第 1 章

コホモロジー

R を環とする．

定義 1.1: 良い被覆

位相空間 X の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ が**良い被覆** (good cover) であるとは，$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\Lambda$ に対して

$$U_{\alpha_1}\cap\cdots\cap U_{\alpha_n}\neq\emptyset \quad\Longrightarrow\quad U_{\alpha_1}\cap\cdots\cap U_{\alpha_n}\text{ は可縮}$$

が成り立つこと．

以下では $\boldsymbol{U_{\alpha_1\ldots\alpha_n}} := U_{\alpha_1}\cap\cdots\cap U_{\alpha_n}$ と略記する．

1.1 層係数コホモロジー

位相空間 X を 1 つ固定する．X 上の**開集合の圏** $\mathbb{O}_{\boldsymbol{X}}$ を，

- X の開集合を対象とする
- X の任意の開集合 $U, V\subset X$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{O}_X}(U,V) := \begin{cases}\{\,\text{包含写像 } U\hookrightarrow V\,\}, & U\subset V\\ \emptyset, & U\not\subset V\end{cases}$$

と定義する．

定義 1.2: 前層

位相空間 X 上の，小圏 $\mathcal{S}$ に値をとる**前層** (presheaf) とは，関手

$$P\colon \mathbb{O}_X^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}$$

のこと[a].

[a] 最も一般的には，関手 $P\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}$ のことを圏 $\mathcal{C}$ 上の $\mathcal{S}$ に値をとる前層と呼ぶ https://ncatlab.org/nlab/show/presheaf

位相空間 X 上の，圏 $\mathcal{S}$ に値をとる**前層の圏 $\mathbf{PSh}(X, \mathcal{S})$** とは，

- $\mathcal{S}$ に値をとる前層を対象とする．
- $\mathcal{S}$ に値をとる前層 $P, Q\colon \mathbb{O}_X^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}$ に対して，自然変換

$$F\colon P \Longrightarrow Q$$

  を射とする

圏のこと．

【例 1.1.1】定数前層

圏 $\mathcal{S}$ の対象 A に対して定まる前層

$$\begin{aligned} A_X\colon \mathbb{O}_X^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathcal{S}, \\ U &\longmapsto A, \\ (U \hookrightarrow V) &\longmapsto \mathrm{id}_A \end{aligned}$$

のことを**定数前層** (constant presheaf) と呼ぶ．

【例 1.1.2】微分形式のなす前層

X を C^∞ 多様体とする．このとき

$$\begin{aligned} C_X^\infty\colon \mathbb{O}_X^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathbb{R}\text{-}\mathbf{Mod}, \\ U &\longmapsto C^\infty(U), \\ (\iota \circ U \hookrightarrow V) &\longmapsto \bigl(f \longmapsto f \circ \iota\bigr) \end{aligned}$$

なる対応は前層である．同様に，$\forall q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$\begin{aligned} \Omega_X^q\colon \mathbb{O}_X^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathbb{R}\text{-}\mathbf{Mod}, \\ U &\longmapsto \Omega^q(U), \\ (\iota\colon U \hookrightarrow V) &\longmapsto \bigl(\omega \longmapsto \iota^*\omega\bigr) \end{aligned}$$

なる対応は前層である．

定義 1.3: 層

前層 $P \in \mathrm{Ob}(\mathbf{PSh}(X,\, \mathcal{S}))$ が**層** (sheaf) であるとは，

- X の任意の開集合 $U \subset X$ および U の開被覆 $\left\{U_\alpha\right\}_{\alpha\in\Lambda}$
- 任意の族 $\left\{x_\alpha \in P(U_\alpha)\right\}_{\alpha\in\Lambda}$ であって，$\forall\alpha,\,\beta \in \Lambda$ に対して

$$P(U_\alpha \cap U_\beta \hookrightarrow U_\alpha)(x_\alpha) = P(U_\alpha \cap U_\beta \hookrightarrow U_\beta)(x_\beta)$$

  を充たすもの

に対して，$x \in P(U)$ が一意的に存在して

$$\forall \alpha \in \Lambda,\ P(U_\alpha \hookrightarrow U)(x) = x_\alpha$$

を充たすこと．

位相空間 X 上の，圏 $\mathcal{S}$ に値をとる**層の圏 $\mathbf{Sh}(X,\, \mathcal{S})$** とは，

- $\mathcal{S}$ に値をとる層を対象とする．
- $\mathcal{S}$ に値をとる層 $P,\, Q\colon \mathbb{O}_X^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}$ に対して，自然変換

$$F\colon P \Longrightarrow Q$$

  を射とする

圏のこと．$\mathcal{S}$ がアーベル圏のとき，圏 $\mathrm{Sh}(X,\, \mathcal{S})$ もまたアーベル圏である [?, p.298, 命題 4.30].

