

第 1 章

モノイダル圏・フュージョン圏・高次群

この章では標数 0 の体 \mathbb{K} のみを考える。

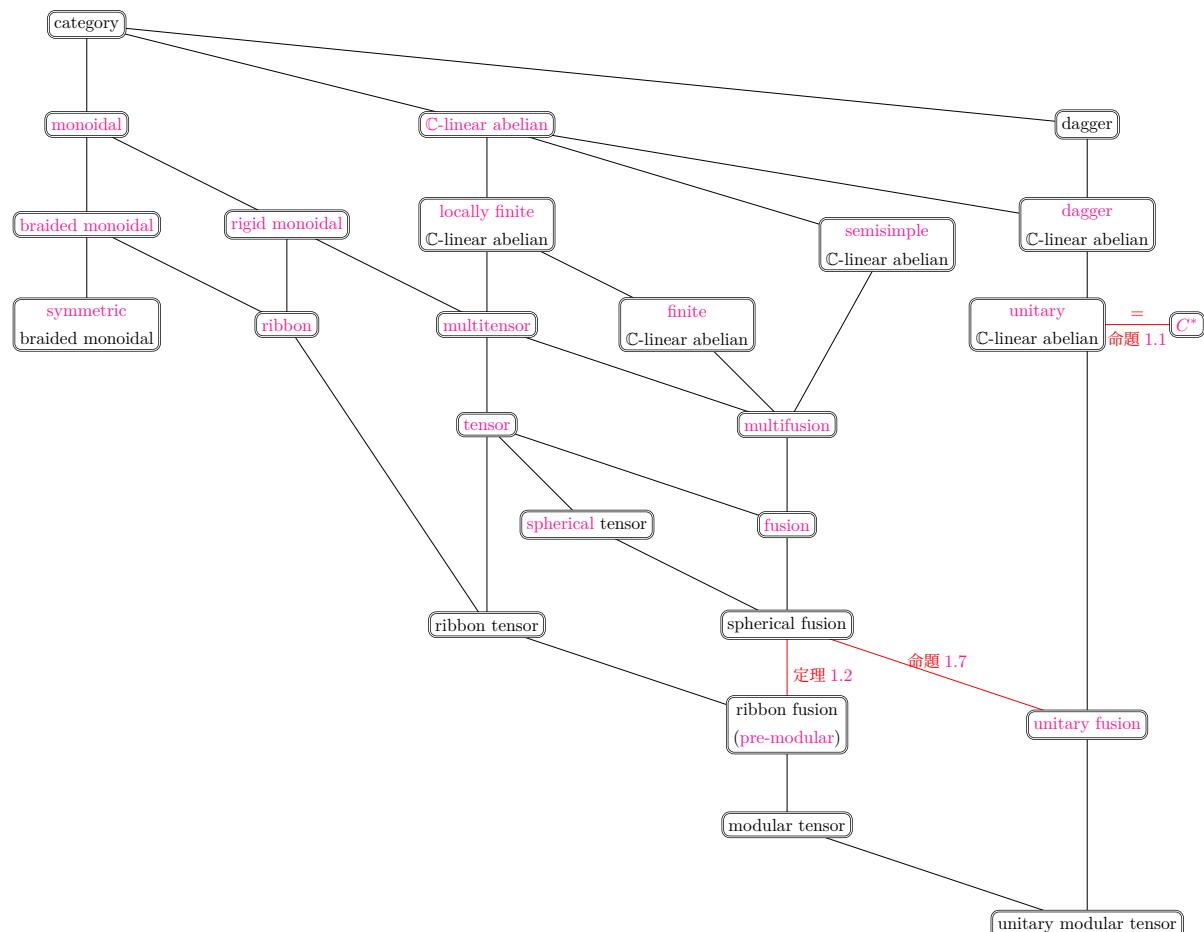


図 1.1: フュージョン圏の構造ガイドマップ. 定義でない部分は赤色で示した.

1.1 アーベル圏

定義 1.1: 加法圏・アーベル圏

圏 \mathcal{C} が体 \mathbb{K} 上の加法圏 (additive category) であるとは、以下を充たすこと：

(add-1)

任意の Hom 集合 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が可換群の構造をもち、かつ射の合成

$$\circ: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

が群演算に関して双加法的である。

(add-2)

零対象^a (zero object) $\mathbf{0} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が存在し、 $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{0}, X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathbf{0}) = 0$ を充たす^b.

(add-3)

有限の余積が常に存在する。

加法圏 \mathcal{C} は、 $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に関して $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が \mathbb{K} -ベクトル空間の構造を持ち、かつ合成 \circ が \mathbb{K} -双線形写像でもあるとき、 \mathbb{K} -線形 (\mathbb{K} -linear) であると言われる。

^a 始対象かつ終対象

^b 最右辺は (add-1) の意味で零ベクトル空間。

加法圏 \mathcal{C} は、以下の条件を充たすときアーベル圏 (abelian category) と呼ばれる：

(Ab-1)

任意の射 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が核 $\ker f: \text{Ker } f \longrightarrow X$ および余核 $\text{coker } f: Y \longrightarrow \text{Coker } f$ を持つ。

(Ab-2)

$\text{Ker } f = \mathbf{0}$ ならば $f = \ker(\text{coker } f)$ 、かつ $\text{Coker } f = \mathbf{0}$ ならば $f = \text{coker}(\ker f)$

定義 1.2: 加法的関手・完全関手

加法圏 \mathcal{C}, \mathcal{D} の間の関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が加法的 (additive) であるとは, $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して定まる写像

$$F_{X, Y}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)), f \mapsto F(f)$$

が可換群の準同型であることを言う. 特に加法圏 \mathcal{C}, \mathcal{D} が \mathbb{K} -線形で, かつ $\forall X, Y \in \mathcal{C}$ に対して $F_{X, Y}$ が \mathbb{K} -線型写像でもあるとき, F は \mathbb{K} -線形 (\mathbb{K} -linear) であると言う.

アーベル圏 \mathcal{C}, \mathcal{D} の間の加法的関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を与える.

- F が左完全 (left exact) であるとは, \mathcal{C} の任意の短完全列 $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ に対して

$$0 \rightarrow F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z)$$

が \mathcal{D} の完全列になること.

- F が右完全 (right exact) であるとは, \mathcal{C} の任意の短完全列 $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ に対して

$$F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z) \rightarrow 0$$

が \mathcal{D} の完全列になること.

- F が完全 (exact) であるとは, F が右完全かつ左完全であること.

【例 1.1.1】表現の圏

G を群とする. このとき

- G の表現 (ρ, V) を対象とする
- G -同変な \mathbb{K} -線型写像 $(\rho, V) \xrightarrow{f} (\rho', V')$ を射とする

圏を $\text{Rep}(G)$ と書く. $\text{Rep}(G)$ はアーベル圏である.

1.1.1 半単純性・有限性

定義 1.3: 単純・半単純

- アーベル圏 \mathcal{C} の対象 $X \in \mathcal{C}$ が単純 (simple) であるとは、任意のモノ射 $i: U \hookrightarrow X$ が 0 であるか同型射であることを言う。
- アーベル圏 \mathcal{C} が半単純 (semisimple) であるとは、 $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が単純対象の有限余積と同型であることを言う。i.e. 単純対象の族 $\{X_i \in \text{Ob}(\mathcal{C})\}_{i \in I}$ および有限個を除いて 0 であるような非負整数の族 $\{N_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}_{i \in I}$ が存在して

$$X \cong \bigoplus_{i \in I} N_i X_i$$

が成り立つこと。

定義 1.4: 有限性

アーベル圏 \mathcal{C} とその対象 $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を与える。

- X が有限長 (finite length) を持つとは、有限のフィルトレーション

$$0 = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_{n-1} \subset X_n = X$$

であって $X_i/X_{i-1} := \text{Coker}(X_{i-1} \hookrightarrow X_i)$ ($\forall i$) が単純対象であるようなもの (Jordan-Hölder 列と言う) が存在することを言う。このときの n を X の長さ (length) と呼ぶ^a。

以下、アーベル圏 \mathcal{C} は \mathbb{K} -線形であるとする。

- \mathcal{C} が局所有限 (locally finite) であるとは、以下の 2 条件を充たすこと：

(IFin-1) $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して、 \mathbb{K} -ベクトル空間 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が有限次元

(IFin-2) $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が有限長を持つ。

- \mathcal{C} が有限 (finite) であるとは、以下の 4 条件を充たすこと：

(Fin-1) $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して、 \mathbb{K} -ベクトル空間 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が有限次元

(Fin-2) $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が有限長を持つ。

(Fin-3) $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が射影的被覆^bを持つ。

(Fin-4) 単純対象の同型類が有限個である。

^a Jordan-Hölder の定理 [?, THEOREM 1.5.4, p.5] から、 X の任意の Jordan-Hölder 列は存在すれば同一の長さを持つ。

^b $P \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が射影的 (projective) であるとは、関手 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, -)$ が完全関手であることを言う。 $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ の射影的被覆 (projective cover) とは、射影的対象 $P_X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ とエピ射 $p_X: P_X \rightarrow X$ の組み (P_X, p_X) であって、任意の射影的対象 $P \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ およびエピ射 $p: P \rightarrow X$ に対してあるエピ射 $h: P \rightarrow P_X$ が存在して $p_X \circ h = p$ を充たすようなもののこと。

1.1.2 ダガー構造・ユニタリ構造・ C^* -構造

定義 1.5: ダガー構造・ユニタリ構造

圏 \mathcal{C} のダガー構造 (dagger structure) とは、関手

$$\dagger: \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{C}$$

であって以下を充たすもののこと：

(dag-1) $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $X^\dagger = X$

(dag-2) $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, 及び $\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ に対して $(f^\dagger)^\dagger = f$

\mathcal{C} を \mathbb{C} -線形なアーベル圏とする。 \mathcal{C} のユニタリ構造 (unitary structure) とは、以下の条件を充たすダガー構造

$$\dagger: \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{C}$$

のこと：

(uni-1) \dagger は反線形である。

(uni-2) $f^\dagger \circ f = 0 \iff f = 0$

定義 1.6: C^* -圏

以下の条件を充たすダガー圏 (\mathcal{C}, \dagger) が C^* -圏と呼ぶ [?, p.5] :

(Cstar-1) \dagger は反線形である。

(Cstar-2) $\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ に対して、ある $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$ が存在して $f^\dagger \circ f = g^\dagger \circ g$ と書ける。

(Cstar-3) $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して、 \mathbb{C} -ベクトル空間 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ は以下のノルムによって完備なノルム空間になる：

$$\|f\| := \sqrt{\sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathbb{C} \text{ s.t. } f^\dagger \circ f - \lambda \text{Id}_x \text{ が可逆でない}\}}$$

命題 1.1: ユニタリ構造と C^* 構造

\mathbb{C} -線形なアーベル圏 \mathcal{C} が C^* -圏であることと、ユニタリ圏であることは同値である。

証明 [?, Proposition 2.1, p.5] ■

1.2 モノイダル圏

これまでにも何回か登場したが、モノイダル圏についてまとめておく：

定義 1.7: モノイダル圏

モノイダル圏 (monoidal category) は、以下の 5 つのデータからなる：

- 圈 \mathcal{C}
- テンソル積 (tensor product) と呼ばれる関手 $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$
- 単位対象 (unit object) $I \in \text{Ob}(\mathcal{C})$
- associator と呼ばれる自然同型

$$\{a_{X,Y,Z}: (X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{\cong} X \otimes (Y \otimes Z)\}_{X,Y,Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

- left/right unitors と呼ばれる自然同型

$$\begin{aligned} \{l_X: I \otimes X \xrightarrow{\cong} X\}_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})}, \\ \{r_X: X \otimes I \xrightarrow{\cong} X\}_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})} \end{aligned}$$

これらは $\forall X, Y, Z, W \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ について以下の 2 つの図式を可換にする：

(triangle diagram)

$$\begin{array}{ccc} (X \otimes I) \otimes Y & \xrightarrow{a_{X,I,Y}} & X \otimes (I \otimes Y) \\ & \searrow r_X \otimes \text{Id}_Y & \swarrow \text{Id}_X \otimes l_Y \\ & X \otimes Y & \end{array}$$

(pentagon diagram)

$$\begin{array}{ccccc} & & ((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z & & \\ & \swarrow a_{W \otimes X, Y, Z} & & \searrow a_{W, X, Y} \otimes \text{Id}_Z & \\ (W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) & & & & (W \otimes (X \otimes Y)) \otimes Z \\ & \searrow a_{W, X, Y \otimes Z} & & & \downarrow a_{W, X \otimes Y, Z} \\ & & W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z)) & & \\ & & & \swarrow \text{Id}_Z \otimes a_{X, Y, Z} & \end{array}$$

モノイダル圏 \mathcal{C} が厳密 (strict) であるとは、 $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$\begin{aligned} (X \otimes Y) \otimes Z &= X \otimes (Y \otimes Z), \\ I \otimes X &= X, \quad X \otimes I = X \end{aligned}$$

が成り立ち、かつ $a_{X,Y,Z}$, l_X , r_X が恒等射であることを言う。

! 定義 1.7 で言うモノイダル圏を、**弱いモノイダル圏** (weak monoidal category) と呼ぶこともある。

定義 1.7 に登場する associator を自然変換として明示的に書くと

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \\ \otimes \times \text{Id}_{\mathcal{C}} \nearrow & \parallel & \searrow \otimes \\ \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \downarrow a & \mathcal{C} \\ \text{Id}_{\mathcal{C}} \times \otimes \searrow & & \mathcal{C} \times \mathcal{C} \end{array}$$

ということである。同様に、left / right unitors は

$$\begin{array}{c} \mathcal{C} \xrightarrow{\quad l \quad} \mathcal{C} \\ \text{Id}_{\mathcal{C}} \downarrow \quad \uparrow I \otimes - \\ \mathcal{C} \xrightarrow{\quad r \quad} \mathcal{C} \end{array}$$

という自然変換である。

【例 1.2.1】 **Cat** のモノイダル構造

Cat を小圏と関手が成す圏とする。このとき、関手

$$\times: \mathbf{Cat} \times \mathbf{Cat} \longrightarrow \mathbf{Cat}$$

を $\text{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) := \text{Ob}(\mathcal{C}) \times \text{Ob}(\mathcal{D})$ により定めると、組み $(\mathbf{Cat}, \times, I)$ は**厳密なモノイダル圏**になる。ただし I はただ 1 つの対象 \bullet を持ち、 $\text{Hom}_I(\bullet, \bullet) = \{\text{Id}_{\bullet}\}$ とする圏である^a

^a I は **Cat** の終対象である。

定義 1.8: モノイダル関手

2 つのモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, I_{\mathcal{C}}, a^{\mathcal{C}}, l^{\mathcal{C}}, r^{\mathcal{C}})$, $(\mathcal{D}, \otimes_{\mathcal{D}}, I_{\mathcal{D}}, a^{\mathcal{D}}, l^{\mathcal{D}}, r^{\mathcal{D}})$ の間の関手

$$F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

が**弱いモノイダル関手** (lax monoidal functor) であるとは、

- 射

$$\varepsilon: I_{\mathcal{D}} \longrightarrow F(I_{\mathcal{C}})$$

- 自然変換

$$\{\mu_{X,Y} : F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y) \longrightarrow F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y)\}_{X,Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

がって、 $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して以下の図式が可換になること：

(associativity)

$$\begin{array}{ccc}
 (F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y)) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z) & \xrightarrow{a_{F(X), F(Y), F(Z)}^{\mathcal{D}}} & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} (F(Y) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z)) \\
 \downarrow \mu_{X,Y} \otimes \text{Id}_{F(Z)} & & \downarrow \text{Id}_{F(X)} \otimes \mu_{Y,Z} \\
 F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{D}} F(Z) & & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y \otimes_{\mathcal{C}} Z) \\
 \downarrow \mu_{X \otimes_{\mathcal{C}} Y, Z} & & \downarrow \mu_{X,Y \otimes_{\mathcal{C}} Z} \\
 F((X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{C}} Z) & \xrightarrow{F(a_{X,Y,Z}^{\mathcal{C}})} & F(X \otimes_{\mathcal{C}} (Y \otimes_{\mathcal{C}} Z))
 \end{array}$$

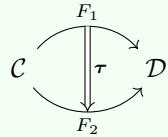
(unitality)

$$\begin{array}{ccc}
 I_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathcal{D}} F(X) & \xrightarrow{\varepsilon \otimes \text{Id}_{F(X)}} & F(I_{\mathcal{C}}) \otimes_{\mathcal{D}} F(X) \\
 \downarrow l_{F(X)}^{\mathcal{D}} & & \downarrow \mu_{I_{\mathcal{C}}, X} \\
 F(X) & \xleftarrow[F(l_X^{\mathcal{C}})]{} & F(I_{\mathcal{C}} \otimes_{\mathcal{C}} X) \\
 \\[10pt]
 F(X) \otimes_{\mathcal{D}} I_{\mathcal{D}} & \xrightarrow{\text{Id}_{F(X)} \otimes \varepsilon} & F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(I_{\mathcal{C}}) \\
 \downarrow r_{F(X)}^{\mathcal{D}} & & \downarrow \mu_{X, I_{\mathcal{C}}} \\
 F(X) & \xleftarrow[F(r_X^{\mathcal{C}})]{} & F(X \otimes_{\mathcal{C}} I_{\mathcal{C}})
 \end{array}$$

- 弱いモノイダル関手 F の ε と $\mu_{X,Y}$ が全て同型射ならば、 F は**強いモノイダル関手** (strong monoidal functor) と呼ばれる。
- 弱いモノイダル関手 F の ε と $\mu_{X,Y}$ が全て恒等射ならば、 F は**厳密なモノイダル関手** (strict monoidal functor) と呼ばれる。

定義 1.9: モノイダル自然変換

2つのモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, I_{\mathcal{C}}, a^{\mathcal{C}}, l^{\mathcal{C}}, r^{\mathcal{C}})$, $(\mathcal{D}, \otimes_{\mathcal{D}}, I_{\mathcal{D}}, a^{\mathcal{D}}, l^{\mathcal{D}}, r^{\mathcal{D}})$ の間の 2つの弱いモノイダル関手 $\left(F_i: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, \varepsilon_i: I_{\mathcal{D}} \rightarrow F(I_{\mathcal{C}}), \{ \mu_{iX,Y}: F_i(X) \otimes F_i(Y) \rightarrow F_i(X \otimes Y) \}_{X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})} \right)$ w/ $i = 1, 2$ の間の自然変換



がモノイダル自然変換 (monoidal natural transformation) であるとは, $\forall X, Y \in \mathcal{C}$ に対して以下の図式が可換になること:

(テンソル積の保存)

$$\begin{array}{ccc} F_1(X) \otimes_{\mathcal{D}} F_1(Y) & \xrightarrow{\tau_X \otimes_{\mathcal{D}} \tau_Y} & F_2(X) \otimes_{\mathcal{D}} F_2(Y) \\ \downarrow \mu_{1X,Y} & & \downarrow \mu_{2X,Y} \\ F_1(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) & \xrightarrow{\tau_{X \otimes_{\mathcal{C}} Y}} & F_2(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \end{array}$$

(単位対象の保存)

$$\begin{array}{ccc} & & I_{\mathcal{D}} \\ & \swarrow \varepsilon_1 & \searrow \varepsilon_2 \\ F_1(I_{\mathcal{C}}) & \xrightarrow{\tau_{I_{\mathcal{C}}}} & F_2(I_{\mathcal{C}}) \end{array}$$

命題 1.2: 単位対象に関する技術的な等式

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ を与える。このとき $\forall X, Y \in \mathcal{C}$ に対して以下が成り立つ：

(1) 以下の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} (I \otimes X) \otimes Y & \xrightarrow{a_{I,X,Y}} & I \otimes (X \otimes Y) \\ & \searrow l_X \otimes \text{Id}_Y & \swarrow l_X \otimes Y \\ & X \otimes Y & \end{array}$$

(2) 以下の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} (X \otimes Y) \otimes I & \xrightarrow{a_{X,Y,I}} & X \otimes (Y \otimes 1) \\ & \searrow r_{X \otimes Y} & \swarrow \text{Id}_X \otimes r_Y \\ & X \otimes Y & \end{array}$$

(3)

$$\begin{aligned} \text{Id}_I \otimes l_X &= (r_I \otimes \text{Id}_I) \circ a_{I,I,X}^{-1}, \\ r_X \otimes \text{Id}_I &= (\text{Id}_X \otimes l_I) \circ a_{X,I,I} \end{aligned}$$

(4)

$$l_I = r_I$$

証明 (1) 次の図式を考える：

$$\begin{array}{ccccc} ((X \otimes I) \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{a_{X,I,Y} \otimes \text{Id}_Z} & (X \otimes (I \otimes Y)) \otimes Z & & \\ \downarrow a_{X \otimes I, Y, Z} & \searrow (r_X \otimes \text{Id}_Y) \otimes \text{Id}_Z & & \swarrow (\text{Id}_X \otimes l_Y) \otimes \text{Id}_Z & \downarrow a_{X, I \otimes Y, Z} \\ & (X \otimes Y) \otimes Z & & & \\ & \downarrow a_{X, Y, Z} & & & \\ & X \otimes (Y \otimes Z) & & & \\ \uparrow \text{Id}_X \otimes l_{Y \otimes Z} & & \uparrow \text{Id}_X \otimes (l_Y \otimes \text{Id}_Z) & & \\ (X \otimes I) \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{r_X \otimes \text{Id}_{Y \otimes Z}} & & X \otimes ((I \otimes Y) \otimes Z) & \\ \downarrow a_{X, I, Y \otimes Z} & & & \swarrow \text{Id}_X \otimes a_{I, Y, Z} & \\ & X \otimes (I \otimes (Y \otimes Z)) & & & \end{array}$$

青色の部分は (pentagon diagram) により可換であり、最上部と左下の三角形は (triangle diagram) により可換である。左の赤色の部分は、圏 $\mathcal{C}^{\times 3}$ における $(r_X, \text{Id}_Y, \text{Id}_Z)$ という射に対して $a: (- \otimes -) \otimes - \Rightarrow - \otimes (- \otimes -)$ の自然性を用いることで可換だと分かる。同様に右の赤色の部分は、圏 $\mathcal{C}^{\times 3}$ における $(\text{Id}_X, l_Y, \text{Id}_Z)$ という射に対して a の自然性を使うことで可換だと分かる。以上より図式全体が可換

なので、残った右下の三角形もまた可換である。

(2) (1) と同様。

(3) (**triangle diagram**)において $X = I$ とおくことで第一式が、 $Y = I$ とおくことで第二式が示される。

(4)

$$\begin{aligned} l_I \otimes \text{Id}_I &= l_{I \otimes I} \circ a_{I,I,I} && \because (1) \\ &= (\text{Id}_I \otimes l_I) \circ a_{I,I,I} && \because l \text{ の自然性} \\ &= r_I \otimes \text{Id}_I && \because (3) \end{aligned}$$

より示された。 ■

定義 1.10: ユニタリモノイダル圏

\mathbb{C} -線形なアーベル圏でもあるモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, a, l, r)$ がユニタリモノイダル圏であるとは、**ユニタリ構造** $\dagger: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$ がモノイダル関手であることを言う。

1.2.1 rigid なモノイダル圏

定義 1.11: 双対

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ およびその任意の対象 $X, X^* \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を与える。 X^* が X の**左双対** (left dual) であるとは、

- coevaluation と呼ばれる射

$$\text{coev}_X^L: I \longrightarrow X \otimes X^*$$

- evaluation と呼ばれる射

$$\text{ev}_X^L: X^* \otimes X \longrightarrow I$$

が存在して以下の図式を可換にすることを言う：

(zig-zag equations)

$$\begin{array}{ccc}
 I \otimes X & \xrightarrow{\text{coev}_X^L \otimes \text{Id}_X} & (X \otimes X^*) \otimes X \\
 \downarrow l_X & & \downarrow a_{X, X^*, X} \\
 & & X \otimes (X^* \otimes X) \\
 & & \downarrow \text{Id}_X \otimes \text{ev}_X^L \\
 X & \xleftarrow{r_X} & X \otimes I
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
X^* \otimes I & \xrightarrow{\text{Id}_{X^*} \otimes \text{coev}_X^L} & X^* \otimes (X \otimes X^*) \\
r_{X^*} \downarrow & & \downarrow a_{X^*, X, X^*}^{-1} \\
& & (X^* \otimes X) \otimes X^* \\
& & \downarrow \text{ev}_X^L \otimes \text{Id}_{X^*} \\
X^* & \xleftarrow{l_{X^*}} & I \otimes X^*
\end{array}$$

