第 2 章

多様体のあれこれ

この章では，主に多様体に関する内容を雑多にまとめる．

2.1 位相多様体の性質

まず，コンパクト性に類似する概念をいくつか紹介する：

定義 2.1: 被覆

- 集合族 $\mathcal{U} := \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が集合 X の**被覆** (cover) であるとは，
$$X \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$
が成り立つこと．
- 位相空間 X の被覆 $\mathcal{U} := \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が**開** (open) であるとは，$\forall \lambda \in \Lambda$ に対して U_λ が X の開集合であること．
- 位相空間 X の被覆 $\mathcal{V} := \{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が，別の X の被覆 $\mathcal{U} := \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の**細分** (refinement) であるとは，$\forall V_\alpha \in \mathcal{V}$ に対してある $U_\lambda \in \mathcal{U}$ が存在して $V_\alpha \subset U_\lambda$ が成り立つこと．
- 位相空間 X の開被覆 $\mathcal{U} := \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が**局所有限** (locally finite) であるとは，$\forall x \in X$ に対して以下の条件が成り立つこと：
(locally finiteness) x のある近傍 $V \subset X$ が存在して集合
$$\{\, \lambda \in \Lambda \mid U_\lambda \cap V \neq \emptyset \,\}$$
が有限集合になる．

定義 2.2: パラコンパクト・コンパクト・局所コンパクト

位相空間 X を与える.

- **パラコンパクト** (paracompact) であるとは, 任意の開被覆が局所有限かつ開な細分を持つこと.
- 位相空間 X の部分集合 $A \subset X$ は, 以下の条件を充たすとき**コンパクト** (compact) であると言われる：

  (Heine-Boral の性質)　A の任意の開被覆 $\mathcal{U} \coloneqq \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して, ある有限部分集合 $I \subset \Lambda$ が存在して $\{U_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{U}$ が A の開被覆となる[a].
- 位相空間 X が**局所コンパクト** (locally compact) であるとは, $\forall x \in X$ が少なくとも 1 つのコンパクトな近傍を持つこと.

[a] このことを「任意の開被覆は有限部分被覆を持つ」と表現する.

2.2　微分構造の構成

微分構造を定義通りに構成するならば, まず位相多様体であることを確認してから座標変換が C^∞ 級であることを確認しなくてはならず, 若干面倒である. しかし, 幸いにしてこの確認の工程をまとめた便利な補題がある [?, p.21, Lemma 1.35].

補題 2.1: 微分構造の構成

- 集合 M
- M の部分集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$
- 写像の族 $\{\varphi_\lambda \colon U_\lambda \longrightarrow \mathbb{R}^n\}_{\lambda \in \Lambda}$

の 3 つ組であって以下の条件を充たすものを与える：

(DS-1)　$\forall \lambda \in \Lambda$ に対して $\varphi_\lambda(U_\lambda) \subset \mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合であり, $\varphi_\lambda \colon U_\lambda \longrightarrow \varphi_\lambda(U_\lambda)$ は全単射である.

(DS-2)　$\forall \alpha, \beta \in \Lambda$ に対して $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta),\ \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である.

(DS-3)　$\forall \alpha, \beta \in \Lambda$ に対して, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ならば $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ は C^∞ 級である.

(DS-4)　添字集合 Λ の可算濃度の部分集合 $I \subset \Lambda$ が存在して $\{U_i\}_{i \in I}$ が M の被覆になる.

(DS-5)　$p, q \in M$ が $p \neq q$ ならば, ある $\lambda \in \Lambda$ が存在して $p, q \in U_\lambda$ を充たすか, またはある $\alpha, \beta \in \Lambda$ が存在して $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ かつ $p \in U_\alpha,\ q \in U_\beta$ を充たす.

このとき, M の微分構造であって, $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ を C^∞ チャートとして持つものが一意的に存在する.

証明　**位相の構成**

$\mathbb{R}^n$ の Euclid 位相を $\mathscr{O}_{\mathbb{R}^n}$ と表記する．集合

$$\mathscr{B} := \left\{ \varphi_\lambda^{-1}(U) \;\middle|\; \lambda \in \Lambda,\, U \in \mathscr{O}_{\mathbb{R}^n} \right\}$$

が開基の公理 **(B1)**, **(B2)** を充たすことを確認する．

(B1) **(DS-4)** より明らか．

(B2) $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ を任意にとる．このとき $\mathscr{B}$ の定義から，ある $\alpha, \beta \in \Lambda$ および $U, V \in \mathscr{O}_{\mathbb{R}^n}$ が存在して $B_1 = \varphi_\alpha^{-1}(U),\, B_2 = \varphi_\beta^{-1}(V)$ と書ける．補題**??**-(4) より

$$\begin{aligned} B_1 \cap B_2 &= \varphi_\alpha^{-1}(U) \cap \varphi_\beta^{-1}(V) \\ &= \varphi_\alpha^{-1}\bigl(U \cap (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(V)\bigr) \\ &= \varphi_\alpha^{-1}\bigl(U \cap (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1}(V)\bigr) \end{aligned}$$

