代数トポロジー ノート

高間俊至

2023 年 2 月 26 日

目次

第 1 章

必要最低限の圏論

1.1 諸定義

ものの集まりを**クラス** (class) と呼ぶことにする[*1]．3 つのもの $\mathcal{C}$ は以下の要素からなるとする：

(1) クラス $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$．その元は**対象** (object) と呼ばれる．
(2) $\forall X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して定まる集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, Y)$．
(3) $\forall X,\, Y,\, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して定まる写像 $\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, Z)$．

!

- 集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, Y)$ は記号として $\mathrm{Hom}(X,\, Y)$ とか $\mathcal{C}(X,\, Y)$ とも書かれる．
- 元 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, Y)$ のことを X から Y への**射** (morphism) と呼び，$\boldsymbol{f\colon X \to Y}$ と書く．
- 写像 $\circ$ のことを**合成** (composite) と呼ぶ．射 $f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to Z$ の合成は $\boldsymbol{g \circ f\colon X \to Z}$ と書かれる．

定義 1.1: 圏

$\mathcal{C}$ が**圏** (category) であるとは，次の 2 条件を充たすことを言う：

(1) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して**恒等射** (identity) と呼ばれる射 $1_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, X)$ が存在して，$\forall W,\ Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ および $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,\, X)$, $\forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, Y)$ について以下が成り立つ：

$$1_X \circ f = f, \quad g \circ 1_X = g$$

(2) $\forall X,\, Y,\, Z,\, W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, Y)$, $\forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\, Z)$, $\forall h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,\, W)$ に対して**結合則** (associativity) が成り立つ．i.e.

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, W)$$

- $\mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ を全ての集合とし，それらの間の全ての写像を射とし，$\circ$ を通常の写像の合成とするものの

[*1] 集合全体の集合を考えると Russell のパラドクスに陥る．これを避けるために，集合よりも上位の概念であるクラスを新しく導入する必要がある．なお，考察の対象とする集合の範囲を**宇宙** (universe) という大きな集合に属するものに限る流儀もある．この場合，圏を扱うときに既知の集合論をそのまま適用できるが，集合論の公理に宇宙の存在の公理を追加する必要がある．

集まり **Sets** は圏を成す.

- Ob(**Top**) を全ての位相空間とし，それらの間の全ての連続写像を射とし，$\circ$ を通常の写像の合成とするものの集まり **Top** は圏を成す.
- 可換環 R について，Ob(R-**Mod**) を全ての R 加群とし，それらの間の全ての R 準同型を射とし，$\circ$ を通常の写像の合成とするものの集まり R-**Mod** は圏を成す.

定義 1.2: 小圏・モノイド

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が集合であるような圏 $\mathcal{C}$ は**小圏** (small category) と呼ばれる.
- $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が一点集合であるような圏 $\mathcal{C}$ は**モノイド** (monoid) と呼ばれる.

定義 1.3: 単射，全射

$\mathcal{C}$ を圏，$A,\ B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\ B)$ とする.

- f が**単射** (monomorphism) であるとは，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して写像

$$\begin{aligned} f^*\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ A) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ B), \\ g &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$$

  が集合の写像として単射であること.
- f が**全射** (epimorphism) であるとは，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対してに対して写像

$$\begin{aligned} {}^*f\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,\ X) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\ X), \\ g &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

  が集合の写像として単射であること.

定義 1.4: 同型射

圏 $\mathcal{C}$ と射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ Y)$ をとる.

- f が**同型射** (isomorphism) であるとは，

$$\exists g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\ X), \quad g \circ f = 1_X \text{ かつ } f \circ g = 1_Y$$

  が成り立つことを言う．このときの射 $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\ X)$ のことを f の**逆** (inverse) と呼ぶ.
- 同型射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ Y)$ が存在するとき，X と Y は**同型** (isomorphic) であると言う.
- 対象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ X)$ の元のうち同型射であるもの全体の集合は合成によって群を成す．この部分集合を $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ X)$ と書き，X の $\mathcal{C}$ における**自己同型群** (automorphism group) と呼ぶ.

定義 1.5: 部分対象

$\mathcal{C}$ を圏とする．

- $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の **部分対象** (subobject) とは，$B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と単射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ の組 (B, f) のことを言う．
- $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の部分対象 (B, f)，(C, g) が**同値** (equivalent) であるとは，ある同型射 $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ であって $g \circ \varphi = f$ を充たすものが存在することを言う[a]．

[a] $B \simeq C$ や $f \simeq g$ と略記することがある．

定義 1.6: 商対象

$\mathcal{C}$ を圏とする．

- $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の **商対象** (quotient bject) とは，$B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と全射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,)$ の組 (B, f) のことを言う．
- $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の部分対象 (B, f)，(C, g) が**同値** (equivalent) であるとは，ある同型射 $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ であって $\varphi \circ f = g$ を充たすものが存在することを言う[a]．

[a] $B \simeq C$ や $f \simeq g$ と略記することがある．

定義 1.7: 充満部分圏

2 つの圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ をとる．圏 $\mathcal{D}$ が $\mathcal{C}$ の**充満部分圏** (full subcategory) であるとは，次の 2 条件が充たされることを言う：

(1) クラス $\mathrm{Ob}(\mathcal{D}) \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$,

(2) $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}), \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

定義 1.8: 反対圏

圏 $\mathcal{C}$ に対して，その**反対圏** (opposite category) $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ を次のように定義する：

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) \coloneqq \mathrm{Ob}(\mathcal{C}),$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X, Y) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \quad \forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$$

1.2 関手と自然変換

圏を対象と考えたとき，射にあたるのは**関手** (functor) である．
$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を圏とする．$\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ の間の対応

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

は次の 2 種類の対応付けから成るとする：

(1) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，記号 $F(X)$ で書かれる $\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ の元を<u>一意に</u>対応づける[*2].
(2) $\forall X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，射を移す<u>写像</u>

$$F\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\bigl(F(X),\, F(Y)\bigr),\ f \longmapsto F(f)$$

を対応付ける.

定義 1.9: 共変関手

$F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ が**共変関手** (covariant functor) であるとは，以下の 2 条件を充たすことを言う：

(恒等射を保つ) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$F(1_X) = 1_{F(X)} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\bigl(F(X),\, F(X)\bigr)$$

が成り立つ.

(合成を保つ) $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, Y),\ \forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y,\, Z)$ に対して

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\bigl(F(X),\, F(Z)\bigr)$$

が成り立つ.

射の向きを逆にすると**反変関手**の定義になる．いま $\mathcal{C},\, \mathcal{D}$ を圏とし，$\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ の間の対応

$$F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

は次の 2 種類の対応付けから成るとする：

(1) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，記号 $F(X)$ で書かれる $\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ の元を<u>一意に</u>対応づける.
(2) $\forall X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，射を移す<u>写像</u>

$$F\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\bigl(F(Y),\, F(X)\bigr),\ f \longmapsto F(f)$$

定義 1.10: 反変関手

$F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が**反変関手** (contravariant functor) であるとは，以下の 2 条件を充たすことを言う：

(恒等射を保つ) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$F(1_X) = 1_{F(X)} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\bigl(F(X),\, F(X)\bigr)$$

が成り立つ.

(合成を保つ) $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, Y),\ \forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y,\, Z)$ に対して

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\bigl(F(Z),\, F(X)\bigr)$$

が成り立つ.

関手を対象と考えたときに，射にあたるものが次に定義する**自然変換**である：

[*2] いわば，「写像」$F\colon \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ とでも言うべきもの.

定義 1.11: 自然変換

2 つの共変関手 $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ について，以下のような対応 $\varphi\colon F \to G$ のことを**自然変換** (natural transformation) と呼ぶ：

(1) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，射

$$\varphi_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\bigl(F(X), G(X)\bigr)$$

を対応付ける．

(2) $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ について図式 1.1 が可換になる．

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\varphi_X"] & F(Y) \arrow[d, "\varphi_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

図 1.1: 自然変換

共変関手 F から G への自然変換全体が成すクラスを $\mathbf{Nat}(F, G)$ と書くことにする．

定義 1.12: 自然同値

2 つの共変関手 $F, G\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ の間の自然変換 $\varphi\colon F \longrightarrow G$ を与える．

- φ が**自然同値** (natural equivalence) であるとは，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $\varphi_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\bigl(F(X), G(X)\bigr)$ が同型射であることを言う．
- 共変関手 F, G が**自然同値** (naturally equivalent) であるとは，F から G への自然同値が存在することを言う．
- 共変関手 F に対し，$\mathrm{id}F(X)\colon F(X) \longrightarrow F(X)$ により定まる F から F 自身への自然変換 φ を**恒等自然変換** (identity natural transformation) と呼ぶ．

定義 1.13:

共変関手 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ を与える.

- F が**忠実** (faithful) であるとは, $\forall X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して写像

$$F\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X,\, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,\bigl(F(X),\, F(Y)\bigr),\ f \longmapsto F(f)$$

  が単射であること.
- F が**充満** (full) であるとは, $\forall X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して写像

$$F\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X,\, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,\bigl(F(X),\, F(Y)\bigr),\ f \longmapsto F(f)$$

  が全射であること.
- F が**本質的全射** (essentially surjective) であるとは, $\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ に対して $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が存在して $F(X)$ が Y と同型になること.

忠実充満関手のことを**埋め込み**と呼ぶことがある.

第 2 章

ホモロジーの定義

補題 2.1: 商加群の普遍性

M, L を加群，$f\colon M \to L$ を準同型とする．部分加群 $N \subset M$ が

$$N \subset \operatorname{Ker} f$$

を充たすならば，準同型 $\bar{f}\colon M/N \to L$ であって標準射影

$$p\colon M \to M/N,\ x \mapsto x + N$$

に対して

$$f = \bar{f} \circ p$$

を充たす，i.e. 図式 2.1 を可換にするようなものが一意に存在する．このような準同型 $\bar{f}\colon M/N \to L$ を $f\colon M \to L$ によって M/N 上に**誘導される準同型** (induced homomorphism) と呼ぶ．

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & L \\ M/N \arrow[ur, dashed, "\exists!\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

図 2.1: 商加群の普遍性

定義 2.1: チェイン複体

加群と準同型の族 $C_\bullet \coloneqq \left\{C_q,\, \partial_q\colon C_q \to C_{q-1}\right\}_{q \geq 0}$ が**チェイン複体** (chain complex) であるとは，$\forall q \geq 0$ に対して C_q が加群，∂_q が準同型であって

$$\partial_q \partial_{q+1} = 0$$

を充していることを言う．

- C_q の元を ***q*-チェイン** (q-chain),

- C_q の部分加群

$$Z_q(C_\bullet) \coloneqq \mathrm{Ker}\big(\partial_q \colon C_q \to C_{q-1}\big)$$

を**第 q サイクル群**，その元を **q-サイクル** (q-cycle)，

- C_q の部分加群

$$B_q(C_\bullet) \coloneqq \mathrm{Im}\big(\partial_{q+1} \colon C_{q+1} \to C_q\big)$$

を**第 q バウンダリー群**，その元を **q-バウンダリー** (q-boundary) と呼ぶ．

チェイン複体の定義から

$$\begin{aligned} \partial_q \partial_{q+1} = 0. \quad &\iff \quad \forall b = \partial_{q+1}(b') \in B_q(C_\bullet),\ \partial_q(b) = 0. \\ &\iff \quad B_q(C_\bullet) \subset Z_q(C_\bullet). \end{aligned}$$

なので，$\forall q \geq 0$ に対して**第 q ホモロジー群** $H_q(C_\bullet)$ を以下のようにサイクルのバウンダリーによる商加群として定義できる：

$$H_q(C_\bullet) \coloneqq Z_q(C_\bullet)/B_q(C_\bullet)$$

2.1 チェイン写像

$C_\bullet = \big\{C_q,\, \partial_q\big\}_{q\geq 0}$, $D_\bullet = \big\{D_q,\, \partial'_q\big\}_{q\geq 0}$ をチェイン複体とする．

定義 2.2: チェイン写像

準同型 $f_q \colon C_q \to D_q$ の族 $f_\bullet \coloneqq \big\{f_q\big\}_{q\geq 0}$ が**チェイン写像** (chain map) であるとは，$\forall q \geq 0$ に対して

$$\partial'_q \circ f_q = f_{q-1} \circ \partial_q$$

が成り立つことを言う．i.e. 図式 2.2 が可換になると言うこと．

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "\partial_{q+2}"] & C_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] \arrow[d, "f_{q+1}"] & C_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "f_q"] & C_{q-1} \arrow[r, "\partial_{q-1}"] \arrow[d, "f_{q-1}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "\partial'_{q+2}"] & D_{q+1} \arrow[r, "\partial'_{q+1}"] & D_q \arrow[r, "\partial'_q"] & D_{q-1} \arrow[r, "\partial'_{q-1}"] & \cdots \end{tikzcd}$$

図 2.2: チェイン写像

補題 2.2:

$\forall q \geq 0$ について以下が成り立つ：

$$\begin{aligned} f_q\big(Z_q(C_\bullet)\big) \subset Z_q(D_\bullet) \\ f_q\big(B_q(C_\bullet)\big) \subset B_q(D_\bullet) \end{aligned}$$

証明 一つ目は

$$
\begin{aligned}
z \in Z_q(C_\bullet) = \operatorname{Ker} \partial_q \quad &\Longleftrightarrow \quad \partial_q(z) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \partial'_q\bigl(f_q(z)\bigr) = f_{q-1}\bigl(\partial_q(z)\bigr) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad f_q(z) \in Z_q(D_\bullet) = \operatorname{Ker} \partial'_q
\end{aligned}
$$

二つ目は

$$
\begin{aligned}
b \in B_q(C_\bullet) = \operatorname{Ker} \partial_q \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists \beta \in C_{q+1},\ b = \partial_{q+1}(\beta) \\
&\Longrightarrow \quad f_q(b) = \partial'_{q+1}\bigl(f_{q+1}(\beta)\bigr) \in B_q(D_\bullet) = \operatorname{Im} \partial'_{q+1}
\end{aligned}
$$

■

2.1.1 誘導準同型とチェイン・ホモトピー

いま，チェイン写像 $f_\bullet \coloneqq \{f_q \colon C_q \to D_q\}_{q\geq 0}$ を与える．標準射影を

$$
\pi \colon Z_q(D_\bullet) \to Z_q(D_\bullet)/B_q(D_\bullet), z \mapsto [z] = z + B_q(D_\bullet)
$$

とおくと，補題 3.2 から

$$
(\pi \circ f_q)\bigl(B_q(C_\bullet)\bigr) \subset \pi\bigl(B_q(D_\bullet)\bigr) = \{0_{Z_q(D_\bullet)/B_q(D_\bullet)}\}
$$

が成り立つ．i.e. $B_q(C_\bullet) \subset \operatorname{Ker} \pi \circ f_q$ である．よって商加群の普遍性から，次のような可換図式を書くことができる：

$$
\begin{tikzcd}
Z_q(C_\bullet) \arrow[r, "f_q"] \arrow[d, "p"'] & Z_q(D_\bullet) \arrow[r, "\pi"] & Z_q(D_\bullet)/B_q(D_\bullet) \\
Z_q(C_\bullet)/B_q(C_\bullet) \arrow[ur, dashed, blue, "\exists! \overline{f_q}"] \arrow[urr, dashed, red, "\exists! \overline{\pi \circ f_q}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

図 2.3: 誘導準同型

定義 2.3: チェイン写像による誘導準同型

図式 2.3 中の赤字で示した準同型は**誘導準同型** (induced homomorphism) と呼ばれ，ホモロジー群の間の準同型を定める：

$$
f_{q*} \coloneqq \overline{\pi \circ f_q} \colon H_q(C_\bullet) \to H_q(D_\bullet),\ [z] \mapsto [f_q(z)]
$$

チェイン・ホモトピーの定義をする：

定義 2.4: チェイン・ホモトピー

二つのチェイン複体 $C_\bullet$, $D_\bullet$ および二つのチェイン写像 $f_\bullet, g_\bullet \colon C_\bullet \longrightarrow D_\bullet$ を与える．
準同型の族 $\Phi = \left\{\Phi_q \colon C_q \to D_{q+1}\right\}_{q \geq 0}$ が $f_\bullet$ を $g_\bullet$ に繋ぐ**チェイン・ホモトピー** (chain homotopy) であるとは，$\forall q \geq 0$ に対して以下が成り立つことを言う：

$$\partial'_{q+1}\Phi_q + \Phi_{q-1}\partial_q = g_q - f_q$$

が成り立つことを言う．ただし，$q = 0$ のときは

$$\partial'_1\Phi_0 = g_0 - f_0$$

と見做す．$f_\bullet$ を $g_\bullet$ に繋ぐチェイン・ホモトピーが存在するとき，$f_\bullet$ と $g_\bullet$ は**チェイン・ホモトピック** (chain homotopic) であるといい，$f_\bullet \simeq g_\bullet$ と書く．

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_{q+2}"] & C_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] \arrow[d] \arrow[dl, red, "\Phi_{q+1}"'] & C_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d] \arrow[dl, red, "\Phi_q"'] & C_{q-1} \arrow[r, "\partial_{q-1}"] \arrow[d] \arrow[dl, red, "\Phi_{q-1}"'] & \cdots \arrow[dl, red, "\Phi_{q-2}"'] \\
\cdots \arrow[r, "\partial'_{q+2}"] & D_{q+1} \arrow[r, "\partial'_{q+1}"] & D_q \arrow[r, "\partial'_q"] & D_{q-1} \arrow[r, "\partial'_{q-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

図 2.4: チェイン・ホモトピー

補題 2.3:

チェイン写像 $f_\bullet$, $g_\bullet$ がチェイン・ホモトピックならば，$\forall q \geq 0$ に対して

$$f_{q*} = g_{q*} \colon H_q(C_\bullet) \longrightarrow H_q(C_\bullet)$$

が成り立つ．i.e. 誘導準同型が等しい．

<u>**証明**</u> $\forall Z_q(C_\bullet)$ に対して

$$g_{q*}[u] - f_{q*}[u] = [(g_q - f_q)(u)] = [\partial'_{q+1}\Phi_q(u) + \Phi_{q-1}\partial_q(u)] = [\partial'_{q+1}\Phi_q(u)] = 0 \in H_q(D_\bullet)$$

が成り立つ．$q = 0$ の場合は

$$g_{0*}[u] - f_{0*}[u] = [(g_0 - f_0)(u)] = [\partial'_1\Phi_0(u)] = 0 \in H_0(D_\bullet)$$

■

2.1.2 チェイン複体の圏

チェイン複体全体のクラスは，対象をチェイン複体 $C_\bullet = \left\{C_q, \partial_q\right\}_{q \geq 0}$，チェイン写像を射とする圏 $\mathbf{Chain}_{\geq 0}$ をなす．$\forall q \geq 0$ に対して，第 q ホモロジー群をとる対応

$$H_q \colon \mathbf{Chain}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}$$

は共変関手である．$\mathcal{C}$ を圏とし，共変関手

$$F_\bullet\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Chain}_{\geq 0}$$

を与える．$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して定まる**チェイン複体**を $F_\bullet(X) = \left\{F_q(X),\, \partial_q\colon F_q(X) \to F_{q-1}(X)\right\}_{q\geq 0}$ と書く．このとき $\forall q \geq 0$ に対して対応 $F_q\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}$ は共変関手で，対応 $\partial_q\colon F_q \longrightarrow F_{q-1}$ は自然変換である．

さて，誘導準同型をとる操作はどのようなものか？ 二つの共変関手

$$F_\bullet,\, G_\bullet\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Chain}_{\geq 0}$$

を与える．ここからさらに第 q ホモロジー群をとることで，二つの共変関手

$$H_q \circ F_\bullet,\, H_q \circ G_\bullet\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}$$

が得られる．このとき，さらに対応

$$H_q\colon \mathbf{Nat}(F_\bullet,\, G_\bullet) \longrightarrow \mathbf{Nat}(H_q \circ F_\bullet,\, H_q \circ G_\bullet),\ \varphi \longmapsto H_q(\varphi)$$

を考えることができ，これがまさにチェイン写像を与えるのである．もう少しあからさまには，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を一つ固定したとき，チェイン写像は

$$\varphi_X \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Chain}_{\geq 0}}\left(F_\bullet(X),\, G_\bullet(X)\right)$$

と書ける．そしてチェイン写像が第 q ホモロジー群に誘導する準同型は

$$H_q(\varphi)_X := (\varphi_X)_{q*} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}}\Big(H_q\big(F_\bullet(X)\big),\, H_q\big(G_\bullet(X)\big)\Big)$$

のことである．

定義 2.4 を一般化して，2 つの自然変換 $\varphi,\, \psi \in \mathbf{Nat}(F_\bullet,\, G_\bullet)$ の間の自然なチェイン・ホモトピーを考えることができる：

定義 2.5: チェイン・ホモトピー

自然変換の族 $\Phi_\bullet := \left\{\Phi_q\colon F_q \longrightarrow G_{q+1}\right\}_{q\geq 0}$ が φ を ψ に繋ぐ**チェイン・ホモトピー**であるとは，$\forall q \geq 0$ および $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$(\partial_{q+1})_X \circ (\Phi_q)_X + (\Phi_{q-1})_X \circ (\partial_q)_X = \psi_X - \varphi_X \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Chain}_{\geq 0}}\left(F_q(X),\, G_q(X)\right)$$

が成り立つことを言う．ただし $(\Phi_{-1})_X = 0$ とする．

自然変換 φ を ψ に繋ぐチェイン・ホモトピーが存在するとき $\varphi \simeq \psi$ と書き，φ は ψ に**チェイン・ホモトピック**であると言う．

チェイン・ホモトピックは同値関係である．補題 2.3 より

$$H_q(\varphi) = H_q(\psi) \in \mathbf{Nat}(H_q \circ F_\bullet,\, H_q \circ G_\bullet)$$

が成り立つ．

2.1.3　非輪状モデル定理

関手 $F_\bullet\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Chain}_{\geq 0}$ を考える．

定義 2.6: 非輪状

$\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の一部分からなる集合 $\mathcal{M}$ を与える．$\forall M \in \mathcal{M}$ と $\forall q \geq 1$ に対して

$$H_q\bigl(F_\bullet(M)\bigr) = 0$$

を充たすとき，関手 $F_\bullet$ は集合 $\mathcal{M}$ について**非輪状** (acyclic) であるという．

定義 2.7: 自由

$\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の一部分からなる集合 $\mathcal{M}$ を与える．$\forall q \geq 0$ に対して

$$\exists J_q \subset \bigl\{\, (M,\, \mu) \bigm| M \in \mathcal{M},\, \mu \in F_q(M) \,\bigr\}$$

であり[a]，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について集合

$$\bigl\{\, F_q(f)(\mu) \bigm| (M,\, \mu) \in J_q,\, f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,\, X) \,\bigr\} \subset F_q(X)$$

の元が互いに異なり，かつ $\mathbb{Z}$ 加群 $F_q(X)$ の自由基底を与えるとき，関手 $F_\bullet$ は集合 $\mathcal{M}$ について**自由** (free) であると言う．

[a] ややこしいが，μ は $\mathbb{Z}$ 加群の元である．

定理 2.1: 非輪状モデル定理

共変関手 $F_\bullet,\, G_\bullet\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Chain}_{\geq 0}$ を与える．$F_\bullet$ が集合 $\mathcal{M}$ について自由で，かつ $G_\bullet$ が集合 $\mathcal{M}$ 非輪状であるとする．このとき，全単射

$$H_0\colon \mathbf{Nat}(F_\bullet,\, G_\bullet)/\simeq \xrightarrow{\simeq} \mathbf{Nat}\bigl(H_0 \circ F_\bullet,\, H_0 \circ G_\bullet\bigr)$$

が成り立つ．

非輪状モデル定理を言い換えると，次の二つが成り立つ：

(全射性)

$$\forall \bar{\varphi} \in \mathbf{Nat}\bigl(H_0 \circ F_\bullet,\, H_0 \circ G_\bullet\bigr),\ \exists \varphi\colon F_\bullet \longrightarrow G_\bullet,\quad \bar{\varphi} = H_0([\varphi])$$

(単射性)　$\forall \varphi,\, \psi \in \mathbf{Nat}(F_\bullet,\, G_\bullet)$ に対して

$$H_0(\varphi) = H_0(\psi) \quad\Longrightarrow\quad \varphi \simeq \psi$$

特に補題 2.3 から

$$H_0(\varphi) = H_0(\psi) \quad\Longleftrightarrow\quad \varphi \simeq \psi$$

である．

2.2　連結準同型と蛇の補題

3 つのチェイン複体 $A_\bullet := \{A_q, \partial_q \colon A_q \to A_{q-1}\}_{q\geq 0}$, $B_\bullet := \{B_q, \partial_q \colon B_q \to B_{q-1}\}_{q\geq 0}$, $C_\bullet := \{C_q, \partial_q \colon C_q \to C_{q-1}\}_{q\geq 0}$ および二つのチェイン写像 $i_\bullet := \{i_q \colon A_q \to B_q\}_{q\geq 0}$, $p_\bullet := \{i_q \colon B_q \to C_q\}_{q\geq 0}$ を与える．縦向きにした 3 つのチェイン複体を横に並べて書いた図式

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "\partial_{q+2}"] & \vdots \arrow[d, "\partial_{q+2}"] & \vdots \arrow[d, "\partial_{q+2}"] & \\
0 \arrow[r] & A_{q+1} \arrow[r, "i_{q+1}"] \arrow[d, "\partial_{q+1}"] & B_{q+1} \arrow[r, "p_{q+1}"] \arrow[d, "\partial_{q+1}"] & C_{q+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{q+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_q \arrow[r, "i_q"] \arrow[d, "\partial_q"] & B_q \arrow[r, "p_q"] \arrow[d, "\partial_q"] & C_q \arrow[r] \arrow[d, "\partial_q"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{q-1} \arrow[r, "i_{q-1}"] \arrow[d, "\partial_{q-1}"] & B_{q-1} \arrow[r, "p_{q-1}"] \arrow[d, "\partial_{q-1}"] & C_{q-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{q-1}"] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

図 2.5

は可換であるとし，さらに各列

$$0 \longrightarrow A_\bullet \xrightarrow{i_\bullet} B_\bullet \xrightarrow{p_\bullet} C_\bullet \longrightarrow 0 \tag{2.2.1}$$

が完全であると仮定する．この節では次の命題を証明する：

命題 2.1: ホモロジー完全列

上の条件下において，**連結準同型** (connecting homomorphism) と呼ばれる準同型写像

$$\partial_q \colon H_q(C_\bullet) \longrightarrow H_{q-1}(A_\bullet)$$

が**自然に**定まり，系列

$$
\begin{aligned}
\cdots \xrightarrow{\partial_{q+1}} & H_q(A_\bullet) \xrightarrow{i_*} H_q(B_\bullet) \xrightarrow{p_*} H_q(C_\bullet) \\
\xrightarrow{\partial_q} & H_{q-1}(C_\bullet) \xrightarrow{i_*} H_{q-1}(B_\bullet) \xrightarrow{p_*} H_{q-1}(C_\bullet) \\
\xrightarrow{\partial_{q-1}} & \cdots \\
\xrightarrow{\partial_1} & H_0(C_\bullet) \xrightarrow{i_*} H_0(B_\bullet) \xrightarrow{p_*} H_0(C_\bullet) \longrightarrow 0
\end{aligned}
\tag{2.2.2}
$$

は完全列になる．完全列 (2.2.2) のことを**ホモロジー完全列** (homology exact sequence) と呼ぶ．

2.2.1　連結準同型の構成

まずは連結準同型を具体的に構成する．手始めに $\forall c \in \operatorname{Ker}\partial_q$ の行き先 $a \in \operatorname{Ker}\partial_{q-1}$ を見繕う．

(1) まず，(2.2.1) が完全であるという仮定から，ある $b \in B_q$ が存在して $c = p_q(b)$ と書ける：

$$\exists b \xrightarrow{p_q} c$$

(2) 図式 2.5 が可換なので

$$p_{q-1}\big(\partial_q b\big) = \partial_q\big(p_q(b)\big) = \partial_q c = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \partial_q b \in \operatorname{Ker} p_{q-1}$$

が成り立つ：

$$\begin{tikzcd}
\exists b \arrow[r, "p_q"] \arrow[d, "\partial_q"] & c \arrow[d, "\partial_q"] \\
\partial_q b \arrow[r, "p_{q-1}"] & 0
\end{tikzcd}$$

(3) もう一度 (2.2.1) が完全であるという仮定を使うと，ある $a \in A_q$ が一意的に存在して[*1] $\partial_q b = i_{q-1}(a)$ と書ける：

$$\begin{tikzcd}
 & \exists b \arrow[r, "p_q"] \arrow[d, "\partial_q"] & c \\
\exists ! a \arrow[r, "i_{q-1}"] & \partial_q b &
\end{tikzcd}$$

(4) 図式 2.5 が可換なので

$$i_{q-2}\big(\partial_{q-1} a\big) = \partial_{q-1}\big(i_{q-1} c\big) = \partial_{q-1}\partial_q b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a \in \operatorname{Ker}\partial_{q-1}$$

が成り立つ．(2.2.1) が完全列なので $i_\bullet$ は単射，i.e. $\operatorname{Ker} i_{q-2} = \{0\}$ だからである：

$$\begin{tikzcd}
 & \exists b \arrow[r, "p_q"] \arrow[d, "\partial_q"] & c \\
\exists ! a \arrow[r, "i_{q-1}"] \arrow[d, "\partial_{q-1}"] & \partial_q b \arrow[d, "\partial_{q-1}"] & \\
\partial_{q-1} a \arrow[r, "i_{q-1}"] & 0 &
\end{tikzcd}$$

ここまでの議論から，写像

$$\partial_* \colon \operatorname{Ker}\partial_q \longrightarrow \operatorname{Ker}\partial_{q-1}/\operatorname{Im}\partial_q,\ c \longmapsto a + \operatorname{Im}\partial_q \tag{2.2.3}$$

を考えたくなる．

[*1] i_{q-1} は単射

補題 2.4:

写像 (2.2.3) は well-defined な準同型写像である．

<u>証明</u> **(well-definedness)** $c = p_q(b')$ を充たす別の $b' \in B_q$ をとる．このとき $p_q(b'-b) = 0 \iff b'-b \in \operatorname{Ker} p_q$ だが，(2.2.1) の完全性 $\operatorname{Ker} p_q = \operatorname{Im} i_q$ から，ある $\alpha \in A_q$ が存在して $b'-b = i_q(\alpha)$ と書ける．このとき図式 2.5 の可換性から

$$i_{q-1}\bigl(\partial_q(\alpha)\bigr) = \partial_q(i_q(a')) = \partial_q(b'-b) \tag{2.2.4}$$

が成り立つ．

一方，手順 (3) と同様に $\partial_q b' = i_{q-1}(a')$ を充たす $a' \in \operatorname{Ker} \partial_{q-1}$ が一意的に存在する．このとき式 (2.2.4) から

$$i_{q-1}(a') = \partial_q b' = \partial_q b + \partial_q(b'-b) = i_{q-1}\bigl(a + \partial_q(\alpha)\bigr)$$

が成り立つが，i_{q-1} が単射なので $a' = a + \partial_q(\alpha) \in a + \operatorname{Im} \partial_q$ となる．i.e.

$$a' + \operatorname{Im} \partial_q = a + \operatorname{Im} \partial_q$$

であり，写像 (2.2.3) は b の取り方によらない．

(準同型写像であること) $\forall c_1, c_2 \in \operatorname{Ker} \partial_q$ に対して $c_i = p_q(b_i)$ $(i = 1, 2)$ を充たす $b_i \in B_q$ を取ることができる．このとき手順 (3), (4) と同様に，$\partial_q b_i = i_{q-1}(a_i)$ を充たす $a_i \in \operatorname{Ker} \partial_{q-1}$ が一意的に存在する．このとき $p_q(b_1 + b_2) = c_1 + c_2 \in \operatorname{Ker} \partial_q$ かつ $i_{q-1}(a_1 + a_2) = \partial_q(b_1 + b_2)$, $a_1 + a_2 \in \operatorname{Ker} \partial_{q-1}$ なので

$$\partial_*(c_1 + c_2) = (a_1 + a_2) + \operatorname{Im} \partial_q$$

であるが，剰余加群の加法の定義から右辺が

$$(a_1 + \operatorname{Im} \partial_q) + (a_2 + \operatorname{Im} \partial_q) = \partial_*(c_1) + \partial_*(c_2) \in \operatorname{Ker} \partial_{q-1} / \operatorname{Im} \partial_q.$$

となって，加法についての証明が完了する．スカラー乗法に関しても同様である．

■

補題 2.5: 連結準同型の定義

準同型写像 (2.2.3) は，準同型写像[a]

$$\partial_\bullet \colon H_q(C_\bullet) \longrightarrow H_{q-1}(A_\bullet),\ [c] \longmapsto [a]$$

を誘導する．ただし

$$[c] \coloneqq c + \operatorname{Im}(\partial_{q+1} \colon C_{q+1} \to C_q), \quad [a] \coloneqq a + \operatorname{Im}(\partial_q \colon A_q \to A_{q-1})$$

とおいた．

[a] $H_q(C_\bullet) \coloneqq \operatorname{Ker} \partial_q / \operatorname{Im} \partial_{q+1}$, $H_{q-1}(A_\bullet) \coloneqq \operatorname{Ker} \partial_{q-1} / \operatorname{Im} \partial_q$ であった．

証明 商加群の普遍性から，$\mathrm{Im}\,\partial_{q+1} \subset \mathrm{Ker}\,\partial_*$ を示せば良い．

勝手な $\mathrm{Im}\,\partial_{q+1}$ の元は $c \in C_{q+1}$ を用いて $\partial_{q+1}c$ と書ける．$\mathrm{Im}\,\partial_{q+1} \subset \mathrm{Ker}\,\partial_q$ よりある $b \in B_q$ が存在して $\partial_{q+1}c = p_q(b)$ かつ $\partial_q b \in \mathrm{Ker}\,p_{q-1}$ を充し，さらに $a \in \mathrm{Ker}\,\partial_{q-1}$ が一意的に存在して $\partial_q b = i_{q-1}(a)$ が成り立つ．

一方，p_{q+1} は全射なので，ある $b' \in B_{q+1}$ が存在して $c = p_{q+1}(b')$ と書ける．図式 2.5 の可換性から

$$p_q\big(\partial_{q+1}(b')\big) = \partial_{q+1}\big(p_{q+1}(b')\big) = \partial_{q+1}c \in C_q$$

が成り立つから，$b = \partial_{q+1}(b')$ と選ぶことができる．このとき

$$\partial_q b = \partial_q\partial_{q+1}b' = 0 = i_{q-1}(0) \in \mathrm{Ker}\,p_{q-1}$$

なので $a = 0 \in A_{q-1}$ とわかる．従って

$$\partial_*(\partial_{q+1}c) = [a] = [0] = 0 \in H_q(A_\bullet)$$

が成り立ち，$\mathrm{Im}\,\partial_{q+1} \subset \mathrm{Ker}\,\partial_*$ が言えた． ■

2.2.2 連結準同型の自然性

チェイン複体の短完全列のクラスは，次のようにして圏をなす：

- 対象をチェイン複体の短完全列

$$0 \longrightarrow C_{1\bullet} \xrightarrow{i_\bullet} C_{2\bullet} \xrightarrow{p_\bullet} C_{3\bullet} \longrightarrow 0$$

  とする．
- 射を，チェイン複体の準同型写像 $f_{i\bullet} := \big\{f_{iq} \colon C_{iq} \to D_{iq}\big\}_{q\geq 0}$ $(i = 1, 2, 3)$ が成す可換図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_{1\bullet} \arrow[r, "i_\bullet"] \arrow[d, "f_{1\bullet}"] & C_{2\bullet} \arrow[r, "p_\bullet"] \arrow[d, "f_{2\bullet}"] & C_{3\bullet} \arrow[r] \arrow[d, "f_{3\bullet}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & D_{1\bullet} \arrow[r, "\iota_\bullet"] & D_{2\bullet} \arrow[r, "\varpi_\bullet"] & D_{3\bullet} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

図 2.6: チェイン複体の短完全列の射（準同型

  とする．
- 射の合成を，準同型写像の合成とする．

連結準同型が自然であるとは，それがチェイン複体の短完全列の圏から加群の準同型の圏への共変関手であることを意味する．より直接的には，図式

$$\begin{tikzcd}
H_q(C_{3\bullet}) \arrow[r, "\partial_\bullet"] \arrow[d, "f_{3\bullet}"'] & H_{q-1}(C_{1\bullet}) \arrow[d, "f_{1\bullet}"] \\
H_q(D_{3\bullet}) \arrow[r, "\partial_\bullet"'] & H_{q-1}(D_{1\bullet})
\end{tikzcd}$$

図 2.7

が可換になることを言う．

補題 2.6: 連結準同型の自然性

図式 2.7 は可換である．

証明 $\forall c_3 \in \operatorname{Ker}\partial_q \subset C_{3q}$ を一つとる．$p_q(c_2) = c_3$ を充たす $c_2 \in C_2$ および $\partial_q c_2 = i_{q-1}(c_1)$ を充たす $c_1 \in \operatorname{Ker}\partial_{q-1} \subset C_{1q-1}$ を取ると，補題 2.5 より $\partial_\bullet[c_3] = [c_1]$ である．

ここで $f_{2q}(c_2) \in D_{2q}$ および $f_{1q-1}(c_1) \in \operatorname{Ker}\partial_{q-1} \subset D_{1q-1}$ は，図式 2.6 の可換性およびチェイン写像の定義から

$$\varpi_q\bigl(f_{2q}(c_2)\bigr) = f_{3q}\bigl(p_q(c_2)\bigr) = f_{3q}(c_3) \in D_{3q},$$
$$\partial_q\bigl(f_{2q}(c_2)\bigr) = \iota_{q-1}\bigl(f_{1q-1}(c_1)\bigr) \in D_{2q}$$

を充たす，i.e. $\partial_\bullet[f_{3q}(c_3)] = [f_{1q-1}(c_1)]$ なので，誘導準同型の定義を思い出すと

$$\partial_\bullet f_{3\bullet}[c_3] = \partial_\bullet[f_{3q}(c_3)] = [f_{1q-1}(c_1)] = f_{1\bullet}[c_1] = f_{1\bullet}\partial_\bullet[c_3].$$

■

2.2.3　完全性

命題 2.1 の証明も，残すところ系列 (2.2.2) が完全になることの証明のみである．

補題 2.7: ホモロジー完全列の完全性

連結準同型 $\partial_\bullet\colon H_q(C_\bullet) \longrightarrow H_{q-1}(A_\bullet)$ に対して，系列

$$\begin{aligned}
\cdots &\xrightarrow{\partial_{q+1}} H_q(A_\bullet) \xrightarrow{i_*} H_q(B_\bullet) \xrightarrow{p_*} H_q(C_\bullet) \\
&\xrightarrow{\partial_q} H_{q-1}(C_\bullet) \xrightarrow{i_*} H_{q-1}(B_\bullet) \xrightarrow{p_*} H_{q-1}(C_\bullet) \\
&\xrightarrow{\partial_{q-1}} \cdots \\
&\xrightarrow{\partial_1} H_0(C_\bullet) \xrightarrow{i_*} H_0(B_\bullet) \xrightarrow{p_*} H_0(C_\bullet) \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

は完全列になる．

証明 ■

2.2.4　蛇の補題

これまでの議論は純粋に代数的なものであった．実は，これらは**蛇の補題** (snake lemma) に集約される．

命題 2.2: 蛇の補題

2 つの行が完全であるような次の左 R 加群の可換図式 2.8 を考える．このとき，次の完全列が存在する：

$$\operatorname{Ker} h_1 \xrightarrow{\bar{f}_1} \operatorname{Ker} h_2 \xrightarrow{\bar{f}_2} \operatorname{Ker} h_3 \xrightarrow{\partial} \operatorname{Coker} h_1 \xrightarrow{\bar{g}_1} \operatorname{Coker} h_2 \xrightarrow{\bar{g}_2} \operatorname{Coker} h_3$$

ただし，f_1 が単射ならば $\bar{f}_1$ も単射，g_2 が全射ならば $\bar{g}_2$ も全射である．

$$\begin{tikzcd}
 & M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "h_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "g_1"] & N_2 \arrow[r, "g_2"] & N_3 &
\end{tikzcd}$$

図 2.8

証明 ■

2.3 整数係数特異ホモロジー

定義 2.8: 標準 q-単体

標準 q 単体 (standard q-simplex) Δ^q を次のように定義する：

$$\Delta^q := \left\{ (x_0,\, x_1,\, \dots,\, x_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \;\middle|\; \sum_{i=0}^{q} x_i = 1,\ x_i \geq 0\ (0 \leq \forall i \leq q) \right\}$$

$\mathbb{R}^{q+1}$ の基底 $\{e_k^q\}_{k=0,\,\dots,\,q}$ を

$$e_k^q := \bigl(0,\, \dots,\, 0,\, \underbrace{1}_{k},\, 0,\, \dots,\, 0\bigr)$$

で定義すると，$e_k^q \in \Delta^q$ である[*2]

[*2] さらに，Δ^q は $\{e_k^q\}_{k=0,\,\dots,\,q}$ を含む最小の凸集合でもある．凸集合 $V \subset \mathbb{R}^{q+1}$ が $\{e_k^q\}_{k=0,\,\dots,\,q} \subset V$ を充たすならば，凸集合の性質から $e_0^q,\, \dots,\, e_q^q$ の凸結合もまた V に属するからである．

定義 2.9: face map

$0 \leq i \leq q$ に対して，線型写像 $f_i^q\colon \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^{q+1}$ を

$$f_i^q(e_k^{q-1}) \coloneqq \begin{cases} e_k^q, & k < i \\ e_{k+1}^q & k \geq i \end{cases}$$

で定義する．このとき $f_i^q(\Delta^{q-1}) \subset \Delta^q$ が成立するから，連続写像

$$f_i^q\big|_{\Delta^{q-1}}\colon \Delta^{q-1} \longrightarrow \Delta^q$$

が構成できたことになる．$f_i^q\big|_{\Delta^{q-1}}$ は**面写像** (face map) と呼ばれる．

明かに

$$f_i^q\big((x_0,\, x_1,\, \dots,\, x_{q-1})\big) = (x_0,\, x_1,\, \dots,\, x_{i-1},\, 0,\, x_i,\, \dots,\, x_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q+1}$$

である．

以降では，位相空間 X から Y への連続写像全体の集合を Y^X と略記することがある：

$$Y^X \coloneqq \left\{\, \sigma\colon X \to Y \;\middle|\; \sigma \text{ は連続写像} \,\right\} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\,(X,\, Y)$$

位相空間 X に対して，集合 X^{Δ^q} は**特異 q 単体** (singular q-simplex) と呼ばれる．

定義 2.10: （整数係数）特異 q 単体

位相空間 X の**特異 q-チェイン群** (singular q-chain group) $S_q(X)$ は，特異 q 単体の生成する自由加群である：

$$S_q(X) \coloneqq \mathbb{Z}X^{\Delta^q}$$

定義 2.11: 境界写像

境界写像 (boundary map) $\partial_q\colon S_q(X) \longrightarrow S_{q-1}(X)$ を次のように定義する：

$$\partial_q(\sigma) \coloneqq \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \big(\sigma \circ f_i^q\big)$$

補題 2.8:

$$\partial_q \partial_{q+1} = 0$$

証明 $X^{\Delta^{q+1}}$ の元は $S_{q+1}(X)$ の基底を成すので，$\forall \sigma \in X^{\Delta^{q+1}}$ に対して $\partial_q\partial_{q+1}\sigma = 0$ が成り立つことを示

せば良い．まず，$i > j$ のとき

$$(f_i^{q+1} \circ f_j^q)(e_k^{q-1}) = \begin{cases} f_i^{q+1}(e_k^q), & k < j \\ f_i^{q+1}(e_{k+1}^q), & k \geq j \end{cases} = \begin{cases} e_k^{q+1}, & k < j < i \\ e_{k+1}^{q+1}, & k \geq j \text{ かつ } k+1 < i \\ e_{k+2}^{q+1}, & j < i \leq k+1 \end{cases}$$

$$(f_j^{q+1} \circ f_{i-1}^q)(e_k^{q-1}) = \begin{cases} f_j^{q+1}(e_k^q), & k < i-1 \\ f_j^{q+1}(e_{k+1}^q), & k \geq i-1 \end{cases} = \begin{cases} e_k^{q+1}, & k < j \leq i-1 \\ e_{k+1}^{q+1}, & k < i-1 \text{ かつ } k+1 \geq j \\ e_{k+2}^{q+1}, & j \leq i-1 \leq k \end{cases}$$

なので $f_i^{q+1} \circ f_j^q = f_j^{q+1} \circ f_{i-1}^q$ である．従って

$$\begin{aligned} \partial_q \partial_{q+1} \sigma &= \sum_{i=0}^{q+1} \sum_{j=0}^{q} (-1)^{i+j} \bigl(\sigma \circ f_i^{q+1} \circ f_j^q\bigr) \\ &= \sum_{0 \leq j < i \leq q+1} (-1)^{i+j} \bigl(\sigma \circ f_i^{q+1} \circ f_j^q\bigr) + \sum_{0 \leq i \leq j \leq q} (-1)^{i+j} \bigl(\sigma \circ f_i^{q+1} \circ f_j^q\bigr) \\ &= \sum_{0 \leq j < i \leq q+1} (-1)^{i+j} \bigl(\sigma \circ f_j^{q+1} \circ f_{i-1}^q\bigr) + \sum_{0 \leq i \leq j \leq q} (-1)^{i+j} \bigl(\sigma \circ f_i^{q+1} \circ f_j^q\bigr) \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

補題 2.8 より，定義 2.10, 2.11 で作った加群と準同型の組

$$S_\bullet(X) \coloneqq \bigl\{S_q(X),\ \partial_q \colon S_q(X) \to S_{q-1}(X)\bigr\}_{q \geq 0}$$

は定義 2.1 の条件を充しているので，チェイン複体である．

補題 2.9: 特異チェイン群が誘導するチェイン写像

連続写像 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ を任意に与える．このとき f は $\mathbb{Z}$ 加群の準同型の族 $f_\bullet \coloneqq \bigl\{f_q \colon S_\bullet(X) \to S_\bullet(Y)\bigr\}_{q \geq 0}$ を次のようにして誘導する：

$$f_q \colon S_q(X) \to S_q(Y),\ \sum_l a_l \sigma_l \mapsto \sum_l a_l (f \circ \sigma_l)$$

また，$f_\bullet$ はチェイン写像となる．

証明 f が連続写像ならば $\forall q \geq 0, \forall \sigma \in X^{\Delta^q}$ に対して $f \circ \sigma \in Y^{\Delta^q}$ もまた連続写像となるため，f_q が準同型になることは明かである．

チェイン複体 $S_\bullet(X), S_\bullet(Y)$ の準同型をそれぞれ $\partial_\bullet^X, \partial_\bullet^Y$ と書く．$\forall \sigma \in X^{\Delta^q}$ に対して

$$\begin{aligned} (\partial_q^Y \circ f_q)(\sigma) &= \sum_{i=0}^{q} (-1)^i (f \circ \sigma \circ f_i^q) \\ &= f_{q-1}\left(\sum_{i=0}^{q} (-1)^i (\sigma \circ f_i^q)\right) \\ &= (f_{q-1} \circ \partial_q^X)(\sigma) \end{aligned}$$

が成り立つので $f_\bullet$ はチェイン写像である． ■

定理 2.2: 特異チェイン群の関手性

S_q は補題 2.9 の対応によって位相空間の圏 **Top** から $\mathbb{Z}$ 加群の圏 $\mathbb{Z}$-**Mod** への共変関手となる．i.e. $\forall X,\ Y,\ Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ と $\forall q \geq 0$ に対して以下が成り立つ：

(1) 恒等写像 $1_X \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\ X)$ について

$$(1_X)_q = 1_{S_q(X)} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}}\big(S_q(X),\ S_q(X)\big)$$

(2) 連続写像 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\ Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Y,\ Z)$ について

$$(g \circ f)_q = g_q \circ f_q \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}}\big(S_q(X),\ S_q(Z)\big)$$

証明 X^{Δ^q} は $S_q(X)$ の基底を成すので，$\forall \sigma \in X^{\Delta^q}$ について示せば十分である．

(1) 恒等写像 $1_X \colon X \to X$ に対して

$$(1_X)_q(\sigma) = 1_X \circ \sigma = \sigma = 1_{S_q(X)}(\sigma).$$

(2) **Top** における射の結合則より

$$(g \circ f)_q(\sigma) = g \circ f \circ \sigma = g \circ (f \circ \sigma) = (g_q \circ f_q)(\sigma).$$

■

定義 2.12:（整数係数）特異ホモロジー

族 $\{S_q(X),\ \partial_q\}_{q \geq 0}$ は位相空間 X の（整数係数）[a]**特異チェイン複体** (singular chain complex) と呼ばれ，そのホモロジーは

$$H_q(X) := \frac{\mathrm{Ker}\big(\partial_q \colon S_q(X) \to S_{q-1}(X)\big)}{\mathrm{Im}\big(\partial_{q+1} \colon S_{q+1}(X) \to S_q(X)\big)}$$

と書かれる．$H_q(X)$ は X の（整数係数）**特異ホモロジー群** (singular homology group) と呼ばれる．

[a] 整数係数の時は $S_\bullet(X;\ R)$ の R を省略する慣習があるらしい？

2.3.1 関手性

命題 2.3: ホモロジーの関手性

H_q は補題 2.9 および定義 2.3 を組み合わせた対応によって位相空間の圏 **Top** から $\mathbb{Z}$ 加群の圏 $\mathbb{Z}$-**Mod** への共変関手となる．i.e. $\forall X,\, Y,\, Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ と $\forall q \geq 0$ に対して以下が成り立つ：

