第 10 章

ゲージ場の数学

10.1　物理学的なゲージ場の導入

時空の多様体を $\mathcal{M}$ と書く．

場[*1] $\varphi\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{K}^N,\ x \longmapsto \bigl(\varphi_1(x),\,\dots,\,\varphi_N(x)\bigr)$ が行列 Lie 群 $G \subset \mathrm{GL}(N,\,\mathbb{K})$ で記述される[*2]内部対称性を持っているような系を考える．つまり，ゲージ原理を要請し，任意の C^∞ 写像 $U\colon \mathcal{M} \longrightarrow G$ に対して[*3]，系のラグランジアン密度の場に関する項 $\mathcal{L}[\varphi_\mu(x)]$ が $\mathcal{L}\bigl[\,[U(x)]_i^{\,j}\varphi_j(x)\bigr] = \mathcal{L}[\varphi_i(x)]$ を充たすとする．もしくは，場 $\varphi\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{K}^N$ であって，時空の各点 $x \in \mathcal{M}$ および任意の C^∞ 写像 $U\colon \mathcal{M} \longrightarrow G$ に対して $\varphi(x) \longrightarrow U(x)\varphi(x)$ と変換する[*4] ものを考えると言っても良い．

この系を経路積分により量子化することを見据えて，このような変換性を充たす全ての場がなす空間の幾何学を考察すると見通しが良いだろう．そのため，まず時空上の無限小だけ離れた 2 点 $x_\mathrm{i},\, x_\mathrm{f} \in \mathcal{M}$ における場の配位 $\varphi(x_\mathrm{i}),\, \varphi(x_\mathrm{f})$ を比較しよう．内部自由度による変換性を議論したいので，$\varphi(x_\mathrm{f}) - \varphi(x_\mathrm{i})$ なる量を調べても意味がない．$x_\mathrm{i},\, x_\mathrm{f}$ を結ぶ C^∞ 曲線 $\gamma\colon [t_\mathrm{i},\, t_\mathrm{f}] \longrightarrow \mathcal{M}$ を持ってきて，γ に沿って $\varphi(x_\mathrm{i})$ を x_f まで流してやるのが良い．つまり，場の配位を記述する空間 $\mathbb{K}^N$ 上の C^∞ 曲線 $\varphi^{(\gamma)} \coloneqq \varphi \circ \gamma\colon [t_\mathrm{i},\, t_\mathrm{f}] \longrightarrow \mathbb{K}^N$ を考えれば，量 $\varphi(x_\mathrm{f}) - \varphi^{(\gamma)}(t_\mathrm{f})$ は $U(x_\mathrm{f}) \in G$ による変換を受けるはずである．$x_\mathrm{i},\, x_\mathrm{f}$ の両方を含む $\mathcal{M}$ のチャート $\bigl(V,\, (x^\mu)\bigr)$ を持ってきて成分計算すると，$\mathrm{d}x \coloneqq x_\mathrm{f} - x_\mathrm{i}$ が[*5]微小なので Taylor 展開において $\mathrm{d}x$ の 1 次の項まで残すことで

$$
\begin{aligned}
\varphi_i^{(\gamma)}(t_\mathrm{f}) &\eqqcolon \varphi_i(x_\mathrm{i}) - [\,A_\mu(x_\mathrm{i})\,]_i^{\,j}\varphi_j(x_\mathrm{i})\,\mathrm{d}x^\mu \\
\varphi(x_\mathrm{f}) &= \varphi(x_\mathrm{i}) + \partial_\mu\varphi(x)\,\mathrm{d}x^\mu
\end{aligned}
\tag{10.1.1}
$$

と書けるはずである．ただし，式 (10.1.1) の右辺によって $\dim\mathcal{M}$ 個の成分を持つ新しい場 $A_\mu\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathrm{GL}(N,\,\mathbb{K})$ を定義した．この場は**ゲージ場**と呼ばれる．

[*1] この段階では，**場**とはその配位を記述する空間 F（これは C^∞ 多様体だったりベクトル空間だったりする）と C^∞ 写像 $\varphi\colon \mathcal{M} \longrightarrow F$ の組のことと考える．この描像は後にファイバー束の C^∞ 切断として定式化される．

[*2] ここでは $\mathbb{K} = \mathbb{R},\, \mathbb{C}$ としておく．

[*3] 内部対称性という言葉を使うのは，U が定数写像とは限らないことを意味する．

[*4] 一般相対論の数学的定式化におけるテンソル場の変換性は，時空の多様体 $\mathcal{M}$ 上の一般座標変換（i.e. チャートの取り替え）に由来するものであった．同じように，ここで考えている場の変換性はどのような数学的定式化に由来するのかということを考えると，時空 $\mathcal{M}$ を底空間とする主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ の同伴ベクトル束 $\mathbb{K}^N \hookrightarrow P \times_\rho \mathbb{K}^N \xrightarrow{q} \mathcal{M}$ における，$\mathcal{M}$ のチャートの取り替えに伴う局所自明化の取り替え（i.e. 変換関数のファイバーへの作用）の概念に行き着くのである．詳細は次の小節で議論する．

[*5] 厳密にはこれは座標関数の差 $\mathrm{d}x^\mu \coloneqq x^\mu(x_\mathrm{f}) - x^\mu(x_\mathrm{i})$ の絶対値が小さいことを主張している．

ゲージ場 A_μ を時空の各点 $x \in \mathcal{M}$ における変換性によって特徴付けよう．そのためには，量

$$\varphi(x_\mathrm{f}) - \varphi^{(\gamma)}(t_\mathrm{f}) = \bigl(\partial_\mu \varphi(x_\mathrm{i}) + A_\mu(x_\mathrm{i})\varphi(x_\mathrm{i})\bigr)\,\mathrm{d}x^\mu$$

が $U(x_\mathrm{f}) \in G$ による変換を受けることに注目すれば良い．つまり，**共変微分**と呼ばれる線型写像を $\mathcal{D}_\mu(x) \coloneqq \partial_\mu + A_\mu(x)$ で定義すると，$\forall x \in \mathcal{M}$ における，内部対称性による変換

$$\varphi(x) \longrightarrow \tilde{\varphi}(x) \coloneqq U(x)\varphi(x) \tag{10.1.2}$$

に伴って $\mathcal{D}_\mu(x)\varphi(x)$ は

$$\mathcal{D}_\mu(x)\varphi(x) \longrightarrow \tilde{\mathcal{D}_\mu}(x)\tilde{\varphi}(x) \coloneqq U(x)\mathcal{D}_\mu(x)\varphi(x)$$

の変換を受ける．このことから，場 φ の変換 (10.1.2) に伴う共変微分自身の変換則は

$$\mathcal{D}_\mu(x) \longrightarrow \tilde{D_\mu}(x) = U(x)\mathcal{D}_\mu(x)U(x)^{-1} \tag{10.1.3}$$

となる．従って場 $A_\mu \colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathrm{GL}(N,\, \mathbb{K})$ の，場 φ の変換 (10.1.2) に伴う変換則が

$$A_\mu(x) \longrightarrow U(x)\bigl(\partial_\mu + A_\mu(x)\bigr)U(x)^{-1} \tag{10.1.4}$$

だと分かった．このような場の変換則を**ゲージ変換** (gauge transformation) と呼ぶ．

10.1.1 内部対称性の定式化

前節で考えた内部対称性を持つ場 $\varphi \colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{K}^N$ を数学の言葉に翻訳すると，主束

$$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$$

の，行列 Lie 群 G の N 次元表現

$$\rho \colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{K}^N),\ U \longmapsto (\boldsymbol{v} \longmapsto U\boldsymbol{v})$$

による同伴ベクトル束

$$\mathbb{K}^N \hookrightarrow P \times_\rho \mathbb{K}^N \xrightarrow{q} \mathcal{M}$$

の局所切断 $\phi \colon V_\alpha \longrightarrow P \times_\rho \mathbb{K}^N$ を，ある一つの局所自明化 $\sigma_\alpha \colon q^{-1}(V_\alpha) \longrightarrow V_\alpha \times \mathbb{K}^N$ によって座標表示したもの（の第 2 成分を取り出してきたもの）

$$\varphi = \mathrm{proj}_2 \circ \sigma_\alpha \circ \phi \colon V_\alpha \longrightarrow \mathbb{K}^N$$

ということになる．と言うのも，こう考えることで場の変換性 (10.1.2)

$$\varphi(x) \longrightarrow \tilde{\varphi}(x) \coloneqq U(x)\varphi(x)$$

が，時空 $\mathcal{M}$ の 2 つのチャート $\bigl(V,\, (x^\mu)\bigr)$, $\bigl(\tilde{V},\, (\tilde{x}^\mu)\bigr)$ の共通部分 $V \cap \tilde{V}$ 上における，局所自明化 $\sigma,\, \tilde{\sigma} \colon q^{-1}(V \cap \tilde{V}) \longrightarrow (V \cap \tilde{V}) \times \mathbb{K}^N$ の取り替え（内部自由度に関する一般座標変換のようなもの）に伴う変換関数 $U_{\tilde{V},\, V} \colon \mathcal{M} \longrightarrow G$ の作用

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma} \circ \sigma^{-1} \colon (V \cap \tilde{V}) \times \mathbb{K}^N &\longrightarrow (V \cap \tilde{V}) \times \mathbb{K}^N, \\
(x,\, \boldsymbol{\varphi(x)}) &\longmapsto \Bigl(x,\, \rho\bigl(U_{\tilde{V},\, V}(x)\bigr)\bigl(\varphi(x)\bigr)\Bigr) = \Bigl(x,\, \boldsymbol{U_{\tilde{V},\, V}(x)\varphi(x)}\Bigr)
\end{aligned} \tag{10.1.5}$$

として上手く定式化できているのである[*6]．ここまでは，ゲージ変換 (10.1.4) に従う場 $A_\mu(x)$ を導入するための舞台の定式化である．以降の節では，ゲージ場 $A_\mu(x)$ そのものの数学的定式化について解説する．最初に答えを言ってしまうと，$A_\mu(x)$ は，主束の接続形式を主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ の局所切断によって引き戻したものとして定式化できる．

10.2 Lie 群の指数写像と基本ベクトル場

主束の接続の話に入る前に，Lie 群の Lie 代数についての準備をしなくてはいけない．この節は [?, Chapter 20], [?, 第 6 章] による．道具としてベクトル場のフローを使うので，必要に応じて付録 B の該当箇所を参照することにしよう．

Lie 群 G の上の微分同相写像[*7]

$$\boldsymbol{L_g} : G \longrightarrow G,\ x \longmapsto gx,$$
$$\boldsymbol{R_g} : G \longrightarrow G,\ x \longmapsto xg,$$

のことをそれぞれ**左移動**，**右移動**と言う．

定義 10.1: 左不変ベクトル場

Lie 群 G の**左不変ベクトル場** (left-invariant vector field) とは，$\mathbb{R}$-ベクトル空間

$$\boldsymbol{\mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)} := \left\{ X \in \mathfrak{X}(G) \;\middle|\; \forall g \in G,\ (L_g)_* X = X \right\}$$

の元のこと．i.e. $\forall g \in G$ に対して自分自身と L_g-related な C^∞ ベクトル場のことを言う．

$\forall g \in G$ と $\forall X, Y \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ をとる．このとき $(L_g)_* X = X$, $(L_g)_* Y = Y$ なので，命題??の後半から

$$(L_g)_*[X, Y] = [(L_g)_* X, (L_g)_* Y] = [X, Y]$$

が言える．i.e. $\mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ は Lie ブラケットについて閉じるので，体 $\mathbb{R}$ 上の Lie 代数になる．

命題 10.1:

G を Lie 群とする．このとき評価写像

$$\mathrm{ev}_{1_G} : \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(M) \longrightarrow T_{1_G} G,\ X \longmapsto X_{1_G}$$

はベクトル空間の同型写像である．

証明 ev_{1_G} が $\mathbb{R}$-線型写像であることは明らか．

[*6] 物理では変換性によって場を定義するので，数学的定式化はこれで良い．なお，この定式化は主束の全空間 P の情報を一切使っていないが，これは命題??の表れである．実際，この節の冒頭の議論で顕に登場したのは時空 $\mathcal{M}$，場の配位を記述する空間 $\mathbb{K}^N$，内部対称性を表す Lie 群 G とその表現 $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(N, \mathbb{K})$，場の局所的変換を表す C^∞ 写像 $U : \mathcal{M} \longrightarrow G$ だけだったので，その数学的定式化が P によらないのは妥当だと思う．

[*7] 従って，命題??から L_g, R_g によるベクトル場の押し出しが一意的に存在する．

ev_{1_G} が単射

$\operatorname{Ker}\mathrm{ev}_{1_G} = \{0\}$ を示す．$\forall X \in \operatorname{Ker}\mathrm{ev}_{1_G}$ に対して $\mathrm{ev}_{1_G}(X) = X_{1_G} = 0$ が成り立つ．一方 $X \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ でもあるので，$\forall g \in G$ に対して $X_g = X_{L_g(1_G)} = (T_{1_G}L_g)(X_{1_G}) = 0$ が言える[*8]．

ev_{1_G} が全射

$\forall v \in T_{1_G}G$ を 1 つとり，C^∞ ベクトル場 $v^{\mathrm{L}} \in \mathfrak{X}(G)$ を

$$v^{\mathrm{L}} \colon G \longrightarrow TG,\ g \longmapsto T_{1_G}(L_g)(v) \tag{10.2.1}$$

と定義する[*9]．$\forall g \in G$ に対して v^{L} が自分自身と L_g-related であることを示す．実際，$\forall h \in G$ に対して

$$T_h(L_g)(v^{\mathrm{L}}|_h) = T_h(L_g) \circ T_{1_G}(L_h)(v) = T_{1_G}(L_g \circ L_h)(v) = T_{1_G}(L_{gh})(v) = v^{\mathrm{L}}|_{gh} = v^{\mathrm{L}}|_{L_g(h)}$$

が言える．i.e. $v^{\mathrm{L}} \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ である．従って v^{L} に ev_{1_G} を作用させることができ，$\mathrm{ev}_{1_G}(v^{\mathrm{L}}) = v^{\mathrm{L}}|_{1_G} = T_{1_G}L_{1_G}(v) = v \in \operatorname{Im}\mathrm{ev}_{1_G}$ が言えた．

■

ここで $\mathfrak{g} \coloneqq T_{1_G}G$ とおき，命題 10.1 の (10.2.1) を使って $\mathfrak{g}$ 上の Lie ブラケットを

$$[X, Y] \coloneqq \bigl[X^{\mathrm{L}}, Y^{\mathrm{L}}\bigr]_{1_G} \in \mathfrak{g}$$

と定義すれば ev_{1_G} は Lie 代数の同型写像となる．この意味で $\mathfrak{g}$ のことを **Lie 群 G の Lie 代数**と呼ぶ．

【例 10.2.1】一般線型群とその Lie 代数

一般線型群 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \subset \mathrm{M}(n, \mathbb{K})$ の Lie 代数 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \coloneqq T_{\mathbb{1}_n}\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ を，$\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ のチャート $\bigl(\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}), (x^\mu{}_\nu)\bigr)$ の下で考える．まず，$\mathbb{K}$-線型写像

$$\begin{aligned} \alpha \colon \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) &\longrightarrow \mathrm{M}(n, \mathbb{K}), \\ a^\mu{}_\nu \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu{}_\nu}\right|_{\mathbb{1}_n} &\longmapsto \bigl[a^\mu{}_\nu\bigr]_{1 \le \mu, \nu \le n} \end{aligned}$$

は明らかに $\mathbb{K}$-ベクトル空間の同型写像である．$\forall a = a^\mu{}_\nu \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu{}_\nu}\right|_{\mathbb{1}_n}$, $b = b^\mu{}_\nu \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu{}_\nu}\right|_{\mathbb{1}_n} \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ をとる．このとき $\forall g = \bigl[g^\mu{}_\nu\bigr]_{1 \le \mu, \nu \le n} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ に関する左移動は

$$L_g\bigl(\bigl[x^\mu{}_\nu\bigr]_{1 \le \mu, \nu \le n}\bigr) = \bigl[g^\mu{}_\rho x^\rho{}_\nu\bigr]_{1 \le \mu, \nu \le n}$$

[*8] 2 つ目の等号で L_g-related の定義を使った．

[*9] v^{L} が C^∞ であることは次のようにしてわかる：$\forall f \in C^\infty(G)$ をとる．$\gamma(0) = 1_G$，$\dot\gamma(0) = v$ を充たす C^∞ 曲線 $\gamma \colon (-\delta, \delta) \longrightarrow G$ をとると，$\forall g \in G$ に対して $(v^{\mathrm{L}}f)(g) = v(f \circ L_g) = \dot\gamma(0)(f \circ L_g) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(f \circ L_g \circ \gamma)(t)$ と書ける．$f \circ L_g \circ \gamma \colon (-\delta, \delta) \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ と見做すとこれは C^∞ 写像の合成なので C^∞ 写像であり，右辺は g に関して C^∞ 級である．

なる C^∞ 写像だから

$$
\begin{aligned}
a^{\mathrm{L}}{}_g = T_{1_G}(L_g)(a) = a^\mu{}_\nu\, T_{1_G}(L_g)\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu{}_\nu}\right|_{\mathbb{1}_n}\right) &= a^\mu{}_\nu\, \frac{\partial [L_g]^\rho{}_\sigma}{\partial x^\mu{}_\nu}(\mathbb{1}_n)\, \left.\frac{\partial}{\partial x^\rho{}_\sigma}\right|_{L_g(\mathbb{1}_n)} \\
&= g^\rho{}_\mu a^\mu{}_\nu\, \left.\frac{\partial}{\partial x^\rho{}_\nu}\right|_g
\end{aligned}
$$

と計算できる．i.e. 第 $(\mu,\, \nu)$ 成分を取り出す C^∞ 関数を $\mathrm{pr}^\mu{}_\nu \colon \mathrm{GL}(n,\, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ とおくと $\forall f \in C^\infty\big(\mathrm{GL}(n,\, \mathbb{K})\big)$ に対して $a^{\mathrm{L}} f \in C^\infty\big(\mathrm{GL}(n,\, \mathbb{K})\big)$ は

$$
a^{\mathrm{L}} f(g) = a^\mu{}_\nu\, \mathrm{pr}^\rho{}_\mu(g) \frac{\partial f}{\partial x^\rho{}_\nu}(g)
$$

と書ける．よって

$$
\begin{aligned}
[a, b] f &= \big[a^{\mathrm{L}}, b^{\mathrm{L}}\big] f(\mathbb{1}_n) \\
&= a^\mu{}_\nu\, \mathrm{pr}^\rho{}_\mu(\mathbb{1}_n)\, \frac{\partial}{\partial x^\rho{}_\nu} \left.\left(b^\alpha{}_\beta\, \mathrm{pr}^\gamma{}_\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\gamma{}_\beta} \right)\right|_{\mathbb{1}_n} \\
&\quad - b^\mu{}_\nu\, \mathrm{pr}^\rho{}_\mu(\mathbb{1}_n)\, \frac{\partial}{\partial x^\rho{}_\nu} \left.\left(a^\alpha{}_\beta\, \mathrm{pr}^\gamma{}_\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\gamma{}_\beta} \right)\right|_{\mathbb{1}_n} \\
&= a^\mu{}_\nu b^\nu{}_\beta \frac{\partial f}{\partial x^\mu{}_\beta}(\mathbb{1}_n) + \cancel{a^\mu{}_\nu b^\alpha{}_\beta \frac{\partial^2 f}{\partial x^\mu{}_\nu \partial x^\alpha{}_\beta}(\mathbb{1}_n)} \\
&\quad - b^\mu{}_\nu a^\nu{}_\beta \frac{\partial f}{\partial x^\mu{}_\beta}(\mathbb{1}_n) - \cancel{b^\mu{}_\nu a^\alpha{}_\beta \frac{\partial^2 f}{\partial x^\mu{}_\nu \partial x^\alpha{}_\beta}(\mathbb{1}_n)} \\
&= \left((a^\mu{}_\rho b^\rho{}_\nu - b^\mu{}_\rho a^\rho{}_\nu)\, \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu{}_\nu}\right|_{\mathbb{1}_n} \right) f
\end{aligned}
$$

であり，

$$
\alpha([a, b]) = \big[\, a^\mu{}_\rho b^\rho{}_\nu - b^\mu{}_\rho a^\rho{}_\nu \,\big]_{1 \le \mu,\, \nu \le n}
$$

i.e. α は Lie 代数の同型写像だと分かった．

定理 10.1: 誘導される Lie 代数の準同型

Lie 群 $G,\, H$ と Lie 群の準同型 $F \colon G \longrightarrow H$ を与える．

(1) このとき，$\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して $Y \in \mathfrak{h}$ がただ一つ存在して，X^{L} と Y^{L} が F-related になる．i.e. $Y^{\mathrm{L}} = F_* X^{\mathrm{L}}$ である．

(2) $T_{1_G} F \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h},\ X \longmapsto T_{1_G} F(X)$ は Lie 代数の準同型である．

証明 (1) $Y = T_{1_G} F(X) \in \mathfrak{h}$ に対して X^{L} と Y^{L} が F-related であることを示す．実際，F が Lie 群の準同型であることから $\forall g,\, h \in G$ について

$$
F \circ L_g(h) = F(gh) = F(g)F(h) = L_{F(g)} \circ F(h)
$$

が成り立つこと，i.e. $F \circ L_g = L_{F(g)} \circ F$ に注意すると $\forall g \in G$ に対して

$$\begin{aligned}
T_g F(X^{\mathrm{L}}|_g) &= T_g F\bigl(T_{1_G} L_g(X)\bigr) \\
&= T_{1_G}(F \circ L_g)(X) \\
&= T_{1_G}(L_{F(g)} \circ F)(X) \\
&= T_{1_H}(L_{F(g)}) \circ T_{1_G} F(X) \\
&= T_{1_H}(L_{F(g)})(Y) \\
&= Y_{F(g)}
\end{aligned}$$

が言える．系??より $F_* X^{\mathrm{L}} = Y^{\mathrm{L}}$ がわかるので Y は一意的に定まる．

(2) $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ をとる．(1) と命題??-(1) より $\bigl[F_* X^{\mathrm{L}}, F_* Y^{\mathrm{L}}\bigr]$ は $\bigl[X^{\mathrm{L}}, Y^{\mathrm{L}}\bigr]$ と F-related であるが，(1) で示した一意性から

$$F_* \bigl[X^{\mathrm{L}}, Y^{\mathrm{L}}\bigr] = \bigl[F_* X^{\mathrm{L}}, F_* Y^{\mathrm{L}}\bigr]$$

が言える．両辺の $1_H \in H$ における値をとることで

$$T_{1_G} F([X, Y]) = (F_* \bigl[X^{\mathrm{L}}, Y^{\mathrm{L}}\bigr])_{1_G} = (\bigl[F_* X^{\mathrm{L}}, F_* Y^{\mathrm{L}}\bigr])_{1_G} = [X, Y]$$

が示された．

■

定義 10.2: 1 パラメータ部分群

Lie 群の準同型写像 $\mathbb{R} \longrightarrow G$ のことを Lie 群 G の **1 パラメータ部分群** (one-parameter subgroup) と呼ぶ[a]．

[a] 1 パラメータ部分群自身は部分 Lie 群ではない．

命題 10.2: 1 パラメータ部分群の特徴付け

Lie 群 G を与える．

(1) G の任意の 1 パラメータ部分群 $\gamma \colon \mathbb{R} \longrightarrow G$ に対して，γ を初期条件 $\gamma(0) = 1_G$ を充たす極大積分曲線として持つ左不変ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ が一意的に存在する．

(2) $\forall X \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ に対して，初期条件 $\gamma(0) = 1_G$ を充たす唯一の X の極大積分曲線 $\gamma \colon \mathbb{R} \longrightarrow G$ は G の 1 パラメータ部分群である．

上述の対応によって $X \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ から一意的に定まる 1 パラメータ部分群のことを **X が生成する 1 パラメータ部分群**と呼ぶ．

!

