第 1 章

∞-圏

この付録では，[?]，[?]，[?] に従って ∞-圏[*1]，および主 ∞-束を導入する．

1.1　圏論の復習

1.1.1　圏と関手

定義 1.1: 圏

圏 (category) $\mathcal{C}$ とは，以下の 4 種類のデータからなる：

- **対象** (object) と呼ばれる要素の集まり[a]

$$\mathbf{Ob}(\mathcal{C})$$

- $\forall A,\, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，A から B への**射** (morphism) と呼ばれる要素の集合

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\boldsymbol{A},\, \boldsymbol{B})$$

- $\forall A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，A 上の**恒等射** (identity morphism) と呼ばれる射

$$\mathbf{Id}_{\boldsymbol{A}} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, A)$$

- $\forall A,\, B,\, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, B),\, \forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(B,\, C)$ に対して，f と g の**合成** (composite) と呼ばれる射 $\boldsymbol{g \circ f} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, C)$ を対応させる集合の写像

$$\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(B,\, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, C),\; (f,\, g) \longmapsto g \circ f$$

これらの構成要素は，次の 2 条件を満たさねばならない：

(1) **(unitality)**：任意の射 $f\colon A \longrightarrow B$ に対して

$$f \circ \mathrm{Id}_A = f, \quad \mathrm{Id}_B \circ f = f$$

が成り立つ．

[*1] [?] が源流にある．[?] は創始者本人によって運営されている web サイトのようだ．

(2) **(associativity)**：任意の射 $f\colon A \longrightarrow B$, $g\colon B \longrightarrow C$, $h\colon C \longrightarrow D$ に対して

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

が成り立つ．

[a] $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ は，集合論では扱えないほど大きなものになっても良い．

定義 1.2: モノ・エピ・同型射

圏 $\mathcal{C}$ を与える．

- 射 $f\colon A \longrightarrow B$ が**モノ射** (monomorphism) であるとは，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して写像

$$\begin{aligned} f_*\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, A) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, B), \\ g &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$$

  が集合の写像として単射であること．
- 射 $f\colon A \longrightarrow B$ が**エピ射** (epimorphism) であるとは，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して写像

$$\begin{aligned} f^*\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,\, X) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\, X), \\ g &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

  が集合の写像として単射であること．
- 射 $f\colon A \longrightarrow B$ が**同型射** (isomorphism) であるとは，射 $g\colon B \longrightarrow A$ が存在して $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ かつ $f \circ g = \mathrm{Id}_B$ を充たすこと．このとき f と g は互いの**逆射** (inverse) であると言い，$g = \boldsymbol{f^{-1}}$, $f = \boldsymbol{g}^{-1}$ と書く[a]．
- $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の間に同型射が存在するとき，対象 A と B は**同型** (isomorphic) であると言い，$\boldsymbol{A \cong B}$ と書く．

[a] 逆射は存在すれば一意である．

定義 1.3: 関手

圏 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ を与える．圏 $\mathcal{C}$ から圏 $\mathcal{D}$ への**関手** F とは，以下の 2 つの対応からなる：

- 圏 $\mathcal{C}$ における任意の対象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，圏 $\mathcal{D}$ における対象 $F(X) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ を対応づける
- 圏 $\mathcal{C}$ における任意の射 $f\colon X \longrightarrow Y$ に対して，圏 $\mathcal{D}$ における射 $F(f)\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ を対応づける

これらの対応は以下の条件を充たさねばならない：

(fun-1) 圏 $\mathcal{C}$ における任意の射 $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon Y \longrightarrow Z$ に対して，

$$F(g \circ f) \longrightarrow F(g) \circ F(f)$$

(fun-2) 圏 $\mathcal{C}$ における任意の対象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，

$$F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$$

文脈上明らかなときは，圏 $\mathcal{C}$ から圏 $\mathcal{D}$ への関手 F のことを関手 $\boldsymbol{F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}}$ と略記する．

定義 1.4: 忠実・充満・本質的全射

関手 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ を与える．

- F が**忠実** (faithful) であるとは，$\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して写像

$$F\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(X), F(Y)\big),\ f \longmapsto F(f)$$

  が単射であること．
- F が**充満** (full) であるとは，$\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して写像

$$F\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(X), F(Y)\big),\ f \longmapsto F(f)$$

  が全射であること．
- F が**本質的全射** (essentially surjective) であるとは，$\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ に対して $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が存在して $F(X)$ が Y と同型になること．

忠実充満関手のことを**埋め込み**と呼ぶことがある．

定義 1.5: 自然変換

2 つの関手 $F, G\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ を与える．F, G の間の**自然変換** (natural transformation) $\boldsymbol{\tau\colon F \Longrightarrow G}$ とは，以下の対応からなる：

- 圏 $\mathcal{C}$ における任意の対象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，圏 $\mathcal{D}$ における射 $\tau_X\colon F(X) \longrightarrow G(X)$ を対応づける

この対応は以下の条件を充たさねばならない：

(nat) 圏 $\mathcal{C}$ における任意の射 $f\colon X \longrightarrow Y$ に対して，以下の図式を可換にする：

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\tau_X"] & F(Y) \arrow[d, "\tau_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

自然変換 $\tau\colon F \Longrightarrow G$ であって，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して射 $\tau_X\colon F(X) \longrightarrow G(X)$ が同型射であるもののことを**自然同値** (natural equivalence)[a] と呼ぶ.

[a] **自然同型** (natural isomorphism) と言うこともある.

自然変換 $\tau\colon F \Longrightarrow G$ を

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, bend right=50, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\tau"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

と書くことがある.

1.1.2 極限と余極限

定義 1.6: 図式

圏 $\mathcal{C}$ と小圏 I（**添字圏**と呼ばれる）を与える.
$\mathcal{C}$ における $\boldsymbol{I}$ **型の図式** (diagram of shape I) とは，関手

$$I \longrightarrow \mathcal{C}$$

のこと.

定義 1.7: 錐の圏

$D\colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ を図式とする.

- D 上の**錐** (cone) とは,

– $\mathcal{C}$ の対象 $\boldsymbol{C} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$

– $\mathcal{C}$ の射の族 $\boldsymbol{c}_\bullet \coloneqq \bigl\{\boldsymbol{c}_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\bigl(\boldsymbol{C},\, D(i)\bigr)\bigr\}_{i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})}$

の組 $(\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{c}_\bullet)$ であって，$\forall i,\, j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ および $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i,\, j)$ に対して

$$\boldsymbol{c}_j = \boldsymbol{c}_i \circ D(f)$$

を充たす，i.e. 以下の図式を可換にするもののこと．

$$\begin{tikzcd} & \boldsymbol{C} \arrow[dl, bend right, "\boldsymbol{c}_i"'] \arrow[dr, bend left, "\boldsymbol{c}_j"] & \\ D(i) \arrow[rr, "D(f)"] & & D(j) \end{tikzcd}$$

- **錐の射** (morphism of cones)

$$(\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{c}_\bullet) \xrightarrow{\;u\;} (\boldsymbol{C}',\, \boldsymbol{c}'_\bullet)$$

とは，$\mathcal{C}$ の射 $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{C}')$ であって，$\forall i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ に対して

$$\boldsymbol{c}_i = u \circ \boldsymbol{c}'_i$$

を充たす，i.e. 以下の図式を可換にするもののこと．

$$\begin{tikzcd} & \boldsymbol{C} \arrow[d, "u"] \arrow[ddl, bend right, "\boldsymbol{c}_i"'] \\ & \boldsymbol{C}' \arrow[dl, bend right, "\boldsymbol{c}'_i"] \\ D(i) & \end{tikzcd}$$

D 上の錐と錐の射を全て集めたものは圏 $\mathbf{Cone}(D)$ を成す．

定義 1.8: 極限

図式 $D\colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ の**極限** (limit)[a]とは，圏 $\mathbf{Cone}(D)$ の終対象のこと．記号として $\bigl(\mathbf{lim}_{\mathcal{I}}\, \boldsymbol{D},\, \boldsymbol{p}_\bullet\bigr)$ と書く[b]．i.e. 極限 $\bigl(\mathbf{lim}_{\mathcal{I}}\, \boldsymbol{D},\, \boldsymbol{p}_\bullet\bigr) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cone}(D))$ は，以下の普遍性を充たす：

(極限の普遍性)

$\forall(\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{c}_\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cone}(D))$ に対して，錐の射 $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cone}(D)}\bigl((\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{c}_\bullet),\, \bigl(\mathbf{lim}_{\mathcal{I}}\, \boldsymbol{D},\, \boldsymbol{p}_\bullet\bigr)\bigr)$ が一意的に存在して，$\forall i,\, j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ および $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i,\, j)$ に対して図式を可換にする．

$$
\begin{tikzcd}
& \forall \boldsymbol{C} \arrow[dl, bend right, "\boldsymbol{c}_i"'] \arrow[dr, bend left, "\boldsymbol{c}_j"] \arrow[d, dashed, "\exists! u"] & \\
& \lim_{\mathcal{I}} \boldsymbol{D} \arrow[dl, bend right, "\boldsymbol{p}_i"] \arrow[dr, bend left, "\boldsymbol{p}_j"'] & \\
D(i) \arrow[rr, "D(f)"] & & D(j)
\end{tikzcd}
$$

図 1.1: 極限の普遍性

[a] **普遍錐** (universal cone) とも言う．

[b] $\varprojlim \boldsymbol{D}$ と書くこともある．

定義 1.9: 余錐の圏

$D\colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ を図式とする．

- D 上の**余錐** (cocone) とは，
  - $\mathcal{C}$ の対象 $\boldsymbol{C} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
  - $\mathcal{C}$ の射の族 $\boldsymbol{c}_\bullet := \left\{ \boldsymbol{c}_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}} \left(D(i),\, \boldsymbol{C} \right) \right\}_{i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})}$

  の組 $(\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{c}_\bullet)$ であって，$\forall i,\, j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ および $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}\,(i,\, j)$ に対して

  $$\boldsymbol{c}_i = D(f) \circ \boldsymbol{c}_j$$

  を充たす，i.e. 以下の図式を可換にするもののこと．

  $$
  \begin{tikzcd}
  D(i) \arrow[rr, "D(f)"] \arrow[dr, bend right, "\boldsymbol{c}_i"'] & & D(j) \arrow[dl, bend left, "\boldsymbol{c}_j"] \\
  & \boldsymbol{C} &
  \end{tikzcd}
  $$

- **余錐の射** (morphism of cocones)

  $$(\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{c}_\bullet) \xrightarrow{u} (\boldsymbol{C}',\, \boldsymbol{c}'_\bullet)$$

