第 1 章

層状化空間・因子化ホモロジー

[?]，[?] のレビュー

1.1　conically smooth な層状化空間

1.1.1　層状化空間

定義 1.1: 半順序集合の位相

$(P, \leq)$ を半順序集合とする．P 上の位相 $\mathscr{O}_{\leq} \subset 2^P$ を以下で定義する：

$$U \in \mathscr{O}_{\leq} \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \forall x \in U, \forall y \in P, \left[x \leq y \quad \Longrightarrow \quad y \in U \right]$$

実際，空集合の定義から $\emptyset \in \mathscr{O}_{\leq}$ であり，$\forall U_1, U_2 \in \mathcal{O}_{\leq}$ に対して $x \in U_1 \cap U_2$ であることは

$$\forall y \in P,\ x \leq y \quad \Longrightarrow \quad y \in U_1 \text{ かつ } y \in U_2$$

と同値なので $U_1 \cap U_2 \in \mathscr{O}_{\leq}$ であり，さらに勝手な開集合族 $\{U_\lambda \in \mathscr{O}_{\leq}\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ は

$$\exists \alpha \in \Lambda,\ \forall y \in P,\ x \leq y \quad \Longrightarrow \quad y \in U_\alpha \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

と同値であるから $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathscr{O}_{\leq}$ であり，$\mathscr{O}_{\leq}$ は集合 P の位相である．

【例 1.1.1】$[n]$ の位相

半順序集合 $[2] \coloneqq \{0 \leq 1 \leq 2\}$ を考える．このとき，位相 $\mathscr{O}_{\leq}$ とは

$$\mathscr{O}_{\leq} = \left\{ \emptyset, \{2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\} \right\}$$

のことである．同様に，半順序集合 $[n] \coloneqq \{0 \leq 1 \leq \cdots \leq n\}$ に対して

$$\mathscr{O}_{\leq} = \left\{ \emptyset, \{n\}, \{n-1, n\}, \dots, \{0, \dots, n\} \right\}$$

が成り立つ．

定義 1.2: 層状化空間・層状化写像

$(P, \leq)$ を半順序集合とし，定義 1.1 の位相を入れて位相空間にする．
このとき，位相空間 X が ***P*-層状化**されている (P-stratified) とは，連続写像 $s\colon X \longrightarrow P$ が存在することを言う．組 $(X,\, s\colon X \longrightarrow P)$ のことを ***P*-層状化空間** (P-stratified space) と呼ぶ．また，$i \in P$ の逆像 $\boldsymbol{X_i} \coloneqq s^{-1}(\{i\}) \subset X$ のことを ***i*-層** (i-strata) と呼ぶ．

層状化空間 $(X,\, s\colon X \longrightarrow P)$, $(X',\, s'\colon X' \longrightarrow P')$ の間の**層状化写像** (stratified map) とは，連続写像の組み $(f\colon X \longrightarrow X',\ \tilde{f}\colon P \longrightarrow P')$ であって以下の図式を可換にするもののこと：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & X' \arrow[d, "s'"] \\ P \arrow[r, "\tilde{f}"'] & P' \end{tikzcd}$$

【例 1.1.2】$[n]$**-層状化空間**

半順序集合 $[n] \coloneqq \{0 \leq \cdots \leq n\}$ に対して【例 1.1.1】の位相を入れる．まず，

$$X_0 = s^{-1}\bigl([n] \setminus \{1, \ldots, n\}\bigr)$$

でかつ $\{1, \ldots, n\}$ は $[n]$ の開集合であるから，s の連続性から X の部分空間 $X_0 \subset X$ は閉集合だとわかる．さらに

$$\begin{aligned} X_0 \cup X_1 &= s^{-1}\bigl([n] \setminus \{2, \ldots, n\}\bigr), \\ X_0 \cup X_1 \cup X_2 &= s^{-1}\bigl([n] \setminus \{3, \ldots, n\}\bigr), \\ &\vdots \\ X_0 \cup \cdots \cup X_n &= X \end{aligned}$$

が成り立つことから，s の連続性より X の部分空間 $X_0 \cup \cdots \cup X_{m \leq n}$ は閉集合だと分かる．

【例 1.1.3】CW 複体

CW 複体 X を与える．$X_{\leq k}$ を X の k-骨格とするとき，$X_k \setminus X_{k-1}$ を $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に写す写像 $s\colon X \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は X の層状化を与える．

直観的には，層状化空間とは defect 付き C^∞ 多様体の一般化である．特に X を C^∞ 多様体とするとき，$[n]$-層状化空間 $(X,\, s\colon X \longrightarrow [n])$ の i-層 X_i とは，多様体 X 上の余次元 $d-i$ の defect を全て集めてきたものだと見做せる．

定義 1.3: 層状化開埋め込み

層状化写像 $(f, \tilde{f}) \colon (X, s\colon X \longrightarrow P) \longrightarrow (X', s'\colon X' \longrightarrow P')$ が**層状化開埋め込み** (stratified open embedding) であるとは，以下の 2 条件を充たすことを言う：

(1) 連続写像 $f\colon X \longrightarrow X'$ は位相的開埋め込みである[a]

