微分幾何学 ノート

高間俊至

2023 年 5 月 12 日
最終更新：2024 年 1 月 11 日

0.0　前書き

本資料は，物理学科の有志で 2022 年 8, 9 月に行った [7]，[2] の輪読ゼミの記録をベースとし，その上に筆者が主に [4] を読んで重要だと感じた事項を加筆した形になっている．数理物理班の他の解説記事に現れる微分幾何学の用語の辞書として使えると思う．本文中にはたまに圏[*1]が登場するが，思考の整理の道具としてしか使っていないので興味のない場合は無視しても問題はない．圏論については [1]，[3] を大いに参考にした．

執筆に際して，物理学の様々な場面で現れる微分幾何学の諸概念を系統的かつできるだけ行間がないように纏めることを目標にしたが，時間と筆者の実力の不足によって，2023 年 5 月の時点では中途半端な内容になってしまった．特に，具体例をほとんど紹介できなかったことと，4 章以降から先に未完成な部分が多くなってしまったことを謝りたい．これらの問題点については後日更新したいと考えている．また，できるだけ正確な記述を試みたが，微分幾何学の専門家の検閲を介しておらず重大な誤りが含まれている可能性があるのでご了承いただきたい．

表 1: 更新履歴

更新日時	更新内容
2023/5/18	定義 3.2 と，命題 3.10 の直前の式の誤植を訂正

[*1] なお，本文中のこの色の箇所は相互参照が付けられており，クリックすることで該当する定義，定理などにジャンプすることができる．

目次

第 1 章　位相空間からの出発 7

1.1　同値類による類別 7

1.2　位相空間 9

1.2.1　位相の構成 9

1.2.2　内部・境界 12

1.2.3　相対位相・積位相・商位相 14

1.2.4　距離空間 15

1.2.5　位相空間の分類 17

1.3　連続写像・同相 18

1.4　コンパクト性 20

1.5　連結性 21

第 2 章　多様体 24

2.1　位相多様体 24

2.1.1　定義 24

2.1.2　アトラス 26

2.2　C^∞ 多様体 31

2.2.1　C^∞ 構造 31

2.2.2　複素多様体・および Lie 群の定義 39

2.3　境界付き多様体 41

2.4　C^∞ 写像 44

2.4.1　微分同相 47

2.5　多様体の圏 47

第 3 章　接空間・余接空間 49

3.1　代数的準備 49

3.1.1　ベクトル空間の圏 50

3.1.2　双対ベクトル空間 52

3.1.3　ベクトル空間のテンソル積 56

3.1.4　多元環 63

3.2　接空間 64

3.2.1　$\mathbb{R}^n$ の接空間 65

3.2.2 C^∞ 多様体の接空間 66
3.3 C^∞ 写像の微分 68
3.3.1 接空間の性質 70
3.4 座標表示 72
3.4.1 接ベクトルの表示 72
3.4.2 微分の座標表示 74
3.4.3 座標変換の座標表示 75
3.4.4 曲線の速度ベクトルとしての接ベクトル 76
3.5 接束 78
3.6 ベクトル場 79
3.6.1 ベクトル場の微分としての特徴付け 80
3.7 余接空間 80
3.7.1 余接空間の基底 81
3.7.2 座標表示 81
3.8 C^∞ 多様体上のテンソル 82
3.8.1 テンソルの作用 82
3.8.2 成分表示の変換則 83
3.8.3 テンソル場 83

第 4 章 微分形式 85
4.1 外積代数 85
4.2 交代形式 86
4.3 C^∞ 多様体上の微分形式 89
4.4 微分形式の演算 90
4.4.1 外積 90
4.4.2 外微分 91
4.4.3 引き戻し 93
4.4.4 内部積と Lie 微分 94
4.5 微分形式の積分 98
4.5.1 パラコンパクト・1 の分割 98
4.5.2 多様体の向き付け 99
4.5.3 n 次元多様体上の n 形式の積分 100
4.6 ベクトル空間に値をとる微分形式 101
4.6.1 外微分 101
4.6.2 外積 101
4.6.3 括弧積 102

第 5 章 Hodge 作用素と Laplacian 103
5.1 内積と随伴 103
5.1.1 内積 103

5.1.2 随伴 . . . 104
5.2 Riemann 計量 . . . 105
5.3 k-形式の内積 . . . 105
5.3.1 計量に誘導される同型写像 . . . 106
5.3.2 共役計量に誘導される同型写像 . . . 106
5.3.3 k-形式の内積 . . . 108
5.4 Hodge $\star$ . . . 109
5.4.1 双対基底への作用 . . . 113
5.5 ラプラシアンと調和形式 . . . 114
5.5.1 随伴外微分作用素 . . . 114
5.5.2 Laplacian . . . 115
5.5.3 Hodge の定理 . . . 116

第 6 章 ホモロジー・de Rham コホモロジーの紹介 117
6.1 多様体のホモロジー . . . 117
6.1.1 単体・三角形分割 . . . 117
6.1.2 ホモロジー群 . . . 118
6.2 de Rham コホモロジー . . . 120
6.2.1 特異ホモロジー . . . 120
6.2.2 微分形式のチェイン積分と Stokes の定理 . . . 121
6.3 de Rham の定理 . . . 122
6.3.1 de Rham コホモロジー . . . 122
6.3.2 de Rham の定理 . . . 123

第 7 章 Riemann 幾何学の紹介 125
7.1 多脚場 . . . 125
7.2 接続形式・曲率形式 . . . 126
7.2.1 接束の接続・曲率 . . . 126
7.2.2 微分形式による ∇, R の局所表示 . . . 128
7.3 Levi-Civita 接続 . . . 130
7.4 接続係数による定式化 . . . 132
7.4.1 テンソル場の共変微分 . . . 133
7.4.2 曲線に沿った共変微分 . . . 134
7.4.3 測地線 . . . 135

第 8 章 複素多様体の紹介 136
8.1 複素化の概要 . . . 137
8.1.1 Dolbeault 作用素 . . . 138
8.1.2 概複素構造 . . . 139
8.1.3 Kähler 多様体 . . . 139

第 9 章　ファイバー束　141
9.1　定義の精密化　142
9.1.1　ファイバー束の同型　143
9.1.2　切断　144
9.2　変換関数　144
9.2.1　構造群　147
9.2.2　構造の類別　147
9.3　G-束　149
9.3.1　同伴束　150
9.3.2　誘導束　150
9.4　主束　151
9.5　ベクトル束　153
9.5.1　局所フレーム　154
9.5.2　切断のなすベクトル空間　154
9.5.3　ベクトル束の計量　155
9.6　ベクトル束の構成法　155
9.6.1　部分束　155
9.6.2　商束　156
9.6.3　Whitney 和　157
9.6.4　双対束　157
9.6.5　テンソル積束　158

付録 A　集合と位相のあれこれ　159
A.1　位相空間の圏　160
A.1.1　始対象と終対象　162
A.1.2　積と和　164
A.1.3　等化子と余等化子　170
A.1.4　引き戻しと押し出し　174
A.1.5　双対性　180
A.1.6　極限と余極限　182

付録 B　多様体のあれこれ　194
B.1　位相多様体の性質　194
B.2　微分構造の構成　195
B.3　部分多様体　197
B.3.1　誘導計量　198
B.4　隅付き多様体　199
B.5　力学系としての多様体　199

付録 C　代数学のあれこれ　200
C.1　群の準同型　201

C.1.1 定義 . . . 201
C.1.2 核と像 . . . 202
C.1.3 剰余類 . . . 203
C.1.4 両側剰余類 . . . 205
C.1.5 正規部分群 . . . 206
C.1.6 直積・半直積 . . . 208
C.1.7 準同型定理 . . . 211
C.2 群の作用 . . . 214
C.2.1 種々の作用 . . . 215
C.2.2 群の作用に関する諸定義 . . . 215
C.3 環 . . . 217
C.3.1 部分環 . . . 218
C.3.2 イデアル . . . 220
C.3.3 準同型定理 . . . 222
C.3.4 環の直積 . . . 223
C.3.5 中国式剰余定理 . . . 223
C.4 加群 . . . 226
C.4.1 加群の生成 . . . 228
C.4.2 加群の準同型 . . . 229
C.4.3 剰余加群 . . . 230
C.4.4 準同型定理 . . . 232
C.5 直積・直和・自由加群 . . . 233
C.5.1 普遍性 . . . 234
C.5.2 自由加群 . . . 238
C.6 ベクトル空間 . . . 239
C.6.1 階数・退化次数の定理 . . . 240
C.6.2 分裂補題と射影的加群 . . . 242

付録 D 小技集 247
D.1 集合と写像の関係 . . . 247
D.2 C^∞ 関数の構成 . . . 251

参考文献 253

第 1 章

位相空間からの出発

1.1　同値類による類別

集合 X の二項関係 (binary relation) $\sim$ とは，直積集合 $X \times X$ の**部分集合**である．i.e. $\sim \subset X \times X$．$(a, b) \in X \times X$ が $(a, b) \in \sim$ を充たすことを $a \sim b$ と表す．

公理 1.1: 同値関係

集合 X の関係 $\sim$ が**同値関係** (equivalence relation) であるとは，X の任意の元 a, b, c に対して以下が成立することを言う：

反射律 (reflexive)　$a \sim a$
対称律 (symmetric)　$a \sim b \implies b \sim a$
推移律 (transitive)　$a \sim b$ かつ $b \sim c \implies a \sim c$

定義 1.1: 同値類

$a \in X$ の**同値類**を以下のように定義する：

$$[a] := \{\, x \in X \mid x \sim a \,\}$$

$[a]$ を $C(a)$ などと書くこともある．今回は $[a]$ を採用する．

命題 1.1: 同値関係の性質

同値類 $[a], [b] \subset X$ は以下を充たす：

(1) $a \in [a]$
(2) $a \sim b \iff [a] = [b]$
(3) $[a] \neq [b] \implies [a] \cap [b] = \emptyset$

証明　(1) 同値関係の反射律より自明．

(2) ($\Longrightarrow$) $a \sim b$ ならば，同値関係の推移律より $\forall x \in [a]$ に対して $x \sim b$ が成立する．i.e. $[a] \subset [b]$ であ

る．同値関係の対称率より $\forall y \in [b]$ に対しても同様に $y \sim a$ であり，$[a] \supseteq [b]$ である．従って $[a] = [b]$ である．

($\Longleftarrow$) $[a] = [b]$ ならば，$\forall x \in [a]$ に対して $x \sim b$ かつ $x \sim a$ が成り立つ．故に同値関係の推移率より $a \sim b$ である．

(3) 対偶を示す．$[a] \cap [b] \neq \emptyset$ ならばある $x \in X$ が存在して $x \sim a$ かつ $x \sim b$ を充たす．故に同値関係の推移律から $a \sim b$ である．よって **(2)** から，$[a] = [b]$ である．

■

命題 1.1 より，集合 X は異なる同値類による**非交和** (disjoint union) として表される．このことを，X が同値関係 $\sim$ によって**類別**されたと言う．

定義 1.2: 商集合・標準射影

集合 X の上に同値関係 $\sim$ を与える．

(1) X の**商集合** (quotient set) を以下のように定義する：

$$X/{\sim} := \{\, [x] \subset X \mid x \in X \,\}$$

(2) X の**標準射影**[a] (canonical projection) π を以下のように定義する：

$$\pi\colon X \to X/{\sim},\ x \mapsto [x]$$

[a] **商写像** (quotient mapping), **自然な全射** (natural surjection) など様々な呼び方がある．その名の通り π は全射である．全射性を表すために $\pi\colon X \twoheadrightarrow X/{\sim}$ と書くこともある．

$C \in X/{\sim}$ に対して $x \in C$ となる X の元 x を[*1]，同値類 C の**代表元** (representative) と呼ぶ．$X/{\sim}$ の異なる同値類の代表元をちょうど一つずつ含む部分集合 $R \subset X$ のことを同値関係 $\sim$ の**完全代表系**と呼ぶ．同値関係 $\sim$ による X の類別は，完全代表系 R を用いて

$$X = \coprod_{x \in R} [x]$$

と表記される．これは集合の直和と呼ばれるものの一例である．

[*1] 当たり前だが，このとき $C = [x]$ である

1.2 位相空間

位相空間論については [9, 第 2 章], [6] を参考にした．

公理 1.2: 位相空間の公理

集合 $X \neq \emptyset$ の部分集合族 $\mathscr{O} \subset 2^X$ が[a]次の 3 条件を充たすとき，$\mathscr{O}$ を X の**位相** (topology) と呼ぶ：

(O1) $X \in \mathscr{O}$, $\emptyset \in \mathscr{O}$.

(O2) $1 \leq n < \infty$ のとき，以下が成立する：

$$U_1, U_2, \dots, U_n \in \mathscr{O}. \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathscr{O}.$$

(O3) 任意の添字集合 Λ に対して以下が成立する：

$$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathscr{O}. \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathscr{O}.$$

[a] X の**冪集合** (power set) 2^X とは，X の部分集合全体の集合である．$\mathscr{P}(X)$ などと書くこともある．

定義 1.3: 位相空間・開集合・閉集合

集合 $X \neq \emptyset$ が位相 $\mathscr{O}$ を持つとき，組 $(X, \mathscr{O})$ のことを**位相空間** (topological space) と呼ぶ．また，位相 $\mathscr{O}$ の元のことを**開集合**と呼ぶ．
X の部分集合 U が**閉集合**であるとは，その補集合 U^c が開集合であることを言う．

1.2.1 位相の構成

ある集合 X とその部分集合族 $\mathscr{B} \subset 2^X$ が与えられたとき，$\mathscr{B}$ を素材にして X の上の位相を構成する方法があると便利である．定理 1.2 はこの様な構成が可能になる十分条件を与えてくれる．

定義 1.4: 開基

$(X, \mathscr{O})$ を位相空間とし，$\mathscr{B} \subset \mathscr{O}$ とする．$\mathscr{B}$ が位相 $\mathscr{O}$ の**開基** (open base) であるとは，任意の $U \in \mathscr{O}$ が $\mathscr{B}$ の元の和集合として表されることを言う．

命題 1.2:

$\mathscr{B} \subset \mathscr{O}$ が位相空間 $(X, \mathscr{O})$ の開基である必要十分条件は

$$\forall U \in \mathscr{O}, \forall x \in U, \exists B \in \mathscr{B}, \ x \in B \subset U$$

が成立することである．

証明 $(\Longrightarrow)$ $\mathscr{B}$ を $(X, \mathscr{O})$ の開基とすると，任意の $U \in \mathscr{O}$ に対して $\mathscr{B}$ の部分集合 $\{V_\lambda \in \mathscr{B} \mid \lambda \in \Lambda\}$ が

存在して

$$U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$$

と書ける．このとき，任意の $x \in U$ に対してある $\mu \in \Lambda$ が存在して $x \in V_\mu \subset U$ を充たす．

($\Longleftarrow$) 逆に $\forall U \in \mathscr{O}, \forall x \in U, \exists B \in \mathscr{B}, x \in B \subset U$ であるとする．任意の $U \in \mathscr{O}$ および $\forall x \in U$ に対して $B(x) := B$ とおくと，$B(x) \subset U$ だから $\bigcup_{x \in U} B(x) \subset U$ である．一方

$$\forall y \in U,\, y \in B(y) \subset \bigcup_{x \in U} B(x)$$

より $\bigcup_{x \in U} B(x) \supseteq U$ であり，結局 $U = \bigcup_{x \in U} B(x), \quad B(x) \in \mathscr{B}$ である．i.e. $\mathscr{B}$ は $(X, \mathscr{O})$ の開基である． ■

定理 1.1: 開基の公理

$(X, \mathscr{O})$ を位相空間とする．開基 $\mathscr{B} \subset \mathscr{O}$ は以下の性質を充たす：

(B1) $\displaystyle\bigcup_{B \in \mathscr{B}} B = X$

(B2) $\forall B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ をとってきたとき，$\forall x \in B_1 \cap B_2$ に対して $\exists B \in \mathscr{B}, x \in B$ かつ $B \subset B_1 \cap B_2$ が成り立つ．

<u>証明</u> **(B1)** $\bigcup_{B \in \mathscr{B}} B \subset X$ は自明．$X \in \mathscr{O}$ より，開基の定義から $\bigcup_{B \in \mathscr{B}} B \supseteq X$ も成り立つ．

(B2) 公理 1.2-**(B2)** より $B_1 \cap B_2 \in \mathscr{O}$ である．よって命題 1.2 から $\forall x \in B_1 \cap B_2$ に対して $x \in B \subset B_1 \cap B_2$ を充たす B が存在する．

■

定理 1.2: 開基から構成される位相

集合 X の部分集合族 $\mathscr{B} \subset 2^X$ が開基の公理 **(B1)**, **(B2)** を充たすとき，$\mathscr{B}$ を開基とするような X 上の位相 $\mathscr{O}$ が存在する．

<u>証明</u> $\mathscr{O}$ を $\mathscr{B}$ の任意の元の和集合全体が作る集合族とする．このとき $\mathscr{O}$ が公理 1.2 を充たすことを確認する．

(O1) **(B1)** より明らか．

(O3) $\mathscr{O}$ の構成より明らか．

(O2) 帰納法から，$n = 2$ の場合を示せば十分である．任意の $U, V \in \mathscr{O}$ をとると，$\mathscr{O}$ の定義から

$$U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_1} B_\lambda, \quad V = \bigcup_{\mu \in \Lambda_2} B_\mu \quad (B_\lambda, B_\mu \in \mathscr{B})$$

と書ける．このとき $\cap$ の分配律から

$$U \cap V = \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda_1} B_\lambda \right) \cap \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda_2} B_\mu \right) = \bigcup_{(\lambda, \mu) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} B_\lambda \cap B_\mu$$

が成り立つ．公理 1.2-**(O3)** より，$\forall (\lambda, \mu) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2$ に対して $B_\lambda \cap B_\mu \in \mathscr{O}$ が成り立つことを示せば $U \cap V \in \mathscr{O}$ が言えて証明が完了する．

$\forall(\lambda, \mu) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2$ を 1 つとる．**(B2)** より，$B_\lambda \cap B_\mu$ の各点 $x \in B_\lambda \cap B_\mu$ に対してある $B(x) \in \mathscr{B}$ が存在して $x \in B(x) \subset B_\lambda \cap B_\mu$ が成り立つ．このとき

$$B_\lambda \cap B_\mu = \bigcup_{x \in B_\lambda \cap B_\mu} B(x)$$

が成り立つので，$\mathscr{O}$ の構成より $B_\mu \cap B_\lambda \in \mathscr{O}$ が示された．

■

定義 1.5: 第 2 可算公理

位相空間 $(X, \mathscr{O})$ が高々可算濃度の開基を少なくとも 1 つ持つとき，位相空間 X は**第 2 可算公理**を充たすと言う．また，このような位相空間 X のことを**第 2 可算空間** (second-countable space) と呼ぶ．

定義 1.6: 近傍・開近傍

$(X, \mathscr{O})$ を位相空間とする．X の部分集合 V が点 $x \in X$ の**近傍** (neighborhood) であるとは，以下が成立することを言う：

$$\exists U \in \mathscr{O},\ x \in U \text{ かつ } U \subset V.$$

とくに $V \in \mathscr{O}$ であるときは**開近傍**と呼ぶ．

以降では，部分集合 $U \subset X$ が点 $x \in X$ の近傍であることを $x \in U \subset X$ と表記する場合がある．

命題 1.3: 開集合の特徴付け

$(X, \mathscr{O})$ を位相空間とする．X の空でない部分集合 U が開集合である必要十分条件は，$\forall x \in U$ に対して U に含まれる x の近傍が存在することである．

<u>**証明**</u> $(\Longrightarrow)$ $U \subset X$ が開集合である，i.e. $U \in \mathscr{O}$ のとき，U 自身が $\forall x \in U$ の開近傍である．

$(\Longleftarrow)$ $\forall x \in U$ を一つとる．x の U に含まれる近傍を $V(x)$ と書くと，近傍の定義から $W(x) \in \mathscr{O}$ が存在して $x \in W(x) \subset V(x)$ を充たす．$V(x) \subset U$ だから x を動かすことで $\bigcup_{x \in U} W(x) = U$ とわかる． ■

定義 1.7: 基本近傍系

$(X, \mathscr{O})$ を位相空間とし，点 $x \in X$ の近傍全ての集合を $\mathscr{V}(x)$ と書く，部分集合 $\mathscr{V}_0(x) \subset \mathscr{V}(x)$ が x の**基本近傍系**であるとは，以下が成立することを言う：

$$\forall V \in \mathscr{V}(x),\ \exists V_0 \in \mathscr{V}_0(x),\ V_0 \subset V.$$

定義 1.8: 第 1 可算公理

位相空間 $(X, \mathscr{O})$ の各点が高々可算濃度の基本近傍系を持つとき，位相空間 X は**第 1 可算公理**を充たすと言う．また，このような位相空間 X のことを**第 1 可算空間** (first-countable space) と呼ぶ．

1.2.2　内部・境界

命題 1.4: 閉包

$(X, \mathscr{O})$ を位相空間とする．X の任意の部分集合 A に対して，A を含む最小の閉集合 $\overline{A}$ が存在する．$\overline{A}$ を A の**閉包**と呼ぶ．

証明 公理 1.2-**(O3)** より，任意個の閉集合の共通部分は閉集合である．また，$X^c = \emptyset \in \mathscr{O}$ なので X 自身は閉集合であり，$A \subset X$ が成り立つ．i.e. A を含む閉集合が存在する．従って $\overline{A}$ は A を含む全ての閉集合の共通部分とすればよい． ■

定理 1.3: 閉包の特徴付け

$(X, \mathscr{O})$ を位相空間とし，$\forall x \in X$ の基本近傍系 $\mathscr{V}_0(x)$ を与える．X の任意の部分集合 A に対して以下が成り立つ：

$$x \in \overline{A} \iff \forall V \in \mathscr{V}_0(x),\ A \cap V \neq \emptyset$$

証明 両辺の否定が同値であることを示す．

$$\begin{aligned} p \notin \overline{A} &\iff \exists F \text{ s.t. } F^c \in \mathscr{O},\ A \subset F \text{ かつ } p \notin F \\ &\iff \exists U \in \mathscr{O},\ A \cap U = \emptyset \text{ かつ } p \in U \\ &\iff \exists V \in \mathscr{V}_0(x),\ A \cap V = \emptyset \end{aligned}$$

■

定義 1.9: 集積点・境界点・内部

$(X, \mathscr{O})$ を位相空間とする．$\forall x \in X$ および $\forall A \subset X$ を一つとり，点 x の近傍全体の成す集合を $\mathscr{V}(x)$ とおく．

(1) x が A の**集積点** (accumulation point)

$$\overset{\text{def}}{\iff} \forall V \in \mathscr{V}(x),\ V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

(2) x が A の**境界点** (boundary point)

$$\overset{\text{def}}{\iff} \forall V \in \mathscr{V}(x),\ V \cap A \neq \emptyset \text{ かつ } V \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$$

(3) x が A の**内点** (interior point)

$$\overset{\text{def}}{\iff} \exists V \in \mathscr{V}(x),\ V \subset A$$

定義 1.10: 境界・内部

(1) A の集積点全体の集合を**導集合** (derived set) と呼び，A^d と書く．

(2) A の境界点全体の集合を**境界** (boundary) と呼び，∂A と書く．

(3) A の内点全体の集合を**内部** (interior) と呼び，$\mathrm{Int}(A)$ と書く．

後の章で述べるが，これらは多様体の内部・境界とは異なる概念である．

定理 1.4: 境界・内部の特徴付け

位相空間 $(X, \mathscr{O})$ の任意の部分集合 A をとる．

(1) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$

(2) $\mathrm{Int}(A) = \displaystyle\bigcup_{\substack{U \in \mathscr{O}, \\ U \subset A}} U$

(3) $\mathrm{Int}(A) = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$

(4) $\partial A = \overline{A} \setminus \mathrm{Int}(A)$

<u>**証明**</u> (1) 境界点の定義 1.9-(2) および定理 1.3 より明らか．

(2) 内点の定義 1.9-(3) および定理 1.3 より明らか．

(3) de Morgan 則と (2) を使うと

$$X \setminus \mathrm{Int}(A) = \left(\bigcup_{\substack{U \in \mathscr{O}, \\ U \subset A}} U \right)^c = \bigcap_{\substack{U \in \mathscr{O}, \\ U \subset A}} U^c = \bigcap_{\substack{F \text{ s.t. closed}, \\ F \supset X \setminus A}} F = \overline{X \setminus A}.$$

がわかるので，両辺の補集合をとって $\mathrm{Int}(A) = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$ を得る．

(4) (1), (3) から従う．

■

定理 1.4-(1) より，∂A は閉集合である．閉集合ならば自身の境界を含むので

$$\boxed{\partial A \supset \partial\partial A}$$

が言える．さらに定理 1.4 を全て活用すると

$$\begin{aligned}
\boxed{\partial\partial\partial A} &= \overline{\partial\partial A} \setminus \mathrm{Int}(\partial\partial A) = \partial\partial A \cap \left(\mathrm{Int}(\partial\partial A)\right)^c \quad (\because \partial\partial A \text{ は閉集合}) \\
&= \partial\partial A \cap \left(\mathrm{Int}\left(\partial A \cap \left(\mathrm{Int}(\partial A)\right)^c\right)\right)^c \\
&= \partial\partial A \cap \left(\mathrm{Int}(\partial A) \cap \mathrm{Int}\left(\left(\mathrm{Int}(\partial A)\right)^c\right)\right)^c \\
&= \partial\partial A \cap \left(\mathrm{Int}(\partial A) \cap X \setminus \overline{\left(X \setminus \left(\mathrm{Int}(\partial A)\right)^c\right)}\right)^c \\
&= \partial\partial A \cap \left(\mathrm{Int}(\partial A) \cap X \setminus \overline{\mathrm{Int}(\partial A)}\right)^c \\
&= \partial\partial A \cap \emptyset^c = \boxed{\partial\partial A}
\end{aligned}$$

がわかる．

1.2.3　相対位相・積位相・商位相

定義 1.11: 相対位相

位相空間 $(X, \mathscr{O})$ を与える．X の部分集合 $Y \subset X$ に対して

$$\mathscr{O}_Y := \left\{ U \cap Y \mid U \in \mathscr{O} \right\}$$

は Y 上の位相を定める．$\mathscr{O}_Y$ を**相対位相** (relative topology) と呼び，位相空間 $(Y, \mathscr{O}_Y)$ を**部分空間** (topological subspace) と呼ぶ．

証明　$\mathscr{O}_Y$ が公理 1.2 を充たすことを確認しておく．

(O1)　$Y = X \cap Y \in \mathscr{O}$, $\emptyset = \emptyset \cap Y \in \mathscr{O}$

(O2)　$\bigcap_{i=1}^n (U_i \cap Y) = (\bigcap_{i=1}^n U_i) \cap Y$ より従う．

(O3)　$\cap$ の分配律 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \cap Y = \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda\right) \cap Y$ より従う．

■

次に，有限個の位相空間から新しい位相空間を作る方法として積位相を導入する．無限個の位相空間の積位相については触れない．

定義 1.12: 積位相

2 つの位相空間 $(X, \mathscr{O}_X)$, $(Y, \mathscr{O}_Y)$ を与える．直積集合 $X \times Y$ の上に

$$\mathscr{B}_{X\times Y} := \left\{ U \times V \subset X \times Y \mid U \in \mathscr{O}_X,\ V \in \mathscr{O}_Y \right\}$$

を開基とする位相 $\mathscr{O}_{X\times Y}$ が定まる．$\mathscr{O}_{X\times Y}$ を**積位相** (product topology)，位相空間 $(X \times Y, \mathscr{O}_{X\times Y})$ を**積空間** (product space) と呼ぶ．

証明 定理 1.2 より，$\mathscr{B}_{X\times Y}$ が開基の公理 1.1 を満たしていることを確認すれば良い．

(B1) 自明

(B2) 任意の $B_1, B_2 \in \mathscr{B}_{X\times Y}$ をとる．このとき $U_i \in \mathscr{O}_X, V_i \in \mathscr{O}_Y$ $(i = 1, 2)$ が存在して $B_i = U_i \times V_i$ と書ける．従って $B_1 \cap B_2 = (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$ であり，公理 1.2-**(O2)** より $B_1 \cap B_2 \in \mathscr{B}_{X\times Y}$ とわかる．

■

開基の定義 1.4 から，積空間 $(X \times Y, \mathscr{O}_{X\times Y})$ の任意の開集合，i.e. 積位相 $\mathscr{O}_{X\times Y}$ の任意の元は，Λ を任意の添字集合として

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \times V_\lambda, \quad U_\lambda \in \mathscr{O}_X, V_\lambda \in \mathscr{O}_Y$$

と書ける．

定義 1.13: 商位相

位相空間 $(X, \mathscr{O})$ と X 上の同値関係 $\sim$ を与える．$\pi\colon X \twoheadrightarrow X/\sim$ を標準射影とする．商集合 $X/\sim$ の上に

$$\mathscr{O}_{X/\sim} := \left\{ U \subset X/\sim \,\middle|\, \pi^{-1}(U) \in \mathscr{O} \right\}$$

なる位相が定まる．$\mathscr{O}_{X/\sim}$ を**商位相** (quotient topology) と呼び，位相空間 $(X/\sim, \mathscr{O}_{X/\sim})$ を**商空間** (quotient space) と呼ぶ[a]．

[a] **等化空間** (identification space) と言うこともあるらしい．

証明 $\mathscr{O}_{X/\sim}$ が公理 1.2 を充たすことを確認する．

(O1) 自明.

(O2) 任意の $U_1, \dots, U_n \in \mathscr{O}_{X/\sim}$ をとる．このとき $\pi^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^n U_i\right) = \bigcap_{i=1}^n \pi^{-1}(U_i) \in \mathscr{O}$ である．

(O3) 任意の添字集合 Λ に関して，集合族 $\left\{ U_\lambda \right\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathscr{O}_{X/\sim}$ をとる．このとき $\pi^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \pi^{-1}(U_\lambda) \in \mathscr{O}$ である．

■

1.2.4 距離空間

位相空間のうち，特に扱いやすい対象である．

公理 1.3: 距離の公理

$X \neq \emptyset$ を集合とする．関数 $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ が以下を充たすとき，d のことを**距離** (metric) と呼ぶ：

(D1) $d(x,\, y) \geq 0$. 等号成立は $x = y$ のときのみ.

(D2) $d(x,\, y) = d(y,\, x)$

(D3) $d(x,\, z) \leq d(x,\, y) + d(y,\, z)$ (**三角不等式**; triangle inequality)

定義 1.14: 距離空間

集合 $X \neq \emptyset$ が距離 d を持つとき，組 $(X,\, d)$ のことを**距離空間** (metric space) と呼ぶ.

距離空間は位相空間になることを確認しよう．

定義 1.15: ε 近傍

$(X,\, d)$ を距離空間とする．点 $x \in X$ の $\boldsymbol{\varepsilon}$ **近傍**を以下のように定義する：

$$B_\varepsilon(x) := \left\{\, y \in X \;\middle|\; d(x,\, y) < \varepsilon \,\right\}$$

定理 1.5: 距離空間の位相

$(X,\, d)$ を距離空間とする．集合族 $\mathscr{O}(d)$ を

$$\mathscr{O}(d) := \left\{\, U \subset X \;\middle|\; \forall x \in U,\, \exists \varepsilon > 0,\; B_\varepsilon(x) \subset U \,\right\}$$

と定めると，$\mathscr{O}(d)$ は X の位相になる．

証明 $\mathscr{O}(d)$ が公理 1.2 を充たすことを確認する．

(O1) $\emptyset \in \mathscr{O}(d)$ は明らか．距離の公理 1.3-**(D1)** より $X \in \mathscr{O}(d)$ が従う．

(O2) 任意の $U_1,\, \dots,\, U_n \in \mathscr{O}(d)$ をとる．$\forall x \in U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n$ をとる．このとき $\exists \varepsilon_i,\; B_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i\ (1 \leq \forall i \leq n)$ であるから，$\varepsilon := \min\{\varepsilon_i\}$ とおくと $B_\varepsilon(x) \subset \bigcap_{i=1}^n U_i$ である．i.e. $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathscr{O}(d)$ である．

(O3) 任意の添字集合 Λ に対する集合族 $\left\{\, U_\lambda \,\right\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathscr{O}(d)$ をとる．$x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ ならば，ある $\mu \in \Lambda$ が存在して $x \in U_\mu$ である．U_μ は開集合であるから，命題 1.3 よりある $\varepsilon > 0$ が存在して $B_\varepsilon(x) \subset U_\mu$ を充たす．従って $B_\varepsilon(x) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathscr{O}(d)$ となる．

■

系 1.6:

ε 近傍の全体

$$\mathscr{B}(d) := \left\{\, B_\varepsilon(x) \;\middle|\; x \in X,\, \varepsilon > 0 \,\right\}$$

は位相 $\mathscr{O}(d)$ の開基である．

証明 命題 1.2 より明らか． ■

1.2.5 位相空間の分類

扱いやすさによって分類する．

定義 1.16: 分離公理

$(X, \mathscr{O})$ を位相空間とする．点 $x \in X$ の近傍全体が成す集合を $\mathscr{V}(x)$ と書く．

(1) X が $\mathbf{T_1}$ **空間**

$\overset{\text{def}}{\iff}$ X の任意の異なる 2 点 $x, y \in X$ に対して以下が成り立つ：

$$\exists V \in \mathscr{V}(y),\ x \notin V$$

(2) X が $\mathbf{T_2}$ **空間 (Hausdorff 空間)**

$\overset{\text{def}}{\iff}$ X の任意の異なる 2 点 $x, y \in X$ に対して以下が成り立つ：

$$\exists U \in \mathscr{V}(x),\ \exists V \in \mathscr{V}(y),\ U \cap V = \emptyset$$

(3) X が**正則空間**

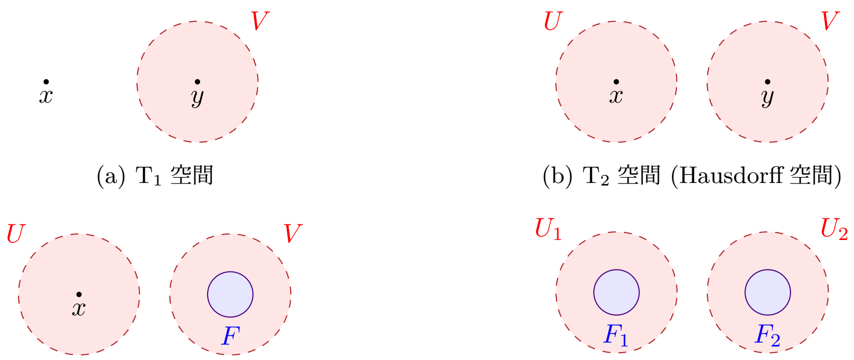
$\overset{\text{def}}{\iff}$ X は T_1 空間であり，$\forall x \in X$ と x を含まない任意の閉集合 $F \subset X$ に対して以下が成り立つ：

$$\exists U, V \in \mathscr{O},\ x \in U \text{ かつ } F \subset V \text{ かつ } U \cap V = \emptyset$$

(4) X が**正規空間**

$\overset{\text{def}}{\iff}$ X は T_1 空間であり，任意の交わらない閉集合 $F_1, F_2 \subset X$ に対して以下が成立する：

$$\exists U_1, U_2 \in \mathscr{O},\ F_1 \subset U_1 \text{ かつ } F_2 \subset U_2 \text{ かつ } U_1 \cap U_2 = \emptyset$$



(a) T_1 空間　(b) T_2 空間 (Hausdorff 空間)　(c) 正則空間　(d) 正規空間

図 1.1: 位相空間の分類

例えば Hausdorff 空間は，点列の収束性が良い空間である．

定義 1.17: 点列の収束

$(X,\,\mathscr{O})$ を位相空間，$\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ を X の点列[a] とする．
$\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ が**極限** (limit) $x \in X$ に**収束する** (converge) とは，x の任意の近傍 $x \in U \subset X$ に対してある $N(U) \subset \mathbb{N}$ が存在して，

$$\forall n > N(U),\ x_n \in U$$

が成り立つことを言う．

[a] 写像 $x\colon \mathbb{N} \longrightarrow X,\ n \longmapsto x_n$ のこと．厳密には $\left\{x_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ とは異なる概念である．

命題 1.5: Hausdorff 空間における点列の収束性

Hausdorff 空間 $(X,\,\mathscr{O})$ の収束する点列 $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ はただ 1 つの極限を持つ．

証明 Hausdorff 空間 M の点列 $\left\{x_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ が異なる 2 点 $x,\,y \in M$ に収束すると仮定する．M の Hausdorff 性から開近傍 $x \in U \subset M,\ y \in V \subset M$ であって $U \cap V = \emptyset$ であるものが存在する．このとき点列の収束の定義からある $N_x,\,N_y \in \mathbb{N}$ が存在して $\forall n \geq N_x,\ x_n \in U$ かつ $\forall m \geq N_y,\ x_m \in V$ ということになるが，$N := \max\{N_x,\,N_y\}$ とおくと $x_N \in U \cap V$ となって $U \cap V = \emptyset$ に矛盾．従って背理法から $x = y$ が言える． ■

定理 1.7:

距離空間 ⇒ 正規空間 ⇒ 正則空間 ⇒ Hausdorff 空間 ⇒ T_1 空間

1.3 連続写像・同相

2 つの位相空間の間の写像の性質を考える．

定義 1.18: 連続性

2 つの位相空間 $(X,\,\mathscr{O}_X),\ (Y,\,\mathscr{O}_Y)$ の間の写像 $f\colon X \to Y$ が**連続** (continuous) であるとは，以下が成立することを言う：

$$V \in \mathscr{O}_Y \implies f^{-1}(V) \in \mathscr{O}_X.$$

命題 1.6: 連続写像の合成は連続写像

位相空間 $(X,\,\mathscr{O}_X),\ (Y,\,\mathscr{O}_Y),\ (Z,\,\mathscr{O}_Z)$ を与える．このとき，任意の連続写像 $f\colon X \longrightarrow Y,\ g\colon Y \longrightarrow Z$ の合成写像 $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$ もまた連続である．

証明 $\forall U \in \mathscr{O}_Z$ とする．このとき g の連続性から $g^{-1}(U) \in \mathscr{O}_Y$ が従い，さらに f の連続性から $f^{-1}\bigl(g^{-1}(U)\bigr) \in \mathscr{O}_X$ が従う．ところで，$x \in f^{-1}\bigl(g^{-1}(U)\bigr) \iff f(x) \in g^{-1}(U) \iff g\bigl(f(x)\bigr) =$

$g \circ f(x) \in U$ が言えるので，集合の等式 $f^{-1}\big(g^{-1}(U)\big) = (g \circ f)^{-1}(U)$ が成り立つ．以上の議論から $(g \circ f)^{-1}(U) \in \mathscr{O}_X$ が示された． ■

2 つの距離空間 $(X,\, d_X)$, $(Y,\, d_Y)$ の間の写像 $f\colon X \to Y$ の連続性の定義として馴染み深いものは，おそらく ε-δ 論法によるものであろう：

$$\forall x \in X,\, \forall \varepsilon > 0,\, \exists \delta > 0, \forall y \in Y,\, d_X(x,\, y) < \delta \implies d_Y\big(f(x),\, f(y)\big) < \varepsilon \tag{1.3.1}$$

この定義は直観的にも分かり易い [要検証] が，距離空間に対してしか適用できないという欠点がある．定義 1.18 は定義 (1.3.1) を改良して，適用範囲を一般の位相空間に拡張したものと言える．実際，距離空間 $(X,\, d_X)$, $(Y,\, d_Y)$ のそれぞれに定理 1.5 で作った位相 $\mathscr{O}(d_X)$, $\mathscr{O}(d_Y)$ を入れると，定義 1.18 と定義 (1.3.1) は同値になる：

<u>**証明**</u> ($\Longrightarrow$) 任意の $\varepsilon > 0$ をとる．$B_\varepsilon\big(f(x)\big) \in \mathscr{O}(d_Y)$ であるから，定義 1.18 より $f^{-1}\Big(B_\varepsilon\big(f(x)\big)\Big) \in \mathscr{O}(d_X)$ である．従って命題 1.3 から，ある $\delta > 0$ が存在して $B_\delta(x) \subset f^{-1}\Big(B_\varepsilon\big(f(x)\big)\Big)$ となる． i.e.

$$\begin{aligned} d_X(x,\, y) < \delta \quad &\Longrightarrow \quad y \in B_\delta(x) \subset f^{-1}\Big(B_\varepsilon\big(f(x)\big)\Big) \\ &\Longrightarrow \quad f(y) \in B_\varepsilon\big(f(x)\big) \\ &\Longrightarrow \quad d_Y\big(f(x),\, f(y)\big) < \varepsilon. \end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) 任意の $V \in \mathscr{O}(d_Y)$ をとる．$U \coloneqq f^{-1}(V) \in \mathscr{O}(d_X)$ を示す．$\forall x \in U$ を一つとる．このとき $f(x) \in V$ だから，定理 1.5 による $\mathscr{O}(d_Y)$ の定義からある $\varepsilon > 0$ が存在して $B_\varepsilon\big(f(x)\big) \subset V$ となる．ここで定義 (1.3.1) を充たす δ をとることができて，

$$\begin{aligned} \forall y \in X,\, d_X(x,\, y) < \delta &\implies d_Y\big(f(x),\, f(y)\big) < \varepsilon. \\ &\iff \quad f\big(B_\delta(x)\big) \subset B_\varepsilon\big(f(x)\big). \end{aligned}$$

を充たす．従って $B_\delta(x) \subset f^{-1}\Big(B_\varepsilon\big(f(x)\big)\Big) \subset f^{-1}(V) = U$ であり，$U \in \mathscr{O}(d_X)$ が示された． ■

定義 1.19: 同相

2 つの位相空間 $(X,\, \mathscr{O}_X)$, $(Y,\, \mathscr{O}_Y)$ を与える．写像 $f\colon X \to Y$ が**同相写像** (homeomorphism) であるとは，f が**連続**かつ**全単射**かつ**逆写像** $f^{-1}\colon Y \to X$ **が連続**であることを言う．X と Y の間に同相写像が存在するとき X は Y に**同相** (homeomorphic) であると言い，$X \approx Y$ と書く．

全ての位相空間の集まり[*2] $\mathscr{T}$ を考えよう．同相 $\approx$ は $\mathscr{T}$ の同値関係であるから，**$\mathscr{T}$ は同相 $\approx$ によって類別できる**．ここから，同相類を如何にして特徴づけられるのかと言う問いが自然に生じる．一つの方法としては，同相の下で変わらない**位相的性質**，**位相不変量**を見つけることである．重要な位相的性質としては

- **Hausdorff 性**
- **コンパクト性**
- **連結性**
- 代数的構造（環・群 etc.）

などが挙げられる．

*2 $\mathscr{T}$ は集合**ではない**．

1.4　コンパクト性

極めて単純な例だが，同相 $(-1,\,1) \approx (\mathbb{R},\,d_2)$ を考える[*3]．実際，同相写像を例えば

$$f\colon (-1,\,1) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

と定義することができる．このことは，直観的には「有限の広がり」を持つ $(-1,\,1)$ が「無限の広がり」を持つ $\mathbb{R}$ と同じであることを意味し，奇妙な感じがする[*4]定義 1.20 はこのような奇妙なことが起こらない位相空間のクラスを特徴付ける．

定義 1.20: コンパクト

$(X,\,\mathscr{O})$ を位相空間とする．X の部分集合 $A \subset X$ が**コンパクト** (compact) であるとは，A が以下の **Heine-Borel の性質**を持つことを言う[a]：

- 開集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathscr{O}$ によって $A \subset \displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ となるとき，添字集合 Λ の有限部分集合 $F \subset \Lambda$ が存在して $A \subset \displaystyle\bigcup_{\mu\in F} U_\mu$ となる．

[a] このことを，**任意の開被覆は有限被覆を持つ**と表現する．

次の定理は，位相空間のコンパクト性が位相的性質であることを保証する．

定理 1.8:

2 つの位相空間 $(X,\,\mathscr{O}_X)$, $(Y,\,\mathscr{O}_Y)$ と，その間の連続写像 $f\colon X \to Y$ を与える．部分集合 $K \subset X$ がコンパクトなら，f による K の像 $f(K) \subset Y$ もまたコンパクトである．

証明　$f(K)$ の任意の開被覆 $f(K) \subset \bigcup_{\mu\in M} V_\mu$ をとる．このとき

$$K \subset f^{-1}\bigl(f(K)\bigr) \subset f^{-1}\left(\bigcup_{\mu\in M} V_\mu\right) = \bigcup_{\mu\in M} f^{-1}(V_\mu).$$

連続写像の定義 1.18 より全ての $f^{-1}(V_\mu)$ は開集合であるから，$\bigcup_{\mu\in M} f^{-1}(V_\mu)$ は K の開被覆を与える．故に，K のコンパクト性を仮定したので，添字集合 M の部分集合 $\{\mu_1\,\ldots,\,\mu_n\} \subset M$ が存在して

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(V_{\mu_i})$$

と書ける．よって

$$f(K) \subset f\left(\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(V_{\mu_i})\right) = \bigcup_{i=1}^{n} f\bigl(f^{-1}(V_{\mu_i})\bigr) \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{\mu_i}$$

となり，$f(K)$ の有限開被覆が得られる．i.e. $f(K)$ はコンパクトである．■

[*3] d_2 は Euclid 距離．以下，なんの断りもなく距離空間 $\mathbb{R}^n$ と言ったら距離として d_2 が定まっているとする．
[*4] もっとも，これを奇妙と思うかどうかは人によると思いますが...

次の定理は，Zorn の補題を用いて証明される．

定理 1.9: Tychonoff の定理

$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をコンパクト空間の族とすると，積空間[a] $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ もコンパクトである．

[a] Λ が有限集合でなくともよい．

1.5 連結性

定義 1.21: 連結空間

(1) 位相空間 $(X, \mathscr{O})$ の部分空間 $(A, \mathscr{O}_A)$ が**連結** (connected) であるとは，A が空でない 2 つの開集合[a]の非交和にならないことである．

(2) 部分空間 A が**弧状連結** (path-connected) であるとは，任意の 2 点 $x, y \in A$ が A 上の連続曲線で結ばれることである．i.e. 連続写像 $\varphi\colon [0, 1] \to A$ であって $\varphi(0) = x$, $\varphi(1) = y$ であるものが存在することである．

[a] $\mathscr{O}_A$ を位相とする．

次の定理は，位相空間の連結性が位相的性質であることを保証する．

定理 1.10:

2 つの位相空間 $(X, \mathscr{O}_X)$, $(Y, \mathscr{O}_Y)$ と，その間の連続写像 $f\colon X \to Y$ を与える．部分空間 $K \subset X$ が連結なら，K の像 $f(K) \subset Y$ もまた連結である．

証明 K が連結のとき，$f(K)$ が $f(K)$ のある開集合 V_1, V_2 に対して $f(K) = V_1 \sqcup V_2$ と書かれたとする．$V_1 = \emptyset$ または $V_2 = \emptyset$ であることを示す．仮定より $K \subset f^{-1}\bigl(f(K)\bigr) = f^{-1}(V_1) \sqcup f^{-1}(V_2)$ である．故に

$$K = \bigl(f^{-1}(V_1) \sqcup f^{-1}(V_2)\bigr) \cap K = \bigl(f^{-1}(V_1) \cap K\bigr) \sqcup \bigl(f^{-1}(V_2) \cap K\bigr).$$

ここで，相対位相の定義 1.11 より Y の開集合 U_1 が存在して $V_1 = U_1 \cap f(K)$ と書けるから，$f^{-1}(V_1) = f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}\bigl(f(K)\bigr)$ となり，$f^{-1}(V_1) \cap K = f^{-1}(U_1) \cap K$ である．連続写像の定義 1.18 より $f^{-1}(U_1)$ は X の開集合であるから，$f^{-1}(V_1) \cap K$ は K の開集合である ($\because$ 相対位相の定義)．同様に $f^{-1}(V_2) \cap K$ もまた K の開集合である．K は連結なのでどちらかが空集合である．$f^{-1}(V_1) \cap K = \emptyset$ とすると $K \subset \bigl(f^{-1}(V_1)\bigr)^c = f^{-1}(V_1^c)$ なので $f(K) \subset f\bigl(f^{-1}(V_1^c)\bigr) \subset V_1^c = V_2$ となり，$V_1 = \emptyset$ である．また，全く同様の議論により $f^{-1}(V_2) \cap K = \emptyset$ ならば $V_2 = \emptyset$ である． ■

次の 2 つの定理の証明はテクニカルなので省略する．

定理 1.11: 積空間の連結性

$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を連結空間の族とすると，積空間 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ も連結である．

定理 1.12:

$(X, \mathscr{O})$ を位相空間，$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を X 上の連結集合の族とする．$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$ ならば，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ も連結集合である．

連結な集合で位相空間を類別できる．

定義 1.22: 連結成分

位相空間 X 上の二項関係

$$\sim \coloneqq \left\{ (x,\, y) \in X \times X \;\middle|\; \exists A \subset X \text{ s.t. 連結},\ \ x \in A,\ y \in A \right\}$$

と定めると $\sim$ は同値関係になる．この同値関係 $\sim$ による同値類を X の**連結成分** (connected component) と呼ぶ．

証明 $\sim$ が同値関係の公理 1.1 を充していることを確認する：

(1) $\{x\}$ は連結なので $x \sim x$.
(2) 対称律は自明.
(3) $x \sim y$ ならば $x,\, y \in A$ なる連結集合 A, $y \sim z$ ならば $y,\, z \in B$ なる連結集合 B が取れる. $\{y\} \in A \cap B$ なので定理 1.12 が使えて $x,\, z \in A \cup B$ なる連結集合 $A \cup B$ が得られる.

■

定理 1.13:

位相空間 $(X, \mathscr{O})$ の部分空間 $(A, \mathscr{O}_A)$ が弧状連結ならば連結である．

補題 1.1:

$\mathbb{R}$ の部分集合 $I \coloneqq [0,\, 1]$ は連結である．

証明 I が連結でないと仮定する．このとき I の開集合 U_1, U_2 が存在して $I = U_1 \sqcup U_2,\, U_1 \neq \emptyset,\, U_2 \neq \emptyset$ が成り立つ．一般性を失わずに $0 \in U_1$ としてよい．

ここで $z \coloneqq \sup\left\{ t \in I \;\middle|\; [0,\, t] \subset U_1 \right\}$ とおく．$z \in U_1$ ならば，U_1 は I の開集合なので，命題 1.3 からある $\varepsilon > 0$ が存在して $(z - \varepsilon,\, z + \varepsilon) \subset U_1$ となる[*5]．しかるにこれは z の定義に矛盾する．

一方 $z \in U_2$ ならば，U_2 が I の開集合であることから $\varepsilon > 0$ が存在して $(z - \varepsilon,\, z + \varepsilon) \subset U_2$ を充たす．しかるに z の定義から，ある $z_0 \in U_1$ が存在して $z_0 \in (z - \varepsilon,\, z)$ を充たす．$(z - \varepsilon,\, z) \subset (z - \varepsilon,\, z + \varepsilon) \subset U_2$ を考慮するとこれは $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ を意味し，U_1, U_2 が disjoint であるという仮定に反する．よって背理法から I は連結である． ■

[*5] $(z - \varepsilon,\, z + \varepsilon)$ は距離空間 $\mathbb{R}$ における点 z の ε 近傍である．

証明 定理 1.10 と補題 1.1 より，連続曲線の像 $\varphi([0,1])$ は連結である．よって $\forall x, y \in A$ を含む連結成分が存在する．i.e. 勝手な $x \in A$ をとってくると $\forall y \in A$ に対して $x \sim y$ なので，x の連結成分 $[x] = X$ である． ■

第 2 章

多様体

集合の位相とは，異なる点同士の「近さ」の概念を定式化したものと言える．その意味で，集合 M の上に位相を定めて位相空間 $(M, \mathscr{O})$ を作れば，M のことを図形と呼べるであろう．さらに M に次のような要請を与える：

- M は Hausdorff 空間である
- M は**局所的に**我々のよく知る $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ と同一視できる

第一の要請により，点列の収束先が一意に定まることが保証される．第二の要請は，M 上の点を座標で表示できることを意味する．

2.1 位相多様体

2.1.1 定義

定義 2.1: 位相多様体

第 2 可算な Hausdorff 空間 $(M, \mathscr{O}_M)$ が n 次元**位相多様体** (topological manifold) であるとは，任意の点 $p \in M$ に対して

- p の開近傍 $p \in U \subset M$
- $\mathbb{R}^n$ の開集合 $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$
- 同相写像 $\varphi \colon U \xrightarrow{\approx} \varphi(U)$

の 3 つが存在することを言う．

少し技術的な話をすると，上述の定義において開集合 $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ を開球 $B_\varepsilon\bigl(0\bigr) \subset \mathbb{R}^n$ $(\varepsilon > 0)$ か，もしくは $\mathbb{R}^n$ そのものに置き換えても同値な定義が得られる[*1]．

[*1] $\forall p \in M$ に対して定義 2.1 の 3 つ組が与えられたとする．平行移動により $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$ を仮定して良い．このとき開集合の性質から $\varphi(p) \in B_\varepsilon(0) \subset \varphi(U)$ を充たす $\varepsilon > 0$ が存在するので M の開集合[*2] $\varphi^{-1}\bigl(B_\varepsilon(0)\bigr) \subset M$ と $B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^n$ と φ の制限 $\varphi|_{\varphi^{-1}\left(B_\varepsilon(0)\right)}$（これも同相写像になっている）が定義 2.1 の 3 つ組に相当するものになる．$B_\varepsilon(0) \approx \mathbb{R}^n$ は，例えば連続写像 $x \longmapsto \frac{x}{\varepsilon - |x|}$ が同相写像になっている．

$\mathbb{R}^n$ との局所的な同相の構造を入れたことで，位相多様体 M 上の点を座標表示することができるようになる．

定義 2.2: 局所座標

n 次元位相多様体 $(M, \mathscr{O}_M)$ を与える．M 上の任意の点 $p \in M$ をとり，p の開近傍 $p \in U \subset M$ であって $\mathbb{R}^n$ の開集合 $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ との同相写像 $\varphi\colon U \xrightarrow{\approx} \varphi(U)$ が存在するものをとる．このとき，

- $U \in \mathscr{O}_M$ を点 p の**座標近傍** (coordinate neighborhood) と呼ぶ．
- 組 (U, φ) のことを**チャート** (chart)，もしくは**局所座標系**と呼ぶ．
- 任意の点 $q \in U$ に対して，q が φ によって写像された行き先

$$\varphi(q) = \big(x^1(q), x^2(q), \dots, x^n(q)\big) \in \mathbb{R}^n$$

  のこと[a]を点 q の**局所座標** (local coordinate) と呼ぶ．
- $\mu = 1, \dots, n$ に対して定まる連続写像[b]

$$x^\mu\colon U \longrightarrow \mathbb{R},\ q \longmapsto x^\mu(q)$$

  のことを U 上の**座標関数**と呼ぶ．

[a] 添字が上付きになっている理由は後ほど明らかになる．
[b] 第 i 成分への射影 $\mathrm{pr}_i\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ (x^1, \dots, x^i, \dots, x^n) \longrightarrow x^i$ が連続であることに注意すると，$x^i = \mathrm{pr}_i \circ \varphi$ は連続写像同士の合成なので連続である．

チャートの座標関数を明示したいときは $(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{\varphi})$ の代わりに $\big(\boldsymbol{U}, (\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\mu}})\big)$ と書くことにする．また，チャート (U, φ) を具体的な写像として定義するときには

$$\varphi\colon U \longrightarrow \varphi(U),\ p \longmapsto \begin{pmatrix} x^1(p) \\ \vdots \\ x^n(p) \end{pmatrix}$$

のように丸括弧で囲まれた，縦に並んだ数の組として表記する[*3]．

位相多様体は，$\mathbb{R}^n$ から様々な性質を引き継ぐ，比較的扱いやすい位相空間である．例えば

命題 2.1: 位相多様体の位相的性質

位相多様体 M は

(1) 局所弧状連結
(2) M が弧状連結 $\iff$ M が連結
(3) 局所コンパクト
(4) パラコンパクト

[*3] 最右辺は n 個の実数の組という以上の情報は持たない．従って，例えば数ベクトルとしての構造を意識しないということである．数ベクトルと見做したいときは角括弧で $\begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$ と書くことにする．

(5) 基本群が可算濃度

証明 [4, Proposition 11-16] を参照.

■

などが成り立つ.

2.1.2　アトラス

定義 2.2 は多様体 M の局所的な座標表示を与えた．座標近傍の M の全域にわたる和集合をとってみるとどうなるのだろうか[*4]？

定義 2.3: アトラス

$(M,\ \mathscr{O}_M)$ を位相多様体とする．チャートの族 $\left\{ (U_\lambda,\, \varphi_\lambda) \right\}_{\lambda\in\Lambda}$ は，座標近傍の族 $\left\{ U_\lambda \right\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathscr{O}_M$ が

$$M = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$$

を充たすとき，M の**アトラス** (atlas) であると言う.

座標近傍 U_α, U_β が重なってしまう場合を考える．空でない共通部分 $U_\alpha \cap U_\beta \in \mathscr{O}_M$ [*5]は 2 通りの同相写像 $\varphi_\alpha,\, \varphi_\beta$ を介して $\mathbb{R}^n$ の開集合と同相なので，U_α の座標表示 $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ と U_β の座標表示 $\varphi_\beta(U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$ の間に**同相写像**

$$f_{\beta\alpha} \coloneqq \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta),\ \varphi_\alpha(p) \longmapsto (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(p)$$

を構成することができる．同相写像 $f_{\beta\alpha}$ のことを**座標変換** (coordinate change) と呼ぶ[*6]（図 2.1).

[*4] 以降，文脈上明らかな時は位相多様体 $(M,\, \mathscr{O}_M)$ を略記して M と書く.
[*5] 位相空間の公理 1.2 より，これもまた開集合である.
[*6] **transition map** from φ_α to φ_β とも言う.

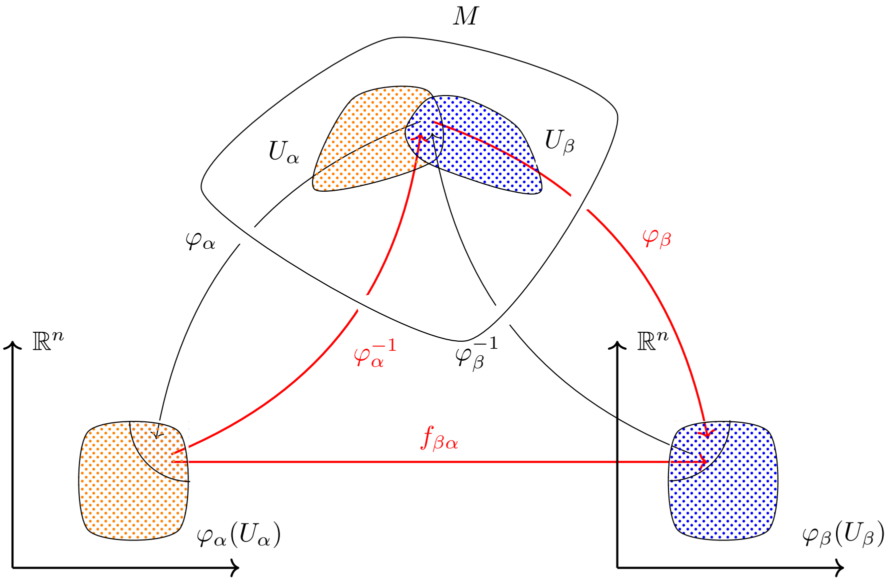


図 2.1: 座標変換の概念図.

> **!** **座標変換は，多様体 M 上の点を実際に動かすものではない．**あくまで点を表現する方法が変わっただけなのである．

座標関数を明示して $(U_\alpha,\, \varphi_\alpha) = \bigl(U_\alpha,\, (x^\mu)\bigr)$, $(U_\beta,\, \varphi_\beta) = \bigl(U_\beta,\, (x'^\mu)\bigr)$ と書くと，座標変換は n 個の実数を引数に持ち n 個の実数値を返す関数

$$f_{\beta\alpha}\colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta),\ \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x'^1(x^1,\, \dots,\, x^n) \\ \vdots \\ x'^n(x^1,\, \dots,\, x^n) \end{pmatrix}$$

である．

【例 2.1.1】関数のグラフ

$U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とし，$f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ を n 変数の実数値連続関数とする．$\mathbb{R}^{n+1}$ の部分集合

$$\Gamma(f) := \left\{\, (x,\, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \;\middle|\; x \in U,\ y = f(x) \,\right\}$$

に $\mathbb{R}^{n+1}$ からの相対位相を入れてできる位相空間のことを**関数 f のグラフ**と呼ぶ．連続写像[a]

$$\mathrm{proj}_1\colon \Gamma(f) \longrightarrow U,\ (x,\, y) \longmapsto x$$

は，連続な逆写像

$$\mathrm{proj}_1^{-1}\colon U \longrightarrow \Gamma(f),\ x \longmapsto \bigl(x,\, f(x)\bigr)$$

を持つので同相写像である．i.e. 組 $\bigl(\Gamma(f),\, \mathrm{proj}_1\bigr)$ は n 次元位相多様体 $\Gamma(f)$ のチャートである．チャートを 1 枚だけ含む族

$$\left\{\bigl(\Gamma(f),\, \mathrm{proj}_1\bigr)\right\}$$

は位相多様体 $\Gamma(f)$ のアトラスである．

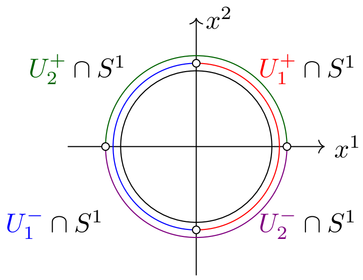
[a] これが連続であることは，直接的には命題 A.6 による．

【例 2.1.2】n 次元球面

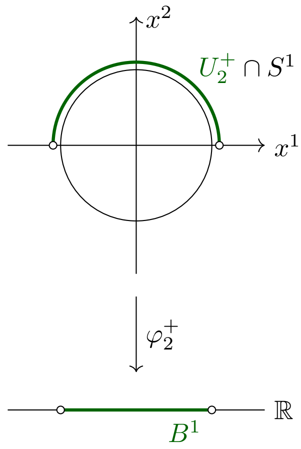
$n \geq 0$ 次元球面 $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ と n 次元開球 $B^n \subset \mathbb{R}^n$ を

$$S^n := \left\{ (x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 = 1 \right\},$$
$$B^n := \left\{ (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 < 1 \right\}$$

として定義する．S^n には，$\mathbb{R}^{n+1}$ からの，B^n には $\mathbb{R}^n$ からの相対位相を入れて位相空間にする．これらは第 2 可算な Hausdorff 空間 $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{R}^n$ の部分空間なので，第 2 可算かつ Hausdorff である．



(a) S^1 のアトラス



(b) S^1 のチャート $(U_2^+ \cap S^1,\ \varphi_2^+)$

図 2.2: S^1 の場合

$i = 1, \dots, n+1$ に対して，$\mathbb{R}^{n+1}$ の開集合

$$U_i^+ := \left\{ (x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; x^i > 0 \right\}$$
$$U_i^- := \left\{ (x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; x^i < 0 \right\}$$

を定める．連続写像

$$f \colon B^n \longrightarrow \mathbb{R},\ (x^1, \dots, x^n) \longmapsto \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2}$$

を考える．すると $\forall (x^1, \dots, x^{n+1}) \in U_i^{\pm} \cap S^n$ は

$$(x^1, \dots, \widehat{x^i}, \dots, x^{n+1}) \in B^n,\ x^i = \pm f(x^1, \dots, \widehat{x^i}, \dots, x^{n+1})$$

を充たす．ただし $\widehat{x^i}$ は第 i 成分を除くことを意味する．つまり，$U_i^{\pm} \cap S^n$ は関数のグラフ

$$U_i^{\pm} \cap S^n = \left\{\, (x^1,\, \dots,\, \widehat{x^i},\, \dots,\, x^{n+1};\, x^i) \in B^n \times \mathbb{R} \;\middle|\; x^i = \pm f(x^1,\, \dots,\, \widehat{x^i},\, \dots,\, x^{n+1}) \,\right\}$$

である．故に第 i 成分以外への射影

$$\varphi_i^{\pm} \colon U_i^{\pm} \cap S^n \longrightarrow B^n,\ (x^1,\, \dots,\, x^{n+1}) \longmapsto \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ \widehat{x^i} \\ \vdots \\ x^{n+1} \end{pmatrix}$$

との組 $(U_i^{\pm},\, \varphi_i^{\pm})$ は n 次元位相多様体 S^n のチャートである．$2n+2$ 枚のチャートからなる族

$$\left\{(U_i^+,\, \varphi_i^+),\, (U_i^-,\, \varphi_i^-)\right\}_{i=1,\, \dots,\, n+1}$$

は S^n のアトラスとなる．

【例 2.1.3】n 次元実射影空間

$\mathbb{R}^{n+1}$ の 1 次元部分実ベクトル空間全体がなす集合の上に，商写像

$$\pi \colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}P^n,\ x \longmapsto \mathrm{Span}\{x\}$$

による商位相を入れてできる位相空間を n 次元**実射影空間** (real projective space) と呼び，$\mathbb{R}\boldsymbol{P^n}$ と書く．$\mathbb{R}^{n+1}$ の原点を通る直線全体がなす商位相空間と言っても良い．$[x] \coloneqq \pi(x) \in \mathbb{R}P^n$ と書くことにする．

補題 2.1:

(1) $\mathbb{R}P^n$ は Hausdorff 空間である．

(2) $\mathbb{R}P^n \approx S^n/\{\pm 1\}$ である．

<u>**証明**</u>　(1) $\langle \cdot | \cdot \rangle$ を Euclid 内積，$|\cdot|$ を Euclid ノルムとする．
$x,\, y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ が $[x] \neq [y]$ を充たすとする．このとき $x,\, y$ は線型独立だから $\frac{|\langle x|y \rangle|}{|x||y|} \in [0,\, 1)$ である．よって $\frac{|\langle x|y \rangle|}{|x||y|} < r_1 < r_2 < 1$ を充たす実数 $r_1,\, r_2$ が存在する．
ここで写像

$$f \colon \mathbb{R}P^n \longrightarrow [0,\, 1],\ [u] \longmapsto \frac{|\langle x|u \rangle|}{|x||u|}$$

を考える．$[u] = [v] \in \mathbb{R}P^n$ ならばある $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して $u = \lambda v$ と書けるので $f([u]) = f([v])$ が言える．i.e. f は $[u]$ の代表元の取り方によらず，well-defined である．π が商写像でかつ $f \circ \pi$ が連続であることから f も連続である．従って，$[0,\, 1]$ の開集合 $[0,\, r_1),\, (r_2,\, 1] \subset [0,\, 1]$ の f による逆像 $U_1 \coloneqq f^{-1}\big([0,\, r_1)\big),\, U_2 \coloneqq f^{-1}\big((r_2,\, 1]\big)$ はどちらも $\mathbb{R}P^n$ の開集合で，かつ $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ である．$f([y]) \in [0,\, r_1)$ かつ $f([x]) = 1 \in (r_2,\, 1]$ なので $[y] \in U_1,\, [x] \in U_2$ であり，証明が完了した．

(2) $\forall x,\, y \in S^n$ について，$[x] = [y]$ ならば $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して $x = \lambda y$ と書けるが，$x,\, y \in S^n$ なので $1 = |x| = |\lambda y| = |\lambda|$ でなくてはならない．故に $\lambda \in \{\pm 1\}$ である．i.e. π の制限 $\pi|_{S^n} \colon S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ は 2 対 1 の連続写像である．従って商写像 $\varpi \colon S^n \longrightarrow S^n/\{\pm 1\},\ x \longmapsto \{\pm 1\}x$ が全単射連続写像 $\overline{\pi|_{S^n}} \colon S^n/\{\pm 1\} \longrightarrow \mathbb{R}P^n,\ \{\pm 1\}x \longmapsto [x]$ を一意的に誘導する．$\overline{\pi|_{S^n}}$ はコンパクト空間から Hausdorff 空間への連続な全単射だから同相写像である．

■

$S^n/\{\pm 1\}$ はコンパクトなので明らかに第 2 可算である．

$i = 1, \ldots, n+1$ に対して，開集合 $\tilde{U}_i \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ を

$$\tilde{U}_i \coloneqq \left\{ (x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, x^i \neq 0 \right\}$$

とし，$U_i \coloneqq \pi(\tilde{U}_i)$ とおく．このとき $\pi^{-1}\bigl(\pi(\tilde{U}_i)\bigr)$ なので制限 $\pi|_{\tilde{U}_i}\tilde{U}_i \longrightarrow U_i$ は商写像である．

ここで写像

$$\varphi_i \colon U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ [x^1, \ldots, x^{n+1}] \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{x^1}{x^i} \\ \vdots \\ \frac{x^{i-1}}{x^i} \\ \frac{x^{i+1}}{x^i} \\ \vdots \\ \frac{x^{n+1}}{x^i} \end{pmatrix}$$

を考える．φ_i は 0 でない定数倍に関して不変なので well-defined である．π が商写像で $\varphi_i \circ \pi$ が連続なので φ_i も連続である．さらに，

$$\varphi_i^{-1} \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow U_i,\ \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} \longmapsto [u^1, \ldots, u^{i-1}, 1, u^{i+1}, \ldots, u^n]$$

が連続な[a]逆写像なので φ_i は同相写像で，組 $(U_i,\, \varphi_i)$ は n 次元位相多様体 $\mathbb{R}P^n$ のチャートである．$n+1$ 枚のチャートからなる族

$$\bigl\{(U_i,\, \varphi_i)\bigr\}_{i=1,\ldots,n+1}$$

がアトラスとなる．

[a] 写像 $\psi_i \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\},\ (u^1, \ldots, u^n) \longmapsto (u^1, \ldots, u^{i-1}, 1, u^{i+1}, \ldots, u^n)$ は明らかに連続なので，$\varphi_i^{-1} = \pi \circ \psi_i$ は連続写像の合成となって連続である．

【例 2.1.4】積多様体

次元 $m,\, n$ の位相多様体 $M,\, N$ を与える．このとき積空間 $M \times N$ は第 2 可算かつ Hausdorff であ流ことが知られている．

$\forall (p,\, q) \in M \times N$ に対して，$M,\, N$ のチャート $(U,\, \varphi),\, (V,\, \psi)$ が存在する．このとき写像

$$\varphi \times \psi \colon U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^{m+n},\ (x,\, y) \longmapsto \bigl(\varphi(x),\, \psi(y)\bigr)$$

は $U \times V$ から $\mathbb{R}^{m+n}$ の開集合 $(\varphi \times \psi)(U \times V)$ への同相写像であり，組 $(U \times V,\, \varphi \times \psi)$ は $M \times N$ のチャートを定める．

トーラス $S^1 \times S^1$ は積多様体の例である．より一般に，n 次元トーラスを n 個の S^1 の積多様体として定義する．

2.2　C^∞ 多様体

まず，$\mathbb{R}^n$ の微分同相を定義しておく．

定義 2.4:（$\mathbb{R}^n$ における）微分同相

$U,\, V$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合とする．同相写像 $\varphi \colon U \xrightarrow{\approx} V$ が**微分同相** (diffeomorphism) であるとは，φ とその逆写像 φ^{-1} がともに C^∞ 写像であることを言う．

2.2.1　C^∞ 構造

位相多様体 M のアトラスの座標変換は同相写像であったが，そのままだと微積分との相性が悪い．そこで，座標変換が何回でも微分可能であるような多様体を定義する．

定義 2.5: C^∞ 多様体

M を位相多様体とし，M のアトラス $\mathcal{S} = \bigl\{ (U_\lambda,\, \varphi_\lambda) \bigr\}_{\lambda \in \Lambda}$ を与える．

- $\mathcal{S}$ が $\boldsymbol{C^\infty}$ **アトラス**であるとは，$\forall \alpha,\, \beta \in \Lambda$ に対して座標変換

$$f_{\beta\alpha} \colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \xrightarrow{\approx} \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

