第 4 章

位相的場の理論の展開：SPT 相の分類

この節で登場する多様体は特に断らない限り常に C^∞ 多様体である．また，体 $\mathbb{K}$ と言ったら $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のいずれかを指す．

4.1 SPT 相の定義

この節では常に $d \coloneqq D+1$ 次元時空 $\mathcal{M}^{(d)} = \Sigma^{(D)} \times \mathbb{R}$ または[*1] $\Sigma^{(D)} \times S^1$ を考える．混乱が生じない時は時空点を $x \coloneqq (\boldsymbol{x},\, t) \in \Sigma^{(D)} \times \mathbb{R}$ と書く．D 次元多様体[*2] $\Sigma^{(D)}$ はノルム $\|\cdot\|$ を持つ距離空間であるとする．

- $\Sigma^{(D)}$ 上の D 次元**格子** (lattice) $\Lambda \subset \Sigma^{(D)}$ とは，$\Sigma^{(D)}$ の有限な[*3]離散部分集合のことである．
- 格子点 $\boldsymbol{x} \in \Lambda$ 上の Hilbert 空間を $\mathcal{H}_{\boldsymbol{x}}$ と書く．
- 全系の Hilbert 空間とは，合成系 $\mathcal{H}_{\mathrm{tot}} \coloneqq \bigotimes_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} \mathcal{H}_{\boldsymbol{x}}$ のことである．

定義 4.1: bosonic な格子模型

- $\forall \boldsymbol{x} \in \Lambda$ を 1 つとる．別の格子点 $\boldsymbol{y} \in \Lambda$ が $\boldsymbol{x}$ についてレンジ $R > 0$ であるとは，$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \leq R$ が成り立つことを言う．$\boldsymbol{x}$ についてレンジ R な格子点全体の集合を $N_R(\boldsymbol{x}) \subset \Lambda$ と書く．
- 格子 Λ 上のレンジ $R > 0$ の（量子的）**bosonic な格子模型**とは，$\forall \boldsymbol{x} \in \Lambda$ に対して，$\forall \boldsymbol{y} \in N_R(\boldsymbol{x})$ における局所的 Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{\boldsymbol{y}}$ にのみ非自明に作用するエルミート演算子 $\hat{h}_{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Hilb}}(\mathcal{H}_{\mathrm{tot}},\, \mathcal{H}_{\mathrm{tot}})$ が存在して，

$$\hat{H} = \sum_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} \hat{h}_{\boldsymbol{x}}$$

  と書かれるエルミート演算子 $\hat{H} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Hilb}}(\mathcal{H}_{\mathrm{tot}},\, \mathcal{H}_{\mathrm{tot}})$ のこと．

bosonic な格子模型の基底状態を **bosonic な基底状態**と呼ぶ．

[*1] 時間方向は必要に応じてコンパクト化する

[*2] closed でなくとも良い．

[*3] 空間多様体 $\Sigma^{(D)}$ や局所 Hilbert 空間に適当な境界条件を課して有限にする．

定義 4.2: gapped な格子模型

bosonic な格子模型 $\hat{H}$ が **gapped** であるとは，熱力学極限を取った際に基底状態 E_0 と第一励起状態 E_1 の間に有限のエネルギーギャップ $\Delta := E_1 - E_0 > 0$ が存在し，かつ基底状態が一意であることを言う．

熱力学極限 $|\Lambda| \to \infty$ をとった $\Sigma^{(D)}$ 上の bosonic な格子模型全体の集合を $\mathbf{Lat}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{(D)}\right) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbf{Hilb}}\left(\mathcal{H}_{\mathrm{tot}}, \mathcal{H}_{\mathrm{tot}}\right)$ と書き，[*4]$\mathrm{Lat}\left(\Sigma^{(D)}\right)$ の元の基底状態全体の集合を $\mathbf{Gnd}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{(D)}\right) \subset \mathcal{H}_{\mathrm{tot}}$ と書く．$\mathrm{Lat}\left(\Sigma^{(D)}\right)$ にコンパクト開位相[*5]を入れて位相空間にする．[?, p.3] に倣い，**量子相** (quantum phase) を以下のように定義する：

定義 4.3: bosonic な量子相

2 つの bosonic な格子模型 $\hat{H}_0, \hat{H}_1 \in \mathrm{Lat}\left(\Sigma^{(D)}\right)$ を与える．

