第 1 章

モノイダル圏・フュージョン圏・高次群

この章では標数 0 の体 $\mathbb{K}$ のみを考える．

1.1　加法圏

定義 1.1: 加法圏・アーベル圏

圏 $\mathcal{C}$ が体 $\mathbb{K}$ 上の**加法圏** (additive category) であるとは，以下を充たすこと：

(add-1)

任意の Hom 集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が可換群の構造をもち，かつ射の合成

$$\circ \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

が群演算に関して双加法的である．

(add-2)

零対象[a] (zero object) $\mathbf{0} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が存在し，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{0}, X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(, \mathbf{0}) = 0$ を充たす[b]．

(add-3)

有限の余積が常に存在する．

加法圏 $\mathcal{C}$ は，$\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に関して $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が $\mathbb{K}$-ベクトル空間の構造を持ち，かつ合成 $\circ$ が $\mathbb{K}$-双線形写像でもあるとき，**$\mathbb{K}$-線形** ($\mathbb{K}$-linear) であると言われる．

[a] 始対象かつ終対象

[b] 最右辺は **(add-1)** の意味で零ベクトル空間．

加法圏 $\mathcal{C}$ は，以下の条件を充たすとき**アーベル圏** (abelian category) と呼ばれる：

(Ab-1)

任意の射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が核 $\ker f \colon \mathrm{Ker}\, f \longrightarrow X$ および余核 $\mathrm{coker}\, f \colon Y \longrightarrow \mathrm{Coker}\, f$ を持つ．

(Ab-2)

Ker $f = \mathbf{0}$ ならば $f = \mathrm{ker}(\mathrm{coker}\, f)$，かつ Coker $f = \mathbf{0}$ ならば $f = \mathrm{coker}(\mathrm{ker}\, f)$

定義 1.2: 加法的関手・完全関手

加法圏 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ の間の関手 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ が**加法的** (additive) であるとは，$\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して定まる写像

$$F_{X,Y}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\bigl(F(X), F(Y)\bigr),\ f \longmapsto F(f)$$

が可換群の準同型であることを言う．特に加法圏 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ が $\mathbb{K}$-線形で，かつ $\forall X, Y \in \mathcal{C}$ に対して $F_{X,Y}$ が $\mathbb{K}$-線型写像でもあるとき，F は **$\mathbb{K}$-線形** ($\mathbb{K}$-linear) であると言う．

アーベル圏 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ の間の加法的関手 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ を与える．

- F が**左完全** (left exact) であるとは，$\mathcal{C}$ の任意の短完全列 $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ に対して

$$0 \longrightarrow F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z)$$

  が $\mathcal{D}$ の完全列になること．
- F が**右完全** (right exact) であるとは，$\mathcal{C}$ の任意の短完全列 $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ に対して

$$F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z) \longrightarrow 0$$

  が $\mathcal{D}$ の完全列になること．
- F が**完全** (exact) であるとは，F が右完全かつ左完全であること．

【例 1.1.1】表現の圏

G を群とする．このとき

- G の表現 (ρ, V) を対象とする
- G-同変な $\mathbb{K}$-線型写像 $(\rho, V) \xrightarrow{f} (\rho', V')$ を射とする

圏を $\mathbf{Rep}(G)$ と書く．$\mathbf{Rep}(G)$ はアーベル圏である．

定義 1.3: 単純・半単純

- アーベル圏 $\mathcal{C}$ の対象 $X \in \mathcal{C}$ が**単純** (simple) であるとは，任意のモノ射 $i: U \hookrightarrow X$ が 0 であるか同型射であることを言う．
- アーベル圏 $\mathcal{C}$ が**半単純** (semisimple) であるとは，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が単純対象の有限余積と同型であることを言う．i.e. 単純対象の族 $\{V_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})\}_{i \in I}$ および有限個を除いて 0 であるような非負整数の族 $\{N_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}_{i \in I}$ が存在して

$$X \cong \bigoplus_{i \in I} N_i X_i$$

が成り立つこと．

定義 1.4: 有限性

アーベル圏 $\mathcal{C}$ とその対象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を与える．

- X が**有限長** (finite length) を持つとは，有限のフィルトレーション

$$0 = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_{n-1} \subset X_n = X$$

であって $X_i/X_{i-1} \coloneqq \mathrm{Coker}(X_{i-1} \hookrightarrow X_i) \quad (\forall i)$ が単純対象であるようなもの（**Jordan-Hölder 列**と言う）が存在することを言う．このときの n を X の**長さ** (length) と呼ぶ[a]．

以下，アーベル圏 $\mathcal{C}$ は $\mathbb{K}$-線形であるとする．

- $\mathcal{C}$ が**局所有限** (locally finite) であるとは，以下の 2 条件を充たすこと：
  (lFin-1) $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，$\mathbb{K}$-ベクトル空間 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が有限次元
  (lFin-2) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が有限長を持つ．
- $\mathcal{C}$ が**有限** (finite) であるとは，以下の 4 条件を充たすこと：
  (Fin-1) $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，$\mathbb{K}$-ベクトル空間 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が有限次元
  (Fin-2) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が有限長を持つ．
  (Fin-3) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が射影的被覆[b]を持つ．
  (Fin-4) 単純対象の同型類が有限個である．

[a] Jordan-Hölder の定理 [?, THEOREM 1.5.4, p.5] から，X の任意の Jordan-Hölder 列は存在すれば同一の長さを持つ．

[b] $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が**射影的** (projective) であるとは，関手 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, \text{-})$ が完全関手であることを言う．$X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の**射影的被覆** (projective cover) とは，射影的対象 $P_X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ とエピ射 $p_X : P_X \longrightarrow X$ の組み (P_X, p_X) であって，任意の射影的対象 $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ およびエピ射 $p: P \longrightarrow X$ に対してあるエピ射 $h: P \longrightarrow P_X$ が存在して $p_X \circ h = p$ を充たすようなもののこと．

1.2 モノイダル圏

これまでも何回か登場したが，モノイダル圏についてまとめておく：

定義 1.5: モノイダル圏

モノイダル圏 (monidal category) は，以下の 5 つのデータからなる：

- 圏 $\mathcal{C}$
- **テンソル積** (tensor product) と呼ばれる関手 $\otimes\colon \mathcal{C}\times\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}$
- **単位対象** (unit object) $I\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- **associator** と呼ばれる自然同値

$$\left\{a_{X,\,Y,\,Z}\colon (X\otimes Y)\otimes Z\xrightarrow{\cong} X\otimes(Y\otimes Z)\right\}_{X,\,Y,\,Z\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

- **left/right unitors** と呼ばれる自然同値

$$\left\{l_X\colon I\otimes X\xrightarrow{\cong} X\right\}_{X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})},$$
$$\left\{r_X\colon X\otimes I\xrightarrow{\cong} X\right\}_{X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは $\forall X,\,Y,\,Z,\,W\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について以下の 2 つの図式を可換にする：

(triangle diagram)

$$\begin{tikzcd}
(X\otimes I)\otimes Y \arrow[rr, "a_{X,\,I,\,Y}"] \arrow[dr, "r_X\otimes\mathrm{Id}_Y"'] & & X\otimes(I\otimes Y) \arrow[dl, "\mathrm{Id}_X\otimes l_Y"] \\
& X\otimes Y &
\end{tikzcd}$$

(pentagon diagram)

$$\begin{tikzcd}
& ((W\otimes X)\otimes Y)\otimes Z \arrow[dl, "a_{W\otimes X,\,Y,\,Z}"'] \arrow[r, "a_{W,\,X,\,Y}\otimes\mathrm{Id}_Z"] & (W\otimes(X\otimes Y))\otimes Z \arrow[d, "a_{W,\,X\otimes Y,\,Z}"] \\
(W\otimes X)\otimes(Y\otimes Z) \arrow[dr, "a_{W,\,X,\,Y\otimes Z}"'] & & W\otimes((X\otimes Y)\otimes Z) \arrow[dl, "\mathrm{Id}_Z\otimes a_{X,\,Y,\,Z}"] \\
& W\otimes(X\otimes(Y\otimes Z)) &
\end{tikzcd}$$

モノイダル圏 $\mathcal{C}$ が**厳密** (strict) であるとは，$\forall X,\,Y,\,Z\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$(X\otimes Y)\otimes Z = X\otimes(Y\otimes Z),$$
$$I\otimes X = X,\quad X\otimes I = X$$

が成り立ち，かつ $a_{X,Y,Z}$, l_X, r_X が恒等射であることを言う．

定義 1.5 で言うモノイダル圏を，**弱いモノイダル圏** (weak monoidal category) と呼ぶこともある．

【例 1.2.1】Cat のモノイダル構造

Cat を小圏と関手が成す圏とする．このとき，関手

$$\times : \mathbf{Cat} \times \mathbf{Cat} \longrightarrow \mathbf{Cat}$$

を $\mathrm{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) := \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ により定めると，組み $(\mathbf{Cat}, \times, I)$ は厳密なモノイダル圏になる．ただし I はただ 1 つの対象 $\bullet$ を持ち，$\mathrm{Hom}_I(\bullet, \bullet) = \{\mathrm{Id}_\bullet\}$ とする圏である[a]

[a] これは **Cat** の終対象でもある．

定義 1.6: 双対

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ およびその任意の対象 $X, X^* \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を与える．X^* が X の**左双対** (left dual) であるとは，

