第 1 章

∞-圏

この付録では，[?]，[?] に従って ∞-圏[*1]，および主 ∞-束を導入する．

1.1 圏論の復習

1.1.1 圏と関手

定義 1.1: 圏

圏 (category) $\mathcal{C}$ とは，以下の 4 種類のデータからなる：

- **対象** (object) と呼ばれる要素の集まり[a]

$$\mathbf{Ob}(\boldsymbol{\mathcal{C}})$$

- $\forall A,\, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，A から B への**射** (morphism) と呼ばれる要素の集合

$$\mathbf{Hom}_{\boldsymbol{\mathcal{C}}}\,(\boldsymbol{A},\, \boldsymbol{B})$$

- $\forall A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，A 上の**恒等射** (identity morphism) と呼ばれる射

$$\mathbf{Id}_{\boldsymbol{A}} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, A)$$

- $\forall A,\, B,\, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, B),\, \forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(B,\, C)$ に対して，f と g の**合成** (composite) と呼ばれる射 $\boldsymbol{g \circ f} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, C)$ を対応させる集合の写像

$$\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(B,\, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, C),\ (f,\, g) \longmapsto g \circ f$$

これらの構成要素は，次の 2 条件を満たさねばならない：

(1) **(unitality)**：任意の射 $f\colon A \longrightarrow B$ に対して

$$f \circ \mathrm{Id}_A = f, \quad \mathrm{Id}_B \circ f = f$$

が成り立つ．

[*1] [?]

(2) **(associativity)**：任意の射 $f\colon A \longrightarrow B,\ g\colon B \longrightarrow C,\ h\colon C \longrightarrow D$ に対して

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

が成り立つ．

[a] $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ は，集合論では扱えないほど大きなものになっても良い．

定義 1.2: モノ・エピ・同型射

圏 $\mathcal{C}$ を与える．

- 射 $f\colon A \longrightarrow B$ が**モノ射** (monomorphism) であるとは，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して写像

$$\begin{aligned} f_*\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ A) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ B), \\ g &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$$

  が集合の写像として単射であること．
- 射 $f\colon A \longrightarrow B$ が**エピ射** (epimorphism) であるとは，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して写像

$$\begin{aligned} f^*\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,\ X) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\ X), \\ g &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

  が集合の写像として単射であること．
- 射 $f\colon A \longrightarrow B$ が**同型射** (isomorphism) であるとは，射 $g\colon B \longrightarrow A$ が存在して $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ かつ $f \circ g = \mathrm{Id}_B$ を充たすこと．このとき f と g は互いの**逆射** (inverse) であると言い，$g = \boldsymbol{f^{-1}},\ f = \boldsymbol{g}^{-1}$ と書く[a]．
- $A,\ B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の間に同型射が存在するとき，対象 A と B は**同型** (isomorphic) であると言い，$\boldsymbol{A \cong B}$ と書く．

[a] 逆射は存在すれば一意である．

定義 1.3: 関手

圏 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ を与える．圏 $\mathcal{C}$ から圏 $\mathcal{D}$ への**関手** F とは，以下の 2 つの対応からなる：

- 圏 $\mathcal{C}$ における任意の対象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，圏 $\mathcal{D}$ における対象 $F(X) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ を対応づける
- 圏 $\mathcal{C}$ における任意の射 $f\colon X \longrightarrow Y$ に対して，圏 $\mathcal{D}$ における射 $F(f)\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ を対応づける

これらの対応は以下の条件を充たさねばならない：

(fun-1) 圏 $\mathcal{C}$ における任意の射 $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon Y \longrightarrow Z$ に対して，

$$F(g \circ f) \longrightarrow F(g) \circ F(f)$$

(fun-2) 圏 $\mathcal{C}$ における任意の対象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，

$$F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$$

文脈上明らかなときは，圏 $\mathcal{C}$ から圏 $\mathcal{D}$ への関手 F のことを関手 $\boldsymbol{F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}}$ と略記する．

定義 1.4: 忠実・充満・本質的全射

関手 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ を与える．

- F が**忠実** (faithful) であるとは，$\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して写像

$$F\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(X), F(Y)\big),\ f \longmapsto F(f)$$

  が単射であること．
- F が**充満** (full) であるとは，$\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して写像

$$F\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(X), F(Y)\big),\ f \longmapsto F(f)$$

  が全射であること．
- F が**本質的全射** (essentially surjective) であるとは，$\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ に対して $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が存在して $F(X)$ が Y と同型になること．

忠実充満関手のことを**埋め込み**と呼ぶことがある．

定義 1.5: 自然変換

2 つの関手 $F, G\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ を与える．F, G の間の**自然変換** (natural transformation) $\boldsymbol{\tau\colon F \Longrightarrow G}$ とは，以下の対応からなる：

- 圏 $\mathcal{C}$ における任意の対象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，圏 $\mathcal{D}$ における射 $\tau_X\colon F(X) \longrightarrow G(X)$ を対応づける

この対応は以下の条件を充たさねばならない：

(nat) 圏 $\mathcal{C}$ における任意の射 $f\colon X \longrightarrow Y$ に対して，以下の図式を可換にする：

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\tau_X"] & F(Y) \arrow[d, "\tau_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

自然変換 $\tau\colon F \Longrightarrow G$ であって，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して射 $\tau_X\colon F(X) \longrightarrow G(X)$ が同型射であるもののことを**自然同値** (natural equivalence) と呼ぶ．

自然変換 $\tau\colon F \Longrightarrow G$ を

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "G"'{name=D}] & \mathcal{D} \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "\tau"] \end{tikzcd}$$

と書くことがある．

1.1.2 極限と余極限

定義 1.6: 図式

圏 $\mathcal{C}$ と小圏 I（**添字圏**と呼ばれる）を与える．
$\mathcal{C}$ における $\boldsymbol{I}$ **型の図式** (diagram of shape I) とは，関手

$$I \longrightarrow \mathcal{C}$$

のこと．

定義 1.7: 錐の圏

$D\colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ を図式とする．

- D 上の**錐** (cone) とは，
  - $\mathcal{C}$ の対象 $\boldsymbol{C} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$

– $\mathcal{C}$ の射の族 $\boldsymbol{c}_\bullet := \left\{\boldsymbol{c}_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\boldsymbol{C},\, D(i)\right)\right\}_{i\in\mathrm{Ob}(\mathcal{I})}$

の組 $(\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{c}_\bullet)$ であって，$\forall i,\, j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ および $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i,\, j)$ に対して

$$\boldsymbol{c}_j = \boldsymbol{c}_i \circ D(f)$$

を充たす，i.e. 以下の図式を可換にするもののこと．

$$\begin{tikzcd} & \boldsymbol{C} \arrow[dl, bend right, "\boldsymbol{c}_i"'] \arrow[dr, bend left, "\boldsymbol{c}_j"] & \\ D(i) \arrow[rr, "D(f)"] & & D(j) \end{tikzcd}$$

- **錐の射** (morphism of cones)

$$(\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{c}_\bullet) \xrightarrow{\color{red}u} (\boldsymbol{C'},\, \boldsymbol{c}'_\bullet)$$

とは，$\mathcal{C}$ の射 ${\color{red}u} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{C'})$ であって，$\forall i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ に対して

$$\boldsymbol{c}_i = {\color{red}u} \circ \boldsymbol{c}'_i$$

を充たす，i.e. 以下の図式を可換にするもののこと．

$$\begin{tikzcd} & \boldsymbol{C} \arrow[dl, bend right, "\boldsymbol{c}_i"'] \arrow[d, red, "u"] \\ & \boldsymbol{C'} \arrow[l, bend left, "\boldsymbol{c}'_i"] \\ D(i) & \end{tikzcd}$$

