第 1 章

層状化空間・因子化ホモロジー

[?], [?] のレビュー

1.1 conically smooth な層状化空間

1.1.1 層状化空間

定義 1.1: 半順序集合の位相

$(P, \leq)$ を半順序集合とする．P 上の位相 $\mathscr{O}_{\leq} \subset 2^P$ を以下で定義する：

$$U \in \mathscr{O}_{\leq} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall x \in U,\, \forall y \in P,\, \bigl[\, x \leq y \quad \Longrightarrow \quad y \in U \,\bigr]$$

実際，空集合の定義から $\emptyset \in \mathscr{O}_{\leq}$ であり，$\forall U_1,\, U_2 \in \mathcal{O}_{\leq}$ に対して $x \in U_1 \cap U_2$ であることは

$$\forall y \in P,\; x \leq y \quad \Longrightarrow \quad y \in U_1 \;\text{かつ}\; y \in U_2$$

と同値なので $U_1 \cap U_2 \in \mathscr{O}_{\leq}$ であり，さらに勝手な開集合族 $\{U_\lambda \in \mathscr{O}_{\leq}\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ は

$$\exists \alpha \in \Lambda,\; \forall y \in P,\; x \leq y \quad \Longrightarrow \quad y \in U_\alpha \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

と同値であるから $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathscr{O}_{\leq}$ であり，$\mathscr{O}_{\leq}$ は集合 P の位相である．

【例 1.1.1】$[n]$ の位相

半順序集合 $[2] \coloneqq \{0 \leq 1 \leq 2\}$ を考える．このとき，位相 $\mathscr{O}_{\leq}$ とは

$$\mathscr{O}_{\leq} = \bigl\{\, \emptyset,\, \{2\},\, \{1,\, 2\},\, \{0,\, 1,\, 2\} \,\bigr\}$$

のことである．同様に，半順序集合 $[n] \coloneqq \{0 \leq 1 \leq \cdots \leq n\}$ に対して

$$\mathscr{O}_{\leq} = \bigl\{\, \emptyset,\, \{n\},\, \{n-1,\, n\},\, \dots,\, \{0,\, \dots,\, n\} \,\bigr\}$$

が成り立つ．

定義 1.2: 層状化空間・層状化写像

$(P, \leq)$ を半順序集合とし，定義 1.1 の位相を入れて位相空間にする．
このとき，位相空間 X が ***P*-層状化**されている (P-stratified) とは，連続写像 $s\colon X \longrightarrow P$ が存在することを言う．組 $(X,\, s\colon X \longrightarrow P)$ のことを ***P*-層状化空間** (P-stratified space) と呼ぶ．また，$i \in P$ の逆像 $\boldsymbol{X_i} \coloneqq s^{-1}(\{i\}) \subset X$ のことを ***i*-層** (i-strata) と呼ぶ．

層状化空間 $(X,\, s\colon X \longrightarrow P)$, $(X',\, s'\colon X' \longrightarrow P')$ の間の**層状化写像** (stratified map) とは，連続写像の組み $(f\colon X \longrightarrow X',\ \tilde{f}\colon P \longrightarrow P')$ であって以下の図式を可換にするもののこと：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & X' \arrow[d, "s'"] \\ P \arrow[r, "\tilde{f}"'] & P' \end{tikzcd}$$

【例 1.1.2】$[n]$**-層状化空間**

半順序集合 $[n] \coloneqq \{0 \leq \cdots \leq n\}$ に対して**【例 1.1.1】**の位相を入れる．まず，

$$X_0 = s^{-1}\bigl([n] \setminus \{1, \ldots, n\}\bigr)$$

でかつ $\{1, \ldots, n\}$ は $[n]$ の開集合であるから，s の連続性から X の部分空間 $X_0 \subset X$ は閉集合だとわかる．さらに

$$\begin{aligned} X_0 \cup X_1 &= s^{-1}\bigl([n] \setminus \{2, \ldots, n\}\bigr), \\ X_0 \cup X_1 \cup X_2 &= s^{-1}\bigl([n] \setminus \{3, \ldots, n\}\bigr), \\ &\vdots \\ X_0 \cup \cdots \cup X_n &= X \end{aligned}$$

が成り立つことから，s の連続性より X の部分空間 $X_0 \cup \cdots \cup X_{m \leq n}$ は閉集合だと分かる．

【例 1.1.3】CW 複体

CW 複体 X を与える．$X_{\leq k}$ を X の k-骨格とするとき，$X_k \setminus X_{k-1}$ を $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に写す写像 $s\colon X \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は X の層状化を与える．

直観的には，層状化空間とは defect 付き C^∞ 多様体の一般化である．特に X を C^∞ 多様体とするとき，$[n]$-層状化空間 $(X,\, s\colon X \longrightarrow [n])$ の i-層 X_i とは，多様体 X 上の余次元 $d - i$ の defect を全て集めてきたものだと見做せる．

定義 1.3: 層状化開埋め込み

層状化写像 $(f, \tilde{f})\colon (X, s\colon X \longrightarrow P) \longrightarrow (X', s'\colon X' \longrightarrow P')$ が**層状化開埋め込み** (stratified open embedding) であるとは，以下の 2 条件を充たすことを言う：

(1) 連続写像 $f\colon X \longrightarrow X'$ は位相的開埋め込みである[a]

(2) $\forall p \in P$ に対して，f の p-strata への制限[b]

$$f|_{X_p}\colon X_p \longrightarrow X'_{\tilde{f}(p)}$$

は位相的開埋め込みである．

[a] i.e. $f\colon X \longrightarrow f(X)$ が同相写像かつ $f(X) \subset Y$ が開集合

[b] 層状化写像の定義に登場する図式の可換性より，$\forall x \in X_p$ に対して $s'\bigl(f(x)\bigr) = s' \circ f(x) = \tilde{f} \circ s(x) = \tilde{f}(p)$，i.e. $f(x) \in s'^{-1}\bigl(\{\tilde{f}(p)\}\bigr) = X'_{\tilde{f}(p)}$ が分かる．

以下では混乱が生じにくい場合，層状化空間 $(X, s\colon X \longrightarrow P)$ のことを $(X \xrightarrow{s} P)$ や $(X \to P)$ と略記する．さらに，層状化写像 $(f, \tilde{f})\colon (X, s\colon X \longrightarrow P) \longrightarrow (X', s'\colon X' \longrightarrow P')$ のことを $f\colon (X \to P) \longrightarrow (X' \to P')$ と略記し，連続写像 $\tilde{f}\colon P \longrightarrow P'$ のことも f と書く場合がある．

圏 **StTop** を，

- 第 2 可算な Hausdorff 空間であるような層状化空間を対象とする
- 層状化開埋め込みを射とする

ことで定義する．

1.1.2 C^0 級層状化空間

定義 1.4: コーン

層状化空間 $(X \xrightarrow{s} P)$ を与える．X の**コーン** (cone) とは，以下のようにして構成される層状化空間 $\bigl(\mathsf{C}(X), \mathsf{C}(s)\colon \mathsf{C}(X) \longrightarrow \mathsf{C}(P)\bigr)$ のこと：

- 位相空間 $\mathsf{C}(X)$ を，押し出し位相空間

$$\mathsf{C}(X) \coloneqq \{\mathrm{pt}\} \amalg_{\{0\}\times X} (\mathbb{R}_{\geq 0} \times X)$$

と定義する：

$$\begin{tikzcd} \{0\} \times X \arrow[r, hook, "\{0\}\times \mathrm{id}_X"] \arrow[d] & \mathbb{R}_{\geq 0} \times X \arrow[d] \\ \{\mathrm{pt}\} \arrow[r, hook] & \{\mathrm{pt}\} \amalg_{\{0\}\times X} (\mathbb{R}_{\geq 0} \times X) \end{tikzcd}$$

- 半順序集合 $\mathsf{C}(P)$ を，P に最小の要素 $-\infty$ を付け足すことで定義する．これは半順序集合の

圏における押し出し

$$\mathsf{C}\,(P) \coloneqq \{-\infty\} \amalg_{\{0\}\times P} \bigl([1] \times P\bigr)$$

である．

- 連続写像

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{\geq 0} \times X &\longrightarrow [1] \times P, \\ (t,\, x) &\longmapsto \begin{cases} \bigl(0,\, s(x)\bigr), & t = 0, \\ \bigl(1,\, s(x)\bigr), & t > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

が誘導する連続写像 $\mathsf{C}\,(X) \longrightarrow \mathsf{C}\,(P)$ を $\mathsf{C}\,(s)$ と書く．

位相空間の圏における押し出しの公式から，位相空間 $\mathsf{C}\,(X)$ とは

$$\begin{aligned} &i_1 \colon \{0\} \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \times X,\ x \longmapsto (0,\, x), \\ &i_2 \colon \{0\} \times X \longrightarrow \{\mathrm{pt}\},\ x \longmapsto \mathrm{pt} \end{aligned}$$

とおいたときのコイコライザ

$$\{0\} \times X \overset{i_1}{\underset{i_2}{\rightrightarrows}} \{\mathrm{pt}\} \sqcup (\mathbb{R}_{\geq 0} \times X) \xrightarrow{\ q\ } \mathsf{C}(X),$$

i.e. 商位相空間

$$\frac{\mathbb{R}_{\geq 0} \times X}{i_1(x) \sim i_2(x)} = \frac{\mathbb{R}_{\geq 0} \times X}{\{0\} \times X}$$

のこと．従って $\mathsf{C}\,(s) : \mathsf{C}\,(X) \longrightarrow \mathsf{C}\,(P)$ とは，連続写像[*1]

$$\frac{\mathbb{R}_{\geq 0} \times X}{\{0\} \times X} \longrightarrow \mathsf{C}\,(P)\,,\ [(t,\, x)] \longmapsto \begin{cases} -\infty, & t = 0 \\ s(x), & t > 0 \end{cases}$$

のことである．

! 以下では，混乱の恐れがない限り層状化空間 $(X \xrightarrow{s} P)$ のコーンを $\mathsf{C}\left(X \xrightarrow{s} P\right)$ と略記する．

