# 第 1 章

# 層状化空間・因子化ホモロジー

[?], [?] のレビュー

## 1.1 conically smooth な層状化空間

### 1.1.1 層状化空間

**定義 1.1: 半順序集合の位相**

$(P, \leq)$ を半順序集合とする．$P$ 上の位相 $\mathscr{O}_{\leq} \subset 2^P$ を以下で定義する：

$$U \in \mathscr{O}_{\leq} \overset{\text{def}}{\iff} \forall x \in U, \forall y \in P, \left[ x \leq y \implies y \in U \right]$$

実際，空集合の定義から $\emptyset \in \mathscr{O}_{\leq}$ であり，$\forall U_1, U_2 \in \mathcal{O}_{\leq}$ に対して $x \in U_1 \cap U_2$ であることは

$$\forall y \in P, \ x \leq y \implies y \in U_1 \text{ かつ } y \in U_2$$

と同値なので $U_1 \cap U_2 \in \mathscr{O}_{\leq}$ であり，さらに勝手な開集合族 $\left\{ U_\lambda \in \mathscr{O}_{\leq} \right\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ は

$$\exists \alpha \in \Lambda, \ \forall y \in P, \ x \leq y \implies y \in U_\alpha \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

と同値であるから $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathscr{O}_{\leq}$ であり，$\mathscr{O}_{\leq}$ は集合 $P$ の位相である．

**【例 1.1.1】$[n]$ の位相**

半順序集合 $[2] \coloneqq \{0 \leq 1 \leq 2\}$ を考える．このとき，位相 $\mathscr{O}_{\leq}$ とは

$$\mathscr{O}_{\leq} = \left\{ \emptyset, \{2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\} \right\}$$

のことである．同様に，半順序集合 $[n] \coloneqq \{0 \leq 1 \leq \cdots \leq n\}$ に対して

$$\mathscr{O}_{\leq} = \left\{ \emptyset, \{n\}, \{n-1, n\}, \dots, \{0, \dots, n\} \right\}$$

が成り立つ．

**定義 1.2: 層状化空間・層状化写像**

$(P, \le)$ を半順序集合とし，定義 1.1 の位相を入れて位相空間にする．
このとき，位相空間 $X$ が ***P*-層状化**されている ($P$-stratified) とは，連続写像 $s\colon X \longrightarrow P$ が存在することを言う．組 $(X,\, s\colon X \longrightarrow P)$ のことを ***P*-層状化空間** ($P$-stratified space) と呼ぶ．また，$i \in P$ の逆像 $\boldsymbol{X_i} \coloneqq s^{-1}(\{i\}) \subset X$ のことを ***i*-層** ($i$-strata) と呼ぶ．

層状化空間 $(X,\, s\colon X \longrightarrow P)$, $(X',\, s'\colon X' \longrightarrow P')$ の間の**層状化写像** (stratified map) とは，連続写像の組み $(f\colon X \longrightarrow X',\, \tilde{f}\colon P \longrightarrow P')$ であって以下の図式を可換にするもののこと：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & X' \arrow[d, "s'"] \\ P \arrow[r, "\tilde{f}"'] & P' \end{tikzcd}$$

**【例 1.1.2】$[n]$-層状化空間**

半順序集合 $[n] \coloneqq \{0 \le \cdots \le n\}$ に対して【例 1.1.1】の位相を入れる．まず，

$$X_0 = s^{-1}\bigl([n] \setminus \{1,\, \dots,\, n\}\bigr)$$

でかつ $\{1,\, \dots,\, n\}$ は $[n]$ の開集合であるから，$s$ の連続性から $X$ の部分空間 $X_0 \subset X$ は閉集合だとわかる．さらに

$$\begin{aligned} X_0 \cup X_1 &= s^{-1}\bigl([n] \setminus \{2,\, \dots,\, n\}\bigr), \\ X_0 \cup X_1 \cup X_2 &= s^{-1}\bigl([n] \setminus \{3,\, \dots,\, n\}\bigr), \\ &\vdots \\ X_0 \cup \cdots \cup X_n &= X \end{aligned}$$

が成り立つことから，$s$ の連続性より $X$ の部分空間 $X_0 \cup \cdots \cup X_{m \le n}$ は閉集合だと分かる．

**【例 1.1.3】CW 複体**

CW 複体 $X$ を与える．$X_{\le k}$ を $X$ の $k$-骨格とするとき，$X_k \setminus X_{k-1}$ を $k \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ に写す写像 $s\colon X \longrightarrow \mathbb{Z}_{\ge 0}$ は $X$ の層状化を与える．

直観的には，層状化空間とは defect 付き位相多様体の一般化である．特に $X$ を位相多様体とするとき，$[n]$-層状化空間 $(X,\, s\colon X \longrightarrow [n])$ の $i$-層 $X_i$ とは，多様体 $X$ 上の余次元 $d - i$ の defect を全て集めてきたものだと見做せる．

**定義 1.3: 層状化開埋め込み**

層状化写像 $(f, \tilde{f})\colon (X, s\colon X \longrightarrow P) \longrightarrow (X', s'\colon X' \longrightarrow P')$ が**層状化開埋め込み** (stratified open embedding) であるとは，以下の 2 条件を充たすことを言う：

(1) 連続写像 $f\colon X \longrightarrow X'$ は位相的開埋め込みである[a]

(2) $\forall p \in P$ に対して，$f$ の $p$-strata への制限[b]

$$f|_{X_p}\colon X_p \longrightarrow X'_{\tilde{f}(p)}$$

は位相的開埋め込みである．

---

[a] i.e. $f\colon X \longrightarrow f(X)$ が同相写像かつ $f(X) \subset Y$ が開集合

[b] 層状化写像の定義に登場する図式の可換性より，$\forall x \in X_p$ に対して $s'\bigl(f(x)\bigr) = s' \circ f(x) = \tilde{f} \circ s(x) = \tilde{f}(p)$，i.e. $f(x) \in s'^{-1}\bigl(\{\tilde{f}(p)\}\bigr) = X'_{\tilde{f}(p)}$ が分かる．

**!** 以下では混乱が生じにくい場合，層状化空間 $(X, s\colon X \longrightarrow P)$ のことを $(X \xrightarrow{s} P)$ や $(X \to P)$ と略記する．さらに，層状化写像 $(f, \tilde{f})\colon (X, s\colon X \longrightarrow P) \longrightarrow (X', s'\colon X' \longrightarrow P')$ のことを $f\colon (X \to P) \longrightarrow (X' \to P')$ と略記し，連続写像 $\tilde{f}\colon P \longrightarrow P'$ のことも $f$ と書く場合がある．

圏 **StTop** を，

- 第 2 可算な Hausdorff 空間であるような層状化空間を対象とする
- 層状化開埋め込みを射とする

ことで定義する．

### 1.1.2 $C^0$ 級層状化空間

**定義 1.4: コーン**

層状化空間 $(X \xrightarrow{s} P)$ を与える．$X$ の**コーン** (cone) とは，以下のようにして構成される層状化空間 $\bigl(\mathsf{C}(X), \mathsf{C}(s)\colon \mathsf{C}(X) \longrightarrow \mathsf{C}(P)\bigr)$ のこと：

- 位相空間 $\mathsf{C}(X)$ を，押し出し位相空間

$$\mathsf{C}(X) \coloneqq \{\mathrm{pt}\} \amalg_{\{0\}\times X} (\mathbb{R}_{\ge 0} \times X)$$

と定義する：

$$\begin{tikzcd} \{0\}\times X \arrow[r, hook, "\{0\}\times\mathrm{id}_X"] \arrow[d] & \mathbb{R}_{\ge 0}\times X \arrow[d] \\ \{\mathrm{pt}\} \arrow[r, hook] & \{\mathrm{pt}\} \amalg_{\{0\}\times X} (\mathbb{R}_{\ge 0}\times X) \end{tikzcd}$$

- 半順序集合 $\mathsf{C}(P)$ を，$P$ に最小の要素 $-\infty$ を付け足すことで定義する．これは半順序集合の

圏における押し出し

$$\mathsf{C}(P) := \{-\infty\} \amalg_{\{0\}\times P} \big([1] \times P\big)$$

である．

- 連続写像

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{\geq 0} \times X &\longrightarrow [1] \times P, \\ (t,\, x) &\longmapsto \begin{cases} \big(0,\, s(x)\big), & t = 0, \\ \big(1,\, s(x)\big), & t > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

が誘導する連続写像 $\mathsf{C}(X) \longrightarrow \mathsf{C}(P)$ を $\mathsf{C}(s)$ と書く．

位相空間の圏における押し出しの公式から，位相空間 $\mathsf{C}(X)$ とは

$$\begin{aligned} &i_1 \colon \{0\} \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \times X,\ x \longmapsto (0,\, x), \\ &i_2 \colon \{0\} \times X \longrightarrow \{\mathrm{pt}\},\ x \longmapsto \mathrm{pt} \end{aligned}$$

とおいたときのコイコライザ

$$\{0\} \times X \underset{i_2}{\overset{i_1}{\rightrightarrows}} \{\mathrm{pt}\} \sqcup (\mathbb{R}_{\geq 0} \times X) \xrightarrow{\ q\ } \mathsf{C}(X),$$

i.e. 商位相空間

$$\frac{\mathbb{R}_{\geq 0} \times X}{i_1(x) \sim i_2(x)} = \frac{\mathbb{R}_{\geq 0} \times X}{\{0\} \times X}$$

のこと．従って $\mathsf{C}(s) : \mathsf{C}(X) \longrightarrow \mathsf{C}(P)$ とは，連続写像[*1]

$$\frac{\mathbb{R}_{\geq 0} \times X}{\{0\} \times X} \longrightarrow \mathsf{C}(P),\ [(t,\, x)] \longmapsto \begin{cases} -\infty, & t = 0 \\ s(x), & t > 0 \end{cases}$$

のことである．

! 以下では，混乱の恐れがない限り層状化空間 $(X \xrightarrow{s} P)$ のコーンを $\mathsf{C}\Big(X \xrightarrow{s} P\Big)$ と略記する．

*1 $\mathsf{C}(P)$ の位相 $\mathscr{O}_{\mathsf{C}(P)}$ は，$P$ の位相 $\mathscr{O}_P$ に 1 つの開集合 $\{-\infty\} \cup P$ を加えたものである．$\forall U \in \mathscr{O}_P$ に対して $\mathsf{C}(s)^{-1}(U) = \mathbb{R}_{>0} \times s^{-1}(U) \in \mathscr{O}_{\mathsf{C}(X)}$ で，かつ $\mathsf{C}(s)^{-1}(\{-\infty\} \cup P) = \mathsf{C}(X) \in \mathscr{O}_{\mathsf{C}(X)}$ なので $\mathsf{C}(s)$ は連続である．

**定義 1.5: $C^0$ 級層状化空間**

以下を充たす **StTop** の最小の充満部分圏を $\mathbf{Snglr}^{C^0}$ と書き，圏 $\mathbf{Snglr}^{C^0}$ の対象を $\boldsymbol{C^0}$ **級層状化空間** ($C^0$ stratified space) と呼ぶ：

**(Snglr-1)** $(\emptyset \to \emptyset) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$

**(Snglr-2)**

$$(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}) \text{ かつ } X,\, P \text{ が位相空間としてコンパクト}$$
$$\implies \quad \mathsf{C}\,(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$$

**(Snglr-3)**

$$(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}) \quad \implies \quad (X \times \mathbb{R} \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$$ [a]

**(Snglr-4)**

$$(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}) \text{ かつ } \mathrm{Hom}_{\mathbf{StTop}}\big((U \to P_U),\, (X \to P)\big) \neq \emptyset$$
$$\implies \quad (U \to P_U) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$$

**(Snglr-5)**

$(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{StTop})$ が開被覆 $\big\{(U_\lambda \to P_\lambda) \longrightarrow (X \to P)\big\}_{\lambda \in \Lambda}$ [b] を持ち，かつ $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して $(U_\lambda \to P_\lambda) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$

$$\implies \quad (X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$$

---

[a] $X \times \mathbb{R}$ の層状化は，連続写像 $X \times \mathbb{R} \longrightarrow X,\ (x,\, t) \longmapsto x$ を前もって合成することにより定める．

[b] i.e. $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, $\{P_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が，それぞれ位相空間 $X$, $P$ の開被覆を成す．

**【例 1.1.4】位相多様体は $C^0$ 級層状化空間**

**(Snglr-1)** より，$* \coloneqq \mathsf{C}\,(\emptyset \to \emptyset) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ である．**(Snglr-3)** より，$\forall n \geq 0$ に対して $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n \to [0]) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ であることが帰納的に分かる．$\mathbb{R}^n$ の任意の開集合 $U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ に対して，

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathbb{R}^n \arrow[d] \\ {[0]} \arrow[r, "="'] & {[0]} \end{tikzcd}$$

は層状化埋め込みであり，従って **(Snglr-4)** より $U \coloneqq (U \to [0]) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ が分かる．以上の考察と **(Snglr-5)** を併せて，任意の位相多様体 $M$ は[a]圏 $\mathbf{Snglr}^{C^0}$ の対象である．

---

[a] より正確には，$M$ を層状化空間 $(M \to [0])$ と同一視している．

【例 1.1.4】の意味で，$C^0$ 級層状化空間は位相多様体の一般化と見做せる．しかしまだそこには $C^\infty$ 構造を一般化した構造は入っておらず，$C^\infty$ 多様体の一般化とは見做せない．

### 1.1.3 $C^0$ basic

**定義 1.6: $C^0$ basic**

$\boldsymbol{C^0}$ 級層状化空間 $(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ が $\boldsymbol{C^0}$**-basic** であるとは，ある $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ およびコンパクトな $\boldsymbol{C^0}$ 級層状化空間 $(Z \to Q) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ が存在して $(X \to P) = \bigl(\mathbb{R}^n \to [0]\bigr) \times \mathsf{C}\,(Z \to Q)$ が成り立つことを言う．

いま，$C^0$ basic な $(U \to P_U) = (\mathbb{R}^n \to [0]) \times \mathsf{C}\,(Z \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ を 1 つとる．コーンの定義から，$U$ の点を $(v,\,[t,\,z]) \in \mathbb{R}^n \times \frac{\mathbb{R}_{\geq 0} \times Z}{\{0\} \times Z}$ と表示することができる．この表示の下で自己同相

$$
\begin{aligned}
\gamma\colon \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^n \times \mathsf{C}\,(Z) &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^n \times \mathsf{C}\,(Z)\,, \\
\bigl(t,\,(v,\,p),\,[s,\,z]\bigr) &\longmapsto \bigl(t,\,(tv+p,\,p),\,[ts,\,z]\bigr)
\end{aligned}
\tag{1.1.1}
$$

を考える[*2]．

さらに，もう 1 つの $C^0$ basic な $(U' \to P_{U'}) = (\mathbb{R}^{n'} \to [0]) \times \mathsf{C}\,(Z' \to P') \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ および $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}}\bigl((U \to P_U),\,(U' \to P_{U'})\bigr)$ をとる．ただし，$f$ はコーンポイントをコーンポイントへ写す，i.e. $\forall u \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(u,\,\mathrm{pt}) \in \mathbb{R}^{n'} \times \{\mathrm{pt}\}$ が成り立つことを仮定する．$f|_{\mathbb{R}^n}\colon \mathbb{R}^n \times \{\mathrm{pt}\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n'} \times \{\mathrm{pt}\}$ を $f$ のコーンポイントへの制限として，

$$
\begin{aligned}
f_\Delta\colon \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^n \times \mathsf{C}\,(Z) &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \times T\mathbb{R}^{n'} \times \mathsf{C}\,(Z')\,, \\
\bigl(t,\,v,\,p,\,[s,\,z]\bigr) &\longmapsto \bigl(t,\,f|_{\mathbb{R}^n}(v),\,f(p,\,[ts,\,z])\bigr)
\end{aligned}
$$

とおこう．

**【例 1.1.5】**

$Z = Z' = \emptyset$ のとき，$f$ とは単に連続関数 $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n'}$ のことである．このとき，

$$
\begin{aligned}
(\gamma^{-1} \circ f_\Delta \circ \gamma)(t,\,v,\,p) &= \gamma^{-1} \circ f_\Delta(t,\,tv+p,\,p) \\
&= \gamma^{-1}\bigl(t,\,f(tv+p),\,f(p)\bigr) \\
&= \left(t,\,\frac{f(tv+p) - f(p)}{t},\,f(p)\right)
\end{aligned}
$$

と計算できるため，$f$ が $C^1$ 級であることと $\forall (v,\,p) \in T\mathbb{R}^n$ に対して $t \to +0$ の極限，i.e. $v$ に沿った片側方向微分が存在することは同値である．

