

第3章

位相的場の理論

この章で登場する多様体は特に断らない限り常に C^∞ 多様体である。また、体 \mathbb{K} と言ったら $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のいずれかを指すことにしよう。

また、グラフ G の頂点集合を $V(G)$ 、辺集合を $E(G)$ と書く。

3.1 モノイダル圏

まず手始めに、モノイダル圏とストリング図式の準備をする。特に、コボルディズム圏と有限次元 Hilbert 空間の圏が rigid な対称モノイダル圏であることの直感的な説明をする。

3.1.1 モノイダル圏の定義

定義 3.1: モノイダル圏

モノイダル圏 (monoidal category) は、以下の 5 つのデータからなる：

- 圈 \mathcal{C}
- テンソル積 (tensor product) と呼ばれる関手 $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$
- 単位対象 (unit object) $I \in \text{Ob}(\mathcal{C})$
- associator と呼ばれる自然同値

$$\{a_{X,Y,Z}: (X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{\cong} X \otimes (Y \otimes Z)\}_{X,Y,Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

- left/right unitors と呼ばれる自然同値

$$\begin{aligned} &\{l_X: I \otimes X \xrightarrow{\cong} X\}_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})}, \\ &\{r_X: X \otimes I \xrightarrow{\cong} X\}_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})} \end{aligned}$$

これらは $\forall X, Y, Z, W \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ について以下の 2 つの図式を可換にする：

(triangle diagram)

$$(X \otimes I) \otimes Y \xrightarrow{a_{X, I, Y}} X \otimes (I \otimes Y)$$

$$\begin{array}{ccc} & & \\ r_X \otimes 1_Y & \searrow & \swarrow 1_X \otimes l_Y \\ & X \otimes Y & \end{array}$$

(pentagon diagram)

$$\begin{array}{ccccc} & & ((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z & & \\ & \swarrow a_{W \otimes X, Y, Z} & & \searrow a_{W, X, Y \otimes 1_Z} & \\ (W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) & & & & (W \otimes (X \otimes Y)) \otimes Z \\ & \swarrow a_{W, X, Y \otimes Z} & & & \downarrow a_{W, X \otimes Y, Z} \\ & & W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z)) & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \swarrow 1_Z \otimes a_{X, Y, Z} \end{array}$$

定義 3.1 は、ストリング図式 (string diagram) で理解すると分かりやすい。モノイダル圏の射 $f: X \rightarrow Y$, $f': X' \rightarrow Y'$ があったら、そのテンソル積 $f \otimes f': X \otimes X' \rightarrow Y \otimes Y'$ はストリング図式上では次のようになる^{*1}。

$$f \otimes f' \bullet \begin{array}{c} | \\ Y \otimes Y' \\ | \\ X \otimes X' \end{array} =: f \bullet \begin{array}{c} | \\ Y \\ | \\ X \end{array} f' \bullet \begin{array}{c} | \\ Y' \\ | \\ X' \end{array}$$

また、単位対象 $I \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ は空白として表す。従って例えば射 $f: I \rightarrow X$ は次のようになる：

$$f \bullet \begin{array}{c} | \\ X \\ | \\ I \end{array} =: f \bullet \begin{array}{c} | \\ X \end{array}$$

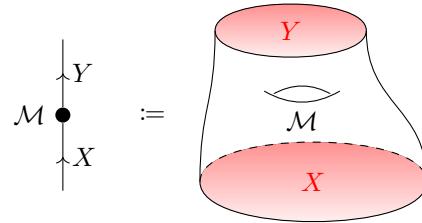
^{*1} このように、ストリング図式におけるテンソル積とはただ図式を横に並べることであるから、(triangle diagram), (pentagon diagram) などが自明な等式であるように見えてしまうという欠点がある。

【例 3.1.1】コボルディズム圏

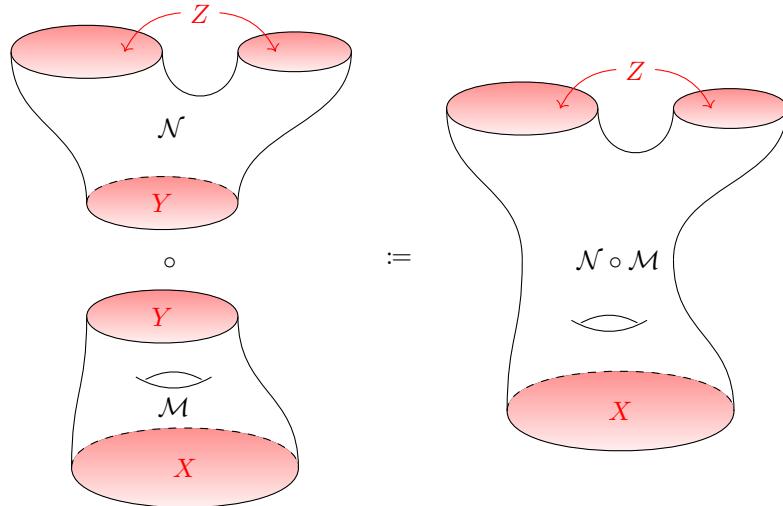
厳密な構成^aは後回しにして、コボルディズム圏 (cobordism category) を直感的に導入しよう。圏^b $\mathbf{Bord}_{(D, D+1)}$ は、

- D 次元多様体を対象
- $D + 1$ 次元のコボルディズム (cobordism) を射

とするような圏のことを言う。 $D + 1$ 次元のコボルディズム $\mathcal{M}: X \rightarrow Y$ と言うのは、 $D + 1$ 次元多様体 \mathcal{M} であって、 $\partial\mathcal{M} = X \amalg Y$ となっているようなもの（の微分同相類）のことである。 $D = 2$ の場合に直感的に^c図示すると次のようになる：



射 $\mathcal{M}: X \rightarrow Y$, $\mathcal{N}: Y \rightarrow Z$ の合成 $\mathcal{N} \circ \mathcal{M}: X \rightarrow Y \rightarrow Z$ とは、 Y に沿った貼り合わせ多様体 $\mathcal{M} \cup_Y \mathcal{N}$ である：



圏 $\mathbf{Bord}_{(D, D+1)}$ は、disjoint union に関してモノイダル圏になる：

$$X \otimes Y := \begin{array}{c} X \\ \cup \\ Y \end{array}, \quad I := \emptyset$$

^a 例えば、 (B, f) -structure の定義から始めるコボルディズムの統一的な扱いは [?, CHAPTER 1]などを参照。

^b 記号は [?] に合わせた。ボルディズム圏 (bordism category) と呼ぶこともある。

^c この図だと \mathcal{M} の「側面」が \mathcal{M} の境界になってしまっていて正確ではない。

【例 3.1.2】有限次元 Hilbert 空間の圏

有限次元 \mathbb{K} -Hilbert 空間の圏 **Hilb** とは,

- 有限次元 \mathbb{K} -Hilbert 空間を対象
- 線型写像を射
- 写像の合成を射の合成

に持つような圏のことを言う。**Hilb** はベクトル空間のテンソル積 $V_1 \otimes V_2$ の上に内積を

$$\langle v_1 \otimes v_2, w_1 \otimes w_2 \rangle := \langle v_1, w_1 \rangle_1 \langle v_2, w_2 \rangle_2$$

と定義することでモノイダル圏になる。

3.1.2 組紐付きモノイダル圏

定義 3.2: 組紐付きモノイダル圏

組紐付きモノイダル圏 (braided monoidal category) とは、以下の 2 つからなる：

- モノイダル圏 \mathcal{C}
- 組紐 (braiding) と呼ばれる自然同型

$$\{b_{X,Y} : X \otimes Y \xrightarrow{\cong} Y \otimes X\}_{X,Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ について以下の図式を可換にする：

(hexagon diagrams)

$$\begin{array}{ccccc}
 X \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{a_{X,Y,Z}^{-1}} & (X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{b_{X,Y \otimes Z}} & (Y \otimes X) \otimes Z \\
 \downarrow b_{X,Y \otimes Z} & & & & \downarrow a_{Y,X,Z} \\
 (Y \otimes Z) \otimes X & \xleftarrow{a_{Y,Z,X}^{-1}} & Y \otimes (Z \otimes X) & \xleftarrow{1_Y \otimes b_{X,Z}} & Y \otimes (X \otimes Z) \\
 \\
 (X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{a_{X,Y,Z}} & X \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{1_X \otimes b_{Y,Z}} & X \otimes (Z \otimes Y) \\
 \downarrow b_{X \otimes Y,Z} & & & & \downarrow a_{X,Z,Y}^{-1} \\
 Z \otimes (X \otimes Y) & \xleftarrow{a_{Z,X,Y}} & (Z \otimes X) \otimes Y & \xleftarrow{b_{X,Z \otimes Y}} & (X \otimes Z) \otimes Y
 \end{array}$$

組紐付きモノイダル圏 \mathcal{C} であって、 \mathcal{C} の組紐が $b_{X,Y} = b_{Y,X}^{-1}$ を充たすものることを対称モノイダル圏 (symmetric monoidal category) と呼ぶ。

ストリング図式で組紐を書く場合は次のようにする：

$$b_{X,Y} =: \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ X \qquad Y \end{array} \qquad b_{X,Y}^{-1} =: \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ X \qquad Y \end{array}$$

このとき (hexagon diagrams) はとてもわかりやすくなる^{*2}：

$$\begin{array}{c} \text{Diagram A: } X \xrightarrow{\quad} Y \xrightarrow{\quad} Z \\ \text{Diagram B: } X \xrightarrow{\quad} Y \xrightarrow{\quad} Z \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagram A} \\ \text{Diagram B} \end{array}
 =
 \begin{array}{c} \text{Diagram C} \\ \text{Diagram D} \end{array}$$

対称モノイダル圏の条件も一目瞭然である：

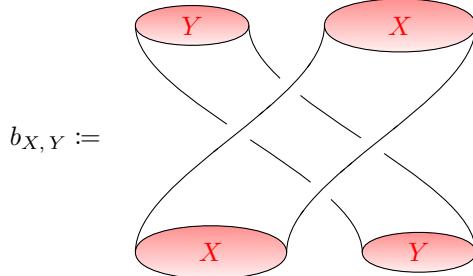
$$\text{Diagram showing a crossing of two strands with arrows indicating orientation, followed by an equals sign and a vertical line with an upward-pointing arrow.}$$

【例 3.1.3】 $\text{Bord}_{\langle D, D+1 \rangle}$ の組紐

Cob_{D+1} の組紐 $b_{X, Y} : X \otimes Y \longrightarrow Y \otimes X$ は、多様体 $(X \times [0, 1]) \amalg (Y \times [0, 1])$ と微分同相である

*2 associator を明示した.

ような $D+1$ 次元多様体のことを言う：



図から、 $\mathbf{Bord}_{(D, D+1)}$ は対称モノイダル圏である。

【例 3.1.4】 \mathbf{Hilb} の組紐

\mathbf{Hilb} の組紐は

$$b_{X,Y}: X \otimes Y \longrightarrow Y \otimes X, \\ x \otimes y \longmapsto y \otimes x$$

である。これがベクトル空間の同型写像であることが示される。明らかに $b_{X,Y} = b_{Y,X}^{-1}$ なので \mathbf{Hilb} は対称モノイダル圏である。

3.1.3 閉圏・rigid なモノイダル圏・ダガー圏

圏 \mathcal{C} を与える。Hom 関手 (Hom functor) とは、関手

$$\text{Hom}: \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

であって

$$(X, Y) \longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \\ ((f, g): (\mathbf{X}', Y) \longrightarrow (\mathbf{X}, Y')) \longmapsto \left(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y'), h \longmapsto g \circ h \circ f \right)$$

なる対応を与えるもののこと。

定義 3.3: 閉圏

モノイダル圏 \mathcal{C} を与える。

- \mathcal{C} が左に閉じている (left closed) とは、internal hom functor と呼ばれる関手

$$-\circ: \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

と、currying と呼ばれる自然同型

$$\{c_{X,Y,Z}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes Y, Z) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y \circ Z)\}_{X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

の 2 つが存在することを言う。

- \mathcal{C} が右に閉じている (right closed) とは, **internal hom functor** と呼ばれる関手と, **currying** と呼ばれる自然同型

$$\{c_{X,Y,Z} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes Y, Z) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X \multimap Z)\}_{X,Y,Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

の 2 つが存在することを言う。

定義 3.4: 双対

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ およびその任意の対象 $X, X^* \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を与える。 X^* が X の左双対 (left dual) であるとは,

- **coevaluation** と呼ばれる射

$$\text{coev}_X^L : I \longrightarrow X \otimes X^*$$

- **evaluation** と呼ばれる射

$$\text{ev}_X^L : X^* \otimes X \longrightarrow I$$

が存在して以下の図式を可換にすることを言う：

(zig-zag equations)

$$\begin{array}{ccc}
 I \otimes X & \xrightarrow{\text{coev}_X^L \otimes \text{Id}_X} & (X \otimes X^*) \otimes X \\
 \downarrow r_X & & \downarrow a_{X, X^*, X} \\
 & & X \otimes (X^* \otimes X) \\
 & & \downarrow \text{Id}_X \otimes \text{ev}_X^L \\
 X & \xleftarrow[r_X]{} & X \otimes I
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 X^* \otimes I & \xrightarrow{\text{Id}_{X^*} \otimes \text{coev}_X^L} & X^* \otimes (X \otimes X^*) \\
 \downarrow l_{X^*} & & \downarrow a_{X^*, X, X^*}^{-1} \\
 & & (X^* \otimes X) \otimes X^* \\
 & & \downarrow \text{ev}_X^L \otimes \text{Id}_{X^*} \\
 X^* & \xleftarrow[l_{X^*}]{} & I \otimes X^*
 \end{array}$$

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ およびその任意の対象 $X, {}^*X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を与える。 *X が X の右双対 (right dual) であるとは、

- 射

$$\text{coev}_X^R : I \longrightarrow {}^*X \otimes X$$

- 射

$$\text{ev}_X^R : X \otimes {}^*X \longrightarrow I$$

が存在して以下の図式を可換にすることを言う：

(zig-zag equations)

$$\begin{array}{ccc}
 X \otimes I & \xrightarrow{\text{Id}_X \otimes \text{coev}_X^R} & X \otimes ({}^*X \otimes X) \\
 \downarrow l_X & & \downarrow a_{X, {}^*X, X}^{-1} \\
 & & (X \otimes {}^*X) \otimes X \\
 & & \downarrow \text{ev}_X^R \otimes \text{Id}_X \\
 X & \xleftarrow{l_X} & I \otimes X
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 I \otimes {}^*X & \xrightarrow{\text{coev}_X^R \otimes \text{Id}_{^*X}} & ({}^*X \otimes X) \otimes {}^*X \\
 \downarrow l_{X^*} & & \downarrow a_{^*X, X, {}^*X}^{-1} \\
 & & {}^*X \otimes (X \otimes {}^*X) \\
 & & \downarrow \text{Id}_{^*X} \otimes \text{ev}_X^R \\
 {}^*X & \xleftarrow{r_{X^*}} & {}^*X \otimes I
 \end{array}$$

双対は、単に矢印を逆にすることで表現する：

$$\text{coev}_X^L =: \begin{array}{c} \nearrow \\ \curvearrowleft \end{array} \quad \text{ev}_X^L =: \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \searrow \end{array} \quad \text{coev}_X^R =: \begin{array}{c} \nearrow \\ \curvearrowright \end{array} \quad \text{ev}_X^R =: \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \searrow \end{array}$$

$\text{coev}^L, \text{ev}^L$ に対する (zig-zag equations) は次のようになり、本当にジグザグしている：

$$\begin{array}{ccc}
 \uparrow & = & \uparrow \quad \curvearrowleft \quad \curvearrowright \quad \downarrow
 \end{array}$$

$$\downarrow = \begin{array}{c} \text{zig-zag diagram} \end{array}$$

$\text{coev}^R, \text{ev}^R$ に対する (zig-zag equations) は

$$\begin{array}{c} \uparrow = \begin{array}{c} \text{zig-zag diagram} \end{array} \\ \downarrow = \begin{array}{c} \text{zig-zag diagram} \end{array} \end{array}$$

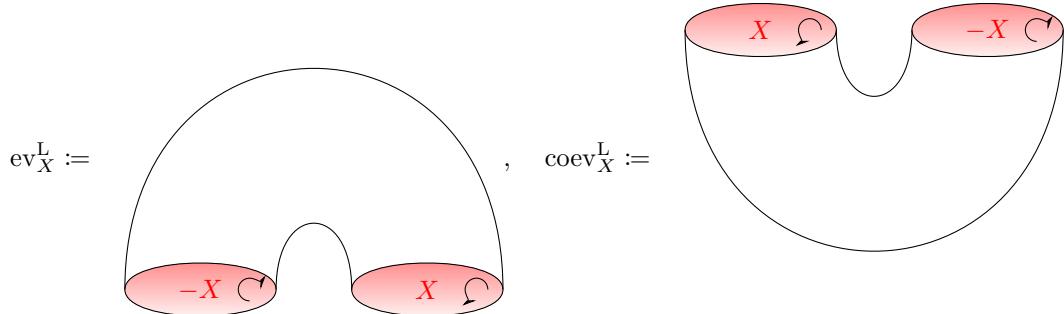
である。

定義 3.5: rigid なモノイダル圏

モノイダル圏 \mathcal{C} は、 $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が左・右双対を持つとき rigid であると言われる。

【例 3.1.5】 $\text{Bord}_{(D, D+1)}^{\text{SO}}$ の unit と counit

$\text{Bord}_{(D, D+1)}^{\text{SO}}$ と書いて、向き付け可能な多様体が成すコボルディズム圏を表すことにする^a。このとき、 $X \in \text{Ob}(\text{Bord}_{(D, D+1)}^{\text{SO}})$ の双対とは、向き付けを逆にした D 次元多様体 $-X$ のことである。
unit, counit はそれぞれ U 字管とそれを逆さにしたもののような見た目をしている：



internal hom functor を $X \multimap Y := X^* \otimes Y$ とすれば、図から $\text{Bord}_{(2, 3)}^{\text{SO}}$ が閉圏であることを直接確認できる。

^a 一般に、 $\text{Bord}_{(D, D+1)}$ の右肩には注目する接構造 (tangential structure) を指定する記号を書く。

【例 3.1.6】 \mathbf{Hilb} の unit と counit

\mathbf{Hilb} において $I = \mathbb{C}$ である。従って、 $X \in \text{Ob}(\mathbf{Hilb})$ の双対とは双対ベクトル空間 $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, \mathbb{C})$ のことである。プラ空間のことだと言っても良い。特に、自然な同型 $X^* \otimes Y \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y)$ を使うと X の unit は

$$\begin{aligned}\text{coev}_X^L: I &\longrightarrow X^* \otimes X, \\ c &\longmapsto c \text{id}_X\end{aligned}$$

で、counit は

$$\begin{aligned}\text{ev}_X^L: X \otimes X^* &\longrightarrow I, \\ x \otimes f &\longmapsto f(x)\end{aligned}$$

であることがわかる。internal hom functor を $X \multimap Y := X^* \otimes Y \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y)$ とすれば \mathbf{Hilb} が閉圏であることを直接確認できる。

実は、rigid なモノイダル圏は自動的に閉圏になる。これは

$$X \multimap Y := X^* \otimes Y$$

として internal hom functor を定義することで確認できる。

定義 3.6: ダガー圏

圏 \mathcal{C} がダガー圏 (dagger category) であるとは、関手

$$\dagger: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$$

が存在して以下を充たすことを言う：

- (1) $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $X^\dagger = X$ を充たす。
- (2) \mathcal{C} の任意の射 $f: X \longrightarrow Y$ に対して $(f^\dagger)^\dagger = f$ を充たす。

【例 3.1.7】 $\mathbf{Bord}_{\langle D, D+1 \rangle}^{\text{SO}}$ の dagger

$\mathbf{Bord}_{\langle D, D+1 \rangle}^{\text{SO}}$ における $\mathcal{M}: X \longrightarrow Y$ のダガーは、上下を逆にしてから \mathcal{M} の連結成分毎に向きを逆にすることで得られる。

【例 3.1.8】 \mathbf{Hilb} の dagger

\mathbf{Hilb} における $f: X \longrightarrow Y$ のダガーは、 $\forall \phi \in X, \forall \psi \in Y$ に対して

$$\langle f^\dagger(\psi), \phi \rangle := \langle \psi, f(\phi) \rangle$$

とすることで定義される。

3.1.4 モノイダル関手

モノイダル関手とは、ざっくり言うとモノイダル圏の構造を保存するような関手のことである：

定義 3.7: モノイダル関手

2つのモノイダル圏 \mathcal{C}, \mathcal{D} の間の関手

$$F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

が lax monoidal functor であるとは、

- 射

$$\varepsilon: I_{\mathcal{D}} \longrightarrow F(I_{\mathcal{C}})$$

- 自然変換

$$\{\mu_{X,Y}: F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y) \longrightarrow F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y)\}_{X,Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

があって、 $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して以下の図式が可換になること：

(associativity)

$$\begin{array}{ccc}
 (F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y)) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z) & \xrightarrow{a_{F(X), F(Y), F(Z)}} & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} (F(Y) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z)) \\
 \downarrow \mu_{X,Y} \otimes 1_{F(Z)} & & \downarrow 1_{F(X)} \otimes \mu_{Y,Z} \\
 F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z) & & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y \otimes_{\mathcal{C}} Z) \\
 \downarrow \mu_{X \otimes_{\mathcal{C}} Y, Z} & & \downarrow \mu_{X, Y \otimes_{\mathcal{C}} Z} \\
 F((X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{C}} Z) & \xrightarrow{F(a_{X, Y, Z}^{\mathcal{C}})} & F(X \otimes_{\mathcal{C}} (Y \otimes_{\mathcal{C}} Z))
 \end{array}$$

(unitality)

$$\begin{array}{ccc}
 I_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathcal{D}} F(X) & \xrightarrow{\varepsilon \otimes 1_{F(X)}} & F(I_{\mathcal{C}}) \otimes_{\mathcal{D}} F(X) \\
 \downarrow l_{F(X)}^{\mathcal{D}} & & \downarrow \mu_{I_{\mathcal{C}}, X} \\
 F(X) & \xleftarrow{F(l_X^{\mathcal{C}})} & F(I_{\mathcal{C}} \otimes_{\mathcal{C}} X)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 F(X) \otimes_{\mathcal{D}} I_{\mathcal{D}} & \xrightarrow{1_{F(X)} \otimes \varepsilon} & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(I_{\mathcal{C}}) \\
 \downarrow r_{F(X)}^{\mathcal{D}} & & \downarrow \mu_{X, I_{\mathcal{C}}} \\
 F(X) & \xleftarrow{F(r_X^{\mathcal{C}})} & F(X \otimes_{\mathcal{C}} I_{\mathcal{C}})
 \end{array}$$

- lax monoidal functor F の ε と $\mu_{X,Y}$ が全て同型射ならば, F は **strong monoidal functor** と呼ばれる.
- lax monoidal functor F の ε と $\mu_{X,Y}$ が全て恒等射ならば, F は **strict monoidal functor** と呼ばれる.

3.2 TQFT の定義

位相的場の理論 (Topological Quantum Field Theory; TQFT) の枠組みをトップダウンに導入する.

3.2.1 Atiyah の公理系

まず, 全ての出発点として Atiyah の公理系 [?] というものがある:

公理 3.1: Atiyah の公理系 (若干簡略版)

体 \mathbb{K} 上の^a, D 次元の位相的場の理論 (Topological Quantum Field Theory; TQFT) とは, 以下の 2 つのデータからなる:

- (1) 向き付けられた (oriented) D 次元の閉多様体 (closed manifold) Σ に対応づけられた有限次元 \mathbb{K} -ベクトル空間 $V(\Sigma)$
- (2) 向き付けられた $D+1$ 次元の境界付き多様体 M に対応づけられたベクトル $Z(M) \in V(\partial M)$

これらのデータは以下の条件を充たす:

(TQFT-1)

Z は向きを保つ微分同相写像について関手的 (functorial) に振る舞う.

(TQFT-2)

Z は対合的 (involutory) である.

(TQFT-3)

Z はモノイダル的 (multiplicative^b) である.

^a 原論文 [?] では環としていて、ベクトル空間の代わりに環上の有限生成加群を扱っている。今回は Hilbert 空間しか考えないので体 \mathbb{K} としておいた。

^b 「乗法的」という語弊がありそうなのでモノイダル的と言った。

[?] に倣って公理の意味を精査していく。

(TQFT-1)

この公理は 2 つの要請を持つ:

- (1) D 次元閉多様体 $\Sigma, \Sigma', \Sigma''$ の間の向きを保つ微分同相写像 $f: \Sigma \rightarrow \Sigma', g: \Sigma' \rightarrow \Sigma''$ に対して, $V(f): V(\Sigma) \rightarrow V(\Sigma')$ はベクトル空間の同型写像で, $V(g \circ f) = V(g) \circ V(f)$ が成り立つ.

- (2) 向きを保つ微分同相写像 $f: \Sigma \longrightarrow \Sigma'$ が, $D+1$ 次元多様体 M, M' であって $\Sigma = \partial M, \Sigma' = \partial M'$ を充たすものの上に $f: M \longrightarrow M'$ と拡張される場合に $V(f)(Z(M)) = Z(M')$ を充たす.

(TQFT-2)

Σ の向きを逆にして得られる D 次元閉多様体を Σ^* と書く^{*3}とき, $V(\Sigma^*) = V(\Sigma)^*$ を充たす^{*4}.

(TQFT-3)

この公理は 5 つの要請を持つ:

- (1) D 次元閉多様体 Σ_1, Σ_2 に対して

$$V(\Sigma_1 \amalg \Sigma_2) = V(\Sigma_1) \otimes V(\Sigma_2)$$

が成り立つこと.

- (2) $D+1$ 次元多様体 M, M_1, M_2 に対して $\partial M_1 = \Sigma_1 \amalg \Sigma_3, \partial M_2 = \Sigma_2 \amalg \Sigma_3^*$, $M = M_1 \cup_{\Sigma_3} M_2$ が成り立つならば,

$$Z(M) = \langle Z(M_1) | Z(M_2) \rangle$$

ただし,

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : V(\partial M_1) \otimes V(\partial M_2) = V(\Sigma_1) \otimes V(\Sigma_3) \otimes V(\Sigma_3)^* \otimes V(\Sigma_2) \longrightarrow V(\partial M) = V(\Sigma_1) \otimes V(\Sigma_2),$$

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_3\rangle \otimes \langle \varphi_3| \otimes |\psi_2\rangle \longmapsto \langle \varphi_3|\psi_3\rangle |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$$

である.

- (3) (2) において $\Sigma_3 = \emptyset$ ならば,

$$Z(M) = Z(M_1) \otimes Z(M_2)$$

- (4) (1) から^{*5},

$$V(\emptyset) = \mathbb{K}$$

- (5) (3) から^{*6},

$$Z(\emptyset) = 1$$

今や別の同値な定義ができる. $D+1$ 次元多様体 M の境界 ∂M を

$$\partial M = \Sigma_1^* \amalg \Sigma_2$$

と分解すると^{*7}, (TQFT-3)-(1) より $Z(M) \in V(\partial M) = Z(\Sigma_1)^* \otimes Z(\Sigma_2) \cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}(Z(\Sigma_1), Z(\Sigma_2))$ が言えるので, $Z(M)$ を線型写像 $Z(M): V(\Sigma_1) \longrightarrow V(\Sigma_2)$ と同一視できるのである. (TQFT-1) もあわせると, 結局これまで V, Z と書いていたものは strong monoidal functor

$$Z: \mathbf{Bord}_{\langle D, D+1 \rangle} \longrightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$$

^{*3} 【例 3.1.5】の意味で, 圏 \mathbf{Cob}_{D+1} における $\Sigma \in \text{Ob}(\mathbf{Cob}_{D+1})$ の双対となっている.

^{*4} $V(\Sigma)$ が有限次元なので, $V(\Sigma)^*$ はプラ空間と見做せる.

^{*5} \mathbf{Cob}_{D+1} の単位対象は \emptyset なので $\emptyset = \emptyset \amalg \emptyset$. よって (1) から $V(\emptyset) = V(\emptyset) \otimes V(\emptyset)$. これを充たすのは $V(\emptyset) = 0, \mathbb{K}$ (モノイダル圏 $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の単位対象は \mathbb{K} である) のどちらかしかないので, 非自明な方を採用する.

^{*6} $\emptyset = \emptyset \amalg \emptyset$ なので (3) から $Z(\emptyset) = Z(\emptyset) \otimes Z(\emptyset)$. これを充たす $V(\emptyset) = \mathbb{K}$ の元は 0, 1 しかないので, 非自明な方を採用する.

^{*7} どちらか一方が \emptyset になんでも良い

の1つに集約することができる。

定義 3.8: TQFT の定義

D 次元の位相的場の理論 (Topological Quantum Field Theory; TQFT) とは、コボルディズム圏からある対称モノイダル圏 \mathcal{D} への strict monoidal functor^a

$$Z: \mathbf{Bord}_{\langle D, D+1 \rangle} \longrightarrow \mathcal{D}$$

のこと。

^a strong monoidal functor とする場合もある（例えば <https://ncatlab.org/nlab/show/cobordism>）ようだが、原論文 [?] では strict monoidal functor になっていた。

興味があるのは $\mathcal{D} = \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}, \mathbf{Hilb}$ の場合なので、以下では TQFT と言ったら strict monoidal functor

$$Z: \mathbf{Bord}_{\langle D, D+1 \rangle} \longrightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}, \mathbf{Hilb}$$

を指すことにしておこう。

3.3 連続な高次対称性

エニオンのフェージョン則を議論する前に少し寄り道をして、[?], [?] に倣って高次対称性 (higher form symmetry) の話をする。この節では自然単位系を使う。時空を表す $D+1$ 次元多様体を \mathcal{M} と書き、 \mathcal{M} のチャートの座標関数を $(x^0, x^1, \dots, x^D) =: (t, \mathbf{x})$ と書く。特に D 次元多様体 Σ を使って $\mathcal{M} = \Sigma \times \mathbb{R}$ または $\Sigma \times S^1$ と書ける場合は $x^0 =: t$ で \mathbb{R} または S^1 成分のチャート (時間) を表すことにし、 Σ のことを時間一定面と呼ぶ。 \mathcal{M} として Minkowski 時空を考える場合、Minkowski 計量としては $[\eta_{\mu\nu}] := (-1, +1, \dots, +1)$ を用いる。Minkowski 計量でない一般の計量テンソルは $g := g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \in \Gamma(T^*\mathcal{M} \otimes T^*\mathcal{M})$ と表記し、共役計量テンソルを $g^{\mu\nu} \partial_\mu \otimes \partial_\nu \in \Gamma(T\mathcal{M} \otimes T\mathcal{M})$ と表記する。

\mathcal{M} に計量 $g_{\mu\nu}$ が与えられたとき、音楽同型 (musical isomorphism) を

$$\begin{aligned} \flat: \mathfrak{X}(\mathcal{M}) &\longrightarrow \Omega^1(\mathcal{M}), X^\mu \partial_\mu \longmapsto g_{\mu\nu} X^\nu dx^\mu, \\ \sharp: \Omega^1(\mathcal{M}) &\longrightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M}), \omega_\mu dx^\mu \longmapsto g^{\mu\nu} \omega_\nu \partial_\mu \end{aligned}$$

で定義する。Hodge star は

$$\begin{aligned} \star: \Omega^p(\mathcal{M}) &\longrightarrow \Omega^{D+1-p}, \\ dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p} &\longmapsto \frac{1}{(D+1-p)!} g^{\mu_1 \nu_1} \cdots g^{\mu_p \nu_p} \epsilon_{\nu_1 \cdots \nu_p \mu_{p+1} \cdots \mu_{D+1}} dx^{\mu_{p+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_{D+1}} \end{aligned}$$

を線型に拡張することで定義される。特に不变体積要素を

$$dx^{D+1} := \star 1 = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{D+1}$$

と定義する。

\mathcal{M} の p 次元部分多様体^{*8} $\mathcal{N}^{(p)} \subset \mathcal{M}$ 上で p -形式 $\omega \in \Omega^p(\mathcal{M})$ を積分する場合、包含写像 $\iota: \mathcal{N}^{(p)} \hookrightarrow \mathcal{M}$ による引き戻し $\iota^*: \Omega^p(\mathcal{M}) \longrightarrow \Omega^p(\mathcal{N}^{(p)})$ を用いて

$$\int_{\mathcal{N}} \omega := \int_{\mathcal{N}^{(p)}} \iota^* \omega$$

と定義する。このとき、Poincaré 双対を考えることで

$$\int_{\mathcal{N}} \omega = \int_{\mathcal{M}} \omega \wedge \delta(\mathcal{N}^{(p)})$$

を充たす $\delta(\mathcal{N}^{(p)}) \in \Omega^{D+1-p}(\mathcal{M})$ (デルタ関数 p -形式と呼ぶ) の存在がわかる^{*9}。さて、 $\mathcal{N}^{(p)} = \partial \mathcal{M}^{(p+1)}$ の場合を考える。 $\forall \omega \in \Omega^p(\mathcal{M})$ に対して Stokes の定理から

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} \omega \wedge \delta(\partial \mathcal{M}^{(p+1)}) &= \int_{\partial \mathcal{M}^{(p+1)}} \omega = \int_{\mathcal{M}^{(p+1)}} d\omega = \int_{\mathcal{M}} d\omega \wedge \delta(\mathcal{M}^{(p+1)}) \\ &= \int_{\mathcal{M}} d(\omega \wedge \delta(\mathcal{M}^{(p+1)})) + (-1)^{p+1} \int_{\mathcal{M}} \omega \wedge d(\delta(\mathcal{M}^{(p+1)})) \\ &= (-1)^{p+1} \int_{\mathcal{M}} \omega \wedge d(\delta(\mathcal{M}^{(p+1)})) \end{aligned}$$

がわかるので、

$$d\delta(\mathcal{M}^{(p+1)}) = (-1)^{p+1} \delta(\partial \mathcal{M}^{(p+1)})$$

が成り立つ。 p 次元部分多様体 $\mathcal{M}^{(p)}$ と $D+1-p$ 次元部分多様体 $\mathcal{M}^{(D+1-p)}$ に対して、これらの向きを考慮した交点数を

$$I(\mathcal{M}^{(p)}, \mathcal{M}^{(D+1-p)}) := \int_{\mathcal{M}} \delta(\mathcal{M}^{(p)}) \wedge \delta(\mathcal{M}^{(D+1-p)})$$

で定義する。 $\mathcal{C}^{(p-1)} = \partial \mathcal{M}^{(p)}$ を充たす $\mathcal{C}^{(p-1)}$ と $\mathcal{M}^{(D+1-p)}$ の絡み数は

$$\text{Link}(\mathcal{C}^{(p-1)}, \mathcal{M}^{(p)}) := I(\mathcal{M}^{(p)}, \mathcal{M}^{(D+1-p)})$$

と定義される。

3.3.1 通常の対称性

N 成分の場^{*10} $\varphi: \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{K}^N$, $x \mapsto (\varphi_i(x))_{1 \leq i \leq N}$ は、あるベクトル束 $\mathbb{K}^N \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ の切断と理解する。場の変換性はベクトル束の変換関数に由来する。

局所的な場のラグランジアン密度 $\mathcal{L}(\varphi_a(x), \partial_\mu \varphi_a(x))$ を持つ古典系を考える。この系の作用は

$$S[\varphi] := \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \mathcal{L}(\varphi_a(x), \partial_\mu \varphi_a(x))$$

と書かれる。場に関する作用の変分とは、勝手な「微小」切断 $\delta\psi \in \Gamma(E)$ による場の微小変換

$$\mathcal{T}_{\delta\varphi}: \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E), \varphi \mapsto \varphi + \delta\varphi$$

*8 コンパクトな埋め込まれた C^∞ 多様体と仮定する。

*9 厳密な扱いは [?, p.270] を参照。ここでは雑に扱う。

*10 場 φ の成分を表す添字として a, b, c, \dots を使う。

を用いて

$$\delta_{\delta\psi} S[\varphi] := S[\mathcal{T}_{\delta\psi}(\varphi)] - S[\varphi]$$

と定義される。顕には Stokes の定理を使って

$$\begin{aligned}\delta_{\delta\psi} S[\varphi] &= \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a(x)} \delta\psi_a(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a(x))} \partial_\mu (\delta\psi_a(x)) \right) \\ &= \int_{\partial\mathcal{M}} \star \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a(x))} \delta\psi_a(x) \right) + \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a(x))} \right) \right) \delta\psi_a(x)\end{aligned}\quad (3.3.1)$$

と書けるが、境界条件 $\partial\mathcal{M} = \emptyset$ または $\delta\psi|_{\partial\mathcal{M}} = 0$ を要請して第 1 項を落とすのが普通である。

最小作用の原理とは、古典論で実現される場の配位（このような場の配位は **on shell** であると呼ばれる） $\varphi_{\text{on shell}} \in \Gamma(E)$ に対して、

$$\forall \delta\psi, \delta_{\delta\psi} S[\varphi_{\text{on shell}}] = 0 \quad (3.3.2)$$

を要請するものである。(3.3.1) から、on shell な場 $\varphi_{\text{on shell}} \in \Gamma(E)$ が充たすべき方程式として Euler-Lagrange 方程式

$$1 \leq \forall i \leq N, \forall x \in \mathcal{M}, \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a(x))} \right) \right]_{\varphi_{\text{on shell}}(x), \partial_\mu \varphi_{\text{on shell}}(x)} = 0 \quad (3.3.3)$$

が得られるのだった。煩雑なので以後 \mathcal{L} の引数は適宜省略する。

対称性変換とは、場の間の変換

$$\mathcal{T}: \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$$

であって作用を不变にすることである。つまり、最小作用の原理 (3.3.2) とは異なり φ ではなく \mathcal{T} が

$$\forall \varphi \in \Gamma(E), \delta_{\mathcal{T}} S[\varphi] = 0 \quad (3.3.4)$$

によって定義される。ここに $\delta_{\mathcal{T}} S[\varphi] := S[\mathcal{T}(\varphi)] - S[\varphi]$ とおいた。定義 (3.3.4) は off shell な場も考慮していることに注意すべきである。特に対称性変換 \mathcal{T} が大域的な微小パラメータ ε および $\partial_0 \varphi$ に陽に依存しない^{*11} $h \in \Gamma(E)$ を用いて $\mathcal{T}(\varphi) = \mathcal{T}_{\varepsilon h}(\varphi)$ と書かれる場合を考えよう。

$$\begin{aligned}0 = \delta_{\mathcal{T}} S[\varphi] &= \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a(x)} \varepsilon h_a(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a(x))} \partial_\mu (\varepsilon h_a(x)) \right) \\ &= \varepsilon \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a(x))} \right) \right) h_a(x) \\ &\quad + \varepsilon \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \left(\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a(x))} \right) h_a(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a(x))} \partial_\mu (h_a(x)) \right) \\ &= \varepsilon \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a(x))} \right) \right) h_a(x)\end{aligned}$$

^{*11} この仮定は (3.3.7) の導出で使うだけ（実はもっと条件を弱めることもできる）なので、Noether の定理の導出には必要ない。

$$+ \varepsilon \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a(x))} h_a(x) \right)$$

が成り立つ。i.e. **Noether カレント**を $D+1$ 個の $X^\mu|_{\partial\mathcal{M}} = 0$ を充たす C^∞ 関数 X^μ を用いて

$$j^\mu(x) := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a(x))} h_a(x) - X^\mu(x) \quad (3.3.5)$$

で定義すると、これが on shell とは限らない任意の $\varphi \in \Gamma(E)$ に対して

$$\partial_\mu j^\mu(x) = - \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a(x))} \right) \right]_{\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)} h_a(x)$$

を充たすことが分かった。特にon shellな任意の $\varphi_{\text{on shell}} \in \Gamma(E)$ に対しては (3.3.3) からカレント (3.3.5) の保存則

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \quad (3.3.6)$$

が成り立つ。このように、対称性変換が存在するとそれに対応してon shellな保存則 (3.3.6) を充たすカレントが存在する (**Noether の定理**)。

ここで、 $\mathcal{M} = \Sigma \times \mathbb{R}$ と書ける場合を考える。このとき **Noether チャージ**を

$$Q(t) := \int_{\Sigma} d^D x j^0(t, \mathbf{x})$$

と定義すると、保存則 (3.3.6) から $\partial\Sigma = \emptyset$ または $j^\mu|_{\partial\Sigma} = 0$ を要請すれば

$$\frac{dQ(t)}{dt} = - \int_{\Sigma} d^D x \partial_i j^i(t, \mathbf{x}) = 0$$

となって時間に依存しないことがわかる。さらに、 $\pi^b(x) := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \varphi_b(x))}$ とおくと

$$Q = \int_{\Sigma} d^D x (\pi^a(x) h_a(x) - X^\mu(x))$$

であるから、Poisson 括弧が

$$\begin{aligned} \{\varphi_a(x), Q\}_P &= \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}y \left(\frac{\partial \varphi_a(x)}{\partial \varphi_b(y)} \frac{\partial Q}{\partial \pi^b(y)} - \frac{\partial \varphi_a(x)}{\partial \pi^b(y)} \frac{\partial Q}{\partial \varphi_b(y)} \right) \\ &= \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}y \left(\delta_a^b \delta^{D+1}(x-y) \int_{\Sigma} d^D z \delta_b^c \delta^D(z-y) h_c(z) - 0 \right) \\ &= h_a(x) \end{aligned}$$

と求まる。つまり、Q は対称性変換 $\mathcal{T}_{\varepsilon h}$ の無限小生成子^{*12}である。従って、正準量子化を行うと

$$[-i\hat{Q}, \hat{\varphi}_a(x)] = h_a(x) \quad (3.3.7)$$

となる。

^{*12} Hamilton フローの意味である

【例 3.3.1】 $D + 1$ 次元自由フェルミオン系

時空 \mathcal{M} を Minkowski 時空, 場をスピン束 $\mathbb{C}^4 \hookrightarrow S \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ の切断 $\psi \in \Gamma(S)$ とする (Dirac 場). 作用はガンマ行列 γ^μ , Dirac 共役 $\bar{\psi} := i\psi^\dagger \gamma^0$ を用いて

$$S[\psi] = - \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \bar{\psi}(x) (\gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi(x)$$

と書かれる. Euler-Lagrange 方程式 (3.3.3) は, $\bar{\psi}, \psi$ に関する変分によってそれぞれ

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi &= 0, \\ \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu - m \bar{\psi} &= 0 \end{aligned}$$

となる. この系の対称性変換は, 例えば $e^{i\theta} \in U(1)$ による

$$\mathcal{T}: \Gamma(S) \longrightarrow \Gamma(S), \psi \longmapsto e^{i\theta}\psi$$

がある. \mathcal{T} を生成する無限小変換は $e^{i\theta}$ の Taylor 展開より $\mathcal{T}_{i\theta\psi}: \psi \longmapsto \psi + i\theta\psi$ である. つまり, 先ほどの議論で登場した $h \in \Gamma(S)$ は今回の場合 $i\psi$ に相当する. よって対称性変換 \mathcal{T} に対応する Noether カレント (3.3.5) は

$$j^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi} i\psi = -i\bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (3.3.8)$$

と求まる. $\mathcal{M} = \mathbb{R}^D \times \mathbb{R}$ であるから, Noether チャージは

$$Q = -i \int_{\mathbb{R}^D} d^Dx \bar{\psi}(x) \gamma^0 \psi(x)$$

であり, 正準量子化すると (3.3.7) より

$$[i\hat{Q}, \hat{\psi}(x)] = -i\hat{\psi}(x)$$

が成り立つ. ここから有限変換 \mathcal{T} に戻すには, 指数写像を用いれば良い. こうして

$$\exp(i\theta\hat{Q})\hat{\psi}(x)\exp(-i\theta\hat{Q}) = e^{-i\theta}\hat{\psi}(x) \quad (3.3.9)$$

だと分かった. ここで [?, p.6] に倣って $g := e^{i\theta}$, $R_g := e^{-i\theta}$, $\hat{U}_g(\mathbb{R}^D) := \exp(i\theta\hat{Q})$ とおく.

