第 3 章

位相的場の理論

この章は [?, Chapter7] および [?] に相当する．この節で登場する多様体は特に断らない限り常に C^∞ 多様体である．また，体 $\mathbb{K}$ と言ったら $\mathbb{K}=\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のいずれかを指すことにしよう．

3.1 モノイダル圏

まず手始めに，モノイダル圏とストリング図式の準備をする．特に，コボルディズム圏と有限次元 Hilbert 空間の圏がコンパクト対称モノイダル圏であることの直感的な説明をする．

3.1.1 モノイダル圏の定義

定義 3.1: モノイダル圏

モノイダル圏 (monidal category) は，以下の 5 つのデータからなる：

- 圏 $\mathcal{C}$
- **テンソル積** (tensor product) と呼ばれる関手 $\otimes\colon \mathcal{C}\times\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}$
- **単位対象** (unit object) $I\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- **associator** と呼ばれる自然同値

$$\left\{a_{X,\,Y,\,Z}\colon (X\otimes Y)\otimes Z\xrightarrow{\cong} X\otimes(Y\otimes Z)\right\}_{X,\,Y,\,Z\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

- **left/right unitors** と呼ばれる自然同値

$$\left\{l_X\colon I\otimes X\xrightarrow{\cong} X\right\}_{X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{X})},$$
$$\left\{r_X\colon X\otimes I\xrightarrow{\cong} X\right\}_{X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{X})}$$

これらは $\forall X,\,Y,\,Z,\,W\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について以下の 2 つの図式を可換にする：

(triangle diagram)

$$
\begin{tikzcd}
(X \otimes I) \otimes Y \arrow[rr, "a_{X,\, I,\, Y}"] \arrow[dr, "r_X \otimes 1_Y"'] & & X \otimes (I \otimes Y) \arrow[dl, "1_X \otimes l_Y"] \\
& X \otimes Y &
\end{tikzcd}
$$

(pentagon diagram)

$$
\begin{tikzcd}
& ((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z \arrow[dl, "a_{W \otimes X,\, Y,\, Z}"'] \arrow[r, "a_{W,\, X,\, Y} \otimes 1_Z"] & (W \otimes (X \otimes Y)) \otimes Z \arrow[d, "a_{W,\, X \otimes Y,\, Z}"] \\
(W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) \arrow[dr, "a_{W,\, X,\, Y \otimes Z}"'] & & W \otimes ((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[dl, "1_Z \otimes a_{X,\, Y,\, Z}"] \\
& W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z)) &
\end{tikzcd}
$$

定義 3.1 は，ストリング図式 (string diagram) で理解するのが良い．モノイダル圏の射 $f \colon X \longrightarrow Y$, $f' \colon X' \longrightarrow Y'$ があったら，そのテンソル積 $f \otimes f' \colon X \otimes X' \longrightarrow Y \otimes Y'$ は，ストリング図式上では次のようになる．

また，単位対象 $I \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ は空白として表す．従って例えば射 $f \colon I \longrightarrow X$ は次のようになる：

【例 3.1.1】コボルディズム圏

厳密な構成[a]は後回しにして，**コボルディズム圏** (cobordism category) を直感的に導入しよう．圏 $\mathbf{Cob}_{D+1}$ は,

- D 次元多様体を対象
- $D+1$ 次元の**コボルディズム** (cobordism) を射

とするような圏のことを言う．$D+1$ 次元のコボルディズム $\mathcal{M} \colon X \longrightarrow Y$ と言うのは，$D+1$ 次元多様体 $\mathcal{M}$ であって，$\partial\mathcal{M} = X \amalg Y$ となっているようなもの（の微分同相類）のことである：
射 $\mathcal{M} \colon X \longrightarrow Y$, $\mathcal{N} \colon Y \longrightarrow Z$ の合成 $\mathcal{N} \circ \mathcal{M} \colon X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ は次の図式が物語る：
圏 $\mathbf{Cob}_{D+1}$ は，disjoint union に関してモノイダル圏になる：

[a] 例えば，$(B,\, f)$-structure の定義から始めるコボルディズムの統一的な扱いは [?, CHAPTER 1] などを参照.

【例 3.1.2】有限次元 Hilbert 空間の圏

有限次元 $\mathbb{K}$-Hilbert 空間の圏 $\mathbf{Hilb}$ とは，

- 有限次元 $\mathbb{K}$-Hilbert 空間を対象
- 線型写像を射
- 写像の合成を射の合成

に持つような圏のことを言う．$\mathbf{Hilb}$ はベクトル空間のテンソル積 $V_1 \otimes V_2$ の上に内積を

$$\langle v_1 \otimes v_2,\, w_1 \otimes w_2 \rangle \coloneqq \langle v_1,\, w_1 \rangle_1 \langle v_2,\, w_2 \rangle_2$$

と定義することでモノイダル圏になる．

3.1.2　組紐付きモノイダル圏

定義 3.2: 組紐付きモノイダル圏

組紐付きモノイダル圏 (braided monoidal category) とは，以下の 2 つからなる：

- モノイダル圏 $\mathcal{C}$
- **組紐** (braiding) と呼ばれる自然同型

$$\left\{ b_{X,\,Y} \colon X \otimes Y \xrightarrow{\cong} Y \otimes X \right\}_{X,\,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは $\forall X,\, Y,\, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について以下の図式を可換にする：

(hexagon diagrams)

$$\begin{tikzcd}
X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "a^{-1}_{X,\,Y,\,Z}"] \arrow[d, "b_{X,\,Y \otimes Z}"] & (X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "b_{X,\,Y} \otimes 1_Z"] & (Y \otimes X) \otimes Z \arrow[d, "a_{Y,\,X,\,Z}"] \\
(Y \otimes Z) \otimes X & Y \otimes (Z \otimes X) \arrow[l, "a^{-1}_{Y,\,Z,\,X}"] & Y \otimes (X \otimes Z) \arrow[l, "1_X \otimes b_{X,\,Z}"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "a_{X,\,Y,\,Z}"] \arrow[d, "b_{X \otimes Y,\,Z}"] & X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "1_X \otimes b_{Y,\,Z}"] & X \otimes (Z \otimes Y) \arrow[d, "a^{-1}_{X,\,Z,\,Y}"] \\
Z \otimes (X \otimes Y) & (Z \otimes X) \otimes Y \arrow[l, "a_{Z,\,X,\,Y}"] & (X \otimes Z) \otimes Y \arrow[l, "b_{X,\,Z} \otimes 1_Y"]
\end{tikzcd}$$

組紐付きモノイダル圏 $\mathcal{C}$ であって，$\mathcal{C}$ の組紐が $b_{X,\,Y} = b^{-1}_{Y,\,X}$ を充たすもののことを**対称モノイダル圏** (symmetric monoidal category) と呼ぶ．

ストリング図式で組紐を書く場合は次のようにする：

このとき hexagon diagrams はとてもわかりやすくなる：

対称モノイダル圏の条件も一目瞭然である：

【例 3.1.3】$\mathbf{Cob}_{D+1}$ の組紐

$\mathbf{Cob}_{D+1}$ の組紐 $b_{X,\,Y}\colon X\otimes Y\longrightarrow Y\otimes X$ は，多様体 $(X\times[0,\,1])\amalg(Y\times[0,\,1])$ と微分同相であるような $D+1$ 次元多様体のことを言う：図から，$\mathbf{Cob}_{D+1}$ は対称モノイダル圏である．

【例 3.1.4】Hilb の組紐

Hilb の組紐は

$$\begin{aligned} b_{X,\,Y}\colon X\otimes Y &\longrightarrow Y\otimes X, \\ x\otimes y &\longmapsto y\otimes x \end{aligned}$$

である．これがベクトル空間の同型写像であることが示される．明らかに $b_{X,\,Y}=b^{-1}_{Y,\,X}$ なので **Hilb** は対称モノイダル圏である．

3.1.3　閉圏・コンパクト圏・ダガー圏

圏 $\mathcal{C}$ を与える．**Hom 関手** (Hom functor) とは，関手

$$\mathrm{Hom}\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C}\longrightarrow\mathbf{Sets}$$

であって

$$\begin{gathered} (X,\,Y)\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X,\,Y) \\ \Big((f,\,g)\colon(X',\,Y)\longrightarrow(X,\,Y')\Big)\longmapsto\Big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X,\,Y)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X',\,Y'),\ h\longmapsto g\circ h\circ f\Big) \end{gathered}$$

なる対応を与えるもののこと．

定義 3.3: 閉圏

モノイダル圏 $\mathcal{C}$ を与える．

- $\mathcal{C}$ が**左に閉じている** (left closed) とは，**internal hom functor** と呼ばれる関手

  $$\multimap\colon\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C}\longrightarrow\mathbf{Sets}$$

  と，**currying** と呼ばれる自然同型

  $$\left\{c_{X,\,Y,\,Z}\colon\mathrm{Hom}\,(X\otimes Y,\,Z)\xrightarrow{\cong}\mathrm{Hom}\,(X,\,Y\multimap Z)\right\}_{X,\,Y,\,Z\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

  の 2 つが存在することを言う．
- $\mathcal{C}$ が**右に閉じている** (right closed) とは，**internal hom functor** と呼ばれる関手と，**currying** と呼ばれる自然同型

  $$\left\{c_{X,\,Y,\,Z}\colon\mathrm{Hom}\,(X\otimes Y,\,Z)\xrightarrow{\cong}\mathrm{Hom}\,(Y,\,X\multimap Z)\right\}_{X,\,Y,\,Z\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

  の 2 つが存在することを言う．

対称モノイダル圏しか考えないので，以降では右に閉じているかどうかしか気にしないことにする．

定義 3.4: 双対

モノイダル圏 $\mathcal{C}$ およびその任意の対象 $X, X^* \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を与える．X^* が X の**右双対** (right dual) であり，かつ X が X^* の**左双対** (left dual) であるとは，

- **unit** と呼ばれる射

$$i_X \colon I \longrightarrow X^* \otimes X$$

- **counit** と呼ばれる射

$$e_X \colon X \otimes X^* \longrightarrow I$$

が存在して以下の図式を可換にすることを言う：

(zig-zag equations)

$$\begin{tikzcd}
X \otimes I \arrow[rr, "1_X \otimes i_X"] \arrow[dd, "r_X"'] & & X \otimes (X^* \otimes X) \arrow[d, "a^{-1}_{X,\,X^*,\,X}"] \\
& & (X \otimes X^*) \otimes X \arrow[d, "e_X \otimes 1_X"] \\
X & & I \otimes X \arrow[ll, "l_X"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I \otimes X^* \arrow[rr, "i_X \otimes 1_{X^*}"] \arrow[dd, "l_{X^*}"'] & & (X^* \otimes X) \otimes X^* \arrow[d, "a_{X^*,\,X,\,X^*}"] \\
& & X^* \otimes (X \otimes X^*) \arrow[d, "1_{X^*} \otimes e_X"] \\
X^* & & X^* \otimes I \arrow[ll, "r_{X^*}"]
\end{tikzcd}$$

双対のストリング図式は，単に矢印を逆にすれば良い：
このとき zig-zag equations が本当にジグザグしていることがわかる：

定義 3.5: コンパクト圏

モノイダル圏 $\mathcal{C}$ は，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が左・右双対を持つとき**コンパクト** (compact) であると言われる．

【例 3.1.5】Cob の unit と counit

$\mathbf{Cob}_{D+1}$ における $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cob}_{D+1})$ の双対とは，向き付けを逆にした D 次元多様体 X のことである．特に $\mathbf{Cob}_3$ における unit, counit はそれぞれ U 字管とそれを逆さにしたもののような見た目をしている：
internal hom functor を $X \multimap Y \coloneqq X^* \otimes Y$ とすれば，図から $\mathbf{Cob}_3$ が閉圏であることを直接確認できる．

【例 3.1.6】Hilb の unit と counit

$\mathbf{Hilb}$ において $I = \mathbb{C}$ である．従って，$X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Hilb})$ の双対とは双対ベクトル空間 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X, \mathbb{C})$ のことである．ブラ空間のことだと言っても良い．特に，自然な同型 $X^* \otimes Y \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y)$ を使うと X の unit は

$$\begin{aligned} i_X \colon I &\longrightarrow X^* \otimes X, \\ c &\longmapsto c\,\mathrm{id}_X \end{aligned}$$

で，counit は

$$\begin{aligned} e_X \colon X \otimes X^* &\longrightarrow I, \\ x \otimes f &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

であることがわかる．internal hom functor を $X \multimap Y \coloneqq X^* \otimes Y \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y)$ とすれば $\mathbf{Hilb}$ が閉圏であることを直接確認できる．

実は，コンパクト圏は自動的に閉圏になる．これは

$$X \multimap Y \coloneqq X^* \otimes Y$$

として internal hom functor を定義することで確認できる．

定義 3.6: ダガー圏

圏 $\mathcal{C}$ が**ダガー圏** (dagger category) であるとは，関手

$$\dagger \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$$

が存在して以下を充たすことを言う：

(1) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $X^\dagger = X$ を充たす．
(2) $\mathcal{C}$ の任意の射 $f \colon X \longrightarrow Y$ に対して $(f^\dagger)^\dagger = f$ を充たす．

【例 3.1.7】Cob の dagger

$\mathbf{Cob}_{D+1}$ における $\mathcal{M} \colon X \longrightarrow Y$ のダガーは，上下を逆にしてから $\mathcal{M}$ の連結成分毎に向きを逆にすることで得られる．

【例 3.1.8】Hilb の dagger

Hilb における $f\colon X \longrightarrow Y$ のダガーは，$\forall \phi \in X,\ \forall \psi \in Y$ に対して

$$\langle f^\dagger(\psi),\, \phi\rangle \coloneqq \langle \psi,\, f(\phi)\rangle$$

とすることで定義される．

3.1.4　モノイダル関手

モノイダル関手とは，ざっくり言うとモノイダル圏の構造を保存するような関手のことである：

定義 3.7: モノイダル関手

2 つのモノイダル圏 $\mathcal{C},\, \mathcal{D}$ の間の関手

$$F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

が **lax monoidal functor** であるとは，

- 射

$$\varepsilon\colon I_{\mathcal{D}} \longrightarrow F(I_{\mathcal{C}})$$

- 自然変換

$$\left\{\mu_{X,\,Y}\colon F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y) \longrightarrow F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y)\right\}_{X,\,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

があって，$\forall X,\, Y,\, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して以下の図式が可換になること：

(associatibity)

$$\begin{tikzcd}
(F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y)) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z) \arrow[rr, "a^{\mathcal{D}}_{F(X),\,F(Y),\,F(Z)}"'] \arrow[d, "\mu_{X,\,Y} \otimes 1_{F(Z)}"'] & & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} (F(Y) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z)) \arrow[d, "1_{F(X)} \otimes \mu_{Y,\,Z}"] \\
F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z) \arrow[d, "\mu_{X \otimes_{\mathcal{C}} Y,\,Z}"'] & & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y \otimes_{\mathcal{C}} Z) \arrow[d, "\mu_{X,\,Y \otimes_{\mathcal{C}} Z}"] \\
F((X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{C}} Z) \arrow[rr, "F(a^{\mathcal{C}}_{X,\,Y,\,Z})"'] & & F(X \otimes_{\mathcal{C}} (Y \otimes_{\mathcal{C}} Z))
\end{tikzcd}$$

(unitality)

$$\begin{tikzcd}
I_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathcal{D}} F(X) \arrow[r, "\varepsilon \otimes 1_{F(X)}"] \arrow[d, "l^{\mathcal{D}}_{F(X)}"'] & F(I_{\mathcal{C}}) \otimes_{\mathcal{D}} F(X) \arrow[d, "\mu_{I_{\mathcal{C}},\,X}"] \\
F(X) & F(I_{\mathcal{C}} \otimes_{\mathcal{C}} X) \arrow[l, "F(l^{\mathcal{C}}_X)"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F(X) \otimes_{\mathcal{D}} I_{\mathcal{D}} \arrow[r, "1_{F(X)} \otimes \varepsilon"] \arrow[d, "r^{\mathcal{D}}_{F(X)}"'] & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(I_{\mathcal{C}}) \arrow[d, "\mu_{X,\, I_{\mathcal{C}}}"] \\
F(X) & F(X \otimes_{\mathcal{C}} I_{\mathcal{C}}) \arrow[l, "F(r^{\mathcal{C}}_X)"]
\end{tikzcd}$$

- lax monoidal functor F の ε と $\mu_{X,Y}$ が全て同型射ならば，F は **strong monoidal functor** と呼ばれる．
- lax monoidal functor F の ε と $\mu_{X,Y}$ が全て恒等射ならば，F は **strict monoidal functor** と呼ばれる．

3.2 TQFT の定義

位相的場の理論 (Topological Quantum Field Theory; TQFT) の枠組みをトップダウンに導入する．

3.2.1 Atiyah の公理系

まず，全ての出発点として Atiyah の公理系 [?] というものがある：

公理 3.1: Atiyah の公理系（若干簡略版）

体 $\mathbb{K}$ 上の[a]，D 次元の**位相的場の理論** (Topological Quantum Field Theory; TQFT) とは，以下の 2 つのデータからなる：

(1) 向き付けられた (oriented) D 次元の閉多様体 (closed manifold) Σ に対応づけられた有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V(\Sigma)$

(2) 向き付けられた $D+1$ 次元の境界付き多様体 M に対応づけられたベクトル $Z(M) \in V(\partial M)$

これらのデータは以下の条件を充たす：

(TQFT-1)
Z は向きを保つ微分同相写像について**関手的** (functorial) に振る舞う．

(TQFT-2)
Z は**対合的** (involutory) である．

(TQFT-3)
Z は**モノイダル的** (multiplicative[b]) である．

[a] 原論文 [?] では環としていて，ベクトル空間の代わりに環上の有限生成加群を扱っている．今回は Hilbert 空間しか考えないので体 $\mathbb{K}$ としておいた．

[b] 「乗法的」というと語弊がありそうなのでモノイダル的と言った．

[?] に倣って公理の意味を精査していく．

(TQFT-1)

この公理は 2 つの要請を持つ：

(1) D 次元閉多様体 $\Sigma, \Sigma', \Sigma''$ の間の向きを保つ微分同相写像 $f\colon \Sigma \longrightarrow \Sigma'$, $g\colon \Sigma' \longrightarrow \Sigma''$ に対して，$V(f)\colon V(\Sigma) \longrightarrow V(\Sigma')$ はベクトル空間の同型写像で，$V(g \circ f) = V(g) \circ V(f)$ が成り立つ．

(2) 向きを保つ微分同相写像 $f\colon \Sigma \longrightarrow \Sigma'$ が，$D+1$ 次元多様体 M, M' であって $\Sigma = \partial M$, $\Sigma' = \partial M'$ を充たすものの上に $f\colon M \longrightarrow M'$ と拡張される場合に $V(f)\bigl(Z(M)\bigr) = Z(M')$ を充たす．

(TQFT-2)

Σ の向きを逆にして得られる D 次元閉多様体を Σ^* と書く[*1]とき，$V(\Sigma^*) = V(\Sigma)^*$ を充たす[*2]．

(TQFT-3)

この公理は 5 つの要請を持つ：

(1) D 次元閉多様体 Σ_1, Σ_2 に対して

$$V(\Sigma_1 \amalg \Sigma_2) = V(\Sigma_1) \otimes V(\Sigma_2)$$

が成り立つこと．

(2) $D+1$ 次元多様体 M, M_1, M_2 に対して $\partial M_1 = \Sigma_1 \amalg \Sigma_3$, $\partial M_2 = \Sigma_2 \amalg \Sigma_3^*$, $M = M_1 \cup_{\Sigma_3} M_2$ が成り立つならば，

$$Z(M) = \langle Z(M_1) | Z(M_2) \rangle$$

ただし，

$$\langle\,|\,\rangle : V(\partial M_1) \otimes V(\partial M_2) = V(\Sigma_1) \otimes V(\Sigma_3) \otimes V(\Sigma_3)^* \otimes V(\Sigma_2) \longrightarrow V(\partial M) = V(\Sigma_1) \otimes V(\Sigma_2),$$

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_3\rangle \otimes \langle\varphi_3| \otimes |\psi_2\rangle \longmapsto \langle\varphi_3|\psi_3\rangle\, |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$$

である．

(3) (2) において $\Sigma_3 = \emptyset$ ならば，

$$Z(M) = Z(M_1) \otimes Z(M_2)$$

(4) (1) から[*3]，

$$V(\emptyset) = \mathbb{K}$$

(5) (3) から[*4]，

$$Z(\emptyset) = 1$$

今や別の同値な定義ができる．$D+1$ 次元多様体 M の境界 ∂M を

$$\partial M = \Sigma_1^* \amalg \Sigma_2$$

---

*1 【例 3.1.5】の意味で，圏 $\mathbf{Cob}_{D+1}$ における $\Sigma \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cob}_{D+1})$ の双対となっている．

*2 $V(\Sigma)$ が有限次元なので，$V(\Sigma)^*$ はブラ空間と見做せる．

*3 $\mathbf{Cob}_{D+1}$ の単位対象は $\emptyset$ なので $\emptyset = \emptyset \amalg \emptyset$．よって (1) から $V(\emptyset) = V(\emptyset) \otimes V(\emptyset)$．これを充たすのは $V(\emptyset) = 0, \mathbb{K}$（モノイダル圏 $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の単位対象は $\mathbb{K}$ である）のどちらかしかないので，非自明な方を採用する．

*4 $\emptyset = \emptyset \amalg \emptyset$ なので (3) から $Z(\emptyset) = Z(\emptyset) \otimes Z(\emptyset)$．これを充たす $V(\emptyset) = \mathbb{K}$ の元は $0, 1$ しかないので，非自明な方を採用する．

と分解すると[*5]，**(TQFT-3)**-(1) より $Z(M) \in V(\partial M) = Z(\Sigma_1)^* \otimes Z(\Sigma_2) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\big(Z(\Sigma_1),\, Z(\Sigma_2)\big)$ が言えるので，$Z(M)$ を線型写像 $Z(M)\colon V(\Sigma_1) \longrightarrow V(\Sigma_2)$ と同一視できるのである．**(TQFT-1)** もあわせると，結局これまで $V,\, Z$ と書いていたものは strong monoidal functor

$$Z\colon \mathbf{Cob}_{D+1} \longrightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$$

