第 6 章

ホモロジー・de Rham コホモロジー

6.1　多様体のホモロジー

X を位相空間とする．X の l 次元ホモロジー群 $H_l(X)$ とは，X 中の「l 次元のサイクル」と呼ばれる量が本質的に何個あるかを示すものである．ホモロジーの定義には何通りかあるが，一般に l 単体と呼ばれる単位に分割し（三角形分割），組み合わせ的な構造を利用して定義する．

6.1.1　単体・三角形分割

手始めに，まず l 単体を定義しよう．

定義 6.1: l-単体

$\mathbb{R}^N$ の $l+1$ 個の点 $v_0, v_1, \dots, v_l$ は，l 個のベクトル $v_i - v_0$ $(i = 1, \dots l)$ が線型独立のとき，**一般の位置にある**という．
一般の位置にある $l+1$ 個の点の集合 $\sigma = \{v_0, \dots, v_l\}$ に対して，それらの点を含む最小の凸集合

$$|\sigma| \coloneqq \left\{ a_0 v_0 + \cdots + a_l v_l \;\middle|\; a_i \geq 0,\, a_0 + \cdots + a_l = 1 \right\}$$

を **l-単体** (l-simplex) と呼ぶ．σ の空でない部分集合 $\tau \subset \sigma$ に対して，単体 $|\tau|$ のことを $|\sigma|$ の**辺** (face) と呼ぶ．

定義 6.2: 単体複体

$\mathbb{R}^N$ の中の単体の集合 K は, 次の条件を充たすとき (Euclid) **単体複体** (Euclidean simplicial complex) と呼ぶ：

(1) $|\sigma| \in K$ ならば $|\sigma|$ の任意の辺はまた K に属する．
(2) 二つの単体 $|\sigma|, |\tau| \in K$ が空でない共通部分を持つならば $|\sigma| \cap |\tau|$ は $|\sigma|$ と $|\tau|$ の共通の辺である．
(3) $\forall |\sigma| \in K$ の任意の点 $x \in |\sigma|$ に対して，x 開近傍 U を適切に取れば U と交わる K の単体は有限個しか存在しないようにできる．

定義 6.3: 多面体・三角形分割

単体複体 K に対して，集合

$$|K| \coloneqq \bigcup_{|\sigma| \in K} |\sigma|$$

を定める．$|K| \subset \mathbb{R}^N$ を**多面体** (polyhedron) と呼ぶ．
位相空間 X に対して適当な単体複体 K を選び，同相写像 $t\colon |K| \xrightarrow{\approx} X$ が与えられたとき，同相写像 t を X の**三角形分割** (triangulation) と呼ぶ．

6.1.2　ホモロジー群

定義 6.4: 単体の向き

l 単体 $|\sigma|$ の頂点 $\{v_0, \ldots, v_l\}$ の順序付き添字 $I = (i_0, \ldots, i_l)$ 全体の集合 $\mathcal{I}$ に以下の同値関係を定める：

$$\sim \coloneqq \left\{ (I, J) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I} \;\middle|\; \exists \tau \in \mathfrak{S}_{l+1} \text{ s.t. } \textbf{偶置換},\ I = \tau J \right\}$$

このとき，$I \in \mathcal{I}$ の $\sim$ による同値類 $[I]$ のことを単体 $|\sigma|$ の**向き** (orientation) と呼ぶ．
単体 $|\sigma|$ に向きが指定されているとき，σ の同値類を**向き付けられた単体**と呼び，$\langle \sigma \rangle$ と表す．頂点が $I = (i_0, \ldots, i_l)$ によって向き付けられているとき，対応する向き付けられた単体を $\langle v_{i_0} \cdots v_{i_l} \rangle$ と書く．

定義 6.5: l-chain

単体複体 $K = \{|\sigma|_i\}$ の各単体に向きを指定し，それぞれ $\langle \sigma_i \rangle$ とする．K の l-単体 $\langle \sigma_i \rangle_l$ 全体によって生成される自由加群を K の l **次元鎖群** $C_l(K)$ と呼び，$C_l(K)$ の元を l**-チェイン** と呼ぶ．

$\forall c \in C_l(K)$ は形式和として

$$c = \sum_{i \in I_l} c_i \langle \sigma_i \rangle_l \,, \quad c_i \in \mathbb{Z}$$