- $U_g(\mathbb{R}^D)$ を \mathcal{M} の D 次元部分多様体 \mathbb{R}^D に付随する対称性演算子
- $\hat{\psi}$ を荷電物体 (charged object)

と呼ぼう. $\forall g, g' \in U(1)$ に対して, 対称性演算子は群のように振る舞う:

$$\hat{U}_g(\mathbb{R}^D) \hat{U}_{g'}(\mathbb{R}^D) = \hat{U}_{gg'}(\mathbb{R}^D)$$

時間一定面を $\mathbb{R}^D \subset \mathcal{M}$ にとったのは, 正準量子化により (3.3.7) を導くためであった. しかしに, 時間一定面を任意の D 次元部分多様体 $\mathcal{M}^{(D)} \subset \mathcal{M}$ にとれるのではないかと期待される. 積分領域が複雑になるの

で微分形式を使うと見通しが良い。

$$\star j := \star \flat(j^\mu \partial_\mu)$$

とおこう。このとき

$$d \star j = \partial_\mu j^\mu d^{D+1}x \quad (3.3.10)$$

が成り立つので、Noether カレントの保存則 (3.3.6) は単に $d \star j = 0$ と書ける。Noether チャージは

$$Q = \int_{\mathcal{M}^{(D)}} \star j = \int_{\mathcal{M}} \star j \wedge \delta(\mathcal{M}^{(D)})$$

である。 $\mathcal{M}^{(D)} \rightarrow \mathcal{M}^{(D)} + \delta \mathcal{M}^{(D)}$ w/ $\delta \mathcal{M}^{(D)} = \partial X^{(D+1)}$ なる時間一定面の変形を考えると、 Q の変化は保存則から

$$\delta Q = \int_{\delta \mathcal{M}^{(D)}} \star j = \int_{X^{(D)}} d \star j = 0$$

だと分かった。i.e.

$$\hat{U}_{e^{i\theta}}(\mathcal{M}^{(D)}) = \hat{U}_{e^{i\theta}}(\mathcal{M}^{(D)} + \delta \mathcal{M}^{(D)})$$

である。この意味で対称性演算子はトポロジカル演算子とも呼ばれる。しかし、 \mathcal{M} 上に荷電物体が存在しているときは (3.3.9) に注意しなくてはいけない。

時間一定面の変形をするので、量子化を経路積分で行う方が見通しが良い。経路積分では、任意の観測可能量 $\hat{\mathcal{O}}$ の期待値が

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle = \int [d\psi] e^{iS[\psi]} \mathcal{O}$$

と計算される。今、勝手な場の演算子 $\mathcal{O}(z)$ に対して

$$\langle \hat{\psi}(y) \hat{\mathcal{O}}(z) \rangle = \int [d\psi] e^{iS[\psi]} \psi(y) \mathcal{O}(z)$$

を計算しよう。荷電物体 $\hat{\psi}(y)$ を囲むような時間一定面 $\mathcal{M}^{(D)} \subset \mathcal{M}$ w/ $y \in \mathcal{M}^{(D)}, z \notin \mathcal{M}^{(D)}$ をとり、 $D+1$ 次元部分多様体 $\mathcal{M}^{(D+1)} \subset \mathbb{M}$ であって $\mathcal{M}^{(D)} = \partial \mathcal{M}^{(D+1)}$ を充たすようなものをとる。そして局所的な場の $U(1)$ 変換

$$\begin{aligned} \mathcal{T}: \Gamma(S) &\longrightarrow \Gamma(S), \psi \longmapsto (x \mapsto e^{i\theta(x)} \psi) \\ \text{w/ } \theta(x) &= \begin{cases} \theta, & x \in \mathcal{M}^{(D)}, \\ 0, & x \notin \mathcal{M}^{(D)} \end{cases} \end{aligned}$$

を行う。すると、Noether カレントの表式 (3.3.8) を用いて

$$\begin{aligned} S[\mathcal{T}(\psi)] - S[\psi] &= - \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x i\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \partial_\mu \theta(x) \\ &= \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x i\partial_\mu (\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)) \theta(x) \\ &= - \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x \partial_\mu j^\mu(x) \theta(x) \end{aligned}$$

$$= -\theta \int_{\mathcal{M}^{D+1}} d \star j \\ = -\theta \int_{\mathcal{M}^D} \star j$$

であることがわかる。つまり、変換 \mathcal{T} の下で

$$\langle \hat{\psi}(y) \hat{\mathcal{O}}(z) \rangle = \int [d\psi] e^{iS[\psi]} \exp \left(-i\theta \int_{\mathcal{M}^D} \star j \right) e^{i\theta} \psi(y) \mathcal{O}(z)$$

と計算される。

$$\langle R_g \hat{\psi}(y) \hat{\mathcal{O}}(z) \rangle = \int [d\psi] e^{iS[\psi]} U_g(\mathcal{M}^{(D)}) \psi(y) \mathcal{O}(z) \quad (3.3.11)$$

と言うことである。

3.3.2 連続的高次対称性

【例 3.3.1】は、荷電物体が 0 次元に分布していた。これを p 次元部分多様体上に分布した物体に置き換えることで p -form symmetry の概念が得られる [?, p.10] :

! 以下で部分多様体といったときは、技術的な理由からコンパクトな埋め込まれた C^∞ 多様体を指すものとする。

定義 3.9: p -form symmetry

$D+1$ 次元の場の量子論が群 G による **p -form symmetry** を持つとは、時空 \mathcal{M} の任意の $D-p$ 次元部分多様体 $\mathcal{M}^{(D-p)} \subset \mathcal{M}$ および $\forall g \in G$ に対して対称性演算子（トポロジカル演算子）(topological operator) $U_g(\mathcal{M}^{(D-p)})$ が存在して以下を充たすことを言う：

- $U_g(\mathcal{M}^{(D-p)})$ は任意の p 次元部分多様体 $\mathcal{C}^{(p)} \subset \mathcal{M}$ の台を持つ荷電物体（演算子）(charged object, operator) $V(\mathcal{C}^{(p)})$ に作用する。
- $\forall g, g' \in G$ に対して群の規則 (group law)

$$U_g(\mathcal{M}^{(D-p)}) U_{g'}(\mathcal{M}^{(D-p)}) = U_{gg'}(\mathcal{M}^{(D-p)})$$

が成り立つ。

- 任意の p 次元部分多様体 $\mathcal{C}^{(p)} \subset \mathcal{M}$ と、それに「絡む」十分小さな $D-p$ 球 $S^{D-p} \subset \mathcal{M}$ に対して、(3.3.11) と同じく経路積分の期待値の意味で

$$U_g(S^{D-p}) V(\mathcal{C}^{(p)}) = R_g(V(\mathcal{C}^{(p)}))$$

が成り立つ。ただし $R: G \rightarrow \text{GL}(\{\text{荷電物体}\})$ は群 G の表現である。

【例 3.3.2】 $3+1$ 次元 $U(1)$ ゲージ理論

物質場のない $U(1)$ ゲージ理論を考える。ゲージ場を局所接続形式^a $a = a_\mu dx^\mu \in \Omega^1(\mathcal{M}; \mathfrak{u}(1))$ として与え、場の強さを $f := da$ とおく。 $f = f_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ と成分表示すると $f_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu$ となる。

作用は

$$S[a] = -\frac{1}{2e^2} \int_{\mathcal{M}} d^4x f \wedge \star f = -\frac{1}{4e^2} \int_{\mathcal{M}} d^4x f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}$$

と書かれる。 $\delta a \in \Omega^1(\mathcal{M}; \mathfrak{u}(1))$ を用いた作用の変分は

$$\begin{aligned} \delta_{\delta a} S[a] &= -\frac{1}{e^2} \int_{\mathcal{M}} d(\delta a) \wedge \star f \\ &= -\frac{1}{e^2} \int_{\mathcal{M}} d(\delta a \wedge \star f) - \frac{1}{e^2} \int_{\mathcal{M}} \delta a \wedge d \star f \end{aligned}$$

なので、Euler-Lagrange 方程式と Bianchi 恒等式から

$$\begin{aligned} d \star f &= 0, \\ df &= 0 \end{aligned}$$

が言える (Maxwell 方程式)。これをカレントの保存則と見做して、任意の $3-1=2$ 次元閉部分多様体 $\mathcal{M}^{(2)} \subset \mathcal{M}$ 上のトポロジカル演算子を

$$\begin{aligned} U^E_{e^{i\theta}}(\mathcal{M}^{(2)}) &:= \exp\left(i\theta \int_{\mathcal{M}^{(2)}} \frac{\star f}{e^2}\right) \\ U^M_{e^{i\theta}}(\mathcal{M}^{(2)}) &:= \exp\left(i\theta \int_{\mathcal{M}^{(2)}} \frac{f}{2\pi}\right) \end{aligned}$$

と定義しよう。 $U^E_{e^{i\theta}}(\mathcal{M}^{(2)})$ が作用する荷電物体は **Wilson loop**

$$W(\mathcal{C}^{(1)}) := \exp\left(i \int_{\mathcal{C}^{(1)}} a\right)$$

である。このことを示そう。

簡単のため $S := \mathcal{M}^{(2)}$, $C := \mathcal{C}^{(1)}$ と略記する。今、**絡み数**が

$$\text{Link}(S, C) = \int_{\mathcal{M}} \delta(C) \wedge \delta(V) = 1$$

となるように $C, V, S = \partial V$ をとる。ゲージ場の変換

$$\mathcal{T}: a \mapsto a + \theta \delta(V)$$

の下で場の強さは $f \mapsto f + \theta d(\delta(V)) = f - \theta \delta(S)$ となり、作用は^b

$$\begin{aligned} S[\mathcal{T}(a)] - S[a] &= -\frac{1}{2e^2} \int_{\mathcal{M}} (f - \theta \delta(S)) \wedge \star (f - \theta \delta(S)) - S[a] \\ &= \frac{\theta}{2e^2} \int_{\mathcal{M}} (\delta(S) \wedge \star f + f \wedge \star \delta(S) - \theta \delta(S) \wedge \star \delta(S)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\theta}{e^2} \int_{\mathcal{M}} (\delta(S) \wedge \star f - \theta \delta(S) \wedge \star \delta(S)) \\
&= \theta \int_S \frac{\star f}{e^2} - \frac{\theta^2}{2e^2} \int_S \delta(S)
\end{aligned}$$

と変換する。一方、Wilson ループは

$$\begin{aligned}
W(C) &\longmapsto \exp \left(i \int_C (a + \theta \delta(V)) \right) \\
&= \exp \left(i \int_C a + i\theta \int_{\mathcal{M}} \delta(V) \wedge \delta(C) \right) \\
&= \exp \left(i \int_C a - i\theta \text{Link}(S, C) \right) \\
&= e^{-i\theta} \exp \left(i \int_C a \right)
\end{aligned}$$

と変換するので^c,

$$\langle W(C)\mathcal{O} \rangle = \int [da] e^{iS[a]} U^E_{e^{i\theta}}(S) e^{-i\theta} W(C) O$$

i.e.

$$\langle e^{i\theta} W(C) \mathcal{O} \rangle = \int [da] e^{iS[a]} U^E_{e^{i\theta}}(S) W(C) O$$

が分かった。

トポジカル演算子を 2 次元閉部分多様体上で定義したが、境界を持つ場合、i.e. $C := \partial \mathcal{M}_C^{(2)} \neq \emptyset$ の場合はどうなるのか。

$$H_\theta(\mathcal{M}_C^{(2)}) := \exp \left(i\theta \int_{\mathcal{M}_C^{(2)}} \frac{\star f}{e^2} \right)$$

を考える。境界を共有するもう 1 つの 2 次元部分多様体 $\mathcal{N}_C^{(2)}$ を持ってくると

$$H_\theta(\mathcal{M}_C^{(2)}) H_\theta(\mathcal{N}_C^{(2)})^{-1} = \exp \left(i\theta \oint_{\mathcal{M}_C^{(2)} \cup_C (-\mathcal{N}_C^{(2)})} \frac{\star f}{e^2} \right)$$

これは $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ のとき C にしかよらない。このことから、 $U^M_{e^{i\eta}}(\mathcal{M}_C^{(2)})$ が作用する荷電物体（'t Hooft ループ）を Hodge dual なゲージ場 $db := \frac{2\pi}{e^2} \star f$ によって

$$H_n(C) := \exp \left(in \int_C b \right)$$

と定義できる。

^a 厳密には \mathcal{M} の開集合上の $u(1)$ -値 1 形式

^b $\omega \wedge \star \eta = \eta \wedge \star \omega$ に注意。

^c トポジカル演算子を $\exp \left[i\theta \left(\int_S \frac{\star f}{e^2} - \frac{\theta^2}{2e^2} \int_S \delta(S) \right) \right]$ と再定義した。

3.3.3 対称性の自発的破れ

まずは通常の対称性(0-form symmetry)の場合を考える。系が Lie 群 G で特徴付けられる 0-form symmetry を持つ場合を考えよう。ただし群は場へ表現 $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(N, \mathbb{K})$ として作用しているとする。このとき、無限小な対称性変換は Lie 代数 \mathfrak{g} の基底 $T^A \in \mathfrak{g}$ および微分表現 $\rho_*: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(N, \mathbb{K})$ を用いて^{*13} $\mathcal{T}_{i\varepsilon_A \rho_*(T^A)(\varphi)}$ と書けるので、Noether の定理より on shell な保存則 (3.3.10) を充たす $\dim G$ 個の Noether カレント (3.3.5) j_A ($A = 1, \dots, \dim G$) が存在し、それに付随して $\dim G$ 個の保存電荷 $Q_A(\mathcal{M}^{(D)}) = \int_{\mathcal{M}^{(D)}} \star j_A$ が存在して対称性変換の無限小生成子 (3.3.7) となるのだった。

さて、Noether の定理によって特徴付けられる対称性は必ずしも系の基底状態 $|0\rangle$ の対称性にならない。i.e. 形式的には

- (1) $1 \leq \forall A \leq \dim G, \hat{Q}_A |0\rangle = 0$
- (2) $1 \leq \exists A \leq \dim G, \hat{Q}_A |0\rangle \neq 0$

の 2 つの場合^{*14}があり得る。(1) の場合、系は対称性を実現している、または系は Wigner 相 (Wigner phase) にあると言い、(2) の場合、系の対称性が自発的に破れた、または系は Nambu-Goldstone 相 (Nambu-Goldstone phase) にあると言う [?, p.1]. 0-form symmetry の言葉に翻訳すると、対称性の自発的破れ (spontaneous symmetry breaking; SSB) とは、0-form symmetry を特徴付ける Lie 群 G がその部分群 $H \subset G$ に縮小していることを指す^{*15}。SSB を特徴付けるには、上述のように素朴には $\hat{Q}_A |0\rangle \neq 0$ を充たす $1 \leq A \leq \dim G$ が存在するかどうかを確認すれば良いように見えるが、 $\langle 0 | \hat{Q}_A \hat{Q}_A | 0 \rangle \propto \mathrm{vol}(\mathcal{M}^{(D)})$ なので^{*16} 熱力学極限において $\hat{Q}_A |0\rangle$ は定義できない。そこで、代わりにある局所演算子 (i.e. compactly supported な演算子) $\hat{O}(x)$ が存在して

$$\langle 0 | [i\hat{Q}_A, \hat{O}(x)] | 0 \rangle \neq 0 \quad (3.3.12)$$

を充たすことと特徴付ける。(3.3.12) の左辺を系の秩序変数 (order parameter) と呼ぶ。

では、相対論的な系における Nambu-Goldstone の定理から出発しよう。

定理 3.1: Nambu-Goldstone (相対論的)

考えている系が Lie 群 G で特徴付けられる 0-form symmetry を持ち、さらに

- (1) 並進対称性と Lorentz 共変性を持ち、
- (2) 部分群 $H \subset G$ に対称性が自発的に破れている

とする。このとき、系は線形分散を持つ零質量の独立な励起 (NG モード) をちょうど $\dim G - \dim H$ 個持つ。

定理 3.1 の条件 (1) は NG モードが互いに独立であり、かつ必ず線形分散を持つことの証明に使うのだが、

^{*13} 苦肉の策だが、Lie 代数の添字を A, B, C, \dots とする。

^{*14} もしくは、 $U_g(\mathcal{M}^{(D)}) |0\rangle = |0\rangle$ としても良い。

^{*15} 考えている場が構造群 G を持つファイバー束として定式化されている場合、SSB は数学的には構造群の収縮 (reduction of structure group) として定式化できる。

^{*16} Fabri - Picasso の定理 [?]

かなりややこしい^{*17}ので、ここでは NG モードが存在することだけの証明の概略を述べるに留める。

証明 系は場 $\varphi \in \Gamma(E)$ からなるとし、この系の作用を $S[\varphi]$ と書く。Green 関数の生成汎函数を

$$\begin{aligned} Z[J] &= e^{iW[J]} := \langle 0 | \mathcal{T} \exp \left(i \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x J(x) \varphi(x) \right) | 0 \rangle \\ &= \frac{\int [d\varphi] \exp \left(S[\varphi] + \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x J(x) \varphi(x) \right)}{\int [d\varphi] \exp S[\varphi]} \end{aligned}$$

と定義し、有効作用を

$$\Gamma[\psi] := W[J] - \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x J(x) \psi(x)$$

と定義する。ただし

$$\psi(x) := \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \frac{\langle 0 | \mathcal{T} \{ \hat{\varphi}(x) \exp \left(i \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x J(x) \varphi(x) \right) \} | 0 \rangle}{\langle 0 | \mathcal{T} \{ \exp \left(i \int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x J(x) \varphi(x) \right) \} | 0 \rangle}$$

とおいた。さらに有効ポテンシャルを

$$V(\varphi) := -\frac{\Gamma[\varphi]|_{\varphi=\text{const.}}}{\int_{\mathcal{M}} d^{D+1}x}$$

と定義する。QFT の一般論から、場の演算子の真空期待値 $\varphi_0 := \langle 0 | \hat{\varphi}(x) | 0 \rangle$ に対して $\varphi_0 = \operatorname{argmin} V(\varphi)$ であることが知られている。

簡単のため G が線型 Lie 群で、系の対称性変換が $\mathcal{T}_{i\varepsilon_A \rho_*(T^A)(\varphi)}$ ($A = 1, \dots, \dim G$) と書ける場合を考える。^(3.3.7) を思い出すと、このとき

$$[i\hat{Q}^A, \hat{\varphi}(x)] = i\rho_*(T^A)(\hat{\varphi}(x))$$

が成り立つ。 $\Gamma[\varphi], V[\varphi]$ もこの変換の下で不变なので

$$\begin{aligned} &V(\varphi + i\varepsilon^A \rho_*(T^A)\varphi) = V(\varphi) \\ \implies &\frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi_a} [\rho_*(T^A)]_a^b \varphi_b = 0 \\ \implies &\frac{\partial^2 V(\varphi)}{\partial \varphi_a \partial \varphi_b} [\rho_*(T^A)]_b^c \varphi_c + \frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi_b} [\rho_*(T^A)]_a^b \varphi_b = 0 \quad (1 \leq \forall a \leq N) \end{aligned} \tag{3.3.13}$$

ここで条件 (2) から

$$\langle 0 | [i\hat{Q}_A, \hat{\varphi}(x)] | 0 \rangle = i\rho_*(T^A)(\langle 0 | \hat{\varphi}(x) | 0 \rangle) \begin{cases} = 0, & T^A \in \mathfrak{h}, \\ \neq 0, & T^A \notin \mathfrak{h} \end{cases}$$

^{*17} 例えば [?, p.7] に漸近場を使った議論が載っている

が成り立つので、 $v := \langle 0 | \hat{\varphi}(x) | 0 \rangle$ とおくと、(3.3.13) より破れた対称性に対応する任意の $1 \leq A \leq \dim G$ に対して

$$v \neq 0 \text{ かつ } \left. \frac{\partial^2 V(\varphi)}{\partial \varphi_a \partial \varphi_b} \right|_{\varphi=v} [\rho_*(T^A)(v)]_b = 0 \quad (1 \leq \forall a \leq N) \quad (3.3.14)$$

が成り立たねばならない。ところで、真空期待値が 0 になる場を $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(x) - v$ で定義すると

$$V(\varphi) = V(v) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V(\varphi)}{\partial \varphi_a \partial \varphi_b} \right|_{\varphi=v} \tilde{\varphi}_a \tilde{\varphi}_b + \mathcal{O}(\tilde{\varphi}^3)$$

となるから、行列 $\left[\left. \frac{\partial^2 V(\varphi)}{\partial \varphi_a \partial \varphi_b} \right|_{\varphi=v} \right]_{1 \leq a, b \leq \dim G}$ を対角化した固有値が粒子の質量の 2 乗を与える。従って (3.3.14) から、 $T^A \notin \mathfrak{h}$ ならば $\rho_*(T^A)(v)$ がこの行列の固有値 0 に対応する固有ベクトル、i.e. ゼロ質量の NG 粒子であることが分かった。 ■

NG モードの存在がわかったので、次に NG 粒子を記述する有効ラグランジアンの構成法を考える。破れた対称性は Lie 群 G/H で特徴付けられるはずである。まず、 $\text{Lie}(G/H) \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ に注意する^{*18}。このとき $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ の基底を $X^A + \mathfrak{h}$ w/ $A = 1, \dots, \dim G - \dim H$ と書くと、 $X^A \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ が \mathfrak{g} において線型独立であるように選べるから、 T^A のうち \mathfrak{h} に属さないものとすることができます。命題??より可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{T_{1_G} p} & \text{Lie}(G/H) \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \\ \downarrow \exp_G & & \downarrow \exp_{G/H} \\ G & \xrightarrow{p} & G/H \end{array}$$

が成り立つから、左剰余類 $gH \in G/H$ の代表元として

$$\exp_G(i\pi_A(x)X^A) \in G$$

を選ぶことができる^{*19}。この $\dim G - \dim H$ 成分場 $\pi: M \longrightarrow \text{Lie}(G/H)$ のことを NG ボゾン場と呼ぶ。このとき、大域的な $g \in G$ の作用に応じた場 π の変換 $\pi \mapsto \pi'$ は

$$\exp_G(i\pi_A(x)X^A) H \mapsto g \exp_G(i\pi_A(x)X^A) H =: \exp_G(i\pi'_A(x)X^A) H$$

となるから、顕にはある $h(g, \pi) \in H$ を使って

$$\exp_G(i\pi'_A(x)X^A) = g \exp_G(i\pi_A(x)X^A) h(g, \pi) \quad (3.3.15)$$

と書くことができる。 $g \in H$ のときは任意の π について

$$\exp_G(i\pi'_A(x)X^A) H = \exp_G(i\pi_A(x)X^A) H$$

でなくてはいけないから $h(g, \pi) = g^{-1}$ であり、(3.3.15) を $0 \in \mathfrak{h}$ において微分することで $\pi(x)$ が

$$\pi'(x) = \text{Ad}(g)(\pi(x))$$

^{*18} 標準的射影 $p: G \longrightarrow G/H$ について $T_{1_G} p: \mathfrak{g} \longrightarrow \text{Lie}(G/H)$ は全射であるが^s、 $X \in \mathfrak{h} \iff T_{1_G} p(X) = T_0(p \circ \exp_G) \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \right) = 0$ なので $\mathfrak{h} \subset \text{Ker } T_{1_G} p$ がわかり、次元を考えることで $\text{Ker } T_{1_G} p = \mathfrak{h}$ が言える。よって準同型定理から $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \cong \text{Lie}(G/H)$ である。

^{*19} 厳密には \exp_G が全射とは限らないので、これは多様体 G/H の単位元 H 近傍のチャート $(U, (\pi_A))$ だと考えるべきである。

なる線形変換を受けることがわかる。一方で $g \in G \setminus H$ のときは変換則 (3.3.15) は $\pi(x)$ について非線形である。

NG ボゾン場の項を含むラグランジアンは、 G -不变でなくてはいけない。そのような項を構成するために Maurer-Cartan 形式 $\theta \in \Omega^1(G; \mathfrak{g})$ を使う。これを C^∞ 写像 $\xi := \exp_G(i\pi(\cdot)) : \mathcal{M} \rightarrow G$ で引き戻すこと で左不変な $\xi^*\theta \in \Omega^1(\mathcal{M}; \mathfrak{g})$ を得る。 \mathfrak{h} 成分と $\mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ 成分に分離して

$$\xi^*\theta = \underbrace{\xi^*\theta_{||}}_{\in \mathfrak{h}} + \underbrace{\xi^*\theta_{\perp}}_{\in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}}$$

と書く。行列 Lie 群の場合に成分表示を求めるとき

$$\xi^*\theta|_x(\partial_\mu) = \theta_{\xi(x)}(T_x\xi(\partial_\mu)) = \xi(x)^{-1}\partial_\mu\xi(x)$$

である。変換則 (3.3.15) から、 $\forall g \in G$ に関する大域的な変換について

$$\xi(x)^{-1}\partial_\mu\xi(x) \mapsto h^{-1}(g, \pi)\xi(x)^{-1}\partial_\mu\xi(x)h(g, \pi) + \underbrace{h(g, \pi)^{-1}\partial_\mu h(g, \pi)}_{\in \mathfrak{h}}$$

となる。i.e. $\text{Tr}(\xi^*\theta_{\perp}) \in \Omega^1(M)$ が NG ボゾン場の変換 (3.3.15) について整合的である。よって微分の次数が 2 次の Lagrangian が

$$\mathcal{L}_{\text{NGB}} := -\frac{1}{2}\text{Tr}(\xi^*\theta_{\perp} \wedge \star\xi^*\theta_{\perp})$$

で与えられる^{*20}。低エネルギーの時は π の最低次までとる。

$$\begin{aligned} \xi(x)^{-1}\partial_\mu\xi(x) &= \frac{1 - e^{-i\text{ad}(\pi(x))}}{i\text{ad}(\pi(x))}(\partial_\mu\pi(x)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{(n+1)!} \text{ad}(\pi(x))^n(\partial_\mu\pi(x)) \\ &= \partial_\mu\pi(x) - \frac{i}{2!}[\pi(x), \partial_\mu\pi(x)] + \mathcal{O}(\pi^2\partial_\mu\pi) \end{aligned}$$

なので

$$\mathcal{L}_{\text{NGB}} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\pi_A\partial^\mu\pi_B \text{Tr}(X^AX^B)$$

である。 $g^{AB} := \text{Tr}(X^AX^B)$ は \mathfrak{g} の規格化条件にもよるが、多様体 G/H の計量テンソルになっている。

次に物質場との結合を記述する方法を考える。物質場 ψ の値域は破れていない対称性 H の既約表現 $\rho_0: H \rightarrow \text{GL}(\mathcal{H})$ の表現空間 \mathcal{H} だと考えて良い。 $\forall g \in G$ による変換則は (3.3.15) の $h(g, \pi) \in H$ を使って

$$\psi(x) \mapsto \rho_0(h(g, \pi)^{-1})(\psi(x))$$

と定義すると、前述の議論から $g = h \in H$ のときは $\psi \mapsto \rho_0(h)(\psi)$ と変換するので整合的である。 G の既約表現 $\rho: G \rightarrow \text{GL}(\mathcal{H}_{\text{ext}})$ であって、 H の表現と見做して既約表現の直和に分解した際に ρ_0 を直和因子の 1 つに持つようなものを与えたとき、標準的包含 $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{H}_{\text{ext}}$ によって ψ を送った先を $\widehat{\psi}$ とおくと、新しい場

$$\chi(x) := \rho(\xi(\pi))(\widehat{\psi}(x))$$

^{*20} このウェッジ積は普通のものではなく、 $\omega = \omega_A T^A$, $\eta = \eta_A T^A$ と展開して $\omega \wedge \eta := \frac{1}{2}\omega_A \wedge \eta_B [T^A, T^B] \in \Omega^{p+q}(M; \mathfrak{g})$ と定義した。

は、 $\forall g \in G$ による大域的変換の下で

$$\begin{aligned}\chi(x) &\longmapsto \rho(g\xi(\pi)h(g, \pi))(\widehat{\rho_0(h(g, \pi)^{-1})}(\psi)(x)) \\ &= \rho(g) \circ \rho(\xi(\pi)) \circ \rho(h(g, \pi)) \circ \rho(h(g, \pi))^{-1}(\widehat{\psi}(x)) \\ &= \rho(g)(\chi(x))\end{aligned}$$

の変換を受ける。 ψ をそのまま扱うよりも $\chi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}_{\text{ext}}$ について G -不変な Lagrangian を書き下す方が簡単であり、 χ は NGB と物質場の相互作用も記述してくれる。最後に、これまで大域的対称性だと思っていた群 G の作用を局所的対称性にするために背景ゲージ場を導入する。そのためには Maurer-Cartan 形式の ∂_μ を共変微分に置き換えれば良く、NGB と背景ゲージ場との結合はそれで決まる。あからさまには

$$\xi(x)^{-1}(\partial_\mu + A_\mu(x))\xi(x)$$

にすると言うことである。 $A_\mu A T^A$ と展開すると

$$\begin{aligned}\xi(x)^{-1}A_\mu(x)\xi(x) &= A_{\mu A}(x) \text{Ad}(\exp_G(-i\pi(x)))(T^A) \\ &= A_{\mu A}(x) \exp_{\text{GL}(\mathfrak{g})}(-i\pi_B(x) \text{ad}(T^B))(T^A) \\ &= A_{\mu A}(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \pi_{B_1}(x) \cdots \pi_{B_n}(x) \text{ad}(T^{B_1}) \circ \cdots \text{ad}(T^{B_n})(T^A) \\ &= A_\mu(x) + \mathcal{O}(\pi)\end{aligned}$$

となるので、 π の最低次では Maurer-Cartan 形式の成分

$$\partial_\mu \pi + A_\mu$$

と書かれる。よってゲージ変換 $A \mapsto A + d\lambda_0$ は NG ボソンに $\pi + \lambda_0$ のシフトを引き起こす。

余談だが、定理 3.1 の Lorentz 共変性の条件 (1) を外すと話はややこしくなる。まず、波数の小さいところにおいて分散関係が奇数幕であるような NG モードを Type-I、偶数幕で書けるような NG モードを Type-II と呼ぶ [?]. そして

- 破れた対称性の個数を $N_{\text{BG}} := \dim G - \dim H$
- NG モードの総数を N_{NGB}
- Type-I, Type-II の個数をそれぞれ $N_{\text{I}}, N_{\text{II}}$

とおこう。[?] による結果は以下の通りである：

定理 3.2: Nielsen-Chadha

$$N_{\text{I}} + 2N_{\text{II}} \geq N_{\text{BG}}$$

証明

さらに、[?] によって以下が示された：

定理 3.3: Watanabe-Murayama

$\Omega := \int_{\Sigma} d^D x$ とおき, $\rho_{AB} := \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\Omega} \langle 0 | [Q_A, Q_B] | 0 \rangle$ と定義する. このとき以下が成り立つ:

$$N_{\text{BG}} - N_{\text{NGB}} = \frac{1}{2} \operatorname{rank} \rho$$

証明

■

3.3.4 高次対称性の自発的破れ

この小節と次の小節では時空 \mathcal{M} は境界を持たないと仮定する^{*21}. 0 次対称性の場合と同様に, p 次対称性の自発的破れを議論することができる. p -form symmetry の場合, トロポジカル演算子は $p+1$ -form 背景ゲージ場と等価であった. 0-form の場合からの類推で, NG ボゾン場は背景 $p+1$ -form ゲージ場のゲージ変換によってシフトするはずだが, $p+1$ -form ゲージ場 B_{p+1} のゲージ変換は p -form Λ_p により $B_{p+1} \mapsto B_{p+1} + d\Lambda_p$ の形をしているので, NG ボゾン場は p -form である.

p -form symmetry の秩序変数は荷電物体の真空期待値であり, 一般に $\mathcal{C}^{(p)} \subset \mathcal{M}$ に依存する何らかの関数 $F(\mathcal{C}^{(p)})$ を使って

$$\langle V(\mathcal{C}^{(p)}) \rangle \sim e^{-F(\mathcal{C}^{(p)})}$$

の振る舞いをする. SSB を特徴づける典型的な振る舞いは

$$\lim_{\operatorname{vol}(\mathcal{C}^{(p)}) \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \left[\frac{F(\mathcal{C}^{(p)})}{\operatorname{vol}(\mathcal{C}^{(p)})} \right] \begin{cases} < \infty, & \text{SSB} \\ = \infty, & \text{unbroken} \end{cases}$$

というものである. SSB が起こったと言うのは, 荷電演算子を

$$\hat{V}(\mathcal{C}^{(p)}) := e^{-c \int_{\mathcal{C}^{(p)}} \star_{\mathcal{C}^{(p)}} 1} V(\mathcal{C}^{(p)})$$

と正則化することで

$$\lim_{\operatorname{vol}(\mathcal{C}^{(p)}) \rightarrow \infty} \langle V(\mathcal{C}^{(p)}) \rangle \neq 0$$

を充たすようにできると言う意味である.

演算子形式ではどうなるのだろうか? (3.3.12) の素朴な一般化は

$$\langle [\hat{Q}(\mathcal{M}^{(D-p)}), V(\mathcal{C}^{(p)})] \rangle$$

であるが, これは $\mathcal{M}^{(D-p)}, \mathcal{C}^{(p)}$ が共に閉多様体だと微妙なところがある [?].

[?, p.5-6] に倣って, 系が並進対称性を持つ場合にギャップレスな励起が存在することをざっと確認しよう. 演算子形式で議論するので, 時間一定面 $\mathcal{M}^{(D)} \subset \mathcal{M}$ を 1 つ固定し, 微妙なことが起こらないように $\mathcal{M}^{(D-p)} \subset \mathcal{M}^{(D)}$ が境界を持つとする. 保存則 $d \star j = 0$ を充たすカレント $\star j$ および $\mathcal{M}^{(D)}$ に関するデ

^{*21} 境界がある場合の取り扱いは [?] に書いてある.

ルタ関数形式 $\delta^D(\mathcal{M}^{(D-p)})$ を使って $Q(\mathcal{M}^{(D-p)}) = \int_{\mathcal{M}^{(D)}} \star j \wedge \delta^D(\mathcal{M}^{(D-p)})$ と書ける。並進対称性から $\langle 0 | \star \hat{j} \wedge \delta^D(\mathcal{M}^{(D-p)})(x) | n \rangle = e^{ip_n \cdot x} \langle 0 | \star \hat{j} \wedge \delta^D(\mathcal{M}^{(D-p)})(0) | n \rangle$ が成り立つので

$$\begin{aligned} & \left\langle \left[i\hat{Q}(\mathcal{M}^{(D-p)}), V(\mathcal{C}^{(p)}) \right] \right\rangle \\ &= i \sum_n (2\pi)^D \delta^D(p) \left(\langle 0 | \star \hat{j} \wedge \delta^D(\mathcal{M}^{(D-p)})(0) | n \rangle \langle n | V(\mathcal{C}^p) | 0 \rangle e^{-iE_n x^0} \right. \\ &\quad \left. - \langle 0 | V(\mathcal{C}^p) | n \rangle \langle n | \star \hat{j} \wedge \delta^D(\mathcal{M}^{(D-p)})(0) | 0 \rangle e^{iE_n x^0} \right) \end{aligned}$$

が言える。一方で左辺を $x^0 = t$ 方向に微分すると、保存則および Stokes の定理から

$$\begin{aligned} \partial_0 \left\langle \left[i\hat{Q}(\mathcal{M}^{(D-p)}), V(\mathcal{C}^{(p)}) \right] \right\rangle &= \int_{\mathcal{M}^{(D-p)}} \left\langle \left[\partial_0 \star j, V(\mathcal{C}^{(p)}) \right] \right\rangle \\ &= - \int_{\partial \mathcal{M}^{(D-p)} \subset \partial \mathcal{M}^{(D)}} \left\langle \left[\star_{\mathcal{M}^{(D)}} j, V(\mathcal{C}^{(p)}) \right] \right\rangle \end{aligned}$$

となる。次元を数えることでいつでも $\mathcal{C}^{(p)} \cap \partial \mathcal{M}^{(D-p)} = \emptyset$ にできることがわかるので結局右辺は 0 だとわかる。よってもし $\left\langle \left[i\hat{Q}(\mathcal{M}^{(D-p)}), V(\mathcal{C}^{(p)}) \right] \right\rangle \neq 0$ ならば $p = 0$ のときに $E_n = 0$ となるような n が存在する。

【例 3.3.3】3 + 1 次元の Yang-Mills 理論

【例 3.3.4】U(1) ゲージ理論

3.3.5 高次対称性の Coleman-Mermin-Wagner の定理

通常の Coleman-Mermin-Wagner の定理は、連続的 0 次対称性が 1 + 1 次元以下では自発的に破れないことを主張する。これは p 次対称性に拡張することができる：

定理 Ph 3.1: 高次対称性についての Coleman-Mermin-Wagner の定理

$D+1$ 次元時空において、Lie 群 G で特徴付けられる $p \geq D-1$ 次対称性は自発的に破れない。

証明 より詳細な扱いは [?, p.23] を参照。ここではとても雑に示す。

$D+1$ 次元 Euclid 時空 \mathcal{M} の自由かつ massless な p -form 場（これは p -form NG ボゾン場のつもりである） $B_p \in \Omega^p(\mathcal{M})$ の理論

$$S = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} dB_p \wedge \star dB_p$$

を考える。 B_p の 2 点関数の長距離における振る舞いを見る。そのためには参照点を 1 つ固定し、その点を原点に持つ $D+1$ 次元極座標 $(r, \theta^1, \dots, \theta^D)$ を r が十分大きいところでとる。このときの Green 関数の r 依存性を見ればよい：

$$d \star dG_p(r, \theta^\mu) = 0$$

外微分したときに $\partial_r dr \wedge$ が生き残るのは $d\theta^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge d\theta^{\mu_p}$ の項のみである。また、自然基底の規格化のために $r d\theta^\mu$ を考えないといけないので、結局 p -form の

$$G_p{}^{\text{ang}}_{\mu_1, \dots, \mu_p} r^p d\theta^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge d\theta^{\mu_p}$$

の部分を見ないと意味がない。よって

$$\frac{1}{r^{D+1-p}} \partial_r \left(r^{D+1-(p+1)} \frac{1}{r^p} \partial_r (r^p G(r)) \right) = 0$$

と言うことであり、 $G(r) \sim r^{-(d-p-1)}$ である。このことから、 $d-p-1 > 0$ でないと 2 点関数が $r \rightarrow \infty$ で発散することになり、 p -form NG ボソン場が ill-defined である。i.e. $p \geq D - 1$ -form symmetry は自発的に破れない。■

3.3.6 対称性のアノマリー

アノマリー^{*22}には、大別して 3 種類ある [?]:

ゲージアノマリー

元の理論 $S[\psi]$ にゲージ化 $\partial_\mu \mapsto \partial_\mu + a_\mu$ の操作を施して得られた理論 $S_{\text{gauged}}[\psi, a]$ の^{*23}分配関数

$$Z_{\text{gauged}} = \int [da] \int [d\psi] e^{-S_{\text{gauged}}[\psi, a] - S_{\text{kin}}[a]} =: \int [da] Z[A] e^{-S_{\text{kin}}[a]}$$

について、ある $g: \mathcal{M}^{(D+1)} \rightarrow G$ が存在してゲージ変換 $a \mapsto a^g := g^{-1}ag + g^{-1}dg$ の下で $Z[a] \neq Z[a^g]$ となること。このとき理論は矛盾している。と言うのも、汎函数積分 $\int [dA]$ が ill-defined になるからである。

't Hooft アノマリー

元の理論 $S[\psi]$ にゲージ化 $\partial_\mu \mapsto \partial_\mu + A_\mu$ の操作を施して得られた理論 $S_{\text{gauged}}[\psi, A]$ について

$$Z[A] := \int [d\psi] e^{-S_{\text{gauged}}[\psi, A]}$$

と定義したとき、ある $g \in G$ が存在してゲージ変換 $A \mapsto A^g := g^{-1}Ag + g^{-1}dg$ の下で $Z[A] \neq Z[A^g]$ となること。 A は単なる外場なので、理論が矛盾したわけではない。また、 $Z[0] = Z$ となる。

今、 $Z_{\text{UV}}[A]$ が繰り込み群変換の下で $Z_{\text{IR}}[A]$ に流れるとする。このとき、のちに見るようにアノマリーは 1 つ次元が上の TQFT で記述されるが、TQFT は繰り込み群変換の下で不变なので、両者のアノマリーは一致していなくてはいけない。つまり、理論 Z_{UV} が繰り込み群変換で Z_{IR} へ流れるための必要条件は、両者で 't Hooft アノマリーが一致することなのである。

ABJ アノマリー (Adler Bell Jackiw anomaly)

ゲージ群 G についてゲージアノマリーを持たない理論

$$Z = \int [da] \int [d\psi] e^{-S[\psi, a]} =: \int [da] Z[a]$$

^{*22} 誤語だと対称性の量子的破れと呼ぶこともある [?].