の 1 つに集約することができる．

定義 3.8: TQFT の定義

D 次元の**位相的場の理論** (Topological Quantum Field Theory; TQFT) とは，コボルディズム圏からある対称モノイダル圏 $\mathcal{D}$ への strict monoidal functor[a]

$$Z\colon \mathbf{Cob}_{D+1} \longrightarrow \mathcal{D}$$

のこと．

[a] strong monoidal functor とする場合もある（例えば https://ncatlab.org/nlab/show/cobordism）ようだが，原論文 [?] では strict monoidal functor になっていた．

興味があるのは $\mathcal{D} = \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}},\, \mathbf{Hilb}$ の場合なので，以下では TQFT と言ったら strict monoidal functor

$$Z\colon \mathbf{Cob}_{D+1} \longrightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}},\, \mathbf{Hilb}$$

を指すことにしよう．

3.3 連続な高次対称性

エニオンのフュージョン則を議論する前に少し寄り道をして，[?], [?] に倣って**一般化対称性** (generalized symmetry)[*6] の話をする．この節では自然単位系を使う．時空を表す $D+1$ 次元多様体を $\mathcal{M}$ と書き，$\mathcal{M}$ のチャートの座標関数を $(x^0,\, x^1,\, \ldots,\, x^D) =: (t,\, \boldsymbol{x})$ と書く．特に D 次元多様体 Σ を使って $\mathcal{M} = \Sigma \times \mathbb{R}$ または $\Sigma \times S^1$ と書ける場合は $x^0 =: t$ で $\mathbb{R}$ または S^1 成分のチャート（時間）を表すことにし，Σ のことを時間一定面と呼ぶ．$\mathcal{M}$ として Minkowski 時空を考える場合，Minkowski 計量としては $[\eta_{\mu\nu}] := (-1,\, +1,\, \ldots,\, +1)$ を用いる．Minkowski 計量でない一般の計量テンソルは $g := g_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu \in \Gamma(T^*\mathcal{M} \otimes T^*\mathcal{M})$ と表記し，共役計量テンソルを $g^{\mu\nu}\partial_\mu \otimes \partial_\nu \in \Gamma(T\mathcal{M} \otimes T\mathcal{M})$ と表記する．

$\mathcal{M}$ に計量 $g_{\mu\nu}$ が与えられたとき，**音楽同型** (musical isomorphism) を

$$\begin{aligned}
\flat\colon \mathfrak{X}(\mathcal{M}) &\longrightarrow \Omega^1(\mathcal{M}),\ X^\mu\partial_\mu \longmapsto g_{\mu\nu}X^\nu\, \mathrm{d}x^\mu\,, \\
\sharp\colon \Omega^1(\mathcal{M}) &\longrightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M}),\ \omega_\mu\, \mathrm{d}x^\mu \longmapsto g^{\mu\nu}\omega_\nu\partial_\mu
\end{aligned}$$

で定義する．Hodge star は

$$\begin{aligned}
&\star\colon \Omega^p(\mathcal{M}) \longrightarrow \Omega^{D+1-p}, \\
&\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_p} \longmapsto \frac{1}{(D+1-p)!} g^{\mu_1\nu_1} \cdots g^{\mu_p\nu_p} \epsilon_{\nu_1\cdots\nu_p\mu_{p+1}\cdots\mu_{D+1}}\, \mathrm{d}x^{\mu_{p+1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_{D+1}}
\end{aligned}$$

[*5] どちらか一方が $\emptyset$ になっても良い

[*6] **高次対称性** (higher form symmetry) と呼ばれることもある．

を線型に拡張することで定義される．特に不変体積要素を

$$\mathrm{d}^{D+1}x \coloneqq \star 1 = \sqrt{|g|}\,\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{D+1}$$

と定義する．

$\mathcal{M}$ の p 次元部分多様体[*7] $\mathcal{N}^{(p)} \subset \mathcal{M}$ 上で p-形式 $\omega \in \Omega^p(\mathcal{M})$ を積分する場合，包含写像 $\iota\colon \mathcal{N}^{(p)} \hookrightarrow \mathcal{M}$ による引き戻し $\iota^*\colon \Omega^p(\mathcal{M}) \longrightarrow \Omega^p(\mathcal{N}^{(p)})$ を用いて

$$\int_{\mathcal{N}} \omega \coloneqq \int_{\mathcal{N}^{(p)}} \iota^* \omega$$

と定義する．このとき，Poincaré 双対を考えることで

$$\int_{\mathcal{N}} \omega = \int_{\mathcal{M}} \omega \wedge \delta(\mathcal{N}^{(p)})$$

を充たす $\delta(\mathcal{N}^{(p)}) \in \Omega^{D+1-p}(\mathcal{M})$（**デルタ関数 p-形式**と呼ぶ）の存在がわかる[*8]．さて，$\mathcal{N}^{(p)} = \partial\mathcal{M}^{(p+1)}$ の場合を考える．$\forall \omega \in \Omega^p(\mathcal{M})$ に対して Stokes の定理から

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{M}} \omega \wedge \delta(\partial\mathcal{M}^{(p+1)}) = \int_{\partial\mathcal{M}^{(p+1)}} \omega = \int_{\mathcal{M}^{(p+1)}} \mathrm{d}\omega = \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}\omega \wedge \delta(\mathcal{M}^{(p+1)}) \\
= \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}\big(\omega \wedge \delta(\mathcal{M}^{(p+1)})\big) + (-1)^{p+1} \int_{\mathcal{M}} \omega \wedge \mathrm{d}\Big(\delta(\mathcal{M}^{(p+1)})\Big) \\
= (-1)^{p+1} \int_{\mathcal{M}} \omega \wedge \mathrm{d}\Big(\delta(\mathcal{M}^{(p+1)})\Big)
\end{aligned}$$

がわかるので，

$$\mathrm{d}\delta(\mathcal{M}^{(p+1)}) = (-1)^{p+1}\delta(\partial\mathcal{M}^{(p+1)})$$

が成り立つ．p 次元部分多様体 $\mathcal{M}^{(p)}$ と $D+1-p$ 次元部分多様体 $\mathcal{M}^{(D+1-p)}$ に対して，これらの向きを考慮した**交点数**を

$$\mathrm{I}(\mathcal{M}^{(p)},\, \mathcal{M}^{(D+1-p)}) \coloneqq \int_{\mathcal{M}} \delta(\mathcal{M}^{(p)}) \wedge \delta(\mathcal{M}^{(D+1-p)})$$

で定義する．$\mathcal{C}^{(p-1)} = \partial\mathcal{M}^{(p)}$ を充たす $\mathcal{C}^{(p-1)}$ と $\mathcal{M}^{(D+1-p)}$ の**絡み数**は

$$\mathrm{Link}(\mathcal{C}^{(p-1)},\, \mathcal{M}^{(p)}) \coloneqq \mathrm{I}(\mathcal{M}^{(p)},\, \mathcal{M}^{(D+1-p)})$$

と定義される．

3.3.1　通常の対称性

N 成分の場[*9] $\varphi\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{K}^N,\ x \longmapsto \big(\varphi_i(x)\big)_{1 \le i \le N}$ は，あるベクトル束 $\mathbb{K}^N \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ の切断と理解する．場の変換性はベクトル束の変換関数に由来する．

[*7] コンパクトな埋め込まれた C^∞ 多様体と仮定する．
[*8] 厳密な扱いは [?, p.270] を参照．ここでは雑に扱う．
[*9] 場 φ の成分を表す添字として $a, b, c, \ldots$ を使う．

局所的な場のラグランジアン密度 $\mathcal{L}\bigl(\varphi_a(x),\,\partial_\mu\varphi_a(x)\bigr)$ を持つ古典系を考える．この系の作用は

$$S[\varphi] \coloneqq \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}x\,\mathcal{L}\bigl(\varphi_a(x),\,\partial_\mu\varphi_a(x)\bigr)$$

と書かれる．場に関する作用の変分とは，勝手な「微小」切断 $\delta\psi \in \Gamma(E)$ による場の微小変換

$$\mathcal{T}_{\delta\varphi}\colon \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E),\ \varphi \longmapsto \varphi + \delta\psi$$

を用いて

$$\delta_{\delta\psi}S[\varphi] \coloneqq S[\mathcal{T}_{\delta\psi}(\varphi)] - S[\varphi]$$

と定義される．顕には Stokes の定理を使って

$$\begin{aligned}\delta_{\delta\psi}S[\varphi] &= \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}x\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a(x)}\delta\psi_a(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bigl(\partial_\mu\varphi_a(x)\bigr)}\partial_\mu\bigl(\delta\psi_a(x)\bigr)\right) \\ &= \int_{\partial\mathcal{M}} \star\flat\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bigl(\partial_\mu\varphi_a(x)\bigr)}\delta\psi_a(x)\right) + \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}x\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a(x)} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bigl(\partial_\mu\varphi_a(x)\bigr)}\right)\right)\delta\psi_a(x)\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

と書けるが，境界条件 $\partial\mathcal{M} = \emptyset$ または $\delta\psi|_{\partial\mathcal{M}} = 0$ を要請して第 1 項を落とすのが普通である．

最小作用の原理とは，古典論で実現される場の配位（このような場の配位は **on shell** であると呼ばれる）$\varphi_{\mathrm{on\,shell}} \in \Gamma(E)$ に対して，

$$\forall\delta\psi,\ \delta_{\delta\psi}S[\varphi_{\mathrm{on\,shell}}] = 0 \tag{3.3.2}$$

を要請するものである. (3.3.1) から, on shell な場 $\varphi_{\mathrm{on\,shell}} \in \Gamma(E)$ が充たすべき方程式として Euler-Lagrange 方程式

$$1 \le \forall i \le N,\ \forall x \in \mathcal{M},\ \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a(x)} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bigl(\partial_\mu\varphi_a(x)\bigr)}\right)\right]\Bigg|_{\varphi_{\mathrm{on\,shell}}(x),\,\partial_\mu\varphi_{\mathrm{on\,shell}}(x)} = 0 \tag{3.3.3}$$

が得られるのだった．煩雑なので以後 $\mathcal{L}$ の引数は適宜省略する．

対称性変換とは，場の間の変換

$$\mathcal{T}\colon \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$$

であって作用を不変にするもののことである．つまり，最小作用の原理 (3.3.2) とは異なり <u>φ ではなく $\mathcal{T}$ が</u>

$$\forall\varphi \in \Gamma(E),\ \delta_{\mathcal{T}}S[\varphi] = 0 \tag{3.3.4}$$

によって定義される. ここに $\delta_{\mathcal{T}}S[\varphi] \coloneqq S[\mathcal{T}(\varphi)] - S[\varphi]$ とおいた. 定義 (3.3.4) は <u>off shell な場も考慮している</u>ことに注意すべきである．特に対称性変換 $\mathcal{T}$ が大域的な微小パラメータ ε および $\partial_0\varphi$ に陽に依存しない[*10]

[*10] この仮定は (3.3.7) の導出で使うだけ（実はもっと条件を弱めることもできる）なので，Noether の定理の導出には必要ない．

$h \in \Gamma(E)$ を用いて $\mathcal{T}(\varphi) = \mathcal{T}_{\varepsilon h}(\varphi)$ と書かれる場合を考えよう．

$$
\begin{aligned}
0 = \delta_{\mathcal{T}} S[\varphi] &= \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a(x)} \varepsilon h_a(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\big(\partial_\mu \varphi_a(x)\big)} \partial_\mu\big(\varepsilon h_a(x)\big) \right) \\
&= \varepsilon \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\big(\partial_\mu \varphi_a(x)\big)} \right) \right) h_a(x) \\
&\quad + \varepsilon \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}x \left(\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\big(\partial_\mu \varphi_a(x)\big)} \right) h_a(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\big(\partial_\mu \varphi_a(x)\big)} \partial_\mu\big(h_a(x)\big) \right) \\
&= \varepsilon \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\big(\partial_\mu \varphi_a(x)\big)} \right) \right) h_a(x) \\
&\quad + \varepsilon \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}x \, \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\big(\partial_\mu \varphi_a(x)\big)} h_a(x) \right)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．i.e. **Noether カレント**を $D+1$ 個の $X^\mu|_{\partial\mathcal{M}} = 0$ を充たす C^∞ 関数 X^μ を用いて

$$
j^\mu(x) \coloneqq \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\big(\partial_\mu \varphi_a(x)\big)} h_a(x) - X^\mu(x) \tag{3.3.5}
$$

で定義すると，これが on shell とは限らない任意の $\varphi \in \Gamma(E)$ に対して

$$
\partial_\mu j^\mu(x) = - \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\big(\partial_\mu \varphi_a(x)\big)} \right) \right] \Bigg|_{\varphi(x),\, \partial_\mu \varphi(x)} h_a(x)
$$

を充たすことが分かった．特にon shell な任意の $\varphi_{\mathrm{on\,shell}} \in \Gamma(E)$ に対しては (3.3.3) からカレント (3.3.5) の保存則

$$
\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \tag{3.3.6}
$$

が成り立つ．このように，対称性変換が存在するとそれに対応してon shell な保存則 (3.3.6) を充たすカレントが存在する（**Noether の定理**）．

ここで，$\mathcal{M} = \Sigma \times \mathbb{R}$ と書ける場合を考える．このとき **Noether チャージ**を

$$
Q(t) \coloneqq \int_\Sigma \mathrm{d}^D x \, j^0(t, \boldsymbol{x})
$$

と定義すると，保存則 (3.3.6) から $\partial\Sigma = \emptyset$ または $j^\mu|_{\partial\Sigma} = 0$ を要請すれば

$$
\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = - \int_\Sigma \mathrm{d}^D x \, \partial_i j^i(t, \boldsymbol{x}) = 0
$$

となって時間に依存しないことがわかる．さらに，$\pi^b(x) \coloneqq \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi_b(x))}$ とおくと

$$
Q = \int_\Sigma \mathrm{d}^D x \left(\pi^a(x) h_a(x) - X^\mu(x) \right)
$$

であるから，Poisson 括弧が

$$
\begin{aligned}
\{\varphi_a(x), Q\}_{\mathrm{P}} &= \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}y \left(\frac{\partial \varphi_a(x)}{\partial \varphi_b(y)} \frac{\partial Q}{\partial \pi^b(y)} - \frac{\partial \varphi_a(x)}{\partial \pi^b(y)} \frac{\partial Q}{\partial \varphi_b(y)} \right) \\
&= \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}y \left(\delta_a^b \delta^{D+1}(x-y) \int_\Sigma \mathrm{d}^D z \, \delta_b^c \delta^D(z-y) h_c(z) - 0 \right) \\
&= h_a(x)
\end{aligned}
$$

と求まる．つまり，Q は対称性変換 $\mathcal{T}_{\varepsilon h}$ の無限小生成子[*11]である．従って，正準量子化を行うと

$$\left[-\mathrm{i}\hat{Q}, \hat{\varphi}_a(x)\right] = h_a(x) \tag{3.3.7}$$

となる．

【例 3.3.1】$D+1$ 次元自由フェルミオン系

時空 $\mathcal{M}$ を Minkowski 時空，場をスピン束 $\mathbb{C}^4 \hookrightarrow S \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ の切断 $\psi \in \Gamma(S)$ とする（Dirac 場）．作用はガンマ行列 γ^μ，Dirac 共役 $\overline{\psi} := \mathrm{i}\psi^\dagger\gamma^0$ を用いて

$$S[\psi] = -\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}x\, \overline{\psi}(x)(\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi(x)$$

と書かれる．Euler-Lagrange 方程式 (3.3.3) は，$\overline{\psi}$, ψ に関する変分によってそれぞれ

$$(\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi = 0,$$
$$\partial_\mu\overline{\psi}\gamma^\mu - m\overline{\psi} = 0$$

となる．この系の対称性変換は，例えば $e^{\mathrm{i}\theta} \in \mathrm{U}(1)$ による

$$\mathcal{T}\colon \Gamma(S) \longrightarrow \Gamma(S),\ \psi \longmapsto e^{\mathrm{i}\theta}\psi$$

がある．$\mathcal{T}$ を生成する無限小変換は $e^{\mathrm{i}\theta}$ の Taylor 展開より $\mathcal{T}_{\mathrm{i}\theta\psi}\colon \psi \longmapsto \psi + \mathrm{i}\theta\psi$ である．つまり，先ほどの議論で登場した $h \in \Gamma(S)$ は今回の場合 $\mathrm{i}\psi$ に相当する．よって対称性変換 $\mathcal{T}$ に対応する Noether カレント (3.3.5) は

$$j^\mu(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\psi}\mathrm{i}\psi = -\mathrm{i}\overline{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{3.3.8}$$

と求まる．$\mathcal{M} = \mathbb{R}^D \times \mathbb{R}$ であるから，Noether チャージは

$$Q = -\mathrm{i}\int_{\mathbb{R}^D} \mathrm{d}^D x\, \overline{\psi}(x)\gamma^0\psi(x)$$

であり，正準量子化すると (3.3.7) より

$$\left[\mathrm{i}\hat{Q}, \hat{\psi}(x)\right] = -\mathrm{i}\hat{\psi}(x)$$

が成り立つ．ここから有限変換 $\mathcal{T}$ に戻すには，指数写像を用いれば良い．こうして

$$\exp\left(\mathrm{i}\theta\hat{Q}\right)\hat{\psi}(x)\exp\left(-\mathrm{i}\theta\hat{Q}\right) = e^{-\mathrm{i}\theta}\hat{\psi}(x) \tag{3.3.9}$$

だと分かった．ここで [?, p.6] に倣って $g := e^{\mathrm{i}\theta}$, $R_g := e^{-\mathrm{i}\theta}$, $\hat{U}_g(\mathbb{R}^D) := \exp\left(\mathrm{i}\theta\hat{Q}\right)$ とおく．

- $U_g(\mathbb{R}^D)$ を $\mathcal{M}$ の D 次元部分多様体 $\mathbb{R}^D$ に付随する**対称性演算子**
- $\hat{\psi}$ を**荷電物体** (charged object)

と呼ぼう．$\forall g,\, g' \in \mathrm{U}(1)$ に対して，対称性演算子は群のように振る舞う：

$$\hat{U}_g(\mathbb{R}^D)\hat{U}_{g'}(\mathbb{R}^D) = \hat{U}_{gg'}(\mathbb{R}^D)$$

[*11] Hamilton フローの意味である

時間一定面を $\mathbb{R}^D \subset \mathcal{M}$ にとったのは，正準量子化により (3.3.7) を導くためであった．しかるに，時間一定面を任意の D 次元部分多様体 $\mathcal{M}^{(D)} \subset \mathcal{M}$ にとれるのではないかと期待される．積分領域が複雑になるので微分形式を使うと見通しが良い．

$$\star j \coloneqq \star\flat(j^\mu \partial_\mu)$$

とおこう．このとき

$$\mathrm{d} \star j = \partial_\mu j^\mu \, \mathrm{d}^{D+1} x \tag{3.3.10}$$

が成り立つので，Noether カレントの保存則 (3.3.6) は単に $\mathrm{d} \star j = 0$ と書ける．Noether チャージは

$$Q = \int_{\mathcal{M}^{(D)}} \star j = \int_{\mathcal{M}} \star j \wedge \delta(\mathcal{M}^{(D)})$$

である．$\mathcal{M}^{(D)} \longrightarrow \mathcal{M}^{(D)} + \delta\mathcal{M}^{(D)}$ ${}^{\text{w/}}$ $\delta\mathcal{M}^{(D)} = \partial X^{(D+1)}$ なる時間一定面の変形を考えると，Q の変化は保存則から

$$\delta Q = \int_{\delta\mathcal{M}^{(D)}} \star j = \int_{X^{(D)}} \mathrm{d} \star j = 0$$

だと分かった．i.e.

$$\hat{U}_{e^{\mathrm{i}\theta}}(\mathcal{M}^{(D)}) = \hat{U}_{e^{\mathrm{i}\theta}}(\mathcal{M}^{(D)} + \delta\mathcal{M}^{(D)})$$

である．この意味で対称性演算子は**トポロジカル演算子**とも呼ばれる．しかし，$\mathcal{M}$ 上に荷電物体が存在しているときは (3.3.9) に注意しなくてはいけない．

時間一定面の変形をするので，量子化を経路積分で行う方が見通しが良い．経路積分では，任意の観測可能量 $\hat{\mathcal{O}}$ の期待値が

$$\left\langle \hat{\mathcal{O}} \right\rangle = \int [\mathrm{d}\psi] e^{\mathrm{i}S[\psi]} \mathcal{O}$$

と計算される．今，勝手な場の演算子 $\mathcal{O}(z)$ に対して

$$\left\langle \hat{\psi}(y) \hat{\mathcal{O}}(z) \right\rangle = \int [\mathrm{d}\psi] e^{\mathrm{i}S[\psi]} \psi(y) \mathcal{O}(z)$$

を計算しよう．荷電物体 $\hat{\psi}(y)$ を囲むような時間一定面 $\mathcal{M}^{(D)} \subset \mathcal{M}$ ${}^{\text{w/}}$ $y \in \mathcal{M}^{(D)}, z \notin \mathcal{M}^{(D)}$ をとり，$D+1$ 次元部分多様体 $\mathcal{M}^{(D+1)} \subset \mathbb{M}$ であって $\mathcal{M}^{(D)} = \partial\mathcal{M}^{(D+1)}$ を充たすようなものをとる．そして局所的な場の $\mathrm{U}(1)$ 変換

$$\begin{aligned} &\mathcal{T} \colon \Gamma(S) \longrightarrow \Gamma(S), \psi \longmapsto \left(x \mapsto e^{\mathrm{i}\theta(x)}\psi\right) \\ &{}^{\text{w/}} \quad \theta(x) = \begin{cases} \theta, & x \in \mathcal{M}^{(D)}, \\ 0, & x \notin \mathcal{M}^{(D)} \end{cases} \end{aligned}$$

を行う．すると，Noether カレントの表式 (3.3.8) を用いて

$$\begin{aligned}
S[\mathcal{T}(\psi)] - S[\psi] &= -\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}x\, \mathrm{i}\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\partial_\mu\theta(x) \\
&= \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}x\, \mathrm{i}\partial_\mu\big(\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\big)\theta(x) \\
&= -\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}x\, \partial_\mu j^\mu(x)\theta(x) \\
&= -\theta\int_{\mathcal{M}^{D+1}} \mathrm{d}\star j \\
&= -\theta\int_{\mathcal{M}^D} \star j
\end{aligned}$$