  が微分同相であること．
- $\mathcal{S}$ が $\boldsymbol{C^\infty}$ **アトラス**であるとき，$\mathcal{S}$ は M 上の $\boldsymbol{C^\infty}$ **構造**を定めるという．
- C^∞ 構造の与えられた多様体のことを $\boldsymbol{C^\infty}$ **多様体**と呼ぶ．

! 文献によっては C^∞ 多様体のことを指して**滑らかな多様体** (smooth manifold) とか，**可微分多様体**，**微分可能多様体** (differentiable manifold) と呼んでいることがあるので注意．この資料では以降一貫して C^∞ 多様体と言うことにする．

座標変換 $f_{\beta\alpha}$ の定義域と終域は $\mathbb{R}^n$ の開集合なので，$\mathbb{R}^n$ における微分同相の定義で十分なのである．なお，与えられた写像 $f \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が微分同相であるかどうかを判定する問題は，一般には容易でない．技術的には，例えば逆函数定理などが有用である：

定理 2.1: 逆函数定理

U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし，C^∞ 写像 $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ を与える．ある 1 点 $x \in U$ における φ の Jacobian が 0 でなければ，x のある開近傍 $x \in V \subset U$ が存在して $\varphi(V) \subset \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合となり，φ の制限

$$\varphi|_V : V \longrightarrow \varphi(V)$$

は微分同相になる．

<u>**証明**</u> 例えば [4, Theorem C.34] を参照． ■

【例 2.2.1】$\mathbb{R}^3$ のチャート

位相多様体 $\mathbb{R}^3$ の最も簡単なチャートは

- $U_1 \coloneqq \mathbb{R}^3$ を点 p の座標近傍とする．
- 同相写像[a]

$$\varphi_1 \colon U_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x,\, y,\, z) \longmapsto \begin{pmatrix} x^1(x,\, y,\, z) \\ x^2(x,\, y,\, z) \\ x^3(x,\, y,\, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

の組 $(U_1,\, \varphi_1)$ で，チャートを 1 枚だけ含む族

$$\mathcal{A}_1 \coloneqq \bigl\{(U_1,\, \varphi_1)\bigr\}$$

が $\mathbb{R}^3$ の C^∞ アトラスになる．

一方で，$\mathbb{R}^3$ の開集合

$$U_2 \coloneqq \bigl\{\, (x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \bigm| x > 0,\, z > 0 \,\bigr\} = (0,\, \infty) \times \mathbb{R} \times (0,\, \infty),$$

の上で定義される連続写像

$$\varphi_2 \colon U_2 \longrightarrow \varphi_2(U_2),\ (x,\, y,\, z) \longmapsto \begin{pmatrix} r(x,\, y,\, z) \\ \theta(x,\, y,\, z) \\ \phi(x,\, y,\, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \arctan(y/z) \\ \arctan(y/x) \end{pmatrix}$$

を考える．$\varphi_2(U_2) = (0,\, \infty) \times (0,\, \pi/2) \times (-\pi/2,\, \pi/2)$ であり，逆写像

$$\varphi_2^{-1} \colon \varphi_2(U_2) \longrightarrow U_2,\ \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} \longmapsto (r \sin\theta \cos\phi,\, r \sin\theta \sin\phi,\, r\cos\theta)$$

も連続なので φ_2 は同相写像である．従って組 $(U_2,\, \varphi_2)$ もチャートと見做せる．このチャートは **3 次元極座標系**と呼ばれるものである．

$$\mathbb{R}^3 = U_1 \cup U_2$$

なので，チャートの族

$$\mathcal{A}_2 \coloneqq \bigl\{(U_1,\, \varphi_1),\, (U_2,\, \varphi_2)\bigr\}$$

もまた位相多様体 $\mathbb{R}^3$ のアトラスになる．アトラス $\mathcal{A}_2$ におけるチャートの重なりは

$$U_1 \cap U_2 = U_2$$

で，この間の座標変換は

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} \colon \varphi_2(U_2) \longrightarrow \varphi_1(U_2) \\
&\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x^1(r,\, \theta,\, \phi) \\ x^2(r,\, \theta,\, \phi) \\ x^3(r,\, \theta,\, \phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となる．$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ の Jacobian は

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial r} & \frac{\partial x^1}{\partial \theta} & \frac{\partial x^1}{\partial \phi} \\ \frac{\partial x^2}{\partial r} & \frac{\partial x^2}{\partial \theta} & \frac{\partial x^3}{\partial \phi} \\ \frac{\partial x^3}{\partial r} & \frac{\partial x^3}{\partial \theta} & \frac{\partial x^3}{\partial \phi} \end{vmatrix} = r^2 \sin\theta$$

で U_2 上の全ての点で正だから，逆関数定理により $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ が微分同相写像であるとわかる．つまり，アトラス $\mathcal{A}_2$ は C^∞ アトラスであり，$\mathbb{R}^3$ の C^∞ 構造の1つを定める．

他には $\mathbb{R}^3$ の開集合

$$U_3 \coloneqq \left\{\, (x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x > 0 \,\right\} = (0,\, \infty) \times \mathbb{R}^2$$

の上で定義される同相写像

$$\varphi_3 \colon U_3 \longrightarrow \varphi_3(U_3),\ (x,\, y,\, z) \longmapsto \begin{pmatrix} \rho(x,\, y,\, z) \\ \phi(x,\, y,\, z) \\ z(x,\, y,\, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \arctan(y/x) \\ z \end{pmatrix}$$

を考えることもできる．$\varphi_3(U_3) = (0,\, \infty) \times (-\pi/2,\, \pi/2) \times \mathbb{R}$ で，逆写像は

$$\varphi_3^{-1} \colon \varphi_3(U_3) \longrightarrow U_3,\ \begin{pmatrix} \rho \\ \phi \\ z \end{pmatrix} \longmapsto (\rho\cos\phi,\, \rho\sin\phi,\, z)$$

である．チャート $(U_3,\, \varphi_3)$ は**円筒座標系**として知られる．チャートの族

$$\mathcal{A}_3 \coloneqq \bigl\{(U_1,\, \varphi_1),\, (U_3,\, \varphi_3)\bigr\}$$

は位相多様体 $\mathbb{R}^3$ のアトラスを成す．$\mathcal{A}_3$ におけるチャートの重なりは

$$U_1 \cap U_3 = U_3$$

で，座標変換は

$$\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1} \colon \varphi_3(U_3) \longrightarrow \varphi_1(U_3),\ \begin{pmatrix} \rho \\ \phi \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x^1(\rho,\, \phi,\, z) \\ x^2(\rho,\, \phi,\, z) \\ x^3(\rho,\, \phi,\, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\phi \\ \rho\sin\phi \\ z \end{pmatrix}$$

となる．$\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1}$ の Jacobian は ρ であるから $\varphi_3(U_3)$ の全ての点において正であり，逆関数定理から微分同相写像であるとわかる．つまり，アトラス $\mathcal{A}_3$ もまた C^∞ アトラスであり，$\mathbb{R}^3$ の上に $\mathcal{A}_2$ とは別の C^∞ 構造を定める．

[a] ややこしいようだが，左辺は位相多様体 $\mathbb{R}^3$ の点としての $(x,\,y,\,z)$ で，右辺はチャートの定義としての $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ である．実際のところは $\varphi_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ である．

この例からも，C^∞ アトラスが複数存在し得ることがわかる．しかし，明かに $\mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$ もまた C^∞ アトラスになるので，$\mathcal{A}_2$ が定める C^∞ 構造と $\mathcal{A}_3$ が定める C^∞ 構造を区別するのは話を無駄にややこしくしているように思われる．そこで，考えられる限り最大の C^∞ アトラスを構成できると便利である．

定義 2.6: C^∞ アトラスの同値関係

C^∞ 多様体 M 上の C^∞ アトラス全体の集まりを $\mathscr{A}$ と書く．$\mathscr{A}$ 上の同値関係 $\sim$ を以下のように定める：

$$\sim := \{(\mathcal{S},\,\mathcal{T}) \in \mathscr{A} \times \mathscr{A} \mid \mathcal{S} \cup \mathcal{T} \in \mathscr{A}\}$$

$\mathcal{S} \sim \mathcal{T}$ のとき，$\mathcal{S},\,\mathcal{T}$ は**両立する**と言う．

証明 同値関係の公理 1.1 を充していることを示す．

(1) $\mathcal{S} \cup \mathcal{S} = \mathcal{S}$ より反射律を充たす．
(2) $\mathcal{S} \cup \mathcal{T} = \mathcal{T} \cup \mathcal{S}$ より対称律を充たす．
(3) 任意のチャート $(S,\,\varphi) \in \mathcal{S}$, $(U,\,\psi) \in \mathcal{U}$ をとる．$\mathcal{S} \sim \mathcal{T}$ かつ $\mathcal{T} \sim \mathcal{U}$ のとき，$\varphi(S \cap U)$, $\psi(S \cap U)$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合でかつ $\psi \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(S \cap U) \to \psi(S \cap U)$ が微分同相であることを示せばよい．

仮定よりそれぞれのチャートは $\forall (T_\lambda,\,\phi_\lambda) \in \mathcal{T}$ と両立するので，$\phi_\lambda(S \cap T_\lambda)$, $\phi_\lambda(U \cap T_\lambda) \subset \mathbb{R}^n$ は開集合である．ϕ_λ は同相写像なので全単射であり，従って補題 D.1-(9) より

$$\phi_\lambda(S \cap T_\lambda) \cap \phi_\lambda(U \cap T_\lambda) = \phi_\lambda(S \cap U \cap T_\lambda)$$

が成り立つから，$\phi_\lambda(S \cap T_\lambda) \cap \phi_\lambda(U \cap T_\lambda)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である．$\varphi \circ \phi_\lambda^{-1}$ は同相写像であるから

$$\varphi(S \cap U \cap T_\lambda) = (\varphi \circ \phi_\lambda^{-1})(\phi_\lambda(S \cap U \cap T_\lambda))$$

も $\mathbb{R}^n$ の開集合である．ここで補題 D.1-(1) を使うと[*7]，

$$\varphi(S \cap U) = \varphi(S \cap U \cap M) = \varphi\left(S \cap U \cap \left(\bigcup_\lambda T_\lambda\right)\right) = \varphi\left(\bigcup_\lambda S \cap U \cap T_\lambda\right) = \bigcup_\lambda \varphi(S \cap U \cap T_\lambda)$$

も $\mathbb{R}^n$ の開集合であると分かる．全く同様の議論により $\psi(S \cap U)$ も $\mathbb{R}^n$ の開集合．

次に，$\psi \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(S \cap U) \to \psi(S \cap U)$ が微分同相であることを示す．仮定より任意のチャート $(T_\lambda,\,\phi_\lambda) \in \mathcal{T}$ に対して $\phi_\lambda \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(S \cap T_\lambda) \to \phi_\lambda(S \cap T_\lambda)$ は微分同相．従ってこれの $\varphi(S \cap U \cap T_\lambda)$ への制限

$$\phi_\lambda \circ \varphi^{-1}\Big|_{\varphi(S \cap U \cap T_\lambda)} : \varphi(S \cap U \cap T_\lambda) \to \phi_\lambda(S \cap U \cap T_\lambda)$$

[*7] 選択公理を認める．

もまた微分同相である．$\psi\circ\phi_\lambda^{-1}|_{\phi_\lambda(S\cap U\cap T_\lambda)}$ に関しても同様なので，これらの合成

$$\psi\circ\varphi^{-1}\colon \varphi(S\cap U\cap T_\lambda)\to\psi(S\cap U\cap T_\lambda)$$

もまた微分同相．ここで $\varphi,\,\psi$ が全単射であること，および $M=\bigcup_\lambda T_\lambda$ を使うと

$$\varphi(S\cap U)=\bigcup_\lambda \varphi(S\cap U\cap T_\lambda),\quad \psi(S\cap U)=\bigcup_\lambda \psi(S\cap U\cap T_\lambda)$$

が分かるので，

$$\psi\circ\varphi^{-1}\colon \varphi(S\cap U)\to\psi(S\cap U)$$

も微分同相写像である．

■

定義 2.7: 微分構造・極大アトラス

C^∞ 多様体 M の C^∞ アトラス $\mathcal{S}$ を与える．

- 定義 2.6 で定めた同値関係による $\mathcal{S}$ の同値類 $[\mathcal{S}]\subset\mathscr{A}$ を M の**微分構造** (differential structure) と呼ぶ．
- C^∞ アトラス $\mathcal{S}$ の**極大アトラス** (maximal atlas) $\mathcal{S}^+$ を以下のように定義する：

$$\mathcal{S}^+ := \bigcup_{\mathcal{T}\in[\mathcal{S}]}\mathcal{T}.$$

! 実は，極大アトラスは 1 通りとは限らないことが知られている．しかし，本資料内ではあまり気にしなくても良い．

以降では，断らない限り多様体のアトラスは全て極大アトラスであるとする．

【例 2.2.2】S^n の微分構造

【例 **2.1.2**】で構成したアトラス

$$\mathcal{A}_{S^n} := \left\{(U_i^\pm,\,\varphi_i^\pm)\right\}_{i=1,\,\ldots,\,n+1}$$

の座標変換を顕に書くと，$i>j$ のとき

$$\varphi_i^\pm\circ(\varphi_j^\pm)^{-1}\colon \begin{pmatrix}u^1\\ \vdots\\ u^n\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}u^1\\ \vdots\\ \widehat{u^i}\\ \vdots\\ \underbrace{\pm\sqrt{1-|\boldsymbol{u}|^2}}_{j}\\ \vdots\\ u^n\end{pmatrix}$$

で，$i = j$ のとき $\varphi_i^{\pm} \circ (\varphi_j^{\pm})^{-1} = \mathrm{id}_{B^n}$ であり，微分同相写像である．従って $\mathcal{A}_{S^n}$ は C^∞ アトラスで，これの極大アトラスを S^n の標準的な微分構造とする．

【例 2.2.3】立体射影

S^n の上に**【例 2.2.2】**の $\mathcal{A}_{S^n}$ とは異なる C^∞ アトラスを構成する．この方法は**立体射影** (stereographic projection) として知られる．

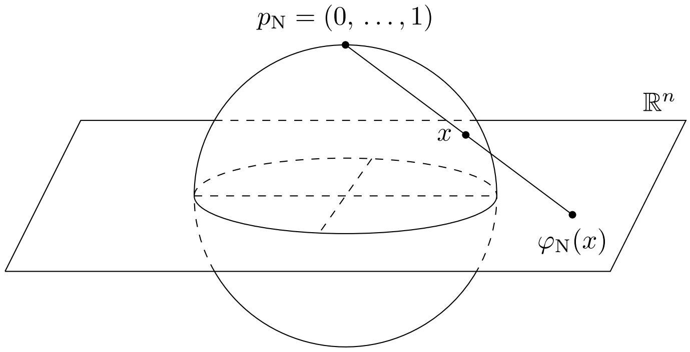


図 2.3: 立体射影

S^n の「北極点」を $p_{\mathrm{N}} = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ とおく．$U_{\mathrm{N}} \coloneqq S^n \setminus \{p_{\mathrm{N}}\}$ は S^n の開集合である．点 $x = (x^1, \ldots, x^{n+1}) \in U_{\mathrm{N}}$ を任意にとる．p_{N} と x を通る $\mathbb{R}^{n+1}$ の直線は $\left\{tx + (1-t)p_{\mathrm{N}}\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ と書けるので，この直線と超平面 $x^{n+1} = 0$ の交点は，t の方程式 $tx^{n+1} + (1-t) = 0$ を解くことで

$$\frac{1}{1-x^{n+1}}x + \left(1 - \frac{1}{1-x^{n+1}}\right)p_{\mathrm{N}} = \left(\frac{x^1}{1-x^{n+1}}, \ldots, \frac{x^n}{1-x^{n+1}}, 0\right) \in \mathbb{R}^n \times \{0\}$$

のただ 1 つであることがわかる．以上の考察から同相写像

$$\varphi_{\mathrm{N}} \colon U_{\mathrm{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ (x^1, \ldots, x^{n+1}) \longmapsto \begin{pmatrix} {x_{\mathrm{N}}}^1(x^1, \ldots, x^{n+1}) \\ \vdots \\ {x_{\mathrm{N}}}^n(x^1, \ldots, x^{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^1}{1-x^{n+1}} \\ \vdots \\ \frac{x^n}{1-x^{n+1}} \end{pmatrix}$$

が得られる．逆写像を顕に書くと

$$\varphi_{\mathrm{N}}^{-1} \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n,\ \begin{pmatrix} {x_{\mathrm{N}}}^1 \\ \vdots \\ {x_{\mathrm{N}}}^n \end{pmatrix} \longmapsto \left(\frac{2{x_{\mathrm{N}}}^1}{|\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}|^2 + 1}, \ldots, \frac{2{x_{\mathrm{N}}}^n}{|\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}|^2 + 1}, \frac{|\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}|^2 - 1}{|\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}|^2 + 1}\right)$$

となる．組 $(U_{\mathrm{N}}, \varphi_{\mathrm{N}}) = \big(U_{\mathrm{N}}, ({x_{\mathrm{N}}}^\mu)\big)$ は位相多様体 S^n のチャートになる．

S^n の「南極点」を $p_{\mathrm{S}} = (0, \ldots, 0, -1)$ とおき，S^n の開集合 $U_{\mathrm{S}} \coloneqq S^n \setminus \{p_{\mathrm{S}}\}$ の上で同様の議論

を行うことで同相写像

$$\varphi_{\mathrm{S}}\colon U_{\mathrm{S}} \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ (x^1,\,\dots,\,x^{n+1}) \longmapsto \begin{pmatrix} {x_{\mathrm{S}}}^1(x^1,\,\dots,\,x^{n+1}) \\ \vdots \\ {x_{\mathrm{S}}}^n(x^1,\,\dots,\,x^{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^1}{1+x^{n+1}} \\ \vdots \\ \frac{x^n}{1+x^{n+1}} \end{pmatrix}$$

$$\varphi_{\mathrm{N}}^{-1}\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n,\ \begin{pmatrix} {x_{\mathrm{S}}}^1 \\ \vdots \\ {x_{\mathrm{S}}}^n \end{pmatrix} \longmapsto \left(\frac{2{x_{\mathrm{S}}}^1}{|\boldsymbol{x}_{\mathrm{S}}|^2+1},\,\dots,\,\frac{2{x_{\mathrm{S}}}^n}{|\boldsymbol{x}_{\mathrm{S}}|^2+1},\,-\frac{|\boldsymbol{x}|^2-1}{|\boldsymbol{x}|^2+1} \right)$$

が得られ，組 $(U_{\mathrm{S}},\,\varphi_{\mathrm{S}}) = \bigl(U_{\mathrm{S}},\,({x_{\mathrm{S}}}^\mu)\bigr)$ も位相多様体 S^n のチャートになる．さらに

$$S^n = U_{\mathrm{N}} \cup U_{\mathrm{S}}$$

が成り立つので，2 つのチャートを含む族

$$\mathcal{A}_{\mathrm{NS}} \coloneqq \bigl\{(U_{\mathrm{N}},\,\varphi_{\mathrm{N}}),\,(U_{\mathrm{S}},\,\varphi_{\mathrm{S}})\bigr\}$$

は S^n のアトラスである．チャートの重なりは $U_{\mathrm{N}} \cap U_{\mathrm{S}} = S^n \setminus \{p_{\mathrm{N}},\,p_{\mathrm{S}}\}$ なので $\varphi_{\mathrm{N}}(U_{\mathrm{N}} \cap U_{\mathrm{S}}) = \varphi_{\mathrm{S}}(U_{\mathrm{N}} \cap U_{\mathrm{S}}) = \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ であり，座標変換は

$$\varphi_{\mathrm{S}} \circ \varphi_{\mathrm{N}}^{-1}\colon \varphi_{\mathrm{N}}(U_{\mathrm{N}} \cap U_{\mathrm{S}}) \longrightarrow \varphi_{\mathrm{S}}(U_{\mathrm{N}} \cap U_{\mathrm{S}}),\ \begin{pmatrix} {x_{\mathrm{N}}}^1 \\ \vdots \\ {x_{\mathrm{N}}}^n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} {x_{\mathrm{N}}}^1/|\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}|^2 \\ \vdots \\ {x_{\mathrm{N}}}^n/|\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}|^2 \end{pmatrix}$$

で，C^∞ 級である．$\varphi_{\mathrm{N}} \circ \varphi_{\mathrm{S}}^{-1}$ も同様に C^∞ 級なので座標変換が微分同相写像であり，アトラス $\mathcal{A}_{\mathrm{NS}}$ は S^n 上の C^∞ アトラスである．

$\mathcal{A}_{\mathrm{NS}}$ が【例 2.2.2】の C^∞ アトラス $\mathcal{A}_{S^n}$ と両立することを確認する．まず $U_{n+1}^{\pm} \cap U_{\mathrm{N}}$ の上の座標変換は

$$\varphi_{n+1}^{\pm} \circ \varphi_{\mathrm{N}}^{-1}\colon \begin{pmatrix} {x_{\mathrm{N}}}^1 \\ \vdots \\ {x_{\mathrm{N}}}^n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{2{x_{\mathrm{N}}}^1}{|\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}|^2+1} \\ \vdots \\ \frac{2{x_{\mathrm{N}}}^n}{|\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}|^2+1} \end{pmatrix}$$

$$\varphi_{\mathrm{N}} \circ (\varphi_{n+1}^{\pm})^{-1}\colon \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{u^1}{1\mp\sqrt{1-|\boldsymbol{u}|^2}} \\ \vdots \\ \frac{u^n}{1\mp\sqrt{1-|\boldsymbol{u}|^2}} \end{pmatrix}$$

なので微分同相写像である．

次に $i=1,\ldots,n$ に対しては $\{p_{\mathrm{N}}, p_{\mathrm{S}}\} \not\subset U_i^{\pm} \cap U_{\mathrm{N}}$ なので，座標変換は

$$\varphi_i^{+} \circ \varphi_{\mathrm{N}}^{-1} \colon \begin{pmatrix} {x_{\mathrm{N}}}^1 \\ \vdots \\ {x_{\mathrm{N}}}^n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{2{x_{\mathrm{N}}}^1}{|\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}|^2+1} \\ \vdots \\ \widehat{\frac{2{x_{\mathrm{N}}}^i}{|\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}|^2+1}} \\ \vdots \\ \frac{2{x_{\mathrm{N}}}^n}{|\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}|^2+1} \end{pmatrix}$$

$$\varphi_{\mathrm{N}} \circ (\varphi_i^{\pm})^{-1} \colon \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{u^1}{1-u^n} \\ \vdots \\ \underbrace{\pm\frac{\sqrt{1-|\boldsymbol{u}|^2}}{1-u^n}}_{i} \\ \vdots \\ \frac{u^{n-1}}{1-u^n} \end{pmatrix}$$

で，微分同相写像である．φ_{S} に関しても同様に，座標変換が微分同相写像であることを直接確認できる．従って $\mathcal{A}_{\mathrm{NS}}$ は $\mathcal{A}_{S^n}$ と同じ極大アトラスに属し，S^n に同じ微分構造を定める．

【例 2.2.4】有限次元位相ベクトル空間

V を $n<\infty$ 次元ベクトル空間とする．V 上の任意のノルムによって V を距離空間と見做し，距離空間の標準的な位相を入れて位相空間にする．V の任意の基底 $\{e_1,\ldots,e_n\}$ を 1 つとってベクトル空間の同型写像

$$e\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow V,\ (x^1,\ldots,x^n) \longmapsto x^\mu e_\mu$$

を考えると，e は同相写像でもある．従って組 $(V, e^{-1}) = \bigl(V, (x^\mu)\bigr)$ は位相多様体 V のチャートになる．この位相多様体 V の上の自然な C^∞ 構造は次のようにして定まる：
別の基底 $\{{e'}_1,\ldots,{e'}_n\}$ による同相写像

$$e'\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow V,\ ({x'}^1,\ldots,{x'}^n) \longmapsto {x'}^\mu {e'}_\mu$$

が定めるチャート $(V, {e'}^{-1}) = \bigl(V, ({x'}^\mu)\bigr)$ を考える．基底の取り替えを表す正則行列 $[T^\mu{}_\nu]$ が存在して

$$e_\mu = {e'}_\nu T^\nu{}_\mu$$

と書けるので，$\bigl(V, (x^\mu)\bigr)$ から $\bigl(V, ({x'}^\mu)\bigr)$ への座標変換は

$${x'}^\mu(x^1,\ldots,x^n) = T^\mu{}_\nu x^\nu \quad (\mu = 1,\ldots,n)$$

という微分同相写像になる．i.e. チャート $\bigl(V, (x^\mu)\bigr)$, $\bigl(V, ({x'}^\mu)\bigr)$ は両立する．アトラス $\{\bigl(V, (x^\mu)\bigr)\}$ の極大アトラスを V の標準的な微分構造として定める．

【例 2.2.5】行列空間

$m\times n$ 実行列全体の集合を $\mathbf{M}(\boldsymbol{m\times n},\,\mathbb{R})$ と書く．$\mathrm{M}(m\times n,\,\mathbb{R})$ は行列の和と実数倍に関して mn 次元ベクトル空間をなすので，**【例 2.2.4】**によって C^∞ 多様体になる．特に，同相写像

$$\mathrm{M}(m\times n,\,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{mn},$$
$$\begin{bmatrix} x^1{}_1 & x^1{}_2 & \cdots & x^1{}_n \\ x^2{}_1 & x^2{}_2 & \cdots & x^2{}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^m{}_1 & x^m{}_2 & \cdots & x^m{}_n \end{bmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x^1{}_1 \\ \vdots \\ x^1{}_n \\ x^2{}_1 \\ \vdots \\ x^m{}_n \end{pmatrix}$$

などによってしばしば $\mathbb{R}^{mn}$ と同一視される．
同様に，$m\times n$ 複素行列全体の集合を $\mathrm{M}(m\times n,\,\mathbb{C})$ と書くとこれは $2mn$ 次元実 C^∞ 多様体になる．
なお，以降では行列のサイズが $n\times n$ の場合に限って $\mathbf{M}(\boldsymbol{n},\,\mathbb{R})$, $\mathbf{M}(\boldsymbol{n},\,\mathbb{C})$ と略記する．

【例 2.2.6】開部分多様体

$U\subset\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合とする．このとき U は n 次元位相多様体であり，1 枚のみのチャートを持つアトラス $\{(U,\,\mathrm{id}_U)\}$ が U 上の C^∞ 構造を定める．
より一般に，M を C^∞ 多様体，$\mathcal{A}_M$ を M の C^∞ アトラスとし，$U\subset M$ を M の開集合とする．このとき，

$$\mathcal{A}_U \coloneqq \left\{\, (V,\,\psi)\in\mathcal{A}_M \;\middle|\; V\subset U \,\right\}$$

は U の C^∞ アトラスになる．このようにして M の開集合に C^∞ 構造を入れてできる C^∞ 多様体のことを**開部分多様体** (open submanifold) と呼ぶ．

【例 2.2.7】C^∞ 積多様体

$M,\,N$ を C^∞ 多様体とする．**【例 2.1.4】**による積多様体 $M\times N$ のチャートは $(U_1\times U_2,\,\varphi_1\times\varphi_2)$ の形をしているが，任意の座標変換

$$(\varphi_1\times\varphi_2)\circ(\psi_1\times\psi_2)^{-1} = (\varphi_1\circ\psi_1^{-1})\times(\varphi_2\circ\psi_2^{-1})$$

は C^∞ 級なので $M\times N$ は C^∞ 多様体でもある．

2.2.2 複素多様体・および Lie 群の定義

この小節では複素多様体と Lie 群の定義のみ行う．複素関数 $f\colon\mathbb{C}^m\to\mathbb{C}$ が**正則** (holomorphic) であるとは，$f(z^1,\,\ldots,\,z^m) = f_1(x^1,\,\ldots,\,x^m;\,y^1,\,\ldots,\,y^m) + \mathrm{i}f_2(x^1,\,\ldots,\,x^m;\,y^1,\,\ldots,\,y^m)$ が各変数 $z^\mu = x^\mu + \mathrm{i}y^\mu$

に関して **Cauchy-Riemann の関係式**

$$\frac{\partial f_1}{\partial x^\mu} = \frac{\partial f_2}{\partial y^\mu}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x^\mu} = -\frac{\partial f_1}{\partial y^\mu}$$

を充たすことを言う．

写像 $(f^1, \ldots, f^n)\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ は，各関数 f^λ が正則であるとき正則であると言う．

複素多様体の定義は，C^∞ 多様体の定義のうち，座標変換の「 C^∞ 級」を「正則」に置き換えることで得られる：

定義 2.8: 複素多様体

M を位相空間とする．集合族 $\mathcal{S} = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda) \mid \varphi_\lambda\colon U_\lambda \xrightarrow{\approx} \mathbb{C}^m\}_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられ，

- $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が M の開被覆
- 全ての座標変換 $f_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ が正則

であるとき，M は**複素多様体**と呼ばれる．

座標近傍が $\mathbb{C}^m$ と同相のとき，m を**複素次元**と呼んで $\mathbf{dim}_{\mathbb{C}}\, \boldsymbol{M} = m$ と書く．こきときの実次元 $2m$ は単に $\mathbf{dim}\, \boldsymbol{M} = 2m$ である．

M のアトラスの上には，定義 2.6 で定めた同値関係が定まる．

定義 2.9: 複素構造

複素多様体 M のアトラス $\mathcal{S}$ を与える．定義 2.6 で定めた同値関係による $\mathcal{S}$ の同値類 $[\mathcal{S}]$ を M の**複素構造** (complex structure) と呼ぶ．

Lie 群と一般線形群を定義する．

定義 2.10: Lie 群

群 G が同時に C^∞ 多様体の構造を持ち，群の二項演算 $\cdot\colon G\times G \to G,\ (g, h) \mapsto gh$ および逆元をとる演算 ${}^{-1}\colon G \to G,\ g \mapsto g^{-1}$ がともに C^∞ 級であるとき，G を **Lie 群** (Lie group) と呼ぶ．G が複素多様体であり，上述の 2 つの演算が正則写像であるときは G を**複素 Lie 群**と呼ぶ．

【例 2.2.8】一般線形群

$n\times n$ 実正則行列全体がなす群を**一般線形群** (general linear group) と呼び，$\mathbf{GL}(\boldsymbol{n}, \mathbb{R})$ と書く．

いま，$n\times n$ 行列全体の集合 $\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$ を**【例 2.2.5】**の方法により C^∞ 多様体と見做す．このとき写像

$$\det\colon \mathrm{M}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\ \begin{bmatrix} {x^1}_1 & \cdots & {x^1}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {x^n}_1 & \cdots & {x^n}_n \end{bmatrix} \longmapsto \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}\sigma\, {x^1}_{\sigma(1)} {x^2}_{\sigma(2)} \cdots {x^n}_{\sigma(n)}$$

は連続であり，$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ は $\mathbb{R}$ の開集合なので，$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \subset \mathrm{M}(n, \mathbb{R})$ は $\mathrm{M}(n, \mathbb{R}) \approx$

$\mathbb{R}^{n^2}$ の開集合だとわかる．従って $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ は n^2 次元 C^∞ 多様体である．群演算は明らかに C^∞ 級なので，$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ は Lie 群である．
同様に，$n \times n$ 複素正則行列全体がなす群 (**複素一般線形群**) $\mathbf{GL}(\boldsymbol{n}, \mathbb{C})$ は $2n^2$ 次元 C^∞ 多様体になる．

2.3　境界付き多様体

$\mathbb{R}^n$ の**閉じた上半空間** (closed upper half space) およびその境界を $n > 0$ のとき

$$\mathbb{H}^n := \left\{ (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x^n \geq 0 \right\}$$
$$\partial\mathbb{H}^n := \left\{ (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x^n = 0 \right\}$$

と定義し，$n = 0$ のとき

$$\mathbb{H}^0 := \{0\}$$
$$\partial\mathbb{H}^0 := \emptyset$$

と定義する．これは Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の部分空間の境界の定義と一致している．

定義 2.11: 境界付き位相多様体

第 2 可算な Hausdorff 空間[a] $(M, \mathscr{O})$ は，その上の任意の点が $\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{H}^n$ と同相になるような近傍を持つとき，n 次元**境界付き位相多様体** (topological manifold with boundary) と呼ばれる．

[a] 位相多様体と同様，第 2 可算性を課すことも多い．

境界付き位相多様体のチャートの定義は位相多様体のチャートの定義とほとんど同じである：

定義 2.12: 境界付き位相多様体のチャート

境界付き位相多様体 $(M, \mathscr{O})$ の開集合 $U \in \mathscr{O}$ であって，$\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{H}^n$ の開集合 V との同相写像 $\varphi\colon U \to V$ が存在するとき，組 (U, φ) を M の**チャート** (chart) と呼ぶ．

必要ならば，境界付き位相多様体 M のチャート (U, φ) のうち，$\varphi(U)$ が $\mathbb{R}^n$ と同相なものを**内部チャート** (interior chart)，$\varphi(U)$ が $\mathbb{H}^n$ の開集合と同相で，かつ $\varphi(U) \cap \partial\mathbb{H}^n \neq \emptyset$ を充たすものを**境界チャート** (boundary chart) と呼ぶことにしよう．

定義 2.13: 内部・境界

$(M, \mathscr{O})$ を境界付き位相多様体とし，$\forall p \in M$ を一つとる．

(1) p が M の**内点** (interior point) であるとは，ある内部チャート (U, φ) が存在して $p \in U$ となること．

(2) p が M の**境界点** (boundary point) であるとは，ある境界チャート (U, φ) が存在して $\varphi(p) \in \partial\mathbb{H}^n$ となること．

M の内点全体の集合を**境界付き位相多様体 M の内部** (interior) と呼び，$\mathrm{Int}\, M$ と書く．M の境界点全体の集合を**境界付き位相多様体 M の境界** (boundary) と呼び，∂M と書く．

定義から明らかなように，$\forall p \in M$ は内点または境界点である．というのも，$p \in M$ が境界点でないならば，p は内点であるか，または境界チャート (U, φ) に対して $p \in U$ かつ $\varphi(p) \notin \partial\mathbb{H}^n$ を充たす．後者の場合 φ の $U \cap \varphi^{-1}\bigl(\mathrm{Int}\ \mathbb{H}^n\bigr)$ への制限は内部チャートになり，かつ $p \in U \cap \varphi^{-1}\bigl(\mathrm{Int}\ \mathbb{H}^n\bigr)$ を充たすので，p は M の内点なのである．

しかしながら，あるチャートに関しては内点だが，別のチャートに関しては境界点であるような点 $p \in M$ が存在しないことは非自明である．この問題は次の命題によって肯定的に解決される．

定理 2.2: 多様体の境界の位相的不変性

境界付き位相多様体 $(M, \mathscr{O})$ に対して以下が成り立つ：

$$M = \mathrm{Int}\, M \sqcup \partial M$$

定理 2.2 はホモロジーを使った議論によって証明できるが，ここでは省略する．

位相空間の部分空間の内部，境界の定義と，境界付き位相多様体の内点・境界の定義は別物であることに注意すべきである．

例えば n 次元閉球

$$\overline{B^n} \coloneqq \left\{ (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; |\boldsymbol{x}|^2 \leq 1 \right\}$$

は定義 2.11 から境界付き位相多様体であり，その境界（空でない）は $n-1$ 次元球面 S^{n-1} である．一方 $\overline{B^n}$ を Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の部分空間と見做した場合の部分空間の境界は S^{n-1} だが，$\overline{B^n}$ を $\overline{B^n}$ 自身の部分空間と見做す場合，部分空間の境界は空集合である[a]．

このような事情があるので，部分空間の境界を**位相的境界** (topological boundary)，境界付き位相多様体の境界付き位相多様体の内点・境界を**多様体の境界** (manifold boundary) と呼んで違いを明確にする場合がある．

[a] $\overline{B^n} \setminus \overline{B^n} = \emptyset$ なので．

命題 2.2: 位相多様体の境界の基本性質

M を n 次元境界付き位相多様体とする．

(1) $\mathrm{Int}\, M \subset M$ は M の開集合で，n 次元の境界を持たない位相多様体である．
(2) $\partial M \subset M$ は M の閉集合で，$n-1$ 次元の境界を持たない位相多様体である．

証明 (1) $\forall x \in \mathrm{Int}\, M$ をとる．このときある内部チャート (U, φ) が存在して $x \in U$ となる．

まず，$\mathrm{Int}\, M$ が開集合であることを示す．命題 1.3 より，そのためには $U \subset \mathrm{Int}\, M$ を示せば良い．$\forall y \in U$ を 1 つとる．このとき $\varphi(y) \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ だが，$\varphi(U)$ は開集合なので命題 1.3 より $\varphi(y)$ の開近傍 $\varphi(y) \in V \subset \varphi(U)$ が存在する．φ は同相写像で全単射なので $y \in \varphi^{-1}(V) \subset U$ が言えて，$(\varphi^{-1}(V), \varphi|_{\varphi^{-1}(V)})$ が y を含む内部チャートだとわかる．よって $y \in \mathrm{Int}\, M$ であり，$U \subset \mathrm{Int}\, M$ が示された．

$\mathrm{Int}\, M$ は第 2 可算な Hausdorff 空間 M の部分空間なので第 2 可算かつ Hausdorff であり，$\mathrm{Int}\, M$ の任意の点はある内部チャートに含まれるので，$\mathrm{Int}\, M$ は n 次元位相多様体である．

(2) 定理 2.2 より $\partial M = M \setminus \mathrm{Int}\, M$ である．従って (1) より ∂M は M の閉集合である．∂M は第 2 可算な Hausdorff 空間 M の部分空間なので第 2 可算かつ Hausdorff である．

$\forall x \in \partial M$ と，x を含む境界チャート (U, φ) をとる．このとき $\varphi(x) \in \partial\mathbb{H}^n$ である．相対位相の定義より，$V := \varphi(U) \cap \partial\mathbb{H}^n$ とおくと V は $\partial\mathbb{H}^n \approx \mathbb{R}^{n-1}$ の開集合である．φ は連続なので $\varphi^{-1}(V) \subset \partial M$ は ∂M の開集合であり，$(\varphi^{-1}(V), \varphi|_{\varphi^{-1}(V)})$ は x を含む ∂M のチャートである．以上で ∂M が $n-1$ 次元位相多様体であることが示された．

■

命題 2.3: 境界付き位相多様体の基本性質

M を n 次元境界付き位相多様体とする．

(1) M は局所弧状連結
(2) M は局所コンパクト
(3) M はパラコンパクト
(4) 基本群が可算濃度

証明 [4, Proposition 1.40] を参照 ■

C^∞ 構造を意識するとき，命題 2.2 に相当する命題が成り立つ．

定理 2.3: 多様体の境界の C^∞ 不変性

M を n 次元境界付き C^∞ 多様体とする．点 $p \in M$ を含む C^∞ の境界チャート (U, φ) が 1 つでも存在して $\varphi(p) \in \partial\mathbb{H}^n$ を充たすならば，p を含む全ての C^∞ チャート (V, ψ) は境界チャートでかつ $\psi(p) \in \partial\mathbb{H}^n$ を充たす．

以降では，境界なしでも境界付きでもどちらの場合にも成り立つ主張であることを強調したい場合には**（境界なし/あり）**と書くことにする．

2.4 C^∞ 写像

連続写像によって，異なる位相空間のトポロジーを比較できるようになった[*8]．同じような形で異なる C^∞ 多様体の C^∞ 構造を比較したい．

定義 2.14: C^∞ 関数

（境界なし/あり）C^∞ 多様体 M と，M の C^∞ アトラス $\mathcal{A}$ を 1 つとる．
M 上の実数値関数 $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ が $\boldsymbol{C^\infty}$ **関数** (smooth function) であるとは，$\forall p \in M$ に対して以下を充たすチャート $(U,\,\varphi) \in \mathcal{A}$ が存在することを言う：

- $p \in U$
- $f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ が $\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{H}^n$ の開集合 $\varphi(U)$ 上の C^∞ 関数となる．

M 上の C^∞ 関数全体の集合を $\boldsymbol{C^\infty(M)}$ と書く．

補題 2.2:

（境界なし/あり）C^∞ 多様体 M と，M の C^∞ アトラス $\mathcal{A}$ を 1 つとり，その上の C^∞ 関数 $f \in C^\infty(M)$ を任意にとる．このとき，任意のチャート $(U,\,\varphi) \in \mathcal{A}$ に対して $f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ は C^∞ 級である．

証明 $\forall p \in U$ を 1 つとると，f が C^∞ 関数であることからあるチャート $(V,\,\psi) \in \mathcal{A}$ が存在して $f \circ \psi^{-1}\colon \psi(V) \longrightarrow \mathbb{R}$ が C^∞ 級になる．M が C^∞ 多様体であることから，座標変換 $\psi \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$ は微分同相写像であり，$f \circ \varphi^{-1} = (f \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \varphi^{-1})\colon \varphi(U \cap V) \longrightarrow \mathbb{R}$ は C^∞ 級写像である．$p \in U$ は任意なので $f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ が C^∞ 級であることが示された． ■

C^∞ 級関数 $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ とチャート $(U,\,\varphi) = \bigl(U,\,(x^\mu)\bigr)$ に対して，$f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ とは n 変数の実数値関数 $f(x^1,\,\dots,\,x^n)$ のことに他ならない．この表式のことを f の**座標表示**と呼ぶことがある．

次に定義する C^∞ 写像は，異なる C^∞ 多様体の間の対応を与えるものである．

定義 2.15: C^∞ 写像

（境界なし/あり）C^∞ 多様体 $M,\,N$ を与え，$M,\,N$ それぞれの C^∞ アトラス $\mathcal{A},\,\mathcal{B}$ を一つずつとる．
写像 $f\colon M \longrightarrow N$ が $\boldsymbol{C^\infty}$ **写像** (smooth map) であるとは，$\forall p \in M$ に対して以下を充たす M のチャート $(U,\,\varphi) \in \mathcal{A}$ と N のチャート $(V,\,\psi) \in \mathcal{B}$ が存在することを言う：

- $p \in U$ かつ $f(p) \in V$
- $f(U) \subset V$
- $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \longrightarrow \psi(V)$ が C^∞ 級（図 2.4）

[*8] つまり，連続写像は位相空間の圏 **Top** の射である．

補題 2.3:

（境界なし/あり）C^∞ 多様体 M, N と M, N それぞれの C^∞ アトラス $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を1つずつとり，C^∞ 写像 $f\colon M \longrightarrow N$ を与える．このとき，任意のチャート $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ に対して $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ は C^∞ 級である．

証明 $\forall (U, \varphi) \in \mathcal{A}$ および $\forall (V, \psi) \in \mathcal{B}$ をとる．$U \cap f^{-1}(V) = \emptyset$ ならば確認することは何もない．$U \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$ とし，$\forall p \in U \cap f^{-1}(V)$ を 1 つとる．すると $f(p) \in V$ が成り立つので，f が C^∞ 写像であることからあるチャート $(U', \varphi') \in \mathcal{A}$, $(V', \psi') \in \mathcal{B}$ が存在して $p \in U'$ かつ $f(p) \in V'$ かつ $f(U') \subset V'$ かつ $\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1}\colon \varphi'(U') \longrightarrow \psi'(V')$ が C^∞ 級になる．座標変換は微分同相写像なので

$$\begin{aligned}\psi \circ f \circ \varphi^{-1} &= \psi \circ (\psi'^{-1} \circ \psi') \circ f \circ (\varphi'^{-1} \circ \varphi) \circ \varphi \\ &= (\psi \circ \psi'^{-1}) \circ (\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1}) \circ (\varphi' \circ \varphi^{-1})\colon \varphi\bigl(U \cap U' \cap f^{-1}(V)\bigr) \longrightarrow \psi(V)\end{aligned}$$

は C^∞ 級である．p は任意だったので，$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi\bigl(U \cap f^{-1}(V)\bigr) \longrightarrow \psi(V)$ は C^∞ 級である． ■

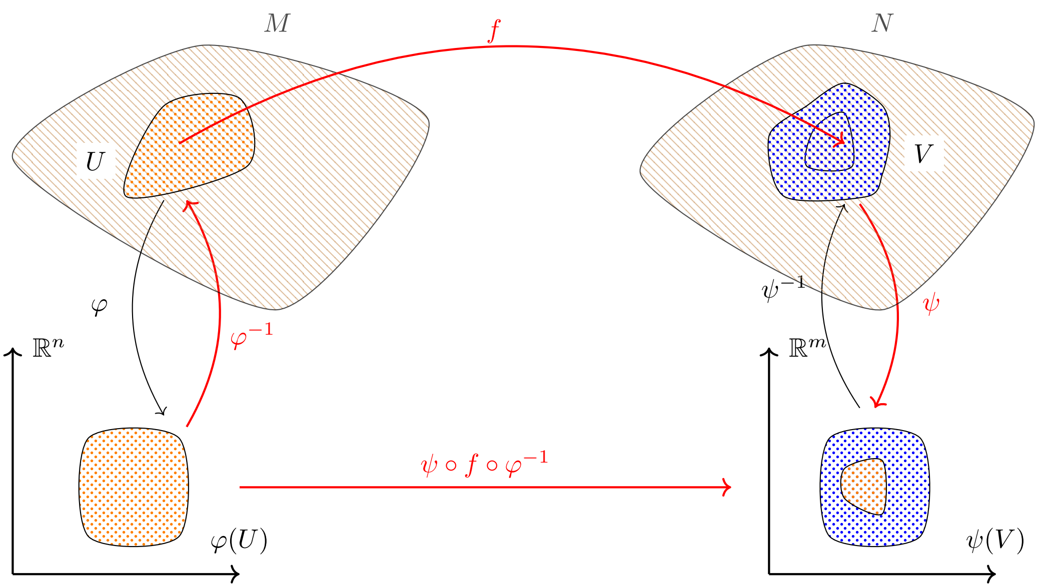


図 2.4: C^∞ 写像．M の次元を n，N の次元を m とした．

補題 2.4: C^∞ 写像の局所性

（境界なし/あり）C^∞ 多様体 M, N および写像 $f\colon M \longrightarrow N$ を任意に与える．

(1) $\forall p \in M$ に対して，$f|_U$ を C^∞ 写像にするような近傍 $p \in U \subset M$ が存在する
$\implies$ f は C^∞ 写像

(2) f が C^∞ 写像 $\implies$ M の任意の開集合 U に対して $f|_U$ が C^∞ 写像

証明 M の開集合には【例 **2.2.6**】の C^∞ 構造を入れて C^∞ 多様体と見做す．

(1) $\forall p \in M$ をとり，仮定の条件を充たす近傍 $p \in U \subset M$ をとる．すると $f|_U$ が C^∞ 写像になる

ので，U のチャート (U', φ') と N のチャート (V, ψ) が存在して $p \in U'$ かつ $f(p) \in V$ かつ $f|_U(U') = f(U') \subset V$ かつ $\psi \circ f \circ \varphi'^{-1}$ が C^∞ 級になる．$U' \subset U$ は U の開集合で $U \subset M$ は M の開集合なので U' は M の開集合でもあり，組 (U', φ') は p を含む M のチャートである．従って $f\colon M \longrightarrow N$ は C^∞ 写像である．

(2) M の任意の開集合 $U \subset M$ をとる．仮定より，$\forall p \in U$ に対して M のチャート (U', φ') と N のチャート (V, ψ) が存在して $p \in U'$ かつ $f(p) \in V$ かつ $f(U') \subset V$ かつ $\psi \circ f \circ \varphi'^{-1}$ が C^∞ 級となる．このとき相対位相の定義より $U' \cap U$ は U の開集合なので $(U' \cap U, \varphi'|_{U' \cap U})$ は U のチャートで，$p \in U \cap U'$ かつ $f(U \cap U') \subset f(U') \subset V$ かつ制限 $\psi \circ f \circ \varphi'^{-1}|_{U' \cap U}$ は C^∞ 級になる．i.e. $f|_U$ は C^∞ 写像である．

■

系 2.4: C^∞ 写像の貼り合わせ補題

（境界なし/あり）C^∞ 多様体 M, N を与える．このとき

- M の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$
- C^∞ 写像の族 $\{F_\lambda\colon U_\lambda \longrightarrow N\}_{\lambda \in \Lambda}$ であって，$\forall \alpha, \beta \in \Lambda$ に対して

$$F_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = F_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$$

  を充たすもの

を与えると，$\forall \lambda \in \Lambda$ に対して $F|_{U_\lambda} = F_\lambda$ を充たすような C^∞ 写像 $F\colon M \longrightarrow N$ が一意的に存在する．

命題 2.4: C^∞ 写像の基本性質

（境界なし/あり）C^∞ 多様体 M, N, P を与える．

(1) 写像 $f\colon M \longrightarrow N$ が C^∞ 写像ならば，f は連続である．
(2) 恒等写像 $\mathrm{id}_M\colon M \longrightarrow N$ は C^∞ 写像である．
(3) 写像 $f\colon M \longrightarrow N$, $g\colon N \longrightarrow P$ が C^∞ 写像ならば，$g \circ f\colon M \longrightarrow P$ も C^∞ 写像である．

証明 (1) $\forall p \in M$ を 1 つとる．仮定より f は C^∞ 写像なので，ある M のチャート (U, φ) と N のチャート (V, ψ) が存在して $p \in U$ かつ $f(p) \in V$ かつ $f(U) \subset V$ かつ $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ が $\mathbb{R}^n$ の C^∞ 級関数になる．従って $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ は連続である．φ, ψ は同相写像なので $f|_U = \psi^{-1} \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi\colon U \longrightarrow V$ は連続である．p は任意だったので $f\colon M \longrightarrow N$ は連続である．

(2) $\forall p \in M$ を 1 つとり，p を含む C^∞ チャート (U, φ) をとる．すると $\mathrm{id}_M(p) \in U$ で，かつ $\varphi \circ \mathrm{id}_M \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_{\varphi(U)}$ は Euclild 空間の部分空間上の恒等写像なので C^∞ 級である．

(3) $\forall p \in M$ を 1 つとる．仮定より g は C^∞ 写像なので，N, P の C^∞ チャート (V, θ), (W, ψ) が存在して $f(p) \in V$ かつ $g\bigl(f(p)\bigr) \in W$ かつ $g(V) \subset W$ かつ $\psi \circ g \circ \theta^{-1}\colon \theta(V) \longrightarrow \psi(W)$ が C^∞ 級になる．さらに仮定より f も C^∞ 写像なので (1) より連続であり，$f^{-1}(V) \subset M$ は点 p の開近傍になる．従って M のチャート (U, φ) が存在して $p \in U \subset f^{-1}(V)$ を充たす．補題 2.3 か

ら，$\theta\circ f\circ\varphi^{-1}\colon \varphi(U)\longrightarrow\theta(V)$ は C^∞ 級である．以上の考察から $g\bigl(f(U)\bigr)\subset g(V)\subset W$ かつ $\psi\circ(g\circ f)\circ\varphi^{-1}=(\psi\circ g\circ\theta^{-1})\circ(\theta\circ f\circ\varphi^{-1})\colon\varphi(U)\longrightarrow\psi(W)$ は C^∞ 級になる．

■

2.4.1 微分同相

これまでに登場した微分同相は，Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の開集合上に定義されていたが，一般の C^∞ 多様体の開集合の上に一般化すると次のようになる：

定義 2.16: 微分同相

（境界なし/あり）C^∞ 多様体 M, N を与える．全単射な C^∞ 写像 $f\colon M\to N$ は，その逆写像 $f^{-1}\colon N\to M$ もまた C^∞ 級写像であるとき，**微分同相写像** (diffeomorphism) と呼ばれる．
また, M から N への微分同相写像が存在するとき, 多様体 M と N は互いに**微分同相** (diffeomorphic) であると言う．このことを $\boldsymbol{M\approx N}$ などと書く．

命題 2.5: 微分同相写像の基本性質

(1) 微分同相写像の合成は微分同相写像である．
(2) 微分同相写像は同相写像である．
(3) 微分同相写像 $f\colon M\longrightarrow N$ の，任意の開集合 $U\subset M$ 上への制限 $f|_U\colon U\longrightarrow f(U)$ もまた微分同相写像である．

微分同相 $M\approx N$ は明らかに同値関係を作る．よって全ての（境界なし/あり）C^∞ 多様体の集まりを $\simeq$ によって類別することができる．そして，微分同相写像によって保存される C^∞ 多様体の性質（微分同相不変量）が重要になる．多様体の次元は微分同相不変量の 1 つである．

命題 2.6: 多様体の境界の微分同相不変性

M, N を境界付き C^∞ 多様体とし，$f\colon M\longrightarrow N$ を微分同相写像とする．このとき $f(\partial M)=\partial N$ で，制限 $f|_{\operatorname{Int}M}\colon \operatorname{Int}M\longrightarrow\operatorname{Int}N$ は微分同相写像である．

<u>証明</u>　[4, Theorem 1.46] ■

2.5 多様体の圏

これまでの議論を圏の言葉で整理しよう．**位相多様体の圏 Man** は

- 位相多様体を対象とする
- 連続写像を射とする
- 恒等射は恒等写像とする．
- 合成は，写像の合成とする

ことによって定義される．**境界付き位相多様体の圏 $\mathbf{Man_b}$** も同様に

- 境界付き位相多様体を対象とする
- 連続写像を射とする
- 合成は，連続写像の合成とする

として定義できる．

同様に，**C^∞ 多様体の圏 $\mathbf{Diff}$** は[*9]

- C^∞ 多様体を対象とする
- C^∞ 写像を射とする
- 恒等射は恒等写像とする（命題 2.4-(2)）
- 合成は，C^∞ 写像の合成とする（命題 2.4-(3)）

ことによって定義され，**境界付き C^∞ 多様体の圏 $\mathbf{Diff_b}$** は

- 境界付き位相多様体を対象とする
- C^∞ 写像を射とする
- 恒等射は恒等写像とする
- 合成は，写像の合成とする

である．

これらと同時に，**基点** (base point) 付きの場合を考えておくと後々便利である．**基点付き集合**とは，集合 $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ と X の 1 要素 $x \in X$ の組 (X, x) のことを言う．基点付き集合 (X, x), (Y, y) の間の**基点を保つ写像**とは，集合の写像 $f\colon X \longrightarrow Y$ であって $f(x) = y$ を充たすもののことを言う．このとき，

- 基点付き集合を対象とする
- 基点を保つ写像を射とする
- 恒等射は恒等写像とする
- 合成は，基点を保つ写像の合成とする

ことで，**基点付き集合と写像の圏 $\mathbf{Sets}_0$** が構成される．同様の構成を $\mathbf{Man}$, $\mathbf{Diff}$ に使うことで，圏 $\mathbf{Man}_0$, $\mathbf{Diff}_0$ が定義される．

[*9] 圏の記号は [4] に倣った．

第 3 章

接空間・余接空間

多様体の接空間は，多様体上の C^∞ 関数に作用する写像として定義される．接空間はその定義から自然にベクトル空間になり，その双対ベクトル空間は余接空間と呼ばれる．さらに，適当な個数の接空間と余接空間のテンソル積をとることで任意の型のテンソル空間が構成される．

この章の内容に関しては [4, Chapter3, 8, 11, 12] が詳しい．

3.1 代数的準備

この章から，幾何学的構造と代数的構造を並行して扱う場面が増える．本章に登場する代数系は，主にベクトル空間と多元環である．

公理 3.1: ベクトル空間の公理

- 集合 V
- **加法**と呼ばれる写像

$$+ \colon V \times V \longrightarrow V,\ (\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w}) \longmapsto \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$$

- **スカラー乗法**と呼ばれる写像

$$\cdot \colon \mathbb{K} \times V \longrightarrow V,\ (\lambda,\ \boldsymbol{v}) \longmapsto \lambda\boldsymbol{v}$$

の組[a] $(V,\ +,\ \cdot\ )$ が**体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間**であるとは，$\forall \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w} \in V$ と $\forall \lambda,\ \mu \in \mathbb{K}$ に対して以下が成り立つことを言う[b]：

(V1) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$.

(V2) $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w})$.

(V3) 記号として $\boldsymbol{0}$ と書かれる V の元が存在して，$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{u}$ が成り立つ．

(V4) 記号として $-\boldsymbol{v}$ と書かれる V の元が存在して，$\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = (-\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ が成り立つ．

(V5) $\lambda(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{u} + \lambda\boldsymbol{v}$.

(V6) $(\lambda + \mu)\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{u}$.

(V7) $(\lambda\mu)\boldsymbol{u} = \lambda(\mu\boldsymbol{u})$.

(V8) $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$.

[a] 実際には，加法とスカラー乗法の記号を明記せずに「ベクトル空間 V」と言うことが多い．
[b] V の元の和をいちいち $+(\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w})$ と書くのは煩雑なので，全て $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ のように略記している．スカラー乗法についても同様に $\lambda\boldsymbol{v} \coloneqq \cdot\,(\lambda,\, \boldsymbol{v})$ である．以降，ベクトル空間以外の代数系に関しても同じような略記を行う．

(V1)-(V4) は，組 $(V,\, +,\, \boldsymbol{0})$ が可換群であることを意味する．

3.1.1 ベクトル空間の圏

体 $\mathbb{K}$ 上の**ベクトル空間の圏** $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ は，

- $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間を対象とする
- 線型写像を射とする
- 合成は，線型写像の合成とする

ことで構成される．以下では，素材となる複数個のベクトル空間から新しいベクトル空間を構成する手法をいくつか紹介する．証明の詳細は付録 C の加群の項目を参照．

命題 3.1: 零ベクトル空間

1 点集合 $\{\boldsymbol{0}\} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ は $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の始対象かつ終対象である（このような対象を**零対象**と呼ぶ）．i.e. 任意の体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 $V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ に対して，写像

$$0\colon \{\boldsymbol{0}\} \longrightarrow V,\ \boldsymbol{0} \longmapsto \boldsymbol{0}$$

および

$$0\colon V \longrightarrow \{\boldsymbol{0}\},\ \boldsymbol{v} \longmapsto \boldsymbol{0}$$

は唯一の線型写像である．

命題 3.2: 直積ベクトル空間

体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 $V,\, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ を与える．

- 直積集合 $V \times W$ の上に
$$(\boldsymbol{v}_1,\, \boldsymbol{v}_2) + (\boldsymbol{w}_1,\, \boldsymbol{w}_2) \coloneqq (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{w}_1,\, \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{w}_2),$$
$$\lambda(\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w}) \coloneqq (\lambda\boldsymbol{v},\, \lambda\boldsymbol{w})$$
として加法とスカラー乗法を定義することで得られるベクトル空間（**直積ベクトル空間**）$\boldsymbol{V \times W} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$
- **標準的射影**と呼ばれる 2 つの線型写像[a]
$$p_1\colon V \times W \longrightarrow V,\ (\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w}) \longmapsto \boldsymbol{v}$$
$$p_2\colon V \times W \longrightarrow V,\ (\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w}) \longmapsto \boldsymbol{w}$$

の組 $(V \times W,\ p_1,\ p_2)$ は（圏論的な）積である．i.e. 圏 $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ における積の普遍性を充たす．

[a] 実際はこれらが線型写像になることを証明する．

命題 3.2 の構成は，直積するベクトル空間が有限個でなくても良い．

命題 3.3: 直積ベクトル空間

A を任意の集合とし，A で添字づけられた，体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間の族 $\left\{V_\alpha \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})\right\}_{\alpha \in A}$ を与える．

- 直積集合 $\prod_{\alpha \in A} V_\alpha$ の上に[a]

$$
\begin{aligned}
(v_\alpha)_{\alpha \in A} + (w_\alpha)_{\alpha \in A} &:= (v_\alpha + w_\alpha)_{\alpha \in A} \\
\lambda(v_\alpha) &:= (\lambda v_\alpha)_{\alpha \in A}
\end{aligned}
$$

  として加法とスカラー情報を定義することで得られるベクトル空間 $\boldsymbol{\prod_{\alpha \in A} V_\alpha}$
- **標準的射影**と呼ばれる線型写像の族

$$
\left\{p_\alpha \colon \prod_{\beta \in A} V_\beta \longrightarrow V_\alpha,\ (v_\beta)_{\beta \in A} \longmapsto v_\alpha\right\}_{\alpha \in A}
$$

の組 $\left(\prod_{\alpha \in A} V_\alpha,\ \left\{p_\alpha\right\}_{\alpha \in A}\right)$ は（圏論的な）積である．i.e. 圏 $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ における積の普遍性を充たす．

[a] 直積集合の元は $(v_\alpha)_{\alpha \in A}$ の形をした記号で書かれる．

命題 3.4: 直和ベクトル空間

A を任意の集合とし，A で添字づけられた，体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間の族 $\left\{V_\alpha \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})\right\}_{\alpha \in A}$ を与える．

- 直積集合 $\prod_{\alpha \in A} V_\alpha$ の部分集合

$$
\boldsymbol{\bigoplus_{\alpha \in A} V_\alpha} := \left\{ (x_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod_{\alpha \in A} V_\alpha \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{有限個の添字 } i_1, \dots, i_n \in \Lambda \text{ を除いた} \\ \text{全ての添字 } \alpha \in A \text{ について } x_\alpha = 0 \end{array} \right\}
$$

  の上に

$$
\begin{aligned}
(v_\alpha)_{\alpha \in A} + (w_\alpha)_{\alpha \in A} &:= (v_\alpha + w_\alpha)_{\alpha \in A} \\
\lambda(v_\alpha) &:= (\lambda v_\alpha)_{\alpha \in A}
\end{aligned}
$$

  として加法とスカラー乗法を定義することで得られるベクトル空間 $\boldsymbol{\bigoplus_{\alpha \in A} V_\alpha}$
- **標準的包含**と呼ばれる線型写像の族

$$
\left\{i_\alpha \colon \longrightarrow V_\alpha \longrightarrow \prod_{\beta \in A} V_\beta,\ v \longmapsto (w_\beta)_{\beta \in A}\right\}_{\alpha \in A}
$$

ただし

$$w_\beta \coloneqq \begin{cases} v, & \beta = \alpha \\ 0, & \beta \neq \alpha \end{cases}$$

とする．

の組 $\left(\bigoplus_{\alpha \in A} V_\alpha,\ \{i_\alpha\}_{\alpha \in A}\right)$ は（圏論的な）和である．i.e. 圏 $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ における和の普遍性を充たす．

与えられたベクトル空間の族が $\forall \alpha \in A$ について $V_\alpha = V$ のように共通している場合は $\boldsymbol{V^{\oplus A}}$ と略記する．

定義から明らかに，有限個のベクトル空間の直和は直積と同型になる．しかし，有限個でないときは必ずしも同型にならない．

命題 3.5: 商ベクトル空間

体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 $V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ と，その部分ベクトル空間 $W \subset V$ を与える．V 上の同値関係 $\sim \subset V \times V$ を

$$\boldsymbol{v} \sim \boldsymbol{w} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \in W$$

によって定義する．$\sim$ による $\boldsymbol{v} \in V$ の同値類を $\boldsymbol{v} + W$ と書き，商集合を $\boldsymbol{V/W}$ と書く．
$\forall \boldsymbol{v} + W,\ \boldsymbol{w} + W \in V/W,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ に対して

$$(\boldsymbol{v} + W) + (\boldsymbol{w} + W) \coloneqq (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) + W$$
$$\lambda \cdot (\boldsymbol{v} + W) \coloneqq (\lambda \boldsymbol{v}) + W$$

のように加法とスカラー乗法を定義すると，組 $(V/W,\ +,\ \cdot\ )$ は体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間になる．このベクトル空間のことを V の W による**商ベクトル空間**と呼ぶ．

証明 V/W がベクトル空間になることの証明は命題 C.15 を参照． ■

3.1.2　双対ベクトル空間

$\mathbb{K}$ 自身が持つ加法 $+$ と乗法 $\cdot$ をそれぞれベクトル空間の加法とスカラー乗法と見做すことで，$\mathbb{K}$ は $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間になる．

定義 3.1: 双対空間

V を体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．集合

$$\boldsymbol{V^*} \coloneqq \{\, \omega \colon V \to \mathbb{K} \mid \omega \text{ は線型写像} \,\} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}}(V, \mathbb{K})$$

の上の加法とスカラー乗法を，$\forall \omega,\, \sigma \in V^*,\ \forall a \in \mathbb{K}$ に対して

$$(\omega + \sigma)(v) := \omega(v) + \sigma(v),$$
$$(a\omega)(v) := a\omega(v)$$

（$\forall v \in V$）と定義すると，V^* はベクトル空間になる．このベクトル空間を**双対ベクトル空間** (dual vector space) と呼び，V^* の元を**余ベクトル** (covector) あるいは **1-形式** (1-form) と呼ぶ．

<u>**証明**</u> $\forall \omega,\, \omega_1,\, \omega_2 \in V^*$ および $\forall a,\, b \in \mathbb{K}$ に対してベクトル空間の公理 3.1 を見たしていることを確認する．

(V1) 自明

(V2) 自明

(V3) $0 = \mathbf{0} \in V$（恒等的に 0 を返す写像）とすればよい．

(V4) $\forall v \in V,\ (-\omega)(v) := -\omega(v)$ とすればよい．

(V5) $\big(a(\omega_1 + \omega_2)\big)(v) = a(\omega_1(v) + \omega_2(v)) = a\omega_1(v) + a\omega_2(v) = (a\omega_1)(v) + (a\omega_2)(v)$.

(V6) $\big((a+b)\omega\big)(v) = (a+b)\omega(v) = a\omega(v) + b\omega(v) = (a\omega)(v) + (b\omega)(v) = (a\omega + b\omega)(v)$.

(V7) $\big((ab)\omega\big)(v) = (ab)\omega(v) = a(b\omega(v)) = a\big((b\omega)(v)\big) = \big(a(b\omega)\big)(v)$.

(V8) $(1\omega)(v) = 1\omega(v) = \omega(v)$.

■

命題 3.6: 有限次元ベクトル空間の双対空間の基底

$V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ は**有限次元**であるとし，V の基底 $\{\, e_i \,\}$ をとる．このとき，

$$e^i(e_k) = \delta^i_k$$

で定義される $\dim V$ 個の余ベクトル

$$e^i \colon V \to \mathbb{K},\ v = v^j e_j \mapsto v^i \quad (i = 1,\, \ldots,\, \dim V)$$

の組 $\{\, e^i \,\}$ は V^* の基底である．

<u>**証明**</u> $\omega \in V^*,\ v = v^i e_i \in V$ を任意にとる．このとき

$$\omega(v) = \omega(v^i e_i) = v^i \omega(e_i) = \omega(e_i) e^i(v) = \big(\omega(e_i) e^i\big)(v).$$

i.e. $\{e^i\}$ はベクトル空間 V^* を生成する．

また，$a_1,\, \ldots,\, a_{\dim V} \in \mathbb{K}$ に対して $a_i e^i = 0$（零写像）が成り立つならば

$$a_k = a_i \delta^i_k = a_i e^i(e_k) = (a_i e^i)(e_k) = 0 \quad (1 \leq \forall k \leq \dim V)$$

である．i.e. $\dim V$ 個の余ベクトル $e^1,\, \ldots,\, e^{\dim V} \in V^*$ は線型独立である． ■

$\forall V,\, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ および任意の線型写像 $f \colon V \longrightarrow W$ を与える．このとき，**双対線型写像** (dual linear map) を

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f^*} \colon W^* &\longrightarrow V^*, \\ \omega &\longmapsto \bigl(v \longmapsto \omega \circ f(v)\bigr) \end{aligned}$$

と定義する[*1].

命題 3.7:

$\forall V,\, W,\, Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ および任意の線型写像 $f \colon V \longrightarrow W,\ g \colon W \longrightarrow Z$ を与える．このとき，以下が成り立つ：

(1) $(\mathrm{id}_V)^* = \mathrm{id}_{V^*}$
(2) $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$

<u>**証明**</u> (1) $\forall \omega \in V^*$ および $\forall v \in V$ に対して[*2]

$$(\mathrm{id}_V)^*(\omega)(v) = \omega \circ \mathrm{id}_{\mathrm{V}}(v) = \omega(v)$$

なので $(\mathrm{id}_V)^*(\omega) = \omega$ である．i.e. $(\mathrm{id}_V)^* = \mathrm{id}_{V^*}$

(2) $\forall \omega \in Z^*$ および $\forall v \in V$ に対して

$$(f^* \circ g^*)(\omega)(v) = f^*(\omega \circ g)(v) = \omega \circ (g \circ f)(v) = (g \circ f)^*(\omega)(v)$$

が成り立つので $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ である．

■

命題 3.7 は

- $V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}^{\mathrm{op}})$ を $V^* \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ に
- $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}^{\mathrm{op}}}(V,\, W)$ を $f^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}}(V^*,\, W^*)$ に

対応づける対応

$$(\text{-})^* \colon \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$$

が関手である[*3]ことを意味する．

$\forall V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ を与える．$v \in V$ に対して**評価写像** $\mathrm{ev}_v \colon V^* \longrightarrow \mathbb{R},\ \omega \longmapsto \omega(v)$ を考えると，

$$\begin{aligned} \eta_V \colon V &\longrightarrow V^{**}, \\ v &\longmapsto \mathrm{ev}_v \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

は線型写像である．

命題 3.8:

V が**有限次元**ならば，$\eta_V \colon V \longrightarrow V^{**}$ はベクトル空間の同型写像である．

[*1] $f^* \colon W^* \longrightarrow V^*$ は線型写像に対して線型写像を返す写像なのでこのように書いた．
[*2] 引数が複数ある時は，左側から先に読む．今の場合，線型写像 $(\mathrm{id}_V)^*(\omega) \colon V \longrightarrow \mathbb{K}$ に引数 $v \in V$ を渡す，と読む．
[*3] 同じことだが，$(\text{-})^* \colon \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ は**反変関手** (contravariant functor) であると言っても良い．

証明 $\dim V < \infty$ なので，命題 3.6 より $\dim V = \dim V^{**}$ である．よって η_V が単射であることを示せば良い[*4]．$v \notin \{0\}$ とする．V の基底 $\{e^i\}$ であって $e^1 = v$ であるものをとり，その双対基底 $\{e^i\}$ をとると

$$\eta_V(v)(e^1) = e^1(v) = 1$$

が成り立つので $\eta_V(v) \neq 0$, i.e. $v \notin \operatorname{Ker} \eta_V$ がわかった．従って対偶から $\operatorname{Ker} \eta_V = \{0\}$ であり，η_V は単射である． ■

線型写像 $\eta_V \colon V \longrightarrow V^{**}$ は自然である．つまり，$\forall V, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ および $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}}(V, W)$ に対して，$\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\eta_V"] \arrow[d, "f"] & V^{**} \arrow[d, "f^{**}"] \\ W \arrow[r, "\eta_W"] & W^{**} \end{tikzcd}$$

が成り立つということである．実際，$\forall v \in V$ および $\forall \omega \in W^*$ に対して[*5]

$$\begin{aligned} (f^{**} \circ \eta_V)(v)(\omega) &= f^{**}(\mathrm{ev}_v)(\omega) \\ &= \mathrm{ev}_v \circ f^*(\omega) \\ &= \mathrm{ev}_v(\omega \circ f) \\ &= \omega\big(f(v)\big) \\ &= \mathrm{ev}_{f(v)}(\omega) \\ &= (\eta_W \circ f)(v)(\omega) \end{aligned}$$

が成り立つ [1, p.159, Example 7.12.].