  とは，$\mathcal{C}$ の射 $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{C}')$ であって，$\forall i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ に対して

  $$\boldsymbol{c}'_i = u \circ \boldsymbol{c}_i$$

  を充たす，i.e. 以下の図式を可換にするもののこと．

  $$
  \begin{tikzcd}
  D(i) \arrow[dr, bend right, "\boldsymbol{c}_i"] \arrow[ddr, bend right, "\boldsymbol{c}_j"'] & \\
  & \boldsymbol{C} \arrow[d, "u"] \\
  & \boldsymbol{C}'
  \end{tikzcd}
  $$

D 上の余錐と余錐の射を全て集めたものは圏 $\mathbf{Cone}(D)$ を成す．

定義 1.10: 余極限

図式 $D\colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ の**余極限** (colimit)[a]とは, 圏 $\mathbf{coCone}(D)$ の始対象のこと. 記号として $\left(\underset{\mathcal{I}}{\mathbf{colim}} D,\, \boldsymbol{p}_\bullet\right)$ と書く[b]. i.e. 余極限 $\left(\mathbf{colim}_{\mathcal{I}}\, \boldsymbol{D},\, \boldsymbol{p}_\bullet\right) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{coCone}(D))$ は, 以下の普遍性を充たす：

(余極限の普遍性)

$\forall(\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{c}_\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{coCone}(D))$ に対して, 余錐の射 $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{coCone}(D)}\left(\left(\mathbf{colim}_{\mathcal{I}}\, \boldsymbol{D},\, \boldsymbol{p}_\bullet\right),\, (\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{c}_\bullet)\right)$ が一意的に存在して, $\forall i,\, j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ および $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i,\, j)$ に対して図式を可換にする.

$$
\begin{tikzcd}
D(i) \arrow[rr, "D(f)"] \arrow[dr, bend right, "\boldsymbol{p}_i"] \arrow[ddr, bend right=40, "\boldsymbol{c}_i"'] & & D(j) \arrow[dl, bend left, "\boldsymbol{p}_i"'] \arrow[ddl, bend left=40, "\boldsymbol{c}_i"] \\
& \mathbf{colim}_{\mathcal{I}}\, \boldsymbol{D} \arrow[d, dashed, "\exists! u"] & \\
& \forall \boldsymbol{C} &
\end{tikzcd}
$$

図 1.2: 余極限の普遍性

[a] **普遍余錐** (universal cocone) とも言う.
[b] $\varinjlim \boldsymbol{D}$ と書くこともある.

【例 1.1.1】積と和

図式

$$
D\colon \boxed{\overset{1}{\bullet} \qquad \overset{2}{\bullet}} \longrightarrow \mathcal{C}
$$

の極限を（存在すれば）**積** (product) と呼び, $\boldsymbol{D}(\mathbf{1}) \times \boldsymbol{D}(\mathbf{2})$ と書く. 同じ図式の余極限を（存在すれば）**和**[a] (coproduct) と呼び, $\boldsymbol{D}(\mathbf{1}) \amalg \boldsymbol{D}(\mathbf{2})$ と書く.

[a] **余積**と言うこともある.

【例 1.1.2】引き戻しと押し出し

図式

$$
D\colon \boxed{\begin{tikzcd} & 3 \arrow[d, "p"] \\ 1 \arrow[r, "f"'] & 2 \end{tikzcd}} \longrightarrow \mathcal{C}
$$

の極限を（存在すれば）**引き戻し**[a] (pullback) と呼び，$\boldsymbol{D(1) \times_{D(3)} D(2)}$ と書く．

図式

$$
D\colon \boxed{\begin{tikzcd} & 3 \\ 1 & 2 \arrow[l, "f"] \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}} \longrightarrow \mathcal{C}
$$

の余極限を（存在すれば）**押し出し**と呼び，$\boldsymbol{D(1) \amalg_{D(3)} D(2)}$ と書く．

[a] **ファイバー積** (fiber product) と呼ぶこともある．

定義 1.11: 完備な圏

圏 $\mathcal{C}$ が**完備**（resp. **余完備**）(complete resp. cocomplete) であるとは，$\mathcal{C}$ における任意の図式が極限（resp. 余極限）を持つことを言う．完備かつ余完備な圏は**双完備** (bicomplete) であると言われる．

Sets は双完備である．

命題 1.1: 極限と Hom の交換

圏 $\mathcal{C}$ の図式 $D\colon I \longrightarrow \mathcal{C}$ を与える．

(1) 圏 $\mathcal{C}$ は完備であるとする．このとき $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X, \lim_I D\right) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ は **Sets** の図式

$$
I \xrightarrow{D} \mathcal{C} \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\,\text{-})} \mathbf{Sets} \tag{1.1.1}
$$

の極限である．i.e. 全単射

$$
\lim_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X, D(i)\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X, \lim_I D\right)
$$

が存在する．

(2) 圏 $\mathcal{C}$ は余完備であるとする．このとき $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\mathrm{colim}_I\, D,\, X\right) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ は $\mathbf{Sets}$ の図式

$$I \xrightarrow{D} \mathcal{C} \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-},\, X)} \mathbf{Sets}$$

の余極限である．i.e. 全単射

$$\lim_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(D(i),\, X\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\mathop{\mathrm{colim}}_{I},\, X\right)$$

が存在する．

証明 (1) $\mathcal{C}$ が完備なので，図式 $D\colon I \longrightarrow \mathcal{C}$ の極限

$$\begin{tikzcd} & \lim_I D \arrow[dl, bend right, "p_i"'] \arrow[dr, bend left, "p_j"] & \\ D(i) \arrow[rr, "D(f)"] & & D(j) \end{tikzcd}$$

が存在する[*2]．示すべきは $\mathbf{Sets}$ の図式

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X,\, \lim_I D) \arrow[dl, bend right, "p_{i*}"'] \arrow[dr, bend left, "p_{j*}"] & \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X,\, D(i)\right) \arrow[rr, "D(f)_*"] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X,\, D(j)\right) \end{tikzcd}$$

が極限の普遍性を充たすことである[*3]．

$\mathbf{Sets}$ の図式 (1.1.1) の錐 $(Y,\, c_\bullet)$ を任意にとる．すると錐の定義および $(\text{-})_*$ の定義から，$\forall y \in Y$ に対して以下の図式が可換になる：

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, bend right, "c_i(y)"'] \arrow[dr, bend left, "c_j(y)"] & \\ D(i) \arrow[rr, "D(f)"] & & D(j) \end{tikzcd}$$

i.e. 組 $\left(X,\, c_\bullet(y)\right)$ は $\mathcal{C}$ の図式 $D\colon I \longrightarrow \mathcal{C}$ の錐であるから，錐の射 $u_y\colon X \longrightarrow \lim_I D$ が一意的に存在する．ここで写像

$$u\colon Y \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X,\, \lim_I D),\ y \longmapsto u_y$$

を考えると，これは $\forall y \in Y$ に対して $p_{\bullet *} \circ u(y) = p_\bullet \circ u_y = c_\bullet(y)$ を充たす．i.e. $\mathbf{Sets}$ の図式

[*2] $i,\, j \in \mathrm{Ob}(I)$ および $f_{ij} \in \mathrm{Hom}_I\,(i,\, j)$ は任意にとる．

[*3] $p_{i*}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X,\, \lim_I D) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X,\, D(i)\right) f \longmapsto p_i \circ f$ などと定義する．このように射に下付きの $*$ を書いた時は post-compose を表す．上付きの $*$ は pre-compose である．

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \forall \boldsymbol{Y} \arrow[dl, bend right, "\boldsymbol{c}_i"'] \arrow[d, "u"] \arrow[dr, bend left, "\boldsymbol{c}_j"] & \\
 & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, \lim_I D) \arrow[dl, bend right, "\boldsymbol{p}_{i*}"'] \arrow[dr, bend left, "\boldsymbol{p}_{j*}"] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X,\, D(i)\big) \arrow[rr, "D(f)_*"] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X,\, D(j)\big)
\end{tikzcd}$$

を可換にする. u_y の定義からこのような u は一意であるから, 図式 (1.1.1) の錐 $\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, \lim_I D),\, p_{\bullet *}\big)$ が極限の普遍性を充たすことが分かった．極限の一意性より

$$\lim_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X,\, D(i)\big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X,\, \lim_I D\big)$$

でなくてはいけない.

(2) $\mathcal{C}$ が余完備なので，図式 $D\colon I \longrightarrow \mathcal{C}$ の余極限

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
D(i) \arrow[rr, "D(f)"] \arrow[dr, bend right, "p_i"'] & & D(j) \arrow[dl, bend left, "p_j"] \\
 & \mathrm{colim}_I\, D &
\end{tikzcd}$$

が存在する[*4]．示すべきは **Sets** の図式

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{colim}_I\, D,\, X) \arrow[dl, bend right, "{p_i}^*"'] \arrow[dr, bend left, "{p_i}^*"] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(D(j),\, X\big) \arrow[rr, "D(f)^*"] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(D(i),\, X\big)
\end{tikzcd}$$

が極限の普遍性を充たすことだが，以降の議論は (1) と同様である.

■

1.1.3　米田埋め込み

定義 1.12: 前層

圏 $\mathcal{C}$ 上の圏 $\mathcal{S}$ に値をとる**前層**とは，関手

$$P\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}$$

のこと.

前層の圏 $\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\, \mathcal{S})$ [*5]とは,

- 前層 $P\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}$ を対象とする

*4 $i,\, j \in \mathrm{Ob}(I)$ および $f_{ij} \in \mathrm{Hom}_I\,(i,\, j)$ は任意にとる.
*5 $[\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}]$ や $\mathcal{S}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ と書くこともある．なお，付録 A で登場したものはこれの一例である.

- 前層 $P,\ Q\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}$ の間の自然変換 $\tau\colon P \Longrightarrow Q$ を射とする

として構成される圏のこと[*6].

定義 1.13: 表現可能前層・米田埋め込み

圏 $\mathcal{C}$ を与える.

- $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，以下で定義する前層

$$\boldsymbol{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-},\, X)}\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

  のことを**表現可能前層** (representable presheaf) と呼ぶ：
  - $\forall Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-},\, X)(Y) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\, X) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$$

    を対応づける
  - $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ における任意の射 $g\colon Y \longrightarrow Z$[a] に対して,

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-},\, X)(g) \coloneqq g^*\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,\, X) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\, X),\\ h &\longmapsto h \circ g\end{aligned}$$

    を対応付ける
- **米田埋め込み** (Yoneda embedding) とは，以下で定義する関手

$$\mathrm{Y}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{PSh}(\mathcal{C},\, \mathbf{Sets})$$

  のこと：
  - $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ に対して表現可能前層 $\mathrm{Y}(X) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-},\, X) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\, \mathbf{Sets}))$ を対応付ける
  - $\mathcal{C}$ における任意の射 $f\colon X \longrightarrow Y$ に対して，以下で定義される自然変換 $\mathrm{Y}(f)\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-},\, X) \Longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-},\, Y)$ を対応付ける：
    - $\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ に対して，圏 $\mathbf{Sets}$ における射

$$\begin{aligned}\mathrm{Y}(f)_Z \coloneqq f_*\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,\, X) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,\, Y),\\ g &\longmapsto f \circ g\end{aligned}$$

      を対応付ける.