**【例 1.1.5】**をもとに，$C^0$ basic な $C^0$ 級層状化空間の間の層状化開埋め込みの **conically smoothness** を定義する．$C^\infty$ 多様体の $C^\infty$ 構造の定義においては，チャート $(U,\,\varphi\colon \mathbb{R}^n \to U)$, $(V,\,\psi\colon \mathbb{R}^n \to V)$ の間の変換関数 $\psi^{-1} \circ \varphi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が $C^\infty$ 級であることを要請した．次の小節で **conically smooth structure** の定義を行うが，その際にチャートに対応するものは **basic** $U = \mathbb{R}^n \times \mathsf{C}\,(Z)$ から着目している $C^0$-級層状化空間 $X$ への層状化開埋め込み $\varphi\colon U \hookrightarrow X$ であり，概ね[*3]2 つのチャート $\varphi\colon U \hookrightarrow X$, $\psi\colon V \hookrightarrow X$ の間の変換関数 $\psi^{-1} \circ \varphi\colon U \longrightarrow V$ に対して conically smooth (along $\mathbb{R}^n$) であることを要請する．

---

[*2] 接束 $T\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^{2n}$ と微分同相である．[?, p.23] の記法に合わせて底空間 $\mathbb{R}^n$ の点を $p$，$p$ 上のファイバーの元を $v$ としたとき $(v,\,p) \in T\mathbb{R}^n$ と書いた．命題??の記法と順番が逆なので注意．

[*3] コーンポイントをコーンポイントに写さない変換関数も存在しうるので，これだけではいけない．

**定義 1.7: $\mathbb{R}^n$ に沿って conically smooth**

- $C^0$ basic な $(U \to P_U) = (\mathbb{R}^n \to [0]) \times \mathsf{C}(Z \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$
- $C^0$ basic な $(U' \to P_{U'}) = (\mathbb{R}^{n'} \to [0]) \times \mathsf{C}(Z' \to P') \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$
- $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}}\big((U \to P_U), (U' \to P_{U'})\big)$ であって，コーンポイントを保存するもの

を与える．このとき，$f$ が $\boldsymbol{\mathbb{R}^n}$ **に沿って** $C^1$ **級** ($C^1$ along $\mathbb{R}^n$) であるとは，以下の図式を可換にする連続写像

$$\tilde{D}f \colon \mathbb{R}_{\geq 0} \times T\mathbb{R}^n \times \mathsf{C}(Z) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \times T\mathbb{R}^{n'} \times \mathsf{C}(Z')$$

が存在することを言う[a]：

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}_{\geq 0} \times T\mathbb{R}^n \times \mathsf{C}(Z) \arrow[r, dashed, "\tilde{D}f"] & \mathbb{R}_{\geq 0} \times T\mathbb{R}^{n'} \times \mathsf{C}(Z') \\
\mathbb{R}_{> 0} \times T\mathbb{R}^n \times \mathsf{C}(Z) \arrow[u] \arrow[r, "\gamma^{-1}\circ f_{\triangle}\circ\gamma"'] & \mathbb{R}_{> 0} \times T\mathbb{R}^{n'} \times \mathsf{C}(Z') \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

[a] 写像 $\gamma^{-1} \circ f_{\triangle} \circ \gamma$ の連続性から，拡張 $\tilde{D}f$ は存在すれば一意かつ連続である．

このような拡張が存在するとき，第一変数を $t = 0$ に制限して得られる連続写像を

$$\boldsymbol{Df} \colon T\mathbb{R}^n \times \mathsf{C}(Z) \longrightarrow T\mathbb{R}^{n'} \times \mathsf{C}(Z')$$

と書く．$f$ が $\boldsymbol{\mathbb{R}^n}$ **に沿って** $C^r$ **級**であるとは，$Df$ が $\mathbb{R}^n$ に沿って $C^{r-1}$ 級であることを言う．$f$ が $\boldsymbol{\mathbb{R}^n}$ **に沿って conically smooth** であるとは，$\forall r \geq 1$ について $C^r$ 級であることを言う．

### 1.1.4 conically smooth な層状化空間

次に行うべきは，与えられた $\boldsymbol{C^0}$ 級層状化空間 $(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ の上の **conically smooth structure** i.e. 変換関数が conically smooth であるような**極大アトラス**を定義することである．この手続きは，次で定義する次元と深さに関する帰納法によって構成される．

**定義 1.8: 被覆次元**

$X$ を位相空間とする．以下の条件を充たす最小の $d \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$ のことを（存在すれば）$X$ の**被覆次元** (covering dimension) と呼び，$\boldsymbol{\dim X}$ と書く：

**(covering)**

$X$ の任意の開被覆 $\mathscr{U}$ に対して，十分細かい細分 $\mathscr{V}_{\mathscr{U}} \prec \mathscr{U}$ が存在して，任意の互いに異なる $\forall m > d+1$ 個の開集合 $V_1, \ldots, V_m \in \mathscr{V}_{\mathscr{U}}$ の共通部分が空になるようにできる．特に，$\emptyset$ の被覆次元は $-1$ と定義する．

---

点 $x \in X$ における**被覆次元**を以下で定義する：

$$\dim_x X \coloneqq \inf \left\{ \dim U \geq -1 \;\middle|\; x \in U \underset{\text{open}}{\subset} X \right\}$$

**定義 1.9: 次元と深さ**

空でない $\boldsymbol{C^0}$ 級層状化空間 $(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ を与える．

- $(X \to P)$ の点 $x \in X$ における**局所的次元** (local dimension) とは，点 $x$ における $X$ の被覆次元 $\boldsymbol{\dim_x(X)}$ のことを言う．
- $(X \to P)$ の**次元** (dimension) とは

$$\boldsymbol{\dim(X \to P)} \coloneqq \sup_{x \in X} \dim_x(X)$$

のこと．
- $(X \xrightarrow{s} P)$ の点 $x \in X$ における**局所的深さ** (local depth) とは，

$$\boldsymbol{\mathrm{depth}_x(X \to P)} \coloneqq \dim_x(X) - \dim_x(X_{s(x)})$$

のこと．
- $(X \to P)$ の**深さ** (depth) とは，

$$\boldsymbol{\mathrm{depth}(X \to P)} \coloneqq \sup_{x \in X} \mathrm{depth}_x(X \to P)$$

のこと．ただし，$\mathrm{depth}(\emptyset) \coloneqq -1$ と定義する．

**【例 1.1.6】コーンの深さ**

$n$ 次元位相多様体 $Z$ について，定義から $\forall x \in Z$ に対して $\dim_x(Z) = n$ が成り立つ．$Z$ を**【例 1.1.4】**により $C^0$ 級層状化空間 $(Z \xrightarrow{s} [0]) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ と見做すと，これのコーン $\mathsf{C}\left(Z \xrightarrow{s} [0]\right)$ について

$$\mathrm{depth}_x\left(\mathsf{C}\left(Z \xrightarrow{s} [0]\right)\right) = \begin{cases} n+1, & x = \mathrm{pt}, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

であることがわかる．実際 $\mathsf{C}(Z)_{\mathsf{C}(s)(\mathrm{pt})} = \{\mathrm{pt}\}$ であるが，1 点からなる位相空間の被覆次元は 0 次元なので $\dim_{\mathrm{pt}}(\mathsf{C}(Z)_{\mathsf{C}(s)(\mathrm{pt})}) = 0$ である．一方，コーンポイント以外の点 $x \in \mathsf{C}(Z)$ に対して $\mathsf{C}(s)(x)$-層は $\mathsf{C}(Z)_{\mathsf{C}(s)(x)} = \mathbb{R}_{>0} \times Z \approx \mathbb{R} \times Z$ であるから，$\dim_x(\mathsf{C}(Z)_{\mathsf{C}(s)(x)}) = n+1$ と計算できる[a]．

また，$\forall(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ に対して

$$\dim\bigl((\mathbb{R}^m \to [0]) \times (X \to P)\bigr) = m + \dim\bigl(X \to P\bigr),$$
$$\mathrm{depth}\bigl((\mathbb{R}^m \to [0]) \times (X \to P)\bigr) = \mathrm{depth}\bigl(X \to P\bigr)$$

が成り立つ．従って，$C^0$ basic な $(U \to P_U) = (\mathbb{R}^n \to [0]) \times \mathsf{C}(Z \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{depth}(U \to P_U) &= \mathrm{depth}\bigl(\mathsf{C}(Z \to P)\bigr)\\ &= \dim(Z \to P) + 1\end{aligned}$$

が成り立つ．

[a] さらに，$\forall x \in \mathsf{C}(Z)$ に対して $\dim_x \mathsf{C}(Z) = n+1$ である．

次元と深さに関する帰納法を実行する前に，構成したい (1, 1)-圏を表す記号の整理をしておこう：

- conically smooth チャートの素材となる，**basic** が成す圏

$$\mathbf{Bsc}$$

  これは，$C^\infty$ 多様体の圏 **Mfld** において $\mathbb{R}^n$ $(\forall n \geq -1)$ 全体が成す充満部分圏に相当するものである．
- 与えられた $C^0$ 級層状化空間 $(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ に対して，その上に入る**極大アトラス**[*4]全体が成す集合を返す前層

$$\mathsf{Sm}\colon (\mathbf{Snglr}^{C^0})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

  この対応が前層であることの直観は，層状化開埋め込み $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}}\bigl((X \to P), (Y \to Q)\bigr)$ が与えられると，$(X \to P)$ 上の極大アトラス $\mathsf{Sm}(X \to P)$ が $(Y \to Q)$ 上の極大アトラス $\mathsf{Sm}(Y \to Q)$ を「制限」する写像 $\mathsf{Sm}(f)\colon \mathsf{Sm}(Y \to Q) \longrightarrow \mathsf{Sm}(X \to P)$ によって得られるということである．
- 深さが $k$ 以下，かつ次元が $n$ 以下であるような $C^0$ 級層状化空間全体が成す $\mathbf{Snglr}^{C^0}$ の充満部分圏を

$$\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\underbrace{\leq k}_{\text{depth}},\ \underbrace{\leq n}_{\text{dimension}}}$$

  と書く．同様に

$$\mathbf{Bsc}_{\leq k,\, \leq n}, \qquad \mathsf{Sm}_{\leq k,\, \leq n}\colon (\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k,\, \leq n})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

  と書く．

[*4] 存在するか分からないし，存在したとして一意であるとは限らない．実際，例えば $C^\infty$ 多様体の段階においてさえ $\mathbb{R}^4$ の上の極大アトラス（i.e. $C^\infty$ 構造）は非可算無限個存在する [?].

- **conically smooth な層状化空間**の圏

$$\mathbf{Snglr}$$

これを作ることが本小節の最終目標である．

帰納法により，$\forall k \geq -1$ に対して $\mathbf{Bsc}_{\leq k,\, \leq\infty}$ および $\mathsf{Sm}_{\leq k,\, \leq\infty} \colon (\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k,\, \leq\infty})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ が構成される．

**定義 1.10: 帰納法の出発点**

**(Snglr-1)** より $(\emptyset \to \emptyset) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq -1,\, \leq\infty})$ である．

(1) $\mathbf{Bsc}_{\leq -1,\, \leq\infty} := \emptyset$

(2) $\mathsf{Sm}_{\leq -1,\, \leq\infty}(\emptyset) := \{*\}$

と定義する．

**仮定 1.1: 帰納法の仮定**

与えられた $k \geq -1$ に対して以下の構成が完了していると仮定する：

(1) 圏 $\mathbf{Bsc}_{\leq k,\, \leq\infty}$

(2) 前層 $\mathsf{Sm}_{\leq k,\, \leq\infty} \colon (\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k,\, \leq\infty})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$

(3) 関手

$$\begin{aligned}
\mathbb{R} \times (\text{-}) \colon \mathbf{Bsc}_{\leq k,\, \leq\infty} &\longrightarrow \mathbf{Bsc}_{\leq k,\, \leq\infty}, \\
U &\longmapsto \mathbb{R} \times U, \\
\bigl(U \xrightarrow{f} V\bigr) &\longmapsto \bigl(\mathbb{R} \times U \xrightarrow{\mathrm{id} \times f} \mathbb{R} \times V\bigr)
\end{aligned}$$

およびそれが誘導する自然変換[a]

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k,\, \leq\infty})^{\mathrm{op}} \arrow[r, bend left=50, "\mathsf{Sm}_{\leq k,\, \leq\infty}(\text{-})"] \arrow[r, bend right=50, "\mathsf{Sm}_{\leq k,\, \leq\infty}(\mathbb{R}\times\text{-})"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \mathbf{Sets}
\end{tikzcd}$$

[a] $X$ の極大アトラス $\{U_\alpha,\, \varphi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ に対して，$\{\mathbb{R} \times U_\alpha,\, \mathrm{id} \times \varphi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ を対応づける．

**定義 1.11: 圏 $\mathbf{Bsc}_{\leq k+1,\, \leq\infty}$**

帰納法の仮定 1.1 がある $k \geq -1$ において成立しているとする．また，$C^0$ basic を $U^n_Z := (\mathbb{R}^n \to [0]) \times \mathsf{C}(Z \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ と書く．このとき，圏 $\mathbf{Bsc}_{\leq k+1,\, \leq\infty}$ を以下で定義する：

**(対象)**

$C^0$ basic [a] $U_Z^n \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}_{\leq k+1,\,\leq\infty}^{C^0})$ および，極大アトラス $\mathcal{A}_Z \in \mathsf{Sm}_{\leq k,\,\leq\infty}(Z \to P)$ の組み

$$(U_Z^n,\, \mathcal{A}_Z)$$

を対象とする．これを **basic** と呼ぶ．

**(射)**

任意の 2 つの対象 $(U_Z^n,\, \mathcal{A}_Z),\ (U_W^m,\, \mathcal{A}_W) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Bsc}_{\leq k+1,\,\leq\infty})$ に対して，以下の条件を充たす層状化開埋め込み $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}_{\leq k+1,\,\leq\infty}^{C^0}}(U_Z^n,\, U_W^m)$ を射とする：

**$f$ がコーンポイントを保存しない場合**

ある層状化開埋め込み $f_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}_{\leq k+1,\,\leq\infty}^{C^0}}\big(U_Z^n,\, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \times W\big)$ が存在して

$$f\colon U_Z^n \xrightarrow{f_0} \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}_{>0} \times W) \hookrightarrow U_W^m = \mathbb{R}^m \times \mathsf{C}(W)$$

と書けて，かつ $(U_Z^n,\, f_0) \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \times W} \in \mathsf{Sm}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \times W)$

**$f$ がコーンポイントを保存する場合**

$f$ は $\mathbb{R}^n$ に沿って conically smooth であって，かつ $Df\colon \mathbb{R}^n \times U_Z^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \times U_W^m$ が単射であり，かつ

$$\mathcal{A}_{f^{-1}(U_W^m \setminus \mathbb{R}^m)} = \mathsf{Sm}_{\leq k,\,\leq\infty}\big(f|_{f^{-1}(U_W^m \setminus \mathbb{R}^m)}\big)\big(\mathcal{A}_{U_W^m \setminus \mathbb{R}^m}\big)$$

を充たす[b]．ただし，$U_W^m \setminus \mathbb{R}^m \coloneqq U_W^m \setminus (\mathbb{R}^m \times \{\mathrm{pt}\}) = \mathbb{R}^{m+1} \times W$ と略記した．

---

[a] depth の定義から $\mathrm{depth}(Z \to P) \leq \dim(Z \to P)$ である．故に【例 1.1.6】から，$\mathrm{depth}(Z \to P) \leq \dim(Z \to P) = \mathrm{depth}\, U_Z^n - 1 \leq k$ であること，i.e. $(Z \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}_{\leq k,\,\leq\infty}^{C^0})$ が分かる．

[b] ここで帰納法の仮定 1.1-(3) を暗に使っている．

**定義 1.12: 前層 $\mathsf{Sm}_{\leq k+1,\,\leq\infty}$**

帰納法の仮定 1.1 がある $k \geq -1$ において成立しているとする．さらに定義 1.11 によって $\mathbf{Bsc}_{\leq k+1,\,\leq\infty}$ が完成しているとする．

- $C^0$ 級層状化空間 $\forall (X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}_{\leq k+1,\,\leq\infty}^{C^0})$ に対して，$X \to P$ の**アトラス** (atlas) を族

$$\mathcal{A} \coloneqq \Big\{\big(U_\alpha \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Bsc}_{\leq k+1,\,\leq\infty}),\, \varphi_\alpha\colon U_\alpha \hookrightarrow (X \to P)\big)\Big\}_{\alpha\in\Lambda} \in \mathsf{Sm}_{\leq k+1,\,\leq\infty}(X \to P)$$

であって以下の条件を充たすものとして定義する：

**(Atlas-1)**

$\mathcal{A}$ は $(X \to P)$ の開被覆である．

**(Atlas-2)**

$\forall \alpha,\, \beta \in \Lambda$ および $\forall x \in \varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta)$ に対して，圏 $\mathbf{Snglr}_{\leq k+1,\,\leq\infty}^{C^0}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd} \exists W \arrow[r, hook, "f_\beta"] \arrow[d, hook, "f_\alpha"'] & U_\beta \arrow[d, hook, "\varphi_\beta"] \\ U_\alpha \arrow[r, hook, "\varphi_\alpha"'] & X \end{tikzcd}$$

