

# 第 1 章

## 層状化空間・因子化ホモロジー

[?], [?] のレビュー

### 1.1 conically smooth な層状化空間

#### 1.1.1 層状化空間

##### 定義 1.1: 半順序集合の位相

$(P, \leq)$  を半順序集合とする.  $P$  上の位相  $\mathcal{O}_{\leq} \subset 2^P$  を以下で定義する:

$$U \in \mathcal{O}_{\leq} \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x \in U, \forall y \in P, [x \leq y \implies y \in U]$$

実際, 空集合の定義から  $\emptyset \in \mathcal{O}_{\leq}$  であり,  $\forall U_1, U_2 \in \mathcal{O}_{\leq}$  に対して  $x \in U_1 \cap U_2$  であることは

$$\forall y \in P, x \leq y \implies y \in U_1 \text{ かつ } y \in U_2$$

と同値なので  $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}_{\leq}$  であり, さらに勝手な開集合族  $\{U_{\lambda} \in \mathcal{O}_{\leq}\}_{\lambda \in \Lambda}$  に対して  $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_{\lambda}$  は

$$\exists \alpha \in \Lambda, \forall y \in P, x \leq y \implies y \in U_{\alpha} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_{\lambda}$$

と同値であるから  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_{\lambda} \in \mathcal{O}_{\leq}$  であり,  $\mathcal{O}_{\leq}$  は集合  $P$  の位相である.

##### 【例 1.1.1】 $[n]$ の位相

半順序集合  $[2] := \{0 \leq 1 \leq 2\}$  を考える. このとき, 位相  $\mathcal{O}_{\leq}$  とは

$$\mathcal{O}_{\leq} = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$$

のことである. 同様に, 半順序集合  $[n] := \{0 \leq 1 \leq \dots \leq n\}$  に対して

$$\mathcal{O}_{\leq} = \{\emptyset, \{n\}, \{n-1, n\}, \dots, \{0, \dots, n\}\}$$

が成り立つ.

### 定義 1.2: 層状化空間・層状化写像

$(P, \leq)$  を半順序集合とし、定義 1.1 の位相を入れて位相空間にする。

このとき、位相空間  $X$  が  **$P$ -層状化**されている ( $P$ -stratified) とは、連続写像  $s: X \rightarrow P$  が存在することを言う。組  $(X, s: X \rightarrow P)$  のことを  **$P$ -層状化空間** ( $P$ -stratified space) と呼ぶ。また、 $i \in P$  の逆像  $X_i := s^{-1}(\{i\}) \subset X$  のことを  **$i$ -層** ( $i$ -strata) と呼ぶ。

層状化空間  $(X, s: X \rightarrow P)$ ,  $(X', s': X' \rightarrow P')$  の間の**層状化写像** (stratified map) とは、連続写像の組  $(f: X \rightarrow X', \tilde{f}: P \rightarrow P')$  であって以下の図式を可換にするもののこと：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tilde{f}} & X' \\ s \downarrow & & \downarrow s' \\ P & \xrightarrow{\tilde{f}} & P' \end{array}$$

#### 【例 1.1.2】 $[n]$ -層状化空間

半順序集合  $[n] := \{0 \leq \dots \leq n\}$  に対して【例 1.1.1】の位相を入れる。まず、

$$X_0 = s^{-1}([n] \setminus \{1, \dots, n\})$$

でかつ  $\{1, \dots, n\}$  は  $[n]$  の開集合であるから、 $s$  の連続性から  $X$  の部分空間  $X_0 \subset X$  は閉集合だとわかる。さらに

$$\begin{aligned} X_0 \cup X_1 &= s^{-1}([n] \setminus \{2, \dots, n\}), \\ X_0 \cup X_1 \cup X_2 &= s^{-1}([n] \setminus \{3, \dots, n\}), \\ &\vdots \\ X_0 \cup \dots \cup X_n &= X \end{aligned}$$

が成り立つことから、 $s$  の連続性より  $X$  の部分空間  $X_0 \cup \dots \cup X_{m \leq n}$  は閉集合だと分かる。

#### 【例 1.1.3】CW 複体

CW 複体  $X$  を与える。 $X_{\leq k}$  を  $X$  の  $k$ -骨格とすると、 $X_k \setminus X_{k-1}$  を  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  に写す写像  $s: X \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  は  $X$  の**層状化**を与える。

直観的には、層状化空間とは defect 付き位相多様体の一般化である。特に  $X$  を位相多様体とすると、 $[n]$ -層状化空間  $(X, s: X \rightarrow [n])$  の  $i$ -層  $X_i$  とは、多様体  $X$  上の余次元  $d - i$  の defect を全て集めてきたものと見做せる。

### 定義 1.3: 層状化開埋め込み

**層状化写像**  $(f, \tilde{f}): (X, s: X \rightarrow P) \rightarrow (X', s': X' \rightarrow P')$  が**層状化開埋め込み** (stratified open embedding) であるとは、以下の2条件を満たすことを言う:

- (1) 連続写像  $f: X \rightarrow X'$  は位相的開埋め込みである<sup>a</sup>
- (2)  $\forall p \in P$  に対して,  $f$  の  $p$ -strata への制限<sup>b</sup>

$$f|_{X_p}: X_p \rightarrow X'_{\tilde{f}(p)}$$

は位相的開埋め込みである.

<sup>a</sup> i.e.  $f: X \rightarrow f(X)$  が同相写像かつ  $f(X) \subset Y$  が開集合

<sup>b</sup> **層状化写像**の定義に登場する図式の可換性より,  $\forall x \in X_p$  に対して  $s'(f(x)) = s' \circ f(x) = \tilde{f} \circ s(x) = \tilde{f}(p)$ , i.e.  $f(x) \in s'^{-1}(\{\tilde{f}(p)\}) = X'_{\tilde{f}(p)}$  が分かる.

!

以下では混乱が生じにくい場合, **層状化空間**  $(X, s: X \rightarrow P)$  のことを  $(X \xrightarrow{s} P)$  や  $(X \rightarrow P)$  と略記する. さらに, **層状化写像**  $(f, \tilde{f}): (X, s: X \rightarrow P) \rightarrow (X', s': X' \rightarrow P')$  のことを  $f: (X \rightarrow P) \rightarrow (X' \rightarrow P')$  と略記し, 連続写像  $\tilde{f}: P \rightarrow P'$  のことも  $f$  と書く場合がある.

圏 **StTop** を,

- 第2可算な Hausdorff 空間であるような**層状化空間**を対象とする
- **層状化開埋め込み**を射とする

ことで定義する.

#### 1.1.2 $C^0$ 級層状化空間

### 定義 1.4: コーン

**層状化空間**  $(X \xrightarrow{s} P)$  を与える.  $X$  の**コーン** (cone) とは, 以下のようにして構成される**層状化空間**  $(C(X), C(s): C(X) \rightarrow C(P))$  のこと:

- 位相空間  $C(X)$  を, 押し出し位相空間

$$C(X) := \{\text{pt}\} \amalg_{\{0\} \times X} (\mathbb{R}_{\geq 0} \times X)$$

と定義する:

$$\begin{array}{ccc} \{0\} \times X & \xhookrightarrow{\{0\} \times \text{id}_X} & \mathbb{R}_{\geq 0} \times X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{\text{pt}\} & \xhookrightarrow{\quad} & \{\text{pt}\} \amalg_{\{0\} \times X} (\mathbb{R}_{\geq 0} \times X) \end{array}$$

- 半順序集合  $C(P)$  を,  $P$  に最小の要素  $-\infty$  を付け足すことで定義する. これは半順序集合の

圏における押し出し

$$C(P) := \{-\infty\} \amalg_{\{0\} \times P} ([1] \times P)$$

である.

- 連続写像

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{\geq 0} \times X &\longrightarrow [1] \times P, \\ (t, x) &\longmapsto \begin{cases} (0, s(x)), & t = 0, \\ (1, s(x)), & t > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

が誘導する連続写像  $C(X) \longrightarrow C(P)$  を  $C(s)$  と書く.

位相空間の圏における押し出しの公式から, 位相空間  $C(X)$  とは

$$\begin{aligned} i_1: \{0\} \times X &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \times X, \quad x \longmapsto (0, x), \\ i_2: \{0\} \times X &\longrightarrow \{\text{pt}\}, \quad x \longmapsto \text{pt} \end{aligned}$$

とおいたときのコイコライザ

$$\{0\} \times X \xrightarrow[i_2]{i_1} \{\text{pt}\} \sqcup (\mathbb{R}_{\geq 0} \times X) \xrightarrow{q} C(X),$$

i.e. 商位相空間

$$\frac{\mathbb{R}_{\geq 0} \times X}{i_1(x) \sim i_2(x)} = \frac{\mathbb{R}_{\geq 0} \times X}{\{0\} \times X}$$

のこと. 従って  $C(s): C(X) \longrightarrow C(P)$  とは, 連続写像<sup>\*1</sup>

$$\frac{\mathbb{R}_{\geq 0} \times X}{\{0\} \times X} \longrightarrow C(P), \quad [(t, x)] \longmapsto \begin{cases} -\infty, & t = 0 \\ s(x), & t > 0 \end{cases}$$

のことである.



以下では, 混乱の恐れがない限り層状化空間  $(X \xrightarrow{s} P)$  の  $\text{コーン}$  を  $C(X \xrightarrow{s} P)$  と略記する.

<sup>\*1</sup>  $C(P)$  の位相  $\mathcal{O}_{C(P)}$  は,  $P$  の位相  $\mathcal{O}_P$  に 1 つの開集合  $\{-\infty\} \cup P$  を加えたものである.  $\forall U \in \mathcal{O}_P$  に対して  $C(s)^{-1}(U) = \mathbb{R}_{>0} \times s^{-1}(U) \in \mathcal{O}_{C(X)}$  で, かつ  $C(s)^{-1}(\{-\infty\} \cup P) = C(X) \in \mathcal{O}_{C(X)}$  なので  $C(s)$  は連続である.

### 定義 1.5: $C^0$ 級層状化空間

以下を充たす **StTop** の最小の充満部分圏を  $\mathbf{Snglr}^{C^0}$  と書き, 圏  $\mathbf{Snglr}^{C^0}$  の対象を  $C^0$  級層状化空間 ( $C^0$  stratified space) と呼ぶ:

(Snglr-1)  $(\emptyset \rightarrow \emptyset) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$

(Snglr-2)

$(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$  かつ  $X, P$  が位相空間としてコンパクト  
 $\implies C(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$

(Snglr-3)

$(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}) \implies (X \times \mathbb{R} \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})^a$

(Snglr-4)

$(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$  かつ  $\text{Hom}_{\mathbf{StTop}}((U \rightarrow P_U), (X \rightarrow P)) \neq \emptyset$   
 $\implies (U \rightarrow P_U) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$

(Snglr-5)

$(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{StTop})$  が開被覆  $\{(U_\lambda \rightarrow P_\lambda) \rightarrow (X \rightarrow P)\}_{\lambda \in \Lambda}^b$  を持ち, かつ  $\forall \lambda \in \Lambda$  に  
 対して  $(U_\lambda \rightarrow P_\lambda) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$   
 $\implies (X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$

<sup>a</sup>  $X \times \mathbb{R}$  の層状化は, 連続写像  $X \times \mathbb{R} \rightarrow X, (x, t) \mapsto x$  を前もって合成することにより定める.

<sup>b</sup> i.e.  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}, \{P_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  が, それぞれ位相空間  $X, P$  の開被覆を成す.

### 【例 1.1.4】位相多様体は $C^0$ 級層状化空間

(Snglr-1) より,  $* := C(\emptyset \rightarrow \emptyset) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$  である. (Snglr-3) より,  $\forall n \geq 0$  に対して  $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n \rightarrow [0]) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$  であることが帰納的に分かる.  $\mathbb{R}^n$  の任意の開集合  $U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  に対して,

$$\begin{array}{ccc} U & \hookrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ [0] & \xrightarrow{=} & [0] \end{array}$$

は層状化埋め込みであり, 従って (Snglr-4) より  $U := (U \rightarrow [0]) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$  が分かる. 以上の考察と (Snglr-5) を併せて, 任意の位相多様体  $M$  は<sup>a</sup>圏  $\mathbf{Snglr}^{C^0}$  の対象である.

<sup>a</sup> より正確には,  $M$  を層状化空間  $(M \rightarrow [0])$  と同一視している.

【例 1.1.4】の意味で,  $C^0$  級層状化空間は位相多様体の一般化と見做せる. しかしまだそこには  $C^\infty$  構造を一般化した構造は入っておらず,  $C^\infty$  多様体の一般化とは見做せない.

### 1.1.3 $C^0$ basic

定義 1.6:  $C^0$  basic

$C^0$  級層状化空間  $(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$  が  $C^0$ -basic であるとは, ある  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  およびコンパクトな  $C^0$  級層状化空間  $(Z \rightarrow Q) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$  が存在して  $(X \rightarrow P) = (\mathbb{R}^n \rightarrow [0]) \times C(Z \rightarrow Q)$  が成り立つことを言う.

いま,  $C^0$  basic な  $(U \rightarrow P_U) = (\mathbb{R}^n \rightarrow [0]) \times C(Z \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$  を 1 つとる. コーンの定義から,  $U$  の点を  $(v, [t, z]) \in \mathbb{R}^n \times \frac{\mathbb{R}_{\geq 0} \times Z}{\{0\} \times Z}$  と表示することができる. この表示の下で自己同相

$$\begin{aligned} \gamma: \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^n \times C(Z) &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^n \times C(Z), \\ (t, (v, p), [s, z]) &\longmapsto (t, (tv + p, p), [ts, z]) \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

を考える<sup>\*2</sup>.

さらに, もう 1 つの  $C^0$  basic な  $(U' \rightarrow P_{U'}) = (\mathbb{R}^{n'} \rightarrow [0]) \times C(Z' \rightarrow P') \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$  および  $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}}((U \rightarrow P_U), (U' \rightarrow P_{U'}))$  をとる. ただし,  $f$  はコーンポイントをコーンポイントへ写す, i.e.  $\forall u \in \mathbb{R}^n$  に対して  $f(u, \text{pt}) \in \mathbb{R}^{n'} \times \{\text{pt}\}$  が成り立つことを仮定する.  $f|_{\mathbb{R}^n}: \mathbb{R}^n \times \{\text{pt}\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n'} \times \{\text{pt}\}$  を  $f$  のコーンポイントへの制限として,

$$\begin{aligned} f_{\Delta}: \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^n \times C(Z) &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^{n'} \times C(Z'), \\ (t, v, p, [s, z]) &\longmapsto (t, f|_{\mathbb{R}^n}(v), f(p, [ts, z])) \end{aligned}$$

とおこう.

【例 1.1.5】

$Z = Z' = \emptyset$  のとき,  $f$  とは単に連続関数  $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n'}$  のことである. このとき,

$$\begin{aligned} (\gamma^{-1} \circ f_{\Delta} \circ \gamma)(t, v, p) &= \gamma^{-1} \circ f_{\Delta}(t, tv + p, p) \\ &= \gamma^{-1}(t, f(tv + p), f(p)) \\ &= \left( t, \frac{f(tv + p) - f(p)}{t}, f(p) \right) \end{aligned}$$

と計算できるため,  $f$  が  $C^1$  級であることと  $\forall (v, p) \in T\mathbb{R}^n$  に対して  $t \rightarrow +0$  の極限, i.e.  $v$  に沿った片側方向微分が存在することは同値である.

【例 1.1.5】をもとに,  $C^0$  basic な  $C^0$  級層状化空間の間の層状化開埋め込みの **conically smoothness** を定義する.  $C^\infty$  多様体の  $C^\infty$  構造の定義においては, チャート  $(U, \varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow U)$ ,  $(V, \psi: \mathbb{R}^n \rightarrow V)$  の間の変換関数  $\psi^{-1} \circ \varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  が  $C^\infty$  級であることを要請した. 次の小節で **conically smooth structure** の定義を行うが, その際にチャートに対応するものは **basic**  $U = \mathbb{R}^n \times C(Z)$  から着目している  $C^0$ -級層状化空間  $X$  への層状化開埋め込み  $\varphi: U \hookrightarrow X$  であり, 概ね<sup>\*3</sup>2 つのチャート  $\varphi: U \hookrightarrow X$ ,  $\psi: V \hookrightarrow X$  の間の変換関数  $\psi^{-1} \circ \varphi: U \longrightarrow V$  に対して **conically smooth (along  $\mathbb{R}^n$ )** であることを要請する.