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ およびその任意の対象 $X, {}^*X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を与える. *X が X の右双対 (right dual) であるとは,

- 射

$$\text{coev}_X^R: I \longrightarrow {}^*X \otimes X$$

- 射

$$\text{ev}_X^R: X \otimes {}^*X \longrightarrow I$$

が存在して以下の図式を可換にすることを言う :

(zig-zag equations)

$$\begin{array}{ccc}
X \otimes I & \xrightarrow{\text{Id}_X \otimes \text{coev}_X^R} & X \otimes ({}^*X \otimes X) \\
r_X \downarrow & & \downarrow a_{X, {}^*X, X}^{-1} \\
& & (X \otimes {}^*X) \otimes X \\
& & \downarrow \text{ev}_X^R \otimes \text{Id}_X \\
X & \xleftarrow{l_X} & I \otimes X
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
I \otimes {}^*X & \xrightarrow{\text{coev}_X^R \otimes \text{Id}_{^*X}} & ({}^*X \otimes X) \otimes {}^*X \\
l_{X^*} \downarrow & & \downarrow a_{^*X, X, {}^*X}^{-1} \\
& & {}^*X \otimes (X \otimes {}^*X) \\
& & \downarrow \text{Id}_{^*X} \otimes \text{ev}_X^R \\
{}^*X & \xleftarrow{r_{X^*}} & {}^*X \otimes I
\end{array}$$

ストリング図式で書くときは

$$\text{coev}_X^L =: \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \quad \text{ev}_X^L =: \begin{array}{c} \text{---} \\ \curvearrowleft \quad \curvearrowright \end{array} \quad \text{coev}_X^R =: \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \quad \text{ev}_X^R =: \begin{array}{c} \text{---} \\ \curvearrowright \quad \curvearrowleft \end{array}$$

とする。ストリング図式において $\text{coev}^L, \text{ev}^L$ に対する (zig-zag equations) は

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} & = & \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \quad \curvearrowright \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} & = & \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \quad \curvearrowleft \end{array} \end{array}$$

$\text{coev}^R, \text{ev}^R$ に対する (zig-zag equations) は

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} & = & \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \quad \curvearrowright \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} & = & \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \quad \curvearrowleft \end{array} \end{array}$$

と書ける。

補題 1.1: 双対の基本性質

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ およびその対象 $X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を与える。

- (1) Y が X の左双対ならば, X は Y の右双対である。
- (2) Z が X の右双対ならば, X は Z の左双対である。
- (3) X が左・右双対を持つならば, ${}^*(X^*) \cong X \cong ({}^*X)^*$ が成り立つ。

証明 (1) 仮定より, $\text{coev}_X^L: I \rightarrow X \otimes Y, \text{ev}_X^L: Y \otimes X \rightarrow I$ が存在して左双対の (zig-zag-equations) を充たす。よって $\text{coev}_Y^R := \text{coev}_X^L, \text{ev}_Y^R := \text{ev}_X^L$ と定めれば、組 $(Y, X, \text{coev}_Y^R, \text{ev}_Y^R)$ は右双対の (zig-zag-equations) を充たす。

(2) 仮定より, $\text{coev}_X^R: I \rightarrow Z \otimes X, \text{ev}_X^R: X \otimes Z \rightarrow I$ が存在して右双対の (zig-zag-equations) を充たす。よって $\text{coev}_Z^L := \text{coev}_X^R, \text{ev}_Z^L := \text{ev}_X^R$ と定めれば、組 $(Z, X, \text{coev}_Z^L, \text{ev}_Z^L)$ は左双対の (zig-zag-equations) を充たす。

(3) 射 $\alpha: X \rightarrow {}^*(X^*)$, $\beta: {}^*(X^*) \rightarrow X$ をそれぞれ

$$\begin{array}{ccc} \alpha \bullet \begin{array}{c} {}^*(X^*) \\ \downarrow \\ X \end{array} & := & \begin{array}{c} {}^*(X^*) \\ \downarrow \\ \text{coev}_{X^*}^R \end{array} \xrightarrow{\quad} \begin{array}{c} X^* \\ \xrightarrow{\quad} \\ X \end{array} \xrightarrow{\text{ev}_X^L} \\ \beta \bullet \begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ {}^*(X^*) \end{array} & := & \begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ \text{coev}_X^L \end{array} \xrightarrow{\quad} \begin{array}{c} X^* \\ \xrightarrow{\quad} \\ {}^*(X^*) \end{array} \end{array}$$

と定義すれば、(zig-zag-equations)により $\alpha \circ \beta = \text{Id}_{X^*}$, $\beta \circ \alpha = \text{Id}_X$ が言える。 $({}^*X)^*$ についても同様である。 ■

命題 1.3: 双対の一意性

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ およびその対象 $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を与える。

- (1) もし X が左双対 $X^* \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を持つならば、それは一意的に定まる同型を除いて一意である。
- (2) もし X が右双対 ${}^*X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を持つならば、それは一意的に定まる同型を除いて一意である。

証明 証明は全く同様なので、(1) のみ示す。 X の 2 つの左双対 $X_1^*, X_2^* \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ および、それらの coevaluation / evaluation をそれぞれ c_1, e_1, c_2, e_2 とおく。このとき、 \mathcal{C} の 2 つの射

$$\begin{aligned} \alpha: X_1^* &\xrightarrow{r_{X_1^*}^{-1}} X_1^* \otimes I \xrightarrow{\text{Id}_{X_1^*} \otimes c_2} X_1^* \otimes (X \otimes X_2^*) \xrightarrow{a_{X_1^*, X, X_2^*}^{-1}} (X_1^* \otimes X) \otimes X_2^* \xrightarrow{e_1 \otimes \text{Id}_{X_2^*}} I \otimes X_2^* \xrightarrow{l_{X_2^*}} X_2^*, \\ \beta: X_2^* &\xrightarrow{r_{X_2^*}^{-1}} X_2^* \otimes I \xrightarrow{\text{Id}_{X_2^*} \otimes c_1} X_2^* \otimes (X \otimes X_1^*) \xrightarrow{a_{X_2^*, X, X_1^*}^{-1}} (X_2^* \otimes X) \otimes X_1^* \xrightarrow{e_2 \otimes \text{Id}_{X_1^*}} I \otimes X_1^* \xrightarrow{l_{X_1^*}} X_1^* \end{aligned}$$

が互いに逆であることを示そう。

実際、ストリング図式で書くと

$$\begin{aligned} \alpha = & \begin{array}{c} e_1 \\ \curvearrowright \\ X \\ \curvearrowright \\ X_1^* \end{array} \xrightarrow{\quad} \begin{array}{c} X_2^* \\ \downarrow \\ c_2 \end{array}, \\ \beta = & \begin{array}{c} e_2 \\ \curvearrowright \\ X \\ \curvearrowright \\ X_2^* \end{array} \xrightarrow{\quad} \begin{array}{c} X_1^* \\ \downarrow \\ c_1 \end{array} \end{aligned}$$

であるから、 \otimes が関手であること^{*1 (zig-zag equiations)} より

$$\begin{aligned}
 & \beta \circ \alpha = \\
 & \quad \text{Diagram showing } \beta \circ \alpha \text{ as a zig-zag path from } X_1^* \text{ to } X_1^*. \\
 & = \\
 & \quad \text{Diagram showing } \beta \circ \alpha \text{ as a zig-zag path from } X_1^* \text{ to } X_1^*, \text{ with labels } e_1, c_2, e_2, c_1. \\
 & = \\
 & \quad \text{Diagram showing } \beta \circ \alpha \text{ as a zig-zag path from } X_1^* \text{ to } X_1^*. \\
 & = \text{Id}_{X_1^*}
 \end{aligned}$$

と計算できる。 $\alpha \circ \beta = \text{Id}_{X_2^*}$ も同様である。

さらに、 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1^*, X_2^*)$ の元であって (zig-zag equiations) を保存するもの^{*2}は α しか存在しないことも分かる。 ■

定義 1.12: rigid なモノイダル圏

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ が **rigid** であるとは、 $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が左・右双対を持つことを言う。

rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ において、対応

$$(-)^*: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

を次のように構成する：

- $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対してその左双対 $X^* \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を対応づける。

^{*1} 従って、 Id を適当に挿入することで、ストリングを上下に自由自在に伸縮させることができる！

^{*2} i.e. $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1^*, X_2^*)$ であって 3 つ組 $(X_1^*, e_2 \circ (f \otimes \text{Id}_X), c_1)$, $(X_2^*, e_2, (\text{Id}_X \otimes f) \circ c_1)$ がどちらも X の左双対を与えるもの。

- $f: X \rightarrow Y$ に対して,

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} f^* \\ \bullet \\ \downarrow \\ X^* \\ \downarrow \\ Y^* \end{array} & := &
 \begin{array}{c} \text{ev}_Y^L \\ \curvearrowleft \\ Y \\ \bullet \\ f \\ \curvearrowright \\ X \\ \curvearrowleft \\ \text{coev}_X^L \end{array} \\
 (1.2.1)
 \end{array}$$

補題 1.2: 左双対の関手性

- (1) 対応 $(-)^*: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ は反変関手である.
- (2) $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $(X \otimes Y)^* = Y^* \otimes X^*$ が成り立つ.

証明 (1) 任意の射 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ をとる. **(zig-zag-equations)** により,

$$\begin{array}{ccccc}
 \begin{array}{c} (g \circ f)^* \\ \bullet \\ \downarrow \\ X^* \\ \downarrow \\ Z^* \end{array} & = &
 \begin{array}{c} \text{zig-zag diagram} \\ g \bullet \\ \text{red} \\ f \bullet \\ \text{black} \end{array} & = &
 \begin{array}{c} \text{zig-zag diagram} \\ g \bullet \\ \text{black} \\ f \bullet \\ \text{black} \end{array} \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \begin{array}{c} \text{zig-zag diagram} \\ g \bullet \\ \text{black} \end{array} & = &
 \begin{array}{c} f^* \\ \bullet \\ \downarrow \\ X^* \\ \downarrow \\ Y^* \\ \bullet \\ \downarrow \\ Z^* \end{array}
 \end{array}$$

- (2) $X \otimes Y$ に関する coevaluation, evaluation をそれぞれ

$$\begin{aligned}
 \text{coev}_{X \otimes Y}^L: I &\xrightarrow{\text{coev}_X^L} X \otimes X^* \xrightarrow{l_X^{-1}} (X \otimes I) \otimes X^* \xrightarrow{(\text{Id}_X \otimes \text{coev}_Y^L) \otimes \text{Id}_{X^*}} (X \otimes (Y \otimes Y^*)) \otimes X^* \\
 &\xrightarrow{a} (X \otimes Y) \otimes (Y^* \otimes X^*)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ev}_{X \otimes Y}^L: (Y^* \otimes X^*) \otimes (X \otimes Y) &\xrightarrow{a} (Y^* \otimes (X^* \otimes X)) \otimes Y \xrightarrow{(\text{Id}_{Y^*} \otimes \text{ev}_X^L) \otimes \text{Id}_Y} (Y^* \otimes I) \otimes Y \\
 &\xrightarrow{l_{Y^*}} Y^* \otimes Y \xrightarrow{\text{ev}_Y^L} I
 \end{aligned}$$

で定義し, 組 $(X \otimes Y, Y^* \otimes X^*, \text{coev}_{X \otimes Y}^L, \text{ev}_{X \otimes Y}^L)$ が **(zig-zag-equations)** を充たすことを示せば良

い。ストリング図式で書くと

$$\begin{array}{ccc}
 X \otimes Y & \xrightarrow{\text{coev}_{X \otimes Y}^L} & Y^* \otimes X^* \\
 & \curvearrowleft & \curvearrowright \\
 & \text{coev}_{X \otimes Y}^L &
 \end{array}
 \quad := \quad
 \begin{array}{c}
 X \quad Y \quad Y^* \quad X^* \\
 \curvearrowleft \quad \curvearrowleft \quad \curvearrowright \quad \curvearrowright
 \end{array} ,$$

$$\begin{array}{ccc}
 Y^* \otimes X^* & \xrightarrow{\text{ev}_{X \otimes Y}^L} & X \otimes Y \\
 & \curvearrowright & \curvearrowleft \\
 & \text{ev}_{X \otimes Y}^L &
 \end{array}
 \quad := \quad
 \begin{array}{c}
 X \quad Y \quad Y^* \quad X^* \\
 \curvearrowright \quad \curvearrowleft \quad \curvearrowright \quad \curvearrowleft
 \end{array}$$

なので明らか。 ■

全く同様にして、反変関手

$${}^*(\cdot) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

を作ることができる。

【例 1.2.2】 双対関手

補題 1.2 より、rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ において関手

$$\begin{aligned}
 (\cdot)^{**} &: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \\
 {}^{**}(\cdot) &: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}
 \end{aligned}$$

は厳密なモノイダル関手である。

補題 1.3: rigidity isomorphism

rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ に対し、以下が成り立つ：

(1) $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して自然な同型

$$\begin{aligned}
 \alpha_{X,Y,Z} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes Y, Z) &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z \otimes Y^*) \\
 \beta_{Y,X,Z} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y^* \otimes X, Z) &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y \otimes Z)
 \end{aligned}$$

が存在する。

(2) $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して自然な同型

$$\begin{aligned}
 \gamma_{X,Y,Z} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes {}^*Y, Z) &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z \otimes Y) \\
 \gamma_{Y,X,Z} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y \otimes X, Z) &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, {}^*Y \otimes Z)
 \end{aligned}$$

が存在する。

証明 (1) 最初の同型は

$$\alpha_{X,Y,Z} : \begin{array}{c} Z \\ | \\ X \diagup \quad \diagdown Y \\ f \end{array} \mapsto \begin{array}{c} Z \\ | \\ X \quad \quad Y \\ f \quad \quad \text{---} \\ \diagup \quad \quad \diagdown \\ \text{---} \quad \quad \text{---} \\ Y^* \end{array}$$

$$\alpha_{X,Y,Z}^{-1} : \begin{array}{c} Z \quad Y^* \\ \diagup \quad \diagdown \\ X \quad g \\ | \\ Y \end{array} \mapsto \begin{array}{c} Z \quad Y^* \\ \diagup \quad \diagdown \\ X \quad g \\ | \\ Y \end{array}$$

である。他も同様。

(2) (1) と同様。 ■

1.2.2 組紐付きモノイダル圏

定義 1.13: 組紐付きモノイダル圏

組紐付きモノイダル圏 (braided monoidal category) とは、以下の 2 つからなる：

- モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$
- 組紐 (braiding) と呼ばれる自然同型

$$\{b_{X,Y} : X \otimes Y \xrightarrow{\cong} Y \otimes X\}_{X,Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ について以下の図式を可換にする：

(hexagon diagrams)

$$\begin{array}{ccccc}
 X \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{a_{X,Y,Z}^{-1}} & (X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{b_{X,Y} \otimes \text{Id}_Z} & (Y \otimes X) \otimes Z \\
 \downarrow b_{X,Y \otimes Z} & & & & \downarrow a_{Y,X,Z} \\
 (Y \otimes Z) \otimes X & \xleftarrow{a_{Y,Z,X}^{-1}} & Y \otimes (Z \otimes X) & \xleftarrow{\text{Id}_Y \otimes b_{X,Z}} & Y \otimes (X \otimes Z) \\
 \\
 (X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{a_{X,Y,Z}} & X \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{\text{Id}_X \otimes b_{Y,Z}} & X \otimes (Z \otimes Y) \\
 \downarrow b_{X \otimes Y,Z} & & & & \downarrow a_{X,Z,Y}^{-1} \\
 Z \otimes (X \otimes Y) & \xleftarrow{a_{Z,X,Y}} & (Z \otimes X) \otimes Y & \xleftarrow{b_{X,Z \otimes \text{Id}_Y}} & (X \otimes Z) \otimes Y
 \end{array}$$

組紐付きモノイダル圏 \mathcal{C} であって、 \mathcal{C} の組紐が $b_{Y,X} \circ b_{X,Y} = \text{Id}_{X \otimes Y}$ を充たすものこれを**対称モノイダル圏** (symmetric monoidal category) と呼ぶ。

ストリング図式で書く場合は

$$b_{X,Y} := \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ X \quad \quad Y \end{array} \qquad b_{X,Y}^{-1} := \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ X \quad \quad Y \end{array}$$

とする。 **(hexagon diagrams)** をストリング図式で表すと

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} Y \\ \uparrow \\ \diagup \quad \diagdown \\ X \quad \quad Y \end{array} & = & \begin{array}{c} Y \\ \uparrow \\ \diagup \quad \diagdown \\ X \quad \quad Y \end{array} \\
 \begin{array}{c} Z \\ \diagup \quad \diagdown \\ X \quad \quad Y \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \diagup \quad \diagdown \\ X \quad \quad Y \end{array} & & \begin{array}{c} Z \\ \diagup \quad \diagdown \\ X \quad \quad Y \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \diagup \quad \diagdown \\ X \quad \quad Y \end{array}
 \end{array}$$

および

のようになる。ただし、**associator**を明示的に描いた。この図式から、**組紐**を含むストリング図式がアイソトピーに関して不变であることが分かる。

組紐付きモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r, b)$ が**対称**であるとき、ストリング図式において

が成り立つ。

定義 1.14: 組紐付きモノイダル関手

2つの**組紐付きモノイダル圏** $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, I_{\mathcal{C}}, a^{\mathcal{C}}, l^{\mathcal{C}}, r^{\mathcal{C}}, b^{\mathcal{C}}), (\mathcal{D}, \otimes_{\mathcal{D}}, I_{\mathcal{D}}, a^{\mathcal{D}}, l^{\mathcal{D}}, r^{\mathcal{D}}, b^{\mathcal{D}})$ の間の弱いモノイダル関手 $(F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, \varepsilon, \mu)$ が**弱い組紐付きモノイダル関手** (lax braided monoidal functor) であるとは、 $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して以下の図式が可換になること：

$$\begin{array}{ccc} F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y) & \xrightarrow{b_{F(X), F(Y)}^{\mathcal{D}}} & F(Y) \otimes_{\mathcal{D}} F(X) \\ \downarrow \mu_{X, Y} & & \downarrow \mu_{Y, X} \\ F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) & \xrightarrow{F(b_{X, Y}^{\mathcal{C}})} & F(Y \otimes_{\mathcal{C}} X) \end{array}$$

命題 1.4: Yang-Baxter 方程式

組紐付きモノイダル圏 $(\mathcal{C}, I, a, l, r, b)$ を与える。このとき、 $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して以下が成り立つ：

$$\begin{aligned} & a_{Y, Z, X} \circ (b_{Y, Z} \otimes \text{Id}_X) \circ a_{Y, Z, X}^{-1} \circ (\text{Id}_Y \otimes b_{X, Z}) \circ a_{Y, X, Z} \circ (b_{X, Y} \otimes \text{Id}_Z) \\ & = (\text{Id}_Z \otimes b_{X, Y}) \circ a_{Z, X, Y} \circ (b_{X, Z} \otimes \text{Id}_Y) \circ a_{X, Z, Y}^{-1} \circ (\text{Id}_X \otimes b_{Y, Z}) \circ a_{X, Y, Z} \end{aligned}$$

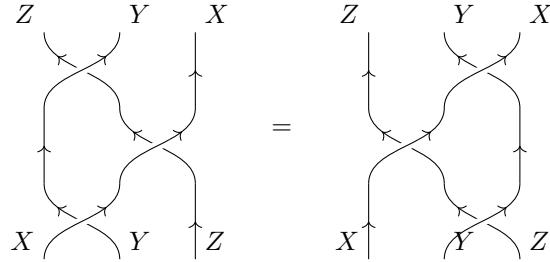
証明 圈 \mathcal{C} における図式

$$\begin{array}{ccccc}
X \otimes (Y \otimes Z) & \xleftarrow{\cong} & (X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{b_{X,Y} \otimes \text{Id}_Z} & (Y \otimes X) \otimes Z & \xrightarrow{\cong} & Y \otimes (X \otimes Z) \\
\downarrow \text{Id}_X \otimes b_{Y,Z} & & \downarrow b_{(X \otimes Y),Z} & & \downarrow b_{(Y \otimes X),Z} & & \downarrow \text{Id}_X \otimes b_{X,Z} \\
X \otimes (Z \otimes Y) & & & & & & Y \otimes (Z \otimes X) \\
\downarrow \cong & & & & & & \downarrow \cong \\
(X \otimes Z) \otimes Y & & & & & & (Y \otimes Z) \otimes X \\
\downarrow b_{X,Z} \otimes \text{Id}_Y & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow b_{Y,Z} \otimes \text{Id}_X \\
(Z \otimes X) \otimes Y & \xrightarrow{\cong} & Z \otimes (X \otimes Y) & \xrightarrow{\text{Id}_Z \otimes b_{X,Y}} & Z \otimes (Y \otimes X) & \xleftarrow{\cong} & (Z \otimes Y) \otimes X
\end{array}$$

を考える。ただし \cong は associator を表す。赤色の部分は (hexagon diagrams) そのものなので可換である。また、中央の四角形は b が自然変換であることから可換である。故に図式の外周部は可換であり、示された。 ■

! 以降、原則としてストリング図式においては associator を描画しない。

命題 1.4 をストリング図式で書くと次のようになる：



補題 1.4: dual と組紐

組紐付き rigid モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R, b)$ を与える。このとき、 $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して以下が成り立つ：

(1)

$$l_X \circ b_{X,I} = r_X, \quad r_X \circ b_{I,X} = l_X, \quad b_{I,X} \circ b_{X,I} = \text{Id}_{X \otimes I}$$

(2)

$$(\text{coev}_X^L \otimes \text{Id}_Y) \circ l_Y^{-1} = b_{Y,X \otimes X^*} \circ (\text{Id}_Y \otimes \text{coev}_X^L) \circ r_Y^{-1}$$

(3)

$$r_Y \circ (\text{Id}_Y \otimes \text{ev}_X^L) = l_Y \circ (\text{ev}_X^L \otimes \text{Id}_Y) \circ b_{Y,X^* \otimes X}$$

証明 (1) [?, EXERCISE 8.1.6, p.196]

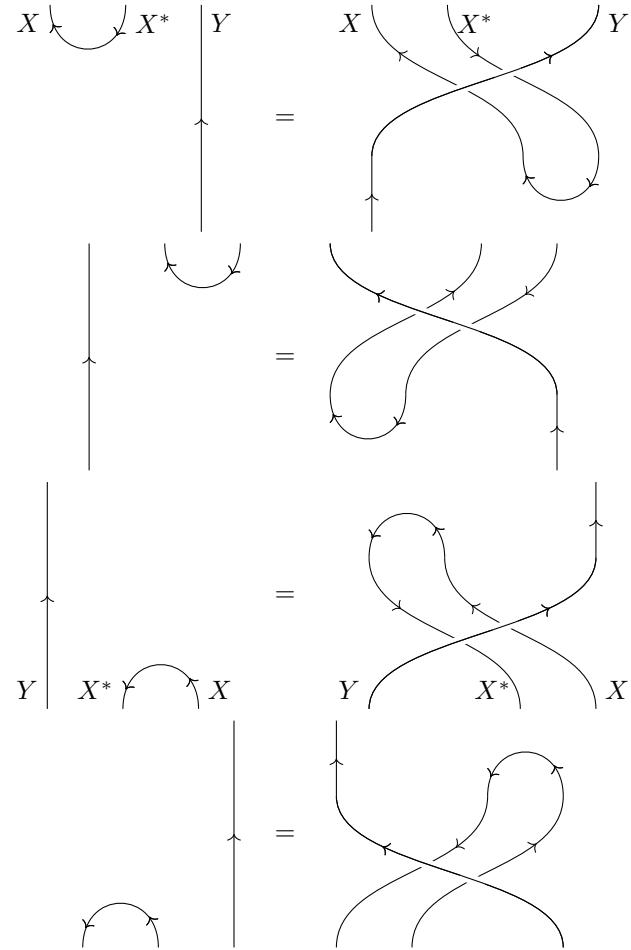
(2) 以下の図式を考える：

$$\begin{array}{ccc}
& I \otimes Y & \xrightarrow{\text{coev}_X^L \otimes \text{Id}_Y} (X \otimes X^*) \otimes Y \\
l_Y^{-1} \nearrow & \uparrow b_{Y,I} & \uparrow b_{Y,X \otimes X^*} \\
Y & & \\
r_Y^{-1} \searrow & \downarrow & \\
& Y \otimes I & \xrightarrow{\text{Id}_Y \otimes \text{coev}_X^L} Y \otimes (X \otimes X^*)
\end{array}$$

