第 1 章

モノイダル圏・フュージョン圏・高次群

この章では標数 0 の体 $\mathbb{K}$ のみを考える．

1.1 加法圏

定義 1.1: 加法圏・アーベル圏

圏 $\mathcal{C}$ が体 $\mathbb{K}$ 上の**加法圏** (additive category) であるとは，以下を充たすこと：

(add-1)

任意の Hom 集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が可換群の構造をもち，かつ射の合成

$$\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

が群演算に関して双加法的である．

(add-2)

零対象[a] (zero object) $\mathbf{0} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が存在し，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{0}, X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(, \mathbf{0}) = 0$ を充たす[b].

(add-3)

有限の余積が常に存在する．

加法圏 $\mathcal{C}$ は，$\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に関して $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が $\mathbb{K}$-ベクトル空間の構造を持ち，かつ合成 $\circ$ が $\mathbb{K}$-双線形写像でもあるとき，**$\mathbb{K}$-線形** ($\mathbb{K}$-linear) であると言われる．

[a] 始対象かつ終対象

[b] 最右辺は **(add-1)** の意味で零ベクトル空間.

加法圏 $\mathcal{C}$ は，以下の条件を充たすとき**アーベル圏** (abelian category) と呼ばれる：

(Ab-1)

任意の射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が核 $\ker f\colon \mathrm{Ker}\, f \longrightarrow X$ および余核 $\mathrm{coker}\, f\colon Y \longrightarrow \mathrm{Coker}\, f$ を持つ．

(Ab-2)

$\mathrm{Ker}\, f = \mathbf{0}$ ならば $f = \ker(\mathrm{coker}\, f)$，かつ $\mathrm{Coker}\, f = \mathbf{0}$ ならば $f = \mathrm{coker}(\ker f)$

定義 1.2: 加法的関手・完全関手

加法圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ の間の関手 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ が**加法的** (additive) であるとは，$\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して定まる写像

$$F_{X,Y}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(X), F(Y)\big),\ f \longmapsto F(f)$$

が可換群の準同型であることを言う．特に加法圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ が $\mathbb{K}$-線形で，かつ $\forall X, Y \in \mathcal{C}$ に対して $F_{X,Y}$ が $\mathbb{K}$-線型写像でもあるとき，F は **$\mathbb{K}$-線形** ($\mathbb{K}$-linear) であると言う．

アーベル圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ の間の加法的関手 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ を与える．

- F が**左完全** (left exact) であるとは，$\mathcal{C}$ の任意の短完全列 $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ に対して
$$0 \longrightarrow F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z)$$
が $\mathcal{D}$ の完全列になること．
- F が**右完全** (right exact) であるとは，$\mathcal{C}$ の任意の短完全列 $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ に対して
$$F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z) \longrightarrow 0$$
が $\mathcal{D}$ の完全列になること．
- F が**完全** (exact) であるとは，F が右完全かつ左完全であること．

【例 1.1.1】表現の圏

G を群とする．このとき

- G の表現 (ρ, V) を対象とする
- G-同変な $\mathbb{K}$-線型写像 $(\rho, V) \xrightarrow{f} (\rho', V')$ を射とする

圏を $\mathbf{Rep}\,(G)$ と書く．$\mathbf{Rep}\,(G)$ はアーベル圏である．

定義 1.3: 単純・半単純

- アーベル圏 $\mathcal{C}$ の対象 $X \in \mathcal{C}$ が**単純** (simple) であるとは，任意のモノ射 $i\colon U \hookrightarrow X$ が 0 であるか同型射であることを言う．
- アーベル圏 $\mathcal{C}$ が**半単純** (semisimple) であるとは，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が単純対象の有限余積と同型であることを言う．i.e. 単純対象の族 $\left\{V_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})\right\}_{i\in I}$ および有限個を除いて 0 であるような非負整数の族 $\left\{N_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\right\}_{i\in I}$ が存在して

$$X \cong \bigoplus_{i\in I} N_i X_i$$

が成り立つこと．

定義 1.4: 有限性

アーベル圏 $\mathcal{C}$ とその対象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を与える．

- X が**有限長** (finite length) を持つとは，有限のフィルトレーション

$$0 = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_{n-1} \subset X_n = X$$

であって $X_i/X_{i-1} \coloneqq \mathrm{Coker}(X_{i-1} \hookrightarrow X_i) \quad (\forall i)$ が単純対象であるようなもの（**Jordan-Hölder 列**と言う）が存在することを言う．このときの n を X の**長さ** (length) と呼ぶ[a]．

以下，アーベル圏 $\mathcal{C}$ は $\mathbb{K}$-線形であるとする．

- $\mathcal{C}$ が**局所有限** (locally finite) であるとは，以下の 2 条件を充たすこと：
  (lFin-1) $\forall X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，$\mathbb{K}$-ベクトル空間 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, Y)$ が有限次元
  (lFin-2) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が有限長を持つ．
- $\mathcal{C}$ が**有限** (finite) であるとは，以下の 4 条件を充たすこと：
  (Fin-1) $\forall X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，$\mathbb{K}$-ベクトル空間 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, Y)$ が有限次元
  (Fin-2) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が有限長を持つ．
  (Fin-3) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が射影的被覆[b]を持つ．
  (Fin-4) 単純対象の同型類が有限個である．

[a] Jordan-Hölder の定理 [?, THEOREM 1.5.4, p.5] から，X の任意の Jordan-Hölder 列は存在すれば同一の長さを持つ．

[b] $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が**射影的** (projective) であるとは，関手 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\, \text{-})$ が完全関手であることを言う．$X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の**射影的被覆** (projective cover) とは，射影的対象 $P_X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ とエピ射 $p_X : P_X \longrightarrow X$ の組み $(P_X,\, p_X)$ であって，任意の射影的対象 $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ およびエピ射 $p\colon P \longrightarrow X$ に対してあるエピ射 $h\colon P \longrightarrow P_X$ が存在して $p_X \circ h = p$ を充たすようなもののこと．

1.2 モノイダル圏

これまでも何回か登場したが，モノイダル圏についてまとめておく：

定義 1.5: モノイダル圏

モノイダル圏 (monidal category) は，以下の 5 つのデータからなる：

- 圏 $\mathcal{C}$
- **テンソル積** (tensor product) と呼ばれる関手 $\otimes\colon \mathcal{C}\times\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}$
- **単位対象** (unit object) $I\in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- **associator** と呼ばれる自然同値

$$\left\{a_{X,\,Y,\,Z}\colon (X\otimes Y)\otimes Z \xrightarrow{\cong} X\otimes (Y\otimes Z)\right\}_{X,\,Y,\,Z\in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

- **left/right unitors** と呼ばれる自然同値

$$\left\{l_X\colon I\otimes X\xrightarrow{\cong} X\right\}_{X\in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})},$$
$$\left\{r_X\colon X\otimes I\xrightarrow{\cong} X\right\}_{X\in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは $\forall X,\,Y,\,Z,\,W\in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について以下の 2 つの図式を可換にする：

(triangle diagram)

$$\begin{tikzcd}
(X\otimes I)\otimes Y \arrow[rr, "a_{X,\,I,\,Y}"] \arrow[dr, "r_X\otimes \mathrm{Id}_Y"'] & & X\otimes (I\otimes Y) \arrow[dl, "\mathrm{Id}_X\otimes l_Y"] \\
& X\otimes Y &
\end{tikzcd}$$

(pentagon diagram)

$$\begin{tikzcd}
& ((W\otimes X)\otimes Y)\otimes Z \arrow[dl, "a_{W\otimes X,\,Y,\,Z}"'] \arrow[r, "a_{W,\,X,\,Y}\otimes \mathrm{Id}_Z"] & (W\otimes (X\otimes Y))\otimes Z \arrow[d, "a_{W,\,X\otimes Y,\,Z}"] \\
(W\otimes X)\otimes (Y\otimes Z) \arrow[dr, "a_{W,\,X,\,Y\otimes Z}"'] & & W\otimes ((X\otimes Y)\otimes Z) \arrow[dl, "\mathrm{Id}_Z\otimes a_{X,\,Y,\,Z}"] \\
& W\otimes (X\otimes (Y\otimes Z)) &
\end{tikzcd}$$

モノイダル圏 $\mathcal{C}$ が**厳密** (strict) であるとは，$\forall X,\,Y,\,Z\in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$(X\otimes Y)\otimes Z = X\otimes (Y\otimes Z),$$
$$I\otimes X = X,\quad X\otimes I = X$$

が成り立ち，かつ $a_{X,Y,Z}$, l_X, r_X が恒等射であることを言う．

定義 1.5 で言うモノイダル圏を，**弱いモノイダル圏** (weak monoidal category) と呼ぶこともある．

【例 1.2.1】Cat のモノイダル構造

Cat を小圏と関手が成す圏とする．このとき，関手

$$\times \colon \mathbf{Cat} \times \mathbf{Cat} \longrightarrow \mathbf{Cat}$$

を $\mathrm{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) \coloneqq \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ により定めると，組み $(\mathbf{Cat}, \times, I)$ は厳密なモノイダル圏になる．ただし I はただ 1 つの対象 $\bullet$ を持ち，$\mathrm{Hom}_I(\bullet, \bullet) = \{\mathrm{Id}_\bullet\}$ とする圏である[a]

