第 2 章

Chern-Simons 理論の導入

この章は [?, Chapter4, 5] に相当する．

2.1 Charge-Flux composite

2.1.1 Aharonov-Bohm 効果

空間を表す多様体を Σ と書く．電荷 q を持つ 1 つの粒子からなる系を考えよう．この系に静磁場をかけたとき，粒子の古典的作用は自由粒子の項 S_0 と，粒子と場の結合を表す項とに分かれる：

$$S[l] = S_0[l] + q\int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} \mathrm{d}t\, \dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{A} = S_0[l] + q\int_l \mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{A}$$

ただし $l\colon [t_\mathrm{i},\, t_\mathrm{f}] \longrightarrow \Sigma$ は粒子の軌跡を表す．

ここで，いつもの 2 重スリットを導入する．粒子が $\boldsymbol{x}_\mathrm{i} = \boldsymbol{x}(t_\mathrm{i})$ から出発して $\boldsymbol{x}_\mathrm{f} = \boldsymbol{x}(t_\mathrm{f})$ に到達するとき，これらの 2 点を結ぶ経路全体の集合 $\mathcal{C}(\boldsymbol{x}_\mathrm{i},\, \boldsymbol{x}_\mathrm{t})$ のホモトピー類は，スリット 1, 2 を通る経路それぞれでちょうど 2 つある．i.e. プロパゲーターは経路積分によって

$$\sum_{l\in\mathcal{C}(\boldsymbol{x}_\mathrm{i},\, \boldsymbol{x}_\mathrm{t})\ \text{s.t. slit 1}} e^{\mathrm{i}S_0[l]/\hbar + \mathrm{i}(q/\hbar)\int_l \mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A}} + \sum_{l\in\mathcal{C}(\boldsymbol{x}_\mathrm{i},\, \boldsymbol{x}_\mathrm{t})\ \text{s.t. slit 2}} e^{\mathrm{i}S_0[l]/\hbar + \mathrm{i}(q/\hbar)\int_l \mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A}}$$

と計算される．第 1 項と第 2 項の位相差は，片方の経路の逆をもう片方に足すことでできる閉曲線 ∂S について

$$\exp\left[\frac{\mathrm{i}q}{\hbar}\oint_{\partial S} \mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A}\right] = \exp\left[\frac{\mathrm{i}q}{\hbar}\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\right] = \exp\left[\frac{\mathrm{i}q}{\hbar}\Phi_S\right]$$

となる[*1]．

(1) 磁束が $\Phi_0 = 2\pi\hbar/q$ の整数倍の時は，位相シフトがない場合と物理的に区別がつかない．

(2) 実は，静止した電荷の周りに磁束を動かしても全く同じ位相シフトが引き起こされる [?].

[*1] 粒子が侵入できない領域にのみ磁場がかかっているとする．なお，粒子の配位空間が単連結でないことが本質的に重要である．このとき，領域 S をホモトピーで 1 点に収縮することで，無限に細い管状の磁束 (flux tube) の概念に到達する．

2.1.2 Charge-Flux composite としてのエニオン

荷電粒子と無限に細い磁束管 (flux tube) が互いに束縛し合って近接しているものを考える．この対を 2 次元系における，(q, Φ) なるチャージを持つ 1 つの粒子と見做してみよう．

さて，粒子 $i(=1, 2)$ がチャージ (q, Φ) を持つとしよう．この 2 つの同種粒子の配位空間の基本群は前章の議論から $\mathbb{Z}_2$ であり，

(1) 粒子 1 を 2 の周りに 1 周させる操作

(2) 粒子の交換を2 回行う操作

の 2 つが同じホモトピー類に属すことがわかる．故に，これら 2 つの操作で得られる位相シフトは等しい．操作 (1) による位相シフトは AB 効果によるもので，$e^{2\mathrm{i}q\Phi/\hbar}$ である[*2]．故に，この粒子が1 回交換することによって得られる位相シフトは $e^{\mathrm{i}q\Phi/\hbar}$ であるが，これは $\theta = q\Phi/\hbar$ なる可換エニオンの統計性である．

次に，エニオンの**フュージョン** (fusion) を経験的に導入する．これは，エニオン $(q_1, \Phi_1), (q_2, \Phi_2)$ が「融合」してエニオン $(q_1+q_2, \Phi_1+\Phi_2)$ になる，と言うものであり，今回の場合だと電荷，磁束の保存則に由来すると考えることができる．エニオン (q, Φ) と $(-q, -\Phi)$ がフュージョンすると $I \coloneqq (0, 0)$ になるだろう．この I をエニオンの真空とみなし[*3]，$(-q, -\Phi)$ のことを (q, Φ) の反エニオン (anti-anyon) と見做す．反エニオンをエニオンの周りに一周させたときの位相シフトが $e^{-2\mathrm{i}\theta}$ になることには注意すべきである．

2.1.3 トーラス上のエニオンの真空

トーラス $T^1 \coloneqq S^1 \times S^1$ の上のエニオン系の基底状態（真空）を考える．

トーラスには非自明なサイクルがちょうど 2 つあるので，それらを C_1, C_2 とおく．そして系の時間発展演算子のうち，次のようなものを考える：

$\hat{T}_1$ ある時刻に C_1 の 1 点において粒子-反粒子対を生成し，それらを C_1 上お互いに反対向きに動かし，有限時間経過後に C_1 の対蹠点で対消滅させる．

$\hat{T}_2$ ある時刻に C_2 の 1 点において粒子-反粒子対を生成し，それらを C_2 上お互いに反対向きに動かし，有限時間経過後に C_2 の対蹠点で対消滅させる．

$\hat{T}_1, \hat{T}_2$ は非可換であり，基底状態への作用を考える限り，フュージョンダイアグラムと braiding の等式から

$$\hat{T}_2\hat{T}_1 = e^{-\mathrm{i}2\theta}\hat{T}_1\hat{T}_2 \tag{2.1.1}$$

が成り立つことが分かる．然るに，基底状態が張る部分空間に制限すると $[T_1, H] = [T_2, H] = 0$ なので[*4]，基底状態が縮退していることがわかる．

さて，T_i はユニタリなので，$T_1 \left|\alpha\right\rangle = e^{\mathrm{i}\alpha}\left|\alpha\right\rangle$ とおける．この時 (2.1.1) より

$$T_1(T_2\left|\alpha\right\rangle) = e^{\mathrm{i}(\alpha+2\theta)}T_2\left|\alpha\right\rangle$$

[*2] 2 がつくのは，粒子 1 の q が粒子 2 の Φ の周りを 1 周する AB 効果だけでなく，粒子 1 の Φ が粒子 2 の q の周りを 1 周する AB 効果の寄与があるからである．一般に，粒子 i のチャージが (q_i, Φ_i) ならば $e^{\mathrm{i}(q_1\Phi_2+q_2\Phi_1)/\hbar}$ の位相シフトが起こる．

[*3] しかし，I のことは粒子として捉える．

[*4] 基底状態 $\left|0\right\rangle$ と $\hat{T}_1\left|0\right\rangle$ は同じエネルギーである．

である．つまり，$|\alpha\rangle$ が基底状態ならば $|\alpha+2\theta\rangle = T_2\,|\alpha\rangle$ もまた基底状態である．この操作を続けて，基底状態 $|\alpha+2n\theta\rangle = (T_2)^n\,|\alpha\rangle$ $(n\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ を得る．特に $\theta = \pi p/m$ $\quad$ (p, m は互いに素) である場合を考えると，基底状態は m 重縮退を示している．

2.2 可換 Chern-Simons 理論の経験的導入

ゲージ場[*5] $a_\alpha = (a_0,\, a_1,\, a_2)$ が印加された N 粒子 2 次元系であって，ラグランジアンが

$$L = L_0 + \int_\Sigma \mathrm{d}^2x \left(\frac{\mu}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}a_\alpha\partial_\beta a_\gamma - j^\alpha a_\alpha\right) =: L_0 + \int_\Sigma \mathrm{d}^2x\,\mathcal{L} \tag{2.2.1}$$

と書かれるものを考える．ただし，L_0 は場と粒子の結合を無視したときの粒子のラグランジアンであり，空間を表す多様体を Σ で書いた．粒子 n はチャージ q_n を持つものとし，$j^\alpha = (j^0,\,\boldsymbol{j})$ は

$$\begin{aligned} j^0(\boldsymbol{x}) &\coloneqq \sum_{n=1}^{N} q_n\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n), \\ \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) &\coloneqq \sum_{n=1}^{N} q_n\dot{\boldsymbol{x}}_n\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n) \end{aligned}$$

と定義される粒子のカレントである．ラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ の第 1 項は場自身を記述し，第 2 項は場と粒子の結合を記述する．

