第 1 章

層状化空間・因子化ホモロジー

[?], [?] のレビュー

1.1　conically smooth な層状化空間

1.1.1　層状化空間

定義 1.1: 半順序集合の位相

$(P, \leq)$ を半順序集合とする．P 上の位相 $\mathscr{O}_{\leq} \subset 2^P$ を以下で定義する：

$$U \in \mathscr{O}_{\leq} \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \forall x \in U, \forall y \in P, \ \big[x \leq y \quad \Longrightarrow \quad y \in U \big]$$

実際，空集合の定義から $\emptyset \in \mathscr{O}_{\leq}$ であり，$\forall U_1, U_2 \in \mathcal{O}_{\leq}$ に対して $x \in U_1 \cap U_2$ であることは

$$\forall y \in P, \ x \leq y \quad \Longrightarrow \quad y \in U_1 \text{ かつ } y \in U_2$$

と同値なので $U_1 \cap U_2 \in \mathscr{O}_{\leq}$ であり，さらに勝手な開集合族 $\big\{U_\lambda \in \mathscr{O}_{\leq}\big\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ は

$$\exists \alpha \in \Lambda, \ \forall y \in P, \ x \leq y \quad \Longrightarrow \quad y \in U_\alpha \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

と同値であるから $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathscr{O}_{\leq}$ であり，$\mathscr{O}_{\leq}$ は集合 P の位相である．

【例 1.1.1】$[n]$ の位相

半順序集合 $[2] \coloneqq \{0 \leq 1 \leq 2\}$ を考える．このとき，位相 $\mathscr{O}_{\leq}$ とは

$$\mathscr{O}_{\leq} = \big\{ \emptyset, \{2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\} \big\}$$

のことである．同様に，半順序集合 $[n] \coloneqq \{0 \leq 1 \leq \cdots \leq n\}$ に対して

$$\mathscr{O}_{\leq} = \big\{ \emptyset, \{n\}, \{n-1, n\}, \ldots, \{0, \ldots, n\} \big\}$$

が成り立つ．

定義 1.2: 層状化空間・層状化写像

$(P, \le)$ を半順序集合とし，定義 1.1 の位相を入れて位相空間にする．
このとき，位相空間 X が $\boldsymbol{P}$**-層状化**されている (P-stratified) とは，連続写像 $s\colon X \longrightarrow P$ が存在することを言う．組 $(X,\ s\colon X \longrightarrow P)$ のことを $\boldsymbol{P}$**-層状化空間** (P-stratified space) と呼ぶ．また，$i \in P$ の逆像 $\boldsymbol{X_i} := s^{-1}(\{i\}) \subset X$ のことを $\boldsymbol{i}$**-層** (i-strata) と呼ぶ．

層状化空間 $(X,\ s\colon X \longrightarrow P)$, $(X',\ s'\colon X' \longrightarrow P')$ の間の**層状化写像** (stratified map) とは，連続写像の組み $(f\colon X \longrightarrow X',\ \tilde{f}\colon P \longrightarrow P')$ であって以下の図式を可換にするもののこと：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & X' \arrow[d, "s'"] \\ P \arrow[r, "\tilde{f}"'] & P' \end{tikzcd}$$

【例 1.1.2】$[n]$**-層状化空間**

半順序集合 $[n] := \{0 \le \cdots \le n\}$ に対して【例 1.1.1】の位相を入れる．まず，

$$X_0 = s^{-1}\big([n] \setminus \{1, \ldots, n\}\big)$$

でかつ $\{1, \ldots, n\}$ は $[n]$ の開集合であるから，s の連続性から X の部分空間 $X_0 \subset X$ は閉集合だとわかる．さらに

$$\begin{aligned} X_0 \cup X_1 &= s^{-1}\big([n] \setminus \{2, \ldots, n\}\big), \\ X_0 \cup X_1 \cup X_2 &= s^{-1}\big([n] \setminus \{3, \ldots, n\}\big), \\ &\ \vdots \\ X_0 \cup \cdots \cup X_n &= X \end{aligned}$$

が成り立つことから，s の連続性より X の部分空間 $X_0 \cup \cdots \cup X_{m \le n}$ は閉集合だと分かる．

【例 1.1.3】CW 複体

CW 複体 X を与える．$X_{\le k}$ を X の k-骨格とするとき，$X_k \setminus X_{k-1}$ を $k \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ に写す写像 $s\colon X \longrightarrow \mathbb{Z}_{\ge 0}$ は X の層状化を与える．

直観的には，層状化空間とは defect 付き位相多様体の一般化である．特に X を位相多様体とするとき，$[n]$-層状化空間 $(X,\ s\colon X \longrightarrow [n])$ の i-層 X_i とは，多様体 X 上の余次元 $d - i$ の defect を全て集めてきたものだと見做せる．

定義 1.3: 層状化開埋め込み

層状化写像 $(f, \tilde{f})\colon (X, s\colon X \longrightarrow P) \longrightarrow (X', s'\colon X' \longrightarrow P')$ が**層状化開埋め込み** (stratified open embedding) であるとは，以下の 2 条件を充たすことを言う：

(1) 連続写像 $f\colon X \longrightarrow X'$ は位相的開埋め込みである[a]

(2) $\forall p \in P$ に対して，f の p-strata への制限[b]

$$f|_{X_p}\colon X_p \longrightarrow X'_{\tilde{f}(p)}$$

は位相的開埋め込みである．

[a] i.e. $f\colon X \longrightarrow f(X)$ が同相写像かつ $f(X) \subset Y$ が開集合

[b] 層状化写像の定義に登場する図式の可換性より，$\forall x \in X_p$ に対して $s'\bigl(f(x)\bigr) = s' \circ f(x) = \tilde{f} \circ s(x) = \tilde{f}(p)$, i.e. $f(x) \in s'^{-1}\bigl(\{\tilde{f}(p)\}\bigr) = X'_{\tilde{f}(p)}$ が分かる．

以下では混乱が生じにくい場合，層状化空間 $(X, s\colon X \longrightarrow P)$ のことを $(X \xrightarrow{s} P)$ や $(X \to P)$ と略記する．さらに，層状化写像 $(f, \tilde{f})\colon (X, s\colon X \longrightarrow P) \longrightarrow (X', s'\colon X' \longrightarrow P')$ のことを $f\colon (X \to P) \longrightarrow (X' \to P')$ と略記し，連続写像 $\tilde{f}\colon P \longrightarrow P'$ のことも f と書く場合がある．

圏 **StTop** を，

- 第 2 可算な Hausdorff 空間であるような層状化空間を対象とする
- 層状化開埋め込みを射とする

ことで定義する．

1.1.2 C^0 級層状化空間

定義 1.4: コーン

層状化空間 $(X \xrightarrow{s} P)$ を与える．X の**コーン** (cone) とは，以下のようにして構成される層状化空間 $\bigl(\mathsf{C}(X), \mathsf{C}(s)\colon \mathsf{C}(X) \longrightarrow \mathsf{C}(P)\bigr)$ のこと：

- 位相空間 $\mathsf{C}(X)$ を，押し出し位相空間

  $$\mathsf{C}(X) \coloneqq \{\mathrm{pt}\} \amalg_{\{0\}\times X} (\mathbb{R}_{\geq 0} \times X)$$

  と定義する：

  $$\begin{array}{ccc} \{0\} \times X & \xhookrightarrow{\{0\}\times \mathrm{id}_X} & \mathbb{R}_{\geq 0} \times X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{\mathrm{pt}\} & \longrightarrow & \{\mathrm{pt}\} \amalg_{\{0\}\times X} (\mathbb{R}_{\geq 0} \times X) \end{array}$$

- 半順序集合 $\mathsf{C}(P)$ を，P に最小の要素 $-\infty$ を付け足すことで定義する．これは半順序集合の

圏における押し出し

$$\mathsf{C}\,(P) \coloneqq \{-\infty\} \amalg_{\{0\}\times P} \left([1]\times P\right)$$

である．

- 連続写像

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{\geq 0}\times X &\longrightarrow [1]\times P, \\ (t,\, x) &\longmapsto \begin{cases} \left(0,\, s(x)\right), & t=0, \\ \left(1,\, s(x)\right), & t>0 \end{cases} \end{aligned}$$

が誘導する連続写像 $\mathsf{C}\,(X)\longrightarrow \mathsf{C}\,(P)$ を $\mathsf{C}\,(s)$ と書く．

位相空間の圏における押し出しの公式から，位相空間 $\mathsf{C}\,(X)$ とは

$$\begin{aligned} &i_1\colon \{0\}\times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}\times X,\ x\longmapsto (0,\, x), \\ &i_2\colon \{0\}\times X \longrightarrow \{\mathrm{pt}\},\ x\longmapsto \mathrm{pt} \end{aligned}$$

とおいたときのコイコライザ

$$\{0\}\times X \overset{i_1}{\underset{i_2}{\rightrightarrows}} \{\mathrm{pt}\}\sqcup(\mathbb{R}_{\geq 0}\times X) \xrightarrow{q} \mathsf{C}(X),$$

i.e. 商位相空間

$$\frac{\mathbb{R}_{\geq 0}\times X}{i_1(x)\sim i_2(x)} = \frac{\mathbb{R}_{\geq 0}\times X}{\{0\}\times X}$$

のこと．従って $\mathsf{C}\,(s) : \mathsf{C}\,(X) \longrightarrow \mathsf{C}\,(P)$ とは，連続写像[*1]

$$\frac{\mathbb{R}_{\geq 0}\times X}{\{0\}\times X} \longrightarrow \mathsf{C}\,(P)\,,\ [(t,\, x)] \longmapsto \begin{cases} -\infty, & t=0 \\ s(x), & t>0 \end{cases}$$

のことである．

! 以下では，混乱の恐れがない限り層状化空間 $(X \xrightarrow{s} P)$ のコーンを $\mathsf{C}\left(X \xrightarrow{s} P\right)$ と略記する．

[*1] $\mathsf{C}\,(P)$ の位相 $\mathscr{O}_{\mathsf{C}(P)}$ は，P の位相 $\mathscr{O}_P$ に 1 つの開集合 $\{-\infty\}\cup P$ を加えたものである．$\forall U\in\mathscr{O}_P$ に対して $\mathsf{C}\,(s)^{-1}\,(U) = \mathbb{R}_{>0}\times s^{-1}(U)\in\mathscr{O}_{\mathsf{C}(X)}$ で，かつ $\mathsf{C}\,(s)^{-1}\,(\{-\infty\}\cup P) = \mathsf{C}\,(X)\in\mathscr{O}_{\mathsf{C}(X)}$ なので $\mathsf{C}\,(s)$ は連続である．

定義 1.5: C^0 級層状化空間

以下を充たす **StTop** の最小の充満部分圏を $\mathbf{Snglr}^{C^0}$ と書き，圏 $\mathbf{Snglr}^{C^0}$ の対象を $\boldsymbol{C^0}$ **級層状化空間** (C^0 stratified space) と呼ぶ：

(Snglr-1) $(\emptyset \to \emptyset) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$

(Snglr-2)

$(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ かつ $X,\ P$ が位相空間としてコンパクト

$\implies \quad \mathsf{C}\,(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$

(Snglr-3)

$(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}) \quad \implies \quad (X \times \mathbb{R} \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$[a]

(Snglr-4)

$(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ かつ $\mathrm{Hom}_{\mathbf{StTop}}\big((U \to P_U),\ (X \to P)\big) \neq \emptyset$

$\implies \quad (U \to P_U) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$

(Snglr-5)

$(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{StTop})$ が開被覆 $\big\{(U_\lambda \to P_\lambda) \longrightarrow (X \to P)\big\}_{\lambda \in \Lambda}$[b] を持ち，かつ $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して $(U_\lambda \to P_\lambda) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$