[a] これは **Cat** の終対象でもある．

定義 1.6: 双対

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ およびその任意の対象 $X, X^* \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を与える．X^* が X の**左双対** (left dual) であるとは，

- **coevaluation** と呼ばれる射

$$\mathrm{coev}_X^{\mathrm{L}} \colon I \longrightarrow X \otimes X^*$$

- **evaluation** と呼ばれる射

$$\mathrm{ev}_X^{\mathrm{L}} \colon X^* \otimes X \longrightarrow I$$

が存在して以下の図式を可換にすることを言う：

(zig-zag equations)

$$\begin{tikzcd}
I \otimes X \arrow[r, "\mathrm{coev}_X^{\mathrm{L}} \otimes \mathrm{Id}_X"] \arrow[dd, "r_X"'] & (X \otimes X^*) \otimes X \arrow[d, "a_{X, X^*, X}"] \\
& X \otimes (X^* \otimes X) \arrow[d, "\mathrm{Id}_X \otimes \mathrm{ev}_X^{\mathrm{L}}"] \\
X & X \otimes I \arrow[l, "r_X"]
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
X^* \otimes I \arrow[r, "\mathrm{Id}_{X^*} \otimes \mathrm{coev}^{\mathrm{L}}_X"] \arrow[dd, "l_{X^*}"'] & X^* \otimes (X \otimes X^*) \arrow[d, "a^{-1}_{X^*,\, X,\, X^*}"] \\
 & (X^* \otimes X) \otimes X^* \arrow[d, "\mathrm{ev}^{\mathrm{L}}_X \otimes \mathrm{Id}_{X^*}"] \\
X^* & I \otimes X^* \arrow[l, "l_{X^*}"]
\end{tikzcd}
$$

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ およびその任意の対象 X, ${}^*X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を与える．${}^*X$ が X の**右双対** (right dual) であるとは,

- 射

$$
\mathrm{coev}^{\mathrm{R}}_X \colon I \longrightarrow {}^*X \otimes X
$$

- 射

$$
\mathrm{ev}^{\mathrm{R}}_X \colon X \otimes {}^*X \longrightarrow I
$$

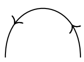
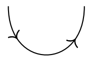
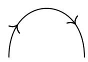
が存在して以下の図式を可換にすることを言う：

(zig-zag equations)

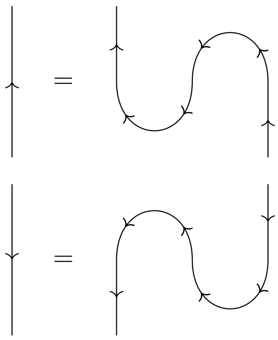
$$
\begin{tikzcd}
X \otimes I \arrow[r, "\mathrm{Id}_X \otimes \mathrm{coev}^{\mathrm{R}}_X"] \arrow[dd, "l_X"'] & X \otimes ({}^*X \otimes X) \arrow[d, "a^{-1}_{X,\, {}^*X,\, X}"] \\
 & (X \otimes {}^*X) \otimes X \arrow[d, "\mathrm{ev}^{\mathrm{R}}_X \otimes \mathrm{Id}_X"] \\
X & I \otimes X \arrow[l, "l_X"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
I \otimes {}^*X \arrow[r, "\mathrm{coev}^{\mathrm{R}}_X \otimes \mathrm{Id}_{{}^*X}"] \arrow[dd, "l_{X^*}"'] & ({}^*X \otimes X) \otimes {}^*X \arrow[d, "a^{-1}_{{}^*X,\, X,\, {}^*X}"] \\
 & {}^*X \otimes (X \otimes {}^*X) \arrow[d, "\mathrm{Id}_{{}^*X} \otimes \mathrm{ev}^{\mathrm{R}}_X"] \\
{}^*X & {}^*X \otimes I \arrow[l, "r_{X^*}"]
\end{tikzcd}
$$

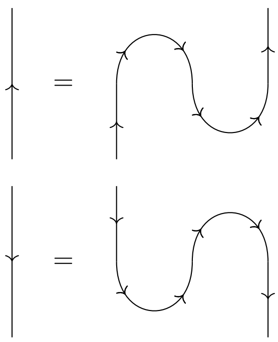
ストリング図式で書くときは

$\mathrm{coev}_X^{\mathrm{L}} :=$  $\mathrm{ev}_X^{\mathrm{L}} :=$  $\mathrm{coev}_X^{\mathrm{R}} :=$  $\mathrm{ev}_X^{\mathrm{R}} :=$ 

とする．ストリング図式において $\mathrm{coev}^{\mathrm{L}}$, $\mathrm{coev}^{\mathrm{R}}$ に対する **(zig-zag equations)** は



$\mathrm{coev}^{\mathrm{R}}$, $\mathrm{coev}^{\mathrm{L}}$ に対する **(zig-zag equations)** は



と書ける．

> ! X^* が X の左双対であるならば，X は X^* に関して $\mathrm{ev}_{X^*}^{\mathrm{R}} = \mathrm{ev}_X^{\mathrm{L}}$, $\mathrm{coev}_{X^*}^{\mathrm{R}} = \mathrm{coev}_X^{\mathrm{L}}$ とした右双対となっている．従って，左/右双対をもつ任意の X に対して ${}^*(X^*) \cong X \cong X \cong ({}^*X)^*$ が成り立つ．

定義 1.7: rigid なモノイダル圏

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ が **rigid** であるとは，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が左・右双対を持つことを言う．

定義 1.8: 組紐付きモノイダル圏

組紐付きモノイダル圏 (braided monoidal category) とは，以下の 2 つからなる：

- モノイダル圏 $(\mathcal{C},\, \otimes,\, I,\, a,\, l,\, r)$
- **組紐** (braiding) と呼ばれる自然同型

$$\left\{ b_{X,\,Y} \colon X \otimes Y \xrightarrow{\cong} Y \otimes X \right\}_{X,\,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは $\forall X,\, Y,\, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について以下の図式を可換にする：

(hexagon diagrams)

$$\begin{tikzcd}
X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "a^{-1}_{X,\,Y,\,Z}"] \arrow[d, "b_{X,\,Y \otimes Z}"] & (X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "b_{X,\,Y} \otimes \mathrm{Id}_Z"] & (Y \otimes X) \otimes Z \arrow[d, "a_{Y,\,X,\,Z}"] \\
(Y \otimes Z) \otimes X & Y \otimes (Z \otimes X) \arrow[l, "a^{-1}_{Y,\,Z,\,X}"] & Y \otimes (X \otimes Z) \arrow[l, "\mathrm{Id}_X \otimes b_{X,\,Z}"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "a_{X,\,Y,\,Z}"] \arrow[d, "b_{X \otimes Y,\,Z}"] & X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "\mathrm{Id}_X \otimes b_{Y,\,Z}"] & X \otimes (Z \otimes Y) \arrow[d, "a^{-1}_{X,\,Z,\,Y}"] \\
Z \otimes (X \otimes Y) & (Z \otimes X) \otimes Y \arrow[l, "a_{Z,\,X,\,Y}"] & (X \otimes Z) \otimes Y \arrow[l, "b_{X,\,Z} \otimes \mathrm{Id}_Y"]
\end{tikzcd}$$

組紐付きモノイダル圏 $\mathcal{C}$ であって，$\mathcal{C}$ の組紐が $b_{X,\,Y} = b^{-1}_{Y,\,X}$ を充たすもののことを**対称モノイダル圏** (symmetric monoidal category) と呼ぶ.

定義 1.9: モノイダル関手

2 つのモノイダル圏 $(\mathcal{C},\, \otimes_{\mathcal{C}},\, I_{\mathcal{C}},\, a^{\mathcal{C}},\, l^{\mathcal{C}},\, r^{\mathcal{C}})$, $(\mathcal{D},\, \otimes_{\mathcal{D}},\, I_{\mathcal{D}},\, a^{\mathcal{D}},\, l^{\mathcal{D}},\, r^{\mathcal{D}})$ の間の関手

$$F \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

が**弱いモノイダル関手** (lax monoidal functor) であるとは,

- 射

$$\varepsilon \colon I_{\mathcal{D}} \longrightarrow F(I_{\mathcal{C}})$$

- 自然変換

$$\left\{ \mu_{X,\,Y} \colon F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y) \longrightarrow F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \right\}_{X,\,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

があって，$\forall X,\, Y,\, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して以下の図式が可換になること：

(associatibity)

$$\begin{tikzcd}
(F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y)) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z) \arrow[r, "a^{\mathcal{D}}_{F(X),\,F(Y),\,F(Z)}"'] \arrow[d, "\mu_{X,\,Y} \otimes \mathrm{Id}_{F(Z)}"'] & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} (F(Y) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z)) \arrow[d, "\mathrm{Id}_{F(X)} \otimes \mu_{Y,\,Z}"] \\
F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z) \arrow[d, "\mu_{X \otimes_{\mathcal{C}} Y,\,Z}"'] & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y \otimes_{\mathcal{C}} Z) \arrow[d, "\mu_{X,\,Y \otimes_{\mathcal{C}} Z}"] \\
F((X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{C}} Z) \arrow[r, "F(a^{\mathcal{C}}_{X,\,Y,\,Z})"'] & F(X \otimes_{\mathcal{C}} (Y \otimes_{\mathcal{C}} Z))
\end{tikzcd}$$

