第 5 章

Hodge 作用素と Laplacian

5.1　内積と随伴

5.1.1　内積

公理 5.1: 内積の公理

実数体 $\mathbb{R}$ 上の n 次元ベクトル空間 V に対して，$g\colon V\times V\to\mathbb{R}$ は

(I1)　g は双線型写像である

(I2)　$g(v,\,w)=g(w,\,v)$

(I3)　$g(v,\,v)\geq 0$ かつ等号成立は $v=0$ のときのみ.

を充たすとき，（正定値）**内積** (inner product) と呼ばれる.

双線型写像

$$\langle\ ,\ \rangle\colon V^*\times V\to\mathbb{R},\ (\omega,\,v)\mapsto\omega[v]$$

を**双対内積**と呼ぶことにする．双対内積を使って，与えられた $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V の上に内積 g を構成することを考える.

双対ベクトル空間 V^* もまたベクトル空間なので，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,\,V^*)$ を考えることができる．ここで，線型同型写像 $\flat\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,\,V^*)$ を一つとろう．$\dim V=\dim V^*=n$ なので $\flat\in\mathrm{GL}(n,\,\mathbb{R})$ でもある．このとき，写像

$$g\colon V\times V\to\mathbb{R},\ (v,\,w)\mapsto\langle\flat(v),\,w\rangle \tag{5.1.1}$$

は明らかに双線型写像なので，内積の公理 **(I1)** を充たす．この g が内積の公理 **(I2)**, **(I3)** を充たすようにするにはどのような条件が必要だろうか.

ここで $V,\,V^*$ の基底 $\{\,e_i\,\}$, $\{\,e^i\,\}$ をとり，$v=v^ie_i$, $w=w^ie_i$ と成分表示する．テンソル積の構成に従うと $g\in T^0_2(V)$ であるから，g の成分表示は $g_{ij}e^i\otimes e^j$ である．このとき $g(v,\,w)$ を計算すると

$$g(v,\,w)=g_{ij}(e^i\otimes e^j)[v^ke_k,\,w^le_l]=g_{ij}e^i[v^ke_k]e^j[w^le_l]=g_{ij}\big(v^ke^i[e_k]\big)\big(w^le^j[e_l]\big)=g_{ij}v^iw^j. \tag{5.1.2}$$

が成り立つ.

- 公理 **(I2)** を充たすには，$g_{ij}w^i v^j = g_{ij}w^j v^i$ でなくてはならない．したがって $g_{ij} = g_{ji}$ である．
- 公理 **(I3)** を充たすには，2 次形式 $g_{ij}v^i v^j$ が正定値でなくてはならない．i.e. 行列 $[g_{ij}]_{1\leq i,\, j\leq n}$ は正定値である．

逆に内積 g が与えられると，そこから同型写像 $\flat \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, V^*)$ の表現行列が自然に定まる[*1]．$\flat(v) = h_i e^i \in V^*$ とおくと式 (5.1.2) において

$$\begin{aligned} g(v,\, w) &= \bigl(g_{ij}v^i\bigr)w^j \\ &= \langle \flat(v),\, w\rangle = h_j w^j \end{aligned}$$

であるから，

$$h_i = g_{ij}v^j$$

となる．i.e. $\flat$ の表現行列は $(\, g_{ij}\,)$ である．

以上の考察から，$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V に対して以下の事実が分かった：

> $\flat \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,\, V^*)$ であってその表現行列 $[g_{ij}]$ が正定値対称行列であるような $\flat$ が存在する
> $\iff$ （正定値）内積を定義できる

5.1.2　随伴

内積 g の定まったベクトル空間 V のことを**計量線型空間**と呼び，$(V,\, g)$ と書く．

定義 5.1: 随伴写像

二つの計量線型空間 $(V,\, g_V)$，$(W,\, g_W)$ および線型写像 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W)$ を与える．線型写像 $\tilde{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W,\, V)$ であって

$$g_W\bigl(w,\, f(v)\bigr) = g_V\bigl(v,\, \tilde{f}(w)\bigr), \quad \forall v \in V,\, \forall w \in W$$

が成り立つものを f の**随伴写像** (adjoint mapping) と呼ぶ．

5.2　Riemann 計量

[*1] $\flat$ の逆写像 $\flat^{-1}$ の存在は，内積の公理 **(I3)** により保証されている．

定義 5.2: Riemann 多様体

C^∞ 多様体 M を与える．各点 $p \in M$ における接空間 T_pM に正定値内積

$$g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

が与えられ，$g = \{ g_p \mid p \in M \}$ が $(0,\,2)$ 型テンソル場を作るとき，g を M 上の **Riemann 計量** (Riemannian matric) という．また，Riemann 計量の与えられた多様体を **Riemann 多様体** (Riemannian manifold) と呼ぶ．

! g_p が内積の公理 5.1-**(I3)** の代わりに

(I3') $\forall u \in T_pM$ に対して $g_p(u,\,v) = 0 \quad \Longrightarrow \quad v = 0$

を充たす（**非退化**; non-degenerate）とき，g を**擬 Riemann 計量** (pseudo-Riemannian metric) と呼ぶ．