が存在して $x \in \varphi_\alpha \circ f_\alpha(W) = \varphi_\beta \circ f_\beta(W)$ を充たす．ただし，可換図式中の赤色の部分は全て圏 $\mathbf{Bsc}_{\le k+1,\,\le\infty}$ の対象および射からなる．

アトラス $\mathcal{A}$ の元 $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ のことを**チャート** (chart) と呼ぶ．

- $C^0$ 級層状化空間 $\forall (X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\le k+1,\,\le\infty})$ の 2 つのアトラス $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ が**同値**であるとは，$\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ が $(X \to P)$ のアトラスであることを言う．これは $(X \to P)$ のアトラス全体の集合の上に同値関係を定める[a]．$(X \to P)$ の**極大アトラス** (maximal atlas) とは，この同値関係によるアトラス $\mathcal{A}$ の同値類 $[\mathcal{A}]$ のことを言う．
- 前層

$$\mathsf{Sm}_{\le k+1,\,\le\infty} \colon (\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\le k+1,\,\le\infty})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を以下のように定義する：

**(対象)**

任意の $C^0$ 級層状化空間 $(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\le k+1,\,\le\infty})$ に対して

$$\mathsf{Sm}_{\le k+1,\,\le\infty}(X \to P) \coloneqq \left\{\, [\mathcal{A}] \;\middle|\; \mathcal{A} \text{ is an atlas of } (X \to P) \,\right\}$$

**(射)**

任意の層状化開埋め込み $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}_{\le k+1,\,\le\infty}}\bigl((X \to P), (Y \to Q)\bigr)$ に対して，$f$ によるアトラスの引き戻しを対応付ける．

[a] 同値関係であることの証明は [**?**, Lemma 3.2.11.] を参照．

以上の帰納法をまとめて，conically smooth な層状化空間と層状化開埋め込みの圏 $\mathbf{Snglr}$ を得る．

**定義 1.13: 圏 Snglr**

- basic のなす圏 $\mathbf{Bsc}$ を以下で定義する：

$$\mathbf{Bsc} \coloneqq \bigcup_{k \geq -1} \mathbf{Bsc}_{\leq k,\, \leq \infty}$$

- 極大アトラスの集合を与える関手 $\mathsf{Sm}\colon (\mathbf{Snglr}^{C^0})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ を以下の右 Kan 拡張として定義する：

$$\begin{tikzcd} (\mathbf{Snglr}^{C^0}_{<\infty,\, \leq\infty})^{\mathrm{op}} \arrow[r, "\mathsf{Sm}_{<\infty,\, \leq\infty}"] \arrow[d, hook] & \mathbf{Sets} \\ (\mathbf{Snglr}^{C^0})^{\mathrm{op}} \arrow[ur, dashed, "\mathsf{Sm}"'] & \end{tikzcd}$$

ただし，$\mathbf{Snglr}^{C^0}_{<\infty,\, \leq\infty} \coloneqq \bigcup_{k\geq -1} \mathbf{Snglr}^{C^0}_{\leq k,\, \leq\infty}$ とおいた．

- **conically smooth な層状化空間** (conically smooth stratified space) と層状化開埋め込みの圏 $\mathbf{Snglr}$ を以下で定義する：

**(対象)**

$C^0$ 級層状化空間 $(X \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ およびその極大アトラス $\mathcal{A}_X \in \mathsf{Sm}(X \to P)$ の組み $\big((X \to P),\, \mathcal{A}_X\big)$ を対象とする．

**(射)**

層状化開埋め込み $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}^{C^0}}\big((X \to P),\, (Y \to Q)\big)$ であって，$f^*\mathcal{A}_Y = \mathcal{A}_X$ を充たすものを射とする．

### 1.1.5 conically smooth map

ここまでは層状化開埋め込みのみを考えていたため，一般の層状化写像の conically smoothness を定義しなくてはいけない．

**定義 1.14: conically smooth map**

2 つのbasic[a] $X = (U^n_Z, \mathcal{A}_Z)$, $Y = (U^m_W, \mathcal{A}_W) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Bsc})$ の間の層状化写像 $f\colon U^n_Z \longrightarrow U^m_W$ が **conically smooth** であることを，depth$(Y)$ に関する帰納法によって定義する：

(1) まず，$\mathrm{depth}(Y) = -1$ のときは $X = Y = \emptyset$ であり，一意的に定まる $X, Y$ 間の層状化写像が conically smooth であると定義する．

(2) 深さ $k \geq -1$ の basic に対して定義が完了しているとする．$Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Bsc})$ の深さが高々 $k+1$ であるとき，層状化写像 $f\colon X \longrightarrow Y$ が conically smooth であることを以下で定義する：

**$f$ がコーンポイントを保存しない場合**

ある conically smooth な層状化写像 $f_0\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{>0} \times W$ が存在して

$$f\colon X \xrightarrow{f_0} \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}_{>0} \times W) \hookrightarrow Y = \mathbb{R}^m \times \mathsf{C}(W)$$

と書ける[b]．

**$f$ がコーンポイントを保存する場合**

$f$ は $\mathbb{R}^n$ に沿って conically smooth であって，かつ制限

$$f|_{f^{-1}(Y \setminus \mathbb{R}^m)}\colon f^{-1}(Y \setminus \mathbb{R}^m) \longrightarrow Y \setminus \mathbb{R}^m$$

が conically smooth．ただし，$U^m_W \setminus \mathbb{R}^m \coloneqq U^m_W \setminus (\mathbb{R}^m \times \{\mathrm{pt}\}) = \mathbb{R}^{m+1} \times W$ と略記した．

---

[a] $C^0$ basic を $U^n_Z \coloneqq (\mathbb{R}^n \to [0]) \times \mathsf{C}(Z \to P) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr}^{C^0})$ と書く．

[b] 【例 1.1.6】より $\mathrm{depth}(W) < k+1$ であり，帰納法の仮定が使える．

---

conically smooth な層状化空間 $\big((X \to P), \mathcal{A}_X\big)$, $\big((Y \to Q), \mathcal{A}_Y\big) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr})$ の間の層状化写像 $f\colon (X \to P) \longrightarrow (Y \to Q)$ が **conically smooth** であるとは，任意のチャートの組み合わせ $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_X$, $(V, \psi) \in \mathcal{A}_Y$ に対して

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi\colon U \longrightarrow V$$

が conically smooth (for basics) であることを言う．

**命題 1.1: conically smooth map の基本性質**

2 つの conically smooth map の合成も conically smooth である．

<u>証明</u>　[?, Proposition 3.3.5] ■

命題 1.1 より，**conically smooth な層状化空間**の圏を定義できる．

**定義 1.15: conically smooth な層状化空間の圏 Strat**

**conically smooth な層状化空間**の圏 $\mathbf{Strat}$ を以下で定義する：

**(対象)**

圏 $\mathbf{Snglr}$ と全く同じ対象を持つ：

$$\mathrm{Ob}(\mathbf{Strat}) \coloneqq \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr})$$

**(射)**

conically smooth map を射とする．

定義から明らかに $\mathbf{Snglr} \subset \mathbf{Strat}$ である．ここで，圏 $\mathbf{Strat}$ における特別な射に名前をつけておこう：

**定義 1.16: constructuble bundle**

- conically smooth な層状化写像 $\pi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}\big((E \to P),\, (B \to Q)\big)$ が**層状化ファイバー束** (conically smooth fiber bundle) であるとは，conically smooth な層状化開埋め込みの族 $\big\{U_\alpha \hookrightarrow B\big\}_{\alpha\in\Lambda}$, $\big\{\varphi_\alpha \colon U_\alpha \times F_\alpha \hookrightarrow E\big\}_{\alpha\in\Lambda}$ が存在して以下を充たすことを言う：

  **(Bun-1)**

  $\forall \alpha \in \Lambda$ に対して，圏 $\mathbf{Strat}$ における引き戻しの図式

  $$\begin{tikzcd} U_\alpha \times F_\alpha \arrow[r, hook, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{proj}_1"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ U_\alpha \arrow[r, hook] & B \end{tikzcd}$$

  が成り立つ．

  **(Bun-2)**

  族 $\big\{U_\alpha\big\}_{\alpha\in\Lambda}$ は $B$ の開基である．

- conically smooth な層状化写像 $\pi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}\big((E \to P),\, (B \to Q)\big)$ が**弱構成可能束** (weakly constructuble bundle) であるとは，$\forall q \in Q$ に対して，$\pi$ の $q$-層への制限

  $$\pi|_{\pi^{-1}(B_q)} \colon \pi^{-1}(B_q) \longrightarrow B_q$$

  が層状化ファイバー束であることを言う．

- conically smooth な層状化写像 $\pi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}\big((E \to P),\, (B \to Q)\big)$ が**構成可能束** (constructuble bundle) であることを，$\mathrm{depth}(E)$ に関する帰納法によって定義する：

  (1) $\mathrm{depth}(E) = 0$ のとき，$\pi$ が構成可能束であるとは，$\pi$ が $C^\infty$ ファイバー束であることを言う．

  (2) 深さ $k \geq 0$ までの定義が完了しているとする．$\mathrm{depth}(E) \leq k+1$ のとき，$\pi$ が構成可能束であるとは，以下の 2 条件を充たすことを言う：

  **(cBun-1)** $\pi$ は弱構成可能束である．

  **(cBun-2)** $\forall q \in Q$ に対して，$\pi$ が誘導する層状化写像

  $$\mathrm{Link}_{\pi^{-1}(B_q)}(E) \longrightarrow \pi^{-1}(B_q) \times_{B_q} \mathrm{Link}_{B_q}(B)$$

  が構成可能束である．

### 1.1.6 管状近傍・ハンドル分解

## 1.2 層状化空間の接構造

### 1.2.1 Kan-豊穣化

圏 **Kan** を，

- Kan 複体を対象に持つ
- Kan 複体の間の自然変換を射に持つ

(1, 1)-圏とする．**Kan** は単体的集合の圏 **sSet** の充満部分圏であり，直積 (**??**) をテンソル積とするモノイダル圏になる．

**定義 1.17: 余単体的多様体**

以下で定義する関手

$$\boldsymbol{\Delta_e} \colon \Delta \longrightarrow \mathbf{Strat}$$

のことを**余単体的多様体** (standard cosimplicial manifold) と呼ぶ[a]：

- $[n] \in \mathrm{Ob}(\Delta)$ を，conically smooth な層状化空間

$$\Delta_e^n \coloneqq \left\{\, (x^0,\, \dots,\, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n} x^i = 1 \,\right\}$$

に対応付ける．

- $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\Delta}\left([m],\, [n]\right)$ を，conically smooth な層状化写像

$$\begin{aligned} \Delta_e(\alpha) \colon \Delta_e^m &\longrightarrow \Delta_e^n, \\ (x^0,\, \dots,\, x^m) &\longmapsto \Bigl( \sum_{j,\, \alpha(j)=0} x^j,\, \dots,\, \sum_{j,\, \alpha(j)=n} x^j \Bigr) \end{aligned}$$

に対応付ける．

[a] 幾何学的 $n$-単体に似ているが，$x^i \geq 0$ の領域で切り取っていない．

$\mathrm{PSh}\left(\mathbf{Strat}^{\mathrm{op}},\, \mathbf{Sets}\right)$ から **sSet** への関手を

$$\begin{aligned} (\text{-})|_{\Delta} \colon \mathrm{PSh}\left(\mathbf{Strat},\, \mathbf{Sets}\right) &\longrightarrow \mathbf{sSet}, \\ F &\longmapsto F \circ \Delta_e \end{aligned}$$

で定義する．さらに，$\forall X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Strat})$ に対して前層 $\widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{trat}}}\left(X,\, Y\right) \in \mathrm{PSh}\left(\mathbf{Strat},\, \mathbf{Sets}\right)$ を

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{trat}}}\left(X,\, Y\right) \colon \mathbf{Strat}^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathbf{Sets}, \\ Z &\longmapsto \left\{\, f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}\left(Z \times X,\, Z \times Y\right) \;\middle|\; \mathrm{proj}_Z \circ f = \mathrm{proj}_Z \,\right\}, \end{aligned}$$

$$(Z \xrightarrow{\alpha} W) \longmapsto \begin{pmatrix} \widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{trat}}}(X,Y)(Z) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{trat}}}(X,Y)(W), \\ f \longmapsto \Big( (w,x) \mapsto \big(w, \mathrm{proj}_Y \circ f(\alpha(w),x)\big) \Big) \end{pmatrix}$$

で定義する．ただし，conically smooth な層状化写像 $\mathrm{proj}_Z \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}(Z \times X,\, Z)$ とは第一成分への射影のことである．同様にして前層 $\widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{nglr}}}(X,\, Y) \in \mathrm{PSh}(\mathbf{Strat},\, \mathbf{Sets})$ を

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{nglr}}}(X,\, Y) \colon \mathbf{Strat}^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathbf{Sets}, \\ Z &\longmapsto \left\{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(Z \times X,\, Z \times Y) \;\middle|\; \mathrm{proj}_Z \circ f = \mathrm{proj}_Z \right\}, \\ (Z \xrightarrow{\alpha} W) &\longmapsto \begin{pmatrix} \widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{nglr}}}(X,Y)(Z) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{nglr}}}(X,Y)(W), \\ f \longmapsto \Big( (w,x) \mapsto \big(w, \mathrm{proj}_Y \circ f(\alpha(w),x)\big) \Big) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

で定義する．

**補題 1.1:**

$\forall X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Strat})$ に対して定まる単体的集合

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{trat}}(X,\, Y) \coloneqq \widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{trat}}}(X,\, Y)\Big|_{\Delta},$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{nglr}}(X,\, Y) \coloneqq \widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{nglr}}}(X,\, Y)\Big|_{\Delta}$$

は Kan 複体である．

証明　[?, Lemma 4.1.4.]. ■

**定義 1.18: $(\infty,\, 1)$-圏 $\mathcal{S}\mathrm{trat}$, $\mathcal{S}\mathrm{nglr}$, $\mathcal{B}\mathrm{sc}$**

**Kan-豊穣圏 $\mathcal{S}\mathbf{trat}$** を以下で定義する：

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{S}\mathbf{trat}) \coloneqq \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr})$
- 補題 1.1 で構成した $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{trat}}(X,\, Y) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Kan})$ を Hom 対象とする．

同様に，**Kan-豊穣圏 $\mathcal{S}\mathbf{nglr}$** を以下で定義する：

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{S}\mathbf{nglr}) \coloneqq \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr})$
- 補題 1.1 で構成した $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{nglr}}(X,\, Y) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Kan})$ を Hom 対象とする．

---

**Kan-豊穣圏 $\mathcal{S}\mathbf{nglr}$** の対象を $\mathrm{Ob}(\mathbf{Bsc})$ に制限して得られる充満部分圏を $\mathcal{B}\mathbf{sc}$ と書く．

**!** **Kan-豊穣圏**を homotopy coherent nerve functor $\mathrm{N}_{\mathrm{hc}} \colon \mathbf{Cat}_{\mathbf{\Delta}} \longrightarrow \mathbf{sSet}$ で単体的集合の圏 $\mathbf{sSet}$ へ埋め込んだものは $(\infty,\, 1)$-圏である [?, Proposition 1.1.5.10.]．故に以下では **Kan-豊穣圏 $\mathcal{S}\mathbf{trat}$, $\mathcal{S}\mathbf{nglr}$** と $(\infty,\, 1)$-圏 $\mathrm{N}_{\mathrm{hc}}(\mathcal{S}\mathbf{trat})$, $\mathrm{N}_{\mathrm{hc}}(\mathcal{S}\mathbf{nglr})$ を区別しない．

### 1.2.2 $(\infty, 1)$-圏におけるファイブレーション

**定義 1.19: $(\infty, 1)$-ファイブレーション**

$p\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{B}$ を $(\infty, 1)$-圏の関手とする．

**(lifting property)**

包含 $\iota \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda^n_j, \Delta^n)$ に関して $p \circ f_0 = f \circ \iota$ を充たす任意の $(f_0, f) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda^n_j, \mathcal{E}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n_j, \mathcal{B})$ に対して，以下の図式を可換にする $\bar{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \mathcal{E})$ が存在する：

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^n_j \arrow[r, "\forall f_0"] \arrow[d, hook, "\iota"'] & \mathcal{E} \arrow[d, "p"] \\
\Delta^n \arrow[r, "\forall f"'] \arrow[ur, dashed, "\exists \bar{f}"] & \mathcal{B}
\end{tikzcd}$$

- $p$ が**内的ファイブレーション** (inner fibration) であるとは，$0 < \forall j < \forall n$ に対して **(lifting property)** を充たすことを言う．
- $p$ が**右ファイブレーション** (right fibration) であるとは，$0 < \forall j \le \forall n$ に対して **(lifting property)** を充たすことを言う．
- $p$ が**左ファイブレーション** (left fibration) であるとは，$0 \le \forall j < \forall n$ に対して **(lifting property)** を充たすことを言う．
- $p$ が **Kan ファイブレーション** (Kan fibration) であるとは，$0 \le \forall j \le \forall n$ に対して **(lifting property)** を充たすことを言う．

