

$$\text{ev}_X^L: X^* \otimes X \longrightarrow I$$

が存在して以下の図式を可換にすることを言う：

(zig-zag equations)

$$\begin{array}{ccc}
 I \otimes X & \xrightarrow{\text{coev}_X^L \otimes \text{Id}_X} & (X \otimes X^*) \otimes X \\
 \downarrow r_X & & \downarrow a_{X, X^*, X} \\
 & & X \otimes (X^* \otimes X) \\
 & & \downarrow \text{Id}_X \otimes \text{ev}_X^L \\
 X & \xleftarrow{r_X} & X \otimes I
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
X^* \otimes I & \xrightarrow{\text{Id}_{X^*} \otimes \text{coev}_X^L} & X^* \otimes (X \otimes X^*) \\
\downarrow l_{X^*} & & \downarrow a_{X^*, X, X^*}^{-1} \\
& & (X^* \otimes X) \otimes X^* \\
& & \downarrow \text{ev}_X^L \otimes \text{Id}_{X^*} \\
X^* & \xleftarrow{l_{X^*}} & I \otimes X^*
\end{array}$$

モノイダル圏  $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$  およびその任意の対象  $X, {}^*X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  を与える.  ${}^*X$  が  $X$  の右双対 (right dual) であるとは,

- 射

$$\text{coev}_X^R: I \longrightarrow {}^*X \otimes X$$

- 射

$$\text{ev}_X^R: X \otimes {}^*X \longrightarrow I$$

が存在して以下の図式を可換にすることを言う：

(zig-zag equations)

$$\begin{array}{ccc}
X \otimes I & \xrightarrow{\text{Id}_X \otimes \text{coev}_X^R} & X \otimes ({}^*X \otimes X) \\
\downarrow l_X & & \downarrow a_{X, {}^*X, X}^{-1} \\
& & (X \otimes {}^*X) \otimes X \\
& & \downarrow \text{ev}_X^R \otimes \text{Id}_X \\
X & \xleftarrow{l_X} & I \otimes X
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
I \otimes {}^*X & \xrightarrow{\text{coev}_X^R \otimes \text{Id}_{{}^*X}} & ({}^*X \otimes X) \otimes {}^*X \\
\downarrow l_{X^*} & & \downarrow a_{{}^*X, X, {}^*X}^{-1} \\
& & {}^*X \otimes (X \otimes {}^*X) \\
& & \downarrow \text{Id}_{{}^*X} \otimes \text{ev}_X^R \\
{}^*X & \xleftarrow{r_{X^*}} & {}^*X \otimes I
\end{array}$$

ストリング図式で書くときは

$$\text{coev}_X^L := \text{diagram of a cup with an arrow pointing down} \quad \text{ev}_X^L := \text{diagram of a cap with an arrow pointing down} \quad \text{coev}_X^R := \text{diagram of a cup with an arrow pointing up} \quad \text{ev}_X^R := \text{diagram of a cap with an arrow pointing up}$$

とする. ストリング図式において  $\text{coev}^L, \text{coev}^R$  に対する (zig-zag equations) は

$$\begin{aligned} \text{diagram of a vertical line with an upward arrow} &= \text{diagram of a zig-zag with an upward arrow} \\ \text{diagram of a vertical line with a downward arrow} &= \text{diagram of a zig-zag with a downward arrow} \end{aligned}$$

$\text{coev}^R, \text{coev}^L$  に対する (zig-zag equations) は

$$\begin{aligned} \text{diagram of a vertical line with an upward arrow} &= \text{diagram of a zig-zag with a downward arrow} \\ \text{diagram of a vertical line with a downward arrow} &= \text{diagram of a zig-zag with an upward arrow} \end{aligned}$$

と書ける.

!  $X^*$  が  $X$  の左双対であるならば,  $X$  は  $X^*$  に関して  $\text{ev}_{X^*}^R = \text{ev}_X^L, \text{coev}_{X^*}^R = \text{coev}_X^L$  とした右双対となっている. 従って, 左/右双対をもつ任意の  $X$  に対して  $*(X^*) \cong X \cong X \cong (*X)^*$  が成り立つ.

#### 定義 1.7: rigid なモノイダル圏

モノイダル圏  $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$  が **rigid** であるとは,  $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  が左・右双対を持つことを言う.

### 定義 1.8: 組紐付きモノイダル圏

組紐付きモノイダル圏 (braided monoidal category) とは, 以下の 2 つからなる:

- モノイダル圏  $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$
- 組紐 (braiding) と呼ばれる自然同型

$$\{b_{X,Y}: X \otimes Y \xrightarrow{\cong} Y \otimes X\}_{X,Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは  $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  について以下の図式を可換にする:

(hexagon diagrams)

$$\begin{array}{ccc} X \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{a_{X,Y,Z}^{-1}} (X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{b_{X,Y} \otimes \text{Id}_Z} (Y \otimes X) \otimes Z \\ \downarrow b_{X,Y \otimes Z} & & \downarrow a_{Y,X,Z} \\ (Y \otimes Z) \otimes X & \xleftarrow{a_{Y,Z,X}^{-1}} Y \otimes (Z \otimes X) & \xleftarrow{\text{Id}_X \otimes b_{X,Z}} Y \otimes (X \otimes Z) \\ \\ (X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{a_{X,Y,Z}} X \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{\text{Id}_X \otimes b_{Y,Z}} X \otimes (Z \otimes Y) \\ \downarrow b_{X \otimes Y, Z} & & \downarrow a_{X,Z,Y}^{-1} \\ Z \otimes (X \otimes Y) & \xleftarrow{a_{Z,X,Y}} (Z \otimes X) \otimes Y & \xleftarrow{b_{X,Z} \otimes \text{Id}_Y} (X \otimes Z) \otimes Y \end{array}$$

組紐付きモノイダル圏  $\mathcal{C}$  であって,  $\mathcal{C}$  の組紐が  $b_{X,Y} = b_{Y,X}^{-1}$  を満たすもののことを対称モノイダル圏 (symmetric monoidal category) と呼ぶ.

### 定義 1.9: モノイダル関手

2 つのモノイダル圏  $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, I_{\mathcal{C}}, a^{\mathcal{C}}, l^{\mathcal{C}}, r^{\mathcal{C}}), (\mathcal{D}, \otimes_{\mathcal{D}}, I_{\mathcal{D}}, a^{\mathcal{D}}, l^{\mathcal{D}}, r^{\mathcal{D}})$  の間の関手

$$F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

が弱いモノイダル関手 (lax monoidal functor) であるとは,

- 射

$$\varepsilon: I_{\mathcal{D}} \longrightarrow F(I_{\mathcal{C}})$$

- 自然変換

$$\{\mu_{X,Y}: F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y) \longrightarrow F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y)\}_{X,Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

があって,  $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  に対して以下の図式が可換になること:

(associativity)



$$\begin{array}{ccc}
(F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y)) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z) & \xrightarrow{a_{F(X), F(Y), F(Z)}^{\mathcal{D}}} & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} (F(Y) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z)) \\
\downarrow \mu_{X, Y} \otimes \text{Id}_{F(Z)} & & \downarrow \text{Id}_{F(X)} \otimes \mu_{Y, Z} \\
F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z) & & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y \otimes_{\mathcal{C}} Z) \\
\downarrow \mu_{X \otimes_{\mathcal{C}} Y, Z} & & \downarrow \mu_{X, Y \otimes_{\mathcal{C}} Z} \\
F((X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{C}} Z) & \xrightarrow{F(a_{X, Y, Z}^{\mathcal{C}})} & F(X \otimes_{\mathcal{C}} (Y \otimes_{\mathcal{C}} Z))
\end{array}$$

(unitality)

$$\begin{array}{ccc}
I_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathcal{D}} F(X) & \xrightarrow{\varepsilon \otimes \text{Id}_{F(X)}} & F(I_{\mathcal{C}}) \otimes_{\mathcal{D}} F(X) \\
\downarrow l_{F(X)}^{\mathcal{D}} & & \downarrow \mu_{I_{\mathcal{C}}, X} \\
F(X) & \xleftarrow{F(l_X^{\mathcal{C}})} & F(I_{\mathcal{C}} \otimes_{\mathcal{C}} X)
\end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccc}
F(X) \otimes_{\mathcal{D}} I_{\mathcal{D}} & \xrightarrow{\text{Id}_{F(X)} \otimes \varepsilon} & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(I_{\mathcal{C}}) \\
\downarrow r_{F(X)}^{\mathcal{D}} & & \downarrow \mu_{X, I_{\mathcal{C}}} \\
F(X) & \xleftarrow{F(r_X^{\mathcal{C}})} & F(X \otimes_{\mathcal{C}} I_{\mathcal{C}})
\end{array}$$

- 弱いモノイダル関手  $F$  の  $\varepsilon$  と  $\mu_{X, Y}$  が全て同型射ならば,  $F$  は**強いモノイダル関手** (strong monoidal functor) と呼ばれる.
- 弱いモノイダル関手  $F$  の  $\varepsilon$  と  $\mu_{X, Y}$  が全て恒等射ならば,  $F$  は**厳密なモノイダル関手** (strict monoidal functor) と呼ばれる.