[*1] $\mathsf{C}\,(P)$ の位相 $\mathscr{O}_{\mathsf{C}(P)}$ は，P の位相 $\mathscr{O}_P$ に 1 つの開集合 $\{-\infty\} \cup P$ を加えたものである．$\forall U \in \mathscr{O}_P$ に対して $\mathsf{C}\,(s)^{-1}\,(U) = \mathbb{R}_{>0} \times s^{-1}(U) \in \mathscr{O}_{\mathsf{C}(X)}$ で，かつ $\mathsf{C}\,(s)^{-1}\,(\{-\infty\} \cup P) = \mathsf{C}\,(X) \in \mathscr{O}_{\mathsf{C}(X)}$ なので $\mathsf{C}\,(s)$ は連続である．

定義 1.5: C^0 級層状化空間

以下を充たす $\mathbf{StTop}$ の最小の充満部分圏を $\mathbf{Snglr}^{C^0}$ と書き，圏 $\mathbf{Snglr}^{C^0}$ の対象を **C^0 級層状化空間** (C^0 stratified space) と呼ぶ：

(Snglr-1) $(\emptyset \to \emptyset) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$

(Snglr-2)

$$(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}) \text{ かつ } X,\, P \text{ が位相空間としてコンパクト} \\ \implies \mathsf{C}\,(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$$

(Snglr-3)

$$(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}) \implies (X \times \mathbb{R} \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$$[a]

(Snglr-4)

$$(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}) \text{ かつ } \mathrm{Hom}_{\mathbf{StTop}}\big((U \to P_U),\, (X \to P)\big) \neq \emptyset \\ \implies (U \to P_U) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$$

(Snglr-5)

$(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{StTop})$ が開被覆 $\{(U_\lambda \to P_\lambda) \longrightarrow (X \to P)\}_{\lambda \in \Lambda}$[b] を持ち，かつ $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して $(U_\lambda \to P_\lambda) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$

$$\implies (X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$$

[a] $X \times \mathbb{R}$ の層状化は，連続写像 $X \times \mathbb{R} \longrightarrow X,\ (x,\, t) \longmapsto x$ を前もって合成することにより定める．

[b] i.e. $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda},\ \{P_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が，それぞれ位相空間 $X,\, P$ の開被覆を成す．

【例 1.1.4】位相多様体は C^0 級層状化空間

(Snglr-1) より，$* := \mathsf{C}\,(\emptyset \to \emptyset) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ である．**(Snglr-3)** より，$\forall n \geq 0$ に対して $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n \to [0]) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ であることが帰納的に分かる．$\mathbb{R}^n$ の任意の開集合 $U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ に対して，

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathbb{R}^n \arrow[d] \\ {[0]} \arrow[r, "="'] & {[0]} \end{tikzcd}$$

は層状化埋め込みであり，従って **(Snglr-4)** より $U := (U \to [0]) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ が分かる．以上の考察と **(Snglr-5)** を併せて，任意の位相多様体 M は[a]圏 $\mathbf{Snglr}^{C^0}$ の対象である．

[a] より正確には，M を層状化空間 $(M \to [0])$ と同一視している．

1.1.3 C^0 basic

定義 1.6: C^0 basic

$\boldsymbol{C^0}$ 級層状化空間 $(X\to P)\in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ が $\boldsymbol{C^0}$**-basic** であるとは，ある $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ およびコンパクトな $\boldsymbol{C^0}$ 級層状化空間 $(Z\to Q)\in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ が存在して $(X\to P)=\big(\mathbb{R}^n\to[0]\big)\times \mathsf{C}\,(Z\to Q)$ が成り立つことを言う．

いま，C^0 basic な $(U\to P_U)=(\mathbb{R}^n\to[0])\times\mathsf{C}\,(Z\to P)\in\mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ を 1 つとる．コーンの定義から，U の点を $(v,\,[t,\,z])\in\mathbb{R}^n\times\frac{\mathbb{R}_{\geq 0}\times Z}{\{0\}\times Z}$ と表示することができる．この表示の下で自己同相

$$
\begin{aligned}
\gamma\colon \mathbb{R}_{>0}\times T\mathbb{R}^n\times\mathsf{C}\,(Z) &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0}\times T\mathbb{R}^n\times\mathsf{C}\,(Z),\\
\big(t,\,(v,\,p),\,[s,\,z]\big) &\longmapsto \big(t,\,(tv+p,\,p),\,[ts,\,z]\big)
\end{aligned}
$$

を考える[*2]．

さらに，もう 1 つの C^0 basic な $(U'\to P_{U'})=(\mathbb{R}^{n'}\to[0])\times\mathsf{C}\,(Z'\to P')\in\mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ および $f\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}}\big((U\to P_U),\,(U'\to P_{U'})\big)$ をとる．ただし，f はコーンポイントをコーンポイントへ写す，i.e. $\forall u\in\mathbb{R}^n$ に対して $f(u,\,\mathrm{pt})\in\mathbb{R}^{n'}\times\{\mathrm{pt}\}$ が成り立つことを仮定する．$f|_{\mathbb{R}^n}\colon\mathbb{R}^n\times\{\mathrm{pt}\}\longrightarrow\mathbb{R}^{n'}\times\{\mathrm{pt}\}$ を f のコーンポイントへの制限として，

$$
\begin{aligned}
f_\Delta\colon \mathbb{R}_{>0}\times T\mathbb{R}^n\times\mathsf{C}\,(Z) &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0}\times T\mathbb{R}^{n'}\times\mathsf{C}\,(Z'),\\
\big(t,\,v,\,p,\,[s,\,z]\big) &\longmapsto \big(t,\,f|_{\mathbb{R}^n}(v),\,f(p,\,[ts,\,z])\big)
\end{aligned}
$$

とおこう．

【例 1.1.5】

$Z=Z'=\emptyset$ のとき，f とは単に連続関数 $f\colon\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^{n'}$ のことである．このとき，

$$
\begin{aligned}
(\gamma^{-1}\circ f_\Delta\circ\gamma)(t,\,v,\,p) &= \gamma^{-1}\circ f_\Delta(t,\,tv+p,\,p)\\
&= \gamma^{-1}\big(t,\,f(tv+p),\,f(p)\big)\\
&= \left(t,\,\frac{f(tv+p)-f(p)}{t},\,f(p)\right)
\end{aligned}
$$

と計算できるため，f が C^1 級であることと $\forall(v,\,p)\in T\mathbb{R}^n$ に対して $t\to+0$ の極限，i.e. v に沿った片側方向微分が存在することは同値である．

【例 1.1.5】をもとに，C^0 basic な C^0 級層状化空間の間の層状化開埋め込みの **conically smoothness** を定義する．C^∞ 多様体の C^∞ 構造の定義においては，チャート $(U,\,\varphi\colon\mathbb{R}^n\to U)$, $(V,\,\psi\colon\mathbb{R}^n\to V)$ の間の変換関数 $\psi^{-1}\circ\varphi\colon\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ が C^∞ 級であることを要請した．次の小節で **conically smooth structure** の定義を行うが，その際にチャートに対応するものは **basic** $U=\mathbb{R}^n\times\mathsf{C}\,(Z)$ から着目している C^0-級層状化空間 X への層状化開埋め込み $\varphi\colon U\hookrightarrow X$ であり，概ね[*3]2 つのチャート $\varphi\colon U\hookrightarrow X$, $\psi\colon V\hookrightarrow X$ の間の変換関数 $\psi^{-1}\circ\varphi\colon U\longrightarrow V$ に対して conically smooth (along $\mathbb{R}^n$) であることを要請する．

---

*2 接束 $T\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^{2n}$ と微分同相である．[?, p.23] の記法に合わせて底空間 $\mathbb{R}^n$ の点を p，p 上のファイバーの元を v としたとき $(v,\,p)\in T\mathbb{R}^n$ と書いた．命題??の記法と順番が逆なので注意．

*3 コーンポイントをコーンポイントに写さない変換関数も存在しうるので，これだけではいけない．

定義 1.7: $\mathbb{R}^n$ に沿って conically smooth

- C^0 basic な $(U \to P_U) = (\mathbb{R}^n \to [0]) \times \mathsf{C}\,(Z \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$
- C^0 basic な $(U' \to P_{U'}) = (\mathbb{R}^{n'} \to [0]) \times \mathsf{C}\,(Z' \to P') \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$
- $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}}\big((U \to P_U),\, (U' \to P_{U'})\big)$ であって，コーンポイントを保存するもの

を与える．このとき，f が $\mathbb{R}^n$ **に沿って** C^1 **級** (C^1 along $\mathbb{R}^n$) であるとは，以下の図式を可換にする連続写像

$$\tilde{D}f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \times T\mathbb{R}^n \times \mathsf{C}\,(Z) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \times T\mathbb{R}^{n'} \times \mathsf{C}\,(Z')$$

が存在することを言う：

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}_{\geq 0} \times T\mathbb{R}^n \times \mathsf{C}\,(Z) \arrow[r, dashed, "\tilde{D}f"] & \mathbb{R}_{\geq 0} \times T\mathbb{R}^{n'} \times \mathsf{C}\,(Z') \\
\mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^n \times \mathsf{C}\,(Z) \arrow[u] \arrow[r, "\gamma^{-1}\circ f_\Delta \circ \gamma"'] & \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^{n'} \times \mathsf{C}\,(Z') \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

このような拡張が存在するとき，第一変数を $t = 0$ に制限して得られる連続写像を

$$\boldsymbol{Df}\colon T\mathbb{R}^n \times \mathsf{C}\,(Z) \longrightarrow T\mathbb{R}^{n'} \times \mathsf{C}\,(Z')$$

と書く．f が $\mathbb{R}^n$ **に沿って** C^r **級** であるとは，Df が $\mathbb{R}^n$ に沿って C^{r-1} 級であることを言う．f が $\mathbb{R}^n$ **に沿って conically smooth** であるとは，$\forall r \geq 1$ について C^r 級であることを言う．

1.1.4 conically smooth な層状化空間

次に行うべきは，与えられた C^0 **級層状化空間** $(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ の上の **conically smooth structure** i.e. 変換関数が conically smooth であるような**極大アトラス**を定義することである．この手続きは，次で定義する次元と深さに関する帰納法によって構成される．