チャート $(U;\, x^\mu)$ に対する g_p の座標表示は

$$g_p = g_{\mu\nu}(p)(\mathrm{d}x^\mu)_p \otimes (\mathrm{d}x^\nu)_p$$

と書かれる．内積の公理 5.1 より，$g_{\mu\nu}(p)$ は正定値対称行列である．

一般相対性理論で使う計量テンソルの定義との対応を見ておく：

$\mathrm{d}x^\mu \in \mathbb{R}$ を微小変位（点 p における 1-形式 $(\mathrm{d}x^i)_p$ ではない）として $\mathrm{d}x^\mu \left(\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p \in T_pM$ のノルムをインターバル $\mathrm{d}s$ と見做すことで，

$$\boxed{\mathrm{d}s^2} = g_p\left[\mathrm{d}x^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p,\, \mathrm{d}x^\nu \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)_p\right] = \mathrm{d}x^\mu\, \mathrm{d}x^\nu\, g_p\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p,\, \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)_p\right] = \boxed{g_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\mu\, \mathrm{d}x^\nu}$$

を再現する．

行列 $(\, g_{\mu\nu}\,)$ は対称行列なので，その固有値は全て実数である．g が Riemann 計量ならば全ての固有値は正であり，擬 Riemann 計量ならば負のものが混ざることがある．

定義 5.3: 計量の指数，Lorentz 計量

行列 $(\, g_{\mu\nu}\,)$ の固有値のうち正のものが i 個，負のものが j 個であるとき，対 $(i,\,j)$ を計量の**指数**という．$j = 1$ ならば **Lorentz 計量**と呼ばれる．

5.3 k-形式の内積

ベクトル空間 V に内積 g が定義されると，その双対ベクトル空間にも自然に内積 G が定義される．また，同型 $\bigwedge^1(V^*) \cong V^*$ を考えることで，V^* 上の内積 G を使って $\bigwedge^k(V^*)$ 上の内積を定義できる．$\bigwedge^k(V^*)$ 上に内積が定義されると，$\bigwedge^k(V^*)$ の正規直交基底を考えることができる．

5.3.1　計量に誘導される同型写像

!

5.1.1から，内積 g_p の成分表示 $g_{\mu\nu}(p)$ は同型写像 $\flat \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\,(T_pM,\, T_p^*M)$ を誘導する：

$$\omega_\mu = g_{\mu\nu}v^\nu, \quad \forall v = v^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p \in T_pM \tag{5.3.1}$$

逆写像 $\flat^{-1}$ は行列 $(\, g_{\mu\nu}(p)\,)$ の逆行列 $(\, g^{\mu\nu}\,)$ によって表現される．$\forall\omega = \omega_\mu(\mathrm{d}x^\mu)_p \in T_p^*M$ に対して

$$v^\mu = g^{\mu\nu}\omega_\nu \tag{5.3.2}$$

と作用する．式 (5.3.1), (5.3.2) を合わせて添字の上げ下げと呼んだ．

上の注釈を代数的に議論する．以下の議論は接空間に限らず一般の体 $\mathbb{K}$ 上の計量線型空間に対して成り立つので，$V = T_pM$ と書く．

まず，線型写像 $\flat\colon V \to V^*$ を次のように構成する：

$$\flat(v)[w] \coloneqq g(v,\, w), \quad \forall v,\, w \in V \tag{5.3.3}$$

補題 5.1:

上で定義した $\flat$ は線型写像である．

証明 $\forall v,\, v_1,\, v_2 \in T_pM,\, \forall\lambda \in \mathbb{R}$ をとる．双対空間の演算規則により

$$\begin{aligned}
&\flat(v_1 + v_2)[w] = g_p(v_1 + v_2,\, w) = g_p(v_1,\, w) + g_p(v_2,\, w) = \flat(v_1)[w] + \flat(v_2)[w] = \big(\flat(v_1) + \flat(v_2)\big)[w] \\
&\flat(\lambda v)[w] = g_p(\lambda v,\, w) = \lambda g_p(v,\, w) = \lambda\flat(v)[w].
\end{aligned}$$

■

補題 5.2:

$\flat\colon T_pM \to T_p^*M$ は同型写像である．

証明 内積の公理 **(I3)** と補題 5.1 より，$\forall v_1,\, v_2 \in T_pM$ に対して

$$\begin{aligned}
v_1 - v_2 \neq 0 \quad &\Longrightarrow \quad \big(\flat(v_1) - \flat(v_2)\big)[v_1 - v_2] = \big(\flat(v_1 - v_2)\big)[v_1 - v_2] = g_p(v_1 - v_2, v_1 - v_2) > 0 \\
&\Longrightarrow \quad \flat(v_1) - \flat(v_2) \neq 0
\end{aligned}$$

i.e. $\flat$ は単射である．$\dim V = \dim V^*$ だから示された．■

5.3.2　共役計量に誘導される同型写像

次に，共役計量 $g^{\mu\nu}$ による「添字の上げ」を議論する．V の上に内積 g が定まっているとき，V^* にも自然に内積 G が定まる：

$$G\colon V^* \times V^* \to \mathbb{K},\ (\omega,\, \eta) \mapsto g(\flat^{-1}(\omega),\, \flat^{-1}(\eta)) = \langle\omega,\, \flat^{-1}(\eta)\rangle \tag{5.3.4}$$