$\implies \quad (X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$

---

[a] $X \times \mathbb{R}$ の層状化は，連続写像 $X \times \mathbb{R} \longrightarrow X,\ (x,\ t) \longmapsto x$ を前もって合成することにより定める．

[b] i.e. $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda},\ \{P_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が，それぞれ位相空間 $X,\ P$ の開被覆を成す．

【例 1.1.4】位相多様体は C^0 級層状化空間

(Snglr-1) より，$* := \mathsf{C}\,(\emptyset \to \emptyset) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ である．**(Snglr-3)** より，$\forall n \geq 0$ に対して $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n \to [0]) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ であることが帰納的に分かる．$\mathbb{R}^n$ の任意の開集合 $U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ に対して，

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathbb{R}^n \arrow[d] \\
{[0]} \arrow[r, "="'] & {[0]}
\end{tikzcd}
$$

は層状化埋め込みであり，従って **(Snglr-4)** より $U := (U \to [0]) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ が分かる．以上の考察と **(Snglr-5)** を併せて，任意の位相多様体 M は[a]圏 $\mathbf{Snglr}^{C^0}$ の対象である．

---

[a] より正確には，M を層状化空間 $(M \to [0])$ と同一視している．

【例 1.1.4】の意味で，C^0 級層状化空間は位相多様体の一般化と見做せる．しかしまだそこには C^∞ 構造を一般化した構造は入っておらず，C^∞ 多様体の一般化とは見做せない．

1.1.3 C^0 basic

定義 1.6: C^0 basic

$\boldsymbol{C^0}$ 級層状化空間 $(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ が $\boldsymbol{C^0}$**-basic** であるとは，ある $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ およびコンパクトな $\boldsymbol{C^0}$ 級層状化空間 $(Z \to Q) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ が存在して $(X \to P) = \big(\mathbb{R}^n \to [0]\big) \times \mathsf{C}\,(Z \to Q)$ が成り立つことを言う．

いま，C^0 basic な $(U \to P_U) = (\mathbb{R}^n \to [0]) \times \mathsf{C}\,(Z \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ を 1 つとる．コーンの定義から，U の点を $(v,\, [t,\, z]) \in \mathbb{R}^n \times \frac{\mathbb{R}_{\geq 0} \times Z}{\{0\} \times Z}$ と表示することができる．この表示の下で自己同相

$$\begin{aligned}\gamma\colon \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^n \times \mathsf{C}\,(Z) &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^n \times \mathsf{C}\,(Z)\,,\\ \big(t,\, (v,\, p),\, [s,\, z]\big) &\longmapsto \big(t,\, (tv+p,\, p),\, [ts,\, z]\big)\end{aligned}$$

を考える[*2]．

さらに，もう 1 つの C^0 basic な $(U' \to P_{U'}) = (\mathbb{R}^{n'} \to [0]) \times \mathsf{C}\,(Z' \to P') \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ および $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}}\big((U \to P_U),\, (U' \to P_{U'})\big)$ をとる．ただし，f はコーンポイントをコーンポイントへ写す，i.e. $\forall u \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(u,\, \mathrm{pt}) \in \mathbb{R}^{n'} \times \{\mathrm{pt}\}$ が成り立つことを仮定する．$f|_{\mathbb{R}^n}\colon \mathbb{R}^n \times \{\mathrm{pt}\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n'} \times \{\mathrm{pt}\}$ を f のコーンポイントへの制限として，

$$\begin{aligned}f_\Delta\colon \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^n \times \mathsf{C}\,(Z) &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^{n'} \times \mathsf{C}\,(Z')\,,\\ \big(t,\, v,\, p,\, [s,\, z]\big) &\longmapsto \big(t,\, f|_{\mathbb{R}^n}(v),\, f(p,\, [ts,\, z])\big)\end{aligned}$$

とおこう．

【例 1.1.5】

$Z = Z' = \emptyset$ のとき，f とは単に連続関数 $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n'}$ のことである．このとき，

$$\begin{aligned}(\gamma^{-1} \circ f_\Delta \circ \gamma)(t,\, v,\, p) &= \gamma^{-1} \circ f_\Delta(t,\, tv+p,\, p)\\ &= \gamma^{-1}\big(t,\, f(tv+p),\, f(p)\big)\\ &= \left(t,\, \frac{f(tv+p) - f(p)}{t},\, f(p)\right)\end{aligned}$$

と計算できるため，f が C^1 級であることと $\forall (v,\, p) \in T\mathbb{R}^n$ に対して $t \to +0$ の極限，i.e. v に沿った片側方向微分が存在することは同値である．

【例 1.1.5】をもとに，C^0 basic な C^0 級層状化空間の間の層状化開埋め込みの **conically smoothness** を定義する．C^∞ 多様体の C^∞ 構造の定義においては，チャート $(U,\, \varphi\colon \mathbb{R}^n \to U),\, (V,\, \psi\colon \mathbb{R}^n \to V)$ の間の変換関数 $\psi^{-1} \circ \varphi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が C^∞ 級であることを要請した．次の小節で **conically smooth structure** の定義を行うが，その際にチャートに対応するものは **basic** $U = \mathbb{R}^n \times \mathsf{C}\,(Z)$ から着目している C^0-級層状化空間 X への層状化開埋め込み $\varphi\colon U \hookrightarrow X$ であり，概ね[*3]2 つのチャート $\varphi\colon U \hookrightarrow X,\, \psi\colon V \hookrightarrow X$ の間の変換関数 $\psi^{-1} \circ \varphi\colon U \longrightarrow V$ に対して conically smooth (along $\mathbb{R}^n$) であることを要請する．

---

*2 接束 $T\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^{2n}$ と微分同相である．[?, p.23] の記法に合わせて底空間 $\mathbb{R}^n$ の点を p，p 上のファイバーの元を v としたとき $(v,\, p) \in T\mathbb{R}^n$ と書いた．命題??の記法と順番が逆なので注意．

*3 コーンポイントをコーンポイントに写さない変換関数も存在しうるので，これだけではいけない．

定義 1.7: $\mathbb{R}^n$ に沿って conically smooth

- C^0 basic な $(U \to P_U) = (\mathbb{R}^n \to [0]) \times \mathsf{C}(Z \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$
- C^0 basic な $(U' \to P_{U'}) = (\mathbb{R}^{n'} \to [0]) \times \mathsf{C}(Z' \to P') \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$
- $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}}\big((U \to P_U),\, (U' \to P_{U'})\big)$ であって，コーンポイントを保存するもの

を与える．このとき，f が $\mathbb{R}^n$ **に沿って** C^1 **級** (C^1 along $\mathbb{R}^n$) であるとは，以下の図式を可換にする連続写像

$$\tilde{D}f \colon \mathbb{R}_{\geq 0} \times T\mathbb{R}^n \times \mathsf{C}(Z) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \times T\mathbb{R}^{n'} \times \mathsf{C}(Z')$$

が存在することを言う：

$$\begin{CD}
\mathbb{R}_{\geq 0} \times T\mathbb{R}^n \times \mathsf{C}(Z) @>{\tilde{D}f}>> \mathbb{R}_{\geq 0} \times T\mathbb{R}^{n'} \times \mathsf{C}(Z') \\
@AAA @AAA \\
\mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^n \times \mathsf{C}(Z) @>>{\gamma^{-1} \circ f_\Delta \circ \gamma}> \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^{n'} \times \mathsf{C}(Z')
\end{CD}$$

このような拡張が存在するとき，第一変数を $t = 0$ に制限して得られる連続写像を

$$\boldsymbol{Df} \colon T\mathbb{R}^n \times \mathsf{C}(Z) \longrightarrow T\mathbb{R}^{n'} \times \mathsf{C}(Z')$$

と書く．f が $\mathbb{R}^n$ **に沿って** C^r **級** であるとは，Df が $\mathbb{R}^n$ に沿って C^{r-1} 級であることを言う．f が $\mathbb{R}^n$ **に沿って conically smooth** であるとは，$\forall r \geq 1$ について C^r 級であることを言う．

1.1.4 conically smooth な層状化空間

次に行うべきは，与えられた C^0 **級層状化空間** $(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ の上の **conically smooth structure** i.e. 変換関数が conically smooth であるような**極大アトラス**を定義することである．この手続きは，次で定義する次元と深さに関する帰納法によって構成される．

定義 1.8: 被覆次元

X を位相空間とする．以下の条件を充たす最小の $d \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$ のことを（存在すれば）X の**被覆次元** (covering dimension) と呼び，$\boldsymbol{\dim X}$ と書く：

(covering)

X の任意の開被覆 $\mathscr{U}$ に対して，十分細かい細分 $\mathscr{V}_{\mathscr{U}} \prec \mathscr{U}$ が存在して，任意の互いに異なる $\forall m > d+1$ 個の開集合 $V_1, \dots, V_m \in \mathscr{V}_{\mathscr{U}}$ の共通部分が空になるようにできる．特に，$\emptyset$ の被覆次元は -1 と定義する．

点 $x \in X$ における**被覆次元**を以下で定義する：

$$\dim_x X := \inf\left\{ \dim U \geq -1 \;\middle|\; x \in U \underset{\text{open}}{\subset} X \right\}$$

定義 1.9: 次元と深さ

空でない C^0 級層状化空間 $(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ を与える．

- $(X \to P)$ の点 $x \in X$ における**局所的次元** (local dimension) とは，点 x における X の被覆次元 $\dim_x(X)$ のことを言う．
- $(X \to P)$ の**次元** (dimension) とは
$$\boldsymbol{\dim(X \to P)} \coloneqq \sup_{x \in X} \dim_x(X)$$
のこと．
- $(X \xrightarrow{s} P)$ の点 $x \in X$ における**局所的深さ** (local depth) とは，
$$\boldsymbol{\mathrm{depth}_x(X \to P)} \coloneqq \dim_x(X) - \dim_x(X_{s(x)})$$
のこと．
- $(X \to P)$ の**深さ** (depth) とは，
$$\boldsymbol{\mathrm{depth}(X \to P)} \coloneqq \sup_{x \in X} \mathrm{depth}_x(X \to P)$$
のこと．ただし，$\mathrm{depth}(\emptyset) \coloneqq -1$ と定義する．

【例 1.1.6】コーンの深さ

n 次元位相多様体 Z について，定義から $\forall x \in Z$ に対して $\dim_x(Z) = n$ が成り立つ．Z を【例 1.1.4】により C^0 級層状化空間 $(Z \xrightarrow{s} [0]) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ と見做すと，これのコーン $\mathsf{C}\left(Z \xrightarrow{s} [0]\right)$ について

$$\mathrm{depth}_x\left(\mathsf{C}\left(Z \xrightarrow{s} [0]\right)\right) = \begin{cases} n+1, & x = \mathrm{pt}, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

であることがわかる．実際 $\mathsf{C}(Z)_{\mathsf{C}(s)(\mathrm{pt})} = \{\mathrm{pt}\}$ であるが，1 点からなる位相空間の被覆次元は 0 次元なので $\dim_{\mathrm{pt}}(\mathsf{C}(Z)_{\mathsf{C}(s)(\mathrm{pt})}) = 0$ である．一方，コーンポイント以外の点 $x \in \mathsf{C}(Z)$ に対して $\mathsf{C}(s)(x)$-層は $\mathsf{C}(Z)_{\mathsf{C}(s)(x)} = \mathbb{R}_{>0} \times Z \approx \mathbb{R} \times Z$ であるから，$\dim_x(\mathsf{C}(Z)_{\mathsf{C}(s)(x)}) = n+1$ と計算できる[a]．