定義 1.8: 被覆次元

X を位相空間とする．以下の条件を充たす最小の $d \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$ のことを（存在すれば）X の**被覆次元** (covering dimension) と呼び，$\boldsymbol{\dim X}$ と書く：

(covering)

X の任意の開被覆 $\mathscr{U}$ に対して，十分細かい細分 $\mathscr{V}_{\mathscr{U}} \prec \mathscr{U}$ が存在して，任意の互いに異なる $\forall m > d+1$ 個の開集合 $V_1, \dots, V_m \in \mathscr{V}_{\mathscr{U}}$ の共通部分が空になるようにできる．特に，$\emptyset$ の被覆次元は -1 と定義する．

点 $x \in X$ における**被覆次元**を以下で定義する：

$$\dim_x X \coloneqq \inf\left\{ \dim U \geq -1 \,\middle|\, x \in U \underset{\text{open}}{\subset} X \right\}$$

定義 1.9: 次元と深さ

空でない C^0 級層状化空間 $(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ を与える．

- $(X \to P)$ の点 $x \in X$ における**局所的次元** (local dimension) とは，点 x における X の被覆次元 $\mathbf{dim}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{(X)}$ のことを言う．
- $(X \to P)$ の**次元** (dimension) とは

$$\mathbf{dim}(\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{P}) \coloneqq \sup_{x \in X} \dim_x(X)$$

のこと．
- $(X \xrightarrow{s} P)$ の点 $x \in X$ における**局所的深さ** (local depth) とは，

$$\mathbf{depth}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{P}) \coloneqq \dim_x(X) - \dim_x(X_{s(x)})$$

のこと．
- $(X \to P)$ の**深さ** (depth) とは，

$$\mathbf{depth}(\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{P}) \coloneqq \sup_{x \in X} \mathrm{depth}_x(X \to P)$$

のこと．ただし，$\mathrm{depth}(\emptyset) \coloneqq -1$ と定義する．

【例 1.1.6】コーンの深さ

n 次元位相多様体 Z について，定義から $\forall x \in Z$ に対して $\dim_x(Z) = n$ が成り立つ．Z を**【例 1.1.4】**により C^0 級層状化空間 $(Z \xrightarrow{s} [0]) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ と見做すと，これのコーン $\mathsf{C}\left(Z \xrightarrow{s} [0]\right)$ について

$$\mathrm{depth}_x\big(\mathsf{C}\left(Z \xrightarrow{s} [0]\right)\big) = \begin{cases} n+1, & x = \mathrm{pt}, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

であることがわかる．実際 $\mathsf{C}\,(Z)_{\mathsf{C}(s)(\mathrm{pt})} = \{\mathrm{pt}\}$ であるが，1 点からなる位相空間の被覆次元は 0 次元なので $\dim_{\mathrm{pt}}(\mathsf{C}\,(Z)_{\mathsf{C}(s)(\mathrm{pt})}) = 0$ である．一方，コーンポイント以外の点 $x \in \mathsf{C}\,(Z)$ に対して $\mathsf{C}\,(s)\,(x)$-層は $\mathsf{C}\,(Z)_{\mathsf{C}(s)(x)} = \mathbb{R}_{>0} \times Z \approx \mathbb{R} \times Z$ であるから，$\dim_x(\mathsf{C}\,(Z)_{\mathsf{C}(s)(x)}) = n+1$ と計算できる[a]．

また，$\forall (X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ に対して

$$\begin{aligned} \dim\big((\mathbb{R}^m \to [0]) \times (X \to P)\big) &= m + \dim\big(X \to P\big), \\ \mathrm{depth}\big((\mathbb{R}^m \to [0]) \times (X \to P)\big) &= \mathrm{depth}\big(X \to P\big) \end{aligned}$$

が成り立つ．従って，C^0 basic な $(U \to P_U) = (\mathbb{R}^n \to [0]) \times \mathsf{C}\,(Z \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ に対して

$$\begin{aligned} \mathrm{depth}(U \to P_U) &= \mathrm{depth}\big(\mathsf{C}\,(Z \to P)\big) \\ &= \dim(Z \to P) + 1 \end{aligned}$$

が成り立つ．

[a] さらに，$\forall x \in \mathsf{C}\,(Z)$ に対して $\dim_x \mathsf{C}\,(Z) = n+1$ である．

次元と深さに関する帰納法を実行する前に，構成したい圏を表す記号の整理をしておこう：

- conically smooth チャートの素材となる，**basic** が成す圏

$$\mathbf{Bsc}$$

  これは，C^∞ 多様体の圏 $\mathbf{Mfld}$ において $\mathbb{R}^n$ $(\forall n \geq -1)$ 全体が成す充満部分圏に相当するものである．

- 与えられた C^0 級層状化空間 $(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ に対して，その上に入る**極大アトラス**[*4]全体が成す集合を返す前層

$$\mathsf{Sm}\colon (\mathbf{Snglr}^{C^0})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

  この対応が前層であることの直観は，層状化開埋め込み $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}}\bigl((X \to P),\,(Y \to Q)\bigr)$ が与えられると，$(X \to P)$ 上の極大アトラス $\mathsf{Sm}(X \to P)$ が $(Y \to Q)$ 上の極大アトラス $\mathsf{Sm}(Y \to Q)$ を「制限」する写像 $\mathsf{Sm}(f)\colon \mathsf{Sm}(Y \to Q) \longrightarrow \mathsf{Sm}(X \to P)$ によって得られるということである．

- 深さが k 以下，かつ次元が n 以下であるような C^0 級層状化空間全体が成す $\mathbf{Snglr}^{C^0}$ の充満部分圏を

$$\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\underbrace{\leq k}_{\text{depth}},\,\underbrace{\leq n}_{\text{dimension}}}$$

  と書く．同様に

$$\mathbf{Bsc}_{\leq k,\,\leq n}, \qquad \mathsf{Sm}_{\leq k,\,\leq n}\colon (\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k,\,\leq n})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

  と書く．

- **conically smooth な層状化空間**の圏

$$\mathbf{Snglr}$$

  これを作ることが本小節の最終目標である．

帰納法により，$\forall k \geq -1$ に対して $\mathbf{Bsc}_{\leq k,\,\leq\infty}$ および $\mathsf{Sm}_{\leq k,\,\leq\infty}\colon (\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k,\,\leq\infty})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ が構成される．

定義 1.10: 帰納法の出発点

(Snglr-1) より $(\emptyset \to \emptyset) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq -1,\,\leq\infty})$ である．

(1) $\mathbf{Bsc}_{\leq -1,\,\leq\infty} := \emptyset$

(2) $\mathsf{Sm}_{\leq -1,\,\leq\infty}(\emptyset) := \{*\}$

と定義する．

[*4] 存在するか分からないし，存在したとして一意であるとは限らない．実際，例えば C^∞ 多様体の段階においてさえ $\mathbb{R}^4$ の上の極大アトラス（i.e. C^∞ 構造）は非可算無限個存在する [?].

仮定 1.1: 帰納法の仮定

与えられた $k \geq -1$ に対して以下の構成が完了していると仮定する：

(1) 圏 $\mathbf{Bsc}_{\leq k,\, \leq\infty}$

(2) 前層 $\mathsf{Sm}_{\leq k,\, \leq\infty} \colon (\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k,\, \leq\infty})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$

(3) 関手

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times (\text{-}) \colon \mathbf{Bsc}_{\leq k,\, \leq\infty} &\longrightarrow \mathbf{Bsc}_{\leq k,\, \leq\infty}, \\ U &\longmapsto \mathbb{R} \times U, \\ \big(U \xrightarrow{f} V\big) &\longmapsto \big(\mathbb{R} \times U \xrightarrow{\mathrm{id}\times f} \mathbb{R} \times V\big) \end{aligned}$$

およびそれが誘導する自然変換[a]

$$\begin{tikzcd} (\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k,\, \leq\infty})^{\mathrm{op}} \arrow[r, bend left=50, "\mathsf{Sm}_{\leq k,\, \leq\infty}(\text{-})"] \arrow[r, bend right=50, "\mathsf{Sm}_{\leq k,\, \leq\infty}(\mathbb{R}\times\text{-})"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \mathbf{Sets} \end{tikzcd}$$

[a] X の極大アトラス $\{U_\alpha,\, \varphi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ に対して，$\{\mathbb{R} \times U_\alpha,\, \mathrm{id} \times \varphi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ を対応づける．

定義 1.11: 圏 $\mathbf{Bsc}_{\leq k+1,\, \leq\infty}$

帰納法の仮定 1.1 がある $k \geq -1$ において成立しているとする．また，C^0 basic を $U^n_Z \coloneqq (\mathbb{R}^n \to [0]) \times \mathsf{C}\,(Z \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ と書く．このとき，圏 $\mathbf{Bsc}_{\leq k+1,\, \leq\infty}$ を以下で定義する：

(対象)

C^0 basic [a] $U^n_Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k+1,\, \leq\infty})$ および，極大アトラス $\mathcal{A}_Z \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Sm}_{\leq k,\, \leq\infty}(Z \to P))$ の組み

$$(U^n_Z,\, \mathcal{A}_Z)$$

を対象とする．

(射)

任意の 2 つの対象 $(U^n_Z,\, \mathcal{A}_Z),\ (U^m_W,\, \mathcal{A}_W) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Bsc}_{\leq k+1,\, \leq\infty})$ に対して，以下の条件を満たす層状化開埋め込み $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k+1,\, \leq\infty}}\big(U^n_Z,\, U^m_W\big)$ を射とする：

f がコーンポイントを保存しない場合

ある層状化開埋め込み $f_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k+1,\, \leq\infty}}\big(U^n_Z,\, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \times W\big)$ が存在して

$$f \colon U^n_Z \xrightarrow{f_0} \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}_{>0} \times W) \hookrightarrow U^m_W = \mathbb{R}^m \times \mathsf{C}\,(W)$$

と書けて，かつ $(U^n_Z,\, f_0) \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \times W} \in \mathsf{Sm}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \times W)$

f がコーンポイントを保存する場合

f は $\mathbb{R}^n$ に沿って conically smooth であって，かつ $Df\colon \mathbb{R}^n \times U_Z^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \times U_W^m$ が単射であり，かつ

$$\mathcal{A}_{f^{-1}(U_W^m \setminus \mathbb{R}^m)} = \mathsf{Sm}_{\leq k,\, \leq \infty}\big(f|_{f^{-1}(U_W^m \setminus \mathbb{R}^m)}\big)\big(\mathcal{A}_{U_W^m \setminus \mathbb{R}^m}\big)$$