D 上の錐と錐の射を全て集めたものは圏 $\mathbf{Cone}(D)$ を成す．

定義 1.8: 極限

図式 $D\colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ の**極限** (limit)[a]とは，圏 $\mathbf{Cone}(D)$ の終対象のこと．記号として $\left(\mathbf{lim}_{\mathcal{I}}\, \boldsymbol{D},\, \boldsymbol{p}_\bullet\right)$ と書く[b]．i.e. 極限 $\left(\mathbf{lim}_{\mathcal{I}}\, \boldsymbol{D},\, \boldsymbol{p}_\bullet\right) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cone}(D))$ は，以下の普遍性を充たす：

(極限の普遍性)

$\forall({\color{blue}\boldsymbol{C}},\, {\color{blue}\boldsymbol{c}_\bullet}) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cone}(D))$ に対して，錐の射 $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cone}(D)}\left(({\color{blue}\boldsymbol{C}},\, {\color{blue}\boldsymbol{c}_\bullet}),\, \left(\mathbf{lim}_{\mathcal{I}}\, \boldsymbol{D},\, \boldsymbol{p}_\bullet\right)\right)$ が一意的に存在して，$\forall i,\, j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ および $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i,\, j)$ に対して図式を可換にする．

$$
\begin{tikzcd}
& \forall \boldsymbol{C} \arrow[d, dashed, "\exists! u"] \arrow[ddl, bend right, "\boldsymbol{c}_i"'] \arrow[ddr, bend left, "\boldsymbol{c}_j"] & \\
& \lim_{\mathcal{I}} \boldsymbol{D} \arrow[dl, bend right, "\boldsymbol{p}_i"'] \arrow[dr, bend left, "\boldsymbol{p}_j"] & \\
D(i) \arrow[rr, "D(f)"] & & D(j)
\end{tikzcd}
$$

図 1.1: 極限の普遍性

[a] **普遍錐** (universal cone) とも言う.

[b] $\varprojlim \boldsymbol{D}$ と書くこともある.

定義 1.9: 余錐の圏

$D \colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ を図式とする.

- D 上の**余錐** (cocone) とは,
  - $\mathcal{C}$ の対象 $\boldsymbol{C} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
  - $\mathcal{C}$ の射の族 $\boldsymbol{c}_\bullet := \left\{ \boldsymbol{c}_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(D(i),\, \boldsymbol{C} \right) \right\}_{i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})}$

  の組 $(\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{c}_\bullet)$ であって, $\forall i,\, j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ および $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i,\, j)$ に対して

  $$\boldsymbol{c}_i = D(f) \circ \boldsymbol{c}_j$$

  を充たす, i.e. 以下の図式を可換にするもののこと.

  $$
  \begin{tikzcd}
  D(i) \arrow[rr, "D(f)"] \arrow[dr, bend right, "\boldsymbol{c}_i"'] & & D(j) \arrow[dl, bend left, "\boldsymbol{c}_j"] \\
  & \boldsymbol{C} &
  \end{tikzcd}
  $$

- **余錐の射** (morphism of cocones)

  $$(\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{c}_\bullet) \xrightarrow{u} (\boldsymbol{C}',\, \boldsymbol{c}'_\bullet)$$

  とは, $\mathcal{C}$ の射 $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{C}')$ であって, $\forall i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ に対して

  $$\boldsymbol{c}'_i = u \circ \boldsymbol{c}_i$$

  を充たす, i.e. 以下の図式を可換にするもののこと.

  $$
  \begin{tikzcd}
  D(i) \arrow[dr, bend right, "\boldsymbol{c}_i"] \arrow[ddr, bend right, "\boldsymbol{c}_j"'] & \\
  & \boldsymbol{C} \arrow[d, "u"] \\
  & \boldsymbol{C}'
  \end{tikzcd}
  $$

D 上の余錐と余錐の射を全て集めたものは圏 $\mathbf{Cone}(D)$ を成す.

定義 1.10: 余極限

図式 $D\colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ の**余極限** (colimit)[a]とは, 圏 $\mathbf{coCone}(D)$ の始対象のこと. 記号として $\left(\operatorname*{\mathbf{colim}}_{\mathcal{I}} D,\ \boldsymbol{p}_\bullet\right)$ と書く[b]. i.e. 余極限 $\left(\mathbf{colim}_{\mathcal{I}}\, \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{p}_\bullet\right) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{coCone}(D))$ は, 以下の普遍性を充たす：

(余極限の普遍性)

$\forall(\boldsymbol{C},\ \boldsymbol{c}_\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{coCone}(D))$ に対して, 余錐の射 $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{coCone}(D)}\left((\mathbf{colim}_{\mathcal{I}}\, \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{p}_\bullet),\ (\boldsymbol{C},\ \boldsymbol{c}_\bullet)\right)$ が一意的に存在して, $\forall i,\ j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ および $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i,\ j)$ に対して図式を可換にする.

$$
\begin{tikzcd}
D(i) \arrow[rr, "D(f)"] \arrow[dr, bend right, "\boldsymbol{p}_i"] \arrow[ddr, bend right=50, "\boldsymbol{c}_i"'] & & D(j) \arrow[dl, bend left, "\boldsymbol{p}_j"'] \arrow[ddl, bend left=50, "\boldsymbol{c}_j"] \\
& \mathbf{colim}_{\mathcal{I}}\, \boldsymbol{D} \arrow[d, dashed, "\exists! u"] & \\
& \forall \boldsymbol{C} &
\end{tikzcd}
$$

図 1.2: 余極限の普遍性

[a] **普遍余錐** (universal cocone) とも言う.

[b] $\varinjlim \boldsymbol{D}$ と書くこともある.

定義 1.11: 完備な圏

圏 $\mathcal{C}$ が**完備**（resp. **余完備**）(complete resp. cocomplete) であるとは, $\mathcal{C}$ における任意の図式が極限（resp. 余極限）を持つことを言う. 完備かつ余完備な圏は**双完備** (bicomplete) であると言われる.

Sets は双完備である.

命題 1.1: 極限と Hom の交換

圏 $\mathcal{C}$ の図式 $D\colon I \longrightarrow \mathcal{C}$ を与える.

(1) 圏 $\mathcal{C}$ は完備であるとする. このとき $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して, 集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X,\ \lim_I D\right) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ は **Sets** の図式

$$I \xrightarrow{D} \mathcal{C} \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\,\text{-})} \mathbf{Sets} \tag{1.1.1}$$

の極限である. i.e. 全単射

$$\lim_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X,\ D(i)\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X,\ \lim_I D\right)$$

が存在する.