(2) $\forall p \in P$ に対して，f の p-strata への制限[b]

$$f|_{X_p} \colon X_p \longrightarrow X'_{\tilde{f}(p)}$$

は位相的開埋め込みである．

[a] i.e. $f\colon X \longrightarrow f(X)$ が同相写像かつ $f(X) \subset Y$ が開集合

[b] 層状化写像の定義に登場する図式の可換性より，$\forall x \in X_p$ に対して $s'\bigl(f(x)\bigr) = s' \circ f(x) = \tilde{f} \circ s(x) = \tilde{f}(p)$，i.e. $f(x) \in s'^{-1}\bigl(\{\tilde{f}(p)\}\bigr) = X'_{\tilde{f}(p)}$ が分かる．

! 以下では混乱が生じにくい場合，層状化空間 $(X, s\colon X \longrightarrow P)$ のことを $(X \xrightarrow{s} P)$ や $(X \to P)$ と略記する．さらに，層状化写像 $(f, \tilde{f}) \colon (X, s\colon X \longrightarrow P) \longrightarrow (X', s'\colon X' \longrightarrow P')$ のことを $f\colon (X \to P) \longrightarrow (X' \to P')$ と略記し，連続写像 $\tilde{f}\colon P \longrightarrow P'$ のことも f と書く場合がある．

圏 **StTop** を，

- 第 2 可算な Hausdorff 空間であるような層状化空間を対象とする
- 層状化開埋め込みを射とする

ことで定義する．

1.1.2 C^0 級層状化空間

定義 1.4: コーン

層状化空間 $(X \xrightarrow{s} P)$ を与える．X の**コーン** (cone) とは，以下のようにして構成される層状化空間 $\bigl(\mathsf{C}(X), \mathsf{C}(s) : \mathsf{C}(X) \longrightarrow \mathsf{C}(P)\bigr)$ のこと：

- 位相空間 $\mathsf{C}(X)$ を，押し出し位相空間

$$\mathsf{C}(X) \coloneqq \{\mathrm{pt}\} \amalg_{\{0\}\times X} (\mathbb{R}_{\geq 0} \times X)$$

と定義する：

$$\begin{tikzcd} \{0\} \times X \arrow[r, hook, "\{0\}\times \mathrm{id}_X"] \arrow[d] & \mathbb{R}_{\geq 0} \times X \arrow[d] \\ \{\mathrm{pt}\} \arrow[r, hook] & \{\mathrm{pt}\} \amalg_{\{0\}\times X} (\mathbb{R}_{\geq 0} \times X) \end{tikzcd}$$

- 半順序集合 $\mathsf{C}(P)$ を，P に最小の要素 $-\infty$ を付け足すことで定義する．これは半順序集合の

圏における押し出し

$$\mathsf{C}(P) \coloneqq \{-\infty\} \amalg_{\{0\}\times P} \big([1] \times P\big)$$

である．

- 連続写像

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{\geq 0} \times X &\longrightarrow [1] \times P, \\ (t,\, x) &\longmapsto \begin{cases} \big(0,\, s(x)\big), & t = 0, \\ \big(1,\, s(x)\big), & t > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

が誘導する連続写像 $\mathsf{C}(X) \longrightarrow \mathsf{C}(P)$ を $\mathsf{C}(s)$ と書く．

位相空間の圏における押し出しの公式から，位相空間 $\mathsf{C}(X)$ とは

$$\begin{aligned} i_1 &\colon \{0\} \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \times X,\; x \longmapsto (0,\, x), \\ i_2 &\colon \{0\} \times X \longrightarrow \{\mathrm{pt}\},\; x \longmapsto \mathrm{pt} \end{aligned}$$

とおいたときのコイコライザ

$$\{0\} \times X \overset{i_1}{\underset{i_2}{\rightrightarrows}} \{\mathrm{pt}\} \sqcup (\mathbb{R}_{\geq 0} \times X) \xrightarrow{\;q\;} \mathsf{C}(X)$$

である．i.e. 商位相空間

$$\frac{\mathbb{R}_{\geq 0} \times X}{i_1(x) \sim i_2(x)} = \frac{\mathbb{R}_{\geq 0} \times X}{\{0\} \times X}$$

のこと．従って $\mathsf{C}(s) \colon \mathsf{C}(X) \longrightarrow \mathsf{C}(P)$ とは，連続写像[*1]

$$\frac{\mathbb{R}_{\geq 0} \times X}{\{0\} \times X} \longrightarrow \mathsf{C}(P),\; [(t,\, x)] \longmapsto \begin{cases} -\infty, & t = 0 \\ s(x), & t > 0 \end{cases}$$

のことである．また，コーンポイントのみからなる 1 点集合 $\{\mathrm{pt}\} \subset X$ は $q^{-1}\big(\{\mathrm{pt}\}\big) = \{0\} \times X$ を充たすが，$\{0\} \times X$ は

! 以下では，混乱の恐れがない限り層状化空間 $(X \xrightarrow{s} P)$ のコーンを $\mathsf{C}\Big(X \xrightarrow{s} P\Big)$ と略記する．