(unitality)

$$\begin{tikzcd}
I_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathcal{D}} F(X) \arrow[r, "\varepsilon \otimes \mathrm{Id}_{F(X)}"] \arrow[d, "l^{\mathcal{D}}_{F(X)}"'] & F(I_{\mathcal{C}}) \otimes_{\mathcal{D}} F(X) \arrow[d, "\mu_{I_{\mathcal{C}},\,X}"] \\
F(X) & F(I_{\mathcal{C}} \otimes_{\mathcal{C}} X) \arrow[l, "F(l^{\mathcal{C}}_X)"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F(X) \otimes_{\mathcal{D}} I_{\mathcal{D}} \arrow[r, "\mathrm{Id}_{F(X)} \otimes \varepsilon"] \arrow[d, "r^{\mathcal{D}}_{F(X)}"'] & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(I_{\mathcal{C}}) \arrow[d, "\mu_{X,\,I_{\mathcal{C}}}"] \\
F(X) & F(X \otimes_{\mathcal{C}} I_{\mathcal{C}}) \arrow[l, "F(r^{\mathcal{C}}_X)"]
\end{tikzcd}$$

- 弱いモノイダル関手 F の ε と $\mu_{X,Y}$ が全て同型射ならば，F は**強いモノイダル関手** (strong monoidal functor) と呼ばれる．
- 弱いモノイダル関手 F の ε と $\mu_{X,Y}$ が全て恒等射ならば，F は**厳密なモノイダル関手** (strict monoidal functor) と呼ばれる．

定義 1.10: モノイダル自然変換

2 つのモノイダル圏 $(\mathcal{C},\, \otimes_{\mathcal{C}},\, I_{\mathcal{C}},\, a^{\mathcal{C}},\, l^{\mathcal{C}},\, r^{\mathcal{C}})$, $(\mathcal{D},\, \otimes_{\mathcal{D}},\, I_{\mathcal{D}},\, a^{\mathcal{D}},\, l^{\mathcal{D}},\, r^{\mathcal{D}})$ の間の 2 つの弱いモノイダル関手 $\Big(F_i\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D},\, \varepsilon_i\colon I_{\mathcal{D}} \longrightarrow F(I_{\mathcal{C}}),\, \big\{\mu_{i\,X,\,Y}\colon F_i(X) \otimes F_i(Y) \longrightarrow F_i(X \otimes Y)\big\}_{X,\,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}\Big)$ w/ $i = 1,\, 2$ の間の自然変換

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F_1"] \arrow[r, bend right, "F_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\tau"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

が**モノイダル自然変換** (monidal natural transformation) であるとは，$\forall X,\, Y \in \mathcal{C}$ に対して以下の図式が可換になること：

(テンソル積の保存)

$$\begin{tikzcd} F_1(X) \otimes_{\mathcal{D}} F_1(Y) \arrow[r, "\tau_X \otimes_{\mathcal{D}} \tau_Y"] \arrow[d, "\mu_{1\,X,Y}"'] & F_2(X) \otimes_{\mathcal{D}} F_2(Y) \arrow[d, "\mu_{2\,X,Y}"] \\ F_1(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \arrow[r, "\tau_{X \otimes_{\mathcal{C}} Y}"'] & F_2(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \end{tikzcd}$$

(単位対象の保存)

$$\begin{tikzcd} & I_{\mathcal{D}} \arrow[dl, "\varepsilon_1"'] \arrow[dr, "\varepsilon_2"] & \\ F_1(I_{\mathcal{C}}) \arrow[rr, "\tau_{I_{\mathcal{C}}}"'] & & F_2(I_{\mathcal{C}}) \end{tikzcd}$$

1.3 テンソル圏・フュージョン圏

! これまではモノイダル圏の対象を英大文字 $X,\, Y,\, Z,\, \ldots$ で，単位対象を I と書いてきたが，以下では対象を英小文字 $x,\, y,\, z,\, \ldots$ で，単位対象を 1 と書くことにする．

定義 1.11: 環圏

圏 $\mathcal{C}$ が**多重環圏** (multiring category) であるとは，以下の条件を充たすこと：

(mR-1) $\mathcal{C}$ は局所有限な $\mathbb{K}$-線形アーベル圏
(mR-2) $\mathcal{C}$ はモノイダル圏 $(\mathcal{C},\, \otimes,\, 1,\, a,\, l,\, r,\, \mathrm{ev}^{\mathrm{L}},\, \mathrm{coev}^{\mathrm{L}},\, \mathrm{ev}^{\mathrm{R}},\, \mathrm{coev}^{\mathrm{R}})$
(mR-3) 関手 $\otimes\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ が $\mathbb{K}$-線形かつ双完全

圏 $\mathcal{C}$ が**環圏** (ring category) であるとは，以下の条件を充たすこと：

(R-1) $\mathcal{C}$ は多重環圏
(R-2) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(1,\, 1) \cong \mathbb{K}$

定義 1.12: テンソル圏・フュージョン圏

圏 $\mathcal{C}$ が**多重テンソル圏** (multitensor category) であるとは，以下の条件を充たすこと：

(mT-1) $\mathcal{C}$ は局所有限な $\mathbb{K}$-線形アーベル圏

(mT-2) $\mathcal{C}$ は rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{C},\, \otimes,\, 1,\, a,\, l,\, r,\, \mathrm{ev}^{\mathrm{L}},\, \mathrm{coev}^{\mathrm{L}},\, \mathrm{ev}^{\mathrm{R}},\, \mathrm{coev}^{\mathrm{R}})$

(mT-3) 関手 $\otimes\colon \mathcal{C}\times\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ が $\forall x,\, y,\, z,\, w \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して定める写像 $\otimes_{x,y,z,w}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(z,\, w) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x\otimes z,\, y\otimes w)$ が $\mathbb{K}$-双線形

圏 $\mathcal{C}$ が**テンソル圏** (tensor category) であるとは，以下の条件を充たすこと：

(T-1) $\mathcal{C}$ は多重テンソル圏

(T-2) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(1,\, 1) \cong \mathbb{K}$

圏 $\mathcal{C}$ が**多重フュージョン圏** (multifusion category) であるとは，以下の条件を充たすこと：

(mFus-1) $\mathcal{C}$ は多重テンソル圏

(mFus-2) $\mathcal{C}$ は $\mathbb{K}$-線形アーベル圏として有限かつ半単純

圏 $\mathcal{C}$ が**フュージョン圏** (fusion category) であるとは，以下の条件を充たすこと：

(Fus-1) $\mathcal{C}$ はテンソル圏

(Fus-2) $\mathcal{C}$ は $\mathbb{K}$-線形アーベル圏として有限かつ半単純

命題 1.1: 多重テンソル圏のテンソル積は双完全

多重テンソル圏 $\mathcal{C}$ の関手 $\otimes\colon \mathcal{C}\times\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ は双完全である．

証明 [?, PROPOSITION 4.2.1., p.66] ■

命題 1.1 より，

$$\text{（多重）テンソル圏} \quad\Longrightarrow\quad \text{（多重）環圏}$$

が言える．

【例 1.3.1】圏 $\mathcal{C}_G$・$\mathbf{Vec}_G$

G を群とする．厳密なモノイダル圏 $\mathcal{C}_G$ を，

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_G) := G$
- $\forall g_1,\, g_2 \in G$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_G}(g_1,\, g_2) := \begin{cases} \mathrm{U}(1), & g_1 = g_2 \\ \emptyset, & g_1 \neq g_2 \end{cases}$$

- $g_1 \otimes g_2 := g_1 g_2$ かつ，$g_i \xrightarrow{\forall\theta_i} g_i$ に対して $\theta_1 \otimes \theta_2 := \theta_1\theta_2$
- $1 := 1_G$

- $a_{g_1, g_2, g_3} \coloneqq 1,\ l_g \coloneqq 1,\ r_g \coloneqq 1$

で定義する．

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ とする．厳密なモノイダル圏 $\mathbf{Vec}_G$ を,

- G-graded な $\mathbb{K}$-ベクトル空間

$$V = \bigoplus_{g \in G} V_g$$

  を対象とする．
- grading を保存する $\mathbb{K}$-線型変換

$$f\colon \bigoplus_{g\in G} V_g \longrightarrow \bigoplus_{g \in G} W_g \quad \text{s.t.} \quad \forall g \in G,\ f(V_g) \subset W_g$$

  を射とする．
- テンソル積 $\otimes\colon \mathbf{Vec}_G \times \mathbf{Vec}_G \longrightarrow \mathbf{Vec}_G$ は,

$$V \otimes W \coloneqq \bigoplus_{g \in G} \left(\bigoplus_{\substack{x,\, y \in G, \\ xy = g}} V_x \otimes_{\mathbb{K}} W_y \right)$$

  と定義する．
- 単位対象は $1 \coloneqq \mathbb{K}$ とする[a]
- $a_{g_1, g_2, g_3} \coloneqq 1,\ l_g \coloneqq 1,\ r_g \coloneqq 1$

によって定義する．G が有限群ならば $\mathcal{C}_G$ はフュージョン圏である．

[a] $1_G \in G$ 成分以外が全て 0

【例 1.3.2】圏 $\mathcal{C}_G^\alpha$・Vec_G^α

G を群とする．**【例 1.3.1】**の associator と unitors を非自明にしてみよう．今 $\alpha \in Z^3{}_{\mathrm{Grp}}\big(G;\, \mathrm{U}(1)\big)$ を 1 つ固定する[a]．

