第1章



この付録では、[?]、[?] に従って ∞ -圏 *1 、および主 ∞ -束を導入する.

1.1 圏論の復習

1.1.1 圏と関手

定義 1.1: 圏

圏 (category) C とは、以下の 4 種類のデータからなる:

• 対象 (object) と呼ばれる要素の集まり^a

 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$

• $\forall A, B \in Ob(\mathcal{C})$ に対して、A から B への \mathbf{h} (morphism) と呼ばれる要素の集合

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$$

• $\forall A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して、 $A \perp \mathcal{O}$ 恒等射 (identity morphism) と呼ばれる射

$$\mathbf{Id}_{\mathbf{A}} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$$

• $\forall A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B), \forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ に対して、f と g の合成 (composite) と呼ばれる射 $g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$ を対応させる集合の写像

$$\circ \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(A,\,B\right) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(B,\,C\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(A,\,C\right),\; (f,\,g) \longmapsto g \circ f$$

これらの構成要素は、次の2条件を満たさねばならない:

(1) (unitality): 任意の射 $f: A \longrightarrow B$ に対して

$$f \circ \mathrm{Id}_A = f$$
, $\mathrm{Id}_B \circ f = f$

が成り立つ.

^{*1 [?]}

(2) (associativity): 任意の射 $f: A \longrightarrow B, g: B \longrightarrow C, h: C \longrightarrow D$ に対して

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

が成り立つ.

a Ob(C) は、集合論では扱えないほど大きなものになっても良い.

定義 1.2: モノ・エピ・同型射

圏 *C* を与える.

• 射 $f: A \longrightarrow B$ が**単射** (monomorphism) であるとは、 $\forall X \in Ob(\mathcal{C})$ に対して写像

$$f_* \colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, B),$$

 $g \longmapsto f \circ g$

が集合の写像として単射であること.

• 射 $f \colon A \longrightarrow B$ が全射 (epimorphism) であるとは、 $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して写像

$$f^* : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X),$$

 $g \longmapsto g \circ f$

が集合の写像として単射であること.

- 射 $f: A \longrightarrow B$ が同型射 (isomorphism) であるとは、射 $g: B \longrightarrow A$ が存在して $g \circ f = \operatorname{Id}_A$ かつ $f \circ g = \operatorname{Id}_B$ を充たすこと.このとき $f \wr g$ は互いの逆射 (inverse) であると言い、 $g = f^{-1}$, $f = g^{-1}$ と書くa.
- $A, B \in Ob(\mathcal{C})$ の間に同型射が存在するとき、対象 $A \ge B$ は同型 (isomorphic) であると言い、 $A \cong B$ と書く.

a 逆射は存在すれば一意である.

定義 1.3: 関手

圏 C, D を与える. 圏 C から圏 D への関手 F とは、以下の 2 つの対応からなる:

- 圏 $\mathcal C$ における任意の対象 $X\in \mathrm{Ob}(\mathcal C)$ に対して、圏 $\mathcal D$ における対象 $F(X)\in \mathrm{Ob}(\mathcal D)$ を対応づける
- 圏 $\mathcal C$ における任意の射 $f\colon X\longrightarrow Y$ に対して、圏 $\mathcal D$ における射 $F(f)\colon F(X)\longrightarrow F(Y)$ を対応づける

これらの対応は以下の条件を充たさねばならない:

(fun-1) 圏 C における任意の射 $f: X \longrightarrow Y, g: Y \longrightarrow Z$ に対して,

$$F(g \circ f) \longrightarrow F(g) \circ F(f)$$

(fun-2) 圏 \mathcal{C} における任意の対象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して、

$$F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$$

文脈上明らかなときは、圏 C から圏 D への関手 F のことを関手 $F: C \longrightarrow D$ と略記する.

定義 1.4: 忠実・充満・本質的全射

関手 $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ を与える.

• F が忠実 (faithful) であるとは, $\forall X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ に対して写像

$$F: \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)), f \longmapsto F(f)$$

が単射であること.

• F が充満 (full) であるとは, $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して写像

$$F: \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)), f \longmapsto F(f)$$

が全射であること.

• F が本質的全射 (essentially surjective) であるとは, $\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ に対して $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が存在して F(X) が Y と同型になること.

忠実充満関手のことを**埋め込み**と呼ぶことがある.