定義 3.2: 自然変換

任意の圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ および関手 $F, G \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ を与える．**自然変換** (natural transformation)

$$\eta \colon F \Longrightarrow G$$

は，$\mathcal{D}$ における射の族

$$\big\{\eta_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(X), G(X)\big)\big\}_{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

であって以下の性質を充たすもののことを言う：

(自然性条件) $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ に対して図式 3.1 を可換にする．

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "F(f)"] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\eta_Y"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

図 3.1: 自然変換

[*4] η_V が単射 $\iff \operatorname{Ker} \eta_V = \{0\} \Longrightarrow \dim V = \dim(\operatorname{Im} \eta_V) \Longrightarrow V = \operatorname{Im} V$

[*5] $(f^{**} \circ \eta_V)(v) \in (W^*)^*$ が $\omega \in W^*$ に作用しているということである．

つまり，(3.1.1) で定義される線型写像の族

$$\eta \coloneqq \left\{\eta_V \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}}(V,\, V^{**})\right\}_{V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})}$$

は自然変換

$$\eta\colon 1_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}} \Longrightarrow (\text{-})^{**}$$

であると言える．

3.1.3　ベクトル空間のテンソル積

本章を皮切りにしてさまざまなテンソル積空間が登場するが，それらは全て以下に述べる定義の特殊な場合である．

$\mathbb{K}$ を体とする．$V,\, W,\, Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ を勝手にとる．写像 $f\colon V \times W \longrightarrow Z$ が**双線型写像** (bilinear map) であるとは，$\forall \boldsymbol{v}_1,\, \boldsymbol{v}_2,\, \boldsymbol{v} \in V,\ \forall \boldsymbol{w}_1,\, \boldsymbol{w}_2,\, \boldsymbol{w} \in W,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ に対して

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2,\, \boldsymbol{w}) &= f(\boldsymbol{v}_1,\, \boldsymbol{w}) + f(\boldsymbol{v}_2,\, \boldsymbol{w}), \\ f(\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) &= f(\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w}_1) + f(\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w}_2), \\ f(\lambda\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w}) &= \lambda f(\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w}), \\ f(\boldsymbol{v},\, \lambda\boldsymbol{w}) &= \lambda f(\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w}) \end{aligned}$$

が成り立つことを言う．2 つの引数のそれぞれについて線型写像になっているということである．

定義 3.3: ベクトル空間のテンソル積

体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 $V,\, W$ の**テンソル積** (tensor product) とは，

- 記号として $\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W}$ と書かれる体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間
- 双線型写像 $\boldsymbol{\Phi}\colon V \times W \longrightarrow \boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W}$

の組であって，以下の性質を充たすもののこと：

(テンソル積の普遍性)　任意のベクトル空間 $Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ と任意の双線型写像 $f\colon V \times W \longrightarrow Z$ に対して，線型写像 $u\colon \boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W} \longrightarrow Z$ が一意的に存在して図式 3.2 を可換にする：

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\boldsymbol{\Phi}"] & \forall Z \\ \boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W} \arrow[ur, dashed, "\exists! u"] & \end{tikzcd}$$

図 3.2: テンソル積の普遍性

この定義を一般化すると加群のテンソル積になり，さらに一般化することでモノイダル圏の概念に到達するが，これ以上深入りしない．

命題 3.9: テンソル積の一意性

テンソル積は，存在すればベクトル空間の同型を除いて一意である．

証明 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 $V,\ W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ を与える．体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間と双線型写像の組 $(\boldsymbol{T},\ \boldsymbol{\Phi}\colon V\times W \longrightarrow \boldsymbol{T})$ および $(\boldsymbol{T},\ \boldsymbol{\Phi'}\colon V\times W \longrightarrow \boldsymbol{T'})$ がどちらも $V,\ W$ のテンソル積であるとする．このときテンソル積の普遍性から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$
\begin{tikzcd}
V\times W \arrow[r, "\Phi'"] \arrow[d, "\boldsymbol{\Phi}"'] & T' \\
\boldsymbol{T} \arrow[ur, dashed, "\exists! u"'] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
V\times W \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\boldsymbol{\Phi'}"'] & T \\
\boldsymbol{T'} \arrow[ur, dashed, "\exists! u'"'] &
\end{tikzcd}
$$

が成り立つので，これらの図式を併せた $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$
\begin{tikzcd}
\boldsymbol{T} & \\
V\times W \arrow[u, "\boldsymbol{\Phi}"] \arrow[r, "\Phi'"] \arrow[d, "\boldsymbol{\Phi}"'] & T' \arrow[ul, dashed, "\exists! u'"'] \\
\boldsymbol{T} \arrow[ur, dashed, "\exists! u"'] &
\end{tikzcd}
$$

が存在する．然るに $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$
\begin{tikzcd}
V\times W \arrow[r, "\boldsymbol{\Phi}"] \arrow[d, "\boldsymbol{\Phi}"'] & \boldsymbol{T'} \\
\boldsymbol{T} \arrow[ur, dashed, "\mathrm{id}_T"'] &
\end{tikzcd}
$$

も成り立ち，テンソル積の普遍性より赤点線で書いた線型写像は一意でなくてはならないので，

$$u' \circ u = \mathrm{id}_T$$

がわかる．同様の議論から

$$u \circ u' = \mathrm{id}_{T'}$$

も従うので，線型写像 $u\colon \boldsymbol{T} \longrightarrow \boldsymbol{T'},\ u'\colon \boldsymbol{T'} \longrightarrow \boldsymbol{T}$ は互いに逆写像，i.e. 同型写像である． ■

命題 3.9 からテンソル積の一意性が言えたが，そもそもテンソル積が存在しなければ意味がない．そこで，体 $\mathbb{K}$ 上の任意のベクトル空間 $V,\ W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ を素材にしてテンソル積 $(V\otimes W,\ \Phi\colon V\times W \longrightarrow V\otimes W)$ を具体的に構成してみよう．

$\mathbb{K} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ なので，任意の集合 S に対してベクトル空間の直和

$$\mathbb{K}^{\oplus S} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$$

を考えることができる．$\mathbb{K}^{\oplus S}$ の元 f とは，有限個の元 $x_1, \dots, x_n \in S$ を除いた全ての $x \in S$ に対して値 $0 \in \mathbb{K}$ を返すような $\mathbb{K}$ 値関数 $f\colon S \longrightarrow \mathbb{K}$ のことである[*6]．

ところで，$\forall x \in S$ に対して次のような関数 $\delta_x \in \mathbb{K}^{\oplus S}$ が存在する：

$$\delta_x\bigl(y\bigr) = \begin{cases} 1, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}$$

この δ_x を x そのものと同一視してしまうことで，先述の $f \in \mathbb{K}^{\oplus(V \times W)}$ は

$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \qquad \text{w/} \quad \lambda_i := f(x_i) \in \mathbb{K}$$

の形に一意的に書ける．[*7] この意味で，$\mathbb{K}^{\oplus(V \times W)}$ は $V \times W$ の元の**形式的な** $\mathbb{K}$ **係数線形結合**全体がなす $\mathbb{K}$ ベクトル空間と言うことができ，集合 $V \times W$ 上の**自由ベクトル空間**と呼ばれる．自由加群の特別な場合と言っても良い．自由ベクトル空間は次の普遍性によって特徴づけられる：

補題 3.1: 自由ベクトル空間の普遍性

任意の集合 S および任意の $\mathbb{K}$ ベクトル空間 $Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ を与える．包含写像

$$\iota\colon S \longrightarrow \mathbb{K}^{\oplus S},\ x \longmapsto \delta_x$$

を考える．このとき，任意の写像 $f\colon S \longrightarrow Z$ に対して線型写像 $u\colon \mathbb{K}^{\oplus S} \longrightarrow Z$ が一意的に存在して，図式 3.4 を可換にする：

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & \forall Z \\ \mathbb{K}^{\oplus S} \arrow[ur, dashed, "\exists! u"] & \end{tikzcd}$$

図 3.4: 自由ベクトル空間の普遍性

<u>**証明**</u> 写像

$$u\colon \mathbb{K}^{\oplus S} \longrightarrow Z,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{x_i} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

は右辺が有限和なので well-defined であり，$\forall x \in S$ に対して $u\bigl(\iota(x)\bigr) = f(x)$ を充たす．

[*6] これは集合論の記法である：ある集合 Λ から集合 A への写像 $a\colon \Lambda \longrightarrow A$ のことを Λ によって**添字づけられた** A の元の**族**と呼び，$\forall \lambda \in \Lambda$ に対して $a(\lambda) \in A$ のことを $\boldsymbol{a_\lambda}$ と書き，$\boldsymbol{a\colon \Lambda \longrightarrow A}$ **自身のことを** $\boldsymbol{(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}}$ と書くのである．なお，$\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ と書いたときは A の部分集合 $\{\, a(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda \,\} \subset A$ のことを意味する．

[*7] というのも，このように書けば $\forall y \in S$ に対して

$$f(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{x_i}(y) = \begin{cases} f(x_i), & y = x_i \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

が言えるので．特に，この式の中辺は $\mathbb{K}$ の元の有限和なので意味を持つ．

別の線型写像 $g\colon \mathbb{K}^{\oplus S} \longrightarrow Z$ が $g \circ \iota = f$ を充たすとする．このとき $\forall x \in S$ に対して $g(\delta_x) = f(x)$ であるから，$\forall v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{x_i} \in \mathbb{K}^{\oplus S}$ に対して

$$g(v) = g\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(\delta_{x_i}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) = u(v)$$

が言える．よって $g = u$ である． ■

さて，自由加群の普遍性の図式とテンソル積の普遍性の図式はとても似ているので，$\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ の候補として $\mathbb{K}^{\oplus(V \times W)}$ を考えてみる．しかしそのままでは $\iota\colon V \times W \longrightarrow \mathbb{K}^{\oplus(V \times W)}$ が双線型写像になってくれる保証はない．そこで，

$$\begin{aligned}
\iota(\lambda v,\, w) &\sim \lambda \iota(v,\, w), \\
\iota(v,\, \lambda w) &\sim \lambda \iota(v,\, w), \\
\iota(v_1 + v_2,\, w) &\sim \iota(v_1,\, w) + \iota(v_2,\, w), \\
\iota(v,\, w_1 + w_2) &\sim \iota(v,\, w_1) + \iota(v,\, w_2)
\end{aligned}$$

を充たすような上手い同値関係による商ベクトル空間を構成する．

命題 3.10: テンソル積

$\mathbb{K}^{\oplus(V \times W)}$ の部分集合

$$\begin{aligned}
S_1 &:= \bigl\{ \iota(\lambda v,\, w) - \lambda \iota(v,\, w) \bigm| \forall v \in V,\, \forall w \in W,\, \forall \lambda \in \mathbb{K} \bigr\}, \\
S_2 &:= \bigl\{ \iota(v,\, \lambda w) - \lambda \iota(v,\, w) \bigm| \forall v \in V,\, \forall w \in W,\, \forall \lambda \in \mathbb{K} \bigr\}, \\
S_3 &:= \bigl\{ \iota(v_1 + v_2,\, w) - \iota(v_1,\, w) - \iota(v_2,\, w) \bigm| \forall v_1,\, \forall v_2 \in V,\, \forall w \in W,\, \forall \lambda \in \mathbb{K} \bigr\}, \\
S_4 &:= \bigl\{ \iota(v,\, w_1 + w_2) - \iota(v,\, w_1) - \iota(v,\, w_2) \bigm| \forall v \in V,\, \forall w_1,\, w_2 \in W,\, \forall \lambda \in \mathbb{K} \bigr\}
\end{aligned}$$

の和集合 $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ が生成する $\mathbb{K}$ ベクトル空間[a]を $\mathcal{R}$ と書き，商ベクトル空間 $\mathbb{K}^{\oplus(V \times W)}/\mathcal{R}$ の商写像を

$$\pi\colon \mathbb{K}^{\oplus(V \times W)} \longrightarrow \mathbb{K}^{\oplus(V \times W)}/\mathcal{R},\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \iota(v_i,\, w_i) \longmapsto \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \iota(v_i,\, w_i)\right) + \mathcal{R}$$

と書き，$\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w} := \pi\bigl(\iota(v,\, w)\bigr)$ とおく．このとき，

- $\mathbb{K}$ ベクトル空間 $\mathbb{K}^{\boldsymbol{\oplus(V \times W)}}/\boldsymbol{\mathcal{R}}$
- 写像 $\boldsymbol{\Phi} = \pi \circ \iota\colon V \times W \longrightarrow \mathbb{K}^{\boldsymbol{\oplus(V \times W)}}/\boldsymbol{\mathcal{R}},\ (v,\, w) \longmapsto v \otimes w$

の組は $V,\, W$ のテンソル積である．

[a] これらの元の形式的な $\mathbb{K}$ 係数線型結合全体が成すベクトル空間のこと．

<u>**証明**</u> まず，$\mathbf{\Phi}$ が双線型写像であることを示す．商ベクトル空間の和とスカラー乗法の定義から

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda v,\, w) &= \iota(v,\, w) + \mathcal{R} = \bigl(\lambda\iota(v,\, w) + \iota(\lambda v,\, w) - \lambda\iota(v,\, w)\bigr) + \mathcal{R} \\
&= \lambda\iota(v,\, w) + \mathcal{R} = \lambda\bigl(\iota(v,\, w) + \mathcal{R}\bigr) = \lambda\Phi(v,\, w) \\
\Phi(v_1 + v_2,\, w) &= \iota(v_1 + v_2,\, w) + \mathcal{R} = \bigl(\iota(v_1,\, w) + \iota(v_2,\, w) + \iota(v_1 + v_2,\, w) - \iota(v_1,\, w) - \iota(v_2,\, w)\bigr) + \mathcal{R} \\
&= \bigl(\iota(v_1,\, w) + \iota(v_2,\, w)\bigr) + \mathcal{R} = \bigl(\iota(v_1,\, w) + \mathcal{R}\bigr) + \bigl(\iota(v_2,\, w) + \mathcal{R}\bigr) \\
&= \Phi(v_1,\, w) + \Phi(v_2,\, w)
\end{aligned}$$

が言える．第 2 引数に関しても同様であり，$\mathbf{\Phi}$ は双線型写像である．

次に，上述の構成がテンソル積の普遍性を充たすことを示す．$\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ と任意の双線型写像 $f\colon V \times W \longrightarrow Z$ を与える．自由ベクトル空間の普遍性から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & \forall Z \\
\mathbb{K}^{\oplus(V \times W)} \arrow[ur, dashed, "\exists! \overline{f}"] &
\end{tikzcd}$$

が存在する．f が双線型なので，

$$\begin{aligned}
\overline{f}\bigl(\iota(\lambda v,\, w)\bigr) &= f(\lambda v,\, w) = \lambda f(v,\, w) \\
&= \lambda\overline{f}\bigl(\iota(v,\, w)\bigr) = \overline{f}\bigl(\lambda\iota(v,\, w)\bigr), \\
\overline{f}\bigl(\iota(v_1 + v_2,\, w)\bigr) &= f(v_1 + v_2,\, w) = f(v_1,\, w) + f(v_2,\, w) \\
&= \overline{f}\bigl(\iota(v_1,\, w)\bigr) + \overline{f}\bigl(\iota(v_2,\, w)\bigr) = \overline{f}\bigl(\iota(v_1,\, w) + \iota(v_2,\, w)\bigr)
\end{aligned}$$

が成り立つ．第 2 引数についても同様なので，$\mathcal{R} \subset \mathrm{Ker}\,\overline{f}$ である．よって準同型定理から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & \forall Z \\
\mathbb{K}^{\oplus(V \times W)} \arrow[ur, dashed, "\exists! \overline{f}"] \arrow[d, "\pi"'] & \\
\mathbb{K}^{\oplus(V \times W)}/\mathcal{R} \arrow[uur, dashed, "\exists! u"'] &
\end{tikzcd}$$

が存在する．この図式の外周部はテンソル積の普遍性の図式である． ■

命題 3.11: テンソル積の基底

$V,\, W$ をそれぞれ $n,\, m$ 次元の体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，$V,\, W$ の基底をそれぞれ $\{e_1,\, \ldots,\, e_n\},\ \{f_1,\, \ldots,\, f_m\}$ と書く．このとき，集合

$$\mathcal{E} := \left\{\, e_i \otimes f_j \;\middle|\; 1 \le i \le n,\, 1 \le j \le m \,\right\}$$

は $V \otimes W$ の基底である．従って $\dim V \otimes W = nm$ である．

証明 テンソル積の構成から，$\forall t \in V \otimes W$ は有限個の $(v_i,\, w_i) \in V \times W$ $(i = 1, \dots l)$ を使って

$$t = \left(\sum_{i=1}^{l} t_i \iota(v_i,\, w_i) \right) = \sum_{i=1}^{l} t_i v_i \otimes w_i$$

と書ける．$v_i = {v_i}^{\mu} e_{\mu}$, $w_i = {w_i}^{\mu} f_{\mu}$ のように展開することで，

$$\begin{aligned} t &= \sum_{i=1}^{l} t_i({v_i}^{\mu} e_{\mu}) \otimes ({w_i}^{\nu} f_{\nu}) \\ &= \sum_{i=1}^{l} t_i {v_i}^{\mu} {w_i}^{\nu} e_{\mu} \otimes f_{\nu} \end{aligned}$$

と書ける．ただし添字 μ, ν に関しては Einstein の規約を適用した．従って $\mathcal{E}$ は $V \otimes W$ を生成する．

$\mathcal{E}$ の元が線型独立であることを示す．

$$t^{\mu\nu} e_{\mu} \otimes e_{\nu} = 0$$

を仮定する．$\{e_{\mu}\}, \{f_{\mu}\}$ の双対基底をそれぞれ $\{\varepsilon^{\mu}\}, \{\eta^{\nu}\}$ と書き，全ての添字の組み合わせ $(\mu,\, \nu) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$ に対して双線型写像

$$\tau^{\mu\nu} \colon V \times W \longrightarrow \mathbb{R},\ (v,\, w) \longmapsto \varepsilon^{\mu}(v) \eta^{\nu}(w)$$

を定める．$\tau^{\mu\nu}$ は双線型なのでテンソル積の普遍性から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\tau^{\mu\nu}"] \arrow[d, "\pi \circ \iota"'] & \mathbb{R} \\ \boldsymbol{V \otimes W} \arrow[ur, dashed, "\exists ! \overline{\tau}^{\mu\nu}"'] & \end{tikzcd}$$

が存在する．このことは，

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{\tau}^{\mu\nu}(t^{\rho\sigma} e_{\rho} \otimes f_{\sigma}) \\ &= t^{\rho\sigma} (\overline{\tau}^{\mu\nu} \circ \pi \circ \iota)(e_{\rho},\, f_{\sigma}) \\ &= t^{\rho\sigma} \tau^{\mu\nu}(e_{\rho},\, f_{\sigma}) = t^{\mu\nu} \end{aligned}$$

を意味する．従って $\mathcal{E}$ の元は線型独立である． ■

これでもまだ直接の計算には向かない．より具体的な構成を探そう．

与えられたベクトル空間 $V, W, Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ に対して，集合

$$\boldsymbol{L(V,\, W;\, Z)} \coloneqq \left\{ F \colon V \times W \longrightarrow Z \;\middle|\; F \text{ は双線型写像} \right\}$$

を考える．$L(V,\, W;\, Z)$ の上の加法とスカラー乗法を $\forall v \in V, \forall w \in W, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ に対して

$$\begin{aligned} (F + G)(v,\, w) &\coloneqq F(v,\, w) + G(v,\, w), \\ (\lambda F)(v,\, w) &\coloneqq \lambda\bigl(F(v,\, w)\bigr) \end{aligned}$$

によって定義すると $L(V,\, W)$ は $\mathbb{K}$ ベクトル空間になる．そして $\forall \omega \in V^*$, $\forall \eta \in W^*$ に対して，$\boldsymbol{\omega \otimes \eta}$ と書かれる $L(V,\, W;\, \mathbb{K})$ の元を

$$\boldsymbol{\omega \otimes \eta} \colon V \times W \longrightarrow \mathbb{K},\ (v,\, w) \longmapsto \omega(v) \eta(w)$$

によって定義する（つまり，$\omega \otimes \eta$ は双線型写像である）．

命題 3.12:

$V,\, W$（$\dim V = n,\, \dim W = m$）の基底をそれぞれ $\{e_\mu\},\, \{f_\nu\}$ と書き，その双対基底をそれぞれ $\{\varepsilon^\mu\},\, \{\eta^\mu\}$ と書く．このとき，集合

$$\mathcal{B} \coloneqq \left\{ \varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu \;\middle|\; 1 \le \mu \le n,\, 1 \le \nu \le m \right\}$$

は $L(V,\, W;\, \mathbb{K})$ の基底である．従って $\dim L(V,\, W;\, \mathbb{K}) = nm$ である．

<u>証明</u> $\forall F \in L(V,\, W;\, \mathbb{K})$ を 1 つとり，全ての添字の組み合わせ $(\mu,\, \nu)$ に対して

$$F_{\mu\nu} \coloneqq F(e_\mu,\, e_\nu)$$

とおく．$\forall (v,\, w) \in V,\, W$ を $v = v^\mu e_\mu,\ w = w^\nu f_\nu$ と展開すると，

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}\varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu(v,\, w) &= F_{\mu\nu}\varepsilon^\mu(v)\eta^\nu(w) \\ &= F_{\mu\nu}v^\mu w^\nu \end{aligned}$$

が成り立つ．一方，双線型性から

$$F(v,\, w) = v^\mu w^\nu F(e_\mu,\, e_\nu) = F_{\mu\nu}v^\mu w^\nu$$

も成り立つので $F = F_{\mu\nu}\varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu$ が言えた．i.e. 集合 $\mathcal{B}$ は $L(V,\, W;\, \mathbb{R})$ を生成する．

次に，$\mathcal{B}$ の元が線型独立であることを示す．

$$F_{\mu\nu}\varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu = 0$$

を仮定する．全ての添字の組み合わせについて，$(e_\mu,\, f_\nu)$ に左辺を作用させることで，$F_{\mu\nu} = 0$ が従う．i.e. $\mathcal{B}$ の元は互いに線型独立である． ■

命題 3.13: テンソル積の構成その 2

$$L(V,\, W;\, \mathbb{K}) \cong V^* \otimes W^*$$

<u>証明</u> 写像

$$\begin{aligned} \Phi \colon V^* \times W^* &\longrightarrow L(V,\, W;\, \mathbb{K}), \\ (\omega,\, \eta) &\longmapsto \big((v,\, w) \longmapsto \omega(v)\eta(w)\big) \end{aligned}$$

は双線型写像なのでテンソル積の普遍性から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd} V^* \times W^* \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi \circ \iota"'] & L(V,\, W;,\, \mathbb{K}) \\ \boldsymbol{V^* \otimes W^*} \arrow[ur, dashed, "\exists ! \overline{\Phi}"'] & \end{tikzcd}$$

が存在する．$V,\, W$（$\dim V = n,\, \dim W = m$）の基底をそれぞれ $\{e_\mu\},\, \{f_\nu\}$ と書き，その双対基底をそれぞれ $\{\varepsilon^\mu\},\, \{\eta^\mu\}$ と書く．命題 3.11 より $V^* \otimes W^*$ の基底として

$$\mathcal{E} := \left\{\, \varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu \;\middle|\; 1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq m \,\right\}$$

がとれ，命題 3.12 より $L(V,\, W;\, \mathbb{K})$ の基底として

$$\mathcal{B} := \left\{\, \varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu \;\middle|\; 1 \leq \mu \leq n,\, 1 \leq \nu \leq m \,\right\}$$

がとれる（記号が同じだが，違う定義である）．このとき，$\forall (v,\, w) \in V \times W$ に対して

$$\overline{\Phi}(\varepsilon_\mu \otimes \eta_\nu)(v,\, w) = \varepsilon_\mu(v)\eta_\nu(w) = \varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu(v,\, w)$$

が成り立つ（ただし，左辺の $\otimes$ は命題 3.10，右辺は命題 3.13 で定義したものである），ので $\overline{\Phi}$ は $\mathcal{E}$ の元と $\mathcal{B}$ の元の 1 対 1 対応を与えるので同型写像である． ■

3.1.4 多元環

公理 3.2: 体上の多元環

$\mathbb{K}$ を体とする．$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 $V \in \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の上に，加法とスカラー乗法の他にもう 1 つの 2 項演算

$$[\ ,\ ] : V \times V \to V,\ (v,\, w) \mapsto [v, w]$$

を与える．

このとき，V が $\mathbb{K}$ 上の**多元環** (algebra) [a]であるとは，以下の 2 条件が充たされていることを言う：

- 組 $\bigl(V,\, +,\, [\ ,\ ]\bigr)$ が環
- $\forall \lambda \in \mathbb{K},\, \forall v,\, w \in V$ に対して

$$\lambda[v, w] = [\lambda v, w] = [v, \lambda w]$$

[a] **代数**と訳されることもある．

定義 3.4: $C^\infty(M)$ 上の演算

$C^\infty(M)$ 上の和，積，スカラー乗法を以下のように定義すると，$C^\infty(M)$ は $\mathbb{R}$ 上の多元環になる：$\forall f,\, g \in C^\infty(M),\, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ および $\forall p \in M$ に対して

$$\begin{aligned}(f+g)(p) &:= f(p) + g(p)\\ ([f,g])(p) &:= f(p)g(p)\\ (\lambda f)(p) &:= \lambda f(p)\end{aligned}$$

証明 多元環の公理 3.2 を充していることを確認する．$C^\infty(M)$ が和とスカラー乗法に関して $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間であること，および和と積に関して環であることは明らかである．積に関しては，$\mathbb{R}$ が可換体であること

から $\forall f,\, g \in C^\infty(M),\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$
\begin{aligned}
\bigl(\lambda[f, g]\bigr)(p) &= \lambda\bigl([f, g](p)\bigr) \\
&= \lambda f(p) g(p) \\
&= \bigl(\lambda f(p)\bigr) g(p) = [\lambda f, g](p) \\
&= f(p)\bigl(\lambda g(p)\bigr) = [f, \lambda g](p)
\end{aligned}
$$

であるから示された． ■

3.2 接空間

n 次元実数ベクトル，すなわち n 個の実数の組 $v = (v^1, \ldots, v^n) \in \mathbb{R}^n$ の幾何学的な解釈とは，方向 $v/|v|$ を向いた長さ $|v|$ の「矢印」のことであり，「矢印」の始点はどこでも良かった．逆に始点がどこでも良いということは，Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の各点 $p \in \mathbb{R}^n$ の上に「矢印」全体がなすベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ が棲んでいると捉えても良い．この意味で，点 $p \in \mathbb{R}^n$ における**幾何学的接空間**を $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{p}} \coloneqq \{p\} \times \mathbb{R}^n$ と書く．

接ベクトルを幾何学的接空間の元として捉える描像においては，例えば S^{n-1} の点 $p \in S^{n-1}$ における幾何学的接空間とは $\mathbb{R}^n_p$ の部分ベクトル空間

$$
\left\{\, v \in \mathbb{R}^n_p \;\middle|\; v \cdot p = 0 \,\right\}
$$

のこと[*8]であり，直観的にも分かりやすい．しかし，全ての C^∞ 多様体 M が Euclid 空間の部分空間として実現されているわけではない．C^∞ 多様体の定義のみが与えられたときに使える情報は，C^∞ 関数と C^∞ 写像と C^∞ チャートだけなので，接空間の定義を修正する必要がある．方針としては，例えば次の 2 つが考えられる：

- 幾何学的接空間の元に，C^∞ 関数の方向微分としての役割を与える．
- C^∞ 曲線の速度ベクトルを考える．

まずは 1 つ目の方法を考えよう．

$\mathbb{R}^n$ の場合，$v \in \mathbb{R}^n_p$ による，点 p における $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ の**方向微分**とは

$$
\hat{D}_v|_p f \coloneqq \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(p + tv)\right|_{t=0} \tag{3.2.1}
$$

で定義される写像 $\hat{D}_v|_p \colon C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ のことである．$\hat{D}_v|_p$ は Leibniz 則

$$
\hat{D}_v|_p(fg) = f(p)\, \hat{D}_v|_p g + g(p)\, \hat{D}_v|_p f
$$

を充し，$\mathbb{R}^n$ の標準的な基底 $\{e_i\}$ を使って $v = v^\mu e_\mu$ と展開したときには，デカルト座標 $\bigl(\mathbb{R}^n, (x^\mu)\bigr)$ において

$$
\hat{D}_v|_p f = v^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(p) = \left(v^\mu \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p \right) f
$$

[*8] $\cdot$ は Euclid 内積とする．

と書ける．つまり，$\forall v \in \mathbb{R}^n_p$ に対して，方向微分 $\hat{D}_v|_p$ は $\{\, \partial/\partial x^\mu \,|_p \,\}_{\mu=1,\dots,n}$ を基底として展開できる．従って，v と $\hat{D}_v|_p$ を同一視すると $\mathbb{R}^n_p$ のベクトル空間の構造も反映してくれそうである．

以上の構成を念頭に置いて，まず $\mathbb{R}^n$ の接空間を構成する．

3.2.1 $\mathbb{R}^n$ の接空間

写像 $w\colon C^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ が点 $p \in \mathbb{R}^n$ における**微分**であるとは，

- w は $\mathbb{R}$ 線型写像[*9]
- $\forall f,\, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して **Leibniz 則**を充たす：

$$w(fg) = f(p)w(g) + g(p)w(f)$$

ことを言う．点 p における微分全体がなす集合を $\boldsymbol{T_p}\mathbb{R}^n$ とおいて，$T_p\mathbb{R}^n$ の上の和とスカラー乗法を

$$\begin{aligned}(w_1 + w_2)(f) &\coloneqq w_1(f) + w_2(f)\\ (\lambda w)(f) &\coloneqq \lambda w(f)\end{aligned}$$

と定義することで $T_p\mathbb{R}^n$ は実ベクトル空間になる[*10]．

補題 3.2:

$\forall p \in \mathbb{R}^n$ を与え，$\forall w \in T_p\mathbb{R}^n$ および $\forall f,\, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ をとる．

(1) f が定数写像ならば $w(f) = 0$

(2) $f(p) = g(p) = 0$ ならば $w(fg) = 0$

証明 (1) $f_1\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ y \longmapsto 1$ に対して

$$w(f_1) = w(f_1 f_1) = f_1(p)w(f_1) + f_1(p)w(f_1) = 2w(f_1)$$

なので $w(f_1) = 0$ が言えた．一般の $\lambda \in \mathbb{R}$ を返す定数写像 f については，w が線型写像であることから $w(f) = w(\lambda f_1) = \lambda w(f_1) = 0$ となって従う．

(2) w の Leibniz 則より明らか．

■

命題 3.14: $\mathbb{R}^n_p$ と $T_p\mathbb{R}^n$

$\forall p \in \mathbb{R}^n$ を 1 つ与える．

(1) $\forall v \in \mathbb{R}^n_p$ に対して (3.2.1) で定義された**方向微分**は $\hat{D}_v|_p \in T_p\mathbb{R}^n$ を充たす．

(2) 写像 $D|_p\colon \mathbb{R}^n_p \longrightarrow T_p\mathbb{R}^n,\ v \longmapsto \hat{D}_v|_p$ はベクトル空間の同型写像である．

証明 (1) $\hat{D}_v|_p$ の線形性および Leibniz 則から明らか．

[*9] 定義 3.4 により $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ は多元環になる．

[*10] $\mathbb{R}$ が体なのでほぼ自明である．

(2) $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ を 1 つとる．線形性は明らかである．

(単射性) $\forall v \in \operatorname{Ker} D|_p$ を 1 つとる．このとき $D|_p(v) = 0$ が成り立つ．このとき $\mathbb{R}^n$ の標準的な基底 $\{e_\mu\}$ によって $v = v^\mu e_\mu$ と展開すると，デカルト座標 $\bigl(\mathbb{R}^n, (x^\mu)\bigr)$ において

$$D|_p(v)(f) = v^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(p) = 0$$

が成り立つ．ここで f として $x^\nu \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ を選ぶと

$$v^\mu \delta^\nu_\mu = v^\nu = 0$$

がわかるので，$v = 0$ である．i.e. $\operatorname{Ker} D|_p = \{0\}$ であり，$D|_p$ は単射である．

(全射性) $\forall w \in T_p\mathbb{R}^n$ を 1 つとる．f は C^∞ 級なので，$\forall x \in \mathbb{R}^n$ に対して $\varepsilon(x) \coloneqq x - p$ とおくと Taylor の定理より

$$f(x) = f(p) + \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(p)\,\varepsilon^\mu(x) + \varepsilon^\mu(x)\varepsilon^\nu(x)\int_0^1 \mathrm{d}t\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^\mu \partial x^\nu}(x + t\varepsilon)$$

が成り立つ．第 3 項は $x = p$ において 0 になる関数 2 つの C^∞ 関数 $\varepsilon^\mu(x)$, $\varepsilon^\nu(x)$ の積だから，補題 3.2-(2) より w を作用させると消える．従って補題 3.2-(1) および w の線型性から

$$\begin{aligned}
w(f) &= w\bigl(f(p)\bigr) + w\left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu}(p)\,\varepsilon^\mu\right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(p)\,w(\varepsilon^\mu) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(p)\bigl(w(x^\mu) - w(p^\mu)\bigr) \\
&= w(x^\mu)\frac{\partial f}{\partial x^\mu}(p) \\
&= \hat{D}|_p\bigl(w(x^\mu)e_\mu\bigr)(f)
\end{aligned}$$

がわかる．i.e. $w = \hat{D}|_p\bigl(w(x^\mu)e_\mu\bigr) \in \operatorname{Im}\hat{D}|_p$ である．

■

系 3.1: $T_x\mathbb{R}^n$ の自然基底

$\mu = 1, \dots, n$ に対して

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p : C^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(p)$$

によって定義される線型写像の組

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p$$

は $T_p\mathbb{R}^n$ の基底をなす．

3.2.2 C^∞ 多様体の接空間

$\mathbb{R}^n$ における構成を一般化する．

定義 3.5: 接空間

M を C^∞ 多様体とし，**任意の点** $p \in M$ **を一つとる．** 写像

$$v\colon C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

が $\forall f, g \in C^\infty(M)$ と $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ に対して以下の 2 条件を充たすとき，v は M の点 p における**接ベクトル** (tangent vector) と呼ばれる：

(線形性)

$$\begin{aligned} v(f+g) &= v(f) + v(g), \\ v(\lambda f) &= \lambda v(f) \end{aligned}$$

(Leibniz 則)

$$v(fg) = v(f)\, g(p) + f(p)\, v(g)$$

M の点 p における接ベクトル全体がなす集合を $\boldsymbol{T_p M}$ と書き，M の点 p における**接空間** (tangent space) と呼ぶ．

定義 3.6: 接空間の演算

$\forall v, w \in T_p M$ に以下のようにして和とスカラー乗法を定義することで，$T_p M$ はベクトル空間になる：

(1) $(v+w)(f) \coloneqq v(f) + w(f)$

(2) $(\lambda v)(f) \coloneqq \lambda v(f)$

ただし，$f \in C^\infty(M)$ は任意とする．

証明 ベクトル空間の公理 3.1 を充していることを確認すればよい．

(V1) 自明

(V2) 自明

(V3) $\mathbf{0} = 0 \in T_p M$（恒等的に 0 を返す写像）とすればよい．

(V4) $\forall f \in C^\infty(M)$, $(-v)(f) = -v(f)$ とすればよい．

(V5) $\lambda(u+v)(f) = \lambda(u(f) + v(f)) = \lambda u(f) + \lambda v(f) = (\lambda u)(f) + (\lambda v)(f)$.

(V6) $\big((\lambda+\mu)u\big)(f) = (\lambda+\mu)u(f) = \lambda u(f) + \mu u(f) = (\lambda u)(f) + (\mu u)(f) = (\lambda u + \mu u)(f)$.

(V7) $\big((\lambda\mu)u\big)(f) = (\lambda\mu)u(f) = \lambda(\mu u(f)) = \lambda\big((\mu u)(f)\big)$.

(V8) $(1u)(f) = 1u(f) = u(f)$.

■

補題 3.3:

（境界なし/あり）C^∞ 多様体 M を与える．$\forall p \in M, \forall w \in T_pM$ および $\forall f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ をとる．

(1) f が定数写像ならば $w(f) = 0$
(2) $f(p) = g(p) = 0$ ならば $w(fg) = 0$

<u>**証明**</u> (1) C^∞ 関数 $f_1 \colon M \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto 1$ に対して

$$w(f_1) = w(f_1 f_1) = f_1(p)w(f_1) + f_1(p)w(f_1) = 2w(f_1)$$

なので $w(f_1) = 0$ が言えた．一般の $\lambda \in \mathbb{R}$ を返す定数写像 f については，w が線型写像であることから $w(f) = w(\lambda f_1) = \lambda w(f_1) = 0$ となって従う．

(2) w の Leibniz 則より明らか．

■

接ベクトルの定義は局所的だが，それが作用する $C^\infty(M)$ の定義域は M 全体であり，大域的である．読者はこのことに疑問を感じるかもしれない．しかし，**接ベクトルの $C^\infty(M)$ への作用は 1 点の開近傍上（しかも，その開近傍は好きなように採れる！）のみで完全に決まる**．

命題 3.15: 接ベクトルの局所性

（境界なし/あり）C^∞ 多様体 M を与え，$\forall p \in M$ と $\forall v \in T_pM$ を 1 つとる．
$f, g \in C^\infty(M)$ が p のある開近傍 $p \in U \subset M$ 上で一致するならば $v(f) = v(g)$ である．

<u>**証明**</u> 補題 D.3 から，p の開近傍 $p \in V \subset M$ であって $\overline{V} \subset U$ を充たすものの上では恒等的に 1 であり，かつ $M \setminus U$ において 0 になる C^∞ 関数 $\tilde{b}$ が存在する．このとき $(f - g)\tilde{b} = 0 \in C^\infty(M)$ である．従って Leibniz 則から

$$0 = v\big((f-g)\tilde{b}\big) = v(f-g)\tilde{b}(p) + (f-g)(p)v(\tilde{b}) = v(f-g) = v(f) - v(g)$$

とわかる．i.e. $v(f) = v(g)$ である． ■

3.3 C^∞ 写像の微分

定義 3.7: C^∞ 写像の微分

（境界なし/あり）C^∞ 多様体 M, N とそれらの間の C^∞ 写像

$$F \colon M \longrightarrow N$$

を与える．<u>点 $p \in M$ における</u> F の**微分** (differential of f at p) とは，接空間の間の**線型写像**

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T_p F} \colon T_pM &\longrightarrow T_{F(p)}N \\ v &\longmapsto \big(f \longmapsto v(f \circ F)\big) \end{aligned}$$

のこと．

証明 命題 2.4-(3) より $f \circ F \in C^\infty(M)$ なので T_pF は well-defined である．T_pF の線形性を確認する．実際，接空間上の加法とスカラー倍の定義から $\forall v,\ w \in T_pM,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ および $\forall f \in C^\infty(N)$ に対して

$$\begin{aligned} T_pF(v+w)(f) &= (v+w)(f \circ F) \\ &= v(f \circ F) + w(f \circ F) \\ &= T_pF(v)(f) + T_pF(w)(f) \\ &= \big(T_pF(v) + T_pF(w)\big)(f), \\ T_pF(\lambda v)(f) &= (\lambda v)(f \circ F) = \lambda v(f \circ F) = \lambda T_pF(v)(f) \end{aligned}$$

が成り立つ． ■

命題 3.16: T_p の関手性

（境界なし/あり）C^∞ 多様体 $M\,N,\,P$ とそれらの間の C^∞ 写像

$$F\colon M \longrightarrow N, \quad G\colon N \longrightarrow P$$

を与える．このとき $\forall p \in M$ に対して以下が成り立つ：

(1) $T_p(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{T_pM}$
(2) $T_p(G \circ F) = T_{F(p)}G \circ T_pF$
(3) $F\colon M \longrightarrow N$ が微分同相写像ならば $T_pF\colon T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ はベクトル空間の同型写像である．

証明 $\forall v \in T_pM$ をとる．

(1) $\forall f \in C^\infty(M)$ に対して

$$T_p(\mathrm{id}_M)(v)(f) = v(f \circ \mathrm{id}_M) = v(f)$$

が成り立つので $T_p(\mathrm{id}_M)(v) = v$，i.e. $T_p(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{T_pM}$ が示された．

(2) $\forall f \in C^\infty(P)$ に対して

$$(T_{F(p)}G \circ T_pF)(v)(f) = T_pF(v)(f \circ G) = v(f \circ G \circ F) = T_p(G \circ F)(v)(f)$$

が成り立つ．

(3) $F\colon M \longrightarrow N$ が微分同相写像ならば C^∞ 写像 $F^{-1}\colon N \longrightarrow M$ が存在して $F^{-1} \circ F = \mathrm{id}_M$ が成り立つ．(1), (2) より

$$\begin{aligned} T_p(F^{-1} \circ F) &= T_{F(p)}(F^{-1}) \circ T_p(F) \\ &= T_p(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{T_pM}, \\ T_{F(p)}(F \circ F^{-1}) &= T_p(F) \circ T_{F(p)}(F^{-1}) \\ &= T_{F(p)}(\mathrm{id}_N) = \mathrm{id}_{T_{F(p)}N} \end{aligned}$$

がわかる．$T_{F(p)}(F^{-1})$ は線型写像なので $T_p(F)$ は $T_{F(p)}(F^{-1})$ を逆に持つベクトル空間の同型写像である．

■

圏の言葉で整理すると，

- $(M,\, p) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Diff}_0)$ に対して，点 p における接空間 $T_pM \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{R}})$ を，
- $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Diff}_0}\big((M,\, p),\, (N,\, q)\big)$ に対して[*11]，F の微分 $T_pF \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}}(T_pM,\, T_qN)$ を

対応づける対応

$$T_p \colon \mathbf{Diff}_0 \longrightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$$

は関手である（$\mathbf{Diff}_0$ は $\mathbf{Diff_{b0}}$ に置き換えても良い）.

3.3.1 接空間の性質

命題 3.17: 接空間の局所性

（境界なし/あり）C^∞ 多様体 M と M の開集合 $U \subset M$ を与える．U を【例 2.2.6】の方法で C^∞ 多様体と見做す．
このとき，$\forall p \in U$ における包含写像 $\iota \colon U \hookrightarrow M$ の微分 $T_p\iota \colon T_pU \longrightarrow T_pM$ はベクトル空間の同型写像である．

! 以降では命題 3.17 により，なんの断りもなく T_pM と T_pU を同一視する場合がある．

証明 (単射性) $\forall v \in \mathrm{Ker}(T_p\iota)$ をとる．このとき $\forall f \in C^\infty(M)$ に対して $T_p\iota(v)(f) = v(f \circ \iota) = 0$ が成り立つ．
p の開近傍 $p \in V$ であって $\overline{V} \subset U$ を充たすものをとる．すると補題 D.3 より，$\forall g \in C^\infty(U)$ に対して $\tilde{g} \in C^\infty(M)$ が存在して V 上至る所で $g = \tilde{g}$ が成り立つ．故に命題 3.15 から

$$v(g) = v(\tilde{g}|_U) = v(\tilde{g} \circ \iota) = T_p\iota(v)(\tilde{g}) = 0$$

が従う．i.e. $\mathrm{Ker}(T_p\iota) = \{0\}$ であり，$T_p\iota$ は単射である．

(全射性) $\forall w \in T_pM$ を 1 つとる．補題 D.3 を使って $v \in T_pU$ を

$$v \colon C^\infty(U) \longrightarrow \mathbb{R},\ g \longmapsto w(\tilde{g})$$

と定義すると，命題 3.15 から $\forall f \in C^\infty(M)$ に対して

$$T_p\iota(v)(f) = v(f \circ \iota) = w(\widetilde{f|_U}) = w(f)$$

が言える．

■

系 3.1 から，境界の無い n 次元 C^∞ 多様体の接空間の次元は n になることが予想される．実は，境界付き C^∞ 多様体の境界点における接空間も n 次元である．

命題 3.18: 接空間の次元

（境界なし/あり）n 次元 C^∞ 多様体 M の $\forall p \in M$ における接空間は n 次元である．

[*11] このように書いたときは $q = F(p)$ が暗に仮定される．

証明 $\forall p \in M$ を 1 つとり，p を含む任意の C^∞ チャート (U, φ) をとる．

(境界がない場合) $\varphi\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ は微分同相写像なので，命題 3.16-(3) より $T_p\varphi\colon T_pU \longrightarrow T_{\varphi(p)}\bigl(\varphi(U)\bigr)$ は同型写像である．その上命題 3.17 より $T_pU \cong T_pM$, $T_{\varphi(p)}\bigl(\varphi(U)\bigr) \cong T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ なので，系 3.1 から $\dim T_pM = \dim T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n = n$ だとわかる．

(境界付きの場合)

補題 3.4:

包含写像 $\iota\colon \mathbb{H}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ を考える．$\forall p \in \partial\mathbb{H}^n$ に対して $T_p\iota\colon T_p\mathbb{H}^n \longrightarrow T_p\mathbb{R}^n$ は同型写像である．

証明 $\forall v \in \operatorname{Ker} T_p\iota$ をとる．$\forall f \in C^\infty(\mathbb{H}^n)$ に対して，補題 D.3 を使って定義域を $\mathbb{R}^n$ に拡張した C^∞ 関数を $\tilde{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ と書く．すると

$$v(f) = v(\tilde{f} \circ \iota) = T_p\iota(v)(\tilde{f}) = 0$$

が従う．i.e. $\operatorname{Ker} T_p\iota = \{0\}$ であり，$T_p\iota$ は単射である．
次に $T_p\iota$ の全射性を示す．$\forall w \in T_p\mathbb{R}^n$ をとる．写像

$$v\colon C^\infty(\mathbb{H}^n) \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longmapsto w(\tilde{f})$$

を定義する．系 3.1 により $w = w^\mu\, \partial/\partial x^\mu\,|_p$ と書けるが，これは $\forall f \in C^\infty(\mathbb{H}^n)$ に対して

$$v(f) = w^\mu \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^\mu}(p)$$

を意味する．f の C^∞ 性から $\partial\tilde{f}\big/\partial x^\mu\ (p)$ の値は $\mathbb{H}^n$ 側のみによって決まるので v の定義は f の定義域の拡張の仕方によらない．以上の考察から v は well-defined で，$v \in T_p\mathbb{H}^n$ だとわかる．従って $\forall g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$T_p\iota(v)(g) = v(g \circ \iota) = w(\widetilde{g|_{\mathbb{H}^n}}) = w(g)$$

が言える．i.e. $w \in \operatorname{Im} T_p\iota$ である． ■

$p \in \operatorname{Int} M$ ならば，命題 3.17 より $T_p(\operatorname{Int} M) \cong T_pM$ である．$\operatorname{Int} M$ は境界が空の n 次元 C^∞ 多様体なので $\dim T_pM = n$ が従う．

$p \in \partial M$ とする．(U, φ) を p を含む境界チャートとする．命題 3.16-(3) より $T_pU \cong T_{\varphi(p)}\bigl(\varphi(U)\bigr)$ が，命題 3.17 より $T_pM \cong T_pU$, $T_{\varphi(p)}\bigl(\varphi(U)\bigr) \cong T_{\varphi(p)}\mathbb{H}^n$ が従う．補題 3.4 より $T_{\varphi(p)}\mathbb{H}^n \cong T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ であるから，$T_pM \cong T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ がわかる．よって $\dim T_pM = n$ である．

■

命題 3.19: 積多様体の接空間

$M,\, N$ を境界を持たない C^∞ 多様体とし，$\pi_1\colon M\times N \longrightarrow M,\ \pi_2\colon M\times N \longrightarrow N$ を第 i 成分への射影とする．
このとき $\forall (p,\, q) \in M\times N$ に対して，写像

$$\begin{aligned}\alpha\colon T_{(p,\,q)}(M\times N) &\longrightarrow T_pM \oplus T_qN,\\ v &\longmapsto \bigl(T_{(p,\,q)}\pi_1(v),\, T_{(p,\,q)}\pi_2(v)\bigr)\end{aligned}$$

はベクトル空間の同型写像である．

証明 直和ベクトル空間の定義から α は線型写像である．
C^∞ 写像

$$\begin{aligned}\iota_1&\colon M \longrightarrow M\times N,\ x \longmapsto (x,\, q)\\ \iota_2&\colon N \longrightarrow M\times N,\ y \longmapsto (p,\, y)\end{aligned}$$

を用いて線型写像

$$\beta\colon T_pM\oplus T_qN \longrightarrow T_{(p,\,q)}(M\times N),\ (v,\, w) \longmapsto T_p\iota_1(v) + T_q\iota_2(w)$$

を定める．$\pi_1\circ\iota_1 = \mathrm{id}_M,\ \pi_2\circ\iota_2 = \mathrm{id}_N$ であり，かつ $\pi_1\circ\iota_2,\ \pi_2\circ\iota_1$ は定数写像なので補題 3.3-(1) より微分すると消える．従って $\forall (v,\, w) \in T_pM\oplus T_qN$ に対して

$$\begin{aligned}\alpha\circ\beta(v,\, w) &= \alpha\bigl(T_p\iota_1(v) + T_q\iota_2(w)\bigr)\\ &= \bigl(T_{(p,\,q)}(\pi_1\circ\iota_1)(v) + T_{(p,\,q)}(\pi_1\circ\iota_2)(w),\, T_{(p,\,q)}(\pi_2\circ\iota_1)(v) + T_{(p,\,q)}(\pi_2\circ\iota_2)(w)\bigr)\\ &= (v,\, w)\end{aligned}$$

が言えて，α が全射だとわかる．$\dim T_{(p,\,q)}(M\times N) = \dim\bigl(T_pM\oplus T_qN\bigr)$ なので α が同型写像であることが示された． ■

3.4 座標表示

これまでの議論は抽象的で，具体的な計算に向かない．そこで，チャートによる成分表示を求める

3.4.1 接ベクトルの表示

（境界なし）n 次元 C^∞ 多様体 M と，その C^∞ チャート $(U,\, \varphi) = \bigl(U,\, (x^\mu)\bigr)$ を与える．φ は微分同相写像なので，命題 3.16-(3) より φ の点 $p\in U$ における微分

$$T_p\varphi\colon T_pM \longrightarrow T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n \tag{3.4.1}$$

は同型写像である[*12]．

[*12] 命題 3.17 によって T_pU と T_pM，$T_{\varphi(p)}\bigl(\varphi(U)\bigr)$ と $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ を同一視した．

系 3.1 より，ベクトル空間 $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ の基底として

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_{\varphi(p)}, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_{\varphi(p)}$$

をとることができる．これを (3.4.1) の同型写像を使って T_pM に戻したものを T_pM の**自然基底**と呼ぶ[*13]：

$$\boxed{\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p} \coloneqq (T_p\varphi)^{-1}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\varphi(p)}\right) = T_{\varphi(p)}(\varphi^{-1})\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\varphi(p)}\right) \tag{3.4.2}$$

実際に勝手な $f \in C^\infty(U)$ に作用させてみると，系 3.1 より

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p (f) = T_{\varphi(p)}(\varphi^{-1})\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\varphi(p)}\right)(f) = \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\varphi(p)}(f\circ\varphi^{-1}) = \boxed{\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^\mu}\bigl(\varphi(p)\bigr)}$$

だとわかった．最右辺を座標 (x^μ) を顕にして書くと

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p (f) = \frac{\partial f(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^\mu}(p^1, \dots, p^n)$$

と言うことである．ただし $(p^1, \dots, p^n) \coloneqq \varphi(p) = \bigl(x^1(p), \dots, x^n(p)\bigr)$ とおいた．

M が境界付きの場合でも，$p \in \operatorname{Int} M$ ならば何も変える必要はない．$p \in \partial M$ の場合に限って同型 (3.4.1) に登場する $\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{H}^n$ に置き換える必要があるが，補題 3.4 の同型 $T_{\varphi(p)}\mathbb{H}^n \cong T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ を挟んでいると思って同じ $\partial/\partial x^\mu\,|_{\varphi(p)}$ の記号を使う．この場合，(3.4.2) の第 $\mu < n$ 成分は境界なしの場合と全く同じだが，n 成分

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p$$

だけは片側偏微分係数と解釈すべきである．

命題 3.20: 自然基底

（境界なし/あり）n 次元 C^∞ 多様体 M の各点 $p \in M$ において，接空間 T_pM は n 次元ベクトル空間である．p を含む任意の C^∞ チャート $(U, \varphi) = \bigl(U, (x^\mu)\bigr)$ に対して，(3.4.2) で定義される**自然基底**

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p$$

が T_pM の基底となる．

3.4.2 微分の座標表示

[*13] 命題 3.16-(3) を使っている．

（境界なし/あり）m 次元 C^∞ 多様体 M，n 次元 C^∞ 多様体 N，および C^∞ 写像

$$F\colon M \longrightarrow N$$

を与える．F の点 $p \in M$ における微分は

$$\begin{aligned} T_pF\colon T_pM &\longrightarrow T_{F(p)}N, \\ v &\longmapsto \bigl(f \longmapsto v(f \circ F)\bigr) \end{aligned}$$

と定義された．M の C^∞ チャート $(U,\,\varphi) = \bigl(U,\,(x^\mu)\bigr)$ と N の C^∞ チャート $(V,\,\psi) = \bigl(V,\,(y^\mu)\bigr)$ によって T_pF を座標表示してみよう．そのためには自然基底の行き先を調べれば良い．

手始めに，Euclid 空間の開集合 $M \subset \mathbb{R}^m,\, N \subset \mathbb{R}^n$ の場合を考える．チャートを $\bigl(U,\,(x^\mu)\bigr) = (M,\,\mathrm{id}_M),\ \bigl(V,\,(y^\mu)\bigr) = (N,\,\mathrm{id}_N)$ として

$$F(x^1,\,\dots,\,x^m) = \begin{pmatrix} F^1(x^1,\,\dots,\,x^m) \\ \vdots \\ F^n(x^1,\,\dots,\,x^m) \end{pmatrix}$$

と書くと，$\forall f \in C^\infty(N)$ に対して

$$\begin{aligned} T_pF\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p\right)(f) &= \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p (f \circ F) \\ &= \frac{\partial f}{\partial y^\nu}\bigl(F(p)\bigr)\frac{\partial F^\nu}{\partial x^\mu}(p) \\ &= \left(\frac{\partial F^\nu}{\partial x^\mu}(p)\left.\frac{\partial}{\partial y^\nu}\right|_{F(p)}\right)(f) \end{aligned}$$

が成り立つ．i.e.

$$\boxed{T_pF\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p\right) = \frac{\partial F^\nu}{\partial x^\mu}(p)\left.\frac{\partial}{\partial y^\nu}\right|_{F(p)}} \tag{3.4.3}$$

である．

次に一般の $M,\,N$ を考える．$\widehat{F} \coloneqq \psi \circ F \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \longrightarrow \psi(V)$ の実態は m 変数の $\mathbb{R}^n$ 値関数なので，$(x^1,\,\dots,\,x^m) \in \varphi\bigl(U \cap F^{-1}(V)\bigr)$ に対して

$$\widehat{F}(x^1,\,\dots,\,x^m) = \begin{pmatrix} \widehat{F}^1(x^1,\,\dots,\,x^m) \\ \vdots \\ \widehat{F}^n(x^1,\,\dots,\,x^m) \end{pmatrix}$$

とおく．

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "T_pF"] \arrow[d, "T_p\varphi"'] & T_{F(p)}N \arrow[d, "T_{F(p)}\psi"] \\ T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^m \arrow[r, "T_{\varphi(p)}(\widehat{F})"] & T_{\psi(F(p))}\mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

の構造[*14]を意識して辛抱強く計算すると

$$
\begin{aligned}
\boxed{T_pF\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p\right)}
&= T_pF\left((T_p\varphi)^{-1}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\varphi(p)}\right)\right) \\
&= T_pF\circ T_{\varphi(p)}(\varphi^{-1})\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\varphi(p)}\right) \\
&= T_{\varphi(p)}(F\circ\varphi^{-1})\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\varphi(p)}\right) \\
&= T_{\psi(F(p))}(\psi^{-1})\left(T_{\varphi(p)}\widehat{F}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\varphi(p)}\right)\right) \\
&= T_{\psi(F(p))}(\psi^{-1})\left(\frac{\partial \widehat{F}^\nu}{\partial x^\mu}\big(\varphi(p)\big)\left.\frac{\partial}{\partial y^\nu}\right|_{\widehat{F}(\varphi(p))}\right) \\
&= \boxed{\frac{\partial \widehat{F}^\nu}{\partial x^\mu}\big(\varphi(p)\big)\left.\frac{\partial}{\partial y^\mu}\right|_{F(p)}}
\end{aligned}
\tag{3.4.4}
$$

とわかる．ただし最後の 2 つの等号に (3.4.3) を使った．

この結果は味わい深い．$\forall v = v^\mu\ \partial/\partial x^\mu\ |_p \in T_pM$ への T_pF の作用が

$$
T_pF\left(v^\mu\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p\right) = \frac{\partial \widehat{F}^\nu}{\partial x^\mu}\big(\varphi(p)\big)v^\mu\left.\frac{\partial}{\partial y^\nu}\right|_{F(p)}
$$

となると言うことなので，行列表示すると

$$
T_pF\left(\begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \widehat{F}^1}{\partial x^1}\big(\varphi(p)\big) & \cdots & \frac{\partial \widehat{F}^1}{\partial x^n}\big(\varphi(p)\big) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \widehat{F}^m}{\partial x^1}\big(\varphi(p)\big) & \cdots & \frac{\partial \widehat{F}^m}{\partial x^n}\big(\varphi(p)\big) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix}
$$

のように Jacobi 行列が出現する！

3.4.3　座標変換の座標表示

C^∞ 多様体 M の 2 つの C^∞ チャート $(U,\varphi) = \big(U,(x^\mu)\big)$, $(V,\psi) = \big(V,(x'^\mu)\big)$ をとる．座標変換とは，微分同相写像

$$
\begin{aligned}
\psi\circ\varphi^{-1}\colon \varphi(U\cap V) &\longrightarrow \psi(U\cap V), \\
\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x'^1(x^1,\dots,x^n) \\ \vdots \\ x'^n(x^1,\dots,x^n) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

[*14] 赤色をつけた部分に座標表示が棲んでいる．

のことであった．このとき，点 $p \in U \cap V$ における自然基底 $\partial/\partial x^\mu\,|_p$ と $\partial/\partial x'^\mu\,|_p$ はどのような関係にあるのだろうか？ 命題 3.16 から，点 $\varphi(p) \in \varphi(U \cap V)$ における座標変換の微分は同型写像

$$T_{\varphi(p)}(\psi \circ \varphi^{-1})\colon T_p\mathbb{R}^n \longrightarrow T_p\mathbb{R}^{\ltimes}$$

になる．これは $T_p\mathbb{R}^n$ の自然基底に

$$T_{\varphi(p)}(\psi \circ \varphi^{-1})\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\varphi(p)}\right) = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}(\varphi(p))\left.\frac{\partial}{\partial x'^\nu}\right|_{\psi(p)}$$

なる変換を引き起こす．従って

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p &= T_{\varphi(p)}(\varphi^{-1})\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\varphi(p)}\right)\\ &= T_{\varphi(p)}(\psi^{-1}) \circ T_{\varphi(p)}(\psi \circ \varphi^{-1})\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\varphi(p)}\right)\\ &= \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}(\varphi(p))\left.\frac{\partial}{\partial x'^\nu}\right|_p \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

だとわかる．

この T_pM における基底の取り替えによって，接ベクトル $v = v^\mu\,\partial/\partial x^\mu\,|_p = v'^\mu\,\partial/\partial x'^\mu\,|_p \in T_pM$ の成分は

$$\boxed{v'^\nu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}(\varphi(p))\,v^\mu}$$

なる変換を受ける．つまり，一般相対論で反変ベクトルと呼ばれるものは，時空と言う 4 次元 C^∞ 多様体 M の上の 1 点 $p \in M$ における接ベクトルのことに他ならない．

3.4.4　曲線の速度ベクトルとしての接ベクトル

$\mathbb{R}$ の開区間から C^∞ 多様体 M への C^∞ 写像のことを M の C^∞ **曲線**と呼ぶ．

C^∞ 曲線

$$\gamma\colon (a,\, b) \to M$$

がある時刻 $t_0 \in (a,\, b)$ において点 $p = \gamma(t_0) \in M$ を通るとする．このとき，曲線 γ の点 p における**速度ベクトル** $\dot{\gamma}(t_0) \in T_pM$ が次のように定義される：

$$\dot{\gamma}(t_0) \coloneqq T_{t_0}\gamma\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0}\right)$$

ここに，$\mathrm{d}/\mathrm{d}t\,|_{t_0}$ は 1 次元 C^∞ 多様体 $(a,\, b)$ の点 t_0 における接空間の自然基底である．速度ベクトルは $\forall f \in C^\infty(M)$ に対して

$$\dot{\gamma}(t_0)(f) = T_{t_0}\gamma\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0}\right)(f) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0}(f \circ \gamma) = \frac{\mathrm{d}(f \circ \gamma)}{\mathrm{d}t}(t_0)$$

と作用する．

点 $p\,(= c(t_0))$ 周りのチャート $(U,\, \varphi) = \bigl(U,\, (x^\mu)\bigr)$ をとると，公式 (3.4.4) により

$$\dot{\gamma}(t_0) = \frac{\mathrm{d}\gamma^\mu}{\mathrm{d}t}(t_0)\, \frac{\partial}{\partial x^\mu}\bigg|_{\gamma(t_0)} \tag{3.4.6}$$

である．ただし，

$$\gamma \circ \varphi^{-1}(t) = \bigl(\gamma^1(t),\, \dots,\, \gamma^n(t)\bigr)$$

とおいた．このことから，γ を任意にとることで，接空間 T_pM の任意の元を速度ベクトルとして表示できそうな気がしてくる．

命題 3.21: 速度ベクトルの集合としての接空間

（境界なし/あり）n 次元 C^∞ 多様体 M を与える．$\forall p \in M$ を 1 つとる．このとき，$\forall v \in T_pM$ は何かしらの C^∞ 曲線の速度ベクトルである．

証明 まず $p \in \operatorname{Int} M$ とする．p を含む C^∞ チャート $(U,\, \varphi) = \bigl(U,\, (x^\mu)\bigr)$ をとり，$v \in T_pM$ を自然基底で $v = v^\mu\, \partial/\partial x^\mu\,|_p$ のように展開する．ここで十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して C^∞ 曲線 $\gamma\colon (-\varepsilon,\, \varepsilon) \longrightarrow M$ を

$$\gamma(t) \coloneqq \varphi^{-1}(tv^1,\, \dots,\, tv^n) \tag{3.4.7}$$

によって定義すると，(3.4.6) により

$$\dot{\gamma}(0) = v^\mu\, \frac{\partial}{\partial x^\mu}\bigg|_{\gamma(0)} = v$$

が成り立つ．

次に $p \in \partial M$ とする．$(U,\, \varphi) = \bigl(U,\, (x^\mu)\bigr)$ を C^∞ 級の境界チャートとし，$v \in T_pM$ を自然基底で $v = v^\mu\, \partial/\partial x^\mu\,|_p$ のように展開する．このとき (3.4.7) の γ を使って

$$\tilde{\gamma} \coloneqq \begin{cases} \gamma, & v^n = 0 \\ \gamma|_{[0,\, \varepsilon)}, & v^n > 0 \\ \gamma|_{(-\varepsilon,\, 0]}, & v^n < 0 \end{cases}$$

と定義した C^∞ 曲線 $\tilde{\gamma}$ は常に $\varphi \circ \tilde{\gamma}(t)$ の第 n 成分が正なので $\mathbb{H}^n$ に属し，$\tilde{\gamma}(0) = p$ かつ $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = v$ を充たす． ■

!

これまでは C^∞ 写像 $F\colon M \longrightarrow N$ の微分を $\boldsymbol{T_pF}$ と書いた．この記法は定義域が明確になると言う利点があるが，やや煩雑である．そこで，以降では誤解の恐れがない場合は

$$\boldsymbol{F_*} \quad \mathrm{d}\boldsymbol{F_p}$$

などと略記することにする．

3.5 接束

n 次元 C^∞ 多様体 M の各点の上に n 次元ベクトル空間が棲んでいると言うような描像を直接定式化しよう．

定義 3.8: 接束

（境界なし/あり）C^∞ 多様体 M を与える．

- disjoint union

$$TM := \coprod_{p\in M} T_pM$$

- 写像（**射影**と呼ばれる）

$$\pi\colon TM \longrightarrow M,\ (p,\, v) \longmapsto p$$

の組のことを M の**接束** (tangent bandle) と呼ぶ.

