第 1 章

モノイダル圏・フュージョン圏・高次群

この章では標数 0 の体 $\mathbb{K}$ のみを考える．

1.1　加法圏

定義 1.1: 加法圏・アーベル圏

圏 $\mathcal{C}$ が体 $\mathbb{K}$ 上の**加法圏** (additive category) であるとは，以下を充たすこと：

(add-1)

任意の Hom 集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が可換群の構造をもち，かつ射の合成

$$\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

が群演算に関して双加法的である．

(add-2)

零対象[a] (zero object) $\mathbf{0} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が存在し，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{0}, X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathbf{0}) = 0$ を充たす[b]．

(add-3)

有限の余積が常に存在する．

加法圏 $\mathcal{C}$ は，$\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に関して $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が $\mathbb{K}$-ベクトル空間の構造を持ち，かつ合成 $\circ$ が $\mathbb{K}$-双線形写像でもあるとき，**$\mathbb{K}$-線形** ($\mathbb{K}$-linear) であると言われる．

[a] 始対象かつ終対象

[b] 最右辺は **(add-1)** の意味で零ベクトル空間．

加法圏 $\mathcal{C}$ は，以下の条件を充たすとき**アーベル圏** (abelian category) と呼ばれる：

(Ab-1)

任意の射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が核 $\ker f\colon \mathrm{Ker}\, f \longrightarrow X$ および余核 $\mathrm{coker}\, f\colon Y \longrightarrow \mathrm{Coker}\, f$ を持つ．

(Ab-2)

$\mathrm{Ker}\, f = \mathbf{0}$ ならば $f = \ker(\mathrm{coker}\, f)$，かつ $\mathrm{Coker}\, f = \mathbf{0}$ ならば $f = \mathrm{coker}(\ker f)$

定義 1.2: 加法的関手・完全関手

加法圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ の間の関手 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ が**加法的** (additive) であるとは，$\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して定まる写像

$$F_{X,Y}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\bigl(F(X), F(Y)\bigr),\ f \longmapsto F(f)$$

が可換群の準同型であることを言う．特に加法圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ が $\mathbb{K}$-線形で，かつ $\forall X, Y \in \mathcal{C}$ に対して $F_{X,Y}$ が $\mathbb{K}$-線型写像でもあるとき，F は**$\mathbb{K}$-線形** ($\mathbb{K}$-linear) であると言う．

アーベル圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ の間の加法的関手 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ を与える．

- F が**左完全** (left exact) であるとは，$\mathcal{C}$ の任意の短完全列 $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ に対して

$$0 \longrightarrow F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z)$$

  が $\mathcal{D}$ の完全列になること．
- F が**右完全** (right exact) であるとは，$\mathcal{C}$ の任意の短完全列 $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ に対して

$$F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z) \longrightarrow 0$$

  が $\mathcal{D}$ の完全列になること．
- F が**完全** (exact) であるとは，F が右完全かつ左完全であること．

【例 1.1.1】表現の圏

G を群とする．このとき

- G の表現 (ρ, V) を対象とする
- G-同変な $\mathbb{K}$-線型写像 $(\rho, V) \xrightarrow{f} (\rho', V')$ を射とする

圏を $\mathbf{Rep}\,(G)$ と書く．$\mathbf{Rep}\,(G)$ はアーベル圏である．

定義 1.3: 単純・半単純

- アーベル圏 $\mathcal{C}$ の対象 $X \in \mathcal{C}$ が**単純** (simple) であるとは，任意のモノ射 $i\colon U \hookrightarrow X$ が 0 であるか同型射であることを言う．
- アーベル圏 $\mathcal{C}$ が**半単純** (semisimple) であるとは，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が単純対象の有限余積と同型であることを言う．i.e. 単純対象の族 $\{X_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})\}_{i\in I}$ および有限個を除いて 0 であるような非負整数の族 $\{N_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}_{i\in I}$ が存在して

$$X \cong \bigoplus_{i\in I} N_i X_i$$

が成り立つこと．

定義 1.4: 有限性

アーベル圏 $\mathcal{C}$ とその対象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を与える．

- X が**有限長** (finite length) を持つとは，有限のフィルトレーション

$$0 = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_{n-1} \subset X_n = X$$

であって $X_i/X_{i-1} \coloneqq \mathrm{Coker}(X_{i-1} \hookrightarrow X_i) \quad (\forall i)$ が単純対象であるようなもの（**Jordan-Hölder 列**と言う）が存在することを言う．このときの n を X の**長さ** (length) と呼ぶ[a]．

以下，アーベル圏 $\mathcal{C}$ は $\mathbb{K}$-線形であるとする．

- $\mathcal{C}$ が**局所有限** (locally finite) であるとは，以下の 2 条件を充たすこと：
  (lFin-1) $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，$\mathbb{K}$-ベクトル空間 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が有限次元
  (lFin-2) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が有限長を持つ．
- $\mathcal{C}$ が**有限** (finite) であるとは，以下の 4 条件を充たすこと：
  (Fin-1) $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，$\mathbb{K}$-ベクトル空間 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が有限次元
  (Fin-2) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が有限長を持つ．
  (Fin-3) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が射影的被覆[b]を持つ．
  (Fin-4) 単純対象の同型類が有限個である．

[a] Jordan-Hölder の定理 [?, THEOREM 1.5.4, p.5] から，X の任意の Jordan-Hölder 列は存在すれば同一の長さを持つ．

[b] $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が**射影的** (projective) であるとは，関手 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, \text{-})$ が完全関手であることを言う．$X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の**射影的被覆** (projective cover) とは，射影的対象 $P_X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ とエピ射 $p_X\colon P_X \longrightarrow X$ の組み (P_X, p_X) であって，任意の射影的対象 $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ およびエピ射 $p\colon P \longrightarrow X$ に対してあるエピ射 $h\colon P \longrightarrow P_X$ が存在して $p_X \circ h = p$ を充たすようなもののこと．

1.2 モノイダル圏

これまでも何回か登場したが，モノイダル圏についてまとめておく：

定義 1.5: モノイダル圏

モノイダル圏 (monidal category) は，以下の 5 つのデータからなる：

- 圏 $\mathcal{C}$
- **テンソル積** (tensor product) と呼ばれる関手 $\otimes\colon \mathcal{C}\times\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}$
- **単位対象** (unit object) $I\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- **associator** と呼ばれる自然同値

$$\left\{a_{X,Y,Z}\colon (X\otimes Y)\otimes Z \xrightarrow{\cong} X\otimes(Y\otimes Z)\right\}_{X,Y,Z\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

- **left/right unitors** と呼ばれる自然同値

$$\left\{l_X\colon I\otimes X\xrightarrow{\cong} X\right\}_{X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})},$$
$$\left\{r_X\colon X\otimes I\xrightarrow{\cong} X\right\}_{X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは $\forall X, Y, Z, W\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について以下の 2 つの図式を可換にする：

(triangle diagram)

$$\begin{tikzcd}
(X\otimes I)\otimes Y \arrow[rr, "a_{X,I,Y}"] \arrow[dr, "r_X\otimes\mathrm{Id}_Y"'] & & X\otimes(I\otimes Y) \arrow[dl, "\mathrm{Id}_X\otimes l_Y"] \\
& X\otimes Y &
\end{tikzcd}$$

(pentagon diagram)

$$\begin{tikzcd}
& ((W\otimes X)\otimes Y)\otimes Z \arrow[dl, "a_{W\otimes X,Y,Z}"'] \arrow[r, "a_{W,X,Y}\otimes\mathrm{Id}_Z"] & (W\otimes(X\otimes Y))\otimes Z \arrow[d, "a_{W,X\otimes Y,Z}"] \\
(W\otimes X)\otimes(Y\otimes Z) \arrow[dr, "a_{W,X,Y\otimes Z}"'] & & W\otimes((X\otimes Y)\otimes Z) \arrow[dl, "\mathrm{Id}_Z\otimes a_{X,Y,Z}"] \\
& W\otimes(X\otimes(Y\otimes Z)) &
\end{tikzcd}$$

モノイダル圏 $\mathcal{C}$ が**厳密** (strict) であるとは，$\forall X, Y, Z\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$(X\otimes Y)\otimes Z = X\otimes(Y\otimes Z),$$
$$I\otimes X = X,\quad X\otimes I = X$$

が成り立ち，かつ $a_{X,Y,Z}$, l_X, r_X が恒等射であることを言う．

定義 1.5 で言うモノイダル圏を，**弱いモノイダル圏** (weak monoidal category) と呼ぶこともある．

【例 1.2.1】Cat のモノイダル構造

Cat を小圏と関手が成す圏とする．このとき，関手

$$\times\colon \mathbf{Cat}\times\mathbf{Cat}\longrightarrow\mathbf{Cat}$$

を $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}\times\mathcal{D}) := \mathrm{Ob}(\mathcal{C})\times\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ により定めると，組み $(\mathbf{Cat},\, \times,\, I)$ は厳密なモノイダル圏になる．ただし I はただ 1 つの対象 $\bullet$ を持ち，$\mathrm{Hom}_I(\bullet,\, \bullet) = \{\mathrm{Id}_\bullet\}$ とする圏である[a]

[a] これは **Cat** の終対象でもある．

定義 1.6: モノイダル関手

2 つのモノイダル圏 $(\mathcal{C},\, \otimes_{\mathcal{C}},\, I_{\mathcal{C}},\, a^{\mathcal{C}},\, l^{\mathcal{C}},\, r^{\mathcal{C}})$, $(\mathcal{D},\, \otimes_{\mathcal{D}},\, I_{\mathcal{D}},\, a^{\mathcal{D}},\, l^{\mathcal{D}},\, r^{\mathcal{D}})$ の間の関手

$$F\colon \mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$$

が**弱いモノイダル関手** (lax monoidal functor) であるとは,

- 射

$$\varepsilon\colon I_{\mathcal{D}}\longrightarrow F(I_{\mathcal{C}})$$

- 自然変換

$$\bigl\{\mu_{X,Y}\colon F(X)\otimes_{\mathcal{D}}F(Y)\longrightarrow F(X\otimes_{\mathcal{C}}Y)\bigr\}_{X,\,Y\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

があって，$\forall X,\, Y,\, Z\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して以下の図式が可換になること：

(associatibity)

$$\begin{tikzcd}
(F(X)\otimes_{\mathcal{D}}F(Y))\otimes_{\mathcal{D}}F(Z) \arrow[rr, "a^{\mathcal{D}}_{F(X),\,F(Y),\,F(Z)}"'] \arrow[d, "\mu_{X,\,Y}\otimes\mathrm{Id}_{F(Z)}"'] & & F(X)\otimes_{\mathcal{D}}(F(Y)\otimes_{\mathcal{D}}F(Z)) \arrow[d, "\mathrm{Id}_{F(X)}\otimes\mu_{Y,\,Z}"] \\
F(X\otimes_{\mathcal{C}}Y)\otimes_{\mathcal{D}}F(Z) \arrow[d, "\mu_{X\otimes_{\mathcal{C}}Y,\,Z}"'] & & F(X)\otimes_{\mathcal{D}}F(Y\otimes_{\mathcal{C}}Z) \arrow[d, "\mu_{X,\,Y\otimes_{\mathcal{C}}Z}"] \\
F((X\otimes_{\mathcal{C}}Y)\otimes_{\mathcal{C}}Z) \arrow[rr, "F(a^{\mathcal{C}}_{X,\,Y,\,Z})"'] & & F(X\otimes_{\mathcal{C}}(Y\otimes_{\mathcal{C}}Z))
\end{tikzcd}$$

(unitality)

$$
\begin{tikzcd}
I_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathcal{D}} F(X) \arrow[r, "\varepsilon \otimes \mathrm{Id}_{F(X)}"] \arrow[d, "l^{\mathcal{D}}_{F(X)}"'] & F(I_{\mathcal{C}}) \otimes_{\mathcal{D}} F(X) \arrow[d, "\mu_{I_{\mathcal{C}},\, X}"] \\
F(X) & F(I_{\mathcal{C}} \otimes_{\mathcal{C}} X) \arrow[l, "F(l^{\mathcal{C}}_X)"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
F(X) \otimes_{\mathcal{D}} I_{\mathcal{D}} \arrow[r, "\mathrm{Id}_{F(X)} \otimes \varepsilon"] \arrow[d, "r^{\mathcal{D}}_{F(X)}"'] & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(I_{\mathcal{C}}) \arrow[d, "\mu_{X,\, I_{\mathcal{C}}}"] \\
F(X) & F(X \otimes_{\mathcal{C}} I_{\mathcal{C}}) \arrow[l, "F(r^{\mathcal{C}}_X)"]
\end{tikzcd}
$$

- 弱いモノイダル関手 F の ε と $\mu_{X,Y}$ が全て同型射ならば，F は**強いモノイダル関手** (strong monoidal functor) と呼ばれる．
- 弱いモノイダル関手 F の ε と $\mu_{X,Y}$ が全て恒等射ならば，F は**厳密なモノイダル関手** (strict monoidal functor) と呼ばれる．

定義 1.7: モノイダル自然変換

2 つのモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, I_{\mathcal{C}}, a^{\mathcal{C}}, l^{\mathcal{C}}, r^{\mathcal{C}})$, $(\mathcal{D}, \otimes_{\mathcal{D}}, I_{\mathcal{D}}, a^{\mathcal{D}}, l^{\mathcal{D}}, r^{\mathcal{D}})$ の間の 2 つの弱いモノイダル関手 $\left(F_i \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D},\, \varepsilon_i \colon I_{\mathcal{D}} \longrightarrow F(I_{\mathcal{C}}),\, \left\{\mu_{i\,X,\,Y} \colon F_i(X) \otimes F_i(Y) \longrightarrow F_i(X \otimes Y)\right\}_{X,\,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}\right)$ w/ $i = 1, 2$ の間の自然変換

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F_1"] \arrow[r, bend right, "F_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \tau"] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}
$$

が**モノイダル自然変換** (monidal natural transformation) であるとは，$\forall X, Y \in \mathcal{C}$ に対して以下の図式が可換になること：

(テンソル積の保存)

$$
\begin{tikzcd}
F_1(X) \otimes_{\mathcal{D}} F_1(Y) \arrow[r, "\tau_X \otimes_{\mathcal{D}} \tau_Y"] \arrow[d, "\mu_{1\,X,Y}"'] & F_2(X) \otimes_{\mathcal{D}} F_2(Y) \arrow[d, "\mu_{2\,X,Y}"] \\
F_1(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \arrow[r, "\tau_{X \otimes_{\mathcal{C}} Y}"'] & F_2(X \otimes_{\mathcal{C}} Y)
\end{tikzcd}
$$

(単位対象の保存)

$$
\begin{tikzcd}
& I_{\mathcal{D}} \arrow[dl, "\varepsilon_1"'] \arrow[dr, "\varepsilon_2"] & \\
F_1(I_{\mathcal{C}}) \arrow[rr, "\tau_{I_{\mathcal{C}}}"'] & & F_2(I_{\mathcal{C}})
\end{tikzcd}
$$

命題 1.1: 単位対象に関する技術的な等式

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ を与える．このとき $\forall X, Y \in \mathcal{C}$ に対して以下が成り立つ：

(1) 以下の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
(I \otimes X) \otimes Y \arrow[rr, "a_{I,X,Y}"] \arrow[dr, "l_X \otimes \mathrm{Id}_Y"'] & & I \otimes (X \otimes Y) \arrow[dl, "l_{X \otimes Y}"] \\
& X \otimes Y &
\end{tikzcd}$$

(2) 以下の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes Y) \otimes I \arrow[rr, "a_{X,Y,I}"] \arrow[dr, "r_{X \otimes Y}"'] & & X \otimes (Y \otimes 1) \arrow[dl, "\mathrm{Id}_X \otimes r_Y"] \\
& X \otimes Y &
\end{tikzcd}$$

(3)

$$\mathrm{Id}_I \otimes l_X = (r_I \otimes \mathrm{Id}_I) \circ a^{-1}_{I,\,I,\,X},$$
$$r_X \otimes \mathrm{Id}_I = (\mathrm{Id}_X \otimes l_I) \circ a_{X,\,I,\,I}$$

(4)

$$l_I = r_I$$

<u>**証明**</u>　(1) 次の図式を考える：

$$\begin{tikzcd}
\big((X \otimes I) \otimes Y\big) \otimes Z \arrow[rrrr, "a_{X,I,Y} \otimes \mathrm{Id}_Z"] \arrow[drr, "(r_X \otimes \mathrm{Id}_Y) \otimes \mathrm{Id}_Z"] \arrow[ddd, "a_{X \otimes I, Y, Z}"'] & & & & \big(X \otimes (1 \otimes Y)\big) \otimes Z \arrow[dll, "(\mathrm{Id}_X \otimes l_Y) \otimes \mathrm{Id}_Z"'] \arrow[ddd, "a_{X, I \otimes Y, Z}"] \\
& & (X \otimes Y) \otimes Z \arrow[d, "a_{X,Y,Z}"] & & \\
& & X \otimes (Y \otimes Z) & & \\
(X \otimes I) \otimes (Y \otimes Z) \arrow[urr, "r_X \otimes \mathrm{Id}_{Y \otimes Z}"] \arrow[drr, "a_{X,I,Y \otimes Z}"'] & & & & X \otimes \big((I \otimes Y) \otimes Z\big) \arrow[ull, "\mathrm{Id}_X \otimes (l_Y \otimes \mathrm{Id}_Z)"'] \arrow[dll, "\mathrm{Id}_X \otimes a_{I,Y,Z}"] \\
& & X \otimes \big(I \otimes (Y \otimes Z)\big) \arrow[uu, "\mathrm{Id}_X \otimes l_{Y \otimes Z}"'] & &
\end{tikzcd}$$

青色の部分は **(pentagon diagram)** により可換であり，最上部と左下の三角形は **(triangle diagram)** により可換である．左の赤色の部分は，圏 $\mathcal{C}^{\times 3}$ における $(r_X, \mathrm{Id}_Y, \mathrm{Id}_Z)$ という射に対して $a\colon (\text{-}\otimes\text{-})\otimes\text{-} \Longrightarrow \text{-} \otimes (\text{-} \otimes \text{-})$ の自然性を用いることで可換だと分かる．同様に右の赤色の部分は，圏 $\mathcal{C}^{\times 3}$ における $(\mathrm{Id}_X, l_Y, \mathrm{Id}_Z)$ という射に対して a の自然性を使うことで可換だと分かる．以上より図式全体が可換

なので，残った右下の三角形もまた可換である．

(2) (1) と同様.

(3) **(triangle diagram)** において $X = I$ とおくことで第一式が，$Y = I$ とおくことで第二式が示される．

(4)

$$\begin{aligned} l_I \otimes \mathrm{Id}_I &= l_{I\otimes I} \circ a_{I,I,I} && \because \quad (1) \\ &= (\mathrm{Id}_I \otimes l_I) \circ a_{I,I,I} && \because \quad l \text{ の自然性} \\ &= r_I \otimes \mathrm{Id}_I && \because \quad (3) \end{aligned}$$

より示された．

■

1.2.1 rigid なモノイダル圏

定義 1.8: 双対

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ およびその任意の対象 $X, X^* \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を与える．X^* が X の**左双対** (left dual) であるとは,

- **coevaluation** と呼ばれる射

$$\mathrm{coev}_X^{\mathrm{L}} : I \longrightarrow X \otimes X^*$$

- **evaluation** と呼ばれる射

$$\mathrm{ev}_X^{\mathrm{L}} : X^* \otimes X \longrightarrow I$$

が存在して以下の図式を可換にすることを言う：

(zig-zag equations)

$$\begin{tikzcd} I \otimes X \arrow[r, "\mathrm{coev}_X^{\mathrm{L}} \otimes \mathrm{Id}_X"] \arrow[dd, "r_X"'] & (X \otimes X^*) \otimes X \arrow[d, "a_{X,X^*,X}"] \\ & X \otimes (X^* \otimes X) \arrow[d, "\mathrm{Id}_X \otimes \mathrm{ev}_X^{\mathrm{L}}"] \\ X & X \otimes I \arrow[l, "r_X"] \end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
X^* \otimes I \arrow[r, "\mathrm{Id}_{X^*} \otimes \mathrm{coev}_X^{\mathrm{L}}"] \arrow[dd, "l_{X^*}"'] & X^* \otimes (X \otimes X^*) \arrow[d, "a^{-1}_{X^*,\, X,\, X^*}"] \\
& (X^* \otimes X) \otimes X^* \arrow[d, "\mathrm{ev}_X^{\mathrm{L}} \otimes \mathrm{Id}_{X^*}"] \\
X^* & I \otimes X^* \arrow[l, "l_{X^*}"]
\end{tikzcd}
$$

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ およびその任意の対象 $X, {}^*X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を与える．${}^*X$ が X の**右双対** (right dual) であるとは，

- 射

$$
\mathrm{coev}_X^{\mathrm{R}} \colon I \longrightarrow {}^*X \otimes X
$$

- 射

$$
\mathrm{ev}_X^{\mathrm{R}} \colon X \otimes {}^*X \longrightarrow I
$$

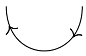
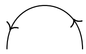
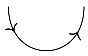
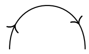
が存在して以下の図式を可換にすることを言う：

(zig-zag equations)

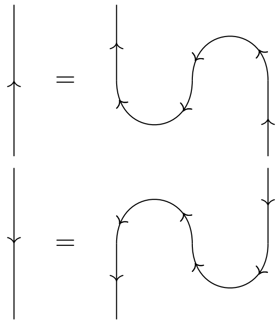
$$
\begin{tikzcd}
X \otimes I \arrow[r, "\mathrm{Id}_X \otimes \mathrm{coev}_X^{\mathrm{R}}"] \arrow[dd, "l_X"'] & X \otimes ({}^*X \otimes X) \arrow[d, "a^{-1}_{X,\, {}^*X,\, X}"] \\
& (X \otimes {}^*X) \otimes X \arrow[d, "\mathrm{ev}_X^{\mathrm{R}} \otimes \mathrm{Id}_X"] \\
X & I \otimes X \arrow[l, "l_X"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
I \otimes {}^*X \arrow[r, "\mathrm{coev}_X^{\mathrm{R}} \otimes \mathrm{Id}_{{}^*X}"] \arrow[dd, "l_{X^*}"'] & ({}^*X \otimes X) \otimes {}^*X \arrow[d, "a^{-1}_{{}^*X,\, X,\, {}^*X}"] \\
& {}^*X \otimes (X \otimes {}^*X) \arrow[d, "\mathrm{Id}_{{}^*X} \otimes \mathrm{ev}_X^{\mathrm{R}}"] \\
{}^*X & {}^*X \otimes I \arrow[l, "r_{X^*}"]
\end{tikzcd}
$$