定義 1.5: 自然変換

2 つの関手 $F,G:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ を与える. F,G の間の自然変換 (natural transformation) $\tau\colon F\Longrightarrow G$ とは、以下の対応からなる:

• 圏 $\mathcal C$ における任意の対象 $X\in \mathrm{Ob}(\mathcal C)$ に対して、圏 $\mathcal D$ における射 $\tau_X\colon F(X)\longrightarrow G(X)$ を対応づける

この対応は以下の条件を充たさねばならない:

(nat) 圏 C における任意の射 $f: X \longrightarrow Y$ に対して、以下の図式を可換にする:

$$F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y)$$

$$\downarrow^{\tau_X} \qquad \qquad \downarrow^{\tau_Y}$$

$$G(X) \xrightarrow{G(f)} G(Y)$$

自然変換 $\tau\colon F\Longrightarrow G$ であって、 $\forall X\in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して射 $\tau_X\colon F(X)\longrightarrow G(X)$ が同型射であるもののことを**自然同値** (natural equivalence) と呼ぶ.

自然変換 $\tau: F \Longrightarrow G$ を



と書くことがある.

1.1.2 米田埋め込み

定義 1.6: 前層

圏 C 上の圏 S に値をとる前層とは、関手

$$P \colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}$$

のこと.

前層の圏 PSh(C, S) *2 とは,

- 前層 $P: \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}$ を対象とする
- 前層 $P, Q: \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}$ の間の自然変換 $\tau: P \Longrightarrow Q$ を射とする

として構成される圏のこと*3.

 $^{^{*2}}$ [$\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\mathcal{S}$] や $\mathcal{S}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ と書くこともある.なお,付録 A で登場したものはこれの一例である.

^{*3} $\mathrm{PSh}(\mathcal{C},\mathcal{S})$ の恒等射は $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^\mathrm{op})$ に対して $\mathrm{Id}_X \colon X \longrightarrow X$ を対応づける自然変換である.

定義 1.7: 表現可能前層・米田埋め込み

圏 C を与える.

• $\forall X \in Ob(C)$ に対して、以下で定義する前層

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\operatorname{ ext{--}},X)\colon \mathcal{C}^{\operatorname{op}}\longrightarrow \operatorname{Sets}$$

のことを表現可能前層 (representable presheaf) と呼ぶ:

 $- \forall Y \in Ob(\mathcal{C}^{op})$ に対して

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)(Y) := \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \in \operatorname{Ob}(\mathbf{Sets})$$

を対応づける

 $- \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ における任意の射 $Y \longleftarrow Z : g$ に対して,

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\operatorname{-}\,,\,X\right)(g) \coloneqq g^* \colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\left(Z,\,X\right) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\left(Y,\,X\right),$$

$$h \longmapsto h \circ g$$

を対応付ける

• 米田埋め込み (Yoneda embedding) とは、以下で定義する関手

$$Y: \mathcal{C} \longrightarrow PSh(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Sets})$$

のこと:

- $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ に対して表現可能前層 $\mathrm{Y}(X) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(-, X\right) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{PSh}\left(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Sets}\right))$ を対応付ける
- -C における任意の射 $f\colon X\longrightarrow Y$ に対して、以下で定義される自然変換 $Y(f)\colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X)\Longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-,Y)$ を対応付ける:
 - * $\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ に対して、圏 **Sets** における射

$$Y(f)_Z := f_* : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y),$$

 $g \longmapsto f \circ g$

を対応付ける.

補題 1.1: 米田の補題

前層 $F: \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ および圏 \mathcal{C} の対象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を与える. このとき, 写像

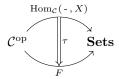
$$\operatorname{Hom}_{\operatorname{PSh}(\mathcal{C}^{\operatorname{op}}, \operatorname{\mathbf{Sets}})} \left(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}} \left(-, X \right), F \right) \longrightarrow F(X),$$

$$\tau \longmapsto \tau_X(\operatorname{Id}_X)$$

は全単射である.

米田の補題の主張は少し込み入っているが,次のように考えれば良い:

 $\tau \in \operatorname{Hom}_{\operatorname{PSh}(\mathcal{C}^{\operatorname{op}}, \operatorname{\mathbf{Sets}})} \left(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}} \left(-, X \right) \right)$ とは自然変換



のことであるから、表現可能前層の定義より $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ に対して圏 **Sets** における射(i.e. 写像) $\tau_X \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X) \longrightarrow F(X)$ が定まる。圏の定義より集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$ には必ず恒等射という元 $\mathrm{Id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$ が含まれるので、それを写像 τ_X で送った先は $\tau_X(\mathrm{Id}_X) \in F(X)$ として well-defined である.