$\dim M = n$ とする．接束はそれ自身が自然に 2n 次元 C^∞ 多様体になり，射影 π は C^∞ 写像になる．このことを確認するには，M の位相と C^∞ アトラスのみを使って TM に位相と C^∞ アトラスを入れることができることを見ればよい：

$\mathcal{S}$ を M のアトラスとする．一点 $p\in M$ を任意にとり，p の周りのチャート $(U,\, \varphi) \in \mathcal{S}$ を一つとる．命題 3.16-(3) より，微分同相写像 $\varphi\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ は同型写像 $T_p\varphi\colon T_pM \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ を誘導する．これを $\forall v \in T_pM$ に対して

$$T_p\varphi(v) = v^\mu \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\varphi(p)}$$

と書く．ここで，写像 $\tilde{\varphi}_U\colon \pi^{-1}(U) \longrightarrow \varphi(U)\times\mathbb{R}^n$ を

$$\tilde{\varphi}_U(v) := \bigl(x^1(p),\, \dots,\, x^n(p);\ v^1,\, \dots,\, v^n\bigr)$$

として定義すれば，$\tilde{\varphi}$ は全単射になる．TM の位相 $\mathscr{O}_{TM}$ は，各 U に対して次の条件を充たすものとして定義する：

(1) $\pi^{-1}(U) \in \mathscr{O}_{TM}$
(2) $\tilde{\varphi}_U$ は同相写像である

TM のアトラスは，

$$\tilde{\mathcal{S}} := \left\{ \bigl(\pi^{-1}(U),\, \tilde{\varphi}_U\bigr) \,\middle|\, (U,\, \varphi) \in \mathcal{S} \right\}$$

とおけば良い．接ベクトルの変換則から $\tilde{\mathcal{S}}$ の座標変換は全て C^∞ 級である．

3.6 ベクトル場

公理 3.3: 環上の加群

R を環とする．**左 R 加群**とは，可換群（Abel 群）$(M, +)$ と，M 上の二項演算（スカラー乗法）$\cdot : R \times M \to M,\ (r, x) \mapsto rx$ の組で，以下の性質を充たすものである．以下，$x, y, z \in M$ かつ $a, b \in R$ とする：

(M1) $a(bx) = (ab)x$

(M2) $(a + b)x = ax + bx$

(M3) $a(x + y) = ax + ay$

(M4) $1x = x$

定義 3.5 は C^∞ 多様体の一点 $p \in M$ における接ベクトルを定義したものであった．次に定義するベクトル場は p を M 全域で動かして得られる構造である．

定義 3.9: ベクトル場

C^∞ 多様体 M を与える．M 上の C^∞ **ベクトル場** X は，各点 p における接ベクトル $X_p \in T_pM$ を対応させ，X_p が p に関して C^∞ 級に動くもののことである．i.e. 点 p を含むチャート $\bigl(U, (x^i)\bigr)$ を与えると，点 p において X は

$$X_p = X^\mu(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p \in T_pM$$

の**局所表示**を持つが，この各係数 $a^i(p)$ が C^∞ 関数になっていることを言う．

M 上のベクトル場全体の集合を $\boldsymbol{\mathfrak{X}(M)}$ と書く．

定義 3.10:

$\mathfrak{X}(M)$ の和とスカラー乗法を次のように定義すると，$\mathfrak{X}(M)$ は $C^\infty(M)$ 上の加群になる：

(1) $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $(X + Y)_p := X_p + Y_p$

(2) $\forall f \in C^\infty(M)$ および $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $(fX)_p := f(p)X_p$

証明 公理 3.3 を充していることを確認すればよい． ■

定義 3.9 は，接束の言葉を使っても定義できる．すなわち，C^∞ 多様体 M 上の**ベクトル場** (vector field) X とは，連続写像

$$X : M \longrightarrow TM,\ p \longmapsto X_p$$

であって，条件

$$\pi \circ X = \mathrm{id}_M$$

を充たすもののことを言う．この条件は $X_p \in T_pM$ を含意している．C^∞ **ベクトル場** $X\colon M \longrightarrow TM$ とは，TM に C^∞ 構造を入れたときに C^∞ 写像となるようなベクトル場のことである．

3.6.1　ベクトル場の微分としての特徴付け

接ベクトルは函数の方向微分を与えた．このことに着想を得て，$C^\infty(M)$ へのベクトル場の作用に新しい解釈を付与できる．i.e. 点 $p \in M$ におけるベクトル場 X の $f \in C^\infty(M)$ への作用 $X_p(f)$ を

$$(Xf)(p) \coloneqq X_p(f) = \left(a^i(p)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right)(f) = a^i(p)\,\frac{\partial}{\partial x^i}\big(f\circ\varphi^{-1}\big)\big(\varphi(p)\big)$$

とおき，点 p に $X_p(f) \in \mathbb{R}$ を対応付ける写像になっていると見做す解釈である．このようにして M 上の C^∞ 関数 Xf が得られる．なお，紛らわしいが，Xf のことを **ベクトル場 X による f の微分**と呼ぶ．

上述の解釈から自然に定まる写像

$$\mathfrak{X}(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M),\ (X,\ f) \mapsto Xf$$

は，f に関しては以下の性質を持つ：

命題 3.22:

$f,\, g \in C^\infty(M)$，$a,\, b \in \mathbb{R}$ に対して以下が成立する：

(1) $X(af + bg) = a\,Xf + b\,Xg$
(2) $X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$

定義 3.11: ベクトル場による微分

命題 3.22 の性質を充たす写像 $X\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M),\ f \mapsto Xf$ を，一般に $\mathbb{R}$ 上の多元環 $C^\infty(M)$ の**微分** (derivation) と呼ぶ．

3.7　余接空間

定義 3.5 より，T_pM はベクトル空間である．従って定義 3.1 による双対ベクトル空間 T_p^*M を考えることができる．

定義 3.12: 余接空間

（境界なし/あり）C^∞ 多様体 M を与える．一点 $p \in M$ における接空間 T_pM の双対ベクトル空間 T_p^*M を点 $p \in M$ における**余接空間** (cotangent space) と呼ぶ．

接束の場合と同様に，**余接束**を考えることができる．すなわち（境界なし/あり）C^∞ 多様体 M の**余接束** (cotangent bundle) とは，

- disjoint union

$$\boldsymbol{T^*M} \coloneqq \coprod_{p \in M} T_p^* M$$

- 射影

$$\pi \colon \boldsymbol{T^*M} \longrightarrow M,\ (p,\, \omega) \longmapsto p$$

の組のことである．**余ベクトル場**，もしくは **1-形式**とは，C^∞ 写像

$$\omega \colon M \longrightarrow T^*M,\ p \longmapsto \omega_p$$

であって，条件

$$\pi \circ \omega = \mathrm{id}_M$$

を充たすもののことを言う．

3.7.1　余接空間の基底

$f \in C^\infty(M)$ を与えたとき，**f の微分** (differential of f) と呼ばれる余ベクトル場 $\mathbf{d}\boldsymbol{f} \in T^*M$ を次のように定義する：

$$\mathrm{d}f_p\,(v) \coloneqq v(f) \quad (v \in T_pM)$$

点 $p \in M$ を含むチャート $\bigl(U,\, (x^\mu)\bigr)$ をとり，自然基底 $\{\partial/\partial x^\mu\,|_p\}$ の双対基底を $\{\lambda^\mu|_p\}$ とおく．座標関数 $x^\mu \colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ は $C^\infty(U)$ の元なので，x^μ の微分を考えることができる：

$$\mathrm{d}x^\mu\,|_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right|_p \right) = \left.\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right|_p (x^\mu) = \delta^\mu_\nu$$

つまり，$\mathrm{d}x^\mu\,|_p = \lambda^\mu|_p$ である．こうして，T_p^*M の基底は

$$\left\{\, \mathrm{d}x^\mu\,|_p \,\right\}$$

であることがわかった．

3.7.2　座標表示

異なるチャート $\bigl(U,\, (x^\mu)\bigr)$，$\bigl(V,\, (x'^\mu)\bigr)$ を採った時の，$U \cap V$ における $\omega \in T_p^*M$ の成分表示の変換則を見る．ω は座標によらないので $\omega = \omega_\mu\,\mathrm{d}x^\mu = \omega'_\mu\,\mathrm{d}x'^\mu$ であり，と書ける．公式 (3.4.5) を使うと

$$\boxed{\omega_\mu} = \omega \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p \right) = \omega \left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\bigl(\varphi(p)\bigr)\, \left.\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right|_p \right) = \boxed{\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\bigl(\varphi(p)\bigr)\,\omega'_\nu}$$

とわかる．これは一般相対論で登場する共変ベクトルの変換則である．

3.8　C^∞ 多様体上のテンソル

命題 3.13 によるテンソル積の構成において，$V \in \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ 上の**共変 $\boldsymbol{k}$-テンソル**空間を

$$\boldsymbol{T_k(V)} \coloneqq \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{k} \cong L(\underbrace{V,\,\ldots,\,V}_{k};\,\mathbb{K})$$

と定める．同様に**反変 $\boldsymbol{k}$-テンソル**空間を

$$\boldsymbol{T^k(V)} \coloneqq \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{k} \cong L(\underbrace{V^*,\,\ldots,\,V^*}_{k};\,\mathbb{K})$$

と定める．さらに $\boldsymbol{(r,\,s)}$ **型の混合テンソル**を

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T^r_s(V)} &\coloneqq \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{r} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{s} \\ &\cong L(\underbrace{V^*,\,\ldots,\,V^*}_{r},\,\underbrace{V,\,\ldots,\,V}_{s};\,\mathbb{K})\end{aligned}$$

と定める．各種のテンソル空間の基底は命題 3.11 により構成できる．

（境界なし/あり）C^∞ 多様体 M 上の点 $p \in M$ における $(r,\,s)$ 型テンソルとは，テンソル空間 $\mathcal{T}^r_s(T_pM)$ の元のことを言う．$\forall T_p \in \mathcal{T}^r_s(T_pM)$ の，チャート $\bigl(U,\,(x^i)\bigr)$ における局所座標表示は

$$T_p = T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right)_p \otimes \cdots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right)_p \otimes (\mathrm{d}x^{j_1})_p \otimes \cdots \otimes (\mathrm{d}x^{j_s})_p$$

と書かれる．

3.8.1　テンソルの作用

$T_p \in T^r_s(T_pM)$ の r 個の 1-形式 $\alpha_a = \alpha_{a\mu}(\mathrm{d}x^\mu)_p \in T^*_pM$ と s 個の接ベクトル $w_b = {w_b}^\nu \left(\dfrac{\partial}{\partial x^\nu}\right)_p \in V$ への作用を丁寧に見ると，

$$\begin{aligned}
&T_p\,[\alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_r;\,w_1,\,\ldots,\,w_s] \\
&= T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}(p) \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right)_p \otimes \cdots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right)_p \otimes (\mathrm{d}x^{j_1})_p \otimes \cdots \otimes (\mathrm{d}x^{j_s})_p \right) \left[\alpha_{a\mu}(\mathrm{d}x^\mu)_p;\, w_{b\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)_p \right] \\
&= \sum_{\substack{i_1 \ldots i_r;\\ j_1 \ldots j_s}} T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}(p) \prod_{\substack{1 \le a \le r,\\ 1 \le b \le s}} \left(\sum_\mu \alpha_{a\mu}(\mathrm{d}x^\mu)_p \right) \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_a}}\right)_p \right] (\mathrm{d}x^{j_b})_p \left[\sum_\nu {w_b}^\nu \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)_p \right] \\
&= \sum_{i_1 \ldots i_r;\, j_1 \ldots j_s} T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}(p) \prod_{a,\,b} \left(\sum_\mu \alpha_{a\mu}(\mathrm{d}x^\mu)_p \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_a}}\right)_p \right] \right) \left(\sum_\nu {w_b}^\mu (\mathrm{d}x^{j_b})_p \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)_p \right] \right) \\
&= \sum_{i_1 \ldots i_r;\, j_1 \ldots j_s} T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}(p) \prod_{a,\,b} \left(\sum_\mu \alpha_{a\mu}\delta^{i_a}_\mu \right) \left(\sum_\nu {w_b}^\mu \delta^{j_b}_\nu \right) \\
&= \sum_{i_1 \ldots i_r;\, j_1 \ldots j_s} T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}(p) \prod_{a,\,b} \alpha_{a i_a} {w_b}^{j_b} \\
&= T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}(p) \alpha_{1 i_1} \cdots \alpha_{r i_r} {w_1}^{j_1} \cdots {w_s}^{j_s}.
\end{aligned} \tag{3.8.1}$$

ただし，2 行目と最終行にのみ Einstein の規約を用いた．

3.8.2　成分表示の変換則

テンソルの成分が座標変換の下でどのような変換を受けるかどうかを観察しよう．もう一つのチャート $\bigl(V,\,(y^i)\bigr)$ をとる．$T_p\,(\alpha_1,\,\dots,\,\alpha_r;\,w_1,\,\dots,\,w_s)$ は局所座標によらないので，余ベクトルと接ベクトルの変換則を式 (3.8.1) に適用することで

$$
\begin{aligned}
&T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}(p)\alpha_{1i_1}\cdots\alpha_{ri_r}{w_1}^{j_1}\cdots{w_s}^{j_s}\\
&=T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}(p)\tilde{\alpha}_{1k_1}\frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{i_1}}(p)\cdots\tilde{\alpha}_{rk_r}\frac{\partial y^{k_r}}{\partial x^{i_r}}(p){\tilde{w}_1}^{l_1}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{l_1}}(p)\cdots{\tilde{w}_s}^{j_s}\frac{\partial x^{j_s}}{\partial y^{l_s}}(p)\\
&=T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}(p)\frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{i_1}}(p)\cdots\frac{\partial y^{k_r}}{\partial x^{i_r}}(p)\frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{l_1}}(p)\cdots\frac{\partial x^{j_s}}{\partial y^{l_s}}(p)\tilde{\alpha}_{1k_1}\cdots\tilde{\alpha}_{1k_r}{\tilde{w}_1}^{l_1}\cdots{\tilde{w}_1}^{l_s}\\
&=\tilde{T}^{k_1\dots k_r}_{l_1\dots l_s}(p)\tilde{\alpha}_{1k_1}\cdots\tilde{\alpha}_{1k_r}{\tilde{w}_1}^{l_1}\cdots{\tilde{w}_1}^{l_s}
\end{aligned}
$$

とわかる．従って

$$
\tilde{T}^{k_1\dots k_r}_{l_1\dots l_s}(p)=T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}(p)\frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{i_1}}(p)\cdots\frac{\partial y^{k_r}}{\partial x^{i_r}}(p)\frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{l_1}}(p)\cdots\frac{\partial x^{j_s}}{\partial y^{l_s}}(p)
$$

である．一般相対性理論で使うテンソルの定義を再現している．

3.8.3　テンソル場

ベクトル場の定義 3.9 と同様にして，テンソル場を定義できる

定義 3.13: テンソル場

C^∞ 多様体 M 上の**テンソル場** T とは，各点 $\forall p\in M$ に対してテンソル $T_p\in T^r_s(T_pM)$ を対応させ，局所座標表示

$$
T_p=T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}(p)\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right)_p\otimes\cdots\otimes\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right)_p\otimes(\mathrm{d}x^{j_1})_p\otimes\cdots\otimes(\mathrm{d}x^{j_s})_p\in\mathcal{T}^r_s(T_pM)
$$

の全係数 $T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}(p)$ が C^∞ 関数になっているようなもののことを言う．

接束と同様の定義も可能である．すなわち，（境界なし/あり）C^∞ 多様体 M 上の**共変 $\boldsymbol{k}$-テンソルの束**を

$$
\boldsymbol{T_k(T^*M)}\coloneqq\coprod_{p\in M}T_k(T^*_pM)
$$

と定める．同様に**反変 $\boldsymbol{k}$-テンソルの束**を

$$
\boldsymbol{T^k(TM)}\coloneqq\coprod_{p\in M}T^k(T_pM)
$$

と定める．さらに **$(\boldsymbol{r},\,\boldsymbol{s})$ 型の混合テンソルの束**を

$$
\boldsymbol{T^r_s(TM)}\coprod_{p\in M}T^r_s(T_pM)
$$

と定める．

特に，$(r,\ s)$ 型の**テンソル場** T とは，C^∞ 写像

$$T \colon M \longrightarrow T^r_s(TM)$$

であって，射影 $\pi \colon T^r_s(TM) \longrightarrow M$ について

$$\pi \circ T = \mathrm{id}_M$$

を充たすもののことである．

第 4 章

微分形式

4.1 外積代数

定義 4.1: 外積代数

V を体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．このとき**外積代数** (exterior algebra) $\left(\bigwedge^{\bullet}(V),\, +,\, \wedge\right)$ は，以下のように定義される $\mathbb{K}$ 上の多元環（定義 3.2）である：

(1) $\mathbb{K}$ 上 V の元によって生成される

(2) 単位元 1 を持つ

(3) 任意の $x,\, y \in V$ に対して以下の関係式が成り立つ：

$$x \wedge y = -y \wedge x$$

$\forall x \in V$ の次数を 1 とおくことで，$\bigwedge^{\bullet}(V)$ の単項式の次数が定義される．次数が k の単項式の $\mathbb{K}$ 係数線型結合全体の集合を $\bigwedge^{k}(V)$ と書くと，直和分解

$$\bigwedge^{\bullet}(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigwedge^{k}(V)$$

が成立する．

! $\bigwedge^{0}(V) = \mathbb{K}$ と約束する．また，自然に $\bigwedge^{1}(V) \cong V$ である．

$\dim V = n < \infty$ とする．$\{e_i\}$ を V の基底とすると，$\bigwedge^{k}(V)$ の基底は $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$ の形をした単項式のうち，互いに線形独立なものである．定義 4.1-(3) より，添字の組 $(i_1,\, \ldots,\, i_k)$ の中に互いに等しいものがあると 0 になり，また，添字の順番を並べ替えただけの項は線形独立にならない．以上の考察から，次のようになる：

定義 4.2: 外積代数の基底

$\bigwedge^k(V)$ の基底として

$$\left\{ e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \;\middle|\; 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n \right\}$$

をとることができる．このとき $\dim \bigwedge^k(V) = \binom{n}{k}$ である．

二項定理から，$\dim \bigwedge^\bullet(V) = 2^n$ である．また，$k > n$ のとき $\bigwedge^k(V) = \{0\}$ である．

4.2 交代形式

定義 4.3: 交代形式

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．(0, r) 型テンソル $\omega \in \mathcal{T}_r^0(V)$ であって，任意の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ に対して

$$\omega\big[X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)}\big] = \operatorname{sgn}\sigma\, \omega\big[X_1, \dots, X_r\big], \quad X_i \in V$$

となるものを V 上の r 次の**交代形式**と呼ぶ．

V 上の r 次の交代形式全体の集合を $A^r(V)$ と書く．$A^r(V)$ はテンソル空間 $\mathcal{T}_r^0(V)$ の部分ベクトル空間である．次数の異なる交代形式全体

$$A^\bullet(V) \coloneqq \bigoplus_{r=0}^{\infty} A^r(V)$$

を考える．ただし $A^0(V) = \mathbb{K}$ と定義する．交代性より $k > n$ のとき $A^k(V) = \{0\}$ になる．

定理 4.1: 外積代数と交代形式の同型

写像 $\iota\colon \bigwedge^\bullet(V^*) \to A^\bullet(V)$ を以下のように定義する：
まず，写像 $\iota_k\colon \bigwedge^k(V^*) \to A^k(V)$ の $\omega = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \in \bigwedge^k(V^*)$ ($\alpha_i \in V^*$) への作用を

$$\iota_k(\omega)[X_1, \dots, X_k] \coloneqq \det\big(\alpha_i[X_j]\big)$$

と定義する．$\forall \omega \in \bigwedge^\bullet(V)^*$ に対する ι の作用は ι_k の作用を線形に拡張する．
このとき，ι は同型写像である．

証明 各 ι_k が同型写像であることを示せば良い[*1]．V の基底 $\{e_i\}$ と V^* の基底 $\{e^i\}$ は $e^i[e_j] = \delta^i_j$ を充しているものとする．このとき $\bigwedge^k(V^*)$ の基底を

$$\left\{ e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k} \;\middle|\; 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n \right\}$$

にとれる．$\left\{ \iota_k\big(e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}\big) \;\middle|\; 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n \right\} \subset A^k(V)$ が $A^k(V)$ の基底を成すことを示す．

[*1] 添字がややこしいのでこの証明では Einstein の規約を用いない．

ある $\lambda_{i_1\dots i_k} \in \mathbb{K}$ に対して

$$\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} \lambda_{i_1\dots i_k}\iota_k\big(e^{i_1}\wedge\dots\wedge e^{i_k}\big) = 0 \in A^k(V)$$

ならば,

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} \lambda_{i_1\dots i_k}\iota_k\big(e^{i_1}\wedge\dots\wedge e^{i_k}\big)[e_{j_1},\dots,e_{j_k}] \\
&= \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} \lambda_{i_1\dots i_k}\det\big(e^{i_l}[e_{j_m}]\big) \\
&= \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} \lambda_{i_1\dots i_k}\det\big(\delta^{i_l}_{j_m}\big) \\
&= \lambda_{j_1\dots j_k}
\end{aligned}$$

なので線形独立である.

次に $\forall\omega \in A^k(V)$ を一つとる. このとき $\omega_{i_1\dots i_k} := \omega[e_{i_1},\,\dots,\,e_{i_k}]$ とおいて

$$\tilde\omega := \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} \omega_{i_1\dots i_k} e^{i_1}\wedge\dots\wedge e^{i_k} \in \bigwedge\nolimits^k(V^*)$$

と定義すると

$$\iota_k(\tilde\omega) = \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} \omega_{i_1\dots i_k}\iota_k\big(e^{i_1}\wedge\dots\wedge e^{i_k}\big) = \omega$$

なので ι_k は全射である. 従って $\iota_k\colon \bigwedge^\bullet(V^*) \xrightarrow{\cong} A^k(V)$ である. ■

! 定理 4.1 において構成した ι_k は, 定数倍しても同型写像を与える. 文献によっては $1/k!$ 倍されていたりするので注意. $1/k!$ 倍する定義は, 特性類の一般論の記述に便利である.

系 4.2: 交代形式の外積

$\tilde\omega \in \bigwedge^k(V^*)$, $\tilde\eta \in \bigwedge^l(V^*)$ を与える. 同型写像 $\iota\colon \bigwedge^\bullet(V^*) \xrightarrow{\cong} A^\bullet(V)$ による対応を

$$\begin{aligned}
\tilde\omega &\mapsto \omega := \iota(\tilde\omega), \\
\tilde\eta &\mapsto \omega := \iota(\tilde\eta), \\
\tilde\omega\wedge\tilde\eta &\mapsto \omega\wedge\eta := \iota(\tilde\omega\wedge\tilde\eta)
\end{aligned}$$

とおくと, $A^\bullet(V)$ 上の**外積** (exterior product) $\wedge\colon A^k(V)\times A^l(V) \to A^{k+l}(V)$ が次のようにして定まる:

$$\begin{aligned}
&(\omega\wedge\eta)[X_1,\,\dots,\,X_{k+l}] \\
&= \frac{1}{k!\,l!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{k+l}} \operatorname{sgn}\sigma\,\omega[X_{\sigma(1)},\,\dots,\,X_{\sigma(k)}]\,\eta[X_{\sigma(k+1)},\dots,\,X_{\sigma(k+l)}]
\end{aligned}$$

ただし, $X_i \in V$ は任意とする.

証明 ι_k の線形性から,

$$\tilde\omega = e^{i_1}\wedge\dots\wedge e^{i_k},\quad \tilde\eta = e^{j_1}\wedge\dots\wedge e^{j_l}$$

について示せば十分．また，$\bigwedge^\bullet(V^*)$ 上の二項演算 $\wedge$ の交代性から添字 $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l$ は全て異なるとしてよい．

ここで，左辺を計算するために次のような置換 $\tau \in \mathfrak{S}_{k+l}$ を考える：

$$\tau := \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_k & j_1 & \dots & j_l \\ m_1 & \dots & m_k & m_{k+1} & \dots & m_{k+l} \end{pmatrix}, \quad m_1 < m_2 < \dots < m_{k+l}.$$

このとき

$$\tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta} = \operatorname{sgn} \tau e^{m_1} \wedge \dots \wedge e^{m_{k+l}}$$

である．したがって

$$(\omega \wedge \eta)[e_{m_1}, \dots, e_{m_{k+l}}] = \operatorname{sgn} \tau \iota_{k+l}(e^{m_1} \wedge \dots \wedge e^{m_{k+l}})[e_{m_1}, \dots, e_{m_{k+l}}] = \boxed{\operatorname{sgn} \tau}.$$

次に，右辺を計算する．

$$\begin{aligned} &\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \operatorname{sgn} \sigma \omega[e_{\sigma(m_1)}, \dots, e_{\sigma(m_k)}]\, \eta[e_{\sigma(m_{k+1})}, \dots, e_{\sigma(m_{k+l})}] \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \operatorname{sgn} \sigma \iota_k(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k})[e_{\sigma\tau(i_1)}, \dots, e_{\sigma\tau(i_k)}]\, \iota_l(e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_l})\eta[e_{\sigma\tau(j_1)}, \dots, e_{\sigma\tau(j_l)}] \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

式 (4.2.1) の和において，$\exists \rho \in \mathfrak{S}_k$，$\exists \pi \in \mathfrak{S}_l$，$\sigma\tau(i_1 \cdots i_k) = \rho(i_1 \cdots i_k)$, $\sigma\tau(j_1 \cdots j_l) = \pi(j_1 \cdots j_l)$ を充たすような $\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}$ の項のみが非ゼロである．そのような σ に対して $\sigma\tau = \rho\pi$，$\rho\pi(i_1 \cdots i_k) = \rho(i_1 \cdots i_k)$，$\rho\pi(j_1 \cdots j_l) = \pi(j_1 \cdots j_l)$ と書けるから

$$\begin{aligned} &\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \operatorname{sgn} \sigma \iota_k(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k})[e_{\sigma\tau(i_1)}, \dots, e_{\sigma\tau(i_k)}]\, \iota_l(e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_l})\eta[e_{\sigma\tau(j_1)}, \dots, e_{\sigma\tau(j_l)}] \\ &= \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_k} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_l} \operatorname{sgn} \sigma \iota_k(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k})[e_{\rho(i_1)}, \dots, e_{\rho(i_k)}]\, \iota_l(e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_l})\eta[e_{\pi(j_1)}, \dots, e_{\pi(j_l)}] \\ &= \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_k} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_l} \operatorname{sgn} \sigma \operatorname{sgn} \rho \operatorname{sgn} \pi \\ &= \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_k} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_l} \operatorname{sgn} \sigma \operatorname{sgn} \rho\pi \\ &= \boxed{k!\, l! \operatorname{sgn} \tau}. \end{aligned}$$

となる．よって示された． ■

4.3 C^∞ 多様体上の微分形式

前節の結果を用いて，局所座標に依存しない微分形式の定義を与えることができる．

定義 4.4: 微分形式

M を C^∞ 多様体とする．ω が M 上の **k-形式** (k-form) であるとは，各点 $p \in M$ において $\omega_p \in \bigwedge^k (T_p^* M)$ を対応させ，ω_p が p に関して C^∞ 級である，i.e.

$$\omega_p = \omega_{i_1 \cdots i_k}(p)\, (\mathrm{d}x^{i_1})_p \wedge \cdots \wedge (\mathrm{d}x^{i_k})_p$$

の各係数 $\omega_{i_1 \cdots i_k}(p)$ が C^∞ 関数であることを言う．

ベクトル束の言葉を使うと，

$$\Omega^k(M) = \bigcup_{p \in M} \bigwedge^k (T_p^* M) \text{ の } C^\infty \text{ 級の切断の全体}$$

となる．

もう一つの解釈は，交代形式の定義 4.3 を前面に押し出す方法である．この解釈では多元環 $C^\infty(M)$ 上の $(0, r)$-階テンソル場（定義 3.13）としての側面が明らかになる：

定理 4.3: k 形式の同型

M を C^∞ 多様体とする．M 上の k-形式全体の集合 $\Omega^k(M)$ は，

$$\left\{ \tilde{\omega} \colon \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M) \right.$$
$$\left. \,\middle|\, \tilde{\omega} \text{ は } C^\infty(M) \text{ -加群として多重線型かつ交代的 } \right\}$$

と自然に同型である．

証明 $C^\infty(M)$-加群として多重線型かつ交代的であるような写像 $\tilde{\omega} \colon \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ が与えられたとする．まず $\forall X_i \in \mathfrak{X}(M)$ に対して，$\tilde{\omega}\big(X_1, \dots, X_k\big) \in C^\infty(M)$ の点 $p \in M$ における値が，各 X_i の点 p における値 $X_i\big|_p \in T_pM$ のみによって定まることを確認する．$\tilde{\omega}$ の線形性から $\tilde{\omega}\big(X_1, \dots, X_i - Y_i, \dots, X_k\big) = \tilde{\omega}\big(X_1, \dots, X_i, \dots, X_k\big) - \tilde{\omega}\big(X_1, \dots, Y_i, \dots, X_k\big)$ なので，ある i について $X_i\big|_p = 0$（0 写像）ならば $\tilde{\omega}\big(X_1, \dots, X_k\big)(p) = 0$（実数）であることを確認すれば良い．$i = 1$ としても一般性を失わない．$(U; x^\mu)$ を p の周りのチャートとする．このとき U 上では $X^\mu \in C^\infty(U)$ を用いて

$$X_1 = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad X^\mu(p) = 0 \tag{4.3.1}$$

と書ける．ここで X_1 の座標表示 (4.3.1) の定義域を補題 D.3 を用いて M 全域に拡張することを考える．そのために $\overline{V} \subset U$ なる p の開近傍 V と，V 常恒等的に 1 であり U の外側では 0 であるような C^∞ 関数 $h \in C^\infty(M)$ をとることができる．このとき

$$Y_i \coloneqq h \frac{\partial}{\partial x^i}$$

とおくと $Y_i \in \mathfrak{X}(M)$ となり，$\tilde{X}^\mu \coloneqq hX^\mu$ とおけば $\tilde{X}^\mu \in C^\infty(M)$ となる．このとき

$$X_1 = X_1 + h^2(X_1 - X_1) = \tilde{X}^\mu Y_\mu + (1 - h^2)X_1 \in \mathfrak{X}(M)$$

の右辺は $V \subset U$ 上至る所で座標表示 (4.3.1) を再現することがわかる．従って $\tilde{\omega}$ の $C^\infty(M)$-線形性から

$$\begin{aligned}
&\tilde{\omega}\bigl(X_1, \dots, X_k\bigr)(p) \\
&= \tilde{X}^\mu(p)\,\tilde{\omega}\bigl(Y_\mu, X_2, \dots, X_k\bigr)(p) + \bigl(1 - h(p)^2\bigr)\,\tilde{\omega}\bigl(X_1, X_2, \dots, X_k\bigr)(p) \\
&= 0
\end{aligned}$$

となり，示された．

故に，次のような k-形式 ω の定義は well-defined である[*2]：任意の k 個の接ベクトル $X_i \in T_pM$ が与えられたとき，k 個のベクトル場 $\tilde{X}_i \in \mathfrak{X}(M)$ であって $\tilde{X}_i\Big|_p = X_i$ を充たすものたちを適当に選ぶ．そして

$$\omega_p\bigl[X_1, \dots, X_k\bigr] \coloneqq \tilde{\omega}\bigl(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_k\bigr)(p)$$

と定めると，上述の議論から左辺は $\tilde{X}_i$ の選び方に依らないのである．ベクトル場の C^∞ 性から ω_p が p に関して C^∞ 級であることは明らかなので，このようにして定義された対応 $\omega\colon p \mapsto \omega_p$ は微分形式である． ■

4.4 微分形式の演算

C^∞ 多様体 M 上の k-形式全体の集合を $\Omega^k(M)$ と書き，

$$A^\bullet(M) \coloneqq \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(M)$$

として M 上の微分形式全体を考える．$A^\bullet(M)$ 上に様々な演算を定義する．

! しばらくの間，微分形式全体 $\Omega^k(M)$ を定理 4.3 の意味で捉える．i.e. $\omega \in \Omega^k(M)$ は k 個のベクトル場に作用する．作用を受けるベクトル場は ( ) で囲むことにする：

$$\omega\colon (X_1, \dots, X_k) \mapsto \omega(X_1, \dots, X_k)$$

4.4.1 外積

微分形式全体 $\Omega^k(M)$ を定理 4.3 の意味で捉える．このとき，k-形式と l-形式の外積

$$\wedge\colon \Omega^k(M) \to \Omega^l(M),\ (\omega, \eta) \mapsto \omega \wedge \eta$$

は，各点 $p \in M$ で

$$(\omega \wedge \eta)_p \coloneqq \omega_p \wedge \eta_p \in A^{k+l}(T_pM)$$

と定義される双線型写像である．

[*2] 定理 4.1 を使って各点 p において $\omega_p \in \bigwedge^k\bigl(T_p^*M\bigr)$ を $A^k(T_pM)$ の元と見做していることに注意

命題 4.1: 外積の性質

外積は以下の性質を持つ：

(1) $\eta \wedge \omega = (-1)^{kl} \omega \wedge \eta$

(2) 任意のベクトル場 $X_1, \dots, X_{k+l} \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\begin{aligned}&(\omega \wedge \eta)(X_1, \dots, X_{k+l}) \\ &= \frac{1}{k!\,l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \operatorname{sgn} \sigma \omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)})\, \eta(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+l)})\end{aligned}$$

証明 定理 4.3 より，各点 $p \in M$ において $(\omega \wedge \eta)_p$ を外積代数 $\bigwedge^{k+l}(T_p^* M)$ の元と見做してよい．

(1) 外積代数の基底 $e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k} \wedge e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_l}$ において e^{j_1} を一番左に持ってくると全体が $(-1)^k$ 倍される．これを l 回繰り返すと全体が $(-1)^{kl}$ 倍される．

(2) $(\omega \wedge \eta)_p$ に対して定理 4.1 を用いればよい．

■

4.4.2 外微分

定義 4.5: 外微分（局所表示）

M のチャート $(U; x^i)$ を与える．k-形式 $\omega \in \Omega^k(M)$ の座標表示が

$$\omega = \omega_{i_1 \cdots i_k} \, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

と与えられたとき，**外微分** (exterior differention)

$$d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$$

は次のように定義される：

$$d\omega := \frac{\partial \omega_{i_1 \cdots i_k}}{\partial x^{j}} \, dx^{j} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

定理 4.4: 外微分（内在的）

$\omega \in \Omega^k(M)$ を M 上の任意の k-形式とする．このとき，任意のベクトル場 $X_1, \dots, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega\,(X_1, \dots, X_{k+1}) = &\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i\bigl(\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1})\bigr) \\
&+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega\bigl([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1}\bigr)
\end{aligned}
$$

ただし $\hat{X}_i$ は X_i を省くことを意味する．また，$[X, Y]$ は **Lie 括弧積**と呼ばれる $\mathfrak{X}(M)$ 上の二項演算で，以下のように定義される：

$$
[X, Y]f \coloneqq X(Yf) - Y(Xf)
$$

定理 4.4 の $k = 1$ の場合を書くと次の通り：

$$
\mathrm{d}\omega\,(X, Y) = (X\omega)(Y) - (Y\omega)(X) - \omega([X, Y]).
$$

定理 4.5: 外微分の性質

外微分 d は以下の性質をみたす：

(1) $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$

(2) $\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) = \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{d}\eta\,, \quad \omega \in \Omega^k(M)$

<u>証明</u> $\forall \omega \in \Omega^k(M)$ と M のチャート $(U; x^i)$ をとる．

(1)

$$
\mathrm{d}^2\omega = \frac{\partial^2 \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\, \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}
$$

であるが，ω は C^∞ 級なので偏微分は可換である．従って添字の対 μ, ν に関して対称かつ反対称な総和をとることになるから $\mathrm{d}^2\omega = 0$ である．

(2) $\omega = \omega_{i_1 \dots i_k}\, \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$, $\eta = \eta_{j_1 \dots j_l}\, \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{j_l}$ とする．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) &= \mathrm{d}\bigl(\omega_{i_1 \dots i_k} \eta_{j_1 \dots j_l}\, \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{j_l}\bigr) \\
&= \left(\frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^\mu} \eta_{j_1 \dots j_l} + \omega_{i_1 \dots i_k} \frac{\partial \eta_{j_1 \dots j_l}}{\partial x^\mu} \right) \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{j_l} \\
&= \left(\frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^\mu}\, \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \right) \wedge \bigl(\eta_{j_1 \dots j_l}\, \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{j_l}\bigr) \\
&\quad + (-1)^k \bigl(\omega_{i_1 \dots i_k}\, \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}\bigr) \wedge \left(\frac{\partial \eta_{j_1 \dots j_l}}{\partial x^\mu}\, \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{j_l} \right) \\
&= \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{d}\eta
\end{aligned}
$$

■

4.4.3　引き戻し

二つの C^∞ 多様体 M, N と，その上の C^∞ 写像 $f\colon M \to N$ を与える．微分写像

$$f_*\colon T_pM \to T_{f(p)}N$$

が $f_* \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\left(T_pM, T_{f(p)}N\right)$ であることから，それの**引き戻し** f^* を，$\forall \alpha \in T^*_{f(p)}N, \forall X \in T_pM$ に対して次のように定義できる：

$$\begin{aligned} &f^*\colon T^*_{f(p)}N \to T^*_pM, \\ &f^*(\alpha)[X] := \alpha\big[f_*(X)\big] \end{aligned}$$

$\bigwedge^1\big(T^*_{f(p)}N\big) \cong T^*_{f(p)}N$ を思い出すと，f^* の定義域，値域は自然に点 p における k-形式へ拡張される．具体的には，$\forall \omega \in \bigwedge^k\big(T^*_{f(p)}N\big), \forall X_i \in T_pM$ に対して

$$\begin{aligned} &f^*\colon \textstyle\bigwedge^k\big(T^*_{f(p)}N\big) \to \bigwedge^k\left(T^*_pM\right), \\ &f^*(\omega)[X_1, \dots, X_k] := \omega\big[f_*(X_1), \dots, f_*(X_k)\big] \end{aligned}$$

と定義する．さらに，各点 $p \in M$ について和集合をとることで k-形式全体に作用するようになる：

$$f^*\colon \Omega^k(N) \to \Omega^k(M),$$

$$\boxed{f^*(\omega)(X_1, \dots, X_k) := \omega\big(f_*(X_1), \dots, f_*(X_k)\big)}$$

ただし $\forall \omega \in \Omega^k(N), \forall X_i \in \mathfrak{X}(M)$ である．$f^*(\omega) \in \Omega^k(M)$ を f による $\omega \in \Omega^k(N)$ の**引き戻し**と呼ぶ．

命題 4.2: 引き戻しの性質

f^* は線型写像であり，以下の性質をみたす：

(1) $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta)$
(2) $\mathrm{d}(f^*(\omega)) = f^*(\mathrm{d}\omega)$

特に，性質 (1) から $f^*\colon A^\bullet(M) \to A^\bullet(N)$ は環準同型写像である．

証明　$k + l$ 個のベクトル場 $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ を任意にとる．

(1) 命題 4.1-(2) より

$$\begin{aligned} &\big(f^*(\omega) \wedge f^*(\eta)\big)(X_1, \dots, X_{k+l}) \\ &= \frac{1}{k!\,l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \operatorname{sgn}\sigma (f^*\omega)(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)})\,(f^*\eta)(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+l)}) \\ &= \frac{1}{k!\,l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \operatorname{sgn}\sigma \omega\big(f_*(X_{\sigma(1)}), \dots, f_*(X_{\sigma(k)})\big)\,\eta\big(f_*(X_{\sigma(k+1)}), \dots, f_*(X_{\sigma(k+l)})\big) \\ &= (\omega \wedge \eta)\big(f_*(X_1), \dots, f_*(X_{k+l})\big) \\ &= f^*(\omega \wedge \eta)(X_1, \dots, X_{k+l}) \end{aligned}$$

(2) 微分写像の定義 (??) から，$f_*\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(N)$ のベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ への作用は

$$(f_*X)h = X(h \circ f) \circ f^{-1} \in C^\infty(N), \quad \forall h \in C^\infty(N)$$

である．故に Lie 括弧積との順序は

$$\begin{aligned}
[f_*X, f_*Y]h &= f_*X\big((f_*Y)h\big) - f_*Y\big((f_*X)h\big) \\
&= X\Big(\big((f_*Y)h\big) \circ f\Big) \circ f^{-1} - Y\Big(\big((f_*X)h\big) \circ f\Big) \circ f^{-1} \\
&= X\Big(\big(Y(h \circ f) \circ f^{-1}\big) \circ f\Big) \circ f^{-1} - Y\Big(\big(X(h \circ f) \circ f^{-1}\big) \circ f\Big) \circ f^{-1} \\
&= \Big(X\big(Y(h \circ f)\big) - Y\big(X(h \circ f)\big)\Big) \circ f^{-1} \\
&= [X, Y](h \circ f) \circ f^{-1} \\
&= (f_*[X, Y])h, \quad \forall h \in C^\infty(N)
\end{aligned}$$

となり，可換である．従って定理 4.5 より

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\big(f^*(\omega)\big)\,(X_1, \dots, X_{k+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i\big((f^*\omega)(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1})\big) \\
&\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} (f^*\omega)\big([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1}\big) \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i\Big(\omega\big(f_*(X_1), \dots, \widehat{f_*(X_i)}, \dots, f_*(X_{k+1})\big)\Big) \\
&\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega\big(f_*([X_i, X_j]), f_*(X_1), \dots, \widehat{f_*(X_i)}, \dots, \widehat{f_*(X_j)}, \dots, f_*(X_{k+1})\big) \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i\Big(\omega\big(f_*(X_1), \dots, \widehat{f_*(X_i)}, \dots, f_*(X_{k+1})\big)\Big) \\
&\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega\big([f_*(X_i), f_*(X_j)], f_*(X_1), \dots, \widehat{f_*(X_i)}, \dots, \widehat{f_*(X_j)}, \dots, f_*(X_{k+1})\big) \\
&= f^*(\mathrm{d}\omega)(X_1, \dots, X_{k+1}).
\end{aligned}$$

■

4.4.4 内部積と Lie 微分

定義 4.6: 内部積

$X \in \mathfrak{X}(M)$ を M 上の任意のベクトル場とする．このとき X による**内部積** (interior product)

$$\mathrm{i}_X\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$$

が次のように定義される：

$$\mathrm{i}_X(\omega)(X_1, \dots, X_{k-1}) \coloneqq \omega(X, X_1, \dots, X_{k-1}), \quad \forall \omega \in \Omega^k(M), \forall X_i \in \mathfrak{X}(M)$$

ただし，$k = 0$ のときは $\mathrm{i}_X = 0$ と定義する．

命題 4.3: 内部積の性質

$\forall \omega,\, \omega_1,\, \omega_2 \in \Omega^k(M),\ \forall f \in C^\infty(M)$ をとる.

(1) $\Omega^k(M)$ を $C^\infty(M)$ 加群と見たとき，$\mathrm{i}_X \in \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}\big(\Omega^k(M),\, \Omega^{k-1}(M)\big)$ である：

$$\mathrm{i}_X(\omega_1 + \omega_2) = \mathrm{i}_X(\omega_1) + \mathrm{i}_X(\omega_2), \quad \mathrm{i}_X(f\omega) = f\,\mathrm{i}_X(\omega).$$

(2) i_X は**反微分**である：

$$\mathrm{i}_X(\omega \wedge \eta) = \mathrm{i}_X(\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{i}_X(\eta)$$

証明　(1) 定義より明らか.

(2) 命題 4.1 より

$$\begin{aligned}
&\mathrm{i}_X(\omega \wedge \eta)(X_1,\, \dots,\, X_{k+l-1}) \\
&= \omega \wedge \eta(X,\, X_1,\, \dots,\, X_{k+l-1}) \\
&= \frac{1}{k!\,l!} \sum_{i=1}^{k} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l-1}} (-1)^{i+1} \operatorname{sgn}\sigma\, \omega(X_{\sigma(1)},\, \dots,\, \underbrace{X}_{i},\, \dots,\, X_{\sigma(k-1)})\, \eta(X_{\sigma(k)},\, \dots,\, X_{\sigma(k+l-1)}) \\
&\quad + (-1)^k \frac{1}{k!\,l!} \sum_{j=1}^{l} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l-1}} (-1)^{j+1} \operatorname{sgn}\sigma\, \omega(X_{\sigma(1)},\, \dots,\, X_{\sigma(k)})\, \eta(X_{\sigma(k+1)},\, \dots,\, \underbrace{X}_{j},\, \dots,\, X_{\sigma(k+l-1)}) \\
&= \big(\mathrm{i}_X(\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{i}_X(\eta)\big)(X_1,\, \dots,\, X_{k+l-1}).
\end{aligned}$$

■

定義 4.7: Lie 微分

$X \in \mathfrak{X}(M)$ を M 上の任意のベクトル場とする．このとき X による **Lie 微分** (Lie derivative) が

$$\mathcal{L}_X \colon \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$$

が次のように定義される：

$$\mathcal{L}_X(\omega)(X_1,\, \dots,\, X_k) \coloneqq X\big(\omega(X_1,\, \dots,\, X_k)\big) - \sum_{i=1}^{k} \omega(X_1,\, \dots,\, [X, X_i],\, \dots,\, X_k)$$

Lie 微分は定理 4.3 の条件を充している，i.e. $\mathcal{L}_X\omega$ は $C^\infty(M)$ 加群として多重線型かつ交代的であるから，微分形式と呼ばれうる.

定理 4.6: Cartan の公式

$X,\, Y \in \mathfrak{X}(M),\ \omega \in \Omega^k(M)$ とする．このとき，以下が成立する：

(1) $\mathrm{i}_{[X,Y]}(\omega) = [\mathcal{L}_X, \mathrm{i}_Y]\omega$

(2) $\mathcal{L}_X = \mathrm{i}_X\,\mathrm{d} + \mathrm{d}\,\mathrm{i}_X$

証明 任意の $k-1$ 個のベクトル場 $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ をとる．

(1) $k=0$ のときは $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$ なので，明らかである．

$k>0$ とする．Lie 微分の定義 4.7 より

$$
\begin{aligned}
&\big(\mathcal{L}_X \mathrm{i}_Y(\omega)\big)(X_1, \ldots X_{k-1}) \\
&= X\big((\mathrm{i}_Y(\omega))(X_1, \ldots, X_{k-1})\big) - \sum_{i=1}^{k-1} \big(\mathrm{i}_Y(\omega)\big)(X_1, \ldots, [X, X_i], \ldots, X_{k-1}) \\
&= X\big(\omega(Y, X_1, \ldots, X_{k-1})\big) - \sum_{i=1}^{k-1} \omega(Y, X_1, \ldots, [X, X_i], \ldots, X_{k-1})
\end{aligned}
$$

である．一方

$$
\begin{aligned}
&\big(\mathrm{i}_Y(\mathcal{L}_X\omega)\big)(X_1, \ldots X_{k-1}) \\
&= (\mathcal{L}_X\omega)(Y, X_1, \ldots X_{k-1}) \\
&= X\big(\omega(Y, X_1, \ldots, X_{k-1})\big) - \omega([X, Y], X_1, \ldots, X_{k-1}) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{k-1} \omega(Y, X_1, \ldots, [X, X_i], \ldots, X_{k-1})
\end{aligned}
$$

だから，

$$
\begin{aligned}
\big([\mathcal{L}_X, \mathrm{i}_Y]\omega\big)(X_1, \ldots X_{k-1}) &= \big(\mathcal{L}_X \mathrm{i}_Y(\omega)\big)(X_1, \ldots X_{k-1}) - \big(\mathrm{i}_Y(\mathcal{L}_X\omega)\big)(X_1, \ldots X_{k-1}) \\
&= \mathrm{i}_{[X,Y]}(\omega)(X_1, \ldots X_{k-1}).
\end{aligned}
$$

(2) $k=0$ のときは $\mathcal{L}_\omega = X\omega \quad (\omega \in C^\infty(M))$ より明らか．$k>0$ とする．定理 4.5 より

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{i}_X(\mathrm{d}\omega)(X_1, \ldots, X_k) \\
&= \mathrm{d}\omega\,(X, X_1, \ldots, X_k) \\
&= X\omega(X_1, \ldots, X_k) + \sum_{i=1}^{k} (-1)^i X_i\big(\omega(X, X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_k)\big) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \omega([X, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_k) \\
&\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X, X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_k).
\end{aligned}
$$

一方，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}\big(\mathrm{i}_X(\omega)\big)\,(X_1, \ldots, X_k) \\
&= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} X_i\big(\omega(X, X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_k)\big) \\
&\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega(X, [X_i, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_k)
\end{aligned}
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
&\bigl(\mathrm{i}_X\,\mathrm{d}+\mathrm{d}\,\mathrm{i}_X\bigr)\omega(X_1,\,\ldots,\,X_k)\\
&=X\omega(X_1,\,\ldots,\,X_k)+\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\omega([X,X_j],\,X_1,\,\ldots,\,\hat{X}_j,\,\ldots,\,X_k)\\
&=(\mathcal{L}_X\omega)(X_1,\,\ldots,\,X_k).
\end{aligned}
$$

■

Cartan の公式 4.6 より，Lie 微分の様々な性質が示される：

定理 4.7: Lie 微分の性質

$X,\,Y\in\mathfrak{X}(M),\ \omega\in\Omega^k(M)$ とする．このとき，以下が成立する：

(1) $\mathcal{L}_X(\omega\wedge\eta)=\mathcal{L}_X(\omega)\wedge\eta+\omega\wedge\mathcal{L}_X(\eta)$
(2) $\mathcal{L}_X(\mathrm{d}\omega)=\mathrm{d}\bigl(\mathcal{L}_X(\omega)\bigr)$
(3) $[\mathcal{L}_X,\mathcal{L}_Y]=\mathcal{L}_{[X,Y]}$

証明 (1) Cartan の公式 4.6-(2) および内部積と外微分が共に反微分であることを利用すると

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_X(\omega\wedge\eta)\\
&=\mathrm{i}_X\bigl(\mathrm{d}\omega\wedge\eta+(-1)^k\omega\wedge\mathrm{d}\eta\bigr)+\mathrm{d}\bigl(\mathrm{i}_X(\omega)\wedge\eta+(-1)^k\omega\wedge\mathrm{i}_X(\eta)\bigr)\\
&=\mathrm{i}_X(\mathrm{d}\omega)\wedge\eta+\cancel{(-1)^{k+1}\,\mathrm{d}\omega\wedge\mathrm{i}_X(\eta)}+\cancel{(-1)^k\mathrm{i}_X(\omega)\wedge\mathrm{d}\eta}+(-1)^{2k}\omega\wedge\mathrm{i}_X(\mathrm{d}\eta)\\
&\quad+\mathrm{d}\mathrm{i}_X(\omega)\wedge\eta+\cancel{(-1)^{k-1}\mathrm{i}_X(\omega)\wedge\mathrm{d}\eta}+\cancel{(-1)^k\,\mathrm{d}\omega\wedge\mathrm{i}_X(\eta)}+(-1)^{2k}\omega\wedge\mathrm{d}\mathrm{i}_X(\eta)\\
&=\mathcal{L}_X(\omega)\wedge\eta+\omega\wedge\mathcal{L}_X(\eta).
\end{aligned}
$$

(2) Cartan の公式 4.6-(2) から

$$
\mathcal{L}_X(\mathrm{d}\omega)=\cancel{\mathrm{i}_X(\mathrm{d}^2\omega)}+\mathrm{d}\,\mathrm{i}_X(\mathrm{d}\omega)=\mathrm{d}\,\mathrm{i}_X(\mathrm{d}\omega)+\mathrm{d}^2\mathrm{i}_X(\omega)=\mathrm{d}\bigl(\mathcal{L}_X(\omega)\bigr)\,.
$$

(3) k に関する数学的帰納法により示す．$k=0$ のとき $\Omega^0(M)=C^\infty(M)$ なので

$$
\mathcal{L}_{[X,Y]}\omega=[X,Y]\omega=X(Y\omega)-Y(X\omega)=[\mathcal{L}_X,\mathcal{L}_Y]\omega
$$

であり，成立している．

$k\geq 0$ について正しいと仮定する．$\forall\omega\in\Omega^{k+1}(M)$ を一つとる．$\forall Z\in\mathfrak{X}(M)$ に対して $\mathrm{i}_Z\omega\in\Omega^k(M)$ だから，帰納法の仮定より

$$
\mathcal{L}_{[X,Y]}\mathrm{i}_Z(\omega)=[\mathcal{L}_X,\mathcal{L}_Y]\mathrm{i}_Z(\omega) \tag{4.4.1}
$$

が成立する．一方 Cartan の公式 4.6-(1) より

$$
\mathcal{L}_{[X,Y]}\mathrm{i}_Z=\mathrm{i}_Z\mathcal{L}_{[X,Y]}+\mathrm{i}_{[[X,Y],Z]} \tag{4.4.2}
$$

である．さらに

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y \mathrm{i}_Z \\
&= \mathcal{L}_X \bigl(\mathrm{i}_Z \mathcal{L}_Y + \mathrm{i}_{[Y,Z]} \bigr) \\
&= \mathrm{i}_Z \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y + \mathrm{i}_{[X,Z]} \mathcal{L}_Y + \mathrm{i}_{[Y,Z]} \mathcal{L}_X + \mathrm{i}_{[X,[Y,Z]]}, \qquad (4.4.3) \\
&\mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X \mathrm{i}_Z \\
&= \mathrm{i}_Z \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X + \mathrm{i}_{[Y,Z]} \mathcal{L}_X + \mathrm{i}_{[X,Z]} \mathcal{L}_Y + \mathrm{i}_{[Y,[X,Z]]} \qquad (4.4.4)
\end{aligned}
$$

であることもわかる．式 (4.4.3)–(4.4.4) より

$$
\begin{aligned}
&[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] \mathrm{i}_Z \\
&= \mathrm{i}_Z [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] + \mathrm{i}_{[X,[Y,Z]]} - \mathrm{i}_{[Y,[X,Z]]}
\end{aligned}
$$

これを式 (4.4.2) から引いて Jacobi 恒等式 $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$ を用いると

$$
\bigl[\bigl(\mathcal{L}_{[X,Y]} - [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] \bigr), \mathrm{i}_Z \bigr] = 0.
$$

(4.4.1) に代入すると

$$
\mathrm{i}_Z \bigl(\mathcal{L}_{[X,Y]} - [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] \bigr) \omega = 0.
$$

Z は任意だったから $\bigl(\mathcal{L}_{[X,Y]} - [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] \bigr) \omega = 0$ を得て証明が完了する．

■

4.5　微分形式の積分

4.5.1　パラコンパクト・1 の分割

定義 4.8: 局所有限

X を位相空間とし，$\mathcal{U} = \{ U_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda}$ を X の被覆とする．$\forall x \in X$ において，x の近傍 V であって，V と交わる U_λ が有限個であるようなものが存在するとき，$\mathcal{U}$ は**局所有限** (locally finite) な被覆と呼ばれる．

X の**任意の開被覆**が局所有限な細分を持つとき，X は**パラコンパクト** (paracompact) であるという．この条件はコンパクトよりも弱い．次の定理は，全ての多様体（C^∞ 多様体だけでなく！）がパラコンパクトよりももう少し良い性質を持っていることを保証してくれる：

定理 4.8:

M を位相多様体とする．M の任意の開被覆に対して，その細分となる高々可算個の元からなる[a]局所有限な開被覆 $\mathcal{V} = \{ V_i \}_{i \in I}$ であって，$\overline{V_i}$ が全てコンパクトとなるものが存在する．
必要ならば，さらに強い条件を充たすようにできる．i.e. 開被覆を成す各 V_i 上にチャート (V_i, ψ_i) をとることができて，$\psi_i(V_i) = D(3)$ [b]かつ $\{ \psi_i^{-1}(D(1)) \}_{i \in I}$ が既に M の開被覆となっている．

[a] 添字集合 I の濃度 (cardinality) が $|I| \leq \aleph_0$.
[b] 半径 3 の開円板．記号の使い方は D.3 を参照．

位相空間 X の連続関数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ に対して，f の値が 0 にならない点全体の集合を含む最小の閉集合

$$\mathrm{supp} f \coloneqq \overline{\{ x \in X \mid f(x) \neq 0 \}}$$

を f の **台** (support) と呼ぶ.

定義 4.9: 1 の分割

M を C^∞ 多様体とする．M 上の高々可算個の C^∞ 関数の族 $\{ f_i \in C^\infty(M) \}_{i \in I}$ は,

(1) $\forall p \in M,\ \forall i \in I$ に対して $f_i(p) \geq 0$ であり，$\{ \mathrm{supp}\, f_i \}_{i \in I}$ は局所有限
(2) $\forall p \in M$ に対して $\sum_{i \in I} f_i(p) = 1$

の 2 条件を充たすとき，M 上の 1 **の分割** (partition of unity) という．
その上 $\{ \mathrm{supp}\, f_i \}_{i \in I}$ が M の開被覆 $\{U_\lambda\}$ の細分になっているとき，1 の分割 $\{ f_i \}_{i \in I}$ は開被覆 $\{U_\lambda\}$ に**従属する**という．

定理 4.9: 1 の分割の存在

M を C^∞ 多様体，$\{U_\lambda\}$ をその開被覆とする．このとき，$\{U_\lambda\}$ に従属する 1 の分割が存在する．

これらの存在定理のおかげで，安心してベクトル場や微分形式，微分形式の積分などをアトラス全体にわたって「貼り合わせる」ことができる．

4.5.2 多様体の向き付け

n 次元多様体 M をとる．多様体の各点 p における**向き** (orientation) は，接空間 T_pM の順序付き基底を考えることで定義される．

$e_1, \ldots, e_n$ と $f_1, \ldots, f_n$ を T_pM の二つの順序付き基底とする．これらは正則な線型変換 $T\colon T_pM \to T_pM$ で移り合うが，$\det T > 0$ であるときに $\{e_i\} \sim \{f_i\}$ であるとして，T_pM の順序付き基底全体の集合 $\mathcal{B}_p$ の上の同値関係 $\sim$ を定義する：

$$\sim \coloneqq \left\{ (\{e_i\}, \{f_i\}) \in \mathcal{B}_p \times \mathcal{B}_p \;\middle|\; \exists T = [T^i_j] \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})\ \text{s.t.}\ f_i = T^j_i e_j,\ \det T > 0 \right\}$$

$\sim$ が同値関係であることは明らかである．故に同値類 $[\{e_i\}] \in \mathcal{B}_p/\!\sim$ を考えることができ，これを点 p における**向き**と呼ぶ．

M が C^∞ 多様体の場合，T_pM における自然基底を代表元にもつ同値類 $[\{(\partial/\partial x^i)_p\}]$ を定義でき，これを**正の向き**と呼ぶ．M の座標変換に伴う基底の取り替えは Jacobi 行列で表現されるから，Jacobian の正負で向きを判定できる．

定義 4.10: 向き付け可能

C^∞ 多様体 M が**向き付け可能** (orientable) であるとは，M のアトラス $\mathcal{S} = \{(U_\lambda,\, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ であって，全ての座標変換 $f_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ の Jacobian が $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ の全ての点で正になるようなものが存在することを言う．

4.5.3 n 次元多様体上の n 形式の積分

n 次元 C^∞ 多様体 M が向き付け可能としよう．

M のチャート $(U,\, \varphi) = (U;\ x^i)$ をとる．n-形式 $\omega \in \Omega^k(M)$ が

$$\omega := h(p)\, \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$$

と座標表示されているとする．別のチャート $(V,\, \psi) = (V;\ y^i)$ をとったときの $U \cap V \neq \emptyset$ 上の ω は

$$\begin{aligned}
\omega &= h(p) \frac{\partial x^1}{\partial y^{j_1}}\, \mathrm{d}y^{j_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial x^n}{\partial y^{j_n}}\, \mathrm{d}y^{j_n} \\
&= h(p)\, \epsilon^{j_1 \cdots j_n} \frac{\partial x^1}{\partial y^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^n}{\partial y^{j_n}}\, \mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^n \\
&= h(p)\ \det\left(\frac{\partial x^k}{\partial y^l}\right) \mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^n
\end{aligned}$$

である．よって座標変換として Jacobian が正のものだけを考えれば，$\displaystyle\int \omega$ は既知の重積分の変数変換公式と整合的である．ここで<u>M が向き付け可能であると言う仮定が効いてくる</u>のである．

以上の考察から，n-形式 ω のチャート $(U_i;\, x^\mu)$ 上の積分を

$$\int_{U_i} \omega := \int_{\varphi(U_i)} h\bigl(\varphi_i^{-1}(x)\bigr)\, \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n$$

として定義できる．積分範囲を M に拡張するには 1 の分割を使う：

定義 4.11: n-形式の積分

$\omega \in \Omega^n(M)$ は台がコンパクトであるとする．また，M の座標近傍からなる開被覆 $\{U_i\}$ と，それに従属する 1 の分割 $\{f_i\}$ をとる．このとき ω の M 上の積分を次のように定義する：

$$\int_M \omega := \sum_i \int_{U_i} f_i \omega$$

命題 4.4:

定義 4.11 は座標近傍の開被覆 $\{U_i\}$ やそれに従属する 1 の分割 $\{f_i\}$ の取り方によらない．

4.6　ベクトル空間に値をとる微分形式

k-形式 $\omega \in \Omega^k(M)$ は $\forall p \in M$ において多重線型写像

$$\omega_p \coloneqq T_pM \times \cdots \times T_pM \to \mathbb{K}$$

を対応させ，それが p に関して C^∞ 級につながっているものであった．ここで，値域 $\mathbb{K}$ を一般の $\mathbb{K}$-ベクトル空間 V に置き換えてみる：

$$\omega_p \coloneqq T_pM \times \cdots \times T_pM \to V$$

このようなもの全体の集合を $\Omega^k(M;\, V)$ と書くことにする．V の基底を $\{\,\hat{e}_i\,\}_{1\leq i\leq r}$ とおくと

$$\omega(X_1,\, \cdots,\, X_k) = \sum_{i=1}^{r} \omega_i(X_1,\, \cdots,\, X_k)\, \hat{e}_i, \quad \omega_i \in \Omega^k(M)$$

と展開できる．$\hat{e}_i$ は $A^\bullet(M)$ の演算と無関係である．

4.6.1　外微分

定義 4.5, 4.4 による外微分を $\{\,\hat{e}_i\,\}_{1\leq i\leq r}$ による展開係数に適用するだけである：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d} : \Omega^k(M;\, V) \to \Omega^{k+1}(M;\, V),\\
&\mathrm{d}\omega \coloneqq \sum_{i=1}^{r} \mathrm{d}\omega_i\, \hat{e}_i
\end{aligned}$$

4.6.2　外積

外積をとった後の値域はテンソル積 $V \otimes W$ である：

$$\begin{aligned}
&\wedge : \Omega^k(M;\, V) \times \Omega^l(M;\, W) \to \Omega^{k+l}(M;\, V \otimes W),\\
&(\omega \wedge \eta)(X_1,\, \ldots,\, X_{k+l}) \coloneqq \frac{1}{k!\, l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \operatorname{sgn}\sigma\, \omega\bigl(X_{\sigma(1)},\, \ldots,\, X_{\sigma(k)}\bigr) \otimes \eta\bigl(X_{\sigma(k+1)},\, \ldots,\, X_{\sigma(k+l)}\bigr)
\end{aligned}$$

予め $\omega = \sum_{i=1}^{r} \omega_i \hat{e}_i$, $\eta = \sum_{i=1}^{s} \eta_i \hat{f}_i$ と展開しておくと

$$\omega \wedge \eta = \sum_{i,\,j} \omega_i \wedge \eta_j\, \hat{e}_i \otimes \hat{f}_j$$

と書ける．外微分は基底 $\{\,\hat{e}_i \otimes \hat{f}_j\,\}$ には作用しないので，命題 4.5-(2) はそのまま成り立つ：

$$\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) = \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{d}\eta$$

4.6.3　括弧積

双線型写像 $[\ ,\ ]\colon V \times V \to V$ が Lie 代数の公理を充してしているとする．このとき

$$
\begin{aligned}
&[\ ,\ ]\colon \Omega^k(M;\, V) \times \Omega^l(M;\, V) \xrightarrow{\wedge} \Omega^{k+l}(M;\, V \otimes V) \xrightarrow{[\ ,\ ]} \Omega^{k+l}(M;\, V), \\
&[\omega, \eta] \coloneqq \sum_{i,\, j} \omega_i \wedge \eta_j [\hat{e}_i, \hat{e}_j]
\end{aligned}
$$

と定義する．命題 4.1-(1), 4.5-(2) から

$$
\boxed{[\eta, \omega]} = \sum_{i,\, j} \eta_j \wedge \omega_i [\hat{e}_j, \hat{e}_i] = \sum_{i,\, j} (-1)^{kl} \omega_i \wedge \omega_j \cdot -[\hat{e}_i, \hat{e}_j] = \boxed{(-1)^{kl+1} [\omega, \eta]}
$$

$$
\boxed{\mathrm{d}[\omega, \eta]} = \sum_{i,\, j} \mathrm{d}\bigl(\omega_i \wedge \eta_j\bigr)\, [\hat{e}_i, \hat{e}_j] = \boxed{[\mathrm{d}\omega\,, \eta] + (-1)^k [\omega, \mathrm{d}\eta]}
$$

がわかる．

第 5 章

Hodge 作用素と Laplacian

5.1 内積と随伴

5.1.1 内積

公理 5.1: 内積の公理

実数体 $\mathbb{R}$ 上の n 次元ベクトル空間 V に対して，$g\colon V \times V \to \mathbb{R}$ は

(I1) g は双線型写像である

(I2) $g(v,\, w) = g(w,\, v)$

(I3) $g(v,\, v) \geq 0$ かつ等号成立は $v = 0$ のときのみ．

を充たすとき，（正定値）**内積** (inner product) と呼ばれる．

双線型写像

$$\langle\ ,\ \rangle\colon V^* \times V \to \mathbb{R},\ (\omega,\, v) \mapsto \omega[v]$$

を**双対内積**と呼ぶことにする．双対内積を使って，与えられた $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V の上に内積 g を構成することを考える．

双対ベクトル空間 V^* もまたベクトル空間なので，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,\, V^*)$ を考えることができる．ここで，線型同型写像 $\flat \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,\, V^*)$ を一つとろう．$\dim V = \dim V^* = n$ なので $\flat \in \mathrm{GL}(n,\, \mathbb{R})$ でもある．このとき，写像

$$g\colon V \times V \to \mathbb{R},\ (v,\, w) \mapsto \langle \flat(v),\, w\rangle \tag{5.1.1}$$

は明らかに双線型写像なので，内積の公理 **(I1)** を充たす．この g が内積の公理 **(I2)**, **(I3)** を充たすようにするにはどのような条件が必要だろうか．

ここで $V,\, V^*$ の基底 $\{\, e_i \,\},\ \{\, e^i \,\}$ をとり，$v = v^i e_i,\ w = w^i e_i$ と成分表示する．テンソル積の構成に従うと $g \in T^0_2(V)$ であるから，g の成分表示は $g_{ij} e^i \otimes e^j$ である．このとき $g(v,\, w)$ を計算すると

$$g(v,\, w) = g_{ij}(e^i \otimes e^j)[v^k e_k,\, w^l e_l] = g_{ij} e^i [v^k e_k] e^j [w^l e_l] = g_{ij}\big(v^k e^i[e_k]\big)\big(w^l e^j[e_l]\big) = g_{ij} v^i w^j. \tag{5.1.2}$$

が成り立つ．

- 公理 **(I2)** を充たすには，$g_{ij}w^i v^j = g_{ij}w^j v^i$ でなくてはならない．したがって $g_{ij} = g_{ji}$ である．
- 公理 **(I3)** を充たすには，2 次形式 $g_{ij}v^i v^j$ が正定値でなくてはならない．i.e. 行列 $[g_{ij}]_{1\leq i,\, j\leq n}$ は正定値である．

逆に内積 g が与えられると，そこから同型写像 $\flat \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, V^*)$ の表現行列が自然に定まる[*1]．$\flat(v) = h_i e^i \in V^*$ とおくと式 (5.1.2) において

$$
\begin{aligned}
g(v,\, w) &= \bigl(g_{ij}v^i\bigr)w^j \\
&= \langle \flat(v),\, w\rangle = h_j w^j
\end{aligned}
$$

であるから，

$$
h_i = g_{ij}v^j
$$

となる．i.e. $\flat$ の表現行列は $(\, g_{ij}\,)$ である．

以上の考察から，$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V に対して以下の事実が分かった：

> $\flat \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,\, V^*)$ であってその表現行列 $[g_{ij}]$ が正定値対称行列であるような $\flat$ が存在する
> $\iff$ （正定値）内積を定義できる

5.1.2 随伴

内積 g の定まったベクトル空間 V のことを**計量線型空間**と呼び，$(V,\, g)$ と書く．

定義 5.1: 随伴写像

二つの計量線型空間 $(V,\, g_V)$，$(W,\, g_W)$ および線型写像 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W)$ を与える．線型写像 $\tilde{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W,\, V)$ であって

$$
g_W\bigl(w,\, f(v)\bigr) = g_V\bigl(v,\, \tilde{f}(w)\bigr), \quad \forall v \in V,\, \forall w \in W
$$

が成り立つものを f の**随伴写像** (adjoint mapping) と呼ぶ．

5.2 Riemann 計量

[*1] $\flat$ の逆写像 $\flat^{-1}$ の存在は，内積の公理 **(I3)** により保証されている．

定義 5.2: Riemann 多様体

C^∞ 多様体 M を与える．各点 $p \in M$ における接空間 T_pM に正定値内積

$$g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

が与えられ，$g = \{ g_p \mid p \in M \}$ が $(0, 2)$ 型テンソル場を作るとき，g を M 上の **Riemann 計量** (Riemannian matric) という．また，Riemann 計量の与えられた多様体を **Riemann 多様体** (Riemannian manifold) と呼ぶ．

!

g_p が内積の公理 5.1-**(I3)** の代わりに

(I3') $\forall u \in T_pM$ に対して $g_p(u, v) = 0 \implies v = 0$

を充たす（**非退化**; non-degenerate）とき，g を**擬 Riemann 計量** (pseudo-Riemannian metric) と呼ぶ．

チャート $(U; x^\mu)$ に対する g_p の座標表示は

$$g_p = g_{\mu\nu}(p)(\mathrm{d}x^\mu)_p \otimes (\mathrm{d}x^\nu)_p$$

と書かれる．内積の公理 5.1 より，$g_{\mu\nu}(p)$ は正定値対称行列である．

一般相対性理論で使う計量テンソルの定義との対応を見ておく：

$\mathrm{d}x^\mu \in \mathbb{R}$ を微小変位（点 p における 1-形式 $(\mathrm{d}x^i)_p$ ではない）として $\mathrm{d}x^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p \in T_pM$ のノルムをインターバル $\mathrm{d}s$ と見做すことで，

$$\boxed{\mathrm{d}s^2} = g_p\left[\mathrm{d}x^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p, \mathrm{d}x^\nu \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)_p\right] = \mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu\, g_p\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)_p\right] = \boxed{g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu}$$

を再現する．

行列 $(\,g_{\mu\nu}\,)$ は対称行列なので，その固有値は全て実数である．g が Riemann 計量ならば全ての固有値は正であり，擬 Riemann 計量ならば負のものが混ざることがある．

定義 5.3: 計量の指数，Lorentz 計量

行列 $(\,g_{\mu\nu}\,)$ の固有値のうち正のものが i 個，負のものが j 個であるとき，対 (i, j) を計量の**指数**という．$j = 1$ ならば **Lorentz 計量**と呼ばれる．

5.3 k-形式の内積

ベクトル空間 V に内積 g が定義されると，その双対ベクトル空間にも自然に内積 G が定義される．また，同型 $\bigwedge^1(V^*) \cong V^*$ を考えることで，V^* 上の内積 G を使って $\bigwedge^k(V^*)$ 上の内積を定義できる．$\bigwedge^k(V^*)$ 上に内積が定義されると，$\bigwedge^k(V^*)$ の正規直交基底を考えることができる．

5.3.1 計量に誘導される同型写像

!