また，$\forall (X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ に対して

$$\begin{aligned} \dim\big((\mathbb{R}^m \to [0]) \times (X \to P)\big) &= m + \dim\big(X \to P\big), \\ \mathrm{depth}\big((\mathbb{R}^m \to [0]) \times (X \to P)\big) &= \mathrm{depth}\big(X \to P\big) \end{aligned}$$

が成り立つ．従って，C^0 basic な $(U \to P_U) = (\mathbb{R}^n \to [0]) \times \mathsf{C}(Z \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ に対して

$$\begin{aligned} \mathrm{depth}(U \to P_U) &= \mathrm{depth}\big(\mathsf{C}(Z \to P)\big) \\ &= \dim(Z \to P) + 1 \end{aligned}$$

が成り立つ．

[a] さらに，$\forall x \in \mathsf{C}(Z)$ に対して $\dim_x \mathsf{C}(Z) = n+1$ である．

次元と深さに関する帰納法を実行する前に，構成したい (1, 1)-圏を表す記号の整理をしておこう：

- conically smooth チャートの素材となる，**basic** が成す圏

$$\mathbf{Bsc}$$

 これは，C^∞ 多様体の圏 $\mathbf{Mfld}$ において $\mathbb{R}^n$ $(\forall n \geq -1)$ 全体が成す充満部分圏に相当するものである．

- 与えられた C^0 級層状化空間 $(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ に対して，その上に入る**極大アトラス**[*4]全体が成す集合を返す前層

$$\mathsf{Sm}\colon (\mathbf{Snglr}^{C^0})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

 この対応が前層であることの直観は，層状化開埋め込み $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}}\big((X \to P), (Y \to Q)\big)$ が与えられると，$(X \to P)$ 上の極大アトラス $\mathsf{Sm}(X \to P)$ が $(Y \to Q)$ 上の極大アトラス $\mathsf{Sm}(Y \to Q)$ を「制限」する写像 $\mathsf{Sm}(f)\colon \mathsf{Sm}(Y \to Q) \longrightarrow \mathsf{Sm}(X \to P)$ によって得られるということである．

- 深さが k 以下，かつ次元が n 以下であるような C^0 級層状化空間全体が成す $\mathbf{Snglr}^{C^0}$ の充満部分圏を

$$\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\underbrace{\leq k}_{\text{depth}},\, \underbrace{\leq n}_{\text{dimension}}}$$

 と書く．同様に

$$\mathbf{Bsc}_{\leq k,\, \leq n}, \qquad \mathsf{Sm}_{\leq k,\, \leq n}\colon (\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k,\, \leq n})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

 と書く．

- **conically smooth な層状化空間**の圏

$$\mathbf{Snglr}$$

 これを作ることが本小節の最終目標である．

帰納法により，$\forall k \geq -1$ に対して $\mathbf{Bsc}_{\leq k,\, \leq \infty}$ および $\mathsf{Sm}_{\leq k,\, \leq \infty}\colon (\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k,\, \leq \infty})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ が構成される．

定義 1.10: 帰納法の出発点

(Snglr-1) より $(\emptyset \to \emptyset) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq -1,\, \leq \infty})$ である．

(1) $\mathbf{Bsc}_{\leq -1,\, \leq \infty} := \emptyset$
(2) $\mathsf{Sm}_{\leq -1,\, \leq \infty}(\emptyset) := \{*\}$

と定義する．

[*4] 存在するか分からないし，存在したとして一意であるとは限らない．実際，例えば C^∞ 多様体の段階においてさえ $\mathbb{R}^4$ の上の極大アトラス（i.e. C^∞ 構造）は非可算無限個存在する [**?**].

仮定 1.1: 帰納法の仮定

与えられた $k \geq -1$ に対して以下の構成が完了していると仮定する：

(1) 圏 $\mathbf{Bsc}_{\leq k,\, \leq\infty}$

(2) 前層 $\mathsf{Sm}_{\leq k,\, \leq\infty} \colon (\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k,\, \leq\infty})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$

(3) 関手

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times (\text{-}) \colon \mathbf{Bsc}_{\leq k,\, \leq\infty} &\longrightarrow \mathbf{Bsc}_{\leq k,\, \leq\infty}, \\ U &\longmapsto \mathbb{R} \times U, \\ \bigl(U \xrightarrow{f} V\bigr) &\longmapsto \bigl(\mathbb{R} \times U \xrightarrow{\mathrm{id}\times f} \mathbb{R} \times V\bigr) \end{aligned}$$

およびそれが誘導する自然変換[a]

$$\begin{tikzcd} (\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k,\, \leq\infty})^{\mathrm{op}} \arrow[r, bend left=50, "\mathsf{Sm}_{\leq k,\, \leq\infty}(\text{-})"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "\mathsf{Sm}_{\leq k,\, \leq\infty}(\mathbb{R}\times\text{-})"'{name=D}] & \mathbf{Sets} \arrow[from=U, to=D, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

[a] X の極大アトラス $\{U_\alpha,\, \varphi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ に対して，$\{\mathbb{R} \times U_\alpha,\, \mathrm{id} \times \varphi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ を対応づける．

定義 1.11: 圏 $\mathbf{Bsc}_{\leq k+1,\, \leq\infty}$

帰納法の仮定 1.1 がある $k \geq -1$ において成立しているとする．また，C^0 basic を $U^n_Z := (\mathbb{R}^n \to [0]) \times \mathsf{C}\,(Z \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ と書く．このとき，圏 $\mathbf{Bsc}_{\leq k+1,\, \leq\infty}$ を以下で定義する：

(対象)

C^0 basic [a] $U^n_Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k+1,\, \leq\infty})$ および，極大アトラス $\mathcal{A}_Z \in \mathsf{Sm}_{\leq k,\, \leq\infty}(Z \to P)$ の組み

$$(U^n_Z,\, \mathcal{A}_Z)$$

を対象とする．

(射)

任意の 2 つの対象 $(U^n_Z,\, \mathcal{A}_Z)$，$(U^m_W,\, \mathcal{A}_W) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Bsc}_{\leq k+1,\, \leq\infty})$ に対して，以下の条件を充たす層状化開埋め込み $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k+1,\, \leq\infty}}\bigl(U^n_Z,\, U^m_W\bigr)$ を射とする：

f がコーンポイントを保存しない場合

ある層状化開埋め込み $f_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k+1,\, \leq\infty}}\bigl(U^n_Z,\, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \times W\bigr)$ が存在して

$$f \colon U^n_Z \xrightarrow{f_0} \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}_{>0} \times W) \hookrightarrow U^m_W = \mathbb{R}^m \times \mathsf{C}\,(W)$$

と書けて，かつ $(U^n_Z,\, f_0) \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}_{>0}\times W} \in \mathsf{Sm}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \times W)$

f がコーンポイントを保存する場合

f は $\mathbb{R}^n$ に沿って conically smooth であって，かつ $Df \colon \mathbb{R}^n \times U^n_Z \longrightarrow \mathbb{R}^m \times U^m_W$ が単射

であり，かつ

$$\mathcal{A}_{f^{-1}(U_W^m\setminus\mathbb{R}^m)} = \mathsf{Sm}_{\le k,\,\le\infty}\bigl(f|_{f^{-1}(U_W^m\setminus\mathbb{R}^m)}\bigr)\bigl(\mathcal{A}_{U_W^m\setminus\mathbb{R}^m}\bigr)$$

を充たす[b]．ただし，$U_W^m \setminus \mathbb{R}^m := U_W^m \setminus (\mathbb{R}^m \times \{\mathrm{pt}\}) = \mathbb{R}^{m+1} \times W$ と略記した．

---

[a] depth の定義から $\mathrm{depth}(Z \to P) \le \dim(Z \to P)$ である．故に【例 1.1.6】から，$\mathrm{depth}(Z \to P) \le \dim(Z \to P) = \mathrm{depth}\, U_Z^n - 1 \le k$ であること，i.e. $(Z \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\le k,\,\le\infty})$ が分かる．

[b] ここで帰納法の仮定 1.1-(3) を暗に使っている．

定義 1.12: 前層 $\mathsf{Sm}_{\le k+1,\,\le\infty}$

帰納法の仮定 1.1 がある $k \ge -1$ において成立しているとする．さらに定義 1.11 によって $\mathbf{Bsc}_{\le k+1,\,\le\infty}$ が完成しているとする．

- C^0 級層状化空間 $\forall (X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\le k+1,\,\le\infty})$ に対して，$X \to P$ の**アトラス** (atlas) を族

  $$\mathcal{A} := \Bigl\{\bigl(U_\alpha \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Bsc}_{\le k+1,\,\le\infty}),\ \varphi_\alpha\colon U_\alpha \hookrightarrow (X \to P)\bigr)\Bigr\}_{\alpha\in\Lambda} \in \mathsf{Sm}_{\le k+1,\,\le\infty}(X \to P)$$

  であって以下の条件を充たすものとして定義する：

  (Atlas-1)

  $\mathcal{A}$ は $(X \to P)$ の開被覆である．

  (Atlas-2)

  $\forall \alpha, \beta \in \Lambda$ および $\forall x \in \varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta)$ に対して，圏 $\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\le k+1,\,\le\infty}$ の可換図式

  $$\begin{tikzcd} \exists W \arrow[r, hook, "f_\beta"] \arrow[d, hook, "f_\alpha"'] & U_\beta \arrow[d, hook, "\varphi_\beta"] \\ U_\alpha \arrow[r, hook, "\varphi_\alpha"'] & X \end{tikzcd}$$

  が存在して $x \in \varphi_\alpha \circ f_\alpha(W) = \varphi_\beta \circ f_\beta(W)$ を充たす．ただし，可換図式中の赤色の部分は全て圏 $\mathbf{Bsc}_{\le k+1,\,\le\infty}$ の対象および射からなる．

  アトラス $\mathcal{A}$ の元 $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ のことを**チャート** (chart) と呼ぶ．

- C^0 級層状化空間 $\forall (X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\le k+1,\,\le\infty})$ の 2 つのアトラス $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ が**同値**であるとは，$\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ が $(X \to P)$ のアトラスであることを言う．これは $(X \to P)$ のアトラス全体の集合の上に同値関係を定める[a]．$(X \to P)$ の**極大アトラス** (maximal atlas) とは，この同値関係によるアトラス $\mathcal{A}$ の同値類 $[\mathcal{A}]$ のことを言う．

- 前層

  $$\mathsf{Sm}_{\le k+1,\,\le\infty}\colon (\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\le k+1,\,\le\infty})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

  を以下のように定義する：

  (対象)

  任意の C^0 級層状化空間 $(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\le k+1,\,\le\infty})$ に対して

  $$\mathsf{Sm}_{\le k+1,\,\le\infty}(X \to P) := \bigl\{\, [\mathcal{A}] \bigm| \mathcal{A} \text{ is an atlas of } (X \to P) \,\bigr\}$$

(射)

任意の層状化開埋め込み $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k+1, \leq \infty}}\big((X \to P), (Y \to Q)\big)$ に対して，f によるアトラスの引き戻しを対応付ける．

[a] 同値関係であることの証明は [?, Lemma 3.2.11.] を参照．

以上の帰納法をまとめて，conically smooth な層状化空間と層状化開埋め込みの圏 **Snglr** を得る．

定義 1.13: 圏 Snglr

- **basic** のなす圏 **Bsc** を以下で定義する：

$$\mathbf{Bsc} := \bigcup_{k \geq -1} \mathbf{Bsc}_{\leq k, \leq \infty}$$

- 極大アトラスの集合を与える関手 $\mathsf{Sm} \colon (\mathbf{Snglr}^{C^0})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ を以下の右 Kan 拡張として定義する：

$$\begin{tikzcd} (\mathbf{Snglr}^{C^0}_{<\infty, \leq\infty})^{\mathrm{op}} \arrow[r, "\mathsf{Sm}_{<\infty, \leq\infty}"] \arrow[d, hook] & \mathbf{Sets} \\ (\mathbf{Snglr}^{C^0})^{\mathrm{op}} \arrow[ur, dashed, "\mathsf{Sm}"'] & \end{tikzcd}$$