(1) 恒等写像 $1_X \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\, X)$ について

$$(1_X)_{q*} = 1_{H_q(X)} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}}\big(H_q(X),\, H_q(X)\big)$$

(2) 連続写像 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\, Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Y,\, Z)$ について

$$(g \circ f)_{q*} = g_{q*} \circ f_{q*} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}}\big(H_q(X),\, H_q(Z)\big)$$

証明 $\forall z \in Z_q(X) = \mathrm{Ker}\big(\partial_q \colon S_q(X) \to S_{q-1}(X)\big)$ をとる．補題 2.9 の対応 $\text{-}_q \colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}}\big(S_q(X),\, S_q(Y)\big)$ により定まるチェイン写像の誘導準同型を考えることで

$$\begin{aligned} (1_X)_{q*}([z]) &= [(1_X)_q(z)] = [z] = 1_{H_q(X)}([z]), \\ (g \circ f)_{q*}([z]) &= [(g \circ f)_q(z)] = [(g_q \circ f_q)(z)] = (g_{q*} \circ f_{q*})([z]). \end{aligned}$$

■

誘導準同型をいちいち f_{q*} と書くのは煩雑なので，以降ではチェイン写像を

$$f_* \colon S_q(X) \to S_q(Y)$$

とし，チェイン写像の誘導準同型を

$$f_* \colon H_q(C_\bullet) \to H_q(D_\bullet)$$

として同じ記号を用いる．

2.3.2 一点のホモロジー

命題 2.4: 一点のホモロジーは $\mathbb{Z}$

一点からなる位相空間 $* = \{*\}$ に対して以下が成り立つ：

$$H_q(*) = \begin{cases} 0, & q \neq 0 \\ \mathbb{Z}, & q = 0 \end{cases}$$

証明 任意の $q \geq 0$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^q,\, *)$ は一点集合であり，その元は定数写像である．それを $\sigma_q \colon \Delta^q \to *$ と書くと

$$S_q(*) = \mathbb{Z}\{\sigma_q\} \cong \mathbb{Z}$$

が成り立つ．境界写像は，$\sigma_q \circ f_i^q = \sigma_{q-1}$ に注意すると

$$\partial_q(\sigma_q) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \sigma_{q-1} = \begin{cases} \sigma_{q-1}, & q \text{ is even} \\ 0, & q \text{ is odd} \end{cases}$$

である．i.e. 位相空間 $*$ の整数係数特異チェイン複体は完全列[*3]

$$\cdots \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \cdots \xrightarrow{0} \mathbb{Z}$$

になる．故に

$$\begin{aligned} H_{q\geq 1}(*) &= \operatorname{Ker}\partial_q / \operatorname{Im}\partial_{q+1} = 0, \\ H_0(*) &= \operatorname{Ker}\partial_0 / \operatorname{Im}\partial_1 = \mathbb{Z}/\{0\} = \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

■

2.3.3 連結準同型

2.3.4 ホモトピー不変性

2 つの位相空間 $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ をとり，その間の連続写像全体の集合 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ を考える．

2 つの連続写像 $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ が**ホモトピック** (homotopic) であるとは，連続写像 $F\colon X \times [0, 1] \longrightarrow Y$ が存在して

$$\forall x \in X, \quad F(x, 0) = f(x) \text{ かつ } F(x, 1) = g(x)$$

を充たすことを言う．$f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ がホモトピックであることを

$$f \simeq g$$

と書くと，$\simeq \subset \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ は集合 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ 上の同値関係を与える[*4]．従って，商集合

$$[X, Y] \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)/\simeq$$

を考えることができる．商集合 $[X, Y]$ のことを，X から Y への連続写像の**ホモトピー集合** (homotopy set) と呼び，連続写像 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ が属する同値類のことを f のホモトピー類 (homotopy class) と呼んで $[f] \in [X, Y]$ と書く．

$f, f' \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ と $g, g' \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Y, Z)$ に対して

$$f \simeq f' \text{ かつ } g \simeq g' \implies g \circ f \simeq g' \circ f' \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Z)$$

が成り立つので，写像

$$\circ\colon [X, Y] \times [Y, Z] \longrightarrow [X, Z],\ ([f], [g]) \longmapsto [g \circ f] \tag{2.3.1}$$

は well-defined である．従って，位相空間を対象とし，その間の連続写像のホモトピー類を射[*5]，合成を写像 (2.3.1) とするものの集まり $\mathbf{hTOP}$ は圏をなす．この圏 $\mathbf{hTOP}$ のことを**ホモトピー圏** (homotopy category) と呼ぶ．

[*3] $\operatorname{Ker}\partial_q = \operatorname{Im}\partial_{q+1}$ であることは明らかであろう．

[*4] $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ にコンパクト開位相を入れて $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ と見做す．この時，X が局所コンパクト Hausdorff 空間のとき $[X, Y] = \pi_0\bigl(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)\bigr)$ となる．

[*5] つまり，$\mathrm{Hom}_{\mathbf{hTOP}}(X, Y) = [X, Y]$ ということ．

定理 2.3: ホモロジー群のホモトピー不変性

$\forall q \geq 0$ について，共変関手 H_q はホモトピー不変性を持つ．i.e. $f,\, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\, Y)$ に対して，

$$f \simeq g \quad \Longrightarrow \quad f_* = g_* \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}}\left(H_q(X) \longrightarrow H_q(Y)\right)$$

が成り立つ．

f と g の間のホモトピー $F\colon X \times [0,\, 1] \to Y$ をとる．二つの包含写像を

$$\begin{aligned} i_0 &\colon X \longrightarrow X \times [0,\, 1],\; x \longmapsto (x,\, 0) \\ i_1 &\colon X \longrightarrow X \times [0,\, 1],\; x \longmapsto (x,\, 1) \end{aligned}$$

で定義すると，ホモトピーの定義から

$$\begin{aligned} &\forall x \in X, \quad F(x,\, 0) = f(x) \text{ かつ } F(x,\, 1) = g(x) \\ \Longleftrightarrow \quad & F \circ i_0 \text{ かつ } F \circ i_1 = g \end{aligned}$$

である．従って定理 2.3 の主張は

$$\begin{aligned} f_* &= (F \circ i_0)_* = F_* \circ i_{0*} \\ &= g_* = (F \circ i_1)_* = F_* \circ i_{1*} \end{aligned}$$

となるから，結局 $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ に対して

$$i_{0*} = i_{1*} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}}\left(H_q(X),\, H_q(X \times [0,\, 1])\right)$$

が成立することを示せば良い．チェイン・ホモトピーの性質を思い出すと，このことは $i_0,\, i_1$ が誘導するチェイン写像

$$\begin{aligned} i_{0*} &\colon S_q(X) \longrightarrow S_q(X \times [0,\, 1]), \\ i_{1*} &\colon S_q(X) \longrightarrow S_q(X \times [0,\, 1]) \end{aligned}$$

がチェイン・ホモトピックであることと同値である．まとめると，定理 2.3 を証明するには

命題 2.5:

任意の位相空間 X に対して，準同型の族 $\Phi_\bullet = \left\{\Phi_q\colon S_q(X) \to S_{q+1}(X \times [0,\, 1])\right\}_{q \geq 0}$ が存在して以下を充たす：

$$\partial_{q+1}\Phi_q + \Phi_{q-1}\partial_q = i_{1*} - i_{0*}$$

を示せば十分である．これは非輪状モデル定理によって達成される．

集合 $\mathcal{M} := \left\{\Delta^q\right\}_{q \geq 0} \subset \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ を考えよう．共変関手 $S_\bullet\colon \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Chain}_{\geq 0}$ は集合 $\mathcal{M}$ について自由である：$\forall q \geq 0$ に対して

$$\left\{\, \sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^q,\, X) \,\right\}$$

が $S_q(X)$ の自由基底を与えるからである．また，次の補題から $S_\bullet$ は集合 $\mathcal{M}$ について非輪状である：

補題 2.10:

位相空間 X は一点 $x_0 \in X$ からなる部分集合 $\{x_0\}$ を変位レトラクトに持つならば，$q = 0$ を除いて $H_q(X) = 0$ である．

$I \coloneqq [0, 1] \subset \mathbb{R}$ を考え，共変関手

$$A_\bullet \colon \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Chain}_{\geq 0}$$

を次のように構成する：

$$\begin{aligned} A_\bullet(X) &\coloneqq S_\bullet(X \times I) \quad (\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})) \\ A_\bullet(f) &\coloneqq (f \times 1_I)_* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Chain}_{\geq 0}}\big(S_\bullet(X \times I),\, S_\bullet(Y \times I)\big) \quad (\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\, Y)) \end{aligned}$$

このとき，$\forall q \geq 0$ について $\Delta^q \times I \approx D^{q+1}$ であることを使うと，補題 2.10 から $A_\bullet$ は集合 $\mathcal{M}$ について非輪状である．

これで非輪状モデル定理を使う準備が整った．共変関手 $S_\bullet \colon \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Chain}_{\geq 0}$ は集合 $\mathcal{M}$ について自由であり，かつ共変関手 $A_\bullet \colon \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Chain}_{\geq 0}$ は集合 $\mathcal{M}$ について非輪状である．また，π_0 のホモトピー不変性と

$$H_0(X) = \mathbb{Z}\pi_0(X)$$

を使う

$$\begin{aligned} & i_{0*} = i_{1*} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}}\big(H_0(X),\, H_0(X \times [0,\, 1])\big) \\ \iff \quad & i_{0*} = i_{1*} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}}\big(H_0 \circ S_\bullet,\, H_0 \circ A_\bullet\big) \end{aligned}$$

がわかる．よって非輪状モデル定理から

$$i_{0*} \simeq i_{1*}$$

が示された．

2.4 Mayer-Vietoris 完全列

位相空間 X の部分空間 $A \subset X$ の X における内部を A° と書く．

定理 2.4: Mayer-Vietoris 完全列

X を位相空間，$U,\, V \subset X$ を部分集合で，

$$U^\circ \cup V^\circ = X$$

を充たすものとする．このとき $\forall q \geq 0$ について連結準同型

$$\partial_\bullet \colon H_q(X) \longrightarrow H_{q-1}(U \cap V)$$

が存在して，完全列

$$\begin{aligned} \cdots &\xrightarrow{i} H_q(U) \oplus H_q(V) \xrightarrow{j} H_q(X) \xrightarrow{\partial_\bullet} H_{q-1}(U \cap V) \\ &\xrightarrow{i} H_{q-1}(U) \oplus H_{q-1}(V) \xrightarrow{j} H_{q-1}(X) \xrightarrow{\partial_\bullet} H_{q-2}(U \cap V) \\ &\xrightarrow{i} \cdots \xrightarrow{i} H_0(U) \oplus H_0(V) \xrightarrow{j} H_0(X) \to 0 \end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，準同型 $i,\, j$ は包含写像

$$\begin{aligned} &i_U \colon U \cap V \hookrightarrow U, && i_V \colon U \cap V \hookrightarrow V, \\ &j_U \colon U \hookrightarrow X, && j_V \colon V \hookrightarrow X \end{aligned}$$

によって

$$\begin{aligned} i(w) &:= \bigl((i_U)_*(w),\, -(i_V)_*(w)\bigr), \quad \forall w \in H_q(U \cap V) \\ j(u,\, v) &:= (j_U)_*(u) + (j_V)_*(v), \quad \forall u \in H_q(U),\, \forall v \in H_q(V) \end{aligned}$$

と定義される．

位相空間 $X,\, Y$，および部分空間 $U,\, V \subset X,\, U',\, V' \subset Y$ と，連続写像 $f \colon X \longrightarrow Y$ であって以下の条件を充たすものが与えられたとき，連結準同型は図式 2.9 を可換にする：

- $U^\circ \cup V^\circ = X$ かつ $U'^\circ \cup V'^\circ = Y$
- $f(U) \subset U'$ かつ $f(V) \subset V'$

$$\begin{tikzcd} H_q(X) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_{q+1}(U \cap V) \arrow[d, "f_*"] \\ H_q(Y) \arrow[r, "\partial_*"] & H_{q+1}(U' \cap V') \end{tikzcd}$$

図 2.9: 連結準同型の自然性

この定理は次の命題から導かれる：

命題 2.6:

$U, V \subset X$ が定理 2.4 の条件を充たすとき，包含写像 $\iota\colon S_\bullet(U) + S_\bullet(V) \hookrightarrow S_\bullet(X)$ は，$\forall q \geq 0$ についてホモロジー群の同型

$$H_q\bigl(S_\bullet(U) + S_\bullet(V)\bigr) \xrightarrow{\cong} H_q(X)$$

を誘導する．

ただし，

$$\begin{aligned} U^{\Delta^q} &\coloneqq \left\{\, \sigma \in X^{\Delta^q} \;\middle|\; \sigma(\Delta^q) \subset U \,\right\} \\ V^{\Delta^q} &\coloneqq \left\{\, \sigma \in X^{\Delta^q} \;\middle|\; \sigma(\Delta^q) \subset V \,\right\} \\ (U \cap V)^{\Delta^q} &= U^{\Delta^q} \cap V^{\Delta^q} \end{aligned}$$

などとすることで，$S_q(U)$, $S_q(V)$, $S_q(U \cap V)$ を $S_q(X)$ の部分加群と見做す．

命題 2.6 を仮定して定理 2.4 を証明する．

証明 系列

$$0 \to S_q(U \cap V) \xrightarrow{i} S_q(U) \oplus S_q(V) \xrightarrow{j} S_q(U) + S_q(V) \to 0$$

は完全である．これのホモロジー完全列をとると

$$\cdots \xrightarrow{i} H_q(U) \oplus H_q(V) \xrightarrow{j} H_q\bigl(S_\bullet(U) + S_\bullet(V)\bigr) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(U \cap V) \xrightarrow{i} \cdots$$

が得られる．さらに命題 2.6 を使うことで

$$\cdots \xrightarrow{i} H_q(U) \oplus H_q(V) \xrightarrow{j} H_q(X) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(U \cap V) \xrightarrow{i} \cdots$$

が得られる．

f が誘導するチェイン写像 $f_*\colon S_\bullet(X) \longrightarrow S_\bullet(Y)$ によって

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & S_q(U \cap V) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"] & S_q(U) \oplus S_q(V) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "f_*"] & S_q(U) + S_q(V) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & S_q(U' \cap V') \arrow[r, "i_*"] & S_q(U') \oplus S_q(V') \arrow[r, "j_*"] & S_q(U') + S_q(V') \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

が成り立つ．ここから連結準同型とホモロジー完全列の自然性を使うことで定理 2.4 の後半も示された． ■

2.5 Seifert-van Kampen の定理

融合積 (amalgamated product) の定義をする．

定義 2.13: 融合積

群 $G,\ H, K$ と準同型 $\psi_1\colon K \to G,\ \psi_2\colon K \to H$ が与えられたとき，新たな群 $\boldsymbol{G *_K H}$ と準同型 $l_1\colon G \to G *_K H,\ l_2\colon H \to G *_K H$ であって図式 2.10 を可換にし，次の普遍性を充たすもののことを，群 $G,\ H$ の K についての**融合積** (amalgamated product) と呼ぶ：

普遍性　群 L および準同型 $q_1\colon G \longrightarrow L,\ q_2\colon H \longrightarrow L$ が図式 2.11a を可換にするとき，可換図式 2.11b が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
G *_K H & H \arrow[l, "l_2"'] \\
G \arrow[u, "l_1"] & K \arrow[l, "\psi_1"] \arrow[u, "\psi_2"']
\end{tikzcd}
$$

図 2.10: 融合積の可換性

$$
\begin{tikzcd}
L & H \arrow[l, "q_2"'] \\
G \arrow[u, "q_1"] & K \arrow[l, "\psi_1"] \arrow[u, "\psi_2"']
\end{tikzcd}
$$

(a)

$$
\begin{tikzcd}
L & & \\
& G *_Z H \arrow[ul, dashed, "\exists!\hat{q}"'] & H \arrow[l, "l_2"'] \arrow[ull, bend right, "q_2"'] \\
& G \arrow[u, "l_1"] \arrow[uul, bend left, "q_1"] & K \arrow[l, "\psi_1"] \arrow[u, "\psi_2"']
\end{tikzcd}
$$

(b)

図 2.11: 融合積の普遍性

融合積は，もし存在すれば同型を除いて一意に定まる．以下では実際に融合積を構成する．

2.6 空間対のホモロジー群

位相空間 X とその部分空間 $A \subset X$ の組 $(X,\ A)$ のことを**空間対** (pair) と呼ぶ．包含写像 $i\colon A \hookrightarrow X$ が誘導するチェイン写像 $i_*\colon S_\bullet(A) \longrightarrow S_\bullet(X)$ を用いて，$\forall q \geq 0$ に対して**可換群**

$$S_q(X,\ A) \coloneqq S_q(X)/\operatorname{Im} i_* = \operatorname{Coker}\bigl(i_*\colon S_\bullet(A) \longrightarrow S_\bullet(X)\bigr)$$

を定義できる．標準射影を

$$j_*\colon S_q(X) \longrightarrow S_q(X,\ A),\ u \longmapsto u + i_* S_q(A)$$

と書く．このとき，境界写像 $\partial_q\colon S_q(X) \longrightarrow S_{q-1}(X)$ は

$$\partial_q\colon S_q(X,\ A) \longrightarrow S_{q-1}(X,\ A),\ u + i_* S_q(A) \longmapsto \partial_q u + i_* S_{q-1}(A)$$

を誘導する．これは次のような図式である：

$$\begin{tikzcd}
S_q(X) \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "j_*"'] & S_{q-1}(X) \arrow[r, "j_*"] & S_{q-1}(X,\, A) \\
S_q(X,\, A) \arrow[urr, dashed, "\exists!\partial_q"'] & &
\end{tikzcd}$$

明かに $\partial_q i_* S_q(A) \subset i_* S_{q-1}(A)$ なので

$$u \in i_* S_q(A) \quad \Longrightarrow \quad \partial_q u \in i_* S_{q-1}(A) \quad \Longrightarrow \quad (j_* \circ \partial_q)(u) = 0_{S_{q-1}(X,\, A)}$$

i.e. $S_q(A) \subset \mathrm{Ker}(j_* \circ \partial_q)$ が成り立つ．したがって商加群の普遍性が使えて $\partial_q\colon S_q(X,\, A) \longrightarrow S_{q-1}(X,\, A)$ は well-defined である．このように定義された準同型 $\partial_q\colon S_q(X,\, A) \longrightarrow S_{q-1}(X,\, A)$ に対して

$$\partial_{q-1}\partial_q(u + i_* S_q(A)) = \partial_{q-1}\partial_q u + i_* S_{q-2}(A) = 0_{S_{q-2}(X,\, A)}$$

が成り立つ．

以上の考察から，加群と準同型の族

$$S_\bullet(X,\, A) \coloneqq \left\{S_q(X,\, A)\right\}_{q \geq 0}$$

はチェイン複体を成す．

定義 2.14: 空間対のホモロジー群

チェイン複体 $S_\bullet(X,\, A)$ のホモロジー群を**空間対 $(S,\, A)$ の第 q のホモロジー群**と呼び，

$$H_q(X,\, A) \coloneqq \frac{\mathrm{Ker}\big(\partial_q\colon S_q(X,\, A) \to S_{q-1}(X,\, A)\big)}{\mathrm{Im}\big(\partial_{q+1}\colon S_{q+1}(X,\, A) \to S_q(X,\, A)\big)}$$

と書く．

包含準同型 $i_*\colon S_q(A) \longrightarrow S_q(X)$ は単射で，かつ標準射影 $j_*\colon S_q(X) \longrightarrow S_q(X,\, A)$ は全射だから，系列

$$0 \to S_\bullet(A) \xrightarrow{i_*} S_\bullet(X) \xrightarrow{j_*} S_\bullet(X,\, A) \to 0$$

は短完全列を成す．ここから，短完全列のホモロジー完全列を適用して，$\forall q \geq 1$ に**連結準同型**

$$\partial_\bullet\colon H_q(X,\, A) \longrightarrow H_{q-1}(A)$$

および**空間対 $(X,\, A)$ のホモロジー完全列**

$$\begin{aligned}
\cdots \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X,\, A) \xrightarrow{\partial_\bullet} H_{q-1}(A) \\
\xrightarrow{i_*} H_{q-1}(X) \xrightarrow{j_*} H_{q-1}(X,\, A) \xrightarrow{\partial_\bullet} H_{q-2}(A) \\
\xrightarrow{i_*} \cdots \xrightarrow{i_*} H_0(X) \xrightarrow{j_*} H_0(X,\, A) \to 0
\end{aligned}$$

が得られる．

2.7 チェイン複体上のテンソルと Hom 関手

この節は**普遍係数定理**への布石である．R 加群のチェイン複体 $\{C_q, \partial_q\}_q$ を与える．ここで，q チェインが自由加群であることは仮定しないものとする．

特異ホモロジーは二つの共変関手の合成であったことに注意する：

$$\begin{aligned} S_\bullet &: \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Chain}_{\geq 0} \\ H_\bullet &: \mathbf{Chain}_{\geq 0} \longrightarrow R\text{-}\mathbf{Mod} \end{aligned}$$

ここで，新しい代数的対応

$$\mathbf{Chain}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbf{Chain}_{\geq 0}$$

を $S_\bullet$ と $H_\bullet$ の間に挟んでみよう．

2.7.1 チェイン複体と R 加群のテンソル積

R 加群 M をとり，対応

$$\{C_q, \partial_q\}_q \longrightarrow \{C_q \otimes M, \partial_q \otimes \mathrm{id}_M\}_q$$

を考える．ただし

$$(\partial_\bullet \otimes \mathrm{id}_M)\left(\sum_i c_i \otimes m_i\right) := \sum_i \partial_\bullet(c_i) \otimes m_i$$

である．$(\partial \otimes \mathrm{id})^2 = 0$ なので $\{C_q \otimes M, \partial_q \otimes \mathrm{id}_M\}_q$ はチェイン複体である．この操作はホモロジー群の係数を取り替える操作に対応する．

補題 2.11:

この対応は共変関手である．

定義 2.15: M 係数ホモロジー

チェイン複体 $C_\bullet \otimes M$ のホモロジー群は**係数 M のホモロジー群**を作る：

$$H_q(C_\bullet;\, M) := \frac{\mathrm{Ker}\,\partial_q\big(C_q \otimes M \to C_{q-1} \otimes M\big)}{\mathrm{Im}\,\partial_{q+1}\big(C_{q+1} \otimes M \to C_q \otimes M\big)}$$

2.7.2 $\mathrm{Hom}_R(C_\bullet,\, M)$

$$\{C_q, \partial_q\}_q \longrightarrow \{\mathrm{Hom}_R(C_q\, M),\, \delta_q\}_q$$

なる対応は関手である．ただし準同型 δ は ∂ の双対である．あからさまには次の通り：

$$
\begin{gathered}
\delta\colon \mathrm{Hom}_R\, C_\bullet,\, M \to \mathrm{Hom}_R\,(C_\bullet,\, M),\\
(\delta f)(c) \coloneqq f(\partial c) \quad \forall f \in \mathrm{Hom}_R\,(C_\bullet,\, M),\ \forall c \in C_\bullet
\end{gathered}
$$

このとき，

$$
(\delta^2 f)(c) = f(\partial^2 c) = f(0) = 0
$$

なので，δ もまた複体である．しかし，次の 2 点に注意：

(1) δ は添字を増加させる方向に作用する．i.e.

$$
\delta\colon \mathrm{Hom}_R\,(C_q,\, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\,(C_{q+1},\, M)
$$

(2) この対応は**反変関手**である．$\forall M \in \mathrm{Ob}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ に対して $\mathrm{Hom}(\text{-},\, M)\colon \mathrm{Ob}(R\text{-}\mathbf{Mod})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ob}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ なる関手が反変関手だからである．

詳細は次章に譲るが，コホモロジーの定義はここから生じる．

定義 2.16: コホモロジー

$$
H^q(C_\bullet;\, M) \coloneqq \frac{\mathrm{Ker}\big(\delta\colon \mathrm{Hom}_R\,(C_q,\, M) \to \mathrm{Hom}_R\,(C_{q+1},\, M)\big)}{\mathrm{Im}\big(\delta\colon \mathrm{Hom}_R\,(C_{q-1},\, M) \to \mathrm{Hom}_R\,(C_q,\, M)\big)}
$$

は係数 $\boldsymbol{M}$ を持つ $(C_\bullet,\, \partial)$ **のコホモロジー**と呼ばれる．

2.8 Eilenberg-Steenrod 公理系

公理 2.1: ホモロジーの Eilenberg-Steenrod 公理系

ホモロジー理論は

$$H_\bullet \colon \{\text{pairs, ct. maps}\} \longrightarrow \{\text{graded } R \text{ modules, homomorphisms}\}$$

なる共変関手であって，以下の公理を充たすものである：

(ES-h1) 任意の空間対 $(X,\, A)$ および非負整数 $q \geq 0$ に対して**自然な**準同型

$$\partial \colon H_q(X,\, A) \longrightarrow H_{q-1}(A)$$

が存在して，包含写像 $i \colon A \hookrightarrow X,\ j \colon X \hookrightarrow (X,\, A)$ を用いて次のホモロジー長完全列が誘導される：

$$\cdots \to H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X,\, A) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(A) \to \cdots$$

(ES-h2) 2 つの連続写像 $f,\, g \colon (X,\, A) \to (Y,\, B)$ がホモトピックならば，誘導準同型 $f_*,\, g_* \colon H_q(X,\, A) \to H_q(Y,\, B)$ は

$$f_* = g_*$$

となる．

(ES-h3) $U \subset X$ かつ $\overline{U} \subset \mathrm{Int}(A)$ ならば，包含写像 $i \colon (X \setminus U,\, A \setminus U) \longrightarrow (X,\, A)$ が誘導する準同型

$$i_* \colon H_q(X \setminus U,\, A \setminus U) \longrightarrow H_q(X,\, A)$$

は $\forall q \geq 0$ に対して同型となる．

(ES-h4) $q \neq 0$ ならば $H_q(*) = 0$.

第 3 章

コホモロジーの定義

まず，純粋に代数的な準備をする．

補題 3.1: 分裂補題

左 R 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i_1} M \xrightarrow{p_2} M_2 \longrightarrow 0 \tag{3.0.1}$$

が与えられたとする．このとき，以下の二つは同値である：

(1) 左 R 加群の準同型 $i_2\colon M_2 \longrightarrow M$ であって $p_2 \circ i_2 = 1_{M_2}$ を充たすものが存在する
(2) 左 R 加群の準同型 $p_1\colon M \longrightarrow M_1$ であって $p_1 \circ i_1 = 1_{M_1}$ を充たすものが存在する

証明 **(1) $\Longrightarrow$ (2)** 写像

$$p_1'\colon M \longrightarrow M,\ x \longmapsto x - i_2\bigl(p_2(x)\bigr)$$

を定義すると，

$$p_2\bigl(p_1'(x)\bigr) = p_2(x) - ((p_2 \circ i_2) \circ p_2)(x) = p_2(x) - p_2(x) = 0$$

が成り立つ．従って，(3.0.1) が完全列であることを使うと $p_1'(x) \in \operatorname{Ker} p_2 = \operatorname{Im} i_1$ である．さらに i_1 が単射であることから

$$\exists ! y \in M_1,\ p_1'(x) = i_1(y)$$

が成り立つ．ここで写像

$$p_1\colon M \longrightarrow M_1,\ x \longmapsto y$$

を定義するとこれは準同型写像であり，$\forall x \in M_1$ に対して

$$p_1'\bigl(i_1(x)\bigr) = i_1(x) - (i_2 \circ (p_2 \circ i_1))(x) = i_1(x)$$

が成り立つ[*1]ことから

$$(p_1 \circ i_1)(x) = x$$

[*1] (3.0.1) が完全列であるため，$p_2 \circ i_1 = 0$

とわかる．i.e. $p_1 \circ i_1 = 1_{M_1}$

(1) $\Longleftarrow$ **(2)** (3.0.1) は完全列であるから $M_2 = \operatorname{Ker} 0 = \operatorname{Im} p_2$ である．従って $\forall x \in M_2 = \operatorname{Im} p_2$ に対して，$x = p_2(y)$ を充たす $y \in M$ が存在する．ここで写像

$$i_2 \colon M_2 \longrightarrow M,\ x \longmapsto y - i_1\bigl(p_1(y)\bigr)$$

は well-defined である．$x = p_2(y')$ を充たす勝手な元 $y' \in M$ をとってきたとき，$p_2(y - y') = 0$ より $y - y' \in \operatorname{Ker} p_2 = \operatorname{Im} i_1$ だから，i_1 の単射性から

$$\exists! z \in M_1, \quad y - y' = i_1(z)$$

が成り立ち，このとき

$$\Bigl(y - i_1\bigl(p_1(y)\bigr)\Bigr) - \Bigl(y' - i_1\bigl(p_1(y')\bigr)\Bigr) = i_1(z) - (i_1 \circ (p_1 \circ i_1))(z) = i_1(z) - i_1(z) = 0$$

とわかるからである．i_2 は準同型写像であり，$\forall x \in M_2$ に対して

$$(p_2 \circ i_2)(x) = p_2(y) - ((p_2 \circ i_1) \circ p_1)(y) = p_2(y) = x$$

なので $p_2 \circ i_2 = 1_{M_2}$.

■

系 3.1:

左 R 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i_1} M \xrightarrow{p_2} M_2 \longrightarrow 0$$

が補題 3.1 の条件を充たすならば

$$M \cong M_1 \oplus M_2$$

証明 補題 3.1 の条件 (1) が満たされているとする．このとき補題 3.1 証明から $\forall x \in M$ に対して

$$i_1\bigl(p_1(x)\bigr) = p_1'(x) = x - i_2\bigl(p_2(x)\bigr) \quad \Longleftrightarrow \quad i_1\bigl(p_1(x)\bigr) + i_2\bigl(p_2(x)\bigr) = x$$

また，完全列の定義から $p_2\bigl(i_1(x)\bigr) = 0$ であるから $\forall x \in M_2$ に対して

$$p_1'\bigl(i_2(x)\bigr) = i_2(x) - ((i_2 \circ p_2) \circ i_2)(x) = 0 = i_1(0)$$

であり，結局 $p_1\bigl(i_2(x)\bigr) = 0$ とわかる．

ここで準同型写像

$$\begin{aligned} f &\colon M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M,\ (x,\, y) \longmapsto i_1(x) + i_2(y), \\ g &\colon M \longrightarrow M_1 \oplus M_2,\ x \longmapsto \bigl(p_1(x),\, p_2(x)\bigr) \end{aligned}$$

を定めると

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x,\, y) &= \bigl(p_1(i_1(x)) + p_1(i_2(y)),\, p_2(i_1(x)) + p_2(i_2(x))\bigr) = (x,\, y), \\ (f \circ g)(x) &= i_1(p_1(x)) + i_2(p_2(x)) = x \end{aligned}$$

なので $f,\, g$ は同型写像. ■

定義 3.1: 分裂

左 R 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i_1} M \xrightarrow{p_2} M_2 \longrightarrow 0$$

が**分裂** (split) するとは，補題 3.1 の条件を充たすことをいう．

左 R 加群 N および左 R 加群の準同型 $f\colon M_1 \longrightarrow M_2$ に対して

$$f_*\colon \mathrm{Hom}_R(N,\, M_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N,\, M_2),\ \varphi \longmapsto f \circ \varphi$$
$$f^*\colon \mathrm{Hom}_R(M_2,\, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M_1,\, N),\ \varphi \longmapsto \varphi \circ f$$

とおく．f_*, f^* は $\mathbb{Z}$ 加群の準同型である．

命題 3.1:

(1) $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$ を左 R 加群の完全列，N を左 R 加群とすると，$\mathbb{Z}$ 加群[a]の完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N,\, M_1) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(N,\, M_2) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(N,\, M_3)$$

が成り立つ．

(2) $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$ を左 R 加群の完全列，N を左 R 加群とすると，$\mathbb{Z}$ 加群の完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M_3,\, N) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(M_2,\, N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(M_3,\, N)$$

が成り立つ．

(3) $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$ を**分裂する**左 R 加群の完全列，N を左 R 加群とすると，$\mathbb{Z}$ 加群の完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N,\, M_1) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(N,\, M_2) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(N,\, M_3) \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M_3,\, N) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(M_2,\, N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(M_1,\, N) \longrightarrow 0$$

が成り立つ．

[a] i.e. 和について可換群

証明 (1) まず，$\varphi \in \mathrm{Ker}\, f_* \iff f \circ \varphi = 0$ かつ f は単射なので $\mathrm{Ker}\, f_* \subset \mathrm{Im}\, 0$ である[*2]．$\mathrm{Ker}\, f_* \supset \mathrm{Im}\, 0$ は明らかであり，$\mathrm{Ker}\, f_* = \mathrm{Im}\, 0$ が言えた．

次に，$g \circ f = 0$ なので

$$\psi \in \mathrm{Im}\, f_* \iff \exists \alpha \in \mathrm{Hom}_R(N,\, M_1),\ \psi = f \circ \alpha \implies g_*(\psi) = g \circ f \circ \alpha = 0$$

が成り立ち，$\mathrm{Ker}\, g_* \supset \mathrm{Im}\, f_*$ がわかる．また，

$$\psi \in \mathrm{Ker}\, g_* \iff g \circ \psi = 0 \implies \mathrm{Im}\, \psi \subset \mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Im}\, f$$

[*2] $f\colon M_1 \to M_2$ は単射だから $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$．故に $\forall x \in N$ に対して $f\big(\varphi(x)\big) = 0 \iff \varphi(x) \in \mathrm{Ker}\, f = \{0\}$．i.e. $\varphi = 0$

が成り立つ．f は単射だから[*3]

$$\exists\beta \in \mathrm{Hom}_R\,(N,\, M_2), \quad \psi = f\circ\beta = f_*(\beta) \in \mathrm{Im}\, f_*$$

が成り立つ．i.e. $\mathrm{Ker}\, g_* \subset \mathrm{Im}\, f_*$ である．

(2)　まず，$\varphi \in \mathrm{Ker}\, g^* \iff \varphi\circ g = 0$ かつ g が全射なので $\mathrm{Ker}\, g_* \subset \mathrm{Im}\, 0$ である[*4]．$\mathrm{Ker}\, g^* \supset \mathrm{Im}\, 0$ は自明なので $\mathrm{Ker}\, g^* = \mathrm{Im}\, 0$ が言えた．

次に，$g\circ f = 0$ より

$$\psi \in \mathrm{Im}\, g^* \iff \exists\alpha \in \mathrm{Hom}_R\,(M_3,\, N),\ \psi = \alpha\circ g \implies f^*(\psi) = \alpha\circ g\circ f = 0$$

が成り立ち，$\mathrm{Ker}\, f^* \supset \mathrm{Im}\, g^*$ がわかる．また，

$$\psi \in \mathrm{Ker}\, f^* \iff \psi\circ f = 0 \implies \psi(\mathrm{Im}\, f) = 0$$

より $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, \psi$ であるから，商加群の普遍性より次の可換図式が成り立つ[*5]：

$$\begin{tikzcd}
M_2 \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "g"'] & N \\
M_2/\,\mathrm{Im}\, f \cong M_3 \arrow[ur, "\exists! h"'] &
\end{tikzcd}$$

i.e. $\psi = h\circ g = g^*(h) \in \mathrm{Im}\, g^*$ であり，$\mathrm{Ker}\, f^* \subset \mathrm{Im}\, g^*$ がわかった．

(3)　与えられた完全列が分裂するので，

$$\exists i_2 \in \mathrm{Hom}_R\,(M_3,\, M_2),\ g\circ i_2 = 1_{M_3}$$
$$\exists p_1 \in \mathrm{Hom}_R\,(M_2,\, M_1),\ p_1\circ f = 1_{M_1}$$

である．故に

$$g_*\circ i_{2*} = (g\circ i_2)_* = 1_{M_3 *} = 1_{\mathrm{Hom}_R\,(N,\, M_3)}$$
$$f^*\circ {p_1}^* = (p_1\circ f)^* = {1_{M_1}}^* = 1_{\mathrm{Hom}_R\,(M_1,\, N)}$$

なので，$\forall\varphi \in \mathrm{Hom}_R\,(N,\, M_3)$, $\forall\psi \in \mathrm{Hom}_R\,(M_1,\, N)$ に対して

$$\varphi = g_*\big(i_{2*}(\varphi)\big) \in \mathrm{Im}\, g_*$$
$$\psi = f^*\big({p_2}^*(\psi)\big) \in \mathrm{Im}\, f^*$$

が成り立つ．i.e. $\mathrm{Im}\, g_* = \mathrm{Ker}\, 0$, $\mathrm{Im}\, f^* = \mathrm{Ker}\, 0$ である．

残りは (1), (2) から従う．

■

[*3] したがって $\forall x \in N$ に対して $\exists! y \in \mathrm{Im}\, f \subset M_2$, $\psi(x) = f(y)$ であり，写像 $\beta\colon N \to M_2$, $x \mapsto y$ は well-defined.

[*4] $g\colon M_2 \to M_3$ が全射なので $\forall x \in M_3$, $\exists y \in M_2$, $x = g(y)$．故に $\varphi(x) = (\varphi\circ g)(y) = 0$． i.e. $\varphi = 0$.

[*5] $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$ が完全列なので $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, g$ かつ $M_3 = \mathrm{Im}\, g$．よって準同型定理から $M_2/\,\mathrm{Im}\, f = M_2/\,\mathrm{Ker}\, g \cong M_3$.

一般のコチェイン複体を定義する．

定義 3.2: コチェイン複体

R を可換環とする．加群と準同型の族 $C^\bullet = \{C^q,\, \delta^q\colon C^q \to C^{q+1}\}_{q\geq 0}$ が ***R* コチェイン複体**であるとは，$\forall q \geq 0$ について C^q が R-加群，δ^q が R 準同型であって

$$\delta^{q+1}\delta^q = 0$$

が成り立つことを言う．

- δ^q を**余境界写像** (coboundary map) と呼ぶ．
- C^q の部分加群

$$Z^q(C^\bullet) \coloneqq \mathrm{Ker}\big(\delta^q\colon C^q \to C^{q+1}\big)$$

  を**第 q コサイクル群**，その元を **q-コサイクル** (q-cocycle),
- C^q の部分加群

$$B^q(C^\bullet) \coloneqq \mathrm{Im}\big(\delta^{q-1}\colon C^{q-1} \to C^q\big)$$

  を**第 q コバウンダリー群**，その元を **q-コバウンダリー** (q-coboundary) と呼ぶ．

3.1 コチェイン写像

$C^\bullet = \{C^q,\, \delta^q\}_{q\geq 0}$, $D^\bullet = \{D^q,\, \delta'^q\}_{q\geq 0}$ をチェイン複体とする．

定義 3.3: コチェイン写像

準同型 $f_q\colon C^q \to D^q$ の族 $f_\bullet \coloneqq \{f_q\}_{q\geq 0}$ が**コチェイン写像** (cochain map) であるとは，$\forall q \geq 0$ に対して

$$\delta'^q \circ f_q = f_{q+1} \circ \delta^q$$

が成り立つことを言う．i.e. 図式 3.1 が可換になると言うこと．

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\delta^{q-2}"] & C^{q-1} \arrow[r, "\delta^{q-1}"] \arrow[d, "f_{q-1}"] & C^q \arrow[r, "\delta^q"] \arrow[d, "f_q"] & C^{q+1} \arrow[r, "\delta^{q+1}"] \arrow[d, "f_{q+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\delta'^{q-2}"] & D^{q-1} \arrow[r, "\delta'^{q-1}"] & D^q \arrow[r, "\delta'^q"] & D^{q+1} \arrow[r, "\delta'^{q+1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

図 3.1: コチェイン写像

補題 3.2:

$\forall q \geq 0$ について以下が成り立つ：

$$
\begin{aligned}
f_q\bigl(Z^q(C^\bullet)\bigr) \subset Z^q(D^\bullet) \\
f_q\bigl(B^q(C^\bullet)\bigr) \subset B^q(D^\bullet)
\end{aligned}
$$

<u>**証明**</u> 一つ目は

$$
\begin{aligned}
z \in Z^q(C^\bullet) = \operatorname{Ker}\delta^q \quad &\Longleftrightarrow \quad \delta^q(z) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \delta'^q\bigl(f_q(z)\bigr) = f_{q+1}\bigl(\delta^q(z)\bigr) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad f_q(z) \in Z^q(D^\bullet) = \operatorname{Ker}\delta'^q
\end{aligned}
$$

二つ目は

$$
\begin{aligned}
b \in B^q(C^\bullet) = \operatorname{Ker}\delta^q \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists\beta \in C^{q-1},\ b = \delta^{q-1}(\beta) \\
&\Longrightarrow \quad f_q(b) = \delta'^{q-1}\bigl(f_{q-1}(\beta)\bigr) \in B^q(D^\bullet) = \operatorname{Im}\delta'^{q-1}
\end{aligned}
$$

■

いま，コチェイン写像 $f_\bullet \coloneqq \bigl\{f_q \colon C^q \to D^q\bigr\}_{q\geq 0}$ を与える．標準射影を

$$
\pi\colon Z^q(D^\bullet) \to Z^q(D^\bullet)/B^q(D^\bullet), z \mapsto [z] = z + B^q(D^\bullet)
$$

とおくと，補題 3.2 から

$$
(\pi \circ f_q)\bigl(B^q(C^\bullet)\bigr) \subset \pi\bigl(B^q(D^\bullet)\bigr) = \{0_{Z^q(D^\bullet)/B^q(D^\bullet)}\}
$$

が成り立つ．i.e. $B^q(C^\bullet) \subset \operatorname{Ker}\pi \circ f_q$ である．よって商加群の普遍性から，次のような可換図式を書くことができる：

$$
\begin{tikzcd}
Z^q(C^\bullet) \arrow[r, "f_q"] \arrow[d, "p"'] & Z^q(D^\bullet) \arrow[r, "\pi"] & Z^q(D^\bullet)/B^q(D^\bullet) \\
Z^q(C^\bullet)/B^q(C^\bullet) \arrow[ru, dashed, "\exists!\overline{f_q}"] \arrow[rru, dashed, "\exists!\overline{\pi\circ f_q}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

図 3.2: 誘導準同型

定義 3.4: コチェイン写像による誘導準同型

図式 3.2 中の赤字で示した準同型は**誘導準同型** (induced homomorphism) と呼ばれ，コホモロジー群の間の準同型を定める：

$$
f_* \coloneqq \overline{\pi \circ f_q}\colon H^q(C^\bullet) \to H^q(D^\bullet),\ [z] \mapsto [f_q(z)]
$$

3.2　特異コホモロジー

しばらくの間 $\mathbb{Z}$ 加群 M を一つ取って固定する．

定義 3.5: 特異 q コチェイン

位相空間 X および $\forall q \geq 0$ に対して

$$S^q(X;\, M) \coloneqq \mathrm{Hom}\big(S_q(X),\, M\big)$$

と定義される $S^q(X;\, M)$ の元は**特異 q コチェイン** (sigular q-cochain) と呼ばれる．

双線型写像

$$\langle\ ,\ \rangle \colon S^q(X;\, M) \times S_q(X) \to M,\ (u,\, c) \mapsto u(c)$$

は **Kronecker pairing** と呼ばれる．

定義 3.6: 特異コチェインの余境界写像

境界写像 $\partial_{q+1} \colon S_{q+1}(X) \to S_q(X)$ の双対写像を

$$\delta^q \colon S^q(X;\, M) \to S^{q+1}(X;\, M),\ u \mapsto u \circ \partial_{q+1}$$

と書く．

定義より以下が成り立つ：

$$\langle \delta^q u,\, c\rangle = \langle u,\, \partial_{q+1} c\rangle$$

前節の議論により

$$\delta^q \delta^{q-1} = 0$$

は分かっている．これは

$$\mathrm{Im}\,\delta^{q-1} \subset \mathrm{Ker}\,\delta^q$$

を意味するので,

$$Z^q\big(S^\bullet(X;\, M)\big) \coloneqq \mathrm{Ker}\,\delta^q$$
$$B^q\big(S^\bullet(X;\, M)\big) \coloneqq \mathrm{Im}\,\delta^{q-1}$$

と書くと次のような構成ができる：

定義 3.7: 特異コホモロジー

族 $\big\{S^q(X;\, M),\, \delta^q\big\}_{q\geq 0}$ は位相空間 X の**特異コチェイン複体** (singular cochain complex) と呼ばれ，そのコホモロジーは

$$H^q(X;\, M) \coloneqq Z^q\big(S^\bullet(X;\, M)\big) / B^q\big(S^\bullet(X;\, M)\big)$$

と書かれる．$H^q(X;\, M)$ は $\mathbb{Z}$ 加群 M に値を持つ X の**特異コホモロジー群** (singular cohomology group with coefficients in the $\mathbb{Z}$ module M) と呼ばれる．

3.2.1 Kronecker 写像

Kronecker pairing は双線型写像

$$\langle\ ,\ \rangle\colon H^q(X;\, M) \times H_q(X) \to M,\ ([u],\, [z]) \mapsto u(z) \tag{3.2.1}$$

を誘導する．

補題 3.3:

上で定義した写像 $\langle\ ,\ \rangle\colon H^q(X;\, M) \times H_q(X) \to M$ は well-defined である．

<u>**証明**</u> $\forall f \in S^{q-1}(X;\, M),\ \forall c \in S_{q+1}(X)$ に対して

$$\begin{aligned} u + \delta^{q-1} f &\in [u] = u + \operatorname{Im} \delta^{q-1}, \\ z + \partial_{q+1} c &\in [z] = z + \operatorname{Im} \partial_{q+1} \end{aligned}$$

である．これらの pairing を計算すると

$$\begin{aligned} (u + \delta^{q-1} f)(z + \partial_{q+1} c) &= (u + f\partial_q)(z + \partial_{q+1} c) \\ &= u(z) + f\big(\partial_q z\big) + u\big(\partial_{q+1} c\big) + \partial_q \partial_{q+1} c \\ &= u(z) + f\big(\partial_q z\big) + (\delta^q u)(c) \end{aligned}$$

$u \in \operatorname{Ker} \delta^q,\ z \in \operatorname{Ker} \partial_q$ なので結局

$$(u + \delta^{q-1} f)(z + \partial_{q+1} c) = u(z)$$

が従う． ■

定義 3.8: Kronecker 写像

(3.2.1) の双線型写像が定める準同型

$$\kappa\colon H^q(X;\, M) \to \operatorname{Hom}\big(H_q(X),\, M\big),\ [u] \mapsto \langle [u],\, \text{-} \rangle$$

を **Kronecker 写像** (Kronecker map) と呼ぶ．

3.2.2 関手性

$f \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\, Y)$ をとる．補題 2.9 より，f はチェイン写像

$$f_*\colon S_\bullet(X) \longrightarrow S_\bullet(Y)$$

を誘導した．

一方，

$$f^*\colon S^q(Y;\, M) \longrightarrow S^q(X;\, M),\ u \longmapsto u \circ f_*$$

という準同型も考えられる．f_* がチェイン写像であることから

$$
\begin{aligned}
(\delta^q \circ f^*)(u) &= f^*(u) \circ \partial_{q+1} \\
&= u \circ (f_* \circ \partial_{q+1}) \\
&= (u \circ \partial'_{q+1}) \circ f_* \\
&= f^*(u \circ \partial'_{q+1}) \\
&= (f^* \circ \delta'^q)(u)
\end{aligned}
$$

が成立するので f^* はコチェイン写像の要件を充たす．従ってコチェイン写像による誘導準同型を考えることができる：

$$
f^* \colon H^q(Y;\, M) \longrightarrow H^q(X;\, M),\ [u] \mapsto [f^*(u)]
$$

$\forall [u] \in H^q(Y;\, M),\ [z] \in H_q(X)$ に対して

$$
\begin{aligned}
\langle f^*[u],\, [z] \rangle &= \langle [f^* u],\, [z] \rangle \\
&= (f^* \circ u)(z) \\
&= (u \circ f_*)(z) \\
&= u\bigl(f_*(z)\bigr) \\
&= \langle [u],\, f_*[z] \rangle
\end{aligned}
$$

が成り立つ．この意味で f^* は f_* の一種の双対写像であると言える．

命題 3.2: コホモロジーの関手性

H^q は位相空間の圏 $\mathbf{Top}$ から $\mathbb{Z}$ 加群の圏 $\mathbb{Z}$-$\mathbf{Mod}$ への**反変**関手となる．i.e. $\forall X,\, Y,\, Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ と $\forall q \geq 0$ に対して以下が成り立つ：

(1) 恒等写像 $1_X \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\, X)$ について

$$
(1_X)^* = 1_{H^q(X;\, M)} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}}\bigl(H^q(X;\, M),\, H^q(X;\, M)\bigr)
$$

(2) 連続写像 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\, Y),\ g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Y,\, Z)$ について

$$
(g \circ f)^* = f^* \circ g^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}}\bigl(H^q(Z;,\, M),\, H_q(X;\, M)\bigr)
$$

3.3 コホモロジーの Eilenberg-Steenrod 公理系

公理 3.1: コホモロジーの Eilenberg-Steenrod 公理系

コホモロジー理論は

$$H^\bullet\colon \{\text{pairs, ct. maps}\} \longrightarrow \{\text{graded } R \text{ modules, homomorphisms}\}$$

なる反変関手であって，以下の公理を充たすものである：

(ES-ch1) 任意の空間対 $(X,\, A)$ および非負整数 $q \geq 0$ に対して**自然な**準同型

$$\delta\colon H^q(A) \longrightarrow H^{q+1}(X,\, A)$$

が存在して，包含写像 $i\colon A \hookrightarrow X,\ j\colon X \hookrightarrow (X,\, A)$ を用いて次のホモロジー長完全列が誘導される：

$$\cdots \to H^{q-1}(A) \xrightarrow{\delta} H^q(X,\, A) \xrightarrow{j^*} H_q(X) \to \cdots$$

(ES-ch2) 2 つの連続写像 $f,\, g\colon (X,\, A) \to (Y,\, B)$ がホモトピックならば，誘導準同型 $f^*,\, g^*\colon H^q(Y,\, B) \to H^q(X,\, A)$ は

$$f^* = g^*$$

となる．

(ES-h3) $U \subset X$ かつ $\overline{U} \subset \mathrm{Int}(A)$ ならば，包含写像 $i\colon (X \setminus U,\, A \setminus U) \longrightarrow (X,\, A)$ が誘導する準同型

$$i^*\colon H^q(X,\, A) \longrightarrow H^q(X \setminus U,\, A \setminus U)$$

は $\forall q \geq 0$ に対して同型となる．

(ES-h4) $q \neq 0$ ならば $H^q(*) = 0$.

