第 4 章

微分形式

4.1 外積代数

定義 4.1: 外積代数

V を体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．このとき**外積代数** (exterior algebra) $\left(\bigwedge^\bullet(V),\,+,\,\wedge\right)$ は，以下のように定義される $\mathbb{K}$ 上の多元環（定義??）である：

(1) $\mathbb{K}$ 上 V の元によって生成される
(2) 単位元 1 を持つ
(3) 任意の $x,\,y \in V$ に対して以下の関係式が成り立つ：

$$x \wedge y = -y \wedge x$$

$\forall x \in V$ の次数を 1 とおくことで，$\bigwedge^\bullet(V)$ の単項式の次数が定義される．次数が k の単項式の $\mathbb{K}$ 係数線型結合全体の集合を $\bigwedge^k(V)$ と書くと，直和分解

$$\bigwedge\nolimits^\bullet(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigwedge\nolimits^k(V)$$

が成立する．

! $\bigwedge^0(V) = \mathbb{K}$ と約束する．また，自然に $\bigwedge^1(V) \cong V$ である．

$\dim V = n < \infty$ とする．$\{\,e_i\,\}$ を V の基底とすると，$\bigwedge^k(V)$ の基底は $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$ の形をした単項式のうち，互いに線形独立なものである．定義 4.1-(3) より，添字の組 $(i_1,\,\ldots,\,i_k)$ の中に互いに等しいものがあると 0 になり，また，添字の順番を並べ替えただけの項は線形独立にならない．以上の考察から，次のようになる：

定義 4.2: 外積代数の基底

$\bigwedge^k(V)$ の基底として

$$\left\{ e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \;\middle|\; 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n \right\}$$

をとることができる．このとき $\dim \bigwedge^k(V) = \binom{n}{k}$ である．

二項定理から，$\dim \bigwedge^\bullet(V) = 2^n$ である．また，$k > n$ のとき $\bigwedge^k(V) = \{0\}$ である．

4.2 交代形式

定義 4.3: 交代形式

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．$(0, r)$ 型テンソル $\omega \in \mathcal{T}_r^0(V)$ であって，任意の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ に対して

$$\omega\bigl[X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(r)}\bigr] = \operatorname{sgn}\sigma\, \omega\bigl[X_1, \ldots, X_r\bigr], \quad X_i \in V$$

となるものを V 上の r 次の**交代形式**と呼ぶ．

V 上の r 次の交代形式全体の集合を $A^r(V)$ と書く．$A^r(V)$ はテンソル空間 $\mathcal{T}_r^0(V)$ の部分ベクトル空間である．次数の異なる交代形式全体

$$A^\bullet(V) \coloneqq \bigoplus_{r=0}^{\infty} A^r(V)$$

を考える．ただし $A^0(V) = \mathbb{K}$ と定義する．交代性より $k > n$ のとき $A^k(V) = \{0\}$ になる．

定理 4.1: 外積代数と交代形式の同型

写像 $\iota\colon \bigwedge^\bullet(V^*) \to A^\bullet(V)$ を以下のように定義する：
まず，写像 $\iota_k\colon \bigwedge^k(V^*) \to A^k(V)$ の $\omega = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \in \bigwedge^k(V^*)$ $(\alpha_i \in V^*)$ への作用を

$$\iota_k(\omega)[X_1, \ldots, X_k] \coloneqq \det\bigl(\alpha_i[X_j]\bigr)$$

と定義する．$\forall \omega \in \bigwedge^\bullet(V)^*$ に対する ι の作用は ι_k の作用を線形に拡張する．
このとき，ι は同型写像である．

証明 各 ι_k が同型写像であることを示せば良い[*1]．V の基底 $\{e_i\}$ と V^* の基底 $\{e^i\}$ は $e^i[e_j] = \delta^i_j$ を充しているものとする．このとき $\bigwedge^k(V^*)$ の基底を

$$\left\{ e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k} \;\middle|\; 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n \right\}$$

にとれる．$\left\{ \iota_k\bigl(e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}\bigr) \;\middle|\; 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n \right\} \subset A^k(V)$ が $A^k(V)$ の基底を成すことを示す．

[*1] 添字がややこしいのでこの証明では Einstein の規約を用いない．

ある $\lambda_{i_1\dots i_k} \in \mathbb{K}$ に対して

$$\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} \lambda_{i_1\dots i_k}\iota_k\bigl(e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_k}\bigr) = 0 \in A^k(V)$$

ならば,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} \lambda_{i_1\dots i_k}\iota_k\bigl(e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_k}\bigr)[e_{j_1}, \dots, e_{j_k}] \\ &= \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} \lambda_{i_1\dots i_k} \det\bigl(e^{i_l}[e_{j_m}]\bigr) \\ &= \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} \lambda_{i_1\dots i_k} \det\bigl(\delta^{i_l}_{j_m}\bigr) \\ &= \lambda_{j_1\dots j_k} \end{aligned}$$

なので線形独立である.

次に $\forall \omega \in A^k(V)$ を一つとる．このとき $\omega_{i_1\dots i_k} := \omega[e_{i_1}, \dots, e_{i_k}]$ とおいて

$$\tilde{\omega} := \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} \omega_{i_1\dots i_k} e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_k} \in \bigwedge^k(V^*)$$

と定義すると

$$\iota_k(\tilde{\omega}) = \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} \omega_{i_1\dots i_k}\iota_k\bigl(e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_k}\bigr) = \omega$$

なので ι_k は全射である．従って $\iota_k\colon \bigwedge^\bullet(V^*) \xrightarrow{\cong} A^k(V)$ である． ■

! 定理 4.1 において構成した ι_k は，定数倍しても同型写像を与える．文献によっては $1/k!$ 倍されていたりするので注意．$1/k!$ 倍する定義は，特性類の一般論の記述に便利である．

系 4.2: 交代形式の外積

$\tilde{\omega} \in \bigwedge^k(V^*)$, $\tilde{\eta} \in \bigwedge^l(V^*)$ を与える．同型写像 $\iota\colon \bigwedge^\bullet(V^*) \xrightarrow{\cong} A^\bullet(V)$ による対応を

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &\mapsto \omega := \iota(\tilde{\omega}), \\ \tilde{\eta} &\mapsto \omega := \iota(\tilde{\eta}), \\ \tilde{\omega}\wedge\tilde{\eta} &\mapsto \omega\wedge\eta := \iota(\tilde{\omega}\wedge\tilde{\eta}) \end{aligned}$$

とおくと，$A^\bullet(V)$ 上の**外積** (exterior product) $\wedge\colon A^k(V)\times A^l(V) \to A^{k+l}(V)$ が次のようにして定まる：

$$\begin{aligned} &(\omega\wedge\eta)[X_1, \dots, X_{k+l}] \\ &= \frac{1}{k!\,l!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{k+l}} \operatorname{sgn}\sigma\,\omega[X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}]\,\eta[X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+l)}] \end{aligned}$$

ただし，$X_i \in V$ は任意とする．

証明 ι_k の線形性から,

$$\tilde{\omega} = e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_k}, \quad \tilde{\eta} = e^{j_1}\wedge\cdots\wedge e^{j_l}$$

について示せば十分．また，$\bigwedge^\bullet(V^*)$ 上の二項演算 $\wedge$ の交代性から添字 $i_1,\dots,i_k,\ j_1,\dots,j_l$ は全て異なるとしてよい．

ここで，左辺を計算するために次のような置換 $\tau\in\mathfrak{S}_{k+l}$ を考える：

$$\tau := \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_k & j_1 & \dots & j_l \\ m_1 & \dots & m_k & m_{k+1} & \dots & m_{k+l} \end{pmatrix}, \quad m_1 < m_2 < \dots < m_{k+l}.$$

このとき

$$\tilde{\omega}\wedge\tilde{\eta} = \operatorname{sgn}\tau e^{m_1}\wedge\dots\wedge e^{m_{k+l}}$$

である．したがって

$$(\omega\wedge\eta)[e_{m_1},\dots,e_{m_{k+l}}] = \operatorname{sgn}\tau\,\iota_{k+l}(e^{m_1}\wedge\dots\wedge e^{m_{k+l}})[e_{m_1},\dots,e_{m_{k+l}}] = \boxed{\operatorname{sgn}\tau}.$$

次に，右辺を計算する．

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{k+l}} \operatorname{sgn}\sigma\omega[e_{\sigma(m_1)},\dots,e_{\sigma(m_k)}]\,\eta[e_{\sigma(m_{k+1})},\dots,e_{\sigma(m_{k+l})}] \\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{k+l}} \operatorname{sgn}\sigma\iota_k(e^{i_1}\wedge\dots\wedge e^{i_k})[e_{\sigma\tau(i_1)},\dots,e_{\sigma\tau(i_k)}]\,\iota_l(e^{j_1}\wedge\dots\wedge e^{j_l})\eta[e_{\sigma\tau(j_1)},\dots,e_{\sigma\tau(j_l)}]
\end{aligned} \tag{4.2.1}$$

式 (4.2.1) の和において，$\exists\rho\in\mathfrak{S}_k$，$\exists\pi\in\mathfrak{S}_l$，$\sigma\tau(i_1\cdots i_k)=\rho(i_1\cdots i_k)$, $\sigma\tau(j_1\cdots j_l)=\pi(j_1\cdots j_l)$ を充たすような $\sigma\in\mathfrak{S}_{k+l}$ の項のみが非ゼロである．そのような σ に対して $\sigma\tau=\rho\pi$，$\rho\pi(i_1\cdots i_k)=\rho(i_1\cdots i_k)$，$\rho\pi(j_1\cdots j_l)=\pi(j_1\cdots j_l)$ と書けるから

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{k+l}} \operatorname{sgn}\sigma\iota_k(e^{i_1}\wedge\dots\wedge e^{i_k})[e_{\sigma\tau(i_1)},\dots,e_{\sigma\tau(i_k)}]\,\iota_l(e^{j_1}\wedge\dots\wedge e^{j_l})\eta[e_{\sigma\tau(j_1)},\dots,e_{\sigma\tau(j_l)}] \\
&= \sum_{\rho\in\mathfrak{S}_k}\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_l} \operatorname{sgn}\sigma\iota_k(e^{i_1}\wedge\dots\wedge e^{i_k})[e_{\rho(i_1)},\dots,e_{\rho(i_k)}]\,\iota_l(e^{j_1}\wedge\dots\wedge e^{j_l})\eta[e_{\pi(j_1)},\dots,e_{\pi(j_l)}] \\
&= \sum_{\rho\in\mathfrak{S}_k}\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_l} \operatorname{sgn}\sigma\operatorname{sgn}\rho\operatorname{sgn}\pi \\
&= \sum_{\rho\in\mathfrak{S}_k}\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_l} \operatorname{sgn}\sigma\operatorname{sgn}\rho\pi \\
&= \boxed{k!\,l!\operatorname{sgn}\tau}.
\end{aligned}$$