(2) 圏 $\mathcal{C}$ は余完備であるとする. このとき $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して, 集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\mathrm{colim}_I\, D,\ X\right) \in$

Ob(**Sets**) は **Sets** の図式

$$I \xrightarrow{D} \mathcal{C} \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-},\,X)} \mathbf{Sets}$$

の余極限である．i.e. 全単射

$$\lim_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(D(i),\, X\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\operatorname*{colim}_{I},\, X\right)$$

が存在する．

証明　(1) $\mathcal{C}$ が完備なので，図式 $D\colon I \longrightarrow \mathcal{C}$ の極限

$$\begin{tikzcd} & \lim_I D \arrow[dl, bend right, "p_i"'] \arrow[dr, bend left, "p_j"] & \\ D(i) \arrow[rr, "D(f)"] & & D(j) \end{tikzcd}$$

が存在する[*2]．示すべきは **Sets** の図式

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X,\, \lim_I D) \arrow[dl, bend right, "p_{i*}"'] \arrow[dr, bend left, "p_{j*}"] & \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X,\, D(i)\right) \arrow[rr, "D(f)_*"] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X,\, D(j)\right) \end{tikzcd}$$

が極限の普遍性を充たすことである[*3]．

Sets の図式 (1.1.1) の錐 $(Y,\, c_\bullet)$ を任意にとる．すると錐の定義および $(\text{-})_*$ の定義から，$\forall y \in Y$ に対して以下の図式が可換になる：

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, bend right, "c_i(y)"'] \arrow[dr, bend left, "c_j(y)"] & \\ D(i) \arrow[rr, "D(f)"] & & D(j) \end{tikzcd}$$

i.e. 組 $\left(X,\, c_\bullet(y)\right)$ は $\mathcal{C}$ の図式 $D\colon I \longrightarrow \mathcal{C}$ の錐であるから，錐の射 $u_y\colon X \longrightarrow \lim_I D$ が一意的に存在する．ここで写像

$$u\colon Y \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X,\, \lim_I D),\; y \longmapsto u_y$$

を考えると，これは $\forall y \in Y$ に対して $p_{\bullet *} \circ u(y) = p_\bullet \circ u_y = c_\bullet(y)$ を充たす．i.e. **Sets** の図式

[*2] $i,\, j \in \mathrm{Ob}(I)$ および $f_{ij} \in \mathrm{Hom}_I\,(i,\, j)$ は任意にとる．

[*3] $p_{i*}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X,\, \lim_I D) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X,\, D(i)\right) f \longmapsto p_i \circ f$ などと定義する．このように射に下付きの $*$ を書いた時は post-compose を表す．上付きの $*$ は pre-compose である．

$$
\begin{tikzcd}
& \forall \boldsymbol{Y} \arrow[d, "u"] \arrow[dl, bend right, "\boldsymbol{c}_i"'] \arrow[dr, bend left, "\boldsymbol{c}_j"] & \\
& \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X,\, \lim_I D\right) \arrow[dl, bend right, "\boldsymbol{p}_{i*}"'] \arrow[dr, bend left, "\boldsymbol{p}_{j*}"] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X,\, D(i)\big) \arrow[rr, "D(f)_*"] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X,\, D(j)\big)
\end{tikzcd}
$$

を可換にする. u_y の定義からこのような u は一意であるから, 図式 (1.1.1) の錐 $\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X,\, \lim_I D\right),\, p_{\bullet *}\big)$ が極限の普遍性を充たすことが分かった．極限の一意性より

$$
\lim_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X,\, D(i)\big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X,\, \lim_I D\big)
$$

でなくてはいけない.

(2) $\mathcal{C}$ が余完備なので，図式 $D\colon I \longrightarrow \mathcal{C}$ の余極限

$$
\begin{tikzcd}
D(i) \arrow[rr, "D(f)"] \arrow[dr, bend right, "p_i"'] & & D(j) \arrow[dl, bend left, "p_j"] \\
& \mathrm{colim}_I\, D &
\end{tikzcd}
$$

が存在する[*4]．示すべきは $\mathbf{Sets}$ の図式

$$
\begin{tikzcd}
& \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\mathrm{colim}_I\, D,\, X\right) \arrow[dl, bend right, "{p_i}^*"'] \arrow[dr, bend left, "{p_i}^*"] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(D(j),\, X\big) \arrow[rr, "D(f)^*"] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(D(i),\, X\big)
\end{tikzcd}
$$

が極限の普遍性を充たすことだが，以降の議論は (1) と同様である.

■

1.1.3　米田埋め込み

定義 1.12: 前層

圏 $\mathcal{C}$ 上の圏 $\mathcal{S}$ に値をとる**前層**とは，関手

$$
P\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}
$$

のこと.

前層の圏 $\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\, \mathcal{S})$ [*5]とは,

- 前層 $P\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}$ を対象とする

[*4] $i,\, j \in \mathrm{Ob}(I)$ および $f_{ij} \in \mathrm{Hom}_I\,(i,\, j)$ は任意にとる.

[*5] $[\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}]$ や $\mathcal{S}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ と書くこともある．なお，付録 A で登場したものはこれの一例である.

- 前層 $P, Q\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}$ の間の自然変換 $\tau\colon P \Longrightarrow Q$ を射とする

として構成される圏のこと[*6].

定義 1.13: 表現可能前層・米田埋め込み

圏 $\mathcal{C}$ を与える.

- $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，以下で定義する前層

$$\boldsymbol{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-}, X)}\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

  のことを**表現可能前層** (representable presheaf) と呼ぶ：
  - $\forall Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-}, X)(Y) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$$

    を対応づける
  - $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ における任意の射 $g\colon Y \longrightarrow Z$[a] に対して,

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-}, X)(g) \coloneqq g^*\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X), \\ h &\longmapsto h \circ g\end{aligned}$$

    を対応付ける
- **米田埋め込み** (Yoneda embedding) とは，以下で定義する関手

$$\mathrm{Y}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{PSh}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets})$$

  のこと：
  - $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ に対して表現可能前層 $\mathrm{Y}(X) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-}, X) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{PSh}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets}))$ を対応付ける
  - $\mathcal{C}$ における任意の射 $f\colon X \longrightarrow Y$ に対して，以下で定義される自然変換 $\mathrm{Y}(f)\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-}, X) \Longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-}, Y)$ を対応付ける：
    - $\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ に対して，圏 $\mathbf{Sets}$ における射

$$\begin{aligned}\mathrm{Y}(f)_Z \coloneqq f_*\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y), \\ g &\longmapsto f \circ g\end{aligned}$$

      を対応付ける.

[a] つまり，これは $\mathcal{C}$ における射 $g\colon Z \longrightarrow Y$ である.

[*6] $\mathrm{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{S})$ の恒等射は $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ に対して $\mathrm{Id}_X\colon X \longrightarrow X$ を対応づける自然変換である.

補題 1.1: 米田の補題

前層 $F\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ および圏 $\mathcal{C}$ の対象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を与える．このとき，写像

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\, \mathbf{Sets})}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\text{-},\, X\right),\, F\right) &\longrightarrow F(X), \\ \tau &\longmapsto \tau_X(\mathrm{Id}_X)\end{aligned}$$

は全単射である．

米田の補題の主張は少し込み入っているが，次のように考えれば良い：
$\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\, \mathbf{Sets})}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\text{-},\, X\right)\right)$ とは自然変換

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \arrow[r, bend left=50, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-},\, X)"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "F"'{name=D}] & \mathbf{Sets} \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "\tau"] \end{tikzcd}$$

のことであるから，表現可能前層の定義より $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ に対して圏 $\mathbf{Sets}$ における射（i.e. 写像）$\tau_X\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X,\, X\right) \longrightarrow F(X)$ が定まる．圏の定義より集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X,\, X\right)$ には必ず恒等射という元 $\mathrm{Id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X,\, X\right)$ が含まれるので，それを写像 τ_X で送った先は $\tau_X(\mathrm{Id}_X) \in F(X)$ として well-defined である．

<u>**証明**</u> 写像

$$\begin{aligned}\eta\colon F(X) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\, \mathbf{Sets})}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\text{-},\, X\right),\, F\right), \\ s &\longmapsto \left\{\eta(s)_Y \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(Y,\, X\right) \longrightarrow F(Y),\ f \longmapsto F(f)(s)\right\}_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}\end{aligned}$$