命題 10.1 の同型と併せると

$$\bigl\{\, G \text{ の 1 パラメータ部分群} \,\bigr\} \xleftrightarrow{\ *\ } \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G) \xleftrightarrow{\mathrm{ev}_{1_G}} T_{1_G} G$$

の 1 対 1 対応がある．i.e. G の任意の 1 パラメータ部分群 γ は，その初速度 $\dot{\gamma}(0) \in T_{1_G} G$ により完全に決定される．

証明 (1) G の 1 パラメータ部分群 $\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow G$ を与える．$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(\mathbb{R})$ なので，定理 10.1 より，$X := \gamma_*\bigl(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigr) \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ は $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ と γ-related な唯一の左不変ベクトル場である．このとき $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ に大して

$$X_{\gamma(t_0)} = T_{t_0}\gamma\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}\right) = \dot{\gamma}(t_0)$$

が成り立ち，γ は初期条件 $\gamma(0) = 1_G$ を充たす X の極大積分曲線である．

(2) 定理??より $\forall X \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ は完備なので，X は大域的なフローを生成する．従って $\gamma(0) = 1_G$ を充たす X の極大積分曲線 γ が唯一存在し，その定義域が $\mathbb{R}$ になる．

$\forall g \in G$ をとる．左不変ベクトル場の定義より $X \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ は X 自身と L_g-related なので，命題??から $L_g \circ \gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow G$ もまた X の積分曲線である．従って $\forall s \in \mathbb{R}$ に対して曲線 $L_{\gamma(s)} \circ \gamma\colon t \longmapsto L_{\gamma(s)}\bigl(\gamma(t)\bigr) = \gamma(s)\gamma(t)$ は $t = 0$ において点 $\gamma(s) \in G$ を通過する X の積分曲線である．然るに補題??-(2) より曲線 $t\colon t \longmapsto \gamma(s+t)$ もまた同一の初期条件を充たす X の積分曲線なので，定理??よりこれらは $\forall t \in \mathbb{R}$ において一致しなくてはならない：

$$\gamma(s)\gamma(t) = \gamma(s+t)$$

i.e. $\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow G$ は 1 パラメータ部分群である．

■

定義 10.3: 指数写像

Lie 群 G を与える．$\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数とする．G の**指数写像** (exponential map) を

$$\exp\colon \mathfrak{g} \longrightarrow G,\ X \longmapsto \gamma_{(X)}(1)$$

と定義する．ただし，$\gamma_{(X)}\colon \mathbb{R} \longrightarrow G$ は $X^{\mathrm{L}} \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ が生成する 1 パラメータ部分群である．

命題 10.3: 指数写像の性質

Lie 群 G を与える．$\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数とする．

(1) $\exp\colon \mathfrak{g} \longrightarrow G$ は C^∞ 写像
(2) $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して，

$$\gamma_{(X)}\colon \mathbb{R} \longrightarrow G,\ t \longmapsto \exp(tX)$$

は $X^{\mathrm{L}} \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ が生成する 1 パラメータ部分群である．
(3) $\forall X \in \mathfrak{g}$, $\forall s,\, t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\exp\bigl((s+t)X\bigr) = \exp(sX)\exp(tX)$$

(4) $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して

$$(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$$

(5) H を別の Lie 群，$F\colon G \longrightarrow H$ を任意の Lie 群の準同型とするとき，以下の図式が可換になる：

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "T_{1_G}F"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{h} \arrow[d, "\exp"] \\ G \arrow[r, "F"] & H \end{tikzcd}$$

(6) $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して，左不変ベクトル場 $X^{\mathrm{L}} \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ が生成するフロー $\theta_{(X)}\colon \mathbb{R} \times G \longrightarrow G$ に対して

$$\theta_{(X)}(t,\, g) = g\exp(tX)\ \bigl(=: R_{\exp(tX)}(g)\bigr)$$

が成り立つ．
(7) $T_0(\exp)\colon T_0\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ は恒等写像である．
(8) 点 $0 \in \mathfrak{g}$ の近傍 $U \subset \mathfrak{g}$ および点 $1_G \in G$ の近傍 $V \subset G$ が存在して，$\exp|_U\colon U \longrightarrow V$ が微分同相写像になる．

証明 (1) [**?**, p.519, Proposition 20.8-(1)]

(2) $\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow G$ を $X^{\mathrm{L}} \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ が生成する 1 パラメータ部分群とする．これは命題 10.2-(2) により $\gamma(0) = 1_G$ を充たす X^{L} の唯一の極大積分曲線である．

$\forall t \in \mathbb{R}$ をとる．このとき補題**??**-(1) より，C^∞ 曲線 $\tilde{\gamma}\colon \mathbb{R} \longrightarrow G,\ s \longmapsto \gamma(ts)$ は初期条件 $\tilde{\gamma}(0) = 1_G$ を充たすベクトル場 tX^{L} の極大積分曲線なので，その一意性から

$$\gamma_{(X)}(t) = \exp(tX) = \tilde{\gamma}(1) = \gamma(t)$$

が成り立つ．i.e. $\gamma_{(X)} = \gamma$ が言えた．

(3) (2) より $\gamma_{(X)}$ が 1 パラメータ部分群なので

$$\exp\bigl((s+t)X\bigr) = \gamma_{(X)}(s+t) = \gamma_{(X)}(s)\gamma_{(X)}(t) = \exp(sX)\exp(tX)$$

(4) (2) より $\gamma_{(X)}$ が 1 パラメータ部分群なので

$$\begin{aligned}\exp X \exp(-X) &= \gamma_{(X)}(1)\gamma_{(X)}(-1) = \gamma_{(X)}(0) = 1_G \\ \exp(-X) \exp X &= \gamma_{(X)}(-1)\gamma_{(X)}(1) = \gamma_{(X)}(0) = 1_G\end{aligned}$$

が言える．i.e. $(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$ である．

(5) $\forall X \in \mathfrak{g}$ を 1 つ固定する．(2) より C^∞ 写像 $t \longmapsto \exp\bigl(tT_{1_G}F(X)\bigr)$ は左不変ベクトル場 $\bigl(T_{1_G}F(X)\bigr)^{\mathrm{L}} = F_*(X^{\mathrm{L}}) \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ が生成する 1 パラメータ部分群である．ここで，$\sigma\colon \mathbb{R} \longrightarrow H,\ t \longmapsto F\bigl(\exp(tX)\bigr)$ とおいたとき

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}(0) &= T_0\bigl(F \circ \exp(tX)\bigr)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right) \\ &= T_{1_G}F \circ T_0\bigl(\exp(tX)\bigr)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right) \\ &= T_{1_G}F\bigl(\dot{\gamma_{(X)}}(0)\bigr) \\ &= T_{1_G}F(X)\end{aligned}$$

が成り立つので σ もまた左不変ベクトル場 $\bigl(T_{1_G}F(X)\bigr)^{\mathrm{L}} \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ が生成する 1 パラメータ部分群であり，その一意性から $\sigma(t) = \exp\bigl(tT_{1_G}F(X)\bigr)$ が言える．

(6) $\forall (t,\, g) \in \mathbb{R} \times G$ をとる．左不変ベクトル場の定義より $X^{\mathrm{L}} \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ は X^{L} 自身と L_g-related なので，命題??から $L_g \circ \gamma_{(X)}\colon \mathbb{R} \longrightarrow G,\ t \longmapsto \exp(tX)$ もまた X^{L} の極大積分曲線である．$L_g \circ \gamma_{(X)}(0) = g$ なので，極大積分曲線の一意性から $L_g \circ \gamma_{(X)} = \theta^{(g)}_{(X)}$ が言える．従って

$$g\exp(tX) = L_g(\exp(tX)) = L_g \circ \gamma_{(X)}(t) = \theta^{(g)}_{(X)}(t) = \theta_{(X)}(t,\, g).$$

(7) $\forall X \in T_0\mathfrak{g}$ を 1 つとる．$\mathfrak{g}$ 上の C^∞ 曲線 $\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{g},\ t \longmapsto tX$ は $\dot{\gamma}(0) = X$ を充たすので

$$\begin{aligned}T_0(\exp)(X) &= T_0(\exp)\bigl(\dot{\gamma}(0)\bigr) \\ &= T_0(\exp) \circ T_0\gamma\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right) \\ &= T_0(\exp \circ \gamma)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right) \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \exp(tX) \\ &= X\end{aligned}$$

(8) (7) より点 $0 \in \mathfrak{g}$ において $T_0(\exp)\colon T_0\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} = T_{1_G}G$ が全単射なので，C^∞ 多様体に関する逆関数定理が使える．

■

定義 10.4: 微分表現

V を $\mathbb{K}$-ベクトル空間とする．Lie 群 G の表現 $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ の，$1_G \in G$ における微分 $T_{1_G}\rho\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ は Lie 代数の表現である．この $T_{1_G}\rho$ のことを ρ の**微分表現** (differential representation) と呼ぶ．

【例 10.2.2】随伴表現

$\forall g \in G$ に対して準同型 $F_g \colon G \longrightarrow G,\ x \longmapsto gxg^{-1}$ を考えると $F_{gh} = F_g \circ F_h$ が成り立つ．故に，$1_G \in G$ における微分

$$T_{1_G}(F_g) \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

は，T_{1_G} の関手性から $T_{1_G}(F_{gh}) = T_{1_G}(F_g) \circ T_{1_G}(F_h)$ を充たす．よって

$$\mathrm{Ad} \colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g}),\ g \longmapsto T_{1_G}(F_g)$$

は Lie 群 G の表現となる[a]．これを Lie 群 G の**随伴表現** (adjoint representation) と呼ぶ．

Ad の微分表現を指数写像を使って計算してみよう．$\forall X \in \mathfrak{g}$ をとる．命題 10.3-(2) により曲線 $\gamma_{(X)} \colon t \longmapsto \exp(tX)$ は X が生成する 1 パラメータ部分群なので，命題??から $\dot{\gamma_{(X)}}(0) = X$ である．従って $\forall Y \in \mathfrak{g}$ に大して

$$\begin{aligned}
\bigl(T_{1_G}(\mathrm{Ad})(X)\bigr)Y &= \Bigl(T_{1_G}(\mathrm{Ad})\bigl(\dot{\gamma_{(X)}}(0)\bigr)\Bigr)Y \\
&= T_{1_G}(\mathrm{Ad}) \circ T_0\gamma_{(X)} \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \right) Y \\
&= T_0(\mathrm{Ad} \circ \gamma_{(X)}) \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \right) Y \\
&= \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}\bigl(\exp(tX)\bigr) \right) Y \\
&= \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}\bigl(\exp(tX)\bigr)(Y) \right) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Bigl(T_{1_G}\bigl(F_{\exp(tX)}\bigr)(Y)\Bigr) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Bigl(T_{1_G}\bigl(R_{(\exp(tX))^{-1}} \circ L_{\exp(tX)}\bigr)(Y^{\mathrm{L}}_{1_G})\Bigr) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Bigl(T_{L_{\exp(tX)}(1_G)}\bigl(R_{\exp(-tX)}\bigr) \circ T_{1_G}\bigl(L_{\exp(tX)}\bigr)(Y^{\mathrm{L}}_{1_G})\Bigr) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Bigl(T_{\exp(tX)}\bigl(R_{\exp(-tX)}\bigr)\bigl(Y^{\mathrm{L}}_{\exp(tX)}\bigr)\Bigr)
\end{aligned}$$

ここで，命題 10.3-(6) より $X^{\mathrm{L}} \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ が生成するフローが $\theta_t(g) = R_{\exp(tX)}(g)$ と書かれることを思い出すと，

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Bigl(T_{\exp(tX)}\bigl(R_{\exp(-tX)}\bigr)\bigl(Y^{\mathrm{L}}_{\exp(tX)}\bigr)\Bigr) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} T_{\theta_t(1_G)}\bigl(\theta_{-t}\bigr)\bigl(Y^{\mathrm{L}}_{\theta_t(1_G)}\bigr) \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{T_{\theta_t(1_G)}\bigl(\theta_{-t}\bigr)\bigl(Y^{\mathrm{L}}_{\theta_t(1_G)}\bigr) - Y^{\mathrm{L}}_{1_G}}{t} \\
&= (\mathcal{L}_{X^{\mathrm{L}}} Y^{\mathrm{L}})_{1_G} \\
&= \bigl[X^{\mathrm{L}}, Y^{\mathrm{L}}\bigr]_{1_G} \\
&= [X, Y]
\end{aligned}$$

となる．ただし 3 つ目の等号で Lie 微分の定義を使った．結局

$$\mathrm{ad} \coloneqq T_{1_G}(\mathrm{Ad})\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}),\ X \longmapsto (Y \mapsto [X, Y])$$

であることが分かった．

[a] 厳密には Ad の C^∞ 性を示さなくてはならない．証明は [?, p.534, Proposition 20.24] を参照.

【例 10.2.3】一般線型群の随伴表現

$G = \mathrm{GL}(n,\, \mathbb{K})$ としたときの随伴表現を考える．$\mathrm{GL}(n,\, \mathbb{K})$ のチャート $\bigl(\mathrm{GL}(n,\, \mathbb{K}),\, ({x^\mu}_\nu)\bigr)$ をとると $\forall g = \bigl[\, {g^\mu}_\nu \,\bigr]_{1 \le \mu,\, \nu \le n} \in \mathrm{GL}(n,\, \mathbb{K})$ に関して C^∞ 写像 $F_g\colon G \longrightarrow G$ は

$$F_g\bigl(\bigl[\, {x^\mu}_\nu \,\bigr]_{1 \le \mu,\, \nu \le n}\bigr) = \bigl[\, {g^\mu}_\rho {x^\rho}_\sigma {[g^{-1}]^\sigma}_\nu \,\bigr]_{1 \le \mu,\, \nu \le n}$$

と座標表示されるので，$\forall {c^\mu}_\nu \left.\frac{\partial}{\partial {x^\mu}_\nu}\right|_{\mathbb{1}_n} \in \mathfrak{gl}(n,\, \mathbb{K})$ の自然基底に関して

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(g)\left({c^\mu}_\nu \left.\frac{\partial}{\partial {x^\mu}_\nu}\right|_{\mathbb{1}_n} \right) &= {c^\mu}_\nu\, T_{\mathbb{1}_n}\left(\left.\frac{\partial}{\partial {x^\mu}_\nu}\right|_{\mathbb{1}_n} \right) \\ &= {c^\mu}_\nu \frac{\partial {[\,F_g\,]^\rho}_\sigma}{\partial {x^\mu}_\nu}(\mathbb{1}_n) \left.\frac{\partial}{\partial {x^\rho}_\sigma}\right|_{F_g(\mathbb{1}_n)} \\ &= {g^\rho}_\mu {c^\mu}_\nu {[g^{-1}]^\nu}_\sigma \left.\frac{\partial}{\partial {x^\rho}_\sigma}\right|_{\mathbb{1}_n} \end{aligned}$$

がわかる．**【例 10.2.1】**の Lie 代数の同型写像 $\alpha\colon \mathfrak{gl}(n,\, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{M}(n,\, \mathbb{K})$ を使うと，これは行列の積の意味で

$$\alpha \circ \mathrm{Ad}(g) \circ \alpha^{-1}(X) = gXg^{-1}$$

を意味する．以上の議論は G が $\mathrm{GL}(n,\, \mathbb{K})$ の部分 Lie 群の場合にも成立するが，大抵の場合 Lie 代数の同型写像 α は省略される.

定理??によって，C^∞ 多様体 M 上の完備なベクトル場 X が Lie 群 $\mathbb{R}$ の M への作用 $\theta\colon \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ を一意に定めることが分かる．そしてこのような状況を指して，ベクトル場 X は Lie 群 $\mathbb{R}$ の作用 θ の無限小生成子であると言うのだった．この考えを任意の Lie 群 G の，任意の M への右作用に拡張することができる．つまり，任意の Lie 群 G の任意の右作用 $◀\colon M \times G \longrightarrow M$ は，ただ一つの無限小生成子を持つ.

定義 10.5: 基本ベクトル場

Lie 群 G が C^∞ 多様体 M に右から作用しているとする．この右作用を $\blacktriangleleft\colon M \times G \longrightarrow M$ と書く．

- $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して，**基本ベクトル場** (fundamental vector field) $\boldsymbol{X^{\#}} \in \mathfrak{X}(M)$ を次のように定める：

$$X_x^{\#} \coloneqq \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \big(x \blacktriangleleft \exp(tX)\big) \in T_x M$$

- 写像

$$\blacktriangleleft^{\#}\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(M),\ X \longmapsto X^{\#}$$

のことを**右作用 $\blacktriangleleft$ の無限小生成子**と呼ぶ．

上の状況下で

- $\forall g \in G$ に対して**右作用移動** $R_g\colon M \longrightarrow M$ を $R_g(x) \coloneqq x \blacktriangleleft g$ と定義する．
- $\forall x \in M$ に対して**右作用軌道** $R^{(x)}\colon G \longrightarrow M$ を $R^{(x)}(g) \coloneqq x \blacktriangleleft g$ と定義する．

$\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して，C^∞ 写像[*10]

$$\theta_{(X)}\colon \mathbb{R} \times M \longrightarrow M,\ (t,\, x) \longmapsto x \blacktriangleleft \exp(tX) = R_{\exp(tX)}(x)$$

は大域的フローである[*11]．この大域的フローの無限小生成子はベクトル場

$$x \longmapsto \left(x,\, \dot{\theta}_{(X)}^{(x)}(0)\right) = \left(x,\, T_0\big(\theta_{(X)}^{(x)}\big)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right)\right)$$

であるが[*12]，これがまさに $X^{\#} \in \mathfrak{X}(M)$ になっている．つまり，基本ベクトル場は $\forall x \in M$ において，$\forall f \in C^\infty(M)$ に

$$X_x^{\#} f = T_0\big(\theta_{(X)}^{(x)}\big)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right) f = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \big(f \circ \theta_{(X)}^{(x)}\big)(t) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f\big(x \blacktriangleleft \exp(tX)\big)$$

と作用する．

---

*10 これは命題 10.3-(6) からの類推だと言える．

*11 実際，命題 10.3 から

$$\begin{aligned}\theta_{(X)}(0,\, x) &= x \blacktriangleleft 1_G = x,\\ \theta_{(X)}(t+s,\, x) &= x \blacktriangleleft \exp\big((s+t)X\big)\\ &= x \blacktriangleleft \big(\exp(sX)\exp(tX)\big)\\ &= x \blacktriangleleft \exp(sX) \blacktriangleleft \exp(tX)\\ &= \theta_{(X)}\big(t,\, \theta_{(X)}(s,\, x)\big)\end{aligned}$$

が成り立つ．

*12 強引に書くと $\theta_{(X)}^{(x)} = R^{(x)} \circ \exp(\text{-}X)\colon \mathbb{R} \longrightarrow M$ と言うことになる．

もしくは，次のように考えることもできる：曲線 $\gamma_{(X)}\colon t \longmapsto \exp(tX)$ は初速度 $\dot{\gamma_{(X)}}(0) = X$ なので，

$$
\begin{aligned}
T_{1_G}(R^{(x)})(X) &= T_{1_G}(R^{(x)})\bigl(\dot{\gamma_{(X)}}(0)\bigr) \\
&= T_{1_G}(R^{(x)}) \circ T_0(\gamma_{(X)}) \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \right) \\
&= T_0(R^{(x)} \circ \gamma_{(X)}) \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \right) \\
&= T_0(\theta^{(x)}_{(X)}) \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \right) \\
&= X^{\#}_x.
\end{aligned} \tag{10.2.2}
$$

このことから $\blacktriangleleft^{\#}$ が $\mathbb{R}$-線型写像だとわかる．なお，等式 (10.2.2) は主束の接続形式を調べる際に極めて重要な役割を果たす．

補題 10.1:

Lie 群 G の C^∞ 多様体 M への右作用 $\blacktriangleleft\colon M \times G \longrightarrow M$ を与える．
このとき $\forall x \in M$ および $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して，$X^{\mathrm{L}} \in \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ とその基本ベクトル場 $X^{\#}$ は $R^{(x)}$-related である

<u>**証明**</u> $\forall g,\ h \in G$ に対して

$$
R^{(x \blacktriangleleft g)}(h) = x \blacktriangleleft g \blacktriangleleft h = x \blacktriangleleft (gh) = x \blacktriangleleft L_g(h) = R^{(x)} \circ L_g(h)
$$

が成り立つことに注意する．$\forall g \in G$ をとり，$y \coloneqq R^{(x)}(g) = x \blacktriangleleft g$ とおく．X^{L} が左不変ベクトル場であることから

$$
\begin{aligned}
X^{\#}_y &= T_{1_G}(R^{(y)})(X) \\
&= T_{1_G}(R^{(x \blacktriangleleft g)})(X^{\mathrm{L}}_{1_G}) \\
&= T_{1_G}(R^{(x)} \circ L_g)(X^{\mathrm{L}}_{1_G}) \\
&= T_{L_g(1_G)}(R^{(x)}) \circ T_{1_G}(L_g)(X^{\mathrm{L}}_{1_G}) \\
&= T_g(R^{(x)})(X^{\mathrm{L}}_g)
\end{aligned}
$$

が言えた． ■

命題 10.4: $\blacktriangleleft^{\#}$ は Lie 代数の準同型

Lie 群 G の C^∞ 多様体 M への右作用 $\blacktriangleleft\colon M \times G \longrightarrow M$ を与える．このとき右作用 $\blacktriangleleft$ の無限小生成子

$$
\blacktriangleleft^{\#}\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(M),\ X \longmapsto X^{\#}
$$

は Lie 代数の準同型である．

<u>**証明**</u> $\forall X,\ Y \in \mathfrak{g}$ をとる．補題 10.1 と Lie ブラケットの自然性から $\forall x \in M$ に対して $\bigl[X^{\mathrm{L}}, Y^{\mathrm{L}}\bigr]$ と $\bigl[X^{\#}, Y^{\#}\bigr]$ が $R^{(x)}$-related だと分かる．i.e.

$$
\bigl[X^{\#}, Y^{\#}\bigr]_x = \bigl[X^{\#}, Y^{\#}\bigr]_{R^{(x)}(1_G)} = T_{1_G}(R^{(x)})\bigl(\bigl[X^{\mathrm{L}}, Y^{\mathrm{L}}\bigr]_{1_G}\bigr) = T_{1_G}(R^{(x)})([X,Y]) = [X,Y]^{\#}_x
$$

が言えた． ■

しばらくの間 Lie 群 G（もしくはその部分群）の Lie 代数を $\mathrm{Lie}(G) \coloneqq \mathfrak{g}$ と書くことにする[*13]．

命題 10.5: 基本ベクトル場の零点

Lie 群 G の C^∞ 多様体 M への右作用 $\blacktriangleleft\colon M \times G \longrightarrow M$ を与える．このとき，以下の 2 つは同値である：

(1) $X \in \mathfrak{g}$ の基本ベクトル場 $X^\#$ が点 $x \in M$ において $X^\#_x = 0$ になる

(2) $X \in \mathrm{Lie}\bigl(\mathrm{Stab}(x)\bigr)$

ただし，$\mathrm{Stab}(x) \subset G$ は点 $x \in M$ の安定化部分群[a]である．

[a] つまり，$\mathrm{Stab}(x) \coloneqq \{\, g \in G \mid x \blacktriangleleft g = x \,\}$

<u>証明</u> **(1) $\Longleftarrow$ (2)**

$X \in \mathrm{Lie}\bigl(\mathrm{Stab}(x)\bigr)$ ならば $\forall t \in \mathbb{R}$ に対して $\exp(tX) \in \mathrm{Stab}(x)$ である．従って $x \in M$ の近傍上で定義された任意の C^∞ 関数 f に対して

$$X^\#_x f = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f\bigl(x \blacktriangleleft \exp(tX)\bigr) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(x) = 0.$$

と計算できる[*14]

(1) $\Longrightarrow$ (2)

$X^\#_x = 0$ とする．このとき定数写像 $\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow M,\ t \longmapsto x$ が

$$\dot{\gamma}(t) = 0 = X^\#_{\gamma(t)}$$

を充たすので，初期条件 $\gamma(0) = x$ を充たす $X^\# \in \mathfrak{X}(M)$ の極大積分曲線となる．一方，$\theta^{(x)}_{(X)}\colon \mathbb{R} \longrightarrow M,\ t \longmapsto x \blacktriangleleft \exp(tX)$ もまた同一の初期条件をみたす $X^\#$ の極大積分曲線だったので，その一意性から $\theta^{(x)}_{(X)} = \gamma \iff x \blacktriangleleft \exp(tX) = x \quad \forall t \in \mathbb{R} \iff \exp(tX) \in \mathrm{Stab}(x) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ が言えた．従って $X \in \mathrm{Lie}(\mathrm{Stab}(x))$ である．

■

[*13] 例えば [?] では，$\mathrm{Lie}(G) \coloneqq \mathfrak{X}^{\mathrm{L}}(G)$ と定義しているので注意．同型なので然程問題にはならないが...

[*14] $f\bigl(x \blacktriangleleft \exp(tX)\bigr)$ が t に関して定数関数なので．

系 10.2:

Lie 群 G の C^∞ 多様体 M への右作用 $\blacktriangleleft\colon M\times G\longrightarrow M$ を与える．
このとき，$\forall x\in M$ の右作用軌道 $R^{(x)}\colon G\longrightarrow M$ の微分

$$T_{1_G}(R^{(x)})\colon \mathfrak{g}\longrightarrow T_xM$$

に対して

$$\mathrm{Ker}\bigl(T_{1_G}(R^{(x)})\bigr)=\mathrm{Lie}\bigl(\mathrm{Stab}(x)\bigr)$$

が成り立つ．

証明 $\forall X\in\mathfrak{g}$ をとる．(10.2.2) と命題 10.5 から

$$\begin{aligned} X\in\mathrm{Ker}\bigl(T_{1_G}(R^{(x)})\bigr) &\iff T_{1_G}(R^{(x)})(X)=0\\ &\iff X^{\#}_x=0\\ &\iff X\in\mathrm{Lie}\bigl(\mathrm{Stab}(x)\bigr)\end{aligned}$$

■

10.3 主束の接続

与えられた C^∞ 多様体 M 上の ***k*-形式** (k-form) とは，外積代数束（これはベクトル束になる）

$$\bigwedge^k T^*M\coloneqq\coprod_{p\in M}\Bigl(\bigwedge^k T_p^*M\Bigr)$$

の C^∞ 切断のことであった．k-形式全体の集合を

$$\boldsymbol{\Omega^k(M)}\coloneqq\Gamma\Bigl(\bigwedge^k T^*M\Bigr)$$

と書く．

任意の $\mathbb{K}$-ベクトル空間 V,W に関して，自然な $\mathbb{K}$-ベクトル空間の同型

$$\underbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}_{k}\otimes W\cong\bigl\{\,f\colon\underbrace{V\times\cdots\times V}_{k}\longrightarrow W\;\big|\;\text{多重線型写像}\,\bigr\}$$

がある（系**??**）．M を底空間とする任意のベクトル束 $E\xrightarrow{\pi}M$ が与えられたとき，この同型を念頭において，***E* 値 *k*-形式** (E-valued k form) をテンソル積束

$$\Bigl(\bigwedge^k T^*M\Bigr)\otimes E$$

の C^∞ 切断として定義する．E 値 k-形式全体の集合を

$$\boldsymbol{\Omega^k(M;E)}\coloneqq\Gamma\Bigl(\Bigl(\bigwedge^k T^*M\Bigr)\otimes E\Bigr)$$

と書く[*15]．特に E があるベクトル空間 V に対して $E = M \times V$ の形をした自明束の場合，代わりに

$$\boldsymbol{\Omega^k(M;\, V)} \coloneqq \Omega^k(M;\, M \times V)$$

と書き，**$\boldsymbol{V}$ 値 $\boldsymbol{k}$-形式**と呼ぶ[*16]．

さて，Lie 群に関する準備が終わったのでいよいよ主束の接続を定義する．この節の内容は [?, 第 6 章], [?, §28] が詳しい．

定義 10.6: 主束の接続（Ehresmann 接続）

$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ を主束とする．$\forall g \in G$ に対して，命題??の右作用によって右作用移動を $R_g \colon P \longrightarrow P,\ u \longmapsto u \blacktriangleleft g$ と定義する．

- 分布 $\{\, H_u \subset T_u P \mid u \in P \,\}$ が P 上の**接続** (connection) であるとは，以下の 2 条件が成り立つことを言う：

  (C-1) $\forall u \in P$ に対して

  $$T_u P = \mathrm{Ker}(T_u \pi) \oplus H_u$$

  (C-2) $\forall u \in P,\ \forall g \in G$ に対して

  $$T_u(R_g)(H_u) = H_{R_g(u)}$$

  が成り立つ（分布 $\{H_u\}$ は **G-不変**）．

  $\mathrm{Ker}\, T_u(\pi),\ H_u$ をそれぞれ $T_u P$ の**垂直部分空間**, **水平部分空間**と呼ぶ．

- $\mathfrak{g}$ 値 1-形式 $\omega \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$ が**接続形式**であるとは，次の 2 条件を充たすことをいう：

  (CF-1) $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して

  $$\omega(X^{\#}) = X$$

  (CF-2) $\forall g \in G$ に対して

  $$(R_g)^* \omega = \mathrm{Ad}(g^{-1})(\omega)$$

  ただし $\mathrm{Ad} \colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ は Lie 群 G の随伴表現である．

本題に入る前に，微分幾何学の風習への注意をしておく．境界あり/なし C^∞ 多様体 M とその部分多様体 $S \subset M$ を与える．このとき包含写像を $\iota \colon S \hookrightarrow M$ と書くと，$\forall p \in S \subset M$ に対して $T_p S$ を $T_p \iota(T_p S)$ と同一視する[*17] ことで $T_p M$ の部分ベクトル空間と見做すのである [?, p.116]．