この定義の仕方は式 (5.1.1) に対応している．$G \in T^2_0(V)$ であるから，V の基底 $\{\, e_\mu \,\}$ を使って

$$G = G^{\mu\nu} e_\mu \otimes e_\nu$$

と書ける．$G^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$（$[\, g_{\mu\nu} \,]$ の逆行列）であることを確認する．

式 (5.3.3) に倣って線型写像 $\natural\colon V^* \to V^{**}$ を

$$\natural(\omega)[\eta] \coloneqq G(\omega,\, \eta), \quad \forall \omega,\, \eta \in V^*$$

と定義すると，$\natural$ は同型写像になる．$\natural$ の $\omega = \omega_\mu e^\mu \in V^*$ に対する作用を成分表示すると次のようになる：

$$\natural(\omega)[\eta] = G^{\mu\nu} \omega[e_\mu] \eta[e_\nu] = G^{\mu\nu} \omega_\mu \eta_\nu \tag{5.3.5}$$

ここで，命題??より $\dim V < \infty$ のとき

$$\begin{aligned} \varphi\colon V &\longrightarrow V^{**}, \\ v &\mapsto \bigl(\omega \longmapsto \varphi(v)\bigr) \end{aligned}$$

は線型同型写像を成す．よって $\sharp \coloneqq \varphi^{-1} \circ \natural$ として線型写像 $\sharp\colon V^* \to V$ を定義すると，$\sharp$ は同型写像になる．式 (5.3.5) より

$$(\varphi \circ \sharp)(\omega)[\eta] = G^{\mu\nu} \omega_\mu \eta_\nu = \omega_\mu G^{\kappa\nu} \eta_\nu e^\mu [e_\kappa] = \omega\bigl[(G^{\kappa\nu} \eta_\nu) e_\kappa\bigr] = \varphi\bigl((G^{\kappa\nu} \eta_\nu) e_\kappa\bigr)[\omega]$$

であるから，

$$(\sharp \circ \flat)(v) = (G^{\kappa\nu} g_{\nu\lambda} v^\lambda) e_\kappa$$

がわかる．定義 (5.3.4) より $\sharp \circ \flat = \mathrm{id}_V$ であるから，$G^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ とわかる．

> ベクトル空間 V 上の内積
>
> $$g = g_{\mu\nu} e^\mu \otimes e^\nu$$
>
> が与えられたとき，双対ベクトル空間 V^* の内積 G が
>
> $$G = g^{\mu\nu} e_\mu \otimes e_\nu$$
>
> として自然に定まる．このとき，計量 g, G から線型同型写像
>
> $$\begin{aligned} &\flat\colon V \xrightarrow{\cong} V^*, \\ &\flat(v)[w] = g(v,\, w). \\ &\sharp\colon V^* \xrightarrow{\cong} V, \\ &\sharp(\omega)[\eta] = G(\omega,\, \eta) \end{aligned}$$
>
> がそれぞれ自然に定まり，$\sharp \circ \flat = \mathrm{id}_V$ を充たす，i.e. $\sharp = \flat^{-1}$ である．

5.3.3 k-形式の内積

前節で述べた双対ベクトル空間 V^* 上の内積 G によって，k-形式同士の内積を定義することができる．

まず，命題??から $\bigwedge^1(V^*) \cong V^*$ なので，**内積 $G\colon V^* \times V^* \to \mathbb{K}$ を $G\colon \bigwedge^1(V^*) \times \bigwedge^1(V^*) \to \mathbb{K}$ と見做すことができる**．これを 1-形式同士の内積として定義し，$\forall \omega, \eta \in \bigwedge^1(V^*)$ に対して $\langle \omega, \eta \rangle \coloneqq G(\omega, \eta)$ と略記する．

! **双対内積** $\langle\ ,\ \rangle\colon V^* \times V \to \mathbb{R},\ (\omega, v) \mapsto \omega[v]$ との混同に注意せよ！！！ 以降，文脈上紛らわしいときは k-形式の内積を $\langle\ ,\ \rangle_k$ と書くことにする．

定義 5.4: k-形式の内積

k-形式同士の内積 $\langle\ ,\ \rangle\colon \bigwedge^k(V^*) \times \bigwedge^k(V^*) \to \mathbb{K}$ を $\alpha_1 \wedge \cdots \alpha_k,\ \beta_1 \wedge \cdots \beta_k \in \bigwedge^k(V^*)$ の形をした元に対して

$$\langle \alpha_1 \wedge \cdots \alpha_k,\ \beta_1 \wedge \cdots \beta_k \rangle \coloneqq \det\big(\langle \alpha_\mu,\ \beta_\nu \rangle\big)$$

と定義する．$\bigwedge^k(V^*)$ 全体に対しては，これを線型に拡張する．違う型同士の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ は 0 と定義する．