系??によると，**(lifting property)** は，$(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{B}$ における角の図式 $\bigl(p_{[n-1]}(f_{00}), \dots, \underbrace{\bullet}_{j}, \dots, p_{[n-1]}(f_{0n})\bigr) \in (\mathcal{B}_{n-1})^{\times n}$ を $n$-射 $f \in \mathcal{B}_n$ が埋めているならば，$(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{E}$ における角の図式 $\bigl(f_{00}, \dots, \underbrace{\bullet}_{j}, \dots, f_{0n}\bigr) \in (\mathcal{E}_{n-1})^{\times n}$ を埋める $n$-射 $\bar{f} \in \mathcal{E}_n$ が存在することを主張している．

**定義 1.20: 充満部分 $(\infty, 1)$-圏**

- $(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}$ の**部分 $(\infty, 1)$-圏** (sub $(\infty, 1)$-category) とは，単体的部分集合 $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$ であって，その包含写像 $i\colon \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{C}$ が内的ファイブレーションであるようなもののこと[a]．
- 部分 $(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$ が**充満部分 $(\infty, 1)$-圏** (full sub $(\infty, 1)$-category) であるとは，$\forall n \ge 0$ に対して以下の条件を充たすことを言う：

  **(fullsub)** $\forall \sigma \in \mathcal{C}_n \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \mathcal{C})$ に対して，$\sigma_{[0]}(\Delta^n_0) \subset \mathcal{S}_0 \implies \sigma \in \mathcal{S}_n$ が成り立つ．

[a] このとき $\mathcal{S}$ は $(\infty, 1)$-圏になる [?, Tag 01CG]

2 つの右ファイブレーション $\mathcal{E} \xrightarrow{p} \mathcal{B}$, $\mathcal{E}' \xrightarrow{p'} \mathcal{B}$ が与えられたとき，これらの間の射とは集合

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}') := \left\{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}') \;\middle|\; p' \circ f = p \right\}$$

のことである．$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E},\,\mathcal{E}')$ の元を $\mathbf{sSet}$ における可換図式として表すと以下の通り：

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathcal{E}' \arrow[dl, "p'"] \\
& \mathcal{B} &
\end{tikzcd}
$$

$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E},\,\mathcal{E}') \subset \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\mathcal{E},\,\mathcal{E}')$ を【例??】の方法で単体的集合と見做せる．このようにして得られる単体的集合 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rfib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E},\,\mathcal{E}')$ の最大の部分 Kan 複体を $\mathbf{Hom}_{\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}}}(\boldsymbol{\mathcal{E}},\,\boldsymbol{\mathcal{E}'})$ と書く．

**定義 1.21: 右ファイブレーションの成す $(\infty,\,1)$-圏**

$\mathcal{B}$ を $(\infty,\,1)$-圏とする．**Kan-豊穣圏** $\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}}$ を

- 右ファイブレーションを対象とする
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{E},\,\mathcal{E}')$ を Hom 対象とする

ことで定義する．以降では $(\infty,\,1)$-圏 $\mathrm{N}_{\mathrm{hc}}(\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}}) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{sSet})$ のことも $\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}}$ と書き，区別しない．

### 1.2.3 $(\infty,\,1)$-圏におけるスライス圏

**定義 1.22: 単体的集合の join**

2 つの単体的集合 $S,\,T \in \mathrm{Ob}(\mathbf{sSet})$ の **join** とは，単体的集合

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{S \star T} \colon \Delta^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathbf{Sets}, \\
[n] &\longmapsto \coprod_{[i];\,-1\le i\le n} (S_i \times T_{n-i-1}), \\
\left([m] \xrightarrow{\alpha} [n]\right) &\longmapsto \left(\left([i];\,(x,\,y)\right) \mapsto \left(\alpha^{-1}([i]);\,\left(S(\alpha|_{\alpha^{-1}([i])})(x),\,T(\alpha|_{\alpha^{-1}([m]\setminus[i])})(y)\right)\right)\right)
\end{aligned}
$$

のこと．ただし $S_{-1} = T_{-1} \coloneqq \{*\},\ [-1] \coloneqq \emptyset$ とおいた．

$d_j^n \in \mathrm{Hom}_{\Delta^{\mathrm{op}}}([n],\,[n-1])$ に対して

$$
\begin{aligned}
(d_j^n)^{-1}([i]) &= \begin{cases} [i], & -1 \le i < j \\ [i-1], & j \le i \le n \end{cases} \\
(d_j^n)^{-1}([n]\setminus[i]) &= \begin{cases} [n-1]\setminus[i], & -1 \le i < j \\ [n-1]\setminus[i-1], & j \le i \le n \end{cases}
\end{aligned}
$$

であるから，$S \star T$ の面写像は $n \ge 1,\ 0 \le j \le n$ に対して

$$
\partial_j^n \colon \coprod_{-1\le i\le n} (S_i \times T_{n-i-1}) \longrightarrow \coprod_{-1\le i\le n-1} (S_i \times T_{n-i-2}), \tag{1.2.1}
$$

$$
\bigl([i];\,(x,\,y)\bigr) \longmapsto \begin{cases} \bigl([-1];\,(*,\,\partial_j^n y)\bigr), & i=-1 \\ \bigl([i];\,(x,\,\partial_{j-i-1}^{n-i-1} y)\bigr), & 0 \le i < j,\ (i,\,j) \neq (n-1,\,n) \\ \bigl([i-1];\,(\partial_j^i x,\,y)\bigr), & j \le i \le n-1,\ (i,\,j) \neq (0,\,0) \\ \bigl([n-1];\,(\partial_j^n x,\,*)\bigr), & i=n \\ \bigl([n-1];\,(x,\,*)\bigr), & (i,\,j)=(n-1,\,n) \\ \bigl([-1];\,(*,\,y)\bigr), & (i,\,j)=(0,\,0) \end{cases}
$$

となる．

**【例 1.2.1】join $\Delta^0 \star \Delta^0$**

$\Delta^0 \star \Delta^0$ を計算してみよう[a]．まず対象は

$$
(\Delta^0 \star \Delta^0)_0 = \Delta^0{}_0 \sqcup \Delta^0{}_0 = \left\{ \begin{array}{c} \{0\} \\ \bullet \\ \\ \bullet \\ \{0\} \end{array} \right\}
$$

である．1-射は

$$
(\Delta^0 \star \Delta^0)_1 = \Delta^0{}_1 \sqcup (\Delta^0_0 \times \Delta^0_0) \sqcup \Delta^0{}_1
$$

であるが，(1.2.1) より始点関数は

$$
\begin{aligned} \partial_1^1|_{\Delta^0_0 \times \Delta^0_0} \colon \Delta^0_0 \times \Delta^0_0 &\longrightarrow \Delta^0{}_0 \sqcup \Delta^0{}_0, \\ (\{0\},\,\{0\}) &\longmapsto \{0\} \end{aligned}
$$

終点関数は

$$
\begin{aligned} \partial_0^1|_{\Delta^0_0 \times \Delta^0_0} \colon \Delta^0_0 \times \Delta^0_0 &\longrightarrow \Delta^0{}_0 \sqcup \Delta^0{}_0, \\ (\{0\},\,\{0\}) &\longmapsto \{0\} \end{aligned}
$$

となるため，$\Delta^0{}_1$, $\Delta^0{}_1$ が縮退していることを考慮すると

$$
(\Delta^0 \star \Delta^0)_1 = \left\{ \begin{array}{c} \{0\} \\ \bullet \\ \downarrow \\ \bullet \\ \{0\} \end{array} \right\}
$$

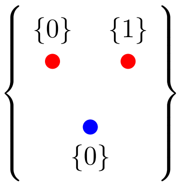
と図示できる．

[a] 左右の区別を付けるために色を付けた．

**【例 1.2.2】join $\Delta^1 \star \Delta^0$**

$\Delta^1 \star \Delta^0$ を計算してみよう．まず対象は

$$(\Delta^1 \star \Delta^0)_0 = {\Delta^1}_0 \sqcup {\Delta^0}_0 =$$




である．1-射は

$$(\Delta^1 \star \Delta^0)_1 = {\Delta^1}_1 \sqcup (\Delta^1_0 \times \Delta^0_0) \sqcup {\Delta^0}_1$$

であるが，(1.2.1) より始点関数は

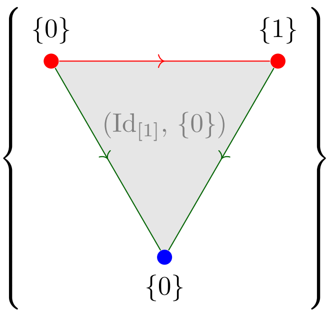
$$\begin{aligned} \partial^1_1|_{\Delta^1_0 \times \Delta^0_0} \colon \Delta^1_0 \times \Delta^0_0 &\longrightarrow {\Delta^1}_0 \sqcup {\Delta^0}_0, \\ (x,\, \{0\}) &\longmapsto x \end{aligned}$$

終点関数は

$$\begin{aligned} \partial^1_0|_{\Delta^1_0 \times \Delta^0_0} \colon \Delta^1_0 \times \Delta^0_0 &\longrightarrow {\Delta^1}_0 \sqcup {\Delta^0}_0, \\ (x,\, \{0\}) &\longmapsto \{0\} \end{aligned}$$

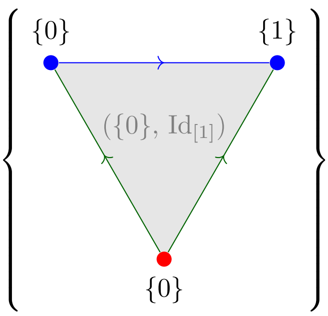
となるため，

$$\Delta^1 \star \Delta^0 =$$




と図示できる．ただし，三角形の内部は 2-射 $(\mathrm{Id}_{[1]},\, \{0\}) \in \Delta^1_1 \times \Delta^0_0 \subset (\Delta^1 \star \Delta^0)_2$ が埋めている．同様に

$$(\Delta^0 \star \Delta^1)_1 =$$

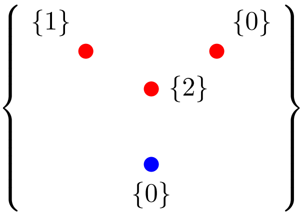



であることが分かる．

**【例 1.2.3】join $\Delta^2 \star \Delta^0$**

$\Delta^2 \star \Delta^0$ を計算してみよう．まず

$$(\Delta^2 \star \Delta^0)_0 = {\color{red}\Delta^2}_0 \sqcup {\color{blue}\Delta^0}_0 =$$




である．次に 1 射は

$$(\Delta^2 \star \Delta^0)_1 = {\color{red}\Delta^2}_1 \sqcup ({\color{green}\Delta^2_0 \times \Delta^0_0}) \sqcup {\color{blue}\Delta^0}_1$$

であるが，(1.2.1) より始点関数は

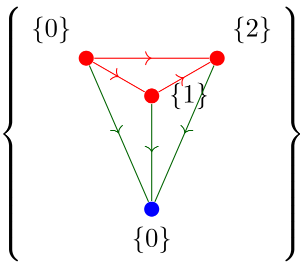
$$\begin{aligned} \partial^1_1|_{\Delta^2_0 \times \Delta^0_0} \colon {\color{green}\Delta^2_0 \times \Delta^0_0} &\longrightarrow {\color{red}\Delta^2}_0 \sqcup {\color{blue}\Delta^0}_0, \\ (x, \mathrm{Id}_{\{0\}}) &\longmapsto {\color{red}x} \end{aligned}$$

となり，終点関数は

$$\begin{aligned} \partial^1_0|_{\Delta^2_0 \times \Delta^0_0} \colon {\color{green}\Delta^2_0 \times \Delta^0_0} &\longrightarrow {\color{red}\Delta^2}_0 \sqcup {\color{blue}\Delta^0}_0, \\ (x, \mathrm{Id}_{\{0\}}) &\longmapsto {\color{blue}\{0\}} \end{aligned}$$

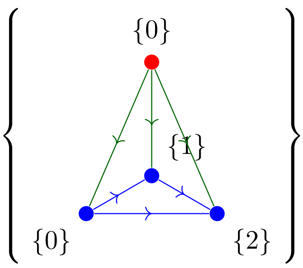
となる．従って図式**??**に倣うと

$$(\Delta^2 \star \Delta^0)_1 = {\color{red}\Delta^2}_1 \sqcup ({\color{green}\Delta^2_0 \times \Delta^0_0}) \sqcup {\color{blue}\Delta^0}_1 =$$




と図示できる．ただし，四面体の内部は 3-射 $(\mathrm{Id}_{[2]}, {\color{blue}\{0\}}) \in \Delta^2_2 \times \Delta^0_0 \subset (\Delta^1 \star \Delta^0)_3$ が埋めている．同様に，$\Delta^0 \star \Delta^2$ の 1-射を図示すると

$$(\Delta^0 \star \Delta^2)_1 = {\color{red}\Delta^0}_1 \sqcup ({\color{green}\Delta^0_0 \times \Delta^2_0}) \sqcup {\color{blue}\Delta^2}_1 =$$




のようになる．

**補題 1.2: $(\infty, 1)$-圏同士の join は $(\infty, 1)$-圏**

$(\infty, 1)$-圏同士の join は $(\infty, 1)$-圏である．

<u>証明</u> [?, Proposition 1.2.8.3] ■

**定義 1.23: スライス $(\infty, 1)$-圏**

$(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{D}, \mathcal{C}$ および $(\infty, 1)$-圏の関手 $p \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ を与える．$p$ に沿った $\mathcal{C}$ の**スライス圏** (overcategory)

$$\boldsymbol{\mathcal{C}_{/p}} \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を以下で定義する：

- $\forall [n] \in \mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})$ に対して，集合
$$\mathrm{Hom}_p(\Delta^n \star \mathcal{D}, \mathcal{C}) := \left\{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n \star \mathcal{D}, \mathcal{C}) \mid f|_{\mathcal{D}} = p \right\}$$
を対応付ける[a]．
- $\forall \alpha \in \mathrm{Hom}_{\Delta^{\mathrm{op}}}([m], [n])$ に対して，写像
$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{/p}(\alpha) \colon \mathrm{Hom}_p(\Delta^m \star \mathcal{D}, \mathcal{C}) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_p(\Delta^n \star \mathcal{D}, \mathcal{C}), \\ f &\longmapsto f \circ (\alpha_* \star \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}) \end{aligned}$$
を対応付ける．

実際，単体的集合 $\mathcal{C}_{/p}$ は $(\infty, 1)$-圏である [?, Tag 018F]．

[a] $f|_{\mathcal{D}}$ というのは，join の定義における $(\Delta^n \star \mathcal{D})_k$ の disjoint union のうち，添字 $i = 0$ が振られている成分への制限を意味する．

---

$p$ に沿った $\mathcal{C}$ の**コスライス圏** (undercategory)

$$\boldsymbol{\mathcal{C}_{p/}} \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を以下で定義する：

- $\forall [n] \in \mathrm{Ob}(\Delta^{\mathrm{op}})$ に対して，集合
$$\mathrm{Hom}_p(\mathcal{D} \star \Delta^n, \mathcal{C}) := \left\{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\mathcal{D} \star \Delta^n, \mathcal{C}) \mid f|_{\mathcal{D}} = p \right\}$$
を対応付ける[a]．
- $\forall \alpha \in \mathrm{Hom}_{\Delta^{\mathrm{op}}}([m], [n])$ に対して，写像
$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{p/}(\alpha) \colon \mathrm{Hom}_p(\mathcal{D} \star \Delta^m, \mathcal{C}) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_p(\mathcal{D} \star \Delta^n, \mathcal{C}), \\ f &\longmapsto f \circ (\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \star \alpha_*) \end{aligned}$$
を対応付ける．

[a] $f|_{\mathcal{D}}$ というのは，join の定義における $(\mathcal{D} \star \Delta^n)_k$ の disjoint union のうち，添字 $i = n$ が振られている成分への制限を意味する．

特に注目すべきは，$(\infty, 1)$-圏の関手 $p\colon \Delta^0 \longrightarrow \mathcal{C}$ をとった場合である．このとき $X \coloneqq p_{[0]}(\{0\}) \in \mathcal{C}_0$ とおいて $\boldsymbol{\mathcal{C}_{/X}}$, $\boldsymbol{\mathcal{C}_{X/}}$ などと書く．

まず，$(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}_{/X}$ の対象 $\varphi \in (\mathcal{C}_{/X})_0 = \mathrm{Hom}_p\left(\Delta^0 \star \Delta^0, \mathcal{C}\right)$ をとる．すると**【例 1.2.1】**および $\varphi|_{\Delta^0} = p$ の条件から，$\varphi_{[1]}\colon (\Delta^0 \star \Delta^0)_1 \longrightarrow \mathcal{C}_1$ とは図式

$$\varphi = \begin{tikzcd} \varphi_{[0]}|_{\Delta^0_0}(\{0\}) \arrow[d, "\varphi_{[1]}|_{\Delta^0_0 \times \Delta^0_0}(\{0\} \to \{0\})"] \\ X \end{tikzcd}$$