第 4 章

ホモロジー代数

この章の主目標は普遍係数定理を証明することである．**単項イデアル整域** (principal ideal domain; PID) が重要となる．

まず，環 R の部分集合 $I \subset R$ が

(1) $0 \in I$

(2) $x, y \in I \implies x + y \in I$

(3) $a \in R,\ x \in I \implies ax \in I$ (resp. $xa \in I$)

を充たすとき，I は**左 (resp. 右) イデアル**であると言う[*1]．部分集合 $S = \{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset R$ を含む最小の左 (resp. 右) イデアル

$$\left\{ \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda x_\lambda \,\middle|\, a_\lambda \in R,\ \text{有限個を除く } \lambda \in \Lambda \text{ に対して } a_\lambda = 0 \right\}$$

のことを S の生成する R の左 (resp. 右) イデアルと呼び，一つの元で生成される**可換環** R のイデアルを**単項イデアル** (principal ideal) と呼ぶ．

定義 4.1: 単項イデアル整域

- 零環でない環 R が**整域** (integral domain) であるとは，

$$a, b \in R,\ ab = 0 \implies a = 0 \text{ または } b = 0$$

が成り立つことを言う．

- 任意のイデアルが単項イデアルである（可換）整域を**単項イデアル整域**と呼ぶ．

命題 4.1: 単項イデアル整域上の自由加群

R を単項イデアル整域とするとき，R 上の自由加群の任意の部分加群は自由加群である．

証明 $R^{\oplus \Lambda}$ の部分加群 M を任意にとる．

[*1] R が可換環のときは左右の区別はないので単に**イデアル**と呼ぶ．

まず，Λ の任意の部分集合 $I \subset I' \subset \Lambda$ に対して自然な単射準同型

$$
\begin{aligned}
&i_{II'}\colon R^{\oplus I} \longrightarrow R^{\oplus I'},\ \bigl(x_i\bigr)_{i\in I} \longmapsto \bigl(y_{i'}\bigr)_{i'\in I'},\\
&\text{w/}\quad y_{i'} \coloneqq \begin{cases} x_{i'}, & i' \in I \\ 0, & i' \notin I \end{cases}
\end{aligned}
$$

が存在する．以降では $i_{I\Lambda}\colon R^{\oplus I} \longrightarrow R^{\oplus \Lambda}$ によって $R^{\oplus I}$ を $R^{\oplus \Lambda}$ の部分加群と見做す．

次に，集合 $\mathcal{S} \subset 2^{\Lambda} \times 2^{M}$ を次のように定義する：$\forall (I,\, J) \in \mathcal{S}$ は

(1)

$$
J \subset M \cap R^{\oplus I}
$$

(2) 準同型写像

$$
f_J\colon R^{\oplus J} \longrightarrow M \cap R^{\oplus I},\ \bigl(x_j\bigr)_{j\in J} \longmapsto \sum_{j\in J} x_j j \tag{4.0.1}
$$

は同型写像となる

を充たすとする．そして $\mathcal{S}$ の上の順序関係 $\le$ を

$$
(I,\, J) \le (I',\, J') \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} I \subset I' \text{ かつ } J \subset J'
$$

で定義する．このとき $(\mathcal{S},\, \le)$ は順序集合で，かつ $(\emptyset,\, \emptyset) \in \mathcal{S}$ なので $\mathcal{S}$ は空でない．

補題 4.1:

順序集合 $(\mathcal{S},\, \le)$ は帰納的順序集合である，i.e. $\mathcal{S}$ の任意の全順序部分集合 $\mathcal{S}' \coloneqq \bigl\{(I_\sigma,\, J_\sigma)\bigr\}_{\sigma\in\Sigma}$ が上限を持つ．

証明 $I \coloneqq \bigcup_{\sigma\in\Sigma} I_\sigma,\ J \coloneqq \bigcup_{\sigma\in\Sigma} J_\sigma$ とおくと，明らかに $I \in 2^{\Lambda},\ J \in 2^{M}$ である．条件 (1) より $J_\sigma \subset M \cap R^{\oplus I_\sigma}$ で，かつ

$$
f_{J_\sigma}\colon R^{\oplus J_\sigma} \longrightarrow M \cap R^{\oplus I_\sigma},\ \bigl(x_j\bigr)_{j\in J_\sigma} \longmapsto \sum_{j\in J_\sigma} x_j j
$$

は同型写像となる．これらの $\sigma \in \Sigma$ に関する和集合をとると $J = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \subset M \cap R^{\oplus I}$ かつ

$$
f_J\colon R^{\oplus J} \longrightarrow M \cap \{R\}_I,\ \bigl(x_j\bigr)_{j\in J} \longmapsto \sum_{j\in J} x_j j
$$

は同型写像となる．故に $(I,\, J) \in \mathcal{S}$ であり，これが $\mathcal{S}'$ の上界を与える． ■

この補題から $(\mathcal{S},\, \le)$ に対して Zorn の補題を適用でき，極大元 $(I_0,\, J_0) \in \mathcal{S}$ の存在が言える．$I_0 = \Lambda$ ならば性質 (2) から $M \cong R^{\oplus J_0}$ が言えるので題意が示されたことになる．

$I_0 \subsetneq \Lambda$ を仮定する．仮定より $\mu \in \Lambda \setminus I_0$ をとることができる．$I_1 \coloneqq I_0 \cup \{\mu\}$ とおくと，μ 成分への標準的射影 $p_\mu\colon R^{\oplus I_1} \longrightarrow R$ を用いた完全列

$$
0 \longrightarrow R^{\oplus I_0} \xrightarrow{i_{I_0 I_1}} R^{\oplus I_1} \xrightarrow{p_\mu} R \longrightarrow 0
$$

が成り立つ．ここからさらに完全列

$$0 \longrightarrow M \cap R^{\oplus I_0} \xrightarrow{i_{I_0 I_1}} M \cap R^{\oplus I_1} \xrightarrow{p_\mu} (M \cap R^{\oplus I_1}) \longrightarrow 0 \tag{4.0.2}$$

が誘導されるが，$p_\mu(M \cap R^{\oplus I_1})$ は R の部分加群，i.e. イデアルなので，**R が単項イデアル整域**であることから，ある $a \in R$ を用いて Ra という形にかける．

$a = 0$ の場合　$p_\mu(M \cap R^{\oplus I_1}) = 0$ なので，(4.0.2) の完全性から $M \cap R^{\oplus I_0} \cong M \cap R^{\oplus I_1}$ となる．このとき $I_0 \subsetneq I_1$ かつ $(I_1, J_0) \subset \mathcal{S}$ となり (I_0, J_0) の極大性に矛盾．

$a \neq 0$ の場合　$p_\mu(M \cap R^{\oplus I_1}) = Ra$ の勝手な元は $x \in R$ を用いて xa と一意的に書ける．従って $p_\mu(b) = a$ を充たす $b \in M \cap R^{\oplus I_1}$ を一つ固定すると，

$$i\colon Ra \longrightarrow M \cap R^{\oplus I_1},\ xa \longmapsto xb$$

と定義した写像 i は well-defined．このとき $p_\mu\bigl(i(xa)\bigr) = p_\mu(xb) = xa$ が成立するので完全列 (4.0.2) は分裂する．従って系 3.1 から同型写像

$$g\colon (M \cap R^{\oplus I_0}) \oplus Ra \longrightarrow M \cap R^{\oplus I_1},\ (m,\, xa) \longmapsto i_{I_0 I_1}(m) + i(xa) = i_{I_0 I_1}(m) + xb$$

を得る．

ここで $J_1 := J_0 \cup \{b\}$ とおき，同型写像 $h'\colon R \longrightarrow Ra,\ x \longmapsto xa$ を定める．このとき

$$h := f_{J_0} \oplus h'\colon R^{\oplus J_1} = R^{\oplus J_0} \oplus R^{\oplus \{b\}} \longrightarrow (M \cap R^{\oplus I_0}) \oplus Ra$$

は同型写像で，定義 (4.0.1) から

$$\begin{aligned} g\Bigl(h\bigl((x_j)_{j\in J_0},\, x_b\bigr)\Bigr) &= g\Bigl(f_{J_0}\bigl((x_j)_{j\in J_0}\bigr),\, x_b a\Bigr) \\ &= f_{J_0}\bigl((x_j)_{j\in J_0}\bigr) + x_b b \\ &= f_{J_1}\Bigl(\bigl((x_j)_{j\in J_0},\, x_b\bigr)\Bigr) \end{aligned}$$

となる．よって $f_{J_1}\colon R^{\oplus J_1} \longrightarrow M \cap R^{\oplus I_1}$ が同型写像となって (2) が充たされ，$I_0 \subsetneq I_1$, $J_0 \subsetneq J_1$ かつ $(I_1, J_1) \in \mathcal{S}$ となって (I_0, J_0) の極大性に矛盾する．

以上より，背理法から $I_0 = \Lambda$ が言えて証明が完了する．■

自由加群に関する次の命題は単純だが，後で使う：

命題 4.2:

任意の左 R 加群 M に対して，ある自由加群から M への全射準同型写像が存在する[a]．

[a] 後にのべるように自由加群は射影的加群なので，特にある射影的加群から M への全射準同型写像が存在する．さらに射影的加群は平坦加群なので，ある平坦加群から M への全射準同型写像が存在する．

証明　$R^{\oplus M}$ は自由加群であり，

$$f\colon R^{\oplus M} \longrightarrow M,\ \bigl(a_m\bigr)_{m\in M} \longmapsto \sum_{m\in M} a_m m$$

は全射準同型写像である．■

4.1 諸定義

4.1.1 射影的加群

定義 4.2: 射影的加群

左 R 加群 P が**射影的加群** (projective module) であるとは，任意の左 R 加群の**全射準同型** $f\colon M \longrightarrow N$ および任意の準同型写像 $g\colon P \longrightarrow N$ に対し，左 R 加群の準同型写像 $h\colon P \longrightarrow M$ であって $f \circ h = g$ を充たすものが存在することを言う（図式 4.1）．

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed, "\exists h"'] \\ M \arrow[r, two heads, "f"] & N \end{tikzcd}$$

図 4.1: 射影的加群

命題 4.3:

左 R 加群の完全列

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

は，N が射影的加群ならば分裂する．

証明 射影的加群の定義において $P = N$ とすることで，左 R 加群の準同型写像 $s\colon N \longrightarrow M$ であって $g \circ s = 1_N$ を充たすものが存在する． ■

命題 4.4: 射影的加群の直和

左 R 加群の族 $\{P_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して以下の 2 つは同値：

(1) $\forall\lambda \in \Lambda$ に対して P_λ が射影的加群

(2) $\displaystyle\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$ が射影的加群

証明 標準的包含を $\iota_\lambda\colon P_\lambda \hookrightarrow \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$ と書く．

(1)⟹(2) 仮定より，$\forall\lambda \in \lambda$ に対して，任意の全射準同型写像 $f\colon M \longrightarrow N$ および任意の準同型写像 $g\colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \longrightarrow N$ に対して，準同型写像 $h_\lambda\colon P_\lambda \longrightarrow M$ であって $f \circ h_\lambda = g \circ \iota_\lambda$ を充たすものが存在する．従って直和の普遍性より準同型写像

$$h\colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \longrightarrow M$$

であって $f \circ h_\lambda = h \circ \iota_\lambda$ を充たすものが一意的に存在する．このとき

$$(f \circ h) \circ \iota_\lambda = f \circ h_\lambda = g \circ \iota_\lambda$$

であるから，h の一意性から $f \circ h = g$.

(1)⟸(2) $\lambda \in \Lambda$ を一つ固定し，任意の全射準同型写像 $f\colon M \longrightarrow N$ および任意の準同型写像 $g\colon P_\lambda \longrightarrow M$ を与える．直和の普遍性より準同型写像

$$h\colon \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda \longrightarrow N$$

であって $h \circ \iota_\lambda = g$（$\forall \mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\},\ h \circ \iota_\lambda = 0$）を充たすものが一意的に存在する．さらに仮定より，準同型写像

$$\alpha\colon \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \longrightarrow M$$

であって $f \circ \alpha = h$ を充たすものが存在する．このとき

$$f \circ (\alpha \circ \iota_\lambda) = h \circ \iota_\lambda = g$$

なので $\beta := h \circ \iota_\lambda$ とおけば良い．

■

系 4.1: 自由加群は射影的加群

環 R 上の自由加群は射影的加群である

証明 R が射影的加群であることを示せば命題??より従う．

左 R 加群の全射準同型写像と準同型写像 $f\colon M \longrightarrow N,\ g\colon R \longrightarrow N$ を任意に与える．このときある $x \in M$ が存在して $f(x) = g(1)$ となる．この x に対して準同型写像 $h\colon R \longrightarrow M,\ a \longmapsto ax$ を定めると，$\forall a \in R$ に対して

$$f\bigl(h(a)\bigr) = f(ax) = af(x) = ag(1) = g(a)$$

が成り立つので $f \circ h = g$ となる． ■

命題 4.5:

左 R 加群 P について，次の 3 条件は同値である：

(1) P は射影的加群

(2) 左 R 加群 Q であって $P \oplus Q$ が自由加群になるものが存在する

(3) 任意の左 R 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

に対して，図式

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P,\ M_1) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(P,\ M_2) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(P,\ M_3) \longrightarrow 0 \tag{4.1.1}$$

は完全列である．

__証明__ **(1)** $\implies$ **(2)** 全射準同型

$$
f\colon R^{\oplus P} \longrightarrow P,\ \left(a_p\right)_{p\in P} \longmapsto \sum_{p\in P} a_p p
$$

を考える．$Q \coloneqq \mathrm{Ker}\, f$ とおくと，図式

$$
0 \longrightarrow Q \longrightarrow R^{\oplus P} \xrightarrow{f} P \longrightarrow 0
$$

は完全列になるが，命題 4.3 よりこれは分裂する．従って命題 3.1 より

$$
P \oplus Q \cong R^{\oplus P}
$$

(2) $\implies$ **(1)** 命題 4.4, 4.1 より明らか.

(1) $\iff$ **(3)** 命題 3.1 より図式 (4.1.2) の g_* の全射性のみ確認すれば良い．i.e. (3) は任意の全射準同型写像 $g\colon M_2 \longrightarrow M_3$ と任意の準同型写像 $\varphi\colon P \longrightarrow M_3$ に対してある準同型写像 $\psi\colon P \longrightarrow M_2$ であって $g_*(\psi) = g\circ\psi = \varphi$ を充たすものが存在することと同値．このことは P が射影的加群であることに他ならない．

■

R が PID のときは嬉しいことが起こる：

系 4.2:

R が単項イデアル整域ならば,
R 加群 P が射影的加群 $\iff$ R が自由加群

__証明__ $\implies$ 命題 4.1 より明らか.

$\impliedby$ 命題 4.5 より，ある R 加群 Q が存在して $P \bigoplus Q$ が自由加群になるので P は自由加群の部分加群と同型である．R が PID なので命題 4.1 より P は自由加群.

■

4.1.2 単射的加群

次に，**単射的加群**の定義をする：

定義 4.3: 単射的加群

左 R 加群 I が**単射的加群** (injective module) であるとは, 任意の左 R 加群の**単射準同型** $f\colon M \longrightarrow N$ および任意の準同型写像 $g\colon M \longrightarrow I$ に対し，左 R 加群の準同型写像 $h\colon N \longrightarrow I$ であって $h\circ f = g$ を充たすものが存在することを言う（図式 4.2).

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[dl, dashed, "\exists h"] \\
I &
\end{tikzcd}
$$

図 4.2: 単射的加群

命題 4.6:

左 R 加群の完全列

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

は，L が単射的加群ならば分裂する．

証明 単射的加群の定義において $I = L$ とすれば良い． ■

命題 4.7:

左 R 加群 P について，次の 2 条件は同値である：

(1) I は単射的加群

(2) 任意の左 R 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

に対して，図式

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M_3, I) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(M_2, I) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(M_1, I) \longrightarrow 0 \tag{4.1.2}$$

は完全列である．

証明 命題 3.1 より，f^* の全射性のみ確認すれば良い．(2) は任意の単射準同型写像 $f\colon M_1 \longrightarrow M_2$ および任意の準同型写像 $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M_1, I)$ に対して，ある $\psi \in \mathrm{Hom}_R\ M_2, I$ が存在して $\psi \circ f = \varphi$ を充たすことと同値であるが，これは単射的加群の定義そのものである． ■

定義 4.4: 非零因子

環 R の元 $a \in R$ が**非零因子** (non zero-diviser) であるとは，$\forall x \in R\setminus\{0\}$ に対して $ax \neq$ かつ $xa \neq 0$ であることを言う．

定義 4.5: 可除加群

左 R 加群 M が**可除加群** (divisable module) であるとは，$\forall x \in M$ と任意の R の非零因子 a に対して

$$\exists y \in M,\ ay = x$$

が成立することを言う．

命題 4.8:

環 R 上の単射的加群は可除加群である．

証明 環 R 上の単射的加群 I を任意にとり，$\forall x \in I$ および任意の R の非零因子 a を一つ固定する．このとき写像

$$f\colon R \longrightarrow R,\ b \longmapsto ba$$

は左 R 加群 R の単射準同型写像である．ここで左 R 加群の準同型写像 $g\colon R \longrightarrow I,\ b \longmapsto bx$ を考えると，I が単射的加群であることからある準同型写像 $h\colon R \longrightarrow I$ であって $h \circ f = g$ を充たすものが存在する．故に

$$x = g(1) = h\bigl(f(1)\bigr) = h(a) = ah(1)$$

となり，I は可除加群である． ■

R が PID のときは同値になる：

> **命題 4.9:**
>
> R が単項イデアル整域ならば，R 上の可除加群は単射的加群である．

命題 4.9 は Zorn の補題を使って証明する．

> **命題 4.10:**
>
> R を環とする．任意の左 R 加群 M に対して，M からある単射的加群への単射準同型写像が存在する．

この命題の証明において，単射的 $\mathbb{Z}$ 加群 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ が主要な役割を果たす．

証明

> **補題 4.2:**
>
> 右 R 加群 P が射影的加群であるとき，左 R 加群 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ は単射的加群である．

証明 $f\colon M \longrightarrow N$ を左 R 加群の単射準同型写像，$g\colon M \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ を左 R 加群の準同型写像とする．f を $\mathbb{Z}$ 加群の単射準同型写像と見做せば，$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ が単射的加群であることから

$$f^*\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),\ h \longmapsto h \circ f$$

は右 R 加群の全射準同型写像となる．ここで右 R 加群の準同型写像

$$g'\colon P \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),\ x \longmapsto \bigl(m \mapsto g(m)(x)\bigr)$$

を定める．このとき P が射影的加群であることから，ある右 R 加群の準同型写像 $h'\colon P \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ であって $f^*(h') = g'$ を充たすものが存在する．さらにここで

$$h\colon N \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),\ n \longmapsto \bigl(x \mapsto h'(x)(n)\bigr)$$

と定義するとこれは左 R 加群の準同型写像となり，かつ

$$h\bigl(f(m)\bigr)(x) = h'(x)\bigl(f(m)\bigr) = (f^*(h'))(x)(m) = g'(x)(m) = g(m)(x)$$

だから $h \circ f = g$ となる．i.e. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ は単射的加群である． ■

補題 4.3:

左 R 加群 M に対して

$$\Phi\colon M \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(M,\, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right),\, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right),\; m \longmapsto \left(\varphi \mapsto \varphi(m)\right)$$

と定義した写像 Φ は左 R 加群の単射準同型である.

<u>**証明**</u> $\forall a \in R,\ \forall \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(M,\, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right)$ に対して

$$\bigl(a\Phi(m)\bigr)(\varepsilon) = \Phi(m)(\varphi a) = (\varphi a)(m) = \varphi(am) = \Phi(am)(\varphi)$$

より $a\Phi(m) = \Phi(am)$ となる．i.e. Φ は左 R 加群の準同型写像である．

次に $\mathrm{Ker}\,\Phi = \{0\}$ を示す．$\forall m \in M \setminus \{0\}$ に対して $\mathbb{Z}$ 加群の準同型写像

$$f\colon \mathbb{Z} \longrightarrow M,\; a \longmapsto am$$

を考える．$\mathbb{Z}$ が PID であることから，部分 $\mathbb{Z}$ 加群（i.e. $\mathbb{Z}$ のイデアル）$\mathrm{Ker}\, f$ はある非負整数 b を用いて $b\mathbb{Z}$ の形に書ける．特に $f(1) = m \neq 0$ なので $b = 0$ または $b \geq 2$ である．

$g\colon \mathrm{Im}\, f \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ を

$$\mathrm{Im}\, f \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/\,\mathrm{Ker}\, f = \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

で定める．ただし

$$i\colon \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z},\; n + b\mathbb{Z} \longmapsto \begin{cases} \frac{n}{2} + \mathbb{Z}, & b = 0 \\ \frac{n}{b} + \mathbb{Z}, & b \geq 2 \end{cases}$$

とする．$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ が単射的加群なので，$\mathbb{Z}$ 加群の準同型写像 $h\colon M \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ であって $h\left|_{\mathrm{Im}\, f}\right. = g$ を充たすものが存在する．このとき

$$h(m) = g(m) = i(1 + b\mathbb{Z}) \neq 0$$

なので $\Phi(m)(h) = h(m) \neq 0$ となり，$\Phi(m)$ は零写像でないことが言えた．i.e. $\mathrm{Ker}\,\Phi = \{0\}$ ■

M を任意の左 R 加群とする．すると $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(M,\, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right)$ は右 R 加群だから，命題 4.2 よりある射影的右 R 加群 P からの全射準同型写像 $f\colon P \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(M,\, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right)$ が存在する．このとき $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}$ の左完全性から

$$f^*\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right),\, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(P,\, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right)$$

は左 R 加群の単射準同型なので，補題 4.3 の Φ との合成 $f^* \circ \Phi\colon M \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(P,\, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right)$ は左 R 加群の単射準同型写像である．さらに補題 4.2 から $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(P,\, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right)$ は単射的加群なので証明が終わる． ■

4.1.3　平坦加群・無捻加群

定義 4.6: 平坦加群

左 R 加群 N が**平坦加群** (flat module) であるとは，任意の右 R 加群の単射準同型写像 $f\colon M \longrightarrow M'$ に対して $f \otimes 1_N\colon M \otimes_R N \longrightarrow M' \otimes_R N$ が単射であることを言う．

補題 4.4:

左 R 加群 N に対して以下の二つは同値.

(1) N は平坦加群

(2) 任意の右 R 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

に対して，図式

$$0 \longrightarrow M_1 \otimes_R N \xrightarrow{f\otimes 1_N} M_2 \otimes_R N \xrightarrow{g\otimes 1_N} M_3 \otimes_R N \longrightarrow 0$$

は完全列である

証明 テンソル積の右完全性より明らか. ■

命題 4.11: 平坦加群の直和

集合 Λ によって添字付けられた左 R 加群の族 $\{P_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をとる．このとき
$\forall\lambda \in \Lambda$ に対して P_λ が平坦加群 $\iff$ $\displaystyle\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$ が平坦加群

証明 ($\Longrightarrow$) $\forall\lambda \in \Lambda$ に対して P_λ が平坦加群ならば，任意の右 R 加群の単射準同型写像 $f\colon M \longrightarrow M'$ に対して $f \otimes 1_{P_\lambda}\colon M \otimes_R P_\lambda \longrightarrow M' \otimes_R P_\lambda$ は単射である．故に

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(f \otimes 1_{P_\lambda})\colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(M \otimes_R P_\lambda) \longrightarrow \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(M' \otimes_R P_\lambda)$$

は単射である．ここで加群の直和が帰納極限であること，および命題 A.9 を用いると

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(M \otimes_R P_\lambda) \cong M \otimes_R \left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda\right)$$

がわかる．この同一視を通じて

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(f \otimes 1_{P_\lambda}) = f \otimes 1_{\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda}$$

とすると右辺も単射であり，$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$ は平坦加群である．

($\Longleftarrow$) $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$ が平坦加群ならば任意の右 R 加群の単射準同型写像 $f\colon M \longrightarrow M'$ に対して $f \otimes 1_{\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda} = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$ は単射となる．従って $\forall\lambda \in \Lambda$ に対して $f \otimes 1_{P_\lambda}$ も単射である．

■

系 4.3:

射影的加群 $\Longrightarrow$ 平坦加群

証明 任意の右 R 加群 M に対して $M \otimes_R R \cong M$ が成り立つことに注意する．従って任意の右 R 加群の単射準同型写像 $f\colon M \longrightarrow M'$ に対して $f \otimes 1_R\colon M \otimes_R R \longrightarrow M' \otimes_R R$ は f と同一視できるので単射である，i.e. R は平坦加群である．自由加群は R の直和と同型だから，命題 4.11 より自由加群は平坦加群である．

さて，N が射影的加群ならば命題 4.5 からある左 R 加群 N' であって $N \oplus N'$ が自由加群となるものが存在する．故に $N \oplus N'$ は平坦加群であり，命題 4.11 から N は平坦加群である． ■

系 4.4:

任意の左 R 加群 M に対して，ある平坦加群から M への全射準同型写像が存在する．

証明 命題 4.2 より，ある射影的加群から M への全射準同型写像が存在する．さらに系 4.3 から題意が示された． ■

無捻加群を定義し，平坦加群との関係を述べる：

定義 4.7: 捩れ元

左 R 加群 M の元 $x \in M$ が**捻れ元** (torsion element) であるとは，ある R の非零因子 a が存在して $ax = 0$ となることを言う．

定義 4.8: 無捻加群

左 R 加群 M が**無捻加群** (torsion-free module) であるとは，M が 0 以外の捻れ元を持たないことを言う．

命題 4.12:

環 R 上の平坦加群は無捻加群である．

証明 M を平坦加群とし，$a \in R$ を任意の非零因子とする．このとき写像 $f\colon R \longrightarrow R,\ x \longmapsto ax$ は右 R 加群の単射準同型写像なので $f \otimes 1_M\colon R \otimes_R M \longrightarrow R \otimes_R M$ は単射．

ここで $R \otimes_R M \cong M$ であることから $f \otimes 1_M$ は M 上の a 倍写像 $M \longrightarrow M,\ x \longmapsto ax$ と同一視できる．これが任意の非零因子 a に対して単射なので M は無捻加群である． ■

R が PID のときは嬉しいことが起こる：

命題 4.13:

R が単項イデアル整域ならば，左 R 加群 M について

M が無捻加群 $\iff$ M が平坦加群

4.2 射影的分解と単射的分解

4.2.1 射影的分解

定義 4.9: 射影的分解

左（右）R 加群のチェイン複体

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

が完全列で，$\forall n \geq 0$ に対して P_n が射影的加群であるとき，組 $(P_\bullet, \partial_\bullet, \varepsilon)$ を M の**射影的分解** (projective resolution) と呼ぶ[a]．特に $\forall n \geq 0$ に対して P_n が自由加群ならば**自由分解** (free resolution) と呼ぶ．

[a] $(P_\bullet, \partial_\bullet) \xrightarrow{\varepsilon} M$ とか $P_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M$ などと略記することがある．

命題 4.14:

任意の左（右）R 加群 M は射影的分解を持つ．

証明 n に関する数学的帰納法より示す．まず $n = 0$ のとき，命題 4.2 から，ある射影的加群 P_0 と全射準同型写像 $\varepsilon\colon P_0 \longrightarrow M$ が存在するので良い．

次に，射影的加群 $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ の図式

$$P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

が完全列であると仮定する．$K_{n-1} \coloneqq \mathrm{Ker}\,\partial_{n-1}$ とおき，命題 4.2 を使って射影的加群 P_n と全射準同型写像 $p_n\colon P_n \longrightarrow K_n$ をとると，2 つの図式

$$P_n \xrightarrow{p_n} K_{n-1} \longrightarrow 0, \quad 0 \longrightarrow K_{n-1} \xrightarrow{\iota_{n-1}} P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

はどちらも完全列である．ただし $\iota_{n-1}\colon K_{n-1} \hookrightarrow P_{n-1}$ は標準的包含とした．このとき $\partial_n \coloneqq \iota_{n-1} \circ p_n$ とおくと，$\mathrm{Im}\,\iota_{n-1} = \mathrm{Ker}\,\partial_{n-1}$ かつ $\mathrm{Im}\,p_n = K_{n-1}$ であることから $\mathrm{Im}\,\partial_n = \mathrm{Im}\,\iota_{n-1} = \mathrm{Ker}\,\partial_{n-1}$ が成り立つので

$$P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

は完全列である． ■

命題 4.14 の構成において，$K_n = \mathrm{Ker}\,\partial_n$ 自身が射影的加群ならば図式

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow K_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

が M の射影的分解を与える．このような場合は K_n で完全列を打ち切ることができる．

定理 4.5:

任意の R 加群 M を与える．

(1) R が体ならば，M は図式

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{1} M \longrightarrow 0$$

を射影的分解にもつ．

(2) R が PID ならば，M は

$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

の形の図式を射影的分解にもつ．

<u>**証明**</u> (1) R が体ならば M はベクトル空間であり，基底を持つ．i.e. 自由 R 加群なので命題 4.1 より射影的加群である．

(2) R が単項イデアル整域ならば，系 4.2 より射影的加群 P_0 は自由加群でもある．さらに命題 4.1 から，自由加群 P_0 の任意の部分加群は自由加群となる．従って $P_1 \coloneqq \operatorname{Ker} \varepsilon$ とすればこれは自由加群であり，命題 4.1 より射影的加群でもある．

■

4.2.2 単射的分解

定義 4.10: 単射的分解

左（右）R 加群のコチェイン複体

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} I^0 \xrightarrow{d^0} \cdots \xrightarrow{d^{n-1}} I^n \xrightarrow{d^n} I^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \cdots$$

が完全列で，$\forall n \geq 0$ に対して I^n が単射的加群であるとき，組 $(I^\bullet, d^\bullet, i)$ を M の**単射的分解** (injective resolution) と呼ぶ[a]．

[a] $M \xrightarrow{i} (I^\bullet, d^\bullet)$ とか $M \xrightarrow{i} I^\bullet$ などと略記することがある．

命題 4.15:

任意の左（右）R 加群 M は単射的分解を持つ．

<u>**証明**</u> 命題 4.10 より，命題 4.5 の証明において矢印の向きを逆にすればよい． ■

定理 4.6:

R が PID ならば，M は

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow 0$$

の形の図式を単射的分解にもつ．

証明 命題 4.8 より単射的加群 I^0 は可除加群である．従って $I^1 := \mathrm{Coker}\, i$ とおくとこれは可除加群だが[*2]，R が PID であることから命題 4.9 が使えて I^1 は単射的加群でもある．故に，標準的射影 $p\colon I^0 \longrightarrow I^1$ を用いた完全列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} I^0 \xrightarrow{p} \mathrm{Coker}\, i \longrightarrow 0$$

は M の単射的分解になる． ■

4.3 Tor と Ext

4.3.1 複体の圏

本題に入る前に，複体に関して記号を整理する．まず，チェイン複体 $(M_\bullet, \partial_\bullet)$ は $M^n := M_{-n}$, $d^n := \partial_{-n}$ とおけばコチェイン複体 $(M^\bullet, d^\bullet)$ になる．このことを踏まえる場合は，今まではチェイン複体，コチェイン複体の圏を $\mathbf{Chain}_{\geq 0}$ と書いていたところを $\mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ に書き換えることにする（添字を非負整数ではなく $\mathbb{Z}$ 全体にとれるようになったため）．また，便宜上ただ **複体** (complex) と呼んだ時はコチェイン複体を指すことにする．

チェイン写像・コチェイン写像もまとめて**複体の射**と呼ぶことがある：

定義 4.11: 複体の射

加群の圏 R-**Mod** における複体 $M := (M^\bullet, d^\bullet)$ から複体 $M' := (M'^\bullet, d'^\bullet)$ への**射**とは，R-**Mod** における図式としての M から M' への射のことを言う．

i.e. R-**Mod** における射の族 $f^\bullet := (f^q\colon M^q \longrightarrow M'^q)_{q\in\mathbb{Z}}$ であって

$$\forall q \in \mathbb{Z},\ d'^q \circ f^q = f^{q+1} \circ d^q$$

を充たすもののこと．

R-**Mod** の対象 M は $M^0 = M$, $M^{n\neq 0} = 0$ とおくことで自然に複体 $M^\bullet$ と見做すことができるので，R-**Mod** は $\mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ の充満部分圏とみなせる．

次の命題はひとまず証明なしに認めることにする．

[*2] 可除加群の剰余加群は可除加群になる：可除 R 加群 M と部分加群 $N \subset M$ をとる．$x + N \in M/N$ と R の非零因子 a を任意にとる．このとき M が可除加群であることから $\exists y \in M,\ ay = x$ が成立するが，剰余加群のスカラー乗法の定義から $a(y + N) = (ay) + N = x + N$ が言える．

命題 4.16:

$\mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ はアーベル圏である．

複体の図式

$$M_1^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} M_2^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} M_3^\bullet$$

が**完全列**であるとは，$\forall q \in \mathbb{Z}$ に対して

$$M_1^q \xrightarrow{f^q} M_2^q \xrightarrow{g^q} M_3^q$$

が R-**Mod** における完全列であることと同値である．以下では R-**Mod** における短完全列の圏を $\mathbf{SES}(\mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod}))$ と書き，完全列の圏を $\mathbf{ES}(\mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod}))$ と書くことにする．文脈上 R-**Mod** が明らかな時は $\mathbf{SES}(\mathbf{Chain})$ や $\mathbf{ES}(\mathbf{Chain})$ と書くこともある．

命題 4.17: コホモロジーの関手性

$f^\bullet\colon (M^\bullet,\, d^\bullet) \longrightarrow (M'^\bullet,\, d'^\bullet)$ を複体の射とする時，$f^\bullet$ は自然にコホモロジーの射

$$H^q(f^\bullet)\colon H^q(M^\bullet) \longrightarrow H^q(M'^\bullet)$$

を誘導し，これにより H^q は共変関手 $\mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod}) \longrightarrow R\text{-}\mathbf{Mod}$ を定める．

証明 $\forall q \in \mathbb{Z}$ に対して $d'^q \circ f^q = f^{q+1} \circ d^q$ が成り立つから，準同型写像

$$\begin{aligned}
\overline{f^{q-1}}\colon \operatorname{Im} d^{q-1} &\longrightarrow \operatorname{Im} d'^{q-1},\ d^{q-1}(x) \longmapsto d'^{q-1}\bigl(f^{q-1}(x)\bigr),\\
\overline{f^q}\colon \operatorname{Ker} d^{q-1} &\longrightarrow \operatorname{Ker} d'^{q-1},\ x \longmapsto f^q(x)
\end{aligned}$$

は well-defined で，かつ自然な単射準同型[*3] $\iota^q\colon \operatorname{Im} d^{q-1} \hookrightarrow \operatorname{Ker} d^q$，$\iota'^q\colon \operatorname{Im} d'^{q-1} \hookrightarrow \operatorname{Ker} d'^q$ に対して図式

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Im} d^{q-1} \arrow[r, hook, "\iota^q"] \arrow[d, "\overline{f^{q-1}}"] & \operatorname{Ker} d^q \arrow[d, "\overline{f^q}"] \\
\operatorname{Im} d'^{q-1} \arrow[r, hook, "\iota'^q"] & \operatorname{Ker} d'^q
\end{tikzcd}$$

は可換図式になる．従って命題 A.2 より，ある準同型写像

$$H^q(f^\bullet)\colon \operatorname{Coker} \iota^q = H^q(M^\bullet) \longrightarrow \operatorname{Coker} \iota'^q = H^q(M'^\bullet)$$

が存在して可換図式

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Im} d^{q-1} \arrow[r, hook, "\iota^q"] \arrow[d, "\overline{f^{q-1}}"] & \operatorname{Ker} d^q \arrow[r, "\operatorname{coker} \iota^q"] \arrow[d, "\overline{f^q}"] & H^q(M^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "H^q(f^\bullet)"] & 0 & (\text{exact}) \\
\operatorname{Im} d'^{q-1} \arrow[r, hook, "\iota'^q"] & \operatorname{Ker} d'^q \arrow[r, "\operatorname{coker} \iota'^q"] & H^q(M'^\bullet) \arrow[r] & 0 & (\text{exact})
\end{tikzcd}$$

が成り立つ．この構成は自然である． ■

[*3] つまり包含写像

命題 4.18: コホモロジー長完全列

$\mathbf{SES}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ の対象

$$0 \longrightarrow (M_1^\bullet,\, d_1^\bullet) \xrightarrow{f^\bullet} (M_2^\bullet,\, d_2^\bullet) \xrightarrow{g^\bullet} (M_3^\bullet,\, d_3^\bullet) \longrightarrow 0 \tag{4.3.1}$$

が与えられたとき，自然に完全列

$$\begin{aligned}\cdots &\xrightarrow{\delta^{q-1}} H^q(M_1^\bullet) \xrightarrow{H^q(f^\bullet)} H^q(M_2^\bullet) \xrightarrow{H^q(g^\bullet)} H^q(M_3^\bullet)\\ &\xrightarrow{\delta^q} H^{q+1}(M_1^\bullet) \xrightarrow{H^{q+1}(f^\bullet)} H^{q+1}(M_2^\bullet) \xrightarrow{H^{q+1}(g^\bullet)} H^{q+1}(M_3^\bullet)\\ &\xrightarrow{\delta^{q+1}} \cdots\end{aligned}$$

が誘導される．これを短完全列 (4.3.1) に伴う **コホモロジー長完全列** (long exact sequence of cohomologies) と呼ぶ．δ^q $(\forall q \in \mathbb{Z})$ を**連結射** (connecting morphism) と呼ぶ．

<u>**証明**</u> $\forall q \in \mathbb{Z}$ に対して可換図式

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M_1^q \arrow[r, "f^q"] \arrow[d, "d_1^q"] & M_2^q \arrow[r, "g^q"] \arrow[d, "d_2^q"] & M_3^q \arrow[r] \arrow[d, "d_3^q"] & 0 & \text{(exact)} \\ 0 \arrow[r] & M_1^{q+1} \arrow[r, "f^{q+1}"] & M_2^{q+1} \arrow[r, "g^{q+1}"] & M_3^{q+1} \arrow[r] & 0 & \text{(exact)} \end{tikzcd}$$

が成り立つ．これに蛇の補題を用いて完全列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \operatorname{Ker} d_1^q \longrightarrow \operatorname{Ker} d_2^q \longrightarrow \operatorname{Ker} d_3^q,\\ \operatorname{Coker} d_1^q \longrightarrow \operatorname{Coker} d_2^q \longrightarrow \operatorname{Coker} d_3^q \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

を得る．

$d_i^q \circ d_i^{q-1} = d_i^{q+1} \circ d_i^q = 0$, i.e. $\operatorname{Im} d_i^{q-1} \subset \operatorname{Ker} d_i^q$, $\operatorname{Im} d_i^q \subset \operatorname{Ker} d_i^{q+1}$ より射

$$d_i^q \colon M_i^q \longrightarrow M_i^{q+1}$$

から自然に well-defined な射

$$\overline{d_i^q}\colon\ \operatorname{Coker} d_i^{q-1} \longrightarrow \operatorname{Ker} d_i^{q+1},\ x + \operatorname{Im} d_i^{q-1} \longmapsto d_i^q(x)$$

が誘導され，

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} \overline{d_i^q} &= \operatorname{Ker} d_i^q / \operatorname{Im} d_i^{q-1} = H^q(M_i^\bullet),\\ \operatorname{Coker} \overline{d_i^q} &= \operatorname{Ker} d_i^{q+1} / \operatorname{Im} d_i^q = H^{q+1}(M_i^\bullet) \end{aligned}$$

が成り立つ．i.e. 可換図式

$$\begin{tikzcd} & \operatorname{Coker} d_1^{q-1} \arrow[r, "\overline{f^q}"] \arrow[d, "\overline{d_1^q}"] & \operatorname{Coker} d_2^{q-1} \arrow[r, "\overline{g^q}"] \arrow[d, "\overline{d_2^q}"] & \operatorname{Coker} d_3^{q-1} \arrow[r] \arrow[d, "\overline{d_3^q}"] & 0 & \text{(exact)} \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} d_1^{q+1} \arrow[r, "\overline{f^{q+1}}"] & \operatorname{Ker} d_2^{q+1} \arrow[r, "\overline{g^{q+1}}"] & \operatorname{Ker} d_3^{q+1} & & \text{(exact)} \end{tikzcd}$$

があるが，これに蛇の補題を用いると完全列

$$
\begin{aligned}
&H^q(M_1^\bullet) \xrightarrow{H^q(f^\bullet)} H^q(M_2^\bullet) \xrightarrow{H^q(g^\bullet)} H^q(M_3^\bullet) \\
&\xrightarrow{\delta^q} H^{q+1}(M_1^\bullet) \xrightarrow{H^{q+1}(f^\bullet)} H^{q+1}(M_2^\bullet) \xrightarrow{H^{q+1}(g^\bullet)} H^{q+1}(M_3^\bullet)
\end{aligned}
$$

が得られる． ■

チェイン・ホモトピーも再掲する：

定義 4.12: 複体の射の間のホモトピー

$(M^\bullet,\ d^\bullet),\ (M'^\bullet,\ d'^\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod}))$ とし，$f^\bullet,\ g^\bullet \colon (M^\bullet,\ d^\bullet) \longrightarrow (M'^\bullet,\ d'^\bullet)$ を 2 つの複体の射とする．この時，$f^\bullet,\ g^\bullet$ の間の**ホモトピー** (homotopy) とは射の族 $(h^q \colon M^q \longrightarrow M'^{q-1})_{q\in\mathbb{Z}}$ であって

$$\forall q \in \mathbb{Z},\ f^q - g^q = d'^{q-1} \circ h^q + h^{q+1} \circ d^q$$

が成り立つもののこと．$f^\bullet,\ g^\bullet$ の間にホモトピーが存在する時，$f^\bullet$ と $g^\bullet$ は**ホモトピック** (homotopic) であるといい，$\boldsymbol{f^\bullet \simeq g^\bullet}$ と書く．

命題 4.19: コホモロジーのホモトピー不変性

$(M^\bullet,\ d^\bullet),\ (M'^\bullet,\ d'^\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod}))$ とし，$f^\bullet,\ g^\bullet \colon (M^\bullet,\ d^\bullet) \longrightarrow (M'^\bullet,\ d'^\bullet)$ を 2 つの複体の射であって互いにホモトピックなものとする．このとき $\forall q \in \mathbb{Z}$ に対して

$$H^q(f^\bullet) = H^q(g^\bullet) \colon H^q(M^\bullet) \longrightarrow H^q(M'^\bullet)$$

が成り立つ．

<u>**証明**</u> 命題 4.17 および命題 A.2 より，コホモロジーの射は

$$
\begin{aligned}
H^q(f^\bullet) &\colon x + \mathrm{Im}\, d^{q-1} \longmapsto f^q(x) + \mathrm{Im}\, d'^{q-1}, \\
H^q(g^\bullet) &\colon x + \mathrm{Im}\, d^{q-1} \longmapsto g^q(x) + \mathrm{Im}\, d'^{q-1}
\end{aligned}
$$

と定義される．$\left(h^q \colon M^q \longrightarrow M'^{q-1}\right)_{q\in\mathbb{Z}}$ をホモトピーとすると，$\forall x \in \mathrm{Ker}\, d^q$ に対して

$$
\begin{aligned}
&H^q(f^\bullet)(x + \mathrm{Im}\, d^{q-1}) - H^q(g^\bullet)(x + \mathrm{Im}\, d^{q-1}) \\
&= \left(f^q(x) + \mathrm{Im}\, d'^{q-1}\right) - \left(g^q(x) + \mathrm{Im}\, d'^{q-1}\right) \\
&= \left(f^q(x) - g^q(x)\right) + \mathrm{Im}\, d'^{q-1} \\
&= \Big(d'^{q-1}\left(h^q(x)\right) + h^{q+1}\left(d^q(x)\right)\Big) + \mathrm{Im}\, d'^{q-1} \\
&= h^{q+1}(0) + \mathrm{Im}\, d'^{q-1} = \mathrm{Im}\, d'^{q-1}
\end{aligned}
$$

が成り立つので証明が完了する． ■

次に，**二重複体**を定義しておく：

定義 4.13: 二重複体

R-**Mod** における図式 4.3 が**二重複体** (double complex) であるとは，$\forall p,\, q \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\begin{aligned} d_1^{p+1,\,q} \circ d_1^{p,\,q} &= 0, \\ d_2^{p,\,q+1} \circ d_2^{p,\,q} &= 0, \\ d_2^{p+1,\,q} \circ d_1^{p,\,q} + d_1^{p,\,q+1} \circ d_2^{p,\,q} &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つことを言う．これを $(M^{\bullet,\,*},\, d_1^{\bullet,\,*},\, d_2^{\bullet,\,*})$ または $M^{\bullet,\,*}$ と書く．

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d, "d_2^{p-1,\,q-2}"] & {} \arrow[d, "d_2^{p,\,q-2}"] & {} \arrow[d, "d_2^{p+1,\,q-2}"] & \\
\cdots \arrow[r, "d_1^{p-2,\,q-1}"] & M^{p-1,\,q-1} \arrow[r, "d_1^{p-1,\,q-1}"] \arrow[d, "d_2^{p-1,\,q-1}"] & M^{p,\,q-1} \arrow[r, "d_1^{p,\,q-1}"] \arrow[d, "d_2^{p,\,q-1}"] & M^{p+1,\,q-1} \arrow[r, "d_1^{p+1,\,q-1}"] \arrow[d, "d_2^{p+1,\,q-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d_1^{p-2,\,q}"] & M^{p-1,\,q} \arrow[r, "d_1^{p-1,\,q}"] \arrow[d, "d_2^{p-1,\,q}"] & M^{p,\,q} \arrow[r, "d_1^{p,\,q}"] \arrow[d, "d_2^{p,\,q}"] & M^{p+1,\,q} \arrow[r, "d_1^{p+1,\,q}"] \arrow[d, "d_2^{p+1,\,q}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d_1^{p-2,\,q+1}"] & M^{p-1,\,q+1} \arrow[r, "d_1^{p-1,\,q+1}"] \arrow[d, "d_2^{p-1,\,q+1}"] & M^{p,\,q+1} \arrow[r, "d_1^{p,\,q+1}"] \arrow[d, "d_2^{p,\,q+1}"] & M^{p+1,\,q+1} \arrow[r, "d_1^{p+1,\,q+1}"] \arrow[d, "d_2^{p+1,\,q+1}"] & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

図 4.3: 二重複体

二重複体の射は図式の射として定義する．この射によって R-**Mod** 上の二重複体全体は圏を成すので，これを $\mathrm{C}_2(R\text{-}\mathbf{Mod})$ と書く．$\mathrm{C}_2(R\text{-}\mathbf{Mod})$ はアーベル圏をなす．

二重複体の定義を少し変形して，図式 4.3 が

$$\begin{aligned} d_1^{p+1,\,q} \circ d_1^{p,\,q} &= 0, \\ d_2^{p,\,q+1} \circ d_2^{p,\,q} &= 0, \\ d_2^{p+1,\,q} \circ d_1^{p,\,q} &= d_1^{p,\,q+1} \circ d_2^{p,\,q} \end{aligned}$$

を充たすものを考えることができる．これは複体 $(M^{\bullet,\,q},\, d_1^{\bullet,\,q})$ の複体をなす，i.e. $\mathbf{C}(\mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod}))$ の対象である．

さらに $\left(M^{\bullet,\,*},\, d_1^{\bullet,\,*},\, (-1)^{\bullet} d_2^{\bullet,\,*}\right)$ を考えると二重複体になる．この対応により $\mathrm{C}_2(R\text{-}\mathbf{Mod}) \cong \mathbf{C}(\mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod}))$ である．

複体 $(M^{\bullet},\, d^{\bullet})$ は縦に見るか横に見るかの 2 通りの方法で二重複体になる

(1) 横に見る：

$$
M^{p,\,q} = \begin{cases} M^p, & q = 0 \\ 0, & q \neq 0 \end{cases},
$$

$$
d_1^{p,\,q} = \begin{cases} d^p, & q = 0 \\ 0, & q \neq 0 \end{cases}, \qquad d_2^{p,\,q} = 0
$$

この二重複体 $(M^{\bullet,\,*},\, d_1^{\bullet,\,*},\, d_2^{\bullet,\,*})$ を $M^\bullet$ と書く.