を充たす[b]．ただし，$U_W^m \setminus \mathbb{R}^m := U_W^m \setminus (\mathbb{R}^m \times \{\mathrm{pt}\}) = \mathbb{R}^{m+1} \times W$ と略記した．

---

[a] 【例 1.1.6】より，$(Z \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k,\, \leq \infty})$ であることが分かる．

[b] ここで帰納法の仮定 1.1-(3) を暗に使っている．

定義 1.12: 前層 $\mathsf{Sm}_{\leq k+1,\, \leq \infty}$

帰納法の仮定 1.1 がある $k \geq -1$ において成立しているとする．さらに定義 1.11 が完成しているとする．

- C^0 級層状化空間 $\forall (X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k+1,\, \leq \infty})$ に対して，$X \to P$ の**アトラス** (atlas) を族

$$\mathcal{A} := \big\{\big(U_\alpha \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Bsc}_{\leq k+1,\, \leq \infty}),\, \varphi_\alpha\colon U_\alpha \hookrightarrow (X \to P)\big)\big\}_{\alpha \in \Lambda} \in \mathsf{Sm}_{\leq k+1,\, \leq \infty}(X \to P)$$

であって以下の条件を充たすものとして定義する：

(Atlas-1)

$\mathcal{A}$ は $(X \to P)$ の開被覆である．

(Atlas-2)

$\forall \alpha, \beta \in \Lambda$ および $\forall x \in \varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta)$ に対して，圏 $\mathbf{Bsc}_{\leq k+1,\, \leq \infty}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd} \exists W \arrow[r, hook, "f_\beta"] \arrow[d, hook, "f_\alpha"'] & U_\beta \arrow[d, hook, "\varphi_\beta"] \\ U_\alpha \arrow[r, hook, "\varphi_\alpha"'] & X \end{tikzcd}$$

が存在して $x \in \varphi_\alpha \circ f_\alpha(W) = \varphi_\beta \circ f_\beta(W)$ を充たす

アトラス $\mathcal{A}$ の元 $(U_\alpha,\, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ のことを**チャート** (chart) と呼ぶ．

- C^0 級層状化空間 $\forall (X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k+1,\, \leq \infty})$ の 2 つのアトラス $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ が**同値**であるとは，$\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ が $(X \to P)$ のアトラスであることを言う．これは $(X \to P)$ のアトラス全体の集合の上に同値関係を定める[a]．$(X \to P)$ の**極大アトラス** (maximal atlas) とは，この同値関係によるアトラス $\mathcal{A}$ の同値類 $[\mathcal{A}]$ のことを言う．
- 前層

$$\mathsf{Sm}_{\leq k+1,\, \leq \infty}\colon (\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k+1,\, \leq \infty})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を以下のように定義する：

(対象)

任意の C^0 級層状化空間 $(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k+1,\, \leq \infty})$ に対して

$$\mathsf{Sm}_{\leq k+1,\, \leq \infty}(X \to P) := \big\{\, [\mathcal{A}] \;\big|\; \mathcal{A} \text{ is an atlas of } (X \to P) \,\big\}$$

(射)

任意の層状化開埋め込み $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k+1,\,\leq\infty}}$ に対して，f によるアトラスの引き戻しを対応付ける．

[a] 同値関係であることの証明は [?, Lemma 3.2.11.] を参照．

以上の帰納法をまとめて，conically smooth な層状化空間と層状化開埋め込みの圏 **Snglr** を得る．

定義 1.13: 圏 Snglr

- **basic** のなす圏 **Bsc** を以下で定義する：

$$\mathbf{Bsc} \coloneqq \bigcup_{k\geq -1} \mathbf{Bsc}_{\leq k,\,\leq\infty}$$

- 極大アトラスの集合を与える関手 $\mathsf{Sm}\colon (\mathbf{Snglr}^{C^0})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ を以下の右 Kan 拡張として定義する：

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{Snglr}^{C^0}_{<\infty,\,\leq\infty})^{\mathrm{op}} \arrow[r, "\mathsf{Sm}_{<\infty,\,\leq\infty}"] \arrow[d, hook] & \mathbf{Sets} \\
(\mathbf{Snglr}^{C^0})^{\mathrm{op}} \arrow[ur, dashed, "\mathsf{Sm}"'] &
\end{tikzcd}$$

ただし，$\mathbf{Snglr}^{C^0}_{<\infty,\,\leq\infty} \coloneqq \bigcup_{k\geq -1} \mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k,\,\leq\infty}$ とおいた．

- **conically smooth な層状化空間** (conically smooth stratified space) と層状化開埋め込みの圏 **Snglr** を以下で定義する：

(対象)

C^0 級層状化空間 $(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ およびその極大アトラス $\mathcal{A}_X \in \mathsf{Sm}(X \to P)$ の組み $\big((X \to P),\, \mathcal{A}_X\big)$ を対象とする．

(射)

層状化開埋め込み $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}}\big((X \to P),\, (Y \to Q)\big)$ であって，$f^*\mathcal{A}_Y = \mathcal{A}_X$ を充たすものを射とする．

1.1.5 conically smooth map

ここまでは層状化開埋め込みのみを考えていたため，一般の層状化写像の conically smoothness を定義しなくてはいけない．

定義 1.14: conically smooth map

2 つのbasic[a] $X = (U^n_Z, \mathcal{A}_Z)$, $Y = (U^m_W, \mathcal{A}_W) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Bsc})$ の間の層状化写像 $f\colon U^n_Z \longrightarrow U^m_W$ が **conically smooth** であることを，depth(Y) に関する帰納法によって定義する：

(1) まず，$\mathrm{depth}(Y) = -1$ のときは $X = Y = \emptyset$ であり，一意的に定まる X, Y 間の層状化写像が conically smooth であると定義する．

(2) 深さ $k \geq -1$ の basic に対して定義が完了しているとする．$Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Bsc})$ の深さが高々 $k+1$ であるとき，層状化写像 $f\colon X \longrightarrow Y$ が conically smooth であることを以下で定義する：

f がコーンポイントを保存しない場合

ある conically smooth な層状化写像 $f_0\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \times W$ が存在して

$$f\colon X \xrightarrow{f_0} \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}_{>0} \times W) \hookrightarrow Y = \mathbb{R}^m \times \mathsf{C}(W)$$

と書ける[b]．

f がコーンポイントを保存する場合

f は $\mathbb{R}^n$ に沿って conically smooth であって，かつ制限

$$f|_{f^{-1}(Y\setminus\mathbb{R}^m)}\colon f^{-1}(Y\setminus\mathbb{R}^m) \longrightarrow Y\setminus\mathbb{R}^m$$

が conically smooth．ただし，$U^m_W \setminus \mathbb{R}^m := U^m_W \setminus (\mathbb{R}^m \times \{\mathrm{pt}\}) = \mathbb{R}^{m+1} \times W$ と略記した．

[a] C^0 basic を $U^n_Z := (\mathbb{R}^n \to [0]) \times \mathsf{C}(Z \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ と書く．
[b] 【例 1.1.6】より $\mathrm{depth}(W) < k+1$ であり，帰納法の仮定が使える．

---

conically smooth な層状化空間 $\big((X \to P), \mathcal{A}_X\big)$, $\big((Y \to Q), \mathcal{A}_Y\big) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr})$ の間の層状化写像 $f\colon (X \to P) \longrightarrow (Y \to Q)$ が **conically smooth** であるとは，任意のチャートの組み合わせ $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_X$, $(V, \psi) \in \mathcal{A}_Y$ に対して

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi\colon U \longrightarrow V$$

が conically smooth (for basics) であることを言う．

命題 1.1: conically smooth map の基本性質

2 つの conically smooth map の合成も conically smooth である．

<u>証明</u>　[?, Proposition 3.3.5] ■

命題 1.1 より，**conically smooth な層状化空間**の圏を定義できる．

定義 1.15: conically smooth な層状化空間の圏 Strat

conically smooth な層状化空間の圏 **Strat** を以下で定義する：

(対象)

圏 **Snglr** と全く同じ対象を持つ：

$$\mathrm{Ob}(\mathbf{Strat}) \coloneqq \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr})$$

(射)

conically smooth map を射とする．

定義から明らかに $\mathbf{Snglr} \subset \mathbf{Strat}$ である．ここで，圏 **Strat** における特別な射に名前をつけておこう：

定義 1.16: constructuble bundle

- conically smooth な層状化写像 $\pi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}\big((E \to P),\, (B \to Q)\big)$ が**層状化ファイバー束** (conically smooth fiber bundle) であるとは，conically smooth な層状化開埋め込みの族 $\{U_\alpha \hookrightarrow B\}_{\alpha\in\Lambda}$, $\{\varphi_\alpha \colon U_\alpha \times F_\alpha \hookrightarrow E\}_{\alpha\in\Lambda}$ が存在して以下を充たすことを言う：

  (Bun-1)

  $\forall \alpha \in \Lambda$ に対して，圏 **Strat** における引き戻しの図式

$$\begin{tikzcd} U_\alpha \times F_\alpha \arrow[r, hook, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{proj}_1"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ U_\alpha \arrow[r, hook] & B \end{tikzcd}$$

  が成り立つ．

  (Bun-2)

  族 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ は B の開基である．

- conically smooth な層状化写像 $\pi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}\big((E \to P),\, (B \to Q)\big)$ が**弱構成可能束** (weakly constructuble bundle) であるとは，$\forall q \in Q$ に対して，π の q-層への制限

$$\pi|_{\pi^{-1}(B_q)} \colon \pi^{-1}(B_q) \longrightarrow B_q$$

  が層状化ファイバー束であることを言う．

- conically smooth な層状化写像 $\pi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}\big((E \to P),\, (B \to Q)\big)$ が**構成可能束** (constructuble bundle) であることを，$\mathrm{depth}(E)$ に関する帰納法によって定義する：