2.2.1 ゲージ不変性

ラグランジアン (2.2.1) のゲージ不変性は次のようにしてわかる：ゲージ変換

$$a_\alpha \longrightarrow a_\alpha + \partial_\alpha\chi$$

による $\mathcal{L}$ の変化は

$$\frac{\mu}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha\chi\partial_\beta a_\gamma + \cancel{\frac{\mu}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}a_\alpha\partial_\beta\partial_\gamma\chi + \frac{\mu}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha\chi\partial_\beta\partial_\gamma\chi} - j^\alpha\partial_\alpha\chi$$

であるから，空間積分を実行すると

$$\begin{aligned} &\int_\Sigma \mathrm{d}^2x\,\frac{\mu}{2}\partial_\alpha\left(\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\chi\partial_\beta a_\gamma\right) - \int_\Sigma \mathrm{d}^2x\,\frac{\mu}{2}\cancel{\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\chi\partial_\alpha\partial_\beta a_\gamma} - \int_\Sigma \mathrm{d}^2x\,\partial_\alpha\left(j^\alpha\chi\right) + \int_\Sigma \mathrm{d}^2x\,\cancel{\partial_\alpha}j^\alpha\chi \\ &= \int_{\partial\Sigma} \mathrm{d}S_\alpha\left(\frac{\mu}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\chi\partial_\beta a_\gamma - j^\alpha\chi\right) \end{aligned}$$

となる．ただしチャージの保存則 $\partial_\alpha j^\alpha = 0$ を使った．このことから，もし空間を表す多様体 Σ の境界が $\partial\Sigma = \emptyset$ ならば[*6]ラグランジアンはゲージ不変である．

[*5] 一般相対論に倣い，時空を表す多様体 $\mathcal{M}$ の座標のうち時間成分を x^0，空間成分を $x^1,\, x^2$ とする．
[*6] このような多様体の中で重要なのが**閉多様体** (closed manifold) である．

2.2.2　運動方程式

ラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ から導かれる Euler-Lagrange 方程式は

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_\alpha} = \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\beta a_\alpha} \right)$$

である．

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_\alpha} &= \frac{\mu}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta a_\gamma - j^\alpha, \\ \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\beta a_\alpha} \right) &= \partial_\beta \left(\frac{\mu}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} a_\alpha \right) = -\frac{\mu}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta a_\gamma \end{aligned}$$

なのでこれは

$$j^\alpha = \mu \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta a_\gamma$$

となる．特に第 0 成分は，「磁場」$\boldsymbol{b} \coloneqq \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{a}$ を導入することで

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{q_n}{\mu} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n) = b^0$$

となる．つまり，位置 $\boldsymbol{x}_n$ に強さ q_n/μ の磁束管が点在している，という描像になり，charge-flux composite を説明できている．

2.2.3　プロパゲーター

簡単のため，全ての粒子のチャージが等しく q であるとする．N 粒子の配位空間 $\mathcal{C}$ における初期配位と終了時の配位をそれぞれ $\{\boldsymbol{x}_\mathrm{i}\}$, $\{\boldsymbol{x}_\mathrm{f}\}$ とし，それらを繋ぐ経路全体の集合を $\mathcal{C}(\boldsymbol{x}_\mathrm{i}, \boldsymbol{x}_\mathrm{f})$ と書くと，プロパゲーターは経路積分によって

$$\sum_{l \in \mathcal{C}(\boldsymbol{x}_\mathrm{i}, \boldsymbol{x}_\mathrm{f})} e^{\mathrm{i} S_0[l]/\hbar} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D} a_\mu(x)\, e^{\mathrm{i} S_{\mathrm{CS}}[a_\mu(x)]/\hbar} e^{\mathrm{i}(q/\hbar) \int_l \mathrm{d}x^\alpha a_\alpha(x)}$$

と計算される．ここに $\mathcal{D} a_\mu(x)$ は汎函数積分の測度を表す．詳細は後述するが，場に関する汎函数積分を先に実行してしまうと，実は

$$\sum_{l \in \mathcal{C}(\boldsymbol{x}_\mathrm{i}, \boldsymbol{x}_\mathrm{f})} e^{\mathrm{i} S_0[l]/\hbar + \mathrm{i}\theta W(l)}$$

の形になることが知られている．ここに $W(l)$ は，経路 l の巻きつき数である．経路に依存する位相因子 $e^{\mathrm{i}\theta W(l)}$ 前章で議論した $\pi_1 \mathcal{C}$ の 1 次元ユニタリ表現そのものであり，エニオンの統計性が発現する機構が Chern-Simons 項により説明できることを示唆している．

2.2.4　真空中の可換 Chern-Simons 理論

粒子が存在しないとき，経路積分は

$$Z(\mathcal{M}) \coloneqq \int_{\mathcal{M}} \mathcal{D}a_\mu(x)\, e^{\mathrm{i}S_{\mathrm{CS}}[a_\mu(x)]/\hbar}$$

の形をする．$Z(\mathcal{M})$ は $\mathcal{M}$ についてホモトピー不変であり，**分配関数** (partition function) と呼ばれる．$Z(\mathcal{M})$ が TQFT において重要な役割を果たすことを後の章で見る．

2.2.5　正準量子化

$a_0 = 0$ なるゲージをとると，ラグランジアン密度における Chern-Simons 項は $-a_1\partial_0 a_2 + a_2\partial_0 a_1$ の形になる．これは a_1（resp. a_2）が a_2（resp. a_1）の共役運動量であることを意味するので，正準量子化を行うならば

$$[a_1(\boldsymbol{x}), a_2(\boldsymbol{y})] = \frac{\mathrm{i}\hbar}{\mu}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$$

を要請する[*7]．

さて，このときトーラス T^2 上の 2 つのサイクル C_1, C_2 に対して Wilson ループ

$$W_j = \exp\left(\frac{\mathrm{i}q}{\hbar}\oint_{C_j} \mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}\right)$$

を考える．$[A, B]$ が c 数である場合の BCH 公式から

$$W_1 W_2 = e^{\mathrm{i}q^2/(\mu\hbar)} W_2 W_1$$

を得る．これは (2.1.1) を説明している．つまり，演算子 T_1, T_2 とは Wilson loop のことだったのである[*8]．

2.3　非可換 Chern-Simons 理論の経験的導入

この節では自然単位系を使う．前節を一般化して，ゲージ場 $a_\mu(x)$ がある Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に値をとるものとしよう．つまり，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底を $\sigma_a/(2\mathrm{i})$ とすると[*9]

$$a_\mu(x) = a_\mu^a(x)\frac{\sigma_a}{2\mathrm{i}}$$

と書かれるような状況を考える[*10]．$\sigma_a \in \mathfrak{g}$ が一般に非可換であることから，このような理論は非可換 Chern-Simons 理論と呼ばれる．

時空多様体 $\mathcal{M}$ 上の閉曲線 l に沿った **Wilson loop** は，**経路順序積** (path ordering) $\mathcal{P}$ を用いて

$$W_l \coloneqq \mathrm{Tr}\left[\mathcal{P}\exp\left(\oint_l \mathrm{d}x^\mu\, a_\mu(x)\right)\right]$$

と定義される．Aharonov-Bohm 位相の一般化という気持ちであるが，経路 l の異なる 2 点 x, y を取ってきたときに $a_\mu(x)$ と $a_\mu(x')$ が一般に非可換であることが話をややこしくする．

[*7] しかし，トーラス上の座標をどのように取るかと言うことは問題である．
[*8] 疑問：座標の時間成分はどこへ行ったのか？
[*9] 因子 $1/(2\mathrm{i})$ は物理学における慣習である．ややこしいことに，文献によってこの因子が異なる場合がある．
[*10] ゲージ接続が Lie 代数に値をとる 1-形式である，ということ．

2.3.1 ゲージ不変性

非可換 Chern-Simons 理論におけるゲージ変換は，$U\colon \mathcal{M} \longrightarrow G$ を用いて

$$a_\mu(x) \longrightarrow U^{-1}(x)\big(a_\mu(x) + \partial_\mu\big)U(x) \tag{2.3.1}$$

の形をする．このゲージ変換が Wilson loop を不変に保つことを，無限小の場合に確認しておこう．

$\mathcal{M}$ の任意の 2 点 $x,\, y \in \mathcal{M}$ を結ぶ曲線[*11] $C\colon [0,\,1] \longrightarrow \mathcal{M}$ をとり，**Wilson line** を

$$\tilde{W}_C(x,\, y) \coloneqq \mathcal{P}\exp\left(\int_C \mathrm{d}x^\mu\, a_\mu(x)\right)$$

