

第 1 章

層状化空間・因子化ホモロジー

[?], [?] のレビュー

1.1 conically smooth な層状化空間

1.1.1 層状化空間

定義 1.1: 半順序集合の位相

(P, \leq) を半順序集合とする. P 上の位相 $\mathcal{O}_{\leq} \subset 2^P$ を以下で定義する:

$$U \in \mathcal{O}_{\leq} \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x \in U, \forall y \in P, [x \leq y \implies y \in U]$$

実際, 空集合の定義から $\emptyset \in \mathcal{O}_{\leq}$ であり, $\forall U_1, U_2 \in \mathcal{O}_{\leq}$ に対して $x \in U_1 \cap U_2$ であることは

$$\forall y \in P, x \leq y \implies y \in U_1 \text{ かつ } y \in U_2$$

と同値なので $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}_{\leq}$ であり, さらに勝手な開集合族 $\{U_{\lambda} \in \mathcal{O}_{\leq}\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_{\lambda}$ は

$$\exists \alpha \in \Lambda, \forall y \in P, x \leq y \implies y \in U_{\alpha} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_{\lambda}$$

と同値であるから $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_{\lambda} \in \mathcal{O}_{\leq}$ であり, \mathcal{O}_{\leq} は集合 P の位相である.

【例 1.1.1】 $[n]$ の位相

半順序集合 $[2] := \{0 \leq 1 \leq 2\}$ を考える. このとき, 位相 \mathcal{O}_{\leq} とは

$$\mathcal{O}_{\leq} = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$$

のことである. 同様に, 半順序集合 $[n] := \{0 \leq 1 \leq \dots \leq n\}$ に対して

$$\mathcal{O}_{\leq} = \{\emptyset, \{n\}, \{n-1, n\}, \dots, \{0, \dots, n\}\}$$

が成り立つ.

定義 1.2: 層状化空間・層状化写像

(P, \leq) を半順序集合とし、定義 1.1 の位相を入れて位相空間にする。

このとき、位相空間 X が **P -層状化**されている (P -stratified) とは、連続写像 $s: X \rightarrow P$ が存在することを言う。組 $(X, s: X \rightarrow P)$ のことを **P -層状化空間** (P -stratified space) と呼ぶ。また、 $i \in P$ の逆像 $X_i := s^{-1}(\{i\}) \subset X$ のことを **i -層** (i -strata) と呼ぶ。

層状化空間 $(X, s: X \rightarrow P)$, $(X', s': X' \rightarrow P')$ の間の**層状化写像** (stratified map) とは、連続写像の組 $(f: X \rightarrow X', \tilde{f}: P \rightarrow P')$ であって以下の図式を可換にするもののこと：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad f \quad} & X' \\ s \downarrow & & \downarrow s' \\ P & \xrightarrow{\quad \tilde{f} \quad} & P' \end{array}$$

【例 1.1.2】 $[n]$ -層状化空間

半順序集合 $[n] := \{0 \leq \dots \leq n\}$ に対して【例 1.1.1】の位相を入れる。まず、

$$X_0 = s^{-1}([n] \setminus \{1, \dots, n\})$$

でかつ $\{1, \dots, n\}$ は $[n]$ の開集合であるから、 s の連続性から X の部分空間 $X_0 \subset X$ は閉集合だとわかる。さらに

$$\begin{aligned} X_0 \cup X_1 &= s^{-1}([n] \setminus \{2, \dots, n\}), \\ X_0 \cup X_1 \cup X_2 &= s^{-1}([n] \setminus \{3, \dots, n\}), \\ &\vdots \\ X_0 \cup \dots \cup X_n &= X \end{aligned}$$

が成り立つことから、 s の連続性より X の部分空間 $X_0 \cup \dots \cup X_{m \leq n}$ は閉集合だと分かる。

【例 1.1.3】CW 複体

CW 複体 X を与える。 $X_{\leq k}$ を X の k -骨格とすると、 $X_k \setminus X_{k-1}$ を $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に写す写像 $s: X \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は X の**層状化**を与える。

直観的には、層状化空間とは defect 付き位相多様体の一般化である。特に X を位相多様体とすると、 $[n]$ -層状化空間 $(X, s: X \rightarrow [n])$ の i -層 X_i とは、多様体 X 上の余次元 $d-i$ の defect を全て集めてきたものと見做せる。

定義 1.3: 層状化開埋め込み

層状化写像 $(f, \tilde{f}): (X, s: X \rightarrow P) \rightarrow (X', s': X' \rightarrow P')$ が**層状化開埋め込み** (stratified open embedding) であるとは、以下の2条件を満たすことを言う:

- (1) 連続写像 $f: X \rightarrow X'$ は位相的開埋め込みである^a
- (2) $\forall p \in P$ に対して, f の p -strata への制限^b

$$f|_{X_p}: X_p \rightarrow X'_{\tilde{f}(p)}$$

は位相的開埋め込みである.

^a i.e. $f: X \rightarrow f(X)$ が同相写像かつ $f(X) \subset Y$ が開集合

^b **層状化写像**の定義に登場する図式の可換性より, $\forall x \in X_p$ に対して $s'(f(x)) = s' \circ f(x) = \tilde{f} \circ s(x) = \tilde{f}(p)$, i.e. $f(x) \in s'^{-1}(\{\tilde{f}(p)\}) = X'_{\tilde{f}(p)}$ が分かる.

!

以下では混乱が生じにくい場合, **層状化空間** $(X, s: X \rightarrow P)$ のことを $(X \xrightarrow{s} P)$ や $(X \rightarrow P)$ と略記する. さらに, **層状化写像** $(f, \tilde{f}): (X, s: X \rightarrow P) \rightarrow (X', s': X' \rightarrow P')$ のことを $f: (X \rightarrow P) \rightarrow (X' \rightarrow P')$ と略記し, 連続写像 $\tilde{f}: P \rightarrow P'$ のことも f と書く場合がある.

圏 **StTop** を,

- 第2可算な Hausdorff 空間であるような**層状化空間**を対象とする
- **層状化開埋め込み**を射とする

ことで定義する.

1.1.2 C^0 級層状化空間

定義 1.4: コーン

層状化空間 $(X \xrightarrow{s} P)$ を与える. X の**コーン** (cone) とは, 以下のようにして構成される**層状化空間** $(C(X), C(s): C(X) \rightarrow C(P))$ のこと:

- 位相空間 $C(X)$ を, 押し出し位相空間

$$C(X) := \{\text{pt}\} \amalg_{\{0\} \times X} (\mathbb{R}_{\geq 0} \times X)$$

と定義する:

$$\begin{array}{ccc} \{0\} \times X & \xhookrightarrow{\{0\} \times \text{id}_X} & \mathbb{R}_{\geq 0} \times X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{\text{pt}\} & \xhookrightarrow{\quad} & \{\text{pt}\} \amalg_{\{0\} \times X} (\mathbb{R}_{\geq 0} \times X) \end{array}$$

- 半順序集合 $C(P)$ を, P に最小の要素 $-\infty$ を付け足すことで定義する. これは半順序集合の

圏における押し出し

$$C(P) := \{-\infty\} \amalg_{\{0\} \times P} ([1] \times P)$$

である.

- 連続写像

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{\geq 0} \times X &\longrightarrow [1] \times P, \\ (t, x) &\longmapsto \begin{cases} (0, s(x)), & t = 0, \\ (1, s(x)), & t > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

が誘導する連続写像 $C(X) \longrightarrow C(P)$ を $C(s)$ と書く.

位相空間の圏における押し出しの公式から, 位相空間 $C(X)$ とは

$$\begin{aligned} i_1: \{0\} \times X &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \times X, \quad x \longmapsto (0, x), \\ i_2: \{0\} \times X &\longrightarrow \{\text{pt}\}, \quad x \longmapsto \text{pt} \end{aligned}$$

とおいたときのコイコライザ

$$\{0\} \times X \xrightarrow[i_2]{i_1} \{\text{pt}\} \sqcup (\mathbb{R}_{\geq 0} \times X) \xrightarrow{q} C(X),$$

i.e. 商位相空間

$$\frac{\mathbb{R}_{\geq 0} \times X}{i_1(x) \sim i_2(x)} = \frac{\mathbb{R}_{\geq 0} \times X}{\{0\} \times X}$$

のこと. 従って $C(s): C(X) \longrightarrow C(P)$ とは, 連続写像^{*1}

$$\frac{\mathbb{R}_{\geq 0} \times X}{\{0\} \times X} \longrightarrow C(P), \quad [(t, x)] \longmapsto \begin{cases} -\infty, & t = 0 \\ s(x), & t > 0 \end{cases}$$

のことである.



以下では, 混乱の恐れがない限り層状化空間 $(X \xrightarrow{s} P)$ の **コーン** を $C(X \xrightarrow{s} P)$ と略記する.

^{*1} $C(P)$ の位相 $\mathcal{O}_{C(P)}$ は, P の位相 \mathcal{O}_P に 1 つの開集合 $\{-\infty\} \cup P$ を加えたものである. $\forall U \in \mathcal{O}_P$ に対して $C(s)^{-1}(U) = \mathbb{R}_{>0} \times s^{-1}(U) \in \mathcal{O}_{C(X)}$ で, かつ $C(s)^{-1}(\{-\infty\} \cup P) = C(X) \in \mathcal{O}_{C(X)}$ なので $C(s)$ は連続である.

定義 1.5: C^0 級層状化空間

以下を充たす **StTop** の最小の充満部分圏を \mathbf{Snglr}^{C^0} と書き, 圏 \mathbf{Snglr}^{C^0} の対象を C^0 級層状化空間 (C^0 stratified space) と呼ぶ:

(Snglr-1) $(\emptyset \rightarrow \emptyset) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$

(Snglr-2)

$(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ かつ X, P が位相空間としてコンパクト
 $\implies C(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$

(Snglr-3)

$(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}) \implies (X \times \mathbb{R} \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})^a$

(Snglr-4)

$(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ かつ $\text{Hom}_{\mathbf{StTop}}((U \rightarrow P_U), (X \rightarrow P)) \neq \emptyset$
 $\implies (U \rightarrow P_U) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$

(Snglr-5)

$(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{StTop})$ が開被覆 $\{(U_\lambda \rightarrow P_\lambda) \rightarrow (X \rightarrow P)\}_{\lambda \in \Lambda}^b$ を持ち, かつ $\forall \lambda \in \Lambda$ に
 対して $(U_\lambda \rightarrow P_\lambda) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$
 $\implies (X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$

^a $X \times \mathbb{R}$ の層状化は, 連続写像 $X \times \mathbb{R} \rightarrow X, (x, t) \mapsto x$ を前もって合成することにより定める.

^b i.e. $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}, \{P_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が, それぞれ位相空間 X, P の開被覆を成す.

【例 1.1.4】位相多様体は C^0 級層状化空間

(Snglr-1) より, $* := C(\emptyset \rightarrow \emptyset) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ である. (Snglr-3) より, $\forall n \geq 0$ に対して $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n \rightarrow [0]) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ であることが帰納的に分かる. \mathbb{R}^n の任意の開集合 $U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ に対して,

$$\begin{array}{ccc} U & \hookrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ [0] & \xrightarrow{=} & [0] \end{array}$$

は層状化埋め込みであり, 従って (Snglr-4) より $U := (U \rightarrow [0]) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ が分かる. 以上の考察と (Snglr-5) を併せて, 任意の位相多様体 M は^a圏 \mathbf{Snglr}^{C^0} の対象である.

^a より正確には, M を層状化空間 $(M \rightarrow [0])$ と同一視している.

【例 1.1.4】の意味で, C^0 級層状化空間は位相多様体の一般化と見做せる. しかしまだそこには C^∞ 構造を一般化した構造は入っておらず, C^∞ 多様体の一般化とは見做せない.

1.1.3 C^0 basic

定義 1.6: C^0 basic

C^0 級層状化空間 $(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ が C^0 -basic であるとは, ある $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ およびコンパクトな C^0 級層状化空間 $(Z \rightarrow Q) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ が存在して $(X \rightarrow P) = (\mathbb{R}^n \rightarrow [0]) \times C(Z \rightarrow Q)$ が成り立つことを言う.

いま, C^0 basic な $(U \rightarrow P_U) = (\mathbb{R}^n \rightarrow [0]) \times C(Z \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ を 1 つとる. コーンの定義から, U の点を $(v, [t, z]) \in \mathbb{R}^n \times \frac{\mathbb{R}_{\geq 0} \times Z}{\{0\} \times Z}$ と表示することができる. この表示の下で自己同相

$$\begin{aligned} \gamma: \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^n \times C(Z) &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^n \times C(Z), \\ (t, (v, p), [s, z]) &\longmapsto (t, (tv + p, p), [ts, z]) \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

を考える^{*2}.

さらに, もう 1 つの C^0 basic な $(U' \rightarrow P_{U'}) = (\mathbb{R}^{n'} \rightarrow [0]) \times C(Z' \rightarrow P') \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ および $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}}((U \rightarrow P_U), (U' \rightarrow P_{U'}))$ をとる. ただし, f はコーンポイントをコーンポイントへ写す, i.e. $\forall u \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(u, \text{pt}) \in \mathbb{R}^{n'} \times \{\text{pt}\}$ が成り立つことを仮定する. $f|_{\mathbb{R}^n}: \mathbb{R}^n \times \{\text{pt}\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n'} \times \{\text{pt}\}$ を f のコーンポイントへの制限として,

$$\begin{aligned} f_{\Delta}: \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^n \times C(Z) &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^{n'} \times C(Z'), \\ (t, v, p, [s, z]) &\longmapsto (t, f|_{\mathbb{R}^n}(v), f(p, [ts, z])) \end{aligned}$$

とおこう.

【例 1.1.5】

$Z = Z' = \emptyset$ のとき, f とは単に連続関数 $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n'}$ のことである. このとき,

$$\begin{aligned} (\gamma^{-1} \circ f_{\Delta} \circ \gamma)(t, v, p) &= \gamma^{-1} \circ f_{\Delta}(t, tv + p, p) \\ &= \gamma^{-1}(t, f(tv + p), f(p)) \\ &= \left(t, \frac{f(tv + p) - f(p)}{t}, f(p) \right) \end{aligned}$$

と計算できるため, f が C^1 級であることと $\forall (v, p) \in T\mathbb{R}^n$ に対して $t \rightarrow +0$ の極限, i.e. v に沿った片側方向微分が存在することは同値である.

【例 1.1.5】をもとに, C^0 basic な C^0 級層状化空間の間の層状化開埋め込みの **conically smoothness** を定義する. C^∞ 多様体の C^∞ 構造の定義においては, チャート $(U, \varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow U)$, $(V, \psi: \mathbb{R}^n \rightarrow V)$ の間の変換関数 $\psi^{-1} \circ \varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が C^∞ 級であることを要請した. 次の小節で **conically smooth structure** の定義を行うが, その際にチャートに対応するものは **basic** $U = \mathbb{R}^n \times C(Z)$ から着目している C^0 -級層状化空間 X への層状化開埋め込み $\varphi: U \hookrightarrow X$ であり, 概ね^{*3}2つのチャート $\varphi: U \hookrightarrow X$, $\psi: V \hookrightarrow X$ の間の変換関数 $\psi^{-1} \circ \varphi: U \longrightarrow V$ に対して **conically smooth (along \mathbb{R}^n)** であることを要請する.

^{*2} 接束 $T\mathbb{R}^n$ は \mathbb{R}^{2n} と微分同相である. [?, p.23] の記法に合わせて底空間 \mathbb{R}^n の点を p , p 上のファイバーの元を v としたとき $(v, p) \in T\mathbb{R}^n$ と書いた. 命題??の記法と順番が逆なので注意.

^{*3} コーンポイントをコーンポイントに写さない変換関数も存在しうるので, これだけではいけない.