さて，主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ において $\forall u \in P$ を 1 つ固定する．$G_{\pi(u)} \coloneqq \pi^{-1}(\{\pi(u)\})$ とおいたとき，$\forall X \in T_u G_{\pi(u)} \subset T_u P$ (i.e. 点 $u \in \boldsymbol{P}$ におけるファイバー方向の接空間）の，$\pi \colon P \longrightarrow M$ の微分による像

[*15] $\boldsymbol{\Omega^0(M;\, E) = \Gamma(E)}$ に注意．

[*16] V が有限次元ベクトル空間ならば，$\Omega^k(M;\, V) \cong \Omega^k(M) \otimes_{\mathbb{R}} V$ が成り立つ．

[*17] つまり $\forall v \in T_p S$ は $\forall f \in C^\infty(S)$ に $v(f)$ として作用するが，$v \in T_p S \subset T_p M$ と見做す時は $\forall f \in C^\infty(M)$ に，$\boldsymbol{T_p \iota(v)} f = v(f \circ \iota) = v(f|_S)$ として作用する．

$T_u\pi(X) \in T_{\pi(u)}M$ は，上述の注意より勝手な C^∞ 関数 $f \in C^\infty(M)$ に対して

$$T_u\pi(X)f = X(f \circ \pi|_{G_{\pi(u)}})$$

と作用する．然るに C^∞ 写像 $f \circ \pi|_{G_{\pi(u)}}$ は常に値 $f(\pi(u))$ を返す定数写像なので，$T_u\pi(X)f = 0$ が言える[*18]．i.e. $X \in \mathrm{Ker}(T_u\pi)$ であり，

$$T_uG_{\pi(u)} \subset \mathrm{Ker}(T_u\pi)$$

が言えた．一方，$T_u\pi \colon T_uP \longrightarrow T_{\pi(u)}M$ は明らかに全射なので $\dim \mathrm{Im}(T_u\pi) = \dim T_{\pi(u)}M$ であり，故にファイバー束の局所自明性と階数-退化次元の定理から

$$\dim \mathrm{Ker}(T_u\pi) = \dim T_uP - \dim T_{\pi(u)}M = \dim T_uG_{\pi(u)} = \dim G \tag{10.3.1}$$

が言える．結局

$$T_uG_{\pi(u)} = \mathrm{Ker}(T_u\pi)$$

だと分かった．さらに次の非常に重要な補題がある．この補題のために基本ベクトル場を導入したと言っても過言ではない：

補題 10.2:

$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ を主束とする．命題??で与えた Lie 群 G の全空間 P への右作用 $\blacktriangleleft \colon P \times G \longrightarrow P$ の無限小生成子 $\blacktriangleleft^\# \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(P),\ X \longmapsto X^\#$ について，

$$\forall u \in P, \quad \mathbf{Ker}(\boldsymbol{T_u\pi}) = \left\{\, \boldsymbol{X_u^\#} \in \boldsymbol{T_uP} \;\middle|\; \boldsymbol{X} \in \mathfrak{g} \,\right\}$$

が成り立つ．

<u>**証明**</u> $\forall u \in P$ を 1 つ固定する．

$\mathbf{Ker}(\boldsymbol{T_u\pi}) \supset \left\{\, \boldsymbol{X_u^\#} \in \boldsymbol{T_uP} \;\middle|\; \boldsymbol{X} \in \mathfrak{g} \,\right\}$

$\forall X \in \mathfrak{g}$ をとる．このとき (10.2.2) より $X_u^\# = T_{1_G}(R^{(u)})(X)$ だが，$\pi \circ R^{(u)}$ は定数写像なので

$$\begin{aligned} T_u\pi(X_u^\#) &= T_u\pi \circ T_{1_G}(R^{(u)})(X) \\ &= T_{1_G}(\pi \circ R^{(u)})(X) \\ &= 0 \end{aligned}$$

が分かる．i.e. $X_u^\# \in \mathrm{Ker}(T_u\pi)$ である．

$\mathbf{Ker}(\boldsymbol{T_u\pi}) \subset \left\{\, \boldsymbol{X_u^\#} \in \boldsymbol{T_uP} \;\middle|\; \boldsymbol{X} \in \mathfrak{g} \,\right\}$

まず，$\mathbb{R}$-線型写像

$$T_{1_G}\bigl(R^{(u)}\bigr) \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Ker}(T_u\pi)$$

がベクトル空間の同型写像であることを示す．系 10.2 から $\mathrm{Ker}\, T_{1_G}\bigl(R^{(u)}\bigr) = \mathrm{Lie}\bigl(\mathrm{Stab}(u)\bigr)$ だが，命題??より右作用 $\blacktriangleleft$ は自由なので $\mathrm{Stab}(u) = \{1_G\}$ である．従って $\mathrm{Ker}\, T_{1_G}\bigl(R^{(u)}\bigr) = \{0\}$ であり，

[*18] 定数関数に接ベクトルを作用させると 0 になる：Leibniz 則より，定数関数 $1 \colon M \longrightarrow \mathbb{R},\ p \longmapsto 1$ に対して $v(1) = v(1 \cdot 1) = v(1) + v(1) \implies v(1) = 0$. v の線型性から一般の定数関数に対しても 0 になることが言える．

$T_{1_G}\big(R^{(u)}\big)$ は単射．(10.3.1) より $\dim\mathfrak{g} = \dim G = \dim \operatorname{Ker}(T_u\pi)$ なので $T_{1_G}\big(R^{(u)}\big)$ はベクトル空間の同型写像である．

以上より，$\forall v \in \operatorname{Ker}(T_u\pi)$ に対して $\big(T_{1_G}(R^{(u)})\big)^{-1}(v) \in \mathfrak{g}$ であり，(10.2.2) から

$$v = T_{1_G}(R^{(u)})\Big(\big(T_{1_G}(R^{(u)})\big)^{-1}(v)\Big) = \Big(\big(T_{1_G}(R^{(u)})\big)^{-1}(v)\Big)^{\#}_{u}$$

が言えた．

■

接続の定義は幾何学的イメージがわかりやすいが，計算は絶望的である．幸いにして主束の接続を与えることと，全空間上の接続形式を与えることは同値なのでなんとかなる：

定理 10.3: 接続と接続形式の関係

$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ を主束とする．

(1) $\omega \in \Omega^1(P;\mathfrak{g})$ が接続形式ならば，分布

$$\big\{\operatorname{Ker}\omega_u \subset T_uP \bigm| u \in P\big\}$$

は P 上の接続である．

(2) (1) は P 上の接続形式全体の集合から P 上の接続全体の集合への 1 対 1 対応を与える．

証明 (1) $\forall u \in P$ を 1 つ固定する．命題??で与えた Lie 群 G の全空間 P への右作用 $\blacktriangleleft\colon P\times G \longrightarrow P$ の無限小生成子 $\blacktriangleleft^{\#}\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(P),\ X \longmapsto X^{\#}$ を考える．

(C-1)

接続形式の定義から $\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して $\omega(X^{\#}) = X$ が成り立つ．i.e. $\omega_u\colon T_uP \longrightarrow \mathfrak{g}$ は全射であり，$\mathbb{R}$-線型写像の系列[*19]

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}\omega_u \xrightarrow{i} T_uP \xrightarrow{\omega_u} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

は短完全列になる．さらにこれは補題 10.2 の証明で与えた線型写像 $T_{1_G}(R^{(u)})\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \operatorname{Ker}(T_u\pi) \subset T_uP$ によって分裂するので

$$T_u \cong \mathfrak{g} \oplus \operatorname{Ker}\omega_u \cong \operatorname{Ker}(T_u\pi) \oplus \operatorname{Ker}\omega_u$$

がわかる．

(C-2)

$\forall v \in \operatorname{Ker}\omega_u$ をとる．このとき **(CF-2)** より $\forall g \in G$ に対して

$$\omega_{u\blacktriangleleft g}\big(T_u(R_g)(v)\big) = ((R_g)^*\omega)_u(v) = \operatorname{Ad}(g^{-1})\big(\omega_u(v)\big) = 0$$

が従い，$T_u(R_g)(\operatorname{Ker}\omega_u) \subset \operatorname{Ker}\omega_{u\blacktriangleleft g}$ が言えた．両辺の次元が等しいので $T_u(R_g)(\operatorname{Ker}\omega_u) = \operatorname{Ker}\omega_{u\blacktriangleleft g}$ が言えた．

[*19] i は包含準同型なので $\operatorname{Ker}\omega_u = \operatorname{Im} i$．$\omega_u$ が全射なので $\operatorname{Im}\omega_u = \mathfrak{g} = \operatorname{Ker} 0$．

(2)

(単射性)

接続形式 $\omega, \eta \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ に対して $\{\operatorname{Ker}\omega_u \mid u \in P\} = \{\operatorname{Ker}\eta_u \mid u \in P\}$ が成り立つとする．このとき $\forall u \in P$ に対して $\operatorname{Ker}\omega_u = \operatorname{Ker}\eta_u$ が成り立つ．補題 10.2 および (1) から $T_uP = \operatorname{Ker}(T_u\pi) \oplus \operatorname{Ker}\omega_u = \{X_u^\# \mid X \in \mathfrak{g}\} \oplus \operatorname{Ker}\omega_u$ の直和分解があり，$\forall v \in T_uP$ に対して $V \in \mathfrak{g}$, $v^H \in \operatorname{Ker}\omega_u = \operatorname{Ker}\eta_u$ が一意的に存在して $v = V_u^\# + v^H$ と書ける．よって **(CF-1)** から

$$\omega_u(v) = \omega_u(V_u^\#) = V = \eta_u(V_u^\#) = \eta_u(v)$$

が分かった．i.e. $\omega_u = \eta_u$ である．u は任意だったので $\omega = \eta$ が言えた．

(全射性)

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ の接続 $\{H_u \subset T_uP \mid u \in P\}$ を与える．$\forall u \in P$ に対して直和分解 $T_uP = \operatorname{Ker}(T_u\pi) \oplus H_u$ の垂直，水平部分空間成分への射影をそれぞれ

$$\begin{aligned}
&i_1 \colon T_uP \longrightarrow \operatorname{Ker}(T_u\pi),\ v^V + v^H \longmapsto v^V \\
&i_2 \colon T_uP \longrightarrow H_u,\ v^V + v^H \longmapsto v^H
\end{aligned}$$

と書き，$\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ を，$\forall u \in P$ に対して補題 10.2 の証明で与えた同型写像 $T_{1_G}(R^{(u)}) \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \operatorname{Ker}(T_u\pi)$ を用いて

$$\omega_u := \left(T_{1_G}(R^{(u)})\right)^{-1} \circ i_1 \colon T_uP \xrightarrow{i_1} \operatorname{Ker}(T_u\pi) \xrightarrow{\left(T_{1_G}(R^{(u)})\right)^{-1}} \mathfrak{g}$$

と定義する．この ω が **(CF-1)**, **(CF-2)** を充たすことを示す：

(CF-1) $\forall u \in P$ を 1 つ固定する．$\forall X \in \mathfrak{g}$ をとる．補題 10.2 より $X_u^\# \in \operatorname{Ker}(T_u\pi)$ だから，(10.2.2) より

$$\begin{aligned}
\omega_u(X_u^\#) &= \left(T_{1_G}(R^{(u)})\right)^{-1} \circ i_1(X_u^\#) \\
&= \left(T_{1_G}(R^{(u)})\right)^{-1}(X_u^\#) \\
&= \left(T_{1_G}(R^{(u)})\right)^{-1}\left(T_{1_G}(R^{(u)})(X)\right) \\
&= X
\end{aligned} \tag{10.3.2}$$

が言えた．

(CF-2)

$\forall u \in P$ を 1 つ固定する．$\forall g \in G$ をとる．示すべきは $\forall v \in T_uP$ に対して

$$\left((R_g)^*\omega\right)_u(v) = \omega_{R_g(u)}\left(T_u(R_g)(v)\right) = \operatorname{Ad}(g^{-1})\left(\omega_u(v)\right)$$

が成り立つことである．実際 $i_1(v) \in \operatorname{Ker}(T_u\pi)$ に対しては，補題 10.2 からある $V \in \mathfrak{g}$ が一意的に存在して $i_1(v) = V_u^\#$ と書けるので

$$\begin{aligned}
\omega_{R_g(u)}\Big(T_u(R_g)\big(i_1(v)\big)\Big) &= \omega_{u \blacktriangleleft g}\Big(T_u(R_g)(V_u^\#)\Big) \\
&= \omega_{u \blacktriangleleft g}\Big(T_u(R_g) \circ T_{1_G}(R^{(u)})(V)\Big) && \because \quad (10.2.2) \\
&= \omega_{u \blacktriangleleft g}\Big(T_{1_G}(R_g \circ R^{(u)})(V)\Big)
\end{aligned}$$

となるが，$\forall x \in G$ に対して

$$
\begin{aligned}
R_g \circ R^{(u)}(x) &= u \blacktriangleleft x \blacktriangleleft g = u \blacktriangleleft (xg) = u \blacktriangleleft (gg^{-1}xg) \\
&= (u \blacktriangleleft g) \blacktriangleleft (g^{-1}xg) = R^{(u \blacktriangleleft g)} \circ F_{g^{-1}}(x)
\end{aligned}
$$

が成り立つ[*20]ことから

$$
\begin{aligned}
\omega_{u \blacktriangleleft g}\Bigl(T_{1_G}(R_g \circ R^{(u)})(V)\Bigr) &= \omega_{u \blacktriangleleft g}\bigl(T_{F_{g^{-1}}(1_G)}(R^{(u \blacktriangleleft g)}) \circ T_{1_G}(F_{g^{-1}})(V)\bigr) \\
&= \omega_{u \blacktriangleleft g}\bigl(T_{1_G}(R^{(u \blacktriangleleft g)}) \circ \mathrm{Ad}(g^{-1})(V)\bigr) && \because \ \mathrm{Ad}\ \text{の定義} \\
&= \omega_{u \blacktriangleleft g}\Bigl(\bigl(\mathrm{Ad}(g^{-1})(V)\bigr)^{\#}_{u \blacktriangleleft g}\Bigr) && \because \ (10.2.2) \\
&= \bigl(T_{1_G}(R^{(u \blacktriangleleft g)})\bigr)^{-1} \circ T_{1_G}(R^{(u \blacktriangleleft g)}) \circ \mathrm{Ad}(g^{-1})(V) && \because \ (10.3.2) \\
&= \mathrm{Ad}(g^{-1})(V) \\
&= \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega_u(V^{\#}_u) && \because \ (10.3.2) \\
&= \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega_u\bigl(i_1(v)\bigr)
\end{aligned}
$$

が言える．$i_2(v) \in H_u$ に関しては，**(C-2)** から $T_u(R_g)\bigl(i_2(v)\bigr) \in H_{u \blacktriangleleft g}$ なので

$$
\begin{aligned}
\omega_{R_g(u)}\Bigl(T_u(R_g)\bigl(i_2(v)\bigr)\Bigr) &= \bigl(T_{1_G}(R^{(u \blacktriangleleft g)})\bigr)^{-1} \circ i_1\Bigl(T_u(R_g)\bigl(i_2(v)\bigr)\Bigr) \\
&= 0 \\
&= \mathrm{Ad}(g^{-1})\Bigl(\omega_u\bigl(i_2(v)\bigr)\Bigr)
\end{aligned}
$$

が言える．$v = i_1(v) + i_2(v)$ なので証明が完了した．

■

10.4　同伴ベクトル束上の共変微分

定義 10.7: tensorial form

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$
- 有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 V
- Lie 群 G の有限次元表現 $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$

を与える．$\forall g \in G$ に対して，命題??の右作用によって右作用移動を $R_g\colon P \longrightarrow P,\ u \longmapsto u \blacktriangleleft g$ と定義する．全空間 P 上の V-値 k 形式 $\phi \in \Omega^k(P;\, V)$ を与える．

- ϕ が**水平** (horizontal) であるとは，$\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して

$$
i_{X^{\#}}(\phi) = 0
$$

[*20] 記号は【**例 10.2.2**】を参照

が成り立つことを言う[a].

- ϕ が **ρ 型の右同変**[b] (right equivalent of type ρ) であるとは，$\forall g \in G$ に対して

$$(R_g)^* \phi = \rho(g^{-1})(\phi)$$

が成り立つことを言う．

- ϕ が **ρ 型の tensorial k-form** (tensorial form of type ρ) であるとは，ϕ が水平かつ ρ 型の右同変であることを言う．

[a] $i_{X^\#} \colon \Omega^k(P;\, V) \longrightarrow \Omega^{k-1}(P;\, V)$ は微分形式の**内部積** (interior product) である．

[b] equivalent の訳語には**同変**があてられることが多い．何かしらの群作用を考えると言う意味があるようだ：http://pantodon.jp/index.rb?body=equivariant_topology

ρ 型の tensorial k-form 全体がなす $\mathbb{K}$-ベクトル空間を $\boldsymbol{\Omega^k_\rho(P;\, V)}$ と書く．

!

補題 10.1 より，$\phi \in \Omega^k(P;\, V)$ が水平であることは任意の k-個の C^∞ ベクトル場 $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(P)$ に対して

$$\exists l \text{ s.t. } X_l \text{ が垂直} \quad \Longrightarrow \quad \phi(X_1, \dots, X_k) = 0$$

が成り立つことと同値である．また，P 上の任意の 0-形式は引数を持たないので，自動的に水平ということになる．

補題 10.3: 同伴ベクトル束のファイバーの構造

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$
- 有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 V
- Lie 群 G の有限次元表現 $\rho \colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$
- 主束 P の同伴ベクトル束 $V \hookrightarrow P \times_\rho V \xrightarrow{q} M$

を与える．このとき，$\forall u \in P$ に対して $\mathbb{K}$-線型写像

$$f_u \colon V \longrightarrow q^{-1}(\{\pi(u)\}),\ v \longmapsto u \times_\rho v$$

はベクトル空間の同型写像である．

<u>**証明**</u> $v, w \in V$ について $u \times_\rho v = u \times_\rho w$ とする．このとき $\times_\rho$ の定義から，ある $g \in G$ が存在して $(u, w) = (u \blacktriangleleft g,\, g^{-1} \blacktriangleright v)$ とかける．右作用 $\blacktriangleleft$ は自由なので $u = u \blacktriangleleft g \implies g = 1_G$ が言える．従って $w = 1_G^{-1} \blacktriangleright v = v$ が言えた．i.e. f_u は単射である．

$\forall x \times_\rho w \in (P \times_\rho V)_{\pi(u)}$ を 1 つとる．このとき $x \in \pi^{-1}(\{\pi(u)\})$ でもあるので，ある $g \in G$ が存在して $x = u \blacktriangleleft g$ と書ける．従って

$$x \times_\rho w = (u \blacktriangleleft g) \times_\rho w = u \times_\rho g \blacktriangleright w = f_u(g \blacktriangleright w)$$

だとわかる．i.e. f_u は全射である． ■

命題??を思い出すと，主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ の開被覆，局所自明化，変換関数をそれぞれ

$\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, $\{\varphi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha\times G\}_{\alpha\in\Lambda}$, $\{t_{\alpha\beta}\colon M \longrightarrow G\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$ とおき，P の局所切断の族

$$\{s_\alpha\colon U_\alpha \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha),\ x \longmapsto \varphi_\alpha^{-1}(x,\,1_G)\}_{\alpha\in\Lambda} \tag{10.4.1}$$

を与えてから，同伴ベクトル束 $V \hookrightarrow P\times_\rho V \xrightarrow{q} M$ の局所自明化を

$$\{\psi_\alpha\colon q^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha\times V,\ s_\alpha(x)\times_\rho v \longmapsto (x,\,v)\}_{\alpha\in\Lambda} \tag{10.4.2}$$

として定義するのだった.

命題 10.6: tensorial form と同伴ベクトル束上の微分形式の対応

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$
- 有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 V
- Lie 群 G の有限次元表現 $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$
- 主束 P の同伴ベクトル束 $V \hookrightarrow P\times_\rho V \xrightarrow{q} M$

を与える．$\forall\phi\in\Omega^k(M;\,P\times_\rho V)$ に対して $\phi^\sharp\in\Omega^k(P;\,V)$ を

$$\phi^\sharp\colon u \longmapsto f_u^{-1}\circ\pi^*\phi|_u$$

と定義する．また，$\forall\psi\in\Omega^k_\rho(P;\,V)$ に対して $\psi^\flat\in\Omega^k(M;\,P\times_\rho V)$ を，$\forall x\in M$, $\forall w_1,\,\dots,\,w_k\in T_xM$ に対して次のように定義する：

$$\psi^\flat|_x(w_1,\,\dots,\,w_k) \coloneqq u\times_\rho\psi_u(v_1,\,\dots,\,v_k) \tag{10.4.3}$$

ただし $u\in\pi^{-1}(\{x\})$ および $v_i\in(T_u\pi)^{-1}(\{w_i\})$ は任意にとって良い.

(1) $\phi^\sharp\in\Omega^k_\rho(P;\,V)$ である.

(2) 写像

$$\sharp\colon \Omega^k(M;\,P\times_\rho V) \longrightarrow \Omega^k_\rho(P;\,V),\ \phi\longmapsto\phi^\sharp$$

はベクトル空間の同型写像であり，その逆写像は

$$\flat\colon \Omega^k_\rho(P;\,V) \longrightarrow \Omega^k(M;\,P\times_\rho V),\ \psi\longmapsto\psi^\flat$$

である.

(3) $\forall s\in\Omega^k(M)$, $\forall\eta\in\Omega^l(M;\,P\times_\rho V)$ に対して

$$\sharp(s\wedge\eta) = (\pi^*s)\wedge\sharp\eta$$

が成り立つ.

(4) $\forall\phi\in\Omega^k(M;\,P\times_\rho V)$ に対して

$$\mathrm{proj}_2\circ\psi_\alpha\circ\phi = s_\alpha^*(\phi^\sharp)\in\Omega^k(U_\alpha;\,V)$$

が成り立つ．ただし $\psi_\alpha\colon q^{-1}(U_\alpha)\longrightarrow U_\alpha\times V$ は (10.4.2) で定義された局所自明化，$s_\alpha\colon M\longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$ は (10.4.1) で定義された局所切断とする.

証明 $\forall \phi \in \Omega^k(M;\, P\times_\rho V)$ を 1 つ固定する．

(1) $\phi^\sharp$ が ρ 型の tensorial k-form であることを示す．

$\phi^\sharp$ が水平であること

$\forall u \in P$ を 1 つ固定すると，$\forall X \in \mathfrak{g}$ および $\forall v_2,\, \dots,\, v_k \in T_uP$ に対して

$$\begin{aligned}
\bigl(i_{X^\#}(\phi^\sharp)\bigr)_u(v_2,\, \dots,\, v_k) &= f_u^{-1} \circ (\pi^*\phi)_u(X_u^\#,\, v_2,\, \dots,\, v_k) \\
&= f_u^{-1}\Bigl(\phi_u\bigl(T_u\pi(X_u^\#),\, T_u\pi(v_2),\, \dots,\, T_u\pi(v_k)\bigr)\Bigr) \\
&= f_u^{-1}\Bigl(\phi_u\bigl(0,\, T_u\pi(v_2),\, \dots,\, T_u\pi(v_k)\bigr)\Bigr) && \because \text{ 補題 } 10.2
\end{aligned}$$

が成り立つが，ϕ_u は多重線型写像なので最右辺は 0 になる．よって $i_{X^\#}(\phi^\sharp) = 0$ が言えた．

$\phi^\sharp$ が ρ-型の右同変であること

$\forall u \in P$ を 1 つ固定し，$\forall v_1,\, v_2,\, \dots,\, v_k \in T_uP$ をとる．右作用移動の定義を思い出すと $\forall g \in G$ に対して $\pi \circ R_g = \pi$ が成り立つので

$$\begin{aligned}
&\bigl((R_g)^*\phi^\sharp\bigr)_u(v_1,\, \dots,\, v_k) \\
&= (\phi^\sharp)_{R_g(u)}\bigl(T_u(R_g)(v_1),\, \dots,\, T_u(R_g)(v_k)\bigr) \\
&= f_{u\blacktriangleleft g}^{-1}\Bigl(\phi_{\pi(u\blacktriangleleft g)}\bigl(T_{u\blacktriangleleft g}\pi \circ T_u(R_g)(v_1),\, \dots,\, T_{u\blacktriangleleft g}\pi \circ T_u(R_g)(v_k)\bigr)\Bigr) \\
&= f_{u\blacktriangleleft g}^{-1}\Bigl(\phi_{\pi(u)}\bigl(T_u(\pi\circ R_g)(v_1),\, \dots,\, T_u(\pi\circ R_g)(v_k)\bigr)\Bigr) \\
&= f_{u\blacktriangleleft g}^{-1}\Bigl(\phi_{\pi(u)}\bigl(T_u\pi(v_1),\, \dots,\, T_u\pi(v_k)\bigr)\Bigr) \\
&= f_{u\blacktriangleleft g}^{-1}\bigl((\pi^*\phi)_u(v_1,\, \dots,\, v_k)\bigr) \\
&= f_{u\blacktriangleleft g}^{-1}\bigl(f_u \circ f_u^{-1} \circ (\pi^*\phi)_u(v_1,\, \dots,\, v_k)\bigr) \\
&= f_{u\blacktriangleleft g}^{-1}\Bigl(f_u\bigl(\phi_u^\sharp(v_1,\, \dots,\, v_k)\bigr)\Bigr) && \because\ \phi^\sharp \text{ の定義} \\
&= f_{u\blacktriangleleft g}^{-1}\bigl(u \times_\rho \phi_u^\sharp(v_1,\, \dots,\, v_k)\bigr) && \because\ f_u \text{ の定義} \\
&= f_{u\blacktriangleleft g}^{-1}\Bigl((u \blacktriangleleft g) \times_\rho \rho(g)^{-1}\bigl(\phi_u^\sharp(v_1,\, \dots,\, v_k)\bigr)\Bigr) && \because\ \times_\rho \text{ の定義} \\
&= \rho(g^{-1})\bigl(\phi_u^\sharp(v_1,\, \dots,\, v_k)\bigr) && \because\ f_u \text{ の定義}
\end{aligned}$$

i.e. $(R_g)^*\phi^\sharp = \rho(g^{-1})(\phi^\sharp)$ が言えた．

(2) $\mathbb{K}$-線型写像 $\sharp\colon \Omega^k(M;\, P\times_\rho V) \longrightarrow \Omega^k_\rho(P;\, V)$ がベクトル空間の同型写像であることを示す．