### 定義 1.10: モノイダル自然変換

2つのモノイダル圏  $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, I_{\mathcal{C}}, a^{\mathcal{C}}, l^{\mathcal{C}}, r^{\mathcal{C}})$ ,  $(\mathcal{D}, \otimes_{\mathcal{D}}, I_{\mathcal{D}}, a^{\mathcal{D}}, l^{\mathcal{D}}, r^{\mathcal{D}})$  の間の2つの弱いモノイダル関手  $(F_i: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, \varepsilon_i: I_{\mathcal{D}} \rightarrow F_i(I_{\mathcal{C}}), \{\mu_{iX,Y}: F_i(X) \otimes_{\mathcal{D}} F_i(Y) \rightarrow F_i(X \otimes_{\mathcal{C}} Y)\}_{X,Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})})$   $w/$   $i = 1, 2$  の間の自然変換

$$\begin{array}{ccc} & F_1 & \\ \curvearrowright & \downarrow \tau & \curvearrowleft \\ \mathcal{C} & & \mathcal{D} \\ \curvearrowleft & \uparrow F_2 & \end{array}$$

がモノイダル自然変換 (monoidal natural transformation) であるとは,  $\forall X, Y \in \mathcal{C}$  に対して以下の図式が可換になること:

(テンソル積の保存)

$$\begin{array}{ccc} F_1(X) \otimes_{\mathcal{D}} F_1(Y) & \xrightarrow{\tau_X \otimes_{\mathcal{D}} \tau_Y} & F_2(X) \otimes_{\mathcal{D}} F_2(Y) \\ \mu_{1X,Y} \downarrow & & \downarrow \mu_{2X,Y} \\ F_1(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) & \xrightarrow{\tau_{X \otimes_{\mathcal{C}} Y}} & F_2(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \end{array}$$

(単位対象の保存)

$$\begin{array}{ccc} & I_{\mathcal{D}} & \\ \varepsilon_1 \swarrow & & \searrow \varepsilon_2 \\ F_1(I_{\mathcal{C}}) & \xrightarrow{\tau_{I_{\mathcal{C}}}} & F_2(I_{\mathcal{C}}) \end{array}$$

## 1.3 テンソル圏・フュージョン圏

! これまではモノイダル圏の対象を英大文字  $X, Y, Z, \dots$  で, 単位対象を  $I$  と書いてきたが, 以下では対象を英小文字  $x, y, z, \dots$  で, 単位対象を  $1$  と書くことにする.

### 定義 1.11: 環圏

圏  $\mathcal{C}$  が多重環圏 (multiring category) であるとは, 以下の条件を満たすこと:

- (mR-1)  $\mathcal{C}$  は局所有有限な  $\mathbb{K}$ -線形アーベル圏
- (mR-2)  $\mathcal{C}$  はモノイダル圏  $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$
- (mR-3) 関手  $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  が  $\mathbb{K}$ -線形かつ双完全

圏  $\mathcal{C}$  が環圏 (ring category) であるとは, 以下の条件を満たすこと:

- (R-1)  $\mathcal{C}$  は多重環圏
- (R-2)  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, 1) \cong \mathbb{K}$

### 定義 1.12: テンソル圏・フュージョン圏

圏  $\mathcal{C}$  が多重テンソル圏 (multitensor category) であるとは、以下の条件を充たすこと：

(mT-1)  $\mathcal{C}$  は局所有限な  $\mathbb{K}$ -線形アーベル圏

(mT-2)  $\mathcal{C}$  は rigid なモノイダル圏  $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$

(mT-3) 関手  $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  が  $\forall x, y, z, w \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  に対して定める写像  $\otimes_{x,y,z,w}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x \otimes z, y \otimes w)$  が  $\mathbb{K}$ -双線形

圏  $\mathcal{C}$  がテンソル圏 (tensor category) であるとは、以下の条件を充たすこと：

(T-1)  $\mathcal{C}$  は多重テンソル圏

(T-2)  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, 1) \cong \mathbb{K}$

圏  $\mathcal{C}$  が多重フュージョン圏 (multifusion category) であるとは、以下の条件を充たすこと：

(mFus-1)  $\mathcal{C}$  は多重テンソル圏

(mFus-2)  $\mathcal{C}$  は  $\mathbb{K}$ -線形アーベル圏として有限かつ半単純

圏  $\mathcal{C}$  がフュージョン圏 (fusion category) であるとは、以下の条件を充たすこと：

(Fus-1)  $\mathcal{C}$  はテンソル圏

(Fus-2)  $\mathcal{C}$  は  $\mathbb{K}$ -線形アーベル圏として有限かつ半単純

### 命題 1.1: 多重テンソル圏のテンソル積は双完全

多重テンソル圏  $\mathcal{C}$  の関手  $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  は双完全である。

証明 [?, PROPOSITION 4.2.1., p.66] ■

命題 1.1 より,

$$(\text{多重}) \text{ テンソル圏} \implies (\text{多重}) \text{ 環圏}$$

が言える。

### 【例 1.3.1】 圏 $\mathcal{C}_G \cdot \text{Vec}_G$

$G$  を群とする。厳密なモノイダル圏  $\mathcal{C}_G$  を,

- $\text{Ob}(\mathcal{C}_G) := G$
- $\forall g_1, g_2 \in G$  に対して

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_G}(g_1, g_2) := \begin{cases} \text{U}(1), & g_1 = g_2 \\ \emptyset, & g_1 \neq g_2 \end{cases}$$

- $g_1 \otimes g_2 := g_1 g_2$  かつ,  $g \xrightarrow{\forall \theta_1, \theta_2} g$  に対して  $\theta_1 \otimes \theta_2 := \theta_1 \theta_2$
- $1 := 1_G$

- $a_{g_1, g_2, g_3} := 1, l_g := 1, r_g := 1$

で定義する.

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$  とする. 厳密なモノイダル圏  $\mathbf{Vec}_G$  を,

- $G$ -graded な  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間

$$V = \bigoplus_{g \in G} V_g$$

を対象とする.

- grading を保存する  $\mathbb{K}$ -線型変換

$$f: \bigoplus_{g \in G} V_g \longrightarrow \bigoplus_{g \in G} W_g \quad \text{s.t.} \quad \forall g \in G, f(V_g) \subset W_g$$

を射とする.

- テンソル積  $\otimes: \mathbf{Vec}_G \times \mathbf{Vec}_G \longrightarrow \mathbf{Vec}_G$  は,

$$V \otimes W := \bigoplus_{g \in G} \left( \bigoplus_{\substack{x, y \in G, \\ xy = g}} V_x \otimes_{\mathbb{K}} W_y \right)$$

と定義する.

- 単位対象は  $1 := \mathbb{K}$  とする<sup>a</sup>
- $a_{g_1, g_2, g_3} := 1, l_g := 1, r_g := 1$

によって定義する.  $G$  が有限群ならば  $\mathcal{C}_G$  はフュージョン圏である.