となる．よって示された． ■

4.3 C^∞ 多様体上の微分形式

前節の結果を用いて，局所座標に依存しない微分形式の定義を与えることができる．

定義 4.4: 微分形式

M を C^∞ 多様体とする．ω が M 上の **k-形式** (k-form) であるとは，各点 $p \in M$ において $\omega_p \in \bigwedge^k (T_p^* M)$ を対応させ，ω_p が p に関して C^∞ 級である，i.e.

$$\omega_p = \omega_{i_1 \cdots i_k}(p) \, (\mathrm{d}x^{i_1})_p \wedge \cdots \wedge (\mathrm{d}x^{i_k})_p$$

の各係数 $\omega_{i_1 \cdots i_k}(p)$ が C^∞ 関数であることを言う．

ベクトル束の言葉を使うと，

$$\Omega^k(M) = \bigcup_{p \in M} \bigwedge^k (T_p^* M) \text{ の } C^\infty \text{ 級の切断の全体}$$

となる．

もう一つの解釈は，交代形式の定義 4.3 を前面に押し出す方法である．この解釈では多元環 $C^\infty(M)$ 上の $(0, r)$-階テンソル場（定義??）としての側面が明らかになる：

定理 4.3: k 形式の同型

M を C^∞ 多様体とする．M 上の k-形式全体の集合 $\Omega^k(M)$ は，

$$\begin{aligned}&\big\{\, \tilde{\omega} \colon \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M) \\ &\;\big|\; \tilde{\omega} \text{ は } C^\infty(M) \text{ -加群として多重線型かつ交代的} \,\big\}\end{aligned}$$

と自然に同型である．

<u>**証明**</u> $C^\infty(M)$-加群として多重線型かつ交代的であるような写像 $\tilde{\omega} \colon \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ が与えられたとする．まず $\forall X_i \in \mathfrak{X}(M)$ に対して，$\tilde{\omega}\big(X_1, \ldots, X_k\big) \in C^\infty(M)$ の点 $p \in M$ における値が，各 X_i の点 p における値 $X_i\big|_p \in T_p M$ のみによって定まることを確認する．$\tilde{\omega}$ の線形性から $\tilde{\omega}\big(X_1, \ldots, X_i - Y_i, \ldots, X_k\big) = \tilde{\omega}\big(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_k\big) - \tilde{\omega}\big(X_1, \ldots, Y_i, \ldots, X_k\big)$ なので，ある i について $X_i\big|_p = 0$（0 写像）ならば $\tilde{\omega}\big(X_1, \ldots, X_k\big)(p) = 0$（実数）であることを確認すれば良い．$i = 1$ としても一般性を失わない．$(U;\, x^\mu)$ を p の周りのチャートとする．このとき U 上では $X^\mu \in C^\infty(U)$ を用いて

$$X_1 = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad X^\mu(p) = 0 \tag{4.3.1}$$

と書ける．ここで X_1 の座標表示 (4.3.1) の定義域を補題??を用いて M 全域に拡張することを考える．そのために $\overline{V} \subset U$ なる p の開近傍 V と，V 常恒等的に 1 であり U の外側では 0 であるような C^∞ 関数 $h \in C^\infty(M)$ をとることができる．このとき

$$Y_i \coloneqq h \frac{\partial}{\partial x^i}$$

とおくと $Y_i \in \mathfrak{X}(M)$ となり，$\tilde{X}^\mu \coloneqq h X^\mu$ とおけば $\tilde{X}^\mu \in C^\infty(M)$ となる．このとき

$$X_1 = X_1 + h^2(X_1 - X_1) = \tilde{X}^\mu Y_\mu + (1 - h^2) X_1 \in \mathfrak{X}(M)$$

の右辺は $V \subset U$ 上至る所で座標表示 (4.3.1) を再現することがわかる．従って $\tilde{\omega}$ の $C^\infty(M)$-線形性から

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\omega}\bigl(X_1, \dots, X_k\bigr)(p) \\
&= \tilde{X}^\mu(p)\,\tilde{\omega}\bigl(Y_\mu, X_2, \dots, X_k\bigr)(p) + \bigl(1 - h(p)^2\bigr)\,\tilde{\omega}\bigl(X_1, X_2, \dots, X_k\bigr)(p) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となり，示された．

故に，次のような k-形式 ω の定義は well-defined である[*2]：任意の k 個の接ベクトル $X_i \in T_pM$ が与えられたとき，k 個のベクトル場 $\tilde{X}_i \in \mathfrak{X}(M)$ であって $\tilde{X}_i\Big|_p = X_i$ を充たすものたちを適当に選ぶ．そして

$$
\omega_p\bigl[X_1, \dots, X_k\bigr] \coloneqq \tilde{\omega}\bigl(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_k\bigr)(p)
$$

と定めると，上述の議論から左辺は $\tilde{X}_i$ の選び方に依らないのである．ベクトル場の C^∞ 性から ω_p が p に関して C^∞ 級であることは明らかなので，このようにして定義された対応 $\omega\colon p \mapsto \omega_p$ は微分形式である． ■

4.4 微分形式の演算

C^∞ 多様体 M 上の k-形式全体の集合を $\Omega^k(M)$ と書き，

$$
A^\bullet(M) \coloneqq \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(M)
$$

として M 上の微分形式全体を考える．$A^\bullet(M)$ 上に様々な演算を定義する．

> **!** しばらくの間，微分形式全体 $\Omega^k(M)$ を定理 4.3 の意味で捉える．i.e. $\omega \in \Omega^k(M)$ は k 個のベクトル場に作用する．作用を受けるベクトル場は ( ) で囲むことにする：
>
> $$\omega\colon (X_1, \dots, X_k) \mapsto \omega(X_1, \dots, X_k)$$

4.4.1 外積

微分形式全体 $\Omega^k(M)$ を定理 4.3 の意味で捉える．このとき，k-形式と l-形式の外積

$$
\wedge\colon \Omega^k(M) \to \Omega^l(M),\ (\omega, \eta) \mapsto \omega \wedge \eta
$$

は，各点 $p \in M$ で

$$
(\omega \wedge \eta)_p \coloneqq \omega_p \wedge \eta_p \in A^{k+l}(T_pM)
$$

と定義される双線型写像である．

[*2] 定理 4.1 を使って各点 p において $\omega_p \in \bigwedge^k\bigl(T_p^*M\bigr)$ を $A^k(T_pM)$ の元と見做していることに注意

命題 4.1: 外積の性質

外積は以下の性質を持つ：

(1) $\eta \wedge \omega = (-1)^{kl} \omega \wedge \eta$

(2) 任意のベクトル場 $X_1, \dots, X_{k+l} \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$
\begin{aligned}
&(\omega \wedge \eta)(X_1, \dots, X_{k+l}) \\
&= \frac{1}{k!\, l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \operatorname{sgn} \sigma \omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)})\, \eta(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+l)})
\end{aligned}
$$

証明 定理 4.3 より，各点 $p \in M$ において $(\omega \wedge \eta)_p$ を外積代数 $\bigwedge^{k+l}(T_p^* M)$ の元と見做してよい．

(1) 外積代数の基底 $e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k} \wedge e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_l}$ において e^{j_1} を一番左に持ってくると全体が $(-1)^k$ 倍される．これを l 回繰り返すと全体が $(-1)^{kl}$ 倍される．

(2) $(\omega \wedge \eta)_p$ に対して定理 4.1 を用いればよい．

■

4.4.2 外微分

定義 4.5: 外微分（局所表示）

M のチャート $(U; x^i)$ を与える．k-形式 $\omega \in \Omega^k(M)$ の座標表示が

$$
\omega = \omega_{i_1 \cdots i_k} \, \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}
$$

と与えられたとき，**外微分** (exterior differention)

$$
\mathrm{d} : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)
$$

は次のように定義される：

$$
\mathrm{d}\omega := \frac{\partial \omega_{i_1 \cdots i_k}}{\partial x^{j}} \, \mathrm{d}x^{j} \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}
$$

定理 4.4: 外微分（内在的）

$\omega \in \Omega^k(M)$ を M 上の任意の k-形式とする．このとき，任意のベクトル場 $X_1, \dots, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega\,(X_1, \dots, X_{k+1}) = &\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}X_i\big(\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1})\big)\\ &+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega\big([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1}\big)\end{aligned}$$

ただし $\hat{X}_i$ は X_i を省くことを意味する．また，$[X,Y]$ は **Lie 括弧積**と呼ばれる $\mathfrak{X}(M)$ 上の二項演算で，以下のように定義される：

$$[X,Y]f \coloneqq X(Yf) - Y(Xf)$$

定理 4.4 の $k=1$ の場合を書くと次の通り：

$$\mathrm{d}\omega\,(X, Y) = (X\omega)(Y) - (Y\omega)(X) - \omega([X,Y]).$$

定理 4.5: 外微分の性質

外微分 d は以下の性質をみたす：

(1) $\mathrm{d}\circ\mathrm{d} = 0$

(2) $\mathrm{d}(\omega\wedge\eta) = \mathrm{d}\omega\wedge\eta + (-1)^k\omega\wedge\mathrm{d}\eta\,, \quad \omega \in \Omega^k(M)$

証明 $\forall\omega \in \Omega^k(M)$ と M のチャート $(U; x^i)$ をとる．

(1)

$$\mathrm{d}^2\omega = \frac{\partial^2\omega_{i_1\dots i_k}}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}$$

であるが，ω は C^∞ 級なので偏微分は可換である．従って添字の対 μ, ν に関して対称かつ反対称な総和をとることになるから $\mathrm{d}^2\omega = 0$ である．

(2) $\omega = \omega_{i_1\dots i_k}\,\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\,,\ \eta = \eta_{j_1\dots j_l}\,\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x^{j_l}$ とする．

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\omega\wedge\eta) &= \mathrm{d}\big(\omega_{i_1\dots i_k}\eta_{j_1\dots j_l}\,\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\wedge\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x^{j_l}\big)\\ &= \left(\frac{\partial\omega_{i_1\dots i_k}}{\partial x^\mu}\eta_{j_1\dots j_l} + \omega_{i_1\dots i_k}\frac{\partial\eta_{j_1\dots j_l}}{\partial x^\mu}\right)\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\wedge\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x^{j_l}\\ &= \left(\frac{\partial\omega_{i_1\dots i_k}}{\partial x^\mu}\,\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\right)\wedge\big(\eta_{j_1\dots j_l}\,\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x^{j_l}\big)\\ &\quad + (-1)^k\big(\omega_{i_1\dots i_k}\,\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\big)\wedge\left(\frac{\partial\eta_{j_1\dots j_l}}{\partial x^\mu}\,\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x^{j_l}\right)\\ &= \mathrm{d}\omega\wedge\eta + (-1)^k\omega\wedge\mathrm{d}\eta\end{aligned}$$