[a] つまり，これは $\mathcal{C}$ における射 $g\colon Z \longrightarrow Y$ である.

[*6] $\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\, \mathcal{S})$ の恒等射は $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ に対して $\mathrm{Id}_X\colon X \longrightarrow X$ を対応づける自然変換である.

補題 1.1: 米田の補題

前層 $F\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ および圏 $\mathcal{C}$ の対象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を与える．このとき，写像

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh}(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})}\bigl(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-},\,X),\,F\bigr) &\longrightarrow F(X), \\ \tau &\longmapsto \tau_X(\mathrm{Id}_X) \end{aligned}$$

は全単射である．

米田の補題の主張は少し込み入っているが，次のように考えれば良い：
$\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh}(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})}\bigl(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-},\,X)\bigr)$ とは自然変換

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \arrow[r, bend left=60, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-},\,X)"{name=U}] \arrow[r, bend right=60, "F"'{name=D}] & \mathbf{Sets} \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\tau"] \end{tikzcd}$$

のことであるから，表現可能前層の定義より $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ に対して圏 $\mathbf{Sets}$ における射（i.e. 写像）$\tau_X\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\,X) \longrightarrow F(X)$ が定まる．圏の定義より集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\,X)$ には必ず恒等射という元 $\mathrm{Id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\,X)$ が含まれるので，それを写像 τ_X で送った先は $\tau_X(\mathrm{Id}_X) \in F(X)$ として well-defined である．

証明 写像

$$\begin{aligned} \eta\colon F(X) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh}(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})}\bigl(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-},\,X),\,F\bigr), \\ s &\longmapsto \bigl\{\eta(s)_Y\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\,X) \longrightarrow F(Y),\ f \longmapsto F(f)(s)\bigr\}_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \end{aligned}$$

を考える．$\forall s \in F(X)$ を 1 つ固定する．このとき圏 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ における任意の射 $Y \longleftarrow Z\colon f$ および $\forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,\,X)$ に対して

$$\begin{aligned} \eta(s)_Y \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-},\,X)(f)(g) &= \eta(s)_Y(g \circ f) \\ &= F(g \circ f)(s) \\ &= F(f) \circ F(g)(s) \\ &= F(f) \circ \eta(s)_Z(g) \end{aligned}$$

が言える．i.e. $\eta(s)$ は自然変換であり，η は well-defined である．
ところで，$\forall \tau \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh}(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})}\bigl(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-},\,X),\,F\bigr)$ に対して

$$\begin{aligned} \eta(\tau_X(\mathrm{Id}_X)) &= \bigl\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\,X) \longrightarrow F(Y),\ f \longmapsto F(f)\bigl(\tau_X(\mathrm{Id}_X)\bigr)\bigr\}_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \\ &= \bigl\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\,X) \longrightarrow F(Y),\ f \longmapsto F(f) \circ \tau_X(\mathrm{Id}_X)\bigr\}_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \\ &= \bigl\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\,X) \longrightarrow F(Y),\ f \longmapsto \tau_Y \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-},\,X)(f)(\mathrm{Id}_X)\bigr\}_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \\ &= \bigl\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\,X) \longrightarrow F(Y),\ f \longmapsto \tau_Y(f \circ \mathrm{Id}_X)\bigr\}_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \\ &= \bigl\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\,X) \longrightarrow F(Y),\ f \longmapsto \tau_Y(f)\bigr\}_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \\ &= \tau \end{aligned}$$

が成り立ち，かつ

$$\eta(s)_X(\mathrm{Id}_X) = F(\mathrm{Id}_X)(s) = \mathrm{Id}_{F(X)}(s) = s$$

が成り立つので，η は題意の写像の逆写像である． ■

命題 1.2: 米田埋め込みは埋め込み

米田埋め込み $\mathrm{Y}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{PSh}\,(\mathcal{C},\, \mathbf{Sets})$ は埋め込みである．

証明 $\forall X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を固定する．写像

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X,\, Y) &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})}\,\bigl(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-}\,,\, X),\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-}\,,\, Y)\bigr),\\ f &\longmapsto \mathrm{Y}(f)\end{aligned}$$

が全単射であることを示せば良い．米田埋め込みの定義から，$\forall s \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X,\, Y)$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{Y}(s) &= \bigl\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(Z,\, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(Z,\, Y),\ g \longmapsto s \circ g\bigr\}_{Z\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})}\\ &= \bigl\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(Z,\, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(Z,\, Y),\ g \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-}\,,\, Y)(g)(s)\bigr\}_{Z\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})}\end{aligned}$$

が成り立つが，これは米田の補題において $F = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-}\,,\, Y) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{PSh}\,(\mathcal{C},\, \mathbf{Sets}))$ としたときの逆写像であり，示された． ■

系 1.1: 同型と表現可能前層の自然同値

以下の 2 つは同値である：

(1) $X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ は同型

(2) 表現可能前層 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-},\, X),\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-},\, Y) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{PSh}\,(\mathcal{C},\, \mathbf{Sets}))$ が自然同型

証明 **(1) $\Longrightarrow$ (2)**

$X \cong Y$ なので $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X,\, Y),\ g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(Y,\, X)$ が存在して $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ かつ $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ を充たす．このとき $\forall A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$\tau_A\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, Y),\ h \longmapsto f \circ h$$

と定義するとこれは $\eta_A\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, X),\ h \longmapsto g \circ h$ を逆射に持つので同型射であり，自然同値

$$\tau\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-},\, X) \Longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-},\, Y)$$

を定める．

(1) $\Longleftarrow$ (2)

$\mathrm{PSh}\,(\mathcal{C},\, \mathbf{Sets})$ における同型射とは，2 つの前層の間の自然同型である．関手は同型射を保つので，命題 1.2 より示された．

■

1.1.4 随伴

定義 1.14: 随伴

関手 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, $G\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ を与える．F が G の**左随伴** (left adjoint) であり，かつ G が F の**右随伴** (right adjoint) であるとは，２つの関手

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(F(\text{-}),\,\text{-}\right) &\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{Sets},\\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\text{-},\,G(\text{-})\right) &\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{Sets}\end{aligned}$$

の間に自然同型

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \arrow[r, bend left=50, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(F(\text{-}),\text{-}\right)"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\text{-},G(\text{-})\right)"'{name=L}] & \mathbf{Sets} \arrow[from=U, to=L, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

が存在することを言う．

F が G の左随伴である（全く同じことだが，G が F の右随伴である）ことを $\boldsymbol{F \dashv G}$ と書く．図式中では

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$$

のように書く．

さて，圏 $\mathcal{C}$ 上の図式 $D\colon I \longrightarrow \mathcal{C}$ が余極限を持つとする：

$$\begin{tikzcd} & D(\forall i) \arrow[dl, bend right] \arrow[dr, bend left, blue] & \\ \mathrm{colim}_I\, D \arrow[rr, dashed, red, "\exists!"] & & \forall X \end{tikzcd}$$

このとき，$\mathcal{D}$ 上の図式として

$$\begin{tikzcd} & F\big(D(\forall i)\big) \arrow[dl, bend right] \arrow[dr, bend left] & \\ \mathrm{colim}_I\, F(D) \arrow[rr, dashed, red, "\exists! u"] & & F(\mathrm{colim}_I\, D) \end{tikzcd}$$

を考えることができる．特に，一意に定まる射 $u\colon \mathrm{colim}_I\, F(D) \longrightarrow F(\mathrm{colim}_I\, D)$ が同型のとき，関手 F は**余極限を保つ**という．

同様に，圏 $\mathcal{D}$ 上の図式 $D\colon I \longrightarrow \mathcal{C}$ が極限を持つとする：

$$\begin{tikzcd} \lim_I D \arrow[dr, bend right] & & \forall X \arrow[ll, dashed, red, "\exists!"'] \arrow[dl, bend left, blue] \\ & D(\forall i) & \end{tikzcd}$$

このとき，$\mathcal{D}$ 上の図式として

$$
\begin{tikzcd}
\lim_I F(D) \arrow[dr, bend right] & & F(\lim_I D) \arrow[ll, dashed, "\exists! u"'] \arrow[dl, bend left] \\
& F\big(D(\forall i)\big) &
\end{tikzcd}
$$

を考えることができる．特に，一意に定まる射 $u\colon F(\lim_I D) \longrightarrow \lim_I F(D)$ が同型のとき，関手 F は**極限を保つ**という．

命題 1.3: 随伴と極限・余極限

関手 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, $G\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ が $F \dashv G$ であるとする．このとき，F は余極限を保ち，G は極限を保つ．

証明 余極限を持つ任意の $\mathcal{C}$ の図式 $D\colon I \longrightarrow \mathcal{C}$ を 1 つ固定する．随伴の定義および命題 1.1 より，$\forall Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ に対して

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(\operatorname*{colim}_I D),\, Y\big) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(\operatorname*{colim}_I D,\, G(Y)\big) \\
&\cong \lim_I \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(D(i),\, G(Y)\big) \\
&\cong \lim_I \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(D(i)),\, Y\big) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(\operatorname*{colim}_I F(D),\, Y\big)
\end{aligned}
$$

が言える．i.e. 自然同型

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[r, bend left=50, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(F(\operatorname{colim}_I D),\,\text{-}\right)", ""{name=U, below}] \arrow[r, bend right=50, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(\operatorname{colim}_I F(D),\,\text{-}\right)"', ""{name=L, above}] & \mathbf{Sets} \arrow[Rightarrow, from=U, to=L]
\end{tikzcd}
$$

があるので，米田の補題の系より

$$
F(\operatorname*{colim}_I D) \cong \operatorname*{colim}_I F(D)
$$

が示された． ■

1.1.5 Kan 拡張

定義 1.15: スライス圏

圏 $\mathcal{D}$ およびその対象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ を与える．**スライス圏** (slice category) $\boldsymbol{\mathcal{D}_{/X}}$ とは，以下のデータからなる圏のこと：

- $\mathcal{D}$ の対象と射の組 $(D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}),\ \alpha\colon D \longrightarrow X)$ を対象に持つ
- $(D,\ \alpha),\ (D',\ \alpha')$ の間の射は，$\mathcal{D}$ における射 $\beta\colon D \longrightarrow D'$ であって $\mathcal{D}$ における図式

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & D' \arrow[dl, "\alpha'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

を可換にするものとする

双対スライス圏 (dual slice category) $\boldsymbol{\mathcal{D}_{X/}}$ とは，以下のデータからなる圏のこと：

- $\mathcal{D}$ の対象と射の組 $(D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}),\ \alpha\colon X \longrightarrow D)$ を対象に持つ
- $(D,\ \alpha),\ (D',\ \alpha')$ の間の射は，$\mathcal{D}$ における射 $\beta\colon D \longrightarrow D'$ であって $\mathcal{D}$ における図式