- **coevaluation** と呼ばれる射

$$\mathrm{coev}_X^{\mathrm{L}} : I \longrightarrow X \otimes X^*$$

- **evaluation** と呼ばれる射

$$\mathrm{ev}_X^{\mathrm{L}} : X^* \otimes X \longrightarrow I$$

が存在して以下の図式を可換にすることを言う：

(zig-zag equations)

$$\begin{tikzcd}
I \otimes X \arrow[r, "\mathrm{coev}_X^{\mathrm{L}} \otimes \mathrm{Id}_X"] \arrow[dd, "r_X"'] & (X \otimes X^*) \otimes X \arrow[d, "a_{X, X^*, X}"] \\
 & X \otimes (X^* \otimes X) \arrow[d, "\mathrm{Id}_X \otimes \mathrm{ev}_X^{\mathrm{L}}"] \\
X & X \otimes I \arrow[l, "r_X"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X^* \otimes I \arrow[r, "\mathrm{Id}_{X^*} \otimes \mathrm{coev}^{\mathrm{L}}_X"] \arrow[dd, "l_{X^*}"'] & X^* \otimes (X \otimes X^*) \arrow[d, "a^{-1}_{X^*,\, X,\, X^*}"] \\
 & (X^* \otimes X) \otimes X^* \arrow[d, "\mathrm{ev}^{\mathrm{L}}_X \otimes \mathrm{Id}_{X^*}"] \\
X^* & I \otimes X^* \arrow[l, "l_{X^*}"]
\end{tikzcd}$$

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ およびその任意の対象 $X,\, {}^*X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を与える. ${}^*X$ が X の**右双対** (right dual) であるとは,

- 射

$$\mathrm{coev}^{\mathrm{R}}_X \colon I \longrightarrow {}^*X \otimes X$$

- 射

$$\mathrm{ev}^{\mathrm{R}}_X \colon X \otimes {}^*X \longrightarrow I$$

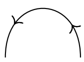
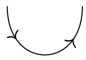
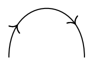
が存在して以下の図式を可換にすることを言う：

(zig-zag equations)

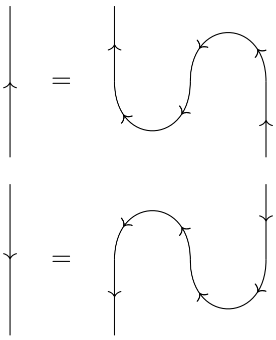
$$\begin{tikzcd}
X \otimes I \arrow[r, "\mathrm{Id}_X \otimes \mathrm{coev}^{\mathrm{R}}_X"] \arrow[dd, "l_X"'] & X \otimes ({}^*X \otimes X) \arrow[d, "a^{-1}_{X,\, {}^*X,\, X}"] \\
 & (X \otimes {}^*X) \otimes X \arrow[d, "\mathrm{ev}^{\mathrm{R}}_X \otimes \mathrm{Id}_X"] \\
X & I \otimes X \arrow[l, "l_X"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I \otimes {}^*X \arrow[r, "\mathrm{coev}^{\mathrm{R}}_X \otimes \mathrm{Id}_{{}^*X}"] \arrow[dd, "l_{X^*}"'] & ({}^*X \otimes X) \otimes {}^*X \arrow[d, "a^{-1}_{{}^*X,\, X,\, {}^*X}"] \\
 & {}^*X \otimes (X \otimes {}^*X) \arrow[d, "\mathrm{Id}_{{}^*X} \otimes \mathrm{ev}^{\mathrm{R}}_X"] \\
{}^*X & {}^*X \otimes I \arrow[l, "r_{X^*}"]
\end{tikzcd}$$

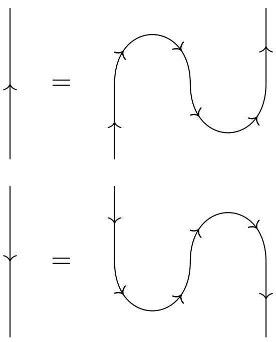
ストリング図式で書くときは

$\mathrm{coev}_X^{\mathrm{L}} :=$  $\mathrm{ev}_X^{\mathrm{L}} :=$  $\mathrm{coev}_X^{\mathrm{R}} :=$  $\mathrm{ev}_X^{\mathrm{R}} :=$ 

とする．ストリング図式において $\mathrm{coev}^{\mathrm{L}}$, $\mathrm{coev}^{\mathrm{R}}$ に対する **(zig-zag equations)** は



$\mathrm{coev}^{\mathrm{R}}$, $\mathrm{coev}^{\mathrm{L}}$ に対する **(zig-zag equations)** は



と書ける．

> ! X^* が X の左双対であるならば，X は X^* に関して $\mathrm{ev}_{X^*}^{\mathrm{R}} = \mathrm{ev}_X^{\mathrm{L}}$, $\mathrm{coev}_{X^*}^{\mathrm{R}} = \mathrm{coev}_X^{\mathrm{L}}$ とした右双対となっている．従って，左/右双対をもつ任意の X に対して ${}^*(X^*) \cong X \cong X \cong ({}^*X)^*$ が成り立つ．

定義 1.7: rigid なモノイダル圏

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ が **rigid** であるとは，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が左・右双対を持つことを言う．

定義 1.8: 組紐付きモノイダル圏

組紐付きモノイダル圏 (braided monoidal category) とは，以下の 2 つからなる：

- モノイダル圏 $(\mathcal{C},\, \otimes,\, I,\, a,\, l,\, r)$
- **組紐** (braiding) と呼ばれる自然同型

$$\left\{ b_{X,\,Y} \colon X \otimes Y \xrightarrow{\cong} Y \otimes X \right\}_{X,\,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは $\forall X,\, Y,\, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について以下の図式を可換にする：

(hexagon diagrams)

$$\begin{tikzcd}
X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "a^{-1}_{X,\,Y,\,Z}"] \arrow[d, "b_{X,\,Y \otimes Z}"] & (X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "b_{X,\,Y} \otimes \mathrm{Id}_Z"] & (Y \otimes X) \otimes Z \arrow[d, "a_{Y,\,X,\,Z}"] \\
(Y \otimes Z) \otimes X & Y \otimes (Z \otimes X) \arrow[l, "a^{-1}_{Y,\,Z,\,X}"] & Y \otimes (X \otimes Z) \arrow[l, "\mathrm{Id}_X \otimes b_{X,\,Z}"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "a_{X,\,Y,\,Z}"] \arrow[d, "b_{X \otimes Y,\,Z}"] & X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "\mathrm{Id}_X \otimes b_{Y,\,Z}"] & X \otimes (Z \otimes Y) \arrow[d, "a^{-1}_{X,\,Z,\,Y}"] \\
Z \otimes (X \otimes Y) & (Z \otimes X) \otimes Y \arrow[l, "a_{Z,\,X,\,Y}"] & (X \otimes Z) \otimes Y \arrow[l, "b_{X,\,Z} \otimes \mathrm{Id}_Y"]
\end{tikzcd}$$

組紐付きモノイダル圏 $\mathcal{C}$ であって，$\mathcal{C}$ の組紐が $b_{X,\,Y} = b^{-1}_{Y,\,X}$ を充たすもののことを**対称モノイダル圏** (symmetric monoidal category) と呼ぶ.

定義 1.9: モノイダル関手

2 つのモノイダル圏 $(\mathcal{C},\, \otimes_{\mathcal{C}},\, I_{\mathcal{C}},\, a^{\mathcal{C}},\, l^{\mathcal{C}},\, r^{\mathcal{C}})$, $(\mathcal{D},\, \otimes_{\mathcal{D}},\, I_{\mathcal{D}},\, a^{\mathcal{D}},\, l^{\mathcal{D}},\, r^{\mathcal{D}})$ の間の関手

$$F \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

が**弱いモノイダル関手** (lax monoidal functor) であるとは,

- 射

$$\varepsilon \colon I_{\mathcal{D}} \longrightarrow F(I_{\mathcal{C}})$$

- 自然変換

$$\left\{ \mu_{X,\,Y} \colon F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y) \longrightarrow F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \right\}_{X,\,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

があって，$\forall X,\, Y,\, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して以下の図式が可換になること：

(associatibity)

$$
\begin{tikzcd}
(F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y)) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z) \arrow[r, "a^{\mathcal{D}}_{F(X),\,F(Y),\,F(Z)}"'] \arrow[d, "\mu_{X,\,Y} \otimes \mathrm{Id}_{F(Z)}"'] & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} (F(Y) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z)) \arrow[d, "\mathrm{Id}_{F(X)} \otimes \mu_{Y,\,Z}"] \\
F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z) \arrow[d, "\mu_{X \otimes_{\mathcal{C}} Y,\,Z}"'] & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y \otimes_{\mathcal{C}} Z) \arrow[d, "\mu_{X,\,Y \otimes_{\mathcal{C}} Z}"] \\
F((X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{C}} Z) \arrow[r, "F(a^{\mathcal{C}}_{X,\,Y,\,Z})"'] & F(X \otimes_{\mathcal{C}} (Y \otimes_{\mathcal{C}} Z))
\end{tikzcd}
$$

(unitality)

$$
\begin{tikzcd}
I_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathcal{D}} F(X) \arrow[r, "\varepsilon \otimes \mathrm{Id}_{F(X)}"] \arrow[d, "l^{\mathcal{D}}_{F(X)}"'] & F(I_{\mathcal{C}}) \otimes_{\mathcal{D}} F(X) \arrow[d, "\mu_{I_{\mathcal{C}},\,X}"] \\
F(X) & F(I_{\mathcal{C}} \otimes_{\mathcal{C}} X) \arrow[l, "F(l^{\mathcal{C}}_X)"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
F(X) \otimes_{\mathcal{D}} I_{\mathcal{D}} \arrow[r, "\mathrm{Id}_{F(X)} \otimes \varepsilon"] \arrow[d, "r^{\mathcal{D}}_{F(X)}"'] & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(I_{\mathcal{C}}) \arrow[d, "\mu_{X,\,I_{\mathcal{C}}}"] \\
F(X) & F(X \otimes_{\mathcal{C}} I_{\mathcal{C}}) \arrow[l, "F(r^{\mathcal{C}}_X)"]
\end{tikzcd}
$$

- 弱いモノイダル関手 F の ε と $\mu_{X,Y}$ が全て同型射ならば，F は**強いモノイダル関手** (strong monoidal functor) と呼ばれる．
- 弱いモノイダル関手 F の ε と $\mu_{X,Y}$ が全て恒等射ならば，F は**厳密なモノイダル関手** (strict monoidal functor) と呼ばれる．