[*1] $\mathsf{C}(P)$ の位相 $\mathscr{O}_{\mathsf{C}(P)}$ は，P の位相 $\mathscr{O}_P$ に 1 つの開集合 $\{-\infty\} \cup P$ を加えたものである．$\forall U \in \mathscr{O}_P$ に対して $\mathsf{C}(s)^{-1}(U) = \mathbb{R}_{>0} \times s^{-1}(U) \in \mathscr{O}_{\mathsf{C}(X)}$ で，かつ $\mathsf{C}(s)^{-1}(\{-\infty\} \cup P) = \mathsf{C}(X) \in \mathscr{O}_{\mathsf{C}(X)}$ なので $\mathsf{C}(s)$ は連続である．

定義 1.5: C^0 級層状化空間

以下を充たす $\mathbf{StTop}$ の最小の充満部分圏を $\mathbf{Snglr}^{C^0}$ と書き，圏 $\mathbf{Snglr}^{C^0}$ の対象を $\boldsymbol{C^0}$ **級層状化空間** (C^0 stratified space) と呼ぶ：

(Snglr-1) $(\emptyset \to \emptyset) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$

(Snglr-2)

$(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ かつ $X,\ P$ が位相空間としてコンパクト

$$\Longrightarrow \quad \mathsf{C}\,(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$$

(Snglr-3)

$$(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}) \quad \Longrightarrow \quad (X \times \mathbb{R} \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$$ [a]

(Snglr-4)

$(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ かつ $\mathrm{Hom}_{\mathbf{StTop}}\big((U \to P_U),\ (X \to P)\big) \neq \emptyset$

$$\Longrightarrow \quad (U \to P_U) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$$

(Snglr-5)

$(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{StTop})$ が開被覆 $\{(U_\lambda \to P_\lambda) \longrightarrow (X \to P)\}_{\lambda \in \Lambda}$ [b] を持ち，かつ $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して $(U_\lambda \to P_\lambda) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$

$$\Longrightarrow \quad (X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$$

[a] $X \times \mathbb{R}$ の層状化は，連続写像 $X \times \mathbb{R} \longrightarrow X,\ (x,\ t) \longmapsto x$ を前もって合成することにより定める．

[b] i.e. $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda},\ \{P_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が，それぞれ位相空間 $X,\ P$ の開被覆を成す．

【例 1.1.4】位相多様体は C^0 級層状化空間

(Snglr-1) より，$* \coloneqq \mathsf{C}\,(\emptyset \to \emptyset) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ である．**(Snglr-3)** より，$\forall n \geq 0$ に対して $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n \to [0]) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ であることが帰納的に分かる．$\mathbb{R}^n$ の任意の開集合 $U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ に対して，

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathbb{R}^n \arrow[d] \\ {[0]} \arrow[r, "="'] & {[0]} \end{tikzcd}$$

は層状化埋め込みであり，従って **(Snglr-4)** より $U \coloneqq (U \to [0]) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ が分かる．以上の考察と **(Snglr-5)** を併せて，任意の位相多様体 M は[a]圏 $\mathbf{Snglr}^{C^0}$ の対象である．

[a] より正確には，M を層状化空間 $(M \to [0])$ と同一視している．

1.1.3 C^0 basic

定義 1.6: C^0 basic

$\boldsymbol{C^0}$ 級層状化空間 $(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ が $\boldsymbol{C^0}$**-basic** であるとは，ある $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ およびコンパクトな $\boldsymbol{C^0}$ 級層状化空間 $(Z \to Q) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ が存在して $(X \to P) = \bigl(\mathbb{R}^n \to [0]\bigr) \times \mathsf{C}\,(Z \to Q)$ が成り立つことを言う．

いま，C^0 basic な $(U \to P_U) = (\mathbb{R}^n \to [0]) \times \mathsf{C}\,(Z \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ を 1 つとる．コーンの定義から，U の点を $(v,\, [t,\, z]) \in \mathbb{R}^n \times \frac{\mathbb{R}_{\geq 0} \times Z}{\{0\} \times Z}$ と表示することができる．この表示の下で自己同相

$$
\begin{aligned}
\gamma \colon \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^n \times \mathsf{C}\,(Z) &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^n \times \mathsf{C}\,(Z)\,, \\
\bigl(t,\, (v,\, p),\, [s,\, z]\bigr) &\longmapsto \bigl(t,\, (tv + p,\, p),\, [ts,\, z]\bigr)
\end{aligned}
$$

を考える[*2]．

さらに，もう 1 つの C^0 basic な $(U' \to P_{U'}) = (\mathbb{R}^{n'} \to [0]) \times \mathsf{C}\,(Z' \to P') \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ および $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}}\bigl((U \to P_U),\, (U' \to P_{U'})\bigr)$ をとる．ただし，f はコーンポイントをコーンポイントへ写す，i.e. $\forall u \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(u,\, \mathrm{pt}) \in \mathbb{R}^{n'} \times \{\mathrm{pt}\}$ が成り立つことを仮定する．$f|_{\mathbb{R}^n} \colon \mathbb{R}^n \times \{\mathrm{pt}\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n'} \times \{\mathrm{pt}\}$ を f のコーンポイントへの制限として，

$$
\begin{aligned}
f_\Delta \colon \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^n \times \mathsf{C}\,(Z) &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^{n'} \times \mathsf{C}\,(Z')\,, \\
\bigl(t,\, v,\, p,\, [s,\, z]\bigr) &\longmapsto \bigl(t,\, f|_{\mathbb{R}^n}(v),\, f(p,\, [ts,\, z])\bigr)
\end{aligned}
$$