証明 写像

$$\eta \colon F(X) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Sets})} \big(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}} (-, X), F \big),$$

$$s \longmapsto \big\{ \eta(s)_Y \colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}} (Y, X) \longrightarrow F(Y), f \longmapsto F(f)(s) \big\}_{Y \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})}$$

を考える. $\forall s \in F(X)$ を 1 つ固定する. このとき圏 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ における任意の射 $Y \longleftarrow Z$: f および $\forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,X)$ に対して

$$\eta(s)_Y \circ \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)(f)(g) = \eta(s)_Y(g \circ f)$$

$$= F(g \circ f)(s)$$

$$= F(f) \circ F(g)(s)$$

$$= F(f) \circ \eta(s)_Z(g)$$

が言える. i.e. $\eta(s)$ は自然変換であり、 η は well-defined である.

ところで、 $\forall \tau \in \operatorname{Hom}_{\operatorname{PSh}(\mathcal{C}^{\operatorname{op}}, \operatorname{\mathbf{Sets}})} (\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}} (-, X), F)$ に対して

$$\begin{split} \eta(\tau_X(\operatorname{Id}_X)) &= \big\{ \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\,X) \longrightarrow F(Y), \ f \longmapsto F(f) \big(\tau_X(\operatorname{Id}_X)\big) \big\}_{Y \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})} \\ &= \big\{ \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\,X) \longrightarrow F(Y), \ f \longmapsto F(f) \circ \tau_X(\operatorname{Id}_X) \big\}_{Y \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})} \\ &= \big\{ \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\,X) \longrightarrow F(Y), \ f \longmapsto \tau_Y \circ \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\,\cdot\,,\,X)(f)(\operatorname{Id}_X) \big\}_{Y \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})} \\ &= \big\{ \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\,X) \longrightarrow F(Y), \ f \longmapsto \tau_Y(f \circ \operatorname{Id}_X) \big\}_{Y \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})} \\ &= \big\{ \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\,X) \longrightarrow F(Y), \ f \longmapsto \tau_Y(f) \big\}_{Y \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})} \\ &= \tau \end{split}$$

が成り立ち,かつ

$$\eta(s)_X(\mathrm{Id}_X) = F(\mathrm{Id}_X)(s) = \mathrm{Id}_{F(X)}(s) = s$$

が成り立つので、 η は題意の写像の逆写像である.

命題 1.1: 米田埋め込みは埋め込み

米田埋め込み $Y: \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{PSh}\left(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \, \mathbf{Sets}\right)$ は埋め込みである.

証明 $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を固定する. 写像

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longmapsto \operatorname{Hom}_{\operatorname{PSh}(\mathcal{C}^{\operatorname{op}}, \operatorname{\mathbf{Sets}})} (\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\operatorname{-}, X), \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\operatorname{-}, Y)),$$

$$f \longmapsto \operatorname{Y}(f)$$

が全単射であることを示せば良い、米田埋め込みの定義から、 $\forall s \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ に対して

$$\begin{split} \mathbf{Y}(s) &= \left\{ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(Z,\,X\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(Z,\,Y\right), \ g \longmapsto s \circ g \right\}_{Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \\ &= \left\{ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(Z,\,X\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(Z,\,Y\right), \ g \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\,\text{-}\,,\,Y\right)\!\left(g\right)\!\left(s\right) \right\}_{Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \end{split}$$

が成り立つが、これは米田の補題において $F = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y) \in \operatorname{Ob}(\operatorname{PSh}(\mathcal{C}^{\operatorname{op}}, \operatorname{\mathbf{Sets}}))$ としたときの逆写像であり、示された.

1.1.3 随伴

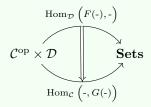
定義 1.8: 随伴

関手 $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}, \ G: \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ を与える. F が G の左随伴 (left adjoint) であり, かつ G が F の右随伴 (right adjoint) であるとは,2つの関手

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(\operatorname{-}),\operatorname{-})\colon \mathcal{C}^{\operatorname{op}}\times\mathcal{D}\longrightarrow \operatorname{\mathbf{Sets}},$$

 $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\operatorname{-},G(\operatorname{-}))\colon \mathcal{C}^{\operatorname{op}}\times\mathcal{D}\longrightarrow \operatorname{\mathbf{Sets}}$

の間に自然変換



が存在することを言う.