  (1) $\mathrm{depth}(E) = 0$ のとき，π が構成可能束であるとは，π が C^∞ ファイバー束であることを言う．

  (2) 深さ $k \geq 0$ までの定義が完了しているとする．$\mathrm{depth}(E) \leq k+1$ のとき，π が構成可能束であるとは，以下の 2 条件を充たすことを言う：

  (cBun-1) f は弱構成可能束である．

  (cBun-2) $\forall q \in Q$ に対して，π が誘導する層状化写像

$$\mathrm{Link}_{\pi^{-1}(B_q)}(E) \longrightarrow \pi^{-1}(B_q) \times_{B_q} \mathrm{Link}_{B_q}(B)$$

  が構成可能束である．

1.1.6　管状近傍・ハンドル分解

1.2　層状化空間の接構造

1.2.1　Kan-豊穣化

圏 **Kan** を，

- Kan 複体を対象に持つ
- Kan 複体の間の自然変換を射に持つ

(1, 1)-圏とする．**Kan** は単体的集合の圏 **sSet** の充満部分圏であり，直積 (**??**) をテンソル積とするモノイダル圏になる．

定義 1.17: 余単体的多様体

以下で定義する関手

$$\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{e}} \colon \Delta \longrightarrow \mathbf{Strat}$$

のことを**余単体的多様体** (standard cosimplicial manifold) と呼ぶ[a]：

- $[n] \in \mathrm{Ob}(\Delta)$ を，conically smooth な層状化空間

$$\Delta_e^n \coloneqq \left\{ (x^0, \dots, x^n) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n} x^i = 1 \right\}$$

　に対応付ける．

- $\alpha \in \mathrm{Hom}_\Delta([m], [n])$ を，conically smooth な層状化写像

$$\begin{aligned} \Delta_e(\alpha) \colon \Delta_e^m &\longrightarrow \Delta_e^n, \\ (x^0, \dots, x^m) &\longmapsto \Big(\sum_{j,\, \alpha(j)=0} x^j, \dots, \sum_{j,\, \alpha(j)=n} x^j \Big) \end{aligned}$$

　に対応付ける．

[a] 余単体的集合に似ているが，$x^i \geq 0$ の領域で切り取っていない．

$\mathrm{PSh}(\mathbf{Strat}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Sets})$ から **sSet** への関手を

$$\begin{aligned} (\text{-})|_\Delta \colon \mathrm{PSh}(\mathbf{Strat}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Sets}) &\longrightarrow \mathbf{sSet}, \\ F &\longmapsto F \circ \Delta_e \end{aligned}$$

で定義する．さらに，$\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Strat})$ に対して前層 $\widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{trat}}}(X, Y) \in \mathrm{PSh}(\mathbf{Strat}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Sets})$ を

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{trat}}}(X, Y) \colon \mathbf{Strat}^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathbf{Sets}, \\ Z &\longmapsto \left\{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}(Z \times X, Z \times Y) \;\middle|\; \mathrm{proj}_Z \circ f = \mathrm{proj}_Z \right\}, \end{aligned}$$

$$(Z \xrightarrow{\alpha} W) \longmapsto (f \mapsto f \circ \alpha)$$

で定義する．ただし，conically smooth な層状化写像 $\mathrm{proj}_Z \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}(Z \times X,\, X)$ とは第一成分への射影のことである．同様にして前層 $\widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{nglr}}}(X,\, Y) \in \mathrm{PSh}(\mathbf{Strat}^{\mathrm{op}},\, \mathbf{Sets})$ を

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{nglr}}}(X,\, Y)\colon \mathbf{Strat}^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathbf{Sets}, \\ {\color{red}Z} &\longmapsto \left\{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}}({\color{red}Z} \times X,\, {\color{red}Z} \times Y) \mid \mathrm{proj}_Z \circ f = \mathrm{proj}_Z \right\}, \\ (Z \xrightarrow{\alpha} W) &\longmapsto (f \mapsto f \circ \alpha)\end{aligned}$$

で定義する．

補題 1.1:

$\forall X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Strat})$ に対して定まる単体的集合

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{trat}}(X,\, Y) &\coloneqq \widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{trat}}}(X,\, Y) \circ (\text{-})|_{\Delta}, \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{nglr}}(X,\, Y) &\coloneqq \widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{nglr}}}(X,\, Y) \circ (\text{-})|_{\Delta}\end{aligned}$$

は Kan 複体である．

<u>証明</u>　[?, Lemma 4.1.4.]. ■

定義 1.18: $(\infty,\, 1)$**-圏** $\mathcal{S}\mathbf{trat}$, $\mathcal{S}\mathbf{nglr}$, $\mathcal{B}\mathbf{sc}$

Kan-豊穣圏 $\mathcal{S}\mathbf{trat}$ を以下で定義する：

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{S}\mathbf{trat}) \coloneqq \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr})$
- 補題 1.1 で構成した $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{trat}}(X,\, Y) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Kan})$ を Hom 対象とする．

同様に，**Kan-豊穣圏** $\mathcal{S}\mathbf{nglr}$ を以下で定義する：

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{S}\mathbf{nglr}) \coloneqq \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr})$
- 補題 1.1 で構成した $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{nglr}}(X,\, Y) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Kan})$ を Hom 対象とする．

Kan-豊穣圏 $\mathcal{S}\mathbf{nglr}$ の対象を $\mathrm{Ob}(\mathbf{Bsc})$ に制限して得られる充満部分圏を $\mathcal{B}\mathbf{sc}$ と書く．

! **Kan-豊穣圏**を homotopy coherent nerve functor $\mathrm{N}_{\mathrm{hc}}\colon \mathbf{Cat}_{\mathbf{\Delta}} \longrightarrow \mathbf{sSet}$ で単体的集合の圏 $\mathbf{sSet}$ へ埋め込んだものは $(\infty,\, 1)$-圏である [?, Proposition 1.1.5.10.]．故に以下では **Kan-豊穣圏** $\mathcal{S}\mathbf{trat}$, $\mathcal{S}\mathbf{nglr}$ と $(\infty,\, 1)$-圏 $\mathrm{N}_{\mathrm{hc}}(\mathcal{S}\mathbf{trat})$, $\mathrm{N}_{\mathrm{hc}}(\mathcal{S}\mathbf{nglr})$ を区別しない．

1.2.2 $(\infty,\, 1)$-圏におけるファイブレーション

定義 1.19: $(\infty, 1)$-ファイブレーション

$p\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{B}$ を $(\infty, 1)$-圏の関手とする.

(lifting property)

包含 $\iota \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda^p_j, \Delta^n)$ に対して $p\circ f_0 = f\circ\iota$ を充たす任意の $(f_0, f) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda^n_j, \mathcal{E}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n_j, \mathcal{B})$ に対して，以下の図式を可換にする $\bar{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \mathcal{E})$ が存在する：

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^n_j \arrow[r, "\forall f_0"] \arrow[d, hook, "\iota"'] & \mathcal{E} \arrow[d, "p"] \\
\Delta^n \arrow[r, "\forall f"'] \arrow[ur, dashed, "\exists \bar{f}"] & \mathcal{B}
\end{tikzcd}$$

- p が**内的ファイブレーション** (inner fibration) であるとは，$0 < \forall j < \forall n$ に対して **(lifting property)** を充たすことを言う.
- p が**右ファイブレーション** (right fibration) であるとは，$0 < \forall j \le \forall n$ に対して **(lifting property)** を充たすことを言う.
- p が**左ファイブレーション** (left fibration) であるとは, $0 \le \forall j < \forall n$ に対して **(lifting property)** を充たすことを言う.
- p が **Kan ファイブレーション** (Kan fibration) であるとは，$0 \le \forall j \le \forall n$ に対して **(lifting property)** を充たすことを言う.

系??によると, **(lifting property)** は, $(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{B}$ における角の図式 $\left(p_{[n-1]}(f_{00}), \dots, \underbrace{\bullet}_{j}, \dots, p_{[n-1]}(f_{0n})\right) \in (\mathcal{B}_{n-1})^{\times n}$ を n-射 $f \in \mathcal{B}_n$ が埋めているならば，$(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{E}$ における角の図式 $\left(f_{00}, \dots, \underbrace{\bullet}_{j}, \dots, f_{0n}\right) \in (\mathcal{E}_{n-1})^{\times n}$ を埋める n-射 $\bar{f} \in \mathcal{E}_n$ が存在することを主張している.

2 つの右ファイブレーション $\mathcal{E} \xrightarrow{p} \mathcal{B}$, $\mathcal{E}' \xrightarrow{p'} \mathcal{B}$ が与えられたとき，これらの間の射とは集合

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}') \coloneqq \left\{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}') \;\middle|\; p' \circ f = p \right\}$$

のことである．$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ の元を可換図式として表すと以下の通り：

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathcal{E}' \arrow[dl, "p'"] \\
& \mathcal{B} &
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}') \subset \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ を【例??】の方法で単体的集合と見做せる．このようにして得られる単体的集合 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ の最大の部分 Kan 複体を $\boldsymbol{\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')}$ と書く.