とおこう．

【例 1.1.5】

$Z = Z' = \emptyset$ のとき，f とは単に連続関数 $f \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n'}$ のことである．このとき，

$$
\begin{aligned}
(\gamma^{-1} \circ f_\Delta \circ \gamma)(t,\, v,\, p) &= \gamma^{-1} \circ f_\Delta(t,\, tv + p,\, p) \\
&= \gamma^{-1}\bigl(t,\, f(tv + p),\, f(p)\bigr) \\
&= \left(t,\, \frac{f(tv + p) - f(p)}{t},\, f(p)\right)
\end{aligned}
$$

と計算できるため，f が C^1 級であることと $\forall (v,\, p) \in T\mathbb{R}^n$ に対して $t \to +0$ の極限，i.e. v に沿った片側方向微分が存在することは同値である．

【例 1.1.5】をもとに，C^0 basic な C^0 級層状化空間の間の層状化開埋め込みの **conically smoothness** を定義する．C^∞ 多様体の C^∞ 構造の定義においては，チャート $(U,\, \varphi \colon \mathbb{R}^n \to U),\, (V,\, \psi \colon \mathbb{R}^n \to V)$ の間の変換関数 $\psi^{-1} \circ \varphi \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が C^∞ 級であることを要請した．次の小節で **conically smooth structure** の定義を行うが，その際にチャートに対応するものは **basic** $U = \mathbb{R}^n \times \mathsf{C}\,(Z)$ から着目している C^0-級層状化空間 X への層状化開埋め込み $\varphi \colon U \hookrightarrow X$ であり，概ね[*3]2 つのチャート $\varphi \colon U \hookrightarrow X,\, \psi \colon V \hookrightarrow X$ の間の変換関数 $\psi^{-1} \circ \varphi \colon U \longrightarrow V$ に対して conically smooth (along $\mathbb{R}^n$) であることを要請する．

---

*2 接束 $T\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^{2n}$ と微分同相である．[?, p.23] の記法に合わせて底空間 $\mathbb{R}^n$ の点を p，p 上のファイバーの元を v としたとき $(v,\, p) \in T\mathbb{R}^n$ と書いた．命題??の記法と順番が逆なので注意．

*3 コーンポイントをコーンポイントに写さない変換関数も存在しうるので，これだけではいけない．

定義 1.7: $\mathbb{R}^n$ に沿って conically smooth

- C^0 basic な $(U \to P_U) = (\mathbb{R}^n \to [0]) \times \mathsf{C}(Z \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$
- C^0 basic な $(U' \to P_{U'}) = (\mathbb{R}^{n'} \to [0]) \times \mathsf{C}(Z' \to P') \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$
- $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}}\big((U \to P_U),\, (U' \to P_{U'})\big)$ であって，コーンポイントを保存するもの

を与える．このとき，f が $\mathbb{R}^n$ **に沿って** C^1 **級** (C^1 along $\mathbb{R}^n$) であるとは，以下の図式を可換にする連続写像

$$\tilde{D}f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times T\mathbb{R}^n \times \mathsf{C}(Z) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \times T\mathbb{R}^{n'} \times \mathsf{C}(Z')$$

が存在することを言う：

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}_{\geq 0} \times T\mathbb{R}^n \times \mathsf{C}(Z) \arrow[r, dashed, "\tilde{D}f"] & \mathbb{R}_{\geq 0} \times T\mathbb{R}^{n'} \times \mathsf{C}(Z') \\
\mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^n \times \mathsf{C}(Z) \arrow[u] \arrow[r, "\gamma^{-1} \circ f_\Delta \circ \gamma"'] & \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^{n'} \times \mathsf{C}(Z') \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

このような拡張が存在するとき，第一変数を $t = 0$ に制限して得られる連続写像を

$$\boldsymbol{Df} : T\mathbb{R}^n \times \mathsf{C}(Z) \longrightarrow T\mathbb{R}^{n'} \times \mathsf{C}(Z')$$

と書く．f が $\mathbb{R}^n$ **に沿って** C^r **級** であるとは，Df が $\mathbb{R}^n$ に沿って C^{r-1} 級であることを言う．f が $\mathbb{R}^n$ **に沿って conically smooth** であるとは，$\forall r \geq 1$ について C^r 級であることを言う．

1.1.4 conically smooth な層状化空間

次に行うべきは，与えられた C^0 **級層状化空間** $(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ の上の **conically smooth structure** i.e. 変換関数が conically smooth であるような**極大アトラス**を定義することである．この手続きは，次で定義する次元と深さに関する帰納法によって構成される．

定義 1.8: 被覆次元

X を位相空間とする．以下の条件を充たす最小の $d \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$ のことを（存在すれば）X の**被覆次元** (covering dimension) と呼ぶ：

(covering)

X の任意の開被覆 $\mathscr{U}$ に対して，十分細かい細分 $\mathscr{V}_{\mathscr{U}} \prec \mathscr{U}$ をとると，任意の互いに異なる $\forall m > d+1$ 個の開集合 $V_1, \dots, V_m \in \mathscr{V}_{\mathscr{U}}$ の共通部分が空になるようにできる．特に，$\emptyset$ の被覆次元は -1 と定義する．