である．$n \geq 2$ 射に相当する $\varphi_{[n]}\colon (\Delta^0 \star \Delta^0)_n \longrightarrow \mathcal{C}_n$ のデータは縮退していて自明である．従って，$\varphi$ は $(1, 1)$-圏における $X$ 上のスライス圏の対象と等価なデータを与える．

同様に，$(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}_{/X}$ の 1-射 $f \in (\mathcal{C}_{/X})_1 = \mathrm{Hom}_p\left(\Delta^1 \star \Delta^0, \mathcal{C}\right)$ とは，**【例 1.2.2】**より

$$f = \begin{tikzcd} f_{[0]}|_{\Delta^1_0}(\{0\}) \arrow[rr] \arrow[dr] & \arrow[d, phantom, "f_{[2]}|_{\Delta^1_1 \times \Delta^0_0}(\mathrm{Id}_{[1]}, \{0\})"] & f_{[0]}|_{\Delta^1_0}(\{1\}) \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

のことである．ただし三角形の内部は 2-射 $f_{[2]}|_{\Delta^1_1 \times \Delta^0_0}(\mathrm{Id}_{[2]}, \{0\}) \in \mathcal{C}_2$ が埋めている．これは $(1, 1)$-圏における $X$ 上のスライス圏の射のデータに対応しているが，横向きの矢印を決めるだけでは $f$ が upto homotopy でしか定まらないという点で異なっている．

$(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}_{/X}$ の $n$-射も同様に図示できる．

**【例 1.2.4】スライス圏からの forgetful functor**

$(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}$ の，$X\colon \Delta^0 \longrightarrow \mathcal{C}$ に沿ったスライス圏に対して，**忘却関手** (forgetful functor)

$$\mathrm{forget}\colon \mathcal{C}_{/X} \longrightarrow \mathcal{C}$$

を次のように定義する：

$$\begin{aligned} \mathrm{forget}_{[n]}\colon (\mathcal{C}_{/X})_n = \mathrm{Hom}_X\left(\Delta^n \star \Delta^0, \mathcal{C}\right) &\longrightarrow \mathcal{C}_n = \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(\Delta^n, \mathcal{C}\right), \\ f &\longmapsto f|_{\Delta^n} \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

$n = 0, 1, 2$ の場合，i.e. **【例 1.2.1】**, **【例 1.2.2】**, **【例 1.2.3】**の図式においては，ちょうど $X \in \mathcal{C}_0$ に対応する青色の頂点（コーンポイント）を除去する操作に対応している．(1.2.2) の定義は右ファイブレーションになっている．

### 1.2.4 $(\infty, 1)$-圏の limit/colimit

後の議論のため，先取りして $(\infty, 1)$-圏における limit/colimit を定義しておこう．$(\infty, 1)$-圏のモデルとして quasi-category を採用する場合，これは **homotopy limit/colimit** と呼ばれることもある．

**定義 1.24: $(\infty, 1)$-圏における始対象と終対象**

- $(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}$ における対象 $x \in \mathcal{C}_0$ が**始対象** (initial object) であるとは，ホモトピー圏 $\mathrm{h}\mathcal{C}$ における始対象[a]であること．
- $(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}$ における対象 $x \in \mathcal{C}_0$ が**終対象** (final object) であるとは，ホモトピー圏 $\mathrm{h}\mathcal{C}$ における終対象[b]であること．

[a] $(1, 1)$-圏の**始対象**とは，空の図式における余極限のこと．
[b] $(1, 1)$-圏の**終対象**とは，空の図式における極限のこと．

**定義 1.25: $(\infty, 1)$-圏の limit/colimit**

$(\infty, 1)$-圏の関手 $D\colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ を与える[a]．

- $D$ の **limit** とは，スライス $(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}_{/D}$ における終対象のこと．$\boldsymbol{\lim D} \in \mathcal{C}_0$ と書く．
- $D$ の **colimit** とは，スライス $(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}_{D/}$ における始対象のこと．$\mathbf{colim}\, \boldsymbol{D} \in \mathcal{C}_0$ と書く．

[a] $(1, 1)$-圏の場合からのアナロジーで，$D$ を図式と見做す．

**【例 1.2.5】pullback**

単体的集合の積 $S \times T\colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ における面写像とは

$$\begin{aligned} \partial_j^n\colon S_n \times T_n &\longrightarrow S_{n-1} \times T_{n-1}, \\ (x,\, y) &\longmapsto (\partial_j^n x,\, \partial_j^n y) \end{aligned}$$

のことであった．故に，単体的集合 $\Delta^1 \times \Delta^1$ は，$\Delta^1_0 =: \{\bullet_0,\, \bullet_1\}$ とおくと

$$\Delta^1 \times \Delta^1 = \begin{tikzcd} (0,\, 0) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & (1,\, 0) \arrow[d] \\ (0,\, 1) \arrow[r] & (1,\, 1) \end{tikzcd}$$

と図示できる．ただし，2-射以上は縮退していて見えない．

$(\infty, 1)$-圏の関手 $D\colon \Delta^1 \times \Delta^1 \longrightarrow \mathcal{C}$ の limit のことを（存在すれば）**pullback** と呼び，

$$\boldsymbol{D(0,\, 1) \times_{D(1,\, 1)} D(1,\, 0)} := \lim D \in \mathcal{C}_0$$

と書く．

### 1.2.5 Unstraightening construction

**定理 1.1: unstraightening construction**

$(\infty,1)$-圏同値

$$\mathbf{PSh}_{(\infty,1)}(\mathcal{B}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}}$$

が存在する．

**証明** $(\infty,1)$-圏同値

$$\mathrm{Un}\colon \mathbf{PSh}_{(\infty,1)}(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}}$$

は，次のようにして構成される (**unstraightening construction**)：

**対象** $F \in \mathbf{PSh}_{(\infty,1)}(\mathcal{B})_0$ に対して，$(\infty,1)$-圏の pullback

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Un}(F) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}\mathbf{paces}_{/*} \arrow[d, "\text{forget}"] \\ \mathcal{B} \arrow[r, "F"'] & \mathcal{S}\mathbf{paces} \end{tikzcd}$$

により得られる右ファイブレーション $\mathrm{Un}(F) \longrightarrow \mathcal{B} \in (\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}})_0$ を対応付ける．

***n*-射**

逆向きの $(\infty,1)$-圏同値 (**straightning construction**)

$$\mathrm{St}\colon \mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}} \longrightarrow \mathbf{PSh}_{(\infty,1)}(\mathcal{B})$$

は難しい．詳細は [**?**, Proposition 2.2.3.11] を参照． ■

### 1.2.6 $(\infty,1)$-圏における米田埋め込み

**定義 1.26: twisted arrow category**

$(\infty,1)$-圏 $\mathcal{C}$ を与える．このとき，$\mathcal{C}$ の **twisted arrow category** と呼ばれる $(\infty,1)$-圏を以下で定義する：

$$\begin{aligned} \mathrm{Tw}(\mathcal{C})\colon \Delta^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathbf{Sets}, \\ [n] &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\big((\Delta^n)^{\mathrm{op}} \star \Delta^n, \mathcal{C}\big), \\ \big([m] \xrightarrow{\alpha} [n]\big) &\longmapsto \big(f \mapsto f \circ (\alpha_* \times \alpha_*)\big) \end{aligned}$$

$(\infty,1)$-圏の関手

$$\mathrm{pr}\colon \mathrm{Tw}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C}$$

を以下で定義すると，これは左ファイブレーションになる [**?**, Tag 03JQ]：

$$\mathrm{pr}_{[n]}\colon \mathrm{Tw}(\mathcal{C})_n \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathrm{op}}_n \times \mathcal{C}_n = \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \mathcal{C}^{\mathrm{op}}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \mathcal{C})$$

$$f \longmapsto \left(f|_{(\Delta^n)^{\mathrm{op}}},\, f|_{\Delta^n}\right)$$

$(\infty, 1)$-圏における Hom 関手

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}\mathbf{paces}$$

の自然な構成は，straightning construction を用いた

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tw}(\mathcal{C}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{pr}"'] & \mathcal{S}\mathbf{paces}_{*/} \arrow[d, "\mathrm{forget}"] \\
\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \arrow[r, "\mathrm{Map}_{\mathcal{C}} := \mathrm{St}(\mathrm{pr})"'] & \mathcal{S}\mathbf{paces}
\end{tikzcd}$$

である [?, I.26., p.19].

**定義 1.27: $(\infty, 1)$-圏の米田埋め込み (informal)**

$\mathcal{C}$ を $(\infty, 1)$-圏とする．$(\infty, 1)$-圏の**米田埋め込み** (Yoneda embedding)

$$よ : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{PSh}_{(\infty,1)}\left(\mathcal{C}\right)$$

とは，$\mathcal{C}$ から $(\infty, 1)$-前層の成す $(\infty, 1)$-圏 $\mathbf{PSh}_{(\infty,1)}(\mathcal{C})$ への $(\infty, 1)$-圏の関手であって，対象 $x \in \mathcal{C}_0$ に対して

$$\begin{aligned}
よ_{[0]}(x)_{[0]} : \mathcal{C}_0^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathcal{S}\mathbf{paces}_0, \\
y &\longmapsto \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}\left(x,\, y\right)
\end{aligned}$$

を充たす[a]ような $(\infty, 1)$-圏の関手 $よ_{[0]}(x) \in \mathbf{PSh}_{(\infty,1)}\left(\mathcal{C}\right)_0 = \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}\left(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\, \mathcal{S}\mathbf{paces}\right)$ を対応付けるもののこと[b].

[a] $(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}$ において，対象 $x,\, y \in \mathcal{C}_0$ の間の射の空間 $\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}\left(x,\, y\right)$ は Kan 複体を成すのだった [?, Tag 01JC].
[b] 厳密な構成については [?, Tag 03NF] を参照.

### 1.2.7 層状化空間の接構造

**定義 1.28: enter-path category**

conically smooth な層状化空間 $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Strat})$ の **enter-path $(\infty, 1)$-category** とは，$(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{B}\mathbf{sc}$ のスライス圏

$$\mathcal{E}\mathbf{ntr}\left(X\right) := \mathcal{B}\mathbf{sc}_{/X}$$

のこと．

**定義 1.29: tangent classifier**

$\iota\colon \mathcal{B}\mathbf{sc} \hookrightarrow \mathcal{S}\mathbf{nglr}$ を包含とする．**tangent classifier** とは，$(\infty,1)$-圏の関手

$$\boldsymbol{\tau}\colon \mathcal{S}\mathbf{nglr} \xrightarrow{\text{よ}} \mathbf{PSh}_{(\infty,1)}(\mathcal{S}\mathbf{nglr}) \xrightarrow{\iota^*} \mathbf{PSh}_{(\infty,1)}(\mathcal{B}\mathbf{sc})$$

のこと．

定義 1.27 より，tangent classifier は conically smooth な層状化空間 $X \in \mathcal{S}\mathbf{nglr}_0$ に対して $(\infty,1)$-圏の表現可能前層

$$\tau_{[0]}(X) = \mathrm{Map}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}(\text{-}, X) \in \mathbf{PSh}_{(\infty,1)}(\mathcal{B}\mathbf{sc})_0 \tag{1.2.3}$$

を対応付ける．

!

定理 1.1 により，tangent classifier $\tau$ のことを

$$\tau\colon \mathcal{S}\mathbf{nglr} \xrightarrow{\text{よ}} \mathbf{PSh}_{(\infty,1)}(\mathcal{S}\mathbf{nglr}) \xrightarrow{\iota^*} \mathbf{PSh}_{(\infty,1)}(\mathcal{B}\mathbf{sc}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}$$

と見做すこともできる．このとき，$\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}$ の構成および $(\infty,1)$-前層 (1.2.3) に対する定理 1.1 の具体的構成から，conically smooth な層状化空間 $X \in \mathcal{S}\mathbf{nglr}_0$ に対して定まる $(\infty,1)$-圏の右ファイブレーション $\tau_{[0]}(X) \in (\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}})_0$ とは忘却関手

$$\tau_{[0]}(X)\colon \mathcal{E}\mathbf{ntr}(X) \longrightarrow \mathcal{B}\mathbf{sc}$$

のことである．この忘却関手を以下では $\boldsymbol{\tau_X} \coloneqq \tau_{[0]}(X)$ と書く．

**定義 1.30: $\mathcal{B}$-多様体**

- **$(\mathcal{B}, f)$ 構造**[a]とは，$(\infty,1)$-圏の右ファイブレーション $(\mathcal{B} \xrightarrow{f} \mathcal{B}\mathbf{sc}) \in (\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}})_0$ のこと．
- $(\mathcal{B}, f)$ 構造 $\mathcal{B} \xrightarrow{f} \mathcal{B}\mathbf{sc}$ を 1 つ固定する．このとき，**$\mathcal{B}$-多様体** ($\mathcal{B}$-manifold) の成す $(\infty,1)$-圏 $\mathcal{M}\mathbf{fld}(\mathcal{B})$ とは，$(\infty,1)$-圏の pullback

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}\mathbf{fld}(\mathcal{B}) \arrow[r] \arrow[d] & (\mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}})_{/f} \arrow[d, "\text{forget}"] \\ \mathcal{S}\mathbf{nglr} \arrow[r, "\tau"'] & \mathcal{R}\mathbf{fib}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}} \end{tikzcd}$$

のこと．特に，$\mathcal{M}\mathbf{fld}(\mathcal{B})_0$ の元は以下の 2 つのデータから成り，**$\mathcal{B}$-多様体**と呼ばれる：
  - conically smooth な層状化空間 $X \in \mathcal{S}\mathbf{nglr}_0$
  - $(\infty,1)$-圏の関手 $g\colon \mathcal{E}\mathbf{ntr}(X) \longrightarrow \mathcal{B}$

これらは以下の条件を充たさねばならない：

**(lift of tangent classifier)**

$\mathbf{sSet}$ における以下の図式は可換である：

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B} \arrow[d, "f"] \\ \mathcal{E}\mathbf{ntr}(X) \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "\tau_X"'] & \mathcal{B}\mathbf{sc} \end{tikzcd}$$

[a] [?, Definition 1.1.6] では $(\infty, 1)$-**category of basics** と呼ばれている．

### 1.2.8 $\mathcal{B}\mathrm{sc}$ における Hom

しばらくの間，basic $U := \left((\mathbb{R}^n \to [0]) \times \mathsf{C}(Z \to P), \mathcal{A}_Z\right) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Bsc})$ を 1 つ固定する．これまでと同様に，層状化空間 $\mathsf{C}\left(Z \xrightarrow{s} P\right) = \left(\mathsf{C}(Z) \xrightarrow{\mathsf{C}(s)} \mathsf{C}(P)\right)$ のコーンポイントのことを $\mathrm{pt} \in \mathsf{C}(Z)$ と書き，$\mathbb{R}^n \times \{\mathrm{pt}\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathsf{C}(Z)$ のことを $\mathbb{R}^n$ と略記することにする．さらに，点 $(0, \mathrm{pt}) \in \mathbb{R}^n \times \mathsf{C}(Z)$ のことを $0 \in \mathbb{R}^n \times \mathsf{C}(Z)$ と略記し，$U$ の**原点** (origin) と呼ぶことにする．

> **!** 以下では，混乱が生じにくい場合は層状化空間 $(X \xrightarrow{s} P)$ の $s$ と $P$ を省略する．さらに，conically smooth atlas を明示しない．

いま，特異単体の変種として，conically smooth な層状化空間 $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Strat})$ の**滑らかな特異単体** (smooth singular simplicial set) と呼ばれる単体的集合を

$$\begin{aligned} \mathrm{Sing}^{\mathrm{sm}}(X) \colon \Delta^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathbf{Sets}, \\ [n] &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Strat}}\left(\Delta_e^n, X\right), \\ \left([m] \xrightarrow{\alpha} [n]\right) &\longmapsto \left(\mathrm{Sing}^{\mathrm{sm}}(X)_m \xrightarrow{\Delta_e(\alpha)^*} \mathrm{Sing}^{\mathrm{sm}}(X)_n\right) \end{aligned}$$

と定義する[*5]．これは Kan 複体になる．ここで (1.1.1) を思い出して，写像

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} \colon \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Bsc}}(U, U), \\ (t, p) &\longmapsto \Big(\big(v, [s, z]\big) \mapsto \big(tv + p, [ts, z]\big)\Big) =: \tilde{\gamma}_{t, p} \end{aligned}$$

を考える．これを Kan 複体の間の射（i.e. 自然変換）

$$\gamma \colon \mathrm{Sing}^{\mathrm{sm}}(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}(U, U) \tag{1.2.4}$$

へと格上げすることができる．実際，$\forall m \geq 0$ に対して，$m$-単体はそれぞれ

$$\begin{aligned} \mathrm{Sing}^{\mathrm{sm}}(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n)_m &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\left(\Delta_e^m, \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n\right)_{\mathrm{smooth}}, \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}(U, U)_m &= \left\{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}}\left(\Delta_e^m \times U, \Delta_e^m \times U\right) \,\middle|\, \mathrm{proj}_{\Delta_e^m} \circ f = \mathrm{proj}_{\Delta_e^m} \right\} \end{aligned}$$