$\sharp$ の単射性

$\phi,\, \eta \in \Omega^k(M;\, P\times_\rho V)$ に対して $\phi^\sharp = \eta^\sharp$ が成り立つとする．このとき $\forall u \in P$ を 1 つ固定すると，f_u は全単射なので $(\pi^*\phi)_u = (\pi^*\eta)_u$ が言える．i.e. $\forall v_1,\, \dots,\, v_k \in T_uP$ に対して

$$0 = \bigl(\pi^*(\phi - \eta)\bigr)_u(v_1,\, \dots,\, v_k) = (\phi_{\pi(u)} - \eta_{\pi(u)})\bigl(T_u\pi(v_1),\, \dots,\, T_u\pi(v_k)\bigr)$$

が成り立つ．$T_u\pi\colon T_uP \longrightarrow T_{\pi(u)}M$ は全射なので $\phi - \eta = 0 \iff \phi = \eta$ が言えた．

$\sharp$ の全射性

$\forall \psi \in \Omega^k_\rho(P;\, V)$ を 1 つ固定する．まず，$\psi^\flat \in \Omega^k(M;\, P\times_\rho V)$ が well-defined であることを示す．そのためには $\forall x \in M,\ \forall w_1,\, \dots,\, w_k \in T_xM$ を固定し，(10.4.3) の右辺が $u \in \pi^{-1}(\{x\})$ および $v_i \in (T_u\pi)^{-1}(\{w_i\})$ の取り方によらずに定まることを示せば良い．

$\psi^\flat$ は well-defined

まず $u \in \pi^{-1}(\{x\})$ を 1 つ固定する．このとき $v_i,\, v_i' \in (T_u\pi)^{-1}(\{w_i\})$ に対して $v_i' - v_i \in \mathrm{Ker}(T_u\pi)$ なので，$\psi \in \Omega^k_\rho(P;\, V)$ が水平であることおよび ψ_u の多重線型性から

$$\begin{aligned}\psi_u(v_1',\, \dots,\, v_k') &= \psi_u\big(v_1 + (v_1' - v_1),\, \dots,\, v_k + (v_k' - v_k)\big)\\ &= \psi_u(v_1,\, \dots,\, v_k) + (\text{少なくとも 1 つの } i \text{ について引数が } v_i' - v_i)\\ &= \psi_u(v_1,\, \dots,\, v_k)\end{aligned}$$

が言える．i.e. ψ_u は v_i の取り方によらない．

次に，他の $u' \in \pi^{-1}(\{x\})$ をとる．このときある $h \in G$ が存在して $u' \blacktriangleleft h = u$ となる．[*21] $T_{u\blacktriangleleft h}\pi \circ T_u(R_h)(v_i) = T_u\pi(v_i) = w_i$ かつ ψ が v_i の取り方によらないこと，および ψ の右同変性を使うと

$$\begin{aligned}\psi_{u'}(v_1,\, \dots,\, v_k) &= \psi_{u\blacktriangleleft h}\big(T_u(R_h)(v_1),\, \dots,\, T_u(R_h)(v_k)\big)\\ &= \big((R_h)^*\psi\big)_u(v_1,\, \dots,\, v_k)\\ &= \rho(h^{-1})\big(\psi_u(v_1,\, \dots,\, v_k)\big)\end{aligned}$$

だとわかるので，$\times_\rho$ の定義から

$$\begin{aligned}u' \times_\rho \psi_{u'}(v_1,\, \dots,\, v_k) &= u' \times_\rho \rho(h^{-1})\big(\psi_u(v_1,\, \dots,\, v_k)\big)\\ &= (u' \blacktriangleleft h) \times_\rho \rho(h) \circ \rho(h^{-1})\big(\psi_u(v_1,\, \dots,\, v_k)\big)\\ &= u \times_\rho \psi_u(v_1,\, \dots,\, v_k)\end{aligned}$$

が言える．i.e. $\psi^\flat|_x$ は $u \in \pi^{-1}(\{x\})$ の取り方にもよらない．

f_u の定義および ϕ_x の well-definedness から，

$$\begin{aligned}&f_u\big(\psi_u(v_1,\, \dots,\, v_k)\big) = \psi^\flat|_{\pi(u)}(w_1,\, \dots,\, w_k) = \pi^*(\psi^\flat)|_u(v_1,\, \dots,\, v_k)\\ \iff\quad &\psi_u = f_u^{-1} \circ \pi^*(\psi^\flat)|_u = (\psi^\flat)^\sharp|_u\end{aligned}$$

i.e. $\psi = (\psi^\flat)^\sharp$ が言えた．

(3) $\forall u \in P$ および $\forall v_1,\, \dots,\, v_{k+l} \in T_uP$ に対して

$$\begin{aligned}&\sharp(s \wedge \eta)_u(v_1,\, \dots,\, v_{k+l})\\ &= f_u^{-1} \circ \big(\pi^*(s \wedge \eta)\big)_u(v_1,\, \dots,\, v_{k+l})\\ &= f_u^{-1}\Big((\pi^*s \wedge \pi^*\eta)_u(v_1,\, \dots,\, v_{k+l})\Big)\\ &= f_u^{-1}\left(\frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \operatorname{sgn}\sigma\, \underbrace{(\pi^*s)_u(v_{\sigma(1)},\, \dots,\, v_{\sigma(k)})}_{\in \mathbb{K}} \otimes (\pi^*\eta)_u(v_{\sigma(k+1)},\, \dots,\, v_{\sigma(k+l)})\right)\\ &= \frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \operatorname{sgn}\sigma\, (\pi^*s)_u(v_{\sigma(1)},\, \dots,\, v_{\sigma(k)}) f_u^{-1}\big((\pi^*\eta)_u(v_{\sigma(k+1)},\, \dots,\, v_{\sigma(k+l)})\big)\\ &= \big((\pi^*s) \wedge \sharp\eta\big)_u(v_1,\, \dots,\, v_{k+l})\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし最後から 2 番目の等号では f_u^{-1} の $\mathbb{K}$-線型性を使った．

[*21] $x \in U_\alpha \subset M$ に対する P の局所自明化 φ_α について $g' := \mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\alpha(u')$，$g := \mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\alpha(u)$ とおけば，$h := g'^{-1}g \in G$ に対して $u' \blacktriangleleft h = u$ となる．

(4) $\forall x \in U_\alpha,\ \forall w_1,\ \dots,\ w_k \in T_x M$ に対して

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{proj}_2 \circ \psi_\alpha \circ \phi)_x(w_1,\ \dots,\ w_k) \\
&= f_{s_\alpha(x)}^{-1}\bigl(\phi_x(w_1,\ \dots,\ w_k)\bigr) && \because\ f_{s_\alpha(x)}\ \text{の定義} \\
&= f_{s_\alpha(x)}^{-1}\Bigl(\phi_x\bigl(T_x(\pi\circ s_\alpha)(w_1),\ \dots,\ T_x(\pi\circ s_\alpha)(w_k)\bigr)\Bigr) && \because\ \pi\circ s_\alpha = \mathrm{id}_{U_\alpha} \\
&= f_{s_\alpha(x)}^{-1}\Bigl(\phi_x\bigl(T_{s_\alpha(x)}\pi\circ T_x(s_\alpha)(w_1),\ \dots,\ T_{s_\alpha(x)}\pi\circ T_x(s_\alpha)(w_k)\bigr)\Bigr) \\
&= f_{s_\alpha(x)}^{-1}\circ(\pi^*\phi)_{s_\alpha(x)}\bigl(T_x(s_\alpha)(w_1),\ \dots,\ T_x(s_\alpha)(w_k)\bigr) \\
&= (\phi^\sharp)_{s_\alpha(x)}\bigl(T_x(s_\alpha)(w_1),\ \dots,\ T_x(s_\alpha)(w_k)\bigr) && \because\ \phi^\sharp\ \text{の定義} \\
&= \bigl(s_\alpha^*(\phi^\sharp)\bigr)_x(w_1,\ \dots,\ w_k)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

■

定義 10.8: ベクトル束上の接続

$V \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ をベクトル束とする．

- ベクトル束 E 上の**接続** (connection) とは，$\mathbb{K}$-線型写像

$$\boldsymbol{\nabla^E} \colon \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(M;\, E)$$

であって，$\forall f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M),\ \forall s \in \Gamma(E) = \Omega^0(M;\, E)$ に対して Leibniz 則

$$\nabla^E(fs) = \mathrm{d}f \otimes s + f\nabla^E s$$

を充たすもののこと．

- $X \in \Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$ に対して定まる $\mathbb{K}$-線型写像

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla^E_X} \colon \Gamma(E) &\longrightarrow \Gamma(E), \\
s &\longmapsto (\nabla^E s)(X)
\end{aligned}
$$

のことを $\boldsymbol{X}$ **に沿った共変微分** (covariant derivative along X) と呼ぶ．

- $\forall \omega \in \Omega^\bullet(M),\ \forall s \in \Gamma(E)$ に対して

$$\mathrm{d}^{\nabla^E}(\omega \otimes s) \coloneqq \mathrm{d}\omega \otimes s + (-1)^{\deg \omega}\omega \wedge \nabla^E s$$

と定義することで定まる写像

$$\boldsymbol{\mathrm{d}^{\nabla^E}} \colon \Omega^\bullet(M;\, E) \longrightarrow \Omega^{\bullet+1}(M;\, E)$$

のことを**共変外微分** (exterior covariant derivative) と呼ぶ．

【例??】を思い出すと，主束に与えられた接続形式が自然に同伴ベクトル束上の接続と結び付くような気がしてくる．実際それは正しい [**?**, p.150, 命題 6.3.3]：

定理 10.4: 同伴ベクトル束上の接続

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$
- 接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$
- 有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 V と Lie 群 G の $\dim V$ 次元表現 $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$
- 同伴ベクトル束 $V \hookrightarrow P \times_\rho V \xrightarrow{q} M$

を与える．$\rho_* \coloneqq T_{1_G}\rho\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ を ρ の微分表現とする．このとき，次が成り立つ：

(1)

$$\bigl(\mathrm{d} + \rho_*(\omega)\wedge\bigr)\Omega^k_\rho(P;\, V) \subset \Omega^{k+1}_\rho(P;\, V)$$

(2) $E \coloneqq P \times_\rho V$ とおく．命題 10.6 で定めた同型写像 $\sharp\colon \Omega^k(M;\, E) \longrightarrow \Omega^k_\rho(P;\, V)$ を用いて定義した写像

$$\nabla^E \coloneqq \sharp^{-1} \circ \bigl(\mathrm{d} + \rho_*(\omega)\bigr) \circ \sharp\colon \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(M;\, E)$$

はベクトル束 E 上の接続である．

(3) (10.4.2) によって定義された局所自明化 $\psi_\alpha\colon E|_{U_\alpha} \longrightarrow U_\alpha \times V$ に対して

$$\mathrm{proj}_2 \circ \psi_\alpha \circ \nabla^E = \mathrm{d} + \rho_*(s_\alpha^*\omega)$$

とかける．

(4) (2) の接続について共変外微分 $\mathrm{d}^{\nabla^E}\colon \Omega^k(M;\, E) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M;\, E)$ を考えると，以下の図式が可換になる：

$$\begin{tikzcd}
\Omega^k(M;\, E) \arrow[r, "\mathrm{d}^{\nabla^E}"] \arrow[d, "\sharp"'] & \Omega^{k+1}(M;\, E) \arrow[d, "\sharp"] \\
\Omega^k_\rho(P;\, V) \arrow[r, "\mathrm{d}+\rho_*(\omega)\wedge"'] & \Omega^{k+1}_\rho(P;\, V)
\end{tikzcd}$$

! $\omega \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$, $\tilde{s} \in \Omega^k(P;\, V)$ に対して $\rho_*(\omega) \wedge \tilde{s} \in \Omega^{k+1}(P;\, V)$ の意味するところは，**通常の $\wedge$ とは微妙に異なる**ことに注意．正確には $\forall X_1, \dots, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(P)$ に対して

$$\bigl(\rho_*(\omega) \wedge \tilde{s}\bigr)(X_1, \dots, X_{k+1}) \coloneqq \frac{1}{1!k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+1}} \operatorname{sgn}\sigma\, \underbrace{\rho_*\bigl(\omega(X_{\sigma(1)})\bigr)}_{\in \mathfrak{gl}(V)} \underbrace{\bigl(\tilde{s}(X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(k+1)})\bigr)}_{\in V}$$

として新しく定義したものである．

証明 (1) $\forall \tilde{s} \in \Omega^k_\rho(P;\, V)$ を 1 つ固定する．

$\bigl(\mathrm{d} + \rho_*(\omega)\wedge\bigr)\tilde{s}$ が水平

$\forall X \in \mathfrak{g}$ を 1 つとる．基本ベクトル場 $X^\# \in \Gamma(P)$ が生成するフローは $\theta\colon \mathbb{R} \times M \longrightarrow$

$M,\ (t,\,u) \longmapsto R_{\exp(tX)}(u)$ だったので，Lie 微分の定義から

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{X^\#}\tilde{s} &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (R_{\exp(tX)})^*\tilde{s} \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho\big(\exp(tX)^{-1}\big)(\tilde{s}) && \because\quad \tilde{s}\ \text{の右同変性} \\
&= \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho\big(\exp(-tX)\big)\right)\tilde{s} \\
&= -T_{1_G}\rho(X)(\tilde{s}) \\
&= -\rho_*(X)(\tilde{s})
\end{aligned}$$

がわかる．従って Lie 微分の公式 (Cartan magic formula) から

$$\begin{aligned}
i_{X^\#}\Big(\big(\mathrm{d}+\rho_*(\omega)\wedge\big)\tilde{s}\Big) &= i_{X^\#}(\mathrm{d}\tilde{s}) + i_{X^\#}\big(\rho_*(\omega)\big)\wedge\tilde{s} + (-1)^{\deg\omega}\rho_*(\omega)\wedge\cancel{i_{X^\#}(\tilde{s})} \\
&= \mathcal{L}_{X^\#}\tilde{s} - \mathrm{d}\big(\cancel{i_{X^\#}(\tilde{s})}\big) + \rho_*\big(i_{X^\#}(\omega)\big)\wedge\tilde{s} \\
&= -\rho_*(X)(\tilde{s}) + \rho_*(X)(\tilde{s}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

が言える．

$\big(\mathrm{d}+\rho_*(\omega)\wedge\big)\tilde{s}$ が右同変

$\forall g \in G$ をとる．$\rho_*\big(\mathrm{Ad}(g^{-1})(\omega)\big) = \rho(g^{-1})\circ\rho_*(\omega)\circ\rho(g)$ なので[*22]

$$\begin{aligned}
(R_g)^*\Big(\big(\mathrm{d}+\rho_*(\omega)\wedge\big)\tilde{s}\Big) &= (R_g)^*\mathrm{d}\tilde{s} + (R_g)^*\big(\rho_*(\omega)\wedge\tilde{s}\big) \\
&= \mathrm{d}\big((R_g)^*\tilde{s}\big) + \rho_*\big((R_g)^*\omega\big)\wedge(R_g)^*\tilde{s} \\
&= \mathrm{d}\big(\rho(g^{-1})\tilde{s}\big) + \rho_*\big(\mathrm{Ad}(g^{-1})(\omega)\big)\wedge\rho(g^{-1})\tilde{s} \\
&= \rho(g^{-1})\Big(\big(\mathrm{d}+\rho_*(\omega)\wedge\big)\tilde{s}\Big)
\end{aligned}$$

が言える．

(2) $\forall f \in C^\infty(M),\ \forall s \in \Gamma(E) = \Omega^0(M;\,E)$ に対して Leibniz 則が成り立つことを示す．外微分と引き戻

*22 【例 10.4】と大体同じ議論をすれば良い：$\forall X \in \mathfrak{g}$ をとる．このとき命題 10.3-(2) より C^∞ 曲線 $\gamma\colon t \longmapsto \exp(tX)$ は X が生成する 1 パラメータ部分群なので，

$$\begin{aligned}
\rho_*\big(\mathrm{Ad}(g^{-1})(X)\big) &= T_{1_G}\rho\Big(\mathrm{Ad}(g^{-1})\big(\dot{\gamma}(0)\big)\Big) \\
&= T_{1_G}\rho\circ T_{1_G}(F_{g^{-1}})\circ T_0\gamma\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right) \\
&= T_0(\rho\circ F_{g^{-1}}\circ\gamma)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho\big(g^{-1}\exp(tX)g\big) \\
&= \rho(g^{-1})\circ\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\Big(\rho\big(\exp(tX)\big)\Big)\circ\rho(g) \\
&= \rho(g^{-1})\circ\rho_*(X)\circ\rho(g)
\end{aligned}$$

ただし最後から 2 番目の等号では $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ が Lie 群の準同型であることを使った．ω は $\mathfrak{g}$ に値を取るので示された．

しが可換であることに注意すると

$$\begin{aligned}
\nabla^E(fs) &= \sharp^{-1} \circ \Big(\mathrm{d}\big(\sharp(fs)\big) + \rho_*(\omega)\big(\sharp(fs)\big)\Big) \\
&= \sharp^{-1} \circ \Big(\mathrm{d}\big((\pi^* f)\,\sharp s\big) + \rho_*(\omega)\big((\pi^* f)\,\sharp s\big)\Big) && \because \quad \text{命題 } 10.6\text{-}(3) \\
&= \sharp^{-1} \circ \Big(\mathrm{d}(\pi^* f) \otimes \sharp s + (\pi^* f)\ \mathrm{d}(\sharp s) + (\pi^* f)\ \rho_*(\omega)(\sharp s)\Big) \\
&= \sharp^{-1} \circ \Big(\pi^*(\mathrm{d}f) \otimes \sharp s + (\pi^* f)\ \big(\mathrm{d} + \rho_*(\omega)\big)(\sharp s)\Big) \\
&= \sharp^{-1} \circ \Big(\sharp(\mathrm{d}f \otimes s) + (\pi^* f)\,\sharp\big(\nabla^E(s)\big)\Big) && \because \quad \text{命題 } 10.6\text{-}(3) \\
&= \mathrm{d}f \otimes s + f\nabla^E s && \because \quad \text{命題 } 10.6\text{-}(3)
\end{aligned}$$

が言えた．

(3) $\forall s \in \Gamma(E)$ に対して，命題 10.6-(4) より

$$\begin{aligned}
\mathrm{proj}_2 \circ \psi_\alpha \circ (\nabla^E s) &= s_\alpha^*\big(\sharp(\nabla^E s)\big) \\
&= s_\alpha^*\Big(\big(\mathrm{d} + \rho_*(\omega)\big)(\sharp s)\Big) \\
&= s_\alpha^*\big(\mathrm{d}(\sharp s)\big) + s_\alpha^*\big(\rho_*(\omega)(\sharp s)\big) \\
&= \mathrm{d}\big(s_\alpha^*(\sharp s)\big) + \rho_*\big(s_\alpha^*\omega\big)\big(s_\alpha^*(\sharp s)\big) \\
&= \big(\mathrm{d} + \rho_*(s_\alpha^*\omega)\big)s_\alpha^*(\sharp s) \\
&= \big(\mathrm{d} + \rho_*(s_\alpha^*\omega)\big)\big(\mathrm{proj}_2 \circ \psi_\alpha(s)\big)
\end{aligned}$$

が言える．

(4) $\forall s \in \Omega^k(M; E)$ をとる．局所自明化 $\psi_\alpha \colon E|_{U_\alpha} \longrightarrow U_\alpha \times V$ について，命題 10.6-(4) より

$$\begin{aligned}
&\mathrm{proj}_2 \circ \psi_\alpha \circ \big(\sharp^{-1} \circ (\mathrm{d} + \rho_*(\omega)\wedge) \circ \sharp(s)\big) \\
&= s_\alpha^*\big((\mathrm{d} + \rho_*(\omega)\wedge)(\sharp s)\big) \\
&= s_\alpha^*\big(\mathrm{d}(\sharp s)\big) + s_\alpha^*\big(\rho_*(\omega) \wedge \sharp s\big) \\
&= \mathrm{d}\big(s_\alpha^*(\sharp s)\big) + \rho_*\big(s_\alpha^*(\omega)\big) \wedge s_\alpha^*(\sharp s) \\
&= \big(\mathrm{d} + \rho_*(s_\alpha^*\omega)\wedge\big)s_\alpha^*(\sharp s) \\
&= \big(\mathrm{d} + \rho_*(s_\alpha^*\omega)\wedge\big)\big(\mathrm{proj}_2 \circ \psi_\alpha(s)\big)
\end{aligned}$$

が言える．また，$\forall s \in \Omega^k(M)$, $\forall t \in \Gamma(E)$ に対して

$$\begin{aligned}
&\mathrm{proj}_2 \circ \psi_\alpha\big(\mathrm{d}s \otimes t + (-1)^{\deg s} s \wedge \nabla^E t\big) \\
&= s_\alpha^*\big(\sharp(\mathrm{d}s \otimes t)\big) + (-1)^{\deg s} s_\alpha^*\big(\sharp(s \wedge \nabla^E t)\big) \\
&= s_\alpha^*\big(\pi^*(\mathrm{d}s) \otimes \sharp t\big) + (-1)^{\deg s} s_\alpha^*\big(\pi^*(s) \wedge \sharp(\nabla^E t)\big) && \because \quad \text{命題 } 10.6\text{-}(3) \\
&= \mathrm{d}\big(s_\alpha^*(\pi^* s)\big) \otimes s_\alpha^*(\sharp t) + (-1)^{\deg s} s_\alpha^*(\pi^* s) \wedge s_\alpha^*\big(\sharp(\nabla^E t)\big) \\
&= \mathrm{d}\big(s_\alpha^*(\pi^* s)\big) \otimes s_\alpha^*(\sharp t) + (-1)^{\deg s} s_\alpha^*(\pi^* s) \wedge \mathrm{d}\big(s_\alpha^*(\sharp t)\big) + (-1)^{\deg s} s_\alpha^*(\pi^* s) \wedge \rho_*(s_\alpha^*\omega)(s_\alpha^*(\sharp t)) \\
&= \mathrm{d}\big(s_\alpha^*(\pi^* s) \otimes s_\alpha^*(\sharp t)\big) + \rho_*(s_\alpha^*\omega) \wedge \big(s_\alpha^*(\pi^* s) \otimes s_\alpha^*(\sharp t)\big) \\
&= \big(\mathrm{d} + \rho_*(s_\alpha^*\omega)\wedge\big)s_\alpha^*\big((\pi^* s) \otimes (\sharp t)\big) \\
&= \big(\mathrm{d} + \rho_*(s_\alpha^*\omega)\wedge\big)s_\alpha^*\big(\sharp(s \otimes t)\big) && \because \quad \text{命題 } 10.6\text{-}(3) \\
&= \big(\mathrm{d} + \rho_*(s_\alpha^*\omega)\wedge\big)\big(\mathrm{proj}_2 \circ \psi_\alpha(s \otimes t)\big)
\end{aligned}$$

であるが，共変外微分の定義から最左辺は $\mathrm{proj}_2 \circ \psi_\alpha \circ \mathrm{d}^{\nabla^E}(s \otimes t)$ と等しい．よって

$$\mathrm{d}^{\nabla^E}(s \otimes t) = \sharp^{-1} \circ \bigl(\mathrm{d} + \rho_*(\omega)\wedge\bigr) \circ \sharp(s \otimes t)$$

が言えた．共変外微分の定義から，d^{∇^E} が一般の $\Omega^k(M;\, E)$ の元に作用する場合についても示された．

■

命題 10.4-(3) がまさに我々の良く知るゲージ場になっていることを確認しよう．

まずは状況設定である．主束

$$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$$

は

- 開被覆 $\bigl\{U_\alpha\bigr\}_{\alpha\in\Lambda}$
- 局所自明化 $\bigl\{\varphi_\alpha \colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G\bigr\}_{\alpha\in\Lambda}$
- 変換関数 $\bigl\{t_{\alpha\beta} \colon U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G\bigr\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$

を持つとする．P の局所切断 $\bigl\{s_\alpha \colon U_\alpha \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)\bigr\}_{\alpha\in\Lambda}$ を，(10.4.2) の通り $s_\alpha(x) := \varphi_\alpha^{-1}(x,\, 1_G)$ と定義する．このとき主束 P の同伴ベクトル束

$$V \hookrightarrow P \times_\rho V \xrightarrow{q} M$$

はその構成から

- 開被覆 $\bigl\{U_\alpha\bigr\}_{\alpha\in\Lambda}$
- 変換関数 $\bigl\{t_{\alpha\beta} \colon U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G\bigr\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$

を持ち，局所自明化 $\bigl\{\psi_\alpha \colon q^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times V\bigr\}_{\alpha\in\Lambda}$ は (10.4.2) の通りに $\psi_\alpha\bigl(s_\alpha(x) \times_\rho v\bigr) := (x,\, v)$ と構成された．なお，命題??の証明の脚注で述べたようにこれは $\psi_\alpha(u \times_\rho v) := \bigl(\pi(u),\, \mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\alpha(u) \blacktriangleright v\bigr)$ と定義することと同値である．以下では便宜上 $E := P \times_\rho V$ とおく．

さて，主束 P 上の接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$ を任意に 1 つ与えよう．このとき定理 10.4-(2) により，同伴ベクトル束 E 上の接続 $\nabla^E \colon \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(M;\, E)$ が $\nabla^E := \sharp^{-1} \circ \bigl(\mathrm{d} + \rho_*(\omega)\bigr) \circ \sharp$ として誘導される．

(10.1.5) が示すように，Lie 群 G で記述される内部対称性を持つ場 ϕ は E の切断 $\phi \in \Gamma(E)$ を局所自明化 ψ_α によって表示した $\phi_\alpha := \mathrm{proj}_2 \circ \psi_\alpha \circ \phi \colon U_\alpha \longrightarrow V$ と同一視された．ここで，$\phi \in \Gamma(E) = \Omega^0(M;\, E)$ なので，ある M 上のベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$ に沿った共変微分 $\nabla^E_X \colon \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E),\ \phi \longmapsto \nabla^E\phi(X)$ を取ることができる．そして $\nabla^E_X\phi \in \Gamma(E)$ の局所自明化による表示 $(\nabla^E_X\phi)_\alpha := \mathrm{proj}_2 \circ \psi_\alpha \circ \nabla^E_X\phi \colon U_\alpha \longrightarrow V$ もまた，$U_\alpha \cap U_\beta$ における ψ_α から ψ_β への局所自明化の取り替えに伴って (10.1.5) の変換を受ける：

$$\begin{aligned}
&\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} \colon (U_\alpha \cap U_\beta) \times V \longrightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times V, \\
&\qquad \Bigl(x,\, \boldsymbol{(\nabla^E_X\phi)_\alpha(x)}\Bigr) \longmapsto \Bigl(x,\, \boldsymbol{(\nabla^E_X\phi)_\beta(x)}\Bigr) = \Bigl(x,\, \boldsymbol{\rho\bigl(t_{\beta\alpha}(x)\bigr)\bigl((\nabla^E_X\phi)_\alpha(x)\bigr)}\Bigr)
\end{aligned}$$