- $\hat{H}_0$ の基底状態 $|\Phi_0\rangle \in \mathrm{Gnd}\left(\Sigma^{(D)}\right)$ と $\hat{H}_1$ の基底状態 $|\Phi_1\rangle \in \mathrm{Gnd}\left(\Sigma^{(D)}\right)$ が同じ**量子相** (quantum phase) にあるとは，C^∞ 曲線 $\hat{H} \colon [0, 1] \longrightarrow \mathrm{Lat}\left(\Sigma^{(D)}\right)$ が存在して $\hat{H}(0) = \hat{H}_0$ かつ $\hat{H}(1) = \hat{H}_1$ を充たすこと．これは $\mathrm{Gnd}\left(\Sigma^{(D)}\right)$ 上の同値関係 $\sim$ をなす．
- 商集合 $\mathrm{Gnd}\left(\Sigma^{(D)}\right)/\sim$ の元のことを**量子相**と呼ぶ．

4.1.1 SRE 状態と LRE 状態

まず，[?, p.3] に倣って **SRE 状態** (Short Range Entangled states) と **LRE 状態** (Long Range Entangled states) を定義する．[?, p.4]

予想 4.1: Chen-Gu-Wen の仮説

bosonic かつ gapped な 2 つの基底状態 $|\Phi_0\rangle, |\Phi_1\rangle$ が同じ量子相にあるならば，以下の条件を充たす bosonic な格子模型の族 $\left\{\hat{H}(t)\right\}_{t\in[0,\,1]}$ が存在する：

- $\forall t \in [0, 1]$ に対して，$\hat{H}(t)$ の基底状態は熱力学極限を取った際に gapped である．
- $|\Phi_0\rangle, |\Phi_1\rangle$ はそれぞれ $\hat{H}(0), \hat{H}(1)$ の基底状態である．

[*4] $\mathcal{H}_{\mathrm{tot}}$ は一般には熱力学極限の取り方に依存する．
[*5] operator norm による距離位相としても良い．

命題 4.1: LU transformation

以下の 2 つは同値である：

(1) bosonic かつ gapped な 2 つの基底状態 $\left|\Phi_0\right\rangle, \left|\Phi_1\right\rangle$ が同じ量子相にある

(2) bosonic な格子模型の族 $\left\{\hat{\hat{H}}(t)\right\}_{t\in[0,1]}$ が存在して

$$\left|\Phi_1\right\rangle = \mathcal{T}\left[e^{-\mathrm{i}\int_0^1 \mathrm{d}t\,\hat{\hat{H}}(t)}\right]\left|\Phi_0\right\rangle \tag{4.1.1}$$

を充たす．ただし $\mathcal{T}$ は経路順序積である．

証明 ($\Longrightarrow$)

仮説 4.1 による．

($\Longleftarrow$)

■

(4.1.1) を**局所ユニタリ発展** (local unitary evolution) と呼ぶ．

定義 4.4: SRE 状態

bosonic かつ gapped な基底状態 $\left|\Phi\right\rangle \in \mathrm{Gnd}\left(\Sigma^{(D)}\right)$ が **SRE 状態** (short range entangled state) であるとは，ある separable な状態

$$\bigotimes_{\boldsymbol{x}\in\Lambda}\left|\psi_{\boldsymbol{x}}\right\rangle \quad {}^{\mathrm{w}/}\quad \forall\boldsymbol{x}\in\Lambda,\ \left|\psi_{\boldsymbol{x}}\right\rangle \in \mathcal{H}_{\boldsymbol{x}}$$

と $\left|\Psi\right\rangle$ との間に局所ユニタリ発展が存在すること．

SRE 状態でない基底状態のことを **LRE 状態** (long range entangled state) と呼ぶ．

定義から明らかに，任意の SRE 状態は同一の量子相に属する．

4.1.2 Bosonic SPT 相

SRE 状態の定義はそのままだと面白くないが，対称性を考慮すると話は変わってくる．位相群 G を与える．また，格子 Λ は空間群 S の対称性を持つ[*6]とする．

[*6] S の Λ への左作用を $\blacktriangleright : S\times\Lambda \longrightarrow \Lambda$ と書く．