を考える．$\forall s \in F(X)$ を 1 つ固定する．このとき圏 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ における任意の射 $Y \longleftarrow Z\colon f$ および $\forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(Z,\, X\right)$ に対して

$$\begin{aligned}\eta(s)_Y \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\text{-},\, X\right)(f)(g) &= \eta(s)_Y(g \circ f) \\ &= F(g \circ f)(s) \\ &= F(f) \circ F(g)(s) \\ &= F(f) \circ \eta(s)_Z(g)\end{aligned}$$

が言える．i.e. $\eta(s)$ は自然変換であり，η は well-defined である．

ところで，$\forall \tau \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\, \mathbf{Sets})}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\text{-},\, X\right),\, F\right)$ に対して

$$\begin{aligned}\eta(\tau_X(\mathrm{Id}_X)) &= \left\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(Y,\, X\right) \longrightarrow F(Y),\ f \longmapsto F(f)\bigl(\tau_X(\mathrm{Id}_X)\bigr)\right\}_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \\ &= \left\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(Y,\, X\right) \longrightarrow F(Y),\ f \longmapsto F(f) \circ \tau_X(\mathrm{Id}_X)\right\}_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \\ &= \left\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(Y,\, X\right) \longrightarrow F(Y),\ f \longmapsto \tau_Y \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\text{-},\, X\right)(f)(\mathrm{Id}_X)\right\}_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \\ &= \left\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(Y,\, X\right) \longrightarrow F(Y),\ f \longmapsto \tau_Y(f \circ \mathrm{Id}_X)\right\}_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \\ &= \left\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(Y,\, X\right) \longrightarrow F(Y),\ f \longmapsto \tau_Y(f)\right\}_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \\ &= \tau\end{aligned}$$

が成り立ち，かつ

$$\eta(s)_X(\mathrm{Id}_X) = F(\mathrm{Id}_X)(s) = \mathrm{Id}_{F(X)}(s) = s$$

が成り立つので，η は題意の写像の逆写像である． ■

命題 1.2: 米田埋め込みは埋め込み

米田埋め込み $\mathrm{Y}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{PSh}\,(\mathcal{C},\, \mathbf{Sets})$ は埋め込みである．

<u>証明</u> $\forall X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を固定する．写像

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X,\, Y) &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})}\,\bigl(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-}\,,\, X),\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-}\,,\, Y)\bigr),\\
f &\longmapsto \mathrm{Y}(f)
\end{aligned}
$$

が全単射であることを示せば良い．米田埋め込みの定義から，$\forall s \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X,\, Y)$ に対して

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Y}(s) &= \bigl\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(Z,\, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(Z,\, Y),\ g \longmapsto s \circ g\bigr\}_{Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}\\
&= \bigl\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(Z,\, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(Z,\, Y),\ g \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-}\,,\, Y)(g)(s)\bigr\}_{Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}
\end{aligned}
$$

が成り立つが，これは米田の補題において $F = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-}\,,\, Y) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{PSh}\,(\mathcal{C},\, \mathbf{Sets}))$ としたときの逆写像であり，示された． ■

系 1.1: 同型と表現可能前層の自然同値

以下の 2 つは同値である：

(1) $X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ は同型

(2) 表現可能前層 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-},\, X),\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-},\, Y) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{PSh}\,(\mathcal{C},\, \mathbf{Sets}))$ が自然同型

<u>証明</u> **(1) $\Longrightarrow$ (2)**

$X \cong Y$ なので $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X,\, Y),\ g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(Y,\, X)$ が存在して $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ かつ $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ を充たす．このとき $\forall A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$
\tau_A\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, Y),\ h \longmapsto f \circ h
$$

と定義するとこれは $\eta_A\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, X),\ h \longmapsto g \circ h$ を逆射に持つので同型射であり，自然同値

$$
\tau\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-},\, X) \Longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-},\, Y)
$$

を定める．

(1) $\Longleftarrow$ (2)

$\mathrm{PSh}\,(\mathcal{C},\, \mathbf{Sets})$ における同型射とは，2 つの前層の間の自然同型である．関手は同型射を保つので，命題 1.2 より示された．

■

1.1.4　随伴

定義 1.14: 随伴

関手 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, $G\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ を与える．F が G の**左随伴** (left adjoint) であり，かつ G が F の**右随伴** (right adjoint) であるとは，２つの関手

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\bigl(F(\text{-}),\,\text{-}\bigr)\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{Sets}, \\ &\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\bigl(\text{-},\,G(\text{-})\bigr)\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{Sets} \end{aligned}$$

の間に自然同型

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \arrow[r, bend left=50, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(\text{-}),\,\text{-})"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-},\,G(\text{-}))"'{name=L}] & \mathbf{Sets} \arrow[Rightarrow, from=U, to=L] \end{tikzcd}$$

が存在することを言う．

F が G の左随伴である（全く同じことだが，G が F の右随伴である）ことを $\boldsymbol{F \dashv G}$ と書く．図式中では

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$$

のように書く．

さて，圏 $\mathcal{C}$ 上の図式 $D\colon I \longrightarrow \mathcal{C}$ が余極限を持つとする：

$$\begin{tikzcd} & D(\forall i) \arrow[dl, bend right] \arrow[dr, bend left] & \\ \operatorname{colim}_I D \arrow[rr, dashed, "\exists!"] & & \forall X \end{tikzcd}$$

このとき，$\mathcal{D}$ 上の図式として

$$\begin{tikzcd} & F\bigl(D(\forall i)\bigr) \arrow[dl, bend right] \arrow[dr, bend left] & \\ \operatorname{colim}_I F(D) \arrow[rr, dashed, "\exists! u"] & & F(\operatorname{colim}_I D) \end{tikzcd}$$

を考えることができる．特に，一意に定まる射 $u\colon \operatorname{colim}_I F(D) \longrightarrow F(\operatorname{colim}_I D)$ が同型のとき，関手 F は**余極限を保つ**という．

同様に，圏 $\mathcal{D}$ 上の図式 $D\colon I \longrightarrow \mathcal{C}$ が極限を持つとする：

$$\begin{tikzcd} \lim_I D \arrow[dr, bend right] & & \forall X \arrow[ll, dashed, "\exists!"'] \arrow[dl, bend left] \\ & D(\forall i) & \end{tikzcd}$$

このとき，$\mathcal{D}$ 上の図式として

$$
\begin{tikzcd}
\lim_I F(D) \arrow[dr, bend right] & & F(\lim_I D) \arrow[ll, dashed, "\exists ! u"'] \arrow[dl, bend left] \\
& F\big(D(\forall i)\big) &
\end{tikzcd}
$$

を考えることができる．特に，一意に定まる射 $u\colon F(\lim_I D) \longrightarrow \lim_I F(D)$ が同型のとき，関手 F は**極限を保つ**という．

> **命題 1.3: 随伴と極限・余極限**
>
> 関手 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, $G\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ が $F \dashv G$ であるとする．このとき，F は余極限を保ち，G は極限を保つ．

<u>**証明**</u> 余極限を持つ任意の $\mathcal{C}$ の図式 $D\colon I \longrightarrow \mathcal{C}$ を 1 つ固定する．随伴の定義および命題 1.1 より，$\forall Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ に対して

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(\operatorname*{colim}_I D),\, Y\big) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(\operatorname*{colim}_I D,\, G(Y)\big) \\
&\cong \lim_I \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(D(i),\, G(Y)\big) \\
&\cong \lim_I \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(D(i)),\, Y\big) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(\operatorname*{colim}_I F(D),\, Y\big)
\end{aligned}
$$