一方で，定理 10.4-(3) から

$$(\nabla^E_X\phi)_\alpha = (\nabla^E\phi)_\alpha(X) = \bigl(\mathrm{d} + \rho_*(s_\alpha^*\omega)\bigr)(\phi_\alpha)(X)$$

なので，$\forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$ において

$$
\begin{aligned}
&(\nabla^E_X \phi)_\beta(x) \\
&= \bigl(\mathrm{d} + \rho_*(s_\beta^*\omega)\bigr)(\phi_\beta)\Big|_x (X_x) \\
&= \rho\bigl(t_{\beta\alpha}(x)\bigr) \circ \bigl(\mathrm{d} + \rho_*(s_\alpha^*\omega)\bigr)(\phi_\alpha)\Big|_x (X_x) \\
&= \rho\bigl(t_{\beta\alpha}(x)\bigr) \circ \bigl(\mathrm{d} + \rho_*(s_\alpha^*\omega)\bigr) \circ \rho\bigl(t_{\beta\alpha}(x)\bigr)^{-1}(\phi_\beta)\Big|_x (X_x) \\
&= \rho\bigl(t_{\beta\alpha}(x)\bigr) \circ \bigl(\mathrm{d} + \rho_*(s_\alpha^*\omega)\bigr) \circ \rho\bigl(t_{\beta\alpha}(x)^{-1}\bigr)(\phi_\beta)\Big|_x (X_x)
\end{aligned}
$$

だとわかる．i.e.

$$
\bigl(\mathrm{d} + \rho_*(s_\beta^*\omega)\bigr)_x = \rho\bigl(t_{\beta\alpha}(x)\bigr) \circ \bigl(\mathrm{d} + \rho_*(s_\alpha^*\omega)\bigr)_x \circ \rho\bigl(t_{\beta\alpha}(x)^{-1}\bigr)
$$

となって (10.1.3) の変換則を再現する．また，V の基底を $e_1, \dots e_{\dim V}$ として $\phi_\beta(x) = {\phi_\beta}^i(x) e_i$ と展開し，$\rho(t_{\beta\alpha}(x)^{-1}) \in \mathrm{GL}(V)$ をこの基底に関して $[\,\rho(t_{\beta\alpha}(x)^{-1})\,]^i{}_j$ と行列表示ときに

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d} \circ \rho\bigl(t_{\beta\alpha}(x)^{-1}\bigr)(\phi_\beta)\Big|_x &= \mathrm{d}\,\underbrace{\bigl([\,\rho(t_{\beta\alpha}(x)^{-1})\,]^i{}_j {\phi_\beta}^i(x)\bigr)}_{\in \Omega^0(M) = C^\infty(M)} e_i \\
&= \partial_\mu\bigl([\,\rho(t_{\beta\alpha}(x)^{-1})\,]^i{}_j\bigr) {\phi_\beta}^i(x)\, \mathrm{d}x^\mu\, e_i + [\,\rho(t_{\beta\alpha}(x)^{-1})\,]^i{}_j \partial_\mu {\phi_\beta}^j(x)\, \mathrm{d}x^\mu\, e_i \\
&=: \Bigl(\mathrm{d}\bigl(\rho\bigl(t_{\beta\alpha}(x)^{-1}\bigr)\bigr) + \rho\bigl(t_{\beta\alpha}(x)^{-1}\bigr) \circ \mathrm{d}\Bigr)(\phi_\beta)\Big|_x
\end{aligned}
$$

が成り立つと言う意味で

$$
\rho_*(s_\beta^*\omega)\Big|_x = \rho\bigl(t_{\beta\alpha}(x)\bigr) \circ \mathrm{d}\bigl(\rho\bigl(t_{\beta\alpha}(x)^{-1}\bigr)\bigr) + \rho\bigl(t_{\beta\alpha}(x)\bigr) \circ \rho_*(s_\alpha\omega) \circ \rho\bigl(t_{\beta\alpha}(x)^{-1}\bigr)
$$

と書けてゲージ変換 (10.1.4) を再現する．つまり，**ゲージ場**とは，接続形式 ω の局所切断による引き戻し $s_\alpha^*\omega \in \Omega^1(U_\alpha; \mathfrak{g})$ のことだったのである．

10.5　局所接続形式とゲージ場

これまでの議論で主束，およびその同伴ベクトル束の接続を大域的な表式を得た．以降の節では，物理の文脈で登場する接続の局所表示（それは**ゲージ場**と呼ばれる）および曲率とその局所表示（それは**場の強さ**と呼ばれる）を，主束およびその同伴ベクトル束の各々において，より直接的な形で定式化する．まず始めにゲージ場と局所ゲージ変換を主束上の接続の言葉で定式化しよう．

先に進む前に，Maurer-Cartan 形式についての注意をしておく．

定義 10.9: Maurer-Cartan 形式

Lie 群 G の **Maurer-Cartan 形式**とは，

$$
\theta_g := T_g(L_{g^{-1}})\colon T_gG \longrightarrow \mathfrak{g}
$$

によって定義されるG 上の $\mathfrak{g}$ 値 1-形式 $\theta \in \Omega^1(G; \mathfrak{g})$ のことを言う．

特に G が $\mathrm{GL}(V)$ の部分 Lie 群（行列 Lie 群）である場合，Maurer-Cartan 形式 $\theta\colon TG \longrightarrow \mathfrak{g}$ はよく $\boldsymbol{g^{-1}\mathrm{d}g}$ と略記される．これの解釈は次の通りである：まず $\forall g \in G$ と G 上の恒等写像 $\mathrm{id}_G\colon G \longrightarrow G,\ g \longmapsto g$ を同一視する．このとき $\mathrm{d}g\colon TG \longrightarrow TG$ は，$\forall g \in G$ に対して $T_g(\mathrm{id}_G) = \mathrm{id}_{T_gG}\colon T_gG \longrightarrow T_gG$ のことだと解釈する．すると，**【例 10.2.1】**，**【例 10.2.3】**の議論から行列 Lie 群の場合 $T_g(L_{g^{-1}}) = L_{g^{-1}}$ と見做して良いので，$\forall v \in T_gG$ に対して

$$\theta_g(v) = T_g(L_{g^{-1}})(v) = L_{g^{-1}} \circ \mathrm{id}_{T_gG}(v) = g^{-1}\mathrm{d}g(v)$$

と書けるのである．

さて，ここで任意の C^∞ 写像 $t\colon M \longrightarrow G$ をとる．このとき，G が $\mathrm{GL}(V)$ の部分 Lie 群ならば，Maurer-Cartan 形式の t による引き戻しが $t^*\theta = \boldsymbol{t^{-1}\mathrm{d}t} \in \Omega^1(M;\mathfrak{g})$ と表記できることを確認しよう．$\forall g \in G$ を 1 つ固定し，$\forall v \in T_pM$ をとる．すると

$$\begin{aligned}
(t^*\theta)_p(v) &= \theta_{t(p)}\bigl(T_pt(v)\bigr) \\
&= T_{t(p)}(L_{t(p)^{-1}}) \circ T_pt(v) \\
&= T_p(L_{t(p)^{-1}} \circ t)(v) \\
&= T_p(L_{t(p)^{-1}} \circ t)\bigl(\dot{\gamma}(0)\bigr) \\
&= T_p(L_{t(p)^{-1}} \circ t) \circ T_0\gamma\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\bigl(L_{t(p)^{-1}} \circ t \circ \gamma(t)\bigr) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} t(p)^{-1}t\bigl(\gamma(t)\bigr) \\
&= t(p)^{-1}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} t\bigl(\gamma(t)\bigr) \\
&= t(p)^{-1}T_pt(\dot{\gamma}(0)) \\
&= t(p)^{-1}\mathrm{d}t|_p(v)
\end{aligned}$$

ただし γ は v が生成する積分曲線である．

ここで，いくつかの技術的な補題を述べよう．

補題 10.4: 積多様体の接空間

C^∞ 多様体 $M_1,\ M_2$ およびその任意の点 $p_1 \in M_1,\ p_2 \in M_2$ を与え，C^∞ 写像

$$\begin{aligned}
\mathrm{proj}_1 &\colon M_1 \times M_2 \longrightarrow M_1,\ (x_1,\ x_2) \longmapsto x_1, \\
\mathrm{proj}_2 &\colon M_1 \times M_2 \longrightarrow M_2,\ (x_1,\ x_2) \longmapsto x_2, \\
\mathrm{inj}_1^{p_2} &\colon M_1 \longrightarrow M_1 \times M_2,\ x \longmapsto (x,\ p_2), \\
\mathrm{inj}_2^{p_1} &\colon M_2 \longrightarrow M_1 \times M_2,\ x \longmapsto (p_1,\ x)
\end{aligned}$$

を考える．このとき，$\mathbb{R}$-線型写像

$$\begin{aligned}
\alpha\colon T_{(p_1,\,p_2)}(M_1 \times M_2) &\longrightarrow T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2, \\
v &\longmapsto \bigl(T_{(p_1,\,p_2)}(\mathrm{proj}_1)(v),\ T_{(p_1,\,p_2)}(\mathrm{proj}_2)(v)\bigr)
\end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned}\beta\colon T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2 &\longrightarrow T_{(p_1,\, p_2)}(M_1 \times M_2),\\ (v,\, w) &\longmapsto T_{p_1}(\mathrm{inj}_1^{p_2})(v) + T_{p_2}(\mathrm{inj}_2^{p_1})(w)\end{aligned}$$

は互いに逆写像である．i.e. $\mathbb{R}$-ベクトル空間の同型

$$T_{(p_1,\, p_2)}(M_1 \times M_2) \cong T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2$$

が成り立つ．

<u>証明</u> $\forall (v,\, w) \in T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2$ に対して

$$\begin{aligned}&\alpha\bigl(\beta(v,\, w)\bigr)\\ &= \bigl(T_{p_1}(\mathrm{proj}_1 \circ \mathrm{inj}_1^{p_2})(v) + \cancel{T_{p_2}(\mathrm{proj}_1 \circ \mathrm{inj}_2^{p_1})(w)},\, \cancel{T_{p_1}(\mathrm{proj}_2 \circ \mathrm{inj}_1^{p_2})(v)} + T_{p_2}(\mathrm{proj}_2 \circ \mathrm{inj}_2^{p_1})(w)\bigr)\\ &= \bigl(T_{p_1}(\mathrm{id}_{M_1})(v),\, T_{p_2}(\mathrm{id}_{M_2})(w)\bigr)\\ &= (v,\, w)\end{aligned}$$

が成り立つので α は全射である．さらに $\dim T_{(p_1,\, p_2)}(M_1 \times M_2) = \dim(T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2)$ なので，階数-退化次元の定理から α が同型写像であることがわかる． ■

補題 10.5: 積の微分の亜種

- C^∞ 多様体 $M_1,\, M_2,\, N_1,\, N_2,\, P$
- 任意の点 $p_i \in M_i$
- C^∞ 写像 $F_i\colon M_i \longrightarrow N_i$
- C^∞ 写像 $\mu\colon N_1 \times N_2 \longrightarrow P$

このとき，

$$T_{(p_1,\, p_2)}\bigl(\mu \circ (F_1 \times F_2)\bigr) = T_{(p_1,\, p_2)}(\mu \circ \mathrm{inj}_1^{F_2(p_2)} \circ F_1 \circ \mathrm{proj}_1) + T_{(p_1,\, p_2)}(\mu \circ \mathrm{inj}_2^{F_1(p_1)} \circ F_2 \circ \mathrm{proj}_2)$$

が成り立つ．

<u>証明</u> $\forall (x_1,\, x_2) \in M_1 \times M_2$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{proj}_i \circ (F_1 \times F_2)(x_1,\, x_2) &= \mathrm{proj}_i\bigl(F_1(x_1),\, F_2(x_2)\bigr)\\ &= F_i(x_i)\\ &= F_i \circ \mathrm{proj}_i(x_1,\, x_2)\end{aligned}$$

i.e. $\mathrm{proj}_i \circ (F_1 \times F_2) = F_i \circ \mathrm{proj}_i$ が成り立つことに注意すると，補題 10.4 より $\forall v \in T_{(p_1,\, p_2)}(M_1 \times M_2)$ に

対して

$$
\begin{aligned}
&T_{(p_1,\,p_2)}\bigl(\mu \circ (F_1 \times F_2)\bigr)(v)\\
&= T_{(F_1(p_1),\,F_2(p_2))}\mu \circ T_{(p_1,\,p_2)}(F_1 \times F_2)(v)\\
&= T_{(F_1(p_1),\,F_2(p_2))}\mu \circ \beta \circ \alpha \circ T_{(p_1,\,p_2)}(F_1 \times F_2)(v)\\
&= T_{(F_1(p_1),\,F_2(p_2))}\mu \circ \beta\Bigl(T_{(p_1,\,p_2)}\bigl(\mathrm{proj}_1 \circ (F_1 \times F_2)\bigr)(v),\, T_{(p_1,\,p_2)}\bigl(\mathrm{proj}_2 \circ (F_1 \times F_2)\bigr)(v)\Bigr)\\
&= T_{(F_1(p_1),\,F_2(p_2))}\mu \circ \beta\bigl(T_{(p_1,\,p_2)}(F_1 \circ \mathrm{proj}_1)(v),\, T_{(p_1,\,p_2)}(F_2 \circ \mathrm{proj}_2)(v)\bigr)\\
&= T_{(p_1,\,p_2)}(\mu \circ \mathrm{inj}_1^{F_2(p_2)} \circ F_1 \circ \mathrm{proj}_1)(v) + T_{(p_1,\,p_2)}(\mu \circ \mathrm{inj}_2^{F_1(p_1)} \circ F_2 \circ \mathrm{proj}_2)(v)
\end{aligned}
$$

がわかる. ■

補題 10.6: 局所切断の微分

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ と，その開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$，局所自明化 $\{\varphi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G\}_{\alpha\in\Lambda}$，変換関数 $\{t_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$ を与える．局所切断の族 $\{s_\alpha\colon U_\alpha \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ を (10.4.1) で定義する．$\theta \in \Omega^1(G;\,\mathfrak{g})$ を Maurer-Cartan 形式とする．
このとき，$\forall\alpha,\,\beta\in\Lambda$ および $\forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$ に関して，$\forall v \in T_x M$ は[a]

$$
T_x s_\beta(v) = T_{s_\alpha(x)}(R_{t_{\alpha\beta}(x)}) \circ T_x s_\alpha(v) + \bigl((t_{\alpha\beta}^*\theta)_x(v)\bigr)^{\#}\Big|_{s_\beta(x)}
$$

を充たす．

[a] [?, p.36, 補題 10.1] には誤植がある

証明 $\forall\alpha,\,\beta\in\Lambda$ を固定し，$\forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$ を取る．$\forall v \in T_x M$ を 1 つ固定する．変換関数の定義および P への右作用 $◀$ の定義から $s_\beta(x) = \varphi_\beta^{-1}(x,\,1_G) = \varphi_\alpha^{-1}\bigl(x,\,t_{\alpha\beta}(x)\bigr) = s_\alpha(x) ◀ t_{\alpha\beta}(x)$ が成り立つ．i.e. C^∞ 写像 $\Delta\colon M \longrightarrow M \times M,\ x \longmapsto (x,\,x)$ を使って $s_\beta = ◀ \circ (s_\alpha \times t_{\alpha\beta}) \circ \Delta$ と書けるので，

$$
T_x s_\beta(v) = T_{(x,\,x)}\bigl(◀ \circ (s_\alpha \times t_{\alpha\beta})\bigr) \circ T_x\Delta(v)
$$

となる．最右辺に補題 10.5 を使うことで

$$
\begin{aligned}
T_x s_\beta(v) &= T_x(◀ \circ \mathrm{inj}_1^{t_{\alpha\beta}(x)} \circ s_\alpha \circ \mathrm{proj}_1 \circ \Delta)(v) + T_x(◀ \circ \mathrm{inj}_2^{s_\alpha(x)} \circ t_{\alpha\beta} \circ \mathrm{proj}_2 \circ \Delta)(v)\\
&= T_x(◀ \circ \mathrm{inj}_1^{t_{\alpha\beta}(x)} \circ s_\alpha)(v) + T_x(◀ \circ \mathrm{inj}_2^{s_\alpha(x)} \circ t_{\alpha\beta})(v)\\
&= T_x(R_{t_{\alpha\beta}(x)} \circ s_\alpha)(v) + T_x(R^{(s_\alpha(x))} \circ t_{\alpha\beta})(v)\\
&= T_{s_\alpha(x)}(R_{t_{\alpha\beta}(x)}) \circ T_x s_\alpha(v) + T_x(R^{(s_\alpha(x))} \circ t_{\alpha\beta})(v)
\end{aligned}
$$

を得る．一方 (10.2.2) から

$$
\begin{aligned}
\bigl((t_{\alpha\beta}^*\theta)_x(v)\bigr)^{\#}|_{s_\beta(x)} &= \bigl(\theta_{t_{\alpha\beta}(x)}(T_x t_{\alpha\beta} v)\bigr)^{\#}|_{s_\alpha(x) ◀ t_{\alpha\beta}(x)}\\
&= T_{1_G}(R^{(s_\alpha(x) ◀ t_{\alpha\beta}(x))}) \circ T_{t_{\alpha\beta}(x)}(L_{t_{\alpha\beta}(x)^{-1}}) \circ T_x t_{\alpha\beta}(v)\\
&= T_x(R^{(s_\alpha(x))} \circ L_{t_{\alpha\beta}(x)} \circ L_{t_{\alpha\beta}(x)^{-1}} \circ t_{\alpha\beta})(v)\\
&= T_x(R^{(s_\alpha(x))} \circ t_{\alpha\beta})(v)
\end{aligned}
$$

と計算できる． ■

[?, 第 10 章-1] に倣って，先ほど導入したゲージ場をより扱いやすい形にしよう．

定理 10.5: 貼り合わせによる接続形式の構成

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ と，その開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$，局所自明化 $\{\varphi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G\}_{\alpha\in\Lambda}$，変換関数 $\{t_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$ を与える．局所切断の族 $\{s_\alpha\colon U_\alpha \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ を (10.4.1) で定義する．$\theta \in \Omega^1(G;\,\mathfrak{g})$ を Maurer-Cartan 形式とする．

(1) $\mathfrak{g}$ 値 1-形式の族 $\{A_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha;\,\mathfrak{g})\}_{\alpha\in\Lambda}$ が $\forall \alpha,\,\beta \in \Lambda$ について

$$A_\beta|_x = \mathrm{Ad}\bigl(t_{\alpha\beta}(x)^{-1}\bigr)\bigl(A_\alpha|_x\bigr) + (t_{\alpha\beta}^*\theta)_x, \quad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta \tag{10.5.1}$$

を充たすならば，$\forall \alpha \in \Lambda$ に対して $A_\alpha = s_\alpha^*\omega$ を充たす接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\,\mathfrak{g})$ が存在する．

(2) 任意の接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\,\mathfrak{g})$ に対して，$\mathfrak{g}$ 値 1-形式の族 $\{A_\alpha \coloneqq s_\alpha^*\omega \in \Omega^1(U_\alpha;\,\mathfrak{g})\}_{\alpha\in\Lambda}$ は $\forall \alpha,\,\beta \in \Lambda$ について

$$A_\beta|_x = \mathrm{Ad}\bigl(t_{\alpha\beta}(x)^{-1}\bigr)\bigl(A_\alpha|_x\bigr) + (t_{\alpha\beta}^*\theta)_x, \quad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$$

を充たす．

<u>証明</u>　(1) この証明では Lie 群の左移動，右移動[*23]，積をそれぞれ

$$\begin{aligned} \lambda_g &\colon G \longrightarrow G,\ x \longmapsto gx \\ \rho_g &\colon G \longrightarrow G,\ x \longmapsto xg \\ \mu &\colon G \times G \longrightarrow G,\ (x,\,y) \longmapsto xy \end{aligned}$$

と書くことにする．条件 (10.5.1) を充たす $\mathfrak{g}$ 値 1-形式の族 $\{A_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha;\,\mathfrak{g})\}_{\alpha\in\Lambda}$ を与える．$\forall \alpha \in \Lambda$ に対して

$$g_\alpha \coloneqq \mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\alpha \colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow G$$

とおく．このとき $\forall u \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ に対して $\varphi_\alpha(u) = \bigl(\pi(u),\,g_\alpha(u)\bigr) = s_\alpha\bigl(\pi(u)\bigr) \blacktriangleleft g_\alpha(u)$ が成り立つ．

$\forall \alpha \in \Lambda$ に対して，<u>P の座標近傍 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 上の</u> $\mathfrak{g}$ 値 1-形式 $\omega_\alpha \in \Omega^1\bigl(\pi^{-1}(U_\alpha);\,\mathfrak{g}\bigr)$ を

$$\omega_\alpha|_u \coloneqq \mathrm{Ad}\bigl(g_\alpha(u)^{-1}\bigr)\bigl((\pi^*A_\alpha)_u\bigr) + (g_\alpha^*\theta)_u \qquad {}^{\mathrm{w}/}\ \forall u \in \pi^{-1}(U_\alpha) \tag{10.5.2}$$

と定義する．$\forall x \in U_\alpha$ および $\forall v \in T_xM$ に対して

$$\begin{aligned} (s_\alpha^*\omega_\alpha)_x(v) &= \omega_\alpha|_{s_\alpha(x)}\bigl(T_xs_\alpha(v)\bigr) \\ &= \mathrm{Ad}\bigl(g_\alpha(s_\alpha(x))^{-1}\bigr)\bigl((\pi^*A_\alpha)_{s_\alpha(x)}(T_xs_\alpha(v))\bigr) + (g_\alpha^*\theta)_{s_\alpha(x)}\bigl(T_xs_\alpha(v)\bigr) \\ &= \mathrm{Ad}\bigl(1_G\bigr)\Bigl(A_\alpha|_x\bigl(T_{s_\alpha(x)}\pi \circ T_xs_\alpha(v)\bigr)\Bigr) + \theta_{g_\alpha(s_\alpha(x))}\bigl(T_{s_\alpha(x)}g_\alpha \circ T_xs_\alpha(v)\bigr) \\ &= A_\alpha|_x\bigl(T_x(\pi \circ s_\alpha)(v)\bigr) + \theta_{1_G}\bigl(\cancel{T_x(g_\alpha \circ s_\alpha)}(v)\bigr) \\ &= A_\alpha|_x(v) \end{aligned}$$

が成り立つので $s_\alpha^*\omega_\alpha = A_\alpha$ である．ただし，最後の等号で $\pi \circ s_\alpha = \mathrm{id}_{U_\alpha}$ であることと $g_\alpha \circ s_\alpha$ が常に 1_G を返す定数写像であることを使った．

[*23] 主束の全空間への右作用による右移動との混同を防ぐために R_g とは書かない．

$\boldsymbol{\omega_\alpha}$ が $\boldsymbol{U_\alpha}$ 上で接続形式の公理を充たすこと

(CF-1)

$\forall X \in \mathfrak{g}$ を 1 つとる．補題 10.2 から，$\forall u \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ に対して $T_u\pi(X_u^{\#}) = 0$ である．右作用 $\blacktriangleleft$ の定義から $\forall g \in G$ に対して $L_{g_\alpha(u)^{-1}} \circ g_\alpha \circ R^{(u)}(g) = g_\alpha(u)^{-1}g_\alpha(u)g = g$ が成り立つ，i.e. $L_{g_\alpha(u)^{-1}} \circ g_\alpha \circ R^{(u)} = \mathrm{id}_G$ であることから

$$\begin{aligned}
\omega_\alpha(X^{\#}) &= \mathrm{Ad}\big(g_\alpha(u)^{-1}\big)\Big(A_\alpha|_{\pi(u)}\big(\cancel{T_u\pi(X_u^{\#})}\big)\Big) + \theta_{g_\alpha(u)}\big(T_u g_\alpha(X_u^{\#})\big) \\
&= T_{g_\alpha(u)}(\lambda_{g_\alpha(u)^{-1}}) \circ T_u g_\alpha \circ T_{1_G}(R^{(u)})(X) && \because \quad (10.2.2) \\
&= T_{1_G}(\lambda_{g_\alpha(u)^{-1}} \circ g_\alpha \circ R^{(u)})(X) \\
&= X
\end{aligned}$$

が言えた．

(CF-2)

$\forall u \in P$ を 1 つ固定する．$\forall v \in T_uP,\ \forall g \in G$ に対して

$$\begin{aligned}
&(R_g^*\omega_\alpha)_u(v) \\
&= \omega_\alpha|_{R_g(u)}\big(T_u(R_g)(v)\big) \\
&= \mathrm{Ad}\big(g_\alpha(u \blacktriangleleft g)^{-1}\big)\Big(A_\alpha|_{\pi(u\blacktriangleleft g)}\big(T_{u\blacktriangleleft g}\pi \circ T_u(R_g)(v)\big)\Big) + \theta_{g_\alpha(u\blacktriangleleft g)}\big(T_{u\blacktriangleleft g}g_\alpha \circ T_u(R_g)(v)\big) \\
&= \mathrm{Ad}\big(g^{-1}g_\alpha(u)^{-1}\big)\Big(A_\alpha|_{\pi(u)}\big(T_u(\pi \circ R_g)(v)\big)\Big) + \theta_{g_\alpha(u)g}\big(T_u(g_\alpha \circ R_g)(v)\big) \\
&= \mathrm{Ad}\big(g^{-1}\big) \circ \mathrm{Ad}\big(g_\alpha(u)^{-1}\big)\Big(A_\alpha|_{\pi(u)}\big(T_u\pi(v)\big)\Big) + T_u(\lambda_{g^{-1}g_\alpha(u)^{-1}} \circ g_\alpha \circ R_g)(v) \\
&= \mathrm{Ad}\big(g^{-1}\big)\Big(\mathrm{Ad}\big(g_\alpha(u)^{-1}\big)\big((\pi^*A_\alpha)_u(v)\big)\Big) + T_u(\lambda_{g^{-1}g_\alpha(u)^{-1}} \circ g_\alpha \circ R_g)(v)
\end{aligned}$$

一方，$\rho_g \circ g_\alpha(u) = g_\alpha(u)g = g_\alpha(u \blacktriangleleft g) = g_\alpha \circ R_g(u)$ に注意すると

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ad}(g^{-1})\big((g_\alpha^*\theta)_u(v)\big) \\
&= T_{1_G}(F_{g^{-1}}) \circ \theta_{g_\alpha(u)}\big(T_u g_\alpha(v)\big) \\
&= T_{1_G}(\lambda_{g^{-1}} \circ \rho_g) \circ T_{g_\alpha(u)}(\lambda_{g_\alpha(u)^{-1}}) \circ T_u g_\alpha(v) \\
&= T_u(\lambda_{g^{-1}} \circ \rho_g \circ \lambda_{g_\alpha(u)^{-1}} \circ g_\alpha)(v) \\
&= T_u(\lambda_{g^{-1}} \circ \lambda_{g_\alpha(u)^{-1}} \circ g_\alpha \circ R_g)(v) \\
&= T_u(\lambda_{g^{-1}g_\alpha(u)^{-1}} \circ g_\alpha \circ R_g)(v)
\end{aligned}$$