(2) 横に見る：

$$
M^{p,\,q} = \begin{cases} M^q, & p = 0 \\ 0, & p \neq 0 \end{cases},
$$

$$
d_1^{p,\,q} = 0, \qquad d_2^{p,\,q} = \begin{cases} d^q, & p = 0 \\ 0, & p \neq 0 \end{cases}
$$

この二重複体 $(M^{\bullet,\,*},\, d_1^{\bullet,\,*},\, d_2^{\bullet,\,*})$ を M^* と書く.

すなわち，射

$$
\begin{aligned}
f\colon (M^\bullet,\, d_M^\bullet) &\longrightarrow (N^{\bullet,\,*},\, d_{N,\,1}^{\bullet,\,*},\, d_{N,\,2}^{\bullet,\,*}),\\
g\colon (M^*,\, d_M^*) &\longrightarrow (N^{\bullet,\,*},\, d_{N,\,1}^{\bullet,\,*},\, d_{N,\,2}^{\bullet,\,*})
\end{aligned}
$$

とはそれぞれ複体の射

$$
\begin{aligned}
f^\bullet\colon (M^\bullet,\, d_M^\bullet) &\longrightarrow (N^{\bullet,\,0},\, d_{N,\,1}^{\bullet,\,0}),\\
g^\bullet\colon (M^\bullet,\, d_M^\bullet) &\longrightarrow (N^{0,\,\bullet},\, d_{N,\,2}^{0,\,\bullet})
\end{aligned}
$$

であって

$$
\begin{aligned}
d_{N,\,2}^{\bullet,\,0} \circ f^\bullet &= 0,\\
d_{N,\,1}^{0,\,\bullet} \circ g^\bullet &= 0
\end{aligned}
$$

を充たすものを表す.

定義 4.14: 全複体

R-**Mod** の二重複体 $M := \bigl(M^{\bullet,\,*},\, d_1^{\bullet,\,*},\, d_2^{\bullet,\,*}\bigr)$ が与えられ，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$n = p + q \text{ かつ } M^{p,\,q} \neq 0$$

を充たす整数の組 $(p,\, q)$ が有限個であると仮定する[a].

[a] 実のところ R-**Mod** の直和は添字集合が有限でなくとも定義されるので，R-**Mod** のみを考えるならこの仮定は無くても良い．しかし，一般のアーベル圏においては可算個の和が定義されているとは限らないので，この仮定が必要になる場合がある．

$$\mathrm{Tot}(M)^n := \bigoplus_{p+q=n} M^{p,\,q}$$

とおき，射

$$d^n \colon \mathrm{Tot}(M)^n \longrightarrow \mathrm{Tot}(M)^{n+1}$$

を，標準的包含 $\iota_{p,\,q} \colon M^{p,\,q} \hookrightarrow \mathrm{Tot}^{p+q}$ w/ $p+q=n$ と書いたときに

$$d^n \circ \iota_{p,\,q} = \iota_{p+1,\,q} \circ d_1^{p,\,q} + \iota_{p,\,q+1} \circ d_2^{p,\,q}$$

を充たす唯一の射とする．このとき組 $\mathrm{Tot}(M) := (\mathrm{Tot}(M)^\bullet,\, d^\bullet)$ がなす複体を二重複体 M の**全複体** (total complex) と呼ぶ．

4.3.2 Tor と Ext の定義

任意の右 R 加群 L および左 R 加群 M を与える．命題 4.14 より，$L,\, M$ の射影的分解

$$P^\bullet \longrightarrow L \longrightarrow 0, \quad Q^\bullet \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

をとることができる．このとき複体 $P^\bullet \otimes_R M$, $L \otimes_R Q^\bullet$，二重複体 $P^\bullet \otimes_R Q^*$ および射

$$P^\bullet \otimes_R Q^* \longrightarrow P^\bullet \otimes_R M, \tag{4.3.2}$$
$$P^\bullet \otimes_R Q^* \longrightarrow L \otimes_R Q^* \tag{4.3.3}$$

を構成することができる．

射影的加群は平坦加群だったので $\forall p,\, q \leq 0$ に対して P^p, Q^q は平坦加群．従って補題 4.4 より射 (4.3.2), (4.3.3) はそれぞれ完全列

$$\cdots \longrightarrow P^p \otimes_R Q^{-1} \longrightarrow P^p \otimes_R Q^0 \longrightarrow P^p \otimes_R M \longrightarrow 0,$$
$$\cdots \longrightarrow P^{-1} \otimes_R Q^q \longrightarrow P^0 \otimes_R Q^q \longrightarrow L \otimes_R Q^q \longrightarrow 0$$

を誘導する．このような状況において，後述する二重複体がつくるスペクトル系列を考えることで，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対する自然な同型

$$H^{-n}(P^\bullet \otimes_R M) \cong H^{-n}\bigl(\mathrm{Tot}(P^\bullet \otimes_R Q^*)\bigr) \cong H^{-n}(L \otimes_R Q^\bullet) \tag{4.3.4}$$

が存在することがわかる．

定義 4.15: Tor

$\forall n \geq 0$ に対して

$$\mathrm{Tor}_n^R(L,\, M) \coloneqq H^{-n}(P^\bullet \otimes_R M) \cong H^{-n}\bigl(\mathrm{Tot}(P^\bullet \otimes_R Q^*)\bigr) \cong H^{-n}(L \otimes_R Q^\bullet)$$

と定義する．

$\mathrm{Tor}_n^R(L,\, M)$ は右完全関手（系 A.5 参照）

$$\text{-} \otimes_R M \colon \mathbf{Mod}\text{-}R \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod},\ L \longmapsto L \otimes_R M$$

の n 番目の左導来関手を L に作用させて得られる $\mathbb{Z}$ 加群であり，かつ右完全関手

$$L \otimes_R \text{-} \colon R\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod},\ M \longmapsto L \otimes_R M$$

の n 番目の左導来関手を M に作用させて得られる $\mathbb{Z}$ 加群である．従って左導来関手の一般論から以下が従う：

命題 4.20: Tor **の基本性質**

(1) $\mathrm{Tor}_n^R(L,\, M)$ は射影的分解の取り方によらない．また，$M \longmapsto \mathrm{Tor}_n^R(L,\, M)$，$L \longmapsto \mathrm{Tor}_n^R(L,\, M)$ はそれぞれ関手

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tor}_n^R(L,\, \text{-}) \colon R\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod},\\ &\mathrm{Tor}_n^R(\text{-},\, M) \colon \mathbf{Mod}\text{-}R \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}\end{aligned}$$

を定める．

(2) $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$ を**左** R 加群の短完全列とすると，自然に長完全列

$$\begin{aligned}&\cdots \xrightarrow{\delta_{n+1}} \mathrm{Tor}_n^R(L,\, M_1) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(L,\, M_2) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(L,\, M_3)\\ &\cdots \xrightarrow{\delta_n} \mathrm{Tor}_{n-1}^R(L,\, M_1) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n-1}^R(L,\, M_2) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n-1}^R(L,\, M_3)\\ &\cdots \xrightarrow{\delta_{n-1}} \cdots\end{aligned}$$

が誘導され，この対応により族 $\bigl(\mathrm{Tor}_n^R(L,\, \text{-})\bigr)_{n\in\mathbb{Z}}$ は関手

$$\mathbf{SES}(R\text{-}\mathbf{Mod}) \longrightarrow \mathbf{ES}(\mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod})$$

を定める．

(3) $0 \longrightarrow L_1 \xrightarrow{f} L_2 \xrightarrow{g} L_3 \longrightarrow 0$ を**右** R 加群の短完全列とすると，自然に長完全列

$$\begin{aligned}&\cdots \xrightarrow{\delta_{n+1}} \mathrm{Tor}_n^R(L_1,\, M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(L_2,\, M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(L_3,\, M)\\ &\cdots \xrightarrow{\delta_n} \mathrm{Tor}_{n-1}^R(L_1,\, M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n-1}^R(L_2,\, M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n-1}^R(L_3,\, M)\\ &\cdots \xrightarrow{\delta_{n-1}} \cdots\end{aligned}$$

が誘導され，この対応により族 $\bigl(\mathrm{Tor}_n^R(\text{-},\, M)\bigr)_{n\in\mathbb{Z}}$ は関手

$$\mathbf{SES}(\mathbf{Mod}\text{-}R) \longrightarrow \mathbf{ES}(\mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod})$$

を定める．

(4) $\mathrm{Tor}_0^R(L,\,M) \cong L \otimes_R M$

同様にして Ext が定義される．

$\forall L,\,M \in R\text{-}\mathbf{Mod}$ または $\forall L,\,M \in \mathbf{Mod}\text{-}R$ を考える．命題 4.15 より，L の射影的分解

$$P^\bullet \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

および M の単射的分解

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I^\bullet$$

をとることができる．このとき複体

$$\begin{aligned} &0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\,(P^0,\,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\,(P^{-1},\,M) \longrightarrow \cdots \\ &0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\,(L,\,I^0) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\,(L,\,I^1) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

ができるのでそれぞれ $\mathrm{Hom}_R\,(P^\bullet,\,M)$, $\mathrm{Hom}_R\,(L,\,I^\bullet)$ と書く．さらに二重複体 $\mathrm{Hom}_R\,(P^\bullet,\,I^*)$ および射

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}_R\,(P^\bullet,\,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\,(P^\bullet,\,I^*), \\ &\mathrm{Hom}_R\,(L,\,I^*) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\,(P^\bullet,\,I^*) \end{aligned}$$

を構成できる．$\forall p \geq 0$ に対して P^{-p} は射影的加群なので命題 4.5 から

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\,(P^{-p},\,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\,(P^{-p},\,I^0) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\,(P^{-p},\,I^1) \longrightarrow \cdots$$

は完全列になる．一方，$\forall p \geq 0$ に対して I^p は単射的加群なので命題 4.7 から

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\,(L,\,I^p) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\,(P^0,\,I^p) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\,(P^{-1},\,I^p) \longrightarrow \cdots$$

もまた完全列になる．このような状況において，二重複体がつくるスペクトル系列を考えれば $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対する自然な同型

$$H^n\big(\mathrm{Hom}_R\,(P^\bullet,\,M)\big) \cong H^n\big(\mathrm{Tot}(\mathrm{Hom}_R\,(P^\bullet,\,I^*))\big) \cong H^n\big(\mathrm{Hom}_R\,(L,\,I^\bullet)\big) \tag{4.3.5}$$

が存在することがわかる．

定義 4.16: Ext

$\forall n \geq 0$ に対して

$$\mathrm{Ext}_R^n(L,\,M) \coloneqq H^n\big(\mathrm{Hom}_R\,(P^\bullet,\,M)\big) \cong H^n\big(\mathrm{Tot}(\mathrm{Hom}_R\,(P^\bullet,\,I^*))\big) \cong H^n\big(\mathrm{Hom}_R\,(L,\,I^\bullet)\big)$$

と定義する．

$\mathrm{Ext}_R^n(L,\,M)$ は左完全関手（命題 3.1 参照）

$$\mathrm{Hom}_R\,(\text{-},\,M)\colon R\text{-}\mathbf{Mod}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod},\ L \longmapsto \mathrm{Hom}_R\,(L,\,M)$$

の n 番目の右導来関手を L に作用させて得られる $\mathbb{Z}$ 加群であり，かつ左完全関手（命題 3.1 参照）

$$\mathrm{Hom}_R\,(L,\,\text{-})\colon R\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod},\ M \longmapsto \mathrm{Hom}_R\,(L,\,M)$$

の n 番目の右導来関手を M に作用させて得られる $\mathbb{Z}$ 加群である．従って右導来関手の一般論から以下が従う：

命題 4.21: Ext の基本性質

(1) $\mathrm{Ext}_R^n(L,\, M)$ は L の射影的分解および M の単射的分解の取り方によらない．また，$M \longmapsto \mathrm{Ext}_R^n(L,\, M)$, $L \longmapsto \mathrm{Ext}_R^n(L,\, M)$ はそれぞれ関手

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ext}_R^n(L,\, \text{-})\colon R\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod},\\ &\mathrm{Ext}_R^n(\text{-},\, M)\colon R\text{-}\mathbf{Mod}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}\end{aligned}$$

を定める．

(2) $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$ を**左** R 加群の短完全列とすると，自然に長完全列

$$\begin{aligned}&\cdots \xrightarrow{\delta^{n-1}} \mathrm{Ext}_R^n(L,\, M_1) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^n(L,\, M_2) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^n(L,\, M_3)\\ &\cdots \xrightarrow{\delta^{n}} \mathrm{Ext}_R^{n+1}(L,\, M_1) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n+1}(L,\, M_2) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n+1}(L,\, M_3)\\ &\cdots \xrightarrow{\delta^{n+1}} \cdots\end{aligned}$$

が誘導され，この対応により族 $\bigl(\mathrm{Ext}_R^n(L,\, \text{-})\bigr)_{n\in\mathbb{Z}}$ は関手

$$\mathbf{SES}(R\text{-}\mathbf{Mod}) \longrightarrow \mathbf{ES}(\mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod})$$

を定める．

(3) $0 \longrightarrow L_1 \xrightarrow{f} L_2 \xrightarrow{g} L_3 \longrightarrow 0$ を**右** R 加群の短完全列とすると，自然に長完全列

$$\begin{aligned}&\cdots \xrightarrow{\delta^{n-1}} \mathrm{Ext}_R^n(L_3,\, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^n(L_2,\, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^n(L_1,\, M)\\ &\cdots \xrightarrow{\delta^{n}} \mathrm{Ext}_R^{n+1}(L_3,\, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n+1}(L_2,\, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n+1}(L_1,\, M)\\ &\cdots \xrightarrow{\delta^{n+1}} \cdots\end{aligned}$$

が誘導され，この対応により族 $\bigl(\mathrm{Ext}_R^n(\text{-},\, M)\bigr)_{n\in\mathbb{Z}}$ は関手

$$\mathbf{SES}(R\text{-}\mathbf{Mod})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{ES}(\mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod})$$

を定める．

(4) $\mathrm{Ext}_R^0(L,\, M) \cong \mathrm{Hom}_R\,(L,\, M)$

次の節ではまず導来関手の一般論を導入して命題 4.20, 4.21 を証明し，その後でスペクトル系列を導入して同型 (4.3.4), (4.3.5) を示す（後者の方が準備が大変）．

しかしその前に，定義 4.15, 4.16 から従ういくつかの事実を確認しておく．

4.3.3 Tor に関する小定理集

命題 4.22: Tor と直和の交換

- 右 R 加群の族 $\{L_i\}_{i\in I}$ および左 R 加群 M を与える．このとき以下の同型が成り立つ：

$$\bigoplus_{i\in I}\mathrm{Tor}_n^R(L_i,\, M) \cong \mathrm{Tor}_n^R\left(\bigoplus_{i\in I} L_i,\, M\right) \tag{4.3.6}$$

- 右 R 加群 L および左 R 加群の族 $\{M_i\}_{i\in I}$ を与える．このとき以下の同型が成り立つ：

$$\bigoplus_{i\in I}\mathrm{Tor}_n^R(L,\, M_i) \cong \mathrm{Tor}_n^R\left(L,\, \bigoplus_{i\in I} M_i\right) \tag{4.3.7}$$

証明 $Q^\bullet \longrightarrow M$ を M の射影的分解とする．テンソル積と直和は可換なので，$\forall p > 0$ に対して

$$\bigoplus_{i\in I}(L_i \otimes_R Q^{-p}) \cong \left(\bigoplus_{i\in I} L_i\right) \otimes_R Q^{-p}$$

が成り立つ．フィルタードな圏 $\mathcal{I}$ 上の R-$\mathbf{Mod}$ の図式において，コホモロジーをとる関手 H^{-n} と帰納極限は交換するので

$$\bigoplus_{i\in I} H^{-n}(L_i \otimes_R Q^\bullet) \cong H^{-n}\left(\left(\bigoplus_{i\in I} L_i\right) \otimes_R Q^\bullet\right)$$

がわかり，同型 (4.3.6) が言えた．同型 (4.3.7) に関しても同様である． ■

命題 4.23: 平坦性による Tor の特徴付け

任意の左 R 加群 M を与える．このとき以下は互いに同値である：

(1) M は平坦加群

(2) 任意の**右** R 加群 L と $\forall n \geq 1$ に対して $\mathrm{Tor}_n^R(L,\, M) = 0$

(3) 任意の**右** R 加群 L に対して $\mathrm{Tor}_1^R(L,\, M) = 0$

(4) 任意の R の右イデアル I に対して $\mathrm{Tor}_1^R(R/I,\, M) = 0$

証明 **(1) $\Longrightarrow$ (2)** M が平坦加群であるとする．

任意の右 R 加群 L と，その射影的分解 $(P^\bullet,\, d^\bullet) \longrightarrow L$ をとる．定義より，次数が 0 以下の部分のみをとった複体 $(P^\bullet,\, d^\bullet)$ は完全列だから，平坦加群の定義より $(P^\bullet \otimes_R M,\, d^\bullet \otimes_R 1_M)$ も完全列である．従って $\forall n \geq 1$ に対して

$$\mathrm{Tor}_n^R(L,\, M) = H^{-n}(P^\bullet \otimes_R M) = \frac{\mathrm{Ker}(d^{-n} \otimes_R 1_M)}{\mathrm{Im}(d^{-n+1} \otimes_R 1_M)} = 0$$

である．

(2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (4) R/I は右 R 加群になるのでよい．

(4) $\Longrightarrow$ (1) 左 R 加群 M が条件 (4) を充たしているとする．また，任意の右 R 加群の単射準同型写像 $f\colon L \longrightarrow L'$ を与える．示すべきは $f \otimes_R 1_M\colon L \otimes_R M \longrightarrow L' \otimes_R M$ が単射になることである．

単射 f を通して L を L' の部分加群と見做す．そして集合 $\mathcal{S}$ を

$$\mathcal{S} \coloneqq \{\, N \in \mathbf{Mod}\text{-}R \mid L \subset N \subset L',\ N/L \text{ は有限生成} \,\}$$

とおき，$\mathcal{S}$ 上の順序 $\le$ を

$$\le \coloneqq \{\, (N,\, N') \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \mid N \subset N' \,\}$$

と定義する．さらに $\forall N,\, N' \in \mathcal{S}$ に対して集合

$$J(N,\, N') \coloneqq \begin{cases} \{*_{N,\, N'}\}, & N \le N' \\ \emptyset, & N \not\le N' \end{cases}$$

を定義し，合成を

$$\circ\colon J(N',\, N'') \times J(N,\, N') \longrightarrow J(N,\, N''),$$
$$\begin{cases} (*_{N',\, N''},\, *_{N,\, N'}) \longmapsto *_{N,\, N''}, & N \le N' \le N'' \\ \text{empty map}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義すると $\bigl(\mathcal{S},\, \{\, J(N,\, N') \,\}_{N,\, N' \in \mathcal{S}}\bigr)$ はフィルタードな圏になる．$N \le N'$ のときの包含写像を $i_{N,\, N'}\colon N \hookrightarrow N'$ とかくと $\bigl(\{N\}_{N \in \mathcal{S}},\, \{i_{N,\, N'}\}_{N \le N'}\bigr)$ はフィルタードな圏 $\mathcal{S}$ 上の図式となり，命題 A.7 の形をした帰納極限 $\varinjlim_{N \in \mathcal{S}} N$ が定義される．このとき $\mathcal{S}$ の定義より $\forall x \in L'$ に対して $x \in xR + L$ だが $xR + L \in \mathcal{S}$ なので $\varinjlim_{N \in \mathcal{S}} N \cong \bigcup_{N \in \mathcal{S}} N = L'$ となる．ここで，帰納極限とテンソル積は可換だから $L' \otimes_R M \cong \varinjlim_{N \in \mathcal{S}} (N \otimes_R M)$ であり，命題??の記号を用いて

$$f \otimes 1_M \colon L \otimes_R M \longrightarrow L' \otimes_R M,\ x \longmapsto [x]$$

とかける．従って

$$x \in \operatorname{Ker}(f \otimes_R 1_M) \iff [x] = [0] \iff \exists N \in \mathcal{S},\ (i_{L,\, N} \otimes 1_M)(x) = 0$$

が言える．

以上の考察から，$\forall N \in \mathcal{S}$ に対して $\operatorname{Ker}(i_{L,\, N} \otimes 1_M) = \{0\}$ であること，i.e. $i_{L,\, N} \otimes 1_M$ が単射であることを示せば良いとわかった．さらに話を簡単にすると，L'/L が有限生成であるような任意の単射準同型写像 $f\colon L \longrightarrow L'$ に対して $f \otimes_R 1_M$ が単射になることを示せば良いということになる．このようなとき $L' = L + x_1R + \cdots + x_nR$ と書けるが，$0 \le i \le n$ に対して $L'_i \coloneqq L + x_1R + \cdots + x_iR$ とおき，標準的包含を $f_i\colon L'_{i-1} \hookrightarrow L'_i$ と書くと，$f \otimes_R 1_M$ の単射性は各 i についての $f_i \otimes_R 1_M$ の単射性に帰着される．その上 $L'_i/L'_{i-1} = (x_i + L'_{i-1})R$ なので，結局 $L'/L = xR$ と書けるような場合に，任意の単射準同型 $f\colon L \longrightarrow L'$ に対して $f \otimes 1_M$ も単射となることを示しさえすれば良い．

さて，$L' = L + xR$ と仮定しよう．すると右 R 加群の準同型 $g\colon R \longrightarrow L'/L,\ a \longmapsto xa + L$ は全射であるから，準同型定理により同型 $\overline{g}\colon R/\operatorname{Ker} g \xrightarrow{\cong} L'/L$ が誘導される．このとき $I \coloneqq \operatorname{Ker} g$ は右イデアルである．よって短完全列

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} L' \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$$

があるが，これを元に Tor の基本性質-(3) の長完全列を構成して 1 次から 0 次にかけた部分を取ることで完全列

$$\operatorname{Tor}_1^R(R/I,\, M) \longrightarrow L \otimes_R M \xrightarrow{f \otimes 1_M} L' \otimes_R M$$

が得られる（基本性質-(4) も使った）．ここに仮定 $\mathrm{Tor}_1^R(R/I,\, M) = 0$ を使って $f \otimes 1_M$ が単射であることが示された．

■

定義 4.17: 平坦分解

左 R 加群 M の**平坦分解** (flat resolution) とは，左 R 加群の**完全列**

$$\cdots \longrightarrow Q^{-1} \longrightarrow Q^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

であって，$\forall n \geq 0$ に対して Q^{-n} が平坦加群であるようなもののこと．

命題 4.24: 平坦分解と Tor

(1) 任意の左 R 加群 M およびその平坦分解 $Q^\bullet \longrightarrow M$ を与える．このとき，任意の右 R 加群 L に対して

$$\mathrm{Tor}_n^R(L,\, M) \cong H^{-n}(L \otimes_R Q^\bullet)$$

が成り立つ[a]．

(2) 左 R 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

であって，M_3 が平坦加群であるようなものを与える．このとき，任意の右 R 加群 L に対して

$$0 \longrightarrow L \otimes_R M_1 \longrightarrow L \otimes_R M_2 \longrightarrow L \otimes_R M_3 \longrightarrow 0$$

は $\mathbb{Z}$ 加群の短完全列となる．

(3) 左 R 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

であって，$M_2,\, M_3$（$M_1,\, M_3$）が平坦加群であるようなものを与える．このとき，M_1（M_2）もまた平坦加群である．

[a] 平坦加群は射影的加群とは限らない！

証明 (1) 命題 4.23 より，平坦加群は R-**Mod** の $L \otimes_R$ - 非輪状対象である．従って $Q^\bullet \longrightarrow M$ は M の $L \otimes_R$ - 非輪状分解であり，左導来関手の一般論から

$$\mathrm{Tor}_n^R(L,\, M) \cong H^{-n}(L \otimes_R Q^\bullet)$$

が成り立つ．

(2) Tor の基本性質-(2) の長完全列の一部をとってくると，完全列

$$\mathrm{Tor}_1^R(L,\, M_3) \longrightarrow L \otimes_R M_1 \longrightarrow L \otimes_R M_2 \longrightarrow L \otimes_R M_3 \longrightarrow 0$$

を得る．命題 4.23-(3) より $\mathrm{Tor}_1^R(L,\, M_3) = 0$ だから示された．

(3) $M_2,\ M_3$ が平坦加群とする．Tor の基本性質より完全列

$$\mathrm{Tor}^R_{n+1}(L,\ M_3) \longrightarrow \mathrm{Tor}^R_n(L,\ M_1) \longrightarrow \mathrm{Tor}^R_n(L,\ M_2)$$

があるが，仮定と命題 4.23 より $\mathrm{Tor}^R_{n+1}(L,\ M_3) = \mathrm{Tor}^R_n(L,\ M_2) = 0$ となる．よって $\mathrm{Tor}^R_n(L,\ M_1) = 0$ であり，命題 4.23 から M_1 が平坦加群であるとわかる．

■

4.3.4 Ext に関する小定理集

命題 4.25: Ext と直積

- 左 R 加群の族 $\{L_i\}_{i\in I}$ および左 R 加群 M を与える．このとき以下の同型が成り立つ：

$$\prod_{i\in I} \mathrm{Ext}^n_R(L_i,\ M) \cong \mathrm{Ext}^n_R\left(\bigoplus_{i\in I} L_i,\ M\right)$$

- 左 R 加群 L および左 R 加群の族 $\{M_i\}_{i\in I}$ を与える．このとき以下の同型が成り立つ：

$$\prod_{i\in I} \mathrm{Ext}^n_R(L,\ M_i) \cong \mathrm{Ext}^n_R\left(L,\ \prod_{i\in I} M_i\right)$$

命題 4.26: 単射的加群による Ext の特徴付け

任意の左 R 加群 M を与える．このとき以下は互いに同値である：

(1) M は単射的加群

(2) 任意の左 R 加群 L と $\forall n \geq 1$ に対して $\mathrm{Ext}^n_R(L,\ M) = 0$

(3) 任意の左 R 加群 L に対して $\mathrm{Ext}^1_R(L,\ M) = 0$

(4) 任意の R の左イデアル I に対して $\mathrm{Ext}^1_R(R/I,\ M) = 0$

命題 4.27: 射影的加群による Ext の特徴付け

任意の左 R 加群 L を与える．このとき以下は互いに同値である：

(1) L は射影的加群

(2) 任意の左 R 加群 M と $\forall n \geq 1$ に対して $\mathrm{Ext}^n_R(L,\ M) = 0$

(3) 任意の左 R 加群 M に対して $\mathrm{Ext}^1_R(L,\ M) = 0$

4.4 導来関手

この節では $\mathcal{A},\ \mathcal{B}$ を充分射影的対象を持つアーベル圏とし，アーベル圏でも通用する証明を目指す．

4.4.1 左導来関手

定義 4.18:

$F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ を加法的関手とする．このとき $\forall A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ に対して $L_nF(A) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ を次のように対応づける：
A の射影的分解 $(P^{\bullet}, d^{\bullet}) \longrightarrow A$ をとり，

$$L_nF(A) \coloneqq H^{-n}\big(F(P^{\bullet})\big)$$

とする．

命題 4.28: 左導来関手の定義と基本性質

(1) 定義 4.18 の $L_nF(A)$ は射影的分解の取り方によらない．また，射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A')$ に対して自然に $L_nF(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\big(L_nF(A) \longrightarrow L_nF(A')\big)$ が定まり，この対応によって L_nF は関手 $L_nF\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ を定めるこれを**左導来関手** (left derived functor) と呼ぶ．

(2) $\mathcal{A}$ における短完全列 $0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{f} A_2 \xrightarrow{g} A_3 \longrightarrow 0$ に対して，自然に長完全列

$$\begin{aligned}
\cdots &\xrightarrow{\delta_{n+1}} L_nF(A_1) \xrightarrow{L_nF(f)} L_nF(A_2) \xrightarrow{L_nF(g)} L_nF(A_3) \\
&\xrightarrow{\delta_n} L_{n-1}F(A_1) \xrightarrow{L_{n-1}F(f)} L_{n-1}F(A_2) \xrightarrow{L_{n-1}F(g)} L_{n-1}F(A_3) \\
&\xrightarrow{\delta_{n-1}} \cdots
\end{aligned}$$

が誘導される．この対応により関手の族 $\{L_nF\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ は関手

$$\mathbf{SES}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbf{ES}(\mathcal{B})$$

を定める．

(3) $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ が射影的ならば $L_{n\geq 1}F(A) = 0$

(4) 自然変換 $\tau\colon L_0F \longrightarrow F$ があり，F が右完全ならばこれは自然同値である．

(5) F が完全ならば $L_{n\geq 1}F(A) = 0,\ \forall A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$

命題??を示すために，いくつかの補題を用意する．

補題 4.5:

- 射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,\, N)$
- 射影的対象の族 $(P^{-n})_{n\in\mathbb{Z}}$ によって構成された複体

$$\cdots \xrightarrow{d^{-(n+1)}} P^{-n} \xrightarrow{d^{-n}} P^{-(n-1)} \xrightarrow{d^{-(n-1)}} \cdots \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \xrightarrow{d} M \longrightarrow 0$$

- $\mathcal{A}$ における完全列

$$\cdots \xrightarrow{e^{-(n+1)}} Q^{-n} \xrightarrow{e^{-n}} Q^{-(n-1)} \xrightarrow{e^{-(n-1)}} \cdots \xrightarrow{e^{-1}} Q^0 \xrightarrow{e} N \longrightarrow 0$$

を与える．このとき，図式 4.4 を可換にする複体の射 $f^\bullet \colon P^\bullet \longrightarrow Q^\bullet$ がホモトピーを除いて一意に存在する．

$$\begin{tikzcd} P^\bullet \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f^\bullet"'] & M \arrow[d, "f"] \\ Q^\bullet \arrow[r, "e"] & N \end{tikzcd}$$

図 4.4

証明 **$f^\bullet$ の構成**

まず P^0 が射影的かつ $e\colon Q^0 \longrightarrow N$ が全射なので次の図式を可換にする f^0 が存在する：

$$\begin{tikzcd} & P^0 \arrow[dl, dashed, "\exists f^0"'] \arrow[d, "f\circ d"] \\ Q^0 \arrow[r, "e"] & N \end{tikzcd}$$

このとき命題??より次の図式を可換にする $\overline{f^0}$ が存在する：

$$\begin{tikzcd} P^{-1} \arrow[r, "\mathrm{coim}\, d^{-1}"] & \mathrm{Ker}\, d \arrow[r, "\ker d"] \arrow[d, dashed, "\exists\overline{f^0}"] & P^0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f^0"] & M \arrow[d, "f"] \\ Q^{-1} \arrow[r, "\mathrm{coim}\, e^{-1}"] & \mathrm{Ker}\, e \arrow[r, "\ker e"] & Q^0 \arrow[r, "e"] & N \end{tikzcd}$$

$Q^\bullet$ の完全性より $\mathrm{coim}\, e^{-1}\colon Q^{-1} \longrightarrow \mathrm{Ker}\, e = \mathrm{Im}\, e^{-1}$ は全射である[*4]．これと P^{-1} が射影的であることを使うと次の図式を可換にする f^{-1} が存在する：

$$\begin{tikzcd} & P^{-1} \arrow[dl, dashed, "\exists f^1"'] \arrow[d, "\overline{f^0}\circ\mathrm{coim}^{-1} d^{-1}"] \\ Q \arrow[r, "\mathrm{coim}\, e^{-1}"] & N \end{tikzcd}$$

[*4] R-**Mod** においては，準同型定理により $\mathrm{Coim}\, e^{-1} \cong \mathrm{Im}\, e^{-1}$．定義から $\mathrm{coim}\, e^{-1}$ は全射なので OK.

この f^{-1} は，$d^{-1} = \ker d \circ \operatorname{coim} d^{-1}$, $e^{-1} = \ker e \circ \operatorname{coim} e^{-1}$ および上 2 つの図式の可換性から

$$e^{-1} \circ f^{-1} = \ker e \circ (\operatorname{coim} e^{-1} \circ f^{-1}) = (\ker e \circ \overline{f^0}) \circ \operatorname{coim} d^{-1} = f^0 \circ \ker d \circ \operatorname{coim} d^{-1} = f^0 \circ d^{-1}$$

を充し，図式 4.4 の該当する部分を可換にする．以上の議論を繰り返せばよい．

ホモトピーを除いて一意

もう一つの複体の射 $g^\bullet \colon P^\bullet \longrightarrow Q^\bullet$ が図式 4.4 を可換にするとする．

$\varphi^{-n} := f^{-n} - g^{-n}$ とおく．$e \circ \varphi^0 = e \circ f^0 - e \circ g^0 = f \circ d - f \circ d = 0$ なので，ある射 $\overline{h^0} \colon P^0 \longrightarrow \operatorname{Ker} e$ で $\ker e \circ \overline{h^0} = \varphi^0$ を充たすものがある：

$$\begin{tikzcd}
 & & P^0 \arrow[dl, dashed, "\exists\overline{h^0}"'] \arrow[d, "\varphi^0"] & \\
Q^{-1} \arrow[r, "\operatorname{coim} e^{-1}"] & \operatorname{Ker} e \arrow[r, "\ker e"] & Q^0 \arrow[r, "e"] & N
\end{tikzcd}$$

さらに $\operatorname{coim} e^{-1}$ は全射かつ P^0 が射影的なので次の図式を可換にする射 h^0 が存在する：

$$\begin{tikzcd}
 & & P^0 \arrow[dll, dashed, "\exists h^0"'] \arrow[dl, "\overline{h^0}"] \arrow[d, "\varphi^0"] & \\
Q^{-1} \arrow[r, "\operatorname{coim} e^{-1}"] & \operatorname{Ker} e \arrow[r, "\ker e"] & Q^0 \arrow[r, "e"] & N
\end{tikzcd}$$

このとき

$$e^{-1} \circ h^0 = \ker e \circ \operatorname{coim} e^{-1} \circ h^0 = \ker e \circ \overline{h^0} = \varphi^0$$

なので h^0 は 0 次のホモトピーである．

次に $\psi^{-1} := \varphi^{-1} - h^0 \circ d^{-1}$ とおく．すると

$$e^{-1} \circ \psi^{-1} = e^{-1} \circ \varphi^{-1} - e^{-1} \circ h^0 \circ d^{-1} = \varphi^0 \circ d^{-1} - \varphi^0 \circ d^{-1} = 0$$

なので，ある射 $\overline{\overline{h^{-1}}} \colon P^{-1} \longrightarrow \operatorname{Ker} e^{-1}$ で $\ker e^{-1} \circ \overline{h^{-1}} = \psi^{-1}$ を充たすものがある：

$$\begin{tikzcd}
 & & P^{-1} \arrow[dl, dashed, "\exists\overline{h^{-1}}"'] \arrow[d, "\psi^{-1}"] & \\
Q^{-2} \arrow[r, "\operatorname{coim} e^{-2}"] & \operatorname{Ker} e^{-1} \arrow[r, "\ker e^{-1}"] & Q^{-1} \arrow[r, "e^{-1}"] & Q^0
\end{tikzcd}$$

さらに $\operatorname{coim} e^{-2}$ は全射かつ P^{-1} が射影的なので次の図式を可換にする射 h^{-1} が存在する：

$$\begin{tikzcd}
 & & P^{-1} \arrow[dll, dashed, "\exists h^{-1}"'] \arrow[dl, "\overline{h^{-1}}"] \arrow[d, "\psi^{-1}"] & \\
Q^{-2} \arrow[r, "\operatorname{coim} e^{-2}"] & \operatorname{Ker} e^{-1} \arrow[r, "\ker e^{-1}"] & Q^{-1} \arrow[r, "e^{-1}"] & Q^0
\end{tikzcd}$$

このとき

$$e^{-2} \circ h^{-1} = \ker e^{-1} \circ \operatorname{coim} e^{-2} \circ h^{-1} = \ker e^{-1} \circ \overline{h^{-1}} = \psi^{-1}$$

が成り立つ．i.e.

$$\varphi^{-1} = \psi^{-1} + h^0 \circ d^{-1} = e^{-2} \circ h^{-1} + h^0 \circ d^{-1}$$

であり，h^{-1} が 1 次のホモトピーであることがわかった．あとは同様の議論を繰り返せばよい．

■

補題 4.6: Horseshoe lemma

- $\mathcal{A}$ における完全列 $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$
- 射影的分解 $(P^\bullet,\, d_P^\bullet) \xrightarrow{d_P} L \longrightarrow 0, \quad (R^\bullet,\, d_R^\bullet) \xrightarrow{d_R} N \longrightarrow 0$
- $Q^{-n} := P^{-n} \oplus R^{-n}$

を与える．このとき以下の条件を充たす可換図式 4.5 が存在する：

(1) $(Q^\bullet,\, d_Q^\bullet) \xrightarrow{d_Q} M \longrightarrow 0$ は M の 射影的分解

(2) 1 行目は複体の完全列である．特に $\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$0 \longrightarrow P^{-n} \xrightarrow{f^{-n}} Q^{-n} \xrightarrow{g^{-n}} R^{-n} \longrightarrow 0 \quad \text{(exact)}$$

は，f^{-n} が $Q^{-n} = P^{-n} \oplus Q^{-n}$ の第 1 成分への標準的包含，g^{-n} が第 2 成分への標準的射影となる．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (P^\bullet,\, d_P^\bullet) \arrow[r, "f^\bullet"] \arrow[d, "d_P"] & (Q^\bullet,\, d_Q^\bullet) \arrow[r, "g^\bullet"] \arrow[d, "d_Q"] & (R^\bullet,\, d_R^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "d_R"] & 0 & \text{(exact)} \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 & \text{(exact)}
\end{tikzcd}$$

図 4.5

<u>**証明**</u> $\mathrm{pr}^{-n} \colon Q^{-n} \longrightarrow P^{-n},\ (x,\, y) \longmapsto x$ とおく．g は全射かつ R^0 は射影的なので次の図式を可換にする射 $h^0 \colon R^0 \longrightarrow M$ が存在する：

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P^0 \arrow[r, "f^0"] \arrow[d, "d_P"] & Q^0 \arrow[r, "g^0"] & R^0 \arrow[r] \arrow[d, "d_R"] \arrow[dl, dashed, "\exists h^0"'] & 0 & \text{(exact)} \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \text{(exact)} \\
& 0 & & 0 & & \\
& \text{(exact)} & & \text{(exact)} & &
\end{tikzcd}
$$

ここで $d_Q\colon Q^0 \longrightarrow M$ を $d_Q \coloneqq f \circ d_P \circ \mathrm{pr}^0 + h^0 \circ g^0$ とおく．このとき直上の図式の可換性と行の完全性から

$$
\begin{aligned}
d_Q \circ f^0 &= f \circ d_P \circ (\mathrm{pr}^0 \circ f^0) + h^0 \circ (g^0 \circ f^0) = f \circ d_P, \\
g \circ d_Q &= (g \circ f) \circ d_P \circ \mathrm{pr}^0 + (g \circ h^0) \circ g^0 = d_R \circ g^0
\end{aligned}
$$

が成立するので d_Q は可換性を崩さない．

また，上の図式に蛇の補題を適用すると 2 つの完全列

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Ker} d_P \longrightarrow \operatorname{Ker} d_Q \xrightarrow{\overline{g^0}} \operatorname{Ker} d_R \\
&\xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker} d_P \longrightarrow \operatorname{Coker} d_Q \operatorname{Coker} d_R
\end{aligned}
\tag{4.4.1}
$$

が得られるが，列の完全性から d_P, d_R が全射で $\operatorname{Coker} d_P = \operatorname{Coker} d_R = 0$ となるから，(4.4.1) から $\operatorname{Coker} d_Q = 0. \iff d_Q$ が全射であるとわかる．また，このとき $\overline{g^0}$ が全射になる．

一方，(??) と射影的分解の完全性より，次の図式を可換にする射 $h^{-1}\colon R^{-1} \longrightarrow \operatorname{Ker} d_Q$ が存在する[*5]：

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P^{-1} \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[d, "d_P"] & Q^{-1} \arrow[r, "g^{-1}"] & R^{-1} \arrow[r] \arrow[d, "d_R"] \arrow[dl, dashed, "\exists h^{-1}"'] & 0 & \text{(exact)} \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} d_P \arrow[r, "\overline{f^0}"] \arrow[d] & \operatorname{Ker} d_Q \arrow[r, "\overline{g^0}"] & \operatorname{Ker} d_R \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \text{(exact)} \\
& 0 & & 0 & & \\
& \text{(exact)} & & \text{(exact)} & &
\end{tikzcd}
$$

ここで $d'^{-1}_Q\colon Q^{-1} \longrightarrow \operatorname{Ker} d_Q$ を $d'^{-1}_Q \coloneqq \overline{f^0} \circ \operatorname{coim} d_P^{-1} \circ \mathrm{pr}^{-1} + h^{-1} \circ g^{-1}$ とおくと，$\overline{g^0} \circ \overline{f^0} = 0$ より

$$
\begin{aligned}
d'^{-1}_Q \circ f^{-1} &= \overline{f^0} \circ \operatorname{coim} d_P^{-1} \circ (\mathrm{pr}^{-1} \circ f^{-1}) + h^{-1} \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = \overline{f^0} \circ \operatorname{coim} d_P^{-1}, \\
\overline{g^0} \circ d'^{-1}_Q &= (\overline{g^0} \circ \overline{f^0}) \circ \operatorname{coim} d_P^{-1} \circ \mathrm{pr}^{-1} + (\overline{g^0} \circ h^{-1}) \circ g^{-1} = \operatorname{coim} d_R^{-1} \circ g^{-1}
\end{aligned}
$$

[*5] P^{-1} が射影的かつ $\overline{g^0}$ が全射なので．

なので上の図式の可換性を崩さない．再び蛇の補題を適用すると d'^{-1}_Q が全射であることが言える．すると $d^{-1}_Q := \ker d_Q \circ d'^{-1}_Q$ とおくことで図式

$$Q^{-1} \xrightarrow{d^{-1}_Q} Q^0 \xrightarrow{d_Q} M \longrightarrow 0$$

は完全列になる．以上の議論を繰り返すことで，性質 (1), (2) を充たす可換図式 4.5 が構成される． ■

次の系の証明は省略する．

系 4.7:

- $\mathcal{A}$ における図式 4.6
- 射影的分解

$$(P^\bullet,\, d^\bullet_P) \xrightarrow{d_P} L \longrightarrow 0,$$
$$(R^\bullet,\, d^\bullet_R) \xrightarrow{d_R} N \longrightarrow 0$$

- $Q^{-n} := P^{-n} \oplus R^{-n}, \quad Q'^{-n} := P'^{-n} \oplus R'^{-n}$

を与える．このとき可換図式 4.7 が存在し，上 2 行と下 2 行はそれぞれ図式 4.6 の上の行と下の行から補題 4.6 の方法で構成したものになっている．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 & \text{(exact)} \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f'"] & M \arrow[r, "g'"] & N \arrow[r] & 0 & \text{(exact)}
\end{tikzcd}$$

図 4.6

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (P^\bullet,\, d^\bullet_P) \arrow[r, "f^\bullet"] \arrow[d, "d_P"] \arrow[ddr, dashed, red, "\alpha^\bullet"] & (Q^\bullet,\, d^\bullet_Q) \arrow[r, "g^\bullet"] \arrow[d, "d_Q"] \arrow[ddr, dashed, red, "\beta^\bullet"] & (R^\bullet,\, d^\bullet_R) \arrow[r] \arrow[d, "d_R"] \arrow[ddr, dashed, red, "\gamma^\bullet"] & 0 & & \text{(exact)} \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[ddr, dashed, blue, "\alpha"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[ddr, dashed, blue, "\beta"] & N \arrow[r] \arrow[ddr, dashed, blue, "\gamma"] & 0 & & \text{(exact)} \\
& 0 \arrow[r] & (P'^\bullet,\, d^\bullet_{P'}) \arrow[r, "f'^\bullet"] \arrow[d, "d_P"] & (Q'^\bullet,\, d^\bullet_{Q'}) \arrow[r, "g'^\bullet"] \arrow[d, "d'_Q"] & (R'^\bullet,\, d^\bullet_{R'}) \arrow[r] \arrow[d, "d_{R'}"] & 0 & \text{(exact)} \\
& 0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "f'"] & M' \arrow[r, "g'"] & N' \arrow[r] & 0 & \text{(exact)}
\end{tikzcd}$$

図 4.7

ここまでの準備の下，命題 4.28 を示す．

証明 (1) $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ の二つの射影的分解 $(P^\bullet, d^\bullet) \xrightarrow{d} A$, $(Q^\bullet, e^\bullet) \xrightarrow{e} A$ をとると，補題 4.5 より複体の射 $\varphi^\bullet \colon P^\bullet \longrightarrow Q^\bullet$, $\psi^\bullet \colon Q^\bullet \longrightarrow P^\bullet$ であって $e \circ \varphi = d$, $d \circ \psi = e$ を充たすものが存在して

$$\psi \circ \varphi \simeq 1_{P^\bullet}, \quad \varphi \circ \psi \simeq 1_{Q^\bullet}$$

となる．加法的関手によってホモトピーは保存されるから

$$F(\psi) \circ F(\varphi) \simeq 1_{F(P^\bullet)}, \quad F(\varphi) \circ F(\psi) \simeq 1_{F(Q^\bullet)}$$

となり，

$$H^{-n}\big(F(\psi)\big) \circ H^{-n}\big(F(\varphi)\big) = 1_{H^{-n}(F(P^\bullet))}, \quad H^{-n}(F(\varphi)) \circ H^{-n}(F(\psi)) = 1_{H^{-n}(F(Q^\bullet))}$$

がわかる．i.e. $H^{-n}\big(F(P^\bullet)\big)$, $H^{-n}\big(F(Q^\bullet)\big)$ は同型である．
$e \circ \varphi' = d$ を充たす別の複体の射 $\varphi' \colon P^\bullet \longrightarrow Q^\bullet$ があるとしても命題 4.5 より $\varphi \simeq \varphi'$ なので，$H^{-n}\big(F(P^\bullet)\big)$, $H^{-n}\big(F(Q^\bullet)\big)$ の同型は φ の取り方に依らない．従って定義 4.18 の $L_nF(A) \coloneqq H^{-n}\big(F(P^\bullet)\big)$ の右辺は A の射影的分解の取り方に依らない．
次に射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A')$ がある場合を考える．A, A' の射影的分解 $(P^\bullet, d^\bullet) \xrightarrow{d} A$, $(P'^\bullet, d'^\bullet) \xrightarrow{d'} A'$ をとると命題 4.5 より複体の射 $\varphi \coloneqq P^\bullet \longrightarrow P'^\bullet$ で $d' \circ \varphi = f \circ d$ を充たすものがホモトピーを除いて一意に定まる．このとき

$$H^{-n}\big(F(\varphi)\big) \colon L_nF(A) \longrightarrow L_nF(A')$$

が射 φ の取り方に依らずに定まる．

$$L_nF(1_A) = 1_{L_nF(A)},$$
$$L_nF(g \circ f) = L_nF(g) \circ L_nF(f)$$

も言えるので L_nF は関手である．

(2) 補題 4.6 より可換図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (P^\bullet, d_P^\bullet) \arrow[r, "f^\bullet"] \arrow[d, "d_P"] & (Q^\bullet, d_Q^\bullet) \arrow[r, "g^\bullet"] \arrow[d, "d_Q"] & (R^\bullet, d_R^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "d_R"] & 0 & \text{(exact)} \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "f"] & A_2 \arrow[r, "g"] & A_3 \arrow[r] & 0 & \text{(exact)}
\end{tikzcd}$$

で，$\forall n \geq 0$ に対して

$$0 \longrightarrow P^{-n} \xrightarrow{f^{-n}} Q^{-n} \xrightarrow{g^{-n}} R^{-n} \longrightarrow 0$$

が分裂完全列であり，全ての列が射影的分解となるようなものが存在する．加法的関手によって複体は保存されるので

$$0 \longrightarrow \big(F(P^\bullet), F(d_P^\bullet)\big) \longrightarrow \big(F(Q^\bullet), F(d_Q^\bullet)\big) \longrightarrow \big(F(R^\bullet), F(d_R^\bullet)\big) \longrightarrow 0$$

も完全列となるので，これのコホモロジー長完全列をとることで題意の長完全列を得る．
系 4.7 を使うと $\{L_nF\}_{n \in \mathbb{Z}}$ が関手 $\mathbf{SES}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbf{ES}(\mathcal{A})$ を定めることもわかる．

(3) $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ が射影的ならば $A \xrightarrow{1_A} A$ が A の射影的分解になるので $n \geq 1$ に対して $L_nF(A) = H^{-n}(A) = 0$.