ただし，$\mathbf{Snglr}^{C^0}_{<\infty, \leq\infty} := \bigcup_{k\geq -1} \mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k, \leq\infty}$ とおいた．

- **conically smooth な層状化空間** (conically smooth stratified space) と層状化開埋め込みの圏 **Snglr** を以下で定義する：

(対象)

C^0 級層状化空間 $(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ およびその極大アトラス $\mathcal{A}_X \in \mathsf{Sm}(X \to P)$ の組み $\big((X \to P), \mathcal{A}_X\big)$ を対象とする．

(射)

層状化開埋め込み $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}}\big((X \to P), (Y \to Q)\big)$ であって，$f^*\mathcal{A}_Y = \mathcal{A}_X$ を充たすものを射とする．

1.1.5 conically smooth map

ここまでは層状化開埋め込みのみを考えていたため，一般の層状化写像の conically smoothness を定義しなくてはいけない．

定義 1.14: conically smooth map

2 つのbasic[a] $X = (U^n_Z, \mathcal{A}_Z)$, $Y = (U^m_W, \mathcal{A}_W) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Bsc})$ の間の層状化写像 $f\colon U^n_Z \longrightarrow U^m_W$ が **conically smooth** であることを，depth(Y) に関する帰納法によって定義する：

(1) まず，$\mathrm{depth}(Y) = -1$ のときは $X = Y = \emptyset$ であり，一意的に定まる X, Y 間の層状化写像が conically smooth であると定義する．

(2) 深さ $k \geq -1$ の basic に対して定義が完了しているとする．$Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Bsc})$ の深さが高々 $k+1$ であるとき，層状化写像 $f\colon X \longrightarrow Y$ が conically smooth であることを以下で定義する：

f がコーンポイントを保存しない場合

ある conically smooth な層状化写像 $f_0\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \times W$ が存在して

$$f\colon X \xrightarrow{f_0} \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}_{>0} \times W) \hookrightarrow Y = \mathbb{R}^m \times \mathsf{C}(W)$$

と書ける[b]．

f がコーンポイントを保存する場合

f は $\mathbb{R}^n$ に沿って conically smooth であって，かつ制限

$$f|_{f^{-1}(Y \setminus \mathbb{R}^m)}\colon f^{-1}(Y \setminus \mathbb{R}^m) \longrightarrow Y \setminus \mathbb{R}^m$$

が conically smooth．ただし，$U^m_W \setminus \mathbb{R}^m := U^m_W \setminus (\mathbb{R}^m \times \{\mathrm{pt}\}) = \mathbb{R}^{m+1} \times W$ と略記した．

[a] C^0 basic を $U^n_Z := (\mathbb{R}^n \to [0]) \times \mathsf{C}(Z \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ と書く．
[b] 【例 1.1.6】より $\mathrm{depth}(W) < k+1$ であり，帰納法の仮定が使える．

---

conically smooth な層状化空間 $\big((X \to P), \mathcal{A}_X\big)$, $\big((Y \to Q), \mathcal{A}_Y\big) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr})$ の間の層状化写像 $f\colon (X \to P) \longrightarrow (Y \to Q)$ が **conically smooth** であるとは，任意のチャートの組み合わせ $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_X$, $(V, \psi) \in \mathcal{A}_Y$ に対して

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi\colon U \longrightarrow V$$

が conically smooth (for basics) であることを言う．

命題 1.1: conically smooth map の基本性質

2 つの conically smooth map の合成も conically smooth である．

<u>証明</u>　[?, Proposition 3.3.5] ■

命題 1.1 より，**conically smooth な層状化空間**の圏を定義できる．

定義 1.15: conically smooth な層状化空間の圏 Strat

conically smooth な層状化空間の圏 **Strat** を以下で定義する：

(対象)

圏 **Snglr** と全く同じ対象を持つ：

$$\mathrm{Ob}(\mathbf{Strat}) \coloneqq \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr})$$

(射)

conically smooth map を射とする．

定義から明らかに $\mathbf{Snglr} \subset \mathbf{Strat}$ である．ここで，圏 **Strat** における特別な射に名前をつけておこう：

定義 1.16: constructible bundle

- conically smooth な層状化写像 $\pi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}\big((E \to P),\, (B \to Q)\big)$ が**層状化ファイバー束** (conically smooth fiber bundle) であるとは，conically smooth な層状化開埋め込みの族 $\{U_\alpha \hookrightarrow B\}_{\alpha\in\Lambda}$, $\{\varphi_\alpha \colon U_\alpha \times F_\alpha \hookrightarrow E\}_{\alpha\in\Lambda}$ が存在して以下を充たすことを言う：

  (Bun-1)

  $\forall \alpha \in \Lambda$ に対して，圏 **Strat** における引き戻しの図式

$$\begin{tikzcd} U_\alpha \times F_\alpha \arrow[r, hook, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{proj}_1"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ U_\alpha \arrow[r, hook] & B \end{tikzcd}$$

  が成り立つ．

  (Bun-2)

  族 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ は B の開基である．

- conically smooth な層状化写像 $\pi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}\big((E \to P),\, (B \to Q)\big)$ が**弱構成可能束** (weakly constructuble bundle) であるとは，$\forall q \in Q$ に対して，π の q-層への制限

$$\pi|_{\pi^{-1}(B_q)} \colon \pi^{-1}(B_q) \longrightarrow B_q$$

  が層状化ファイバー束であることを言う．

- conically smooth な層状化写像 $\pi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}\big((E \to P),\, (B \to Q)\big)$ が**構成可能束** (constructuble bundle) であることを，depth(E) に関する帰納法によって定義する：

  (1) $\mathrm{depth}(E) = 0$ のとき，π が構成可能束であるとは，π が C^∞ ファイバー束であることを言う．

  (2) 深さ $k \geq 0$ までの定義が完了しているとする．$\mathrm{depth}(E) \leq k+1$ のとき，π が構成可能束であるとは，以下の 2 条件を充たすことを言う：

  (cBun-1) π は弱構成可能束である．

  (cBun-2) $\forall q \in Q$ に対して，π が誘導する層状化写像

$$\mathrm{Link}_{\pi^{-1}(B_q)}(E) \longrightarrow \pi^{-1}(B_q) \times_{B_q} \mathrm{Link}_{B_q}(B)$$

  が構成可能束である．

1.1.6 管状近傍・ハンドル分解

1.2 層状化空間の接構造

1.2.1 Kan-豊穣化

圏 **Kan** を,

- Kan 複体を対象に持つ
- Kan 複体の間の自然変換を射に持つ

(1, 1)-圏とする．**Kan** は単体的集合の圏 **sSet** の充満部分圏であり，直積 (**??**) をテンソル積とするモノイダル圏になる．

定義 1.17: 余単体的多様体

以下で定義する関手

$$\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{e}} \colon \Delta \longrightarrow \mathbf{Strat}$$

のことを**余単体的多様体** (standard cosimplicial manifold) と呼ぶ[a]：

- $[n] \in \mathrm{Ob}(\Delta)$ を，conically smooth な層状化空間

$$\Delta_e^n \coloneqq \left\{ (x^0, \dots, x^n) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n} x^i = 1 \right\}$$

  に対応付ける．
- $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\Delta}([m], [n])$ を，conically smooth な層状化写像

$$\begin{aligned}\Delta_e(\alpha) \colon \Delta_e^m &\longrightarrow \Delta_e^n, \\ (x^0, \dots, x^m) &\longmapsto \left(\sum_{j,\, \alpha(j)=0} x^j, \dots, \sum_{j,\, \alpha(j)=n} x^j \right)\end{aligned}$$

  に対応付ける．

[a] 幾何学的 n-単体に似ているが，$x^i \geq 0$ の領域で切り取っていない．

$\mathrm{PSh}(\mathbf{Strat}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Sets})$ から **sSet** への関手を

$$\begin{aligned}(\text{-})|_{\Delta} \colon \mathrm{PSh}(\mathbf{Strat}, \mathbf{Sets}) &\longrightarrow \mathbf{sSet}, \\ F &\longmapsto F \circ \Delta_e\end{aligned}$$

で定義する．さらに，$\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Strat})$ に対して前層 $\widetilde{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{S}\mathbf{trat}}(X, Y) \in \mathrm{PSh}(\mathbf{Strat}, \mathbf{Sets})$ を

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{S}\mathbf{trat}}(X, Y) \colon \mathbf{Strat}^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathbf{Sets}, \\ Z &\longmapsto \left\{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}(Z \times X, Z \times Y) \;\middle|\; \mathrm{proj}_Z \circ f = \mathrm{proj}_Z \right\},\end{aligned}$$

$$(Z \xrightarrow{\alpha} W) \longmapsto \left(\substack{\widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{trat}}}(X,Y)(Z) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{trat}}}(X,Y)(W), \\ f \longmapsto \left((w,x) \mapsto \left(w, \mathrm{proj}_Y \circ f(\alpha(w),x)\right) \right)} \right)$$

で定義する．ただし，conically smooth な層状化写像 $\mathrm{proj}_Z \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}(Z \times X,\ Z)$ とは第一成分への射影のことである．同様にして前層 $\widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{nglr}}}(X,\ Y) \in \mathrm{PSh}(\mathbf{Strat},\ \mathbf{Sets})$ を

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{nglr}}}(X,\ Y) \colon \mathbf{Strat}^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathbf{Sets}, \\
Z &\longmapsto \left\{\, f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(Z \times X,\ Z \times Y) \;\middle|\; \mathrm{proj}_Z \circ f = \mathrm{proj}_Z \,\right\}, \\
(Z \xrightarrow{\alpha} W) &\longmapsto \left(\substack{\widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{nglr}}}(X,Y)(Z) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{nglr}}}(X,Y)(W), \\ f \longmapsto \left((w,x) \mapsto \left(w, \mathrm{proj}_Y \circ f(\alpha(w),x)\right) \right)} \right)
\end{aligned}$$

で定義する．

補題 1.1:

$\forall X,\ Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Strat})$ に対して定まる単体的集合

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{trat}}(X,\ Y) := \widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{trat}}}(X,\ Y)\Big|_{\Delta},$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{nglr}}(X,\ Y) := \widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{nglr}}}(X,\ Y)\Big|_{\Delta}$$

は Kan 複体である．

証明 [?, Lemma 4.1.4.]. ■

定義 1.18: $(\infty,\ 1)$-圏 $\mathcal{S}\mathrm{trat}$, $\mathcal{S}\mathrm{nglr}$, $\mathcal{B}\mathrm{sc}$

Kan-豊穣圏 $\mathcal{S}\mathbf{trat}$ を以下で定義する：

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{S}\mathbf{trat}) := \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr})$
- 補題 1.1 で構成した $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{trat}}(X,\ Y) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Kan})$ を Hom 対象とする．

同様に，**Kan-豊穣圏 $\mathcal{S}\mathbf{nglr}$** を以下で定義する：

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{S}\mathbf{nglr}) := \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr})$
- 補題 1.1 で構成した $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{nglr}}(X,\ Y) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Kan})$ を Hom 対象とする．

Kan-豊穣圏 $\mathcal{S}\mathbf{nglr}$ の対象を $\mathrm{Ob}(\mathbf{Bsc})$ に制限して得られる充満部分圏を $\mathcal{B}\mathbf{sc}$ と書く．