---

<sup>a</sup>  $1_G \in G$  成分以外が全て 0

### 【例 1.3.2】 圏 $\mathcal{C}_G^\alpha \cdot \mathbf{Vec}_G^\alpha$

$G$  を群とする. 【例 1.3.1】 の associator と unitors を非自明にしてみよう. 今  $\alpha \in Z^3_{\text{Grp}}(G; \mathbb{U}(1))$  を 1 つ固定する<sup>a</sup>.

モノイダル圏  $\mathcal{C}_G^\alpha$  を,

$$\begin{aligned} a_{g_1, g_2, g_3} &:= \alpha(g_1, g_2, g_3), \\ l_g &:= \alpha(1, 1, g)^{-1}, \\ r_g &:= \alpha(g, 1, 1) \end{aligned}$$

とおくことにより定義する<sup>b</sup>. 実際, コサイクル条件および  $U(1)$  の可換性により

$$\begin{aligned}
& (\text{Id}_{g_4} \otimes a_{g_1, g_2, g_3}) \circ a_{g_4, g_1 \otimes g_2, g_3} \circ (a_{g_4, g_1, g_2} \otimes \text{Id}_{g_3}) \\
&= \alpha(g_1, g_2, g_3) \alpha(g_4, g_1 g_2, g_3) \alpha(g_4, g_1, g_2) \\
&= \alpha(g_4 g_1, g_2, g_3) \alpha(g_4, g_1, g_2 g_3) \\
&= \alpha(g_4, g_1, g_2 g_3) \alpha(g_4 g_1, g_2, g_3) \\
&= a_{g_4, g_1, g_2 g_3} \circ a_{g_4 \otimes g_1, g_2, g_3}
\end{aligned}$$

の通りに **(pentagon identity)** が成り立ち,

$$\begin{aligned}
(\text{Id}_{g_1} \otimes l_{g_2}) \circ a_{g_1, 1, g_2} &= \frac{\alpha(g_1, 1, g_2)}{\alpha(1, 1, g_2)} \\
&= \frac{\alpha(g_1, 1, 1) \alpha(g_1, 1, g_2) \alpha(1, 1, g_2)}{\alpha(g_1, 1, g_2) \alpha(1, 1, g_2)} \\
&= \alpha(g_1, 1, 1) \\
&= r_{g_1}
\end{aligned}$$

の通りに **(triangle identity)** が成り立つ. もし  $l_g = r_g = \text{Id}_g$  にしたければ

$$\forall g, h \in G, \alpha(g, 1, h) = 1_G$$

を充たす  $\alpha \in Z_{\text{Grp}}^3(G; U(1))$  をとることが必要十分である (正規化条件).

圏  $\mathbf{Vec}_G^\alpha$  は,  $\alpha \in Z_{\text{Grp}}^3(G; \mathbb{K}^\times)$  に対して  $\mathcal{C}_G^\alpha$  の構成を線形に拡張することで得られる.  $G$  が有限群ならば  $\mathbf{Vec}_G^\alpha$  は **フュージョン圏** である.

<sup>a</sup> i.e. 3-コサイクル

<sup>b</sup> 他のデータは **【例 1.3.1】** と全く同じである

### 定義 1.13: テンソル関手・ファイバー関手

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$  を **多重環圏** とする. 関手  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  を与える.  $F$  が **テンソル関手** (tensor functor) であるとは, 以下を充たすこと:

**(TF-1)**  $F$  は  **$\mathbb{K}$ -線形**

**(TF-2)**  $F$  は **強いモノイダル関手**

**(TF-3)**  $F$  は **完全かつ忠実**<sup>a</sup>

特に  $\mathcal{D} = \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$  のとき, テンソル関手  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$  は **ファイバー関手** (fiber functor) と呼ばれる.

<sup>a</sup> この条件は [?, DEFINITION 4.2.5., p.66] に合わせて付けたものであり, テンソル関手と言った際には必要とされないことも多い.

【例 1.3.3】圏  $\mathbf{Vec}_G^\alpha$  のテンソル関手

$G_1, G_2$  を群,  $\omega_i \in Z_{\text{Grp}}^3(G_i; \mathbf{U}(1))$  を 3-コサイクルとする. **テンソル関手**

$$F: \mathcal{C}_{G_1}^{\alpha_1} \longrightarrow \mathcal{C}_{G_2}^{\alpha_2}$$

とはどのようなものだろうか.

まず  $F$  は**強いモノイダル関手**であるから, 対象の対応について群準同型

$$f: G_1 \longrightarrow G_2$$

このとき**強いモノイダル関手**の持つ自然変換とは, ある  $\mu \in C_{\text{Grp}}^2(G_1; \mathbf{U}(1))$  を用いて

$$\mu_{g_1, g_2} := \mu(g_1, g_2) \text{Id}_{f(g_1 g_2)}: f(g_1) f(g_2) \xrightarrow{\cong} f(g_1 g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G_1$$

と書けるが, **(associativity)** から

$$\mu(g_1, g_2 g_3) \mu(g_2, g_3) \alpha_2(f(g_1), f(g_2), f(g_3)) = \alpha_1(g_1, g_2, g_3) \mu(g_1 g_2, g_3) \mu(g_1, g_2)$$

でなくてはならない. i.e.

$$\alpha_1 = f^* \omega_2 \cdot \delta \mu \quad (1.3.1)$$

である. 逆に群準同型  $f: G_1 \longrightarrow G_2$  および  $\mu \in C_{\text{Grp}}^3(G_1; \mathbf{U}(1))$  の組  $(f, \mu)$  であって (1.3.1) を満たすものが与えられると, これらを素材にして**テンソル関手**

$$F: \mathcal{C}_{G_1}^{\alpha_1} \longrightarrow \mathcal{C}_{G_2}^{\alpha_2}$$

を構成することができる. このような関手  $F$  が圏同値になる必要十分条件は  $f$  が群の同型写像になることである.

【例 1.3.4】圏  $\mathbf{Vec}_G^\alpha$  のモノイダル自然変換

【例 1.3.3】の構成で得られる**テンソル関手**を  $F_{f, \mu}$  と書く. このとき, **モノイダル自然変換**

$$\begin{array}{ccc} & F_{f, \mu} & \\ \text{Vec}_{G_1}^{\alpha_1} & \xrightarrow{\quad} & \text{Vec}_{G_2}^{\alpha_2} \\ & F_{f', \mu'} & \end{array} \quad \tau$$

を同定しよう. まず自然変換と言うからには  $\forall g \in G_1$  に対して

$$\tau_g := \tau(g) \text{Id}_{f(g)}: f(g) \longrightarrow f'(g)$$

を定めないとはいけない. ただし  $\tau \in C_{\text{Grp}}^1(G_1; \mathbf{U}(1))$  である. ところが, 【例 1.3.2】より  $\mathbf{Vec}_{G_2}^{\alpha_2}$  の射は  $f(g) = f'(g)$ , i.e.  $f = f'$  でないと自然変換が存在しない.

(テンソル積の保存) の条件から,  $\forall g_1, g_2 \in G_1$  に対して

$$\mu'(g_1, g_2)\tau(g_1)\tau(g_2) = \tau(g_1g_2)\mu(g_1, g_2)$$

でなくてはならない. i.e.

$$\mu = \mu' \cdot \delta\tau \quad (1.3.2)$$

である。逆に (1.3.2) を充たす  $\tau \in C^1_{\text{Grp}}$  からモノイダル自然変換  $\tau: F_{f, \mu} \Longrightarrow F_{f, \mu'}$  を構成することができる。

### 1.3.1 量子次元

### 定義 1.14: 量子トレース

- rigid なモノイダル圏  $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$
- 対象  $V \in \mathcal{C}$
- $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(V, V^{**}), g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(V, {}^{**}V)$

を与える.