であることがわかる．つまり，変換 $\mathcal{T}$ の下で

$$\left\langle \hat{\psi}(y)\hat{\mathcal{O}}(z)\right\rangle = \int[\mathrm{d}\psi]e^{\mathrm{i}S[\psi]}\exp\left(-\mathrm{i}\theta\int_{\mathcal{M}^D}\star j\right)e^{\mathrm{i}\theta}\psi(y)\mathcal{O}(z)$$

と計算される．

$$\left\langle R_g\hat{\psi}(y)\hat{\mathcal{O}}(z)\right\rangle = \int[\mathrm{d}\psi]e^{\mathrm{i}S[\psi]}U_g(\mathcal{M}^{(D)})\psi(y)\mathcal{O}(z) \tag{3.3.11}$$

と言うことである．

3.3.2 連続的高次対称性

【例 **3.3.1**】は，荷電物体が 0 次元に分布していた．これを p 次元部分多様体上に分布した物体に置き換えることで p-form symmetry の概念が得られる [?, p.10]：

> ! 以下で部分多様体といったときは，技術的な理由からコンパクトな埋め込まれた C^∞ 多様体を指すものとする．

定義 3.9: p-form symmetry

$D+1$ 次元の場の量子論が群 G による ***p*-form symmetry** を持つとは，時空 $\mathcal{M}$ の任意の $D-p$ 次元部分多様体 $\mathcal{M}^{(D-p)}\subset\mathcal{M}$ および $\forall g\in G$ に対して**対称性演算子 (トポロジカル演算子)** (topological operator) $U_g(\mathcal{M}^{(D-p)})$ が存在して以下を充たすことを言う：

- $U_g(\mathcal{M}^{(D-p)})$ は任意の p 次元部分多様体 $\mathcal{C}^{(p)}\subset\mathcal{M}$ の台を持つ**荷電物体（演算子）** (charged object, operator) $V(\mathcal{C}^{(p)})$ に作用する．
- $\forall g,\, g'\in G$ に対して**群の規則** (group law)
$$U_g(\mathcal{M}^{(D-p)})U_{g'}(\mathcal{M}^{(D-p)}) = U_{gg'}(\mathcal{M}^{(D-p)})$$
が成り立つ．
- 任意の p 次元部分多様体 $\mathcal{C}^{(p)}\subset\mathcal{M}$ と，それに「絡む」十分小さな $D-p$-球 $S^{D-p}\subset\mathcal{M}$ に対して，(3.3.11) と同じく経路積分の期待値の意味で
$$U_g(S^{D-p})V(\mathcal{C}^{(p)}) = R_g\big(V(\mathcal{C}^{(p)})\big)$$

が成り立つ．ただし $R\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(\{荷電物体\})$ は群 G の表現である．

【例 3.3.2】 $3+1$ **次元** $\mathrm{U}(1)$ **ゲージ理論**

物質場のない $\mathrm{U}(1)$ ゲージ理論を考える．ゲージ場を局所接続形式[a] $a = a_\mu \, \mathrm{d}x^\mu \in \Omega^1(\mathcal{M};\, \mathfrak{u}(1))$ として与え，場の強さを $f \coloneqq \mathrm{d}a$ とおく．$f = f_{\mu\nu} \, \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu$ と成分表示すると $f_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu$ となる．

作用は

$$S[a] = -\frac{1}{2e^2} \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^4x \, f \wedge \star f = -\frac{1}{4e^2} \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^4x \, f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}$$

と書かれる．$\delta a \in \Omega^1(\mathcal{M};\, \mathfrak{u}(1))$ を用いた作用の変分は

$$\begin{aligned}\delta_{\delta a} S[a] &= -\frac{1}{e^2} \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}(\delta a) \wedge \star f \\ &= -\frac{1}{e^2} \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}(\delta a \wedge \star f) - \frac{1}{e^2} \int_{\mathcal{M}} \delta a \wedge \mathrm{d} \star f\end{aligned}$$

なので，Euler-Lagrange 方程式と Bianchi 恒等式から

$$\begin{aligned}\mathrm{d} \star f &= 0, \\ \mathrm{d} f &= 0\end{aligned}$$

が言える（Maxwell 方程式）．これをカレントの保存則と見做して，任意の $3-1=2$ 次元閉部分多様体 $\mathcal{M}^{(2)} \subset \mathcal{M}$ 上のトポロジカル演算子を

$$\begin{aligned}U^{\mathrm{E}}{}_{e^{\mathrm{i}\theta}}(\mathcal{M}^{(2)}) &\coloneqq \exp\left(\mathrm{i}\theta \int_{\mathcal{M}^{(2)}} \frac{\star f}{e^2}\right) \\ U^{\mathrm{M}}{}_{e^{\mathrm{i}\theta}}(\mathcal{M}^{(2)}) &\coloneqq \exp\left(\mathrm{i}\theta \int_{\mathcal{M}^{(2)}} \frac{f}{2\pi}\right)\end{aligned}$$

と定義しよう．$U^{\mathrm{E}}{}_{e^{\mathrm{i}\theta}}(\mathcal{M}^{(2)})$ が作用する荷電物体は **Wilson loop**

$$W(\mathcal{C}^{(1)}) \coloneqq \exp\left(\mathrm{i} \int_{\mathcal{C}^{(1)}} a\right)$$

である．このことを示そう．

簡単のため $S \coloneqq \mathcal{M}^{(2)},\, C \coloneqq \mathcal{C}^{(1)}$ と略記する．今，絡み数が

$$\mathrm{Link}(S,\, C) = \int_{\mathcal{M}} \delta(C) \wedge \delta(V) = 1$$

となるように $C,\, V,\, S = \partial V$ をとる．ゲージ場の変換

$$\mathcal{T}\colon a \longmapsto a + \theta\delta(V)$$

の下で場の強さは $f \longmapsto f + \theta\,\mathrm{d}(\delta(V)) = f - \theta\delta(S)$ となり，作用は[b]

$$
\begin{aligned}
S[\mathcal{T}(a)] - S[a] &= -\frac{1}{2e^2}\int_{\mathcal{M}} \bigl(f - \theta\delta(S)\bigr) \wedge \star\bigl(f - \theta\delta(S)\bigr) - S[a] \\
&= \frac{\theta}{2e^2}\int_{\mathcal{M}} \bigl(\delta(S) \wedge \star f + f \wedge \star\delta(S) - \theta\delta(S) \wedge \star\delta(S)\bigr) \\
&= \frac{\theta}{e^2}\int_{\mathcal{M}} \bigl(\delta(S) \wedge \star f - \theta\delta(S) \wedge \star\delta(S)\bigr) \\
&= \theta\int_S \frac{\star f}{e^2} - \frac{\theta^2}{2e^2}\int_S \delta(S)
\end{aligned}
$$

と変換する．一方，Wilson ループは

$$
\begin{aligned}
W(C) \longmapsto \exp\left(\mathrm{i}\int_C (a + \theta\delta(V))\right) \\
&= \exp\left(\mathrm{i}\int_C a + \mathrm{i}\theta\int_{\mathcal{M}} \delta(V) \wedge \delta(C)\right) \\
&= \exp\left(\mathrm{i}\int_C a - \mathrm{i}\theta\ \mathrm{Link}(S,\,C)\right) \\
&= e^{-\mathrm{i}\theta}\exp\left(\mathrm{i}\int_C a\right)
\end{aligned}
$$

と変換するので[c]，

$$
\langle W(C)\mathcal{O}\rangle = \int [\mathrm{d}a] e^{\mathrm{i}S[a]} {U^{\mathrm{E}}}_{e^{\mathrm{i}\theta}}(S) e^{-\mathrm{i}\theta} W(C) O
$$

i.e.

$$
\left\langle e^{\mathrm{i}\theta} W(C)\mathcal{O}\right\rangle = \int [\mathrm{d}a] e^{\mathrm{i}S[a]} {U^{\mathrm{E}}}_{e^{\mathrm{i}\theta}}(S) W(C)\mathcal{O}
$$

が分かった．

トポロジカル演算子を 2 次元閉部分多様体上で定義したが，境界を持つ場合，i.e. $C := \partial\mathcal{M}_C^{(2)} \neq \emptyset$ の場合はどうなるのか．

$$
H_\theta(\mathcal{M}_C^{(2)}) := \exp\left(\mathrm{i}\theta\int_{\mathcal{M}_C^{(2)}} \frac{\star f}{e^2}\right)
$$

を考える．境界を共有するもう 1 つの 2 次元部分多様体 $\mathcal{N}_C^{(2)}$ を持ってくると

$$
H_\theta(\mathcal{M}_C^{(2)}) H_\theta(\mathcal{N}_C^{(2)})^{-1} = \exp\left(\mathrm{i}\theta\oint_{\mathcal{M}_C^{(2)} \cup_C \left(-\mathcal{N}_C^{(2)}\right)} \frac{\star f}{e^2}\right)
$$

これは $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ のとき C にしかよらない．このことから，${U^{\mathrm{M}}}_{e^{\mathrm{i}\eta}}(\mathcal{M}_C^{(2)})$ が作用する荷電物体（**'t Hooft ループ**）を Hodge dual なゲージ場 $\mathrm{d}b := \frac{2\pi}{e^2} \star f$ によって

$$
H_n(C) := \exp\left(\mathrm{i}n\int_C b\right)
$$

と定義できる．

[a] 厳密には $\mathcal{M}$ の開集合上の $\mathfrak{u}(1)$-値 1 形式
[b] $\omega \wedge \star\eta = \eta \wedge \star\omega$ に注意.
[c] トポロジカル演算子を $\exp\left[\mathrm{i}\theta\left(\int_S \frac{\star f}{e^2} - \frac{\theta^2}{2e^2}\int_S \delta(S)\right)\right]$ と再定義した.

3.3.3 対称性の自発的破れ

まずは通常の対称性(0-form symmetry)の場合を考える.系が Lie 群 G で特徴付けられる 0-form symmetry を持つ場合を考えよう.ただし群は場へ表現 $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(N,\, \mathbb{K})$ として作用しているとする.このとき,無限小な対称性変換は Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底 $T^A \in \mathfrak{g}$ および微分表現 $\rho_*\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(N,\, \mathbb{K})$ を用いて[*12]$\mathcal{T}_{\mathrm{i}\varepsilon_A \rho_*(T^A)(\varphi)}$ と書けるので,Noether の定理より on shell な保存則 (3.3.10) を充たす $\dim G$ 個の Noether カレント (3.3.5) $j_A \quad (A = 1,\, \dots,\, \dim G)$ が存在し,それに付随して $\dim G$ 個の保存電荷 $Q_A(\mathcal{M}^{(D)}) = \int_{\mathcal{M}^{(D)}} \star j_A$ が存在して対称性変換の無限小生成子 (3.3.7) となるのだった.

さて,Noether の定理によって特徴付けられる対称性は必ずしも系の基底状態 $|0\rangle$ の対称性にならない.i.e. 形式的には

(1) $1 \leq \forall A \leq \dim G,\ \hat{Q}_A\,|0\rangle = 0$
(2) $1 \leq \exists A \leq \dim G,\ \hat{Q}_A\,|0\rangle \neq 0$

の 2 つの場合[*13]があり得る.(1) の場合,系は対称性を実現している,または系は **Wigner 相** (Wigner phase) にあると言い,(2) の場合,系の対称性が**自発的に破れた**,または系は **Nambu-Goldstone 相** (Nambu-Goldstone phase) にあると言う [?, p.1].0-form symmetry の言葉に翻訳すると,**対称性の自発的破れ** (spontaneous symmetry breaking; SSB) とは,0-form symmetry を特徴付ける Lie 群 G がその部分群 $H \subset G$ に縮小していることを指す[*14].SSB を特徴付けるには,上述のように素朴には $\hat{Q}_A\,|0\rangle \neq 0$ を充たす $1 \leq A \leq \dim G$ が存在するかどうかを確認すれば良いように見えるが,$\langle 0|\hat{Q}_A\hat{Q}_A|0\rangle \propto \mathrm{vol}(\mathcal{M}^{(D)})$ なので[*15]熱力学極限において $\hat{Q}_A\,|0\rangle$ は定義できない.そこで,代わりにある局所演算子(i.e. compactly supported な演算子)$\hat{\mathcal{O}}(x)$ が存在して

$$\langle 0|\left[\mathrm{i}\hat{Q}_A,\, \hat{\mathcal{O}}(x)\right]|0\rangle \neq 0 \tag{3.3.12}$$

を充たすことと特徴付ける.(3.3.12) の左辺を系の**秩序変数** (order parameter) と呼ぶ.

では,相対論的な系における Nambu-Goldstone の定理から出発しよう.

[*12] 苦肉の策だが,Lie 代数の添字を $A,\, B,\, C,\, \dots$ とする.
[*13] もしくは,$U_g(\mathcal{M}^{(D)})\,|0\rangle = |0\rangle$ としても良い.
[*14] 考えている場が構造群 G を持つファイバー束として定式化されている場合,SSB は数学的には**構造群の収縮** (reduction of structure group) として定式化できる.
[*15] **Fabri – Picasso の定理** [?]

定理 3.1: Nambu-Goldstone（相対論的）

考えている系が Lie 群 G で特徴付けられる 0-form symmetry を持ち，さらに

(1) 並進対称性と Lorentz 共変性を持ち，
(2) 部分群 $H \subset G$ に対称性が自発的に破れている

とする．このとき，系は線形分散を持つ零質量の独立な励起（**NG モード**）をちょうど $\dim G - \dim H$ 個持つ．

定理 3.1 の条件 (1) は NG モードが互いに独立であり，かつ必ず線形分散を持つことの証明に使うのだが，かなりややこしい[*16]ので，ここでは NG モードが存在することだけの証明の概略を述べるに留める．

証明 系は場 $\varphi \in \Gamma(E)$ からなるとし，この系の作用を $S[\varphi]$ と書く．Green 関数の生成汎函数を

$$
\begin{aligned}
Z[J] = e^{\mathrm{i}W[J]} &:= \langle 0|\mathcal{T} \exp\left(\mathrm{i}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}x\, J(x)\varphi(x)\right)|0\rangle \\
&= \frac{\displaystyle\int [\mathrm{d}\varphi] \exp\left(S[\varphi] + \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}x\, J(x)\varphi(x)\right)}{\displaystyle\int [\mathrm{d}\varphi] \exp S[\varphi]}
\end{aligned}
$$

と定義し，有効作用を

$$
\Gamma[\psi] := W[J] - \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}x\, J(x)\psi(x)
$$

と定義する．ただし

$$
\psi(x) := \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \frac{\langle 0|\mathcal{T}\left\{\hat{\varphi}(x) \exp\left(\mathrm{i}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}x\, J(x)\varphi(x)\right)\right\}|0\rangle}{\langle 0|\mathcal{T}\left\{\exp\left(\mathrm{i}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}x\, J(x)\varphi(x)\right)\right\}|0\rangle}
$$

とおいた．さらに有効ポテンシャルを

$$
V(\varphi) := -\frac{\Gamma[\varphi]|_{\varphi=\mathrm{const.}}}{\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D+1}x}
$$

と定義する．QFT の一般論から，場の演算子の真空期待値 $\varphi_0 := \langle 0|\hat{\varphi}(x)|0\rangle$ に対して $\varphi_0 = \mathrm{argmin}\, V(\varphi)$ であることが知られている．

簡単のため G が線型 Lie 群で，系の対称性変換が $\mathcal{T}_{\mathrm{i}\varepsilon_A \rho_*(T^A)(\varphi)}$ $(A = 1, \ldots, \dim G)$ と書ける場合を考える．(3.3.7) を思い出すと，このとき

$$
\left[\mathrm{i}\hat{Q}^A, \hat{\varphi}(x)\right] = \mathrm{i}\rho_*(T^A)\big(\hat{\varphi}(x)\big)
$$

[*16] 例えば [?, p.7] に漸近場を使った議論が載っている

が成り立つ．$\Gamma[\varphi]$, $V[\varphi]$ もこの変換の下で不変なので

$$\begin{aligned}
&V(\varphi+\mathrm{i}\varepsilon^A\rho_*(T^A)\varphi)=V(\varphi)\\
\Longrightarrow\quad &\frac{\partial V(\varphi)}{\partial\varphi_a}[\,\rho_*(T^A)\,]_a{}^b\varphi_b=0\\
\Longrightarrow\quad &\frac{\partial^2 V(\varphi)}{\partial\varphi_a\partial\varphi_b}[\,\rho_*(T^A)\,]_b{}^c\varphi_c+\frac{\partial V(\varphi)}{\partial\varphi_b}[\,\rho_*(T^A)\,]_a{}^b\varphi_b=0\quad(1\le\forall a\le N)
\end{aligned}\tag{3.3.13}$$

ここで条件 (2) から

$$\langle 0|\Big[\mathrm{i}\hat{Q}_A,\hat{\varphi}(x)\Big]|0\rangle=\mathrm{i}\rho_*(T^A)(\,\langle 0|\hat{\varphi}(x)|0\rangle\,)\begin{cases}=0, & T^A\in\mathfrak{h},\\ \neq 0, & T^A\notin\mathfrak{h}\end{cases}$$

が成り立つので，$v:=\langle 0|\hat{\varphi}(x)|0\rangle$ とおくと，(3.3.13) より破れた対称性に対応する任意の $1\le A\le\dim G$ に対して

$$v\neq 0\ \text{かつ}\ \left.\frac{\partial^2 V(\varphi)}{\partial\varphi_a\partial\varphi_b}\right|_{\varphi=v}[\,\rho_*(T^A)(v)\,]_b=0\quad(1\le\forall a\le N)\tag{3.3.14}$$

が成り立たねばならない．ところで，真空期待値が 0 になる場を $\tilde{\varphi}(x):=\varphi(x)-v$ で定義すると

$$V(\varphi)=V(v)+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 V(\varphi)}{\partial\varphi_a\partial\varphi_b}\right|_{\varphi=v}\tilde{\varphi}_a\tilde{\varphi}_b+\mathcal{O}(\tilde{\varphi}^3)$$

となるから，行列 $\left[\left.\frac{\partial^2 V(\varphi)}{\partial\varphi_a\partial\varphi_b}\right|_{\varphi=v}\right]_{1\le a,\,b\le\dim G}$ を対角化した固有値が粒子の質量の 2 乗を与える．従って (3.3.14) から，$T^A\notin\mathfrak{h}$ ならば $\rho_*(T^A)(v)$ がこの行列の固有値 0 に対応する固有ベクトル，i.e. ゼロ質量の NG 粒子であることが分かった． ■

NG モードの存在がわかったので，次に NG 粒子を記述する有効ラグランジアンの構成法を考える．破れた対称性は Lie 群 G/H で特徴付けられるはずである．まず，$\mathrm{Lie}(G/H)\cong\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ に注意する[*17]．このとき $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ の基底を $X^A+\mathfrak{h}$ w/ $A=1,\ldots,\dim G-\dim H$ と書くと，$X^A\in\mathfrak{g}\setminus\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ において線型独立であるように選べるから，T^A のうち $\mathfrak{h}$ に属さないものとすることができる．命題??より可換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "T_{1_G}p"] \arrow[d, "\exp_G"] & \mathrm{Lie}(G/H)\cong\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \arrow[d, "\exp_{G/H}"] \\
G \arrow[r, "p"] & G/H
\end{tikzcd}$$

が成り立つから，左剰余類 $gH\in G/H$ の代表元として

$$\exp_G\bigl(\mathrm{i}\pi_A(x)X^A\bigr)\in G$$

を選ぶことができる[*18]．この $\dim G-\dim H$ 成分場 $\pi\colon M\longrightarrow\mathrm{Lie}(G/H)$ のことを **NG ボゾン場**と呼ぶ．このとき，大域的な $\forall g\in G$ の作用に応じた場 π の変換 $\pi\longmapsto\pi'$ は

$$\exp_G\bigl(\mathrm{i}\pi_A(x)X^A\bigr)\,H\longmapsto g\exp_G\bigl(\mathrm{i}\pi_A(x)X^A\bigr)\,H=:\exp_G\bigl(\mathrm{i}\pi'_A(x)X^A\bigr)\,H$$

---

*17 標準的射影 $p\colon G\longrightarrow G/H$ について $T_{1_G}p\colon\mathfrak{g}\longrightarrow\mathrm{Lie}(G/H)$ は全射であるが，$X\in\mathfrak{h}\iff T_{1_G}p(X)=T_0(p\circ\exp_G)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right)=0$ なので $\mathfrak{h}\subset\mathrm{Ker}\,T_{1_G}p$ がわかり，次元を考えることで $\mathrm{Ker}\,T_{1_G}p=\mathfrak{h}$ が言える．よって準同型定理から $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}\cong\mathrm{Lie}(G/H)$ である．

*18 厳密には $\exp_G$ が全射とは限らないので，これは多様体 G/H の単位元 H 近傍のチャート $\bigl(U,\,(\pi_A)\bigr)$ だと考えるべきである．

となるから，顕にはある $h(g,\pi)\in H$ を使って

$$\exp_G\bigl(\mathrm{i}\pi'_A(x)X^A\bigr) = g\exp_G\bigl(\mathrm{i}\pi_A(x)X^A\bigr)h(g,\pi) \tag{3.3.15}$$

と書くことができる．$g\in H$ のときは任意の π について

$$\exp_G\bigl(\mathrm{i}\pi'_A(x)X^A\bigr)\,H = \exp_G\bigl(\mathrm{i}\pi_A(x)X^A\bigr)\,H$$

でなくてはいけないから $h(g,\pi)=g^{-1}$ であり，(3.3.15) を $0\in\mathfrak{h}$ において微分することで $\pi(x)$ が

$$\pi'(x) = \mathrm{Ad}(g)\bigl(\pi(x)\bigr)$$

なる線形変換を受けることがわかる．一方で $g\in G\setminus H$ のときは変換則 (3.3.15) は $\pi(x)$ について非線形である．

NG ボゾン場の項を含むラグランジアンは，G-不変でなくてはいけない．そのためには Maurer-Cartan 形式 $\theta\in\Omega^1(G;g)$ を使う．これを C^∞ 写像 $\xi\coloneqq\exp_G\bigl(\mathrm{i}\pi(\text{-})\bigr)\colon\mathcal{M}\longrightarrow G$ で引き戻すことで左不変な $\xi^*\theta\in\Omega^1(\mathcal{M};\mathfrak{g})$ を得る．$\mathfrak{h}$ 成分と $\mathfrak{g}\setminus\mathfrak{h}$ 成分に分離して

$$\xi^*\theta = \underbrace{\xi^*\theta_\parallel}_{\in\mathfrak{h}} + \underbrace{\xi^*\theta_\perp}_{\in\mathfrak{g}\setminus\mathfrak{h}}$$