定義 1.10: モノイダル自然変換

2 つのモノイダル圏 $(\mathcal{C},\ \otimes_\mathcal{C},\ I_\mathcal{C},\ a^\mathcal{C},\ l^\mathcal{C},\ r^\mathcal{C}),\ (\mathcal{D},\ \otimes_\mathcal{D},\ I_\mathcal{D},\ a^\mathcal{D},\ l^\mathcal{D},\ r^\mathcal{D})$ の間の 2 つの弱いモノイダル関手 $\left(F_i\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D},\ \varepsilon_i\colon I_\mathcal{D} \longrightarrow F(I_\mathcal{C}),\ \{\mu_{i\,X,\,Y}\colon F_i(X) \otimes F_i(Y) \longrightarrow F_i(X \otimes Y)\}_{X,\,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}\right)$ w/ $i = 1,\ 2$ の間の自然変換

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F_1"{name=U}] \arrow[r, bend right, "F_2"'{name=D}] & \mathcal{D} \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "\tau"] \end{tikzcd}$$

が**モノイダル自然変換** (monidal natural transformation) であるとは，$\forall X,\ Y \in \mathcal{C}$ に対して以下の図式が可換になること：

(テンソル積の保存)

$$\begin{tikzcd} F_1(X) \otimes_\mathcal{D} F_1(Y) \arrow[r, "\tau_X \otimes_\mathcal{D} \tau_Y"] \arrow[d, "\mu_{1\,X,Y}"'] & F_2(X) \otimes_\mathcal{D} F_2(Y) \arrow[d, "\mu_{2\,X,Y}"] \\ F_1(X \otimes_\mathcal{C} Y) \arrow[r, "\tau_{X \otimes_\mathcal{C} Y}"'] & F_2(X \otimes_\mathcal{C} Y) \end{tikzcd}$$

(単位対象の保存)

$$\begin{tikzcd} & I_\mathcal{D} \arrow[dl, "\varepsilon_1"'] \arrow[dr, "\varepsilon_2"] & \\ F_1(I_\mathcal{C}) \arrow[rr, "\tau_{I_\mathcal{C}}"'] & & F_2(I_\mathcal{C}) \end{tikzcd}$$

1.3 テンソル圏・フュージョン圏

！ これまではモノイダル圏の対象を英大文字 $X,\ Y,\ Z,\ \ldots$ で，単位対象を I と書いてきたが，以下では対象を英小文字 $x,\ y,\ z,\ \ldots$ で，単位対象を 1 と書くことにする．

定義 1.11: 環圏

圏 $\mathcal{C}$ が**多重環圏** (multiring category) であるとは，以下の条件を充たすこと：

(mR-1) $\mathcal{C}$ は局所有限な $\mathbb{K}$-線形アーベル圏

(mR-2) $\mathcal{C}$ はモノイダル圏 $(\mathcal{C},\ \otimes,\ 1,\ a,\ l,\ r,\ \mathrm{ev}^\mathrm{L},\ \mathrm{coev}^\mathrm{L},\ \mathrm{ev}^\mathrm{R},\ \mathrm{coev}^\mathrm{R})$

(mR-3) 関手 $\otimes\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ が $\mathbb{K}$-線形かつ双完全

圏 $\mathcal{C}$ が**環圏** (ring category) であるとは，以下の条件を充たすこと：

(R-1) $\mathcal{C}$ は多重環圏

(R-2) $\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(1,\ 1) \cong \mathbb{K}$

定義 1.12: テンソル圏・フュージョン圏

圏 $\mathcal{C}$ が**多重テンソル圏** (multitensor category) であるとは，以下の条件を充たすこと：

(mT-1) $\mathcal{C}$ は局所有限な $\mathbb{K}$-線形アーベル圏

(mT-2) $\mathcal{C}$ は rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{C},\,\otimes,\,1,\,a,\,l,\,r,\,\mathrm{ev}^{\mathrm{L}},\,\mathrm{coev}^{\mathrm{L}},\,\mathrm{ev}^{\mathrm{R}},\,\mathrm{coev}^{\mathrm{R}})$

(mT-3) 関手 $\otimes\colon \mathcal{C}\times\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}$ が $\forall x,\,y,\,z,\,w\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して定める写像 $\otimes_{x,y,z,w}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\,y)\times\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(z,\,w)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x\otimes z,\,y\otimes w)$ が $\mathbb{K}$-双線形

圏 $\mathcal{C}$ が**テンソル圏** (tensor category) であるとは，以下の条件を充たすこと：

(T-1) $\mathcal{C}$ は多重テンソル圏

(T-2) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(1,\,1)\cong\mathbb{K}$

圏 $\mathcal{C}$ が**多重フュージョン圏** (multifusion category) であるとは，以下の条件を充たすこと：

(mFus-1) $\mathcal{C}$ は多重テンソル圏

(mFus-2) $\mathcal{C}$ は $\mathbb{K}$-線形アーベル圏として有限かつ半単純

圏 $\mathcal{C}$ が**フュージョン圏** (fusion category) であるとは，以下の条件を充たすこと：

(Fus-1) $\mathcal{C}$ はテンソル圏

(Fus-2) $\mathcal{C}$ は $\mathbb{K}$-線形アーベル圏として有限かつ半単純

命題 1.1: 多重テンソル圏のテンソル積は双完全

多重テンソル圏 $\mathcal{C}$ の関手 $\otimes\colon\mathcal{C}\times\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}$ は双完全である．

<u>証明</u> [?, PROPOSITION 4.2.1., p.66] ■

命題 1.1 より，

$$\text{（多重）テンソル圏} \quad\Longrightarrow\quad \text{（多重）環圏}$$

が言える．

【例 1.3.1】圏 $\mathcal{C}_G$ と $\mathbf{Vec}_G$

G を群とする．厳密なモノイダル圏 $\mathcal{C}_G$ を，

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_G)\coloneqq G$
- $\forall g_1,\,g_2\in G$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_G}(g_1,\,g_2)\coloneqq\begin{cases}\mathrm{U}(1), & g_1=g_2\\ \emptyset, & g_1\neq g_2\end{cases}$$

- $g_1\otimes g_2\coloneqq g_1g_2$ かつ，$g_i\xrightarrow{\forall\theta_i}g_i$ に対して $\theta_1\otimes\theta_2\coloneqq\theta_1\theta_2$
- $1\coloneqq 1_G$

- $a_{g_1, g_2, g_3} \coloneqq 1,\ l_g \coloneqq 1,\ r_g \coloneqq 1$

で定義する．

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ とする．厳密なモノイダル圏 $\mathbf{Vec}_G$ を，

- G-graded な $\mathbb{K}$-ベクトル空間

$$V = \bigoplus_{g \in G} V_g$$

  を対象とする．
- grading を保存する $\mathbb{K}$-線型変換

$$f \colon \bigoplus_{g \in G} V_g \longrightarrow \bigoplus_{g \in G} W_g \quad \text{s.t.} \quad \forall g \in G,\ f(V_g) \subset W_g$$

  を射とする．
- テンソル積 $\otimes \colon \mathbf{Vec}_G \times \mathbf{Vec}_G \longrightarrow \mathbf{Vec}_G$ は，

$$V \otimes W \coloneqq \bigoplus_{g \in G} \left(\bigoplus_{\substack{x,\, y \in G, \\ xy = g}} V_x \otimes_{\mathbb{K}} W_y \right)$$

  と定義する．
- 単位対象は $1 \coloneqq \mathbb{K}$ とする[a]
- $a_{g_1, g_2, g_3} \coloneqq 1,\ l_g \coloneqq 1,\ r_g \coloneqq 1$

によって定義する．G が有限群ならば $\mathcal{C}_G$ はフュージョン圏である．

[a] $1_G \in G$ 成分以外が全て 0

【例 1.3.2】圏 $\mathcal{C}_G^\alpha$ と Vec_G^α

G を群とする．【例 1.3.1】の associator と unitors を非自明にしてみよう．今 $\alpha \in Z^3_{\mathrm{Grp}}\big(G;\, \mathrm{U}(1)\big)$ を 1 つ固定する[a]．

モノイダル圏 $\mathcal{C}_G^\alpha$ を，

$$\begin{aligned} a_{g_1, g_2, g_3} &\coloneqq \alpha(g_1,\, g_2,\, g_3), \\ l_g &\coloneqq \alpha(1,\, 1,\, g)^{-1}, \\ r_g &\coloneqq \alpha(g,\, 1,\, 1) \end{aligned}$$

とおくことにより定義する[b]．実際，コサイクル条件および U(1) の可換性により

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{Id}_{g_4} \otimes a_{g_1, g_2, g_3}) \circ a_{g_4, g_1 \otimes g_2, g_3} \circ (a_{g_4, g_1, g_2} \otimes \mathrm{Id}_{g_3}) \\
&= \alpha(g_1,\, g_2,\, g_3)\alpha(g_4,\, g_1g_2,\, g_3)\alpha(g_4,\, g_1,\, g_2) \\
&= \alpha(g_4g_1,\, g_2,\, g_3)\alpha(g_4,\, g_1,\, g_2g_3) \\
&= \alpha(g_4,\, g_1,\, g_2g_3)\alpha(g_4g_1,\, g_2,\, g_3) \\
&= a_{g_4, g_1, g_2g_3} \circ a_{g_4 \otimes g_1,\, g_2,\, g_3}
\end{aligned}
$$

の通りに **(pentagon identity)** が成り立ち，

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{Id}_{g_1} \otimes l_{g_2}) \circ a_{g_1, 1, g_2} &= \frac{\alpha(g_1,\, 1,\, g_2)}{\alpha(1,\, 1,\, g_2)} \\
&= \frac{\alpha(g_1,\, 1,\, 1)\cancel{\alpha(g_1,\, 1,\, g_2)\alpha(1,\, 1,\, g_2)}}{\cancel{\alpha(g_1,\, 1,\, g_2)\alpha(1,\, 1,\, g_2)}} \\
&= \alpha(g_1,\, 1,\, 1) \\
&= r_{g_1}
\end{aligned}
$$