! **Kan-豊穣圏**を homotopy coherent nerve functor $\mathrm{N_{hc}}\colon \mathbf{Cat}_{\boldsymbol{\Delta}} \longrightarrow \mathbf{sSet}$ で単体的集合の圏 $\mathbf{sSet}$ へ埋め込んだものは $(\infty,\ 1)$-圏である [?, Proposition 1.1.5.10.]．故に以下では **Kan-豊穣圏 $\mathcal{S}\mathbf{trat}$, $\mathcal{S}\mathbf{nglr}$** と $(\infty,\ 1)$-圏 $\mathrm{N_{hc}}(\mathcal{S}\mathbf{trat})$, $\mathrm{N_{hc}}(\mathcal{S}\mathbf{nglr})$ を区別しない．

1.2.2 $(\infty, 1)$-圏におけるファイブレーション

定義 1.19: $(\infty, 1)$-ファイブレーション

$p\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{B}$ を $(\infty, 1)$-圏の関手とする．

(lifting property)

包含 $\iota \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda^n_j, \Delta^n)$ に対して $p\circ f_0 = f\circ\iota$ を充たす任意の $(f_0, f) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda^n_j, \mathcal{E})\times \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n_j, \mathcal{B})$ に対して，以下の図式を可換にする $\bar{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \mathcal{E})$ が存在する：

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_j \arrow[r, "\forall f_0"] \arrow[d, hook, "\iota"'] & \mathcal{E} \arrow[d, "p"] \\ \Delta^n \arrow[r, "\forall f"'] \arrow[ur, dashed, "\exists \bar{f}"] & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

- p が**内的ファイブレーション** (inner fibration) であるとは，$0 < \forall j < \forall n$ に対して **(lifting property)** を充たすことを言う．
- p が**右ファイブレーション** (right fibration) であるとは，$0 < \forall j \le \forall n$ に対して **(lifting property)** を充たすことを言う．
- p が**左ファイブレーション** (left fibration) であるとは，$0 \le \forall j < \forall n$ に対して **(lifting property)** を充たすことを言う．
- p が **Kan ファイブレーション** (Kan fibration) であるとは，$0 \le \forall j \le \forall n$ に対して **(lifting property)** を充たすことを言う．

系??によると，**(lifting property)** は，$(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{B}$ における角の図式 $\bigl(p_{[n-1]}(f_{00}), \dots, \underbrace{\bullet}_{j}, \dots, p_{[n-1]}(f_{0n})\bigr) \in (\mathcal{B}_{n-1})^{\times n}$ を n-射 $f \in \mathcal{B}_n$ が埋めているならば，$(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{E}$ における角の図式 $\bigl(f_{00}, \dots, \underbrace{\bullet}_{j}, \dots, f_{0n}\bigr) \in (\mathcal{E}_{n-1})^{\times n}$ を埋める n-射 $\bar{f} \in \mathcal{E}_n$ が存在することを主張している．

2 つの右ファイブレーション $\mathcal{E} \xrightarrow{p} \mathcal{B}$, $\mathcal{E}' \xrightarrow{p'} \mathcal{B}$ が与えられたとき，これらの間の射とは集合

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}') := \left\{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}') \,\middle|\, p' \circ f = p \right\}$$

のことである．$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ の元を $\mathbf{sSet}$ における可換図式として表すと以下の通り：

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathcal{E}' \arrow[dl, "p'"] \\ & \mathcal{B} & \end{tikzcd}$$

$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}') \subset \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ を【例??】の方法で単体的集合と見做せる．このようにして得られる単体的集合 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ の最大の部分 Kan 複体を $\mathbf{Hom}_{\boldsymbol{\mathcal{R}}\mathbf{fib}_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}}(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathcal{E}'})$ と書く．

定義 1.20: 右ファイブレーションの成す $(\infty, 1)$-圏

$\mathcal{B}$ を $(\infty, 1)$-圏とする．**Kan-豊穣圏** $\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}}$ を

- 右ファイブレーションを対象とする
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ を Hom 対象とする

ことで定義する．以降では $(\infty, 1)$-圏 $\mathrm{N}_{\mathrm{hc}}(\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}}) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{sSet})$ のことも $\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}}$ と書き，区別しない．

1.2.3 $(\infty, 1)$-圏におけるスライス圏

定義 1.21: 単体的集合の join

2 つの単体的集合 $S, T \in \mathrm{Ob}(\mathbf{sSet})$ の **join** とは，単体的集合

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S \star T} \colon \Delta^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathbf{Sets}, \\ [n] &\longmapsto \coprod_{[i];\, -1 \le i \le n} (S_i \times T_{n-i-1}), \\ \Bigl([m] \xrightarrow{\alpha} [n]\Bigr) &\longmapsto \Bigl(\bigl([i];\, (x, y)\bigr) \mapsto \bigl(\alpha^{-1}([i]);\, (S(\alpha|_{\alpha^{-1}([i])})(x),\, T(\alpha|_{\alpha^{-1}([m]\setminus[i])})(y))\bigr)\Bigr) \end{aligned}$$

のこと．ただし $S_{-1} = T_{-1} \coloneqq \{*\}$, $[-1] \coloneqq \emptyset$ とおいた．

$d_j^n \in \mathrm{Hom}_{\Delta^{\mathrm{op}}}([n], [n-1])$ に対して

$$\begin{aligned} (d_j^n)^{-1}([i]) &= \begin{cases} [i], & -1 \le i < j \\ [i-1], & j \le i \le n \end{cases} \\ (d_j^n)^{-1}([n] \setminus [i]) &= \begin{cases} [n-1] \setminus [i], & -1 \le i < j \\ [n-1] \setminus [i-1], & j \le i \le n \end{cases} \end{aligned}$$

であるから，$S \star T$ の面写像は $n \ge 1$, $0 \le j \le n$ に対して

$$\begin{aligned} \partial_j^n \colon \coprod_{-1 \le i \le n} (S_i \times T_{n-i-1}) &\longrightarrow \coprod_{-1 \le i \le n-1} (S_i \times T_{n-i-2}), \\ \bigl([i];\, (x, y)\bigr) &\longmapsto \begin{cases} \bigl([-1];\, (*, \partial_j^n y)\bigr), & i = -1 \\ \bigl([i];\, (x, \partial_{j-i-1}^{n-i-1} y)\bigr), & 0 \le i < j,\ (i, j) \ne (n-1, n) \\ \bigl([i-1];\, (\partial_j^i x, y)\bigr), & j \le i \le n-1,\ (i, j) \ne (0, 0) \\ \bigl([n-1];\, (\partial_j^n x, *)\bigr), & i = n \\ \bigl([n-1];\, (x, *)\bigr), & (i, j) = (n-1, n) \\ \bigl([-1];\, (*, y)\bigr), & (i, j) = (0, 0) \end{cases} \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

となる．

【例 1.2.1】join $\Delta^0 \star \Delta^0$

$\Delta^0 \star \Delta^0$ を計算してみよう[a]．まず対象は

$$(\Delta^0 \star \Delta^0)_0 = {\Delta^0}_0 \sqcup {\Delta^0}_0 = \left\{ \begin{array}{c} \{0\} \\ \bullet \\ \\ \bullet \\ \{0\} \end{array} \right\}$$

である．1-射は

$$(\Delta^0 \star \Delta^0)_1 = {\Delta^0}_1 \sqcup (\Delta^0_0 \times \Delta^0_0) \sqcup {\Delta^0}_1$$

であるが，(1.2.1) より始点関数は

$$\begin{aligned} \partial^1_1|_{\Delta^0_0 \times \Delta^0_0} \colon \Delta^0_0 \times \Delta^0_0 &\longrightarrow {\Delta^0}_0 \sqcup {\Delta^0}_0, \\ (\{0\}, \{0\}) &\longmapsto \{0\} \end{aligned}$$

終点関数は

$$\begin{aligned} \partial^1_0|_{\Delta^0_0 \times \Delta^0_0} \colon \Delta^0_0 \times \Delta^0_0 &\longrightarrow {\Delta^0}_0 \sqcup {\Delta^0}_0, \\ (\{0\}, \{0\}) &\longmapsto \{0\} \end{aligned}$$

となるため，${\Delta^0}_1$, ${\Delta^0}_1$ が縮退していることを考慮すると

$$(\Delta^0 \star \Delta^0)_1 = \left\{ \begin{array}{c} \{0\} \\ \bullet \\ \downarrow \\ \bullet \\ \{0\} \end{array} \right\}$$

と図示できる．

---

[a] 左右の区別を付けるために色を付けた．

【例 1.2.2】join $\Delta^1 \star \Delta^0$

$\Delta^1 \star \Delta^0$ を計算してみよう．まず対象は

$$(\Delta^1 \star \Delta^0)_0 = {\Delta^1}_0 \sqcup {\Delta^0}_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \{0\} & & \{1\} \\ \bullet & & \bullet \\ & & \\ & \bullet & \\ & \{0\} & \end{array} \right\}$$

である．1-射は

$$(\Delta^1 \star \Delta^0)_1 = {\Delta^1}_1 \sqcup (\Delta^1_0 \times \Delta^0_0) \sqcup {\Delta^0}_1$$

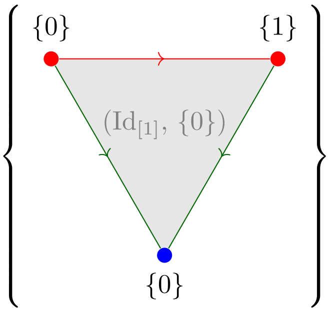
であるが，(1.2.1) より始点関数は

$$
\begin{aligned}
\partial_1^1|_{\Delta_0^1 \times \Delta_0^0} \colon \Delta_0^1 \times \Delta_0^0 &\longrightarrow {\Delta^1}_0 \sqcup {\Delta^0}_0, \\
(x,\, \{0\}) &\longmapsto x
\end{aligned}
$$

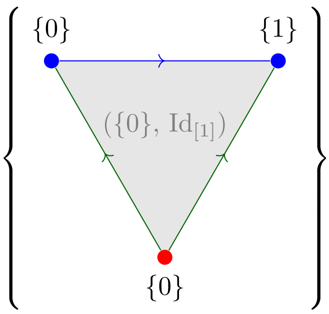
終点関数は

$$
\begin{aligned}
\partial_0^1|_{\Delta_0^1 \times \Delta_0^0} \colon \Delta_0^1 \times \Delta_0^0 &\longrightarrow {\Delta^1}_0 \sqcup {\Delta^0}_0, \\
(x,\, \{0\}) &\longmapsto \{0\}
\end{aligned}
$$

となるため，

$\Delta^1 \star \Delta^0 =$ 

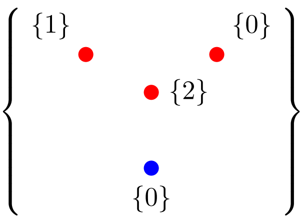
と図示できる．ただし，三角形の内部は 2-射 $(\mathrm{Id}_{[1]},\, \{0\}) \in \Delta_1^1 \times \Delta_0^0 \subset (\Delta^1 \star \Delta^0)_2$ が埋めている．同様に

$(\Delta^0 \star \Delta^1)_1 =$ 

であることが分かる．

【例 1.2.3】join $\Delta^2 \star \Delta^0$

$\Delta^2 \star \Delta^0$ を計算してみよう．まず

$(\Delta^2 \star \Delta^0)_0 = {\Delta^2}_0 \sqcup {\Delta^0}_0 =$ 

である．次に 1 射は

$$(\Delta^2 \star \Delta^0)_1 = {\Delta^2}_1 \sqcup (\Delta^2_0 \times \Delta^0_0) \sqcup {\Delta^0}_1$$