■

4.4.3 引き戻し

二つの C^∞ 多様体 $M,\, N$ と，その上の C^∞ 写像 $f\colon M \to N$ を与える．微分写像

$$f_*\colon T_pM \to T_{f(p)}N$$

が $f_* \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\left(T_pM,\, T_{f(p)}N\right)$ であることから，それの**引き戻し** f^* を，$\forall\alpha \in T^*_{f(p)}N,\, \forall X \in T_pM$ に対して次のように定義できる：

$$\begin{aligned} &f^*\colon T^*_{f(p)}N \to T^*_pM, \\ &f^*(\alpha)[X] \coloneqq \alpha\big[f_*(X)\big] \end{aligned}$$

$\bigwedge^1\big(T^*_{f(p)}N\big) \cong T^*_{f(p)}N$ を思い出すと，f^* の定義域，値域は自然に点 p における k-形式へ拡張される．具体的には，$\forall\omega \in \bigwedge^k\big(T^*_{f(p)}N\big),\, \forall X_i \in T_pM$ に対して

$$\begin{aligned} &f^*\colon \bigwedge^k\big(T^*_{f(p)}N\big) \to \bigwedge^k\big(T^*_pM\big), \\ &f^*(\omega)[X_1,\, \dots,\, X_k] \coloneqq \omega\big[f_*(X_1),\, \dots,\, f_*(X_k)\big] \end{aligned}$$

と定義する．さらに，各点 $p \in M$ について和集合をとることで k-形式全体に作用するようになる：

$$f^*\colon \Omega^k(N) \to \Omega^k(M),$$

$$\boxed{f^*(\omega)(X_1,\, \dots,\, X_k) \coloneqq \omega\big(f_*(X_1),\, \dots,\, f_*(X_k)\big)}$$

ただし $\forall\omega \in \Omega^k(N),\, \forall X_i \in \mathfrak{X}(M)$ である．$f^*(\omega) \in \Omega^k(M)$ を f による $\omega \in \Omega^k(N)$ の**引き戻し**と呼ぶ．

命題 4.2: 引き戻しの性質

f^* は線型写像であり，以下の性質をみたす：

(1) $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta)$
(2) $\mathrm{d}(f^*(\omega)) = f^*(\mathrm{d}\omega)$

特に，性質 (1) から $f^*\colon A^\bullet(M) \to A^\bullet(N)$ は環準同型写像である．

証明 $k+l$ 個のベクトル場 $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ を任意にとる．

(1) 命題 4.1-(2) より

$$\begin{aligned} &\big(f^*(\omega) \wedge f^*(\eta)\big)(X_1,\, \dots,\, X_{k+l}) \\ &= \frac{1}{k!\,l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \operatorname{sgn}\sigma (f^*\omega)(X_{\sigma(1)},\, \dots,\, X_{\sigma(k)})\,(f^*\eta)(X_{\sigma(k+1)},\, \dots,\, X_{\sigma(k+l)}) \\ &= \frac{1}{k!\,l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \operatorname{sgn}\sigma\omega\big(f_*(X_{\sigma(1)}),\, \dots,\, f_*(X_{\sigma(k)})\big)\,\eta\big(f_*(X_{\sigma(k+1)}),\, \dots,\, f_*(X_{\sigma(k+l)})\big) \\ &= (\omega \wedge \eta)\big(f_*(X_1),\, \dots,\, f_*(X_{k+l})\big) \\ &= f^*(\omega \wedge \eta)(X_1,\, \dots,\, X_{k+l}) \end{aligned}$$

(2) 微分写像の定義 (??) から，$f_*\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(N)$ のベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ への作用は

$$(f_*X)h = X(h \circ f) \circ f^{-1} \in C^\infty(N), \quad \forall h \in C^\infty(N)$$

である．故に Lie 括弧積との順序は

$$\begin{aligned}
[f_*X, f_*Y]h &= f_*X\big((f_*Y)h\big) - f_*Y\big((f_*X)h\big) \\
&= X\Big(\big((f_*Y)h\big) \circ f\Big) \circ f^{-1} - Y\Big(\big((f_*X)h\big) \circ f\Big) \circ f^{-1} \\
&= X\Big(\big(Y(h \circ f) \circ f^{-1}\big) \circ f\Big) \circ f^{-1} - Y\Big(\big(X(h \circ f) \circ f^{-1}\big) \circ f\Big) \circ f^{-1} \\
&= \Big(X\big(Y(h \circ f)\big) - Y\big(X(h \circ f)\big)\Big) \circ f^{-1} \\
&= [X, Y](h \circ f) \circ f^{-1} \\
&= (f_*[X, Y])h, \quad \forall h \in C^\infty(N)
\end{aligned}$$

となり，可換である．従って定理 4.5 より

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\big(f^*(\omega)\big)\,(X_1, \dots, X_{k+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i\big((f^*\omega)(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1})\big) \\
&\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} (f^*\omega)\big([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1}\big) \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i\Big(\omega\big(f_*(X_1), \dots, \widehat{f_*(X_i)}, \dots, f_*(X_{k+1})\big)\Big) \\
&\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega\big(f_*([X_i, X_j]), f_*(X_1), \dots, \widehat{f_*(X_i)}, \dots, \widehat{f_*(X_j)}, \dots, f_*(X_{k+1})\big) \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i\Big(\omega\big(f_*(X_1), \dots, \widehat{f_*(X_i)}, \dots, f_*(X_{k+1})\big)\Big) \\
&\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega\big([f_*(X_i), f_*(X_j)], f_*(X_1), \dots, \widehat{f_*(X_i)}, \dots, \widehat{f_*(X_j)}, \dots, f_*(X_{k+1})\big) \\
&= f^*(\mathrm{d}\omega)(X_1, \dots, X_{k+1}).
\end{aligned}$$

■

4.4.4 内部積と Lie 微分

定義 4.6: 内部積

$X \in \mathfrak{X}(M)$ を M 上の任意のベクトル場とする．このとき X による**内部積** (interior product)

$$\mathrm{i}_X\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$$

が次のように定義される：

$$\mathrm{i}_X(\omega)(X_1, \dots, X_{k-1}) \coloneqq \omega(X, X_1, \dots, X_{k-1}), \quad \forall \omega \in \Omega^k(M), \forall X_i \in \mathfrak{X}(M)$$

ただし，$k = 0$ のときは $\mathrm{i}_X = 0$ と定義する．

命題 4.3: 内部積の性質

$\forall \omega, \omega_1, \omega_2 \in \Omega^k(M)$, $\forall f \in C^\infty(M)$ をとる．

(1) $\Omega^k(M)$ を $C^\infty(M)$ 加群と見たとき，$\mathrm{i}_X \in \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}\big(\Omega^k(M), \Omega^{k-1}(M)\big)$ である：

$$\mathrm{i}_X(\omega_1 + \omega_2) = \mathrm{i}_X(\omega_1) + \mathrm{i}_X(\omega_2), \quad \mathrm{i}_X(f\omega) = f\,\mathrm{i}_X(\omega).$$

(2) i_X は**反微分**である：

$$\mathrm{i}_X(\omega \wedge \eta) = \mathrm{i}_X(\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{i}_X(\eta)$$

証明　(1) 定義より明らか．

(2) 命題 4.1 より

$$\begin{aligned}
&\mathrm{i}_X(\omega \wedge \eta)(X_1, \dots, X_{k+l-1}) \\
&= \omega \wedge \eta(X, X_1, \dots, X_{k+l-1}) \\
&= \frac{1}{k!\,l!} \sum_{i=1}^{k} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l-1}} (-1)^{i+1} \operatorname{sgn}\sigma\, \omega(X_{\sigma(1)}, \dots, \underbrace{X}_{i}, \dots, X_{\sigma(k-1)})\, \eta(X_{\sigma(k)}, \dots, X_{\sigma(k+l-1)}) \\
&\quad + (-1)^k \frac{1}{k!\,l!} \sum_{j=1}^{l} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l-1}} (-1)^{j+1} \operatorname{sgn}\sigma\, \omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)})\, \eta(X_{\sigma(k+1)}, \dots, \underbrace{X}_{j}, \dots, X_{\sigma(k+l-1)}) \\
&= \big(\mathrm{i}_X(\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{i}_X(\eta)\big)(X_1, \dots, X_{k+l-1}).
\end{aligned}$$

■

定義 4.7: Lie 微分

$X \in \mathfrak{X}(M)$ を M 上の任意のベクトル場とする．このとき X による **Lie 微分** (Lie derivative) が

$$\mathcal{L}_X \colon \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$$

が次のように定義される：

$$\mathcal{L}_X(\omega)(X_1, \dots, X_k) \coloneqq X\big(\omega(X_1, \dots, X_k)\big) - \sum_{i=1}^{k} \omega(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_k)$$

Lie 微分は定理 4.3 の条件を充している，i.e. $\mathcal{L}_X\omega$ は $C^\infty(M)$ 加群として多重線型かつ交代的であるから，微分形式と呼ばれうる．

定理 4.6: Cartan の公式

$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\omega \in \Omega^k(M)$ とする．このとき，以下が成立する：

(1) $\mathrm{i}_{[X,Y]}(\omega) = [\mathcal{L}_X, \mathrm{i}_Y]\omega$
(2) $\mathcal{L}_X = \mathrm{i}_X\,\mathrm{d} + \mathrm{d}\,\mathrm{i}_X$

証明 任意の $k-1$ 個のベクトル場 $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ をとる．

(1) $k=0$ のときは $\Omega^0(M)=C^\infty(M)$ なので，明らかである．
$k>0$ とする．Lie 微分の定義 4.7 より

$$
\begin{aligned}
&\big(\mathcal{L}_X \mathrm{i}_Y(\omega)\big)(X_1,\, \dots X_{k-1}) \\
&= X\big((\mathrm{i}_Y(\omega))(X_1,\, \dots,\, X_{k-1})\big) - \sum_{i=1}^{k-1}\big(\mathrm{i}_Y(\omega)\big)(X_1,\, \dots,\, [X, X_i],\, \dots,\, X_{k-1}) \\
&= X\big(\omega(Y,\, X_1,\, \dots,\, X_{k-1})\big) - \sum_{i=1}^{k-1}\omega(Y,\, X_1,\, \dots,\, [X, X_i],\, \dots,\, X_{k-1})
\end{aligned}
$$