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "\beta"] & & D' \\ & X \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[ur, "\alpha'"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にするものとする

関手[*7] $\mathcal{D}_{/X} \longrightarrow \mathcal{D},\ (D,\ \alpha) \longmapsto D$ のことを**標準的忘却関手** (canonical forgetful functor) と呼ぶ．標準的関手は図式中でも記号で明記しないことが多い．

関手 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ および圏 $\mathcal{D}$ における対象 $X \in \mathcal{D}$ を与える．このとき**関手 $\boldsymbol{F}$ に関するスライス圏**を関手圏 $\mathbf{Fun}(\boldsymbol{\mathcal{C}},\ \boldsymbol{\mathcal{D}})$ における引き戻し

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{F_{/X}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{D}_{/X} \arrow[d] \\ \mathcal{C} \arrow[r, "F"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

として定義する．i.e. $F_{/X}$ の対象は $(C \in \mathcal{C},\ \alpha\colon F(C) \longrightarrow X)$ であり，$(C,\ \alpha),\ (C',\ \alpha')$ の間の射とは，$\mathcal{C}$ における射 $\beta\colon C \longrightarrow C'$ であって $\mathcal{D}$ における図式

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[rr, "F(\beta)"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & F(C') \arrow[dl, "\alpha'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

を可換にするものである．

*7 対象の対応のみ明示した．

定理 1.2: density theorem

前層 $F\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ を与える．関手 $\mathrm{Y}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{PSh}\,(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})$ を米田埋め込みとする．
このとき，前層の圏 $\mathrm{PSh}\,(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})$ における同型

$$F \cong \operatorname*{colim}_{X \in \mathrm{Y}_{/F}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-},\ X)$$

が成り立つ．

証明 米田の補題の系により，示すべきは自然同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})}\left(\operatorname*{colim}_{X \in \mathrm{Y}_{/F}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-},\ X),\,\text{-}\right) \Longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})}\left(F,\,\text{-}\right)$$

である．実際，$\forall G \in \mathrm{Ob}(\mathrm{PSh}\,(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets}))$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})}\left(\operatorname*{colim}_{X \in \mathrm{Y}_{/F}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-},\ X),\,G\right) &\cong \lim_{X \in \mathrm{Y}_{/F}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\text{-},\,X),\,G\right) && \because\ \text{命題 1.1} \\
&\cong \lim_{X \in \mathrm{Y}_{/F}} G(X) && \because\ \text{米田の補題}
\end{aligned}$$

なる自然同型がある．

ここで $\mathrm{pt} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{PSh}\left(\mathrm{Y}_{/F},\,\mathbf{Sets}\right))$ を $\mathrm{pt}(X) \coloneqq \{*\}$ で定義する[*8]と，極限の定義から明らかに $\lim_{X \in \mathrm{Y}_{/F}} G(X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathrm{Y}_{/F},\,\mathbf{Sets})}\,(\mathrm{pt},\,G)$ が成り立つ．自然変換 $\forall \tau \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathrm{Y}_{/F},\,\mathbf{Sets})}\,(\mathrm{pt},\,G)$ は，$\forall (X,\,\alpha) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Y}_{/F})$ に対して写像 $\{*\} \longrightarrow G(X),\ * \longmapsto \tau_{(X,\,\alpha)}$ を一意的に定める．一方で米田の補題より $\forall (X,\,\alpha) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Y}_{/F})$ はある $\alpha_X(\mathrm{Id}_X) \in F(X)$ と一対一対応する．この対応により $\forall X \in \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ について写像

$$\eta(\tau)_X\colon F(X) \longrightarrow G(X),\ \alpha_X(\mathrm{Id}_X) \longmapsto \tau_{(X,\,\alpha)}$$

が得られる．α は自然変換なので $\eta(\tau)_X$ を全て集めたものは自然変換 $\eta(\tau)\colon F \Longrightarrow G$ になる．よって写像

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathrm{Y}_{/F},\,\mathbf{Sets})}\,(\mathrm{pt},\,G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\,\mathbf{Sets})}\,(F,\,B),\ \tau \longmapsto \eta(\tau)$$

は自然な同型であり，証明が完了した． ■

[*8] $\{*\}$ は一点集合．$\mathbf{Sets}$ における終対象と言っても良い．

定義 1.16: Kan 拡張

$i\colon \mathcal{C}_0 \hookrightarrow \mathcal{C}$ を $\mathcal{C}$ の小部分圏，$\mathcal{D}$ を双完備な圏とする．

- 関手 $F\colon \mathcal{C}_0 \longrightarrow \mathcal{D}$ の，関手 i に沿った**左 Kan 拡張** (left Kan extention) とは，

$$i_!(F)(x) \coloneqq \operatorname*{colim}_{c\in(\mathcal{C}_0)_{/x}} F(c)$$

  によって定義される関手

$$i_!\colon \mathrm{Fun}(\mathcal{C}_0,\, \mathcal{D}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{C},\, \mathcal{D})$$

  によって定まる関手 $i_!(F)\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ のこと．
- 関手 $F\colon \mathcal{C}_0 \longrightarrow \mathcal{D}$ の，関手 i に沿った**右 Kan 拡張** (right Kan extention) とは，

$$i_*(F)(x) \coloneqq \lim_{c\in(\mathcal{C}_0)_{x/}} F(c)$$

  によって定義される関手

$$i_*\colon \mathrm{Fun}(\mathcal{C}_0,\, \mathcal{D}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{C},\, \mathcal{D})$$

  によって定まる関手 $i_*(F)\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ のこと．

制限関手

$$i^*\colon \mathrm{Fun}(\mathcal{C},\, \mathcal{D}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{C}_0,\, \mathcal{D})$$

について $i_! \dashv i^*$ かつ $i_* \vdash i^*$ である．

1.2 単体圏

higher geometry において重要な役割を果たす単体的集合の圏を定義する．

定義 1.17: 単体圏

- $\forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して，全順序付集合 $[\boldsymbol{n}] \coloneqq \{0,\, 1,\, \dots,\, n\}$ のことを ***n*-単体** (n-simplex) と呼ぶ．
- **単体圏** (simplex category) Δ とは，
  - $\forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して，n-単体 $[n]$ を対象とする．
  - 順序を保つ写像を射とする

  圏のこと．

特に $\mathrm{Hom}_\Delta\,([n-1],\, [n])$ の元のうち

$$d_i^n\colon [n-1] \hookrightarrow [n],\ x \longmapsto \begin{cases} x, & x < i \\ x+1 & x \geq i \end{cases} \text{ w/ } \quad i = 0,\, \dots,\, n$$

のことを**面写像** (face map) と呼び，$\mathrm{Hom}_{\Delta}([n+1],\,[n])$ の元のうち

$$s_i^n \colon [n+1] \twoheadrightarrow [n],\ x \longmapsto \begin{cases} x, & x \le i \\ x-1 & x > i \end{cases} \text{ w/ } \ i = 0,\,\dots,\,n$$

のことを**縮退写像** (degeneracy map) と呼ぶ．

定義 1.18: 単体的集合

- **単体的集合** (simplicial set) とは，前層

$$K \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

のこと．特に n-単体 $[n] \in \mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})$ の表現可能前層を $\boldsymbol{\Delta^n} \coloneqq \mathrm{Hom}_{\Delta}(\text{-},\,[n]) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{SimpSet})$ と書く．

余単体的集合 (cosimplicial set) とは，関手

$$K \colon \Delta \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

のこと．

- 単体的集合 $S \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ が単体的集合 $K \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ の**単体的部分集合** (simplicial subset) であるとは，以下の 2 条件を充たすことを言う：

(sub-1) $\forall n \ge 0$ に対して $S([n]) \subset K([n])$

(sub-2) 圏 Δ における任意の射 $\alpha \colon [n] \longrightarrow [m]$ に対して $K(\alpha)\bigl(S([m])\bigr) \subset S([n])$

誤解の恐れがないときは，単体的部分集合を $\boldsymbol{S \subset K}$ と書く．

- **単体的集合の圏 SimpSet** とは，前層の圏

$$\mathbf{SimpSet} \coloneqq \mathrm{PSh}\,(\Delta,\,\mathbf{Sets})$$

のこと．

$K_n \coloneqq K([n])$ とおく．

- K_n の元のことを **n-単体** (n-simplex)
- $\partial_i \coloneqq K(d_i) \colon K_n \twoheadrightarrow K_{n-1}$ のことを**面写像** (face map)
- $\sigma_i \coloneqq K(s_i) \colon K_n \hookrightarrow K_{n+1}$ のことを**縮退写像** (degeneracy map) と呼ぶ．

と呼ぶ．これらは以下の**単体的恒等式** (simplicial identities) を充たす：

$$\begin{aligned}
\partial_i^{n-1} \circ \partial_j^n &= \partial_{j-1}^{n-1} \circ \partial_i^n && (i < j), \\
\partial_i^{n+1} \circ \sigma_j^n &= \sigma_{j-1}^{n-1} \circ \partial_i^n && (i < j), \\
\partial_i^{n+1} \circ \sigma_j^n &= \sigma_j^{n-1} \circ \partial_{i-1}^n && (i > j+1), \\
\partial_i^{n+1} \circ \sigma_j^n &= \mathrm{id} && (i = j,\, j+1), \\
\sigma_i^{n+1} \circ \sigma_j^n &= \sigma_{j+1}^{n+1} \circ \sigma_i^n && (i \le j)
\end{aligned} \tag{1.2.1}$$

逆に,

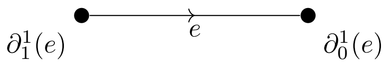
- 対象の族 $\{K_n\}_{n\geq 0}$
- 射の族 $\{\partial_i^n \colon K_n \longrightarrow K_{n-1}\}_{0\leq i\leq n,\, n\geq 0}$
- 射の族 $\{\sigma_i^n \colon K_n \longrightarrow K_{n+1}\}_{0\leq i\leq n,\, n\geq 0}$

の組であって単体的恒等式を充たすものは単体的集合を一意に定める [**?**, Proposition 1.1.2.14].

単体的集合 $K\colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ を図示する方法がある.

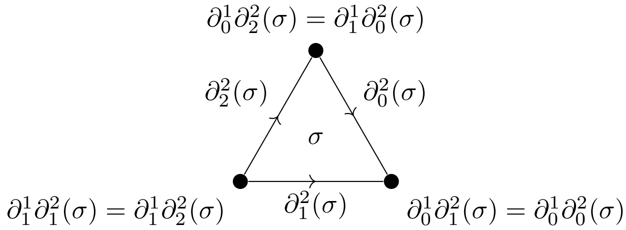
(1) K_0 の元（i.e. 0-単体）を点と見做し，$K_0 = \{\bullet, \ldots, \bullet\}$ のように書く.