<sup>\*2</sup> 接束  $T\mathbb{R}^n$  は  $\mathbb{R}^{2n}$  と微分同相である. [?, p.23] の記法に合わせて底空間  $\mathbb{R}^n$  の点を  $p$ ,  $p$  上のファイバーの元を  $v$  としたとき  $(v, p) \in T\mathbb{R}^n$  と書いた. 命題??の記法と順番が逆なので注意.

<sup>\*3</sup> コーンポイントをコーンポイントに写さない変換関数も存在しうるので, これだけではいけない.

### 定義 1.7: $\mathbb{R}^n$ に沿って conically smooth

- $C^0$  basic な  $(U \rightarrow P_U) = (\mathbb{R}^n \rightarrow [0]) \times C(Z \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$
- $C^0$  basic な  $(U' \rightarrow P_{U'}) = (\mathbb{R}^{n'} \rightarrow [0]) \times C(Z' \rightarrow P') \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$
- $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}}((U \rightarrow P_U), (U' \rightarrow P_{U'}))$  であって, コーンポイントを保存するもの

を与える. このとき,  $f$  が  $\mathbb{R}^n$  に沿って  $C^1$  級 ( $C^1$  along  $\mathbb{R}^n$ ) であるとは, 以下の図式を可換にする連続写像

$$\tilde{D}f: \mathbb{R}_{\geq 0} \times T\mathbb{R}^n \times C(Z) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \times T\mathbb{R}^{n'} \times C(Z')$$

が存在することを言う:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{\geq 0} \times T\mathbb{R}^n \times C(Z) & \xrightarrow{\tilde{D}f} & \mathbb{R}_{\geq 0} \times T\mathbb{R}^{n'} \times C(Z') \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{R}_{> 0} \times T\mathbb{R}^n \times C(Z) & \xrightarrow{\gamma^{-1} \circ f_{\Delta} \circ \gamma} & \mathbb{R}_{> 0} \times T\mathbb{R}^{n'} \times C(Z') \end{array}$$

このような拡張が存在するとき, 第一変数を  $t = 0$  に制限して得られる連続写像を

$$Df: T\mathbb{R}^n \times C(Z) \longrightarrow T\mathbb{R}^{n'} \times C(Z')$$

と書く.  $f$  が  $\mathbb{R}^n$  に沿って  $C^r$  級であるとは,  $Df$  が  $\mathbb{R}^n$  に沿って  $C^{r-1}$  級であることを言う.  $f$  が  $\mathbb{R}^n$  に沿って conically smooth であるとは,  $\forall r \geq 1$  について  $C^r$  級であることを言う.

### 1.1.4 conically smooth な層状化空間

次に行うべきは, 与えられた  $C^0$  級層状化空間  $(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$  の上の conically smooth structure i.e. 変換関数が conically smooth であるような極大アトラスを定義することである. この手続きは, 次で定義する次元と深さに関する帰納法によって構成される.

### 定義 1.8: 被覆次元

$X$  を位相空間とする. 以下の条件を充たす最小の  $d \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$  のことを (存在すれば)  $X$  の被覆次元 (covering dimension) と呼び,  $\dim X$  と書く:

(covering)

$X$  の任意の開被覆  $\mathcal{U}$  に対して, 十分細かい細分  $\mathcal{V}_{\mathcal{U}} \prec \mathcal{U}$  が存在して, 任意の互いに異なる  $\forall m > d + 1$  個の開集合  $V_1, \dots, V_m \in \mathcal{V}_{\mathcal{U}}$  の共通部分が空になるようにできる. 特に,  $\emptyset$  の被覆次元は  $-1$  と定義する.

点  $x \in X$  における被覆次元を以下で定義する:

$$\dim_x X := \inf \{ \dim U \geq -1 \mid x \in U \underset{\text{open}}{\subset} X \}$$

### 定義 1.9: 次元と深さ

空でない  $C^0$  級層状化空間  $(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$  を与える.

- $(X \rightarrow P)$  の点  $x \in X$  における局所的次元 (local dimension) とは, 点  $x$  における  $X$  の被覆次元  $\dim_x(X)$  のことを言う.
- $(X \rightarrow P)$  の次元 (dimension) とは

$$\dim(X \rightarrow P) := \sup_{x \in X} \dim_x(X)$$

のこと.

- $(X \xrightarrow{s} P)$  の点  $x \in X$  における局所的深さ (local depth) とは,

$$\text{depth}_x(X \rightarrow P) := \dim_x(X) - \dim_x(X_{s(x)})$$

のこと.

- $(X \rightarrow P)$  の深さ (depth) とは,

$$\text{depth}(X \rightarrow P) := \sup_{x \in X} \text{depth}_x(X \rightarrow P)$$

のこと. ただし,  $\text{depth}(\emptyset) := -1$  と定義する.

#### 【例 1.1.6】コーンの深さ

$n$  次元位相多様体  $Z$  について, 定義から  $\forall x \in Z$  に対して  $\dim_x(Z) = n$  が成り立つ.  $Z$  を【例 1.1.4】により  $C^0$  級層状化空間  $(Z \xrightarrow{s} [0]) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$  と見做すと, このコーン  $C(Z \xrightarrow{s} [0])$  について

$$\text{depth}_x(C(Z \xrightarrow{s} [0])) = \begin{cases} n+1, & x = \text{pt}, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

であることがわかる. 実際  $C(Z)_{C(s)(\text{pt})} = \{\text{pt}\}$  であるが, 1 点からなる位相空間の被覆次元は 0 次元なので  $\dim_{\text{pt}}(C(Z)_{C(s)(\text{pt})}) = 0$  である. 一方, コーンポイント以外の点  $x \in C(Z)$  に対して  $C(s)(x)$ -層は  $C(Z)_{C(s)(x)} = \mathbb{R}_{>0} \times Z \approx \mathbb{R} \times Z$  であるから,  $\dim_x(C(Z)_{C(s)(x)}) = n+1$  と計算できる<sup>a</sup>.

また,  $\forall (X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$  に対して

$$\begin{aligned} \dim((\mathbb{R}^m \rightarrow [0]) \times (X \rightarrow P)) &= m + \dim(X \rightarrow P), \\ \text{depth}((\mathbb{R}^m \rightarrow [0]) \times (X \rightarrow P)) &= \text{depth}(X \rightarrow P) \end{aligned}$$

が成り立つ. 従って,  $C^0$  basic な  $(U \rightarrow P_U) = (\mathbb{R}^n \rightarrow [0]) \times C(Z \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$  に対して

$$\begin{aligned} \text{depth}(U \rightarrow P_U) &= \text{depth}(C(Z \rightarrow P)) \\ &= \dim(Z \rightarrow P) + 1 \end{aligned}$$

が成り立つ.

<sup>a</sup> さらに,  $\forall x \in C(Z)$  に対して  $\dim_x C(Z) = n+1$  である.



次元と深さに関する帰納法を実行する前に、構成したい  $(1, 1)$ -圏を表す記号の整理をしておこう：

- conically smooth チャートの素材となる、**basic** が成す圏

$$\mathbf{Bsc}$$

これは、 $C^\infty$  多様体の圏  $\mathbf{Mfd}$  において  $\mathbb{R}^n$  ( $\forall n \geq -1$ ) 全体が成す充満部分圏に相当するものである。

- 与えられた  $C^0$  級層状化空間  $(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$  に対して、その上に入る極大アトラス<sup>\*4</sup>全体が成す集合を返す前層

$$\text{Sm}: (\mathbf{Snglr}^{C^0})^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

この対応が前層であることの直観は、層状化開埋め込み  $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}}((X \rightarrow P), (Y \rightarrow Q))$  が与えられると、 $(X \rightarrow P)$  上の極大アトラス  $\text{Sm}(X \rightarrow P)$  が  $(Y \rightarrow Q)$  上の極大アトラス  $\text{Sm}(Y \rightarrow Q)$  を「制限」する写像  $\text{Sm}(f): \text{Sm}(Y \rightarrow Q) \longrightarrow \text{Sm}(X \rightarrow P)$  によって得られるということである。

- 深さが  $k$  以下、かつ次元が  $n$  以下であるような  $C^0$  級層状化空間全体が成す  $\mathbf{Snglr}^{C^0}$  の充満部分圏を

$$\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\substack{\leq k, \\ \text{depth} \quad \text{dimension}}} \leq n$$

と書く。同様に

$$\mathbf{Bsc}_{\leq k, \leq n}, \quad \text{Sm}_{\leq k, \leq n}: (\mathbf{Snglr}_{\leq k, \leq n}^{C^0})^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

と書く。

- conically smooth な層状化空間の圏

$$\mathbf{Snglr}$$

これを作ることが本小節の最終目標である。

帰納法により、 $\forall k \geq -1$  に対して  $\mathbf{Bsc}_{\leq k, \leq \infty}$  および  $\text{Sm}_{\leq k, \leq \infty}: (\mathbf{Snglr}_{\leq k, \leq \infty}^{C^0})^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$  が構成される。

#### 定義 1.10: 帰納法の出発点

(**Snglr-1**) より  $(\emptyset \rightarrow \emptyset) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}_{\leq -1, \leq \infty}^{C^0})$  である。

$$(1) \quad \mathbf{Bsc}_{\leq -1, \leq \infty} := \emptyset$$

$$(2) \quad \text{Sm}_{\leq -1, \leq \infty}(\emptyset) := \{*\}$$

と定義する。

<sup>\*4</sup> 存在するか分からないし、存在したとして一意であるとは限らない。実際、例えば  $C^\infty$  多様体の段階においてさえ  $\mathbb{R}^4$  の上の極大アトラス (i.e.  $C^\infty$  構造) は非可算無限個存在する [?].

### 仮定 1.1: 帰納法の仮定

与えられた  $k \geq -1$  に対して以下の構成が完了していると仮定する：

- (1) 圏  $\mathbf{Bsc}_{\leq k, \leq \infty}$
- (2) 前層  $\mathbf{Sm}_{\leq k, \leq \infty} : (\mathbf{Snglr}_{\leq k, \leq \infty}^{C^0})^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$
- (3) 関手

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times (-) : \mathbf{Bsc}_{\leq k, \leq \infty} &\longrightarrow \mathbf{Bsc}_{\leq k, \leq \infty}, \\ U &\longmapsto \mathbb{R} \times U, \\ (U \xrightarrow{f} V) &\longmapsto (\mathbb{R} \times U \xrightarrow{\text{id} \times f} \mathbb{R} \times V) \end{aligned}$$

およびそれが誘導する自然変換<sup>a</sup>

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\mathbf{Sm}_{\leq k, \leq \infty}(-)} & \\ (\mathbf{Snglr}_{\leq k, \leq \infty}^{C^0})^{\text{op}} & \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} & \mathbf{Sets} \\ & \xleftarrow{\mathbf{Sm}_{\leq k, \leq \infty}(\mathbb{R} \times -)} & \end{array}$$

<sup>a</sup>  $X$  の極大アトラス  $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  に対して,  $\{\mathbb{R} \times U_\alpha, \text{id} \times \varphi_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  を対応づける.

### 定義 1.11: 圏 $\mathbf{Bsc}_{\leq k+1, \leq \infty}$

帰納法の仮定 1.1 がある  $k \geq -1$  において成立しているとする. また,  $C^0$  basic を  $U_Z^n := (\mathbb{R}^n \rightarrow [0]) \times C(Z \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}_{\leq k+1, \leq \infty}^{C^0})$  と書く. このとき, 圏  $\mathbf{Bsc}_{\leq k+1, \leq \infty}$  を以下で定義する：

(対象)

$C^0$  basic <sup>a</sup>  $U_Z^n \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}_{\leq k+1, \leq \infty}^{C^0})$  および, 極大アトラス  $\mathcal{A}_Z \in \mathbf{Sm}_{\leq k, \leq \infty}(Z \rightarrow P)$  の組み  $(U_Z^n, \mathcal{A}_Z)$

を対象とする. これを **basic** と呼ぶ.

(射)

任意の 2 つの対象  $(U_Z^n, \mathcal{A}_Z), (U_W^m, \mathcal{A}_W) \in \text{Ob}(\mathbf{Bsc}_{\leq k+1, \leq \infty})$  に対して, 以下の条件を充たす層状化開埋め込み  $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Snglr}_{\leq k+1, \leq \infty}^{C^0}}(U_Z^n, U_W^m)$  を射とする：

$f$  がコーンポイントを保存しない場合

ある層状化開埋め込み  $f_0 \in \text{Hom}_{\mathbf{Snglr}_{\leq k+1, \leq \infty}^{C^0}}(U_Z^n, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \times W)$  が存在して

$$f : U_Z^n \xrightarrow{f_0} \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}_{>0} \times W) \hookrightarrow U_W^m = \mathbb{R}^m \times C(W)$$

と書けて, かつ  $(U_Z^n, f_0) \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \times W} \in \mathbf{Sm}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \times W)$

$f$  がコーンポイントを保存する場合

$f$  は  $\mathbb{R}^n$  に沿って **conically smooth** であって, かつ  $Df : \mathbb{R}^n \times U_Z^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \times U_W^m$  が単射

であり, かつ

$$\mathcal{A}_{f^{-1}(U_W^m \setminus \mathbb{R}^m)} = \text{Sm}_{\leq k, \leq \infty}(f|_{f^{-1}(U_W^m \setminus \mathbb{R}^m)})(\mathcal{A}_{U_W^m \setminus \mathbb{R}^m})$$

を充たす<sup>b</sup>. ただし,  $U_W^m \setminus \mathbb{R}^m := U_W^m \setminus (\mathbb{R}^m \times \{\text{pt}\}) = \mathbb{R}^{m+1} \times W$  と略記した.

<sup>a</sup> **depth** の定義から  $\text{depth}(Z \rightarrow P) \leq \dim(Z \rightarrow P)$  である. 故に【例 1.1.6】から,  $\text{depth}(Z \rightarrow P) \leq \dim(Z \rightarrow P) = \text{depth } U_Z^m - 1 \leq k$  であること, i.e.  $(Z \rightarrow P) \in \text{Ob}(\text{Snglr}_{\leq k, \leq \infty}^{C^0})$  が分かる.

<sup>b</sup> ここで帰納法の仮定 1.1-(3) を暗に使っている.

### 定義 1.12: 前層 $\text{Sm}_{\leq k+1, \leq \infty}$

帰納法の仮定 1.1 がある  $k \geq -1$  において成立しているとする. さらに定義 1.11 によって  $\text{Bsc}_{\leq k+1, \leq \infty}$  が完成しているとする.

- **$C^0$  級層状化空間**  $\forall (X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\text{Snglr}_{\leq k+1, \leq \infty}^{C^0})$  に対して,  $X \rightarrow P$  のアトラス (atlas) を族

$$\mathcal{A} := \left\{ (U_\alpha \in \text{Ob}(\text{Bsc}_{\leq k+1, \leq \infty}), \varphi_\alpha: U_\alpha \hookrightarrow (X \rightarrow P)) \right\}_{\alpha \in \Lambda} \in \text{Sm}_{\leq k+1, \leq \infty}(X \rightarrow P)$$

であって以下の条件を充たすものとして定義する:

#### (Atlas-1)

$\mathcal{A}$  は  $(X \rightarrow P)$  の開被覆である.

#### (Atlas-2)

$\forall \alpha, \beta \in \Lambda$  および  $\forall x \in \varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta)$  に対して, 圏  $\text{Snglr}_{\leq k+1, \leq \infty}^{C^0}$  の可換図式

$$\begin{array}{ccc} \exists W & \xrightarrow{f_\beta} & U_\beta \\ f_\alpha \downarrow & & \downarrow \varphi_\beta \\ U_\alpha & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & X \end{array}$$

が存在して  $x \in \varphi_\alpha \circ f_\alpha(W) = \varphi_\beta \circ f_\beta(W)$  を充たす. ただし, 可換図式中の赤色の部分は全て圏  $\text{Bsc}_{\leq k+1, \leq \infty}$  の対象および射からなる.