命題 5.1: $\bigwedge^k(V^*)$ の正規直交基底

k-形式全体の集合 $\bigwedge^k(V^*)$ の上に定義 5.4 によって内積を定義する．

$\{\, e_i \,\}$ を V の正規直交基底，$\{\, \theta^i \,\}$ をその双対基底とする．i.e. $\theta^i[e_j] = \delta^i_j$．このとき，

$$\left\{\, \theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_k} \;\middle|\; 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n \,\right\}$$

は正規直交基底である．

<u>**証明**</u> まず，

$$\langle \theta^i,\ \theta^j \rangle = G(\theta^i,\ \theta^j) = (g^{\mu\nu} e_\mu \otimes e_\nu)[\theta^i,\ \theta^j] = \mathring{g}^{ij}$$

なので $\{\, \theta^i \,\}$ は $\bigwedge^k(V^*)$ の正規直交基底である．ゆえに

$$\langle \theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_k},\ \theta^{j_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{j_k} \rangle = \det\big(\langle \theta^{i_\mu},\ \theta^{i_\nu} \rangle\big) = \det\big(\mathring{g}^{i_\mu j_\nu}\big)$$

であり，添字の集合 $\{\, i_\mu \,\}, \{\, j_\nu \,\}$ が集合として一致していなければ行列式の行/列で全て 0 のものが少なくとも 1 つ存在して 0 になる．集合として一致している場合は，添字の大小が指定されているので

$$\begin{aligned}
&\langle \theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_k},\ \theta^{j_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{j_k} \rangle \\
&= \begin{vmatrix} \mathring{g}^{i_1 i_1} & & & \\ & \mathring{g}^{i_2 i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathring{g}^{i_k i_k} \end{vmatrix} \\
&= \prod_{\mu=1}^{k} \mathring{g}^{i_\mu i_\mu} = \pm 1
\end{aligned}$$

となる． ■

> **!** ここで定義した k-形式の内積は，多様体 M の各点 p における局所的なものである．$\langle \omega_p,\, \eta_p \rangle$ が定義されたので，関数 $\langle \omega,\, \eta \rangle \colon M \to \mathbb{K},\, p \mapsto \langle \omega_p,\, \eta_p \rangle$ を考えることができる．以下，$\langle \omega,\, \eta \rangle$ と書いたらこのような意味を持つとする．

5.4 Hodge $\star$

n 次元 C^∞ 多様体 M の各点 p において $\dim \bigwedge^k (T_p^* M) = \dim \bigwedge^{n-k} (T_p^* M)$ であった．従ってこれらは抽象ベクトル空間としては同型である．M に Riemann 計量が入っており，かつ向き付けられているならば，同型写像を自然に定めることができる．それが Hodge の $\star$ 作用素である．

定義 5.5: $\star$

C^∞ 多様体 M は指数 $(i,\, j)$ の計量を持つとする．$\theta^1,\, \dots,\, \theta^k,\, \theta^{k+1},\, \dots,\, \theta^n \in T_p^* M$ を $T_p^* M$ の任意の正の向きの正規直交基底とする．このとき，各点 $p \in M$ において線型写像 $\star$ を

$$\star(\theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^k) := \left(\prod_{a=1}^{k} \langle \theta^a,\, \theta^a \rangle \right) \theta^{k+1} \wedge \dots \wedge \theta^n$$

と定義する．特に $k = 0,\, n$ のときにそれぞれ

$$\star 1 := \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n, \quad \star(\theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n) := (-1)^j$$

である[a]．$\star 1 \in \Omega^n(M)$ を M の**体積要素** (volume form) と呼び，vol_M と書く．
$\forall p \in M$ における上述の線型写像をあわせることで **Hodge の作用素**

$$\star \colon \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$$

が定義される．

[a] 計量が正定値のとき，i.e. M が Riemann 多様体のときは $j = 0$ で，青字で示した因子は常に 1 である．

定義 5.5 に従うと $\star(\theta^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{\mu_k})$ は，集合 $\{1,\,\dots,\,n\}$ の部分集合 $\{\mu_1,\,\dots,\,\mu_k\}$ の補集合を小さい方から順に並べた添字の集合 $\{\nu_1,\,\dots,\,\nu_{n-k}\mid 1\le\nu_1<\cdots<\nu_{n-k}\le n\}$ を得て

$$\star(\theta^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{\mu_k})=\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}1&\dots&k&k+1&\dots&n\\\mu_1&\dots&\mu_k&\nu_1&\dots&\nu_{n-k}\end{pmatrix}\left(\prod_{a=1}^{k}\langle\theta^{\mu_a},\,\theta^{\mu_a}\rangle\right)\theta^{\nu_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{\nu_{n-k}}$$

として計算される．これは，Levi-Civita 記号と Einstein の規約を利用した

$$\frac{1}{(n-k)!}\langle\theta^{\mu_1},\,\theta^{\nu_1}\rangle\cdots\langle\theta^{\mu_k},\,\theta^{\nu_k}\rangle\,\epsilon_{\nu_1\dots\nu_k\nu_{k+1}\dots\nu_n}\,\theta^{\nu_{k+1}}\wedge\cdots\wedge\theta^{\nu_n}$$