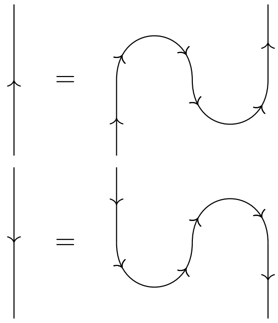
ストリング図式で書くときは

$\mathrm{coev}^{\mathrm{L}}_X =:$  $\mathrm{ev}^{\mathrm{L}}_X =:$  $\mathrm{coev}^{\mathrm{R}}_X =:$  $\mathrm{ev}^{\mathrm{R}}_X =:$ 

とする．ストリング図式において $\mathrm{coev}^{\mathrm{L}}$, ev^{L} に対する **(zig-zag equations)** は



$\mathrm{coev}^{\mathrm{R}}$, ev^{R} に対する **(zig-zag equations)** は



と書ける．

補題 1.1: 双対の基本性質

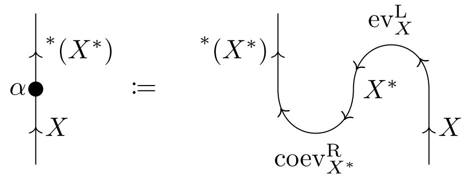
モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ およびその対象 $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を与える．

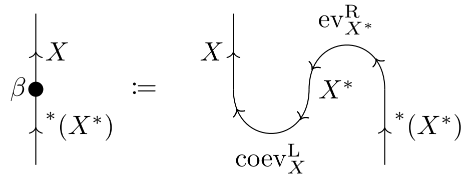
(1) Y が X の左双対ならば，X は Y の右双対である．
(2) Z が X の右双対ならば，X は Z の左双対である．
(3) X が左・右双対を持つならば，${}^*(X^*) \cong X \cong ({}^*X)^*$ が成り立つ．

<u>**証明**</u> (1) 仮定より，$\mathrm{coev}^{\mathrm{L}}_X : I \longrightarrow X \otimes Y$, $\mathrm{ev}^{\mathrm{L}}_X : Y \otimes X \longrightarrow I$ が存在して左双対の **(zig-zag-equations)** を充たす．よって $\mathrm{coev}^{\mathrm{R}}_Y := \mathrm{coev}^{\mathrm{L}}_X$, $\mathrm{ev}^{\mathrm{R}}_Y := \mathrm{ev}^{\mathrm{L}}_X$ と定めれば，組 $(Y, X, \mathrm{coev}^{\mathrm{R}}_Y, \mathrm{ev}^{\mathrm{R}}_Y)$ は右双対の **(zig-zag-equations)** を充たす．

(2) 仮定より，$\mathrm{coev}^{\mathrm{R}}_X : I \longrightarrow Z \otimes X$, $\mathrm{ev}^{\mathrm{R}}_X : X \otimes Z \longrightarrow I$ が存在して右双対の **(zig-zag-equations)** を充たす．よって $\mathrm{coev}^{\mathrm{L}}_Z := \mathrm{coev}^{\mathrm{R}}_X$, $\mathrm{ev}^{\mathrm{L}}_Z := \mathrm{ev}^{\mathrm{R}}_X$ と定めれば，組 $(Z, X, \mathrm{coev}^{\mathrm{L}}_Z, \mathrm{ev}^{\mathrm{L}}_Z)$ は左双対の **(zig-zag-equations)** を充たす．

(3) 射 $\alpha\colon X \longrightarrow {}^*(X^*)$, $\beta\colon {}^*(X^*) \longrightarrow X$ をそれぞれ





と定義すれば，**(zig-zag-equations)** により $\alpha \circ \beta = \mathrm{Id}_{X^*}$, $\beta \circ \alpha = \mathrm{Id}_X$ が言える．$({}^*X)^*$ についても同様である． ■

定義 1.9: rigid なモノイダル圏

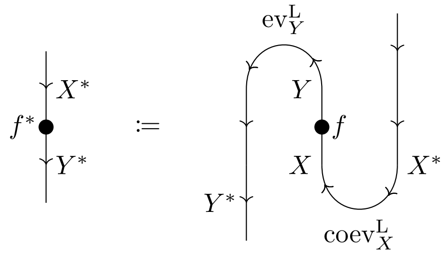
モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ が **rigid** であるとは，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が左・右双対を持つことを言う．

rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r, \mathrm{ev}^{\mathrm{L}}, \mathrm{coev}^{\mathrm{L}}, \mathrm{ev}^{\mathrm{R}}, \mathrm{coev}^{\mathrm{R}})$ において，対応

$$(\text{-})^* \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

を次のように構成する：

- $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対してその左双対 $X^* \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を対応づける．
- $f\colon X \longrightarrow Y$ に対して，



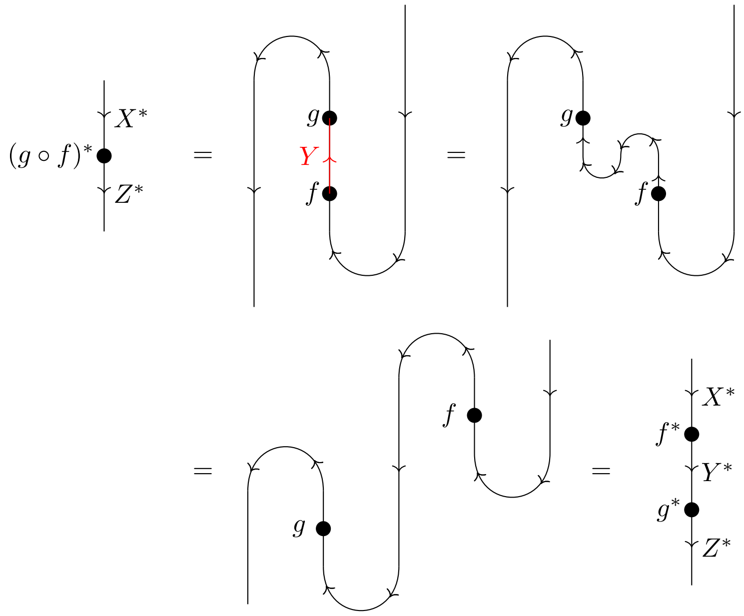
(1.2.1)

補題 1.2: 左双対の関手性

(1) 対応 $(\text{-})^* \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ は反変関手である．

(2) $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $(X \otimes Y)^* = Y^* \otimes X^*$ が成り立つ．

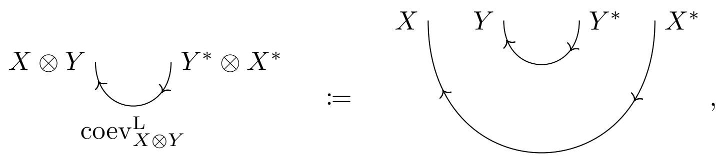
証明 (1) 任意の射 $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon Y \longrightarrow Z$ をとる．**(zig-zag-equations)** により，

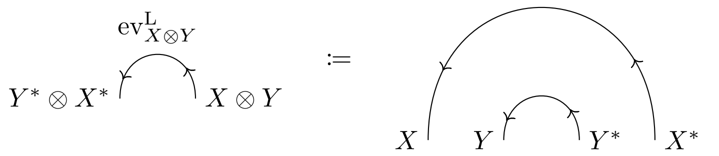


(2) $X \otimes Y$ に関する coevaluation, evaluation をそれぞれ

$$\mathrm{coev}^{\mathrm{L}}_{X\otimes Y}\colon I \xrightarrow{\mathrm{coev}^{\mathrm{L}}_X} X\otimes X^* \xrightarrow{l_X^{-1}} (X\otimes I)\otimes X^* \xrightarrow{(\mathrm{Id}_X\otimes \mathrm{coev}^{\mathrm{L}}_Y)\otimes \mathrm{Id}_{X^*}} \big(X\otimes (Y\otimes Y^*)\big)\otimes X^*$$
$$\xrightarrow{a} (X\otimes Y)\otimes (Y^*\otimes X^*)$$
$$\mathrm{ev}^{\mathrm{L}}_{X\otimes Y}\colon (Y^*\otimes X^*)\otimes (X\otimes Y) \xrightarrow{a} \big(Y^*\otimes (X^*\otimes X)\big)\otimes Y \xrightarrow{(\mathrm{Id}_{Y^*}\otimes \mathrm{ev}^{\mathrm{L}}_X)\otimes \mathrm{Id}_Y} (Y^*\otimes I)\otimes Y$$
$$\xrightarrow{l_{Y^*}} Y^*\otimes Y \xrightarrow{\mathrm{ev}^{\mathrm{L}}_Y} I$$

で定義し，組 $(X\otimes Y,\ Y^*\otimes X^*,\ \mathrm{coev}^{\mathrm{L}}_{X\otimes Y},\ \mathrm{ev}^{\mathrm{L}}_{X\otimes Y})$ が **(zig-zag-equations)** を充たすことを示せば良い．ストリング図式で書くと





なので明らか．

■

全く同様にして，反変関手

$${}^*(\text{-})\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

を作ることができる．

【例 1.2.2】双対関手

補題 1.2 より，rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{C},\, \otimes,\, I,\, a,\, l,\, r,\, \mathrm{ev}^{\mathrm{L}},\, \mathrm{coev}^{\mathrm{L}},\, \mathrm{ev}^{\mathrm{R}},\, \mathrm{coev}^{\mathrm{R}})$ において関手

$$
\begin{aligned}
(\text{-})^{**} &\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \\
{}^{**}(\text{-}) &\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}
\end{aligned}
$$

は厳密なモノイダル関手である．

補題 1.3: rigidity isomorphism

rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{C},\, \otimes,\, I,\, a,\, l,\, r,\, \mathrm{ev}^{\mathrm{L}},\, \mathrm{coev}^{\mathrm{L}},\, \mathrm{ev}^{\mathrm{R}},\, \mathrm{coev}^{\mathrm{R}})$ に対し，以下が成り立つ：

(1) $\forall X,\, Y,\, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して自然な同型

$$
\begin{aligned}
\alpha_{X,Y,Z} &\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X \otimes Y,\, Z) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X,\, Z \otimes Y^*) \\
\beta_{Y,X,Z} &\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(Y^* \otimes X,\, Z) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X,\, Y \otimes Z)
\end{aligned}
$$

が存在する．

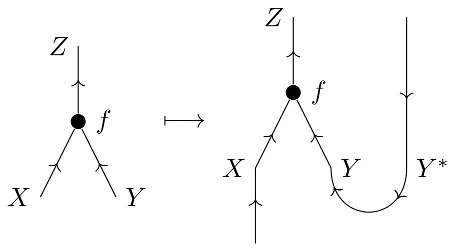
(2) $\forall X,\, Y,\, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して自然な同型

$$
\begin{aligned}
\gamma_{X,Y,Z} &\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X \otimes {}^*Y,\, Z) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X,\, Z \otimes Y) \\
\gamma_{Y,X,Z} &\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(Y \otimes X,\, Z) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X,\, {}^*Y \otimes Z)
\end{aligned}
$$

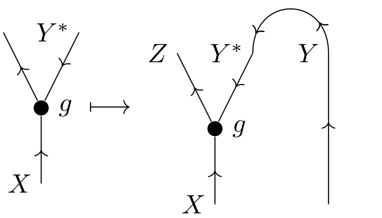
が存在する．

<u>**証明**</u>　(1) 最初の同型は

$\alpha_{X,Y,Z}\colon$



$\alpha^{-1}_{X,Y,Z}\colon$



である．他も同様．

(2) (1) と同様．

■

1.2.2　組紐付きモノイダル圏

定義 1.10: 組紐付きモノイダル圏

組紐付きモノイダル圏 (braided monoidal category) とは，以下の 2 つからなる：

- モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$
- **組紐** (braiding) と呼ばれる自然同型

$$\left\{ b_{X,\,Y} \colon X \otimes Y \xrightarrow{\cong} Y \otimes X \right\}_{X,\,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは $\forall X,\,Y,\,Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について以下の図式を可換にする：

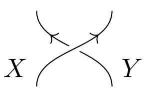
(hexagon diagrams)

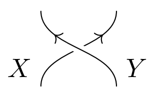
$$\begin{tikzcd}
X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "a^{-1}_{X,\,Y,\,Z}"] \arrow[d, "b_{X,\,Y \otimes Z}"] & (X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "b_{X,\,Y} \otimes \mathrm{Id}_Z"] & (Y \otimes X) \otimes Z \arrow[d, "a_{Y,\,X,\,Z}"] \\
(Y \otimes Z) \otimes X & Y \otimes (Z \otimes X) \arrow[l, "a^{-1}_{Y,\,Z,\,X}"] & Y \otimes (X \otimes Z) \arrow[l, "\mathrm{Id}_Y \otimes b_{X,\,Z}"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "a_{X,\,Y,\,Z}"] \arrow[d, "b_{X \otimes Y,\,Z}"] & X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "\mathrm{Id}_X \otimes b_{Y,\,Z}"] & X \otimes (Z \otimes Y) \arrow[d, "a^{-1}_{X,\,Z,\,Y}"] \\
Z \otimes (X \otimes Y) & (Z \otimes X) \otimes Y \arrow[l, "a_{Z,\,X,\,Y}"] & (X \otimes Z) \otimes Y \arrow[l, "b_{X,\,Z} \otimes \mathrm{Id}_Y"]
\end{tikzcd}$$

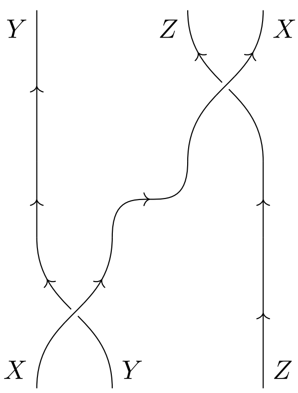
組紐付きモノイダル圏 $\mathcal{C}$ であって，$\mathcal{C}$ の組紐が $b_{Y,\,X} \circ b_{X,\,Y} = \mathrm{Id}_{X \otimes Y}$ を充たすもののことを**対称モノイダル圏** (symmetric monoidal category) と呼ぶ．

ストリング図式で書く場合は

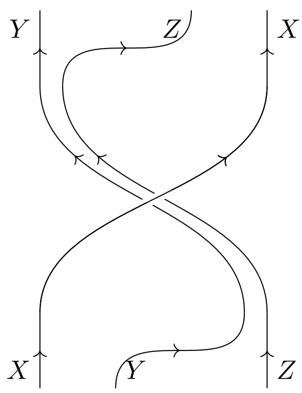
$b_{X,\,Y} =:$ 

$b^{-1}_{X,\,Y} =:$ 

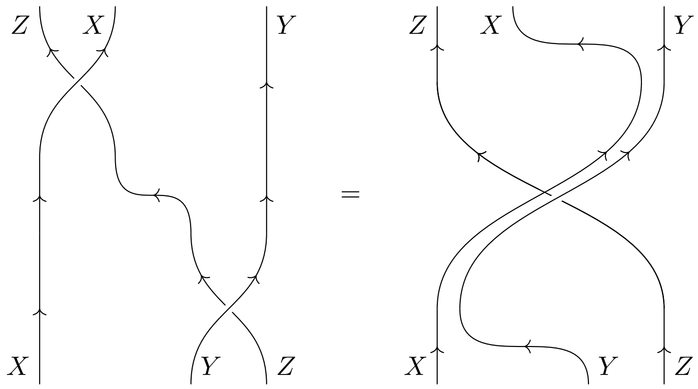
とする．**(hexagon diagrams)** をストリング図式で表すと



$=$

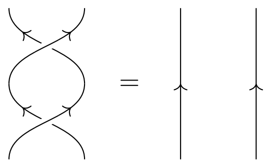


および



のようになる．ただし，associator を明示的に描いた．この図式から，組紐を含むストリング図式がアイソトピーに関して不変であることが分かる．

組紐付きモノイダル圏 $(\mathcal{C},\ \otimes,\ I,\ a,\ l,\ r,\ b)$ が対称であるとき，ストリング図式において



が成り立つ．

定義 1.11: 組紐付きモノイダル関手

2 つの組紐付きモノイダル圏 $(\mathcal{C},\ \otimes_{\mathcal{C}},\ I_{\mathcal{C}},\ a^{\mathcal{C}},\ l^{\mathcal{C}},\ r^{\mathcal{C}},\ b^{\mathcal{C}})$, $(\mathcal{D},\ \otimes_{\mathcal{D}},\ I_{\mathcal{D}},\ a^{\mathcal{D}},\ l^{\mathcal{D}},\ r^{\mathcal{D}},\ b^{\mathcal{D}})$ の間の弱いモノイダル関手 $(F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D},\ \varepsilon,\ \mu)$ が**弱い組紐付きモノイダル関手** (lax braided monoidal functor) であるとは，$\forall X,\ Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して以下の図式が可換になること：

$$
\begin{tikzcd}
F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y) \arrow[r, "b^{\mathcal{D}}_{F(X),F(Y)}"] \arrow[d, "\mu_{X,\,Y}"'] & F(Y) \otimes_{\mathcal{D}} F(X) \arrow[d, "\mu_{Y,\,X}"] \\
F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \arrow[r, "F(b^{\mathcal{C}}_{X,\,Y})"] & F(Y \otimes_{\mathcal{C}} X)
\end{tikzcd}
$$

命題 1.2: Yang-Baxter 方程式

組紐付きモノイダル圏 $(\mathcal{C},\ I,\ a,\ l,\ r,\ b)$ を与える．このとき，$\forall X,\ Y,\ Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して以下が成り立つ：

$$
\begin{aligned}
&a_{Y,\,Z,\,X} \circ (b_{Y,\,Z} \otimes \mathrm{Id}_X) \circ a^{-1}_{Y,\,Z,\,X} \circ (\mathrm{Id}_Y \otimes b_{X,\,Z}) \circ a_{Y,\,X,\,Z} \circ (b_{X,\,Y} \otimes \mathrm{Id}_Z) \\
&= (\mathrm{Id}_Z \otimes b_{X,\,Y}) \circ a_{Z,\,X,\,Y} \circ (b_{X,\,Z} \otimes \mathrm{Id}_Y) \circ a^{-1}_{X,\,Z,\,Y} \circ (\mathrm{Id}_X \otimes b_{Y,\,Z}) \circ a_{X,\,Y,\,Z}
\end{aligned}
$$

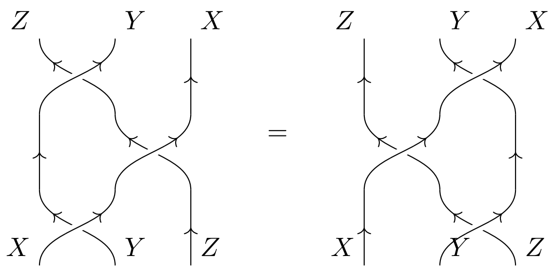
証明 圏 $\mathcal{C}$ における図式

$$
\begin{tikzcd}
X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[d, "\mathrm{Id}_X \otimes b_{Y,Z}"'] & (X \otimes Y) \otimes Z \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r, "b_{X,Y} \otimes \mathrm{Id}_Z"] \arrow[ddd, "b_{(X \otimes Y),Z}"] & (Y \otimes X) \otimes Z \arrow[r, "\cong"] \arrow[ddd, "b_{(Y \otimes X),Z}"] & Y \otimes (X \otimes Z) \arrow[d, "\mathrm{Id}_Y \otimes b_{X,Z}"] \\
X \otimes (Z \otimes Y) \arrow[d, "\cong"'] & & & Y \otimes (Z \otimes X) \arrow[d, "\cong"] \\
(X \otimes Z) \otimes Y \arrow[d, "b_{X,Z} \otimes \mathrm{Id}_Y"'] & & & (Y \otimes Z) \otimes X \arrow[d, "b_{Y,Z} \otimes \mathrm{Id}_X"] \\
(Z \otimes X) \otimes Y \arrow[r, "\cong"'] & Z \otimes (X \otimes Y) \arrow[r, "\mathrm{Id}_Z \otimes b_{X,Y}"'] & Z \otimes (Y \otimes X) & (Z \otimes Y) \otimes X \arrow[l, "\cong"]
\end{tikzcd}
$$

を考える．ただし $\cong$ は associator を表す．赤色の部分は **(hexagon diagrams)** そのものなので可換である．また，中央の四角形は b が自然変換であることから可換である．故に図式の外周部は可換であり，示された． ■

! 以降，原則としてストリング図式においては associator を描画しない．

命題 1.2 をストリング図式で書くと次のようになる：



補題 1.4: dual と組紐

組紐付き rigid モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r, \mathrm{ev}^{\mathrm{L}}, \mathrm{coev}^{\mathrm{L}}, \mathrm{ev}^{\mathrm{R}}, \mathrm{coev}^{\mathrm{R}}, b)$ を与える．このとき，$\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して以下が成り立つ：

(1)

$$
l_X \circ b_{X,\,I} = r_X, \qquad r_X \circ b_{I,\,X} = l_X, \qquad b_{I,\,X} \circ b_{X,\,I} = \mathrm{Id}_{X \otimes I}
$$

(2)

$$
(\mathrm{coev}^{\mathrm{L}}_X \otimes \mathrm{Id}_Y) \circ l_Y^{-1} = b_{Y,\,X \otimes X^*} \circ (\mathrm{Id}_y \otimes \mathrm{coev}^{\mathrm{L}}_X) \circ r_Y^{-1}
$$

(3)

$$
r_Y \circ (\mathrm{Id}_Y \otimes \mathrm{ev}^{\mathrm{L}}_X) = l_Y \circ (\mathrm{ev}^{\mathrm{L}}_X \otimes \mathrm{Id}_Y) \circ b_{Y,\,X^* \otimes X}
$$

証明 (1) [?, EXERCISE 8.1.6, p.196]

(2) 以下の図式を考える：

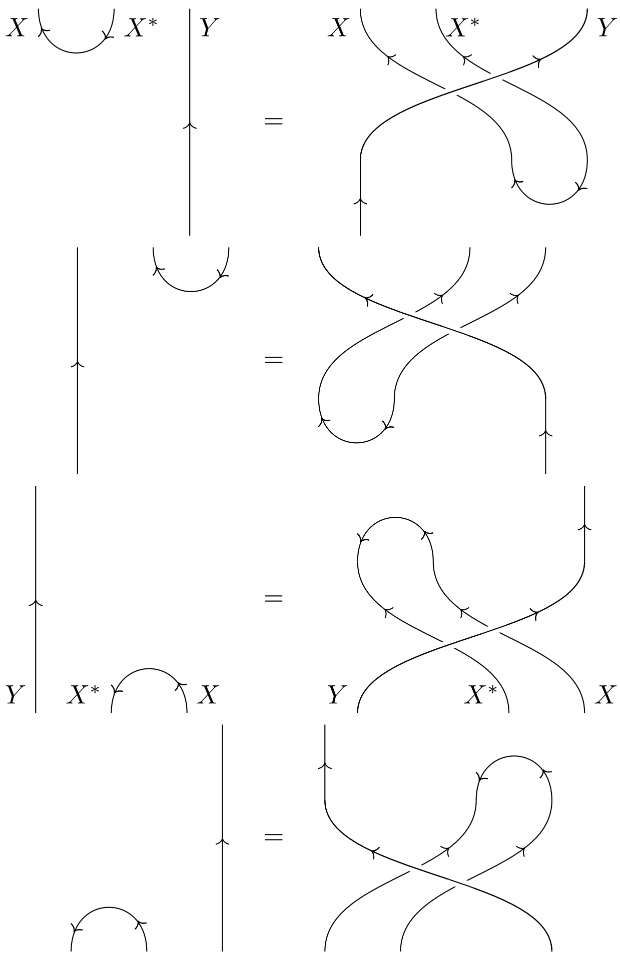
$$
\begin{tikzcd}
 & I \otimes Y \arrow[r, "\mathrm{coev}^{\mathrm{L}}_X \otimes \mathrm{Id}_Y"] & (X \otimes X^*) \otimes Y \\
Y \arrow[ur, "l_Y^{-1}"] \arrow[dr, "r_Y^{-1}"'] & & \\
 & Y \otimes I \arrow[uu, "b_{Y,I}"'] \arrow[r, "\mathrm{Id}_Y \otimes \mathrm{coev}^{\mathrm{L}}_X"'] & Y \otimes (X \otimes X^*) \arrow[uu, "b_{Y, X \otimes X^*}"']
\end{tikzcd}
$$

左端の三角形は (1) より可換である．四角形は，圏 $\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ における射 $(\mathrm{Id}_Y, \mathrm{coev}^{\mathrm{L}}_X)$ に対して $b\colon \otimes \Longrightarrow \otimes \circ \tau$ の自然性を用いることで可換だとわかる．よって外周部も可換であり，示された．

(3) (1) と同様.