で定義する．無限小だけ離れた 2 点 $x,\, x+\mathrm{d}x$ を取ってくると

$$\tilde{W}_C(x,\, x+\mathrm{d}x) = 1 + a_\mu(x)\,\mathrm{d}x^\mu$$

と書けるので，

$$\begin{aligned}\tilde{W}_C(x,\, x+\mathrm{d}x) &\longrightarrow U^{-1}(x)\tilde{W}_C(x,\, x+\mathrm{d}x)U(x+\mathrm{d}x)\\ &= U(x)^{-1}\big[1 + a_\mu(x)\,\mathrm{d}x^\mu\big]\big[U(x) + \partial_\mu U(x)\,\mathrm{d}x^\mu\big]\\ &= 1 + U^{-1}(x)\big[a_\mu + \partial_\mu\big]U(x)\,\mathrm{d}x^\mu\end{aligned}$$

である[*12]．

2.3.2 Chern-Simons 作用

いささか天下り的だが，**Chern-Simons action** を

$$S_{\mathrm{CS}}[a_\mu] \coloneqq \frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^3x\, \epsilon^{\alpha\beta\gamma}\,\mathrm{Tr}\left[a_\alpha\partial_\beta a_\gamma + \frac{2}{3}a_\alpha a_\beta a_\gamma\right]$$

により定義する．第 2 項は可換な場合には必ず零になるので前節では登場しなかった．S_{CS} が時空 $\mathcal{M}$ の計量によらない[*13]ことは，ゲージ場を 1-形式 a として書き表したときに

$$S_{\mathrm{CS}}[a] = \frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{Tr}\left(a\wedge\mathrm{d}a + \frac{2}{3}a\wedge a\wedge a\right)$$

と書けることからわかる[*14]．

S_{CS} にゲージ変換 (2.3.1) を施した結果は

$$\begin{aligned}&S_{\mathrm{CS}}[a_\mu] \longrightarrow S_{\mathrm{CS}}[a_\mu] + 2\pi\nu k,\\ \text{w/ }\ &\nu \coloneqq \frac{1}{24\pi^2}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^3x\, \epsilon^{\alpha\beta\gamma}\,\mathrm{Tr}\big[(U^{-1}\partial_\alpha U)(U^{-1}\partial_\beta U)(U^{-1}\partial_\gamma U)\big]\end{aligned} \tag{2.3.2}$$

---

*11 閉曲線でなくとも良い．閉曲線ならば Wilson loop と呼ばれる．

*12 無限小の場合はゲージ不変であるように見えるが，一般に Wilson line 自身はゲージ不変<u>ではない</u>．

*13 **計量不変** (metric invariant) であると言う．

*14 ... と言うのは微妙に的を外している．より正確には $2+1$ 次元多様体 $\mathcal{M}$ を教会に持つような 4 次元多様体 $\mathcal{N}$ を用意し，$\mathcal{N}$ の作用 $\mathcal{S}[a] \coloneqq k/(4\pi)\int_{\mathcal{N}}\mathrm{Tr}(F\wedge F)$ を部分積分することで S_{CS} の別の定義が与えられる．

となる．ν は写像 $U\colon \mathcal{M} \longrightarrow G$ の**巻きつき数** (winding number)，もしくは **Pontryagin index** と呼ばれ，常に整数値をとる．この極めて非自明な結果についても後述する．(2.3.2) から，S_{CS} は厳密にはゲージ不変ではない．然るに，もし $k \in \mathbb{Z}$ ならば（このとき k の値は **level** と呼ばれる），分配関数 $Z(\mathcal{M})$ がゲージ不変な形になってくれるので問題ない，と考える．$2+1$ 次元においては，1 つのゲージ場からなる作用であって

- トポロジカル不変性（i.e. 計量不変性）
- 上述の意味のゲージ不変性

の 2 つを充たすものは他にない．

2.4 古典的ゲージ理論

時空の多様体を $\mathcal{M}$ と書く．

場 $\varphi\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{K}^N,\ x \longmapsto \bigl(\varphi_1(x),\, \dots,\, \varphi_N(x)\bigr)$ が線型 Lie 群 $G \subset \mathrm{GL}(N,\, \mathbb{K})$ で記述される[*15]内部対称性を持っているような系を考える．つまり，任意の C^∞ 写像 $U\colon \mathcal{M} \longrightarrow G$ に対して[*16]，系のラグランジアン密度の場に関する項 $\mathcal{L}[\varphi_\mu(x)]$ が $\mathcal{L}\bigl[\,[U(x)]_i^{\,j}\varphi_j(x)\bigr] = \mathcal{L}[\varphi_i(x)]$ を充たすとする．

この系を経路積分により量子化することを見据えて，場の配位空間の幾何学を考察すると見通しが良いだろう．そのため，まず時空上の無限小だけ離れた 2 点 $x_{\mathrm{i}},\, x_{\mathrm{f}} \in \mathcal{M}$ における場の配位 $\varphi(x_{\mathrm{i}}),\, \varphi(x_{\mathrm{f}})$ を比較しよう．内部自由度による変換性を議論したいので，$\varphi(x_{\mathrm{f}}) - \varphi(x_{\mathrm{i}})$ なる量を調べても意味がない．$x_{\mathrm{i}},\, x_{\mathrm{f}}$ を結ぶ C^∞ 曲線 $\gamma\colon [t_{\mathrm{i}},\, t_{\mathrm{f}}] \longrightarrow \mathcal{M}$ を持ってきて，γ に沿って $\varphi(x_{\mathrm{i}})$ を x_{t} まで流してやるのが良い．つまり，場の配位空間 $\mathbb{K}^N$ 上の C^∞ 曲線 $\varphi^{(\gamma)} \coloneqq \varphi \circ \gamma\colon [t_{\mathrm{i}},\, t_{\mathrm{f}}]$ を考えれば，量 $\varphi(x_{\mathrm{f}}) - \varphi^{(\gamma)}(t_{\mathrm{f}})$ は $U(x_{\mathrm{f}}) \in G$ による変換を受ける．$x_{\mathrm{i}},\, x_{\mathrm{f}}$ の両方を含む $\mathcal{M}$ のチャート $\bigl(U,\, (x^\mu)\bigr)$ を持ってきて成分計算すると，$\mathrm{d}x \coloneqq x_{\mathrm{f}} - x_{\mathrm{i}}$ が[*17]微小なので Taylor 展開において $\mathrm{d}x$ の 1 次の項まで残すことで

$$
\begin{aligned}
\varphi_i^{(\gamma)}(t_{\mathrm{f}}) &\eqqcolon \varphi_i(x_{\mathrm{i}}) + [\,A_\mu(x)\,]_i^{\,j}\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x^\mu \qquad (2.4.1)\\
\varphi(x_{\mathrm{f}}) &= \varphi(x_{\mathrm{i}}) + \partial_\mu\varphi(x)\,\mathrm{d}x^\mu
\end{aligned}
$$

と書ける．ただし，式 (2.4.1) の右辺によって $\dim\mathcal{M}$ 個の成分を持つ新しい場 $A_\mu\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathrm{GL}(N,\, \mathbb{K})$ を定義した．この場は**ゲージ場**と呼ばれる．

ゲージ場 A_μ の変換性を調べるには，量

$$
\varphi(x_{\mathrm{f}}) - \varphi^{(\gamma)}(t_{\mathrm{f}}) = \bigl(\partial_\mu\varphi(x) - A_\mu(x)\varphi(x)\bigr)\,\mathrm{d}x^\mu
$$

が $U(x_{\mathrm{f}}) \in G$ による変換を受けることに注目すれば良い．つまり，**共変微分**と呼ばれる線型写像を $\mathcal{D}_\mu(x) \coloneqq \partial_\mu - \mathrm{i}A_\mu(x)$ で定義すると，$\forall x \in \mathcal{M}$ における，内部対称性による変換

$$
\varphi(x) \longrightarrow \tilde{\varphi}(x) \coloneqq U(x)\varphi(x) \qquad (2.4.2)
$$

に伴って $\mathcal{D}_\mu(x)\varphi(x)$ は

$$
\mathcal{D}_\mu(x)\varphi(x) \longrightarrow \tilde{\mathcal{D}_\mu}(x)\tilde{\varphi}(x) \coloneqq U(x)\mathcal{D}_\mu(x)\varphi(x)
$$

[*15] ここでは $\mathbb{K} = \mathbb{R},\, \mathbb{C}$ としておく．
[*16] 内部対称性と言うのは，U が定数写像とは限らないことを意味する．
[*17] 厳密にはこれは座標関数の差 $\mathrm{d}x^\mu \coloneqq x^\mu(x_{\mathrm{f}}) - x^\mu(x_{\mathrm{i}})$ の絶対値が小さいことを主張している．