の通りに **(triangle identity)** が成り立つ．もし $l_g = r_g = \mathrm{Id}_g$ にしたければ

$$
\forall g,\, h \in G,\ \alpha(g,\, 1,\, h) = 1_G
$$

を充たす $\alpha \in Z^3_{\mathrm{Grp}}\bigl(G;\, \mathrm{U}(1)\bigr)$ をとることが必要十分である（**正規化条件**）．
圏 $\mathbf{Vec}^{\alpha}_G$ は，$\alpha \in Z^3_{\mathrm{Grp}}\bigl(G;\, \mathbb{K}^{\times}\bigr)$ に対して $\mathcal{C}^{\alpha}_G$ の構成を線形に拡張することで得られる．
G が有限群ならば $\mathbf{Vec}^{\alpha}_G$ はフュージョン圏である．

[a] i.e. 3-コサイクル
[b] 他のデータは【例 **1.3.1**】と全く同じである

定義 1.13: テンソル関手・ファイバー関手

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を多重環圏とする．関手 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ を与える．F が**テンソル関手** (tensor functor) であるとは，以下を充たすこと：

(TF-1) F は $\mathbb{K}$-線形

(TF-2) F は強いモノイダル関手

(TF-3) F は完全かつ忠実[a]

特に $\mathcal{D} = \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ のとき，テンソル関手 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ は**ファイバー関手** (fiber functor) と呼ばれる．

[a] この条件は [?, DEFINITION 4.2.5., p.66] に合わせて付けたものであり，テンソル関手と言った際には必要とされないことも多い．

【例 1.3.3】圏 $\mathbf{Vec}_G^{\alpha}$ のテンソル関手

$G_1,\, G_2$ を群，$\omega_i \in Z^3_{\mathrm{Grp}}\big(G_i;\, \mathrm{U}(1)\big)$ を 3-コサイクルとする．テンソル関手

$$F\colon \mathcal{C}^{\alpha_1}_{G_1} \longrightarrow \mathcal{C}^{\alpha_2}_{G_2}$$

とはどのようなものだろうか．

まず F は強いモノイダル関手であるから，対象の対応について群準同型

$$f\colon G_1 \longrightarrow G_2$$

このとき強いモノイダル関手の持つ自然変換とは，ある $\mu \in C^2_{\mathrm{Grp}}\big(G_1;\, \mathrm{U}(1)\big)$ を用いて

$$\mu_{g_1, g_2} \coloneqq \mu(g_1,\, g_2)\mathrm{Id}_{f(g_1 g_2)}\colon f(g_1)f(g_2) \xrightarrow{\cong} f(g_1 g_2) \quad \text{w/} \quad g_1,\, g_2 \in G_1$$

と書けるが，**(associativity)** から

$$\mu(g_1,\, g_2 g_3)\mu(g_2,\, g_3)\alpha_2\big(f(g_1),\, f(g_2),\, f(g_3)\big) = \alpha_1(g_1,\, g_2,\, g_3)\mu(g_1 g_2,\, g_3)\mu(g_1,\, g_2)$$

でなくてはいけない．i.e.

$$\alpha_1 = f^* \alpha_2 \cdot \delta\mu \tag{1.3.1}$$

である．逆に群準同型 $f\colon G_1 \longrightarrow G_2$ および $\mu \in C^3_{\mathrm{Grp}}\big(G_1;\, \mathrm{U}(1)\big)$ の組 $(f,\, \mu)$ であって (1.3.1) を充たすものが与えられると，これらを素材にしてテンソル関手

$$F\colon \mathcal{C}^{\alpha_1}_{G_1} \longrightarrow \mathcal{C}^{\alpha_2}_{G_2}$$

を構成することができる．このような関手 F が圏同値になる必要十分条件は f が群の同型写像になることである．

【例 1.3.4】圏 $\mathbf{Vec}_G^{\alpha}$ のモノイダル自然変換

【例 1.3.3】の構成で得られるテンソル関手を $F_{f,\,\mu}$ と書く．このとき，モノイダル自然変換

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Vec}^{\alpha_1}_{G_1} \arrow[r, bend left=50, "F_{f,\,\mu}"] \arrow[r, bend right=50, "F_{f',\,\mu'}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\tau"] & \mathbf{Vec}^{\alpha_2}_{G_2}
\end{tikzcd}$$

を同定しよう．まず自然変換と言うからには $\forall g \in G_1$ に対して

$$\tau_g \coloneqq \tau(g)\mathrm{Id}_{f(g)}\colon f(g) \longrightarrow f'(g)$$

を定めないといけない．ただし $\tau \in C^1_{\mathrm{Grp}}\big(G_1;\, \mathrm{U}(1)\big)$ である．ところが，**【例 1.3.2】**より $\mathbf{Vec}^{\alpha_2}_{G_2}$ の射は $f(g) = f'(g)$，i.e. $f = f'$ でないと自然変換が存在しない．

(テンソル積の保存) の条件から，$\forall g_1,\, g_2 \in G_1$ に対して

$$\mu'(g_1,\, g_2)\tau(g_1)\tau(g_2) = \tau(g_1 g_2)\mu(g_1,\, g_2)$$

でなくてはいけない．i.e.

$$\mu = \mu' \cdot \delta\tau \tag{1.3.2}$$

である．逆に (1.3.2) を充たす $\tau \in C^1_{\mathrm{Grp}}$ からモノイダル自然変換 $\tau\colon F_{f,\,\mu} \Longrightarrow F_{f,\,\mu'}$ を構成することができる．

1.3.1 量子次元

定義 1.14: 量子トレース

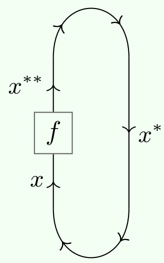
- rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{C},\, \otimes,\, 1,\, a,\, l,\, r,\, \mathrm{ev}^{\mathrm{L}},\, \mathrm{coev}^{\mathrm{L}},\, \mathrm{ev}^{\mathrm{R}},\, \mathrm{coev}^{\mathrm{R}})$
- 対象 $x \in \mathcal{C}$
- $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, x^{**}),\ g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, {}^{**}x)$

を与える．

- f の**左量子トレース** (left quantum trace) を以下で定義する：

$$\mathrm{Tr}^{\mathrm{L}}(f)\colon 1 \xrightarrow{\mathrm{coev}^{\mathrm{L}}_x} x \otimes x^* \xrightarrow{f \otimes \mathrm{Id}_x} x^{**} \otimes x^* \xrightarrow{\mathrm{ev}^{\mathrm{L}}_{x^*}} 1$$

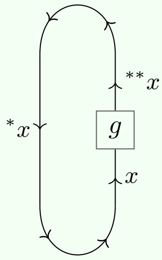
  ストリング図式で書くと次のようになる[a]：

$\mathrm{Tr}^{\mathrm{L}}(f) \coloneqq$  $\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(1,\, 1)$

- g の**右量子トレース** (right quantum trace) を以下で定義する：

$$\mathrm{Tr}^{\mathrm{R}}(g)\colon 1 \xrightarrow{\mathrm{coev}^{\mathrm{R}}_{{}^*x}} {}^*x \otimes x \xrightarrow{\mathrm{Id}_{{}^*x} \otimes g} {}^*x \otimes {}^{**}x \xrightarrow{\mathrm{ev}^{\mathrm{R}}_{{}^{**}x}} 1$$

ストリング図式で書くと次のようになる[b]：

$\mathrm{Tr}^{\mathrm{L}}(g) :=$ 

$\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(1,\ 1)$

---

[a] $\mathrm{ev}^{\mathrm{L}}_{V^*} = \mathrm{ev}^{\mathrm{R}}_{V^{**}}$ を使った．
[b] $\mathrm{ev}^{\mathrm{R}}_{^{**}x} = \mathrm{ev}^{\mathrm{L}}_{^{*}x}$ を使った．

定義 1.15: 旋回構造

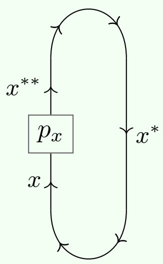
rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{C},\ \otimes,\ 1,\ a,\ l,\ r,\ \mathrm{ev}^{\mathrm{L}},\ \mathrm{coev}^{\mathrm{L}},\ \mathrm{ev}^{\mathrm{R}},\ \mathrm{coev}^{\mathrm{R}})$ を与える．$\mathcal{C}$ の**旋回構造** (pivotal structure) とは，モノイダル自然同型

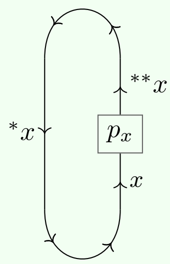
$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "(\text{-})^{**}"'{name=D}] & \mathcal{C} \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "p"'] \end{tikzcd}$$

のこと．

定義 1.16: 球状圏・量子次元

テンソル圏 $(\mathcal{C},\ \otimes,\ 1,\ a,\ l,\ r,\ \mathrm{ev}^{\mathrm{L}},\ \mathrm{coev}^{\mathrm{L}},\ \mathrm{ev}^{\mathrm{R}},\ \mathrm{coev}^{\mathrm{R}})$ が旋回構造 p を持つとする．圏 $\mathcal{C}$ が**球状** (spherical) であるとは，$\forall x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$\mathrm{Tr}^{\mathrm{L}}(p_x) =$ 

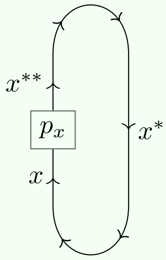
$=$ 

$= \mathrm{Tr}^{\mathrm{R}}(p_x)$

が成り立つことを言う．

球状圏 $\mathcal{C}$ の対象 $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の**量子次元** (quantum dimension) を以下で定義する：

$$\dim_p(x) \coloneqq \mathrm{Tr}^{\mathrm{L}}(p_x) \coloneqq$$



$$\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(1,\, 1)$$

1.3.2 Deligne のテンソル積

定義 1.17: Deligne のテンソル積

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を局所有限な $\mathbb{K}$-線形アーベル圏とする．**Deligne のテンソル積** (Deligne's tensor product) とは，以下の性質をみたす $\mathbb{K}$-線形アーベル圏 $\boldsymbol{\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}}$ と双右完全関手 $\boxtimes \colon \mathcal{C} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ の組み $(\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}, \boxtimes)$ のこと：