■

補題 1.4-(2), (3) をストリング図式で書くと次のようになる：



ただし left/right unitor を省略した．つまり，端で折り返している組紐は，下を潜らせることができる．

1.2.3 リボン構造

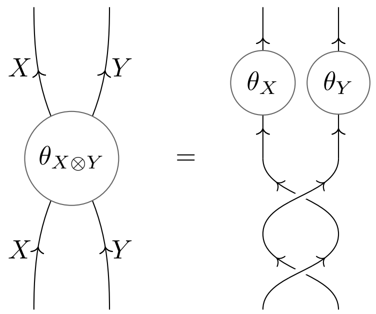
定義 1.12: リボン構造

組紐付き rigid モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \mathrm{ev}^{\mathrm{L}}, \mathrm{coev}^{\mathrm{L}}, \mathrm{ev}^{\mathrm{R}}, \mathrm{coev}^{\mathrm{R}}, b)$ の**リボン構造** (ribbon structure) とは，自然同型 $\theta\colon \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \Longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ であって以下を充たすもののこと：

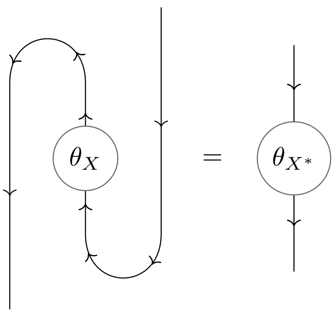
(Rib-1) $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $\theta_{X\otimes Y} = (\theta_X \otimes \theta_Y) \circ b_{Y,X} \circ b_{X,Y}$ が成り立つ．

(Rib-2) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $(\theta_X)^* = \theta_{X^*}$

ストリング図式で **(Rib-1)** を書くと



となり，**(Rib-2)** は



となる．

1.3 テンソル圏・フュージョン圏

! これまではモノイダル圏の対象を英大文字 $X, Y, Z, \ldots$ で，単位対象を I と書いてきたが，以下では対象を英小文字 $x, y, z, \ldots$ で，単位対象を 1 と書くことにする．

定義 1.13: 環圏

圏 $\mathcal{C}$ が**多重環圏** (multiring category) であるとは，以下の条件を充たすこと：

(mR-1) $\mathcal{C}$ は局所有限な $\mathbb{K}$-線形アーベル圏

(mR-2) $\mathcal{C}$ はモノイダル圏 $(\mathcal{C},\, \otimes,\, 1,\, a,\, l,\, r)$

(mR-3) 関手 $\otimes \colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ が $\mathbb{K}$-双線形かつ双完全

圏 $\mathcal{C}$ が**環圏** (ring category) であるとは，以下の条件を充たすこと：

(R-1) $\mathcal{C}$ は多重環圏

(R-2) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(1,\, 1) \cong \mathbb{K}$

補題 1.5: 環圏における 1 の単純性

(1) 左双対を持つ多重環圏 $(\mathcal{C},\, \otimes,\, 1,\, a,\, l,\, r,\, \mathrm{coev}^{\mathrm{L}},\, \mathrm{ev}^{\mathrm{L}})$ において，左双対関手 $(\text{-})^* \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ は完全である．

(2) 左双対を持つ環圏 $(\mathcal{C},\, \otimes,\, 1,\, a,\, l,\, r,\, \mathrm{coev}^{\mathrm{L}},\, \mathrm{ev}^{\mathrm{L}})$ において，$1 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ は単純対象である．

<u>**証明**</u> (1) 完全列 $0 \longrightarrow x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z \longrightarrow 0$ を与える．示すべきは $0 \longrightarrow z^* \xrightarrow{g^*} y^* \xrightarrow{f^*} x^* \longrightarrow 0$ が完全であることである．$\forall w \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を 1 つとり，圏 $\mathcal{C}$ における図式

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(w,\, z^*) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(w,\, g^*)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(w,\, y^*) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(w,\, f^*)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(w,\, x^*)$$

を考える．補題 1.3-(1) の自然同型によりこれは

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(w \otimes z,\, 1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(w \otimes y,\, 1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(w \otimes x,\, 1)$$

と書けるが，多重環圏の定義より $\otimes$ は完全で，かつ $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-},\, 1)$ は左完全関手なので，これは完全列である．よって $0 \longrightarrow z^* \xrightarrow{g^*} y^* \xrightarrow{f^*} x^*$ は完全である．同様の議論から $z^* \xrightarrow{g^*} y^* \xrightarrow{f^*} x^* \longrightarrow 0$ の完全性も従う．

(2) 任意のゼロでない単純な部分対象 $x \overset{i}{\hookrightarrow} 1$ を 1 つとる[*1]．$\mathcal{C}$ はアーベル圏なので i の余核が存在し，

$$0 \longrightarrow x \overset{i}{\hookrightarrow} 1 \xrightarrow{\mathrm{coker}\, i} \mathrm{Coker}\, i \longrightarrow 0$$

は完全列になる．(1) より

$$0 \longrightarrow (\mathrm{Coker}\, i)^* \longrightarrow 1 \longrightarrow x^* \longrightarrow 0$$

は完全列である．さらに，環圏の定義より $\otimes$ は完全なので

$$0 \longrightarrow x \otimes (\mathrm{Coker}\, i)^* \longrightarrow x \longrightarrow x \otimes x^* \longrightarrow 0 \tag{1.3.1}$$

も完全列だが，x は単純でかつ $x \otimes x^* \neq 0$（evaluation が零射でないため）なので[*2] $x \otimes x^* \cong x$ が分かった．よってエピ射 $1 \xrightarrow{\mathrm{coev}^{\mathrm{L}}_x} x \otimes x^* \longrightarrow x$ を得る．よって零射でない $1 \twoheadrightarrow x \overset{i}{\hookrightarrow} 1$ を得るが，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(1,\, 1) = \mathbb{K}$ なので $x = 1$ でなくてはいけない．

*1 アーベル圏 $\mathcal{C}$ の有限性から，このような x は存在する．

*2 (1.3.1) は完全列なので $x \otimes (\mathrm{Coker}\, i)^* \longrightarrow x$ はモノ射であり，かつ $x \neq 0$ なので $\mathrm{Coker}\, i \neq 1$ であるから，$x \otimes (\mathrm{Coker}\, i)^* = 0$ が言える．

■

定義 1.14: テンソル圏・フュージョン圏

圏 $\mathcal{C}$ が**多重テンソル圏** (multitensor category) であるとは，以下の条件を充たすこと：

(mT-1) $\mathcal{C}$ は局所有限な $\mathbb{K}$-線形アーベル圏

(mT-2) $\mathcal{C}$ は rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{C},\ \otimes,\ 1,\ a,\ l,\ r,\ \mathrm{ev}^{\mathrm{L}},\ \mathrm{coev}^{\mathrm{L}},\ \mathrm{ev}^{\mathrm{R}},\ \mathrm{coev}^{\mathrm{R}})$

(mT-3) 関手 $\otimes\colon \mathcal{C}\times\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ が $\forall x,\ y,\ z,\ w \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して定める写像 $\otimes_{x,y,z,w}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\ y)\times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(z,\ w) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x\otimes z,\ y\otimes w)$ が $\mathbb{K}$-双線形

圏 $\mathcal{C}$ が**テンソル圏** (tensor category) であるとは，以下の条件を充たすこと：

(T-1) $\mathcal{C}$ は多重テンソル圏

(T-2) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(1,\ 1) \cong \mathbb{K}$

圏 $\mathcal{C}$ が**多重フュージョン圏** (multifusion category) であるとは，以下の条件を充たすこと：

(mFus-1) $\mathcal{C}$ は多重テンソル圏

(mFus-2) $\mathcal{C}$ は $\mathbb{K}$-線形アーベル圏として有限かつ半単純

圏 $\mathcal{C}$ が**フュージョン圏** (fusion category) であるとは，以下の条件を充たすこと：

(Fus-1) $\mathcal{C}$ はテンソル圏

(Fus-2) $\mathcal{C}$ は $\mathbb{K}$-線形アーベル圏として有限かつ半単純

命題 1.3: 多重テンソル圏のテンソル積は双完全

多重テンソル圏 $\mathcal{C}$ の関手 $\otimes\colon \mathcal{C}\times\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ は双完全である．

<u>証明</u> [?, PROPOSITION 4.2.1., p.66] ■

命題 1.3 より，

$$\text{（多重）テンソル圏} \quad \Longrightarrow \quad \text{（多重）環圏}$$

が言える．

命題 1.4: テンソル圏における 1 の単純性

テンソル圏において 1 は単純である．

<u>証明</u> 命題 1.3 と補題 1.5 とテンソル圏の定義から従う． ■

【例 1.3.1】圏 $\mathcal{C}_G$ と $\mathbf{Vec}_G$

G を群とする．厳密なモノイダル圏 $\mathcal{C}_G$ を，

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_G) \coloneqq G$
- $\forall g_1,\, g_2 \in G$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_G}(g_1,\, g_2) \coloneqq \begin{cases} \mathrm{U}(1), & g_1 = g_2 \\ \emptyset, & g_1 \neq g_2 \end{cases}$$

- $g_1 \otimes g_2 \coloneqq g_1 g_2$ かつ，$g_i \xrightarrow{\forall \theta_i} g_i$ に対して $\theta_1 \otimes \theta_2 \coloneqq \theta_1 \theta_2$
- $1 \coloneqq 1_G$
- $a_{g_1, g_2, g_3} \coloneqq 1,\ l_g \coloneqq 1,\ r_g \coloneqq 1$

で定義する．

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ とする．厳密なモノイダル圏 $\mathbf{Vec}_G$ を，

- G-graded な $\mathbb{K}$-ベクトル空間

$$V = \bigoplus_{g \in G} V_g$$

を対象とする．

- grading を保存する $\mathbb{K}$-線型変換

$$f \colon \bigoplus_{g \in G} V_g \longrightarrow \bigoplus_{g \in G} W_g \quad \text{s.t.} \quad \forall g \in G,\ f(V_g) \subset W_g$$

を射とする．

- テンソル積 $\otimes \colon \mathbf{Vec}_G \times \mathbf{Vec}_G \longrightarrow \mathbf{Vec}_G$ は，

$$V \otimes W \coloneqq \bigoplus_{g \in G} \left(\bigoplus_{\substack{x,\, y \in G, \\ xy = g}} V_x \otimes_{\mathbb{K}} W_y \right)$$

と定義する．

- 単位対象は $1 \coloneqq \mathbb{K}$ とする[a]
- $a_{g_1, g_2, g_3} \coloneqq 1,\ l_g \coloneqq 1,\ r_g \coloneqq 1$

によって定義する．G が有限群ならば $\mathcal{C}_G$ はフュージョン圏である．

[a] $1_G \in G$ 成分以外が全て 0

【例 1.3.2】圏 $\mathcal{C}_G^{\alpha}$ と Vec_G^{α}

G を群とする．**【例 1.3.1】**の associator と unitors を非自明にしてみよう．今 $\alpha \in Z^3_{\mathrm{Grp}}\big(G;\, \mathrm{U}(1)\big)$ を 1 つ固定する[a]．

モノイダル圏 $\mathcal{C}_G^{\alpha}$ を，

$$a_{g_1, g_2, g_3} \coloneqq \alpha(g_1,\, g_2,\, g_3),$$

$$
\begin{aligned}
l_g &\coloneqq \alpha(1,\,1,\,g)^{-1},\\
r_g &\coloneqq \alpha(g,\,1,\,1)
\end{aligned}
$$

とおくことにより定義する[b]．実際，コサイクル条件および $\mathrm{U}(1)$ の可換性により

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{Id}_{g_4} \otimes a_{g_1,g_2,g_3}) \circ a_{g_4,g_1\otimes g_2,g_3} \circ (a_{g_4,g_1,g_2} \otimes \mathrm{Id}_{g_3})\\
&= \alpha(g_1,\,g_2,\,g_3)\alpha(g_4,\,g_1g_2,\,g_3)\alpha(g_4,\,g_1,\,g_2)\\
&= \alpha(g_4g_1,\,g_2,\,g_3)\alpha(g_4,\,g_1,\,g_2g_3)\\
&= \alpha(g_4,\,g_1,\,g_2g_3)\alpha(g_4g_1,\,g_2,\,g_3)\\
&= a_{g_4,g_1,g_2g_3} \circ a_{g_4\otimes g_1,\,g_2,\,g_3}
\end{aligned}
$$

の通りに **(pentagon identity)** が成り立ち，

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{Id}_{g_1} \otimes l_{g_2}) \circ a_{g_1,1,g_2} &= \frac{\alpha(g_1,\,1,\,g_2)}{\alpha(1,\,1,\,g_2)}\\
&= \frac{\alpha(g_1,\,1,\,1)\cancel{\alpha(g_1,\,1,\,g_2)\alpha(1,\,1,\,g_2)}}{\cancel{\alpha(g_1,\,1,\,g_2)\alpha(1,\,1,\,g_2)}}\\
&= \alpha(g_1,\,1,\,1)\\
&= r_{g_1}
\end{aligned}
$$

の通りに **(triangle identity)** が成り立つ．もし $l_g = r_g = \mathrm{Id}_g$ にしたければ

$$
\forall g,\,h \in G,\ \alpha(g,\,1,\,h) = 1_G
$$

を充たす $\alpha \in Z^3_{\mathrm{Grp}}\bigl(G;\,\mathrm{U}(1)\bigr)$ をとることが必要十分である（**正規化条件**）．
圏 $\mathbf{Vec}^{\alpha}_{G}$ は，$\alpha \in Z^3_{\mathrm{Grp}}\bigl(G;\,\mathbb{K}^{\times}\bigr)$ に対して $\mathcal{C}^{\alpha}_{G}$ の構成を線形に拡張することで得られる．
<u>G が有限群ならば</u> $\mathbf{Vec}^{\alpha}_{G}$ はフュージョン圏である．

---

[a] i.e. 3-コサイクル
[b] 他のデータは【例 1.3.1】と全く同じである

定義 1.15: テンソル関手・ファイバー関手

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を多重環圏とする．関手 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ を与える．F が**テンソル関手** (tensor functor) であるとは，以下を充たすこと：

(TF-1) F は $\mathbb{K}$-線形
(TF-2) F は強いモノイダル関手
(TF-3) F は完全かつ忠実[a]

特に $\mathcal{D} = \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ のとき，テンソル関手 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ は**ファイバー関手** (fiber functor) と呼ばれる．

---

[a] この条件は [?, DEFINITION 4.2.5., p.66] に合わせて付けたものであり，テンソル関手と言った際には必要とされないことも多い．

【例 1.3.3】圏 $\mathbf{Vec}_G^{\alpha}$ のテンソル関手

$G_1,\, G_2$ を群，$\omega_i \in Z^3_{\mathrm{Grp}}\big(G_i;\, \mathrm{U}(1)\big)$ を 3-コサイクルとする．テンソル関手

$$F\colon \mathcal{C}_{G_1}^{\alpha_1} \longrightarrow \mathcal{C}_{G_2}^{\alpha_2}$$

とはどのようなものだろうか．
まず F は強いモノイダル関手であるから，対象の対応について群準同型

$$f\colon G_1 \longrightarrow G_2$$

このとき強いモノイダル関手の持つ自然変換とは，ある $\mu \in C^2_{\mathrm{Grp}}\big(G_1;\, \mathrm{U}(1)\big)$ を用いて

$$\mu_{g_1, g_2} \coloneqq \mu(g_1,\, g_2)\mathrm{Id}_{f(g_1 g_2)}\colon f(g_1)f(g_2) \xrightarrow{\cong} f(g_1 g_2) \quad {}^{\mathrm{w}/} \quad g_1,\, g_2 \in G_1$$

と書けるが，**(associativity)** から

$$\mu(g_1,\, g_2 g_3)\mu(g_2,\, g_3)\alpha_2\big(f(g_1),\, f(g_2),\, f(g_3)\big) = \alpha_1(g_1,\, g_2,\, g_3)\mu(g_1 g_2,\, g_3)\mu(g_1,\, g_2)$$

でなくてはいけない．i.e.

$$\alpha_1 = f^* \alpha_2 \cdot \delta\mu \tag{1.3.2}$$

である．逆に群準同型 $f\colon G_1 \longrightarrow G_2$ および $\mu \in C^3_{\mathrm{Grp}}\big(G_1;\, \mathrm{U}(1)\big)$ の組 $(f,\, \mu)$ であって (1.3.2) を充たすものが与えられると，これらを素材にしてテンソル関手

$$F\colon \mathcal{C}_{G_1}^{\alpha_1} \longrightarrow \mathcal{C}_{G_2}^{\alpha_2}$$

を構成することができる．このような関手 F が圏同値になる必要十分条件は f が群の同型写像になることである．

【例 1.3.4】圏 $\mathbf{Vec}_G^{\alpha}$ のモノイダル自然変換

【例 **1.3.3**】の構成で得られるテンソル関手を $F_{f,\,\mu}$ と書く．このとき，モノイダル自然変換

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Vec}_{G_1}^{\alpha_1} \arrow[r, bend left=50, "F_{f,\,\mu}"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "F_{f',\,\mu'}"'{name=D}] & \mathbf{Vec}_{G_2}^{\alpha_2} \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\tau"]
\end{tikzcd}$$

を同定しよう．まず自然変換と言うからには $\forall g \in G_1$ に対して

$$\tau_g \coloneqq \tau(g)\mathrm{Id}_{f(g)}\colon f(g) \longrightarrow f'(g)$$

を定めないといけない．ただし $\tau \in C^1_{\mathrm{Grp}}\big(G_1;\, \mathrm{U}(1)\big)$ である．ところが，【例 **1.3.2**】より $\mathbf{Vec}_{G_2}^{\alpha_2}$ の射は $f(g) = f'(g)$，i.e. $f = f'$ でないと自然変換が存在しない．

(テンソル積の保存) の条件から，$\forall g_1,\, g_2 \in G_1$ に対して

$$\mu'(g_1,\, g_2)\tau(g_1)\tau(g_2) = \tau(g_1 g_2)\mu(g_1,\, g_2)$$

でなくてはいけない．i.e.

$$\mu = \mu' \cdot \delta\tau \tag{1.3.3}$$

である．逆に (1.3.3) を充たす $\tau \in C^1_{\mathrm{Grp}}\big(G_1;\, \mathrm{U}(1)\big)$ からモノイダル自然変換 $\tau\colon F_{f,\,\mu} \Longrightarrow F_{f,\,\mu'}$ を構成することができる．

1.3.1　量子次元

定義 1.16: 量子トレース

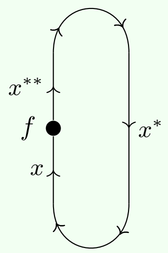
- rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{C},\, \otimes,\, 1,\, a,\, l,\, r,\, \mathrm{ev}^{\mathrm{L}},\, \mathrm{coev}^{\mathrm{L}},\, \mathrm{ev}^{\mathrm{R}},\, \mathrm{coev}^{\mathrm{R}})$
- 対象 $x \in \mathcal{C}$
- $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, x^{**}),\ g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, {}^{**}x)$

を与える．

- f の**左量子トレース** (left quantum trace) を以下で定義する：

$$\mathrm{Tr}^{\mathrm{L}}(f)\colon 1 \xrightarrow{\mathrm{coev}^{\mathrm{L}}_x} x \otimes x^* \xrightarrow{f \otimes \mathrm{Id}_x} x^{**} \otimes x^* \xrightarrow{\mathrm{ev}^{\mathrm{L}}_{x^*}} 1$$

ストリング図式で書くと次のようになる[a]：

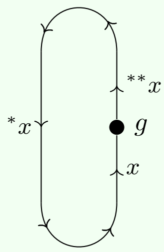
$\mathrm{Tr}^{\mathrm{L}}(f) :=$ 

$\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(1,\, 1)$

- g の**右量子トレース** (right quantum trace) を以下で定義する：

$$\mathrm{Tr}^{\mathrm{R}}(g)\colon 1 \xrightarrow{\mathrm{coev}^{\mathrm{R}}_x} {}^*x \otimes x \xrightarrow{\mathrm{Id}_{{}^*x} \otimes g} {}^*x \otimes {}^{**}x \xrightarrow{\mathrm{coev}^{\mathrm{R}}_{{}^*x}} 1$$

ストリング図式で書くと次のようになる：

$\mathrm{Tr}^{\mathrm{R}}(g) :=$  $\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(1,\, 1)$

[a] $\mathrm{ev}^{\mathrm{L}}_{V^*} = \mathrm{ev}^{\mathrm{R}}_{V^{**}}$ を使った．

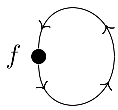
補題 1.6: 左量子トレースと右量子トレースの関係

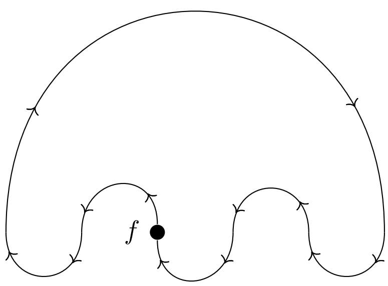
rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{C},\, \otimes,\, 1,\, a,\, l,\, r,\, \mathrm{ev}^{\mathrm{L}},\, \mathrm{coev}^{\mathrm{L}},\, \mathrm{ev}^{\mathrm{R}},\, \mathrm{coev}^{\mathrm{R}})$ を与える．このとき，$\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, x^{**})$ について

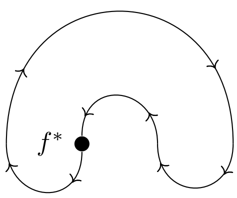
$$\mathrm{Tr}^{\mathrm{L}}(f) = \mathrm{Tr}^{\mathrm{R}}(f^*)$$