と書かれる．群 $C_l(K)$ の二項演算 $+$，単位元 0，逆元 $-c$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} c + c' &\coloneqq \sum_i (c_i + c'_i) \langle \sigma_i \rangle_l \,, \\ 0 &\coloneqq \sum_i 0 \langle \sigma_i \rangle_l \,, \\ -c &\coloneqq \sum_i (-c_i) \langle \sigma_i \rangle_l \end{aligned}$$

である．ただし，$\langle \sigma_i \rangle_l$ と反対に向き付けられた l 単体は $(-1) \langle \sigma_i \rangle_l \in C_l(K)$ と同一視する．このとき，自然に

$$C_l(K) \cong \bigoplus_{I_l} \mathbb{Z}$$

である．

定義 6.6: 境界作用素

準同型写像

$$\partial_l \colon C_l(K) \to C_{l-1}(K)$$

を向き付けられた各 l-単体上

$$\partial_l \langle v_0 v_1 \cdots v_l \rangle := \sum_{i=0}^{l} (-1)^i \langle v_0 \cdots \hat{v}_i \cdots v_l \rangle$$

と定義する．ただし，$\hat{v}_i$ は v_i を省くことを意味する．

命題 6.1: 境界の境界

$\partial_l \circ \partial_{l+1} = 0$

<u>**証明**</u> ∂_l は $C_l(K)$ 上の線型作用素なので生成元 $\sigma := \langle v_0 v_1 \cdots v_{l+1} \rangle \in C_{l+1}(K)$ に対して示せば十分．$l = 0$ のときは自明なので $l > 0$ とする．

$$\begin{aligned}
&\partial_l \circ \partial_{l+1} \sigma \\
&= \sum_{i=0}^{l+1} (-1)^i \partial_l \langle v_0 \cdots \hat{v}_i \cdots v_{l+1} \rangle \\
&= \sum_{i=0}^{l+1} (-1)^i \left(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \langle v_0 \cdots \hat{v}_j \cdots \hat{v}_i \cdots v_{l+1} \rangle + \sum_{j=i+1}^{l+1} (-1)^{j-1} \langle v_0 \cdots \hat{v}_i \cdots \hat{v}_j \cdots v_{l+1} \rangle \right) \\
&= \sum_{i>j} (-1)^{i+j} \langle v_0 \cdots \hat{v}_j \cdots \hat{v}_i \cdots v_{l+1} \rangle - \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \langle v_0 \cdots \hat{v}_i \cdots \hat{v}_j \cdots v_{l+1} \rangle = 0.
\end{aligned}$$

■

命題 6.1 より，

$$\begin{aligned}
Z_l(K) &:= \left\{ c \in C_l(K) \mid \partial_l c = 0 \right\} = \operatorname{Ker} \partial_l \\
B_l(K) &:= \left\{ \partial_{l+1} c \in C_l(K) \mid c \in C_{l+1}(K) \right\} = \operatorname{Im} \partial_{l+1}
\end{aligned}$$

とおくと

$$B_l(K) \subset Z_l(K)$$

となる．

! $Z_l(K)$ を l-**輪体群**もしくは**サイクル**，$B_l(K)$ を l-**境界輪体群**もしくは**バウンダリー**と呼ぶ．

定義 6.7: ホモロジー群

上で定義した $Z_l(K)$, $B_l(K)$ に対して，部分群の剰余類を考えることにより

$$H_l(K) \coloneqq Z_l(K)/B_l(K)$$

は商群を作る．これを K の l **次元ホモロジー群**と呼ぶ．

サイクル $c \in Z_l(K)$ を代表元にもつホモロジー類 $[c] \in H_l(K)$ に対して，別のサイクル $d \in Z_l(K)$ が $d \in [c]$ であるとき，i.e. $c - d \in B_l(K)$ であるとき，c, d は**ホモローグ** (homologue) であるという．

定理 6.1: ホモロジー群は位相不変量

ホモロジー群は位相不変量である．i.e. 位相空間 X, Y が互いに同相であるとし，それぞれの三角形分割 $f\colon |K| \xrightarrow{\approx} X$, $g\colon |L| \xrightarrow{\approx} Y$ を与える．このとき

$$H_l(K) \cong H_l(L) \quad (l = 0, 1, \dots)$$

が成り立つ．

6.2 de Rham コホモロジー

6.2.1 特異ホモロジー

定義 6.8: 標準 k-単体

$\mathbb{R}^k$ の部分集合

$$\Delta^k \coloneqq \left\{ (x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^k \;\middle|\; x^i \geq 0,\ x^1 + \cdots + x^k \leq 1 \right\}$$