が言える．i.e. 自然同型

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[r, bend left=60, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(F(\operatorname{colim}_I D),\, \text{-}\right)", ""{name=U, below}] \arrow[r, bend right=60, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(\operatorname{colim}_I F(D),\, \text{-}\right)"', ""{name=L, above}] & \mathbf{Sets}
\arrow[Rightarrow, from=U, to=L]
\end{tikzcd}
$$

があるので，米田の補題の系より

$$
F(\operatorname*{colim}_I D) \cong \operatorname*{colim}_I F(D)
$$

が示された． ■

1.1.5 Kan 拡張

定義 1.15: スライス圏

圏 $\mathcal{D}$ およびその対象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ を与える．**スライス圏** (slice category) $\boldsymbol{\mathcal{D}_{/X}}$ とは，以下のデータからなる圏のこと：

- $\mathcal{D}$ の対象と射の組 $(D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}),\ \alpha\colon D \longrightarrow X)$ を対象に持つ
- $(D,\ \alpha),\ (D',\ \alpha')$ の間の射は，$\mathcal{D}$ における射 $\beta\colon D \longrightarrow D'$ であって $\mathcal{D}$ における図式

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & D' \arrow[dl, "\alpha'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

を可換にするものとする

双対スライス圏 (dual slice category) $\boldsymbol{\mathcal{D}_{X/}}$ とは，以下のデータからなる圏のこと：

- $\mathcal{D}$ の対象と射の組 $(D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}),\ \alpha\colon X \longrightarrow D)$ を対象に持つ
- $(D,\ \alpha),\ (D',\ \alpha')$ の間の射は，$\mathcal{D}$ における射 $\beta\colon D \longrightarrow D'$ であって $\mathcal{D}$ における図式

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "\beta"] & & D' \\ & X \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[ur, "\alpha'"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にするものとする

関手[*7] $\mathcal{D}_{/X} \longrightarrow \mathcal{D},\ (D,\ \alpha) \longmapsto D$ のことを**標準的関手忘却** (canonical forgetful functor) と呼ぶ．標準的関手は図式中でも記号で明記しないことが多い．

関手 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ および圏 $\mathcal{D}$ における対象 $X \in \mathcal{D}$ を与える．このとき**関手 $\boldsymbol{F}$ に関するスライス圏**を関手圏 $\mathbf{Fun}(\boldsymbol{\mathcal{C}},\ \boldsymbol{\mathcal{D}})$ における引き戻し

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{F_{/X}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{D}_{/X} \arrow[d] \\ \mathcal{C} \arrow[r, "F"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

として定義する．i.e. $F_{/X}$ の対象は $(C \in \mathcal{C},\ \alpha\colon F(C) \longrightarrow X)$ であり，$(C,\ \alpha),\ (C',\ \alpha')$ の間の射とは，$\mathcal{C}$ における射 $\beta\colon C \longrightarrow C'$ であって $\mathcal{D}$ における図式

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[rr, "F(\beta)"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & F(C') \arrow[dl, "\alpha'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

を可換にするものである．

[*7] 対象の対応のみ明示した．

定理 1.2: density theorem

前層 $F\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ を与える．関手 $\mathrm{Y}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{PSh}\left(\mathcal{C},\, \mathbf{Sets}\right)$ を米田埋め込みとする．
このとき，前層の圏 $\mathrm{PSh}\left(\mathcal{C},\, \mathbf{Sets}\right)$ における同型

$$F \cong \operatorname*{colim}_{X \in \mathrm{Y}_{/F}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\text{-},\ X\right)$$

が成り立つ．

<u>**証明**</u> 米田の補題の系により，示すべきは自然同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\, \mathbf{Sets})}\left(\operatorname*{colim}_{X \in \mathrm{Y}_{/F}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\text{-},\ X\right),\, \text{-}\right) \Longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\, \mathbf{Sets})}\left(F,\, \text{-}\right)$$

である．実際，$\forall G \in \mathrm{Ob}(\mathrm{PSh}\left(\mathcal{C},\, \mathbf{Sets}\right))$ に対して

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\, \mathbf{Sets})}\left(\operatorname*{colim}_{X \in \mathrm{Y}_{/F}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\text{-},\ X\right),\, G\right) &\cong \lim_{X \in \mathrm{Y}_{/F}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\, \mathbf{Sets})}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\text{-},\, X\right),\, G\right) && \because \quad \text{命題 1.1} \\ &\cong \lim_{X \in \mathrm{Y}_{/F}} G(X) && \because \quad \text{米田の補題} \end{aligned}$$

なる自然同型がある．

ここで $\mathrm{pt} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{PSh}\left(\mathrm{Y}_{/F},\, \mathbf{Sets}\right))$ を $\mathrm{pt}(X) \coloneqq \{*\}$ で定義する[*8]と，極限の定義から明らかに $\lim_{X \in \mathrm{Y}_{/F}} G(X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathrm{Y}_{/F},\, \mathbf{Sets})}\left(\mathrm{pt},\, G\right)$ が成り立つ．自然変換 $\forall \tau \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathrm{Y}_{/F},\, \mathbf{Sets})}\left(\mathrm{pt},\, G\right)$ は，$\forall (X,\, \alpha) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Y}_{/F})$ に対して写像 $\{*\} \longrightarrow G(X),\ * \longmapsto \tau_{(X,\, \alpha)}$ を一意的に定める．一方で米田の補題より $\forall (X,\, \alpha) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Y}_{/F})$ はある $\alpha_X(\mathrm{Id}_X) \in F(X)$ と一対一対応する．この対応により $\forall X \in \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ について写像

$$\eta(\tau)_X \colon F(X) \longrightarrow G(X),\ \alpha_X(\mathrm{Id}_X) \longmapsto \tau_{(X,\, \alpha)}$$

が得られる．α は自然変換なので $\eta(\tau)_X$ を全て集めたものは自然変換 $\eta(\tau)\colon F \Longrightarrow G$ になる．よって写像

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathrm{Y}_{/F},\, \mathbf{Sets})}\left(\mathrm{pt},\, G\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\, \mathbf{Sets})}\left(F,\, B\right),\ \tau \longmapsto \eta(\tau)$$

は自然な同型であり，証明が完了した． ■

[*8] $\{*\}$ は一点集合．$\mathbf{Sets}$ における終対象と言っても良い．

定義 1.16: Kan 拡張

$i\colon \mathcal{C}_0 \hookrightarrow \mathcal{C}$ を $\mathcal{C}$ の小部分圏，$\mathcal{D}$ を双完備な圏とする．

- 関手 $F\colon \mathcal{C}_\prime \longrightarrow \mathcal{D}$ の，関手 i に沿った**左 Kan 拡張** (left Kan extention) とは，
$$i_!(F)(x) \coloneqq \operatorname*{colim}_{c \in (C_0)_{/x}} F(c)$$
によって定義される関手
$$i_!\colon \mathrm{Fun}(\mathcal{C}_0,\, \mathcal{D}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{C},\, \mathcal{D})$$
によって定まる関手 $i_!(F)\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ のこと．
- 関手 $F\colon \mathcal{C}_\prime \longrightarrow \mathcal{D}$ の，関手 i に沿った**右 Kan 拡張** (right Kan extention) とは，
$$i_*(F)(x) \coloneqq \lim_{c \in (C_0)_{x/}} F(c)$$
によって定義される関手
$$i_*\colon \mathrm{Fun}(\mathcal{C}_0,\, \mathcal{D}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{C},\, \mathcal{D})$$
によって定まる関手 $i_*(F)\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ のこと．