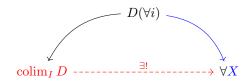
F が G の左随伴である(全く同じことだが,G が F の右随伴である)ことを $F \dashv G$ と書く.図式中では

$$\mathcal{C} \overset{F}{\underset{G}{\longleftarrow}} \mathcal{D}$$

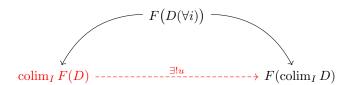
のように書く.

これまでもなんとなく使ってきたが,圏 $\mathcal C$ における I 型の図式とは小圏から圏への関手 $D\colon I\longrightarrow \mathcal C$ のことを言う.I 型の図式 $D\colon I\longrightarrow \mathcal C$ および関手 $F\colon \mathcal C\longrightarrow \mathcal D$ をとると,同じ型の新たな図式 $I\overset{\mathcal D}{\longrightarrow}\mathcal C\overset{F}{\longrightarrow}\mathcal D$ が構成できる.

さて、圏 C 上の図式 $D: I \longrightarrow C$ が余極限を持つとする:

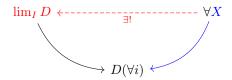


このとき、 D 上の図式として

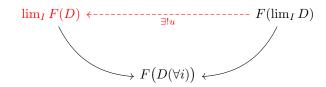


を考えることができる. 特に、一意に定まる射 u: $\operatorname{colim}_I F(D) \longrightarrow F(\operatorname{colim}_I D)$ が同型のとき、関手 F は 余極限を保つという.

同様に、圏 \mathcal{D} 上の図式 $D: I \longrightarrow \mathcal{C}$ が極限を持つとする:



このとき、 ひ上の図式として



を考えることができる。特に、一意に定まる射 u: $F(\lim_I D) \longrightarrow \lim_I F(D)$ が同型のとき、関手 F は極限を保つという。

命題 1.2: 随伴と極限・余極限

関手 $F:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D},\ G:\mathcal{D}\longrightarrow\mathcal{C}$ が $F\dashv G$ であるとする.このとき,F は余極限を保ち,G は極限を保つ.

証明 余極限を持つ任意の $\mathcal C$ の図式 $D\colon I\longrightarrow \mathcal C$ を 1 つ固定する. 随伴の定義および余極限の定義より, $\forall Y\in \mathrm{Ob}(\mathcal D)$ に対して

$$\begin{split} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\left(F(\operatorname{colim}D),\,Y\right) &\cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\operatorname{colim}D,\,G(Y)\right) \\ &\cong \lim_{I}\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\left(D(i),\,G(Y)\right) \\ &\cong \lim_{I}\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\left(F(D(i)),\,Y\right) \\ &\cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\left(\operatorname{colim}F(D),\,Y\right) \end{split}$$

が言える. 米田の補題により

$$F(\operatorname{colim}_I D) \cong \operatorname{colim}_I F(D)$$

が示された.

定義 1.9: 完備な圏

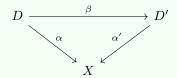
圏が**完備**(resp. **余完備**)(complete resp. cocomplete) であるとは、任意の小圏を添字圏にもつ図式 が極限を持つことを言う. 完備かつ余完備な圏は**双完備** (bicomplete) であると言われる.

1.1.4 Kan 拡張

定義 1.10: スライス圏

圏 $\mathcal D$ およびその対象 $X\in \mathrm{Ob}(\mathcal D)$ を与える. スライス圏 (slice category) $\mathcal D_{/X}$ とは、以下のデータ からなる圏のこと:

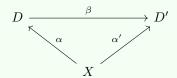
- \mathcal{D} の対象と射の組 $(D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}), \alpha \colon D \longrightarrow X)$ を対象に持つ
- $(D,\alpha),\,(D',\alpha')$ の間の射は, $\mathcal D$ における射 $\beta\colon D\longrightarrow D'$ であって $\mathcal D$ における図式



を可換にするものとする

双対スライス圏 (dual slice category) $\mathcal{D}_{X/}$ とは、以下のデータからなる圏のこと:

- \mathcal{D} の対象と射の組 $(D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}), \alpha : X \longrightarrow D)$ を対象に持つ
- $(D, \alpha), (D', \alpha')$ の間の射は、 \mathcal{D} における射 $\beta: D \longrightarrow D'$ であって \mathcal{D} における図式



を可換にするものとする

関手* *4 $\mathcal{D}_{/X} \longrightarrow \mathcal{D}, \ (D, \alpha) \longmapsto D$ のことを**標準的関手** (canonical functor) と呼ぶ. 標準的関手は図式中でも記号で明記しないことが多い.

^{*4} 対象の対応のみ明示した.