定義 1.7: \mathbb{R}^n に沿って conically smooth

- C^0 basic な $(U \rightarrow P_U) = (\mathbb{R}^n \rightarrow [0]) \times C(Z \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$
- C^0 basic な $(U' \rightarrow P_{U'}) = (\mathbb{R}^{n'} \rightarrow [0]) \times C(Z' \rightarrow P') \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$
- $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}}((U \rightarrow P_U), (U' \rightarrow P_{U'}))$ であって, コーンポイントを保存するもの

を与える. このとき, f が \mathbb{R}^n に沿って C^1 級 (C^1 along \mathbb{R}^n) であるとは, 以下の図式を可換にする連続写像

$$\tilde{D}f: \mathbb{R}_{\geq 0} \times T\mathbb{R}^n \times C(Z) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \times T\mathbb{R}^{n'} \times C(Z')$$

が存在することを言う^a:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{\geq 0} \times T\mathbb{R}^n \times C(Z) & \xrightarrow{\tilde{D}f} & \mathbb{R}_{\geq 0} \times T\mathbb{R}^{n'} \times C(Z') \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{R}_{> 0} \times T\mathbb{R}^n \times C(Z) & \xrightarrow{\gamma^{-1} \circ f_{\Delta} \circ \gamma} & \mathbb{R}_{> 0} \times T\mathbb{R}^{n'} \times C(Z') \end{array}$$

^a 写像 $\gamma^{-1} \circ f_{\Delta} \circ \gamma$ の連続性から, 拡張 $\tilde{D}f$ は存在すれば一意かつ連続である.

このような拡張が存在するとき, 第一変数を $t = 0$ に制限して得られる連続写像を

$$Df: T\mathbb{R}^n \times C(Z) \longrightarrow T\mathbb{R}^{n'} \times C(Z')$$

と書く. f が \mathbb{R}^n に沿って C^r 級であるとは, Df が \mathbb{R}^n に沿って C^{r-1} 級であることを言う. f が \mathbb{R}^n に沿って conically smooth であるとは, $\forall r \geq 1$ について C^r 級であることを言う.

1.1.4 conically smooth な層状化空間

次に行うべきは, 与えられた C^0 級層状化空間 $(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ の上の conically smooth structure i.e. 変換関数が conically smooth であるような極大アトラスを定義することである. この手続きは, 次で定義する次元と深さに関する帰納法によって構成される.

定義 1.8: 被覆次元

X を位相空間とする．以下の条件を満たす最小の $d \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$ のことを（存在すれば） X の**被覆次元** (covering dimension) と呼び、 $\dim X$ と書く：

(covering)

X の任意の開被覆 \mathcal{U} に対して、十分細かい細分 $\mathcal{V}_{\mathcal{U}} \prec \mathcal{U}$ が存在して、任意の互いに異なる $\forall m > d + 1$ 個の開集合 $V_1, \dots, V_m \in \mathcal{V}_{\mathcal{U}}$ の共通部分が空になるようにできる．特に、 \emptyset の被覆次元は -1 と定義する．

点 $x \in X$ における**被覆次元**を以下で定義する：

$$\dim_x X := \inf \{ \dim U \geq -1 \mid x \in U \underset{\text{open}}{\subset} X \}$$

定義 1.9: 次元と深さ

空でない \mathbf{C}^0 級層状化空間 $(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\text{Snglr}^{\mathbf{C}^0})$ を与える．

- $(X \rightarrow P)$ の点 $x \in X$ における**局所的次元** (local dimension) とは、点 x における X の**被覆次元** $\dim_x(X)$ のことを言う．
- $(X \rightarrow P)$ の**次元** (dimension) とは

$$\dim(X \rightarrow P) := \sup_{x \in X} \dim_x(X)$$

のこと．

- $(X \xrightarrow{s} P)$ の点 $x \in X$ における**局所的深さ** (local depth) とは、

$$\text{depth}_x(X \rightarrow P) := \dim_x(X) - \dim_x(X_{s(x)})$$

のこと．

- $(X \rightarrow P)$ の**深さ** (depth) とは、

$$\text{depth}(X \rightarrow P) := \sup_{x \in X} \text{depth}_x(X \rightarrow P)$$

のこと．ただし、 $\text{depth}(\emptyset) := -1$ と定義する．

【例 1.1.6】コーンの深さ

n 次元位相多様体 Z について、定義から $\forall x \in Z$ に対して $\dim_x(Z) = n$ が成り立つ． Z を【例 1.1.4】により \mathbf{C}^0 級層状化空間 $(Z \xrightarrow{s} [0]) \in \text{Ob}(\text{Snglr}^{\mathbf{C}^0})$ と見做すと、この**コーン** $\mathbf{C}(Z \xrightarrow{s} [0])$ について

$$\text{depth}_x(\mathbf{C}(Z \xrightarrow{s} [0])) = \begin{cases} n + 1, & x = \text{pt}, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

であることがわかる．実際 $C(Z)_{C(s)(pt)} = \{pt\}$ であるが，1 点からなる位相空間の被覆次元は 0 次元なので $\dim_{pt}(C(Z)_{C(s)(pt)}) = 0$ である．一方，コーンポイント以外の点 $x \in C(Z)$ に対して $C(s)(x)$ -層は $C(Z)_{C(s)(x)} = \mathbb{R}_{>0} \times Z \approx \mathbb{R} \times Z$ であるから， $\dim_x(C(Z)_{C(s)(x)}) = n + 1$ と計算できる^a．

また， $\forall (X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ に対して

$$\begin{aligned} \dim((\mathbb{R}^m \rightarrow [0]) \times (X \rightarrow P)) &= m + \dim(X \rightarrow P), \\ \text{depth}((\mathbb{R}^m \rightarrow [0]) \times (X \rightarrow P)) &= \text{depth}(X \rightarrow P) \end{aligned}$$

が成り立つ．従って， C^0 basic な $(U \rightarrow P_U) = (\mathbb{R}^n \rightarrow [0]) \times C(Z \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ に対して

$$\begin{aligned} \text{depth}(U \rightarrow P_U) &= \text{depth}(C(Z \rightarrow P)) \\ &= \dim(Z \rightarrow P) + 1 \end{aligned}$$

が成り立つ．

^a さらに， $\forall x \in C(Z)$ に対して $\dim_x C(Z) = n + 1$ である．

次元と深さに関する帰納法を実行する前に，構成したい (1, 1)-圏を表す記号の整理をしておこう：

- conically smooth チャートの素材となる，**basic** が成す圏

Bsc

これは， C^∞ 多様体の圏 **Mfld** において \mathbb{R}^n ($\forall n \geq -1$) 全体が成す充満部分圏に相当するものである．

- 与えられた C^0 級層状化空間 $(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ に対して，その上に入る極大アトラス^{*4}全体が成す集合を返す前層

$$\text{Sm}: (\mathbf{Snglr}^{C^0})^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

この対応が前層であることの直観は，層状化開埋め込み $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}}((X \rightarrow P), (Y \rightarrow Q))$ が与えられると， $(X \rightarrow P)$ 上の極大アトラス $\text{Sm}(X \rightarrow P)$ が $(Y \rightarrow Q)$ 上の極大アトラス $\text{Sm}(Y \rightarrow Q)$ を「制限」する写像 $\text{Sm}(f): \text{Sm}(Y \rightarrow Q) \longrightarrow \text{Sm}(X \rightarrow P)$ によって得られるということである．

- 深さが k 以下，かつ次元が n 以下であるような C^0 級層状化空間全体が成す \mathbf{Snglr}^{C^0} の充満部分圏を

$$\mathbf{Snglr}^{C^0} \underbrace{\leq k}_{\text{depth}}, \underbrace{\leq n}_{\text{dimension}}$$

と書く．同様に

$$\mathbf{Bsc}_{\leq k, \leq n}, \quad \text{Sm}_{\leq k, \leq n}: (\mathbf{Snglr}_{\leq k, \leq n}^{C^0})^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

と書く．

^{*4} 存在するか分からないし，存在したとして一意であるとは限らない．実際，例えば C^∞ 多様体の段階においてさえ \mathbb{R}^4 の上の極大アトラス (i.e. C^∞ 構造) は非可算無限個存在する [?].

- conically smooth な層状化空間の圏

Snglr

これを作ることが本小節の最終目標である。

帰納法により, $\forall k \geq -1$ に対して $\mathbf{Bsc}_{\leq k, \leq \infty}$ および $\mathbf{Sm}_{\leq k, \leq \infty} : (\mathbf{Snglr}_{\leq k, \leq \infty}^{C^0})^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ が構成される。

定義 1.10: 帰納法の出発点

(Snglr-1) より $(\emptyset \rightarrow \emptyset) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}_{\leq -1, \leq \infty}^{C^0})$ である。

- (1) $\mathbf{Bsc}_{\leq -1, \leq \infty} := \emptyset$
- (2) $\mathbf{Sm}_{\leq -1, \leq \infty}(\emptyset) := \{*\}$

と定義する。

仮定 1.1: 帰納法の仮定

与えられた $k \geq -1$ に対して以下の構成が完了していると仮定する：

- (1) 圏 $\mathbf{Bsc}_{\leq k, \leq \infty}$
- (2) 前層 $\mathbf{Sm}_{\leq k, \leq \infty} : (\mathbf{Snglr}_{\leq k, \leq \infty}^{C^0})^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$
- (3) 関手

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times (-) : \mathbf{Bsc}_{\leq k, \leq \infty} &\longrightarrow \mathbf{Bsc}_{\leq k, \leq \infty}, \\ U &\longmapsto \mathbb{R} \times U, \\ (U \xrightarrow{f} V) &\longmapsto (\mathbb{R} \times U \xrightarrow{\text{id} \times f} \mathbb{R} \times V) \end{aligned}$$

およびそれが誘導する自然変換^a

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{Sm}_{\leq k, \leq \infty}(-) & \\ \curvearrowright & \downarrow & \curvearrowleft \\ (\mathbf{Snglr}_{\leq k, \leq \infty}^{C^0})^{\text{op}} & & \mathbf{Sets} \\ \curvearrowleft & \downarrow & \curvearrowright \\ & \mathbf{Sm}_{\leq k, \leq \infty}(\mathbb{R} \times -) & \end{array}$$

^a X の極大アトラス $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ に対して, $\{\mathbb{R} \times U_\alpha, \text{id} \times \varphi_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ を対応づける。

定義 1.11: 圏 $\mathbf{Bsc}_{\leq k+1, \leq \infty}$

帰納法の仮定 1.1 がある $k \geq -1$ において成立しているとする。また, C^0 basic を $U_Z^n := (\mathbb{R}^n \rightarrow [0]) \times C(Z \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ と書く。このとき, 圏 $\mathbf{Bsc}_{\leq k+1, \leq \infty}$ を以下で定義する：

(対象)

C^0 basic ^a $U_Z^n \in \text{Ob}(\text{Snglr}_{\leq k+1, \leq \infty}^{C^0})$ および, 極大アトラス $\mathcal{A}_Z \in \text{Sm}_{\leq k, \leq \infty}(Z \rightarrow P)$ の組み

$$(U_Z^n, \mathcal{A}_Z)$$

を対象とする. これを **basic** と呼ぶ.

(射)

任意の 2 つの対象 $(U_Z^n, \mathcal{A}_Z), (U_W^m, \mathcal{A}_W) \in \text{Ob}(\text{Bsc}_{\leq k+1, \leq \infty})$ に対して, 以下の条件を満たす層状化開埋め込み $f \in \text{Hom}_{\text{Snglr}_{\leq k+1, \leq \infty}^{C^0}}(U_Z^n, U_W^m)$ を射とする:

f がコーンポイントを保存しない場合

ある層状化開埋め込み $f_0 \in \text{Hom}_{\text{Snglr}_{\leq k+1, \leq \infty}^{C^0}}(U_Z^n, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \times W)$ が存在して

$$f: U_Z^n \xrightarrow{f_0} \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}_{>0} \times W) \hookrightarrow U_W^m = \mathbb{R}^m \times \mathbb{C}(W)$$

と書いて, かつ $(U_Z^n, f_0) \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \times W} \in \text{Sm}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \times W)$

f がコーンポイントを保存する場合

f は \mathbb{R}^n に沿って **conically smooth** であって, かつ $Df: \mathbb{R}^n \times U_Z^n \rightarrow \mathbb{R}^m \times U_W^m$ が単射であり, かつ

$$\mathcal{A}_{f^{-1}(U_W^m \setminus \mathbb{R}^m)} = \text{Sm}_{\leq k, \leq \infty}(f|_{f^{-1}(U_W^m \setminus \mathbb{R}^m)})(\mathcal{A}_{U_W^m \setminus \mathbb{R}^m})$$

を満たす^b. ただし, $U_W^m \setminus \mathbb{R}^m := U_W^m \setminus (\mathbb{R}^m \times \{\text{pt}\}) = \mathbb{R}^{m+1} \times W$ と略記した.

^a **depth** の定義から $\text{depth}(Z \rightarrow P) \leq \dim(Z \rightarrow P)$ である. 故に【例 1.1.6】から, $\text{depth}(Z \rightarrow P) \leq \dim(Z \rightarrow P) = \text{depth } U_Z^n - 1 \leq k$ であること, i.e. $(Z \rightarrow P) \in \text{Ob}(\text{Snglr}_{\leq k, \leq \infty}^{C^0})$ が分かる.

^b ここで帰納法の仮定 1.1-(3) を暗に使っている.

定義 1.12: 前層 $\text{Sm}_{\leq k+1, \leq \infty}$

帰納法の仮定 1.1 がある $k \geq -1$ において成立しているとする. さらに定義 1.11 によって $\text{Bsc}_{\leq k+1, \leq \infty}$ が完成しているとする.

- C^0 級層状化空間 $\forall (X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\text{Snglr}_{\leq k+1, \leq \infty}^{C^0})$ に対して, $X \rightarrow P$ のアトラス (atlas) を族

$$\mathcal{A} := \left\{ (U_\alpha \in \text{Ob}(\text{Bsc}_{\leq k+1, \leq \infty}), \varphi_\alpha: U_\alpha \hookrightarrow (X \rightarrow P)) \right\}_{\alpha \in \Lambda} \in \text{Sm}_{\leq k+1, \leq \infty}(X \rightarrow P)$$

であって以下の条件を満たすものとして定義する:

(Atlas-1)

\mathcal{A} は $(X \rightarrow P)$ の開被覆である.

(Atlas-2)

$\forall \alpha, \beta \in \Lambda$ および $\forall x \in \varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta)$ に対して, 圏 $\text{Snglr}_{\leq k+1, \leq \infty}^{C^0}$ の可換図式

$$\begin{array}{ccc}
\exists W & \xrightarrow{f_\beta} & U_\beta \\
f_\alpha \downarrow & & \downarrow \varphi_\beta \\
U_\alpha & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & X
\end{array}$$

が存在して $x \in \varphi_\alpha \circ f_\alpha(W) = \varphi_\beta \circ f_\beta(W)$ を充たす. ただし, 可換図式中の赤色の部分は全て圏 $\mathbf{Bsc}_{\leq k+1, \leq \infty}$ の対象および射からなる.

アトラス \mathcal{A} の元 $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ のことを**チャート** (chart) と呼ぶ.

- C^0 級層状化空間 $\forall (X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}_{\leq k+1, \leq \infty}^{C^0})$ の2つのアトラス \mathcal{A}, \mathcal{B} が同値であるとは, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ が $(X \rightarrow P)$ のアトラスであることを言う. これは $(X \rightarrow P)$ のアトラス全体の集合の上に同値関係を定める^a. $(X \rightarrow P)$ の**極大アトラス** (maximal atlas) とは, この同値関係によるアトラス \mathcal{A} の同値類 $[\mathcal{A}]$ のことを言う.
- 前層

$$\text{Sm}_{\leq k+1, \leq \infty} : (\mathbf{Snglr}_{\leq k+1, \leq \infty}^{C^0})^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を以下のように定義する:

(対象)

任意の C^0 級層状化空間 $(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}_{\leq k+1, \leq \infty}^{C^0})$ に対して

$$\text{Sm}_{\leq k+1, \leq \infty}(X \rightarrow P) := \{ [\mathcal{A}] \mid \mathcal{A} \text{ is an atlas of } (X \rightarrow P) \}$$

(射)

任意の層状化開埋め込み $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Snglr}_{\leq k+1, \leq \infty}^{C^0}}((X \rightarrow P), (Y \rightarrow Q))$ に対して, f によるアトラスの引き戻しを対応付ける.