であったから，

$$\begin{aligned} \gamma_{[m]} \colon \mathrm{Sing}^{\mathrm{sm}}(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n)_m &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}(U, U)_m, \\ \Big(x \mapsto \big(t(x), p(x)\big)\Big) &\longmapsto \Big(\big(x, u\big) \mapsto \big(x, \tilde{\gamma}_{t(x), p(x)}(u)\big)\Big) =: \gamma_{[m]\, t, p} \end{aligned}$$

[*5] 滑らかな特異単体と言ったときは幾何学的 $n$-単体を用いることが多く，このように定義することは稀だと思う．

と定義すればよい．

さらに，勝手な conically smooth な層状化空間 $Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Snglr})$ に対して，その**自己同相群** (automorphism group)

$$\mathrm{Aut}(Z) \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を，Kan 複体 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{nglr}}(Z, Z)$ の部分 Kan 複体として次のように定義する：

$$\mathrm{Aut}(Z)_m := \left\{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{nglr}}(Z, Z)_m \;\middle|\; \exists f^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(\Delta_e^m \times Z, \Delta_e^m \times Z) \right\}$$

なお，$\forall m \geq 0$ に対し集合 $\mathrm{Aut}(Z)_m$ は (1, 1)-圏 **Snglr** における 1-射の合成に関して群になるため，Kan 複体 $\mathrm{Aut}(Z)$ は**群的な Kan 複体** (group-like Kan complex)[*6]と見做すことができる．

**定義 1.31: 層状化された一般線形群**

勝手な basic $U := \mathbb{R}^n \times \mathsf{C}(Z) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Bsc})$ を与える．
Kan 複体 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{nglr}}(U, U)$ の部分 Kan 複体

$$\mathrm{GL}(U) \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を次のように定義し，**層状化された一般線形群**と呼ぶ：

$$\mathrm{GL}(U)_m := \left\{ T \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{nglr}}(U, U)_m \;\middle|\; \forall (t, p) \in \mathrm{Sing}^{\mathrm{sm}}(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n)_m,\ T \circ \gamma_{[m]\, t,\, p} = \gamma_{[m]\, t,\, (Tp)_{\mathbb{R}^n}} \circ T \right\}$$

ただし，$(Tp)_{\mathbb{R}^n} := \mathrm{proj}_{\mathbb{R}^n} \circ T|_{\Delta_e^m \times \mathbb{R}^n \times \{0\}} \circ p \colon \Delta_e^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ と略記した．

---

Kan 複体 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{nglr}}(U, U)$ の部分 Kan 複体

$$\mathrm{O}(U) \colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を次のように定義し，**層状化された直交群**と呼ぶ：

$$\mathrm{O}(U) := \mathrm{Sing}^{\mathrm{sm}}\big(\mathrm{O}(n)\big) \times \mathrm{Aut}(Z)$$

**【例 1.2.6】通常の一般線形群**

$Z = \emptyset$ の場合を考える．このとき $U = \mathbb{R}^n$ なので，Kan 複体の射 (1.2.4) とは単に

$$\gamma_{[m]} \colon \Big(x \mapsto \big(t(x), p(x)\big)\Big) \longmapsto \Big(\big(x, u\big) \mapsto \big(x, t(x)u + p(x)\big)\Big)$$

のことであり，$T \in \mathrm{GL}(U)_m$ とは $\forall (t, p) \in \mathrm{Sing}^{\mathrm{sm}}(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n)$ および $\forall (x, u) \in \Delta_e^m \times U = \Delta_e^m \times \mathbb{R}^n$ に対して

$$\begin{aligned}
T \circ \gamma_{[m]\, t,\, p}(x, u) &= T\big(x, t(x)u + p(x)\big) \\
&= \gamma_{[m]\, t,\, \mathrm{proj}_{\mathbb{R}^n} \circ T|_{\mathbb{R}^n}(p)} \circ T(x, u) \\
&= \Big(x, t(x)\, \mathrm{proj}_{\mathbb{R}^n} \circ T(x, u) + \mathrm{proj}_{\mathbb{R}^n} \circ T\big(x, p(x)\big)\Big)
\end{aligned}$$

[*6] Kan 複体であって，$\Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Grp}$ でもあるもの．従って，homotopy hypothesis より位相群と見做すことができる．

が成り立つことを意味する．i.e. $\forall x \in \Delta_e^m$ に対して，$\tilde{T}_x \coloneqq \mathrm{proj}_{\mathbb{R}^n} \circ T|_{\{x\}\times U} \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ とおくと

$$\tilde{T}_x\bigl(t(x)u + p(x)\bigr) = t(x)\,\tilde{T}_x u + \tilde{T}_x p(x)$$

が成り立つため，$\tilde{T}_x$ は線型写像である．(1, 1)-圏 **Snglr** の定義より $T$ は開埋め込みであり，単射である．故に，有限次元ベクトル空間の間の単射線型写像 $\tilde{T}_x$ は全単射でもあり，$\tilde{T}_x \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ だと分かった．この事実は，Kan 複体の同型 $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n) \cong \mathrm{Sing}^{\mathrm{sm}}\bigl(\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})\bigr)$ を意味する．

さて，部分 Kan 複体 $\mathrm{Aut}^0(U) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}{}^0(U, U) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{nglr}}(U, U)$ を次のように定義しよう：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}{}^0(U, U)_m &\coloneqq \bigl\{\, f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathbf{nglr}}(U, U)_m \bigm| \forall x \in \Delta_e^m,\ f(x, 0) = (x, 0) \,\bigr\}, \\
\mathrm{Aut}^0(U)_m &\coloneqq \bigl\{\, f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}{}^0(U, U)_m \bigm| \forall x \in \Delta_e^m,\ \exists (f|_{\{x\}\times U})^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(U, U) \,\bigr\}
\end{aligned}$$

**補題 1.3: 層状化された一般線形群は原点を保つ自己同相群**

$$\mathrm{GL}(U) \subset \mathrm{Aut}^0(U) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}{}^0(U, U)$$

**証明** $\forall m \geq 0$ および $\forall T \in \mathrm{GL}(U)_m$ を 1 つ固定する．$\forall x \in \Delta_e^m$ および $\forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して $\gamma_{[m]\,t,\,0}(x, 0) = (x, 0)$ が成り立つので，

$$T(x, 0) = T \circ \gamma_{[m]\,0,\,0}(x, 0) = \gamma_{[m]\,0,\,0}\bigl(T(x, 0)\bigr) = (x, 0)$$

が言える．また，(1, 1)-圏 **Snglr** の定義より $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(\Delta_e^m \times U \longrightarrow \Delta_e^m \times U)$ は開埋め込みであるから単射である．故に $T$ が全射であることを示せば良い． ■

**補題 1.4: 層状化された直交群は一般線形群の部分 Kan 複体**

$$\mathrm{O}(U) \subset \mathrm{GL}(U)$$

**証明** $\forall m \geq 0$ および $\forall T \coloneqq (A, f) \in \mathrm{O}(U)_m = \mathrm{Sing}^{\mathrm{sm}}\bigl(\mathrm{O}(n)\bigr)_m \times \mathrm{Aut}(Z)_m$ を 1 つ固定する．まず，$\forall\bigl(x, (v, [s, z])\bigr) \in \Delta_e^m \times U = \Delta_e^m \times \mathbb{R}^n \times \mathsf{C}(Z)$ に対して

$$T\bigl(x, (v, [s, z])\bigr) \coloneqq \Bigl(x, \bigl(A(x)v, [s, \mathrm{proj}_Z \circ f(x, z)]\bigr)\Bigr)$$

と定めることで $T \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}{}^0(U, U)_m$ と見做せる．このとき，$\forall (t, p) \in \mathrm{Sing}^{\mathrm{sm}}(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n)$ に対して

$$\begin{aligned}
T \circ \gamma_{[m]\,t,\,p}\bigl(x, (v, [s, z])\bigr) &= T\Bigl(x, \bigl(t(x)v + p(x), [t(x)s, z]\bigr)\Bigr) \\
&= \Bigl(x, \bigl(t(x)A(x)v + A(x)p(x), [t(x)s, \mathrm{proj}_Z \circ f(x, z)]\bigr)\Bigr) \\
&= \gamma_{[m]\,t,\,Ap}\Bigl(x, \bigl(A(x)v, [s, \mathrm{proj}_Z \circ f(x, z)]\bigr)\Bigr) \\
&= \gamma_{[m]\,t,\,(Tp)_{\mathbb{R}^n}} \circ T\bigl(x, (v, [s, z])\bigr)
\end{aligned}$$

が成り立つため $T \in \mathrm{GL}(U)_m$ が言えた． ■

**命題 1.2:**

Kan 複体の包含写像

$$\mathrm{O}(U) \overset{i_1}{\hookrightarrow} \mathrm{GL}(U) \overset{i_2}{\hookrightarrow} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}{}^0(U,\, U) \overset{i_3}{\hookrightarrow} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}(U,\, U)$$

は全て Kan 複体のホモトピー同値である．

**証明** $i_1$ **のホモトピー逆**

Gram-Schmidt の正規直交化を行う．

$i_2$ **のホモトピー逆**

$(\infty,\,1)$-圏 $\mathcal{B}\mathbf{sc}$ の定義において登場する射は全て conically smooth なので，$\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}{}^0(U,\, U)_m$ の微分

$$Df\colon T(\Delta_e^m \times \mathbb{R}^n) \times \mathsf{C}(Z) \longrightarrow T(\Delta_e^m \times \mathbb{R}^n) \times \mathsf{C}(Z)$$

が存在する[*7]．このとき，$T(\Delta_e^m \times \mathbb{R}^n) \approx (\Delta_e^m \times \mathbb{R}^n) \times (\Delta_e^m \times \mathbb{R}^n)$ であり，底空間の勝手な元 $(x,\, p) \in \Delta_e^m \times \mathbb{R}^n$ に対して

$$D_{(x,\,p)}f \coloneqq Df|_{\Delta_e^m \times \mathbb{R}^n \times \{(x,\,p)\} \times \mathsf{C}(Z)} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}(U,\, U)_m \subset \mathrm{Hom}_{\mathbf{Snglr}}(\Delta_e^m \times U,\, \Delta_e^m \times U)$$

とおこう．特に，$D_{(x,\,0)}f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}{}^0(U,\, U)_m$ であることに注意する．

$\forall x \in \Delta_e^m$ を 1 つ固定する．まずは $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}{}^0(U,\, U)_m$ に対して $D_{(x,\,0)}f \in \mathrm{GL}(U)_m$ であること，i.e. Kan 複体の射

$$D_0\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}{}^0(U,\, U) \longrightarrow \mathrm{GL}(U)$$

が定まることを示そう．実際，$\forall (t,\, p) \in \mathrm{Sing}^{\mathrm{sm}}(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n)_m$ に対して

$$\begin{aligned} D_{(x,\,0)}f \circ \gamma_{[m]\,t,\,p} &= \left( \lim_{s \to +0} \gamma_{\frac{1}{s},\,0} \circ f \circ \gamma_{s,\,0} \right) \circ \gamma_{t,\,p} \\ &= \cdots \\ &= \gamma_{[m]\,t,\,D_{(x,\,0)}f(p)} \circ D_{(x,\,0)}f \end{aligned}$$

と計算できる．

さらに，$\mathrm{GL}(U)$ の定義から $\forall T \in \mathrm{GL}(U)_m$ および $\forall t > 0$ に対して

$$\gamma_{[m]\,\frac{1}{t},\,0} \circ T \circ \gamma_{[m]\,t,\,0} = T$$

が成り立つので，微分の一意性より $D_0 T = T$ だと分かる．i.e. $D_0 \circ i_2 = \mathrm{Id}_{\mathrm{GL}(U)}$ である．

その上,

$$\begin{aligned} \mathrm{Sing}^{\mathrm{sm}}([0,\, 1]) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}{}^0(U,\, U) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}{}^0(U,\, U), \\ (s,\, f) &\longmapsto \gamma_{\frac{1}{s},\,0} \circ f \circ \gamma_{s,\,0} \end{aligned}$$

がちょうど $i_2 \circ D_0$ と $\mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\mathbf{sc}}{}^0(U,\,U)}$ を繋ぐホモトピーになっており，$i_2$ のホモトピー逆が $D_0$ であることが示された．

[*7] $\Delta_e^m \approx \mathbb{R}^m$ である．

**$i_3$ のホモトピー逆**

$\gamma$ により原点へ並行移動すれば良い．

■

### 1.2.9 $\mathcal{B}$sc の構造

$(1,\,1)$-圏 **Bsc** における対象の同型類が成す集合を

$$\mathrm{Ob}([\mathcal{B}\mathbf{sc}]) \coloneqq \left\{\, [U] \;\middle|\; U \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Bsc}) \,\right\}$$

と書く．この集合の上には 2 項関係

$$\left\{\, ([U],\,[V]) \in \mathrm{Ob}([\mathcal{B}\mathbf{sc}])^{\times 2} \;\middle|\; \mathrm{Hom}_{\mathbf{Bsc}}(U,\,V) \neq \,\right\} \tag{1.2.5}$$

が定まる．

**定理 1.2: Basics are easy**

(1) $\forall U = \mathbb{R}^n \times \mathsf{C}(Z) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Bsc})$ に対して，Kan 複体の包含

$$\mathrm{O}(\mathbb{R}^n) \times \mathrm{Aut}(Z) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Bsc}}(U,\,U)$$

は Kan 複体のホモトピー同値である．

(2) $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Bsc}}(U,\,V)$ に対して，以下のいずれかちょうど 1 つが真である：
  (a) $f$ は $(\infty,\,1)$-圏 $\mathcal{B}\mathbf{sc}$ における同型射である．
  (b) $\mathrm{depth}(U) < \mathrm{depth}(V)$

(3) 集合 $\mathrm{Ob}([\mathcal{B}\mathbf{sc}])$ 上の 2 項関係 (1.2.5) は半順序である．半順序集合 $\mathrm{Ob}([\mathcal{B}\mathbf{sc}])$ を $(1,\,1)$-圏と見做し，それを $[\mathcal{B}\mathbf{sc}]$ と書く．

(4) $(\infty,\,1)$-圏の関手

$$[\text{-}] \colon \mathcal{B}\mathbf{sc} \longrightarrow \mathrm{N}\,[\mathcal{B}\mathbf{sc}]$$

は conservative である．i.e. $(U \xrightarrow{f} V) \in \mathcal{B}\mathbf{sc}_1$ が $(\infty,\,1)$-圏 $\mathcal{B}\mathbf{sc}$ における同型射であるためには，$U,\,V$ が $(1,\,1)$-圏 **Bsc** において同型であることが必要十分である．

(5) 写像

$$\mathrm{depth} \colon \mathrm{Ob}([\mathcal{B}\mathbf{sc}]) \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

は順序を保つ．

**証明**

■

### 1.2.10 tangent classifier の構造

## 1.3 Disk algebras

### 1.3.1 $(\infty,1)$-オペラッド

本資料では，$(\infty,1)$-圏を quasi-category として定義した．この小節では，quai-category における colored operad を定義する．

**定義 1.32: $(1,1)$-圏 $\mathbf{Fin}$, $\mathbf{Fin}_*$**

$(1,1)$-圏 $\mathbf{Fin}$ を以下で定義する：

- 有限集合および空集合を対象に持つ．
- $I, J \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Fin})$ の間の写像を射とする．

---

$(1,1)$-圏 $\mathbf{Fin}_*$ を以下で定義する：

- 基点付き有限集合
$$\langle n\rangle \coloneqq \{*, 1, \dots, n\}$$
を対象に持つ．i.e.
$$\mathrm{Ob}(\mathbf{Fin}_*) \coloneqq \left\{ \langle n\rangle \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}.$$
- $\forall \langle m\rangle, \langle n\rangle \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Fin}_*)$ に対して，それらの間の基点を保つ写像を射とする．i.e.
$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}\left(\langle m\rangle, \langle n\rangle\right) \coloneqq \left\{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}\left(\langle m\rangle, \langle n\rangle\right) \;\middle|\; f(*) = * \right\}.$$

**定義 1.33: inert/active morphism**

- 圏 $\mathbf{Fin}_*$ における射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m\rangle, \langle n\rangle)$ が **inert** であるとは，$\forall i \in \langle n\rangle \setminus \{*\}$ に対して $f^{-1}\big(\{i\}\big) \subset \langle m\rangle$ が 1 点集合であることを言う．
- 圏 $\mathbf{Fin}_*$ における射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}(\langle m\rangle, \langle n\rangle)$ が **active** であるとは，$f^{-1}\big(\{*\}\big) = \{*\} \subset \langle m\rangle$ であることを言う．