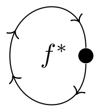
が成り立つ．

証明

$\mathrm{Tr}^{\mathrm{L}}(f) =$ 

$=$  $\because$ **(zig-zag equations)**

$=$ 

$=$ 

$\because$ **(zig-zag equations)**

ここで，補題 1.1 より $\mathrm{ev}^{\mathrm{L}}_{x^*} = \mathrm{ev}^{\mathrm{R}}_{x^{**}}$, $\mathrm{coev}^{\mathrm{L}}_{x^{**}} = \mathrm{coev}^{\mathrm{R}}_{x^{***}}$ が成り立つので，最右辺は $\mathrm{Tr}^{\mathrm{R}}(f^*)$ に等しい． ■

定義 1.17: 旋回構造

rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \mathrm{ev}^{\mathrm{L}}, \mathrm{coev}^{\mathrm{L}}, \mathrm{ev}^{\mathrm{R}}, \mathrm{coev}^{\mathrm{R}})$ を与える．$\mathcal{C}$ の**旋回構造** (pivotal structure) とは，モノイダル自然同型

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "(\text{-})^{**}"'{name=D}] & \mathcal{C} \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "p"] \end{tikzcd}$$

のこと．ただし $(\text{-})^{**}$ は【例 **1.2.2**】で構成したモノイダル関手である．

補題 1.7: 旋回構造と双対

rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \mathrm{ev}^{\mathrm{L}}, \mathrm{coev}^{\mathrm{L}}, \mathrm{ev}^{\mathrm{R}}, \mathrm{coev}^{\mathrm{R}})$ の旋回構造 p を与える．このとき $\forall x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して以下が成り立つ：

(1) $p_{x^*} = (p_x)^{*-1}$
(2) $p_{x^{**}} = (p_x)^{**}$

<u>**証明**</u> $\forall x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を 1 つ固定する．

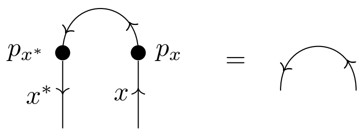
(1) $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ は厳密なモノイダル関手であり，【例 **1.2.2**】より $(\text{-})^{**} \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ もまた厳密なモノイダル関手であるから，$p \colon \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \Longrightarrow (\text{-})^{**}$ がモノイダル自然同型であることより $\forall x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について以下の図式は可換になる：

$$\begin{tikzcd} x^* \otimes x \arrow[r, "p_{x^*} \otimes p_x"] \arrow[d, "="'] & x^{***} \otimes x^{**} \arrow[d, "="] \\ x^* \otimes x \arrow[r, "p_{x^* \otimes x}"] & (x^* \otimes x)^{**} \end{tikzcd}$$

さらに，p の自然性から図式

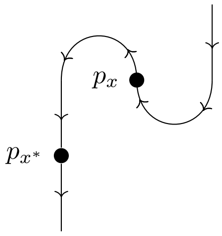
$$\begin{tikzcd} x^* \otimes x \arrow[rr, "p_{x^* \otimes x}"] \arrow[dr, "\mathrm{ev}^{\mathrm{L}}_x"'] & & (x^* \otimes x^{**}) \arrow[dl, "\mathrm{ev}^{\mathrm{L}}_{x^{**}}"] \\ & 1 & \end{tikzcd}$$

も可換であるから，

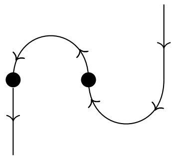


が成り立つことが分かった．よって

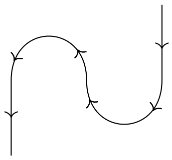
$(p_x)^* \circ p_{x^*} =$



$=$



$=$



$= \mathrm{Id}_{x^*}$ $\quad\because$ **(zig-zag equations)**

が言える．$p_{x^*} \circ (p_x)^* = \mathrm{Id}_{x^{***}}$ も同様．

(2) p の自然性より

$$(p_x)^{**} \circ p_x = p_{x^{**}} \circ p_x$$

が言える．$p_x \colon x \longrightarrow x^{**}$ は同型射だから示された．

■

非常に重要な予想がある [?, Conjecture 2.8., p.5]：

予想 1.1: フュージョン圏は pivotal

任意のフュージョン圏は旋回構造を持つ．

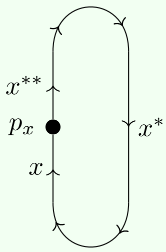
本資料ではこの予想を認める．

定義 1.18: 量子次元

旋回構造 p を持つ rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \mathrm{ev}^{\mathrm{L}}, \mathrm{coev}^{\mathrm{L}}, \mathrm{ev}^{\mathrm{R}}, \mathrm{coev}^{\mathrm{R}})$ を与える．$\mathcal{C}$ の対

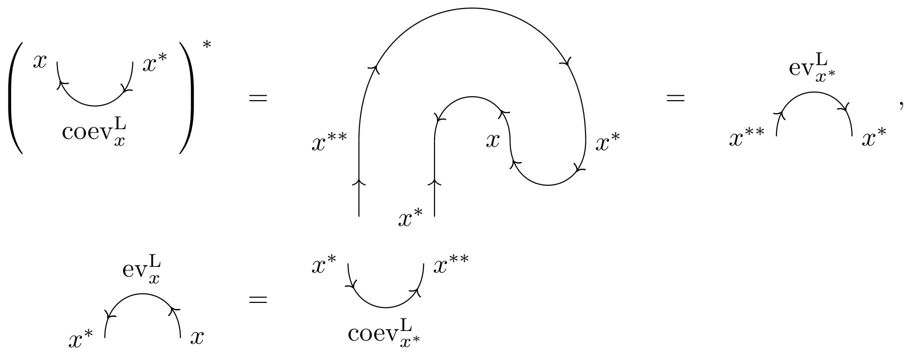
象 $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の，p に関する**量子次元** (quantum dimension) を以下で定義する：

$$\dim_p(x) \coloneqq \mathrm{Tr}^{\mathrm{L}}(p_x) \coloneqq$$



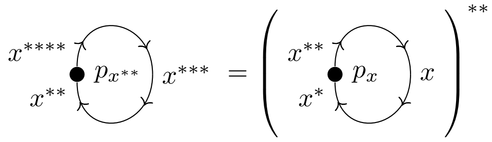
$$\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(1,\, 1)$$

補題 1.1-(2) の証明より



であるから，(-)** の関手性および補題 1.7-(2) により

$$\dim_p(x^{**}) =$$



$$= \dim_p(x)$$

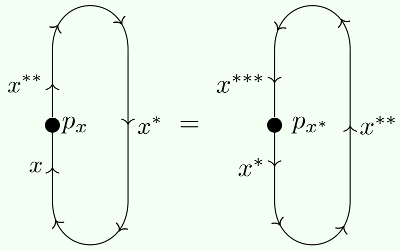
が言える．ただし，(-)* の定義 (1.2.1) より $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(1,\, 1)$ に対して[*3] $f^* = (l_1 \otimes \mathrm{Id}_1) \circ (\mathrm{Id}_1 \otimes f \otimes \mathrm{Id}_1) \circ (\mathrm{Id}_1 \otimes l_1^{-1}) = f$ が成り立つことを使った．

[*3] $1^* = {}^*1 = 1$ である．

定義 1.19: 球状圏

テンソル圏 $(\mathcal{C},\,\otimes,\,1,\,a,\,l,\,r,\,\mathrm{ev}^{\mathrm{L}},\,\mathrm{coev}^{\mathrm{L}},\,\mathrm{ev}^{\mathrm{R}},\,\mathrm{coev}^{\mathrm{R}})$ の旋回構造 p が**球状** (spherical) であるとは，$\forall x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$\dim_p(x) =$



$= \dim_p(x^*)$

が成り立つことを言う．

定理 1.1: 球状圏における左/右量子トレース

球状圏 $(\mathcal{C},\,\otimes,\,1,\,a,\,l,\,r,\,\mathrm{ev}^{\mathrm{L}},\,\mathrm{coev}^{\mathrm{L}},\,\mathrm{ev}^{\mathrm{R}},\,\mathrm{coev}^{\mathrm{R}},\,p)$ およびその対象 $\forall x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を 1 つとる．
このとき，$\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\,x)$ に対して以下が成り立つ：

$$\mathrm{Tr}^{\mathrm{L}}(p_x \circ f) = \mathrm{Tr}^{\mathrm{R}}(f \circ p_x^{-1})$$

証明 $f = \mathrm{Id}_x$ の場合は補題 1.6 および補題 1.7-(1) から従う．一般の f については [?, THEOREM 4.7.15] を参照． ■

1.3.2 フュージョン環・Frobenius-Perron 次元

$(\mathcal{C},\,\otimes,\,1,\,a,\,l,\,r,\,\mathrm{coev}^{\mathrm{L}},\,\mathrm{ev}^{\mathrm{L}},\,\mathrm{coev}^{\mathrm{R}},\,\mathrm{ev}^{\mathrm{R}})$ を体 $\mathbb{K}$ 上の多重フュージョン圏とする．$\mathcal{C}$ の単純対象の同型類が成す有限集合を $\mathbf{Simp}(\mathcal{C})$ と書く．

このとき，$\mathrm{Simp}(\mathcal{C})$ が生成する自由 $\mathbb{Z}$-加群 $\mathbb{Z}^{\oplus\,\mathrm{Simp}(\mathcal{C})}$ の上に次のようにして積を入れることができる：

$$x \star y \coloneqq [x \otimes y] \qquad \forall x,\, y \in \mathrm{Simp}(\mathcal{C}) \tag{1.3.4}$$

$\mathcal{C}$ は半単純なので，右辺に対して非負整数の族 $\left\{N_{xy}^{c} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\right\}_{c \in \mathrm{Simp}(\mathcal{C})}$ が存在して

$$x \star y = \sum_{c \in \mathrm{Simp}(\mathcal{C})} N_{xy}^{c}\, c \tag{1.3.5}$$

と書ける．式 (1.3.5) のことを**フュージョン則** (fusion rule) と呼ぶ．$\mathbb{Z}^{\oplus\,\mathrm{Simp}(\mathcal{C})}$ 上の積 (1.3.4) は明らかに結合則を充たし，単位元 $[1]$ を持つ[*4]．このようにしてできる環 $(\mathbb{Z}^{\oplus\,\mathrm{Simp}(\mathcal{C})},\,\star\,,\,[1])$ のことを**フュージョン環** (fusion ring) と呼ぶ．

[*4] 命題 1.4 より $\mathcal{C}$ がテンソル圏ならば $1 \in \mathrm{Simp}(\mathcal{C})$ であるが，多重テンソル圏においては必ずしもそうではない．しかるに，$1 \notin \mathrm{Simp}\,\mathcal{C}$ であったとしても $\mathcal{C}$ の半単純性から $[1] \in \mathbb{Z}^{\oplus\,\mathrm{Simp}(\mathcal{C})}$ は成り立つ．

定義 1.20: Frobenius-Perron 次元

$x \in \mathrm{Simp}(\mathcal{C})$ の **Frobenius-Perron 次元** (Frobenius-Perron dimension) とは，非負整数値行列 $\left[N_{xb}^{c}\right]_{1\le b,\, c\le |\mathrm{Simp}(\mathcal{C})|}$ の最大の非負固有値 $\mathbf{FPdim}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{C}$ のこと．

1.3.3 F-シンボル

多重フュージョン圏は半単純かつ有限なので，補題??-(1) および極限・余極限と Hom の交換，フュージョン則 (1.3.5) から

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(x\otimes y,\, z\right) \cong \bigoplus_{w\in \mathrm{Simp}(\mathcal{C})} N_{xy}^{w}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(w,\, z\right) \cong \mathbb{K}^{\oplus N_{xy}^{w}}$$

が $\forall x,\, y,\, z \in \mathrm{Simp}\,\mathcal{C}$ に対して成り立つ．i.e. $\dim_{\mathbb{K}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(x\otimes y,\, z\right) = N_{xy}^{z}$ である[*5]．よって

$$\begin{aligned}
(x\otimes y)\otimes z &\cong \bigoplus_{w,\, u\in \mathrm{Simp}\,\mathcal{C}} N_{xy}^{w}N_{wz}^{u}\, u \\
&\cong \bigoplus_{w,\, u\in \mathrm{Simp}\,\mathcal{C}} \dim_{\mathbb{K}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(x\otimes y,\, w\right)\dim_{\mathbb{K}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(w\otimes z,\, u\right) u \\
x\otimes(y\otimes z) &\cong \bigoplus_{w,\, u\in \mathrm{Simp}\,\mathcal{C}} N_{wx}^{u}N_{yz}^{w}\, u \\
&\cong \bigoplus_{w,\, u\in \mathrm{Simp}\,\mathcal{C}} \dim_{\mathbb{K}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(w\otimes x,\, u\right)\dim_{\mathbb{K}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(y\otimes z,\, w\right) u
\end{aligned}$$

が成り立つが，associator による自然同型 $(x\otimes y)\otimes z \cong x\otimes(y\otimes z)$ により

$$\begin{aligned}
&\sum_{w\in \mathrm{Simp}\,\mathcal{C}} \dim_{\mathbb{K}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(x\otimes y,\, w\right)\dim_{\mathbb{K}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(w\otimes z,\, u\right) \\
&= \sum_{w\in \mathrm{Simp}\,\mathcal{C}} \dim_{\mathbb{K}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(w\otimes x,\, u\right)\dim_{\mathbb{K}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(y\otimes z,\, w\right)
\end{aligned}$$

が言える．ここから $\mathbb{K}$-ベクトル空間としての同型

$$\Phi_{u}^{xyz}\colon \bigoplus_{w}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(x\otimes y,\, w\right)\otimes_{\mathbb{K}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(w\otimes z,\, u\right) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{w}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(w\otimes x,\, u\right)\otimes_{\mathbb{K}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(y\otimes z,\, w\right) \tag{1.3.6}$$

が存在することが分かる．この同型写像の第 $(a,\, b)$ 成分

$$(\Phi_{u}^{xyz})_{ab}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(x\otimes y,\, a\right)\otimes_{\mathbb{K}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(a\otimes z,\, u\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(b\otimes x,\, u\right)\otimes_{\mathbb{K}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(y\otimes z,\, b\right)$$

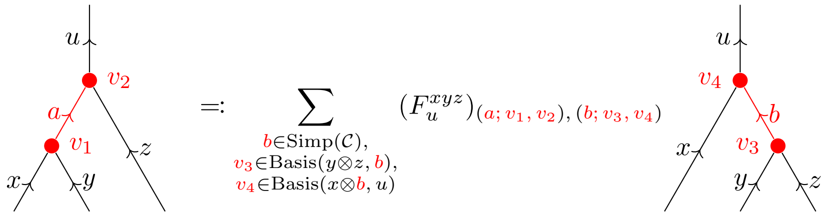
のことを **6j-シンボル** (6j-symbol) と呼ぶ．

特に $\mathbb{K}$ が代数閉体のときは，Müger 半単純性および補題 1.3 より，(1.3.6) の同型写像は

$$F_{u}^{xyz}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left((x\otimes y)\otimes z,\, u\right) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(x\otimes(y\otimes z),\, u\right)$$

[*5] この次元は $\mathbb{K}$-ベクトル空間としての次元である．

と等価である．この同型写像の行列要素を ***F*-シンボル** (F-symbol) と呼ぶ．ストリング図式として書くと，F-シンボルとは次のようにして定義される $(F^{xyz}_u)_{(a;\,v_1,\,v_2),\,(b;\,v_3,\,v_4)} \in \mathbb{K}$ のことである：



ただし，$\forall x,\, y,\, z \in \mathrm{Simp}(\mathcal{C})$ に対して定まる $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x \otimes y,\, z)$ の基底を $\mathrm{Basis}(x \otimes y,\, z)$ と書いた．

1.3.4　C^* 圏・ユニタリフュージョン圏

標数 0 の代数閉体 $\mathbb{K}$ 上のフュージョン圏 $(\mathcal{C},\, \otimes,\, 1,\, a,\, l,\, r,\, \mathrm{coev}^{\mathrm{L}},\, \mathrm{ev}^{\mathrm{L}},\, \mathrm{coev}^{\mathrm{R}},\, \mathrm{ev}^{\mathrm{R}})$ とその上の旋回構造 p を考える．圏 $\mathcal{C}$ の**圏論的次元** (categorical dimension) を

$$\mathbf{dim}(\boldsymbol{\mathcal{C}}) \coloneqq \sum_{x \in \mathrm{Simp}(\mathcal{C})} \mathrm{Tr}^{\mathrm{L}}(p_x) \circ \mathrm{Tr}^{\mathrm{L}}\big((p_x^{-1})^*\big) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(1,\, 1) = \mathbb{K}$$

で定義し[*6]，Frobenius-Perron 次元について

$$\mathbf{FPdim}(\boldsymbol{\mathcal{C}}) \coloneqq \sum_{x \in \mathrm{Simp}(\mathcal{C})} \mathrm{FPdim}(x)^2$$

とおく．

定義 1.21: 擬ユニタリフュージョン圏

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ とする．このときフュージョン圏 $\mathcal{C}$ が**擬ユニタリ** (pseudo-unitary) であるとは，

$$\dim(\mathcal{C}) = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C})$$

が成り立つことを言う [**?**, DEFINITION 9.4.4., p.283]．

命題 1.5: 擬ユニタリフュージョン圏における球状構造

擬ユニタリフュージョン圏 $\mathcal{C}$ は一意的な球状構造 p を持つ．
さらに，その球状構造 p は $\forall x \in \mathrm{Simp}(\mathcal{C})$ に対して $\dim_p(x) = \mathrm{FPdim}_{\mathcal{C}}(x)$ を充たす．

<u>**証明**</u>　[**?**, PROPOSITION 9.5.1., p.284]　■

---

*6 右辺は旋回構造の取り方に依存しない [**?**, p.179].

定義 1.22: C^*-圏

$*$-圏は[a]，以下のデータからなる：

- $\mathbb{C}$-線形なアーベル圏 $\mathcal{C}$
- $\mathbb{C}$-反線形な関手 $(\text{-})^\dagger \colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{C}$ であって，$\forall x \in \mathcal{C}$ に対して $x^\dagger = x$ を見たすもの

これらは以下を充たす：

(star-1) $\dagger^{\mathrm{op}} \circ \dagger = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$

[a] 双対の記号に $(\text{-})^*$ を使用してしまったので，$(\text{-})^\dagger$ と書くことにする．

C^*-圏とは，$*$-圏 $(\mathcal{C},\, (\text{-})^\dagger)$ であって以下の条件を充たすもののこと [?, p.5]：

(Cstar-1) $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, y)$ に対して，ある $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, x)$ が存在して $f^\dagger \circ f = g^\dagger \circ g$ と書ける．

(Cstar-2) $\forall x,\, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，$\mathbb{C}$-ベクトル空間 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, y)$ は以下のノルムによって完備なノルム空間になる：

$$\|f\| \coloneqq \sqrt{\sup\{\, |\lambda| \mid \lambda \in \mathbb{C} \ \text{ s.t. } f^\dagger \circ f - \lambda \mathrm{Id}_x \text{ が可逆でない} \,\}}$$

定義 1.23: ユニタリフュージョン圏

ユニタリフュージョン圏 (unitary fusion category) とは，フュージョン圏であって C^*-圏でもあり，$(f \otimes g)^\dagger = f^\dagger \otimes g^\dagger$ を充たすもののこと．

命題 1.6: ユニタリフュージョン圏は擬ユニタリ

ユニタリフュージョン圏は擬ユニタリである．

証明 ■

1.3.5 Deligne のテンソル積

定義 1.24: Deligne のテンソル積

$\mathcal{C},\, \mathcal{D}$ を局所有限な $\mathbb{K}$-線形アーベル圏とする．**Deligne のテンソル積** (Deligne's tensor product) とは，以下の性質をみたす $\mathbb{K}$-線形アーベル圏 $\boldsymbol{\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}}$ と双右完全関手 $\boxtimes \colon \mathcal{C} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ の組み $(\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D},\, \boxtimes)$ のこと：

(普遍性)

任意の双右完全関手 $F \colon \mathcal{C} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{A}$ に対し，ある双右完全関手 $\bar{F} \colon \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{A}$ が一意的に存在して $\bar{F} \circ \boxtimes = F$ を充たす．

命題 1.7: Deligne のテンソル積の基本性質

(1) Deligne のテンソル積は存在し，それ自身が局所有限な $\mathbb{K}$-線形アーベル圏になる．

(2) 関手 $\boxtimes\colon \mathcal{C}\times\mathcal{D}\longrightarrow\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{D}$ は双完全であり，

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x_1,\,y_1)\otimes_{\mathbb{K}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x_2,\,y_2)\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{D}}(x_1\boxtimes x_2,\,y_1\boxtimes y_2)$$

を充たす．

(3) $\mathcal{C},\,\mathcal{D}$ が (多重) 環圏/(多重) テンソル圏ならば $\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{D}$ は (多重) 環圏/(多重) テンソル圏である．

証明 (1) [?, PROPOSITION 1.11.2., p.15]

(2) [?, PROPOSITION 1.11.2., p.15]

(3) [?, PROPOSITION 4.6.1., p.73]

■

1.4 加群圏

1.4.1 左/右加群圏

定義 1.25: 左/右加群圏

$(\mathcal{C},\,\otimes,\,1,\,a,\,l,\,r)$ をモノイダル圏とする．**左 $\mathcal{C}$-加群圏** (left $\mathcal{C}$-module category) $\mathcal{M}$ は，以下のデータからなる：

- 圏 $\mathcal{M}$
- **左加群積** (left module product) と呼ばれる関手[a] $\blacktriangleright\colon\mathcal{C}\times\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{M}$
- **left actor** と呼ばれる自然同型 $\left\{\alpha_{x,\,y,\,m}\colon(x\otimes y)\blacktriangleright m\longrightarrow x\blacktriangleright(y\blacktriangleright m)\right\}_{x,y\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\,m\in\mathrm{Ob}(\mathcal{M})}$
- **left unitor** と呼ばれる自然同型 $\left\{\lambda_m\colon 1\blacktriangleright m\longrightarrow m\right\}_{m\in\mathrm{Ob}(\mathcal{M})}$

これらは以下の条件を充たさねばならない：

(lMod-1) $\forall x,\,y,\,z\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\ \forall m\in\mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ に対して以下の図式を可換にする：

$$
\begin{tikzcd}
& \big((x\otimes y)\otimes z\big)\blacktriangleright m \arrow[dl, "a_{x,y,z}\blacktriangleright \mathrm{Id}_m"'] \arrow[r, "\alpha_{x\otimes y,z,m}"] & (x\otimes y)\blacktriangleright(z\blacktriangleright m) \arrow[d, "\alpha_{x,y,z\blacktriangleright m}"] \\
\big(x\otimes(y\otimes z)\big)\blacktriangleright m \arrow[dr, "\alpha_{x,y\otimes z,m}"'] & & x\blacktriangleright\big(y\blacktriangleright(z\blacktriangleright m)\big) \\
& x\blacktriangleright\big((y\otimes z)\blacktriangleright m\big) \arrow[ur, "\mathrm{Id}_x\blacktriangleright\alpha_{y,z,m}"'] &
\end{tikzcd}
$$

(lMod-2)　$\forall x\in\mathcal{C},\ \forall m\in\mathcal{M}$ に対して以下の図式を可換にする：

$$
\begin{tikzcd}
(x\otimes 1)\blacktriangleright m \arrow[rr, "\alpha_{x,1,m}"] \arrow[dr, "r_x\blacktriangleright\mathrm{Id}_m"'] & & x\blacktriangleright(1\blacktriangleright m) \arrow[dl, "\mathrm{Id}_x\blacktriangleright\lambda_m"] \\
& x\blacktriangleright m &
\end{tikzcd}
$$

[a] 記号として $\oslash$ を使うこともある（参考：https://ncatlab.org/nlab/show/action+of+a+monoidal+category）.