である．一方

$$
\begin{aligned}
&\big(\mathrm{i}_Y(\mathcal{L}_X\omega)\big)(X_1,\, \dots X_{k-1}) \\
&= (\mathcal{L}_X\omega)(Y,\, X_1,\, \dots X_{k-1}) \\
&= X\big(\omega(Y,\, X_1,\, \dots,\, X_{k-1})\big) - \omega([X, Y],\, X_1,\, \dots,\, X_{k-1}) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{k-1}\omega(Y,\, X_1,\, \dots,\, [X, X_i],\, \dots,\, X_{k-1})
\end{aligned}
$$

だから，

$$
\begin{aligned}
\big([\mathcal{L}_X, \mathrm{i}_Y]\omega\big)(X_1,\, \dots X_{k-1}) &= \big(\mathcal{L}_X \mathrm{i}_Y(\omega)\big)(X_1,\, \dots X_{k-1}) - \big(\mathrm{i}_Y(\mathcal{L}_X\omega)\big)(X_1,\, \dots X_{k-1}) \\
&= \mathrm{i}_{[X,Y]}(\omega)(X_1,\, \dots X_{k-1}).
\end{aligned}
$$

(2) $k=0$ のときは $\mathcal{L}_\omega = X\omega \quad (\omega \in C^\infty(M))$ より明らか．$k>0$ とする．定理 4.5 より

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{i}_X(\mathrm{d}\omega)(X_1,\, \dots,\, X_k) \\
&= \mathrm{d}\omega\,(X,\, X_1,\, \dots,\, X_k) \\
&= X\omega(X_1,\, \dots,\, X_k) + \sum_{i=1}^{k}(-1)^i X_i\big(\omega(X,\, X_1,\, \dots,\, \hat{X}_i,\, \dots,\, X_k)\big) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{k}(-1)^j\omega([X, X_j],\, X_1,\, \dots,\, \hat{X}_j,\, \dots,\, X_k) \\
&\quad + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j],\, X,\, X_1,\, \dots,\, \hat{X}_i,\, \dots,\, \hat{X}_j,\, \dots,\, X_k).
\end{aligned}
$$

一方，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}\big(\mathrm{i}_X(\omega)\big)\,(X_1,\, \dots,\, X_k) \\
&= \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}X_i\big(\omega(X,\, X_1,\, \dots,\, \hat{X}_i,\, \dots,\, X_k)\big) \\
&\quad + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega(X,\, [X_i, X_j],\, X_1,\, \dots,\, \hat{X}_i,\, \dots,\, \hat{X}_j,\, \dots,\, X_k)
\end{aligned}
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
&\bigl(\mathrm{i}_X\,\mathrm{d}+\mathrm{d}\,\mathrm{i}_X\bigr)\omega(X_1,\,\ldots,\,X_k)\\
&=X\omega(X_1,\,\ldots,\,X_k)+\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\omega([X,X_j],\,X_1,\,\ldots,\,\hat{X}_j,\,\ldots,\,X_k)\\
&=(\mathcal{L}_X\omega)(X_1,\,\ldots,\,X_k).
\end{aligned}
$$

■

Cartan の公式 4.6 より，Lie 微分の様々な性質が示される：

定理 4.7: Lie 微分の性質

$X,\,Y\in\mathfrak{X}(M),\ \omega\in\Omega^k(M)$ とする．このとき，以下が成立する：

(1) $\mathcal{L}_X(\omega\wedge\eta)=\mathcal{L}_X(\omega)\wedge\eta+\omega\wedge\mathcal{L}_X(\eta)$

(2) $\mathcal{L}_X(\mathrm{d}\omega)=\mathrm{d}\bigl(\mathcal{L}_X(\omega)\bigr)$

(3) $[\mathcal{L}_X,\mathcal{L}_Y]=\mathcal{L}_{[X,Y]}$

証明 (1) Cartan の公式 4.6-(2) および内部積と外微分が共に反微分であることを利用すると

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_X(\omega\wedge\eta)\\
&=\mathrm{i}_X\bigl(\mathrm{d}\omega\wedge\eta+(-1)^k\omega\wedge\mathrm{d}\eta\bigr)+\mathrm{d}\bigl(\mathrm{i}_X(\omega)\wedge\eta+(-1)^k\omega\wedge\mathrm{i}_X(\eta)\bigr)\\
&=\mathrm{i}_X(\mathrm{d}\omega)\wedge\eta+\cancel{(-1)^{k+1}\,\mathrm{d}\omega\wedge\mathrm{i}_X(\eta)}+\cancel{(-1)^k\mathrm{i}_X(\omega)\wedge\mathrm{d}\eta}+(-1)^{2k}\omega\wedge\mathrm{i}_X(\mathrm{d}\eta)\\
&\quad+\mathrm{d}\mathrm{i}_X(\omega)\wedge\eta+\cancel{(-1)^{k-1}\mathrm{i}_X(\omega)\wedge\mathrm{d}\eta}+\cancel{(-1)^k\,\mathrm{d}\omega\wedge\mathrm{i}_X(\eta)}+(-1)^{2k}\omega\wedge\mathrm{d}\mathrm{i}_X(\eta)\\
&=\mathcal{L}_X(\omega)\wedge\eta+\omega\wedge\mathcal{L}_X(\eta).
\end{aligned}
$$

(2) Cartan の公式 4.6-(2) から

$$
\mathcal{L}_X(\mathrm{d}\omega)=\cancel{\mathrm{i}_X(\mathrm{d}^2\omega)}+\mathrm{d}\,\mathrm{i}_X(\mathrm{d}\omega)=\mathrm{d}\,\mathrm{i}_X(\mathrm{d}\omega)+\mathrm{d}^2\mathrm{i}_X(\omega)=\mathrm{d}\bigl(\mathcal{L}_X(\omega)\bigr)\,.
$$

(3) k に関する数学的帰納法により示す．$k=0$ のとき $\Omega^0(M)=C^\infty(M)$ なので

$$
\mathcal{L}_{[X,Y]}\omega=[X,Y]\omega=X(Y\omega)-Y(X\omega)=[\mathcal{L}_X,\mathcal{L}_Y]\omega
$$

であり，成立している．

$k\geq 0$ について正しいと仮定する．$\forall\omega\in\Omega^{k+1}(M)$ を一つとる．$\forall Z\in\mathfrak{X}(M)$ に対して $\mathrm{i}_Z\omega\in\Omega^k(M)$ だから，帰納法の仮定より

$$
\mathcal{L}_{[X,Y]}\mathrm{i}_Z(\omega)=[\mathcal{L}_X,\mathcal{L}_Y]\mathrm{i}_Z(\omega) \tag{4.4.1}
$$

が成立する．一方 Cartan の公式 4.6-(1) より

$$
\mathcal{L}_{[X,Y]}\mathrm{i}_Z=\mathrm{i}_Z\mathcal{L}_{[X,Y]}+\mathrm{i}_{[[X,Y],Z]} \tag{4.4.2}
$$

である．さらに

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y\mathrm{i}_Z \\
&= \mathcal{L}_X\bigl(\mathrm{i}_Z\mathcal{L}_Y + \mathrm{i}_{[Y,Z]}\bigr) \\
&= \mathrm{i}_Z\mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y + \mathrm{i}_{[X,Z]}\mathcal{L}_Y + \mathrm{i}_{[Y,Z]}\mathcal{L}_X + \mathrm{i}_{[X,[Y,Z]]}, \qquad (4.4.3)\\
&\mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X\mathrm{i}_Z \\
&= \mathrm{i}_Z\mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X + \mathrm{i}_{[Y,Z]}\mathcal{L}_X + \mathrm{i}_{[X,Z]}\mathcal{L}_Y + \mathrm{i}_{[Y,[X,Z]]} \qquad (4.4.4)
\end{aligned}
$$

であることもわかる．式 (4.4.3)−(4.4.4) より

$$
\begin{aligned}
&[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]\mathrm{i}_Z \\
&= \mathrm{i}_Z[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] + \mathrm{i}_{[X,[Y,Z]]} - \mathrm{i}_{[Y,[X,Z]]}
\end{aligned}
$$

これを式 (4.4.2) から引いて Jacobi 恒等式 $[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0$ を用いると

$$
\bigl[\bigl(\mathcal{L}_{[X,Y]} - [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]\bigr), \mathrm{i}_Z\bigr] = 0.
$$

(4.4.1) に代入すると

$$
\mathrm{i}_Z\bigl(\mathcal{L}_{[X,Y]} - [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]\bigr)\omega = 0.
$$

Z は任意だったから $\bigl(\mathcal{L}_{[X,Y]} - [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]\bigr)\omega = 0$ を得て証明が完了する．

■

4.5 C^∞ 多様体の向き

4.5.1 C^∞ 多様体の向き付けとその特徴付け

有限次元ベクトル空間 V（$\dim V > 0$）の順序付き基底全体の集合を $\mathcal{B}_V$ と書く．

- $\mathcal{B}_V$ 上の同値関係を

$$
(e_1,\,\dots,\,e_{\dim V}) \sim (f_1,\,\dots,\,f_{\dim V}) \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists T = [T^\mu{}_\nu] \in \mathrm{GL}(\dim V),\ e_\mu = f_\nu T^\nu{}_\mu \ \text{かつ}\ \det T > 0
$$

  で定め，この同値関係による同値類のことをベクトル空間 V の**向き** (orientation) と呼ぶ．
- ベクトル空間 V とその向き $\mathcal{O}_V \in \mathcal{B}_V/\sim$ の組 $(V,\,\mathcal{O}_V)$ のことを**向き付けられたベクトル空間** (oriented vector space) と呼ぶ．
- 向き付けられたベクトル空間 $(V,\,\mathcal{O}_V)$ の順序付き基底 $(e_1,\,\dots,\,e_{\dim V}) \in \mathcal{B}_V$ は，$(e_1,\,\dots,\,e_{\dim V}) \in \mathcal{O}_V$ のとき**正の向き** (positively oriented)，$(e_1,\,\dots,\,e_{\dim V}) \notin \mathcal{O}_V$ のとき**負の向き** (negatively oriented) であるという．

! $\dim V = 0$ のときは $\mathcal{O}_V \in \{\pm 1\}$ とする．

C^∞ 多様体 M の各点 $p \in M$ における接空間 T_pM は有限次元ベクトル空間なので，上述の意味で向き $\mathcal{O}_{T_pM}$ を与えることができる．この各点各点で与えた接空間の向きたち $\bigl\{\mathcal{O}_{T_pM}\bigr\}_{p\in M}$ を次の意味で「連続に繋げる」ことができたとき，C^∞ 多様体 M に**向き**が与えられたと言う：

定義 4.8: C^∞ 多様体の向き

境界なし/あり C^∞ 多様体 M を与える.