左端の三角形は (1) より可換である。四角形は、圏 $\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ における射 $(\text{Id}_Y, \text{coev}_X^L)$ に対して $b: \otimes \Rightarrow \otimes \circ \tau$ の自然性を用いることで可換だとわかる。よって外周部も可換であり、示された。

(3) (1) と同様。 ■

補題 1.4-(2), (3) をストリング図式で書くと次のようになる：



ただし left/right unitor を省略した。つまり、端で折り返している組紐は、下を潜らせることができる。

1.2.3 リボン構造

定義 1.15: リボン構造

組紐付き rigid モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R, b)$ のリボン構造 (ribbon structure) とは、自然同型 $\theta: \text{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow \text{Id}_{\mathcal{C}}$ であって以下を充たすもののこと：

(Rib-1) $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $\theta_{X \otimes Y} = (\theta_X \otimes \theta_Y) \circ b_{Y, X} \circ b_{X, Y}$ が成り立つ。

(Rib-2) $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $(\theta_X)^* = \theta_{X^*}$

ストリング図式で **(Rib-1)** を書くと

$$\begin{array}{c} X \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \theta_{X \otimes Y} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ Y \end{array} = \begin{array}{c} \theta_X \quad \theta_Y \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

となり、**(Rib-2)** は

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \theta_X \\ \uparrow \quad \downarrow \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \theta_{X^*} \\ \uparrow \quad \downarrow \end{array}$$

となる。

1.3 テンソル圏・フュージョン圏



これまでではモノイダル圏の対象を英大文字 X, Y, Z, \dots で、単位対象を I と書いてきたが、以下では対象を英小文字 x, y, z, \dots で、単位対象を 1 と書くことにする。

定義 1.16: 環圏

圏 \mathcal{C} が多重環圏 (multiring category) であるとは、以下の条件を充たすこと：

- (mR-1) \mathcal{C} は局所有限な \mathbb{K} -線形アーベル圏
- (mR-2) \mathcal{C} はモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r)$
- (mR-3) 関手 $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ が \mathbb{K} -双線形かつ双完全

圏 \mathcal{C} が環圏 (ring category) であるとは、以下の条件を充たすこと：

- (R-1) \mathcal{C} は多重環圏
- (R-2) $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, 1) \cong \mathbb{K}$

補題 1.5: 環圏における 1 の単純性

- (1) 左双対を持つ多重環圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{coev}^L, \text{ev}^L)$ において、左双対関手 $(-)^*: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ は完全である。
- (2) 左双対を持つ環圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{coev}^L, \text{ev}^L)$ において、 $1 \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ は単純対象である。

証明 (1) 完全列 $0 \rightarrow x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z \rightarrow 0$ を与える。示すべきは $0 \rightarrow z^* \xrightarrow{g^*} y^* \xrightarrow{f^*} x^* \rightarrow 0$ が完全であることである。 $\forall w \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を 1 つとり、圏 \mathcal{C} における図式

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(w, z^*) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(w, g^*)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(w, y^*) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(w, f^*)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(w, x^*)$$

を考える。補題 1.3-(1) の自然同型によりこれは

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(w \otimes z, 1) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(w \otimes y, 1) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(w \otimes x, 1)$$

と書けるが、多重環圏の定義より \otimes は完全で、かつ $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, 1)$ は左完全関手なので、これは完全列である。よって $0 \rightarrow z^* \xrightarrow{g^*} y^* \xrightarrow{f^*} x^*$ は完全である。同様の議論から $z^* \xrightarrow{g^*} y^* \xrightarrow{f^*} x^* \rightarrow 0$ の完全性も従う。

(2) 任意のゼロでない単純な部分対象 $x \xrightarrow{i} 1$ を 1 つとる^{*3}。 \mathcal{C} はアーベル圏なので i の余核が存在し、

$$0 \rightarrow x \xrightarrow{i} 1 \xrightarrow{\text{coker } i} \text{Coker } i \rightarrow 0$$

は完全列になる。(1) より

$$0 \rightarrow (\text{Coker } i)^* \rightarrow 1 \rightarrow x^* \rightarrow 0$$

は完全列である。さらに、環圏の定義より \otimes は完全なので

$$0 \rightarrow x \otimes (\text{Coker } i)^* \rightarrow x \rightarrow x \otimes x^* \rightarrow 0 \tag{1.3.1}$$

も完全列だが、 x は単純でかつ $x \otimes x^* \neq 0$ (evaluation が零射でないため) なので^{*4} $x \otimes x^* \cong x$ が分かった。よってエピ射 $1 \xrightarrow{\text{coev}_x^L} x \otimes x^* \rightarrow x$ を得る。よって零射でない $1 \twoheadrightarrow x \xrightarrow{i} 1$ を得るが、 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, 1) = \mathbb{K}$ なので $x = 1$ でなくてはいけない。

^{*3} アーベル圏 \mathcal{C} の有限性から、このような x は存在する。

^{*4} (1.3.1) は完全列なので $x \otimes (\text{Coker } i)^* \rightarrow x$ はモノ射であり、かつ $x \neq 0$ なので $\text{Coker } i \neq 1$ であるから、 $x \otimes (\text{Coker } i)^* = 0$ が言える。

定義 1.17: テンソル圏・フュージョン圏

圏 \mathcal{C} が多重テンソル圏 (multitensor category) であるとは、以下の条件を充たすこと：

(mT-1) \mathcal{C} は局所有限な \mathbb{K} -線形アーベル圏

(mT-2) \mathcal{C} は rigid なモノイダル圏 ($\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R$)

(mT-3) 関手 $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ が $\forall x, y, z, w \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して定める写像 $\otimes_{x,y,z,w}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x \otimes z, y \otimes w)$ が \mathbb{K} -双線形

圏 \mathcal{C} がテンソル圏 (tensor category) であるとは、以下の条件を充たすこと：

(T-1) \mathcal{C} は多重テンソル圏

(T-2) $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, 1) \cong \mathbb{K}$

圏 \mathcal{C} が多重フュージョン圏 (multifusion category) であるとは、以下の条件を充たすこと：

(mFus-1) \mathcal{C} は多重テンソル圏

(mFus-2) \mathcal{C} は \mathbb{K} -線形アーベル圏として有限かつ半単純

圏 \mathcal{C} がフュージョン圏 (fusion category) であるとは、以下の条件を充たすこと：

(Fus-1) \mathcal{C} はテンソル圏

(Fus-2) \mathcal{C} は \mathbb{K} -線形アーベル圏として有限かつ半単純

命題 1.5: 多重テンソル圏のテンソル積は双完全

多重テンソル圏 \mathcal{C} の関手 $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ は双完全である.

証明 [?, PROPOSITION 4.2.1., p.66]

命題 1.5 より、

(多重) テンソル圏 \implies (多重) 環圏

が言える。

命題 1.6: テンソル圏における 1 の単純性

テンソル圏において 1 は単純である.

証明 命題 1.5 と補題 1.5 とテンソル圏の定義から従う.

【例 1.3.1】 圏 \mathcal{C}_G と Vec_G

G を群とする。厳密なモノイダル圏 \mathcal{C}_G を、

- $\text{Ob}(\mathcal{C}_G) := G$
- $\forall g_1, g_2 \in G$ に対して

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_G}(g_1, g_2) := \begin{cases} \text{U}(1), & g_1 = g_2 \\ \emptyset, & g_1 \neq g_2 \end{cases}$$

- $g_1 \otimes g_2 := g_1 g_2$ かつ, $g_i \xrightarrow{\forall \theta_i} g_i$ に対して $\theta_1 \otimes \theta_2 := \theta_1 \theta_2$
- $1 := 1_G$
- $a_{g_1, g_2, g_3} := 1, l_g := 1, r_g := 1$

で定義する.

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ とする. **厳密なモノイダル圏** Vec_G を,

- G -graded な \mathbb{K} -ベクトル空間

$$V = \bigoplus_{g \in G} V_g$$

を対象とする.

- grading を保存する \mathbb{K} -線型変換

$$f: \bigoplus_{g \in G} V_g \longrightarrow \bigoplus_{g \in G} W_g \quad \text{s.t.} \quad \forall g \in G, f(V_g) \subset W_g$$

を射とする.

- テンソル積 $\otimes: \text{Vec}_G \times \text{Vec}_G \longrightarrow \text{Vec}_G$ は,

$$V \otimes W := \bigoplus_{g \in G} \left(\bigoplus_{\substack{x, y \in G, \\ xy=g}} V_x \otimes_{\mathbb{K}} W_y \right)$$

と定義する.

- 単位対象は $1 := \mathbb{K}$ とする^a
- $a_{g_1, g_2, g_3} := 1, l_g := 1, r_g := 1$

によって定義する. G が有限群ならば Vec_G は**フュージョン圏**である.

^a $1_G \in G$ 成分以外が全て 0

【例 1.3.2】 圈 \mathcal{C}_G^α と Vec_G^α

G を群とする. 【例 1.3.1】の associator と unitors を非自明にしてみよう. 今 $\alpha \in Z_{\text{Grp}}^3(G; \text{U}(1))$ を 1 つ固定する^a.

モノイダル圏 \mathcal{C}_G^α を,

$$a_{g_1, g_2, g_3} := \alpha(g_1, g_2, g_3),$$

$$l_g := \alpha(1, 1, g)^{-1}, \\ r_g := \alpha(g, 1, 1)$$

とおくことにより定義する^b. 実際, コサイクル条件および $U(1)$ の可換性により

$$\begin{aligned} & (\text{Id}_{g_4} \otimes a_{g_1, g_2, g_3}) \circ a_{g_4, g_1 \otimes g_2, g_3} \circ (a_{g_4, g_1, g_2} \otimes \text{Id}_{g_3}) \\ &= \alpha(g_1, g_2, g_3) \alpha(g_4, g_1 g_2, g_3) \alpha(g_4, g_1, g_2) \\ &= \alpha(g_4 g_1, g_2, g_3) \alpha(g_4, g_1, g_2 g_3) \\ &= \alpha(g_4, g_1, g_2 g_3) \alpha(g_4 g_1, g_2, g_3) \\ &= a_{g_4, g_1, g_2 g_3} \circ a_{g_4 \otimes g_1, g_2, g_3} \end{aligned}$$

の通りに (**pentagon identity**) が成り立ち,

$$\begin{aligned} (\text{Id}_{g_1} \otimes l_{g_2}) \circ a_{g_1, 1, g_2} &= \frac{\alpha(g_1, 1, g_2)}{\alpha(1, 1, g_2)} \\ &= \frac{\alpha(g_1, 1, 1) \alpha(g_1, 1, g_2) \alpha(1, 1, g_2)}{\alpha(g_1, 1, g_2) \alpha(1, 1, g_2)} \\ &= \alpha(g_1, 1, 1) \\ &= r_{g_1} \end{aligned}$$

の通りに (**triangle identity**) が成り立つ. もし $l_g = r_g = \text{Id}_g$ にしたければ

$$\forall g, h \in G, \alpha(g, 1, h) = 1_G$$

を充たす $\alpha \in Z_{\text{Grp}}^3(G; U(1))$ をとることが必要十分である (**正規化条件**).

圈 \mathbf{Vec}_G^α は, $\alpha \in Z_{\text{Grp}}^3(G; \mathbb{K}^\times)$ に対して \mathcal{C}_G^α の構成を線形に拡張することで得られる.
 G が有限群ならば \mathbf{Vec}_G^α はフュージョン圈である.

^a i.e. 3-コサイクル

^b 他のデータは **【例 1.3.1】** と全く同じである

定義 1.18: テンソル関手・ファイバー関手

\mathcal{C}, \mathcal{D} を多重環圏とする. 関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を与える. F がテンソル関手 (tensor functor) であるとは, 以下を充たすこと:

- (TF-1) F は \mathbb{K} -線形
- (TF-2) F は強いモノイダル関手
- (TF-3) F は完全かつ忠実^a

特に $\mathcal{D} = \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ のとき, テンソル関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ はファイバー関手 (fiber functor) と呼ばれる.

^a この条件は [?, DEFINITION 4.2.5., p.66] に合わせて付けたものであり, テンソル関手と言った際には必要とされることが多い.

【例 1.3.3】 圈 Vec_G^α のテンソル関手

G_1, G_2 を群, $\alpha_i \in Z_{\text{Grp}}^3(G_i; \text{U}(1))$ を 3-コサイクルとする. テンソル関手

$$F: \mathcal{C}_{G_1}^{\alpha_1} \longrightarrow \mathcal{C}_{G_2}^{\alpha_2}$$

とはどのようなものだろうか.

まず F は強いモノイダル関手であるから, 対象の対応について群準同型

$$f: G_1 \longrightarrow G_2$$

を成す. このとき強いモノイダル関手の持つ自然変換とは, ある $\mu \in C_{\text{Grp}}^2(G_1; \text{U}(1))$ を用いて

$$\mu_{g_1, g_2} := \mu(g_1, g_2) \text{Id}_{f(g_1 g_2)}: f(g_1) f(g_2) \xrightarrow{\cong} f(g_1 g_2) \quad w/ \quad g_1, g_2 \in G_1$$

と書けるが, (associativity) から

$$\mu(g_1, g_2 g_3) \mu(g_2, g_3) \alpha_2(f(g_1), f(g_2), f(g_3)) = \alpha_1(g_1, g_2, g_3) \mu(g_1 g_2, g_3) \mu(g_1, g_2)$$

でなくてはいけない. i.e.

$$\alpha_1 = f^* \alpha_2 \cdot \delta \mu \quad (1.3.2)$$

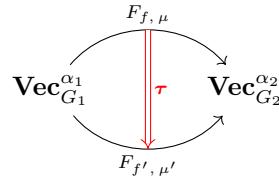
である. 逆に群準同型 $f: G_1 \longrightarrow G_2$ および $\mu \in C_{\text{Grp}}^2(G_1; \text{U}(1))$ の組 (f, μ) であって (1.3.2) を充たすものが与えられると, これらを素材にしてテンソル関手

$$F: \mathcal{C}_{G_1}^{\alpha_1} \longrightarrow \mathcal{C}_{G_2}^{\alpha_2}$$

を構成することができる. このような関手 F が圏同値になる必要十分条件は f が群の同型写像になることである.

【例 1.3.4】 圈 Vec_G^α のモノイダル自然変換

【例 1.3.3】の構成で得られるテンソル関手を $F_{f, \mu}$ と書く. このとき, モノイダル自然変換



を同定しよう. まず自然変換と言うからには $\forall g \in G_1$ に対して

$$\tau_g := \tau(g) \text{Id}_{f(g)}: f(g) \longrightarrow f'(g)$$

を定めないといけない. ただし $\tau \in C_{\text{Grp}}^1(G_1; \text{U}(1))$ である. ところが, 【例 1.3.2】より $\text{Vec}_{G_2}^{\alpha_2}$ の射は $f(g) = f'(g)$, i.e. $f = f'$ でないと自然変換が存在しない.

(テンソル積の保存) の条件から, $\forall g_1, g_2 \in G_1$ に対して

$$\mu'(g_1, g_2)\tau(g_1)\tau(g_2) = \tau(g_1g_2)\mu(g_1, g_2)$$

でなくてはいけない. i.e.

$$\mu = \mu' \cdot \delta\tau \quad (1.3.3)$$

である. 逆に (1.3.3) を充たす $\tau \in C_{\text{Grp}}^1(G_1; \text{U}(1))$ からモノイダル自然変換 $\tau: F_{f, \mu} \Rightarrow F_{f, \mu'}$ を構成することができる.

1.3.1 旋回構造・球状構造・量子次元

定義 1.19: 量子トレース

- rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$
- 対象 $x \in \mathcal{C}$
- $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x^{**})$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, {}^{**}x)$

を与える.

- f の左量子トレース (left quantum trace) を以下で定義する :

$$\text{Tr}^L(f): 1 \xrightarrow{\text{coev}_x^L} x \otimes x^* \xrightarrow{f \otimes \text{Id}_x} x^{**} \otimes x^* \xrightarrow{\text{ev}_{x^*}^L} 1$$

ストリング図式で書くと次のようになる^a:

$$\text{Tr}^L(f) := \begin{array}{c} x^{**} \\ f \bullet \\ x \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \\ \curvearrowright \end{array} x^* \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, 1)$$

- g の右量子トレース (right quantum trace) を以下で定義する :

$$\text{Tr}^R(g): 1 \xrightarrow{\text{coev}_x^R} {}^*x \otimes x \xrightarrow{\text{Id}_{x^*} \otimes g} {}^*x \otimes {}^{**}x \xrightarrow{\text{coev}_{x^*}^R} 1$$

ストリング図式で書くと次のようになる：

$$\text{Tr}^R(g) := {}^*x \begin{array}{c} \nearrow \\ \curvearrowleft \end{array} g \begin{array}{c} \nearrow \\ \curvearrowright \end{array} {}^{**}x \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, 1)$$

^a $\text{ev}_{V^*}^L = \text{ev}_{V^{**}}^R$ を使った.

補題 1.6: 左量子トレースと右量子トレースの関係

rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ を与える. このとき, $\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x^{**})$ について

$$\text{Tr}^L(f) = \text{Tr}^R(f^*)$$

が成り立つ.

証明

$$\text{Tr}^L(f) = f \begin{array}{c} \nearrow \\ \curvearrowleft \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \nearrow \\ \curvearrowleft \end{array} f \begin{array}{c} \nearrow \\ \curvearrowright \end{array} \quad \therefore \text{(zig-zag equations)}$$

$$= \begin{array}{c} \nearrow \\ \curvearrowright \end{array} f^* \begin{array}{c} \nearrow \\ \curvearrowleft \end{array}$$

$$= \text{Diagram showing a circle with a dot labeled } f^*, \text{ with arrows forming a zig-zag pattern around it.} \quad \therefore \text{(zig-zag equations)}$$

ここで、補題 1.1 より $\text{ev}_{x^*}^L = \text{ev}_{x^{**}}^R$, $\text{coev}_{x^{**}}^L = \text{coev}_{x^{***}}^R$ が成り立つので、最右辺は $\text{Tr}^R(f^*)$ に等しい。 ■

定義 1.20: 旋回構造

rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ を与える。 \mathcal{C} の旋回構造 (pivotal structure) とは、モノイダル自然同型

$$\text{Diagram showing a circle with a red vertical arrow labeled } p \text{ passing through the center. The top arc is labeled } \text{Id}_{\mathcal{C}} \text{ and the bottom arc is labeled } (-)^{**}. \text{ Arrows point from left to right along the perimeter.}$$

のこと。ただし $(-)^{**}$ は【例 1.2.2】で構成したモノイダル関手である。

左量子トレースは $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x^{**})$ に対してしか定義されておらず、不便なことがある。 $f \in \text{End}_{\mathbb{C}}(x)$ に対してトレースを定義するためには旋回構造が必要である。

定義 1.21: トレース

rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ の旋回構造 p を与える。このとき、 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$ のトレース (trace) を以下で定義する：

$$\text{Tr}(f): 1 \xrightarrow{\text{coev}_x^L} x \otimes x^* \xrightarrow{(p \circ f) \otimes \text{Id}_{x^*}} x^{**} \otimes x^* \xrightarrow{\text{ev}_{x^*}^L} 1$$

補題 1.7: 旋回構造と双対

rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ の旋回構造 p を与える。このとき $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して以下が成り立つ：

- (1) $p_{x^*} = (p_x)^{* - 1}$
- (2) $p_{x^{**}} = (p_x)^{**}$

証明 $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を 1 つ固定する。

(1) $\text{Id}_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ は厳密なモノイダル関手であり、【例 1.2.2】より $(-)^{**}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ もまた厳密なモノイダル関手であるから、 $p: \text{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow (-)^{**}$ がモノイダル自然同型であることより $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ について以下の図式は可換になる：

$$\begin{array}{ccc}
 x^* \otimes x & \xrightarrow{p_{x^*} \otimes p_x} & x^{***} \otimes x^{**} \\
 \downarrow = & & \downarrow = \\
 x^* \otimes x & \xrightarrow{p_{x^*} \otimes x} & (x^* \otimes x)^{**}
 \end{array}$$

さらに, p の自然性から図式

$$\begin{array}{ccc}
 x^* \otimes x & \xrightarrow{p_{x^*} \otimes x} & (x^* \otimes x)^{**} \\
 & \searrow \text{ev}_x^L & \swarrow \text{ev}_{x^{**}}^L \\
 & 1 &
 \end{array}$$

も可換であるから,

$$\begin{array}{ccc}
 p_{x^*} \bullet & \xrightarrow{\quad} & p_x \bullet \\
 x^* \downarrow & & \downarrow x \\
 & \curvearrowright &
 \end{array} = \quad \curvearrowright$$

が成り立つことが分かった. よって

$$\begin{aligned}
 (p_x)^* \circ p_{x^*} &= \begin{array}{c} \bullet \\ \downarrow \\ \bullet \\ \downarrow \\ \bullet \end{array} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \\
 &= \begin{array}{c} \bullet \\ \downarrow \\ \bullet \\ \downarrow \\ \bullet \end{array} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \\
 &= \begin{array}{c} \bullet \\ \downarrow \\ \bullet \end{array} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \\
 &= \text{Id}_{x^*} \quad \therefore \quad (\text{zig-zag equations})
 \end{aligned}$$

が言える. $p_{x^*} \circ (p_x)^* = \text{Id}_{x^{***}}$ も同様.

(2) p の自然性より

$$(p_x)^{**} \circ p_x = p_{x^{**}} \circ p_x$$

が言える. $p_x: x \longrightarrow x^{**}$ は同型射だから示された.

■

非常に重要な予想がある [?, Conjecture 2.8., p.5] :

予想 1.1: フュージョン圏は pivotal

任意の半単純なテンソル圏は旋回構造を持つ.

本資料ではこの予想を認める.

定義 1.22: 量子次元

旋回構造 p を持つ rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ を与える. \mathcal{C} の対象 $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ の, p に関する量子次元 (quantum dimension) を以下で定義する:

$$\dim_p(x) := \text{Tr}^L(p_x) := \begin{array}{c} \text{Diagram showing } p_x \text{ as a point in } \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, 1) \\ \text{with arrows } x^{**}, x^*, x \text{ and a curved arrow from } x^{**} \text{ to } x^* \end{array}$$

補題 1.1-(2) の証明より

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} x \\ \curvearrowleft \\ \text{coev}_x^L \end{array} \right)^* &= \begin{array}{c} \text{Diagram showing } x^{**} \text{ and } x^* \text{ with a curved arrow from } x^{**} \text{ to } x^* \end{array} \\ &= \begin{array}{c} \text{Diagram showing } x^{**} \text{ and } x^* \text{ with a curved arrow from } x^{**} \text{ to } x^* \end{array} \\ \text{ev}_x^L &= \begin{array}{c} \text{Diagram showing } x^* \text{ and } x^{**} \text{ with a curved arrow from } x^* \text{ to } x^{**} \end{array} \\ \text{coev}_{x^*}^L & \end{aligned}$$

であるから, $(-)^{**}$ の関手性および補題 1.7-(2) により

$$\dim_p(x^{**}) = \left(\begin{array}{c} x^{****} \\ \curvearrowleft \\ x^{**} \end{array} \right) x^{***} = \left(\begin{array}{c} x^{**} \\ \curvearrowleft \\ x^* \end{array} \right) x = \dim_p(x)$$

が言える. ただし, $(-)^*$ の定義 (1.2.1) より $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, 1)$ に対して⁵ $f^* = (l_1 \otimes \text{Id}_1) \circ (\text{Id}_1 \otimes f \otimes \text{Id}_1) \circ (\text{Id}_1 \otimes l_1^{-1}) = f$ が成り立つことを使った.