$(\mathcal{C},\,\otimes,\,1,\,a,\,l,\,r)$ をモノイダル圏とする．**右 $\mathcal{C}$-加群圏** $\mathcal{M}$ は，以下のデータからなる：

- 圏 $\mathcal{M}$
- **右加群積** (left module product) と呼ばれる関手[a] $\blacktriangleright\colon\mathcal{C}\times\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{M}$
- **right actor** と呼ばれる自然同型 $\big\{\beta_{m,\,x,\,y}\colon m\blacktriangleleft(x\otimes y)\longrightarrow(m\blacktriangleleft x)\blacktriangleleft y\big\}_{x,y\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\,m\in\mathrm{Ob}(\mathcal{M})}$
- **right unitor** と呼ばれる自然同型 $\big\{\rho_m\colon m\blacktriangleleft 1\longrightarrow m\big\}_{m\in\mathrm{Ob}(\mathcal{M})}$

これらは以下の条件を充たさねばならない：

(rMod-1)　$\forall x,\,y,\,z\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\ \forall m\in\mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ に対して以下の図式を可換にする：

(rMod-2)　$\forall x\in\mathcal{C},\ \forall m\in\mathcal{M}$ に対して以下の図式を可換にする：

$$
\begin{tikzcd}
m\blacktriangleleft(1\otimes x) \arrow[rr, "\beta_{m,1,x}"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}_m\blacktriangleleft l_x"'] & & (m\blacktriangleleft 1)\blacktriangleleft x \arrow[dl, "\rho_m\blacktriangleleft\mathrm{Id}_x"] \\
& m\blacktriangleleft x &
\end{tikzcd}
$$

[a] 記号として $\oslash$ を使うこともある（参考：https://ncatlab.org/nlab/show/action+of+a+monoidal+category）.

$\mathcal{C}$ が多重テンソル圏である場合は，左/右加群積が射について $\mathbb{K}$-双線形であること，および両方の引数につ

いて完全関手になっていることを要請する[*7].

定義 1.26: 加群関手

$(\mathcal{C},\, \otimes,\, 1,\, a,\, l,\, r)$ をモノイダル圏，$(\mathcal{M}_i,\, \blacktriangleright_i,\, \alpha_i,\, \lambda_i)$ ${}^{\mathrm{w}/}$ $i = 1,\, 2$ を左 $\mathcal{C}$-加群圏とする．**左 $\mathcal{C}$-加群関手** (left $\mathcal{C}$-module functor) は，以下のデータからなる：

- 関手 $F\colon \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$
- 自然同型 $\bigl\{s_{x,m}\colon F(x \blacktriangleright_1 m) \longrightarrow x \blacktriangleright_2 F(m)\bigr\}_{x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\, m \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M}_1)}$

これらは以下の条件を充たさねばならない：

(pentagon identity) $\forall x,\, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\ \forall m \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M}_1)$ に対して以下の図式を可換にする：

$$\begin{tikzcd}
 & F\bigl((x \otimes y) \blacktriangleright_1 m\bigr) \arrow[dl, "F(\alpha_{1\,x,y,m})"'] \arrow[r, "s_{x\otimes y, m}"] & (x \otimes y) \blacktriangleright_2 F(m) \arrow[d, "\alpha_{2\,x,y,F(m)}"] \\
F\bigl(x \blacktriangleright_1 (y \blacktriangleright_1 m)\bigr) \arrow[dr, "s_{x, y \blacktriangleright_1 m}"'] & & x \blacktriangleright_2 \bigl(y \blacktriangleright_2 F(m)\bigr) \\
 & x \blacktriangleright_2 F(y \blacktriangleright_1 m) \arrow[ur, "\mathrm{Id}_x \blacktriangleright_2 s_{y,m}"'] &
\end{tikzcd}$$

(triangle identity) $\forall m \in \mathcal{M}_1$ に対して以下の図式を可換にする：

$$\begin{tikzcd}
F(1 \blacktriangleright_1 m) \arrow[rr, "s_{1,m}"] \arrow[dr, "F(\lambda_{1\,m})"'] & & 1 \otimes_2 F(m) \arrow[dl, "\lambda_{2\,F(m)}"] \\
 & F(m) &
\end{tikzcd}$$

定義 1.27: 加群圏の自然変換

$(\mathcal{C},\, \otimes,\, 1,\, a,\, l,\, r)$ をモノイダル圏，$(\mathcal{M}_i,\, \blacktriangleright_i,\, \alpha_i,\, \lambda_i)$ ${}^{\mathrm{w}/}$ $i = 1,\, 2$ を左 $\mathcal{C}$-加群圏，$(F_i\colon \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2,\ s_i)$ ${}^{\mathrm{w}/}$ $i = 1,\, 2$ を $\mathcal{C}$-加群関手とする．このとき，自然変換

*7 実際には，第 1/第 2 引数について完全になっていさえいれば残りの引数についても自動的に完全になる [?, EXERCISE7.3.2, p.135]

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_1 \arrow[r, bend left, "F_1"] \arrow[r, bend right, "F_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\tau"] & \mathcal{M}_2 \end{tikzcd}$$

が $\mathcal{C}$**-加群圏の自然変換**であるとは，$\forall x \in \mathcal{C}$, $\forall m \in \mathcal{M}_1$ に対して以下の図式が可換になること：

(action の保存)

$$\begin{tikzcd} F_1(x \blacktriangleright_1 m) \arrow[r, "s_{1\,x,m}"] \arrow[d, "\tau_{x \blacktriangleright_1 m}"'] & x \blacktriangleright_2 F_1(m) \arrow[d, "\tau_x \blacktriangleright_2 \mathrm{Id}_m"] \\ F_2(x \blacktriangleright_1 m) \arrow[r, "s_{2\,x,m}"'] & x \blacktriangleright_2 F_2(m) \end{tikzcd}$$

定義 1.28: 加群圏の完全性

十分射影的対象を持つ多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \mathrm{ev}^{\mathrm{L}}, \mathrm{coev}^{\mathrm{L}}, \mathrm{ev}^{\mathrm{R}}, \mathrm{coev}^{\mathrm{R}})$ を与える．
局所有限な左 $\mathcal{C}$-加群圏 $(\mathcal{M}, \blacktriangleright, \alpha, \lambda)$ が**完全** (exact) であるとは，任意の射影的対象 $p \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ および任意の対象 $m \in \mathcal{M}$ に対して $p \blacktriangleright m$ が $\mathcal{M}$ の射影的対象になることを言う．

1.4.2　両側加群圏

定義 1.29: 両側加群圏

$(\mathcal{C}_i, \otimes_i, 1, a_i, l_i, r_i)$ w/ $i = 1, 2$ をモノイダル圏とする．$(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$**-両側加群圏** ($(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$-bimodule category) $\mathcal{M}$ は，以下のデータからなる：

- 圏 $\mathcal{M}$
- **左加群積**と呼ばれる関手 $\blacktriangleright\colon \mathcal{C}_1 \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$
- **右加群積**と呼ばれる関手 $\blacktriangleleft\colon \mathcal{M} \times \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{M}$
- **left actor** と呼ばれる自然同型

$$\left\{\alpha_{x_1, y_1, m}\colon (x_1 \otimes y_1) \blacktriangleright m \longrightarrow x_1 \blacktriangleright (y_1 \blacktriangleright m)\right\}_{x_1, y_1 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_1),\, m \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})}$$

- **left unitor** と呼ばれる自然同型 $\left\{\lambda_m\colon 1 \blacktriangleright m \longrightarrow m\right\}_{m \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})}$
- **right actor** と呼ばれる自然同型

$$\left\{\beta_{m, x_2, y_2}\colon m \blacktriangleleft (x_2 \otimes y_2) \longrightarrow (m \blacktriangleleft x_2) \blacktriangleleft y_2\right\}_{x_2, y_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_2),\, m \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})}$$

- **right unitor** と呼ばれる自然同型 $\left\{\rho_m\colon m \blacktriangleleft 1 \longrightarrow m\right\}_{m \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})}$
- **middle actor** と呼ばれる自然同型

$$\left\{b_{x_1, m, x_2}\colon (x_1 \blacktriangleright m) \blacktriangleleft x_2 \longrightarrow x_1 \blacktriangleright (m \blacktriangleleft x_2)\right\}_{x_1 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_1),\, x_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_2) m \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})}$$

これらは以下の条件を充たす：

(Bimod-1)　組 $(\mathcal{M}, \blacktriangleright, \alpha, \lambda)$ は左 $\mathcal{C}_1$-加群圏である．

(Bimod-2) 組 $(\mathcal{M}, \blacktriangleleft, \beta, \rho)$ は右 $\mathcal{C}_2$-加群圏である．

(Bimod-3) $\forall x_i,\, y_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_i),\ \forall m \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ に対して以下の図式を可換にする：

$$
\begin{tikzcd}
& \big((x_1 \otimes_1 y_1) \blacktriangleright m\big) \blacktriangleleft x_1 \arrow[dr, "b_{x_1 \otimes_1 y_1, m, x_2}"] \arrow[ddl, "\alpha_{x_1, y_1, m} \blacktriangleright \mathrm{Id}_{x_1}"'] & \\
& & (x_1 \otimes_1 y_1) \blacktriangleright (m \blacktriangleleft x_2) \arrow[dd, "\alpha_{x_1, y_1, m \blacktriangleleft x_2}"] \\
\big(x_1 \blacktriangleright (y_1 \blacktriangleright m)\big) \blacktriangleleft x_1 \arrow[ddr, "b_{x_1, y_1 \blacktriangleright m, x_2}"'] & & \\
& & x_1 \blacktriangleright \big(y_1 \blacktriangleright (m \blacktriangleleft x_2)\big) \\
& x_1 \blacktriangleright \big((y_1 \blacktriangleright m) \blacktriangleleft x_1\big) \arrow[ur, "\mathrm{Id}_{x_1} \blacktriangleright b_{y_1, m, 1}"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& x_1 \blacktriangleright \big(m \blacktriangleleft (x_2 \otimes_2 y_2)\big) \arrow[ddl, "\mathrm{Id}_{x_1} \blacktriangleright \beta_{m, x_2, y_2}"'] & \\
& & (x_1 \blacktriangleright m) \blacktriangleleft (x_2 \otimes_2 y_2) \arrow[ul, "b_{x_1, m, x_2 \otimes_2 y_2}"'] \arrow[dd, "\beta_{x_1 \blacktriangleright m, x_2, y_2}"] \\
x_1 \blacktriangleright \big((m \blacktriangleleft x_2) \blacktriangleleft y_2\big) & & \\
& & \big((x_1 \blacktriangleright m) \blacktriangleleft x_2\big) \blacktriangleleft y_2 \arrow[dl, "b_{x_1, m, x_2} \blacktriangleleft \mathrm{Id}_{y_2}"] \\
& \big(x_1 \blacktriangleright (m \blacktriangleleft x_2)\big) \blacktriangleleft y_2 \arrow[uul, "b_{x_1, m \blacktriangleleft x_2, y_2}"] &
\end{tikzcd}
$$

1.4.3 代数と加群

定義 1.30: 代数対象

多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \mathrm{ev}^{\mathrm{L}}, \mathrm{coev}^{\mathrm{L}}, \mathrm{ev}^{\mathrm{R}}, \mathrm{coev}^{\mathrm{R}})$ を与える．$\mathcal{C}$ の**代数対象** (algebra object) x とは，以下のデータからなる：

- $\mathcal{C}$ の対象 $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- **乗法** (multiplication) と呼ばれる $\mathcal{C}$ の射 $\mu\colon x \otimes x \longrightarrow x$
- **単位** (unit) と呼ばれる $\mathcal{C}$ の射 $\upsilon\colon 1 \longrightarrow x$

これらは以下の条件を充たさねばならない：

(associatibity)

$$\begin{tikzcd}
 & (x \otimes x) \otimes x \arrow[dl, "\mu\otimes\mathrm{Id}_x"'] \arrow[dr, "a_{x,x,x}"] & \\
x \otimes x \arrow[ddr, "\mu"'] & & x \otimes (x \otimes x) \arrow[d, "\mathrm{Id}_x\otimes\mu"] \\
 & & x \otimes x \arrow[dl, "\mu"] \\
 & x &
\end{tikzcd}$$

(unitality)

$$\begin{tikzcd}
1 \otimes x \arrow[r, "l_x"] \arrow[d, "\upsilon\otimes\mathrm{Id}_x"'] & x \arrow[d, "\mathrm{Id}_x"] \\
x \otimes x \arrow[r, "\mu"'] & x
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
x \otimes 1 \arrow[r, "r_x"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_x\otimes\upsilon"'] & x \arrow[d, "\mathrm{Id}_x"] \\
x \otimes x \arrow[r, "\mu"'] & x
\end{tikzcd}$$

多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \mathrm{ev}^{\mathrm{L}}, \mathrm{coev}^{\mathrm{L}}, \mathrm{ev}^{\mathrm{R}}, \mathrm{coev}^{\mathrm{R}})$ を与える．$\mathcal{C}$ の**余代数対象** (coalgebra object) y とは，以下のデータからなる：

- $\mathcal{C}$ の対象 $y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- **余乗法** (comultiplication) と呼ばれる $\mathcal{C}$ の射 $\Delta\colon y \longrightarrow y \otimes y$
- **余単位** (counit) と呼ばれる $\mathcal{C}$ の射 $\epsilon\colon y \longrightarrow 1$

これらは以下の条件を充たさねばならない：

(coassociatibity)

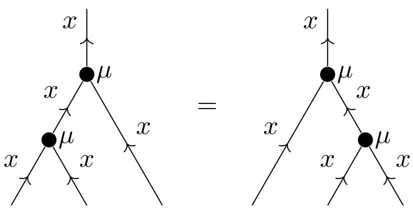
$$
\begin{tikzcd}
 & (y\otimes y)\otimes y & \\
 & & y\otimes(y\otimes y) \arrow[ul, "a_{y,y,y}"'] \\
 y\otimes y \arrow[uur, "\Delta\otimes\mathrm{Id}_y"] & & \\
 & & y\otimes y \arrow[uu, "\mathrm{Id}_y\otimes\Delta"'] \\
 & y \arrow[uul, "\Delta"] \arrow[ur, "\Delta"'] &
\end{tikzcd}
$$

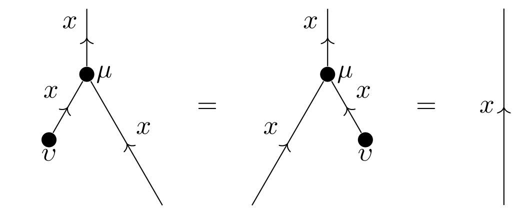
(unitality)

$$
\begin{tikzcd}
1\otimes y & y \arrow[l, "l_y"'] \\
y\otimes y \arrow[u, "\epsilon\otimes\mathrm{Id}_y"] & y \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\mathrm{Id}_y"']
\end{tikzcd}
$$

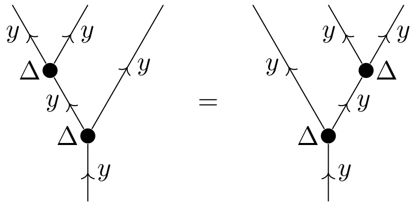
$$
\begin{tikzcd}
y\otimes 1 & y \arrow[l, "r_y"'] \\
y\otimes y \arrow[u, "\mathrm{Id}_y\otimes\epsilon"] & y \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\mathrm{Id}_y"']
\end{tikzcd}
$$

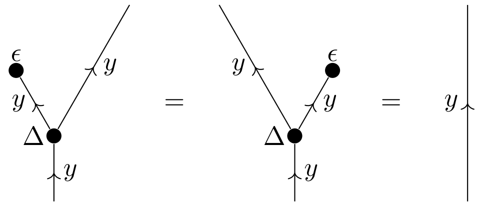
ストリング図式で代数対象 $(x,\, \mu,\, \upsilon)$ の **(associatibity)**, **(unitality)** を書くと，それぞれ





となり，余代数対象 $(y,\, \Delta,\, \epsilon)$ の **(associatibity)**, **(unitality)** を書くと





となる．

定義 1.31: 加群対象

多重テンソル圏 $(\mathcal{C},\, \otimes,\, 1,\, a,\, l,\, r,\, \mathrm{ev}^{\mathrm{L}},\, \mathrm{coev}^{\mathrm{L}},\, \mathrm{ev}^{\mathrm{R}},\, \mathrm{coev}^{\mathrm{R}})$ および $\mathcal{C}$ の代数対象 $(x,\, \mu,\, \upsilon)$ を与える．$\mathcal{C}$ における，**左 x-加群対象** (right x-module object) m とは，以下のデータからなる：

- $\mathcal{C}$ の対象 $m \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- **左作用** (right action) と呼ばれる $\mathcal{C}$ の射 $\lambda\colon x \otimes m \longrightarrow m$

これらは以下の条件を充たさねばならない：

(associativity)

$$\begin{tikzcd}
 & x \otimes (x \otimes m) \arrow[dl, "\mathrm{Id}_x \otimes \lambda"'] \arrow[r, "a^{-1}_{x,x,m}"] & (x \otimes x) \otimes m \arrow[d, "\mu \otimes \mathrm{Id}_m"] \\
x \otimes m \arrow[dr, "\lambda"'] & & x \otimes m \arrow[dl, "\lambda"] \\
 & m &
\end{tikzcd}$$

(unitarity)

$$\begin{tikzcd} 1 \otimes m \arrow[r, "l_m"] \arrow[d, "\upsilon \otimes \mathrm{Id}_m"'] & m \arrow[d, "\mathrm{Id}_m"] \\ x \otimes m \arrow[r, "\lambda"'] & m \end{tikzcd}$$

多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \mathrm{ev}^{\mathrm{L}}, \mathrm{coev}^{\mathrm{L}}, \mathrm{ev}^{\mathrm{R}}, \mathrm{coev}^{\mathrm{R}})$ および $\mathcal{C}$ の代数対象 (x, μ, υ) を与える．$\mathcal{C}$ における，**右 x-加群対象** (right x-module object) m とは，以下のデータからなる：

- $\mathcal{C}$ の対象 $m \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- **右作用** (right action) と呼ばれる $\mathcal{C}$ の射 $\rho \colon m \otimes x \longrightarrow m$

これらは以下の条件を充たさねばならない：

(associativity)

$$\begin{tikzcd} & (m \otimes x) \otimes x \arrow[dl, "\rho \otimes \mathrm{Id}_x"'] \arrow[dr, "a_{m,x,x}"] & \\ m \otimes x \arrow[dr, "\rho"'] & & m \otimes (x \otimes x) \arrow[d, "\mathrm{Id}_x \otimes \rho"] \\ & m & m \otimes x \arrow[l, "\rho"] \end{tikzcd}$$

(unitarity)

$$\begin{tikzcd} m \otimes 1 \arrow[r, "r_m"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_m \otimes \upsilon"'] & m \arrow[d, "\mathrm{Id}_m"] \\ m \otimes x \arrow[r, "\rho"'] & m \end{tikzcd}$$

定義 1.32: 代数および加群の準同型

多重テンソル圏 $(\mathcal{C},\, \otimes,\, 1,\, a,\, l,\, r,\, \mathrm{ev}^{\mathrm{L}},\, \mathrm{coev}^{\mathrm{L}},\, \mathrm{ev}^{\mathrm{R}},\, \mathrm{coev}^{\mathrm{R}})$ および $\mathcal{C}$ の 2 つの代数対象 $(x_i,\, \mu_i,\, \upsilon_i)$ ${}^{\mathrm{w}/}$ $i = 1,\, 2$ を与える．

このとき，$\mathcal{C}$ の射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x_1,\, x_2)$ が**代数準同型** (algebra homomorphism) であるとは，以下の条件を充たすことを言う：

(乗法の保存)

$$\begin{tikzcd}
x_1 \otimes x_1 \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "\mu_1"'] & x_2 \otimes x_2 \arrow[d, "\mu_2"] \\
x_1 \arrow[r, "f"'] & x_2
\end{tikzcd}$$

(単位の保存)

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[rr, "\upsilon_1"] \arrow[dr, "\upsilon_2"'] & & A_1 \arrow[dl, "f"] \\
& A_2 &
\end{tikzcd}$$

- 多重テンソル圏 $(\mathcal{C},\, \otimes,\, 1,\, a,\, l,\, r,\, \mathrm{ev}^{\mathrm{L}},\, \mathrm{coev}^{\mathrm{L}},\, \mathrm{ev}^{\mathrm{R}},\, \mathrm{coev}^{\mathrm{R}})$
- $\mathcal{C}$ の代数対象 $(x,\, \mu,\, \upsilon)$
- $\mathcal{C}$ の 2 つの左 x-加群対象 $(m_i,\, \lambda_i)$ ${}^{\mathrm{w}/}$ $i = 1,\, 2$

を与える．

このとき，$\mathcal{C}$ の射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(m_1,\, m_2)$ が**左 x-加群準同型** (left x-module homohorphism) であるとは，以下の条件を充たすことを言う：

(左作用の保存)

$$\begin{tikzcd}
x \otimes m_1 \arrow[r, "\mathrm{Id}_x\otimes f"] \arrow[d, "\lambda_1"'] & x \otimes m_2 \arrow[d, "\lambda_2"] \\
x_1 \arrow[r, "f"'] & x_2
\end{tikzcd}$$

しばらくの間 多重テンソル圏 $(\mathcal{C},\, \otimes,\, 1,\, a,\, l,\, r,\, \mathrm{ev}^{\mathrm{L}},\, \mathrm{coev}^{\mathrm{L}},\, \mathrm{ev}^{\mathrm{R}},\, \mathrm{coev}^{\mathrm{R}})$ および $\mathcal{C}$ の代数対象 $(x,\, \mu,\, \upsilon)$ を 1 つ固定する．

2 つの左 x-加群対象 $(m_i,\, \lambda_i)$ ${}^{\mathrm{w}/}$ $i = 1,\, 2$ の間の左 x-加群の準同型全体がなす集合を $\boldsymbol{\mathrm{Hom}_x\,(m_1,\, m_2)} \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(m_1,\, m_2)$ と書くと，これは部分 $\mathbb{K}$-ベクトル空間をなす．さらに準同型の合成は準同型であるから，アーベル圏 x-$\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}}$ を次のようにして構成することができる：