がわかり，

$$R_g^*\omega_\alpha = \mathrm{Ad}\big(g^{-1}\big)(\omega_\alpha)$$

が示された．

$\boldsymbol{\omega_\alpha}|_{\pi^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)} = \boldsymbol{\omega_\beta}|_{\pi^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)}$

$\forall u \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ および $\forall v \in T_uP$ を 1 つ固定する．変換関数の定義から $g_\beta(u) = t_{\beta\alpha}\big(\pi(u)\big)g_\alpha(u)$ が成り立つ．i.e. C^∞ 写像 $\Delta\colon P \longrightarrow P \times P$ を用いて $g_\beta = \mu \circ \big((t_{\beta\alpha} \circ \pi) \times g_\alpha\big) \circ \Delta$ と書ける．よって補題 10.5 を使って

$$\begin{aligned}
T_u g_\beta(v) &= T_u\big(\mu \circ \mathrm{inj}_1^{g_\alpha(u)} \circ t_{\beta\alpha} \circ \pi \circ \mathrm{proj}_1 \circ \Delta\big)(v) \\
&\quad + T_u\big(\mu \circ \mathrm{inj}_2^{t_{\beta\alpha}(u)} \circ g_\alpha \circ \mathrm{proj}_2 \circ \Delta\big)(v) \\
&= T_u(\rho_{g_\alpha(u)} \circ t_{\beta\alpha} \circ \pi)(v) + T_u(\lambda_{t_{\beta\alpha}(\pi(u))} \circ g_\alpha)(v)
\end{aligned}$$

であり，Maurer-Cartan 形式の定義から

$$
\begin{aligned}
(g_\beta^*\theta)_u(v) &= T_{t_{\beta\alpha}(\pi(u))g_\alpha(u)}(\lambda_{g_\alpha(u)^{-1}t_{\beta\alpha}(\pi(u))^{-1}})\bigl(T_u g_\beta(v)\bigr) \\
&= T_u(\lambda_{g_\alpha(u)^{-1}} \circ \lambda_{t_{\beta\alpha}(\pi(u))^{-1}} \circ \rho_{g_\alpha(u)} \circ t_{\beta\alpha} \circ \pi)(v) \\
&\quad + T_{g_\alpha(u)}(\lambda_{g_\alpha(u)^{-1}})\bigl(T_u g_\alpha(v)\bigr) \\
&= \mathrm{Ad}\bigl(g_\alpha(u)^{-1}\bigr)\bigl(T_u(\lambda_{t_{\beta\alpha}(\pi(u))^{-1}})(v)\bigr) + (g_\alpha^*\theta)_u(v)
\end{aligned}
$$

と計算できる．従って，$\omega_\alpha \in \Omega^1\bigl(\pi^{-1}(U_\alpha); \mathfrak{g}\bigr)$ の定義 (10.5.2) および条件 (10.5.1) より

$$
\begin{aligned}
\omega_\beta|_u(v) &= \mathrm{Ad}\bigl(g_\beta(u)^{-1}\bigr)\bigl((\pi^*A_\beta)_u(v)\bigr) + (g_\beta^*\theta)_u(v) \\
&= \mathrm{Ad}\Bigl(g_\alpha(u)^{-1}t_{\beta\alpha}\bigl(\pi(u)\bigr)^{-1}\Bigr)\Bigl(\mathrm{Ad}\bigl(t_{\alpha\beta}(\pi(u))^{-1}\bigr)\bigl((\pi^*A_\alpha)_u(v)\bigr) + \bigl((t_{\alpha\beta}\circ\pi)^*\theta\bigr)_u(v)\Bigr) \\
&\quad + (g_\beta^*\theta)_u(v) \\
&= \mathrm{Ad}\bigl(g_\alpha(u)^{-1}\bigr)\bigl((\pi^*A_\alpha)_u(v)\bigr) \\
&\quad + \mathrm{Ad}\bigl(g_\alpha(u)^{-1}\bigr)\Bigl(\mathrm{Ad}\bigl(t_{\alpha\beta}(\pi(u))\bigr)\bigl(T_{t_{\alpha\beta}(\pi(u))}(\lambda_{t_{\alpha\beta}(\pi(u))^{-1}}) \circ T_u(t_{\alpha\beta}\circ\pi)(v)\bigr)\Bigr) \\
&\quad + \mathrm{Ad}\bigl(g_\alpha(u)^{-1}\bigr)\bigl(T_u(\lambda_{t_{\beta\alpha}(\pi(u))^{-1}})(v)\bigr) + (g_\alpha^*\theta)_u(v) \\
&= \omega_\alpha|_u(v) \\
&\quad + \mathrm{Ad}\bigl(g_\alpha(u)^{-1}\bigr)\Bigl(T_u\bigl(\rho_{t_{\beta\alpha}(\pi(u))} \circ t_{\alpha\beta} \circ \pi\bigr)(v) + T_u\bigl(\lambda_{t_{\alpha\beta}(\pi(u))} \circ t_{\beta\alpha} \circ \pi\bigr)(v)\Bigr) \\
&= \omega_\alpha|_u(v) \\
&\quad + \mathrm{Ad}\bigl(g_\alpha(u)^{-1}\bigr)\Bigl(T_u\bigl(\mu \circ \bigl((t_{\alpha\beta}\circ\pi) \times (t_{\beta\alpha}\circ\pi)\bigr) \circ \Delta\bigr)(v)\Bigr) \\
&= \omega_\alpha|_u(v)
\end{aligned}
$$

が言えた．ただし，最後から 3 つ目の等号ではコサイクル条件から従う $t_{\alpha\beta}(\pi(u))^{-1} = t_{\beta\alpha}(\pi(u))$ を使い，最後から 2 番目の等号では補題 10.5 を使い，最後の等号では $\mu \circ \bigl((t_{\alpha\beta}\circ\pi)\times(t_{\beta\alpha}\circ\pi)\bigr) \circ \Delta \colon P \longrightarrow G$ が常に 1_G を返す定数写像であることを使った．

ところで，$\bigl\{U_\alpha\bigr\}_{\alpha\in\Lambda}$ は M の開被覆であったから $P = \bigcup_{\alpha\in\Lambda}\pi^{-1}(U_\alpha)$ が成り立つ．よって $\forall u \in P$ に対してある $\alpha \in \Lambda$ が存在して $u \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ を充たす．従って大域的な $\mathfrak{g}$ 値 1-形式 $\omega \in \Omega^1(P;\mathfrak{g})$ を

$$
\omega_u \coloneqq \omega_\alpha|_u
$$

と定義すると，上で示したことからこれは well-defined な接続形式になり，かつ $\forall\alpha \in \Lambda$ に対して $s_\alpha^*\omega = A_\alpha$ を充たす．

(2) $\forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$ を 1 つ固定する．このとき接続形式の公理および補題 10.6 から，$\forall v \in T_xM$ に対して

$$
\begin{aligned}
s_\beta^*\omega|_x(v) &= \omega_{s_\beta(x)}\bigl(T_x s_\beta(v)\bigr) \\
&= \omega_{s_\alpha(x)\blacktriangleleft t_{\alpha\beta}(x)}\Bigl(T_{s_\alpha(x)}(R_{t_{\alpha\beta}(x)})\bigl(T_x s_\alpha(v)\bigr)\Bigr) + \omega_{s_\beta(x)}\Bigl(\bigl((t_{\alpha\beta}^*\theta)_x(v)\bigr)^{\#}|_{s_\beta(x)}\Bigr) \\
&= \bigl((R_{t_{\alpha\beta}(x)})^*\omega\bigr)_{s_\alpha(x)}\bigl(T_x s_\alpha(v)\bigr) + (t_{\alpha\beta}^*\theta)_x(v) \\
&= \mathrm{Ad}\bigl(t_{\alpha\beta}(x)^{-1}\bigr)\Bigl(\omega_{s_\alpha(x)}\bigl(T_x s_\alpha(v)\bigr)\Bigr) + (t_{\alpha\beta}^*\theta)_x(v) \\
&= \mathrm{Ad}\bigl(t_{\alpha\beta}(x)^{-1}\bigr)\bigl(s_\alpha^*\omega|_x(v)\bigr) + (t_{\alpha\beta}^*\theta)_x(v)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

■

10.6　水平持ち上げ

定義 10.10: C^∞ 曲線の水平持ち上げ

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ およびその接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$
- $\underline{M \text{ 上の}}$ C^∞ 曲線 $\gamma\colon [0,\, 1] \longrightarrow M$

を与える．このとき，$\forall u \in \pi^{-1}(\{\gamma(0)\})$ に対して以下を充たす$\underline{P \text{ 上の}}$ C^∞ 曲線 $\tilde{\gamma}\colon [0,\, 1] \longrightarrow P$ が一意的に存在し，γ の**水平持ち上げ** (horizontal lift) と呼ばれる：

(HC-1)　$\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$

(HC-2)　$\tilde{\gamma}(0) = u$

(HC-3)　$\forall t \in [0,\, 1]$ に対して

$$\dot{\tilde{\gamma}}(t) \in \operatorname{Ker} \omega_{\tilde{\gamma}(t)}$$

一意存在は本質的に常微分方程式の基本定理による：

補題 10.7: 水平持ち上げの公式

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ およびその接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$
- $\underline{M \text{ 上の}}$ C^∞ 曲線 $\gamma\colon [0,\, 1] \longrightarrow M$
- $\forall u \in \pi^{-1}\bigl(\{\gamma(0)\}\bigr)$

を与える．このとき，γ の水平持ち上げ $\tilde{\gamma}\colon [0,\, 1] \longrightarrow P$ が一意的に存在して以下を充たす：

(1) $\forall t \in [0,\, 1]$ に対して

$$\dot{\tilde{\gamma}}(t) = T_{s_\alpha(\gamma(t))} R_{g(t)} \circ T_{\gamma(t)} s_\alpha\bigl(\dot{\gamma}(t)\bigr) - \Bigl(\operatorname{Ad}\bigl(g(t)^{-1}\bigr)\Bigl(s_\alpha^* \omega|_{\gamma(t)}\bigl(\dot{\gamma}(t)\bigr)\Bigr)\Bigr)^{\#}_{\tilde{\gamma}(t)}$$

(2) $\forall t \in [0,\, 1]$ に対して

$$\dot{g}(t) = -T_{1_G} \rho_{g(t)}\Bigl(s_\alpha^* \omega|_{\gamma(t)}\bigl(\dot{\gamma}(t)\bigr)\Bigr)$$

ただし $\underline{G \text{ 上の}}$ C^∞ 曲線 $g\colon [0,\, 1] \longrightarrow G$ を

$$g \coloneqq \mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\alpha \circ \tilde{\gamma}$$

で定義した．

補題 10.7-(2) は，G が行列 Lie 群の場合にはゲージ場を使って

$$\dot{g}(t) = -A_\alpha|_{\gamma(t)}\bigl(\dot{\gamma}(t)\bigr)\, g(t)$$

と書ける．C^∞ 写像の成分表示の公式 (**??**) を使うとこれは

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}s}(t) = -A_{\alpha\mu}\bigl(\gamma(t)\bigr) \frac{\mathrm{d}\gamma^\mu}{\mathrm{d}s}(t)\, g(t)$$

とも書くことができるが，この常微分方程式の解 $g(t)$ の $t=1$ における値は時間順序積 $\mathcal{T}$ および経路順序積 $\mathcal{P}$ を使って形式的に

$$\begin{aligned}
g(1) &= \mathcal{T}\exp\left(-\int_0^1 \mathrm{d}s\,\frac{\mathrm{d}\gamma^\mu}{\mathrm{d}s}\,A_{\alpha\mu}\bigl(\gamma(s)\bigr)\right) \\
&= \mathcal{P}\exp\left(-\int_\gamma A_\alpha\right)
\end{aligned}$$

と書けて，物理では **Wilson line** として知られている物理量を表している．

<u>**証明**</u> 定理 10.5 と同様に

- 開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$
- 局所自明化 $\{\varphi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha)\longrightarrow U_\alpha\times G\}_{\alpha\in\Lambda}$，変換関数 $\{t_{\alpha\beta}\colon U_\alpha\cap U_\beta\longrightarrow G\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$ を与える．
- (10.4.1) で定義される局所切断の族 $\{s_\alpha\colon U_\alpha\longrightarrow\pi^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$

を与える．$[0,\,1]\subset\mathbb{R}$ はコンパクト集合なので連続写像 $\gamma\colon[0,\,1]\longrightarrow M$ による像 $\gamma([0,\,1])\subset M$ もまたコンパクトである．よって $\gamma([0,\,1])$ を有限個の点で区切ることにより，ある $\alpha\in\Lambda$ が存在して $\gamma([0,\,1])\subset U_\alpha$ が成り立つと仮定して良い．また，このとき $\tilde{\gamma}([0,\,1])\subset\pi^{-1}(U_\alpha)$ を充たす任意の C^∞ 曲線 $\tilde{\gamma}\colon[0,\,1]\longrightarrow P$ に対して定義される

$$g\coloneqq \mathrm{proj}_2\circ\varphi_\alpha\circ\tilde{\gamma}\colon[0,\,1]\longrightarrow G$$

は G 上の C^∞ 曲線であり，全空間 P への右作用の定義から $\forall t\in[0,\,1]$ に対して

$$\tilde{\gamma}(t)=\varphi_\alpha^{-1}\Bigl(\pi\bigl(\tilde{\gamma}(t)\bigr),\,g(t)\Bigr)=s_\alpha\Bigl(\pi\bigl(\tilde{\gamma}(t)\bigr)\Bigr)\blacktriangleleft g(t)$$

が成り立つ．C^∞ 写像 $\Delta\colon[0,\,1]\longrightarrow[0,\,1]\times[0,\,1],\ t\longmapsto(t,\,t)$ を使うと

$$\tilde{\gamma}=\blacktriangleleft\circ\bigl((s_\alpha\circ\pi\circ\tilde{\gamma})\times g\bigr)\circ\Delta \tag{10.6.1}$$

と書くこともできる．

ここで，$\tilde{\gamma}$ を γ の水平持ち上げとする．すると条件 **(HC-1)** より (10.6.1) は $\tilde{\gamma}=\blacktriangleleft\bigl((s_\alpha\circ\gamma)\times g\bigr)\circ\Delta$ となるから，補題 10.5 より

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\gamma}}(t) &= T_t\tilde{\gamma}\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t}\right) \\
&= T_{(t,\,t)}\Bigl(\blacktriangleleft\circ\bigl((s_\alpha\circ\gamma)\times g\bigr)\Bigr)\circ T_t\Delta\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t}\right) \\
&= T_{(t,\,t)}\Bigl(\blacktriangleleft\circ\bigl((s_\alpha\circ\gamma)\times g\bigr)\Bigr)\circ T_t\Delta\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t}\right) \\
&= T_t(\blacktriangleleft\circ\mathrm{inj}_1^{g(t)}\circ s_\alpha\circ\gamma)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t}\right) \\
&\quad + T_t(\blacktriangleleft\circ\mathrm{inj}_2^{s_\alpha(\gamma(t))}\circ g)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t}\right) \\
&= T_{s_\alpha(\gamma(t))}R_{g(t)}\circ T_{\gamma(t)}s_\alpha\bigl(\dot{\gamma}(t)\bigr) \\
&\quad + T_t\bigl(R^{\left(s_\alpha(\gamma(t))\right)}\circ g\bigr)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t}\right)
\end{aligned} \tag{10.6.2}$$

が分かった．補題 10.6 の証明と同様の計算により，Maurer-Cartan 形式 $\theta \in \Omega^1(G;\, \mathfrak{g})$ を使った等式

$$T_t\big(R^{(s_\alpha(\gamma(t)))} \circ g\big)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=t}\right) = \left((g^*\theta)_t\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=t}\right)\right)^{\#}\Bigg|_{\tilde{\gamma}(t)}$$

が成り立つ．よって条件 **(HC-2)** より

$$\begin{aligned} 0 &= \omega_{\tilde{\gamma}(t)}\big(\dot{\tilde{\gamma}}(t)\big) \\ &= (R^*_{g(t)}\omega)_{s_\alpha(\gamma(t))}\Big(T_{\gamma(t)}s_\alpha\big(\dot{\gamma}(t)\big)\Big) + (g^*\theta)_t\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=t}\right) \\ &= \mathrm{Ad}\big(-g(t)\big)\Big(s^*_\alpha\omega|_{\gamma(t)}\big(\dot{\gamma}(t)\big)\Big) + \theta_{g(t)}\big(\dot{g}(t)\big) \end{aligned} \tag{10.6.3}$$

が従い，

$$(g^*\theta)_t\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=t}\right) = -\,\mathrm{Ad}\big(g(t)^{-1}\big)\Big(s^*_\alpha\omega|_{\gamma(t)}\big(\dot{\gamma}(t)\big)\Big) \tag{10.6.4}$$

が分かった．

(1) (10.6.2), (10.6.4) より

$$\dot{\tilde{\gamma}}(t) = T_{s_\alpha(\gamma(t))}R_{g(t)} \circ T_{\gamma(t)}s_\alpha\big(\dot{\gamma}(t)\big) + \left(-\,\mathrm{Ad}\big(g(t)^{-1}\big)\Big(s^*_\alpha\omega|_{\gamma(t)}\big(\dot{\gamma}(t)\big)\Big)\right)^{\#}_{\tilde{\gamma}(t)}$$

(2) Ad の定義と Maurer-Cartan 形式の定義より (10.6.3) は

$$\begin{aligned} 0 &= T_{1_G}(\lambda_{g^{-1}(t)} \circ \rho_{g(t)})\Big(s^*_\alpha\omega|_{\gamma(t)}\big(\dot{\gamma}(t)\big)\Big) + T_{g(t)}(\lambda_{g(t)^{-1}})\big(\dot{g}(t)\big) \\ &= T_{1_G}(\lambda_{g^{-1}(t)})\bigg(T_{1_G}\rho_{g(t)}\Big(s^*_\alpha\omega|_{\gamma(t)}\big(\dot{\gamma}(t)\big)\Big) + \dot{g}(t)\bigg) \end{aligned}$$

とも書けるが，Lie 群の左移動が微分同相写像であることから $T_{1_G}(\lambda_{g^{-1}(t)})$ はベクトル空間の同型写像であり，

$$\dot{g}(t) = -T_{1_G}\rho_{g(t)}\Big(s^*_\alpha\omega|_{\gamma(t)}\big(\dot{\gamma}(t)\big)\Big)$$

が分かった．これは g に関する常微分方程式であり，与えられた初期条件 $g(0) = \mathrm{proj}_2\big(\varphi_\alpha(u)\big)$ に関して一意的な解を持つ．

(2) の証明より $\tilde{\gamma}$ の一意存在も言えた． ■

命題 10.7:

γ の 2 つの水平持ち上げ $\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}'$ が，ある $g \in G$ について $\tilde{\gamma}'(0) = \tilde{\gamma}(0) \blacktriangleleft g$ を充たすとする．このとき，$\forall t \in [0,\, 1]$ において $\tilde{\gamma}'(t) = \tilde{\gamma}(t) \blacktriangleleft g$ が成り立つ．

<u>証明</u> C^∞ 曲線

$$\tilde{\gamma} \blacktriangleleft g \colon [0,\, 1] \longrightarrow P,\ t \longmapsto \tilde{\gamma}(t) \blacktriangleleft g$$

は，$\pi \circ \tilde{\gamma} \blacktriangleleft g = \gamma$，$\tilde{\gamma} \blacktriangleleft g(0) = \tilde{\gamma}(0) \blacktriangleleft g$ を充たし，

$$
\begin{aligned}
\omega_{\tilde{\gamma} \blacktriangleleft g}\bigl(\dot{\tilde{\gamma} \blacktriangleleft g}(t)\bigr) &= (R_g^* \omega)_{\tilde{\gamma}(t)}\bigl(\dot{\tilde{\gamma}}(t)\bigr) \\
&= \mathrm{Ad}(g^{-1})\Bigl(\omega_{\tilde{\gamma}(t)}\bigl(\dot{\tilde{\gamma}}(t)\bigr)\Bigr) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

も充たすので，初期条件 $\tilde{\gamma} \blacktriangleleft g(0) = \tilde{\gamma}(0) \blacktriangleleft g = \tilde{\gamma}'(0)$ を充たす水平持ち上げである．故に水平持ち上げの一意性から

$$
\tilde{\gamma}' = \tilde{\gamma} \blacktriangleleft g
$$

が言える． ■

C^∞ 曲線のみならず，底空間上の C^∞ ベクトル場もまた全空間に持ち上がる．

定義 10.11: C^∞ ベクトル場の水平持ち上げ

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ およびその接続形式 $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$
- M 上の C^∞ ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$

このとき，$\forall u \in P$ に対して以下を充たす P 上の C^∞ ベクトル場 $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(P)$ が一意的に存在し，X の**水平持ち上げ** (horizontal life) と呼ばれる：

(HV-1) $T_u\pi(\tilde{X}_u) = X_{\pi(u)}$
(HV-2) $\tilde{X}_u \in \mathrm{Ker}\,\omega_u$

定理 10.3 より $\forall u \in P$ に対して

$$
T_u\pi|_{\mathrm{Ker}\,\omega_u} \colon \mathrm{Ker}\,\omega_u \longrightarrow T_{\pi(u)}M
$$

はベクトル空間の同型写像であるから，与えられた $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して接束 TP の（C^∞ とは限らない）切断 $\tilde{X}$ を

$$
\tilde{X}_u := \bigl(T_u\pi|_{\mathrm{Ker}\,\omega_u}\bigr)^{-1}(X_{\pi(u)})
$$

と定義すればこれは **(HV-1)**, **(HV-2)** を充たす．逆に性質 **(HV-1)**, **(HV-2)** を充たす接束 TP の（C^∞ とは限らない）任意の切断 $\tilde{Y}$ に対して，

$$
\tilde{Y}_u = \bigl(T_u\pi|_{\mathrm{Ker}\,\omega_u}\bigr)^{-1}(X_{\pi(u)}) = \tilde{X}_u
$$

が成り立つので，一意存在がわかった．あとはこのようにして構成した $\tilde{X}$ が C^∞ ベクトル場であることを確かめれば良い．そのためには，命題??より $\forall f \in C^\infty(P)$ に対して $\tilde{X}f$ が C^∞ 関数になっていることを示せば良い．

命題 10.8: 水平持ち上げの C^∞ 性

$\tilde{X}$ は C^∞ ベクトル場である．

証明 $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ および $\forall u \in P$ を 1 つ固定する．$X_{\pi(u)}$ は何らかの C^∞ 曲線 $\gamma\colon [0,\,1] \longrightarrow M$ の $t=0$ における速度ベクトルである．γ の水平持ち上げ $\tilde{\gamma}$ であって $\tilde{\gamma}(0)=u$ を充たすものをとる．このとき，一般に $\forall g \in G$ に対して $\pi \circ R_g = \pi$ が成り立つことに注意すると補題 10.3, 10.7 から

$$
\begin{aligned}
T_u\pi\bigl(\dot{\tilde{\gamma}}(0)\bigr) &= T_u(\pi \circ R_{g(0)}) \circ T_{\gamma(0)}s_\alpha\bigl(\dot{\gamma}(0)\bigr) - T_u\pi\Bigl(\mathrm{Ad}\bigl(g(0)^{-1}\bigr)\Bigl(s_\alpha^*\omega|_{\gamma(0)}\bigl(\dot{\gamma}(0)\bigr)\Bigr)\Bigr)^{\#}_{\tilde{\gamma}(t)} \\
&= T_u(\pi \circ s_\alpha)(X_{\pi(u)}) \\
&= T_u(\mathrm{id}_{U_\alpha})(X_{\pi(u)}) \\
&= X
\end{aligned}
$$

が従い，$\dot{\tilde{\gamma}}(0)$ は点 $u \in P$ において **(HV-1)**, **(HV-2)** を充たす．よって $\tilde{X}$ の一意性から

$$
\tilde{X}_u = \dot{\tilde{\gamma}}(0)
$$

である．

ここで $\forall f \in C^\infty(P)$ を 1 つ固定する．このとき

$$
\begin{aligned}
\tilde{X}f|_u &= \dot{\tilde{\gamma}}(0)f|_u \\
&= T_{s_\alpha(\gamma(0))}R_{g(0)} \circ T_{\gamma(0)}s_\alpha\bigl(X_{\pi(u)}\bigr)f - \Bigl(\mathrm{Ad}\bigl(g(0)^{-1}\bigr)\Bigl(s_\alpha^*\omega|_{\pi(u)}\bigl(X_{\pi(u)}\bigr)\Bigr)\Bigr)^{\#}_u f \\
&= X_{\pi(u)}(f \circ R_{g(0)} \circ s_\alpha) - \Bigl(\mathrm{Ad}\bigl(g(0)^{-1}\bigr)\Bigl(s_\alpha^*\omega|_{\pi(u)}(X)\Bigr)\Bigr)^{\#}_u f
\end{aligned}
$$

であるが，$f \circ R_{g(0)} \circ s_\alpha \in C^\infty(U_\alpha)$ であることおよび写像 $U_\alpha \longrightarrow \mathfrak{g},\ u \longmapsto \mathrm{Ad}\bigl(g(0)^{-1}\bigr)\Bigl(s_\alpha^*\omega|_{\pi(u)}(X)\Bigr)$ が C^∞ 写像であることから，あとは C^∞ 写像 $A\colon P \longrightarrow \mathfrak{g}$ に関して定まる関数 $P \longrightarrow \mathbb{R},\ u \longmapsto A(u)^{\#}f$ が C^∞ 級であることを言えば良い．

ところで基本ベクトル場の定義を思い出すと

$$
A(u)^{\#}f = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f\bigl(u \blacktriangleleft \exp(tA(u))\bigr) = T_0\bigl(R^{(u)} \circ \exp(\text{-}A(u))\bigr)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right)
$$

であるが，$R^{(u)} \circ \exp(\text{-}A(u))\colon [0,\,1] \longmapsto P$ は u に関しても C^∞ 級なので，$A(u)^{\#}f \in C^\infty(P)$ が言えた． ■

命題 10.9: ベクトル場の水平持ち上げは右不変

$\tilde{X}$ は右不変である．i.e. $\forall g \in G$ に対して自分自身と R_g-related である．

証明 $\forall u \in P,\ \forall g \in G$ を 1 つ固定する．このとき

$$
\begin{aligned}
T_u\pi\bigl((R_{g*}\tilde{X})_u\bigr) &= T_u\pi \circ T_{u\blacktriangleleft g^{-1}}(R_g)(\tilde{X}_{u\blacktriangleleft g^{-1}}) \\
&= T_{u\blacktriangleleft g^{-1}}(\pi \circ R_g)(\tilde{X}_{u\blacktriangleleft g^{-1}}) \\
&= T_{u\blacktriangleleft g^{-1}}\pi(\tilde{X}_{u\blacktriangleleft g^{-1}}) \\
&= X_{\pi(u\blacktriangleleft g^{-1})} \\
&= X_{\pi(u)}
\end{aligned}
$$

かつ

$$\begin{aligned}\omega_u\big((R_{g*}\tilde{X})_u\big) &= \omega_u\big(T_{u\blacktriangleleft g^{-1}}(R_g)(\tilde{X}_{u\blacktriangleleft g^{-1}})\big)\\ &= (R_g^*\omega)_{u\blacktriangleleft g^{-1}}(\tilde{X}_{u\blacktriangleleft g^{-1}})\\ &= \mathrm{Ad}(g^{-1})\big(\omega_{u\blacktriangleleft g^{-1}}(\tilde{X}_{u\blacktriangleleft g^{-1}})\big)\\ &= 0\end{aligned}$$

なので，ベクトル場 $R_{g*}\tilde{X}$ は **(HV-1)**, **(HV-2)** を充たす．i.e. X の水平持ち上げである．水平持ち上げの一意性から

$$R_{g*}\tilde{X}|_{u\blacktriangleleft g} = T_u(R_g)(\tilde{X}_u) = \tilde{X}_{u\blacktriangleleft g}$$

でなくてはいけない． ■

10.7 主束上の曲率形式

この節では主束上の曲率と主束上の共変微分を大域的な形で定義する．

定義 10.12: 曲率 2 形式

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ およびその接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$ を与える．
曲率 2 形式 (curvature 2 form) $\Omega \in \Omega^2(P;\, \mathfrak{g})$ を以下で定義する：

$$\Omega := \mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$$

!