(普遍性)

任意の双右完全関手 $F \colon \mathcal{C} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{A}$ に対し，ある双右完全関手 $\bar{F} \colon \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{A}$ が一意的に存在して $\bar{F} \circ \boxtimes = F$ を充たす．

命題 1.2: Deligne のテンソル積の基本性質

(1) Deligne のテンソル積は存在し，それ自身が局所有限な $\mathbb{K}$-線形アーベル圏になる．

(2) 関手 $\boxtimes \colon \mathcal{C} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ は双完全であり，

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x_1,\, y_1) \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x_2,\, y_2) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}}(x_1 \boxtimes x_2,\, y_1 \boxtimes y_2)$$

を充たす．

(3) $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ が (多重) 環圏/(多重) テンソル圏ならば $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ は (多重) 環圏/(多重) テンソル圏である．

<u>証明</u> (1) [?, PROPOSITION 1.11.2., p.15]

(2) [?, PROPOSITION 1.11.2., p.15]

(3) [?, PROPOSITION 4.6.1., p.73]

■

1.4 加群圏

1.4.1 左/右加群圏

定義 1.18: 左/右加群圏

$(\mathcal{C},\otimes,1,a,l,r)$ をモノイダル圏とする．**左 $\mathcal{C}$-加群圏** (left $\mathcal{C}$-module category) $\mathcal{M}$ は，以下のデータからなる：

- 圏 $\mathcal{M}$
- **左加群積** (left module product) と呼ばれる関手[a] $\blacktriangleright\colon \mathcal{C}\times\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{M}$
- **left actor** と呼ばれる自然同型 $\{\alpha_{x,y,m}\colon (x\otimes y)\blacktriangleright m\longrightarrow x\blacktriangleright(y\blacktriangleright m)\}_{x,y\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\,m\in\mathrm{Ob}(\mathcal{M})}$
- **left unitor** と呼ばれる自然同型 $\{\lambda_m\colon 1\blacktriangleright m\longrightarrow m\}_{m\in\mathrm{Ob}(\mathcal{M})}$

これらは以下の条件を充たさねばならない：

(lMod-1) 関手 $\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{M},\ m\longmapsto 1\blacktriangleright m$ は圏の自己同型である

(lMod-2) $\forall x,\,y,\,z\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\ \forall m\in\mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ に対して以下の図式を可換にする：

$$\begin{tikzcd}
 & \big((x\otimes y)\otimes z\big)\blacktriangleright m \arrow[dl, "a_{x,y,z}\blacktriangleright \mathrm{Id}_m"'] \arrow[dr, "\alpha_{x\otimes y,z,m}"] & \\
\big(x\otimes(y\otimes z)\big)\blacktriangleright m \arrow[dd, "\alpha_{x,y\otimes z,m}"'] & & (x\otimes y)\blacktriangleright(z\blacktriangleright m) \arrow[dd, "\alpha_{x,y,z\blacktriangleright m}"] \\
 & & \\
x\blacktriangleright\big((y\otimes z)\blacktriangleright m\big) \arrow[rr, "\mathrm{Id}_x\blacktriangleright\alpha_{y,z,m}"'] & & x\blacktriangleright\big(y\blacktriangleright(z\blacktriangleright m)\big)
\end{tikzcd}$$

(lMod-3) $\forall x\in\mathcal{C},\ \forall m\in\mathcal{M}$ に対して以下の図式を可換にする：

$$\begin{tikzcd}
(x\otimes 1)\blacktriangleright m \arrow[rr, "\alpha_{x,1,m}"] \arrow[dr, "r_x\blacktriangleright\mathrm{Id}_m"'] & & x\blacktriangleright(1\blacktriangleright m) \arrow[dl, "\mathrm{Id}_x\blacktriangleright\lambda_m"] \\
 & x\blacktriangleright m &
\end{tikzcd}$$

[a] 記号として $\oslash$ を使うこともある（参考：https://ncatlab.org/nlab/show/action+of+a+monoidal+category）.

$(\mathcal{C},\otimes,1,a,l,r)$ をモノイダル圏とする．**右 $\mathcal{C}$-加群圏** $\mathcal{M}$ は，以下のデータからなる：

- 圏 $\mathcal{M}$
- **右加群積** (left module product) と呼ばれる関手[a] $\blacktriangleright\colon \mathcal{C}\times\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{M}$

- **right actor** と呼ばれる自然同型 $\left\{\beta_{m,\,x,\,y}\colon m \blacktriangleleft (x\otimes y) \longrightarrow (m \blacktriangleleft x) \blacktriangleleft y\right\}_{x,y\in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\, m\in\mathrm{Ob}(\mathcal{M})}$
- **right unitor** と呼ばれる自然同型 $\left\{\rho_m\colon m \blacktriangleleft 1 \longrightarrow m\right\}_{m\in\mathrm{Ob}(\mathcal{M})}$

これらは以下の条件を充たさねばならない：

(rMod-1) 関手 $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M},\ m \longmapsto m \blacktriangleleft 1$ は圏の自己同型である．

(rMod-2) $\forall x,\ y,\ z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\ \forall m \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ に対して以下の図式を可換にする：

(rMod-3) $\forall x \in \mathcal{C},\ \forall m \in \mathcal{M}$ に対して以下の図式を可換にする：

$$\begin{tikzcd}
m \blacktriangleleft (1 \otimes x) \arrow[rr, "\beta_{m,1,x}"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}_m \blacktriangleleft l_x"'] & & (m \blacktriangleleft 1) \blacktriangleleft x \arrow[dl, "\rho_m \blacktriangleleft \mathrm{Id}_x"] \\
& m \blacktriangleleft x &
\end{tikzcd}$$

---

[a] 記号として $\oslash$ を使うこともある（参考：https://ncatlab.org/nlab/show/action+of+a+monoidal+category）．

定義 1.19: 加群関手

$(\mathcal{C},\ \otimes,\ 1,\ a,\ l,\ r)$ をモノイダル圏，$(\mathcal{M}_i,\ \blacktriangleright_i,\ \alpha_i,\ \lambda_i)$ $^{\mathrm{w}/}$ $i = 1,\ 2$ を左 $\mathcal{C}$-加群圏とする．**左 $\mathcal{C}$-加群関手** (left $\mathcal{C}$-module functor) は，以下のデータからなる：

- 関手 $F\colon \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$
- 自然同型 $\left\{s_{x,m}\colon F(x \blacktriangleright_1 m) \longrightarrow x \blacktriangleright_2 F(m)\right\}_{x\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\, m\in\mathrm{Ob}(\mathcal{M}_1)}$

これらは以下の条件を充たさねばならない：

(pentagon identity) $\forall x,\ y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\ \forall m \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M}_1)$ に対して以下の図式を可換にする：

$$\begin{tikzcd}
& F\big((x\otimes y) \blacktriangleright_1 m\big) \arrow[dr, "s_{x\otimes y,m}"] \arrow[ddl, "F(\alpha_{1\,x,y,m})"'] & \\
& & (x\otimes y) \blacktriangleright_2 F(m) \arrow[dd, "\alpha_{2\,x,y,F(m)}"] \\
F\big(x \blacktriangleright_1 (y \blacktriangleright_1 m)\big) \arrow[ddr, "s_{x,y\blacktriangleright_1 m}"'] & & \\
& & x \blacktriangleright_2 \big(y \blacktriangleright_2 F(m)\big) \\
& x \blacktriangleright_2 F(y \blacktriangleright_1 m) \arrow[ur, "\mathrm{Id}_x \blacktriangleright_2 s_{y,m}"'] &
\end{tikzcd}$$

(triangle identity) $\forall m \in \mathcal{M}_1$ に対して以下の図式を可換にする：

$$
\begin{tikzcd}
F(1 \blacktriangleright_1 m) \arrow[rr, "s_{1,m}"] \arrow[dr, "F(\lambda_{1m})"'] & & 1 \otimes_2 F(m) \arrow[dl, "\lambda_{2F(m)}"] \\
& F(m) &
\end{tikzcd}
$$

定義 1.20: 加群圏の自然変換

$(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r)$ をモノイダル圏，$(\mathcal{M}_i, \blacktriangleright_i, \alpha_i, \lambda_i)$ $^{\mathrm{w}/}$ $i = 1, 2$ を左 $\mathcal{C}$-加群圏，$(F_i \colon \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2, s_i)$ $^{\mathrm{w}/}$ $i = 1, 2$ を $\mathcal{C}$-加群関手とする．このとき，自然変換

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_1 \arrow[r, bend left=50, "F_1"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "F_2"'{name=D}] & \mathcal{M}_2
\arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "\tau"]
\end{tikzcd}
$$

が $\mathcal{C}$**-加群圏の自然変換**であるとは，$\forall x \in \mathcal{C}$, $\forall m \in \mathcal{M}_1$ に対して以下の図式が可換になること：

(action の保存)

$$
\begin{tikzcd}
F_1(x \blacktriangleright_1 m) \arrow[r, "s_{1x,m}"] \arrow[d, "\tau_{x \blacktriangleright_1 m}"'] & x \blacktriangleright_2 F_1(m) \arrow[d, "\tau_x \blacktriangleright_2 \mathrm{Id}_m"] \\
F_2(x \blacktriangleright_1 m) \arrow[r, "s_{2x,m}"'] & x \blacktriangleright_2 F_2(m)
\end{tikzcd}
$$

1.4.2 両側加群圏

定義 1.21: 両側加群圏

$(\mathcal{C}_i, \otimes_i, 1, a_i, l_i, r_i)$ $^{\mathrm{w}/}$ $i = 1, 2$ をモノイダル圏とする．$(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$**-両側加群圏** ($(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$-bimodule category) $\mathcal{M}$ は，以下のデータからなる：