- $\mathcal{C}$ における左 x-加群対象を対象とする．
- 左 x-加群の準同型を射とする．

同様にして $\mathcal{C}$ における右 x-加群対象がなす圏 $\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}}$-$x$ を定義できる．

左加群圏と $\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}}\text{-}x$ の間には関係がある．今，$\mathcal{C}$ における任意の右 x-加群対象 $(m,\,\rho)$ および $\mathcal{C}$ の任意の対象 $y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を与える．すると，$y \otimes m \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と

$$\rho_{y\otimes m}\colon (y\otimes m)\otimes x \xrightarrow{a_{y,m,x}} y\otimes(m\otimes x) \xrightarrow{\mathrm{Id}_y\otimes\rho} y\otimes m$$

の組み $(y\otimes m,\,\rho_{y\otimes m})$ は右 x-加群になる．i.e. $(y\otimes m,\,\rho_{y\otimes m}) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}}\text{-}x)$ である．この構成により関手

$$\blacktriangleright\colon \mathcal{C}\times\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}}\text{-}x \longrightarrow \mathbf{Mod}_{\mathcal{C}}\text{-}x \tag{1.4.1}$$

が定義できる．さらに，$\mathcal{C}$ が元々持っていた associator と unitors に関しては，$\forall(m,\,\rho)\in\mathrm{Ob}(\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}}\text{-}x)$, $\forall y,\,z\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$\begin{aligned} a_{y,z,m}&\colon (y\otimes z)\blacktriangleright m \longrightarrow y\blacktriangleright(z\blacktriangleright m)\\ l_y&\colon 1\blacktriangleright m\longrightarrow m \end{aligned}$$

が自然な[*8]右 x-加群の同型になる．

命題 1.8: $\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}}\text{-}x$ は左加群圏

多重テンソル圏 $(\mathcal{C},\,\otimes,\,1,\,a,\,l,\,r,\,\mathrm{ev}^{\mathrm{L}},\,\mathrm{coev}^{\mathrm{L}},\,\mathrm{ev}^{\mathrm{R}},\,\mathrm{coev}^{\mathrm{R}})$ および $\mathcal{C}$ の代数対象 $(x,\,\mu,\,\upsilon)$ を 1 つ与える．

このとき，組み[a] $(\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}}\text{-}x,\,\blacktriangleright,\,a,\,l)$ は左 $\mathcal{C}$-加群圏である．

[a] $\blacktriangleright\colon \mathcal{C}\times\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}}\text{-}x\longrightarrow\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}}\text{-}x$ は (1.4.1) で定義した関手である．

証明 $\forall y,\,z,\,w\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $\forall(m,\,\rho)\in\mathrm{Ob}(\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}}\text{-}x)$ に対して **(IMOD-1)**, **(IMOD-2)** が成り立つことを示せば良い． ■

定義 1.33: 森田同値

多重テンソル圏 $(\mathcal{C},\,\otimes,\,1,\,a,\,l,\,r,\,\mathrm{ev}^{\mathrm{L}},\,\mathrm{coev}^{\mathrm{L}},\,\mathrm{ev}^{\mathrm{R}},\,\mathrm{coev}^{\mathrm{R}})$ を与える．

$\mathcal{C}$ の 2 つの代数対象 $(x_i,\,\mu_i,\,\upsilon_i)$ w/ $i=1,\,2$ が**森田同値** (Morita equivalent) であるとは，左 $\mathcal{C}$-加群圏として $x_1\text{-}\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}}$ と $x_2\text{-}\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}}$ が圏同値であることを言う．

定義 1.34: 代数上のテンソル積

- 多重テンソル圏 $(\mathcal{C},\,\otimes,\,1,\,a,\,l,\,r,\,\mathrm{ev}^{\mathrm{L}},\,\mathrm{coev}^{\mathrm{L}},\,\mathrm{ev}^{\mathrm{R}},\,\mathrm{coev}^{\mathrm{R}})$ および $\mathcal{C}$ の代数対象 $(x,\,\mu,\,\upsilon)$
- $\mathcal{C}$ における右 x-加群対象 $(m,\,\rho)\in\mathrm{Ob}(\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}}\text{-}x)$
- $\mathcal{C}$ における左 x-加群対象 $(n,\,\lambda)\in\mathrm{Ob}(\mathbf{Mod}\text{-}\mathcal{C}x)$

を与える．このとき，m と n の $\boldsymbol{x}$ **上のテンソル積** (tensor product over x) $\boldsymbol{m\otimes_x n}\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を，以下の図式のコイコライザとして定義する：

$$m\otimes x\otimes n \underset{\mathrm{Id}_m\otimes\lambda}{\overset{\rho\otimes\mathrm{Id}_n}{\rightrightarrows}} m\otimes n \xrightarrow{\pi} m\otimes_x n$$

[*8] $a \coloneqq \{a_{y,z,m}\}_{y,z\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\,m\in\mathrm{Ob}(\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}}\text{-}x)}$ が自然同型．

1.4.4　両側加群

定義 1.35: 両側加群

多重テンソル圏 $(\mathcal{C},\,\otimes,\,1,\,a,\,l,\,r,\,\mathrm{ev}^{\mathrm{L}},\,\mathrm{coev}^{\mathrm{L}},\,\mathrm{ev}^{\mathrm{R}},\,\mathrm{coev}^{\mathrm{R}})$ および $\mathcal{C}$ の 2 つの代数対象 $(x_i,\,\mu_i,\,\upsilon_i)$ を与える．$\mathcal{C}$ における $\boldsymbol{(x_1,\,x_2)}$**-両側加群対象** ($(x_1,\,x_2)$-bimodule object) とは，以下のデータからなる：

- $\mathcal{C}$ の対象 $m \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- **左作用** (left action) と呼ばれる $\mathcal{C}$ の射 $\lambda\colon x_1 \otimes m \longrightarrow m$
- **右作用** (right action) と呼ばれる $\mathcal{C}$ の射 $\rho\colon m \otimes x_2 \longrightarrow m$

これらは以下の条件を充たさねばならない：

(bimod-1)　組 $(m,\,\lambda)$ は $\mathcal{C}$ の左 x_1-加群対象

(bimod-2)　組 $(m,\,\rho)$ は $\mathcal{C}$ の右 x_2-加群対象

(bimod-3)　以下の図式を可換にする：

$$
\begin{tikzcd}
 & (x_1 \otimes m) \otimes x_2 \arrow[dl, "\lambda\otimes\mathrm{Id}_{x_2}"'] \arrow[dr, "a_{x_1,m,x_2}"] & \\
m \otimes x_2 \arrow[ddr, "\rho"'] & & x_1 \otimes (m \otimes x_2) \arrow[d, "\mathrm{Id}_{x_1}\otimes\rho"] \\
 & & x_1 \otimes m \arrow[dl, "\lambda"] \\
 & m &
\end{tikzcd}
$$

定義 1.36: 両側加群の準同型

- 多重テンソル圏 $(\mathcal{C},\,\otimes,\,1,\,a,\,l,\,r,\,\mathrm{ev}^{\mathrm{L}},\,\mathrm{coev}^{\mathrm{L}},\,\mathrm{ev}^{\mathrm{R}},\,\mathrm{coev}^{\mathrm{R}})$ および $\mathcal{C}$ の 2 つの代数対象 $(x_i,\,\mu_i,\,\upsilon_i)$
- 2 つの $(x_1,\,x_2)$-両側加群対象 $(m_i,\,\lambda_i,\,\rho_i)$ ${}^{\mathrm{w}/}$ $i = 1,\,2$

を与える．このとき，$\mathcal{C}$ の射 $f\colon m_1 \longrightarrow m_2$ が $(x_1,\,x_2)$ **両側加群の準同型**であるとは，それが左 x_1-加群の準同型かつ右 x_2-加群の準同型であることを言う．

しばらくの間 多重テンソル圏 $(\mathcal{C},\,\otimes,\,1,\,a,\,l,\,r,\,\mathrm{ev}^{\mathrm{L}},\,\mathrm{coev}^{\mathrm{L}},\,\mathrm{ev}^{\mathrm{R}},\,\mathrm{coev}^{\mathrm{R}})$ および $\mathcal{C}$ の 2 つの代数対象 $(x_i,\,\mu_i,\,\upsilon_i)$ を固定する．

2 つの $(x_1,\,x_2)$-両側加群対象 $(m_i,\,\lambda_i,\,\rho_i)$ ${}^{\mathrm{w}/}$ $i = 1,\,2$ の間の $(x_1,\,x_2)$-両側加群の準同型全体がなす集合を $\mathbf{Hom}_{\boldsymbol{x_1\text{-}x_2}}\,\boldsymbol{(m_1,\,m_2)} \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(m_1,\,m_2)$ と書くと，これは部分 $\mathbb{K}$-ベクトル空間をなす．さらに準同型の

合成は準同型であるから，アーベル圏 $\mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(x_1,\, x_2)$ を次のようにして構成することができる：

- $\mathcal{C}$ における $(x_1,\, x_2)$-加群対象を対象とする．
- $(x_1,\, x_2)$-両側加群の準同型を射とする．

同様にして $\mathcal{C}$ における右 x-加群対象がなす圏 $\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}}\text{-}x$ を定義できる．

補題 1.8: 両側加群のテンソル積

- 多重テンソル圏 $(\mathcal{C},\, \otimes,\, 1,\, a,\, l,\, r,\, \mathrm{ev}^{\mathrm{L}},\, \mathrm{coev}^{\mathrm{L}},\, \mathrm{ev}^{\mathrm{R}},\, \mathrm{coev}^{\mathrm{R}})$ および $\mathcal{C}$ の 4 つの代数対象 $(x_i,\, \mu_i,\, \upsilon_i)$ $^{\mathrm{w}/}$ $i = 1,\, \dots,\, 4$
- $(x_1,\, x_2)$-両側加群対象 $(m_1,\, \lambda_1,\, \rho_1) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(x_1,\, x_2))$
- $(x_2,\, x_3)$-両側加群対象 $(m_2,\, \lambda_2,\, \rho_2) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(x_2,\, x_3))$
- $(x_3,\, x_4)$-両側加群対象 $(m_3,\, \lambda_3,\, \rho_3) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(x_3,\, x_4))$

を与える．このとき以下が成り立つ：

(1) $m_1 \otimes_{x_2} m_2$ は自然な $(x_1,\, x_3)$-両側加群対象の構造を持つ．

(2) 自然な $(x_1,\, x_4)$-両側加群の同型

$$\begin{aligned}\bar{a}_{m_1,m_2,m_3} &\colon (m_1 \otimes_{x_2} m_2) \otimes_{x_3} m_3 \xrightarrow{\cong} m_1 \otimes_{x_2} (m_2 \otimes_{x_3} m_3)\\ \bar{l}_{m_1} &\colon x_1 \otimes_{x_1} m_1 \xrightarrow{\cong} m_1\\ \bar{r}_{m_1} &\colon m_1 \otimes_{x_2} x_2 \xrightarrow{\cong} m_1\end{aligned}$$

が存在する．

<u>**証明**</u>　(1)

■

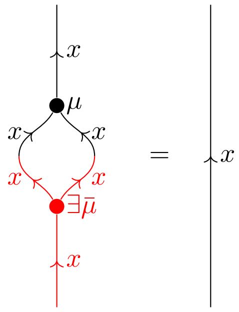
$\mathcal{C}$ の任意の代数対象 $(x,\, \mu,\, \upsilon)$ について，明らかに $(x,\, \mu,\, \mu) \in \mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(x,\, x)$ である．

定義 1.37: 分離可能性

テンソル圏 $(\mathcal{C},\, \otimes,\, 1,\, a,\, l,\, r,\, \mathrm{ev}^{\mathrm{L}},\, \mathrm{coev}^{\mathrm{L}},\, \mathrm{ev}^{\mathrm{R}},\, \mathrm{coev}^{\mathrm{R}})$ の代数対象 $(x,\, \mu,\, \upsilon)$ が**分離可能** (separable) であるとは，ある $(x,\, x)$-両側加群の準同型 $\bar{\mu}\colon x \longrightarrow x \otimes x$ が存在して $\mu \circ \bar{\mu} = \mathrm{Id}_x$ を充たすことを言う[a]．

[a] 補題 1.8-(1) によって $x \otimes x$ を $(x,\, x)$-両側加群対象と見做す．

分離可能性をストリング図式で表すと



となる．

命題 1.9: 分離可能性と半単純性

フュージョン圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \mathrm{ev}^{\mathrm{L}}, \mathrm{coev}^{\mathrm{L}}, \mathrm{ev}^{\mathrm{R}}, \mathrm{coev}^{\mathrm{R}})$ の代数対象 (x, μ, υ) を与える．
このときもし (x, μ, υ) が分離可能ならば，アーベル圏 $\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}}\text{-}x$ は半単純である．

証明 [?, PROPOSITION7.8.30, p.146] ■

1.4.5 Frobenius 代数

定義 1.38: Frobenius 代数

多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \mathrm{ev}^{\mathrm{L}}, \mathrm{coev}^{\mathrm{L}}, \mathrm{ev}^{\mathrm{R}}, \mathrm{coev}^{\mathrm{R}})$ を与える．
$\mathcal{C}$ の代数対象 (x, μ, υ) が **Frobenius 代数** (Frobenius algebra) であるとは，

- **余乗法** (comultiplication) と呼ばれる $\mathcal{C}$ の射 $\Delta\colon x \longrightarrow x \otimes x$
- **余単位** (counit) と呼ばれる $\mathcal{C}$ の射 $\epsilon\colon x \longrightarrow 1$

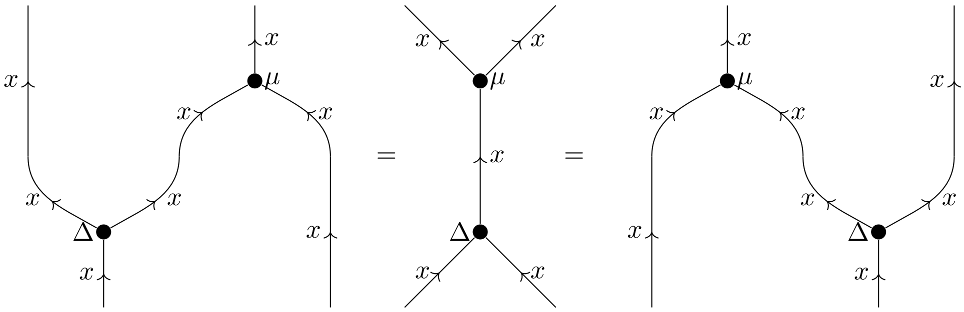
が存在して以下を充たすことを言う：

(Frob-1) (x, Δ, ϵ) は $\mathcal{C}$ の余代数対象である．

(Frob-2) 以下の図式を可換にする：

$$\begin{tikzcd}
& x \otimes x \arrow[dl, "\Delta\otimes\mathrm{Id}_x"'] \arrow[d, "\mu"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}_x\otimes\Delta"] & \\
x \otimes x \otimes x \arrow[dr, "\mathrm{Id}_x\otimes\mu"'] & x \arrow[d, "\Delta"] & x \otimes x \otimes x \arrow[dl, "\mu\otimes\mathrm{Id}_x"] \\
& x \otimes x &
\end{tikzcd}$$

ストリング図式で **(Frob-2)** を書くと次のようになる：



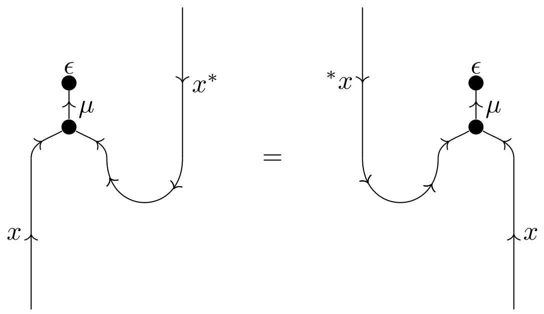
定義 1.39: 対称 Frobenius 代数

多重テンソル圏 $(\mathcal{C},\ \otimes,\ 1,\ a,\ l,\ r,\ \mathrm{ev}^{\mathrm{L}},\ \mathrm{coev}^{\mathrm{L}},\ \mathrm{ev}^{\mathrm{R}},\ \mathrm{coev}^{\mathrm{R}})$ を与える．

$\mathcal{C}$ の Frobenius 代数 $(x,\ \mu,\ \upsilon,\ \Delta,\ \epsilon)$ が**対称** (symmetric) であるとは，以下の図式を可換にすることを言う：

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[rr, "\mathrm{coev}^{\mathrm{R}}_x \otimes \mathrm{Id}_x"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_x \otimes \mathrm{coev}^{\mathrm{L}}_x"'] & & {}^*x \otimes x \otimes x \arrow[d, "\mathrm{Id}_{{}^*x} \otimes \mu"] \\
x \otimes x \otimes x^* \arrow[d, "\mu \otimes \mathrm{Id}_{x^*}"'] & & {}^*x \otimes x \arrow[d, "\mathrm{Id}_{{}^*x} \otimes \epsilon"] \\
x \otimes x^* \arrow[rr, "\epsilon \otimes \mathrm{Id}_{x^*}"'] & & {}^*x
\end{tikzcd}$$

ストリング図式では



となる．

定義 1.40: 特殊 Frobenius 代数

多重テンソル圏 $(\mathcal{C},\ \otimes,\ 1,\ a,\ l,\ r,\ \mathrm{ev}^{\mathrm{L}},\ \mathrm{coev}^{\mathrm{L}},\ \mathrm{ev}^{\mathrm{R}},\ \mathrm{coev}^{\mathrm{R}})$ を与える．

$\mathcal{C}$ の Frobenius 代数 $(x,\ \mu,\ \upsilon,\ \Delta,\ \epsilon)$ が**特殊** (special) であるとは，$\mathcal{C}$ の代数対象 $(x,\ \mu,\ \upsilon)$ が余積 $\Delta\colon x \longrightarrow x \otimes x$ によって分離可能であることを言う[a]． i.e. $\mu \circ \Delta = \mathrm{Id}_x$ が成り立つこと．

[a] これは [?, p.17] に倣った定義である．ある $\beta_x,\ \beta_1 \in \mathbb{K}^\times$ が存在して $\mu \circ \Delta = \beta_x \mathrm{Id}_x,\ \epsilon \circ \upsilon = \beta_1 \mathrm{Id}_1$ が成り立つことを，special Frobenius algebra の定義とする場合もある [?, Definition 3.4-(i)]

1.4.6 加群圏における internal hom

定義 1.41: 加群圏における internal hom

$(\mathcal{C},\,\otimes,\,1,\,a,\,l,\,r)$ をモノイダル圏とする．左 $\mathcal{C}$-加群圏 $(\mathcal{M},\,\blacktriangleright,\,\alpha,\,\lambda)$ を与える．$\mathcal{M}$ の **internal hom** とは，以下のデータの組のこと：

- 関手

$$\multimap\colon \mathcal{M}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$$

- **currying** と呼ばれる自然同型

$$\left\{c_{x,\,m_1,\,m_2}\colon \mathrm{Hom}\,(x \blacktriangleright m_1,\,m_2) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}\,(x,\,m_1 \multimap m_2)\right\}_{x\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\,Y,\,Z\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

1.5 組紐付きテンソル圏

1.5.1 リボン構造と旋回構造の関係

補題 1.9: テンソル圏における組紐と旋回構造

組紐付きモノイダル圏 $(\mathcal{C},\,I,\,a,\,l,\,r,\,b)$ を与え，$\forall x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して射 $u_x\colon x \longrightarrow x^{**}$ を以下で定義する[a]：

$$x \xrightarrow{\mathrm{Id}_x\otimes\mathrm{coev}^{\mathrm{L}}_{x^*}} x\otimes x^*\otimes x^{**} \xrightarrow{b_{x,x^*}\otimes\mathrm{Id}_{x^{**}}} x^*\otimes x\otimes x^{**} \xrightarrow{\mathrm{ev}^{\mathrm{L}}_x\otimes\mathrm{Id}_{x^{**}}} x^{**}$$

(1) $u \coloneqq \left\{u_x\colon x \longrightarrow x^{**}\right\}_{x\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$ は自然変換 $u\colon \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \Longrightarrow (\text{-})^{**}$ を成し，$\forall x,\,y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して以下を充たす：

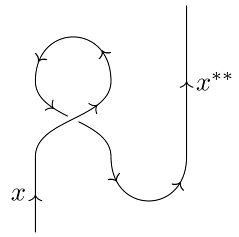
$$u_x \otimes u_y = u_{x\otimes y} \circ b_{y,\,x} \circ b_{x,\,y}$$

(2) $\mathcal{C}$ がテンソル圏ならば u は自然同型になる．

[a] **Drinfeld morphism** と呼ぶ [?, DEFINITION 8.9.4., p.215]

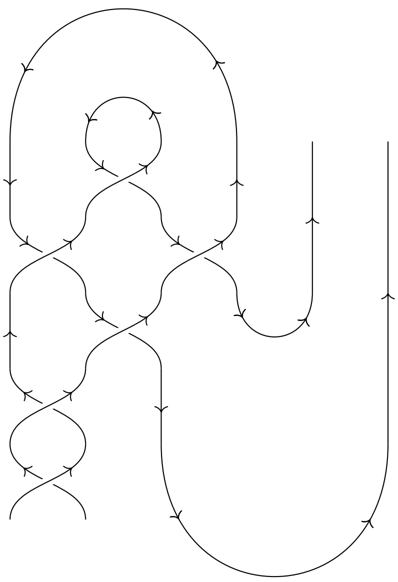
ストリング図式では

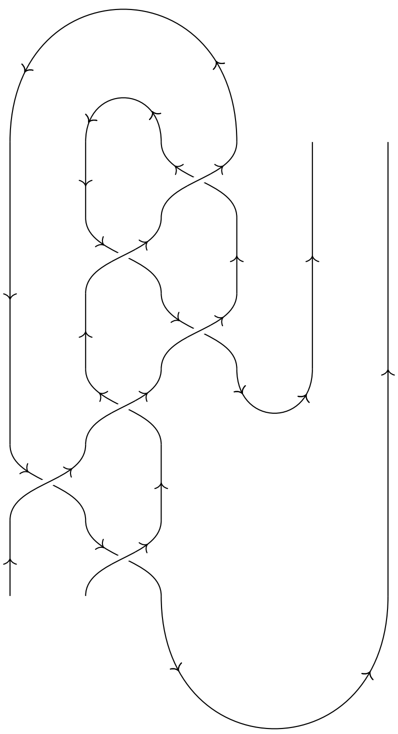
$$u_x =$$



と書ける．

証明　(1) u が自然変換であることは明らか.

$u_{x\otimes y} \circ b_{y,\,x} \circ b_{x,\,y} =$  $\because$ **(hexagon diagrams)**

$=$  $\because$ 命題 1.2 $\times 3$

$= u_x \otimes u_y$ $\because$ 補題 1.4-(3)

(2) $\forall x \in \mathrm{Simp}(\mathcal{C})$ に対して示せば十分である.