定義 4.5: 外部半直積

$N,\ H$ を群とし，$\phi\colon H \to \mathrm{Aut}\, N,\ h \mapsto \phi_h$ を準同型写像とする[a]．このとき，集合 $N \times H$ は次の二項演算 $\cdot : N \times H \to N \times H$ に関して群を成す：

$$(n_1,\, h_1) \cdot (n_2,\, h_2) \coloneqq \bigl(n_1 \phi_{h_1}(n_2),\, h_1 h_2\bigr)$$

この群 $\bigl(N\times H,\, \cdot\,,\, (1_N,\, 1_H)\bigr)$ のことを $N,\ H$ の (外部) **半直積** (semidirect product) と呼び，$\boldsymbol{H \ltimes_{\phi} N}$ または $\boldsymbol{N \rtimes_{\phi} H}$ と書く．

[a] $\mathrm{Aut}\, N$ は，N から N 自身への同型写像全体の集合に，写像の合成を群の演算として群構造を入れたもので，**自己同型群** (automorphism group) と呼ばれる．

定義 4.6: G-対称な格子模型

bosonic な格子模型 $\hat{H}$ が ***G*-対称** [?, p.12] であるとは，

- 群準同型 $\rho_{\mathrm{spa}}\colon G \longrightarrow S$
- 群準同型 $\phi_{\mathrm{int}}\colon G \longrightarrow \{\pm 1\}$
- 群のユニタリ or 反ユニタリ表現 $\rho_{\mathrm{int}}\colon G \ltimes_{\blacktriangleright \circ \rho_{\mathrm{spa}}} S \longrightarrow \bigl\{\, \text{unitary or antiunitary operator } \mathcal{H}_{\mathrm{tot}} \to \mathcal{H}_{\mathrm{tot}} \,\bigr\}$

が存在して以下を充たすことを言う：

(Gsym-1)

$\forall g \in G$ に対し，

$$\phi_{\mathrm{int}}(g) = \begin{cases} +1, & \rho_{\mathrm{int}}(g) \text{ is unitary} \\ -1, & \rho_{\mathrm{int}}(g) \text{ is antiunitary} \end{cases}$$

(Gsym-2)

群 G の $\mathcal{H}_{\mathrm{tot}}$ への作用

$$\begin{aligned} \rho\colon G &\longrightarrow \mathrm{GL}(\mathcal{H}_{\mathrm{tot}}), \\ g &\longmapsto \left(\bigotimes_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} \lvert \psi_{\boldsymbol{x}} \rangle \longmapsto \bigotimes_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} \rho_{\mathrm{int}}\bigl(g,\, \rho_{\mathrm{spa}}(g)^{-1} \blacktriangleright \boldsymbol{x}\bigr) \bigl\lvert \psi_{\rho_{\mathrm{spa}}(g)^{-1} \blacktriangleright \boldsymbol{x}} \bigr\rangle \right) \end{aligned}$$

に関して，

$$\forall g \in G,\ \Bigl[\hat{H}, \rho(g)\Bigr] = 0$$

が成り立つ．

G-対称な格子模型全体の集合を $\mathbf{Lat}_{\boldsymbol{G}}\bigl(\boldsymbol{\Sigma}^{(\boldsymbol{D})}\bigr) \subset \mathrm{Lat}\bigl(\Sigma^{(D)}\bigr)$ と書き[*7]．その基底状態全体の集合を $\mathbf{Gnd}_{\boldsymbol{G}}\bigl(\boldsymbol{\Sigma}^{(\boldsymbol{D})}\bigr) \subset \mathrm{Gnd}\bigl(\Sigma^{(D)}\bigr)$ と書く．

[*7] $\mathrm{Lat}\bigl(\Sigma^{(D)}\bigr)$ からの subspace topology を入れる．

定義 4.7: G-同変な量子相

2 つの bosonic かつ G-対称な格子模型 $\hat{H}_0,\ \hat{H}_1 \in \mathrm{Lat}_G(\Sigma^{(D)})$ を与える．