が成り立つが，**(DS-3)** より $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ は連続なので $(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1}(V) \in \mathscr{O}_{\mathbb{R}^n}$ である．よって

$$B_1 \cap B_2 \in \mathscr{B}$$

であり，**(B2)** が示された．

従って定理**??**より，$\mathscr{B}$ を開基とする M の位相 $\mathscr{O}_M$ が存在する．

φ_λ が同相写像であること

$\forall \lambda \in \Lambda$ を 1 つ固定する．$\mathscr{O}_M$ の構成と補題**??**-(4) より，$\forall V \in \mathscr{O}_{\mathbb{R}^n}$ に対して $\varphi_\lambda^{-1}\bigl(V \cap \varphi_\lambda(U_\lambda)\bigr) = \varphi_\lambda^{-1}(V) \cap U_\lambda$ は U_λ の開集合である[*1]．i.e. $\varphi_\lambda \colon U_\lambda \longrightarrow \varphi_\lambda(U_\lambda)$ は連続である．

$\forall B \in \mathscr{B}$ をとる．このとき補題**??**-(9) より $\varphi_\lambda(B \cap U_\lambda) = \varphi_\lambda(B) \cap \varphi_\lambda(U_\lambda)$ が成り立つが，$\mathscr{O}_M$ の定義より $\varphi_\lambda(B) \in \mathscr{O}_{\mathbb{R}^n}$ なので $\varphi_\lambda(B \cap U_\lambda)$ は $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ の開集合である．相対位相の定義と de Morgan 則より，U_λ の任意の開集合は $B \cap U_\lambda$ の形をした部分集合の和集合で書けるので，補題**??**-(1) と位相空間の公理から φ_λ は U_λ の開集合を $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ の開集合に移す．i.e. $\varphi_\lambda \colon U_\lambda \longrightarrow \varphi_\lambda(U_\lambda)$ は連続な全単射でかつ開写像であるから同相写像である．

Hausdorff 性

位相空間 $(M, \mathscr{O}_M)$ が Hausdorff 空間であることを示す．M の異なる 2 点 p, q を勝手にとる．このとき **(DS-5)** より，

- ある $\lambda \in \Lambda$ が存在して $p, q \in U_\lambda$ を充たす
- ある $\alpha, \beta \in \Lambda$ が存在して $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ かつ $p \in U_\alpha,\ q \in U_\beta$ を充たす

のいずれかである．後者ならば証明することは何もない．

前者の場合を考える．このとき $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合だから，$\mathbb{R}^n$ の Hausdorff 性から $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ も Hausdorff 空間であり，従って $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ の開集合 $U, V \subset \varphi\lambda(U_\lambda)$ であって $\varphi_\lambda(p) \in U$ かつ $\varphi_\lambda(q) \in V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ を充たすものが存在する．このとき補題**??**-(4) より $\varphi_\lambda^{-1}(U) \cap \varphi_\lambda^{-1}(V) = \varphi_\lambda^{-1}(U \cap V) = \emptyset$ で，かつ $\mathscr{O}_M$ の構成から $\varphi_\lambda^{-1}(U), \varphi_\lambda^{-1}(V) \subset M$ はどちらも M の開集合である．そのうえ $p \in \varphi_\lambda^{-1}(U)$ かつ $q \in \varphi_\lambda^{-1}(V)$ が成り立つので M は Hausdorff 空間である．

第 2 可算性

$\mathbb{R}^n$ は第 2 可算なので，$\forall \lambda \in \Lambda$ に対して $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ も第 2 可算である．$\varphi_\lambda \colon U_\lambda \longrightarrow \varphi_\lambda(U_\lambda)$ は同相写像なので，U_λ も第 2 可算である．従って **(DS-4)** から M も第 2 可算である．

[*1] U_λ には $(M, \mathscr{O}_M)$ からの相対位相が，$\varphi_\lambda(U_\lambda)$ には $(\mathbb{R}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{R}^n})$ からの相対位相を入れている．

以上の考察から，位相空間 $(M,\, \mathscr{O}_M)$ が位相多様体であることが示された．さらに **(DS-3)** より $\mathcal{A} \coloneqq \big\{(U_\lambda,\, \varphi_\lambda)\big\}_{\lambda \in \Lambda}$ は $(M,\, \mathscr{O}_M)$ の C^∞ アトラスであることもわかる．

最後に，$\mathcal{A}$ の極大アトラス $\mathcal{A}^+$ が，集合 M 上の，与えられた全ての $(U_\lambda,\, \varphi_\lambda)$ を C^∞ チャートとする唯一の微分構造であることを示す．