アトラス  $\mathcal{A}$  の元  $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$  のことを**チャート** (chart) と呼ぶ.

- **$C^0$  級層状化空間**  $\forall (X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\text{Snglr}_{\leq k+1, \leq \infty}^{C^0})$  の2つのアトラス  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  が**同値**であるとは,  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  が  $(X \rightarrow P)$  のアトラスであることを言う. これは  $(X \rightarrow P)$  のアトラス全体の集合の上に同値関係を定める<sup>a</sup>.  $(X \rightarrow P)$  の**極大アトラス** (maximal atlas) とは, この同値関係によるアトラス  $\mathcal{A}$  の同値類  $[\mathcal{A}]$  のことを言う.
- 前層

$$\text{Sm}_{\leq k+1, \leq \infty}: (\text{Snglr}_{\leq k+1, \leq \infty}^{C^0})^{\text{op}} \longrightarrow \text{Sets}$$

を以下のように定義する:

#### (対象)

任意の  **$C^0$  級層状化空間**  $(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\text{Snglr}_{\leq k+1, \leq \infty}^{C^0})$  に対して

$$\text{Sm}_{\leq k+1, \leq \infty}(X \rightarrow P) := \{ [\mathcal{A}] \mid \mathcal{A} \text{ is an atlas of } (X \rightarrow P) \}$$

(射)

任意の層状化開埋め込み  $f \in \text{Hom}_{\text{Snglr}^{C^0}_{\leq k+1, \leq \infty}}((X \rightarrow P), (Y \rightarrow Q))$  に対して,  $f$  によるアトラスの引き戻しを対応付ける.

<sup>a</sup> 同値関係であることの証明は [?, Lemma 3.2.11.] を参照.

以上の帰納法をまとめて, conically smooth な層状化空間と層状化開埋め込みの圏 **Snglr** を得る.

### 定義 1.13: 圏 **Snglr**

- **basic** のなす圏 **Bsc** を以下で定義する:

$$\mathbf{Bsc} := \bigcup_{k \geq -1} \mathbf{Bsc}_{\leq k, \leq \infty}$$

- 極大アトラスの集合を与える関手  $\text{Sm}: (\text{Snglr}^{C^0})^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$  を以下の右 Kan 拡張として定義する:

$$\begin{array}{ccc} (\text{Snglr}^{C^0}_{<\infty, \leq \infty})^{\text{op}} & \xrightarrow{\text{Sm}_{<\infty, \leq \infty}} & \mathbf{Sets} \\ \downarrow & \nearrow \text{Sm} & \\ (\text{Snglr}^{C^0})^{\text{op}} & & \end{array}$$

ただし,  $\text{Snglr}^{C^0}_{<\infty, \leq \infty} := \bigcup_{k \geq -1} \text{Snglr}^{C^0}_{\leq k, \leq \infty}$  とおいた.

- conically smooth な層状化空間 (conically smooth stratified space) と層状化開埋め込みの圏 **Snglr** を以下で定義する:

(対象)

$C^0$  級層状化空間  $(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\text{Snglr}^{C^0})$  およびその極大アトラス  $\mathcal{A}_X \in \text{Sm}(X \rightarrow P)$  の組み  $((X \rightarrow P), \mathcal{A}_X)$  を対象とする.

(射)

層状化開埋め込み  $f \in \text{Hom}_{\text{Snglr}^{C^0}}((X \rightarrow P), (Y \rightarrow Q))$  であって,  $f^* \mathcal{A}_Y = \mathcal{A}_X$  を充たすものを射とする.

### 1.1.5 conically smooth map

ここまでは層状化開埋め込みのみを考えていたため, 一般の層状化写像の conically smoothness を定義しなくては行けない.

### 定義 1.14: conically smooth map

2つの **basic**<sup>a</sup>  $X = (U_Z^n, \mathcal{A}_Z)$ ,  $Y = (U_W^m, \mathcal{A}_W) \in \text{Ob}(\mathbf{Bsc})$  の間の **層状化写像**  $f: U_Z^n \rightarrow U_W^m$  が **conically smooth** であることを, **depth**( $Y$ ) に関する帰納法によって定義する:

- (1) まず,  $\text{depth}(Y) = -1$  のときは  $X = Y = \emptyset$  であり, 一意的に定まる  $X, Y$  間の層状化写像が conically smooth であると定義する.
- (2) 深さ  $k \geq -1$  の basic に対して定義が完了しているとする.  $Y \in \text{Ob}(\mathbf{Bsc})$  の深さが高々  $k+1$  であるとき, 層状化写像  $f: X \rightarrow Y$  が conically smooth であることを以下で定義する:

**$f$  がコーンポイントを保存しない場合**

ある conically smooth な層状化写像  $f_0: X \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \times W$  が存在して

$$f: X \xrightarrow{f_0} \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}_{>0} \times W) \hookrightarrow Y = \mathbb{R}^m \times \mathbb{C}(W)$$

と書ける<sup>b</sup>.

**$f$  がコーンポイントを保存する場合**

$f$  は  $\mathbb{R}^n$  に沿って conically smooth であって, かつ制限

$$f|_{f^{-1}(Y \setminus \mathbb{R}^m)}: f^{-1}(Y \setminus \mathbb{R}^m) \rightarrow Y \setminus \mathbb{R}^m$$

が conically smooth. ただし,  $U_W^m \setminus \mathbb{R}^m := U_W^m \setminus (\mathbb{R}^m \times \{\text{pt}\}) = \mathbb{R}^{m+1} \times W$  と略記した.

<sup>a</sup>  $C^0$  basic を  $U_Z^n := (\mathbb{R}^n \rightarrow [0]) \times \mathbb{C}(Z \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$  と書く.

<sup>b</sup> 【例 1.1.6】より  $\text{depth}(W) < k+1$  であり, 帰納法の仮定が使える.

**conically smooth な層状化空間**  $((X \rightarrow P), \mathcal{A}_X), ((Y \rightarrow Q), \mathcal{A}_Y) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr})$  の間の **層状化写像**  $f: (X \rightarrow P) \rightarrow (Y \rightarrow Q)$  が **conically smooth** であるとは, 任意のチャートの組み合わせ  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_X, (V, \psi) \in \mathcal{A}_Y$  に対して

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi: U \rightarrow V$$

が conically smooth (for basics) であることを言う.

### 命題 1.1: conically smooth map の基本性質

2つの conically smooth map の合成も conically smooth である.

**証明** [?, Proposition 3.3.5] ■

命題 1.1 より, conically smooth な層状化空間の圏を定義できる.

### 定義 1.15: conically smooth な層状化空間の圏 $\mathbf{Strat}$

conically smooth な層状化空間の圏  $\mathbf{Strat}$  を以下で定義する：

(対象)

圏  $\mathbf{Snglr}$  と全く同じ対象を持つ：

$$\mathrm{Ob}(\mathbf{Strat}) := \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr})$$

(射)

conically smooth map を射とする．

定義から明らかに  $\mathbf{Snglr} \subset \mathbf{Strat}$  である．ここで、圏  $\mathbf{Strat}$  における特別な射に名前をつけておこう：

### 定義 1.16: constructible bundle

- conically smooth な層状化写像  $\pi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}((E \rightarrow P), (B \rightarrow Q))$  が層状化ファイバー束 (conically smooth fiber bundle) であるとは、conically smooth な層状化開埋め込みの族  $\{U_\alpha \hookrightarrow B\}_{\alpha \in \Lambda}$ ,  $\{\varphi_\alpha: U_\alpha \times F_\alpha \hookrightarrow E\}_{\alpha \in \Lambda}$  が存在して以下を充たすことを言う：

(Bun-1)

$\forall \alpha \in \Lambda$  に対して、圏  $\mathbf{Strat}$  における引き戻しの図式

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times F_\alpha & \xhookrightarrow{\varphi_\alpha} & E \\ \mathrm{proj}_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ U_\alpha & \hookrightarrow & B \end{array}$$

が成り立つ．

(Bun-2)

族  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  は  $B$  の開基である．

- conically smooth な層状化写像  $\pi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}((E \rightarrow P), (B \rightarrow Q))$  が弱構成可能束 (weakly constructible bundle) であるとは、 $\forall q \in Q$  に対して、 $\pi$  の  $q$ -層への制限

$$\pi|_{\pi^{-1}(B_q)}: \pi^{-1}(B_q) \longrightarrow B_q$$

が層状化ファイバー束であることを言う．

- conically smooth な層状化写像  $\pi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}((E \rightarrow P), (B \rightarrow Q))$  が構成可能束 (constructible bundle) であることを、 $\mathrm{depth}(E)$  に関する帰納法によって定義する：

(1)  $\mathrm{depth}(E) = 0$  のとき、 $\pi$  が構成可能束であるとは、 $\pi$  が  $C^\infty$  ファイバー束であることを言う．

(2) 深さ  $k \geq 0$  までの定義が完了しているとする． $\mathrm{depth}(E) \leq k+1$  のとき、 $\pi$  が構成可能束であるとは、以下の2条件を充たすことを言う：

(cBun-1)  $\pi$  は弱構成可能束である．

(cBun-2)  $\forall q \in Q$  に対して、 $\pi$  が誘導する層状化写像

$$\mathrm{Link}_{\pi^{-1}(B_q)}(E) \longrightarrow \pi^{-1}(B_q) \times_{B_q} \mathrm{Link}_{B_q}(B)$$

が構成可能束である．

### 1.1.6 管状近傍・ハンドル分解

## 1.2 層状化空間の接構造

### 1.2.1 Kan-豊穡化

圏  $\mathbf{Kan}$  を,

- Kan 複体を対象に持つ
- Kan 複体の間の自然変換を射に持つ

(1, 1)-圏とする.  $\mathbf{Kan}$  は単体的集合の圏  $\mathbf{sSet}$  の充満部分圏であり, 直積 (??) をテンソル積とするモノイダル圏になる.

#### 定義 1.17: 余単体的多様体

以下で定義する関手

$$\Delta_e: \Delta \longrightarrow \mathbf{Strat}$$

のことを余単体的多様体 (standard cosimplicial manifold) と呼ぶ<sup>a</sup>:

- $[n] \in \text{Ob}(\Delta)$  を, **conically smooth な層状化空間**

$$\Delta_e^n := \left\{ (x^0, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x^i = 1 \right\}$$

に対応付ける.

- $\alpha \in \text{Hom}_\Delta([m], [n])$  を, **conically smooth な層状化写像**

$$\begin{aligned} \Delta_e(\alpha): \Delta_e^m &\longrightarrow \Delta_e^n, \\ (x^0, \dots, x^m) &\longmapsto \left( \sum_{j, \alpha(j)=0} x^j, \dots, \sum_{j, \alpha(j)=n} x^j \right) \end{aligned}$$

に対応付ける.

<sup>a</sup> 幾何学的  $n$ -単体に似ているが,  $x^i \geq 0$  の領域で切り取っていない.

$\mathbf{PSh}(\mathbf{Strat}^{\text{op}}, \mathbf{Sets})$  から  $\mathbf{sSet}$  への関手を

$$\begin{aligned} (-)|_\Delta: \mathbf{PSh}(\mathbf{Strat}, \mathbf{Sets}) &\longrightarrow \mathbf{sSet}, \\ F &\longmapsto F \circ \Delta_e \end{aligned}$$

で定義する. さらに,  $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathbf{Strat})$  に対して前層  $\widetilde{\text{Hom}}_{\mathbf{Strat}}(X, Y) \in \mathbf{PSh}(\mathbf{Strat}, \mathbf{Sets})$  を

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Hom}}_{\mathbf{Strat}}(X, Y): \mathbf{Strat}^{\text{op}} &\longrightarrow \mathbf{Sets}, \\ Z &\longmapsto \left\{ f \in \text{Hom}_{\mathbf{Strat}}(Z \times X, Z \times Y) \mid \text{proj}_Z \circ f = \text{proj}_Z \right\}, \end{aligned}$$

$$(Z \xrightarrow{\alpha} W) \mapsto \left( \widetilde{\text{Hom}_{\mathbf{Strat}}(X, Y)}(Z) \longrightarrow \widetilde{\text{Hom}_{\mathbf{Strat}}(X, Y)}(W), \right. \\ \left. f \mapsto \left( (w, x) \mapsto (w, \text{proj}_Y \circ f(\alpha(w), x)) \right) \right)$$

で定義する．ただし，**conically smooth な層状化写像**  $\text{proj}_Z \in \text{Hom}_{\mathbf{Strat}}(Z \times X, Z)$  とは第一成分への射影のことである．同様にして前層  $\widetilde{\text{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(X, Y)} \in \text{PSh}(\mathbf{Strat}, \mathbf{Sets})$  を

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(X, Y)}: \mathbf{Strat}^{\text{op}} &\longrightarrow \mathbf{Sets}, \\ Z &\mapsto \{ f \in \text{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(Z \times X, Z \times Y) \mid \text{proj}_Z \circ f = \text{proj}_Z \}, \\ (Z \xrightarrow{\alpha} W) &\mapsto \left( \widetilde{\text{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(X, Y)}(Z) \longrightarrow \widetilde{\text{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(X, Y)}(W), \right. \\ &\quad \left. f \mapsto \left( (w, x) \mapsto (w, \text{proj}_Y \circ f(\alpha(w), x)) \right) \right) \end{aligned}$$

で定義する．

#### 補題 1.1:

$\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathbf{Strat})$  に対して定まる単体的集合

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbf{Strat}}(X, Y) &:= \widetilde{\text{Hom}_{\mathbf{Strat}}(X, Y)} \Big|_{\Delta}, \\ \text{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(X, Y) &:= \widetilde{\text{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(X, Y)} \Big|_{\Delta} \end{aligned}$$

は Kan 複体である．

**証明** [?, Lemma 4.1.4.]. ■

#### 定義 1.18: $(\infty, 1)$ -圏 $\mathbf{Strat}$ , $\mathbf{Snglr}$ , $\mathcal{B}\mathbf{sc}$

**Kan-豊稜圏  $\mathbf{Strat}$**  を以下で定義する：

- $\text{Ob}(\mathbf{Strat}) := \text{Ob}(\mathbf{Snglr})$
- 補題 1.1 で構成した  $\text{Hom}_{\mathbf{Strat}}(X, Y) \in \text{Ob}(\mathbf{Kan})$  を Hom 対象とする．

同様に，**Kan-豊稜圏  $\mathbf{Snglr}$**  を以下で定義する：

- $\text{Ob}(\mathbf{Snglr}) := \text{Ob}(\mathbf{Snglr})$
- 補題 1.1 で構成した  $\text{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(X, Y) \in \text{Ob}(\mathbf{Kan})$  を Hom 対象とする．

**Kan-豊稜圏  $\mathbf{Snglr}$**  の対象を **Ob( $\mathcal{B}\mathbf{sc}$ )** に制限して得られる充満部分圏を  $\mathcal{B}\mathbf{sc}$  と書く．

!

**Kan-豊稜圏**を homotopy coherent nerve functor  $N_{\text{hc}}: \mathbf{Cat}_{\Delta} \longrightarrow \mathbf{sSet}$  で単体的集合の圏  $\mathbf{sSet}$  へ埋め込んだものは  $(\infty, 1)$ -圏である [?, Proposition 1.1.5.10.]. 故に以下では **Kan-豊稜圏  $\mathbf{Strat}$ ,  $\mathbf{Snglr}$**  と  $(\infty, 1)$ -圏  $N_{\text{hc}}(\mathbf{Strat})$ ,  $N_{\text{hc}}(\mathbf{Snglr})$  を区別しない．



### 1.2.2 $(\infty, 1)$ -圏におけるファイブレーション

#### 定義 1.19: $(\infty, 1)$ -ファイブレーション

$p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$  を  $(\infty, 1)$ -圏の関手とする.