の変換を受ける．このことから，場 φ の変換 (2.4.2) に伴う共変微分自身の変換則は

$$\mathcal{D}_\mu(x) \longrightarrow \tilde{D_\mu}(x) = U(x)^{-1}\mathcal{D}_\mu(x)U(x)$$

となる．従って場 $A_\mu \colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathrm{GL}(N,\, \mathbb{K})$ の，場 φ の変換 (2.4.2) に伴う変換則が

$$A_\mu(x) \longrightarrow U(x)^{-1}\bigl(\partial_\mu + A_\mu(x)\bigr)U(x)$$

だと分かった．このような場の変換則を**ゲージ変換** (gauge transformation) と呼ぶ．

2.4.1　内部対称性を持つ場の定式化

ゲージ場は，主束の接続として定式化できる．特に，主束の同伴ベクトル束が重要である．

まずファイバー束と主束を定義する．C^∞ 多様体の**微分同相群** (diffeomorphism group) **Diff** $\boldsymbol{M}$ とは，

- 台集合 $\mathrm{Diff}\, M \coloneqq \left\{\, f \colon M \longrightarrow M \;\middle|\; 微分同相写像 \,\right\}$
- 単位元を恒等写像
- 積を写像の合成

として構成される群のことを言う．

定義 2.1: Lie 群の作用

- Lie 群 G の C^∞ 多様体 M への**左作用**とは，群準同型 $\rho \colon G \longrightarrow \mathrm{Diff}\, M$ であって写像

$$\blacktriangleright \colon G \times M \longrightarrow M,\ (g,\, x) \longmapsto \rho(g)(x)$$

  が C^∞ 写像となるようなもののこと．$\boldsymbol{g \blacktriangleright x} \coloneqq \blacktriangleright (g,\, x)$ と略記する．
- Lie 群 G の C^∞ 多様体 M への**右作用**とは，群準同型 $\rho \colon G^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Diff}\, M$ であって写像

$$\blacktriangleleft \colon M \times G \longrightarrow M,\ (x,\, g) \longmapsto \rho(g)(x)$$

  が C^∞ 写像となるようなもののこと．$\boldsymbol{x \blacktriangleleft g} \coloneqq \blacktriangleleft (g,\, x)$ と略記する．
- Lie 群の左（resp．右）作用が**自由** (free) であるとは，$\forall x \in X,\ \forall g \in G \setminus \{1_G\},\ g \blacktriangleright x \neq x$　(resp.　$x \blacktriangleleft g \neq x$) を充たすことを言う．
- Lie 群の左（resp．右）作用が**効果的** (effective) であるとは，$\rho \colon G \longrightarrow \mathrm{Diff}\, M$　(resp.　$\rho \colon G^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Diff}\, M$) が単射であることを言う．

定義 2.2: C^∞ ファイバー束

Lie 群 G が C^∞ 多様体 F に効果的に作用しているとする．**ファイバー束** (fiber bundle) とは,

- C^∞ 多様体 $E,\ B,\ F$
- C^∞ の全射 $\pi\colon E \longrightarrow B$
- Lie 群 G と，G の F への左作用 $\blacktriangleright\colon G \times F \longrightarrow F$
- B の開被覆 $\{\, U_\lambda \,\}$
- 微分同相写像の族

$$\{\, \varphi_\lambda\colon \pi^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times F \,\}_{\lambda \in \Lambda}$$

であって，$\forall \lambda \in \Lambda$ に対して図 2.1 を可換にするもの．

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_\lambda) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & U_\lambda \times F \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\ U_\lambda & \end{tikzcd}$$

図 2.1: 局所自明性

- C^∞ 写像の族

$$\left\{\, t_{\alpha\beta}\colon B \longrightarrow G \;\middle|\; \forall (p,\, f) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times F,\ \varphi_\beta^{-1}(p,\, f) = \varphi_\alpha^{-1}\big(p,\, t_{\alpha\beta}(p) \blacktriangleright f\big) \,\right\}_{\alpha,\, \beta \in \Lambda}$$

の 6 つのデータの組みのこと．記号としては $\boldsymbol{(E,\, \pi,\, B,\, F)}$ や $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ と書く．

以下ではファイバー束と言ったら C^∞ ファイバー束のことを指すようにする．ファイバー束 $(E,\, \pi,\, B,\, F)$ に関して,

- E を**全空間** (total space)
- B を**底空間** (base space)
- F を**ファイバー** (fiber)
- π を**射影** (projection)
- φ_λ を**局所自明化** (local trivialization)
- $t_{\alpha\beta}$ を**変換関数** (transition map)

と呼ぶ[*18]．また，射影 π による 1 点集合 $\{b\}$ の逆像 $\pi^{-1}(\{b\}) \subset E$ のことを**点 $\boldsymbol{b}$ のファイバー** (fiber) と呼び，$F|_b$ と書く．

定義 2.3: ベクトル束

ファイバーを n 次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間とし，構造群を $\mathrm{GL}(n,\, \mathbb{K})$ とするようなファイバー束のことを**階数 $\boldsymbol{n}$ のベクトル束** (vector bundle of rank n) と呼ぶ．

*18 紛らわしくないとき，ファイバー束 $(E,\, \pi,\, B,\, F)$ のことを $\pi\colon E \to B$ ，または単に E と略記することがある．

【例 2.4.1】接束

n 次元 C^∞ 多様体 M の接束は, ベクトル束 $(TM,\, \pi,\, M,\, \mathbb{R}^n)$ である. 実際, M のチャート $\big(U_\lambda,\, (x^\mu)\big)$ に対して局所自明化は

$$\varphi_\lambda\colon \pi^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times \mathbb{R}^n,\ \left(p,\, v^\mu \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p\right) \longmapsto (p,\, \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix})$$

となり，チャート $\big(U_\alpha,\, (x^\mu)\big),\, \big(U_\beta,\, (y^\mu)\big)$ に対して

$$\varphi_\beta^{-1}\big(p,\, (v^1,\, \dots,\, v^n)\big) = v_\alpha^{-1}(p,\, \begin{bmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix})$$

となる．故に変換関数は

$$t_{\alpha\beta}(p) := \begin{bmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n}(p) \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(n,\, \mathbb{R})$$

で，ファイバーへの構造群の左作用はただ数ベクトルに行列を掛けることである．

定義 2.4: 束写像

ファイバー F と構造群 G を共有する二つのファイバー束 $\xi_i = (E_i,\, \pi_i,\, B_i,\, F)$ を与える．

- ξ_1 から ξ_2 への**束写像** (bundle map) とは，二つの C^∞ 写像 $f\colon B_1 \to B_2,\ \tilde{f}\colon E_1 \to E_2$ の組であって図 2.2

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ B_1 \arrow[r, "f"] & B_2 \end{tikzcd}$$

図 2.2: 束写像

を可換にし，かつ底空間 B_1 の各点 b において，**点 b のファイバー $\pi_1^{-1}(\{b\}) \subset E_1$** への $\tilde{f}$ の制限

$$\tilde{f}|_{\pi_1^{-1}(\{b\})}\colon \pi_1^{-1}(\{b\}) \to \tilde{f}\big(\pi_1^{-1}(\{b\})\big) \subset E_2$$

が微分同相写像になっているもののことを言う．

- ファイバー束 ξ_1 と ξ_2 が**同型** (isomorphic) であるとは, $B_1 = B_2 = B$ であってかつ $f\colon B \to B$ が恒等写像となるような束写像 $\tilde{f}\colon E_1 \to E_2$ が存在することを言う．記号としては $\xi_1 \simeq \xi_2$ とかく．

$$
\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[rr, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\
& B &
\end{tikzcd}
$$

図 2.3: ファイバー束の同型

- 積束 $(B \times F,\ \mathrm{proj}_1,\ B,\ F)$ と同型なファイバー束を**自明束** (trivial bundle) と呼ぶ.