点 $x \in X$ における**被覆次元**を以下で定義する：

$$\dim_x X \coloneqq \inf \left\{ \dim U \geq -1 \;\middle|\; x \in U \underset{\text{open}}{\subset} X \right\}$$

定義 1.9: 次元と深さ

空でない C^0 級層状化空間 $(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ を与える．

- $(X \to P)$ の点 $x \in X$ における**局所的次元** (local dimension) とは，点 x における X の被覆次元 $\boldsymbol{\dim_x(X)}$ のことを言う．
- $(X \to P)$ の**次元** (dimension) とは

$$\boldsymbol{\dim(X \to P)} \coloneqq \sup_{x \in X} \dim_x(X)$$

のこと．
- $(X \xrightarrow{s} P)$ の点 $x \in X$ における**局所的深さ** (local depth) とは，

$$\boldsymbol{\mathrm{depth}_x(X \to P)} \coloneqq \dim_x(X) - \dim_x(X_{s(x)})$$

のこと．
- $(X \to P)$ の**深さ** (depth) とは，

$$\boldsymbol{\mathrm{depth}(X \to P)} \coloneqq \sup_{x \in X} \mathrm{depth}_x(X \to P)$$

のこと．ただし，$\mathrm{depth}(\emptyset) \coloneqq -1$ と定義する．

【例 1.1.6】コーンの深さ

n 次元位相多様体 Z について，定義から $\forall x \in Z$ に対して $\dim_x(Z) = n$ が成り立つ．Z を**【例 1.1.4】**により C^0 級層状化空間 $(Z \xrightarrow{s} [0]) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ と見做すと，これのコーン $\mathsf{C}\left(Z \xrightarrow{s} [0]\right)$ について

$$\mathrm{depth}_x\left(\mathsf{C}\left(Z \xrightarrow{s} [0]\right)\right) = \begin{cases} n+1, & x = \mathrm{pt}, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

であることがわかる．実際 $\mathsf{C}(Z)_{\mathsf{C}(s)(\mathrm{pt})} = \{\mathrm{pt}\}$ であるが，1 点からなる位相空間の被覆次元は 0 次元なので $\dim_{\mathrm{pt}}(\mathsf{C}(Z)_{\mathsf{C}(s)(\mathrm{pt})}) = 0$ である．一方，コーンポイント以外の点 $x \in \mathsf{C}(Z)$ に対して $\mathsf{C}(s)(x)$-層は $\mathsf{C}(Z)_{\mathsf{C}(s)(x)} = \mathbb{R}_{>0} \times Z \approx \mathbb{R} \times Z$ であるから，$\dim_x(\mathsf{C}(Z)_{\mathsf{C}(s)(x)}) = n+1$ と計算できる[a]．

また，$\forall (X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ に対して

$$\dim\big((\mathbb{R}^m \to [0]) \times (X \to P)\big) = m + \dim\big(X \to P\big),$$
$$\mathrm{depth}\big((\mathbb{R}^m \to [0]) \times (X \to P)\big) = \mathrm{depth}\big(X \to P\big)$$

が成り立つ．従って，C^0 basic な $(U \to P_U) = (\mathbb{R}^n \to [0]) \times \mathsf{C}(Z \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ に対して

$$\mathrm{depth}(U \to P_U) = \mathrm{depth}(Z \to P) + 1$$

が成り立つ．

[a] さらに，$\forall x \in \mathsf{C}(Z)$ に対して $\dim_x \mathsf{C}(Z) = n+1$ である．

次元と深さに関する帰納法を実行する前に，構成したい圏を表す記号の整理をしておこう：

- conically smooth チャートの素材となる，**basic** が成す圏

$$\mathbf{Bsc}$$

これは，C^∞ 多様体の圏 **Mfld** において $\mathbb{R}^n$ $(\forall n \geq -1)$ 全体が成す充満部分圏に相当するものである．

- 与えられた C^0 級層状化空間 $(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ に対して，その上に入る**極大アトラス**[*4]全体が成す集合を返す前層

$$\mathsf{Sm}\colon (\mathbf{Snglr}^{C^0})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

この対応が前層であることの直観は，層状化開埋め込み $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}}\big((X \to P),\, (Y \to Q)\big)$ が与えられると，$(X \to P)$ 上の極大アトラス $\mathsf{Sm}(X \to P)$ が $(Y \to Q)$ 上の極大アトラス $\mathsf{Sm}(Y \to Q)$ を「制限」する写像 $\mathsf{Sm}(f)\colon \mathsf{Sm}(Y \to Q) \longrightarrow \mathsf{Sm}(X \to P)$ によって得られるということである．

- 深さが k 以下，かつ次元が n 以下であるような C^0 級層状化空間全体が成す $\mathbf{Snglr}^{C^0}$ の充満部分圏を

$$\mathbf{Snglr}^{C^0}{}_{\underbrace{\leq k}_{\text{depth}},\, \underbrace{\leq n}_{\text{dimension}}}$$

と書く．同様に

$$\mathbf{Bsc}_{\leq k,\, \leq n}, \qquad \mathsf{Sm}_{\leq k,\, \leq n}\colon (\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k,\, \leq \infty})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