- $f$  の左量子トレース (left quantum trace) を以下で定義する：

$$\mathrm{Tr}^L(f): 1 \xrightarrow{\mathrm{coev}_V^L} V \otimes V^* \xrightarrow{f \otimes \mathrm{Id}_V} V^{**} \otimes V^* \xrightarrow{\mathrm{ev}_{V^*}^L} 1$$

string関式で書くと次のようになる<sup>a</sup>：

$$\mathrm{Tr}^{\mathrm{L}}(f) := \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ V^{**} \nearrow \\ \boxed{f} \\ \searrow V \\ \text{ } \end{array} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(1, 1)$$

- $g$  の右量子トレース (right quantum trace) を以下で定義する：

$$\mathrm{Tr}^R(g): 1 \xrightarrow{\mathrm{coev}^R_V} {}^*V \otimes V \xrightarrow{\mathrm{Id}_*V \otimes g} {}^*V \otimes {}^{**}V \xrightarrow{\mathrm{ev}^{**}_V} 1$$

文字列を文字列として扱うには、`String` クラスの `toString()` メソッドを使う。文字列を文字列として扱うには、`String` クラスの `toString()` メソッドを使う。文字列を文字列として扱うには、`String` クラスの `toString()` メソッドを使う。

$$\mathrm{Tr}^{\mathrm{L}}(g) := \begin{array}{c} \text{---} *V \\ \downarrow \\ \text{---} V \\ \uparrow \\ \text{---} **V \end{array} g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(1, 1)$$

<sup>a</sup>  $\text{ev}_{V^*}^L = \text{ev}_{V^{**}}^R$  を使った.<sup>b</sup>  $\text{ev}_{**V}^R = \text{ev}_{*V}^L$  を使った.

### 定義 1.15: 旋回構造

rigid なモノイダル圏  $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$  を与える.  $\mathcal{C}$  の旋回構造 (pivotal structure) とは, モノイダル自然同型

A commutative diagram with two objects,  $C$  at the top and  $(-)^{**}$  at the bottom. A curved arrow labeled  $\text{Id}_C$  points from  $C$  to  $C$ . A curved arrow labeled  $(-)^{**}$  points from  $C$  to  $(-)^{**}$ . A straight arrow labeled  $p$  points from  $\text{Id}_C$  to  $(-)^{**}$ .

のこと.

### 定義 1.16: 球狀圈・量子次元

**テンソル圏**  $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \mathrm{ev}^L, \mathrm{coev}^L, \mathrm{ev}^R, \mathrm{coev}^R)$  が**巡回構造**  $p$  を持つとする. 圏  $\mathcal{C}$  が**球状** (spherical) であるとは,  $\forall V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$  に対して

$$\text{Tr}^L(p_V) = \begin{array}{c} \text{---} V^{**} \text{---} \\ \uparrow \\ \boxed{p_V} \\ \downarrow \\ \text{---} V \text{---} \end{array} V^* = {}^*V \begin{array}{c} \text{---} {}^{**}V \text{---} \\ \uparrow \\ \boxed{p_V} \\ \downarrow \\ \text{---} V \text{---} \end{array} = \text{Tr}^R(p_V)$$

が成り立つことを言う。



球状圏  $\mathcal{C}$  の対象  $V \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  の量子次元 (quantum dimension) を以下で定義する：

$$\dim_p(V) := \text{Tr}^L(p_V) := \text{Tr}^L(a_V) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, 1)$$

### 1.3.2 Deligne のテンソル積

#### 定義 1.17: Deligne のテンソル積

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$  を局所有限な  $\mathbb{K}$ -線形アーベル圏とする。Deligne のテンソル積 (Deligne's tensor product) とは、以下の性質をみたす  $\mathbb{K}$ -線形アーベル圏  $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$  と双右完全関手  $\boxtimes: \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$  の組み  $(\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}, \boxtimes)$  のこと：

#### (普遍性)

任意の双右完全関手  $F: \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$  に対し、ある双右完全関手  $\bar{F}: \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$  が一意的に存在して  $\bar{F} \circ \boxtimes = F$  を充たす。

#### 命題 1.2: Deligne のテンソル積の基本性質

- (1) Deligne のテンソル積は存在し、それ自身が局所有限な  $\mathbb{K}$ -線形アーベル圏になる。
- (2) 関手  $\boxtimes: \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$  は双完全であり、

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x_1, y_1) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}}(x_1 \boxtimes x_2, y_1 \boxtimes y_2)$$

を充たす。

- (3)  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  が (多重) 環圏/(多重) テンソル圏ならば  $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$  は (多重) 環圏/(多重) テンソル圏である。

**証明** (1) [?, PROPOSITION 1.11.2., p.15]

(2) [?, PROPOSITION 1.11.2., p.15]

(3) [?, PROPOSITION 4.6.1., p.73]

■

## 1.4 加群圏

### 定義 1.18: 左加群圏

$(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r)$  をモノイダル圏とする.

左  $\mathcal{C}$ -加群圏 (left  $\mathcal{C}$ -module category)  $\mathcal{M}$  は, 以下のデータからなる:

- 圏  $\mathcal{M}$
- 関手  $\triangleright: \mathcal{C} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$
- 自然同型  $\{\alpha_{x,y,m}: (x \otimes y) \triangleright m \longrightarrow x \triangleright (y \triangleright m)\}_{x,y \in \text{Ob}(\mathcal{C}), m \in \text{Ob}(\mathcal{M})}$

これらは以下の条件を充たす:

(IMod-1) 関手  $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}, m \mapsto 1 \triangleright m$  は圏の自己同型である

(IMod-2)  $\forall x, y, z \in \text{Ob}(\mathcal{C}), \forall m \in \text{Ob}(\mathcal{M})$  に対して以下の図式を可換にする:

$$\begin{array}{ccc}
 & ((x \otimes y) \otimes z) \triangleright m & \\
 \swarrow a_{x,y,z} \triangleright \text{Id}_m & & \searrow \alpha_{x \otimes y, z, m} \\
 (x \otimes (y \otimes z)) \triangleright m & & (x \otimes y) \triangleright (z \triangleright m) \\
 \searrow \alpha_{x, y \otimes z, m} & & \downarrow \alpha_{x, y, z \triangleright m} \\
 & x \triangleright ((y \otimes z) \triangleright m) & \\
 \nearrow \text{Id}_x \triangleright \alpha_{y, z, m} & & \nearrow x \triangleright (y \triangleright (z \triangleright m))
 \end{array}$$

右  $\mathcal{C}$ -加群圏  $\mathcal{M}$  も同様に定義される.

### 定義 1.19: 両側加群圏

$(\mathcal{C}_i, \otimes_i, 1, a_i, l_i, r_i) \quad w/ \quad i = 1, 2$  をモノイダル圏とする.

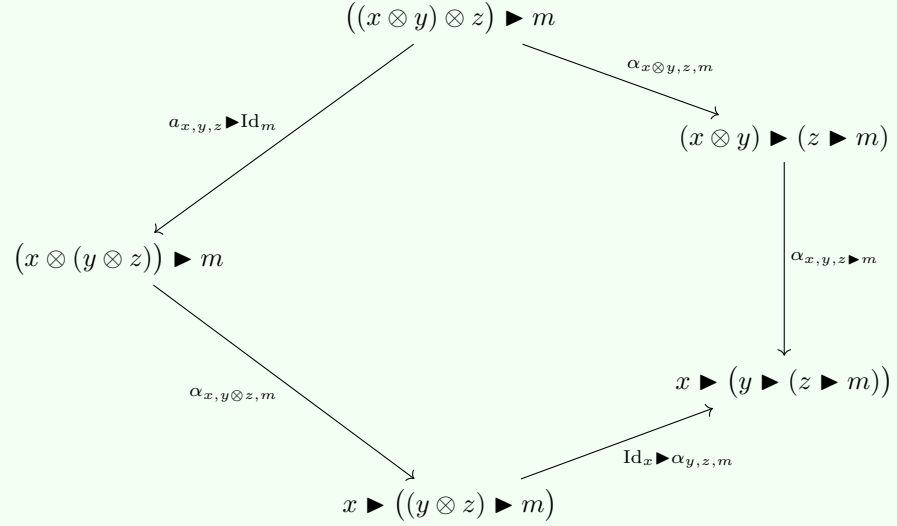
$(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ -両側加群圏  $((\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ -bimodule category)  $\mathcal{M}$  は, 以下のデータからなる:

- 圏  $\mathcal{M}$
- 関手  $\triangleright: \mathcal{C}_1 \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$
- 関手  $\triangleleft: \mathcal{M} \times \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{M}$
- 自然同型  $\{\alpha_{x_1, y_1, m}: (x_1 \otimes y_1) \triangleright m \longrightarrow x_1 \triangleright (y_1 \triangleright m)\}_{x_1, y_1 \in \text{Ob}(\mathcal{C}_1), m \in \text{Ob}(\mathcal{M})}$
- 自然同型  $\{\beta_{m, x_2, y_2}: m \triangleleft (x_2 \otimes y_2) \longrightarrow (m \triangleleft x_2) \triangleleft y_2\}_{x_2, y_2 \in \text{Ob}(\mathcal{C}_2), m \in \text{Ob}(\mathcal{M})}$
- 自然同型  $\{b_{x_1, m, x_2}: (x_1 \triangleright m) \triangleleft x_2 \longrightarrow x_1 \triangleright (m \triangleleft x_2)\}_{x_1 \in \text{Ob}(\mathcal{C}_1), x_2 \in \text{Ob}(\mathcal{C}_2), m \in \text{Ob}(\mathcal{M})}$

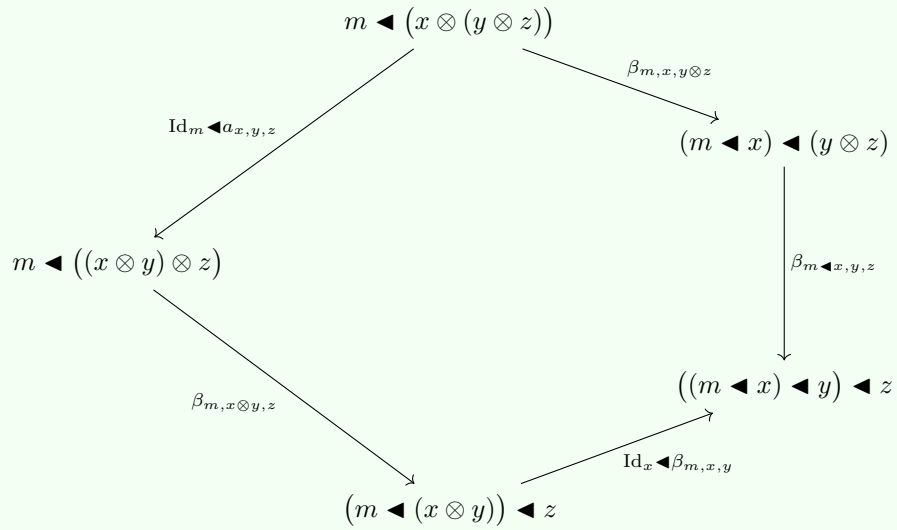
これらは以下の条件を充たす:

**(Bimod-1)** 関手  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ ,  $m \mapsto 1 \blacktriangleright m$  および  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ ,  $m \mapsto m \blacktriangleleft 1$  は圏の自己同型である

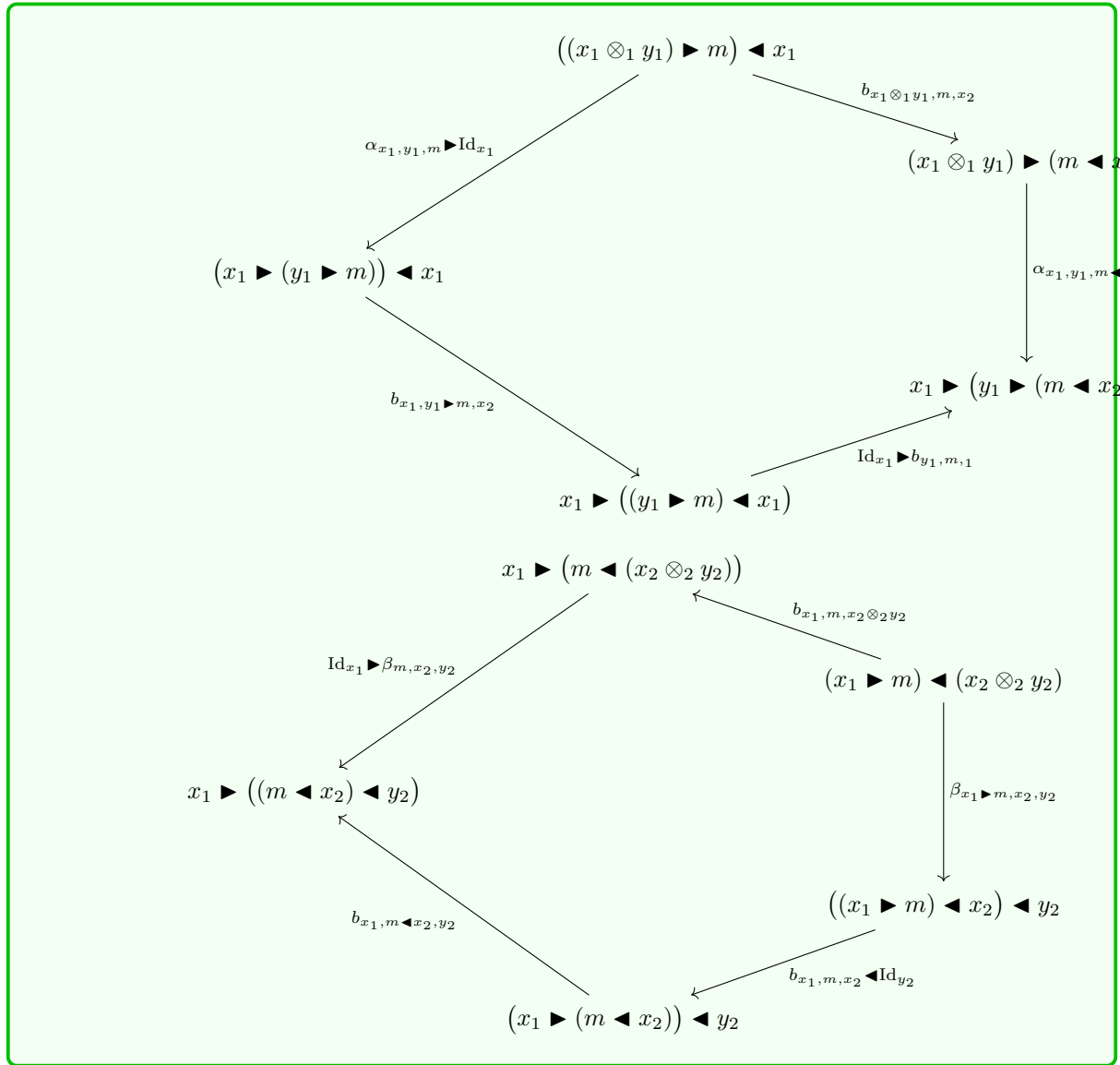
**(Bimod-2)**  $\forall x, y, z \in \text{Ob}(\mathcal{C}_1)$ ,  $\forall m \in \text{Ob}(\mathcal{M})$  に対して以下の図式を可換にする：



**(Bimod-3)**  $\forall x, y, z \in \text{Ob}(\mathcal{C}_2)$ ,  $\forall m \in \text{Ob}(\mathcal{M})$  に対して以下の図式を可換にする：



**(Bimod-4)**  $\forall x_i, y_i \in \text{Ob}(\mathcal{C}_i)$ ,  $\forall m \in \text{Ob}(\mathcal{M})$  に対して以下の図式を可換にする：



## 1.5 2-群

### 1.5.1 豊穠圏と2-圏

まず、厳密な 2-圏 (strict 2-category) を導入する.