であるが，(1.2.1) より始点関数は

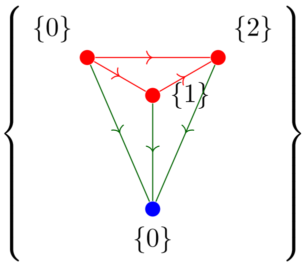
$$\begin{aligned} \partial^1_1|_{\Delta^2_0 \times \Delta^0_0} \colon \Delta^2_0 \times \Delta^0_0 &\longrightarrow {\Delta^2}_0 \sqcup {\Delta^0}_0, \\ (x,\, \mathrm{Id}_{\{0\}}) &\longmapsto x \end{aligned}$$

となり，終点関数は

$$\begin{aligned} \partial^1_0|_{\Delta^2_0 \times \Delta^0_0} \colon \Delta^2_0 \times \Delta^0_0 &\longrightarrow {\Delta^2}_0 \sqcup {\Delta^0}_0, \\ (x,\, \mathrm{Id}_{\{0\}}) &\longmapsto \{0\} \end{aligned}$$

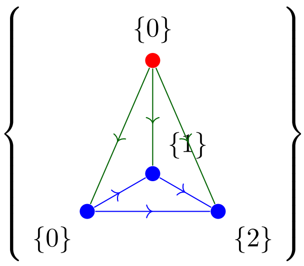
となる．従って図式??に倣うと

$$(\Delta^2 \star \Delta^0)_1 = {\Delta^2}_1 \sqcup (\Delta^2_0 \times \Delta^0_0) \sqcup {\Delta^0}_1 =$$



と図示できる．ただし，四面体の内部は 3-射 $(\mathrm{Id}_{[2]},\, \{0\}) \in \Delta^2_2 \times \Delta^0_0 \subset (\Delta^1 \star \Delta^0)_3$ が埋めている．同様に，$\Delta^0 \star \Delta^2$ の 1-射を図示すると

$$(\Delta^0 \star \Delta^2)_1 = {\Delta^0}_1 \sqcup (\Delta^0_0 \times \Delta^2_0) \sqcup {\Delta^2}_1 =$$



のようになる．

補題 1.2: $(\infty, 1)$-圏同士の join は $(\infty, 1)$-圏

$(\infty, 1)$-圏同士の join は $(\infty, 1)$-圏である．

証明 [?, Proposition 1.2.8.3] ■

定義 1.22: スライス $(\infty, 1)$-圏

$(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{D}, \mathcal{C}$ および $(\infty, 1)$-圏の関手 $p \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ を与える．p に沿った $\mathcal{C}$ の**スライス圏**

(overcategory)

$$\boldsymbol{\mathcal{C}_{/p}} : \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を以下で定義する：

- $\forall [n] \in \mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})$ に対して，集合

$$\mathrm{Hom}_p\left(\Delta^n \star \mathcal{D},\, \mathcal{C}\right) \coloneqq \left\{\, f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(\Delta^n \star \mathcal{D},\, \mathcal{C}\right) \;\middle|\; f|_{\mathcal{D}} = p \,\right\}$$

  を対応付ける[a]．
- $\forall \alpha \in \mathrm{Hom}_{\Delta^{\mathrm{op}}}\left([m],\, [n]\right)$ に対して，写像

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{/p}(\alpha) \colon \mathrm{Hom}_p\left(\Delta^m \star \mathcal{D},\, \mathcal{C}\right) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_p\left(\Delta^n \star \mathcal{D},\, \mathcal{C}\right), \\ f &\longmapsto f \circ \left(\alpha_* \star \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}\right) \end{aligned}$$

  を対応付ける．

実際，単体的集合 $\mathcal{C}_{/p}$ は $(\infty,\, 1)$-圏である [**?**, Tag 018F]．

[a] $f|_{\mathcal{D}}$ というのは，join の定義における $(\Delta^n \star \mathcal{D})_k$ の disjoint union のうち，添字 $i = 0$ が振られている成分への制限を意味する．

---

p に沿った $\mathcal{C}$ の**コスライス圏** (undercategory)

$$\boldsymbol{\mathcal{C}_{p/}} : \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を以下で定義する：

- $\forall [n] \in \mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})$ に対して，集合

$$\mathrm{Hom}_p\left(\mathcal{D} \star \Delta^n,\, \mathcal{C}\right) \coloneqq \left\{\, f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(\mathcal{D} \star \Delta^n,\, \mathcal{C}\right) \;\middle|\; f|_{\mathcal{D}} = p \,\right\}$$

  を対応付ける[a]．
- $\forall \alpha \in \mathrm{Hom}_{\Delta^{\mathrm{op}}}\left([m],\, [n]\right)$ に対して，写像

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{p/}(\alpha) \colon \mathrm{Hom}_p\left(\mathcal{D} \star \Delta^m,\, \mathcal{C}\right) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_p\left(\mathcal{D} \star \Delta^n,\, \mathcal{C}\right), \\ f &\longmapsto f \circ \left(\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \star \alpha_*\right) \end{aligned}$$

  を対応付ける．

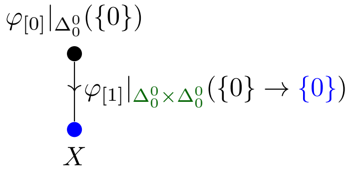
[a] $f|_{\mathcal{D}}$ というのは，join の定義における $(\mathcal{D} \star \Delta^n)_k$ の disjoint union のうち，添字 $i = n$ が振られている成分への制限を意味する．

特に注目すべきは，$(\infty,\, 1)$-圏の関手 $p \colon \Delta^0 \longrightarrow \mathcal{C}$ をとった場合である．このとき $X \coloneqq p_{[0]}(\{0\}) \in \mathcal{C}_0$ とおいて $\boldsymbol{\mathcal{C}_{/X}}$, $\boldsymbol{\mathcal{C}_{X/}}$ などと書く．

まず，$(\infty,\, 1)$-圏 $\mathcal{C}_{/X}$ の対象 $\varphi \in (\mathcal{C}_{/X})_0 = \mathrm{Hom}_p\left(\Delta^0 \star \Delta^0,\, \mathcal{C}\right)$ をとる．すると【例 1.2.1】および $\varphi|_{\Delta^0} = p$

の条件から，$\varphi_{[1]} \colon (\Delta^0 \star \Delta^0)_1 \longrightarrow \mathcal{C}_1$ とは図式

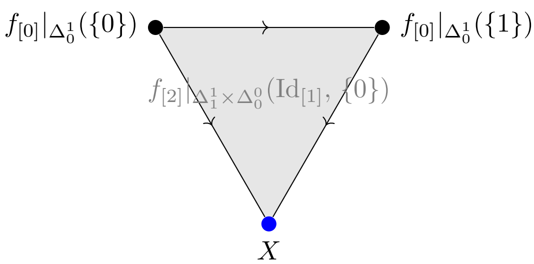
$\varphi =$



である．$n \geq 2$ 射に相当する $\varphi_{[n]} \colon (\Delta^0 \star \Delta^0)_n \longrightarrow \mathcal{C}_n$ のデータは縮退していて自明である．従って，φ は $(1,\,1)$-圏における X 上のスライス圏の対象と等価なデータを与える．

同様に，$(\infty,\,1)$-圏 $\mathcal{C}_{/X}$ の 1-射 $f \in (\mathcal{C}_{/X})_1 = \mathrm{Hom}_p\,(\Delta^1 \star \Delta^0,\,\mathcal{C})$ とは，**【例 1.2.2】** より

$f =$



のことである．ただし三角形の内部は 2-射 $f_{[2]}|_{\Delta^1_1 \times \Delta^0_0}(\mathrm{Id}_{[2]},\,\{0\}) \in \mathcal{C}_2$ が埋めている．これは $(1,\,1)$-圏における X 上のスライス圏の射のデータに対応しているが，横向きの矢印を決めるだけでは f が upto homotopy でしか定まらないという点で異なっている．

$(\infty,\,1)$-圏 $\mathcal{C}_{/X}$ の n-射も同様に図示できる．

【例 1.2.4】スライス圏からの forgetful functor

$(\infty,\,1)$-圏 $\mathcal{C}$ の，$X \colon \Delta^0 \longrightarrow \mathcal{C}$ に沿ったスライス圏に対して，**忘却関手** (forgetful functor)

$$\mathrm{forget} \colon \mathcal{C}_{/X} \longrightarrow \mathcal{C}$$

を次のように定義する：

$$\begin{aligned} \mathrm{forget}_{[n]} \colon (\mathcal{C}_{/X})_n = \mathrm{Hom}_X\,(\Delta^n \star \Delta^0,\,\mathcal{C}) &\longrightarrow \mathcal{C}_n = \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\,(\Delta^n,\,\mathcal{C}), \\ f &\longmapsto f|_{\Delta^n} \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

$n = 0,\,1,\,2$ の場合，i.e. **【例 1.2.1】**, **【例 1.2.2】**, **【例 1.2.3】** の図式においては，ちょうど $X \in \mathcal{C}_0$ に対応する青色の頂点（コーンポイント）を除去する操作に対応している．(1.2.2) の定義は右ファイブレーションになっている．

1.2.4 $(\infty,\,1)$-圏の limit/colimit

後の議論のため，先取りして $(\infty,\,1)$-圏における limit/colimit を定義しておこう．$(\infty,\,1)$-圏のモデルとして quasi-category を採用する場合，これは **homotopy limit/colimit** と呼ばれることもある．

定義 1.23: $(\infty, 1)$-圏における始対象と終対象

- $(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}$ における対象 $x \in \mathcal{C}_0$ が**始対象** (initial object) であるとは，ホモトピー圏 $\mathrm{h}\mathcal{C}$ における始対象[a]であること．
- $(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}$ における対象 $x \in \mathcal{C}_0$ が**終対象** (final object) であるとは，ホモトピー圏 $\mathrm{h}\mathcal{C}$ における終対象[b]であること．

[a] $(1, 1)$-圏の**始対象**とは，空の図式における余極限のこと．
[b] $(1, 1)$-圏の**終対象**とは，空の図式における極限のこと．

定義 1.24: $(\infty, 1)$-圏の limit/colimit

$(\infty, 1)$-圏の関手 $D\colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ を与える[a]．

- D の **limit** とは，スライス $(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}_{/D}$ における終対象のこと．$\boldsymbol{\lim D} \in \mathcal{C}_0$ と書く．
- D の **colimit** とは，スライス $(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}_{D/}$ における始対象のこと．$\boldsymbol{\mathrm{colim}\, D} \in \mathcal{C}_0$ と書く．

[a] $(1, 1)$-圏の場合からのアナロジーで，D を図式と見做す．

【例 1.2.5】pullback

単体的集合の積 $S \times T\colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ における面写像とは

$$\begin{aligned} \partial_j^n\colon S_n \times T_n &\longrightarrow S_{n-1} \times T_{n-1}, \\ (x,\, y) &\longmapsto (\partial_j^n x,\, \partial_j^n y) \end{aligned}$$

のことであった．故に，単体的集合 $\Delta^1 \times \Delta^1$ は，$\Delta_0^1 =: \{\bullet_0,\, \bullet_1\}$ とおくと

$$\Delta^1 \times \Delta^1 = \begin{tikzcd} (0,\,0) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & (1,\,0) \arrow[d] \\ (0,\,1) \arrow[r] & (1,\,1) \end{tikzcd}$$

と図示できる．ただし，2-射以上は縮退していて見えない．

$(\infty, 1)$-圏の関手 $D\colon \Delta^1 \times \Delta^1 \longrightarrow \mathcal{C}$ の limit のことを（存在すれば）**pullback** と呼び，

$$\boldsymbol{D(0,\,1) \times_{D(1,\,1)} D(1,\,0)} \coloneqq \lim D \in \mathcal{C}_0$$