Ω の定義の第 2 項は，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底 T^a w/ $a = 1, \dots, \dim G$ をとったときに

$$\frac{1}{2}[\omega, \omega] := \frac{1}{2}\omega_a \wedge \omega_b\big[T^a, T^b\big]$$

という意味であって，<u>$\mathfrak{g}$-値 1 形式のウェッジ積という意味ではない</u>.

補題 10.8:

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ およびその接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$ を与える．$\forall u \in P$ において，

(1) $\forall v \in \operatorname{Ker} T_u\pi$ に対して，ある $V \in \mathfrak{g}$ が存在して $V^{\#}|_u = v$ を充たす．
(2) $\forall v \in \operatorname{Ker} \omega_u$ に対して，ある $H \in \mathfrak{X}(M)$ が存在して $\tilde{H}|_u = v$ を充たす．ただし $\tilde{H}$ は H の水平持ち上げである．

証明 (1) 補題 10.2 の証明より $T_{1_G}(R^{(u)})\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \operatorname{Ker} T_u\pi$ は全射だから，ある $V \in \mathfrak{g}$ が存在して $v = T_{1_G}(R^{(u)})(V) = V^{\#}|_u$ を充たす．ただし最後の等号で (10.2.2) を使った．
(2) $T_u\pi(v) \in T_{\pi(u)}M$ を $H \in \mathfrak{X}(M)$ に拡張すればよい．

■

定理 10.6: 曲率形式の性質

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ およびその接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$ を与える．$\Omega \in \Omega^2(P;\, \mathfrak{g})$ を曲率形式とする．

(1) $\forall u \in P$ および $\forall v,\, w \in T_u P$ において

$$\Omega_u(v,\, w) = \mathrm{d}\omega|_u(v^{\mathrm{H}},\, w^{\mathrm{H}})$$

(2) $\forall g \in \Omega$ に対して

$$R_g^*\Omega = \mathrm{Ad}(g^{-1})\Omega$$

(3) **(Bianchi の第 2 恒等式)**

$$\mathrm{d}\Omega = [\Omega, \omega]$$

! 定理 10.6-(1) を曲率形式の定義とすることもある（ [?, p.43] など）．その場合，我々が採用した定義 10.12 は以下で与える証明と全く同じ議論によって導出され，**Cartan の構造方程式**と呼ばれる．

証明　(1) 引数を場合分けする．

$\boldsymbol{v,\, w \in \mathrm{Ker}\,\omega_u}$

$$\begin{aligned}\Omega_u(v,\, w) &= \mathrm{d}\omega\,|_u(v,\, w) + \frac{1}{2}[\omega_u, \omega_u](v,\, w) \\ &= \mathrm{d}\omega\,|_u(v,\, w) + \frac{1}{2}\big([\omega_u(v), \omega_u(w)] - [\omega_u(w), \omega_u(v)]\big) \\ &= \mathrm{d}\omega\,|_u(v,\, w) \\ &= \mathrm{d}\omega\,|_u(v^{\mathrm{H}},\, w^{\mathrm{H}})\end{aligned}$$

$\boldsymbol{v \in \mathrm{Ker}\, T_u\pi,\, w \in \mathrm{Ker}\,\omega_u}$

$[\omega_u, \omega_u](v,\, w) = 0$ である．補題 10.8 より v は基本ベクトル場 $A^{\#} \in \mathfrak{X}(P)$ に拡張し，w は水平持ち上げ $\tilde{B} \in \mathfrak{X}(P)$ に拡張する．外微分の公式から

$$\mathrm{d}\omega\,(A^{\#},\, \tilde{B}) = A^{\#}\omega(\tilde{B}) - \tilde{B}\omega(A^{\#}) - \omega\big(\big[A^{\#}, \tilde{B}\big]\big)$$

第 1 項は ω の性質から 0 で，第 2 項は $\omega(A^{\#}) = A$ が[*24] P 上の定数関数なので 0 になる．第 3 項が 0 になることを示すためには $\big[A^{\#}, \tilde{B}\big]$ が水平であることを示せば十分である．実際，$A^{\#}$ の生成するフローが

$$\theta\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M \longrightarrow M,\ (t,\, x) \longmapsto R_{\exp(tX)}(x)$$

であることを思い出すと，Lie 微分の定義と公式から

$$\big[A^{\sharp}, \tilde{B}\big]_u = \lim_{t\to 0} \frac{T_{u\blacktriangleleft\exp(tA)}(R_{\exp(-tA)})(\tilde{B}_{u\blacktriangleleft\exp(tA)}) - \tilde{B}_u}{t}$$

[*24] $\omega(A^{\#}) \in C^\infty(P)$ というのは，$\omega(A^{\#})\colon P \longrightarrow \mathbb{R},\ u \longmapsto \omega_u(A^{\#}|_u)$ という意味である．

が言える．$\tilde{B}_u \in \operatorname{Ker}\omega_u$ は明らかで，接続形式の定義から

$$\begin{aligned}\omega_u\big(T_{u\blacktriangleleft\exp(tA)}(R_{\exp(-tA)})(\tilde{B}_{u\blacktriangleleft\exp(tA)})\big) &= \big(R^*_{\exp(-tA)}\omega\big)_{u\blacktriangleleft\exp(tA)}\big(\tilde{B}_{u\blacktriangleleft\exp(tA)}\big)\\ &= \operatorname{Ad}\big(\exp(tA)\big)\Big(\omega_{u\blacktriangleleft\exp(tA)}\big(\tilde{B}_{u\blacktriangleleft\exp(tA)}\big)\Big)\\ &= 0\end{aligned}$$

が言えるので $\left[A^\sharp, \tilde{B}\right]_u \in \operatorname{Ker}\omega_u$ が示された．

$\boldsymbol{v} \in \mathbf{Ker}\,\boldsymbol{T_u\pi}$**,** $\boldsymbol{w} \in \mathbf{Ker}\,\boldsymbol{T_u\pi}$

v, w を補題 10.8 により拡張して $A^\#$, $B^\#$ にする．このとき

$$\begin{aligned}\Omega(A^\#,\, B^\#) &= \mathrm{d}\omega\,(A^\#,\, B^\#) + [A, B]\\ &= A^\#\omega(B^\#) - B^\#\omega(A^\#) - \omega(\big[A^\#, B^\#\big]) + [A, B]\\ &= -\omega([A, B]^\#) + [A, B]\\ &= -\omega([A, B]) + [A, B]\\ &= 0\end{aligned}$$

が成り立つ．

(2) 引き戻しが外微分，wedge 積と可換なので

$$\begin{aligned}R_g^*\Omega &= \mathrm{d}R_g^*\omega + \frac{1}{2}\big[R_g^*\omega, R_g^*\omega\big]\\ &= \operatorname{Ad}(g^{-1})\Omega\end{aligned}$$

がわかる．

(3)

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Omega &= \frac{1}{2}\big([\mathrm{d}\omega\,, \omega] - [\omega, \mathrm{d}\omega]\big)\\ &= [\mathrm{d}\omega\,, \omega]\\ &= [\Omega, \omega] - \frac{1}{2}[[\omega, \omega], \omega]\end{aligned}$$

ところで，$\omega = \omega_a T^a$ と展開すると

$$\begin{aligned}[[\omega, \omega], \omega] &= \omega_a \wedge \omega_b \wedge \omega_c[[T_a, T_b], T_c]\\ &= -\omega_a \wedge \omega_b \wedge \omega_c[[T_b, T_c], T_a] - \omega_a \wedge \omega_b \wedge \omega_c[[T_c, T_a], T_b] \qquad \because\ \text{Jacobi の恒等式}\\ &= -2\omega_a \wedge \omega_b \wedge \omega_c[[T_a, T_b], T_c]\\ &= -2[[\omega, \omega], \omega]\end{aligned}$$

i.e. $[[\omega, \omega], \omega] = 0$ が分かった．

■

定理 10.6 より，Ω は tensorial form of type Ad であることが分かった．記号としては $\Omega \in \Omega^2_{\mathrm{Ad}}(P; \mathfrak{g})$ ということである．定理 10.6-(1) は，主束上の共変微分の定義のヒントになっている．

定義 10.13: 主束上の共変微分

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ およびその接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$ を与える．
- 有限次元ベクトル空間 V

を与える．このとき，主束 P 上の**共変微分** $\mathrm{D}\colon \Omega^k(P;\, V) \longrightarrow \Omega^{k+1}(P;\, V)$ を

$$\mathrm{D}\phi|_u(v_1,\, \dots,\, v_{k+1}) \coloneqq \mathrm{d}\phi\,|_u({v_1}^{\mathrm{H}},\, \dots,\, {v_{k+1}}^{\mathrm{H}})$$

で定義する．ただし任意の $\phi \in \Omega^k(P;\, V)$, $u \in P$, $v_1,\, \dots,\, v_{k+1} \in T_uP$ をとった．

この定義はベクトル束上の共変微分の定義と見かけ上大きく異なっている．しかし，実は定理 10.4-(4) の意味で同じものだということが次の命題からわかる：

命題 10.10: 主束上の共変微分の公式

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ およびその接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$ を与える．
- 有限次元ベクトル空間 V
- Lie 群 G の表現 $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$

を与える．このとき，$\forall \phi \in \Omega^k_\rho(P;\, V)$ に対して以下が成り立つ：

$$\mathrm{D}\phi = \mathrm{d}\phi + \rho_*(\omega) \wedge \phi$$

! 定理 10.4 のときと同様に，

$$\big(\rho_*(\omega) \wedge \phi\big)_u(v_1,\, \dots,\, v_{k+1}) \coloneqq \frac{1}{1!k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+1}} \operatorname{sgn}\sigma\, T_u\rho\big(v_{\sigma(1)}\big)\big(\phi(v_{\sigma(2)},\, \dots,\, v_{\sigma(k+1)})\big) \tag{10.7.1}$$

という定義である．

<u>**証明**</u> $\forall u \in P$ および $\forall v_1,\, \dots,\, v_{k+1} \in T_uP$ を固定する．示すべき式は全ての引数に関して線型だから，v_i は水平であるか垂直であるかのどちらかであるとして良い．さらに以下では補題 10.8 によって水平（resp. 垂直）な $v_i \in T_uP$ を水平（resp. 垂直）な $X_i \in \mathfrak{X}(P)$ に拡張する．具体的には，$v_i \in T_uP$ 水平（resp. 垂直）ならば X_i は水平持ち上げ $\tilde{B}_i$（resp. 基本ベクトル場 ${A_i}^{\#} \in \mathfrak{X}(P)$）である．

引数について場合分けする．

X_i が全て水平

$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_{k+1}$ に対して $\omega(X_{\sigma(1)}) = 0$ なので自明．

X_i のうち少なくとも 2 つが垂直

引数の入れ替えに関する反対称性より，$X_1 = {A_1}^{\#}$, $X_2 = {A_2}^{\#}$ を仮定しても一般性を損なわない．このとき命題 10.4 より $[X_1, X_2] = [A_1, A_2]^{\#}$ が成り立つので $[X_1, X_2]$ もまた垂直である．

まず，共変微分の定義から (10.7.1) の左辺は

$$\mathrm{D}\phi(X_1,\, \dots,\, X_{k+1}) = \mathrm{d}\phi\,(0,\, 0,\, \dots) = 0$$

である．よって (10.7.1) の右辺が 0 になることを示せば良い．実際，右辺第 1 項に関しては，外微分

の公式より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\phi\,(X_1,\,\dots,\,X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i-1}X_i\phi(\dots,\,\widehat{X_i},\,\dots) + \sum_{1\le i<j\le k+1}(-1)^{i+j}\phi([X_i, X_j],\,\dots,\,\widehat{X_i},\,\widehat{X_j},\,\dots) \qquad (10.7.2)\\
&= 0+0
\end{aligned}
$$

が言える．さらに右辺第 2 項に関して，ϕ の引数のうち少なくとも 1 つが水平なので

$$
\bigl(\rho_*(\omega)\wedge\phi\bigr)(X_1,\,\dots,\,X_{k+1}) = 0
$$

がわかる．

X_i の 1 つのみが垂直で他が全て水平

引数の入れ替えに関する反対称性より，$X_1 = {A_1}^{\#}$ を仮定しても一般性を損なわない．
まず，共変微分の定義から (10.7.1) の左辺は

$$
\mathrm{D}\phi(X_1,\,\dots,\,X_{k+1}) = \mathrm{d}\phi\,(0,\,\dots) = 0
$$

である．よって (10.7.1) の右辺が 0 になることを示せば良い．
(10.7.1) の右辺第 1 項に関しては，外微分の公式 (10.7.2) より非ゼロな項が

$$
X_1\phi(X_2,\,\dots) + \sum_{2\le j\le k+1}(-1)^{1+j}\phi([X_1, X_j],\,X_2,\,\dots,\,\widehat{X_j},\,\dots)
$$

だとわかる．ところが，命題 10.9 より $X_2,\,\dots,\,X_{k+1}$ が右不変なので Lie 微分の公式より

$$
\begin{aligned}
[X_1, X_j]_u &= \bigl[{A_1}^{\#}, X_j\bigr]_u\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{T_{u\blacktriangleleft\exp(tA_1)}\bigl(R_{\exp(-tA_1)}\bigr)\bigl(X_j|_{u\blacktriangleleft\exp(tA_1)}\bigr) - X_j|_u}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{X_j|_{u\blacktriangleleft\exp(tA_1)\blacktriangleleft\exp(-tA_1)} - X_j|_u}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{X_j|_u - X_j|_u}{t}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

が言えて，結局

$$
\mathrm{d}\phi\,(X_1,\,\dots,\,X_{k+1}) = X_1\phi(X_2,\,\dots) = {A_1}^{\#}\phi(X_2,\,\dots,\,X_{k+1})
$$

が分かった．$f\in C^\infty(P)$ を $f(u) \coloneqq \phi_u(X_2|_u,\,\dots,\,X_{k+1}|_u)$ によって定義し，(10.2.2) を使ってさらに計算を進めると

$$
\begin{aligned}
\bigl({A_1}^{\#}\phi(X_2,\,\dots,\,X_{k+1})\bigr)|_u &= ({A_1}^{\#}f)(u)\\
&= T_{1_G}(R^{(u)})(A_1)f\\
&= A_1\bigl(f\circ R^{(u)}\bigr)
\end{aligned}
$$

となるが，$\forall g \in G$ に対して

$$
\begin{aligned}
f \circ R^{(u)}(g) &= \phi_{R^{(u)}(g)}\big(X_2|_{R^{(u)}(g)},\, \dots,\, X_{k+1}|_{R^{(u)}(g)}\big) \\
&= \phi_{u \blacktriangleleft g}\big(T_u(R_g)(X_2|_u),\, \dots,\, T_u(R_g)(X_{k+1}|_u)\big) && \because\ X_j \text{ の右不変性} \\
&= (R_g^* \phi)_u(X_2|_u,\, \dots,\, X_{k+1}|_u) \\
&= \rho(g^{-1})\big(\phi_u(X_2|_u,\, \dots,\, X_{k+1}|_u)\big) && \because\ \phi \text{ の右同変性} \\
&= \rho(g^{-1})\big(f(u)\big)
\end{aligned}
$$

が成り立つので，

$$
\begin{aligned}
A_1\big(f \circ R^{(u)}\big) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Big(\rho\big(\exp(tA_1)^{-1}\big)\big(f(u)\big)\Big) \\
&= \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho\big(\exp(tA_1)^{-1}\big)\right)\big(f(u)\big) && \because\ \text{補題 10.5} \\
&= \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho\big(\exp(-tA_1)\big)\right)\big(f(u)\big) && \because\ \text{命題 10.3} \\
&= -\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho\big(\exp(tA_1)\big)\right)\big(f(u)\big) \\
&= -T_0\big(\rho \circ \exp(\text{-}A_1)\big)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right)\big(f(u)\big) \\
&= -T_{1_G}\rho \circ T_0\big(\exp(\text{-}A_1)\big)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right)\big(f(u)\big) \\
&= -\rho_*(A_1)f(u)
\end{aligned}
$$

i.e. ${A_1}^{\#}\phi(X_2,\, \dots,\, X_{k+1}) = -\rho_*\big(A_1\big)\phi(X_2,\, \dots,\, X_{k+1})$ だと分かった．一方，右辺第 2 項の非ゼロな項は

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+1},\, \sigma(1)=1} \operatorname{sgn}\sigma\, \rho_*\big(\omega(X_1)\big)\big(\phi(X_{\sigma(2)},\, \dots,\, X_{\sigma(k+1)})\big) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+1},\, \sigma(1)=1} \operatorname{sgn}\sigma\, \rho_*\big(A_1\big)\big(\phi(X_{\sigma(2)},\, \dots,\, X_{\sigma(k+1)})\big) \\
&= \rho_*\big(A_1\big)\phi(X_2,\, \dots,\, X_{k+1})
\end{aligned}
$$

であるから，これらは相殺して 0 になる．

■

特に $\Omega \in \Omega^2_{\mathrm{Ad}}(P;\, \mathfrak{g})$ なので，命題 10.10 から

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}\Omega &= \mathrm{d}\Omega + \mathrm{ad}(\omega) \wedge \Omega \\
&= \mathrm{d}\Omega + \omega_a \wedge \Omega_b\, \mathrm{ad}(T^a)(T^b) \\
&= \mathrm{d}\Omega + \omega_a \wedge \Omega_b \big[T^a, T^b\big] \\
&= \mathrm{d}\Omega + [\omega, \Omega]
\end{aligned}
$$

だとわかる．よって Bianchi の第 2 恒等式は共変微分を使って

$$
\mathrm{D}\Omega = 0
$$

と書くこともできる．

10.8　曲率形式の局所表示と場の強さ

この小説では，前節で定義した主束上の曲率形式を局所表示し，それが物理側で**場の強さ**と呼ばれるものと同一視できることを確認する．

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ と，その開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$，局所自明化 $\{\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G\}_{\alpha\in\Lambda}$，変換関数 $\{t_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$ を与える．局所切断の族 $\{s_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ を (10.4.1) で定義する．

定理 10.5 を参考に，曲率形式の局所表示を

$$F_\alpha := s_\alpha^*\Omega \in \Omega^2(U_\alpha;\, \mathfrak{g})$$

で定義する．曲率形式の定義と，引き戻しと外微分，wedge 積が可換であることから

$$\begin{aligned} F_\alpha &= \mathrm{d}s_\alpha^*\omega + \frac{1}{2}[s_\alpha^*\omega, s_\alpha^*\omega] \\ &= \mathrm{d}A_\alpha + \frac{1}{2}[A_\alpha, A_\alpha] \end{aligned}$$

がわかる．F_α の，チャート $(U_\alpha(x^\mu))$ における成分表示 $F_\alpha = \frac{1}{2}F_{\alpha\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu$ を求めてみる：

$$\begin{aligned} 2F_\alpha &= F_{\alpha\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \\ &= 2\partial_\mu A_{\alpha\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \\ &\quad + A_{\alpha a\mu}A_{\alpha b\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu\,\big[T^a, T^b\big] \\ &= (\partial_\mu A_{\alpha\nu} - \partial_\nu A_{\alpha\mu})\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \\ &\quad + [A_{\alpha\mu}, A_{\alpha\nu}]\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \end{aligned}$$

より，

$$F_{\alpha\mu\nu} = (\partial_\mu A_{\alpha\nu} - \partial_\nu A_{\alpha\mu}) + [A_{\alpha\mu}, A_{\alpha\nu}]$$

と書くことができる．これは物理側で**場の強さ** (field strength) としてよく知られたものである．この意味で以降，$F_\alpha \in \Omega^2(U_\alpha;\, \mathfrak{g})$ のことを場の強さと呼ぶ．

定理 10.7: 場の強さの変換則

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ と，その開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$，局所自明化 $\{\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G\}_{\alpha\in\Lambda}$，変換関数 $\{t_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$ を与える．局所切断の族 $\{s_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ を (10.4.1) で定義する．

このとき，$\forall \alpha,\, \beta \in \Lambda$ について

$$F_\beta|_x = \mathrm{Ad}\big(t_{\alpha\beta}(x)^{-1}\big)(F_\alpha|_x), \quad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$$

が成り立つ．

証明 $\forall x \in M,\, \forall v_1,\, v_2 \in T_xM$ を 1 つ固定する．定理 10.6-(1) より，

$$\begin{aligned} F_\beta|_x(v_1,\, v_2) &= s_\beta^*\Omega|_x(v_1,\, v_2) \\ &= \Omega|_{s_\beta(x)}\big(T_xs_\beta(v_1),\, T_xs_\beta(v_2)\big) \\ &= \mathrm{d}\omega\,|_{s_\beta(x)}\big(T_xs_\beta(v_1)^{\mathrm{H}},\, T_xs_\beta(v_2)^{\mathrm{H}}\big) \end{aligned}$$

ここで補題 10.6 および水平部分空間の右不変性から

$$T_x s_\beta(v_i)^{\mathrm{H}} = T_{s_\alpha(x)}(R_{t_{\alpha\beta}(x)})\bigl(T_x s_\alpha(v_i)^{\mathrm{H}}\bigr)$$

なので，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\omega\,|_{s_\beta(x)}\bigl(T_x s_\beta(v_1)^{\mathrm{H}},\, T_x s_\beta(v_2)^{\mathrm{H}}\bigr)\\
&= (R^*_{t_{\alpha\beta}(x)}\,\mathrm{d}\omega)\Big|_{s_\alpha(x)}\bigl(T_x s_\alpha(v_1)^{\mathrm{H}},\, T_x s_\alpha(v_2)^{\mathrm{H}}\bigr)\\
&= \mathrm{d}\bigl(R^*_{t_{\alpha\beta}(x)}\omega\bigr)\Big|_{s_\alpha(x)}\bigl(T_x s_\alpha(v_1)^{\mathrm{H}},\, T_x s_\alpha(v_2)^{\mathrm{H}}\bigr)\\
&= \mathrm{d}\Bigl(\mathrm{Ad}\bigl(t_{\alpha\beta}(x)^{-1}\bigr)(\omega)\Bigr)\Big|_{s_\alpha(x)}\bigl(T_x s_\alpha(v_1)^{\mathrm{H}},\, T_x s_\alpha(v_2)^{\mathrm{H}}\bigr)\\
&= \mathrm{Ad}\bigl(t_{\alpha\beta}(x)^{-1}\bigr)\Bigl(\mathrm{d}\omega\,|_{s_\alpha(x)}\bigl(T_x s_\alpha(v_1)^{\mathrm{H}},\, T_x s_\alpha(v_2)^{\mathrm{H}}\bigr)\Bigr)\\
&= \mathrm{Ad}\bigl(t_{\alpha\beta}(x)^{-1}\bigr)\Bigl(\Omega|_{s_\alpha(x)}\bigl(T_x s_\alpha(v_1),\, T_x s_\alpha(v_2)\bigr)\Bigr)\\
&= \mathrm{Ad}\bigl(t_{\alpha\beta}(x)^{-1}\bigr)\bigl(s_\alpha^*\Omega|_x(v_1,\, v_2)\bigr)\\
&= \mathrm{Ad}\bigl(t_{\alpha\beta}(x)^{-1}\bigr)\bigl(F_\alpha|_x(v_1,\, v_2)\bigr)
\end{aligned}$$

が言える． ■

10.9 同伴ベクトル束上の接続とその局所表示

この節では同伴ベクトル束上の共変微分をゲージ場の言葉を使って局所表示し，物理において馴染み深い共変微分と同一視できることを顕に確認する．この節では常に

- 主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$
- 接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$
- 有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 V と Lie 群 G の $\dim V$ 次元表現 $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$
- 同伴ベクトル束 $V \hookrightarrow P \times_\rho V \xrightarrow{q} M$

が与えられているものとする．$E \coloneqq P \times_\rho V$ とおく．定理 10.4-(2) より，

$$\nabla^E \coloneqq \sharp^{-1} \circ \mathrm{D} \circ \sharp\colon \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(M;\, E)$$

はベクトル束 E 上の接続であった．これを水平持ち上げによって表示してみよう．

定理 10.8: 同伴ベクトル束上の共変微分の表示

$\forall s \in \Gamma(E)$, $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ および $\forall p \in M$ を 1 つ固定する．このとき，任意の

- C^∞ 曲線 $\gamma\colon [0,\,1] \longrightarrow M$ であって $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = X_p$ を充たすもの
- $u \in \pi^{-1}(\{x\})$
- γ の水平持ち上げ $\tilde{\gamma}\colon [0,\,1] \longrightarrow P$ であって $\tilde{\gamma}(0) = u$ を充たすもの[a]