は**標準 k-単体** (standard k-simplex) と呼ばれる．

定義 6.9: C^∞ 特異 k-単体

C^∞ 多様体 M に対して，任意の C^∞ 写像

$$\sigma\colon \Delta^k \to X$$

を X の C^∞ **特異 k 単体** (singular k-simplex) と呼ぶ．M の C^∞ 特異 k 単体全体によって生成される自由加群を $S_k(X)$ と書き，その元を M の C^∞ **特異 k-チェインと呼ぶ**．

定義 6.10: 境界作用素

$i = 0, \ldots, k$ に対して連続写像 $\varepsilon_i \colon \Delta^{k-1} \to \Delta^k$ を

$$\begin{aligned}\varepsilon_0(x_1, \ldots, x_{k-1}) &\coloneqq \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} x_i,\ x_1, \ldots, x_{k-1}\right), \\ \varepsilon_i(x_1, \ldots, x_{k-1}) &\coloneqq (x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, x_{k-1})\end{aligned}$$

と定義する．このとき，**境界作用素**

$$\partial \colon S_k(M) \to S_{k-1}(M)$$

を次のように定義する：

$$\partial\sigma \coloneqq \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \sigma \circ \varepsilon_i$$

サイクル $Z_k(M)$ および k-境界輪体群 $B_k(M)$ を

$$\begin{aligned}Z_k(M) &\coloneqq \operatorname{Ker} \partial_k \\ B_k(M) &\coloneqq \operatorname{Im} \partial_{k+1}\end{aligned}$$

と定めると，相変わらず $\partial \circ \partial = 0$ であるから $B_k(M) \subset Z_k(M)$ が従う．故に部分群の剰余類を考えることができる：

定義 6.11: 特異ホモロジー群

$B_k(M)$, $Z_k(M)$ に対して，商群

$$H_k(M) \coloneqq Z_k(M)/B_k(M)$$

を M の**特異ホモロジー群**と呼ぶ．

6.2.2 微分形式のチェイン積分と Stokes の定理

M を C^∞ 多様体，$S_\bullet(M) \coloneqq \{S_k(M), \partial\}$ を M の C^∞ 特異チェイン複体とする．
M の特異 k 単体

$$\sigma \colon \Delta^k \to M$$

は C^∞ 写像であるから，k-形式 $\omega \in \Omega^k(M)$ の引き戻し（命題**??**付近を参照）$\sigma^*\omega \in \Omega^k(\Delta^k)$ が定義される．

定義 6.12: 特異 k 単体上の積分

$\omega \in \Omega^k(M)$ の σ 上の積分を

$$\int_\sigma \omega := \int_{\Delta^k} \sigma^* \omega$$

により定義する．右辺はただの k-中積分である．
一般の C^∞ 特異 k-チェイン $c \in S_k(M)$ が $c = \sum_i a_i s_i$ と表示されているときは

$$\int_c \omega := \sum_i a_i \int_{\sigma_i} \omega$$

と定義する．

定理 6.2: チェイン上の Stokes の定理

C^∞ 多様体 M の特異 k-チェイン $c \in S_k(M)$ と $k-1$-形式 $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$ に対し，以下の等式が成立する：

$$\int_c \mathrm{d}\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

6.3 de Rham の定理

6.3.1 de Rham コホモロジー

定義 6.13: 閉形式・完全形式

k-形式 $\omega \in \Omega^k(M)$ は

- $\mathrm{d}\omega = 0$ のとき**閉形式** (closed form)
- $\exists \eta \in \Omega^{k-1}(M)$, $\omega = \mathrm{d}\eta$ のとき**完全形式** (exact form)

と呼ばれる．

M 上の閉じた k -形式全体を $Z^k(M)$ ，完全な k-形式全体を $B^k(M)$ と書く：

$$Z^k(M) := \mathrm{Ker}\big(\mathrm{d} : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)\big),$$
$$B^k(M) := \mathrm{Im}\big(\mathrm{d} : \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M)\big).$$

$\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$ なので，$B^k(M) \subset Z^k(M)$ である．