- M の**各点の向き** (pointwise orientation) とは, 族 $\{\mathcal{O}_{T_pM}\}_{p\in M}$ のこと.
- M の各点の向き $\{\mathcal{O}_{T_pM}\}_{p\in M}$ を与える. 開集合 $U \subset M$ 上の局所フレーム $(E_1, \ldots, E_{\dim M})$ が**正の向き** (positively oriented) であるとは, $\forall p \in U$ において $(E_1|_p, \ldots, E_{\dim M}|_p) \in \mathcal{O}_{T_pM}$ であることを言う. **負の向き**も同様に定義する.
- 与えられた M の各点の向き $\{\mathcal{O}_{T_pM}\}_{p\in M}$ が**連続** (continuous) であるとは, $\forall p \in M$ に対してある正の向きの局所フレーム $E^{(p)} := (E_1^{(p)}, \ldots, E_{\dim M}^{(p)})$ が存在して $p \in \mathrm{dom}\, E^{(p)}$ を充たすことを言う.
- M の**向き** (orientation) とは, M の各点の向きであって連続であるもののことを言う.
- M が**向き付け可能** (orientable) であるとは, M の向きが存在することを言う.
- M が向き付け可能なとき, 向き $\{\mathcal{O}_{T_pM}\}_{p\in M}$ と M の組 $(M, \{\mathcal{O}_{T_pM}\}_{p\in M})$ のことを**向きづけられた多様体** (oriented manifold) という.

補題 4.1:

- 向き付け可能な境界あり/なし C^∞ 多様体 M の向き $\{\mathcal{O}_{T_pM}\}_{p\in M}$
- **連結**な開集合 $U \subset M$

を任意に与える. このとき, U 上の任意の局所フレーム $(E_1, \ldots, E_{\dim M})$ は正の向きであるか負の向きであるかのどちらかである.

証明 背理法により示す. U 上の局所フレーム $E := (E_1, \ldots, E_{\dim M})$ であって,

$$W := \{\, p \in U \mid E_p \in \mathcal{O}_{T_pM} \,\}$$

とおいたときに $W \neq \emptyset$ かつ $U \setminus W \neq \emptyset$ が成り立つものが存在するとする.

$\forall p \in W \subset M$ を 1 つ固定する. 仮定より各点の向き $\{\mathcal{O}_{T_pM}\}_{p\in M}$ は連続だから, ある正の向きの局所フレーム $F^{(p)}$ が存在して $p \in \mathrm{dom}\, F^{(p)} =: V_p$ を充たす. このとき連続写像 $T\colon U \cap V_p \longrightarrow \mathrm{GL}(\dim M)$ を

$$E_\mu|_x =: F^{(p)}{}_\nu|_x \left[T(x)\right]^\nu{}_\mu \quad (\forall x \in U \cap V_p)$$

により定めると[*3],

$$W \cap V_p = T^{-1}\big(\mathrm{GL}_+(\dim M)\big)$$

と書けるので $W \cap V_p$ は開集合であり[*4], かつ $p \in W \cap V_p \subset W$ を充たす. i.e. $\forall p \in W$ に対して W における p の開近傍 $W \cap U_p$ が存在するので, 命題??より W が開集合だと分かった. 同じ議論により $U \setminus W$ が開集合であることもわかるが, これは U の連結性に矛盾する. ■

[*3] T の連続性は, E, $F^{(p)}$ が局所フレームであることによる.

[*4] $\mathrm{GL}_+(\dim M) := \{\, X \in \mathrm{GL}(\dim M) \mid \det X > 0 \,\}$ である. $\det\colon \mathrm{GL}(\dim M) \longrightarrow \mathbb{R}$ が連続写像なので $\mathrm{GL}_+(\dim M) = \det^{-1}\big((0, \infty)\big)$ は $\mathrm{GL}(\dim M)$ の開集合である.

定義 4.8 の意味は直感的だが，扱い辛い．しかし，実は微分形式によって C^∞ 多様体の向きを特徴付けることができて計算上便利である：

命題 4.4: 微分形式による向きの特徴付け

境界あり/なし C^∞ 多様体 M を与える．

(1) $\forall p \in M$ において 0 にならない $\omega \in \Omega^{\dim M}(M)$ が与えられたとする．このとき $\forall p \in M$ に対して

$$\mathcal{O}_{\omega_p} \coloneqq \left\{ (e_1, \dots, e_{\dim M}) \in \mathcal{B}_{T_pM} \,\middle|\, \omega_p(e_1, \dots, e_{\dim M}) > 0 \right\}$$

とおくと，族 $\left\{\mathcal{O}_{\omega_p}\right\}_{p\in M}$ は M の向きである．

(2) M に向き $\left\{\mathcal{O}_{T_pM}\right\}_{p\in M}$ が与えられたとする．このとき $\forall p \in M$ および $\forall (e_1, \dots, e_{\dim M}) \in \mathcal{O}_{T_pM}$ に対して

$$\omega_p \neq 0 \;\; かつ \;\; \omega_p(e_1, \dots, e_{\dim M}) > 0$$

を充たす $\omega \in \Omega^{\dim M}(M)$ が存在する．

証明 (1) $\forall p \in M$ において $\omega_p \neq 0$ とする．このとき $\forall (e_1, \dots, e_{\dim M}), (f_1, \dots, f_{\dim M}) \in \mathcal{B}_{T_pM}$ に対して，$e_\mu = f_\nu T^\nu{}_\mu$ ならば，

$$\begin{aligned}\omega_p(e_1, \dots, e_{\dim M}) &= \omega_p(f_{\nu_1} T^{\nu_1}{}_1, \dots, f_{\nu_{\dim M}} T^{\nu_{\dim M}}{}_{\dim M}) \\ &= T^{\nu_1}{}_1 \cdots T^{\nu_{\dim M}}{}_{\dim M} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_{\dim M}} \omega_p(f_1, \dots, f_{\dim M}) \\ &= (\det T)\omega_p(f_1, \dots, f_{\dim M})\end{aligned}$$

で $\det T \neq 0$ なので，

$$\begin{aligned}&(e_1, \dots, e_{\dim M}) \sim (f_1, \dots, f_{\dim M}) \\ \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\; &\omega_p(e_1, \dots, e_{\dim M}), \omega_p(f_1, \dots, f_{\dim M}) \text{ が同符号}\end{aligned}$$

によって定めた $\mathcal{B}_{T_pM}$ の同値関係 $\sim$ による同値類はベクトル空間 T_pM の向きである．特に 2 つある同値類のうち ω_p の符号が正であるものを $\mathcal{O}_{\omega_p}$ とおいたので，族 $\left\{\mathcal{O}_{\omega_p}\right\}_{p\in M}$ は各点の向きである．

次に，各点の向き $\left\{\mathcal{O}_{\omega_p}\right\}_{p\in M}$ が連続であることを示す．$\forall p \in M$ を一つ固定し，p の連結な開近傍 $p \in U \subset M$ とその上の任意の局所フレーム $(E_1, \dots, E_{\dim M})$ をとる[*5]. (E_i) の双対フレームを (ε_i) とする. すると U 上で任意の $\omega \in \Omega^n(M)$ はある $f \in C^\infty(U)$ を使って $\omega = f\varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{\dim M}$ の形で書ける. ω が 0 にならないと言うことは f が 0 にならないので, U 上至る所で $\omega(E_1, \dots, E_{\dim M}) = f \neq 0$ である．i.e. $f(U) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ であるが，U の連結性から $f(U) \subset \mathbb{R}_{>0}$ か $f(U) \subset \mathbb{R}_{<0}$ のどちらかしかあり得ない．

(2) $\left\{\mathcal{O}_{T_pM}\right\}_{p\in M}$ を M の向きとする．このとき $\forall p \in M$ に対してある正の向きの局所フレーム $E^{(p)}$ が存在して $p \in \operatorname{dom} E^{(p)}$ を充たす．そのような局所フレームの族 $\left\{E^{(p)}\right\}_{p\in M}$ を 1 つ固定する．すると M の部分集合族 $\mathcal{E} \coloneqq \left\{\operatorname{dom} E^{(p)}\right\}_{p\in M}$ は M の開被覆であるから，$\mathcal{E}$ に従属する C^∞ 級の 1 の分割 $\left\{\psi_p \in M \longrightarrow [0, 1]\right\}_{p\in M}$ をとることができる．

[*5] 例えば座標ベクトル場の定義域を十分小さく取れば良い．

ここで $\forall p \in M$ について $E^{(p)}$ の双対フレーム $\varepsilon^{(p)}$ をとり，

$$\omega^{(p)} := \varepsilon^{(p)1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{(p)\dim M}$$

と定義する．このとき $\forall x \in \mathrm{dom}\, E^{(p)}$ および $(e_1,\, \dots,\, e_{\dim M}) \in \mathcal{O}_{T_x M}$ に対して，向きの定義から $E^{(p)}|_x \in \mathcal{O}_{T_x M}$ であることと (1) の議論から $\omega^{(p)}|_x(E^{(p)}{}_1|_x,\, \dots,\, E^{(p)}{}_{\dim M}|_x) = 1 > 0$ と $\omega^{(p)}|_x(e_1,\, \dots,\, e_{\dim M})$ は同符号，i.e. 正である．したがって $\omega \in \Omega^{\dim M}(M)$ を

$$\omega := \sum_{p \in M} \psi_p\, \omega^{(p)}$$

で定義すると $\forall x \in M$ および $\forall (e_1,\, \dots,\, e_{\dim M}) \in \mathcal{O}_{T_x M}$ に対して

$$\omega_x(e_1,\, \dots,\, e_{\dim M}) = \sum_{\substack{p \in M, \\ x \in \mathrm{dom}\, E^{(p)}}} \psi_p(x)\, \underbrace{\omega^{(p)}|_x(e_1,\, \dots,\, e_{\dim M})}_{>0}$$

であり，1 の分割の性質-(4) から少なくとも 1 つの $p \in M$ について $\psi_p(x) > 0$ であるので，左辺が正であることが示された．構成から明らかに $\forall p \in M$ について $\omega_p \neq 0$ である．

■

命題 4.4 を踏まえて次のように定義する：

定義 4.9: 向き付け形式

境界あり/なし C^∞ 多様体 M の至る所で 0 にならない $\omega \in \Omega^{\dim M}(M)$ のことを**向き付け形式** (orientation form) と呼ぶ．

向きの定義では局所フレームが登場したが，実際には座標フレームを考えれば十分だとわかる：

定義 4.10: 向きづけられたアトラス

境界あり/なし多様体 M を与え[a]，M の極大アトラス $\mathcal{A}^+ := \bigl\{ (U_\alpha,\, \varphi_\alpha) \bigr\}_{\alpha \in \Lambda^+}$ を 1 つ固定する．