定義 1.20: 右ファイブレーションの成す $(\infty, 1)$-圏

$\mathcal{B}$ を $(\infty, 1)$-圏とする．**Kan-豊穣圏** $\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}}$ を

- 右ファイブレーションを対象とする
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ を Hom 対象とする

ことで定義する．以降では $(\infty, 1)$-圏 $\mathrm{N}_{\mathrm{hc}}(\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}}) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{sSet})$ のことも $\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}}$ と書き，区別しない．

定理 1.1: unstraightening construction

Unstraightening construction [?, Theorem 2.2.1.2.] は，$(\infty, 1)$-圏同値

$$\mathrm{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathcal{B}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}}$$

を与える．

__証明__ [?, Proposition 2.2.3.11] ■

1.2.3 $(\infty, 1)$-圏におけるスライス圏

定義 1.21: 単体的集合の join

2 つの単体的集合 $S, T \in \mathrm{Ob}(\mathbf{sSet})$ の **join** とは，単体的集合

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S \star T} \colon \Delta^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathbf{Sets}, \\ [n] &\longmapsto \coprod_{-1 \le i \le n} (S_i \times T_{n-i-1}), \\ \left([m] \xrightarrow{\alpha} [n]\right) &\longmapsto \left(\left(i;\, (x,\, y)\right) \mapsto \left(\alpha^{-1}([i]);\, \left(S(\alpha|_{\alpha^{-1}([i])})(x),\, T(\alpha|_{\alpha^{-1}([m-i-1])})(y)\right)\right)\right) \end{aligned}$$

のこと．ただし $S_{-1} = T_{-1} \coloneqq \emptyset$ とおいた．

特に，$d_j^n \in \mathrm{Hom}_{\Delta}([n-1], [n])$，$s_j^n \in \mathrm{Hom}_{\Delta}([n+1], [n])$ に対して

$$(d_j^n)^{-1}([i]) = \begin{cases} [i], & i < j \\ [i-1], & i \ge j \end{cases}$$

$$(s_j^n)^{-1}([i]) = \begin{cases} [i], & i < j \\ [i+1], & i \ge j \end{cases}$$

であるから，$S \star T$ の面写像は

$$\begin{aligned} \partial_j^n \colon \coprod_{-1 \le i \le n} (S_i \times T_{n-i-1}) &\longrightarrow \coprod_{-1 \le i \le n-1} (S_i \times T_{n-i-2}), \\ (i;\, (x,\, y)) &\longmapsto \begin{cases} \left(i;\, (\partial_j^i x,\, y)\right), & j < i,\ i \neq 0 \\ \left(i-1;\, (\partial_j^i x,\, y)\right), & j = i \neq 0 \\ \left(-1;\, y\right), & j = i = 0 \\ \left(i-1;\, (x,\, \partial_{j-i-1}^{n-i-1} y)\right), & j > i > 0,\ n-i-1 \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

であり，縮退写像は

$$
\begin{aligned}
\sigma_j^n \colon \coprod_{-1\le i\le n} (S_i \times T_{n-i-1}) &\longrightarrow \coprod_{-1\le i\le n+1} (S_i \times T_{n-i}), \\
\bigl(i;\,(x,\,y)\bigr) &\longmapsto \begin{cases} \bigl(i;\,(\sigma_j^i x,\,y)\bigr), & j<i,\ i\neq 0 \\ \bigl(i+1;\,(\sigma_j^i x,\,y)\bigr), & j=i \\ \bigl(i+1;\,(x,\,\sigma_{j-i-1}^{n-i-1} y)\bigr), & j>i,\ n-i-1\neq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

となる．

【例 1.2.1】join $\Delta^0 \star \Delta^0$

$\Delta^0 \star \Delta^0$ を計算してみよう[a]．まず対象は

$$
(\Delta^0 \star \Delta^0)_0 = {\Delta^0}_0 \sqcup {\Delta^0}_0 = \left\{ \begin{array}{c} \{0\} \\ \bullet \\ \\ \bullet \\ \{0\} \end{array} \right\}
$$

である．1-射は

$$
(\Delta^0 \star \Delta^0)_1 = {\Delta^0}_1 \sqcup (\Delta^0_0 \times \Delta^0_0) \sqcup {\Delta^0}_1
$$

であるが，(1.2.1) より始点関数は

$$
\begin{aligned}
\partial_1^1|_{\Delta^0_0\times\Delta^0_0} \colon \Delta^0_0 \times \Delta^0_0 &\longrightarrow {\Delta^0}_0 \sqcup {\Delta^0}_0, \\
(\{0\},\,\{0\}) &\longmapsto \{0\}
\end{aligned}
$$

終点関数は

$$
\begin{aligned}
\partial_0^1|_{\Delta^0_0\times\Delta^0_0} \colon \Delta^0_0 \times \Delta^0_0 &\longrightarrow {\Delta^0}_0 \sqcup {\Delta^0}_0, \\
(\{0\},\,\{0\}) &\longmapsto \{0\}
\end{aligned}
$$

となるため，${\Delta^0}_1$, ${\Delta^0}_1$ が縮退していることを考慮すると

$$
(\Delta^0 \star \Delta^0)_1 = \left\{ \begin{array}{c} \{0\} \\ \bullet \\ \downarrow \\ \bullet \\ \{0\} \end{array} \right\}
$$

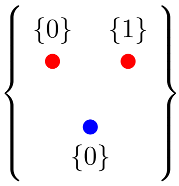
と図示できる．

[a] 左右の区別を付けるために色を付けた．

【例 1.2.2】join $\Delta^1 \star \Delta^0$

$\Delta^1 \star \Delta^0$ を計算してみよう．まず対象は

$$(\Delta^1 \star \Delta^0)_0 = {\Delta^1}_0 \sqcup {\Delta^0}_0 =$$



である．1-射は

$$(\Delta^1 \star \Delta^0)_1 = {\Delta^1}_1 \sqcup (\Delta^1_0 \times \Delta^0_0) \sqcup {\Delta^0}_1$$

であるが，(1.2.1) より始点関数は

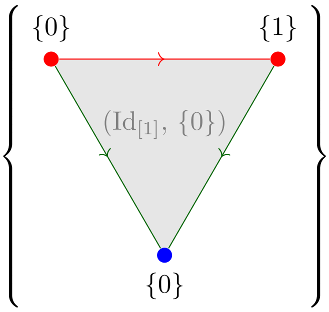
$$\begin{aligned} \partial^1_1|_{\Delta^1_0 \times \Delta^0_0} \colon \Delta^1_0 \times \Delta^0_0 &\longrightarrow {\Delta^1}_0 \sqcup {\Delta^0}_0, \\ (x, \{0\}) &\longmapsto x \end{aligned}$$

終点関数は

$$\begin{aligned} \partial^1_0|_{\Delta^1_0 \times \Delta^0_0} \colon \Delta^1_0 \times \Delta^0_0 &\longrightarrow {\Delta^1}_0 \sqcup {\Delta^0}_0, \\ (x, \{0\}) &\longmapsto \{0\} \end{aligned}$$

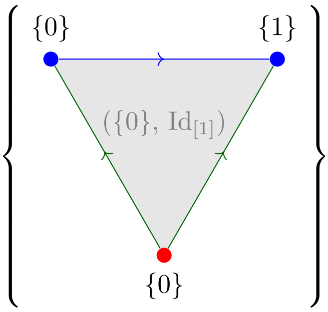
となるため，

$$\Delta^1 \star \Delta^0 =$$



と図示できる．ただし，三角形の内部は 2-射 $(\mathrm{Id}_{[1]}, \{0\}) \in \Delta^1_1 \times \Delta^0_0 \subset (\Delta^1 \star \Delta^0)_2$ が埋めている．同様に

$$(\Delta^0 \star \Delta^1)_1 =$$

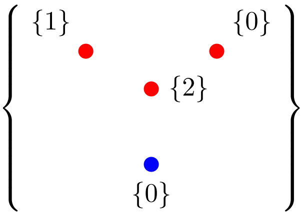


であることが分かる．

【例 1.2.3】join $\Delta^2 \star \Delta^0$

$\Delta^2 \star \Delta^0$ を計算してみよう．まず

$$(\Delta^2 \star \Delta^0)_0 = {\Delta^2}_0 \sqcup {\Delta^0}_0 =$$



である．次に 1 射は

$$(\Delta^2 \star \Delta^0)_1 = {\Delta^2}_1 \sqcup (\Delta^2_0 \times \Delta^0_0) \sqcup {\Delta^0}_1$$

であるが，(1.2.1) より始点関数は

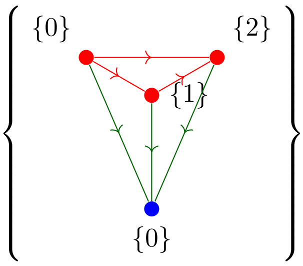
$$\begin{aligned} \partial^1_1|_{\Delta^2_0 \times \Delta^0_0} \colon \Delta^2_0 \times \Delta^0_0 &\longrightarrow {\Delta^2}_0 \sqcup {\Delta^0}_0, \\ (x, \mathrm{Id}_{\{0\}}) &\longmapsto x \end{aligned}$$

となり，終点関数は

$$\begin{aligned} \partial^1_0|_{\Delta^2_0 \times \Delta^0_0} \colon \Delta^2_0 \times \Delta^0_0 &\longrightarrow {\Delta^2}_0 \sqcup {\Delta^0}_0, \\ (x, \mathrm{Id}_{\{0\}}) &\longmapsto \{0\} \end{aligned}$$

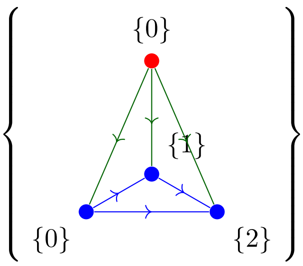
となる．従って図式??に倣うと

$$(\Delta^2 \star \Delta^0)_1 = {\Delta^2}_1 \sqcup (\Delta^2_0 \times \Delta^0_0) \sqcup {\Delta^0}_1 =$$



と図示できる．ただし，四面体の内部は 3-射 $(\mathrm{Id}_{[2]}, \{0\}) \in \Delta^2_2 \times \Delta^0_0 \subset (\Delta^1 \star \Delta^0)_3$ が埋めている．同様に，$\Delta^0 \star \Delta^2$ の 1-射を図示すると

$$(\Delta^0 \star \Delta^2)_1 = {\Delta^0}_1 \sqcup (\Delta^0_0 \times \Delta^2_0) \sqcup {\Delta^2}_1 =$$



のようになる．

補題 1.2: $(\infty, 1)$-圏同士の join は $(\infty, 1)$-圏

$(\infty, 1)$-圏同士の join は $(\infty, 1)$-圏である．

証明 [?, Proposition 1.2.8.3] ■

定義 1.22: スライス $(\infty, 1)$-圏

$(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{D}, \mathcal{C}$ および $(\infty, 1)$-圏の関手 $p \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ を与える．p に沿った $\mathcal{C}$ の**スライス圏** (overcategory)

$$\mathcal{C}_{/p} \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を以下で定義する：

- $\forall [n] \in \mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})$ に対して，集合

$$\mathrm{Hom}_p(\Delta^n \star \mathcal{D}, \mathcal{C}) := \left\{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n \star \mathcal{D}, \mathcal{C}) \;\middle|\; f|_{\mathcal{D}} = p \right\}$$