定義 6.14: de Rham コホモロジー群

$\Omega^k(M)$ の部分ベクトル空間 $B^k(M)$, $Z^k(M)$ に対して，商空間

$$H^k_{\mathrm{DR}}(M) \coloneqq Z^k(M)/B^k(M)$$

は M の k 次 **de Rham コホモロジー群**と呼ばれる．
k -形式 $\omega \in \Omega^k(M)$ に対し，それを代表元に持つ剰余類 $[\omega] \in H^k_{\mathrm{DR}}(M)$ を ω の表す **de Rham コホモロジー類**と呼ぶ．

$$H^\bullet_{\mathrm{DR}}(M) \coloneqq \bigoplus_{k=0}^{n} H^k_{\mathrm{DR}}(M)$$

を M の **de Rham コホモロジー群**と呼ぶ．

$x \in H^k_{\mathrm{DR}}(M)$, $y \in H^l_{\mathrm{DR}}(M)$ が $\omega \in \Omega^k(M)$, $\eta \in \Omega^l(M)$ によって $x = [\omega]$, $y = [\eta]$ と書かれるとき，$H^\bullet_{\mathrm{DR}}(M)$ 上の積 $\cdot : H^\bullet_{\mathrm{DR}}(M) \times H^\bullet_{\mathrm{DR}}(M) \to H^\bullet_{\mathrm{DR}}(M)$ を以下のように定義する：

$$x \cdot y \coloneqq [\omega \wedge \eta] \in H^{k+l}_{\mathrm{DR}}(M)$$

このとき二項演算 $\cdot$ は well-defined である，i.e. ω, η の取り方によらない．

上で定義した積構造の入った $\left(H^\bullet_{\mathrm{DR}}(M), \cdot\right)$ のことを M の **de Rham コホモロジー代数**と呼ぶ．

6.3.2 de Rham の定理

コホモロジー群とホモロジー群は，Stokes の定理によって双対性を持つ．

C^∞ 多様体 M および M の C^∞ 特異 r-チェイン $S_k(M)$ を与える. $\forall c \in S_k(M)$, $\forall \omega \in \Omega^k(M)$ $(1 \leq k \leq n)$ をとる．ここで双対内積 (duality pairing) を

$$\langle\ ,\ \rangle \colon S_k(M) \times \Omega^k(M) \to \mathbb{R},\ (c,\, \omega) \mapsto \int_c \omega$$

と定義する．このとき $\langle c, \omega\rangle$ は双線型であり，$\langle\ , \omega\rangle \colon S_k(M) \to \mathbb{R}$, $\langle c,\ \rangle \colon \Omega^k(M) \to \mathbb{R}$ はどちらも線型写像である：

$$\begin{aligned}
\langle c_1 + c_2,\, \omega\rangle &= \int_{c_1+c_2} \omega = \int_{c_1} \omega + \int_{c_2} \omega = \langle c_1,\, \omega\rangle + \langle c_2,\, \omega\rangle \\
\langle c,\, \omega_1 + \omega_2\rangle &= \int_c (\omega_1 + \omega_2) = \int_c \omega_1 + \int_c \omega_2 = \langle c,\, \omega_1\rangle + \langle c,\, \omega_2\rangle
\end{aligned}$$

Stokes の定理は

$$\langle c,\, \mathrm{d}\omega\rangle = \langle \partial c,\, \omega\rangle$$

と書かれ，この意味で d と ∂ は互いに随伴写像である．

duality pairing $\langle\ ,\ \rangle$ は内積 $\Lambda \colon H_k(M) \times H^k_{\mathrm{DR}}(M) \to \mathbb{R}$ を誘導する．それは以下のように定義される：

$$\Lambda\big([c],\, [\omega]\big) \coloneqq \langle c,\, \mathrm{d}\omega\rangle$$

定義 6.3.2 は well-defined である．

定理 6.3: Poincaré 双対

M がコンパクトな C^∞ 多様体ならば $H_k(M)$, $H^k_{\mathrm{DR}}(M)$ はともに有限次元である．さらに写像

$$\Lambda\colon H_k(M) \times H^k_{\mathrm{DR}}(M) \to \mathbb{R}$$

は双線型かつ非退化である．i.e. $H_r(M) = \left(H^k_{\mathrm{DR}}(M)\right)^*$（双対ベクトル空間）である．

補題 6.1: Poincaré の補題

$\mathbb{R}^n$ の de Rham コホモロジーは自明である：

$$H^k_{\mathrm{DR}}(\mathbb{R}^n) = H^k_{\mathrm{DR}}(\text{一点 } p_0 \in \mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & : k = 0 \\ 0 & : k > 0 \end{cases}$$

i.e. $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R})$ を任意の閉形式とすると，ある $k-1$ 形式 η が存在して $\omega = \mathrm{d}\eta$ を充たす．