第 2 章

Chern-Simons 理論の導入

この章は [?, Chapter4, 5] に相当する．

2.1　Charge-Flux composite

2.1.1　Aharonov-Bohm 効果

空間を表す多様体を Σ と書く．電荷 q を持つ 1 つの粒子からなる系を考えよう．この系に静磁場をかけたとき，粒子の古典的作用は自由粒子の項 S_0 と，粒子と場の結合を表す項とに分かれる：

$$S[l] = S_0[l] + q\int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} \mathrm{d}t\, \dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{A} = S_0[l] + q\int_l \mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A}$$

ただし $l\colon [t_\mathrm{i},\, t_\mathrm{f}] \longrightarrow \Sigma$ は粒子の軌跡を表す．

ここで，いつもの 2 重スリットを導入する．粒子が $\boldsymbol{x}_\mathrm{i} = \boldsymbol{x}(t_\mathrm{i})$ から出発して $\boldsymbol{x}_\mathrm{f} = \boldsymbol{x}(t_\mathrm{f})$ に到達するとき，これらの 2 点を結ぶ経路全体の集合 $\mathcal{C}(\boldsymbol{x}_\mathrm{i},\, \boldsymbol{x}_\mathrm{t})$ のホモトピー類は，スリット 1, 2 を通る経路それぞれでちょうど 2 つある．i.e. プロパゲーターは経路積分によって

$$\sum_{l\in\mathcal{C}(\boldsymbol{x}_\mathrm{i},\, \boldsymbol{x}_\mathrm{t})\text{ s.t. slit 1}} e^{\mathrm{i}S_0[l]/\hbar + \mathrm{i}(q/\hbar)\int_l \mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A}} + \sum_{l\in\mathcal{C}(\boldsymbol{x}_\mathrm{i},\, \boldsymbol{x}_\mathrm{t})\text{ s.t. slit 2}} e^{\mathrm{i}S_0[l]/\hbar + \mathrm{i}(q/\hbar)\int_l \mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A}}$$

と計算される．第 1 項と第 2 項の位相差は，片方の経路の逆をもう片方に足すことでできる閉曲線 ∂S について

$$\exp\left[\frac{\mathrm{i}q}{\hbar}\oint_{\partial S}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A}\right] = \exp\left[\frac{\mathrm{i}q}{\hbar}\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\right] = \exp\left[\frac{\mathrm{i}q}{\hbar}\Phi_S\right]$$

となる[*1]．

(1) 磁束が $\Phi_0 = 2\pi\hbar/q$ の整数倍の時は，位相シフトがない場合と物理的に区別がつかない．

(2) 実は，静止した電荷の周りに磁束を動かしても全く同じ位相シフトが引き起こされる．

[*1] 粒子が侵入できない領域にのみ磁場がかかっているとする．なお，粒子の配位空間が単連結でないことが本質的に重要である．このとき，領域 S をホモトピーで 1 点に収縮することで，無限に細い管状の磁束 (flux tube) の概念に到達する．

2.1.2 Charge-Flux composite としてのエニオン

荷電粒子と無限に細い磁束管 (flux tube) が互いに束縛し合って近接しているものを考える．この対を 2 次元系における，(q, Φ) なるチャージを持つ 1 つの粒子と見做してみよう．

さて，粒子 $i(=1, 2)$ がチャージ (q, Φ) を持つとしよう．この 2 つの同種粒子の配位空間の基本群は前章の議論から $\mathbb{Z}_2$ であり，

(1) 粒子 1 を 2 の周りに 1 周させる操作

(2) 粒子の交換を2 回行う操作

の 2 つが同じホモトピー類に属すことがわかる．故に，これら 2 つの操作で得られる位相シフトは等しい．操作 (1) による位相シフトは AB 効果によるもので，$e^{2\mathrm{i}q\Phi/\hbar}$ である[*2]．故に，この粒子が1 回交換することによって得られる位相シフトは $e^{\mathrm{i}q\Phi/\hbar}$ であるが，これは $\theta = q\Phi/\hbar$ なる可換エニオンの統計性である．