- M が向きづけられた多様体であるとする．このとき M のチャート $\bigl(U,\, (x^\mu)\bigr) \in \mathcal{A}^+$ が**正の向き** (positively oriented) であるとは，座標フレーム $\bigl(\frac{\partial}{\partial x^1},\, \dots,\, \frac{\partial}{\partial x^{\dim M}}\bigr)$ が正の向きであることを言う．
- （極大とは限らない）C^∞ アトラス $\mathcal{A} := \bigl\{ (U_\alpha,\, \varphi_\alpha) \bigr\}_{\alpha \in \Lambda \subset \Lambda^+} \subset \mathcal{A}^+$ が**向き付けれられた C^∞ アトラス** (oriented smooth atlas) であるとは，$\forall \alpha,\, \beta \in \Lambda \subset \Lambda^+$ に対して座標変換

$$\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha \colon \varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$$

の Jacobian が正であることを言う．

[a] この時点では向き付け可能でなくても良い

命題 4.5: 向きづけられた C^∞ アトラスによる向きの特徴付け

境界あり/なし C^∞ 多様体 M を与え，M の極大アトラス $\mathcal{A}^+ := \{ (U_\alpha,\, \varphi_\alpha) \}_{\alpha \in \Lambda^+}$ を1つ固定する．

(1) M に向きづけられた C^∞ アトラス $\mathcal{A} := \{ (U_\alpha,\, \varphi_\alpha) \}_{\alpha \in \Lambda}$ が与えられたとする．このとき M の向き $\{\mathcal{O}_{T_pM}\}_{p\in M}$ であって，$\forall \alpha \in \Lambda$ について M のチャート $(U_\alpha,\, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ が正の向きになるようなものが一意的に存在する．

(2) M に向き $\{\mathcal{O}_{T_pM}\}_{p\in M}$ が与えられたとする．このとき$\underline{\partial M = \emptyset \text{ または } \dim M > 1}$ ならば，$\mathcal{A}^+$ の部分集合

$$\mathcal{A} := \left\{ (U,\, \varphi) \in \mathcal{A}^+ \;\middle|\; (U,\, \varphi) \text{ は正の向き} \right\}$$

は向きづけられた C^∞ アトラスである．

証明 (1) まず $\forall p \in M$ を1つ固定する．$\mathcal{A}$ は M の C^∞ アトラスなので，ある $\alpha_p \in \Lambda$ が存在して $p \in U_{\alpha_p}$ を充たす．このときチャート $(U_{\alpha_p},\, \varphi_{\alpha_p}) = (U_{\alpha_p},\, (x^\mu)) \in \mathcal{A}$ について，自然基底 $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p,\, \dots,\, \frac{\partial}{\partial x^{\dim M}}\Big|_p \right) \in \mathcal{B}_{T_pM}$ が属する T_pM の向きを $\mathcal{O}_{T_pM}$ と定義する．$p \in U_{\beta_p}$ を充たす別の $\beta_p \in \Lambda$ に関しても，$\mathcal{A}$ が向きづけられた C^∞ アトラスであるという仮定からチャート $(U_{\beta_p},\, \varphi_{\beta_p}) = (U_{\beta_p},\, (y^\mu)) \in \mathcal{A}$ について

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_p,\, \dots,\, \frac{\partial}{\partial x^{\dim M}}\bigg|_p \right) \sim \left(\frac{\partial}{\partial y^1}\bigg|_p,\, \dots,\, \frac{\partial}{\partial y^{\dim M}}\bigg|_p \right)$$

が成り立つ[*6]ので，$\mathcal{O}_{T_pM}$ は well-defined である．族 $\{\mathcal{O}_{T_pM}\}_{p\in M}$ は M の各点の向きであるが，座標フレームは局所フレームなので M の向きでもある．

M にこの向きを与えたとき，構成から明らかに $\forall (U,\, \varphi) \in \mathcal{A}$ は正の向きのチャートである．

(2) $\mathcal{A}^+$ は M の C^∞ アトラスなので，$\forall p \in M$ に対して $\alpha_p \in \Lambda^+$ が存在して $p \in U_{\alpha_p}$ を充たす．必要なら U_{α_p} を十分小さくとることで U_{α_p} は連結であるとして良い[*7]．このときチャート $(U_{\alpha_p},\, \varphi_{\alpha_p}) = (U_{\alpha_p},\, (x^1,\, x^2,\, \dots)) \in \mathcal{A}^+$ に付随する座標フレームは補題 4.1 により正の向きであるか負の向きであるかのどちらかである．もしも負の向きならば，x^1 を $-x^1$ に置き換えた別の C^∞ チャート[*8] $(U'_{\alpha_p},\, \varphi'_{\alpha_p}) := (U_{\alpha_p},\, (-x^1,\, x^2,\, \dots)) \in \mathcal{A}^+$ は正の向きである．よって $\mathcal{A}$ は C^∞ アトラスを成す．$\mathcal{A}$ に属する全てのチャートが正の向きなので，それらの間の変換関数の Jacobian もまた正でなくてはいけない．

■

---

*6 自然基底の間の基底の取り替え行列は Jacobi 行列である．

*7 $\mathcal{A}^+$ は極大アトラスなのでこのようなチャート $(U_{\alpha_p},\, \varphi_{\alpha_p})$ を必ず含む．

*8 $\mathcal{A}^+$ は極大アトラスなのでこのようなチャートを必ず含む．なお，この構成は $\partial M \neq \emptyset$ かつ $\dim M = 1$ のとき境界チャートに適用することができない．

定義 4.11: 向き付けを保つ C^∞ 写像

向き付けられた C^∞ 多様体 $(M, \{\mathcal{O}_{T_pM}\}_{p\in M})$, $(N, \{\mathcal{O}_{T_qN}\}_{q\in N})$ と, 局所微分同相写像 $F\colon M \longrightarrow N$ を与える.

- F が**向きを保つ** (orientation-preserving) とは, $\forall p \in M$ において同型写像 $T_pF\colon T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ が $T_pF(\mathcal{O}_{T_pM}) = \mathcal{O}_{T_{F(p)}N}$ を充たすことを言う.
- F が**向きを逆にする** (orientation-reversing) とは, $\forall p \in M$ において同型写像 $T_pF\colon T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ が $T_pF(\mathcal{O}_{T_pM}) = -\mathcal{O}_{T_{F(p)}N}$ を充たすことを言う.

4.5.2 新しい向きの構成

素材となる向き付けられた C^∞ 多様体から新しい向きづけられた多様体を作る方法をいくつか紹介する.

命題 4.6: 積多様体の向き

- 向き付けられた C^∞ 多様体 M_1, M_2
- C^∞ 写像

$$\pi_1\colon M_1 \times M_2 \longrightarrow M_1,\ (x,\, y) \longmapsto x,$$
$$\pi_2\colon M_1 \times M_2 \longrightarrow M_2,\ (x,\, y) \longmapsto y$$

を与える. このとき, 積多様体 $M_1 \times M_2$ の向きであって以下を充たすもの (**product orientation** と言う) が一意的に存在する:

(product orientation)

M_i に与えられた向きを命題 4.4-(1) の方法で再現する向き付け形式 $\omega_i \in \Omega^{\dim M_i}(M_i)$ に関して, $\pi_1^*\omega_1 \wedge \pi_2^*\omega_2 \in \Omega^{\dim(M_1\times M_2)}(M_1 \times M_2)$ は product orientation を命題 4.4-(1) の方法で再現する向き付け形式である.

証明 $n_i := \dim M_i$ とおく. $\forall (p,\, q) \in M_1 \times M_2$ を 1 つ固定する. ω_i は M_i 上至る所 0 でないので, ある $v_1, \dots, v_{n_1} \in T_pM_1$ および $w_1, \dots, w_{n_2} \in T_qM_2$ が存在して

$$\omega_1|_p(v_1, \dots, v_{n_1}) \neq 0, \quad \omega_2|_q(w_1, \dots, w_{n_2}) \neq 0$$

を充たす. ここで C^∞ 写像

$$\mathrm{inj}_1^q\colon M_1 \longrightarrow M_1 \times M_2,\ x \longmapsto (x,\, q)$$
$$\mathrm{inj}_2^p\colon M_2 \longrightarrow M_1 \times M_2,\ x \longmapsto (p,\, x)$$

によって

$$V_i := T_p(\mathrm{inj}_1^q)(v_i) \in T_{(p,\,q)}(M_1 \times M_2) \ \ ^{\mathrm{w/}}\ \ i = 1, \dots, n_1,$$
$$V_{n_1+j} := T_q(\mathrm{inj}_2^p)(w_j) \in T_{(p,\,q)}(M_1 \times M_2) \ \ ^{\mathrm{w/}}\ \ j = 1, \dots, n_2$$

を定義すると，命題??から

$$
\begin{aligned}
T_{(p,\,q)}\pi_1(V_i) &= v_i, & T_{(p,\,q)}\pi_2(V_i) &= 0, \\
T_{(p,\,q)}\pi_1(V_{n_1+j}) &= 0, & T_{(p,\,q)}\pi_2(V_{n_1+j}) &= w_j
\end{aligned}
$$

が言える．よって

$$
\begin{aligned}
&\pi_1^*\omega_1 \wedge \pi_2^*\omega_2|_{(p,\,q)}(V_1,\,\dots,\,V_{n_1},\,V_{n_1+1},\,\dots,\,V_{n_1+n_2}) \\
&= \frac{1}{n_1!n_2!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n_1+n_2}} \operatorname{sgn}\sigma\, \pi_1^*\omega_1|_{(p,\,q)}(V_{\sigma(1)},\,\dots,\,V_{\sigma(n_1)})\, \pi_2\omega_2|_{(p,\,q)}(V_{\sigma(n_1+1)},\,\dots,\,V_{\sigma(n_1+n_2)}) \\
&= \frac{1}{n_1!n_2!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n_1+n_2}} \operatorname{sgn}\sigma\, \omega_1|_p\bigl(T_{(p,\,q)}\pi_1(V_{\sigma(1)}),\,\dots,\,T_{(p,\,q)}\pi_1(V_{\sigma(n_1)})\bigr) \\
&\qquad \times \omega_2|_q\bigl(T_{(p,\,q)}\pi_2(V_{\sigma(n_1+1)}),\,\dots,\,T_{(p,\,q)}\pi_2(V_{\sigma(n_1+n_2)})\bigr) \\
&= \frac{1}{n_1!n_2!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n_1},\,\tau \in \mathfrak{S}_{n_2}} \operatorname{sgn}\sigma\tau\, \omega_1|_p\bigl(T_{(p,\,q)}\pi_1(V_{\sigma(1)}),\,\dots,\,T_{(p,\,q)}\pi_1(V_{\sigma(n_1)})\bigr) \\
&\qquad \times \omega_2|_q\bigl(T_{(p,\,q)}\pi_2(V_{n_1+\tau(1)}),\,\dots,\,T_{(p,\,q)}\pi_2(V_{n_1+\tau(n_2)})\bigr) \\
&= \omega_1|_p(v_1,\,\dots,\,v_{n_1})\, \omega_2|_p(w_1,\,\dots,\,w_{n_2}) \\
&\neq 0
\end{aligned}
$$