と書く．

- **conically smooth な層状化空間**の圏

$$\mathbf{Snglr}$$

これを作ることが本小節の最終目標である．

帰納法により，$\forall k \geq -1$ に対して $\mathbf{Bsc}_{\leq k,\, \leq \infty}$ および $\mathsf{Sm}_{\leq k,\, \leq \infty}\colon (\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k,\, \leq \infty})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ が構成される．

定義 1.10: 帰納法の出発点

(Snglr-1) より $(\emptyset \to \emptyset) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq -1,\, \leq \infty})$ である．

(1) $\mathbf{Bsc}_{\leq -1,\, \leq \infty} \coloneqq \emptyset$
(2) $\mathsf{Sm}_{\leq -1,\, \leq \infty}(\emptyset) \coloneqq \{*\}$

と定義する．

[*4] 存在するか分からないし，存在したとして一意であるとは限らない．実際，例えば C^∞ 多様体の段階においてさえ $\mathbb{R}^4$ の上の極大アトラス（i.e. C^∞ 構造）は非可算無限個存在する [?].

仮定 1.1: 帰納法の仮定

与えられた $k \geq -1$ に対して以下の構成が完了していると仮定する：

(1) 圏 $\mathbf{Bsc}_{\leq k,\, \leq\infty}$

(2) 前層 $\mathsf{Sm}_{\leq k,\, \leq\infty} \colon (\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k,\, \leq\infty})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$

(3) 関手

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times (\text{-}) \colon \mathbf{Bsc}_{\leq k,\, \leq\infty} &\longrightarrow \mathbf{Bsc}_{\leq k,\, \leq\infty}, \\ U &\longmapsto \mathbb{R} \times U, \\ \bigl(U \xrightarrow{f} V\bigr) &\longmapsto \bigl(\mathbb{R} \times U \xrightarrow{\mathrm{id} \times f} \mathbb{R} \times V\bigr) \end{aligned}$$

およびそれが誘導する自然変換[a]

$$\begin{tikzcd} (\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k,\, \leq\infty})^{\mathrm{op}} \arrow[r, bend left=50, "\mathsf{Sm}_{\leq k,\, \leq\infty}(\text{-})"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "\mathsf{Sm}_{\leq k,\, \leq\infty}(\mathbb{R}\times\text{-})"'{name=D}] & \mathbf{Sets} \arrow[from=U, to=D, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

[a] X の極大アトラス $\{U_\alpha,\, \varphi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ に対して，$\{\mathbb{R} \times U_\alpha,\, \mathrm{id} \times \varphi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ を対応づける．

定義 1.11: 圏 $\mathbf{Bsc}_{\leq k+1,\, \leq\infty}$

帰納法の仮定 1.1 がある $k \geq -1$ において成立しているとする．また，C^0 basic を $U^n_Z \coloneqq (\mathbb{R}^n \to [0]) \times \mathsf{C}\,(Z \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ と書く．このとき，圏 $\mathbf{Bsc}_{\leq k+1,\, \leq\infty}$ を以下で定義する：

(対象)

C^0 basic [a] $U^n_Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k+1,\, \leq\infty})$ および，極大アトラス $\mathcal{A}_Z \in \mathsf{Sm}_{\leq k,\, \leq\infty}(Z \to P)$ の組み

$$(U^n_Z,\, \mathcal{A}_Z)$$

を対象とする．

(射)

任意の 2 つの対象 $(U^n_Z,\, \mathcal{A}_Z)$，$(U^m_W,\, \mathcal{A}_W) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Bsc}_{\leq k+1,\, \leq\infty})$ に対して，以下の条件を満たす層状化開埋め込み $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k+1,\, \leq\infty}}\bigl(U^n_Z,\, U^m_W\bigr)$ を対象とする：

f がコーンポイントを保存しない場合

ある層状化開埋め込み $f_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k+1,\, \leq\infty}}\bigl(U^n_Z,\, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \times W\bigr)$ が存在して

$$f \colon U^n_Z \xrightarrow{f_0} \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}_{>0} \times W) \hookrightarrow U^m_W = \mathbb{R}^m \times \mathsf{C}\,(W)$$

と書けて，かつ $(U^n_Z,\, f_0) \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \times W} \in \mathsf{Sm}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \times W)$

f がコーンポイントを保存する場合

f は $\mathbb{R}^n$ に沿って conically smooth であって，かつ $Df \colon \mathbb{R}^n \times U^n_Z \longrightarrow \mathbb{R}^m \times U^m_W$ が単射

であり，かつ

$$\mathcal{A}_{f^{-1}(U^m_W \setminus \mathbb{R}^m)} = \mathsf{Sm}_{\le k,\, \le\infty}\bigl(f|_{f^{-1}(U^m_W\setminus\mathbb{R}^m)}\bigr)\bigl(\mathcal{A}_{U^m_W\setminus\mathbb{R}^m}\bigr)$$

を充たす[b]．ただし，$U^m_W \setminus \mathbb{R}^m := U^m_W \setminus (\mathbb{R}^m \times \{\mathrm{pt}\}) = \mathbb{R}^{m+1} \times W$ と略記した．