^{*23} ゲージ場がダイナミカルなときは a, b, \dots で、単に外場であるときは A, B, \dots で書くことにする。

が別の Lie 群 H についても大域的対称性を持っているとき、外場 A を導入して H 対称性をゲージ化して

$$Z[a, A] = \int [d\psi] e^{-S[\psi, a, A]}$$

を得るが、この新しく加えた A についてゲージ変換 $A \mapsto A^h$ を施したときに $Z[a, A^h] \neq Z[a, A]$ となることである。摂動論的には、 $2n$ 次元の理論が持つ摂動アノマリーであって、対応する $n+1$ 角形の Feynman ダイアグラムの外線のうち 1 本が外場で、残りの n 本がダイナミカルなゲージ場であるようなものである。ABJ アノマリーの場合もまた、理論が矛盾しているわけではない。

ABJ アノマリーは Noether カレントの非保存と等価である。

$$S[\psi, a] := \int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} d^{D+1}x \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu + a_\mu) \psi$$

を考える。これが G によるゲージ変換以外に、 H による大域的対称性 $S[\psi, a] = S[\psi^h, a]$ を持つとする。このとき $h: \mathcal{M}^{(D+1)} \rightarrow H$ による変換 $\rho(h)(\psi)$ を摂動的に扱い $h \sim 1 + \epsilon$ と思うと、

$$S[\psi^h, a] = S[\psi, a] - \int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} d^{D+1}x \epsilon \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)$$

になる。ここで、経路積分において測度が $[d\bar{\psi}^h d\psi^h] = J[d\bar{\psi} d\psi]$ と変換するならば

$$Z[a] = \int [d\bar{\psi}^h d\psi^h] e^{-S[\psi^h, a]} = \int [d\bar{\psi} d\psi] e^{-S[\psi, a]} J e^{\int d^{D+1}x \epsilon \partial_\mu j^\mu}$$

であり、 $J = e^{i \int d^{D+1}x \epsilon \mathbf{A}}$ と書くと

$$\partial_\mu j^\mu = i\mathbf{A}$$

が導かれるのだった (Fujikawa の方法)。一方、大域的対称性 H をゲージ化して

$$S[\psi, a, A] := \int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} d^{D+1}x \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu + a_\mu + A_\mu) \psi$$

にする。ゲージ不变性から $S[\psi^h, a, A^h] = S[\psi, a, A]$ なので、

$$S[\psi^h, a, A] = S[\psi^h, a, A^h] - \int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} d^{D+1}x \epsilon \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)$$

である。ABJ アノマリーは

$$\begin{aligned} Z[a, A^h] &= e^{i \int d^{D+1}\epsilon \mathbf{B}} Z[a, A] \\ \iff \int [d\bar{\psi}^h d\psi^h] e^{-S[\psi^h, a, A^h]} &= e^{i \int d^{D+1}\epsilon \mathbf{B}} \int [d\bar{\psi} d\psi] e^{-S[\psi, a, A]} \end{aligned}$$

を意味するから、

$$\partial_\mu j^\mu = -i\mathbf{B}$$

となる。

Lie 群 G で特徴づけられる 0-form symmetry の場合を考える。on shell な保存カレントを 't Hooft アノマリーの意味で 1-form 背景ゲージ場 A_1 に結合させることができる。このとき、ゲージ場はダイナミカルでないもので、分配関数は

$$Z[A_1] = \int [d\psi] e^{-S[\psi, A_1]}$$

の形になっている。この 0-form symmetry がアノマリーを持つとは、ゲージ変換 $A_1 \mapsto A_1 + d\lambda_0$ の下で分配関数が不变にならないことである、と定義しよう。記号的には

$$Z[A_1 + d\lambda_0] = e^{i \int_{M(D+1)} \mathcal{A}[A_1, \lambda_0]} Z[A_1]$$

と言うことである。ここで、この位相 $\mathcal{A}[A_1, \lambda_0]$ は $D+2$ 次元時空の TQFT の境界からの寄与だと考えてみよう^{*24}：

$$e^{i \int_{M(D+1)} \mathcal{A}[A_1, \lambda_0]} = e^{i \int_{\partial N(D+2)} \mathcal{A}[A_1, \lambda_0]} = e^{i \int_{N(D+2)} d\mathcal{A}[A_1, \lambda_0]}$$

つまり、 $d\mathcal{A}[A_1, \lambda_0]$ を $\widehat{\mathcal{A}}[A_1 + d\lambda_0] \in \Omega^{D+2}(N^{(D+2)})$ と見做すのである。すると、元の理論の分配関数を

$$\widehat{Z}[A_1] := Z[A_1] e^{-i \int_{N(D+2)} \widehat{\mathcal{A}}[A_1]}$$

と正則化すれば、直上で定義した意味でのアノマリーを相殺できるのである。

【例 3.3.5】カイラルアノマリー

カイラルアノマリーを Fujikawa 法で計算した結果は

$$\mathcal{A}[A_1, \lambda_0] = \kappa \lambda_0 \frac{F_2 \wedge F_2}{8\pi^2}$$

であるが、

$$\widehat{\mathcal{A}}[A_1] = \kappa A_1 \wedge \frac{F_2 \wedge F_2}{8\pi^2}$$

とすれば

$$\begin{aligned} \widehat{Z}[A_1 + d\lambda_0] &= Z[A_1] e^{i\kappa \int_{M(D+1)} \lambda_0 \frac{F_2 \wedge F_2}{8\pi^2}} e^{-i\kappa \int_{N(D+2)} (A_1 + d\lambda_0) \wedge \frac{F_2 \wedge F_2}{8\pi^2}} \\ &= \widehat{Z}[A_1] e^{\kappa \int_{M(D+1)} \lambda_0 \frac{F_2 \wedge F_2}{8\pi^2} - i\kappa \int_{\partial N(D+2) = M(D+1)} \lambda_0 \frac{F_2 \wedge F_2}{8\pi^2}} \\ &= \widehat{Z}[A_1] \end{aligned}$$

となり、アノマリーが相殺されている。

しかるに、全てのゲージ変換について分配関数の不变性を調べるのは一般には難しい。そこで、アノマリーの定義を数学的により扱いやすい形に書き直そう [?, p.41]。まず、アノマリー流入の仮説から出発する：

^{*24} この仮説は、フェルミオン系においては数学的に証明されている [?]

仮説 3.1: anomaly inflow

$d = D+1$ 次元時空 $\mathcal{M}^{(d)}$ の上の任意のゲージ場の理論 $Z[A; \mathcal{M}^{(d)}]$ を与える。このとき、ある $\mathcal{N}^{(d+1)}$ の上の TQFT $S^{\text{top}}[A; \mathcal{N}^{(d+1)}]$ が存在して、任意の $d+1$ 次元時空 $\mathcal{N}^{(d+1)}$ であって $\partial\mathcal{N}^{(d+1)} = \mathcal{M}^{(d)}$ を充たすものについて

$$\widehat{Z}[A; \mathcal{M}^{(d)}, \mathcal{N}^{(d+1)}] := Z_{\mathcal{M}^{(d)}}[A] e^{-iS^{\text{top}}[A; \mathcal{N}^{(d+1)}]}$$

で定義される理論がゲージ不变であるようにできる。

ここから、 d 次元のゲージ場の理論の分配関数をむしろ初めから $\widehat{Z}[A; \mathcal{M}^{(d)}, \mathcal{N}^{(d+1)}]$ として定義する。

定義 3.10: アノマリー

理論 $\widehat{Z}[A; \mathcal{M}^{(d)}, \mathcal{N}^{(d+1)}]$ がアノマリーを持つとは、ある 2 つの異なる $d+1$ 次元時空 $\mathcal{N}_1^{(d+1)}, \mathcal{N}_2^{(d+1)}$ であって $\partial\mathcal{N}_1^{(d+1)} = \partial\mathcal{N}_2^{(d+1)} = \mathcal{M}^{(d)}$ を充たすものが存在して

$$J[A; \mathcal{N}_1^{(d+1)}, \mathcal{N}_2^{(d+1)}] := \frac{\widehat{Z}[A; \mathcal{M}^{(d)}, \mathcal{N}_2^{(d+1)}]}{\widehat{Z}[A; \mathcal{M}^{(d)}, \mathcal{N}_1^{(d+1)}]} \neq 1$$

が成り立つことを言う。

定義 3.11: IFT

TQFT $\mathcal{Z}: \mathbf{Cob}_{d+1} \rightarrow \mathbf{Hilb}$ が IFT (invertible field theory) であるとは、 $\forall \Sigma^{(d)} \in \text{Ob}(\mathbf{Cob}_{d+1})$ について

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Z}(\Sigma^{(d)}) = 1$$

が成り立つことを言う。

仮説 3.1において、 $S^{\text{top}}[A; \mathcal{N}^{(d+1)}]$ は TQFT であった。特に IFT であることを仮定すると、アノマリーは

$$\begin{aligned} J[A; \mathcal{N}_1^{(d+1)}, \mathcal{N}_2^{(d+1)}] &= \frac{\widehat{Z}[A; \mathcal{M}^{(d)}, \mathcal{N}_2^{(d+1)}]}{\widehat{Z}[A; \mathcal{M}^{(d)}, \mathcal{N}_1^{(d+1)}]} \\ &= (e^{iS^{\text{top}}[A; \mathcal{N}_1^{(d+1)}]})^\dagger e^{iS^{\text{top}}[A; \mathcal{N}_2^{(d+1)}]} \\ &= \left\langle \mathcal{Z}(\mathcal{N}_1^{(d+1)}) \middle| \mathcal{Z}(\mathcal{N}_2^{(d+1)}) \right\rangle \\ &= \mathcal{Z}((- \mathcal{N}_1^{(d+1)}) \cup_{\partial\mathcal{N}^{(d+1)}} \mathcal{N}_2^{(d+1)}) \end{aligned}$$

となる。i.e. $\mathcal{M}^{(d)}$ のアノマリーはある IFT $\mathcal{Z}: \mathbf{Cob}_{d+1} \rightarrow \mathbf{Hilb}$ の分配関数^{*25}である。この事実をバルク-エッジ対応と言う。結局、アノマリーを列挙する問題は IFT を列挙する問題に帰着された、と言うことである。

^{*25} $d+1$ 次元閉多様体 $\mathcal{N}^{(d+1)}$ を $\mathcal{N}^{(d+1)} \in \text{Hom}_{\mathbf{Cob}_{d+1}}(\emptyset, \emptyset)$ と見做した際に、TQFT $\mathcal{Z}: \mathbf{Cob}_{d+1} \rightarrow \mathbf{Hilb}$ によって線型写像 $\mathcal{Z}(\mathcal{N}^{(d+1)}): \mathcal{Z}(\emptyset) \rightarrow \mathcal{Z}(\emptyset)$ が定まるが、 $\mathcal{Z}(\emptyset) = \mathbb{C}$ と定義していたのでこの線型写像はある複素数 $\lambda_{\mathcal{Z}, \mathcal{N}^{(d+1)}} \in \mathbb{C}$ と $\mathcal{Z}(\mathcal{N}^{(d+1)})(|\psi\rangle) = \lambda_{\mathcal{Z}, \mathcal{N}^{(d+1)}} |\psi\rangle$ の関係で一対一対応する。この複素数 $\lambda_{\mathcal{Z}, \mathcal{N}^{(d+1)}}$ のことを $\mathcal{Z}(\mathcal{N}^{(d+1)})$ と書いて、分配関数と呼ぶ。

さらに、次の有名な予想がある [?] :

予想 3.1: Freed-Hopkins の予想

IFT $\mathbf{Cob}_{d+1} \longrightarrow \mathbf{Hilb}$ の群構造は、 $d+2$ 次元の bordism 群の Anderson 双対

$$(I_{\mathbb{Z}}\Omega)^{d+2}$$

により与えられる。

3.3.7 高次対称性のアノマリー

高次対称性に関しても全く同様にアノマリーを判定できる。つまり、 p -form カレントを背景ゲージ場と結合させてゲージ変換を施した際の分配関数の変化が

$$Z[A_{p_i} + d\Lambda_{p_i-1}] = Z[A_{p_i}] e^{i \int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} \mathcal{A}[A_{p_i}, \Lambda_{p_i-1}]}$$

となり、 $\mathcal{A}[A_{p_i}, \Lambda_{p_i-1}] \neq 0$ ならば理論はアノマリーを持つと言う。特に $\mathcal{A}[A_{p_i}, \Lambda_{p_i-1} = 0 \forall i] = 0$ ならば't Hooft アノマリー、そうでないならば ABJ 型のアノマリーを持つと言う。

【例 3.3.6】 p -form U(1) ゲージ理論のアノマリー

作用が

$$S[A_p] = \frac{1}{2g^2} \int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} F_{p+1} \wedge \star F_{p+1}$$

で書かれる p -form U(1) ゲージ場 A_p の理論を考えよう。U(1)-ゲージ変換は $A_p \mapsto A_p + d\Lambda_{p-1}$ と書け、運動方程式と Bianchi 恒等式はそれぞれ

$$\begin{aligned} d \star F_{p+1} &= 0, \\ dF_{p+1} &= 0 \end{aligned}$$

となり、これらに対応して 2 つの保存カレント

$$\begin{aligned} \star J^{(e)} &:= \frac{1}{g^2} \star F_{p+1} \\ \star J^{(m)} &:= \frac{1}{2\pi} F_{p+1} \end{aligned}$$

がある。背景ゲージ場 $B_{p+1}^{(e)}$, $B_{D-p}^{(m)}$ と結合させよう：

$$S[A_p, B_{p+1}^{(e)}, B_{D-p}^{(m)}] = \int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} \frac{1}{2g^2} (F_{p+1} - B_{p+1}^{(e)}) \wedge \star (F_{p+1} - B_{p+1}^{(e)}) + \frac{i}{2\pi} \int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} F_{p+1} \wedge B_{D-p}^{(m)}$$

ここで背景ゲージ場のゲージ変換 $\delta B_{p+1}^{(e)} = \Lambda_{p+1}^{(e)} \in \mathrm{B}^{p+1}(\mathcal{M}^{(D+1)}; \mathbb{Z})$ を施す^b：

$$S[A_p, B_{p+1}^{(e)} + \Lambda_{p+1}^{(e)}, B_{D-p}^{(m)}]$$

$$= S[A_p, B_{p+1}^{(e)}, B_{D-p}^{(m)}] + \frac{i}{2\pi} \int_{\mathcal{M}^{(D+1)}} \Lambda_{p+1}^{(e)} \wedge B_{D-p}^{(m)}$$

この 't Hooft アノマリーは、アノマリー流入

$$\widehat{A}[B_{p+1}^{(e)}, B_{D-p}^{(m)}] := \frac{i}{2\pi} B_{p+1}^{(e)} \wedge dB_{D-p}^{(m)}$$

により相殺される。と言うのも、

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{N}^{(D+2)}} \widehat{A}[B_{p+1}^{(e)} + \Lambda_{p+1}^{(e)}, B_{D-p}^{(m)}] &= \int_{\mathcal{N}^{(D+2)}} \widehat{A}[B_{p+1}^{(e)}, B_{D-p}^{(m)}] + \frac{i}{2\pi} \int_{\mathcal{N}^{(D+2)}} \Lambda_{p+1}^{(e)} \wedge dB_{D-p}^{(m)} \\ &= \int_{\mathcal{N}^{(D+2)}} \widehat{A}[B_{p+1}^{(e)}, B_{D-p}^{(m)}] + (-1)^{p+1} \frac{i}{2\pi} \int_{\partial \mathcal{N}^{(D+2)} = \mathcal{M}^{(D+1)}} \Lambda_{p+1}^{(e)} \wedge B_{D-p}^{(m)} \end{aligned}$$

となるので、分配関数を

$$\widehat{Z}[B_{p+1}^{(e)}, B_{D-p}^{(m)}] := Z[B_{p+1}^{(e)}, B_{D-p}^{(m)}] e^{(-1)^p \int_{\mathcal{N}^{(D+2)}} \widehat{A}[B_{p+1}^{(e)}, B_{D-p}^{(m)}]}$$

と正則化すれば良い。

^a この理論は **p-form electrodynamics** と呼ばれる。

^b $B^\bullet(\mathcal{M}^{(D+1)}) := \text{Im}(d : \Omega^{\bullet-1}(\mathcal{M}^{(D+1)}) \longrightarrow \Omega^\bullet(\mathcal{M}^{(D+1)}))$ はバウンダリー。

3.4 Dijkgraaf-Witten 理論

離散的ゲージ理論^{*26} として知られる Dijkgraaf-Witten 理論 [?] を導入する。

3.4.1 普遍束

G を Lie 群とする。

*26 ゲージ場は 1 形式である。

定義 3.12: ファイバー束の引き戻し

- 構造群 G を持つファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$
- 連続写像 $f: B_1 \longrightarrow B$

を与える。このとき

$$f^*(E) := \{ (b_1, u) \in B_1 \times E \mid f(b_1) = \pi(u) \}$$

と定めることで得られるファイバー束 $F \hookrightarrow f^*(E) \xrightarrow{\text{proj}_1} B_1$ のことを引き戻し束 (pullback bundle) と呼ぶ (図式 3.1)。

$$\begin{array}{ccc} f^*(E) & \xrightarrow{\text{proj}_2} & E \\ \text{proj}_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

図 3.1: 引き戻し束

ファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ が

- B の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$
- 局所自明化 $\{\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\sim} U_\alpha \times F\}_{\alpha \in \Lambda}$
- 変換関数 $\{t_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G\}_{\alpha \in \Lambda}$

を持つとき、引き戻し束 $F \hookrightarrow f^*(E) \xrightarrow{\text{proj}_1} B_1$ の構造は

- B_1 の開被覆 $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$
- 局所自明化 $\{\tilde{\varphi}_\alpha: f^{-1}(U_\alpha) \times \pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\sim} f^{-1}(U_\alpha) \times F, (b_1, u) \mapsto (b_1, \text{proj}_2 \circ \varphi_\alpha(u))\}_{\alpha \in \Lambda}$
- 変換関数 $\{\tilde{t}_{\alpha\beta}: f^{-1}(U_\alpha) \cap f^{-1}(U_\beta) \longrightarrow G, x \mapsto t_{\alpha\beta}(f(x))\}_{\alpha \in \Lambda}$

によって定まる。

命題 3.1: 引き戻し束の同型

- 2つのファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$, $F \hookrightarrow E_1 \xrightarrow{\pi_1} B_1$
- 束写像 $(f: B_1 \longrightarrow B, \tilde{f}: E_1 \xrightarrow{\pi_1} E)$

を与える。このとき以下の図式を可換にする $w: E_1 \longrightarrow f^*(E)$ が一意的に存在し、 E_1 と引き戻し束 $f^*(E)$ が束同型になる。

$$\begin{array}{ccccc}
 & f^*(E) & \xrightarrow{\text{proj}_2} & E & \\
 & \swarrow \exists! w & \searrow \tilde{f} & \downarrow \pi & \\
 & E_1 & \xrightarrow{\text{proj}_1} & B & \\
 & \downarrow \pi_1 & & \nearrow f & \\
 & B_1 & & &
 \end{array}$$

証明

$$w: E_1 \longrightarrow f^*(E), u \longmapsto (\pi_1(u), \tilde{f}(u))$$

と定義すると図式の緑色の部分が全て可換になり、束同型を与える。一意性は w の定義から明らか。 ■

圈 hMfld を、

- 多様体を対象とする
- 2つの多様体 X, Y の間のホモトピー集合 $[X, Y]$ を Hom 集合とする

ものとして定義する。

- $\forall X \in \text{Ob}(\text{hMfld})$ に対して集合

$$\text{Prin}_G(X) := \{ X \text{ 上の主束の束同型類} \}$$

を、

- $\forall X, Y \in \text{Ob}(\text{hMfld})$ の $\forall [f] \in \text{Hom}_{\text{hMfld}}(X, Y)$ に対して写像

$$\text{Prin}_G([f]): \text{Prin}_G(Y) \longrightarrow \text{Prin}_G(X), [\xi] \longmapsto [f^*(\xi)]$$

を

対応づける対応

$$\text{Prin}_G: \text{hMfld} \longrightarrow \text{Sets}$$

は反変関手である [?, p.53, 10.1 Theorem].

定義 3.13: 普遍束

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} B$ が G の普遍束 (universal bundle) であるとは, $\forall X \in \text{Ob}(\text{hMfld})$ について定まる写像

$$\phi_P(X): [X, B] \longrightarrow \text{Prin}_G(X), [f] \longmapsto [f^*P]$$

が全単射になること.

普遍束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} B$ において, B のことを G の分類空間 (classifying space) と呼ぶ.

G の普遍束の全空間を EG , 分類空間を BG と書く慣習がある.

命題 3.2: 普遍束の特徴付け

主束 $G \hookrightarrow EG \xrightarrow{\pi_G} BG$ が G の普遍束であることは, 以下の 2 つが満たされることと同値である :

- (univ-1) $\forall X \in \text{Ob}(\text{hMfld})$ および X を底空間にもつ任意の主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} X$ に対して, ある連続写像 $f: X \longrightarrow BG$ が存在して P と引き戻し束 $f^*(EG)$ が束同型になる.
- (univ-2) $\forall X \in \text{Ob}(\text{hMfld})$ および任意の連続写像 $f, g: X \longrightarrow BG$ に対して, $f^*(EG)$ と $g^*(EG)$ が束同型ならば f, g はホモトピックである.

証明 (univ-1) は写像 $\phi_{EG}(X)$ の全射性, univ-2 は写像 $\phi_{EG}(X)$ の単射性を意味する. ■

命題 3.3: 普遍束の全空間の特徴付け

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} B$ が普遍束であるための必要十分条件は, $\forall n \geq 0$ に対して $\pi_n(P) = 0$ を充たすことである.

証明 [?, p.102, 19.4] ■

命題 3.4:

G が離散群ならば $BG = K(G, 1)$

証明 命題 3.3 より, ホモトピー長完全列から $\pi_n(BG) \cong \pi_{n-1}(G)$ が言える. 離散群の場合は $\pi_0(G) = G$ かつ $\pi_{n>0}(G) = 0$ なので示された. ■

定義したは良いが, 与えられた G に対してその普遍束が存在しなければ意味がないので, 具体的に EG を構成しよう.

集合

$$EG_M := \left\{ (t_0g_0, t_1g_1, \dots) \mid t_i \in [0, 1], g_i \in G, \begin{array}{l} \text{高々有限個の } i \text{ のみ } t_i \neq 0 \\ \text{かつ } \sum_{i \geq 0} t_i = 1 \end{array} \right\}$$

を考える. $\langle g, t \rangle := (t_0g_0, t_1g_1, \dots)$ と書き, EG_M 上の等号を

$$\langle g, t \rangle = \langle g', t' \rangle \iff \forall i \geq 0, t_i = t'_i \text{ かつ } \forall i \geq 0, t_i = t'_i > 0 \implies g_i = g'_i$$

と定義する. EG_M への G の自由な右作用を

$$\blacktriangleleft: EG_M \times G \longrightarrow EG_M, ((t_0g_0, t_1g_1, \dots), g) \longmapsto (t_0g_0g, t_1g_1g, \dots)$$

で定義する. EG_M には, $\forall i \geq 0$ について定まる写像

$$\begin{aligned} t_i: EG_M &\longrightarrow [0, 1], (t_0g_0, t_1g_1, \dots) \longmapsto t_i, \\ x_i: t_i^{-1}((0, 1]) &\longrightarrow G, (t_0g_0, t_1g_1, \dots) \longmapsto x_i \end{aligned}$$

が連続になるような最小の位相を入れる. 右作用 \blacktriangleleft による EG_M の商位相空間を $BG_M := EG_M/G$ とおく.

定理 3.4: Milnor 構成

任意の Lie 群 G について $G \hookrightarrow EG_M \xrightarrow{p} BG_M$ は^a主束であり, 普遍束でもある.

^a $p: EG_M \longrightarrow BG_M$ は商写像.

証明 主束であること

$\forall i \geq 0$ に対して $U_i := p(t_i^{-1}((0, 1]))$ とおくと, 開集合族 $\{U_i\}_{i \geq 0}$ は BG_M の開被覆になる^{*27}. さらに, $\forall \langle g, t \rangle \in EG_M$, $\forall h \in G$ に対して $t_i(\langle g, t \rangle \blacktriangleleft h) = t_i(\langle g, t \rangle)$ が成り立つので $p^{-1}(U_i) = t_i^{-1}((0, 1])$ が言える^{*28}.

次に, $\forall i \geq 0$ を 1 つ固定し, U_i 上の局所自明化を構成する. 連続写像

$$\sigma_i: p^{-1}(U_i) \longrightarrow p^{-1}(U_i), \langle g, t \rangle \longmapsto \langle g, t \rangle \blacktriangleleft (g_i(\langle g, t \rangle)^{-1})$$

を考える. $\forall h \in G$ に対して

$$\begin{aligned} \sigma_i(\langle g, t \rangle \blacktriangleleft h) &= \langle g, t \rangle \blacktriangleleft (h g_i(\langle g, t \rangle \blacktriangleleft h)^{-1}) \\ &= \langle g, t \rangle \blacktriangleleft (h h^{-1} g_i(\langle g, t \rangle)^{-1}) \\ &= \langle g, t \rangle \blacktriangleleft (g_i(\langle g, t \rangle)^{-1}) \\ &= \sigma_i(\langle g, t \rangle) \end{aligned}$$

が成り立つから,

$$s_i: U_i \longrightarrow p^{-1}(U_i), p(\langle g, t \rangle) \longmapsto \sigma_i(\langle g, t \rangle)$$

は well-defined な連続写像である. さらに $\forall p(\langle g, t \rangle) \in U_i$ に対して $p \circ s_i(p(\langle g, t \rangle)) = p \circ \sigma_i(\langle g, t \rangle) = p(\langle g, t \rangle)$ が成り立つので s_i は局所切断である. ここで

$$\varphi_i: p^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times G, s_i(x) \blacktriangleleft g \longmapsto (x, g)$$

*27 U_i が BG_M の開集合であることは EG_M の位相の定義から明らか. $\forall \langle g, t \rangle \in EG_M$ に対して, EG_M の定義から $\sum_{i \geq 0} t_i = 1$ なので $\exists i \geq 0, t_i \neq 0$ であり, $p(\langle g, t \rangle) \in U_i$ も言える.

*28

$$\begin{aligned} \langle g, t \rangle \in p^{-1}(U_i) &\iff p(\langle g, t \rangle) \in U_i = p(t_i^{-1}((0, 1])) \\ &\iff \exists h \in G, \exists \langle g', t' \rangle \in t_i^{-1}((0, 1]), \langle g, t \rangle = \langle g', t' \rangle \blacktriangleleft h \\ &\implies t_i(\langle g, t \rangle) = t_i(\langle g', t' \rangle \blacktriangleleft h) = t_i(\langle g', t' \rangle) \in (0, 1] \\ &\iff \langle g, t \rangle \in t_i^{-1}((0, 1]) \end{aligned}$$

逆の包含は明らか.

と定義すると、 φ_i は well-defined な同相写像になっている^{*29} ので U_i 上の局所自明化である。別の $j \geq 0$ をとると、 $\forall p(\langle g, t \rangle) \in p^{-1}(U_i \cap U_j)$, $\forall h \in G$ に対して

$$\begin{aligned}\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(p(\langle g, t \rangle), h) &= \varphi_i(\sigma_j(\langle g, t \rangle) \blacktriangleleft h) \\ &= \varphi_i\left(\sigma_i(\langle g, t \rangle) \blacktriangleleft (g_i(\langle g, t \rangle)g_j(\langle g, t \rangle)^{-1}h)\right) \\ &= (p(\langle g, t \rangle), g_i(\langle g, t \rangle)g_j(\langle g, t \rangle)^{-1}h)\end{aligned}$$

が成り立つので、変換関数は

$$t_{ij}: U_i \cap U_j \longrightarrow G, p(\langle g, t \rangle) \longmapsto g_i(\langle g, t \rangle)g_j(\langle g, t \rangle)^{-1}$$

だと分かった^{*30}。

最後に EG_M が第 2 可算な Hausdorff 空間であることを示さないといけないが、技術的なのでここでは省略する。

普遍束であること [?, p.55, 11.2 Theorem]

■

もしくは、有限群の場合^{*31}は G を対象が 1 点で Hom 集合が G であるような圏

$$\mathbf{B}G := \begin{array}{c} G \\ \curvearrowright \\ \bullet \end{array}$$

と見做したとき、その脈体を取って得られる $(\infty, 1)$ -圏 $N(\mathbf{B}G)$ の幾何学的実現は $K(G, 1)$ になる [?, Tag 0038]。

3.4.2 群コホモロジー

先に進む前に、特異ホモロジー・コホモロジーについて復習する。 R を単項イデアル整域、 M を R -加群とする。

- R -係数特異ホモロジーとは、関手

$$H_k(-; R): \mathbf{Top} \xrightarrow{S_\bullet(-; \mathbb{Z})} \mathbf{Chain} \xrightarrow{H_k} R\text{-Mod}$$

のこと。

- M -係数特異ホモロジーとは、関手

$$H_k(-; M): \mathbf{Top} \xrightarrow{S_\bullet(-; \mathbb{Z})} \mathbf{Chain} \xrightarrow{\otimes_R M} \mathbf{Chain} \xrightarrow{H_k} R\text{-Mod}$$

のこと。

^{*29} $\forall \langle g, t \rangle \in p^{-1}(U_i)$ を与える。このとき $s_i(p(\langle g, t \rangle)) = \langle g, t \rangle \blacktriangleleft (g_i(\langle g, t \rangle)^{-1})$ なので $\langle g, t \rangle = s_i(p(\langle g, t \rangle)) \blacktriangleleft g_i(\langle g, t \rangle)$ であり、 G の右作用 \blacktriangleleft は自由なのでこのような分解は一意である。よって $\varphi_i(\langle g, t \rangle) = (p(\langle g, t \rangle), g_i(\langle g, t \rangle))$ であり、 φ_i が well-defined な全単射だとわかった。同相写像であることは、連続写像の合成として書けているので明らか。

^{*30} $g_i(\langle g, t \rangle \blacktriangleleft h) = g_i(\langle g, t \rangle)h$ なので、 t_{ij} は well-defined である。

^{*31} 位相群の場合であっても、 G の特異単体は Kan 複体なので、この方法で対象が 1 点の Kan 豊穣圏が得られる。これの homotopy coherent nerve をとったものの幾何学的実現により位相空間としての BG が (up to ホモトピーで) 正しく構成される。

- 任意の位相空間 X に対して, $H_\bullet(X; R)$ と $H_\bullet(X; M)$ は普遍係数定理

$$0 \longrightarrow H_k(X; R) \otimes_R M \longrightarrow H_k(X; M) \longrightarrow \text{Tor}_1^R(H_{k-1}(X; R), M) \longrightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

によって互いに関係する.

特に, 特異ホモロジーの場合は構成から $\forall k \in \mathbb{Z}$ に対して $S_k(X; R)$ が自由加群なのでこの短完全列は分裂し

$$H_k(X; M) \cong (H_k(X; R) \otimes_R M) \oplus \text{Tor}_1^R(H_{k-1}(X; R), M)$$

が言える.

- R -係数特異コホモロジーとは, 関手

$$H^k(-; R): \mathbf{Top} \xrightarrow{S_\bullet(-; \mathbb{Z})} \mathbf{Chain} \xrightarrow{\text{Hom}_R(-; R)} \mathbf{Chain}^{\text{op}} \xrightarrow{H^k} R\text{-Mod}$$

のこと.

- M -係数特異コホモロジーとは, 関手

$$H^k(-; M): \mathbf{Top} \xrightarrow{S_\bullet(-; \mathbb{Z})} \mathbf{Chain} \xrightarrow{\text{Hom}_R(-; R)} \mathbf{Chain} \xrightarrow{\otimes_R M} \mathbf{Chain}^{\text{op}} \xrightarrow{H^k} R\text{-Mod}$$

のこと.

- 任意の位相空間 X に対して, $H^\bullet(X; R)$ と $H^\bullet(X; M)$ は普遍係数定理

$$0 \longrightarrow \text{Ext}_R^1(H_{k-1}(X; R), M) \longrightarrow H^k(X; M) \longrightarrow \text{Hom}_R(H_k(X; R), M) \longrightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

によって互いに関係する.

特に, 特異コホモロジーの場合は構成から $\forall k \in \mathbb{Z}$ に対して $\text{Hom}_R(S_k(X; R); R)$ が自由加群なのでこの短完全列は分裂し

$$H^k(X; M) \cong \text{Hom}_R(H_k(X; R), M) \oplus \text{Ext}_R^1(H_{k-1}(X; R), M)$$

が言える.

公理 3.2: G 加群

可換群 $(M, +)$ と, 群 G の M への左作用

$$\blacktriangleright: G \times M \longrightarrow M$$

の組み $(M, +, \blacktriangleright)$ であって, $\forall g, h \in G, \forall x, y \in M$ に対して以下の条件を充たすものを左 G 加群と呼ぶ:

(G-mod1) $g \blacktriangleright (x + y) = g \blacktriangleright x + g \blacktriangleright y$

(G-mod2) $(gh) \blacktriangleright x = g \blacktriangleright (h \blacktriangleright x)$

(G-mod3) $1_G \blacktriangleright x = x$

右 G 加群も同様に定義する.

\mathbb{Z} 係数の G の群環とは、可換群 $\mathbb{Z}^{\oplus G}$ に積

$$(a_g)_g \cdot (b_g)_g := \left(\sum_{hk=g} a_h b_k \right)_g$$

を定義してできる環 $(\mathbb{Z}^{\oplus G}, +, \cdot)$ のこと。記号として $\mathbb{Z}[G]$ と書く。左 G 加群と左 $\mathbb{Z}[G]$ 加群は同一視できる。

$$\epsilon: \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z}, (a_g)_g \longmapsto \sum_{g \in G} a_g$$

を augmentation と呼ぶ。

定義 3.14: 群コホモロジー（代数的）

左 G 加群 M を与える。 \mathbb{Z} を自明な作用により左 G 加群と見做す。

- 群 G の M -係数ホモロジーとは、

$$H_{\text{Grp}}^k(G; M) := \text{Tor}_k^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$$

のこと。

- 群 G の M -係数コホモロジーとは、

$$H_{\text{Grp}}^k(G; M) := \text{Ext}_{\mathbb{Z}[G]}^k(\mathbb{Z}, M)$$

のこと。

右導來関手の一般論から、任意の G 加群の短完全列 $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ (exact) に対応する長完全列

$$\begin{aligned} \cdots &\longrightarrow H_{\text{Grp}}^k(G, M_1) \longrightarrow H_{\text{Grp}}^k(G, M_2) \longrightarrow H_{\text{Grp}}^k(G, M_3) \\ &\longrightarrow H_{\text{Grp}}^{k+1}(G, M_1) \longrightarrow H_{\text{Grp}}^{k+1}(G, M_2) \longrightarrow H_{\text{Grp}}^{k+1}(G, M_3) \\ &\longrightarrow \cdots \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

が成り立つ。

いくつかの実用上有用な命題を紹介する：

定理 3.5: 群コホモロジー（位相空間論的）

任意の有限群 G および G 加群 M に対して

$$H^\bullet(BG; M) \cong H_{\text{Grp}}^\bullet(G; M)$$

が成り立つ。

命題 3.5: 色々な群コホモロジー

(1) 任意の有限群に対して

$$H_{\text{Grp}}^{k>0}(G; \mathbb{R}) = 0$$

(2) 任意のコンパクト Lie 群に対して

$$H_{\text{Grp}}^{2k+1}(G; \mathbb{R}) = 0$$

(3) 任意の Lie 群に対して

$$H_{\text{Grp}}^{2k}(G; \mathbb{R}) \cong \text{Inv}(\mathfrak{g})$$

群 G が有限群のとき, 命題 3.5-(1) と群コホモロジーの長完全列 (3.4.1) により短完全列 $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \text{U}(1) \longrightarrow 0$ から同型

$$H_{\text{Grp}}^k(G; \mathbb{Z}) \cong H_{\text{Grp}}^{k-1}(G; \text{U}(1))$$

がわかる.

3.4.3 関手としての接続

$d = D + 1$ 次元時空 $\mathcal{M}^{(d)}$ を考える. 圈 $\mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)})$ を,

- $\mathcal{M}^{(d)}$ の点を対象とする.
- $\text{Hom}_{\mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)})}(x, y) := \{ \sigma: [0, 1] \longrightarrow \mathcal{M}^{(d)} \mid \sigma(0) = x, \sigma(1) = y \}$

によって定義する^{*32}.

^{*32} 正確には, 圈 $\mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)})$ とはこの Hom 集合を **thin homotopy** と呼ばれる同値関係で割ることで得られる groupoid のことであり, **path groupoid** と呼ぶ (<https://ncatlab.org/nlab/show/path+groupoid>).

命題 3.6: 関手としての接続

- $\mathcal{M}^{(d)}$ 上の主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}^{(d)}$
- P の同伴ベクトル束 $V \hookrightarrow E \xrightarrow{q} \mathcal{M}^{(d)}$

を与える。このとき、任意の P の接続形式 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ に対して

- (1) $\forall x \in \text{Ob}(\mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)}))$ に対して $\Gamma_\omega(x) := q^{-1}(\{x\})$
- (2) $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)}))$, $\forall \sigma \in \text{Hom}_{\mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)})}(x, y)$ に対して ^a $\Gamma_\omega(\sigma) := (u \mapsto u \blacktriangleleft \Phi_u(\sigma))$

と定義される対応

$$\Gamma_\omega: \mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)}) \longrightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$$

は関手である。

^a $\Phi_u(\sigma) \in G$ はループ σ のホロノミー。

逆に、関手

$$\Gamma: \mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)}) \longrightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$$

であって以下の条件を充たすものは P の接続形式 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ を与える：

- (1) 任意の単調増加関数 $f: [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ および $\forall \sigma \in \text{Hom}_{\mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)})}(x, y)$ に対して

$$\Gamma(\sigma) = \Gamma(\sigma \circ f)$$

- (2) 任意の単調減少関数 $f: [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ および $\forall \sigma \in \text{Hom}_{\mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)})}(x, y)$ に対して

$$\Gamma(\sigma) = \Gamma(\sigma \circ f)$$

- (3) Γ は σ について適切な C^∞ 性を充たす。

証明 前半は命題??より明らか。後半は [?], [?] を参照 ■

大域的切断 $s: \mathcal{M}^{(d)} \longrightarrow P$ を許容する主束 P およびその接続 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ を与え、2点 $x, y \in \mathcal{M}^{(d)}$ を繋ぐ曲線 $\sigma \in \text{Hom}_{\mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)})}(x, y)$ であって、その水平持ち上げ $\tilde{\sigma}$ が $\tilde{\sigma}(0) = s(x)$ を充たすものをとる。するとこのとき $\tilde{\sigma}(1) = s(y) \blacktriangleleft g_\sigma$ を充たす $g_\sigma \in G$ が一意に定まる。さらに2点 $y, z \in \mathcal{M}^{(d)}$ を繋ぐ曲線 $\sigma' \in \text{Hom}_{\mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)})}(y, z)$ であって、その水平持ち上げ $\tilde{\sigma}'$ が $\tilde{\sigma}'(0) = s(y)$ を充たすものをとると、水平持ち上げの一意性から $(\widetilde{\sigma' * \sigma})(1) = s(z) \blacktriangleleft g_\sigma g_{\sigma'}$ が成り立つ。従って、 P が自明束ならば命題 3.6 の関手 $\Gamma_\omega: \mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)}) \longrightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ は関手

$$\Gamma_\omega: \mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)}) \longrightarrow \mathbf{BG} \tag{3.4.2}$$

と見做せる。ただし \mathbf{BG} は

- 一点のみを対象に持つ： $\text{Ob}(\mathbf{BG}) = \{*\}$

- G の元を射を持つ. 射の合成は G の積として定める

ことで構成される圏である^{*33}. 接続 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ と関手 (3.4.2) の同一視を物理語に翻訳すると, ゲージ場 A そのものと, ゲージ場の **Wilson line**

$$\mathcal{P} \exp \left(- \int_{\gamma} A \right) \stackrel{\text{w/}}{\sim} \gamma \in \text{Hom}_{\mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)})} (\gamma(0), \gamma(1))$$

を同一視することに他ならない.

自明束 P におけるゲージ変換とは, 大域的切断の取り替えに伴う変換関数によって特徴付けられる. 変換関数とは, 2つの大域的切断 $s_1, s_2: M \rightarrow P$ に対して $s_1(x) = s_2(x) \blacktriangleleft g_{12}(x)$ と定義することで定まる $g_{12}: M \rightarrow G$ のことであり, $\sigma \in \text{Hom}_{\mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)})} (x, y)$ に対して

$$\Gamma_{\omega}(\sigma) \mapsto \Gamma'_{\omega}(\sigma) = g_{12}(y)^{-1} \Gamma_{\omega}(\sigma) g_{12}(x) \quad (3.4.3)$$

なる変換を引き起こす^{*34}. i.e. 変換関数 $g_{12}: M \rightarrow G$ は, 自然変換

$$\begin{array}{ccc} & \Gamma_{\omega} & \\ \mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)}) & \begin{array}{c} \nearrow \\ \parallel \\ \searrow \end{array} & \mathbf{B}G \\ & g_{12} & \\ & \Gamma'_{\omega} & \end{array}$$

である.

定義 3.15: 平坦接続

$\mathcal{M}^{(d)}$ 上の主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}^{(d)}$ を与える. このとき P の関手としての接続

$$\Gamma: \mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)}) \rightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$$

が平坦接続 (flat connection) であるとは, 互いにホモトピックな任意の $\sigma, \sigma' \in \text{Hom}_{\mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)})}$ に対して

$$\Gamma(\sigma) = \Gamma(\sigma')$$

が成り立つことを言う.

これまでの議論から, 連結な $\mathcal{M}^{(d)}$ 上の平坦接続のモジュライ空間は

$$\text{Hom}_{\mathbf{Grp}} (\pi_1(\mathcal{M}^{(d)}), G)/G \quad (3.4.4)$$

であることが分かった. ただし G 作用 $g \mapsto g^{-1}(-)g$ によって商をとり, ゲージ変換 (3.4.3) の冗長性を排除した.

^{*33} この圏は groupoid を成し, 群 G の **delooping groupoid** と呼ばれる.