ファイバー束 $(E,\ \pi,\ B,\ F)$ は，射影 π によってファイバー F の情報を失う．F を復元するためにも，$s\colon B \to E$ なる写像の存在が必要であろう．

定義 2.5: C^∞ 切断

ファイバー束 $\xi = (E,\ \pi,\ B,\ F)$ の C^∞ **切断** (cross section) とは，C^∞ 写像 $s\colon B \to E$ であって $\pi \circ s = \mathrm{id}_B$ となるもののことを言う．

ξ の切断全体の集合を $\boldsymbol{\Gamma(B,\ E)}$ あるいは $\boldsymbol{\Gamma(E)}$ と書く．

$\xi = (E,\ \pi,\ B,\ F)$ をファイバー束とする．底空間 B の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をとると，定義 2.2 から，どの $\alpha \in \Lambda$ に対しても局所自明性（図 2.4a）が成り立つ．ここでもう一つの $\beta \in \Lambda$ をとり，$U_\alpha \cap U_\beta$ に関して局所自明性の図式を横に並べることで，自明束 $\mathrm{proj}_1\colon (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \to U_\alpha \cap U_\beta$ の自己同型（図 2.4c）が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
U_\alpha \times F \arrow[dr, "\mathrm{proj}_1"'] & \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[l, "\varphi_\alpha"'] \arrow[d, "\pi"] \\
& U_\alpha
\end{tikzcd}
$$

(a) U_α に関する局所自明性

$$
\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U_\beta) \arrow[r, "\varphi_\beta"] \arrow[d, "\pi"'] & U_\beta \times F \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\
U_\beta &
\end{tikzcd}
$$

(b) U_β に関する局所自明性

$$
\begin{tikzcd}
(U_\alpha \cap U_\beta) \times F \arrow[rr, "\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}"] \arrow[dr, "\mathrm{proj}_1"'] & & (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\
& U_\alpha \cap U_\beta &
\end{tikzcd}
$$

(c) 自明束 $(U_\alpha \cap U_\beta) \times F$ の自己同型

図 2.4: 局所自明性の結合

全ての $U_\alpha \cap U_\beta$ に関する変換関数の族 $\{t_{\alpha\beta}\}$ が $\forall b \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ に対して条件

$$
t_{\alpha\beta}(b) \circ t_{\beta\gamma}(b) = t_{\alpha\gamma}(b) \tag{2.4.3}
$$

を充たすことは図式 2.4 より明かである．次の命題は，ファイバー束 $(E,\ \pi,\ B,\ F)$ を構成する「素材」には

- 底空間となる C^∞ 多様体 B
- ファイバーとなる C^∞ 多様体 F
- B の開被覆 $\{U_\lambda\}$
- (2.4.3) を充たす C^∞ 関数族 $\{t_{\alpha\beta}\colon U_\beta \cap U_\alpha \to \mathrm{Diff}\, F\}$

があれば十分であることを主張する：

命題 2.1: ファイバー束の構成

- C^∞ 多様体 $B,\ F$
- B の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$
- **コサイクル条件** (2.4.3) を充たす C^∞ 関数の族 $\{t_{\alpha\beta}\colon U_\beta \cap U_\alpha \to \mathrm{Diff}\, F\}$

を与える．このとき，構造群 G と変換関数 $\{t_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$ を持つファイバー束 $\xi = (E,\, \pi,\, B,\, F)$ が存在する．

<u>**証明**</u> まず手始めに，cocycle 条件 (2.4.3) より

$$t_{\alpha\alpha}(b)\circ t_{\alpha\alpha}(b) = t_{\alpha\alpha}(b), \quad \forall b \in U_\alpha$$

だから $t_{\alpha\alpha}(b) = \mathrm{id}_F$ であり，また

$$t_{\alpha\beta}(b)\circ t_{\beta\alpha}(b) = t_{\alpha\alpha}(b) = \mathrm{id}_F, \quad \forall b \in U_\alpha \cap U_\beta$$

だから $t_{\beta\alpha}(b) = t_{\alpha\beta}(b)^{-1}$ である．

開被覆 $\{U_\lambda\}$ の添字集合を Λ とする．このとき $\forall\lambda\in\Lambda$ に対して，$U_\lambda \subset B$ には底空間 B からの相対位相を入れ，$U_\lambda \times F$ にはそれと F の位相との積位相を入れることで，直和位相空間

$$\mathcal{E} := \coprod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \times F$$

を作ることができる[*19]．$\mathcal{E}$ の任意の元は $(\lambda,\, b,\, f) \in \Lambda \times U_\lambda \times F$ と書かれる．

さて，$\mathcal{E}$ 上の二項関係 $\sim$ を以下のように定める：

$$\sim := \Big\{ \big((\alpha,\, b,\, f),\, (\beta,\, c,\, h) \big) \in \mathcal{E}\times\mathcal{E} \;\Big|\; b = c,\ f = t_{\alpha\beta}(b)(h) \Big\}$$

$\sim$ が同値関係の公理??を充たすことを確認する：

反射律　冒頭の議論から $t_{\alpha\alpha}(b) = \mathrm{id}_F$ なので良い．

対称律　冒頭の議論から $t_{\beta\alpha}(b) = t_{\alpha\beta}(b)^{-1}$ なので，

$$\begin{aligned}
(\alpha,\, b,\, f) \sim (\beta,\, c,\, h) \quad &\Longrightarrow \quad b = c,\ f = t_{\alpha\beta}(b)(h) \\
&\Longrightarrow \quad c = b,\ h = t_{\alpha\beta}(b)^{-1}(f) = t_{\beta\alpha}(b)(f) \\
&\Longrightarrow \quad (\beta,\, c,\, h) \sim (\alpha,\, b,\, f).
\end{aligned}$$

[*19] $\mathcal{E}$ はいわば，「貼り合わせる前の互いにバラバラな素材（局所自明束 $U_\alpha \times F$）」である．証明の以降の部分では，これらの「素材」を $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ の部分に関して「良い性質 (2.4.3) を持った接着剤 $\{t_{\alpha\beta}\}$」を用いて「貼り合わせる」操作を，位相を気にしながら行う．

推移律　cocycle 条件 (2.4.3) より

$$\begin{aligned}(\alpha,\,b,\,f)\sim(\beta,\,c,\,h),\ (\beta,\,c,\,h)\sim(\gamma,\,d,\,k) \quad &\Longrightarrow \quad b=c,\ c=d,\ f=t_{\alpha\beta}(b)(h),\ h=t_{\beta\gamma}(c)(k)\\ &\Longrightarrow \quad b=d,\ f=t_{\alpha\beta}(b)\circ t_{\beta\gamma}(b)(k)=t_{\alpha\gamma}(b)(k)\\ &\Longrightarrow \quad (\alpha,\,b,\,f)\sim(\gamma,\,d,\,k).\end{aligned}$$

したがって $\sim$ は同値関係である．$\sim$ による $\mathcal{E}$ の商集合を E と書き，標準射影 (canonical injection) を $\mathrm{pr}\colon \mathcal{E}\to E,\ (\alpha,\,b,\,f)\mapsto[(\alpha,\,b,\,f)]$ と書くことにする．

集合 E に商位相を入れて E を位相空間にする．このとき開集合 $\{\alpha\}\times U_\alpha\times F\subset\mathcal{E}$ は pr によって E の開集合 $\mathrm{pr}(\{\alpha\}\times U_\alpha\times F)\subset E$ に移される．ゆえに E は $\big\{\mathrm{pr}(\{\alpha\}\times U_\alpha\times V_\beta)\big\}$ を座標近傍にもつ C^∞ 多様体である（ここに $\{V_\beta\}$ は，C^∞ 多様体 F の座標近傍である）．

次に C^∞ 写像 $\pi\colon E\to B$ を

$$\pi\big([(\alpha,\,b,\,f)]\big)\coloneqq b$$

と定義すると，これは局所自明化

$$\varphi_\alpha\colon\pi^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha\times F,\ [(\alpha,\,b,\,f)]\mapsto(b,\,f)$$

による局所自明性を持つ．従って組 $\xi=(E,\,\pi,\,B,\,F)$ はファイバー束になり，証明が終わる．　■

定義 2.6: 主束

構造群を G に持つファイバー束 $\xi=(P,\,\pi,\,M,\,G)$ が**主束** (principal bundle) であるとは，G の G 自身への左作用が自然な左作用[a]であることを言う．

[a] つまり，$g\blacktriangleright x\coloneqq gx$（Lie 群の積）である．

次の命題は証明の構成が極めて重要である：

命題 2.2: 主束の全空間への右作用

$\xi=(P,\,\pi,\,M,\,G)$ を主束とする．このとき，G の全空間 P への自由な右作用が自然に定義され，その軌道空間 (orbit space) P/G が M になる．

証明 ξ の局所自明化を $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，変換関数を $\{t_{\alpha\beta}\colon U_\alpha\cap U_\beta\to G\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$ と書く．$\forall u\in P,\ \forall g\in G$ をとる．$\pi(u)\in U_\alpha$ となる $\alpha\in\Lambda$ を選び，対応する局所自明化 φ_α による u の像を $\varphi_\alpha(u)\eqqcolon(p,\,h)\in U_\alpha\times G$ とおく．このとき G の P への右作用 $\blacktriangleleft\colon P\times G\longrightarrow P$ を次のように定義する[*20]：

$$u\blacktriangleleft g\coloneqq\varphi_\alpha^{-1}(p,\,hg) \tag{2.4.4}$$

◀ の well-definedness

$\beta\neq\alpha$ に対しても $\pi(u)\in U_\beta$ であるとする．このとき $\varphi_\beta(u)=(p,\,h')\in(U_\alpha\cap U_\beta)\times G$ と書けて，また変換関数の定義から

$$h'=t_{\alpha\beta}(p)\cdot h\quad\big(t_{\alpha\beta}(p)\in G\big)$$

[*20] 右辺の hg は Lie 群の乗法である．

である．したがって

$$\varphi_\beta^{-1}(p,\, h'\cdot g) = \varphi_\beta^{-1}\bigl(p,\, t_{\alpha\beta}(p)\cdot h\cdot g\bigr) = \varphi_\beta^{-1}\bigl(p,\, t_{\alpha\beta}(p)\cdot (h\cdot g)\bigr) = \varphi_\beta^{-1}\circ(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})(p,\, h\cdot g) = \varphi_\alpha^{-1}(p,\, h\cdot g)$$

