

第 1 章

モノイダル圏・フュージョン圏・高次群

この章では標数 0 の体 \mathbb{K} のみを考える.

1.1 加法圏

定義 1.1: 加法圏・アーベル圏

圏 \mathcal{C} が体 \mathbb{K} 上の**加法圏** (additive category) であるとは, 以下を充たすこと:

(add-1)

任意の Hom 集合 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が \mathbb{K} -ベクトル空間の構造をもち, かつ射の合成

$$\circ: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

が \mathbb{K} -双線形写像である.

(add-2)

零対象^a (zero object) $\mathbf{0} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が存在し, $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{0}, X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathbf{0}) = 0$ を充たす^b.

(add-3)

有限の余積が常に存在する.

^a 始対象かつ終対象

^b 最右辺は (add-1) の意味で零ベクトル空間.

加法圏 \mathcal{C} は, 以下の条件を充たすとき**アーベル圏** (abelian category) と呼ばれる:

(Ab-1)

任意の射 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が核 $\ker f: \text{Ker } f \longrightarrow X$ および余核 $\text{coker } f: Y \longrightarrow \text{Coker } f$ を持つ.

(Ab-2)

$\text{Ker } f = \mathbf{0}$ ならば $f = \ker(\text{coker } f)$, かつ $\text{Coker } f = \mathbf{0}$ ならば $f = \text{coker}(\ker f)$

以下では**加法圏** \mathcal{C}, \mathcal{D} の間の関手 $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ には, $F_{X,Y}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$, $f \longmapsto$

$F(f)$ が \mathbb{K} -線型写像となることを常に要請する.

【例 1.1.1】表現の圏

G を群とする. このとき

- G の表現 (ρ, V) を対象とする
- G -同変な \mathbb{K} -線型写像 $(\rho, V) \xrightarrow{f} (\rho', V')$ を射とする

圏を $\mathbf{Rep}(G)$ と書く. $\mathbf{Rep}(G)$ はアーベル圏である.

定義 1.2: 単純・半単純

- アーベル圏 \mathcal{C} の対象 $X \in \mathcal{C}$ が単純 (simple) であるとは, 任意のモノ射 $i: U \hookrightarrow X$ が 0 であるか同型射であることを言う.
- アーベル圏 \mathcal{C} が半単純 (semisimple) であるとは, $\forall X \in \mathcal{C}$ が単純対象の有限余積と同型であることを言う. i.e. 単純対象の族 $\{V_i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})\}_{i \in I}$ および有限個を除いて 0 であるような非負整数の族 $\{N_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}_{i \in I}$ が存在して

$$X \cong \bigoplus_{i \in I} N_i X_i$$

が成り立つこと.

1.2 モノイダル圏

これまででも何回か登場したが, モノイダル圏についてまとめておく:

定義 1.3: モノイダル圏

モノイダル圏 (monoidal category) は, 以下の 5 つのデータからなる:

- 圏 \mathcal{C}
- テンソル積 (tensor product) と呼ばれる関手 $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$
- 単位対象 (unit object) $I \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$
- associator と呼ばれる自然同値

$$\{a_{X,Y,Z}: (X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{\cong} X \otimes (Y \otimes Z)\}_{X,Y,Z \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})}$$

- left/right unitors と呼ばれる自然同値

$$\{l_X: I \otimes X \xrightarrow{\cong} X\}_{X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})},$$

$$\{r_X: X \otimes I \xrightarrow{\cong} X\}_{X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは $\forall X, Y, Z, W \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ について以下の 2 つの図式を可換にする:

(triangle diagram)

$$\begin{array}{ccc}
 (X \otimes I) \otimes Y & \xrightarrow{a_{X, I, Y}} & X \otimes (I \otimes Y) \\
 \searrow r_X \otimes \text{Id}_Y & & \swarrow \text{Id}_X \otimes l_Y \\
 & X \otimes Y &
 \end{array}$$