^{*34} $\tilde{\sigma}(0) = s_1(x)$ とする. このとき $\tilde{\sigma} \blacktriangleleft g_{12}(x)$ は $s_2(x) = s_1(x) \blacktriangleleft g_{12}(x)$ を始点とする σ の水平持ち上げであるから, $s_2(y) \blacktriangleleft \Gamma'_{\omega}(\sigma) = \tilde{\sigma}(1) \blacktriangleleft g_{12}(x) = s_1(y) \blacktriangleleft \Gamma_{\omega}(\sigma) \blacktriangleleft g_{12}(x) = s_2(y) \blacktriangleleft (g_{12}(y)^{-1} \Gamma_{\omega}(\sigma) g_{12}(x))$

3.4.4 トポロジカルなゲージ理論 : Lie 群の場合

時空が $2+1$ 次元の連結な閉多様体 $\mathcal{M}^{(3)}$ であるとする。Lie 群 G がコンパクトかつ单連結ならば、 $\mathcal{M}^{(3)}$ 上の任意の主束は自明束と同型になり^{*35}、Chern-Simons 作用

$$S[A] := \frac{k}{8\pi^2} \int_{\mathcal{M}^{(3)}} \text{Tr} \left(A \wedge A + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right)$$

は $\mathcal{M}^{(3)}$ 上大域的に well-defined である。しかし、 G が一般のコンパクト Lie 群である場合にはそう上手くいかない。

この問題を解決する方法としては、 $\mathcal{M}^{(3)}$ を境界を持つ 4 次元多様体 $\mathcal{N}^{(4)}$ を持ってきて、

$$S[A] := \int_{\mathcal{N}^{(4)}} \Omega(F) = \frac{k}{8\pi^2} \int_{\mathcal{N}^{(4)}} \text{Tr}[F \wedge F]$$

と定義することが考えられる。この $S[A]$ は Chern 指標^{*36}の積分なので整数値を取り、トポロジカルなゲージ場の理論になっている。4 次元多様体への拡張は一意ではないので作用は mod 1 の不定性を持つが、分配関数は well-defined になる。しかし、この構成が可能であるためには任意の $\mathcal{M}^{(3)}$ 上の主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}^{(3)}$ に対して、 $\mathcal{N}^{(4)}$ 上の主束 $G \hookrightarrow P' \xrightarrow{\pi'} \mathcal{N}^{(4)}$ であって、 $\partial\mathcal{N}^{(4)} = \mathcal{M}^{(3)}$ への制限が $P'|_{\partial\mathcal{N}^{(4)}} = P$ を充たすようなものが存在しなくてはいけない。この拡張の障害となるのが、分類写像 $\gamma: \mathcal{M}^{(3)} \rightarrow BG$ の誘導準同型による $\mathcal{M}^{(3)}$ の基本類 $[\mathcal{M}^{(3)}] \in H_3(\mathcal{M}^{(3)}; \mathbb{Z})$ の像 $\gamma_*[\mathcal{M}^{(3)}] \in H_3(BG; \mathbb{Z})$ である^{*37}。もし $\gamma_*[\mathcal{M}^{(3)}] = 0$ なら拡張が可能だが、そうでないときは不可能ということになる。しかしながら、命題 3.5-(2) よりコンパクト Lie 群の奇数次のホモロジーは捻れ元 (torsion element) のみから成るので、ある $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して

$$n \cdot \gamma_*[\mathcal{M}^{(3)}] = 0$$

を充たす。よって素朴には

$$S[A] := \frac{1}{n} \int_{\mathcal{N}^{(4)}} \Omega(F)$$

と修正すれば良いように思えるが、このままだと分配関数に $e^{2i\pi m/n}$ の不定性が残り理論が well-defined でない。この不定性を排除するためには、 $\Omega(F)$ が特性類なので自然な单射 $H^4(BG, \mathbb{Z}) \hookrightarrow H^4(BG; \mathbb{R})$ を使って $\Omega(F) \cong \rho([\omega])$ と書けるような $[\omega] \in H^4(BG, \mathbb{Z})$ が存在することを使い^{*38}

$$S[A] := \frac{1}{n} \left(\int_{\mathcal{N}^{(4)}} \Omega(F) - \langle \gamma^* \omega, \mathcal{N}^{(4)} \rangle \right)$$

とすれば良い。というのも、de Rham の定理からそもそも

$$\int_{\mathcal{N}^{(4)}} \Omega(F) = \langle \gamma^* \omega, \mathcal{N}^{(4)} \rangle$$

であり、 $[\omega]$ の別の代表元 η をとってきたとすると、その差分は $\epsilon \in C^3(BG; \mathbb{Z})$ を使って

$$\frac{1}{n} \langle \gamma^* \delta^4 \epsilon, \mathcal{N}^{(4)} \rangle = \frac{1}{n} \langle \epsilon, \gamma_* \partial \mathcal{N}^{(4)} \rangle = \langle \epsilon, \gamma_* [\mathcal{M}^{(3)}] \rangle \in \mathbb{Z}$$

^{*35} 詳細は <https://math.stackexchange.com/questions/370313/every-principal-g-bundle-over-a-surface-is-trivial-if-g-is-compact-and-simpl> を参照。

^{*36} Chern-Weil の定理からこれは大域的に well-defined である。

^{*37} 厳密にはボルディズム群 $\Omega_3^{\text{SO}}(BG)$ を考えなくてはいけない。

^{*38} $\Omega(F) \in H_{\text{dR}}^4(\mathcal{M}^{(3)}) \cong H_{\text{dR}}^4(BG) \cong H^4(BG; \mathbb{R})$ である。

になるのである。

もしくは、**Cheeger Simons differential character** [?], [?] $\alpha \in \widehat{H}^3(BG, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ を使って

$$S[A] = \left\langle \gamma^* \alpha_A, [\mathcal{M}^{(3)}] \right\rangle$$

と書くこともできる。

3.4.5 トポロジカルなゲージ理論：有限群の場合

ここからは d 次元の連結な時空 $\mathcal{M}^{(d)}$ を考える。ゲージ群 G が有限群^{*39}の場合、主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}^{(d)}$ の接続は一意に決まる^{*40}。さらにこの主束は被覆空間になるので、 $\forall \sigma \in \text{Hom}_{\mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)})}(x, x)$ は x のファイバー内の点 $u \in \pi^{-1}(\{x\})$ について一意的に $\tilde{\sigma} \in \text{Hom}_{\mathbf{P}_1(P)}(u, \tilde{\sigma}(1))$ へ持ち上がり、 $\tilde{\sigma}(1) =: \tilde{\sigma}(0) \blacktriangleleft \gamma_P(\sigma)$ とおくことで、連続な群準同型

$$\begin{aligned} \gamma_P : \text{Hom}_{\mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)})}(x, x) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{B}G}(*, *) = G, \\ \sigma &\longmapsto \gamma_P(\sigma) \end{aligned}$$

を定める。さらに、 $\mathcal{M}^{(d)}$ のホモトピーもまた P 上に持ち上がるため、群準同型 $\gamma_{[P]} : \pi_1(\mathcal{M}^{(d)}) \longrightarrow G$ が定まった。始点 $u \in \pi^{-1}(\{x\})$ を $u \blacktriangleleft h$ に取り替えることは $\gamma_{[P]}(\sigma) \longmapsto h^{-1}\gamma_{[P]}(\sigma)h$ の変換を引き起こす。以上の議論より、写像

$$\begin{aligned} \text{Prin}_G(\mathcal{M}^{(d)}) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(\pi_1(\mathcal{M}^{(d)}), G)/G, \\ [P] &\longmapsto \gamma_{[P]} \end{aligned}$$

が全単射だと分かる [?, p.4]. (3.4.4) と比較すると、結局

$$\text{Prin}_G(\mathcal{M}^{(d)}) \xrightarrow{1:1} \{ \text{ } \mathcal{M}^{(d)} \text{ 上の平坦接続全体の集合} \}$$

であることが分かった。

定義 3.16: Dijkgraaf-Witten 理論

Dijkgraaf-Witten 理論を

$$Z(\mathcal{M}^{(d)}) := \frac{1}{\#G} \sum_{\gamma \in [\mathcal{M}^{(d)}, BG]} e^{2\pi i S[\gamma]} \quad \text{w/ } S[\gamma] := \left\langle \gamma^* \alpha, [\mathcal{M}^{(d)}] \right\rangle \quad (3.4.5)$$

と定義する^a。ここに $\alpha \in H^d(BG; \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ である。

^a **BG の定義**から、主束 P の同型類 $[P]$ は $[\mathcal{M}^{(d)}, BG]$ の元と 1 対 1 対応するので、左辺では $\mathcal{M}^{(d)}$ を底空間とする主束の同型類全体に渡って和（経路積分）をとっていることになる。

このままだと実用上不便なので、計算しやすい形に書きかえよう。 $H^k(BG; \text{U}(1)) \cong H_{\text{Grp}}^k(G; \text{U}(1))$ であるから、結局群コホモロジーを具体的に計算することになる。

*39 離散位相を入れて位相群と見做す。

*40 直観的には、ファイバー方向の接空間、i.e. 垂直部分空間が 0 次元になると見える。

M を G 加群とする. Milnor 構成を思い出すと, 群コホモロジーのコチェイン $C^k(G; M)$ を

$$C_{\text{Grp}}^k(G; M) := \{ \omega: G^{n+1} \longrightarrow M \mid \forall g \in G, \forall g_0, \dots, g_n \in G, \omega(g_0, \dots, g_n) = \omega(gg_0, \dots, gg_n) \}$$

で定義し, 余境界写像 $\delta^{k+1}: H_{\text{Grp}}^k(G; M) \longrightarrow H_{\text{Grp}}^{k+1}(G; M)$ を特異コホモロジーからのアナロジーで

$$(\delta^{k+1}\omega)(g_0, \dots, g_{n+1}) := \prod_{j=0}^{n+1} \omega(g_0, \dots, \hat{g}_j, \dots, g_{n+1})^{(-1)^j}$$

と定義してみる^{*41}. すると $\delta^2 = 0$ が確認できるので系列

$$\dots \xrightarrow{\delta^k} C_{\text{Grp}}^k(G; M) \xrightarrow{\delta^{k+1}} C_{\text{Grp}}^{k+1}(G; M) \xrightarrow{\delta^{k+2}} \dots$$

はコチェイン複体を成す. この複体のコホモロジー類をとることで $H_{\text{Grp}}^k(G; M)$ が得られる^{*42}. コチェインを別の表示で書くこともできる:

$$\alpha(g_1, \dots, g_n) := \omega(1, g_1, g_1g_2, \dots, g_1 \cdots g_n)$$

このとき, 余境界写像は

$$(\delta^{n+1}\alpha)(g_1, \dots, g_{n+1}) = \alpha(g_2, \dots, g_{n+1}) \prod_{j=1}^n \alpha(g_1, \dots, g_{j-1}, g_j g_{j+1}, g_{j+2}, \dots, g_{n+1})^{(-1)^j} \alpha(g_1, \dots, g_n)^{(-1)^{n+1}}$$

と作用する.

群コホモロジーの表式を使って分配関数を計算するには, まず $\mathcal{M}^{(d)}$ の三角形分割 $|\mathcal{T}| \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^{(d)}$ をとる. 簡単のため $d = 3$ とする. $\mathcal{M}^{(3)}$ は連結だとしていたので, BG の基点 $\text{pt} \in BG$ を 1 つ固定することで, 分類写像 $\gamma: \mathcal{M}^{(3)} \longrightarrow BG$ をホモトピックに変形して, 任意の 0 単体 $\sigma_0 \in \mathcal{T}$ を $\gamma[\sigma_0] = \text{pt} \in BG$ に写すようになる. すると, 任意の 1 単体 $\sigma_1 \in \mathcal{T}$ は分類写像 γ のホモトピー類によって $[\gamma \circ \sigma_1] \in \pi_1(BG, \text{pt})$ と対応付くが, 命題 3.4 より $\pi_1(BG, \text{pt}) \cong G$ であるから, 結局分類写像 γ によって $\forall \sigma_1 \in \mathcal{T}$ と何かしらの $g_{\sigma_1} \in G$ が対応付くことになる. この g_{σ_1} は格子ゲージ理論におけるリンク変数 (i.e. ゲージ場) と見做せる. しかるに, G が有限群であることから主束の接続は平坦でなくてはいけない. そのため, もし 3 つの 1-単体 $\sigma_1^{(1)}, \sigma_1^{(2)}, \sigma_1^{(3)} \in \mathcal{T}$ がある 2 単体 σ_2 について $\partial(\sigma_2) = \sigma_1^{(1)} \cup \sigma_1^{(2)} \cup \sigma_1^{(3)}$ をみたすならば

$$g_{\sigma_1^{(1)}} g_{\sigma_1^{(2)}} g_{\sigma_1^{(3)}} = \gamma(\sigma_1^{(1)} \cup \sigma_1^{(2)} \cup \sigma_1^{(3)}) = 1 \quad (3.4.6)$$

にならなくてはいけない. このとき任意の 3 单体 $\sigma_3 \in \mathcal{T}$ に対して $\alpha \in H_{\text{Grp}}^3(G, \text{U}(1))$ は $W(\sigma_3) \in \text{U}(1)$ を対応づけることができる. つまり, 任意の 3 単体 $\sigma_4^{(i)}$ を四面体と見做したとき, その 6 つある辺のうち 3 つが γ によって $g_i, h_i, k_i \in G$ と同定されていれば (3.4.6) から残りの 3 辺も決定できるということであり, $W(\sigma_3^{(i)}) := \alpha(g_i, h_i, k_i) \in \text{U}(1)$ として定まる. $|\mathcal{T}| = \bigcup_{\sigma_3 \in \mathcal{T}} \sigma_3$ であり, 3 单体 $\sigma_3^{(i)}$ の向きを特徴付ける $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$ を使って

$$[M] = \sum_i \epsilon_i \gamma(\sigma_3^{(i)})$$

^{*41} 群 G の演算は乗法的な表記を採用した.

^{*42} 群コホモロジーの定義からこの表式を得ることもできるが, \mathbb{Z} の $\mathbb{Z}[G]$ 加群としての射影的分解を構成するのが少し手間である.

と書くことができる。よって、作用は

$$e^{2\pi i S[\gamma]} = \prod_i W(\sigma_3^{(i)})^{\epsilon_i} = \prod_i \alpha(g_i, h_i, k_i)^{\epsilon_i} \quad (3.4.7)$$

と書かれる。

【例 3.4.1】Riemann 面の次元

種数 g の Riemann 面 Σ_g に対して、TQFT(3.4.5) によって定まる Hilbert 空間 $Z(\Sigma_g)$ の実態は不明だが、その次元を計算することができる。というのも、

$$Z(\Sigma_g \times S^1) = \text{Tr}(Z(\text{id}_{\Sigma_g})) = \text{Tr}(\text{id}_{Z(\Sigma_g)}) = \dim Z(\Sigma_g)$$

であるが、最左辺は $\Sigma_g \times S^1$ の具体的な三角形分割をとることで (3.4.7) を使って計算できるのである。

3.5 離散的高次ゲージ理論

Dijkgraaf-Witten 理論は離散的ゲージ理論だが、そこで登場したゲージ場は依然として 1 形式のものだった。これを higher gauge theory に拡張するために、新たなゲージ場の表式を導入する。

3.5.1 Deligne-Beilinson コサイクルとしての $U(1)$ ゲージ場

$d = D + 1$ 次元時空 $\mathcal{M}^{(d)}$ を考える。 $\mathcal{M}^{(d)}$ の良い被覆 $\mathcal{U} := \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ を 1 つ固定する。

$\mathcal{M}^{(d)}$ 上の $U(1)$ 束 $U(1) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}^{(d)}$ を考える。命題??より、 P の同型類は変換関数の族 $\{g_{\alpha\beta}: U_{\alpha\beta} \rightarrow U(1)\}_{\alpha, \beta \in \Lambda}$ であって、コサイクル条件

$$\forall x \in U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}, g_{\alpha_0\alpha_1}(x)g_{\alpha_1\alpha_2}(x)g_{\alpha_2\alpha_0}(x) = 1$$

を充たすものによって特徴づけられるのだった。ここで $g_{\alpha\beta}(x) =: e^{2i\pi\Lambda_{\alpha\beta}(x)}$ によって $\{\Lambda_{\alpha\beta}: U_{\alpha\beta} \rightarrow \mathbb{R}\}_{\alpha, \beta \in \Lambda}$ を定義すると、コサイクル条件は

$$\forall x \in U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}, \Lambda_{\alpha_0\alpha_1}(x) + \Lambda_{\alpha_1\alpha_2}(x) + \Lambda_{\alpha_2\alpha_0}(x) =: n_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}(x) \in \mathbb{Z}$$

と同値である。今、 $\{\Lambda_{\alpha_0\alpha_1}\}_{(\alpha_0, \alpha_1) \in \Lambda^2} \in \check{H}^1(\mathcal{U}; \Omega_{\mathcal{M}^{(d)}}^0)$ と見做そう。

\mathcal{U} が良い被覆であることと $n_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}: U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} \rightarrow \mathbb{Z}$ が連続であることから^{*43} $\forall (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in \Lambda^3$ に対して $n_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}(x)$ は定数関数であり、故に $\{n_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}\}_{(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)} \in \check{H}^2(\mathcal{U}; \mathbb{Z}_{\mathcal{M}^{(d)}})$ が分かった。特に

$$\forall x \in U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3}, n_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} - n_{\alpha_0\alpha_1\alpha_3} + n_{\alpha_0\alpha_2\alpha_3} - n_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = 0$$

が成り立つが、左辺は Čech 複体の余境界写像 $\delta^3: \check{H}^2(\mathcal{U}; \mathbb{Z}_{\mathcal{M}^{(d)}}) \rightarrow \check{H}^3(\mathcal{U}; \mathbb{Z}_{\mathcal{M}^{(d)}})$ を使って $\delta^3(\{n_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}\}_{(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)})$ と等しいので

$$\{n_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}\}_{(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)} \in \text{Ker } \delta^3$$

^{*43} \mathbb{Z} には離散位相を入れる。

i.e. Čech 2-コサイクルの元であることが分かった.

ところで命題??より, ゲージ場とは主束 P の接続形式を \mathcal{U} に付随する局所切断によって引き戻して得られる族 $\{A_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha; \mathfrak{u}(1))\}_{\alpha \in \Lambda}$ のことであるが, $\mathfrak{u}(1) \cong \mathbb{R}$ なので $A_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha)$ と見做すことができる. よって $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \in \check{H}^0(\mathcal{U}, \Omega_{\mathcal{M}^{(d)}}^1)$ と見做すことができる. そしてこのとき $\forall \alpha_0, \alpha_1 \in \Lambda$ に対して

$$\forall x \in U_{\alpha_0 \alpha_1}, A_{\alpha_1}(x) - A_{\alpha_0}(x) = g_{\alpha_0 \alpha_1}^{-1}(x) d g_{\alpha_0 \alpha_1}(x) = 2i\pi d \Lambda_{\alpha_0 \alpha_1}(x)$$

が言える. 以上を図式にまとめると

$$\begin{array}{ccc} & \{A_{\alpha_0}\} & \\ & \downarrow -\delta & \\ \{A_{\alpha_0 \alpha_1}\} & \xrightarrow{d} & \\ & \downarrow \delta & \\ \{n_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}\} & \xrightarrow{d} & \\ & \downarrow \delta & \\ & 0 & \end{array}$$

が成り立っている. i.e.

$$(\{n_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}\}, \{\Lambda_{\alpha_0 \alpha_1}\}, \{A_{\alpha_0}\}) \in \check{C}^2(\mathcal{U}, \Omega_X^{-1}) \oplus \check{C}^1(\mathcal{U}, \Omega_X^0) \oplus \check{C}^0(\mathcal{U}, \Omega_X^1)$$

であり, Deligne-Beilinson コチェインの元であることが分かった. 特に $\mathbb{Z}(2)_D^1$ の元だと見做すとこれはコサイクルである.

3つ組 $(\mathcal{U}, P, \{A_\alpha\})$ が与えられたとき, 対応する Deligne-Beilinson コサイクルは

$$(dq^{(0,0)}, \delta q^{(0,0)} + d_{-1}m^{1,-1}, \delta m^{1,-1}) \xrightarrow{\text{w/}} (m^{(1,-1)}, q^{(0,0)}) \in \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_{\mathcal{M}^{(d)}}) \oplus \check{C}^0(\mathcal{U}, \Omega_{\mathcal{M}^{(d)}}^0)$$

の不定性を持つが, この不定性は局所切断の取り替えに伴うゲージ変換に相当し, コバウンダリとして書いている. よって

$$(\mathcal{U}, P, \{A_\alpha\}) \xleftrightarrow{1:1} H_D^2(\mathcal{U}; \mathbb{Z}(2)_D)$$

なる一対一対応があることが分かった.

ゲージ場の強さは局所的に $F_\alpha := dA_\alpha$ と定義されたが, 今の場合

$$F_{\alpha_0} - F_{\alpha_1} = d(A_{\alpha_0} - A_{\alpha_1}) = -2i\pi d^2 \Lambda_{\alpha_0 \alpha_1} = 0$$

となるので大域的に定義されていることが分かった.

higher gauge field に関しても同様である. p -form のゲージ場であれば

$$(\mathcal{U}, P^{(p)}, \{A_\alpha^{(p)}\}) \xleftrightarrow{1:1} H_D^{p+1}(\mathcal{U}; \mathbb{Z}(p+1)_D) \tag{3.5.1}$$

の一対一対応がある. 逆に, (3.5.1) を p -form ゲージ場の定義として採用することにしよう.

3.5.2 BF-理論

$d = D + 1$ 次元時空 $\mathcal{M}^{(d)}$ を考える。

定義 3.17: BF-理論 (U(1) ゲージ場の理論として)

p -form U(1) ゲージ場 $A^{(p)}$ および $(d - p - 1)$ -form U(1) ゲージ場 $B^{(d-p-1)}$ を与える。

このとき, **BF-理論**を

$$Z_{\text{BF}}[A^{(p)}, B^{(d-p-1)}] := e^{-S_{\text{BF}}[a^{(p)}, B^{(d-p-1)}]}$$

$$\text{w/ } S_{\text{BF}}[A^{(p)}, B^{(d-p-1)}] := \frac{in}{2\pi} \int_{\mathcal{M}^{(d)}} B^{(d-p-1)} \wedge dA^{(p)}$$

と定義する^a。ただし $n \in \mathbb{Z}$ とする。

^a $\int_{\mathcal{M}^{(d)}}$ は Deligne-Beilinson コチェインの積分と解釈すべきであるが、形式的に de Rham コチェインの積分として扱っても問題は生じにくい。

$\mathcal{M}^{(d)}$ の良い被覆 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ を 1 つ固定する。ゲージ変換は Deligne-Beilinson コサイクル

$$(\{n_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+2}}\}, \{\Lambda_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+1}}^{(1)}\}, \dots, \{\Lambda_{\alpha_0 \alpha_1}^{(p-1)}\}, \{A_{\alpha_0}^{(p)}\}) \in \check{C}^{p+1}(\mathcal{U}; \mathbb{Z}) \oplus \bigoplus_{k=0}^p \check{C}^{p-k}(\mathcal{U}; \Omega^k)$$

$$(\{m_{\alpha_0 \dots \alpha_{d-p}}\}, \{\lambda_{\alpha_0 \dots \alpha_{d-p-1}}^{(1)}\}, \dots, \{\lambda_{\alpha_0 \alpha_1}^{(d-p-2)}\}, \{B_{\alpha_0}^{(d-p-1)}\}) \in \check{C}^{d-p-1}(\mathcal{U}; \mathbb{Z}) \oplus \bigoplus_{k=0}^{d-p-1} \check{C}^{d-p-k-1}(\mathcal{U}; \Omega^k)$$

によって定義される。特に場の強さは $\forall \alpha_0, \alpha_1 \in \Lambda$ に対して

$$dA_{\alpha_1}^{(p)} - dA_{\alpha_0}^{(p)} = d(\delta A^{(p)})_{\alpha_0 \alpha_1} = d(d\Lambda_{\alpha_0 \alpha_1}^{(p-1)}) = 0,$$

$$dB_{\alpha_1}^{(d-p-1)} - dB_{\alpha_0}^{(d-p-1)} = d(\delta B^{(d-p-1)})_{\alpha_0 \alpha_1} = d(d\lambda_{\alpha_0 \alpha_1}^{(d-p-2)}) = 0$$

を充たすので大域的に well-defined である。

BF-理論から発見法的に「ゲージ群」^{*44}が \mathbb{Z}_n であるような p -form ゲージ理論を得るトリックを説明する [?, p.6], [?, p.9]。具体的には、2 つのゲージ場をダイナミカルにするだけで良い：

$$Z_{\text{BF}} := \int [da^{(p)}] \int [db^{(d-p-1)}] Z_{\text{BF}}[a^{(p)}, b^{(d-p-1)}]$$

$$= \int [da^{(p)}] \int [db^{(d-p-1)}] e^{\frac{in}{2\pi} \int_{\mathcal{M}^{(d)}} b^{(d-p-1)} \wedge da^{(p)}}$$

$$= \int [da^{(p)}] \Big|_{da^{(p)}=0}$$

ただし、最右辺の拘束条件 $da^{(p)} = 0$ は Euler-Lagrange 方程式によるものである。この拘束条件により、 $a^{(p)}$ についての和が平坦接続についてのものに制限されたということである。また、任意の閉部分多様体 $\Sigma^{(p+1)}, \Sigma^{(d-p-2)} \subset \mathcal{M}^{(d)}$ に対するホロノミー

$$W(\Sigma^{(p)}) := e^{i \int_{\Sigma^{(p+1)}} a^{(p)}},$$

^{*44} 主 p -束の観点からすると、 p -form ゲージ場に対応する「ゲージ群」は p -群になるべきである。

$$W(\Sigma^{(d-p-1)}) := e^{i \int_{\Sigma^{(d-p-2)}} b^{(d-p-1)}}$$

は,

$$\begin{aligned} \langle W(\Sigma^{(p)}) \rangle &= \int [da^{(p)}] \int [db^{(d-p-1)}] e^{\frac{i n}{2\pi} \int_{\mathcal{M}(d)} b^{(d-p-1)} \wedge a^{(p)}} e^{i \int_{\mathcal{M}(d)} a^{(p)} \wedge \delta(\Sigma^{(p+1)})} \\ &= \int [dB^{(d-p-1)}] \Big|_{db^{(d-p-1)} = \frac{2\pi}{n} \delta(\Sigma^{(d-p-2)})}, \\ \langle W(\Sigma^{(d-p-1)}) \rangle &= \int [da^{(p)}] \int [db^{(d-p-1)}] e^{\frac{i n}{2\pi} \int_{\mathcal{M}(d)} B^{(d-p-1)} \wedge a^{(p)}} e^{i \int_{\mathcal{M}(d)} b^{(d-p-1)} \wedge \delta(\Sigma^{(d-p-2)})} \\ &= \int [da^{(p)}] \Big|_{da^{(p)} = \frac{2\pi}{n} \delta(\Sigma^{(p+1)})} \end{aligned}$$

となることから, $\Sigma^{(d-p-1)}$ の周りでは

$$W(\Sigma^{(p)}) = e^{-\frac{2\pi i}{n} \text{Link}(\Sigma^{(p)}, \Sigma^{(d-p-1)})} \in \mathbb{Z}_n$$

$\Sigma^{(p)}$ の周りでは

$$W(\Sigma^{(p)}) = e^{-\frac{2\pi i}{n} \text{Link}(\Sigma^{(p)}, \Sigma^{(d-p-1)})} \in \mathbb{Z}_n$$

のホロノミーがあることが分かる. このことから, **BF-理論**に登場する2つのゲージ場をダイナミカルにすることで得られる理論は, ホロノミーが \mathbb{Z}_n に値をとる平坦接続のゲージ理論であること, i.e. \mathbb{Z}_n ゲージ理論になっていると見做せるのである.

3.5.3 BF-理論の等価な形

前小節で導入したトリックは, いくつかの等価な形で述べることができる. 補助場 $\tilde{a}^{(d-p-2)}$ を導入し, 場の強さ $F^{(p+1)} := dA^{(p)}$ を独立な場と見做すことで

$$\begin{aligned} S_{\text{BF}}[F^{(p+1)}, B^{(d-p-1)}, \tilde{a}^{(p)}] &:= \frac{i n}{2\pi} B^{(d-p-1)} \wedge F^{(p+1)} + \frac{i}{2\pi} d\tilde{a}^{(d-p-2)} \wedge F^{(p+1)} \\ &= \frac{i}{2\pi} F^{(p+1)} \wedge (d\tilde{a}^{(d-p-2)} + nB^{(d-p-1)}) \end{aligned}$$

とする. ここでゲージ場をダイナミカルにすることで

$$\begin{aligned} Z_{\text{BF}} &= \int [df^{(p+1)}] \int [db^{(d-p-1)}] \int [d\tilde{a}^{(d-p-2)}] e^{-\int_{\mathcal{M}(d)} \left(\frac{i n}{2\pi} b^{(d-p-1)} \wedge f^{(p+1)} + \frac{i}{2\pi} d\tilde{a}^{(d-p-2)} \wedge f^{(p+1)} \right)} \\ &= \int [df^{(p+1)}] \Big|_{df^{(p+1)}=0} \int [db^{(d-p-1)}] e^{-\int_{\mathcal{M}(d)} \frac{i n}{2\pi} b^{(d-p-1)} \wedge f^{(p+1)}} \\ &= \int [df^{(p+1)}] \Big|_{df^{(p+1)}=0, f^{(p+1)}=0} \end{aligned}$$

となる. 汎函数積分において Bianchi 恒等式 $dF^{(p+1)} = 0$ および平坦接続の拘束条件が付いてくれるのである. もしくは,

$$Z_{\text{BF}} = \int [db^{(d-p-1)}] \int [d\tilde{a}^{(d-p-2)}] \int [df^{(p+1)}] e^{-\int_{\mathcal{M}(d)} \frac{i}{2\pi} F^{(p+1)} \wedge (d\tilde{a}^{(d-p-2)} + nb^{(d-p-1)})}$$

$$= \int [db^{(d-p-1)}] \int [d\tilde{a}^{(d-p-2)}] \Big|_{d\tilde{a}^{(d-p-2)} + nb^{(d-p-1)} = 0} \quad (3.5.2)$$

と捉えても良い。 $\tilde{a}^{(d-p-2)}$ は、 $Z_{BF}[F^{(p+1)}, B^{(d-p-1)}, \tilde{a}^{(p)}]$ に対するゲージ不变性の要請から

$$\tilde{a}^{(d-p-2)} \mapsto \tilde{a}^{(d-p-2)} + d\tilde{\lambda}^{(d-p-3)} - n\lambda^{(d-p-2)} \quad (3.5.3)$$

なるゲージ変換を受ける。

3.5.4 BF-理論における 't Hooft operator

't Hooft operator の素朴な定義は $\tilde{T}(\Sigma^{(d-p-2)}) := \exp(i \int_{\Sigma^{(d-p-2)}} \tilde{a}^{(d-p-2)})$ とすることだが、これはゲージ変換 (3.5.3) の下で不变でない。ゲージ不变にするために、 $\partial\Sigma^{(d-p-1)} = \Sigma^{(d-p-2)}$ を充たす $(d-p-1)$ -次元部分多様体 $\Sigma^{(d-p-1)} \subset \mathcal{M}^{(d)}$ を用いて

$$T(\Sigma^{(d-p-2)}; \Sigma^{(d-p-1)}) := \exp \left(i \int_{\Sigma^{(d-p-2)}} \tilde{a}^{(d-p-2)} + in \int_{\Sigma^{(d-p-1)}} b^{(d-p-1)} \right)$$

と定義する。然るに (3.5.2) から、この期待値を計算すると

$$\begin{aligned} & \langle T(\Sigma^{(d-p-2)}; \Sigma^{(d-p-1)}) \rangle \\ &= \int [db^{(d-p-1)}] \int [d\tilde{a}^{(d-p-2)}] \Big|_{d\tilde{a}^{(d-p-2)} + nb^{(d-p-1)} = 0} \exp \left(i \int_{\Sigma^{(d-p-2)}} \tilde{a}^{(d-p-2)} + in \int_{\Sigma^{(d-p-1)}} b^{(d-p-1)} \right) \\ &= \int [db^{(d-p-1)}] \int [d\tilde{a}^{(d-p-2)}] \Big|_{d\tilde{a}^{(d-p-2)} + nb^{(d-p-1)} = 0} \exp \left(i \int_{\Sigma^{(d-p-1)}} (d\tilde{a}^{(d-p-2)} + nb^{(d-p-1)}) \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

となり消えてしまう。

3.5.5 BF-理論における離散的高次対称性

離散群によって特徴付けられる対称性に対しては、保存カレントを定義することはできないが、トポロジカル演算子と charged object ならば定義できる。

BF-理論を考える。まず最初に、この理論が以下の変換の下で不变であることに注意する：

$$\begin{aligned} A^{(p)} &\mapsto A^{(p)} + \frac{1}{n}\epsilon^{(p)}, \\ B^{(d-p-1)} &\mapsto B^{(d-p-1)} + \frac{1}{n}\epsilon^{(d-p-1)}, \\ F^{(p+1)} &\mapsto F^{(p+1)}, \\ \tilde{A}^{(d-p-2)} &\mapsto \tilde{A}^{(d-p-2)} - \tilde{\epsilon}^{(d-p-2)} \end{aligned}$$

ただし $\epsilon^{(p)}, \epsilon^{(d-p-1)}$ は閉形式であり、任意の閉部分多様体 $\Sigma^{(p)}, \Sigma^{(d-p-1)} \subset \mathcal{M}^{(d)}$ について

$$\int_{\Sigma^{(p)}} \epsilon^{(p)}, \int_{\Sigma^{(d-p-1)}} \epsilon^{(d-p-1)} \in 2\pi\mathbb{Z}$$

を充たすとする。また、局所的に $\epsilon^{(d-p-1)} =: d\tilde{\epsilon}^{(d-p-2)}$ と定義した。実際、この変換によって

$$\begin{aligned} Z_{\text{BF}} &= \int [da^{(p)}] \int [db^{(d-p-1)}] e^{\frac{in}{2\pi} \int_{\mathcal{M}^{(d)}} b^{(d-p-1)} \wedge a^{(p)}} \\ &\mapsto \int [da^{(p)}] \int [db^{(d-p-1)}] e^{\frac{in}{2\pi} \int_{\mathcal{M}^{(d)}} b^{(d-p-1)} \wedge a^{(p)}} e^{\frac{i}{2\pi} \int_{\mathcal{M}^{(d)}} \epsilon^{(d-p-1)} \wedge da^{(p)}} \\ &= \int [da^{(p)}] \Big|_{da^{(p)}=0} e^{\frac{i}{2\pi} \int_{\mathcal{M}^{(d)}} \epsilon^{(d-p-1)} \wedge a^{(p)}} \\ &= Z_{\text{BF}} \end{aligned}$$

となる。トポロジカル演算子は

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{e^{2\pi ik/n}}(\Sigma^{(p)}) &:= e^{ik \int_{\Sigma^{(p)}} a^{(p)}} \\ U_{e^{2\pi ik/n}}(\Sigma^{(d-p-1)}) &:= e^{ik \int_{\Sigma^{(d-p-1)}} b^{(d-p-1)}} \end{aligned}$$

の 2 つあり、それぞれに対応する charged object は

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_n(\mathcal{C}^{(d-p-1)}) &:= e^{in \int_{\mathcal{C}^{(d-p-1)}} b^{(d-p-1)}} \\ W_n(\mathcal{C}^{(p)}) &:= e^{in \int_{\mathcal{C}^{(p)}} a^{(p)}} \end{aligned}$$

となっている。

【例 3.5.1】(3+1)-次元における \mathbb{Z}_n ゲージ理論

(3+1)-次元時空 $\mathcal{M}^{(4)}$ におけるトポロジカルな \mathbb{Z}_n ゲージ理論

$$\begin{aligned} S[a^{(1)}, b^{(2)}] &:= \frac{in}{2\pi} \int_{\mathcal{M}^{(4)}} b^{(2)} \wedge da^{(1)} + \frac{ipn}{4\pi} \int_{\mathcal{M}^{(4)}} b^{(2)} \wedge b^{(2)} \\ &= \frac{in}{4\pi p} \int_{\mathcal{M}^{(4)}} (da^{(1)} + pb^{(2)}) \wedge (da^{(1)} + pb^{(2)}) - \frac{in}{4\pi p} \int_{\mathcal{M}^{(4)}} da^{(1)} \wedge da^{(1)} \end{aligned}$$

を考える [?, p.21]。 $a^{(1)}, b^{(2)}$ はダイナミカルなので、作用は $\text{mod } 2\pi$ でゲージ不变でなくてはいけない。よって $b^{(2)}$ のゲージ変換 $b^{(2)} \mapsto b^{(2)} + d\lambda^{(1)}$ は $a^{(1)}$ にも同時に変換を引き起こさなくてはいけない^a：

$$a^{(1)} \mapsto a^{(1)} - p\lambda^{(1)}$$

注意すべきなのは、 $a^{(1)}, \lambda^{(1)}$ の両者が $U(1)$ ゲージ場なので、その値が $\text{mod } 2\pi$ でしか決まらないことである。よってこのゲージ変換における作用の非自明な変化は

$$-\pi ipn \int_{\mathcal{M}^{(4)}} \frac{d\lambda}{2\pi} \wedge \frac{d\lambda}{2\pi}$$

で記述される。この項が $\text{mod } 2\pi$ で消えるためには

$$\frac{pn}{2} \in \mathbb{Z}$$

が必要である^b。

BF-理論の節で行った議論と同様にこの理論を補助場 $f^{(2)}$ および $U(1)$ ゲージ場 $\hat{a}^{(1)}$ を含む等価な形で述べることができる：

$$\begin{aligned} S[f^{(2)}, b^{(2)}, \hat{a}^{(1)}] &:= \frac{in}{2\pi} \int_{\mathcal{M}^{(4)}} b^{(2)} \wedge f^{(2)} + \frac{ipn}{4\pi} \int_{\mathcal{M}^{(4)}} b^{(2)} \wedge b^{(2)} + \frac{i}{2\pi} \int_{\mathcal{M}^{(4)}} d\hat{a}^{(1)} \wedge f^{(2)} \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{\mathcal{M}^{(4)}} f^{(2)} \wedge (d\hat{a}^{(1)} + nb^{(2)}) + \frac{ipn}{4\pi} \int_{\mathcal{M}^{(4)}} b^{(2)} \wedge b^{(2)} \end{aligned}$$

ただし、 $b^{(2)}$ のゲージ変換 $b^{(2)} \mapsto b^{(2)} + d\lambda^{(1)}$ は $f^{(2)}, \hat{a}^{(1)}$ にも同時に変換を引き起こさなくてはいけない：

$$\begin{aligned} f^{(2)} &\mapsto f^{(2)} - p d\lambda^{(1)}, \\ \hat{a}^{(1)} &\mapsto \hat{a}^{(1)} - n\lambda^{(1)} \end{aligned}$$

$f^{(2)}, b^{(2)}$ に関する汎函数積分を実行することで

$$S[\hat{a}^{(1)}] = \frac{ip}{4\pi n} d\hat{a}^{(1)} \wedge d\hat{a}^{(1)}$$

とも等価である。

この理論の持つトポロジカル演算子を求めよう。 $p = 0$ のときは **BF-理論**のものと全く同じだが^a、 $p \neq 0$ のときは運動方程式 $da^{(1)} + pb^{(2)} = 0$ および $d\hat{a}^{(1)} + nb^{(2)} = 0$ により

$$W(\mathcal{C}^{(2)}) := e^{i \int_{\mathcal{C}^{(2)}} b^{(2)}}$$

とおくと

$$\begin{aligned} \langle (W(\mathcal{C}^{(2)})^p) \rangle &= 1, \\ \langle (W(\mathcal{C}^{(2)})^N) \rangle &= 1 \end{aligned} \tag{3.5.4}$$

がわかる。i.e.

$$\langle (W(\mathcal{C}^{(2)})^{\gcd(n, p)}) \rangle = 1$$

である。もう 1 つの Wilson line は、ゲージ不变性の要請から

$$\tilde{\mathcal{W}}(\mathcal{C}^{(1)}; \Sigma^{(2)}) := e^{i \int_{\mathcal{C}^{(1)}} a^{(1)}} e^{ip \int_{\Sigma^{(2)}} b^{(2)}}$$

とせざるを得ない。これは $\pm^{(2)}$ に依存しているので genuine line operator でないが、(3.5.4) を使うと

$$\tilde{\mathcal{W}}(\mathcal{C}^{(1)}; \Sigma^{(2)})^N = e^{i \int_{\mathcal{C}^{(1)}} (Na^{(1)} - p\hat{a}^{(1)})}$$

がわかる。ここから、

$$\mathcal{W}(\mathcal{C}^{(1)}) := \tilde{\mathcal{W}}(\mathcal{C}^{(1)}; \Sigma^{(2)})^{N/\gcd(n, p)}$$

がもう一つの line operator であることがわかり、 $\mathbb{Z}_{\gcd(n, p)}$ -チャージが導出された。

^a $a^{(1)}, \lambda^{(1)}$ が共に $U(1)$ ゲージ場であることから、 $p \in \mathbb{Z}$ でなくてはいけない。

^b この条件は $\mathcal{M}^{(4)}$ がスピン多様体ならば $p \in \mathbb{Z}$ と等価である。

3.6 高次のゲージ理論-より厳密な定式化

時空を $\mathcal{M}^{(d)}$ と書く。これまで高次のゲージ場の配位空間^{*45}について全く触れずに計算を進めてきた。しかし、これらの計算は実質的に U(1) ゲージ場についての経路積分になっており、ill-defined である。また、0-form の Dijkgraaf-Witten 理論の場合に見たように、トポロジカルなゲージ場の理論を考える際にはゲージ場の配位空間を真面目に考えないと自明な理論しか得られない可能性がある。この節では、[?] を参考に高次のゲージ場の配位空間の構造をできるだけ正確に記述することを試みる。

3.6.1 0-form のまとめ

一般化の前に 0-form (i.e. ゲージ場としては 1-form) の場合の結果をまとめておくのが有用である。

まずゲージ群 G が一般の位相群である場合、時空 $\mathcal{M}^{(d)}$ 上の主束は普遍束により分類された：

$$\text{Prin}_G(\mathcal{M}^{(d)})/\cong \xleftrightarrow{1:1} [\mathcal{M}^{(d)}, BG] \quad (3.6.1)$$

ただし \cong はファイバー束の同型である。これは圈 **Mfd** における引き戻し^{*46}

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}^{(d)} & \xrightarrow{\gamma} & BG \end{array}$$

と理解することができた。ただし命題 3.3 により普遍束の全空間は一点 * と同じホモトピー型なので * と書いた。一方で、接続としてのゲージ場はこの上に Deligne-Beilinson 2-コサイクルの情報を付加することに他ならない。概念的には、我々の求めたい接続付き主束の同型類全体と 1 対 1 対応がある空間を BG_{conn} と書いて

$$\begin{array}{ccc} & & BG_{\text{conn}} \\ & \nearrow (A, g) & \downarrow \text{forget} \\ \mathcal{M}^{(d)} & \xrightarrow{\gamma} & BG \end{array}$$

のようになっている。ここに $(A, g) \in \text{Del}^2(\mathcal{M}^{(d)}, \Omega^\bullet(-, \mathfrak{g}))$ である。また、平坦接続に話を限った BG_{flat} はより簡単な構造を持つ。これは接続を命題 3.6 により関手 $\mathbf{P}_1(\mathcal{M}^{(d)}) \rightarrow BG$ と見做すことで、 $\mathcal{M}^{(d)}$ が連結ならば

$$BG_{\text{flat}} \xleftrightarrow{1:1} \text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(\pi_1(\mathcal{M}^{(d)}), G)/G \quad (3.6.2)$$

となることが分かった。

次にゲージ群 G が離散群の場合を考える。このとき接続の定義から自動的に平坦接続になってしまふ：

$$BG_{\text{conn}} = BG_{\text{flat}} \xleftrightarrow{1:1} \text{Prin}_G(\mathcal{M}^{(d)})/\cong \quad (3.6.3)$$

^{*45} 物理ではモジュライ空間 (moduli space) とも言う。

^{*46} 正確には全ての射が up to homotopy だとした、homotopy pullback (<https://ncatlab.org/nlab/show/homotopy+pullback>) の図式である。

さらに主束が自動的に被覆空間になることから

$$[\mathcal{M}^{(d)}, BG] \xleftrightarrow{1:1} \text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(\pi_1(\mathcal{M}^{(d)}), G)/G$$

が分かり、結局

$$BG_{\text{conn}} = BG_{\text{flat}} \xleftrightarrow{1:1} \text{Prin}_G(\mathcal{M}^{(d)}) / \cong \xleftrightarrow{1:1} [\mathcal{M}^{(d)}, BG] \quad (3.6.4)$$

が言えた。i.e. ゲージ場の配位空間は $[\mathcal{M}^{(d)}, BG]$ と求まった。

3.6.2 p -formへの拡張

全小節の内容を素朴に p -form (i.e. $(p+1)$ -form ゲージ場) の場合に拡張することを考えてみよう。まずは G を一般の位相群とする。このとき (3.6.1) の一般化として、ある「上手く定義された圏」(∞ -トポス) H の上の homotopy pullback の図式

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}^{(d)} & \xrightarrow{\gamma} & \mathbf{B}G \end{array}$$

があると考えて、

$$\text{Prin}_G(\mathcal{M}^{(d)}) := \text{Hom}_H(\mathcal{M}^{(d)}, BG)$$

とおいてみる。ただし $\text{Prin}_G(\mathcal{M}^{(d)})$ と言うのは「主 p -束」とでも呼ぶべき構造であり、現時点では未定義である。次に「平坦接続」付き「主 p -束」のモジュライ空間 $\mathbf{B}G_{\text{flat}}$ であるが、これは path groupoid を十分うまく拡張した「path $(p+1)$ -groupoid」 $\mathbf{P}_{p+1}(\mathcal{M}^{(d)})$ があると考えて (3.6.2) の一般化

$$BG_{\text{flat}} \cong \text{Hom}_H(\mathbf{P}_{p+1}(\mathcal{M}^{(d)}), BG)$$

を仮定する。平坦でない場合というのは厄介だが、 BG の方を上手く処理できたとして同様に考える。

次に、 G が離散群である場合を考える。このとき問題になるのは、(3.6.3) の一般化

$$\mathbf{B}G_{\text{conn}} = \mathbf{B}G_{\text{flat}}$$

が成り立つか不明であり、従って (3.6.4) の一般化

$$\mathbf{B}G_{\text{conn}} = \mathbf{B}G_{\text{flat}} \xrightarrow{1:1} \text{Prin}_G(\mathcal{M}^{(d)}) = \text{Hom}_H(\mathcal{M}^{(d)}, BG)$$

が成り立っているかが不明な点にある。実際、前節で行ったトリックは $\mathbf{B}G_{\text{conn}}$ について和をとっていることになる。しかし、トポロジカル演算子を挿入することを考えるとむしろ $\text{Prin}_G(\mathcal{M}^{(d)}) / \cong$ の方が配位空間だと考える方が自然かもしれない。

3.6.3 高次群の構造が自明な場合： ∞ -groupoid

全小節の推測を真面目に扱うには、 ∞ -圏の力を借りる必要がある。

定義 3.18: extended group

有限群の列 $\mathbb{G} = (G_1, G_2, \dots)$ であって,

- ある d が存在して $\forall q \geq d$ に対して $G_q = 1$ を充たす.
- $\forall p \geq 2$ に対して G_p は可換群

を充たすものを拡張された群 (extended group) と呼ぶ [?].