と書く．

1.2.5 Unstraightening construction

定理 1.1: unstraightening construction

$(\infty, 1)$-圏同値

$$\mathbf{PSh}_{(\infty,1)}(\mathcal{B}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}}$$

が存在する．

<u>**証明**</u> $(\infty, 1)$-圏同値

$$\mathrm{Un}\colon \mathbf{PSh}_{(\infty,1)}(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}}$$

は，次のようにして構成される (**unstraightening construction**)：

対象 $F \in \mathbf{PSh}_{(\infty,1)}(\mathcal{B})_0$ に対して，$(\infty, 1)$-圏の pullback

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Un}(F) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}\mathbf{paces}_{/*} \arrow[d, "\text{forget}"] \\ \mathcal{B} \arrow[r, "F"'] & \mathcal{S}\mathbf{paces} \end{tikzcd}$$

により得られる右ファイブレーション $\mathrm{Un}(F) \longrightarrow \mathcal{B} \in (\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}})_0$ を対応付ける．

***n*-射**

逆向きの $(\infty, 1)$-圏同値 (**straightning construction**)

$$\mathrm{St}\colon \mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}} \longrightarrow \mathbf{PSh}_{(\infty,1)}(\mathcal{B})$$

は難しい．詳細は [**?**, Proposition 2.2.3.11] を参照． ■

1.2.6 $(\infty, 1)$-圏における米田埋め込み

定義 1.25: twisted arrow category

$(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}$ を与える．このとき，$\mathcal{C}$ の **twisted arrow category** と呼ばれる $(\infty, 1)$-圏を以下で定義する：

$$\begin{aligned} \mathrm{Tw}(\mathcal{C})\colon \Delta^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathbf{Sets}, \\ [n] &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big((\Delta^n)^{\mathrm{op}} \star \Delta^n,\, \mathcal{C}\big), \\ \big([m] \xrightarrow{\alpha} [n]\big) &\longmapsto \big(f \mapsto f \circ (\alpha_* \times \alpha_*)\big) \end{aligned}$$

$(\infty, 1)$-圏の関手

$$\mathrm{pr}\colon\ \mathrm{Tw}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C}$$

を以下で定義すると，これは左ファイブレーションになる [**?**, Tag 03JQ]：

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_{[n]}\colon\ \mathrm{Tw}(\mathcal{C})_n &\longrightarrow \mathcal{C}^{\mathrm{op}}_n \times \mathcal{C}_n = \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \mathcal{C}^{\mathrm{op}}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \mathcal{C}) \\ f &\longmapsto \big(f|_{(\Delta^n)^{\mathrm{op}}},\, f|_{\Delta^n}\big) \end{aligned}$$

$(\infty, 1)$-圏における Hom 関手

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}\mathbf{paces}$$

の自然な構成は，straightning construction を用いた

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Tw}(\mathcal{C}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{pr}"'] & \mathcal{S}\mathbf{paces}_{*/} \arrow[d, "\mathrm{forget}"] \\ \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}} := \mathrm{St}(\mathrm{pr})"'] & \mathcal{S}\mathbf{paces} \end{tikzcd}$$

である [?, I.26., p.19].

定義 1.26: $(\infty, 1)$-圏の米田埋め込み (informal)

$\mathcal{C}$ を $(\infty, 1)$-圏とする．$(\infty, 1)$-圏の**米田埋め込み** (Yoneda embedding)

$$よ : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathcal{C})$$

とは，$\mathcal{C}$ から $(\infty, 1)$-前層の成す $(\infty, 1)$-圏 $\mathbf{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathcal{C})$ への $(\infty, 1)$-圏の関手であって，対象 $x \in \mathcal{C}_0$ に対して

$$\begin{aligned} よ_{[0]}(x)_{[0]} : \mathcal{C}_0^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathcal{S}\mathbf{paces}_0, \\ y &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \end{aligned}$$

を充たす[a]ような $(\infty, 1)$-圏の関手 $よ_{[0]}(x) \in \mathbf{PSh}_{(\infty, 1)}(\mathcal{C})_0 = \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathbf{paces})$ を対応付けるもののこと[b].

[a] $(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}$ において，対象 $x, y \in \mathcal{C}_0$ の間の 1-射全体の集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \subset \mathcal{C}_1$ は Kan 複体を成す [?, Tag 01JC].

[b] 厳密な構成については [?, Tag 03NF] を参照.

1.2.7 層状化空間の接構造

定義 1.27: enter-path category

conically smooth な層状化空間 $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Strat})$ の **enter-path** $(\infty, 1)$**-category** とは，$(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{B}\mathbf{sc}$ のスライス圏

$$\mathcal{E}\mathbf{ntr}(X) := \mathcal{B}\mathbf{sc}_{/X}$$

のこと.

定義 1.28: tangent classifier

$\iota\colon \mathcal{B}\mathbf{sc} \hookrightarrow \mathcal{S}\mathbf{nglr}$ を包含とする．**tangent classifier** とは，$(\infty, 1)$-圏の関手

$$\boldsymbol{\tau}\colon \mathcal{S}\mathbf{nglr} \xrightarrow{\text{よ}} \mathbf{PSh}_{(\infty,1)}(\mathcal{S}\mathbf{nglr}) \xrightarrow{\iota^*} \mathbf{PSh}_{(\infty,1)}(\mathcal{B}\mathbf{sc})$$

のこと．

定義 1.26 より，tangent classifier は conically smooth な層状化空間 $X \in \mathcal{S}\mathbf{nglr}_0$ に対して $(\infty, 1)$-圏の表現可能前層

$$\tau_{[0]}(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}(\text{-}, X) \in \mathbf{PSh}_{(\infty,1)}(\mathcal{B}\mathbf{sc})_0 \tag{1.2.3}$$

を対応付ける．

!

定理 1.1 により，tangent classifier τ のことを

$$\tau\colon \mathcal{S}\mathbf{nglr} \xrightarrow{\text{よ}} \mathbf{PSh}_{(\infty,1)}(\mathcal{S}\mathbf{nglr}) \xrightarrow{\iota^*} \mathbf{PSh}_{(\infty,1)}(\mathcal{B}\mathbf{sc}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}$$

と見做すこともできる．このとき，$\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}$ の構成および $(\infty, 1)$-前層 (1.2.3) に対する定理 1.1 の具体的構成から，conically smooth な層状化空間 $X \in \mathcal{S}\mathbf{nglr}_0$ に対して定まる $(\infty, 1)$-圏の右ファイブレーション $\tau_{[0]}(X) \in (\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}})_0$ とは忘却関手

$$\tau_{[0]}(X)\colon \mathcal{E}\mathbf{ntr}(X) \longrightarrow \mathcal{B}\mathbf{sc}$$

のことである．この忘却関手を以下では $\boldsymbol{\tau_X} \coloneqq \tau_{[0]}(X)$ と書く．

定義 1.29: $\mathcal{B}$-多様体

- **$(\mathcal{B}, f)$ 構造**[a]とは，$(\infty, 1)$-圏の右ファイブレーション $(\mathcal{B} \xrightarrow{f} \mathcal{B}\mathbf{sc}) \in (\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}})_0$ のこと．
- $(\mathcal{B}, f)$ 構造 $\mathcal{B} \xrightarrow{f} \mathcal{B}\mathbf{sc}$ を 1 つ固定する．このとき，**$\mathcal{B}$-多様体** ($\mathcal{B}$-manifold) の成す $(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{M}\mathbf{fld}(\mathcal{B})$ とは，$(\infty, 1)$-圏の pullback

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}\mathbf{fld}(\mathcal{B}) \arrow[r] \arrow[d] & (\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}})_{/f} \arrow[d, "\text{forget}"] \\ \mathcal{S}\mathbf{nglr} \arrow[r, "\tau"'] & \mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}} \end{tikzcd}$$

のこと．特に，$\mathcal{M}\mathbf{fld}(\mathcal{B})_0$ の元は以下の 2 つのデータから成り，**$\mathcal{B}$-多様体**と呼ばれる：
  - conically smooth な層状化空間 $X \in \mathcal{S}\mathbf{nglr}_0$
  - $(\infty, 1)$-圏の関手 $g\colon \mathcal{E}\mathbf{ntr}(X) \longrightarrow \mathcal{B}$

  これらは以下の条件を充たさねばならない：

  (lift of tangent classifier)

  $\mathbf{sSet}$ における以下の図式は可換である：

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B} \arrow[d, "f"] \\ \mathcal{E}\mathbf{ntr}(X) \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "\tau_X"'] & \mathcal{B}\mathbf{sc} \end{tikzcd}$$

[a] [?, Definition 1.1.6] では $(\infty, 1)$-**category of basics** と呼ばれている．

1.2.8 C^∞-多様体の接構造との比較

1.3 Disk algebras

1.3.1 $(\infty, 1)$-オペラッド

本資料では，$(\infty, 1)$-圏を quasi-category として定義した．この小節では，quai-category における colored operad を定義する．

定義 1.30: 圏 $\mathbf{Fin}_*$

$(1, 1)$-圏 $\mathbf{Fin}_*$ を以下で定義する：

- 基点付き有限集合

$$\langle n \rangle := \{*, 1, \dots, n\}$$

を対象に持つ．i.e.

$$\mathrm{Ob}(\mathbf{Fin}_*) := \{ \langle n \rangle \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \}.$$

- $\forall \langle m \rangle, \langle n \rangle \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Fin}_*)$ に対して，それらの間の基点を保つ写像を射とする．i.e.

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m \rangle, \langle n \rangle) := \{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(\langle m \rangle, \langle n \rangle) \mid f(*) = * \}.$$

定義 1.31: innert/active morphism

- 圏 $\mathbf{Fin}_*$ における射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m \rangle, \langle n \rangle)$ が **innert** であるとは，$\forall i \in \langle n \rangle \setminus \{*\}$ に対して $f^{-1}(\{i\}) \subset \langle m \rangle$ が 1 点集合であることを言う．
- 圏 $\mathbf{Fin}_*$ における射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m \rangle, \langle n \rangle)$ が **active** であるとは，$f^{-1}(\{*\}) = \{*\} \subset \langle m \rangle$ であることを言う．

脈体の定義において $[n] \in \mathrm{Ob}(\Delta)$ を $(1, 1)$-圏と見做した方法と同様にして，半順序集合 $\{n-1 \leq n\}$ を $(1, 1)$-圏と見做す．このとき，

$$\mathrm{N}(\{n-1 \leq n\}) = \left(\underset{n-1}{\bullet} \longrightarrow \underset{n}{\bullet} \right) \cong \Delta^1$$

と図示できる．同様に，

$$\mathrm{N}\bigl(\{0 \le 1\}\bigr) = \left(\underset{0}{\bullet} \longrightarrow \underset{1}{\bullet} \right) \cong \Delta^1$$

である．

定義 1.32: p-Cartesian morphism

$p\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{B}$ を内的ファイブレーションとする．

- $\mathcal{E}$ の 1-射 $(x \xrightarrow{f} y) \in \mathcal{E}_1$ が以下の条件を充たすとき，f は **p-Cartesian** であると言う：

  (Cartesian) $\forall n \ge 2$ に対して，以下の図式を可換にする $\mathcal{E}$ の n-射 $\bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \mathcal{E}) \cong \mathcal{E}_n$ が存在する：

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{N}\bigl(\{n-1 \le n\}\bigr) \cong \Delta^1 \arrow[d, hook] \arrow[drr, "f"] & & \\
\Lambda^n_n \arrow[rr, "\forall \varphi_0"] \arrow[d, hook] & & \mathcal{E} \arrow[d, "p"] \\
\Delta^n \arrow[rr, "\forall \varphi"'] \arrow[urr, dashed, "\exists \bar{\varphi}"] & & \mathcal{B}
\end{tikzcd}$$