 を対応付ける[a]．
- $\forall \alpha \in \mathrm{Hom}_{\Delta^{\mathrm{op}}}([m], [n])$ に対して，写像

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{/p}(\alpha) \colon \mathrm{Hom}_p(\Delta^m \star \mathcal{D}, \mathcal{C}) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_p(\Delta^n \star \mathcal{D}, \mathcal{C}), \\ f &\longmapsto f \circ (\alpha_* \star \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}) \end{aligned}$$

 を対応付ける．

実際，単体的集合 $\mathcal{C}_{/p}$ は $(\infty, 1)$-圏である [?, Proposition 4.3.6.1]．

[a] $f|_{\mathcal{D}}$ というのは，join の定義における $(\Delta^n \star \mathcal{D})_k$ の disjoint union のうち，添字 $i = 0$ が振られている成分への制限を意味する．

p に沿った $\mathcal{C}$ の**コスライス圏** (undercategory)

$$\mathcal{C}_{p/} \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を以下で定義する：

- $\forall [n] \in \mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})$ に対して，集合

$$\mathrm{Hom}_p(\mathcal{D} \star \Delta^n, \mathcal{C}) := \left\{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\mathcal{D} \star \Delta^n, \mathcal{C}) \;\middle|\; f|_{\mathcal{D}} = p \right\}$$

 を対応付ける[a]．
- $\forall \alpha \in \mathrm{Hom}_{\Delta^{\mathrm{op}}}([m], [n])$ に対して，写像

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{p/}(\alpha) \colon \mathrm{Hom}_p(\mathcal{D} \star \Delta^m, \mathcal{C}) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_p(\mathcal{D} \star \Delta^n, \mathcal{C}), \\ f &\longmapsto f \circ (\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \star \alpha_*) \end{aligned}$$

 を対応付ける．

[a] $f|_{\mathcal{D}}$ というのは，join の定義における $(\mathcal{D} \star \Delta^n)_k$ の disjoint union のうち，添字 $i = n$ が振られている成分への制限を意味する．

特に注目すべきは，$(\infty, 1)$-圏の関手 $p\colon \Delta^0 \longrightarrow \mathcal{C}$ をとった場合である．このとき $X \coloneqq p_{[0]}(\{0\}) \in \mathcal{C}_0$ とおいて $\boldsymbol{\mathcal{C}_{/X}}$, $\boldsymbol{\mathcal{C}_{X/}}$ などと書く．

まず，$(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}_{/X}$ の対象 $\varphi \in (\mathcal{C}_{/X})_0 = \mathrm{Hom}_p\,(\Delta^0 \star \Delta^0, \mathcal{C})$ をとる．すると**【例 1.2.1】**および $\varphi|_{\Delta^0} = p$ の条件から，$\varphi_{[1]}\colon (\Delta^0 \star \Delta^0)_1 \longrightarrow \mathcal{C}_1$ とは図式

$$\varphi = \quad \begin{tikzcd} \varphi_{[0]}|_{\Delta^0_0}(\{0\}) \arrow[d, "\varphi_{[1]}|_{\Delta^0_0 \times \Delta^0_0}(\{0\} \to \{0\})"] \\ X \end{tikzcd}$$

である．$n \geq 2$ 射に相当する $\varphi_{[n]}\colon (\Delta^0 \star \Delta^0)_n \longrightarrow \mathcal{C}_n$ のデータは縮退していて自明である．従って，φ は $(1, 1)$-圏における X 上のスライス圏の対象と等価なデータを与える．

同様に，$(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}_{/X}$ の 1-射 $f \in (\mathcal{C}_{/X})_1 = \mathrm{Hom}_p\,(\Delta^1 \star \Delta^0, \mathcal{C})$ とは，**【例 1.2.2】**より

$$f = \quad \begin{tikzcd} f_{[0]}|_{\Delta^1_0}(\{0\}) \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "f_{[2]}|_{\Delta^1_1 \times \Delta^0_0}(\mathrm{Id}_{[1]}, \{0\})"] & & f_{[0]}|_{\Delta^1_0}(\{1\}) \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

のことである．ただし三角形の内部は 2-射 $f_{[2]}|_{\Delta^1_1 \times \Delta^0_0}(\mathrm{Id}_{[2]}, \{0\}) \in \mathcal{C}_2$ が埋めている．これは $(1, 1)$-圏における X 上のスライス圏の射のデータに対応しているが，横向きの矢印を決めるだけでは f が upto homotopy でしか定まらないという点で異なっている．

$(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}_{/X}$ の n-射も同様に図示できる．

1.2.4 homotopy limit/colimit

後の議論のため，先取りして $(\infty, 1)$-圏における limit/colimit を定義しておこう．$(\infty, 1)$-圏のモデルとして quasi-category を採用する場合，これは **homotopy limit/colimit** と呼ばれることもある．

定義 1.23: $(\infty, 1)$-圏における始対象と終対象

- $(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}$ における対象 $x \in \mathcal{C}_0$ が**始対象** (initial object) であるとは，ホモトピー圏 $\mathrm{h}\mathcal{C}$ における始対象[a]であること．
- $(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}$ における対象 $x \in \mathcal{C}_0$ が**終対象** (final object) であるとは，ホモトピー圏 $\mathrm{h}\mathcal{C}$ における終対象[b]であること．

[a] $(1, 1)$-圏の**始対象**とは，空の図式における余極限のこと．
[b] $(1, 1)$-圏の**終対象**とは，空の図式における極限のこと．

定義 1.24: homotopy limit/colimit

$(\infty, 1)$-圏の関手 $D\colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ を与える[a]．

- D の **homotopy limit** とは，スライス $(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}_{/D}$ における終対象のこと．$\boldsymbol{\mathrm{holim}\, D} \in \mathcal{C}_0$ と書く．
- D の **homotopy colimit** とは，スライス $(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}_{D/}$ における始対象のこと．$\boldsymbol{\mathrm{hocolim}\, D} \in \mathcal{C}_0$ と書く．

[a] $(1, 1)$-圏の場合からのアナロジーで，D を図式と見做す．

【例 1.2.4】homotopy pullback

単体的集合の積 $S \times T\colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ における面写像とは

$$
\begin{aligned}
\partial_j^n\colon S_n \times T_n &\longrightarrow S_{n-1} \times T_{n-1}, \\
(x, y) &\longmapsto (\partial_j^n x, \partial_j^n y)
\end{aligned}
$$

のことであった．故に，単体的集合 $\Delta^1 \times \Delta^1$ は，$\Delta^1_0 =: \{\bullet_0, \bullet_1\}$ とおくと

$$
\Delta^1 \times \Delta^1 = \begin{tikzcd} (0,0) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & (1,0) \arrow[d] \\ (0,1) \arrow[r] & (1,1) \end{tikzcd}
$$

と図示できる．ただし，2-射以上は縮退していて見えない．

$(\infty, 1)$-圏の関手 $D\colon \Delta^1 \times \Delta^1 \longrightarrow \mathcal{C}$ の homotopy limit のことを（存在すれば）**homotopy pullback** と呼び，

$$
D(0, 1) \times^{\mathrm{h}}_{D(1,1)} D(1, 0) := \mathrm{holim}\, D \in \mathcal{C}_0
$$

と書く．

1.2.5 層状化空間の接構造

定義 1.25: $(\infty, 1)$-圏の米田埋め込み (informal)

$\mathcal{C}$ を $(\infty, 1)$-圏とする．$(\infty, 1)$-圏の**米田埋め込み** (Yoneda embedding)

$$よ: \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathcal{C})$$

とは，$\mathcal{C}$ から $(\infty, 1)$-前層の成す $(\infty, 1)$-圏 $\mathrm{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathcal{C})$ への $(\infty, 1)$-圏の関手であって，対象 $x \in \mathcal{C}_0$ に対して

$$\begin{aligned} よ(x)_{[0]} : \mathcal{C}_0^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathcal{S}\mathbf{paces}_0, \\ y &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \end{aligned}$$

を充たす[a]ような $(\infty, 1)$-圏の関手 $よ(x) \in \mathrm{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathcal{C})_0 = \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(K^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathbf{paces})$ を対応付けるもののこと[b]．

[a] $(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}$ において，対象 $x, y \in \mathcal{C}_0$ の間の 1-射全体の集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \subset \mathcal{C}_1$ は Kan 複体を成す [?, Proposition 4.6.1.10]．

[b] 厳密な構成については [?, Definition 8.3.3.9] を参照．

定義 1.26: enter-path category

conically smooth な層状化空間 $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Strat})$ の **enter-path** $(\infty, 1)$**-category** とは，$(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{B}\mathbf{sc}$ のスライス圏

$$\mathcal{E}\mathbf{ntr}(X) := \mathcal{B}\mathbf{sc}_{/X}$$

のこと．

定義 1.27: tangent classifier

$\iota: \mathcal{B}\mathbf{sc} \hookrightarrow \mathcal{S}\mathbf{nglr}$ を包含とする．**tangent classifier** とは，$(\infty, 1)$-圏の関手

$$\boldsymbol{\tau}: \mathcal{S}\mathbf{nglr} \xrightarrow{よ} \mathrm{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathcal{S}\mathbf{nglr}) \xrightarrow{\iota^*} \mathrm{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathcal{B}\mathbf{sc})$$

のこと．

定義 1.25 より，tangent classifier は conically smooth な層状化空間 $X \in \mathcal{S}\mathbf{nglr}_0$ に対して $(\infty, 1)$-圏の表現可能前層

$$\tau_{[0]}(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}(\text{-}, X) \in \mathrm{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathcal{B}\mathbf{sc})_0 \tag{1.2.2}$$

を対応付ける．

! 定理 1.1 により，tangent classifier τ のことを

$$\tau: \mathcal{S}\mathbf{nglr} \xrightarrow{よ} \mathrm{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathcal{S}\mathbf{nglr}) \xrightarrow{\iota^*} \mathrm{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathcal{B}\mathbf{sc}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}$$