##### (lifting property)

包含  $\iota \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda_j^n, \Delta^n)$  に関して  $p \circ f_0 = f \circ \iota$  を満たす任意の  $(f_0, f) \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda_j^n, \mathcal{E}) \times \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \mathcal{B})$  に対して, 以下の図式を可換にする  $\bar{f} \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \mathcal{E})$  が存在する:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_j^n & \xrightarrow{\forall f_0} & \mathcal{E} \\ \downarrow \iota & \nearrow \exists \bar{f} & \downarrow p \\ \Delta^n & \xrightarrow{\forall f} & \mathcal{B} \end{array}$$

- $p$  が **内的ファイブレーション** (inner fibration) であるとは,  $0 < \forall j < \forall n$  に対して **(lifting property)** を満たすことを言う.
- $p$  が **右ファイブレーション** (right fibration) であるとは,  $0 < \forall j \leq \forall n$  に対して **(lifting property)** を満たすことを言う.
- $p$  が **左ファイブレーション** (left fibration) であるとは,  $0 \leq \forall j < \forall n$  に対して **(lifting property)** を満たすことを言う.
- $p$  が **Kan ファイブレーション** (Kan fibration) であるとは,  $0 \leq \forall j \leq \forall n$  に対して **(lifting property)** を満たすことを言う.

系??によると, **(lifting property)** は,  $(\infty, 1)$ -圏  $\mathcal{B}$  における角の図式  $(p_{[n-1]}(f_{00}), \dots, \underbrace{\bullet}_j, \dots, p_{[n-1]}(f_{0n})) \in (\mathcal{B}_{n-1})^{\times n}$  を  $n$ -射  $f \in \mathcal{B}_n$  が埋めているならば,  $(\infty, 1)$ -圏  $\mathcal{E}$  における角の図式  $(f_{00}, \dots, \underbrace{\bullet}_j, \dots, f_{0n}) \in (\mathcal{E}_{n-1})^{\times n}$  を埋める  $n$ -射  $\bar{f} \in \mathcal{E}_n$  が存在することを主張している.

#### 定義 1.20: 充満部分 $(\infty, 1)$ -圏

- $(\infty, 1)$ -圏  $\mathcal{C}$  の **部分  $(\infty, 1)$ -圏** (sub  $(\infty, 1)$ -category) とは, 単体的部分集合  $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$  であって, その包含写像  $i: \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{C}$  が内的ファイブレーションであるようなもののこと<sup>a</sup>.
- 部分  $(\infty, 1)$ -圏  $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$  が **充満部分  $(\infty, 1)$ -圏** (full sub  $(\infty, 1)$ -category) であるとは,  $\forall n \geq 0$  に対して以下の条件を満たすことを言う:  
**(fullsub)**  $\forall \sigma \in \mathcal{C}_n \cong \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \mathcal{C})$  に対して,  $\sigma_{[0]}(\Delta_0^n) \subset \mathcal{S}_0 \implies \sigma \in \mathcal{S}_n$  が成り立つ.

<sup>a</sup> このとき  $\mathcal{S}$  は  $(\infty, 1)$ -圏になる [?, Tag 01CG]

2つの**右ファイブレーション**  $\mathcal{E} \xrightarrow{p} \mathcal{B}$ ,  $\mathcal{E}' \xrightarrow{p'} \mathcal{B}$  が与えられたとき, これらの間の射とは集合

$$\text{Hom}_{\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}') := \{ f \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}') \mid p' \circ f = p \}$$

のことである．  $\text{Hom}_{\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$  の元を  $\mathbf{sSet}$  における可換図式として表すと以下の通り：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{f} & \mathcal{E}' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & \mathcal{B} & \end{array}$$

$\text{Hom}_{\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}') \subset \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$  を【例??】の方法で単体的集合と見做せる．このようにして得られる単体的集合  $\text{Hom}_{\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$  の最大の部分 Kan 複体を  $\text{Hom}_{\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$  と書く．

**定義 1.21:** 右ファイブレーションの成す  $(\infty, 1)$ -圏

$\mathcal{B}$  を  $(\infty, 1)$ -圏とする．Kan-豊穡圏  $\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}$  を

- 右ファイブレーションを対象とする
- $\text{Hom}_{\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$  を Hom 対象とする

ことで定義する．以降では  $(\infty, 1)$ -圏  $\text{N}_{\text{hc}}(\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}) \in \text{Ob}(\mathbf{sSet})$  のことも  $\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}$  と書き，区別しない．

### 1.2.3 $(\infty, 1)$ -圏におけるスライス圏

**定義 1.22:** 単体的集合の join

2 つの単体的集合  $S, T \in \text{Ob}(\mathbf{sSet})$  の join とは，単体的集合

$$S \star T: \Delta^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets},$$

$$[n] \longmapsto \coprod_{[i]; -1 \leq i \leq n} (S_i \times T_{n-i-1}),$$

$$\left( [m] \xrightarrow{\alpha} [n] \right) \longmapsto \left( ([i]; (x, y)) \mapsto \left( \alpha^{-1}([i]); (S(\alpha|_{\alpha^{-1}([i])})(x), T(\alpha|_{\alpha^{-1}([m] \setminus [i])})(y)) \right) \right)$$

のこと．ただし  $S_{-1} = T_{-1} := \{*\}$ ,  $[-1] := \emptyset$  とおいた．

$d_j^n \in \text{Hom}_{\Delta^{\text{op}}}([n], [n-1])$  に対して

$$(d_j^n)^{-1}([i]) = \begin{cases} [i], & -1 \leq i < j \\ [i-1], & j \leq i \leq n \end{cases}$$

$$(d_j^n)^{-1}([n] \setminus [i]) = \begin{cases} [n-1] \setminus [i], & -1 \leq i < j \\ [n-1] \setminus [i-1], & j \leq i \leq n \end{cases}$$

であるから， $S \star T$  の面写像は  $n \geq 1, 0 \leq j \leq n$  に対して

$$\partial_j^n: \coprod_{-1 \leq i \leq n} (S_i \times T_{n-i-1}) \longrightarrow \coprod_{-1 \leq i \leq n-1} (S_i \times T_{n-i-2}), \quad (1.2.1)$$

$$([i]; (x, y)) \mapsto \begin{cases} ([-1]; (*, \partial_j^n y)), & i = -1 \\ ([i]; (x, \partial_{j-i-1}^{n-i-1} y)), & 0 \leq i < j, (i, j) \neq (n-1, n) \\ ([i-1]; (\partial_j^i x, y)), & j \leq i \leq n-1, (i, j) \neq (0, 0) \\ ([n-1]; (\partial_j^n x, *)), & i = n \\ ([n-1]; (x, *)), & (i, j) = (n-1, n) \\ ([-1]; (*, y)), & (i, j) = (0, 0) \end{cases}$$

となる.

【例 1.2.1】  $\text{join } \Delta^0 \star \Delta^0$

$\Delta^0 \star \Delta^0$  を計算してみよう<sup>a</sup>. まず対象は

$$(\Delta^0 \star \Delta^0)_0 = \Delta^0_0 \sqcup \Delta^0_0 = \left\{ \begin{array}{c} \{0\} \\ \bullet \\ \{0\} \end{array} \right\}$$

である. 1-射は

$$(\Delta^0 \star \Delta^0)_1 = \Delta^0_1 \sqcup (\Delta^0_0 \times \Delta^0_0) \sqcup \Delta^0_1$$

であるが, (1.2.1) より始点関数は

$$\begin{aligned} \partial_1^1|_{\Delta^0_0 \times \Delta^0_0} : \Delta^0_0 \times \Delta^0_0 &\longrightarrow \Delta^0_0 \sqcup \Delta^0_0, \\ (\{0\}, \{0\}) &\longmapsto \{0\} \end{aligned}$$

終点関数は

$$\begin{aligned} \partial_0^1|_{\Delta^0_0 \times \Delta^0_0} : \Delta^0_0 \times \Delta^0_0 &\longrightarrow \Delta^0_0 \sqcup \Delta^0_0, \\ (\{0\}, \{0\}) &\longmapsto \{0\} \end{aligned}$$

となるため,  $\Delta^0_1, \Delta^0_1$  が縮退していることを考慮すると

$$(\Delta^0 \star \Delta^0)_1 = \left\{ \begin{array}{c} \{0\} \\ \bullet \\ \downarrow \\ \bullet \\ \{0\} \end{array} \right\}$$

と図示できる.

---

<sup>a</sup> 左右の区別を付けるために色を付けた.

【例 1.2.2】  $\text{join } \Delta^1 \star \Delta^0$

$\Delta^1 \star \Delta^0$  を計算してみよう．まず対象は

$$(\Delta^1 \star \Delta^0)_0 = \Delta^1_0 \sqcup \Delta^0_0 = \left\{ \begin{array}{cc} \{0\} & \{1\} \\ \bullet & \bullet \\ & \bullet \\ & \{0\} \end{array} \right\}$$

である．1-射は

$$(\Delta^1 \star \Delta^0)_1 = \Delta^1_1 \sqcup (\Delta^1_0 \times \Delta^0_0) \sqcup \Delta^0_1$$

であるが，(1.2.1) より始点関数は

$$\begin{aligned} \partial_1^1|_{\Delta^1_0 \times \Delta^0_0} : \Delta^1_0 \times \Delta^0_0 &\longrightarrow \Delta^1_0 \sqcup \Delta^0_0, \\ (x, \{0\}) &\longmapsto x \end{aligned}$$

終点関数は

$$\begin{aligned} \partial_0^1|_{\Delta^1_0 \times \Delta^0_0} : \Delta^1_0 \times \Delta^0_0 &\longrightarrow \Delta^1_0 \sqcup \Delta^0_0, \\ (x, \{0\}) &\longmapsto \{0\} \end{aligned}$$

となるため，

$$\Delta^1 \star \Delta^0 = \left\{ \begin{array}{cc} \{0\} & \{1\} \\ \bullet & \bullet \\ & \bullet \\ & \{0\} \end{array} \right\}$$

と図示できる．ただし，三角形の内部は 2-射  $(\text{Id}_{[1]}, \{0\}) \in \Delta^1_1 \times \Delta^0_0 \subset (\Delta^1 \star \Delta^0)_2$  が埋めている．同様に

$$(\Delta^0 \star \Delta^1)_1 = \left\{ \begin{array}{cc} \{0\} & \{1\} \\ \bullet & \bullet \\ & \bullet \\ & \{0\} \end{array} \right\}$$

であることが分かる．

【例 1.2.3】  $\text{join } \Delta^2 \star \Delta^0$

$\Delta^2 \star \Delta^0$  を計算してみよう． まず

$$(\Delta^2 \star \Delta^0)_0 = \Delta^2_0 \sqcup \Delta^0_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \{1\} & & \{0\} \\ & \bullet & \\ & \{2\} & \\ & \bullet & \\ & \{0\} & \end{array} \right\}$$

である． 次に 1 射は

$$(\Delta^2 \star \Delta^0)_1 = \Delta^2_1 \sqcup (\Delta^2_0 \times \Delta^0_0) \sqcup \Delta^0_1$$

であるが， (1.2.1) より始点関数は

$$\begin{aligned} \partial_1^1|_{\Delta^2_0 \times \Delta^0_0} : \Delta^2_0 \times \Delta^0_0 &\longrightarrow \Delta^2_0 \sqcup \Delta^0_0, \\ (x, \text{Id}_{\{0\}}) &\longmapsto x \end{aligned}$$

となり， 終点関数は

$$\begin{aligned} \partial_0^1|_{\Delta^2_0 \times \Delta^0_0} : \Delta^2_0 \times \Delta^0_0 &\longrightarrow \Delta^2_0 \sqcup \Delta^0_0, \\ (x, \text{Id}_{\{0\}}) &\longmapsto \{0\} \end{aligned}$$

となる． 従って図式??に倣うと

$$(\Delta^2 \star \Delta^0)_1 = \Delta^2_1 \sqcup (\Delta^2_0 \times \Delta^0_0) \sqcup \Delta^0_1 = \left\{ \begin{array}{ccc} \{0\} & & \{2\} \\ & \nearrow & \searrow \\ & \{1\} & \\ & \downarrow & \\ & \{0\} & \end{array} \right\}$$

と図示できる． ただし， 四面体の内部は 3-射  $(\text{Id}_{[2]}, \{0\}) \in \Delta^2_2 \times \Delta^0_0 \subset (\Delta^1 \star \Delta^0)_3$  が埋めている． 同様に，  $\Delta^0 \star \Delta^2$  の 1-射を図示すると

$$(\Delta^0 \star \Delta^2)_1 = \Delta^0_1 \sqcup (\Delta^0_0 \times \Delta^2_0) \sqcup \Delta^2_1 = \left\{ \begin{array}{ccc} & \{0\} & \\ & \downarrow & \\ \{0\} & \{1\} & \{2\} \\ & \uparrow & \\ & \{0\} & \end{array} \right\}$$

のようになる．

**補題 1.2:  $(\infty, 1)$ -圏同士の join は  $(\infty, 1)$ -圏**

$(\infty, 1)$ -圏同士の join は  $(\infty, 1)$ -圏である。

証明 [?, Proposition 1.2.8.3] ■

**定義 1.23: スライス  $(\infty, 1)$ -圏**

$(\infty, 1)$ -圏  $\mathcal{D}, \mathcal{C}$  および  $(\infty, 1)$ -圏の関手  $p \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$  を与える。  $p$  に沿った  $\mathcal{C}$  のスライス圏 (overcategory)

$$\mathcal{C}_{/p}: \Delta^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を以下で定義する：

- $\forall [n] \in \text{Ob}(\Delta^{\text{op}})$  に対して、 集合

$$\text{Hom}_p(\Delta^n \star \mathcal{D}, \mathcal{C}) := \{ f \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n \star \mathcal{D}, \mathcal{C}) \mid f|_{\mathcal{D}} = p \}$$

を対応付ける<sup>a</sup>。

- $\forall \alpha \in \text{Hom}_{\Delta^{\text{op}}}([m], [n])$  に対して、 写像

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{/p}(\alpha): \text{Hom}_p(\Delta^m \star \mathcal{D}, \mathcal{C}) &\longrightarrow \text{Hom}_p(\Delta^n \star \mathcal{D}, \mathcal{C}), \\ f &\longmapsto f \circ (\alpha_* \star \text{Id}_{\mathcal{D}}) \end{aligned}$$

を対応付ける。

実際、単体的集合  $\mathcal{C}_{/p}$  は  $(\infty, 1)$ -圏である [?, Tag 018F].

<sup>a</sup>  $f|_{\mathcal{D}}$  というのは、join の定義における  $(\Delta^n \star \mathcal{D})_k$  の disjoint union のうち、添字  $i = 0$  が振られている成分への制限を意味する。

$p$  に沿った  $\mathcal{C}$  のコスライス圏 (undercategory)

$$\mathcal{C}_{p/}: \Delta^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を以下で定義する：

- $\forall [n] \in \text{Ob}(\Delta^{\text{op}})$  に対して、 集合

$$\text{Hom}_p(\mathcal{D} \star \Delta^n, \mathcal{C}) := \{ f \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\mathcal{D} \star \Delta^n, \mathcal{C}) \mid f|_{\mathcal{D}} = p \}$$

を対応付ける<sup>a</sup>。

- $\forall \alpha \in \text{Hom}_{\Delta^{\text{op}}}([m], [n])$  に対して、 写像

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{p/}(\alpha): \text{Hom}_p(\mathcal{D} \star \Delta^m, \mathcal{C}) &\longrightarrow \text{Hom}_p(\mathcal{D} \star \Delta^n, \mathcal{C}), \\ f &\longmapsto f \circ (\text{Id}_{\mathcal{D}} \star \alpha_*) \end{aligned}$$

を対応付ける。

<sup>a</sup>  $f|_{\mathcal{D}}$  というのは, **join の定義**における  $(\mathcal{D} \star \Delta^n)_k$  の disjoint union のうち, 添字  $i = n$  が振られている成分への制限を意味する.

特に注目すべきは,  $(\infty, 1)$ -圏の関手  $p: \Delta^0 \rightarrow \mathcal{C}$  をとった場合である. このとき  $X := p_{[0]}(\{0\}) \in \mathcal{C}_0$  において  $\mathcal{C}_{/X}$ ,  $\mathcal{C}_{X/}$  などを書く.