X を位相空間とする．加法的関手

$$A\colon \mathrm{Sh}(X,\, R\text{-}\mathbf{Mod}) \longrightarrow R\text{-}\mathbf{Mod} \tag{1.1.1}$$

を，

- 任意の層 $P \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Sh}(X,\, R\text{-}\mathbf{Mod}))$ に対して R-加群 $P(X) \in \mathrm{Ob}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ を対応付ける
- 層 $P,\, Q \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Sh}(X,\, R\text{-}\mathbf{Mod}))$ の間の任意の自然変換 $F\colon P \Longrightarrow Q$ に対して，R-加群の準同型 $F_X\colon P(X) \longrightarrow Q(X)$ を対応付ける

関手として定義する．

定義 1.4: 層係数コホモロジー

加法的関手 (1.1.1) の右導来関手を $\left(H^n(X,\, \text{-})\right)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ と書く．層 $P \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Sh}(X,\, R\text{-}\mathbf{Mod}))$ を係数とする位相空間 X の**層係数コホモロジー** (sheaf cohomology) とは，

$$H^n(X,\, P)$$

のこと．

1.2　Čech コホモロジー

位相空間 X および前層 $P \in \mathrm{Ob}(\mathrm{PSh}(X,\, R\text{-}\mathbf{Mod}))$ を与える．
X の開被覆 $\mathcal{U} \coloneqq \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ をとる．$\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$\check{C}^n(\mathcal{U},\, P) \coloneqq \prod_{(\alpha_0,\, \dots,\, \alpha_n)\in\Lambda^{n+1}} P(U_{\alpha_0\dots\alpha_n})$$

と定義し，

$$\begin{aligned}
&\delta^{n+1}\colon \check{C}^n(\mathcal{U},\, P) \longrightarrow \check{C}^{n+1}(\mathcal{U},\, P),\\
&(x_{\alpha_0\dots\alpha_n})_{(\alpha_0,\,\dots,\,\alpha_n)} \longmapsto \left(\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j P(U_{\alpha_0\dots\alpha_{n+1}} \hookrightarrow U_{\alpha_0\dots\hat{\alpha_j}\dots\alpha_{n+1}})(x_{\alpha_0\dots\hat{\alpha_j}\dots\alpha_{n+1}})\right)_{(\alpha_0,\,\dots,\,\alpha_{n+1})}
\end{aligned} \tag{1.2.1}$$

と定義すると $\delta^{n+1}\circ\delta^n = 0$ であるから，$R\text{-}\mathbf{Mod}$ の図式

$$\cdots \xrightarrow{\delta^{n-1}} \check{C}^{n-1}(\mathcal{U},\, P) \xrightarrow{\delta^n} \check{C}^n(\mathcal{U},\, P) \xrightarrow{\delta^{n+1}} \check{C}^{n+1}(\mathcal{U},\, P) \xrightarrow{\delta^{n+2}} \cdots$$

はコチェイン複体である．この複体を **Čech 複体**と呼ぶ．

定義 1.5: Čech コホモロジー

Čech 複体 $\left(\check{C}^\bullet(\mathcal{U},\, P),\, \delta^\bullet\right)$ のコホモロジーのことを X の開被覆 $\mathcal{U}$ に関する P 係数 **Čech コホモロジー**と呼び，$\boldsymbol{\check{H}^\bullet(\mathcal{U},\, P)}$ と書く．