- $\hat{H}_0$ の基底状態 $|\Phi_0\rangle \in \mathrm{Gnd}_G\left(\Sigma^{(D)}\right)$ と $\hat{H}_1$ の基底状態 $|\Phi_1\rangle \in \mathrm{Gnd}_G\left(\Sigma^{(D)}\right)$ が同じ ***G*-同変な量子相** (G-equivalent quantum phase) にあるとは，C^∞ 曲線 $\hat{H}\colon [0,\,1] \longrightarrow \mathrm{Lat}_G(\Sigma^{(D)})$ が存在して $\hat{H}(0) = \hat{H}_0$ かつ $\hat{H}(1) = \hat{H}_1$ を充たすこと．これは $\mathrm{Gnd}_G\left(\Sigma^{(D)}\right)$ 上の同値関係を成す．
- 商集合 $\mathrm{Gnd}_G\left(\Sigma^{(D)}\right)/\sim$ の元のことを ***G*-同変な量子相**と呼ぶ．

定義 4.8: SPT 相 (Chen-Gu-Wen による)

bosonic かつ gapped かつ G-同変な量子相 $[|\Phi\rangle] \in \mathrm{Gnd}_G\left(\Sigma^{(D)}\right)$ が **SPT 相** (symmetry protected topological phase[a]) であるとは，$\forall\,|\Psi\rangle \in [|\Phi\rangle]$ が SRE 状態であることを言う．

[a] **symmetry protected trivial phase** と呼ぶこともある [**?**].

つまり，任意の代表元が G-対称性を破れば separable な状態に滑らかにつながるような量子相のことを SPT 相と呼ぶ．SPT 相の名前はこのことに由来する．

4.1.3 Fermionic SPT 相

4.2 Bosonic SPT 相の分類：群コホモロジーによる方法

[**?**, p.16, VIII] は，Dijkgraaf-Witten 理論を用いて[*8]かなり多くの SPT 相を書き下す系統的な方法を発明した．この節ではその方法を紹介する．

簡単のため，G-対称な格子模型のうち群準同型 ρ_{spa} が自明なもの[*9]のみ考える．また，G は局所コンパクト[*10]であるとする．このとき G は Haar 測度を持つのでそれを $\int_G \mathrm{d}g$ とおく．このとき，非ゼロな $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{\boldsymbol{x}}$ を 1 つ固定して $\forall g \in G$ に対して

$$|g\rangle \coloneqq \rho_{\mathrm{int}}(g)\,|\psi\rangle$$

とおくと，Haar 測度の左右不変性から族 $\left\{|g\rangle\right\}_{g\in G}$ は一般化コヒーレント状態を成す．ここで $\forall\left\{g_{\boldsymbol{x}}\right\}_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} \in \prod_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} G$ に対して

$$\left|\left\{g_{\boldsymbol{x}}\right\}_{\boldsymbol{x}\in\Lambda}\right\rangle \coloneqq \bigotimes_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} |g_{\boldsymbol{x}}\rangle \in \mathcal{H}_{\mathrm{tot}}$$

とおこう．さらに以下では G は離散群であるとする．

[*8] 彼女らの元論文では Dijkgraaf-Witten 理論とは言わずに topological θ-term と呼んでいる．
[*9] i.e. $\forall g \in G$ に対して $\rho_{\mathrm{spa}}(g) = 1_S$
[*10] 任意の点がコンパクト近傍を持つ

命題 4.2: SPT 相の構成

- 空間多様体 Σ を境界にもつ $D+1$ 次元多様体 $\mathcal{N}^{(D+1)}$
- $\mathcal{N}^{(D+1)}$ の三角形分割 $|K| \xrightarrow{\approx} \mathcal{N}^{(D+1)}$ であって，その 0-単体（頂点）K_0 が $\partial\mathcal{N}^{(D+1)}$ において格子 Λ を再現するもの
- $\omega \in H^{D+1}_{\mathrm{Grp}}(G,\, \mathrm{U}(1))$

をとる．このとき

$$|\Psi\rangle_\omega := \frac{1}{|G|^{|\Lambda|}} \sum_{\{g_j\}_{j\in K_1}} \prod_{\{j_0,\,\dots,\,j_{D+1}\}\in K_{D+1}} \omega(g_{j_0},\,\dots,\,g_{j_{D+1}})^{\epsilon_{\{j_0,\,\dots,\,j_{D+1}\}}} \left|\{g_{\boldsymbol{x}}\}_{\boldsymbol{x}\in\Lambda}\right\rangle$$

は SPT 相の代表元である．ただし $\epsilon_{\{j_0,\,\dots,\,j_{D+1}\}}$ は $D+1$-単体 $\{j_0,\,\dots,\,j_{D+1}\}\in K_{D+1}$ の向きである．