制限関手
$$i^*\colon \mathrm{Fun}(\mathcal{C},\, \mathcal{D}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{C}_0,\, \mathcal{D})$$
について $i_! \dashv i^*$ かつ $i_* \vdash i^*$ である．

1.2 単体圏

higher geometry において重要な役割を果たす単体的集合の圏を定義する．

定義 1.17: 単体圏

- $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して，全順序付集合 $[\boldsymbol{n}] \coloneqq \{0,\, 1,\, \dots,\, n\}$ のことを ***n*-単体** (n-simplex) と呼ぶ．
- **単体圏** (simplex category) Δ とは，
  - $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して，n-単体 $[n]$ を対象とする．
  - 順序を保つ写像を射とする

  圏のこと．

特に $\mathrm{Hom}_{\Delta}\left([n-1],\, [n]\right)$ の元のうち
$$d_i\colon [n-1] \hookrightarrow [n],\ x \longmapsto \begin{cases} x, & x < i \\ x+1 & x \geq i \end{cases} \ \text{w/} \quad i = 0,\, \dots,\, n$$

のことを**面写像** (face map) と呼び，$\mathrm{Hom}_{\Delta}([n+1], [n])$ の元のうち

$$s_i \colon [n+1] \twoheadrightarrow [n],\ x \longmapsto \begin{cases} x, & x \le i \\ x-1 & x > i \end{cases} \text{ w/ } \quad i = 0, \dots, n$$

のことを**縮退写像** (degeneracy map) と呼ぶ.

定義 1.18: 単体的集合

単体的集合 (simplicial set) とは，前層

$$K \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

のこと.

$K_n \coloneqq K([n])$ とおき，$\partial_i \coloneqq K(d_i) \colon K_n \twoheadrightarrow K_{n-1}$ のことを**面写像**，$\sigma_i \coloneqq K(s_i) \colon K_n \hookrightarrow K_{n+1}$ のことを**縮退写像**と呼ぶ．これらは以下の**単体的恒等式** (simplicial identities) を充たす：

$$\begin{aligned}
\partial_i \circ \partial_i &= \partial_{j-1} \circ \partial_i & & (i < j), \\
\partial_i \circ \sigma_j &= \sigma_{j-1} \circ \partial_i & & (i < j), \\
\partial_i \circ \sigma_i &= \mathrm{id} & & (0 \le i \le n), \\
\partial_{i+1} \circ \sigma_i &= \mathrm{id} & & (0 \le i \le n), \\
\partial_i \circ \sigma_j &= \sigma_j \circ \partial_{i-1} & & (i > j+1), \\
\sigma_i \circ \sigma_j &= \sigma_{j+1} \circ \sigma_i & & (i \le j)
\end{aligned}$$

定義 1.19: 単体的集合の圏

単体的集合の圏 $\mathbf{SimpSet}$ とは，前層の圏

$$\mathbf{SimpSet} \coloneqq \mathrm{PSh}\,(\Delta, \mathbf{Sets})$$

のこと．また，n-単体 $[n] \in \mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})$ の表現可能前層を $\boldsymbol{\Delta^n} \coloneqq \mathrm{Hom}_{\Delta}(\text{-}, [n]) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{SimpSet})$ と書く.

命題 1.4: 単体的集合の圏の基本性質

$\mathrm{Y}\colon \Delta \longrightarrow \mathbf{SimpSet}$ を米田埋め込みとする.

(1) 任意の単体的集合 $K\colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ に対して, 自然な同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}(\Delta^n,\, K) \cong K_n$$

が成り立つ.

(2) 圏 **SimpSet** は双完備である.

(3) 任意の単体的集合 $K\colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ に対して,

$$K \cong \mathrm{colim}_{[n]\in \mathrm{Y}_{/K}} \Delta^n$$

が成り立つ.

<u>証明</u> (1) 米田の補題より

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}(\Delta^n,\, K) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\Delta,\,\mathbf{Sets})}(\mathrm{Hom}_{\Delta}(\text{-},\,[n]),\, K) \cong K([n]) = K_n$$

(2)

(3) 定理 1.2 より

$$K \cong \operatorname*{colim}_{[n]\in\Delta_{/K}} \mathrm{Hom}_{\Delta}(\text{-},\,[n]) = \operatorname*{colim}_{[n]\in\Delta_{/K}} \Delta^n$$

■

定義 1.20: 幾何学的 n-単体

- **幾何学的 n-単体** Δ^n_{top} とは, 位相空間

$$\Delta^n_{\mathrm{top}} \coloneqq \left\{ (x^0,\, \dots,\, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; x_i \geq 0,\ \sum_{i=0}^{n} x_i = 1 \right\}$$

のこと.

- 余単体的集合

$$\Delta^n_{\mathrm{top}}\colon \Delta \longrightarrow \mathbf{Top}$$

とは,

  - n-単体 $[n] \in \mathrm{Ob}(\Delta)$ に対して幾何学的 n-単体 Δ^n_{top} を対応づける
  - 圏 Δ における任意の射 $\alpha\colon [n] \longrightarrow [m]$ に対して, 連続写像

$$\alpha_*\colon \Delta^n_{\mathrm{top}} \longrightarrow \Delta^m_{\mathrm{top}},\ (x_0,\, \dots,\, x_n) \longmapsto \left(\sum_{j,\ \alpha(j)=0} x_j,\, \dots,\, \sum_{j,\ \alpha(j)=m} x_j \right)$$

  を対応付ける

関手のこと.

- 位相空間 $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ の**特異単体** (singular simplicial set) とは, 単体的集合

$$S(X)\colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets},\ [n] \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^n_{\mathrm{top}},\, X)$$

のこと．

- 特異複体とは，関手 $S\colon \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{SimpSet},\ X \longmapsto S(X)$ のこと．

定義 1.21: 幾何学的実現

$\mathrm{Y}\colon \Delta \longrightarrow \mathbf{SimpSet}$ を米田埋め込みとする．**幾何学的実現** (geometric realization) とは，余極限を保つ関手

$$|\text{-}|\colon \mathbf{SimpSet} \longrightarrow \mathbf{Top},\ K \longmapsto \operatorname*{colim}_{\Delta^n \in \mathrm{Y}_{/K}} \Delta^n_{\mathrm{top}}$$

のこと．

$\mathbf{Top}$ における colim の公式を使うと

$$|K| = \left(\coprod_{[n]\in \mathrm{Ob}(\Delta)} (K_n \times \Delta^n_{\mathrm{top}}) \right) \Big/ \left\{ \left(\alpha^*(x),\, t\right) \sim \left(x,\, \alpha_*(t)\right) \,\middle|\, x \in K_n,\, t \in \Delta^m_{\mathrm{top}},\, \alpha \in \mathrm{Hom}_{\Delta}\left([m],\, [n]\right) \right\}$$

となる．

命題 1.5:

特異複体 $S\colon \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{SimpSet},\ X \longmapsto S(X)$ は幾何学的実現 $|\text{-}|\colon \mathbf{SimpSet} \longrightarrow \mathbf{Top}$ の右随伴である．

<u>**証明**</u> 右随伴の定義を思い出すと，$\forall (K,\, X) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{SimpSet}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Top})$ に対して自然同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\left(|K|,\, X\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}^{\mathrm{op}}}\left(K,\, S(X)\right)$$

が成り立つことを示せば良い．実際，命題 1.1 より

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\left(|K|,\, X\right) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\left(\operatorname*{colim}_{\Delta^n \in \mathrm{Y}_{/K}} \Delta^n_{\mathrm{top}},\, X\right) \cong \lim_{\Delta^n \in \mathrm{Y}_{/K}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\left(\Delta^n_{\mathrm{top}},\, X\right)$$