【例 1.2.1】Čech-de Rham 複体

X を C^∞ 多様体とし，X の開被覆 $\mathcal{U}$ をとる．**【例 1.1.2】**において導入した前層 $\Omega_X^q\colon \mathbb{O}_X^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbb{R}\text{-}\mathbf{Mod}$ について，複体 $\left(\check{C}^\bullet(\mathcal{U},\, \Omega_X^q),\, \delta^\bullet\right)$ のことを **Čech-de Rham 複体**と呼ぶ．$\delta\colon \check{C}^n(\mathcal{U},\, \Omega_X^l)$ の定義 (1.2.1) に $\underline{(-1)^l\ をつける}$ことで，これは二重複体の構造[a]を持つ：

$$\begin{array}{ccccccccc}
\check{C}^0(\mathcal{U},\, \Omega_X^0) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \check{C}^0(\mathcal{U},\, \Omega_X^1) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \check{C}^0(\mathcal{U},\, \Omega_X^{\dim X}) & \longrightarrow & 0\\
\downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \\
\check{C}^1(\mathcal{U},\, \Omega_X^0) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \check{C}^1(\mathcal{U},\, \Omega_X^1) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \check{C}^1(\mathcal{U},\, \Omega_X^{\dim X}) & \longrightarrow & 0\\
\downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \\
\check{C}^2(\mathcal{U},\, \Omega_X^0) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \check{C}^2(\mathcal{U},\, \Omega_X^1) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \check{C}^2(\mathcal{U},\, \Omega_X^{\dim X}) & \longrightarrow & 0\\
\downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & &
\end{array}$$

[a] $(-1)^l$ の因子は $\mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d} = 0$ を成り立たせるために必要である．

命題 1.1: 良い被覆に関する Čech コホモロジー

定数前層 $\mathbb{R}_X : \mathbb{O}_X \longrightarrow \mathbb{R}\text{-}\mathbf{Mod}$ について，もし $\mathcal{U}$ が良い被覆ならば

$$H^\bullet_{\mathrm{dR}}(X;\,\mathbb{R}) \cong \check{H}^\bullet(\mathcal{U};\,\mathbb{R}_X)$$

が成り立つ．

<u>証明</u> ■

1.3 Deligne-Beilinson コホモロジー

一般論には立ち入らず，[?, p.21, Appendix A] を参考に，本文中で必要になる最小限だけ Deligne-Beilinson コホモロジーを導入する．

C^∞ 多様体 X とその開被覆 $\mathcal{U}$ を一つ固定する．まず，Čech-de Rham 複体の de Rham 複体成分を次数 -1 に拡張する：

$$\check{C}^n(\mathcal{U},\,\Omega_X^{-1}) \coloneqq \check{C}^n(\mathcal{U},\,\mathbb{Z}_X)$$

ただし $\mathbb{Z}_X$ は圏 $\mathbb{R}\text{-}\mathbf{Mod}$ の定数前層である．そして

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_{-1} \colon \check{C}^n(\mathcal{U},\,\Omega_X^{-1}) &\longrightarrow \check{C}^n(\mathcal{U},\,\Omega_X^{0}), \\ \left(c_{\alpha_0\dots\alpha_n}\right)_{(\alpha_0,\,\dots,\,\alpha_n)} &\longmapsto \left((x \longmapsto c_{\alpha_0\dots\alpha_n})\right)_{(\alpha_0,\,\dots,\,\alpha_n)} \end{aligned}$$

と定義することで，二重複体

$$\begin{tikzcd}
\check{C}^0(\mathcal{U},\,\Omega_X^{-1}) \arrow[r, "\mathrm{d}_{-1}"] \arrow[d, "\delta"] & \check{C}^0(\mathcal{U},\,\Omega_X^{0}) \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "\delta"] & \check{C}^0(\mathcal{U},\,\Omega_X^{1}) \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "\delta"] & \cdots \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \check{C}^0(\mathcal{U},\,\Omega_X^{\dim X}) \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & 0 \\
\check{C}^1(\mathcal{U},\,\Omega_X^{-1}) \arrow[r, "\mathrm{d}_{-1}"] \arrow[d, "\delta"] & \check{C}^1(\mathcal{U},\,\Omega_X^{0}) \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "\delta"] & \check{C}^1(\mathcal{U},\,\Omega_X^{1}) \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "\delta"] & \cdots \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \check{C}^1(\mathcal{U},\,\Omega_X^{\dim X}) \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & 0 \\
\check{C}^2(\mathcal{U},\,\Omega_X^{-1}) \arrow[r, "\mathrm{d}_{-1}"] \arrow[d, "\delta"] & \check{C}^2(\mathcal{U},\,\Omega_X^{0}) \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "\delta"] & \check{C}^2(\mathcal{U},\,\Omega_X^{1}) \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "\delta"] & \cdots \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \check{C}^2(\mathcal{U},\,\Omega_X^{\dim X}) \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots &
\end{tikzcd}$$