⁵ $1^* = *1 = 1$ である.

定義 1.23: 球状圏

テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ の旋回構造 p が球状 (spherical) であるとは、 $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$\dim_p(x) = \begin{array}{c} x^{**} \\ \bullet p_x \\ x \\ \curvearrowleft \end{array} = \begin{array}{c} x^{***} \\ \bullet p_{x^*} \\ x^* \\ \curvearrowleft \end{array} = \dim_p(x^*)$$

が成り立つことを言う。

定理 1.1: 球状圏における左/右量子トレース

球状圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R, p)$ およびその対象 $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を 1 つとる。このとき、 $\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$ に対して以下が成り立つ：

$$\text{Tr}^L(p_x \circ f) = \text{Tr}^R(f \circ p_x^{-1})$$

証明 $f = \text{Id}_x$ の場合は補題 1.6 および補題 1.7-(1) から従う。一般の f については [?, THEOREM 4.7.15] を参照。 ■

1.3.2 フュージョン環・Frobenius-Perron 次元

$(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{coev}^L, \text{ev}^L, \text{coev}^R, \text{ev}^R)$ を体 \mathbb{K} 上の半単純な多重フュージョン圏とする。 \mathcal{C} の単純対象の同型類が成す有限集合を $\text{Simp}(\mathcal{C})$ と書く。

このとき、 $\text{Simp}(\mathcal{C})$ が生成する自由 \mathbb{Z} -加群 $\mathbb{Z}^{\oplus \text{Simp}(\mathcal{C})}$ の上に次のようにして積を入れることができる：

$$x \star y := [x \otimes y] \quad \forall x, y \in \text{Simp}(\mathcal{C}) \quad (1.3.4)$$

\mathcal{C} は半単純なので、右辺に対して非負整数の族 $\{N_{xy}^c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}_{c \in \text{Simp}(\mathcal{C})}$ が存在して

$$x \star y = \sum_{c \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{xy}^c c \quad (1.3.5)$$

と書ける。式 (1.3.5) のことをフュージョン則 (fusion rule) と呼ぶ。 $\mathbb{Z}^{\oplus \text{Simp}(\mathcal{C})}$ 上の積 (1.3.4) は明らかに結合則を充たし、単位元 $[1]$ を持つ^{*6}。このようにしてできる環 $(\mathbb{Z}^{\oplus \text{Simp}(\mathcal{C})}, \star, [1])$ のことを Grothendieck 環 (Grothendieck ring) と呼び、 $\text{Gr}(\mathcal{C})$ と書く。次の定義は、この構成を一般化したものである：

^{*6} 命題 1.6 より \mathcal{C} がテンソル圏ならば $1 \in \text{Simp}(\mathcal{C})$ であるが、多重テンソル圏においては必ずしもそうではない。しかるに、 $1 \notin \text{Simp}(\mathcal{C})$ であったとしても \mathcal{C} の半単純性から $[1] \in \mathbb{Z}^{\oplus \text{Simp}(\mathcal{C})}$ は成り立つ。

定義 1.24: \mathbb{Z}_+ -環・フュージョン環

$(\mathbb{Z}^{\oplus I}, \star, 1)$ を環とする。 $A := \mathbb{Z}^{\oplus I}$ とおく。また、部分集合 $I_0 \subset I$ を $1 =: \sum_{i \in I_0} x_i b_i$ で定義する。

- (1) A の基底 $\{b_i\}_{i \in I}$ が \mathbb{Z}_+ -基底 (\mathbb{Z}_+ -basis) であるとは、 $\forall i, j \in I$ に対してある非負整数の族 $\{N_{ij}^c \in \mathbb{Z}_+\}_{c \in I}$ が存在して

$$b_i \star b_j = \sum_{c \in I} N_{ij}^c b_c$$

を充たすことを言う。

- (2) 環 $(A, \star, 1)$ とその \mathbb{Z}_+ 基底の組 $(A, \star, 1, \{b_i\}_{i \in I})$ が \mathbb{Z}_+ -環 (\mathbb{Z}_+ -ring) であるとは、 $1 \in A$ が $\{b_i\}_{i \in I}$ の非負係数線型結合で書けることを言う。
- (3) \mathbb{Z}_+ -環 $(A, \star, 1, \{b_i\}_{i \in I})$ が単位的 (unital) であるとは、 $1 \in A$ が \mathbb{Z}_+ -基底であることを言う。
- (4) \mathbb{Z}_+ -環 $(A, \star, 1, \{b_i\}_{i \in I})$ が底的 (based) であるとは、以下の 2 つの条件を充たすことを言う：
- (based-1)** ある対合射^a $(-)^*: I \longrightarrow I$, $i \longmapsto i^*$ が存在して、それに誘導される写像

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow A, \\ \sum_{i \in I} x_i b_i &\longmapsto \sum_{i \in I} x_i b_{i^*} \end{aligned}$$

が環の反対合準同型になる。

- (based-2)** 可換群の準同型

$$\begin{aligned} \tau: A &\longrightarrow \mathbb{Z}, \\ b_i &\longmapsto \begin{cases} 1, & i \in I_0 \\ 0, & i \notin I_0 \end{cases} \end{aligned}$$

が、 $\forall i, j \in I$ に対して以下を充たす：

$$\tau(b_i \star b_j) = \delta_{i, j^*}$$

- (5) 多重フュージョン環 (multifusion ring) とは、底的な \mathbb{Z}_+ -環 $(A, \star, 1, \{b_i\}_{i \in I})$ であって I が有限集合であるもののこと。
- (6) フュージョン環 (fusion ring) とは、単位的な多重フュージョン環のこと。

^a i.e. $(-)^{**} = \text{Id}_I$

補題 1.8: Grothendieck 環は底的な \mathbb{Z}_+ -環

- (1) \mathcal{C} が半単純な多重テンソル圏 $\implies \text{Gr}(\mathcal{C})$ は底的な \mathbb{Z}_+ -環
- (2) \mathcal{C} が半単純なテンソル圏 $\implies \text{Gr}(\mathcal{C})$ は底的な単位的 \mathbb{Z}_+ -環
- (3) \mathcal{C} が多重フュージョン圏 $\implies \text{Gr}(\mathcal{C})$ は多重フュージョン環
- (4) \mathcal{C} がフュージョン圏 $\implies \text{Gr}(\mathcal{C})$ はフュージョン環

証明 (1)

■

補題 1.9: フュージョン環の性質

$(A, \star, 1, \{b_i\}_{i \in I})$ を底的な \mathbb{Z}_+ -環とする。また、 \mathbb{K} を標数 0 の代数閉体とする。このとき、以下が成り立つ：

(1) $\forall i, j, k \in I$ に対して,

$$N_{i,j}^{k^*} = N_{ki}^{j^*} = N_{jk}^{i^*}$$

(2) 2 つの異なる環準同型 $\chi_1, \chi_2: A \rightarrow \mathbb{K}$ に対して,

$$\sum_{i \in I} \chi_1(b_i) \chi_2(b_{i^*}) = 0$$

証明 (1)

$$\tau(b_i \star b_j \star b_k) = \sum_{l \in I} N_{ij}^l \tau(b_l \star b_k) = N_{ij}^{k^*}$$

である。さらに、 $(-)^*: I \rightarrow I$ が対合射であることから

$$\tau(b_i \star b_j) = \delta_{i,j^*} = \delta_{j^{**},i^*} = \delta_{j,i^*} = \tau(b_j \star b_i)$$

が言えるので、示された。

(2) $P := \sum_{i \in I} \chi_1(b_i) b_{i^*} \in A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{K}$ とおく。このとき $\forall j \in I$ に対して

$$\begin{aligned} b_j \star P &= \sum_{i \in I} \chi_1(b_i) b_j \star b_{i^*} \\ &= \sum_{i, k \in I} \chi_1(b_i) N_{ji^*}^k b_k \\ &= \sum_{i, k \in I} \chi_1(b_i) N_{k^*j}^i b_k && \because (1) \\ &= \sum_{k \in I} \chi_1 \left(\sum_{i \in I} N_{k^*j}^i b_i \right) b_k \\ &= \sum_{k \in I} \chi_1(b_{k^*} \star b_j) b_k \\ &= \chi_1(b_j) P \end{aligned}$$

が成り立つ。両辺に χ_2 を作用させることで、 $\forall j \in I$ に対して

$$\chi_2(b_j) \left(\sum_{i \in I} \chi_1(b_i) \chi_2(b_{i^*}) \right) = \chi_1(b_j) \left(\sum_{i \in I} \chi_1(b_i) \chi_2(b_{i^*}) \right)$$

が成り立たねばならないことが分かる。ところが $\chi_1 \neq \chi_2$ なので、

$$\sum_{i \in I} \chi_1(b_i) \chi_2(b_{i^*}) = 0$$

である.

■

定義 1.25: Frobenius-Perron 次元

$x \in \text{Simp}(\mathcal{C})$ の **Frobenius-Perron 次元** (Frobenius-Perron dimension) とは、非負整数値行列 $[N_{x\mathbf{b}}^{\mathbf{c}}]_{1 \leq \mathbf{b}, \mathbf{c} \leq |\text{Simp}(\mathcal{C})|}$ の最大の非負固有値 $\text{FPdim}_{\mathcal{C}}(x) \in \mathbb{C}$ のこと.

1.3.3 F-シンボル

多重フュージョン圏は半単純かつ有限なので、補題??-(1) および極限・余極限と Hom の交換、フュージョン則 (1.3.5) から

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x \otimes y, z) \cong \bigoplus_{w \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{xy}^w \text{Hom}_{\mathcal{C}}(w, z) \cong \mathbb{K}^{\oplus N_{xy}^z}$$

が $\forall x, y, z \in \text{Simp} \mathcal{C}$ に対して成り立つ。i.e. $\dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x \otimes y, z) = N_{xy}^z$ である^{*7}。よって

$$\begin{aligned} (x \otimes y) \otimes z &\cong \bigoplus_{w, u \in \text{Simp} \mathcal{C}} N_{xy}^w N_{wz}^u u \\ &\cong \bigoplus_{w, u \in \text{Simp} \mathcal{C}} \dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x \otimes y, w) \dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(w \otimes z, u) u \\ x \otimes (y \otimes z) &\cong \bigoplus_{w, u \in \text{Simp} \mathcal{C}} N_{wx}^u N_{yz}^w u \\ &\cong \bigoplus_{w, u \in \text{Simp} \mathcal{C}} \dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(w \otimes x, u) \dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y \otimes z, w) u \end{aligned}$$

が成り立つが、**associator** による自然同型 $(x \otimes y) \otimes z \cong x \otimes (y \otimes z)$ により

$$\begin{aligned} &\sum_{w \in \text{Simp} \mathcal{C}} \dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x \otimes y, w) \dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(w \otimes z, u) \\ &= \sum_{w \in \text{Simp} \mathcal{C}} \dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(w \otimes x, u) \dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y \otimes z, w) \end{aligned}$$

が言える。ここから \mathbb{K} -ベクトル空間としての同型

$$\Phi_u^{xyz}: \bigoplus_w \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x \otimes y, w) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(w \otimes z, u) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_w \text{Hom}_{\mathcal{C}}(w \otimes x, u) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y \otimes z, w) \quad (1.3.6)$$

が存在することが分かる。この同型写像の第 (a, b) 成分

$$(\Phi_u^{xyz})_{ab}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x \otimes y, a) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a \otimes z, u) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(b \otimes x, u) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y \otimes z, b)$$

のことを **6j-シンボル** (6j-symbol) と呼ぶ。

特に \mathbb{K} が代数閉体のときは、Müger 半単純性および補題 1.3 より、(1.3.6) の同型写像は

$$F_u^{xyz}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}((x \otimes y) \otimes z, u) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x \otimes (y \otimes z), u)$$

^{*7} この次元は \mathbb{K} -ベクトル空間としての次元である。

と等価である。この同型写像の行列要素を **F -シンボル** (F -symbol) と呼ぶ。ストリング図式として書くと、 F -シンボルとは次のようにして定義される $(F_u^{xyz})_{(a; v_1, v_2), (b; v_3, v_4)} \in \mathbb{K}$ のことである：

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Diagram 1: } & & \text{Diagram 2: } \\
 \begin{array}{c} \text{A string diagram with nodes } u, v_2, v_1, x, y, z. \\ \text{Nodes } v_1 \text{ and } v_2 \text{ are red.} \\ \text{Arc } a \text{ connects } v_1 \text{ and } v_2. \\ \text{Arcs } x, y, z \text{ connect } v_1 \text{ to } x, v_1 \text{ to } y, \text{ and } v_2 \text{ to } z \text{ respectively.} \end{array} & =: & \begin{array}{c} \text{A string diagram with nodes } u, v_4, v_3, x, y, z. \\ \text{Nodes } v_3 \text{ and } v_4 \text{ are red.} \\ \text{Arc } b \text{ connects } v_3 \text{ and } v_4. \\ \text{Arcs } x, y, z \text{ connect } v_3 \text{ to } x, v_3 \text{ to } y, \text{ and } v_4 \text{ to } z \text{ respectively.} \end{array}
 \end{array}$$

ただし、 $\forall x, y, z \in \text{Simp}(\mathcal{C})$ それぞれに対して定まる \mathbb{K} -ベクトル空間 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x \otimes y, z)$ の基底を 1 つ固定し、それを $\text{Basis}(x \otimes y, z)$ と書いた。

1.3.4 ユニタリフュージョン圏

定義 1.26: ユニタリフュージョン圏

ユニタリフュージョン圏 (unitary fusion category) とは、フュージョン圏であってユニタリモノイダル圏でもあるものとを言う。

ユニタリ構造の定義とモノイダル圏のテンソル積 \otimes は定義のレベルでは全く別のものであるが、左/右双対に関して強く相互作用する。特に、以下で示す命題 1.7 により、ユニタリテンソル圏は自動的に球状テンソル圏になる。

補題 1.10: ユニタリモノイダル圏における右双対

rigid なユニタリモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \dagger)$ の対象 $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が左双対 $(x^*, \text{coev}_x^L, \text{ev}_x^L)$ を持つとする。このとき、 $(x^*, \text{ev}_x^{L\dagger}, \text{coev}_x^{L\dagger})$ は x の右双対である。

証明 (zig-zag equations) を示す。実際、

$$\begin{aligned}
 (\text{coev}_x^{L\dagger} \otimes \text{Id}_x) \circ (\text{Id}_x \otimes \text{ev}_x^{L\dagger}) &= (\text{coev}_x^{L\dagger} \otimes \text{Id}_x^\dagger) \circ (\text{Id}_x^\dagger \otimes \text{ev}_x^{L\dagger}) \\
 &= (\text{coev}_x^L \otimes \text{Id}_x)^\dagger \circ (\text{Id}_x \otimes \text{ev}_x^L)^\dagger \\
 &= ((\text{Id}_x \otimes \text{ev}_x^L) \circ (\text{coev}_x^L \otimes \text{Id}_x))^\dagger \\
 &= \text{Id}_x^\dagger = \text{Id}_x,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{Id}_{x^*} \otimes \text{coev}_x^{L\dagger}) \circ (\text{ev}_x^{L\dagger} \otimes \text{Id}_{x^*}) &= ((\text{ev}_x^L \otimes \text{Id}_{x^*}) \circ (\text{Id}_{x^*} \otimes \text{coev}_x^L))^\dagger \\
 &= \text{Id}_{x^*}
 \end{aligned}$$

が成り立つ。 ■

命題 1.7: ユニタリテンソル圏における球状構造

ユニタリテンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{coev}^L, \text{ev}^L, \dagger)$ における旋回構造

$$p_x := (\text{coev}_x^{L\dagger} \otimes \text{Id}_{x^{**}}) \circ (\text{Id}_x \otimes \text{coev}_{x^*}^L) : x \longrightarrow x^{**}$$

が球状構造になる必要十分条件は、 $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

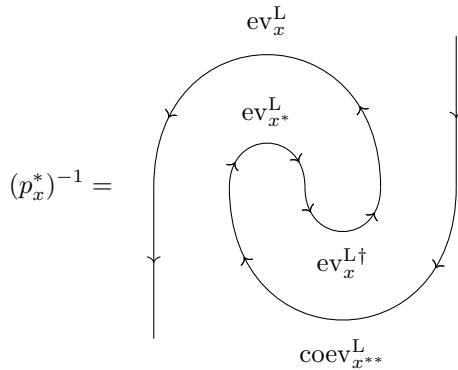
$$\text{coev}_x^{L\dagger} \circ \text{coev}_x^L = \text{ev}_x^L \circ \text{ev}_x^{L\dagger}$$

が成り立つことである。

証明

$$\begin{aligned} \dim_p(x) &= \text{ev}_{x^*}^L \circ (p_x \otimes \text{Id}_{x^*}) \circ \text{coev}_x^L \\ &= \text{coev}_x^{L\dagger} \circ \text{coev}_x^L \end{aligned}$$

ところで、



であるから、

$$\begin{aligned} \dim_p(x^*) &= \text{Tr}^L((p_x^*)^{-1}) && \because \text{補題 1.7-(1)} \\ &= \text{ev}_x^L \circ \text{ev}_x^{L\dagger} \end{aligned}$$

と計算できる。よって

$$\dim_p(x) = \dim_p(x^*) \iff \text{coev}_x^{L\dagger} \circ \text{coev}_x^L = \text{ev}_x^L \circ \text{ev}_x^{L\dagger}$$

■

coevaluation/evaluation を適切に選ぶことで、いつでも命題 1.7 の条件を充たすようにできる。実際、 $\text{coev}_x^L, \text{ev}_x^L$ が $x, x^* \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に関する (co)evaluation ならば、 $\forall \lambda \in \mathbb{C}^\times$ に対して $\lambda \text{coev}_x^L, \lambda^{-1} \text{ev}_x^L$ もまた (zig-zag equations) を充たすので x, x^* に関する (co)evaluation である。よって

$$|\lambda|^2 = \sqrt{\frac{\text{ev}_x^L \circ \text{ev}_x^{L\dagger}}{\text{coev}_x^{L\dagger} \circ \text{coev}_x^L}}$$

を充たすように λ を選べば良い [?, LEMMA 3.9., p.9].

定義 1.27: balanced なユニタリテンソル圏

ユニタリテンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{coev}^L, \text{ev}^L, \dagger)$ が **balanced** であるとは, $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$\text{coev}_x^{L\dagger} \circ \text{coev}_x^L = \text{ev}_x^L \circ \text{ev}_x^{L\dagger}$$

が成り立つこと. このとき, 命題 1.7 の構成によって \mathcal{C} は球状圏になる.

1.3.5 ユニタリフュージョン圏における Frobenius-Perron 次元

標数 0 の代数閉体 \mathbb{K} 上の **フュージョン圏** $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{coev}^L, \text{ev}^L, \text{coev}^R, \text{ev}^R)$ とその上の **旋回構造** p を考える. 圏 \mathcal{C} の **圏論的次元** (categorical dimension) を

$$\dim(\mathcal{C}) := \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \text{Tr}^L(p_x) \circ \text{Tr}^L((p_x^{-1})^*) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1, 1) = \mathbb{K}$$

で定義し^{*8}, **Frobenius-Perron 次元**について

$$\text{FPdim}(\mathcal{C}) := \sum_{x \in \text{Simp}(\mathcal{C})} \text{FPdim}(x)^2$$

とおく.

定義 1.28: 擬ユニタリフュージョン圏

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ とする. このときフュージョン圏 \mathcal{C} が **擬ユニタリ** (pseudo-unitary) であるとは,

$$\dim(\mathcal{C}) = \text{FPdim}(\mathcal{C})$$

が成り立つことを言う [?, DEFINITION 9.4.4., p.283].

命題 1.8: 擬ユニタリフュージョン圏における球状構造

擬ユニタリフュージョン圏 \mathcal{C} は一意的な **球状構造** p を持つ.

さらに, その球状構造 p は $\forall x \in \text{Simp}(\mathcal{C})$ に対して $\dim_p(x) = \text{FPdim}_{\mathcal{C}}(x)$ を充たす.

証明 [?, PROPOSITION 9.5.1., p.284] ■

命題 1.9: ユニタリフュージョン圏は擬ユニタリ

ユニタリフュージョン圏は **擬ユニタリ** である.

証明

! 一般の **フュージョン圏**においては, **量子次元**と **Frobenius-Perron 次元**が一致するとは限らない. 命題 1.8 および 1.9 によって, **ユニタリフュージョン圏**においては一致することが保証されている.

^{*8} 右辺は旋回構造の取り方に依存しない [?, p.179].

1.3.6 Deligne のテンソル積

定義 1.29: Deligne のテンソル積

\mathcal{C}, \mathcal{D} を局所有限な \mathbb{K} -線形アーベル圏とする。Deligne のテンソル積 (Deligne's tensor product) とは、以下の性質をみたす \mathbb{K} -線形アーベル圏 $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ と双右完全関手 $\boxtimes: \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ の組み $(\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}, \boxtimes)$ のこと：

(普遍性)

任意の双右完全関手 $F: \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ に対し、ある双右完全関手 $\bar{F}: \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ が一意的に存在して $\bar{F} \circ \boxtimes = F$ を充たす。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} \times \mathcal{D} & \xrightarrow{\forall F} & \mathcal{A} \\ \boxtimes \downarrow & \nearrow \exists! \bar{F} & \\ \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D} & & \end{array}$$

命題 1.10: Deligne のテンソル積の基本性質

(1) Deligne のテンソル積は存在し、それ自身が局所有限な \mathbb{K} -線形アーベル圏になる。

(2) 関手 $\boxtimes: \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ は双完全であり、

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x_1, y_1) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x_2, y_2) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}}(x_1 \boxtimes x_2, y_1 \boxtimes y_2)$$

を充たす。

(3) \mathcal{C}, \mathcal{D} が(多重)環圏/(多重)テンソル圏ならば $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ は(多重)環圏/(多重)テンソル圏である。

証明 (1) [?, PROPOSITION 1.11.2., p.15]

(2) [?, PROPOSITION 1.11.2., p.15]

(3) [?, PROPOSITION 4.6.1., p.73]

■

1.4 組紐付きテンソル圏

1.4.1 リボン構造と旋回構造の関係

補題 1.11: テンソル圏における組紐と旋回構造

rigid な組紐付きモノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R, b)$ を与え, $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に對して射 $u_x: x \rightarrow x^{**}$ を以下で定義する^a:

$$x \xrightarrow{\text{Id}_x \otimes \text{coev}_{x^*}^L} x \otimes x^* \otimes x^{**} \xrightarrow{b_{x,x^*} \otimes \text{Id}_{x^{**}}} x^* \otimes x \otimes x^{**} \xrightarrow{\text{ev}_x^L \otimes \text{Id}_{x^{**}}} x^{**}$$

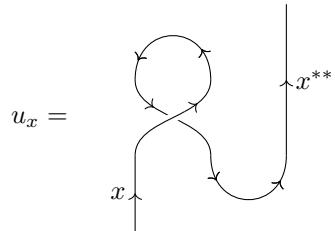
- (1) $u := \{u_x: x \rightarrow x^{**}\}_{x \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$ は自然変換 $u: \text{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow (-)^{**}$ を成し, $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して以下を充たす:

$$u_x \otimes u_y = u_{x \otimes y} \circ b_{y,x} \circ b_{x,y}$$

- (2) \mathcal{C} がテンソル圏ならば u は自然同型になる.