と等しい．いちいちこのように書くのは大変なので，Levi-Civita 記号の添字の上げを $\mathring{g}^{\mu\nu}:=\langle\theta^\mu,\,\theta^\nu\rangle$ によって行い次のように略記する：

$$\epsilon^{\mu_1\dots\mu_k}{}_{\nu_{k+1}\dots\nu_n}:=\mathring{g}^{\mu_1\nu_1}\cdots\mathring{g}^{\mu_k\nu_k}\epsilon_{\nu_1\dots\nu_k\nu_{k+1}\dots\nu_n}$$

$\forall\omega\in\Omega^k(M)$ に対して $\star\omega\in\Omega^{n-k}(M)$ が C^∞ 級であることを確認する．そのために，正規直交基底によって $\star\omega$ を成分表示する：

正規直交基底の構成

M の正のチャート $(U;\,x^\mu)$ をとる．$\forall p\in M$ において，自然基底

$$X_\mu=\frac{\partial}{\partial x^\mu}\in\mathfrak{X}(M)$$

に Gram-Schmidt の直交化法を施す：

$$e_\mu:=\frac{X_\mu-\sum_{\nu=1}^{\mu-1}g(X_\mu,\,e_\nu)e_\nu}{\left\|X_\mu-\sum_{\nu=1}^{\mu-1}g(X_\mu,\,e_\nu)e_\nu\right\|}$$

$\{e_\mu\}$ は U 上の C^∞ ベクトル場であり，$\forall p\in U$ において接空間 T_pM の正規直交基底をなす．これを U 上の**正規直交標構** (orthogonal frame) と呼ぶ．

双対基底の構成

$\{\theta^\mu\}$ を $\{e_\mu\}$ の双対基底とする．命題 5.1 より，これらは $\forall p\in M$ において T_p^*M の正の正規直交基底をなす．

局所表示の対応

$\omega\in\Omega^k(M)$ が U 上で

$$\omega=\omega_{\mu_1\dots\mu_k}\theta^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{\mu_k}$$

の局所表示を持つとする．このとき定義 5.5 から，各点 $p\in U$ において

$$\begin{aligned}\star\omega_p&=\omega_{\mu_1\dots\mu_k}(p)\,\star(\theta^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{\mu_k})\\&=\frac{1}{(n-k)!}\omega_{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}(p)\,\epsilon^{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}{}_{\nu_{k+1}\nu_{k+2}\dots\nu_n}\,\theta^{\nu_{k+1}}\wedge\cdots\wedge\theta^{\nu_n}\end{aligned}$$

である[*2]．$\omega_{\mu_1\dots\mu_k}(p)$ が C^∞ 関数なので $\star\omega$ は C^∞ 級である．

[*2] Einstein の規約により添字 $\nu_{k+1},\,\nu_{k+2},\,\dots,\,\nu_n$ に関しても和をとることになるので，添字 $\mu_1,\,\mu_2,\,\dots,\,\mu_k$ の組み合わせ一つにつき $(n-k)!$ 個の項が重複する．

命題 5.2: 体積要素の表示

M のチャート $(U;\ x^\mu)$ に対して以下が成立する：

$$\mathrm{vol}_M = \sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|}\,\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$$

証明 別の正のチャート $(V;\ y^\mu)$ をとる．このとき

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n &= \frac{\partial x^1}{\partial y^{\nu_1}}\,\mathrm{d}y^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial x^n}{\partial y^{\nu_n}}\,\mathrm{d}y^{\nu_n} \\
&= \epsilon^{\nu_1 \ldots \nu_n} \frac{\partial x^1}{\partial y^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^n}{\partial y^{\nu_n}}\,\mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^n \\
&= \det\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}\right)\mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^n
\end{aligned} \tag{5.4.1}$$

が成立する．一方，g の y^μ に関する局所表示を ${g'}_{\mu\nu}$ とおくと

$$g_p = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu = g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\kappa}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\lambda}\,\mathrm{d}y^\kappa \otimes \mathrm{d}y^\lambda = {g'}_{\kappa\lambda}\,\mathrm{d}y^\kappa\,\mathrm{d}y^\lambda$$

であるから

$${g'}_{\kappa\lambda} = g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\kappa}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\lambda}$$

である．両辺を行列と見做して行列式をとることで

$$\det({g'}_{\kappa\lambda}) = \det(g_{\mu\nu})\left(\det\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}\right)\right)^2$$

とわかる．ゆえに式 (5.4.1) から

$$\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n = \sqrt{|\det({g'}_{\kappa\lambda})|\ /\ |\det(g_{\mu\nu})|}\,\mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^n$$

である．ここで $(V;\, y^\mu)$ として正規直交標構 $\{\,\theta^a\,\}$ に対応するチャートをとってくれば[*3]，$|\det({g'}_{\kappa\lambda})| = 1$ であるので

$$\sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|}\,\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n = \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n = \star 1 = \mathrm{vol}_M$$

■

[*3] 座標近傍は U，座標変換が直交行列である．

命題 5.3: $\star$ の性質

多様体 M が指数 $(i,\, j)$ の計量を持つとする．$\forall f,\, g \in C^\infty(M)$ と $\forall \omega,\, \eta \in \Omega^k(M)$ に対して以下が成立する：