と書く．行列 Lie 群の場合に成分表示を求めると

$$\xi^*\theta|_x(\partial_\mu) = \theta_{\xi(x)}\left(T_x\xi(\partial_\mu)\right) = \xi(x)^{-1}\partial_\mu\xi(x)$$

である．変換則 (3.3.15) から，$\forall g\in G$ に関する大域的な変換について

$$\xi(x)^{-1}\partial_\mu\xi(x)\longmapsto h^{-1}(g,\pi)\xi(x)^{-1}\partial_\mu\xi(x)h(g,\pi)+\underbrace{h(g,\pi)^{-1}\partial_\mu h(g,\pi)}_{\in\mathfrak{h}}$$

となる．i.e. $\mathrm{Tr}(\xi^*\theta_\perp)\in\Omega^1(M)$ が NG ボゾン場の変換 (3.3.15) について整合的である．よって微分の次数が 2 次の Lagrangian が

$$\mathcal{L}_{\mathrm{NGB}}\coloneqq-\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\xi^*\theta_\perp\wedge\star\xi^*\theta_\perp)$$

で与えられる[*19]．低エネルギーの時は π の最低次までとる．

$$\begin{aligned}
\xi(x)^{-1}\partial_\mu\xi(x) &= \frac{1-e^{-\mathrm{i}\,\mathrm{ad}(\pi(x))}}{\mathrm{i}\,\mathrm{ad}(\pi(x))}\bigl(\partial_\mu\pi(x)\bigr)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^n}{(n+1)!}\,\mathrm{ad}\bigl(\pi(x)\bigr)^n\bigl(\partial_\mu\pi(x)\bigr)\\
&= \partial_\mu\pi(x)-\frac{\mathrm{i}}{2!}[\pi(x),\partial_\mu\pi(x)]+\mathcal{O}\bigl(\pi^2\partial_\mu\pi\bigr)
\end{aligned}$$

なので

$$\mathcal{L}_{\mathrm{NGB}} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\pi_A\partial^\mu\pi_B\,\mathrm{Tr}\bigl(X^AX^B\bigr)$$

*19 このウェッジ積は普通のものではなく，$\omega=\omega_AT^A$, $\eta=\eta_AT^A$ と展開して $\omega\wedge\eta\coloneqq\frac{1}{2}\omega_A\wedge\eta_B\bigl[T^A,T^B\bigr]\in\Omega^{p+q}(M;\mathfrak{g})$ と定義した．

である．$g^{AB} \coloneqq \mathrm{Tr}\bigl(X^A X^B\bigr)$ は $\mathfrak{g}$ の規格化条件にもよるが，多様体 G/H の計量テンソルになっている．

次に物質場との結合を記述する方法を考える．物質場 ψ の値域は破れていない対称性 H の既約表現 $\rho_H\colon H \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ の表現空間 $\mathcal{H}$ だと考えて良い．$\forall g \in G$ による変換則は (3.3.15) の $h(g,\,\pi) \in H$ を使って

$$\psi(x) \longmapsto \rho_0\bigl(h(g,\,\pi)^{-1}\bigr)\bigl(\psi(x)\bigr)$$

と定義すると，前述の議論から $g = h \in H$ のときは $\psi \longmapsto \rho_0(h)(\psi)$ と変換するので整合的である．G の既約表現 $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathcal{H}_{\mathrm{ext}})$ であって，H の表現と見做して既約表現の直和に分解した際に ρ_0 を直和因子の 1 つに持つようなものを与えたとき，標準的包含 $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}$ によって ψ を送った先を $\widehat{\psi}$ とおくと，新しい場

$$\chi(x) \coloneqq \rho\bigl(\xi(\pi)\bigr)\bigl(\widehat{\psi}(x)\bigr)$$

は，$\forall g \in G$ による大域的変換の下で

$$\begin{aligned}
\chi(x) \longmapsto &\rho\bigl(g\xi(\pi)h(g,\,\pi)\bigr)\bigl(\widehat{\rho_0(h(g,\,\pi)^{-1})(\psi)(x)}\bigr) \\
&= \rho(g) \circ \rho\bigl(\xi(\pi)\bigr) \circ \rho\bigl(h(g,\,\pi)\bigr) \circ \rho\bigl(h(g,\,\pi)\bigr)^{-1}\bigl(\widehat{\psi}(x)\bigr) \\
&= \rho(g)\bigl(\chi(x)\bigr)
\end{aligned}$$

の変換を受ける．ψ をそのまま扱うよりも $\chi\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}$ について G-不変な Lagrangian を書き下す方が簡単であり，χ は NGB と物質場の相互作用も記述してくれる．最後に，これまで大域的対称性だと思っていた群 G の作用を局所的対称性にするために背景ゲージ場を導入する（**ゲージ化**）．そのためには Maurer-Cartan 形式の ∂_μ を共変微分に置き換えれば良く，NGB と背景ゲージ場との結合はそれで決まる．あからさまには

$$\xi(x)^{-1}\bigl(\partial_\mu + A_\mu(x)\bigr)\xi(x)$$

にすると言うことである．$A_{\mu A}T^A$ と展開すると

$$\begin{aligned}
\xi(x)^{-1}A_\mu(x)\xi(x) &= A_{\mu A}(x)\,\mathrm{Ad}\bigl(\exp_G(-\mathrm{i}\pi(x))\bigr)\bigl(T^A\bigr) \\
&= A_{\mu A}(x)\exp_{\mathrm{GL}(\mathfrak{g})}\bigl(-\mathrm{i}\pi_B(x)\,\mathrm{ad}(T^B)\bigr)\bigl(T^A\bigr) \\
&= A_{\mu A}(x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^n}{n!}\pi_{B_1}(x)\cdots\pi_{B_n}(x)\,\mathrm{ad}(T^{B_1})\circ\cdots\mathrm{ad}(T^{B_n})(T^A) \\
&= A_\mu(x) + \mathcal{O}(\pi)
\end{aligned}$$

となるので，π の最低次では Maurer-Cartan 形式の成分

$$\partial_\mu\pi + A_\mu$$

と書かれる．よってゲージ変換 $A \longmapsto A + \mathrm{d}\lambda_0$ は NG ボゾンに $\pi + \lambda_0$ のシフトを引き起こす．

余談だが，定理 3.1 の Lorentz 共変性の条件 (1) を外すと話はややこしくなる．まず，波数の小さいところにおいて分散関係が奇数冪であるような NG モードを **Type-I**，偶数冪で書けるような NG モードを **Type-II** と呼ぶ [**?**]．そして

- 破れた対称性の個数を $N_{\mathrm{BG}} \coloneqq \dim G - \dim H$
- NG モードの総数を N_{NGB}
- Type-I, Type-II の個数をそれぞれ $N_{\mathrm{I}},\, N_{\mathrm{II}}$

とおこう．[?] による結果は以下の通りである：

定理 3.2: Nielsen-Chadha

$$N_{\mathrm{I}}+2N_{\mathrm{II}}\geq N_{\mathrm{BG}}$$

証明 ■

さらに，[?] によって以下が示された：

定理 3.3: Watanabe-Murayama

$\Omega:=\int_\Sigma \mathrm{d}^D x$ とおき，$\rho_{AB}:=\lim_{\Omega\to\infty}\frac{-\mathrm{i}}{\Omega}\langle 0|[Q_A,Q_B]|0\rangle$ と定義する．このとき以下が成り立つ：

$$N_{\mathrm{BG}}-N_{\mathrm{NGB}}=\frac{1}{2}\operatorname{rank}\rho$$

証明 ■

3.3.4 高次対称性の自発的破れ

この小節と次の小節では時空 $\mathcal{M}$ は境界を持たないと仮定する[*20]．0 次対称性の場合と同様に，p 次対称性の自発的破れを議論することができる．p-form symmetry の場合，トロポジカル演算子は $p+1$-form 背景ゲージ場と等価であった．0-form の場合からの類推で，NG ボゾン場は背景 $p+1$-form ゲージ場のゲージ変換によってシフトするはずだが，$p+1$-form ゲージ場 B_{p+1} のゲージ変換は p-form Λ_p により $B_{p+1}\longmapsto B_{p+1}+\mathrm{d}\Lambda_p$ の形をしているので，NG ボゾン場は p-form である．

p-form symmetry の秩序変数は荷電物体の真空期待値であり，一般に $\mathcal{C}^{(p)}\subset\mathcal{M}$ に依存する何らかの関数 $F(\mathcal{C}^{(p)})$ を使って

$$\left\langle V(\mathcal{C}^{(p)})\right\rangle\sim e^{-F(\mathcal{C}^{(p)})}$$

の振る舞いをする．SSB を特徴づける典型的な振る舞いは

$$\lim_{\mathrm{vol}(\mathcal{C}^{(p)})\longrightarrow\infty}\mathrm{Re}\left[\frac{F(\mathcal{C}^{(p)})}{\mathrm{vol}(\mathcal{C}^{(p)})}\right]\begin{cases}<\infty, & \text{SSB}\\ =\infty, & \text{unbroken}\end{cases}$$

というものである．SSB が起こったと言うのは，荷電演算子を

$$\widehat{V}(\mathcal{C}^{(p)}):=e^{-c\int_{\mathcal{C}^{(p)}}\star_{\mathcal{C}^{(p)}}1}V(\mathcal{C}^{(p)})$$

と正則化することで

$$\lim_{\mathrm{vol}(\mathcal{C}^{(p)})\longrightarrow\infty}\left\langle V(\mathcal{C}^{(p)})\right\rangle\neq 0$$

[*20] 境界がある場合の取り扱いは [?] に書いてある．

を充たすようにできると言う意味である．

演算子形式ではどうなるのだろうか？ (3.3.12) の素朴な一般化は

$$\left\langle\left[\mathrm{i}\hat{Q}(\mathcal{M}^{(D-p)}), V(\mathcal{C}^{(p)})\right]\right\rangle$$

であるが，これは $\mathcal{M}^{(D-p)}, \mathcal{C}^{(p)}$ が共に閉多様体だと微妙なところがある [?].

[?, p.5-6] に倣って，系が並進対称性を持つ場合にギャップレスな励起が存在することをざっと確認しよう．演算子形式で議論するので，時間一定面 $\mathcal{M}^{(D)} \subset \mathcal{M}$ を 1 つ固定し，微妙なことが起こらないように $\mathcal{M}^{(D-p)} \subset \mathcal{M}^{(D)}$ が境界を持つとする．保存則 $\mathrm{d} \star j = 0$ を充たすカレント $\star j$ および$\mathcal{M}^{(D)}$ に関するデルタ関数形式 $\delta^D(\mathcal{M}^{(D-p)})$ を使って $Q(\mathcal{M}^{(D-p)}) = \int_{\mathcal{M}^{(D)}} \star j \wedge \delta^D(\mathcal{M}^{(D-p)})$ と書ける．並進対称性から $\langle 0|\star\hat{j} \wedge \delta^D(\mathcal{M}^{(D-p)})(x)|n\rangle = e^{\mathrm{i}p_n\cdot x} \langle 0|\star\hat{j} \wedge \delta^D(\mathcal{M}^{(D-p)})(0)|n\rangle$ が成り立つので

$$\begin{aligned}
&\left\langle\left[\mathrm{i}\hat{Q}(\mathcal{M}^{(D-p)}), V(\mathcal{C}^{(p)})\right]\right\rangle \\
&= \mathrm{i}\sum_n (2\pi)^D \delta^D(\boldsymbol{p})\Big(\langle 0|\star\hat{j} \wedge \delta^D(\mathcal{M}^{(D-p)})(0)|n\rangle \langle n|V(\mathcal{C}^p)|0\rangle\, e^{-\mathrm{i}E_n x^0} \\
&\quad - \langle 0|V(\mathcal{C}^p)|n\rangle \langle n|\star\hat{j} \wedge \delta^D(\mathcal{M}^{(D-p)})(0)|0\rangle\, e^{\mathrm{i}E_n x^0}\Big)
\end{aligned}$$

が言える．一方で左辺を $x^0 = t$ 方向に微分すると，保存則および Stokes の定理から

$$\begin{aligned}
\partial_0 \left\langle\left[\mathrm{i}\hat{Q}(\mathcal{M}^{(D-p)}), V(\mathcal{C}^{(p)})\right]\right\rangle &= \int_{\mathcal{M}^{(D-p)}} \left\langle\left[\partial_0 \star j, V(\mathcal{C}^{(p)})\right]\right\rangle \\
&= -\int_{\partial\mathcal{M}^{(D-p)} \subset \partial\mathcal{M}^{(D)}} \left\langle\left[\star_{\mathcal{M}^{(D)}} j, V(\mathcal{C}^{(p)})\right]\right\rangle
\end{aligned}$$

となる．次元を数えることでいつでも $\mathcal{C}^{(p)} \cap \partial\mathcal{M}^{(D-p)} = \emptyset$ にできることがわかるので結局右辺は 0 だとわかる．よってもし $\left\langle\left[\mathrm{i}\hat{Q}(\mathcal{M}^{(D-p)}), V(\mathcal{C}^{(p)})\right]\right\rangle \neq 0$ ならば $\boldsymbol{p} = 0$ のときに $E_n = 0$ となるような n が存在する．

【例 3.3.3】 $3+1$ **次元の Yang-Mills 理論**

【例 3.3.4】 U(1) **ゲージ理論**

3.3.5 高次対称性の Coleman-Mermin-Wagner の定理

通常の Coleman-Mermin-Wagner の定理は，連続的 0 次対称性が $1+1$ 次元以下では自発的に破れないことを主張する．これは p 次対称性に拡張することができる：

定理 3.4: 高次対称性についての Coleman-Mermin-Wagner の定理

$D+1$ 次元時空において，Lie 群 G で特徴付けられる $p \geq D-1$ 次対称性は自発的に破れない．

証明 より詳細な扱いは [?, p.23] を参照．ここではとても雑に示す．

$D+1$ 次元 Euclid 時空 $\mathcal{M}$ の自由かつ massless な p-form 場（これは p-form NG ボゾン場のつもりである）$B_p \in \Omega^p(\mathcal{M})$ の理論

$$S = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}B_p \wedge \star\, \mathrm{d}B_p$$

を考える．B_p の 2 点関数の長距離における振る舞いを見る．そのためには参照点を 1 つ固定し，その点を原点に持つ $D+1$ 次元極座標 $(r,\,\theta^1,\,\dots,\,\theta^D)$ を r が十分大きいところでとる．このときの Green 関数の r 依存性を見ればよい：

$$\mathrm{d}\star\mathrm{d}G_p(r,\,\theta^\mu) = 0$$

外微分したときに $\partial_r\,\mathrm{d}r\wedge$ が生き残るのは $\mathrm{d}\theta^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\theta^{\mu_p}$ の項のみである．また，自然基底の規格化のために $r\,\mathrm{d}\theta^\mu$ を考えないといけないので，結局 p-form の

$${G_p}^{\mathrm{ang}}{}_{\mu_1,\,\dots,\,\mu_p} r^p\,\mathrm{d}\theta^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\theta^{\mu_p}$$

の部分を見ないと意味がない．よって

$$\frac{1}{r^{D+1-p}}\partial_r\left(r^{D+1-(p+1)}\frac{1}{r^p}\partial_r\bigl(r^p\,G(r)\bigr)\right) = 0$$

と言うことであり，$G(r)\sim r^{-(d-p-1)}$ である．このことから，$d-p-1>0$ でないと 2 点関数が $r\to\infty$ で発散することになり，p-form NG ボゾン場が ill-defined である．i.e. $p\geq D-1$-form symmetry は自発的に破れない．

■

3.3.6 対称性のアノマリー

アノマリー[*21]には，大別して 3 種類ある [?]：

ゲージアノマリー

元の理論 $S[\psi]$ に**ゲージ化** $\partial_\mu \longmapsto \partial_\mu + a_\mu$ の操作を施して得られた理論 $S_{\mathrm{gauged}}[\psi,\,a]$ の[*22]分配関数

$$Z_{\mathrm{gauged}} = \int[\mathrm{d}a]\int[\mathrm{d}\psi]\,e^{-S_{\mathrm{gauged}}[\psi,\,a]-S_{\mathrm{kin}}[a]} =: \int[\mathrm{d}a]\,Z[A]\,e^{-S_{\mathrm{kin}}[a]}$$

について，ある $g\colon \mathcal{M}^{(D+1)}\longrightarrow G$ が存在してゲージ変換 $a\longmapsto a^g := g^{-1}ag + g^{-1}\,\mathrm{d}g$ の下で $Z[a]\neq Z[a^g]$ となること．このとき理論は矛盾している．と言うのも，汎函数積分 $\int[\mathrm{d}A]$ が ill-defined になるからである．

't Hooft アノマリー

元の理論 $S[\psi]$ に**ゲージ化** $\partial_\mu \longmapsto \partial_\mu + A_\mu$ の操作を施して得られた理論 $S_{\mathrm{gauged}}[\psi,\,A]$ について

$$Z[A] := \int[\mathrm{d}\psi]\,e^{-S_{\mathrm{gauged}}[\psi,\,A]}$$

*21 訳語だと**対称性の量子的破れ**と呼ぶこともある [?].

*22 ゲージ場がダイナミカルなときは $a,\,b,\,\dots$ で，単に外場であるときは $A,\,B,\,\dots$ で書くことにする．

と定義したとき, ある $g \in G$ が存在してゲージ変換 $A \longmapsto A^g := g^{-1}Ag + g^{-1}\,\mathrm{d}g$ の下で $Z[A] \neq Z[A^g]$ となること．A は単なる外場なので，理論が矛盾したわけではない．また，$Z[0] = Z$ となる．

今，$Z_{\mathrm{UV}}[A]$ が繰り込み群変換の下で $Z_{\mathrm{IR}}[A]$ に流れるとする．このとき，のちに見るようにアノマリーは 1 つ次元が上の TQFT で記述されるが，TQFT は繰り込み群変換の下で不変なので，両者のアノマリーは一致していなくてはいけない．つまり，理論 Z_{UV} が繰り込み群変換で Z_{IR} へ流れるための必要条件は，両者で 't Hooft アノマリーが一致することなのである．

ABJ アノマリー (Adler Bell Jackiw anomaly)

ゲージ群 G についてゲージアノマリーを持たない理論

$$Z = \int [\mathrm{d}a] \int [\mathrm{d}\psi]\, e^{-S[\psi,\, a]} =: \int [\mathrm{d}a]\, Z[a]$$

が別の Lie 群 H についても大域的対称性を持っているとき，外場 A を導入して H 対称性をゲージ化して

$$Z[a,\, A] = \int [\mathrm{d}\psi]\, e^{-S[\psi,\, a,\, A]}$$

を得るが，この新しく加えた A についてゲージ変換 $A \longmapsto A^h$ を施したときに $Z[a,\, A^h] \neq Z[a,\, A]$ となることである．摂動論的には，$2n$ 次元の理論が持つ摂動アノマリーであって，対応する $n+1$ 角形の Feynman ダイアグラムの外線のうち 1 本が外場で，残りの n 本がダイナミカルなゲージ場であるようなものである．ABJ アノマリーの場合もまた，理論が矛盾しているわけではない．

ABJ アノマリーは Noether カレントの非保存と等価である．

$$S[\psi,\, a] := \int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} \mathrm{d}^{D+1}x\, \bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + a_\mu)\psi$$

を考える．これが G によるゲージ変換以外に，H による<u>大域的</u>対称性 $S[\psi,\, a] = S[\psi^h,\, a]$ を持っているとする．このとき $h\colon \mathcal{M}^{(D+1)} \longrightarrow H$ による変換 $\rho\big(h\big)\big(\psi\big)$ を摂動的に扱い $h \sim 1 + \epsilon$ と思うと，

$$S[\psi^h,\, a] = S[\psi,\, a] - \int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} \mathrm{d}^{D+1}x\, \epsilon\, \partial_\mu(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi)$$

になる．ここで，経路積分において測度が $[\mathrm{d}\bar{\psi}^h\, \mathrm{d}\psi^h] = J[\mathrm{d}\bar{\psi}\, \mathrm{d}\psi]$ と変換するならば

$$Z[a] = \int [\mathrm{d}\bar{\psi}^h\, \mathrm{d}\psi^h] e^{-S[\psi^h,\, a]} = \int [\mathrm{d}\bar{\psi}\, \mathrm{d}\psi]\, e^{-S[\psi,\, a]} J e^{\int \mathrm{d}^{D+1}x \epsilon \partial_\mu j^\mu}$$

であり，$J = e^{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^{D+1}x \epsilon \boldsymbol{A}}$ と書くと

$$\partial_\mu j^\mu = \mathrm{i}\boldsymbol{A}$$

が導かれるのだった（Fujikawa の方法）．一方，大域的対称性 H をゲージ化して

$$S[\psi,\, a,\, A] := \int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} \mathrm{d}^{D+1}x\, \bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + a_\mu + A_\mu)\psi$$

にする．ゲージ不変性から $S[\psi^h,\, a,\, A^h] = S[\psi,\, a,\, A]$ なので，

$$S[\psi^h,\, a,\, A] = S[\psi^h,\, a,\, A^h] - \int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} \mathrm{d}^{D+1}x\, \epsilon\, \partial_\mu(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi)$$

である．ABJ アノマリーは

$$
\begin{aligned}
& Z[a,\, A^h] = e^{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^{D+1}\epsilon \boldsymbol{B}} Z[a,\, A] \\
\Longleftrightarrow\quad & \int [\mathrm{d}\bar{\psi}^h\, \mathrm{d}\psi^h] e^{-S[\psi^h,\, a,\, A^h]} = e^{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^{D+1}\epsilon \boldsymbol{B}} \int [\mathrm{d}\bar{\psi}\, \mathrm{d}\psi] e^{-S[\psi,\, a,\, A]}
\end{aligned}
$$

を意味するから，

$$
\partial_\mu j^\mu = -\mathrm{i}\boldsymbol{B}
$$

となる．

Lie 群 G で特徴づけられる 0-form symmetry の場合を考える．on shell な保存カレントを 't Hooft アノマリーの意味で 1-form 背景ゲージ場 A_1 に結合させることができる．このとき，ゲージ場はダイナミカルでないので，分配関数は

$$
Z[A_1] = \int [\mathrm{d}\psi]\, e^{-S[\psi,\, A_1]}
$$

の形になっている．この 0-form symmetry が**アノマリー**を持つとは，ゲージ変換 $A_1 \longmapsto A_1 + \mathrm{d}\lambda_0$ の下で分配関数が不変にならないことである，と定義しよう．記号的には

$$
Z[A_1 + \mathrm{d}\lambda_0] = e^{\mathrm{i}\int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} \mathcal{A}[A_1,\, \lambda_0]} Z[A_1]
$$

と言うことである．ここで，この位相 $\mathcal{A}[A_1,\, \lambda_0]$ は $D+2$ 次元時空の TQFT の境界からの寄与だと考えてみよう[*23]：

$$
e^{\mathrm{i}\int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} \mathcal{A}[A_1,\, \lambda_0]} = e^{\mathrm{i}\int_{\partial\mathcal{N}^{(D+2)}} \mathcal{A}[A_1,\, \lambda_0]} = e^{\mathrm{i}\int_{\mathcal{N}^{(D+2)}} \mathrm{d}\mathcal{A}[A_1,\, \lambda_0]}
$$

つまり，$\mathrm{d}\mathcal{A}[A_1,\, \lambda_0]$ を $\widehat{\mathcal{A}}[A_1 + \mathrm{d}\lambda_0] \in \Omega^{D+2}(\mathcal{N}^{(D+2)})$ と見做すのである．すると，元の理論の分配関数を

$$
\widehat{Z}[A_1] := Z[A_1] e^{-\mathrm{i}\int_{\mathcal{N}^{(D+2)}} \widehat{\mathcal{A}}[A_1]}
$$

と正則化すれば，直上で定義した意味でのアノマリーを相殺できるのである．

【例 3.3.5】カイラルアノマリー

カイラルアノマリーを Fujikawa 法で計算した結果は

$$
\mathcal{A}[A_1,\, \lambda_0] = \kappa\lambda_0 \frac{F_2 \wedge F_2}{8\pi^2}
$$

であるが，

$$
\widehat{\mathcal{A}}[A_1] = \kappa A_1 \wedge \frac{F_2 \wedge F_2}{8\pi^2}
$$

*23 この仮説は，フェルミオン系においては数学的に証明されている [?]