モノイダル圏 $\mathcal{C}_G^\alpha$ を,

$$\begin{aligned} a_{g_1, g_2, g_3} &\coloneqq \alpha(g_1,\, g_2,\, g_3), \\ l_g &\coloneqq \alpha(1,\, 1,\, g)^{-1}, \\ r_g &\coloneqq \alpha(g,\, 1,\, 1) \end{aligned}$$

とおくことにより定義する[b]．実際，コサイクル条件および U(1) の可換性により

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{Id}_{g_4} \otimes a_{g_1, g_2, g_3}) \circ a_{g_4, g_1 \otimes g_2, g_3} \circ (a_{g_4, g_1, g_2} \otimes \mathrm{Id}_{g_3}) \\
&= \alpha(g_1,\, g_2,\, g_3)\alpha(g_4,\, g_1 g_2,\, g_3)\alpha(g_4,\, g_1,\, g_2) \\
&= \alpha(g_4 g_1,\, g_2,\, g_3)\alpha(g_4,\, g_1,\, g_2 g_3) \\
&= \alpha(g_4,\, g_1,\, g_2 g_3)\alpha(g_4 g_1,\, g_2,\, g_3) \\
&= a_{g_4, g_1, g_2 g_3} \circ a_{g_4 \otimes g_1,\, g_2,\, g_3}
\end{aligned}
$$

の通りに **(pentagon identity)** が成り立ち，

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{Id}_{g_1} \otimes l_{g_2}) \circ a_{g_1, 1, g_2} &= \frac{\alpha(g_1,\, 1,\, g_2)}{\alpha(1,\, 1,\, g_2)} \\
&= \frac{\alpha(g_1,\, 1,\, 1)\cancel{\alpha(g_1,\, 1,\, g_2)\alpha(1,\, 1,\, g_2)}}{\cancel{\alpha(g_1,\, 1,\, g_2)\alpha(1,\, 1,\, g_2)}} \\
&= \alpha(g_1,\, 1,\, 1) \\
&= r_{g_1}
\end{aligned}
$$

の通りに **(triangle identity)** が成り立つ．もし $l_g = r_g = \mathrm{Id}_g$ にしたければ

$$
\forall g,\, h \in G,\ \alpha(g,\, 1,\, h) = 1_G
$$

を充たす $\alpha \in Z^3_{\mathrm{Grp}}\bigl(G;\, \mathrm{U}(1)\bigr)$ をとることが必要十分である（**正規化条件**）．

圏 $\mathbf{Vec}^{\alpha}_{G}$ は，$\alpha \in Z^3_{\mathrm{Grp}}\bigl(G;\, \mathbb{K}^{\times}\bigr)$ に対して $\mathcal{C}^{\alpha}_{G}$ の構成を線形に拡張することで得られる．G が有限群ならば $\mathbf{Vec}^{\alpha}_{G}$ はフュージョン圏である．

[a] i.e. 3-コサイクル

[b] 他のデータは【**例 1.3.1**】と全く同じである

定義 1.13: テンソル関手・ファイバー関手

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を多重環圏とする．関手 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ を与える．F が**テンソル関手** (tensor functor) であるとは，以下を充たすこと：

- **(TF-1)** F は $\mathbb{K}$-線形
- **(TF-2)** F は強いモノイダル関手
- **(TF-3)** F は完全かつ忠実[a]

特に $\mathcal{D} = \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ のとき，テンソル関手 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ は**ファイバー関手** (fiber functor) と呼ばれる．

[a] この条件は [?, DEFINITION 4.2.5., p.66] に合わせて付けたものであり，テンソル関手と言った際には必要とされないことも多い．

【例 1.3.3】圏 $\mathbf{Vec}_G^{\alpha}$ のテンソル関手

$G_1,\, G_2$ を群，$\omega_i \in Z^3_{\mathrm{Grp}}\big(G_i;\, \mathrm{U}(1)\big)$ を 3-コサイクルとする．テンソル関手

$$F\colon \mathcal{C}^{\alpha_1}_{G_1} \longrightarrow \mathcal{C}^{\alpha_2}_{G_2}$$

とはどのようなものだろうか.

まず F は強いモノイダル関手であるから，対象の対応について群準同型

$$f\colon G_1 \longrightarrow G_2$$

このとき強いモノイダル関手の持つ自然変換とは，ある $\mu \in C^2_{\mathrm{Grp}}\big(G_1;\, \mathrm{U}(1)\big)$ を用いて

$$\mu_{g_1, g_2} \coloneqq \mu(g_1,\, g_2)\mathrm{Id}_{f(g_1 g_2)}\colon f(g_1)f(g_2) \xrightarrow{\cong} f(g_1 g_2) \quad {}^{\mathrm{w}/} \quad g_1,\, g_2 \in G_1$$

と書けるが，**(associativity)** から

$$\mu(g_1,\, g_2g_3)\mu(g_2,\, g_3)\alpha_2\big(f(g_1),\, f(g_2),\, f(g_3)\big) = \alpha_1(g_1,\, g_2,\, g_3)\mu(g_1g_2,\, g_3)\mu(g_1,\, g_2)$$

でなくてはいけない．i.e.

$$\alpha_1 = f^*\alpha_2 \cdot \delta\mu \tag{1.3.1}$$

である．逆に群準同型 $f\colon G_1 \longrightarrow G_2$ および $\mu \in C^3_{\mathrm{Grp}}\big(G_1;\, \mathrm{U}(1)\big)$ の組 $(f,\, \mu)$ であって (1.3.1) を充たすものが与えられると，これらを素材にしてテンソル関手

$$F\colon \mathcal{C}^{\alpha_1}_{G_1} \longrightarrow \mathcal{C}^{\alpha_2}_{G_2}$$

を構成することができる．このような関手 F が圏同値になる必要十分条件は f が群の同型写像になることである．

【例 1.3.4】圏 $\mathbf{Vec}_G^{\alpha}$ のモノイダル自然変換

【例 **1.3.3**】の構成で得られるテンソル関手を $F_{f,\,\mu}$ と書く．このとき，モノイダル自然変換

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Vec}^{\alpha_1}_{G_1} \arrow[rr, bend left, "F_{f,\,\mu}"] \arrow[rr, bend right, "F_{f',\,\mu'}"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \tau"] & & \mathbf{Vec}^{\alpha_2}_{G_2} \end{tikzcd}$$

を同定しよう．まず自然変換と言うからには $\forall g \in G_1$ に対して

$$\tau_g \coloneqq \tau(g)\mathrm{Id}_{f(g)}\colon f(g) \longrightarrow f'(g)$$

を定めないといけない．ただし $\tau \in C^1_{\mathrm{Grp}}\big(G_1;\, \mathrm{U}(1)\big)$ である．ところが，【例 **1.3.2**】より $\mathbf{Vec}^{\alpha_2}_{G_2}$ の射は $f(g) = f'(g)$，i.e. $f = f'$ でないと自然変換が存在しない．

(テンソル積の保存) の条件から，$\forall g_1,\, g_2 \in G_1$ に対して

$$\mu'(g_1,\, g_2)\tau(g_1)\tau(g_2) = \tau(g_1 g_2)\mu(g_1,\, g_2)$$

でなくてはいけない．i.e.

$$\mu = \mu' \cdot \delta\tau \tag{1.3.2}$$

である．逆に (1.3.2) を充たす $\tau \in C^1_{\mathrm{Grp}}$ からモノイダル自然変換 $\tau\colon F_{f,\,\mu} \Longrightarrow F_{f,\,\mu'}$ を構成することができる．

1.3.1 量子次元

定義 1.14: 量子トレース

- rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{C},\, \otimes,\, 1,\, a,\, l,\, r,\, \mathrm{ev}^{\mathrm{L}},\, \mathrm{coev}^{\mathrm{L}},\, \mathrm{ev}^{\mathrm{R}},\, \mathrm{coev}^{\mathrm{R}})$
- 対象 $V \in \mathcal{C}$
- $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V,\, V^{**})$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V,\, {}^{**}V)$

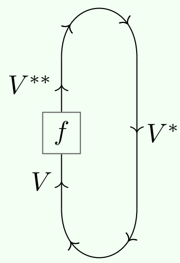
を与える．

- f の**左量子トレース** (left quantum trace) を以下で定義する：

$$\mathrm{Tr}^{\mathrm{L}}(f)\colon 1 \xrightarrow{\mathrm{coev}^{\mathrm{L}}_V} V \otimes V^* \xrightarrow{f \otimes \mathrm{Id}_V} V^{**} \otimes V^* \xrightarrow{\mathrm{ev}^{\mathrm{L}}_{V^*}} 1$$

ストリング図式で書くと次のようになる[a]：

$\mathrm{Tr}^{\mathrm{L}}(f) :=$

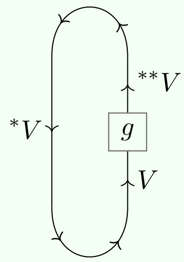


$\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(1,\, 1)$

- g の**右量子トレース** (right quantum trace) を以下で定義する：

$$\mathrm{Tr}^{\mathrm{R}}(g)\colon 1 \xrightarrow{\mathrm{coev}^{\mathrm{R}}_{{}^*V}} {}^*V \otimes V \xrightarrow{\mathrm{Id}_{{}^*V} \otimes g} {}^*V \otimes {}^{**}V \xrightarrow{\mathrm{ev}^{\mathrm{R}}_{{}^{**}V}} 1$$