時空 $\mathcal{M}^{(d)}$ の三角形分割を与える单体的集合 $T \in \text{Ob}(\mathbf{sSet})$ をとり, 勝手な d -单体 $\sigma \in T_d$ を 1 つ固定する. σ はちょうど $d+1$ 個の 0-单体 $\{0, 1, \dots, d\}$ からなる. σ の部分 p -单体は $\{0, 1, \dots, d\}$ から互いに相異なる $p+1$ 個を選んだ $\{l_0, \dots, l_p\} \subset \{0, 1, \dots, d\}$ からなる. i.e.

$$\binom{d+1}{p+1}$$

個存在する. d -单体 σ の部分 p -单体全体の集合を $\langle d : p \rangle$ と書く. p 单体の向きは常に $l_0 < \dots < l_p$ を充たすようにとる.

定義 3.19:

- 自明な高次群 (higher group) の構造を持つ σ 上の $\mathbb{G} = (G_1, G_2, \dots)$ -ゲージ場とは, $\forall \textcolor{red}{p} \geq 1$ に対して与えられた写像

$$A^{(\textcolor{red}{p})}: \langle d : \textcolor{red}{p} \rangle \longrightarrow G_{\textcolor{red}{p}} \quad (3.6.5)$$

のこと^a.

- \mathbb{G} -ゲージ場 $\{A^{(\textcolor{red}{p})}: \langle d : \textcolor{red}{p} \rangle \longrightarrow G_{\textcolor{red}{p}}\}_{\textcolor{red}{p} \geq 1}$ が平坦 (flat) であるとは, $\forall \textcolor{red}{p} \geq 1$ および $\forall \tau \in \langle d : \textcolor{red}{p} + 1 \rangle$ に対して

$$\prod_{j=0}^{\textcolor{red}{p}+1} A(\partial_j^{\textcolor{red}{p}+1}(\tau))^{(-1)^j} = 1_{G_{\textcolor{red}{p}}} \quad (3.6.6)$$

を充たすこと.

^a $A^{(\textcolor{red}{p})}$ の像の元をゲージ自由度と呼ぶ.

しばらくの間, $1 \leq \textcolor{red}{p} \leq d$ を 1 つ固定する. (3.6.6) により, 独立なゲージ自由度は

$$\binom{d}{\textcolor{red}{p}}$$

個である. よって $\{1, \dots, d\}$ の互いに相異なる $\textcolor{red}{p}$ 点部分集合全体がなす集合を $[d : \textcolor{red}{p}] \subset \langle d : \textcolor{red}{p} \rangle$ と書くと, 写像

$$g^{(\textcolor{red}{p})}: [d : \textcolor{red}{p}] \longrightarrow G_{\textcolor{red}{p}}, \{q_1, \dots, q_{\textcolor{red}{p}}\} \longmapsto g_{q_1 \dots, q_{\textcolor{red}{p}}} \quad (3.6.7)$$

は独立なゲージ自由度を表している。表示 (3.6.5) と (3.6.7) の間の関係としては [?, p.8] に倣って

$$\forall \{l_0, \dots, l_{\textcolor{red}{p}}\} \subset \{0, \dots, d\}, \quad A(\{l_0, \dots, l_{\textcolor{red}{p}}\}) = \prod_{q_1=l_0+1}^{l_1} \cdots \prod_{q_{\textcolor{red}{p}}=l_{\textcolor{red}{p}-1}+1}^{l_{\textcolor{red}{p}}} g_{q_1 \dots q_{\textcolor{red}{p}}}$$

を仮定する。このとき面写像 $d_j^d \in \text{Hom}_{\Delta}([d-1], [d])$ による $\textcolor{red}{p}$ -form ゲージ場 $A^{(\textcolor{red}{p})}$ の引き戻しは $\forall \{l_0, \dots, l_{\textcolor{red}{p}}\} \subset \{0, \dots, d-1\}$ について

$$\begin{aligned} & \prod_{q_1=l_0+1}^{l_1} \cdots \prod_{q_{\textcolor{red}{p}}=l_{\textcolor{red}{p}-1}+1}^{l_{\textcolor{red}{p}}} (d_j^{d*} g)_{q_1 \dots q_{\textcolor{red}{p}}} \\ &:= d_j^{d*} A(\{l_0, \dots, l_{\textcolor{red}{p}}\}) \\ &= A(d_j^d(\{l_0, \dots, l_{\textcolor{red}{p}}\})) \\ &= A(\{l_0, \dots, l_{k-1}, l_k + 1, \dots, l_{\textcolor{red}{p}} + 1\}) \quad (l_{k-1} < j \leq l_k) \\ &= \prod_{q_1=l_0+1}^{l_1} \cdots \prod_{q_{k-1}=l_{k-2}+1}^{l_{k-1}} \prod_{q_k=l_{k-1}+1}^{l_k+1} \prod_{q_{k+1}=l_k+2}^{l_{k+1}+1} \cdots \prod_{q_{\textcolor{red}{p}}=l_{\textcolor{red}{p}-1}+2}^{l_{\textcolor{red}{p}}+1} g_{q_1 \dots q_{\textcolor{red}{p}}} \end{aligned}$$

と求まり、縮退写像 $s_j^d \in \text{Hom}_{\Delta}([d+1], [d])$ による引き戻しは^{*47} $\forall \{l_0, \dots, l_{\textcolor{red}{p}}\} \subset \{0, \dots, d+1\}$ について

$$\begin{aligned} & \prod_{q_1=l_0+1}^{l_1} \cdots \prod_{q_{\textcolor{red}{p}}=l_{\textcolor{red}{p}-1}+1}^{l_{\textcolor{red}{p}}} (s_j^{d*} g)_{q_1 \dots q_{\textcolor{red}{p}}} \\ &:= s_j^{d*} A(\{l_0, \dots, l_{\textcolor{red}{p}}\}) \\ &= A(s_j^d(\{l_0, \dots, l_{\textcolor{red}{p}}\})) \\ &= A(\{l_0 \dots l_{k-1}, l_k - 1, \dots, l_{\textcolor{red}{p}} - 1\}) \quad (l_{k-1} \leq j < l_k) \\ &= \begin{cases} \prod_{q_1=l_0+1}^{l_1} \cdots \prod_{q_{k-1}=l_{k-2}+1}^{l_{k-1}} \prod_{q_k=l_{k-1}+1}^{l_k-1} \prod_{q_{k+1}=l_k}^{l_{k+1}-1} \cdots \prod_{q_{\textcolor{red}{p}}=l_{\textcolor{red}{p}-1}+1}^{l_{\textcolor{red}{p}}-1} g_{q_1 \dots q_{\textcolor{red}{p}}}, & l_{k-1} < j < l_k \\ 1_{G_p}, & l_{k-1} = j \end{cases} \end{aligned}$$

となる。i.e.

$$\begin{aligned} (d_j^{d*} g)_{q_1 \dots q_{\textcolor{red}{p}}} &= \begin{cases} g_{q_1 \dots q_{\bullet}, q_{\bullet+1}+1, \dots, q_{\textcolor{red}{p}}+1}, & q_{\bullet} < j < q_{\bullet+1} \\ g_{q_1 \dots q_{\bullet}, q_{\bullet+1}+1, \dots, q_{\textcolor{red}{p}}+1} g_{q_1 \dots q_{\bullet}+1, q_{\bullet+1}+1, \dots, q_{\textcolor{red}{p}}+1}, & q_{\bullet} = j \end{cases} \\ (s_j^{d*} g)_{q_1 \dots q_{\textcolor{red}{p}}} &= \begin{cases} g_{q_1 \dots q_{\bullet}, q_{\bullet+1}-1, \dots, q_{\textcolor{red}{p}}-1}, & q_{\bullet} < j+1 < q_{\bullet+1} \\ 1_{G_p}, & j+1 \in \{q_1, \dots, q_{\textcolor{red}{p}}\} \end{cases} \end{aligned}$$

が分かった。以上より、3つ組

$$\begin{aligned} & \{X^{(\textcolor{red}{p})}([d]) := \text{Hom}_{\mathbf{Sets}}([d : \textcolor{red}{p}], G_{\textcolor{red}{p}})\}_{d \geq 0}, \\ & \{\partial_j^d : \text{Hom}_{\mathbf{Sets}}([d : \textcolor{red}{p}], G_{\textcolor{red}{p}}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Sets}}([d-1 : \textcolor{red}{p}], G_{\textcolor{red}{p}}), g \longmapsto d_j^{d*} g\}_{0 \leq j \leq d, d \geq 1}, \end{aligned} \tag{3.6.8}$$

^{*47} 部分単体の次数は相変わらず $\textcolor{red}{p}$ であることに注意。

$$\{\sigma_j^d : \text{Hom}_{\mathbf{Sets}}([d : \textcolor{red}{p}], G_{\textcolor{red}{p}}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Sets}}([d+1 : \textcolor{red}{p}], G_{\textcolor{red}{p}}), g \longmapsto s_j^{d*}g\}_{0 \leq j \leq d, d \geq 1}, \quad (3.6.9)$$

は単体的恒等式を満たし、単体的集合

$$X^{(\textcolor{red}{p})} : \Delta^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を成す。

定理 3.6:

単体的集合 $X^{(\textcolor{red}{p})} \in \text{Ob}(\mathbf{sSet})$ は ∞ -groupoid である。

証明 $\forall n \geq 0$ および $0 \leq \forall i \leq n$ を 1 つ固定する。勝手な圏 \mathbf{sSet} の射

$$f : \Lambda_i^n \longrightarrow X^{(\textcolor{red}{p})}$$

を 1 つ固定する。このとき、圏 \mathbf{sSet} における可換図式

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_i^n & \xrightarrow{f} & X^{(\textcolor{red}{p})} \\ \downarrow \iota & \nearrow \exists \bar{f} & \\ \Delta^n & & \end{array}$$

の存在を示せば良い。ところで系??から、射 f, ι はそれぞれ

$$\begin{aligned} (f_0, \dots, \hat{f}_i, \dots, f_n) &\in \prod_{k \in [n] \setminus \{i\}} X^{(\textcolor{red}{p})}([n-1]), \\ (d_0^n, \dots, \widehat{d_i^n}, \dots, d_i^n) &\in \prod_{k \in [n] \setminus \{i\}} \Delta^n([n-1]) \end{aligned}$$

であって $\forall j, k \in [n] \setminus \{i\}$ s.t. $j < k$ について $\partial_j^{n-1}(f_k) = \partial_{k-1}^{n-1}(f_j)$ を充たすものと同一視できる。よって示すべきは $\partial_j^n(\bar{f}) = f_j$ ($\forall j \in [n] \setminus \{i\}$) を充たす $\bar{f} \in X^{(\textcolor{red}{p})}([n-1]) = \text{Hom}_{\mathbf{Sets}}([n-1 : \textcolor{red}{p}], G_{\textcolor{red}{p}})$ が存在することである^{*48}。 $n \geq \textcolor{red}{p}$ のときは自明なので $n < \textcolor{red}{p}$ を考える。

$\{q_1 < \dots < q_{\textcolor{red}{p}}\} \in [n-1 : \textcolor{red}{p}]$ に含まれない最小の整数を j とおき、 j に関する数学的帰納法によって写像 \bar{f} の行き先 $\bar{f}(\{q_1, \dots, q_{\textcolor{red}{p}}\})$ を構成する。まず $j = 1$ のときは

$$\bar{f}(\{q_1, \dots, q_{\textcolor{red}{p}}\}) := f_0(\{q_1 - 1, \dots, q_{\textcolor{red}{p}} - 1\})$$

とおく。 $j > 1$ のときは帰納法の仮定を使い

$$\begin{aligned} \bar{f}(\{q_1, \dots, q_{\textcolor{red}{p}}\}) &:= f_j(\{q_1, \dots, q_m, q_{m+1} - 1, \dots, q_{\textcolor{red}{p}} - 1\}) \\ &\times \bar{f}(\{q_1 + 1, \dots, q_m + 1, q_{m+1}, \dots, q_{\textcolor{red}{p}}\})^{-1} \end{aligned}$$

(ただし $q_m = j$) とおくと、 $j \leq i-1$ までの帰納法が完成する。

次に $\{q_1 < \dots < q_{\textcolor{red}{p}}\} \in [n-1 : \textcolor{red}{p}]$ に含まれない最大の整数を j とおき、 j に関する数学的帰納法によって写像 \bar{f} の行き先 $\bar{f}(\{q_1, \dots, q_{\textcolor{red}{p}}\})$ を構成する。まず $j = n-1$ のときは

$$\bar{f}(\{q_1, \dots, q_{\textcolor{red}{p}}\}) := f_n(\{q_1, \dots, q_{\textcolor{red}{p}}\})$$

^{*48} このような \bar{f} のことを角 Λ_i^n の **filler** と呼ぶ。

とおく. $j < n - 1$ のときは帰納法の仮定を使い

$$\begin{aligned}\bar{f}(\{q_1, \dots, q_{\textcolor{red}{p}}\}) &\coloneqq \bar{f}(\{q_1, \dots, q_m, q_{m+1}-1, \dots, q_{\textcolor{red}{p}}-1\})^{-1} \\ &\quad \times f_j(\{q_1, \dots, q_m, q_{m+1}-1, \dots, q_{\textcolor{red}{p}}-1\})\end{aligned}$$

(ただし $q_m = j$) とおくと, $j \geq i + 2$ までの帰納法が完成する. 以上の 2 段階の帰納法により \bar{f} が定まった. (3.6.9) を使うと $\partial_j^n(\bar{f}) = f_j$ が分かる. ■

定理 3.7: $X^{(\textcolor{red}{p})}$ は Eilenberg-MacLane 空間

$$\pi_n(|X^{(\textcolor{red}{p})}|) = \begin{cases} G_{\textcolor{red}{p}}, & n = \textcolor{red}{p} \\ 1, & n \neq \textcolor{red}{p} \end{cases}$$

証明 定理??より, ∞ -groupoid $X^{(\textcolor{red}{p})}$ の単体的ホモトピー群を計算すれば良い. $n = 0$ のときと $n < \textcolor{red}{p}$ のときは $Z_n(X, *) \subset X_n = \{\emptyset\}$ なので $\pi_n^\Delta(X, *) = 1$ である.

$n > \textcolor{red}{p}$ とする. すると $\forall Q := \{q_1 < \dots < q_{\textcolor{red}{p}}\} \in [n : \textcolor{red}{p}]$ に対してある $0 \leq j \leq n$ が存在して $j \notin Q$ を充たす. よって $\forall h \in Z_n(X, *)$ をとると (3.6.8) から

$$\partial_i^n h(Q) = h(\{q_1, \dots, q_{\bullet}, q_{\bullet}+1, \dots, q_{\textcolor{red}{p}+1}+1\}) = (\sigma_0)^{n-1}(*) = 1_{G_{\textcolor{red}{p}}}$$

が分かる. i.e. $Z_n(X, *) = \{1\}$ であり, $\pi_n^\Delta(X, *) = 1$ が分かった.

$n = \textcolor{red}{p}$ とする. $[p : p]$ は一点集合で $[p+1 : p]$ は $p+1$ 点集合なので $X^{(\textcolor{red}{p})}([n]) \cong G_{\textcolor{red}{p}}$, $X^{(\textcolor{red}{p})}([n+1]) \cong G_{\textcolor{red}{p}}^{\times(\textcolor{red}{p}+1)}$ となる. よって $x \in X^{(\textcolor{red}{p})}([n+1])$ を

$$x = (x_1, \dots, x_{\textcolor{red}{p}+1})$$

と書く. $\forall a, b \in Z_n(X^{(\textcolor{red}{p})}, *)$ をとる. このとき a と b を繋ぐホモトピー $x \in X^{(\textcolor{red}{p})}([n+1])$ は存在すれば

$$x_1 = x_2 x_1 = \dots = x_{\textcolor{red}{p}} x_{\textcolor{red}{p}-1} = 1, x_{\textcolor{red}{p}+1} x_{\textcolor{red}{p}} = a, x_{\textcolor{red}{p}+1} = b$$

を充たすが, これの解は $a = b$ でないと存在しない. よって $a \sim b \iff a = b$ であり, $\pi_n^\Delta(X^{(\textcolor{red}{p})}, *) \cong G_{\textcolor{red}{p}}$ が分かる. ■

3.6.4 2-群の場合：ホロノミー 2-関手

次に, ゲージ群が 2-群の場合を考えよう. [?] を参考に, ゲージ群が厳密な 2-Lie 群 \mathcal{G} である場合から出発する. 命題??より \mathcal{G} は交差加群 $(G_2 \xrightarrow{t} G_1, \alpha)$ と等しい. G_1, G_2 の単位元における接空間をとることで, 微分交差加群 $(\mathfrak{g}_2 \xrightarrow{\mathrm{d}t} \mathfrak{g}_1, \mathrm{d}\alpha)$ を得る.

時空の good cover $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ を 1 つ固定する. 命題 3.6 のように, 2-接続をホロノミーのなす関手として定義するところから始める.

3.7 (1+1)-次元の非可逆対称性のゲージ化

[?] に従って, $(1+1)$ -次元系の, フュージョン則がある種の有限性を充たすような 0-form symmetry をゲージ化する手続きを与える. このような一般化対称性は**非可逆対称性** (non-invertible symmetry), または**圏論的対称性** (categorical symmetry) と呼ばれる. この構成は, 具体例として非可換有限群 G の 0-form symmetry のゲージ化を含む.

3.7.1 ユニタリフュージョン圏としての 0-form 対称性

公理 3.3: $(1+1)$ -次元の有限 0-form 対称性

$(1+1)$ -次元系における有限の^a0-form symmetry は, ユニタリフュージョン圏として特徴付けられる.

^a 単純対象が有限個

公理 3.3 を解説する. ユニタリフュージョン圏 \mathcal{C} を 1 つ固定する.

まず, トポロジカル演算子は $a \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ によってラベルされる. $C \subset M$ を向きづけられた 1 次元部分多様体 (i.e. 曲線) とすると, 理論 T にトポロジカル演算子を挿入した際の分配関数は

$$\langle \cdots U_a(C) \cdots \rangle$$

となる. 特に, 単位対象 $1 \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対応するトポロジカル演算子は分配関数を変えない:

$$\langle \cdots U_1(C) \cdots \rangle = \langle \cdots \rangle$$

$f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b)$ は, トポロジカルな点状の演算子を表し, トロポジカル演算子のラベルを取り替える.



$\forall a, b \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対し, その直和

$$\langle \cdots U_{a \oplus b}(C) \cdots \rangle = \langle \cdots U_a(C) \cdots \rangle + \langle \cdots U_b(C) \cdots \rangle$$

が存在する. また, 2 つのトポロジカル演算子はフュージョンすることができる:

$$\langle \cdots U_{a \otimes b}(C) \cdots \rangle = \sum_{c \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{ab}^c \langle \cdots U_c(C) \cdots \rangle$$

特に \mathcal{C} がフュージョン圏であることから, $\text{Simp}(\mathcal{C})$ にはある種の有限性を要請していることになる.

\mathcal{C} は rigid なモノイダル圏でもあり, associator, evaluation, coevaluation に対応するデータも持つ. associator に対応するデータはしばしば F -symbol^{*49} と呼ばれる.

^{*49} F -symbol は, 厳密には associator そのものではない.

【例 3.7.1】 圈 \mathbf{Vec}_G^α とアノマリー

$\mathcal{C} = \mathbf{Vec}_G^\alpha$ とする。このとき, $\alpha \in H_{\text{Grp}}^3(G; \text{U}(1))$ は Dijkgraaf-Witten 理論を定める。i.e. Dijkgraaf-Witten 理論をアノマリー流入に持つ't Hooft アノマリーを 1 つ指定している。

【例 3.7.2】 圈 \mathbf{Vec}_G^α と G -SPT のスタック

$\mathcal{C} = \mathbf{Vec}_G^\alpha$ とする。 \mathbf{Vec}_G^α の自己同型はモノイダル自然同型によって与えられるが、【例??】によりそれは 2 つ組 $(f, \tau) \in \text{Aut}(G) \times H_{\text{Grp}}^2(G; \text{U}(1))$ を指定する。これは 2 次元の理論 T に 2 次元のボゾニック G -SPT をスタックする操作に他ならない。

3.7.2 代数対象とゲージ化

$(1+1)$ -次元系における有限の 0-form symmetry を公理 3.3 によりユニタリフェージョン圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ と見做す。

定義 Ph 3.1: ゲージ化

$(1+1)$ -次元時空 $M^{(2)}$ 上の場の理論 T が 0-form symmetry $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ を持つとする。

T のゲージ化 (gauging) とは、圏 \mathcal{C} における特殊な対称 Frobenius 代数 $(A, \mu, \nu, \Delta, \epsilon)$ を 1 つ指定することを言う。ゲージ化された理論のことを \mathbf{T}/\mathbf{A} と書く。

定義 3.1 を解読する。まず $(1+1)$ -次元時空 $M^{(2)}$ の任意の三角形分割 $K \in \text{Ob}(\mathbf{sSet})$ をとり、その Poincaré 双対をとることで得られるグラフ $P^{(1)}(K)$ を考える (図 3.2)^{*50}。グラフ $P^{(1)}(K)$ の全ての辺にトポロジカル演算子 $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を置き、頂点には射 $\mu: A \otimes A \rightarrow A$ または $\Delta: A \rightarrow A \otimes A$ を置くことで、グラフ $P^{(1)}(K)$ はストリング図式 $\mathbb{F}_A(K)$ を与える。次の命題 3.7 より、 A が特殊な対称 Frobenius 代数であることが、このストリング図式 $\mathbb{F}_A(K)$ が位相不変量であること (i.e. ゲージ不变性) を保証しているのだと分かる。

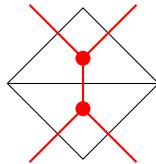


図 3.2: 2 次元多様体 $M^{(2)}$ の三角形分割 K の一部と、その Poincaré 双対グラフ $P^{(1)}$ 。

命題 3.7: ゲージ化は三角形分割の取り方によらない

ストリング図式 $\mathbb{F}_A(K)$ は、時空多様体 $M^{(2)}$ の三角形分割 K の取り方によらない。

^{*50} グラフ $P^{(1)}$ は、後述する多面体分割の一例となっている。

証明 $\mathbb{F}_A(K)$ が**双星状移動**に関して不変であることを示せば良い。2次元 PL 多様体の双星状移動は以下の 2 つである：

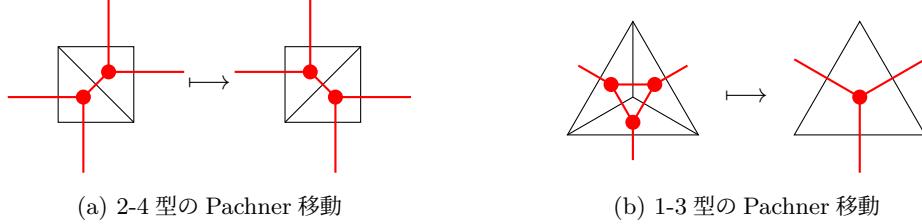


図 3.3: 2 次元 PL 多様体の双星状移動 (Pachner 移動)

Frobenius 代数の定義 (**Frob-2**) より、**2-4 型の双星状移動**の下で $\mathbb{F}_A(K)$ は不変である。**1-3 型の双星状移動**に関しては、

により不変であることがわかった。 ■

従来のゲージ化の定義との対応は、次の【例 3.7.4】によって分かる。逆に言うと、定義 3.1 は【例 3.7.4】を一般化したものである。

【例 3.7.3】 \mathbf{Vec}_G におけるゲージ化

G を可換とは限らない有限群とし、【例??】で定義したユニタリフュージョン圏 $\mathcal{C} = \mathbf{Vec}_G$ を考える。

$A := \bigoplus_{g \in G} \mathbb{K}g$ とおこう。ただし $\forall g \in G$ に対して $\mathbb{K}g$ は 1 次元 \mathbb{K} -ベクトル空間であり、その基底を e_g と書く。このとき

- \mathbf{Vec}_G の射

$$\mu: A \otimes A \longrightarrow A, e_g \otimes e_h \longmapsto e_{gh}$$

- \mathbf{Vec}_G の射

$$v: 1 \longrightarrow A, 1_G \longmapsto \sum_{g \in G} \delta_{1_G, g} e_g$$

は明らかに \mathbf{Vec}_G の代数対象を成す。さらに

- \mathbf{Vec}_G の射

$$\Delta: A \longrightarrow A \otimes A, e_g \longmapsto \sum_{h \in G} e_h \otimes e_{h^{-1}g}$$

- \mathbf{Vec}_G の射

$$\epsilon: A \longrightarrow 1, e_g \longmapsto \delta_{1_G, g} e_{1_G}$$

は $\forall g \in G$ に対して

$$\begin{aligned} (\mathrm{Id}_A \otimes \Delta) \circ \Delta(e_g) &= (\mathrm{Id}_A \otimes \Delta) \left(\sum_{h \in G} e_h \otimes e_{h^{-1}g} \right) \\ &= \sum_{h, k \in G} e_h \otimes e_k \otimes e_{(hk)^{-1}g}, \\ (\Delta \otimes \mathrm{Id}_A) \circ \Delta(e_g) &= \sum_{h, k \in G} e_k \otimes e_{k^{-1}h} \otimes e_{h^{-1}g} \\ &= \sum_{k \in G} e_k \otimes \left(\sum_{h \in G} e_{k^{-1}h} \otimes e_{h^{-1}g} \right) \\ &= \sum_{k \in G} e_k \otimes \left(\sum_{h \in G} e_h \otimes e_{(kh)^{-1}g} \right) \\ &= (\mathrm{Id}_A \otimes \Delta) \circ \Delta(e_g), \\ (\epsilon \otimes \mathrm{Id}_A) \circ \Delta(e_g) &= \sum_{h \in G} \delta_{1_G, h} e_{1_G} \otimes e_{h^{-1}g} \\ &= e_{1_G} \otimes e_g \\ &= l_A(e_g), \\ (\mathrm{Id}_A \otimes \epsilon) \circ \Delta(e_g) &= \sum_{h \in G} \delta_{1_G, h^{-1}g} e_h \otimes e_{h^{-1}g} \\ &= e_g \otimes e_{1_G} \\ &= r_A(e_g) \end{aligned}$$

を充たすので組 (A, Δ, ϵ) は余代数対称である。その上

$$\begin{aligned} (\mathrm{Id}_A \otimes \mu) \circ (\Delta \otimes \mathrm{Id}_A)(e_g \otimes e_h) &= (\mathrm{Id}_A \otimes \mu) \left(\sum_{k \in G} e_k \otimes e_{k^{-1}g} \otimes e_h \right) \\ &= \sum_{k \in G} e_k \otimes e_{k^{-1}gh}, \\ \Delta \circ \mu(e_g \otimes e_h) &= \sum_{k \in G} e_k \otimes e_{k^{-1}(gh)} \\ (\mu \otimes \mathrm{Id}_A) \circ (\mathrm{Id}_A \otimes \Delta)(e_g \otimes e_h) &= (\mu \otimes \mathrm{Id}_A) \left(\sum_{k \in G} e_g \otimes e_k \otimes e_{k^{-1}h} \right) \\ &= \sum_{k \in G} e_{gk} \otimes e_{k^{-1}h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k \in G} e_k \otimes e_{(g^{-1}k)^{-1}h} \\
&= \sum_{k \in G} e_k \otimes e_{k^{-1}gh}
\end{aligned}$$

が成り立つので Frobenius 代数であり,

$$\begin{aligned}
(\epsilon \otimes \text{Id}_{A^*}) \circ (\mu \otimes \text{Id}_{x^*}) \circ (\text{Id}_A \otimes \text{coev}_A^L)(e_g) &= (\epsilon \otimes \text{Id}_{A^*}) \circ (\mu \otimes \text{Id}_{x^*}) \left(e_g \otimes \left(\sum_{h \in G} e_h \otimes e_{h^{-1}} \right) \right) \\
&= \sum_{h \in G} \delta_{1_G, gh} e_{h^{-1}} \\
&= e_g,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{Id}_{A^*} \otimes \epsilon) \circ (\text{Id}_{x^*} \otimes \mu) \circ (\text{coev}_A^R \otimes \text{Id}_A)(e_g) &= (\text{Id}_{A^*} \otimes \epsilon) \circ (\text{Id}_{x^*} \otimes \mu) \left(\left(\sum_{h \in G} e_{h^{-1}} \otimes e_h \right) \otimes e_g \right) \\
&= \sum_{h \in G} \delta_{1_G, hg} e_{h^{-1}} \\
&= e_g
\end{aligned}$$

が成り立つので対称 Frobenius 代数であり,

$$\begin{aligned}
\mu \circ \Delta(e_g) &= \mu \left(\sum_{h \in G} e_h \otimes e_{h^{-1}g} \right) \\
&= \text{Id}_A(e_g)
\end{aligned}$$

が成り立つので組 $(A, \mu, \nu, \Delta, \epsilon)$ は特殊 Frobenius 代数であることが分かった. 以上の考察から, 組 $(A, \mu, \nu, \Delta, \epsilon)$ は定義 3.1 の意味で対称性 Vec_G のゲージ化である.

従来の意味のゲージ化とは, 理論をゲージ場と結合させてゲージ場に関する経路積分を実行することであった. 0-form symmetry の全てのトポロジカル演算子のあらゆる可能な配位に関する足し上げと言っても良い. 定義 3.1 の意味のゲージ化は, 今回の場合は時空の三角形分割から得られる双対グラフの全ての边上に, 全てのトポロジカル演算子を足し上げることで構成されるトポロジカル演算子 $A = \bigoplus_{g \in G} \mathbb{K}g$ をアサインしているため, まさにトポロジカル演算子のあらゆる可能な配位に関する足し上げを実行したことに他ならない^a.

^a 暗に和をとる順序を変えている. 単純対象が有限個で, 三角形分割も有限であるから, 有限和の順序交換となって well-defined である.

3.7.3 ゲージ化された理論の持つ対称性

定義 3.1 に倣い, ユニタリフュージョン圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ の特殊な対称 Frobenius 代数 $(A, \mu, \nu, \Delta, \epsilon)$ を 1 つ固定する. このとき, ゲージ化された理論 T/A の持つ 0-form symmetry はどのようなユニタリフュージョン圏で特徴づけられるのだろうか?

命題 ph 3.1: ゲージ化された理論の持つ対称性

T/A の持つ対称性は、 \mathcal{C} における (A, A) -両側加群対象がなす圏 $\mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(A, A)$ である.

命題 3.1 を理解しよう. まず、 T/A の分配関数は、 T の分配関数に A でラベルされたトポロジカル演算子を、時空多様体 $M^{(2)}$ 上のメッシュに沿って挿入したものである：

$$Z_{T/A}(M^{(2)}) = Z_T \left(\begin{array}{c} \text{red mesh} \\ \text{in } M^{(2)} \end{array} \right)$$

したがってトポロジカル演算子として $p \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ でラベルされるようなものを依然として考えることができるが、それが A の任意のメッシュの配位に対してトポロジカルであるためには、 p でラベルされたトポロジカル演算子と A でラベルされたトポロジカル演算子との間のフュージョン則にある種の整合性条件を課す必要がある. 命題 3.1 は、その整合性条件がまさに (A, A) -両側加群対象の条件 **(bimod-1)-(bimod-3)** であることを主張している. 物理的には、トポロジカル演算子の向きが逆になっていてもフュージョンできるべきである. 幸いにして \mathcal{C} がユニタリフュージョン圏であることから、 $\text{coev}^L, \text{coev}^R$ を用いることで A -加群の構造の定義に登場する矢印の向きを全て逆転して、 A -余加群の構造を常に持たせることができる.

次に、2つの異なるトポロジカル演算子 $p, q \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を考える. これらの接合部となる点状のトポロジカル演算子 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(p, q)$ は、左右からの A の作用について可換でなくてはいけない. i.e. (A, A) -両側加群の準同型ということになる. このことから、 $(1+1)$ -次元の理論 T/A の持つトポロジカル演算子全体が圏 $\mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(A, A)$ を成すことがわかる.

しかるに、圏 $\mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(A, A)$ が 0-form symmetry であるためにはそれがユニタリフュージョン圏にならなくてはいけない. まず、テンソル積は代数 A 上のテンソル積 (\otimes_A, π) だと考えられる. 実際、こうすることで $(p, \lambda_1, \rho_1), (q, \lambda_2, \rho_2) \in \text{Ob}(\mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(A, A))$ のフュージョン則が

$$\begin{array}{ccc} \text{Diagram showing } p \otimes_A q & = & \text{Diagram showing } p \otimes_A q \\ \text{with associator } \pi \text{ and unitors } \rho_1, \rho_2 & & \text{with unitors } \lambda_1, \lambda_2 \text{ and } \text{coev}_p^L, \text{coev}_q^R \end{array}$$

のようになるが、これはまさに p, q に挟まれた A のメッシュを p, q のフュージョンにおいて無視できることを意味する. $\mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(A, A)$ の associator と unitors, left/right evaluation, coevaluation は

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{p,q,r} &:= \pi_{p,q \otimes_A r} \circ (\text{Id}_p \otimes \pi_{q,r}) \circ a_{p,q,r} \circ (\bar{\pi}_{p,q} \otimes \text{Id}_r) \circ \bar{\pi}_{p \otimes_A q, r}, \\ \bar{\text{ev}}_p^L &:= v \circ \text{ev}_p^L \circ \bar{\pi}_{p^*, p}, \\ \bar{\text{coev}}_p^L &:= \pi_{p,p^*} \circ \text{coev}_p^L \circ \Delta, \\ &\vdots \end{aligned}$$

のように定義する. こうして $(\mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(A, A), \otimes_A, 1, \bar{a}, \bar{l}, \bar{r}, \bar{\text{ev}}^L, \bar{\text{coev}}^L, \bar{\text{ev}}^R, \bar{\text{coev}}^R)$ がユニタリフュージョン圏になり、公理 3.3 の意味で T/A の 0-form symmetry を特徴付ける.

命題 ph 3.2: half-space gauging

時空多様体 M が 1 次元部分多様体 D によって 2 つの領域 M_1, M_2 に分割されているとする。左側の M_1 には理論 T を、右側の M_2 にはゲージ化された理論 T/A を置く（図 3.4）^a。

このとき、ドメインウォール D が成す圏は $\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}}-A$ であり、 $(\mathcal{C}, \mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(A, A))$ -両側加群圏の構造を持つ。

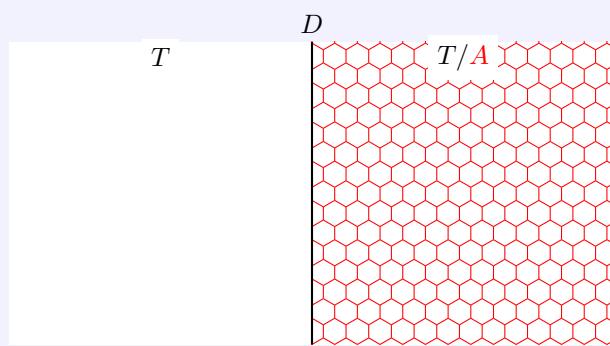


図 3.4: half-space gauging. ドメインウォール D には右から A が作用するので右 A -加群である。さらに、左からは T のトポロジカル演算子が、右からは T/A のトポロジカル演算子が作用するため、 $(\mathcal{C}, \mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(A, A))$ -両側加群でもある。

^a この設定を **half-space gauging** と呼ぶ。

【例 3.7.4】 \mathbf{Vec}_G のゲージ化

G を有限群とする。前小節と同様に、 \mathbf{Vec}_G の対象 Frobenius 代数として

$$\begin{aligned} A &:= \bigoplus_{g \in G} \mathbb{K}\{e_g\} \\ \mu: A \otimes A &\longrightarrow A, e_g \otimes e_h \longmapsto e_{gh} \\ v: 1 &\longrightarrow A, 1_G \longmapsto \sum_{g \in G} \delta_{1_G, g} e_g \\ \Delta: A &\longrightarrow A \otimes A, e_g \longmapsto \sum_{h \in G} e_h \otimes e_{h^{-1}g} \\ \epsilon: A &\longrightarrow 1, e_g \longmapsto \delta_{1_G, g} e_{1_G} \end{aligned}$$

を選ぶ。 \mathbf{Vec}_G の右 A -加群対象全体がなす圏 $\mathbf{Mod}_{\mathbf{Vec}_G}-A$ とはなんだろうか。

まず、 $\forall m \in \text{Ob}(\mathbf{Vec}_G)$ に対してある非負整数の族 $\{N_g\}_{g \in G}$ が存在して $m = \bigoplus_{g \in G} N_g \mathbb{K}\{e_g\}$ と書くことができる。 m が右 A -加群対象であるためには、(associativity), (unitarity) を充たす \mathbf{Vec}_G の射 $\rho \in \text{Hom}_{\mathbf{Vec}_G}(m \otimes A, m)$ を見つけなくてはいけない。【例??】から、 \mathbf{Vec}_G のテンソル積は

$$m \otimes A = \bigoplus_{g \in G} \bigoplus_{h \in G} N_h \mathbb{K}e_h \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}e_{h^{-1}g}$$

と書けるから、結局 $\forall g, h \in G$ に対して

$$\rho_{g,h}: N_g \mathbb{K}e_g \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}e_h \longrightarrow N_{gh} \mathbb{K}e_{gh}$$

を指定すれば ρ が定まる. (**associativity**) より $\forall g, h, k \in G$ に対して

$$\rho_{gh,k} \circ \rho_{g,h} = \rho_{g,hk}$$

が, (**unitarity**) より $\forall g \in G$ に対して

$$\rho_{g,1_G} = \text{Id}$$

がわかる. よって $\forall g, h \in G$ に対して

$$\rho_{g,h} \circ \rho_{gh,h^{-1}} = \rho_{gh,1_G} = \text{Id}$$

が言える. ここから

$$N_g = N_{1_G} =: N\rho_{g,h} = \rho_{1_G,gh} \circ \rho_{1_G,g}^{-1}$$

が分かる. i.e. $m = NA$ であり, ρ は線型同型写像の族 $\{\rho_{1_G,g}\}_{g \in G}$ によって完全に決定できる. ところが, $\forall (NA, \{\rho_{1_G,g}\}_{g \in G}) \in \text{Ob}(\mathbf{Mod}_{\mathbf{Vec}_G}-A)$ は明らかに $(NA, \{\text{Id}\}_{g \in G})$ と右 A -加群対象として同型である. よって $(NA, \{\text{Id}\}_{g \in G})$ のみ考えれば良い.

次に, 射 $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Mod}_{\mathbf{Vec}_G}-A}(NA, N'A)$ を考える. 右作用が自明なのでこれはただの線型写像である. 以上の考察から, まず $\mathbf{Mod}_{\mathbf{Vec}_G}-A \cong \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ が分かった.

同様の考察から, $(NA, \{\lambda_{g,1_G}\}_{g \in G}, \{\rho_{1_G,g}\}_{g \in G}) \in \text{Ob}(\mathbf{Bimod}_{\mathbf{Vec}_G}(A, A))$ と見做すことができる. 条件 (**bimod-3**) から $\forall g, h \in G$ に対して

$$\lambda_{g,1_G} \circ \lambda_{h,1_G} = x_{gh,1_G}$$

がわかるが, $\lambda_{g,1_G} \in \text{GL}(NA)$ であることから左作用のデータ $\{\lambda_{g,1_G}\}_{g \in G}$ は群 G の表現を与えることが分かる. $\mathbf{Bimod}_{\mathbf{Vec}_G}(A, A)$ の射は明らかに G -同変写像であるから, $\mathbf{Bimod}_{\mathbf{Vec}_G}(A, A) \cong \mathbf{Rep}(G)$ が分かった.

【例 3.7.5】 $\mathbf{Rep}(G)$ のゲージ化

G を有限群とする. $\mathbf{Rep}(G)$ の対象 Frobenius 代数として G の正則表現 (regular representation)

$$A: G \longrightarrow \text{GL} \left(\bigoplus_{g \in G} \mathbb{K}\widehat{g} \right), \quad g \longmapsto (\widehat{h} \longmapsto \widehat{gh})$$

をとってくる. 代数対象の乗法は G -同変写像

$$\mu: \left(\bigoplus_{g \in G} \mathbb{K}\widehat{g} \right) \otimes \left(\bigoplus_{g \in G} \mathbb{K}\widehat{g} \right) \longrightarrow \bigoplus_{g \in G} \mathbb{K}\widehat{g}, \quad \widehat{g} \otimes \widehat{g} \longmapsto \delta_{g,h}\widehat{g}$$

で, unit は G -同変写像

$$v: 1 \longrightarrow \bigoplus_{g \in G} \mathbb{K}\widehat{g}, \quad 1 \longmapsto \sum_{g \in G} \widehat{g}$$

である. A による $\mathbf{Rep}(G)$ のゲージ化は \mathbf{Vec}_G になり, 【例 3.7.4】の逆操作を与える [?].