(1) $\star(f\omega + g\eta) = f\star\omega + g\star\eta$

(2) $\star\star\omega = (-1)^{j+k(n-k)}\omega$

(3) $\boxed{\omega \wedge \star\eta} = \eta \wedge \star\omega = \boxed{\langle \omega,\, \eta \rangle \mathrm{vol}_M}$

(4) $\star(\omega \wedge \star\eta) = \star(\eta \wedge \star\omega) = \langle \omega,\, \eta \rangle$

(5) $\langle \star\omega,\, \star\eta \rangle = (-1)^{j} \langle \omega,\, \eta \rangle$

ただし，k-形式の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ は定義 5.4 によるものとする．

証明 M 上の各点 p において示せば良い．

(1) $\bigwedge^k(V^*)$ は $C^\infty(M)$-加群なので，Hodge の作用素の定義から明かである．

(2) $\{\,\theta^i\,\}$ を T_p^*M の正規直交標構とする．命題 5.1 より，$\omega_p = \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^k$ の場合に示せば十分である．

$$\star\omega_p = \left(\prod_{a=1}^{k} \langle \theta^a,\, \theta^a \rangle\right) \theta^{k+1} \wedge \cdots \wedge \theta^n$$

だから，

$$\begin{aligned}
\star\star\,\omega_p &= \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \ldots & n-k & n-k+1 & \ldots & n \\ k+1 & \ldots & n & 1 & \ldots & k \end{pmatrix} \left(\prod_{a=1}^{k} \langle \theta^a,\, \theta^a \rangle\right) \left(\prod_{b=k+1}^{n} \langle \theta^b,\, \theta^b \rangle\right) \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^k \\
&= \left(\prod_{a=1}^{n} \langle \theta^a,\, \theta^a \rangle\right) (-1)^{k(n-k)} \omega_p \\
&= (-1)^{j+k(n-k)} \omega_p
\end{aligned}$$

(3) 線形性から $\omega_p = \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^k$, $\eta_p = \theta^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{\mu_k}$ の場合に示せば十分である．

$$\star(\theta^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{\mu_k}) = \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \ldots & k & k+1 & \ldots & n \\ \mu_1 & \ldots & \mu_k & \nu_1 & \ldots & \nu_{n-k} \end{pmatrix} \left(\prod_{a=1}^{k} \langle \theta^{\mu_a},\, \theta^{\mu_a} \rangle\right) \theta^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{\nu_{n-k}}$$

であるから，$\omega_p \wedge \star\eta_p \neq 0$ なのは $\{1,\, \ldots,\, k\} = \{\mu_1,\, \ldots,\, \mu_k\}$ の場合のみである．このとき

$$\omega_p \wedge \star\eta_p = \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \ldots & k \\ \mu_1 & \ldots & \mu_k \end{pmatrix} \left(\prod_{a=1}^{k} \langle \theta^a,\, \theta^a \rangle\right) \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n$$

である．一方，$\langle \omega_p,\, \eta_p \rangle \neq 0$ となるのは $\{1,\, \ldots,\, k\} = \{\mu_1,\, \ldots,\, \mu_k\}$ の場合のみであり，

$$\langle \omega_p,\, \eta_p \rangle = \det\big(\langle \theta^i,\, \theta^{\mu_j} \rangle\big) = \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \ldots & k \\ \mu_1 & \ldots & \mu_k \end{pmatrix} \left(\prod_{a=1}^{k} \langle \theta^a,\, \theta^a \rangle\right)$$

となる．同様の議論により $\omega \wedge \star\eta = \eta \wedge \star\omega = \langle \omega,\, \eta \rangle \mathrm{vol}_M$ とわかる．

(4) $\star \mathrm{vol}_M = 1$ と (3) より従う．

(5) (2), (4) より

$$\langle \star\omega,\, \star\eta \rangle = \star(\star\omega \wedge \star\star\,\eta) = (-1)^{j+k(n-k)} \star (\star\omega \wedge \eta) = (-1)^{j} \star (\eta \wedge \star\omega) = (-1)^{j} \langle \omega,\, \eta \rangle$$

■

!

性質 (3) を $\star$ の定義とすることもできる．その場合，「性質 (3) $\Longrightarrow$ 定義 5.5」は次のようにして示される：

証明 M の各点 p において示せば良い．$\{\theta^i\}$ を正規直交標構として $\omega_p = \theta^1 \wedge \cdots \theta^k$ とおくと，性質 (3) より

$$\begin{aligned}
\omega_p \wedge \star\omega_p &= (\theta^1 \wedge \cdots \theta^k) \wedge \star(\theta^1 \wedge \cdots \theta^k) \\
&= \det\big(\, \langle \theta^\mu,\, \theta^\nu \rangle_k \,\big)\, \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n \\
&= \left(\prod_{a=1}^{k} \langle \theta^a,\, \theta^a \rangle \right) \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n .
\end{aligned}$$

したがって

$$\star(\theta^1 \wedge \cdots \theta^k) = \left(\prod_{a=1}^{k} \langle \theta^a,\, \theta^a \rangle \right) \theta^{k+1} \wedge \cdots \wedge \theta^n$$