とすれば

$$
\begin{aligned}
\widehat{Z}[A_1+\mathrm{d}\lambda_0] &= Z[A_1]e^{\mathrm{i}\kappa\int_{\mathcal{M}^{(D+1)}}\lambda_0\frac{F_2\wedge F_2}{8\pi^2}}e^{-\mathrm{i}\kappa\int_{\mathcal{N}^{(D+2)}}(A_1+\mathrm{d}\lambda_0)\wedge\frac{F_2\wedge F_2}{8\pi^2}} \\
&= \widehat{Z}[A_1]e^{\kappa\int_{\mathcal{M}^{(D+1)}}\lambda_0\frac{F_2\wedge F_2}{8\pi^2}-\mathrm{i}\kappa\int_{\partial\mathcal{N}^{(D+2)}=\mathcal{M}^{(D+1)}}\lambda_0\frac{F_2\wedge F_2}{8\pi^2}} \\
&= \widehat{Z}[A_1]
\end{aligned}
$$

となり，アノマリーが相殺されている．

しかるに，全てのゲージ変換について分配関数の不変性を調べるのは一般には難しい．そこで，アノマリーの定義を数学的により扱いやすい形に書き直そう [?, p.41]．まず，アノマリー流入の仮説から出発する：

仮説 3.1: anomaly inflow

$d=D+1$ 次元時空 $\mathcal{M}^{(d)}$ の上の任意のゲージ場の理論 $Z[A;\,\mathcal{M}^{(d)}]$ を与える．このとき，ある $\mathcal{N}^{(d+1)}$ の上の TQFT $S^{\mathrm{top}}[A;\,\mathcal{N}^{(d+1)}]$ が存在して，任意の $d+1$ 次元時空 $\mathcal{N}^{(d+1)}$ であって $\partial\mathcal{N}^{(d+1)}=\mathcal{M}^{(d)}$ を充たすものについて

$$
\widehat{Z}[A;\,\mathcal{M}^{(d)},\,\mathcal{N}^{(d+1)}] := Z_{\mathcal{M}^{(d)}}[A]e^{-\mathrm{i}S^{\mathrm{top}}[A;\,\mathcal{N}^{(d+1)}]}
$$

で定義される理論がゲージ不変であるようにできる．

ここから，d 次元のゲージ場の理論の分配関数をむしろ初めから $\widehat{Z}[A;\,\mathcal{M}^{(d)},\,\mathcal{N}^{(d+1)}]$ として定義する．

定義 3.10: アノマリー

理論 $\widehat{Z}[A;\,\mathcal{M}^{(d)},\,\mathcal{N}^{(d+1)}]$ が**アノマリー**を持つとは，ある 2 つの異なる $d+1$ 次元時空 $\mathcal{N}_1^{(d+1)}$, $\mathcal{N}_2^{(d+1)}$ であって $\partial\mathcal{N}_1^{(d+1)}=\partial\mathcal{N}_2^{(d+1)}=\mathcal{M}^{(d)}$ を充たすものが存在して

$$
J[A;\,\mathcal{N}_1^{(d+1)},\,\mathcal{N}_2^{(d+1)}] := \frac{\widehat{Z}[A;\,\mathcal{M}^{(d)},\,\mathcal{N}_2^{(d+1)}]}{\widehat{Z}[A;\,\mathcal{M}^{(d)},\,\mathcal{N}_1^{(d+1)}]} \neq 1
$$

が成り立つことを言う．

定義 3.11: IFT

TQFT $\mathcal{Z}\colon \mathbf{Cob}_{d+1} \longrightarrow \mathbf{Hilb}$ が **IFT** (invertible field theory) であるとは，$\forall\Sigma^{(d)}\in\mathrm{Ob}(\mathbf{Cob}_{d+1})$ について

$$
\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{Z}(\Sigma^{(d)})=1
$$

が成り立つことを言う．

仮説 3.1 において，$S^{\mathrm{top}}[A;\mathcal{N}^{(d+1)}]$ は TQFT であった．特に IFT であることを仮定すると，アノマリーは

$$\begin{aligned}J[A;\mathcal{N}_1^{(d+1)},\mathcal{N}_2^{(d+1)}] &= \frac{\widehat{Z}[A;\mathcal{M}^{(d)},\mathcal{N}_2^{(d+1)}]}{\widehat{Z}[A;\mathcal{M}^{(d)},\mathcal{N}_1^{(d+1)}]} \\ &= (e^{\mathrm{i}S^{\mathrm{top}}[A;\mathcal{N}_1^{(d+1)}]})^\dagger e^{\mathrm{i}S^{\mathrm{top}}[A;\mathcal{N}_2^{(d+1)}]} \\ &= \left\langle \mathcal{Z}(\mathcal{N}_1^{(d+1)}) \middle| \mathcal{Z}(\mathcal{N}_2^{(d+1)}) \right\rangle \\ &= \mathcal{Z}\big((-\mathcal{N}_1^{(d+1)}) \cup_{\partial\mathcal{N}^{(d+1)}} \mathcal{N}_2^{(d+1)}\big)\end{aligned}$$

となる．i.e. $\mathcal{M}^{(d)}$ のアノマリーはある IFT $\mathcal{Z}\colon \mathbf{Cob}_{d+1} \longrightarrow \mathbf{Hilb}$ の分配関数[*24]である．この事実を**バルク-エッジ対応**と言う．結局，アノマリーを列挙する問題は IFT を列挙する問題に帰着された，と言うことである．

さらに，次の有名な予想がある [?]：

予想 3.1: Freed-Hopkins の予想

IFT $\mathbf{Cob}_{d+1} \longrightarrow \mathbf{Hilb}$ の群構造は，$d+2$ 次元の bordism 群の Anderson 双対

$$(I_{\mathbb{Z}}\Omega)^{d+2}$$

により与えられる．

3.3.7 高次対称性のアノマリー

高次対称性に関しても全く同様にアノマリーを判定できる．つまり，p-form カレントを背景ゲージ場と結合させてゲージ変換を施した際の分配関数の変化が

$$Z[A_{p_i} + \mathrm{d}\Lambda_{p_i-1}] = Z[A_{p_i}]e^{\mathrm{i}\int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} \mathcal{A}[A_{p_i},\Lambda_{p_i-1}]}$$

となり，$\mathcal{A}[A_{p_i},\Lambda_{p_i-1}] \neq 0$ ならば理論はアノマリーを持つと言う．特に $\mathcal{A}[A_{p_i},\Lambda_{p_i-1}=0\,\forall i]=0$ ならば**'t Hooft アノマリー**，そうでないならば **ABJ 型のアノマリー**を持つと言う．

【例 3.3.6】p-form U(1) ゲージ理論のアノマリー

作用が

$$S[A_p] = \frac{1}{2g^2}\int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} F_{p+1} \wedge \star F_{p+1}$$

[*24] $d+1$ 次元閉多様体 $\mathcal{N}^{(d+1)}$ を $\mathcal{N}^{(d+1)} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cob}_{d+1}}(\emptyset,\emptyset)$ と見做した際に，TQFT $\mathcal{Z}\colon \mathbf{Cob}_{d+1} \longrightarrow \mathbf{Hilb}$ によって線型写像 $\mathcal{Z}(\mathcal{N}^{(d+1)})\colon \mathcal{Z}(\emptyset) \longrightarrow \mathcal{Z}(\emptyset)$ が定まるが，$\mathcal{Z}(\emptyset)=\mathbb{C}$ と定義していたのでこの線型写像はある複素数 $\lambda_{\mathcal{Z},\mathcal{N}^{(d+1)}} \in \mathbb{C}$ と $\mathcal{Z}(\mathcal{N}^{(d+1)})(|\psi\rangle) = \lambda_{\mathcal{Z},\mathcal{N}^{(d+1)}}|\psi\rangle$ の関係で一対一対応する．この複素数 $\lambda_{\mathcal{Z},\mathcal{N}^{(d+1)}}$ のことを $\mathcal{Z}(\mathcal{N}^{(d+1)})$ と書いて，**分配関数**と呼ぶ．

で書かれる p-form U(1) ゲージ場 A_p の理論を考えよう[a] U(1)-ゲージ変換は $A_p \longmapsto A_p + \mathrm{d}\Lambda_{p-1}$ と書け，運動方程式と Bianchi 恒等式はそれぞれ

$$\begin{aligned} \mathrm{d} \star F_{p+1} &= 0, \\ \mathrm{d}F_{p+1} &= 0 \end{aligned}$$

となり，これらに対応して 2 つの保存カレント

$$\begin{aligned} \star J^{(\mathrm{e})} &\coloneqq \frac{1}{g^2} \star F_{p+1} \\ \star J^{(\mathrm{m})} &\coloneqq \frac{1}{2\pi} F_{p+1} \end{aligned}$$

がある．背景ゲージ場 $B^{(\mathrm{e})}_{p+1}$, $B^{(\mathrm{m})}_{D-p}$ と結合させよう：

$$S[A_p,\, B^{(\mathrm{e})}_{p+1},\, B^{(\mathrm{m})}_{D-p}] = \int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} \frac{1}{2g^2} (F_{p+1} - B^{(\mathrm{e})}_{p+1}) \wedge \star (F_{p+1} - B^{(\mathrm{e})}_{p+1}) + \frac{\mathrm{i}}{2\pi} \int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} F_{p+1} \wedge B^{(\mathrm{m})}_{D-p}$$

ここで背景ゲージ場のゲージ変換 $\delta B^{(\mathrm{e})}_{p+1} = \Lambda^{(\mathrm{e})}_{p+1} \in \mathrm{B}^{p+1}(\mathcal{M}^{(D+1)};\, \mathbb{Z})$ を施す[b]：

$$\begin{aligned} &S[A_p,\, B^{(\mathrm{e})}_{p+1} + \Lambda^{(\mathrm{e})}_{p+1},\, B^{(\mathrm{m})}_{D-p}] \\ &= S[A_p,\, B^{(\mathrm{e})}_{p+1},\, B^{(\mathrm{m})}_{D-p}] + \frac{\mathrm{i}}{2\pi} \int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} \Lambda^{(\mathrm{e})}_{p+1} \wedge B^{(\mathrm{m})}_{D-p} \end{aligned}$$

この 't Hooft アノマリーは，アノマリー流入

$$\widehat{A}[B^{(\mathrm{e})}_{p+1},\, B^{(\mathrm{m})}_{D-p}] \coloneqq \frac{\mathrm{i}}{2\pi} B^{(\mathrm{e})}_{p+1} \wedge \mathrm{d}B^{(\mathrm{m})}_{D-p}$$

により相殺される．と言うのも，

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{N}^{(D+2)}} \widehat{A}[B^{(\mathrm{e})}_{p+1} + \Lambda^{(\mathrm{e})}_{p+1},\, B^{(\mathrm{m})}_{D-p}] &= \int_{\mathcal{N}^{(D+2)}} \widehat{A}[B^{(\mathrm{e})}_{p+1},\, B^{(\mathrm{m})}_{D-p}] + \frac{\mathrm{i}}{2\pi} \int_{\mathcal{N}^{(D+2)}} \Lambda^{(\mathrm{e})}_{p+1} \wedge \mathrm{d}B^{(\mathrm{m})}_{D-p} \\ &= \int_{\mathcal{N}^{(D+2)}} \widehat{A}[B^{(\mathrm{e})}_{p+1},\, B^{(\mathrm{m})}_{D-p}] + (-1)^{p+1} \frac{\mathrm{i}}{2\pi} \int_{\partial\mathcal{N}^{(D+2)} = \mathcal{M}^{(D+1)}} \Lambda^{(\mathrm{e})}_{p+1} \wedge B^{(\mathrm{m})}_{D-p} \end{aligned}$$

となるので，分配関数を

$$\widehat{Z}[B^{(\mathrm{e})}_{p+1},\, B^{(\mathrm{m})}_{D-p}] \coloneqq Z[B^{(\mathrm{e})}_{p+1},\, B^{(\mathrm{m})}_{D-p}] e^{(-1)^p \int_{\mathcal{N}^{(D+2)}} \widehat{A}[B^{(\mathrm{e})}_{p+1},\, B^{(\mathrm{m})}_{D-p}]}$$

と正則化すれば良い．

---

[a] この理論は ***p*-form electrodynamics** と呼ばれる．

[b] $\mathrm{B}^{\bullet}(\mathcal{M}^{(D+1)}) \coloneqq \mathrm{Im}\big(\mathrm{d} : \Omega^{\bullet-1}(\mathcal{M}^{(D+1)}) \longrightarrow \Omega^{\bullet}(\mathcal{M}^{(D+1)})\big)$ はバウンダリー．

3.4　Dijkgraaf-Witten 理論

離散的ゲージ理論[*25]として知られる Dijkgraaf-Witten 理論 [?] を導入する．

3.4.1　普遍束

G を Lie 群とする．

定義 3.12: ファイバー束の引き戻し

- 構造群 G を持つファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$
- 連続写像 $f\colon B_1 \longrightarrow B$

を与える．このとき

$$f^*(E) \coloneqq \left\{\, (b_1,\, u) \in B_1 \times E \,\middle|\, f(b_1) = \pi(u) \,\right\}$$

と定めることで得られるファイバー束 $F \hookrightarrow f^*(E) \xrightarrow{\mathrm{proj}_1} B_1$ のことを**引き戻し束** (pullback bundle) と呼ぶ（図式 3.1）．

$$\begin{tikzcd}
f^*(E) \arrow[r, "\mathrm{proj}_2"] \arrow[d, "\mathrm{proj}_1"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\
B_1 \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

図 3.1: 引き戻し束

ファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ が

- B の開被覆 $\left\{U_\alpha\right\}_{\alpha\in\Lambda}$
- 局所自明化 $\left\{\varphi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\approx} U_\alpha \times F\right\}_{\alpha\in\Lambda}$
- 変換関数 $\left\{t_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G\right\}_{\alpha\in\Lambda}$

を持つとき，引き戻し束 $F \hookrightarrow f^*(E) \xrightarrow{\mathrm{proj}_1} B_1$ の構造は

- B_1 の開被覆 $\left\{f^{-1}(U_\alpha)\right\}_{\alpha\in\Lambda}$
- 局所自明化 $\left\{\tilde{\varphi}_\alpha\colon f^{-1}(U_\alpha) \times \pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\approx} f^{-1}(U_\alpha) \times F,\ (b_1,\, u) \longmapsto \bigl(b_1,\, \mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\alpha(u)\bigr)\right\}_{\alpha\in\Lambda}$
- 変換関数 $\left\{\tilde{t}_{\alpha\beta}\colon f^{-1}(U_\alpha) \cap f^{-1}(U_\beta) \longrightarrow G,\ x \longmapsto t_{\alpha\beta}\bigl(f(x)\bigr)\right\}_{\alpha\in\Lambda}$

によって定まる．

[*25] ゲージ場は 1 形式である．

命題 3.1: 引き戻し束の同型

- 2 つのファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B,\ F \hookrightarrow E_1 \xrightarrow{\pi} B_1$
- 束写像 $(f\colon B_1 \longrightarrow B,\ \tilde{f}\colon E_1 \xrightarrow{\pi_1} E)$

を与える．このとき以下の図式を可換にする $w\colon E_1 \longrightarrow f^*(E)$ が一意的に存在し，E_1 と引き戻し束 $f^*(E)$ が束同型になる．

$$
\begin{tikzcd}
f^*(E) \arrow[rr, "\mathrm{proj}_2"] \arrow[dddr, "\mathrm{proj}_1"'] & & E \arrow[dd, "\pi"] \\
& E_1 \arrow[ul, dashed, "\exists ! w"'] \arrow[ur, "\tilde{f}"'] \arrow[dd, "\pi_1"] & \\
& & B \\
& B_1 \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
$$

証明

$$w\colon E_1 \longrightarrow f^*(E),\ u \longmapsto \bigl(\pi_1(u),\ \tilde{f}(u)\bigr)$$

と定義すると図式の緑色の部分が全て可換になり，束同型を与える．一意性は w の定義から明らか． ■

圏 **hoMfd** を，

- 多様体を対象とする
- 2 つの多様体 $X,\ Y$ の間のホモトピー集合 $[X, Y]$ を Hom 集合とする

ものとして定義する．

- $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{hoMfd})$ に対して集合

$$k_G(X) \coloneqq \{\, X \text{ 上の主束の束同型類} \,\}$$

  を，
- $\forall X,\ Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{hoMfd})$ の $\forall [f] \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{hoMfd}}(X,\ Y)$ に対して写像

$$k_G\bigl([f]\bigr)\colon k_G(Y) \longrightarrow k_G(X),\ [\xi] \longmapsto [f^*(\xi)]$$

  を

対応づける対応

$$k_G\colon \mathbf{hoMfd} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

は反変関手である [**?**, p.53, 10.1 Theorem].

定義 3.13: 普遍束

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} B$ が G の**普遍束** (universal bundle) であるとは，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{hoMfd})$ について定まる写像

$$\phi_P(X)\colon [X, B] \longrightarrow k_G(X),\ [f] \longmapsto [f^*P]$$

が全単射になること．

普遍束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} B$ において，B のことを G の**分類空間** (classifying space) と呼ぶ．

G の普遍束の全空間を $\boldsymbol{EG}$，分類空間を $\boldsymbol{BG}$ と書く慣習がある．

命題 3.2: 普遍束の特徴付け

主束 $G \hookrightarrow EG \xrightarrow{\pi_G} BG$ が G の普遍束であることは，以下の 2 つが満たされることと同値である：

(univ-1) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{hoMfd})$ および X を底空間にもつ任意の主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$ に対して，ある連続写像 $f\colon X \longrightarrow BG$ が存在して P と引き戻し束 $f^*(EG)$ が束同型になる．

(univ-2) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{hoMfd})$ および任意の連続写像 $f,\, g\colon X \longrightarrow BG$ に対して，$f^*(EG)$ と $g^*(EG)$ が束同型ならば $f,\, g$ はホモトピックである．

<u>証明</u> **(univ-1)** は写像 $\phi_{EG}(X)$ の全射性，**univ-2** は写像 $\phi_{EG}(X)$ の単射性を意味する． ■

命題 3.3: 普遍束の全空間の特徴付け

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} B$ が普遍束であるための必要十分条件は，$\forall n \geq 0$ に対して $\pi_n(EG) = 0$ を充たすことである．

<u>証明</u> [**?**, p.102, 19.4] ■

命題 3.4:

G が離散群ならば $BG = K(G,\, 1)$

<u>証明</u> 命題 3.3 より，ホモトピー長完全列から $\pi_n(BG) \cong \pi_{n-1}(G)$ が言える．離散群の場合は $\pi_0(G) = G$ かつ $\pi_{n>0}(G) = 0$ なので示された． ■

定義したは良いが，与えられた G に対してその普遍束が存在しなければ意味がないので，具体的に EG を構成しよう．

集合

$$EG_{\mathrm{M}} := \left\{ (t_0 g_0,\, t_1 g_1,\, \dots) \;\middle|\; t_i \in [0,\, 1],\ g_i \in G,\ \substack{\text{高々有限個の } i \text{ のみ } t_i \neq 0 \\ \text{かつ } \sum_{i \geq 0} t_i = 1} \right\}$$

を考える．$\langle g,\, t\rangle := (t_0 g_0,\, t_1 g_1,\, \dots)$ と書き，EG_{M} 上の等号を

$$\langle g,\, t\rangle = \langle g',\, t'\rangle \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \forall i \geq 0,\ t_i = t'_i \ \text{かつ}\ \forall i \geq 0,\ t_i = t'_i > 0 \quad \Longrightarrow \quad g_i = g'_i$$

と定義する．EG_{M} への G の自由な右作用を

$$\blacktriangleleft\colon EG_{\mathrm{M}} \times G \longrightarrow EG_{\mathrm{M}},\ \bigl((t_0 g_0,\, t_1 g_1,\, \dots),\, g\bigr) \longmapsto (t_0 g_0 g,\, t_1 g_1 g,\, \dots)$$