<u>**証明**</u> まず，$|\Psi\rangle_\omega$ が G-対称であることを示す．実際 $\forall\{g_{\boldsymbol{x}}\}_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} \in \prod_{\boldsymbol{x}\in\Lambda} G$ および $\forall g\in G$ に対して

$$\begin{aligned}
\left\langle\{g_{\boldsymbol{x}}\}_{\boldsymbol{x}\in\Lambda}\middle|\rho(g)\middle|\Psi\right\rangle_\omega &= \left\langle\{g_{\boldsymbol{x}}\}_{\boldsymbol{x}\in\Lambda}\middle|\bigotimes_{\boldsymbol{x}\in\Lambda}\rho_{\mathrm{int}}(g)\middle|\Psi\right\rangle_\omega \\
&= \left\langle\{g^{-1}g_{\boldsymbol{x}}\}_{\boldsymbol{x}\in\Lambda}\middle|\Psi\right\rangle_\omega \\
&= \frac{1}{|G|^{|\Lambda|}} \sum_{\{g_j\}_{j\in K_0\setminus\Lambda}} \prod_{\{j_0,\,\dots,\,j_{D+1}\}\in K_{D+1}} \omega(g_{j_0},\,\dots,\,g_{j_{D+1}})^{\epsilon_{\{j_0,\,\dots,\,j_{D+1}\}}} \\
&= \left\langle\{g_{\boldsymbol{x}}\}_{\boldsymbol{x}\in\Lambda}\middle|\Psi\right\rangle_\omega
\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし 3 つ目の等号でコサイクルの左不変性を使った．

次に，$|\Psi\rangle_\omega$ が SRE 状態であることを示す．簡単のため $\Sigma = S^D$, $\mathcal{N}^{(D+1)} = D^{D+1}$ の場合を考える[*11]．このとき $K_1\setminus\Lambda = \{*\}$ となるような三角形分割をとることができて，

$$\begin{aligned}
|\Psi\rangle_\omega &= \left(\sum_{\{g_{\boldsymbol{x}}\}_{\boldsymbol{x}\in\Lambda}} \prod_{\{j_0,\,\dots,\,j_D,\,*\}\in K_{D+1}} \omega(g_{j_0},\,\dots,\,g_{j_D},\,g_*) \left|\{g_{\boldsymbol{x}}\}_{\boldsymbol{x}\in\Lambda}\right\rangle\!\left\langle\{g_{\boldsymbol{x}}\}_{\boldsymbol{x}\in\Lambda}\right|\right) \bigotimes_{\boldsymbol{x}\in\Lambda}\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g_{\boldsymbol{x}}\in G}|g_{\boldsymbol{x}}\rangle\right) \\
&= \left(\prod_{\{j_0,\,\dots,\,j_D,\,*\}\in K_{D+1}} \sum_{\{g_{j_n}\}_{n=0}^D\in G^{D+1}} \omega(g_{j_0},\,\dots,\,g_{j_D},\,g_*) \left|\{g_{j_n}\}_{n=0}^D\right\rangle\!\left\langle\{g_{j_n}\}_{n=0}^D\right|\right) \bigotimes_{\boldsymbol{x}\in\Lambda}\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g_{\boldsymbol{x}}\in G}|g_{\boldsymbol{x}}\rangle\right)
\end{aligned}$$

と書けるので SRE 状態である．

最後に，$|\Psi\rangle$ が属する SPT 相が $\omega\in H^{D+1}_{\mathrm{Grp}}(G,\,\mathrm{U}(1))$ の代表元の取り方によらないことを示す．実際，D-コチェイン $\eta\in C^D_{\mathrm{Grp}}(G,\,\mathrm{U}(1))$ に対して $\omega\longmapsto\omega\cdot\delta\eta$ と取り替えると

$$|\Psi\rangle_{\omega\cdot\delta\eta} = \left(\prod_{\{j_0,\,\dots,\,j_D,\,*\}\in K_{D+1}} \sum_{\{g_{j_0},\,\dots,\,g_{j_D}\}\in G^{D+1}} \eta(g_{j_0},\,\dots,\,g_{j_D}) \left|\{g_{j_n}\}_{n=0}^D\right\rangle\!\left\langle\{g_{j_n}\}_{n=0}^D\right|\right)|\Psi\rangle_\omega$$