---

[a] 【例 1.1.6】より，$(Z \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\le k,\, \le\infty})$ であることが分かる．
[b] ここで帰納法の仮定 1.1-(3) を暗に使っている．

定義 1.12: 前層 $\mathsf{Sm}_{\le k+1,\, \le\infty}$

帰納法の仮定 1.1 がある $k \ge -1$ において成立しているとする．さらに定義 1.11 が完成しているとする．

- C^0 級層状化空間 $\forall (X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\le k+1,\, \le\infty})$ に対して，$X \to P$ の**アトラス** (atlas) を族

$$\mathcal{A} := \bigl\{\bigl(U_\alpha \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Bsc}_{\le k+1,\, \le\infty}),\, \varphi_\alpha \colon U_\alpha \hookrightarrow (X \to P)\bigr)\bigr\}_{\alpha\in\Lambda} \in \mathsf{Sm}_{\le k+1,\, \le\infty}(X \to P)$$

  であって以下の条件を充たすものとして定義する：

  (Atlas-1)

  $\mathcal{A}$ は $(X \to P)$ の開被覆である．

  (Atlas-2)

  $\forall \alpha, \beta \in \Lambda$ および $\forall x \in \varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta)$ に対して，圏 $\mathbf{Bsc}_{\le k+1,\, \le\infty}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd} \exists W \arrow[r, hook, "f_\beta"] \arrow[d, hook, "f_\alpha"'] & U_\beta \arrow[d, hook, "\varphi_\beta"] \\ U_\alpha \arrow[r, hook, "\varphi_\alpha"'] & X \end{tikzcd}$$

  が存在して $x \in \varphi_\alpha \circ f_\alpha(W) = \varphi_\beta \circ f_\beta(W)$ を充たす

  アトラス $\mathcal{A}$ の元 $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ のことを**チャート** (chart) と呼ぶ．

- C^0 級層状化空間 $\forall (X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\le k+1,\, \le\infty})$ の 2 つのアトラス $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ が**同値**であるとは，$\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ が $(X \to P)$ のアトラスであることを言う．これは $(X \to P)$ のアトラス全体の集合の上に同値関係を定める[a]．$(X \to P)$ の**極大アトラス** (maximal atlas) とは，この同値関係によるアトラス $\mathcal{A}$ の同値類 $[\mathcal{A}]$ のことを言う．

- 前層

$$\mathsf{Sm}_{\le k+1,\, \le\infty} \colon (\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\le k+1,\, \le\infty})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

  を以下のように定義する：

  (対象)

  任意の C^0 級層状化空間 $(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\le k+1,\, \le\infty})$ に対して

$$\mathsf{Sm}_{\le k+1,\, \le\infty}(X \to P) := \bigl\{\, [\mathcal{A}] \bigm| \mathcal{A} \text{ is an atlas of } (X \to P) \,\bigr\}$$

  (射)

任意の層状化開埋め込み $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k+1,\,\leq\infty}}$ に対して，f によるアトラスの引き戻しを対応付ける．

[a] 同値関係であることの証明は [?, Lemma 3.2.11.] を参照．

以上の帰納法をまとめて，conically smooth な層状化空間と層状化開埋め込みの圏 $\mathbf{Snglr}$ を得る．

定義 1.13: 圏 Snglr

- **basic** のなす圏 $\mathbf{Bsc}$ を以下で定義する：

$$\mathbf{Bsc} := \bigcup_{k\geq -1} \mathbf{Bsc}_{\leq k,\,\leq\infty}$$

- 極大アトラスの集合を与える関手 $\mathsf{Sm}\colon (\mathbf{Snglr}^{C^0})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ を以下の右 Kan 拡張として定義する：

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{Snglr}^{C^0}_{<\infty,\,\leq\infty})^{\mathrm{op}} \arrow[r, "\mathsf{Sm}_{<\infty,\,\leq\infty}"] \arrow[d, hook] & \mathbf{Sets} \\
(\mathbf{Snglr}^{C^0})^{\mathrm{op}} \arrow[ur, dashed, "\mathsf{Sm}"'] &
\end{tikzcd}$$

ただし，$\mathbf{Snglr}^{C^0}_{<\infty,\,\leq\infty} := \bigcup_{k\geq -1} \mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k,\,\leq\infty}$ とおいた．

- **conically smooth な層状化空間** (conically smooth stratified space) と層状化開埋め込みの圏 $\mathbf{Snglr}$ を以下で定義する：

(対象)

C^0 級層状化空間 $(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ およびその極大アトラス $\mathcal{A}_X \in \mathsf{Sm}(X \to P)$ の組み $\big((X \to P),\, \mathcal{A}_X\big)$ を対象とする．

(射)

層状化開埋め込み $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}}\big((X \to P),\, (Y \to Q)\big)$ であって，$f^*\mathcal{A}_Y = \mathcal{A}_X$ を充たすものを射とする．

1.1.5 conically smooth map

ここまでは層状化開埋め込みのみを考えていたため，一般の層状化写像の conically smoothness を定義しなくてはいけない．

定義 1.14: conically smooth map

2 つのbasic[a] $X = (U^n_Z, \mathcal{A}_Z)$, $Y = (U^m_W, \mathcal{A}_W) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Bsc})$ の間の層状化写像 $f\colon U^n_Z \longrightarrow U^m_W$ が **conically smooth** であることを，depth(Y) に関する帰納法によって定義する：