(2) K_1 の元（i.e. 1-単体）$e \in K_1$ を



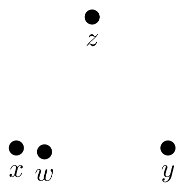
のように有向辺として図示する.

(3) K_2 の元（i.e. 2-単体）$\sigma \in K_2$ を



のように向きづけられた三角形として図示する．この図は単体的恒等式 (1.2.1) を表している.

(4) K_3 の元（i.e. 3-単体）$t \in K_3$ を



(5) K_n の元（i.e. n-単体）は，単体的恒等式 (1.2.1) によって帰納的に図示する.

命題 1.4: 単体的集合の圏の基本性質

$\mathrm{Y} \colon \Delta \longrightarrow \mathbf{SimpSet}$ を米田埋め込みとする．

(1) 任意の単体的集合 $K \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ に対して，自然な同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}\left(\Delta^{n},\, K\right) \cong K_{n}$$

が成り立つ．

(2) 圏 **SimpSet** は双完備である．

(3) 任意の単体的集合 $K \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ に対して，

$$K \cong \operatorname*{colim}_{[n] \in \mathrm{Y}_{/K}} \Delta^{n}$$

が成り立つ．

命題 1.4-(1) によって，n-単体 $\sigma \in K_n$

<u>**証明**</u> (1) 米田の補題より

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}\left(\Delta^{n},\, K\right) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\Delta,\, \mathbf{Sets})}\left(\mathrm{Hom}_{\Delta}\left(\text{-},\, [n]\right),\, K\right) \cong K([n]) = K_{n}$$

(2)

(3) 定理 1.2 より

$$K \cong \operatorname*{colim}_{[n] \in \mathrm{Y}_{/K}} \mathrm{Hom}_{\Delta}\left(\text{-},\, [n]\right) = \operatorname*{colim}_{[n] \in \mathrm{Y}_{/K}} \Delta^{n}$$

■

定義 1.18 を再現する具体的な構成をする．

定義 1.19: 幾何学的 n-単体

- **幾何学的 n-単体** Δ^n_{top} とは，位相空間

$$\Delta^{n}_{\mathrm{top}} \coloneqq \left\{\, (x^{0},\, \dots,\, x^{n}) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; x_{i} \geq 0,\, \sum_{i=0}^{n} x_{i} = 1 \,\right\}$$

のこと．

- 余単体的集合

$$\Delta_{\mathrm{top}} \colon \Delta \longrightarrow \mathbf{Top}$$

とは，

 - n-単体 $[n] \in \mathrm{Ob}(\Delta)$ に対して幾何学的 n-単体 Δ^n_{top} を対応づける
 - 圏 Δ における任意の射 $\alpha \colon [n] \longrightarrow [m]$ に対して，連続写像

$$\Delta_{\mathrm{top}}(\alpha) \colon \Delta^{n}_{\mathrm{top}} \longrightarrow \Delta^{m}_{\mathrm{top}},\; (x_{0},\, \dots,\, x_{n}) \longmapsto \left(\sum_{j,\, \alpha(j)=0} x_{j},\, \dots,\, \sum_{j,\, \alpha(j)=m} x_{j} \right)$$

 を対応付ける

関手のこと．

- 位相空間 $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ の**特異単体** (singular simplicial set) とは，単体的集合

$$S(X)\colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets},\ [n] \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\left(\Delta^n_{\mathrm{top}},\ X\right)$$

のこと．

- 特異複体とは，関手 $S\colon \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{SimpSet},\ X \longmapsto S(X)$ のこと．

定義 1.20: 幾何学的実現

$\mathrm{Y}\colon \Delta \longrightarrow \mathbf{SimpSet}$ を米田埋め込みとする．**幾何学的実現** (geometric realization) とは，余極限を保つ関手

$$|\text{-}|\colon \mathbf{SimpSet} \longrightarrow \mathbf{Top},\ K \longmapsto \operatorname*{colim}_{[n]\in \mathrm{Y}_{/K}} \Delta_{\mathrm{top}}([n])$$

のこと．

$\mathbf{Top}$ における colim の公式を使うと

$$|K| = \left(\coprod_{[n]\in \mathrm{Ob}(\Delta)} (K_n \times \Delta^n_{\mathrm{top}})\right) \Big/ \left\{ \left(\alpha^*(x),\ t\right) \sim \left(x,\ \Delta_{\mathrm{top}}(\alpha)(t)\right) \;\middle|\; {\scriptstyle x\in K_n,\ t\in\Delta^m_{\mathrm{top}}, \atop \alpha\in \mathrm{Hom}_{\Delta}([m],\ [n])} \right\}$$

となる．

命題 1.5:

特異複体 $S\colon \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{SimpSet},\ X \longmapsto S(X)$ は幾何学的実現 $|\text{-}|\colon \mathbf{SimpSet} \longrightarrow \mathbf{Top}$ の右随伴である．

<u>**証明**</u> 右随伴の定義を思い出すと，$\forall (K,\ X) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{SimpSet}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Top})$ に対して自然同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\left(|K|,\ X\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}^{\mathrm{op}}}\left(K,\ S(X)\right)$$

が成り立つことを示せば良い．実際，命題 1.1 より

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\left(|K|,\ X\right) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\left(\operatorname*{colim}_{[n]\in \mathrm{Y}_{/K}} \Delta^n_{\mathrm{top}},\ X\right) \cong \lim_{[n]\in \mathrm{Y}_{/K}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\left(\Delta^n_{\mathrm{top}},\ X\right)$$

が，命題 1.4-(3) より

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}^{\mathrm{op}}}\left(K,\ S(X)\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}^{\mathrm{op}}}\left(\operatorname*{colim}_{[n]\in \mathrm{Y}_K} \Delta^n,\ S(X)\right) \cong \lim_{[n]\in \mathrm{Y}_{/K}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\left(\Delta^n,\ X\right)$$

が言える． ■

定義 1.21: 境界・角・背骨・骨格

- $\Delta^n \in \mathrm{Ob}(\mathbf{SimpSet})$ の**単体的境界** (simplicial boundary) $\boldsymbol{\partial\Delta^n}$ とは，Δ^n の単体的部分集合

$$\partial\Delta^n\colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

であって

$$\partial\Delta^n([k]) \coloneqq \begin{cases} \Delta^n([k]), & k \neq n \\ \Delta^n([k]) \setminus \{\mathrm{Id}_{[n]}\}, & k = n \end{cases}$$

を充たすもののこと．

- 任意の部分集合 $S \subset [n]$ を与える．**S-角** (S-horn) とは，Δ^n の単体的部分集合

$$\boldsymbol{\Lambda^n_S} \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

であって，

$$\Lambda^n_S([k]) \coloneqq \left\{ f \in \Delta^n([k]) \;\middle|\; [n] \setminus \big(f([k]) \cup S\big) \neq \emptyset \right\}$$

を充たすもののこと．特に $\boldsymbol{\Lambda^n_j} \coloneqq \Lambda^n_{\{j\}}$ は $0 < j < n$ のとき**内部角** (inner horn)，$j = 0, n$ のとき**外部角** (outer horn) と呼ばれる．

- **背骨** (spine) とは，Δ^n の単体的部分集合

$$\boldsymbol{I^n} \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

であって，

$$I^n([k]) \coloneqq \left\{ f \in \Delta^n([k]) \;\middle|\; f([k]) = \{j\} \,\mathrm{or}\, f([k]) = \{j, j+1\} \right\} \subset \Delta^n([k])$$

を充たすもののこと．

- 単体的集合 $K \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ の **n-骨格** (n-skelton) とは，濃度 $n+1$ 以下の対象からなる Δ の充満部分圏 $i \colon \Delta_{\le n} \hookrightarrow \Delta$ に沿った，関手 $i^*(K) \colon (\Delta_{\le n})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ の左 Kan 拡張 $i_!\big(i^*(K)\big) \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ のこと．
- 単体的集合 $K \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ の **n-余骨格** (n-coskelton) とは，濃度 $n+1$ 以下の対象からなる Δ の充満部分圏 $i \colon \Delta_{\le n} \hookrightarrow \Delta$ に沿った，関手 $i^*(K) \colon (\Delta_{\le n})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ の右 Kan 拡張 $i_*\big(i^*(K)\big) \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ のこと．

命題 1.6: コイコライザとしての境界

境界 $\partial\Delta^n$ は圏 **SimpSet** におけるコイコライザである：

$$\textstyle\coprod_{0 \le i < j \le n} \Delta^{n-2} \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} \coprod_{0 \le k \le n} \Delta^{n-1} \xrightarrow{\;w\;} \partial\Delta^n$$

証明 $0 \le \forall k \le n$ に対して，圏 **SimpSet** における射（i.e. 自然変換）

$$u_k \colon \coprod_{0 \le i < k} \Delta^{n-2} \longrightarrow \Delta^{n-1}$$
$$v_k \colon \coprod_{k < j \le n} \Delta^{n-2} \longrightarrow \Delta^{n-1}$$

を

$$u_k := \left\{ u_{k\,[m]} \colon \coprod_{0 \le i < k} \Delta^{n-2}\big([m]\big) \longrightarrow \Delta^{n-2}\big([m]\big),\ (i,\,\alpha) \longmapsto d^{n-1}_i \circ \alpha \right\}_{[m] \in \mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})}$$

$$v_k := \left\{ u_{k\,[m]} \colon \coprod_{k < j \le n} \Delta^{n-2}\big([m]\big) \longrightarrow \Delta^{n-2}\big([m]\big),\ (j,\,\alpha) \longmapsto d^{n-1}_{j-1} \circ \alpha \right\}_{[m] \in \mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})}$$

により定義する[*9]．そして圏 **SimpSet** における 2 つの余積を

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{0 \le i < j \le n} \Delta^{n-2} = \coprod_{0 \le k \le n} \coprod_{0 \le i < k} \Delta^{n-2} \arrow[r, dashed, "\exists! u"] & \coprod_{0 \le k \le n} \Delta^{n-1} \\
\coprod_{0 \le i < k} \Delta^{n-2} \arrow[u, hook] \arrow[r, "u_k"'] & \Delta^{n-1} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{0 \le i < j \le n} \Delta^{n-2} = \coprod_{0 \le k \le n} \coprod_{k < j \le n} \Delta^{n-2} \arrow[r, dashed, "\exists! v"] & \coprod_{0 \le k \le n} \Delta^{n-1} \\
\coprod_{k < j \le n} \Delta^{n-2} \arrow[u, hook] \arrow[r, "v_k"'] & \Delta^{n-1} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

のようにとる．さらに射

$$w \colon \coprod_{0 \le k \le n} \Delta^{n-1} \longrightarrow \partial\Delta^n$$

を

$$w := \left\{ w_{[m]} \colon \coprod_{0 \le k \le n} \Delta^{n-1}\big([m]\big) \longrightarrow \partial\Delta^{n}\big([m]\big),\ (k,\,\beta) \longmapsto d^{n}_k \circ \beta \right\}_{[m] \in \mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})}$$