となるが，この変換は明らかに $\rho(g)$ と可換なので G-同変な局所ユニタリ発展である． ■

[*11] 一般の場合でも，C^∞ 多様体は CW 複体の構造を持つので問題ないと思われる．

Dijkgraaf-Witten 理論との関係は，大域的 G-対称性をゲージ化することにより明らかになる [?, APPENDIX E]．ゲージ化によって，$\mathcal{N}^{(D+1)}$ の三角形分割の 1-単体（辺）$e \in K_1$ 上に G の元 h_e が指定される．ただし，G が離散群なので h_e は平坦接続でなくてはならない．よってもし 3 つの 1-単体 e_1, e_2, e_3 がある 2-単体 d について $\partial_i^2(d) = e_i$ を充たすならば

$$h_{e_1} h_{e_2} h_{e_3} = 1_G$$

が成り立たねばならない．また，「物質場」g_x とゲージ場 h_e のゲージ変換は，$\{k_x\}_{x\in K_0} \in G^{|K_0|}$ を用いてそれぞれ

$$\begin{aligned} g_x &\longmapsto k_x g_x, \\ h_e &\longmapsto k_{\partial_1^1(e)}^{-1} h_e k_{\partial_0^1(e)} \end{aligned}$$

のようになる．故に，命題 4.2 の構成で用いた「物質場」の分配関数

$$Z(\{g_i\}_{i\in K_0}; \mathcal{N}^{(D+1)}) \coloneqq \prod_{\{j_0, \dots, j_{D+1}\}\in K_{D+1}} \omega(g_{j_0}, \dots, g_{j_{D+1}})^{\epsilon\{j_0, \dots, j_{D+1}\}}$$

は G-対称性のゲージ化によって

$$\begin{aligned} &Z_{\text{gauged}}(\{g_i\}_{i\in K_0}, \{h_e\}_{e\in K_1}; \mathcal{N}^{(D+1)}) \\ &= \frac{1}{|G|^{|\Lambda|}} \prod_{\{j_0, \dots, j_{D+1}\}\in K_{D+1}} \omega(g_{j_0}, h_{j_0 j_1} g_{j_1}, h_{j_0 j_1} h_{j_1 j_2} g_{j_2} \dots, h_{j_0 j_1} \cdots h_{j_D j_{D+1}} g_{j_{D+1}})^{\epsilon\{j_0, \dots, j_{D+1}\}} \\ &= \frac{1}{|G|^{|\Lambda|}} \prod_{\{j_0, \dots, j_{D+1}\}\in K_{D+1}} \alpha(g_{j_0}^{-1} h_{j_0 j_1} g_{j_1}, g_{j_1}^{-1} h_{j_1 j_2} g_{j_2}, \dots, g_{j_D}^{-1} h_{j_D j_{D+1}} g_{j_{D+1}})^{\epsilon\{j_0, \dots, j_{D+1}\}} \end{aligned}$$

になる．ゲージ場を外場と見做すことにより Dijkgraaf-Witten 理論の作用が得られる：

$$\begin{aligned} &\sum_{\{g_j\}_{j\in K_1}} Z_{\text{gauged}}(\{g_i\}_{i\in K_0}, \{h_e\}_{e\in K_1}; \mathcal{N}^{(D+1)}) \\ &= \prod_{\{j_0, \dots, j_{D+1}\}\in K_{D+1}} \alpha(h_{j_0 j_1}, h_{j_1 j_2}, \dots, h_{j_D j_{D+1}})^{\epsilon\{j_0, \dots, j_{D+1}\}} \\ &= e^{2\pi \mathrm{i} \langle \gamma^* \alpha, [] \rangle} \end{aligned}$$

以上の議論により，D 次元の bosonic な[*12]SPT 相の分類は $H_{\mathrm{Grp}}^{D+1}(G, \mathrm{U}(1))$ によって成される，などと言う [?].

4.3 Bosonic SPT 相の分類：Ω-スペクトラムによる方法

上述の群コホモロジーによる bosonic な SPT 相の分類は低次元においては有効だが，高次元だと不十分になることが知られている [?]．現代的には一般コホモロジー理論によって分類するのが良いとされている [?]. その際には，そもそも局所ユニタリ発展は使わずに SPT 相を定義する．

[*12] より正確には G が離散群でかつ on site symmetry のとき