**【例 1.3.1】inert な射 $\rho^i$**

$1 \leq \forall i \leq \forall n$ を 1 つ固定する．このとき，写像

$$\rho^i\colon \langle n\rangle \longrightarrow \langle 1\rangle,$$
$$j \longmapsto \begin{cases} 1, & j = i \\ *, & j \neq i \end{cases}$$

は圏 $\mathbf{Fin}_*$ における inert な射である．

**【例 1.3.2】active な射 $\alpha_n$**

$\forall n \geq 1$ を 1 つ固定する．このとき，写像

$$
\begin{aligned}
\alpha_n \colon \langle n \rangle &\longrightarrow \langle 1 \rangle\,, \\
j &\longmapsto \begin{cases} 1, & j \neq * \\ *, & j = * \end{cases}
\end{aligned}
$$

は圏 $\mathbf{Fin}_*$ における active な射である．なお，$\alpha_n$ は射の集合 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}\big(\langle n \rangle\,, \langle 1 \rangle\big)$ の元のうち，唯一の active な射である．

脈体の定義において $[n] \in \mathrm{Ob}(\Delta)$ を $(1,\,1)$-圏と見做した方法と同様にして，半順序集合 $\{n-1 \leq n\}$ を $(1,\,1)$-圏と見做す．このとき，

$$
\mathrm{N}\big(\{n-1 \leq n\}\big) = \left( \underset{n-1}{\bullet} \longrightarrow \underset{n}{\bullet} \right) \cong \Delta^1
$$

と図示できる．同様に，

$$
\mathrm{N}\big(\{0 \leq 1\}\big) = \left( \underset{0}{\bullet} \longrightarrow \underset{1}{\bullet} \right) \cong \Delta^1
$$

である．

**定義 1.34: $p$-Cartesian morphism**

$p \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{B}$ を内的ファイブレーションとする．

- $\mathcal{E}$ の 1-射 $(x \xrightarrow{f} y) \in \mathcal{E}_1$ が以下の条件を充たすとき，$f$ は ***p*-Cartesian** であると言う：
  **(Cartesian)** $\forall n \geq 2$ に対して，以下の **sSet** の図式を可換にする $\mathcal{E}$ の $n$-射 $\bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n,\,\mathcal{E}) \cong \mathcal{E}_n$ が存在する：

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{N}\big(\{n-1 \leq n\}\big) \cong \Delta^1 \arrow[d, hook] \arrow[dr, "f"] & \\
\Lambda^n_n \arrow[r, "\forall \varphi_0"] \arrow[d, hook] & \mathcal{E} \arrow[d, "p"] \\
\Delta^n \arrow[ur, dashed, "\exists \bar{\varphi}"] \arrow[r, "\forall \varphi"'] & \mathcal{B}
\end{tikzcd}
$$

  ただし，**sSet** の射 $f \colon \mathrm{N}\big(\{n-1 \leq n\}\big) \longrightarrow \mathcal{E}$ とは

$$
f_{[1]}\left( \underset{n-1}{\bullet} \longrightarrow \underset{n}{\bullet} \right) = \underset{x}{\bullet} \xrightarrow{f} \underset{y}{\bullet}
$$

  を充たす唯一の自然変換である．
- $\mathcal{E}$ の 1-射 $(x \xrightarrow{f} y) \in \mathcal{E}_1$ が以下の条件を充たすとき，$f$ は ***p*-coCartesian** であると言う：
  **(coCartesian)** $\forall n \geq 2$ に対して，以下の **sSet** の図式を可換にする $\mathcal{E}$ の $n$-射 $\bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n,\,\mathcal{E}) \cong \mathcal{E}_n$ が存在する：

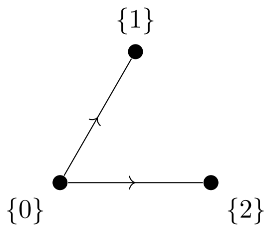
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{N}\bigl(\{0 \le 1\}\bigr) \cong \Delta^1 \arrow[d, hook] \arrow[dr, "f"] & \\
\Lambda^n_0 \arrow[r, "\forall \varphi_0"] \arrow[d, hook] & \mathcal{E} \arrow[d, "p"] \\
\Delta^n \arrow[r, "\forall \varphi"'] \arrow[ur, dashed, "\exists \overline{\varphi}"] & \mathcal{B}
\end{tikzcd}$$

ただし，**sSet** の射 $f\colon \mathrm{N}\bigl(\{0 \le 1\}\bigr) \longrightarrow \mathcal{E}$ とは

$$f_{[1]}\left( \underset{n-1}{\bullet} \longrightarrow \underset{n}{\bullet} \right) = \underset{x}{\bullet} \xrightarrow{f} \underset{y}{\bullet}$$

を充たす唯一の自然変換である．

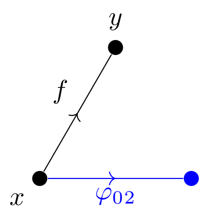
$n = 2$ の場合の **(coCartesian)** の可換図式の意味を，系**??**を用いて解読しよう．まず，包含 $\mathrm{N}\bigl(\{0 \le 1\}\bigr) \hookrightarrow \Lambda^2_0$ というのは，系**??**による角 $\Lambda^2_0$ の図示




のうち辺 $\{0\} \longrightarrow \{1\}$ への埋め込みであるから，可換図式の

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{N}\bigl(\{0 \le 1\}\bigr) \cong \Delta^1 \arrow[d, hook] \arrow[dr, "f"] & \\
\Lambda^2_0 \arrow[r, "\forall \varphi_0"] & \mathcal{E}
\end{tikzcd}$$

の部分は勝手な角の図式 $\varphi_0 = (\bullet,\, f,\, \varphi_{02}) \in \mathcal{E}^{\times 2}_1$ を与えることに対応する．図示すると

$\varphi_0 =$ 

(1.3.1)

となる．従って，**(coCart-2)** の主張は次のような意味を持つ：

$(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{B}$ において角の図式が 2-射 $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^2, \mathcal{B}) \cong \mathcal{B}_2$ によって

$$
\begin{tikzcd}
 & p_{[0]}(y) \arrow[dr, "\partial_0^2(\varphi)"] \arrow[d, phantom, "\varphi"] & \\
p_{[0]}(x) \arrow[ur, "p_{[1]}(f)"] \arrow[rr, "p_{[1]}(\varphi_{02})"'] & {} & \bullet
\end{tikzcd}
$$

と埋められているならば，$\mathcal{E}$ において角の図式 (1.3.1) を

$$
\begin{tikzcd}
 & y \arrow[dr, "\partial_0^2(\bar{\varphi})"] \arrow[d, phantom, "\bar{\varphi}"] & \\
x \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\varphi_{02}"'] & {} & \bullet
\end{tikzcd}
$$

のように埋める 2-射 $\bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^2, \mathcal{E}) \cong \mathcal{E}_2$ が存在する．

**定義 1.35: デカルトファイブレーション**

$p\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{B}$ を内的ファイブレーションとする．

- $p$ が**デカルトファイブレーション** (Cartesian fibration) であるとは，
  - $\mathcal{B}$ の任意の 1 射 $(x \xrightarrow{f} y) \in \mathcal{B}_1$
  - $p_{[0]}(\bar{y}) = y$ を充たす $\mathcal{E}$ の任意の対象 $\bar{y} \in \mathcal{E}_0$

  に対して，以下の条件を充たす $\mathcal{E}$ の 1-射 $(z \xrightarrow{\bar{f}} \bar{y}) \in \mathcal{E}_1$ が存在することを言う：

  **(Cart-1)**

  $\bar{f}$ は $f$ の持ち上げである．i.e. $p_{[1]}(\bar{f}) = f$ が成り立つ．

  **(Cart-2)**

  $\bar{f}$ は $p$-Cartesian である．
- $p$ が**余デカルトファイブレーション** (coCartesian fibration) であるとは，
  - $\mathcal{B}$ の任意の 1 射 $(x \xrightarrow{f} y) \in \mathcal{B}_1$
  - $p_{[0]}(\bar{x}) = x$ を充たす $\mathcal{E}$ の任意の対象 $\bar{x} \in \mathcal{E}_0$

  に対して，以下の条件を充たす $\mathcal{E}$ の 1-射 $(\bar{x} \xrightarrow{\bar{f}} z) \in \mathcal{E}_1$ が存在することを言う：

  **(coCart-1)**

  $\bar{f}$ は $f$ の持ち上げである．i.e. $p_{[1]}(\bar{f}) = f$ が成り立つ．

  **(coCart-2)**

  $\bar{f}$ は $p$-coCartesian である．

**定義 1.36: $(\infty, 1)$-オペラッド**

**$(\infty, 1)$-オペラッド** ($(\infty, 1)$-operad)[a] とは，$(\infty, 1)$-圏の関手

$$p\colon \mathcal{O}^{\otimes} \longrightarrow \mathrm{N}(\mathbf{Fin}_*)$$

であって以下の条件を充たすもののこと [?, Definition 2.1.1.10.]：

**(Op-1)**

任意の inert な射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}\left(\langle m\rangle,\, \langle n\rangle\right)$ および $\forall c \in (\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle m\rangle})_0$ に対して，$\mathcal{O}^{\otimes}$ における $p$-coCartesian な 1-射 $\bar{f}\colon c \longrightarrow c'$ が存在して $p_{[1]}(\bar{f}) = f$ を充たす．

**(Op-2)**

$\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}\left(\langle m\rangle,\, \langle n\rangle\right)$ および $\forall c \in (\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle m\rangle})_0$，$\forall c' \in (\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n\rangle})_0$ に対して，**【例 1.3.1】**の inert な射の族 $\left\{\rho^i \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}\left(\langle n\rangle,\, \langle 1\rangle\right)\right\}_{1\le i\le n}$ に **(Op-1)** を適用して得られる $p$-coCartesian な 1-射の族 $\left\{c' \xrightarrow{\bar{\rho}^i} c'_i \in (\mathcal{O}^{\otimes})_1\right\}_{1\le i\le n}$ が誘導する Kan 複体の関手[b]

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{O}^{\otimes}}\left(c,\, c'\right)_f \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Map}_{\mathcal{O}^{\otimes}}\left(c,\, c'_i\right)_{\rho^i\circ f}$$

は，$(\infty,\, 1)$-圏 $\mathcal{S}\mathbf{paces}$ における同型射である．

**(Op-3)**

$\forall c_1,\, \dots,\, c_n \in (\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle 1\rangle})_0$ に対して，ある $c \in (\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n\rangle})_0$ および $p$-coCartesian な 1-射 $\widehat{\rho}_i \in \left(\mathrm{Map}_{\mathcal{O}^{\otimes}}\left(c,\, c_i\right)_{\rho^i}\right)_0$ が存在する．

ただし，以下の記法を採用した：

- 点 $\langle n\rangle \in \mathrm{N}(\mathbf{Fin}_*)_0$ における $(\infty,\, 1)$-圏の関手 $p\colon \mathcal{O}^{\otimes} \longrightarrow \mathrm{N}(\mathbf{Fin}_*)$ の**ファイバー** $\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n\rangle}$ を，$(\infty,\, 1)$-圏の pullback

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n\rangle} \arrow[r] \arrow[d] & \Delta^0 \arrow[d, hook, "\langle n\rangle"] \\ \mathcal{O}^{\otimes} \arrow[r, "p"'] & \mathrm{N}(\mathbf{Fin}_*) \end{tikzcd}$$

と定義した[c]．
- $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}\left(\langle m\rangle,\, \langle n\rangle\right)$ および $c \in (\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle m\rangle})_0$，$c' \in (\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n\rangle})_0$ に対して，$\bar{f} \in \mathrm{Map}_{\mathcal{O}^{\otimes}}\left(c,\, c'\right)_0$ であって $p_{[1]}(\bar{f}) = f$ を充たすもの全体から定まる，$\mathrm{Map}_{\mathcal{O}^{\otimes}}\left(c,\, c'\right) \in \mathcal{S}\mathbf{paces}_0$ の充満部分 Kan 複体を

$$\boldsymbol{\mathrm{Map}_{\mathcal{O}^{\otimes}}\left(c,\, c'\right)_f} \hookrightarrow \mathrm{Map}_{\mathcal{O}^{\otimes}}\left(c,\, c'\right)$$

と書いた．

---

[a] $\infty$-operad とも呼ばれる．

[b] 対象の対応としては $\bar{f} \longmapsto (\bar{\rho}^1 \circ \bar{f},\, \dots,\, \bar{\rho}^n \circ \bar{f})$ であるが，右辺の $(\infty,\, 1)$-圏 $\mathcal{O}^{\otimes}$ における 1-射の合成は up to homotopy でしか定まらないため，この関手は up to homotopy でしか決まらない．

[c] これ自体が $(\infty,\, 1)$-圏である．なお，ファイバーは $(\infty,\, 1)$-圏の pullback なので一見すると非常に計算が難しいが，幸いにしてこの場合は $(1,\, 1)$-圏 $\mathbf{sSet}$ における pullback と一致する．

**補題 1.5: Segal 条件**

$(\infty, 1)$-圏の関手

$$p \colon \mathcal{O}^{\otimes} \longrightarrow \mathrm{N}(\mathbf{Fin}_*)$$

であって条件 **(Op-1)**, **(Op-2)** を充たすものを与える．このとき，条件 **(Op-3)** は以下と同値である[a]：

**(Segal)**

$\forall n \geq 0$ に対して，【例 **1.3.1**】の inert な射の族 $\left\{\rho^i \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}\left(\langle n\rangle, \langle 1\rangle\right)\right\}_{1\leq i\leq n}$ が条件 **(Op-1)** により誘導する $(\infty, 1)$-圏の関手の族 $\left\{\rho^i_! \colon \mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n\rangle} \longrightarrow \mathcal{O}^{\otimes}_{\langle 1\rangle}\right\}_{1\leq i\leq n}$ は，$(\infty, 1)$-圏同値

$$(\rho^1_!, \dots, \rho^n_!) \colon \mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n\rangle} \xrightarrow{\simeq} \left(\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle 1\rangle}\right)^{\times n} \tag{1.3.2}$$

を与える．

[a] 一般に Segal 条件というと $n$-fold pullback のことだが，現在は $\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle 0\rangle}$ が contractible なので $n$-fold product になっている．

証明 **(OP-3) $\Longrightarrow$ (Segal)**

**(OP-3)** を仮定する．命題**??**より，$(\infty, 1)$-圏の関手 (1.3.2) が忠実充満かつ本質的全射であることを示せば良い．

$\forall n \geq 0$ および $\forall c, c' \in (\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n\rangle})_0$ を固定する．このとき $\mathrm{Id}_{\langle n\rangle} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}\left(\langle n\rangle, \langle n\rangle\right)$ に対して **(OP-2)** を用いることで，ホモトピー同値

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n\rangle}}(c, c') \simeq \mathrm{Map}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c, c')_{\mathrm{Id}_{\langle n\rangle}} \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Map}_{\mathcal{O}^{\otimes}}\left(c, c'_i\right)_{\rho^i}$$

が得られる．さらに，$p$-coCartesian な射の定義からホモトピー同値

$$\prod_{i=1}^{n} \mathrm{Map}_{\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle 1\rangle}}\left(\rho^i_{![0]}(c), \rho^i_{![0]}(c')\right) \simeq \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Map}_{\mathcal{O}^{\otimes}}\left(c_i, c'_i\right)_{\mathrm{Id}_{\langle 1\rangle}} \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Map}_{\mathcal{O}^{\otimes}}\left(c, c'_i\right)_{\rho^i}$$

が得られる[*8]ため，(1.3.2) が忠実充満だと分かった．本質的全射であることは **(OP-3)** より従う．

**(OP-3) $\Longleftarrow$ (Segal)**　明らか．

■

[*8] **(OP-2)** における $c'_i \in (\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle 1\rangle})_0$ とは，ちょうど $\rho^i_{![0]}(c')$ のことである．

**定義 1.37: $(\infty, 1)$-オペラッドの射**

$(\infty, 1)$-オペラッド $p\colon \mathcal{O}^{\otimes} \longrightarrow \mathrm{N}(\mathbf{Fin}_*)$ を与える．このとき，$(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{O}^{\otimes}$ の 1-射 $f \in (\mathcal{O}^{\otimes})_1$ が **inert** であるとは，以下の 2 条件を充たすことを言う：

**(inert-1)** $p_{[1]}(f)$ は $(1, 1)$-圏 $\mathbf{Fin}_*$ における inner な射である．

**(inert-2)** $f$ は $p$-coCartesian な 1-射である．

---

2 つの $(\infty, 1)$-オペラッド $p\colon \mathcal{O}^{\otimes} \longrightarrow \mathrm{N}(\mathbf{Fin}_*)$, $p'\colon \mathcal{O}'^{\otimes} \longrightarrow \mathrm{N}(\mathbf{Fin}_*)$ を与える．このとき，$(\infty, 1)$-圏の関手 $f\colon \mathcal{O}^{\otimes} \longrightarrow \mathcal{O}'^{\otimes}$ が **$(\infty, 1)$-オペラッドの射** ($\infty$-operad map) であるとは，以下の 2 つの条件を充たすことを言う：