で定義する．EG_{M} には，$\forall i \geq 0$ について定まる写像

$$\begin{aligned} &t_i\colon EG_{\mathrm{M}} \longrightarrow [0,\, 1],\ (t_0 g_0,\, t_1 g_1,\, \dots) \longmapsto t_i, \\ &x_i\colon t_i^{-1}\bigl((0,\, 1]\bigr) \longrightarrow G,\ (t_0 g_0,\, t_1 g_1,\, \dots) \longmapsto x_i \end{aligned}$$

が連続になるような最小の位相を入れる．右作用 $\blacktriangleleft$ による EG_{M} の商位相空間を $BG_{\mathrm{M}} \coloneqq EG_{\mathrm{M}}/G$ とおく．

定理 3.5: Milnor 構成

任意の Lie 群 G について $G \hookrightarrow EG_{\mathrm{M}} \xrightarrow{p} BG_{\mathrm{M}}$ は[a]主束であり，普遍束でもある．

[a] $p\colon EG_{\mathrm{M}} \longrightarrow BG_{\mathrm{M}}$ は商写像．

証明 主束であること

$\forall i \geq 0$ に対して $U_i \coloneqq p\bigl(t_i^{-1}\bigl((0,\, 1]\bigr)\bigr)$ とおくと，開集合族 $\bigl\{U_i\bigr\}_{i \geq 0}$ は BG_{M} の開被覆になる[*26]．さらに，$\forall \langle g,\, t\rangle \in EG_{\mathrm{M}}$，$\forall h \in G$ に対して $t_i(\langle g,\, t\rangle \blacktriangleleft h) = t_i(\langle g,\, t\rangle)$ が成り立つので $p^{-1}(U_i) = t_i^{-1}\bigl((0,\, 1]\bigr)$ が言える[*27]．

次に，$\forall i \geq 0$ を 1 つ固定し，U_i 上の局所自明化を構成する．連続写像

$$\sigma_i\colon p^{-1}(U_i) \longrightarrow p^{-1}(U_i),\ \langle g,\, t\rangle \longmapsto \langle g,\, t\rangle \blacktriangleleft \bigl(g_i(\langle g,\, t\rangle)^{-1}\bigr)$$

を考える．$\forall h \in G$ に対して

$$\begin{aligned} \sigma_i\bigl(\langle g,\, t\rangle \blacktriangleleft h\bigr) &= \langle g,\, t\rangle \blacktriangleleft \bigl(h\, g_i(\langle g,\, t\rangle \blacktriangleleft h)^{-1}\bigr) \\ &= \langle g,\, t\rangle \blacktriangleleft \bigl(hh^{-1} g_i(\langle g,\, t\rangle)^{-1}\bigr) \\ &= \langle g,\, t\rangle \blacktriangleleft \bigl(g_i(\langle g,\, t\rangle)^{-1}\bigr) \\ &= \sigma_i\bigl(\langle g,\, t\rangle\bigr) \end{aligned}$$

が成り立つから，

$$s_i\colon U_i \longrightarrow p^{-1}(U_i),\ p(\langle g,\, t\rangle) \longmapsto \sigma_i(\langle g,\, t\rangle)$$

は well-defined な連続写像である．さらに $\forall p(\langle g,\, t\rangle) \in U_i$ に対して $p \circ s_i\bigl(p(\langle g,\, t\rangle)\bigr) = p \circ \sigma_i(\langle g,\, t\rangle) = p(\langle g,\, t\rangle)$ が成り立つので s_i は局所切断である．ここで

$$\varphi_i\colon p^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times G,\ s_i(x) \blacktriangleleft g \longmapsto (x,\, g)$$

[*26] U_i が BG_{M} の開集合であることは EG_{M} の位相の定義から明らか．$\forall \langle g,\, t\rangle \in EG_{\mathrm{M}}$ に対して，EG_{M} の定義から $\sum_{i \geq 0} t_i = 1$ なので $\exists i \geq 0,\ t_i \neq 0$ であり，$p(\langle g,\, t\rangle) \in U_i$ も言える．

[*27]

$$\begin{aligned} \langle g,\, t\rangle \in p^{-1}(U_i) \quad &\Longleftrightarrow \quad p(\langle g,\, t\rangle) \in U_i = p\bigl(t_i^{-1}\bigl((0,\, 1]\bigr)\bigr) \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists h \in G,\ \exists \langle g',\, t'\rangle \in t_i^{-1}\bigl((0,\, 1]\bigr),\ \langle g,\, t\rangle = \langle g',\, t'\rangle \blacktriangleleft h \\ &\Longrightarrow \quad t_i(\langle g,\, t\rangle) = t_i(\langle g',\, t'\rangle \blacktriangleleft h) = t_i(\langle g',\, t'\rangle) \in (0,\, 1] \\ &\Longleftrightarrow \quad \langle g,\, t\rangle \in t_i^{-1}\bigl((0,\, 1]\bigr) \end{aligned}$$

逆の包含は明らか．

と定義すると，φ_i は well-defined な同相写像になっている[*28] ので U_i 上の局所自明化である．別の $j \geq 0$ をとると，$\forall p(\langle g,\, t\rangle) \in p^{-1}(U_i \cap U_j),\ \forall h \in G$ に対して

$$\begin{aligned}\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}\bigl(p(\langle g,\, t\rangle),\, h\bigr) &= \varphi_i\bigl(\sigma_j(\langle g,\, t\rangle) \blacktriangleleft h\bigr) \\ &= \varphi_i\Bigl(\sigma_i(\langle g,\, t\rangle) \blacktriangleleft \bigl(g_i(\langle g,\, t\rangle)g_j(\langle g,\, t\rangle)^{-1}h\bigr)\Bigr) \\ &= \bigl(p(\langle g,\, t\rangle),\, g_i(\langle g,\, t\rangle)g_j(\langle g,\, t\rangle)^{-1}h\bigr)\end{aligned}$$

が成り立つので，変換関数は

$$t_{ij} \colon U_i \cap U_j \longrightarrow G,\ p(\langle g,\, t\rangle) \longmapsto g_i(\langle g,\, t\rangle)g_j(\langle g,\, t\rangle)^{-1}$$

だと分かった[*29]．

最後に EG_{M} が第 2 可算な Hausdorff 空間であることを示さないといけないが，技術的なのでここでは省略する．詳細は [?, p.55, 11.2 Theorem] を参照．

普遍束であること

主束 $G \hookrightarrow EG_{\mathrm{M}} \xrightarrow{p} BG_{\mathrm{M}}$ が命題 3.2 の条件 **(univ-1)**, **(univ-2)** を充していることを示す．

(univ-1)　勝手な多様体 X を 1 つ固定する．

- X を底空間に持つ任意の主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$
- P の開被覆 $\mathcal{U} \coloneqq \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ と局所自明化 $\{\varphi_\alpha \colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G\}_{\alpha\in\Lambda}$
- $\mathcal{U}$ に従属する 1 の分割 $\{v_\alpha \colon X \longrightarrow [0,\, 1]\}_{\alpha\in\Lambda}$

を与える．1 の分割の定義から，$\forall x \in X$ に対して，$\mathcal{U}$ の添字集合 Λ の部分集合

$$S(x) \coloneqq \bigl\{\, i \in \Lambda \bigm| \operatorname{supp} v_i \cap \{x\} \neq \emptyset \,\bigr\}$$

は有限集合である．また，Λ の任意の<u>有限</u>部分集合 $I \subset \Lambda$ に対して X の部分集合

$$W(I) \coloneqq \bigl\{\, x \in X \bigm| \forall i \in I,\ \forall \alpha \in \Lambda \setminus I,\ v_i(x) > v_\alpha(x) \,\bigr\}$$

および連続関数

$$u_I \colon X \longrightarrow [0,\, 1],\ x \longmapsto \max\Bigl\{0,\ \min_{i\in I,\, \alpha\in\Lambda\setminus I}\bigl\{v_i(x) - v_\alpha(x)\bigr\}\Bigr\}$$

を考える．$W(I) = u_I\bigl((0,\, 1]\bigr)$ なので $W(I)$ は X の開集合である．このとき，互いに異なる Λ の任意の有限部分集合 $I,\, J \underset{\text{finite}}{\subset} \Lambda$ に対して，$\#I = \#J$ ならば $W(I) \cap W(J) = \emptyset$ になる[*30]．よっ

---

*28 $\forall \langle g,\, t\rangle \in p^{-1}(U_i)$ を与える．このとき $s_i\bigl(p(\langle g,\, t\rangle)\bigr) = \langle g,\, t\rangle \blacktriangleleft \bigl(g_i(\langle g,\, t\rangle)^{-1}\bigr)$ なので $\langle g,\, t\rangle = s_i\bigl(p(\langle g,\, t\rangle)\bigr) \blacktriangleleft g_i(\langle g,\, t\rangle)$ であり，G の右作用 $\blacktriangleleft$ は自由なのでこのような分解は一意である．よって $\varphi_i(\langle g,\, t\rangle) = \bigl(p(\langle g,\, t\rangle),\, g_i(\langle g,\, t\rangle)\bigr)$ であり，φ_i が well-defined な全単射だとわかった．同相写像であることは，連続写像の合成として書けているので明らか．

*29 $g_i(\langle g,\, t\rangle \blacktriangleleft h) = g_i(\langle g,\, t\rangle)h$ なので，t_{ij} は well-defined である．

*30 $i \in I \setminus J,\ j \in J \setminus I$ をとる．このとき $\forall x \in W(I)$ に対して $v_i(x) > v_j(x)$ が成り立ち，かつ $\forall y \in W(J)$ に対して $v_j(y) > v_i(y)$ が成り立つので，$W(I) \cap W(J) = \emptyset$ でないといけない．

て，$\forall m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$
W_m \coloneqq \bigcup_{\substack{I \underset{\text{finite}}{\subset} \Lambda, \\ \#I=m}} W(I),
$$

$$
u_m \colon X \longrightarrow [0,\, 1],\ x \longmapsto \frac{\displaystyle\sum_{\substack{I \underset{\text{finite}}{\subset} \Lambda, \\ \#I=m}} u_I(x)}{\displaystyle\sum_{n\geq 0} \sum_{\substack{I \underset{\text{finite}}{\subset} \Lambda, \\ \#I=n}} u_I(x)}
$$

と定義すると，u_m は連続関数なので $W_m = u_m^{-1}\bigl((0,\, 1]\bigr)$ は X の開集合であり，

- X の開被覆 $\mathcal{W} \coloneqq \bigl\{W_m\bigr\}_{m\geq 0}$
- $\mathcal{W}$ に従属する 1 の分割 $\bigl\{u_m \colon X \longrightarrow [0,\, 1]\bigr\}_{m\geq 0}$

が得られた．特に W_m は $W(I)$ の非交和であり，$P|_{W(I)}$ は定義から自明束と同型なので[*31] $P|_{W_m}$ は自明束と同型である．この束同型写像を $h_m \colon \pi^{-1}(W_m) \xrightarrow{\approx} W_m \times G$ とおく．

今，連続写像

$$
\tilde{f} \colon P \longrightarrow EG_{\mathrm{M}},\ u \longmapsto \Bigl(\bigl(u_0 \circ \pi(u)\bigr)\bigl(\mathrm{proj}_2 \circ h_0(u)\bigr),\, \dots,\, \bigl(u_m \circ \pi(u)\bigr)\bigl(\mathrm{proj}_2 \circ h_m(u)\bigr),\, \dots\Bigr)
$$

を考える．$u \notin \pi^{-1}(W_m)$ のときは 1 の分割の定義から $u_m \circ \pi(u) = 0$ となるのでこの写像は well-defined であり，$\forall g \in G$ に対して[*32]

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}(u \blacktriangleleft g) &= \Bigl(\bigl(u_0 \circ \pi(u \blacktriangleleft g)\bigr)\bigl(\mathrm{proj}_2 \circ h_0(u \blacktriangleleft g)\bigr),\, \dots,\, \bigl(u_m \circ \pi(u)\bigr)\bigl(\mathrm{proj}_2 \circ h_m(u \blacktriangleleft g)\bigr),\, \dots\Bigr) \\
&= \Bigl(\bigl(u_0 \circ \pi(u)\bigr)\bigl(\mathrm{proj}_2 \circ h_0(u)\bigr)g,\, \dots,\, \bigl(u_m \circ \pi(u)\bigr)\bigl(\mathrm{proj}_2 \circ h_m(u)\bigr)g,\, \dots\Bigr) \\
&= \tilde{f}(u) \blacktriangleleft g
\end{aligned}
$$

が成り立つ．このとき連続写像

$$
f \colon X \longrightarrow BG_{\mathrm{M}},\ \pi(u) \longmapsto p\bigl(\tilde{f}(u)\bigr)
$$

は well-defined であり，図式

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\pi"'] & EG_{\mathrm{M}} \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "f"'] & BG_{\mathrm{M}}
\end{tikzcd}
$$

を可換にする．i.e. 組 $(f,\, \tilde{f})$ は束写像である．よって命題 3.1 より P と $f^*(EG_{\mathrm{M}})$ が束同型だと分かった．

(univ-2)

■

[*31] $W(I) \subset \bigcap_{i\in I} v_i^{-1}\bigl((0,\, 1]\bigr) \subset \bigcap_{i\in I} U_i$ なので．

[*32] $u \blacktriangleleft g$ は命題**??**で与えた G の P への右作用である．

3.4.2 群コホモロジー

先に進む前に，特異ホモロジー・コホモロジーについて復習する．R を単項イデアル整域，M を R-加群とする．

- R-係数特異ホモロジーとは，関手

$$H_k(\text{-};\, R)\colon \mathbf{Top} \xrightarrow{S_\bullet(\text{-};\,\mathbb{Z})} \mathbf{Chain} \xrightarrow{H_k} R\text{-}\mathbf{Mod}$$

　のこと．

- M-係数特異ホモロジーとは，関手

$$H_k(\text{-};\, M)\colon \mathbf{Top} \xrightarrow{S_\bullet(\text{-};\,\mathbb{Z})} \mathbf{Chain} \xrightarrow{\otimes_R M} \mathbf{Chain} \xrightarrow{H_k} R\text{-}\mathbf{Mod}$$

　のこと．

- 任意の位相空間 X に対して，$H_\bullet(X;\, R)$ と $H_\bullet(X;\, M)$ は普遍係数定理

$$0 \longrightarrow H_k(X;\, R) \otimes_R M \longrightarrow H_k(X;\, M) \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^R\bigl(H_{k-1}(X;\, R),\, M\bigr) \longrightarrow 0 \quad \text{(exact)}$$

　によって互いに関係する．

特に，特異ホモロジーの場合は構成から $\forall k \in \mathbb{Z}$ に対して $S_k(X;\, R)$ が自由加群なのでこの短完全列は分裂し

$$H_k(X;\, M) \cong \bigl(H_k(X;\, R) \otimes_R M\bigr) \oplus \operatorname{Tor}_1^R\bigl(H_{k-1}(X;\, R),\, M\bigr)$$

が言える．

- R-係数特異コホモロジーとは，関手

$$H^k(\text{-};\, R)\colon \mathbf{Top} \xrightarrow{S_\bullet(\text{-};\,\mathbb{Z})} \mathbf{Chain} \xrightarrow{\operatorname{Hom}_R(\text{-};\, R)} \mathbf{Chain}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{H^k} R\text{-}\mathbf{Mod}$$

　のこと．

- M-係数特異コホモロジーとは，関手

$$H^k(\text{-};\, M)\colon \mathbf{Top} \xrightarrow{S_\bullet(\text{-};\,\mathbb{Z})} \mathbf{Chain} \xrightarrow{\operatorname{Hom}_R(\text{-};\, R)} \mathbf{Chain} \xrightarrow{\otimes_R M} \mathbf{Chain}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{H^k} R\text{-}\mathbf{Mod}$$

　のこと．

- 任意の位相空間 X に対して，$H^\bullet(X;\, R)$ と $H^\bullet(X;\, M)$ は普遍係数定理

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^1\bigl(H_{k-1}(X;\, R),\, M\bigr) \longrightarrow H^k(X;\, M) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R\bigl(H_k(X;\, R),\, M\bigr) \longrightarrow 0 \quad \text{(exact)}$$

　によって互いに関係する．

特に，特異コホモロジーの場合は構成から $\forall k \in \mathbb{Z}$ に対して $\operatorname{Hom}_R\bigl(S_k(X;\, R);\, R\bigr)$ が自由加群なのでこの短完全列は分裂し

$$H^k(X;\, M) \cong \operatorname{Hom}_R\bigl(H_k(X;\, R),\, M\bigr) \oplus \operatorname{Ext}_R^1\bigl(H_{k-1}(X;\, R),\, M\bigr)$$

が言える．

公理 3.2: G 加群

可換群 $(M, +)$ と，群 G の M への左作用

$$\blacktriangleright\colon G \times M \longrightarrow M$$

の組み $(M, +, \blacktriangleright)$ であって，$\forall g, h \in G$, $\forall x, y \in M$ に対して以下の条件を充たすものを**左 G 加群**と呼ぶ：

(G-mod1) $g \blacktriangleright (x+y) = g \blacktriangleright x + g \blacktriangleright y$

(G-mod2) $(gh) \blacktriangleright x = g \blacktriangleright (h \blacktriangleright x)$

(G-mod3) $1_G \blacktriangleright x = x$

右 G 加群も同様に定義する．

$\mathbb{Z}$ 係数の G の**群環**とは，可換群 $\mathbb{Z}^{\oplus G}$ に積

$$(a_g)_g \cdot (b_g)_g := \left(\sum_{hk=g} a_h b_k\right)_g$$

を定義してできる環 $(\mathbb{Z}^{\oplus G}, +, \cdot\,)$ のこと．記号として $\mathbb{Z}[G]$ と書く．左 G 加群と左 $\mathbb{Z}[G]$ 加群は同一視できる．

$$\epsilon\colon \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z},\ (a_g)_g \longmapsto \sum_{g\in G} a_g$$

を **augmentation** と呼ぶ．

定義 3.14: 群コホモロジー（代数的）

左 G 加群 M を与える．$\mathbb{Z}$ を自明な作用により左 G 加群と見做す．

- **群 G の M-係数ホモロジー**とは，

$$H_{\mathrm{Grp}\,k}(G;\, M) := \mathrm{Tor}_k^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},\, M)$$

のこと．

- **群 G の M-係数コホモロジー**とは，

$$H^k_{\mathrm{Grp}}(G;\, M) := \mathrm{Ext}^k_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},\, M)$$

のこと．

右導来関手の一般論から，任意の G 加群の短完全列 $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ (exact) に対応する長完全列

$$\begin{aligned}\cdots &\longrightarrow H^k_{\mathrm{Grp}}(G,\, M_1) \longrightarrow H^k_{\mathrm{Grp}}(G,\, M_2) \longrightarrow H^k_{\mathrm{Grp}}(G,\, M_3)\\ &\longrightarrow H^{k+1}_{\mathrm{Grp}}(G,\, M_1) \longrightarrow H^{k+1}_{\mathrm{Grp}}(G,\, M_2) \longrightarrow H^{k+1}_{\mathrm{Grp}}(G,\, M_3)\\ &\longrightarrow \cdots\end{aligned} \tag{3.4.1}$$

が成り立つ．

定理 3.6: 群コホモロジー（位相空間論的）

任意の群 G および G 加群 M に対して

$$H^{\bullet}(BG;\, M) \cong H^{\bullet}_{\mathrm{Grp}}(G;\, M)$$

が成り立つ．

証明 ■

いくつかの実用上有用な命題を紹介する：

命題 3.5: 色々な群コホモロジー

(1) 任意の有限群に対して

$$H^{k>0}_{\mathrm{Grp}}(G;\, \mathbb{R}) = 0$$

(2) 任意のコンパクト Lie 群に対して

$$H^{2k+1}_{\mathrm{Grp}}(G;\, \mathbb{R}) = 0$$

(3) 任意の Lie 群に対して

$$H^{2k}_{\mathrm{Grp}}(G;\, \mathbb{R}) \cong \mathrm{Inv}(\mathfrak{g})$$

証明 (1)

■

群 G が有限群のとき，命題 3.5-(1) と群コホモロジーの長完全列 (3.4.1) により短完全列 $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathrm{U}(1) \longrightarrow 0$ から同型

$$H^{k}_{\mathrm{Grp}}(G;\, \mathbb{Z}) \cong H^{k-1}_{\mathrm{Grp}}(G;\, \mathrm{U}(1))$$

がわかる．

3.4.3 関手としての接続

$d = D + 1$ 次元時空 $\mathcal{M}^{(d)}$ を考える．圏 $\mathbf{P}_1\left(\mathcal{M}^{(d)}\right)$ を[*33]，

- $\mathcal{M}^{(d)}$ の点を対象とする．
- $\mathrm{Hom}_{\mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)})}(x,\, y) \coloneqq \left\{\, \sigma\colon [0,\, 1] \longrightarrow \mathcal{M}^{(d)} \;\middle|\; \sigma(0) = x,\, \sigma(1) = y \,\right\}$

によって定義する．

[*33] これは groupoid を成し，**path groupoid** と呼ばれる（`https://ncatlab.org/nlab/show/path+groupoid`）．

命題 3.6: 関手としての接続

- $\mathcal{M}^{(d)}$ 上の主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}^{(d)}$
- P の同伴ベクトル束 $V \hookrightarrow E \xrightarrow{q} \mathcal{M}^{(d)}$

を与える．このとき，任意の P の接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$ に対して

(1) $\forall x \in \mathrm{Ob}(\mathbf{P}_1\left(\mathcal{M}^{(d)}\right))$ に対して $\Gamma_\omega(x) := q^{-1}(\{x\})$

(2) $\forall x,\, y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{P}_1\left(\mathcal{M}^{(d)}\right))$, $\forall \sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}_1\left(\mathcal{M}^{(d)}\right)}(x,\, y)$ に対して[a] $\Gamma_\omega(\sigma) := \bigl(u =: \tilde{\sigma}(0) \longmapsto \tilde{\sigma}(1)\bigr)$

と定義される対応

$$\Gamma_\omega \colon \mathbf{P}_1\left(\mathcal{M}^{(d)}\right) \longrightarrow \mathbf{Vect}$$

は関手である．

[a] $\Phi_u(\sigma) \in G$ はループ σ のホロノミー．

逆に，関手

$$\Gamma \colon \mathbf{P}_1\left(\mathcal{M}^{(d)}\right) \longrightarrow \mathbf{Vect}$$

であって以下の条件を充たすものは P の接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$ を与える：