まず,  $(\infty, 1)$ -圏  $\mathcal{C}_{/X}$  の対象  $\varphi \in (\mathcal{C}_{/X})_0 = \text{Hom}_p(\Delta^0 \star \Delta^0, \mathcal{C})$  をとる. すると【例 1.2.1】および  $\varphi|_{\Delta^0} = p$  の条件から,  $\varphi_{[1]}: (\Delta^0 \star \Delta^0)_1 \rightarrow \mathcal{C}_1$  とは図式

$$\varphi = \begin{array}{c} \varphi_{[0]}|_{\Delta^0_0}(\{0\}) \\ \bullet \\ \downarrow \varphi_{[1]}|_{\Delta^0_0 \times \Delta^0_0}(\{0\} \rightarrow \{0\}) \\ \bullet \\ X \end{array}$$

である.  $n \geq 2$  射に相当する  $\varphi_{[n]}: (\Delta^0 \star \Delta^0)_n \rightarrow \mathcal{C}_n$  のデータは縮退していて自明である. 従って,  $\varphi$  は  $(1, 1)$ -圏における  $X$  上のスライス圏の対象と等価なデータを与える.

同様に,  $(\infty, 1)$ -圏  $\mathcal{C}_{/X}$  の 1-射  $f \in (\mathcal{C}_{/X})_1 = \text{Hom}_p(\Delta^1 \star \Delta^0, \mathcal{C})$  とは, 【例 1.2.2】より

$$f = \begin{array}{ccc} f_{[0]}|_{\Delta^1_0}(\{0\}) & \xrightarrow{\quad} & f_{[0]}|_{\Delta^1_0}(\{1\}) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & f_{[2]}|_{\Delta^1_1 \times \Delta^0_0}(\text{Id}_{[1]}, \{0\}) & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ & \bullet & \\ & X & \end{array}$$

のことである. ただし三角形の内部は 2-射  $f_{[2]}|_{\Delta^1_1 \times \Delta^0_0}(\text{Id}_{[2]}, \{0\}) \in \mathcal{C}_2$  が埋めている. これは  $(1, 1)$ -圏における  $X$  上のスライス圏の射のデータに対応しているが, 横向きの矢印を決めるだけでは  $f$  が upto homotopy でしか定まらないという点で異なっている.

$(\infty, 1)$ -圏  $\mathcal{C}_{/X}$  の  $n$ -射も同様に図示できる.

#### 【例 1.2.4】スライス圏からの forgetful functor

$(\infty, 1)$ -圏  $\mathcal{C}$  の,  $X: \Delta^0 \rightarrow \mathcal{C}$  に沿った**スライス圏**に対して, **忘却関手** (forgetful functor)

$$\text{forget}: \mathcal{C}_{/X} \rightarrow \mathcal{C}$$

を次のように定義する:

$$\begin{aligned} \text{forget}_{[n]}: (\mathcal{C}_{/X})_n = \text{Hom}_X(\Delta^n \star \Delta^0, \mathcal{C}) &\rightarrow \mathcal{C}_n = \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \mathcal{C}), \\ f &\mapsto f|_{\Delta^n} \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

$n = 0, 1, 2$  の場合, i.e. 【例 1.2.1】, 【例 1.2.2】, 【例 1.2.3】の図式においては, ちょうど  $X \in \mathcal{C}_0$  に対応する青色の頂点 (コーンポイント) を除去する操作に対応している. (1.2.2) の定義は**右ファイブレーション**になっている.

### 1.2.4 $(\infty, 1)$ -圏の limit/colimit

後の議論のため、先取りして  $(\infty, 1)$ -圏における limit/colimit を定義しておこう。  $(\infty, 1)$ -圏のモデルとして quasi-category を採用する場合、これは **homotopy limit/colimit** と呼ばれることもある。

#### 定義 1.24: $(\infty, 1)$ -圏における始対象と終対象

- $(\infty, 1)$ -圏  $\mathcal{C}$  における対象  $x \in \mathcal{C}_0$  が**始対象** (initial object) であるとは、ホモトピー圏  $\mathrm{h}\mathcal{C}$  における始対象<sup>a</sup>であること。
- $(\infty, 1)$ -圏  $\mathcal{C}$  における対象  $x \in \mathcal{C}_0$  が**終対象** (final object) であるとは、ホモトピー圏  $\mathrm{h}\mathcal{C}$  における終対象<sup>b</sup>であること。

<sup>a</sup>  $(1, 1)$ -圏の**始対象**とは、空の図式における余極限のこと。

<sup>b</sup>  $(1, 1)$ -圏の**終対象**とは、空の図式における極限のこと。

#### 定義 1.25: $(\infty, 1)$ -圏の limit/colimit

$(\infty, 1)$ -圏の関手  $D: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  を与える<sup>a</sup>。

- $D$  の **limit** とは、**スライス  $(\infty, 1)$ -圏  $\mathcal{C}_{/D}$**  における**終対象**のこと。  $\lim D \in \mathcal{C}_0$  と書く。
- $D$  の **colimit** とは、**スライス  $(\infty, 1)$ -圏  $\mathcal{C}_{D/}$**  における**始対象**のこと。  $\mathrm{colim} D \in \mathcal{C}_0$  と書く。

<sup>a</sup>  $(1, 1)$ -圏の場合からのアナロジーで、 $D$  を図式と見做す。

#### 【例 1.2.5】 pullback

単体的集合の積  $S \times T: \Delta^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$  における面写像とは

$$\begin{aligned} \partial_j^n: S_n \times T_n &\longrightarrow S_{n-1} \times T_{n-1}, \\ (x, y) &\longmapsto (\partial_j^n x, \partial_j^n y) \end{aligned}$$

のことであった。故に、単体的集合  $\Delta^1 \times \Delta^1$  は、 $\Delta_0^1 = \{\bullet_0, \bullet_1\}$  とおくと

$$\Delta^1 \times \Delta^1 = \begin{array}{ccc} (0, 0) & \xrightarrow{\quad} & (1, 0) \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ (0, 1) & \xrightarrow{\quad} & (1, 1) \end{array}$$

と図示できる。ただし、2-射以上は縮退して見えない。

$(\infty, 1)$ -圏の関手  $D: \Delta^1 \times \Delta^1 \rightarrow \mathcal{C}$  の **limit** のことを（存在すれば）**pullback** と呼び、

$$D(0, 1) \times_{D(1, 1)} D(1, 0) := \lim D \in \mathcal{C}_0$$

と書く。



### 1.2.5 Unstraightening construction

#### 定理 1.1: unstraightening construction

$(\infty, 1)$ -圏同値

$$\mathbf{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}}$$

が存在する.

証明  $(\infty, 1)$ -圏同値

$$\mathbf{Un}: \mathbf{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}}$$

は, 次のようにして構成される (unstraightening construction) :

対象  $F \in \mathbf{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathcal{B})_0$  に対して,  $(\infty, 1)$ -圏の pullback

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Un}(F) & \longrightarrow & \mathcal{S}\mathbf{paces}_{/*} \\ \downarrow & & \downarrow \text{forget} \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{F} & \mathcal{S}\mathbf{paces} \end{array}$$

により得られる右ファイブレーション  $\mathbf{Un}(F) \longrightarrow \mathcal{B} \in (\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}})_0$  を対応付ける.

$n$ -射

逆向きの  $(\infty, 1)$ -圏同値 (straightning construction)

$$\mathbf{St}: \mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}} \longrightarrow \mathbf{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathcal{B})$$

は難しい. 詳細は [?, Proposition 2.2.3.11] を参照. ■

### 1.2.6 $(\infty, 1)$ -圏における米田埋め込み

#### 定義 1.26: twisted arrow category

$(\infty, 1)$ -圏  $\mathcal{C}$  を与える. このとき,  $\mathcal{C}$  の twisted arrow category と呼ばれる  $(\infty, 1)$ -圏を以下で定義する:

$$\begin{aligned} \mathbf{Tw}(\mathcal{C}): \Delta^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathbf{Sets}, \\ [n] &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}((\Delta^n)^{\mathrm{op}} \star \Delta^n, \mathcal{C}), \\ ([m] \xrightarrow{\alpha} [n]) &\longmapsto (f \mapsto f \circ (\alpha_* \times \alpha_*)) \end{aligned}$$

$(\infty, 1)$ -圏の関手

$$\mathrm{pr}: \mathbf{Tw}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C}$$

を以下で定義すると, これは左ファイブレーションになる [?, Tag 03JQ] :

$$\mathrm{pr}_{[n]}: \mathbf{Tw}(\mathcal{C})_n \longrightarrow \mathcal{C}_n^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C}_n = \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \mathcal{C}^{\mathrm{op}}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \mathcal{C})$$

$$f \mapsto (f|_{(\Delta^n)^{\text{op}}}, f|_{\Delta^n})$$

$(\infty, 1)$ -圏における Hom 関手

$$\text{Map}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}\text{paces}$$

の自然な構成は, [straightning construction](#) を用いた

$$\begin{array}{ccc} \text{Tw}(\mathcal{C}) & \longrightarrow & \mathcal{S}\text{paces}_{*/} \\ \text{pr} \downarrow & & \downarrow \text{forget} \\ \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} & \xrightarrow[\text{Map}_{\mathcal{C}} := \text{St}(\text{pr})]{} & \mathcal{S}\text{paces} \end{array}$$

である [?, I.26., p.19].

#### 定義 1.27: $(\infty, 1)$ -圏の米田埋め込み (informal)

$\mathcal{C}$  を  $(\infty, 1)$ -圏とする.  $(\infty, 1)$ -圏の米田埋め込み (Yoneda embedding)

$$\mathbf{y} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathcal{C})$$

とは,  $\mathcal{C}$  から  $(\infty, 1)$ -前層の成す  $(\infty, 1)$ -圏  $\mathbf{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathcal{C})$  への  $(\infty, 1)$ -圏の関手であって, 対象  $x \in \mathcal{C}_0$  に対して

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{[0]}(x)_{[0]} : \mathcal{C}_0^{\text{op}} &\longrightarrow \mathcal{S}\text{paces}_0, \\ y &\longmapsto \text{Map}_{\mathcal{C}}(x, y) \end{aligned}$$

を充たす<sup>a</sup>ような  $(\infty, 1)$ -圏の関手  $\mathbf{y}_{[0]}(x) \in \mathbf{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathcal{C})_0 = \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathcal{S}\text{paces})$  を対応付けるもののこと<sup>b</sup>.

<sup>a</sup>  $(\infty, 1)$ -圏  $\mathcal{C}$  において, 対象  $x, y \in \mathcal{C}_0$  の間の射の空間  $\text{Map}_{\mathcal{C}}(x, y)$  は Kan 複体を成すのだった [?, [Tag 01JC](#)].

<sup>b</sup> 厳密な構成については [?, [Tag 03NF](#)] を参照.

### 1.2.7 層状化空間の接構造

#### 定義 1.28: enter-path category

[conically smooth](#) な層状化空間  $X \in \text{Ob}(\mathbf{Strat})$  の enter-path  $(\infty, 1)$ -category とは,  $(\infty, 1)$ -圏  $\mathcal{B}\text{sc}$  のスライス圏

$$\mathcal{E}\text{nter}(X) := \mathcal{B}\text{sc}_{/X}$$

のこと.

### 定義 1.29: tangent classifier

$\iota: \mathcal{B}\mathbf{sc} \hookrightarrow \mathbf{Snglr}$  を包含とする. **tangent classifier** とは,  $(\infty, 1)$ -圏の関手

$$\tau: \mathbf{Snglr} \xrightarrow{\iota} \mathbf{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathbf{Snglr}) \xrightarrow{\iota^*} \mathbf{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathcal{B}\mathbf{sc})$$

のこと.

定義 1.27 より, **tangent classifier** は **conically smooth な層状化空間**  $X \in \mathbf{Snglr}_0$  に対して  $(\infty, 1)$ -圏の表現可能前層

$$\tau_{[0]}(X) = \mathrm{Map}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}(-, X) \in \mathbf{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathcal{B}\mathbf{sc})_0 \quad (1.2.3)$$

を対応付ける.

定理 1.1 より, **tangent classifier**  $\tau$  のことを

$$\tau: \mathbf{Snglr} \xrightarrow{\iota} \mathbf{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathbf{Snglr}) \xrightarrow{\iota^*} \mathbf{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathcal{B}\mathbf{sc}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}$$

と見做すこともできる. このとき,  $\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}$  の構成および  $(\infty, 1)$ -前層 (1.2.3) に対する定理 1.1 の具体的構成から, **conically smooth な層状化空間**  $X \in \mathbf{Snglr}_0$  に対して定まる  $(\infty, 1)$ -圏の**右ファイブレーション**  $\tau_{[0]}(X) \in (\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}})_0$  とは忘却関手

$$\tau_{[0]}(X): \mathcal{E}\mathbf{nter}(X) \longrightarrow \mathcal{B}\mathbf{sc}$$

のことである. この忘却関手を以下では  $\tau_X := \tau_{[0]}(X)$  と書く.

### 定義 1.30: $\mathcal{B}$ -多様体

- $(\mathcal{B}, f)$  構造<sup>a</sup>とは,  $(\infty, 1)$ -圏の**右ファイブレーション**  $(\mathcal{B} \xrightarrow{f} \mathcal{B}\mathbf{sc}) \in (\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}})_0$  のこと.
- $(\mathcal{B}, f)$  構造  $\mathcal{B} \xrightarrow{f} \mathcal{B}\mathbf{sc}$  を 1 つ固定する. このとき,  **$\mathcal{B}$ -多様体** ( $\mathcal{B}$ -manifold) の成す  $(\infty, 1)$ -圏  $\mathcal{M}\mathbf{fld}(\mathcal{B})$  とは,  $(\infty, 1)$ -圏の **pullback**

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}\mathbf{fld}(\mathcal{B}) & \longrightarrow & (\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}})_{/f} \\ \downarrow & & \downarrow \text{forget} \\ \mathbf{Snglr} & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}} \end{array}$$

のこと. 特に,  $\mathcal{M}\mathbf{fld}(\mathcal{B})_0$  の元は以下の 2 つのデータから成り,  **$\mathcal{B}$ -多様体**と呼ばれる:

- **conically smooth な層状化空間**  $X \in \mathbf{Snglr}_0$
- $(\infty, 1)$ -圏の関手  $g: \mathcal{E}\mathbf{nter}(X) \longrightarrow \mathcal{B}$

これらは以下の条件を充たさねばならない:

**(lift of tangent classifier)**

$\mathbf{sSet}$  における以下の図式は可換である:

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{B} \\ & \nearrow g & \downarrow f \\ \mathcal{E}\mathbf{nt}\mathbf{r}(X) & \xrightarrow{\tau_X} & \mathcal{B}\mathbf{sc} \end{array}$$

<sup>a</sup> [?, Definition 1.1.6] では  $(\infty, 1)$ -category of basics と呼ばれている。

### 1.2.8 $C^\infty$ -多様体の接構造との比較

### 1.2.9 $\mathcal{B}\mathbf{sc}$ における Hom

しばらくの間, **basic**  $U := ((\mathbb{R}^n \rightarrow [0]) \times C(Z \rightarrow P), \mathcal{A}_Z) \in \text{Ob}(\mathbf{B}\mathbf{sc})$  を 1 つ固定する. これまでと同様に, **層状化空間**  $C(Z \xrightarrow{s} P) = (C(Z) \xrightarrow{C(s)} C(P))$  の **コーンポイント** のことを  $\text{pt} \in C(Z)$  と書き,  $\mathbb{R}^n \times \{\text{pt}\} \subset \mathbb{R}^n \times C(Z)$  のことを  $\mathbb{R}^n$  と略記することにする. さらに, 点  $(0, \text{pt}) \in \mathbb{R}^n \times C(Z)$  のことを  $0 \in \mathbb{R}^n \times C(Z)$  と略記し,  $U$  の **原点** (origin) と呼ぶことにする.

! 以下では, 混乱が生じにくい場合は層状化空間  $(X \xrightarrow{s} P)$  の  $s$  と  $P$  を省略する.