次に，エニオンの**フュージョン** (fusion) を経験的に導入する．これは，エニオン $(q_1, \Phi_1), (q_2, \Phi_2)$ が「融合」してエニオン $(q_1 + q_2, \Phi_1 + \Phi_2)$ になる，と言うものであり，今回の場合だと電荷，磁束の保存則に由来すると考えることができる．エニオン (q, Φ) と $(-q, -\Phi)$ がフュージョンすると $I \coloneqq (0, 0)$ になるだろう．この I をエニオンの真空とみなし[*3]，$(-q, -\Phi)$ のことを (q, Φ) の反エニオン (anti-anyon) と見做す．反エニオンをエニオンの周りに一周させたときの位相シフトが $e^{-2\mathrm{i}\theta}$ になることには注意すべきである．

2.1.3 トーラス上のエニオンの真空

トーラス $T^1 \coloneqq S^1 \times S^1$ の上のエニオン系の基底状態（真空）を考える．

トーラスには非自明なサイクルがちょうど 2 つあるので，それらを C_1, C_2 とおく．そして系の時間発展演算子のうち，次のようなものを考える：

$\hat{T}_1$ ある時刻に C_1 の 1 点において粒子-反粒子対を生成し，それらを C_1 上お互いに反対向きに動かし，有限時間経過後に C_1 の対蹠点で対消滅させる．

$\hat{T}_2$ ある時刻に C_2 の 1 点において粒子-反粒子対を生成し，それらを C_2 上お互いに反対向きに動かし，有限時間経過後に C_2 の対蹠点で対消滅させる．

$\hat{T}_1, \hat{T}_2$ は非可換であり，基底状態への作用を考える限り，フュージョンダイアグラムと braiding の等式から

$$\hat{T}_2\hat{T}_1 = e^{-\mathrm{i}2\theta}\hat{T}_1\hat{T}_2 \tag{2.1.1}$$

が成り立つことが分かる．然るに，基底状態が張る部分空間に制限すると $[T_1, H] = [T_2, H] = 0$ なので[*4]，基底状態が縮退していることがわかる．

さて，T_i はユニタリなので，$T_1 |\alpha\rangle = e^{\mathrm{i}\alpha} |\alpha\rangle$ とおける．この時 (2.1.1) より

$$T_1(T_2 |\alpha\rangle) = e^{\mathrm{i}(\alpha+2\theta)}T_2 |\alpha\rangle$$

[*2] 2 がつくのは，粒子 1 の q が粒子 2 の Φ の周りを 1 周する AB 効果だけでなく，粒子 1 の Φ が粒子 2 の q の周りを 1 周する AB 効果の寄与があるからである．一般に，粒子 i のチャージが (q_i, Φ_i) ならば $e^{\mathrm{i}(q_1\Phi_2+q_2\Phi_1)/\hbar}$ の位相シフトが起こる．

[*3] しかし，I のことは粒子として捉える．

[*4] 基底状態 $|0\rangle$ と $\hat{T}_1 |0\rangle$ は同じエネルギーである．

である．つまり，$|\alpha\rangle$ が基底状態ならば $|\alpha+2\theta\rangle = T_2\,|\alpha\rangle$ もまた基底状態である．この操作を続けて，基底状態 $|\alpha+2n\theta\rangle = (T_2)^n\,|\alpha\rangle$ $(n\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ を得る．特に $\theta=\pi p/m$ $\quad$ (p, m は互いに素) である場合を考えると，基底状態は m 重縮退を示している．

2.2　可換 Chern-Simons 理論

ゲージ場[*5] $a_\alpha = (a_0,\,a_1,\,a_2)$ が印加された N 粒子 2 次元系であって，ラグランジアンが

$$L = L_0 + \int_\Sigma \mathrm{d}^2x\left(\frac{\mu}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}a_\alpha\partial_\beta a_\gamma - j^\alpha a_\alpha\right) =: L_0 + \int_\Sigma \mathrm{d}^2x\,\mathcal{L} \tag{2.2.1}$$

と書かれるものを考える．ただし，L_0 は場と粒子の結合を無視したときの粒子のラグランジアンであり，空間を表す多様体を Σ で書いた．粒子 n はチャージ q_n を持つものとし，$j^\alpha=(j^0,\,\boldsymbol{j})$ は

$$\begin{aligned} j^0(\boldsymbol{x}) &\coloneqq \sum_{n=1}^N q_n\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n),\\ \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) &\coloneqq \sum_{n=1}^N q_n\dot{\boldsymbol{x}}_n\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n) \end{aligned}$$