(4) A の射影的分解 $(P^\bullet,\, d^\bullet) \xrightarrow{d} A \longrightarrow 0$ をとると

$$F(d) \circ F(d^{-1}) = F(d \circ d^{-1}) = F(0) = 0$$

となる[*6]ので $F(d)$ は射

$$\mathrm{Coker}\, F(d^{-1}) \longrightarrow F(A)$$

を誘導するが，$L_0F(A) = \mathrm{Coker}\, F(d^{-1})$ であり，これが自然変換 $\tau\colon L_0F \longrightarrow F$ を定める．
F が右完全関手ならば

$$F(P^{-1}) \xrightarrow{F(d^{-1})} F(P^0) \xrightarrow{F(d)} F(A) \longrightarrow 0$$

が完全なので命題 A.1-(2) より上述の射 $L_0F(A) \longrightarrow F(A)$ は同型となる．

(5) A の射影的分解 $(P^\bullet,\, d^\bullet) \xrightarrow{d} A \longrightarrow 0$ をとると F が完全関手ならば複体 $\left\{F(P^{-p}),\, F(d^{-p})\right\}_{p\geq 1}$ は完全になる．従って $n \geq 1$ に対して $L_nF(A) = H^{-n}(F(P^\bullet)) = 0$ となる．

■

4.4.2 左 Cartan-Eilenberg 分解

次の命題は Künneth スペクトル系列を示す際に使う：

命題 4.29: 左 Cartan-Eilenberg 分解

$\mathcal{A}$ における複体 $(C^\bullet,\, d^\bullet)$ を任意に与える．このとき，ある二重複体からの射

$$(P^{\bullet,\,*},\, d_1^{\bullet,\,*},\, d_2^{\bullet,\,*}) \longrightarrow (C^\bullet,\, d^\bullet) \tag{4.4.2}$$

が存在して，

$$\begin{aligned} Z^{-n,\,-m} &:= \mathrm{Ker}\, d_1^{-n,\,-m}, \\ B^{-n,\,-m} &:= \mathrm{Im}\, d_1^{-n-1,\,-m}, \\ H^{-n,\,-m} &:= Z^{-n,\,-m}/B^{-n,\,-m} \end{aligned}$$

とおいたとき以下の条件を充たす：

(1) $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して $(P^{-n,\,\bullet},\, d_2^{-n,\,\bullet})$ は射影的分解.

(2) $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して，$d_2^{-n,\,-m}$ が引き起こす射による複体

$$\begin{aligned} &(Z^{-n,\,-\bullet},\, d_{2,\,Z}^{-n,\,\bullet}), \\ &(B^{-n,\,-\bullet},\, d_{2,\,B}^{-n,\,\bullet}), \\ &(H^{-n,\,-\bullet},\, d_{2,\,H}^{-n,\,\bullet}) \end{aligned}$$

[*6] 逆射ではない！

から定まる図式

$$
\begin{aligned}
(Z^{-n,\,-\bullet},\ d_{2,\,Z}^{-n,\,\bullet}) &\longrightarrow \operatorname{Ker} d^{-n},\\
(B^{-n,\,-\bullet},\ d_{2,\,B}^{-n,\,\bullet}) &\longrightarrow \operatorname{Im} d^{-n-1},\\
(H^{-n,\,-\bullet},\ d_{2,\,H}^{-n,\,\bullet}) &\longrightarrow H^{-n}(C^\bullet)
\end{aligned}
$$

が全て射影的分解.

(3) $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$
\begin{aligned}
C^{-n} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad P^{-n,\,\bullet} = 0,\\
H^{-n}(C^\bullet) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad H^{-n,\,\bullet} = 0.
\end{aligned}
$$

証明 命題 4.5 より，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して射影的分解

$$(B^{-n,\,\bullet},\ d_{2,\,B}^{-n,\,\bullet}) \longrightarrow \operatorname{Im} d^{-n-1}, \tag{4.4.3}$$

$$(H^{-n,\,\bullet},\ d_{2,\,H}^{-n,\,\bullet}) \longrightarrow H^{-n}(C^\bullet) \tag{4.4.4}$$

をとることができる[*7]．これらと完全列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im} d^{-n-1} \xrightarrow{i^{-n}} \operatorname{Ker} d^{-n} \xrightarrow{\operatorname{coker} i^{-n}} H^{-n}(C^\bullet) \longrightarrow 0$$

に対して補題 4.6 を適用すると，$Z^{-n,\,\bullet} := B^{-n,\,\bullet} \oplus H^{-n,\,\bullet}$ とした可換図式

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (B^{-n,\,\bullet},\ d_{2,\,B}^{-n,\,\bullet}) \arrow[r, "i^{-n,\,\bullet}"] \arrow[d] & (Z^{-n,\,\bullet},\ d_{2,\,Z}^{-n,\,\bullet}) \arrow[r, "p^{-n,\,\bullet}"] \arrow[d] & (H^{-n,\,\bullet},\ d_{2,\,H}^{-n,\,\bullet}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \text{(exact)}\\
0 \arrow[r] & \operatorname{Im} d^{-n-1} \arrow[r, "i^{-n}"] & \operatorname{Ker} d^{-n} \arrow[r, "\operatorname{coker} i^{-n}"] & H^{-n}(C^\bullet) \arrow[r] & 0 & \text{(exact)}
\end{tikzcd}
$$

で，真ん中の列が射影的分解となるようなものが存在する．

一方，命題 A.1-(3) より完全列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} d^{-n} \xrightarrow{\ker d^{-n}} C^{-n} \xrightarrow{\operatorname{coim} d^{-n}} \operatorname{Im} d^{-n} \longrightarrow 0$$

があるので，これと (4.4.3), (4.4.4) に補題 4.6 を適用すると，$Q^{-n,\,\bullet} := Z^{-n,\,\bullet} \oplus B^{-n+1,\,\bullet}$ とした可換図式

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (Z^{-n,\,\bullet},\ d_{2,\,Z}^{-n,\,\bullet}) \arrow[r, "\iota^{-n,\,\bullet}"] \arrow[d] & (Q^{-n,\,\bullet},\ d_{2,\,Q}^{-n,\,\bullet}) \arrow[r, "\pi^{-n,\,\bullet}"] \arrow[d] & (B^{-n+1,\,\bullet},\ d_{2,\,B}^{-n+1,\,\bullet}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \text{(exact)}\\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} d^{-n} \arrow[r, "\ker d^{-n}"] & C^{-n} \arrow[r, "\operatorname{coim} d^{-n}"] & \operatorname{Im} d^{-n} \arrow[r] & 0 & \text{(exact)}
\end{tikzcd}
$$

で真ん中の列が射影的分解となるようなものが存在する．ここで

$$d_{1,\,Q}^{-n,\,-m} := \iota^{-n+1,\,-m} \circ i^{-n+1,\,-m} \circ \pi^{-n,\,-m}$$

[*7] この時点ではこのような記号でおいただけである．

とおくと，上の図式の行の完全性より

$$\begin{aligned} d_{1,Q}^{-n+1,-m} \circ d_{1,Q}^{-n,-m} &= (\iota^{-n+2,-m} \circ i^{-n+2,-m} \circ \pi^{-n+1,-m}) \circ (\iota^{-n+1,-m} \circ i^{-n+1,-m} \circ \pi^{-n,-m}) \\ &= \iota^{-n+2,-m} \circ i^{-n+2,-m} \circ (\pi^{-n+1,-m} \circ \iota^{-n+1,-m}) \circ i^{-n+1,-m} \circ \pi^{-n,-m} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

が，射影的分解の完全性から

$$d_{2,Q}^{-n,-m+1} \circ d_{2,Q}^{-n,-m+1} = 0 \tag{4.4.6}$$

が，上の 2 つの図式の可換性から

$$\begin{aligned} d_{2,Q}^{-n+1,-m} \circ d_{1,Q}^{-n,-m} &= (d_{2,Q}^{-n+1,-m} \circ \iota^{-n+1,-m}) \circ i^{-n+1,-m} \circ \pi^{-n,-m} \\ &= \iota^{-n+1,-m+1} \circ (d_{2,Z}^{-n+1,-m} \circ i^{-n+1,-m}) \circ \pi^{-n,-m} \\ &= \iota^{-n+1,-m+1} \circ i^{-n+1,-m+1} \circ (d_{2,B}^{-n+1,-m} \circ \pi^{-n,-m}) \\ &= (\iota^{-n+1,-m+1} \circ i^{-n+1,-m+1} \circ \pi^{-n,-m+1}) \circ d_{2,Q}^{-n,-m} \\ &= d_{1,Q}^{-n,-m+1} \circ d_{2,Q}^{-n,-m} \end{aligned} \tag{4.4.7}$$

が従う．i.e. (4.4.5), (4.4.6), (4.4.7) より

$$(P^{\bullet,*},\, d_1^{\bullet,*},\, d_2^{\bullet,*}) := (Q^{\bullet,*},\, d_{1,Q}^{\bullet,*},\, (-1)^{\bullet} d_{2,Q}^{\bullet,*})$$

は $m > 0$ を見ると二重複体になり[*8]，$m = 0$ の部分から射 (4.4.2) が得られる．構成よりこの射は条件 (1), (2), (3) を充たす． ■

4.4.3　右導来関手

4.5　スペクトル系列

同型 (4.3.4), (4.3.5) を示すためにスペクトル系列を考察する．また，Künneth スペクトル系列を構成することで普遍係数定理を証明する．

4.5.1　filtration とスペクトル系列の定義

この節では $\mathcal{A}$ をアーベル圏とするが，Mitchell の埋め込み定理を用いて $\mathcal{A} = R$-**Mod** の場合のみを考えることも多い．まずアーベル圏における filtration の概念を導入する．

定義 4.19: フィルター付け

(1) $\forall E \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ を 1 つとる．E の**フィルター付け** (filtration) とは，

- $\mathcal{A}$ の対象の族 $\left(F^p E\right)_{p\in\mathbb{Z}}$
- 単射の族 $\left(i^p \colon F^{p+1}E \longrightarrow F^p E\right)_{p\in\mathbb{Z}}$

[*8] 符号については二重複体の定義の直下の注を参照.

- 単射の族 $\left(\iota^p\colon F^pE \longrightarrow E\right)_{p\in\mathbb{Z}}$

の 3 つ組であって，

$$\iota^p \circ i^p = \iota^{p+1}$$

を充たすもののことを言う．

(2) 4 つ組み

$$\left(E,\ \left(F^pE\right)_{p\in\mathbb{Z}},\ \left(i^p\colon F^{p+1}E \longrightarrow F^pE\right)_{p\in\mathbb{Z}},\ \left(\iota^p\colon F^pE \longrightarrow E\right)_{p\in\mathbb{Z}}\right)$$

のことをアーベル圏 $\mathcal{A}$ における**フィルター付けされた対象** (filtered object) と呼ぶ．

(3) filtration が**有限** (finite) であるとは，ある $p_0,\, p_1 \in \mathbb{Z}$ が存在して ι^{p_0} が同型，ι^{p_1} が零写像となること．このとき

$$F^pE = \begin{cases} E, & p \le p_0 \\ 0, & p \ge p_1 \end{cases}$$

となる．

filtration や filtered object のことをそれぞれ

$$\left(F^pE\right)_{p\in\mathbb{Z}},\quad \left(E,\ \left(F^pE\right)_{p\in\mathbb{Z}}\right)$$

と略記する．

定義 4.19 の単射 ι^p により F^pE は E の部分対象となる．特に $\mathcal{A} = R$-**Mod** のとき，左 R 加群 E の filtration $\left(F^pE\right)_{p\in\mathbb{Z}}$ とは，E の部分加群の列

$$\cdots \subset F^{p+1}E \subset F^pE \subset F^{p-1}E \subset \cdots$$

のことである．

複体の圏 $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ もアーベル圏なので，複体 $(E^\bullet,\, d^\bullet)$ の filtration$\left(F^pE^\bullet\right)_{p\in\mathbb{Z}}$ を考えることができる．$\mathcal{A} = R$-**Mod** のとき，それは

- $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対する E^n の filtration

$$\cdots \subset F^{p+1}E^n \subset F^pE^n \subset F^{p-1}E^n \subset \cdots$$

  であって，
- $\forall n,\, p \in \mathbb{Z}$ に対して

$$d^n(F^pE^n) \subset F^pE^{n+1}$$

  が成り立つ

もののこと．

次に，スペクトル系列を定義する．この定義では収束を比較的簡単に扱うことができる．

定義 4.20: スペクトル系列

アーベル圏 $\mathcal{A}$ における**スペクトル系列** (spectral sequence) とは，次の 5 つ組みのことを言う：

(1) $\mathcal{A}$ の対象の族 $\left(E_r^{p,\,q}\right)_{p,\,q,\,r\in\mathbb{Z},\,r\geq 1}$

(2) $\mathcal{A}$ の**有限に**フィルター付けされた対象の族 $\Big(E^n,\ \left(F^pE\right)_{p\in\mathbb{Z}}\Big)_{n\in\mathbb{Z}}$

(3) 射の族 $\left(d_r^{p,\,q}\colon E_r^{p,\,q}\longrightarrow E_r^{p+r,\,q-r+1}\right)_{p,\,q,\,r\in\mathbb{Z},\,r\geq 1}$

(4) 同型

$$\operatorname{Ker} d_r^{p,\,q}/\operatorname{Im} d_r^{p-r,\,q+r-1}\xrightarrow{\cong}E_{r+1}^{p,\,q}$$

(5) 同型

$$E_\infty^{p,\,q}\xrightarrow{\cong}F^pE^{p+q}/F^{p+1}E^{p+q}$$

ただし，(3) の射は以下の条件を充たす：

(SS1) $\forall p,\,q,\,r\in\mathbb{Z},\ r\geq 1$ に対して

$$d_r^{p,\,q}\circ d_r^{p-r,\,q+r-1}=0.$$

(SS2) $\forall p,\,q\in\mathbb{Z}$ に対してある $r_0\geq 1$ が存在し，

$$r\geq r_0\quad\Longrightarrow\quad d_r^{p,\,q}=d_r^{p-r,\,q+r-1}=0.$$

また，$E_\infty^{p,\,q}$ は次のように決める：

- 条件 **(SS1)** により射 $\operatorname{im} d_r^{p-r,\,q+r-1}$ は自然に単射

$$\operatorname{Im} d_r^{p-r,\,q+r-1}\longrightarrow\operatorname{Ker} d_r^{p,\,q}$$

を誘導する．条件 **(SS2)** を充たす $\forall r\geq r_0$ において，この単射は零写像

$$0\longrightarrow E_r^{p,\,q}\quad(\forall p,\,q\in\mathbb{Z})$$

となる．

- (4) の同型は，条件 **(SS2)** を充たす $\forall r\geq r_0$ に対しては

$$\operatorname{Ker} d_r^{p,\,q}=E_r^{p,\,q}\cong E_{r+1}^{p,\,q}$$

になる．このとき

$$E_\infty^{p,\,q}\coloneqq E_{r_0}^{p,\,q}=E_{r_0+1}^{p,\,q}=\cdots$$

と定義する．

定義 4.20 を，ある $r \geq 1$ を固定して

$$\boldsymbol{E_r^{p,\,q} \Longrightarrow E^{p+q}}$$

と略記することがある．

- $E_r^{p,\,q}$ をスペクトル系列の $\boldsymbol{E_r}$ **項**
- $E_\infty^{p,\,q}$ をスペクトル系列の $\boldsymbol{E_\infty}$ **項**
- E^n のことをスペクトル系列の **極限**

と言う．また，$r \geq 1$ が条件

$$\forall p,\, q \in \mathbb{Z},\ \forall s \geq r,\ d_s^{p,\,q} = 0$$

を充たすとき，スペクトル系列は $\boldsymbol{E_r}$ **退化**すると言う．

4.5.2　完全対によるスペクトル系列の構成

2 重複体は filtration を持つので，スペクトル系列が定まる．このような状況を一般化すると有界な次数 1 の二重次数付き完全対の概念に到達する．

まず，完全対と導来対を定義する：

定義 4.21: 完全対

アーベル圏 $\mathcal{A}$ を考える．

- $D,\, E \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$
- $i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(D,\, D)$
- $j \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(D,\, E)$
- $k \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(E,\, D)$

の 5 つ組み $(D,\, E,\, i,\, j,\, k)$ が **完全対** (exact couple) であるとは，

$$\mathrm{Im}\, i = \mathrm{Ker}\, j, \quad \mathrm{Im}\, j = \mathrm{Ker}\, k, \quad \mathrm{Im}\, k = \mathrm{Ker}\, i$$

を充たすことを言う．

Mitchell の埋め込み定理によりアーベル圏 $\mathcal{A} = R\text{-}\mathbf{Mod}$ として考える．

命題 4.30: 導来対

$(D,\, E,\, i,\, j,\, k)$ を $\mathcal{A}$ における完全対とする．このとき

$$
\begin{aligned}
D' &:= \operatorname{Im} i,\\
E' &:= \operatorname{Coker}\bigl(\operatorname{Im}(j \circ k) \longrightarrow \operatorname{Ker}(j \circ k)\bigr),\\
i' &:= i|_{D'} \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(D',\, D')
\end{aligned}
$$

とおく[a]．すると射

$$
\begin{aligned}
&j' \colon D' \longrightarrow E',\ a \longmapsto j(b) + \operatorname{Im}(j \circ k) \qquad {}^{\mathrm{w}/}\ b \in i^{-1}(\{a\})\\
&k' \colon E' \longrightarrow D',\ a + \operatorname{Im}(j \circ k) \longmapsto k(a)
\end{aligned}
$$

は well-defined で，5 つ組み $(D',\, E',\, i',\, j',\, k')$ は完全対である．

[a] $k \circ j = 0$ なので，自然に単射 $\operatorname{Im}(j \circ k) \longrightarrow \operatorname{Ker}(j \circ k)$ が誘導される．

<u>証明</u> $\mathcal{A} = R$-**Mod** として示せばよい．$\operatorname{Im} i' = \operatorname{Im} i^2$ に注意する．

well-definedness

別の $b' \in i^{-1}(\{a\})$ を任意にとると

$$
i(b' - b) = i(b') - i(b) = a - a = 0 \quad \iff \quad b' - b \in \operatorname{Ker} i = \operatorname{Im} k
$$

が成り立つので $j(b') \in j(b) + \operatorname{Im}(j \circ k)$，i.e. j' は well-defined.

一方，別の $a' \in a + \operatorname{Im}(j \circ k)$ はある $c \in E$ を用いて $a' = a + j\bigl(k(c)\bigr)$ と書けるので，$\operatorname{Im} j = \operatorname{Ker} k$ より

$$
k(a') = k(a) + k\bigl(j(k(c))\bigr) = k(a)
$$

がいえる．i.e. k' は well-defined.

完全対であること

$\mathbf{Im}\, \boldsymbol{i'} = \mathbf{Ker}\, \boldsymbol{j'}$

$\forall x \in \operatorname{Im} i'$ は，ある $y \in D$ を用いて $x = i\bigl(i(y)\bigr)$ と書けるので

$$
j'(x) = j\bigl(i(i(y))\bigr) + \operatorname{Im}(j \circ k) = \operatorname{Im}(j \circ k) \quad \iff \quad x \in \operatorname{Ker} j'
$$

i.e. $\operatorname{Im} i' \subset \operatorname{Ker} j'$ が言えた．

$\forall x \in \operatorname{Ker} j'$ をとると $y \in D$ を用いて $x = i(y)$ と書ける．このとき $j'(x) = \operatorname{Im}(j \circ k)$．i.e. $j(y) \in \operatorname{Im}(j \circ k)$ が成り立つ．故にある $z \in E$ が存在して $j(y) = j\bigl(k(z)\bigr)$ と書ける．このとき $y - k(z) \in \operatorname{Ker} j = \operatorname{Im} i$ なので

$$
x = i(y) - i\bigl(k(z)\bigr) = i\bigl(y - k(z)\bigr) \in \operatorname{Im} i^2 = \operatorname{Im} i'
$$

i.e. $\operatorname{Ker} j' \subset \operatorname{Im} i'$ もわかった．

$\mathbf{Im}\, \boldsymbol{j'} = \mathbf{Ker}\, \boldsymbol{k'}$

$\forall j'(x) \in \operatorname{Im} j'$ は，$y \in i^{-1}(\{x\})$ を用いて $j'(x) = j(y) + \operatorname{Im}(j \circ k)$ と書かれる．このとき

$$k'\big(j'(x)\big) = k\big(j(y)\big) = 0$$

なので $j'(x) \in \operatorname{Ker} k'$．i.e. $\operatorname{Im} j' \subset \operatorname{Ker} k'$ が示された．

一方，$\forall x + \operatorname{Im}(j \circ k) \in \operatorname{Ker} k'$ $^{\text{w/}}$ $x \in \operatorname{Ker}(j \circ k)$ に対して $k(x) = 0 \iff x \in \operatorname{Ker} k = \operatorname{Im} j$ が成り立つ．故にある $y \in D$ を用いて $x = j(y)$ と書かれるので

$$x + \operatorname{Im}(j \circ k) = j(y) + \operatorname{Im}(j \circ k) = j'\big(i(y)\big).$$

i.e. $\operatorname{Ker} k' \subset \operatorname{Im} j'$ が言えた．

$\operatorname{Im} k' = \operatorname{Ker} i'$

$\forall x \in \operatorname{Im} k'$ はある $y \in \operatorname{Ker}(j \circ k)$ を用いて $x = k'(y + \operatorname{Im}(j \circ k)) = k(y)$ と書ける．従って $i'(x) = i\big(k(y)\big) = 0$．i.e. $\operatorname{Im} k' \subset \operatorname{Ker} i'$．

一方，$\forall x \in \operatorname{Ker} i'$ はある $y \in D$ を用いて $x = i(y)$ と書けて，さらに $i(y) \in \operatorname{Ker} i = \operatorname{Im} k$ なのである $z \in E$ を用いて $x = i(y) = k(z)$ と書ける．このとき $j\big(k(z)\big) = j\big(i(y)\big) = 0 \iff z \in \operatorname{Ker}(j \circ k)$ なので $x = k'(z + \operatorname{Im}(j \circ k)) \in \operatorname{Im} k'$．i.e. $\operatorname{Ker} i' \subset \operatorname{Im} k'$ が言えた．

■

定義 4.22: 導来対

- 命題 4.30 の 5 つ組み (D', E', i', j', k') は完全対 (D, E, i, j, k) の**導来対** (derived couple) と呼ばれる．
- $r \geq 1$ に対して，完全対 (D, E, i, j, k) から導来対を作る操作を $r - 1$ 回繰り返してできる完全対を (D, E, i, j, k) の**第 r 導来対**と呼ぶ．

完全対 (D, E, i, j, k) の第 r 導来対を直接定めることもできる．$r \geq 1$ を 1 つとって固定する．

$$D_r \coloneqq \operatorname{Im} i^{r-1}$$

とおき，ファイバー積を使って

$$Z_r \coloneqq \prod_{D,\, A \in \{\operatorname{Im} i^{r-1},\, E\}} A,$$
$$B_r \coloneqq \operatorname{Im}\big(\operatorname{Ker} i^{r-1} \xrightarrow{\ker i^{r-1}} D \xrightarrow{j} E\big)$$

と定める．

$$\begin{tikzcd}
\forall X \arrow[r, "g_1"] \arrow[ddr] \arrow[dd, dashed, "\exists! g"'] & \operatorname{Im} i^{r-1} \arrow[dr, "\operatorname{im} i^{r-1}"] & \\
 & & D \\
Z_r \arrow[uur, "p_1"] \arrow[r, "p_2"] & E \arrow[ur, "k"] &
\end{tikzcd}$$

図 4.8: ファイバー積による Z_r の定義

補題 4.7:

$\mathcal{A} = R$-**Mod** のとき,

$$Z_r = k^{-1}(\operatorname{Im} i^{r-1}), \quad B_r = j(\operatorname{Ker} i^{r-1})$$

証明 $B_r = j(\operatorname{Ker} i^{r-1})$ は $\ker i^{r-1}$ が包含写像であることから明らか.

図式 4.9 において $Z_r = k^{-1}(\operatorname{Im} i^{r-1})$, $p_1 = k$ とし, p_2 は包含写像 $\iota\colon k^{-1}(\operatorname{Im} i^{r-1}) \hookrightarrow E$ とする. すると $\forall x \in k^{-1}(\operatorname{Im} i^{r-1})$ に対して $k(x) \in \operatorname{Im} i^{r-1}$ だから $k(x) = \operatorname{im} i^{r-1}\bigl(k(x)\bigr)$ であり

$$k\bigl(p_2(x)\bigr) = k(x) = \operatorname{im} i^{r-1}\bigl(p_1(x)\bigr)$$

が成り立つ.

次に, $\forall X \in R$-**Mod** および集合

$$\left\{\, (g_1,\, g_2) \in \operatorname{Hom}_R(X,\, \operatorname{Im} i^{r-1}) \times \operatorname{Hom}_R(X,\, E) \;\middle|\; \operatorname{im} i^{r-1} \circ g_1 = k \circ g_2 \,\right\}$$

の任意の元 $(g_1,\, g_2)$ をとる. このとき $\operatorname{im} i^{r-1}$ は包含写像なので $g_1 = k \circ g_2$ であり, $\operatorname{Im} g_2 \subset k^{-1}(\operatorname{Im} i^{r-1})$ とわかる. 故に $g_2 = \iota \circ g_2$. ここで $p_i \circ g_2 = p_i \circ g' \quad (i = 1,\, 2)$ を充たす別の $g' \in \operatorname{Hom}_R\bigl(X,\, k^{-1}(\operatorname{Im} i^{r-1})\bigr)$ をとると, $p_2 = \iota$ が単射であることから $g_2 = g'$. 以上の考察から写像

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_R\bigl(X,\, k^{-1}(\operatorname{Im} i^{r-1})\bigr) &\longrightarrow \left\{\, (g_1,\, g_2) \in \operatorname{Hom}_R(X,\, \operatorname{Im} i^{r-1}) \times \operatorname{Hom}_R(X,\, E) \;\middle|\; \operatorname{im} i^{r-1} \circ g_1 = k \circ g_2 \,\right\} \\ g &\longmapsto \bigl(p_i \circ g\bigr)_{i=1,\,2} = \bigl(k \circ g,\; \iota \circ g\bigr) \end{aligned}$$

が全単射であることがわかった. i.e. $k^{-1}(\operatorname{Im} i^{r-1}) = \prod_{D,\, A \in \{\operatorname{Im} i^{r-1},\, E\}} A$ である.

■

このとき合成射

$$B_r \xrightarrow{\operatorname{im}(j \circ \ker i^{r-1})} E \xrightarrow{k} D$$

は零写像となる[*9]ので, B_r が自然に Z_r の部分対象になる.

証明 Mitchell の埋め込み定理によって $\mathcal{A} = R$-**Mod** の場合に確認すればよい. このとき

$$Z_r = k^{-1}(\operatorname{Im} i^{r-1}), \quad B_r = j(\operatorname{Ker} i^{r-1})$$

であるから, $\forall x \in B_r$ をとってくると, ある $y \in \operatorname{Ker} i^{r-1}$ が存在して $x = j(y)$ と書ける. よって $k(x) = k\bigl(j(y)\bigr) = 0 \in \operatorname{Im} i^{r-1}$ なので $x \in Z_r$ でもある. i.e. $B_r \subset Z_r$. ■

自然な単射 $B_r \longrightarrow Z_r$ に対して

$$E_r := \operatorname{Coker}(B_r \longrightarrow Z_r)$$

と定める.

[*9] まず完全対の定義から $k \circ j = 0$ なので $k \circ j \circ \ker i^{r-1} = 0$ が成り立つ. Abel 圏における任意の射は coim と im の合成で書けるので $k \circ \operatorname{im}(j \circ \ker i^{r-1}) \circ \operatorname{coim}(j \circ \ker i^{r-1}) = 0$ だが, coim は全射なので結局 $k \circ \operatorname{im}(j \circ \ker i^{r-1}) = 0$ が言えた.

命題 4.31: 第 r 導来対の同型

記号を上述の通りとし，さらに

$$i_r := i|_{D_r} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(D_r,\, D_r)$$

とおく．すると射

$$\begin{aligned} j_r\colon D_r &\longrightarrow E_r,\ a \longmapsto j(b) + B_r \qquad {}^{\mathrm{w}/}\ \ b \in (i^{r-1})^{-1}(\{a\}) \\ k_r\colon E_r &\longrightarrow D_r,\ a + B_r \longmapsto k(a) \end{aligned}$$

は well-defined であり，5 つ組み $(D_r,\, E_r,\, i_r,\, j_r,\, k_r)$ は完全対 $(D,\, E,\, i,\, j,\, k)$ の第 $\boldsymbol{r}$ 導来対と同型である．

証明 well-definedness

別の $b' \in (i^{r-1})^{-1}(\{a\})$ を任意にとると

$$i^{r-1}(b'-b) = i^{r-1}(b') - i^{r-1}(b) = a - a = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad b' - b \in \mathrm{Ker}\, i^{r-1}$$

なので，$j(b') - j(b) \in j(\mathrm{Ker}\, i^{r-1}) = B_r$ が言える．i.e. j_r は well-defined.

一方，別の $a' \in Z_r$ であって $a' \in a + B_r$ を充たすものをとると $a' - a \in B_r$ より

$$k(a') - k(a) \in k(B_r) \subset \mathrm{Im}(k \circ j) = 0$$

なので k' も well-defined.

同型であること

$r \geq 2$ とし，$(D_{r-1},\, E_{r-1},\, i_{r-1},\, j_{r-1},\, k_{r-1})$ の導来対 $(D'_{r-1},\, E'_{r-1},\, i'_{r-1},\, j'_{r-1},\, k'_{r-1})$ が $(D_r,\, E_r,\, i_r,\, j_r,\, k_r)$ と同型であることを示す．また，Mitchell の埋め込み定理によって $\mathcal{A} = R\text{-}\mathbf{Mod}$ の場合に示せばよい．まず定義から即座に

$$\begin{aligned} D_r &= D'_r = \mathrm{Im}\, i^{r-1}, \\ i_r &= i'_r = i|_{\mathrm{Im}\, i^{r-1}} \end{aligned}$$

が従う．

$\boldsymbol{E_r \cong E'_{r-1}}$

示すべきは

$$E_r = Z_r/B_r \cong \mathrm{Ker}(j_{r-1} \circ k_{r-1}) / \mathrm{Im}(j_{r-1} \circ k_{r-1}) = E'_{r-1} \tag{4.5.1}$$

である．そのために全射

$$g\colon Z_r \longrightarrow \mathrm{Ker}(j_{r-1} \circ k_{r-1}) / \mathrm{Im}(j_{r-1} \circ k_{r-1})$$

であって，$\mathrm{Ker}\, g = B_r$ を充たすものを構成する．

$$f\colon Z_r \longrightarrow E_{r-1},\ a \longmapsto a + B_{r-1}$$

と定める．$a \in Z_r = k^{-1}(\operatorname{Im} i^{r-1})$ なので，ある $b \in D$ があって $k(a) = i^{r-1}(b)$ を充たす．すると

$$(j_{r-1} \circ k_{r-1})\bigl(f(a)\bigr) = j_{r-1}\bigl(k(a)\bigr) = j\bigl(i(b)\bigr) + B_{r-1} = B_{r-1}.$$

i.e. $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker}(j_{r-1} \circ k_{r-1})$ である．よって次のような射を定義できる：

$$\begin{aligned} g \colon Z_r &\longrightarrow \operatorname{Ker}(j_{r-1} \circ k_{r-1}) / \operatorname{Im}(j_{r-1} \circ k_{r-1}), \\ a &\longmapsto f(a) + \operatorname{Im}(j_{r-1} \circ k_{r-1}) = (a + B_{r-1}) + \operatorname{Im}(j_{r-1} \circ k_{r-1}) \end{aligned}$$

g は全射

$\forall a + B_{r-1} \in \operatorname{Ker}(j_{r-1} \circ k_{r-1})$ を一つとる．$\operatorname{Ker}(j_{r-1} \circ k_{r-1}) \subset E_{r-1} = Z_{r-1}/B_{r-1}$ なので $a \in Z_{r-1}$ であるから，ある $b \in D$ が存在して $k(a) = i^{r-2}(b)$ と書ける．また，$(j_{r-1} \circ k_{r-1})(a + B_{r-1}) = j\bigl(b\bigr) + B_{r-1} = B_{r-1}$ なので $j(b) \in B_{r-1} = j(\operatorname{Ker} i^{r-2})$ である．故にある $c \in \operatorname{Ker} i^{r-2}$ が存在して $j(b) = j(c)$ と書ける．すると

$$j(b - c) = j(b) - j(c) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad b - c \in \operatorname{Ker} j = \operatorname{Im} i$$

となるのである $d \in D$ が存在して $b - c = i(d)$ と書ける．すると

$$k(a) = i^{r-2}(b) = i^{r-2}(b) - i^{r-2}(c) = i^{r-2}(b - c) = i^{r-1}(d) \in \operatorname{Im} i^{r-1}$$

なので $a \in Z_r$ が言えた．i.e. g は全射である．

$\operatorname{Ker} g \subset B_r$

$\forall a \in \operatorname{Ker} g$ を一つとる．すると $a + B_{r-1} \in \operatorname{Im}(j_{r-1} \circ k_{r-1})$ だから，ある $b \in Z_{r-1}$ と $c \in D$ が存在して $k(b) = i^{r-2}(c)$ かつ $a - j(c) \in B_{r-1}$ を充たす．i.e. ある $d \in \operatorname{Ker} i^{r-2}$ が存在して $j(d) = a - j(c)$ を充たす．よって $a = j(c + d)$ と書けるが，

$$i^{r-1}(c + d) = i\bigl(i^{r-2}(c)\bigr) + i\bigl(i^{r-2}(d)\bigr) = i\bigl(k(b)\bigr) = 0 \quad \Longrightarrow \quad a \in j(\operatorname{Ker} i^{r-1}) = B_r$$

とわかる．i.e. $\operatorname{Ker} g \subset B_r$ が言えた．

$\operatorname{Ker} g \supset B_r$

$\forall a \in B_r$ を一つとると，ある $b \in \operatorname{Ker} i^{r-1}$ を用いて $a = j(b)$ と書ける．$i^{r-2}(b) \in \operatorname{Ker} i = \operatorname{Im} k$ だからある $c \in E$ があって $i^{r-2}(b) = k(c)$ と書けるが，このとき $c \in k^{-1}(\operatorname{Im} i^{r-2}) = Z_{r-1}$ である．よって

$$(j_{r-1} \circ k_{r-1})(c + B_{r-1}) = j_{r-1}\bigl(k(c)\bigr) = j_{r-1}\bigl(i^{r-2}(b)\bigr) = j(b) + B_{r-1} = a + B_{r-1}$$

i.e. $a + B_{r-1} \in \operatorname{Im}(j_{r-1} \circ k_{r-1})$ であり，$\operatorname{Ker} g \supset B_r$ が言えた．

このようにして構成された g に準同型定理を使うことで目的の同型 (4.5.1) が示された．

$j_r = j'_{r-1}$

g によって誘導される同型を

$$\begin{aligned} \psi \colon E_r &\xrightarrow{\cong} E'_{r-1}, \\ a + B_r &\longmapsto (a + B_{r-1}) + \operatorname{Im}(j_{r-1} \circ k_{r-1}) \end{aligned}$$

とおくと $j'_{r-1} = \psi \circ j_r$ である．

$k_r = k'_{r-1}$

同様に $k'_{r-1} \circ \psi = k_r$ がわかる．

■

二重次数付き完全対を定義する：

定義 4.23: 二重次数付き完全対

$r_0 \geq 1$ とする．

- $\mathcal{A}$ の対象の族 $\left(D^{p,\,q}\right)_{p,\,q\in\mathbb{Z}}$, $\left(E^{p,\,q}\right)_{p,\,q\in\mathbb{Z}}$
- $\mathcal{A}$ の射の族

$$\begin{aligned}&\left(i^{p,\,q} \colon D^{p,\,q} \longrightarrow D^{p-1,\,q+1}\right)_{p,\,q\in\mathbb{Z}},\\&\left(j^{p,\,q} \colon D^{p,\,q} \longrightarrow E^{p+r_0-1,\,q-r_0+1}\right)_{p,\,q\in\mathbb{Z}},\\&\left(k^{p,\,q} \colon E^{p,\,q} \longrightarrow D^{p+1,\,q}\right)_{p,\,q\in\mathbb{Z}}\end{aligned}$$

を与える．このとき，5 つ組み $\Big((D^{p,\,q}),\,(E^{p,\,q}),\,(i^{p,\,q}),\,(j^{p,\,q}),\,(k^{p,\,q})\Big)$ が次数 r_0 の **二重次数付き完全対** (bigraded exact couple) であるとは，$\forall p,\,q \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} i^{p,\,q} &= \operatorname{Ker} j^{p-1,\,q+1},\\\operatorname{Im} j^{p,\,q} &= \operatorname{Ker} k^{p+r_0-1,\,q-r_0+1},\\\operatorname{Im} k^{p,\,q} &= \operatorname{Ker} i^{p+1,\,q}\end{aligned}$$

が成り立つこと．

二重次数付き完全対が**有界**であるとは，

$$\begin{aligned}&\forall n \in \mathbb{Z},\ \exists p_0,\,p_1 \in \mathbb{Z} \quad \text{s.t.} \quad p_0 \geq p_1,\\&p \geq p_0 \quad\Longrightarrow\quad D^{p,\,n-p} = 0,\\&p \leq p_1 \quad\Longrightarrow\quad i^{p,\,n-p}\ \text{が同型}\end{aligned}$$

が成り立つこと．

補題 4.8:

$\mathcal{A}$ 上の二重次数付き完全対 $\Big((D^{p,\,q}),\,(E^{p,\,q}),\,(i^{p,\,q}),\,(j^{p,\,q}),\,(k^{p,\,q})\Big)$ を与える．

(1) $\mathcal{A} = R\text{-}\mathbf{Mod}$ とすると

$$\left(\bigoplus_{p,\,q} D^{p,\,q},\ \bigoplus_{p,\,q} E^{p,\,q},\ \bigoplus_{p,\,q} i^{p,\,q},\ \bigoplus_{p,\,q} j^{p,\,q},\ \bigoplus_{p,\,q} k^{p,\,q}\right)$$

は完全対である．

(2) $\mathcal{A}$ における有向グラフ $(\mathbb{Z},\,\leq)$ 上の図式

$$\left(\left(D^{-p,\,n+p}\right)_{p\in\mathbb{Z}},\ \left(\iota_{p,\,p'} \colon D^{-p,\,n+p} \longrightarrow D^{-p',\,n+p'}\right)_{(p,\,p')\in\mathbb{Z}^2,\,p\leq p'}\right)$$

を次のように定める：

$$\iota_{p,\,p'} := i^{-(p'-1),\,n+(p'-1)} \circ \cdots \circ i^{-p,\,n+p}.$$

このとき，与えられた二重次数付き完全対が有界ならば，充分大きな $p_\infty \in \mathbb{Z}$ をとると

$$\varinjlim_{p\in\mathbb{Z}} D^{-p,\, n+p} = D^{-p_\infty,\, n+p_\infty}$$

が成り立つ．

(2) において $E^n := \varinjlim_{p\in\mathbb{Z}} D^{-p,\, n+p}$ とおき，標準的包含を $\iota^{p,\, q}\colon D^{p,\, q} \longrightarrow E^{p+q}$ と書いて

$$F^pE := \mathrm{Im}\bigl(\iota^{p,\, n-p}\colon D^{p,\, n-p} \longrightarrow E^n\bigr)$$

と定義すると，$\bigl(E^n,\, (F^pE^n)_{p\in\mathbb{Z}}\bigr)_{n\in\mathbb{Z}}$ は filtrered object になる．

<u>証明</u>　(1) 明らか

(2)　二重次数付き完全対 $\Bigl((D^{p,\, q}),\, (E^{p,\, q}),\, (i^{p,\, q}),\, (j^{p,\, q}),\, (k^{p,\, q})\Bigr)$ の有界性から，ある $p_\infty \in \mathbb{Z}$ が存在して $\forall p \geq p_\infty$ に対して $\iota_{p_\infty,\, p}$ は同型となる．ここで $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ および集合

$$\left\{ \left(f_p\right)_{p\in\mathbb{Z}} \in \prod_{\pi\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\left(D^{-p,\, n+p},\, X\right) \;\middle|\; \forall p,\, p' \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } p \leq p', \quad f_{p'} \circ \iota_{p,\, p'} = f_p \right\}$$

の勝手な元 $\left(f_p\right)_{p\in\mathbb{Z}}$ をとる．すると $\forall p \in \mathbb{Z}$ に対して

$$f_p = f_{p_\infty} \circ \iota_{p,\, p_\infty}$$

が成り立つ．

$g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\left(D^{-p_\infty,\, n+p_\infty},\, X\right)$ であって，$\forall p \in \mathbb{Z}$ に対して $g \circ \iota_{p,\, p_\infty} = f_p$ を充たすものをもう一つとる．ここで $g \neq f_{p_\infty}$ と仮定すると，$\forall p \geq p_\infty$ に対して

$$f_{p_\infty} \neq g = f_p \circ (\iota_{p,\, p_\infty})^{-1} = f_{p_\infty}$$

となり矛盾．従って $g = f_{p_\infty}$ がわかった．これは写像

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\left(D^{-p_\infty,\, n+p_\infty},\, X\right) \longrightarrow \left\{ \left(f_p\right)_{p\in\mathbb{Z}} \in \prod_{\pi\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\left(D^{-p,\, n+p},\, X\right) \;\middle|\; \forall p,\, p' \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } p \leq p', \quad f_{p'} \circ \iota_{p,\, p'} = f_p \right\},$$

$$g \longmapsto (g \circ \iota_{p,\, p_\infty})_{p\in\mathbb{Z}}$$

が全単射であることを意味する．i.e. $\varinjlim_{p\in\mathbb{Z}} D^{-p,\, n+p} = D^{-p_\infty,\, n+p_\infty}$ である．

■

二重次数付き完全対の導来対を考えることもできる：

命題 4.32: 二重次数付き完全対の導来対

次数 r_0 の二重次数付き完全対 $\Bigl((D^{p,\, q}),\, (E^{p,\, q}),\, (i^{p,\, q}),\, (j^{p,\, q}),\, (k^{p,\, q})\Bigr)$ を与える．

$$\begin{aligned}
D'^{p,\, q} &:= \mathrm{Im}\, i^{p+1,\, q-1}, \\
Z'^{p,\, q} &:= \mathrm{Ker}(j^{p+1,\, q} \circ k^{p,\, q}), \\
B'^{p,\, q} &:= \mathrm{Im}(j^{p-r_0+1,\, q+r_0-1} \circ k^{p-r_0,\, q+r_0-1})
\end{aligned}$$

とおくと自然な単射 $B'^{p,\,q} \longrightarrow Z'^{p,\,q}$ がある．この単射を使って

$$E'^{p,\,q} := \mathrm{Coker}(B'^{p,\,q} \longrightarrow Z'^{p,\,q})$$

とおく．さらに

$$(D,\,E,\,i,\,j,\,k) := \left(\bigoplus_{p,\,q} D^{p,\,q},\,\bigoplus_{p,\,q} E^{p,\,q},\,\bigoplus_{p,\,q} i^{p,\,q},\,\bigoplus_{p,\,q} j^{p,\,q},\,\bigoplus_{p,\,q} k^{p,\,q}\right)$$

の導来対を $(D',\,E',\,i',\,j',\,k')$ とおいて

$$\begin{aligned} i'^{p,\,q} &:= i'|_{D'^{p,\,q}},\\ j'^{p,\,q} &:= j'|_{D'^{p,\,q}},\\ k'^{p,\,q} &:= k'|_{E'^{p,\,q}} \end{aligned}$$

と定めると well-defined である．このとき 5 つ組み

$$\Big((D'^{p,\,q}),\,(E'^{p,\,q}),\,(i'^{p,\,q}),\,(j'^{p,\,q}),\,(k'^{p,\,q})\Big)$$

は次数 r_0+1 の二重次数付き完全対である（**導来対**）．

次数 r_0 の二重次数付き完全対 $\Big((D^{p,\,q}),\,(E^{p,\,q}),\,(i^{p,\,q}),\,(j^{p,\,q}),\,(k^{p,\,q})\Big)$ から導来対を得る操作を $r-1$ 回繰り返してできる次数 r_0+r-1 の二重次数付き完全対を**第 r 導来対**と呼ぶ．

証明 まず二重次数付き完全対の定義から $k^{p,\,q} \circ j^{p-r_0+1,\,q+r_0-1} = 0$ が成り立つので $B'^{p,\,q}$ は $Z'^{p,\,q}$ の部分対象であり，自然な単射 $B'^{p,\,q} \longrightarrow Z'^{p,\,q}$ がある．

以下では Mitchell の埋め込み定理より $\mathcal{A} = R$-$\mathbf{Mod}$ として考える．補題 4.8-(1) より $(D,\,E,\,i,\,j,\,k)$ は完全対である．$(D',\,E',\,i',\,j',\,k')$ をその導来対とすると，帰納極限同士が交換することから

$$\begin{aligned} D' &= \mathrm{Im}\left(\bigoplus_{p,\,q} i^{p,\,q}\right) = \bigoplus_{p,\,q} \mathrm{Im}\, i^{p,\,q} = \bigoplus_{p,\,q} D'^{p,\,q},\\ E' &= \bigoplus_{p,\,q} E'^{p,\,q} \end{aligned}$$

となる．また，

$$\begin{aligned} i'(D'^{p,\,q}) &\subset D'^{p-1,\,q+1},\\ j'(D'^{p,\,q}) &\subset E'^{p+r_0,\,q-r_0},\\ k'(E'^{p,\,q}) &\subset D'^{p+1,\,q} \end{aligned}$$

が成り立つので

$$(D',\,E',\,i',\,j',\,k') = \left(\bigoplus_{p,\,q} D'^{p,\,q},\,\bigoplus_{p,\,q} E'^{p,\,q},\,\bigoplus_{p,\,q} i'^{p,\,q},\,\bigoplus_{p,\,q} j'^{p,\,q},\,\bigoplus_{p,\,q} k'^{p,\,q}\right)$$

である． ■

完全対の第 r 導来対の場合と同様にして，二重次数付き完全対 $\Big((D^{p,\,q}),\,(E^{p,\,q}),\,(i^{p,\,q}),\,(j^{p,\,q}),\,(k^{p,\,q})\Big)$ の第 r 導来対を直接定めることもできる．簡単のため，二重次数付き完全対の次数は 1 とする．

まず記号として，射

$$i^{p,\,q}\colon D^{p,\,q} \longrightarrow D^{p-1,\,q+1}$$

を上手く $r-1$ 回合成した写像

$$i^{p+1,\,q-1} \circ i^{p+2,\,q-2} \circ \cdots \circ i^{p+(r-1),\,q-(r-1)}\colon D^{p+(r-1),\,q-(r-1)} \longrightarrow D^{p,\,q}$$

のことを $(i^{p,\,q})^{r-1}$ と略記する．そして

$$D_r^{p,\,q} \coloneqq \mathrm{Im}\Bigl((i^{p,\,q})^{r-1}\colon D^{p+(r-1),\,q-(r-1)} \longrightarrow D^{p,\,q}\Bigr)$$

とおく．

次に $E_r^{p,\,q}$ であるが，完全対の第 r 導来対の場合と同様にファイバー積を使って

$$\begin{aligned}
Z_r &\coloneqq \prod_{D^{p+1,\,q},\, A\in\{\mathrm{Im}(i^{p+1,\,q})^{r-1},\, E^{p,\,q}\}} A, \\
B_r &\coloneqq \mathrm{Im}\Bigl(\mathrm{Ker}(i^{p-(r-1),\,q+(r-1)})^{r-1} \xrightarrow{\ker(i^{p-(r-1),\,q+(r-1)})^{r-1}} D^{p,\,q} \xrightarrow{j^{p,\,q}} E^{p,\,q}\Bigr)
\end{aligned}$$

と定める．

$$\begin{tikzcd}
\forall X \arrow[r, "g_1"] \arrow[dd, dashed, "\exists! g"'] \arrow[ddr, "p_1"] & \mathrm{Im}(i^{p+1,\,q})^{r-1} \arrow[dr, "\mathrm{im}(i^{p+1,\,q})^{r-1}"] & \\
 & & D^{p+1,\,q} \\
Z_r^{p,\,q} \arrow[r, "p_2"] \arrow[uur] & E^{p,\,q} \arrow[ur, "k^{p,\,q}"] &
\end{tikzcd}$$

図 4.9: ファイバー積による $Z_r^{p,\,q}$ の定義

次の補題は補題 4.9 と同様に示される．

補題 4.9:

$\mathcal{A} = R$-**Mod** のとき，

$$Z_r^{p,\,q} = (k^{p,\,q})^{-1}\bigl(\mathrm{Im}(i^{p+1,\,q})^{r-1}\bigr), \quad B_r^{p,\,q} = j^{p,\,q}\bigl(\mathrm{Ker}(i^{p-(r-1),\,q+(r-1)})^{r-1}\bigr)$$

もとの二重次数付き完全対の次数が 1 なので $\mathrm{Im}\, j^{p,\,q} = \mathrm{Ker}\, k^{p,\,q}$ が成り立つことから，合成射

$$B_r \xrightarrow{\mathrm{im}\left(j^{p,\,q}\mathrm{oker}(i^{p-(r-1),\,q+(r-1)})^{r-1}\right)} E^{p,\,q} \xrightarrow{k^{p,\,q}} D^{p+1,\,q}$$

は零写像となり，B_r が自然に Z_r の部分対象になる．ここで，自然な単射 $B_r^{p,\,q} \longrightarrow Z_r^{p,\,q}$ に対して

$$E_r^{p,\,q} \coloneqq \mathrm{Coker}(B_r^{p,\,q} \longrightarrow Z_r^{p,\,q})$$

と定める．

射 $i_r^{p,\,q}$, $j_r^{p,\,q}$, $k_r^{p,\,q}$ は次のように定義する[*10]．まず

$$(D,\, E,\, i,\, j,\, k) \coloneqq \left(\bigoplus_{p,\,q} D^{p,\,q},\, \bigoplus_{p,\,q} E^{p,\,q},\, \bigoplus_{p,\,q} i^{p,\,q},\, \bigoplus_{p,\,q} j^{p,\,q},\, \bigoplus_{p,\,q} k^{p,\,q}\right)$$