が，命題 1.4-(3) より

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}^{\mathrm{op}}}\left(K,\, S(X)\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}^{\mathrm{op}}}\left(\operatorname*{colim}_{[n]\in \mathrm{Y}_K} \Delta^n,\, S(X)\right) \cong \lim_{[n]\in \mathrm{Y}_{/K}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\left(\Delta^n,\, X\right)$$

が言える． ■

定義 1.22: 境界・角・背骨・骨格

- $\Delta^n \in \mathrm{Ob}(\mathbf{SimpSet})$ の**単体的境界** (simplicial boundary) $\boldsymbol{\partial\Delta^n}$ とは，単体的集合

$$\partial\Delta^n \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

であって

$$\partial\Delta^n([k]) \coloneqq \Delta^n([k]) \setminus \{\mathrm{Id}_{[n]}\} = \mathrm{Hom}_{\Delta}\left([k],\, [n]\right) \setminus \{\mathrm{Id}_{[n]}\}$$

を充たすもののこと．

- 任意の部分集合 $S \subset [n]$ に対して，**S-角** (S-horn) とは，単体的集合

$$\mathbf{\Lambda}^n_S \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

であって，

$$\Lambda^n_S([k]) \coloneqq \left\{\, f \in \mathrm{Hom}_{\Delta}\left([k],\, [n]\right) \;\middle|\; [n] \setminus \big(f([k]) \cup S\big) \neq \emptyset \,\right\} \subset \Delta^n([k])$$

を充たすもののこと．

  $\Lambda^n_j \coloneqq \Lambda^n_{\{j\}}$ は $0 < j < n$ のとき**内部角** (inner horn)，$j = 0,\, n$ のとき**外部角** (outer horn) と呼ばれる．

- **背骨** (spine) とは，単体的集合

$$\boldsymbol{I}^n \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

であって，

$$I^n([k]) \coloneqq \left\{\, f \in \mathrm{Hom}_{\Delta}\left([k],\, [n]\right) \;\middle|\; f([k]) = \{j\} \;\mathrm{or}\, f([k]) = \{j,\, j+1\} \,\right\} \subset \Delta^n([k])$$

- 単体的集合 $K \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ の **n-骨格** (n-skelton) とは，濃度 $n+1$ 以下の対象からなる Δ の充満部分圏 $i \colon \Delta_{\leq n} \hookrightarrow \Delta$ に沿った，関手 $i^*(K) \colon (\Delta_{\leq n})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ の左 Kan 拡張 $i_!\big(i^*(K)\big) \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ のこと．
- 単体的集合 $K \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ の **n-余骨格** (n-coskelton) とは，濃度 $n+1$ 以下の対象からなる Δ の充満部分圏 $i \colon \Delta_{\leq n} \hookrightarrow \Delta$ に沿った，関手 $i^*(K) \colon (\Delta_{\leq n})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ の右 Kan 拡張 $i_*\big(i^*(K)\big) \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ のこと．

命題 1.6: 角と背骨の幾何学的実現

幾何学的実現は角，背骨を保つ．

証明 $|\Delta^n| = \Delta^n_{\mathrm{top}}$ であることに注意する． ■

1.3 脈体・Kan 複体・$(\infty,\, 1)$-圏

定義 1.23: 脈体

圏 $\mathcal{C}$ の**脈体** (nerve) とは，単体的集合

$$\mathrm{N}(\mathcal{C}) \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

であって

$$\mathrm{N}(\mathcal{C})([n]) = \mathrm{Fun}([n],\, \mathcal{C})$$

を充たすもののこと．

定義 1.24: Kan 複体

Kan 複体 (Kan complex) とは，単体的集合

$$K\colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

であって以下の性質を充たすもののこと：

(Kan)

$\forall n \geq 1,\ 0 \leq \forall j \leq n$ および $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}\left(\Lambda^n_j,\, K\right)$ に対して，以下の図式を可換にする自然変換 $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}\left(\Delta^n,\, K\right)$ が存在する：

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_j \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & K \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed, "u"'] & \end{tikzcd}$$

単体的集合であって，内部角 i.e. $\forall n \geq 2,\ 0 < \forall j < n$ についてのみ **(Kan)** を充たすもののことを**弱 Kan 複体** (weak Kan complex) と呼ぶ.

定義 1.25: ∞-圏

- **$(\infty, 1)$-圏**とは，単体的集合であって弱 Kan 複体になっているもののことを言う．$(\infty, 1)$-圏の関手とは，**SimpSet** の射のこと．
- **∞-groupoid** とは，単体的集合であって Kan 複体になっているもののこと

以下では $(\infty, 1)$-圏のことを **∞-圏**と呼ぶ.

定義 1.26: 単体的ホモトピー

- $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}(X, Y)$ を繋ぐ**ホモトピー**とは，**SimpSet の射** $\eta \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}(X \times \Delta^1, Y)$ であって，以下の **SimpSet** の図式を可換にするもののこと：

$$\begin{tikzcd} X \cong X \times \Delta^0 \arrow[r, "\mathrm{Id}\times\sigma_1"] \arrow[dr, "f"'] & X \times \Delta^1 \arrow[d, "\eta"] & X \times \Delta^1 X \times \Delta^1 \cong X \arrow[l, "\mathrm{Id}\times\sigma_0"'] \arrow[dl, "g"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

f, g を繋ぐホモトピーが存在するとき，f, g は互いに**ホモトピック**であるという．

- 基点付き Kan 複体 (K, x) を与える．このとき n 次の**単体的ホモトピー群** (simplicial homotopy group) を

$$\boldsymbol{\pi_n^{\Delta}(X, x)} := \mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}_*}\big((\Delta^n, \partial\Delta^n), (X, x)\big)/\simeq$$

と定義する．

より具体的には，f, g を繋ぐ**単体的ホモトピー** (simplicial homotopy) とは **Sets** の射の族

$$\big\{h_i\colon X_n \longrightarrow Y_{n+1}\big\}_{i=0,\,\dots,\,n,\,n\geq 0}$$

であって以下を充たすもののこと：

$$\begin{aligned} \partial_0 \circ h_0 &= f_n, \\ \partial_{n+1} \circ h_n &= g_n, \\ \partial_i \circ h_j &= \begin{cases} h_{j-1} \circ \partial_i, & i < j \\ \partial_i \circ h_{i-1}, & i = j \neq 0 \\ h_j \circ \partial_{i-1}, & i > j+1 \end{cases} \\ \sigma_i \circ h_j &= \begin{cases} h_{j+1} \circ \sigma_i, & i \leq j \\ h_j \circ \sigma_{i-1}, & i > j \end{cases} \end{aligned}$$

一見するとホモトピーと単体的ホモトピーは別のものに見えるが，実は同じものである．単体的ホモトピー $\big\{h_i\colon X_n \longrightarrow Y_{n+1}\big\}_{i=0,\,\dots,\,n,\,n\geq 0}$ が与えられたとする．このとき **SimpSet** の射 $\eta \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}(X \times \Delta^1, Y)$ を

$$\begin{aligned} \eta_0 &:= \partial_0 \circ h_0, \\ \eta_{n+1} &:= \partial_{n+1} \circ h_n, \\ \eta_j &:= \partial_j \circ h_j \quad (1 \leq j \leq n) \end{aligned}$$

と定義すると，和の普遍性の図式によって $\eta \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}(X \times \Delta^1, Y)$ が定まる．