が分かり，式 (2.4.4) の右辺は局所自明化の取り方によらない．

$\blacktriangleleft$ は右作用　写像 $\rho\colon G^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Diff}\, P,\ g \longmapsto (u \longmapsto u \blacktriangleleft g)$ が群準同型であることを示す．

(1) $u \blacktriangleleft 1_G = \varphi_\alpha^{-1}(p,\, h1_G) = \varphi_\alpha^{-1}(p,\, h) = u$

(2) $\forall g_1,\, g_2 \in G$ をとる．

$$u \blacktriangleleft (g_1 g_2) = \varphi_\alpha^{-1}\bigl(p,\, (hg_1)g_2\bigr) = \varphi_\alpha^{-1}(p,\, hg_1) \blacktriangleleft g_2 = (u \blacktriangleleft g_1) \blacktriangleleft g_2$$

$\blacktriangleleft$ は自由

$\forall\alpha\in\Lambda$ に対して $\forall u = (p,\, g) \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ をとる．$u \blacktriangleleft g' = u$ ならば

$$u \blacktriangleleft g' = \varphi_\alpha^{-1}(p,\, gg') = u = \varphi_\alpha^{-1}(p,\, g1_G)$$

が成り立つが，局所自明化は全単射なので $gg' = g$ が言える．g は任意なので $g' = 1_G$ が分かった．

軌道空間が M

$\forall\alpha\in\Lambda$ に対して，G の右作用 (2.4.4) による $U\times G$ の軌道空間は $(U\times G)/G = U\times\{1_G\} = U$ となる．故に P 全域に対しては $P/G = B$ となる．

■

定理 2.1:

コンパクト Hausdorff 空間 P と，P に自由に作用しているコンパクト Lie 群 G を与える．この時，軌道空間への商写像

$$\pi\colon P \longrightarrow P/G$$

は主束である．

証明　■

構造群を G とするファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ が与えられたとき，命題 2.1 を使うと，変換関数が共通の主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{p} M$ が存在することがわかる．このようにして得られる主束をファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ に**同伴する** (associated) 主束と呼ぶ．

【例 2.4.2】フレーム束

$\mathbb{K}^n \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ を，変換関数 $\{t_{\alpha\beta}\colon M \longrightarrow \mathrm{GL}(n,\, \mathbb{K})\}$ を持つ階数 n のベクトル束とする．$\forall x\in M$ に対して

$$P_x := \left\{\, f \in \mathrm{Hom}\,(\mathbb{K}^n,\, E_x) \;\middle|\; \textbf{同型写像} \,\right\}$$

とし，

$$P := \coprod_{x\in M} P_x, \quad \pi\colon P \longrightarrow M,\ (x,\, f) \longmapsto x$$

と定める．$\mathrm{GL}(n,\,\mathbb{K})P \xrightarrow{\pi} M$ に適切な局所自明化を入れて，変換関数が $\{t_{\alpha\beta}\colon M \longrightarrow \mathrm{GL}(n,\,\mathbb{K})\}$ になるような主束を構成してみよう．

$\mathbb{K}^n$ の標準基底を $e_1,\,\ldots,\,e_n$ とすると，$\forall f \in P_x$ に対して f は E_x の基底 $f(e_1),\,\ldots,\,f(e_n)$ と同一視される．実際，$\forall v = v^\mu e_\mu \in \mathbb{K}^n$ に対して

$$f(v) = v^\mu f(e_\mu)$$

である．よって $f_\mu \coloneqq f(e_\mu)$ とおいて $f = (f_1,\,\ldots,\,f_n) \in P_x$ と表すことにする．

E の局所自明化 $\{\varphi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{K}^n\}$ を与える．このとき，n 個の U_α 上の局所切断 $s_1,\,\ldots s_n \in \Gamma(E|_{U_\alpha})$ を

$$s_\mu(x) = \varphi_\alpha^{-1}(x,\,e_\mu)$$

と定義すると，$\forall x \in U_\alpha$ に対して $s_1(x),\,\ldots,\,s_n(x)$ が E_x の基底となる[a]．故に，n 個の P の局所切断 $p_\alpha \in \Gamma(P|_{U_\alpha})$ を

$$p_\alpha(x) \coloneqq \bigl(s_1(x),\,\ldots,\,s_n(x)\bigr) \in P_x$$

により定義できる．このとき，$\forall (x,\,f) = \bigl(x,\,(f_1,\,\ldots,\,f_n)\bigr) \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ に対してある $g \in \mathrm{GL}(n,\,\mathbb{K})$ が存在して $f = p_\alpha(x)g$ と書ける．ただし g は基底の取り替え行列で，ただ単に右から行列の積として右から作用している．故に P の局所自明化を

$$\psi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathrm{GL}(n,\,\mathbb{K}),\ (x,\,f) = (x,\,p_\alpha(x)g) \longmapsto (x,\,g)$$

と定義できる．変換関数を計算すると

$$\begin{aligned}
\psi_\beta^{-1}(x,\,g) &= \bigl(x,\,p_\beta(x)g\bigr) \\
&= \Bigl(x,\,(\varphi_\beta^{-1}(x,\,e_1),\,\ldots,\,\varphi_\beta^{-1}(x,\,e_n))g\Bigr) \\
&= \biggl(x,\,\Bigl(\varphi_\alpha^{-1}\bigl(x,\,t_{\alpha\beta}(x)e_1\bigr),\,\ldots,\,\varphi_\beta^{-1}\bigl(x,\,t_{\alpha\beta}(x)e_n\bigr)\Bigr)g\biggr) \\
&= \bigl(x,\,p_\alpha(x)t_{\alpha\beta}(x)g\bigr) \\
&= \psi_\alpha^{-1}(x,\,t_{\alpha\beta}(x)g)
\end{aligned}$$

となり，目標が達成された．この $\mathrm{GL}(n,\,\mathbb{K}) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ のことを**フレーム束**と呼ぶ.

---

[a] このような切断の組のことを**フレーム場**と呼ぶ.

命題 2.3: Borel 構成

$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ を主束とし，Lie 群 G の C^∞ 多様体への左作用 $\blacktriangleright : G \times F \longrightarrow F$ を与える．(2.4.4) で定義された G の P への右作用を $\blacktriangleleft : P \times G \longrightarrow P$ と書く．

- 積多様体 $P \times F$ への G の新しい右作用 $\blacktriangleleft : (P \times F) \times G \longrightarrow P \times F$ を

$$(u,\, f) \blacktriangleleft g := (u \blacktriangleleft g,\, g^{-1} \blacktriangleright f)$$

  と定義し，この右作用による $P \times F$ の軌道空間を $\boldsymbol{P \times_G F} := (P \times F)/G$ と書く．
- 商写像 $\varpi : P \times F \longrightarrow P \times_G F,\ (u,\, f) \longmapsto (u,\, f) \blacktriangleleft G$ を考える．このとき写像

$$q : P \times_G F \longrightarrow M,\ \varpi(u,\, f) \longmapsto \pi(u)$$

  が well-defined になる．

このとき，$F \hookrightarrow P \times_G F \xrightarrow{q} M$ は構造群 G をもち，変換関数が $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ と同じであるようなファイバー束である．

証明 q の well-definedness は，(2.4.4) で定義した右作用 $\blacktriangleleft$ が $\pi(u)$ を不変に保つので明らか．

$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ の開被覆，局所自明化，変換関数をそれぞれ $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda},\ \{\varphi_\lambda : \pi^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times G\}_{\lambda \in \Lambda},\ \{t_{\alpha\beta} : M \longrightarrow G\}_{\alpha,\,\beta \in \Lambda}$ と書く．また，$\forall \lambda \in \Lambda$ に対して局所切断 $s_\lambda \in \Gamma(P|_{U_\alpha})$ を

$$s_\lambda : M \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha),\ x \longmapsto \varphi_\lambda^{-1}(x,\, 1_G)$$