^a 同値関係であることの証明は [?, Lemma 3.2.11.] を参照.

以上の帰納法をまとめて, conically smooth な層状化空間と層状化開埋め込みの圏 \mathbf{Snglr} を得る.

定義 1.13: 圏 \mathbf{Snglr}

- **basic** のなす圏 \mathbf{Bsc} を以下で定義する：

$$\mathbf{Bsc} := \bigcup_{k \geq -1} \mathbf{Bsc}_{\leq k, \leq \infty}$$

- 極大アトラスの集合を与える関手 $\mathbf{Sm}: (\mathbf{Snglr}^{C^0})^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ を以下の右 Kan 拡張として定義する：

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{Snglr}_{<\infty, \leq \infty}^{C^0})^{\text{op}} & \xrightarrow{\mathbf{Sm}_{<\infty, \leq \infty}} & \mathbf{Sets} \\ \downarrow & \nearrow \text{Sm} & \\ (\mathbf{Snglr}^{C^0})^{\text{op}} & & \end{array}$$

ただし, $\mathbf{Snglr}_{<\infty, \leq \infty}^{C^0} := \bigcup_{k \geq -1} \mathbf{Snglr}_{\leq k, \leq \infty}^{C^0}$ とおいた.

- **conically smooth** な層状化空間 (conically smooth stratified space) と **層状化開埋め込み** の圏 \mathbf{Snglr} を以下で定義する：

(対象)

C^0 級層状化空間 $(X \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ およびその **極大アトラス** $\mathcal{A}_X \in \mathbf{Sm}(X \rightarrow P)$ の組み $((X \rightarrow P), \mathcal{A}_X)$ を対象とする.

(射)

層状化開埋め込み $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}}((X \rightarrow P), (Y \rightarrow Q))$ であって, $f^* \mathcal{A}_Y = \mathcal{A}_X$ を充たすものを射とする.

1.1.5 conically smooth map

ここまでは**層状化開埋め込み**のみを考えていたため, 一般の**層状化写像**の conically smoothness を定義しなくてはならない.

定義 1.14: conically smooth map

2つの **basic**^a $X = (U_Z^n, \mathcal{A}_Z)$, $Y = (U_W^m, \mathcal{A}_W) \in \text{Ob}(\mathbf{Bsc})$ の間の **層状化写像** $f: U_Z^n \rightarrow U_W^m$ が **conically smooth** であることを, **depth**(Y) に関する帰納法によって定義する:

- (1) まず, $\text{depth}(Y) = -1$ のときは $X = Y = \emptyset$ であり, 一意的に定まる X, Y 間の層状化写像が conically smooth であると定義する.
- (2) 深さ $k \geq -1$ の basic に対して定義が完了しているとする. $Y \in \text{Ob}(\mathbf{Bsc})$ の深さが高々 $k+1$ であるとき, 層状化写像 $f: X \rightarrow Y$ が conically smooth であることを以下で定義する:

f がコーンポイントを保存しない場合

ある conically smooth な層状化写像 $f_0: X \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \times W$ が存在して

$$f: X \xrightarrow{f_0} \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}_{>0} \times W) \hookrightarrow Y = \mathbb{R}^m \times \mathbb{C}(W)$$

と書ける^b.

f がコーンポイントを保存する場合

f は \mathbb{R}^n に沿って conically smooth であって, かつ制限

$$f|_{f^{-1}(Y \setminus \mathbb{R}^m)}: f^{-1}(Y \setminus \mathbb{R}^m) \rightarrow Y \setminus \mathbb{R}^m$$

が conically smooth. ただし, $U_W^m \setminus \mathbb{R}^m := U_W^m \setminus (\mathbb{R}^m \times \{\text{pt}\}) = \mathbb{R}^{m+1} \times W$ と略記した.

^a C^0 basic を $U_Z^n := (\mathbb{R}^n \rightarrow [0]) \times \mathbb{C}(Z \rightarrow P) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ と書く.

^b 【例 1.1.6】より $\text{depth}(W) < k+1$ であり, 帰納法の仮定が使える.

conically smooth な層状化空間 $((X \rightarrow P), \mathcal{A}_X), ((Y \rightarrow Q), \mathcal{A}_Y) \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr})$ の間の **層状化写像** $f: (X \rightarrow P) \rightarrow (Y \rightarrow Q)$ が **conically smooth** であるとは, 任意のチャートの組み合わせ $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_X, (V, \psi) \in \mathcal{A}_Y$ に対して

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi: U \rightarrow V$$

が conically smooth (for basics) であることを言う.

命題 1.1: conically smooth map の基本性質

2つの conically smooth map の合成も conically smooth である.

証明 [?, Proposition 3.3.5] ■

命題 1.1 より, conically smooth な層状化空間の圏を定義できる.

定義 1.15: conically smooth な層状化空間の圏 \mathbf{Strat}

conically smooth な層状化空間の圏 \mathbf{Strat} を以下で定義する：

(対象)

圏 \mathbf{Snglr} と全く同じ対象を持つ：

$$\mathrm{Ob}(\mathbf{Strat}) := \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr})$$

(射)

conically smooth map を射とする．

定義から明らかに $\mathbf{Snglr} \subset \mathbf{Strat}$ である．ここで、圏 \mathbf{Strat} における特別な射に名前をつけておこう：

定義 1.16: constructible bundle

- conically smooth な層状化写像 $\pi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}((E \rightarrow P), (B \rightarrow Q))$ が層状化ファイバー束 (conically smooth fiber bundle) であるとは、conically smooth な層状化開埋め込みの族 $\{U_\alpha \hookrightarrow B\}_{\alpha \in \Lambda}$, $\{\varphi_\alpha: U_\alpha \times F_\alpha \hookrightarrow E\}_{\alpha \in \Lambda}$ が存在して以下を充たすことを言う：

(Bun-1)

$\forall \alpha \in \Lambda$ に対して、圏 \mathbf{Strat} における引き戻しの図式

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times F_\alpha & \xhookrightarrow{\varphi_\alpha} & E \\ \mathrm{proj}_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ U_\alpha & \hookrightarrow & B \end{array}$$

が成り立つ．

(Bun-2)

族 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ は B の開基である．

- conically smooth な層状化写像 $\pi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}((E \rightarrow P), (B \rightarrow Q))$ が弱構成可能束 (weakly constructible bundle) であるとは、 $\forall q \in Q$ に対して、 π の q -層への制限

$$\pi|_{\pi^{-1}(B_q)}: \pi^{-1}(B_q) \longrightarrow B_q$$

が層状化ファイバー束であることを言う．

- conically smooth な層状化写像 $\pi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}((E \rightarrow P), (B \rightarrow Q))$ が構成可能束 (constructible bundle) であることを、 $\mathrm{depth}(E)$ に関する帰納法によって定義する：

(1) $\mathrm{depth}(E) = 0$ のとき、 π が構成可能束であるとは、 π が C^∞ ファイバー束であることを言う．

(2) 深さ $k \geq 0$ までの定義が完了しているとする． $\mathrm{depth}(E) \leq k+1$ のとき、 π が構成可能束であるとは、以下の2条件を充たすことを言う：

(cBun-1) π は弱構成可能束である．

(cBun-2) $\forall q \in Q$ に対して、 π が誘導する層状化写像

$$\mathrm{Link}_{\pi^{-1}(B_q)}(E) \longrightarrow \pi^{-1}(B_q) \times_{B_q} \mathrm{Link}_{B_q}(B)$$

が構成可能束である．

1.1.6 管状近傍・ハンドル分解

1.2 層状化空間の接構造

1.2.1 Kan-豊穡化

圏 \mathbf{Kan} を,

- Kan 複体を対象に持つ
- Kan 複体の間の自然変換を射に持つ

(1, 1)-圏とする. \mathbf{Kan} は単体的集合の圏 \mathbf{sSet} の充満部分圏であり, 直積 (??) をテンソル積とするモノイダル圏になる.

定義 1.17: 余単体的多様体

以下で定義する関手

$$\Delta_e: \Delta \longrightarrow \mathbf{Strat}$$

のことを余単体的多様体 (standard cosimplicial manifold) と呼ぶ^a:

- $[n] \in \text{Ob}(\Delta)$ を, **conically smooth な層状化空間**

$$\Delta_e^n := \left\{ (x^0, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x^i = 1 \right\}$$

に対応付ける.

- $\alpha \in \text{Hom}_\Delta([m], [n])$ を, **conically smooth な層状化写像**

$$\begin{aligned} \Delta_e(\alpha): \Delta_e^m &\longrightarrow \Delta_e^n, \\ (x^0, \dots, x^m) &\longmapsto \left(\sum_{j, \alpha(j)=0} x^j, \dots, \sum_{j, \alpha(j)=n} x^j \right) \end{aligned}$$

に対応付ける.

^a 幾何学的 n -単体に似ているが, $x^i \geq 0$ の領域で切り取っていない.

$\mathbf{PSh}(\mathbf{Strat}^{\text{op}}, \mathbf{Sets})$ から \mathbf{sSet} への関手を

$$\begin{aligned} (-)|_\Delta: \mathbf{PSh}(\mathbf{Strat}, \mathbf{Sets}) &\longrightarrow \mathbf{sSet}, \\ F &\longmapsto F \circ \Delta_e \end{aligned}$$

で定義する. さらに, $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathbf{Strat})$ に対して前層 $\widetilde{\text{Hom}}_{\mathbf{Strat}}(X, Y) \in \mathbf{PSh}(\mathbf{Strat}, \mathbf{Sets})$ を

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Hom}}_{\mathbf{Strat}}(X, Y): \mathbf{Strat}^{\text{op}} &\longrightarrow \mathbf{Sets}, \\ Z &\longmapsto \left\{ f \in \text{Hom}_{\mathbf{Strat}}(Z \times X, Z \times Y) \mid \text{proj}_Z \circ f = \text{proj}_Z \right\}, \end{aligned}$$

$$(Z \xrightarrow{\alpha} W) \mapsto \left(\widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}(X, Y)}(Z) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}(X, Y)}(W), \right. \\ \left. f \mapsto \left((w, x) \mapsto (w, \mathrm{proj}_Y \circ f(\alpha(w), x)) \right) \right)$$

で定義する．ただし，**conically smooth な層状化写像** $\mathrm{proj}_Z \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}(Z \times X, Z)$ とは第一成分への射影のことである．同様にして前層 $\widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(X, Y)} \in \mathrm{PSh}(\mathbf{Strat}, \mathbf{Sets})$ を

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(X, Y)}: \mathbf{Strat}^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathbf{Sets}, \\ Z &\mapsto \{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(Z \times X, Z \times Y) \mid \mathrm{proj}_Z \circ f = \mathrm{proj}_Z \}, \\ (Z \xrightarrow{\alpha} W) &\mapsto \left(\widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(X, Y)}(Z) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(X, Y)}(W), \right. \\ &\quad \left. f \mapsto \left((w, x) \mapsto (w, \mathrm{proj}_Y \circ f(\alpha(w), x)) \right) \right) \end{aligned}$$

で定義する．

補題 1.1:

$\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Strat})$ に対して定まる単体的集合

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}(X, Y) &:= \widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}(X, Y)} \Big|_{\Delta}, \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(X, Y) &:= \widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(X, Y)} \Big|_{\Delta} \end{aligned}$$

は Kan 複体である．

証明 [?, Lemma 4.1.4.]. ■

定義 1.18: $(\infty, 1)$ -圏 $\mathbf{Strat}, \mathbf{Snglr}, \mathcal{Bsc}$

Kan-豊稜圏 \mathbf{Strat} を以下で定義する：

- $\mathrm{Ob}(\mathbf{Strat}) := \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr})$
- 補題 1.1 で構成した $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}(X, Y) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Kan})$ を Hom 対象とする．

同様に，**Kan-豊稜圏 \mathbf{Snglr}** を以下で定義する：

- $\mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}) := \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr})$
- 補題 1.1 で構成した $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(X, Y) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Kan})$ を Hom 対象とする．

Kan-豊稜圏 \mathbf{Snglr} の対象を **Ob(Bsc)** に制限して得られる充満部分圏を \mathcal{Bsc} と書く．

!

Kan-豊稜圏を homotopy coherent nerve functor $N_{\mathrm{hc}}: \mathbf{Cat}_{\Delta} \longrightarrow \mathbf{sSet}$ で単体的集合の圏 \mathbf{sSet} へ埋め込んだものは $(\infty, 1)$ -圏である [?, Proposition 1.1.5.10.]. 故に以下では **Kan-豊稜圏 $\mathbf{Strat}, \mathbf{Snglr}$** と $(\infty, 1)$ -圏 $N_{\mathrm{hc}}(\mathbf{Strat}), N_{\mathrm{hc}}(\mathbf{Snglr})$ を区別しない．

1.2.2 $(\infty, 1)$ -圏におけるファイブレーション

定義 1.19: $(\infty, 1)$ -ファイブレーション

$p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ を $(\infty, 1)$ -圏の関手とする.

(lifting property)

包含 $\iota \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda_j^n, \Delta^n)$ に関して $p \circ f_0 = f \circ \iota$ を満たす任意の $(f_0, f) \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda_j^n, \mathcal{E}) \times \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \mathcal{B})$ に対して, 以下の図式を可換にする $\bar{f} \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \mathcal{E})$ が存在する:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_j^n & \xrightarrow{\forall f_0} & \mathcal{E} \\ \downarrow \iota & \nearrow \exists \bar{f} & \downarrow p \\ \Delta^n & \xrightarrow{\forall f} & \mathcal{B} \end{array}$$

- p が **内的ファイブレーション** (inner fibration) であるとは, $0 < \forall j < \forall n$ に対して **(lifting property)** を満たすことを言う.
- p が **右ファイブレーション** (right fibration) であるとは, $0 < \forall j \leq \forall n$ に対して **(lifting property)** を満たすことを言う.
- p が **左ファイブレーション** (left fibration) であるとは, $0 \leq \forall j < \forall n$ に対して **(lifting property)** を満たすことを言う.
- p が **Kan ファイブレーション** (Kan fibration) であるとは, $0 \leq \forall j \leq \forall n$ に対して **(lifting property)** を満たすことを言う.

系??によると, **(lifting property)** は, $(\infty, 1)$ -圏 \mathcal{B} における角の図式 $(p_{[n-1]}(f_{00}), \dots, \underbrace{\bullet}_j, \dots, p_{[n-1]}(f_{0n})) \in (\mathcal{B}_{n-1})^{\times n}$ を n -射 $f \in \mathcal{B}_n$ が埋めているならば, $(\infty, 1)$ -圏 \mathcal{E} における角の図式 $(f_{00}, \dots, \underbrace{\bullet}_j, \dots, f_{0n}) \in (\mathcal{E}_{n-1})^{\times n}$ を埋める n -射 $\bar{f} \in \mathcal{E}_n$ が存在することを主張している.

定義 1.20: 充満部分 $(\infty, 1)$ -圏

- $(\infty, 1)$ -圏 \mathcal{C} の **部分 $(\infty, 1)$ -圏** (sub $(\infty, 1)$ -category) とは, 単体的部分集合 $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$ であって, その包含写像 $i: \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{C}$ が内的ファイブレーションであるようなもののこと^a.
- 部分 $(\infty, 1)$ -圏 $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$ が **充満部分 $(\infty, 1)$ -圏** (full sub $(\infty, 1)$ -category) であるとは, $\forall n \geq 0$ に対して以下の条件を満たすことを言う:
(fullsub) $\forall \sigma \in \mathcal{C}_n \cong \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \mathcal{C})$ に対して, $\sigma_{[0]}(\Delta_0^n) \subset \mathcal{S}_0 \implies \sigma \in \mathcal{S}_n$ が成り立つ.