とおくと，補題 4.8-(1) よりこれは完全対である．命題 4.31 を使うと，その第 r 導来対を直接構成できる[*11]：

$$\begin{aligned}
D_r &\coloneqq \bigoplus_{p,\,q} \mathrm{Im}(i^{p,\,q})^{r-1}, \\
B_r &\coloneqq \bigoplus_{p,\,q} \mathrm{Im}\left(\mathrm{Ker}\left(i^{p-(r-1),\,q+(r-1)}\right)^{r-1} \xrightarrow{\ker\left(i^{p-(r-1),\,q+(r-1)}\right)^{r-1}} D^{p,\,q} \xrightarrow{j^{p,\,q}} E^{p,\,q}\right), \\
Z_r &\coloneqq \bigoplus_{p,\,q} (k^{p,\,q})^{-1}\left(\mathrm{Im}(i^{p+1,\,q})^{r-1}\right), \\
E_r &\coloneqq \mathrm{Coker}(B_r \hookrightarrow Z_r) = Z_r/B_r, \\
i_r &\coloneqq i|_{D_r} \colon D_r \longrightarrow D_r, \\
j_r &\colon D_r \longrightarrow E_r,\, \longmapsto j(b) + B_r \quad {}^{\mathrm{w}/}\ b \in (i^{r-1})^{-1}(\{a\}), && (4.5.2) \\
k_r &\colon E_r \longrightarrow D_r,\, a + B_r \longmapsto k(a) \quad {}^{\mathrm{w}/}\ a \in Z_r && (4.5.3)
\end{aligned}$$

射 i_r, j_r, k_r は直和 $\bigoplus_{p,\,q}$ の形をしているので，第 p, q 成分を取り出して

$$\begin{aligned}
i_r^{p,\,q} &\coloneqq i_r|_{D_r^{p,\,q}}, \\
j_r^{p,\,q} &\coloneqq j_r|_{D_r^{p,\,q}}, \\
k_r^{p,\,q} &\coloneqq k_r|_{E_r^{p,\,q}},
\end{aligned}$$

とおく[*12]．このとき[*13]

$$(D_r,\, E_r,\, i_r,\, j_r,\, k_r) \coloneqq \left(\bigoplus_{p,\,q} D_r^{p,\,q},\, \bigoplus_{p,\,q} E_r^{p,\,q},\, \bigoplus_{p,\,q} i_r^{p,\,q},\, \bigoplus_{p,\,q} j_r^{p,\,q},\, \bigoplus_{p,\,q} k_r^{p,\,q}\right)$$

なので，$\left((D_r^{p,\,q}),\, (E_r^{p,\,q}),\, (i_r^{p,\,q}),\, (j_r^{p,\,q}),\, (k_r^{p,\,q})\right)$ が次数 r の[*14]二重次数付き完全対だとわかる．さらに命題 4.31 の同型を使うことで次の命題が成り立つことが言える：

命題 4.33: 二重次数付き完全対の第 r 導来対の表示

記号を上述の通りとする．このとき，$\left((D_r^{p,\,q}),\, (E_r^{p,\,q}),\, (i_r^{p,\,q}),\, (j_r^{p,\,q}),\, (k_r^{p,\,q})\right)$ は $\left((D^{p,\,q}),\, (E^{p,\,q}),\, (i^{p,\,q}),\, (j^{p,\,q}),\, (k^{p,\,q})\right)$ の第 r 導来対と同型である．

次の定理は，有界な次数 1 の二重次数付き完全対が与えられると自然にスペクトル系列が構成されることを主張する：

[*10] 以降では $\mathcal{A} = R\text{-}\mathbf{Mod}$ とする．

[*11] フィルタードな帰納極限（i.e. 直和）と有限な射影極限（i.e. Ker）が可換であることを暗に使っている

[*12] より厳密には，i_r の定義域の制限は第 $(p,\,q)$ 成分への標準的包含 $\iota_{p,\,q} \coloneqq D_r^{p,\,q} \hookrightarrow D_r$ を用いて $\iota_{p,\,q}(D_r^{p,\,q})$ とする．j_r, k_r の制限も同様．

[*13] E_r に関しては，射影極限（i.e. 直和）と射影極限（i.e. Coker）が交換することを用いている．

[*14] 素材となる $\left((D^{p,\,q}),\, (E^{p,\,q}),\, (i^{p,\,q}),\, (j^{p,\,q}),\, (k^{p,\,q})\right)$ の次数は 1 としていたのだった．

定理 4.8: スペクトル系列の構成

次数 1 の 有界な 二重次数付き完全対 $\bigl((D^{p,q}),\,(E^{p,q}),\,(i^{p,q}),\,(j^{p,q}),\,(k^{p,q})\bigr)$ を与え，これの第 r 導来対を $\bigl((D_r^{p,q}),\,(E_r^{p,q}),\,(i_r^{p,q}),\,(j_r^{p,q}),\,(k_r^{p,q})\bigr)$ とおく．

$$d_r^{p,q} := j_r^{p+1,q} \circ k_r^{p,q} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\bigl(E_r^{p,q},\,E_r^{p+r,q-r+1}\bigr)$$

と定め，filtered object を補題 4.8-(2) の通りに定める．このとき，

(1) 対象の族 $(E_r^{p,q})$

(2) **有限に**フィルター付けされた対象の族 $\Bigl(E^n,\,\bigl(F^pE\bigr)_{p\in\mathbb{Z}}\Bigr)_{n\in\mathbb{Z}}$

(3) 射の族 $\bigl(d_r^{p,q}\colon E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r,q-r+1}\bigr)_{p,q,r\in\mathbb{Z},\,r\geq 1}$

はスペクトル系列

$$E_1^{p,q} \quad\Longrightarrow\quad E^{p+q}$$

を自然に定める．

<u>証明</u> スペクトル系列の定義の条件と同型 (4), (5) を確認すればよい．$\mathcal{A} = R$-**Mod** として考える．

(SS1)

定義 (4.5.3) より，$\forall a + B_r^{p,q} \in E_r^{p,q}$ に対して

$$k_r^{p,q}(a + B_r^{p,q}) = k^{p,q}(a) \in \mathrm{Im}(i^{p+1,q})^{r-1}$$

が成り立つ．故に定義 (4.5.2) より，$b \in (i^{p+1,q})^{-1}(\{k^{p,q}(a)\}) \subset D^{p+r,q-r+1}$ を任意にとると

$$\begin{aligned} d_r^{p,q}(a + B_r^{p,q}) &= (j_r^{p+1,q} \circ k_r^{p,q})(a + B_r^{p,q}) = j_r\bigl(k^{p,q}(a)\bigr) \\ &= j^{p+r,q-r+1}(b) + B_r^{p+r,q-r+1} \in E^{p+r,q-r+1} \end{aligned}$$

となる．これと $\mathrm{Im}\,j^{p+r,q-r+1} = \mathrm{Ker}\,k^{p+r,q-r+1}$ より，

$$\begin{aligned} (d_r^{p+r,q-r+1} \circ d_r^{p,q})(a + B_r^{p,q}) &= (j_r^{p+r+1,q-r+1} \circ (k_r^{p+r,q-r+1} \circ j_r^{p+1,q}) \circ k_r^{p,q})(a + B_r^{p,q}) \\ &= j_r^{p+r+1,q-r+1}\Bigl(k_r^{p+r,q-r+1}\bigl(j^{p+r,q-r+1}(b)\bigr)\Bigr) = 0 \end{aligned}$$

i.e. $d_r^{p+r,q-r+1} \circ d_r^{p,q} = 0$ が示された．

(SS2)

与えられた二重次数付き完全対 $\bigl((D^{p,q}),\,(E^{p,q}),\,(i^{p,q}),\,(j^{p,q}),\,(k^{p,q})\bigr)$ が有界であるという仮定より，$p \gg 0$ および $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$D^{p,n-p} = D^{p+1,n-p} = 0$$

が成り立つ．従って

$$E^{p,n-p} = \mathrm{Ker}(k^{p,n-p}\colon E^{p,n-p} \longrightarrow 0) = \mathrm{Im}(j^{p,n-p}\colon 0 \longrightarrow E^{p,n-p}) = 0.$$

である．また，$p \ll 0$ に対して $i^{p+1,\,n-p}$, $i^{p+1,\,n-p-1}$ が同型，i.e. 単射かつ全射であるから

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} k^{p,\,n-p} &= \operatorname{Ker} i^{p+1,\,n-p} = 0,\\ \operatorname{Ker} j^{p,\,n-p} &= \operatorname{Im} i^{p+1,\,n-p-1} = D^{p,\,n-p}\end{aligned}$$

が成り立つ．故に

$$E^{p,\,n-p} = \operatorname{Ker} k^{p,\,n-p} = \operatorname{Im}(j^{p,\,n-p\colon D^{p,\,n-p} \longrightarrow E^{p,\,n-p}}) = 0$$

が言えた．

以上の考察から，$r \gg 0$ および $\forall (p,\,q) \in \mathbb{Z}^2$ に対して $E^{p+r,\,q-r+1} = E^{p-r,\,q+r-1} = 0$ がわかり，従って $d_r^{p,\,q} = d_r^{p-r,\,q+r-1} = 0$ である．

同型 (4)

二重次数付き完全対の第 r 導来対（これは次数 r の二重次数付き完全対である）から第 $r+1$ 導来対を構成する操作の定義より

$$E_{r+1}^{p,\,q} = \frac{\operatorname{Ker}(j_r^{p+1} \circ k_r^{p,\,q})}{\operatorname{Im}(j_r^{p-r+1,\,q+r-1} \circ k^{p-r,\,q+r-1})} = \frac{\operatorname{Ker} d_r^{p,\,q}}{\operatorname{Im} d_r^{p-r,\,q+r-1}}$$

が言えるが，これがまさに所望の同型である．

同型 (5)

与えられた二重次数付き完全対 $\bigl((D^{p,\,q}),\,(E^{p,\,q}),\,(i^{p,\,q}),\,(j^{p,\,q}),\,(k^{p,\,q})\bigr)$ が有界であるという仮定より，$r \gg 0$ および $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して $D^{p+r,\,q-r+1} = 0$ なので

$$\begin{aligned}&\operatorname{Im}\bigl((i^{p+1,\,q})^{r-1}\colon 0 \longrightarrow D^{p+1,\,q}\bigr) = 0.\\ \therefore\quad &Z_r^{p,\,q} = (k^{p,\,q})^{-1}(\{0\}) = \operatorname{Ker} k^{p,\,q}.\end{aligned} \tag{4.5.4}$$

また，補題 4.8 より $E^{p+q} = D^{p-r+1,\,q+r-1}$ なので

$$\begin{aligned}&\operatorname{Ker}\bigl((i^{p-r+1,\,q+r-1})^{r-1}\colon D^{p,\,q} \longrightarrow E^{p+q}\bigr) = \operatorname{Ker}(\iota^{p,\,q}\colon D^{p,\,q} \longrightarrow E^{p+q}).\\ \therefore\quad &B_r^{p,\,q} = j^{p,\,q}(\operatorname{Ker} \iota^{p,\,q}).\end{aligned} \tag{4.5.5}$$

(4.5.5), (4.5.4) より，十分大きな r および $\forall p,\,n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$E_r^{p,\,n-p} = \frac{Z_r^{p,\,n-p}}{B_r^{p,\,n-p}} = \frac{\operatorname{Ker} k^{p,\,n-p}}{j^{p,\,n-p}(\operatorname{Ker} \iota^{p,\,n-p})}$$

となることがわかった．従って示すべきは

$$E_r^{p,\,n-p} \cong \frac{F^p E^n}{F^{p+1} E^n} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{\operatorname{Ker} k^{p,\,n-p}}{j^{p,\,n-p}(\operatorname{Ker} \iota^{p,\,n-p})} \cong \frac{\operatorname{Im} \iota^{p,\,n-p}}{\operatorname{Im} \iota^{p+1,\,n-p-1}}$$

である．

ここで合成射

$$\begin{aligned}&f_1\colon D^{p,\,n-p} \xrightarrow{\iota^{p,\,n-p}} \operatorname{Im} \iota^{p,\,n-p} \twoheadrightarrow \frac{\operatorname{Im} \iota^{p,\,n-p}}{\operatorname{Im} \iota^{p+1,\,n-(p+1)}},\\ &f_2\colon D^{p,\,n-p} \xrightarrow{j^{p,\,n-p}} \operatorname{Im} j^{p,\,n-p} = \operatorname{Ker} k^{p,\,n-p} \twoheadrightarrow \frac{\operatorname{Ker} k^{p,\,n-p}}{j^{p,\,n-p}(\operatorname{Ker} \iota^{p,\,n-p})}\end{aligned}$$

を考えると，f_1, f_2 はどちらも全射で

$$\mathrm{Ker}\, f_1 = \mathrm{Ker}\, f_2 = \mathrm{Ker}\, \iota^{p,\, n-p} + \mathrm{Im}\, i^{p+1,\, n-p-1}$$

が成り立つ．故に準同型定理から f_1, f_2 はそれぞれ同型

$$\begin{aligned}
\overline{f_1}\colon \frac{D^{p,\, n-p}}{\mathrm{Ker}\, \iota^{p,\, n-p} + \mathrm{Im}\, i^{p+1,\, n-p-1}} &\xrightarrow{\cong} \frac{\mathrm{Im}\, \iota^{p,\, n-p}}{\mathrm{Im}\, \iota^{p+1,\, n-(p+1)}}, \\
\overline{f_2}\colon \frac{D^{p,\, n-p}}{\mathrm{Ker}\, \iota^{p,\, n-p} + \mathrm{Im}\, i^{p+1,\, n-p-1}} &\xrightarrow{\cong} \frac{\mathrm{Ker}\, k^{p,\, n-p}}{j^{p,\, n-p}(\mathrm{Ker}\, \iota^{p,\, n-p})}
\end{aligned}$$

を誘導する．このとき $\overline{f_1} \circ \overline{f_2}^{-1}$ が欲しかった同型となる．

■

さらに，filtered な複体から自然にスペクトル系列が構成されることもわかる：

定理 4.9: フィルター付けされた複体によるスペクトル系列

$(K^\bullet,\, (F^pK^\bullet)_{p\in\mathbb{Z}})$ を，$\mathcal{A}$ における filtered な複体であって，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して K^n の**有限な** filtration が $(F^pK^n)_{p\in\mathbb{Z}}$ であるようなものとする．このとき，自然にスペクトル系列

$$E_1^{p,\, q} = H^{p+q}(F^pK^\bullet/F^{p+1}K^\bullet) \quad\Longrightarrow\quad E^{p+q} = H^{p+q}(K^\bullet)$$

が構成される．

証明

$$\begin{aligned}
D^{p,\, q} &:= H^{p+q}(F^pK^\bullet), \\
E^{p,\, q} &:= H^{p+q}(F^pK^\bullet/F^{p+1}K^\bullet)
\end{aligned}$$

とおくと，複体の完全列

$$0 \longrightarrow F^{p+1}K^\bullet \longrightarrow F^pK^\bullet \longrightarrow F^pK^\bullet/F^{p+1}K^\bullet \longrightarrow 0$$

がある．これのコホモロジー長完全列

$$\begin{aligned}
\cdots &\xrightarrow{k^{p,\, q-1}} D^{p+1,\, q-1} \xrightarrow{i^{p+1,\, q-1}} D^{p,\, q} \xrightarrow{j^{p,\, q}} E^{p,\, q} \\
&\xrightarrow{k^{p,\, q}} D^{p+1,\, q} \xrightarrow{i^{p+1,\, q}} D^{p,\, q+1} \xrightarrow{j^{p,\, q+1}} E^{p,\, q+1} \\
&\xrightarrow{k^{p,\, q+1}} \cdots
\end{aligned} \tag{4.5.6}$$

によって射の族

$$\begin{aligned}
&\left(i^{p,\, q}\colon D^{p,\, q} \longrightarrow D^{p-1,\, q+1}\right)_{p,\, q\in\mathbb{Z}}, \\
&\left(j^{p,\, q}\colon D^{p,\, q} \longrightarrow E^{p,\, q}\right)_{p,\, q\in\mathbb{Z}}, \\
&\left(k^{p,\, q}\colon E^{p,\, q} \longrightarrow D^{p+1,\, q}\right)_{p,\, q\in\mathbb{Z}}
\end{aligned}$$

が定まる．図式 (4.5.6) の完全性から $\left((D^{p,\, q}),\, (E^{p,\, q}),\, (i^{p,\, q}),\, (j^{p,\, q}),\, (k^{p,\, q})\right)$ が次数 1 の 二重次数付き完全対であることがわかる．有界性は，filtration が有限であることから従う．よって定理 4.8 が使えて題意のスペクトル系列が構成される． ■

4.6 スペクトル系列の計算例

4.6.1 E_r 項が疎な場合

4.6.2 二重複体によるスペクトル系列

アーベル圏 $\mathcal{A}$ における二重複体 $(K^{\bullet,\,*},\ \delta_1^{\bullet,\,*},\ \delta_2^{\bullet,\,*})$ は，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$K^{a,\,b} \neq 0 \text{ かつ } a+b=n$$

を充たす $(a,\,b) \in \mathbb{Z}^2$ が有限個であると仮定する．

定理 4.10: 二重複体によるスペクトル系列

$\forall p \in \mathbb{Z}$ に対して $K^{\bullet,\,*}$ の部分対象 $F^pK^{\bullet,\,*}$ を

$$F^pK^{a,\,b} := \begin{cases} K^{a,\,b}, & a \geq p \\ 0, & a < p \end{cases}$$

と定義し，

$$\begin{aligned} K^\bullet &:= \mathrm{Tot}(K^{\bullet,\,*}), \\ F^pK^\bullet &:= \mathrm{Tot}(F^pK^{\bullet,\,*}) \end{aligned}$$

とおく．このとき組 $\left(K^\bullet,\ \left(F^pK^\bullet\right)_{p\in\mathbb{Z}}\right)$ は filtered な複体で，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して $\left(F^pK^n\right)_{p\in\mathbb{Z}}$ は K^n の**有限な** filtration になる．また，自然にスペクトル系列

$$E_1^{p,\,q} = H^q(K^{p,\,\bullet}) \quad \Longrightarrow \quad E^{p+q} = H^{p+q}(K^\bullet)$$

が構成される．

<u>証明</u> $\mathcal{A} = R$-**Mod** とする．$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して，構成より明らかに

$$\cdots \subset F^{p+1}K^n \subset F^pK^n \subset F^{p-1}K^n \subset \cdots \subset K^n$$

が成り立つ．さらに二重複体 $(K^{\bullet,\,*},\ \delta_1^{\bullet,\,*},\ \delta_2^{\bullet,\,*})$ の全複体の射 $d^n\colon K^n = \mathrm{Tot}(K^{\bullet,\,*})^n \longrightarrow K^{n+1} = \mathrm{Tot}(K^{\bullet,\,*})^{n+1}$ の定義より，$\forall p \in \mathbb{Z}$ を一つ固定したときに

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ d^n(F^pK^n) \subset F^pK^{n+1}$$

が成り立つ．i.e. $\left(K^\bullet,\ \left(F^pK^\bullet\right)_{p\in\mathbb{Z}}\right)$ は filtered な複体で，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して $\left(F^pK^\bullet\right)_{p\in\mathbb{Z}}$ は K^n の**有限な** filtration になっている．

また，$\forall p \in \mathbb{Z}$ を一つ固定すると $\forall n \in \mathbb{Z},\ F^pK^n = \bigoplus_{a+b=n,\,a\geq p} K^{a,\,b},\quad F^{p+1}K^n = \bigoplus_{a+b=n,\,a\geq p+1} K^{a,\,b}$ だから $F^pK^n/F^{p+1}K^n = K^{p,\,n-p}$ である．従って $F^pK^\bullet/F^{p+1}K^\bullet = \left(K^{p,\,\bullet-p},\ \delta_2^{p,\,\bullet-p}\right)$ であることがわかるが，$H^{p+q}(K^{p,\,\bullet-p}) = H^q(K^{p,\,\bullet})$ なので，定理 4.9 より題意が従う． ■

系 4.11:

$\forall p \in \mathbb{Z}$ に対して $K^{\bullet,*}$ の部分対象 $F^pK^{\bullet,*}$ を

$$F^pK^{a,b} \coloneqq \begin{cases} K^{a,b}, & b \geq p \\ 0, & b < p \end{cases}$$

と定義し，

$$K^{\bullet} \coloneqq \mathrm{Tot}(K^{\bullet,*}),$$
$$F^pK^{\bullet} \coloneqq \mathrm{Tot}(F^pK^{\bullet,*})$$

とおく．このとき組 $\left(K^{\bullet},\, \left(F^pK^{\bullet}\right)_{p\in\mathbb{Z}}\right)$ は filtered な複体で，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して $\left(F^pK^n\right)_{p\in\mathbb{Z}}$ は K^n の**有限な** filtration になる．また，自然にスペクトル系列

$$E_1^{p,q} = H^q(K^{\bullet,p}) \implies E^{p+q} = H^{p+q}(K^{\bullet})$$

が構成される．

証明 定理 4.10 と全く同様にして示せる． ■

定理 4.10 のスペクトル系列の E_2 項を計算しよう．E_1 項がわかっているのでスペクトル系列の定義の **同型 (4)** を使えば良い．スペクトル系列の定義の **(3) の射**は

$$d_1^{p,q} \colon E_1^{p,q} = H^q(K^{p,\bullet}) \longrightarrow E_1^{p+1,q} = H^q(K^{p+1,\bullet})$$

となるが，系 4.11 の構成より

$$d_1^{p,q} = H^q(\delta_1^{p,\bullet})$$

がわかる．よって

$$E_2^{p,q} = \frac{\mathrm{Ker}\, d_1^{p,q}}{\mathrm{Im}\, d_1^{p-1,q}} = \frac{\mathrm{Ker}\, H^q(\delta_1^{p,\bullet})}{\mathrm{Im}\, H^q(\delta_1^{p-1,\bullet})}$$

と求まった．これは，複体

$${H^q}_{\mathrm{II}}(K^{\bullet,*}) \coloneqq \cdots \xrightarrow{H^q(\delta_1^{p-1,\bullet})} H^q(K^{p,\bullet}) \xrightarrow{H^q(\delta_1^{p,\bullet})} H^q(K^{p+1,\bullet}) \xrightarrow{H^q(\delta_1^{p+1,\bullet})} \cdots$$

の p 次コホモロジーを ${H^p}_{\mathrm{I}}\big({H^q}_{\mathrm{II}}(K^{\bullet,*})\big)$ と書いたときに

$$E_2^{p,q} = {H^p}_{\mathrm{I}}\big({H^q}_{\mathrm{II}}(K^{\bullet,*})\big) \tag{4.6.1}$$

が成り立つことを意味する．

添字の役割を逆にすることで

$$E_2^{p,q} = {H^p}_{\mathrm{II}}\big({H^q}_{\mathrm{I}}(K^{\bullet,*})\big) \tag{4.6.2}$$

もわかる．

系 4.12:

$A^\bullet$ をアーベル圏 $\mathcal{A}$ における複体，$K^{\bullet,*}$ を二重複体とする[a].

(1) 次のどちらか一方を仮定する：

(a) 射 $f^\bullet\colon A^\bullet \longrightarrow K^{\bullet,*}$ であって，$\forall p \in \mathbb{Z}$ に対して $f^p\colon A^p \longrightarrow K^{p,\bullet}$ がコホモロジーの同型

$$\left.\begin{matrix} A^p, & n=0 \\ 0, & n\neq 0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\cong} H^n(K^{p,\bullet})$$

を誘導するようなものが存在する.

(b) 二重複体の射 $f^{\bullet,*}\colon K^{\bullet,*} \longrightarrow A^\bullet$ であって，$\forall p \in \mathbb{Z}$ に対して $f^{p,\bullet}\colon K^{p,\bullet} \longrightarrow A^p$ がコホモロジーの同型

$$H^n(K^{p,\bullet}) \xrightarrow{\cong} \begin{cases} A^p, & n=0 \\ 0, & n\neq 0 \end{cases}$$

を誘導するようなものが存在する.

このとき，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して自然な同型

$$H^n(A^\bullet) \cong H^n(\mathrm{Tot}\, K^{\bullet,*})$$

がある.

(2) 次のどちらか一方を仮定する：

(a) 射 $f^*\colon A^\bullet \longrightarrow K^{\bullet,*}$ であって，$\forall q \in \mathbb{Z}$ に対して $f^q\colon A^q \longrightarrow K^{\bullet,q}$ がコホモロジーの同型

$$\left.\begin{matrix} A^q, & n=0 \\ 0, & n\neq 0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\cong} H^n(K^{\bullet,q})$$

を誘導するようなものが存在する.

(b) 二重複体の射 $f^{\bullet,*}\colon K^{\bullet,*} \longrightarrow A^\bullet$ であって，$\forall q \in \mathbb{Z}$ に対して $f^{\bullet,q}\colon K^{\bullet,q} \longrightarrow A^q$ がコホモロジーの同型

$$H^n(K^{\bullet,q}) \xrightarrow{\cong} \begin{cases} A^q, & n=0 \\ 0, & n\neq 0 \end{cases}$$

を誘導するようなものが存在する.

このとき，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して自然な同型

$$H^n(A^\bullet) \cong H^n(\mathrm{Tot}\, K^{\bullet,*})$$

がある.

[a] $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して，$K^{a,b} \neq 0$，$a+b=n$ を充たす $(a,\, b) \in \mathbb{Z}^2$ が有限個であると仮定する.

系 4.12 の条件を少し強めて，より見やすい形に直してみる．

(1) (a) (1)-(a) の条件に，さらに条件

$$b < 0 \quad \Longrightarrow \quad K^{a,\,b} = 0$$

をつけると，これは $\forall p \in \mathbb{Z}$ に対して定まる図式

$$0 \longrightarrow A^p \xrightarrow{f^p} K^{p,\,0} \longrightarrow K^{p,\,1} \longrightarrow K^{p,\,2} \longrightarrow \cdots$$

が完全であることと同値である．

(b) (1)-(b) の条件に，さらに条件

$$b > 0 \quad \Longrightarrow \quad K^{a,\,b} = 0$$

をつけると，これは $\forall p \in \mathbb{Z}$ に対して定まる図式

$$\cdots \longrightarrow K^{p,\,-2} \longrightarrow K^{p,\,-1} \longrightarrow K^{p,\,0} \xrightarrow{f^{p,\,0}} A^p \longrightarrow 0$$

が完全であることと同値である．

(2) (a) (2)-(a) の条件に，さらに条件

$$a < 0 \quad \Longrightarrow \quad K^{a,\,b} = 0$$

をつけると，これは $\forall q \in \mathbb{Z}$ に対して定まる図式

$$0 \longrightarrow A^q \xrightarrow{f^q} K^{0,\,q} \longrightarrow K^{1,\,q} \longrightarrow K^{2,\,q} \longrightarrow \cdots$$

が完全であることと同値である．

(b) (2)-(b) の条件に，さらに条件

$$a > 0 \quad \Longrightarrow \quad K^{a,\,b} = 0$$

をつけると，これは $\forall q \in \mathbb{Z}$ に対して定まる図式

$$\cdots \longrightarrow K^{-2,\,q} \longrightarrow K^{-1,\,q} \longrightarrow K^{0,\,q} \xrightarrow{f^{0,\,q}} A^q \longrightarrow 0$$

が完全であることと同値である．

証明　(1) 仮定より複体の同型

$$H^q{}_{\mathrm{II}}(K^{\bullet,\,*}) \cong \begin{cases} \cdots \longrightarrow A^{p-1} \longrightarrow A^p \longrightarrow A^{p+1} \longrightarrow \cdots, & q = 0 \\ \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots, & q \neq 0 \end{cases}$$

が成り立つ．よって (4.6.1) から従うスペクトル系列

$$E_2^{p,\,q} = H^p{}_{\mathrm{I}}\big(H^q{}_{\mathrm{II}}(K^{\bullet,\,*})\big) \quad \Longrightarrow \quad H^{p+q}(\operatorname{Tot} K^{\bullet,\,*})$$

において

$$E_2^{p,\,q} = \begin{cases} H^q(A^\bullet), & q = 0 \\ 0, & q \neq 0 \end{cases}$$

となるので $H^n(A^\bullet) = E_2^{p,\,0} \cong E^n = H^n(\mathrm{Tot}\, K^{\bullet,\,*})$ となる．

(2) (4.6.2) から従うスペクトル系列

$$E_2^{p,\,q} = H^p{}_{\mathrm{II}}\bigl(H^q{}_{\mathrm{I}}(K^{\bullet,\,*})\bigr) \quad \Longrightarrow \quad H^{p+q}(\mathrm{Tot}\, K^{\bullet,\,*})$$

を用いて (1) と同様の議論をすれば証明できる．

■

(4.3.4) はまさに系 4.12 の条件を充たしており，同型 (4.3.4) が示されたことになる．

4.6.3 Künneth スペクトル系列と普遍係数定理

補題 4.10:

右 R 加群の複体 $(L^\bullet,\, d_L^\bullet)$ と左 R 加群の複体 $(M^\bullet,\, d_M^\bullet)$ を与える．$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して $\mathrm{Im}\, d_M^n,\, H^n(M^\bullet)$ が平坦加群であると仮定する．
このとき，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して自然な同型

$$\bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(M^\bullet) \xrightarrow{\cong} H^n\bigl(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)\bigr)$$

が成り立つ．

証明 $Z^n := \mathrm{Ker}\, d_M^n,\ B^n := \mathrm{Im}\, d_M^{n-1}$ とおく．するとコホモロジーの定義により，$\forall j \in \mathbb{Z}$ に対して短完全列

$$0 \longrightarrow B^j \longrightarrow Z^j \longrightarrow H^j(M^\bullet) \longrightarrow 0 \tag{4.6.3}$$

がある．仮定より $H^j(M^\bullet)$ は平坦加群なので，(4.6.3) に命題 4.24-(2) を使うことができて，$\forall i,\, j \in \mathbb{Z}$ に対して短完全列

$$0 \longrightarrow H^i(L^\bullet) \otimes_R B^j \xrightarrow{\alpha_{i,\,j}} H^i(L^\bullet) \otimes_R Z^j \longrightarrow H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(M^\bullet) \longrightarrow 0$$

を得る．さらに，直和は完全列を保存するので $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して短完全列

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R B^j \xrightarrow{\bigoplus_{i+j=n} \alpha_{i,\,j}} \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R Z^j \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(M^\bullet) \longrightarrow 0$$

を得る．

次に，$(B^\bullet,\, 0),\, (Z^\bullet,\, 0)$ を複体と見做すことで，標準的包含 $Z^n \hookrightarrow M^n$ および $d^n = d_M^n \colon M^n \longrightarrow B^{n+1}$ は自然に複体の射 $Z^\bullet \to M^\bullet,\ d^\bullet \colon M^\bullet,\, B^{\bullet+1}$ を定める．また，複体の短完全列

$$0 \longrightarrow Z^\bullet \longrightarrow M^\bullet \xrightarrow{d^\bullet} B^{\bullet+1} \longrightarrow 0 \tag{4.6.4}$$

がある．仮定より B^n は平坦加群なので，(4.6.4) に命題 4.24-(2) を使うことができて，二重複体の短完全列

$$0 \longrightarrow L^\bullet \otimes_R Z^* \longrightarrow L^\bullet \otimes_R M^* \xrightarrow{1_{L^\bullet}\otimes d^*} L^\bullet \otimes_R B^{*+1} \longrightarrow 0$$

を得る．全複体をとる操作は完全関手なので[*15]短完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R Z^*) \longrightarrow \mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*) \longrightarrow \mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R B^{*+1}) \longrightarrow 0$$

があるが，これのコホモロジー長完全列を取ることで

$$\begin{aligned}
&\cdot \longrightarrow H^{n-1}\big(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R Z^*)\big) \longrightarrow H^{n-1}\big(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)\big) \longrightarrow H^{n-1}\big(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R B^{*+1})\big)\\
&\xrightarrow{\beta} H^{n}\big(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R Z^*)\big) \longrightarrow H^{n}\big(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)\big) \longrightarrow H^{n}\big(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R B^{*+1})\big)\\
&\longrightarrow \cdots
\end{aligned}$$

を得る．然るに複体 $B^\bullet$, $Z^\bullet$ を構成する準同型写像は零写像だから

$$\begin{aligned}
H^{n-1}\big(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R B^{*+1})\big) &= \bigoplus_{i+j=n-1} H^i(L^\bullet) \otimes_R B^{j+1}\\
&= \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R B^{j},\\
H^{n}\big(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R Z^{*})\big) &= \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R Z^{j}
\end{aligned}$$

が成り立つ．このとき

$$\beta = \bigoplus_{i+j=n} (-1)^i \alpha_{ij} \colon \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R B^{j} \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R Z^{j}$$

とかけ，かつ β は $\forall n$ に対して単射である．よって，横の 2 つの写像が同型であるような次の可換図式がある：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R B^j \arrow[r, "\bigoplus_{i+j=n}(-1)^i"] \arrow[d, "\bigoplus_{i+j=n}\alpha_{ij}"] & \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R B^j \arrow[d, "\beta"] \\
\bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R Z^j \arrow[r, "1"] \arrow[d] & \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R Z^j \arrow[d] \\
\bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(M^\bullet) \arrow[d] & H^n\big(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)\big) \arrow[d] \\
0 & 0 \\
\text{(exact)} & \text{(exact)}
\end{tikzcd}$$

[*15] R-**Mod** においては単に直和である．

この可換図式から同型

$$\bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(M^\bullet) \xrightarrow{\cong} H^n\bigl(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)\bigr)$$

が誘導される． ■

定理 4.13: Künneth スペクトル系列

右 R 加群の複体 $(L^\bullet,\, d_L^\bullet)$ と左 R 加群の複体 $(M^\bullet,\, d_M^\bullet)$ を与える．次の条件のいずれかが満たされているとする：

(1) $L^\bullet$ または $M^\bullet$ が平坦加群からなる複体であり，かつ $L^\bullet,\, M^\bullet$ の両方が上に有界である．

(2) $L^\bullet$ が平坦加群からなる複体であり，かつある $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して，$\forall M \in R$-**Mod** が $\forall n < -N,\ P^n = 0$ を充たすような射影的分解 $P^\bullet \longrightarrow M$ を持つ．

(3) $M^\bullet$ が平坦加群からなる複体であり，かつある $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して，$\forall M \in$ **Mod**-R が $\forall n < -N,\ P^n = 0$ を充たすような射影的分解 $P^\bullet \longrightarrow M$ を持つ．

このとき，スペクトル系列

$$E_2^{p,\,q} = \bigoplus_{i+j=n} \mathrm{Tor}_{-p}^R\bigl(H^i(L^\bullet),\, H^j(M^\bullet)\bigr) \quad\Longrightarrow\quad H^{p+q}\bigl(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)\bigr)$$

が構成される．

! R が単項イデアル整域のとき，$N = 1$ として条件 (2), (3) の後半が充たされる（定理 4.5）．

証明　条件 (1), (2) において $L^\bullet$ が平坦加群からなる複体であるとして証明する．

複体 $M^\bullet$ の左 Cartan-Eilenberg 分解 $Q^{\bullet,\,*} \longrightarrow M^\bullet$ をとる．ただし条件 (2) の場合は $\forall n \in \mathbb{Z},\, \forall m < -N,\ Q^{n,\,m} = 0$ を充たすようにとる．三重複体 $L^\bullet \otimes_R Q^{*,\,\blacktriangle}$ の 3 つ目の添字 n を固定したときにできる二重複体たちの全複体 $\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R Q^{*,\,n})$ は，n を動かすことで二重複体

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R Q^{*,\,n-1}) \longrightarrow \mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R Q^{*,\,n}) \longrightarrow \cdots$$

になる[*16]．これを $\mathrm{Tot}_2(L^\bullet \otimes_R Q^{*,\,\blacktriangle})$ と書き，その次数 $(a,\,b)$ の項を $\mathrm{Tot}_2(L^\bullet \otimes_R Q^{*,\,\blacktriangle})^{a,\,b} := \bigoplus_{i+j=a} L^i \otimes_R Q^{j,\,b}$ とおく．

仮定 (1) のとき　$\mathrm{Tot}_2(L^\bullet \otimes_R Q^{*,\,\blacktriangle})^{a,\,b}$ は $a \gg 0$ または $b > 0$ のとき 0

仮定 (2) のとき　$\mathrm{Tot}_2(L^\bullet \otimes_R Q^{*,\,\blacktriangle})^{a,\,b}$ は $b < -N$ または $b > 0$ のとき 0

だから，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して $\mathrm{Tot}_2(L^\bullet \otimes_R Q^{*,\,\blacktriangle})^{a,\,b} \neq 0,\ a + b = n$ を充たす $(a,\,b) \in \mathbb{Z}^2$ は有限個である．

左 Cartan-Eilenberg 分解の定義より，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して $Q^{n,\,\bullet} \longrightarrow M^n \longrightarrow 0$ は完全列で，かつ仮定より $\forall m \in \mathbb{Z},\ L^m$ は平坦加群なので，$\forall m,\, n \in \mathbb{Z}$ に対して命題 4.24-(2) より完全列

$$\cdots \longrightarrow L^m \otimes_R Q^{n,\,-1} \longrightarrow L^m \otimes_R Q^{n,\,0} \longrightarrow L^m \otimes_R M^n \longrightarrow 0$$

[*16] $\mathrm{Tot}\bigl(\mathrm{Tot}_2(L^\bullet \otimes_R Q^{*,\,\blacktriangle})\bigr) = \mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R Q^{*,\,\blacktriangle})$ となるような二重複体．

を得る．これの直和を取る事で，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して完全列

$$\cdots \mathrm{Tot}_2(L^\bullet \otimes_R Q^{*,\blacktriangle})^{n,\,-1} \longrightarrow \mathrm{Tot}_2(L^\bullet \otimes_R Q^{*,\blacktriangle})^{n,\,0} \longrightarrow \mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)^n \longrightarrow 0$$

が得られる．

以上の考察より，複体 $\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)$ と二重複体 $\mathrm{Tot}_2(L^\bullet \otimes_R Q^{*,\blacktriangle})$ の組に対して系 4.12 を使うことができて，自然な同型

$$H^n\big(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)\big) \cong H^n\Big(\mathrm{Tot}\big(\mathrm{Tot}_2(L^\bullet \otimes_R Q^{*,\blacktriangle})\big)\Big) = H^n\big(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R Q^{*,\blacktriangle})\big)$$

があるとわかった．

一方，$Q^{\bullet,*} \longrightarrow M^\bullet$ が左 Cartan-Eilenberg 分解なので補題 4.10 を使うことができて[*17]同型

$$H^q\big(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R Q^{*,p})\big) \cong \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(Q^{\bullet,p})$$

がわかる．従って $\mathrm{Tot}_2(L^\bullet \otimes_R Q^{*,\blacktriangle})$ の 1 つ目の添字について第 q 次コホモロジーをとると複体

$$\cdots \longrightarrow H^q\big(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R Q^{*,p-1})\big) \longrightarrow H^q\big(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R Q^{*,p})\big) \longrightarrow H^q\big(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R Q^{*,p+1})\big) \longrightarrow \cdots$$

が得られるが，これは複体

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(Q^{\bullet,p-1}) \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(Q^{\bullet,p}) \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(Q^{\bullet,p+1}) \longrightarrow \cdots$$

に等しい．さらにこの複体の p 次コホモロジーをとると，$H^j(Q^{\bullet,*}) \longrightarrow H^j(M^\bullet)$ が射影的分解であることと H^p と直和が交換することから，Tor の定義より

$$H^p{}_{\mathrm{II}}\Big(H^q{}_{\mathrm{I}}\big(\mathrm{Tot}_2(L^\bullet \otimes_R Q^{*,\blacktriangle})\big)\Big) = \bigoplus_{i+j=n} \mathrm{Tor}^R_{-p}\big(H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(M^\bullet)\big)$$

が言える．左辺は $\mathrm{Tot}_2(L^\bullet \otimes_R Q^{*,\blacktriangle})$ により構成される二重複体によるスペクトル系列の E_2 項だから，スペクトル系列

$$\bigoplus_{i+j=n} \mathrm{Tor}^R_{-p}\big(H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(M^\bullet)\big) \quad\Longrightarrow\quad H^{p+q}\big(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)\big)$$

がある． ■

[*17] 射影的加群は平坦加群（系 4.3）

系 4.14: Künneth 公式

R を単項イデアル整域とし，2 つの R 加群の複体 $(L^\bullet,\, d_L^\bullet)$, $(M^\bullet,\, d_M^\bullet)$ であって，いずれかが無捻加群からなるようなものを与える．

- このとき，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して次の完全列が存在する：

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(M^\bullet) &\xrightarrow{f} H^n\big(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)\big) \\ \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n+1} \mathrm{Tor}_1^R\big(H^i(L^\bullet),\, H^j(M^\bullet)\big) &\longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{4.6.5}$$

- さらに $L^\bullet$, $M^\bullet$ が**共に**自由加群からなる複体ならば完全列 (4.6.5) は分裂し，同型

$$H^n\big(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)\big) \cong \left(\bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(M^\bullet)\right) \oplus \left(\bigoplus_{i+j=n+1} \mathrm{Tor}_1^R\big(H^i(L^\bullet),\, H^j(M^\bullet)\big)\right)$$

が成り立つ．

証明 R が P.I.D. なので，定理 4.13 の条件 (2) または (3) が充たされて Künneth スペクトル系列が存在する．さらに定理 4.5 より $\forall n \geq 2$, $\mathrm{Tor}_n^R(\text{-}, \text{-}) = 0$ が言える．よって $p \neq -1, 0$ のとき $E_2^{p,\,q} = 0$ となり，完全列 (4.6.5) を得る．

後半を示す．仮定より自由加群の部分加群 $\mathrm{Im}\, d_L^i \subset L^{i+1}$ もまた自由加群になる（命題 4.1）．故に命題??から完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\, d_L^i \xrightarrow{\ker d_L^i} L^i \xrightarrow{\mathrm{coim}\, d_L^i} \mathrm{Im}\, d_L^i \longrightarrow 0$$

は分裂する．i.e. 準同型写像 $s_i \colon L^i \longrightarrow \mathrm{Ker}\, d_L^i$ が存在して $s_i \circ \ker d_L^i = 1_{\mathrm{Ker}\, d_L^i}$ を充たす．d_M^j についても同様に，準同型写像 $s'_j \colon M^j \longrightarrow \mathrm{Ker}\, d_M^j$ が存在して $s'_j \circ \ker d_M^j = 1_{\mathrm{Ker}\, d_M^j}$ を充たす．

写像 t_i, t'_j をそれぞれ

$$\begin{aligned} t_i \colon L^i &\xrightarrow{s_i} \mathrm{Ker}\, d_L^i \hookrightarrow H^i(L^\bullet), \\ t'_j \colon M^j &\xrightarrow{s'_j} \mathrm{Ker}\, d_M^j \hookrightarrow H^j(M^\bullet) \end{aligned}$$

で定義し，

$$g_n \coloneqq \bigoplus_{i+j=n} t_i \otimes t'_j$$

とおく．$\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)^n = \bigoplus_{i+j=n} L^i \otimes_R M^j$ だから

$$g_n \colon \mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)^n \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(M^\bullet)$$

である．このとき $\forall x \in L^i$ に対して $d_L^i(x) \in \mathrm{Im}\, d_L^i \subset \mathrm{Ker}\, d_L^{i+1}$ だから $s_{i+1}\big(d_L^i(x)\big) = d_L^i(x) \in \mathrm{Im}\, d_L^i$ であり，$t_{i+1}\big(d_L^i(x)\big) = 0 + \mathrm{Im}\, d_L^i (= 0)$ が言える．同様にして $\forall y \in M^j$ に対して $t'_{j+1}\big(d_M^j(y)\big) = 0$ が言えるの

で，結局

$$(t_{i+1} \otimes t'_j) \circ (d_L^i \otimes 1) = (t_i \otimes t'_{j+1}) \circ (1 \otimes d_M^j) = 0$$

がわかった．故に全複体の射 $d^{n-1}\colon \operatorname{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)^{n-1} \longrightarrow \operatorname{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)^n$ に対して $g_n \circ d^{n-1} = 0$ であるから，準同型定理（第 3 同型定理）により g_n は準同型

$$\overline{g_n}\colon H^n\bigl(\operatorname{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)\bigr) \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(M^\bullet)$$

を自然に誘導する．

$\forall x \in \operatorname{Ker} d_L^i$ に対して $s_i(x) = x$ だから $t_i(x) = x + \operatorname{Im} d_L^{i-1}$ であり，同様に $\forall y \in \operatorname{Ker} d_M^j$ に対して $t'_j(y) = y + \operatorname{Im} d_M^{j-1}$ である．よって $i + j = n$ ならば，$\forall x \otimes y \in L^i \otimes_R M^j \subset \operatorname{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)^n$ に対して

$$g_n(x \otimes y) = (x + \operatorname{Im} d_L^{i-1}) \otimes (y + \operatorname{Im} d_M^{j-1})$$

が成り立つ．従って $\forall x \otimes y \in \operatorname{Ker}\bigl(d^n\colon \operatorname{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)^n \longrightarrow \operatorname{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)^{n+1}\bigr)$ に対して

$$\overline{g_n}\bigl(x \otimes y + \operatorname{Im} d^{n-1}\bigr) = (x + \operatorname{Im} d_L^{i-1}) \otimes (y + \operatorname{Im} d_M^{j-1})$$

が成り立つので $\overline{g_n} \circ f = 1$ が言えた．i.e. 完全列 (4.6.5) は分裂する． ■

系 4.15: 普遍係数定理

R を単項イデアル整域とし，R 加群 M および R 加群の複体 $(L^\bullet, d_L^\bullet)$ であって，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して L^n が無捻加群であるようなものを与える．

- このとき，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して次の完全列が存在する：

$$0 \longrightarrow H^n(L^\bullet) \otimes_R M \xrightarrow{f} H^n(L^\bullet \otimes_R M) \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^R\bigl(H^{n+1}(L^\bullet),\, M\bigr) \longrightarrow 0 \qquad (4.6.6)$$

- さらに $L^\bullet$ が自由加群からなる複体ならば完全列 (4.6.6) は分裂し，同型

$$H^n\bigl(L^\bullet \otimes_R M\bigr) \cong \bigl(H^n(L^\bullet) \otimes_R M\bigr) \oplus \operatorname{Tor}_1^R\bigl(H^{n+1}(L^\bullet),\, M\bigr)$$

が成り立つ．

証明 Künneth 公式において，複体 $M^\bullet = M$ とおけば完全列 (4.6.6) が得られる．

後半を示す．系 4.14 と同様に準同型 $s_n\colon L^n \longrightarrow \operatorname{Ker} d_L^n$ であって $s_n \circ \ker d_L^n = 1$ となるものが存在する．ここで写像 g_n を

$$g_n\colon L^n \otimes_R M \xrightarrow{s_n \otimes 1_M} \operatorname{Ker} d_L^n \otimes M \hookrightarrow H^n(L^\bullet) \otimes_R M$$

と定義すると，$\forall x \in L^n$ に対して $d_L^n(x) \in \operatorname{Ker} d_L^{n+1}$ より $s_{n+1}\bigl(d_L^n(x)\bigr) = d_L^n(x)$ であり，$g_n \circ (d_L^{n-1} \otimes 1_M) = 0$ が従う．よって g_n は自然に準同型写像

$$\overline{g_n}\colon H^n(L^\bullet \otimes M) \longrightarrow H^n(L^\bullet) \otimes_R M$$

を引き起こす．これは $\forall x \otimes y \in \operatorname{Ker}(d_L^n \otimes 1_M)$ に対して

$$\overline{g_n}\bigl(x \otimes y + \operatorname{Im}(d_L^{n-1} \otimes 1_M)\bigr) = (x + \operatorname{Im} d_L^{n-1}) \otimes y$$

と作用するので $\overline{g_n} \circ f = 1$ が言えた． ■

Ext に関してもほとんど同様である：

補題 4.11:

左 R 加群の複体 $(L^\bullet,\, d_L^\bullet)$, $(M^\bullet,\, d_M^\bullet)$ を与える．次の 2 条件のいずれかを仮定する：

(1) $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して $\mathrm{Im}\, d_L^n,\, H^n(L^\bullet)$ が射影的加群
(2) $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して $\mathrm{Im}\, d_M^n,\, H^n(M^\bullet)$ が単射的加群

このとき，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して自然な同型

$$H^n\Big(\mathrm{Tot}\big(\mathrm{Hom}_R\,(L^\bullet,\, M^*)\big)\Big) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{j-i=n} \mathrm{Hom}_R\,\big(H^i(L^\bullet),\, H^j(M^\bullet)\big)$$

が成り立つ．

定理 4.16: Künneth スペクトル系列

右 R 加群の複体 $(L^\bullet,\, d_L^\bullet)$, $(M^\bullet,\, d_M^\bullet)$ を与える．次の条件のいずれかが満たされているとする：

(1) $L^\bullet$ が射影的加群からなる複体であるか，または $M^\bullet$ が単射的加群からなる複体であり，$L^\bullet$ が上に有界かつ $M^\bullet$ が下に有界である．
(2) $L^\bullet$ が射影的加群からなる複体であり，かつある $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して，$\forall M \in R$-**Mod** が $\forall n > N,\ I^n = 0$ を充たすような単射的分解 $M \longrightarrow I^\bullet$ を持つ．
(3) $M^\bullet$ が単射的加群からなる複体であり，かつある $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して，$\forall M \in$ **Mod**-R が $\forall n < -N,\ P^n = 0$ を充たすような射影的分解 $P^\bullet \longrightarrow M$ を持つ．