と見做すこともできる．このとき，$\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}$ の構成および $(\infty, 1)$-前層 (1.2.2) に対する定理 1.1 の具体的構成から，conically smooth な層状化空間 $X \in \mathcal{S}\mathbf{nglr}_0$ に対して定まる $(\infty, 1)$-圏の右ファイブレーション $\tau_{[0]}(X) \in (\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}})_0$ とは忘却関手

$$\tau_{[0]}(X) \colon \mathcal{E}\mathbf{ntr}\,(X) \longrightarrow \mathcal{B}\mathbf{sc}$$

のことである．この忘却関手を以下では $\boldsymbol{\tau_X} \coloneqq \tau_{[0]}(X)$ と書く．

定義 1.28: $\mathcal{B}$-多様体

- **$(\mathcal{B}, f)$ 構造**[a]とは，$(\infty, 1)$-圏の右ファイブレーション $(\mathcal{B} \xrightarrow{f} \mathcal{B}\mathbf{sc}) \in (\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}})_0$ のこと．
- $(\mathcal{B}, f)$ 構造 $\mathcal{B} \xrightarrow{f} \mathcal{B}\mathbf{sc}$ を 1 つ固定する．このとき，**$\mathcal{B}$-多様体** ($\mathcal{B}$-manifold) の成す $(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{M}\mathbf{fld}\,(\mathcal{B})$ とは，$\mathbf{qCat}$[b] における homotopy pullback

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}\mathbf{fld}\,(\mathcal{B}) \arrow[r] \arrow[d] & (\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}})_{/f} \arrow[d, "\text{forget}"] \\ \mathcal{S}\mathbf{nglr} \arrow[r, "\tau"'] & \mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}} \end{tikzcd}$$

のこと．特に，$\mathcal{M}\mathbf{fld}\,(\mathcal{B})_0$ の元は以下の 2 つのデータから成り，**$\mathcal{B}$-多様体**と呼ばれる：
  - conically smooth な層状化空間 $X \in \mathcal{S}\mathbf{nglr}_0$
  - $(\infty, 1)$-圏の関手 $g \colon \mathcal{E}\mathbf{ntr}\,(X) \longrightarrow \mathcal{B}$

  これらは以下の条件を充たさねばならない：

  (lift of tangent classifier)

  $\mathbf{sSet}$ における以下の図式は可換である：

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B} \arrow[d, "f"] \\ \mathcal{E}\mathbf{ntr}\,(X) \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "\tau_X"'] & \mathcal{B}\mathbf{sc} \end{tikzcd}$$

[a] [?, Definition 1.1.6] では $(\infty, 1)$-**category of basics** と呼ばれている．
[b] quasi-category 全体のなす $(\infty, 1)$-圏

1.2.6 C^∞-多様体の接構造との比較

1.3 Disk algebras

1.3.1 対称モノイダル $(\infty, 1)$-圏

本資料では，$(\infty, 1)$-圏を quasi-category として定義した．この小節では，quai-category における対称モノイダル構造を定義する．

定義 1.29: 圏 $\mathbf{Fin}_*$

$(1, 1)$-圏 $\mathbf{Fin}_*$ を以下で定義する：

- 基点付き有限集合

$$\langle n \rangle \coloneqq \{*,\, 1,\, \dots,\, n\}$$

  を対象に持つ．i.e.

$$\mathrm{Ob}(\mathbf{Fin}_*) \coloneqq \left\{\, \langle n \rangle \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \,\right\}.$$

- $\forall \langle m \rangle, \langle n \rangle \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Fin}_*)$ に対して，それらの間の基点を保つ写像を射とする．i.e.

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}\big(\langle m \rangle, \langle n \rangle\big) \coloneqq \left\{\, f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}\big(\langle m \rangle, \langle n \rangle\big) \;\middle|\; f(*) = * \,\right\}.$$

脈体の定義において $[n] \in \mathrm{Ob}(\Delta)$ を $(1, 1)$-圏と見做した方法と同様にして，半順序集合 $\{n-1 \leq n\}$ を $(1, 1)$-圏と見做す．このとき，

$$\mathrm{N}\big(\{n-1 \leq n\}\big) = \left(\underset{n-1}{\bullet} \longrightarrow \underset{n}{\bullet} \right) \cong \Delta^1$$

と図示できる．同様に，

$$\mathrm{N}\big(\{0 \leq 1\}\big) = \left(\underset{0}{\bullet} \longrightarrow \underset{1}{\bullet} \right) = \Delta^1$$

である．

定義 1.30: デカルトファイブレーション

$p\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{B}$ を内的ファイブレーションとする．

- p が**デカルトファイブレーション** (Cartesian fibration) であるとは，
  - $\mathcal{B}$ の任意の 1 射 $(x \xrightarrow{f} y) \in \mathcal{B}_1$
  - $p_{[0]}(\bar{y}) = y$ を充たす $\mathcal{E}$ の任意の対象 $\bar{y} \in \mathcal{E}_0$

  に対して，以下の条件を充たす $\mathcal{E}$ の 1-射 $(z \xrightarrow{\bar{f}} \bar{y}) \in \mathcal{E}_1$ が存在すること：

  (Cart-1)

  $\bar{f}$ は f の持ち上げである．i.e. $p_{[1]}(\bar{f}) = f$ が成り立つ．

  (Cart-2)

  $\forall n \geq 2$ に対して，以下の図式を可換にする $\mathcal{E}$ の n-射 $\bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \mathcal{E}) \cong \mathcal{E}_n$ が存在する：

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{N}\bigl(\{n-1 \le n\}\bigr) \cong \Delta^1 \arrow[d, hook] \arrow[dr, "\bar{f}"] & \\
\Lambda^n_n \arrow[r, "\forall \varphi_0"] \arrow[d, hook] & \mathcal{E} \arrow[d, "p"] \\
\Delta^n \arrow[r, "\forall \varphi"'] \arrow[ur, dashed, "\exists \bar{\varphi}"] & \mathcal{B}
\end{tikzcd}$$

ただし，**sSet** の射 $\bar{f}\colon \mathrm{N}\bigl(\{n-1 \le n\}\bigr) \longrightarrow \mathcal{E}$ とは

$$\bar{f}_{[1]}\left(\underset{n-1}{\bullet} \rightarrow \underset{n}{\bullet} \right) = \underset{z}{\bullet} \xrightarrow{\bar{f}} \underset{\bar{y}}{\bullet}$$

を充たす唯一の自然変換である．

- p が**余デカルトファイブレーション** (coCartesian fibration) であるとは，
  - $\mathcal{B}$ の任意の 1 射 $(x \xrightarrow{f} y) \in \mathcal{B}_1$
  - $p_{[0]}(\bar{x}) = x$ を充たす $\mathcal{E}$ の任意の対象 $\bar{x} \in \mathcal{E}_0$

  に対して，以下の条件を充たす $\mathcal{E}$ の 1-射 $(\bar{x} \xrightarrow{\bar{f}} z) \in \mathcal{E}_1$ が存在すること：

  (coCart-1)

  $\bar{f}$ は f の持ち上げである．i.e. $p_{[1]}(\bar{f}) = f$ が成り立つ．

  (coCart-2)

  $\forall n \ge 2$ に対して，以下の図式を可換にする $\mathcal{E}$ の n-射 $\bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \mathcal{E}) \cong \mathcal{E}_n$ が存在する：

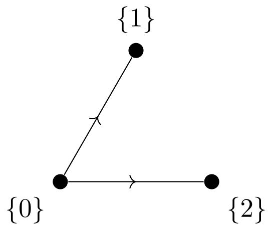
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{N}\bigl(\{0 \le 1\}\bigr) \cong \Delta^1 \arrow[d, hook] \arrow[dr, "\bar{f}"] & \\
\Lambda^n_0 \arrow[r, "\forall \varphi_0"] \arrow[d, hook] & \mathcal{E} \arrow[d, "p"] \\
\Delta^n \arrow[r, "\forall \varphi"'] \arrow[ur, dashed, "\exists \bar{\varphi}"] & \mathcal{B}
\end{tikzcd}$$

  ただし，**sSet** の射 $\bar{f}\colon \mathrm{N}\bigl(\{0 \le 1\}\bigr) \longrightarrow \mathcal{E}$ とは

$$\bar{f}_{[1]}\left(\underset{n-1}{\bullet} \rightarrow \underset{n}{\bullet} \right) = \underset{\bar{x}}{\bullet} \xrightarrow{\bar{f}} \underset{z}{\bullet}$$

  を充たす唯一の自然変換である．

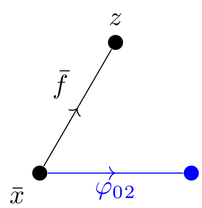
$n = 2$ の場合の **(coCart-2)** の可換図式を系??を用いて書き直そう．まず，包含 $\mathrm{N}\bigl(\{0 \le 1\}\bigr) \hookrightarrow \Lambda^2_0$ というのは，系??による角 Λ^2_0 の図示



のうち，辺 $\{0\} \longrightarrow \{1\}$ への埋め込みである．従って可換図式の

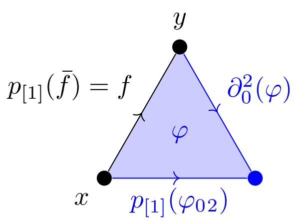
$$\begin{tikzcd} \mathrm{N}\big(\{0 \le 1\}\big) \cong \Delta^1 \arrow[d, hook] \arrow[dr, "\bar{f}"] & \\ \Lambda^n_0 \arrow[r, "\forall \varphi_0"] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

の部分は角の図式 $\varphi_0 = (\bullet,\, \bar{f},\, \varphi_{02}) \in \mathcal{E}_1^{\times 2}$ に対応する．図示すると

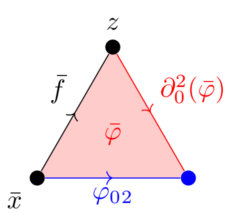
$\varphi_0 =$  (1.3.1)

となる．従って，**(coCart-2)** の主張は次のように言い換えられる：

$(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{B}$ において角の図式が 2-射 $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^2, \mathcal{B}) \cong \mathcal{B}_2$ によって



と埋められているならば，$\mathcal{E}$ において角の図式 (1.3.1) を



のように埋める 2-射 $\bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^2, \mathcal{E}) \cong \mathcal{E}_2$ が存在する．