^a このとき \mathcal{S} は $(\infty, 1)$ -圏になる [?, Tag 01CG]

2つの**右ファイブレーション** $\mathcal{E} \xrightarrow{p} \mathcal{B}, \mathcal{E}' \xrightarrow{p'} \mathcal{B}$ が与えられたとき, これらの間の射とは集合

$$\text{Hom}_{\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}') := \{ f \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}') \mid p' \circ f = p \}$$

のことである． $\text{Hom}_{\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ の元を \mathbf{sSet} における可換図式として表すと以下の通り：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{f} & \mathcal{E}' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & \mathcal{B} & \end{array}$$

$\text{Hom}_{\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}') \subset \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ を【例??】の方法で単体的集合と見做せる．このようにして得られる単体的集合 $\text{Hom}_{\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ の最大の部分 Kan 複体を $\text{Hom}_{\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ と書く．

定義 1.21: 右ファイブレーションの成す $(\infty, 1)$ -圏

\mathcal{B} を $(\infty, 1)$ -圏とする．Kan-豊穡圏 $\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}$ を

- 右ファイブレーションを対象とする
- $\text{Hom}_{\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ を Hom 対象とする

ことで定義する．以降では $(\infty, 1)$ -圏 $\text{N}_{\text{hc}}(\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}) \in \text{Ob}(\mathbf{sSet})$ のことも $\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}$ と書き，区別しない．

1.2.3 $(\infty, 1)$ -圏におけるスライス圏

定義 1.22: 単体的集合の join

2 つの単体的集合 $S, T \in \text{Ob}(\mathbf{sSet})$ の join とは，単体的集合

$$\begin{aligned} S \star T: \Delta^{\text{op}} &\longrightarrow \mathbf{Sets}, \\ [n] &\longmapsto \coprod_{[i]; -1 \leq i \leq n} (S_i \times T_{n-i-1}), \\ \left([m] \xrightarrow{\alpha} [n]\right) &\longmapsto \left(\left([i]; (x, y)\right) \mapsto \left(\alpha^{-1}([i]); (S(\alpha|_{\alpha^{-1}([i])})(x), T(\alpha|_{\alpha^{-1}([m] \setminus [i])})(y))\right)\right) \end{aligned}$$

のこと．ただし $S_{-1} = T_{-1} := \{*\}$, $[-1] := \emptyset$ とおいた．

$d_j^n \in \text{Hom}_{\Delta^{\text{op}}}([n], [n-1])$ に対して

$$\begin{aligned} (d_j^n)^{-1}([i]) &= \begin{cases} [i], & -1 \leq i < j \\ [i-1], & j \leq i \leq n \end{cases} \\ (d_j^n)^{-1}([n] \setminus [i]) &= \begin{cases} [n-1] \setminus [i], & -1 \leq i < j \\ [n-1] \setminus [i-1], & j \leq i \leq n \end{cases} \end{aligned}$$

であるから， $S \star T$ の面写像は $n \geq 1, 0 \leq j \leq n$ に対して

$$\partial_j^n: \coprod_{-1 \leq i \leq n} (S_i \times T_{n-i-1}) \longrightarrow \coprod_{-1 \leq i \leq n-1} (S_i \times T_{n-i-2}), \quad (1.2.1)$$

$$([i]; (x, y)) \mapsto \begin{cases} ([-1]; (*, \partial_j^n y)), & i = -1 \\ ([i]; (x, \partial_{j-i-1}^{n-i-1} y)), & 0 \leq i < j, (i, j) \neq (n-1, n) \\ ([i-1]; (\partial_j^i x, y)), & j \leq i \leq n-1, (i, j) \neq (0, 0) \\ ([n-1]; (\partial_j^n x, *)), & i = n \\ ([n-1]; (x, *)), & (i, j) = (n-1, n) \\ ([-1]; (*, y)), & (i, j) = (0, 0) \end{cases}$$

となる.

【例 1.2.1】 $\text{join } \Delta^0 \star \Delta^0$

$\Delta^0 \star \Delta^0$ を計算してみよう^a. まず対象は

$$(\Delta^0 \star \Delta^0)_0 = \Delta^0_0 \sqcup \Delta^0_0 = \left\{ \begin{array}{c} \{0\} \\ \bullet \\ \bullet \\ \{0\} \end{array} \right\}$$

である. 1-射は

$$(\Delta^0 \star \Delta^0)_1 = \Delta^0_1 \sqcup (\Delta^0_0 \times \Delta^0_0) \sqcup \Delta^0_1$$

であるが, (1.2.1) より始点関数は

$$\begin{aligned} \partial_1^1|_{\Delta^0_0 \times \Delta^0_0} : \Delta^0_0 \times \Delta^0_0 &\longrightarrow \Delta^0_0 \sqcup \Delta^0_0, \\ (\{0\}, \{0\}) &\longmapsto \{0\} \end{aligned}$$

終点関数は

$$\begin{aligned} \partial_0^1|_{\Delta^0_0 \times \Delta^0_0} : \Delta^0_0 \times \Delta^0_0 &\longrightarrow \Delta^0_0 \sqcup \Delta^0_0, \\ (\{0\}, \{0\}) &\longmapsto \{0\} \end{aligned}$$

となるため, Δ^0_1, Δ^0_1 が縮退していることを考慮すると

$$(\Delta^0 \star \Delta^0)_1 = \left\{ \begin{array}{c} \{0\} \\ \bullet \\ \downarrow \\ \bullet \\ \{0\} \end{array} \right\}$$

と図示できる.

^a 左右の区別を付けるために色を付けた.

【例 1.2.2】 $\text{join } \Delta^1 \star \Delta^0$

$\Delta^1 \star \Delta^0$ を計算してみよう．まず対象は

$$(\Delta^1 \star \Delta^0)_0 = \Delta^1_0 \sqcup \Delta^0_0 = \left\{ \begin{array}{cc} \{0\} & \{1\} \\ \bullet & \bullet \\ & \bullet \\ & \{0\} \end{array} \right\}$$

である．1-射は

$$(\Delta^1 \star \Delta^0)_1 = \Delta^1_1 \sqcup (\Delta^1_0 \times \Delta^0_0) \sqcup \Delta^0_1$$

であるが，(1.2.1) より始点関数は

$$\begin{aligned} \partial_1^1|_{\Delta^1_0 \times \Delta^0_0} : \Delta^1_0 \times \Delta^0_0 &\longrightarrow \Delta^1_0 \sqcup \Delta^0_0, \\ (x, \{0\}) &\longmapsto x \end{aligned}$$

終点関数は

$$\begin{aligned} \partial_0^1|_{\Delta^1_0 \times \Delta^0_0} : \Delta^1_0 \times \Delta^0_0 &\longrightarrow \Delta^1_0 \sqcup \Delta^0_0, \\ (x, \{0\}) &\longmapsto \{0\} \end{aligned}$$

となるため，

$$\Delta^1 \star \Delta^0 = \left\{ \begin{array}{cc} \{0\} & \{1\} \\ \bullet & \bullet \\ & \bullet \\ & \{0\} \end{array} \right\}$$

と図示できる．ただし，三角形の内部は 2-射 $(\text{Id}_{[1]}, \{0\}) \in \Delta^1_1 \times \Delta^0_0 \subset (\Delta^1 \star \Delta^0)_2$ が埋めている．同様に

$$(\Delta^0 \star \Delta^1)_1 = \left\{ \begin{array}{cc} \{0\} & \{1\} \\ \bullet & \bullet \\ & \bullet \\ & \{0\} \end{array} \right\}$$

であることが分かる．

【例 1.2.3】 $\text{join } \Delta^2 \star \Delta^0$

$\Delta^2 \star \Delta^0$ を計算してみよう． まず

$$(\Delta^2 \star \Delta^0)_0 = \Delta^2_0 \sqcup \Delta^0_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \{1\} & & \{0\} \\ & \bullet & \\ & \{2\} & \\ & \bullet & \\ & \{0\} & \end{array} \right\}$$

である． 次に 1 射は

$$(\Delta^2 \star \Delta^0)_1 = \Delta^2_1 \sqcup (\Delta^2_0 \times \Delta^0_0) \sqcup \Delta^0_1$$

であるが， (1.2.1) より始点関数は

$$\begin{aligned} \partial_1^1|_{\Delta^2_0 \times \Delta^0_0} : \Delta^2_0 \times \Delta^0_0 &\longrightarrow \Delta^2_0 \sqcup \Delta^0_0, \\ (x, \text{Id}_{\{0\}}) &\longmapsto x \end{aligned}$$

となり， 終点関数は

$$\begin{aligned} \partial_0^1|_{\Delta^2_0 \times \Delta^0_0} : \Delta^2_0 \times \Delta^0_0 &\longrightarrow \Delta^2_0 \sqcup \Delta^0_0, \\ (x, \text{Id}_{\{0\}}) &\longmapsto \{0\} \end{aligned}$$

となる． 従って図式??に倣うと

$$(\Delta^2 \star \Delta^0)_1 = \Delta^2_1 \sqcup (\Delta^2_0 \times \Delta^0_0) \sqcup \Delta^0_1 = \left\{ \begin{array}{ccc} \{0\} & & \{2\} \\ & \nearrow & \searrow \\ & \{1\} & \\ & \downarrow & \\ & \{0\} & \end{array} \right\}$$

と図示できる． ただし， 四面体の内部は 3-射 $(\text{Id}_{[2]}, \{0\}) \in \Delta^2_2 \times \Delta^0_0 \subset (\Delta^1 \star \Delta^0)_3$ が埋めている． 同様に， $\Delta^0 \star \Delta^2$ の 1-射を図示すると

$$(\Delta^0 \star \Delta^2)_1 = \Delta^0_1 \sqcup (\Delta^0_0 \times \Delta^2_0) \sqcup \Delta^2_1 = \left\{ \begin{array}{ccc} & \{0\} & \\ & \downarrow & \\ \{0\} & \{1\} & \{2\} \\ & \uparrow & \\ & \{0\} & \end{array} \right\}$$

のようになる．

補題 1.2: $(\infty, 1)$ -圏同士の join は $(\infty, 1)$ -圏

$(\infty, 1)$ -圏同士の join は $(\infty, 1)$ -圏である。

証明 [?, Proposition 1.2.8.3] ■

定義 1.23: スライス $(\infty, 1)$ -圏

$(\infty, 1)$ -圏 \mathcal{D}, \mathcal{C} および $(\infty, 1)$ -圏の関手 $p \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ を与える。 p に沿った \mathcal{C} のスライス圏 (overcategory)

$$\mathcal{C}_{/p}: \Delta^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を以下で定義する：

- $\forall [n] \in \text{Ob}(\Delta^{\text{op}})$ に対して、 集合

$$\text{Hom}_p(\Delta^n \star \mathcal{D}, \mathcal{C}) := \{ f \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n \star \mathcal{D}, \mathcal{C}) \mid f|_{\mathcal{D}} = p \}$$

を対応付ける^a。

- $\forall \alpha \in \text{Hom}_{\Delta^{\text{op}}}([m], [n])$ に対して、 写像

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{/p}(\alpha): \text{Hom}_p(\Delta^m \star \mathcal{D}, \mathcal{C}) &\longrightarrow \text{Hom}_p(\Delta^n \star \mathcal{D}, \mathcal{C}), \\ f &\longmapsto f \circ (\alpha_* \star \text{Id}_{\mathcal{D}}) \end{aligned}$$

を対応付ける。

実際、単体的集合 $\mathcal{C}_{/p}$ は $(\infty, 1)$ -圏である [?, Tag 018F].

^a $f|_{\mathcal{D}}$ というのは、join の定義における $(\Delta^n \star \mathcal{D})_k$ の disjoint union のうち、添字 $i = 0$ が振られている成分への制限を意味する。

p に沿った \mathcal{C} のコスライス圏 (undercategory)

$$\mathcal{C}_{p/}: \Delta^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を以下で定義する：

- $\forall [n] \in \text{Ob}(\Delta^{\text{op}})$ に対して、 集合

$$\text{Hom}_p(\mathcal{D} \star \Delta^n, \mathcal{C}) := \{ f \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\mathcal{D} \star \Delta^n, \mathcal{C}) \mid f|_{\mathcal{D}} = p \}$$

を対応付ける^a。

- $\forall \alpha \in \text{Hom}_{\Delta^{\text{op}}}([m], [n])$ に対して、 写像

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{p/}(\alpha): \text{Hom}_p(\mathcal{D} \star \Delta^m, \mathcal{C}) &\longrightarrow \text{Hom}_p(\mathcal{D} \star \Delta^n, \mathcal{C}), \\ f &\longmapsto f \circ (\text{Id}_{\mathcal{D}} \star \alpha_*) \end{aligned}$$

を対応付ける。

^a $f|_{\mathcal{D}}$ というのは, **join の定義**における $(\mathcal{D} \star \Delta^n)_k$ の disjoint union のうち, 添字 $i = n$ が振られている成分への制限を意味する.

特に注目すべきは, $(\infty, 1)$ -圏の関手 $p: \Delta^0 \rightarrow \mathcal{C}$ をとった場合である. このとき $X := p_{[0]}(\{0\}) \in \mathcal{C}_0$ において $\mathcal{C}_{/X}$, $\mathcal{C}_{X/}$ などを書く.

まず, $(\infty, 1)$ -圏 $\mathcal{C}_{/X}$ の対象 $\varphi \in (\mathcal{C}_{/X})_0 = \text{Hom}_p(\Delta^0 \star \Delta^0, \mathcal{C})$ をとる. すると【例 1.2.1】および $\varphi|_{\Delta^0} = p$ の条件から, $\varphi_{[1]}: (\Delta^0 \star \Delta^0)_1 \rightarrow \mathcal{C}_1$ とは図式

$$\varphi = \begin{array}{c} \varphi_{[0]}|_{\Delta^0_0}(\{0\}) \\ \bullet \\ \downarrow \varphi_{[1]}|_{\Delta^0_0 \times \Delta^0_0}(\{0\} \rightarrow \{0\}) \\ \bullet \\ X \end{array}$$

である. $n \geq 2$ 射に相当する $\varphi_{[n]}: (\Delta^0 \star \Delta^0)_n \rightarrow \mathcal{C}_n$ のデータは縮退していて自明である. 従って, φ は $(1, 1)$ -圏における X 上のスライス圏の対象と等価なデータを与える.

同様に, $(\infty, 1)$ -圏 $\mathcal{C}_{/X}$ の 1-射 $f \in (\mathcal{C}_{/X})_1 = \text{Hom}_p(\Delta^1 \star \Delta^0, \mathcal{C})$ とは, 【例 1.2.2】より

$$f = \begin{array}{ccc} f_{[0]}|_{\Delta^1_0}(\{0\}) & \xrightarrow{\quad} & f_{[0]}|_{\Delta^1_0}(\{1\}) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & f_{[2]}|_{\Delta^1_1 \times \Delta^0_0}(\text{Id}_{[1]}, \{0\}) & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ & \bullet & \\ & X & \end{array}$$

のことである. ただし三角形の内部は 2-射 $f_{[2]}|_{\Delta^1_1 \times \Delta^0_0}(\text{Id}_{[2]}, \{0\}) \in \mathcal{C}_2$ が埋めている. これは $(1, 1)$ -圏における X 上のスライス圏の射のデータに対応しているが, 横向きの矢印を決めるだけでは f が upto homotopy でしか定まらないという点で異なっている.

$(\infty, 1)$ -圏 $\mathcal{C}_{/X}$ の n -射も同様に図示できる.

【例 1.2.4】スライス圏からの forgetful functor

$(\infty, 1)$ -圏 \mathcal{C} の, $X: \Delta^0 \rightarrow \mathcal{C}$ に沿った**スライス圏**に対して, **忘却関手** (forgetful functor)

$$\text{forget}: \mathcal{C}_{/X} \rightarrow \mathcal{C}$$

を次のように定義する:

$$\begin{aligned} \text{forget}_{[n]}: (\mathcal{C}_{/X})_n = \text{Hom}_X(\Delta^n \star \Delta^0, \mathcal{C}) &\rightarrow \mathcal{C}_n = \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \mathcal{C}), \\ f &\mapsto f|_{\Delta^n} \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

$n = 0, 1, 2$ の場合, i.e. 【例 1.2.1】, 【例 1.2.2】, 【例 1.2.3】の図式においては, ちょうど $X \in \mathcal{C}_0$ に対応する青色の頂点 (コーンポイント) を除去する操作に対応している. (1.2.2) の定義は**右ファイブレーション**になっている.