(1) まず，$\mathrm{depth}(Y) = -1$ のときは $X = Y = \emptyset$ であり，一意的に定まる X, Y 間の層状化写像が conically smooth であると定義する．

(2) 深さ $k \geq -1$ の basic に対して定義が完了しているとする．$Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Bsc})$ の深さが高々 $k+1$ であるとき，層状化写像 $f\colon X \longrightarrow Y$ が conically smooth であることを以下で定義する：

f がコーンポイントを保存しない場合

ある conically smooth な層状化写像 $f_0\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \times W$ が存在して

$$f\colon X \xrightarrow{f_0} \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}_{>0} \times W) \hookrightarrow Y = \mathbb{R}^m \times \mathsf{C}(W)$$

と書ける[b]．

f がコーンポイントを保存する場合

f は $\mathbb{R}^n$ に沿って conically smooth であって，かつ制限

$$f|_{f^{-1}(Y\setminus\mathbb{R}^m)}\colon f^{-1}(Y \setminus \mathbb{R}^m) \longrightarrow Y \setminus \mathbb{R}^m$$

が conically smooth．ただし，$U^m_W \setminus \mathbb{R}^m := U^m_W \setminus (\mathbb{R}^m \times \{\mathrm{pt}\}) = \mathbb{R}^{m+1} \times W$ と略記した．

[a] C^0 basic を $U^n_Z := (\mathbb{R}^n \to [0]) \times \mathsf{C}(Z \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ と書く．
[b] 【例 1.1.6】より $\mathrm{depth}(W) < k+1$ であり，帰納法の仮定が使える．

---

conically smooth な層状化空間 $\big((X \to P), \mathcal{A}_X\big)$, $\big((Y \to Q), \mathcal{A}_Y\big) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr})$ の間の層状化写像 $f\colon (X \to P) \longrightarrow (Y \to Q)$ が **conically smooth** であるとは，任意のチャートの組み合わせ $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_X$, $(V, \psi) \in \mathcal{A}_Y$ に対して

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi\colon U \longrightarrow V$$

が conically smooth (for basics) であることを言う．

命題 1.1: conically smooth map の基本性質

2 つの conically smooth map の合成も conically smooth である．

<u>証明</u> [?, Proposition 3.3.5] ■

命題 1.1 より，**conically smooth な層状化空間**の圏を定義できる．

定義 1.15: conically smooth な層状化空間の圏 Strat

conically smooth な層状化空間の圏 $\mathbf{Strat}$ を以下で定義する：

(対象)

圏 $\mathbf{Snglr}$ と全く同じ対象を持つ：

$$\mathrm{Ob}(\mathbf{Strat}) \coloneqq \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$$

(射)

conically smooth map を射とする．

ここで，圏 $\mathbf{Strat}$ における特別な射に名前をつけておこう：

定義 1.16: constructible bundle

- conically smooth な層状化写像 $\pi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}\big((E \to P),\, (B \to Q)\big)$ が**層状化ファイバー束** (conically smooth fiber bundle) であるとは，conically smooth な層状化開埋め込みの族 $\{U_\alpha \hookrightarrow B\}_{\alpha\in\Lambda}$, $\{\varphi_\alpha \colon U_\alpha \times F_\alpha \hookrightarrow E\}_{\alpha\in\Lambda}$ が存在して以下を充たすことを言う：

  (Bun-1)

  $\forall \alpha \in \Lambda$ に対して，圏 $\mathbf{Strat}$ における引き戻しの図式

$$\begin{tikzcd} U_\alpha \times F_\alpha \arrow[r, hook, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{proj}_1"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ U_\alpha \arrow[r, hook] & B \end{tikzcd}$$

  が成り立つ．

  (Bun-2)

  族 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ は B の開基である．

- conically smooth な層状化写像 $\pi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}\big((E \to P),\, (B \to Q)\big)$ が**弱構成可能束** (weakly constructible bundle) であるとは，$\forall q \in Q$ に対して，π の q-層への制限

$$\pi|_{\pi^{-1}(B_q)} \colon \pi^{-1}(B_q) \longrightarrow B_q$$

  が層状化ファイバー束であることを言う．

- conically smooth な層状化写像 $\pi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}\big((E \to P),\, (B \to Q)\big)$ が**構成可能束** (constructible bundle) であることを，$\mathrm{depth}(E)$ に関する帰納法によって定義する：

  (1) $\mathrm{depth}(E) = 0$ のとき，π が構成可能束であるとは，π が C^∞ ファイバー束であることを言う．

  (2) 深さ $k \geq 0$ までの定義が完了しているとする．$\mathrm{depth}(E) \leq k+1$ のとき，π が構成可能束であるとは，以下の 2 条件を充たすことを言う：

  (cBun-1) f は弱構成可能束である．

  (cBun-2) $\forall q \in Q$ に対して，π が誘導する層状化写像

$$\mathrm{Link}_{\pi^{-1}(B_q)}(E) \longrightarrow \pi^{-1}(B_q) \times_{B_q} \mathrm{Link}_{B_q}(B)$$

  が構成可能束である．

1.1.6　管状近傍・ハンドル分解

1.1.7　層状化空間の接構造