で定義する[*10]．すると $\forall [m] \in \mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})$, $\forall \big((i<j),\,\alpha\big) \in \coprod_{0 \le i < j \le n} \Delta^{n-2}\big([m]\big)$ に対して

$$\begin{aligned}
(w \circ u)_{[m]}\big((i<j),\,\alpha\big) &= w_{[m]}\Big(j,\, u_{j\,[m]}\big(i,\,\alpha\big)\Big) \\
&= d^n_j \circ d^{n-1}_i \circ \alpha, \\
(w \circ v)_{[m]}\big((i<j),\,\alpha\big) &= w_{[m]}\Big(i,\, v_{i\,[m]}\big(j,\,\alpha\big)\Big) \\
&= d^n_i \circ d^{n-1}_{j-1} \circ \alpha
\end{aligned}$$

が成り立ち，単体的恒等式 (1.2.1) より $w \circ u = w \circ v$ が分かる．よってコイコライザの普遍性から圏 **SimpSet** の可換図式

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{0 \le i < j \le n} \Delta^{n-2} \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & \coprod_{0 \le k \le n} \Delta^{n-1} \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "w"'] & \mathrm{Coeq}(u,\,v) \arrow[d, dashed, "\exists! \bar{w}"] \\
& & \partial\Delta^n
\end{tikzcd}$$

[*9] $\coprod_i \Delta^{n-2}\big([m]\big) = \coprod_i \mathrm{Hom}_{\Delta}\big([m],\,[n-2]\big)$ は集合と写像の圏 **Sets** における余積なので，集合としては $\bigcup_i \big\{\, (i,\,\alpha) \bigm| \alpha \in \mathrm{Hom}_{\Delta}\big([m],\,[n-2]\big) \,\big\}$ と 1 対 1 対応する．

[*10] $\forall (k,\,\beta) \in \coprod_{0 \le k \le n} \Delta^{n-1}\big([m]\big) = \coprod_{0 \le k \le n} \mathrm{Hom}_{\Delta}\big([m],\,[n-1]\big)$ に対して $w_{[m]}(k,\,\beta) = d^n_k \circ \beta \in \mathrm{Hom}_{\Delta}\big([m],\,[n]\big) = \Delta^n\big([m]\big)$ であり，$d^n_k \in \mathrm{Hom}_{\Delta}\big([n-1],\,[n]\big)$ は全射でないため $m = n$ のときも $w_{[m]}(k,\,\beta) \in \Delta^n\big([m]\big) \setminus \{\mathrm{Id}_{[n]}\}$ が言える．よって w の像は $\partial\Delta^n$ の単体的部分集合である．

が成り立つ．後は $\bar{w}\colon \mathrm{Coeq}(u,\,v) \longrightarrow \partial\Delta^n$ が自然同値であることを示せば良い．

($\bar{w}$ はエピ射)

w がエピ射であることを示す．そのためには $\forall[m] \in \mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})$ を 1 つ固定し，写像 $w_{[m]}\colon \coprod_{0\le k\le n} \Delta^{n-1}\big([m]\big) \longrightarrow \partial\Delta^n\big([m]\big)$ が全射であることを示せば良い．

$\forall\gamma \in \partial\Delta^n\big([m]\big)$ を 1 つ固定する．このとき $\gamma \in \mathrm{Hom}_{\Delta}\big([m],\,[n]\big)$ は全射でない．i.e. ある $0 \le i \le n$ が存在して，圏 Δ において γ は

$$\begin{tikzcd} {[m]} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, dashed, "\exists!\bar{\gamma}"'] & {[n]} \\ & {[n]\setminus\{i\}} \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

と一意的に分解する．$d_i^n\big([n-1]\big) = [n]\setminus\{i\}$ かつ d_i^n は単射なので，ある $(i,\,\beta_i) \in \coprod_{0\le k\le n} \Delta^{n-1}\big([m]\big)$ が一意的に存在して $\bar{\gamma} = d_i^n \circ \beta_i = w_{[m]}(i,\,\beta_i)$ が成り立つ．

($\bar{w}$ はモノ射)

$\forall[m] \in \mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})$ を 1 つ固定し，写像 $\bar{w}_{[m]}\colon \mathrm{Coeq}(u,\,v)\big([m]\big) \longrightarrow \partial\Delta^n\big([m]\big)$ が全射であることを示す．

$\bar{w}_{[m]}(x) = \bar{w}_{[m]}(y)$ を仮定する．$q\colon \coprod_{0\le k\le n} \Delta^{n-1} \longrightarrow \mathrm{Coeq}(u,\,v)$ はエピなので，$x = q_{[m]}(i,\,\beta_i),\, y = q_{[m]}(j,\,\beta_j)$ を充たす $(i,\,\beta_i),\,(j,\,\beta_j) \in \coprod_{0\le k\le n} \Delta^{n-1}\big([m]\big)$ が存在する．コイコライザの普遍性の図式の可換性から $w_{[m]}(i,\,\beta_i) = \bar{w}_{[m]}(x) = \bar{w}_{[m]}(y) = w_{[m]}(j,\,\beta_j)$ が分かる．

$i = j$ ならば $x = y$ は自明なので，$i < j$ とする．このとき，エピ射であることの証明から $\gamma \coloneqq w_{[m]}(i,\,\beta_i) = w_{[m]}(j,\,\beta_j) \in \partial\Delta^n\big([m]\big)$ の像は $[n]\setminus\{i<j\}$ に収まっている．i.e. γ は

$$\begin{tikzcd} {[m]} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, dashed, "\bar{\gamma}"'] & {[n]} \\ & {[n]\setminus\{i<j\}} \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

と分解する．$d_j^n d_i^{n-1}\big([n-2]\big) = d_i^n d_{j-1}^{n-1}\big([n-2]\big) = [n]\setminus\{i<j\}$ なので，ある $\big((i<j),\,\alpha\big) \in \coprod_{0\le k<l\le n} \Delta^{n-2}\big([m]\big)$ が存在して $(i,\,\beta_i) = u_{[m]}\big((i<j),\,\gamma\big)$，$(j,\,\beta_j) = v_{[m]}\big((i<j),\,\gamma\big)$ と書ける．よって

$$x = q_{[m]}(i,\,\beta_i) = (q\circ u)_{[m]}\big((i<j),\,\gamma\big) = (q\circ v)_{[m]}\big((i<j),\,\gamma\big) = q_{[m]}(j,\,\beta_j) = y$$

が言えた．

■

系 1.3: 境界の公式

$\forall K \in \mathrm{Ob}(\mathbf{SimpSet})$ に対して，写像

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}(\partial\Delta^n,\, K) \longrightarrow \left\{ (\sigma_0,\, \dots,\, \sigma_n) \in \prod_{0\le k\le n} K_{n-1} \;\middle|\; 0 \le \forall i < j \le n,\; \partial_i^{n-1}(\sigma_j) = \partial_{j-1}^{n-1}(\sigma_i) \right\},$$

$$f \longmapsto (f \circ d_0^n,\, \dots,\, f \circ d_n^n)$$

は全単射である．

<u>**証明**</u> 命題 1.6 より，集合

$$\begin{aligned} X &:= \left\{ \bar{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}\left(\coprod_{0\le k\le n} \Delta^{n-1},\, K \right) \;\middle|\; \bar{f}\circ u = \bar{f}\circ v \right\} \\ &= \left\{ \bar{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}\left(\coprod_{0\le k\le n} \Delta^{n-1},\, K \right) \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall [m]\in\mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}}),\, \forall \big((i<j),\, \alpha\big) \in \coprod_{0\le k<l\le n} \Delta^{n-2}\big([m]\big), \\ \bar{f}_{[m]}\big(j,\, d_i^{n-1}\circ\alpha\big) = \bar{f}_{[m]}\big(i,\, d_{j-1}^{n-1}\circ\alpha\big) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

の任意の元 $\bar{f}$ に対してコイコライザの普遍性の可換図式

$$\begin{tikzcd} \coprod_{0\le i<j\le n} \Delta^{n-2} \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & \coprod_{0\le k\le n} \Delta^{n-1} \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "\bar{f}"'] & \partial\Delta^n \arrow[d, dashed, "\exists! f"] \\ & & K \end{tikzcd}$$

が成り立つ．i.e. 写像

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}(\partial\Delta^n,\, K) \longrightarrow X,$$

$$f \longmapsto f\circ w = \left\{ \big((f_{[m]}\circ d_k^n)_*\big)_{0\le k\le n} \colon \coprod_{0\le k\le n} \Delta^{n-1}([m]) \longrightarrow K_m \right\}_{[m]\in\mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})}$$

は全単射である．命題 1.1-(2) と米田の補題から

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}\left(\coprod_{0\le k\le n} \Delta^{n-1},\, K \right) \cong \prod_{0\le k\le n} \mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}(\Delta^{n-1},\, K) \cong \prod_{0\le k\le n} K_{n-1}$$

が言えるので，示された． ■

命題 1.7: コイコライザとしての角

角 Λ_i^n は圏 **SimpSet** におけるコイコライザである：

$$\begin{tikzcd} \coprod_{\substack{j,\, k\in[n]\setminus\{i\} \\ j<k}} \Delta^{n-2} \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & \coprod_{l\in[n]\setminus\{i\}} \Delta^{n-1} \arrow[r, "w"] & \Lambda_i^n \end{tikzcd}$$

<u>**証明**</u> 命題 1.6 とほぼ同様である． ■

系 1.4: 角の公式

$\forall K \in \mathrm{Ob}(\mathbf{SimpSet})$ に対して，写像

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}\left(\Lambda_i^n,\, K\right) &\longrightarrow \left\{ (\sigma_0,\, \dots,\, \sigma_{i-1},\, \sigma_{i+1},\, \dots,\, \sigma_n) \in \prod_{k\in[n]\setminus\{i\}} K_{n-1} \,\middle|\, \substack{\forall j,\, k\in[n]\setminus\{i\} \text{ s.t. } j<k,\\ \partial_j^{n-1}(\sigma_k)=\partial_{k-1}^{n-1}(\sigma_j)} \right\},\\ f &\longmapsto \left(f\circ d_0^n,\, \dots,\, f\circ d_{i-1}^n,\, f\circ d_{i+1}^n,\, \dots,\, f\circ d_n^n\right)\end{aligned}$$

は全単射である．

<u>証明</u> ■

命題 1.8: 角と背骨の幾何学的実現

幾何学的実現は角，背骨を保つ．

<u>証明</u> $|\Delta^n| = \Delta^n_{\mathrm{top}}$ であることに注意する． ■

1.3　脈体・Kan 複体・$(\infty,\, 1)$-圏

$[n] \in \mathrm{Ob}(\Delta)$ に対して，

- $\forall i \in [n]$ を対象とする
- Hom 集合は

$$\mathrm{Hom}_{[n]}\left(i,\, j\right) := \begin{cases} \{*\}, & i \le j \\ \emptyset, & i > j \end{cases}$$