1.2.4 $(\infty, 1)$ -圏の limit/colimit

後の議論のため、先取りして $(\infty, 1)$ -圏における limit/colimit を定義しておこう。 $(\infty, 1)$ -圏のモデルとして quasi-category を採用する場合、これは **homotopy limit/colimit** と呼ばれることもある。

定義 1.24: $(\infty, 1)$ -圏における始対象と終対象

- $(\infty, 1)$ -圏 \mathcal{C} における対象 $x \in \mathcal{C}_0$ が**始対象** (initial object) であるとは、ホモトピー圏 $h\mathcal{C}$ における始対象^aであること。
- $(\infty, 1)$ -圏 \mathcal{C} における対象 $x \in \mathcal{C}_0$ が**終対象** (final object) であるとは、ホモトピー圏 $h\mathcal{C}$ における終対象^bであること。

^a $(1, 1)$ -圏の**始対象**とは、空の図式における余極限のこと。

^b $(1, 1)$ -圏の**終対象**とは、空の図式における極限のこと。

定義 1.25: $(\infty, 1)$ -圏の limit/colimit

$(\infty, 1)$ -圏の関手 $D: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ を与える^a。

- D の **limit** とは、**スライス $(\infty, 1)$ -圏 $\mathcal{C}_{/D}$** における**終対象**のこと。 $\lim D \in \mathcal{C}_0$ と書く。
- D の **colimit** とは、**スライス $(\infty, 1)$ -圏 $\mathcal{C}_{D/}$** における**始対象**のこと。 $\operatorname{colim} D \in \mathcal{C}_0$ と書く。

^a $(1, 1)$ -圏の場合からのアナロジーで、 D を図式と見做す。

【例 1.2.5】 pullback

単体的集合の積 $S \times T: \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ における面写像とは

$$\begin{aligned} \partial_j^n: S_n \times T_n &\longrightarrow S_{n-1} \times T_{n-1}, \\ (x, y) &\longmapsto (\partial_j^n x, \partial_j^n y) \end{aligned}$$

のことであった。故に、単体的集合 $\Delta^1 \times \Delta^1$ は、 $\Delta_0^1 = \{\bullet_0, \bullet_1\}$ とおくと

$$\Delta^1 \times \Delta^1 = \begin{array}{ccc} (0, 0) & \xrightarrow{\quad} & (1, 0) \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ (0, 1) & \xrightarrow{\quad} & (1, 1) \end{array}$$

と図示できる。ただし、2-射以上は縮退して見えない。

$(\infty, 1)$ -圏の関手 $D: \Delta^1 \times \Delta^1 \rightarrow \mathcal{C}$ の **limit** のことを（存在すれば）**pullback** と呼び、

$$D(0, 1) \times_{D(1, 1)} D(1, 0) := \lim D \in \mathcal{C}_0$$

と書く。

1.2.5 Unstraightening construction

定理 1.1: unstraightening construction

$(\infty, 1)$ -圏同値

$$\mathbf{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}}$$

が存在する.

証明 $(\infty, 1)$ -圏同値

$$\mathbf{Un}: \mathbf{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}}$$

は, 次のようにして構成される (unstraightening construction) :

対象 $F \in \mathbf{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathcal{B})_0$ に対して, $(\infty, 1)$ -圏の pullback

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Un}(F) & \longrightarrow & \mathcal{S}\mathbf{paces}_{/*} \\ \downarrow & & \downarrow \text{forget} \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{F} & \mathcal{S}\mathbf{paces} \end{array}$$

により得られる右ファイブレーション $\mathbf{Un}(F) \longrightarrow \mathcal{B} \in (\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}})_0$ を対応付ける.

n -射

逆向きの $(\infty, 1)$ -圏同値 (straightning construction)

$$\mathbf{St}: \mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}} \longrightarrow \mathbf{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathcal{B})$$

は難しい. 詳細は [?, Proposition 2.2.3.11] を参照. ■

1.2.6 $(\infty, 1)$ -圏における米田埋め込み

定義 1.26: twisted arrow category

$(\infty, 1)$ -圏 \mathcal{C} を与える. このとき, \mathcal{C} の twisted arrow category と呼ばれる $(\infty, 1)$ -圏を以下で定義する:

$$\begin{aligned} \mathbf{Tw}(\mathcal{C}): \Delta^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathbf{Sets}, \\ [n] &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}((\Delta^n)^{\mathrm{op}} \star \Delta^n, \mathcal{C}), \\ ([m] \xrightarrow{\alpha} [n]) &\longmapsto (f \mapsto f \circ (\alpha_* \times \alpha_*)) \end{aligned}$$

$(\infty, 1)$ -圏の関手

$$\mathrm{pr}: \mathbf{Tw}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C}$$

を以下で定義すると, これは左ファイブレーションになる [?, Tag 03JQ] :

$$\mathrm{pr}_{[n]}: \mathbf{Tw}(\mathcal{C})_n \longrightarrow \mathcal{C}_n^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C}_n = \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \mathcal{C}^{\mathrm{op}}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \mathcal{C})$$

$$f \mapsto (f|_{(\Delta^n)^{\text{op}}}, f|_{\Delta^n})$$

$(\infty, 1)$ -圏における Hom 関手

$$\text{Map}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}\text{paces}$$

の自然な構成は, [straightning construction](#) を用いた

$$\begin{array}{ccc} \text{Tw}(\mathcal{C}) & \longrightarrow & \mathcal{S}\text{paces}_{*/} \\ \text{pr} \downarrow & & \downarrow \text{forget} \\ \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} & \xrightarrow{\text{Map}_{\mathcal{C}} := \text{St}(\text{pr})} & \mathcal{S}\text{paces} \end{array}$$

である [?, I.26., p.19].

定義 1.27: $(\infty, 1)$ -圏の米田埋め込み (informal)

\mathcal{C} を $(\infty, 1)$ -圏とする. $(\infty, 1)$ -圏の米田埋め込み (Yoneda embedding)

$$\mathbf{y} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathcal{C})$$

とは, \mathcal{C} から $(\infty, 1)$ -前層の成す $(\infty, 1)$ -圏 $\mathbf{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathcal{C})$ への $(\infty, 1)$ -圏の関手であって, 対象 $x \in \mathcal{C}_0$ に対して

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{[0]}(x)_{[0]} : \mathcal{C}_0^{\text{op}} &\longrightarrow \mathcal{S}\text{paces}_0, \\ y &\longmapsto \text{Map}_{\mathcal{C}}(x, y) \end{aligned}$$

を充たす^aような $(\infty, 1)$ -圏の関手 $\mathbf{y}_{[0]}(x) \in \mathbf{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathcal{C})_0 = \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathcal{S}\text{paces})$ を対応付けるもののこと^b.

^a $(\infty, 1)$ -圏 \mathcal{C} において, 対象 $x, y \in \mathcal{C}_0$ の間の射の空間 $\text{Map}_{\mathcal{C}}(x, y)$ は Kan 複体を成すのだった [?, [Tag 01JC](#)].

^b 厳密な構成については [?, [Tag 03NF](#)] を参照.

1.2.7 層状化空間の接構造

定義 1.28: enter-path category

[conically smooth](#) な層状化空間 $X \in \text{Ob}(\mathbf{Strat})$ の enter-path $(\infty, 1)$ -category とは, $(\infty, 1)$ -圏 $\mathcal{B}\text{sc}$ のスライス圏

$$\mathcal{E}\text{nter}(X) := \mathcal{B}\text{sc}_{/X}$$

のこと.

定義 1.29: tangent classifier

$\iota: \mathcal{B}\mathbf{sc} \hookrightarrow \mathbf{Snglr}$ を包含とする. **tangent classifier** とは, $(\infty, 1)$ -圏の関手

$$\tau: \mathbf{Snglr} \xrightarrow{\iota} \mathbf{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathbf{Snglr}) \xrightarrow{\iota^*} \mathbf{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathcal{B}\mathbf{sc})$$

のこと.

定義 1.27 より, **tangent classifier** は **conically smooth な層状化空間** $X \in \mathbf{Snglr}_0$ に対して $(\infty, 1)$ -圏の表現可能前層

$$\tau_{[0]}(X) = \mathrm{Map}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}(-, X) \in \mathbf{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathcal{B}\mathbf{sc})_0 \quad (1.2.3)$$

を対応付ける.

定理 1.1 より, **tangent classifier** τ のことを

$$\tau: \mathbf{Snglr} \xrightarrow{\iota} \mathbf{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathbf{Snglr}) \xrightarrow{\iota^*} \mathbf{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathcal{B}\mathbf{sc}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}$$

と見做すこともできる. このとき, $\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}$ の構成および $(\infty, 1)$ -前層 (1.2.3) に対する定理 1.1 の具体的構成から, **conically smooth な層状化空間** $X \in \mathbf{Snglr}_0$ に対して定まる $(\infty, 1)$ -圏の**右ファイブレーション** $\tau_{[0]}(X) \in (\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}})_0$ とは忘却関手

$$\tau_{[0]}(X): \mathcal{E}\mathbf{nter}(X) \longrightarrow \mathcal{B}\mathbf{sc}$$

のことである. この忘却関手を以下では $\tau_X := \tau_{[0]}(X)$ と書く.

定義 1.30: \mathcal{B} -多様体

- (\mathcal{B}, f) 構造^aとは, $(\infty, 1)$ -圏の**右ファイブレーション** $(\mathcal{B} \xrightarrow{f} \mathcal{B}\mathbf{sc}) \in (\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}})_0$ のこと.
- (\mathcal{B}, f) 構造 $\mathcal{B} \xrightarrow{f} \mathcal{B}\mathbf{sc}$ を 1 つ固定する. このとき, **\mathcal{B} -多様体** (\mathcal{B} -manifold) の成す $(\infty, 1)$ -圏 $\mathcal{M}\mathbf{fld}(\mathcal{B})$ とは, $(\infty, 1)$ -圏の **pullback**

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}\mathbf{fld}(\mathcal{B}) & \longrightarrow & (\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}})_{/f} \\ \downarrow & & \downarrow \text{forget} \\ \mathbf{Snglr} & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}} \end{array}$$

のこと. 特に, $\mathcal{M}\mathbf{fld}(\mathcal{B})_0$ の元は以下の 2 つのデータから成り, **\mathcal{B} -多様体**と呼ばれる:

- **conically smooth な層状化空間** $X \in \mathbf{Snglr}_0$
- $(\infty, 1)$ -圏の関手 $g: \mathcal{E}\mathbf{nter}(X) \longrightarrow \mathcal{B}$

これらは以下の条件を充たさねばならない:

(lift of tangent classifier)

\mathbf{sSet} における以下の図式は可換である:

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{B} \\ & \nearrow g & \downarrow f \\ \mathcal{E}\text{nt}\mathbf{r}(X) & \xrightarrow{\tau_X} & \mathcal{B}\text{sc} \end{array}$$

^a [?, Definition 1.1.6] では $(\infty, 1)$ -category of basics と呼ばれている。

1.2.8 $\mathcal{B}\text{sc}$ における Hom

しばらくの間, $\text{basic } U := ((\mathbb{R}^n \rightarrow [0]) \times \mathcal{C}(Z \rightarrow P), \mathcal{A}_Z) \in \text{Ob}(\mathcal{B}\text{sc})$ を 1 つ固定する. これまでと同様に, 層状化空間 $\mathcal{C}(Z \xrightarrow{s} P) = (\mathcal{C}(Z) \xrightarrow{\mathcal{C}(s)} \mathcal{C}(P))$ の **コーンポイント** のことを $\text{pt} \in \mathcal{C}(Z)$ と書き, $\mathbb{R}^n \times \{\text{pt}\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathcal{C}(Z)$ のことを \mathbb{R}^n と略記することにする. さらに, 点 $(0, \text{pt}) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{C}(Z)$ のことを $0 \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{C}(Z)$ と略記し, U の **原点** (origin) と呼ぶことにする.

! 以下では, 混乱が生じにくい場合は層状化空間 $(X \xrightarrow{s} P)$ の s と P を省略する. さらに, **conically smooth atlas** を明示しない.

いま, 特異単体の変種として, **conically smooth な層状化空間** $X \in \text{Ob}(\mathbf{Strat})$ の滑らかな特異単体 (smooth singular simplicial set) と呼ばれる単体的集合を

$$\begin{aligned} \text{Sing}^{\text{sm}}(X) &: \Delta^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}, \\ [n] &\longmapsto \text{Hom}_{\mathbf{Strat}}(\Delta_e^n, X), \\ ([m] \xrightarrow{\alpha} [n]) &\longmapsto (\text{Sing}^{\text{sm}}(X)_m \xrightarrow{\Delta_e(\alpha)^*} \text{Sing}^{\text{sm}}(X)_n) \end{aligned}$$

と定義する^{*5}. これは Kan 複体になる. ここで (1.1.1) を思い出して, 写像

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}\text{sc}}(U, U), \\ (t, p) &\longmapsto \left((v, [s, z]) \mapsto (tv + p, [ts, z]) \right) =: \tilde{\gamma}_{t,p} \end{aligned}$$

を考える. これを Kan 複体の間の射 (i.e. 自然変換)

$$\gamma: \text{Sing}^{\text{sm}}(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}\text{sc}}(U, U) \quad (1.2.4)$$

へと格上げすることができる. 実際, $\forall m \geq 0$ に対して, m -単体はそれぞれ

$$\begin{aligned} \text{Sing}^{\text{sm}}(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n)_m &= \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta_e^m, \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n)_{\text{smooth}}, \\ \text{Hom}_{\mathcal{B}\text{sc}}(U, U)_m &= \{ f \in \text{Hom}_{\mathbf{Sngl}\mathbf{r}}(\Delta_e^m \times U, \Delta_e^m \times U) \mid \text{proj}_{\Delta_e^m} \circ f = \text{proj}_{\Delta_e^m} \} \end{aligned}$$

であったから,

$$\begin{aligned} \gamma_{[m]}: \text{Sing}^{\text{sm}}(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n)_m &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}\text{sc}}(U, U)_m, \\ (x \mapsto (t(x), p(x))) &\longmapsto \left((x, u) \mapsto (x, \tilde{\gamma}_{t(x), p(x)}(u)) \right) =: \gamma_{[m]t,p} \end{aligned}$$

^{*5} 滑らかな特異単体と言ったときは幾何学的 n -単体を用いることが多く, このように定義することは稀だと思う.

と定義すればよい.

さらに, 勝手な **conically smooth な層状化空間** $Z \in \text{Ob}(\mathbf{Snglr})$ に対して, その**自己同相群** (automorphism group)

$$\text{Aut}(Z): \Delta^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を, **Kan 複体** $\text{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(Z, Z)$ の部分 Kan 複体として次のように定義する:

$$\text{Aut}(Z)_m := \{ f \in \text{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(Z, Z)_m \mid \exists f^{-1} \in \text{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(\Delta_e^m \times Z, \Delta_e^m \times Z) \}$$

なお, $\forall m \geq 0$ に対し集合 $\text{Aut}(Z)_m$ は $(1, 1)$ -圏 \mathbf{Snglr} における 1-射の合成に関して群になるため, Kan 複体 $\text{Aut}(Z)$ は**群的な Kan 複体** (group-like Kan complex)^{*6}と見做することができる.

定義 1.31: 層状化された一般線形群

勝手な **basic** $U := \mathbb{R}^n \times \mathbf{C}(Z) \in \text{Ob}(\mathbf{Bsc})$ を与える.

