第 1 章

∞-圏

この付録では，[?]，[?] に従って ∞-圏[*1]，および主 ∞-束を導入する．

1.1　圏論の復習

1.1.1　圏と関手

定義 1.1: 圏

圏 (category) $\mathcal{C}$ とは，以下の 4 種類のデータからなる：

- **対象** (object) と呼ばれる要素の集まり[a]

$$\mathbf{Ob}(\boldsymbol{\mathcal{C}})$$

- $\forall A,\, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，A から B への**射** (morphism) と呼ばれる要素の集合

$$\mathbf{Hom}_{\boldsymbol{\mathcal{C}}}\,(\boldsymbol{A},\, \boldsymbol{B})$$

- $\forall A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，A 上の**恒等射** (identity morphism) と呼ばれる射

$$\mathbf{Id}_{\boldsymbol{A}} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, A)$$

- $\forall A,\, B,\, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, B),\, \forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(B,\, C)$ に対して，f と g の**合成** (composite) と呼ばれる射 $\boldsymbol{g \circ f} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, C)$ を対応させる集合の写像

$$\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(B,\, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, C),\ (f,\, g) \longmapsto g \circ f$$

これらの構成要素は，次の 2 条件を満たさねばならない：

(1) **(unitality)**：任意の射 $f\colon A \longrightarrow B$ に対して

$$f \circ \mathrm{Id}_A = f, \quad \mathrm{Id}_B \circ f = f$$

が成り立つ．

*1 [?]

(2) **(associativity)**：任意の射 $f\colon A \longrightarrow B,\ g\colon B \longrightarrow C,\ h\colon C \longrightarrow D$ に対して

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

が成り立つ．

[a] $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ は，集合論では扱えないほど大きなものになっても良い．

定義 1.2: モノ・エピ・同型射

圏 $\mathcal{C}$ を与える．

- 射 $f\colon A \longrightarrow B$ が**単射** (monomorphism) であるとは，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して写像

$$\begin{aligned} f_*\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ A) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ B), \\ g &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$$

  が集合の写像として単射であること．
- 射 $f\colon A \longrightarrow B$ が**全射** (epimorphism) であるとは，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して写像

$$\begin{aligned} f^*\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,\ X) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\ X), \\ g &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

  が集合の写像として単射であること．
- 射 $f\colon A \longrightarrow B$ が**同型射** (isomorphism) であるとは，射 $g\colon B \longrightarrow A$ が存在して $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ かつ $f \circ g = \mathrm{Id}_B$ を充たすこと．このとき f と g は互いの**逆射** (inverse) であると言い，$g = \boldsymbol{f^{-1}},\ f = \boldsymbol{g}^{-1}$ と書く[a]．
- $A,\ B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の間に同型射が存在するとき，対象 A と B は**同型** (isomorphic) であると言い，$\boldsymbol{A \cong B}$ と書く．

[a] 逆射は存在すれば一意である．

定義 1.3: 関手

圏 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ を与える．圏 $\mathcal{C}$ から圏 $\mathcal{D}$ への**関手** F とは，以下の 2 つの対応からなる：

- 圏 $\mathcal{C}$ における任意の対象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，圏 $\mathcal{D}$ における対象 $F(X) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ を対応づける
- 圏 $\mathcal{C}$ における任意の射 $f\colon X \longrightarrow Y$ に対して，圏 $\mathcal{D}$ における射 $F(f)\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ を対応づける

これらの対応は以下の条件を充たさねばならない：

(fun-1) 圏 $\mathcal{C}$ における任意の射 $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon Y \longrightarrow Z$ に対して，

$$F(g \circ f) \longrightarrow F(g) \circ F(f)$$

(fun-2) 圏 $\mathcal{C}$ における任意の対象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，

$$F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$$

文脈上明らかなときは，圏 $\mathcal{C}$ から圏 $\mathcal{D}$ への関手 F のことを関手 $\boldsymbol{F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}}$ と略記する．

定義 1.4: 忠実・充満・本質的全射

関手 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ を与える．

- F が**忠実** (faithful) であるとは，$\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して写像

  $$F\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(X), F(Y)\big),\ f \longmapsto F(f)$$

  が単射であること．
- F が**充満** (full) であるとは，$\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して写像

  $$F\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(X), F(Y)\big),\ f \longmapsto F(f)$$

  が全射であること．
- F が**本質的全射** (essentially surjective) であるとは，$\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ に対して $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が存在して $F(X)$ が Y と同型になること．