と定義する．

このとき，$\forall \lambda \in \Lambda$ に対して C^∞ 写像

$$\psi_\lambda : q^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times F,\ \varpi\bigl(s_\lambda(x),\, f\bigr) \longmapsto \bigl(x,\, f\bigr)$$

が well-defined な全単射になるので，族

$$\bigl\{\psi_\lambda : q^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times F\bigr\}_{\lambda \in \Lambda}$$

を $F \hookrightarrow P \times_G F \xrightarrow{q} M$ の局所自明化にとる．すると $\forall \alpha,\, \beta \in \Lambda,\ \forall (x,\, f) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$ に対して

$$\begin{aligned}
\psi_\beta^{-1}(x,\, f) &= \varpi\bigl(s_\beta(x),\, f\bigr) \\
&= \varpi\bigl(\varphi_\beta^{-1}(x,\, 1_G),\, f\bigr) \\
&= \varpi\bigl(\varphi_\alpha^{-1}(x,\, t_{\alpha\beta}(x) 1_G),\, f\bigr) \\
&= \varpi\bigl(\varphi_\alpha^{-1}(x,\, 1_G t_{\alpha\beta}(x)),\, f\bigr) \\
&= \varpi\bigl(\varphi_\alpha^{-1}(x,\, 1_G) \blacktriangleleft t_{\alpha\beta}(x),\, f\bigr) \\
&= \varpi\bigl(s_\alpha(x) \blacktriangleleft t_{\alpha\beta}(x),\, f\bigr) \\
&= \varpi\bigl((s_\alpha(x) \blacktriangleleft t_{\alpha\beta}(x)) \blacktriangleleft t_{\alpha\beta}(x)^{-1},\, t_{\alpha\beta}(x) \blacktriangleright f\bigr) \\
&= \varpi\bigl(s_\alpha(x),\, t_{\alpha\beta}(x) \blacktriangleright f\bigr) \\
&= \psi_\alpha^{-1}(x,\, t_{\alpha\beta}(x) \blacktriangleright f)
\end{aligned}$$

が成り立つので $F \hookrightarrow P \times_G F \xrightarrow{q} M$ の変換関数は

$$\bigl\{\, t_{\alpha\beta} : M \longrightarrow G \,\bigr\}_{\alpha,\,\beta \in \Lambda}$$

である． ■

【例 2.4.3】同伴ベクトル束

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ を任意に与える．Lie 群 G の，N 次元 $\mathbb{K}$ ベクトル空間 V への左作用とは，Lie 群 G の表現 $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ のことに他ならない[a]．このとき，命題 2.3 の方法によって構成される階数 N のベクトル束のことを $\boldsymbol{P \times_\rho V}$ と書き，**同伴ベクトル束** (associated vector bundle) と呼ぶ．

[a] $\mathrm{End}\, V$ に標準的な C^∞ 構造を入れて Lie 群と見做したものを $\mathrm{GL}(V)$ と書いた．

これでゲージ場を導入する準備が整った．つまり，この節の冒頭で考えた内部対称性を持つ場 $\varphi\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{K}^N$ とは，厳密には主束

$$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$$

の，線型 Lie 群 G の N 次元表現

$$\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{K}^N),\ U \longmapsto (\boldsymbol{v} \longmapsto U\boldsymbol{v})$$

による同伴ベクトル束

$$\mathbb{K}^N \hookrightarrow P \times_\rho \mathbb{K}^N \xrightarrow{q} \mathcal{M}$$

の局所切断 $\phi\colon U_\alpha \longrightarrow P \times_\rho \mathbb{K}^N$ を，ある一つの局所自明化 $\sigma_\alpha\colon q^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{K}^N$ によって座標表示した（ものの第 2 成分を取り出してきたもの）

$$\varphi = \mathrm{proj}_2 \circ \sigma_\alpha \circ \phi\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{K}^N$$

のことだと見做せる．と言うのも，こう考えることで場の変換性 (2.4.2)

$$\varphi(x) \longrightarrow \tilde{\varphi}(x) \coloneqq U(x)\varphi(x)$$

が，時空の 2 つの開集合 $V,\, \tilde{V} \subset \mathcal{M}$ の共通部分上における，局所自明化 $\sigma,\, \tilde{\sigma}\colon \pi^{-1}(V \cap \tilde{V}) \longrightarrow (V \cap \tilde{V}) \times \mathbb{K}^N$ の取り替え（内部自由度に関する一般座標変換のようなもの）に伴う変換関数 $U_{\tilde{V},V}\colon \mathcal{M} \longrightarrow G$ の作用

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} \circ \sigma^{-1}\colon (V \cap \tilde{V}) \times \mathbb{K}^N &\longrightarrow (V \cap \tilde{V}) \times \mathbb{K}^N, \\ \big(x,\, \varphi(x)\big) &\longmapsto \Big(x,\, \rho\big(U_{\tilde{V},V}(x)\big)\big(\varphi(x)\big)\Big) \end{aligned}$$

として上手く定式化できているのである．

2.4.2 主束の接続とゲージ場の定義

Lie 群 G の上の微分同相写像[*21]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L_g}&\colon G \longrightarrow G,\ x \longmapsto gx, \\ \boldsymbol{R_g}&\colon G \longrightarrow G,\ x \longmapsto xg, \end{aligned}$$

[*21] 従って，命題??から L_g, R_g によるベクトル場の押し出しが一意的に存在する．

のことをそれぞれ**左移動**，**右移動**と言う．**左不変**ベクトル場とは，$\mathbb{R}$-ベクトル空間

$$\boldsymbol{\mathfrak{X}^L(G)} := \left\{ X \in \mathfrak{X}(G) \,\middle|\, \forall g \in G,\ (L_g)_* X = X \right\}$$

の元のことである．$\mathfrak{X}^L(G)$ はベクトル場の Lie ブラケットについて閉じ，[?, p.188, Proposition 8.30]Lie 代数の公理を充たす．

線型写像

$$\iota\colon \mathfrak{X}^L(G) \longrightarrow T_{1_G}G,\ X \longmapsto X_{1_G}$$

を考える．$\forall X \in \mathfrak{X}^L(G),\ \forall g \in G$ に対して $X_g = \big((L_g)_* X\big)_{1_G} = X_{1_G}$ であるから $X \in \mathfrak{X}^L(G)$ は X_{1_G} だけで完全に決まる．i.e. ι は単射である．逆に $\forall v \in T_{1_G}G$ に対して，ベクトル場 $X\colon G \longrightarrow TG,\ g \longmapsto \big(g,\, T_{1_G}(L_g)v\big)$ は $v = \iota(X)$ でかつ $X \in \mathfrak{X}^L(G)$ を充たすので ι は全射である．

ここで $\mathfrak{g} := T_{1_G}G$ とおき，$\mathfrak{g}$ 上の Lie ブラケットを

$$[X, Y] := \left[\iota^{-1}(X), \iota^{-1}(Y)\right]_{1_G} \in \mathfrak{g}$$

と定義すれば ι は Lie 代数の同型となる．この意味で $\mathfrak{g}$ のことを **Lie 群 G の Lie 代数**と呼ぶ．さて，慣例に従って $X \in \mathfrak{g}$ に対して $\boldsymbol{X^\#} := \iota^{-1}(X)$ と書く．

Lie 群 G の **1 パラメータ部分群** (one parameter subgroup) とは，Lie 群の準同型写像 $\mathbb{R} \longrightarrow G,\ t \longmapsto g_t$ の像 $\{g_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ のことを言う．

命題 2.4: 指数写像の存在

G を Lie 群，$\mathfrak{g}$ をその Lie 代数とする．このとき以下が成り立つ：

(1) $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して，ベクトル場 $X^\# \in \mathfrak{X}^L(G)$ は完備である．従って大域的な流れ[a] $\theta\colon \mathbb{R}\times G \longrightarrow G$ を生成する．

(2) $\forall X \in \mathfrak{g},\ \forall t \in \mathbb{R}$ に対して $\exp_G(tX) := \theta(t, 1_G)$ と書くと，$\theta_t = R_{\exp_G(tX)}\colon G \longrightarrow G$ が成り立つ．

(3) $\forall X \in \mathfrak{g},\ \forall s, t \in \mathbb{R}$ に対して $\exp_G(sX)\exp_G(tX) = \exp_G((s+t)X) \in G$ が成り立つ．i.e. $\{\exp_G(tX)\}_{t\in\mathbb{R}}$ は G の 1 パラメータ部分群である．

(4) $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \big(\exp_G(tX)\big) = X \in \mathfrak{g}$ が成り立つ．

(5) 対応 $X \longmapsto \{\exp_G(tX)\}_{t\in\mathbb{R}}$ は $\mathfrak{g}$ から G の 1 パラメータ部分群全体の全単射である．