とする

ことにより $[n]$ 自身が圏になる．

定義 1.22: 脈体

- 圏 $\mathcal{C}$ の**脈体** (nerve) とは，以下で定義される単体的集合

$$\mathrm{N}(\mathcal{C})\colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

のこと：

  - $\forall [n] \in \mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})$ に対して

$$\mathrm{N}(\mathcal{C})([n]) = \mathrm{Fun}([n],\, \mathcal{C})$$

を対応付ける

  - 圏 Δ^{op} における任意の射 $[n] \xrightarrow{\alpha} [m]$ に対して写像

$$\mathrm{N}\,(\mathcal{C})\,(\alpha) \coloneqq \alpha^*\colon \mathrm{Fun}([n],\, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Fun}([m],\, \mathcal{C}),\ G_n \longmapsto G_n \circ \alpha$$

を対応付ける

- **脈体関手** (nerve functor) とは，以下で定義される関手

$$\mathrm{N}\colon \mathbf{Cat} \longrightarrow \mathbf{SimpSet}$$

のこと．

  - $\forall \mathcal{C} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $\mathrm{N}(\mathcal{C}) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{SimpSet})$ を対応づける．
  - 任意の関手 $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ に対して自然変換

$$\mathrm{N}\,(F) : \mathrm{N}\,(\mathcal{C}) \Longrightarrow \mathrm{N}\,(\mathcal{D}),$$
$$\text{w/}\ \ \mathrm{N}\,(F) \coloneqq \left\{\mathrm{N}(F)_{[n]}\colon \mathrm{Fun}([n],\, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Fun}([n],\, \mathcal{D}),\ G_n \longmapsto F \circ G_n\right\}_{[n]\in\mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})}$$

を対応付ける

圏 $[n]$ の射の定義を思い出すと，$\mathrm{N}(\mathcal{C})_n \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ の要素は $\mathcal{C}$ における図式

$$X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} X_n \tag{1.3.1}$$

により同定されることがわかる．このことから，脈体の morphism-morphism 対応は図式の対応

$$(X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_n) \longmapsto (X_{\alpha(0)} \to X_{\alpha(1)} \to \cdots \to X_{\alpha(m)})$$

と理解できる．

命題 1.9: 脈体関手は忠実充満

脈体関手は忠実充満関手である．

証明

$$\theta\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}\,(\mathcal{C},\, \mathcal{D}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}\,\big(\mathrm{N}(\mathcal{C}),\, \mathrm{N}(\mathcal{D})\big),\ F \longmapsto \mathrm{N}(F)$$

が全単射であることを示せば良い．

単射

関手 $F, G\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ が $\mathrm{N}(F) = \mathrm{N}(G)$ を充たすとする．(1.3.1) により $\mathcal{C}$ における任意の図式

$$X \xrightarrow{f} Y$$

を $\mathrm{N}(\mathcal{C})_1$ の元と見做すことができるが，仮定より圏 $\mathcal{D}$ において

$$\begin{aligned} &\mathrm{N}(F)_{[1]}(X \xrightarrow{f} Y) = \mathrm{N}(G)_{[1]}(X \xrightarrow{f} Y) \\ \iff \quad &\bigl(F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y)\bigr) = \bigl(G(X) \xrightarrow{G(f)} G(Y)\bigr) \end{aligned}$$

が成り立つ．i.e. $F = G$ である．

全射

$\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}\bigl(\mathrm{N}(\mathcal{C}), \mathrm{N}(\mathcal{D})\bigr)$ を 1 つ固定する．f は自然変換だから，$\forall n \geq 0$ に対して自然変換 $f_{[n]}\colon \mathrm{N}(\mathcal{C})_n \longrightarrow \mathrm{N}(\mathcal{D})_n$ が定まる．(1.3.1) より $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を $\mathrm{N}(\mathcal{C})_0$ の要素と見做し，圏 $\mathcal{C}$ における任意の射 $X \xrightarrow{u} Y$ を $\mathrm{N}(\mathcal{C})_1$ の要素と見做すことができる．すると自然変換 f により

$$f_{[0]}(X),\ f_{[0]}(Y) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$$

が対応付く．その上 f が自然変換であることから面写像 $d_i^1\colon [0] \longrightarrow [1]$ との間に可換図式

$$\begin{tikzcd} \mathrm{N}(\mathcal{C})_1 \arrow[r, "f_{[1]}"] \arrow[d, "\mathrm{N}(\mathcal{C})(d_i^1)=\partial_i^1"'] & \mathrm{N}(\mathcal{D})_1 \arrow[d, "\mathrm{N}(\mathcal{D})(d_i^1)=\partial_i^1"] \\ \mathrm{N}(\mathcal{C})_0 \arrow[r, "f_{[0]}"'] & \mathrm{N}(\mathcal{D})_0 \end{tikzcd}$$

が成り立つ．よって

$$\begin{aligned} \partial_0^1 \circ f_{[1]}\bigl(X \xrightarrow{u} Y\bigr) &= f_{[0]} \circ \partial_0^1\bigl(X \xrightarrow{u} Y\bigr) \\ &= f_{[0]}(Y), \\ \partial_1^1 \circ f_{[1]}\bigl(X \xrightarrow{u} Y\bigr) &= f_{[0]} \circ \partial_1^1\bigl(X \xrightarrow{u} Y\bigr) \\ &= f_{[0]}(X) \end{aligned}$$

が言える．i.e. $f_{[1]}(u)$ は圏 $\mathcal{D}$ における射 $f_{[0]}(X) \xrightarrow{f_{[1]}(u)} f_{[0]}(Y)$ である．ここで，対応 $F_f\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ を

- $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $f_{[0]}(X) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ を対応付ける
- $X \xrightarrow{\forall u} Y$ に対して $f_{[0]}(X) \xrightarrow{f_{[1]}(u)} f_{[0]}(Y)$ を対応付ける

ものとして定義する．もし F_f が関手ならば明らかに $\theta(F_f) = f$ であるから，F_f が関手であることを示せば良い：

(fun-1)

(1.3.1) により圏 $\mathcal{C}$ における図式

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$$

を $\mathrm{N}(\mathcal{C})_2$ の要素と見做すことができる．f は自然変換なので，面写像 $d_i^2\colon [2] \longrightarrow [1]$ について可換図式

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{N}(\mathcal{C})_2 \arrow[r, "f_{[2]}"] \arrow[d, "\mathrm{N}(\mathcal{C})(d_i^2)=\partial_i^2"'] & \mathrm{N}(\mathcal{D})_2 \arrow[d, "\mathrm{N}(\mathcal{D})(d_i^2)=\partial_i^2"] \\
\mathrm{N}(\mathcal{C})_1 \arrow[r, "f_{[1]}"'] & \mathrm{N}(\mathcal{D})_1
\end{tikzcd}
$$

が成り立つ．よって

$$
\begin{aligned}
\partial_0^2 \circ f_{[2]}(X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z) &= f_{[1]} \circ \partial_0^2(X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z) \\
&= f_{[1]}(Y \xrightarrow{v} Z) \\
&= \big(F_f(Y) \xrightarrow{F_f(v)} F_f(Z)\big), \\
\partial_2^2 \circ f_{[2]}(X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z) &= f_{[1]} \circ \partial_2^2(X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z) \\
&= f_{[1]}(X \xrightarrow{u} Y) \\
&= \big(F_f(X) \xrightarrow{F_f(u)} F_f(Y)\big)
\end{aligned}
$$

が分かった．i.e.

$$
f_{[2]}(X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z) = \big(F_f(X) \xrightarrow{F_f(u)} F_f(Y) \xrightarrow{F_f(v)} F_f(Z)\big)
$$

である．故に

$$
\begin{aligned}
\big(F_f(X) \xrightarrow{F_f(v)\circ F_f(u)} F_f(Y)\big) &= \partial_1^2 \circ f_{[2]}\big(X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z\big) \\
&= f_{[1]} \circ \partial_1^2\big(X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z\big) \\
&= f_{[1]}\big(X \xrightarrow{v\circ u} Z\big) \\
&= \big(F_f(X) \xrightarrow{F_f(v\circ u)} F_f(Y)\big)
\end{aligned}
$$

i.e.

$$
F(v \circ u) = F(v) \circ F(u)
$$

が示された．

(fun-2)

f が自然変換なので縮退写像 $s_0^0 \colon [1] \longrightarrow [0]$ について可換図式

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{N}(\mathcal{C})_1 \arrow[r, "f_{[1]}"] & \mathrm{N}(\mathcal{D})_1 \\
\mathrm{N}(\mathcal{C})_0 \arrow[r, "f_{[0]}"] \arrow[u, "\mathrm{N}(\mathcal{C})(s_0^0)=\sigma_0^0"] & \mathrm{N}(\mathcal{D})_0 \arrow[u, "\mathrm{N}(\mathcal{D})(s_0^0)=\sigma_0^0"']
\end{tikzcd}
$$

が成り立つ．(1.3.1) を使うと，これは $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \mathrm{N}(\mathcal{C})_0$ に対して

$$
\begin{aligned}
f_{[1]} \circ \sigma_0^0(X) &= f_{[1]}(X \xrightarrow{\mathrm{Id}_X} X) \\
&= \big(F_f(X) \xrightarrow{F_f(\mathrm{Id}_X)} F_f(X)\big) \\
&= \sigma_0^0 \circ f_{[0]}(X) \\
&= \big(F_f(X) \xrightarrow{\mathrm{Id}_{F_f(X)}} F_f(X)\big)
\end{aligned}
$$

を意味するので

$$F_f(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$$

が示された．

■

定義 1.23: Kan 複体

Kan 複体 (Kan complex) とは，単体的集合

$$K\colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

であって以下の性質を充たすもののこと：

(Kan)

$\forall n \geq 1,\ 0 \leq \forall j \leq n$ および $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}(\Lambda^n_j,\ K)$ に対して，以下の図式を可換にする自然変換 $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}(\Delta^n,\ K)$ が存在する：

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_j \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & K \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed, "u"'] & \end{tikzcd}$$

単体的集合であって，内部角 i.e. $\forall n \geq 2,\ 0 < \forall j < n$ についてのみ **(Kan)** を充たすもののことを**弱 Kan 複体** (weak Kan complex) と呼ぶ．

定義 1.24: ∞-圏

- **$(\infty, 1)$-圏**とは，単体的集合であって弱 Kan 複体になっているもののことを言う．$(\infty, 1)$-圏の関手とは，**SimpSet** の射のこと．
- **∞-groupoid** とは，単体的集合であって Kan 複体になっているもののこと

以下では $(\infty, 1)$-圏のことを **∞-圏**と呼ぶ．

定理 1.5: Kan 条件と脈体

任意の単体的集合 $K\colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ に対して以下は同値である：