であり，$\pi_1^*\omega_1 \wedge \pi_2^*\omega_2|_{(p,\,q)} \neq 0$ が言えた． ■

定義 4.12: 局所微分同相写像

境界なし/あり C^∞ 多様体 $M,\,N$ を与える．
C^∞ 写像 $F\colon M \longrightarrow N$ が**局所微分同相写像** (local diffeomorphism) であるとは，$\forall p \in M$ が以下の条件を充たす近傍 $p \in U_p \subset M$ を持つことを言う：

(1) $F(U_p) \subset N$ が開集合
(2) $F|_{U_p}\colon U_p \longrightarrow F(U_p)$ が微分同相写像

命題 4.7: 引き戻しによる向き

- 境界あり/なし C^∞ 多様体 M
- 向き付けられた境界あり/なし C^∞ 多様体 N
- 局所微分同相写像 $F\colon M \longrightarrow N$

を与える．このとき M は F が向きを保つような向き（**pullback orientation** と言う）を一意にもつ．

<u>証明</u> N に与えられた向きを $\{\mathcal{O}_{T_q(N)}\}_{q\in N}$ と書く．$\forall p \in M$ を 1 つ固定する．F が局所微分同相写像なので，点 p における F の微分 $T_pF\colon T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ はベクトル空間の同型写像である．よって T_pM の向き $\mathcal{O}_{T_pM}$ であって $T_pF(\mathcal{O}_{T_pM}) = \mathcal{O}_{T_{F(p)}N}$ を充たすものが一意的に存在する．
N の向き $\{\mathcal{O}_{T_q(N)}\}_{q\in N}$ を命題 4.4-(1) の方法で再現する向き付け形式 $\omega \in \Omega^{\dim N}(N)$ について，$F^*\omega \in \Omega^{\dim M}(M)$ は明らかに M 上至る所 0 でなく，$F^*\omega$ が命題 4.4-(1) の方法で作る M の向き $\{\mathcal{O}_{F^*\omega|_p}\}_{p\in M}$ は $\{\mathcal{O}_{T_pM}\}_{p\in M}$ と等しい． ■

4.5.3 部分多様体の C^∞ 構造

次に，部分多様体に向きを入れる方法を考える．然るに，そのためには部分多様体の C^∞ 構造を真面目に扱う必要がある．まずいくつかの定義を述べる：

定義 4.13: C^∞ 写像のランク

境界あり/なし C^∞ 多様体 $M,\, N$ および C^∞ 写像 $F\colon M \longrightarrow N$ を与える．

- 点 $p \in M$ における F の**ランク** (rank) とは，線型写像 $T_pF\colon T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ のランク，i.e. $\dim\bigl(\mathrm{Im}(T_pF)\bigr) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ のこと．$\forall p \in M$ における F のランクが等しいとき，F は**定ランク** (constant rank) であると言い，$\mathbf{rank}\, \boldsymbol{F} := \dim\bigl(\mathrm{Im}(T_pF)\bigr)$ と書く．
- 点 $p \in M$ における F のランクが $\min\bigl\{\dim M,\, \dim N\bigr\}$ に等しいとき，F は**点 $\boldsymbol{p}$ においてフルランク** (full rank at p) であると言う．$\mathrm{rank}\, F = \min\bigl\{\dim M,\, \dim N\bigr\}$ ならば F は**フルランク** (full rank) であると言う．

位相空間 $M,\, N$ を与える．連続写像 $F\colon M \longrightarrow N$ が**位相的埋め込み** (topological embedding) であるとは，$F(M) \subset N$ に N からの相対位相を入れたときに写像 $F\colon M \longrightarrow F(M)$ が同相写像になることを言う．

定義 4.14: C^∞ 沈めこみ・C^∞ はめ込み・C^∞ 埋め込み

境界あり/なし C^∞ 多様体 $M,\, N$ および定ランクの C^∞ 写像 $F\colon M \longrightarrow N$ を与える．

- F が **C^∞ 沈め込み** (smooth submersion) であるとは，$\forall p \in M$ において $T_pF\colon T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ が全射である，i.e. $\mathrm{rank}\, F = \dim N$ であることを言う．
- F が **C^∞ はめ込み** (smooth immersion) であるとは，$\forall p \in M$ において $T_pF\colon T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ が単射である，i.e. $\mathrm{rank}\, F = \dim M$ であること[a]を言う．
- F が **C^∞ 埋め込み** (smooth embedding) であるとは，F が C^∞ はめ込みであってかつ位相的埋め込みであることを言う．

[a] 階数・退化次元の定理から $\dim(\mathrm{Ker}\, T_pF) + \dim(\mathrm{Im}\, T_pF) = \dim M$ なので，$\mathrm{rank}\, F = \dim(\mathrm{Im}\, T_pF) = \dim M \iff \dim(\mathrm{Ker}\, T_pF) = 0 \iff \mathrm{Ker}\, T_pF = 0$

定義 4.15: 部分多様体

境界あり/なし C^∞ 多様体 $(M,\, \mathscr{O}_M)$ を与え[a], その極大アトラス $\mathcal{A}_M^+$ を 1 つ固定する．M の部分集合[b] $S \subset M$ を与える．

- S が M の境界あり/なし **C^∞ 部分多様体** (smooth submanifold) であるとは，S に位相[c] $\mathscr{O}_S$ が与えられていて位相空間 $(S,\, \mathscr{O}_S)$ が境界あり/なし位相多様体になっており，かつ位相多様体 $(S,\, \mathscr{O}_S)$ に C^∞ アトラス[d] $\mathcal{A}_S$ が与えられていて C^∞ 多様体になっていることを言う．
- 境界を持たない C^∞ 部分多様体 $(S,\, \mathscr{O}_S,\, \mathcal{A}_S)$ が M に**はめ込まれた C^∞ 部分多様体** (immersed submanifold) であるとは，C^∞ アトラス $\mathcal{A}_S$ に関して包含写像 $\iota\colon S \hookrightarrow M$ が C^∞ はめ込みになっていることを言う．

- 境界を持たない C^∞ 部分多様体 $(S, \mathscr{O}_S, \mathcal{A}_S)$ が M に**埋め込まれた C^∞ 部分多様体** (embedded submanifold) であるとは，位相 $\mathscr{O}_S$ が位相空間 $(M, \mathscr{O}_M)$ からの相対位相であり，かつ C^∞ アトラス $\mathcal{A}_S$ に関して包含写像 $\iota\colon S \hookrightarrow M$ が C^∞ 埋め込みになっていることを言う．

[a] $\mathscr{O}_M$ は M の位相
[b] この時点では S の位相を指定していない．
[c] 位相空間 $(M, \mathscr{O}_M)$ からの相対位相でなくても良い
[d] $\mathcal{A}_S \subset \mathcal{A}_M^+$ でなくても良い

M にはめ込まれた C^∞ 部分多様体 $(S, \mathscr{O}_S, \mathcal{A}_S)$ について，$\dim M - \dim S$ を S の**余次元** (codimension) と呼ぶ．

混乱の恐れがない場合，以下では C^∞ 部分多様体の位相と C^∞ アトラスを明示しない．また，特に断らずに部分多様体と言ったら C^∞ 部分多様体のことを指すものとする．

定義 4.16: スライスチャート

境界あり/なし C^∞ 多様体 M を与え，その極大アトラス $\mathcal{A}_M^+$ を 1 つ固定する．部分集合 $S \subset M$ を与える．

M のチャート $(U, \varphi) = \bigl(U, (x^\mu)\bigr) \in \mathcal{A}_M^+$ が **S に関する k-スライスチャート**であるとは，

$$\varphi(S \cap U) = \left\{\, (x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^{\dim M}) \in \varphi(U) \;\middle|\; x^{k+1}, \dots, x^{\dim M} \text{ は定数} \,\right\}$$

が成り立つ，i.e. $\varphi(S \cap U) \subset \mathbb{R}^{\dim M}$ が $\varphi(U)$ と k 次元超平面との共通部分になっていることを言う．

定理 4.8: スライスチャートによる埋め込まれた C^∞ 部分多様体の特徴付け

境界を持たない C^∞ 多様体 M を与え，その極大アトラス $\mathcal{A}_M^+$ を 1 つ固定する．部分集合 $S \subset M$ を与える．このとき，以下の 2 つが成り立つ．

(1) S が埋め込まれた C^∞ 部分多様体 $\implies$ $\forall p \in S$ に対して，p を含む S に関する $\dim S$-スライスチャート $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_M^+$ が存在する．

(2) $\forall p \in S$ に対して，p を含む S に関する k-スライスチャート $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_M^+$ が存在する． $\implies$ S は M からの相対位相によって k 次元の位相多様体になり，かつ S の C^∞ アトラス

$$\mathcal{A}_S := \left\{\, (S \cap U, \varphi|_{S \cap U}) \;\middle|\; (U, \varphi) \in \mathcal{A}_M^+ \text{ s.t. } S \text{ に関する } k\text{-スライスチャート} \,\right\}$$

が S に与える C^∞ 構造に関して S は M に埋め込まれた C^∞ 部分多様体になる．

証明 (1)

■

境界付き C^∞ 多様体 M の境界 ∂M に M からの相対位相を入れると $\dim M - 1$ 次元の境界を持たない位相多様体になることは命題??-(2) で見たが，その際は ∂M の C^∞ 構造については何も言及していなかった．ここまでの準備の下，∂M の C^∞ 構造を定めよう：

定理 4.9: 境界の C^∞ 構造

境界付き C^∞ 多様体 $(M, \mathscr{O}_M)$ を与え，その極大アトラス $\mathcal{A}_M^+$ を 1 つ固定する．このとき，M の境界 ∂M に M からの相対位相 $\mathscr{O}_{\partial M}$ を入れてできる $\dim M - 1$ 次元位相多様体 $(\partial M, \mathscr{O}_{\partial M})$ について以下が成り立つ：

(1) $(\partial M, \mathscr{O}_{\partial M})$ は

$$\mathcal{A}_{\partial M} \coloneqq \left\{ (\partial M \cap U, \varphi|_{\partial M \cap U}) \;\middle|\; (U, \varphi) \in \mathcal{A}_M^+ \text{ s.t. 境界チャート} \right\}$$