Kan 複体 $\text{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(U, U)$ の部分 Kan 複体

$$\text{GL}(U): \Delta^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を次のように定義し, **層状化された一般線形群**と呼ぶ:

$$\text{GL}(U)_m := \{ T \in \text{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(U, U)_m \mid \forall (t, p) \in \text{Sing}^{\text{sm}}(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n)_m, T \circ \gamma_{[m]t, p} = \gamma_{[m]t, (Tp)_{\mathbb{R}^n}} \circ T \}$$

ただし, $(Tp)_{\mathbb{R}^n} := \text{proj}_{\mathbb{R}^n} \circ T|_{\Delta_e^m \times \mathbb{R}^n \times \{0\}} \circ p: \Delta_e^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ と略記した.

Kan 複体 $\text{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(U, U)$ の部分 Kan 複体

$$\text{O}(U): \Delta^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を次のように定義し, **層状化された直交群**と呼ぶ:

$$\text{O}(U) := \text{Sing}^{\text{sm}}(\text{O}(n)) \times \text{Aut}(Z)$$

【例 1.2.6】 通常的一般線形群

$Z = \emptyset$ の場合を考える. このとき $U = \mathbb{R}^n$ なので, Kan 複体の射 (1.2.4) とは単に

$$\gamma_{[m]}: \left(x \mapsto (t(x), p(x)) \right) \longmapsto \left((x, u) \mapsto (x, t(x)u + p(x)) \right)$$

のことであり, $T \in \text{GL}(U)_m$ とは $\forall (t, p) \in \text{Sing}^{\text{sm}}(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n)$ および $\forall (x, u) \in \Delta_e^m \times U = \Delta_e^m \times \mathbb{R}^n$ に対して

$$\begin{aligned} T \circ \gamma_{[m]t, p}(x, u) &= T(x, t(x)u + p(x)) \\ &= \gamma_{[m]t, \text{proj}_{\mathbb{R}^n} \circ T|_{\mathbb{R}^n}(p)} \circ T(x, u) \\ &= \left(x, t(x) \text{proj}_{\mathbb{R}^n} \circ T(x, u) + \text{proj}_{\mathbb{R}^n} \circ T(x, p(x)) \right) \end{aligned}$$

^{*6} Kan 複体であって, $\Delta^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Grp}$ でもあるもの. 従って, homotopy hypothesis より位相群と見做することができる.

が成り立つことを意味する． i.e. $\forall x \in \Delta_e^m$ に対して, $\tilde{T}_x := \text{proj}_{\mathbb{R}^n} \circ T|_{\{x\} \times U} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ とおくと

$$\tilde{T}_x(t(x)u + p(x)) = t(x)\tilde{T}_xu + \tilde{T}_xp(x)$$

が成り立つため, \tilde{T}_x は線型写像である． (1, 1)-圏 **Snglr** の定義より T は開埋め込みであり, 単射である． 故に, 有限次元ベクトル空間の間の単射線型写像 \tilde{T}_x は全単射でもあり, $\tilde{T}_x \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ だと分かった． この事実, Kan 複体の同型 $\text{GL}(\mathbb{R}^n) \cong \text{Sing}^{\text{sm}}(\text{GL}(n, \mathbb{R}))$ を意味する．

さて, 部分 Kan 複体 $\text{Aut}^0(U) \subset \text{Hom}_{\mathcal{B}\text{sc}}^0(U, U) \subset \text{Hom}_{\mathcal{S}\text{nglr}}(U, U)$ を次のように定義しよう：

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{B}\text{sc}}^0(U, U)_m &:= \{ f \in \text{Hom}_{\mathcal{S}\text{nglr}}(U, U)_m \mid \forall x \in \Delta_e^m, f(x, 0) = (x, 0) \}, \\ \text{Aut}^0(U)_m &:= \{ f \in \text{Hom}_{\mathcal{B}\text{sc}}^0(U, U)_m \mid \forall x \in \Delta_e^m, \exists (f|_{\{x\} \times U})^{-1} \in \text{Hom}_{\mathcal{S}\text{nglr}}(U, U) \} \end{aligned}$$

補題 1.3: 層状化された一般線形群は原点を保つ自己同相群

$$\text{GL}(U) \subset \text{Aut}^0(U) \subset \text{Hom}_{\mathcal{B}\text{sc}}^0(U, U)$$

証明 $\forall m \geq 0$ および $\forall T \in \text{GL}(U)_m$ を 1 つ固定する． $\forall x \in \Delta_e^m$ および $\forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して $\gamma_{[m]t, 0}(x, 0) = (x, 0)$ が成り立つので,

$$T(x, 0) = T \circ \gamma_{[m]0, 0}(x, 0) = \gamma_{[m]0, 0}(T(x, 0)) = (x, 0)$$

が言える． また, (1, 1)-圏 **Snglr** の定義より $T \in \text{Hom}_{\mathcal{S}\text{nglr}}(\Delta_e^m \times U \longrightarrow \Delta_e^m \times U)$ は開埋め込みであるから単射である． 故に T が全射であることを示せば良い． ■

補題 1.4: 層状化された直交群は一般線形群の部分 Kan 複体

$$\text{O}(U) \subset \text{GL}(U)$$

証明 $\forall m \geq 0$ および $\forall T := (A, f) \in \text{O}(U)_m = \text{Sing}^{\text{sm}}(\text{O}(n))_m \times \text{Aut}(Z)_m$ を 1 つ固定する． まず, $\forall (x, (v, [s, z])) \in \Delta_e^m \times U = \Delta_e^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}(Z)$ に対して

$$T(x, (v, [s, z])) := (x, (A(x)v, [s, \text{proj}_Z \circ f(x, z)]))$$

と定めることで $T \in \text{Hom}_{\mathcal{B}\text{sc}}^0(U, U)_m$ と見做せる． このとき, $\forall (t, p) \in \text{Sing}^{\text{sm}}(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n)$ に対して

$$\begin{aligned} T \circ \gamma_{[m]t, p}(x, (v, [s, z])) &= T(x, (t(x)v + p(x), [t(x)s, z])) \\ &= (x, (t(x)A(x)v + A(x)p(x), [t(x)s, \text{proj}_Z \circ f(x, z)])) \\ &= \gamma_{[m]t, Ap}(x, (A(x)v, [s, \text{proj}_Z \circ f(x, z)])) \\ &= \gamma_{[m]t, (Tp)_{\mathbb{R}^n}} \circ T(x, (v, [s, z])) \end{aligned}$$

が成り立つため $T \in \text{GL}(U)_m$ が言えた． ■

命題 1.2:

Kan 複体の包含写像

$$\mathcal{O}(U) \xrightarrow{i_1} \mathrm{GL}(U) \xrightarrow{i_2} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathrm{sc}}^0(U, U) \xrightarrow{i_3} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathrm{sc}}(U, U)$$

は全て Kan 複体のホモトピー同値である.

証明 i_1 のホモトピー逆

Gram-Schmidt の正規直交化を行う.

i_2 のホモトピー逆

$(\infty, 1)$ -圏 $\mathcal{B}\mathrm{sc}$ の定義において登場する射は全て **conically smooth** なので, $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathrm{sc}}^0(U, U)_m$ の微分

$$Df: T(\Delta_e^m \times \mathbb{R}^n) \times \mathcal{C}(Z) \longrightarrow T(\Delta_e^m \times \mathbb{R}^n) \times \mathcal{C}(Z)$$

が存在する^{*7}. このとき, $T(\Delta_e^m \times \mathbb{R}^n) \approx (\Delta_e^m \times \mathbb{R}^n) \times (\Delta_e^m \times \mathbb{R}^n)$ であり, 底空間の勝手な元 $(x, p) \in \Delta_e^m \times \mathbb{R}^n$ に対して

$$D_{(x,p)}f := Df|_{\Delta_e^m \times \mathbb{R}^n \times \{(x,p)\} \times \mathcal{C}(Z)} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathrm{sc}}(U, U)_m \subset \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(\Delta_e^m \times U, \Delta_e^m \times U)$$

とおこう. 特に, $D_{(x,0)}f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathrm{sc}}^0(U, U)_m$ であることに注意する.

$\forall x \in \Delta_e^m$ を 1 つ固定する. まずは $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathrm{sc}}^0(U, U)_m$ に対して $D_{(x,0)}f \in \mathrm{GL}(U)_m$ であること, i.e. Kan 複体の射

$$D_0: \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathrm{sc}}^0(U, U) \longrightarrow \mathrm{GL}(U)$$

が定まることを示そう. 実際, $\forall (t, p) \in \mathrm{Sing}^{\mathrm{sm}}(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n)_m$ に対して

$$\begin{aligned} D_{(x,0)}f \circ \gamma_{[m]t,p} &= \left(\lim_{s \rightarrow +0} \gamma_{\frac{1}{s},0} \circ f \circ \gamma_{s,0} \right) \circ \gamma_{t,p} \\ &= \dots \\ &= \gamma_{[m]t, D_{(x,0)}f(p)} \circ D_{(x,0)}f \end{aligned}$$

と計算できる.

さらに, **GL(U) の定義**から $\forall T \in \mathrm{GL}(U)_m$ および $\forall t > 0$ に対して

$$\gamma_{[m]\frac{1}{t},0} \circ T \circ \gamma_{[m]t,0} = T$$

が成り立つので, 微分の一意性より $D_0T = T$ だと分かる. i.e. $D_0 \circ i_2 = \mathrm{Id}_{\mathrm{GL}(U)}$ である.

その上,

$$\begin{aligned} \mathrm{Sing}^{\mathrm{sm}}([0, 1]) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathrm{sc}}^0(U, U) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathrm{sc}}^0(U, U), \\ (s, f) &\longmapsto \gamma_{\frac{1}{s},0} \circ f \circ \gamma_{s,0} \end{aligned}$$

がちやうど $i_2 \circ D_0$ と $\mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathrm{sc}}^0(U, U)}$ を繋ぐホモトピーになっており, i_2 のホモトピー逆が D_0 であることが示された.

^{*7} $\Delta_e^m \approx \mathbb{R}^m$ である.

i_3 のホモトピー逆

γ により原点へ並行移動すれば良い.

■

1.2.9 $\mathcal{B}\mathbf{sc}$ の構造

(1, 1)-圏 \mathbf{Bsc} における対象の同型類が成す集合を

$$\mathrm{Ob}([\mathcal{B}\mathbf{sc}]) := \{ [U] \mid U \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Bsc}) \}$$

と書く. この集合の上には 2 項関係

$$\{ ([U], [V]) \in \mathrm{Ob}([\mathcal{B}\mathbf{sc}])^{\times 2} \mid \mathrm{Hom}_{\mathbf{Bsc}}(U, V) \neq \emptyset \} \quad (1.2.5)$$

が定まる.

定理 1.2: Basics are easy

(1) $\forall U = \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}(Z) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Bsc})$ に対して, Kan 複体の包含

$$\mathrm{O}(\mathbb{R}^n) \times \mathrm{Aut}(Z) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Bsc}}(U, U)$$

は Kan 複体のホモトピー同値である.

(2) $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Bsc}}(U, V)$ に対して, 以下のいずれかちょうど 1 つが真である:

(a) f は $(\infty, 1)$ -圏 $\mathcal{B}\mathbf{sc}$ における同型射である.

(b) $\mathrm{depth}(U) < \mathrm{depth}(V)$

(3) 集合 $\mathrm{Ob}([\mathcal{B}\mathbf{sc}])$ 上の 2 項関係 (1.2.5) は半順序である. 半順序集合 $\mathrm{Ob}([\mathcal{B}\mathbf{sc}])$ を (1, 1)-圏と見做し, それを $[\mathcal{B}\mathbf{sc}]$ と書く.

(4) $(\infty, 1)$ -圏の関手

$$[-]: \mathcal{B}\mathbf{sc} \longrightarrow \mathbf{N}[\mathcal{B}\mathbf{sc}]$$

は conservative である. i.e. $(U \xrightarrow{f} V) \in \mathcal{B}\mathbf{sc}_1$ が $(\infty, 1)$ -圏 $\mathcal{B}\mathbf{sc}$ における同型射であるためには, U, V が (1, 1)-圏 \mathbf{Bsc} において同型であることが必要十分である.

(5) 写像

$$\mathrm{depth}: \mathrm{Ob}([\mathcal{B}\mathbf{sc}]) \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

は順序を保つ.

証明

■

1.2.10 tangent classifier の構造

1.3 Disk algebras

1.3.1 $(\infty, 1)$ -オペラッド

本資料では、 $(\infty, 1)$ -圏を quasi-category として定義した。この小節では、quai-category における colored operad を定義する。

定義 1.32: $(1, 1)$ -圏 \mathbf{Fin} , \mathbf{Fin}_*

$(1, 1)$ -圏 \mathbf{Fin} を以下で定義する：

- 有限集合および空集合を対象に持つ。
- $I, J \in \text{Ob}(\mathbf{Fin})$ の間の写像を射とする。

$(1, 1)$ -圏 \mathbf{Fin}_* を以下で定義する：

- 基点付き有限集合

$$\langle n \rangle := \{*, 1, \dots, n\}$$

を対象に持つ。i.e.

$$\text{Ob}(\mathbf{Fin}_*) := \{ \langle n \rangle \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \}.$$

- $\forall \langle m \rangle, \langle n \rangle \in \text{Ob}(\mathbf{Fin}_*)$ に対して、それらの間の基点を保つ写像を射とする。i.e.

$$\text{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m \rangle, \langle n \rangle) := \{ f \in \text{Hom}_{\mathbf{Sets}}(\langle m \rangle, \langle n \rangle) \mid f(*) = * \}.$$

定義 1.33: inert/active morphism

- 圏 \mathbf{Fin}_* における射 $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m \rangle, \langle n \rangle)$ が **inert** であるとは、 $\forall i \in \langle n \rangle \setminus \{*\}$ に対して $f^{-1}(\{i\}) \subset \langle m \rangle$ が 1 点集合であることを言う。
- 圏 \mathbf{Fin}_* における射 $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m \rangle, \langle n \rangle)$ が **active** であるとは、 $f^{-1}(\{*\}) = \{*\} \subset \langle m \rangle$ であることを言う。

【例 1.3.1】inert な射 ρ^i

$1 \leq \forall i \leq \forall n$ を 1 つ固定する。このとき、写像

$$\begin{aligned} \rho^i: \langle n \rangle &\longrightarrow \langle 1 \rangle, \\ j &\longmapsto \begin{cases} 1, & j = i \\ *, & j \neq i \end{cases} \end{aligned}$$

は圏 \mathbf{Fin}_* における **inert な射**である。

【例 1.3.2】 active な射 α_n

$\forall n \geq 1$ を 1 つ固定する．このとき，写像

$$\alpha_n: \langle n \rangle \longrightarrow \langle 1 \rangle, \\ j \longmapsto \begin{cases} 1, & j \neq * \\ *, & j = * \end{cases}$$

は圏 \mathbf{Fin}_* における **active な射** である．なお， α_n は射の集合 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle n \rangle, \langle 1 \rangle)$ の元のうち，唯一の active な射である．

脈体の定義において $[n] \in \mathrm{Ob}(\Delta)$ を $(1, 1)$ -圏と見做した方法と同様にして，半順序集合 $\{n-1 \leq n\}$ を $(1, 1)$ -圏と見做す．このとき，

$$N(\{n-1 \leq n\}) = \left(\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ n-1 & & n \end{array} \right) \cong \Delta^1$$

と図示できる．同様に，

$$N(\{0 \leq 1\}) = \left(\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ 0 & & 1 \end{array} \right) \cong \Delta^1$$

である．

定義 1.34: p -Cartesian morphism

$p: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{B}$ を **内的ファイブレーション** とする．

- \mathcal{E} の 1-射 $(x \xrightarrow{f} y) \in \mathcal{E}_1$ が以下の条件を充たすとき， f は **p -Cartesian** であると言う：
(Cartesian) $\forall n \geq 2$ に対して，以下の \mathbf{sSet} の図式を可換にする \mathcal{E} の n -射 $\bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \mathcal{E}) \cong \mathcal{E}_n$ が存在する：

$$\begin{array}{ccc} N(\{n-1 \leq n\}) \cong \Delta^1 & & \\ \downarrow & \searrow f & \\ \Delta_n^n & \xrightarrow{\forall \varphi_0} & \mathcal{E} \\ \downarrow & \searrow \exists \bar{\varphi} & \downarrow p \\ \Delta^n & \xrightarrow{\forall \varphi} & \mathcal{B} \end{array}$$

ただし， \mathbf{sSet} の射 $f: N(\{n-1 \leq n\}) \longrightarrow \mathcal{E}$ とは

$$f_{[1]} \left(\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ n-1 & & n \end{array} \right) = \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{f} & \bullet \\ x & & y \end{array}$$

を充たす唯一の自然変換である．

- \mathcal{E} の 1-射 $(x \xrightarrow{f} y) \in \mathcal{E}_1$ が以下の条件を充たすとき， f は **p -coCartesian** であると言う：
(coCartesian) $\forall n \geq 2$ に対して，以下の \mathbf{sSet} の図式を可換にする \mathcal{E} の n -射 $\bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \mathcal{E}) \cong \mathcal{E}_n$ が存在する：

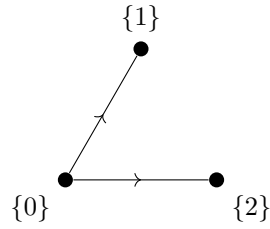
$$\begin{array}{ccc}
N(\{0 \leq 1\}) \cong \Delta^1 & & \\
\downarrow & \searrow f & \\
\Lambda_0^n & \xrightarrow{\forall \varphi_0} & \mathcal{E} \\
\downarrow & \searrow \exists \varphi & \downarrow p \\
\Delta^n & \xrightarrow{\forall \varphi} & \mathcal{B}
\end{array}$$

ただし, \mathbf{sSet} の射 $f: N(\{0 \leq 1\}) \rightarrow \mathcal{E}$ とは

$$f_{[1]} \left(\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ n-1 & & n \end{array} \right) = \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{f} & \bullet \\ x & & y \end{array}$$

を充たす唯一の自然変換である.