忠実充満関手のことを**埋め込み**と呼ぶことがある．

定義 1.5: 自然変換

2 つの関手 $F, G\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ を与える．F, G の間の**自然変換** (natural transformation) $\boldsymbol{\tau\colon F \Longrightarrow G}$ とは，以下の対応からなる：

- 圏 $\mathcal{C}$ における任意の対象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，圏 $\mathcal{D}$ における射 $\tau_X\colon F(X) \longrightarrow G(X)$ を対応づける

この対応は以下の条件を充たさねばならない：

(nat) 圏 $\mathcal{C}$ における任意の射 $f\colon X \longrightarrow Y$ に対して，以下の図式を可換にする：

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\tau_X"] & F(Y) \arrow[d, "\tau_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

自然変換 $\tau\colon F \Longrightarrow G$ であって，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して射 $\tau_X\colon F(X) \longrightarrow G(X)$ が同型射であるもののことを**自然同値** (natural equivalence) と呼ぶ．

自然変換 $\tau\colon F \Longrightarrow G$ を

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "G"'{name=D}] & \mathcal{D} \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "\tau"] \end{tikzcd}$$

と書くことがある．

1.1.2 米田埋め込み

定義 1.6: 前層

圏 $\mathcal{C}$ 上の圏 $\mathcal{S}$ に値をとる**前層**とは，関手

$$P\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}$$

のこと．

前層の圏 $\mathrm{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{S})$ [*2]とは，

- 前層 $P\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}$ を対象とする
- 前層 $P, Q\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}$ の間の自然変換 $\tau\colon P \Longrightarrow Q$ を射とする

として構成される圏のこと[*3].

*2 $[\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}]$ や $\mathcal{S}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ と書くこともある．なお，付録 A で登場したものはこれの一例である．

*3 $\mathrm{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{S})$ の恒等射は $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ に対して $\mathrm{Id}_X\colon X \longrightarrow X$ を対応づける自然変換である．

定義 1.7: 表現可能前層・米田埋め込み

圏 $\mathcal{C}$ を与える．

- $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，以下で定義する前層

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\,\text{-}\,,\,\boldsymbol{X})\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

  のことを**表現可能前層** (representable presheaf) と呼ぶ：
  - $\forall Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\,\text{-}\,,\,X)(Y) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(Y,\,X) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$$

    を対応づける
  - $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ における任意の射 $Y \longleftarrow Z\,:g$ に対して，

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\,\text{-}\,,\,X)(g) \coloneqq g^{*}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(Z,\,X) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(Y,\,X),\\ h &\longmapsto h \circ g\end{aligned}$$

    を対応付ける
- **米田埋め込み** (Yoneda embedding) とは，以下で定義する関手

$$\mathrm{Y}\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{PSh}\,(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\,\mathbf{Sets})$$

  のこと：
  - $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ に対して表現可能前層 $\mathrm{Y}(X) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\,\text{-}\,,\,X) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{PSh}\,(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\,\mathbf{Sets}))$ を対応付ける
  - $\mathcal{C}$ における任意の射 $f\colon X \longrightarrow Y$ に対して，以下で定義される自然変換 $\mathrm{Y}(f)\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\,\text{-}\,,\,X) \Longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\,\text{-}\,,\,Y)$ を対応付ける：
    - $\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ に対して，圏 $\mathbf{Sets}$ における射

$$\begin{aligned}\mathrm{Y}(f)_{Z} \coloneqq f_{*}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(Z,\,X) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(Z,\,Y),\\ g &\longmapsto f \circ g\end{aligned}$$

      を対応付ける．

補題 1.1: 米田の補題

前層 $F\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ および圏 $\mathcal{C}$ の対象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を与える．このとき，写像

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\,\mathbf{Sets})}\,\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\,\text{-}\,,\,X),\,F\big) &\longrightarrow F(X),\\ \tau &\longmapsto \tau_{X}(\mathrm{Id}_{X})\end{aligned}$$

は全単射である．

米田の補題の主張は少し込み入っているが，次のように考えれば良い：
$\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\,\mathbf{Sets})}\,\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\,\text{-}\,,\,X)\big)$ とは自然変換

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \arrow[r, bend left=50, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-},\, X)"] \arrow[r, bend right=50, "F"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\tau"] & \mathbf{Sets}
\end{tikzcd}
$$

のことであるから，表現可能前層の定義より $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ に対して圏 $\mathbf{Sets}$ における射（i.e. 写像）$\tau_X \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, X) \longrightarrow F(X)$ が定まる．圏の定義より集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, X)$ には必ず恒等射という元 $\mathrm{Id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, X)$ が含まれるので，それを写像 τ_X で送った先は $\tau_X(\mathrm{Id}_X) \in F(X)$ として well-defined である．