いま, 特異単体の変種として, 滑らかな (境界付き) 多様体  $X$  の **滑らかな特異単体** (smooth singular simplicial set) と呼ばれる単体の集合を

$$\begin{aligned} \text{Sing}^{\text{sm}}(X): \Delta^{\text{op}} &\longrightarrow \mathbf{Sets}, \\ [n] &\longmapsto \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta_e^n, X)_{\text{smooth}}, \\ ([m] \xrightarrow{\alpha} [n]) &\longmapsto (\text{Sing}^{\text{sm}}(X)_m \xrightarrow{\Delta_e(\alpha)^*} \text{Sing}^{\text{sm}}(X)_n) \end{aligned}$$

と定義する<sup>\*5</sup>. これは Kan 複体になる. ここで (1.1.1) を思い出して, 写像

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{B}\mathbf{sc}}(U, U), \\ (t, p) &\longmapsto \left( (v, [s, z]) \mapsto (tv + p, [ts, z]) \right) =: \tilde{\gamma}_{[m]t, p} \end{aligned}$$

を考える. これを Kan 複体の間の射 (i.e. 自然変換)

$$\gamma: \text{Sing}^{\text{sm}}(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{B}\mathbf{sc}}(U, U) \quad (1.2.4)$$

へと格上げすることができる. 実際,  $\forall m \geq 0$  に対して,  $m$ -単体はそれぞれ

$$\begin{aligned} \text{Sing}^{\text{sm}}(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n)_m &= \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta_e^m, \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n)_{\text{smooth}}, \\ \text{Hom}_{\mathbf{B}\mathbf{sc}}(U, U)_m &= \{ f \in \text{Hom}_{\mathbf{Strat}}(\Delta_e^m \times U, \Delta_e^m \times U) \mid \text{proj}_{\Delta_e^m} \circ f = \text{proj}_{\Delta_e^m} \} \end{aligned}$$

であったから,

$$\begin{aligned} \gamma_{[m]}: \text{Sing}^{\text{sm}}(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n)_m &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{B}\mathbf{sc}}(U, U)_m, \\ (x \mapsto (t(x), p(x))) &\longmapsto \left( (x, u) \mapsto (x, \tilde{\gamma}_{t(x), p(x)}(u)) \right) =: \gamma_{t, p} \end{aligned}$$

<sup>\*5</sup> 滑らかな特異単体と言ったときは幾何学的  $n$ -単体を用いることが多く, このように定義することは稀だと思う.

と定義すればよい.

さらに, 勝手な **conically smooth な層状化空間**  $Z \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr})$  に対して, その**自己同相群** (automorphism group)

$$\text{Aut}(Z): \Delta^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を, **Kan 複体**  $\text{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(Z, Z)$  の部分 Kan 複体として次のように定義する:

$$\text{Aut}(Z)_m := \{ f \in \text{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(Z, Z)_m \mid \text{proj}_{\Delta_e^m} \circ f = \text{proj}_{\Delta_e^m}, \exists f^{-1} \in \text{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(\Delta_e^m \times Z, \Delta_e^m \times Z) \}$$

なお,  $\forall m \geq 0$  に対し集合  $\text{Aut}(Z)_m$  は  $(1, 1)$ -圏  $\mathbf{Snglr}$  における 1-射の合成に関して群になるため, Kan 複体  $\text{Aut}(Z)$  は **Kan 群** (group Kan complex)<sup>\*6</sup>と見做することができる.

#### 定義 1.31: 層状化された一般線形群

勝手な **basic**  $U := ((\mathbb{R}^n \rightarrow [0]) \times \mathbf{C}(Z \rightarrow P), \mathcal{A}_Z) \in \text{Ob}(\mathbf{Bsc})$  を与える.

**Kan 複体**  $\text{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(U, U)$  の部分 Kan 複体

$$\text{GL}(U): \Delta^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を次のように定義し, **層状化された一般線形群**と呼ぶ:

$$\text{GL}(U)_m := \{ T \in \text{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(U, U)_m \mid \forall (t, p) \in \text{Sing}^{\text{sm}}(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n)_m, T \circ \gamma_{[m]t, p} = \gamma_{[m]t, (Tp)_{\mathbb{R}^n}} \circ T \}$$

ただし,  $(Tp)_{\mathbb{R}^n} := \text{proj}_{\mathbb{R}^n} \circ T|_{\Delta_e^m \times \mathbb{R}^n \times \{0\}} \circ p: \Delta_e^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$  と略記した.

**Kan 複体**  $\text{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(U, U)$  の部分 Kan 複体

$$\text{O}(U): \Delta^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を次のように定義し, **層状化された直交群**と呼ぶ:

$$\text{O}(U) := \text{Sing}^{\text{sm}}(\text{O}(n)) \times \text{Aut}(Z)$$

#### 【例 1.2.6】 通常の一般線形群

$Z = \emptyset$  の場合を考える. このとき  $U = \mathbb{R}^n$  なので, Kan 複体の射 (1.2.4) とは単に

$$\gamma_{[m]}: (x \mapsto (t(x), p(x))) \longmapsto ((x, u) \mapsto (x, t(x)u + p(x)))$$

のことであり,  $T \in \text{GL}(U)_m$  とは  $\forall (t, p) \in \text{Sing}^{\text{sm}}(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n)$  および  $\forall (x, u) \in \Delta_e^m \times U = \Delta_e^m \times \mathbb{R}^n$  に対して

$$\begin{aligned} T \circ \gamma_{[m]t, p}(x, u) &= T(x, t(x)u + p(x)) \\ &= \gamma_{[m]t, \text{proj}_{\mathbb{R}^n} \circ T|_{\mathbb{R}^n}(p)} \circ T(x, u) \\ &= (x, t(x) \text{proj}_{\mathbb{R}^n} \circ T(x, u) + \text{proj}_{\mathbb{R}^n} \circ T(x, p(x))) \end{aligned}$$

<sup>\*6</sup> Kan 複体であって,  $\Delta^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Grp}$  でもあるもの. 従って, homotopy hypothesis より位相群と見做することができる.

が成り立つことを意味する． i.e.  $\forall x \in \Delta_e^m$  に対して,  $\tilde{T}_x := \text{proj}_{\mathbb{R}^n} \circ T|_{\{x\} \times U} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  とおくと

$$\tilde{T}_x(t(x)u + p(x)) = t(x)\tilde{T}_xu + \tilde{T}_xp(x)$$

が成り立つため,  $\tilde{T}_x$  は線型写像である． (1, 1)-圏 **Snglr** の定義より  $T$  は開埋め込みであり, 単射である． 故に, 有限次元ベクトル空間の間の単射線型写像  $\tilde{T}_x$  は全単射でもあり,  $\tilde{T}_x \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$  だと分かった． この事実は, Kan 複体の同型  $\text{GL}(\mathbb{R}^n) \cong \text{Sing}^{\text{sm}}(\text{GL}(n, \mathbb{R}))$  を意味する．

さて, 部分 Kan 複体  $\text{Aut}^0(U) \subset \text{Hom}_{\mathcal{B}\text{sc}}^0(U, U) \subset \text{Hom}_{\text{Snglr}}(U, U)$  を次のように定義しよう：

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{B}\text{sc}}^0(U, U)_m &:= \{ f \in \text{Hom}_{\text{Snglr}}(U, U)_m \mid \forall x \in \Delta_e^m, f(x, 0) = (x, 0) \}, \\ \text{Aut}^0(U)_m &:= \{ f \in \text{Hom}_{\mathcal{B}\text{sc}}^0(U, U)_m \mid \forall x \in \Delta_e^m, \exists (f|_{\{x\} \times U})^{-1} \in \text{Hom}_{\text{Snglr}}(U, U) \} \end{aligned}$$

**補題 1.3: 層状化された一般線形群は原点を保つ自己同相群**

$$\text{GL}(U) \subset \text{Aut}^0(U) \subset \text{Hom}_{\mathcal{B}\text{sc}}^0(U, U)$$

**証明**  $\forall m \geq 0$  および  $\forall T \in \text{GL}(U)_m$  を 1 つ固定する．  $\forall x \in \Delta_e^m$  および  $\forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  に対して  $\gamma_{[m]t, 0}(x, 0) = (x, 0)$  が成り立つので,

$$T(x, 0) = T \circ \gamma_{[m]0, 0}(x, 0) = \gamma_{[m]0, 0}(T(x, 0)) = (x, 0)$$

が言える． また, (1, 1)-圏 **Snglr** の定義より  $T \in \text{Hom}_{\text{Snglr}}(\Delta_e^m \times U \longrightarrow \Delta_e^m \times U)$  は開埋め込みであるから単射である． 故に  $T$  が全射であることを示せば良い． ■

**補題 1.4: 層状化された直交群は一般線形群の部分 Kan 複体**

$$\text{O}(U) \subset \text{GL}(U)$$

**証明**  $\forall m \geq 0$  および  $\forall T := (A, f) \in \text{O}(U)_m = \text{Sing}^{\text{sm}}(\text{O}(n))_m \times \text{Aut}(Z)_m$  を 1 つ固定する． まず,  $\forall (x, (v, [s, z])) \in \Delta_e^m \times U = \Delta_e^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}(Z)$  に対して

$$T(x, (v, [s, z])) := (x, (A(x)v, [s, \text{proj}_Z \circ f(x, z)]))$$

と定めることで  $T \in \text{Hom}_{\mathcal{B}\text{sc}}^0(U, U)_m$  と見做せる． このとき,  $\forall (t, p) \in \text{Sing}^{\text{sm}}(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n)$  に対して

$$\begin{aligned} T \circ \gamma_{[m]t, p}(x, (v, [s, z])) &= T(x, (t(x)v + p(x), [t(x)s, z])) \\ &= (x, (t(x)A(x)v + A(x)p(x), [t(x)s, \text{proj}_Z \circ f(x, z)])) \\ &= \gamma_{[m]t, Ap}(x, (A(x)v, [s, \text{proj}_Z \circ f(x, z)])) \\ &= \gamma_{[m]t, (Tp)_{\mathbb{R}^n}} \circ T(x, (v, [s, z])) \end{aligned}$$

が成り立つため  $T \in \text{GL}(U)_m$  が言えた． ■

### 命題 1.2:

Kan 複体の包含写像

$$\mathcal{O}(U) \xrightarrow{i_1} \mathrm{GL}(U) \xrightarrow{i_2} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathrm{Sc}}^0(U, U) \xrightarrow{i_3} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathrm{Sc}}(U, U)$$

は全て Kan 複体のホモトピー同値である.

#### 証明 $i_1$ のホモトピー逆

Gram-Schmidt の正規直交化を行う.

#### $i_2$ のホモトピー逆

射は全て **conically smooth** なので,  $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathrm{Sc}}^0(U, U)_m$  の微分  $D_0 f := Df|_{\mathbb{R}^n \times \{0\} \times C(Z)} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Snglr}}(U, U)$  が存在する. この  $D_0$  がホモトピー逆を与える.

#### $i_3$ のホモトピー逆

$\gamma$  により原点へ並行移動すれば良い.

■

## 1.3 Disk algebras

### 1.3.1 $(\infty, 1)$ -オペラッド

本資料では,  $(\infty, 1)$ -圏を quasi-category として定義した. この小節では, quai-category における colored operad を定義する.

#### 定義 1.32: $(1, 1)$ -圏 $\mathbf{Fin}, \mathbf{Fin}_*$

$(1, 1)$ -圏  $\mathbf{Fin}$  を以下で定義する:

- 有限集合および空集合を対象に持つ.
- $I, J \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Fin})$  の間の写像を射とする.

$(1, 1)$ -圏  $\mathbf{Fin}_*$  を以下で定義する:

- 基点付き有限集合

$$\langle n \rangle := \{*, 1, \dots, n\}$$

を対象に持つ. i.e.

$$\mathrm{Ob}(\mathbf{Fin}_*) := \{ \langle n \rangle \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \}.$$

- $\forall \langle m \rangle, \langle n \rangle \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Fin}_*)$  に対して, それらの間の基点を保つ写像を射とする. i.e.

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m \rangle, \langle n \rangle) := \{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(\langle m \rangle, \langle n \rangle) \mid f(*) = * \}.$$

### 定義 1.33: inert/active morphism

- 圏  $\mathbf{Fin}_*$  における射  $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m \rangle, \langle n \rangle)$  が **inert** であるとは,  $\forall i \in \langle n \rangle \setminus \{*\}$  に対して  $f^{-1}(\{i\}) \subset \langle m \rangle$  が 1 点集合であることを言う.
- 圏  $\mathbf{Fin}_*$  における射  $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m \rangle, \langle n \rangle)$  が **active** であるとは,  $f^{-1}(\{*\}) = \{*\} \subset \langle m \rangle$  であることを言う.

#### 【例 1.3.1】 inert な射 $\rho^i$

$1 \leq \forall i \leq \forall n$  を 1 つ固定する. このとき, 写像

$$\rho^i: \langle n \rangle \longrightarrow \langle 1 \rangle, \\ j \longmapsto \begin{cases} 1, & j = i \\ *, & j \neq i \end{cases}$$

は圏  $\mathbf{Fin}_*$  における **inert な射** である.

#### 【例 1.3.2】 active な射 $\alpha_n$

$\forall n \geq 1$  を 1 つ固定する. このとき, 写像

$$\alpha_n: \langle n \rangle \longrightarrow \langle 1 \rangle, \\ j \longmapsto \begin{cases} 1, & j \neq * \\ *, & j = * \end{cases}$$

は圏  $\mathbf{Fin}_*$  における **active な射** である. なお,  $\alpha_n$  は射の集合  $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle n \rangle, \langle 1 \rangle)$  の元のうち, 唯一の active な射である.

脈体の定義において  $[n] \in \mathrm{Ob}(\Delta)$  を  $(1, 1)$ -圏と見做した方法と同様にして, 半順序集合  $\{n-1 \leq n\}$  を  $(1, 1)$ -圏と見做す. このとき,

$$N(\{n-1 \leq n\}) = \left( \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ n-1 & & n \end{array} \right) \cong \Delta^1$$

と図示できる. 同様に,

$$N(\{0 \leq 1\}) = \left( \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ 0 & & 1 \end{array} \right) \cong \Delta^1$$

である.

### 定義 1.34: $p$ -Cartesian morphism

$p: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{B}$  を **内的ファイブレーション** とする.

- $\mathcal{E}$  の 1-射  $(x \xrightarrow{f} y) \in \mathcal{E}_1$  が以下の条件を満たすとき,  $f$  は  **$p$ -Cartesian** であると言う:  
**(Cartesian)**  $\forall n \geq 2$  に対して, 以下の  $\mathbf{sSet}$  の図式を可換にする  $\mathcal{E}$  の  $n$ -射  $\bar{\varphi} \in$



$\text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \mathcal{E}) \cong \mathcal{E}_n$  が存在する：

$$\begin{array}{ccc}
 N(\{n-1 \leq n\}) \cong \Delta^1 & & \\
 \downarrow & \searrow f & \\
 \Lambda_n^n & \xrightarrow{\forall \varphi_0} & \mathcal{E} \\
 \downarrow & \nearrow \exists \bar{\varphi} & \downarrow p \\
 \Delta^n & \xrightarrow{\forall \varphi} & \mathcal{B}
 \end{array}$$

ただし,  $\mathbf{sSet}$  の射  $f: N(\{n-1 \leq n\}) \rightarrow \mathcal{E}$  とは

$$f_{[1]} \left( \begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{\quad} \bullet \\ n-1 \quad n \end{array} \right) = \begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{f} \bullet \\ x \quad y \end{array}$$

を充たす唯一の自然変換である.