(pentagon diagram)

$$\begin{array}{ccccc}
 & & ((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z & & \\
 & \swarrow a_{W \otimes X, Y, Z} & & \searrow a_{W, X, Y \otimes \text{Id}_Z} & \\
 (W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) & & & & (W \otimes (X \otimes Y)) \otimes Z \\
 & \searrow a_{W, X, Y \otimes Z} & & & \downarrow a_{W, X \otimes Y, Z} \\
 & & W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z)) & \swarrow \text{Id}_Z \otimes a_{X, Y, Z} & \\
 & & & & W \otimes ((X \otimes Y) \otimes Z)
 \end{array}$$

モノイダル圏 \mathcal{C} が**厳密** (strict) であるとは, $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$\begin{aligned}
 (X \otimes Y) \otimes Z &= X \otimes (Y \otimes Z), \\
 I \otimes X &= X, \quad X \otimes I = X
 \end{aligned}$$

が成り立ち, かつ $a_{X, Y, Z}, l_X, r_X$ が恒等射であることを言う.

! 定義 1.3 で言うモノイダル圏を, **弱いモノイダル圏** (weak monoidal category) と呼ぶこともある.

定義 1.4: 組紐付きモノイダル圏

組紐付きモノイダル圏 (braided monoidal category) とは, 以下の 2 つからなる:

- モノイダル圏 \mathcal{C}
- 組紐 (braiding) と呼ばれる自然同型

$$\{b_{X,Y}: X \otimes Y \xrightarrow{\cong} Y \otimes X\}_{X,Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ について以下の図式を可換にする:

(hexagon diagrams)

$$\begin{array}{ccccc} X \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{a_{X,Y,Z}^{-1}} & (X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{b_{X,Y} \otimes \text{Id}_Z} & (Y \otimes X) \otimes Z \\ \downarrow b_{X,Y \otimes Z} & & & & \downarrow a_{Y,X,Z} \\ (Y \otimes Z) \otimes X & \xleftarrow{a_{Y,Z,X}^{-1}} & Y \otimes (Z \otimes X) & \xleftarrow{\text{Id}_X \otimes b_{X,Z}} & Y \otimes (X \otimes Z) \\ \\ (X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{a_{X,Y,Z}} & X \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{\text{Id}_X \otimes b_{Y,Z}} & X \otimes (Z \otimes Y) \\ \downarrow b_{X \otimes Y, Z} & & & & \downarrow a_{X,Z,Y}^{-1} \\ Z \otimes (X \otimes Y) & \xleftarrow{a_{Z,X,Y}} & (Z \otimes X) \otimes Y & \xleftarrow{b_{X,Z} \otimes \text{Id}_Y} & (X \otimes Z) \otimes Y \end{array}$$

組紐付きモノイダル圏 \mathcal{C} であって, \mathcal{C} の組紐が $b_{X,Y} = b_{Y,X}^{-1}$ を満たすもののことを対称モノイダル圏 (symmetric monoidal category) と呼ぶ.

定義 1.5: 双対

モノイダル圏 \mathcal{C} およびその任意の対象 $X, X^* \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を与える. X^* が X の右双対 (right dual) であり, かつ X が X^* の左双対 (left dual) であるとは,

- unit と呼ばれる射

$$i_X: I \longrightarrow X^* \otimes X$$

- counit と呼ばれる射

$$e_X: X \otimes X^* \longrightarrow I$$

が存在して以下の図式を可換にすることを言う:

(zig-zag equations)

$$\begin{array}{ccc}
X \otimes I & \xrightarrow{\text{Id}_X \otimes i_X} & X \otimes (X^* \otimes X) \\
\downarrow r_X & & \downarrow a_{X, X^*, X}^{-1} \\
& & (X \otimes X^*) \otimes X \\
& & \downarrow e_X \otimes \text{Id}_X \\
X & \xleftarrow{l_X} & I \otimes X
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
I \otimes X^* & \xrightarrow{i_X \otimes \text{Id}_{X^*}} & (X^* \otimes X) \otimes X^* \\
\downarrow l_{X^*} & & \downarrow a_{X^*, X, X^*} \\
& & X^* \otimes (X \otimes X^*) \\
& & \downarrow \text{Id}_{X^*} \otimes e_X \\
X^* & \xleftarrow{r_{X^*}} & X^* \otimes I
\end{array}$$

定義 1.6: rigid なモノイダル圏

モノイダル圏 \mathcal{C} が **rigid** であるとは, $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が左・右双対を持つことを言う.