証明 写像

$$
\begin{aligned}
\eta \colon F(X) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\, \mathbf{Sets})}\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-},\, X),\, F\big), \\
s &\longmapsto \big\{\eta(s)_Y \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\, X) \longrightarrow F(Y),\ f \longmapsto F(f)(s)\big\}_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}
\end{aligned}
$$

を考える．$\forall s \in F(X)$ を 1 つ固定する．このとき圏 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ における任意の射 $Y \longleftarrow Z \colon f$ および $\forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,\, X)$ に対して

$$
\begin{aligned}
\eta(s)_Y \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-},\, X)(f)(g) &= \eta(s)_Y(g \circ f) \\
&= F(g \circ f)(s) \\
&= F(f) \circ F(g)(s) \\
&= F(f) \circ \eta(s)_Z(g)
\end{aligned}
$$

が言える．i.e. $\eta(s)$ は自然変換であり，η は well-defined である．

ところで，$\forall \tau \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\, \mathbf{Sets})}\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-},\, X),\, F\big)$ に対して

$$
\begin{aligned}
\eta(\tau_X(\mathrm{Id}_X)) &= \big\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\, X) \longrightarrow F(Y),\ f \longmapsto F(f)\big(\tau_X(\mathrm{Id}_X)\big)\big\}_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \\
&= \big\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\, X) \longrightarrow F(Y),\ f \longmapsto F(f) \circ \tau_X(\mathrm{Id}_X)\big\}_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \\
&= \big\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\, X) \longrightarrow F(Y),\ f \longmapsto \tau_Y \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-},\, X)(f)(\mathrm{Id}_X)\big\}_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \\
&= \big\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\, X) \longrightarrow F(Y),\ f \longmapsto \tau_Y(f \circ \mathrm{Id}_X)\big\}_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \\
&= \big\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\, X) \longrightarrow F(Y),\ f \longmapsto \tau_Y(f)\big\}_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \\
&= \tau
\end{aligned}
$$

が成り立ち，かつ

$$
\eta(s)_X(\mathrm{Id}_X) = F(\mathrm{Id}_X)(s) = \mathrm{Id}_{F(X)}(s) = s
$$

が成り立つので，η は題意の写像の逆写像である． ■

命題 1.1: 米田埋め込みは埋め込み

米田埋め込み $\mathrm{Y} \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{PSh}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\, \mathbf{Sets})$ は埋め込みである．

証明 $\forall X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を固定する．写像

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, Y) &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\, \mathbf{Sets})}\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-},\, X),\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-},\, Y)\big), \\
f &\longmapsto \mathrm{Y}(f)
\end{aligned}
$$

が全単射であることを示せば良い．米田埋め込みの定義から，$\forall s \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\,Y)$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathrm{Y}(s) &= \left\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,\,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,\,Y),\ g \longmapsto s \circ g\right\}_{Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \\
&= \left\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,\,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,\,Y),\ g \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-}\,,\,Y)(g)(s)\right\}_{Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}
\end{aligned}$$

が成り立つが，これは米田の補題において $F = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{-}\,,\,Y) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{PSh}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\,\mathbf{Sets}))$ としたときの逆写像であり，示された． ■

1.1.3 随伴

定義 1.8: 随伴

関手 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, $G\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ を与える．F が G の**左随伴** (left adjoint) であり，かつ G が F の**右随伴** (right adjoint) であるとは，２つの関手

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(F(\text{-}),\,\text{-}\right)\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{Sets}, \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\text{-},\,G(\text{-})\right)\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{Sets}
\end{aligned}$$

の間に自然変換

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \arrow[rr, bend left=60, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(F(\text{-}),\,\text{-}\right)"] \arrow[rr, bend right=60, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\text{-},\,G(\text{-})\right)"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow"] & & \mathbf{Sets}
\end{tikzcd}$$

が存在することを言う．

F が G の左随伴である（全く同じことだが，G が F の右随伴である）ことを $\boldsymbol{F \dashv G}$ と書く．図式中では

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"]
\end{tikzcd}$$

のように書く．

これまでもなんとなく使ってきたが，圏 $\mathcal{C}$ における ***I* 型の図式**とは小圏から圏への関手 $D\colon I \longrightarrow \mathcal{C}$ のことを言う．I 型の図式 $D\colon I \longrightarrow \mathcal{C}$ および関手 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ をとると，同じ型の新たな図式 $I \xrightarrow{D} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ が構成できる．