5.1.1から，内積 g_p の成分表示 $g_{\mu\nu}(p)$ は同型写像 $\flat \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_pM,\, T_p^*M)$ を誘導する：

$$\omega_\mu = g_{\mu\nu}v^\nu, \quad \forall v = v^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p \in T_pM \tag{5.3.1}$$

逆写像 $\flat^{-1}$ は行列 $(\, g_{\mu\nu}(p)\,)$ の逆行列 $(\, g^{\mu\nu}\,)$ によって表現される．$\forall \omega = \omega_\mu (\mathrm{d}x^\mu)_p \in T_p^*M$ に対して

$$v^\mu = g^{\mu\nu}\omega_\nu \tag{5.3.2}$$

と作用する．式 (5.3.1), (5.3.2) を合わせて添字の上げ下げと呼んだ．

上の注釈を代数的に議論する．以下の議論は接空間に限らず一般の体 $\mathbb{K}$ 上の計量線型空間に対して成り立つので，$V = T_pM$ と書く．

まず，線型写像 $\flat\colon V \to V^*$ を次のように構成する：

$$\flat(v)[w] \coloneqq g(v,\, w), \quad \forall v,\, w \in V \tag{5.3.3}$$

補題 5.1:

上で定義した $\flat$ は線型写像である．

__証明__ $\forall v,\, v_1,\, v_2 \in T_pM,\, \forall\lambda \in \mathbb{R}$ をとる．双対空間の演算規則により

$$\begin{aligned}
&\flat(v_1+v_2)[w] = g_p(v_1+v_2,\, w) = g_p(v_1,\, w) + g_p(v_2,\, w) = \flat(v_1)[w] + \flat(v_2)[w] = \big(\flat(v_1)+\flat(v_2)\big)[w] \\
&\flat(\lambda v)[w] = g_p(\lambda v,\, w) = \lambda g_p(v,\, w) = \lambda\flat(v)[w].
\end{aligned}$$

■

補題 5.2:

$\flat\colon T_pM \to T_p^*M$ は同型写像である．

__証明__ 内積の公理 **(I3)** と補題 5.1 より，$\forall v_1,\, v_2 \in T_pM$ に対して

$$\begin{aligned}
v_1 - v_2 \neq 0 \quad &\Longrightarrow \quad \big(\flat(v_1)-\flat(v_2)\big)[v_1-v_2] = \big(\flat(v_1-v_2)\big)[v_1-v_2] = g_p(v_1-v_2, v_1-v_2) > 0 \\
&\Longrightarrow \quad \flat(v_1)-\flat(v_2) \neq 0
\end{aligned}$$

i.e. $\flat$ は単射である．$\dim V = \dim V^*$ だから示された． ■

5.3.2 共役計量に誘導される同型写像

次に，共役計量 $g^{\mu\nu}$ による「添字の上げ」を議論する．V の上に内積 g が定まっているとき，V^* にも自然に内積 G が定まる：

$$G\colon V^* \times V^* \to \mathbb{K},\ (\omega,\, \eta) \mapsto g(\flat^{-1}(\omega),\, \flat^{-1}(\eta)) = \langle \omega,\, \flat^{-1}(\eta)\rangle \tag{5.3.4}$$

この定義の仕方は式 (5.1.1) に対応している．$G \in T^2_0(V)$ であるから，V の基底 $\{\, e_\mu \,\}$ を使って

$$G = G^{\mu\nu} e_\mu \otimes e_\nu$$

と書ける．$G^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$（$[\, g_{\mu\nu} \,]$ の逆行列）であることを確認する．

式 (5.3.3) に倣って線型写像 $\natural \colon V^* \to V^{**}$ を

$$\natural(\omega)[\eta] \coloneqq G(\omega,\, \eta), \quad \forall \omega,\, \eta \in V^*$$

と定義すると，$\natural$ は同型写像になる．$\natural$ の $\omega = \omega_\mu e^\mu \in V^*$ に対する作用を成分表示すると次のようになる：

$$\natural(\omega)[\eta] = G^{\mu\nu} \omega[e_\mu] \eta[e_\nu] = G^{\mu\nu} \omega_\mu \eta_\nu \tag{5.3.5}$$

ここで，命題 3.8 より $\dim V < \infty$ のとき

$$\begin{aligned} \varphi \colon V &\longrightarrow V^{**}, \\ v &\mapsto \bigl(\omega \longmapsto \varphi(v)\bigr) \end{aligned}$$

は線型同型写像を成す．よって $\sharp \coloneqq \varphi^{-1} \circ \natural$ として線型写像 $\sharp \colon V^* \to V$ を定義すると，$\sharp$ は同型写像になる．式 (5.3.5) より

$$(\varphi \circ \sharp)(\omega)[\eta] = G^{\mu\nu} \omega_\mu \eta_\nu = \omega_\mu G^{\kappa\nu} \eta_\nu e^\mu[e_\kappa] = \omega\bigl[(G^{\kappa\nu} \eta_\nu) e_\kappa\bigr] = \varphi\bigl((G^{\kappa\nu} \eta_\nu) e_\kappa\bigr)[\omega]$$

であるから，

$$(\sharp \circ \flat)(v) = (G^{\kappa\nu} g_{\nu\lambda} v^\lambda) e_\kappa$$

がわかる．定義 (5.3.4) より $\sharp \circ \flat = \mathrm{id}_V$ であるから，$G^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ とわかる．

ベクトル空間 V 上の内積

$$g = g_{\mu\nu} e^\mu \otimes e^\nu$$

が与えられたとき，双対ベクトル空間 V^* の内積 G が

$$G = g^{\mu\nu} e_\mu \otimes e_\nu$$

として自然に定まる．このとき，計量 g, G から線型同型写像

$$\begin{aligned} &\flat \colon V \xrightarrow{\cong} V^*, \\ &\flat(v)[w] = g(v,\, w). \\ &\sharp \colon V^* \xrightarrow{\cong} V, \\ &\sharp(\omega)[\eta] = G(\omega,\, \eta) \end{aligned}$$

がそれぞれ自然に定まり，$\sharp \circ \flat = \mathrm{id}_V$ を充たす，i.e. $\sharp = \flat^{-1}$ である．

5.3.3 k-形式の内積

前節で述べた双対ベクトル空間 V^* 上の内積 G によって，k-形式同士の内積を定義することができる．

まず，命題 4.3 から $\bigwedge^1(V^*) \cong V^*$ なので，**内積 $G\colon V^* \times V^* \to \mathbb{K}$ を $G\colon \bigwedge^1(V^*) \times \bigwedge^1(V^*) \to \mathbb{K}$ と見做すことができる**．これを 1-形式同士の内積として定義し，$\forall \omega,\, \eta \in \bigwedge^1(V^*)$ に対して $\langle \omega,\, \eta \rangle \coloneqq G(\omega,\, \eta)$ と略記する．

> **!** **双対内積** $\langle\ ,\ \rangle\colon V^* \times V \to \mathbb{R},\ (\omega,\, v) \mapsto \omega[v]$ との混同に注意せよ！！！ 以降，文脈上紛らわしいときは k-形式の内積を $\langle\ ,\ \rangle_k$ と書くことにする．

定義 5.4: k-形式の内積

k-形式同士の内積 $\langle\ ,\ \rangle\colon \bigwedge^k(V^*) \times \bigwedge^k(V^*) \to \mathbb{K}$ を $\alpha_1 \wedge \cdots \alpha_k,\ \beta_1 \wedge \cdots \beta_k \in \bigwedge^k(V^*)$ の形をした元に対して

$$\langle \alpha_1 \wedge \cdots \alpha_k,\, \beta_1 \wedge \cdots \beta_k \rangle \coloneqq \det\bigl(\langle \alpha_\mu,\, \beta_\nu \rangle \bigr)$$

と定義する．$\bigwedge^k(V^*)$ 全体に対しては，これを線型に拡張する．違う型同士の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ は 0 と定義する．

命題 5.1: $\bigwedge^k(V^*)$ の正規直交基底

k-形式全体の集合 $\bigwedge^k(V^*)$ の上に定義 5.4 によって内積を定義する．
$\{\, e_i \,\}$ を V の正規直交基底，$\{\, \theta^i \,\}$ をその双対基底とする．i.e. $\theta^i[e_j] = \delta^i_j$．このとき，

$$\left\{\, \theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_k} \,\middle|\, 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n \,\right\}$$

は正規直交基底である．

<u>**証明**</u> まず，

$$\langle \theta^i,\, \theta^j \rangle = G(\theta^i,\, \theta^j) = (g^{\mu\nu} e_\mu \otimes e_\nu)[\theta^i,\, \theta^j] = \mathring{g}^{ij}$$

なので $\{\, \theta^i \,\}$ は $\bigwedge^k(V^*)$ の正規直交基底である．ゆえに

$$\langle \theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_k},\, \theta^{j_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{j_k} \rangle = \det\bigl(\langle \theta^{i_\mu},\, \theta^{i_\nu} \rangle \bigr) = \det\bigl(\mathring{g}^{i_\mu j_\nu} \bigr)$$

であり，添字の集合 $\{\, i_\mu \,\},\, \{\, j_\nu \,\}$ が集合として一致していなければ行列式の行/列で全て 0 のものが少なくとも 1 つ存在して 0 になる．集合として一致している場合は，添字の大小が指定されているので

$$\begin{aligned} &\langle \theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_k},\, \theta^{j_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{j_k} \rangle \\ &= \begin{vmatrix} \mathring{g}^{i_1 i_1} & & & \\ & \mathring{g}^{i_2 i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathring{g}^{i_k i_k} \end{vmatrix} \\ &= \prod_{\mu=1}^{k} \mathring{g}^{i_\mu i_\mu} = \pm 1 \end{aligned}$$

となる. ■

ここで定義した k-形式の内積は，多様体 M の各点 p における局所的なものである．$\langle \omega_p,\, \eta_p \rangle$ が定義されたので，関数 $\langle \omega,\, \eta \rangle \colon M \to \mathbb{K},\ p \mapsto \langle \omega_p,\, \eta_p \rangle$ を考えることができる．以下，$\langle \omega,\, \eta \rangle$ と書いたらこのような意味を持つとする．

5.4 Hodge $\star$

n 次元 C^∞ 多様体 M の各点 p において $\dim \bigwedge^k (T_p^* M) = \dim \bigwedge^{n-k} (T_p^* M)$ であった．従ってこれらは抽象ベクトル空間としては同型である．M に Riemann 計量が入っており，かつ向き付けられているならば，同型写像を自然に定めることができる．それが Hodge の $\star$ 作用素である．

定義 5.5: $\star$

C^∞ 多様体 M は指数 $(i,\, j)$ の計量を持つとする．$\theta^1,\, \dots,\, \theta^k,\, \theta^{k+1},\, \dots,\, \theta^n \in T_p^* M$ を $T_p^* M$ の任意の正の向きの正規直交基底とする．このとき，各点 $p \in M$ において線型写像 $\star$ を

$$\star(\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^k) \coloneqq \left(\prod_{a=1}^{k} \langle \theta^a,\, \theta^a \rangle \right) \theta^{k+1} \wedge \cdots \wedge \theta^n$$

と定義する．特に $k = 0,\, n$ のときにそれぞれ

$$\star 1 \coloneqq \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n, \quad \star(\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n) \coloneqq (-1)^j$$

である[a]．$\star 1 \in \Omega^n(M)$ を M の**体積要素** (volume form) と呼び，vol_M と書く．
$\forall p \in M$ における上述の線型写像をあわせることで **Hodge の作用素**

$$\star \colon \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$$

が定義される．

[a] 計量が正定値のとき，i.e. M が Riemann 多様体のときは $j = 0$ で，青字で示した因子は常に 1 である．

定義 5.5 に従うと $\star(\theta^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{\mu_k})$ は，集合 $\{1,\,\dots,\,n\}$ の部分集合 $\{\mu_1,\,\dots,\,\mu_k\}$ の補集合を小さい方から順に並べた添字の集合 $\{\nu_1,\,\dots,\,\nu_{n-k}\mid 1\le\nu_1<\cdots<\nu_{n-k}\le n\}$ を得て

$$\star(\theta^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{\mu_k})=\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1 & \dots & k & k+1 & \dots & n\\ \mu_1 & \dots & \mu_k & \nu_1 & \dots & \nu_{n-k}\end{pmatrix}\left(\prod_{a=1}^{k}\langle\theta^{\mu_a},\,\theta^{\mu_a}\rangle\right)\theta^{\nu_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{\nu_{n-k}}$$

として計算される．これは，Levi-Civita 記号と Einstein の規約を利用した

$$\frac{1}{(n-k)!}\,\langle\theta^{\mu_1},\,\theta^{\nu_1}\rangle\cdots\langle\theta^{\mu_k},\,\theta^{\nu_k}\rangle\,\epsilon_{\nu_1\dots\nu_k\nu_{k+1}\dots\nu_n}\,\theta^{\nu_{k+1}}\wedge\cdots\wedge\theta^{\nu_n}$$

と等しい．いちいちこのように書くのは大変なので，Levi-Civita 記号の添字の上げを $\mathring{g}^{\mu\nu}:=\langle\theta^{\mu},\,\theta^{\nu}\rangle$ によって行い次のように略記する：

$$\epsilon^{\mu_1\dots\mu_k}{}_{\nu_{k+1}\dots\nu_n}:=\mathring{g}^{\mu_1\nu_1}\cdots\mathring{g}^{\mu_k\nu_k}\epsilon_{\nu_1\dots\nu_k\nu_{k+1}\dots\nu_n}$$

$\forall\omega\in\Omega^k(M)$ に対して $\star\omega\in\Omega^{n-k}(M)$ が C^∞ 級であることを確認する．そのために，正規直交基底によって $\star\omega$ を成分表示する：

正規直交基底の構成

M の正のチャート $(U;\,x^\mu)$ をとる．$\forall p\in M$ において，自然基底

$$X_\mu=\frac{\partial}{\partial x^\mu}\in\mathfrak{X}(M)$$

に Gram-Schmidt の直交化法を施す：

$$e_\mu:=\frac{X_\mu-\sum_{\nu=1}^{\mu-1}g(X_\mu,\,e_\nu)e_\nu}{\left\|X_\mu-\sum_{\nu=1}^{\mu-1}g(X_\mu,\,e_\nu)e_\nu\right\|}$$

$\{e_\mu\}$ は U 上の C^∞ ベクトル場であり，$\forall p\in U$ において接空間 T_pM の正規直交基底をなす．これを U 上の**正規直交標構** (orthogonal frame) と呼ぶ．

双対基底の構成

$\{\theta^\mu\}$ を $\{e_\mu\}$ の双対基底とする．命題 5.1 より，これらは $\forall p\in M$ において T_p^*M の正の正規直交基底をなす．

局所表示の対応

$\omega\in\Omega^k(M)$ が U 上で

$$\omega=\omega_{\mu_1\dots\mu_k}\theta^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{\mu_k}$$

の局所表示を持つとする．このとき定義 5.5 から，各点 $p\in U$ において

$$\begin{aligned}\star\omega_p&=\omega_{\mu_1\dots\mu_k}(p)\star(\theta^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{\mu_k})\\&=\frac{1}{(n-k)!}\omega_{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}(p)\,\epsilon^{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}{}_{\nu_{k+1}\nu_{k+2}\dots\nu_n}\,\theta^{\nu_{k+1}}\wedge\cdots\wedge\theta^{\nu_n}\end{aligned}$$

である[*2]．$\omega_{\mu_1\dots\mu_k}(p)$ が C^∞ 関数なので $\star\omega$ は C^∞ 級である．

[*2] Einstein の規約により添字 $\nu_{k+1},\,\nu_{k+2},\,\dots,\,\nu_n$ に関しても和をとることになるので，添字 $\mu_1,\,\mu_2,\,\dots,\,\mu_k$ の組み合わせ一つにつき $(n-k)!$ 個の項が重複する．

命題 5.2: 体積要素の表示

M のチャート $(U;\ x^\mu)$ に対して以下が成立する：

$$\mathrm{vol}_M = \sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|}\,\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$$

証明 別の正のチャート $(V;\ y^\mu)$ をとる．このとき

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n &= \frac{\partial x^1}{\partial y^{\nu_1}}\,\mathrm{d}y^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial x^n}{\partial y^{\nu_n}}\,\mathrm{d}y^{\nu_n} \\ &= \epsilon^{\nu_1 \dots \nu_n} \frac{\partial x^1}{\partial y^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^n}{\partial y^{\nu_n}}\,\mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^n \\ &= \det\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}\right)\mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^n \end{aligned} \tag{5.4.1}$$

が成立する．一方，g の y^μ に関する局所表示を ${g'}_{\mu\nu}$ とおくと

$$g_p = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu = g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\kappa}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\lambda}\,\mathrm{d}y^\kappa \otimes \mathrm{d}y^\lambda = {g'}_{\kappa\lambda}\,\mathrm{d}y^\kappa\,\mathrm{d}y^\lambda$$

であるから

$${g'}_{\kappa\lambda} = g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\kappa}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\lambda}$$

である．両辺を行列と見做して行列式をとることで

$$\det({g'}_{\kappa\lambda}) = \det(g_{\mu\nu})\left(\det\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}\right)\right)^2$$

とわかる．ゆえに式 (5.4.1) から

$$\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n = \sqrt{|\det({g'}_{\kappa\lambda})|\ /\ |\det(g_{\mu\nu})|}\,\mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^n$$

である．ここで $(V;\, y^\mu)$ として正規直交標構 $\{\,\theta^a\,\}$ に対応するチャートをとってくれば[*3]，$|\det({g'}_{\kappa\lambda})| = 1$ であるので

$$\sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|}\,\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n = \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n = \star 1 = \mathrm{vol}_M$$

■

[*3] 座標近傍は U，座標変換が直交行列である．

命題 5.3: $\star$ の性質

多様体 M が指数 $(i,\,j)$ の計量を持つとする．$\forall f,\,g \in C^\infty(M)$ と $\forall \omega,\,\eta \in \Omega^k(M)$ に対して以下が成立する：

(1) $\star(f\omega + g\eta) = f \star \omega + g \star \eta$
(2) $\star\star\,\omega = (-1)^{j+k(n-k)}\omega$
(3) $\boxed{\omega \wedge \star\eta} = \eta \wedge \star\omega = \boxed{\langle \omega,\,\eta \rangle \mathrm{vol}_M}$
(4) $\star(\omega \wedge \star\eta) = \star(\eta \wedge \star\omega) = \langle \omega,\,\eta \rangle$
(5) $\langle \star\omega,\,\star\eta \rangle = (-1)^j \langle \omega,\,\eta \rangle$

ただし，k-形式の内積 $\langle\;,\;\rangle$ は定義 5.4 によるものとする．

証明 M 上の各点 p において示せば良い．

(1) $\bigwedge^k(V^*)$ は $C^\infty(M)$-加群なので，Hodge の作用素の定義から明かである．
(2) $\{\,\theta^i\,\}$ を T_p^*M の正規直交標構とする．命題 5.1 より，$\omega_p = \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^k$ の場合に示せば十分である．

$$\star\omega_p = \left(\prod_{a=1}^{k} \langle \theta^a,\,\theta^a \rangle\right) \theta^{k+1} \wedge \cdots \wedge \theta^n$$

だから，

$$\begin{aligned}
\star\star\,\omega_p &= \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \dots & n-k & n-k+1 & \dots & n \\ k+1 & \dots & n & 1 & \dots & k \end{pmatrix} \left(\prod_{a=1}^{k} \langle \theta^a,\,\theta^a \rangle\right) \left(\prod_{b=k+1}^{n} \langle \theta^b,\,\theta^b \rangle\right) \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^k \\
&= \left(\prod_{a=1}^{n} \langle \theta^a,\,\theta^a \rangle\right) (-1)^{k(n-k)}\omega_p \\
&= (-1)^{j+k(n-k)}\omega_p
\end{aligned}$$

(3) 線形性から $\omega_p = \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^k$, $\eta_p = \theta^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{\mu_k}$ の場合に示せば十分である．

$$\star(\theta^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{\mu_k}) = \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \dots & k & k+1 & \dots & n \\ \mu_1 & \dots & \mu_k & \nu_1 & \dots & \nu_{n-k} \end{pmatrix} \left(\prod_{a=1}^{k} \langle \theta^{\mu_a},\,\theta^{\mu_a} \rangle\right) \theta^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{\nu_{n-k}}$$

であるから，$\omega_p \wedge \star\eta_p \neq 0$ なのは $\{1,\,\dots,\,k\} = \{\mu_1,\,\dots,\,\mu_k\}$ の場合のみである．このとき

$$\omega_p \wedge \star\eta_p = \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \dots & k \\ \mu_1 & \dots & \mu_k \end{pmatrix} \left(\prod_{a=1}^{k} \langle \theta^a,\,\theta^a \rangle\right) \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n$$

である．一方，$\langle \omega_p,\,\eta_p \rangle \neq 0$ となるのは $\{1,\,\dots,\,k\} = \{\mu_1,\,\dots,\,\mu_k\}$ の場合のみであり，

$$\langle \omega_p,\,\eta_p \rangle = \det\bigl(\langle \theta^i,\,\theta^{\mu_j} \rangle\bigr) = \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \dots & k \\ \mu_1 & \dots & \mu_k \end{pmatrix} \left(\prod_{a=1}^{k} \langle \theta^a,\,\theta^a \rangle\right)$$

となる．同様の議論により $\omega \wedge \star\eta = \eta \wedge \star\omega = \langle \omega,\,\eta \rangle \mathrm{vol}_M$ とわかる．

(4) $\star \mathrm{vol}_M = 1$ と (3) より従う．

(5) (2), (4) より

$$\langle \star\omega,\, \star\eta \rangle = \star(\star\omega \wedge \star\star\eta) = (-1)^{j+k(n-k)} \star (\star\omega \wedge \eta) = (-1)^j \star (\eta \wedge \star\omega) = (-1)^j \langle \omega,\, \eta \rangle$$

■

!

性質 (3) を $\star$ の定義とすることもできる．その場合，「性質 (3) $\Longrightarrow$ 定義 5.5」は次のようにして示される：

証明 M の各点 p において示せば良い．$\{\, \theta^i \,\}$ を正規直交標構として $\omega_p = \theta^1 \wedge \cdots \theta^k$ とおくと，性質 (3) より

$$\begin{aligned}\omega_p \wedge \star\omega_p &= (\theta^1 \wedge \cdots \theta^k) \wedge \star(\theta^1 \wedge \cdots \theta^k) \\ &= \det\bigl(\langle \theta^\mu,\, \theta^\nu \rangle_k \bigr)\, \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n \\ &= \left(\prod_{a=1}^{k} \langle \theta^a,\, \theta^a \rangle \right) \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n .\end{aligned}$$

したがって

$$\star(\theta^1 \wedge \cdots \theta^k) = \left(\prod_{a=1}^{k} \langle \theta^a,\, \theta^a \rangle \right) \theta^{k+1} \wedge \cdots \wedge \theta^n$$

■

5.4.1 双対基底への作用

命題 5.2 と命題 5.3-(3) を用いると

$$\begin{aligned}&(\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^k) \wedge \star(\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^k) \\ &= \det\bigl(\langle \mathrm{d}x^\mu ,\, \mathrm{d}x^\nu \rangle \bigr)_{1 \le \mu,\, \nu \le k} \sqrt{\bigl|\det\bigl(g_{\kappa\lambda}\bigr)\bigr|}\, \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \\ &= \det\bigl(g^{\mu\nu}\bigr)_{1 \le \mu,\, \nu \le k} \sqrt{\bigl|\det\bigl(g_{\kappa\lambda}\bigr)\bigr|}\, \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n\end{aligned}$$

なので，$g \coloneqq \det\bigl(g_{\kappa\lambda}\bigr)$ とおいて

$$\begin{aligned}&\star\, (\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^k) = \det\bigl(g^{\mu\nu}\bigr)_{1 \le \mu,\, \nu \le k} \sqrt{|g|}\; \mathrm{d}x^{k+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \\ &= \sqrt{|g|}\, \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_k} g^{\mu_1 1} \cdots g^{\mu_k k}\; \mathrm{d}x^{k+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \\ &= \frac{\sqrt{|g|}}{(n-k)!}\, \epsilon^{1 \dots k}{}_{\nu_{k+1} \dots \nu_n}\; \mathrm{d}x^{\nu_{k+1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\nu_n} .\end{aligned}$$

ただし 2 番目の等号において，添字 $\{\nu_{k+1},\, \dots \nu_n\}$ に関する和をとるようにしたことで重複する項が $(n-k)!$ 個出現するため，$(n-k)!$ で全体を割っている．$\{1,\, \dots,\, k\}$ の順番を入れ替えることで

$$\boxed{\star(\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_k}) = \frac{\sqrt{|g|}}{(n-k)!}\, \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_{k+1} \dots \nu_n}\; \mathrm{d}x^{\nu_{k+1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\nu_n}}$$

である．

5.5 ラプラシアンと調和形式

この節では，M は指数 (i, j) の計量 g を持った向き付けられた多様体で，コンパクトかつ境界のないものとする．コンパクト性は $\Omega^k(M)$ に内積 5.6 を入れて計量線型空間にする場合にのみ必要となる．

定義 5.6: k-形式の内積その 2

k-形式全体が作る無限次元ベクトル空間 $\Omega^k(M)$ 上の非退化内積 $(\ ,\ ) : \Omega^k(M) \times \Omega^k(M) \to \mathbb{R}$ を次のように定義する：

$$(\omega,\, \eta) := \int_M \langle \omega,\, \eta \rangle_k \,\mathrm{vol}_M$$

特に M が Riemann 多様体ならば内積 $(\ ,\ )$ は正定値内積である．

証明 非退化（正定値）内積の公理 5.1-**(I1), (I2), (I3')**（**(I3)**）を充たすことを確認すれば良い． ■

命題 5.3-(3) より

$$(\omega,\, \eta) = \int_M \omega \wedge \star\eta = \int_M \eta \wedge \star\omega$$

とも書ける．

5.5.1 随伴外微分作用素

定義 5.7: 随伴外微分作用素

外微分作用素

$$\mathrm{d} : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$$

に対して，**随伴外微分作用素**

$$\delta \colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$$

を次のように定義する：

$$\delta := (-1)^k \star^{-1} \circ\, \mathrm{d} \circ \star = (-1)^{j+n(k+1)+1} \star \circ\, \mathrm{d} \circ \star$$

命題 5.4: 随伴性

$C^\infty(M)$-加群 $\Omega^k(M)$ に定義 5.6 の内積 $(\ ,\ )$ を入れて計量線型空間にしたとき，δ は d の随伴作用素（定義 5.1）である：

$$(\mathrm{d}\omega\,,\, \eta) = (\omega,\, \delta\eta)\,, \quad \forall \omega \in \Omega^k(M),\, \forall \eta \in \Omega^{k+1}(M)$$

<u>**証明**</u>

$$\mathrm{d}\omega\wedge\star\eta=\mathrm{d}(\omega\wedge\star\eta)-(-1)^k\omega\wedge\mathrm{d}(\star\eta)=\mathrm{d}\omega\wedge\star\eta+\omega\wedge\star(\delta\eta)$$

両辺を M 上で積分して Stokes の定理を用いると，M に境界がないことから

$$(\mathrm{d}\omega\,,\,\eta)=\int_M\mathrm{d}\omega\wedge\star\eta+\int_M\omega\wedge\star\delta\eta=(\omega,\,\delta\eta)\,.$$

■

命題 5.5:

(1) $\star\delta=(-1)^k\,\mathrm{d}\star$

(2) $\delta\star=(-1)^{k+1}\star\mathrm{d}$

(3) $\delta\circ\delta=0$

<u>**証明**</u> (1) $\star\delta=\star\circ(-1)^k\star^{-1}\circ\mathrm{d}\circ\star=(-1)^k\,\mathrm{d}\star$.

(2) $\delta\star=(-1)^{j+n(n-k+1)+1}\circ\mathrm{d}\circ\star\circ\star=(-1)^{j+n(n-k+1)+1}(-1)^{j+(n-k)k}\star\circ\mathrm{d}\circ\star^{-1}\circ\star=(-1)^{k+1}\star\mathrm{d}$.

(3) $\delta\circ\delta=(-1)^{k-1}\star^{-1}\circ\mathrm{d}\circ\star\circ(-1)^k\star^{-1}\circ\mathrm{d}\circ\star=-\star^{-1}\circ\mathrm{d}\circ\mathrm{d}\circ\star=0$.

■

5.5.2 Laplacian

定義 5.8: Laplacian

線型作用素

$$\Delta:=\mathrm{d}\delta+\delta\,\mathrm{d}:\Omega^k(M)\to\Omega^k(M)$$

は**ラプラシアン** (Laplacian) もしくは **Laplace-Beltrami 作用素** (Laplace-Beltrami operator) と呼ばれる.

また,

$$\Delta\omega=0$$

となる微分形式 $\omega\in\Omega^*(M)$ を**調和形式** (harmonic form) と呼ぶ.

命題 5.6: Laplacian の性質

(1) $\star\Delta=\Delta\star$. i.e. ω が調和形式 $\Longrightarrow$ $\star\omega$ も調和形式

(2) $\forall\omega,\,\eta\in\Omega^k(M)$ に対して $(\Delta\omega,\,\eta)=(\omega,\,\Delta\eta)$. i.e. Δ はエルミート作用素である.

(3) M が Riemann 多様体ならば，$\Delta\omega=0\iff\mathrm{d}\omega=0,\,\delta\omega=0$

<u>**証明**</u> (1) 命題 5.5-(1), (2) より

$$\star\Delta=(-1)^{k+1}\delta\star\delta+(-1)^k\,\mathrm{d}\star\mathrm{d}=\delta\,\mathrm{d}\star+\mathrm{d}\,\delta\star=\Delta\star\,.$$

(2) 命題 5.4 と内積の対称性より

$$\begin{aligned}(\Delta\omega,\,\eta) &= (\mathrm{d}\,\delta\omega,\,\eta) + (\eta,\,\delta\,\mathrm{d}\,\omega)\\ &= (\delta\omega,\,\delta\eta) + (\mathrm{d}\eta\,,\,\mathrm{d}\,\omega)\\ &= (\mathrm{d}\,\delta\eta,\,\omega) + (\omega,\,\delta\,\mathrm{d}\,\eta)\\ &= (\omega,\,\Delta\eta)\,.\end{aligned} \tag{5.5.1}$$

(3) $(\Longleftarrow)$ は明らか.

$(\Longrightarrow)$ M が Riemann 多様体であるという仮定から，内積 (,) は正定値である．式 (5.5.1) より

$$(\Delta\omega,\,\omega) = (\delta\omega,\,\delta\omega) + (\mathrm{d}\omega\,,\,\mathrm{d}\omega)$$

であるから，内積の正定値性から $\Delta\omega = 0$ ならば $\delta\omega = \mathrm{d}\omega = 0$ である.

■

5.5.3 Hodge の定理

この節では，M は向き付けられたコンパクト Riemann 多様体で境界がないものとする．
M 上の調和 k-形式全体の集合を

$$\mathrm{Harm}^k(M) := \bigl\{\omega \in \Omega^k(M) \bigm| \Delta\omega = 0\bigr\}$$

と書く．命題 5.6-(3) により調和形式は必ず閉形式なので

$$\mathrm{Harm}^k(M) \subset \mathrm{Ker}\bigl(\mathrm{d} : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)\bigr)$$

であり，後述の de Rham コホモロジー類 $H^k_{\mathrm{DR}}(M)$ への写像が自然に誘導される：

$$\pi\colon\ \mathrm{Harm}^k(M) \to H^k_{\mathrm{DR}}(M),\ \omega \mapsto [\omega]$$

$\omega \in \mathrm{Harm}^k(M)$ が完全形式である，i.e. $\exists\eta \in \Omega^{k-1},\ \omega = \mathrm{d}\eta$ ならば

$$(\omega,\,\omega) = (\mathrm{d}\eta\,,\,\omega) = (\eta,\,\delta\omega) = 0. \quad\Longrightarrow\quad \omega = 0.$$

であることから，π は単射であるとわかる．実は，次の事実が知られている：

定理 5.1: Hodge の定理

自然な写像 $\pi\colon\ \mathrm{Harm}^k(M) \to H^k_{\mathrm{DR}}(M)$ は同型写像である．i.e. 向き付けられたコンパクト Riemann 多様体の任意の de Rham コホモロジー類は，ただ一つの調和形式で代表される．

定理 5.1 の証明には，次の定理が有用である：

定理 5.2: Hodge 分解

向き付けられたコンパクト Riemann 多様体の任意の k-形式は，調和形式，完全形式，双対完全形式の和として一意的に分解される：

$$\Omega^k(M) = \mathrm{Harm}^k(M) \oplus \mathrm{d}\Omega^{k-1}(M) \oplus \delta\Omega^{k+1}(M)$$

第 6 章

ホモロジー・de Rham コホモロジーの紹介

6.1　多様体のホモロジー

X を位相空間とする．X の l 次元ホモロジー群 $H_l(X)$ とは，X 中の「l 次元のサイクル」と呼ばれる量が本質的に何個あるかを示すものである．ホモロジーの定義は何通りか知られているが，一般に l 単体と呼ばれる単位に分割し，組み合わせ的な構造を利用して定義する．本章ではごく部分的に多様体上のホモロジーと de Rham コホモロジーを紹介する．詳細は [7, 第 3 章] や [4, Chapter 17, 18] を参照されたし．

6.1.1　単体・三角形分割

手始めに，まず l 単体を定義しよう．

定義 6.1: l-単体

$\mathbb{R}^N$ の $l+1$ 個の点 $v_0, v_1, \ldots, v_l$ は，l 個のベクトル $v_i - v_0$ $(i = 1, \ldots l)$ が線型独立のとき，**一般の位置にある**という．
一般の位置にある $l+1$ 個の点の集合 $\sigma = \{v_0, \ldots, v_l\}$ に対して，それらの点を含む最小の凸集合

$$|\sigma| := \left\{ a_0 v_0 + \cdots + a_l v_l \;\middle|\; a_i \geq 0,\, a_0 + \cdots + a_l = 1 \right\}$$

を **l-単体** (l-simplex) と呼ぶ．σ の空でない部分集合 $\tau \subset \sigma$ に対して，単体 $|\tau|$ のことを $|\sigma|$ の**辺** (face) と呼ぶ．

定義 6.2: 単体複体

$\mathbb{R}^N$ の中の単体の集合 K は, 次の条件を充たすとき (Euclid) **単体複体** (Euclidean simplicial complex) と呼ぶ：

(1) $|\sigma| \in K$ ならば $|\sigma|$ の任意の辺はまた K に属する．
(2) 二つの単体 $|\sigma|, |\tau| \in K$ が空でない共通部分を持つならば $|\sigma| \cap |\tau|$ は $|\sigma|$ と $|\tau|$ の共通の辺である．
(3) $\forall |\sigma| \in K$ の任意の点 $x \in |\sigma|$ に対して，x 開近傍 U を適切に取れば U と交わる K の単体は有限個しか存在しないようにできる．

定義 6.3: 多面体・三角形分割

単体複体 K に対して，集合

$$|K| \coloneqq \bigcup_{|\sigma| \in K} |\sigma|$$

を定める．$|K| \subset \mathbb{R}^N$ を**多面体** (polyhedron) と呼ぶ．
位相空間 X に対して適当な単体複体 K を選び，同相写像 $t\colon |K| \xrightarrow{\approx} X$ が与えられたとき，同相写像 t を X の**三角形分割** (triangulation) と呼ぶ．

6.1.2 ホモロジー群

定義 6.4: 単体の向き

l 単体 $|\sigma|$ の頂点 $\{v_0, \dots, v_l\}$ の順序付き添字 $I = (i_0, \dots, i_l)$ 全体の集合 $\mathcal{I}$ に以下の同値関係を定める：

$$\sim \coloneqq \left\{ (I, J) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I} \,\middle|\, \exists \tau \in \mathfrak{S}_{l+1} \text{ s.t. } \textbf{偶置換},\ I = \tau J \right\}$$

このとき，$I \in \mathcal{I}$ の $\sim$ による同値類 $[I]$ のことを単体 $|\sigma|$ の**向き** (orientation) と呼ぶ．
単体 $|\sigma|$ に向きが指定されているとき，σ の同値類を**向き付けられた単体**と呼び，$\langle \sigma \rangle$ と表す．頂点が $I = (i_0, \dots, i_l)$ によって向き付けられているとき，対応する向き付けられた単体を $\langle v_{i_0} \cdots v_{i_l} \rangle$ と書く．

定義 6.5: l-chain

単体複体 $K = \{|\sigma|_i\}$ の各単体に向きを指定し，それぞれ $\langle \sigma_i \rangle$ とする．K の l-単体 $\langle \sigma_i \rangle_l$ 全体によって生成される自由加群を K の l **次元鎖群** $C_l(K)$ と呼び，$C_l(K)$ の元を **l-チェイン** と呼ぶ．

$\forall c \in C_l(K)$ は形式和として

$$c = \sum_{i \in I_l} c_i \langle \sigma_i \rangle_l, \quad c_i \in \mathbb{Z}$$

と書かれる．群 $C_l(K)$ の二項演算 $+$，単位元 0，逆元 $-c$ はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
c + c' &\coloneqq \sum_i (c_i + c'_i) \langle \sigma_i \rangle_l \,, \\
0 &\coloneqq \sum_i 0 \langle \sigma_i \rangle_l \,, \\
-c &\coloneqq \sum_i (-c_i) \langle \sigma_i \rangle_l
\end{aligned}
$$

である．ただし，$\langle \sigma_i \rangle_l$ と反対に向き付けられた l 単体は $(-1)\langle \sigma_i \rangle_l \in C_l(K)$ と同一視する．このとき，自然に

$$
C_l(K) \cong \bigoplus_{I_l} \mathbb{Z}
$$

である．

定義 6.6: 境界作用素

準同型写像

$$
\partial_l \colon C_l(K) \to C_{l-1}(K)
$$

を向き付けられた各 l-単体上

$$
\partial_l \langle v_0 v_1 \cdots v_l \rangle \coloneqq \sum_{i=0}^{l} (-1)^i \langle v_0 \cdots \hat{v}_i \cdots v_l \rangle
$$

と定義する．ただし，$\hat{v}_i$ は v_i を省くことを意味する．

命題 6.1: 境界の境界

$\partial_l \circ \partial_{l+1} = 0$

証明 ∂_l は $C_l(K)$ 上の線型作用素なので生成元 $\sigma \coloneqq \langle v_0 v_1 \cdots v_{l+1} \rangle \in C_{l+1}(K)$ に対して示せば十分．$l = 0$ のときは自明なので $l > 0$ とする．

$$
\begin{aligned}
&\partial_l \circ \partial_{l+1} \sigma \\
&= \sum_{i=0}^{l+1} (-1)^i \partial_l \langle v_0 \cdots \hat{v}_i \cdots v_{l+1} \rangle \\
&= \sum_{i=0}^{l+1} (-1)^i \left(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \langle v_0 \cdots \hat{v}_j \cdots \hat{v}_i \cdots v_{l+1} \rangle + \sum_{j=i+1}^{l+1} (-1)^{j-1} \langle v_0 \cdots \hat{v}_i \cdots \hat{v}_j \cdots v_{l+1} \rangle \right) \\
&= \sum_{i>j} (-1)^{i+j} \langle v_0 \cdots \hat{v}_j \cdots \hat{v}_i \cdots v_{l+1} \rangle - \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \langle v_0 \cdots \hat{v}_i \cdots \hat{v}_j \cdots v_{l+1} \rangle = 0.
\end{aligned}
$$

■

命題 6.1 より，

$$Z_l(K) \coloneqq \left\{ c \in C_l(K) \,\middle|\, \partial_l c = 0 \right\} = \operatorname{Ker} \partial_l$$
$$B_l(K) \coloneqq \left\{ \partial_{l+1} c \in C_l(K) \,\middle|\, c \in C_{l+1}(K) \right\} = \operatorname{Im} \partial_{l+1}$$

とおくと

$$B_l(K) \subset Z_l(K)$$

となる．

! $Z_l(K)$ を l-**輪体群**もしくは**サイクル**，$B_l(K)$ を l-**境界輪体群**もしくは**バウンダリー**と呼ぶ．

定義 6.7: ホモロジー群

上で定義した $Z_l(K)$, $B_l(K)$ に対して，部分群の剰余類を考えることにより

$$H_l(K) \coloneqq Z_l(K)/B_l(K)$$

は商群を作る．これを K の l **次元ホモロジー群**と呼ぶ．

定理 6.1: ホモロジー群は位相不変量

ホモロジー群は位相不変量である．i.e. 位相空間 X, Y が互いに同相であるとし，それぞれの三角形分割 $f\colon |K| \xrightarrow{\approx} X$, $g\colon |L| \xrightarrow{\approx} Y$ を与える．このとき

$$H_l(K) \cong H_l(L) \quad (l = 0, 1, \dots)$$

が成り立つ．

6.2 de Rham コホモロジー

6.2.1 特異ホモロジー

定義 6.8: 標準 k-単体

$\mathbb{R}^k$ の部分集合

$$\Delta^k \coloneqq \left\{ (x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^k \,\middle|\, x^i \geq 0,\ x^1 + \cdots + x^k \leq 1 \right\}$$

は**標準 k-単体** (standard k-simplex) と呼ばれる．

定義 6.9: C^∞ 特異 k-単体

C^∞ 多様体 M に対して，任意の C^∞ 写像

$$\sigma\colon \Delta^k \to X$$

を X の C^∞ **特異 k 単体** (singular k-simplex) と呼ぶ．M の C^∞ 特異 k 単体全体によって生成される自由加群を $S_k(X)$ と書き，その元を M の C^∞ **特異 k-チェインと呼ぶ.**

定義 6.10: 境界作用素

$i = 0, \dots, k$ に対して連続写像 $\varepsilon_i\colon \Delta^{k-1} \to \Delta^k$ を

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0(x_1, \dots, x_{k-1}) &:= \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} x_i,\ x_1, \dots, x_{k-1}\right), \\
\varepsilon_i(x_1, \dots, x_{k-1}) &:= (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, x_{k-1})
\end{aligned}$$

と定義する．このとき，**境界作用素**

$$\partial\colon S_k(M) \to S_{k-1}(M)$$

を次のように定義する：

$$\partial\sigma := \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \sigma \circ \varepsilon_i$$

サイクル $Z_k(M)$ および k-境界輪体群 $B_k(M)$ を

$$\begin{aligned}
Z_k(M) &:= \operatorname{Ker} \partial_k \\
B_k(M) &:= \operatorname{Im} \partial_{k+1}
\end{aligned}$$

と定めると，相変わらず $\partial \circ \partial = 0$ であるから $B_k(M) \subset Z_k(M)$ が従う．故に部分群の剰余類を考えることができる：

定義 6.11: 特異ホモロジー群

$B_k(M)$, $Z_k(M)$ に対して，商群

$$H_k(M) := Z_k(M)/B_k(M)$$

を M の**特異ホモロジー群**と呼ぶ.

6.2.2 微分形式のチェイン積分と Stokes の定理

M を C^∞ 多様体，$S_\bullet(M) := \{S_k(M), \partial\}$ を M の C^∞ 特異チェイン複体とする．
M の特異 k 単体

$$\sigma\colon \Delta^k \to M$$

は C^∞ 写像であるから，k-形式 $\omega \in \Omega^k(M)$ の引き戻し（命題 4.2 付近を参照）$\sigma^*\omega \in \Omega^k(\Delta^k)$ が定義される．

定義 6.12: 特異 k 単体上の積分

$\omega \in \Omega^k(M)$ の σ 上の積分を

$$\int_\sigma \omega := \int_{\Delta^k} \sigma^*\omega$$

により定義する．右辺はただの k-中積分である．
一般の C^∞ 特異 k-チェイン $c \in S_k(M)$ が $c = \sum_i a_i s_i$ と表示されているときは

$$\int_c \omega := \sum_i a_i \int_{\sigma_i} \omega$$

と定義する．

定理 6.2: チェイン上の Stokes の定理

C^∞ 多様体 M の特異 k-チェイン $c \in S_k(M)$ と $k-1$-形式 $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$ に対し，以下の等式が成立する：

$$\int_c \mathrm{d}\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

6.3 de Rham の定理

6.3.1 de Rham コホモロジー

定義 6.13: 閉形式・完全形式

k-形式 $\omega \in \Omega^k(M)$ は

- $\mathrm{d}\omega = 0$ のとき**閉形式** (closed form)
- $\exists \eta \in \Omega^{k-1}(M)$, $\omega = \mathrm{d}\eta$ のとき**完全形式** (exact form)

と呼ばれる．

M 上の閉じた k -形式全体を $Z^k(M)$ ，完全な k-形式全体を $B^k(M)$ と書く：

$$Z^k(M) := \mathrm{Ker}\bigl(\mathrm{d} : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)\bigr),$$
$$B^k(M) := \mathrm{Im}\bigl(\mathrm{d} : \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M)\bigr).$$

$\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$ なので，$B^k(M) \subset Z^k(M)$ である．

定義 6.14: de Rham コホモロジー群

$\Omega^k(M)$ の部分ベクトル空間 $B^k(M)$, $Z^k(M)$ に対して，商空間

$$H^k_{\mathrm{DR}}(M) \coloneqq Z^k(M)/B^k(M)$$

は M の k 次 **de Rham コホモロジー群**と呼ばれる．
k -形式 $\omega \in \Omega^k(M)$ に対し，それを代表元に持つ剰余類 $[\omega] \in H^k_{\mathrm{DR}}(M)$ を ω の表す **de Rham コホモロジー類**と呼ぶ．

$$H^\bullet_{\mathrm{DR}}(M) \coloneqq \bigoplus_{k=0}^{n} H^k_{\mathrm{DR}}(M)$$

を M の **de Rham コホモロジー群**と呼ぶ．

$x \in H^k_{\mathrm{DR}}(M)$, $y \in H^l_{\mathrm{DR}}(M)$ が $\omega \in \Omega^k(M)$, $\eta \in \Omega^l(M)$ によって $x = [\omega]$, $y = [\eta]$ と書かれるとき，$H^\bullet_{\mathrm{DR}}(M)$ 上の積 $\cdot : H^\bullet_{\mathrm{DR}}(M) \times H^\bullet_{\mathrm{DR}}(M) \to H^\bullet_{\mathrm{DR}}(M)$ を以下のように定義する：

$$x \cdot y \coloneqq [\omega \wedge \eta] \in H^{k+l}_{\mathrm{DR}}(M)$$

このとき二項演算 $\cdot$ は well-defined である，i.e. ω, η の取り方によらない．
上で定義した積構造の入った $\bigl(H^\bullet_{\mathrm{DR}}(M), \cdot\bigr)$ のことを M の **de Rham コホモロジー代数**と呼ぶ．

6.3.2 de Rham の定理

コホモロジー群とホモロジー群は，Stokes の定理によって双対性を持つ．
C^∞ 多様体 M および M の C^∞ 特異 r-チェイン $S_k(M)$ を与える．$\forall c \in S_k(M)$, $\forall \omega \in \Omega^k(M)$ $(1 \le k \le n)$ をとる．ここで双対内積 (duality pairing) を

$$\langle\ ,\ \rangle \colon S_k(M) \times \Omega^k(M) \to \mathbb{R},\ (c, \omega) \mapsto \int_c \omega$$

と定義する．このとき $\langle c, \omega\rangle$ は双線型であり，$\langle\ , \omega\rangle \colon S_k(M) \to \mathbb{R}$, $\langle c,\ \rangle \colon \Omega^k(M) \to \mathbb{R}$ はどちらも線型写像である：

$$\begin{aligned}
\langle c_1 + c_2, \omega\rangle &= \int_{c_1+c_2} \omega = \int_{c_1} \omega + \int_{c_2} \omega = \langle c_1, \omega\rangle + \langle c_2, \omega\rangle \\
\langle c, \omega_1 + \omega_2\rangle &= \int_c (\omega_1 + \omega_2) = \int_c \omega_1 + \int_c \omega_2 = \langle c, \omega_1\rangle + \langle c, \omega_2\rangle
\end{aligned}$$

Stokes の定理は

$$\langle c, \mathrm{d}\omega\rangle = \langle \partial c, \omega\rangle$$

と書かれ，この意味で d と ∂ は互いに随伴写像である．
duality pairing $\langle\ ,\ \rangle$ は内積 $\Lambda \colon H_k(M) \times H^k_{\mathrm{DR}}(M) \to \mathbb{R}$ を誘導する．それは以下のように定義される：

$$\Lambda\bigl([c], [\omega]\bigr) \coloneqq \langle c, \mathrm{d}\omega\rangle$$

定義 6.3.2 は well-defined である．

定理 6.3: Poincaré 双対

M がコンパクトな C^∞ 多様体ならば $H_k(M)$, $H^k_{\mathrm{DR}}(M)$ はともに有限次元である．さらに写像

$$\Lambda\colon H_k(M) \times H^k_{\mathrm{DR}}(M) \to \mathbb{R}$$

は双線型かつ非退化である．i.e. $H_r(M) = \left(H^k_{\mathrm{DR}}(M)\right)^*$（双対ベクトル空間）である．

補題 6.1: Poincaré の補題

$\mathbb{R}^n$ の de Rham コホモロジーは自明である：

$$H^k_{\mathrm{DR}}(\mathbb{R}^n) = H^k_{\mathrm{DR}}(\text{一点 } p_0 \in \mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & : k = 0 \\ 0 & : k > 0 \end{cases}$$

i.e. $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R})$ を任意の閉形式とすると，ある $k-1$ 形式 η が存在して $\omega = \mathrm{d}\eta$ を充たす.

第 7 章

Riemann 幾何学の紹介

7.1　多脚場

計量 g の表現行列 $[\,g_{\mu\nu}\,]$ は多様体 M の各点 $p \in M$ において対称行列なので，直交行列を用いて対角化することができる．さらにスケール変換を施すことで，指数 $(i,\,j)$ の計量テンソルは

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \mathring{g}_{ab}\, e^a{}_\mu e^b{}_\nu \\ \mathring{g}_{ab} &= \mathrm{diag}\big(\underbrace{-1,\,\dots,\,-1}_{i},\,\underbrace{1,\,\dots,\,1}_{j}\big) \end{aligned} \tag{7.1.1}$$

と分解される．$e^a{}_\mu$ は**多脚場** (vierbein) と呼ばれる．この分解は双対基底 $\{\,(\mathrm{d}x^\mu)_p\,\}$ の取り替えに対応する：

$$g_p = g_{\mu\nu} (\mathrm{d}x^\mu)_p \otimes (\mathrm{d}x^\nu)_p = \mathring{g}_{ab} \big(e^a{}_\mu (\mathrm{d}x^\mu)_p\big) \otimes \big(e^b{}_\nu (\mathrm{d}x^\nu)_p\big)$$

こうして得られた $T^*_p M$ の新しい基底を $\{\,\hat{\theta}^a\,\}$ と書こう．

$\{\,\hat{\theta}^a\,\}$ に双対的な $T_p M$ の基底 $\{\,\hat{e}_b\,\}$ を $\hat{\theta}^a[\hat{e}_b] = \delta^a_b$ を充たす接ベクトルとして定義する．自然基底からの基底の取り替えを $\hat{e}_a = E_a{}^\nu \left(\dfrac{\partial}{\partial x^\nu}\right)_p$ とおくと

$$\boxed{\delta^a_b} = \hat{\theta}^a[\hat{e}_b] = e^a{}_\mu (\mathrm{d}x^\mu)_p \left[E_b{}^\nu \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)_p \right] = e^a{}_\mu E_b{}^\nu (\mathrm{d}x^\mu)_p \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)_p \right] = e^a{}_\mu E_b{}^\nu \delta^\mu_\nu = \boxed{e^a{}_\mu E_b{}^\mu}$$

であることがわかる．i.e. $[\,e^a{}_\mu\,]$ と $[\,E_b{}^\nu\,]$ は互いに逆行列である[*1]．この事実と $[\,g_{\mu\nu}\,]$ の逆行列 $[\,g^{\mu\nu}\,]$ を使うと，式 (7.1.1) から

$$E_a{}^\mu = g^{\mu\nu} \mathring{g}_{ab} e^b{}_\nu$$

であることがわかる．さらに，共役計量に対しては

$$g^{\mu\nu} = \mathring{g}^{ab} E_a{}^\mu E_b{}^\nu$$

が成立する．

[*1] 逆行列の存在は，$\det(e^a{}_\mu) = \sqrt{(-1)^i \det(g_{\mu\nu})} \neq 0$ であることによって保証されている．

$\{\hat{e}_a\}$ は正規直交系をなす：

$$g_p[\hat{e}_a,\, \hat{e}_b] = E_a{}^\mu E_b{}^\nu g_p\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu},\, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right] = g_{\mu\nu}E_a{}^\mu E_b{}^\nu = \mathring{g}_{ab}.$$

この意味で $\{\,\hat{e}_a\,\}$ と $\{\,\hat{\theta}^a\,\}$ を**正規直交標構** (orthonormal frame) と呼ぶ.

7.2 接続形式・曲率形式

7.2.1 接束の接続・曲率

ベクトル束 $\pi\colon E \to M$ に対して，$\pi \circ \xi = \mathrm{id}_M$ となるような C^∞ 写像 $\xi\colon M \to E$ を**切断** (section) と呼ぶ．ベクトル束の切断全体の集合を $\Gamma(E)$ と書くと，$\Gamma(E)$ は $C^\infty(M)$-加群となる．

開集合 $U \subset M$ 上の n 個の切断の組 $\{\,\xi_i \mid \xi_i\colon U \to E\,\}$ であって，$\forall p \in U$ において $\{\,\xi_i(p)\,\}$ が E_p の基底となっているものを U 上の**フレーム** (frame) と呼ぶ.

定義 7.1: 接続

C^∞ 多様体 M のベクトル束 $\pi\colon E \to M$ の**接続** (connection) とは，$C^\infty(M)$-双線型写像

$$\nabla\colon \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$$

であって，$\forall f \in C^\infty(M),\ \forall X \in \mathfrak{X}(M),\ \forall \xi \in \Gamma(E)$ に対して

(1) $\nabla_{fX}\xi = f\nabla_X\xi$
(2) $\nabla_X(f\xi) = f\nabla_X\xi + (Xf)\xi$

を充たすもののことを言う．$\nabla_X\xi$ を ξ の X による**共変微分** (covariant differential) と呼ぶ.

定義 7.2: 曲率

∇ をベクトル束 $\pi\colon E \to M$ 上の接続とする．このとき，$\forall X,\, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$R(X,\, Y) \coloneqq \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$$

を対応付ける写像 R を，接続 ∇ の**曲率** (curvature) と呼ぶ.

補題 7.1: 曲率の性質

$\forall X,\, Y \in \mathfrak{X}(M),\ \forall f,\, g,\, h \in C^\infty(M),\ \forall \xi \in \Gamma(E)$ に対して以下が成立する：

(1) $R(Y,\, X) = -R(X,\, Y)$
(2) $R(fX,\, gY)(h\xi) = fgh\, R(X,\, Y)(\xi)$

証明 (1) Lie 括弧積の定義より $[Y,\, X] = -[X,\, Y]$ であることと接続の定義 7.1-(2) から明らか.

(2)　まず，$f = g \equiv 1$ の場合を示す．接続の定義 7.1 から

$$\begin{aligned}\nabla_X \nabla_Y (h\xi) &= \nabla_X \bigl(h \nabla_Y \xi + (Yh)\xi\bigr) \\ &= h\nabla_X \nabla_Y \xi + (Xh)\nabla_Y \xi + (Yh)\nabla_X \xi + (XYh)\xi.\end{aligned}$$

同様にして

$$\nabla_Y \nabla_X (h\xi) = h\nabla_Y \nabla_X \xi + (Yh)\nabla_X \xi + (Xh)\nabla_Y \xi + (YXh)\xi.$$

となる．一方，

$$\nabla_{[X,Y]}(h\xi) = h\nabla_{[X,Y]}\xi + \bigl([X,Y]h\bigr)\xi = h\nabla_{[X,Y]}\xi + (XYh)\xi - (YXh)\xi$$

であるから，

$$\begin{aligned}\boxed{R(X,\,Y)(h\xi)} &= \nabla_X \nabla_Y (h\xi) - \nabla_X \nabla_Y (h\xi) - \nabla_{[X,Y]}(h\xi) \\ &= h\bigl(\nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[X,Y]}\xi\bigr) \\ &= \boxed{hR(X,\,Y)(\xi)}.\end{aligned} \tag{7.2.1}$$

次に，一般の $f,\,g$ を考える．接続の定義 7.1 から

$$\begin{aligned}R(fX\,gY) &= \nabla_{fX}\nabla_{gY} - \nabla_{gY}\nabla_{fX} - \nabla_{[fX,gY]} \\ &= f\nabla_X\bigl(g\nabla_Y\bigr) - g\nabla_Y\bigl(f\nabla_X\bigr) - \nabla_{[fX,gY]} \\ &= fg\nabla_X\nabla_Y + f(Xg)\nabla_Y - gf\nabla_Y\nabla_X - g(Yf)\nabla_X - \nabla_{[fX,gY]}.\end{aligned}$$

Lie 括弧積の公式 $[fX, gY] = fg[X,Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$ と接続の双線型性を使うと

$$\nabla_{[fX,gY]} = fg\nabla_{[X,Y]} + f(Xg)\nabla_Y - g(Yf)\nabla_X$$

だから，

$$R(fX\,gY) = fg\bigl(\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}\bigr) = fg\,R(X,\,Y).$$

式 (7.2.1) と併せて $R(fX,\,gY)(h\xi) = fgh\,R(X,\,Y)(\xi)$ を得る．

■

! 特に $\Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$ であるから，接束上の接続 ∇ に対して $R(X,\,Y)Z \quad \bigl(\forall X,\,Y,\,Z \in \mathfrak{X}(M)\bigr)$ は $(1,\,3)$-型テンソル場を成す．これを接続 ∇ の**曲率テンソル**と呼ぶ．

定義 7.3: 捩率

∇ を接束 $\pi\colon TM \to M$ 上の接続とする．このとき $\forall X,\,Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$T(X,\,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \in \mathfrak{X}(M)$$

を対応させる写像 T を**捩率** (torsion) と呼ぶ．T が定義する $(1,\,2)$-型テンソル場を**捩率テンソル**と呼ぶ．

7.2.2 微分形式による ∇, R の局所表示

∇ をベクトル束 $\pi\colon E \to M$ の接続，R をその曲率とする．

定義 7.4: 接続 1-形式

開集合 $M \subset U$ 上のフレーム $\{\xi_i\} \subset \Gamma(E|_U)$ が与えられているとする．このとき，$\forall X \in \mathfrak{X}(U)$ に対して

$$\omega^i_j(X)\xi_i \coloneqq \nabla_X \xi_j$$

によって n^2 個の $\omega^i_j(X) \in C^\infty(U)$ を定義する．
n^2 個の $\omega^i_j\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathbb{R}$ をまとめて

$$\omega \coloneqq (\omega^i_j)$$

と書き，**接続形式** (connection form) と呼ぶ．

接続の定義 7.1-(1) より，$\forall f \in C^\infty(U)$ に対して

$$\omega^i_j(fX)\xi_i = \nabla_{fX}\xi_j = f\nabla_X \xi_i = f\,\omega^i_j(X)s_i$$

が成り立つ．i.e. $\omega^i_j(fX) = f\,\omega^i_j(X)$ である．X に関する加法準同型性も同様に従うので，$\omega^i_j\colon \mathfrak{X}(U) \to \mathbb{R}$ は $C^\infty(U)$-線型写像である．従って命題 4.1 から $\omega^i_j \in \Omega^1(U)$ となる．これが ω が接続 1-形式と呼ばれる所以である．

ω 自身は $n \times n$ 正則行列全体が作る Lie 代数 $\mathfrak{gl}(n)$ に値をとる 1-形式と見做される．

定義 7.5: 曲率 2-形式

開集合 $M \subset U$ 上のフレーム $\{\xi_i\} \subset \Gamma(E|_U)$ が与えられているとする．このとき，$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ に対して

$$\Omega^i_j(X, Y)\xi_i \coloneqq R(X, Y)(\xi_j)$$

によって n^2 個の $\Omega^i_j(X, Y) \in C^\infty(U)$ を定義する．
n^2 個の $\Omega^i_j\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathbb{R}$ をまとめて

$$\Omega \coloneqq (\omega^i_j)$$

と書き，**曲率形式** (curvature form) と呼ぶ．

補題 1.1 より，$\forall f, g \in C^\infty(U)$ に対して

(1) $\Omega^i_j(X, Y)\xi_i = R(X, Y)(\xi_i) = -R(Y, X)(\xi_i) = -\Omega^i_j(Y, X)\xi_i$
(2) $\Omega^i_j(fX, gY)\xi_i = R(fX, gY)(\xi_i) = fgR(X, Y)(\xi_i) = fg\Omega^i_j(X, Y)\xi_i$

が成り立つ．i.e. $\Omega^i_j(X, Y) = -\Omega^i_j(X, Y)$，$\Omega^i_j(fX, gY) = fg\Omega^i_j(X, Y)$ である．従って $\Omega^i_j\colon \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to$

$\mathbb{R}$ は $C^\infty(U)$-双線型線型かつ交代的な写像である．故に命題 4.1 から $\Omega^i_j \in \Omega^2(U)$ となる．この意味で $\omega\colon \mathfrak{X}(U)\times\mathfrak{X}(U)\to\mathfrak{gl}(n)$ は 2-形式である．

定理 7.1: Cartan の構造方程式

ベクトル束の接続形式 ω と曲率形式 Ω は以下の等式をみたす：

$$\mathrm{d}\omega = -\omega\wedge\omega + \Omega$$

成分表示で

$$\mathrm{d}\omega^i_j = -\omega^i_k\wedge\omega^k_j + \omega^i_j.$$

証明 曲率形式の定義 7.4 から

$$R(X,Y)(\xi_j) = \Omega^i_j(X,Y)\xi_j$$

一方，曲率の定義 7.2 から

$$\begin{aligned}
R(X,Y)(\xi_j) &= \bigl(\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}\bigr)(\xi_j)\\
&= \nabla_X\omega^i_j(Y)\xi_i - \nabla_Y\omega^i_j(X)\xi_i - \omega^i_j([X,Y])\xi_i\\
&= \omega^k_j(Y)\omega^i_k(X)\xi_i + \bigl(X\omega^i_j(Y)\bigr)\xi_i\\
&\quad - \omega^k_j(X)\omega^i_k(Y)\xi_i - \bigl(Y\omega^i_j(X)\bigr)\xi_i\\
&\quad - \omega^i_j([X,Y])\xi_i
\end{aligned}$$

外微分の公式 4.5 と外積の性質 4.1 から

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega^i_j(X,Y) &= (X\omega^i_j)(Y) - (Y\omega^i_j)(X) - \omega^i_j([X,Y]),\\
\omega^i_k\wedge\omega^k_j(X,Y) &= \omega^i_k(X)\omega^k_j(Y) - \omega^i_k(Y)\omega^k_j(X)
\end{aligned}$$

なので，

$$\Omega^i_j(X,Y)\xi_j = R(X,Y)(\xi_j) = \bigl(\mathrm{d}\omega^i_j(X,Y) + \omega^i_k\wedge\omega^k_j(X,Y)\bigr)\xi_i.$$

■

系 7.2:（第 2）Bianchi の恒等式

接続形式 ω と曲率形式 Ω に対して以下の恒等式が成り立つ：

$$\mathrm{d}\Omega + \omega\wedge\Omega - \Omega\wedge\omega = 0$$

成分表示で

$$\mathrm{d}\Omega^i_j + \omega^i_k\wedge\Omega^k_j - \Omega^i_k\wedge\omega^k_j = 0$$

証明 構造方程式 7.1 の両辺の外微分をとることで，

$$\begin{aligned}
0 &= -\mathrm{d}\omega\wedge\omega - (-1)\omega\wedge\mathrm{d}\omega + \mathrm{d}\Omega\\
&= \omega\wedge\omega\wedge\omega - \Omega\wedge\omega - \omega\wedge\omega\wedge\omega + \omega\wedge\Omega + \mathrm{d}\Omega\\
&= \mathrm{d}\Omega + \omega\wedge\Omega - \Omega\wedge\omega.
\end{aligned}$$

■

7.3 Levi-Civita 接続

定義 7.6: 計量接続

(擬) Riemann 多様体 M が計量 $\langle\ ,\ \rangle\colon \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to C^\infty(M)$ を持つとする．M の接束 $\pi\colon TM\to M$ 上の接続 ∇ が計量と**両立する** (compatible) 接続，あるいは**計量接続** (metric connection) であるとは，∇ が $\forall X,\,Y,\,Z\in\mathfrak{X}(M)$ に対して以下の条件を充たすことを言う：

$$X\langle Y,\,Z\rangle = \langle\nabla_X Y,\,Z\rangle + \langle Y,\,\nabla_X Z\rangle$$

命題 7.1:

(擬) Riemann 多様体 M と，その座標近傍 U をとる．$\{\,\hat{e}_a\,\}$ を TU の正規直交標構，$\{\,\hat{\theta}^a\,\}\subset\Omega^1(U)$ をその双対基底とする．このとき以下の 2 条件を充たすような U 上の 1-形式 $\omega := ({\omega^a}_b)\colon \mathfrak{X}(U)\to\mathfrak{gl}(n)$ がただ一つ存在する：

(1) ${\omega^a}_b = -{\omega^b}_a$
(2) $\mathrm{d}\hat{\theta}^a = -{\omega^a}_b\wedge\hat{\theta}^b$

<u>**証明**</u>　まず，$\mathrm{d}\hat{\theta}^a\in\Omega^2(U)$ を命題??の正規直交基底で展開する：

$$\mathrm{d}\hat{\theta}^a = \frac{1}{2}{\alpha^a}_{bc}\,\hat{\theta}^b\wedge\hat{\theta}^c,\quad {\alpha^a}_{bc} = -{\alpha^a}_{cb}$$

$\hat{\theta}^b\wedge\hat{\theta}^c$ の線型独立性から，展開係数 ${\alpha^a}_{bc}$ は一意に定まる．

次に，${\omega^a}_b$ を

$${\omega^a}_b = {\beta^a}_{bc}\,\hat{\theta}^c$$

と表示し，命題の条件を充たすように ${\beta^a}_{bc}$ を決めることにする．まず，条件 (1) から

$${\beta^a}_{bc} = -{\beta^b}_{ac} \tag{7.3.1}$$

が必要である．また，

$${\omega^a}_b\wedge\hat{\theta}^b = -{\beta^a}_{bc}\,\hat{\theta}^b\wedge\hat{\theta}^c$$

だから，条件 (2) を充たすには

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}{\alpha^a}_{bc}\,\hat{\theta}^b\wedge\hat{\theta}^c = {\beta^a}_{bc}\,\hat{\theta}^b\wedge\hat{\theta}^c\\ \Longleftrightarrow\quad &{\alpha^a}_{bc} = {\beta^a}_{bc} - {\beta^a}_{cb}\end{aligned} \tag{7.3.2}$$

が必要である．

ここで，式 (7.3.2) の添字を交換することで

$$
\begin{aligned}
\alpha^a{}_{bc} &= \beta^a{}_{bc} - \beta^a{}_{cb} \\
\alpha^b{}_{ac} &= \beta^b{}_{ac} - \beta^b{}_{ca} \\
\alpha^c{}_{ba} &= \beta^c{}_{ba} - \beta^c{}_{ab}
\end{aligned}
$$

を得る．式 (7.3.1) を用いて整理すると

$$
\begin{aligned}
\alpha^a{}_{bc} &= \beta^a{}_{bc} - \beta^a{}_{cb} \\
\alpha^b{}_{ac} &= -\beta^a{}_{bc} - \beta^b{}_{ca} \\
\alpha^c{}_{ba} &= -\beta^b{}_{ca} + \beta^a{}_{cb}
\end{aligned}
$$

だから，これを $\beta^a{}_{bc}$ について解くと

$$
\beta^a{}_{bc} = \frac{1}{2}\bigl(\alpha^a{}_{bc} - \alpha^b{}_{ac} + \alpha^c{}_{ba}\bigr)
$$

を得る．右辺は一意に定まるので左辺も一意に定まる，i.e. $\omega^a{}_b$ は一意に定まる． ■

命題 7.1 で存在が示された 1-形式 $\omega = (\omega^a{}_b)$ を接続形式とする TU 上の接続 $\nabla \colon \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(U)$ が

$$
\nabla \hat{e}_b \coloneqq \omega^a{}_b \otimes \hat{e}_a
$$

と定義される．命題 7.1 の条件 (1) より，このとき ∇ は計量と両立する．

接束 TU の接続 ∇ は，余接束 T^*U の接続 ∇^* を誘導する．今回の場合は

$$
\nabla^* \hat{\theta}^a \coloneqq -\omega^a{}_b \otimes \hat{\theta}^b
$$

である．従って，命題 7.1 の条件 (2) は合成写像

$$
\Gamma(T^*U) = \Omega^1(U) \xrightarrow{\nabla^*} \Gamma(T^*U \otimes T^*U) \xrightarrow{\wedge} \Gamma\bigl(\Omega^2(T^*U)\bigr) = \Omega^2(U)
$$

が $\hat{\theta}^a$ を $\mathrm{d}\hat{\theta}^a$ に移すことを主張している．

定理 7.3: Levi-Civita 接続（接続形式）

任意の（擬）Riemann 多様体の接束は，その（擬）Riemann 計量と両立し，かつ合成写像 $\wedge \circ \nabla^*$ が外微分 d と一致するようなただ一つの接続 ∇ を持つ．この ∇ を **Levi-Civita 接続** (Levi-Civita connection) と呼ぶ．

7.4 接続係数による定式化

定理 7.4: Levi-Civita 接続（接続係数）

任意の（擬）Riemann 多様体 M には，その（擬）Riemann 計量 $\langle\ ,\ \rangle\colon \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to C^\infty(M)$ と両立する対称接続 ∇ がただ一つ存在する．i.e. ∇ は $\forall X,\,Y,\,Z\in\mathfrak{X}(M)$, $\forall f\in C^\infty(M)$ に対して

(1) $\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]=T(X,\,Y)=0$
(2) $X\langle Y,\,Z\rangle=\langle\nabla_X Y,\,Z\rangle+\langle Y,\,\nabla_X Z\rangle$

を充たす．このような ∇ を **Levi-Civita 接続**と呼ぶ．

補題 7.2:

(0, 1)-型テンソル場 $\alpha\colon \mathfrak{X}(M)\to C^\infty(M)$ が $\alpha\in \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}\bigl(\mathfrak{X}(M),\,C^\infty(M)\bigr)$ であるならば，$V\in\mathfrak{X}(M)$ であって $\alpha(X)=\langle V,\,X\rangle,\ \forall X\in\mathfrak{X}(M)$ であるものがただ一つ存在する．

証明 M のチャート $(U;\,x^\mu)$ に対して α を $\alpha=\alpha_\mu\,\mathrm{d}x^\mu$ と局所表示する．このとき，$V:=g^{\mu\nu}\alpha_\nu\partial_\mu$ が求めるベクトル場である． ■

証明 題意を充たす接続 ∇ が存在すると仮定する．このとき条件 (2) より

$$
\begin{aligned}
X\langle Y,\,Z\rangle&=\langle\nabla_X Y,\,Z\rangle+\langle Y,\,\nabla_X Z\rangle\\
Y\langle Z,\,X\rangle&=\langle\nabla_Y Z,\,X\rangle+\langle Z,\,\nabla_Y X\rangle\\
Z\langle X,\,Y\rangle&=\langle\nabla_Z X,\,Y\rangle+\langle X,\,\nabla_Z Y\rangle
\end{aligned}
$$

が成立する．これを $\langle\nabla_X Y,\,Z\rangle$ について解いて条件 (1) を用いると

$$
\begin{aligned}
\langle\nabla_X Y,\,Z\rangle=\frac{1}{2}\bigl(&X\langle Y,\,Z\rangle+Y\langle Z,\,X\rangle-Z\langle X,\,Y\rangle\\
&+\langle[X,Y],\,Z\rangle-\langle[Y,Z],\,X\rangle+\langle[Z,X],\,Y\rangle\bigr)
\end{aligned}
\tag{7.4.1}
$$

となるから，補題 7.2 より $\nabla_X Y$ は一意である．

次に，∇ が存在することを示す．実際，$\forall X,\,Y\in\mathfrak{X}(M)$ に対して $\alpha\colon\mathfrak{X}(M)\to C^\infty(M)$ を，$\alpha(Z)$ として式 (7.4.1) の右辺によって定義する．この α は $C^\infty(f)$-線型なので $\alpha(Z)=\langle\nabla_X Y,\,Z\rangle$ なる $\nabla_X Y\in\mathfrak{X}(M)$ が存在する．この $\nabla_X Y$ が接続の定義 7.1 および条件 (1), (2) を充たすことは，Lie 括弧積の性質から直接示される． ■

Levi-Civita 接続 ∇ に対して，

$$
\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M),\ (X,\,Y)\mapsto\nabla_X Y
$$

と定義される写像は Y に関して $C^\infty(M)$-線型でないため，$C^\infty(M)$-加群としては (1, 2)-型テンソル場ではない．

定義 7.7: 接続係数

M のチャート $(U;\, x^\mu)$ に対して，n^3 個の C^∞ 関数 $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\colon U \to \mathbb{R}$ が

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\partial_\mu \coloneqq \nabla_{\partial_\nu}\partial_\lambda$$

として定まる．これを**接続係数**，もしくは **Christoffel 記号**と呼ぶ．

Christoffel 記号を使って共変微分 $\nabla_X Y$ を成分表示すると，接続の定義 7.1-(2) に注意[*2]して

$$\begin{aligned}\boxed{\nabla_X Y} &= \nabla_{X^\mu\partial_\mu}(Y^\nu\partial_\nu) = X^\mu\nabla_{\partial_\mu}(Y^\nu\partial_\nu)\\ &= X^\mu(\partial_\mu Y^\nu)\partial_\nu + X^\mu Y^\nu\nabla_{\partial_\mu}\partial_\nu\\ &= \boxed{\left(X(Y^\nu) + \Gamma^\nu_{\mu\lambda}X^\mu Y^\lambda\right)\partial_\nu}\end{aligned}$$

となる．

7.4.1 テンソル場の共変微分

（擬）Riemann 多様体 M を与える．U を M の開集合とし，$\mathfrak{T}(U) \coloneqq \bigoplus_{r,\, s=0}^{\infty}\mathfrak{T}^r_s(U)$ を U 上のテンソル場（定義 3.13）全体が作る $C^\infty(U)$-多元環とする．$\mathcal{C}\colon \mathfrak{T}^r_s(U) \to \mathfrak{T}^{r-1}_{s-1}(U)$ で縮約を表す．

命題 7.2: 共偏微分の一般化

$X \in \mathfrak{X}(U)$ に対して，写像

$$\nabla_X\colon \mathfrak{T}(U) \to \mathfrak{T}(U)$$

であって次の条件を充たすものが一意に存在する：

(1) ∇_X はテンソル場の型を保つ $\mathbb{R}$-線型写像であり，$\forall T,\, T' \in \mathfrak{T}(U)$ に対して

$$\begin{aligned}\nabla_X\left(T\otimes T'\right) &= \nabla_X T\otimes T' + T\otimes\nabla_X T',\\ \nabla_X\mathcal{C}(T) &= C\left(\nabla_X T\right)\end{aligned}$$

を充たす．i.e. ∇_X は微分である．

(2) ∇_X は $\mathfrak{T}^0_0(U) = C^\infty(U)$ 上

$$\nabla_X f \coloneqq Xf, \quad \forall C^\infty(U)$$

であり，$\mathfrak{T}^1_0(U) = \mathfrak{X}(U)$ 上は Levi-Civita 接続による共変微分である．

(3) $V \subset U$ を開集合とすると，$\left(\nabla_X T\right)\big|_V = \nabla_{X|_V}\left(T\big|_V\right)$

証明 まず，$\mathfrak{T}^0_1(U) = \Omega^1(U)$ への作用を構成する．duality pairing $\langle\ ,\ \rangle\colon \Omega^1(U)\times\mathfrak{X}(U) \to C^\infty(U)$ は (1, 1)-

[*2] $X,\, Y$ は**ベクトル場**なので，自然基底ベクトル場 $\partial_\mu \in \mathfrak{X}(U)$ による展開係数は C^∞ 関数である．

型テンソル場を作り，定義から $\forall\omega \in \Omega^1(U)$, $\forall Y \in \mathfrak{X}(U)$ に対して $\langle\omega,\, Y\rangle = \omega \otimes Y$ であるから，条件 (1) により

$$\nabla_X\langle\omega,\, Y\rangle = \langle\nabla_X\omega,\, Y\rangle + \langle\omega,\, \nabla_X Y\rangle$$

でなくてはならない．一方，条件 (2) から

$$\nabla_X\langle\omega,\, Y\rangle = X\bigl(\langle\omega,\, Y\rangle\bigr)$$

である．従って $\nabla_X\omega \in \Omega^1(U)$ は，与えられた ω に対して $\langle\omega,\, Y\rangle \coloneqq \omega(Y)$ であったから

$$(\nabla_X\omega)(Y) \coloneqq X\bigl(\omega(Y)\bigr) - \omega\bigl(\nabla_X Y\bigr), \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(U)$$

と定義される．これは一意的であり，(3) を充たす．

次に，$\omega \in \mathfrak{T}^0_s(U)$ の場合を構成する．$s = 1$ の場合と同様に $\forall Y_1,\, \dots,\, Y_s \in \mathfrak{X}(U)$ に対して

$$\begin{aligned}\bigl(\nabla_X\omega\bigr)(Y_1,\, \dots,\, Y_s) \coloneqq\ & X\bigl(\omega(X_1,\, \dots,\, X_s)\bigr) \\ & - \sum_{i=1}^{s}\omega\bigl(Y_1,\, \dots,\, \nabla_X Y_i,\, \dots,\, Y_s\bigr)\end{aligned}$$

と $\nabla_X\omega \in \mathfrak{T}^0_s(U)$ を定義すればよい．

最後に, $T \in \mathfrak{T}^r_s(U)$ の場合を構成する．定義**??**から $\omega_1,\, \dots,\, \omega_r \in \Omega^1(U)$ に対して $T(\omega_1,\, \dots,\, \omega_r) \in \mathfrak{T}^0_s(U)$ になることを考慮して

$$\begin{aligned}\bigl(\nabla_X T\bigr)(\omega_1,\, \dots,\, \omega_r) \coloneqq\ & \nabla_X T\bigl(\omega_1,\, \dots,\, \omega_r\bigr) \\ & - \sum_{i=1}^{r} T\bigl(\omega_1,\, \dots,\, \nabla_X\omega_i,\, \dots,\, \omega_s\bigr)\end{aligned}$$

と $\bigl(\nabla_X T\bigr)(\omega_1,\, \dots,\, \omega_r) \in \mathfrak{T}^0_s(U)$ を定義すればよい． ■

7.4.2 曲線に沿った共変微分

C^∞ 曲線 $c\colon [a,\, b] \to M$ を与える．

C^∞ 曲線 c に沿ったベクトル場 $Y(t)$ を考える．i.e. $\forall t \in [a,\, b]$ に対して

$$Y(t) \in T_{c(t)}M$$

であり，かつ

$$Y(t) \circ c\colon [a,\, b] \to TM$$

が C^∞ 級写像である状況である．このとき $\dot{c}(t) \in TM$ だから $\nabla_{\dot{c}(t)}$ を考えることができる．各点 $c(t) \in M$ において丁寧に計算すると

$$\begin{aligned}&\bigl(\nabla_{\dot{c}(t)}Y\bigr)\bigl(c(t)\bigr) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^\mu \circ c)(t)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_{c(t)}[Y^\nu(t)]\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)_{c(t)} + \mathit{\Gamma}^\nu_{\mu\lambda}\bigl(c(t)\bigr)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^\mu \circ c)(t)Y^\lambda(t)\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)_{c(t)} \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}Y^\nu}{\mathrm{d}t}(t) + \mathit{\Gamma}^\nu_{\mu\lambda}\bigl(c(t)\bigr)\dot{x}^\mu(t)Y^\lambda(t)\right)(\partial_\nu)_{c(t)}\end{aligned}$$

なので，結局

$$\nabla_{\dot{c}(t)} Y = \left(\frac{\mathrm{d}Y^\nu}{\mathrm{d}t} + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} \dot{x}^\mu Y^\lambda \right) \partial_\nu$$

とわかった．

定義 7.8: 平行

C^∞ 曲線 $c\colon [a,\, b] \to M$ に沿ったベクトル場 $Y(t)$ が c **に沿って平行**であるとは，

$$\nabla_{\dot{c}(t)} Y \equiv 0$$

であることを言う．

定義 7.8 をチャート $(U;\ x^\mu)$ に関して局所表示すると

$$\frac{\mathrm{d}Y^\nu}{\mathrm{d}t} + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} \dot{x}^\mu Y^\lambda = 0 \quad (\mu = 1,\, \dots,\, n)$$