と定義される粒子のカレントである．ラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ の第 1 項は場自身を記述し，第 2 項は場と粒子の結合を記述する．

2.2.1　ゲージ不変性

ラグランジアン (2.2.1) のゲージ不変性は次のようにしてわかる：ゲージ変換

$$a_\alpha \longrightarrow a_\alpha + \partial_\alpha\chi$$

による $\mathcal{L}$ の変化は

$$\frac{\mu}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha\chi\partial_\beta a_\gamma + \cancel{\frac{\mu}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}a_\alpha\partial_\beta\partial_\gamma\chi + \frac{\mu}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha\chi\partial_\beta\partial_\gamma\chi} - j^\alpha\partial_\alpha\chi$$

であるから，空間積分を実行すると

$$\begin{aligned} &\int_\Sigma \mathrm{d}^2x\,\frac{\mu}{2}\partial_\alpha\bigl(\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\chi\partial_\beta a_\gamma\bigr) - \int_\Sigma \mathrm{d}^2x\,\frac{\mu}{2}\cancel{\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\chi\partial_\alpha\partial_\beta a_\gamma} - \int_\Sigma \mathrm{d}^2x\,\partial_\alpha\bigl(j^\alpha\chi\bigr) + \int_\Sigma \mathrm{d}^2x\,\cancel{\partial_\alpha}j^\alpha\chi\\ &= \int_{\partial\Sigma}\mathrm{d}S_\alpha\left(\frac{\mu}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\chi\partial_\beta a_\gamma - j^\alpha\chi\right) \end{aligned}$$

となる．ただしチャージの保存則 $\partial_\alpha j^\alpha = 0$ を使った．このことから，もし空間を表す多様体 Σ の境界が $\partial\Sigma=\emptyset$ ならば[*6]ラグランジアンはゲージ不変である．

[*5] 一般相対論に倣い，時空を表す多様体 $\mathcal{M}$ の座標のうち時間成分を x^0，空間成分を x^1, x^2 とする．
[*6] このような多様体の中で重要なのが**閉多様体** (closed manifold) である．

2.2.2 運動方程式

ラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ から導かれる Euler-Lagrange 方程式は

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_\alpha} = \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\beta a_\alpha} \right)$$

である．

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_\alpha} &= \frac{\mu}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta a_\gamma - j^\alpha, \\ \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\beta a_\alpha} \right) &= \partial_\beta \left(\frac{\mu}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} a_\alpha \right) = -\frac{\mu}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta a_\gamma \end{aligned}$$

なのでこれは

$$j^\alpha = \mu \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta a_\gamma$$

となる．特に第 0 成分は，「磁場」$\boldsymbol{b} \coloneqq \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{a}$ を導入することで

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{q_n}{\mu} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n) = b^0$$

となる．つまり，位置 $\boldsymbol{x}_n$ に強さ q_n/μ の磁束管が点在している，という描像になり，磁束のピン留め現象を説明できることがわかった．

2.2.3 プロパゲーター

簡単のため，全ての粒子のチャージが等しく q であるとする．N 粒子の配位空間 $\mathcal{C}$ における初期配位と終了時の配位をそれぞれ $\{\boldsymbol{x}_\mathrm{i}\}$, $\{\boldsymbol{x}_\mathrm{f}\}$ とし，それらを繋ぐ経路全体の集合を $\mathcal{C}(\boldsymbol{x}_\mathrm{i}, \boldsymbol{x}_\mathrm{f})$ と書くと，プロパゲーターは経路積分によって

$$\sum_{l \in \mathcal{C}(\boldsymbol{x}_\mathrm{i}, \boldsymbol{x}_\mathrm{f})} e^{\mathrm{i} S_0[l]/\hbar} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D} a_\mu(x)\, e^{\mathrm{i} S_{\mathrm{CS}}[a_\mu(x)]/\hbar} e^{\mathrm{i}(q/\hbar) \int_l \mathrm{d}x^\alpha a_\alpha(x)}$$