定理 1.3: Kan 条件と脈体

任意の単体的集合 $K \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ に対して以下は同値である：

(1) K は弱 Kan 条件を充たす一意解を持つ
(2) K は背骨の包含 $I^n \hookrightarrow \Delta^n$ を一意に持ち上げる．
(3) K はある圏の脈体と同型である．

証明 [?, p.20, Theorem 1.1.52] を参照. ■

命題 1.7: 脈体が ∞-groupoid になる必要十分条件

圏 $\mathcal{C}$ の脈体が ∞-groupoid になる必要十分条件は，$\mathcal{C}$ が groupoid であること．

証明 [?, p.23, Lemma 1.1.54] ■

1.3.1 SimpSet-豊穣化と単体的ホモトピー

単体的集合の圏 **SimpSet** はモノイダル圏の構造を持つ．実際，単体的集合 $S, T \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ に対して，新たな単体的集合

$$S \otimes T \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets},\ [n] \longmapsto S_n \times T_n$$

がテンソル積 $\otimes \colon \mathbf{SimpSet} \times \mathbf{SimpSet} \longrightarrow \mathbf{SimpSet}$ を定めている．

定義 1.27: 豊穣圏

モノイダル圏 $(V, \otimes, I)$ を与える．
***V*-豊穣圏** (V-enriched category) $\mathcal{C}$ は，以下のデータからなる：

- 集合 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，**Hom 対象**と呼ばれる V の対象 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \in \mathrm{Ob}(V)$ を持つ
- $\forall x, y, z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，**合成射**と呼ばれる V の射 $\circ_{x,y,z} \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$ を持つ
- $\forall x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，**恒等素**と呼ばれる V の射 $j_x \colon I \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$ を持つ

これらは以下の図式を可換にしなくてはいけない：

(associativity)

$\forall x, y, z, w \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について[a]

$$\begin{tikzcd}
\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z)\big) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[d, "\circ_{x,y,z} \otimes \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(z,w)}"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \otimes \mathrm{H} \arrow[d, "\mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w) \arrow[r, "\circ_{x,z,w}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, w) & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, \arrow[l, "\circ_{x,y,w}"']
\end{tikzcd}$$

(unitality)

$\forall x,\, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について[b]

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\,x) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\,y) \arrow[r, "\circ_{x,x,y}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\,y) & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\,y) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,\,y) \arrow[l, "\circ_{x,y,y}"'] \\
I \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\,y) \arrow[u, "j_x \otimes \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\,y)}"] \arrow[ur, "\cong"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\,y) \otimes I \arrow[u, "\mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\,y)} \otimes j_y"'] \arrow[ul, "\cong"]
\end{tikzcd}$$

---

[a] $\cong$ は associator
[b] $\cong$ は left/right unitor

2 つの V-豊穣圏 $\mathcal{C},\,\mathcal{D}$ の間の ***V*-豊穣関手** (V-enriched functor) $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ は，以下のデータからなる：

- 写像 $f\colon \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathcal{D}),\ x \longmapsto f(x)$
- $\forall x,\, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，V における射 $f_{x,\,y}\colon \mathrm{Hom}_{CatC}(x,\,y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(f(x),\,f(y)\big)$

これらは以下の図式を可換にしなくてはいけない：

(enriched-1)

$\forall x,\, y,\, z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\,y) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,\,z) \arrow[r, "\circ_{x,y,z}"] \arrow[d, "f_{x,y} \otimes f_{y,z}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\,z) \arrow[d, "f_{x,z}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(f(x),\,f(y)\big) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(f(y),\,f(z)\big) \arrow[r, "\circ_{f(x),f(y),f(z)}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(f(x),\,f(z)\big)
\end{tikzcd}$$

(enriched-2)

$\forall x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "j_x"] \arrow[dr, "j_{f(x)}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\,x) \arrow[d, "f_{x,x}"] \\
& \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(f(x),\,f(x)\big)
\end{tikzcd}$$

与えられたモノイダル圏 V に対して，***V*-豊穣圏のなす圏**を $\mathbf{Cat}_V$ と書く．

定義 1.28: homotopy coherent な脈体

1.3.2 ∞-トポス

∞-groupoid のなす圏を $\infty\mathbf{Grpd}$ と書く．

定義 1.29: ∞-前層

K を $(\infty, 1)$-圏とする．K 上の $(\infty, 1)$**-前層**とは，$(\infty, 1)$-圏の関手

$$P\colon K^{\mathrm{op}} \longrightarrow \infty\mathbf{Grpd}$$

のこと．$(\infty, 1)$-前層のなす $(\infty, 1)$-圏とは，$(\infty, 1)$-圏の関手の圏

$$\mathrm{PSh}_{(\infty, 1)}(K) \coloneqq \mathrm{Fun}_{(\infty, 1)}(K^{\mathrm{op}}, \infty\mathbf{Grpd})$$

のこと．

以降では，$(\infty, 1)$-前層のことを ∞-前層と呼ぶ．

命題 1.8: ∞-前層の圏のモデル

$\mathcal{C}$ を $\mathbf{SimpSet}$-豊穣圏であって，Kan 複体を Hom 対象に持つものとする．
このとき homotopy coherent な脈体 $\mathrm{N_{hc}}$ に対して

$$\mathrm{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathrm{N_{hc}}(\mathcal{C})) \cong \mathrm{N}\big([\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{SimpSet}_{\mathrm{Quillen}}]_{\mathrm{proj}}\big)^{\circ}$$

が成り立つ．

証明 https://ncatlab.org/nlab/show/%28infinity%2C1%29-category+of+%28infinity%2C1%29-presheaves を参照． ■

[?]，[?, p.9] に従い $(\infty, 1)$-トポスの定義を概観する[*9]．

*9 ここでの定義は不完全なので，詳細は [?]，[?] などを参照．

定義 1.30: ∞-トポス

K を $(\infty,1)$-圏とする．

K 上の **$(\infty,1)$-トポス**とは，$(\infty,1)$-前層のなす $(\infty,1)$-圏 $\mathrm{PSh}_{(\infty,1)}(K)$ の部分 $(\infty,1)$-圏

$$i\colon \mathbf{H} \hookrightarrow \mathrm{PSh}_{(\infty,1)}(K)$$

であって，包含 $(\infty,1)$-関手 i が有限極限を保つ左随伴 $(\infty,1)$-関手

$$\begin{tikzcd} \mathbf{H} \arrow[r, bend left, "i"] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathrm{PSh}_{(\infty,1)}(K) \arrow[l, bend left, "\mathrm{lex}"] \end{tikzcd}$$

を持つようなもののこと．

もしくは，余完全[a]な $(\infty,1)$-圏 $\mathbf{H}$ であって以下の公理を充たすもののこと [?, p.9, Definition5.4]：

(T1) $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(X, Y)$ および $\mathbf{H}$ における図式 $D\colon I \longrightarrow \mathbf{H}_{/Y}$ において，自然な同型

$$\mathrm{colim}_{i\in I}\big(X \times_Y D(i)\big) \cong X \times_Y \mathrm{colim}_{i\in I} D(i)$$

がある[b]．

(T2) $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{H})$ に対して，図式 $Y \longleftarrow \emptyset \longrightarrow X$ の押し出し

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & X \amalg Y \end{tikzcd}$$

は図式 $Y \longrightarrow X \amalg Y \longleftarrow X$ の引き戻しでもある．i.e. 任意の和が disjoint である．

(T3) $\mathbf{H}$ における任意の groupoid object は delooping を持つ．

[a] 正確には **presentable** [?, p.372, Def5.5.0.18]

[b] $\times_Y$ は引き戻し

[?] は命題 1.8 を使って ∞-トポスを定義している．