■

5.4.1 双対基底への作用

命題 5.2 と命題 5.3-(3) を用いると

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^k) \wedge \star(\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^k) \\
&= \det\big(\, \langle \mathrm{d}x^\mu\,,\, \mathrm{d}x^\nu \rangle \,\big)_{1 \le \mu,\, \nu \le k} \sqrt{\left|\det\big(g_{\kappa\lambda}\big)\right|}\, \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \\
&= \det\big(g^{\mu\nu}\big)_{1 \le \mu,\, \nu \le k} \sqrt{\left|\det\big(g_{\kappa\lambda}\big)\right|}\, \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n
\end{aligned}$$

なので，$g := \det\big(g_{\kappa\lambda}\big)$ とおいて

$$\begin{aligned}
&\star\,(\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^k) = \det\big(g^{\mu\nu}\big)_{1 \le \mu,\, \nu \le k} \sqrt{|g|}\ \mathrm{d}x^{k+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \\
&= \sqrt{|g|}\, \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_k} g^{\mu_1 1} \cdots g^{\mu_k k}\ \mathrm{d}x^{k+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \\
&= \frac{\sqrt{|g|}}{(n-k)!}\, \epsilon^{1 \dots k}{}_{\nu_{k+1} \dots \nu_n}\ \mathrm{d}x^{\nu_{k+1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\nu_n} .
\end{aligned}$$

ただし 2 番目の等号において，添字 $\{\nu_{k+1},\, \dots \nu_n\}$ に関する和をとるようにしたことで重複する項が $(n-k)!$ 個出現するため，$(n-k)!$ で全体を割っている．$\{1,\, \dots,\, k\}$ の順番を入れ替えることで

$$\boxed{\star(\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_k}) = \frac{\sqrt{|g|}}{(n-k)!}\, \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_{k+1} \dots \nu_n}\ \mathrm{d}x^{\nu_{k+1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\nu_n}}$$

である．

5.5　ラプラシアンと調和形式

この節では，M は指数 $(i,\, j)$ の計量 g を持った向き付けられた多様体で，コンパクトかつ境界のないものとする．コンパクト性は $\Omega^k(M)$ に内積 5.6 を入れて計量線型空間にする場合にのみ必要となる．

定義 5.6: k-形式の内積その 2

k-形式全体が作る無限次元ベクトル空間 $\Omega^k(M)$ 上の非退化内積 $(\ ,\ )\colon \Omega^k(M)\times\Omega^k(M)\to\mathbb{R}$ を次のように定義する：

$$(\omega,\, \eta) := \int_M \langle\omega,\, \eta\rangle_k \,\mathrm{vol}_M$$

特に M が Riemann 多様体ならば内積 $(\ ,\ )$ は正定値内積である．

証明 非退化（正定値）内積の公理 5.1-**(I1)**, **(I2)**, **(I3')**（**(I3)**）を充たすことを確認すれば良い．■

命題 5.3-(3) より

$$(\omega,\, \eta) = \int_M \omega\wedge\star\eta = \int_M \eta\wedge\star\omega$$

とも書ける．

5.5.1　随伴外微分作用素

定義 5.7: 随伴外微分作用素

外微分作用素

$$\mathrm{d}\colon \Omega^k(M)\to\Omega^{k+1}(M)$$

に対して，**随伴外微分作用素**

$$\delta\colon \Omega^k(M)\to\Omega^{k-1}(M)$$

を次のように定義する：

$$\delta := (-1)^k \star^{-1}\circ\,\mathrm{d}\circ\star = (-1)^{j+n(k+1)+1}\star\circ\,\mathrm{d}\circ\star$$

命題 5.4: 随伴性

$C^\infty(M)$-加群 $\Omega^k(M)$ に定義 5.6 の内積 $(\ ,\ )$ を入れて計量線型空間にしたとき，δ は d の随伴作用素（定義 5.1）である：

$$(\mathrm{d}\omega\,,\, \eta) = (\omega,\, \delta\eta)\,,\quad \forall\omega\in\Omega^k(M),\, \forall\eta\in\Omega^{k+1}(M)$$

証明

$$\mathrm{d}\omega \wedge \star\eta = \mathrm{d}(\omega \wedge \star\eta) - (-1)^k \omega \wedge \mathrm{d}(\star\eta) = \mathrm{d}\omega \wedge \star\eta + \omega \wedge \star(\delta\eta)$$

両辺を M 上で積分して Stokes の定理を用いると，M に境界がないことから

$$(\mathrm{d}\omega\,,\,\eta) = \int_M \mathrm{d}\omega \wedge \star\eta + \int_M \omega \wedge \star\delta\eta = (\omega,\,\delta\eta)\,.$$

■

命題 5.5:

(1) $\star\delta = (-1)^k\,\mathrm{d}\star$

(2) $\delta\star = (-1)^{k+1}\star\mathrm{d}$

(3) $\delta \circ \delta = 0$

証明 (1) $\star\delta = \star \circ (-1)^k \star^{-1} \circ \mathrm{d} \circ \star = (-1)^k\,\mathrm{d}\star\,.$