さて，圏 $\mathcal{C}$ 上の図式 $D\colon I \longrightarrow \mathcal{C}$ が余極限を持つとする：

$$\begin{tikzcd}
 & D(\forall i) \arrow[dl, bend right] \arrow[dr, bend left] & \\
\operatorname{colim}_I D \arrow[rr, dashed, "\exists!"] & & \forall X
\end{tikzcd}$$

このとき，$\mathcal{D}$ 上の図式として

$$
\begin{tikzcd}
& F\big(D(\forall i)\big) \arrow[dl, bend right] \arrow[dr, bend left] & \\
\operatorname{colim}_I F(D) \arrow[rr, dashed, "\exists! u"] & & F(\operatorname{colim}_I D)
\end{tikzcd}
$$

を考えることができる．特に，一意に定まる射 $u\colon \operatorname{colim}_I F(D) \longrightarrow F(\operatorname{colim}_I D)$ が同型のとき，関手 F は**余極限を保つ**という．

同様に，圏 $\mathcal{D}$ 上の図式 $D\colon I \longrightarrow \mathcal{C}$ が極限を持つとする：

$$
\begin{tikzcd}
\lim_I D \arrow[dr, bend right] & & \forall X \arrow[ll, dashed, "\exists!"'] \arrow[dl, bend left] \\
& D(\forall i) &
\end{tikzcd}
$$

このとき，$\mathcal{D}$ 上の図式として

$$
\begin{tikzcd}
\lim_I F(D) \arrow[dr, bend right] & & F(\lim_I D) \arrow[ll, dashed, "\exists! u"'] \arrow[dl, bend left] \\
& F\big(D(\forall i)\big) &
\end{tikzcd}
$$

を考えることができる．特に，一意に定まる射 $u\colon F(\lim_I D) \longrightarrow \lim_I F(D)$ が同型のとき，関手 F は**極限を保つ**という．

命題 1.2: 随伴と極限・余極限

関手 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, $G\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ が $F \dashv G$ であるとする．このとき，F は余極限を保ち，G は極限を保つ．

<u>**証明**</u> 余極限を持つ任意の $\mathcal{C}$ の図式 $D\colon I \longrightarrow \mathcal{C}$ を 1 つ固定する．随伴の定義および余極限の定義より，$\forall Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ に対して

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(F(\operatorname*{colim}_I D),\, Y\right) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\operatorname*{colim}_I D,\, G(Y)\right) \\
&\cong \lim_I \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(D(i),\, G(Y)\right) \\
&\cong \lim_I \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(F(D(i)),\, Y\right) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(\operatorname*{colim}_I F(D),\, Y\right)
\end{aligned}
$$

が言える．米田の補題により

$$
F(\operatorname*{colim}_I D) \cong \operatorname*{colim}_I F(D)
$$

が示された． ■

定義 1.9: 完備な圏

圏が**完備**（resp. **余完備**）(complete resp. cocomplete) であるとは，任意の小圏を添字圏にもつ図式が極限を持つことを言う．完備かつ余完備な圏は**双完備** (bicomplete) であると言われる．

1.1.4 Kan 拡張

定義 1.10: スライス圏

圏 $\mathcal{D}$ およびその対象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ を与える．**スライス圏** (slice category) $\boldsymbol{\mathcal{D}_{/X}}$ とは，以下のデータからなる圏のこと：

- $\mathcal{D}$ の対象と射の組 $(D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}),\ \alpha\colon D \longrightarrow X)$ を対象に持つ
- $(D,\ \alpha),\ (D',\ \alpha')$ の間の射は，$\mathcal{D}$ における射 $\beta\colon D \longrightarrow D'$ であって $\mathcal{D}$ における図式

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & D' \arrow[dl, "\alpha'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

を可換にするものとする

双対スライス圏 (dual slice category) $\boldsymbol{\mathcal{D}_{X/}}$ とは，以下のデータからなる圏のこと：

- $\mathcal{D}$ の対象と射の組 $(D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}),\ \alpha\colon X \longrightarrow D)$ を対象に持つ
- $(D,\ \alpha),\ (D',\ \alpha')$ の間の射は，$\mathcal{D}$ における射 $\beta\colon D \longrightarrow D'$ であって $\mathcal{D}$ における図式

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "\beta"] & & D' \\ & X \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[ur, "\alpha'"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にするものとする

関手[*4] $\mathcal{D}_{/X} \longrightarrow \mathcal{D},\ (D,\ \alpha) \longmapsto D$ のことを**標準的関手** (canonical functor) と呼ぶ．標準的関手は図式中でも記号で明記しないことが多い．

[*4] 対象の対応のみ明示した．