  ただし，**sSet** の射 $f\colon \mathrm{N}\bigl(\{n-1 \le n\}\bigr) \longrightarrow \mathcal{E}$ とは

$$f_{[1]}\left(\underset{n-1}{\bullet} \longrightarrow \underset{n}{\bullet} \right) = \underset{x}{\bullet} \xrightarrow{f} \underset{y}{\bullet}$$

  を充たす唯一の自然変換である．

- $\mathcal{E}$ の 1-射 $(x \xrightarrow{f} y) \in \mathcal{E}_1$ が以下の条件を充たすとき，f は **p-coCartesian** であると言う：

  (coCartesian) $\forall n \ge 2$ に対して，以下の図式を可換にする $\mathcal{E}$ の n-射 $\bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \mathcal{E}) \cong \mathcal{E}_n$ が存在する：

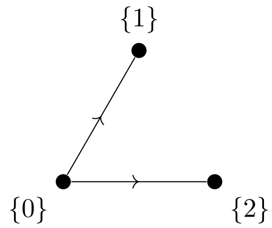
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{N}\bigl(\{0 \le 1\}\bigr) \cong \Delta^1 \arrow[d, hook] \arrow[drr, "f"] & & \\
\Lambda^n_0 \arrow[rr, "\forall \varphi_0"] \arrow[d, hook] & & \mathcal{E} \arrow[d, "p"] \\
\Delta^n \arrow[rr, "\forall \varphi"'] \arrow[urr, dashed, "\exists \bar{\varphi}"] & & \mathcal{B}
\end{tikzcd}$$

  ただし，**sSet** の射 $f\colon \mathrm{N}\bigl(\{0 \le 1\}\bigr) \longrightarrow \mathcal{E}$ とは

$$f_{[1]}\left(\underset{n-1}{\bullet} \longrightarrow \underset{n}{\bullet} \right) = \underset{x}{\bullet} \xrightarrow{f} \underset{y}{\bullet}$$

  を充たす唯一の自然変換である．

$n = 2$ の場合の **(coCartesian)** の可換図式の意味を，系??を用いて解読しよう．まず，包含 $\mathrm{N}\bigl(\{0 \le 1\}\bigr) \hookrightarrow \Lambda^2_0$ というのは，系??による角 Λ^2_0 の図示

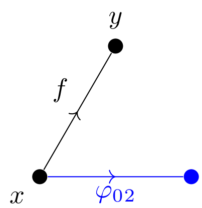


のうち辺 $\{0\} \longrightarrow \{1\}$ への埋め込みであるから，可換図式の

$$\begin{tikzcd} \mathrm{N}\big(\{0 \leq 1\}\big) \cong \Delta^1 \arrow[d, hook] \arrow[dr, "f"] & \\ \Lambda^2_0 \arrow[r, "\forall \varphi_0"'] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

の部分は勝手な角の図式 $\varphi_0 = (\bullet,\, f,\, \varphi_{02}) \in \mathcal{E}_1^{\times 2}$ を与えることに対応する．図示すると

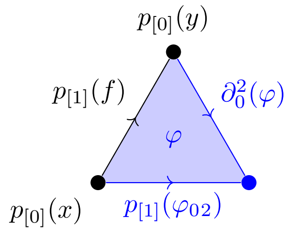
$\varphi_0 =$



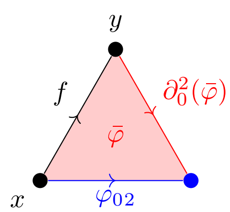
(1.3.1)

となる．従って，**(coCart-2)** の主張は次のような意味を持つ：

$(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{B}$ において角の図式が 2-射 $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(\Delta^2, \mathcal{B}\right) \cong \mathcal{B}_2$ によって



と埋められているならば，$\mathcal{E}$ において角の図式 (1.3.1) を



のように埋める 2-射 $\bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(\Delta^2, \mathcal{E}\right) \cong \mathcal{E}_2$ が存在する．

定義 1.33: デカルトファイブレーション

$p\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{B}$ を内的ファイブレーションとする．

- p が**デカルトファイブレーション** (Cartesian fibration) であるとは，
  - $\mathcal{B}$ の任意の 1 射 $(x \xrightarrow{f} y) \in \mathcal{B}_1$
  - $p_{[0]}(\bar{y}) = y$ を充たす $\mathcal{E}$ の任意の対象 $\bar{y} \in \mathcal{E}_0$

  に対して，以下の条件を充たす $\mathcal{E}$ の 1-射 $(z \xrightarrow{\bar{f}} \bar{y}) \in \mathcal{E}_1$ が存在することを言う：

  (Cart-1)

  $\bar{f}$ は f の持ち上げである．i.e. $p_{[1]}(\bar{f}) = f$ が成り立つ．

  (Cart-2)

  $\bar{f}$ は p-Cartesian である．
- p が**余デカルトファイブレーション** (coCartesian fibration) であるとは，
  - $\mathcal{B}$ の任意の 1 射 $(x \xrightarrow{f} y) \in \mathcal{B}_1$
  - $p_{[0]}(\bar{x}) = x$ を充たす $\mathcal{E}$ の任意の対象 $\bar{x} \in \mathcal{E}_0$

  に対して，以下の条件を充たす $\mathcal{E}$ の 1-射 $(\bar{x} \xrightarrow{\bar{f}} z) \in \mathcal{E}_1$ が存在することを言う：

  (coCart-1)

  $\bar{f}$ は f の持ち上げである．i.e. $p_{[1]}(\bar{f}) = f$ が成り立つ．

  (coCart-2)

  $\bar{f}$ は p-coCartesian である．

定義 1.34: $(\infty, 1)$-オペラッド

innert な射 $\rho^i \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}\bigl(\langle n \rangle, \langle 1 \rangle\bigr)$ を

$$\rho^i\colon \langle n \rangle \longrightarrow \langle 1 \rangle,$$
$$j \longmapsto \begin{cases} 1, & j = i \\ *, & j \neq i \end{cases}$$

で定義する．**$(\infty, 1)$-オペラッド** ($(\infty, 1)$-operad)[a] とは，$(\infty, 1)$-圏の関手 $p\colon \mathcal{O}^{\otimes} \longrightarrow \mathrm{N}(\mathbf{Fin}_*)$ であって以下の条件を充たすもののこと：

(Op-1)

任意の innert な射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}\bigl(\langle m \rangle, \langle n \rangle\bigr)$ および $\forall c \in (\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle m \rangle})_0$ に対して，$\mathcal{O}^{\otimes}$ における p-coCartesian な 1-射 $\bar{f}\colon c \longrightarrow c'$ が存在して $p_{[1]}(\bar{f}) = f$ を充たす．

(Op-2)

$\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}\bigl(\langle m \rangle, \langle n \rangle\bigr)$ および $\forall c \in (\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle m \rangle})_0$，$\forall c' \in (\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n \rangle})_0$ に対して，innert な射 $\rho^i \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}\bigl(\langle n \rangle, \langle 1 \rangle\bigr)$ に **(Op-1)** を適用して得られる p-coCartesian な 1-射の族 $\bigl\{c' \xrightarrow{\bar{\rho}^i} c'_i \in (\mathcal{O}^{\otimes})_1\bigr\}_{1 \le i \le n}$ が誘導する $(\infty, 1)$-圏の関手

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c,\, c')_f \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c,\, c'_i)_{\rho^i \circ f}$$

は，$(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{S}\mathbf{paces}$ における同型射である．

(Op-3)

$\forall c_1, \dots, c_n \in (\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle 1 \rangle})_0$ に対して，ある $c \in (\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n \rangle})_0$ および p-coCartesian な 1-射 $\overline{\rho^i} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c, c_i)_{\rho^i}$ が存在する．

ただし，以下の記法を採用した：

- 点 $\langle n \rangle \in \mathrm{N}(\mathbf{Fin}_*)_0$ における $(\infty, 1)$-圏の関手 $p\colon \mathcal{O}^{\otimes} \longrightarrow \mathrm{N}(\mathbf{Fin}_*)$ の**ファイバー**[b] $\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n \rangle}$ を，$(\infty, 1)$-圏の pullback

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n \rangle} \arrow[r] \arrow[d] & \Delta^0 \arrow[d, hook, "\langle n \rangle"] \\ \mathcal{O}^{\otimes} \arrow[r, "p"'] & \mathrm{N}(\mathbf{Fin}_*) \end{tikzcd}$$

と定義した．

- $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m \rangle, \langle n \rangle)$ および $c \in (\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle m \rangle})_0$, $c' \in (\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n \rangle})_0$ に対して，$\bar{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c, c')_0$ であって $p_{[1]}(\bar{f}) = f$ を充たすもの全体が生成する，Kan 複体 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c, c') \in \mathcal{S}\mathbf{paces}_0$[c]の最大の部分 Kan 複体を

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}')_{\boldsymbol{f}} \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c, c')$$

と書いた．

---

[a] ∞-operad とも呼ばれる．

[b] これ自体が $(\infty, 1)$-圏である．

[c] $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c, c') \in \mathcal{S}\mathbf{paces}_0$ は，$(\infty, 1)$-圏における Hom 関手 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}\colon (\mathcal{O}^{\otimes})^{\mathrm{op}} \times \mathcal{O}^{\otimes} \longrightarrow \mathcal{S}\mathbf{paces}$ による対象 $(c, c') \in ((\mathcal{O}^{\otimes})^{\mathrm{op}} \times \mathcal{O}^{\otimes})_0$ の像である．

定義 1.34 がオペラッドと呼ぶにふさわしいことを示すために，次の小節では $(1, 1)$-圏の文脈で対応物を考えよう．

1.3.2　古典的なオペラッドと $(1, 1)$-圏の coCartesian fibration

定義 1.35: $(1, 1)$-圏における coCartesian fibration

$p\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{B}$ を $(1, 1)$-圏の関手とする．

- $\mathcal{E}$ の射 $\bar{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\bar{x}, \bar{y})$ が以下の条件を充たすとき，f は **p-coCartesian** であると言う：

(coCart-ord)　$(1, 1)$-圏 $\mathcal{B}$ の図式

$$\begin{tikzcd} & p(\bar{y}) \arrow[dr, "\forall\varphi"] & \\ p(\bar{x}) \arrow[ur, "p(\bar{f})"] \arrow[rr, "p(\forall\varphi_0)"'] & & p(\forall\bar{z}) \end{tikzcd}$$

を可換にする勝手な 2 つの射 $\varphi_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\bar{x}, \bar{z})$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\big(p(\bar{y}), p(\bar{z})\big)$ に対して，射

$\textcolor{red}{\bar{\varphi}} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\bar{y}, \textcolor{blue}{\bar{z}})$ が<u>一意的に</u>存在して (1, 1)-圏 $\mathcal{E}$ の図式

$$\begin{tikzcd} & \bar{y} \arrow[dr, red, "\exists!\bar{\varphi}"] & \\ \bar{x} \arrow[ur, "\bar{f}"] \arrow[rr, blue, "\varphi_0"'] & & \textcolor{blue}{\bar{z}} \end{tikzcd}$$

を可換にする．

- p が **coCartesian fibration** であるとは,
  - (1, 1)-圏 $\mathcal{B}$ の任意の射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(x, y)$
  - $p(\bar{x}) = x$ を充たす (1, 1)-圏 $\mathcal{E}$ の対象 $\bar{x} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E})$

  に対して，以下の条件を充たす (1, 1)-圏 $\mathcal{E}$ の射 $\bar{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\bar{x}, z)$ が存在することを言う：

  (coCart-ord-1)

  $\bar{f}$ は f の持ち上げである．i.e. $p(\bar{f}) = f$ が成り立つ．

  (coCart-ord-2)

  $\bar{f}$ は p-coCartesian である．