(2) $\delta\star = (-1)^{j+n(n-k+1)+1} \circ \mathrm{d} \circ \star \circ \star = (-1)^{j+n(n-k+1)+1}(-1)^{j+(n-k)k} \star \circ \mathrm{d} \circ \star^{-1} \circ \star = (-1)^{k+1}\star\mathrm{d}\,.$

(3) $\delta \circ \delta = (-1)^{k-1} \star^{-1} \circ \mathrm{d} \circ \star \circ (-1)^k \star^{-1} \circ \mathrm{d} \circ \star = - \star^{-1} \circ \mathrm{d} \circ \mathrm{d} \circ \star = 0.$

■

5.5.2 Laplacian

定義 5.8: Laplacian

線型作用素

$$\Delta := \mathrm{d}\delta + \delta\,\mathrm{d} : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$$

は**ラプラシアン** (Laplacian) もしくは **Laplace-Beltrami 作用素** (Laplace-Beltrami operator) と呼ばれる．

また，

$$\Delta\omega = 0$$

となる微分形式 $\omega \in \Omega^*(M)$ を**調和形式** (harmonic form) と呼ぶ．

命題 5.6: Laplacian の性質

(1) $\star\Delta = \Delta\star$. i.e. ω が調和形式 $\Longrightarrow$ $\star\omega$ も調和形式

(2) $\forall\omega,\,\eta \in \Omega^k(M)$ に対して $(\Delta\omega,\,\eta) = (\omega,\,\Delta\eta)$. i.e. Δ はエルミート作用素である．

(3) M が Riemann 多様体ならば，$\Delta\omega = 0 \iff \mathrm{d}\omega = 0,\ \delta\omega = 0$

証明 (1) 命題 5.5-(1), (2) より

$$\star\Delta = (-1)^{k+1}\delta\star\delta + (-1)^k\,\mathrm{d}\star\mathrm{d} = \delta\,\mathrm{d}\star + \mathrm{d}\,\delta\star = \Delta\star\,.$$

(2) 命題 5.4 と内積の対称性より

$$
\begin{aligned}
(\Delta\omega,\, \eta) &= (\mathrm{d}\,\delta\omega,\, \eta) + (\eta,\, \delta\,\mathrm{d}\,\omega) \\
&= (\delta\omega,\, \delta\eta) + (\mathrm{d}\eta\,,\, \mathrm{d}\,\omega) \\
&= (\mathrm{d}\,\delta\eta,\, \omega) + (\omega,\, \delta\,\mathrm{d}\,\eta) \\
&= (\omega,\, \Delta\eta)\,.
\end{aligned}
\tag{5.5.1}
$$

(3) ($\Longleftarrow$) は明らか.

($\Longrightarrow$) M が Riemann 多様体であるという仮定から，内積 (,) は正定値である．式 (5.5.1) より

$$(\Delta\omega,\, \omega) = (\delta\omega,\, \delta\omega) + (\mathrm{d}\omega\,,\, \mathrm{d}\omega)$$

であるから，内積の正定値性から $\Delta\omega = 0$ ならば $\delta\omega = \mathrm{d}\omega = 0$ である.

■

5.5.3 Hodge の定理

この節では，M は向き付けられたコンパクト Riemann 多様体で境界がないものとする.

M 上の調和 k-形式全体の集合を

$$\mathrm{Harm}^k(M) \coloneqq \left\{\omega \in \Omega^k(M) \,\middle|\, \Delta\omega = 0\right\}$$

と書く．命題 5.6-(3) により調和形式は必ず閉形式なので

$$\mathrm{Harm}^k(M) \subset \mathrm{Ker}\bigl(\mathrm{d} : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)\bigr)$$

であり，後述の de Rham コホモロジー類 $H^k_{\mathrm{DR}}(M)$ への写像が自然に誘導される：

$$\pi\colon\ \mathrm{Harm}^k(M) \to H^k_{\mathrm{DR}}(M),\ \omega \mapsto [\omega]$$

$\omega \in \mathrm{Harm}^k(M)$ が完全形式である，i.e. $\exists\eta \in \Omega^{k-1}$, $\omega = \mathrm{d}\eta$ ならば

$$(\omega,\, \omega) = (\mathrm{d}\eta\,,\, \omega) = (\eta,\, \delta\omega) = 0. \quad\Longrightarrow\quad \omega = 0.$$

であることから，π は単射であるとわかる．実は，次の事実が知られている：

定理 5.1: Hodge の定理

自然な写像 $\pi\colon\ \mathrm{Harm}^k(M) \to H^k_{\mathrm{DR}}(M)$ は同型写像である．i.e. 向き付けられたコンパクト Riemann 多様体の任意の de Rham コホモロジー類は，ただ一つの調和形式で代表される.

定理 5.1 の証明には，次の定理が有用である：

定理 5.2: Hodge 分解

向き付けられたコンパクト Riemann 多様体の任意の k-形式は，調和形式，完全形式，双対完全形式の和として一意的に分解される：

$$\Omega^k(M) = \mathrm{Harm}^k(M) \oplus \mathrm{d}\Omega^{k-1}(M) \oplus \delta\Omega^{k+1}(M)$$