位相の一意性

与えられた集合 M の上の位相 $\mathscr{T}$ であって，位相空間 $(M,\, \mathscr{T})$ が第 2 可算な Hausdorff 空間となるようなものを任意にとる．$\forall \lambda \in \Lambda$ に対して与えられた全単射 $\varphi_\lambda \colon U_\lambda \longrightarrow \varphi_\lambda(U_\lambda)$ が同相写像であるためには，$\forall V \in 2^{U_\lambda}$ に対して

$$V \in \mathscr{T} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi_\lambda(V) \in \mathscr{O}_{\mathbb{R}^n}$$

が成り立つことが必要十分である．そしてこのとき ■

2.3 部分多様体

定義 2.3: 部分多様体

n 次元 C^∞ 多様体 $(M,\, \mathscr{O}_M)$ を与える．部分集合 $N \subset M$ は以下の条件を充たすとき**部分多様体** (submanifold) と呼ばれる：

(sub) $\forall p \in N$ に対してある開近傍 $U \in \mathscr{O}_M$ と U 上定義された座標関数 $x^\mu \colon U \to \mathbb{R}$ が存在して，

$$\exists k \geq 0,\ N \cap U = \big\{ q \in U \bigm| x^{k+1}(q) = \cdots = x^n(q) = 0 \big\}.$$

N が M の閉集合であるときは**閉部分多様体**と呼ぶ．

定義 2.4: はめ込みと埋め込み

C^∞ 多様体 $M,\, N$ と C^∞ 写像 $f \colon M \to N$ を与える．

(1) $\forall p \in M$ において f の微分写像 $f_* \colon T_pM \to T_{f(p)}N$ が単射のとき，f を**はめ込み** (immersion) と呼ぶ．

(2) $f \colon M \to N$ がはめ込みであって，かつ全射 $f \colon M \twoheadrightarrow f(M)$ が同相写像であるとき，f を**埋め込み** (embedding) と呼ぶ．

(3) $f \colon M \to N$ が全射であって，かつ $\forall p \in M$ において $f_* \colon T_pM \to T_{f(p)}N$ が全射であるとき，f を**沈め込み** (submersion) と呼ぶ．

定理 2.1: 埋め込みと部分多様体

$f\colon M \to N$ を埋め込みとする．このとき $f(M) \subset N$ は N の部分多様体であり，$f\colon M \twoheadrightarrow f(M)$ は微分同相写像である．
逆に M が N の部分多様体であるとき，包含写像[a] $\iota\colon M \hookrightarrow N$ は埋め込みである．

[a] $M \subset N$ のとき，$p \in M$ を N の元として扱う写像．$\iota(p) = p$ である．**標準単射** (canonical injection) と呼ばれることもある．

定理 2.2: Whitney の埋め込み定理

任意の n 次元 C^∞ 多様体は $\mathbb{R}^{2n+1}$ の中に閉部分多様体として埋め込むことができる．

2.3.1　誘導計量

定義 2.5: 誘導計量

$(N,\, h)$ を Riemann 多様体，C^∞ 写像 $f\colon M \to N$ をはめ込みとする．このとき，2-形式 $h \in \Omega^2(N)$ の引き戻し（??）f^*h は M 上の Riemann 計量 $g \in \Omega^2(M)$ を定める：

$$g_p(u,\, v) \coloneqq h_{f(p)}\big(f_*(u),\, f_*(v)\big), \quad \forall p \in M,\, \forall u,\, v \in T_pM$$

これを f による M の**誘導計量**と呼ぶ．

誘導計量を M のチャート $(U;\, x^\mu)$ および N のチャート $(V;\, y^\nu)$ に関して成分表示すると

$$\begin{aligned} g_p(u,\, v) &= g_{\mu\nu}(p) u^\mu v^\nu \\ &= h_{\alpha\beta}\big(f(p)\big) \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\big(f(p)\big) \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu}\big(f(p)\big) u^\mu v^\nu \end{aligned}$$

だから，

$$g_{\mu\nu}(p) = h_{\alpha\beta}\big(f(p)\big) \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\big(f(p)\big) \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu}\big(f(p)\big)$$

である．特に C^∞ 多様体 M の Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ へのはめ込み $\boldsymbol{r}\colon M \to \mathbb{R}^n,\, (x^\mu) \mapsto \boldsymbol{r}(x^\mu)$ が与えられたとき，M の Riemann 計量がしばしば

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^\nu}$$

と書かれるのはこのためである．

! 多様体 N が擬 Riemann 多様体のときは，多様体 M が誘導計量を持つとは限らない．

例えば Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$ に埋め込まれた単位球面 S^2 を考える．はめ込みを

$$\boldsymbol{r}\colon (\theta,\, \phi) \mapsto \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

として与えると，S^2 の誘導計量は

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu &= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu \\ &= \mathrm{d}\theta \otimes \mathrm{d}\theta + \sin^2\theta\ \mathrm{d}\phi \otimes \mathrm{d}\phi \end{aligned}$$

と求まる.

2.4 隅付き多様体

2.5 力学系としての多様体