$n = 2$ の場合の **(coCartesian)** の可換図式の意味を, 系??を用いて解説しよう. まず, 包含 $N(\{0 \leq 1\}) \hookrightarrow \Lambda_0^2$ というのは, 系??による角 Λ_0^2 の図示



のうち辺 $\{0\} \rightarrow \{1\}$ への埋め込みであるから, 可換図式の

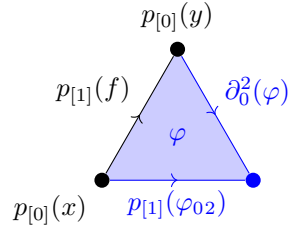
$$\begin{array}{ccc}
N(\{0 \leq 1\}) \cong \Delta^1 & & \\
\downarrow & \searrow f & \\
\Lambda_0^2 & \xrightarrow{\forall \varphi_0} & \mathcal{E}
\end{array}$$

の部分は勝手な角の図式 $\varphi_0 = (\bullet, f, \varphi_{02}) \in \mathcal{E}_1^{\times 2}$ を与えることに対応する. 図示すると

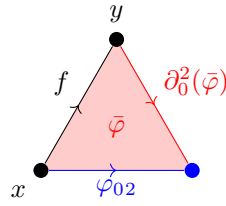
$$\varphi_0 = \begin{array}{ccc} & y & \\ & \bullet & \\ f \nearrow & & \\ x & \bullet & \bullet \\ \varphi_{02} \rightarrow & & \end{array} \quad (1.3.1)$$

となる. 従って, **(coCart-2)** の主張は次のような意味を持つ:

$(\infty, 1)$ -圏 \mathcal{B} において角の図式が 2-射 $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^2, \mathcal{B}) \cong \mathcal{B}_2$ によって



と埋められているならば, \mathcal{E} において角の図式 (1.3.1) を



のように埋める 2-射 $\bar{\varphi} \in \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^2, \mathcal{E}) \cong \mathcal{E}_2$ が存在する.

定義 1.35: デカルトファイブレーション

$p: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{B}$ を **内的ファイブレーション** とする.

- p が **デカルトファイブレーション** (Cartesian fibration) であるとは,
 - \mathcal{B} の任意の 1 射 $(x \xrightarrow{f} y) \in \mathcal{B}_1$
 - $p_{[0]}(\bar{y}) = y$ を満たす \mathcal{E} の任意の対象 $\bar{y} \in \mathcal{E}_0$

に対して, 以下の条件を満たす \mathcal{E} の 1-射 $(z \xrightarrow{\bar{f}} \bar{y}) \in \mathcal{E}_1$ が存在することを言う:

(Cart-1)

\bar{f} は f の持ち上げである. i.e. $p_{[1]}(\bar{f}) = f$ が成り立つ.

(Cart-2)

\bar{f} は **p -Cartesian** である.

- p が **余デカルトファイブレーション** (coCartesian fibration) であるとは,
 - \mathcal{B} の任意の 1 射 $(x \xrightarrow{f} y) \in \mathcal{B}_1$
 - $p_{[0]}(\bar{x}) = x$ を満たす \mathcal{E} の任意の対象 $\bar{x} \in \mathcal{E}_0$

に対して, 以下の条件を満たす \mathcal{E} の 1-射 $(\bar{x} \xrightarrow{\bar{f}} z) \in \mathcal{E}_1$ が存在することを言う:

(coCart-1)

\bar{f} は f の持ち上げである. i.e. $p_{[1]}(\bar{f}) = f$ が成り立つ.

(coCart-2)

\bar{f} は **p -coCartesian** である.

定義 1.36: $(\infty, 1)$ -オペラッド

$(\infty, 1)$ -オペラッド $((\infty, 1)\text{-operad})^a$ とは, $(\infty, 1)$ -圏の関手

$$p: \mathcal{O}^{\otimes} \longrightarrow \mathbf{N}(\mathbf{Fin}_*)$$

であって以下の条件を充たすもののこと [?, Definition 2.1.1.10.] :

(Op-1)

任意の **inert** な射 $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m \rangle, \langle n \rangle)$ および $\forall c \in (\mathcal{O}_{\langle m \rangle}^\otimes)_0$ に対して, \mathcal{O}^\otimes における **p -coCartesian** な 1-射 $\bar{f}: c \rightarrow c'$ が存在して $p_{[1]}(\bar{f}) = f$ を充たす.

(Op-2)

$\forall f \in \text{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m \rangle, \langle n \rangle)$ および $\forall c \in (\mathcal{O}_{\langle m \rangle}^\otimes)_0, \forall c' \in (\mathcal{O}_{\langle n \rangle}^\otimes)_0$ に対して, 【例 1.3.1】の inert な射の族 $\{\rho^i \in \text{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle n \rangle, \langle 1 \rangle)\}_{1 \leq i \leq n}$ に **(Op-1)** を適用して得られる **p -coCartesian** な 1-射の族 $\{c' \xrightarrow{\rho^i} c'_i \in (\mathcal{O}^\otimes)_1\}_{1 \leq i \leq n}$ が誘導する Kan 複体の関手^b

$$\text{Map}_{\mathcal{O}^\otimes}(c, c')_f \rightarrow \prod_{i=1}^n \text{Map}_{\mathcal{O}^\otimes}(c, c'_i)_{\rho^i \circ f}$$

は, $(\infty, 1)$ -圏 **Spaces** における同型射である.

(Op-3)

$\forall c_1, \dots, c_n \in (\mathcal{O}_{\langle 1 \rangle}^\otimes)_0$ に対して, ある $c \in (\mathcal{O}_{\langle n \rangle}^\otimes)_0$ および **p -coCartesian** な 1-射 $\hat{\rho}_i \in (\text{Map}_{\mathcal{O}^\otimes}(c, c_i)_{\rho^i})_0$ が存在する.

ただし, 以下の記法を採用した:

- 点 $\langle n \rangle \in N(\mathbf{Fin}_*)_0$ における $(\infty, 1)$ -圏の関手 $p: \mathcal{O}^\otimes \rightarrow N(\mathbf{Fin}_*)$ のファイバー $\mathcal{O}_{\langle n \rangle}^\otimes$ を, **$(\infty, 1)$ -圏の pullback**

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\langle n \rangle}^\otimes & \xrightarrow{\quad} & \Delta^0 \\ \downarrow & & \downarrow \langle n \rangle \\ \mathcal{O}^\otimes & \xrightarrow{p} & N(\mathbf{Fin}_*) \end{array}$$

と定義した^c.

- $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m \rangle, \langle n \rangle)$ および $c \in (\mathcal{O}_{\langle m \rangle}^\otimes)_0, c' \in (\mathcal{O}_{\langle n \rangle}^\otimes)_0$ に対して, $\bar{f} \in \text{Map}_{\mathcal{O}^\otimes}(c, c')_0$ であって $p_{[1]}(\bar{f}) = f$ を充たすもの全体から定まる, $\text{Map}_{\mathcal{O}^\otimes}(c, c') \in \mathbf{Spaces}_0$ の **充満部分 Kan 複体**を

$$\text{Map}_{\mathcal{O}^\otimes}(c, c')_f \hookrightarrow \text{Map}_{\mathcal{O}^\otimes}(c, c')$$

と書いた.

^a ∞ -operad と呼ばれる.

^b 対象の対応としては $\bar{f} \mapsto (\bar{\rho}^1 \circ \bar{f}, \dots, \bar{\rho}^n \circ \bar{f})$ であるが, 右辺の $(\infty, 1)$ -圏 \mathcal{O}^\otimes における 1-射の合成は up to homotopy でしか定まらないため, この関手は up to homotopy でしか決まらない.

^c これ自体が $(\infty, 1)$ -圏である. なお, ファイバーは $(\infty, 1)$ -圏の pullback なので一見すると非常に計算が難しいが, 幸いにしてこの場合は $(1, 1)$ -圏 **sSet** における pullback と一致する.

補題 1.5: Segal 条件

$(\infty, 1)$ -圏の関手

$$p: \mathcal{O}^\otimes \longrightarrow N(\mathbf{Fin}_*)$$

であって条件 **(Op-1)**, **(Op-2)** を満たすものを与える。このとき、条件 **(Op-3)** は以下と同値である^a:

(Segal)

$\forall n \geq 0$ に対して, 【例 1.3.1】の inert な射の族 $\{\rho^i \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle n \rangle, \langle 1 \rangle)\}_{1 \leq i \leq n}$ が条件 **(Op-1)** により誘導する $(\infty, 1)$ -圏の関手の族 $\{\rho^i: \mathcal{O}_{\langle n \rangle}^\otimes \longrightarrow \mathcal{O}_{\langle 1 \rangle}^\otimes\}_{1 \leq i \leq n}$ は, $(\infty, 1)$ -圏同値

$$(\rho_!^1, \dots, \rho_!^n): \mathcal{O}_{\langle n \rangle}^\otimes \xrightarrow{\simeq} (\mathcal{O}_{\langle 1 \rangle}^\otimes)^{\times n} \quad (1.3.2)$$

を与える。

^a 一般に Segal 条件というと n -fold pullback のことだが, 現在は $\mathcal{O}_{\langle 0 \rangle}^\otimes$ が contractible なので n -fold product になっている。

証明 (OP-3) \implies (Segal)

(OP-3) を仮定する。命題??より, $(\infty, 1)$ -圏の関手 (1.3.2) が忠実充満かつ本質的全射であることを示せば良い。

$\forall n \geq 0$ および $\forall c, c' \in (\mathcal{O}_{\langle n \rangle}^\otimes)_0$ を固定する。このとき $\mathrm{Id}_{\langle n \rangle} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle n \rangle, \langle n \rangle)$ に対して **(OP-2)** を用いることで, ホモトピー同値

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{O}_{\langle n \rangle}^\otimes}(c, c') \simeq \mathrm{Map}_{\mathcal{O}^\otimes}(c, c')_{\mathrm{Id}_{\langle n \rangle}} \longrightarrow \prod_{i=1}^n \mathrm{Map}_{\mathcal{O}^\otimes}(c, c'_i)_{\rho^i}$$

が得られる。さらに, p -coCartesian な射の定義からホモトピー同値

$$\prod_{i=1}^n \mathrm{Map}_{\mathcal{O}_{\langle 1 \rangle}^\otimes}(\rho_!^i(c), \rho_!^i(c')) \simeq \prod_{i=1}^n \mathrm{Map}_{\mathcal{O}^\otimes}(c_i, c'_i)_{\mathrm{Id}_{\langle 1 \rangle}} \longrightarrow \prod_{i=1}^n \mathrm{Map}_{\mathcal{O}^\otimes}(c, c'_i)_{\rho^i}$$

が得られる^{*8}ため, (1.3.2) が忠実充満だと分かった。本質的全射であることは **(OP-3)** より従う。

(OP-3) \Leftarrow (Segal) 明らか。 ■

^{*8} **(OP-2)** における $c'_i \in (\mathcal{O}_{\langle 1 \rangle}^\otimes)_0$ とは, ちょうど $\rho_!^i(c')$ のことである。

定義 1.37: $(\infty, 1)$ -オペラッドの射

$(\infty, 1)$ -オペラッド $p: \mathcal{O}^\otimes \rightarrow \mathbf{N}(\mathbf{Fin}_*)$ を与える. このとき, $(\infty, 1)$ -圏 \mathcal{O}^\otimes の 1-射 $f \in (\mathcal{O}^\otimes)_1$ が **inert** であるとは, 以下の 2 条件を満たすことを言う:

(inert-1) $p_{[1]}(f)$ は $(1, 1)$ -圏 \mathbf{Fin}_* における **inner な射** である.

(inert-2) f は **p -coCartesian** な 1-射である.

2 つの $(\infty, 1)$ -オペラッド $p: \mathcal{O}^\otimes \rightarrow \mathbf{N}(\mathbf{Fin}_*)$, $p': \mathcal{O}'^\otimes \rightarrow \mathbf{N}(\mathbf{Fin}_*)$ を与える. このとき, $(\infty, 1)$ -圏の開手 $f: \mathcal{O}^\otimes \rightarrow \mathcal{O}'^\otimes$ が $(\infty, 1)$ -オペラッドの射 (∞ -operad map) であるとは, 以下の 2 つの条件を満たすことを言う:

(Opmap-1) $(1, 1)$ -圏 \mathbf{sSet} の図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}^\otimes & \xrightarrow{f} & \mathcal{O}'^\otimes \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & \mathbf{N}(\mathbf{Fin}_*) & \end{array}$$

は可換である.

(Opmap-2) 1-射の間の写像 $f_{[1]}: (\mathcal{O}^\otimes)_1 \rightarrow (\mathcal{O}'^\otimes)_1$ により, inert な 1-射が保存される^a.

^a 条件 **(Opmap-1)** より, inert な 1-射の $p_{[1]}$ による像が条件 **(inert-1)** を満たすことは明らかである.

定義 1.36 がオペラッドと呼ぶにふさわしいことを示すために, 次の小節では $(1, 1)$ -圏の文脈で対応物を考えよう.