を C^∞ アトラスに持つ．

(2) C^∞ 多様体 $(\partial M, \mathscr{O}_{\partial M}, \mathcal{A}_{\partial M})$ は M に proper に[a]埋め込まれた C^∞ 部分多様体になる．

[a] つまり，包含写像 $\iota\colon \partial M \longrightarrow M$ による M の任意のコンパクト集合 $K \subset M$ の逆像 $\iota^{-1}(K) \subset \partial M$ がコンパクト

証明　(1)

■

4.6 微分形式の積分

4.6.1 パラコンパクト・1 の分割

定義 4.17: 局所有限

X を位相空間とし，$\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を X の被覆とする．$\forall x \in X$ において，x の近傍 V であって，V と交わる U_λ が有限個であるようなものが存在するとき，$\mathcal{U}$ は**局所有限** (locally finite) な被覆と呼ばれる．

X の**任意の開被覆**が局所有限な細分を持つとき，X は**パラコンパクト** (paracompact) であるという．この条件はコンパクトよりも弱い．次の定理は，全ての多様体（C^∞ 多様体だけでなく！）がパラコンパクトよりももう少し良い性質を持っていることを保証してくれる：

定理 4.10:

M を位相多様体とする．M の任意の開被覆に対して，その細分となる高々可算個の元からなる[a]局所有限な開被覆 $\mathcal{V} = \left\{ V_i \right\}_{i\in I}$ であって，$\overline{V_i}$ が全てコンパクトとなるものが存在する．
必要ならば，さらに強い条件を充たすようにできる．i.e. 開被覆を成す各 V_i 上にチャート (V_i, ψ_i) をとることができて，$\psi_i(V_i) = D(3)$ [b]かつ $\left\{ \psi_i^{-1}\big(D(1)\big) \right\}_{i\in I}$ が既に M の開被覆となっている．

[a] 添字集合 I の濃度 (cardinality) が $|I| \leq \aleph_0$.
[b] 半径 3 の開円板．記号の使い方は **??** を参照．

証明　[**?**, p.30, 命題 1.29]　■

位相空間 X の連続関数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ に対して，f の値が 0 にならない点全体の集合を含む最小の閉集合

$$\mathrm{supp} f \coloneqq \overline{\left\{ x \in X \mid f(x) \neq 0 \right\}}$$

を f の **台** (support) と呼ぶ．

定義 4.18: 1 の分割

- 境界なし/あり C^∞ 多様体 M
- M の開被覆 $\mathcal{U} \coloneqq \left\{ U_\lambda \right\}_{\lambda \in \Lambda}$

を与える．**$\mathcal{U}$ に従属する C^∞ 級の 1 の分割**[a] (smooth partition of unity subordinate to $\mathcal{U}$) とは，C^∞ 関数の族 $\left\{ \psi_\lambda \colon M \longrightarrow \mathbb{R} \right\}_{\lambda \in \Lambda}$ であって以下の条件を充たすもののこと：

(1) $\forall \lambda \in \Lambda,\ \forall p \in M$ に対して $\psi_\alpha(x) \in [0,\,1]$
(2) $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して $\mathrm{supp}\,\psi_\lambda \subset U_\lambda$
(3) M の部分集合族 $\left\{ \mathrm{supp}\,\psi_\lambda \right\}_{\lambda \in \Lambda}$ は局所有限である．i.e. $\forall p \in M$ に対してある開近傍 $p \in U_p \subset M$ が存在して，$\left\{ \lambda \in \Lambda \;\middle|\; U_p \cap \mathrm{supp}\,\psi_\lambda \neq \emptyset \right\} \subset \Lambda$ が有限集合になる．
(4) $\forall p \in M$ に対して[b] $\sum_{\lambda \in \Lambda} \psi_\lambda(p) = 1$

[a] 本資料では「C^∞ 級の」を省略する
[b] 条件 (3) により左辺の和は well-defined である．

命題 4.8: 1 の分割の存在

- 境界なし/あり C^∞ 多様体 M
- M の開被覆 $\mathcal{U} \coloneqq \left\{ U_\lambda \right\}_{\lambda \in \Lambda}$

を任意に与える．このとき，$\mathcal{U}$ に従属する 1 の分割が存在する．

<u>**証明**</u> かなり技術的なので省略する．例えば [?, Theorem 2.23] を参照． ■

この存在定理のおかげで，ある 1 つのチャート（したがって $\mathbb{R}^n,\ \mathbb{H}^n$）の上で定義した構造をアトラス全体にわたって「貼り合わせる」ことができる．したがって，しばしば $\mathbb{R}^n,\ \mathbb{H}^n$ の上でだけ考えれば十分である．

n 次元 C^∞ 多様体 M が向き付け可能としよう．

M のチャート $(U,\,\varphi) = (U;\ x^i)$ をとる．n-形式 $\omega \in \Omega^k(M)$ が

$$\omega \coloneqq h(p)\, \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$$

と座標表示されているとする．別のチャート $(V,\,\psi) = (V;\ y^i)$ をとったときの $U \cap V \neq \emptyset$ 上の ω は

$$\begin{aligned}
\omega &= h(p) \frac{\partial x^1}{\partial y^{j_1}}\, \mathrm{d}y^{j_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial x^n}{\partial y^{j_n}}\, \mathrm{d}y^{j_n} \\
&= h(p)\, \epsilon^{j_1 \cdots j_n} \frac{\partial x^1}{\partial y^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^n}{\partial y^{j_n}}\, \mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^n \\
&= h(p)\, \det\left(\frac{\partial x^k}{\partial y^l} \right) \mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^n
\end{aligned}$$

である．よって座標変換として Jacobian が正のものだけを考えれば，$\displaystyle\int \omega$ は既知の重積分の変数変換公式と整合的である．ここでM が向き付け可能であると言う仮定が効いてくるのである．

以上の考察から，n-形式 ω のチャート $(U_i;\, x^\mu)$ 上の積分を

$$\int_{U_i} \omega := \int_{\varphi(U_i)} h\big(\varphi_i^{-1}(x)\big)\, \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n$$

として定義できる．積分範囲を M に拡張するには 1 の分割を使う：

定義 4.19: n-形式の積分

$\omega \in \Omega^n(M)$ は台がコンパクトであるとする．また，M の座標近傍からなる開被覆 $\{U_i\}$ と，それに従属する 1 の分割 $\{f_i\}$ をとる．このとき ω の M 上の積分を次のように定義する：

$$\int_M \omega := \sum_i \int_{U_i} f_i \omega$$

命題 4.9:

定義 4.19 は座標近傍の開被覆 $\{U_i\}$ やそれに従属する 1 の分割 $\{f_i\}$ の取り方によらない．

4.7 ベクトル空間に値をとる微分形式

k-形式 $\omega \in \Omega^k(M)$ は $\forall p \in M$ において多重線型写像

$$\omega_p := T_pM \times \cdots \times T_pM \to \mathbb{K}$$

を対応させ，それが p に関して C^∞ 級につながっているものであった．ここで，値域 $\mathbb{K}$ を一般の $\mathbb{K}$-ベクトル空間 V に置き換えてみる：

$$\omega_p := T_pM \times \cdots \times T_pM \to V$$

このようなもの全体の集合を $\Omega^k(M;\, V)$ と書くことにする．V の基底を $\{\, \hat{e}_i \,\}_{1 \le i \le r}$ とおくと

$$\omega(X_1, \cdots, X_k) = \sum_{i=1}^r \omega_i(X_1, \cdots, X_k)\, \hat{e}_i, \quad \omega_i \in \Omega^k(M)$$

と展開できる．$\hat{e}_i$ は $A^\bullet(M)$ の演算と無関係である．

4.7.1 外微分

定義 4.5, 4.4 による外微分を $\{\, \hat{e}_i \,\}_{1 \le i \le r}$ による展開係数に適用するだけである：

$$\mathrm{d} : \Omega^k(M;\, V) \to \Omega^{k+1}(M;\, V),$$
$$\mathrm{d}\omega := \sum_{i=1}^r \mathrm{d}\omega_i\, \hat{e}_i$$

4.7.2 外積

外積をとった後の値域はテンソル積 $V \otimes W$ である：

$$\begin{aligned}&\wedge\colon \Omega^k(M;\, V) \times \Omega^l(M;\, W) \to \Omega^{k+l}(M;\, V \otimes W),\\&(\omega \wedge \eta)(X_1,\, \dots,\, X_{k+l}) \coloneqq \frac{1}{k!\,l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \operatorname{sgn}\sigma\, \omega\bigl(X_{\sigma(1)},\, \dots,\, X_{\sigma(k)}\bigr) \otimes \eta\bigl(X_{\sigma(k+1)},\, \dots,\, X_{\sigma(k+l)}\bigr)\end{aligned}$$

予め $\omega = \sum_{i=1}^{r} \omega_i \hat{e}_i$, $\eta = \sum_{i=1}^{s} \eta_i \hat{f}_i$ と展開しておくと

$$\omega \wedge \eta = \sum_{i,\,j} \omega_i \wedge \eta_j\, \hat{e}_i \otimes \hat{f}_j$$

と書ける．外微分は基底 $\{\, \hat{e}_i \otimes \hat{f}_j \,\}$ には作用しないので，命題 4.5-(2) はそのまま成り立つ：

$$\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) = \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{d}\eta$$

4.7.3 括弧積

双線型写像 $[\ ,\ ]\colon V \times V \to V$ が Lie 代数の公理を充してしているとする．このとき

$$\begin{aligned}&[\ ,\ ]\colon \Omega^k(M;\, V) \times \Omega^l(M;\, V) \xrightarrow{\wedge} \Omega^{k+l}(M;\, V \otimes V) \xrightarrow{[\ ,\ ]} \Omega^{k+l}(M;\, V),\\&[\omega, \eta] \coloneqq \sum_{i,\,j} \omega_i \wedge \eta_j [\hat{e}_i, \hat{e}_j]\end{aligned}$$

と定義する．命題 4.1-(1), 4.5-(2) から

$$\boxed{[\eta, \omega]} = \sum_{i,\,j} \eta_j \wedge \omega_i [\hat{e}_j, \hat{e}_i] = \sum_{i,\,j} (-1)^{kl} \omega_i \wedge \omega_j \cdot -[\hat{e}_i, \hat{e}_j] = \boxed{(-1)^{kl+1}[\omega, \eta]}$$

$$\boxed{\mathrm{d}[\omega, \eta]} = \sum_{i,\,j} \mathrm{d}\bigl(\omega_i \wedge \eta_j\bigr)\, [\hat{e}_i, \hat{e}_j] = \boxed{[\mathrm{d}\omega\,, \eta] + (-1)^k [\omega, \mathrm{d}\eta]}$$

がわかる．