3.7.4 等価なゲージ化

時空多様体 $M^{(2)}$ のメッシュが同一だとすると、異なる対称 Frobenius 代数 $(A, \mu, v, \Delta, \epsilon), (A', \mu', v', \Delta', \epsilon')$ はいつ同じゲージ化された理論 $T/A \cong T/A'$ を与えるのだろうか？この \cong は、ゲージ化された理論の持つ対称性およびドメインウォールが等価であることを意味する。

定義 Ph 3.2: 等価なゲージ化

$T/A \cong T/A'$ であるとは、左 \mathcal{C} -加群圏の同値 $\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-A} \cong \mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-A'}$ が成り立つこと、i.e. A と A' が森田同値であることを言う。

定理 3.8: 加群圏の特徴付け

- 有限な多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$
- 既約かつ完全な左 \mathcal{C} -加群圏 $(\mathcal{M}, \blacktriangleright, \alpha, \lambda)$
- 勝手な \mathcal{M} の対象 $m \in \text{Ob}(\mathcal{M})$

を与える。このとき \mathcal{M} の internal hom functor $\multimap: \mathcal{M}^{\text{op}} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$ について $m \multimap m$ は \mathcal{C} における代数対象になり、関手

$$\begin{aligned} F: \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-}(m \multimap m), \\ n &\longmapsto m \multimap n \end{aligned}$$

は左 \mathcal{C} -加群圏同値である。

証明 [?, THEOREM7.10.1, p.150] ■

定理 3.8 より、ゲージ化の同値類は既約かつ完全な左 \mathcal{C} -加群圏 $(\mathcal{M}, \blacktriangleright, \alpha, \lambda)^{*51}$ と一対一対応する。このことから、ゲージ化された理論を T/A と書く代わりに T/\mathcal{M} と書く。さらに命題 3.2 より、その \mathcal{M} は元の理論 T とゲージ化された理論 T/\mathcal{M} の間のドメインウォールを記述する。

3.7.5 再ゲージ化

既約かつ完全な左 \mathcal{C} -加群圏 $(\mathcal{M}, \blacktriangleright, \alpha, \lambda)$ を 1 つ固定する。命題 3.1, 3.2 より定理 3.8 から、ある対称 Frobenius 代数対象 $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が存在して左 \mathcal{C} -加群圏の同値 $\mathcal{M} \cong \mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-A}$ が成り立ち、ゲージ化された理論 T/\mathcal{M} は $\mathcal{C}' := \mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(A, A)$ の対称性を持ち、 \mathcal{M} は自然に $(\mathcal{C}, \mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(A, A))$ -両側加群圏の構造を持つ。

既約かつ完全な左 $\mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(A, A)$ -加群圏 $(\mathcal{M}', \blacktriangleright', \alpha', \lambda')'$ をとってきてこの操作を繰り返すことは、 $(\mathcal{C}, \mathcal{C}'')$ -両側加群圏の構造を持つ Deligne のテンソル積 $\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}'} \mathcal{M}'$ によって $T/(\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}'} \mathcal{M}')$ とゲージ化することに等しい。特に、 \mathcal{M} の反対加群^{*52} \mathcal{M}_{op} を加群積の順序を逆にすることで定義する^{*53}と、 \mathcal{M}_{op}

^{*51} [?, p.152]

^{*52} 反対圏は op を上付きに書くことで区別する。

^{*53} より正確には、さらに left/right actor の逆写像をとる

は $(\mathcal{C}', \mathcal{C})$ -両側加群圏となり、 $\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}'} \mathcal{M}_{\text{op}}$ によるゲージ化は対称性を元に戻す。i.e. 定義 3.2 の意味で $T \cong T/\mathcal{M}/\mathcal{M}_{\text{op}}$ が成り立つ。

3.7.6 ゲージ化で移り合える対称性

命題 ph 3.3: ゲージ化で互いに移り合える対称性

$(1+1)$ -次元の理論の対称性 $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ が適切なゲージ化によって互いに移り合える必要十分条件は、その Drinfeld センターが一致することである。

3.8 Turaev-Viro 理論

前節で見てきたように、 $1+1$ 次元における有限対称性とは ユニタリフュージョン圏のことであった。一方で、Turaev-Viro 理論とは、与えられた球状フュージョン圏 \mathcal{C} のデータを素材にして構成される $2+1$ 次元の TQFT である [?]. $2+1$ 次元の symmetry TFT として Turaev-Viro 理論を採用することにより、境界に \mathcal{C} の対称性を持つ理論を作ることができる [?].

この節では [?], [?], [?] に従い Turaev-Viro 理論の構成を行う。

3.8.1 球状圏に関する準備

以下では、代数閉体 \mathbb{K} 上の球状フュージョン圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{coev}^L, \text{ev}^L, \text{coev}^R, \text{ev}^R)$ と、その旋回構造 p を 1 つ固定する。 \mathcal{C} の単純対象の同型類が成す有限集合を $\text{Simp}(\mathcal{C})$ と書く。

補題 3.1: 単純対象の Hom

半単純かつ有限な任意の \mathbb{K} -線形アーベル圏 \mathcal{C} において、以下が成り立つ：

- (1) $\forall a, b \in \text{Simp}(\mathcal{C})$ に対して

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b) = \delta_{ab}\mathbb{K}$$

が成り立つ。

- (2) $\forall a \in \text{Simp}(\mathcal{C})$ および $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して、以下の条件を充たす射の族

$$\{p_{\alpha}: x \rightarrow a, i_{\alpha}: a \rightarrow x\}_{\alpha \in \Lambda}$$

が存在する：

(part-1) $|\Lambda| = \dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, a) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, x)$

(part-2) $\{p_{\alpha}: x \rightarrow a\}_{\alpha \in \Lambda}$ は \mathbb{K} -ベクトル空間 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, a)$ の基底である。

(part-3) $\{i_{\alpha}: a \rightarrow x\}_{\alpha \in \Lambda}$ は \mathbb{K} -ベクトル空間 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, x)$ の基底である。

(part-4) $\forall \alpha, \beta \in \Lambda$ に対して、 $p_{\alpha} \circ i_{\beta} = \delta_{\alpha\beta} \text{Id}_a$

証明 (1) アーベル圏の定義により, $\forall \varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b) \setminus \{0\}$ は核 $\ker \varphi: \text{Ker } \varphi \hookrightarrow a$ および余核 $\text{coker } \varphi: b \twoheadrightarrow \text{Coker } \varphi$ を持つ. いま a は単純だから, モノ射 $\ker \varphi$ は零射である. よって φ がモノ射だと分かった. 一方で, 再度アーベル圏の定義によりモノ射 $\text{ker}(\text{coker } \varphi): \text{Ker}(\text{coker } \varphi) \hookrightarrow b$ が存在する^{*54}. b もまた単純でかつ $\varphi \neq 0$ より, モノ射 $\text{ker}(\text{coker } \varphi)$ は同型射であり, 従って $\text{coker } \varphi = 0$, i.e. φ はエピ射だと分かった.

以上の考察から $\forall \varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b)$ は零射であるか同型射であるかのどちらかである^{*55}から, $a \neq b$ ならば $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b) = 0$ である. $a = b$ のとき, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b) := \text{End}_{\mathcal{C}}(a)$ は射の合成に関して体 \mathbb{K} 上の可除代数 (division algebra) を成す. ところでフュージョン圏 \mathcal{C} は有限なので $\text{End}_{\mathcal{C}}(a)$ は \mathbb{K} -ベクトル空間として有限次元であり, かつ仮定より \mathbb{K} は代数閉体であるから, $\text{End}_{\mathcal{C}}(a) = \mathbb{K}$ しかありえない.

(2) \mathcal{C} は半単純なので, x は有限の直和分解

$$x \cong \bigoplus_{b \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_b b$$

を持つ. 直和を特徴付ける射の族^{*56}を $\{i_{\beta}^{(b)}: b \longrightarrow x\}_{b \in \text{Simp}(\mathcal{C}), 1 \leq \beta \leq N_b}$ と書こう.

ここで $\forall a \in \text{Simp}(\mathcal{C})$ を 1 つ固定し, $\Lambda := \{1, \dots, N_a\}$ とおく. このとき直和の普遍性により, $\forall \alpha \in \Lambda$ に対して射 $p_{\alpha}^{(a)}: x \longrightarrow a$ が一意的に存在して以下の図式を可換にする^{*57}:

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{i_{\beta}^{(a)}} & x \\ & \searrow \delta_{\alpha\beta} \text{Id}_a & \downarrow p_{\alpha}^{(a)} \\ & & a \end{array}$$

i.e. $p_{\alpha} := p_{\alpha}^{(a)}$, $i_{\alpha} := i_{\alpha}^{(a)}$ と選ぶことで (part-4) が充たされる. さらに, 極限・余極限と Hom の交換および (1) から \mathbb{K} -ベクトル空間としての同型

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, a) &\cong \bigoplus_{b \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_b \text{Hom}_{\mathcal{C}}(b, a) = \mathbb{K}^{\oplus N_a}, \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, x) &\cong \bigoplus_{b \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_b \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b) = \mathbb{K}^{\oplus N_a} \end{aligned}$$

があるので (part-1)-(part-3) も充たされる. ■

\mathbb{K} を代数閉体とするとき, アーベル圏の構造を使わずに \mathbb{K} -線形な加法圏における半単純性を特徴付ける方法が存在する [?, p.6].

*54 この 2 つ組 $(\text{Ker}(\text{coker } \varphi), \text{ker}(\text{coker } \varphi))$ を射 φ の像と呼び, $(\text{Im } \varphi, \text{im } \varphi)$ と書くのだった.

*55 これを Schur の補題と呼ぶ.

*56 つまり, 余錐のデータである.

*57 より正確には, $\forall \alpha \in \Lambda$ を 1 つ固定したとき, 組 $(a, \{\delta_{\alpha\beta} \delta_{ab} \text{Id}_a: b \longrightarrow a\}_{b \in \text{Simp}(\mathcal{C}), 1 \leq \beta \leq N_b})$ が $\prod_{b \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_b$ 個の頂点だけから構成される図式 (i.e. 直和の図式) の余錐であることを正在している.

定義 3.20: Müger 半単純

\mathbb{K} -線形な加法圏 \mathcal{C} が Müger 半単純であるとは,

- (Muger1) 有限余積が常に存在する
- (Muger2) 任意の幂等射が分裂する (幂等完全; idempotent complete)
- (Muger3) 対象の部分集合 $\text{Simp}(\mathcal{C}) \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$ が存在して以下を充たす:
 - (1) $\forall a, b \in \text{Simp}(\mathcal{C})$ に対して

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b) = \delta_{ab}\mathbb{K}$$

- (2) $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して, \mathbb{K} -線型写像

$$m_{x,y}: \bigoplus_{a \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, a) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y), \quad (3.8.1)$$

$$\sum_{a \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \varphi_a \otimes_{\mathbb{K}} \psi_a \longmapsto \sum_{a \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \psi_a \circ \varphi_a$$

は自然な \mathbb{K} -ベクトル空間の同型写像である.

半単純性の定義として 3.20 を採用すると, 任意の対象が単純対象の直和に分解することが証明できる [?, Proposition 28, p.7]. アーベル圏における半単純性の定義は Müger 半単純と等価でない点に注意しよう. 具体的には, アーベル圏における半単純性の定義から (3.8.1) を示すことはできない. 本資料では (3.8.1) を認めることにする.



以下では, 混乱防止のため厳密なモノイダル圏 $\text{Vec}_{\mathbb{K}}$ におけるテンソル積を $\otimes_{\mathbb{K}}$ と書き, $\forall x \in \text{Ob}(\text{Vec}_{\mathbb{K}})$ における恒等射を 1_x と書くこととする.

補題 3.2: Moore-Seiberg の欠片

$\forall x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して, 以下の自然同型が存在する:

(Rotation isomorphism)

$$Z: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, x_n \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n-1})$$

(Gluing isomorphism)

$$\begin{aligned} G: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes z) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, z^* \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) \\ \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_n), \\ \varphi \otimes \psi \longmapsto \text{ev}_z^L \circ (\varphi \otimes \psi) \end{aligned}$$

証明 (1) 旋回構造 p の存在と補題??より,

$$\begin{aligned} Z: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n) \\ \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{Id}_1, \text{Id}_{x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n-1}} \otimes p_{x_n})} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, x_1 \otimes \cdots \otimes x_n^{**}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\alpha_{1,x_n^*,x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n-1}}^{-1}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x_n^*, x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n-1}) \\ & \xrightarrow{\beta_{x_n, 1, x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n-1}}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, x_n \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n-1}) \end{aligned}$$

と自然同型が構成できる。

- (2) \mathcal{C} は定義から半単純なので, $z = \bigoplus_{a \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_a a$ と書くことができる。さらに補題??により $(-)^* : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ は反変関手だが、左随伴関手を持つので命題??より余極限 \bigoplus と交換し、

$$z^* = \bigoplus_{a \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_a a^*$$

と書ける。よって余極限と Hom の交換から自然同型

$$\begin{aligned} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes z) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, z^* \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) \\ & \cong \bigoplus_{a \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes a) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, a^* \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) \end{aligned}$$

が従う。さらに旋回構造 p と補題??、Müger 半単純の自然同型 (3.8.1)，および余極限と Hom の交換などを使うと自然同型

$$\begin{aligned} & \bigoplus_{a \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes a) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, a^* \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) \\ & \cong \bigoplus_{a \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x_n^* \otimes \cdots \otimes x_1^*, a) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a^{**}, y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) \\ & \cong \bigoplus_{a \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x_n^* \otimes \cdots \otimes x_1^*, a) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) \\ & \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x_n^* \otimes \cdots \otimes x_1^*, y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) \\ & \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) \end{aligned}$$

が分かる。

補題 3.2 のデータは、本質的に Moore-Seiberg による RCFT の公理のデータの一部分である [?, THEOREM5.3.8., p.111]。関手

!

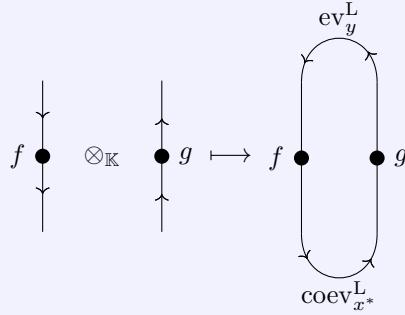
$$\begin{aligned} \langle - \rangle : \mathcal{C}^{\times n} & \longrightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}, \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{3.8.2}$$

は共形ブロックのデータを与える。以下では関手 (3.8.2) に準じた略記 $\langle x_1, \dots, x_n \rangle := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)$ を行う。

補題 3.3: 非退化な双線形形式

$\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ について、双線形形式

$$\omega: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x^*, y^*) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \longrightarrow \mathbb{K}$$



は非退化であり、自然同型

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)^* \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x^*, y^*)$$

を誘導する。

証明 $x = 1$ の場合に示す。圏 \mathcal{C} はフュージョン圏なので、補題??より $1 \in \text{Simp}(\mathcal{C})$ である。 \mathcal{C} は半単純だから、 $y = \bigoplus_{a \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_a a$ と書ける。このとき、余極限と Hom の交換および補題 3.1-(1) より

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, y) &\cong \bigoplus_{a \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_a \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, a) = \mathbb{K}^{\oplus N_1}, \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, 1) &\cong \bigoplus_{a \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_a \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, 1) = \mathbb{K}^{\oplus N_1} \end{aligned}$$

なので、補題 3.1-(2) より $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, y), \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, 1)$ の基底 $\{p_j: 1 \rightarrow y\}_{1 \leq j \leq N_1}, \{q_j: y \rightarrow 1\}_{1 \leq j \leq N_1}$ であって $q_i \circ p_j = \delta_{ij} \text{Id}_1 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, 1) = \mathbb{K}$ を充たすものが存在する^{*58}。ここで、 \mathbb{K} -線形写像

$$\alpha: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, y^*) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, 1), \psi \mapsto \text{ev}_{y^*}^L \circ (\text{Id}_y \otimes \psi)$$

は逆写像

$$\beta: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, 1) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, y^*), \varphi \mapsto (\text{Id}_{y^*} \otimes \varphi) \circ \text{coev}_{y^*}^L$$

を持つので \mathbb{K} -ベクトル空間の同型写像であり、よって $\{\beta(q_j): 1 \rightarrow y^*\}_{1 \leq j \leq N_1}$ は $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, y^*)$ の基底を成す。そして $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, y^*) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, y)$ の基底 $\{\beta(q_i) \otimes_{\mathbb{K}} p_j\}_{1 \leq i, j \leq N_1}$ に関する ω の表現行列は

$$\omega(\beta(q_i) \otimes_{\mathbb{K}} p_j) = \text{ev}_y^L \circ ((\text{Id}_{y^*} \otimes q_i) \otimes p_j) \circ (\text{coev}_{y^*}^L \otimes \text{Id}_1) = q_i \circ p_j = \delta_{ij}$$

であるから、 ω は非退化である。 ■

^{*58} 要するに双対基底をとっている。なお、ここで圏 \mathcal{C} の有限性を使っている。

以下, $\varphi \in \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ のストリング図式を書く際には

$$\begin{array}{c} \cdots \\ | \\ \varphi \\ | \\ \cdots \\ x_2 \leftarrow \xrightarrow{\quad} \end{array} := \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & x_n \\ \swarrow & \searrow & & & & & \end{array}$$

のような略記がある. さらに, 有限次元 \mathbb{K} -ベクトル空間 $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ の基底を $\{\varphi_\alpha\}$ と書くと, 補題 3.3 により, その ω に関する双対基底 $\{\varphi^\alpha\}$ は同一次元の \mathbb{K} -ベクトル空間 $\langle x_n^*, \dots, x_1^* \rangle$ の基底をなす. このことから, 以下のような略記を導入する:

$$\begin{array}{ccccc} \cdots & | & \varphi & | & \cdots \\ | & & \bullet & & | \\ x_1 & \leftarrow \xrightarrow{\quad} & x_n & \leftarrow \xrightarrow{\quad} & x_n^* \\ | & & | & & | \\ x_n^* & \leftarrow \xrightarrow{\quad} & x_1^* & \leftarrow \xrightarrow{\quad} & x_1 \end{array} := \sum_{\alpha} \begin{array}{ccccc} \cdots & | & \varphi_\alpha & | & \cdots \\ | & & \bullet & & | \\ x_1 & \leftarrow \xrightarrow{\quad} & x_n & \leftarrow \xrightarrow{\quad} & x_n^* \\ | & & | & & | \\ x_n^* & \leftarrow \xrightarrow{\quad} & x_1^* & \leftarrow \xrightarrow{\quad} & x_1 \end{array} \otimes_{\mathbb{K}} \begin{array}{ccccc} \cdots & | & \varphi^\alpha & | & \cdots \\ | & & \bullet & & | \\ x_1 & \leftarrow \xrightarrow{\quad} & x_n & \leftarrow \xrightarrow{\quad} & x_n^* \\ | & & | & & | \\ x_n^* & \leftarrow \xrightarrow{\quad} & x_1^* & \leftarrow \xrightarrow{\quad} & x_1 \end{array}$$

さらに, $\forall a \in \text{Simp}(\mathcal{C}), \forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が与えられたときに, 補題 3.1-(2) の射の族

$$\{p_\alpha: x \longrightarrow a, i_\alpha: a \longrightarrow x\}_{\alpha \in \Lambda}$$

を用いて構成される射

$$\sum_{\alpha \in \Lambda} p_\alpha \otimes_{\mathbb{K}} i_\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, a) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, x)$$

を次のような図式で表現する:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} a \\ \downarrow \\ x \\ \uparrow \\ a \end{array} & \otimes_{\mathbb{K}} & \begin{array}{c} x \\ \downarrow \\ a \\ \uparrow \\ a \end{array} \\ & & \end{array} := \sum_{\alpha \in \Lambda} \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} a \\ \downarrow \\ p_\alpha \bullet \\ x \\ \uparrow \\ a \end{array} & \otimes_{\mathbb{K}} & \begin{array}{c} x \\ \downarrow \\ i_\alpha \\ a \\ \uparrow \\ a \end{array} \end{array}$$

補題 3.4: 技術的な補題 1

$\forall a \in \text{Simp}(\mathcal{C}), \forall x, x_1, \dots, x_n \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して以下が成り立つ:

(1)

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} a \\ \downarrow \\ x \\ \uparrow \\ a \end{array} & = \dim_{\mathbb{K}} (\text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, x)) & \begin{array}{c} a \\ \downarrow \\ a \end{array} \end{array}$$

(2)

$$\sum_{a \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \begin{array}{c} x \\ \nearrow \\ a \\ \searrow \\ x \end{array} = \begin{array}{c} x \\ \nearrow \\ x \end{array}$$

(3)

$$\begin{array}{c} x \\ \nearrow \\ a \\ \searrow \\ x \end{array} = \begin{array}{c} x \\ \nearrow \\ \bullet \end{array}, \quad \begin{array}{c} \bullet \\ \nearrow \\ x \\ \searrow \\ x \end{array} = \begin{array}{c} \bullet \\ \nearrow \\ x \end{array}$$

(4)

$$\begin{array}{c} a \\ \nearrow \\ x \end{array} \otimes_{\mathbb{K}} \begin{array}{c} x \\ \nearrow \\ a \end{array} = \dim_p(a) \begin{array}{c} a \\ \nearrow \\ x \\ \searrow \\ x \end{array} \otimes_{\mathbb{K}} \begin{array}{c} x \\ \nearrow \\ a \end{array}$$

(5) 非退化な双線形形式 $\omega: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, x^*) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, x) \rightarrow \mathbb{K}$ について,

$$\Omega: \mathbb{K} \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, x) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, x^*)$$

$$1_{\mathbb{K}} \mapsto \begin{array}{c} \nearrow \\ \text{---} \\ \searrow \end{array} \otimes_{\mathbb{K}} \begin{array}{c} \nearrow \\ \text{---} \\ \searrow \end{array}$$

で定義される双線形形式は、圈 $\text{Vec}_{\mathbb{K}}$ において (zig-zag equation) を充たす：

$$(\mathbb{1}_{x^*} \otimes_{\mathbb{K}} \omega) \circ (\Omega \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{1}_x) = \mathbb{1}_{x^*}, \\ (\omega \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{1}_x) \circ (\mathbb{1}_x \otimes_{\mathbb{K}} \Omega) = \mathbb{1}_x$$

さらに、 $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ の基底 $\{\varphi_{\bullet}\}$ の取り方によらず

$$\Omega(1_{\mathbb{K}}) = \begin{array}{c} \cdots \\ | \\ \varphi_{\bullet} \\ | \\ \cdots \end{array} \otimes_{\mathbb{K}} \begin{array}{c} \cdots \\ | \\ \varphi_{\bullet} \\ | \\ \cdots \end{array} x_2 \leftarrow \begin{array}{c} \varphi_{\bullet} \\ \circ \\ \varphi_{\bullet} \end{array} \rightarrow x_1 \leftarrow x_n \rightarrow \begin{array}{c} \varphi_{\bullet} \\ \circ \\ \varphi_{\bullet} \end{array} \rightarrow x_2^* \leftarrow x_1^*$$

が成り立つ [?, Lemma4.8, p.82].

証明 補題 3.1-(2) の射の族

$$\{p_\alpha : x \rightarrow a, i_\alpha : a \rightarrow x\}_{\alpha \in \Lambda}$$

を 1 つ固定する.

(1) 補題 3.1-(2) より

$$\begin{array}{c} a \\ \downarrow \\ x \\ \uparrow \\ a \end{array} := \sum_{\alpha \in \Lambda} \begin{array}{c} a \\ \downarrow \\ x \\ \bullet \\ i_\alpha \\ \uparrow \\ a \end{array} = \sum_{\alpha \in \Lambda} \begin{array}{c} a \\ \downarrow \\ x \\ p_\alpha \\ \bullet \\ \uparrow \\ a \end{array} = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, x)) \text{Id}_a$$

(2) $m := \sum_{\beta \in \Lambda} i_\beta \circ p_\beta \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$ とおく. このとき補題 3.1-(2) より $\forall \alpha \in \Lambda$ に対して

$$m \circ i_\alpha = i_\alpha$$

が成り立つ. i.e. 以下の図式が可換になる:

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{i_\alpha} & x \\ & \searrow i_\alpha & \downarrow m \\ & & x \end{array}$$

一方で, $\text{Id}_x \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$ もまた同じ図式を可換にする:

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{i_\alpha} & x \\ & \searrow i_\alpha & \downarrow \text{Id}_x \\ & & x \end{array}$$

然るに直和の普遍性より赤色の射は一意であるから, $m = \text{Id}_x$ である.

(3) 補題 3.1-(1) より $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, a) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, 1) = \delta_{a, 1}\mathbb{K}$ なので, (2) において

$$\begin{array}{c} x \\ \downarrow \\ \bullet \\ \uparrow \\ x \end{array} = \sum_{a \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \begin{array}{c} x \\ \downarrow \\ \bullet \\ \uparrow \\ a \\ \downarrow \\ x \\ \uparrow \\ a \end{array} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, a) = \begin{array}{c} x \\ \downarrow \\ \bullet \\ \uparrow \\ x \end{array}$$

$$\begin{array}{c} x \\ \downarrow \\ \bullet \\ \uparrow \\ x \end{array} = \sum_{a \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \begin{array}{c} x \\ \downarrow \\ \bullet \\ \uparrow \\ a \\ \downarrow \\ x \\ \uparrow \\ a \end{array} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, 1) = \begin{array}{c} x \\ \downarrow \\ \bullet \\ \uparrow \\ x \end{array}$$

と計算できる。

(4) 補題 3.1-(2) の射の族

$$\{P_\alpha : x \otimes a^* \rightarrow 1, I_\alpha : 1 \rightarrow x \otimes a^*\}_{\alpha \in \Lambda}$$

を 1 つとり,

$$\begin{array}{ccc} \text{Diagram with blue semi-circle} & \otimes_{\mathbb{K}} & \begin{array}{c} x \\ \downarrow \\ a^* \end{array} \end{array} := \sum_{\alpha \in \Lambda} P_\alpha \otimes_{\mathbb{K}} I_\alpha$$

とおく。このとき

$$\tilde{p}_\alpha := \dim_p(a) \quad \text{Diagram with black dot and curved arrows} \quad , \quad \tilde{i}_\alpha := \quad \text{Diagram with black dot and curved arrows}$$

と定義した射の族

$$\{\tilde{p}_\alpha : x \rightarrow a, \tilde{i}_\alpha : a \rightarrow x\}_{\alpha \in \Lambda}$$

が補題 3.1-(2) の条件 **(part-4)** を充たすことを示せばよい。実際、 $\forall \alpha, \beta \in \Lambda$ について $\tilde{p}_\alpha \circ \tilde{i}_\beta \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, a) = \mathbb{K}$ なので、ある $A_{\alpha\beta} \in \mathbb{K}$ が存在して $\tilde{p}_\alpha \circ \tilde{i}_\beta = A_{\alpha\beta} \text{Id}_a$ と書ける。両辺の量子トレースをとることで

$$\begin{aligned} \dim_p(a) A_{\alpha\beta} &= \dim_p(a) \quad \text{Diagram with two black dots and curved arrows} \\ &= \dim_p(a) \quad \text{Diagram with one black dot and curved arrows} \quad \because \text{(zig-zag equation)} \\ &= \dim_p(a) P_\alpha \circ I_\beta \\ &= \dim_p(a) \delta_{\alpha\beta} \quad \because \text{(part-4)} \end{aligned}$$

が分かった。i.e. $A_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ である。

(5) (3) より、 $\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, x)$ に対して

$$(1 \otimes_{\mathbb{K}} \omega) \circ (\Omega \otimes_{\mathbb{K}} 1)(1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} f) = (1 \otimes_{\mathbb{K}} \omega)(\Omega(1_{\mathbb{K}}) \otimes_{\mathbb{K}} f)$$

$$= \text{Diagram with red semi-circle} \quad \text{Diagram with red semi-circle and curved arrow} \quad f$$

$$\begin{array}{c}
 \uparrow \\
 = \text{ (red curved arrow)} \\
 \downarrow \\
 \bullet f \\
 = f
 \end{array}$$

同様に, $\forall g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, x^*)$ に対して

$$(\omega \otimes_{\mathbb{K}} 1_x) \circ (1_x \otimes_{\mathbb{K}} \Omega)(g \otimes_{\mathbb{K}} 1_{\mathbb{K}}) = (\omega \otimes_{\mathbb{K}} 1_x)(g \otimes_{\mathbb{K}} \Omega(1_{\mathbb{K}}))$$

$$\begin{array}{c}
 = g \bullet \text{ (red curved arrow)} \quad \text{ (red curved arrow)} \\
 \downarrow
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 = g \bullet \text{ (red curved arrow)} \quad \text{ (red curved arrow)} \\
 \downarrow
 \end{array}$$

$$= g$$

が成り立つので **(zig-zag equation)** が示された.

ここで, $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ の勝手な基底 $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ および ω に関する $\langle x_1^*, \dots, x_1^* \rangle$ の双対基底 $\{\varphi^\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ を 1 つとる. そして $\omega^\alpha{}_\beta := \omega(\varphi^\alpha \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_\beta)$, $\Omega^\alpha{}_\beta := ((\varphi_\alpha)^* \otimes_{\mathbb{K}} (\varphi^\beta)^*)(\Omega(1_{\mathbb{K}}))$ とおく. すると

$$\begin{aligned}
 \omega^\alpha{}_\beta \Omega^\beta{}_\gamma &= \omega(\varphi^\alpha \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_\beta)((\varphi_\beta)^* \otimes_{\mathbb{K}} (\varphi^\gamma)^*)(\Omega(1_{\mathbb{K}})) \\
 &= \omega((\varphi^\alpha \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_\beta)((\varphi_\beta)^* \otimes_{\mathbb{K}} (\varphi^\gamma)^*)(\Omega(1_{\mathbb{K}}))) \\
 &= \omega((\varphi^\alpha \otimes_{\mathbb{K}} 1_{\langle x_1, \dots, x_n \rangle}) \circ (1_{\langle x_1, \dots, x_n \rangle} \otimes_{\mathbb{K}} (\varphi^\gamma)^*) \circ \Omega(1_{\mathbb{K}})) \\
 &= (\varphi^\gamma)^*((\omega \otimes_{\mathbb{K}} 1_{\langle x_1^*, \dots, x_1^* \rangle}) \circ (1_{\langle x_1^*, \dots, x_1^* \rangle} \otimes_{\mathbb{K}} \Omega)(\varphi^\alpha \otimes_{\mathbb{K}} 1_{\mathbb{K}})) \\
 &= (\varphi^\gamma)^*(\varphi^\alpha) \quad \because \text{(zig-zag equation)} \\
 &= \delta_\gamma^\alpha
 \end{aligned}$$

であるから, 双対基底の定義より $\omega^\alpha{}_\beta = \delta_\beta^\alpha$ であることに注意すると^{*59}

$$\begin{aligned}
 \Omega(1_{\mathbb{K}}) &= \Omega^\alpha{}_\beta \varphi_\alpha \otimes_{\mathbb{K}} \varphi^\beta \\
 &= [\omega^{-1}]^\alpha{}_\beta \varphi_\alpha \otimes_{\mathbb{K}} \varphi^\beta \\
 &= \varphi_\alpha \otimes_{\mathbb{K}} \varphi^\alpha
 \end{aligned}$$

が分かる.

■

^{*59} 双対基底でなくとも, $[\omega^\alpha{}_\beta]$ が可逆行列ならばこの構成が有効である.

補題 3.5: 技術的な補題 2

補題 3.3 の双線形形式 ω を用いる。

(1) $\forall a, b \in \text{Simp}(\mathcal{C}), \forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ および $\forall \varphi \in \langle b, x \rangle, \forall \psi \in \langle x^*, a^* \rangle$ に対して

$$\begin{array}{c} b \\ \downarrow \\ \varphi \end{array} \xrightarrow{x} \begin{array}{c} x^* \\ \downarrow \\ \psi \end{array} \xrightarrow{a^*} \begin{array}{c} a^* \\ \downarrow \\ \text{dim}_p(a) \end{array} = \delta_{a,b} \frac{\omega(\varphi, \psi)}{\text{dim}_p(a)} a \xrightarrow{a^*}$$

(2) $\forall x_1, \dots, x_n \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$\sum_{a \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \text{dim}_p(a) x_2 \xleftarrow{\vdots} \begin{array}{c} \varphi \bullet \\ \downarrow \\ x_1 \end{array} \xrightarrow{\text{ev}_a^L} \begin{array}{c} x_n^* \\ \downarrow \\ x_2^* \end{array} = \begin{array}{c} x_1 x_2 \dots x_n x_n^* x_2^* x_1^* \\ \vdots \end{array}$$

(3)

$$\begin{array}{c} \varphi \bullet \\ \downarrow \\ x_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \varphi \bullet \\ \downarrow \\ x_2 \end{array} = \begin{array}{c} \varphi \bullet \\ \downarrow \\ x_1 \end{array} \quad \vdots$$

証明 (1) $a \neq b$ ならば補題 3.1-(1) より両辺は 0 になる。 $a = b$ とする。左辺は $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, a \otimes a^*)$ の元だが、補題??の同型 $\alpha_{1,a,a}^{-1}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, a \otimes a^*) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, a) = \mathbb{K}$ から、ある定数 $A_a \in \mathbb{K}$ を用いて

$$\alpha_{1,a,a}^{-1} \left(\begin{array}{c} a \\ \downarrow \\ \varphi \end{array} \xrightarrow{x} \begin{array}{c} x^* \\ \downarrow \\ \psi \end{array} \xrightarrow{a^*} \begin{array}{c} a^* \\ \downarrow \\ \text{dim}_p(a) \end{array} \right) = A_a \quad \boxed{a}$$

と書ける。逆射 $\alpha_{1,a,a}$ を作用させることで

$$\begin{array}{c} a \\ \downarrow \\ \varphi \end{array} \xrightarrow{x} \begin{array}{c} x^* \\ \downarrow \\ \psi \end{array} \xrightarrow{a^*} \begin{array}{c} a^* \\ \downarrow \\ \text{dim}_p(a) \end{array} = A_a \quad \boxed{a}$$

が分かるので、両辺の量子トレースを取ることで

$$A_a = \frac{\omega(\varphi, \psi)}{\text{dim}_p(a)}$$

と求まる.

(2)

$$\begin{aligned}
 & \sum_{a \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \dim_p(a) x_2 \xleftarrow{\varphi_\bullet} x_n \xleftarrow{\text{ev}_a^L} \varphi_\bullet^* x_2^* \xleftarrow{x_2^*} x_n^* \\
 &= \sum_{a \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \dim_p(a) x_1 x_2 \dots x_n \xrightarrow{a} \Omega(1_{\mathbb{K}}) \xrightarrow{x_n^* \dots x_2^* x_1^*} \quad \because \text{補題 3.4-(5)}
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{a \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \dim_p(a^*) x_1 x_2 \dots x_n \xrightarrow{a} x_n^* \dots x_2^* x_1^*$$

$$= \sum_{a \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \dim_p(a^*) x_1 x_2 \dots x_n \xrightarrow{a^*} x_n^* \dots x_2^* x_1^* \quad \because \text{補題 3.4-(4)}$$

$$= x_1 x_2 \dots x_n x_n^* x_2^* x_1^* \quad \because \text{補題 3.4-(2)}$$

(3) (2) と補題 3.1-(1), および $\dim_p(1) = 1_{\mathbb{K}}$ より従う.

■

3.8.2 PL 多様体に関する準備

定義 3.21: PL 多様体

任意の座標変換が区分的線形であるようなアトラスを **PL 構造** (piecewise linear structure) と呼び、区分的線形構造を持つ位相多様体を **PL 多様体** (piecewise linear manifold) と呼ぶ。

2 つの单体的複体を取り、その幾何学的実現をそれぞれ $|K|$, $|L|$ と書く。

- 連続写像 $f: |K| \rightarrow |L|$ が **PL 写像**であるとは、 K, L の細分 K', L' が存在して、 f が K' の单体を L' の单体に写し、各单体への制限が線型写像になっていることを言う。
- 同相写像 $f: |K| \rightarrow |L|$ が **PL 同相写像**であるとは、それが PL 写像であることを言う。
- 勝手な单体 $A \in K$ に対し、

$$\begin{aligned}\mathbf{St}(A) &:= \{\sigma \in K \mid \sigma \cup A \in K\} \\ \mathbf{Lk}(A) &:= \{\sigma \in \mathbf{St}(A) \mid \sigma \cap A = \emptyset\}\end{aligned}$$

とおいてそれぞれ **星状複体** (star), **絡み複体** (link) と呼ぶ。

- 三角形分割された位相多様体 $(M, K, \psi: |K| \xrightarrow{\sim} M)$ が **組み合わせ多様体** (combinatorial manifold) であるとは、 $\forall v \in K_0$ に対して $|\text{Lk}(v)| \approx S^{\dim M - 1}$ が成り立つことを言う。また、位相多様体 M を組み合わせ多様体にする三角形分割 $(K, \psi: |K| \xrightarrow{\sim} M)$ のことを **組み合わせ三角形分割** と呼ぶ。

定理 3.9:

PL 多様体は組み合わせ三角形分割を持つ。逆に、組み合わせ多様体は PL 多様体である。

定理 3.9 により、以後 PL 多様体と組み合わせ多様体を区別しない。

星状同値

单体的複体 K, L が、互いに頂点を 1 つも共有していないとする。このとき、これらの **join** と呼ばれる单体的複体を

$$K * L := \{\sigma \cup \tau \mid \sigma \in K \text{かつ } \tau \in L\}$$

で定義する。また、 $\forall \sigma \in K$ に対して

$$\begin{aligned}\bar{\sigma} &:= \{\tau \subset \sigma\}, \\ \partial \bar{\sigma} &:= \{\tau \subsetneq \sigma\}\end{aligned}$$

と定義する。

单体的複体 K の**双星状移動** (bistellar move)^{*60} とは、次のような操作のことを言う：

^{*60} Pachner move とも言う。

(1) まず, $\sigma \in K$, $\tau \notin K$ であって $\text{Lk}_K(\sigma) = \partial\bar{\tau}$, $\text{St}_K(\sigma) = \bar{\sigma} * \bar{\tau}$ を充たすものを持ってくる.

(2) 次に,

$$K \longmapsto (K \setminus (\bar{\sigma} * \partial\bar{\tau})) \cup (\partial\bar{\sigma} * \bar{\tau})$$

なる置き換えをして新たな単体的複体を得る.

2つの PL 多様体 (M, K, ψ) , (N, L, φ) が双星状同値 (bistellar equivalent) であるとは, K に有限回の双星状移動を施すことによって L にすることができる.

定理 3.10: Pachner の定理

PL 同相 \iff 双星状同値

従って, PL 多様体の上に構成した量が位相不変量 (i.e. PL 不変量) であることを示すには, それが双星状移動に関して不变であることを示すだけで良い.

多面体分割

技術的な理由により, 多面体分割 (polytope decomposition) を導入する [?, p.11].

定義 3.22: 2-多面体

- 2次元コンパクト多様体 P が **2-多面体** (2-polyhedra) であるとは, P の三角形分割 $\psi: |K| \xrightarrow{\sim} P$ であって, 任意の 0 単体および 1 単体がある 2 単体の面になっているものが存在することを言う.
- 2-多面体の層状化 (stratification) とは, P に埋め込まれた無向グラフ $P^{(1)} \subset P$ であって $P \setminus \text{Int}(P) \subset P^{(1)}$ を充たすもののこと. 層状化された多面体 (stratified polyhedra) とは, 2-多面体 P とその層状化 $P^{(1)} \subset P$ の組み $(P, P^{(1)})$ のこと.

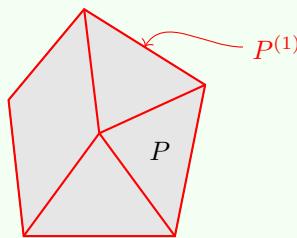


図 3.5: 層状化された多面体 $(P, P^{(1)})$

- 層状化された多面体 $(P, P^{(1)})$ において, $P \setminus P^{(1)}$ の連結成分の閉包を領域 (region) と呼ぶ. $(P, P^{(1)})$ の領域を全て集めた集合を $\text{Reg}(P)$ と書くこととする.
領域 $R \in \text{Reg}(P)$ が埋め込み可能であるとは, 全射 $p: \partial(\overline{P \setminus P^{(1)}}) \rightarrow P^{(1)}$ の制限 $p|_{\partial R}: \partial R \rightarrow P^{(1)}$ が单射であることを言う.
- 層状化された多面体 $(P, P^{(1)})$ において, 頂点 $v \in V(P^{(1)})$ の分岐とは, 連続曲線 $\gamma: [0, 1] \rightarrow P$ であって $\gamma(0) = v$ かつ $\gamma([0, 1]) \subset P \setminus P^{(1)}$ を充たすもののホモトピー類のこと. 頂点 v

の分岐の総数を、頂点 v の**配位数** (valence) と呼ぶ。

- 層状化された多面体 $(P, P^{(1)})$ において、辺 $e \in E(P^{(1)})$ の**分岐**とは、連続曲線 $\gamma: [0, 1] \rightarrow P$ であって $\gamma(0) \in \text{Int}(e)$ かつ $\gamma((0, 1]) \subset P \setminus P^{(1)}$ を充たすもののホモトピー類のこと。辺 e の分岐がなす集合を $P_e^{(1)}$ と書き、 $|P_e^{(1)}| \in \mathbb{N}$ を辺 e の**配位数** (valence) と呼ぶ。
- 層状化された多面体 $(P, P^{(1)})$ の**向き** (orientation) とは、位相空間 $P \setminus P^{(1)}$ の向きのこと。

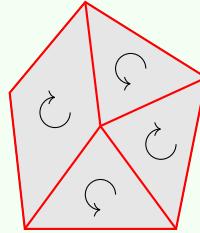


図 3.6: 層状化された多面体の向き

^a 位相多様体。境界はついていてもいなくても良い。

^b ここでは、位相空間としてのグラフを考えている。

定義 3.23: 境界グラフ

- 層状化された多面体 $(P, P^{(1)})$ の**境界** (boundary) とは、無向グラフ

$$\partial P := \{ e \in E(P^{(1)}) \mid \text{配位数 } 1 \}$$

のこと。 $(P, P^{(1)})$ の**向き**は、グラフ ∂P に（グラフとしての）向き $\mathcal{O}_{\partial P}$ を一意的に誘導する。

- 層状化された多面体 $(P, P^{(1)})$ が**円筒境界を持つ**とは、 $\forall v \in V(\partial P)$ に対して $e_v \in E(P^{(1)}) \setminus E(\partial P)$ がただ 1 つ存在し、以下を充たすことを言う：
 - e_v の端点のうち 1 つは v で、もう 1 つは v でない。
 - v の全ての分岐に隣接する

このとき、位相多様体 $\partial P \subset P$ は $\partial P \times [0, 1]$ と同相な近傍を持つ。

位相空間

$$\mathcal{B} := \{ (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 = 0 \} \cup \{ (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid x^1 = 0, x^3 > 0 \} \cup \{ (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 = 0, x^3 < 0 \}$$

を考える。図示すると次のようになる：

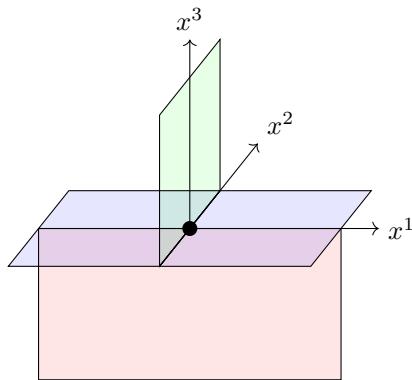


図 3.7: 位相空間 \mathcal{B}

定義 3.24: 2-多面体のクラス

- 層状化された多面体 $(P, P^{(1)})$ が正則 (regular) であるとは, P の部分空間 $\forall R \in \text{Reg}(P)$ が $R \approx D^2$ かつ埋め込み可能であることを言う.
- 層状化された多面体 $(P, P^{(1)})$ が特殊 (special) であるとは, 以下の条件を充たすことを言う :
 - $\forall p \in P$ に対してある開近傍 $p \in U \subset P$ および開部分集合 $V \subset \mathcal{B}$ が存在し, $U \approx V$ となる.
 - P の各連結成分には, (1) の同相写像で \mathcal{B} の原点に移されるような点が少なくとも 1 つ存在する.
 - $P \setminus \text{Int}(P)$ の各連結成分は S^1 と同相でない.