なる 1 階線形常微分方程式系が得られる．常微分方程式の一般論から，c に沿って平行な C^∞ 級のベクトル場 $Y(t)$ であって，初期条件 $Y(a) = u \in T_{c(a)}M$ を充たすものがただ一つ存在する．解の線形性も考慮すると，写像

$$T_{c(a)}M \ni u \mapsto Y \in TM$$

は単射な線型写像である．特に，線型写像

$$P(c)\colon T_{c(a)}M \to T_{c(b)}M,\ u \mapsto Y(b)$$

を c に沿った**平行移動**と呼ぶ．$P(c)$ は全単射であり，これによって $T_{c(a)}M \cong T_{c(b)}M$ である．また，Levi-Civita 接続の定義 7.4-(2) から $P(c)$ は内積を保つ．

異なる 2 点 $p,\, q \in M$ を結ぶ C^∞ 曲線 c が与えられれば，Levi-Civita 接続により接空間 $T_pM,\, T_qM$ の間に計量同型写像が存在する．

7.4.3　測地線

定義 7.9: 測地線

（擬）Riemann 多様体の上に Levi-Civita 接続 ∇ を与える．C^∞ 曲線 $c\colon [a,\, b] \to M$ が以下の条件を充たすとき，c は**測地線** (geodesic) と呼ばれる：

$$\nabla_{\dot{c}(t)} \dot{c}(t) = 0.$$

定義 7.9 は，「接ベクトル場 $\dot{c}$ が c 自身に沿って平行である」ことを定式化したものである．

第 8 章

複素多様体の紹介

この章の内容は [2, 3.4] によるところが大きい．

複素関数 $f\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ が**正則** (holomorphic) であるとは，$f(z^1, \ldots, z^m) = f_1(x^1, \ldots, x^m;\ y^1, \ldots, y^m) + \mathrm{i} f_2(x^1, \ldots, x^m;\ y^1, \ldots, y^m)$ が各変数 $z^\mu = x^\mu + \mathrm{i} y^\mu$ に関して **Cauchy-Riemann の関係式**

$$\frac{\partial f_1}{\partial x^\mu} = \frac{\partial f_2}{\partial y^\mu}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x^\mu} = -\frac{\partial f_1}{\partial y^\mu}$$

を充たすことを言う．

写像 $(f^1, \ldots, f^n)\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ は，各関数 f^λ が正則であるとき正則であると言う．

複素多様体の定義を再掲する：

定義 8.1: 複素多様体（再掲）

M を位相空間とする．集合族 $\mathcal{S} = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda) \mid \varphi_\lambda\colon U_\lambda \xrightarrow{\approx} \mathbb{C}^m\}_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられ，$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が M の開被覆になっており，かつその全ての座標変換 $f_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ が正則であるとき，M は**複素多様体**と呼ばれる．

座標近傍が $\mathbb{C}^m$ と同相のとき，m を**複素次元**と呼んで $\dim_{\mathbb{C}} M = m$ と書く．実次元 $2m$ は単に $\dim M = 2m$ と書く．

M のアトラスの上には，定義 2.6 で定めた同値関係が定まる．

定義 8.2: 複素構造

複素多様体 M のアトラス $\mathcal{S}$ を与える．定義 2.6 で定めた同値関係による $\mathcal{S}$ の同値類 $[\mathcal{S}]$ を M の**複素構造** (complex structure) と呼ぶ．

8.1 複素化の概要

複素次元 m の複素多様体 M のチャート $(U;\, z^\mu)$ をとる．$2m$ 個の接ベクトルを

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z^\mu} &:= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y^\mu}\right) \\
\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu} &:= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y^\mu}\right)
\end{aligned}
$$

と定義し，対応する双対ベクトルを

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}z_\nu &:= \mathrm{d}x_\nu + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y_\nu \\
\mathrm{d}\bar{z}_\nu &:= \mathrm{d}x_\nu - \mathrm{i}\,\mathrm{d}y_\nu
\end{aligned}
$$

と定義する．このとき，C^∞ 関数 f の外微分は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}f &= \sum_\mu \left(\frac{\partial f_1}{\partial x^\mu}\,\mathrm{d}x^\mu + \frac{\partial f_1}{\partial y^\mu}\,\mathrm{d}y^\mu\right) + \mathrm{i}\sum_\mu \left(\frac{\partial f_2}{\partial x^\mu}\,\mathrm{d}x^\mu + \frac{\partial f_2}{\partial y^\mu}\,\mathrm{d}y^\mu\right) \\
&= \sum_\mu \frac{\partial f}{\partial z^\mu}\,\mathrm{d}z^\mu + \sum_\mu \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^\mu}\,\mathrm{d}\bar{z}^\mu
\end{aligned}
$$

と書かれる．

$$
\begin{aligned}
\partial f &:= \sum_\mu \frac{\partial f}{\partial z^\mu}\,\mathrm{d}z^\mu \\
\overline{\partial} f &:= \sum_\mu \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^\mu}\,\mathrm{d}\bar{z}^\mu
\end{aligned}
$$

とおけば $\mathrm{d}f = \partial f + \overline{\partial} f$ である．1 変数正則関数 $f(z)$ の場合，Cauchy-Riemann の関係式から

$$
\overline{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,\mathrm{d}\bar{z} = 0
$$

であった．これは m 変数正則関数 f の場合に一般化され，

$$
\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^\mu} = 0 \quad (1 \le \forall \mu \le m)
$$

あるいは $\overline{\partial} f = 0$ となる．

別のチャート $(V;\, w^\nu)$ をとると，座標変換は正則である．故に $U \cap V$ 上で

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}w^\mu &= \partial w^\mu + \overline{\partial} w^\mu = \partial w^\mu = \sum_\nu \frac{\partial w^\mu}{\partial z^\nu}\,\mathrm{d}z^\nu\,, \\
\mathrm{d}\bar{w}^\mu &= \partial \bar{w}^\mu + \overline{\partial} \bar{w}^\mu = \overline{\partial} \bar{w}^\mu = \sum_\nu \frac{\partial \bar{w}^\mu}{\partial \bar{z}^\nu}\,\mathrm{d}\bar{z}^\nu
\end{aligned}
$$

が成立する．従って，

$$
\begin{aligned}
T^{1,0}M &:= \mathrm{Span}\left\{\frac{\partial}{\partial z^\mu}\right\}, \quad T^{0,1}M := \mathrm{Span}\left\{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu}\right\} \\
T^{1,0*}M &:= \mathrm{Span}\left\{\mathrm{d}z^\mu\right\}, \quad T^{0,1*}M := \mathrm{Span}\left\{\mathrm{d}\bar{z}^\mu\right\}
\end{aligned}
$$

と定義すると直和分解

$$
\begin{aligned}
TM \otimes \mathbb{C} &= T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M \\
TM^* \otimes \mathbb{C} &= T^{1,0*}M \oplus T^{0,1*}M
\end{aligned}
$$

が成立する．

8.1.1　Dolbeault 作用素

複素 r-形式の基底は p 個の $\mathrm{d}z^\mu$ と q 個の $\mathrm{d}\bar{z}^\mu$ が Wedge 積で結合したものである（ただし $r = p+q$）．対 (p, q) のことを**双次数**と呼ぶ．双次数 (p, q) の複素 r 形式全体の集合を $\Omega^{p,q}(M)$ と書くと，直和分解

$$
\Omega^r(M)^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=r} \Omega^{p,q}(M)
$$

が成り立つ．

先ほど定義した $\partial\colon \Omega^{0,0}(M) \to \Omega^{1,0}(M)$, $\bar{\partial}\colon \Omega^{0,0}(M) \to \Omega^{0,1}(M)$ は，次のように一般化される：

$$
\partial\colon \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p+1,q}(M), \quad \bar{\partial}\colon \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p,q+1}(M)
$$

このような $\partial, \bar{\partial}$ は **Dolbeault 作用素**と呼ばれる．Dolbeault 作用素によって，複素 $p+q$-形式の外微分 $\mathrm{d}: \Omega^{p+q}(M)^{\mathbb{C}} \to \Omega^{p+q+1}(M)^{\mathbb{C}}$ は

$$
\mathrm{d} = \partial + \bar{\partial}
$$

と分解される．

Hodge 作用素は

$$
\star\colon \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{m-p,\, m-q}
$$

と作用する．定義 5.7 を参照すると，複素 Riemann 多様体 M の外微分 d の随伴作用素は

$$
\delta = -\star\mathrm{d}\star\colon \Omega^{p+q}(M)^{\mathbb{C}} \to \Omega^{p+q-1}(M)^{\mathbb{C}}
$$

と定義される．Dolbeaut 作用素の随伴

$$
\partial^\dagger : \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p-1,q}(M), \quad \bar{\partial}^\dagger : \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p,q-1}(M)
$$

によって

$$
\delta = \partial^\dagger + \bar{\partial}^\dagger
$$

と書かれる．このとき，3 通りの Laplacian が定義できる：

$$
\begin{aligned}
\Delta &\coloneqq (\mathrm{d} + \delta)^2 \\
\Delta_\partial &\coloneqq (\partial + \partial^\dagger)^2 \\
\Delta_{\bar{\partial}} &\coloneqq (\bar{\partial} + \bar{\partial}^\dagger)^2
\end{aligned}
$$

一般に，これらの間に特別な関係はない．

8.1.2　概複素構造

多様体 M は，線型写像 $J\colon TM \to TM$ であって $J^2 = -1$ を充たす J が大域的に存在するとき，**概複素構造** (almost complex structure) を持つという．奇数次元の多様体が概複素構造を持つことはない．

任意の複素多様体 M が概複素構造を持つことを確認する．M の各点 p と，それを含むチャート $(U;\, z^\mu) = (U;\, x^\mu;\, y^\mu)$ をとる．において，線型写像 $J_p\colon T_pM \to T_pM$ を

$$J_p\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) \coloneqq \frac{\partial}{\partial y^\mu}, \quad J_p\left(\frac{\partial}{\partial y^\mu}\right) = -\frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

で定義する．定義から $(J_p)^2 = -1_p$ であることは明らか．

別のチャート $(V;\, w^\mu) = (V;\, u^\mu,\, v^\mu)$ をとり $w^\mu = u^\mu + \mathrm{i}v^\mu$ とすると，Cauchy-Riemann の関係式から

$$\begin{aligned}
J_p\left(\frac{\partial}{\partial u^\mu}\right) &= J_p\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial u^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} + \frac{\partial y^\nu}{\partial u^\mu}\frac{\partial}{\partial y^\nu}\right) = \frac{\partial x^\nu}{\partial v^\mu}\frac{\partial}{\partial y^\nu} + \left(-\frac{\partial y^\nu}{\partial v^\mu}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) = \frac{\partial}{\partial v^\mu} \\
J_p\left(\frac{\partial}{\partial v^\mu}\right) &= J_p\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial v^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} + \frac{\partial y^\nu}{\partial v^\mu}\frac{\partial}{\partial y^\nu}\right) = -\frac{\partial x^\nu}{\partial u^\mu}\frac{\partial}{\partial y^\nu} + \frac{\partial y^\nu}{\partial u^\mu}\left(-\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) = -\frac{\partial}{\partial u^\mu}
\end{aligned}$$

が成立するため，J_p の作用はチャートの取り方によらない．ゆえに，J_p の表現行列はチャートの取り方によらずに

$$\begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}$$

である．J_p は，その構成からわかるように $\forall p \in M$ で定義でき，それらを集めた $J = \{\, J_p \mid p \in M \,\}$ は M 上至る所 C^∞ 級である．故に $J \in \mathfrak{T}^2_0(M)$ であり，M の外複素構造を定める．

8.1.3　Kähler 多様体

複素多様体 M の Riemann 計量 g が，$\forall p \in M$ と $\forall X,\, Y \in T_pM$ に対して

$$g_p(J_pX,\, J_pY) = g_p(X,\, Y)$$

を充たすとき，g は **Hermite 計量**と呼ばれる．このとき，組 $(M,\, g)$ を **Hermite 多様体**と呼ぶ．任意の複素多様体 $(M,\, g)$ は，

$$\hat{g}_p(X,\, Y) \coloneqq \frac{1}{2}\bigl(g_p(X,\, Y) + g_p(J_pX,\, J_pY)\bigr)$$

として新しい計量 $\hat{g}$ を定義することで Hermite 多様体になる．

> 複素多様体 $\Longrightarrow$ Hermite 多様体

Hermite 多様体 $(M,\, g)$ 上には自然に

$$K \coloneqq \frac{\mathrm{i}}{2} g_{\mu\bar{\nu}}\, \mathrm{d}z^\mu \wedge \mathrm{d}\bar{z}^\nu$$

なる 2-形式が定義される．K を **Kähker 形式**と呼ぶ．K は実形式である．

定義 8.3: Kähker 多様体

Hermite 多様体 (M, g) であって，その Kähler 形式 K が閉形式であるものを言う．i.e. $\mathrm{d}K = 0$. このとき，計量 g は M の Kähler 計量と呼ばれる．

例えば，$\dim_{\mathbb{C}} M = 1$ の任意の複素多様体 (M, g) は Kähler 多様体である．M の Kähler 形式 K は実 2-形式だから，その外微分 $\mathrm{d}K$ は 3-形式であり，$\dim M = 2$ であることから 0 になるのである．1 次元コンパクト複素多様体は **Riemann 面**と呼ばれる．

第 9 章

ファイバー束

二つの C^∞ 多様体 $B,\,N$ が与えられたとしよう．B を**底空間**，F を**ファイバー**と呼ぶことにする．このとき，大雑把に言うと，**局所的に**積多様体[*1] $B\times F$ と同一視される C^∞ 多様体 E のことを ***F* をファイバーとする *B* 上のファイバー束**と呼ぶ．もう少し真面目に言うと，M のチャート $(U_i,\,\varphi)$ をとってきたときに積多様体

$$U_i\times F \tag{9.0.1}$$

と E の開集合との間に微分同相写像が存在することである．

しかし，これだけだと E の**大域的な**幾何構造が見えてこない．情報の欠落をなんとかするには M の開被覆 $\{U_i\}$ に関して局所的な積多様体 (9.0.1) の構造を張り合わせる必要がある．そのために，我々は全ての $U_i\cap U_j\neq\emptyset$ 上において，**変換関数** $\{\Phi_{ij}\}$ を

$$\Phi_{ij}\colon F|_{U_i}\to F|_{U_j}$$

として用意する．変換関数の構成の如何によっては，ファイバー束 E の大域的な幾何構造は極めて複雑なものになりうる．

これだけだとよくわからないので，まず手始めに S^1 を底空間とするファイバー束を具体的に構成してみよう．1 次元実多様体 S^1 の C^∞ アトラス $\{(U_+,\,\varphi_+),\,(U_-,\,\varphi_-)\}$ を次のようにとる：

$$\begin{aligned}
U_+ &\coloneqq \left\{e^{\mathrm{i}\theta}\;\middle|\;\theta\in(-\varepsilon,\,\pi+\varepsilon)\right\}, &\qquad \varphi_+&\colon U_+\to\mathbb{R},\ e^{\mathrm{i}\theta}\mapsto\theta\\
U_- &\coloneqq \left\{e^{\mathrm{i}\theta}\;\middle|\;\theta\in(\pi-\varepsilon,\,2\pi+\varepsilon)\right\}, &\qquad \varphi_-&\colon U_-\to\mathbb{R},\ e^{\mathrm{i}\theta}\mapsto\theta
\end{aligned}$$

ファイバー F としては 1 次元実多様体

$$F\coloneqq[-1,\,1]\subset\mathbb{R}$$

を選ぶ．このときファイバー束 E は積多様体 $U_+\times F$ および $U_-\times F$ の二部分からなり，それぞれチャート

$$\bigl(U_+;\,\theta,\,t_+\bigr),\quad \bigl(U_-;\,\theta,\,t_-\bigr)$$

を持つ（当然だが $t_\pm\in[-1,\,1]$ である）．なお，この時点では $U_+\times F,\,U_-\times F$ の「つながり方」は未定義である．

[*1] 位相は積位相（定義 1.12）を入れるのだった．

ところで，S^1 の開被覆 U_+, U_- は 2 ヶ所で重なっている：

$$\varphi_\pm(U_+\cap U_-) = (-\varepsilon,\, 0]\cup[2\pi,\, 2\pi+\varepsilon)\cup(\pi-\varepsilon,\, \pi+\varepsilon)$$

ここで，変換関数を

$$\Phi_{+-}\colon F|_{U_-}\to F|_{U_+},\ \begin{cases} t_+ = t_- & : \theta\in(-\varepsilon,\, 0]\cup[2\pi,\, 2\pi+\varepsilon) \\ t_+ = t_- & : \theta\in(\pi-\varepsilon,\, \pi+\varepsilon) \end{cases}$$

と定義することでファイバー束 E は**円筒**と同相に，

$$\Phi_{+-}\colon F|_{U_-}\to F|_{U_+},\ \begin{cases} t_+ = t_- & : \theta\in(-\varepsilon,\, 0]\cup[2\pi,\, 2\pi+\varepsilon) \\ t_+ = -t_- & : \theta\in(\pi-\varepsilon,\, \pi+\varepsilon) \end{cases}$$

と定義することでファイバー束 E は **Möbius の帯**と同相になる．前者は特に $E\approx S^2\times F$ と言うことだが，このような状況を指してファイバー束 E は**自明束**であると表現する．

9.1 定義の精密化

ファイバー束のイメージが掴めたところで，数学的に厳密な定義を与える．まずは変換関数を入れる前の段階までの定式化である：

定義 9.1: 微分可能ファイバー束

C^∞ 多様体 F, E, B を与える．C^∞ 写像 $\pi\colon E\to B$ が与えられ，それが次の条件を充たすとき，組 $(E,\, \pi,\, B,\, F)$ を F をファイバーとする**微分可能ファイバー束** (differentiable fiber bundle) と呼ぶ：

(局所自明性)

$\forall b\in B$ に対して，b のある開近傍 U と微分同相写像 $\varphi\colon \pi^{-1}(U)\xrightarrow{\simeq} U\times F$ が存在して

$$\forall u\in\pi^{-1}(U),\ \pi(u) = \mathrm{proj}_1\circ\varphi(u)$$

となる，i.e. 図 9.1 が可換図式となる．ただし，proj_1 は第一成分への射影である：

$$\mathrm{proj}_1\colon U\times F\to U,\ (p,\, f)\mapsto p$$

微分同相写像 φ のことを**局所自明化** (local trivialization) と呼ぶ．

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & U\times F \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$

図 9.1: 局所自明性

定義 9.1 において，π を連続写像に，φ を位相同型写像に置き換えると一般のファイバー束の定義が得られる．しかし，以降では微分可能ファイバー束しか考えないので定義 9.1 の条件を充たす $(E,\, \pi,\, B,\, F)$ のことを**ファイバー束**と呼ぶことにする．

ファイバー束 $(E,\, \pi,\, B,\, F)$ に関して，

- E を**全空間** (total space)
- B を**底空間** (base space)
- F を**ファイバー** (fiber)
- π を**射影** (projection)

と呼ぶ[*2]．また，射影 π による 1 点集合 $\{b\}$ の逆像 $\pi^{-1}(\{b\}) \subset E$ のことを**点 $\boldsymbol{b}$ のファイバー** (fiber) と呼び，$F|_b$ と書く．

9.1.1　ファイバー束の同型

C^∞ 多様体 F を共通のファイバーに持つ二つのファイバー束 $(E_i,\, \pi_i,\, B_i,\, F)$ を考える．このとき，二つの底空間 B_i の間の C^∞ 写像と同様に，全空間 E_i の間の微分同相写像を考えることができる．これら二つの C^∞ 写像は**束写像** (bundle map) と呼ばれる．

定義 9.2: 束写像

ファイバー F を共有する二つのファイバー束 $\xi_i = (E_i,\, \pi_i,\, B_i,\, F)$ を与える．このとき ξ_1 から ξ_2 への**束写像** (bundle map) とは，二つの C^∞ 写像 $f\colon B_1 \to B_2$，$\tilde{f}\colon E_1 \to E_2$ であって図 9.2 が可換図式になり，かつ底空間 B_1 の各点 b において，**点 $\boldsymbol{b}$ のファイバー $\boldsymbol{\pi_1^{-1}(\{b\})}$** $\subset E_1$ への $\tilde{f}$ の制限

$$\tilde{f}|_{\pi_1^{-1}(\{b\})}\colon \pi_1^{-1}(\{b\}) \to \tilde{f}\bigl(\pi_1^{-1}(\{b\})\bigr) \subset E_2$$

が微分同相写像になっているもののことを言う．

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ B_1 \arrow[r, "f"] & B_2 \end{tikzcd}$$

図 9.2: 束写像

定義 9.3: ファイバー束の同型

ファイバー F と底空間 B を共有する二つのファイバー束 $\xi_i = (E_i,\, \pi_i,\, B,\, F)$ を与える．このとき，ファイバー束 ξ_1 と ξ_2 が**同型** (isomorphic) であるとは，$f\colon B \to B$ が恒等写像となるような束写像 $\tilde{f}\colon E_1 \to E_2$ が存在することを言う．記号として $\xi_1 \simeq \xi_2$ とかく．

[*2] 紛らわしくないとき，ファイバー束 $(E,\, \pi,\, B,\, F)$ のことを $\pi\colon E \to B$ ，または単に E と略記することがある．

$$
\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[rr, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\
& B &
\end{tikzcd}
$$

図 9.3: ファイバー束の同型

積束 $(B \times F,\ \mathrm{proj}_1,\ B,\ F)$ と同型なファイバー束を**自明束** (trivial bundle) と呼ぶ.

9.1.2　切断

ファイバー束 $(E,\ \pi,\ B,\ F)$ は，射影 π によってファイバー F の情報を失う．F を復元するためにも，$s\colon B \to E$ なる写像の存在が必要であろう．

定義 9.4: 切断

ファイバー束 $\xi = (E,\ \pi,\ B,\ F)$ の**切断** (cross section) とは，C^∞ 写像 $s\colon B \to E$ であって $\pi \circ s = \mathrm{id}_B$ となるもののことを言う．

各点 $b \in B$ に対して，明らかに $s(b) \in \pi^{-1}(\{b\})$ である．

切断は**大域的な**対象であり，与えられたファイバー束が切断を持つとは限らない．一方，各点 $b \in B$ の開近傍 U 上であれば，図 9.1 の示す局所自明性から**局所切断** $s\colon U \to \pi^{-1}(U)$ が必ず存在する．$\mathrm{proj}_1^{-1}(\{b\}) = \{b\} \times F$ であることを考慮すると $\pi^{-1}(\{b\}) \simeq F$ とわかるので，局所切断 $s\colon U \to \pi^{-1}(U)$ は C^∞ 写像 $\tilde{s}\colon U \to F$ と一対一に対応する．

B 上の切断全体の集合を $\Gamma(B,\ E)$ と書くことにする．例えば $\Gamma(B,\ TB) \simeq \mathfrak{X}(B)$ である．

9.2　変換関数

つぎに，変換関数を定式化しよう．$\xi = (E,\ \pi,\ B,\ F)$ をファイバー束とする．底空間 B の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ をとると，定義 9.1 から，どの $\alpha \in \Lambda$ に対しても局所自明性（図 9.4a）が成り立つ．ここでもう一つの $\beta \in \Lambda$ をとり，$U_\alpha \cap U_\beta$ に関して局所自明性の図式を横に並べることで，自明束 $\mathrm{proj}_1\colon (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \to U_\alpha \cap U_\beta$ の自己同型（図 9.4c）が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
U_\alpha \times F \arrow[dr, "\mathrm{proj}_1"'] & \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[l, "\varphi_\alpha"'] \arrow[d, "\pi"] \\
 & U_\alpha
\end{tikzcd}
$$

(a) U_α に関する局所自明性

$$
\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U_\beta) \arrow[r, "\varphi_\beta"] \arrow[d, "\pi"'] & U_\beta \times F \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\
U_\beta &
\end{tikzcd}
$$

(b) U_β に関する局所自明性

$$
\begin{tikzcd}
(U_\alpha \cap U_\beta) \times F \arrow[rr, red, "\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}"] \arrow[dr, "\mathrm{proj}_1"'] & & (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\
 & U_\alpha \cap U_\beta &
\end{tikzcd}
$$

(c) 自明束 $(U_\alpha \cap U_\beta) \times F$ の自己同型

図 9.4: 局所自明性の結合

つまり，$F \to F$ の微分同相写像全体のなす群（**微分同相群**）を $\mathrm{Diff}\, F$ と書くとき写像

$$t_{\beta\alpha} \colon U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{Diff}\, F \tag{9.2.1}$$

が存在し，$\forall (b,\, f) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$ に対して

$$\left(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}\right)(b,\, f) = \left(b,\, t_{\beta\alpha}(b)(f)\right)$$

と作用する[*3].

定義 9.5: 変換関数

上の設定において，式 (9.2.1) の $t_{\alpha\beta}$ をファイバー束 ξ の**変換関数** (transition function) と呼ぶ.

全ての $U_\alpha \cap U_\beta$ に関する変換関数の族 $\{t_{\alpha\beta}\}$ が $\forall b \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ に対して条件

$$t_{\alpha\beta}(b) \circ t_{\beta\gamma}(b) = t_{\alpha\gamma}(b) \tag{9.2.2}$$

を充たすことは図式 9.4 より明かである．次の命題は，ファイバー束 $(E,\, \pi,\, B,\, F)$ を構成する「素材」には

- 底空間となる C^∞ 多様体 B
- ファイバーとなる C^∞ 多様体 F
- B の開被覆 $\{U_\lambda\}$
- (9.2.2) を充たす C^∞ 関数族 $\{t_{\alpha\beta} \colon U_\beta \cap U_\alpha \to \mathrm{Diff}\, F\}$

があれば十分であることを主張する：

[*3] なお $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ の作用で点 b が動かないのは，図式 9.4c が可換図式である，i.e. $\mathrm{proj}_1(b,\, f) = b = \left(\mathrm{proj}_1 \circ (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})\right)(b,\, f)$ であることによる.

命題 9.1: ファイバー束の復元

任意の C^∞ 多様体 $B,\ F$ を与える.
B の開被覆 $\{U_\lambda\}$ と, **コサイクル条件** (9.2.2) (cocycle condition) を充たす C^∞ 級関数の族 $\{t_{\alpha\beta}\colon U_\beta \cap U_\alpha \mapsto \mathrm{Diff}\, F\}$ が与えられたとき, ファイバー束 $\xi = (E,\ \pi,\ B,\ F)$ であって, その変換関数が $\{t_{\alpha\beta}\}$ となるものが存在する.

証明 まず手始めに, cocycle 条件 (9.2.2) より

$$t_{\alpha\alpha}(b) \circ t_{\alpha\alpha}(b) = t_{\alpha\alpha}(b), \quad \forall b \in U_\alpha$$

だから $t_{\alpha\alpha}(b) = \mathrm{id}_F$ であり, また

$$t_{\alpha\beta}(b) \circ t_{\beta\alpha}(b) = t_{\alpha\alpha}(b) = \mathrm{id}_F, \quad \forall b \in U_\alpha \cap U_\beta$$

だから $t_{\beta\alpha}(b) = t_{\alpha\beta}(b)^{-1}$ である.

開被覆 $\{U_\lambda\}$ の添字集合を Λ とする. このとき $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して, $U_\lambda \subset B$ には底空間 B からの相対位相を入れ, $U_\lambda \times F$ にはそれと F の位相との積位相を入れることで, 直和位相空間

$$\mathcal{E} \coloneqq \coprod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \times F$$

を作ることができる[*4]. $\mathcal{E}$ の任意の元は $(\lambda,\ b,\ f) \in \Lambda \times U_\lambda \times F$ と書かれる.

さて, $\mathcal{E}$ 上の二項関係 $\sim$ を以下のように定める:

$$\sim \coloneqq \left\{ \bigl((\alpha,\ b,\ f),\ (\beta,\ c,\ h) \bigr) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \;\middle|\; b = c,\ f = t_{\alpha\beta}(b)(h) \right\}$$

$\sim$ が同値関係の公理 1.1 を充たすことを確認する:

反射律 冒頭の議論から $t_{\alpha\alpha}(b) = \mathrm{id}_F$ なので良い.

対称律 冒頭の議論から $t_{\beta\alpha}(b) = t_{\alpha\beta}(b)^{-1}$ なので,

$$\begin{aligned}
(\alpha,\ b,\ f) \sim (\beta,\ c,\ h) \quad &\Longrightarrow \quad b = c,\ f = t_{\alpha\beta}(b)(h) \\
&\Longrightarrow \quad c = b,\ h = t_{\alpha\beta}(b)^{-1}(f) = t_{\beta\alpha}(b)(f) \\
&\Longrightarrow \quad (\beta,\ c,\ h) \sim (\alpha,\ b,\ f).
\end{aligned}$$

推移律 cocycle 条件 (9.2.2) より

$$\begin{aligned}
(\alpha,\ b,\ f) \sim (\beta,\ c,\ h),\ (\beta,\ c,\ h) \sim (\gamma,\ d,\ k) \quad &\Longrightarrow \quad b = c,\ c = d,\ f = t_{\alpha\beta}(b)(h),\ h = t_{\beta\gamma}(c)(k) \\
&\Longrightarrow \quad b = d,\ f = t_{\alpha\beta}(b) \circ t_{\beta\gamma}(b)(k) = t_{\alpha\gamma}(b)(k) \\
&\Longrightarrow \quad (\alpha,\ b,\ f) \sim (\gamma,\ d,\ k).
\end{aligned}$$

したがって $\sim$ は同値関係である. $\sim$ による $\mathcal{E}$ の商集合を E と書き, 標準射影 (canonical injection) を $\mathrm{pr}\colon \mathcal{E} \to E,\ (\alpha,\ b,\ f) \mapsto [(\alpha,\ b,\ f)]$ と書くことにする.

[*4] $\mathcal{E}$ はいわば,「貼り合わせる前の互いにバラバラな素材(局所自明束 $U_\alpha \times F$)」である. 証明の以降の部分では, これらの「素材」を $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ の部分に関して「良い性質 (9.2.2) を持った接着剤 $\{t_{\alpha\beta}\}$」を用いて「貼り合わせる」操作を, 位相を気にしながら行う.

集合 E に商位相を入れて E を位相空間にする．このとき開集合 $\{\alpha\} \times U_\alpha \times F \subset \mathcal{E}$ は pr によって E の開集合 $\mathrm{pr}(\{\alpha\} \times U_\alpha \times F) \subset E$ に移される．ゆえに E は $\{\mathrm{pr}(\{\alpha\} \times U_\alpha \times V_\beta)\}$ を座標近傍にもつ C^∞ 多様体である（ここに $\{V_\beta\}$ は，C^∞ 多様体 F の座標近傍である）．

次に C^∞ 写像 $\pi\colon E \to B$ を

$$\pi\big([(\alpha,\, b,\, f)]\big) := b$$

と定義すると，これは局所自明化

$$\varphi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F,\ [(\alpha,\, b,\, f)] \mapsto (b,\, f)$$

による局所自明性を持つ．従って組 $\xi = (E,\, \pi,\, B,\, F)$ はファイバー束になり，証明が終わる． ■

9.2.1 構造群

以上の議論から，任意の F をファイバーとするファイバー束が，底空間 B の開被覆 $\{U_\lambda\}$ に対して局所的な自明束 $U_\lambda \times F$ を変換関数 $\{t_{\alpha\beta}\}$ によって「張り合わせる」ことで構成されることがわかった．しかし，式 (9.2.1) の変換関数の値域として選んだ $\mathrm{Diff}\, F$ は集合として大きすぎて扱いが難しい．そこで，微分同相群 $\mathrm{Diff}\, F$ の代わりにその部分群 $G \subset \mathrm{Diff}\, F$ を使うと言う発想に至る．特に G として Lie 変換群[*5]を選ぶことが多い，これが**構造群**である．

定義 9.6: 構造群

ファイバー束 $\xi = (E,\, \pi,\, B,\, F)$ を与える．底空間 B の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ と，各 U_λ に関する局所自明化 $\varphi_\lambda\colon \pi^{-1}(U_\lambda) \to U_\lambda \times F$ が与えられたとする．このとき，全ての添字の組 $\forall(\alpha,\, \beta) \in \Lambda \times \Lambda$ に対して，変換関数 $t_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{Diff}\, F$ と F 上のある Lie 変換群 $G \subset \mathrm{Diff}\, F$ が

$$\mathrm{Im}\, t_{\alpha\beta} \subset G$$

を充し，かつ $t_{\alpha\beta}$ 自身が C^∞ 級ならば，**開被覆と局所自明化の組 $\{U_\lambda\} \times \{\varphi_\lambda\}$** はファイバー束 ξ に G を**構造群** (structure group) とするファイバー束の構造を定めると言う．

構造群 G が指定されたファイバー束のことを記号として $(E,\, \pi,\, B,\, F,\, G)$ と書く．

構造群 G を指定する開被覆 $\{U_\lambda\}$ およびその上の局所自明化 $\{\varphi_\lambda\}$ を明記するときは**座標束**と呼び，記号として $\big(\boldsymbol{E,\, \pi,\, B,\, F,\, G,\, \{\varphi_\lambda\},\, \{U_\lambda\}}\big)$ と書く．座標束は多様体のアトラスと類似の概念である．

9.2.2 構造の類別

座標束 $(E,\, \pi,\, B,\, F,\, G,\, \{\varphi_\lambda\},\, \{U_\lambda\})$ を与える．ここで，底空間 B の開集合 U 上に別の局所自明化 $\varphi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times F$ が与えられたとしよう．開被覆の添字集合を Λ とするとき，$\forall \alpha \in \Lambda$ に対して自明束 $(U \cap U_\alpha) \times F$ の自己同型

[*5] つまり，構造群 G はファイバー F に左から作用する．

$$\begin{tikzcd}
(U_\alpha \cap U) \times F \arrow[rr, "\varphi\circ\varphi_\alpha^{-1}"] \arrow[dr, "\mathrm{proj}_1"'] & & (U_\alpha \cap U) \times F \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\
& U_\alpha \cap U &
\end{tikzcd}$$

を考えることができる．このとき，ある写像 $t_\alpha \colon U_\alpha \cap U \to \mathrm{Diff}\, F$ が存在して

$$(\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1})(b,\, f) = \bigl(b,\, t_\alpha(b)(f)\bigr)$$

と書けるが，$\boldsymbol{\mathrm{Im}\, t_\alpha \subset G}$ **とは限らない!**

定義 9.7: 許容

上述の設定において，局所自明化 φ が座標束 $\bigl(E,\, \pi,\, B,\, F,\, G,\, \{\varphi_\lambda\},\, \{U_\lambda\}\bigr)$ の**許容される** (admissible) **局所自明化**であるとは，$\forall \alpha \in \Lambda$ に対して $\mathrm{Im}\, g_\alpha \subset G$ かつ g_α が C^∞ 級であることを言う．

全空間 E, 射影 π, 底空間 B, ファイバー F を持ち，G を構造群とする座標束全体の集合を $\mathscr{F}(E,\, B,\, F,\, G)$ と書こう．$(E,\, \pi,\, B,\, F,\, G,\, \{\varphi_\lambda\},\, \{U_\lambda\}) \in \mathscr{F}(E,\, B,\, F,\, G)$ のことを $(\{U_\lambda\},\, \{\varphi_\lambda\})$ と略記する．

定義 9.8: 座標束の同値関係

$\mathscr{F}(E,\, B,\, F,\, G)$ 上の同値関係 $\sim$ を以下のように定める：

$$\sim\, := \Bigl\{\bigl((\{U_\lambda\},\, \{\varphi_\lambda\}),\, (\{V_\mu\},\, \{\psi_\mu\})\bigr) \Bigm| \psi_\mu\ (\forall \mu)\ \text{は座標束}\ (\{U_\lambda\},\, \{\varphi_\lambda\})\ \text{に許容される}\Bigr\}$$

同値関係 9.8 は

$$\sim\, = \Bigl\{\bigl((\{U_\lambda\},\, \{\varphi_\lambda\}),\, (\{V_\mu\},\, \{\psi_\mu\})\bigr) \Bigm| (\{U_\lambda\} \cup \{V_\mu\},\, \{\varphi_\lambda\} \cup \{\psi_\mu\}) \in \mathscr{F}(E,\, B,\, F,\, G)\Bigr\}$$

とも書けて，アトラスの同値関係 2.6 と似ている．

定義 9.9: G-束

同値関係 9.8 による同値類を $\boldsymbol{G}$**-束** (G-bundle) と呼び，$\boldsymbol{(E,\, \pi,\, B,\, F,\, G)}$ と書く．

9.3 G-束

ほとんどファイバー束と同じ扱いである．

定義 9.10: G-束の束写像

ファイバー F を共有する二つの G-束 $\xi_i = (E_i,\, \pi_i,\, B_i,\, F,\, G)$ を与える．このとき ξ_1 から ξ_2 への**束写像** (bundle map) とは，ファイバー束の束写像（図式 9.2）であって，以下の条件を充たすもののことを言う：

$\xi_1,\, \xi_2$ の任意の許容される局所自明化 $\varphi\colon \pi_1^{-1}(U) \to U \times F,\ \psi\colon \pi_2^{-1}(V) \to V \times F$ に対して，自明束の束写像 $\psi \circ \tilde{f} \circ \varphi^{-1}\colon (U \cap f^{-1}(V)) \times F \to V \times F$（図式 9.5 の外周部）がある連続写像 $h\colon U \cap f^{-1}(V) \to \mathrm{Diff}\, F$ を用いて

$$(\psi \circ \tilde{f})(b,\, f) = \bigl(\, f(b),\, h(b)(f)\,\bigr)$$

と書かれるとき，$\mathrm{Im}\, h \subset G$ かつ h が C^∞ 級である．

$$\begin{tikzcd}
U \times F \arrow[dr, "\mathrm{proj}_1"'] & \pi_1^{-1}(U) \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \pi_2^{-1}(V) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi_2"] & V \times F \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\
 & U \arrow[r, "f"] & V &
\end{tikzcd}$$

図 9.5: G-束の束写像

定義 9.11: G-束の同型

ファイバー F と底空間 B を共有する二つの G-束 $\xi_i = (E_i,\, \pi_i,\, B,\, F,\, G)$ を与える．このとき，G-束 ξ_1 と ξ_2 が**同型** (isomorphic) であるとは，$f\colon B \to B$ が恒等写像となるような G-束の束写像 $\tilde{f}\colon E_1 \to E_2$ が存在することを言う．記号として $\xi_1 \simeq \xi_2$ とかく．

定義 9.12: 縮小

G-束 $\xi = (E,\, \pi,\, B,\, F,\, G)$ を与える．$H \subset G$ を G の部分群とするとき，ある ξ の座標束 $\bigl(E,\, \pi,\, B,\, F,\, G,\, \{U_\lambda\},\, \{\varphi_\lambda\}\bigr)$ 上の変換関数の族 $\{t_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to G\}$ の像が $\mathrm{Im}\, t_{\alpha\beta} \subset H$ を充たすとき，**ξ の構造群が H に縮小** (reduce) すると言う．

命題 9.1 と全く同様にして以下が示される：

命題 9.2: G-束の復元

任意の C^∞ 多様体 $B,\, F$ を与える．
B の開被覆 $\{U_\lambda\}$ と，**コサイクル条件** (9.2.2) (cocycle condition) を充たす C^∞ 級関数の族 $\{t_{\alpha\beta}\colon U_\beta \cap U_\alpha \mapsto G\}$ が与えられたとき，G-束 $\xi = (E,\, \pi,\, B,\, F,\, G)$ であって，その変換関数が $\{t_{\alpha\beta}\}$ となるものが存在する．

9.3.1　同伴束

命題 9.2 より，変換関数 $t_{\alpha\beta}$ はファイバー F の情報を何も持っていない．したがって Lie 群 G が別の C^∞ 多様体 F' に Lie 変換群として作用するならば，同じ変換関数だが異なるファイバーを持つ G-束 $\xi' = (E,\, \pi,\, B,\, F',\, G)$ を構成できる．

定義 9.13: 同伴束

上記の設定のとき，ξ と ξ' は互いに他の**同伴束** (associated bundle) であると言う．

9.3.2　誘導束

G-束 $\xi = (E,\, \pi,\, B,\, F,\, G)$ を与え，ξ の代表元となる座標束 $(E,\, \pi,\, B,\, F,\, G,\, \{U_\lambda\},\, \{\varphi_\lambda\})$ および変換関数 $t_{\alpha\beta} \colon U_\alpha \cap U_\beta \to G$ をとる．

ここで新しい C^∞ 多様体 M を導入し，底空間 B との間に C^∞ 写像 $f \colon M \to B$ が与えられたとする．命題 9.2 を用いて M を底空間とする G-束（座標束）を構成できる．

M の開被覆

まず，M の開被覆を構成しよう．f は連続写像だから（定義 2.15）開集合 $U_\alpha \subset B$ の逆像 $f^{-1}(U_\alpha) \subset M$ は開集合である．$f^{-1}(\bigcup_\lambda U_\lambda) = \bigcup_\lambda f^{-1}(U_\lambda)$ なので，$\{f^{-1}(U_\lambda)\}$ が M の開被覆であるとわかる．

M の変換関数

次に，変換関数 $t^*_{\alpha\beta} \colon f^{-1}(U_\alpha) \cap f^{-1}(U_\beta) \to G$ を構成しよう．試しに

$$t^*_{\alpha\beta} \coloneqq t_{\alpha\beta} \circ f$$

とおいてみると，$t^*_{\alpha\beta}$ は明らかに C^∞ 級である．また，$\forall p \in f^{-1}(U_\alpha) \cap f^{-1}(U_\beta) \cap f^{-1}(U_\gamma)$ に対して

$$t^*_{\alpha\gamma}(p) = t_{\alpha\gamma}(f(p)) = t_{\alpha\beta}(f(p)) \circ t_{\beta\gamma}(f(p)) = t^*_{\alpha\beta}(p) \circ t^*_{\beta\gamma}(p)$$

なので cocycle 条件 (9.2.2) を充たす．

以上の考察と命題 9.2 から，$\{t_{\alpha\beta} \circ f\}$ を変換関数とする M 上の G-束が存在するとわかる．これを**誘導束** (induced bundle) と呼び，$f^*(\xi)$ と書く．

具体的には，

$$f^*E \coloneqq \left\{ (p,\, u) \in M \times E \;\middle|\; f(p) = \pi(u) \right\}$$

とおけば G-束 $f^*(\xi) \coloneqq \left(f^*E,\, \mathrm{proj}_1,\, M,\, F,\, G\right)$ が誘導束になる．このとき G-束の束写像（定義 9.10）は $\mathrm{proj}_2 \colon (p,\, u) \mapsto u$ である：

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r, "\mathrm{proj}_2"] \arrow[d, "\mathrm{proj}_1"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

図 9.6: 誘導束の束写像

$\varphi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times F$ を ξ の局所自明化とすると，$f^*(\xi)$ の局所自明化は

$$\tilde{\varphi}\colon \mathrm{proj}^{-1}\bigl(f^{-1}(U)\bigr) \to f^{-1}(U) \times F,\ \bigl(p,\, u\bigr) \mapsto \bigl(p,\, \varphi(u)\bigr)$$

となる：

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(U) \times F \arrow[dr, "\mathrm{proj}_1"'] & \mathrm{proj}_1^{-1}\bigl(f^{-1}(U)\bigr) \arrow[l, "\tilde{\varphi}"'] \arrow[r, "\mathrm{proj}_2"] \arrow[d, "\mathrm{proj}_1"'] & \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & U \times F \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\ & f^{-1}(U) \arrow[r, "f"] & U & \end{tikzcd}$$

図 9.7: $f^*(\xi)$ の局所自明化

9.4 主束

定義 9.14: 主束

G を Lie 群とする．G-束 $\xi = (P,\, \pi,\, M,\, G,\, G)$ は，G の G 自身への作用が自然な**左作用**であるとき，**主束** (principal bundle) あるいは**主 G-束** (principal G-bundle) と呼ばれる．

主束 $(P,\, \pi,\, M,\, G,\, G)$ は $(P,\, \pi,\, M,\, G)$ とか $P(M,\, G)$ と書かれることもある．

命題 9.3: 全空間への右作用

$\xi = (P,\, \pi,\, M,\, G)$ を主 G-束とする．このとき，G の全空間 P への右作用が自然に定義される．この作用は任意のファイバーをそれ自身の上にうつす**推移的かつ自由な作用**（定義 C.15）であり，その商空間は底空間 M と一致する．

証明 まず座標束 $(P,\, \pi,\, M,\, G,\, \{U_\lambda\},\, \{\varphi_\lambda\})$ をとり，関数の族 $\{t_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to G\}$ を座標束に対応する変換関数族とする．

$\forall u \in P,\, \forall g \in G$ をとる．$\pi(u) \in U_\alpha$ となる α を選び，対応する局所自明化が $\varphi_\alpha(u) = (p,\, h) \in U_\alpha \times G$ であるとする．このとき写像 $\phi\colon P \times G \to P$ を次のように定義する[*6]：

$$\phi(u,\, g) \coloneqq \varphi_\alpha^{-1}(p,\, h \cdot g) \tag{9.4.1}$$

ϕ の well-definedness

[*6] G の G 自身への右作用は，G の右からの積演算を選ぶ．この作用は推移的かつ効果的である．

$\beta \neq \alpha$ に対しても $\pi(u) \in U_\beta$ であるとする．このとき $\varphi_\beta(u) = (p,\, h') \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times G$ と書けて，また変換関数の定義から

$$h' = t_{\alpha\beta}(p) \cdot h \quad \bigl(t_{\alpha\beta}(p) \in G\bigr)$$

である．したがって

$$\varphi_\beta^{-1}(p,\, h' \cdot g) = \varphi_\beta^{-1}\bigl(p,\, t_{\alpha\beta}(p) \cdot h \cdot g\bigr) = \varphi_\beta^{-1}\bigl(p,\, t_{\alpha\beta}(p) \cdot (h \cdot g)\bigr) = \varphi_\beta^{-1} \circ (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(p,\, h \cdot g) = \varphi_\alpha^{-1}(p,\, h \cdot g)$$

が分かり，式 (9.4.1) の右辺は座標束の取り方によらない．

ϕ は右作用

定義 C.12 の 2 条件を充たしていることを確認する．

(1) $\phi(u,\, 1_G) = \varphi_\alpha^{-1}(p,\, h \cdot 1_G) = \varphi_\alpha^{-1}(p,\, h) = u$ よりよい．

(2) $\forall g_1,\, g_2 \in G$ をとる．

$$\phi(u,\, g_1 g_2) = \varphi_\alpha^{-1}\bigl(p,\, (h \cdot g_1) \cdot g_2\bigr) = \phi\bigl(\varphi_\alpha^{-1}(p,\, h \cdot g_1),\, g_2\bigr) = \phi\bigl(\phi(u,\, g_1),\, g_2\bigr)$$

よりよい．

ϕ は推移的かつ自由

G の G 自身への右作用が推移的なので $\phi\colon \pi^{-1}(p) \times G \to \pi^{-1}(p)$ も明らかに推移的．また $\forall u \in \pi^{-1}(p)$ に対して，$\phi(u,\, g) = u$ ならば

$$\phi(u,\, g) = \varphi_\alpha^{-1}(p,\, h \cdot g) = u = \varphi_\alpha^{-1}(p,\, h \cdot 1_G)$$

であり，φ_α が全単射であることから $g = 1_G$ である．i.e. 安定化群は $\forall u \in \pi^{-1}(p)$ に対して自明であるからこの作用は自由である．

■

命題 9.4:

主 G-束 $\xi = (P,\, \pi,\, M,\, G)$ が自明束になるための必要十分条件は，それが切断（定義 9.4）を持つことである．

証明 ($\Longrightarrow$)　ξ が自明束ならば切断をもつことは明らか．

($\Longleftarrow$)　切断 $s\colon M \to P$ が存在するとする．命題 9.3 より G は P に右から自由に作用する．従って $p \in M$ のファイバー $\pi^{-1}(p)$ 上の任意の 2 点 $\forall u,\, v \in \pi^{-1}(p)$ に対して，ただ一つの $g \in G$ が存在して $v = u \cdot g$ となる．

ここで，写像 $\tilde{f}\colon P \to M \times G$ を次のように定義する：

$u,\, s(\pi(u)) \in \pi^{-1}(\pi(u))$ だから

$$\exists! g \in G,\, u = s(\pi(u)) \cdot g$$

であり，この g を用いて

$$\tilde{f}(u) := \bigl(\pi(u),\, g\bigr)$$

とする．この $\tilde{f}$ が下図を可換図式にすることは明らかであり，$(P,\,\pi,\,M,\,G) \cong (M\times G,\,\mathrm{proj}_1,\,M,\,G)$ が示された．

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & M\times G \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

図 9.8: 主 G-束の同型

■

9.5 ベクトル束

定義 9.15: ベクトル束

M を n 次元 C^∞ 多様体とする．ファイバー束（定義 9.1）$\xi = (E,\,\pi,\,M,\,F)$ が k 次元**ベクトル束** (vector bundle) であるとは，$F = \mathbb{R}^k$ であり，かつ M の任意の開集合 U および $\forall p \in U$ に対して U 上の**局所自明化の $\boldsymbol{\pi^{-1}(p)}$ への制限が線型同型写像**になっていることを言う．

$F = \mathbb{C}^k$ のときは ξ は k 次元**複素ベクトル束**と呼ばれる．

ξ は $E \xrightarrow{\pi} M$ と略記されることがある．また，k を**ファイバー次元**と呼び，記号として $\dim E$ と書く．$E_p := \pi^{-1}(p)$ を**点 $\boldsymbol{p} \in M$ におけるファイバー**と呼ぶことがある．

k 次元ベクトル束の変換関数は $\mathrm{GL}(k,\,\mathbb{R})$ の元である．

! ベクトル束の束写像および同型の概念はファイバー束の場合（定義 9.2, 9.3）とほぼ同様に定義されるが，束写像 $\tilde{f}\colon E_1 \to E_2$ が C^∞ 写像であるだけでなく，$\forall p \in M$ におけるファイバー E_{1p} への制限 $\tilde{f}|_{E_{1p}}\colon E_{1p} \to E_{2f(p)}$ が線型同型写像であるという点が異なる．

定義 9.16: ゼロ切断

$\xi = (E,\,\pi,\,M)$ の切断（定義 9.4）のうち以下の条件を充たすものを**ゼロ切断** (zero section) と呼ぶ：

$$\forall p \in M,\ s(p) = \mathbf{0} \in E_p$$

! ゼロ切断の定義式を充たすように作った写像 $s_0\colon M \to E$ は明らかに C^∞ 写像で，かつ $\pi \circ s_0 = \mathrm{id}_M$ を充たす．i.e. 任意のベクトル束には零切断が存在する．

9.5.1 局所フレーム

定義 9.17: 局所フレーム

k 次元ベクトル束 $E \xrightarrow{\pi} M$ および M の開集合 U を与える．U 上の E の**局所フレーム** (local frame) とは，順序付けられた k 個の局所切断の組 $\{ s_i : U \to E \}_{1 \le i \le k}$ であって，$\forall p \in U$ に対して $\{ s_i(p) \}$ が $\pi^{-1}(p)$ の基底を成すもののことを言う．

命題 9.5: 局所自明化と局所フレーム

k 次元ベクトル束 $E \xrightarrow{\pi} M$ および M の開集合 U を与える．U 上の局所自明化（図 9.1）を与えることと局所フレームを与えることは同値である．

証明 ($\Longrightarrow$)　局所自明化 $\varphi \colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ が与えられたとする．$\mathbb{R}^k$ の標準基底を $\hat{e}_i$（第 i 成分のみ 1 の k 次元数ベクトル）とおくと，$\forall p \in U$ に対して $\varphi|_{E_p} \colon E_p \to \{p\} \times \mathbb{R}^k$ が線型同型写像であることから $s_i(p) \coloneqq \varphi^{-1}(p, \hat{e}_i)$ が E_p の基底を成す．

($\Longleftarrow$)　局所フレーム $\{ s_i : U \to E \}_{1 \le i \le k}$ が与えられたとする．このとき局所フレームの定義から，$\forall p \in U$ および $v_p \in E_p$ に対して

$$\exists!(c_1, \ldots, c_k) \in \mathbb{R}^k, \ v_p = \sum_{i=1}^{k} c_i \, s_i(p)$$

が成り立つ．したがって，写像 $\varphi \colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ を

$$\varphi(p, v_p) \coloneqq (p; \ c_1, \ldots, c_k)$$

と定義すれば φ は局所自明化になる． ■

系 9.1:

ベクトル束 $E \xrightarrow{\pi} M$ が自明束になる必要十分条件は，M 上の大域的なフレームが存在することである．

系 9.2:

ベクトル束 $E \xrightarrow{\pi} M$ が自明束になる必要十分条件は，$\forall p \in M$ において $s(p) \neq \mathbf{0}$ となる $s \in \Gamma(E)$ が存在することである．このような s を**ゼロにならない切断** (non-zero section) と呼ぶ．

9.5.2 切断のなすベクトル空間

ベクトル束 $E \xrightarrow{\pi} M$ の切断全体の集合を $\Gamma(E, M)$ または $\Gamma(E)$ と書く．

定義 9.18: $\Gamma(E)$ の演算

$\Gamma(E)$ 上の和とスカラー倍を次のように定義すると，$\Gamma(E)$ は $\mathbb{K}$-ベクトル空間になる：
$\forall s,\ s_1,\ s_2 \in \Gamma(E),\ \forall\lambda \in \mathbb{K}$ に対して

(1) $(s_1 + s_2)(p) := s_1(p) + s_2(p), \quad \forall p \in M$
(2) $(\lambda s) := \lambda s(p), \quad \forall p \in M$

また，$\forall f \in C^\infty(M)$ に対して

(2') $\quad (fs)(p) := f(p)s(p), \quad \forall p \in M$

とおけば $\Gamma(E)$ は $C^\infty(M)$-加群になる．

9.5.3 ベクトル束の計量

定義 9.19: ベクトル束の Riemann 計量

ベクトル束 $E \xrightarrow{\pi} M$ 上の Riemann 計量は，$\forall p \in M$ における正定値内積 $g_p\colon E_p \times E_p \to \mathbb{R}$ であって，p に関して C^∞ 級であるものをいう．
i.e. U を M の開集合とし，$\{\, s_i\colon U \to E \,\}$ を U 上の局所フレームとするとき，U 上の関数

$$g_p\bigl(s_i(p),\ s_j(p)\bigr) \quad \forall p \in U$$

が C^∞ 関数となることである．
複素ベクトル束については Hermite 内積として定義する．

命題 9.6:

任意のベクトル束には計量が存在する．

9.6 ベクトル束の構成法

9.6.1 部分束

定義 9.20: 制限

ベクトル束 $E \xrightarrow{\pi} M$ を与える．M の任意の部分多様体（定義 B.3）N に対して

$$E|_N := \pi^{-1}(N)$$

とおき，射影 $\pi_N\colon E|_N \to N$ を $\pi_N := \pi|_{E|_N}$ によって定義すれば $E|_N \xrightarrow{\pi_N} N$ はベクトル束になる．
これを E の N への**制限** (restriction) と呼ぶ．

定義 9.21: 部分束

ベクトル束 $E \xrightarrow{\pi} M$ を与える．ベクトル束 $F \xrightarrow{\pi} M$ が E の**部分束** (subbundle) であるとは，全空間 F が E の部分多様体であり，$\forall p \in M$ におけるファイバー F_p が E_p の部分ベクトル空間になっていることを言う．

N を C^∞ 多様体 M の部分多様体とすると，TN は $TM|_N$ の部分束になる．

9.6.2　商束

定義 9.22: 商束

ベクトル束 $E \xrightarrow{\pi} M$ とその部分束 $F \xrightarrow{\pi} M$ が与えられたとする．このとき $\forall p \in M$ において商ベクトル空間 E_p/F_p を考え，

$$E/F := \bigcup_{p\in M} E_p/F_p$$

とおくと，自然な射影 $\pi\colon E/F \to M,\ x_p + F_p \mapsto p$ はベクトル束を成す．この $E/F \xrightarrow{\pi} M$ を E の F による**商束** (quotient buncle) と呼ぶ．

証明 ■

$\dim E = n, \dim F = m$ とおくと $\dim E/F = n - m$ である．

定義 9.23: 法束

N を M の C^∞ 部分多様体とする．このとき接束 TN は $TM|_N$ の部分束であるから，商束 $TM|_N/TN$ を定義できる．これを N の M における**法束** (normal bundle) と呼ぶ．

C^∞ 多様体 M に Riemann 計量を入れると，部分ベクトル空間 $T_pN \subset T_pM$ の直交法空間 $(T_pN)^\perp$ が定義できる．このとき

$$\bigcup_{p\in M} (T_pN)^\perp$$

は $TM|_N$ の部分束になる．一方，標準射影 $\mathrm{pr}\colon T_pM \to T_pM/T_pN,\ x \mapsto x + T_pN$ の $(T_pN)^\perp$ への制限 $\mathrm{pr}|_{(T_pN)^\perp}$ は線型同型写像だからベクトル束の同型

$$\bigcup_{p\in M} (T_pN)^\perp \cong TM|_N/TN$$

がわかる．

9.6.3　Whitney 和

定義 9.24: Whitney 和

底空間 M を共有する 2 つのベクトル束 $\pi_i\colon E_i \to M$ を与える．このとき

$$E_1 \oplus E_2 := \left\{ (u_1,\, u_2) \in E_1 \times E_2 \;\middle|\; \pi_1(u_1) = \pi_2(u_2) \right\}$$

とおいて

$$\pi\colon E_1 \oplus E_2 \to M,\; (u_1,\, u_2) \mapsto \pi_1(u_1)\;\bigl(= \pi_2(u_2)\bigr)$$

と定義すると $\pi\colon E_1 \oplus E_2 \to M$ はベクトル束になる．これを **Whitney 和** (Whitney sum) と呼ぶ．

射影 $\pi_1 \times \pi_2\colon E_1 \times E_2 \to M \times M,\; (u_1,\, u_2) \mapsto \bigl(\pi_1(u_1),\, \pi_2(u_2)\bigr)$ と定義すると，Whitney 和は $f(p) := (p,\, p)$ で定義される C^∞ 写像 $f\colon M \to M \times M$ による $E_1 \times E_2$ の引き戻し束である（図 9.9）．

$$\begin{tikzcd}
E_1 \oplus E_2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E_1 \times E_2 \arrow[d, "\pi_1 \times \pi_2"] \\
M \arrow[r, "f"] & M \times M
\end{tikzcd}$$

図 9.9: Whitney 和

9.6.4　双対束

定義 9.25: 双対束

ベクトル束 $\pi\colon E \to M$ を与える．このとき $\forall p \in M$ におけるベクトル空間 E_p の双対ベクトル空間 E_p^* を用いて

$$E^* := \bigcup_{p \in M} E_p^*$$

とおくと $\pi\colon E^* \to M$ はベクトル束になる．これを**双対束** (dual bundle) と呼ぶ．

! 実ベクトル束 E の双対束は E に Riemann 計量を入れると自然に $E \cong E^*$ となるが，複素ベクトル束 E の場合は必ずしもこの同型は成り立たない．

特に M の接束 TM の双対束 T^*M を**余接束** (cotangent bundle) と呼ぶ．

9.6.5　テンソル積束

定義 9.26: テンソル積束

ベクトル束 $\pi_i \colon E_i \to M$ を与える．このとき $\forall p \in M$ におけるベクトル空間 E_{ip} のテンソル積空間 $E_1 \otimes E_2$ を用いて

$$E_1 \otimes E_2 \coloneqq \bigcup_{p \in M} E_{1p} \otimes E_{2p}$$

とおくと $\pi \colon E_1 \otimes E_2 \to M$ はベクトル束になる．これを**テンソル積束** (tensor product bundle) と呼ぶ．

定義 9.27: 外積束

ベクトル束 $\pi \colon E \to M$ を与える．このとき $\forall p \in M$ におけるベクトル空間 E_{ip} の r 次の外積代数 $\bigwedge^r(E_p)$ を用いて

$$\bigwedge^r(E) \coloneqq \bigcup_{p \in M} \bigwedge^r(E_p)$$

とおくと $\pi \colon \bigwedge^r(E) \to M$ はベクトル束になる．

例えば C^∞ 多様体 M 上の k 次の微分形式全体の集合 $\Omega^k(M)$ は

$$\Omega^k(M) = \Gamma\left(\bigwedge^k(T^*M)\right)$$

と書かれる．

付録 A

集合と位相のあれこれ

一部の議論は開基だけでは不十分なので，**準開基**の概念を導入する：

定義 A.1: 準開基

位相空間 $(X, \mathscr{O})$ の位相の部分集合 $\mathcal{SB} \subset \mathscr{O}$ が**準開基** (subbase) であるとは，

$$\left\{ S_1 \cap \cdots \cap S_n \,\middle|\, \{S_i\}_{i=1,\,\cdots,\,n} \subset \mathcal{SB},\ n = 0,\, 1,\, \ldots \right\}$$

が $\mathscr{O}$ の開基になることをいう[a]．

[a] $n = 0$ のときは X である．

次に，写像の連続性を判定する際に便利な補題を用意しておく：

補題 A.1: 写像の連続性

$(X, \mathscr{O}_X)$, $(Y, \mathscr{O}_Y)$, $(Z, \mathscr{O}_Z)$ を位相空間，$\mathcal{SB}_Y \subset \mathscr{O}_Y$ を Y の準開基，$\mathcal{B}_Y \subset \mathscr{O}_Y$ を Y の開基とする．

(1) 写像 $f\colon X \longrightarrow Y$ が連続 $\iff$ $\forall S \in \mathcal{SB}_Y$ に対して $f^{-1}(S) \in \mathscr{O}_X$

(2) 写像 $f\colon X \longrightarrow Y$ が連続 $\iff$ $\forall B \in \mathcal{B}_Y$ に対して $f^{-1}(B) \in \mathscr{O}_X$

証明 (1) **($\Longrightarrow$)** $\forall S \in \mathcal{SB}_Y$ は Y の開集合なので明らか．

($\Longleftarrow$) $\forall U \in \mathscr{O}_Y$ を 1 つとって固定する．準基の定義より集合

$$\mathcal{B} := \left\{ S_1 \cap \cdots \cap S_n \,\middle|\, \{S_i\}_{i=1,\,\cdots,\,n} \subset \mathcal{SB},\ n = 0,\, 1,\, \ldots \right\}$$

は Y の開基だから，ある部分集合族 $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{B}$ が存在して $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ が成り立つ．示すべきは $f^{-1}(U) \in \mathscr{O}_X$ だが，

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$$

なので $\forall \lambda \in \Lambda$ について $f^{-1}(B_\lambda) \in \mathscr{O}_X$ を示せば十分．ところで $B_\lambda \in \mathscr{B}$ なので，ある

$S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{SB}_Y$ が存在して $B_\lambda = \bigcap_{i=1}^n S_i$ と書ける．このとき仮定より

$$f^{-1}(B_\lambda) = f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} S_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(S_i) \in \mathscr{O}_X$$

が言える．

(2) 開基は準開基でもあるので (1) より従う．

■

位相空間 X, Y の間の写像 $f\colon X \to Y$ の連続性の定義 1.18 から，X に開集合が多く，Y に開集合が少ないほど f は連続になりやすいと言える．

定義 A.2: 位相の強弱

集合 X 上に二つの位相 $\mathscr{O}_1, \mathscr{O}_2$ を与える．

$$\mathscr{O}_1 \subset \mathscr{O}_2$$

が成り立つことを，**$\mathscr{O}_1$ は $\mathscr{O}_2$ より弱い (weaker)，粗い (coarser)** 位相であるとか，**$\mathscr{O}_2$ は $\mathscr{O}_1$ より強い (stronger)，細かい (finer)** 位相であると表現する．

! 集合 X の部分集合族 $\mathcal{SB} \subset 2^X$ を準開基とする X の位相 $\mathscr{O} \subset 2^X$ は，**$\mathcal{SB}$ を含む X の位相のうち最弱のものである．**

A.1　位相空間の圏

第 1 章で積位相・商位相を定義した．これらは，ある位相空間 X, Y を素材にして新しい位相空間を作る手法であった．このような構成のフレームワークを圏の言葉を使って整理してみよう．

定義 A.3: 圏

圏 (category) $\mathcal{C}$ とは，以下の 4 種類のデータからなる：

- **対象** (object) と呼ばれる要素の集まり[a]

$$\mathbf{Ob}(\mathcal{C})$$

- $\forall A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，A から B への**射** (morphism) と呼ばれる要素の集合

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, B)$$

- $\forall A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，A 上の**恒等射** (identity morphism) と呼ばれる射

$$\mathbf{Id}_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, A)$$

- $\forall A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, B), \forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(B,\, C)$ に対して，f と g の**合成** (composite) と呼ばれる射 $\boldsymbol{g \circ f} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, C)$ を対応させる集合の写像

$$\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(B,\, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, C),\ (f,\, g) \longmapsto g \circ f$$

これらの構成要素は，次の 2 条件を満たさねばならない：

(1) **(unitality)**：任意の射 $f\colon A \longrightarrow B$ に対して

$$f \circ \mathrm{Id}_A = f, \quad \mathrm{Id}_B \circ f = f$$

が成り立つ．

(2) **(associativity)**：任意の射 $f\colon A \longrightarrow B,\ g\colon B \longrightarrow C,\ h\colon C \longrightarrow D$ に対して

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

が成り立つ．

[a] $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ は，集合論では扱えないほど大きなものになっても良い．

!