(1) 任意の単調増加関数 $f \colon [0,\, 1] \longrightarrow [0,\, 1]$ および $\forall \sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}_1\left(\mathcal{M}^{(d)}\right)}(x,\, y)$ に対して

$$\Gamma(\sigma) = \Gamma(\sigma \circ f)$$

(2) 任意の単調減少関数 $f \colon [0,\, 1] \longrightarrow [0,\, 1]$ および $\forall \sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}_1\left(\mathcal{M}^{(d)}\right)}(x,\, y)$ に対して

$$\Gamma(\sigma) = \Gamma(\sigma \circ f)$$

(3) Γ は σ について適切な C^∞ 性を充たす．

証明 前半は命題**??**より明らか．後半は [**?**]，[**?**] を参照 ■

大域的切断 $s \colon \mathcal{M}^{(d)} \longrightarrow P$ を許容する主束 P およびその接続 $\omega \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$ を与え，2 点 $x,\, y \in \mathcal{M}^{(d)}$ を繋ぐ曲線 $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}_1\left(\mathcal{M}^{(d)}\right)}(x,\, y)$ であって，その水平持ち上げ $\tilde{\sigma}$ が $\tilde{\sigma}(0) = s(x)$ を充たすものをとる．するとこのとき $\tilde{\sigma}(1) = s(y) \blacktriangleleft g_\sigma$ を充たす $g_\sigma \in G$ が一意に定まる．さらに 2 点 $y,\, z \in \mathcal{M}^{(d)}$ を繋ぐ曲線 $\sigma' \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}_1\left(\mathcal{M}^{(d)}\right)}(y,\, z)$ であって，その水平持ち上げ $\tilde{\sigma'}$ が $\tilde{\sigma'}(0) = s(y)$ を充たすものをとると，水平持ち上げの一意性から $(\sigma' \tilde{*} \sigma)(1) = s(z) \blacktriangleleft g_\sigma g_{\sigma'}$ が成り立つ．従って，P が自明束ならば命題 3.6 の関手 $\Gamma_\omega \colon \mathbf{P}_1\left(\mathcal{M}^{(d)}\right) \longrightarrow \mathbf{Vect}$ は関手

$$\Gamma_\omega \colon \mathbf{P}_1\left(\mathcal{M}^{(d)}\right) \longrightarrow \boldsymbol{G}$$

と見做せる．ただし $\boldsymbol{G}$ は

- G のみを対象に持つ

- G の元を射に持つ

ことで構成される圏である．自明束 P におけるゲージ変換とは，大域的切断の取り替えに伴う変換関数によって特徴付けられる．変換関数は，大域的切断 $s_1,\, s_2 \colon M \longrightarrow P$ に対して $s_1(x) = s_2(x) \blacktriangleleft g_{12}(x)$ と定義することで定まる $g_{12} \colon M \longrightarrow G$ のことであり，$\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)})}(x,\, y)$ に対して

$$\Gamma_\omega(\sigma) \longmapsto \Gamma'_\omega(\sigma) = g_{12}(y)^{-1}\Gamma_\omega(\sigma)g_{12}(x) \tag{3.4.2}$$

なる変換を引き起こす[*34]．i.e. 変換関数 $g_{12} \colon M \longrightarrow P$ は，自然変換

$$\begin{tikzcd} \mathbf{P}_1\left(\mathcal{M}^{(d)}\right) \arrow[r, bend left=50, "\Gamma_\omega"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "\Gamma'_\omega"'{name=D}] & \boldsymbol{G} \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "g_{12}"] \end{tikzcd}$$

である．

定義 3.15: 平坦接続

$\mathcal{M}^{(d)}$ 上の主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}^{(d)}$ を与える．このとき P の関手としての接続

$$\Gamma \colon \mathbf{P}_1\left(\mathcal{M}^{(d)}\right) \longrightarrow \mathbf{Vect}$$

が**平坦接続** (flat connection) であるとは，互いにホモトピックな任意の $\sigma,\, \sigma' \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)})}$ に対して

$$\Gamma(\sigma) = \Gamma(\sigma')$$

が成り立つことを言う．

これまでの議論から，連結な $\mathcal{M}^{(d)}$ 上の平坦接続のモジュライ空間は

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}\left(\pi_1(\mathcal{M}^{(d)}),\, G\right)/G \tag{3.4.3}$$

であることが分かった．ただし G 作用 $g \longmapsto g^{-1}(\text{-})g$ によって商をとり，ゲージ変換 (3.4.2) の冗長性を排除した．

3.4.4 トポロジカルなゲージ理論：Lie 群の場合

時空が $2+1$ 次元の連結な閉多様体 $\mathcal{M}^{(3)}$ であるとする．Lie 群 G がコンパクトかつ単連結ならば，$\mathcal{M}^{(3)}$ 上の任意の主束は自明束と同型になり，Chern-Simons 作用

$$S[A] \coloneqq \frac{k}{8\pi^2}\int_{\mathcal{M}^{(3)}} \mathrm{Tr}\left(A \wedge A + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A\right)$$

は well-defined である．しかし，G が一般のコンパクト Lie 群である場合にはそう上手くいかない．

[*34] $\tilde{\sigma}(0) = s_1(x)$ とする．このとき $\tilde{\sigma} \blacktriangleleft g_{12}(x)$ は $s_2(x) = s_1(x) \blacktriangleleft g_{12}(x)$ を始点とする σ の水平持ち上げであるから，$s_2(y) \blacktriangleleft \Gamma'_\omega(\sigma) = \tilde{\sigma}(1) \blacktriangleleft g_{12}(x) = s_1(y) \blacktriangleleft \Gamma_\omega(\sigma) \blacktriangleleft g_{12}(x) = s_2(y) \blacktriangleleft \left(g_{12}(y)^{-1}\Gamma_\omega(\sigma)g_{12}(x)\right)$

これを解決する方法としては，$\mathcal{M}^{(3)}$ を境界に持つ 4 次元多様体 $\mathcal{N}^{(4)}$ を持ってきて，

$$S[A] \coloneqq \int_{\mathcal{N}^{(4)}} \Omega(F) = \frac{k}{8\pi^2} \int_{\mathcal{N}^{(4)}} \mathrm{Tr}\big[F \wedge F\big]$$

と定義することが考えられる．この $S[A]$ は Chern 指標[*35]の積分なので整数値を取り，トポロジカルなゲージ場の理論になっている．4 次元多様体への拡張は一意ではないので作用は　mod 1 の不定性を持つが，分配関数は well-defined になる．しかし，この構成が可能であるためには任意の $\mathcal{M}^{(3)}$ 上の主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}^{(3)}$ に対して，$\mathcal{N}^{(4)}$ 上の主束 $G \hookrightarrow P' \xrightarrow{\pi'} \mathcal{N}^{(4)}$ であって，$\partial\mathcal{N}^{(4)} = \mathcal{M}^{(3)}$ への制限 $P'|_{\partial\mathcal{N}^{(4)}} = P$ を充たすようなものが存在しなくてはいけない．この拡張の障害となるのが，分類写像 $\gamma\colon \mathcal{M}^{(3)} \longrightarrow BG$ の誘導準同型による $\mathcal{M}^{(3)}$ の基本類 $[\mathcal{M}^{(3)}] \in H_3(\mathcal{M}^{(3)};\,\mathbb{Z})$ の像 $\gamma_*[\mathcal{M}^{(3)}] \in H_3(BG;\,\mathbb{Z})$ である[*36]．もし $\gamma_*[\mathcal{M}^{(3)}] = 0$ なら拡張が可能だが，そうでないときは不可能ということになる．しかしながら，命題 3.5-(2) よりコンパクト Lie 群の奇数次のホモロジーは捻れ元 (torsion element) のみから成るので，ある $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して

$$n \cdot \gamma_*[\mathcal{M}^{(3)}] = 0$$

を充たす．よって素朴には

$$S[A] \coloneqq \frac{1}{n} \int_{\mathcal{N}^{(4)}} \Omega(F)$$

と修正すれば良いように思えるが，このままだと分配関数に $e^{2i\pi m/n}$ の不定性が残り理論が well-defined でない．この不定性を排除するためには，$\Omega(F) \in H^4_{\mathrm{dR}}\left(\mathcal{M}^{(3)}\right) \cong H^4_{\mathrm{dR}}\left(BG\right) \cong H^4(BG;\,\mathbb{R})$ だが $\Omega(F)$ は特性類なので，自然な単射 $H^4(BG,\,\mathbb{Z}) \hookrightarrow H^4(BG;\,\mathbb{R})$ を使って $\Omega(F) \cong \rho([\omega])$ と書けるような $[\omega] \in H^4(BG,\,\mathbb{Z})$ が存在することを使い

$$S[A] \coloneqq \frac{1}{n} \left(\int_{\mathcal{N}^{(4)}} \Omega(F) - \left\langle \gamma^*\omega,\, \mathcal{N}^{(4)} \right\rangle \right)$$

とすれば良い．というのも，de Rham の定理からそもそも

$$\int_{\mathcal{N}^{(4)}} \Omega(F) = \left\langle \gamma^*\omega,\, \mathcal{N}^{(4)} \right\rangle$$

であり，$[\omega]$ の別の代表元 η をとってきたとすると，その差分は $\epsilon \in C^3(BG;\,\mathbb{Z})$ を使って

$$\frac{1}{n} \left\langle \gamma^*\delta^4\epsilon,\, \mathcal{N}^{(4)} \right\rangle = \frac{1}{n} \left\langle \epsilon,\, \gamma_*\partial\mathcal{N}^{(4)} \right\rangle = \left\langle \epsilon,\, \gamma_*[\mathcal{M}^{(3)}] \right\rangle \in \mathbb{Z}$$

になるのである．

もしくは，**Cheegar Simons differential character** [?] $\alpha \in \widehat{H}^3\big(BG,\, \mathrm{U}(1)\big)$ を使って

$$S[A] = \left\langle \gamma^*\alpha_A,\, [\mathcal{M}^{(3)}] \right\rangle$$

と書くこともできる．

[*35] Chern-Weil の定理からこれは大域的に well-deifned である．

[*36] 厳密にはボルディズム群を考えなくてはいけない．

3.4.5 トポロジカルなゲージ理論：有限群の場合

ここからは d 次元の連結な時空 $\mathcal{M}^{(d)}$ を考える．ゲージ群 G が有限群[*37]の場合，主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}^{(d)}$ の接続は一意に決まる[*38]．さらにこの主束は被覆空間になるので，$\forall \sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)})}(x,\, x)$ は x のファイバー内の点 $u \in \pi^{-1}(\{x\})$ について一意的に $\tilde{\sigma} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)})}(u,\, \tilde{\sigma}(1))$ へ持ち上がり，$\tilde{\sigma}(1) =: \tilde{\gamma}(0) \blacktriangleleft \gamma_P(\sigma)$ を定める．$\mathcal{M}^{(d)}$ のホモトピーもまた P 上に持ち上がり，結果として群準同型 $\gamma_P \colon \pi_1(\mathcal{M}^{(d)}) \longrightarrow G$ が定まる．始点 $u \in \pi^{-1}(\{x\})$ を $u \blacktriangleleft h$ に取り替えることは $\gamma_P(\sigma) \longmapsto h^{-1}\gamma_P(\sigma)h$ の変換を引き起こす．ここから

$$\left[\mathcal{M}^{(d)}, BG\right] \xleftrightarrow{1:1} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}\left(\pi_1(\mathcal{M}^{(d)}),\, G\right)/G$$

を示すことができる [?, p.4]．(3.4.3) と比較すると，結局

$$\left\{\, \mathcal{M}^{(d)} \text{ 上の主束の同型類} \,\right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{\, \mathcal{M}^{(d)} \text{ 上の平坦接続全体の集合} \,\right\}$$

であることが分かった．

定義 3.16: Dijkgraaf-Witten 理論

Dijkgraaf-Witten 理論を

$$Z(\mathcal{M}^{(d)}) =: \frac{1}{\#G} \sum_{\gamma \in [\mathcal{M}^{(d)}, BG]} e^{2\pi \mathrm{i} S[\gamma]} \quad \text{w/} \quad S[\gamma] := \left\langle \gamma^* \alpha,\, [\mathcal{M}^{(d)}] \right\rangle \tag{3.4.4}$$

と定義する．ここに $\alpha \in H^d(BG;\, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ である．

このままだと実用上不便なので，計算しやすい形に書きかえよう．$H^k(BG;\, \mathrm{U}(1)) \cong H^k_{\mathrm{Grp}}(G;\, \mathrm{U}(1))$ であるから，結局群コホモロジーを具体的に計算することになる．

M を G 加群とする．Milnor 構成を思い出すと，群コホモロジーのコチェイン $C^k(G;\, M)$ を

$$C^k_{\mathrm{Grp}}(G;\, M) := \left\{\, \omega \colon G^{n+1} \longrightarrow M \;\middle|\; \forall g \in G,\, \forall g_0,\, \dots,\, g_n \in G,\, \omega(g_0,\, \dots,\, g_n) = \omega(gg_0,\, \dots,\, gg_n) \,\right\}$$

で定義し，余境界写像 $\delta^{k+1} \colon H^k_{\mathrm{Grp}}(G;\, M) \longrightarrow H^{k+1}_{\mathrm{Grp}}(G;\, M)$ を特異コホモロジーからのアナロジーで

$$(\delta^{k+1}\omega)(g_0,\, \dots,\, g_{n+1}) := \prod_{j=0}^{n+1} \omega(g_0,\, \dots,\, \widehat{g_j},\, \dots,\, g_{n+1})^{(-1)^j}$$

と定義してみる[*39]．すると $\delta^2 = 0$ が確認できるので系列

$$\cdots \xrightarrow{\delta^k} C^k_{\mathrm{Grp}}(G;\, M) \xrightarrow{\delta^{k+1}} C^{k+1}_{\mathrm{Grp}}(G;\, M) \xrightarrow{\delta^{k+2}} \cdots$$

はコチェイン複体を成す．この複体のコホモロジー類をとることで $H^k_{\mathrm{Grp}}(G;\, M)$ が得られる[*40]．コチェインを別の表示で書くこともできる：

$$\alpha(g_1,\, \dots,\, g_n) := \omega(1,\, g_1,\, g_1g_2,\, \dots,\, g_1 \cdots g_n)$$

[*37] 離散位相を入れて位相群と見做す．
[*38] 直観的には，ファイバー方向の接空間，i.e. 垂直部分空間が 0 次元になると考える．
[*39] 群 G の演算は乗法的な表記を採用した．
[*40] 群コホモロジーの定義からこの表式を得ることもできるが，$\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}[G]$ 加群としての射影的分解を構成するのが少し手間である．

このとき，余境界写像は

$$(\delta^{n+1}\alpha)(g_1,\ldots,g_{n+1}) = \alpha(g_2,\ldots,g_{n+1})\prod_{j=1}^{n}\alpha(g_1,\ldots,g_{j-1},g_jg_{j+1},g_{j+2},\ldots,g_{n+1})^{(-1)^j}\alpha(g_1,\ldots,g_n)^{(-1)^{n+1}}$$

と作用する．

群コホモロジーの表式を使って分配関数を計算するには，まず $\mathcal{M}^{(d)}$ の三角形分割 $|\mathcal{T}| \longrightarrow \mathcal{M}^{(d)}$ をとる．

定義 3.17: 単体圏

- $\forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して，全順序付集合 $[\boldsymbol{n}] := \{0, 1, \ldots, n\}$ のことを ***n*-単体** (n-simplex) と呼ぶ．
- **単体圏** (simplex category) Δ とは，
  - $\forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して，n-単体 $[n]$ を対象とする．
  - 順序を保つ写像を射とする

  圏のこと．

特に $\mathrm{Hom}_{\Delta}([n-1], [n])$ の元のうち

$$d_i\colon [n-1] \hookrightarrow [n],\ x \longmapsto \begin{cases} x, & x < i \\ x+1 & x \geq i \end{cases} \quad \text{w/} \quad i = 0, \ldots, n$$

のことを**面写像** (face map) と呼び，$\mathrm{Hom}_{\Delta}([n+1], [n])$ の元のうち

$$s_i\colon [n+1] \twoheadrightarrow [n],\ x \longmapsto \begin{cases} x, & x \leq i \\ x-1 & x > i \end{cases} \quad \text{w/} \quad i = 0, \ldots, n$$

のことを**縮退写像** (degeneracy map) と呼ぶ．

定義 3.18: 単体的集合

単体的集合 (simplicial set) とは，関手

$$K\colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

のこと．

$K_n := K([n])$ とおき，$\partial_i := K(d_i)\colon K_n \twoheadrightarrow K_{n-1}$ のことを**面写像**，$\sigma_i := K(s_i)\colon K_n \hookrightarrow K_{n+1}$ のことを**縮退写像**と呼ぶ．これらは以下の**単体的恒等式** (simplicial identities) を充たす：

$$\begin{aligned}
\partial_i \circ \partial_i &= \partial_{j-1} \circ \partial_i && (i < j), \\
\partial_i \circ \sigma_j &= \sigma_{j-1} \circ \partial_i && (i < j), \\
\partial_i \circ \sigma_i &= \mathrm{id} && (0 \leq i \leq n), \\
\partial_{i+1} \circ \sigma_i &= \mathrm{id} && (0 \leq i \leq n), \\
\partial_i \circ \sigma_j &= \sigma_j \circ \partial_{i-1} && (i > j+1), \\
\sigma_i \circ \sigma_j &= \sigma_{j+1} \circ \sigma_i && (i \leq j)
\end{aligned}$$

簡単のため $d=3$ とする．$\mathcal{M}^{(3)}$ は連結だとしていたので，BG の基点 $\mathrm{pt}\in BG$ を 1 つ固定することで，分類写像 $\gamma\colon M \longrightarrow BG$ をホモトピックに変形して，任意の 0 単体 $\sigma_0\in\mathcal{T}$ を $\gamma[\sigma_0]=\mathrm{pt}$ に写すようにできる．すると，任意の 1 単体 $\sigma_1\in\mathcal{T}$ は $\gamma(\sigma_1)\in\pi_1(BG,\,\mathrm{pt})$ と見做すことができるが，命題 3.4 より $\pi_1(BG,\,\mathrm{pt})\cong G$ であるから，結局分類写像 γ によって $\forall\sigma_1\in\mathcal{T}$ と何かしらの $g_{\sigma_1}\in G$ が対応付く．この g_{σ_1} は格子ゲージ理論におけるリンク変数（i.e. ゲージ場）と見做すと分かりやすい．しかるに，G が有限群であることから主束の接続は平坦でなくてはいけない．そのため，もし $\sigma_1^{(1)},\,\sigma_1^{(2)},\,\sigma_1^{(3)}\in\mathcal{T}$ がある 2 単体 σ_2 について $\partial(\sigma_2)=\sigma_1^{(1)}\cup\sigma_1^{(2)}\cup\sigma_1^{(3)}$ をみたすならば

$$g_{\sigma_1^{(1)}}g_{\sigma_1^{(2)}}g_{\sigma_1^{(3)}}=\gamma(\sigma_1^{(1)}\cup\sigma_1^{(2)}\cup\sigma_1^{(3)})=1 \tag{3.4.5}$$

にならなくてはいけない．このとき任意の 3 単体 $\sigma_3\in\mathcal{T}$ に対して $\alpha\in H^3_{\mathrm{Grp}}(G,\,\mathrm{U}(1))$ は $W(\sigma_3)\in\mathrm{U}(1)$ を対応づけることができる．つまり，任意の 3 単体 $\sigma_3^{(i)}$ を四面体と見做したとき，その 6 つある辺のうち 3 つが γ によって $g_i,\,h_i,\,k_i\in G$ と同定されていれば (3.4.5) から残りの 3 辺も決定できるということであり，$W(\sigma_3^{(i)}):=\alpha(g_i,\,h_i,\,k_i)\in\mathrm{U}(1)$ として定まる．$|\mathcal{T}|=\bigcup_{\sigma_3\in\mathcal{T}}\sigma_3$ であり，3 単体 $\sigma_3^{(i)}$ の向きを特徴付ける $\epsilon_i\in\{\pm1\}$ を使って

$$[M]=\sum_i\epsilon_i\gamma(\sigma_3^{(i)})$$

と書くことができる．よって，作用は

$$e^{2\pi\mathrm{i}S[\gamma]}=\prod_i W(\sigma_3^{(i)})^{\epsilon_i}=\prod_i\alpha(g_i,\,h_i,\,k_i)^{\epsilon_i} \tag{3.4.6}$$

と書かれる．

【例 3.4.1】Riemann 面の次元

種数 g の Riemann 面 Σ_g に対して，TQFT(3.4.4) によって定まる Hilbert 空間 $Z(\Sigma_g)$ の実態は不明だが，その次元を計算することができる．というのも，

$$Z(\Sigma_g\times S^1)=\mathrm{Tr}\big(Z(\mathrm{id}_{\Sigma_g})\big)=\mathrm{Tr}\big(\mathrm{id}_{Z(\Sigma_g)}\big)=\dim Z(\Sigma_g)$$

であるが，最左辺は $\Sigma_g\times S^1$ の具体的な三角形分割をとることで (3.4.6) を使って計算できるのである．

3.5　離散的高次ゲージ理論

Dijkgraaf-Witten 理論は離散的ゲージ理論だが，そこで登場したゲージ場は依然として 1 形式のものだった．これを higher gauge theory に拡張するために，新たなゲージ場の表式を導入する．

3.5.1　Deligne-Beilinson コサイクルとしての U(1) ゲージ場

$d = D + 1$ 次元時空 $\mathcal{M}^{(d)}$ を考える．$\mathcal{M}^{(d)}$ の良い被覆 $\mathcal{U} \coloneqq \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ を 1 つ固定する．

$\mathcal{M}^{(d)}$ 上の U(1) 束 $\mathrm{U}(1) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}^{(d)}$ を考える．命題??より，P の同型類は変換関数の族 $\{g_{\alpha\beta} \colon U_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathrm{U}(1)\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$ であって，コサイクル条件

$$\forall x \in U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2},\ g_{\alpha_0\alpha_1}(x) g_{\alpha_1\alpha_2}(x) g_{\alpha_2\alpha_0}(x) = 1$$