ストリング図式で書くと次のようになる[b]：

$\mathrm{Tr}^{\mathrm{L}}(g) :=$  $\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(1, 1)$

[a] $\mathrm{ev}^{\mathrm{L}}_{V^*} = \mathrm{ev}^{\mathrm{R}}_{V^{**}}$ を使った．
[b] $\mathrm{ev}^{\mathrm{R}}_{^{**}V} = \mathrm{ev}^{\mathrm{L}}_{^{*}V}$ を使った．

定義 1.15: 旋回構造

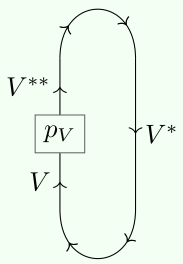
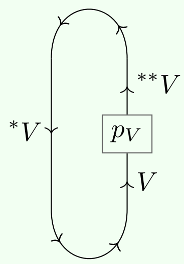
rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \mathrm{ev}^{\mathrm{L}}, \mathrm{coev}^{\mathrm{L}}, \mathrm{ev}^{\mathrm{R}}, \mathrm{coev}^{\mathrm{R}})$ を与える．$\mathcal{C}$ の**旋回構造** (pivotal structure) とは，モノイダル自然同型

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}"] \arrow[r, bend right, "(\text{-})^{**}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow p"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

のこと．

定義 1.16: 球状圏・量子次元

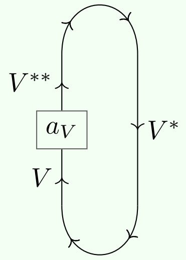
テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \mathrm{ev}^{\mathrm{L}}, \mathrm{coev}^{\mathrm{L}}, \mathrm{ev}^{\mathrm{R}}, \mathrm{coev}^{\mathrm{R}})$ が旋回構造 p を持つとする．圏 $\mathcal{C}$ が**球状** (spherical) であるとは，$\forall V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$\mathrm{Tr}^{\mathrm{L}}(p_V) =$  $=$  $= \mathrm{Tr}^{\mathrm{R}}(p_V)$

が成り立つことを言う．

球状圏 $\mathcal{C}$ の対象 $V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の**量子次元** (quantum dimension) を以下で定義する：

$$\dim_p(V) := \mathrm{Tr}^{\mathrm{L}}(p_V) :=$$



$$\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(1,\, 1)$$

1.3.2　Deligne のテンソル積

定義 1.17: Deligne のテンソル積

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を局所有限な $\mathbb{K}$-線形アーベル圏とする．**Deligne のテンソル積** (Deligne's tensor product) とは，以下の性質をみたす $\mathbb{K}$-線形アーベル圏 $\boldsymbol{\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}}$ と双右完全関手 $\boxtimes\colon \mathcal{C} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ の組み $(\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}, \boxtimes)$ のこと：

(普遍性)

任意の双右完全関手 $F\colon \mathcal{C} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{A}$ に対し，ある双右完全関手 $\bar{F}\colon \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{A}$ が一意的に存在して $\bar{F} \circ \boxtimes = F$ を充たす．

命題 1.2: Deligne のテンソル積の基本性質

(1) Deligne のテンソル積は存在し，それ自身が局所有限な $\mathbb{K}$-線形アーベル圏になる．

(2) 関手 $\boxtimes\colon \mathcal{C} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ は双完全であり，

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x_1,\, y_1) \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x_2,\, y_2) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}}(x_1 \boxtimes x_2,\, y_1 \boxtimes y_2)$$

を充たす．

(3) $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ が (多重) 環圏/(多重) テンソル圏ならば $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ は (多重) 環圏/(多重) テンソル圏である．

<u>証明</u>　(1) [?, PROPOSITION 1.11.2., p.15]

(2) [?, PROPOSITION 1.11.2., p.15]

(3) [?, PROPOSITION 4.6.1., p.73]

■

1.4　加群圏

定義 1.18: 左加群圏

$(\mathcal{C},\ \otimes,\ 1,\ a,\ l,\ r)$ をモノイダル圏とする．
左 $\mathcal{C}$-加群圏 (left $\mathcal{C}$-module category) $\mathcal{M}$ は，以下のデータからなる：

- 圏 $\mathcal{M}$
- 関手 $\blacktriangleright\colon \mathcal{C}\times\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{M}$
- 自然同型 $\left\{\alpha_{x,\,y,\,m}\colon (x\otimes y)\blacktriangleright m\longrightarrow x\blacktriangleright(y\blacktriangleright m)\right\}_{x,y\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\,m\in\mathrm{Ob}(\mathcal{M})}$

これらは以下の条件を充たす：

(lMod-1) 関手 $\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{M},\ m\longmapsto 1\blacktriangleright m$ は圏の自己同型である
(lMod-2) $\forall x,\ y,\ z\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\ \forall m\in\mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ に対して以下の図式を可換にする：

$$\begin{tikzcd}
 & \big((x\otimes y)\otimes z\big)\blacktriangleright m \arrow[ddl, "a_{x,y,z}\blacktriangleright\mathrm{Id}_m"'] \arrow[dr, "\alpha_{x\otimes y,z,m}"] & \\
 & & (x\otimes y)\blacktriangleright(z\blacktriangleright m) \arrow[dd, "\alpha_{x,y,z\blacktriangleright m}"] \\
\big(x\otimes(y\otimes z)\big)\blacktriangleright m \arrow[ddr, "\alpha_{x,y\otimes z,m}"'] & & \\
 & & x\blacktriangleright\big(y\blacktriangleright(z\blacktriangleright m)\big) \\
 & x\blacktriangleright\big((y\otimes z)\blacktriangleright m\big) \arrow[ur, "\mathrm{Id}_x\blacktriangleright\alpha_{y,z,m}"'] &
\end{tikzcd}$$

右 $\mathcal{C}$-加群圏 $\mathcal{M}$ も同様に定義される．

定義 1.19: 両側加群圏

$(\mathcal{C}_i,\ \otimes_i,\ 1,\ a_i,\ l_i,\ r_i)$ $^{\mathrm{w}/}$ $i=1,\,2$ をモノイダル圏とする．
$(\mathcal{C}_1,\ \mathcal{C}_2)$-両側加群圏 ($(\mathcal{C}_1,\ \mathcal{C}_2)$-bimodule category) $\mathcal{M}$ は，以下のデータからなる：

- 圏 $\mathcal{M}$
- 関手 $\blacktriangleright\colon \mathcal{C}_1\times\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{M}$
- 関手 $\blacktriangleleft\colon \mathcal{M}\times\mathcal{C}_2\longrightarrow\mathcal{M}$
- 自然同型 $\left\{\alpha_{x_1,\,y_1,\,m}\colon (x_1\otimes y_1)\blacktriangleright m\longrightarrow x_1\blacktriangleright(y_1\blacktriangleright m)\right\}_{x_1,y_1\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_1),\,m\in\mathrm{Ob}(\mathcal{M})}$
- 自然同型 $\left\{\beta_{m,\,x_2,\,y_2}\colon m\blacktriangleleft(x_2\otimes y_2)\longrightarrow(m\blacktriangleleft x_2)\blacktriangleleft y_2\right\}_{x_2,y_2\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_2),\,m\in\mathrm{Ob}(\mathcal{M})}$
- 自然同型 $\left\{b_{x_1,\,m,\,x_2}\colon (x_1\blacktriangleright m)\blacktriangleleft x_2\longrightarrow x_1\blacktriangleright(m\blacktriangleleft x_2)\right\}_{x_1\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_1),\,x_2\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_2)m\in\mathrm{Ob}(\mathcal{M})}$

これらは以下の条件を充たす：

(Bimod-1) 関手 $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M},\ m \longmapsto 1 \blacktriangleright m$ および $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M},\ m \longmapsto m \blacktriangleleft 1$ は圏の自己同型である

(Bimod-2) $\forall x,\, y,\, z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_1),\ \forall m \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ に対して以下の図式を可換にする：

$$
\begin{tikzcd}
 & \big((x \otimes y) \otimes z\big) \blacktriangleright m \arrow[dl, "a_{x,y,z} \blacktriangleright \mathrm{Id}_m"'] \arrow[dr, "\alpha_{x \otimes y, z, m}"] & \\
\big(x \otimes (y \otimes z)\big) \blacktriangleright m \arrow[dd, phantom] \arrow[ddr, "\alpha_{x, y \otimes z, m}"'] & & (x \otimes y) \blacktriangleright (z \blacktriangleright m) \arrow[d, "\alpha_{x,y,z \blacktriangleright m}"] \\
 & & x \blacktriangleright \big(y \blacktriangleright (z \blacktriangleright m)\big) \\
 & x \blacktriangleright \big((y \otimes z) \blacktriangleright m\big) \arrow[ur, "\mathrm{Id}_x \blacktriangleright \alpha_{y,z,m}"'] &
\end{tikzcd}
$$