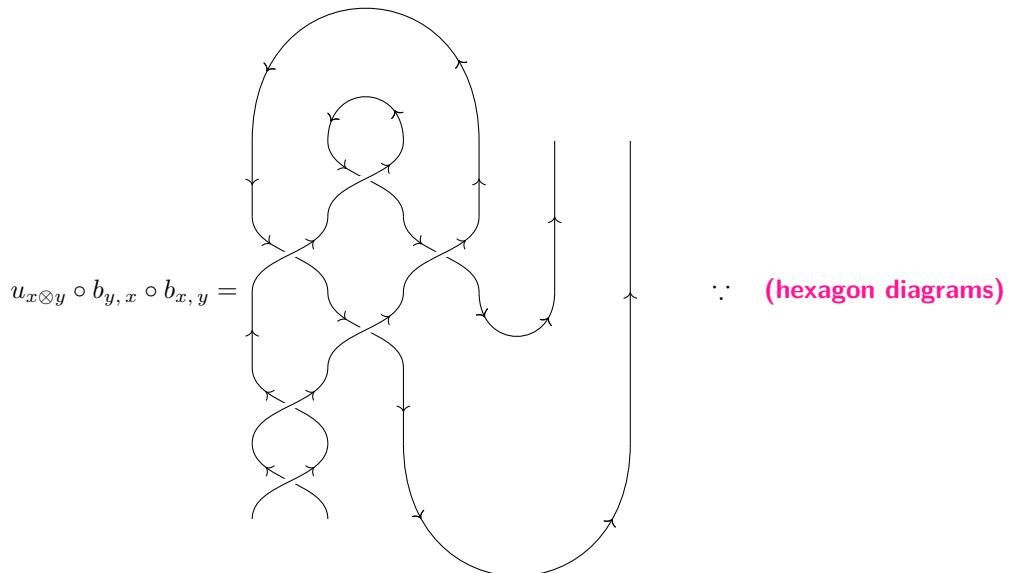
^a Drinfeld morphism と呼ぶ [?, DEFINITION 8.9.4., p.215]

ストリング図式では



と書ける.

証明 (1) u が自然変換であることは明らか.



∴ (hexagon diagrams)

$=$

$\therefore \text{命題 } 1.4 \times 3$

$$= u_x \otimes u_y \quad \therefore \text{補題 } 1.4-(3)$$

(2) $\forall x \in \text{Simp}(\mathcal{C})$ に対して示せば十分である.

■

補題 1.11 より, テンソル圏における任意の自然同型 $p: \text{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow (-)^{**}$ は, ある自然同型 $\theta: \text{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow \text{Id}_{\mathcal{C}}$ を用いて

$$p = u \circ \theta$$

と書ける. このような p が旋回構造になるのは θ が (Rib-1) を充たすときのみである.

定理 1.2: 球状構造とリボン構造

組紐付きフュージョン圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R, b)$ を与える. このとき, \mathcal{C} の旋回構造 $p: \text{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow (-)^{**}$ が球状構造であるためには, 自然同型 $u^{-1} \circ p: \text{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow \text{Id}_{\mathcal{C}}$ がリボン構造であることが必要十分である.

証明 [?, PROPOSITION 8.10.12, p.220]

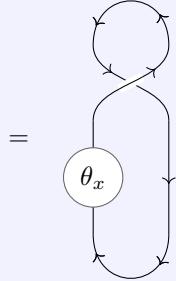
以下では, 特に断らない限りリボン付き組紐付きフュージョン圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R, b, \theta)$ の球状構造 p は定理 1.2 によって定まる $p := u \circ \theta$ を選び, 明示しない.

1.4.2 リボン構造と量子次元・ S -行列

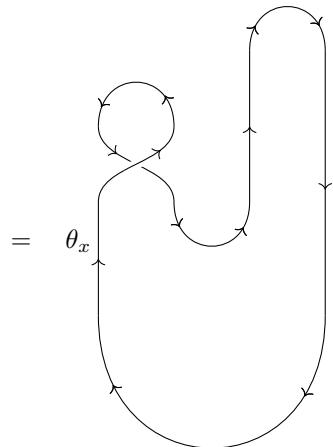
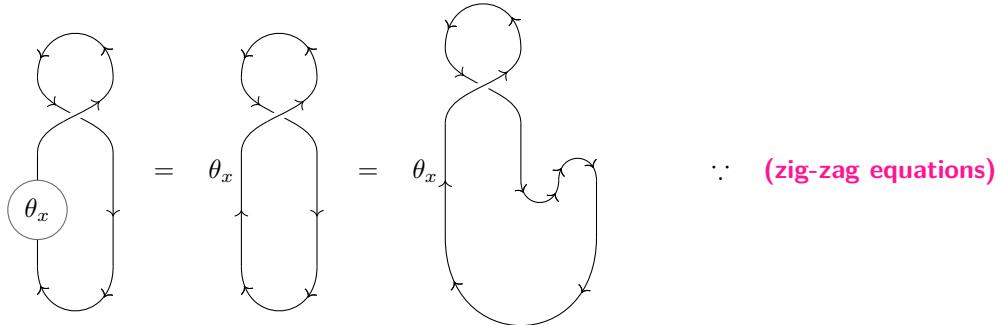
補題 1.12: リボン構造と量子次元

リボン構造付き組紐付きテンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R, b, \theta)$ を与える。このとき、 $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して以下が成り立つ：

$$\dim_{u \circ \theta}(x) = \text{ev}_x^L \circ b_{x, x^*} \circ (\theta_x \otimes \text{Id}_{x^*}) \circ \text{coev}_x^L$$



証明 $x \in \text{Simp}(\mathcal{C})$ の場合に示せば十分である。このとき Schur の補題より $\theta_x \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x) = \mathbb{K}$ なので、ある $\theta_x \in \mathbb{K}$ が存在して $\theta_x = \theta_x \text{Id}_x$ と書ける。故に



$$= \theta_x \text{Tr}^L(u_x)$$

$$= \text{Tr}^L(u_x \circ \theta_x) \\ = \dim_p(x)$$

が言えた. ■

定義 1.30: 前モジュラー圏

前モジュラー圏 (pre-modular category) とは、リボン構造付き組紐付きフュージョン圏のこと.

定義 1.31: S-行列

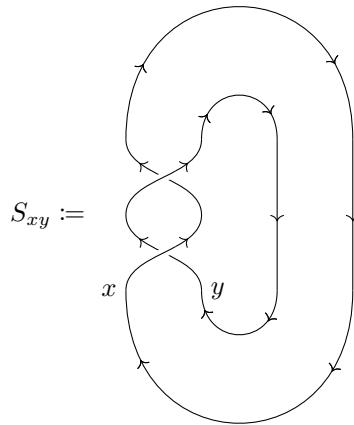
$(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{coev}^L, \text{ev}^L, b, \theta)$ を前モジュラー圏とする. $\forall x, y \in \text{Simp}(\mathcal{C})$ に対して、S-行列 (S-matrix) 要素を

$$S_{xy} := \text{Tr}(b_{y,x} \circ b_{x,y})$$

で定義する^a.

^a 左量子トレースではなくトレースである！定理 1.2 の球状構造を使っている。

S-行列の定義をストリング図式で書くと次のようになる：



命題 1.11: S -行列の性質

S 行列は $\forall x, y, z \in \text{Simp}(\mathcal{C})$ について以下を充たす：

(1)

$$S_{xy} = \theta_x^{-1} \theta_y^{-1} \sum_{z \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{xy}^z \theta_z \dim_{u \circ \theta}(z)$$

(2)

$$S_{xy} S_{xz} = \dim_{u \circ \theta}(x) \sum_{w \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{yz}^w S_{zw}$$

(3) $\forall x \in \text{Simp}(\mathcal{C})$ に対して定まる写像

$$\begin{aligned} h_x: \text{Simp}(\mathcal{C}) &\longrightarrow \mathbb{K}, \\ y &\longmapsto \frac{S_{xy}}{\dim_{u \circ \theta}(x)} \end{aligned}$$

は、Grothendieck 環 $\text{Gr}(\mathcal{C})$ から \mathbb{K} への環準同型を定める。

証明 (1) (Rib-1) のトレースをとると、 $x, y \in \text{Simp}(\mathcal{C})$ であることから

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\theta_{x \otimes y}) &= \sum_{z \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{xy}^z \text{Tr}(\theta_z) = \sum_{z \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{xy}^z \theta_z \dim(z) \\ &= \theta_x \theta_y \text{Tr}(b_{y,x} \circ b_{x,y}) = \theta_x \theta_y S_{xy} \end{aligned}$$

(2) (hexagon diagrams) から従う等式

$$\begin{aligned} (b_{y,x} \otimes \text{Id}_z) \circ (\text{Id}_y \otimes (b_{z,x} \circ b_{x,z})) \circ (b_{x,y} \otimes \text{Id}_z) &= \\ &= b_{y \otimes z, x} \circ b_{x, y \otimes z} \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

に注目し、この式の両辺のトレースを計算する。

まず左辺の z についてのみトレースをとると,

$$\begin{array}{c} \text{Diagram showing three strands } x, y, z \text{ with arrows indicating orientation.} \\ = \\ \text{Diagram showing the same strands with a different crossing pattern, labeled '補題 1.4-(3)' in pink.} \\ = \\ \text{Diagram showing the strands in their original configuration, labeled '命題 1.4' in pink.} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{Diagram showing two parallel strands with arrows indicating direction. The top strand has a loop and a crossing point. The bottom strand has a loop and a crossing point. Arrows indicate flow from left to right.} & \because \text{命題 1.4} \\
 &= \text{Diagram showing two parallel strands. The top strand has a loop and a crossing point. The bottom strand has a loop and a crossing point. Arrows indicate flow from left to right.} & \because \text{補題 1.4(2)}
 \end{aligned}$$

ここで、補題??より $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x) = \mathbb{K}$ であることに注意すると、ある $A \in \mathbb{K}$ が存在して

$$\begin{array}{c}
 x \\
 | \quad | \\
 \text{Diagram showing two parallel strands. The top strand has a loop and a crossing point. The bottom strand has a loop and a crossing point. Arrows indicate flow from left to right.} \\
 | \quad |
 \end{array}
 = A
 \begin{array}{c}
 | \\
 x
 \end{array}$$

が成り立つ。両辺のトレースをとることで $A = S_{xz} / \dim_{u \circ \theta}(x)$ と求まる。以上の考察から、

$$\text{Diagrammatic equation: } \text{Left side} = \frac{S_{xz}}{\dim_{u \circ \theta}(x)} \text{Right side}$$

が分かった。両辺のトレースをとることで、(1.4.1) の左辺のトレースが $S_{xy}S_{xz} / \dim_{u \circ \theta}(x)$ と求まった。

次に、(1.4.1) の右辺のトレースを計算すると

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(b_{y \otimes z} \circ b_{x, y \otimes z}) &= \sum_{w \in \mathrm{Simp}(\mathcal{C})} N_{yz}^w \mathrm{Tr}(b_{w, x} \circ b_{x, w}) \\ &= \sum_{w \in \mathrm{Simp}(\mathcal{C})} N_{yz}^w S_{xw} \end{aligned}$$

となる。よって示された。

(3)

$$h_x(y \star z) = h_x \left(\sum_{w \in \mathrm{Simp}(\mathcal{C})} N_{yz}^w w \right) := \sum_{w \in \mathrm{Simp}(\mathcal{C})} N_{yz}^w h_x(w)$$

として h_x を フュージョン環 $\mathbb{Z}^{\oplus \mathrm{Simp}(\mathcal{C})}$ 全体へ拡張する。このとき、(2) より

$$\begin{aligned} h_x(y \star z) &= \sum_{w \in \mathrm{Simp}(\mathcal{C})} N_{yz}^w h_x(w) \\ &= \sum_{w \in \mathrm{Simp}(\mathcal{C})} N_{yz}^w \frac{S_{xw}}{\dim_{u \circ \theta}(x)} \\ &= \frac{S_{xy}S_{xz}}{\dim_{u \circ \theta}(x)^2} \\ &= h_x(y)h_x(z) \end{aligned}$$

が成り立つ。 ■

1.5 加群圏

1.5.1 左/右加群圏

定義 1.32: 左/右加群圏

$(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r)$ をモノイダル圏とする。左 \mathcal{C} -加群圏 (left \mathcal{C} -module category) \mathcal{M} は、以下のデータからなる：

- 圈 \mathcal{M}
- 左加群積 (left module product) と呼ばれる関手 $a^{\blacktriangleright}: \mathcal{C} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$
- left actor と呼ばれる自然同型 $\{\alpha_{x,y,m}: (x \otimes y) \blacktriangleright m \rightarrow x \blacktriangleright (y \blacktriangleright m)\}_{x,y \in \text{Ob}(\mathcal{C}), m \in \text{Ob}(\mathcal{M})}$
- left unitor と呼ばれる自然同型 $\{\lambda_m: 1 \blacktriangleright m \rightarrow m\}_{m \in \text{Ob}(\mathcal{M})}$

これらは以下の条件を充たさねばならない：

(IMod-1) $\forall x, y, z \in \text{Ob}(\mathcal{C}), \forall m \in \text{Ob}(\mathcal{M})$ に対して以下の図式を可換にする：

$$\begin{array}{ccccc}
 & & ((x \otimes y) \otimes z) \blacktriangleright m & & \\
 & \swarrow a_{x,y,z} \blacktriangleright \text{Id}_m & & \searrow \alpha_{x \otimes y, z, m} & \\
 (x \otimes (y \otimes z)) \blacktriangleright m & & & & (x \otimes y) \blacktriangleright (z \blacktriangleright m) \\
 & \downarrow \alpha_{x, y \otimes z, m} & & & \downarrow \alpha_{x, y, z \blacktriangleright m} \\
 & & x \blacktriangleright ((y \otimes z) \blacktriangleright m) & & x \blacktriangleright (y \blacktriangleright (z \blacktriangleright m))
 \end{array}$$

(IMod-2) $\forall x \in \mathcal{C}, \forall m \in \mathcal{M}$ に対して以下の図式を可換にする：

$$\begin{array}{ccc}
 (x \otimes 1) \blacktriangleright m & \xrightarrow{\alpha_{x, 1, m}} & x \blacktriangleright (1 \blacktriangleright m) \\
 \searrow r_x \blacktriangleright \text{Id}_m & & \swarrow \text{Id}_x \blacktriangleright \lambda_m \\
 x \blacktriangleright m & &
 \end{array}$$

^a 記号として \oslash を使うこともある。LaTeX コマンドは `\oslash` である（参考：<https://ncatlab.org/nlab/show/action+of+a+monoidal+category>）。

$(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r)$ をモノイダル圏とする。右 \mathcal{C} -加群圏 \mathcal{M} は、以下のデータからなる：

- 圈 \mathcal{M}
- 右加群積 (right module product) と呼ばれる関手 $a^{\blacktriangleright}: \mathcal{C} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$

- **right actor** と呼ばれる自然同型 $\{\beta_{m,x,y}: m \blacktriangleleft (x \otimes y) \rightarrow (m \blacktriangleleft x) \blacktriangleleft y\}_{x,y \in \text{Ob}(\mathcal{C}), m \in \text{Ob}(\mathcal{M})}$
- **right unitor** と呼ばれる自然同型 $\{\rho_m: m \blacktriangleleft 1 \rightarrow m\}_{m \in \text{Ob}(\mathcal{M})}$

これらは以下の条件を充たさねばならない：

(rMod-1) $\forall x, y, z \in \text{Ob}(\mathcal{C}), \forall m \in \text{Ob}(\mathcal{M})$ に対して以下の図式を可換にする：

$$\begin{array}{ccccc}
 & m \blacktriangleleft (x \otimes (y \otimes z)) & & & \\
 & \swarrow \text{Id}_m \blacktriangleleft a_{x,y,z} & & \searrow \beta_{m,x,y \otimes z} & \\
 m \blacktriangleleft ((x \otimes y) \otimes z) & & & & ((m \blacktriangleleft x) \blacktriangleleft y) \blacktriangleleft z \\
 & \searrow \beta_{m,x \otimes y,z} & & \nearrow \beta_{m,x,y} \blacktriangleleft \text{Id}_z & \\
 & (m \blacktriangleleft (x \otimes y)) \blacktriangleleft z & & &
 \end{array}$$

(rMod-2) $\forall x \in \mathcal{C}, \forall m \in \mathcal{M}$ に対して以下の図式を可換にする：

$$\begin{array}{ccc}
 m \blacktriangleleft (1 \otimes x) & \xrightarrow{\beta_{m,1,x}} & (m \blacktriangleleft 1) \blacktriangleleft x \\
 & \searrow \text{Id}_m \blacktriangleleft l_x & \nearrow \rho_m \blacktriangleleft \text{Id}_x \\
 & m \blacktriangleleft x &
 \end{array}$$

^a 記号として \oslash を使うこともある (参考：<https://ncatlab.org/nlab/show/action+of+a+monoidal+category>).

\mathcal{C} が多重テンソル圏である場合は、左/右加群積が射について \mathbb{K} -双線形であること、および両方の引数について完全関手になっていることを要請する^{*9}.

定義 1.33: 加群関手

$(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r)$ をモノイダル圏、 $(\mathcal{M}_i, \blacktriangleright_i, \alpha_i, \lambda_i)$ w/ $i = 1, 2$ を左 \mathcal{C} -加群圏とする。左 \mathcal{C} -加群関手 (left \mathcal{C} -module functor) は、以下のデータからなる：

- 関手 $F: \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$
- 自然同型 $\{s_{x,m}: F(x \blacktriangleright_1 m) \rightarrow x \blacktriangleright_2 F(m)\}_{x \in \text{Ob}(\mathcal{C}), m \in \text{Ob}(\mathcal{M}_1)}$

これらは以下の条件を充たさねばならない：

(pentagon identity) $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C}), \forall m \in \text{Ob}(\mathcal{M}_1)$ に対して以下の図式を可換にする：

^{*9} 実際には、第 1/第 2 引数について完全になっていさえいれば残りの引数についても自動的に完全になる [?, EXERCISE7.3.2, p.135]

$$\begin{array}{ccccc}
& & F((x \otimes y) \blacktriangleright_1 m) & & \\
& \swarrow F(\alpha_{1x,y,m}) & & \searrow s_{x \otimes y, m} & \\
F(x \blacktriangleright_1 (y \blacktriangleright_1 m)) & & & & (x \otimes y) \blacktriangleright_2 F(m) \\
& \searrow s_{x,y \blacktriangleright_1 m} & & & \downarrow \alpha_{2x,y,F(m)} \\
& & x \blacktriangleright_2 (y \blacktriangleright_2 F(m)) & & \\
& \nearrow \text{Id}_{x \blacktriangleright_2 s_{y,m}} & & & \\
& & x \blacktriangleright_2 F(y \blacktriangleright_1 m) & &
\end{array}$$

(triangle identity) $\forall m \in \mathcal{M}_1$ に対して以下の図式を可換にする：

$$\begin{array}{ccc}
F(1 \blacktriangleright_1 m) & \xrightarrow{s_{1,m}} & 1 \blacktriangleright_2 F(m) \\
& \searrow F(\lambda_{1m}) & \swarrow \lambda_{2F(m)} \\
& F(m) &
\end{array}$$

$(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r)$ をモノイダル圏, $(\mathcal{M}_i, \blacktriangleleft_i, \beta_i, \rho_i)$ w/ $i = 1, 2$ を右 \mathcal{C} -加群圏とする。右 \mathcal{C} -加群関手 (right \mathcal{C} -module functor) は、以下のデータからなる：

- 関手 $F: \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$
- 自然同型 $\{t_{m,x}: F(m \blacktriangleleft_1 x) \longrightarrow F(m) \blacktriangleleft_2 x\}_{x \in \text{Ob}(\mathcal{C}), m \in \text{Ob}(\mathcal{M}_1)}$

これらは以下の条件を充たさねばならない：

(pentagon identity) $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C}), \forall m \in \text{Ob}(\mathcal{M}_1)$ に対して以下の図式を可換にする：

$$\begin{array}{ccccc}
& & F(m \blacktriangleleft_1 (x \otimes y)) & & \\
& \swarrow F(\beta_{1m,x,y}) & & \searrow t_{m,x \otimes y} & \\
F((m \blacktriangleleft_1 x) \blacktriangleleft_1 y) & & & & F(m) \blacktriangleleft_2 (x \otimes y) \\
& \searrow t_{m \blacktriangleleft_1 x,y} & & & \downarrow \beta_{2F(m),x,y} \\
& & & & (F(m) \blacktriangleleft_2 x) \blacktriangleleft_2 y \\
& \nearrow t_{m \blacktriangleleft_1 x,y} & & \swarrow t_{m,x \blacktriangleleft_2 \text{Id}_y} & \\
& & F(m \blacktriangleleft_1 x) \blacktriangleleft_2 y & &
\end{array}$$

(triangle identity) $\forall m \in \mathcal{M}_1$ に対して以下の図式を可換にする：

$$\begin{array}{ccc}
 F(m \blacktriangleleft_1 1) & \xrightarrow{t_{m,1}} & F(m) \blacktriangleleft_2 1 \\
 & \searrow F(\rho_{1,m}) & \swarrow \rho_{2,F(m)} \\
 & F(m) &
 \end{array}$$

定義 1.34: 加群圏の自然変換

$(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r)$ をモノイダル圏, $(\mathcal{M}_i, \blacktriangleright_i, \alpha_i, \lambda_i) \text{ w/ } i = 1, 2$ を左 \mathcal{C} -加群圏, $(F_i: \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2, s_i) \text{ w/ } i = 1, 2$ を左 \mathcal{C} -加群関手とする。このとき, 自然変換

$$\begin{array}{ccc}
 & F_1 & \\
 \mathcal{M}_1 & \begin{array}{c} \nearrow \\ \tau \\ \searrow \end{array} & \mathcal{M}_2 \\
 & F_2 &
 \end{array}$$

が左 \mathcal{C} -加群圏の自然変換であるとは, $\forall x \in \mathcal{C}, \forall m \in \mathcal{M}_1$ に対して以下の図式が可換になること：

(左加群積の保存)

$$\begin{array}{ccc}
 F_1(x \blacktriangleright_1 m) & \xrightarrow{s_{1x,m}} & x \blacktriangleright_2 F_1(m) \\
 \tau_{x \blacktriangleright_1 m} \downarrow & & \downarrow \text{Id}_x \blacktriangleright_2 \tau_m \\
 F_2(x \blacktriangleright_1 m) & \xrightarrow{s_{2x,m}} & x \blacktriangleright_2 F_2(m)
 \end{array}$$

$(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r)$ をモノイダル圏, $(\mathcal{M}_i, \blacktriangleleft_i, \beta_i, \rho_i) \text{ w/ } i = 1, 2$ を右 \mathcal{C} -加群圏, $(F_i: \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2, t_i) \text{ w/ } i = 1, 2$ を右 \mathcal{C} -加群関手とする。このとき, 自然変換

$$\begin{array}{ccc}
 & F_1 & \\
 \mathcal{M}_1 & \begin{array}{c} \nearrow \\ \tau \\ \searrow \end{array} & \mathcal{M}_2 \\
 & F_2 &
 \end{array}$$

が右 \mathcal{C} -加群圏の自然変換であるとは, $\forall x \in \mathcal{C}, \forall m \in \mathcal{M}_1$ に対して以下の図式が可換になること：

(右加群積の保存)

$$\begin{array}{ccc}
 F_1(m \blacktriangleleft_1 x) & \xrightarrow{t_{1m,x}} & F_1(m) \blacktriangleleft_2 x \\
 \tau_{m \blacktriangleleft_1 x} \downarrow & & \downarrow \tau_m \blacktriangleleft_2 \text{Id}_x \\
 F_2(m \blacktriangleleft_1 x) & \xrightarrow{t_{2m,x}} & F_2(m) \blacktriangleright_2 x
 \end{array}$$

定義 1.35: 加群圏の完全性

十分射影的対象を持つ多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ を与える。局所有限な左 \mathcal{C} -加群圏 $(\mathcal{M}, \blacktriangleright, \alpha, \lambda)$ が完全 (exact) であるとは、任意の射影的対象 $p \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ および任意の対象 $m \in \mathcal{M}$ に対して $p \blacktriangleright m$ が \mathcal{M} の射影的対象になることを言う。

1.5.2 両側加群圏

定義 1.36: 両側加群圏

$(\mathcal{C}_i, \otimes_i, 1, a_i, l_i, r_i)$ w/ $i = 1, 2$ をモノイダル圏とする。 $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ -両側加群圏 $((\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)\text{-bimodule category}) \mathcal{M}$ は、以下のデータからなる：

- 圏 \mathcal{M}
- 左加群積と呼ばれる関手 $\blacktriangleright: \mathcal{C}_1 \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$
- 右加群積と呼ばれる関手 $\blacktriangleleft: \mathcal{M} \times \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{M}$
- left actor と呼ばれる自然同型

$$\{\alpha_{x_1, y_1, m}: (x_1 \otimes y_1) \blacktriangleright m \rightarrow x_1 \blacktriangleright (y_1 \blacktriangleright m)\}_{x_1, y_1 \in \text{Ob}(\mathcal{C}_1), m \in \text{Ob}(\mathcal{M})}$$