と計算される．ここに $\mathcal{D} a_\mu(x)$ は汎函数積分の測度を表す．詳細は後述するが，場に関する汎函数積分を先に実行してしまうと，実は

$$\sum_{l \in \mathcal{C}(\boldsymbol{x}_\mathrm{i}, \boldsymbol{x}_\mathrm{f})} e^{\mathrm{i} S_0[l]/\hbar + \mathrm{i}\theta W(l)}$$

の形になることが知られている．ここに $W(l)$ は，経路 l の巻きつき数である．経路に依存する位相因子 $e^{\mathrm{i}\theta W(l)}$ 前章で議論した $\pi_1 \mathcal{C}$ の 1 次元ユニタリ表現そのものであり，エニオンの統計性が発現する機構が Chern-Simons 項により説明できることを示唆している．

2.2.4 真空中の可換 Chern-Simons 理論

粒子が存在しないとき，経路積分は

$$Z(\mathcal{M}) \coloneqq \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}a_\mu(x)\, e^{\mathrm{i}S_{\mathrm{CS}}[a_\mu(x)]/\hbar}$$

の形をする．$Z(\mathcal{M})$ は $\mathcal{M}$ についてホモトピー不変であり，**分配関数** (partition function) と呼ばれる．$Z(\mathcal{M})$ が TQFT において重要な役割を果たすことを後の章で見る．

2.2.5　正準量子化

$a_0 = 0$ なるゲージをとると，ラグランジアン密度における Chern-Simons 項は $-a_1\partial_0 a_2 + a_2\partial_0 a_1$ の形になる．これは a_1（resp. a_2）が a_2（resp. a_1）の共役運動量であることを意味するので，正準量子化を行うならば

$$[a_1(\boldsymbol{x}), a_2(\boldsymbol{y})] = \frac{\mathrm{i}\hbar}{\mu}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$$

を要請する．

さて，このときトーラス T^2 上の 2 つのサイクル C_1, C_2 に対して Wilson ループ

$$W_j = \exp\left(\frac{\mathrm{i}q}{\hbar}\oint_{C_j} \mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}\right)$$

を考える．$[A, B]$ が c 数である場合の BCH 公式から

$$W_1W_2 = e^{\mathrm{i}q^2/(\mu\hbar)}W_2W_1$$

を得る．これは (2.1.1) を説明している．つまり，演算子 T_1, T_2 とは Wilson loop のことだったのである．

2.3　非可換 Chern-Simons 理論

この節では自然単位系を使う．前節を一般化して，ゲージ場 $a_\mu(x)$ がある Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に値をとるものとしよう．つまり，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底を $\sigma_a/(2\mathrm{i})$ とすると[*7]

$$a_\mu(x) = a_\mu^a(x)\frac{\sigma_a}{2\mathrm{i}}$$

と書かれるような状況を考える[*8]．$\sigma_a \in \mathfrak{g}$ が一般に非可換であることから，このような理論は非可換 Chern-Simons 理論と呼ばれる．

時空多様体 $\mathcal{M}$ 上の閉曲線 l に沿った **Wilson loop** は，**経路順序積** (path ordering) $\mathcal{P}$ を用いて

$$W_l \coloneqq \mathrm{Tr}\left[\mathcal{P}\exp\left(\oint_l \mathrm{d}x^\mu\, a_\mu(x)\right)\right]$$

と定義される．Aharonov-Bohm 位相の一般化という気持ちであるが，経路 l の異なる 2 点 x, y を取ってきたときに $a_\mu(x)$ と $a_\mu(x')$ が一般に非可換であることが話をややこしくする．

*7 因子 $1/(2\mathrm{i})$ は物理学における慣習である．ややこしいことに，文献によってこの因子が異なる場合がある．

*8 ゲージ接続が Lie 代数に値をとる 1-形式である，ということ．

2.3.1　ゲージ不変性

非可換 Chern-Simons 理論におけるゲージ変換は，$U\colon \mathcal{M} \longrightarrow G$ を用いて

$$a_\mu(x) \longrightarrow U^{-1}(x)\big(a_\mu(x) + \partial_\mu\big)U(x) \tag{2.3.1}$$