- $\mathcal{E}$  の 1-射  $(x \xrightarrow{f} y) \in \mathcal{E}_1$  が以下の条件を充たすとき,  $f$  は  **$p$ -coCartesian** であると言う：  
**(coCartesian)**  $\forall n \geq 2$  に対して, 以下の  $\mathbf{sSet}$  の図式を可換にする  $\mathcal{E}$  の  $n$ -射  $\bar{\varphi} \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \mathcal{E}) \cong \mathcal{E}_n$  が存在する：

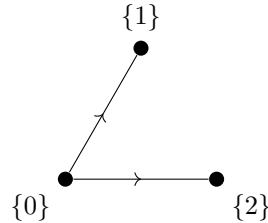
$$\begin{array}{ccc}
 N(\{0 \leq 1\}) \cong \Delta^1 & & \\
 \downarrow & \searrow f & \\
 \Lambda_0^n & \xrightarrow{\forall \varphi_0} & \mathcal{E} \\
 \downarrow & \nearrow \exists \bar{\varphi} & \downarrow p \\
 \Delta^n & \xrightarrow{\forall \varphi} & \mathcal{B}
 \end{array}$$

ただし,  $\mathbf{sSet}$  の射  $f: N(\{0 \leq 1\}) \rightarrow \mathcal{E}$  とは

$$f_{[1]} \left( \begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{\quad} \bullet \\ n-1 \quad n \end{array} \right) = \begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{f} \bullet \\ x \quad y \end{array}$$

を充たす唯一の自然変換である.

$n = 2$  の場合の (**coCartesian**) の可換図式の意味を, 系??を用いて解説しよう. まず, 包含  $N(\{0 \leq 1\}) \hookrightarrow \Lambda_0^2$  というのは, 系??による角  $\Lambda_0^2$  の図示



のうち辺  $\{0\} \rightarrow \{1\}$  への埋め込みであるから, 可換図式の

$$\begin{array}{ccc}
 N(\{0 \leq 1\}) \cong \Delta^1 & & \\
 \downarrow & \searrow f & \\
 \Lambda_0^2 & \xrightarrow{\forall \varphi_0} & \mathcal{E}
 \end{array}$$

の部分は勝手な角の図式  $\varphi_0 = (\bullet, f, \varphi_{02}) \in \mathcal{E}_1^{\times 2}$  を与えることに対応する．図示すると

$$\varphi_0 = \begin{array}{c} y \\ \nearrow f \\ x \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi_{02}} \bullet \end{array} \quad (1.3.1)$$

となる．従って，(coCart-2) の主張は次のような意味を持つ：

$(\infty, 1)$ -圏  $\mathcal{B}$  において角の図式が 2-射  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^2, \mathcal{B}) \cong \mathcal{B}_2$  によって

$$\begin{array}{c} p_{[0]}(y) \\ \nearrow p_{[1]}(f) \\ p_{[0]}(x) \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{p_{[1]}(\varphi_{02})} \bullet \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{ } \\ \nearrow \varphi \\ \text{ } \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{ } \\ \nearrow \partial_0^2(\varphi) \\ \text{ } \end{array}$$

と埋められているならば， $\mathcal{E}$  において角の図式 (1.3.1) を

$$\begin{array}{c} y \\ \nearrow f \\ x \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi_{02}} \bullet \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{ } \\ \nearrow \bar{\varphi} \\ \text{ } \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{ } \\ \nearrow \partial_0^2(\bar{\varphi}) \\ \text{ } \end{array}$$

のように埋める 2-射  $\bar{\varphi} \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^2, \mathcal{E}) \cong \mathcal{E}_2$  が存在する．

### 定義 1.35: デカルトファイブレーション

$p: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{B}$  を **内的ファイブレーション** とする．

- $p$  が **デカルトファイブレーション** (Cartesian fibration) であるとは，

- $\mathcal{B}$  の任意の 1 射  $(x \xrightarrow{f} y) \in \mathcal{B}_1$
- $p_{[0]}(\bar{y}) = y$  を満たす  $\mathcal{E}$  の任意の対象  $\bar{y} \in \mathcal{E}_0$

に対して，以下の条件を満たす  $\mathcal{E}$  の 1-射  $(z \xrightarrow{\bar{f}} \bar{y}) \in \mathcal{E}_1$  が存在することを言う：

**(Cart-1)**

$\bar{f}$  は  $f$  の持ち上げである． i.e.  $p_{[1]}(\bar{f}) = f$  が成り立つ．

**(Cart-2)**

$\bar{f}$  は  **$p$ -Cartesian** である．

- $p$  が **余デカルトファイブレーション** (coCartesian fibration) であるとは，

- $\mathcal{B}$  の任意の 1 射  $(x \xrightarrow{f} y) \in \mathcal{B}_1$
- $p_{[0]}(\bar{x}) = x$  を満たす  $\mathcal{E}$  の任意の対象  $\bar{x} \in \mathcal{E}_0$

に対して，以下の条件を満たす  $\mathcal{E}$  の 1-射  $(\bar{x} \xrightarrow{\bar{f}} z) \in \mathcal{E}_1$  が存在することを言う：

**(coCart-1)**

$\bar{f}$  は  $f$  の持ち上げである. i.e.  $p_{[1]}(\bar{f}) = f$  が成り立つ.

**(coCart-2)**

$\bar{f}$  は  $p$ -coCartesian である.

**定義 1.36:  $(\infty, 1)$ -オペラッド**

$(\infty, 1)$ -オペラッド  $((\infty, 1)\text{-operad})^a$  とは,  $(\infty, 1)$ -圏の関手

$$p: \mathcal{O}^\otimes \longrightarrow N(\mathbf{Fin}_*)$$

であって以下の条件を充たすもののこと [?, Definition 2.1.1.10.] :

**(Op-1)**

任意の inert な射  $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m \rangle, \langle n \rangle)$  および  $\forall c \in (\mathcal{O}_{\langle m \rangle}^\otimes)_0$  に対して,  $\mathcal{O}^\otimes$  における  $p$ -coCartesian な 1-射  $\bar{f}: c \rightarrow c'$  が存在して  $p_{[1]}(\bar{f}) = f$  を充たす.

**(Op-2)**

$\forall f \in \text{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m \rangle, \langle n \rangle)$  および  $\forall c \in (\mathcal{O}_{\langle m \rangle}^\otimes)_0, \forall c' \in (\mathcal{O}_{\langle n \rangle}^\otimes)_0$  に対して, 【例 1.3.1】の inert な射の族  $\{\rho^i \in \text{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle n \rangle, \langle 1 \rangle)\}_{1 \leq i \leq n}$  に (Op-1) を適用して得られる  $p$ -coCartesian な 1-射の族  $\{c' \xrightarrow{\rho^i} c'_i \in (\mathcal{O}^\otimes)_1\}_{1 \leq i \leq n}$  が誘導する Kan 複体の関手<sup>b</sup>

$$\text{Map}_{\mathcal{O}^\otimes}(c, c')_f \longrightarrow \prod_{i=1}^n \text{Map}_{\mathcal{O}^\otimes}(c, c'_i)_{\rho^i \circ f}$$

は,  $(\infty, 1)$ -圏  $\mathbf{Spaces}$  における同型射である.

**(Op-3)**

$\forall c_1, \dots, c_n \in (\mathcal{O}_{\langle 1 \rangle}^\otimes)_0$  に対して, ある  $c \in (\mathcal{O}_{\langle n \rangle}^\otimes)_0$  および  $p$ -coCartesian な 1-射  $\hat{\rho}_i \in (\text{Map}_{\mathcal{O}^\otimes}(c, c_i)_{\rho^i})_0$  が存在する.

ただし, 以下の記法を採用した:

- 点  $\langle n \rangle \in N(\mathbf{Fin}_*)_0$  における  $(\infty, 1)$ -圏の関手  $p: \mathcal{O}^\otimes \rightarrow N(\mathbf{Fin}_*)$  のファイバー  $\mathcal{O}_{\langle n \rangle}^\otimes$  を,  $(\infty, 1)$ -圏の pullback

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\langle n \rangle}^\otimes & \xrightarrow{\quad} & \Delta^0 \\ \downarrow & & \downarrow \langle n \rangle \\ \mathcal{O}^\otimes & \xrightarrow{p} & N(\mathbf{Fin}_*) \end{array}$$

と定義した<sup>c</sup>.

- $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m \rangle, \langle n \rangle)$  および  $c \in (\mathcal{O}_{\langle m \rangle}^\otimes)_0, c' \in (\mathcal{O}_{\langle n \rangle}^\otimes)_0$  に対して,  $\bar{f} \in \text{Map}_{\mathcal{O}^\otimes}(c, c')_0$  であって  $p_{[1]}(\bar{f}) = f$  を充たすもの全体から定まる,  $\text{Map}_{\mathcal{O}^\otimes}(c, c') \in \mathbf{Spaces}_0$  の充滿部分 Kan 複体を

$$\text{Map}_{\mathcal{O}^\otimes}(c, c')_f \hookrightarrow \text{Map}_{\mathcal{O}^\otimes}(c, c')$$

と書いた.

<sup>a</sup>  $\infty$ -operad と呼ばれる.

<sup>b</sup> 対象の対応としては  $\bar{f} \mapsto (\bar{\rho}^1 \circ \bar{f}, \dots, \bar{\rho}^n \circ \bar{f})$  であるが, 右辺の  $(\infty, 1)$ -圏  $\mathcal{O}^\otimes$  における 1-射の合成は up to homotopy でしか定まらないため, この関手は up to homotopy でしか決まらない.

<sup>c</sup> これ自体が  $(\infty, 1)$ -圏である. なお, ファイバーは  $(\infty, 1)$ -圏の pullback なので一見すると非常に計算が難しいが, 幸いにしてこの場合は  $(1, 1)$ -圏  $\mathbf{sSet}$  における pullback と一致する.

### 補題 1.5: Segal 条件

$(\infty, 1)$ -圏の関手

$$p: \mathcal{O}^\otimes \longrightarrow N(\mathbf{Fin}_*)$$

であって条件 **(Op-1)**, **(Op-2)** を満たすものを与える. このとき, 条件 **(Op-3)** は以下と同値である<sup>a</sup>:

**(Segal)**

$\forall n \geq 0$  に対して, 【例 1.3.1】の inert な射の族  $\{\rho^i \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle n \rangle, \langle 1 \rangle)\}_{1 \leq i \leq n}$  が条件 **(Op-1)** により誘導する  $(\infty, 1)$ -圏の関手の族  $\{\rho_i^\otimes: \mathcal{O}_{\langle n \rangle}^\otimes \longrightarrow \mathcal{O}_{\langle 1 \rangle}^\otimes\}_{1 \leq i \leq n}$  は,  $(\infty, 1)$ -圏同値

$$(\rho_1^\otimes, \dots, \rho_n^\otimes): \mathcal{O}_{\langle n \rangle}^\otimes \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_{\langle 1 \rangle}^\otimes)^{\times n} \quad (1.3.2)$$

を与える.

<sup>a</sup> 一般に Segal 条件というと  $n$ -fold pullback のことだが, 現在は  $\mathcal{O}_{\langle 0 \rangle}^\otimes$  が contractible なので  $n$ -fold product になっている.

### 証明 (Op-3) $\implies$ (Segal)

**(Op-3)** を仮定する. 命題??より,  $(\infty, 1)$ -圏の関手 (1.3.2) が忠実充満かつ本質的全射であることを示せば良い.

$\forall n \geq 0$  および  $\forall c, c' \in (\mathcal{O}_{\langle n \rangle}^\otimes)_0$  を固定する. このとき  $\mathrm{Id}_{\langle n \rangle} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle n \rangle, \langle n \rangle)$  に対して **(Op-2)** を用いることで, ホモトピー同値

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{O}_{\langle n \rangle}^\otimes}(c, c') \simeq \mathrm{Map}_{\mathcal{O}^\otimes}(c, c')_{\mathrm{Id}_{\langle n \rangle}} \longrightarrow \prod_{i=1}^n \mathrm{Map}_{\mathcal{O}^\otimes}(c, c'_i)_{\rho^i}$$

が得られる. さらに,  $p$ -coCartesian な射の定義からホモトピー同値

$$\prod_{i=1}^n \mathrm{Map}_{\mathcal{O}_{\langle 1 \rangle}^\otimes}(\rho_i^\otimes(c), \rho_i^\otimes(c')) \simeq \prod_{i=1}^n \mathrm{Map}_{\mathcal{O}^\otimes}(c_i, c'_i)_{\mathrm{Id}_{\langle 1 \rangle}} \longrightarrow \prod_{i=1}^n \mathrm{Map}_{\mathcal{O}^\otimes}(c, c'_i)_{\rho^i}$$

が得られる<sup>\*7</sup>ため, (1.3.2) が忠実充満だと分かった. 本質的全射であることは **(Op-3)** より従う.

**(Op-3)  $\Leftarrow$  (Segal)** 明らか. ■

<sup>\*7</sup> **(Op-2)** における  $c'_i \in (\mathcal{O}_{\langle 1 \rangle}^\otimes)_0$  とは, ちょうど  $\rho_i^\otimes(c')$  のことである.

### 定義 1.37: $(\infty, 1)$ -オペラッドの射

$(\infty, 1)$ -オペラッド  $p: \mathcal{O}^\otimes \rightarrow N(\mathbf{Fin}_*)$  を与える. このとき,  $(\infty, 1)$ -圏  $\mathcal{O}^\otimes$  の 1-射  $f \in (\mathcal{O}^\otimes)_1$  が **inert** であるとは, 以下の 2 条件を満たすことを言う:

**(inert-1)**  $p_{[1]}(f)$  は  $(1, 1)$ -圏  $\mathbf{Fin}_*$  における **inner な射** である.

**(inert-2)**  $f$  は  **$p$ -coCartesian** な 1-射である.

2 つの  $(\infty, 1)$ -オペラッド  $p: \mathcal{O}^\otimes \rightarrow N(\mathbf{Fin}_*)$ ,  $p': \mathcal{O}'^\otimes \rightarrow N(\mathbf{Fin}_*)$  を与える. このとき,  $(\infty, 1)$ -圏の開手  $f: \mathcal{O}^\otimes \rightarrow \mathcal{O}'^\otimes$  が  $(\infty, 1)$ -オペラッドの射 ( $\infty$ -operad map) であるとは, 以下の 2 つの条件を満たすことを言う:

**(Opmap-1)**  $(1, 1)$ -圏  $\mathbf{sSet}$  の図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}^\otimes & \xrightarrow{f} & \mathcal{O}'^\otimes \\ & \searrow p \quad \swarrow p' & \\ & N(\mathbf{Fin}_*) & \end{array}$$

は可換である.

**(Opmap-2)** 1-射の間の写像  $f_{[1]}: (\mathcal{O}^\otimes)_1 \rightarrow (\mathcal{O}'^\otimes)_1$  により, inert な 1-射が保存される<sup>a</sup>.

<sup>a</sup> 条件 **(Opmap-1)** より, inert な 1-射の  $p_{[1]}$  による像が条件 **(inert-1)** を満たすことは明らかである.

定義 1.36 がオペラッドと呼ぶにふさわしいことを示すために, 次の小節では  $(1, 1)$ -圏の文脈で対応物を考えよう.