- left unitor と呼ばれる自然同型 $\{\lambda_m: 1 \blacktriangleright m \rightarrow m\}_{m \in \text{Ob}(\mathcal{M})}$
- right actor と呼ばれる自然同型

$$\{\beta_{m, x_2, y_2}: m \blacktriangleleft (x_2 \otimes y_2) \rightarrow (m \blacktriangleleft x_2) \blacktriangleleft y_2\}_{x_2, y_2 \in \text{Ob}(\mathcal{C}_2), m \in \text{Ob}(\mathcal{M})}$$

- right unitor と呼ばれる自然同型 $\{\rho_m: m \blacktriangleleft 1 \rightarrow m\}_{m \in \text{Ob}(\mathcal{M})}$
- middle actor と呼ばれる自然同型

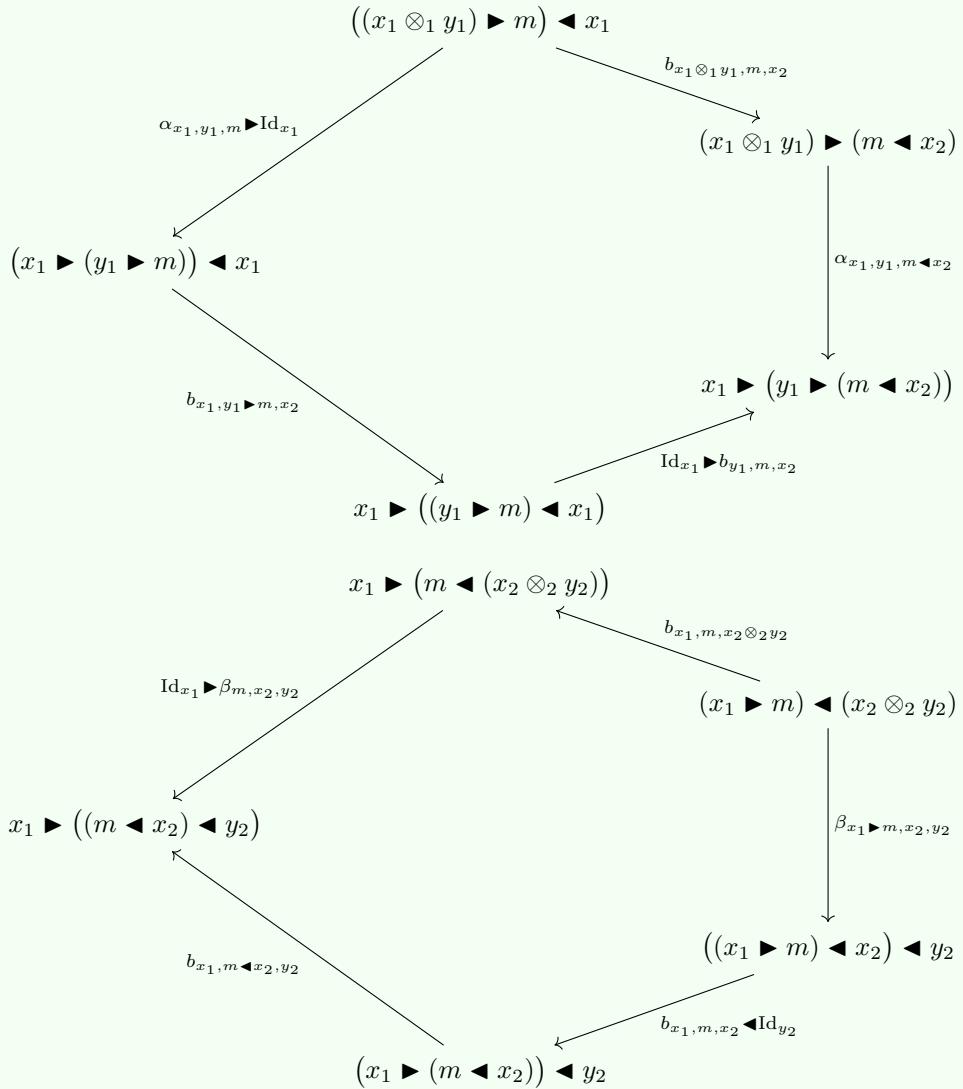
$$\{b_{x_1, m, x_2}: (x_1 \blacktriangleright m) \blacktriangleleft x_2 \rightarrow x_1 \blacktriangleright (m \blacktriangleleft x_2)\}_{x_1 \in \text{Ob}(\mathcal{C}_1), x_2 \in \text{Ob}(\mathcal{C}_2), m \in \text{Ob}(\mathcal{M})}$$

これらは以下の条件を充たさねばならない：

(Bimod-1) 組 $(\mathcal{M}, \blacktriangleright, \alpha, \lambda)$ は左 \mathcal{C}_1 -加群圏である。

(Bimod-2) 組 $(\mathcal{M}, \blacktriangleleft, \beta, \rho)$ は右 \mathcal{C}_2 -加群圏である。

(Bimod-3) $\forall x_i, y_i \in \text{Ob}(\mathcal{C}_i), \forall m \in \text{Ob}(\mathcal{M})$ に対して以下の図式を可換にする：



定義 1.37: 兩側加群関手

$(\mathcal{C}_i, \otimes_i, 1, a_i, l_i, r_i)$ ($i = 1, 2$) をモノイダル圏とし、 $(\mathcal{M}_i; \blacktriangleright_i, \blacktriangleleft_i; \alpha_i, \beta_i, b_i; \lambda_i, \rho_i)$ ($i = 1, 2$) を $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ -兩側加群圏とする。兩側加群関手 (bimodule functor) とは、以下のデータからなる：

- 関手 $F: \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$
- 自然同型 $\{s_{x_1, m}: F(x_1 \blacktriangleright_1 m) \longrightarrow x_1 \blacktriangleright_2 F(m)\}_{x_1 \in \text{Ob}(\mathcal{C}_1), m \in \text{Ob}(\mathcal{M})}$
- 自然同型 $\{t_{m, x_2}: F(m \blacktriangleleft_1 x_2) \longrightarrow F(m) \blacktriangleleft_2 x_2\}_{x_2 \in \text{Ob}(\mathcal{C}_2), m \in \text{Ob}(\mathcal{M})}$

これらは以下の条件を充たさねばならない：

- (左加群関手) 2つ組み $(F, \{s_{x_1, m}\}_{x_1 \in \text{Ob}(\mathcal{C}_1), m \in \text{Ob}(\mathcal{M})})$ は左 \mathcal{C}_1 -加群関手である。
 (右加群関手) 2つ組み $(F, \{t_{m, x_2}\}_{x_2 \in \text{Ob}(\mathcal{C}_2), m \in \text{Ob}(\mathcal{M})})$ は右 \mathcal{C}_2 -加群関手である。

(middle actor に関する hexagon identity) $\forall x_1 \in \text{Ob}(\mathcal{C}_1), \forall m \in \text{Ob}(\mathcal{M}), \forall x_2 \in \mathcal{C}_2$ に対して以下の図式を可換にする：

$$\begin{array}{ccccc}
& & F((x_1 \blacktriangleright_1 m) \blacktriangleleft_1 x_2) & & \\
F(b_{1x_1, m, x_2}) \swarrow & & & \searrow t_{x_1 \blacktriangleright_1 m, x_2} & \\
F(x_1 \blacktriangleright_1 (m \blacktriangleleft_1 x_2)) & & & & F(x_1 \blacktriangleright_1 m) \blacktriangleleft_2 x_2 \\
\downarrow s_{x_1, m \blacktriangleleft_1 x_2} & & & & \downarrow s_{x_1, m \blacktriangleleft_2 \text{Id}_{x_2}} \\
x_1 \blacktriangleright_2 F(m \blacktriangleleft_1 x_2) & & & & (x_1 \blacktriangleright_2 F(m)) \blacktriangleleft_2 x_2 \\
\downarrow \text{Id}_{x_1 \blacktriangleright_2 t_{m, x_1}} & & & & \downarrow b_{2x_1, F(m), x_2} \\
x_1 \blacktriangleright_2 (F(m) \blacktriangleleft_2 x_2) & & & &
\end{array}$$

1.5.3 テンソル圏における代数対象と加群対象

定義 1.38: 代数対象

多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ を与える。 \mathcal{C} の**代数対象** (algebra object) x とは、以下のデータからなる：

- \mathcal{C} の対象 $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$
- 乗法 (multiplication) と呼ばれる \mathcal{C} の射 $\mu: x \otimes x \rightarrow x$
- 単位 (unit) と呼ばれる \mathcal{C} の射 $v: 1 \rightarrow x$

これらは以下の条件を充たさねばならない：

(associativity)

$$\begin{array}{ccccc}
& & (x \otimes x) \otimes x & & \\
& \nearrow \mu \otimes \text{Id}_x & & \searrow a_{x, x, x} & \\
x \otimes x & & & & x \otimes (x \otimes x) \\
& \searrow \mu & & \downarrow \text{Id}_x \otimes \mu & \\
& & x & & x \otimes x
\end{array}$$

(unitality)

$$\begin{array}{ccc} 1 \otimes x & \xrightarrow{l_x} & x \\ v \otimes \text{Id}_x \downarrow & & \downarrow \text{Id}_x \\ x \otimes x & \xrightarrow{\mu} & x \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} x \otimes 1 & \xrightarrow{r_x} & x \\ \text{Id}_x \otimes v \downarrow & & \downarrow \text{Id}_x \\ x \otimes x & \xrightarrow{\mu} & x \end{array}$$

多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ を与える。 \mathcal{C} の余代数対象 (coalgebra object) y とは、以下のデータからなる：

- \mathcal{C} の対象 $y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$
- 余乗法 (comultiplication) と呼ばれる \mathcal{C} の射 $\Delta: y \longrightarrow y \otimes y$
- 余単位 (counit) と呼ばれる \mathcal{C} の射 $\epsilon: y \longrightarrow 1$

これらは以下の条件を充たさねばならない：

(coassociativity)

$$\begin{array}{ccccc} & & (y \otimes y) \otimes y & & \\ & \swarrow \Delta \otimes \text{Id}_y & & \searrow a_{y,y,y} & \\ y \otimes y & & & & y \otimes (y \otimes y) \\ & \nwarrow \Delta & & & \uparrow \text{Id}_y \otimes \Delta \\ & & y & & y \otimes y \end{array}$$

(unitality)

$$\begin{array}{ccc} 1 \otimes y & \xleftarrow{l_y} & y \\ \epsilon \otimes \text{Id}_y \uparrow & & \uparrow \text{Id}_y \\ y \otimes y & \xleftarrow{\Delta} & y \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & y \otimes 1 & \\
 & \xleftarrow{r_y} & y \\
 \text{Id}_y \otimes \epsilon \uparrow & & \uparrow \text{Id}_y \\
 y \otimes y & \xleftarrow{\Delta} & y
 \end{array}$$

ストリング図式で代数対象 (x, μ, v) の (associativity), (unitality) を書くと、それぞれ

$$\begin{array}{c}
 \text{Associativity: } \begin{array}{ccc}
 \text{String diagram: } & & \\
 \begin{array}{c} x \\ | \\ x \xrightarrow{\mu} x \\ | \\ x \xrightarrow{\mu} x \end{array} & = & \begin{array}{c} x \\ | \\ x \xrightarrow{\mu} x \\ | \\ x \xrightarrow{\mu} x \end{array}
 \end{array} \\
 \text{Unitality: } \begin{array}{ccc}
 \text{String diagram: } & & \\
 \begin{array}{c} x \\ | \\ x \xrightarrow{\mu} x \\ | \\ v \end{array} & = & \begin{array}{c} x \\ | \\ x \xrightarrow{\mu} x \\ | \\ v \end{array} = \begin{array}{c} x \\ | \\ \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

となり、余代数対象 (y, Δ, ϵ) の (associativity), (unitality) を書くと

$$\begin{array}{c}
 \text{Associativity: } \begin{array}{ccc}
 \text{String diagram: } & & \\
 \begin{array}{c} y \\ \diagup \quad \diagdown \\ \Delta \bullet \quad y \\ \diagdown \quad \diagup \\ y \quad \Delta \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ y \end{array} & = & \begin{array}{c} y \\ \diagup \quad \diagdown \\ y \quad \Delta \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \Delta \bullet \quad y \\ \diagup \quad \diagdown \\ y \end{array}
 \end{array} \\
 \text{Unitality: } \begin{array}{ccc}
 \text{String diagram: } & & \\
 \begin{array}{c} \epsilon \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ y \\ \Delta \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ y \end{array} & = & \begin{array}{c} y \\ \diagup \quad \diagdown \\ \Delta \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \epsilon \bullet \\ y \end{array} = \begin{array}{c} y \\ | \\ \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

となる。

定義 1.39: 加群対象

多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ および \mathcal{C} の代数対象 (x, μ, v) を与える。

\mathcal{C} における、左 x -加群対象 (right x -module object) m とは、以下のデータからなる：

- \mathcal{C} の対象 $m \in \text{Ob}(\mathcal{C})$
- 左作用 (right action) と呼ばれる \mathcal{C} の射 $\lambda: x \otimes m \longrightarrow m$

これらは以下の条件を充たさねばならない：

(associativity)

$$\begin{array}{ccccc}
 & & x \otimes (x \otimes m) & & \\
 & \swarrow \text{Id}_x \otimes \lambda & & \searrow a_{x,x,m}^{-1} & \\
 x \otimes m & & & & (x \otimes x) \otimes m \\
 & \nwarrow \lambda & & & \downarrow \mu \otimes \text{Id}_m \\
 & & m & \nearrow \lambda & x \otimes m
 \end{array}$$

(unitarity)

$$\begin{array}{ccc}
 1 \otimes m & \xrightarrow{l_m} & m \\
 v \otimes \text{Id}_m \downarrow & & \downarrow \text{Id}_m \\
 x \otimes m & \xrightarrow{\lambda} & m
 \end{array}$$

多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ および \mathcal{C} の代数対象 (x, μ, v) を与える。
 \mathcal{C} における、右 x -加群対象 (right x -module object) m とは、以下のデータからなる：

- \mathcal{C} の対象 $m \in \text{Ob}(\mathcal{C})$
- 右作用 (right action) と呼ばれる \mathcal{C} の射 $\rho: m \otimes x \longrightarrow m$

これらは以下の条件を充たさねばならない：

(associativity)

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (m \otimes x) \otimes x & & \\
 & \swarrow \rho \otimes \text{Id}_x & & \searrow a_{m,x,x} & \\
 m \otimes x & & & & m \otimes (x \otimes x) \\
 & \nwarrow \rho & & & \downarrow \text{Id}_x \otimes \rho \\
 & & m & \nearrow \rho & m \otimes x
 \end{array}$$

(unitarity)

$$\begin{array}{ccc} m \otimes 1 & \xrightarrow{r_m} & m \\ \downarrow \text{Id}_m \otimes v & & \downarrow \text{Id}_m \\ m \otimes x & \xrightarrow{\rho} & m \end{array}$$

定義 1.40: 代数および加群の準同型

多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ および \mathcal{C} の 2 つの**代数対象** (x_i, μ_i, v_i) w/ $i = 1, 2$ を与える.

このとき, \mathcal{C} の射 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x_1, x_2)$ が**代数準同型** (algebra homomorphism) であるとは, 以下の条件を充たすこと言う:

(乗法の保存)

$$\begin{array}{ccc} x_1 \otimes x_1 & \xrightarrow{f \otimes f} & x_2 \otimes x_2 \\ \downarrow \mu_1 & & \downarrow \mu_2 \\ x_1 & \xrightarrow{f} & x_2 \end{array}$$

(単位の保存)

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{v_1} & A_1 \\ & \searrow v_2 & \swarrow f \\ & A_2 & \end{array}$$

- **多重テンソル圏** $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$
- \mathcal{C} の**代数対象** (x, μ, v)
- \mathcal{C} の 2 つの**左 x -加群対象** (m_i, λ_i) w/ $i = 1, 2$

を与える.

このとき, \mathcal{C} の射 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(m_1, m_2)$ が**左 x -加群準同型** (left x -module homomorphism) であるとは, 以下の条件を充たすこと言う:

(左作用の保存)

$$\begin{array}{ccc} x \otimes m_1 & \xrightarrow{\text{Id}_x \otimes f} & x \otimes m_2 \\ \downarrow \lambda_1 & & \downarrow \lambda_2 \\ x_1 & \xrightarrow{f} & x_2 \end{array}$$

しばらくの間 **多重テンソル圏** $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ および \mathcal{C} の**代数対象** (x, μ, v) を 1 つ固定する.

2つの左 x -加群対象 $(m_i, \lambda_i) \quad i = 1, 2$ の間の左 x -加群の準同型全体がなす集合を $\mathbf{Hom}_x(m_1, m_2) \subset \text{Hom}_{\mathcal{C}}(m_1, m_2)$ と書くと、これは部分 \mathbb{K} -ベクトル空間をなす。さらに準同型の合成は準同型であるから、アーベル圏 $x\text{-}\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}}$ を次のようにして構成することができる：

- \mathcal{C} における左 x -加群対象を対象とする。
- 左 x -加群の準同型を射とする。

同様にして \mathcal{C} における右 x -加群対象がなす圏 $\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x}$ を定義できる。

左加群圏と $\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x}$ の間には関係がある。今、 \mathcal{C} における任意の右 x -加群対象 (m, ρ) および \mathcal{C} の任意の対象 $y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を与える。すると、 $y \otimes m \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ と

$$\rho_{y \otimes m}: (y \otimes m) \otimes x \xrightarrow{a_{y, m, x}} y \otimes (m \otimes x) \xrightarrow{\text{Id}_y \otimes \rho} y \otimes m$$

の組み $(y \otimes m, \rho_{y \otimes m})$ は右 x -加群になる。i.e. $(y \otimes m, \rho_{y \otimes m}) \in \text{Ob}(\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x})$ である。この構成により関手

$$\blacktriangleright: \mathcal{C} \times \mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x} \longrightarrow \mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x} \quad (1.5.1)$$

が定義できる。さらに、 \mathcal{C} が元々持っていた associator と unitors に関しては、 $\forall (m, \rho) \in \text{Ob}(\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x}), \forall y, z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$\begin{aligned} a_{y, z, m}: (y \otimes z) \blacktriangleright m &\longrightarrow y \blacktriangleright (z \blacktriangleright m) \\ l_y: 1 \blacktriangleright m &\longrightarrow m \end{aligned}$$

が自然な^{*10}右 x -加群の同型になる。

命題 1.12: $\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x}$ は左加群圏

多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ および \mathcal{C} の代数対象 (x, μ, v) を 1 つ与える。

このとき、組み^a $(\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x}, \blacktriangleright, a, l)$ は左 \mathcal{C} -加群圏である。

^a $\blacktriangleright: \mathcal{C} \times \mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x} \longrightarrow \mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x}$ は (1.5.1) で定義した関手である。

証明 $\forall y, z, w \in \text{Ob}(\mathcal{C}), \forall (m, \rho) \in \text{Ob}(\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x})$ に対して (IMOD-1), (IMOD-2) が成り立つことを示せば良い。 ■

^{*10} $a := \{a_{y, z, m}\}_{y, z \in \text{Ob}(\mathcal{C}), m \in \text{Ob}(\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x})}$ が自然同型。

定義 1.41: 代数上のテンソル積

- 多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ および \mathcal{C} の代数対象 (x, μ, v)
- \mathcal{C} における右 x -加群対象 $(m, \rho) \in \text{Ob}(\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x})$
- \mathcal{C} における左 x -加群対象 $(n, \lambda) \in \text{Ob}(\mathbf{Mod}-\mathcal{C}x)$

を与える。このとき、 m と n の x 上のテンソル積 (tensor product over x) $m \otimes_x n \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を、以下の図式のコイコライザとして定義する：

$$m \otimes x \otimes n \xrightarrow[\text{Id}_m \otimes \lambda]{\rho \otimes \text{Id}_n} m \otimes n \xrightarrow{\pi} m \otimes_x n$$

1.5.4 テンソル圏における両側加群対象

定義 1.42: 両側加群

多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ および \mathcal{C} の 2 つの代数対象 (x_i, μ_i, v_i) を与える。 \mathcal{C} における (x_1, x_2) -両側加群対象 $((x_1, x_2)\text{-bimodule object})$ とは、以下のデータからなる：

- \mathcal{C} の対象 $m \in \text{Ob}(\mathcal{C})$
- 左作用 (left action) と呼ばれる \mathcal{C} の射 $\lambda: x_1 \otimes m \longrightarrow m$
- 右作用 (right action) と呼ばれる \mathcal{C} の射 $\rho: m \otimes x_2 \longrightarrow m$

これらは以下の条件を充たさねばならない：

(bimod-1) 組 (m, λ) は \mathcal{C} の左 x_1 -加群対象

(bimod-2) 組 (m, ρ) は \mathcal{C} の右 x_2 -加群対象

(bimod-3) 以下の図式を可換にする：

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (x_1 \otimes m) \otimes x_2 & & \\
 & \swarrow \lambda \otimes \text{Id}_{x_2} & & \searrow a_{x_1, m, x_2} & \\
 m \otimes x_2 & & & & x_1 \otimes (m \otimes x_2) \\
 & \searrow \rho & & \downarrow \text{Id}_{x_1} \otimes \rho & \\
 & & m & \nearrow \lambda &
 \end{array}$$

定義 1.43: 両側加群の準同型

- 多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ および \mathcal{C} の 2 つの代数対象 (x_i, μ_i, v_i)
- 2 つの (x_1, x_2) -両側加群対象 $(m_i, \lambda_i, \rho_i) \text{ w/ } i = 1, 2$

を与える。このとき、 \mathcal{C} の射 $f: m_1 \rightarrow m_2$ が (x_1, x_2) 両側加群の準同型であるとは、それが左 x_1 -加群の準同型かつ右 x_2 -加群の準同型であることを言う。

しばらくの間 多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ および \mathcal{C} の 2 つの代数対象 (x_i, μ_i, v_i) を固定する。

2 つの (x_1, x_2) -両側加群対象 $(m_i, \lambda_i, \rho_i) \text{ w/ } i = 1, 2$ の間の (x_1, x_2) -両側加群の準同型全体がなす集合を $\text{Hom}_{x_1-x_2}(m_1, m_2) \subset \text{Hom}_{\mathcal{C}}(m_1, m_2)$ と書くと、これは部分 \mathbb{K} -ベクトル空間をなす。さらに準同型の合成は準同型であるから、アーベル圏 $\mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(x_1, x_2)$ を次のようにして構成することができる：

- \mathcal{C} における (x_1, x_2) -加群対象を対象とする。
- (x_1, x_2) -両側加群の準同型を射とする。

同様にして \mathcal{C} における右 x -加群対象がなす圏 $\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}-x}$ を定義できる。

補題 1.13: 両側加群のテンソル積

- 多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ および \mathcal{C} の 4 つの代数対象 $(x_i, \mu_i, v_i) \text{ w/ } i = 1, \dots, 4$
- (x_1, x_2) -両側加群対象 $(m_1, \lambda_1, \rho_1) \in \text{Ob}(\mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(x_1, x_2))$
- (x_2, x_3) -両側加群対象 $(m_2, \lambda_2, \rho_2) \in \text{Ob}(\mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(x_2, x_3))$
- (x_3, x_4) -両側加群対象 $(m_3, \lambda_3, \rho_3) \in \text{Ob}(\mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(x_3, x_4))$

を与える。このとき以下が成り立つ：

- $m_1 \otimes_{x_2} m_2$ は自然な (x_1, x_3) -両側加群対象の構造を持つ。
- 自然な (x_1, x_4) -両側加群の同型

$$\begin{aligned}\bar{a}_{m_1, m_2, m_3}: (m_1 \otimes_{x_2} m_2) \otimes_{x_3} m_3 &\xrightarrow{\cong} m_1 \otimes_{x_2} (m_2 \otimes_{x_3} m_3) \\ \bar{l}_{m_1}: x_1 \otimes_{x_1} m_1 &\xrightarrow{\cong} m_1 \\ \bar{r}_{m_1}: m_1 \otimes_{x_2} x_2 &\xrightarrow{\cong} m_1\end{aligned}$$

が存在する。

証明 (1)

\mathcal{C} の任意の代数対象 (x, μ, v) について、明らかに $(x, \mu, \mu) \in \mathbf{Bimod}_{\mathcal{C}}(x, x)$ である。 ■

定義 1.44: 分離可能性

テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ の代数対象 (x, μ, v) が分離可能 (separable) であるとは、ある (x, x) -両側加群の準同型 $\bar{\mu}: x \rightarrow x \otimes x$ が存在して $\mu \circ \bar{\mu} = \text{Id}_x$ を充たすことを言う^a.