(1) K は弱 Kan 条件を充たす一意解を持つ

(2) K は背骨の包含 $I^n \hookrightarrow \Delta^n$ を一意に持ち上げる．

(3) K はある圏の脈体と同型である．

証明 [?, p.20, Theorem 1.1.52] を参照． ■

命題 1.10: 脈体が ∞-groupoid になる必要十分条件

圏 $\mathcal{C}$ の脈体が ∞-groupoid になる必要十分条件は，$\mathcal{C}$ が groupoid であること．

<u>証明</u> [?, p.23, Lemma 1.1.54] ■

1.3.1 単体的ホモトピー

単体的集合の圏 $\mathbf{SimpSet}$ はモノイダル圏の構造を持つ．実際，単体的集合 $S, T\colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ に対して，新たな単体的集合

$$S \otimes T\colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets},\ [n] \longmapsto S_n \times T_n$$

がテンソル積 $\otimes\colon \mathbf{SimpSet} \times \mathbf{SimpSet} \longrightarrow \mathbf{SimpSet}$ を定めている．

定義 1.25: 単体的ホモトピー

$X, Y, K \in \mathrm{Ob}(\mathbf{SimpSet})$ を，K が X の単体的部分集合となるようにとる．包含射 $i\colon K \hookrightarrow X$ をとる．

- $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}(X, Y)$ を繋ぐ**ホモトピー**とは，**$\mathbf{SimpSet}$ の射** $\eta \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}(X \times \Delta^1, Y)$ であって，以下の $\mathbf{SimpSet}$ の図式を可換にするもののこと：

$$\begin{tikzcd} X \cong X \times \Delta^0 \arrow[r, hook, "\mathrm{Id}\times d^1_{1*}"] \arrow[dr, "f"'] & X \times \Delta^1 \arrow[d, "\eta"] & X \times \Delta^0 \arrow[l, hook', "\mathrm{Id}\times d^1_{0*}"'] \arrow[dl, "g"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

f, g を繋ぐホモトピーが存在するとき，f, g は互いに**ホモトピック**であるという．

- $f \circ i = gcirci =: \alpha$ とおく．ホモトピー $\eta \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}(X \times \Delta^1, Y)$ が f と g の間の ***K* に関する相対ホモトピー** (homotopy from f to g (rel K)) であるとは，上の可換図式に加えて

$$\begin{tikzcd} K \times \Delta^1 \arrow[r, hook, "i\times\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}"'] & X \times \Delta^1 \arrow[d, "\eta"] \\ K \arrow[r, "\alpha"'] & Y \end{tikzcd}$$

が成り立つことを言う．

より具体的には，f, g を繋ぐ**単体的ホモトピー** (simplicial homotopy) とは $\mathbf{Sets}$ の射の族

$$\{h_i\colon X_n \longrightarrow Y_{n+1}\}_{i=0,\ldots,n,\, n\geq 0}$$

であって以下を充たすもののこと：

$$\begin{aligned} \partial_0 \circ h_0 &= f_n, \\ \partial_{n+1} \circ h_n &= g_n, \\ \partial_i \circ h_j &= \begin{cases} h_{j-1} \circ \partial_i, & i < j \\ \partial_i \circ h_{i-1}, & i = j \neq 0 \\ h_j \circ \partial_{i-1}, & i > j+1 \end{cases} \\ \sigma_i \circ h_j &= \begin{cases} h_{j+1} \circ \sigma_i, & i \leq j \\ h_j \circ \sigma_{i-1}, & i > j \end{cases} \end{aligned}$$

一見するとホモトピーと単体的ホモトピーは別のものに見えるが，実は同じものである．単体的ホモトピー $\{h_i \colon X_n \longrightarrow Y_{n+1}\}_{i=0,\,\dots,\,n,\,n\geq 0}$ が与えられたとする．このとき **SimpSet** の射 $\eta \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}(X \times \Delta^1,\, Y)$ を

$$\begin{aligned} \eta_0 &\coloneqq \partial_0 \circ h_0, \\ \eta_{n+1} &\coloneqq \partial_{n+1} \circ h_n, \\ \eta_j &\coloneqq \partial_j \circ h_j \quad (1 \leq j \leq n) \end{aligned}$$

と定義すると，和の普遍性の図式によって $\eta \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}(X \times \Delta^1,\, Y)$ が定まる．

命題 1.11: ∞-groupoid とホモトピー

$X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{SimpSet})$ が ∞-groupoid ならば，ホモトピックは $\mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}(X,\, Y)$ の上の同値関係になる．ホモトピック (rel $K \subset X$) も同値関係である．

証明 [?, p.26, COROLLARY 6.2] ■

∞-groupoid X を与え，$* \in X_0$ を 1 つ固定する．このとき集合としての同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}\big((\Delta^n,\, \partial\Delta^n),\, (X,\, *)\big) \cong \left\{\, x \in X_n \;\middle|\; 0 \leq \forall i \leq n,\ \partial_i^n(x) = \sigma_0^{n-2} \circ \cdots \circ \sigma_0^0(*) \,\right\} =: Z_n(X,\, *)$$

がある [?]．$a,\, b \in X_n$ を繋ぐ**ホモトピー**とは，この場合 $y \in X_{n+1}$ であって

$$\partial_i^{n+1}(y) = \begin{cases} \sigma_0^{n-1} \circ \cdots \circ \sigma_0^0(*), & i < n \\ a, & i = n \\ b, & i = n+1 \end{cases}$$

を充たすもののことである．ホモトピック $\sim$ は $Z_n(X,\, *)$ 上の同値関係になる [?, p.27, Lemma 3.28].

$a,\, b \in Z_n(X,\, *)$ に対して，系 1.4，命題 1.4-(1) および Kan 条件によって

$$\begin{tikzcd} \Lambda_n^{n+1} \arrow[r, "{\left((\sigma_0)^n(*),\, \dots,\, (\sigma_0)^n(*),\, a,\, b\right)}"] \arrow[d, hook] & X \\ \Delta^{n+1} \arrow[ur, dashed, "\exists a \star b"'] & \end{tikzcd}$$

として $a\star b\in X_{n+1}$ をとってくる．

$$\boldsymbol{\pi_n^{\Delta}(X,\,*)} \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathbf{SimpSet}}\big((\Delta^n,\,\partial\Delta^n),\,(X,\,*)\big)/\simeq\,\cong Z_n(X,\,*)/\sim$$

とおく．

命題 1.12: 単体的ホモトピー群

写像

$$\pi_n^{\Delta}(X,\,*)\times\pi_n^{\Delta}(X,\,*)\longrightarrow\pi_n^{\Delta}(X,\,*),\ ([a],\,[b])\longmapsto[\partial_n^{n+1}(a\star b)]$$

によって $\pi_n^{\Delta}(X,\,*)$ は群になる．これを**単体的ホモトピー群**と呼ぶ．

証明 ■

定理 1.6: 単体的ホモトピー群と幾何学的実現

$$\pi_n^{\Delta}(X,\,*)\cong\pi_n(|X|,\,|*|)$$

証明 [?, p.64, PROPOSITION 11.1] ■

定義 1.26: homotopy coherent な脈体

1.3.2 ∞-トポス

∞-groupoid のなす圏を $\boldsymbol{\infty}\mathbf{Grpd}$ と書く．

定義 1.27: ∞-前層

K を $(\infty,\,1)$-圏とする．K 上の $(\infty,\,1)$**-前層**とは，$(\infty,\,1)$-圏の関手

$$P\colon K^{\mathrm{op}}\longrightarrow\boldsymbol{\infty}\mathbf{Grpd}$$

のこと．$(\infty,\,1)$-前層のなす $(\infty,\,1)$-圏とは，$(\infty,\,1)$-圏の関手の圏

$$\mathrm{PSh}_{(\infty,\,1)}(K)\coloneqq\mathrm{Fun}_{(\infty,\,1)}(K^{\mathrm{op}},\,\boldsymbol{\infty}\mathbf{Grpd})$$

のこと．

! 以降では，$(\infty,\,1)$-前層のことを ∞-前層と呼ぶ．

命題 1.13: ∞-前層の圏のモデル

$\mathcal{C}$ を **SimpSet**-豊穣圏であって，Kan 複体を Hom 対象に持つものとする．
このとき homotopy coherent な脈体 $\mathrm{N_{hc}}$ に対して

$$\mathrm{PSh}_{(\infty,1)}\left(\mathrm{N_{hc}}(\mathcal{C})\right) \cong \mathrm{N_{hc}}\left([\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{SimpSet}_{\mathrm{Quillen}}]^{\circ}_{\mathrm{proj}}\right)$$

が成り立つ．

証明 https://ncatlab.org/nlab/show/%28infinity%2C1%29-category+of+%28infinity%2C1%29-presheaves を参照. ■

[?]，[?, p.9] に従い $(\infty, 1)$-トポスの定義を概観する[*11].

[*11] ここでの定義は不完全なので，詳細は [?]，[?] などを参照.

定義 1.28: ∞-トポス

K を $(\infty, 1)$-圏とする．

K 上の **(∞, 1)-トポス**とは，$(\infty, 1)$-前層のなす $(\infty, 1)$-圏 $\mathrm{PSh}_{(\infty, 1)}(K)$ の部分 $(\infty, 1)$-圏

$$i\colon \mathbf{H} \hookrightarrow \mathrm{PSh}_{(\infty, 1)}(K)$$

であって，包含 $(\infty, 1)$-関手 i が有限極限を保つ左随伴 $(\infty, 1)$-関手

$$\begin{tikzcd} \mathbf{H} \arrow[r, bend left, "i"] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathrm{PSh}_{(\infty, 1)}(K) \arrow[l, bend left, "\mathrm{lex}"] \end{tikzcd}$$

を持つようなもののこと．

もしくは，余完全[a]な $(\infty, 1)$-圏 $\mathbf{H}$ であって以下の公理を充たすもののこと [?, p.9, Definition5.4]：

(T1) $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(X, Y)$ および $\mathbf{H}$ における図式 $D\colon I \longrightarrow \mathbf{H}_{/Y}$ において，自然な同型

$$\mathrm{colim}_{i\in I}\bigl(X \times_Y D(i)\bigr) \cong X \times_Y \mathrm{colim}_{i\in I} D(i)$$

がある[b]．

(T2) $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{H})$ に対して，図式 $Y \longleftarrow \emptyset \longrightarrow X$ の押し出し

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & X \amalg Y \end{tikzcd}$$

は図式 $Y \longrightarrow X \amalg Y \longleftarrow X$ の引き戻しでもある．i.e. 任意の和が disjoint である．

(T3) $\mathbf{H}$ における任意の groupoid object は delooping を持つ．

[a] 正確には **presentable** [?, p.372, Def5.5.0.18]

[b] $\times_Y$ は引き戻し

[?] は命題 1.13 を使って ∞-トポスを定義している．