■

補題 1.9 より，テンソル圏における任意の自然同型 $p\colon \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \Longrightarrow (\text{-})^{**}$ は，ある自然同型 $\theta\colon \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \Longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ を用いて

$$p = u \circ \theta$$

と書ける．このような p が旋回構造になるのは θ が **(Rib-1)** を充たすときのみである．

定理 1.2: 球状構造とリボン構造

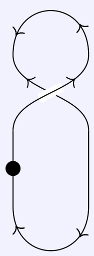
組紐付きフュージョン圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \mathrm{ev}^{\mathrm{L}}, \mathrm{coev}^{\mathrm{L}}, \mathrm{ev}^{\mathrm{R}}, \mathrm{coev}^{\mathrm{R}}, b)$ を与える．このとき，$\mathcal{C}$ の旋回構造 $p\colon \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \Longrightarrow (\text{-})^{**}$ が球状構造であるためには，自然同型 $u^{-1} \circ p\colon \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \Longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ がリボン構造であることが必要十分である．

証明 [?, PROPOSITION 8.10.12, p.220] ■

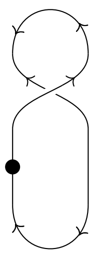
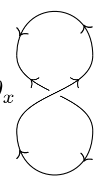
1.5.2 リボン構造と量子次元・S-行列

補題 1.10: リボン構造と量子次元

リボン構造付き組紐付きテンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \mathrm{ev}^{\mathrm{L}}, \mathrm{coev}^{\mathrm{L}}, \mathrm{ev}^{\mathrm{R}}, \mathrm{coev}^{\mathrm{R}}, b, \theta)$ を与える．$\mathcal{C}$ の旋回構造 p は定理 1.2 により定める．このとき，$\forall x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して以下が成り立つ：

$\dim_p(x) =$ 

証明 $x \in \mathrm{Simp}(\mathcal{C})$ の場合に示せば十分である．このとき Schur の補題より $\theta_x \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x) = \mathbb{K}$ なので，$\theta_x = \theta_x \mathrm{Id}_x$ と書ける．故に

 $= \theta_x$ 

$$\begin{aligned} &= \theta_x \, \mathrm{Tr}^{\mathrm{L}}(u_x) && \because \ \textbf{(zig-zag equations)} \\ &= \mathrm{Tr}^{\mathrm{L}}(u_x \circ \theta_x) \\ &= \dim_p(x) \end{aligned}$$

が言えた． ■

定義 1.42: 前モジュラー圏

前モジュラー圏 (pre-modular category) とは，リボン構造付き組紐付きフュージョン圏のこと．

定義 1.43: S-行列

$(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \mathrm{coev}^{\mathrm{L}}, \mathrm{ev}^{\mathrm{L}}, \dagger, b)$ を前モジュラー圏とする．$\forall x, y \in \mathrm{Simp}(\mathcal{C})$ に対して，***S*-行列** (S-matrix) 要素を

$$S_{xy} \coloneqq \mathrm{Tr}(b_{y,x} \circ b_{x,y})$$

で定義する．

命題 1.10: S-行列の性質

S 行列は $\forall x, y, z \in \mathrm{Simp}(\mathcal{C})$ について以下を充たす：

(1)

$$S_{xy} = \theta_x^{-1}\theta_y^{-1} \sum_{z\in\mathrm{Simp}(\mathcal{C})} N_{xy}^z \theta_z \dim(z)$$

(2)

$$S_{xy}S_{xz} = \dim(x) \sum_{w\in\mathrm{Simp}(\mathcal{C})} N_{yz}^w S_{xw}$$

<u>証明</u>　(1) **(Rib-1)** の量子トレースをとると，$x, y \in \mathrm{Simp}(\mathcal{C})$ であることから

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\theta_{x\otimes y}) &= \sum_{z\in\mathrm{Simp}(\mathcal{C})} N_{xy}^z \,\mathrm{Tr}(\theta_z) = \sum_{z\in\mathrm{Simp}(\mathcal{C})} N_{xy}^z \theta_z \dim(z) \\ &= \theta_x\theta_y \,\mathrm{Tr}(b_{y,x}\circ b_{x,y}) = \theta_x\theta_y S_{xy}\end{aligned}$$

(2)

■

1.6 2-群

1.6.1 豊穣圏と 2-圏

まず，**厳密な 2-圏** (strict 2-category) を導入する．

定義 1.44: 豊穣圏

モノイダル圏 $(V, \otimes, I)$ を与える．

***V*-豊穣圏** (V-enriched category) $\mathcal{C}$ は，以下のデータからなる：

- 集合 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，**Hom 対象**と呼ばれる$\underline{V \text{ の}}$対象 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \in \mathrm{Ob}(V)$ を持つ
- $\forall x, y, z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，**合成射**と呼ばれる$\underline{V \text{ の}}$射 $\circ_{x, y, z} \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$ を持つ
- $\forall x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，**恒等素**と呼ばれる$\underline{V \text{ の}}$射 $j_x \colon I \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$ を持つ

これらは以下の図式を可換にしなくてはいけない：

(associativity)

$\forall x, y, z, w \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について[a]

$$
\begin{tikzcd}
\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z)\big) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w) \arrow[r, "\circ_{x,y,z} \otimes \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w)}"] \arrow[dd, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w) \arrow[d, "\circ_{x,z,w}"] \\
 & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, w) \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w)\big) \arrow[r, "\mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)} \otimes \circ_{y,z,w}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, w) \arrow[u, "\circ_{x,y,w}"']
\end{tikzcd}
$$

(unitality)

$\forall x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について[b]

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \arrow[r, "\circ_{x,x,y}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, y) \arrow[l, "\circ_{x,y,y}"'] \\
I \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \arrow[u, "j_x \otimes \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)}"] \arrow[ur, "\cong"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes I \arrow[u, "\mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)} \otimes j_y"'] \arrow[ul, "\cong"]
\end{tikzcd}
$$

[a] $\cong$ はモノイダル圏 V の associator
[b] $\cong$ はモノイダル圏 V の left/right unitor

定義 1.45: 豊穣関手

モノイダル圏 $(V, \otimes, I)$ を与える．
2 つの V-豊穣圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ の間の **V-豊穣関手** (V-enriched functor)

$$F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

は，以下のデータからなる：

- 写像 $F_0\colon \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathcal{D}),\ x \longmapsto F_0(x)$
- V の射の族

$$\left\{F_{x,y}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F_0(x), F_0(y)\big)\right\}_{x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは以下の図式を可換にしなくてはいけない：

(enriched-1)

$\forall x, y, z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して[a]

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \arrow[r, "\circ_{x,y,z}"] \arrow[d, "F_{x,y}\otimes F_{y,z}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z) \arrow[d, "F_{x,z}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F_0(x), F_0(y)\big) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F_0(y), F_0(z)\big) \arrow[r, "\circ_{F_0(x),F_0(y),F_0(z)}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F_0(x), F_0(z)\big)
\end{tikzcd}$$

(enriched-2)

$\forall x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して[b]

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "j_x"] \arrow[dr, "j_{F_0(x)}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x) \arrow[d, "F_{x,x}"] \\
& \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F_0(x), F_0(x)\big)
\end{tikzcd}$$

[a] これは，通常の関手において射の合成が保存されることに対応する．
[b] これは，通常の関手において恒等射が保存されることに対応する．

与えられたモノイダル圏 V に対して，**V-豊穣圏のなす圏**を V-**Cat** と書く．V-**Cat** は

- V-豊穣圏を対象とする
- V-豊穣関手を射とする

ことで得られる圏である．

定義 1.46: 厳密な 2-圏

小圏と関手の圏 **Cat** を【例 **1.2.1**】の方法でモノイダル圏と見做す．**Cat**-豊穣圏のことを**厳密な 2-圏** (strict 2-category) と呼ぶ．

定義 1.46 を解読しよう．まず，小圏と関手の圏 **Cat** における対象とは小圏のことで，射とは関手のことである．さらに，**Cat** のテンソル積とは【**例 1.2.1**】より直積 $\times$ のことである．よって豊穣圏の定義から，厳密な 2-圏 $\mathcal{C}$ は

- **対象** (object)[*9] 全体の集合 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall x,\, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の間の **1-射** (1-morphism)[*10]全体が成す圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cat})$.
- **合成** (composition) と呼ばれる関手 $\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,\, z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, z)$
- **恒等素** (identity morphism) と呼ばれる関手 $j_x\colon 1 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, x)$

の 4 つのデータからなる．従って 1-射 $f\colon x \longrightarrow y$ とは圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)$ の対象 $f \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y))$ のことであるから，2 つの 1-射 $f,\, g \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y))$ が与えられると，圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)$ における，それらの間の射 $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)}(f,\, g)$ が存在する．このような α を **2-射** (2-morphism)[*11]と呼び，混乱防止のため $\alpha\colon f \longrightarrow g$ と書く代わりに $\boldsymbol{\alpha\colon f \Longrightarrow g}$ と書く．

2 つの 2-射 $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)}(f,\, g)$，$\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)}(g,\, h)$ は，圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)$ における射の合成 $*$ によって結合的かつ単位的に合成することができる：

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=60, "f"] \arrow[r, bend right=60, "h"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \beta * \alpha"] & y
\end{tikzcd}
\quad \coloneqq \quad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=60, "f"] \arrow[r, "g" description] \arrow[r, bend right=60, "h"'] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow \alpha"] \arrow[r, phantom, bend right=30, "\Downarrow \beta"] & y
\end{tikzcd}
$$

このような 2-射の合成を**縦の合成** (vertical composition) と呼ぶ．一方，4 つの 1-射 $f,\, g\colon x \longrightarrow y$，$f',\, g'\colon y \longrightarrow z$ および 2 つの 2-射 $\alpha\colon f \Longrightarrow g$，$\alpha'\colon f' \Longrightarrow g'$ が与えられたとき，1-射の合成 $\circ$ が関手であることによって，圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,\, z)$ の射 $(\alpha,\, \alpha')\colon (f,\, f') \longrightarrow (g,\, g')$ に対して圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, z)$ の射，i.e. 2-射

$$
\alpha' \circ \alpha \coloneqq \circ(\alpha,\, \alpha')\colon f' \circ f \Longrightarrow g' \circ g
$$

が対応付く：

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[rr, bend left=60, "f' \circ f"] \arrow[rr, bend right=60, "g' \circ g"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \alpha' \circ \alpha"] & & z
\end{tikzcd}
\quad \coloneqq \quad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=60, "f"] \arrow[r, bend right=60, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & y \arrow[r, bend left=60, "f'"] \arrow[r, bend right=60, "g'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha'"] & z
\end{tikzcd}
$$

このような 2-射の合成を**横の合成** (horizontal composition) と呼ぶ．横の合成は，モノイダル圏 **Cat** が厳密なモノイダル圏であること，および関手 $\circ$ の **(associativity)**，**(unitality)** によって結合的かつ単位的になる．

[*9] **0-セル** (0-cell) とも言う

[*10] **1-セル** (1-cell) とも言う．正確には，圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)$ の対象のことを 1-射と呼ぶ．

[*11] **2-セル** (2-cell) とも言う

縦の合成と横の合成は，$\circ$ が関手であることによって交換する：

$$\begin{aligned}(\beta' * \alpha') \circ (\beta * \alpha) &= \circ\bigl((\beta,\, \beta') * (\alpha,\, \alpha')\bigr) \\ &= \bigl(\circ(\beta,\, \beta')\bigr) * \bigl(\circ(\alpha,\, \alpha')\bigr) \\ &= (\beta' \circ \beta) * (\alpha' \circ \alpha)\end{aligned}$$

図式で書くと一目瞭然である：

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left=50, "f"] \arrow[r, bend right=50, "h"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \beta * \alpha"] & y \arrow[r, bend left=50, "f'"] \arrow[r, bend right=50, "h'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \beta' * \alpha'"] & z \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left=60, "f"] \arrow[r, "g" description] \arrow[r, bend right=60, "h"'] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow \alpha"] \arrow[r, phantom, bend right=30, "\Downarrow \beta"] & y \arrow[r, bend left=60, "f'"] \arrow[r, "g'" description] \arrow[r, bend right=60, "h'"'] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow \alpha'"] \arrow[r, phantom, bend right=30, "\Downarrow \beta'"] & z \end{tikzcd}$$

$$= \begin{tikzcd} x \arrow[rr, bend left=50, "f' \circ f"] \arrow[rr, "g' \circ g" description] \arrow[rr, bend right=50, "h' \circ h"'] \arrow[rr, phantom, bend left=25, "\Downarrow \alpha' \circ \alpha"] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Downarrow \beta' \circ \beta"] & & z \end{tikzcd}$$

定義 1.47: 2-圏

厳密な 2-圏と同様の

- **対象** (object)[a] 全体の集合 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall x,\, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の間の **1-射** (1-morphism)[b]全体が成す圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cat})$.
- **合成** (composition) と呼ばれる関手 $\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,\, z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, z)$
- **恒等素** (identity morphism) と呼ばれる関手 $j_x\colon 1 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, x)$

の 4 つのデータに加えて

- $\forall x, y, z, w \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して **associator** と呼ばれる自然同型[c].

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(w, y) \arrow[dr, bend left, "\circ"] \arrow[dd, Rightarrow, "\alpha_{w,x,y,z}"] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(w, x) \arrow[ur, bend left, "\mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z)} \times \circ"] \arrow[dr, bend right, "\circ \times \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(w, x)}"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(w, z) \\
 & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(w, x) \arrow[ur, bend right, "\circ"'] &
\end{tikzcd}
$$

- $\forall x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して **left/right unitor** と呼ばれる自然同型

$$
\lambda_{x,y} \coloneqq \left\{ l_{x,y\,f} \colon f \longmapsto f \circ j_x(1) \right\}_{f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)}
$$
$$
\rho_{x,y} \coloneqq \left\{ l_{x,y\,f} \colon f \longmapsto j_x(1) \circ f \right\}_{f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x) \arrow[dr, bend left, "\circ"] \arrow[d, Rightarrow, "\lambda_{w,x,y,z}"] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \arrow[ur, bend left, "\mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)} \times j_x"] \arrow[dr, bend right, "j_y \times \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)}"'] \arrow[rr, "\mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)}"] & {} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \\
 & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \arrow[ur, bend right, "\circ"'] \arrow[u, Rightarrow, "\rho_{w,x,y,z}"'] &
\end{tikzcd}
$$

を持ち,

- associator が **(pentagon identity)** を
- unitors が **(triangle identity)** を

充たす $\mathcal{C}$ のことを **2-圏** (2-category) と呼ぶ.

---

[a] **0-セル** (0-cell) とも言う

[b] **1-セル** (1-cell) とも言う. 正確には, 圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\, y)$ の対象のことを 1-射と呼ぶ.

[c] これは圏 **Cat** における図式である.

要するに，厳密な 2-圏において合成 $\circ$ の associativity および unitality を自然同型まで弱めたものが 2-圏である．

【例 1.6.1】2-圏としてのモノイダル圏

モノイダル圏 $(\mathcal{C},\, \otimes,\, I,\, \{a_{x,y,z}\},\, \{l_x\},\, \{l_y\})$ は 2-圏である．実際，2-圏 $\mathbf{B}\mathcal{C}$ を

- $\mathrm{Ob}(\mathbf{B}\mathcal{C}) \coloneqq \{\bullet\}$（1 点集合）
- $\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}\mathcal{C}}(\bullet,\, \bullet) \coloneqq \mathcal{C}$
- $\circ \coloneqq \otimes \colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$
- $j_x \coloneqq \iota_I \colon I \hookrightarrow \mathcal{C}$
- $\alpha_{\bullet,\bullet,\bullet} \coloneqq \{a_{x,y,z}\}$
- $\lambda_{\bullet,\bullet} \coloneqq \{l_{x,y,z}\}, \quad \rho_{\bullet,\bullet} \coloneqq \{r_{x,y,z}\}$

により定義すると $\mathcal{C} = \mathbf{B}\mathcal{C}$ となる．

1.6.2　弱い 2-群・コヒーレントな 2-群・厳密な 2-群

[?] に倣い **2-群** (2-group) を導入する．

定義 1.48: 弱い逆対象

モノイダル圏 $(\mathcal{C},\, \otimes,\, 1)$ の対象 $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を 1 つとる．

- 対象 $y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が x の**弱い逆対象** (weak inverse) であるとは，対象の同型の意味で[a] $x \otimes y \cong 1$ かつ $y \otimes x \cong 1$ が成り立つことを言う．
- x が**弱可逆** (weakly invertible) であるとは，x が弱い逆対象を持つことを言う．

[a] 自然同型ではない

定義 1.49: 弱い 2-群・コヒーレントな 2-群・厳密な 2-群

- **弱い 2-群** (weak 2-group) とは，モノイダル圏 $\mathcal{G}$ であって，任意の対象が弱可逆でかつ任意の射が同型射であるもののこと．
- **コヒーレントな 2-群** (coherent 2-group) とは，モノイダル圏 $\mathcal{G}$ であって，任意の対象 $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$ が可逆な unit，counit $(x,\, \bar{x},\, i_x,\, e_x)$ を持ち，かつ任意の射が同型射であるもののこと．
- **厳密な 2-群** (strict 2-group) とは，モノイダル圏 $\mathcal{G}$ であって，任意の対象が可逆[a]でかつ任意の射が同型射であるもののこと．

[a] $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $x^{-1} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が存在して，厳密に $x \otimes x^{-1} = 1$，$x^{-1} \otimes x = 1$ が成り立つ．

定義 1.50: 2-群の準同型

2-群 $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ の間の**準同型**とは，モノイダル関手 $f\colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ のこと．

定理 1.3: 弱い 2-群はコヒーレントな 2-群

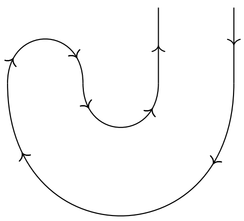
任意の弱い 2-群はコヒーレントな 2-群にすることができる．

<u>**証明**</u> 勝手な弱い 2-群 $\mathcal{G}$ を 1 つ固定する．このとき $\forall x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$ に対してある $\bar{x} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$ および同型射 $i'_x\colon 1 \longrightarrow x \otimes \bar{x},\ e'_x\colon \bar{x} \otimes x \longrightarrow 1$ が存在する．

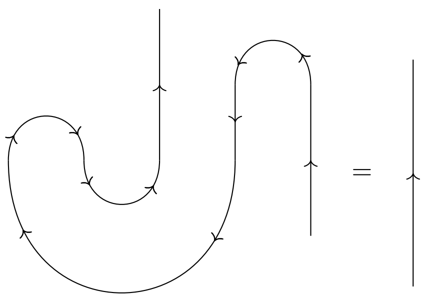
ここで $e_x \coloneqq e'_x$ とおき，

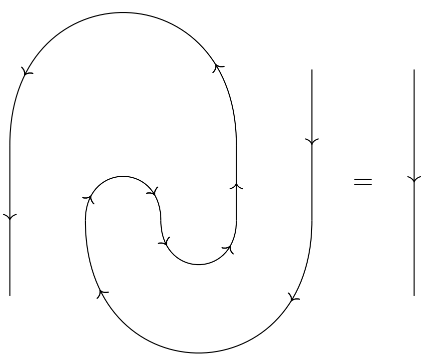
$$i_x \coloneqq (l_x \otimes \mathrm{Id}_{\bar{x}}) \circ a^{-1}_{1,x,\bar{x}} \circ ({i'_x}^{-1} \otimes \mathrm{Id}_{x\otimes\bar{x}}) \circ a^{-1}_{x,\bar{x},x\otimes\bar{x}} \circ (\mathrm{Id}_x \otimes a_{\bar{x},x,\bar{x}}) \circ (\mathrm{Id}_x \otimes {e'_x}^{-1} \otimes \mathrm{Id}_{\bar{x}}) \circ (\mathrm{Id}_x \otimes l^{-1}_{\bar{x}}) \circ i'_x$$

とおくと組 $(x,\ \bar{x},\ i_x,\ e_x)$ が zig-zag equation を充たすことを示す．実際，i_x の定義をストリング図式で書くと

$i_x =$ 

となるから，





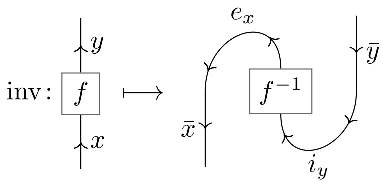
が言える． ■

! 定理 1.3 を踏まえ，以下ではコヒーレントな 2-群のことを単に **2-群** (2-group) と呼ぶ．

2-群 $\mathcal{G}$ において，弱い逆対象を対応づける関手

$$\mathrm{inv}\colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G},\ x \longmapsto \bar{x} \tag{1.6.1}$$

を考えたいが，射の対応は少々厄介である．[?, p.34] に倣うと



とすれば良いことがわかる[*12]．

以上より，2-群 $\mathcal{G}$ を【例 **1.6.1**】により 2 圏 $\mathbf{B}\mathcal{G}$ の言葉で表現すると

- ただ 1 つの対象を持つ：$\mathrm{Ob}(\mathbf{B}\mathcal{G}) = \{\bullet\}$
- 任意の 1-射 $x \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}\mathcal{G}}(\bullet, \bullet)) = \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$ が弱可逆であり，その弱い逆対象 $\bar{x}$ は関手 (1.6.1) によって与えられる．
- 任意の 2-射 $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}\mathcal{G}}(\bullet, \bullet)}(x, y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(x, y)$ が同型射

と言うことになる．特に厳密な 2-群とは，全ての $\alpha, \lambda, \rho, i, e$ が $\underline{\mathcal{G}\text{ の}}$恒等射となっていることを言う．

1.6.3　交差加群との関係

*12 定義からコヒーレントな 2 群は rigid なモノイダル圏であり，zigzag identity を使えることが肝になる．

定義 1.51: 交差加群

交差加群 (crossed module) とは,

- 群準同型 $G_2 \xrightarrow{t} G_1$
- G_1 の左作用 $\alpha\colon G_1 \longrightarrow \mathrm{Aut}(G_2)$

の組であって，以下の条件を満たすもののこと：

(cr-1) 以下の図式を可換にする：

$$\begin{tikzcd} G_2 \times G_2 \arrow[rr, "t\times \mathrm{Id}"] \arrow[dr, "\mathrm{Ad}"'] & & G_1 \times G_2 \arrow[dl, "\alpha"] \\ & G_2 & \end{tikzcd}$$

あるいは同じことだが，$\forall g_i \in G_i$ に対して

$$t\big(\alpha(g_1)(g_2)\big) = g_1 t(g_2) g_1^{-1}$$

を充たす.