^a 補題 1.13-(1) によって $x \otimes x$ を (x, x) -両側加群対象と見做す。

分離可能性をストリング図式で表すと

$$=$$

となる。

命題 1.13: 分離可能性と半単純性

フュージョン圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ の代数対象 (x, μ, v) を与える。このときもし (x, μ, v) が分離可能ならば、アーベル圏 $\text{Mod}_{\mathcal{C}-x}$ は半単純である。

証明 [?, PROPOSITION7.8.30, p.146] ■

定義 1.45: 可換代数

組紐付き多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R, b)$ を与える。このとき \mathcal{C} の代数対象 (x, μ, v) が可換 (commutative) であるとは、 $\mu \circ b_{x,x} = m$ が成り立つことを言う。

可換性をストリング図式で表すと

$$=$$

となる。

1.5.5 森田同値

定義 1.46: 森田同値

多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ を与える。

\mathcal{C} の 2 つの代数対象 (x_i, μ_i, v_i) w/ $i = 1, 2$ が森田同値 (Morita equivalent) であるとは、左 \mathcal{C} -加群圏として $x_1\text{-Mod}_{\mathcal{C}}$ と $x_2\text{-Mod}_{\mathcal{C}}$ が圏同値であることを言う。

1.5.6 Frobenius 代数

定義 1.47: Frobenius 代数

多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ を与える。

\mathcal{C} の代数対象 (x, μ, ϵ) が Frobenius 代数 (Frobenius algebra) であるとは、

- 余乗法 (comultiplication) と呼ばれる \mathcal{C} の射 $\Delta: x \longrightarrow x \otimes x$
- 余単位 (counit) と呼ばれる \mathcal{C} の射 $\epsilon: x \longrightarrow 1$

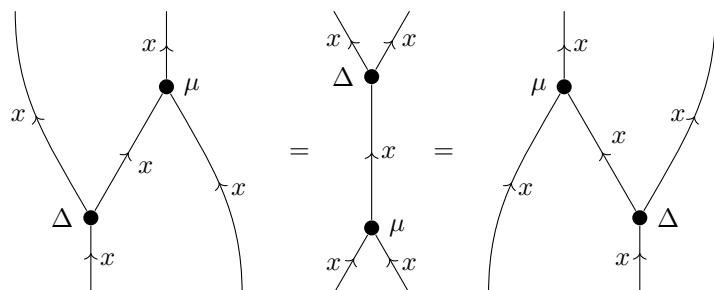
が存在して以下を充たすことを言う：

(Frob-1) (x, Δ, ϵ) は \mathcal{C} の余代数対象である。

(Frob-2) 以下の図式を可換にする：

$$\begin{array}{ccccc}
 & & x \otimes x & & \\
 & \swarrow \Delta \otimes \text{Id}_x & \downarrow \mu & \searrow \text{Id}_x \otimes \Delta & \\
 x \otimes x \otimes x & & x & & x \otimes x \otimes x \\
 & \searrow \text{Id}_x \otimes \mu & \downarrow \Delta & \swarrow \mu \otimes \text{Id}_x & \\
 & & x \otimes x & &
 \end{array}$$

ストリング図式で **(Frob-2)** を書くと次のようになる：



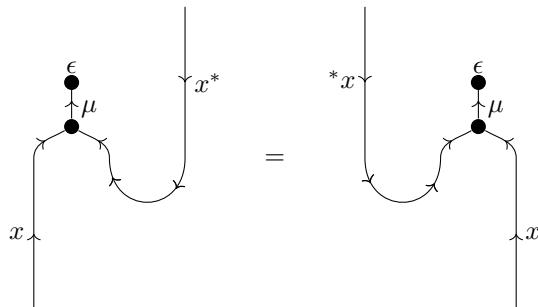
定義 1.48: 対称 Frobenius 代数

多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ を与える。

\mathcal{C} の Frobenius 代数 $(x, \mu, \nu, \Delta, \epsilon)$ が対称 (symmetric) であるとは、以下の図式を可換にすることを言う：

$$\begin{array}{ccc}
 x & \xrightarrow{\text{coev}_x^R \otimes \text{Id}_x} & {}^*x \otimes x \otimes x \\
 \downarrow \text{Id}_x \otimes \text{coev}_x^L & & \downarrow \text{Id}_{x^*} \otimes \mu \\
 x \otimes x \otimes x^* & & {}^*x \otimes x \\
 \downarrow \mu \otimes \text{Id}_{x^*} & & \downarrow \text{Id}_{x^*} \otimes \epsilon \\
 x \otimes x^* & \xrightarrow{\epsilon \otimes \text{Id}_{x^*}} & {}^*x
 \end{array}$$

ストリング図式では



となる。

定義 1.49: 特殊 Frobenius 代数

多重テンソル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ を与える。

\mathcal{C} の Frobenius 代数 $(x, \mu, \nu, \Delta, \epsilon)$ が特殊 (special) であるとは、 \mathcal{C} の代数対象 (x, μ, ν) が余積 $\Delta: x \rightarrow x \otimes x$ によって分離可能であることを言う^a。i.e. $\mu \circ \Delta = \text{Id}_x$ が成り立つこと。

^a これは [?, p.17] に倣った定義である。ある $\beta_x, \beta_1 \in \mathbb{K}^\times$ が存在して $\mu \circ \Delta = \beta_x \text{Id}_x$, $\epsilon \circ \nu = \beta_1 \text{Id}_1$ が成り立つことを、special Frobenius algebra の定義とする場合もある [?, Definition 3.4-(i)]

1.5.7 加群圏における internal hom

定義 1.50: 加群圏における internal hom

$(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r)$ をモノイダル圏とする。左 \mathcal{C} -加群圏 $(\mathcal{M}, \blacktriangleright, \alpha, \lambda)$ を与える。 \mathcal{M} の internal hom とは、以下のデータの組のこと：

- 関手

$$-\circ: \mathcal{M}^{\text{op}} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$$

- currying と呼ばれる自然同型

$$\{c_{x, m_1, m_2}: \text{Hom}(x \blacktriangleright m_1, m_2) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}(x, m_1 -\circ m_2)\}_{x \in \text{Ob}(\mathcal{C}), Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

1.6 Drinfeld 中心

定義 1.51: Drinfeld 中心

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r)$ の Drinfeld センター (Drinfeld center) とは、以下のようにして構成される $(1, 1)$ -圏 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ のこと：

- $Z \in \mathcal{C}$ と自然同型 $\gamma_Z = \{\gamma_{Z,x}: x \otimes Z \xrightarrow{\cong} Z \otimes x\}_{x \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$ の 2 つ組 (Z, γ_Z) を対象に持つ。ただし、 γ_Z は $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して以下の図式を可換にしなくてはいけない：
(Half-braiding)

$$\begin{array}{ccc} (x \otimes y) \otimes Z & \xrightarrow{a_{x,y,Z}} & x \otimes (y \otimes z) \xrightarrow{\text{Id}_x \otimes \gamma_{Z,y}} x \otimes (Z \otimes y) \\ \downarrow \gamma_{Z,x \otimes y} & & \downarrow a_{x,Z,y}^{-1} \\ Z \otimes (x \otimes y) & \xleftarrow{a_{Z,x,y}} & (Z \otimes x) \otimes y \xleftarrow{\gamma_{Z,x} \otimes \text{Id}_y} (x \otimes Z) \otimes y \end{array}$$

- $\forall (Z, \gamma_Z), (W, \gamma_W) \in \text{Ob}(\mathcal{Z}(\mathcal{C}))$ に対して、射の集合を

$$\begin{aligned} & \text{Hom}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}((Z, \gamma_Z), (W, \gamma_W)) \\ & := \{f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W) \mid \forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C}), (f \otimes \text{Id}_x) \circ \gamma_Z = \gamma_W \circ (\text{Id}_x \otimes f)\} \end{aligned}$$

と定義する。

- 射の合成は \mathcal{C} のものを引き継ぐ。

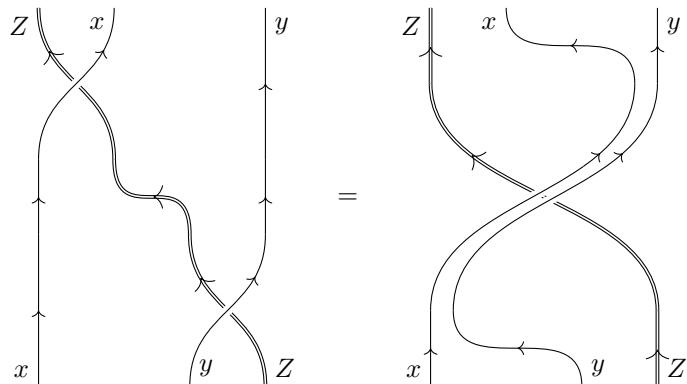
以降では、Drinfeld 中心の対象をストリング図式で

$$(Z, \gamma_Z) =: \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ Z \end{array} \in \text{Ob}(\mathcal{Z}(\mathcal{C}))$$

と図示する。このとき $\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{Z}(\mathcal{C})}((Z, \gamma_Z), (W, \gamma_W))$ は、 $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ f \bullet W \end{array} & = & \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ f \bullet W \\ \uparrow x \\ \uparrow Z \end{array} \end{array}$$

を充たす。(**Half-braiding**) は



を意味する。2つ目の(**hexagon equiations**)との類似に注目されたい。

次の命題は、証明の構成が極めて重要である。

命題 1.14: Drinfeld 中心の構造

- (1) モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r)$ の Drinfeld 中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ は組紐付きモノイダル圏の構造を持つ。
- (2) フュージョン圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L, \text{ev}^R, \text{coev}^R)$ の Drinfeld 中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ は組紐付きフュージョン圏の構造を持つ。

証明 (1) ■

1.7 2-群

1.7.1 豊穣圏と 2-圏

まず、厳密な 2-圏 (strict 2-category) を導入する。

定義 1.52: 豊穣圏

モノイダル圏 (V, \otimes, I) を与える。

V -豊穣圏 (V -enriched category) \mathcal{C} は、以下のデータからなる：

- 集合 $\text{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して、**Hom** 対象と呼ばれる V の対象 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \in \text{Ob}(V)$ を持つ
- $\forall x, y, z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して、合成射と呼ばれる V の射 $\circ_{x, y, z}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$ を持つ
- $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して、恒等素と呼ばれる V の射 $j_x: I \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$ を持つ

これらは以下の図式を可換にしなくてはいけない：

(associativity)

$\forall x, y, z, w \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ について^a

$$\begin{array}{ccc}
 (\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z)) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w) & \xrightarrow{\circ_{x,y,z} \otimes \text{Id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w)}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w) \\
 \cong \downarrow & & \downarrow \circ_{x,z,w} \\
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes (\text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w)) & \xrightarrow{\text{Id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)} \otimes \circ_{y,z,w}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, w) \\
 & & \uparrow \circ_{x,y,w}
 \end{array}$$

(unitality)

$\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ について^b

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) & \xrightarrow{\circ_{x,x,y}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) & \xleftarrow{\circ_{x,y,y}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, y) \\
 j_x \otimes \text{Id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)} \uparrow & \nearrow \cong & & \swarrow \cong & \uparrow \text{Id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)} \otimes j_y \\
 I \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) & & & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes I
 \end{array}$$

^a \cong はモノイダル圏 V の associator

^b \cong はモノイダル圏 V の left/right unitor

定義 1.53: 豊穣関手

モノイダル圏 (V, \otimes, I) を与える.

2つの V -豊穣圏 \mathcal{C}, \mathcal{D} の間の V -豊穣関手 (V -enriched functor)

$$F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

は、以下のデータからなる：

- 写像 $F_0: \text{Ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{Ob}(\mathcal{D}), x \mapsto F_0(x)$
- V の射の族

$$\{F_{x,y}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(x), F_0(y))\}_{x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

これらは以下の図式を可換にしなくてはいけない：

(enriched-1)

$\forall x, y, z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して^a

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) & \xrightarrow{\circ_{x,y,z}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z) \\ F_{x,y} \otimes F_{y,z} \downarrow & & \downarrow F_{x,z} \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(x), F_0(y)) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(y), F_0(z)) & \xrightarrow{\circ_{F_0(x), F_0(y), F_0(z)}} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(x), F_0(z)) \end{array}$$

(enriched-2)

$\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して^b

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{j_x} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x) \\ & \searrow j_{F_0(x)} & \downarrow F_{x,x} \\ & & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(x), F_0(x)) \end{array}$$

^a これは、通常の関手において射の合成が保存されることに対応する。

^b これは、通常の関手において恒等射が保存されることに対応する。

与えられたモノイダル圏 V に対して、 V -豊穣圏のなす圏を $V\text{-Cat}$ と書く。 $V\text{-Cat}$ は

- V -豊穣圏を対象とする
- V -豊穣関手を射とする

ことで得られる圏である。

定義 1.54: 厳密な 2-圏

小圏と関手の圏 Cat を【例 1.2.1】の方法でモノイダル圏と見做す。 Cat -豊穣圏のことを **厳密な 2-圏** (strict 2-category) と呼ぶ。

定義 1.54 を解説しよう。まず、小圏と関手の圏 **Cat** における対象とは小圏のこと、射とは関手のことである。さらに、**Cat** のテンソル積とは【例 1.2.1】より直積 \times のことである。よって**豊穣圏の定義**から、厳密な 2-圏 \mathcal{C} は

- 対象 (object)^{*11} 全体の集合 $\text{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ の間の **1-射** (1-morphism)^{*12} 全体が成す圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \in \text{Ob}(\mathbf{Cat})$.
- 合成 (composition) と呼ばれる関手 $\circ: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$
- 恒等素 (identity morphism) と呼ばれる関手 $j_x: 1 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$

の 4 つのデータからなる。従って 1-射 $f: x \rightarrow y$ とは圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ の対象 $f \in \text{Ob}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y))$ のことであるから、2 つの 1-射 $f, g \in \text{Ob}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y))$ が与えられると、圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ における、それらの間の射 $\alpha \in \text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)}(f, g)$ が存在する。このような α を **2-射** (2-morphism)^{*13} と呼び、混乱防止のため $\alpha: f \rightarrow g$ と書く代わりに $\alpha: f \Rightarrow g$ と書く。

2 つの 2-射 $\alpha \in \text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)}(f, g)$, $\beta \in \text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)}(g, h)$ は、圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ における射の合成 * によって結合的かつ単位的に合成することができる：

このような 2-射の合成を**縦の合成** (vertical composition) と呼ぶ。一方、4 つの 1-射 $f, g: x \rightarrow y$, $f', g': y \rightarrow z$ および 2 つの 2-射 $\alpha: f \Rightarrow g$, $\alpha': f' \Rightarrow g'$ が与えられたとき、1-射の合成 \circ が関手であることによって、圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z)$ の射 $(\alpha, \alpha'): (f, f') \rightarrow (g, g')$ に対して 圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$ の射、i.e. 2-射

$$\alpha' \circ \alpha := \circ(\alpha, \alpha'): f' \circ f \Rightarrow g' \circ g$$

が対応付く：

このような 2-射の合成を**横の合成** (horizontal composition) と呼ぶ。横の合成は、モノイダル圏 **Cat** が**厳密なモノイダル圏**であること、および関手 \circ の (**associativity**), (**unitality**) によって結合的かつ単位的になる。

^{*11} **0-セル** (0-cell) とも言う

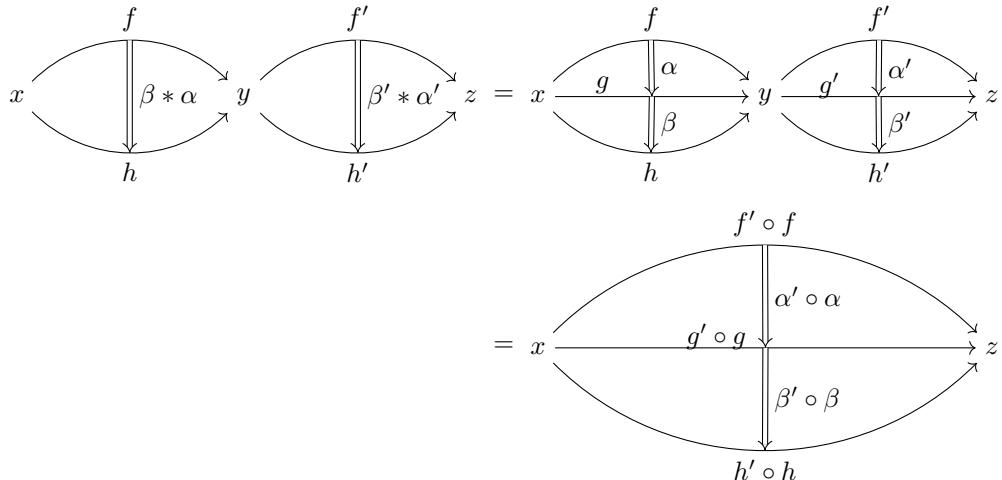
^{*12} **1-セル** (1-cell) とも言う。正確には、圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ の対象のことを 1-射と呼ぶ。

^{*13} **2-セル** (2-cell) とも言う

縦の合成と横の合成は、 \circ が関手であることによって交換する：

$$\begin{aligned} (\beta' * \alpha') \circ (\beta * \alpha) &= \circ((\beta, \beta') * (\alpha, \alpha')) \\ &= (\circ(\beta, \beta')) * (\circ(\alpha, \alpha')) \\ &= (\beta' \circ \beta) * (\alpha' \circ \alpha) \end{aligned}$$

図式で書くと一目瞭然である：



定義 1.55: 2-圏

厳密な 2-圏と同様の

- 対象 (object)^a 全体の集合 $\text{Ob}(\mathcal{C})$
- $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ の間の 1-射 (1-morphism)^b 全体が成す圏 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \in \text{Ob}(\mathbf{Cat})$.
- 合成 (composition) と呼ばれる関手 $\circ: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$
- 恒等素 (identity morphism) と呼ばれる関手 $j_x: 1 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$

の 4 つのデータに加えて

- $\forall x, y, z, w \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して **associator** と呼ばれる自然同型^c.

$$\begin{array}{ccccc}
& & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(w, y) & & \\
& \nearrow \text{Id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z)} \times \circ & & \searrow \circ & \\
\text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(w, x) & & \downarrow \alpha_{w,x,y,z} & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(w, z) \\
& \searrow \circ \times \text{Id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(w, x)} & & \nearrow \circ & \\
& & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(w, x) & &
\end{array}$$

- $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して **left/right unit** と呼ばれる自然同型

$$\begin{aligned}
\lambda_{x,y} &:= \{l_{x,y}f : f \mapsto f \circ j_x(1)\}_{f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)} \\
\rho_{x,y} &:= \{r_{x,y}f : f \mapsto j_y(1) \circ f\}_{f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc}
& & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x) & & \\
& \nearrow \text{Id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)} \times j_x & & \searrow \circ & \\
\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) & \xrightarrow{\text{Id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)}} & & \xrightarrow{\lambda_{w,x,y,z}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \\
& \searrow j_y \times \text{Id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)} & & \nearrow \rho_{w,x,y,z} & \\
& & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) & &
\end{array}$$

を持ち,

- associator が **(pentagon identity)** を
- unitors が **(triangle identity)** を

充たす \mathcal{C} のことを **2-圏** (2-category) と呼ぶ.

^a **0-セル** (0-cell) とも言う

^b **1-セル** (1-cell) とも言う. 正確には, 圈 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ の対象のことを 1-射と呼ぶ.

^c これは圏 **Cat** における図式である.

要するに、**厳密な 2-圏**において合成 \circ の associativity および unitality を自然同型まで弱めたものが**2-圏**である。

【例 1.7.1】 2-圏としてのモノイダル圏

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I, \{a_{x,y,z}\}, \{l_x\}, \{r_y\})$ は**2-圏**と見做せる。実際、2-圏 \mathbf{BC} を次のように構成できる：

- $\text{Ob}(\mathbf{BC}) := \{\bullet\}$ (1 点集合)
- $\text{Hom}_{\mathbf{BC}}(\bullet, \bullet) := \mathcal{C}$
- $\circ := \otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$
- $j_x := \iota_I: I \hookrightarrow \mathcal{C}$
- $\alpha_{\bullet, \bullet, \bullet} := \{a_{x,y,z}\}$
- $\lambda_{\bullet, \bullet} := \{l_{x,y,z}\}, \rho_{\bullet, \bullet} := \{r_{x,y,z}\}$

\mathbf{BC} はモノイダル圏 \mathcal{C} の **delooping** と呼ばれる。

1.7.2 弱い 2-群・コヒーレントな 2-群・厳密な 2-群

[?] に倣い **2-群** (2-group) を導入する。

定義 1.56: 弱い逆対象

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ の対象 $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ を 1 つとる。

- 対象 $y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が x の**弱い逆対象** (weak inverse) であるとは、対象の同型の意味で^a $x \otimes y \cong 1$ かつ $y \otimes x \cong 1$ が成り立つことを言う。
- x が**弱可逆** (weakly invertible) であるとは、 x が弱い逆対象を持つことを言う。

^a 自然同型ではない

定義 1.57: 弱い 2-群・コヒーレントな 2-群・厳密な 2-群

- **弱い 2-群** (weak 2-group) とは、**モノイダル圏** \mathcal{G} であって、任意の対象が**弱可逆**でかつ任意の射が同型射であるもののこと。
- **コヒーレントな 2-群** (coherent 2-group) とは、**モノイダル圏** \mathcal{G} であって、任意の対象 $x \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ が可逆な **unit**, **counit** (x, \bar{x}, i_x, e_x) を持ち、かつ任意の射が同型射であるもののこと。
- **厳密な 2-群** (strict 2-group) とは、**モノイダル圏** \mathcal{G} であって、任意の対象が可逆^aでかつ任意の射が同型射であるもののこと。

^a $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $x^{-1} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が存在して、厳密に $x \otimes x^{-1} = 1, x^{-1} \otimes x = 1$ が成り立つ。

定義 1.58: 2-群の準同型

2-群 $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ の間の準同型とは、モノイダル関手 $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ のこと。

定理 1.3: 弱い 2-群はコヒーレントな 2-群

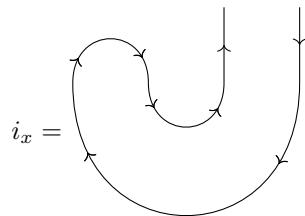
任意の弱い 2-群はコヒーレントな 2-群にすることができる。

証明 勝手な弱い 2-群 \mathcal{G} を 1 つ固定する。このとき $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ に対してある $\bar{x} \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ および同型射 $i'_x: 1 \rightarrow x \otimes \bar{x}$, $e'_x: \bar{x} \otimes x \rightarrow 1$ が存在する。

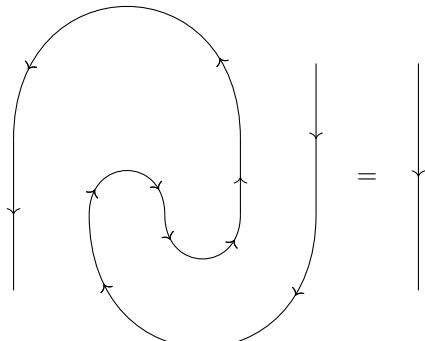
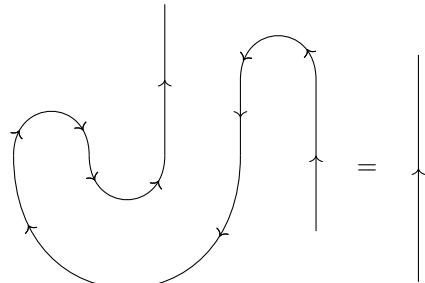
ここで $e_x := e'_x$ とおき,

$$i_x := (l_x \otimes \text{Id}_{\bar{x}}) \circ a_{1,x,\bar{x}}^{-1} \circ (i'^{-1}_x \otimes \text{Id}_{x \otimes \bar{x}}) \circ a_{x,\bar{x},x \otimes \bar{x}}^{-1} \circ (\text{Id}_x \otimes a_{\bar{x},x,\bar{x}}) \circ (\text{Id}_x \otimes e'^{-1}_x \otimes \text{Id}_{\bar{x}}) \circ (\text{Id}_x \otimes l_{\bar{x}}^{-1}) \circ i'_x$$