#### 定義 1.20: 豊穠圏

モノイダル圏  $(V, \otimes, I)$  を与える.

$V$ -豊穠圏 ( $V$ -enriched category)  $\mathcal{C}$  は、以下のデータからなる：

- 集合  $\text{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  に対して, **Hom 対象**と呼ばれる  $V$  の対象  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \in \text{Ob}(V)$  を持つ
- $\forall x, y, z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  に対して, **合成射**と呼ばれる  $V$  の射  $\circ_{x, y, z}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$  を持つ
- $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  に対して, **恒等素**と呼ばれる  $V$  の射  $j_x: I \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$  を持つ

これらは以下の図式を可換にしなくてはならない:

**(associativity)**

$\forall x, y, z, w \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  について<sup>a</sup>

$$\begin{array}{ccc}
 (\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z)) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w) & \xrightarrow{\circ_{x, y, z} \otimes \text{Id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w)}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w) \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \circ_{x, z, w} \\
 & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, w) \\
 & & \uparrow \circ_{x, y, w} \\
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes (\text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w)) & \xrightarrow{\text{Id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)} \otimes \circ_{y, z, w}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, w)
 \end{array}$$

**(unitality)**

$\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  について<sup>b</sup>

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) & \xrightarrow{\circ_{x, x, y}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) & \xleftarrow{\circ_{x, y, y}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, y) \\
 \uparrow j_x \otimes \text{Id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)} & \nearrow \cong & & \nwarrow \cong & \uparrow \text{Id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)} \otimes j_y \\
 I \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) & & & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes I
 \end{array}$$

<sup>a</sup>  $\cong$  はモノイダル圏  $V$  の associator

<sup>b</sup>  $\cong$  はモノイダル圏  $V$  の left/right unitor

### 定義 1.21: 豊穣関手

モノイダル圏  $(V, \otimes, I)$  を与える.

2つの  $V$ -豊穣圏  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  の間の  $V$ -豊穣関手 ( $V$ -enriched functor)

$$F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

は, 以下のデータからなる:

- 写像  $F_0: \text{Ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{Ob}(\mathcal{D}), x \longmapsto F_0(x)$
- $V$  の射の族

$$\{F_{x,y}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(x), F_0(y))\}_{x,y \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは以下の図式を可換にしなくてはならない:

(enriched-1)

$\forall x, y, z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  に対して<sup>a</sup>

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) & \xrightarrow{\circ_{x,y,z}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z) \\ \downarrow F_{x,y} \otimes F_{y,z} & & \downarrow F_{x,z} \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(x), F_0(y)) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(y), F_0(z)) & \xrightarrow{\circ_{F_0(x), F_0(y), F_0(z)}} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(x), F_0(z)) \end{array}$$

(enriched-2)

$\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  に対して<sup>b</sup>

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{j_x} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x) \\ & \searrow j_{F_0(x)} & \downarrow F_{x,x} \\ & & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(x), F_0(x)) \end{array}$$

<sup>a</sup> これは, 通常の関手において射の合成が保存されることに対応する.

<sup>b</sup> これは, 通常の関手において恒等射が保存されることに対応する.

与えられたモノイダル圏  $V$  に対して,  $V$ -豊穣圏のなす圏を  $V\text{-Cat}$  と書く.  $V\text{-Cat}$  は

- $V$ -豊穣圏を対象とする
- $V$ -豊穣関手を射とする

ことで得られる圏である.

### 定義 1.22: 厳密な 2-圏

小圏と関手の圏  $\mathbf{Cat}$  を【例 1.2.1】の方法でモノイダル圏と見做す.  $\mathbf{Cat}$ -豊穣圏のことを厳密な 2-圏 (strict 2-category) と呼ぶ.

定義 1.22 を解説しよう．まず，小圏と関手の圏  $\mathbf{Cat}$  における対象とは小圏のことで，射とは関手のことである．さらに， $\mathbf{Cat}$  のテンソル積とは【例 1.2.1】より直積  $\times$  のことである．よって豊稜圏の定義から，厳密な 2-圏  $\mathcal{C}$  は

- 対象 (object)<sup>\*1</sup> 全体の集合  $\text{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  の間の 1-射 (1-morphism)<sup>\*2</sup> 全体が成す圏  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \in \text{Ob}(\mathbf{Cat})$ .
- 合成 (composition) と呼ばれる関手  $\circ: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$
- 恒等素 (identity morphism) と呼ばれる関手  $j_x: 1 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$

の 4 つのデータからなる．従って 1-射  $f: x \rightarrow y$  とは圏  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$  の対象  $f \in \text{Ob}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y))$  のことであるから，2 つの 1-射  $f, g \in \text{Ob}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y))$  が与えられると，圏  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$  における，それらの間の射  $\alpha \in \text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)}(f, g)$  が存在する．このような  $\alpha$  を 2-射 (2-morphism)<sup>\*3</sup> と呼び，混乱防止のため  $\alpha: f \rightarrow g$  と書く代わりに  $\alpha: f \Rightarrow g$  と書く．

2 つの 2-射  $\alpha \in \text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)}(f, g)$ ,  $\beta \in \text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)}(g, h)$  は，圏  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$  における射の合成  $*$  によって結合的かつ単位的に合成することができる：

$$\begin{array}{c} x \xrightarrow{\quad f \quad} y \\ \quad \downarrow \beta * \alpha \quad \\ x \xrightarrow{\quad g \quad} y \\ \quad \downarrow \beta \quad \\ x \xrightarrow{\quad h \quad} y \end{array} \quad := \quad \begin{array}{c} x \xrightarrow{\quad f \quad} y \\ \quad \downarrow \alpha \quad \\ x \xrightarrow{\quad g \quad} y \\ \quad \downarrow \beta \quad \\ x \xrightarrow{\quad h \quad} y \end{array}$$

このような 2-射の合成を縦の合成 (vertical composition) と呼ぶ．一方，4 つの 1-射  $f, g: x \rightarrow y$ ,  $f', g': y \rightarrow z$  および 2 つの 2-射  $\alpha: f \Rightarrow g$ ,  $\alpha': f' \Rightarrow g'$  が与えられたとき，1-射の合成  $\circ$  が関手であることによって，圏  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z)$  の射  $(\alpha, \alpha'): (f, f') \rightarrow (g, g')$  に対して圏  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$  の射，i.e. 2-射

$$\alpha' \circ \alpha := \circ(\alpha, \alpha'): f' \circ f \Rightarrow g' \circ g$$

が対応付く：

$$\begin{array}{c} x \xrightarrow{\quad f' \circ f \quad} z \\ \quad \downarrow \alpha' \circ \alpha \quad \\ x \xrightarrow{\quad g' \circ g \quad} z \end{array} \quad := \quad \begin{array}{c} x \xrightarrow{\quad f \quad} y \xrightarrow{\quad f' \quad} z \\ \quad \downarrow \alpha \quad \downarrow \alpha' \quad \\ x \xrightarrow{\quad g \quad} y \xrightarrow{\quad g' \quad} z \end{array}$$

このような 2-射の合成を横の合成 (horizontal composition) と呼ぶ．横の合成は，モノイダル圏  $\mathbf{Cat}$  が厳密なモノイダル圏であること，および関手  $\circ$  の (associativity), (unitality) によって結合的かつ単位的になる．

<sup>\*1</sup> 0-セル (0-cell) とも言う

<sup>\*2</sup> 1-セル (1-cell) とも言う．正確には，圏  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$  の対象のことを 1-射と呼ぶ．

<sup>\*3</sup> 2-セル (2-cell) とも言う

縦の合成と横の合成は、 $\circ$  が関手であることによって交換する：

$$\begin{aligned} (\beta' * \alpha') \circ (\beta * \alpha) &= \circ((\beta, \beta') * (\alpha, \alpha')) \\ &= (\circ(\beta, \beta')) * (\circ(\alpha, \alpha')) \\ &= (\beta' \circ \beta) * (\alpha' \circ \alpha) \end{aligned}$$