- 圏 $\mathcal{M}$
- **左加群積**と呼ばれる関手 $\blacktriangleright \colon \mathcal{C}_1 \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$
- **右加群積**と呼ばれる関手 $\blacktriangleleft \colon \mathcal{M} \times \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{M}$
- **left actor** と呼ばれる自然同型

$$\{\alpha_{x_1, y_1, m} \colon (x_1 \otimes y_1) \blacktriangleright m \longrightarrow x_1 \blacktriangleright (y_1 \blacktriangleright m)\}_{x_1, y_1 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_1),\, m \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})}$$

- **left unitor** と呼ばれる自然同型 $\{\lambda_m \colon 1 \blacktriangleright m \longrightarrow m\}_{m \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})}$
- **right actor** と呼ばれる自然同型

$$\{\beta_{m, x_2, y_2} \colon m \blacktriangleleft (x_2 \otimes y_2) \longrightarrow (m \blacktriangleleft x_2) \blacktriangleleft y_2\}_{x_2, y_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_2),\, m \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})}$$

- **right unitor** と呼ばれる自然同型 $\{\rho_m \colon m \blacktriangleleft 1 \longrightarrow m\}_{m \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})}$
- **middle actor** と呼ばれる自然同型

$$\{b_{x_1, m, x_2} \colon (x_1 \blacktriangleright m) \blacktriangleleft x_2 \longrightarrow x_1 \blacktriangleright (m \blacktriangleleft x_2)\}_{x_1 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_1),\, x_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_2) m \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})}$$

これらは以下の条件を充たす：

(Bimod-1) 組 $(\mathcal{M}, \blacktriangleright, \alpha)$ は左 $\mathcal{C}_1$-加群圏である．

(Bimod-2) 組 $(\mathcal{M}, \blacktriangleleft, \beta)$ は右 $\mathcal{C}_2$-加群圏である．

(Bimod-3) $\forall x_i,\, y_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_i),\ \forall m \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ に対して以下の図式を可換にする：

$$
\begin{tikzcd}
& \big((x_1 \otimes_1 y_1) \blacktriangleright m\big) \blacktriangleleft x_1 \arrow[ddl, "\alpha_{x_1,y_1,m} \blacktriangleright \mathrm{Id}_{x_1}"'] \arrow[dr, "b_{x_1 \otimes_1 y_1, m, x_2}"] & \\
& & (x_1 \otimes_1 y_1) \blacktriangleright (m \blacktriangleleft x_2) \arrow[dd, "\alpha_{x_1,y_1,m \blacktriangleleft x_2}"] \\
\big(x_1 \blacktriangleright (y_1 \blacktriangleright m)\big) \blacktriangleleft x_1 \arrow[ddr, "b_{x_1, y_1 \blacktriangleright m, x_2}"'] & & \\
& & x_1 \blacktriangleright \big(y_1 \blacktriangleright (m \blacktriangleleft x_2)\big) \\
& x_1 \blacktriangleright \big((y_1 \blacktriangleright m) \blacktriangleleft x_1\big) \arrow[uur, "\mathrm{Id}_{x_1} \blacktriangleright b_{y_1,m,1}"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& x_1 \blacktriangleright \big(m \blacktriangleleft (x_2 \otimes_2 y_2)\big) \arrow[ddl, "\mathrm{Id}_{x_1} \blacktriangleright \beta_{m,x_2,y_2}"'] & \\
& & (x_1 \blacktriangleright m) \blacktriangleleft (x_2 \otimes_2 y_2) \arrow[ul, "b_{x_1, m, x_2 \otimes_2 y_2}"'] \arrow[dd, "\beta_{x_1 \blacktriangleright m, x_2, y_2}"] \\
x_1 \blacktriangleright \big((m \blacktriangleleft x_2) \blacktriangleleft y_2\big) & & \\
& & \big((x_1 \blacktriangleright m) \blacktriangleleft x_2\big) \blacktriangleleft y_2 \arrow[dl, "b_{x_1,m,x_2} \blacktriangleleft \mathrm{Id}_{y_2}"] \\
& \big(x_1 \blacktriangleright (m \blacktriangleleft x_2)\big) \blacktriangleleft y_2 \arrow[uul, "b_{x_1, m \blacktriangleleft x_2, y_2}"] &
\end{tikzcd}
$$

1.5 2-群

1.5.1 豊穣圏と 2-圏

まず，**厳密な 2-圏** (strict 2-category) を導入する．

定義 1.22: 豊穣圏

モノイダル圏 $(V,\,\otimes,\,I)$ を与える．

***V*-豊穣圏** (V-enriched category) $\mathcal{C}$ は，以下のデータからなる：

- 集合 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，**Hom 対象**と呼ばれるV の対象 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\,y) \in \mathrm{Ob}(V)$ を持つ
- $\forall x, y,\,z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，**合成射**と呼ばれるV の射 $\circ_{x,\,y,\,z} \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\,y) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(y,\,z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\,z)$ を持つ
- $\forall x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，**恒等素**と呼ばれるV の射 $j_x \colon I \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\,x)$ を持つ

これらは以下の図式を可換にしなくてはいけない：

(associativity)

$\forall x,\,y,\,z,\,w \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について[a]

$$\begin{tikzcd}
\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\,y) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(y,\,z)\big) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(z,\,w) \arrow[r, "\circ_{x,y,z} \otimes \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(z,\,w)}"] \arrow[dd, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\,z) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(z,\,w) \arrow[d, "\circ_{x,z,w}"] \\
 & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\,w) \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\,y) \otimes \big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(y,\,z) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(z,\,w)\big) \arrow[r, "\mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\,y)} \otimes \circ_{y,z,w}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\,y) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(y,\,w) \arrow[u, "\circ_{x,y,w}"']
\end{tikzcd}$$

(unitality)

$\forall x,\,y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について[b]

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\,x) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\,y) \arrow[r, "\circ_{x,x,y}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\,y) & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\,y) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(y,\,y) \arrow[l, "\circ_{x,y,y}"'] \\
I \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\,y) \arrow[u, "j_x \otimes \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\,y)}"] \arrow[ur, "\cong"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\,y) \otimes I \arrow[u, "\mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\,y)} \otimes j_y"'] \arrow[ul, "\cong"]
\end{tikzcd}$$

---

[a] $\cong$ はモノイダル圏 V の associator

[b] $\cong$ はモノイダル圏 V の left/right unitor

定義 1.23: 豊穣関手

モノイダル圏 $(V, \otimes, I)$ を与える．
2 つの V-豊穣圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ の間の V-**豊穣関手** (V-enriched functor)

$$F \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

は，以下のデータからなる：

- 写像 $F_0 \colon \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathcal{D}),\ x \longmapsto F_0(x)$
- V の射の族

$$\left\{F_{x,y} \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F_0(x), F_0(y)\big)\right\}_{x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは以下の図式を可換にしなくてはいけない：

(enriched-1)

$\forall x, y, z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して[a]

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \arrow[r, "\circ_{x,y,z}"] \arrow[d, "F_{x,y} \otimes F_{y,z}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z) \arrow[d, "F_{x,z}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F_0(x), F_0(y)\big) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F_0(y), F_0(z)\big) \arrow[r, "\circ_{F_0(x),F_0(y),F_0(z)}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F_0(x), F_0(z)\big)
\end{tikzcd}$$

(enriched-2)

$\forall x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して[b]

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "j_x"] \arrow[dr, "j_{F_0(x)}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x) \arrow[d, "F_{x,x}"] \\
& \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F_0(x), F_0(x)\big)
\end{tikzcd}$$

[a] これは，通常の関手において射の合成が保存されることに対応する．
[b] これは，通常の関手において恒等射が保存されることに対応する．

与えられたモノイダル圏 V に対して，V**-豊穣圏のなす圏**を V-**Cat** と書く．V-**Cat** は

- V-豊穣圏を対象とする
- V-豊穣関手を射とする

ことで得られる圏である．

定義 1.24: 厳密な 2-圏

小圏と関手の圏 **Cat** を【例 **1.2.1**】の方法でモノイダル圏と見做す．**Cat**-豊穣圏のことを**厳密な 2-圏** (strict 2-category) と呼ぶ．

定義 1.24 を解読しよう．まず，小圏と関手の圏 **Cat** における対象とは小圏のことで，射とは関手のことである．さらに，**Cat** のテンソル積とは【**例 1.2.1**】より直積 $\times$ のことである．よって豊穣圏の定義から，厳密な 2-圏 $\mathcal{C}$ は

- **対象** (object)[*1] 全体の集合 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall x,\, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の間の **1-射** (1-morphism)[*2]全体が成す圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, y) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cat})$.
- **合成** (composition) と呼ばれる関手 $\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(y,\, z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, z)$
- **恒等素** (identity morphism) と呼ばれる関手 $j_x\colon 1 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, x)$

の 4 つのデータからなる．従って 1-射 $f\colon x \longrightarrow y$ とは圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, y)$ の対象 $f \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, y))$ のことであるから，2 つの 1-射 $f,\, g \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, y))$ が与えられると，圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, y)$ における，それらの間の射 $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, y)}\,(f,\, g)$ が存在する．このような α を **2-射** (2-morphism)[*3]と呼び，混乱防止のため $\alpha\colon f \longrightarrow g$ と書く代わりに $\boldsymbol{\alpha\colon f \Longrightarrow g}$ と書く．

2 つの 2-射 $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, y)}\,(f,\, g)$，$\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, y)}\,(g,\, h)$ は，圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, y)$ における射の合成 $*$ によって結合的かつ単位的に合成することができる：

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=50, "f"{name=F}] \arrow[r, bend right=50, "h"'{name=H}] & y
\arrow[from=F, to=H, Rightarrow, "\beta * \alpha"]
\end{tikzcd}
\quad \coloneqq \quad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=50, "f"{name=F}] \arrow[r, "g"{name=G}] \arrow[r, bend right=50, "h"'{name=H}] & y
\arrow[from=F, to=G, Rightarrow, "\alpha"]
\arrow[from=G, to=H, Rightarrow, "\beta"]
\end{tikzcd}
$$