(cr-2) 以下の図式を可換にする：

$$\begin{tikzcd} G_1 \times G_2 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{Id}\times t"'] & G_2 \arrow[d, "t"] \\ G_1 \times G_1 \arrow[r, "\mathrm{Ad}"'] & G_1 \end{tikzcd}$$

あるいは同じことだが，$\forall g_2,\, g_2' \in G_2$ に対して

$$\alpha\big(t(g_2)\big)\big(g_2'\big) = g_2 g_2' g_2^{-1}$$

を充たす (**Peiffer identity**).

命題 1.11: 交差加群と厳密な 2-群

(1) 交差加群 $(G_2 \xrightarrow{t} G_1,\ \alpha)$ が与えられたとする．このとき

- 1-射の集合 $\mathcal{G}_0 \coloneqq G_1$
- 2-射の集合 $\mathcal{G}_1 \coloneqq G_1 \ltimes_\alpha G_2$（外部半直積）
- 始点射 $\sigma\colon \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_0,\ (g_1,\ g_2) \longrightarrow g_1$
- 終点射 $\tau\colon \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_0,\ (g_1,\ g_2) \longrightarrow t(g_2)g_1$
- 恒等素 $j\colon \mathcal{G}_0 \longrightarrow \mathcal{G}_1,\ g_1 \longrightarrow (g_1,\ 1_{G_2})$
- 2-射の合成 $\circ\colon \mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_1,\ \big((g_1,\ g_2),\ (g_1',\ g_2')\big) \longmapsto (g_1',\ g_2g_2')$

とおくと，圏 $\mathcal{G}$ は厳密な 2-群になる．

(2) 逆に厳密な 2-群 $(\mathcal{G},\ \otimes,\ 1)$ が与えられたとき，

- $G_1 \coloneqq \mathcal{G}_0$
- $G_2 \coloneqq \operatorname{Ker}\sigma \subset \mathcal{G}_1$
- $t \coloneqq \tau|_{G_2}\colon G_2 \longrightarrow G_1$
- $\alpha\colon G_1 \longrightarrow \operatorname{Aut}(G_2),\ g_1 \longmapsto \big(g_2 \longmapsto j(g_1) \otimes g_2 \otimes j(g_1)^{-1}\big)$

とおくことで交差加群 $(G_2 \xrightarrow{t} G_1,\ \alpha)$ が得られる．

証明 (1) 圏 $\mathcal{G}$ を

- 対象が成す集合を $\operatorname{Ob}(\mathcal{G}) \coloneqq \mathcal{G}_0$ と定義する．
- $\forall g,\ h \in \operatorname{Ob}(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_0$ に対して，その間の射が成す集合を

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{G}}(g,\ h) \coloneqq \big\{\, (f_1,\ f_2) \in \mathcal{G}_1 \bigm| \sigma(f_1,\ f_2) = g,\ \tau(f_1,\ f_2) = h \,\big\}$$

  と定義する．
- $\forall g,\ h,\ k \in \mathcal{G}$ に対して，射の合成を

$$\begin{aligned}\circ_{g,h,k}\colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{G}}(h,\ k) \times \operatorname{Hom}_{\mathcal{G}}(g,\ h) &\longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{G}}(g,\ k),\\ \big((l_1,\ l_2),\ (m_1,\ m_2)\big) &\longmapsto (m_1,\ l_2m_2)\end{aligned}$$

  と定義する．なお，

$$\begin{aligned}\sigma(m_1,\ l_2m_2) &= m_1 = \sigma(m_1,\ m_2) = g,\\ \tau(m_1,\ l_2m_2) &= t(l_2m_2)m_1\\ &= t(l_2)\big(t(m_2)m_1\big)\\ &= t(l_2)h\\ &= t(l_2)\sigma(l_1,\ l_2)\\ &= t(l_2)l_1\\ &= \tau(l_1,\ l_2)\\ &= k\end{aligned}$$

  が成り立つので写像 $\circ_{g,h,k}$ は well-defined である．

として構成する．実際，$\forall (f_1,\ f_2) \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{G}}(g,\ h)$ に対して[*13]

$$(f_1,\ f_2) \circ (g,\ 1_{G_2}) = (g,\ f_2) = (f_1,\ f_2),$$

[*13] Hom 集合の定義より $f_1 = \sigma(f_1,\ f_2) = g$ が自動的に成り立つ．

$$(h,\ 1_{G_2}) \circ (f_1,\ f_2) = (f_1,\ f_2)$$

が成り立つので $\mathrm{Id}_g = (g,\ 1_{G_2}) = j(g) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(g,\ g)$ であり，かつ $\forall (f_1,\ f_2) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(g,\ h),\ \forall (g_1,\ g_2) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(h,\ k),\ \forall (h_1,\ h_2) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(k,\ l)$ に対して

$$\begin{aligned}
\bigl((h_1,\ h_2) \circ (g_1,\ g_2)\bigr) \circ (f_1,\ f_2) &= (g_1,\ h_2 g_2) \circ (f_1,\ f_2) \\
&= (f_1,\ h_2 g_2 f_2) \\
&= (h_1,\ h_2) \circ (f_1,\ g_2 f_2) \\
&= (h_1,\ h_2) \circ \bigl((g_1,\ g_2) \circ (f_1,\ f_2)\bigr)
\end{aligned}$$

が成り立つので，$\mathcal{G}$ は圏の公理を充たす．

さて，$\mathcal{G}_1$ の積を $(g_1,\ g_2) \cdot (h_1,\ h_2) \coloneqq \bigl(g_1 h_1,\ g_2 \alpha(g_1)(h_2)\bigr)$ と書こう．そして関手

$$\otimes \colon \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$$

を次のように定義する：

- $\forall (g,\ h) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G} \times \mathcal{G}) = \mathcal{G}_0 \times \mathcal{G}_0$ に対して

$$g \otimes h \coloneqq gh \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_0$$

  を対応付ける

- $\forall \bigl((f_1,\ f_2),\ (g_1,\ g_2)\bigr) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}\times\mathcal{G}}\bigl((g,\ h),\ (g',\ h')\bigr)$ に対して

$$(f_1,\ f_2) \otimes (g_1,\ g_2) \coloneqq (f_1,\ f_2) \cdot (g_1,\ g_2) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(gh,\ g'h')$$

  を対応付ける．なお，

$$\begin{aligned}
\sigma\bigl((f_1,\ f_2) \cdot (g_1,\ g_2)\bigr) &= f_1 g_1 \\
&= \sigma(f_1,\ f_2)\sigma(g_1,\ g_2) \\
&= gh, \\
\tau\bigl((f_1,\ f_2) \cdot (g_1,\ g_2)\bigr) &= t\bigl(f_2 \alpha(f_1)(g_2)\bigr) f_1 g_1 \\
&= t(f_2) t\bigl(\alpha(f_1)(g_2)\bigr) f_1 g_1 \\
&= t(f_2) f_1 t(g_2) g_1 && \because \text{Crossed module の定義} \\
&= \tau(f_1,\ f_2)\tau(g_1,\ g_2) \\
&= g'h'
\end{aligned}$$

  なのでこの対応は well-defined である．

群演算の結合則より $\otimes$ に関する associator は全て恒等射で，かつ $1 \coloneqq 1_{G_1}$ とおくと left/right unitor も恒等射になる．よって $(\mathcal{G},\ \otimes,\ 1_{G_1},\ \{\mathrm{Id}\},\ \{\mathrm{Id}\},\ \{\mathrm{Id}\})$ は厳密なモノイダル圏を成す．$\forall g \in \mathcal{G}_0$ に対して明らかに $g \otimes g^{-1} = g^{-1} \otimes g = 1$ であり，かつ $\forall (f_1,\ f_2) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(g,\ h)$ に対して $(h,\ f_2^{-1}) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\bullet,\bullet)}(h,\ g)$ は

$$\begin{aligned}
(f_1,\ f_2) \circ (h,\ f_2^{-1}) = (h,\ 1_{G_2}) = \mathrm{Id}_h \\
(h,\ f_2^{-1}) \circ (f_1,\ f_2) = (g,\ 1_{G_2}) = \mathrm{Id}_g
\end{aligned}$$

を充たすので，$\mathcal{G}$ は厳密な 2 群である．

(2) 始めに，厳密な 2-群の定義から 1-射の集合 $\mathcal{G}_0 \coloneqq \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$ は $\otimes$ を積とする群を成し，2-射全体がなす集合 $\mathcal{G}_1 \coloneqq \bigcup_{g,\, h\in\mathcal{G}_0} \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}\,(g,\, h)$ もまたテンソル積 $\otimes$ について群を成すことに注意する[*14]．恒等素は

$$j\colon \mathcal{G}_0 \longrightarrow \mathcal{G}_1,\ g \longmapsto \mathrm{Id}_g$$

と定義され，始点射および終点射は

$$\sigma\colon \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_0,\quad \underbrace{\varphi}_{\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}\,(g,\,h)} \longmapsto g$$
$$\tau\colon \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_0,\quad \underbrace{\varphi}_{\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}\,(g,\,h)} \longmapsto h$$

のように定義される．特に $\forall\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}\,(g,\, h),\ \forall\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}\,(g',\, h')$ に対して

$$\sigma(\psi\otimes\varphi) = g\otimes g' = \sigma(\psi)\otimes\sigma(\varphi)$$
$$\tau(\psi\otimes\varphi) = h\otimes h' = \tau(\psi)\otimes\tau(\varphi)$$

が成り立つので $\sigma,\,\tau$ は群準同型である．

交差加群の定義 **(cr-1)**, **(cr-2)** を確認する．

(cr-1) $\forall g_1 \in G_1,\ \forall g_2 \in G_2$ に対して

$$\begin{aligned} t\bigl(\alpha(g_1)(g_2)\bigr) &= t\bigl(\mathrm{Id}_{g_1}\otimes g_2\otimes \mathrm{Id}_{g_1^{-1}}\bigr) \\ &= g_1\otimes t(g_2)\otimes g_1^{-1} \end{aligned}$$

(cr-2) $\forall g_2,\, g_2' \in G_2$ に対して

$$\begin{aligned} \alpha\bigl(t(g_2)\bigr)(g_2') &= \mathrm{Id}_{t(g_2)}\otimes g_2'\otimes \mathrm{Id}_{t(g_2)^{-1}} \\ &= \mathrm{Id}_{\tau(g_2)}\otimes g_2'\otimes \mathrm{Id}_{\tau(g_2^{-1})} \\ &= g_2\otimes g_2'\otimes g_2^{-1} \end{aligned}$$

ただし $\sigma(g_2) = 1$ であることを使った．

■

1.6.4 2-群の分類

定義 1.52: 骨格的

コヒーレントな 2 群 $(\mathcal{G},\, \otimes,\, 1,\, a,\, l,\, r,\, \mathrm{ev}^{\mathrm{L}},\, \mathrm{coev}^{\mathrm{L}})$ が**骨格的** (skeltal) であるとは，任意の同型な 1-射が等しいことを言う．

[*14] まず，$\forall\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}\,(g,\, h)$ に対して $\varphi\otimes \mathrm{Id}_1 = \varphi$ であるから，単位元は $\mathrm{Id}_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}\,(1,1)$ である．逆元を見つけるのは少し難しい．$\forall\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}\,(g,\, h)$ を 1 つ固定しよう．$\mathcal{G}$ が厳密な 2-群であることから，$g\otimes g^{-1} = 1$ を充たす $g^{-1} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$ が存在する．よって $\otimes$ が関手なので $\mathrm{Id}_g\otimes\mathrm{Id}_{g^{-1}} = \mathrm{Id}_{g\otimes g^{-1}} = \mathrm{Id}_1$ であり，任意の恒等射が逆元を持つことが分かった．さらに，$\otimes$ が関手であることにより $\forall\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}\,(g,\, h),\ \forall\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}\,(g',\, h')$ に対して

$$\varphi\otimes\psi = (\mathrm{Id}_h\circ\varphi)\otimes(\psi\circ\mathrm{Id}_{g'}) = (\mathrm{Id}_h\otimes\psi)\circ(\varphi\otimes\mathrm{Id}_{g'})$$

が成り立つので，φ の $\otimes$ に関する逆元は $\psi \coloneqq \mathrm{Id}_{h^{-1}}\otimes\varphi^{-1}\otimes\mathrm{Id}_{g^{-1}}$ であることが分かる．

骨格的であるとは，同型射が自己同型しか存在しないことを意味する．[?, p.55] に倣って特別な 2 群を定義する．

定義 1.53: 特別な 2 群

コヒーレントな 2 群 $(\mathcal{G}, \otimes, 1, a, l, r, \mathrm{ev^L}, \mathrm{coev^L})$ が**特別** (special) であるとは，骨格的でかつ $l, r, \mathrm{ev^L}, \mathrm{coev^L}$ が恒等自然変換であることを言う．

命題 1.12:

任意のコヒーレントな 2 群 $(\mathcal{G}, \otimes, 1, a, l, r, \mathrm{ev^L}, \mathrm{coev^L})$ は，ある特別な 2 群と同型である．

証明 コヒーレントな 2 群 $\mathcal{G}$ から，それと 2 群として同型な特別な 2 群 $(\mathcal{G}, \tilde{\otimes}, 1, \tilde{a}, \tilde{l}, \tilde{r}, \widetilde{\mathrm{ev}}^{\mathrm{L}}, \widetilde{\mathrm{coev}}^{\mathrm{L}})$ を構成する[*15]．そのためにまず，$\forall x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$ に対してある対象 $x\tilde{\otimes}y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$ および同型射 $\gamma_{x,y} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(x\tilde{\otimes}y, x \otimes y)$ を選べたとしよう．このとき，$\gamma_{x,y}$ の可逆性により

- 関手 $\mathrm{id}\colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$
- 射 $\mathrm{Id}_1\colon 1 \longrightarrow \mathrm{id}(1) = 1$
- 射の族 $\left\{\gamma_{x,y}\colon \mathrm{id}(x\tilde{\otimes}y) \longrightarrow \mathrm{id}(x) \otimes \mathrm{id}(y)\right\}_{x,\, y\in\mathrm{Ob}(\mathcal{G})}$

の 3 つ組がモノイダル関手になるように関手 $\tilde{\otimes}\colon \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ および自然変換 $\tilde{a}, \tilde{l}, \tilde{r}$ を構成することができる．$\widetilde{\mathrm{ev}}^{\mathrm{L}}, \widetilde{\mathrm{coev}}^{\mathrm{L}}$ は，以下の可換図式が成り立つように決めれば良い：

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{id}(x\tilde{\otimes}x^*) \arrow[r, "\gamma_{x,x^*}"] & \mathrm{id}(x) \otimes \mathrm{id}(x^*) \\
\mathrm{id}(1) \arrow[u, "\mathrm{id}(\widetilde{\mathrm{coev}}^{\mathrm{L}}_x)"] & 1 \arrow[l, "\mathrm{Id}_1"] \arrow[u, "\mathrm{coev}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{id}(x)}"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{id}(x\tilde{\otimes}x^*) \arrow[r, "\gamma_{x,x^*}"] \arrow[d, "\mathrm{id}(\widetilde{\mathrm{ev}}^{\mathrm{L}}_x)"'] & \mathrm{id}(x) \otimes \mathrm{id}(x^*) \arrow[d, "\mathrm{ev}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{id}(x)}"] \\
\mathrm{id}(1) & 1 \arrow[l, "\mathrm{Id}_1"]
\end{tikzcd}
$$

このようにして得られる rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{G}, \tilde{\otimes}, 1, \tilde{a}, \tilde{l}, \tilde{r}, \widetilde{\mathrm{ev}}^{\mathrm{L}}, \widetilde{\mathrm{coev}}^{\mathrm{L}})$ は明らかにコヒーレントな 2 群であり，2 群の準同型 $(\mathrm{id}, \mathrm{Id}_1, \{\gamma_{x,y}\})$ がもとのコヒーレントな 2 群 $(\mathcal{G}, \tilde{\otimes}, 1, \tilde{a}, \tilde{l}, \tilde{r}, \widetilde{\mathrm{ev}}^{\mathrm{L}}, \widetilde{\mathrm{coev}}^{\mathrm{L}})$ との同型を与える．具体的に

$$
x\tilde{\otimes}y := \begin{cases} y, & x = 1 \\ x, & y = 1 \\ 1, & x = y^* \\ 1, & y = x^* \\ x \otimes y, & \text{otherwise} \end{cases}
$$

[*15] 下地になる圏 $\mathcal{G}$ と単位対象 1 は同じものをとる．

$$\gamma_{x,y} := \begin{cases} l_y^{-1}, & x = 1 \\ r_x^{-1}, & y = 1 \\ \mathrm{ev}_y^{\mathrm{L}-1}, & x = y^* \\ \mathrm{coev}_x^{\mathrm{L}}, & y = x^* \\ \mathrm{Id}_{x\otimes y}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

と選ぶことで，上述の構成で $\tilde{l}$, $\tilde{r}$, $\tilde{\mathrm{ev}}^{\mathrm{L}}$, $\tilde{\mathrm{coev}}^{\mathrm{L}}$ を全て恒等自然変換にすることができる．

ところで，選択公理を認めると，任意の圏 $\mathcal{G}$ は骨格的な充満部分圏 $\mathrm{sk}(\mathcal{G})$ を持つ．$\mathcal{G}$ を $\mathrm{sk}(\mathcal{G})$ と同一視することで証明が完了する． ■

命題 1.12 により，コヒーレントな 2 群の分類は特別な 2 群の分類と一致する．

命題 1.13: 2 群の分類

特別な 2 群 $(\mathcal{G},\otimes,1,a)$ は以下のデータの組 (G,H,α,a) と 1 対 1 対応する：

- 群 G
- 可換群 H
- 群作用 $\alpha\colon G \longrightarrow H$
- 正規化された 3-コサイクル $a \in Z^3_{\mathrm{Grp}}(G;H)$

証明 特別な 2 群 $(\mathcal{G},\otimes,1,a)$ を与える．$\mathcal{G}$ は骨格的なので，その 1-射の集合は $\otimes$ に関して群をなす．

$$G := \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$$

とおく．

$\forall h, h' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(1,1)$ に対して，$\otimes$ の関手性から

$$\begin{aligned} h\otimes h' &= (h\circ \mathrm{Id}_1)\otimes(\mathrm{Id}_1\circ h') \\ &= (h\otimes \mathrm{Id}_1)\circ(\mathrm{Id}_1\otimes h') \\ &= h\circ h' \\ &= (\mathrm{Id}_1\otimes h)\circ(h'\otimes \mathrm{Id}_1) \\ &= (\mathrm{Id}_1\circ h')\otimes(h\circ \mathrm{Id}_1) \\ &= h'\otimes h \end{aligned}$$

が成り立つ．命題 1.11-(2) の証明と同様の議論により $\otimes$ に関する逆元も存在するので，

$$H := \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(1,1)$$

は $\otimes$ に関して可換群をなす．

ここで，写像

$$\alpha\colon G \longrightarrow \mathrm{Aut}(H),\ g \longmapsto \bigl(h \longmapsto (\mathrm{Id}_g\otimes h)\otimes \mathrm{Id}_{g^*}\bigr)$$

を考える．$\otimes$ の関手性により α は群準同型である．

最後に，$\mathcal{G}$ が骨格的であることから associator が

$$a_{g_1,g_2,g_3} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(g_1\otimes g_2\otimes g_3,\ g_1\otimes g_2\otimes g_3)$$

のように自己同型になることに注意する．ここから

$$a\colon G^{\times 3} \longrightarrow H,\ (g_1,\ g_2,\ g_3) \longmapsto a_{g_1,g_2,g_3} \otimes (\mathrm{Id}_{(g_1\otimes g_2\otimes g_3)^*})$$

のように定義すると，pentagon identity から $a \in Z^3_{\mathrm{Grp}}(G;\ H)$ が分かり，triangle identity から $g_1,\ g_2,\ g_3$ のうち少なくとも 1 つが 1 であるときに $a(g_1,\ g_2,\ 1) = \mathrm{Id}_1$ が成り立つことが分かる． ■

1.7 3-群

1.7.1 3-圏

一般の 3-圏は associator, unitors のせいで扱いが難しいので，まずは**厳密な 3-圏** (strict 3-group) を考える．**Cat** を【例 **1.2.1**】の方法でモノイダル圏と見做す．定義 1.46 から，2-圏としての同値

$$\mathbf{Str2Cat} \cong \mathbf{Cat}\text{-}\mathbf{Cat}$$

が成り立つ．さらに **Cat**-**Cat** は直積に関してモノイダル圏になる．

定義 1.54: 厳密な 3-圏

厳密な 2-圏が成す 2-圏 **Cat**-**Cat** をモノイダル圏と見做す．このとき **Cat**-**Cat**-豊穣圏のことを**厳密な 3-圏** (strict 3-category) と呼ぶ．

1.7.2 2-crossed module と厳密な 3-群

定義 1.55: 厳密な 3-群

厳密な 3-圏 $\mathcal{G}$ であって，ただ 1 つの対象を持ち，1-射，2-射，3-射が厳密に可逆であるものを**厳密な 3-群** (strict 3-category) と呼ぶ．

定義 1.56: 2-交差加群

2-交差加群 (2-crossed module) とは，以下のデータからなる：

- 群の正規複体 $G_3 \xrightarrow{\partial_2} G_2 \xrightarrow{\partial_1} G_1$
- 群の左作用 $\alpha_1 \colon G_1 \longrightarrow \mathrm{Aut}(G_2)$, $\alpha_2 \colon G_1 \longrightarrow \mathrm{Aut}(G_3)$
- **Peiffer lifting** と呼ばれる写像 $\{\text{-}, \text{-}\} \colon G_2 \times G_2 \longrightarrow G_3$

これらは以下の条件を充たす：

(2CM1) ∂_1, ∂_2 は G_1-同変

(2CM2) $\forall g_2, h_2 \in G_2$ に対して

$$\partial_2\{g_2, h_2\} = \alpha_1(g_2)(h_2) g_2 h_2^{-1} g_2^{-1}$$

(2CM3) $\forall g_3, h_3 \in G_3$ に対して

$$\{\partial_2 g_3, \partial_2 h_3\} = [h_3, g_3]$$

(2CM4) $\forall g_2 \in G_2,\ g_3 \in G_3$ に対して

$$\{g_2, \partial_2 g_3\}\{\partial_2 g_3, g_2\} = \alpha_2\bigl(\partial_1(g_2)\bigr)(g_3) g_3^{-1}$$

(2CM5) $\forall g_2, h_2, k_2 \in G_2$ に対して

$$\begin{aligned}\{g_2, h_2 k_2\} &= \{g_2, h_2\}\bigl\{\partial_2\{g_2, k_2\}, g_2 h_2 g_2^{-1}\bigr\}\{g_2, k_2\} \\ \{g_2 h_2, k_2\} &= \alpha_2\bigl(\partial_1(g_2)\bigr)\bigl(\{h_2, k_2\}\bigr)\bigl\{g_2, h_2 k_2 h_2^{-1}\bigr\}\end{aligned}$$

(2CM6) $\forall g_1 \in G_1,\ \forall g_2, h_2 \in G_2$ に対して

$$\alpha_2(g_1)(\{g_2, h_2\}) = \{\alpha_1(g_1)(g_2), \alpha_1(g_1)(h_2)\}$$