1.3.2 色付きオペラッドと $(1, 1)$ -圏の coCartesian fibration

定義 1.38: colored operad

色付きオペラッド^a (colored operad) \mathcal{O} は, 以下の 4 つのデータから成る:

- 対象^b (object) の集まり

$$\mathbf{Ob}(\mathcal{O})$$

- $\forall I \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Fin}), \forall \{x_i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{O})\}_{i \in I}, \forall y \in \mathbf{Ob}(\mathcal{O})$ の 3 つ組に対して定まっている, $\{x_i\}_{i \in I}$ から y へ向かう **多射** (multimorphism) の集合

$$\mathbf{Mul}_{\mathcal{O}}(\{x_i\}_{i \in I}, y) \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Sets})$$

- $\forall \alpha \in \mathbf{Hom}_{\mathbf{Fin}}(I, J), \forall \{x_i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{O})\}_{i \in I}, \{y_j \in \mathbf{Ob}(\mathcal{O})\}_{j \in J}, \forall z \in \mathbf{Ob}(\mathcal{O})$ の 4 つ組に対して定まっている, 多射の**合成** (composition map) と呼ばれる写像

$$\begin{aligned} \circ_\alpha: \mathbf{Mul}_{\mathcal{O}}(\{y_j\}_{j \in J}, z) \times \prod_{j \in J} \mathbf{Mul}_{\mathcal{O}}(\{x_i\}_{i \in \alpha^{-1}(\{j\})}, y_j) &\longrightarrow \mathbf{Mul}_{\mathcal{O}}(\{x_i\}_{i \in I}, z), \\ (G, (F_j)_{j \in J}) &\longmapsto G \circ_\alpha (F_j)_{j \in J} \end{aligned}$$

- 恒等射 (identity) と呼ばれる多射の族 $\{\text{Id}_x \in \text{Mul}_{\mathcal{O}}(\{x\}, x)\}_{x \in \text{Ob}(\mathcal{O})}$

これらは以下の条件を充たさねばならない：

(cOp-1)

恒等射は合成に関して単位元として振る舞う。

(cOp-2)

多射の合成は結合則を充たす. i.e. $\forall \alpha \in \text{Hom}_{\mathbf{Fin}}(I, J), \forall \beta \in \text{Hom}_{\mathbf{Fin}}(J, K), \forall \{x_i \in \text{Ob}(\mathcal{O})\}_{i \in I}, \forall \{y_j \in \text{Ob}(\mathcal{O})\}_{j \in J}, \forall \{z_k \in \text{Ob}(\mathcal{O})\}_{k \in K}, \forall w \in \text{Ob}(\mathcal{O})$ に対して, $(1, 1)$ -圏 **Sets** の図式

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Mul}_{\mathcal{O}}(\{z_k\}_{k \in K}, w) \times \prod_{k \in K} \text{Mul}_{\mathcal{O}}(\{y_j\}_{j \in \beta^{-1}(\{k\})}, z_k) \times \prod_{j \in J} \text{Mul}_{\mathcal{O}}(\{x_i\}_{i \in \alpha^{-1}(\{j\})}, y_j) & & \\
 \swarrow \circ_{\beta} \times \text{Id} & & \searrow \text{Id} \times (\circ_{\alpha}|_{\alpha^{-1}(\beta^{-1}(\{k\}))})_{k \in K} \\
 \text{Mul}_{\mathcal{O}}(\{y_j\}_{j \in J}, w) \times \prod_{j \in J} \text{Mul}_{\mathcal{O}}(\{x_i\}_{i \in \alpha^{-1}(\{j\})}, y_j) & & \\
 \searrow \circ_{\alpha} & & \swarrow \circ_{\beta \circ \alpha} \\
 & \text{Mul}_{\mathcal{O}}(\{z_k\}_{k \in K}, w) \times \prod_{k \in K} \text{Mul}_{\mathcal{O}}(\{x_i\}_{i \in (\beta \circ \alpha)^{-1}(\{k\})}, z_k) & \\
 & \searrow & \\
 & \text{Mul}_{\mathcal{O}}(\{x_i\}_{i \in I}, z) &
 \end{array}$$

は可換である。

^a いわゆる対称色付きオペラッド (symmetric colored operad) である。

^b 色 (color) と呼ばれることもある。

色付きオペラッドの定義において, 写像 $\alpha \in \text{Hom}_{\mathbf{Fin}}(I, J)$ が多射の合成の「型」を規定している。

定義 1.39: $(1, 1)$ -圏における coCartesian fibration

$p: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{B}$ を $(1, 1)$ -圏の関手とする。

- \mathcal{E} の射 $\bar{f} \in \text{Hom}_{\mathcal{E}}(\bar{x}, \bar{y})$ が以下の条件を充たすとき, \bar{f} は **p -coCartesian** であると言う：

(coCart-ord) $(1, 1)$ -圏 \mathcal{B} の図式

$$\begin{array}{ccc}
 & p(\bar{y}) & \\
 p(\bar{f}) \nearrow & & \searrow \forall \varphi \\
 p(\bar{x}) & \xrightarrow{p(\forall \varphi_0)} & p(\forall \bar{z})
 \end{array}$$

を可換にする勝手な 2 つの射 $\varphi_0 \in \text{Hom}_{\mathcal{E}}(\bar{x}, \bar{z})$, $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(p(\bar{y}), p(\bar{z}))$ に対して, 射 $\bar{\varphi} \in \text{Hom}_{\mathcal{E}}(\bar{y}, \bar{z})$ が一意的存在して $(1, 1)$ -圏 \mathcal{E} の図式

$$\begin{array}{ccc}
 & \bar{y} & \\
 \bar{f} \nearrow & & \searrow \exists! \bar{\varphi} \\
 \bar{x} & \xrightarrow{\varphi_0} & \bar{z}
 \end{array}$$

を可換にする.

- p が **coCartesian fibration** であるとは,
 - $(1, 1)$ -圏 \mathcal{B} の任意の射 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(x, y)$
 - $p(\bar{x}) = x$ を満たす $(1, 1)$ -圏 \mathcal{E} の対象 $\bar{x} \in \text{Ob}(\mathcal{E})$

に対して, 以下の条件を満たす $(1, 1)$ -圏 \mathcal{E} の射 $\bar{f} \in \text{Hom}_{\mathcal{E}}(\bar{x}, z)$ が存在することを言う:

(coCart-ord-1)

\bar{f} は f の持ち上げである. i.e. $p(\bar{f}) = f$ が成り立つ.

(coCart-ord-2)

\bar{f} は p -coCartesian である.

定義 1.36 に合わせて, $(1, 1)$ -圏の関手

$$p: \mathcal{O}^{\otimes} \longrightarrow \mathbf{Fin}_* \quad (1.3.3)$$

であって以下の 3 条件を満たすものを考えてみる:

(OP-ord-1)

任意の **inert** な射 $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m \rangle, \langle n \rangle)$ および $\forall c \in \text{Ob}(\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle m \rangle})$ に対して, \mathcal{O}^{\otimes} における **p -coCartesian** な射 $\bar{f} \in \text{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c, c')$ が存在して $p(\bar{f}) = f$ を満たす.

(OP-ord-2)

$\forall f \in \text{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m \rangle, \langle n \rangle)$ および $\forall c \in \text{Ob}(\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle m \rangle}), \forall c' \in \text{Ob}(\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n \rangle})$ に対して, inert な射 $\rho^i \in \text{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle n \rangle, \langle 1 \rangle)$ に **(Op-ord-1)** を適用して得られる **p -coCartesian** な射の族 $\{\bar{\rho}^i \in \text{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c', c'_i)\}_{1 \leq i \leq n}$ が誘導する写像

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c, c')_f &\longrightarrow \prod_{i=1}^n \text{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c, c'_i)_{\bar{\rho}^i \circ f}, \\ \varphi &\longmapsto (\bar{\rho}^1 \circ \varphi, \dots, \bar{\rho}^n \circ \varphi) \end{aligned}$$

は, $(1, 1)$ -圏 **Sets** における同型射 (i.e. 全単射) である.

(OP-ord-3)

$\forall c_1, \dots, c_n \in \text{Ob}(\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle 1 \rangle})$ に対して, ある $c \in \text{Ob}(\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n \rangle})_0$ および **p -coCartesian** な射 $\hat{\rho}_i \in \text{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c, c_i)_{\rho^i}$ が存在する.

ここで, **Cat** における引き戻し

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n \rangle} & \xrightarrow{\quad} & * \\ \downarrow & & \downarrow \langle n \rangle \\ \mathcal{O}^{\otimes} & \xrightarrow{p} & \mathbf{Fin}_* \end{array}$$

により $(1, 1)$ -圏 \mathcal{O}^{\otimes} を定義している. 具体的には

$$\text{Ob}(\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n \rangle}) = \{c \in \text{Ob}(\mathcal{O}^{\otimes}) \mid p(c) = \langle n \rangle\}$$

である. さらに, $\forall f \in \text{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m \rangle, \langle n \rangle)$ に対して

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c, c')_f := \{\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c, c') \mid p(\varphi) = f\}$$

と定義した.

命題 1.3: 色付きオペラッドの再構成

条件 **(Op-ord-1)**-**(Op-ord-3)** を満たす $(1, 1)$ -圏の関手 (1.3.3) から次のように構成されたデータの組み \mathcal{O} は色付きオペラッドを成す:

- 対象の集まりを $\text{Ob}(\mathcal{O}) := \text{Ob}(\mathcal{O}_{(1)}^{\otimes})$ と定義する.
- $\forall x_1, \dots, x_n, y \in \text{Ob}(\mathcal{O})$ に対して, 以下の 3 つ組全体が成す集合を $\text{Mul}_{\mathcal{O}}((x_1, \dots, x_n), y)$ と定義する.
 - x_1, \dots, x_n に対して **(Op-ord-3)** を適用することにより定まる $X \in \text{Ob}(\mathcal{O}_{\langle n \rangle}^{\otimes})$
 - x_1, \dots, x_n に対して **(Op-ord-3)** を適用することにより定まる p -coCartesian な射の族 $\{\hat{\rho}_i \in \text{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(X, x_i)_{\rho^i}\}_{1 \leq i \leq n}$
 - 【例 1.3.2】** の active な射 $\alpha_n \in \text{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle n \rangle, \langle 1 \rangle)$ およびその上の \mathcal{O}^{\otimes} の射 $F \in \text{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(X, y)_{\alpha_n}$
- n 個の多射

$$\begin{aligned} (X^1, \{\hat{\rho}_i^1\}_{1 \leq i \leq m_1}, F^1) &\in \text{Mul}_{\mathcal{O}}((x_1^1, \dots, x_{m_1}^1), y_1), \\ &\vdots \\ (X^n, \{\hat{\rho}_i^n\}_{1 \leq i \leq m_n}, F^n) &\in \text{Mul}_{\mathcal{O}}((x_1^n, \dots, x_{m_n}^n), y_n) \end{aligned}$$

と 1 つの多射 $(Y, \{\hat{\rho}_j\}_{1 \leq j \leq n}, G) \in \text{Mul}_{\mathcal{O}}((y_1, \dots, y_n), z)$ の合成

$$(X, \{\hat{\rho}_i\}_{1 \leq i \leq m_1 + \dots + m_n}, G \circ (F^1; \dots; F^n)) \in \text{Mul}_{\mathcal{O}}((x_1^1, \dots, x_{m_1}^1; \dots; x_1^n, \dots, x_{m_n}^n), z)$$

を次のように定義する:

- $X \in \text{Ob}(\mathcal{O}_{\langle m_1 + \dots + m_n \rangle}^{\otimes})$ は, $x_1^1, \dots, x_{m_n}^n \in \text{Ob}(\mathcal{O})$ に対して **(Op-ord-3)** を適用することにより定める.
- p -coCartesian な射の族 $\{\hat{\rho}_i^j \in \text{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(X, x_i^j)_{\rho^{i+m_1+\dots+m_{j-1}}}\}_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq m_j}}$ は $x_1^1, \dots, x_{m_n}^n \in \text{Ob}(\mathcal{O})$ に対して **(Op-ord-3)** を適用することにより定める.
- \mathcal{O}^{\otimes} の射 $G \circ (F^1; \dots; F^n) \in \text{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(X, z)_{\alpha_{m_1+\dots+m_n}}$ は以下の手順に従って構成する:

(STEP-1)

まず, $1 \leq \forall j \leq n$ に対して inert な射 $\pi_j \in \text{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m_1 + \dots + m_n \rangle, \langle m_j \rangle)$ を

$$\begin{aligned} \pi_j: \langle m_1 + \dots + m_n \rangle &\longrightarrow \langle m_j \rangle, \\ k &\longmapsto \begin{cases} k - (m_1 + \dots + m_{j-1}), & 1 \leq k - (m_1 + \dots + m_{j-1}) \leq m_j \\ *, & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

で定義する.

(STEP-2)

inert な射 $\pi_j \in \text{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m_1 + \dots + m_n \rangle, \langle m_j \rangle)$ に対して **(Op-ord-1)** を適用することにより, p -coCartesian な射 $\bar{\pi}_j \in \text{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(X, X^j)_{\pi_j}$ を取得する.

(STEP-3)

$$(F^1 \circ \bar{\pi}_1, \dots, F^n \circ \bar{\pi}_n) \in \prod_{j=1}^n \text{Hom}_{\mathcal{O}^\otimes}(X, y_j)_{\alpha_{m_j} \circ \pi_j}$$

に対して (Op-ord-2) を適用することで, 対応する

$$F \in \text{Hom}_{\mathcal{O}^\otimes}(X, Y)_\pi$$

が一意的に定まる. これに $G \in \text{Hom}_{\mathcal{O}^\otimes}(Y, z)_{\alpha_n}$ を合成して

$$G \circ_\pi (F^1; \dots; F^n) := G \circ F \in \text{Hom}_{\mathcal{O}^\otimes}(X, z)_{\alpha_{m_1 + \dots + m_n}}$$

と定義する. ただし, $\pi \in \text{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m_1 + \dots + m_n \rangle, \langle n \rangle)$ は

$$\pi(k) := \begin{cases} j, & m_{j-1} < k \leq m_j \\ *, & k = * \end{cases}$$

と定義される active な射である^a.

^a $1 \leq \forall j \leq n$ に対して $\rho^j \circ \pi = \alpha_{m_j} \circ \pi_j$ が成り立つ.

証明

逆の対応を作ることもできる. ■

定義 1.40: Category of operators

いま, **colored operad** \mathcal{O} が与えられたとする. このとき **category of operators** と呼ばれる $(1, 1)$ -圏 \mathcal{O}^\otimes を次のように定義する:

- \mathcal{O} の対象の有限列 $x_1, \dots, x_n \in \text{Ob}(\mathcal{O})$ を対象に持つ.
 - $\forall (x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_n) \in \text{Ob}(\mathcal{O}^\otimes)$ に対して, 以下の 2 つ組を全て集めて得られる集合を $\text{Hom}_{\mathcal{O}^\otimes}(\{x_i\}_{1 \leq i \leq m}, \{y_j\}_{1 \leq j \leq n})$ とする.
- (1) \mathbf{Fin}_* の射

$$\alpha \in \text{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m \rangle, \langle n \rangle)$$

(2) 多射の族

$$\left\{ \phi_j \in \text{Mul}_{\mathcal{O}}(\{x_i\}_{i \in \alpha^{-1}(\{j\})}, y_j) \right\}_{1 \leq j \leq n}$$

より具体的には,

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}^\otimes}(\{x_i\}_{1 \leq i \leq m}, \{y_j\}_{1 \leq j \leq n}) := \coprod_{\alpha \in \text{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m \rangle, \langle n \rangle)} \prod_{j=1}^n \text{Mul}_{\mathcal{O}}(\{x_i\}_{i \in \alpha^{-1}(\{j\})}, y_j)$$

である.

- 射の合成は, \mathbf{Fin}_* における射の合成および \mathcal{O} における多射の合成によって定める.

\mathcal{O}^\otimes から \mathbf{Fin}_* への忘却関手を

$$\begin{aligned} p: \mathcal{O}^\otimes &\longrightarrow \mathbf{Fin}_*, \\ \{x_i\}_{1 \leq i \leq n} &\longmapsto \langle n \rangle, \\ (\alpha, \{\phi_j\}_{1 \leq j \leq n}) &\longmapsto \alpha \end{aligned}$$

と定義する.

命題 1.4: 色付きオペラッドと category of operators

$(1, 1)$ -圏の関手

$$p: \mathcal{O}^\otimes \longrightarrow \mathbf{Fin}_*$$

において, \mathcal{O}^\otimes がある **色付きオペラッド** \mathcal{O} の **category of operators** と圏同値になる必要十分条件は, p が条件 **(Op-ord-1)-(Op-ord-3)** を満たすことである.

証明 [?, Proposition 2.2.II.] ■

1.3.3 $(\infty, 1)$ -圏の構成

話を $(\infty, 1)$ -オペラッドに戻そう.