【例 3.8.1】4 面体の重心細分

4 面体の重心細分として得られる層状化された多面体は, 正則かつ特殊である.

定義 3.25: 多面体分割

向き付けられた 3 次元閉多様体 M の**多面体分割**とは、**境界グラフ**が空の^a**向き付けられ、層状化された多面体** $(P, P^{(1)})$ であって、 M に埋め込まれており、 $M \setminus P$ が開球の disjoint union になっているもののこと。

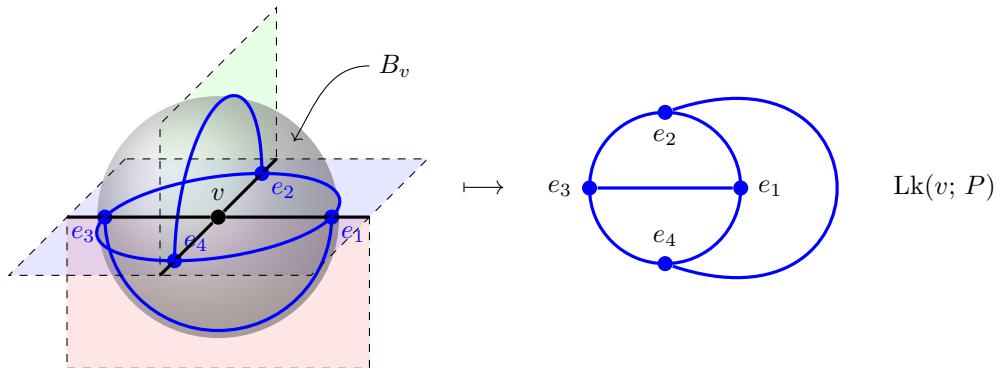
^a 従って、 $\forall e \in E(P^{(1)})$ の配位数は 2 以上である。

向き付けられた境界付き 3 次元コンパクト多様体 M 、およびその境界に埋め込まれた**有向グラフ** $G \subset \partial M$ を与える。 $\forall v \in V(G)$ の**配位数**は 2 以上であるとする^a。組 (M, G) の**多面体分割**とは、 **∂ -円筒境界を持つ、向き付けられ、層状化された 2-多面体** $(P, P^{(1)})$ であって、

- (1) P は M に埋め込まれている
- (2) 有向グラフとして $\partial P^{(1)} = G$ で、かつ $P \setminus \partial P \subset M \setminus \partial M$
- (3) $M \setminus P$ は 3-開球および 3 次元多様体 $(\partial M \setminus G) \times [0, 1]$ の disjoint union である。

^a 従って、境界の境界は考えない。

M の多面体分割 $(P, P^{(1)})$ の任意の頂点 $v \in V(P^{(1)})$ に対して、 v の閉球近傍 $B_v \subset M$ を十分小さく取る。すると、 v の**分岐** $R_v \in \text{Reg}(P)$ と ∂B_v の共通部分 $R \cap \partial B_v$ を辺に持つグラフが得られる：



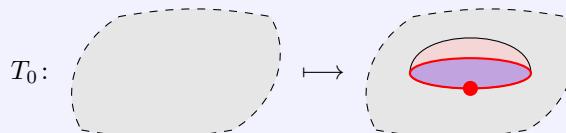
これを頂点 v の**絡みグラフ**と呼び、 $\text{Lk}(v; P)$ と書くことにする。

定理 3.11: 多面体分割の PL 不変性

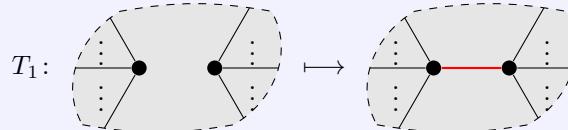
向き付けられた境界付き 3 次元コンパクト多様体 M 、およびその境界に埋め込まれた有向グラフ $G \subset \partial M$ を与える。 $\forall v \in V(G)$ の**配位数**は 2 以上であるとする^a。

このとき、 (M, G) の任意の 2 つの**多面体分割** $(P, P^{(1)}), (P', P'^{(1)})$ は、以下の操作 (**Matveev-Piergallini move** と呼ばれる) の有限回の組み合わせで互いに写り合う：

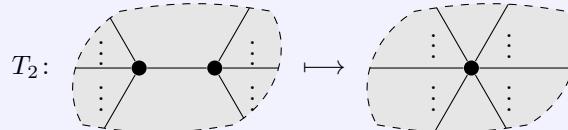
(T0)



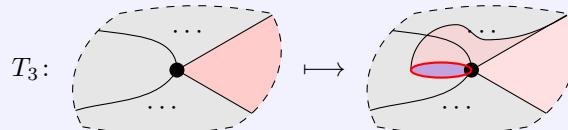
(T1)



(T2)



(T3)



^a 従って、境界の境界は考えない。

証明 [?, Theorem 11.5, p.250] ■

3.8.3 Turaev-Viro 不変量の構成：閉多様体

向き付けられた 3 次元閉多様体 M の多面体分割 $(P, P^{(1)})$ を 1 つ固定する。

定義 3.26: 彩色

多面体分割 $(P, P^{(1)})$ の彩色 (coloring) とは、写像

$$\Gamma: \text{Reg}(P) \longrightarrow \text{Simp}(\mathcal{C})$$

のこと。

彩色 $\Gamma: \text{Reg}(P) \longrightarrow \text{Simp}(\mathcal{C})$ を 1 つ固定したとき、対応するアイソトピー不变量 $Z(\Gamma; P) \in \mathbb{K}$ を構成しよう。まず $V(P^{(1)}) = \emptyset$ のときは $Z(\Gamma; P) := 1_{\mathbb{K}}$ と定義する。 $V(P^{(1)}) \neq \emptyset$ の場合を考える。

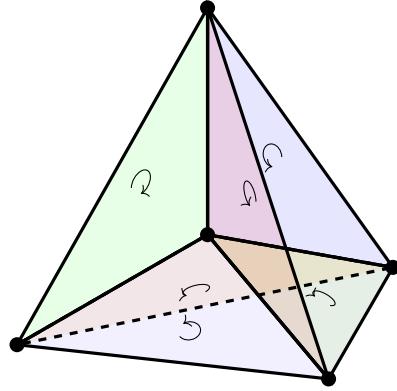


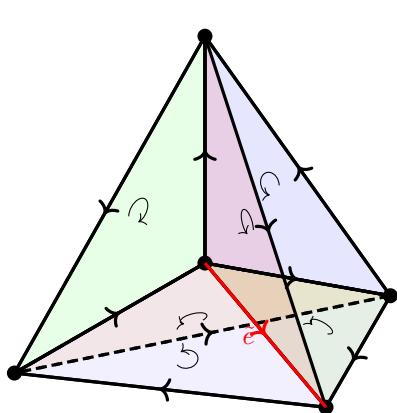
図 3.8: 多面体分割 $(P, P^{(1)})$ の一部. 各領域上に M から誘導される向きを図示した.

STEP1. 各辺に載せるベクトル空間の構成

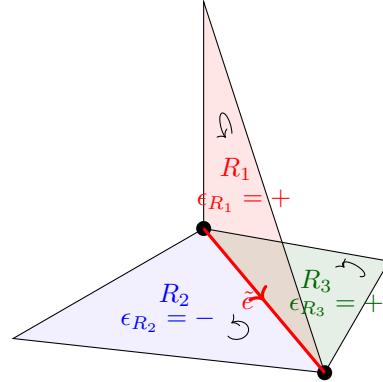
まず、無向グラフ $P^{(1)}$ に勝手な向き $\mathcal{O} \in \{\pm\}^{|E(P^{(1)})|}$ を与えて有向グラフ $P^{(1)\mathcal{O}}$ にする（図 3.9a）。そして有向辺 $\tilde{e} \in E(P^{(1)\mathcal{O}})$ の分岐の集合 $P_{\tilde{e}}^{(1)}$ に、右ネジの法則に従うサイクリックな順序 $<$ を与える（図 3.9b）。さらに $\forall R \in P_{\tilde{e}}^{(1)}$ に対して、 $\epsilon_R \in \{\pm\}$ を、 M から誘導される向きと \tilde{e} の向きが整合しているならば $+$ 、不整合ならば $-$ となるように定義する（図 3.9b）ことで、有向辺 $\tilde{e} \in E(P^{(1)\mathcal{O}})$ 上の \mathbb{K} -ベクトル空間を

$$\mathcal{H}(\tilde{e}; \Gamma) := \langle \Gamma(R_1)^{\epsilon_{R_1}}, \dots, \Gamma(R_n)^{\epsilon_{R_n}} \rangle \text{ w/ } P_{\tilde{e}}^{(1)} = \{R_1 < \dots < R_n\}$$

と構成する。



(a) 有向グラフ $P^{(1)\mathcal{O}}$ の一部



(b) 有向辺 $\tilde{e} \in E(P^{(1)\mathcal{O}})$ の分岐の集合 $P_{\tilde{e}}^{(1)} = \{R_1 < R_2 < R_3\}$ 及び $\epsilon_{R_j} \in \{\pm\}$ の定義.

図 3.9: $\mathcal{H}(\tilde{e}; \Gamma)$ の構成

STEP2. 全系のベクトル空間の構成

全系の \mathbb{K} -ベクトル空間は、有向グラフとしてのテンソル積^{*61}

$$\mathcal{H}(\Gamma) := \bigotimes_{\mathcal{O}} \bigotimes_{\tilde{e} \in E(P^{(1)} \mathcal{O})} \mathcal{H}(\tilde{e}; \Gamma)$$

として構成する。

STEP3. contraction vector の構成

無向辺 $\forall e \in E(P^{(1)})$ は、丁度 2 通りの方法で有向辺になる。こうして得られる 2 つの有向辺をそれぞれ \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 と書くと、**STEP1.** の構成により

$$\mathcal{H}(\tilde{e}_2; \Gamma) = \mathcal{H}(\tilde{e}_1; \Gamma)^*$$

が成り立つ（図 3.10）。よって補題 3.3 の非退化な双線形形式 $\omega_{\Gamma, e}: \mathcal{H}(\tilde{e}_2; \Gamma) \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{H}(\tilde{e}_1; \Gamma) \rightarrow \mathbb{K}$ を考えることができ、補題 3.4-(5) の構成によりその双対 $\Omega_{\Gamma, e}: \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{H}(\tilde{e}_1; \Gamma) \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{H}(\tilde{e}_2; \Gamma)$ を得る。特に

$$\bigotimes_{e \in E(P^{(1)})} (\mathcal{H}(\tilde{e}_1; \Gamma) \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{H}(\tilde{e}_2; \Gamma)) = \bigotimes_{\mathcal{O}} \bigotimes_{\tilde{e} \in E(P^{(1)} \mathcal{O})} \mathcal{H}(\tilde{e}; \Gamma) = \mathcal{H}(\Gamma)$$

に注意して、

$$\Omega_{\Gamma}(1_{\mathbb{K}}) := \bigotimes_{e \in E(P^{(1)})} \Omega_{\Gamma, e}(1_{\mathbb{K}}) \in \mathcal{H}(\Gamma) \quad (3.8.3)$$

のことを **contraction vector** と呼ぶ。

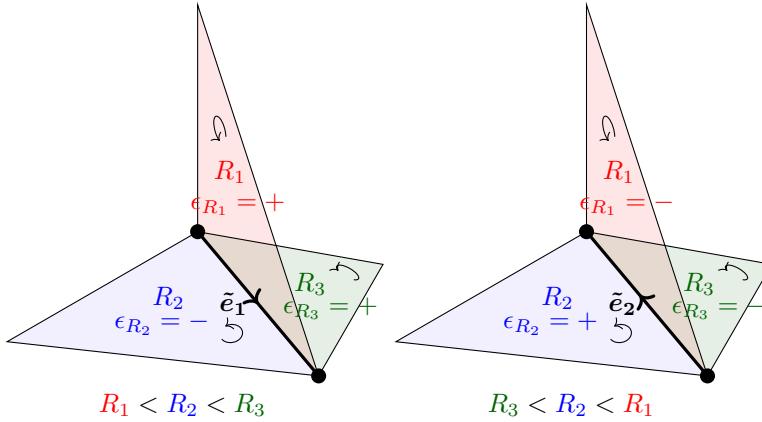


図 3.10: 有向辺 \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 と、それらの分岐の集合 $P_{\tilde{e}_1}^{(1)} = \{\textcolor{red}{R}_1 < \textcolor{blue}{R}_2 < \textcolor{green}{R}_3\}, P_{\tilde{e}_2}^{(1)} = \{\textcolor{green}{R}_3 < \textcolor{blue}{R}_2 < \textcolor{red}{R}_1\}$ 及び $\epsilon_{R_j} \in \{\pm\}$ の定義。 ϵ_{R_j} は互いに逆符号であることに注意。

STEP4. 絡みグラフをストリング図式に読み替える

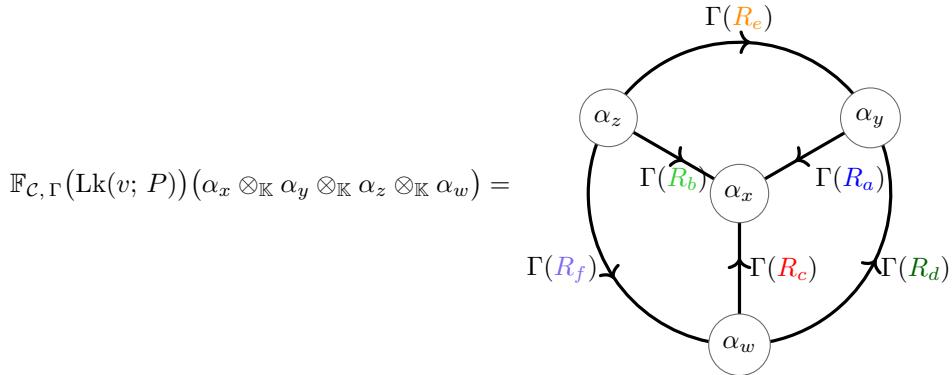
$\forall v \in V(P^{(1)})$ を 1 つ固定し、頂点 v の十分小さな開球近傍 B_v およびその絡みグラフ $\text{Lk}(v; P) \subset \partial B_v$ をとる。 a には $R_a \setminus \text{Int}(B_a)$ から誘導される向きを入れることで、 $\text{Lk}(v; P)$ を有向グラフにする（図 3.11）。

^{*61} より正確には、**unordered tensor product** を取っている [?, Appendix E, p.477].

ここで, $a \in E(Lk(v; P))$ はある 1 つの領域 $R_a \in \text{Reg}(P)$ に含まれているから, a には $\Gamma(R_a) \in \text{Simp}(\mathcal{C})$ を割り当てる. さらに $\forall x \in V(Lk(v; P))$ に対して勝手な $\alpha_x \in \langle \Gamma(R_{a_1})^{\varepsilon_{a_1}}, \dots, \Gamma(R_{a_m})^{\varepsilon_{a_m}} \rangle =: \mathcal{H}_x(Lk(v; P); \Gamma)$ を割り当てることで, 絡みグラフ $Lk(v; P)$ をストリング図式 $\mathbb{F}_{\mathcal{C}, \Gamma}(Lk(v; P))(\bigotimes_{x \in V(Lk(v; P))} \alpha_x)$ に読み替える. ただし, ε_{a_i} は有向辺 $a_i \in E(Lk(v; P))$ が $x \in V(Lk(v; P))$ を終点に持つならば +, 始点に持つならば - を与える^{*62}. 例えは図 3.11 の絡みグラフ $Lk(v; P)$ に対応するストリング図式は,

$$\begin{aligned}\alpha_x &\in \langle \Gamma(\textcolor{blue}{R}_a)^*, \Gamma(\textcolor{green}{R}_b)^*, \Gamma(\textcolor{red}{R}_c)^* \rangle, \\ \alpha_y &\in \langle \Gamma(\textcolor{blue}{R}_a), \Gamma(\textcolor{red}{R}_d)^*, \Gamma(\textcolor{orange}{R}_e)^* \rangle, \\ \alpha_z &\in \langle \Gamma(\textcolor{green}{R}_b), \Gamma(\textcolor{orange}{R}_e), \Gamma(\textcolor{blue}{R}_f) \rangle, \\ \alpha_w &\in \langle \Gamma(\textcolor{red}{R}_c), \Gamma(\textcolor{blue}{R}_f)^*, \Gamma(\textcolor{green}{R}_d)^* \rangle\end{aligned}$$

について



と読み取れる.

M が境界を持たないことから絡みグラフ $Lk(v; P)$ の配位数は 2 以上なので, このようにして得られたストリング図式は端点を持たない. i.e. $\mathbb{F}_{\mathcal{C}, \Gamma}(Lk(v; P))(\bigotimes_{x \in V(Lk(v; P))} \alpha_x) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, 1) = \mathbb{K}$ が成り立つ. これを \mathbb{K} -線形に拡張することで, \mathbb{K} -線型写像

$$\mathbb{F}_{\mathcal{C}, \Gamma}(Lk(v; P)) \in \text{Hom}_{\text{Vec}_{\mathbb{K}}} \left(\bigotimes_{x \in V(Lk(v; P))} \mathcal{H}_x(Lk(v; P)), \mathbb{K} \right)$$

を得る.

^{*62} つまり, 有向グラフ $Lk(v; P)$ の辺の向きと, ストリング図式 $\mathbb{F}_{\mathcal{C}, \Gamma}(Lk(v; P))(\bigotimes_{x \in V(Lk(v; P))} \alpha_x)$ の矢印の向きは逆向きである!

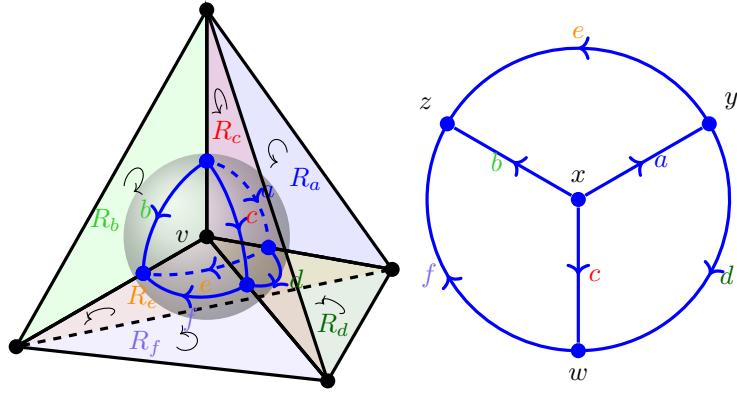


図 3.11: 有向グラフ $\text{Lk}(v; P)$

STEP5. アイソトピー不变量の構成

\mathbb{K} -ベクトル空間としての同型

$$\bigotimes_{x \in V(\text{Lk}(v; P))} \mathcal{H}_x(\text{Lk}(v; P)) \cong \bigotimes_{\tilde{e}_v; v \text{ を始点に持つ}} \mathcal{H}(\tilde{e}_v; \Gamma)$$

に注意すると

$$\begin{aligned} & \bigotimes_{v \in V(P^{(1)})} \text{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}} \left(\bigotimes_{x \in V(\text{Lk}(v; P))} \mathcal{H}_x(\text{Lk}(v; P)), \mathbb{K} \right) \\ & \cong \text{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}} \left(\bigotimes_{v \in V(P^{(1)})} \bigotimes_{\tilde{e}_v; v \text{ を始点に持つ}} \mathcal{H}(\tilde{e}_v; \Gamma), \mathbb{K} \right) \\ & \cong \text{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}} (\mathcal{H}(\Gamma), \mathbb{K}) \end{aligned}$$

が成り立つことが分かる。よって

$$z(\Gamma; P) := \bigotimes_{v \in V(P^{(1)})} \mathbb{F}_{C, \Gamma}(\text{Lk}(v; P)) \in \text{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}} (\mathcal{H}(\Gamma), \mathbb{K})$$

だと分かった。これで (3.8.3) を写像することで

$$Z(\Gamma; P) := z(\Gamma; P) \circ \Omega_{\Gamma}(1_{\mathbb{K}}) \in \mathbb{K}$$

を得る。

定義 3.27: 閉多様体における TV 不変量

向き付けられた 3 次元閉多様体 M および多面体分割 $(P, P^{(1)})$ をとる。Turaev-Viro 不変量を

$$Z_{\text{TV}, C}(M) := \dim(C)^{-|M \setminus P|} \sum_{\Gamma: \text{Reg}(P) \rightarrow \text{Simp}(C)} \left(Z(\Gamma; P) \prod_{R \in \text{Reg}(P)} \dim(\Gamma(R))^{\chi(R)} \right)$$

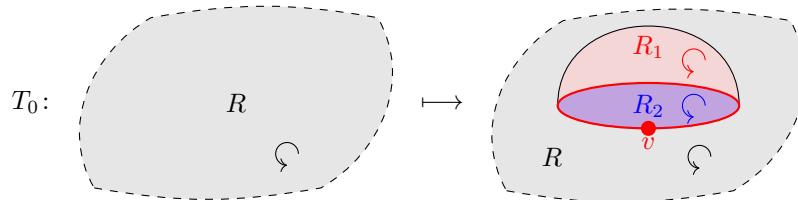
で定義する。ただし $M \setminus P$ は $M \setminus P$ の連結成分の個数で、 $\chi(R)$ は領域 $R \in \text{Reg}(P)$ の Euler 標数である。

定理 3.12:

Turaev-Viro 不変量 $Z_{\text{TV},c}(M)$ は**多面体分割** $(P, P^{(1)})$ の取り方によらない.

証明 $2+1$ 次元多様体 M の勝手な**多面体分割** $(P, P^{(1)})$ を 1 つ固定し、そこから構成した $Z_{\text{TV},c}(M; P)$ が定理 3.11 の操作 **(T0)-(T3)** に関して不变であることを示せば良い.

(T0)



によって M の多面体分割 $(P, P^{(1)})$ には

- $V(P^{(1)})$ に新しく 1 つの頂点 v が,
- $E(P^{(1)})$ に新しく 1 つの無向辺 e が,
- $\text{Reg}(P)$ に新しく 2 つの領域 R_1, R_2 が

追加される. 彩色

$$\Gamma: \text{Reg}(T_0(P)) \longrightarrow \text{Simp}(\mathcal{C})$$

を 1 つ固定する. すると、新たに追加された無向辺 $e \in E(T_0(P^{(1)}))$ から **STEP3.** によって構成される contraction vector は

$$\Omega_{\Gamma, e}(1_{\mathbb{K}}) \in \langle \Gamma(R_2)^*, \Gamma(R), \Gamma(R_1)^* \rangle \otimes_{\mathbb{K}} \langle \Gamma(R_1), \Gamma(R)^*, \Gamma(R_2) \rangle$$

であるが、補題 3.4-(5) によってこれは

$$\Omega_{\Gamma, e}(1_{\mathbb{K}}) = \begin{array}{c} \varphi \bullet \\ \circlearrowleft \quad \circlearrowright \\ \Gamma(R_2) \quad \Gamma(R) \\ \otimes_{\mathbb{K}} \\ \circlearrowleft \quad \circlearrowright \\ \Gamma(R) \quad \Gamma(R_2) \\ \downarrow \Gamma(R_1) \end{array}$$

と計算できる。**STEP4.** によって**絡みグラフ** $\text{Lk}(v; T_0(P))$ から得られるストリング図式は

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_{\mathcal{C}, \Gamma}(\text{Lk}(v; T_0(P))) &= \begin{array}{c} \varphi \bullet \\ \circlearrowleft \quad \circlearrowright \\ \Gamma(R_2) \quad \Gamma(R) \\ \text{---} \\ \Gamma(R) \\ \text{---} \\ \Gamma(R_1) \end{array} \\ &\in \text{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}} \left(\langle \Gamma(R_2)^*, \Gamma(R), \Gamma(R_1)^* \rangle \otimes_{\mathbb{K}} \langle \Gamma(R_1), \Gamma(R)^*, \Gamma(R_2) \rangle, \mathbb{K} \right) \end{aligned}$$

であるから、結局 **STEP5.** の計算は

$$\begin{aligned}
 Z(\Gamma; T_0(P)) &= \mathbb{F}_{\mathcal{C}, \Gamma} \left(\text{Lk}(v; T_0(P)) \right) \left(\Omega_{\Gamma, e}(1_{\mathbb{K}}) \right) \otimes_{\mathbb{K}} Z(\Gamma|_{\text{Reg}(P)}; P) \\
 &= \begin{array}{c} \Gamma(R_2) \\ \nearrow \\ \varphi^\bullet \end{array} \quad \begin{array}{c} \Gamma(R) \\ \nwarrow \\ \varphi_\bullet \end{array} \quad \otimes_{\mathbb{K}} Z(\Gamma|_{\text{Reg}(P)}; P) \\
 &\quad \begin{array}{c} \Gamma(R_1) \\ \searrow \\ \varphi_\bullet \end{array} \\
 &= \dim_{\mathbb{K}} (\langle \Gamma(R_1), \Gamma(R)^*, \Gamma(R_2) \rangle) Z(\Gamma|_{\text{Reg}(P)}; P) \quad \because \text{補題 3.5-(1)} \\
 &= N_{\Gamma(R_1), \Gamma(R_2)}^{\Gamma(R)} Z(\Gamma|_{\text{Reg}(P)}; P)
 \end{aligned}$$

と実行できる。一方で

$$\prod_{S \in \text{Reg}(T_0(P))} \dim(\Gamma(S))^{\chi(S)} = \frac{\dim(\Gamma(R_1)) \dim(\Gamma(R_2))}{\dim(\Gamma(R))} \prod_{S \in \text{Reg}(P)} \dim(\Gamma(S))^{\chi(S)},$$

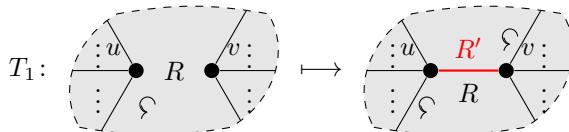
$$|M \setminus T_0(P)| = |M \setminus P| + 1$$

であるから、

$$\begin{aligned}
 Z_{\text{TV}, \mathcal{C}}(M; T_0(P)) &= \dim(\mathcal{C})^{-|M \setminus P|} \sum_{\Gamma: \text{Reg}(P) \rightarrow \text{Simp}(\mathcal{C})} Z(\Gamma; P) \prod_{S \in \text{Reg}(P)} \dim(\Gamma(S))^{\chi(S)} \\
 &\quad \times \left(\frac{1}{\dim(\Gamma(R)) \dim(\mathcal{C})} \sum_{a, b \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \dim(a) \dim(b) N_{ab}^{\Gamma(R)} \right) \\
 &= Z_{\text{TV}, \mathcal{C}}(M; P) \quad \because \text{補題??-(1) \& } \dim(x) = \dim(x^*)
 \end{aligned}$$

が言えた^{*63}。

(T1)



によって M の多面体分割 $(P, P^{(1)})$ には

- $E(P^{(1)})$ に新しく 1 つの無向辺 e が、
- $\text{Reg}(P)$ に新しく 1 つの領域 R' が^{*64}

追加される。彩色

$$\Gamma: \text{Reg}(T_1(P)) \longrightarrow \text{Simp}(\mathcal{C})$$

^{*63} $\dim(x) = \dim(x^*)$ が成立立つののは \mathcal{C} が球状テンソル圏であるため。

^{*64} 実は R' と R が連結である場合もありえる。

を 1 つ固定する. すると, 新たに追加された無向辺 $e \in E(T_0(P^{(1)}))$ から **STEP3.** によって構成される contraction vector はちょうど

$$\Omega_{\Gamma, e}(1_{\mathbb{K}}) \in \langle \Gamma(R)^*, \Gamma(R') \rangle \otimes_{\mathbb{K}} \langle \Gamma(R), \Gamma(R')^* \rangle$$

であり, $\Gamma(R) = \Gamma(R')$ でない限り 0 になる. このことから, **STEP5.** の計算のうち 2 頂点 $u, v \in V(P^{(1)})$ に関連する部分は

$$\begin{aligned} & \left(\mathbb{F}_{C, \Gamma} \left(\begin{array}{c} R' \\ \text{---} \\ R \end{array} \right) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{F}_{C, \Gamma} \left(\begin{array}{c} R' \\ \text{---} \\ R \end{array} \right) \right) (\Omega_{\Gamma, e}(1_{\mathbb{K}})) \\ &= \begin{array}{ccccc} \Gamma(R) & & \Gamma(R) & & \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \\ \varphi^\bullet & \circ & \varphi_\bullet & \circ & \end{array} \quad \because \text{補題 3.4-(5)} \\ &= \frac{1}{\dim(\Gamma(R))} \begin{array}{c} \text{---} \\ \Gamma(R) \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \Gamma(R) \end{array} \end{aligned}$$

だと分かる. ただし, 最後の等号で **非退化な双線形形式 ω** に関する双対基底として具体的に

$$\begin{aligned} \varphi^\bullet &= \frac{1}{\dim_p(\Gamma(R))} p_{\Gamma(R)} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \in \langle \Gamma(R), \Gamma(R)^* \rangle^*, \\ \varphi_\bullet &= \text{coev}_{\Gamma(R)}^L \in \langle \Gamma(R), \Gamma(R)^* \rangle \end{aligned}$$

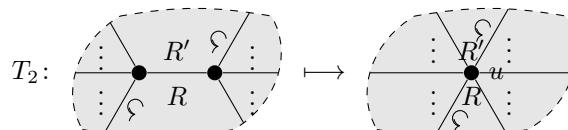
を取れることを用いた^{*65}. 最右辺は $\dim(\Gamma(R))^{-1}$ 倍を除いて T_1 を施す前と等しい. ところで, $\Gamma(R) = \Gamma(R')$ のとき

$$\prod_{S \in \text{Reg}(T_1(P))} \dim(\Gamma(S))^{\chi(S)} = \dim(\Gamma(R)) \prod_{S \in \text{Reg}(P)} \dim(\Gamma(S))^{\chi(S)},$$

$$|M \setminus T_1(P)| = |M \setminus P|$$

が成り立つので $Z_{\text{TV}, C}(M; T_1(P)) = Z_{\text{TV}, C}(M; P)$ が言えた.

(T2)



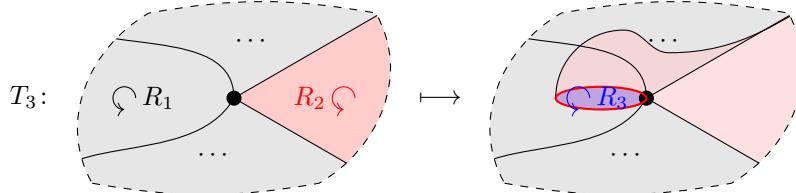
^{*65} $\dim_{\mathbb{K}}(\langle \Gamma(R), \Gamma(R)^* \rangle) = 1$ である! なお, $p_{\Gamma(R)} \in \text{Hom}_C(\Gamma(R), \Gamma(R)^{**})$ は C の球状構造である.

である。STEP5. の計算のうち非自明な部分は頂点 $u \in V(T_2(P^{(1)}))$ に関連する部分のみであり,

$$\begin{aligned}
& \Gamma(R') = \Gamma(R) + \varphi \circ \Gamma(R) + \Gamma(R) \circ \varphi \\
& = \left(\mathbb{F}_{C,\Gamma} \left(\begin{array}{c} R' \\ R \end{array} \right) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{F}_{C,\Gamma} \left(\begin{array}{c} R' \\ R \end{array} \right) \right) (\Omega_{\Gamma,e}(1_{\mathbb{K}})) \quad \because \text{補題 3.4-(5)}
\end{aligned}$$

と計算できるが、(T1) と同様に最右辺は T_2 を施す前と等しい。Euler 標数の変化はないので $Z_{TV,C}(M; T_2(P)) = Z_{TV,C}(M; P)$ が言えた。

(T3)



によって M の多面体分割 $(P, P^{(1)})$ には

- $E(P^{(1)})$ に新しく 1 つの無向辺 e が,
- $\text{Reg}(P)$ に新しく 1 つの領域 R_3 が

追加される。彩色

$$\Gamma: \text{Reg}(T_3(P)) \longrightarrow \text{Simp}(\mathcal{C})$$

を 1 つ固定しよう。STEP5. の計算のうち非自明な部分は、図中の頂点から構成される絡みグラフのうち、新しく追加された辺 e と関連する部分のみであり,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{F}_{C,\Gamma} \left(\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \right) (\Omega_{\Gamma,e}(1_{\mathbb{K}})) = \Gamma(R_3) + \Gamma(R_2) + \Gamma(R_1) \quad \because \text{補題 3.4-(5)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{N_{\Gamma(\textcolor{blue}{R}_3)\Gamma(\textcolor{red}{R}_2)}^{\Gamma(R_1)}}{\dim(\Gamma(R_1))} \quad \Gamma(R_1) \leftarrow \begin{array}{c} \text{grey circle} \\ \text{with a loop} \end{array} \quad \because \text{補題 3.5-(1)}$$

と計算できる。ところで、

$$\prod_{S \in \text{Reg}(T_3(P))} \dim(\Gamma(S))^{\chi(S)} = \frac{\dim(\Gamma(\textcolor{blue}{R}_3))}{\dim(\Gamma(R_1)) \dim(\Gamma(\textcolor{red}{R}_2))} \prod_{S \in \text{Reg}(P)} \dim(\Gamma(S))^{\chi(S)},$$

$$|M \setminus T_3(P)| = |M \setminus P|$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned} Z_{\text{TV}, \mathcal{C}}(M; T_3(P)) &= \dim(\mathcal{C})^{-|M \setminus P|} \sum_{\Gamma: \text{Reg}(P) \rightarrow \text{Simp}(\mathcal{C})} Z(\Gamma; P) \prod_{S \in \text{Reg}(P)} \dim(\Gamma(S))^{\chi(S)} \\ &\times \left(\frac{1}{\dim(\Gamma(R_1)) \dim(\Gamma(\textcolor{red}{R}_2))} \sum_{\textcolor{blue}{a} \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{\textcolor{blue}{a}\Gamma(\textcolor{red}{R}_2)}^{\Gamma(R_1)} \dim(\textcolor{blue}{a}) \right) \\ &= Z_{\text{TV}, \mathcal{C}}(M; P) \quad \because \text{補題??-(1) \& } \dim(x) = \dim(x^*) \end{aligned}$$

が言えた。 ■

3.8.4 Turaev-Viro 不变量の構成：境界付き多様体

向き付けられた 3 次元境界付き多様体 M と、その境界に埋め込まれた有向グラフ $G \subset \partial M$ を与える。組 (M, G) の多面体分割 $(P, P^{(1)})$ を 1 つ固定する。閉多様体の場合とは異なり、境界条件を設定する必要がある。

STEP0. 境界条件の設定

$e \in E(G)$ に対して勝手な $x_e \in \text{Simp}(\mathcal{C})$ をアサインする。

定義 3.28: 境界付き彩色

- 3 次元境界付き多様体 M
- ∂M に埋め込まれた有向グラフ G
- 組 (M, G) の多面体分割 $(P, P^{(1)})$
- 境界条件 $\{x_e \in \text{Simp}(\mathcal{C})\}_{e \in E(G)}$

を与える。4 つ組 $(G, P, P^{(1)}, \{x_e\})$ の彩色 (coloring) とは、写像

$$\Gamma: \text{Reg}(P) \longrightarrow \text{Simp}(\mathcal{C})$$

であって、 $\forall e \in E(G) = E(\partial P)$ に対して以下を充たすものとを言う：

(彩色の境界条件)

e が一意的に隣接する^a領域 $R_e \in \text{Reg}(P)$ に対して、 $\Gamma(R_e) = x_e$ (図 3.12)

^a 境界グラフの定義

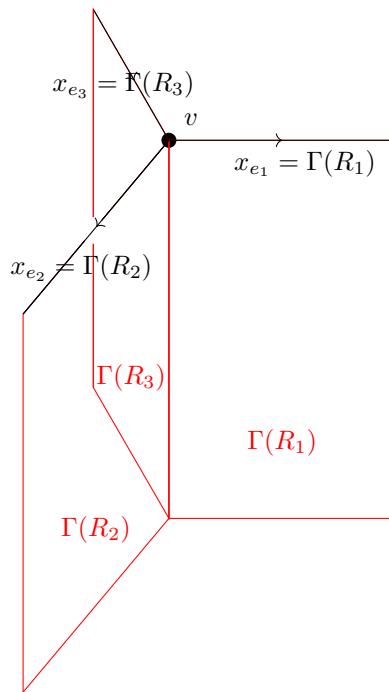


図 3.12: 彩色の境界条件

Turaev-Viro 不変量は、与えられた $(M, G, \{x_e\})$ に対してあるベクトル $Z_{\text{TV}, \mathcal{C}}(M, G; \{x_e\}) \in \mathcal{H}(G; \{x_e\})$ を返す。TQFT と見做すときは、コボルディズム $M \in \text{Hom}_{\text{Bord}_{(2,3)}^{\text{SO}}}(\emptyset, \partial M)$ に対応する線型写像 $Z_{\text{TV}, \mathcal{C}}(M)$ による $1 \in \mathbb{K} = Z_{\text{TV}, \mathcal{C}}(\emptyset)$ の行き先を構成していると考えれば良い^{*66}。以下では境界条件 $\{x_e \in \text{Simp}(\mathcal{C})\}_{e \in E(G)}$ および境界付き彩色 Γ を 1 つ固定しよう。

*66 正確には、規格化定数の違いがある。

STEP1. 境界に載せるベクトル空間の構成

有向グラフ G の辺のうち, $v \in V(G)$ を端点に持つもの全体が成す集合を E_v と書く. E_v には, 内向き法線ベクトルが定める^{*67}サイクリックな順序 $<$ を与える. そして $\forall e \in E_v$ に対して

$$\epsilon_e := \begin{cases} +, & e \text{ が } v \text{ へ向かう向き} \\ -, & e \text{ が } v \text{ から離れる向き} \end{cases}$$

と定義し, 頂点 $v \in V(G) = V(\partial P)$ 上の \mathbb{K} -ベクトル空間を

$$\mathcal{H}_v(G; \{x_e\}) := \langle x_{e_1}^{\epsilon_{e_1}}, \dots, x_{e_n}^{\epsilon_{e_n}} \rangle \text{ w/ } E_v = \{e_1 < \dots < e_n\}$$

と構成する (図 3.13). ∂M 全体のベクトル空間は

$$\mathcal{H}(G; \{x_e\}) := \bigotimes_{v \in V(G)} \mathcal{H}_v(G; \{x_e\})$$

とする^{*68}.

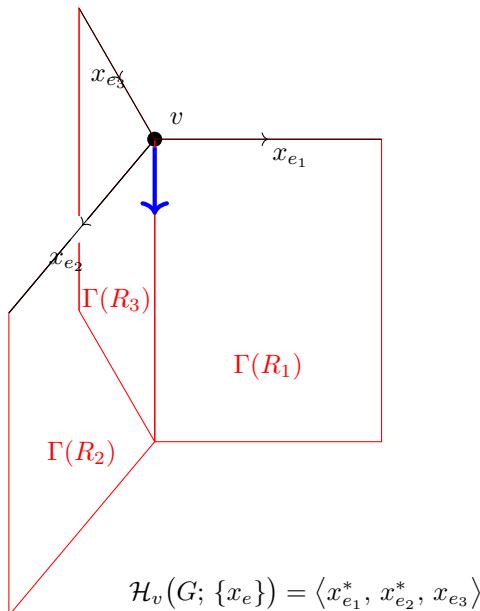


図 3.13: 境界のベクトル空間. 内向き法線ベクトルを青色で描いた. このとき $e_1 < e_2 < e_3$ である.

STEP2. 内部グラフの向き付け

無向グラフ^{*69} $P^{(1)} \setminus \partial P$ に勝手な向き $\mathcal{O} \in \{\pm\}^{|E(P^{(1)} \setminus \partial P)|}$ を与えることで, $P^{(1)} \setminus \partial P$ を有向グラフ $P^{(1)\mathcal{O}} \setminus \partial P$ にする. そして

$$\begin{aligned} E_{\text{Int}}^{\mathcal{O}} &:= \{ e \in E(P^{(1)\mathcal{O}} \setminus \partial P) \mid \text{始点} \notin G \} \\ E_{\partial}^{\mathcal{O}} &:= \{ e \in E(P^{(1)\mathcal{O}} \setminus \partial P) \mid \text{始点} \in G \} \end{aligned}$$

^{*67}つまり, ∂M の向きが定めるものとは逆向きである.

^{*68}より正確には, **unordered tensor product** を取っている [?, Appendix E, p.477]

^{*69}多面体分割の定義から, 境界グラフ ∂P は有向グラフとして常に G と等しい.

とおくと、与えられた有向辺の始点を返す関数 $s: e \mapsto s(e)$ によって集合 $\bigcup_{\mathcal{O}} E_{\partial}^{\mathcal{O}}$ と集合 $V(G)$ は 1 対 1 対応する（図 3.14）。さらに、 $v \in V(G)$ に対して、集合 E_v が持つサイクリックな順序の定義は ∂M の内向き法線ベクトルに関する右ネジの法則を適用して得られるものであったから、閉多様体の場合の **STEP1.** より $\forall e \in \bigcup_{\mathcal{O}} E_{\partial}^{\mathcal{O}}$ に対して

$$\mathcal{H}_{s(e)}(G; \{x_e\}) = \mathcal{H}(e; \Gamma)$$

が成り立つ。ただし、 $\mathcal{H}(e; \Gamma)$ は閉多様体の場合の **STEP1.** で構成したベクトル空間である。以上の考察から、

$$\mathcal{H}(G; \{x_e\}) = \bigotimes_{\mathcal{O}} \bigotimes_{e \in E_{\partial}^{\mathcal{O}}} \mathcal{H}(e; \Gamma)$$

が分かった。便宜上、以下では

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\Gamma) &:= \bigotimes_{\mathcal{O}} \bigotimes_{e \in E(P^{(1)} \setminus \partial P)} \mathcal{H}(e; \Gamma), \\ \mathcal{H}_{\text{Int}}(\Gamma) &:= \bigotimes_{\mathcal{O}} \bigotimes_{e \in E_{\text{int}}^{\mathcal{O}}} \mathcal{H}(e; \Gamma), \\ \mathcal{H}_{\partial}(\Gamma) &:= \bigotimes_{\mathcal{O}} \bigotimes_{e \in E_{\partial}^{\mathcal{O}}} \mathcal{H}(e; \Gamma)\end{aligned}$$

とおく。このとき

$$\mathcal{H}(\Gamma) = \mathcal{H}_{\text{Int}}(\Gamma) \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{H}_{\partial}(\Gamma) = \mathcal{H}_{\text{Int}}(\Gamma) \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{H}(G; \{x_e\})$$

が成り立つ。

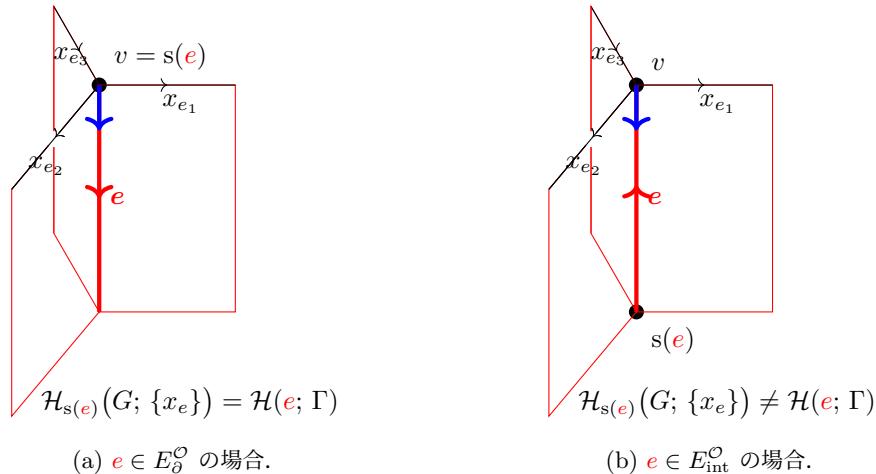


図 3.14: $E_{\partial}^{\mathcal{O}}$ と $E_{\text{int}}^{\mathcal{O}}$.