このとき，スペクトル系列

$$E_2^{p,\,q} = \bigoplus_{-i+j=n} \mathrm{Ext}_R^p\big(H^i(L^\bullet),\, H^j(M^\bullet)\big) \quad\Longrightarrow\quad H^{p+q}\Big(\mathrm{Tot}\big(\mathrm{Hom}_R\,(L^\bullet,\, M^*)\big)\Big)$$

が構成される．

系 4.17: Künneth 公式

R を単項イデアル整域とし，2 つの R 加群の複体 $(L^\bullet,\, d_L^\bullet)$, $(M^\bullet,\, d_M^\bullet)$ であって，

(1) $L^\bullet$ は自由加群からなる複体であるか，
(2) $M^\bullet$ は可除加群からなる複体であるか

のどちらかであるとする．
このとき，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して次の分裂する完全列が存在する：

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow \bigoplus_{-i+j=n-1} \mathrm{Ext}_R^1\big(H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(M^\bullet)\big) \longrightarrow H^n\Big(\mathrm{Tot}\big(\mathrm{Hom}_R\,(L^\bullet,\, M^*)\big)\Big)\\ \longrightarrow \bigoplus_{-i+j=n} \mathrm{Hom}_R\,\big(H^i(L^\bullet),\, H^j(M^\bullet)\big) \longrightarrow 0\end{aligned}$$

系 4.18: 普遍係数定理

R を単項イデアル整域とし，R 加群 M および R 加群の複体 $(L^\bullet,\, d_L^\bullet)$ であって，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して L^n が自由加群であるようなものを与える．このとき，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して次の分裂する短完全列が存在する：

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1\big(H^{-n+1}(L^\bullet),\, M\big) \longrightarrow H^n\big(\mathrm{Hom}_R\,(L^\bullet,\, M)\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\,\big(H^{-n}(L^\bullet),\, M\big) \longrightarrow 0$$

付録 A

ホモロジー代数に入門するための下準備

この章では，ホモロジー代数について基本的なことをまとめる．

A.1　図式

定義 A.1: 有向グラフ

有向グラフ (directed graph) とは，以下の 2 つ組 $(V,\, E)$ のことを言う：

- 頂点集合 V
- 頂点の 2 つ組全体の集合 $V \times V$ によって添字付けられた集合族 $E := \bigl\{J(v,\, w)\bigr\}_{(v,\, w) \in V \times V}$

V の元のことを**頂点** (vertex)，**集合** $J(v,\, w) \in E$ の元のことを頂点 v から頂点 w へ向かう**辺** (edge) と呼ぶ．

定義 A.2: 環上の加群の図式

R を環，$\mathcal{I} := \Bigl(I,\, \bigl\{J(i,\, j)\bigr\}_{(i,\, j) \in I \times I}\Bigr)$ を有向グラフとする．$\mathcal{I}$ 上の左 R 加群の**図式** (diagram) とは次の 2 つ組のことを言う：

- 左 R 加群の族 $\bigl\{M_i\bigr\}_{i \in I}$
- 左 R 加群の準同型写像の族[a]

$$\Bigl\{\bigl\{f_\varphi \colon M_i \to M_j\bigr\}_{\varphi \in J(i,\, j)}\Bigr\}_{(i,\, j) \in I \times I}$$

[a] 2 頂点 $i,\, j \in I$ を選んできたとき，$J(i,\, j)$ は i から j へ向かう辺全体の**集合**である．最も一般的なグラフを考えているので，i から j へ向かう辺が複数存在しうるのである．なので，念のため族の添字を入れ子にした．なお，$J(i,\, j) = \emptyset$ の場合，図式上では $M_i,\, M_j$ が準同型写像で結ばれないと言うことになる．

いちいち断るのは面倒なので，以降ではある有向グラフ上の左 R 加群の図式のことを単に左 R 加群の図式と呼ぶ．

A.1.1　可換図式

定義 A.2 のように図式の概念を形式化することで，図式の**可換性**を定式化できる．有向グラフ $\mathcal{I} \coloneqq \left(I,\ \{J(i,\,j)\}_{(i,\,j)\in I\times I}\right)$ 上の図式 $\left(\{M_i\}_{i\in I},\ \left\{\{f_\varphi\colon M_i \to M_j\}_{\varphi\in J(i,\,j)}\right\}_{(i,\,j)\in I\times I}\right)$ が与えられたとする．このとき，ある頂点 i から有向グラフの辺を辿って j へ行く経路全体の集合は

$$\tilde{J}(i,\,j) \coloneqq \coprod_{n=0}^{\infty} \underbrace{\coprod_{\substack{i_0,\,\dots,\,i_n\in I\\ i_0=i,\,i_n=j}} \left[J(i_{n-1},\,i_n)\times\cdots\times J(i_1,\,i_2)\times J(i_0,\,i_1)\right]}_{=:\tilde{J}(i,\,j)_n\ \text{と書く．}n-1\ \text{個の頂点を経由する経路全体の集合.}}$$

と書けることに注意する[*1]．また，$n-1$ 点を経由する任意の経路はこの記法だと

$$(\varphi_n,\,\dots,\,\varphi_1) \in \tilde{J}(i,\,j)_n$$

と書かれるわけだが，これに対応する準同型写像の「たどり方」を

$$f_{(\varphi_n,\,\dots,\,\varphi_1)} \coloneqq f_{\varphi_n}\circ\cdots\circ f_{\varphi_1}$$

と書くことにする[*2]．ただし $f_{\mathrm{id}_i} \coloneqq 1_{M_i}$ と約束する．

定義 A.3: 可換図式

図式 $\left(\{M_i\}_{i\in I},\ \left\{\{f_\varphi\colon M_i \to M_j\}_{\varphi\in J(i,\,j)}\right\}_{(i,\,j)\in I\times I}\right)$ が**可換図式** (commutative diagram) であるとは，任意の始点 $i\in I$ と終点 $j\in I$ に対して

$$f_\varphi\colon M_i \longrightarrow M_j \qquad {}^{\text{w/}}\ \ \varphi\in\tilde{J}(i,\,j)$$

が，全ての経路の取り方 $\forall\varphi\in\tilde{J}(i,\,j)$ について等しくなることを言う．

A.1.2　図式の圏

有向グラフ

$$\mathcal{I} = \left(I,\ \{J(i,\,j)\}_{(i,\,j)\in I\times I}\right)$$

を素材にして，大きな有向グラフ

$$\left(I,\ \{\tilde{J}(i,\,j)\}_{(i,\,j)\in I\times I}\right)$$

を構成できる．ここで

(1) 頂点を対象とする：

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{I}) \coloneqq I$$

[*1] $n=0$ の場合もこれで良い．始点 i と終点 j が一致しているならば，これは空集合からの写像 J（ただ一つ存在）を $i_0=i=j$ なる添字について直和したものなので一元集合 $\{\mathrm{id}_i\}$ となり，始点と終点が一致しない場合は空集合からの写像を空なる添字について直和したものなので空集合になるからである．

[*2] $\tilde{J}(i,\,j)_n$ の定義で添字が減少する方向に直積をとったのは，このように写像の合成と整合させるためであった．

(2) 任意の頂点（対象）$i,\, j \in I$ に対して，i を始点，j を終点とする経路を射とする：

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}\,(i,\, j) \coloneqq \tilde{J}(i,\, j)$$

(3) $\forall i,\, j,\, k \in I$ に対して定まる写像

$$\begin{aligned}\circ\colon \tilde{J}(j,\, k) \times \tilde{J}(i,\, j) &\longrightarrow \tilde{J}(i,\, k), \\ \bigl((\varphi_n,\, \ldots,\, \varphi_1),\, (\psi_m,\, \ldots,\, \psi_1)\bigr) &\longmapsto (\varphi_n,\, \ldots,\, \varphi_1,\, \psi_m,\, \ldots,\, \psi_1)\end{aligned}$$

を合成とする．

このようにして圏 $\mathcal{I}$ (さらに言うとモノイド) を定義できる. 実際, 恒等射は先程脚注で述べた $\mathrm{id}_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}\,(i,\, i)$ とすればよく，合成の結合則は自明である．

有向グラフ $\mathcal{I}$ を圏と見做したとき，$\mathcal{I}$ 上の左 R 加群の図式

$$\mathcal{M} \coloneqq \Bigl(\bigl\{M_i\bigr\}_{i\in I},\, \Bigl\{\bigl\{f_\varphi\colon M_i \to M_j\bigr\}_{\varphi\in J(i,\, j)}\Bigr\}_{(i,\, j)\in I\times I}\Bigr)$$

は圏 $\mathcal{I}$ から左 R 加群の圏 R-**Mod** への共変関手と言うことになる：

(1) 各頂点 $i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I}) = I$ に対して，左 R 加群 M_i を対応づける：

$$\mathcal{M}(i) \coloneqq M_i$$

(2) $\forall i,\, j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I}) = I$ に対して，経路 $\varphi \in \tilde{J}(i,\, j)$ に左 R 加群の準同型写像 $f_\varphi\colon M_i \to M_j$ を対応付ける：

$$\mathcal{M}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}\,(i,\, j) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}\,(M_i,\, M_j),\ \varphi \longmapsto \mathcal{M}(\varphi) \coloneqq f_\varphi$$

であって，$\forall i,\, j,\, k \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I}) = I$ および $\forall \varphi \in \tilde{J}(i,\, j),\ \forall \psi \in \tilde{J}(j,\, k)$ に対して

$$f_{\mathrm{id}_i} = 1_{M_i}, \quad f_{\psi\circ\varphi} = f_\psi \circ f_\varphi$$

が成立するからである．

A.1.3 フィルタードな圏

定義 A.4: フィルタード

圏 $\mathcal{I} = \bigl(I,\, \bigl\{J(i,\, j)\bigr\}_{(i,\, j)\in I\times I}\bigr)$ が**フィルタード** (filtered) であるとは，以下の 3 条件を充たすことをいう：

(1) $I \neq \emptyset$

(2) $\forall i,\, i' \in I$ に対してある $j \in I$ が存在し，

$$J(i,\, j) \neq \emptyset \ \text{かつ}\ J(i',\, j) \neq \emptyset$$

を充たす．

(3) $\forall i,\, i' \in I$ および $\forall \varphi,\, \psi \in J(i,\, i')$ に対して，ある $j \in I$ および $\mu \in J(i',\, j)$ が存在して

$$\mu \circ \varphi = \mu \circ \psi$$

を充たす．

特に，$I \neq \emptyset$ が**有向集合** (directed set) ならば圏 $\mathcal{I}$ はフィルタードな圏となる．

定義 A.5: 有向集合

空でない**順序集合** $(I, \leq)$ が**有向集合** (directed set) であるとは，$\forall i, i' \in I$ に対してある $j \in I$ が存在し，

$$i \leq j \text{ かつ } i' \leq j$$

を充たすことを言う．

A.2 完全列と蛇の補題

R を環とする．左 R 加群の準同型 $f\colon M \longrightarrow N$ に対して

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker} f &:= \{\, x \in M \mid f(x) = 0 \,\},\\
\operatorname{Im} f &:= \{\, y \in N \mid \exists x \in M,\ y = f(x) \,\},\\
\operatorname{Coker} f &:= N/\operatorname{Im} f,\\
\operatorname{Coim} f &:= M/\operatorname{Ker} f
\end{aligned}$$

と定義する．これらはすべて**部分左 R 加群をなす**．これらの部分加群に関わる標準的包含，標準的射影を次の記号で書く：

$$\begin{aligned}
\ker f &\colon \operatorname{Ker} f \hookrightarrow M,\ x \mapsto x\\
\operatorname{im} f &\colon \operatorname{Im} f \hookrightarrow N,\ y \mapsto y\\
\operatorname{coker} f &\colon N \twoheadrightarrow \operatorname{Coker} f,\ y \mapsto y + \operatorname{Im} f\\
\operatorname{coim} f &\colon M \twoheadrightarrow \operatorname{Coim} f,\ x \mapsto x + \operatorname{Ker} f
\end{aligned}$$

定義より明らかに $\ker f, \operatorname{im} f$ は単射，$\operatorname{coker} f, \operatorname{coim} f$ は全射である．

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} f \arrow[dr, "\ker f"] & & & \operatorname{Coker} f \\
& M \arrow[r, "f"] \arrow[dl, "\operatorname{coim} f"'] \arrow[dl, red, shift right, "\operatorname{coker}(\ker f)"'] & N \arrow[ur, "\operatorname{coker} f"] & \\
\operatorname{Coim} f & & & \operatorname{Im} f \arrow[ul, "\operatorname{im} f"] \arrow[ul, red, shift right, "\ker(\operatorname{coker} f)"']
\end{tikzcd}$$

図 A.1: 左 R 加群の圏 R-**Mod** における核，像，余核，余像の定義

像については

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker}(\operatorname{coker} f), \quad \operatorname{im} f = \ker(\operatorname{coker} f)$$

が，**余像** (coimage) については

$$\operatorname{Coim} f = \operatorname{Coker}(\ker f), \quad \operatorname{coim} f = \operatorname{coker}(\ker f)$$

が成り立つ．これは一般のアーベル圏における像，余像の定義になる．

補題 A.1:

- f が単射 $\iff$ $\operatorname{Ker} f = 0$
- f が全射 $\iff$ $\operatorname{Im} f = N$ $\iff$ $\operatorname{Coker} f = 0$

定義 A.6: 完全列

- 左 R 加群 M_1, M, M_2 および左 R 加群の準同型 $f_1\colon M_1 \longrightarrow M$, $f_2\colon M \longrightarrow M_2$ を与える．このとき系列

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M \xrightarrow{f_2} M_2$$

が M において**完全** (exact) であるとは，$\operatorname{Im} f_1 = \operatorname{Ker} f_2$ が成り立つこと．これは $\operatorname{Ker} f_2 \subset \operatorname{Im} f_1$ かつ $f_2 \circ f_1 = 0$ と同値である．
- 左 R 加群の図式

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$$

が**完全**であるとは，$\forall i$ に対して系列 $M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+2}$ が完全であること．

次の命題は基本的である：

命題 A.1:

(1) (a) $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ が完全 $\iff$ f は単射.
  (b) $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ が完全 $\iff$ f は全射.

(2) (a) $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ が完全 $\iff$ f により $L \cong \operatorname{Ker} g$
  (b) $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ が完全 $\iff$ g により $\operatorname{Coker} f \cong N$

(3) 任意の左 R 加群の準同型写像 $f\colon M \longrightarrow N$ に対して，以下の 3 つの図式は完全列になる（図式 A.2）：

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f \xrightarrow{\ker f} M \xrightarrow{\operatorname{coim} f} \operatorname{Coim} f \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \operatorname{Im} f \xrightarrow{\operatorname{im} f} N \xrightarrow{\operatorname{coker} f} \operatorname{Coker} f \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f \xrightarrow{\ker f} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\operatorname{coker} f} \operatorname{Coker} f \longrightarrow 0$$

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f \arrow[dr, "\ker f"] & & & \operatorname{Coker} f \arrow[r] & 0 \\
& & M \arrow[r, "f"] \arrow[dl, "\operatorname{coim} f"] & N \arrow[ur, "\operatorname{coker} f"] & & \\
0 & \operatorname{Coim} f \arrow[l] & & & \operatorname{Im} f \arrow[ul, "\operatorname{im} f"'] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

図 A.2: 準同型写像 $f\colon M \longrightarrow N$ に伴う短完全列

<u>**証明**</u>　(1) (a) $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ が完全 $\iff$ $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} 0 = 0$ $\iff$ f は単射.

(b) $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ が完全 $\iff$ $N = \operatorname{Ker} 0 = \operatorname{Im} f$ $\iff$ f は全射.

(2) (a) $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ が完全 $\iff$ f が単射かつ $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$. $\iff$ $L \longrightarrow \operatorname{Ker} g,\ x \longmapsto f(x)$ が well-defined な同型写像

$$
\begin{tikzcd}
& \operatorname{Ker} g \arrow[dr, "\ker g"] & & \\
0 \arrow[r] & L \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & L
\end{tikzcd}
$$

(b) $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ が完全 $\iff$ $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$ かつ g が全射 $\iff$ $\operatorname{Coker} f \longrightarrow N,\ x + \operatorname{Im} f \longmapsto g(x)$ が well-defined な同型写像[*3].

$$
\begin{tikzcd}
& & \operatorname{Coker} f \arrow[d, "\cong"] & \\
L \arrow[r, "f"] & M \arrow[ur, "\operatorname{coker} f"] \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

(3)　定義から $\ker f$ は単射かつ $\operatorname{coim} f$ は全射であり，また $\operatorname{coim} f$ の定義から $\operatorname{Ker}(\operatorname{coim} f) = \operatorname{Ker} f = \operatorname{Im}(\ker f)$ なので 1 つ目の図式は完全である.

定義から $\operatorname{im} f$ は単射かつ $\operatorname{coker} f$ は全射であり，また $\operatorname{coker} f$ の定義から $\operatorname{Ker}(\operatorname{coker} f) = \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker}(\operatorname{coker} f)$ なので 2 つ目の図式も完全.

さらに $\ker f$ は単射かつ $\operatorname{coker} f$ は全射であり，$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im}(\ker f)$, $\operatorname{Ker}(\operatorname{coker} f) = \operatorname{Im} f$ であることから 3 つ目の図式も完全である.

■

命題 A.2:

左 R 加群の可換図式 A.3a が与えられたとき，自然に可換図式 A.3b が誘導され，2 つの行が完全列となる.

[*3] $g(x) \in \operatorname{Ker}(\operatorname{Coker} f \longrightarrow N) \iff x \in \operatorname{Ker} g$ より $\operatorname{Ker}(\operatorname{Coker} f \longrightarrow N) = \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$ なので単射.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \big\downarrow{\scriptstyle h_1} & & \big\downarrow{\scriptstyle h_2} \\ M' & \xrightarrow{f'} & N' \end{array}$$

(a)

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \operatorname{Ker} f & \xrightarrow{\ker f} & M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{\operatorname{coker} f} & \operatorname{Coker} f & \longrightarrow & 0 & & \text{(exact)} \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle \overline{h_1}} & & \big\downarrow{\scriptstyle h_1} & & \big\downarrow{\scriptstyle h_2} & & \big\downarrow{\scriptstyle \overline{h_2}} & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \operatorname{Ker} f' & \xrightarrow{\ker f'} & M' & \xrightarrow{f'} & N' & \xrightarrow{\operatorname{coker} f'} & \operatorname{Coker} f' & \longrightarrow & 0 & & \text{(exact)} \end{array}$$

(b)

図 A.3: 自然に誘導される可換図式

証明 まず $\overline{h_1}$ を定義する．与えられた図式 A.3a の可換性から $\forall x \in \operatorname{Ker} f$ に対して $f'\bigl(h_1(x)\bigr) = h_2\bigl(f(x)\bigr) = 0$ が成立する．i.e. $\operatorname{Im} h_1|_{\operatorname{Ker} f} \subset \operatorname{Ker} f'$ なので，写像

$$\overline{h_1} \colon \operatorname{Ker} f \longrightarrow \operatorname{Ker} f',\ x \longmapsto h_1(x)$$

は well-defined な準同型写像である．このとき $\forall x \in \operatorname{Ker} f$ に対して

$$(\ker f')\bigl(\overline{h_1}(x)\bigr) = (\ker f')\bigl(h_1(x)\bigr) = h_1(x) = h_1\bigl((\ker f)(x)\bigr)$$

が成り立つので図式 A.3b の左半分は可換．

次に $\overline{h_2}$ を定義する．$\forall y \in x + \operatorname{Im} f$ は $y = x + f(z)$ の形で書けるが，図式 A.3a の可換性から $h_2(y) = h_2(x) + f'\bigl(g(z)\bigr) \in h_2(x) + \operatorname{Im} f'$ が成り立つ．従って写像

$$\overline{h_2} \colon \operatorname{Coker} f \longrightarrow \operatorname{Coker} f',\ x + \operatorname{Im} f \longmapsto h_2(x) + \operatorname{Im} f'$$

は well-defined な準同型写像である．このとき $\forall x \in N$ に対して

$$\overline{h_2}\bigl((\operatorname{coker} f)(x)\bigr) = h_2(x) + \operatorname{Im} f' = (\operatorname{coker} f')\bigl(h_2(x)\bigr)$$

が成り立つので図式 A.3b の右半分も可換．

各行の完全性は命題 A.1-(3) より従うので，題意が示された． ■

定理 A.1: 蛇の補題

2 つの行が完全であるような左 R 加群の図式 A.4 を考える．このとき，以下の完全列が存在する：

$$\operatorname{Ker} h_1 \xrightarrow{\overline{f_1}} \operatorname{Ker} h_2 \xrightarrow{\overline{f_2}} \operatorname{Ker} h_3 \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker} h_1 \xrightarrow{\overline{g_1}} \operatorname{Coker} h_2 \xrightarrow{\overline{g_2}} \operatorname{Coker} h_3$$

ただし，命題 A.2 と同様に

$$\begin{aligned} &\overline{f_i} \colon \operatorname{Ker} h_i \longrightarrow \operatorname{Ker} h_{i+1},\ x \longmapsto f_i(x), \\ &\overline{g_i} \colon \operatorname{Coker} h_i \longrightarrow \operatorname{Coker} h_{i+1},\ x + \operatorname{Im} h_i \longmapsto g_i(x) + \operatorname{Im} h_{i+1} \end{aligned}$$

$(i = 1,\ 2)$ と定める．

$$
\begin{tikzcd}
 & M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "h_3"] & 0 & \text{(exact)} \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "g_1"] & N_2 \arrow[r, "g_2"] & N_3 & & \text{(exact)}
\end{tikzcd}
$$

図 A.4: 蛇の補題の仮定

<u>**証明**</u>　図式 A.4 の行の完全性から $f_2 \circ f_1 = 0$, $g_2 \circ g_1 = 0$ なので $\overline{f_2} \circ \overline{f_1} = 0$, $\overline{g_2} \circ \overline{g_1} = 0$ がわかる．i.e. $\operatorname{Im} \overline{f_1} \subset \operatorname{Ker} \overline{f_2}$, $\operatorname{Im} \overline{g_1} \subset \operatorname{Ker} \overline{g_2}$.

$\operatorname{Ker} h_1 \xrightarrow{\overline{f_1}} \operatorname{Ker} h_2 \xrightarrow{\overline{f_2}} \operatorname{Ker} h_3$　(exact)

$\operatorname{Im} \overline{f_1} \supset \operatorname{Ker} \overline{f_2}$ を示せばよい．$\forall x \in \operatorname{Ker} \overline{f_2}$ を 1 つとると，$\overline{f_2}(x) = f_2(x) = 0$ なので $x \in \operatorname{Ker} f_2 = \operatorname{Im} f_1$ でもある．i.e. ある $y \in M_1$ が存在して $x = f_1(y)$ と書ける．

一方，$\overline{f_2}$ の定義から $x \in \operatorname{Ker} h_2$ である．ここで図式 A.4 の可換性を使うと

$$0 = h_2(x) = h_2\bigl(f_1(y)\bigr) = g_1\bigl(h_1(y)\bigr)$$

がわかるが，図式 A.4 の行の完全性から g_1 は単射なので $h_1(y) = 0 \iff y \in \operatorname{Ker} h_1$ がわかる．故に $\overline{f_1}(y) = x$ の左辺が定義できて $x \in \operatorname{Im} \overline{f_1}$ が示された．

$$
\begin{tikzcd}
y \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[d, mapsto, "h_1"] & x \arrow[d, mapsto, "h_2"] \\
h_1(y) \arrow[r, mapsto, "g_1"] & 0
\end{tikzcd}
$$

$\operatorname{Coker} h_1 \xrightarrow{\overline{g_1}} \operatorname{Coker} h_2 \xrightarrow{\overline{g_2}} \operatorname{Coker} h_3$　(exact)

$\operatorname{Im} \overline{g_1} \supset \operatorname{Ker} \overline{g_2}$ を示せばよい．$\forall x + \operatorname{Im} h_2 \in \operatorname{Ker} \overline{g_2}$ を 1 つとると，$\overline{g_2}(x + \operatorname{Im} h_2) = g_2(x) + \operatorname{Im} h_3 = \operatorname{Im} h_3$ なので $g_2(x) \in \operatorname{Im} h_3$．i.e. ある $y \in M_3$ が存在して $g_3(x) = h_3(y)$ と書ける．さらに図式 A.4 の行の完全性から f_2 は全射だから，ある $z \in M_2$ が存在して $y = f_2(z)$ と書ける．ここで図式 A.4 の可換性を使うと

$$
\begin{aligned}
& g_2\bigl(x - h_2(z)\bigr) = g_2(x) - g_2\bigl(h_2(z)\bigr) = g_2(x) - h_3\bigl(f_2(z)\bigr) = g_2(x) - g_2(x) = 0 \\
\iff \quad & x - h_2(z) \in \operatorname{Ker} g_2 = \operatorname{Im} g_1
\end{aligned}
$$

従ってある $w \in M_1$ が存在して $g_1(w) = g_1\bigl(x - h_2(z)\bigr) \in g_1(x) + \operatorname{Im} h_2$ を充たす. 故に $\overline{g_1}(w + \operatorname{Im} h_1) = g_1(w) + \operatorname{Im} h_2 = x + \operatorname{Im} h_2$ であり，$x + \operatorname{Im} h_2 \in \operatorname{Im} \overline{g_1}$ が示された．

δ：$\operatorname{Ker} h_3 \longrightarrow \operatorname{Coker} h_1$ の構成

図式 A.4 の行の完全性から $\forall x \in \operatorname{Ker} h_3, \exists y \in M_2$，$f_2(y) = x$ が成り立つ．このとき図式 A.4 の可換性より

$$
\begin{aligned}
& g_2\bigl(h_2(y)\bigr) = h_3\bigl(f_2(y)\bigr) = h_3(x) = 0 \\
\iff \quad & h_2(y) \in \operatorname{Ker} g_2 = \operatorname{Im} g_1 \\
\iff \quad & \exists z \in N_1,\ g_1(z) = h_2(y). \qquad \text{(A.2.1)}
\end{aligned}
$$

ここで，$z + \operatorname{Im} h_1 \in \operatorname{Coker} h_1$ が $y \in M_2, z \in N_1$ のとり方によらずに定まることを示す．$y' \in M_2, z' \in N_1$ を $f_2(y') = x,\ h_2(y') = g_1(z')$ を充たすようにとる．このとき

$$f_2(y' - y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y' - y \in \operatorname{Ker} f_2 = \operatorname{Im} f_1$$

だから，ある $v \in M_1$ が存在して $y' - y = f_1(v)$ とかける．すると図式 A.4 の可換性より

$$g_1(z' - z) = h_2(y' - y) = h_2\bigl(f_1(v)\bigr) = g_1\bigl(h_1(v)\bigr)$$

が成り立つが，図式 A.4 の行の完全性から g_1 は単射なので $z' - z = h_1(v) \in \operatorname{Im} h_1$ がわかった．

以上の考察から，写像

$$\delta\colon \operatorname{Ker} h_3 \longrightarrow \operatorname{Coker} h_1,\ x \longmapsto z + \operatorname{Im} h_1 \tag{A.2.2}$$

は well-defined な準同型である．

$\operatorname{Ker} h_2 \xrightarrow{\overline{f_2}} \operatorname{Ker} h_3 \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker} h_1$ (exact)

まず $\operatorname{Im} \overline{f_2} \subset \operatorname{Ker} \delta$ を示す．$\forall x \in \operatorname{Im} \overline{f_2}$ を 1 つとると，$\overline{f_2}$ の定義から

$$\exists y \in \operatorname{Ker} h_2,\ f_2(y) = \overline{f_2}(y) = x$$

と書ける．従って (A.2.1) で定義される z は $g_1(z) = h_2(y) = 0$ を充たすが，図式 A.4 の行の完全性から g_1 は単射なので $z = 0$．故に δ の定義 (A.2.2) から $\delta(x) = 0 + \operatorname{Im} h_1$ であり，$x \in \operatorname{Ker} \delta$ が言えた．

次に $\operatorname{Im} \overline{f_2} \supset \operatorname{Ker} \delta$ を示す．$\forall x \in \operatorname{Ker} \delta$ を 1 つとると，(A.2.1) で定義される z は $z \in \operatorname{Im} h_1$ を充たす．従って

$$\exists w \in M_1,\ h_1(w) = z$$

であり，図式 A.4 の可換性から $x = f_2(y), g_1(z) = h_2(y)$ なる $y \in M_2$ に対して

$$\begin{aligned} &h_2\bigl(y - f_1(w)\bigr) = g_1(z) - g_1(z) = 0, \\ &f_2\bigl(y - f_1(w)\bigr) = x \end{aligned}$$

が成り立つ．i.e. $x = \overline{f_2}\bigl(y - f_1(w)\bigr) \in \operatorname{Im} \overline{f_2}$ が言えた．

$\operatorname{Ker} h_3 \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker} h_1 \xrightarrow{\overline{g_1}} \operatorname{Coker} h_2$ (exact)

まず $\operatorname{Im} \delta \subset \operatorname{Ker} \overline{g_1}$ を示す．$\forall \delta(x) = z + \operatorname{Im} h_1 \in \operatorname{Im} \delta$ を 1 つとると，(A.2.1) の z の定義から

$$\overline{g_1}(z + \operatorname{Im} h_1) = g_1(z) + \operatorname{Im} h_2 = h_2(y) + \operatorname{Im} h_2 = \operatorname{Im} h_2. \quad \Longrightarrow \quad z + \operatorname{Im} h_1 \in \operatorname{Ker} \overline{g_1}.$$

次に $\operatorname{Im} \delta \supset \operatorname{Ker} \overline{g_1}$ を示す．$\forall x + \operatorname{Im} h_1 \in \operatorname{Ker} \overline{g_1}$ を 1 つとると $g_1(x) \in \operatorname{Im} h_2$ が成り立つ．従って

$$\exists w \in M_2,\ h_2(w) = g_1(x)$$

である．一方，図式 A.4 の行の完全性および可換性から

$$\begin{aligned} &0 = g_2\bigl(g_1(x)\bigr) = g_2\bigl(h_2(w)\bigr) = h_3\bigl(f_2(w)\bigr) \\ \Longleftrightarrow\quad &f_2(w) \in \operatorname{Ker} h_3. \end{aligned}$$

δ の定義 (A.2.2) から $\delta\bigl(f_2(w)\bigr) = x$ であり，$x \in \operatorname{Im} \delta$ が言えた．

■

A.3 普遍性による諸定義

R を環とする．

A.3.1 核・余核

命題 A.3: 核・余核の普遍性

左 R 加群の準同型写像 $f\colon M \longrightarrow M'$ を与える．また $i\colon \mathrm{Ker}\, f \hookrightarrow M,\ x \mapsto x$ を標準的包含，$p\colon M' \twoheadrightarrow \mathrm{Coker}\, f,\ x \mapsto x + \mathrm{Coker}\, f$ を標準的射影とする．このとき以下が成り立つ：

(核の普遍性) 任意の左 R 加群 N に対して，写像

$$i_*\colon \mathrm{Hom}_R(N,\, \mathrm{Ker}\, f) \longrightarrow \left\{ g \in \mathrm{Hom}_R(N,\, M) \,\middle|\, f \circ g = 0 \right\},\ h \longmapsto i \circ h$$

は well-defined な全単射である．特に $\forall g \in \mathrm{Hom}_R(N,\, M)$ s.t. $f \circ g = 0$ に対して $\exists! h \in \mathrm{Hom}_R(N,\, \mathrm{Ker}\, f)$ s.t. $i \circ h = g$（図式 A.5a）．

(余核の普遍性) 任意の左 R 加群 N に対して，写像

$$p^*\colon \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Coker}\, f,\, N) \longrightarrow \left\{ g \in \mathrm{Hom}_R(M',\, N) \,\middle|\, g \circ f = 0 \right\},\ h \longmapsto h \circ p$$

は well-defined な全単射である．特に $\forall g \in \mathrm{Hom}_R(M',\, N)$ s.t. $g \circ f = 0$ に対して $\exists! h \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Coker}\, f,\, N)$ s.t. $h \circ p = g$（図式 A.5b）．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\, f \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, "f"] & M' \\
N \arrow[u, dashed, "\exists! h"] \arrow[ur, "g"] \arrow[urr, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

(a) 核の普遍性

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[drr, "0"'] & M' \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "g"] & \mathrm{Coker}\, f \arrow[d, dashed, "\exists! h"] \\
& & N
\end{tikzcd}$$

(b) 余核の普遍性

<u>証明</u> (1) **well-definedness** 核の定義により $f \circ i = 0$ だから，$\forall h \in \mathrm{Hom}_R(N,\, \mathrm{Ker}\, f)$，$f \circ \bigl(i_*(h)\bigr) = (f \circ i) \circ h = 0$．

全単射であること $\forall g \in \left\{ g \in \mathrm{Hom}_R(N,\, M) \,\middle|\, f \circ g = 0 \right\}$ をとる．このとき $\forall x \in N$ に対して $f\bigl(g(x)\bigr) = 0 \iff g(x) \in \mathrm{Ker}\, f$ なので，写像

$$h\colon N \longrightarrow \mathrm{Ker}\, f,\ x \longmapsto g(x)$$

は well-defined かつ $g = i \circ h \in \mathrm{Im}\, i_*$ が成り立つ．i.e. i_* は全射．
また，$h,\, h' \in \mathrm{Hom}_R(N,\, \mathrm{Ker}\, f)$ に対して

$$i_*(h) = i_*(h') \iff i \circ h = i \circ h' \implies \forall x \in N,\ i\bigl(h(x)\bigr) = i\bigl(h'(x)\bigr)$$

だが，i は単射なので $\forall x \in N,\ h(x) = h'(x) \iff h = h'$ が成り立つ．i.e. i_* は単射．

(2) **well-definedness** 余核の定義により $p \circ f = 0$ だから，$\forall h \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Coker}\, f,\, N)$，$p^*(h) \circ f = h \circ (p \circ f) = 0$.

全単射であること $\forall g \in \left\{ g \in \mathrm{Hom}_R(M',\, N) \,\middle|\, g \circ f = 0 \right\}$ をとる．このとき $\forall x' \in x + \mathrm{Coker}\, f$ は ある $y \in M$ を用いて $x' = x + f(y)$ と書けるから

$$g(x') = g(x) + (g \circ f)(y) = g(x) \in N$$

が成り立つ．したがって写像

$$h\colon \mathrm{Coker}\, f \longrightarrow N,\ x + \mathrm{Im}\, f \longmapsto g(x)$$

は well-defined であり，かつ $g = h \circ p \in \mathrm{Im}\, p^*$ が成り立つ．i.e. p^* は全射．
また，$h,\, h' \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Coker}\, f,\, N)$ に対して

$$p^*(h) = p^*(h') \quad \Longrightarrow \quad h \circ p = h' \circ p$$

が成り立つが，p は全射なので $h = h'$ が言える．i.e. p^* は単射．

■

別の左 R 加群 K と準同型写像 $i'\colon K \longrightarrow M$ が核の普遍性を充していて，次のような可換図式を書ける場合を考える．

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "i'"] & M \arrow[r, "f"] & M' \\
\forall N \arrow[u, dashed, "\exists! h'"] \arrow[ru, "g"] \arrow[rru, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

このとき，次のような可換図式を充たす**同型写像** $\widehat{h}\colon \mathrm{Ker}\, f \xrightarrow{\cong} K$ が**一意的に**存在する：

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[rrd, bend left, "i'"] & & & \\
& \mathrm{Ker}\, f \arrow[lu, "\exists! \widehat{h}"'] \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, "f"] & M' \\
& \forall N \arrow[u, dashed, "\exists! h"] \arrow[luu, dashed, bend left, "\exists! h"] \arrow[ru, "g"] \arrow[rru, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

<u>**証明**</u> 実際，$N = \mathrm{Ker}\, f$ とすると R 加群の準同型 $\widehat{h}\colon \mathrm{Ker}\, f \longrightarrow K$ であって $i' \circ \widehat{h} = i$ を充たすものが一意に存在することがわかり，$N = K$ とすると R 加群の準同型 $\widehat{h}'\colon K \longrightarrow \mathrm{Ker}\, f$ であって $i \circ \widehat{h}' = i'$ を充たすものが一意に存在することがわかる．このとき

$$\begin{aligned}
i_*(\widehat{h}' \circ \widehat{h}) &= (i \circ \widehat{h}') \circ \widehat{h} = i = i_*(\mathrm{id}_{\mathrm{Ker}\, f}) \\
i'_*(\widehat{h} \circ \widehat{h}') &= (i' \circ \widehat{h}) \circ \widehat{h}' = i' = i'_*(\mathrm{id}_K)
\end{aligned}$$

だが，核の普遍性より $i_*,\, i'_*$ は単射なので

$$\begin{aligned}
\widehat{h}' \circ \widehat{h} &= \mathrm{id}_{\mathrm{Ker}\, f} \\
\widehat{h} \circ \widehat{h}' &= \mathrm{id}_K
\end{aligned}$$

が従う．i.e. $\widehat{h}$ は同型写像である． ■

同様の議論は余核に対しても成り立つ：

別の左 R 加群 C と準同型写像 $p' \colon M' \longrightarrow C$ が余核の普遍性を充していて，次のような可換図式を書ける場合を考える．

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[rrd, "0"'] & M' \arrow[r, "p'"] \arrow[rd, "g"] & C \arrow[d, dashed, "\exists! h'"] \\
& & \forall N
\end{tikzcd}$$

このとき，次のような可換図式を充たす**同型写像** $\widehat{h} \colon \operatorname{Ker} f \xrightarrow{\cong} K$ が**一意的に**存在する：

$$\begin{tikzcd}
& & & C \arrow[ld, dashed, bend left, "\exists! h'"] \\
M \arrow[r, "f"] \arrow[rrd, "0"'] & M' \arrow[r, "p"] \arrow[rd, "g"] \arrow[rru, bend left, "p'"] & \operatorname{Coker} f \arrow[ru, "\exists! \widehat{h}"] \arrow[d, dashed, "\exists! h"] & \\
& & \forall N &
\end{tikzcd}$$

証明 実際，$N = \operatorname{Coker} f$ とすると R 加群の準同型 $\widehat{h}' \colon C \longrightarrow \operatorname{Coker} f$ であって $\widehat{h}' \circ p' = p$ を充たすものが一意に存在することがわかり，$N = C$ とすると R 加群の準同型 $\widehat{h} \colon \operatorname{Coker} f \longrightarrow C$ であって $\widehat{h} \circ p = p'$ を充たすものが一意に存在することがわかる．このとき

$$\begin{aligned}
p^*(\widehat{h}' \circ \widehat{h}) &= \widehat{h}' \circ (\widehat{h} \circ p) = p = p^*(\mathrm{id}_{\operatorname{Coker} f}) \\
p'^*(\widehat{h} \circ \widehat{h}') &= \widehat{h} \circ (\widehat{h}' \circ p') = p' = p'^*(\mathrm{id}_C)
\end{aligned}$$

だが，余核の普遍性より p^*, p'^* は単射なので

$$\begin{aligned}
\widehat{h}' \circ \widehat{h} &= \mathrm{id}_{\operatorname{Coker} f} \\
\widehat{h} \circ \widehat{h}' &= \mathrm{id}_C
\end{aligned}$$

が従う．i.e. $\widehat{h}$ は同型写像である． ■

A.3.2 直和・直積

R を環，Λ を任意の添字集合とする．$\forall \lambda \in \Lambda$ に対応して R 加群 M_λ が与えられているとする．R 加群の族 $\{(M_\lambda, +, \cdot)\}_{\lambda \in \Lambda}$ の集合としての直積は

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = \{ (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \mid \forall \lambda \in \Lambda,\ x_\lambda \in M_\lambda \}$$

と書かれるのだった．

定義 A.7: 加群の直積・直和

Λ, $\{(M_\lambda, +, \cdot)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を上述の通りにとる．

(1) 集合 $\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ の上の加法 $+$ およびスカラー乗法 $\cdot$ を次のように定めると，組 $\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, +, \cdot\right)$ は左 R 加群になる．これを加群の族 $\{(M_\lambda, +, \cdot)\}_{\lambda\in\Lambda}$ の**直積** (direct product) と呼ぶ：

$$+\colon \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \times \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda,\ \big((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\big) \mapsto (x_\lambda + y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$
$$\cdot\colon R \times \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda,\ \big(a, (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\big) \mapsto (a\cdot x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

添字集合 Λ が有限集合 $\{1, \dots, n\}$ であるときは

$$M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$$

とも書く．

(2) 加群の直積 $\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, +, \cdot\right)$ を与えると，次のように定義される部分集合 $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ は部分 R 加群をなす．これを加群の族 $\{(M_\lambda, +, \cdot)\}_{\lambda\in\Lambda}$ の**直和** (direct sum) と呼ぶ：

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda := \left\{ (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \;\middle|\; \begin{array}{c}\text{有限個の添字 } i_1, \dots, i_n \in \Lambda \text{ を除いた}\\ \text{全ての添字 } \lambda\in\Lambda \text{ について } x_\lambda = 0\end{array} \right\}$$

添字集合 Λ が有限集合 $\{1, \dots, n\}$ であるときは

$$M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$$

とも書く．

! 添字集合 Λ が有限のときは R 加群として $\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ である．Λ が無限集合の時は，包含写像 $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \hookrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ によって準同型であるが，同型とは限らない．

定義 A.8: 標準射影，標準包含

加群の族 $\{(M_\lambda,\,+,\,\cdot\,)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を与える．

(1) 各添字 $\mu\in\Lambda$ に対して，次のように定義される写像 $\pi_\mu\colon \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to M_\mu$ のことを**標準射影** (canonical projection) と呼ぶ：

$$\pi_\mu\big((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\big) := x_\mu$$

(2) 各添字 $\mu\in\Lambda$ に対して，次のように定義される写像 $\iota_\mu\colon M_\mu \hookrightarrow \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ のことを**標準包含** (canonical inclusion) と呼ぶ：

$$\iota_\mu(x) := (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, \quad {}^{\mathrm{w}/}\ \ y_\lambda := \begin{cases} x, & : \lambda=\mu \\ 0. & : \text{otherwise}\end{cases}$$

加群の族をいちいち $\{(M_\lambda,\,+,\,\cdot\,)\}_{\lambda\in\Lambda}$ と書くと煩雑なので，以降では省略して $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と書くことにする．

命題 A.4: 直積・直和の普遍性

任意の添字集合 Λ，および加群の族 $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を与える．添字 $\mu\in\Lambda$ に対する標準射影，標準包含をそれぞれ $\pi_\mu,\ \iota_\mu$ と書く．

(直積の普遍性) 任意の左 R 加群 N に対して，写像

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_R\Big(N,\ \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda\Big) & \longrightarrow & \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Hom}_R(N,\ M_\lambda) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ f & \longmapsto & \{\,\pi_\lambda\circ f\,\}_{\lambda\in\Lambda} \end{array}$$

は全単射である．i.e. 任意の左 R 加群 N ，および任意の左 R 加群の準同型写像の族 $\{\,f_\lambda\colon N\to M_\lambda\,\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，$\forall\lambda\in\Lambda,\ \pi_\mu\circ f = f_\lambda$ を充たす準同型写像 $f\colon N\to\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ が一意的に存在する（図式 A.6a).

(直和の普遍性) 任意の左 R 加群 N に対して，写像

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_R\Big(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda,\ N\Big) & \longrightarrow & \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Hom}_R(M_\lambda,\ N) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ f & \longmapsto & \{\,f\circ\iota_\lambda\,\}_{\lambda\in\Lambda} \end{array}$$

は全単射である．i.e. 任意の左 R 加群 N ，および任意の左 R 加群の準同型写像の族 $\{\,f_\lambda\colon M_\lambda\to N\,\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，$\forall\lambda\in\Lambda,\ f\circ\iota_\lambda = f_\lambda$ を充たす準同型写像 $f\colon\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda\to N$ が一意的に存在する（図式 A.6b).