に対して

$$(\nabla^E_X s)|_p = \tilde{\gamma}(0) \times_\rho \dot{\eta}(0)$$

が成り立つ．特に右辺は γ, u の取り方によらない．ただし，C^∞ 曲線 $\eta\colon [0,\,1] \longrightarrow V$ を

$$s\bigl(\gamma(t)\bigr) =: \tilde{\gamma}(t) \times_\rho \eta(t)$$

で定義した．

[a] γ, u が与えられると $\tilde{\gamma}$ は一意に決まるのだった．

証明 γ, u を 1 つ固定する．命題 10.6-(2) より

$$\begin{aligned}
(\nabla^E_X s)|_p &= (\nabla^E s)(X)|_p \\
&= (\sharp^{-1} \circ \mathrm{D} \circ \sharp s)_p(X_p) \\
&= \Bigl(\flat\bigl(\mathrm{D}(\sharp s)\bigr)\Bigr)_{\gamma(0)}\bigl(\dot{\gamma}(0)\bigr) \\
&= \tilde{\gamma}(0) \times_\rho \bigl(\mathrm{D}(\sharp s)\bigr)_{\tilde{\gamma}(0)}\bigl(\dot{\tilde{\gamma}}(0)\bigr) \qquad \because\ \tilde{\gamma}(0) \in \pi^{-1}(\{\gamma(0)\}),\ \dot{\tilde{\gamma}}(0) \in (T_{\tilde{\gamma}(0)}\pi)^{-1}(\{\dot{\gamma}(0)\}) \\
&= \tilde{\gamma}(0) \times_\rho \Bigl[\mathrm{d}(\sharp s)\,|_{\tilde{\gamma}(0)}\bigl(\dot{\tilde{\gamma}}(0)\bigr) + \rho_*\Bigl(\cancel{\omega_{\tilde{\gamma}(0)}\bigl(\dot{\tilde{\gamma}}(0)\bigr)}\Bigr)\Bigl(\sharp s|_{\gamma(0)}\Bigr)\Bigr] \\
&= \tilde{\gamma}(0) \times_\rho T_0(\sharp s \circ \tilde{\gamma})\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right)
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで $\sharp$ の定義を思い出すと，$\forall t \in [0,\,1]$ に対して

$$\begin{aligned}
\sharp s \circ \tilde{\gamma}(t) &= f^{-1}_{\tilde{\gamma}(t)}\Bigl(s \circ \pi\bigl(\tilde{\gamma}(t)\bigr)\Bigr) \\
&= f^{-1}_{\tilde{\gamma}(t)}\Bigl(s\bigl(\gamma(t)\bigr)\Bigr)
\end{aligned}$$

が成り立つことが分かる．$f^{-1}_{\tilde{\gamma}(t)}$ の定義から

$$\sharp s \circ \tilde{\gamma} = \eta$$

であり，

$$(\nabla^E_X s)|_p = \tilde{\gamma}(0) \times_\rho \dot{\eta}(0)$$

が示された． ■

定理 10.8 を使って，同伴ベクトル束上の共変微分の局所表示を定理 10.4-(3) よりもあからさまな形で求めよう．

定理 10.9: 同伴ベクトル束上の共変微分の局所表示

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ について

- M の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$
- P の局所自明化 $\{\varphi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G\}_{\alpha\in\Lambda}$
- P の局所切断の族 $\{s_\alpha\colon U_\alpha \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha),\ p \longmapsto \varphi_\alpha^{-1}(p,\, 1_G)\}_{\alpha\in\Lambda}$
- Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底 T^a ${}^{\mathrm{w}/}$ $a = 1, \dots, \dim G$

を与え，同伴ベクトル束 $V \hookrightarrow E := P \times_\rho V \xrightarrow{q} M$ について

- $\underline{E\ の}$局所自明化 $\{\psi_\alpha\colon q^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times V,\ s_\alpha(p) \times_\rho v \longmapsto (p,\, v)\}_{\alpha\in\Lambda}$
- V の基底 e_i ${}^{\mathrm{w}/}$ $i = 1, \dots, \dim V$
- E の局所切断の族 $\{e_{\alpha i}\colon U_\alpha \longrightarrow q^{-1}(U_\alpha),\ x \longmapsto s_\alpha(x) \times_\rho e_i\}_{\alpha\in\Lambda}$

を与える．このとき M のチャート $\bigl(U_\alpha,\, (x^\mu)\bigr)$ においてゲージ場 $A_\alpha := s_\alpha^*\omega \in \Omega^1(U_\alpha;\, \mathfrak{g})$ を

$$A_\alpha =: A_{\alpha a} T^a = A_{\alpha a\mu}\, \mathrm{d}x^\mu\ T^a$$

と展開すると以下が成り立つ：

(1) $\forall X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \in \mathfrak{X}(M)$[a] に対して[b],

$$\nabla^E_X e_{\alpha i} = X^\mu A_{\alpha a\mu} \bigl[\rho_*(T^a)\bigr]^j{}_i\, e_{\alpha j}$$

(2) $\forall X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \in \mathfrak{X}(M)$ および $\forall s \in \Gamma(E)$ に対して

$$\nabla^E_X s = X^\mu \left(\frac{\partial {\xi_\alpha}^i}{\partial x^\mu} + A_{\alpha a\mu} \bigl[\rho_*(T^a)\bigr]^i{}_j\, {\xi_\alpha}^j \right) e_{\alpha i}$$

ただし，$\forall x \in U_\alpha$ に対して $s(x) =: s_\alpha(x) \times_\rho \xi_\alpha(x) = s_\alpha(x) \times_\rho \xi_\alpha(x)^i e_i = \xi_\alpha(x)^i e_{\alpha i}(x)$ と展開した．

[a] 厳密には $X \in \mathfrak{X}(U_\alpha)$ であるが，これを 1 の分割を使って拡張したと思えば良い．
[b] $\bigl[\rho_*(T^a)\bigr]^j{}_i$ というのは，線形変換 $\rho_*(T^a) \in \mathfrak{gl}(V)$ の，V の基底 e_i による表現行列の $(j,\, i)$ 成分という意味である．

証明 $\forall p \in U_\alpha$ を 1 つ固定する．

(1) C^∞ 曲線 $\gamma\colon [0,\, 1] \longrightarrow M$ であって，$\gamma(0) = p,\ \dot\gamma(0) = X_p$ を充たすものをとる．γ の像は U_α に含まれているとし[*25]，γ の水平持ち上げを

$$\tilde\gamma(t) =: s_\alpha\bigl(\gamma(t)\bigr) \blacktriangleleft g_\alpha(t)$$

と書く．ただし補題 10.7 と同様に新しい C^∞ 曲線 $g_\alpha\colon U_\alpha \longrightarrow G$ を $g_\alpha := \mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\alpha \circ \tilde\gamma$ により定義した．

[*25] $\gamma([0,\, 1]) \subset M$ はコンパクト集合なので，有限個の点で区切ればこの要請を充たすことができる．

局所切断 $e_{\alpha i}$ の共変微分を求める．

$$\begin{aligned} e_{\alpha i}\big(\gamma(t)\big) &= s_\alpha\big(\gamma(t)\big) \times_\rho e_i \\ &= \Big(s_\alpha\big(\gamma(t)\big) \blacktriangleleft g_\alpha(t)\Big) \times_\rho \rho\big(g_\alpha(t)^{-1}\big)\big(e_i\big) \\ &= \tilde{\gamma}(t) \times_\rho \rho\big(g_\alpha(t)^{-1}\big)\big(e_i\big) \end{aligned}$$

であるから，定理 10.8 より

$$(\nabla^E_X e_{\alpha i})|_p = \tilde{\gamma}(0) \times_\rho \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho\big(g_\alpha(t)^{-1}\big)\big(e_i\big)$$

ここで $L^{(v)}\colon G \longrightarrow V,\ g \longrightarrow \rho(g)(v)$ を使って $\rho\big(g_\alpha(t)^{-1}\big)\big(e_i\big) = L^{(e_i)} \circ {}^{-1} \circ g_\alpha(t)$ と書けるので，

$$\begin{aligned} &\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho\big(g_\alpha(t)^{-1}\big)\big(e_i\big) \\ &= T_0(L^{(e_i)} \circ {}^{-1} \circ g_\alpha)\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right) \\ &= T_{g_\alpha(0)^{-1}}(L^{(e_i)}) \circ T_{g_\alpha(0)}({}^{-1})\big(\dot{g_\alpha}(0)\big) \\ &= -T_{g_\alpha(0)}(L^{(e_i)} \circ \mathcal{L}_{g_\alpha(0)^{-1}} \circ \mathcal{R}_{g_\alpha(0)^{-1}})\big(\dot{g_\alpha}(0)\big) \\ &= -\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho\big(g_\alpha(0)^{-1} g_\alpha(t) g_\alpha(0)^{-1}\big)\big(e_i\big) \\ &= -\rho\big(g_\alpha(0)^{-1}\big) \circ \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho\big(g_\alpha(t)\big)\right) \circ \rho\big(g_\alpha(0)^{-1}\big)\big(e_i\big) \\ &= -\rho\big(g_\alpha(0)^{-1}\big) \circ \Big(T_{g_\alpha(0)}\rho\big(\dot{g_\alpha}(0)\big)\Big) \circ \rho\big(g_\alpha(0)^{-1}\big)\big(e_i\big) \\ &= \rho\big(g_\alpha(0)^{-1}\big) \circ \Big(T_{g_\alpha(0)}\rho \circ T_{1_G}\mathcal{R}_{g(0)}\big(A_\alpha|_{\gamma(0)}(X)\big)\Big) \circ \rho\big(g_\alpha(0)^{-1}\big)\big(e_i\big) && \because \quad \text{補題 } 10.7 \\ &= \rho\big(g_\alpha(0)^{-1}\big) \circ \rho_*\big(A_\alpha|_{\gamma(0)}(X_p)\big)\big(e_i\big) && \because \quad \text{補題 } 10.7 \end{aligned}$$

である[*26]から，

$$\begin{aligned} (\nabla^E_X e_{\alpha i})|_p &= \big(\tilde{\gamma}(0) \blacktriangleleft g_\alpha(0)^{-1}\big) \times_\rho \rho_*\big(A_\alpha|_{\gamma(0)}(X)\big)\big(e_i\big) \\ &= s_\alpha\big(\gamma(0)\big) \times_\rho \rho_*\big(A_\alpha|_p(X)\big)\big(e_i\big) \end{aligned}$$

---

*26

$$\begin{aligned} 0 &= T_g(\mu \circ (\mathrm{id}_G \times {}^{-1}) \circ \Delta)(X) \\ &= T_g(\mu \circ \mathrm{inj}_1^{g^{-1}})(X) + T_g(\mu \circ \mathrm{inj}_2^g \circ {}^{-1})(X) \\ &= T_g(\mathcal{R}_{g^{-1}})(X) + T_{g^{-1}}(\mathcal{L}_g) \circ T_g({}^{-1})(X) \end{aligned}$$

より

$$T_g({}^{-1}) = -T_g(\mathcal{L}_{g^{-1}} \circ \mathcal{R}_{g^{-1}})$$

が分かった．特にチャート $(U_\alpha(x^\mu))$ において $A_\alpha = A_{\alpha a\mu}\,\mathrm{d}x^\mu\, T^a$，$X = X^\mu(p)\ \frac{\partial}{\partial x^\mu}\big|_p$ と展開すると

$$
\begin{aligned}
(\nabla^E_X e_{\alpha i})|_p &= s_\alpha\big(\gamma(0)\big) \times_\rho X^\nu(p) A_{\alpha a\mu}(p)\,\mathrm{d}x^\mu\,|_p \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\bigg|_p \right) \rho_*(T^a)(e_i) \\
&= s_\alpha\big(\gamma(0)\big) \times_\rho X^\nu(p) A_{\alpha a\mu}(p) \delta^\mu_\nu \rho_*(T^a)(e_i) \\
&= s_\alpha\big(\gamma(0)\big) \times_\rho X^\mu(p) A_{\alpha a\mu}(p) \big[\,\rho_*(T^a)\,\big]^j{}_i\, e_j \\
&= X^\mu(p) A_{\alpha a\mu}(p) \big[\,\rho_*(T^a)\,\big]^j{}_i\, e_{\alpha j}|_p
\end{aligned}
$$

と成分表示が求まった．

(2) 一般の切断 $s \in \Gamma(E)$ の共変微分を求める．U_α 上で $s(x) = s_\alpha(x) \times_\rho \xi_\alpha(x) = s_\alpha(x) \times_\rho \xi_\alpha(x)^i e_i = \xi_\alpha(x)^i e_{\alpha i}(x)$ と展開できるので，ベクトル束上の共変微分の定義より

$$
\begin{aligned}
\nabla^E_X s &= \nabla^E s(X) \\
&= \mathrm{d}\xi_\alpha{}^i\,(X) \otimes e_{\alpha i} + \xi_\alpha{}^i \nabla^E e_{\alpha i}(X) \\
&= X^\nu \frac{\partial \xi_\alpha{}^i}{\partial x^\mu}\,\mathrm{d}x^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) e_{\alpha i} + \xi_\alpha{}^i X^\mu A_{\alpha a\mu} \big[\,\rho_*(T^a)\,\big]^j{}_i\, e_{\alpha j} \\
&= X^\mu \left(\frac{\partial \xi_\alpha{}^i}{\partial x^\mu} + A_{\alpha a\mu} \big[\,\rho_*(T^a)\,\big]^i{}_j \xi_\alpha{}^j \right) e_{\alpha i}
\end{aligned}
$$

と計算できる．

■

定理 10.9-(2) において，特に X として座標ベクトル場 $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ をとると

$$
\nabla^E_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} e_{\alpha i} = A_{\alpha a\mu} \big[\,\rho_*(T^a)\,\big]^j{}_i\, e_{\alpha j}
$$

となり，ゲージ場の成分 $A_{\alpha a\mu} \big[\,\rho_*(T^a)\,\big]^j{}_i$ が Riemann 幾何学における Christoffel 記号と同等の働きをすることが分かる．

10.10　同伴ベクトル束上の曲率とその局所表示

この節ではまず一般のベクトル束上の曲率を大域的な形で定義し，同伴ベクトル束上の接続との関係を議論する．そして同伴ベクトル束上の曲率の局所表示が，主束上の曲率の局所表示と同一のものであることを確認する．

定義 10.14: ベクトル束上の曲率

- ベクトル束 $V \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$
- ベクトル束 E 上の接続 $\nabla^E \colon \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(M;\, E)$

を与える．ベクトル束 E 上の**曲率** (curvature) とは，

$$
R^\nabla := \mathrm{d}^{\nabla^E} \circ \nabla^E \colon \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^2(M;\, E)
$$

のこと．

命題 10.11: 曲率の $C^\infty(M)$ 線形性

$\forall f \in C^\infty(M),\ \forall s \in \Gamma(E)$ に対して

$$R^{\nabla^E}(fs) = f\,R^{\nabla^E}(s)$$

が成り立つ．

証明 ベクトル束上の接続の定義から

$$\begin{aligned}
R^{\nabla^E}(fs) &= \mathrm{d}^{\nabla^E}\bigl(\mathrm{d}f \otimes s + f\,\nabla^E s\bigr) \\
&= \cancel{\mathrm{d}^2 f} \otimes s - \mathrm{d}f \wedge \nabla^E s + \mathrm{d}^{\nabla^E}\bigl(f\,\nabla^E s\bigr) \\
&= \cancel{-\,\mathrm{d}f \wedge \nabla^E s + \mathrm{d}f \wedge \nabla^E s} + f\,\mathrm{d}^{\nabla^E}(\nabla^E s) \\
&= f\,R^{\nabla^E}(s)
\end{aligned}$$

が分かる[*27]. ■

この結果から，

$$R^{\nabla^E} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E),\ s \longmapsto \bigl(p \longmapsto R^{\nabla^E}(s)(p)\bigr)$$

と見做すとこれが $C^\infty(M)$-線形写像になっている．このようなとき，End 束 $\mathrm{End}(E) := \coprod_{p\in M} \mathrm{End}(E_p)$ の C^∞ 切断 $\underline{R^{\nabla^E}} \in \Gamma\bigl(\bigwedge^2 T^*M \otimes \mathrm{End}(E)\bigr)$ であって，

$$R^{\nabla^E}(s)(p) = \underline{R^{\nabla^E}}(p)\bigl(s(p)\bigr)$$

を充たすものが存在することが分かる[*28]．そのため，この $\underline{R^{\nabla^E}}$ と同一視して $R^{\nabla^E} \in \Omega^2\bigl(\mathrm{End}(E)\bigr)$ である

---

*27 E の局所フレーム $e_i \in \Gamma(E)$ を使うと $\nabla^E s = (\nabla^E s)^i \otimes e_i \quad {}^{\mathrm{w}/} \quad (\nabla^E s)^i \in \Omega^1(M)$ と書けるので，ベクトル束上の接続の定義から

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^{\nabla^E}\bigl(f\,\nabla^E s\bigr) &= \mathrm{d}\bigl(f\,(\nabla^E s)^i\bigr) \otimes e_i - f\,(\nabla^E s)^i \wedge \nabla^E e_i \\
&= \mathrm{d}f \wedge \nabla^E s + f\,\mathrm{d}(\nabla^E s)^i \otimes e_i - f\,(\nabla^E s)^i \wedge \nabla^E e_i \\
&= \mathrm{d}f \wedge \nabla^E s + f\,\mathrm{d}^{\nabla^E}(\nabla^E s)
\end{aligned}$$

だとわかる．

*28 $\forall p \in M$ を 1 つ固定し，$s \in \Gamma(E)$ であって $s(p) = 0$ を充たすものをとる．p の開近傍（特に，局所自明性を充たすもの）$p \in U \subset M$ とその上の局所フレーム (e_i) をとる．このとき U 上では $s = s^i e_i$ と展開できる．ところで，多様体のパラコンパクト性から $p \in \overline{V} \subset U$ を充たす p の開近傍 $V \subset M$ が存在するので，M の開被覆 $\{U,\, M \setminus \overline{V}\}$ に従属する 1 の分割 $\{\psi_U,\, \psi_{M\setminus\overline{V}}\}$ をとることができる．特に C^∞ 関数 $\psi_U : M \longrightarrow [0,\,1]$ は

$$\psi_U(x) = \begin{cases} 1, & x \in \overline{V} \\ 0, & x \in M \setminus U \end{cases}$$

を充たす．よって $\tilde{e}_i := \psi_U\, e_i \in \Gamma(E)$, $\tilde{s}^i := \psi_U\, s^i \in C^\infty(M)$ である．したがって

$$s = s + \psi_U^2(s - s) = (1 - \psi_U^2)s + \tilde{s}^i \tilde{e}_i$$

が分かった．したがって R^{∇^E} の C^∞-線形性から

$$R^{\nabla^E}(s)(p) = \bigl(1 - \psi_U^2(p)\bigr)\,R^{\nabla^E}(s)(p) + \tilde{s}^i(p)\,R^{\nabla^E}(\tilde{e}_i)(p) = 0$$

が言えた．このことから，$\underline{R^{\nabla^E}} \in \Gamma\bigl(\mathrm{End}(E)\bigr)$ を，$\forall p \in M,\ \forall v \in E_p$ について

$$\underline{R^{\nabla^E}}(p)(v) := R^{\nabla^E}(s)(p) \quad {}^{\mathrm{w}/} \quad s \in \Gamma(E)\ \text{ s.t. } s\,(p) = v$$

と言う.

定理 10.10: 同伴ベクトル束上の曲率の表示

$$R^{\nabla^E} = \sharp^{-1} \circ \rho_*(\Omega) \circ \sharp$$

<u>**証明**</u>　(1)

$$\begin{aligned}
R^{\nabla^E} &= \sharp^{-1} \circ D^2 \circ \sharp \\
&= \sharp^{-1} \circ \big(\mathrm{d} + \rho_*(\omega)\wedge\big) \circ \big(\mathrm{d} + \rho_*(\omega)\big) \circ \sharp \\
&= \sharp^{-1} \circ \big(\cancel{\mathrm{d}^2} + \rho_*(\omega) \wedge \mathrm{d} + \mathrm{d}\big(\rho_*(\omega)\big) + \rho_*(\omega) \wedge \rho_*(\omega)\big) \circ \sharp
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\big(\rho_*(\omega)(\sharp s)\big) &= \mathrm{d}\big(\rho_*(\omega_a T^a)(\sharp s)\big) \\
&= \mathrm{d}\big(\omega_a\, \rho_*(T^a)(\sharp s)\big) \\
&= \mathrm{d}\omega_a\ \rho_*(T^a)(\sharp s) - \omega_a \wedge \rho_*(T^a)\, \mathrm{d}(\sharp s) \\
&= \rho_*(\mathrm{d}\omega)(\sharp s) - \rho_*(\omega) \wedge \mathrm{d}(\sharp s)
\end{aligned}$$

なので,

$$R^{\nabla^E} = \sharp \circ \big(\rho_*(\mathrm{d}\omega) + \rho_*(\omega) \wedge \rho_*(\omega)\big) \circ \sharp$$

さらに

$$\begin{aligned}
\rho_*(\omega) \wedge \rho_*(\omega)(\sharp s) &= \omega_a \wedge \omega_b \rho_*(T^a)\big(\rho_*(T^b)(\sharp s)\big) \\
&= \frac{1}{2}\omega_a \wedge \omega_b \Big(\rho_*(T^a) \circ \rho_*(T^b) - \rho_*(T^b) \circ \rho_*(T^a)\Big)(\sharp s) \\
&= \frac{1}{2}\omega_a \wedge \omega_b \big[\rho_*(T^a), \rho_*(T^b)\big](\sharp s) \\
&= \frac{1}{2}\omega_a \wedge \omega_b \rho_*(\big[T^a, T^b\big])(\sharp s) \\
&= \frac{1}{2}\rho_*([\omega, \omega])(\sharp s)
\end{aligned}$$

であるから

$$R^{\nabla^E} = \sharp^{-1} \circ \rho_*(\Omega) \circ \sharp$$

が分かった.

■

と定義すると well-defiend である.

定理 10.11: 同伴ベクトル束上の曲率の局所表示

定理 10.9 と同様の記号を使って以下が成り立つ：

(1)

$$R^{\nabla^E} e_{\alpha i} = F_{\alpha a} \big[\, \rho_*(T^a) \,\big]^j{}_i \otimes e_{\alpha j}$$

(2) $\forall s = \xi_\alpha{}^i e_{\alpha i}$ に対して

$$R^{\nabla^E} s = F_{\alpha a} \big[\, \rho_*(T^a) \,\big]^j{}_i \xi_\alpha{}^i \otimes e_{\alpha j}$$

証明 (1) 定理 10.9 およびベクトル束上の共変外微分の定義より，

$$\begin{aligned}
R^{\nabla^E} e_{\alpha i} &= \mathrm{d}^{\nabla^E} \Big(\big[\, \rho_*(A_\alpha) \,\big]^j{}_i \otimes e_{\alpha j} \Big) \\
&= \big[\, \mathrm{d}\big(\rho_*(A_\alpha)\big) \,\big]^j{}_i - \big[\, \rho_*(A_\alpha) \,\big]^j{}_i \wedge \nabla^E e_{\alpha j} \\
&= \big[\, \rho_*(\mathrm{d}A_\alpha) \,\big]^j{}_i \otimes e_{\alpha j} - \big[\, \rho_*(A_\alpha) \,\big]^j{}_i \wedge \big[\, \rho_*(A_\alpha) \,\big]^k{}_j e_{\alpha k} \\
&= \big[\, \rho_*(\mathrm{d}A_\alpha) \,\big]^j{}_i \otimes e_{\alpha j} - A_{\alpha a} \wedge A_{\alpha b} \big[\, \rho_*(T^b) \,\big]^k{}_j \big[\, \rho_*(T^a) \,\big]^j{}_i e_{\alpha k} \\
&= \big[\, \rho_*(\mathrm{d}A_\alpha) \,\big]^j{}_i \otimes e_{\alpha j} + A_{\alpha a} \wedge A_{\alpha b} \big[\, \rho_*(T^a) \circ \rho_*(T^b) \,\big]^k{}_i e_{\alpha k} \\
&= F_{\alpha a} \big[\, \rho_*(T^a) \big]^j{}_i \otimes e_{\alpha j}
\end{aligned}$$

(2) 命題 10.11 より R^{∇^E} は $C^\infty(M)$-線形なので明らか.

■

10.11 ホロノミー

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ を与える．任意の $x \in M$ に対して

$$\Omega_x := \big\{\, \gamma \colon [0,\, 1] \longrightarrow M \;\big|\; \text{区分的}C^\infty\text{曲線},\ \gamma(0) = \gamma(1) \,\big\}$$

とおく.

命題 10.12: ホロノミー

- $\omega \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$ を接続形式とする．
- $x \in M$
- $u \in \pi^{-1}(\{x\})$

を与え，写像 $\Phi_u \colon \Omega_x \longrightarrow G$ を

$$\tilde{\gamma}(1) =: \tilde{\gamma}(0) \blacktriangleleft \Phi_u(\gamma) \quad {}^{\mathrm{w}/} \quad \tilde{\gamma}(0) = u$$

で定義する．このとき以下が成り立つ：

(1) $\forall h \in G$ に対して

$$\Phi_{u \blacktriangleleft h}(\gamma) = h^{-1}\Phi_u(\gamma)h$$

(2) $\gamma_1,\, \gamma_2 \in \Omega_x$ に対して

$$\Phi_u(\gamma_1 * \gamma_2) = \Phi_u(\gamma_2)\Phi_u(\gamma_1)$$

ただし $*$ は道の積である．

<u>**証明**</u> (1) 命題 10.7 より $\tilde{\gamma} \blacktriangleleft h$ は $u \blacktriangleleft h$ を始点とする γ の水平持ち上げであるから，

$$(u \blacktriangleleft h) \blacktriangleleft \Phi_{u \blacktriangleleft h}(\gamma) = \tilde{\gamma}(1) \blacktriangleleft h = \big(u \blacktriangleleft \Phi_u(\gamma)\big) \blacktriangleleft h = u \blacktriangleleft h \blacktriangleleft \big(h^{-1}\Phi_u(\gamma)h\big)$$

(2) 命題 10.7 より $\tilde{\gamma_2} \blacktriangleleft \Phi_u(\gamma_1)$ は $\tilde{\gamma_1}(1) = u \blacktriangleleft \Phi_u(\gamma_1)$ を始点，$u \blacktriangleleft \Phi_u(\gamma_2)\Phi_u(\gamma_1)$ とする γ_2 の水平持ち上げであるから，水平持ち上げの一意性から

$$u \blacktriangleleft \Phi_u(\gamma_1 * \gamma_2) = u \blacktriangleleft \Phi_u(\gamma_2)\Phi_u(\gamma_1)$$

が成り立つ．

■

定義 10.15: ホロノミー群

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ とその接続形式 $\omega \in \Omega^1(P;\, \mathfrak{g})$ を与える．$\forall u \in P$ に対して，命題 10.12 より G の部分集合

$$\mathrm{Hol}_u(P,\, \omega) \coloneqq \Phi_u(\Omega_{\pi(u)})$$

は部分群をなす．この部分群のことを**ホロノミー群** (holonomy group) と呼ぶ．