を得る．ここから，ある $0 \le p \le \dim X + 1$ に対して

$$C_{\mathrm{D}}{}_p^q \coloneqq \begin{cases} \bigoplus_{n+m=q-1} \check{C}^n(\mathcal{U},\,\Omega_X^m), & 0 \le q \le p \\ \bigoplus_{\substack{n+m=p-1,\\ m \le p-1}} \check{C}^n(\mathcal{U},\,\Omega_X^m), & 0 \le q > p \end{cases}$$

と定義し $D \coloneqq \mathrm{d} + (-1)^{\deg}\delta$ とおくと，図式

$$\cdots \xrightarrow{D} C_{\mathrm{D}}{}_p^q \xrightarrow{D} C_{\mathrm{D}}{}_p^{q+1} \xrightarrow{D} \cdots$$

はコチェイン複体になる．

定義 1.6: Deligne-Beilinson コホモロジー

$0 \le p \le \dim X + 1$ を与える．
上述の複体 $\left(C_{\mathrm{D}}{}_p^{\bullet},\ \mathcal{U},\ D\right)$ を開被覆 $\mathcal{U}$ に関する **Deligne-Beilinson 複体**，そのコホモロジーを **Deligne-Beilinson コホモロジー**と呼ぶ．記号として $\boldsymbol{H_{\mathrm{D}}^{\bullet}\left(C_{\mathrm{D}p}, \mathcal{U}\right)}$ と書く．

標準的射影 $\pi^q \colon C_{\mathrm{D}}{}_p^q \longrightarrow \check{C}^q(\mathcal{U},\ \Omega_X^{-1})$ はチェイン写像

$$\begin{CD}
\cdots @>{D}>> C_{\mathrm{D}}{}_p^q @>{D}>> C_{\mathrm{D}}{}_p^{q+1} @>{D}>> \cdots \\
@V{\pi}VV @V{\pi}VV @V{\pi}VV \\
\cdots @>{\delta}>> C_{\mathrm{D}}{}_p^q @>{\delta}>> C_{\mathrm{D}}{}_p^{q+1} @>{\delta}>> \cdots
\end{CD}$$

となるので，誘導準同型

$$H_{\mathrm{D}}^q\left(C_{\mathrm{D}p}, \mathcal{U}\right) \longrightarrow \check{H}^q\left(\mathcal{U},\ \mathbb{Z}_X\right)$$

がある．

命題 1.2: Deligne-Beilinson コホモロジーと Čech コホモロジー

$0 \le p \le \dim X + 1$ を与える．

(1) $q < p$ ならば

$$H_{\mathrm{D}}^q\left(C_{\mathrm{D}p}, \mathcal{U}\right) \cong \check{H}^{q-1}\left(\mathcal{U},\ \mathbb{R}/\mathbb{Z}\right)$$

(2) $q > p$ ならば

$$H_{\mathrm{D}}^q\left(C_{\mathrm{D}p}, \mathcal{U}\right) \cong \check{H}^{q-1}\left(\mathcal{U},\ \mathbb{Z}\right)$$

(3) $q = p$ ならば，$\mathbb{Z}$ 加群の完全列

$$0 \longrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{closed global } (p-1)\text{-forms} \\ \text{with integral periods}\end{matrix}\right\} \longrightarrow \Omega^{p-1}(X;\ \mathbb{R}) \longrightarrow H_{\mathrm{D}}^p\left(C_{\mathrm{D}p}, \mathcal{U}\right) \longrightarrow \check{H}^p\left(\mathcal{U},\ \mathbb{Z}\right) \quad \text{(exact)}$$

が成り立つ．

証明　(1)

■

命題 1.3: 良い被覆に関する Deligne-Beilinson コホモロジー

$H_{\mathrm{D}}^{\bullet}\left(C_{\mathrm{D}p}, \mathcal{U}\right)$ は良い被覆 $\mathcal{U}$ の取り方によらない．

証明 ■