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, dashed, "\exists! f"] \arrow[dr, "f_\lambda"'] & \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \arrow[d, "\pi_\lambda"] \\ & M_\lambda \end{tikzcd}$$

(a) 直積の普遍性

$$\begin{tikzcd} M_\lambda \arrow[r, "\iota_\lambda"] \arrow[dr, "f_\lambda"'] & \bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \arrow[d, dashed, "\exists! f"] \\ & N \end{tikzcd}$$

(b) 直和の普遍性

<u>**証明**</u>　(1) **存在**　左 R 加群の準同型写像の族 $\left\{ f_\lambda\colon N \to M_\lambda \right\}_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられたとき，写像 f を

$$f\colon N \to \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda,\ x \mapsto \big(f_\lambda(x)\big)_{\lambda\in\Lambda}$$

と定義する．このとき $\forall \mu \in \Lambda, \forall x \in N$ に対して

$$(\pi_\mu \circ f)(x) = f_\mu(x)$$

なので図 A.6a は可換図式になる．

一意性　図 A.6a を可換図式にする別の準同型写像 $g\colon N \to \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ が存在したとする．このとき $\forall x \in N, \forall \lambda \in \Lambda$ に対して

$$\pi_\lambda\big(g(x)\big) = f_\lambda(x) = \pi_\lambda\big(f(x)\big)$$

なので $f(x) = g(x)$ となる．i.e. f は一意である．

(2) **存在**　左 R 加群の準同型写像の族 $\left\{ f_\lambda\colon M_\lambda \to N \right\}_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられたとき，写像 f を

$$f\colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to N,\ (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mapsto \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x_\lambda)$$

と定義する．右辺は有限和なので意味を持つ．
このとき $\forall \mu \in \Lambda, \forall x \in M_\mu$ に対して

$$f\big(\iota_\mu(x)\big) = f_\mu(x_\mu) + \sum_{\lambda\neq\mu} f_\lambda(0) = f_\mu(x_\mu)$$

なので図 A.6b は可換図式になる．

一意性　図 A.6b を可換図式にする別の準同型写像 $g\colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to N$ が存在したとする．このとき $\forall (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}$ に対して

$$g\big((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\big) = g\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} \iota_\lambda(x_\lambda)\right) = \sum_{\lambda\in\Lambda} g\big(\iota_\lambda(x_\lambda)\big) = \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x_\lambda) = f\big((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\big)$$

なので $f = g$ となる．i.e. f は一意である．

■

別の左 R 加群 P と準同型写像の族 $\left\{\pi'_\lambda\colon P \to M_\lambda\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ が直積の普遍性を充していて，次のような可換図式を書ける場合を考える：

$$
\begin{tikzcd}
\forall N \arrow[r, dashed, "\exists! f'"] \arrow[dr, "f_\lambda"'] & P \arrow[d, "\pi'_\lambda"] \\
& M_\lambda
\end{tikzcd}
$$

このとき，次のような可換図式を充たす**同型写像** $\widehat{f}\colon \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \longrightarrow P$ が**一意に**存在する：

$$
\begin{tikzcd}
& & P \arrow[ddl, bend left, "\pi'_\lambda"] \\
\forall N \arrow[urr, dashed, bend left, "\exists! f'"] \arrow[r, dashed, "\exists! f"] \arrow[dr, "f_\lambda"'] & \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \arrow[ur, "\exists! \widehat{f}"] \arrow[d, "\pi_\lambda"] & \\
& M_\lambda &
\end{tikzcd}
$$

直和の普遍性に関しても同様である：別の左 R 加群 S と準同型写像の族 $\left\{\iota'_\lambda\colon M_\lambda \to S\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ が直和の普遍性を充していて，次のような可換図式を書ける場合を考える：

$$
\begin{tikzcd}
M_\lambda \arrow[r, "\iota'_\lambda"] \arrow[dr, "f_\lambda"'] & S \arrow[d, dashed, "\exists! f'"] \\
& \forall N
\end{tikzcd}
$$

このとき，次のような可換図式を充たす**同型写像** $\widehat{f}\colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \longrightarrow S$ が**一意に**存在する：

$$
\begin{tikzcd}
& & S \arrow[ddl, dashed, bend left, "\exists! f'"] \\
M_\lambda \arrow[urr, bend left, "\iota'_\lambda"] \arrow[r, "\iota_\lambda"] \arrow[dr, "f_\lambda"'] & \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \arrow[ur, "\exists! \widehat{f}"] \arrow[d, dashed, "\exists! f'"] & \\
& \forall N &
\end{tikzcd}
$$

A.3.3　テンソル積

M を左 R 加群，Λ を任意の添字集合として，M の部分集合 $S \coloneqq \{m_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset M$ を考える．このとき S の生成する部分加群とは

$$\left\{ \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda m_\lambda \;\middle|\; a_\lambda \in R,\, m_\lambda \in S,\, {\scriptstyle \text{有限個の添字 } i_1,\, \dots,\, i_n \text{ を除いた} \atop \scriptstyle \text{全ての添字 } \lambda \in \Lambda \text{ について } a_\lambda = 0} \right\}$$

のことである．

定義 A.9: テンソル積

右 $\boldsymbol{R}$ 加群 M および**左 $\boldsymbol{R}$ 加群** N を与える．M と N の R 上の**テンソル積** (tensor product) $\boldsymbol{M \otimes_R N}$ とは，次のようにして定義される**剰余加群**のことである：

(1) まず $\mathbb{Z}$ 加群

$$F(M,\, N) \coloneqq \mathbb{Z}^{\oplus (M \times N)}$$

を定める[a]．

(2) $\forall (m,\, n) \in M \times N$ に対して，第 $(m,\, n)$ 成分からの標準的包含

$$\begin{aligned} &\iota_{(m,\, n)} \colon \mathbb{Z} \hookrightarrow F(M,\, N),\ x \longmapsto (y_\lambda)_{\lambda \in M \times N} \\ &\text{w/}\quad y_\lambda = \begin{cases} x, & \lambda = (m,\, n) \\ 0, & \lambda \neq (m,\, n) \end{cases} \end{aligned}$$

による 1 の像を $[m,\, n]$ と書く．i.e.

$$[m,\, n] \coloneqq \iota_{(m,\, n)}(1)$$

(3) 部分加群 $G(M,\, N) \subset F(M,\, N)$ を

$$\begin{aligned} &[m_1 + m_2,\, n] - [m_1,\, n] - [m_2,\, n] \\ &[m,\, n_1 + n_2] - [m,\, n_1] - [m,\, n_2] \\ &[ma,\, n] - [m,\, an] \end{aligned}$$

の形をした $F(M,\, N)$ の元全体の集合によって生成される部分加群として定める．

(4) $F(M,\, N)$ の $G(M,\, N)$ による剰余加群をとる：

$$M \otimes_R N \coloneqq F(M,\, N)/G(M,\, N)$$

また，$[m,\, n]$ の $M \otimes_R N$ における剰余類を $m \otimes n$ と書く．

[a] つまり，$F(M,\, N)$ は $M \times N$ を**添字集合とする** $\mathbb{Z}$ 加群の族 $\{\mathbb{Z}\}_{(m,\, n) \in M \times N}$ の直和である．

補題 A.2: テンソル積の性質

右 R 加群 M，左 R 加群 N を与える．このとき $\forall m,\, m_1,\, m_2 \in M,\, \forall n,\, n_1,\, n_2 \in N,\, \forall a \in R$ に対して以下が成り立つ：

(1)

$$
\begin{aligned}
(m_1 + m_2) \otimes n = m_1 \otimes n + m_2 \otimes n, \\
n \otimes (n_1 + n_2) = m \otimes n_1 + m \otimes n_2, \\
(ma) \otimes n = m \otimes (an)
\end{aligned}
$$

(2)

$$
0_{M \otimes_R N} = 0_M \otimes n = m \otimes 0_N
$$

証明 混乱を避けるため，この証明では剰余加群が持つ加法を赤字で $+$ と書くことにする．

(1) テンソル積の定義より

$$
\begin{aligned}
(m_1 + m_2) \otimes n &= [m_1 + m_2,\, n] + G(M,\, N) \\
&= \bigl([m_1,\, n] + [m_2,\, n]\bigr) + G(M,\, N) \\
&= \bigl([m_1,\, n] + G(M,\, N)\bigr) + \bigl([m_2,\, n] + G(M,\, N)\bigr) \\
&= m_1 \otimes n + m_2 \otimes n
\end{aligned}
$$

が成り立つ[*4]．ただし，2 番目の等号において

$$
\begin{aligned}
[m_1 + m_2,\, n] &= \bigl([m_1,\, n] + [m_2,\, n]\bigr) + \bigl([m_1 + m_2,\, n] - [m_1,\, n] - [m_2,\, n]\bigr) \\
&\in \bigl([m_1,\, n] + [m_2,\, n]\bigr) + G(M,\, N)
\end{aligned}
$$

を用いた．同様にして他の 2 つも示される：

$$
\begin{aligned}
m \otimes (n_1 + n_2) &= [m,\, n_1 + n_2] + G(M,\, N) \\
&= \bigl([m,\, n_1] + [m,\, n_2]\bigr) + G(M,\, N) \\
&= \bigl([m,\, n_1] + G(M,\, N)\bigr) + \bigl([m,\, n_2] + G(M,\, N)\bigr) \\
&= m \otimes n_1 + m \otimes n_2, \\
ma \otimes n &= [ma,\, n] + G(M,\, N) \\
&= [m,\, an] + G(M,\, N) \\
&= m \otimes an
\end{aligned}
$$

(2) (1) より

$$
\begin{aligned}
0_M \otimes n = (0_M + 0_M) \otimes n = 0_M \otimes n + 0_M \otimes n \\
m \otimes 0_N = m \otimes (0_N + 0_N) = m \otimes 0_N + m \otimes 0_N
\end{aligned}
$$

なので

$$
0_M \otimes n = m \otimes 0_N = 0_{M \otimes_R N}
$$

[*4] 少しややこしいが，剰余加群 $F(M,\, N)/G(M,\, N)$ の元は $x \in F(M,\, N)$ を用いて $x + G(M,\, N)$ と書かれる．

とわかる．

■

$F(M,\, N)$ の勝手な元は<u>有限の</u>添字集合 I に対する集合族 $\{m'_i\}_{i\in I} \subset M,\ \{n_i\}_{i\in I} \subset N$ によって

$$\sum_{i\in I}(\pm[m'_i,\, n_i])$$

の形で書けるが，補題 A.2 から

$$0_{M\otimes_R N} = 0_M \otimes n_i = (m'_i - m'_i) \otimes n_i = m'_i \otimes n_i + (-m'_i) \otimes n_i$$

なので

$$-(m'_i \otimes n_i) = (-m'_i) \otimes n_i$$

とわかる．従って[*5]

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i\in I}(\pm[m'_i,\, n_i])\right) + G(M,\, N) &= \sum_{i\in I}\big((\pm[m'_i,\, n_i]) + G(M,\, N)\big) \\ &= \sum_{i\in I}\pm\big([m'_i,\, n_i] + G(M,\, N)\big) \\ &= \sum_{i\in I}\pm\big(m'_i \otimes n_i\big) \\ &= \sum_{i\in I}(\pm m'_i) \otimes n_i\end{aligned}$$

とわかる．i.e. $M \otimes_R N$ の勝手な元は

$$\sum_{i\in I} m_i \otimes n_i$$

の形で書ける．しかし，この表示は一意**ではない**．

定義 A.10: R-バランス写像

右 R 加群 M，左 R 加群 N，$\mathbb{Z}$ 加群 L を与える．
このとき写像 $f\colon M \times N \longrightarrow L$ が ***R* バランス写像** (R-balanced map) であるとは，

$$\begin{aligned}f(m_1 + m_2,\, n) &= f(m_1,\, n) + f(m_2,\, n) \\ f(m,\, n_1 + n_2) &= f(m,\, n_1) + f(m,\, n_2) \\ f(ma,\, n) &= f(m,\, an)\end{aligned}$$

を充たすことを言う．

補題 A.2 から，写像

$$\Phi\colon M \times N \longrightarrow M \otimes_R N,\ (m,\, n) \longmapsto m \otimes n$$

[*5] 剰余加群において定義される加法を赤字で $\sum_{i\in I}$ と書いた．

は R バランス写像となる．

命題 A.5: テンソル積の普遍性

右 R 加群 M，左 R 加群 N を与える．このとき，以下が成り立つ：

(テンソル積の普遍性) 任意の $\mathbb{Z}$ **加群** L と任意の R バランス写像 $f\colon M\times N\longrightarrow L$ に対して，$\mathbb{Z}$ 加群の準同型 $g\colon M\otimes_R N\longrightarrow L$ であって $g\circ\Phi=f$ を充たすものが**一意的に**存在する．

$$\begin{tikzcd}
M\times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Phi"'] & L \\
M\otimes_R N \arrow[ur, dashed, "\exists! g"'] &
\end{tikzcd}$$

図 A.7: テンソル積の普遍性

__証明__ 集合 $M\times N$ で添字付けられた $\mathbb{Z}$ 加群の準同型の族 $\{g_{(m,\,n)}\colon \mathbb{Z}\to L\}_{(m,\,n)\in M\times N}$ を，$g_{(m,\,n)}(x)\coloneqq xf(m,\,n)$ として定める．すると直和の普遍性から，$\forall(m,\,n)\in M\times N$ に対して次のような可換図式が書ける：

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "\iota_{(m,\,n)}"] \arrow[dr, "g_{(m,\,n)}"'] & F(M,\,N)=\mathbb{Z}^{\oplus(M\times N)} \arrow[d, "\exists!\tilde{g}"] \\
& L
\end{tikzcd}$$

i.e. $\mathbb{Z}$ 加群の準同型 $\tilde{g}\colon F(M,\,N)\longrightarrow L$ はただ一つ存在し，

$$\tilde{g}([m,\,n])=(\tilde{g}\circ\iota_{(m,\,n)})(1)=f(m,\,n)$$

を充たす．このときバランス写像の定義から

$$\begin{aligned}
&\tilde{g}([m_1+m_2,\,n]-[m_1,\,n]-[m_2,\,n])=f(m_1+m_2,\,n)-f(m_1,\,n)-f(m_2,\,n)=0,\\
&\tilde{g}([m,\,n_1+n_2]-[m,\,n_1]-[m,\,n_1])=f(m,\,n_1+n_2)-f(m,\,n_1)-f(m,\,n_2)=0,\\
&\tilde{g}([ma,\,n]-[m,\,an])=f(ma,\,n)-f(m,\,an)=0,
\end{aligned}$$

が成り立つから，標準的包含 $i\colon G(M,\,N)\hookrightarrow F(M,\,N)$ について

$$(\tilde{g}\circ i)\bigl(G(M,\,N)\bigr)=0$$

が成り立つ．故に余核の普遍性から次の可換図式が書ける：

$$\begin{tikzcd}
G(M,\,N) \arrow[r, "i"] \arrow[drr, "0"'] & F(M,\,N) \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "\tilde{g}"] & \operatorname{Coker} i=M\otimes_R N \arrow[d, dashed, "\exists! g"] \\
& & L
\end{tikzcd}$$

このように構成された $\mathbb{Z}$ 加群の準同型 $g\colon M \otimes_R N \longrightarrow L$ は一意に定まり，$\forall (m,\, n) \in M \times N$ に対して

$$(g \circ \Phi)(m,\, n) = g(m \otimes n) = (g \circ p)([m,\, n]) = \tilde{g}([m,\, n]) = f(m,\, n)$$

を充たす．i.e. $g \circ \Phi = f$. ■

> **!** 図式 A.7 で $M,\, N,\, L$ を固定したとき，R バランス写像 $f\colon M \times N \longrightarrow L$ 全体のなす集合のことを**テンソル空間**と呼ぶことが多いような気がする．

別の $\mathbb{Z}$ 加群 T と R バランス写像 $\varphi\colon M \times N \longrightarrow T$ がテンソル積の普遍性を充たしていて，次のような可換図式を書ける場合を考える：

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & \forall L \\
T \arrow[ur, dashed, "\exists! g'"'] &
\end{tikzcd}$$

このとき，次のような可換図式を充たす**同型写像** $\widehat{g}\colon M \otimes_R N \xrightarrow{\cong} T$ が**一意に定まる**：

$$\begin{tikzcd}
& M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Phi"] \arrow[ddl, bend right, "\varphi"'] & \forall L \\
& M \otimes_R N \arrow[ur, dashed, "\exists! g"'] \arrow[dl, "\exists! \widehat{g}"'] & \\
T \arrow[uurr, dashed, bend right, "\exists! g'"'] & &
\end{tikzcd}$$

系 A.2: テンソル積の準同型

右 R 加群の準同型写像 $f\colon M_1 \longrightarrow M_2$ と，左 R 加群の準同型写像 $g\colon N_1 \longrightarrow N_2$ を与える．このとき，以下が成り立つ：

(1) $\mathbb{Z}$ 加群の準同型写像

$$f \otimes g\colon M_1 \otimes_R N_1 \longrightarrow M_2 \otimes_R N_2$$

であって，$\forall m \in M_1,\, \forall n \in N_1$ に対して

$$(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$$

を充たすものが**一意的に**存在する．

(2) 別の右 R 加群の準同型写像 $f'\colon M_1 \longrightarrow M_2$ と，左 R 加群の準同型写像 $g'\colon N_1 \longrightarrow N_2$ を与えると

$$(f + f') \otimes g = f \otimes g + f' \otimes g,$$
$$f \otimes (g + g') = f \otimes g + f \otimes g'$$

が成り立つ．

(3) さらに右 R 加群の準同型写像 $f'' \colon M_2 \longrightarrow M_3$ と，左 R 加群の準同型写像 $g'' \colon N_2 \longrightarrow N_3$ を与えると

$$(f'' \otimes g'') \circ (f \otimes g) = (f'' \circ f) \otimes (g'' \circ g)$$

が成り立つ.

<u>**証明**</u>　(1) 補題 A.2 より，写像

$$\varphi \colon M_1 \times N_1 \longrightarrow M_2 \otimes N_2,\ (m,\, n) \longmapsto f(m) \otimes g(n)$$

は R バランス写像になる．従ってテンソル積の普遍性から，題意を充たす準同型写像 $f \otimes g$ が一意に存在する：

$$\begin{tikzcd}
M_1 \times N_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\Phi"'] & M_2 \otimes N_2 \\
M_1 \otimes N_1 \arrow[ur, dashed, "\exists! f\otimes g"'] &
\end{tikzcd}$$

一意性は $M_1 \times N_1$ が $m \otimes n$ の形の元によって生成されることから従う.

(2) 補題 A.2 より，$\forall (m,\, n) \in M_1 \times N_1$ に対して

$$\begin{aligned}
\bigl((f + f') \otimes g\bigr)(m \otimes n) &= \bigl(f(m) + f'(m)\bigr) \otimes g(n) = f(m) \otimes g(n) + f'(m) \otimes g(n), \\
\bigl(f \otimes g + f' \otimes g\bigr)(m \otimes n) &= (f \otimes g)(m \otimes n) + (f' \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n) + f'(m) \otimes g(n)
\end{aligned}$$

だから $(f + f') \otimes g = f \otimes g + f' \otimes g$．もう一方も同様.

(3)

$$\begin{aligned}
\bigl((f'' \otimes g'') \otimes (f \otimes g)\bigr)(m \otimes n) &= (f'' \otimes g'')\bigl(f(m) \otimes g(n)\bigr) = f''\bigl(f(m)\bigr) \otimes g''\bigl(g(n)\bigr), \\
\bigl((f'' \circ f) \otimes (g'' \circ g)\bigr)(m \otimes n) &== f''\bigl(f(m)\bigr) \otimes g''\bigl(g(n)\bigr)
\end{aligned}$$

だから $(f'' \otimes g'') \otimes (f \otimes g) = (f'' \circ f) \otimes (g'' \circ g)$.

■

系 A.3: R 加群としてのテンソル積

R, S を環とする．

(1) M を $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R})$ 両側加群，N を左 R 加群とする．このとき $M \otimes_R N$ の S による**左乗法**であって，$\forall s \in S$ に対して

$$s(m \otimes n) = (sm) \otimes n$$

を充たすものが一意的に定まり，この左乗法によって $M \otimes_R N$ は左 S 加群となる．

(2) M を右 R 加群，N を $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{S})$ 両側加群とする．このとき $M \otimes_R N$ の S による**右乗法**であって，$\forall s \in S$ に対して

$$(m \otimes n)s = m \otimes (ns)$$

を充たすものが一意的に定まり，この右乗法によって $M \otimes_R N$ は右 S 加群となる．

(3) R が**可換環**で M, N が R 加群のとき，$S = R$ として (1), (2) の方法を適用することで $M \otimes_R N$ は自然に R 加群になり，かつそれら 2 つは等しい．

証明 (1) $\forall s \in S$ を一つとる．このとき写像 $L_s \colon M \longrightarrow M,\ m \longmapsto sm$ は右 R 加群の準同型写像であるから，系 A.2-(1) より準同型写像

$$L_s \otimes \mathrm{id}_N \colon M \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N$$

であって $(L_s \otimes \mathrm{id}_N)(m \otimes n) = L_s(m) \otimes n = (sm) \otimes n$ を充たすものが一意的に存在する．これを $s \in S$ による左乗法と定義すればよい．

(2) 写像 $R_s \colon N \longrightarrow N,\ n \longmapsto ns$ は左 R 加群の準同型写像なので系 A.2-(1) から準同型写像

$$\mathrm{id}_M \otimes R_s \colon M \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N$$

であって $(\mathrm{id}_M \otimes R_s)(m \otimes n) = m \otimes (ns)$ を充たすものが一意的に存在する．これを $s \in S$ による右乗法と定義すればよい．

(3) R が可換環のとき，(1) による R 加群の構造は $r(m \otimes n) = (rm) \otimes n$，(2) による R 加群の構造は $r(m \otimes n) = m \otimes (rn)$ となるが，補題 A.2 よりこれらは等しい．

■

A.3.4 帰納極限と射影極限

まず，一般の（フィルタードとは限らない）図式をもとにした定義を述べる．

有向グラフまたは圏 $\mathcal{I} = \left(I,\ \left\{J(i,j)\right\}_{(i,j)\in I\times I}\right)$ を与え，$\mathcal{I}$ 上の左 R 加群の図式

$$\mathcal{M} = \left(\left\{M_i\right\}_{i\in I},\ \left\{\left\{f_\varphi \colon M_i \to M_j\right\}_{\varphi\in J(i,j)}\right\}_{(i,j)\in I\times I}\right)$$

を考える．勝手な 2 頂点 $i, j \in I$ を固定し，i から j に向かう辺 $\varphi \in J(i, j)$ を一つとる．φ を引数にして**始**

点と終点を返す写像は

$$\begin{aligned} \mathrm{s}\colon J(i,\, j) &\longrightarrow I,\ \varphi \longmapsto \mathrm{s}(\varphi) \coloneqq i \\ \mathrm{t}\colon J(i,\, j) &\longrightarrow I,\ \varphi \longmapsto \mathrm{t}(\varphi) \coloneqq j \end{aligned}$$

のように定義される．また，$\mathcal{I}$ の辺全体の集合を

$$E \coloneqq \coprod_{(i,\, j)\in I\times I} J(i,\, j)$$

とおく．

ここで次の二つの加群の直和を考える：

$$X \coloneqq \bigoplus_{\varphi\in E} M_{\mathrm{s}(\varphi)}, \quad Y \coloneqq \bigoplus_{i\in I} M_i$$

いわば，X は「図式の矢印の始点となる全ての M_i を直和したもの」となっている．標準的包含を

$$\iota'_\varphi\colon M_{\mathrm{s}(\varphi)} \hookrightarrow X, \quad \iota''_i\colon M_i \hookrightarrow Y$$

と書く．X の添字集合は E なので標準的包含も辺 $\varphi\in E$ を成分の添字にもつ．直和の普遍性から $\forall\varphi\in E$ に対して次のような可換図式が書ける：

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\iota'_\varphi"] \arrow[dr, "\iota''_{\mathrm{s}(\varphi)}"'] & X \arrow[d, "\exists!f_{\mathrm{s}}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

(a) f_{s} の定義

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\iota'_\varphi"] \arrow[dr, "\iota''_{\mathrm{t}(\varphi)}\circ f_\varphi"'] & X \arrow[d, "\exists!f_{\mathrm{t}}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

(b) f_{t} の定義

一意に定まる準同型 $f_{\mathrm{s}},\, f_{\mathrm{t}}\colon X \longrightarrow Y$ は $\forall\bigl(x_\varphi\bigr)_{\varphi\in E} \in X$ に次のように作用する：

$$f_{\mathrm{s}}\bigl((x_\varphi)_{\varphi\in E}\bigr) = \sum_{\varphi\in E} \iota''_{\mathrm{s}(\varphi)}(x_\varphi), \quad f_{\mathrm{t}}\bigl((x_\varphi)_{\varphi\in E}\bigr) = \sum_{\varphi\in E} \iota''_{\mathrm{t}(\varphi)}(x_\varphi)$$

定義 A.11: 帰納極限

左 R 加群の図式 $\mathcal{M}$ の**帰納極限** (inductive limit) を次のように定義する：

$$\varinjlim_{i\in I} M_i \coloneqq \mathrm{Coker}(f_{\mathrm{t}} - f_{\mathrm{s}})$$

順極限と呼ぶこともある．また，$\forall i\in I$ に対して写像

$$\iota_i\colon M_i \longrightarrow \varinjlim_{i\in I} M_i,\ x \longmapsto (p\circ\iota''_i)(x)$$

を**標準的包含**と呼ぶ[a]．

[a] $p\colon Y \longrightarrow \varinjlim_{i\in I} M_i$ は標準的射影である．なお，ι_i はその名前に反して**単射とは限らない**．

$\forall i,\, j \in I$ をとり，$\forall x \in M_i,\, \forall \varphi \in J(i,\, j)$ を考える．このとき図式 A.8a, A.8b を参照すると，$\mathrm{s}(\varphi) = i,\, \mathrm{t}(\varphi) = j$ に注意して

$$\iota''_j\bigl(f_\varphi(x)\bigr) = f_{\mathrm{t}}\bigl(\iota'_\varphi(x)\bigr) = f_{\mathrm{s}}\bigl(\iota'_\varphi(x)\bigr) + (f_{\mathrm{t}} - f_{\mathrm{s}})\bigl(\iota'_\varphi(x)\bigr) = \iota''_i(x) + (f_{\mathrm{t}} - f_{\mathrm{s}})\bigl(\iota'_\varphi(x)\bigr)$$

とわかる．両辺に標準射影 $p\colon Y \longrightarrow \varinjlim_{i \in I} M_i = \mathrm{Coker}(f_{\mathrm{t}} - f_{\mathrm{s}})$ を作用させることで

$$\iota_j\bigl(f_\varphi(x)\bigr) = (p \circ \iota''_j)\bigl(f_\varphi(x)\bigr) = (p \circ \iota''_i)\bigl(x\bigr) = \iota_i(x)$$

i.e. $\iota_j \circ f_\varphi = \iota_i$ が成り立つ．

同様にして図式 $\mathcal{M}$ の射影極限が定義される．今度は**反対圏** $\mathcal{I}^{\mathrm{op}}$ 上の左 R 加群の図式

$$\mathcal{M}^{\mathrm{op}} = \Bigl(\bigl\{M_i\bigr\}_{i \in I},\, \Bigl\{\bigl\{f_\varphi\colon M_j \to M_i\bigr\}_{\varphi \in J(i,\, j)}\Bigr\}_{(i,\, j) \in I \times I}\Bigr)$$

を考える．

次の二つの加群の直積を考える：

$$X \coloneqq \prod_{i \in I} M_i, \quad Y \coloneqq \prod_{\varphi \in E} M_{\mathrm{s}(\varphi)}$$

X と Y で先程と添字集合が逆になっていることに注意．いわば，Y は「図式の矢印の始点となる全ての M_i を直積したもの」となっている．標準的射影を

$$p'_i\colon X \longrightarrow M_i, \quad p''_\varphi\colon Y \longrightarrow M_{\mathrm{s}(\varphi)}$$

と書く．直積の普遍性から $\forall \varphi \in E$ に対して次のような可換図式が書ける：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\exists! f_{\mathrm{s}}"] \arrow[dr, "p'_{\mathrm{s}(\varphi)}"'] & Y \arrow[d, "p''_\varphi"] \\ & M_i \end{tikzcd}$$

(a) f_{s} の定義

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\exists! f_{\mathrm{t}}"] \arrow[dr, "f_\varphi \circ p'_{\mathrm{t}(\varphi)}"'] & Y \arrow[d, "p''_\varphi"] \\ & M_i \end{tikzcd}$$

(b) f_{t} の定義

一意に定まる準同型 $f_{\mathrm{s}},\, f_{\mathrm{t}}\colon X \longrightarrow Y$ は $\forall \bigl(x_i\bigr)_{i \in I} \in X$ に次のように作用する：

$$f_{\mathrm{s}}\bigl((x_i)_{i \in I}\bigr) = \bigl(x_{\mathrm{s}(\varphi)}\bigr)_{\varphi \in E}, \quad f_{\mathrm{t}}\bigl((x_i)_{i \in I}\bigr) = \Bigl(f_\varphi\bigl(x_{\mathrm{t}(\varphi)}\bigr)\Bigr)_{\varphi \in E}$$

定義 A.12: 射影極限

左 R 加群の図式 $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$ の**射影極限** (projective limit) を次のように定義する：

$$\varprojlim_{i \in I} M_i \coloneqq \mathrm{Ker}(f_{\mathrm{t}} - f_{\mathrm{s}})$$

逆極限と呼ぶこともある．また，$\forall i \in I$ に対して写像

$$p_i\colon \varprojlim_{i \in I} M_i \longrightarrow M_i,\; x \longmapsto (p'_i \circ \iota)(x)$$

を**標準的射影**と呼ぶ[a]．

[a] $\iota\colon \varprojlim_{i \in I} M_i \longrightarrow X$ は標準的包含である．なお，p_i はその名前に反して**全射とは限らない**．

命題 A.6: 帰納極限・射影極限の普遍性

(帰納極限の普遍性) 記号は定義 A.11 の通りとする．任意の左 R 加群 N に対して，写像

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_R\left(\varinjlim_{i\in I} M_i,\, N\right) & \longrightarrow & \left\{ (g_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(M_i,\, N) \,\middle|\, \substack{\forall i,\, j\in I,\, \forall \varphi\in J(i,\, j),\\ g_j\circ f_\varphi = g_i} \right\} \\ \Cup & & \Cup \\ g & \longmapsto & \left\{ g\circ \iota_i \right\}_{i\in I} \end{array} \tag{A.3.1}$$

は well-defined な全単射である．i.e. 任意の左 R 加群 N，および任意の左 R 加群の準同型写像の族 $\left\{ g_i\colon M_i \to N \right\}_{i\in I}$ であって任意の 2 頂点 $i,\, j \in I$ と i から j へ向かう任意の辺 $\varphi \in J(i,\, j)$ に対して $g_j \circ f_\varphi = g_i$ を充たすものに対して，準同型写像 $g\colon \varinjlim_{i\in I} M_i \longrightarrow N$ であって

$$\forall i \in I,\ g\circ \iota_i = g_i$$

を充たすものが**一意的に**存在する（図式 A.10a）．

(射影極限の普遍性) 記号は定義 A.12 の通りとする．任意の左 R 加群 N に対して，写像

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_R\left(N,\, \varprojlim_{i\in I} M_i\right) & \longrightarrow & \left\{ (g_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(N,\, M_i) \,\middle|\, \substack{\forall i,\, j\in I,\, \forall \varphi\in J(i,\, j),\\ f_\varphi\circ g_j = g_i} \right\} \\ \Cup & & \Cup \\ g & \longmapsto & \left\{ p_i\circ g \right\}_{i\in I} \end{array}$$

は well-defined な全単射である．i.e. 任意の左 R 加群 N，および任意の左 R 加群の準同型写像の族 $\left\{ g_i\colon N \to M_i \right\}_{i\in I}$ であって任意の 2 頂点 $i,\, j \in I$ と i から j へ向かう任意の辺 $\varphi \in J(i,\, j)$ に対して $f_\varphi \circ g_j = g_i$ を充たすものに対して，準同型写像 $g\colon N \longrightarrow \varprojlim_{i\in I} M_i$ であって

$$\forall i \in I,\ p_i\circ g = g_i$$

を充たすものが**一意的に**存在する（図式 A.10b）．

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[d, "f_\varphi"'] \arrow[dr, "g_i"] & \varinjlim_{i\in I} M_i \arrow[d, dashed, "\exists! g"] \\ M_j \arrow[ur, "\iota_j"] \arrow[r, "g_j"'] & \forall N \end{tikzcd}$$

(a) 帰納極限の普遍性

$$\begin{tikzcd} \forall N \arrow[r, "g_j"] \arrow[d, dashed, "\exists! g"'] \arrow[dr, "g_i"] & M_j \arrow[d, "f_\varphi"] \\ \varprojlim_{i\in I} M_i \arrow[ur, "p_j"] \arrow[r, "p_i"'] & M_i \end{tikzcd}$$

(b) 射影極限の普遍性

証明 (1) 図式 A.8a, A.8b より

$$\iota''_{\mathrm{s}(\varphi)} = f_{\mathrm{s}} \circ \iota'_\varphi, \quad \iota''_{\mathrm{t}(\varphi)} = f_{\mathrm{t}} \circ \iota'_\varphi \tag{A.3.2}$$

が成り立つ．

余核の普遍性から次のような可換図式が書ける：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_{\mathrm{t}} - f_{\mathrm{s}}"] \arrow[rrd, "0"'] & Y \arrow[r, "p"] \arrow[rd, "g"] & \varinjlim_{i \in I} M_i \arrow[d, dashed, "\exists! h"] \\ & & \forall N \end{tikzcd}$$

i.e. 写像

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R\left(\varinjlim_{i \in I} M_i,\, N\right) &\longrightarrow \left\{\, g \in \mathrm{Hom}_R(Y,\, N) \;\middle|\; g \circ f_{\mathrm{t}} = g \circ f_{\mathrm{s}} \,\right\} \\ h &\longmapsto g \circ p \end{aligned}$$

は全単射である．さらに直和の普遍性より，

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\iota''_i"] \arrow[rd, "g_i"'] & Y \arrow[d, dashed, "\exists! g"] \\ & \forall N \end{tikzcd}$$

もわかる．このとき式 (A.3.2) より

$$\begin{aligned} & g \circ f_{\mathrm{t}} = g \circ f_{\mathrm{s}} \iff \forall \varphi \in E,\ g \circ f_{\mathrm{t}} \circ \iota'_{\varphi} = g \circ f_{\mathrm{s}} \circ \iota'_{\varphi} \\ \iff & \forall \varphi \in E,\ g_{\mathrm{s}(\varphi)} = g \circ \iota\iota''_{\mathrm{s}(\varphi)} = \left(g \circ \iota''_{\mathrm{t}(\varphi)}\right) \circ f_{\varphi} \end{aligned}$$

が成り立つことから，写像

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R\left(\varinjlim_{i \in I} M_i,\, N\right) &\longrightarrow \left\{\, (g_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_R(M_i,\, N) \;\middle|\; \forall \varphi \in E,\ g_{\mathrm{s}(\varphi)} = g_{\mathrm{t}(\varphi)} \circ f_{\varphi} \,\right\} \\ h &\longmapsto \left\{\, h \circ p \circ \iota_i \,\right\}_{i \in I} \end{aligned}$$

が全単射であることがわかる．

(2) 図式 A.9a, A.9b より

$$p''_{\varphi} \circ f_{\mathrm{s}} = p'_{\mathrm{s}(\varphi)}, \quad p''_{\varphi} \circ f_{\mathrm{t}} = p'_{\mathrm{t}(\varphi)}$$

が成り立つ．核の普遍性および直積の普遍性より，写像

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_R\left(N,\, \varprojlim_{i \in I} M_i\right) & \longrightarrow & \left\{\, (g_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_R(N,\, M_i) \;\middle|\; \forall \varphi \in E,\ f_{\varphi} \circ g_{\mathrm{t}(\varphi)} = g_{\mathrm{s}(\varphi)} \,\right\} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ h & \longmapsto & \left\{\, p'_i \circ \iota \circ h \,\right\}_{i \in I} \end{array}$$

は全単射である．

■

図式がフィルタードな圏 $\mathcal{I}$ 上のものである場合，帰納極限は別の表示を持つ：

命題 A.7: フィルタードな圏上の帰納極限

$\mathcal{I} = \left(I,\, \{J(i,\, j)\}_{(i,\, j) \in I \times I}\right)$ をフィルタードな圏,

$$\mathcal{M} = \left(\{M_i\}_{i \in I},\, \left\{\{f_\varphi \colon M_i \to M_j\}_{\varphi \in J(i,\, j)}\right\}_{(i,\, j) \in I \times I}\right)$$

を $\mathcal{I}$ 上の左 R 加群の図式とする.

(1) disjoint union $\coprod_{i \in I} M_i$ において

$$\sim := \left\{\, (x,\, x') \in \coprod_{i \in I} M_i \times \coprod_{i \in I} M_i \;\middle|\; {}^{x \in M_i,\, x' \in M_{i'}}_{\varphi \in J(i,\, j),\, \varphi' \in J(i',\, j),} \;\overset{\Longrightarrow}{}\; {}^{\exists j \in I,}_{f_\varphi(x) = f_{\varphi'}(x')} \right\}$$

と定義した二項関係 $\sim$ は同値関係である.

(2) 商集合

$$\coprod_{i \in I} M_i \Big/ \sim$$

における $x \in \coprod_{i \in I} M_i$ の同値類を $[x]$ と書くことにする. $x \in M_i$, $x' \in M_{i'}$ ならば, 頂点 $j \in I$ であって $J(i,\, j) \neq \emptyset$, $J(i',\, j) \neq \emptyset$ を充たすものをとり[a], 辺 $\varphi \in J(i,\, j)$, $\varphi' \in J(i',\, j)$ をとってくる.

上述の準備の後, 商集合 $\coprod_{i \in I} M_i \Big/ \sim$ 上の加法と左乗法を次のように定義すると, これらは well-defined な写像になる：

$$\begin{aligned} [x] + [x'] &:= [f_\varphi(x) + f_{\varphi'}(x')] \\ a[x] &:= [ax] \end{aligned}$$

さらに, 組

$$\left(\coprod_{i \in I} M_i \Big/ \sim,\, +,\, \cdot\right)$$

は左 R 加群となる. **特に**

$$\boldsymbol{\varinjlim_{i \in I} M_i \cong \coprod_{i \in I} M_i \Big/ \sim}$$

である.

[a] フィルタードな圏の定義より, このような j は少なくとも一つ存在する.

__証明__ (1) 反射律と対称律は自明なので, 推移律のみ示す. $x \in M_i$, $x' \in M_{i'}$, $x'' \in M_{i''}$, $x \sim x'$ かつ $x' \sim x''$ とすると

$$\begin{aligned} &\exists j \in I,\, \varphi \in J(i,\, j),\, \varphi' \in J(i',\, j),\; f_\varphi(x) = f_{\varphi'}(x'), \\ &\exists j' \in I,\, \psi \in J(i',\, j'),\, \psi' \in J(i'',\, j'),\; f_{\varphi'}(x) = f_{\varphi''}(x'') \end{aligned}$$

が成り立つ. $\mathcal{I}$ がフィルタードであることから, ある $k \in I$ が存在して $\exists \mu \in J(j,\, k)$, $\exists \mu' \in J(j',\, k)$

を充たす．その上 $\mu\circ\varphi',\ \mu'\circ\psi' \in J(i',\, j)$ に対して $\exists k' \in I,\ \exists \nu \in J(k,\, k'),\ \nu\circ(\mu\circ\varphi') = \nu\circ(\mu'\circ\psi')$ が成立するから，$k = k',\ \mu = \nu\circ\mu,\ \mu' = \nu\circ\mu'$ と取り替えることができる．このとき

$$\begin{aligned} f_{\mu\circ\varphi}(x) f_{\mu}\circ f_{\varphi}(x) &= f_{\mu}\circ f_{\varphi'}(x') = f_{\mu\circ\varphi'}(x') = f_{\mu'\circ\psi'}(x') \\ &= f_{\mu'\circ\psi'}(x') = f_{\mu'\circ\psi''}(x'') = f_{\mu'\circ\psi''}(x'') \end{aligned}$$

i.e. $x \sim x''$ である．

(2) **well-definedness**

同型であること

■

A.4 帰納極限と射影極限の性質

帰納極限・射影極限は，様々な部分加群を内包する概念である．

補題 A.3:

有向グラフ $\mathcal{I} = \bigl(I,\, \{J(i,\, j)\}_{(i,\, j)\in I\times I}\bigr)$ が $\forall i,\, j \in I$ に対して $J(i,\, j) = \emptyset$ であるとき，$\mathcal{I}$ 上の左 R 加群の図式

$$\mathcal{M} = \Bigl(\{M_i\}_{i\in I},\ \Bigl\{\{f_{\varphi}\colon M_i \to M_j\}_{\varphi\in J(i,\, j)}\Bigr\}_{(i,\, j)\in I\times I}\Bigr)$$

に対して

$$\begin{aligned} \varinjlim_{i\in I} M_i &= \bigoplus_{i\in I} M_i, \\ \varprojlim_{i\in I} M_i &= \prod_{i\in I} M_i \end{aligned}$$

が成り立つ．

補題 A.4:

有向グラフ $\mathcal{I} = \bigl(I,\, \{J(i,\, j)\}_{(i,\, j)\in I\times I}\bigr)$ として

$$I = \{1,\, 2\}, \quad J(i,\, j) = \begin{cases} \{1,\, 2\}, & (i,\ j) = (1,\, 2) \\ \emptyset, & \text{otherwise} \end{cases}$$

を与える．$\mathcal{I}$ 上の左 R 加群の図式 $\mathcal{M},\, \mathcal{M}^{\mathrm{op}}$ に対して，それぞれ

$$\begin{aligned} \varinjlim_{i\in I} M_i &= \operatorname{Coker}(f_1 - f_2), \\ \varprojlim_{i\in I} M_i &= \operatorname{Ker}(f_1 - f_2) \end{aligned}$$

が成り立つ．

命題 A.6 を観察すると，次の重大な結果が得られる：

N を左 R 加群とする．有向グラフまたは圏 $\mathcal{I} = \left(I,\, \left\{J(i,\, j)\right\}_{(i,\, j) \in I \times I}\right)$ を与え，$\mathcal{I}$ 上の左 R 加群の図式

$$\mathcal{M} = \left(\left\{M_i\right\}_{i \in I},\, \left\{\left\{f_\varphi \colon M_i \to M_j\right\}_{\varphi \in J(i,\, j)}\right\}_{(i,\, j) \in I \times I}\right)$$

に対応して $\mathcal{I}^{\mathrm{op}}$ 上の $\mathbb{Z}$ 加群の図式

$$\left(\left\{\mathrm{Hom}_R\left(M_i,\, N\right)\right\}_{i \in I},\, \left\{\left\{f_\varphi^*\right\}_{\varphi \in J(i,\, j)}\right\}_{(i,\, j) \in I \times I}\right)$$

を考えよう．ただし，$\varphi \in J(i,\, j)$ に対して

$$f_\varphi^* \colon \mathrm{Hom}_R\left(M_j,\, N\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\left(M_i,\, N\right),\ h \longmapsto h \circ f_\varphi$$

とする．このとき式 (A.3.1) の右辺を少し書き換えると

$$\left\{\left(g_i\right)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_R\left(M_i,\, N\right) \,\middle|\, \forall \varphi \in E,\ f_\varphi^*\left(g_{\mathrm{t}(\varphi)}\right) = g_{\mathrm{s}(\varphi)}\right\}$$

となるが，図式 A.9a, A.9b に照らし合わせるとこれは $\mathrm{Ker}({f^*}_{\mathrm{t}} - {f^*}_{\mathrm{s}})$ に等しいことがわかる．

同様に $\mathcal{I}^{\mathrm{op}}$ 上の左 R 加群の図式

$$\mathcal{M}^{\mathrm{op}} = \left(\left\{M_i\right\}_{i \in I},\, \left\{\left\{f_\varphi \colon M_j \to M_i\right\}_{\varphi \in J(i,\, j)}\right\}_{(i,\, j) \in I \times I}\right)$$

に対応して $\mathcal{I}$ 上の $\mathbb{Z}$ 加群の図式

$$\left(\left\{\mathrm{Hom}_R\left(N,\, M_i\right)\right\}_{i \in I},\, \left\{\left\{f_\varphi^*\right\}_{\varphi \in J(i,\, j)}\right\}_{(i,\, j) \in I \times I}\right)$$

を考える．ただし，$\varphi \in J(i,\, j)$ に対して

$$f_{\varphi *} \colon \mathrm{Hom}_R\left(N,\, M_i\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\left(N,\, M_j\right),\ h \longmapsto f_\varphi \circ h$$

とする．このとき式 (A.3.1) の右辺を少し書き換えると

$$\left\{\left(g_i\right)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_R\left(N,\, M_i\right) \,\middle|\, \forall \varphi \in E,\ f_{\varphi *}\left(g_{\mathrm{t}(\varphi)}\right) = g_{\mathrm{s}(\varphi)}\right\}$$

となるが，図式 A.8a, A.8b に照らし合わせるとこれは $\mathrm{Ker}(f_{*\mathrm{t}} - f_{*\mathrm{s}})$ に等しいことがわかる．

以上の考察と命題 A.6 の主張から次のことがわかった：

命題 A.8: Hom と帰納・射影極限の交換

自然な $\mathbb{Z}$ 加群の同型

$$\mathrm{Hom}_R\left(\varinjlim_{i \in I} M_i,\, N\right) \cong \varprojlim_{i \in I} \mathrm{Hom}_R\left(M_i,\, N\right)$$
$$\mathrm{Hom}_R\left(N,\, \varprojlim_{i \in I} M_i\right) \cong \varprojlim_{i \in I} \mathrm{Hom}_R\left(N,\, M_i\right)$$

が成り立つ．

命題 A.8 から即座に Hom_R の左右の完全性が従う：

系 A.4: Hom_R の右・左完全性（再掲）

(1) $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$ を左 R 加群の完全列，N を左 R 加群とすると，$\mathbb{Z}$ 加群[a]の完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N,\, M_1) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(N,\, M_2) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(N,\, M_3)$$

が成り立つ．

(2) $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$ を左 R 加群の完全列，N を左 R 加群とすると，$\mathbb{Z}$ 加群の完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M_3,\, N) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(M_2,\, N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(M_3,\, N)$$

が成り立つ．

(3) $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$ を**分裂する**左 R 加群の完全列，N を左 R 加群とすると，$\mathbb{Z}$ 加群の完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N,\, M_1) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(N,\, M_2) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(N,\, M_3) \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M_3,\, N) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(M_2,\, N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(M_1,\, N) \longrightarrow 0$$

が成り立つ．

[a] i.e. 和について可換群

<u>**証明**</u> (1) 命題 A.1 より $M_1 \cong \mathrm{Ker}\, g$ である．命題 A.8 および Ker が射影極限であることから

$$\mathrm{Hom}_R(N,\, M_1) \cong \mathrm{Hom}_R(N,\, \mathrm{Ker}\, g) \cong \mathrm{Ker}\, g_*$$

が従うので，命題 A.1 より $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N,\, M_1) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(N,\, M_2) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(N,\, M_3)$ は完全列である．

(2) 命題 A.1 より $M_3 \cong \mathrm{Coker}\, f$ である．命題 A.8 および Coker が帰納極限であることから

$$\mathrm{Hom}_R(M_3,\, N) \cong \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Coker}\, f,\, N) \cong \mathrm{Ker}\, f^*$$

が従うので，命題 A.1 より $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M_3,\, N) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(M_2,\, N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(M_3,\, N)$ は完全列である．

(3) (1), (2) より従う．以前にも示したので略．

■

帰納極限とテンソル積も可換である．この事実からテンソル積の左完全性が従う．

命題 A.9: 帰納極限とテンソル積の交換

R を環，$\mathcal{I} = \left(I,\, \{J(i,\, j)\}_{(i,\, j) \in I \times I}\right)$ を有向グラフまたは圏とする．$\mathcal{I}$ 上の**右** R 加群の図式

$$\mathcal{M} = \left(\{M_i\}_{i \in I},\, \left\{\{f_\varphi\colon M_i \to M_j\}_{\varphi \in J(i,\, j)}\right\}_{(i,\, j) \in I \times I}\right)$$

および**左** R 加群 N に対して，自然な $\mathbb{Z}$ 加群の同型

$$\varinjlim_{i \in I}\left(M_i \otimes_R N\right) \cong \left(\varinjlim_{i \in I} M_i\right) \otimes_R N$$

が成り立つ．

<u>**証明**</u> 帰納極限の標準的包含 $\iota_i\colon M_i \longrightarrow \varinjlim_{i \in I} M_i$ に対して

$$\iota_i \otimes 1_N\colon M_i \otimes_R \longrightarrow \left(\varinjlim_{i \in I} M_i\right) \otimes_R N$$

は $i \in I$ で添字付けられた $\mathbb{Z}$ 加群の準同型の族であり，かつ $\forall i,\, j \in I,\, \forall \varphi \in J(i,\, j)$ に対して

$$(\iota_j \otimes_R 1_N) \circ (f_\varphi \otimes_R 1_N) = \iota_i \otimes_R 1_N$$

を充たす．故に帰納極限の普遍性により

$$\Phi\colon \varinjlim_{i \in I}\left(M_i \otimes_R N\right) \longrightarrow \left(\varinjlim_{i \in I} M_i\right) \otimes_R N$$

であって $\forall i \in I,\, \forall m \in M_i,\, \forall n \in N$ に対して

$$\Phi\left((\iota_i \otimes 1_N)(m \otimes n)\right) = \iota_i(m) \otimes n$$

を充たすものが一意的に存在する．

一方，写像

$$\phi\colon \left(\varinjlim_{i \in I} M_i\right) \times N \longrightarrow \varinjlim_{i \in I}\left(M_i \otimes_R N\right),\ \left(\iota_i(m),\, n\right) \longmapsto (\iota_i \otimes 1_N)(m \otimes n)$$

はバランス写像になる．故にテンソル積の普遍性からこれは

$$\Psi\colon \left(\varinjlim_{i \in I} M_i\right) \otimes_R N \longrightarrow \varinjlim_{i \in I}\left(M_i \otimes_R N\right)$$

であって，$\forall i \in I,\, \forall m \in M_i,\, \forall n \in N$ に対して

$$\Psi\left(\iota_i(m) \otimes n\right) = (\iota_i \otimes 1_N)(m \otimes n)$$

を充たすものが一意に定まる．従って

$$\Psi\left(\Phi((\iota_i \otimes 1_N)(m \otimes n))\right) = (\iota_i \otimes 1_N)(m \otimes n),$$
$$\Phi\left(\Psi(\iota_i(m) \otimes n)\right) = \iota_i(m) \otimes n,$$

が成り立つが，テンソル積の定義から $(\iota_i \otimes 1_N)(m \otimes n)$ の形の元は $\varinjlim_{i\in I}\bigl(M_i \otimes_R N\bigr)$ を，$\iota_i(m) \otimes n$ の形の元は $\bigl(\varinjlim_{i\in I} M_i\bigr) \otimes_R N$ を生成するので

$$\Psi \circ \Phi = 1, \quad \Phi \circ \Psi = 1$$

i.e. Ψ, Φ が同型写像であることがわかった． ■

系 A.5: テンソル積の右完全性

(1) 任意の**右** R 加群の完全列

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

および任意の**左** R 加群 N を与える．このとき図式

$$M_1 \otimes_R N \xrightarrow{f\otimes 1_N} M_2 \otimes_R N \xrightarrow{g\otimes 1_N} M_3 \otimes_R N \longrightarrow 0$$

は完全列である．

(2) 分裂する任意の**右** R 加群の完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

および任意の**左** R 加群 N を与える．このとき図式

$$0 \longrightarrow M_1 \otimes_R N \xrightarrow{f\otimes 1_N} M_2 \otimes_R N \xrightarrow{g\otimes 1_N} M_3 \otimes_R N \longrightarrow 0$$

は完全列である．

証明 (1) 命題 A.1 から $M_3 \cong \mathrm{Coker}\, f$ である．Coker が帰納極限であることと命題 A.9 より

$$M_3 \otimes_R N \cong (\mathrm{Coker}\, f) \otimes_R N \cong \mathrm{Coker}\bigl(f \otimes 1_N\bigr)$$

が言え，命題 A.1 から題意が示された．

(2) 仮定より，準同型写像 $t\colon M_2 \longrightarrow M_1$ であって $t \circ f = 1_{M_1}$ を充たすものが取れる．このとき

$$(t \otimes 1_N) \circ (f \otimes 1_N) = 1_{M_1 \otimes_R N}$$

だから $f \otimes 1_N$ は単射である．$f \otimes 1_N$ の単射性以外は (1) から従う．

■

付録 B

アーベル圏

B.1　諸定義

定義 B.1: アーベル圏

圏 $\mathcal{A}$ が**アーベル圏** (Abelian category) であるとは，以下を充たすことをいう：

(Ab1)　零対象 $0 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$.

(Ab2)　$\forall A_1,\, A_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ に対して積 $A_1 \times A_2$ と和 $A_1 \amalg A_2$ が存在する．

(Ab3)　$\mathcal{A}$ における任意の射は核，余核を持つ．

(Ab4)　$\mathcal{A}$ における任意の単射はある射の核であり，任意の全射はある射の余核である．

定義 B.2: アーベル圏における完全列

- アーベル圏 $\mathcal{A}$ における図式

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

が**完全** (exact) であるとは，B の部分対象として $(\mathrm{Ker}\, g,\, \ker g) \simeq (\mathrm{Im}\, f,\, \mathrm{im}\, f)$ であることを言う．

- $\mathcal{A}$ における図式

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$$

が**完全**であるとは，$\forall i$ に対して図式 $A_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+2}$ が完全であること．

定義 B.3: アーベル圏の間の関手

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ をアーベル圏，F を $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への関手とする．

- F が**加法的** (additive) であるとは，$\forall A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ に対して $F_{A,B} \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(F(A), F(B))$ が可換群の準同型写像となることを言う．
- F が**左完全** (left exact) であるとは，$\mathcal{A}$ における
$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C$$
の形をした任意の完全列に対して
$$0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C)$$
が $\mathcal{B}$ における完全列となることを言う．
- F が**右完全** (right exact) であるとは，$\mathcal{A}$ における
$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$
の形をした任意の完全列に対して
$$F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0$$
が $\mathcal{B}$ における完全列となることを言う．
- F が**完全** (exact) であるとは，任意の $\mathcal{A}$ における完全列
$$A \longrightarrow B \longrightarrow C$$
に対して
$$F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C)$$
が $\mathcal{B}$ における完全列となることを言う．

B.2 埋め込み定理

証明を省いて Mitchell の埋め込み定理を紹介する．

定理 B.1: Mitchell の埋め込み定理

$\mathcal{A}$ を小さなアーベル圏とするとき，ある環 R とある完全忠実充満関手 $\mathcal{A} \longrightarrow R\text{-}\mathbf{Mod}$ が存在する．