(Bimod-3) $\forall x,\, y,\, z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_2),\ \forall m \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ に対して以下の図式を可換にする：

$$
\begin{tikzcd}
 & m \blacktriangleleft \big(x \otimes (y \otimes z)\big) \arrow[dl, "\mathrm{Id}_m \blacktriangleleft a_{x,y,z}"'] \arrow[dr, "\beta_{m,x,y \otimes z}"] & \\
m \blacktriangleleft \big((x \otimes y) \otimes z\big) \arrow[ddr, "\beta_{m, x \otimes y, z}"'] & & (m \blacktriangleleft x) \blacktriangleleft (y \otimes z) \arrow[d, "\beta_{m \blacktriangleleft x, y, z}"] \\
 & & \big((m \blacktriangleleft x) \blacktriangleleft y\big) \blacktriangleleft z \\
 & \big(m \blacktriangleleft (x \otimes y)\big) \blacktriangleleft z \arrow[ur, "\mathrm{Id}_x \blacktriangleleft \beta_{m,x,y}"'] &
\end{tikzcd}
$$

(Bimod-4) $\forall x_i,\, y_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_i),\ \forall m \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ に対して以下の図式を可換にする：

$$
\begin{tikzcd}
& \big((x_1 \otimes_1 y_1) \blacktriangleright m\big) \blacktriangleleft x_1 \arrow[ddl, "\alpha_{x_1,y_1,m} \blacktriangleright \mathrm{Id}_{x_1}"'] \arrow[dr, "b_{x_1 \otimes_1 y_1, m, x_2}"] & \\
& & (x_1 \otimes_1 y_1) \blacktriangleright (m \blacktriangleleft x_2) \arrow[dd, "\alpha_{x_1,y_1,m \blacktriangleleft x_2}"] \\
\big(x_1 \blacktriangleright (y_1 \blacktriangleright m)\big) \blacktriangleleft x_1 \arrow[ddr, "b_{x_1,y_1 \blacktriangleright m,x_2}"'] & & \\
& & x_1 \blacktriangleright \big(y_1 \blacktriangleright (m \blacktriangleleft x_2)\big) \\
& x_1 \blacktriangleright \big((y_1 \blacktriangleright m) \blacktriangleleft x_1\big) \arrow[uur, "\mathrm{Id}_{x_1} \blacktriangleright b_{y_1,m,1}"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& x_1 \blacktriangleright \big(m \blacktriangleleft (x_2 \otimes_2 y_2)\big) \arrow[ddl, "\mathrm{Id}_{x_1} \blacktriangleright \beta_{m,x_2,y_2}"'] & \\
& & (x_1 \blacktriangleright m) \blacktriangleleft (x_2 \otimes_2 y_2) \arrow[ul, "b_{x_1,m,x_2 \otimes_2 y_2}"'] \arrow[dd, "\beta_{x_1 \blacktriangleright m,x_2,y_2}"] \\
x_1 \blacktriangleright \big((m \blacktriangleleft x_2) \blacktriangleleft y_2\big) & & \\
& & \big((x_1 \blacktriangleright m) \blacktriangleleft x_2\big) \blacktriangleleft y_2 \arrow[dl, "b_{x_1,m,x_2} \blacktriangleleft \mathrm{Id}_{y_2}"] \\
& \big(x_1 \blacktriangleright (m \blacktriangleleft x_2)\big) \blacktriangleleft y_2 \arrow[uul, "b_{x_1,m \blacktriangleleft x_2,y_2}"] &
\end{tikzcd}
$$

1.5　2-群

1.5.1　豊穣圏と 2-圏

まず，**厳密な 2-圏** (strict 2-category) を導入する．

定義 1.20: 豊穣圏

モノイダル圏 $(V, \otimes, I)$ を与える．

$\boldsymbol{V}$**-豊穣圏** (V-enriched category) $\mathcal{C}$ は，以下のデータからなる：

- 集合 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，**Hom 対象**と呼ばれるV の対象 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) \in \mathrm{Ob}(V)$ を持つ
- $\forall x, y,\, z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，**合成射**と呼ばれるV の射 $\circ_{x,\,y,\,z} \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,\, z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, z)$ を持つ
- $\forall x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，**恒等素**と呼ばれるV の射 $j_x \colon I \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, x)$ を持つ

これらは以下の図式を可換にしなくてはいけない：

(associativity)

$\forall x,\, y,\, z,\, w \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について[a]

$$\begin{tikzcd}
\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,\, z)\big) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(z,\, w) \arrow[r, "\circ_{x,y,z} \otimes \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(z,\, w)}"] \arrow[dd, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, z) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(z,\, w) \arrow[d, "\circ_{x,z,w}"] \\
 & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, w) \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) \otimes \big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,\, z) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(z,\, w)\big) \arrow[r, "\mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)} \otimes \circ_{y,z,w}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,\, w) \arrow[u, "\circ_{x,y,w}"']
\end{tikzcd}$$

(unitality)

$\forall x,\, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について[b]

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, x) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) \arrow[r, "\circ_{x,x,y}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,\, y) \arrow[l, "\circ_{x,y,y}"'] \\
I \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) \arrow[u, "j_x \otimes \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)}"] \arrow[ur, "\cong"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) \otimes I \arrow[u, "\mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)} \otimes j_y"'] \arrow[ul, "\cong"]
\end{tikzcd}$$

---

[a] $\cong$ はモノイダル圏 V の associator
[b] $\cong$ はモノイダル圏 V の left/right unitor

定義 1.21: 豊穣関手

モノイダル圏 $(V, \otimes, I)$ を与える．
2 つの V-豊穣圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ の間の **V-豊穣関手** (V-enriched functor)

$$F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

は，以下のデータからなる：

- 写像 $F_0\colon \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathcal{D}),\ x \longmapsto F_0(x)$
- V の射の族

$$\left\{F_{x,\,y}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\,y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,\big(F_0(x),\,F_0(y)\big)\right\}_{x,\,y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは以下の図式を可換にしなくてはいけない：

(enriched-1)

$\forall x,\,y,\,z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して[a]

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\,y) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(y,\,z) \arrow[r, "\circ_{x,y,z}"] \arrow[d, "F_{x,y} \otimes F_{y,z}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\,z) \arrow[d, "F_{x,z}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,\big(F_0(x),\,F_0(y)\big) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,\big(F_0(y),\,F_0(z)\big) \arrow[r, "\circ_{F_0(x),F_0(y),F_0(z)}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,\big(F_0(x),\,F_0(z)\big)
\end{tikzcd}$$

(enriched-2)

$\forall x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して[b]

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "j_x"] \arrow[dr, "j_{F_0(x)}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\,x) \arrow[d, "F_{x,x}"] \\
& \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,\big(F_0(x),\,F_0(x)\big)
\end{tikzcd}$$

[a] これは，通常の関手において射の合成が保存されることに対応する．
[b] これは，通常の関手において恒等射が保存されることに対応する．

与えられたモノイダル圏 V に対して，**V-豊穣圏のなす圏**を V-**Cat** と書く．V-**Cat** は

- V-豊穣圏を対象とする
- V-豊穣関手を射とする

ことで得られる圏である．

定義 1.22: 厳密な 2-圏

小圏と関手の圏 **Cat** を【例 1.2.1】の方法でモノイダル圏と見做す．**Cat**-豊穣圏のことを**厳密な 2-圏** (strict 2-category) と呼ぶ．

定義 1.22 を解読しよう．まず，小圏と関手の圏 **Cat** における対象とは小圏のことで，射とは関手のことである．さらに，**Cat** のテンソル積とは【例 **1.2.1**】より直積 $\times$ のことである．よって豊穣圏の定義から，厳密な 2-圏 $\mathcal{C}$ は

- **対象** (object)[*1] 全体の集合 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall x,\, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の間の **1-射** (1-morphism)[*2]全体が成す圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cat})$.
- **合成** (composition) と呼ばれる関手 $\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,\, z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, z)$
- **恒等素** (identity morphism) と呼ばれる関手 $j_x\colon 1 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, x)$

の 4 つのデータからなる．従って 1-射 $f\colon x \longrightarrow y$ とは圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)$ の対象 $f \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y))$ のことであるから，2 つの 1-射 $f,\, g \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y))$ が与えられると，圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)$ における，それらの間の射 $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)}(f,\, g)$ が存在する．このような α を **2-射** (2-morphism)[*3]と呼び，混乱防止のため $\alpha\colon f \longrightarrow g$ と書く代わりに $\boldsymbol{\alpha\colon f \Longrightarrow g}$ と書く．

2 つの 2-射 $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)}(f,\, g)$, $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)}(g,\, h)$ は，圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)$ における射の合成 $*$ によって結合的かつ単位的に合成することができる：

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=50, "f"] \arrow[r, bend right=50, "h"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \beta * \alpha"] & y
\end{tikzcd}
\quad := \quad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=50, "f"] \arrow[r, "g" description] \arrow[r, bend right=50, "h"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow \alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow \beta"] & y
\end{tikzcd}
$$

このような 2-射の合成を**縦の合成** (vertical composition) と呼ぶ．一方，4 つの 1-射 $f,\, g\colon x \longrightarrow y$, $f',\, g'\colon y \longrightarrow z$ および 2 つの 2-射 $\alpha\colon f \Longrightarrow g$, $\alpha'\colon f' \Longrightarrow g'$ が与えられたとき，1-射の合成 $\circ$ が関手であることによって，圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,\, z)$ の射 $(\alpha,\, \alpha')\colon (f,\, f') \longrightarrow (g,\, g')$ に対して圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, z)$ の射，i.e. 2-射

$$
\alpha' \circ \alpha \coloneqq \circ(\alpha,\, \alpha')\colon f' \circ f \Longrightarrow g' \circ g
$$