このような 2-射の合成を**縦の合成** (vertical composition) と呼ぶ．一方，4 つの 1-射 $f, g\colon x \longrightarrow y$，$f', g'\colon y \longrightarrow z$ および 2 つの 2-射 $\alpha\colon f \Longrightarrow g$，$\alpha'\colon f' \Longrightarrow g'$ が与えられたとき，1-射の合成 $\circ$ が関手であることによって，圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(y,\, z)$ の射 $(\alpha,\, \alpha')\colon (f,\, f') \longrightarrow (g,\, g')$ に対して圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, z)$ の射，i.e. 2-射

$$
\alpha' \circ \alpha \coloneqq \circ(\alpha,\, \alpha')\colon f' \circ f \Longrightarrow g' \circ g
$$

が対応付く：

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=50, "f' \circ f"{name=F}] \arrow[r, bend right=50, "g' \circ g"'{name=G}] & z
\arrow[from=F, to=G, Rightarrow, "\alpha' \circ \alpha"]
\end{tikzcd}
\quad \coloneqq \quad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=50, "f"{name=F}] \arrow[r, bend right=50, "g"'{name=G}] & y \arrow[r, bend left=50, "f'"{name=F2}] \arrow[r, bend right=50, "g'"'{name=G2}] & z
\arrow[from=F, to=G, Rightarrow, "\alpha"]
\arrow[from=F2, to=G2, Rightarrow, "\alpha'"]
\end{tikzcd}
$$

このような 2-射の合成を**横の合成** (horizontal composition) と呼ぶ．横の合成は，モノイダル圏 **Cat** が厳密なモノイダル圏であること，および関手 $\circ$ の **(associativity)**，**(unitality)** によって結合的かつ単位的になる．

[*1] **0-セル** (0-cell) とも言う

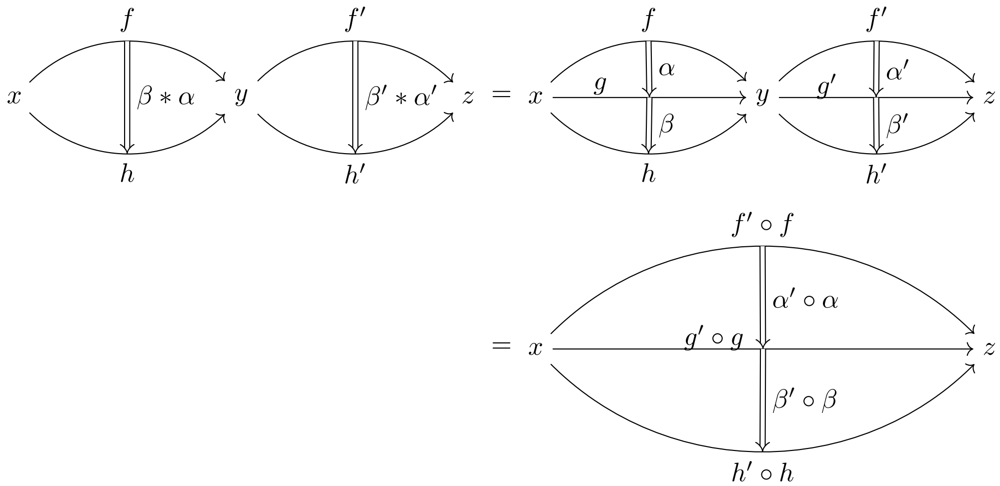
[*2] **1-セル** (1-cell) とも言う．正確には，圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, y)$ の対象のことを 1-射と呼ぶ．

[*3] **2-セル** (2-cell) とも言う

縦の合成と横の合成は，$\circ$ が関手であることによって交換する：

$$
\begin{aligned}
(\beta' * \alpha') \circ (\beta * \alpha) &= \circ\big((\beta,\, \beta') * (\alpha,\, \alpha')\big) \\
&= \big(\circ(\beta,\, \beta')\big) * \big(\circ(\alpha,\, \alpha')\big) \\
&= (\beta' \circ \beta) * (\alpha' \circ \alpha)
\end{aligned}
$$

図式で書くと一目瞭然である：



定義 1.25: 2-圏

厳密な 2-圏と同様の

- **対象** (object)[a] 全体の集合 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall x,\, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の間の **1-射** (1-morphism)[b]全体が成す圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, y) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cat})$.
- **合成** (composition) と呼ばれる関手 $\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(y,\, z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, z)$
- **恒等素** (identity morphism) と呼ばれる関手 $j_x\colon 1 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(x,\, x)$

の 4 つのデータに加えて

- $\forall x, y, z, w \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して **associator** と呼ばれる自然同型[c].

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(w, y) \arrow[dd, Rightarrow, "\alpha_{w,x,y,z}"] \arrow[dr, bend left, "\circ"] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(w, x) \arrow[ur, bend left, "\mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,z)} \times \circ"] \arrow[dr, bend right, "\circ \times \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(w,x)}"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(w, z) \\
 & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(w, x) \arrow[ur, bend right, "\circ"'] &
\end{tikzcd}$$

- $\forall x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して **left/right unitor** と呼ばれる自然同型

$$\lambda_{x,y} \coloneqq \left\{ l_{x,y\,f} \colon f \longmapsto f \circ j_x(1) \right\}_{f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)}$$
$$\rho_{x,y} \coloneqq \left\{ l_{x,y\,f} \colon f \longmapsto j_x(1) \circ f \right\}_{f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x) \arrow[d, Rightarrow, "\lambda_{w,x,y,z}"] \arrow[dr, bend left, "\circ"] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \arrow[ur, bend left, "\mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)} \times j_x"] \arrow[rr, "\mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)}"] \arrow[dr, bend right, "j_y \times \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)}"'] & {} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \\
 & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \arrow[u, Rightarrow, "\rho_{w,x,y,z}"'] \arrow[ur, bend right, "\circ"'] &
\end{tikzcd}$$

を持ち,

- associator が **(pentagon identity)** を
- unitors が **(triangle identity)** を

充たす $\mathcal{C}$ のことを **2-圏** (2-category) と呼ぶ.

---

[a] **0-セル** (0-cell) とも言う

[b] **1-セル** (1-cell) とも言う. 正確には, 圏 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ の対象のことを 1-射と呼ぶ.

[c] これは圏 **Cat** における図式である.

要するに，厳密な 2-圏において合成 $\circ$ の associativity および unitality を自然同型まで弱めたものが 2-圏である．

【例 1.5.1】2-圏としてのモノイダル圏

モノイダル圏 $\bigl(\mathcal{C},\, \otimes,\, I,\, \{a_{x,y,z}\},\, \{l_x\},\, \{l_y\}\bigr)$ は 2-圏である．実際，2-圏 $\mathbf{B}\mathcal{C}$ を

- $\mathrm{Ob}(\mathbf{B}\mathcal{C}) \coloneqq \{\bullet\}$（1 点集合）
- $\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}\mathcal{C}}(\bullet,\, \bullet) \coloneqq \mathcal{C}$
- $\circ \coloneqq \otimes \colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$
- $j_x \coloneqq \iota_I \colon I \hookrightarrow \mathcal{C}$
- $\alpha_{\bullet,\bullet,\bullet} \coloneqq \{a_{x,y,z}\}$
- $\lambda_{\bullet,\bullet} \coloneqq \{l_{x,y,z}\}, \quad \rho_{\bullet,\bullet} \coloneqq \{r_{x,y,z}\}$

により定義すると $\mathcal{C} = \mathbf{B}\mathcal{C}$ となる．

1.5.2　弱い 2-群・コヒーレントな 2-群・厳密な 2-群

[?] に倣い **2-群** (2-group) を導入する．

定義 1.26: 弱い逆対象

モノイダル圏 $(\mathcal{C},\, \otimes,\, 1)$ の対象 $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を 1 つとる．

- 対象 $y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が x の**弱い逆対象** (weak inverse) であるとは，対象の同型の意味で[a] $x \otimes y \cong 1$ かつ $y \otimes x \cong 1$ が成り立つことを言う．
- x が**弱可逆** (weakly invertible) であるとは，x が弱い逆対象を持つことを言う．

[a] 自然同型ではない

定義 1.27: 弱い 2-群・コヒーレントな 2-群・厳密な 2-群

- **弱い 2-群** (weak 2-group) とは，モノイダル圏 $\mathcal{G}$ であって，任意の対象が弱可逆でかつ任意の射が同型射であるもののこと．
- **コヒーレントな 2-群** (coherent 2-group) とは，モノイダル圏 $\mathcal{G}$ であって，任意の対象 $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$ が可逆な unit，counit $(x,\, \bar{x},\, i_x,\, e_x)$ を持ち，かつ任意の射が同型射であるもののこと．
- **厳密な 2-群** (strict 2-group) とは，モノイダル圏 $\mathcal{G}$ であって，任意の対象が可逆[a]でかつ任意の射が同型射であるもののこと．

[a] $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $x^{-1} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が存在して，厳密に $x \otimes x^{-1} = 1$，$x^{-1} \otimes x = 1$ が成り立つ．

定義 1.28: 2-群の準同型

2-群 $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ の間の**準同型**とは，モノイダル関手 $f\colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ のこと．

定理 1.1: 弱い 2-群はコヒーレントな 2-群

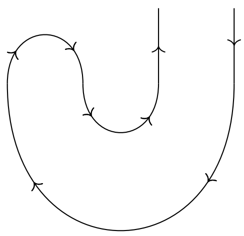
任意の弱い 2-群はコヒーレントな 2-群にすることができる．

証明 勝手な弱い 2-群 $\mathcal{G}$ を 1 つ固定する．このとき $\forall x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$ に対してある $\bar{x} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$ および同型射 $i'_x\colon 1 \longrightarrow x \otimes \bar{x},\ e'_x\colon \bar{x} \otimes x \longrightarrow 1$ が存在する．