従って，**指数写像** $\exp_G\colon \mathfrak{g} \longmapsto G$ が定義される．

[a] つまり，Lie 群 $\mathbb{R}$ の作用．

証明 (1) 命題??より，ベクトル場 $X^\#$ の積分曲線 $\gamma_{1_G}\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow G$ で，$\gamma_\varepsilon(0) = 1_G$ を充たすものが存在する．このとき $\forall g \in G$ に対して C^∞ 曲線を

$$\gamma_g\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow G,\ t \longmapsto g\gamma_{1_G}(t)$$

と定義すると

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}\gamma_g(t+s) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}\bigl(L_g\circ\gamma_{1_G}(t+s)\bigr)\\ &= T_{\gamma_{1_G}(t)}(L_g)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}\gamma_{1_G}(t+s)\right)\\ &= T_{\gamma_{1_G}(t)}(L_g)\Bigl((X^{\#})_{\gamma_{1_G}(t)}\Bigr)\\ &= (X^{\#})_{\gamma_g(t)}\end{aligned}$$

が成り立つので，γ_g は初期条件 $\gamma_g(0)=g$ を充たす $X^{\#}$ の積分曲線である．

ここで $g_1 \coloneqq \gamma_{1_G}(\varepsilon/2)$，$g_2 \coloneqq \gamma_{1_G}(-\varepsilon/2)$ とおいて

$$\gamma_{1_G}(t) \coloneqq \begin{cases}\gamma_{g_1}(t-\frac{\varepsilon}{2}), & t\in[\varepsilon/2,\,3\varepsilon/2)\\ \gamma_{1_G}(t), & t\in[-\varepsilon/2,\,\varepsilon/2]\\ \gamma_{g_2}(t+\frac{\varepsilon}{2}), & t\in(-3\varepsilon/2,\,-\varepsilon/2]\end{cases}$$

と定義すると $\gamma_{1_G}\colon(-3\varepsilon/2,\,3\varepsilon/2)\longrightarrow G$ は well-defined で，$X^{\#}$ の積分曲線となる．同様の議論で定義域を拡張すれば，初期条件 $\gamma_{1_G}(0)=1_G$ を充たす $X^{\#}$ の積分曲線 $\gamma_{1_G}\colon\mathbb{R}\longrightarrow G$ が得られる．

次に，上の議論により得られた γ_{1_G} を使って $\forall g\in G$ に対して

$$\gamma_g\colon\mathbb{R}\longrightarrow G,\ t\longmapsto g\gamma_{1_G}(t)$$

と定義するとこれは $\gamma_g(0)=g$ を充たす $X^{\#}$ の積分曲線である．よって $X^{\#}$ は大域的な流れ

$$\theta\colon\mathbb{R}\times G\longrightarrow G,\ (t,\,g)\longmapsto\gamma_g(t)$$

を生成する．

(2) (1) の証明より，$\forall t\in\mathbb{R},\,\forall g\in G$ に対して

$$\begin{aligned}\exp_G(tX)&=\theta(t,\,1_G)=\gamma_{1_G}(t),\\ \theta_t(g)\coloneqq\theta(t,\,g)&=\gamma_g(t)=g\gamma_{1_G}(t)=R_{\exp_G(tX)}(g)\end{aligned}$$

が言える．

(3) (1) で得た θ が大域的な流れなので

$$\exp_G(sX)\exp_G(tX)=\theta_t\bigl(1_G\exp_G(sX)\bigr)=\theta_t\circ\theta_s(1_G)=\theta_{s+t}(1_G)=\exp_G\bigl((s+t)X\bigr)$$

が成り立つ．

(4)

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\bigl(\exp_G(tX)\bigr)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\gamma_{1_G}(t)=(X^{\#})_{1_G}=\iota(X^{\#})=X$$

(5)

■

定義 2.7: 微分表現

V を $\mathbb{K}$-ベクトル空間とする．Lie 群 G の表現 $\rho\colon G\longrightarrow\mathrm{GL}(V)$ の，$1_G\in G$ における微分 $T_{1_G}\rho\colon\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{gl}(V)$ は Lie 代数の準同型である．この $T_{1_G}\rho$ のことを ρ の**微分表現** (differential representation) と呼ぶ．

【例 2.4.4】随伴表現

$\forall g \in G$ に対して準同型 $F_g\colon G \longrightarrow G,\ x \longmapsto gxg^{-1}$ を考えると $F_{gh} = F_g \circ F_h$ が成り立つ．故に，$1_G \in G$ における微分

$$T_{1_G}(F_g)\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

は，T_{1_G} の関手性から $T_{1_G}(F_{gh}) = T_{1_G}(F_g) \circ T_{1_G}(F_h)$ を充たす．よって

$$\mathrm{Ad}\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g}),\ g \longmapsto T_{1_G}(F_g)$$

は Lie 群 G の表現となる．これを Lie 群 G の**随伴表現** (adjoint representation) と呼ぶ．Ad の微分表現は

$$\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}),\ X \longmapsto (Y \mapsto [X, Y])$$

になる．

定義 2.8: 基本ベクトル場

Lie 群 G が C^∞ 多様体 M に右から作用しているとする．この右作用を $\blacktriangleleft\colon M \times G \longrightarrow M$ と書く．

- $\forall g \in G$ に対して**右移動** $R_g\colon M \longrightarrow M$ を $R_g(x) := x \blacktriangleleft g$ と定義する．
- $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して，**基本ベクトル場** (fundamental vector field) $\boldsymbol{X^\#} \in \mathfrak{X}(M)$ を次のように定める：

$$(X^\#)_x := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \bigl(x \blacktriangleleft \exp_G(tX)\bigr) \in T_xM$$

$\forall X,\, Y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\left[X^\#, Y^\#\right] = [X, Y]^\#$$

が成り立つ．

さて，Lie 群に関する準備が終わったのでいよいよ主束の接続を定義する．

定義 2.9: 主束の接続

$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ を主束とする．$\forall g \in G$ に対して，命題 2.2 の右作用によって右移動を $R_g \colon P \longrightarrow P,\ u \longmapsto u \blacktriangleleft g$ と定義する．

- 分布 $\{\, H_u \subset T_u P \mid u \in P \,\}$ が P 上の**接続** (connection) であるとは，以下の 2 条件が成り立つことを言う：

  (C-1) $\forall u \in P$ に対して
$$T_u P = \operatorname{Ker} T_u(\pi) \oplus H_u$$
  (C-2) $\forall u \in P,\ \forall g \in G$ に対して
$$T_u(R_g)(H_u) = H_{R_g(u)}$$
  が成り立つ（分布 $\{H_u\}$ は G**-不変**）．

  $\operatorname{Ker} T_u(\pi)$, H_u をそれぞれ $T_u P$ の**垂直部分空間**, **水平部分空間**と呼ぶ．
- $\mathfrak{g}$ 値 1 形式 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ が**接続形式**であるとは，次の 2 条件を充たすことをいう：

  (CF-1) $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して
$$\omega(X^\#) = X$$
  (CF-2) $\forall g \in G$ に対して
$$(R_g)^* \omega = \operatorname{Ad}(g^{-1})(\omega)$$

定理 2.2: 接続と接続形式の関係

$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ を主束とする．

(1) $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ が接続形式ならば，分布
$$\{\, \operatorname{Ker} \omega_u \subset T_u P \mid u \in P \,\}$$
は P 上の接続である．

(2) (1) は P 上の接続形式全体の集合から P 上の接続全体の集合への 1 対 1 対応を与える．

<u>証明</u> (1) $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ を接続形式とする．$\operatorname{Ker} T_u(\pi) = \{\, (X_u)^\# \in T_u P \mid X \in \mathfrak{g} \,\}$ であり，接続形式の定義から $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して $\omega(X^\#) = X$ が成り立つ．よって $T_u P = \operatorname{Ker} T_u(\pi) \oplus \operatorname{Ker} \omega_u$ である．

$\forall v \in \operatorname{Ker} \omega_u$ をとる．このとき **(CF-2)** より
$$\omega_{u \blacktriangleleft g}\bigl(T_u(R_g)(v)\bigr) = ((R_g)^* \omega)_u(v) = \operatorname{Ad}(g^{-1})\bigl(\omega_u(v)\bigr) = 0$$
が従い，$T_u(R_g)(\operatorname{Ker} \omega_u) \subset \operatorname{Ker} \omega_{u \blacktriangleleft g}$ である．両辺の次元が等しいので $T_u(R_g)(\operatorname{Ker} \omega_u) = \operatorname{Ker} \omega_{u \blacktriangleleft g}$ が言えた．

(2)

■

定理 2.3: 同伴ベクトル束上の接続

2.5　特性類と Chern-Simons 形式