が対応付く：

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=50, "f' \circ f"] \arrow[r, bend right=50, "g' \circ g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha' \circ \alpha"] & z
\end{tikzcd}
\quad := \quad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=50, "f"] \arrow[r, bend right=50, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & y \arrow[r, bend left=50, "f'"] \arrow[r, bend right=50, "g'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha'"] & z
\end{tikzcd}
$$

このような 2-射の合成を**横の合成** (horizontal composition) と呼ぶ．横の合成は，モノイダル圏 **Cat** が厳密なモノイダル圏であること，および関手 $\circ$ の **(associativity)**，**(unitality)** によって結合的かつ単位的になる．

[*1] **0-セル** (0-cell) とも言う
[*2] **1-セル** (1-cell) とも言う．正確には，圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)$ の対象のことを 1-射と呼ぶ．
[*3] **2-セル** (2-cell) とも言う

縦の合成と横の合成は，$\circ$ が関手であることによって交換する：

$$
\begin{aligned}
(\beta' * \alpha') \circ (\beta * \alpha) &= \circ\bigl((\beta,\, \beta') * (\alpha,\, \alpha')\bigr) \\
&= \bigl(\circ(\beta,\, \beta')\bigr) * \bigl(\circ(\alpha,\, \alpha')\bigr) \\
&= (\beta' \circ \beta) * (\alpha' \circ \alpha)
\end{aligned}
$$

図式で書くと一目瞭然である：

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=50, "f"] \arrow[r, bend right=50, "h"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \beta * \alpha"] & y \arrow[r, bend left=50, "f'"] \arrow[r, bend right=50, "h'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \beta' * \alpha'"] & z
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=50, "f"] \arrow[r, "g" description] \arrow[r, bend right=50, "h"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow \alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow \beta"] & y \arrow[r, bend left=50, "f'"] \arrow[r, "g'" description] \arrow[r, bend right=50, "h'"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow \alpha'"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow \beta'"] & z
\end{tikzcd}
$$

$$
=
\begin{tikzcd}
x \arrow[rr, bend left=50, "f' \circ f"] \arrow[rr, "g' \circ g" description] \arrow[rr, bend right=50, "h' \circ h"'] \arrow[rr, phantom, shift left=4, "\Downarrow \alpha' \circ \alpha"] \arrow[rr, phantom, shift right=4, "\Downarrow \beta' \circ \beta"] & & z
\end{tikzcd}
$$

定義 1.23: 2-圏

厳密な 2-圏と同様の

- **対象** (object)[a] 全体の集合 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall x,\, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の間の **1-射** (1-morphism)[b]全体が成す圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cat})$.
- **合成** (composition) と呼ばれる関手 $\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,\, z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, z)$
- **恒等素** (identity morphism) と呼ばれる関手 $j_x\colon 1 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, x)$

の 4 つのデータに加えて

- $\forall x,\, y,\, z,\, w \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して **associator** と呼ばれる自然同型[c].

$$
\begin{tikzcd}
& \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(y,\, z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(w,\, y) \arrow[dr, bend left, "\circ"] \arrow[dd, Rightarrow, "\alpha_{w,x,y,z}"] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(y,\, z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(w,\, x) \arrow[ur, bend left, "\mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,\, z)} \times \circ"] \arrow[dr, bend right, "\circ \times \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(w,\, x)}"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(w,\, z) \\
& \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(w,\, x) \arrow[ur, bend right, "\circ"'] &
\end{tikzcd}
$$

- $\forall x,\, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して **left/right unitor** と呼ばれる自然同型

$$
\begin{aligned}
\lambda_{x,y} &:= \left\{ l_{x,y\,f} \colon f \longmapsto f \circ j_x(1) \right\}_{f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, y)} \\
\rho_{x,y} &:= \left\{ l_{x,y\,f} \colon f \longmapsto j_x(1) \circ f \right\}_{f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, y)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, x) \arrow[dr, bend left, "\circ"] \arrow[d, Rightarrow, "\lambda_{w,x,y,z}"] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, y) \arrow[ur, bend left, "\mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)} \times j_x"] \arrow[dr, bend right, "j_y \times \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)}"'] \arrow[rr, "\mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, y)}"] & {} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, y) \\
& \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(y,\, y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, y) \arrow[ur, bend right, "\circ"'] \arrow[u, Rightarrow, "\rho_{w,x,y,z}"'] &
\end{tikzcd}
$$

を持ち，

- associator が **(pentagon identity)** を
- unitors が **(triangle identity)** を

充たす $\mathcal{C}$ のことを **2-圏** (2-category) と呼ぶ.

---

[a] **0-セル** (0-cell) とも言う

[b] **1-セル** (1-cell) とも言う．正確には，圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, y)$ の対象のことを 1-射と呼ぶ.

[c] これは圏 **Cat** における図式である.

要するに，厳密な 2-圏において合成 $\circ$ の associativity および unitality を自然同型まで弱めたものが 2-圏である．

【例 1.5.1】2-圏としてのモノイダル圏

モノイダル圏 $\left(\mathcal{C},\,\otimes,\,I,\,\{a_{x,y,z}\},\,\{l_x\},\,\{l_y\}\right)$ は 2-圏である．実際，2-圏 $\mathbf{B}\mathcal{C}$ を

- $\mathrm{Ob}(\mathbf{B}\mathcal{C}) \coloneqq \{\bullet\}$（1 点集合）
- $\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}\mathcal{C}}\left(\bullet,\,\bullet\right) \coloneqq \mathcal{C}$
- $\circ \coloneqq \otimes \colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$
- $j_x \coloneqq \iota_I \colon I \hookrightarrow \mathcal{C}$
- $\alpha_{\bullet,\bullet,\bullet} \coloneqq \{a_{x,y,z}\}$
- $\lambda_{\bullet,\bullet} \coloneqq \{l_{x,y,z}\}, \quad \rho_{\bullet,\bullet} \coloneqq \{r_{x,y,z}\}$

により定義すると $\mathcal{C} = \mathbf{B}\mathcal{C}$ となる．

1.5.2　弱い 2-群・コヒーレントな 2-群・厳密な 2-群

[?] に倣い **2-群** (2-group) を導入する．

定義 1.24: 弱い逆対象

モノイダル圏 $(\mathcal{C},\,\otimes,\,1)$ の対象 $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を 1 つとる．

- 対象 $y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が x の**弱い逆対象** (weak inverse) であるとは，対象の同型の意味で[a] $x \otimes y \cong 1$ かつ $y \otimes x \cong 1$ が成り立つことを言う．
- x が**弱可逆** (weakly invertible) であるとは，x が弱い逆対象を持つことを言う．

[a] 自然同型ではない

定義 1.25: 弱い 2-群・コヒーレントな 2-群・厳密な 2-群

- **弱い 2-群** (weak 2-group) とは，モノイダル圏 $\mathcal{G}$ であって，任意の対象が弱可逆でかつ任意の射が同型射であるもののこと．
- **コヒーレントな 2-群** (coherent 2-group) とは，モノイダル圏 $\mathcal{G}$ であって，任意の対象 $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$ が可逆な unit，counit $(x,\,\bar{x},\,i_x,\,e_x)$ を持ち，かつ任意の射が同型射であるもののこと．
- **厳密な 2-群** (strict 2-group) とは，モノイダル圏 $\mathcal{G}$ であって，任意の対象が可逆[a]でかつ任意の射が同型射であるもののこと．

[a] $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $x^{-1} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が存在して，厳密に $x \otimes x^{-1} = 1$，$x^{-1} \otimes x = 1$ が成り立つ．

定義 1.26: 2-群の準同型

2-群 $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ の間の**準同型**とは，モノイダル関手 $f\colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ のこと．

定理 1.1: 弱い 2-群はコヒーレントな 2-群

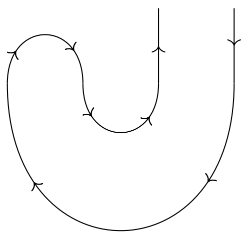
任意の弱い 2-群はコヒーレントな 2-群にすることができる．

<u>**証明**</u> 勝手な弱い 2-群 $\mathcal{G}$ を 1 つ固定する．このとき $\forall x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$ に対してある $\bar{x} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$ および同型射 $i'_x\colon 1 \longrightarrow x \otimes \bar{x},\ e'_x\colon \bar{x} \otimes x \longrightarrow 1$ が存在する．