### 1.3.2 色付きオペラッドと $(1, 1)$ -圏の coCartesian fibration

#### 定義 1.38: colored operad

色付きオペラッド<sup>a</sup> (colored operad)  $\mathcal{O}$  は, 以下の 4 つのデータから成る:

- 対象<sup>b</sup> (object) の集まり

$$\mathbf{Ob}(\mathcal{O})$$

- $\forall I \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Fin}), \forall \{x_i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{O})\}_{i \in I}, \forall y \in \mathbf{Ob}(\mathcal{O})$  の 3 つ組に対して定まっている,  $\{x_i\}_{i \in I}$  から  $y$  へ向かう **多射** (multimorphism) の集合

$$\mathbf{Mul}_{\mathcal{O}}(\{x_i\}_{i \in I}, y) \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Sets})$$

- $\forall \alpha \in \mathbf{Hom}_{\mathbf{Fin}}(I, J), \forall \{x_i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{O})\}_{i \in I}, \{y_j \in \mathbf{Ob}(\mathcal{O})\}_{j \in J}, \forall z \in \mathbf{Ob}(\mathcal{O})$  の 4 つ組に対して定まっている, 多射の**合成** (composition map) と呼ばれる写像

$$\begin{aligned} \circ_\alpha: \mathbf{Mul}_{\mathcal{O}}(\{y_j\}_{j \in J}, z) \times \prod_{j \in J} \mathbf{Mul}_{\mathcal{O}}(\{x_i\}_{i \in \alpha^{-1}(\{j\})}, y_j) &\longrightarrow \mathbf{Mul}_{\mathcal{O}}(\{x_i\}_{i \in I}, z), \\ (G, (F_j)_{j \in J}) &\longmapsto G \circ_\alpha (F_j)_{j \in J} \end{aligned}$$

- 恒等射 (identity) と呼ばれる多射の族  $\{\text{Id}_x \in \text{Mul}_{\mathcal{O}}(\{x\}, x)\}_{x \in \text{Ob}(\mathcal{O})}$

これらは以下の条件を充たさねばならない：

**(cOp-1)**

恒等射は合成に関して単位元として振る舞う。

**(cOp-2)**

多射の合成は結合則を充たす. i.e.  $\forall \alpha \in \text{Hom}_{\mathbf{Fin}}(I, J), \forall \beta \in \text{Hom}_{\mathbf{Fin}}(J, K), \forall \{x_i \in \text{Ob}(\mathcal{O})\}_{i \in I}, \forall \{y_j \in \text{Ob}(\mathcal{O})\}_{j \in J}, \forall \{z_k \in \text{Ob}(\mathcal{O})\}_{k \in K}, \forall w \in \text{Ob}(\mathcal{O})$  に対して,  $(1, 1)$ -圏 **Sets** の図式

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Mul}_{\mathcal{O}}(\{z_k\}_{k \in K}, w) \times \prod_{k \in K} \text{Mul}_{\mathcal{O}}(\{y_j\}_{j \in \beta^{-1}(\{k\})}, z_k) \times \prod_{j \in J} \text{Mul}_{\mathcal{O}}(\{x_i\}_{i \in \alpha^{-1}(\{j\})}, y_j) & & \\
 \swarrow \circ_{\beta} \times \text{Id} & & \searrow \text{Id} \times (\circ_{\alpha}|_{\alpha^{-1}(\beta^{-1}(\{k\}))})_{k \in K} \\
 \text{Mul}_{\mathcal{O}}(\{y_j\}_{j \in J}, w) \times \prod_{j \in J} \text{Mul}_{\mathcal{O}}(\{x_i\}_{i \in \alpha^{-1}(\{j\})}, y_j) & & \\
 \searrow \circ_{\alpha} & \text{Mul}_{\mathcal{O}}(\{z_k\}_{k \in K}, w) \times \prod_{k \in K} \text{Mul}_{\mathcal{O}}(\{x_i\}_{i \in (\beta \circ \alpha)^{-1}(\{k\})}, z_k) & \swarrow \circ_{\beta \circ \alpha} \\
 & \text{Mul}_{\mathcal{O}}(\{x_i\}_{i \in I}, z) & 
 \end{array}$$

は可換である。

<sup>a</sup> いわゆる対称色付きオペラッド (symmetric colored operad) である。

<sup>b</sup> 色 (color) と呼ばれることもある。

色付きオペラッドの定義において, 写像  $\alpha \in \text{Hom}_{\mathbf{Fin}}(I, J)$  が多射の合成の「型」を規定している。

**定義 1.39:  $(1, 1)$ -圏における coCartesian fibration**

$p: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{B}$  を  $(1, 1)$ -圏の関手とする。

- $\mathcal{E}$  の射  $\bar{f} \in \text{Hom}_{\mathcal{E}}(\bar{x}, \bar{y})$  が以下の条件を充たすとき,  $\bar{f}$  は  **$p$ -coCartesian** であると言う：

**(coCart-ord)**  $(1, 1)$ -圏  $\mathcal{B}$  の図式

$$\begin{array}{ccc}
 & p(\bar{y}) & \\
 p(\bar{f}) \nearrow & & \searrow \forall \varphi \\
 p(\bar{x}) & \xrightarrow{p(\forall \varphi_0)} & p(\forall \bar{z})
 \end{array}$$

を可換にする勝手な 2 つの射  $\varphi_0 \in \text{Hom}_{\mathcal{E}}(\bar{x}, \bar{z})$ ,  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(p(\bar{y}), p(\bar{z}))$  に対して, 射  $\bar{\varphi} \in \text{Hom}_{\mathcal{E}}(\bar{y}, \bar{z})$  が一意的存在して  $(1, 1)$ -圏  $\mathcal{E}$  の図式

$$\begin{array}{ccc}
 & \bar{y} & \\
 \bar{f} \nearrow & & \searrow \exists! \bar{\varphi} \\
 \bar{x} & \xrightarrow{\varphi_0} & \bar{z}
 \end{array}$$

を可換にする.

- $p$  が **coCartesian fibration** であるとは,
  - $(1, 1)$ -圏  $\mathcal{B}$  の任意の射  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(x, y)$
  - $p(\bar{x}) = x$  を満たす  $(1, 1)$ -圏  $\mathcal{E}$  の対象  $\bar{x} \in \text{Ob}(\mathcal{E})$

に対して, 以下の条件を満たす  $(1, 1)$ -圏  $\mathcal{E}$  の射  $\bar{f} \in \text{Hom}_{\mathcal{E}}(\bar{x}, z)$  が存在することを言う:

**(coCart-ord-1)**

$\bar{f}$  は  $f$  の持ち上げである. i.e.  $p(\bar{f}) = f$  が成り立つ.

**(coCart-ord-2)**

$\bar{f}$  は  $p$ -coCartesian である.

定義 1.36 に合わせて,  $(1, 1)$ -圏の関手

$$p: \mathcal{O}^{\otimes} \longrightarrow \mathbf{Fin}_* \quad (1.3.3)$$

であって以下の 3 条件を満たすものを考えてみる:

**(OP-ord-1)**

任意の **inert** な射  $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m \rangle, \langle n \rangle)$  および  $\forall c \in \text{Ob}(\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle m \rangle})$  に対して,  $\mathcal{O}^{\otimes}$  における  **$p$ -coCartesian** な射  $\bar{f} \in \text{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c, c')$  が存在して  $p(\bar{f}) = f$  を満たす.

**(OP-ord-2)**

$\forall f \in \text{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m \rangle, \langle n \rangle)$  および  $\forall c \in \text{Ob}(\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle m \rangle}), \forall c' \in \text{Ob}(\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n \rangle})$  に対して, inert な射  $\rho^i \in \text{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle n \rangle, \langle 1 \rangle)$  に **(Op-ord-1)** を適用して得られる  **$p$ -coCartesian** な射の族  $\{\bar{\rho}^i \in \text{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c', c'_i)\}_{1 \leq i \leq n}$  が誘導する写像

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c, c')_f &\longrightarrow \prod_{i=1}^n \text{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c, c'_i)_{\bar{\rho}^i \circ f}, \\ \varphi &\longmapsto (\bar{\rho}^1 \circ \varphi, \dots, \bar{\rho}^n \circ \varphi) \end{aligned}$$

は,  $(1, 1)$ -圏 **Sets** における同型射 (i.e. 全単射) である.

**(OP-ord-3)**

$\forall c_1, \dots, c_n \in \text{Ob}(\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle 1 \rangle})$  に対して, ある  $c \in \text{Ob}(\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n \rangle})_0$  および  **$p$ -coCartesian** な射  $\hat{\rho}_i \in \text{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c, c_i)_{\rho^i}$  が存在する.

ここで, **Cat** における引き戻し

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n \rangle} & \xrightarrow{\quad} & * \\ \downarrow & & \downarrow \langle n \rangle \\ \mathcal{O}^{\otimes} & \xrightarrow{p} & \mathbf{Fin}_* \end{array}$$

により  $(1, 1)$ -圏  $\mathcal{O}^{\otimes}$  を定義している. 具体的には

$$\text{Ob}(\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n \rangle}) = \{c \in \text{Ob}(\mathcal{O}^{\otimes}) \mid p(c) = \langle n \rangle\}$$

である. さらに,  $\forall f \in \text{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m \rangle, \langle n \rangle)$  に対して

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c, c')_f := \{\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c, c') \mid p(\varphi) = f\}$$

と定義した.

### 命題 1.3: 色付きオペラッドの再構成

条件 **(Op-ord-1)**-**(Op-ord-3)** を満たす  $(1, 1)$ -圏の関手 (1.3.3) から次のように構成されたデータの組み  $\mathcal{O}$  は色付きオペラッドを成す:

- 対象の集まりを  $\text{Ob}(\mathcal{O}) := \text{Ob}(\mathcal{O}_{\langle 1 \rangle}^{\otimes})$  と定義する.
- $\forall x_1, \dots, x_n, y \in \text{Ob}(\mathcal{O})$  に対して, 以下の 3 つ組全体が成す集合を  $\text{Mul}_{\mathcal{O}}((x_1, \dots, x_n), y)$  と定義する.
  - $x_1, \dots, x_n$  に対して **(Op-ord-3)** を適用することにより定まる  $X \in \text{Ob}(\mathcal{O}_{\langle n \rangle}^{\otimes})$
  - $x_1, \dots, x_n$  に対して **(Op-ord-3)** を適用することにより定まる  $p$ -coCartesian な射の族  $\{\hat{\rho}_i \in \text{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(X, x_i)_{\rho^i}\}_{1 \leq i \leq n}$
  - 【例 1.3.2】** の active な射  $\alpha_n \in \text{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle n \rangle, \langle 1 \rangle)$  およびその上の  $\mathcal{O}^{\otimes}$  の射  $F \in \text{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(X, y)_{\alpha_n}$
- $n$  個の多射

$$\begin{aligned} (X^1, \{\hat{\rho}_i^1\}_{1 \leq i \leq m_1}, F^1) &\in \text{Mul}_{\mathcal{O}}((x_1^1, \dots, x_{m_1}^1), y_1), \\ &\vdots \\ (X^n, \{\hat{\rho}_i^n\}_{1 \leq i \leq m_n}, F^n) &\in \text{Mul}_{\mathcal{O}}((x_1^n, \dots, x_{m_n}^n), y_n) \end{aligned}$$

と 1 つの多射  $(Y, \{\hat{\rho}_j\}_{1 \leq j \leq n}, G) \in \text{Mul}_{\mathcal{O}}((y_1, \dots, y_n), z)$  の合成

$$(X, \{\hat{\rho}_i\}_{1 \leq i \leq m_1 + \dots + m_n}, G \circ (F^1; \dots; F^n)) \in \text{Mul}_{\mathcal{O}}((x_1^1, \dots, x_{m_1}^1; \dots; x_1^n, \dots, x_{m_n}^n), z)$$

を次のように定義する:

- $X \in \text{Ob}(\mathcal{O}_{\langle m_1 + \dots + m_n \rangle}^{\otimes})$  は,  $x_1^1, \dots, x_{m_n}^n \in \text{Ob}(\mathcal{O})$  に対して **(Op-ord-3)** を適用することにより定める.
- $p$ -coCartesian な射の族  $\{\hat{\rho}_i^j \in \text{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(X, x_i^j)_{\rho^{i+m_1+\dots+m_{j-1}}}\}_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq m_j}}$  は  $x_1^1, \dots, x_{m_n}^n \in \text{Ob}(\mathcal{O})$  に対して **(Op-ord-3)** を適用することにより定める.
- $\mathcal{O}^{\otimes}$  の射  $G \circ (F^1; \dots; F^n) \in \text{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(X, z)_{\alpha_{m_1+\dots+m_n}}$  は以下の手順に従って構成する:

#### (STEP-1)

まず,  $1 \leq \forall j \leq n$  に対して inert な射  $\pi_j \in \text{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m_1 + \dots + m_n \rangle, \langle m_j \rangle)$  を

$$\begin{aligned} \pi_j: \langle m_1 + \dots + m_n \rangle &\longrightarrow \langle m_j \rangle, \\ k &\longmapsto \begin{cases} k - (m_1 + \dots + m_{j-1}), & 1 \leq k - (m_1 + \dots + m_{j-1}) \leq m_j \\ *, & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

で定義する.

#### (STEP-2)

inert な射  $\pi_j \in \text{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m_1 + \dots + m_n \rangle, \langle m_j \rangle)$  に対して **(Op-ord-1)** を適用することにより,  $p$ -coCartesian な射  $\bar{\pi}_j \in \text{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(X, X^j)_{\pi_j}$  を取得する.



(STEP-3)

$$(F^1 \circ \bar{\pi}_1, \dots, F^n \circ \bar{\pi}_n) \in \prod_{j=1}^n \text{Hom}_{\mathcal{O}^\otimes}(X, y_j)_{\alpha_{m_j} \circ \pi_j}$$

に対して (Op-ord-2) を適用することで, 対応する

$$F \in \text{Hom}_{\mathcal{O}^\otimes}(X, Y)_\pi$$

が一意的に定まる. これに  $G \in \text{Hom}_{\mathcal{O}^\otimes}(Y, z)_{\alpha_n}$  を合成して

$$G \circ_\pi (F^1; \dots; F^n) := G \circ F \in \text{Hom}_{\mathcal{O}^\otimes}(X, z)_{\alpha_{m_1 + \dots + m_n}}$$

と定義する. ただし,  $\pi \in \text{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m_1 + \dots + m_n \rangle, \langle n \rangle)$  は

$$\pi(k) := \begin{cases} j, & m_{j-1} < k \leq m_j \\ *, & k = * \end{cases}$$

と定義される active な射である<sup>a</sup>.

---

<sup>a</sup>  $1 \leq \forall j \leq n$  に対して  $\rho^j \circ \pi = \alpha_{m_j} \circ \pi_j$  が成り立つ.

証明

逆の対応を作ることもできる. ■

#### 定義 1.40: Category of operators

いま, **colored operad**  $\mathcal{O}$  が与えられたとする. このとき **category of operators** と呼ばれる  $(1, 1)$ -圏  $\mathcal{O}^\otimes$  を次のように定義する:

- $\mathcal{O}$  の対象の有限列  $x_1, \dots, x_n \in \text{Ob}(\mathcal{O})$  を対象に持つ.
- $\forall (x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_n) \in \text{Ob}(\mathcal{O}^\otimes)$  に対して, 以下の 2 つ組を全て集めて得られる集合を  $\text{Hom}_{\mathcal{O}^\otimes}(\{x_i\}_{1 \leq i \leq m}, \{y_j\}_{1 \leq j \leq n})$  とする.

(1)  $\mathbf{Fin}_*$  の射

$$\alpha \in \text{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m \rangle, \langle n \rangle)$$

(2) 多射の族

$$\left\{ \phi_j \in \text{Mul}_{\mathcal{O}}(\{x_i\}_{i \in \alpha^{-1}(\{j\})}, y_j) \right\}_{1 \leq j \leq n}$$

より具体的には,

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}^\otimes}(\{x_i\}_{1 \leq i \leq m}, \{y_j\}_{1 \leq j \leq n}) := \coprod_{\alpha \in \text{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m \rangle, \langle n \rangle)} \prod_{j=1}^n \text{Mul}_{\mathcal{O}}(\{x_i\}_{i \in \alpha^{-1}(\{j\})}, y_j)$$

である.

- 射の合成は,  $\mathbf{Fin}_*$  における射の合成および  $\mathcal{O}$  における多射の合成によって定める.

$\mathcal{O}^\otimes$  から  $\mathbf{Fin}_*$  への忘却関手を

$$\begin{aligned} p: \mathcal{O}^\otimes &\longrightarrow \mathbf{Fin}_*, \\ \{x_i\}_{1 \leq i \leq n} &\longmapsto \langle n \rangle, \\ (\alpha, \{\phi_j\}_{1 \leq j \leq n}) &\longmapsto \alpha \end{aligned}$$

と定義する.

#### 命題 1.4: 色付きオペラッドと category of operators

$(1, 1)$ -圏の関手

$$p: \mathcal{O}^\otimes \longrightarrow \mathbf{Fin}_*$$

において,  $\mathcal{O}^\otimes$  がある **色付きオペラッド**  $\mathcal{O}$  の **category of operators** と圏同値になる必要十分条件は,  $p$  が条件 **(Op-ord-1)-(Op-ord-3)** を満たすことである.

**証明** [?, Proposition 2.2.II.] ■

#### 1.3.3 $(\infty, 1)$ -圏の構成

話を  $(\infty, 1)$ -オペラッドに戻そう.