図式で書くと一目瞭然である：



### 定義 1.23: 2-圏

厳密な 2-圏と同様の

- 対象 (object)<sup>a</sup> 全体の集合  $\text{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  の間の 1-射 (1-morphism)<sup>b</sup> 全体が成す圏  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \in \text{Ob}(\mathbf{Cat})$ .
- 合成 (composition) と呼ばれる関手  $\circ: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$
- 恒等素 (identity morphism) と呼ばれる関手  $j_x: 1 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$

の 4 つのデータに加えて



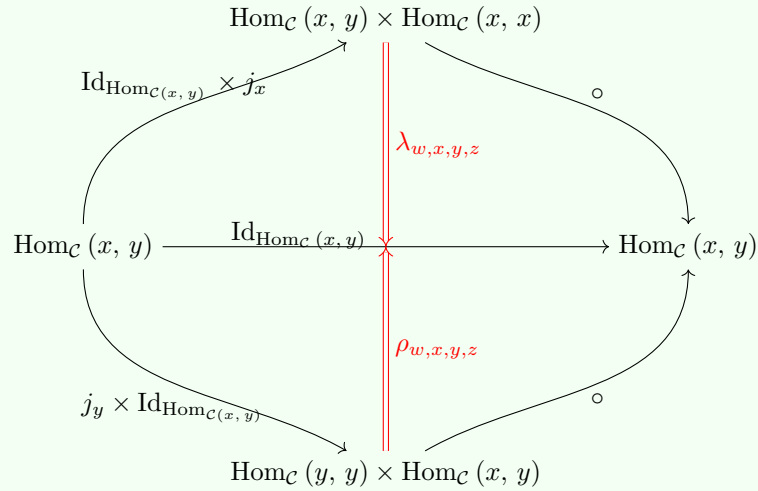
- $\forall x, y, z, w \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  に対して **associator** と呼ばれる自然同型<sup>c</sup>.



- $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  に対して **left/right unitor** と呼ばれる自然同型

$$\lambda_{x,y} := \{l_{x,y}f: f \mapsto f \circ j_x(1)\}_{f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)}$$

$$\rho_{x,y} := \{l_{x,y}f: f \mapsto j_x(1) \circ f\}_{f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)}$$



を持ち,

- associator が **(pentagon identity)** を
- unitors が **(triangle identity)** を

満たす  $\mathcal{C}$  のことを **2-圏** (2-category) と呼ぶ.

<sup>a</sup> **0-セル** (0-cell) とも言う

<sup>b</sup> **1-セル** (1-cell) とも言う. 正確には, 圏  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$  の対象のことを 1-射と呼ぶ.

<sup>c</sup> これは圏 **Cat** における図式である.

要するに、**厳密な 2-圏**において合成  $\circ$  の associativity および unitality を自然同型まで弱めたものが **2-圏** である。

### 【例 1.5.1】2-圏としてのモノイダル圏

**モノイダル圏**  $(\mathcal{C}, \otimes, I, \{a_{x,y,z}\}, \{l_x\}, \{r_y\})$  は **2-圏** である。実際、2-圏  $\mathbf{BC}$  を

- $\text{Ob}(\mathbf{BC}) := \{\bullet\}$  (1 点集合)
- $\text{Hom}_{\mathbf{BC}}(\bullet, \bullet) := \mathcal{C}$
- $\circ := \otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$
- $j_x := \iota_I: I \hookrightarrow \mathcal{C}$
- $\alpha_{\bullet,\bullet,\bullet} := \{a_{x,y,z}\}$
- $\lambda_{\bullet,\bullet} := \{l_{x,y,z}\}, \quad \rho_{\bullet,\bullet} := \{r_{x,y,z}\}$

により定義すると  $\mathcal{C} = \mathbf{BC}$  となる。

## 1.5.2 弱い 2-群・コヒーレントな 2-群・厳密な 2-群

[?] に倣い **2-群** (2-group) を導入する。

### 定義 1.24: 弱い逆対象

**モノイダル圏**  $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$  の対象  $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  を 1 つとる。

- 対象  $y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  が  $x$  の **弱い逆対象** (weak inverse) であるとは、対象の同型の意味で<sup>a</sup>  $x \otimes y \cong 1$  かつ  $y \otimes x \cong 1$  が成り立つことを言う。
- $x$  が **弱可逆** (weakly invertible) であるとは、 $x$  が弱い逆対象を持つことを言う。

<sup>a</sup> 自然同型ではない

### 定義 1.25: 弱い 2-群・コヒーレントな 2-群・厳密な 2-群

- **弱い 2-群** (weak 2-group) とは、**モノイダル圏**  $\mathcal{G}$  であって、任意の対象が **弱可逆** であかつ任意の射が同型射であるもののこと。
- **コヒーレントな 2-群** (coherent 2-group) とは、**モノイダル圏**  $\mathcal{G}$  であって、任意の対象  $x \in \text{Ob}(\mathcal{G})$  が可逆な **unit**, **counit**  $(x, \bar{x}, i_x, e_x)$  を持ち、かつ任意の射が同型射であるもののこと。
- **厳密な 2-群** (strict 2-group) とは、**モノイダル圏**  $\mathcal{G}$  であって、任意の対象が可逆<sup>a</sup> であかつ任意の射が同型射であるもののこと。

<sup>a</sup>  $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  に対して  $x^{-1} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  が存在して、厳密に  $x \otimes x^{-1} = 1, x^{-1} \otimes x = 1$  が成り立つ。

**定義 1.26: 2-群の準同型**

2-群  $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$  の間の準同型とは, モノイダル関手  $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$  のこと.

**定理 1.1: 弱い 2-群はコヒーレントな 2-群**

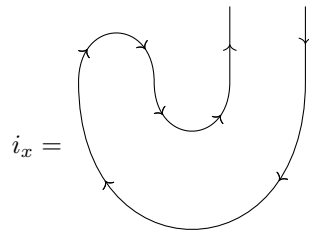
任意の弱い 2-群はコヒーレントな 2-群にすることができる.

証明 勝手な弱い 2-群  $\mathcal{G}$  を 1 つ固定する. このとき  $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{G})$  に対してある  $\bar{x} \in \text{Ob}(\mathcal{G})$  および同型射  $i'_x: 1 \rightarrow x \otimes \bar{x}$ ,  $e'_x: \bar{x} \otimes x \rightarrow 1$  が存在する.

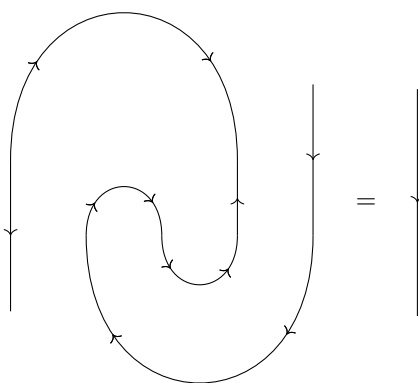
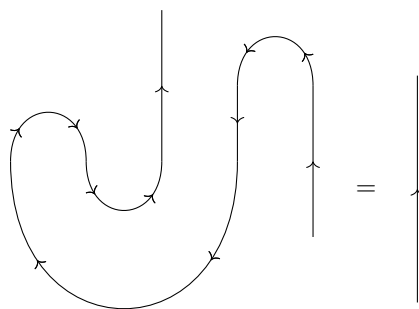
ここで  $e_x := e'_x$  とおき,

$$i_x := (l_x \otimes \text{Id}_{\bar{x}}) \circ a_{1, x, \bar{x}}^{-1} \circ (i'_x)^{-1} \otimes \text{Id}_{x \otimes \bar{x}} \circ a_{x, \bar{x}, x \otimes \bar{x}}^{-1} \circ (\text{Id}_x \otimes a_{\bar{x}, x, \bar{x}}) \circ (\text{Id}_x \otimes e_x'^{-1} \otimes \text{Id}_{\bar{x}}) \circ (\text{Id}_x \otimes l_{\bar{x}}^{-1}) \circ i'_x$$

とおくと組  $(x, \bar{x}, i_x, e_x)$  が zig-zag equation を満たすことを示す. 実際,  $i_x$  の定義をストリング図式で書くと



となるから,



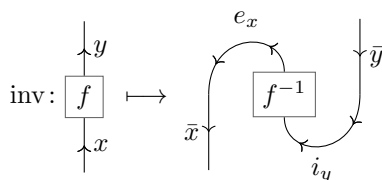
と言える.