の形をする．このゲージ変換が Wilson line を不変に保つことを，無限小の場合に確認しておこう．

$\mathcal{M}$ の任意の 2 点 $x,\, y \in \mathcal{M}$ を結ぶ曲線[*9] $C\colon [0,\, 1] \longrightarrow \mathcal{M}$ をとり，**Wlison line** を

$$\tilde{W}_C(x,\, y) \coloneqq \mathcal{P}\exp\left(\int_C \mathrm{d}x^\mu\, a_\mu(x)\right)$$

で定義する．無限小だけ離れた 2 点 $x,\, x + \mathrm{d}x$ を取ってくると

$$\tilde{W}_C(x,\, x+\mathrm{d}x) = 1 + a_\mu(x)\,\mathrm{d}x^\mu$$

と書けるので，

$$\begin{aligned}
\tilde{W}_C(x,\, x+\mathrm{d}x) &\longrightarrow U^{-1}(x)\tilde{W}_C(x,\, x+\mathrm{d}x)U(x+\mathrm{d}x) \\
&= U(x)^{-1}\big[1 + a_\mu(x)\,\mathrm{d}x^\mu\big]\big[U(x) + \partial_\mu U(x)\,\mathrm{d}x^\mu\big] \\
&= 1 + U^{-1}(x)\big[a_\mu + \partial_\mu\big]U(x)\,\mathrm{d}x^\mu
\end{aligned}$$

である．

2.3.2　Chern-Simons 作用

いささか天下り的だが，**Chern-Simons action** を

$$S_{\mathrm{CS}} \coloneqq \frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^3x\, \epsilon^{\alpha\beta\gamma}\,\mathrm{Tr}\left[a_\alpha\partial_\beta a_\gamma + \frac{2}{3}a_\alpha a_\beta a_\gamma\right]$$

により定義する．第 2 項は可換な場合には必ず零になるので前節では登場しなかった．S_{CS} が時空 $\mathcal{M}$ の計量によらない[*10]ことは，ゲージ場を 1-形式 a として書き表したときに

$$S_{\mathrm{CS}} = \frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{Tr}\left(a \wedge \mathrm{d}a + \frac{2}{3}a\wedge a\wedge a\right)$$

と書けることからわかる[*11]．

S_{CS} にゲージ変換 (2.3.1) を施した結果は

$$\begin{aligned}
&S_{\mathrm{CS}} \longrightarrow S_{\mathrm{CS}} + 2\pi\nu k, \\
&\text{w/ } \nu \coloneqq \frac{1}{24\pi^2}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^3x\, \epsilon^{\alpha\beta\gamma}\,\mathrm{Tr}\big[(U^{-1}\partial_\alpha U)(U^{-1}\partial_\beta U)(U^{-1}\partial_\gamma U)\big]
\end{aligned} \tag{2.3.2}$$

となる．ν は写像 $U\colon \mathcal{M} \longrightarrow G$ の**巻きつき数** (winding number)，もしくは **Pontryagin index** と呼ばれ，常に整数値をとる．この極めて非自明な結果についても後述する．(2.3.2) から，S_{CS} は厳密にはゲージ不変

[*9] 閉曲線でなくとも良い．閉曲線ならば Wilson loop と呼ばれる．

[*10] **計量不変** (metric invariant) であると言う．

[*11] ... と言うのは微妙に的を外している．より正確には $2+1$ 次元多様体 $\mathcal{M}$ を教会に持つような 4 次元多様体 $\mathcal{N}$ を用意し，$\mathcal{N}$ の作用 $\mathcal{S}[a] \coloneqq k/(4\pi)\int_{\mathcal{N}} \mathrm{Tr}(F\wedge F)$ を部分積分することで $\mathcal{S}CS$ の別の定義が与えられる．

ではない．然るに，もし $k \in \mathbb{Z}$ ならば（このとき k の値は **level** と呼ばれる），分配関数 $Z(\mathcal{M})$ がゲージ不変な形になってくれるので問題ない，と考える．$2+1$ 次元においては，1 つのゲージ場からなる作用であって

- トポロジカル不変性（i.e. 計量不変性）
- 上述の意味のゲージ不変性

の 2 つを充たすものは他にない．

2.3.3 Wilson loop と結び目不変量

Wilson loop の真空期待値が結び目不変量になることが知られている．