! これまでは圏 \mathcal{C} の対象を大文字で書いてきたが, 以下では文脈によっては小文字で書くことがある.

定義 1.7: モノイダル関手

2つのモノイダル圏 \mathcal{C}, \mathcal{D} の間の関手

$$F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

が**弱いモノイダル関手** (lax monoidal functor) であるとは,

- 射

$$\varepsilon: I_{\mathcal{D}} \longrightarrow F(I_{\mathcal{C}})$$

- 自然変換

$$\{\mu_{X, Y}: F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y) \longrightarrow F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y)\}_{X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

があって, $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して以下の図式が可換になること:

(associativity)

$$\begin{array}{ccc}
(F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y)) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z) & \xrightarrow{a_{F(X), F(Y), F(Z)}^{\mathcal{D}}} & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} (F(Y) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z)) \\
\downarrow \mu_{X, Y} \otimes \text{Id}_{F(Z)} & & \downarrow \text{Id}_{F(X)} \otimes \mu_{Y, Z} \\
F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z) & & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y \otimes_{\mathcal{C}} Z) \\
\downarrow \mu_{X \otimes_{\mathcal{C}} Y, Z} & & \downarrow \mu_{X, Y \otimes_{\mathcal{C}} Z} \\
F((X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{C}} Z) & \xrightarrow{F(a_{X, Y, Z}^{\mathcal{C}})} & F(X \otimes_{\mathcal{C}} (Y \otimes_{\mathcal{C}} Z))
\end{array}$$

(unitality)

$$\begin{array}{ccc}
I_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathcal{D}} F(X) & \xrightarrow{\varepsilon \otimes \text{Id}_{F(X)}} & F(I_{\mathcal{C}}) \otimes_{\mathcal{D}} F(X) \\
\downarrow l_{F(X)}^{\mathcal{D}} & & \downarrow \mu_{I_{\mathcal{C}}, X} \\
F(X) & \xleftarrow{F(l_X^{\mathcal{C}})} & F(I_{\mathcal{C}} \otimes_{\mathcal{C}} X) \\
\\
F(X) \otimes_{\mathcal{D}} I_{\mathcal{D}} & \xrightarrow{\text{Id}_{F(X)} \otimes \varepsilon} & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(I_{\mathcal{C}}) \\
\downarrow r_{F(X)}^{\mathcal{D}} & & \downarrow \mu_{X, I_{\mathcal{C}}} \\
F(X) & \xleftarrow{F(r_X^{\mathcal{C}})} & F(X \otimes_{\mathcal{C}} I_{\mathcal{C}})
\end{array}$$

- 弱いモノイダル関手 F の ε と $\mu_{X, Y}$ が全て同型射ならば, F は**強いモノイダル関手** (strong monoidal functor) と呼ばれる.
- 弱いモノイダル関手 F の ε と $\mu_{X, Y}$ が全て恒等射ならば, F は**厳密なモノイダル関手** (strict monoidal functor) と呼ばれる.

定義 1.8: モノイダル自然変換

2 つのモノイダル圏 \mathcal{C}, \mathcal{D} の間の 2 つの弱いモノイダル関手 $(F_i: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, \varepsilon_i: I_{\mathcal{D}} \rightarrow F(I_{\mathcal{C}}), \{\mu_{iX,Y}: F_i(X) \otimes F_i(Y) \rightarrow F_i(X \otimes Y)\}_{X,Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})})$ $w/ i = 1, 2$ の間の自然変換

$$\begin{array}{ccc} & F_1 & \\ \curvearrowright & \downarrow \tau & \curvearrowleft \\ \mathcal{C} & & \mathcal{D} \\ \curvearrowleft & \downarrow F_2 & \end{array}$$

がモノイダル自然変換 (monoidal natural transformation) であるとは, $\forall X, Y \in \mathcal{C}$ に対して以下の図式が可換になること:

(テンソル積の保存)

$$\begin{array}{ccc} F_1(X) \otimes_{\mathcal{D}} F_1(Y) & \xrightarrow{\tau_X \otimes_{\mathcal{D}} \tau_Y} & F_2(X) \otimes_{\mathcal{D}} F_2(Y) \\ \mu_{1X,Y} \downarrow & & \downarrow \mu_{2X,Y} \\ F_1(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) & \xrightarrow{\tau_{X \otimes_{\mathcal{C}} Y}} & F_2(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \end{array}$$

(単位対象の保存)

$$\begin{array}{ccc} & I_{\mathcal{D}} & \\ \varepsilon_1 \swarrow & & \searrow \varepsilon_2 \\ F_1(I_{\mathcal{C}}) & \xrightarrow{\tau_{I_{\mathcal{C}}}} & F_2(I_{\mathcal{C}}) \end{array}$$

1.3 フュージョン圏

定義 1.9: フュージョン圏

圏 \mathcal{C} がフュージョン圏 (fusion category) であるとは,

- \mathcal{C} は半単純な \mathbb{K} -上のアーベル圏
- \mathcal{C} は rigid なモノイダル圏
- \mathcal{C} の単純対象の同型類が有限個
- 単位対象 $I \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ について, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(I, I) = \mathbb{K}$

が成り立つこと.

フュージョン圏 \mathcal{C} が組紐付きフュージョン圏 (braided fusion category) であるとは, \mathcal{C} が組紐付きモノイダル圏でもあることを言う.

1.4 2-群

[?] に倣い **2-群** (2-group) を導入する.

定義 1.10: 弱い逆対象

モノイダル圏 \mathcal{C} の対象 $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を 1 つとる.

- 対象 $y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が x の **弱い逆対象** (weak inverse) であるとは, 対象の同型の意味で^a $x \otimes y \cong 1$ かつ $y \otimes x \cong 1$ が成り立つことを言う.
- x が **弱可逆** (weakly invertible) であるとは, x が弱い逆対象を持つことを言う.

^a 自然同型ではない

定義 1.11: 弱い 2-群・コヒーレントな 2-群

- 弱い 2-群** (weak 2-group) とは, **モノイダル圏** \mathcal{G} であって, 任意の対象が **弱可逆** かつ任意の射が同型射であるもののこと.
- コヒーレントな 2-群** (coherent 2-group) とは, **モノイダル圏** \mathcal{G} であって, 任意の対象 $x \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ が可逆な **unit**, **counit** (x, \bar{x}, i_x, e_x) を持ち, かつ任意の射が同型射であるもののこと.

定理 1.1: 弱い 2-群はコヒーレントな 2-群

任意の **弱い 2-群** は **コヒーレントな 2-群** にすることができる.

証明 勝手な **弱い 2-群** \mathcal{G} を 1 つ固定する. このとき $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ に対してある $\bar{x} \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ および同型射 $i'_x: 1 \rightarrow x \otimes \bar{x}$, $e'_x: \bar{x} \otimes x \rightarrow 1$ が存在する.

ここで $e_x := e'_x$ とおき,

$$i_x := (l_x \otimes \text{Id}_{\bar{x}}) \circ a_{1, x, \bar{x}}^{-1} \circ (i'_x{}^{-1} \otimes \text{Id}_{x \otimes \bar{x}}) \circ a_{x, \bar{x}, x \otimes \bar{x}}^{-1} \circ (\text{Id}_x \otimes a_{\bar{x}, x, \bar{x}}) \circ (\text{Id}_x \otimes e'_x{}^{-1} \otimes \text{Id}_{\bar{x}}) \circ (\text{Id}_x \otimes l_{\bar{x}}^{-1}) \circ i'_x$$

とおくと組 (x, \bar{x}, i_x, e_x) が **zig-zag equation** を満たすことを示す. 実際, i_x の定義をストリング図式で書くと

$$i_x =$$

となるから, ■



定理 1.1 を踏まえ, 以下では **コヒーレントな 2-群** のことを単に **2-群** (2-group) と呼ぶ.

定義 1.12: 2-群の準同型

2-群 $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ の間の **準同型** とは, **モノイダル関手** $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ のこと.