！ 定理 1.1 を踏まえ, 以下では**コヒーレントな 2-群**のことを単に **2-群** (2-group) と呼ぶ.

2-群  $\mathcal{G}$  において, 弱い逆対象を対応づける関手

$$\text{inv}: \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}, x \longmapsto \bar{x} \quad (1.5.1)$$

を考えたいが, 射の対応は少々厄介である. [?, p.34] に倣うと



とすれば良いことがわかる<sup>\*4</sup>.

以上より, 2-群  $\mathcal{G}$  を【例 1.5.1】により 2 圏  $\mathbf{BG}$  の言葉で表現すると

- ただ 1 つの対象を持つ:  $\text{Ob}(\mathbf{BG}) = \{\bullet\}$

<sup>\*4</sup> 定義から**コヒーレントな 2 群**は rigid なモノイダル圏であり, zigzag identity を使えることが肝になる.

- 任意の 1-射  $x \in \text{Ob}(\text{Hom}_{\mathbf{BG}}(\bullet, \bullet)) = \text{Ob}(\mathcal{G})$  が弱可逆であり, その弱い逆対象  $\bar{x}$  は関手 (1.5.1) によって与えられる.
- 任意の 2-射  $\alpha \in \text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathbf{BG}}(\bullet, \bullet)}(x, y) = \text{Hom}_{\mathcal{G}}(x, y)$  が同型射

ということになる. 特に厳密な 2-群とは, 全ての  $\alpha, \lambda, \rho, i, e$  が  $\mathcal{G}$  の恒等射となっていることを言う.

### 1.5.3 交差加群との関係

#### 定義 1.27: 交差加群

交差加群 (crossed module) とは,

- 群準同型  $G_2 \xrightarrow{t} G_1$
- $G_1$  の左作用  $\alpha: G_1 \rightarrow \text{Aut}(G_2)$

の組であって, 以下の条件を満たすもののこと:

(cr-1) 以下の図式を可換にする:

$$\begin{array}{ccc} G_2 \times G_2 & \xrightarrow{t \times \text{Id}} & G_1 \times G_2 \\ & \searrow \text{Ad} & \swarrow \alpha \\ & G_2 & \end{array}$$

あるいは同じことだが,  $\forall g_i \in G_i$  に対して

$$t(\alpha(g_1)(g_2)) = g_1 t(g_2) g_1^{-1}$$

を充たす.

(cr-2) 以下の図式を可換にする:

$$\begin{array}{ccc} G_1 \times G_2 & \xrightarrow{\alpha} & G_2 \\ \text{Id} \times t \downarrow & & \downarrow t \\ G_1 \times G_1 & \xrightarrow{\text{Ad}} & G_1 \end{array}$$

あるいは同じことだが,  $\forall g_2, g'_2 \in G_2$  に対して

$$\alpha(t(g_2))(g'_2) = g_2 g'_2 g_2^{-1}$$

を充たす (Peiffer identity).

### 命題 1.3: 交差加群と厳密な 2-群

- (1) 交差加群  $(G_2 \xrightarrow{t} G_1, \alpha)$  が与えられたとする. このとき
- 1-射の集合  $\mathcal{G}_0 := G_1$
  - 2-射の集合  $\mathcal{G}_1 := G_1 \rtimes_{\alpha} G_2$  (外部半直積)
  - 始点射  $\sigma: \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_0, (g_1, g_2) \mapsto g_1$
  - 終点射  $\tau: \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_0, (g_1, g_2) \mapsto t(g_2)g_1$
  - 恒等素  $j: \mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{G}_1, g_1 \mapsto (g_1, 1_{G_2})$
  - 2-射の合成  $\circ: \mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_1, ((g_1, g_2), (g'_1, g'_2)) \mapsto (g_1, g_2 g'_2)$
- とおくと, 圏  $\mathcal{G}$  は厳密な 2-群になる.
- (2) 逆に厳密な 2-群  $\mathcal{G}$  が与えられたとき,
- $G_1 := \mathcal{G}_0$
  - $G_2 := \text{Ker } \sigma \subset \mathcal{G}_1$
  - $t := \tau|_{G_2}: G_2 \rightarrow G_1$
  - $\alpha: G_1 \rightarrow \text{Aut}(G_2), g_1 \mapsto (g_2 \mapsto j(g_1)g_2j(g_1)^{-1})$
- とおくことで交差加群  $(G_2 \xrightarrow{t} G_1, \alpha)$  が得られる.

証明 (1)

■

## 1.6 3-群

### 1.6.1 3-圏

一般の 3-圏は associator, unitors のせいで扱いが難しいので, まずは厳密な 3-圏 (strict 3-group) を考える.  $\text{Cat}$  を【例 1.2.1】の方法でモノイダル圏と見做す. 定義 1.22 から, 2-圏としての同値

$$\text{Str2Cat} \cong \text{Cat-Cat}$$

が成り立つ. さらに  $\text{Cat-Cat}$  は直積に関してモノイダル圏になる.

#### 定義 1.28: 厳密な 3-圏

厳密な 2-圏が成す 2-圏  $\text{Cat-Cat}$  をモノイダル圏と見做す. このとき  $\text{Cat-Cat}$ -豊穡圏のことを厳密な 3-圏 (strict 3-category) と呼ぶ.

### 1.6.2 2-crossed module と厳密な 3-群

### 定義 1.29: 厳密な 3-群

厳密な 3-圏  $\mathcal{G}$  であって、ただ 1 つの対象を持ち、1-射、2-射、3-射が厳密に可逆であるものを**厳密な 3-群** (strict 3-category) と呼ぶ。

### 定義 1.30: 2-交差加群

**2-交差加群** (2-crossed module) とは、以下のデータからなる：

- 群の正規複体  $G_3 \xrightarrow{\partial_2} G_2 \xrightarrow{\partial_1} G_1$
- 群の左作用  $\alpha_1: G_1 \rightarrow \text{Aut}(G_2)$ ,  $\alpha_2: G_1 \rightarrow \text{Aut}(G_3)$
- **Peiffer lifting** と呼ばれる写像  $\{-, -\}: G_2 \times G_2 \rightarrow G_3$

これらは以下の条件を充たす：

**(2CM1)**  $\partial_1, \partial_2$  は  $G_1$ -同変

**(2CM2)**  $\forall g_2, h_2 \in G_2$  に対して

$$\partial_2\{g_2, h_2\} = \alpha_1(g_2)(h_2)g_2h_2^{-1}g_2^{-1}$$

**(2CM3)**  $\forall g_3, h_3 \in G_3$  に対して

$$\{\partial_2g_3, \partial_2h_3\} = [h_3, g_3]$$

**(2CM4)**  $\forall g_2 \in G_2, g_3 \in G_3$  に対して

$$\{g_2, \partial_2g_3\}\{\partial_2g_3, g_2\} = \alpha_2(\partial_1(g_2))(g_3)g_3^{-1}$$

**(2CM5)**  $\forall g_2, h_2, k_2 \in G_2$  に対して

$$\begin{aligned}\{g_2, h_2k_2\} &= \{g_2, h_2\}\{\partial_2\{g_2, k_2\}, g_2h_2g_2^{-1}\}\{g_2, k_2\} \\ \{g_2h_2, k_2\} &= \alpha_2(\partial_1(g_2))(\{h_2, k_2\})\{g_2, h_2k_2h_2^{-1}\}\end{aligned}$$

**(2CM6)**  $\forall g_1 \in G_1, \forall g_2, h_2 \in G_2$  に対して

$$\alpha_2(g_1)(\{g_2, h_2\}) = \{\alpha_1(g_1)(g_2), \alpha_1(g_1)(h_2)\}$$