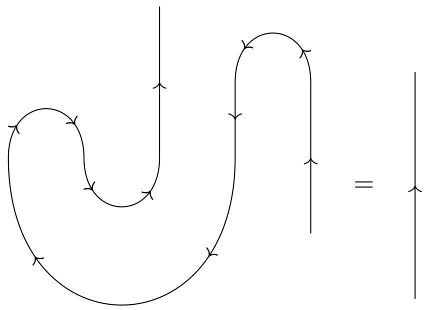
ここで $e_x \coloneqq e'_x$ とおき，

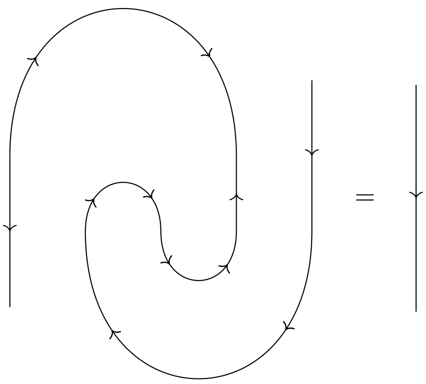
$$i_x \coloneqq (l_x \otimes \mathrm{Id}_{\bar{x}}) \circ a^{-1}_{1,x,\bar{x}} \circ ({i'_x}^{-1} \otimes \mathrm{Id}_{x\otimes\bar{x}}) \circ a^{-1}_{x,\bar{x},x\otimes\bar{x}} \circ (\mathrm{Id}_x \otimes a_{\bar{x},x,\bar{x}}) \circ (\mathrm{Id}_x \otimes {e'_x}^{-1} \otimes \mathrm{Id}_{\bar{x}}) \circ (\mathrm{Id}_x \otimes l^{-1}_{\bar{x}}) \circ i'_x$$

とおくと組 $(x, \bar{x}, i_x, e_x)$ が zig-zag equation を充たすことを示す．実際，i_x の定義をストリング図式で書くと

$i_x =$ 

となるから，





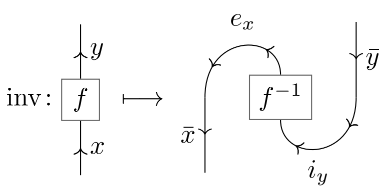
が言える． ■

> ! 定理 1.1 を踏まえ，以下ではコヒーレントな 2-群のことを単に **2-群** (2-group) と呼ぶ．

2-群 $\mathcal{G}$ において，弱い逆対象を対応づける関手

$$\mathrm{inv}\colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G},\ x \longmapsto \bar{x} \tag{1.5.1}$$

を考えたいが，射の対応は少々厄介である．[?, p.34] に倣うと



とすれば良いことがわかる[4]．

以上より，2-群 $\mathcal{G}$ を【例 **1.5.1**】により 2 圏 $\mathbf{B}\mathcal{G}$ の言葉で表現すると

- ただ 1 つの対象を持つ：$\mathrm{Ob}(\mathbf{B}\mathcal{G}) = \{\bullet\}$

[4] 定義からコヒーレントな 2 群は rigid なモノイダル圏であり，zigzag identity を使えることが肝になる．

- 任意の 1-射 $x \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}\mathcal{G}}(\bullet, \bullet)) = \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$ が弱可逆であり，その弱い逆対象 $\bar{x}$ は関手 (1.5.1) によって与えられる．
- 任意の 2-射 $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}\mathcal{G}}(\bullet, \bullet)}(x, y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(x, y)$ が同型射

と言うことになる．特に厳密な 2-群とは，全ての $\alpha, \lambda, \rho, i, e$ が $\mathcal{G}$ の恒等射となっていることを言う．

1.5.3 交差加群との関係

定義 1.29: 交差加群

交差加群 (crossed module) とは，

- 群準同型 $G_2 \xrightarrow{t} G_1$
- G_1 の左作用 $\alpha\colon G_1 \longrightarrow \mathrm{Aut}(G_2)$

の組であって，以下の条件を満たすもののこと：

(cr-1) 以下の図式を可換にする：

$$\begin{tikzcd}
G_2 \times G_2 \arrow[rr, "t \times \mathrm{Id}"] \arrow[dr, "\mathrm{Ad}"'] & & G_1 \times G_2 \arrow[dl, "\alpha"] \\
& G_2 &
\end{tikzcd}$$

あるいは同じことだが，$\forall g_i \in G_i$ に対して

$$t\big(\alpha(g_1)(g_2)\big) = g_1 t(g_2) g_1^{-1}$$

を充たす．

(cr-2) 以下の図式を可換にする：

$$\begin{tikzcd}
G_1 \times G_2 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{Id} \times t"'] & G_2 \arrow[d, "t"] \\
G_1 \times G_1 \arrow[r, "\mathrm{Ad}"'] & G_1
\end{tikzcd}$$

あるいは同じことだが，$\forall g_2, g_2' \in G_2$ に対して

$$\alpha\big(t(g_2)\big)\big(g_2'\big) = g_2 g_2' g_2^{-1}$$

を充たす (**Peiffer identity**).

命題 1.3: 交差加群と厳密な 2-群

(1) 交差加群 $(G_2 \xrightarrow{t} G_1,\ \alpha)$ が与えられたとする．このとき

- 1-射の集合 $\mathcal{G}_0 \coloneqq G_1$
- 2-射の集合 $\mathcal{G}_1 \coloneqq G_1 \ltimes_\alpha G_2$（外部半直積）
- 始点射 $\sigma\colon \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_0,\ (g_1,\ g_2) \longrightarrow g_1$
- 終点射 $\tau\colon \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_0,\ (g_1,\ g_2) \longrightarrow t(g_2)g_1$
- 恒等素 $j\colon \mathcal{G}_0 \longrightarrow \mathcal{G}_1,\ g_1 \longrightarrow (g_1,\ 1_{G_2})$
- 2-射の合成 $\circ\colon \mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_1,\ \big((g_1,\ g_2),\ (g_1',\ g_2')\big) \longmapsto (g_1,\ g_2 g_2')$

とおくと，圏 $\mathcal{G}$ は厳密な 2-群になる．

(2) 逆に厳密な 2-群 $\mathcal{G}$ が与えられたとき，

- $G_1 \coloneqq \mathcal{G}_0$
- $G_2 \coloneqq \operatorname{Ker}\sigma \subset \mathcal{G}_1$
- $t \coloneqq \tau|_{G_2}\colon G_2 \longrightarrow G_1$
- $\alpha\colon G_1 \longrightarrow \operatorname{Aut}(G_2),\ g_1 \longmapsto \big(g_2 \longmapsto j(g_1) g_2 j(g_1)^{-1}\big)$

とおくことで交差加群 $(G_2 \xrightarrow{t} G_1,\ \alpha)$ が得られる．

証明 (1)

■

1.6 3-群

1.6.1 3-圏

一般の 3-圏は associator, unitors のせいで扱いが難しいので，まずは**厳密な 3-圏** (strict 3-group) を考える．**Cat** を【例 **1.2.1**】の方法でモノイダル圏と見做す．定義 1.24 から，2-圏としての同値

$$\mathbf{Str2Cat} \cong \mathbf{Cat\text{-}Cat}$$

が成り立つ．さらに **Cat-Cat** は直積に関してモノイダル圏になる．

定義 1.30: 厳密な 3-圏

厳密な 2-圏が成す 2-圏 **Cat-Cat** をモノイダル圏と見做す．このとき **Cat-Cat-**豊穣圏のことを**厳密な 3-圏** (strict 3-category) と呼ぶ．

1.6.2 2-crossed module と厳密な 3-群

定義 1.31: 厳密な 3-群

厳密な 3-圏 $\mathcal{G}$ であって，ただ 1 つの対象を持ち，1-射，2-射，3-射が厳密に可逆であるものを**厳密な 3-群** (strict 3-category) と呼ぶ.

定義 1.32: 2-交差加群

2-交差加群 (2-crossed module) とは，以下のデータからなる：

- 群の正規複体 $G_3 \xrightarrow{\partial_2} G_2 \xrightarrow{\partial_1} G_1$
- 群の左作用 $\alpha_1 \colon G_1 \longrightarrow \mathrm{Aut}(G_2)$, $\alpha_2 \colon G_1 \longrightarrow \mathrm{Aut}(G_3)$
- **Peiffer lifting** と呼ばれる写像 $\{\text{-}, \text{-}\} \colon G_2 \times G_2 \longrightarrow G_3$

これらは以下の条件を充たす：

(2CM1) ∂_1, ∂_2 は G_1-同変

(2CM2) $\forall g_2,\ h_2 \in G_2$ に対して

$$\partial_2\{g_2, h_2\} = \alpha_1(g_2)(h_2) g_2 h_2^{-1} g_2^{-1}$$

(2CM3) $\forall g_3,\ h_3 \in G_3$ に対して

$$\{\partial_2 g_3, \partial_2 h_3\} = [h_3, g_3]$$

(2CM4) $\forall g_2 \in G_2,\ g_3 \in G_3$ に対して

$$\{g_2, \partial_2 g_3\}\{\partial_2 g_3, g_2\} = \alpha_2\big(\partial_1(g_2)\big)(g_3) g_3^{-1}$$

(2CM5) $\forall g_2,\ h_2,\ k_2 \in G_2$ に対して

$$\begin{aligned}\{g_2, h_2 k_2\} &= \{g_2, h_2\}\big\{\partial_2\{g_2, k_2\}, g_2 h_2 g_2^{-1}\big\}\{g_2, k_2\} \\ \{g_2 h_2, k_2\} &= \alpha_2\big(\partial_1(g_2)\big)\big(\{h_2, k_2\}\big)\big\{g_2, h_2 k_2 h_2^{-1}\big\}\end{aligned}$$

(2CM6) $\forall g_1 \in G_1,\ \forall g_2,\ h_2 \in G_2$ に対して

$$\alpha_2(g_1)(\{g_2, h_2\}) = \{\alpha_1(g_1)(g_2), \alpha_1(g_1)(h_2)\}$$