STEP3. contraction vector の構成

部分グラフ $P^{(1)} \setminus \partial P$ に対して、閉多様体の場合の **STEP3.** と全く同様の構成によって **contraction vector**

$$\Omega_{\Gamma}(1_{\mathbb{K}}) \in \mathcal{H}(\Gamma) = \mathcal{H}_{\text{Int}}(\Gamma) \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{H}(G; \{x_e\}) \quad (3.8.4)$$

を得る.

STEP4. 絡みグラフをストリング図式に読み替える

閉多様体の場合の STEP4. と全く同様の構成によって, $\forall v \in V(P^{(1)} \setminus \partial P)$ における絡みグラフ $Lk(v; P)$ をストリング図式に読み替えることができ, \mathbb{K} -線型写像

$$\mathbb{F}_{C, \Gamma}(Lk(v; P)) \in \text{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}} \left(\bigotimes_{x \in V(Lk(v; P))} \mathcal{H}_x(Lk(v; P)), \mathbb{K} \right)$$

を得る.

STEP5. アイソトピー不变量の構成

閉多様体の場合の STEP4. と全く同様に, \mathbb{K} -ベクトル空間の同型

$$\begin{aligned} & \bigotimes_{v \in V(P^{(1)} \setminus \partial P)} \text{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}} \left(\bigotimes_{x \in V(Lk(v; P))} \mathcal{H}_x(Lk(v; P)), \mathbb{K} \right) \\ & \cong \text{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}} \left(\bigotimes_{v \in V(P^{(1)} \setminus \partial P)} \bigotimes_{\substack{\tilde{e}_v; \\ v \text{ を始点に持つ}}} \mathcal{H}(\tilde{e}_v; \Gamma), \mathbb{K} \right) \\ & \cong \text{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}} (\mathcal{H}_{\text{Int}}(\Gamma), \mathbb{K}) \end{aligned}$$

がある. よって

$$z(\Gamma; P) := \left(\bigotimes_{v \in V(P^{(1)} \setminus \partial P)} \mathbb{F}_{C, \Gamma}(Lk(v; P)) \right) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{1}_{\mathcal{H}_{\partial}(\Gamma)}$$

と定義すると

$$z(\Gamma; P) \in \text{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}} (\mathcal{H}_{\text{Int}}(\Gamma), \mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}} (\mathcal{H}_{\partial}(\Gamma), \mathcal{H}_{\partial}(\Gamma)) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}} (\mathcal{H}(\Gamma), \mathcal{H}_{\partial}(\Gamma))$$

だと分かった. これで (3.8.4) を写像することで, アイソトピー不变量

$$Z(\Gamma; P) := z(\Gamma; P) \circ \Omega_{\Gamma}(1_{\mathbb{K}}) \in \mathcal{H}_{\partial}(\Gamma) = \mathcal{H}(G; \{x_e\})$$

を得る.

定義 3.29: 境界付き多様体における TV 不変量

- 3 次元境界付き多様体 M
- ∂M に埋め込まれた有向グラフ G
- 組 (M, G) の多面体分割 $(P, P^{(1)})$
- 境界条件 $\{x_e \in \text{Simp}(\mathcal{C})\}_{e \in E(G)}$

を与える。このとき、**Turaev-Viro 不変量**を

$$Z_{\text{TV}, \mathcal{C}}(M, G) := \dim(\mathcal{C})^{-|M \setminus P|} \sum_{\substack{\Gamma: \text{Reg}(P) \rightarrow \text{Simp}(\mathcal{C}), \\ \Gamma|_{\partial P} = \{x_e\}}} \left(Z(\Gamma; P) \prod_{R \in \text{Reg}(P)} \dim(\Gamma(R))^{\chi(R)} \right) \\ \in \mathcal{H}(G; \{x_e\})$$

で定義する。ただし $|M \setminus P|$ は $M \setminus P$ の連結成分の個数で、 $\chi(R)$ は領域 $R \in \text{Reg}(P)$ の Euler 標数である。

定理 3.13:

- 3 次元境界付き多様体 M
- ∂M に埋め込まれた有向グラフ G
- 組 (M, G) の多面体分割 $(P, P^{(1)})$
- 境界条件 $\{x_e \in \text{Simp}(\mathcal{C})\}_{e \in E(G)}$

を与える。このとき、以下が成り立つ：

- (1) Turaev-Viro 不変量 $Z_{\text{TV}, \mathcal{C}}(M, G)$ は多面体分割 $(P, P^{(1)})$ の取り方によらない。
- (2) 任意の向き付けを保つ同相写像 $f: M \rightarrow N$ に対して

$$Z_{\text{TV}, \mathcal{C}}(N, f(G)) = f_*(Z_{\text{TV}, \mathcal{C}}(M, G))$$

ただし $f_*: \mathcal{H}(G; \{x_e\}) \rightarrow \mathcal{H}(f(G); \{x_{f(e)}\})$ は f によって誘導される \mathbb{K} -ベクトル空間の同型写像である。

証明 (1) 定理 3.12 と同様。

(2) (1) および定理 3.10 より明らか。 ■

3.8.5 state sum TQFT

定義 3.30: 2 次元閉多様体の多面体分割

向きづけられた 2 次元閉多様体 $\Sigma \in \text{Ob}(\mathbf{Bord}_{\langle 2, 3 \rangle}^{\text{SO}})$ に埋め込まれたグラフ $G \subset \Sigma$ が**多面体分割**であるとは、 $\forall v \in V(G)$ の配位数が 2 以上であり、かつ $\Sigma \setminus G$ が 2-開球の disjoint union であることを言う。

- 2 次元閉多様体 $\Sigma_0, \Sigma_1 \in \text{Ob}(\mathbf{Bord}_{\langle 2, 3 \rangle}^{\text{SO}})$
- 3 次元境界付き多様体 $M \in \text{Hom}_{\mathbf{Bord}_{\langle 2, 3 \rangle}^{\text{SO}}}(\Sigma_0, \Sigma_1)$
- **2 次元閉多様体の多面体分割** $G_0 \subset \Sigma_0, G_1 \subset \Sigma_1$
- 境界条件 $\{x_e^0 \in \text{Simp}(\mathcal{C})\}_{e \in E(G_0)}, \{x_e^1 \in \text{Simp}(\mathcal{C})\}_{e \in E(G_1)}$

を与えたとき、 M のマッピングトーラスを考えて

$$Z_{\text{preTV}}(M; G_0, G_1; \{x_e^0\}, \{x_e^1\}) := \frac{\sqrt{\dim(\mathcal{C})}^{|\Sigma_1 \setminus G_1|} \sqrt{\dim(\mathcal{C})}^{|\Sigma_0 \setminus G_0|}}{\prod_{e \in E(G_1)} \sqrt{\dim(x_e^1)} \prod_{e \in E(G_0)} \sqrt{\dim(x_e^0)}} Z_{\text{TV}, \mathcal{C}}(M, G_0^{\text{op}} \cup G_1) \quad (3.8.5)$$

とおく。ただし $|\Sigma_1 \setminus G_1|$ は $\Sigma_1 \setminus G_1$ の連結成分の個数である。 $Z_{\text{preTV}}(M; G_0, G_1; \{x_e^0\}, \{x_e^1\})$ は

$$\mathcal{H}(G_0; \{x_e^0\})^* \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{H}(G_1; \{x_e^1\}) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}}(\mathcal{H}(G_0; \{x_e^0\}), \mathcal{H}(G_1; \{x_e^1\}))$$

の元である。

$Z_{\text{preTV}}(M; G_0, G_1; \{x_e^0\}, \{x_e^1\})$ の規格化定数には不定性がある。例えば [?, p.282] では

!

$$Z_{\text{preTV}}(M; G_0, G_1; \{x_e^0\}, \{x_e^1\}) := \frac{\dim(\mathcal{C})^{|\Sigma_1 \setminus G_1|}}{\prod_{e \in E(G_1)} \dim(x_e)} Z_{\text{TV}, \mathcal{C}}(M, G_0^{\text{op}} \cup G_1)$$

と定義されている。本資料では [?, Definition 4.2.], [?, p.36] に合わせた。

補題 3.6: state sum TQFT の離形

- 2 次元閉多様体 $\Sigma_0, \Sigma, \Sigma_1 \in \text{Ob}(\mathbf{Bord}_{\langle 2, 3 \rangle}^{\text{SO}})$
- 3 次元境界付き多様体 $M_0 \in \text{Hom}_{\mathbf{Bord}_{\langle 2, 3 \rangle}^{\text{SO}}}(\Sigma_0, \Sigma), M_1 \in \text{Hom}_{\mathbf{Bord}_{\langle 2, 3 \rangle}^{\text{SO}}}(\Sigma, \Sigma_1)$
- **2 次元閉多様体の多面体分割** $G_0 \subset \Sigma_0, G \subset \Sigma, G_1 \subset \Sigma_1$
- 境界条件 $\{x_e^0 \in \text{Simp}(\mathcal{C})\}_{e \in E(G_0)}, \{x_e^1 \in \text{Simp}(\mathcal{C})\}_{e \in E(G_1)}$

を与える。このとき、

$$\begin{aligned} & Z_{\text{preTV}}(M_1 \circ M_0; G_0, G_1; \{x_e^0\}, \{x_e^1\}) \\ &= \sum_{\{x_e\}_{e \in E(G)}} Z_{\text{preTV}}(M_1; G, G_1; \{x_e\}, \{x_e^1\}) \circ Z_{\text{preTV}}(M_0; G_0, G; \{x_e^0\}, \{x_e\}) \end{aligned}$$

が成り立つ。

証明

- 組 $(M_0, G_0^{\text{op}} \cup G)$ の**多面体分割** $(P_0, P_0^{(1)})$

- 組 $(M_1, G^{\text{op}} \cup G_1)$ の多面体分割 $(P_1, P_1^{(1)})$
を 1 つ固定する。このとき、組 $(M, G_0^{\text{op}} \cup G_1)$ の多面体分割 $(P, P^{(1)})$ を次のように構成する：

頂点 グラフ $P^{(1)}$ の頂点集合は

$$V(P^{(1)}) := (V(P_0^{(1)}) \setminus V(G)) \cup (V(P_1^{(1)}) \setminus V(G^{\text{op}}))$$

とする。

辺 多面体分割の定義より $(P_i, P_i^{(1)})$ は円筒境界を持つから、 $\forall v \in V(G)$ に対して、 v を 1 つの端点に持つ $e_v^i \in E(P_i^{(1)}) \setminus E(\partial P)$ がただ 1 つ存在する。このとき、 $P^{(1)}$ の辺集合を

$$E(P^{(1)}) := (E(P_0^{(1)}) \setminus E(G)) \cup (E(P_1^{(1)}) \setminus E(G^{\text{op}})) \cup \{e_v^0 \cup e_v^1\}_{v \in V(G)}$$

とする。

面 多面体分割の定義より $\partial P_0^{\mathcal{O}_{\partial P_0}} = G$, $\partial P_1^{\mathcal{O}_{\partial P_1}} = G^{\text{op}}$ が成り立つから、 $\forall e \in E(G)$ に対して、 e の分岐 R_e^i がただ 1 つ存在する。このとき、層状化された多面体 $(P, P^{(1)})$ の領域を

$$\text{Reg}(P) := (\text{Reg}(P_0) \setminus \text{Reg}(G)) \cup (\text{Reg}(P_1) \setminus \text{Reg}(G^{\text{op}})) \cup \{R_e := R_e^0 \cup R_e^1\}_{e \in E}$$

層状化された多面体 P_0, P_1 の向きは G 上で整合的だから、 P の向きを一意的に誘導する。このように構成された多面体分割 $(P, P^{(1)})$ について

$$\begin{aligned} |M_1 \circ M_0 \setminus P| &= (|M_0 \setminus P_0| - |\Sigma \setminus G|) + (|M_1 \setminus P_1| - |\Sigma \setminus G^{\text{op}}|) + |\Sigma \setminus G| \\ &= |M_0 \setminus P_0| + |M_1 \setminus P_1| - |\Sigma \setminus G| \end{aligned} \quad (3.8.6)$$

が成り立つ。さらに、勝手な境界付き彩色 $\Gamma: \text{Reg}(P) \rightarrow \text{Simp}(\mathcal{C})$ は

- G, G^{op} 上の境界条件 $\{\Gamma(R_e)\}_{e \in E(G)}$
- 4 つ組 $(G^{\text{op}} \cup G, P_0, P_0^{(1)}, \{x_e^0\} \cup \{\Gamma(R_e)\})$ の境界付き彩色

$$\Gamma_0 := \Gamma|_{(\text{Reg}(P_0) \setminus \text{Reg}(G)) \cup \{R_e\}}: \text{Reg}(P_0) \rightarrow \text{Simp}(\mathcal{C})$$

- 4 つ組 $(G^{\text{op}} \cup G_1, P_1, P_1^{(1)}, \{\Gamma(R_e)\} \cup \{x_e^1\})$ の境界付き彩色

$$\Gamma_1 := \Gamma|_{(\text{Reg}(P_1) \setminus \text{Reg}(G^{\text{op}})) \cup \{R_e\}}: \text{Reg}(P_1) \rightarrow \text{Simp}(\mathcal{C})$$

を定め、

$$\prod_{R \in \text{Reg}(P)} \dim(\Gamma(R)) = \frac{\prod_{R_0 \in \text{Reg}(P_0)} \dim(\Gamma_0(R_0)) \prod_{R_1 \in \text{Reg}(P_1)} \dim(\Gamma_1(R_1))}{\prod_{e \in E(G)} \dim(\Gamma(R_e))} \quad (3.8.7)$$

が成り立つ。 $\chi(R_e) = \chi(R_e^0) + \chi(R_e^1) - 1$ に注意すると、(3.8.5), (3.8.6), (3.8.7) および Turaev-Viro 不変量の定義より

$$\begin{aligned} Z_{\text{preTV}}(M_1 \circ M_0; G_0, G_1; \{x_e^0\}, \{x_e^1\}) \\ = \frac{\sqrt{\dim(\mathcal{C})}^{|M_1 \setminus G_1|} \sqrt{\dim(\mathcal{C})}^{|M_0 \setminus G_0|}}{\prod_{e \in E(G_1)} \sqrt{\dim(x_e^1)} \prod_{e \in E(G_0)} \sqrt{\dim(x_e^0)}} \dim(\mathcal{C})^{-|M_1 \circ M_0 \setminus P|} \sum_{\substack{\Gamma: \text{Reg}(P) \rightarrow \text{Simp}(\mathcal{C}), \\ \Gamma|_{\partial P} = \{x_e^0\} \cup \{x_e^1\}}} \left(Z(\Gamma; P) \prod_{R \in \text{Reg}(P)} \dim(\Gamma(R))^{\chi(R)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{\dim(\mathcal{C})}^{|\Sigma_1 \setminus G_1|} \sqrt{\dim(\mathcal{C})}^{|\Sigma_0 \setminus G_0|}}{\prod_{e \in \mathbb{E}(G_1)} \sqrt{\dim(x_e^1)} \prod_{e \in \mathbb{E}(G_0)} \sqrt{\dim(x_e^0)}} \dim(\mathcal{C})^{-|M_0 \setminus P_0| - |M_1 \setminus P_1| + |\Sigma \setminus G|} \\
&\quad \times \sum_{\{\Gamma(R_e)\}} \sum_{\substack{\Gamma_0: \text{Reg}(P_0) \rightarrow \text{Simp}(\mathcal{C}), \Gamma_1: \text{Reg}(P_1) \rightarrow \text{Simp}(\mathcal{C}), \\ \Gamma|_{\partial P_0} = \{x_e^0\} \cup \{\Gamma(R_e)\} \quad \Gamma|_{\partial P_1} = \{\Gamma(R_e)\} \cup \{x_e^1\}}} \sum_{\substack{\prod_{R_0 \in \text{Reg}(P_0)} \dim(\Gamma_0(R))^{\chi(R_0)} \prod_{R_1 \in \text{Reg}(P_1)} \dim(\Gamma_1(R))^{\chi(R_1)} \\ \prod_{e \in \mathbb{E}(G)} \sqrt{\dim(\Gamma(R_e))} \sqrt{\dim(\Gamma(R_e))}}} \\
&\quad \times \left(Z(\Gamma_1; P_1) \circ Z(\Gamma_0; P_0) \frac{\prod_{R_0 \in \text{Reg}(P_0)} \dim(\Gamma_0(R))^{\chi(R_0)} \prod_{R_1 \in \text{Reg}(P_1)} \dim(\Gamma_1(R))^{\chi(R_1)}}{\prod_{e \in \mathbb{E}(G)} \sqrt{\dim(\Gamma(R_e))} \sqrt{\dim(\Gamma(R_e))}} \right) \\
&= \sum_{\{\Gamma(R_e)\}} \left(\frac{\sqrt{\dim(\mathcal{C})}^{|\Sigma_1 \setminus G_1|} \sqrt{\dim(\mathcal{C})}^{|\Sigma \setminus G|}}{\prod_{e \in \mathbb{E}(G_1)} \sqrt{\dim(x_e^1)} \prod_{e \in \mathbb{E}(G)} \sqrt{\dim(\Gamma(R_e))}} \dim(\mathcal{C})^{-|M_1 \setminus P_1|} \sum_{\Gamma_1} Z(\Gamma_1; P_1) \prod_{R_1 \in \text{Reg}(P_1)} \dim(\Gamma_1(R))^{\chi(R_1)} \right) \\
&\quad \circ \left(\frac{\sqrt{\dim(\mathcal{C})}^{|\Sigma \setminus G|} \sqrt{\dim(\mathcal{C})}^{|\Sigma_0 \setminus G_0|}}{\prod_{e \in \mathbb{E}(G)} \sqrt{\dim(\Gamma(R_e))} \prod_{e \in \mathbb{E}(G_0)} \sqrt{\dim(x_e^0)}} \dim(\mathcal{C})^{-|M_0 \setminus P_0|} \sum_{\Gamma_0} Z(\Gamma_0; P_0) \prod_{R_0 \in \text{Reg}(P_0)} \dim(\Gamma_0(R))^{\chi(R_0)} \right) \\
&= \sum_{\{x_e\}_{e \in \mathbb{E}(G)}} Z_{\text{preTV}}(M_1; G, G_1; \{x_e\}, \{x_e^1\}) \circ Z_{\text{preTV}}(M_0; G_0, G; \{x_e^0\}, \{x_e\})
\end{aligned}$$

が言えた。 ■

補題 3.7: state sum TQFT の離形

- 2 次元閉多様体 $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma'_0, \Sigma'_1 \in \text{Ob}(\mathbf{Bord}_{\langle 2, 3 \rangle}^{\text{SO}})$
- 3 次元境界付き多様体 $M \in \text{Hom}_{\mathbf{Bord}_{\langle 2, 3 \rangle}^{\text{SO}}}(\Sigma_0, \Sigma_1), M' \in \text{Hom}_{\mathbf{Bord}_{\langle 2, 3 \rangle}^{\text{SO}}}(\Sigma'_0, \Sigma'_1)$
- 2 次元閉多様体の多面体分割 $G \subset -\Sigma_0 \sqcup \Sigma_1, G' \subset -\Sigma'_0 \sqcup \Sigma'_1$
- 境界条件 $\{x_e \in \text{Simp}(\mathcal{C})\}_{e \in \mathbb{E}(G)}, \{x'_e \in \text{Simp}(\mathcal{C})\}_{e \in \mathbb{E}(G')}$

を与える。このとき、

$$Z_{\text{preTV}}(M \sqcup M'; G_0 \sqcup G'_0, G_1 \sqcup G'_1) = Z_{\text{preTV}}(M; G_0, G_1) \otimes_{\mathbb{K}} Z_{\text{preTV}}(M'; G'_0, G'_1)$$

が成り立つ^a。

^a 境界条件を略記した。

証明 Turaev-Viro 不变量の構成より明らか。 ■

さて、Turaev-Viro 不变量から作った (3.8.5) を TQFT

$$Z_{\text{TV}, \mathcal{C}}: \mathbf{Bord}_{\langle 2, 3 \rangle}^{\text{SO}} \longrightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$$

に昇華しよう。そのためには境界条件への依存性を無くす必要がある。素朴な方法は、 $\forall \Sigma \in \text{Ob}(\mathbf{Bord}_{\langle 2, 3 \rangle}^{\text{SO}})$ およびその多面体分割 $G \subset \Sigma$ に対して

$$\tilde{Z}_{\text{TV}, \mathcal{C}}(\Sigma, G) := \bigoplus_{\{x_e\}} \mathcal{H}(G; \{x_e\})$$

と定義することである。物理的には境界のゲージ場（トポロジカル演算子）に関する経路積分を実行することに相当する。このとき、 $\forall M \in \text{Hom}_{\mathbf{Bord}_{\langle 2, 3 \rangle}^{\text{SO}}}(\Sigma_0, \Sigma_1)$ およびその境界の多面体分割 $G_i \subset \Sigma_i$ に対して、直和の普遍性を利用して \mathbb{K} -線型写像 (3.8.5) を拡張した

$$\tilde{Z}_{\text{TV}, \mathcal{C}}(M; G_0, G_1): \tilde{Z}_{\text{TV}, \mathcal{C}}(\Sigma_0, G_0) \longrightarrow \tilde{Z}_{\text{TV}, \mathcal{C}}(\Sigma_1, G_1)$$

を考える. 具体的には, 直和の普遍性により $\forall \{x_e^0\}_{e \in E(G_0)} \in \text{Simp}(\mathcal{C})^{\times |E(G_0)|}$ および標準的包含 $\iota_{\{x_e^0\}}: \mathcal{H}(G_0; \{x_e\})$ について

$$\sum_{\{x_e^1\}_{e \in E(G_1)}} Z_{\text{preTV}}(M; G_0, G_1; \{x_e^0\}, \{x_e^1\}) = \tilde{Z}_{\text{TV}, c}(M; G_0, G_1) \circ \iota_{\{x_e^0\}}$$

を充たす $\tilde{Z}_{\text{TV}, c}(M; G_0, G_1)$ が唯一存在することが分かるのである. このとき, 補題 3.6 より

$$\tilde{Z}_{\text{TV}, c}(M_1 \circ M_0; G_0, G_1) = \tilde{Z}_{\text{TV}, c}(M_1; G, G_1) \circ \tilde{Z}_{\text{TV}, c}(M_0; G_0, G)$$

が成り立つこともわかる.

ところが, このままでは $\text{Id}_\Sigma \in \text{Hom}_{\mathbf{Bord}_{\langle 2, 3 \rangle}^{\text{SO}}}(\Sigma, \Sigma)$ に対応する線型写像が恒等写像になってくれるとは限らず, 関手になっていない. この問題を解決するためには, 境界の多面体分割依存性も無くす必要がある. そこで, 2次元閉多様体 $\Sigma \in \text{Ob}(\mathbf{Bord}_{\langle 2, 3 \rangle}^{\text{SO}})$ の任意の多面体分割 $G, G' \subset \Sigma$ に対して

$$\begin{aligned} p(G, G') &:= \tilde{Z}_{\text{TV}, c}(\text{Id}_\Sigma; G, G'): \tilde{Z}_{\text{TV}, c}(\Sigma, G) \longrightarrow \tilde{Z}_{\text{TV}, c}(\Sigma, G'), \\ Z_{\text{TV}, c}(\Sigma, G) &:= \text{Im}(p(G, G)) \end{aligned}$$

と定義する. すると $(\{Z_{\text{TV}, c}(\Sigma, G)\}_{G \subset \Sigma}, \{p(G, G')\}_{G, G' \subset \Sigma})$ は射影系を成し, 射影極限

$$Z_{\text{TV}, c}(\Sigma) := \varprojlim Z_{\text{TV}, c}(\Sigma, G) \quad (3.8.8)$$

をとることができる. 物理的には, 境界の理論の連続極限を取ることに対応する. 射影極限は極限なので, 錐 $(Z_{\text{TV}, c}(\Sigma), \{\tau_G: Z_{\text{TV}, c}(\Sigma) \xrightarrow{\cong} Z_{\text{TV}, c}(\Sigma, G)\}_{G \subset \Sigma})$ が存在する. これを用いて $\forall M \in \text{Hom}_{\mathbf{Bord}_{\langle 2, 3 \rangle}^{\text{SO}}}(\Sigma_0, \Sigma_1)$ に対して

$$Z_{\text{TV}, c}(M) := \tau_{G_1}^{-1} \circ \tilde{Z}_{\text{TV}, c}(M; G_0, G_1) \circ \tau_{G_0}: Z_{\text{TV}, c}(\Sigma_0) \longrightarrow Z_{\text{TV}, c}(\Sigma_1) \quad (3.8.9)$$

と定義する.

定義 3.31: Turaev-Viro TQFT

Turaev-Viro TQFT を, 以下のように定義する:

- $\forall \Sigma \in \text{Ob}(\mathbf{Bord}_{\langle 2, 3 \rangle}^{\text{SO}})$ に対して (3.8.8) で構成した \mathbb{K} -ベクトル空間 $Z_{\text{TV}, c}(\Sigma)$ を対応づける.
- $\forall M \in \text{Hom}_{\mathbf{Bord}_{\langle 2, 3 \rangle}^{\text{SO}}}(\Sigma_0, \Sigma_1)$ に対して (3.8.9) で構成した \mathbb{K} -線型写像 $Z_{\text{TV}, c}(M)$ を対応づける.

命題 3.8:

Turaev-Viro TQFT は TQFT

$$Z_{\text{TV}, c}: \mathbf{Bord}_{\langle 2, 3 \rangle}^{\text{SO}} \longrightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$$

である.

証明 関手性は補題 3.6 から, 強いモノイダル関手であることは補題 3.7 より従う. ■

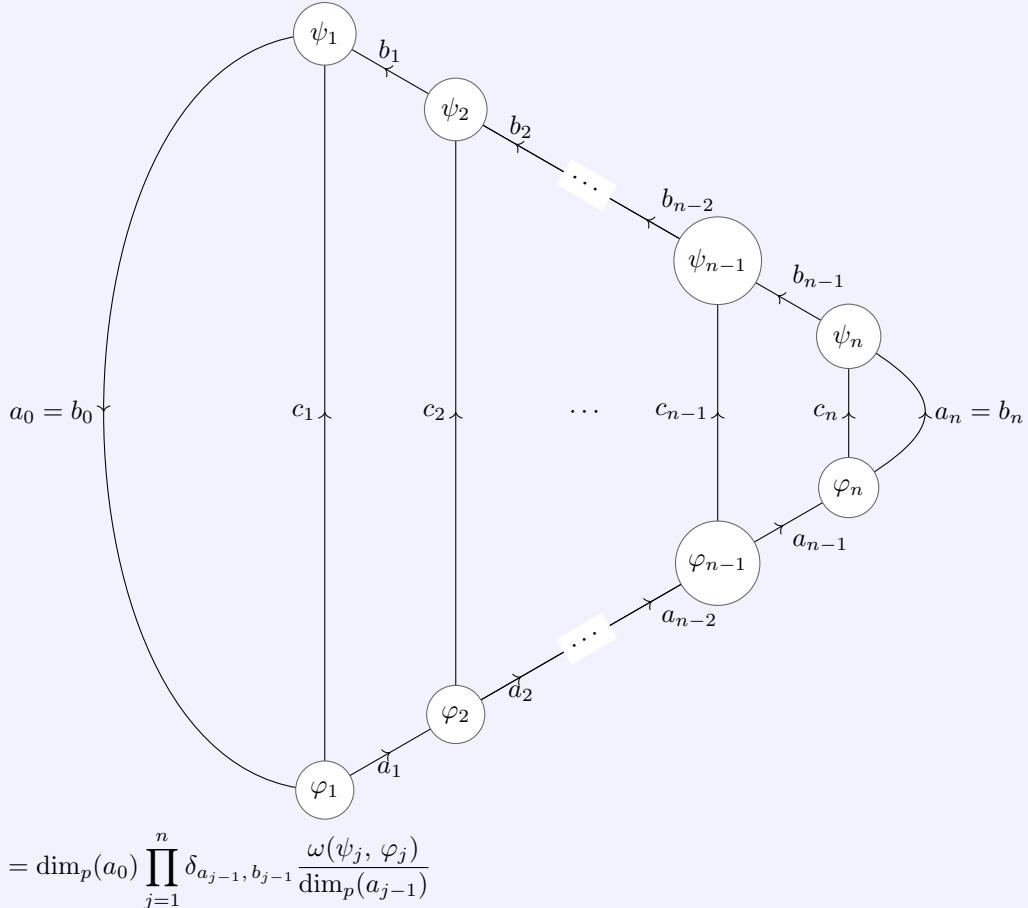
3.8.6 三角形分割の場合の計算

Turaev-Viro が最初に発見した TQFT は、多様体 M の**多面体分割** $(P, P^{(1)})$ として三角形分割をとる場合のものであった [?]. 三角形分割に対して Turaev-Viro 不変量を計算してみよう. これまでと同様に、球状フュージョン圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{coev}^L, \text{ev}^L, \text{coev}^R, \text{ev}^R)$ とその旋回構造 p を 1 つ固定する.

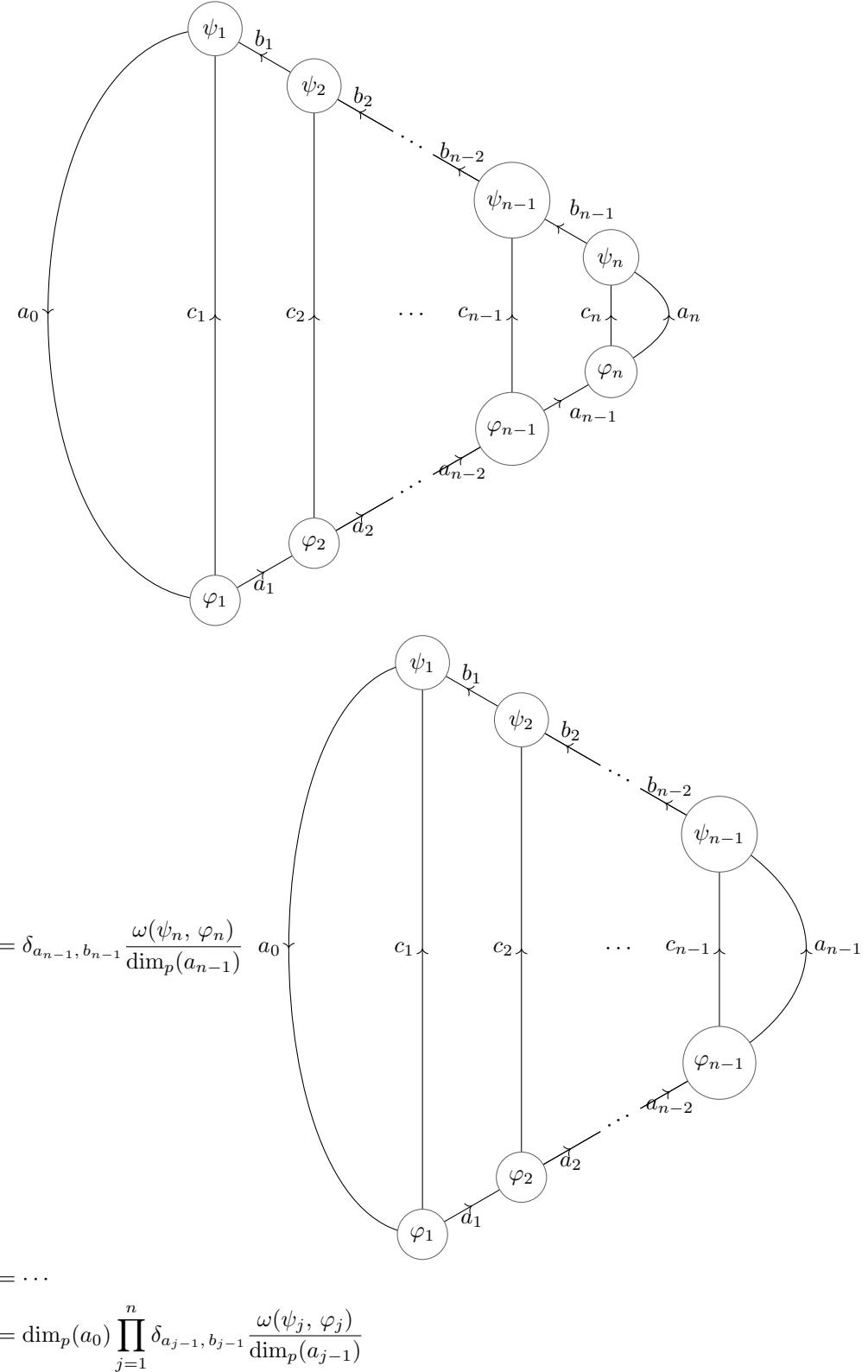
補題 3.8: 梯子型ストリング図式の計算

- $\forall a_0, a_1, \dots, a_n \in \text{Simp}(\mathcal{C})$
- $\forall b_0, b_1, \dots, b_n \in \text{Simp}(\mathcal{C})$ であって、 $b_0 = a_0, b_n = a_n$ を充たすもの
- $\forall c_1, \dots, c_n \in \text{Simp}(\mathcal{C})$
- $\forall \varphi_j \in \langle a_{j-1}^*, c_j, a_j \rangle, \forall \psi_j \in \langle b_j^*, c_j^*, b_{j-1} \rangle$

に対して、以下が成り立つ：



証明 補題 3.5-(1) を繰り返し用いることで,



と計算できる。 ■

いま、 $\forall a, b, c \in \text{Simp}(\mathcal{C})$ に対して、有限次元 \mathbb{K} -ベクトル空間 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b \otimes c) \cong \langle b, c, a^* \rangle$ の基底を 1 つ選んできて固定する。それを $\text{Basis}(a, b \otimes c)$ と書く。球状フュージョン圏の **F-シンボル** (F-symbol) とは、

- $x, y, z, u, a, b \in \text{Simp}(\mathcal{C})$
- $\varphi_{1\mu_1} \in \text{Basis}(u, a \otimes z), \varphi_{2\mu_2} \in \text{Basis}(a, x \otimes y)$
- $\varphi_{3\mu_3} \in \text{Basis}(u, x \otimes b), \varphi_{4\mu_4} \in \text{Basis}(b, y \otimes z)$

を指定することによって定まる $(F_u^{xyz})(a; \varphi_{1\mu_1}, \varphi_{2\mu_2}), (b; \varphi_{3\mu_3}, \varphi_{4\mu_4}) \in \mathbb{K}$ のことであった：

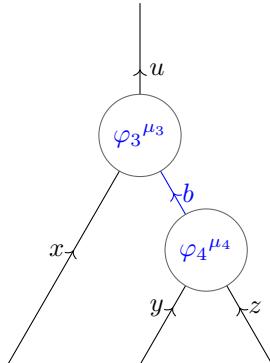
$$(F_u^{xyz})(a; \varphi_{1\mu_1}, \varphi_{2\mu_2}), (b; \varphi_{3\mu_3}, \varphi_{4\mu_4}) = \sum_{\substack{b \in \text{Simp}(\mathcal{C}) \\ \varphi_{3\mu_3} \in \text{Basis}(u, x \otimes b) \\ \varphi_{4\mu_4} \in \text{Basis}(b, y \otimes z)}} (F_u^{xyz})(a; \varphi_{1\mu_1}, \varphi_{2\mu_2}), (b; \varphi_{3\mu_3}, \varphi_{4\mu_4}) \quad (3.8.10)$$

補題 3.9: 三角形分割の絡みグラフと F-シンボル

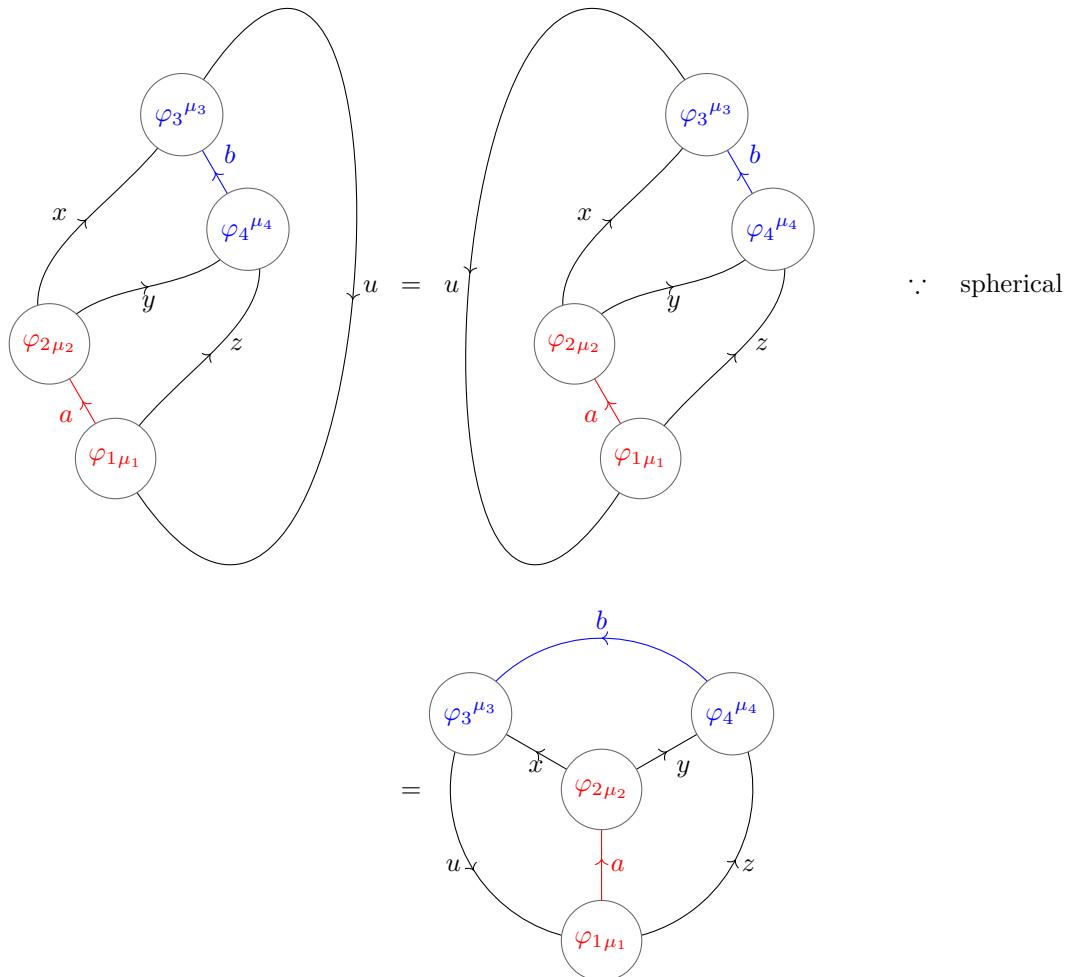
$$= \frac{1}{\dim_p(b)} (F_u^{xyz})(a; \varphi_{1\mu_1}, \varphi_{2\mu_2}), (b; \varphi_{3\mu_3}, \varphi_{4\mu_4})$$

ただし、 $\varphi_{3\mu_3} \in \text{Basis}(x \otimes b, u)$, $\varphi_{4\mu_4} \in \text{Basis}(y \otimes z, b)$ はそれぞれ $\varphi_{3\mu_3} \in \text{Basis}(u, x \otimes b)$, $\varphi_{4\mu_4} \in \text{Basis}(b, y \otimes z)$ の、ペアリング ω に関する双対基底である。

証明 式 (3.8.10) のストリング図式の上から



を合成してトレースをとると、左辺は



と計算できる。一方右辺は、補題 3.8 から

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{c \in \text{Simp}(\mathcal{C}) \\ \varphi_{3\nu_3} \in \text{Basis}(u, x \otimes c) \\ \varphi_{4\nu_4} \in \text{Basis}(c, y \otimes z)}} (F_u^{xyz})(\mathbf{a}; \varphi_{1\mu_1}, \varphi_{1\mu_1}), (\mathbf{c}; \varphi_{3\nu_3}, \varphi_{4\nu_4}) \\
 & \quad \begin{array}{c} \text{Diagram: } u \text{ is a large oval containing } \varphi_{3^{\mu_3}}, \varphi_{4^{\mu_4}}, \varphi_{4\nu_4}, \varphi_{3\nu_3}. \text{ Edges: } \varphi_{3^{\mu_3}} \xrightarrow{b} \varphi_{4^{\mu_4}}, \varphi_{4^{\mu_4}} \xrightarrow{y} \varphi_{4\nu_4}, \varphi_{4\nu_4} \xrightarrow{z} \varphi_{3\nu_3}, \varphi_{3\nu_3} \xrightarrow{c} \varphi_{3^{\mu_3}}. \end{array} \\
 = & \sum_{\substack{c \in \text{Simp}(\mathcal{C}) \\ \varphi_{3\nu_3} \in \text{Basis}(u, x \otimes c) \\ \varphi_{4\nu_4} \in \text{Basis}(c, y \otimes z)}} (F_u^{xyz})(\mathbf{a}; \varphi_{1\mu_1}, \varphi_{1\mu_1}), (\mathbf{c}; \varphi_{3\nu_3}, \varphi_{4\nu_4}) \\
 & \quad \begin{array}{c} \text{Diagram: } u \text{ is a large oval containing } \varphi_{3^{\mu_3}}, \varphi_{4^{\mu_4}}, \varphi_{4\nu_4}, \varphi_{3\nu_3}. \text{ Edges: } \varphi_{3^{\mu_3}} \xrightarrow{b} \varphi_{4^{\mu_4}}, \varphi_{4^{\mu_4}} \xrightarrow{y} \varphi_{4\nu_4}, \varphi_{4\nu_4} \xrightarrow{z} \varphi_{3\nu_3}, \varphi_{3\nu_3} \xrightarrow{c} \varphi_{3^{\mu_3}}. \end{array} \\
 = & \sum_{\substack{c \in \text{Simp}(\mathcal{C}) \\ \varphi_{3\nu_3} \in \text{Basis}(u, x \otimes c) \\ \varphi_{4\nu_4} \in \text{Basis}(c, y \otimes z)}} (F_u^{xyz})(\mathbf{a}; \varphi_{1\mu_1}, \varphi_{1\mu_1}), (\mathbf{c}; \varphi_{3\nu_3}, \varphi_{4\nu_4}) \dim_p(u) \delta_{\mathbf{c}, b} \frac{\delta_{\nu_3, \mu_3} \delta_{\nu_4, \mu_4}}{\dim_p(u) \dim_p(b)} \\
 = & \frac{1}{\dim_p(b)} (F_u^{xyz})(\mathbf{a}; \varphi_{1\mu_1}, \varphi_{2\mu_2}), (\mathbf{b}; \varphi_{3\mu_3}, \varphi_{4\mu_4})
 \end{aligned}$$

と計算できるので、示された。 ■