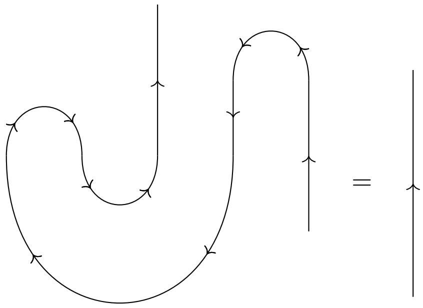
ここで $e_x \coloneqq e'_x$ とおき，

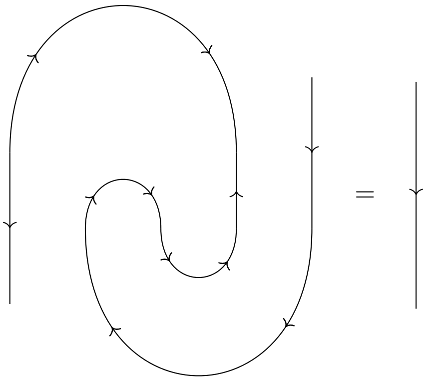
$$i_x \coloneqq (l_x \otimes \mathrm{Id}_{\bar{x}}) \circ a^{-1}_{1,x,\bar{x}} \circ ({i'_x}^{-1} \otimes \mathrm{Id}_{x\otimes\bar{x}}) \circ a^{-1}_{x,\bar{x},x\otimes\bar{x}} \circ (\mathrm{Id}_x \otimes a_{\bar{x},x,\bar{x}}) \circ (\mathrm{Id}_x \otimes {e'_x}^{-1} \otimes \mathrm{Id}_{\bar{x}}) \circ (\mathrm{Id}_x \otimes l^{-1}_{\bar{x}}) \circ i'_x$$

とおくと組 $(x, \bar{x}, i_x, e_x)$ が zig-zag equation を充たすことを示す．実際，i_x の定義をストリング図式で書くと

$$i_x =$$ 

となるから，





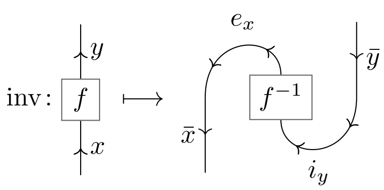
が言える． ■

> **!** 定理 1.1 を踏まえ，以下ではコヒーレントな 2-群のことを単に **2-群** (2-group) と呼ぶ.

2-群 $\mathcal{G}$ において，弱い逆対象を対応づける関手

$$\mathrm{inv}\colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G},\ x \longmapsto \bar{x} \tag{1.5.1}$$

を考えたいが，射の対応は少々厄介である．[?, p.34] に倣うと



とすれば良いことがわかる[*4].

以上より，2-群 $\mathcal{G}$ を【例 **1.5.1**】により 2 圏 $\mathbf{B}\mathcal{G}$ の言葉で表現すると

- ただ 1 つの対象を持つ：$\mathrm{Ob}(\mathbf{B}\mathcal{G}) = \{\bullet\}$

[*4] 定義からコヒーレントな 2 群は rigid なモノイダル圏であり，zigzag identity を使えることが肝になる．

- 任意の 1-射 $x \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}\mathcal{G}}(\bullet, \bullet)) = \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$ が弱可逆であり，その弱い逆対象 $\bar{x}$ は関手 (1.5.1) によって与えられる．
- 任意の 2-射 $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}\mathcal{G}}(\bullet, \bullet)}(x, y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(x, y)$ が同型射

と言うことになる．特に厳密な 2-群とは，全ての $\alpha, \lambda, \rho, i, e$ が $\mathcal{G}$ の恒等射となっていることを言う．

1.5.3 交差加群との関係

定義 1.27: 交差加群

交差加群 (crossed module) とは，

- 群準同型 $G_2 \xrightarrow{t} G_1$
- G_1 の左作用 $\alpha \colon G_1 \longrightarrow \mathrm{Aut}(G_2)$

の組であって，以下の条件を満たすもののこと：

(cr-1) 以下の図式を可換にする：

$$\begin{tikzcd} G_2 \times G_2 \arrow[rr, "t\times\mathrm{Id}"] \arrow[dr, "\mathrm{Ad}"'] & & G_1 \times G_2 \arrow[dl, "\alpha"] \\ & G_2 & \end{tikzcd}$$

あるいは同じことだが，$\forall g_i \in G_i$ に対して

$$t\bigl(\alpha(g_1)(g_2)\bigr) = g_1 t(g_2) g_1^{-1}$$

を充たす．

(cr-2) 以下の図式を可換にする：

$$\begin{tikzcd} G_1 \times G_2 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{Id}\times t"'] & G_2 \arrow[d, "t"] \\ G_1 \times G_1 \arrow[r, "\mathrm{Ad}"'] & G_1 \end{tikzcd}$$

あるいは同じことだが，$\forall g_2, g_2' \in G_2$ に対して

$$\alpha\bigl(t(g_2)\bigr)\bigl(g_2'\bigr) = g_2 g_2' g_2^{-1}$$

を充たす (**Peiffer identity**).

命題 1.3: 交差加群と厳密な 2-群

(1) 交差加群 $(G_2 \xrightarrow{t} G_1,\ \alpha)$ が与えられたとする．このとき

- 1-射の集合 $\mathcal{G}_0 \coloneqq G_1$
- 2-射の集合 $\mathcal{G}_1 \coloneqq G_1 \ltimes_\alpha G_2$（外部半直積）
- 始点射 $\sigma\colon \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_0,\ (g_1,\ g_2) \longrightarrow g_1$
- 終点射 $\tau\colon \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_0,\ (g_1,\ g_2) \longrightarrow t(g_2)g_1$
- 恒等素 $j\colon \mathcal{G}_0 \longrightarrow \mathcal{G}_1,\ g_1 \longrightarrow (g_1,\ 1_{G_2})$
- 2-射の合成 $\circ\colon \mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_1,\ \big((g_1,\ g_2),\ (g_1',\ g_2')\big) \longmapsto (g_1,\ g_2 g_2')$

とおくと，圏 $\mathcal{G}$ は厳密な 2-群になる．

(2) 逆に厳密な 2-群 $\mathcal{G}$ が与えられたとき，

- $G_1 \coloneqq \mathcal{G}_0$
- $G_2 \coloneqq \mathrm{Ker}\,\sigma \subset \mathcal{G}_1$
- $t \coloneqq \tau|_{G_2}\colon G_2 \longrightarrow G_1$
- $\alpha\colon G_1 \longrightarrow \mathrm{Aut}(G_2),\ g_1 \longmapsto \big(g_2 \longmapsto j(g_1)g_2 j(g_1)^{-1}\big)$

とおくことで交差加群 $(G_2 \xrightarrow{t} G_1,\ \alpha)$ が得られる．

証明　(1)

■

1.6 3-群

1.6.1 3-圏

一般の 3-圏は associator, unitors のせいで扱いが難しいので，まずは**厳密な 3-圏** (strict 3-group) を考える．**Cat** を【例 **1.2.1**】の方法でモノイダル圏と見做す．定義 1.22 から，2-圏としての同値

$$\mathbf{Str2Cat} \cong \mathbf{Cat}\text{-}\mathbf{Cat}$$

が成り立つ．さらに **Cat-Cat** は直積に関してモノイダル圏になる．

定義 1.28: 厳密な 3-圏

厳密な 2-圏が成す 2-圏 **Cat-Cat** をモノイダル圏と見做す．このとき **Cat-Cat-豊穣圏**のことを**厳密な 3-圏** (strict 3-category) と呼ぶ．

1.6.2 2-crossed module と厳密な 3-群

定義 1.29: 厳密な 3-群

厳密な 3-圏 $\mathcal{G}$ であって，ただ 1 つの対象を持ち，1-射，2-射，3-射が厳密に可逆であるものを**厳密な 3-群** (strict 3-category) と呼ぶ.

定義 1.30: 2-交差加群

2-交差加群 (2-crossed module) とは，以下のデータからなる：

- 群の正規複体 $G_3 \xrightarrow{\partial_2} G_2 \xrightarrow{\partial_1} G_1$
- 群の左作用 $\alpha_1 \colon G_1 \longrightarrow \mathrm{Aut}(G_2)$, $\alpha_2 \colon G_1 \longrightarrow \mathrm{Aut}(G_3)$
- **Peiffer lifting** と呼ばれる写像 $\{\text{-}, \text{-}\} \colon G_2 \times G_2 \longrightarrow G_3$

これらは以下の条件を充たす：

(2CM1) ∂_1, ∂_2 は G_1-同変

(2CM2) $\forall g_2,\, h_2 \in G_2$ に対して

$$\partial_2\{g_2, h_2\} = \alpha_1(g_2)(h_2)g_2h_2^{-1}g_2^{-1}$$

(2CM3) $\forall g_3,\, h_3 \in G_3$ に対して

$$\{\partial_2 g_3, \partial_2 h_3\} = [h_3, g_3]$$

(2CM4) $\forall g_2 \in G_2,\, g_3 \in G_3$ に対して

$$\{g_2, \partial_2 g_3\}\{\partial_2 g_3, g_2\} = \alpha_2\bigl(\partial_1(g_2)\bigr)(g_3)g_3^{-1}$$

(2CM5) $\forall g_2,\, h_2,\, k_2 \in G_2$ に対して

$$\begin{aligned} \{g_2, h_2k_2\} &= \{g_2, h_2\}\bigl\{\partial_2\{g_2, k_2\}, g_2h_2g_2^{-1}\bigr\}\{g_2, k_2\} \\ \{g_2h_2, k_2\} &= \alpha_2\bigl(\partial_1(g_2)\bigr)\bigl(\{h_2, k_2\}\bigr)\bigl\{g_2, h_2k_2h_2^{-1}\bigr\} \end{aligned}$$

(2CM6) $\forall g_1 \in G_1,\, \forall g_2,\, h_2 \in G_2$ に対して

$$\alpha_2(g_1)(\{g_2, h_2\}) = \{\alpha_1(g_1)(g_2), \alpha_1(g_1)(h_2)\}$$