とおくと組 (x, \bar{x}, i_x, e_x) が zig-zag equation を充たすことを示す。実際、 i_x の定義をストリング図式で書くと



となるから、



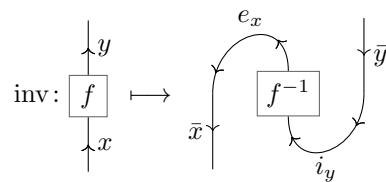
が言える。 ■

! 定理 1.3 を踏まえ、以下ではコヒーレントな 2-群のことを単に **2-群** (2-group) と呼ぶ。

2-群 \mathcal{G} において、弱い逆対象を対応づける関手

$$\text{inv}: \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}, x \mapsto \bar{x} \quad (1.7.1)$$

を考えたいが、射の対応は少々厄介である。[?, p.34] に倣うと



とすれば良いことがわかる^{*14}。

以上より、2-群 \mathcal{G} を【例 1.7.1】により 2 圈 $\mathbf{B}\mathcal{G}$ の言葉で表現すると

- ただ 1 つの対象を持つ: $\text{Ob}(\mathbf{B}\mathcal{G}) = \{\bullet\}$
- 任意の 1-射 $x \in \text{Ob}(\text{Hom}_{\mathbf{B}\mathcal{G}}(\bullet, \bullet)) = \text{Ob}(\mathcal{G})$ が弱可逆であり、その弱い逆対象 \bar{x} は関手 (1.7.1) によって与えられる。
- 任意の 2-射 $\alpha \in \text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathbf{B}\mathcal{G}}(\bullet, \bullet)}(x, y) = \text{Hom}_{\mathcal{G}}(x, y)$ が同型射

と言うことになる。特に厳密な 2-群とは、全ての $\alpha, \lambda, \rho, i, e$ が \mathcal{G} の恒等射 となっていることを言う。

1.7.3 交差加群との関係

^{*14} 定義からコヒーレントな 2 群は rigid なモノイダル圏であり、zigzag identity を使えることが肝になる。

定義 1.59: 交差加群

交差加群 (crossed module) とは,

- 群準同型 $G_2 \xrightarrow{t} G_1$
- G_1 の左作用 $\alpha: G_1 \longrightarrow \text{Aut}(G_2)$

の組であって、以下の条件を満たすもののこと：

(cr-1) 以下の図式を可換にする：

$$\begin{array}{ccc} G_2 \times G_2 & \xrightarrow{t \times \text{Id}} & G_1 \times G_2 \\ & \searrow \text{Ad} & \swarrow \alpha \\ & G_2 & \end{array}$$

あるいは同じことだが、 $\forall g_i \in G_i$ に対して

$$t(\alpha(g_1)(g_2)) = g_1 t(g_2) g_1^{-1}$$

を充たす。

(cr-2) 以下の図式を可換にする：

$$\begin{array}{ccc} G_1 \times G_2 & \xrightarrow{\alpha} & G_2 \\ \downarrow \text{Id} \times t & & \downarrow t \\ G_1 \times G_1 & \xrightarrow[\text{Ad}]{} & G_1 \end{array}$$

あるいは同じことだが、 $\forall g_2, g'_2 \in G_2$ に対して

$$\alpha(t(g_2))(g'_2) = g_2 g'_2 g_2^{-1}$$

を充たす (**Peiffer identity**)。

命題 1.15: 交差加群と厳密な 2-群

- (1) 交差加群 $(G_2 \xrightarrow{t} G_1, \alpha)$ が与えられたとする。このとき
- 1-射の集合 $\mathcal{G}_0 := G_1$
 - 2-射の集合 $\mathcal{G}_1 := G_1 \times_{\alpha} G_2$ (外部半直積)
 - 始点射 $\sigma: \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_0, (g_1, g_2) \mapsto g_1$
 - 終点射 $\tau: \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_0, (g_1, g_2) \mapsto t(g_2)g_1$
 - 恒等素 $j: \mathcal{G}_0 \longrightarrow \mathcal{G}_1, g_1 \mapsto (g_1, 1_{G_2})$
 - 2-射の合成 $\circ: \mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_1, ((g_1, g_2), (g'_1, g'_2)) \mapsto (g'_1, g_2g'_2)$
- とおくと、圏 \mathcal{G} は厳密な 2-群になる。
- (2) 逆に厳密な 2-群 $(\mathcal{G}, \otimes, 1)$ が与えられたとき、
- $G_1 := \mathcal{G}_0$
 - $G_2 := \text{Ker } \sigma \subset \mathcal{G}_1$
 - $t := \tau|_{G_2}: G_2 \longrightarrow G_1$
 - $\alpha: G_1 \longrightarrow \text{Aut}(G_2), g_1 \mapsto (g_2 \mapsto j(g_1) \otimes g_2 \otimes j(g_1)^{-1})$
- とおくことで交差加群 $(G_2 \xrightarrow{t} G_1, \alpha)$ が得られる。

証明 (1) 圏 \mathcal{G} を

- 対象が成す集合を $\text{Ob}(\mathcal{G}) := \mathcal{G}_0$ と定義する。
- $\forall g, h \in \text{Ob}(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_0$ に対して、その間の射が成す集合を

$$\text{Hom}_{\mathcal{G}}(g, h) := \{(f_1, f_2) \in \mathcal{G}_1 \mid \sigma(f_1, f_2) = g, \tau(f_1, f_2) = h\}$$

と定義する。

- $\forall g, h, k \in \mathcal{G}$ に対して、射の合成を

$$\begin{aligned} \circ_{g,h,k}: \text{Hom}_{\mathcal{G}}(h, k) \times \text{Hom}_{\mathcal{G}}(g, h) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{G}}(g, k), \\ ((l_1, l_2), (m_1, m_2)) &\longmapsto (m_1, l_2m_2) \end{aligned}$$

と定義する。なお、

$$\begin{aligned} \sigma(m_1, l_2m_2) &= m_1 = \sigma(m_1, m_2) = g, \\ \tau(m_1, l_2m_2) &= t(l_2m_2)m_1 \\ &= t(l_2)(t(m_2)m_1) \\ &= t(l_2)h \\ &= t(l_2)\sigma(l_1, l_2) \\ &= t(l_2)l_1 \\ &= \tau(l_1, l_2) \\ &= k \end{aligned}$$

が成り立つので写像 $\circ_{g,h,k}$ は well-defined である。

として構成する。実際、 $\forall (f_1, f_2) \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(g, h)$ に対して^{*15}

$$(f_1, f_2) \circ (g, 1_{G_2}) = (g, f_2) = (f_1, f_2),$$

^{*15} Hom 集合の定義より $f_1 = \sigma(f_1, f_2) = g$ が自動的に成り立つ。

$$(h, 1_{G_2}) \circ (f_1, f_2) = (f_1, f_2)$$

が成り立つので $\text{Id}_g = (g, 1_{G_2}) = j(g) \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(g, g)$ であり, かつ $\forall (f_1, f_2) \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(g, h), \forall (g_1, g_2) \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(h, k), \forall (h_1, h_2) \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(k, l)$ に対して

$$\begin{aligned} ((h_1, h_2) \circ (g_1, g_2)) \circ (f_1, f_2) &= (g_1, h_2 g_2) \circ (f_1, f_2) \\ &= (f_1, h_2 g_2 f_2) \\ &= (h_1, h_2) \circ (f_1, g_2 f_2) \\ &= (h_1, h_2) \circ ((g_1, g_2) \circ (f_1, f_2)) \end{aligned}$$

が成り立つので, \mathcal{G} は圏の公理を充たす.

さて, \mathcal{G}_1 の積を $(g_1, g_2) \cdot (h_1, h_2) := (g_1 h_1, g_2 \alpha(g_1)(h_2))$ と書こう. そして関手

$$\otimes: \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$$

を次のように定義する :

- $\forall (g, h) \in \text{Ob}(\mathcal{G} \times \mathcal{G}) = \mathcal{G}_0 \times \mathcal{G}_0$ に対して

$$g \otimes h := gh \in \text{Ob}(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_0$$

を対応付ける

- $\forall ((f_1, f_2), (g_1, g_2)) \in \text{Hom}_{\mathcal{G} \times \mathcal{G}}((g, h), (g', h'))$ に対して

$$(f_1, f_2) \otimes (g_1, g_2) := (f_1, f_2) \cdot (g_1, g_2) \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(gh, g'h')$$

を対応付ける. なお,

$$\begin{aligned} \sigma((f_1, f_2) \cdot (g_1, g_2)) &= f_1 g_1 \\ &= \sigma(f_1, f_2) \sigma(g_1, g_2) \\ &= gh, \\ \tau((f_1, f_2) \cdot (g_1, g_2)) &= t(f_2 \alpha(f_1)(g_2)) f_1 g_1 \\ &= t(f_2) t(\alpha(f_1)(g_2)) f_1 g_1 \\ &= t(f_2) f_1 t(g_2) g_1 \\ &= \tau(f_1, f_2) \tau(g_1, g_2) \\ &= g'h' \end{aligned}$$

∴ Crossed module の定義

なのでこの対応は well-defined である.

群演算の結合則より \otimes に関する associator は全て恒等射で, かつ $1 := 1_{G_1}$ とおくと left/right unitor も恒等射になる. よって $(\mathcal{G}, \otimes, 1_{G_1}, \{\text{Id}\}, \{\text{Id}\}, \{\text{Id}\})$ は厳密なモノイダル圏を成す. $\forall g \in \mathcal{G}_0$ に対して明らかに $g \otimes g^{-1} = g^{-1} \otimes g = 1$ であり, かつ $\forall (f_1, f_2) \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(g, h)$ に対して $(h, f_2^{-1}) \in \text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathcal{G}}(\bullet, \bullet)}(h, g)$ は

$$\begin{aligned} (f_1, f_2) \circ (h, f_2^{-1}) &= (h, 1_{G_2}) = \text{Id}_h \\ (h, f_2^{-1}) \circ (f_1, f_2) &= (g, 1_{G_2}) = \text{Id}_g \end{aligned}$$

を充たすので, \mathcal{G} は厳密な 2 群である.

(2) 始めに、**厳密な 2-群の定義**から 1-射の集合 $\mathcal{G}_0 := \text{Ob}(\mathcal{G})$ は \otimes を積とする群を成し、2-射全体がなす集合 $\mathcal{G}_1 := \bigcup_{g, h \in \mathcal{G}_0} \text{Hom}_{\mathcal{G}}(g, h)$ もまたテンソル積 \otimes について群を成すことに注意する^{*16}。恒等素は

$$j: \mathcal{G}_0 \longrightarrow \mathcal{G}_1, g \longmapsto \text{Id}_g$$

と定義され、始点射および終点射は

$$\begin{aligned} \sigma: \mathcal{G}_1 &\longrightarrow \mathcal{G}_0, & \underbrace{\varphi}_{\in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(g, h)} &\longmapsto g \\ \tau: \mathcal{G}_1 &\longrightarrow \mathcal{G}_0, & \underbrace{\varphi}_{\in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(g, h)} &\longmapsto h \end{aligned}$$

のように定義される。特に $\forall \varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(g, h), \forall \psi \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(g', h')$ に対して

$$\begin{aligned} \sigma(\psi \otimes \varphi) &= g \otimes g' = \sigma(\psi) \otimes \sigma(\varphi) \\ \tau(\psi \otimes \varphi) &= h \otimes h' = \tau(\psi) \otimes \tau(\varphi) \end{aligned}$$

が成り立つので σ, τ は群準同型である。

交差加群の定義 (cr-1), (cr-2) を確認する。

(cr-1) $\forall g_1 \in G_1, \forall g_2 \in G_2$ に対して

$$\begin{aligned} t(\alpha(g_1)(g_2)) &= t(\text{Id}_{g_1} \otimes g_2 \otimes \text{Id}_{g_1^{-1}}) \\ &= g_1 \otimes t(g_2) \otimes g_1^{-1} \end{aligned}$$

(cr-2) $\forall g_2, g'_2 \in G_2$ に対して

$$\begin{aligned} \alpha(t(g_2))(g'_2) &= \text{Id}_{t(g_2)} \otimes g'_2 \otimes \text{Id}_{t(g_2)^{-1}} \\ &= \text{Id}_{\tau(g_2)} \otimes g'_2 \otimes \text{Id}_{\tau(g_2^{-1})} \\ &= g_2 \otimes g'_2 \otimes g_2^{-1} \end{aligned}$$

ただし $\sigma(g_2) = 1$ であることを使った。 ■

1.7.4 2-群の分類

定義 1.60: 骨格的

コヒーレントな 2 群 $(\mathcal{G}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L)$ が**骨格的** (sketal) であるとは、任意の同型な 1-射が等しいことを言う。

^{*16} まず、 $\forall \varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(g, h)$ に対して $\varphi \otimes \text{Id}_1 = \varphi$ であるから、単位元は $\text{Id}_1 \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(1, 1)$ である。逆元を見つけるのは少し難しい。 $\forall \varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(g, h)$ を 1 つ固定しよう。 \mathcal{G} が厳密な 2-群であることから、 $g \otimes g^{-1} = 1$ を充たす $g^{-1} \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ が存在する。よって \otimes が関手なので $\text{Id}_g \otimes \text{Id}_{g^{-1}} = \text{Id}_{g \otimes g^{-1}} = \text{Id}_1$ であり、任意の恒等射が逆元を持つことが分かった。さらに、 \otimes が関手であることにより $\forall \varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(g, h), \forall \psi \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(g', h')$ に対して

$$\varphi \otimes \psi = (\text{Id}_h \circ \varphi) \otimes (\psi \circ \text{Id}_{g'}) = (\text{Id}_h \otimes \psi) \circ (\varphi \otimes \text{Id}_{g'})$$

が成り立つので、 φ の \otimes に関する逆元は $\psi := \text{Id}_{h^{-1}} \otimes \varphi^{-1} \otimes \text{Id}_{g^{-1}}$ であることが分かる。

骨格的であるとは、同型射が自己同型しか存在しないことを意味する。[?, p.55] に倣って特別な 2 群を定義する。

定義 1.61: 特別な 2 群

コヒーレントな 2 群 $(\mathcal{G}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L)$ が**特別** (special) であるとは、**骨格的**でかつ $a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L$ が恒等自然変換であることを言う。

命題 1.16:

任意のコヒーレントな 2 群 $(\mathcal{G}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L)$ は、ある**特別な 2 群**と**同型**である。

証明 コヒーレントな 2 群 \mathcal{G} から、それと 2 群として同型な**特別な 2 群** $(\mathcal{G}, \tilde{\otimes}, 1, \tilde{a}, \tilde{l}, \tilde{r}, \tilde{\text{ev}}^L, \tilde{\text{coev}}^L)$ を構成する^{*17}。そのためにはまず、 $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ に対してある対象 $x \tilde{\otimes} y \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ および同型射 $\gamma_{x,y} \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(x \tilde{\otimes} y, x \otimes y)$ を選べたとしよう。このとき、 $\gamma_{x,y}$ の可逆性により

- 関手 $\text{id}: \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$
- 射 $\text{Id}_1: 1 \longrightarrow \text{id}(1) = 1$
- 射の族 $\{\gamma_{x,y}: \text{id}(x \tilde{\otimes} y) \longrightarrow \text{id}(x) \otimes \text{id}(y)\}_{x, y \in \text{Ob}(\mathcal{G})}$

の 3 つ組がモノイダル関手になるように関手 $\tilde{\otimes}: \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ および自然変換 $\tilde{a}, \tilde{l}, \tilde{r}$ を構成することができる。 $\tilde{\text{ev}}^L, \tilde{\text{coev}}^L$ は、以下の可換図式が成り立つように決めれば良い：

$$\begin{array}{ccc}
 \text{id}(x \tilde{\otimes} x^*) & \xrightarrow{\gamma_{x,x^*}} & \text{id}(x) \otimes \text{id}(x^*) \\
 \text{id}(\text{coev}_x^L) \uparrow & & \uparrow \text{coev}_{\text{id}(x)}^L \\
 \text{id}(1) & \xleftarrow{\text{Id}_1} & 1 \\
 \text{id}(x \tilde{\otimes} x^*) & \xrightarrow{\gamma_{x,x^*}} & \text{id}(x) \otimes \text{id}(x^*) \\
 \text{id}(\text{ev}_x^L) \downarrow & & \downarrow \text{ev}_{\text{id}(x)}^L \\
 \text{id}(1) & \xleftarrow{\text{Id}_1} & 1
 \end{array}$$

このようにして得られる rigid なモノイダル圏 $(\mathcal{G}, \tilde{\otimes}, 1, \tilde{a}, \tilde{l}, \tilde{r}, \tilde{\text{ev}}^L, \tilde{\text{coev}}^L)$ は明らかに**コヒーレントな 2 群**であり、**2 群の準同型** $(\text{id}, \text{Id}_1, \{\gamma_{x,y}\})$ がもとのコヒーレントな 2 群 $(\mathcal{G}, \otimes, 1, a, l, r, \text{ev}^L, \text{coev}^L)$ との同型を与える。具体的に

$$x \tilde{\otimes} y := \begin{cases} y, & x = 1 \\ x, & y = 1 \\ 1, & x = y^* \\ 1, & y = x^* \\ x \otimes y, & \text{otherwise} \end{cases}$$

^{*17} 下地になる圏 \mathcal{G} と単位対象 1 は同じものをとする。

$$\gamma_{x,y} := \begin{cases} l_y^{-1}, & x = 1 \\ r_x^{-1}, & y = 1 \\ \text{ev}_y^{\text{L}-1}, & x = y^* \\ \text{coev}_x^{\text{L}}, & y = x^* \\ \text{Id}_{x \otimes y}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

と選ぶことで、上述の構成で $\tilde{l}, \tilde{r}, \tilde{\text{ev}}^{\text{L}}, \tilde{\text{coev}}^{\text{L}}$ を全て恒等自然変換にすることができる。

ところで、選択公理を認めるとき、任意の圏 \mathcal{G} は骨格的な充満部分圏 $\text{sk}(\mathcal{G})$ を持つ。 \mathcal{G} を $\text{sk}(\mathcal{G})$ と同一視することで証明が完了する。 ■

命題 1.16 により、**コピーレントな 2 群** の分類は**特別な 2 群** の分類と一致する。

命題 1.17: 2 群の分類

特別な 2 群 $(\mathcal{G}, \otimes, 1, a)$ は以下のデータの組 (G, H, α, a) と 1 対 1 対応する：

- 群 G
- 可換群 H
- 群作用 $\alpha: G \longrightarrow H$
- 正規化された 3-コサイクル $a \in Z_{\text{Grp}}^3(G; H)$

証明 **特別な 2 群** $(\mathcal{G}, \otimes, 1, a)$ を与える。 \mathcal{G} は骨格的なので、その 1-射の集合は \otimes に関して群をなす。

$$G := \text{Ob}(\mathcal{G})$$

とおく。

$\forall h, h' \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(1, 1)$ に対して、 \otimes の関手性から

$$\begin{aligned} h \otimes h' &= (h \circ \text{Id}_1) \otimes (\text{Id}_1 \circ h') \\ &= (h \otimes \text{Id}_1) \circ (\text{Id}_1 \otimes h') \\ &= h \circ h' \\ &= (\text{Id}_1 \otimes h) \circ (h' \otimes \text{Id}_1) \\ &= (\text{Id}_1 \circ h') \otimes (h \circ \text{Id}_1) \\ &= h' \otimes h \end{aligned}$$

が成り立つ。命題 1.15-(2) の証明と同様の議論により \otimes に関する逆元も存在するので、

$$H := \text{Hom}_{\mathcal{G}}(1, 1)$$

は \otimes に関して可換群をなす。

ここで、写像

$$\alpha: G \longrightarrow \text{Aut}(H), g \longmapsto (h \longmapsto (\text{Id}_g \otimes h) \otimes \text{Id}_{g*})$$

を考える。 \otimes の関手性により α は群準同型である。

最後に、 \mathcal{G} が骨格的であることから associator が

$$a_{g_1, g_2, g_3} \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(g_1 \otimes g_2 \otimes g_3, g_1 \otimes g_2 \otimes g_3)$$

のように自己同型になることに注意する。ここから

$$a: G^{\times 3} \longrightarrow H, (g_1, g_2, g_3) \mapsto a_{g_1, g_2, g_3} \otimes (\text{Id}_{(g_1 \otimes g_2 \otimes g_3)^*})$$

のように定義すると、pentagon identity から $a \in Z_{\text{Grp}}^3(G; H)$ が分かり、triangle identity から g_1, g_2, g_3 のうち少なくとも 1 つが 1 であるときに $a(g_1, g_2, 1) = \text{Id}_1$ が成り立つことが分かる。 ■

1.8 3-群

1.8.1 3-圏

一般の 3-圏は associator, unitors のせいで扱いが難しいので、まずは**厳密な 3-圏** (strict 3-group) を考える。Cat を【例 1.2.1】の方法で**モノイダル圏**と見做す。定義 1.54 から、2-圏としての同値

$$\text{Str2Cat} \cong \text{Cat-Cat}$$

が成り立つ。さらに Cat-Cat は直積に関して**モノイダル圏**になる。

定義 1.62: 厳密な 3-圏

厳密な 2-圏が成す 2-圏 Cat-Cat を**モノイダル圏**と見做す。このとき **Cat-Cat-豊穣圏**のことを**厳密な 3-圏** (strict 3-category) と呼ぶ。

1.8.2 2-crossed module と厳密な 3-群

定義 1.63: 厳密な 3-群

厳密な 3-圏 \mathcal{G} であって、ただ 1 つの対象を持ち、1-射、2-射、3-射が厳密に可逆であるものを**厳密な 3-群** (strict 3-category) と呼ぶ。

定義 1.64: 2-交差加群

2-交差加群 (2-crossed module) とは、以下のデータからなる：

- 群の正規複体 $G_3 \xrightarrow{\partial_2} G_2 \xrightarrow{\partial_1} G_1$
- 群の左作用 $\alpha_1: G_1 \longrightarrow \text{Aut}(G_2)$, $\alpha_2: G_1 \longrightarrow \text{Aut}(G_3)$
- Peiffer lifting と呼ばれる写像 $\{-, -\}: G_2 \times G_2 \longrightarrow G_3$

これらは以下の条件を充たす：

(2CM1) ∂_1, ∂_2 は G_1 -同変

(2CM2) $\forall g_2, h_2 \in G_2$ に対して

$$\partial_2\{g_2, h_2\} = \alpha_1(g_2)(h_2)g_2h_2^{-1}g_2^{-1}$$

(2CM3) $\forall g_3, h_3 \in G_3$ に対して

$$\{\partial_2g_3, \partial_2h_3\} = [h_3, g_3]$$

(2CM4) $\forall g_2 \in G_2, g_3 \in G_3$ に対して

$$\{g_2, \partial_2g_3\}\{\partial_2g_3, g_2\} = \alpha_2(\partial_1(g_2))(g_3)g_3^{-1}$$

(2CM5) $\forall g_2, h_2, k_2 \in G_2$ に対して

$$\begin{aligned} \{g_2, h_2k_2\} &= \{g_2, h_2\}\{\partial_2\{g_2, k_2\}, g_2h_2g_2^{-1}\}\{g_2, k_2\} \\ \{g_2h_2, k_2\} &= \alpha_2(\partial_1(g_2))(\{h_2, k_2\})\{g_2, h_2k_2h_2^{-1}\} \end{aligned}$$

(2CM6) $\forall g_1 \in G_1, \forall g_2, h_2 \in G_2$ に対して

$$\alpha_2(g_1)(\{g_2, h_2\}) = \{\alpha_1(g_1)(g_2), \alpha_1(g_1)(h_2)\}$$