要素 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ を

$$\boldsymbol{f\colon A \longrightarrow B}$$

のように矢印で表すことがある．A は f の**始域** (domain)，B は f の**終域** (codomain) と呼ばれ，それぞれ

$$\mathbf{dom}\,\boldsymbol{f} \coloneqq A, \quad \mathbf{cod}\,\boldsymbol{f} \coloneqq B$$

と書かれる．

素直な例として，**集合と写像の圏 Sets** がある．これは

- $\mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ は，すべての集合の集まり．
- $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(X, Y)$ は，集合 X と Y の間の全ての写像がなす集合．
- 任意の集合 X に対して，恒等射 $\mathrm{Id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(X, X)$ とは，恒等写像 $\mathrm{id}_X\colon X \longrightarrow X$ のこと．
- 射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(X, Y)$，$g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Y, Z)$ の合成とは，写像の合成 $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$ のこと．

として構成される圏のことを言う．幾何学の舞台となる**位相空間の圏**は，よく **Top** と表記されるが，次のようにして構成される：

- $\mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ はすべての位相空間の集まり．
- $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ とは，位相空間 X と Y の間の全ての連続写像が成す集合．
- 任意の位相空間 X に対して，恒等射 $\mathrm{Id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, X)$ とは恒等写像 $\mathrm{id}_X\colon X \longrightarrow X$ のこと[*1]．
- 射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$，$g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Y, Z)$ の合成とは，写像の合成 $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$ のこと[*2]．

一般の圏 $\mathcal{C}$ において，射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ はただの集合の要素なのであって写像とは限らない．従って f の性質を調べる際に元の行き先を具体的に追跡することができない場合もある．幸いにして，圏 **Sets**, **Top** における射は写像なので，このような心配はしなくても本書の中では問題ない．

[*1] 恒等写像 id_X は，X の任意の開集合 $U \subset X$ に対して $(\mathrm{id}_X)^{-1}(U) = U \subset X$ が X の開集合となるので連続写像である．
[*2] 命題 1.6 より，連続写像同士の合成は連続写像であることに注意．

A.1.1　始対象と終対象

定義 A.4: 始対象・終対象

圏 $\mathcal{C}$ を与える．

- 対象 $\boldsymbol{I} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が**始対象** (initial object) であるとは，$\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して射
$$\boldsymbol{I} \longrightarrow \forall Z$$
がただ一つだけ存在すること．
- 対象 $\boldsymbol{T} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が**終対象** (terminal object) であるとは，$\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して射
$$\forall Z \longrightarrow \boldsymbol{T}$$
がただ一つだけ存在すること．

この定義は，**任意の**対象に対してある**一意的な**射が存在する，という風な構造をしている．このような特徴付けを**普遍性** (universal property) と呼ぶ．

任意の圏において，2 つの対象が「交換可能」であることを表すのが**同型射**の概念である．

定義 A.5: 同型射

圏 $\mathcal{C}$ を与える．

- 射 $f\colon A \longrightarrow B$ が**同型射** (isomorphism) であるとは，射 $g\colon B \longrightarrow A$ が存在して $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ かつ $f \circ g = \mathrm{Id}_B$ を充たすこと．このとき f と g は互いの**逆射** (inverse) であると言い，$g = \boldsymbol{f^{-1}}$，$f = \boldsymbol{g^{-1}}$ と書く[a]．
- $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の間に同型射が存在するとき，対象 A と B は**同型** (isomorphic) であると言い，$\boldsymbol{A \cong B}$ と書く．

[a] 逆射は存在すれば一意である．

圏 **Sets** における同型射とは，全単射のことである．**圏 Top における同型射とは，同相写像に他ならない．**

命題 A.1: 始対象・終対象の一意性

圏 $\mathcal{C}$ の始対象・終対象は，存在すれば同型を除いて一意である．

証明 $I, I' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ がどちらも始対象であるとする．始対象の普遍性により次のような射が一意的に存在する：

$$I \overset{a}{\dashrightarrow} I'$$

$$I \overset{b}{\dashrightarrow} I$$

これらを合成すると射 $b \circ a\colon I \longrightarrow I$ が得られるが，一方で圏の定義から恒等射 $\mathrm{Id}_I\colon I \longrightarrow I$ も存在する：

$$\begin{tikzcd} I \arrow[rr, dashed, "\mathrm{id}_I"] \arrow[dr, dashed, "a"'] & & I \\ & I' \arrow[ur, dashed, "b"'] & \end{tikzcd}$$

始対象の普遍性より射 $I \longrightarrow I$ は一意でなくてはならないから，$b \circ a = \mathrm{Id}_I$ である．全く同様の議論により $a \circ b = \mathrm{Id}_{I'}$ も従うので，I と I' は同型である．

終対象の一意性も全く同様の議論によって示せる． ■

基本的に，普遍性による定義には同じ論法が使える．命題 A.1 の主張には「存在すれば」と言う枕詞がついている．従って**考えている圏において実際に始対象・終対象が存在するかどうかは全く別の問題である．**

命題 A.2: 圏 Sets における始対象・終対象の存在

圏 **Sets** において，

- 空集合 $\emptyset$ は始対象である．
- 1 点集合 $\{\mathrm{pt}\}$ は終対象である．

証明 $\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ をとる．

- $\emptyset$ から Z への写像 f とは，部分集合 $f \subset \emptyset \times Z$ であって命題 $\forall s \; (s \in \emptyset \Longrightarrow \exists ! t \in Z, \; (s, t) \in f)$ が真になるもののことであった．$s \in \emptyset$ は常に偽なのでこの命題は任意の $f \subset \emptyset \times Z$ について成り立つが，集合論の約束により $\emptyset \times Z = \emptyset$ なので結局 $f = \emptyset$ となって一意性が示された．
- Z から $\{\mathrm{pt}\}$ への写像は定数写像 $c\colon Z \longrightarrow \{\mathrm{pt}\}, \; x \longmapsto \mathrm{pt}$ のみである．

■

命題 A.3: 圏 Top における始対象・終対象の存在

圏 **Top** において，

- 空集合 $\emptyset$ は始対象である．
- 1 点が成す位相空間 $\{\mathrm{pt}\}$ は終対象である．

証明 $\forall (Z, \mathscr{O}_Z) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ をとる．**Sets における証明中に登場した射が連続写像であることを示せば良い．**

- **Sets** における証明から，写像 $\emptyset\colon \emptyset \longrightarrow Z$ が一意に存在する．明らかにこれは連続である．
- **Sets** における証明から，写像 $c\colon Z \longrightarrow \{\mathrm{pt}\}$ は定数写像のみである．位相空間の公理から $\{\mathrm{pt}\}$ の開集合は $\emptyset, \{\mathrm{pt}\}$ のみであり，$c^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \; c^{-1}(\{\mathrm{pt}\}) = X$ はどちらも X の開集合なので c は連続である．

■

A.1.2　積と和

まず，任意の圏における積を普遍性を用いて定義する．

定義 A.6: 積

圏 $\mathcal{C}$ と，その対象 $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を与える．X と Y の**積** (product) とは,

- $\boldsymbol{X \times Y}$ と書かれる $\mathcal{C}$ の対象
- **標準的射影** (canonical projection) と呼ばれる 2 つの射

$$\boldsymbol{p_X} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{X \times Y}, X)$$
$$\boldsymbol{p_Y} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{X \times Y}, Y)$$

の組であって，以下の普遍性を充たすもののこと：

(積の普遍性)　$\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ および $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$, $\forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y)$ に対して，射 $f \times g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, \boldsymbol{X \times Y})$ が一意的に存在して図式 A.1 を可換にする．

$$\begin{tikzcd} & \forall Z \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\exists! f\times g"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & \boldsymbol{X \times Y} \arrow[l, "\boldsymbol{p_X}"] \arrow[r, "\boldsymbol{p_Y}"'] & Y \end{tikzcd}$$

図 A.1: 積の普遍性

命題 A.4: 積の一意性

圏 $\mathcal{C}$ の積は，存在すれば同型を除いて一意である．

証明　もう 1 つの圏 $\mathcal{C}$ の対象 $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と射 $\pi_X : P \longrightarrow X$, $\pi_Y : P \longrightarrow Y$ の組が積の普遍性を充しているとする：

$$\begin{tikzcd} & \forall Z \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\exists! f\times g"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & X \times Y \arrow[l, "p_X"] \arrow[r, "p_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \forall Z \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\exists! h"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & P \arrow[l, "\pi_X"] \arrow[r, "\pi_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

このとき，$Z = X \times Y$, P と選ぶことで

$$
\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[dr, "\pi_Y"] \arrow[d, dashed, red, "\exists!\pi_X \times \pi_Y"] & \\
X & X \times Y \arrow[l, "p_X"] \arrow[r, "p_Y"'] \arrow[d, dashed, red, "\exists! h"] & Y \\
& P \arrow[ul, "\pi_X"] \arrow[ur, "\pi_Y"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& X \times Y \arrow[dl, "p_X"'] \arrow[dr, "p_Y"] \arrow[d, dashed, red, "\exists! h"] & \\
X & P \arrow[l, "\pi_X"] \arrow[r, "\pi_Y"'] \arrow[d, dashed, red, "\exists!\pi_X \times \pi_Y"] & Y \\
& X \times Y \arrow[ul, "p_X"] \arrow[ur, "p_Y"'] &
\end{tikzcd}
$$

が成り立つ．一方で可換図式

$$
\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[dr, "\pi_Y"] \arrow[dd, dashed, red, "\exists!\mathrm{Id}_P"] & \\
X & & Y \\
& P \arrow[ul, "\pi_X"] \arrow[ur, "\pi_Y"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& X \times Y \arrow[dl, "p_X"'] \arrow[dr, "p_Y"] \arrow[dd, dashed, red, "\exists!\mathrm{Id}_{X \times Y}"] & \\
X & & Y \\
& X \times Y \arrow[ul, "p_X"] \arrow[ur, "p_Y"'] &
\end{tikzcd}
$$

も成り立つが，積の普遍性から赤点線で書いた矢印は一意でなくてはならない．従って

$$
h \circ (\pi_X \times \pi_Y) = \mathrm{Id}_P \quad \text{かつ} \quad (\pi_X \times \pi_Y) \circ h = \mathrm{Id}_{X \times Y}
$$

が示された． ■

Sets における積とは，直積集合のことである．

命題 A.5: 圏 Sets における積の存在

圏 **Sets** とその対象 $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ に対して，

- 直積集合 $X \times Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$

- 標準的射影

$$p_X : X \times Y \longrightarrow X,\ (x,\ y) \longmapsto x$$
$$p_Y : X \times Y \longrightarrow Y,\ (x,\ y) \longmapsto y$$

の組は（圏論的な）積である．

<u>**証明**</u> $\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を 1 つとる．積の普遍性は，写像

$$\psi \colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Z,\ X \times Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Z,\ X) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Z,\ Y)$$
$$f \longmapsto \bigl(p_X \circ f,\ p_Y \circ f\bigr)$$

が全単射であることと同値である．

(全射性)

$\forall (f_1,\ f_2) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Z,\ X) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Z,\ Y)$ を 1 つとる．このとき写像 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Z,\ X \times Y)$ を，$\forall z \in Z$ に対して

$$f(z) = \bigl(f_1(z),\ f_2(z)\bigr)$$

を充たすものとして定義すると

$$p_X \circ f(z) = f_1(z),$$
$$p_Y \circ f(z) = f_2(z)$$

が成り立つので $(f_1,\ f_2) = \psi(f)$ である．

(単射性)

$f,\ g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Z,\ X \times Y)$ が $\psi(f) = \psi(g)$ を充たすとする．このとき $\forall z \in Z$ に対して $(x,\ y) \coloneqq g(z)$ とおけば

$$x = p_X \circ g(z) = p_X \circ f(z),$$
$$y = p_Y \circ g(z) = p_Y \circ f(z)$$

が成り立つので，

$$g(z) = (x,\ y) = \bigl(p_X \circ f(z),\ p_Y \circ f(z)\bigr) = f(z)$$

が言える．i.e. $f = g$ であり，ψ は単射である．

■

圏 **Top** における（圏論的な）積を構成するには，**Sets** の積の上に適切な位相を入れると良い．つまり，位相空間 $(X,\ \mathscr{O}_X)$ と $(Y,\ \mathscr{O}_Y)$ の積とは，

- **Sets** の積 $X \times Y$ の上に，
- **Sets** の積の標準的射影 $p_X,\ p_Y$ が **Top** の射，i.e. 連続写像になるような位相 $\mathscr{O}_{X \times Y}$

を入れて構成される位相空間 $(X \times Y,\ \mathscr{O}_{X \times Y})$ のことである．幸い，見慣れた積空間はこれらの条件を充している：

命題 A.6: 圏 Top における積の存在

圏 **Top** とその対象 $(X, \mathscr{O}_X), (Y, \mathscr{O}_Y) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ に対して，

- **Sets** の積 $X \times Y$ の上に，部分集合族

$$\{\, U \times V \subset X \times Y \mid U \in \mathscr{O}_X, V \in \mathscr{O}_Y \,\}$$

 を開基とする位相 $\mathscr{O}_{X\times Y}$ を入れてできる位相空間

$$(X \times Y, \mathscr{O}_{X\times Y}) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$$

- **Sets** の積の標準的射影

$$\begin{aligned} p_X &: X \times Y \longrightarrow X,\ (x, y) \longmapsto x \\ p_Y &: X \times Y \longrightarrow Y,\ (x, y) \longmapsto y \end{aligned}$$

の組は（圏論的な）積である．

証明 $\forall U \in \mathscr{O}_X, \forall V \in \mathscr{O}_Y$ に対して

$$\begin{aligned} p_X^{-1}(U) &= U \times Y, \\ p_Y^{-1}(V) &= X \times V \end{aligned}$$

が成り立つが，$X \in \mathscr{O}_X, Y \in \mathscr{O}_Y$ なので右辺はどちらも開基に属する．i.e. $p_X^{-1}(U) \in \mathscr{O}_{X\times Y}$，$p_Y^{-1}(V) \in \mathscr{O}_{X\times Y}$ であり，p_X, p_Y はどちらも連続である．積の普遍性は **Sets** の積の普遍性から従う． ■

系 A.1:

$\forall (X, \mathscr{O}_X), (Y, \mathscr{O}_Y), (Z, \mathscr{O}_Z) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ を与える．
このとき，写像 $f\colon Z \longrightarrow X \times Y,\ z \longmapsto \big(f_1(z), f_2(z)\big)$ が連続ならば 2 つの写像 $f_1\colon Z \longrightarrow X,\ z \longmapsto f_1(z)$，$f_2\colon Z \longrightarrow Y,\ z \longmapsto f_2(z)$ はどちらも連続である．

証明 命題 A.6 より標準的射影 $p_X\colon X \times Y \longrightarrow X$，$p_Y\colon X \times Y \longrightarrow Y$ はどちらも連続だから，$f_1 = p_X \circ f$，$f_2 = p_Y \circ f$ はどちらも連続写像同士の合成となり，連続である． ■

位相 $\mathscr{O}_{X\times Y}$ の開基は

$$\begin{aligned} \{\, U \times V \mid U \in \mathscr{O}_X, V \in \mathscr{O}_Y \,\} &= \{\, (U \cap X) \times (V \cap Y) \mid U \in \mathscr{O}_X, V \in \mathscr{O}_Y \,\} \\ &= \{\, (U \times Y) \cap (X \times V) \mid U \in \mathscr{O}_X, V \in \mathscr{O}_Y \,\} \end{aligned}$$

であるから，$\mathscr{O}_{X\times Y}$ は部分集合族

$$\begin{aligned} &\{\, (U \times Y) \mid U \in \mathscr{O}_X \,\} \cup \{\, (X \times V) \mid V \in \mathscr{O}_Y \,\} \\ =\ &\{\, p_X^{-1}(U) \subset X \times Y \mid U \in \mathscr{O}_X \,\} \cup \{\, p_Y^{-1}(V) \subset X \times Y \mid V \in \mathscr{O}_Y \,\} \end{aligned}$$

を準開基に持つ．

! つまり，位相 $\mathscr{O}_{X\times Y}$ とは，$\boldsymbol{p_X, p_Y}$ **の両方を連続にする最弱の位相である．**

定義 A.7: 和

圏 $\mathcal{C}$ と，その対象 $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を与える．X と Y の**和** (sum)，もしくは**余積** (coproduct) とは，

- $\boldsymbol{X \amalg Y}$ と書かれる $\mathcal{C}$ の対象
- **標準的包含** (canonical injection) と呼ばれる 2 つの射

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{i_X} &\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X,\, \boldsymbol{X \amalg Y}\right)\\
\boldsymbol{i_Y} &\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(Y,\, \boldsymbol{X \amalg Y}\right)
\end{aligned}
$$

の組であって，以下の普遍性を充たすもののこと：

(和の普遍性) $\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ および $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X,\, Z\right)$, $\forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(Y,\, Z\right)$ に対して，$f \amalg g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\boldsymbol{X \amalg Y},\, Z\right)$ が一意的に存在して図式 A.2 を可換にする．

$$
\begin{tikzcd}
 & \forall Z & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\boldsymbol{i_X}"'] & \boldsymbol{X \amalg Y} \arrow[u, dashed, "\exists! f \amalg g"'] & Y \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "\boldsymbol{i_Y}"]
\end{tikzcd}
$$

図 A.2: 和の普遍性

命題 A.7: 和の一意性

圏 $\mathcal{C}$ の和は，存在すれば同型を除いて一意である．

<u>**証明**</u> 積の一意性の証明と全く同様の論法で示せる． ■

それでは，圏 **Sets** の和を構成してみよう．

命題 A.8: 圏 Sets における和の存在

圏 **Sets** とその対象 $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ に対して，

- 次のように定義される $\boldsymbol{X \sqcup Y} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$[a]

$$
\boldsymbol{X \sqcup Y} \coloneqq \left\{\, (1,\, x) \,\middle|\, x \in X \,\right\} \cup \left\{\, (2,\, y) \,\middle|\, y \in Y \,\right\}
$$

  この集合は X と Y の**非交和** (disjoint union) と呼ばれる．
- 標準的包含

$$
\begin{aligned}
i_1 \colon X &\longrightarrow X \sqcup Y,\ x \longmapsto (1,\, x)\\
i_2 \colon Y &\longrightarrow X \sqcup Y,\ y \longmapsto (2,\, y)
\end{aligned}
$$

の組は（圏論的な）和である．

[a] 接バンドルを念頭において，成分を通常の非交和とは逆の順番に書いた．

証明 $\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を 1 つとる．和の普遍性は，写像

$$\begin{aligned}\psi\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(X \sqcup Y,\, Z) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(X,\, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Y,\, Z) \\ f &\longmapsto \bigl(f \circ i_1,\, f \circ i_2\bigr)\end{aligned}$$

が全単射であることと同値である．

(全射性)

$\forall (f_0,\, f_1) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(X,\, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Y,\, Z)$ を 1 つとる．このとき写像 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(X \sqcup Y,\, Z)$ を，$\forall (\delta,\, z) \in X \sqcup Y$ に対して

$$f(\delta,\, z) = \begin{cases} f_1(z), & \delta = 1, \\ f_2(z), & \delta = 2 \end{cases}$$

を充たすものとして定義すると，$\forall x \in X,\, \forall y \in Y$ に対して

$$\begin{aligned} f \circ i_1(x) &= f_1(x), \\ f \circ i_2(y) &= f_2(y) \end{aligned}$$

が成り立つので $(f_1,\, f_2) = \psi(f)$ である．

(単射性)

$f,\, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(X \sqcup Y,\, Z)$ が $\psi(f) = \psi(g)$ を充たすとする．このとき $\forall (\delta,\, z) \in X \sqcup Y$ に対して $\delta = 1$ のとき

$$g \circ i_1(z) = f \circ i_1(z)$$

が，$\delta = 2$ のとき

$$g \circ i_2(z) = f \circ i_2(z)$$

がそれぞれ成り立つので，

$$g(\delta,\, z) = \begin{cases} f \circ i_1(z) = f(\delta,\, z), & \delta = 1 \\ f \circ i_2(z) = f(\delta,\, z), & \delta = 2 \end{cases}$$

が言える．i.e. $f = g$ であり，ψ は単射である．

■

圏 **Top** において，2 つの対象 $(X,\, \mathscr{O}_X),\, (Y,\, \mathscr{O}_Y) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ の（圏論的な）和を構成するには，**Sets** の和 $X \amalg Y$ の上に適切な位相を入れて標準的包含 $i_1,\, i_2$ が連続になるようにすれば良い．

命題 A.9: 圏 Top における和の存在

圏 $\mathbf{Top}$ とその対象 $(X,\,\mathscr{O}_X),\,(Y,\,\mathscr{O}_Y) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ に対して,

- **Sets の和** $X \amalg Y$ の上に，位相

$$\mathscr{O}_{X \amalg Y} \coloneqq \left\{\, U \subset X \amalg Y \;\middle|\; i_1^{-1}(U) \in \mathscr{O}_X \;\text{ かつ }\; i_2^{-1}(U) \in \mathscr{O}_Y \,\right\} \tag{A.1.1}$$

  を入れてできる位相空間

$$(X \amalg Y,\, \mathscr{O}_{X \amalg Y}) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top}).$$

  なお，$\mathscr{O}_{X \amalg Y}$ は**直和位相** (disjoint union topology) と呼ばれる．
- 標準的包含

$$\begin{aligned} i_1 &: X \longrightarrow X \amalg Y,\; x \longmapsto (0,\, x) \\ i_2 &: Y \longrightarrow X \amalg Y,\; y \longmapsto (1,\, y) \end{aligned}$$

の組は（圏論的な）和である．

証明 定義 (A.1.1) より，$\forall U \in \mathscr{O}_{X \amalg Y}$ に対して

$$\begin{aligned} &i_1^{-1}(U) \in \mathscr{O}_X, \\ &i_2^{-1}(U) \in \mathscr{O}_Y \end{aligned}$$

が成り立つ．i.e. $i_1,\,i_2$ はどちらも連続である．和の普遍性は **Sets** の和の普遍性から従う． ■

! 積位相とは対照的に，直和位相は**標準的包含 $i_1,\,i_1$ の両方を連続にする最強の位相である．**

A.1.3 等化子と余等化子

定義 A.8: 等化子

圏 $\mathcal{C}$ における対象 $X,\,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と，それらの間の 2 つの射

$$X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y$$

を任意に与える．射 $f,\,g$ の**等化子** (equalizer) とは,

- $\mathcal{C}$ の対象 $\mathbf{Eq}(f,\,g) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- 射 $e \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(\mathbf{Eq}(f,\,g),\, X\big)$ であって $f \circ e = g \circ e$ を充たすもの

の組であって，以下の普遍性を充たすもののこと：

(等化子の普遍性) $\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ および $f \circ z = g \circ z$ を充たす任意の射 $z \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,\, X)$ に対して，射 $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(Z,\, \mathbf{Eq}(f,\,g)\big)$ が一意的に存在して図式 A.3 を可換にする．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Eq}(\boldsymbol{f},\, \boldsymbol{g}) \arrow[r, "e"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \\
\forall Z \arrow[u, dashed, "\exists! u"] \arrow[ur, "z"'] & &
\end{tikzcd}
$$

図 A.3: 等化子の普遍性

命題 A.10: 等化子の一意性

圏 $\mathcal{C}$ の等化子は，存在すれば同型を除いて一意である．

証明 積の一意性と同様の論法で示せる． ■

Sets における等化子は，方程式 $f(x) = g(x)$ の解空間のようなものである．

命題 A.11: 圏 Sets における等化子の存在

$\forall X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ と，$\forall f,\, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(X,\, Y)$ を与える．このとき，

- X の部分集合

$$
\mathrm{Eq}(f,\, g) \coloneqq \{\, x \in X \mid f(x) = g(x) \,\} \tag{A.1.2}
$$

- 包含写像

$$
e \colon \mathrm{Eq}(f,\, g) \longrightarrow X,\ x \longmapsto x
$$

の組は写像 $f,\, g$ の等化子である．

証明 $\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ を与える．等化子の普遍性は写像

$$
\begin{aligned}
\psi \colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}\bigl(Z,\, \mathrm{Eq}(f,\, g)\bigr) &\longrightarrow \{\, z \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Z,\, X) \mid f \circ z = g \circ z \,\} \\
h &\longmapsto e \circ h
\end{aligned}
$$

が well-defined な全単射であることと同値である．

(well-definedness)

$\forall h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}\bigl(Z,\, \mathrm{Eq}(f,\, g)\bigr)$ を 1 つとる．集合 $\mathrm{Eq}(f,\, g)$ の定義 (A.1.2) から，このとき $\forall x \in Z$ に対して $f\bigl(e \circ h(x)\bigr) = f\bigl(h(x)\bigr) = g\bigl(h(x)\bigr) = g\bigl(e \circ h(x)\bigr)$ が言えるので ψ は well-defined である．

(全射性)

$f \circ z = g \circ z$ を充たす任意の射 $z \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Z,\, X)$ を与える．このとき $\forall x \in Z$ に対して $f\bigl(z(x)\bigr) = g\bigl(z(x)\bigr)$ が成り立つので $z(x) \in \mathrm{Eq}(f,\, g)$ であり，$z(x) = e \circ z(x)$ が言える．i.e. $z = \psi(z)$ である．

(単射性)

2 つの射 $h,\, k \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}\bigl(Z,\, \mathrm{Eq}(f,\, g)\bigr)$ が $\psi(h) = \psi(k)$ を充たすとする．このとき $\forall x \in Z$ に対して $h(x) = e \circ h(x) = \psi(h)(x) = \psi(k)(x) = e \circ k(x) = k(x)$ が成り立つので $h = k$ が言える．i.e.

ψ は単射である．

■

これに位相を入れることで位相空間の圏 **Top** における等化写像が構成できる．

命題 A.12: 圏 Top における等化子の存在

$\forall (X, \mathscr{O}_X), (Y, \mathscr{O}_Y) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ と，$\forall f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ を与える．このとき，

- 圏 **Sets** における等化子 $\mathrm{Eq}(f, g)$ に X からの相対位相

$$\mathscr{O}_{\mathrm{Eq}(f,g)} \coloneqq \left\{ U \cap \mathrm{Eq}(f, g) \mid U \in \mathscr{O}_X \right\}$$

  を入れてできる位相空間

$$\bigl(\mathrm{Eq}(f, g), \mathscr{O}_{\mathrm{Eq}(f,g)}\bigr) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$$

- 包含写像

$$e\colon \mathrm{Eq}(f, g) \longrightarrow X,\ x \longmapsto x$$

の組は連続写像 f, g の等化子である．

<u>証明</u> $\forall U \in \mathscr{O}_X$ に対して

$$e^{-1}(U) = U \cap \mathrm{Eq}(f, g) \in \mathscr{O}_{\mathrm{Eq}(f,g)}$$

なので e は連続である．等化子の普遍性は **Sets** における等化子の普遍性から従う． ■

! $\mathrm{Eq}(f, g)$ に入れた位相は包含写像 $\boldsymbol{e}$ **を連続にする最弱の位相**である．

定義 A.9: 余等化子

圏 $\mathcal{C}$ における対象 $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と，それらの間の 2 つの射

$$X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y$$

を任意に与える．射 f, g の**余等化子** (coequalizer) とは，

- $\mathcal{C}$ の対象 $\boldsymbol{Q} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- 射 $\boldsymbol{q} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, \boldsymbol{Q})$ であって $\boldsymbol{q} \circ f = \boldsymbol{q} \circ g$ を充たすもの

の組であって，以下の普遍性を充たすもののこと：

(余等化子の普遍性) $\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ および $z \circ f = z \circ g$ を充たす任意の射 $z \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ に対して，射 $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{Q}, Z)$ が一意的に存在して図式 A.4 を可換にする．

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "\boldsymbol{q}"] \arrow[dr, "z"'] & \boldsymbol{Q} \arrow[d, dashed, "\exists ! u"] \\
& & \forall Z
\end{tikzcd}$$

図 A.4: 余等化子の普遍性

命題 A.13: 余等化子の一意性

圏 $\mathcal{C}$ の余等化子は，存在すれば同型を除いて一意である．

集合と写像の圏 **Sets** においては，余等化子はある種の商集合である．

命題 A.14: 圏 Sets における余等化子の存在

$\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ と，$\forall f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(X, Y)$ を与える．部分集合 $\sim \subset Y \times Y$ を，$\forall x \in X$ に対して $f(x) \sim g(x)$ を充たす Y の最小の同値関係とする．このとき，

- Y の商集合
$$Y/\sim \coloneqq \{ [y] \mid y \in Y \}$$
- 商写像
$$q\colon Y \longrightarrow Y/\sim,\ y \longmapsto [y]$$

の組は写像 f, g の余等化子である．

<u>**証明**</u> 本題に入る前に，Y の同値関係 $\sim \subset Y \times Y$ は，$\forall x \in X$ に対して $\big(f(x), g(x)\big) \in R$ を充たす全ての同値関係[*3] $R \subset Y \times Y$ の共通部分であることに注意する．

$\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ を与える．余等化子の普遍性は写像

$$\begin{aligned}
\psi\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}\big(Y/\sim, Z\big) &\longrightarrow \{ z \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Y, Z) \mid z \circ f = z \circ g \} \\
h &\longmapsto h \circ q
\end{aligned}$$

が well-defined な全単射であることと同値である．

(well-definedness)

$\forall h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Y/\sim, Z)$ を 1 つとる．同値関係 $\sim$ の定義から $\forall x \in X$ に対して $[f(x)] = [g(x)]$ が成り立つから $h \circ q\big(f(x)\big) = h\big([f(x)]\big) = h\big([g(x)]\big) = h \circ q\big(g(x)\big)$ が言える．i.e. $\psi(h) \circ f = \psi(h) \circ g$ なので ψ は well-defined である．

(全射性)

$z \circ f = z \circ g$ を充たす任意の射 $z \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Y, Z)$ を与える．Y の同値関係 $R_z \subset Y \times Y$ を

$$(y, y') \in R_z \quad \Longleftrightarrow \quad z(y) = z(y')$$

[*3] $Y \times Y$ はこの条件を充たす同値関係なので，$\sim$ の存在が言える．

によって定義する[*4]．このとき，$\forall x \in X$ に対して $z\bigl(f(x)\bigr) = z\bigl(g(x)\bigr)$ が成り立つので $\bigl(f(x),\, g(x)\bigr) \in R_z$ であり，$\sim \subset R_z$ が分かる．つまり $y \sim y' \implies (y,\, y') \in R_z \implies z(y) = z(y')$ なので，写像

$$\overline{z}\colon Y/{\sim} \longrightarrow Z,\ [y] \longmapsto z(y)$$

は $[y]$ の代表元の取り方によらず，well-defined である．故に $z = \overline{z} \circ q = \psi(\overline{z})$ である．

(単射性)

2 つの射 $h,\, k \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}\,(Y/{\sim},\, Z)$ が $\psi(h) = \psi(k)$ を充たすとする．このとき $\forall y \in Y$ に対して $h \circ q(y) = k \circ q(y) \iff h([y]) = k([y])$ が成り立つので $h = k$ が言える．i.e. ψ は単射である．

■

命題 A.15: 圏 Top における余等化子の存在

$\forall (X,\, \mathscr{O}_X),\, (Y,\, \mathscr{O}_Y) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ と，$\forall f,\, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\,(X,\, Y)$ を与える．このとき，

- **Sets の余等化子** $Y/{\sim}$ に Y からの商位相

$$\mathscr{O}_{Y/\sim} := \left\{\, U \subset Y/{\sim} \;\middle|\; q^{-1}(U) \in \mathscr{O}_X \,\right\}$$

  を入れてできる商位相空間

$$\bigl(Y/{\sim},\, \mathscr{O}_{Y/\sim}\bigr) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$$

- 商写像

$$q\colon Y \longrightarrow Y/{\sim},\ y \longmapsto [y]$$

の組は連続写像 $f,\, g$ の余等化子である．

証明 $\forall U \in \mathscr{O}_{Y/\sim}$ に対して $q^{-1}(U) \in \mathscr{O}_{Y/\sim}$ なので q は連続である．余等化子の普遍性は **Sets** における余等化子の普遍性から従う．■

! $Y/{\sim}$ に入れた位相は**商写像 q を連続にする最強の位相**であると言える．

A.1.4 引き戻しと押し出し

定義 A.10: 引き戻し

圏 $\mathcal{C}$ における対象 $X,\, Y,\, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と，それらの間の 2 つの射

[*4] z が写像であることから $z(y) = z(y)$ なので $(y,\, y) \in R_z$（反射律）が，$z(y) = z(y') \implies z(y') = z(y)$ なので $(y,\, y') \in R_z \implies (y',\, y) \in R_z$（対称律）が，$z(y) = z(y')$ かつ $z(y') = z(y'') \implies z(y) = z(y'')$ なので $(y,\, y'),\, (y',\, y'') \in R_z \implies (y,\, y'') \in R_z$（推移律）が従う．

$$
\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, "f"] & Z
\end{tikzcd}
$$

を与える．射 f, g の**引き戻し** (pullback)[a] とは,

- $\mathcal{C}$ の対象 $\boldsymbol{P} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- 2 つの射 $\boldsymbol{\pi_1} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{P},\, X)$, $\boldsymbol{\pi_2} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{P},\, Y)$ であって $f \circ \boldsymbol{\pi_1} = g \circ \boldsymbol{\pi_2}$ を充たすもの：

$$
\begin{tikzcd}
\boldsymbol{P} \arrow[r, "\boldsymbol{\pi_2}"] \arrow[d, "\boldsymbol{\pi_1}"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, "f"] & Z
\end{tikzcd}
$$

の組であって，以下の普遍性を充たすもののこと：

(引き戻しの普遍性) $\forall W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ および 2 つの射 $w_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,\, X)$, $w_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,\, Y)$ であって $f \circ w_1 = g \circ w_2$ を充たすものに対して，射 $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,\, \boldsymbol{P})$ が一意的に存在して図式 A.5 を可換にする．

$$
\begin{tikzcd}
\forall W \arrow[dr, dashed, "\exists ! u"] \arrow[drr, bend left, "w_2"] \arrow[ddr, bend right, "w_1"'] & & \\
 & \boldsymbol{P} \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
 & X \arrow[r, "f"] & Z
\end{tikzcd}
$$

図 A.5: 引き戻しの普遍性

対象 $\boldsymbol{P}$ はしばしば $\boldsymbol{X} \times_{\boldsymbol{Z}} \boldsymbol{Y}$ と書かれる．

[a] **ファイバー積** (fiber product) と呼ぶ場合がある．

命題 A.16: 引き戻しの一意性

圏 $\mathcal{C}$ の引き戻しは，存在すれば同型を除いて一意である．

命題 A.17: 圏 Sets における引き戻し

$\forall X,\, Y,\, Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ と，$\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(X,\, Z)$, $\forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Y,\, Z)$ を与える．このとき，

- 集合

$$X \times_Z Y \coloneqq \left\{ (x,\, y) \in X \times Y \;\middle|\; f(x) = g(y) \right\}$$

- **Sets における積の標準的射影** $p_X,\, p_Y$ の制限

$$\begin{aligned} \pi_1 &\coloneqq p_X|_{X \times_Z Y} \colon X \times_Z Y \longrightarrow X,\; (x,\, y) \longmapsto x \\ \pi_2 &\coloneqq p_Y|_{X \times_Z Y} \colon X \times_Z Y \longrightarrow Y,\; (x,\, y) \longmapsto y \end{aligned}$$

の組は写像 $f,\, g$ の引き戻しである．

<u>証明</u> $\forall W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ を与える．引き戻しの普遍性は写像

$$\begin{aligned} \psi \colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(W,\, \boldsymbol{X} \times_{\boldsymbol{Z}} \boldsymbol{Y}) &\longrightarrow \left\{ (w_1,\, w_2) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(W,\, X) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(W,\, Y) \;\middle|\; f \circ w_1 = g \circ w_2 \right\} \\ h &\longmapsto \big(\pi_1 \circ h,\, \pi_2 \circ h\big) \end{aligned}$$

が well-defined な全単射であることと同値である．

(well-definedness)

$\forall h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(W,\, \boldsymbol{X} \times_{\boldsymbol{Z}} \boldsymbol{Y})$ を 1 つとる．このとき $\forall x \in W$ に対して $h(x) = \big(h_1(x),\, h_2(x)\big) \in X \times_Z Y$ と書くと $f\big(h_1(x)\big) = g\big(h_2(x)\big)$ が成り立つ．$h_1(x) = \pi_1 \circ h(x)$, $h_2(x) = \pi_2 \circ h(x)$ なので ψ が well-defined であることが示された．

(全射性)

$f \circ w_1 = g \circ w_2$ を充たす任意の写像の組 $(w_1,\, w_2) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(W,\, X) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(W,\, Y)$ をとる．このとき写像

$$w \colon W \longrightarrow X \times_Z Y$$

を $\forall x \in W$ に対して

$$w(x) \coloneqq \big(w_1(x),\, w_2(x)\big)$$

と定めると w は well-defined である．従って **Sets における積の普遍性**の証明から $(w_1,\, w_2) = \psi(w)$ である．

(単射性)

Sets における積の普遍性の証明と全く同様に示せる．

■

命題 A.18: 圏 Top における引き戻しの存在

$\forall (X,\, \mathscr{O}_X),\, (Y,\, \mathscr{O}_Y),\, (Z,\, \mathscr{O}_Z) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ と，$\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\, Z),\, \forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Y,\, Z)$ を与える．このとき，

- **Sets** の引き戻し $X \times_Z Y$ の上に積空間 $(X \times Y,\, \mathscr{O}_{X \times Y})$ からの相対位相

$$\mathscr{O}_{X \times_Z Y} := \left\{ U \cap X \times_Z Y \;\middle|\; U \in \mathscr{O}_{X \times Y} \right\}$$

  を入れてできる位相空間

$$\left(X \times_Z Y,\, \mathscr{O}_{X \times_Z Y} \right) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$$

- **Top** における積の標準的射影 $p_X,\, p_Y$ の制限

$$\begin{aligned} \pi_1 &:= p_X|_{X \times_Z Y} : X \times_Z Y \longrightarrow X,\; (x,\, y) \longmapsto x \\ \pi_2 &:= p_Y|_{X \times_Z Y} : X \times_Z Y \longrightarrow Y,\; (x,\, y) \longmapsto y \end{aligned}$$

の組は連続写像 $f,\, g$ の引き戻しである．

<u>**証明**</u> 命題 A.6 より $p_X,\, p_Y$ は連続なので，$\pi_1,\, \pi_2$ も連続である．引き戻しの普遍性は **Sets** における引き戻しの普遍性から従う． ■

! $X \times_Z Y$ に入れた位相は $\boldsymbol{\pi_1},\, \boldsymbol{\pi_2}$ **を連続にする最弱の位相である．**

定義 A.11: 押し出し

圏 $\mathcal{C}$ における対象 $X,\, Y,\, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と，それらの間の 2 つの射

$$\begin{tikzcd} & Y \\ X & Z \arrow[l, "f"'] \arrow[u, "g"] \end{tikzcd}$$

を与える．射 $f,\, g$ の**押し出し** (pushout)[a] とは，

- $\mathcal{C}$ の対象 $\boldsymbol{P} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- 2 つの射 $\boldsymbol{\iota_1} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, \boldsymbol{P}),\, \boldsymbol{\iota_2} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\, \boldsymbol{P})$ であって $\boldsymbol{\iota_1} \circ f = \boldsymbol{\iota_2} \circ g$ を充たすもの：

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{P} & Y \arrow[l, "\boldsymbol{\iota_2}"'] \\ X \arrow[u, "\boldsymbol{\iota_1}"] & Z \arrow[l, "f"'] \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

の組であって，以下の普遍性を充たすもののこと：

(押し出しの普遍性) $\forall W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ および 2 つの射 $w_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, W),\, w_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\, W)$ であって $w_1 \circ f = w_2 \circ g$ を充たすものに対して，射 $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{P},\, W)$ が一意的に存在して図式 A.5 を可換にする．

$$
\begin{tikzcd}
\forall W & & \\
& \boldsymbol{P} \arrow[ul, dashed, "\exists ! u"'] & Y \arrow[l, "\iota_2"'] \arrow[ull, bend right, "w_2"'] \\
& X \arrow[u, "\iota_1"] \arrow[uul, bend left, "w_1"] & Z \arrow[l, "f"'] \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}
$$

図 A.6: 押し出しの普遍性

対象 $\boldsymbol{P}$ はしばしば $\boldsymbol{X \amalg_Z Y}$ と書かれる．

[a] **ファイバー和** (fiber sum) と呼ぶ場合がある．

命題 A.19: 押し出しの一意性

圏 $\mathcal{C}$ の押し出しは，存在すれば同型を除いて一意である．

命題 A.20: 圏 Sets における押し出し

$\forall X,\, Y,\, Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ と，$\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Z,\, X)$，$\forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Z,\, Y)$ を与える．部分集合 $\sim \subset (X \amalg Y) \times (X \amalg Y)$ を，$\forall z \in Z$ に対して $\bigl(1,\, f(z)\bigr) \sim \bigl(2,\, g(z)\bigr)$ を充たす $X \amalg Y$ の最小の同値関係とする．このとき，

- Sets の和 $X \amalg Y$ の商集合
$$X \amalg_Z Y \coloneqq (X \amalg Y)/\sim$$
- Sets における和の標準的包含 $i_1,\, i_2$ と商写像 $q\colon X \amalg Y \longrightarrow X \amalg_Z Y,\ (\delta,\, w) \longmapsto [\delta,\, w]$ の合成
$$\iota_1 \coloneqq q \circ i_1 \colon X \longrightarrow X \amalg_Z Y,\ x \longmapsto [1,\, x]$$
$$\iota_2 \coloneqq q \circ i_2 \colon Y \longrightarrow X \amalg_Z Y,\ y \longmapsto [2,\, y]$$

の組は写像 $f,\, g$ の押し出しである．

証明 $\forall W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ を与える．押し出しの普遍性は写像

$$\psi\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(\boldsymbol{X \amalg_Z Y},\, W) \longrightarrow \bigl\{\, (w_1,\, w_2) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(X,\, W) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Y,\, W) \bigm| w_1 \circ f = w_2 \circ g \,\bigr\}$$
$$h \longmapsto \bigl(h \circ \iota_1,\, h \circ \iota_2\bigr)$$

が well-defined な全単射であることと同値である．

(well-definedness)

$\forall h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(W,\, \boldsymbol{X \times_Z Y})$ を 1 つとる．このとき同値関係 $\sim$ の定義から，$\forall z \in Z$ に対して $(h \circ \iota_1) \circ f(z) = h\bigl([1,\, f(z)]\bigr) = h\bigl([2,\, g(z)]\bigr) = (h \circ \iota_2) \circ g(z)$ が成り立つ．i.e. ψ は well-defined である．

(全射性)

$w_1 \circ f = w_2 \circ g$ を充たす任意の写像の組 $(w_1,\, w_2) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(X,\, W) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Y,\, W)$ をとる．同値関係 $R_{w_1 w_2} \subset (X \amalg Y) \times (X \amalg Y)$ を

$$\big((\delta,\, v),\, (\delta',\, v')\big) \in R_{w_1 w_2} \quad \Longleftrightarrow \quad w_\delta(v) = w_{\delta'}(v')$$

により定義する．このとき $\forall z \in Z$ に対して $w_1\big(f(z)\big) = w_2\big(g(z)\big)$ が成り立つので $\Big((1,\, f(z)),\, (2,\, g(z))\Big) \in R_{w_1 w_2}$ であり，同値関係 $\sim$ の最小性から $\sim\, \subset R_{w_1 w_2}$ が分かる．よって写像

$$\overline{w}\colon X \amalg_Z Y \longrightarrow W,\ [\delta,\, v] \longmapsto w_\delta(v)$$

は well-defined である．従って $(w_1,\, w_2) = \big(\overline{w} \circ \iota_1,\, \overline{w} \circ \iota_2\big) = \psi(\overline{w})$ が示された．

(単射性)

Sets における和の普遍性の証明と全く同様に示せる．

■

命題 A.21: 圏 Top における押し出しの存在

$\forall (X,\, \mathscr{O}_X),\, (Y,\, \mathscr{O}_Y),\, (Z,\, \mathscr{O}_Z) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ と，$\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Z,\, X),\, \forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Z,\, Y)$ を与える．このとき，

- Sets の押し出し $X \amalg_Z Y$ の上に直和位相空間 $(X \amalg Y,\, \mathscr{O}_{X \amalg Y})$ からの商位相

  $$\mathscr{O}_{X \amalg_Z Y} \coloneqq \big\{\, U \subset X \amalg_Z Y \;\big|\; q^{-1}(U) \in \mathscr{O}_{X \amalg Y} \,\big\}$$

  を入れてできる位相空間

  $$\big(X \amalg_Z Y,\, \mathscr{O}_{X \amalg_Z Y}\big) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$$

- Top における和の標準的包含 $i_1,\, i_2$ と商写像 $q\colon X \amalg Y \longrightarrow X \amalg Y/{\sim},\ (\delta,\, z) \longmapsto [\delta,\, z]$ の合成

  $$\begin{aligned}\iota_1 &\coloneqq q \circ i_1 \colon X \longrightarrow X \amalg_Z Y,\ x \longmapsto [0,\, x] \\ \iota_2 &\coloneqq q \circ i_2 \colon Y \longrightarrow X \amalg_Z Y,\ y \longmapsto [1,\, y]\end{aligned}$$

の組は連続写像 $f,\, g$ の押し出しである．

<u>証明</u> 命題 A.6 より $i_1,\, i_2$ は連続である．$\mathscr{O}_{X \amalg_Z Y}$ の定義より q も連続だから $\iota_2,\, \iota_2$ も連続である．押し出しの普遍性は Sets における押し出しの普遍性から従う． ■

$X \amalg_Z Y$ に入れた位相は $\iota_1,\, \iota_2$ を連続にする最強の位相である．

A.1.5 双対性

これまで登場した普遍性の図式を列挙してみよう．

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} & \forall Z \arrow[l, dashed] \end{tikzcd}$$

(a) 終対象の普遍性

$$\begin{tikzcd} \mathbf{0} \arrow[r, dashed] & \forall Z \end{tikzcd}$$

(b) 始対象の普遍性

$$\begin{tikzcd} & \forall Z \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\exists! f\times g"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} \arrow[l, "p_X"] \arrow[r, "p_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

(a) 積の普遍性

$$\begin{tikzcd} & \forall Z & \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "i_X"'] & \boldsymbol{X} \amalg \boldsymbol{Y} \arrow[u, dashed, "\exists! f\amalg g"] & Y \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "i_Y"] \end{tikzcd}$$

(b) 和の普遍性

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Eq}(\boldsymbol{f},\, \boldsymbol{g}) \arrow[r, "\boldsymbol{e}"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \\ \forall Z \arrow[u, dashed, "\exists! u"] \arrow[ur, "z"'] & & \end{tikzcd}$$

(a) 等化子の普遍性

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{Q} \arrow[d, dashed, "\exists! u"'] & X \arrow[l, "\boldsymbol{q}"'] \arrow[dl, "z"] & Y \arrow[l, shift right, "g"'] \arrow[l, shift left, "f"] \\ \forall Z & & \end{tikzcd}$$

(b) 余等化子の普遍性

$$\begin{tikzcd} \forall W \arrow[dr, dashed, "\exists! u"] \arrow[drr, bend left, "w_2"] \arrow[ddr, bend right, "w_1"'] & & \\ & \boldsymbol{P} \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & X \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

(a) 引き戻しの普遍性

$$\begin{tikzcd} \forall W & & \\ & \boldsymbol{P} \arrow[ul, dashed, "\exists! u"'] & Y \arrow[l, "\iota_2"'] \arrow[ull, bend right, "w_2"'] \\ & X \arrow[u, "\iota_1"] \arrow[uul, bend left, "w_1"] & Z \arrow[l, "f"'] \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

(b) 押し出しの普遍性

今や法則は一目瞭然である．つまり，**右の図式は左の図式の射の向きを逆にしたものだと言える．**

定義 A.12: 反対圏

圏 $\mathcal{C}$ の**反対圏** (opposite category)[a] $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ とは，

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) := \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(A,\, B) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,\, A)$
- 合成

$$\circ^{\mathrm{op}} \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(A,\, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(B,\, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(A,\, C),\ (f,\, g) \longmapsto g \circ f$$

は，$\mathcal{C}$ における合成を $\circ$ と書いたときに

$$g \circ^{\mathrm{op}} f := f \circ g$$

と定める．

のようにして構成される圏のことである．要するに，$\mathcal{C}$ と対象は同じだが**矢印が全て逆向き**になっているような圏のこと．

[a] **双対圏** (dual category) とも言う．

これまでに登場した圏 **Top** における構成は，

(1) まず圏 **Sets** において普遍性を充たすような対象を構成し，
(2) **Sets** における普遍性に登場する射が連続になるような上手い位相を入れる

という流れであった．そして注意 A.1.2, A.1.2, A.1.3, A.1.3, A.1.4, A.1.4 から，**位相の入れ方にも一種の双対性が見てとれる**：

最弱の位相	最強の位相
始対象	終対象
積	和
等化子	余等化子
引き戻し	押し出し

こうして我々は，**始位相**と**終位相**の概念にたどり着く．

定義 A.13: 始位相

- 集合 $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$
- 位相空間の族 $\left\{(Y_\lambda,\, \mathscr{O}_\lambda) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})\right\}_{\lambda\in\Lambda}$
- 写像の族 $\mathcal{F} := \left\{\varphi_\lambda \colon X \longrightarrow Y_\lambda\right\}_{\lambda\in\Lambda}$

を与える．写像の族 $\mathcal{F}$ によって誘導される X の**始位相** (initial topology)[a] とは，X の位相のうち，$\forall\lambda \in \Lambda$ について φ_λ を連続にする**最弱の**位相のこと．

[a] **極限位相** (limit topology) や，**射影的位相** (projective topology) と呼ぶことがある．

明示的には，X の部分集合族

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \left\{\, \varphi_\lambda^{-1}(U) \subset X \;\middle|\; U \in \mathscr{O}_\lambda \,\right\}$$

を準開基とする X の位相のことを言う．

定義 A.14: 終位相

- 集合 $Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$
- 位相空間の族 $\left\{(X_\lambda,\, \mathscr{O}_\lambda) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})\right\}_{\lambda\in\Lambda}$

- 写像の族 $\mathcal{F} \coloneqq \{\varphi_\lambda \colon X_\lambda \longrightarrow Y\}_{\lambda\in\Lambda}$

を与える．写像の族 $\mathcal{F}$ によって誘導される Y の**終位相** (final topology)[a] とは，Y の位相のうち，$\forall\lambda \in \Lambda$ について φ_λ を連続にする**最強の**位相のこと．

[a] **余極限位相** (colimit topology) や，**帰納的位相** (inductive topology) と呼ぶことがある．

明示的には，Y の部分集合族

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\left\{\, U \subset Y \;\middle|\; \varphi_\lambda^{-1}(U) \in \mathscr{O}_\lambda \,\right\}$$

のことである．

A.1.6　極限と余極限

実は，終対象，積，等化子，引き戻しおよびそれらの双対は全て統一的に理解できる．それは**極限**とその双対（**余極限**）である．極限の定義の準備をする．

定義 A.15: 関手

2 つの圏 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ をとる．

$$\boldsymbol{F} \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

と書かれる $\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への**関手** (functor) は，以下の 2 つの対応付けからなる：

- $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ にはある対象 $\boldsymbol{F(X)} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ を対応させ，
- $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ にはある射 $\boldsymbol{F(f)} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(X), F(Y)\big)$ を対応させる．

これらの構成要素は次の 2 条件を充たさねばならない：

(1) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$$

が成り立つ．

(2) $\forall X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ および $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $\forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ に対して

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

が成り立つ．

これまでもなんとなく**図式**という用語を使ってきたが，正確な定義は次のようになる．

定義 A.16: 図式

圏 $\mathcal{C}$ における $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ **型** (type $\mathcal{I}$) の**図式** (diagram) とは，圏 $\mathcal{I}$ からの関手

$$\boldsymbol{D} \colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$$

のこと．圏 $\mathcal{I}$ は**添字圏** (indexing category) と呼ばれる．

定義 A.16 はかなり抽象的だが，例えば添字圏 $\mathcal{I}$ として**有向グラフ**から作られる**自由圏**を考えてみると，見慣れた（手でかけるサイズの）可換図式がきっちり定義されていることが確認できる．

定義 A.17: 有向グラフ

- **頂点** (vertex) 集合 V
- **辺** (edge) 集合 E
- **始点関数** (source function) $s \colon E \longrightarrow V$
- **終点関数** (target function) $t \colon E \longrightarrow V$

の 4 つ組 $\Gamma := (V,\, E,\, s,\, t)$ のことを**有向グラフ** (directed graph) と呼ぶ [3]．頂点 $v,\, w \in V$ に対して $s(e) = v,\; t(e) = w$ を充たすような辺 $e \in E$ のことを，$\boldsymbol{v}$ **から** $\boldsymbol{w}$ **へ向かう辺**と呼ぶ．

- 有向グラフ Γ の長さ $n \geq 0$ の**道** (path) とは組 $(v;\, e_1,\, \dots,\, e_n) \in V \times E^n$ であって以下を充たすもののこと[a]：
  (1) $s(e_1) = v$
  (2) $\forall i \in \{1,\, \dots,\, n-1\}$ に対して $t(e_i) = s(e_{i+1})$
- Γ の長さ n の道 $p := (v;\, e_1,\, \dots,\, e_n)$ の**始点**を

$$\boldsymbol{s(p)} := v$$

と定義する．p の**終点**は

$$\boldsymbol{t(p)} := \begin{cases} v, & n = 0 \\ t(e_n), & n \geq 1 \end{cases}$$

と定義する．
- Γ の 2 つの道 $p := (v;\, e_1,\, \dots,\, e_n),\; q := (w;,\, f_1,\, \dots,\, f_m)$ が $t(p) = s(q)$ を充たすとき，$p,\, q$ の**連結**と呼ばれる長さ $n+m$ の道を

$$\boldsymbol{p \circ q} := \bigl(v;\, e_1,\, \dots,\, e_n,\, f_1,\, \dots,\, f_m\bigr) \in V \times E^{n+m}$$

によって定義する．
- Γ の 2 つの道 $p,\, q$ が**平行** (parallel) であるとは，

$$s(p) = s(q) \quad \text{かつ} \quad t(p) = t(q)$$

が成り立つこと．

[a] 長さ 0 の道とは $(v) \in V$ のことである．つまり，文字通り**辺を 1 回も辿らない**．

> **定義 A.18: 自由圏**
>
> 任意の有向グラフ $\Gamma = (V,\, E,\, s,\, t)$ に対して，Γ 上の**自由圏** (free category) $\mathbf{Free}(\Gamma)$ を次のように定義する：
>
> - 対象は Γ の頂点とする：$\mathrm{Ob}(\mathbf{Free}(\Gamma)) := \Gamma$
> - $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Free}(\Gamma)}(v,\, w)$ は v から w へのすべての道が成す集合とする．
> - 対象 v 上の恒等射は v を始点とする長さ 0 の道とする．
> - 射の合成は道の連結とする．

自由圏の例をいくつか挙げる．

【例 A.1.1】自由圏 0

頂点も辺も空であるような有向グラフを素材とする自由圏

$$\mathbf{0} := \mathbf{Free}\left(\boxed{}\right)$$

においては $\mathrm{Ob}(\mathbf{0}) = \emptyset$ で，射も空である．

【例 A.1.2】自由圏 1

自由圏

$$\mathbf{1} := \mathbf{Free}\left(\boxed{\overset{v_1}{\bullet}}\right)$$

においては $\mathrm{Ob}(\mathbf{1}) = \{v_1\}$ で，射は $\mathrm{Hom}_{\mathbf{1}}(v_1,\, v_1) = \{(v_1)\}$ の 1 つしかない．
一方，自由圏

$$\mathbf{1'} := \mathbf{Free}\left(\boxed{\overset{v_1}{\bullet} \circlearrowleft e_1}\right)$$

を考えると，

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{1'}}(v_1,\, v_1) = \left\{\, (v_1),\, (v_1;\, e_1),\, (v_1;\, e_1) \circ (v_1;\, e_1),\, \ldots \right\}$$

のように無限個の射がある．

【例 A.1.3】自由圏 n

$$\mathbf{2} := \mathbf{Free}\left(\boxed{\overset{v_1}{\bullet} \xrightarrow{e_1} \overset{v_2}{\bullet}}\right)$$

においては $\mathrm{Ob}(\mathbf{2}) = \{v_1,\ v_2\}$ で，射は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{2}}(v_1,\ v_1) &= \{(v_1)\} \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{2}}(v_2,\ v_2) &= \{(v_2)\} \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{2}}(v_1,\ v_2) &= \{(v_1;\ e_1)\}
\end{aligned}
$$

の 3 つである．同様にして自由圏 $\mathbf{3},\ \mathbf{4},\ \ldots$ を定義できる．

以降では文脈上明らかな場合は有向グラフとそれを素材にした自由圏の違いを無視する．可換図式の定式化は次のようになる：

定義 A.19: 可換図式

圏 $\mathcal{C}$ における $\mathcal{I}$ 型の図式 $D \colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ が**可換図式** (commutative diagram) であるとは，$\mathcal{I}$ における全ての平行な射の組 $f,\ g \colon i \longrightarrow j$ に対して $D(f) = D(g)$ が成り立つこと．

【例 A.1.4】積の普遍性の図式

$$
\mathcal{I} := \mathbf{Free}\left(\boxed{\begin{tikzcd}
 & 4 \arrow[dl, "e_{41}"'] \arrow[d, "e_{43}"] \arrow[dr, "e_{42}"] & \\
1 & 3 \arrow[l, "e_{31}"] \arrow[r, "e_{32}"'] & 2
\end{tikzcd}}\right)
$$

と定義すると，$\mathcal{I}$ における平行な射は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(4,\ 1) &= \left\{e_{41},\ e_{31} \circ e_{43}\right\}, \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(4,\ 2) &= \left\{e_{42},\ e_{32} \circ e_{43}\right\}
\end{aligned}
$$

である．一般に平行な道の間には**道の等式**を課すことができる．今回の場合

$$
\begin{aligned}
e_{41} &= e_{31} \circ e_{43}, \\
e_{42} &= e_{32} \circ e_{43}
\end{aligned}
$$

の 2 つを課すことで図式

$$
D \colon \boxed{\begin{array}{c}
\begin{tikzcd}
 & 4 \arrow[dl, "e_{41}"'] \arrow[d, "e_{43}"] \arrow[dr, "e_{42}"] & \\
1 & 3 \arrow[l, "e_{31}"] \arrow[r, "e_{32}"'] & 2
\end{tikzcd} \\
e_{41} = e_{31} \circ e_{43}, \qquad e_{42} = e_{32} \circ e_{43}
\end{array}} \longrightarrow \mathcal{C}
$$

はちょうど圏 $\mathcal{C}$ における積の普遍性を表す可換図式になる．

圏 $\mathcal{C}$ における図式の概念が定義されたので，極限の定義を始める．

定義 A.20: 錐の圏

$D\colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ を図式とする．

- D 上の**錐** (cone) とは，
  - $\mathcal{C}$ の対象 $\boldsymbol{C} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
  - $\mathcal{C}$ の射の族 $\boldsymbol{c}_\bullet \coloneqq \left\{\boldsymbol{c}_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\boldsymbol{C},\, D(i)\right)\right\}_{i\in\mathrm{Ob}(\mathcal{I})}$

  の組 $(\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{c}_\bullet)$ であって，$\forall i,\, j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ および $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i,\, j)$ に対して

  $$\boldsymbol{c}_j = \boldsymbol{c}_i \circ D(f)$$

  を充たす，i.e. 以下の図式を可換にするもののこと．

  $$\begin{tikzcd} & \boldsymbol{C} \arrow[dl, bend right, "\boldsymbol{c}_i"'] \arrow[dr, bend left, "\boldsymbol{c}_j"] & \\ D(i) \arrow[rr, "D(f)"] & & D(j) \end{tikzcd}$$

- **錐の射** (morphism of cones)

  $$(\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{c}_\bullet) \xrightarrow{\color{red}u} (\boldsymbol{C'},\, \boldsymbol{c'}_\bullet)$$

  とは，$\mathcal{C}$ の射 ${\color{red}u} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{C'})$ であって，$\forall i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ に対して

  $$\boldsymbol{c}_i = {\color{red}u} \circ \boldsymbol{c}'_i$$

  を充たす，i.e. 以下の図式を可換にするもののこと．

  $$\begin{tikzcd} & \boldsymbol{C} \arrow[d, red, "u"] \arrow[ddl, bend right, "\boldsymbol{c}_i"'] \\ & \boldsymbol{C'} \arrow[dl, bend right, "\boldsymbol{c}'_i"] \\ D(i) & \end{tikzcd}$$

D 上の錐と錐の射を全て集めたものは圏 $\mathbf{Cone}(D)$ を成す．

定義 A.21: 極限

図式 $D\colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ の**極限** (limit)[a]とは，圏 $\mathbf{Cone}(D)$ の終対象のこと．記号として $\left(\varprojlim \boldsymbol{D},\, \boldsymbol{p}_\bullet\right)$ と書く．i.e. 極限 $\left(\varprojlim \boldsymbol{D},\, \boldsymbol{p}_\bullet\right) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cone}(D))$ は，以下の普遍性を充たす：

(極限の普遍性)

$\forall({\color{blue}\boldsymbol{C}},\, {\color{blue}\boldsymbol{c}_\bullet}) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cone}(D))$ に対して，錐の射 ${\color{red}u} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cone}(D)}\left(({\color{blue}\boldsymbol{C}},\, {\color{blue}\boldsymbol{c}_\bullet}),\, \left(\varprojlim \boldsymbol{D},\, \boldsymbol{p}_\bullet\right)\right)$ が一

意的に存在して，$\forall i,\, j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ および $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i,\, j)$ に対して図式を可換にする．

$$\begin{tikzcd}
& \forall \boldsymbol{C} \arrow[d, dashed, "\exists! u"] \arrow[ddl, bend right, "\boldsymbol{c}_i"'] \arrow[ddr, bend left, "\boldsymbol{c}_j"] & \\
& \varprojlim \boldsymbol{D} \arrow[dl, bend right, "\boldsymbol{p}_i"'] \arrow[dr, bend left, "\boldsymbol{p}_j"] & \\
D(i) \arrow[rr, "F(f)"] & & D(j)
\end{tikzcd}$$

図 A.11: 極限の普遍性

[a] **普遍錐** (universal cone) とも言う．

命題 A.22: 極限の一意性

図式 $D\colon \mathcal{I}, \mathcal{C}$ の極限は，存在すれば同型を除いて一意である．

証明 終対象の一意性より明らか． ■

【例 A.1.5】終対象

何もない圏 $\mathbf{0}$ を添字圏とする図式 $D\colon \mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{C}$ の上の極限は終対象である：

$$\varprojlim D \cong \boldsymbol{T}.$$

【例 A.1.6】積

図式

$$D\colon \mathbf{Free}\left(\boxed{\overset{1}{\bullet} \qquad \overset{2}{\bullet}}\right) \longrightarrow \mathcal{C}$$

の上の錐 $\big(\boldsymbol{C},\, \{\boldsymbol{c}_1,\, \boldsymbol{c}_2\}\big) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cone}(D))$ は

$$\begin{tikzcd}
& \boldsymbol{C} \arrow[dl, bend right, "\boldsymbol{c}_1"'] \arrow[dr, bend left, "\boldsymbol{c}_2"] & \\
D(1) & & D(2)
\end{tikzcd}$$

の形をしている．この図式 D の極限は積である：

$$\big(\varprojlim D,\, \{\boldsymbol{p}_1,\, \boldsymbol{p}_2\}\big) \cong \big(D(1) \times D(2),\, \{p_{D(1)},\, p_{D(2)}\}\big).$$

【例 A.1.7】等化子

図式

$$D\colon \mathbf{Free}\left(\boxed{\begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \overset{2}{\bullet} \end{tikzcd}}\right) \longrightarrow \mathcal{C}$$

の上の錐 $\bigl(\boldsymbol{C},\, \{\boldsymbol{c}_1,\, \boldsymbol{c}_2\}\bigr) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cone}(D))$ は

$$\begin{tikzcd} D(1) \arrow[r, shift left, "D(f)"] \arrow[r, shift right, "D(g)"'] & D(2) \\ \boldsymbol{C} \arrow[u, "\boldsymbol{c}_1"] \arrow[ur, bend right, "\boldsymbol{c}_2"] & \end{tikzcd}$$

の形をした可換図式を成す．図式の可換性から

$$D(f) \circ \boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{c}_2 \;\text{ かつ }\; D(g) \circ \boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{c}_2$$

が成り立つので，結局 $D(f) \circ \boldsymbol{c}_1 = D(f) \circ \boldsymbol{c}_2$ が成り立つ．この場合，$\boldsymbol{c}_2$ は冗長なので省略すると等化子の普遍性の図式を得る．つまり，$\bigl(\varprojlim D,\, \{\boldsymbol{p}_1\}\bigr)$ は射 $D(f),\, D(g)$ のイコライザとなる．

【例 A.1.8】引き戻し

図式

$$D\colon \mathbf{Free}\left(\boxed{\begin{tikzcd} & \overset{2}{\bullet} \arrow[d, "g"'] \\ \overset{1}{\bullet} \arrow[r, "f"] & \overset{3}{\bullet} \end{tikzcd}}\right) \longrightarrow \mathcal{C}$$

の上の錐 $\bigl(\boldsymbol{C},\, \{\boldsymbol{c}_1,\, \boldsymbol{c}_2,\, \boldsymbol{c}_3\}\bigr) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cone}(D))$ は

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{C} \arrow[r, bend left, "\boldsymbol{c}_2"] \arrow[d, bend right, "\boldsymbol{c}_1"] \arrow[dr, bend left, "\boldsymbol{c}_3"] & D(2) \arrow[d, "D(g)"] \\ D(1) \arrow[r, "D(f)"] & D(3) \end{tikzcd}$$

の形をした可換図式を成す．図式の可換性から $\boldsymbol{c}_3$ は冗長なので省略すると引き戻しの普遍性の図式が得られる．従って

$$\bigl(\varprojlim D,\, \{\boldsymbol{p}_1,\, \boldsymbol{p}_2\}\bigr) \cong \bigl(D(1) \times_{D(3)} D(2),\, \{\pi_1,\, \pi_2\}\bigr)$$

である．

命題 A.23: 極限の存在

圏 $\mathcal{C}$ が任意の図式 $D\colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ に対して極限を持つ必要十分条件は，圏 $\mathcal{C}$ において常に積とイコライザが存在することである．

証明 $\mathcal{I}$ の全ての射の集まりを $\mathrm{Mor}(\mathcal{I})$ と書くことにする．$\Longrightarrow$ はすでに確認したので，$\Longleftarrow$ を示す．圏 $\mathcal{C}$ において常に積とイコライザが存在するとする．

任意の型 $\mathcal{I}$ を持つ図式

$$D\colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$$

を与える．仮定より $\mathcal{C}$ は常に積を持つから，極限の第 1 候補として

$$\prod_{i\in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})} D(i)$$

を考えることができる．$\forall j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ について，$D(j)$ へ伸びる標準的射影 $p_j\colon \prod_{i\in\mathrm{Ob}(\mathcal{I})} D(i) \longrightarrow D(j)$ があるからである．しかし，$\forall i, j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ および $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i, j)$ に関して図式

$$\begin{tikzcd} & \prod_{i\in\mathrm{Ob}(\mathcal{I})} D(i) \arrow[dl, bend right, "p_i"'] \arrow[dr, bend left, "p_j"] & \\ D(i) \arrow[rr, "D(f)"] & & D(j) \end{tikzcd}$$

は必ずしも可換になってくれない．そこで，この非可換性を図式

$$\begin{tikzcd} \prod_{i\in\mathrm{Ob}(\mathcal{I})} D(i) \arrow[r, shift left, "\phi"] \arrow[r, shift right, "\psi"'] & \prod_{f\in\mathrm{Mor}(\mathcal{I})} D(\mathrm{cod}\, f) \end{tikzcd}$$

の等化子

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{E} \arrow[r, "\boldsymbol{e}"] & \prod_{i\in\mathrm{Ob}(\mathcal{I})} D(i) \arrow[r, shift left, "\phi"] \arrow[r, shift right, "\psi"'] & \prod_{f\in\mathrm{Mor}(\mathcal{I})} D(\mathrm{cod}\, f) \end{tikzcd}$$

によって補正することを考える．仮定より $\mathcal{C}$ は常に等化子を持つのでこのような構成は可能である．ただし ϕ, ψ は $\prod_{f\in\mathrm{Mor}(\mathcal{I})} D(\mathrm{cod}\, f)$[*5]に関する 2 つの積の普遍性の図式

$$\begin{tikzcd} & \prod_{i\in\mathrm{Ob}(\mathcal{I})} D(i) \arrow[dl, bend right, "p_{\mathrm{cod}\, f}"'] \arrow[d, dashed, "\exists!\phi"] \\ D(\mathrm{cod}\, f) & \prod_{f\in\mathrm{Mor}(\mathcal{I})} D(\mathrm{cod}\, f) \arrow[l, "p_f"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \prod_{i\in\mathrm{Ob}(\mathcal{I})} D(i) \arrow[dl, bend right, "D(f)\circ p_{\mathrm{dom}\, f}"'] \arrow[d, dashed, "\exists!\psi"] \\ D(\mathrm{cod}\, f) & \prod_{f\in\mathrm{Mor}(\mathcal{I})} D(\mathrm{cod}\, f) \arrow[l, "p_f"] \end{tikzcd}$$

によって特徴づけられている．

- 等化子 $\boldsymbol{E} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- 射の族 $\boldsymbol{\pi}_\bullet := \{p_i \circ \boldsymbol{e}\}_{i\in\mathrm{Ob}(\mathcal{I})}$

[*5] $\prod_{i\in\mathrm{Ob}(\mathcal{I})} D(i)$ とは添字集合が異なるので，標準的射影も違うものになっていることに注意．

の組 $\big(\boldsymbol{E},\, \boldsymbol{\pi}_\bullet\big)$ が図式 D の極限であることを示す．まず $\forall i,\, j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ および $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}\,(i,\, j)$ に対して

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\pi}_j = p_j \circ \boldsymbol{e} = p_{\mathrm{cod}\, f} \circ \boldsymbol{e} = p_f \circ (\phi \circ \boldsymbol{e}),\\ D(f) \circ \boldsymbol{\pi}_i = D(f) \circ p_i \circ \boldsymbol{e} = (D(f) \circ p_{\mathrm{dom}\, f}) \circ \boldsymbol{e} = p_f \circ (\psi \circ \boldsymbol{e})\end{aligned}$$

が成り立つが，等化子の定義より $\phi \circ \boldsymbol{e} = \psi \circ \boldsymbol{e}$ が成り立つので図式

$$\begin{tikzcd} & \boldsymbol{E} \arrow[dl, bend right, "\boldsymbol{\pi}_i"'] \arrow[dr, bend left, "\boldsymbol{\pi}_j"] & \\ D(i) \arrow[rr, "D(f)"] & & D(j) \end{tikzcd}$$

は可換である．i.e. $(\boldsymbol{E},\, \boldsymbol{\pi}_i) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cone}(D))$ が分かった．

次に錐 $(\boldsymbol{E},\, \boldsymbol{\pi}_i)$ が $\mathbf{Cone}(D)$ の終対象であることを示す．$\forall (\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{c}_\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cone}(D))$ をとる．そして積の普遍性の図式を使って $\forall i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ について $c_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,\big(\boldsymbol{C},\, D(i)\big)$ を

$$\begin{tikzcd} & \boldsymbol{C} \arrow[dl, bend right, "c_i"'] \arrow[d, dashed, "\exists ! \overline{c}"] \\ D(i) & \prod_{i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})} D(i) \arrow[l, "p_i"] \end{tikzcd}$$

のように一意に分解する．このとき錐の定義から $\forall i,\, j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ および $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}\,(i,\, j)$ に対して $\boldsymbol{c}_j = D(f) \circ \boldsymbol{c}_i$ が成り立つので，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}_j &= p_j \circ \overline{c} = p_{\mathrm{cod}\, f} \circ \overline{c} = p_f \circ (\phi \circ \overline{c})\\ &= D(f) \circ \boldsymbol{c}_i = D(f) \circ p_{\mathrm{dom}\, f} \circ \overline{c} = p_f \circ (\psi \circ \overline{c})\end{aligned}$$

が言える．従って $\prod_{f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{I})} D(\mathrm{cod}\, f)$ に関する積の普遍性から $\phi \circ \overline{c} = \psi \circ \overline{c}$ が言えて，等化子の普遍性の図式

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{E} \arrow[r, "\boldsymbol{e}"] & \prod_{i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})} D(i) \arrow[r, shift left, "\phi"] \arrow[r, shift right, "\psi"'] & \prod_{f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{I})} D(\mathrm{cod}\, f) \\ \boldsymbol{C} \arrow[u, dashed, "\exists ! u"] \arrow[ur, "\overline{c}"'] & & \end{tikzcd}$$

を書くことができる．このとき $\forall i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ に関して

$$\boldsymbol{c}_i = p_i \circ \overline{c} = p_i \circ \boldsymbol{e} \circ u = \boldsymbol{\pi}_i \circ u$$

が成り立つので $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{E})$ は一意な錐の射だと分かった． ■

命題 A.23 の証明は具体的に極限を構成する手法を与えている点でも重要である．圏 **Sets** における等化子の構成を思い出すと，**Sets** における極限を書き下すことができる：

系 A.2: 圏 Sets における極限

任意の図式 $D\colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ を与える．$\mathcal{I}$ の全ての射の集まりを $\mathrm{Mor}(\mathcal{I})$ と書く．このとき，

- $\displaystyle\prod_{i\in\mathrm{Ob}(\mathcal{I})} D(i)$ の部分集合

$$\varprojlim D \coloneqq \left\{ (x_i)_{i\in\mathrm{Ob}(\mathcal{I})} \in \prod_{i\in\mathrm{Ob}(\mathcal{I})} D(i) \;\middle|\; \forall f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{I}),\ x_{\mathrm{cod}\, f} = D(f)(x_{\mathrm{dom}\, f}) \right\} \tag{A.1.3}$$

- 写像の族

$$\boldsymbol{p}_\bullet \coloneqq \left\{\boldsymbol{p}_i \colon \varprojlim D \longrightarrow D(i),\ (x_j)_{j\in\mathrm{Ob}(\mathcal{I})} \longmapsto x_i\right\}_{i\in\mathrm{Ob}(\mathcal{I})}$$

の組は図式 D の極限である．

この公式いくつかの例で確認してみよう．

【例 A.1.9】終対象

対象も射もない図式

$$D\colon \mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を考える．添字集合 Λ を持つ直積は Λ からの写像だから，今の場合 $\prod_{i\in\mathrm{Ob}(\mathbf{0})} D(i) = \emptyset$ である．公式 (A.1.3) の条件は $\forall f\ \bigl(f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{I}) \implies x_{\mathrm{cod}\, f} = D(f)(x_{\mathrm{dom}\, f})\bigr)$ と読めるが，$\mathrm{Mor}(\mathcal{I}) = \emptyset$ なのでこの命題は常に真である．従って公式 (A.1.3) が表すものは 1 元集合

$$\varprojlim D = \{\emptyset\}$$

であり，**Sets における終対象**である．

【例 A.1.10】積

図式

$$D\colon \mathbf{Free}\left(\boxed{\overset{1}{\bullet} \qquad \overset{2}{\bullet}}\right) \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

は対象をちょうど 2 つ持つが射を持たない．$\mathrm{Mor}(\mathcal{I}) = \emptyset$ なので公式 (A.1.3) の条件は常に充たされ，結局

$$\varprojlim D = D(1) \times D(2)$$

がわかる．これは **Sets における積**である．なお，この議論は射を持たない圏を添字圏に持つ任意の図式に対して有効である．

【例 A.1.11】等化子

図式

$$D\colon \mathbf{Free}\left(\boxed{\begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \overset{2}{\bullet} \end{tikzcd}}\right) \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

の極限を公式 (A.1.3) を使って書き下すと

$$\begin{aligned}\varinjlim D &= \left\{\, (x_1,\, x_2) \in D(1) \times D(2) \;\middle|\; x_2 = D(f)(x_1) \ \text{かつ}\ x_2 = D(g)(x_1) \,\right\} \\ &\cong \left\{\, x_1 \in D(1) \;\middle|\; D(f)(x_1) = D(g)(x_1) \,\right\}\end{aligned}$$

となり[a]，**Sets における等化子**と同型である．

[a] **Sets** における同型なので，これらの間には全単射が存在すると言うことである．

【例 A.1.12】引き戻し

図式

$$D\colon \mathbf{Free}\left(\boxed{\begin{tikzcd} & \overset{2}{\bullet} \arrow[d, "g"'] \\ \overset{1}{\bullet} \arrow[r, "f"] & \overset{3}{\bullet} \end{tikzcd}}\right) \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

の極限を公式 (A.1.3) を使って書き下すと

$$\begin{aligned}\varinjlim D &= \left\{\, (x_1,\, x_2,\, x_3) \in D(1) \times D(2) \times D(3) \;\middle|\; x_3 = D(f)(x_1) \ \text{かつ}\ x_3 = D(g)(x_2) \,\right\} \\ &\cong \left\{\, (x_1,\, x_2) \in D(1) \times D(2) \;\middle|\; D(f)(x_1) = D(g)(x_2) \,\right\}\end{aligned}$$

となり，**Sets における引き戻し**と同型である．

系 A.3: 圏 Sets における極限

任意の図式 $D\colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathbf{Top}$ を与える．$\mathcal{I}$ の全ての射の集まりを $\mathrm{Mor}(\mathcal{I})$ と書く．このとき，

- **Sets** における極限 $(\varprojlim D,\, \boldsymbol{p}_\bullet)$ に，写像の族 $\boldsymbol{p}_\bullet$ によって誘導される $\varprojlim D$ の始位相 $\mathscr{O}_{\boldsymbol{p}_\bullet}$ を入れてできる位相空間

$$\left(\varprojlim D,\, \mathscr{O}_{\boldsymbol{p}_\bullet}\right)$$

- 写像の族

$$\boldsymbol{p}_\bullet := \left\{\boldsymbol{p}_i\colon \varprojlim D \longrightarrow D(i),\ (x_j)_{j\in\mathrm{Ob}(\mathcal{I})} \longmapsto x_i\right\}_{i\in\mathrm{Ob}(\mathcal{I})}$$

の組は図式 D の極限である．

証明 始位相は $\forall p_i \in \boldsymbol{p}_\bullet$ を連続にする位相である．極限の普遍性は命題 A.23 の証明から従う． ■

付録 B

多様体のあれこれ

この章では，主に多様体に関する内容を雑多にまとめる．

B.1　位相多様体の性質

まず，コンパクト性に類似する概念をいくつか紹介する：

定義 B.1: 被覆

- 集合族 $\mathcal{U} := \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が集合 X の**被覆** (cover) であるとは，

$$X \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

  が成り立つこと．
- 位相空間 X の被覆 $\mathcal{U} := \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が**開** (open) であるとは，$\forall \lambda \in \Lambda$ に対して U_λ が X の開集合であること．
- 位相空間 X の被覆 $\mathcal{V} := \{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が，別の X の被覆 $\mathcal{U} := \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の**細分** (refinement) であるとは，$\forall V_\alpha \in \mathcal{V}$ に対してある $U_\lambda \in \mathcal{U}$ が存在して $V_\alpha \subset U_\lambda$ が成り立つこと．
- 位相空間 X の開被覆 $\mathcal{U} := \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が**局所有限** (locally finite) であるとは，$\forall x \in X$ に対して以下の条件が成り立つこと：

  (locally finiteness)　x のある近傍 $V \subset X$ が存在して集合

$$\{\, \lambda \in \Lambda \mid U_\lambda \cap V \neq \emptyset \,\}$$

  が有限集合になる．

定義 B.2: パラコンパクト・コンパクト・局所コンパクト

位相空間 X を与える．

- **パラコンパクト** (paracompact) であるとは，任意の開被覆が局所有限かつ開な細分を持つこと．
- 位相空間 X の部分集合 $A \subset X$ は，以下の条件を充たすとき**コンパクト** (compact) であると言われる：

  (Heine-Boral の性質)　A の任意の開被覆 $\mathcal{U} := \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，ある有限部分集合 $I \subset \Lambda$ が存在して $\{U_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{U}$ が A の開被覆となる[a]．
- 位相空間 X が**局所コンパクト** (locally compact) であるとは，$\forall x \in X$ が少なくとも 1 つのコンパクトな近傍を持つこと．

[a] このことを「任意の開被覆は有限部分被覆を持つ」と表現する．

B.2　微分構造の構成

微分構造を定義通りに構成するならば，まず位相多様体であることを確認してから座標変換が C^∞ 級であることを確認しなくてはならず，若干面倒である．しかし，幸いにしてこの確認の工程をまとめた便利な補題がある [4, p.21, Lemma 1.35].