を充たすものによって特徴づけられるのだった．ここで $g_{\alpha\beta}(x) \eqqcolon e^{2\mathrm{i}\pi\Lambda_{\alpha\beta}(x)}$ によって $\{\Lambda_{\alpha\beta} \colon U_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathbb{R}\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$ を定義すると，コサイクル条件は

$$\forall x \in U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2},\ \Lambda_{\alpha_0\alpha_1}(x) + \Lambda_{\alpha_1\alpha_2}(x) + \Lambda_{\alpha_2\alpha_0}(x) \eqqcolon n_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}(x) \in \mathbb{Z}$$

と同値である．今，$\{\Lambda_{\alpha_0\alpha_1}\}_{(\alpha_0,\,\alpha_1)\in\Lambda^2} \in \check{H}^1\left(\mathcal{U};\, \Omega^0_{\mathcal{M}d}\right)$ と見做そう．

$\mathcal{U}$ が良い被覆であることと $n_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} \colon U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} \longrightarrow \mathbb{Z}$ が連続であることから*41$\forall(\alpha_0,\,\alpha_1,\,\alpha_2) \in \Lambda^3$ に対して $n_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}(x)$ は定数関数であり，故に $\{n_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}\}_{(\alpha_0,\,\alpha_1,\,\alpha_2)} \in \check{H}^2\left(\mathcal{U};\, \mathbb{Z}_{\mathcal{M}^{(d)}}\right)$ が分かった．特に

$$\forall x \in U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3},\ n_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} - n_{\alpha_0\alpha_1\alpha_3} + n_{\alpha_0\alpha_2\alpha_3} - n_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = 0$$

が成り立つが，左辺は Čech 複体の余境界写像 $\delta^3 \colon \check{H}^2\left(\mathcal{U};\, \mathbb{Z}_{\mathcal{M}^{(d)}}\right) \longrightarrow \check{H}^3\left(\mathcal{U};\, \mathbb{Z}_{\mathcal{M}^{(d)}}\right)$ を使って $\delta^3\left(\{n_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}\}_{(\alpha_0,\,\alpha_1,\,\alpha_2)}\right)$ と等しいので

$$\{n_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}\}_{(\alpha_0,\,\alpha_1,\,\alpha_2)} \in \operatorname{Ker}\delta^3$$

i.e. **Čech 2-コサイクル**の元であることが分かった．

ところで命題??より，ゲージ場とは主束 P の接続形式を $\mathcal{U}$ に付随する局所切断によって引き戻して得られる族 $\{A_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha;\, \mathfrak{u}(1))\}_{\alpha\in\Lambda}$ のことであるが，$\mathfrak{u}(1) \cong \mathbb{R}$ なので $A_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha)$ と見做すことができる．よって $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \in \check{H}^0\left(\mathcal{U},\, \Omega^1_{\mathcal{M}^{(d)}}\right)$ と見做すことができる．そしてこのとき $\forall\alpha_0,\,\alpha_1 \in \Lambda$ に対して

$$\forall x \in U_{\alpha_0\alpha_1},\ A_{\alpha_1}(x) - A_{\alpha_0}(x) = g^{-1}_{\alpha_0\alpha_1}(x)\,\mathrm{d}g_{\alpha_0\alpha_1}(x) = 2\mathrm{i}\pi\,\mathrm{d}\Lambda_{\alpha_0\alpha_1}(x)$$

が言える．以上を図式にまとめると

$$\begin{tikzcd}
& & \{A_{\alpha_0}\} \arrow[d, "-\delta"] \\
& \{\Lambda_{\alpha_0\alpha_1}\} \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "\delta"] & {} \\
\{n_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}\} \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "\delta"] & {} & \\
0 & &
\end{tikzcd}$$

が成り立っている．i.e.

$$\left(\{n_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}\},\, \{\Lambda_{\alpha_0\alpha_1}\},\, \{A_{\alpha_0}\}\right) \in \check{C}^2(\mathcal{U},\, \Omega^{-1}_X) \oplus \check{C}^1(\mathcal{U},\, \Omega^0_X) \oplus \check{C}^0(\mathcal{U},\, \Omega^1_X)$$

*41 $\mathbb{Z}$ には離散位相を入れる．

であり，Deligne-Beilinson コチェインの元であることが分かった．特に $C_{\mathrm{D}2}^{1}$ の元だと見做すとこれはコサイクルである．

3 つ組 $(\mathcal{U},\, P,\, \{A_\alpha\})$ が与えられたとき，対応する Deligne-Beilinson コサイクルは

$$\left(\mathrm{d}q^{(0,0)}\,,\, \delta q^{(0,0)} + \mathrm{d}_{-1}m^{1,-1},\, \delta m^{1,-1}\right) \quad \text{w/} \quad \left(m^{(1,-1)},\, q^{(0,0)}\right) \in \check{C}^1(\mathcal{U},\, \mathbb{Z}_{\mathcal{M}^{(d)}}) \oplus \check{C}^0(\mathcal{U},\, \Omega^0_{\mathcal{M}^{(d)}})$$

の不定性を持つが，この不定性は局所切断の取り替えに伴うゲージ変換に相当し，コバウンダリとして書けている．よって

$$(\mathcal{U},\, P,\, \{A_\alpha\}) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} H^2_{\mathrm{D}}\left(C_{\mathrm{D}2},\, \mathcal{U}\right)$$

なる一対一対応があることが分かった．

ゲージ場の強さは局所的に $F_\alpha := \mathrm{d}A_\alpha$ と定義されたが，今の場合

$$F_{\alpha_0} - F_{\alpha_1} = \mathrm{d}(A_{\alpha_0} - A_{\alpha_1}) = -2\mathrm{i}\pi\, \mathrm{d}^2\Lambda_{\alpha_0\alpha_1} = 0$$

となるので大域的に定義されていることが分かった．

higher gauge field に関しても同様である．p-form のゲージ場であれば

$$(\mathcal{U},\, P^{(p)},\, \{A^{(p)}_\alpha\}) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} H^{p+1}_{\mathrm{D}}\left(C_{\mathrm{D}p+1},\, \mathcal{U}\right) \tag{3.5.1}$$

の一対一対応がある．逆に，応急処置としてしばらくの間 (3.5.1) を p-form ゲージ場の定義として採用することにしよう．

3.5.2 BF-理論

$d = D + 1$ 次元時空 $\mathcal{M}^{(d)}$ を考える．

定義 3.19: BF-理論（U(1) ゲージ場の理論として）

p-form U(1) ゲージ場 $A^{(p)}$ および $(d-p-1)$-form U(1) ゲージ場 $B^{(d-p-1)}$ を与える．
このとき，***BF*-理論**を

$$\begin{aligned} Z_{\mathrm{BF}}[A^{(p)},\, B^{(d-p-1)}] &:= e^{-S_{\mathrm{BF}}[a^{(p)},\, B^{(d-p-1)}]} \\ \text{w/} \quad S_{\mathrm{BF}}[A^{(p)},\, B^{(d-p-1)}] &:= \frac{\mathrm{i}n}{2\pi}\int_{\mathcal{M}^{(d)}} B^{(d-p-1)} \wedge \mathrm{d}A^{(p)} \end{aligned}$$

と定義する[a]．ただし $n \in \mathbb{Z}$ とする．

[a] $\int_{\mathcal{M}^{(d)}}$ は Deligne-Beilinson コチェインの積分と解釈すべきであるが，形式的に de Rham コチェインの積分として扱っても問題は生じにくい．

$\mathcal{M}^{(d)}$ の良い被覆 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ を 1 つ固定する．ゲージ変換は Deligne-Beilinson コサイクル

$$(\{n_{\alpha_0\dots\alpha_{p+2}}\},\, \{\Lambda^{(1)}_{\alpha_0\dots\alpha_{p+1}}\},\, \dots,\, \{\Lambda^{(p-1)}_{\alpha_0\alpha_1}\},\, \{A^{(p)}_{\alpha_0}\}) \in \check{C}^{p+1}(\mathcal{U};\,\mathbb{Z}) \oplus \bigoplus_{k=0}^{p} \check{C}^{p-k}(\mathcal{U};\,\Omega^k)$$
$$(\{m_{\alpha_0\dots\alpha_{d-p}}\},\, \{\lambda^{(1)}_{\alpha_0\dots\alpha_{d-p-1}}\},\, \dots,\, \{\lambda^{(d-p-2)}_{\alpha_0\alpha_1}\},\, \{B^{(d-p-1)}_{\alpha_0}\}) \in \check{C}^{d-p-1}(\mathcal{U};\,\mathbb{Z}) \oplus \bigoplus_{k=0}^{d-p-1} \check{C}^{d-p-k-1}(\mathcal{U};\,\Omega^k)$$

によって定義される．特に場の強さは $\forall \alpha_0,\, \alpha_1 \in \Lambda$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}A^{(p)}_{\alpha_1} - \mathrm{d}A^{(p)}_{\alpha_0} &= \mathrm{d}\big(\delta A^{(p)}\big)_{\alpha_0\alpha_1} = \mathrm{d}\big(\mathrm{d}\Lambda^{(p-1)}_{\alpha_0\alpha_1}\big) = 0,\\
\mathrm{d}B^{(d-p-1)}_{\alpha_1} - \mathrm{d}B^{(d-p-1)}_{\alpha_0} &= \mathrm{d}\big(\delta B^{(d-p-1)}\big)_{\alpha_0\alpha_1} = \mathrm{d}\big(\mathrm{d}\lambda^{(d-p-2)}_{\alpha_0\alpha_1}\big) = 0
\end{aligned}$$

を充たすので大域的に well-defined である．

BF-理論から発見法的に「ゲージ群」[*42]が $\mathbb{Z}_n$ であるような p-form ゲージ理論を得るトリックを説明する [?, p.6]，[?, p.9]．具体的には，2 つのゲージ場をダイナミカルにするだけで良い：

$$\begin{aligned}
Z_{\mathrm{BF}} &:= \int [\mathrm{d}a^{(p)}] \int [\mathrm{d}b^{(d-p-1)}]\, Z_{\mathrm{BF}}[a^{(p)},\, b^{(d-p-1)}]\\
&= \int [\mathrm{d}a^{(p)}] \int [\mathrm{d}b^{(d-p-1)}]\, e^{\frac{\mathrm{i}n}{2\pi}\int_{\mathcal{M}^{(d)}} b^{(d-p-1)}\wedge \mathrm{d}a^{(p)}}\\
&= \int [\mathrm{d}a^{(p)}]\Big|_{\mathrm{d}a^{(p)}=0}
\end{aligned}$$

ただし，最右辺の拘束条件 $\mathrm{d}a^{(p)} = 0$ は Euler-Lagrange 方程式によるものである．この拘束条件により，$a^{(p)}$ についての和が平坦接続についてのものに制限されたということである．また，任意の閉部分多様体 $\Sigma^{(p+1)},\, \Sigma^{(d-p-2)} \subset \mathcal{M}^{(d)}$ に対するホロノミー

$$\begin{aligned}
W(\Sigma^{(p)}) &:= e^{\mathrm{i}\int_{\Sigma^{(p+1)}} a^{(p)}},\\
W(\Sigma^{(d-p-1)}) &:= e^{\mathrm{i}\int_{\Sigma^{(d-p-2)}} b^{(d-p-1)}}
\end{aligned}$$

は，

$$\begin{aligned}
\Big\langle W(\Sigma^{(p)})\Big\rangle &= \int [\mathrm{d}a^{(p)}] \int [\mathrm{d}b^{(d-p-1)}]\, e^{\frac{\mathrm{i}n}{2\pi}\int_{\mathcal{M}^{(d)}} b^{(d-p-1)}\wedge a^{(p)}} e^{\mathrm{i}\int_{\mathcal{M}^{(d)}} a^{(p)}\wedge\delta(\Sigma^{(p+1)})}\\
&= \int [\mathrm{d}B^{(d-p-1)}]\Big|_{\mathrm{d}b^{(d-p-1)}=\frac{2\pi}{n}\delta(\Sigma^{(d-p-2)})},\\
\Big\langle W(\Sigma^{(d-p-1)})\Big\rangle &= \int [\mathrm{d}a^{(p)}] \int [\mathrm{d}b^{(d-p-1)}]\, e^{\frac{\mathrm{i}n}{2\pi}\int_{\mathcal{M}^{(d)}} B^{(d-p-1)}\wedge a^{(p)}} e^{\mathrm{i}\int_{\mathcal{M}^{(d)}} b^{(d-p-1)}\wedge\delta(\Sigma^{(d-p-2)})}\\
&= \int [\mathrm{d}a^{(p)}]\Big|_{\mathrm{d}a^{(p)}=\frac{2\pi}{n}\delta(\Sigma^{(p+1)})}
\end{aligned}$$

となることから，$\Sigma^{(d-p-1)}$ の周りでは

$$W(\Sigma^{(p)}) = e^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}\mathrm{Link}(\Sigma^{(p)},\,\Sigma^{(d-p-1)})} \in \mathbb{Z}_n$$

[*42] 主 p-束の観点からすると，p-form ゲージ場に対応する「ゲージ群」は **p-群**になるべきである．

$\Sigma^{(p)}$ の周りでは

$$W(\Sigma^{(p)}) = e^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{n} \mathrm{Link}(\Sigma^{(p)},\, \Sigma^{(d-p-1)})} \in \mathbb{Z}_n$$

のホロノミーがあることが分かる．このことから，BF-理論に登場する 2 つのゲージ場をダイナミカルにすることで得られる理論は，ホロノミーが $\mathbb{Z}_n$ に値をとる平坦接続のゲージ理論であること，i.e. $\mathbb{Z}_n$ ゲージ理論になっていると見做せるのである．

3.5.3 BF-理論の等価な形

前小節で導入したトリックは，いくつかの等価な形で述べることができる．補助場 $\tilde{a}^{(d-p-2)}$ を導入し，場の強さ $F^{(p+1)} := \mathrm{d}A^{(p)}$ を独立な場と見做すことで

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{BF}}[F^{(p+1)},\, B^{(d-p-1)},\, \tilde{a}^{(p)}] &:= \frac{\mathrm{i}n}{2\pi} B^{(d-p-1)} \wedge F^{(p+1)} + \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\, \mathrm{d}\tilde{a}^{(d-p-2)} \wedge F^{(p+1)} \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2\pi} F^{(p+1)} \wedge (\mathrm{d}\tilde{a}^{(d-p-2)} + nB^{(d-p-1)}) \end{aligned}$$

とする．ここでゲージ場をダイナミカルにすることで

$$\begin{aligned} Z_{\mathrm{BF}} &= \int [\mathrm{d}f^{(p+1)}] \int [\mathrm{d}b^{(d-p-1)}] \int [\mathrm{d}\tilde{a}^{(d-p-2)}]\, e^{-\int_{\mathcal{M}^{(d)}} \left(\frac{\mathrm{i}n}{2\pi} b^{(d-p-1)} \wedge f^{(p+1)} + \frac{\mathrm{i}}{2\pi} \mathrm{d}\tilde{a}^{(d-p-2)} \wedge f^{(p+1)} \right)} \\ &= \int [\mathrm{d}f^{(p+1)}] \Big|_{\mathrm{d}f^{(p+1)}=0} \int [\mathrm{d}b^{(d-p-1)}]\, e^{-\int_{\mathcal{M}^{(d)}} \frac{\mathrm{i}n}{2\pi} b^{(d-p-1)} \wedge f^{(p+1)}} \\ &= \int [\mathrm{d}f^{(p+1)}] \Big|_{\mathrm{d}f^{(p+1)}=0,\ f^{(p+1)}=0} \end{aligned}$$

となる．汎函数積分において Bianchi 恒等式 $\mathrm{d}F^{(p+1)} = 0$ および平坦接続の拘束条件が付いてくれるのである．もしくは，

$$\begin{aligned} Z_{\mathrm{BF}} &= \int [\mathrm{d}b^{(d-p-1)}] \int [\mathrm{d}\tilde{a}^{(d-p-2)}] \int [\mathrm{d}f^{(p+1)}]\, e^{-\int_{\mathcal{M}^{(d)}} \frac{\mathrm{i}}{2\pi} F^{(p+1)} \wedge (\mathrm{d}\tilde{a}^{(d-p-2)} + nb^{(d-p-1)})} \\ &= \int [\mathrm{d}b^{(d-p-1)}] \int [\mathrm{d}\tilde{a}^{(d-p-2)}] \Big|_{\mathrm{d}\tilde{a}^{(d-p-2)} + nb^{(d-p-1)} = 0} \end{aligned} \tag{3.5.2}$$

と捉えても良い．$\tilde{a}^{(d-p-2)}$ は，$Z_{\mathrm{BF}}[F^{(p+1)},\, B^{(d-p-1)},\, \tilde{a}^{(p)}]$ に対するゲージ不変性の要請から

$$\tilde{a}^{(d-p-2)} \longmapsto \tilde{a}^{(d-p-2)} + \mathrm{d}\tilde{\lambda}^{(d-p-3)} - n\lambda^{(d-p-2)} \tag{3.5.3}$$

なるゲージ変換を受ける．

3.5.4 BF-理論における 't Hooft operator

't Hooft operator の素朴な定義は $\tilde{T}(\Sigma^{(d-p-2)}) := \exp\left(\mathrm{i} \int_{\Sigma^{(d-p-2)}} \tilde{a}^{(d-p-2)}\right)$ とすることだが，これはゲージ変換 (3.5.3) の下で不変でない．ゲージ不変にするために，$\partial \Sigma^{(d-p-1)} = \Sigma^{(d-p-2)}$ を充たす $(d-p-1)$-次元部分多様体 $\Sigma^{(d-p-1)} \subset \mathcal{M}^{(d)}$ を用いて

$$T(\Sigma^{(d-p-2)};\, \Sigma^{(d-p-1)}) := \exp\left(\mathrm{i} \int_{\Sigma^{(d-p-2)}} \tilde{a}^{(d-p-2)} + \mathrm{i}n \int_{\Sigma^{(d-p-1)}} b^{(d-p-1)}\right)$$

と定義する．然るに (3.5.2) から，これの期待値を計算すると

$$\begin{aligned}
&\left\langle T(\Sigma^{(d-p-2)};\,\Sigma^{(d-p-1)})\right\rangle \\
&= \int [\mathrm{d}b^{(d-p-1)}] \int [\mathrm{d}\tilde{a}^{(d-p-2)}]\Big|_{\mathrm{d}\tilde{a}^{(d-p-2)}+nb^{(d-p-1)}=0} \exp\left(\mathrm{i}\int_{\Sigma^{(d-p-2)}} \tilde{a}d-p-2^{(+)}\mathrm{i}n\int_{\Sigma^{(d-p-1)}} b^{(d-p-1)}\right) \\
&= \int [\mathrm{d}b^{(d-p-1)}] \int [\mathrm{d}\tilde{a}^{(d-p-2)}]\Big|_{\mathrm{d}\tilde{a}^{(d-p-2)}+nb^{(d-p-1)}=0} \exp\left(\mathrm{i}\int_{\Sigma^{(d-p-1)}} (\mathrm{d}\tilde{a}^{(d-p-2)}+nb^{(d-p-1)})\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

となり消えてしまう．

3.5.5　より厳密な定式化

3.6　離散的高次対称性

離散群によって特徴付けられる対称性に対しては，保存カレントを定義することはできないが，トポロジカル演算子と charged object ならば定義できる．

3.6.1　BF-理論における離散的高次対称性

BF-理論を考える．まず最初に，この理論が以下の変換の下で不変であることに注意する：

$$\begin{aligned}
A^{(p)} &\longmapsto A^{(p)} + \frac{1}{n}\epsilon^{(p)}, \\
B^{(d-p-1)} &\longmapsto B^{(d-p-1)} + \frac{1}{n}\epsilon^{(d-p-1)}, \\
F^{(p+1)} &\longmapsto F^{(p+1)}, \\
\tilde{A}^{(d-p-2)} &\longmapsto \tilde{A}^{(d-p-2)} - \tilde{\epsilon}^{(d-p-2)}
\end{aligned}$$

ただし $\epsilon^{(p)}, \epsilon^{(d-p-1)}$ は閉形式であり，任意の閉部分多様体 $\Sigma^{(p)}, \Sigma^{(d-p-1)} \subset \mathcal{M}^{(d)}$ について

$$\int_{\Sigma^{(p)}} \epsilon^{(p)},\ \int_{\Sigma^{(d-p-1)}} \epsilon^{(d-p-1)} \in 2\pi\mathbb{Z}$$

を充たすとする．また，局所的に $\epsilon^{(d-p-1)} =: \mathrm{d}\tilde{\epsilon}^{(d-p-2)}$ と定義した．実際，この変換によって

$$\begin{aligned}
Z_{\mathrm{BF}} &= \int [\mathrm{d}a^{(p)}] \int [\mathrm{d}b^{(d-p-1)}]\, e^{\frac{\mathrm{i}n}{2\pi}\int_{\mathcal{M}^{(d)}} b^{(d-p-1)}\wedge a^{(p)}} \\
\longmapsto &\int [\mathrm{d}a^{(p)}] \int [\mathrm{d}b^{(d-p-1)}]\, e^{\frac{\mathrm{i}n}{2\pi}\int_{\mathcal{M}^{(d)}} b^{(d-p-1)}\wedge a^{(p)}}\, e^{\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{\mathcal{M}^{(d)}} \epsilon^{(d-p-1)}\wedge \mathrm{d}a^{(p)}} \\
&= \int [\mathrm{d}a^{(p)}]\Big|_{\mathrm{d}a^{(p)}=0} e^{\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{\mathcal{M}^{(d)}} \epsilon^{(d-p-1)}\wedge a^{(p)}} \\
&= Z_{\mathrm{BF}}
\end{aligned}$$

となる．トポロジカル演算子は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U}_{e^{2\pi \mathrm{i}k/n}}(\Sigma^{(p)}) &\coloneqq e^{\mathrm{i}k\int_{\Sigma^{(p)}} a^{(p)}} \\
U_{e^{2\pi \mathrm{i}k/n}}(\Sigma^{(d-p-1)}) &\coloneqq e^{\mathrm{i}k\int_{\Sigma^{(d-p-1)}} b^{(d-p-1)}}
\end{aligned}
$$

の 2 つあり，それぞれに対応する charged object は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W}_n(\mathcal{C}^{(d-p-1)}) &\coloneqq e^{\mathrm{i}n\int_{\mathcal{C}^{(d-p-1)}} b^{(d-p-1)}} \\
W_n(\mathcal{C}^{(p)}) &\coloneqq e^{\mathrm{i}n\int_{\mathcal{C}^{(p)}} a^{(p)}}
\end{aligned}
$$

となっている．