**(Opmap-1)** $(1, 1)$-圏 **sSet** の図式

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}^{\otimes} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathcal{O}'^{\otimes} \arrow[dl, "p'"] \\ & \mathrm{N}(\mathbf{Fin}_*) & \end{tikzcd}$$

は可換である．

**(Opmap-2)** 1-射の間の写像 $f_{[1]}\colon (\mathcal{O}^{\otimes})_1 \longrightarrow (\mathcal{O}'^{\otimes})_1$ により，inert な 1-射が保存される[a]．

[a] 条件 **(Opmap-1)** より，inert な 1-射の $p_{[1]}$ による像が条件 **(inert-1)** を充たすことは明らかである．

定義 1.36 がオペラッドと呼ぶにふさわしいことを示すために，次の小節では $(1, 1)$-圏の文脈で対応物を考えよう．

### 1.3.2 色付きオペラッドと $(1, 1)$-圏の coCartesian fibration

**定義 1.38: colored operad**

**色付きオペラッド**[a] (colored operad) $\mathcal{O}$ は，以下の 4 つのデータから成る：

- **対象**[b] (object) の集まり
$$\mathbf{Ob}(\mathcal{O})$$
- $\forall I \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Fin})$, $\forall \{x_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O})\}_{i\in I}$, $\forall y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O})$ の 3 つ組に対して定まっている，$\{x_i\}_{i\in I}$ から $y$ へ向かう**多射** (multimorphism) の集合
$$\mathbf{Mul}_{\mathcal{O}}\bigl(\{x_i\}_{i\in I},\, y\bigr) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$$
- $\forall \alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}}(I, J)$, $\forall \bigl\{x_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O})\bigr\}_{i\in I}$, $\bigl\{y_j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O})\bigr\}_{j\in J}$, $\forall z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O})$ の 4 つ組に対して定まっている，多射の**合成** (composition map) と呼ばれる写像
$$\circ_{\boldsymbol{\alpha}}\colon \mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}\bigl(\{y_j\}_{j\in J},\, z\bigr) \times \prod_{j\in J} \mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}\bigl(\{x_i\}_{i\in\alpha^{-1}(\{j\})},\, y_j\bigr) \longrightarrow \mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}\bigl(\{x_i\}_{i\in I},\, z\bigr),$$
$$\bigl(G,\, (F_j)_{j\in J}\bigr) \longmapsto G \circ_{\alpha} (F_j)_{j\in J}$$

- **恒等射** (identitiy) と呼ばれる多射の族 $\left\{ \mathrm{Id}_x \in \mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}\bigl(\{x\},\, x\bigr) \right\}_{x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O})}$

これらは以下の条件を充たさねばならない：

**(cOp-1)**
: 恒等射は合成に関して単位元として振る舞う．

**(cOp-2)**
: 多射の合成は結合則を充たす．i.e. $\forall \alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}}(I,\, J)$, $\forall \beta \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}}(J,\, K)$, $\forall \bigl\{x_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O})\bigr\}_{i \in I}$, $\forall \bigl\{y_j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O})\bigr\}_{j \in J}$, $\forall \bigl\{z_k \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O})\bigr\}_{k \in K}$, $\forall w \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O})$ に対して，(1, 1)-圏 **Sets** の図式

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}\bigl(\{z_k\}_{k\in K},\, w\bigr) \times \prod_{k\in K} \mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}\bigl(\{y_j\}_{j\in\beta^{-1}(\{k\})},\, z_k\bigr) \times \prod_{j\in J} \mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}\bigl(\{x_i\}_{i\in\alpha^{-1}(\{j\})},\, y_j\bigr) \arrow[dl, "\circ_\beta \times \mathrm{Id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{Id} \times \left(\circ_{\alpha|_{\alpha^{-1}(\beta^{-1}(\{k\}))}}\right)_{k\in K}"] & \\
\mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}\bigl(\{y_j\}_{j\in J},\, w\bigr) \times \prod_{j\in J} \mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}\bigl(\{x_i\}_{i\in\alpha^{-1}(\{j\})},\, y_j\bigr) \arrow[dr, "\circ_\alpha"'] & & \mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}\bigl(\{z_k\}_{k\in K},\, w\bigr) \times \prod_{k\in K} \mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}\bigl(\{x_i\}_{i\in(\beta\circ\alpha)^{-1}(\{k\})},\, z_k\bigr) \arrow[dl, "\circ_{\beta\circ\alpha}"] \\
& \mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}\bigl(\{x_i\}_{i\in I},\, z\bigr) &
\end{tikzcd}$$

は可換である．

---

[a] いわゆる**対称色付きオペラッド** (symmetric colored operad) である．
[b] **色** (color) と呼ばれることもある．

色付きオペラッドの定義において，写像 $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}}(I,\, J)$ が多射の合成の「型」を規定している．

**定義 1.39: (1, 1)-圏における coCartesian fibration**

$p\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{B}$ を (1, 1)-圏の関手とする．

- $\mathcal{E}$ の射 $\bar{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\bar{x},\, \bar{y})$ が以下の条件を充たすとき，$\bar{f}$ は ***p*-coCartesian** であると言う：

  **(coCart-ord)** (1, 1)-圏 $\mathcal{B}$ の図式

$$\begin{tikzcd}
& p(\bar{y}) \arrow[dr, "\forall\varphi"] & \\
p(\bar{x}) \arrow[ur, "p(\bar{f})"] \arrow[rr, "p(\forall\varphi_0)"'] & & p(\forall\bar{z})
\end{tikzcd}$$

  を可換にする勝手な 2 つの射 $\varphi_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\bar{x},\, \bar{z})$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\bigl(p(\bar{y}),\, p(\bar{z})\bigr)$ に対して，射 $\bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\bar{y},\, \bar{z})$ が一意的に存在して (1, 1)-圏 $\mathcal{E}$ の図式

$$\begin{tikzcd}
& \bar{y} \arrow[dr, "\exists!\bar{\varphi}"] & \\
\bar{x} \arrow[ur, "\bar{f}"] \arrow[rr, "\varphi_0"'] & & \bar{z}
\end{tikzcd}$$

を可換にする．

- $p$ が **coCartesian fibration** であるとは，
  - $(1,\ 1)$-圏 $\mathcal{B}$ の任意の射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(x,\ y)$
  - $p(\bar{x}) = x$ を充たす $(1,\ 1)$-圏 $\mathcal{E}$ の対象 $\bar{x} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E})$

  に対して，以下の条件を充たす $(1,\ 1)$-圏 $\mathcal{E}$ の射 $\bar{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\bar{x},\ z)$ が存在することを言う：

  **(coCart-ord-1)**

  $\bar{f}$ は $f$ の持ち上げである．i.e. $p(\bar{f}) = f$ が成り立つ．

  **(coCart-ord-2)**

  $\bar{f}$ は $p$-coCartesian である．

定義 1.36 に合わせて，$(1,\ 1)$-圏の関手

$$p\colon \mathcal{O}^{\otimes} \longrightarrow \mathbf{Fin}_* \tag{1.3.3}$$

であって以下の 3 条件を充たすものを考えてみる：

**(OP-ord-1)**

任意の inert な射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}\big(\langle m\rangle,\ \langle n\rangle\big)$ および $\forall c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O}^{\otimes}{}_{\langle m\rangle})$ に対して，$\mathcal{O}^{\otimes}$ における $p$-coCartesian な射 $\bar{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c,\ c')$ が存在して $p(\bar{f}) = f$ を充たす．

**(OP-ord-2)**

$\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}\big(\langle m\rangle,\ \langle n\rangle\big)$ および $\forall c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle m\rangle}),\ \forall c' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n\rangle})$ に対して，inert な射 $\rho^i \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}\big(\langle n\rangle,\ \langle 1\rangle\big)$ に **(Op-ord-1)** を適用して得られる $p$-coCartesian な射の族 $\big\{\bar{\rho}^i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c',\ c'_i)\big\}_{1\le i\le n}$ が誘導する写像

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c,\ c')_f &\longrightarrow \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c,\ c'_i)_{\rho^i\circ f}, \\ \varphi &\longmapsto (\bar{\rho}^1\circ\varphi,\ \dots,\ \bar{\rho}^n\circ\varphi) \end{aligned}$$

は，$(1,\ 1)$-圏 **Sets** における同型射（i.e. 全単射）である．

**(OP-ord-3)**

$\forall c_1,\ \dots,\ c_n \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle 1\rangle})$ に対して，ある $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n\rangle})_0$ および $p$-coCartesian な射 $\widehat{\rho}_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c,\ c_i)_{\rho^i}$ が存在する．

ここで，**Cat** における引き戻し

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n\rangle} \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d, "\langle n\rangle"] \\ \mathcal{O}^{\otimes} \arrow[r, "p"'] & \mathbf{Fin}_* \end{tikzcd}$$

により $(1,\ 1)$-圏 $\mathcal{O}^{\otimes}$ を定義している．具体的には

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n\rangle}) = \big\{\, c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O}^{\otimes}) \;\big|\; p(c) = \langle n\rangle \,\big\}$$

である．さらに，$\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}\big(\langle m\rangle,\ \langle n\rangle\big)$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c,\ c')_f \coloneqq \big\{\, \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(c,\ c') \;\big|\; p(\varphi) = f \,\big\}$$

と定義した．

**命題 1.3: 色付きオペラッドの再構成**

条件 **(Op-ord-1)-(Op-ord-3)** を充たす (1, 1)-圏の関手 (1.3.3) から次のように構成されたデータの組み $\mathcal{O}$ は色付きオペラッドを成す：

- 対象の集まりを $\mathrm{Ob}(\mathcal{O}) \coloneqq \mathrm{Ob}(\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle 1\rangle})$ と定義する．
- $\forall x_1, \ldots, x_n, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O})$ に対して，以下の 3 つ組全体が成す集合を $\mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}\big((x_1, \ldots, x_n), y\big)$ と定義する．
  (1) $x_1, \ldots, x_n$ に対して **(Op-ord-3)** を適用することにより定まる $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle n\rangle})$
  (2) $x_1, \ldots, x_n$ に対して **(Op-ord-3)** を適用することにより定まる $p$-coCartesian な射の族 $\big\{\widehat{\rho_i} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(X, x_i)_{\rho^i}\big\}_{1\le i\le n}$
  (3)【例 **1.3.2**】の active な射 $\alpha_n \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}\big(\langle n\rangle, \langle 1\rangle\big)$ およびその上の $\mathcal{O}^{\otimes}$ の射 $F \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(X, y)_{\alpha_n}$
- $n$ 個の多射

$$\begin{gathered}(X^1, \{\widehat{\rho_i}^1\}_{1\le i\le m_1}, F^1) \in \mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}\big((x^1_1, \ldots, x^1_{m_1}), y_1\big),\\ \vdots \\ (X^n, \{\widehat{\rho_i}^n\}_{1\le i\le m_n}, F^n) \in \mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}\big((x^n_1, \ldots, x^n_{m_n}), y_n\big)\end{gathered}$$

と 1 つの多射 $(Y, \{\widehat{\rho_j}\}_{1\le j\le n}, G) \in \mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}\big((y_1, \ldots, y_n), z\big)$ の合成

$$\big(X, \{\widehat{\rho_i}\}_{1\le i\le m_1+\cdots+m_n}, G\circ(F^1; \ldots; F^n)\big) \in \mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}\big((x^1_1, \ldots, x^1_{m_1}; \ldots; x^n_1, \ldots, x^n_{m_n}), z\big)$$

を次のように定義する：

(1) $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O}^{\otimes}_{\langle m_1+\cdots+m_n\rangle})$ は，$x^1_1, \ldots, x^n_{m_n} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O})$ に対して **(Op-ord-3)** を適用することにより定める．

(2) $p$-coCartesian な射の族 $\big\{\widehat{\rho^j_i} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(X, x^j_i)_{\rho^{i+m_1+\cdots+m_{j-1}}}\big\}_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le i\le m_j}}$ は $x^1_1, \ldots, x^n_{m_n} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O})$ に対して **(Op-ord-3)** を適用することにより定める．

(3) $\mathcal{O}^{\otimes}$ の射 $G\circ(F^1; \ldots; F^n) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(X, z)_{\alpha_{m_1+\cdots+m_n}}$ は以下の手順に従って構成する：

**(STEP-1)**

まず，$1 \le \forall j \le n$ に対して inert な射 $\pi_j \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}\big(\langle m_1+\cdots+m_n\rangle, \langle m_j\rangle\big)$ を

$$\begin{aligned}\pi_j\colon \langle m_1+\cdots+m_n\rangle &\longrightarrow \langle m_j\rangle,\\ k &\longmapsto \begin{cases} k-(m_1+\cdots+m_{j-1}), & 1\le k-(m_1+\cdots+m_{j-1})\le m_j\\ *, & \text{otherwise}\end{cases}\end{aligned}$$

で定義する．

**(STEP-2)**

inert な射 $\pi_j \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}\big(\langle m_1+\cdots+m_n\rangle, \langle m_j\rangle\big)$ に対して **(Op-ord-1)** を適用することにより，$p$-coCartesian な射 $\overline{\pi}_j \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}(X, X^j)_{\pi_j}$ を取得する．

**(STEP-3)**

$$\left(F^1 \circ \bar{\pi}_1,\, \dots,\, F^n \circ \bar{\pi}_n\right) \in \prod_{j=1}^{n} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}\left(X,\, y_j\right)_{\alpha_{m_j} \circ \pi_j}$$

に対して **(Op-ord-2)** を適用することで，対応する

$$F \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}\left(X,\, Y\right)_{\pi}$$

が一意的に定まる．これに $G \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}\left(Y,\, z\right)_{\alpha_n}$ を合成して

$$G \circ_{\pi} \left(F^1;\, \dots;\, F^n\right) \coloneqq G \circ F \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}\left(X,\, z\right)_{\alpha_{m_1+\cdots+m_n}}$$

と定義する．ただし，$\pi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}\left(\langle m_1 + \cdots + m_n \rangle,\, \langle n \rangle\right)$ は

$$\pi(k) \coloneqq \begin{cases} j, & m_{j-1} < k \leq m_j \\ *, & k = * \end{cases}$$

と定義される active な射である[a]．

[a] $1 \leq \forall j \leq n$ に対して $\rho^j \circ \pi = \alpha_{m_j} \circ \pi_j$ が成り立つ．

**証明** ■

逆の対応を作ることもできる．

**定義 1.40: Category of operators**

いま，colored operad $\mathcal{O}$ が与えられたとする．このとき **category of operators** と呼ばれる $(1,\,1)$-圏 $\mathcal{O}^{\otimes}$ を次のように定義する：

- $\mathcal{O}$ の対象の有限列 $x_1,\,\ldots,\,x_n \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O})$ を対象に持つ．
- $\forall (x_1,\,\ldots,\,x_m),\,(y_1,\,\ldots,\,y_n) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O}^{\otimes})$ に対して，以下の 2 つ組を全て集めて得られる集合を $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}\left(\{x_i\}_{1\le i\le m},\,\{y_j\}_{1\le j\le n}\right)$ とする．

  (1) $\mathbf{Fin}_*$ の射

  $$\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}\left(\langle m\rangle\,,\,\langle n\rangle\right)$$

  (2) 多射の族

  $$\left\{\phi_j \in \mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}\left(\{x_i\}_{i\in\alpha^{-1}(\{j\})},\,y_j\right)\right\}_{1\le j\le n}$$

  より具体的には，

  $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^{\otimes}}\left(\{x_i\}_{1\le i\le m},\,\{y_j\}_{1\le j\le n}\right) \coloneqq \coprod_{\alpha\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}_*}\left(\langle m\rangle,\,\langle n\rangle\right)} \prod_{j=1}^{n} \mathrm{Mul}_{\mathcal{O}}\left(\{x_i\}_{i\in\alpha^{-1}(\{j\})},\,y_j\right)$$

  である．
- 射の合成は，$\mathbf{Fin}_*$ における射の合成および $\mathcal{O}$ における多射の合成によって定める．

---

$\mathcal{O}^{\otimes}$ から $\mathbf{Fin}_*$ への忘却関手を

$$\begin{aligned} p\colon \mathcal{O}^{\otimes} &\longrightarrow \mathbf{Fin}_*, \\ \{x_i\}_{1\le i\le n} &\longmapsto \langle n\rangle\,, \\ \left(\alpha,\,\{\phi_j\}_{1\le j\le n}\right) &\longmapsto \alpha \end{aligned}$$

と定義する．

**命題 1.4: 色付きオペラッドと category of operators**

$(1,\,1)$-圏の関手

$$p\colon \mathcal{O}^{\otimes} \longrightarrow \mathbf{Fin}_*$$

において，$\mathcal{O}^{\otimes}$ がある色付きオペラッド $\mathcal{O}$ の category of operators と圏同値になる必要十分条件は，$p$ が条件 **(Op-ord-1)-(Op-ord-3)** を充たすことである．

証明 [?, Proposition 2.2.II.] ■

### 1.3.3 $(\infty,\,1)$-圏の構成

話を $(\infty,\,1)$-オペラッドに戻そう．