補題 B.1: 微分構造の構成

- 集合 M
- M の部分集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$
- 写像の族 $\{\varphi_\lambda : U_\lambda \longrightarrow \mathbb{R}^n\}_{\lambda\in\Lambda}$

の 3 つ組であって以下の条件を充たすものを与える：

(DS-1)　$\forall\lambda \in \Lambda$ に対して $\varphi_\lambda(U_\lambda) \subset \mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合であり，$\varphi_\lambda : U_\lambda \longrightarrow \varphi_\lambda(U_\lambda)$ は全単射である．

(DS-2)　$\forall\alpha, \beta \in \Lambda$ に対して $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$, $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である．

(DS-3)　$\forall\alpha, \beta \in \Lambda$ に対して，$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ならば $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ は C^∞ 級である．

(DS-4)　添字集合 Λ の可算濃度の部分集合 $I \subset \Lambda$ が存在して $\{U_i\}_{i\in I}$ が M の被覆になる．

(DS-5)　$p, q \in M$ が $p \neq q$ ならば，ある $\lambda \in \Lambda$ が存在して $p, q \in U_\lambda$ を充たすか，またはある $\alpha, \beta \in \Lambda$ が存在して $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ かつ $p \in U_\alpha$, $q \in U_\beta$ を充たす．

このとき，M の微分構造であって，$\forall\lambda \in \Lambda$ に対して $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ を C^∞ チャートとして持つものが一意的に存在する．

証明　**位相の構成**

$\mathbb{R}^n$ の Euclid 位相を $\mathscr{O}_{\mathbb{R}^n}$ と表記する．集合

$$\mathscr{B} := \left\{ \varphi_\lambda^{-1}(U) \;\middle|\; \lambda \in \Lambda,\, U \in \mathscr{O}_{\mathbb{R}^n} \right\}$$

が開基の公理 **(B1)**, **(B2)** を充たすことを確認する．

(B1) **(DS-4)** より明らか．

(B2) $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ を任意にとる．このとき $\mathscr{B}$ の定義から，ある $\alpha, \beta \in \Lambda$ および $U, V \in \mathscr{O}_{\mathbb{R}^n}$ が存在して $B_1 = \varphi_\alpha^{-1}(U)$, $B_2 = \varphi_\beta^{-1}(V)$ と書ける．補題 D.1-(4) より

$$\begin{aligned} B_1 \cap B_2 &= \varphi_\alpha^{-1}(U) \cap \varphi_\beta^{-1}(V) \\ &= \varphi_\alpha^{-1}\bigl(U \cap (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(V)\bigr) \\ &= \varphi_\alpha^{-1}\bigl(U \cap (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1}(V)\bigr) \end{aligned}$$

が成り立つが，**(DS-3)** より $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ は連続なので $(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1}(V) \in \mathscr{O}_{\mathbb{R}^n}$ である．よって

$$B_1 \cap B_2 \in \mathscr{B}$$

であり，**(B2)** が示された．

従って定理 1.2 より，$\mathscr{B}$ を開基とする M の位相 $\mathscr{O}_M$ が存在する．

φ_λ が同相写像であること

$\forall \lambda \in \Lambda$ を 1 つ固定する．$\mathscr{O}_M$ の構成と補題 D.1-(4) より，$\forall V \in \mathscr{O}_{\mathbb{R}^n}$ に対して $\varphi_\lambda^{-1}\bigl(V \cap \varphi_\lambda(U_\lambda)\bigr) = \varphi_\lambda^{-1}(V) \cap U_\lambda$ は U_λ の開集合である[*1]．i.e. $\varphi_\lambda \colon U_\lambda \longrightarrow \varphi_\lambda(U_\lambda)$ は連続である．

$\forall B \in \mathscr{B}$ をとる．このとき補題 D.1-(9) より $\varphi_\lambda(B \cap U_\lambda) = \varphi_\lambda(B) \cap \varphi_\lambda(U_\lambda)$ が成り立つが，$\mathscr{O}_M$ の定義より $\varphi_\lambda(B) \in \mathscr{O}_{\mathbb{R}^n}$ なので $\varphi_\lambda(B \cap U_\lambda)$ は $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ の開集合である．相対位相の定義と de Morgan 則より，U_λ の任意の開集合は $B \cap U_\lambda$ の形をした部分集合の和集合で書けるので，補題 D.1-(1) と位相空間の公理から φ_λ は U_λ の開集合を $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ の開集合に移す．i.e. $\varphi_\lambda \colon U_\lambda \longrightarrow \varphi_\lambda(U_\lambda)$ は連続な全単射でかつ開写像であるから同相写像である．

Hausdorff 性

位相空間 $(M, \mathscr{O}_M)$ が Hausdorff 空間であることを示す．M の異なる 2 点 p, q を勝手にとる．このとき **(DS-5)** より，

- ある $\lambda \in \Lambda$ が存在して $p, q \in U_\lambda$ を充たす
- ある $\alpha, \beta \in \Lambda$ が存在して $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ かつ $p \in U_\alpha,\ q \in U_\beta$ を充たす

のいずれかである．後者ならば証明することは何もない．

前者の場合を考える．このとき $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合だから，$\mathbb{R}^n$ の Hausdorff 性から $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ も Hausdorff 空間であり，従って $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ の開集合 $U, V \subset \varphi\lambda(U_\lambda)$ であって $\varphi_\lambda(p) \in U$ かつ $\varphi_\lambda(q) \in V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ を充たすものが存在する．このとき補題 D.1-(4) より $\varphi_\lambda^{-1}(U) \cap \varphi_\lambda^{-1}(V) = \varphi_\lambda^{-1}(U \cap V) = \emptyset$ で，かつ $\mathscr{O}_M$ の構成から $\varphi_\lambda^{-1}(U), \varphi_\lambda^{-1}(V) \subset M$ はどちらも M の開集合である．そのうえ $p \in \varphi_\lambda^{-1}(U)$ かつ $q \in \varphi_\lambda^{-1}(V)$ が成り立つので M は Hausdorff 空間である．

第 2 可算性

$\mathbb{R}^n$ は第 2 可算なので，$\forall \lambda \in \Lambda$ に対して $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ も第 2 可算である．$\varphi_\lambda \colon U_\lambda \longrightarrow \varphi_\lambda(U_\lambda)$ は同相写像なので，U_λ も第 2 可算である．従って **(DS-4)** から M も第 2 可算である．

[*1] U_λ には $(M, \mathscr{O}_M)$ からの相対位相が，$\varphi_\lambda(U_\lambda)$ には $(\mathbb{R}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{R}^n})$ からの相対位相を入れている．

以上の考察から，位相空間 $(M, \mathscr{O}_M)$ が位相多様体であることが示された．さらに **(DS-3)** より $\mathcal{A} := \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ は $(M, \mathscr{O}_M)$ の C^∞ アトラスであることもわかる．

最後に，$\mathcal{A}$ の極大アトラス $\mathcal{A}^+$ が，集合 M 上の，与えられた全ての $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ を C^∞ チャートとする唯一の微分構造であることを示す．

位相の一意性

与えられた集合 M の上の位相 $\mathscr{T}$ であって，位相空間 $(M, \mathscr{T})$ が第 2 可算な Hausdorff 空間となるようなものを任意にとる．$\forall\lambda \in \Lambda$ に対して与えられた全単射 $\varphi_\lambda \colon U_\lambda \longrightarrow \varphi_\lambda(U_\lambda)$ が同相写像であるためには，$\forall V \in 2^{U_\lambda}$ に対して

$$V \in \mathscr{T} \quad\Longleftrightarrow\quad \varphi_\lambda(V) \in \mathscr{O}_{\mathbb{R}^n}$$

が成り立つことが必要十分である．そしてこのとき ■

B.3 部分多様体

定義 B.3: 部分多様体

n 次元 C^∞ 多様体 $(M, \mathscr{O}_M)$ を与える．部分集合 $N \subset M$ は以下の条件を充たすとき**部分多様体** (submanifold) と呼ばれる：

(sub) $\forall p \in N$ に対してある開近傍 $U \in \mathscr{O}_M$ と U 上定義された座標関数 $x^\mu \colon U \to \mathbb{R}$ が存在して，

$$\exists k \geq 0,\ N \cap U = \left\{q \in U \;\middle|\; x^{k+1}(q) = \cdots = x^n(q) = 0\right\}.$$

N が M の閉集合であるときは**閉部分多様体**と呼ぶ．

定義 B.4: はめ込みと埋め込み

C^∞ 多様体 M, N と C^∞ 写像 $f \colon M \to N$ を与える．

(1) $\forall p \in M$ において f の微分写像 $f_* \colon T_pM \to T_{f(p)}N$ が単射のとき，f を**はめ込み** (immersion) と呼ぶ．

(2) $f \colon M \to N$ がはめ込みであって，かつ全射 $f \colon M \twoheadrightarrow f(M)$ が同相写像であるとき，f を**埋め込み** (embedding) と呼ぶ．

(3) $f \colon M \to N$ が全射であって，かつ $\forall p \in M$ において $f_* \colon T_pM \to T_{f(p)}N$ が全射であるとき，f を**沈め込み** (submersion) と呼ぶ．

定理 B.1: 埋め込みと部分多様体

$f\colon M \to N$ を埋め込みとする．このとき $f(M) \subset N$ は N の部分多様体であり，$f\colon M \twoheadrightarrow f(M)$ は微分同相写像である．
逆に M が N の部分多様体であるとき，包含写像[a] $\iota\colon M \hookrightarrow N$ は埋め込みである．

[a] $M \subset N$ のとき，$p \in M$ を N の元として扱う写像．$\iota(p) = p$ である．**標準単射** (canonical injection) と呼ばれることもある．

定理 B.2: Whitney の埋め込み定理

任意の n 次元 C^∞ 多様体は $\mathbb{R}^{2n+1}$ の中に閉部分多様体として埋め込むことができる．

B.3.1 誘導計量

定義 B.5: 誘導計量

$(N,\, h)$ を Riemann 多様体，C^∞ 写像 $f\colon M \to N$ をはめ込みとする．このとき，2-形式 $h \in \Omega^2(N)$ の引き戻し（4.4.3）f^*h は M 上の Riemann 計量 $g \in \Omega^2(M)$ を定める：

$$g_p(u,\, v) \coloneqq h_{f(p)}\bigl(f_*(u),\, f_*(v)\bigr), \quad \forall p \in M,\, \forall u,\, v \in T_pM$$

これを f による M の**誘導計量**と呼ぶ．

誘導計量を M のチャート $(U;\, x^\mu)$ および N のチャート $(V;\, y^\nu)$ に関して成分表示すると

$$\begin{aligned} g_p(u,\, v) &= g_{\mu\nu}(p) u^\mu v^\nu \\ &= h_{\alpha\beta}\bigl(f(p)\bigr) \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\bigl(f(p)\bigr) \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu}\bigl(f(p)\bigr) u^\mu v^\nu \end{aligned}$$

だから，

$$g_{\mu\nu}(p) = h_{\alpha\beta}\bigl(f(p)\bigr) \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\bigl(f(p)\bigr) \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu}\bigl(f(p)\bigr)$$

である．特に C^∞ 多様体 M の Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ へのはめ込み $\boldsymbol{r}\colon M \to \mathbb{R}^n,\, (x^\mu) \mapsto \boldsymbol{r}(x^\mu)$ が与えられたとき，M の Riemann 計量がしばしば

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^\nu}$$

と書かれるのはこのためである．

! 多様体 N が擬 Riemann 多様体のときは，多様体 M が誘導計量を持つとは限らない．

例えば Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$ に埋め込まれた単位球面 S^2 を考える．はめ込みを

$$\boldsymbol{r}\colon (\theta,\, \phi) \mapsto \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

として与えると，S^2 の誘導計量は

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu &= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu \\ &= \mathrm{d}\theta \otimes \mathrm{d}\theta + \sin^2\theta\ \mathrm{d}\phi \otimes \mathrm{d}\phi \end{aligned}$$

と求まる．

B.4　隅付き多様体

B.5　力学系としての多様体

付録 C

代数学のあれこれ

この章では，主に代数学に関する内容を雑多にまとめる．詳細は [8] や，加群については [5] を参照されるのが良いと思う．

まず，部分群の定義と判定法を書いておく：

定義 C.1: 部分群

$(G,\cdot,1_G)$ を群とする．部分集合 $H\subset G$ が G の**部分群** (subgroup) であるとは，H が演算 $\cdot$ によって群になることを言う．

命題 C.1: 部分群であることの判定法

群 G の部分集合 H が G の部分群になるための必要十分条件は，以下の 3 条件が満たされることである：

(SG1) $1_G\in H$

(SG2) $x,\,y\in H \implies x\cdot y\in H$

(SG3) $x\in H \implies x^{-1}\in H$

群の生成を定義しておく：

定義 C.2: word

$(G,\cdot,1_G)$ を群，$S\subset G$ を部分集合とする．
S の有限部分集合 $\{x_1,\,\dots,\,x_n\}\subset S$ によって

$$x_1^{\pm1}\cdot x_2^{\pm1}\cdots x_n^{\pm1} \qquad {}^{\mathrm{w}/}\ \ x_i^{\pm1}\ \text{は}\ x_i\ \text{か}\ x_i^{-1}\ \text{のどちらでも良い}$$

と書かれる G の元を ***S* の元による語** (word) と呼ぶ．ただし $n=0$ のときは単位元 1_G を表すものとする．

命題 C.2: 部分加群の生成

S の元による word 全体の集合を $\langle S \rangle$ と書く．

(1) $\langle S \rangle$ は G の部分群である．これを S **によって生成された部分群**と呼び，S のことを**生成系** (generator)，S の元を**生成元**と呼ぶ．

(2) G の部分群 H が $S \subset H$ を充たすならば $\langle S \rangle \subset H$ である．i.e. $\langle S \rangle$ は S を含む最小の部分群である．

<u>**証明**</u>　(1) 命題 C.1 の 3 条件を充していることを確認する．$x_1, \ldots, x_n,\ y_1, \ldots, y_m \in S$ とする．

(SG1)　$n = 0$ の場合から $1_G \in \langle S \rangle$

(SG2)　$x_1, \ldots, x_n,\ y_1, \ldots, y_m \in S$ とする．

$$(x_1^{\pm 1} \cdots x_n^{\pm 1}) \cdot (y_1^{\pm 1} \cdots y_m^{\pm 1}) = x_1^{\pm 1} \cdots x_n^{\pm 1} \cdot y_1^{\pm 1} \cdots y_m^{\pm 1} \in \langle S \rangle$$

(SG3)　複号同順で

$$(x_1^{\pm 1} \cdots x_n^{\pm 1}) \cdot (x_n^{\mp 1} \cdots x_1^{\mp 1}) = 1_G$$

かつ $x_n^{\mp 1} \cdots x_1^{\mp 1} \in \langle S \rangle$ なので良い．

(2) $1_G \in H$ なので $n = 0$ のときは良い．$n > 0$ として $x_1, \ldots, x_n \in S$ を任意にとると，仮定より $x_1, \ldots, x_n \in H$ である．故に命題 C.1 から $x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1} \in H$ であり，H が席について閉じていることから $x_1^{\pm 1} \cdots x_n^{\pm 1} \in H$ である．i.e. $\langle S \rangle \subset H$.

■

定義 C.3: 巡回群

G を群とする．一つの元 $x \in G$ で生成される群 $\langle x \rangle$ を**巡回群** (cyclic group) と言う．G の部分群であって，巡回群でもあるものを**巡回部分群**と呼ぶ．

C.1　群の準同型

C.1.1　定義

定義 C.4: 群準同型

$(G_1, \cdot\,, 1_{G_1}),\ (G_2, *\,, 1_{G_2})$ を群とする．写像 $\phi\colon G_1 \to G_2$ が（群の）**準同型写像** (homomorphism) であるとは，

$$\phi(x \cdot y) = \phi(x) * \phi(y), \quad \forall x,\, y \in G_1$$

が成り立つことを言う．

ϕ が準同型写像であって逆写像 ϕ^{-1} を持ち，かつ ϕ^{-1} もまた準同型写像であるとき，ϕ は**同型写像** (isomorphism) と呼ばれる．このとき G_1, G_2 は同型 (isomorphic) であるといい，$G_1 \cong G_2$ と書く．

いちいち群の演算を明記するのは大変なので，以降では余程紛らわしくない限り省略する．

命題 C.3:

$\phi\colon G_1 \to G_2$ を群の準同型とするとき，以下が成立する：

(1) $\phi(1_{G_1}) = 1_{G_2}$
(2) $\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}, \quad \forall x \in G_1$

証明　(1) $\phi(1_{G_1}) = \phi(1_{G_1}1_{G_1}) = \phi(1_{G_1})\phi(1_{G_1})$ より $\phi(1_{G_1}) = 1_{G_2}$
(2) (1) より $\phi(1_{G_1}) = \phi(x^{-1}x) = \phi(x^{-1})\phi(x) = 1_{G_2}$

■

標語的には「準同型写像 $\phi\colon G_1 \to G_2$ は群の演算，単位元，逆元の全てを保つ」ということになる．特に ϕ が全単射である，i.e. 同型写像であるならば，G_1 と G_2 の群論的な性質は同じである．この意味で G_1 と G_2 は同一視できる．

C.1.2　核と像

定義 C.5: 準同型の核・像

G_1, G_2 を群，$\phi\colon G_1 \to G_2$ を準同型写像とする．

(1) ϕ の**核** (kernel) $\mathrm{Ker}\,\phi \subset G_1$ を次のように定義する：

$$\mathrm{Ker}\,\phi \coloneqq \left\{ x \in G_1 \,\middle|\, \phi(x) = 1_{G_2} \right\}$$

(2) ϕ の**像** (image) $\mathrm{Im}\,\phi \subset G_2$ を次のように定義する：

$$\mathrm{Im}\,\phi \coloneqq \left\{ \phi(x) \,\middle|\, x \in G_1 \right\}$$

命題 C.4:

G_1, G_2 を群，$\phi\colon G_1 \to G_2$ を準同型写像とする．このとき $\mathrm{Ker}\,\phi$, $\mathrm{Im}\,\phi$ はそれぞれ G_1, G_2 の部分群である．

証明　命題 C.1 の 3 条件を充していることを確認すれば良い．

(SG1)　命題 C.3-(1) より $1_{G_1} \in \mathrm{Ker}\,\phi$, $1_{G_2} \in \mathrm{Im}\,\phi$
(SG2)　$\mathrm{Ker}\,\phi$ に関しては

$$\begin{aligned} x,\, y \in \mathrm{Ker}\,\phi \quad &\Longrightarrow \quad \phi(xy) = \phi(x)\phi(y) = 1_{G_2}1_{G_2} = 1_{G_2} \\ &\Longrightarrow \quad xy \in \mathrm{Ker}\,\phi \end{aligned}$$

よりよい．
$\mathrm{Im}\,\phi$ に関しては ϕ が準同型であることから自明．

(SG3) $\mathrm{Ker}\,\phi$ に関しては命題 C.3-(2) から

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}\,\phi &\implies \phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1} = 1_{G_2}^{-1} = 1_{G_2} \\ &\implies x^{-1} \in \mathrm{Ker}\,\phi \end{aligned}$$

よりよい．

$\mathrm{Im}\,\phi$ に関しても命題 C.3-(2) から

$$\begin{aligned} y \in \mathrm{Im}\,\phi &\implies \exists x \in G_1,\ y = \phi(x) \\ &\implies y^{-1} = \phi(x)^{-1} = \phi(x^{-1}) \\ &\implies y^{-1} \in \mathrm{Im}\,\phi \end{aligned}$$

ただし，3 行目で G_1 が群であるために $x \in G_1 \implies x^{-1} \in G_1$ であることを使った．

■

命題 C.4 より，$\mathrm{Ker}\,\phi$ や $\mathrm{Im}\,\phi$ による剰余類を考えることができる．

命題 C.5: 準同型の単射性判定

準同型写像 $\phi\colon G_1 \to G_2$ に対して以下が成立する：

$$\phi \text{ が単射} \iff \mathrm{Ker}\,\phi = \{1_{G_1}\}$$

証明 $(\Longrightarrow)$　ϕ は単射と仮定する．命題 C.3-(1) より $1_{G_1} \in \mathrm{Ker}\,\phi$ である．このとき $\forall x \in G_1$ に対して

$$x \in \mathrm{Ker}\,\phi \implies \phi(x) = 1_{G_2} = \phi(1_{G_1})$$

であり，仮定から $x = 1_{G_1}$ とわかる．

$(\Longleftarrow)$　$\mathrm{Ker}\,\phi = \{1_{G_1}\}$ と仮定する．このとき $\forall x, y \in G_1$ に対して

$$\begin{aligned} \phi(x) = \phi(y) &\implies \phi(xy^{-1}) = \phi(x)\phi(y)^{-1} = \phi(x)\phi(x)^{-1} = 1_{G_2} \\ &\implies xy^{-1} \in \mathrm{Ker}\,\phi \end{aligned}$$

が成立し，仮定より $xy^{-1} = 1_{G_1}$ とわかる．故に $x = y$ であり，$\phi(x) = \phi(y) \implies x = y$ が示された． ■

C.1.3 剰余類

群 G の部分群 H は G 上の同値関係を誘導する：

命題 C.6: 部分群による同値関係

群 $(G, \cdot, 1_G)$ の部分群 $(H, \cdot, 1_H)$ を与える．このとき，次のようにして定義される集合 $\sim_{\mathrm{L}}, \sim_{\mathrm{R}} \subset G \times G$ は同値関係である[a]：

$$\begin{aligned} \sim_{\mathrm{L}} &:= \left\{ (x, y) \in G \times G \mid x^{-1}y \in H \right\} \\ \sim_{\mathrm{R}} &:= \left\{ (x, y) \in G \times G \mid yx^{-1} \in H \right\} \end{aligned}$$

[a] 群 G は可換とは限らない!

証明 同値関係の公理 1.1 を充していることを確認すればよい．ほぼ同じ議論なので，$\sim_{\mathrm{L}}$ についてのみ示す．

(1) 命題 C.1-(1) より $x^{-1}x = 1_G = 1_H \in H$ であるから $x \sim_{\mathrm{L}} x$.

(2) 命題 C.1-(3) より部分群 H は逆元をとる操作について閉じている．故に

$$\begin{aligned} x \sim_{\mathrm{L}} y \quad &\Longrightarrow \quad x^{-1}y \in H \\ &\Longrightarrow \quad y^{-1}x = (x^{-1}y)^{-1} \in H \\ &\Longrightarrow \quad y \sim_{\mathrm{L}} x. \end{aligned}$$

(3) 命題 C.1-(2) より部分群 H は演算 $\cdot$ について閉じている．故に

$$\begin{aligned} x \sim_{\mathrm{L}} y \quad \text{かつ} \quad y \sim_{\mathrm{L}} z \quad &\Longrightarrow \quad x^{-1}y \in H \quad \text{かつ} \quad y^{-1}z \in H \\ &\Longrightarrow \quad x^{-1}z = x^{-1}(yy^{-1})z = (x^{-1}y)(y^{-1}z) \in H \\ &\Longrightarrow \quad x \sim_{\mathrm{L}} z. \end{aligned}$$

■

つまり，同値関係 $\sim_{\mathrm{L}}$, $\sim_{\mathrm{R}}$ の気持ちは

- 反射律 $\leftrightarrow$ 単位元
- 対称律 $\leftrightarrow$ 逆元をとる操作
- 推移律 $\leftrightarrow$ 群の演算

という対応を定式化したものと言える．

さて，集合 G の上に同値関係ができたので同値類を考えることができる：

定義 C.6: 剰余類

群 $(G, \cdot, 1_G)$ の部分群 $(H, \cdot, 1_H)$ を与える．

(1) G 上の同値関係 $\sim_{\mathrm{L}}$ による $x \in G$ の同値類を**左剰余類** (left coset) と呼び，xH と書く．あからさまには以下の通り：

$$xH := \{y \in G \mid x^{-1}y \in H\}$$

同値関係 $\sim_{\mathrm{L}}$ による G の商集合を $\boldsymbol{G/H}$ と書く：

$$\boldsymbol{G/H} := G/{\sim_{\mathrm{L}}} = \{xH \mid x \in G\}$$

(2) G 上の同値関係 $\sim_{\mathrm{R}}$ による $x \in G$ の同値類を**右剰余類** (right coset) と呼び，Hx と書く．あからさまには以下の通り：

$$Hx := \{y \in G \mid yx^{-1} \in H\}$$

同値関係 $\sim_{\mathrm{R}}$ による G の商集合を $\boldsymbol{H\backslash G}$ と書く：

$$\boldsymbol{H\backslash G} := G/{\sim_{\mathrm{R}}} = \{Hx \mid x \in G\}$$

左/右剰余類は H が G の部分群ならば**必ず**作ことができる．

命題 C.7: 剰余類の位数

H が G の部分群ならば以下が成り立つ（位数は ∞ でも良い）：

(1) $|G/H| = |H\backslash G|$
(2) $|xH| = |Hx| = |H|, \quad \forall x \in G$

証明 (1) 集合の濃度が等しいことを示すには，G/H から $H\backslash G$ への全単射が存在することを示せば良い．

写像 $\alpha\colon G/H \to H\backslash G$ を $\alpha(xH) \coloneqq Hx^{-1}$ と定義する．α が well-defined であることを示す．実際，$\forall x \in G$ を一つ固定したとき xH の勝手な元は xh $(h \in H)$ と書かれるが，$(xh)^{-1} = h^{-1}x^{-1} \in Hx^{-1}$ なので，写像 α の xH への作用は xH の代表元の取り方によらない．i.e. α は well-defined である．

同様な議論から，写像 $\beta\colon H\backslash G \to G/H$ を $\beta(Hx) \coloneqq x^{-1}H$ として定義すると β も well-defined であることがわかる．このとき $(\beta\circ\alpha)(xH) = \beta(Hx^{-1}) = xH$, $(\alpha\circ\beta)(Hx) = Hx$ が成立するので $\beta\circ\alpha = \mathrm{id}_{G/H}$，$\alpha\circ\beta = \mathrm{id}_{H\backslash G}$ であり，α, β は両方とも全単射である．

(2) 写像 $\phi\colon H \to xH$ を $\phi(h) \coloneqq xh$ と定義する．このとき，$\forall h_1, h_2 \in H$ に対して

$$\phi(h_1) = \phi(h_2) \implies xh_1 = xh_2 \implies h_1 = x^{-1}xh_1 = x^{-1}xh_2 = h_2$$

が成立するので ϕ は単射である．ϕ が全射であることは明らかなので全単射である．故に $|xH| = |H|$. $|Hg| = |H|$ も同様に示される．

■

同値類全体の集合は商集合を非交和 (disjoint union) に分割することを考えると，次の定理が即座に従う：

定理 C.1: Lagrange の定理

集合 G/H, $H\backslash G$ の濃度を $\boldsymbol{(G:H)}$ と書く[a]と，

$$|G| = (G:H)|H|.$$

[a] G における H の**指数** (index) と呼ぶ．

C.1.4 両側剰余類

命題 C.8:

群 $(G, \cdot, 1_G)$ およびその部分群 $(H, \cdot, 1_H)$, $(K, \cdot\ 1_K)$ を与える．このとき，次のようにして定義される集合 $\sim_{\mathrm{D}} \subset G\times G$ は同値関係である：

$$\sim_{\mathrm{D}} \coloneqq \left\{ (x, y) \;\middle|\; \exists h \in H, \exists k \in K,\ x = h\cdot y\cdot k \right\}$$

証明 同値関係の公理 1.1 を充していることを確認すればよい．ほぼ同じ議論なので，$\sim_{\mathrm{L}}$ についてのみ示す．

(1) 命題 C.1-(1) より $1_G = 1_H = 1_K$ であるから $x = 1_H x 1_K$.

(2) 命題 C.1-(3) より部分群は逆元をとる操作について閉じている．故に

$$\begin{aligned} x \sim_{\mathrm{D}} y \quad &\implies \exists h \in H,\, \exists k \in K,\; x = hyk \\ &\implies \quad y = h^{-1} x k^{-1} \\ &\implies \quad y \sim_{\mathrm{D}} x. \end{aligned}$$

(3) 命題 C.1-(2) より部分群は演算・について閉じている．故に

$$\begin{aligned} x \sim_{\mathrm{D}} y \quad かつ \quad y \sim_{\mathrm{D}} z \quad &\implies \exists h_1,\, h_2 \in H,\, \exists k_1,\, k_2 \in K,\; x = h_1 y k_1 \;\; かつ \;\; y = h_2 z k_2 \\ &\implies \quad x = (h_1 h_2) z (k_2 k_1) \\ &\implies \quad x \sim_{\mathrm{D}} z. \end{aligned}$$

■

定義 C.7: 両側剰余類

命題 C.8 において，同値関係 $\sim_{\mathrm{D}}$ による G の商集合 $G/{\sim_{\mathrm{D}}}$ を $\boldsymbol{H\backslash G/K}$ と書く．$H\backslash G/K$ の元を $H,\, K$ による**両側剰余類** (double coset) と呼ぶ．$x \in G$ の両側剰余類をあからさまに書くと以下の通り：

$$HxK = \left\{\, hxk \;\middle|\; h \in H,\, k \in K \,\right\}$$

C.1.5 正規部分群

定義 C.6 において右剰余類と左剰余類を定義したが，補題 C.1 より部分群 H が正規部分群ならば両者は一致する．そしてこのとき商集合 G/H と $H\backslash G$ が同一視され，自然に群構造が入る．

定義 C.8: 正規部分群

H を G の部分群とする．H が G の**正規部分群** (normal subgroup) であるとは，$\forall g \in G,\, \forall h \in H$ に対して $ghg^{-1} \in H$ であることを言い[a]，記号として $H \lhd G$，あるいは $G \rhd H$ と書く．

[a] このことを H は**内部自己同型** (inner automorphism) の下で不変だ，とか言う

命題 C.9: Ker は正規部分群

$G_1,\, G_2$ を群，$\phi\colon G_1 \to G_2$ を準同型写像とすると，$\operatorname{Ker}\phi \lhd G_1$ である．

<u>**証明**</u> $\forall g \in G_1$，$h \in \operatorname{Ker}\phi$ に対して

$$\phi(ghg^{-1}) = \phi(g)\phi(h)\phi(g^{-1}) = \phi(g)\phi(g)^{-1} = 1_{G_2}$$

なので $ghg^{-1} \in \operatorname{Ker}\phi$ である．i.e. $\operatorname{Ker}\phi \lhd G_1$ である． ■

補題 C.1:

群 G およびその部分群 N を与える．このとき以下が成り立つ：

$$N \lhd G \quad \Longleftrightarrow \quad \forall g \in G,\ gN = Ng$$

<u>証明</u> ($\Longrightarrow$)

- ($\subset$)　$\forall x \in gN$ を一つとると，ある $n \in N$ が存在して $x = gn$ と書ける．仮定より $N \lhd G$ だから $gng^{-1} \in N$ である．ゆえに

$$x = gn = gn(g^{-1}g) = (gng^{-1})g \in Ng.$$

  $x \in gN$ は任意だったから $gN \subset Ng$.
- ($\supset$)　g を g^{-1} に置き換えて同じ議論をすれば良い．

($\Longleftarrow$)　$\forall g \in G,\ \forall n \in N$ をとる．仮定より $\exists n' \in N,\ gn = n'g$ が言える．従って

$$gng^{-1} = n'gg^{-1} = n' \in N.$$

■

定理 C.2: 剰余群

群 G とその<u>正規部分群</u> N を与える．このとき，<u>左剰余類による</u>商集合（定義 C.6）G/N 上の二項演算 $\cdot : G/N \times G/N \to G/N$ を

$$gN \cdot hN := (gh)N \tag{C.1.1}$$

と定義するとこれは well-defined であり，かつ $(G/N, \cdot, N)$ **は群を成す**．この群を G の N による**剰余群** (quotient group) と呼ぶ．

<u>証明</u> **well-definedness**

要するに式 (C.1.1) の右辺が引数 gN, hN の代表元の取り方によらずに定まることを示せば良い．$\forall g, h \in G$ を固定する．このとき左剰余類 gN, hN の勝手な元 $x \in gN, y \in hN$ は $x = gn,\ y = hn'$ $(n, n' \in N)$ と書ける．故に

$$xy = (gn)(hn') = g(hh^{-1})nhn' = (gh)(h^{-1}nh)n'$$

だが，**N が G の正規部分群であることにより** $h^{-1}nh \in N$ が言える．よって $xy \in (gh)N$ であり，式 (C.1.1) の右辺が gN, hN の代表元の取り方によらないことが示された．

群であること

演算 $\cdot$ の well-definedness が示されたので，後は群の公理を充していることを確認すれば良い．

単位元　G/N の任意の元は gN の形をしている．このとき

$$gN \cdot N = N \cdot gN = (g1_G)N = gN$$

なので $1_{G/N} = N$ である．

結合則　G/N の任意の元を 3 つとってきて，それらを $gN,\ hN,\ kN\ (g,\ h,\ k \in G)$ と書く．このとき

$$gN \cdot (hN \cdot kN) = gN \cdot (hk)N = (ghk)N = \bigl((gh)k\bigr)N = (gh)N \cdot kN = (gN \cdot hN) \cdot kN$$

なので良い．

逆元　G/N の任意の元を 1 つとってきてそれを $gN\ (g \in G)$ と書く．このとき $g^{-1} \in G$ なので $g^{-1}N \in G/N$ であり，

$$gN \cdot g^{-1}N = (gg^{-1})N = N = 1_{G/N}$$

とわかる．i.e. $(gN)^{-1} = g^{-1}N$ である．

■

系 C.3: 標準射影と剰余群

群 G とその正規部分群 N を与える．このとき標準射影（定義 1.2）$\pi\colon G \to G/N,\ g \mapsto gN$ は $\boldsymbol{G/N}$ **を剰余群だと思うと全射準同型写像になる**．また，$\operatorname{Ker}\pi = N$ である．

証明　$\operatorname{Im}\pi = G/N$ は π の定義から明らか．

剰余群 G/N の積の定義 (C.1.1) より

$$\pi(gh) = (gh)N = gN \cdot hN = \pi(g) \cdot \pi(h)$$

であり，π は準同型である．

剰余群 G/N の単位元は N なので，$\forall g \in G$ に対して $\pi(g) = gN = 1_{G/N} \iff g \in N$． ■

系 C.3 より，標準射影 $\pi\colon G \twoheadrightarrow G/N$ のことを**自然な全射準同型**と呼ぶ場合がある．

C.1.6　直積・半直積

部分群の「割り算」を定義できたので，ついでに「積」も定義しておこう．まず群 G の**部分集合**の積が自然に定まることを見る．以下の定義 C.9 は**部分群を作っているわけではないので注意**．

定義 C.9: 群 G の部分集合の積

$S_1,\ S_2$ を群 $(G,\ \cdot\ ,\ 1_G)$ の部分集合とする[a]．集合

$$S_1S_2 \coloneqq \left\{\, x \cdot y \;\middle|\; x \in S_1,\ y \in S_2 \,\right\}$$

を部分集合の**積**と呼ぶ．

[a] 部分群ではない！

命題 C.10: 部分集合の積が部分群になる必要十分条件

群 $(G,\ \cdot\ ,\ 1_G)$ とその部分群 $H_1,\ H_2$ を与える．このとき，以下が成り立つ：

(1) $H_1H_2 \subset G$ が G の部分群 $\iff$ $H_1H_2 = H_2H_1$

(2) $H_1 \lhd G$ かつ $H_2 \lhd G$ $\implies$ $H_1H_2 \lhd G$

証明 (1) ($\implies$) H_1H_2 が G の部分群であると仮定する．H_1H_2 の勝手な元は $x = h_1h_2$ $(h_i \in H_i)$ と書ける．このとき仮定より $x^{-1} \in H_1H_2$ だが，H_i が部分群なので

$$x^{-1} = h_2^{-1}h_1^{-1} \in H_2H_1$$

でもある．よって $H_1H_2 = H_2H_1$.

($\impliedby$) $H_1H_2 = H_2H_1$ と仮定する．命題 C.1 の 2 条件を充していることを確認する．

(SG1) H_i が部分群なので $1_G = 1_G1_G \in H_1H_2$.

(SG2) H_1H_2 の勝手な 2 つの元は $h_1h_2,\ k_1k_2$ $(h_i,\ k_i \in H_i)$ と書ける．仮定より $\exists h'_1 \in H_1,\ \exists k'_2 \in H_2,\ h_2k_1 = h'_1k'_2$ が成立するから，

$$(h_1h_2)(k_1k_2) = h_1(h_2k_1)k_2 = (h_1h'_1)(k'_2k_2) \in H_1H_2.$$

(SG3) $h_1h_2 \in H_1H_2$ を任意にとる．仮定から $\exists k'_1 \in H_1,\ \exists k'_2 \in H_2,\ h_2^{-1}h_1^{-1} = k'_1k'_2$ が成立するから

$$(h_1h_2)^{-1} = h'_1h'_2 \in H_1H_2.$$

(2) 仮定と補題 C.1 より $\forall g \in G$ に対して $gH_2 = H_2g$ である．故に

$$H_1H_2 = \bigcup_{h_1 \in H_1} h_1H_2 = \bigcup_{h_1 \in H_1} H_2h_1 = H_2H_1.$$

よって (1) から H_1H_2 は G の部分群である．

$h_1h_2 \in H_1H_2$ を任意にとる．仮定より $\forall g \in G$ に対して $gh_ig^{-1} \in H_i$ である．

$$g(h_1h_2)g^{-1} = (gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1}) \in H_1H_2.$$

i.e. $H_1H_2 \lhd G$.

■

次に，群の直積集合を群にする方法を定める．

定義 C.10: 群の直積

- $G_1,\ G_2$ を群とする．直積集合 $G_1 \times G_2$ に以下のように二項演算 $\cdot : G_1 \times G_2 \to G_1 \times G_2$ を定義すれば，$\bigl(G_1 \times G_2,\ \cdot\ ,\ (1_{G_1},\ 1_{G_2})\bigr)$ は群になる：

$$(g_1,\ g_2) \cdot (h_1,\ h_2) := (g_1h_1,\ g_2h_2)$$

-

証明 **結合律** $G_1,\ G_2$ それぞれの結合則から明らか．

単位元 $\forall (g_1,\, g_2) \in G_1 \times G_2$ に対して

$$(g_1,\, g_2)\cdot(1_{G_1},\, 1_{G_2}) = (g_1,\, g_2) = (1_{G_1},\, 1_{G_2})\cdot(g_1,\, g_2)$$

逆元 $\forall (g_1,\, g_2) \in G_1 \times G_2$ に対して

$$(g_1,\, g_2)\cdot(g_1^{-1},\, g_2^{-1}) = (1_{G_1},\, 1_{G_2}) = 1_{G_1\times G_2}$$

i.e. $(g_1,\, g_2)^{-1} = (g_1^{-1},\, g_2^{-1})$ である．

■

命題 C.11: 群の直積の特徴付け

(1) G_1, G_2 を群とし，包含写像 $\iota_i\colon G_i \hookrightarrow G_1 \times G_2 \quad (i = 1, 2)$ を

$$\iota_1(g_1) := (g_1,\, 1_{G_2}), \quad \iota_2(g_2) := (1_{G_1},\, g_2)$$

と定義する．このとき $\iota_1(G_1)$ の元と $\iota_2(G_2)$ の元は互いに可換であり，$\iota_i(G_i) \lhd G_1 \times G_2$ が成り立つ．

(2) G を群，$H, K \subset G$ を部分群とする．このとき $H \lhd G$ かつ $K \lhd G$ かつ $H \cap K = \{1_G\}$ かつ $HK = G$ ならば $G \cong H \times K$ である．

証明 (1) 可換であることは

$$(g_1,\, 1_{G_2})(1_{G_1},\, g_2) = (g_1,\, g_2) = (1_{G_1},\, g_2)(g_1,\, 1_{G_2})$$

より従う．

$\forall g_1 \in G_1,\ \forall (h_1,\, h_2) \in G_1 \times G_2$ をとる．

$$(h_1,\, h_2)\iota_1(g_1)(h_1,\, h_2)^{-1} = (h_1 g_1 h_1^{-1},\, 1_{G_2}) \in \iota_1(G_1)$$

なので $\iota_1(G_1) \lhd G_1 \times G_2$ である．全く同様にして $\iota_2(G_2) \lhd G_1 \times G_2$ もわかる．

(2) 写像 $\phi\colon H \times K \to G$ を

$$\phi\big((h,\, k)\big) := hk$$

と定義する．仮定より $G = HK$ だから（部分集合の積）ϕ は全射．

まず $\forall h \in H, \forall k \in K$ に対して $hk = kh$ であることを示す．

$$hk(kh)^{-1} = (hkh^{-1})k^{-1} = h(kh^{-1}k^{-1})$$

だが，仮定より $K, H \lhd G$ なので $hkh^{-1} \in K$, $kh^{-1}k^{-1} \in H$ であり，$hk(kh)^{-1} \in K \cap H = \{1_G\}$ が言える．i.e. $hk = kh$.

従って $\forall (h,\, k), (h',\, k') \in H \times K$ に対して

$$\phi\big((h,\, k)\big)\phi\big((h',\, k')\big) = h(kh')k' = h(h'k)k' = (hh')(kk') = \phi\big((h,\, k)\cdot(h',\, k')\big)$$

が成り立つから ϕ は群の準同型である．また，

$$(h,\, k) \in \operatorname{Ker}\phi \quad\Longrightarrow\quad hk = 1_G \quad\Longrightarrow\quad h = k^{-1} \in H \cap K = \{1_G\}$$

だから $\operatorname{Ker}\phi = \{1_G\}$ であり，命題 C.5 から ϕ は単射．よって ϕ は同型写像である．

■

最後に群の半直積を定義しておこう．

定義 C.11: 外部半直積

$N,\, H$ を群とし，$\phi\colon H \to \operatorname{Aut} N,\ h \mapsto \phi_h$ を準同型写像とする[a]．このとき，集合 $N \times H$ は次の二項演算 $\cdot : N \times H \to N \times H$ に関して群を成す：

$$(n_1,\, h_1) \cdot (n_2,\, h_2) \coloneqq \bigl(n_1 \phi_{h_1}(n_2),\, h_1 h_2\bigr)$$

この群 $\bigl(N \times H,\, \cdot\,,\, (1_N,\, 1_H)\bigr)$ のことを $N,\, H$ の（外部）**半直積** (semidirect product) と呼び，$\boldsymbol{H \ltimes_\phi N}$ または $\boldsymbol{N \rtimes_\phi H}$ と書く．

[a] $\operatorname{Aut} N$ は，N から N 自身への同型写像全体の集合に，写像の合成を群の演算として群構造を入れたもので，**自己同型群** (automorphism group) と呼ばれる．

証明 **結合律** $\phi\colon H \to \operatorname{Aut} N$ は準同型写像であるから $\phi_{h_1 h_2} = \phi(h_1 h_2) = \phi(h_1) \circ \phi(h_2) = \phi_{h_1} \circ \phi_{h_2}$ である．

$$\begin{aligned}
\bigl((n_1,\, h_1) \cdot (n_2,\, h_2)\bigr) \cdot (n_3,\, h_3) &= \Bigl(n_1 \phi_{h_1}(n_2) \phi_{h_1 h_2}(n_3),\, h_1 h_2 h_3\Bigr) \\
&= \Bigl(n_1 \phi_{h_1}(n_2) \phi_{h_1}\bigl(\phi_{h_2}(n_3)\bigr),\, h_1 h_2 h_3\Bigr) \\
&= \Bigl(n_1 \phi_{h_1}\bigl(n_2 \phi_{h_2}(n_3)\bigr),\, h_1 (h_2 h_3)\Bigr) \\
&= (n_1,\, h_1) \cdot \bigl(n_2 \phi_{h_2}(n_3),\, h_2 h_3\bigr) \\
&= (n_1,\, h_1) \cdot \Bigl((n_2,\, h_2) \cdot (n_3,\, h_3)\Bigr)
\end{aligned}$$

単位元 $\phi\colon H \to \operatorname{Aut} N$ は準同型写像であるから $\phi_{1_H} = \mathrm{id}_N$ である．故に $\forall n \in N,\, \forall h \in H$ に対して

$$(n,\, h) \cdot (1_N,\, 1_H) = (n \phi_h(1_N),\, h 1_H) = (n,\, h) = (1_N \phi_{1_H}(n),\, 1_H h) = (1_N,\, 1_H) \cdot (n,\, h)$$

逆元 $\phi\colon H \to \operatorname{Aut} N$ は準同型写像であるから，命題 C.4 より $\phi_{h^{-1}} = \phi(h^{-1}) = \phi(h)^{-1} = \phi_h^{-1}$ である．故に $\forall n \in N,\, \forall h \in H$ に対して

$$\begin{aligned}
(n,\, h) \cdot \bigl(\phi_{h^{-1}}(n^{-1}),\, h^{-1}\bigr) &= \Bigl(n \phi_h\bigl(\phi_{h^{-1}}(n^{-1})\bigr),\, 1_H\Bigr) = (n n^{-1},\, 1_H) = 1_{N \rtimes_\phi H} \\
\bigl(\phi_{h^{-1}}(n^{-1}),\, h^{-1}\bigr) \cdot (n,\, h) &= \Bigl(\phi_{h^{-1}}(n^{-1}) \phi_{h^{-1}}(n),\, 1_H\Bigr) = (\phi_{h^{-1}}(n)^{-1} \phi_{h^{-1}}(n),\, 1_H) = 1_{N \rtimes_\phi H}
\end{aligned}$$

i.e. $\boldsymbol{(n,\, h)^{-1} = \bigl(\phi_{h^{-1}}(n^{-1}),\, h^{-1}\bigr)}$.

■

C.1.7 準同型定理

群の準同型写像 $\phi\colon G \to H$ が与えられると，命題 C.9 より $\operatorname{Ker} \phi \lhd G$ であるから $G/\operatorname{Ker} \phi$ は剰余群 C.2 になる．そして系 C.3 により，G と $G/\operatorname{Ker} \phi$ は自然に全射準同型 π で結ばれることもわかる．では，群 $G/\operatorname{Ker} \phi$ と群 H の関係はどうなっているのだろうか？

定理 C.4: 準同型定理 (第一同型定理)

群の準同型写像 $\phi\colon G \to H$ を与える．$\pi\colon G \to G/\operatorname{Ker}\phi$ を自然な準同型とする．このとき，図 C.1 が可換図式となるような準同型 $\psi\colon G/\operatorname{Ker}\phi \to H$ がただ一つ存在し，$\psi\colon G/\operatorname{Ker}\phi \to \operatorname{Im}\phi$ は同型写像になる．

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"] & H \\
G/\operatorname{Ker}\phi \arrow[ur, dashed, "\exists!\psi"'] &
\end{tikzcd}
$$

図 C.1: 準同型定理

<u>**証明**</u> $N = \operatorname{Ker}\phi$ とおく．$\forall g \in G$ に対して

$$\psi(gN) \coloneqq \phi(g) \tag{C.1.2}$$

と定義する．

$\forall x \in gN$ はある $n \in N = \operatorname{Ker}\phi$ を使って $x = gn$ と書くことができるから

$$\psi(xN) = \phi(x) = \phi(gn) = \phi(g)\phi(n) = \phi(g)1_G = \psi(gN)$$

が成立する．i.e. (C.1.2) によって定義される写像 $\psi\colon G/N \to H$ は well-defined である．

ψ は準同型写像で，図 C.1 は可換図式である

$\forall g,\, h \in G$ に対して

$$\psi\bigl((gN)(hN)\bigr) = \psi\bigl((gh)N\bigr) = \phi(gh) = \phi(g)\phi(h) = \psi(gN)\psi(hN)$$

であるから ψ は準同型写像．

また，定義 (C.1.2) から明らかに写像の等式として $\psi \circ \pi = \phi$ が成り立つ．i.e. 図 C.1 は可換図式である．

ψ は単射である

$\forall g \in G$ に対して

$$\psi(gN) = 1_H \quad\Longrightarrow\quad \phi(g) = 1_H \quad\Longleftrightarrow\quad g \in \operatorname{Ker}\phi = N$$

なので $\operatorname{Ker}\psi = \{N\}$ とわかる．$N = 1_{G/N}$ なので，命題 C.4 から ψ は単射である．

$\operatorname{Im}\psi = \operatorname{Im}\phi$ である

$\forall g \in G$ に対して $\phi(g) = \psi(gN)$ なので $\operatorname{Im}\phi \subset \operatorname{Im}\psi$．$G/N$ の勝手な元は $gN \quad (g \in G)$ の形をしているので $\psi(gN) = \phi(g)$ であり，$\operatorname{Im}\psi \subset \operatorname{Im}\phi$ とわかる．よって $\operatorname{Im}\psi = \operatorname{Im}\phi$ である．ψ は単射だから $\psi\colon G/N \to \operatorname{Im}\phi$ は全単射であり，$G/N \cong \operatorname{Im}\phi$ が言える．

ψ は一意的に定まる

図 C.1 が可換図式であるとき，i.e. $\psi \circ \pi = \phi$ が成り立つとき，$\forall x = gN \in G/N$ に対して $\psi(x) = \psi(gN) = (\psi \circ \pi)(g) = \phi(g)$ として値が定まり，定義 (C.1.2) と一致する．従って ψ は一意に定まる．

■

定理 C.5: 準同型定理 (第二同型定理)

G を群，H を G の部分群，N を G の正規部分群とするとき，次が成り立つ：

(1) $H \cap N \lhd H$
(2) $\boldsymbol{HN/N \cong H/H \cap N}$

証明 写像 $\phi\colon H \to HN/N,\ h \mapsto hN/N$ は剰余群への自然な全射準同型と同様に well-defined な準同型写像である．

$\forall y \in HN/N$ に対して

$$\exists h \in H, \exists n \in N,\ y = (hn)N = hN = \phi(h)$$

が成立するから $\operatorname{Im}\phi = HN/N$ である．また，$h \in H$ に対して

$$\phi(h) = 1_{HN/N} \quad \Longleftrightarrow \quad hN = N \quad \Longrightarrow \quad h \in H \cap N$$

だから $\operatorname{Ker}\phi = H \cap N$ である．

(1) 命題 $prop.ker_group - 1$ より $H \cap N \lhd H$ である．
(2) 準同型定理（第一同型定理）C.17 より，ϕ によって $HN/N \cong H/H \cap N$ である．

■

定理 C.6: 準同型定理 (第三同型定理)

G を群，$N \subset M$ を G の正規部分群とするとき，次が成り立つ：

$$\boldsymbol{(G/N)/(M/N) \cong G/M}$$

証明 $\forall x \in G, \forall y \in N$ をとる．$N \subset M$ なので $(xy)M = xM$ である．従って，写像 $\phi\colon G/N \to G/M$ を

$$\phi(xN) := xM$$

とおくと ϕ は well-defined な準同型写像である．

また，$x \in G$ に対して

$$\phi(xN) = 1_{G/M} \quad \Longleftrightarrow \quad xM = M \quad \Longrightarrow \quad x \in M$$

だから $\operatorname{Ker}\phi = M/N$ である．よって準同型定理（第一同型定理）C.17 を使うことで $(G/N)/(M/N) \cong G/M$ がわかる． ■

C.2 群の作用

定義 C.12: 群の作用

G を群，X を集合とする．

- G の X への**左作用** (left action) とは写像

$$\phi\colon G\times X\to X,\ (g,\,x)\mapsto \phi(g,\,x)$$

であって以下の性質を充たすものを言う：

(1) $\phi(1_G,\,x)=x$

(2) $\phi\bigl(g,\,\phi(h,\,x)\bigr)=\phi(gh,\,x)$

- G の X への**右作用** (right action) とは写像

$$\phi\colon X\times G\to X,\ (x,\,g)\mapsto \phi(x,\,g)$$

であって以下の性質を充たすものを言う：

(1) $\phi(x,\,1_G)=x$

(2) $\phi\bigl(\phi(x,\,h),\,g\bigr)=\phi(hg,\,x)$

よく左作用 ϕ は $g\cdot x,\ gx:=\phi(g,\,x)$ と略記される．右作用 ϕ は $x\cdot g,\ xg,\ x^g:=\phi(g,\,x)$ などと略記される．

命題 C.12:

群 G が集合 X に左（右）から作用するとする．$\forall g\in G$ を一つ固定すると，写像

$$\alpha\colon X\to X,\ x\mapsto g\cdot x$$

は全単射になる．

証明 **左作用**　$\forall x\in X$ に対して $y:=g\cdot x$ とおく．

$$g^{-1}\cdot(g\cdot x)=(g^{-1}g)\cdot x=1_G\cdot x=x=g^{-1}\cdot y$$

なので写像 $\beta\colon X\to X,\ x\mapsto g^{-1}\cdot x$ が α の逆写像である．

右作用　左作用のときとほぼ同様に $y:=x\cdot g$ とおくと，

$$(x\cdot g)\cdot g^{-1}=x\cdot(gg^{-1})=x\cdot 1_G=y\cdot g^{-1}$$

であることから，α^{-1} の逆写像の存在が示される．

■

C.2.1　種々の作用

定義 C.13: 剰余群への自然な作用

H を群 G の部分群とする．このとき $\forall g,\ \forall xH \in G/H$ に対して

$$g \cdot (xH) \coloneqq (gx)H \tag{C.2.1}$$

と定義すれば G の G/H への左作用が得られる．これを $\boldsymbol{G}$ **の** $\boldsymbol{G/H}$ **への自然な作用**と呼ぶ．
同様に $\forall g,\ \forall Hx \in H\backslash G$ に対して

$$(Hx) \cdot g \coloneqq H(xg)$$

と定義すれば G の $H\backslash G$ への右作用が得られる．これも自然な作用と呼ぶ．

<u>**証明**</u> well-definedness を確認する．実際 xH の勝手な元 y は $h \in H$ を使って $y = xh$ と書かれるから

$$gy = gxh \in (gx)H$$

であり，式 (C.2.1) の右辺は剰余類 xH の代表元の取り方によらない．右作用に関しても同様である． ■

定義 C.14: 随伴作用

G を群とし，$\forall g \in G$ をとる．このとき，写像 $\mathrm{Ad}(g)\colon G \to G$ を

$$\mathrm{Ad}(g)(h) \coloneqq ghg^{-1}, \quad \forall h \in G$$

と定義すれば，$\mathrm{Ad}\colon G \times G \to G$ は G の G 自身への<u>左作用</u>になる．これを**随伴作用**[a] (adjoint action) と呼ぶ．

[a] **共役作用** (conjugation) とも言う．

<u>**証明**</u> 定義 C.12 の 2 条件を充していることを確認する．

(1) $\mathrm{Ad}(1_G)(h) = h$ より明らか．
(2) $\forall g_1,\ g_2 \in G$ に対して

$$\mathrm{Ad}(g_1 g_2)(h) = (g_1 g_2)h(g_1 g_2)^{-1} = g_1(g_2 h g_2^{-1})g_1^{-1} = \mathrm{Ad}(g_1)\bigl(\mathrm{Ad}(g_2)(h)\bigr)$$

よりよい．

■

C.2.2 群の作用に関する諸定義

以下，断らなければ作用は左作用であるとする．

定義 C.15: 軌道，等質空間，安定化群

群 G が集合 X に作用するとする．

(1) $x \in X$ に対して，集合 $\boldsymbol{G \cdot x} := \left\{ g \cdot x \mid g \in G \right\}$ を x の G による**軌道** (orbit) と呼ぶ．
(2) $x \in X$ に対して，集合 $\boldsymbol{G_x} := \left\{ g \in G \mid g \cdot x = x \right\}$ を x の**安定化群** (stabilizer subgroup) と呼ぶ．
(3) $\exists x \in X,\ G \cdot x = X$ であるとき，この作用は**推移的**[a] (transitive) であると言う．このとき X は G の**等質空間** (homogeneous space) であると言う．
(4) $\forall x \in X,\ G_x = \{1_G\}$ であるとき，この作用は**自由**[b] (free) であると言う．
(5) $\exists x \in X,\ G_x = \{1_G\}$ であるとき，この作用は**効果的**[c] (effective) であると言う．

[a] **可移**と言うこともある．
[b] **半正則** (semiregular) とも言う．
[c] **忠実** (faithful) とも言う．

命題 C.13:

群 G が X に作用するとする．$\forall x \in X$ を一つ固定する．このとき写像

$$\alpha\colon G/G_x \to G \cdot x,\ gG_x \mapsto g \cdot x$$

は全単射である．従って

$$|G \cdot x| = (G : G_x).$$

証明 gG_x の勝手な元 h は $g_1 \in G_x$ を用いて $h = gg_1$ と書かれるから $h \cdot x = (gg_1) \cdot x = g \cdot (g_1 \cdot x) = g \cdot x$ であり，α は well-defined である．

$\forall g_1,\, g_2 \in G$ をとる．

$$\begin{aligned} g_1 \cdot x = g_2 \cdot x \quad &\Longleftrightarrow \quad (g_2^{-1} g_1) \cdot x = x \\ &\Longleftrightarrow \quad g_2^{-1} g_1 \in G_x \\ &\Longleftrightarrow \quad g_1 \in g_2 G_x \\ &\Longrightarrow \quad g_1 G_x = g_2 G_x \end{aligned}$$

だから α は単射である．全射性は明らか． ■

定義 C.16: 正規化群，中心化群

H を群 G の部分群とする．

(1) G の部分群 $\mathrm{N}_G(H) := \left\{ g \in G \mid gHg^{-1} = H \right\}$ を H の**正規化群** (normalizer) と呼ぶ．
(2) G の部分群 $\mathrm{Z}_G(H) := \left\{ g \in G \mid \forall h \in H,\ gh = hg \right\}$ を H の**中心化群** (centralizer) と呼ぶ．
(3) $\mathrm{Z}(G) := \mathrm{Z}_G(G)$ を G の**中心** (center) と呼ぶ．

定義 C.17: 共役類

群 G の元 $x,\ y$ に対して

$$\exists g \in G,\ y = gxg^{-1}$$

が成り立つとき，x と y は**共役**であると言う[a]．x と共役である元全体の集合を $C(x)$ と書き，**共役類** (conjugacy class) と呼ぶ．

[a] 共役は明らかに同値関係である．

C.3 環

公理 C.1: 環の公理

- R を集合とする．**環** (ring) とは，R と写像

$$\begin{aligned} +&\colon R \times R \to R,\ (a,\ b) \mapsto a + b \\ \cdot&\colon R \times R \to R,\ (a,\ b) \mapsto a \cdot b \end{aligned}$$

  の組 $(R,\ +,\ \cdot\ )$ であって，$\forall a,\ b,\ c \in R$ に対して以下を充たすもののことを言う：

  (R1) $(R,\ +\ ,\ 0)$ は可換群である

  (R2) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

  (R3) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

  (R4) $\exists 1 \in R,\ a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

  (R2)-(R4) は，R が乗法 $\cdot$ に関してモノイドであることを意味する．
- 環 $(R,\ +,\ \cdot\ )$ が以下の条件を充たすとき，R を**可換環** (commutative ring) という：

  (R5) $a \cdot b = b \cdot a$
- 可換環 $(R,\ +,\ \cdot\ )$ において，$\forall a \in R \setminus \{0\}$ が乗法 $\cdot$ に関して逆元を持つとき，R は**体** (field) と呼ばれる．

定義 C.18: 単元

環 $(R,\ +,\ \cdot\ )$ を与える．

- $a \in R$ が乗法 $\cdot$ に関して逆元を持つとき，a は**可逆元**または**単元**と呼ばれる．
- R の単元全体の集合を $\boldsymbol{R^{\times}}$ と書く．組 $(R^{\times},\ \cdot,\ 1_R)$ を R の**乗法群**という．

!

(R4) を除いたものを環と呼ぶ流儀もある．このときは，**(R1)-(R4)** を充たすものを**単位元を持つ環** (unital ring, ring with unity) と呼ぶ．

さらに珍しい（古い？）が，**(R1)**, **(R3)** のみを環の公理とする場合もある．これが Lie「環」と呼ばれる所以である．

定義 C.19: 環の準同型・同型

$(R_1, +, \cdot\,)$, $(R_2, +, *\,)$ を環とする．

- 写像 $\phi\colon R_1 \to R_2$ が以下の条件を充たすとき，ϕ は環の**準同型写像** (homomorphism) と呼ばれる：
  (1) $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$
  (2) $\phi(x \cdot y) = \phi(x) * \phi(y)$
  (3) $\phi(1_{R_1}) = 1_{R_2}$
- $\phi\colon R_1 \to R_2$ が環の準同型写像で逆写像 ϕ^{-1} を持ち，ϕ^{-1} もまた環の準同型写像であるとき，ϕ は**同型写像** (isomorphism) であると言う．このことを記号として $\boldsymbol{R_1 \cong R_2}$ と書く．

いちいち $(R, +, \cdot\,)$ と書くのは面倒なので，以下では環 R と略記する．

定義 C.20: 整域・零因子

R を零環でない**可換環**とする．

(1) R が**整域** (domain) であるとは，次が成立することを言う：

$$\forall a, b \in R \setminus \{0\},\ ab \neq 0$$

(2) $a \in R$ が以下の条件を充たすとき，a は**零因子** (zero-divisor) であると言う：

$$\exists b \in R \setminus \{0\},\ ab = 0$$

i.e. R が整域であるとは，零因子が 0 のみであること．

C.3.1 部分環

定義 C.21: 部分環

R を環とする．R の部分集合 S が R の加法と乗法により環になり，かつ $1_R \in S$ ならば，S を R の**部分環** (subring)，R を S の**拡大環**と呼ぶ.

命題 C.14: 部分環の判定

R を環，$S \subset R$ を部分集合とする．S が部分環であるための必要十分条件は，次の条件が成り立つことである：

(SR1) S は加法に関して部分群である
(SR2) $a, b \in S \implies ab \in S$
(SR3) $1_R \in S$

命題 C.15: 整域の部分環は整域

R が整域，S が R の部分環ならば，S も整域である．

証明 $a, b \in S \setminus \{0\}$ ならば a, b は R の元としても 0 でない．故に R は整域だから R の元として $ab \neq 0$ である．部分環 S は R と加法逆元 0 および乗法を共有するから，S の元としても $ab \neq 0$ である．i.e. S は整域である．■

定義 C.22: 核・像

$\phi\colon R_1 \to R_2$ を環の準同型写像とする．

(1) ϕ の**核** (kernel) を次のように定義する：

$$\operatorname{Ker}\phi := \left\{ x \in R_1 \mid \phi(x) = 0_{R_2} \right\} \subset R_1$$

$\operatorname{Ker}\phi$ は R_1 のイデアルであり，かつ $\operatorname{Ker}\phi \neq A$ である．

(2) ϕ の**像** (image) を次のように定義する：

$$\operatorname{Im}\phi := \left\{ \phi(x) \mid x \in R_1 \right\} \subset R_2$$

$\operatorname{Im}\phi$ は R_2 の部分環である．

証明 (1) ϕ は加法準同型なので，命題 C.4 から $\operatorname{Ker}\phi$ は R_1 の加法部分群である．
ここで $a \in R, x \in \operatorname{Ker}\phi$ を任意にとると

$$\phi(ax) = \phi(a)\phi(x) = \phi(a)0_{R_2} = 0_{R_2}$$

なので $ax \in \operatorname{Ker}\phi$ である．以上より $\operatorname{Ker}\phi$ は R_1 のイデアルである．
また，$\phi(1_{R_1}) = 1_{R_2} \neq 0_{R_2}$ なので $1_{R_1} \notin \operatorname{Ker}\phi$ である．よって $\operatorname{Ker}\phi \neq A$.

(2) 命題 C.14 の 3 条件を確認する．

(SR1) ϕ は加法準同型なので，命題 C.4 から $\operatorname{Im}\phi$ は加法部分群.

(SR2)

$$a, b \in \operatorname{Im}\phi \implies \exists x, y \in R_1,\ a = \phi(x), b = \phi(y) \implies ab = \phi(x)\phi(y) = \phi(xy) \in \operatorname{Im}\phi$$

(SR3) ϕ の定義から明らか.

■

命題 C.16: 環準同型の単射性判定

環準同型写像 $\phi\colon R_1 \to R_2$ に対して以下が成立する：

$$\phi \text{ が単射} \iff \operatorname{Ker}\phi = \{0_{R_1}\}$$

証明 ($\Longrightarrow$) ϕ が単射であるとする．命題 C.3-(1) より $0_{R_1} \in \operatorname{Ker}\phi$ だから，仮定より

$$x \in \operatorname{Ker}\phi \implies \phi(x) = \phi(0_{R_1}) = 0_{R_2} \implies x = 0_{R_1}$$

$(\Longleftarrow)$ $\mathrm{Ker}\,\phi = \{0_{R_1}\}$ とする．このとき命題 C.3-(2) より，$\forall x,\, y \in R_1$ に対して

$$\begin{aligned} \phi(x) = \phi(y) \quad &\Longrightarrow \quad \phi(x) - \phi(y) = \phi(x) + \phi(-y) = \phi(x-y) = 0_{R_2} \\ &\Longrightarrow \quad x - y \in \mathrm{Ker}\,\phi \quad \Longrightarrow \quad x = y \end{aligned}$$

i.e. ϕ は単射. ■

C.3.2 イデアル

環において正規部分群に対応するものがイデアルである.

定義 C.23: イデアル

R を環，I を R の部分集合とする.

(1) I が以下を充たすとき，I は**左イデアル** (left ideal) と呼ばれる：
  (a) I は R の加法部分群
  (b) $\forall a \in R,\, \forall x \in I,\ ax \in I$

(2) I が以下を充たすとき，I は**右イデアル** (right ideal) と呼ばれる：
  (a) I は R の加法部分群
  (b) $\forall a \in R,\, \forall x \in I,\ xa \in I$

I が左イデアルかつ右イデアルのとき，**両側イデアル** (two-sided ideal) と言う．R が可換環のときは左右の区別はなく，単に**イデアル** (ideal) と言う.

$\{0\}$, R は明らかに両側イデアルである．これらを**自明なイデアル**と呼ぶ.

定義 C.24: イデアルの生成

R を環とする.

- 任意の添字集合 Λ を与える．部分集合 $S \coloneqq \{s_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset R$ を含む最小の左イデアル

$$\left\{ \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda s_\lambda \;\middle|\; a_\lambda \in R,\ \begin{array}{l}\text{有限個の添字 } i_1, \dots, i_n \text{ を除いた} \\ \text{全ての添字 } \lambda{\in}\Lambda \text{ について } a_\lambda{=}0\end{array} \right\}$$

  は ***S* で生成された *R* の左イデアル**と呼ばれ，記号として $\displaystyle\sum_{\lambda \in \Lambda} R s_\lambda$ と書かれる.

- S を含む最小の右イデアル

$$\left\{ \sum_{\lambda \in \Lambda} s_\lambda a_\lambda \;\middle|\; a_\lambda \in R,\ \begin{array}{l}\text{有限個の添字 } i_1, \dots, i_n \text{ を除いた} \\ \text{全ての添字 } \lambda{\in}\Lambda \text{ について } a_\lambda{=}0\end{array} \right\}$$

  は ***S* で生成された *R* の右イデアル**と呼ばれ，記号として $\displaystyle\sum_{\lambda \in \Lambda} s_\lambda R$ と書かれる.

- S を含む最小の両側イデアル

$$\left\{ \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda s_\lambda b_\lambda \;\middle|\; a_\lambda,\, b_\lambda \in R,\ \substack{\text{有限個の添字 } i_1,\,\dots,\,i_n \text{ を除いた}\\ \text{全ての添字 } \lambda\in\Lambda \text{ について } a_\lambda=0} \right\}$$

は $\boldsymbol{S}$ **で生成された** $\boldsymbol{R}$ **の両側イデアル**と呼ばれ，記号として $\displaystyle\sum_{\lambda\in\Lambda} Rs_\lambda R$ と書かれる．

- $\Lambda = \{1,\,\dots,\,n\}$ のとき，S の生成する最小の左（resp. 右，両側）イデアルは $\boldsymbol{Rs_1 + \cdots + Rs_n}$ (resp. $\boldsymbol{s_1R + \cdots + s_nR}$, $\boldsymbol{(s_1,\,\dots,\,s_n)}$) と書かれる．特に R が可換環の場合，これは[a]**有限生成なイデアル** (finitly generated ideal) と呼ばれる．
- 1 つの元 $s \in R$ で生成される可換環 R のイデアルを**単項イデアル** (principal ideal) と言い，$\boldsymbol{(s)}$ と書く．

[a] もちろん，R が可換環ならば左・右・両側イデアルの定義は互いに同値である．この場合，有限生成なイデアルの記号として $(s_1,\,\dots,\,s_n)$ を使うことが多いように思う．

定義 C.25: イデアルの和・積

R を環，$I,\,J \subset R$ を左（右）イデアルとする．

(1) $I,\,J$ の**和**を次のように定義する：

$$I + J := \left\{\, x + y \;\middle|\; x \in I,\ y \in J \,\right\}$$

$I + J$ は左（右）イデアルである．

(2) $I,\,J$ の**積**を次のように定義する：

$$IJ := \left\{\, x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ x_i \in I,\ y_i \in J \,\right\}$$

IJ は左（右）イデアルである．

定理 C.7: 剰余環

環 R とその自明でない両側イデアル I を与える．このとき，加法に関する剰余類[a]全体の集合 R/I の上の 2 つの二項演算 $+,\,\cdot\colon R/I \times R/I \to R/I$ を

$$\begin{aligned}(x+I) + (y+I) &:= (x+y) + I\\ (x+I)\cdot(y+I) &:= (xy) + I\end{aligned}$$

と定義するとこれらは well-defined であり，かつ $\boldsymbol{(R/I,\,+,\,\cdot\,)}$ **は環を成す．**この環を R の I による**剰余環** (quotient ring) と言う．

[a] $+$ に関して可換群なので，左・右剰余類の区別はない．

R が可換環ならば，その剰余環も可換環になる．

証明 加法に関する well-definedness および可換群であることは，定理 C.2 より即座に従う．

well-definedness 乗法に関して示す．

剰余類剰余類 $x+I,\, y+I$ の勝手な元は $x' = x+a,\, ,y' = y+b\ (a,\, b \in I)$ とかける．故に

$$x'y' = (x+a)(y+b) = xy + xb + ay + ab$$

であるが，I が R の両側イデアルであることにより $xb,\, ay,\, ab \in I$ が言える．従って $x'y' \in (xy) + I$ であり，乗法の定義は剰余類の代表元の取り方に依らない．

環であること 環の公理を充していることを確認すれば良い．

- **(R1)** 定理 C.2 より従う．零元 $0_{R/I} = I$ である．
- **(R2)** R の結合律より従う．
- **(R3)** R の分配律より従う．
- **(R4)** 乗法単位元は $1_{R/I} = 1 + I$ である．

■

系 C.8: 剰余環への自然な全射準同型

環 R とその両側イデアル I を与える．このとき標準射影（定義 1.2）$\pi\colon R \to R/I,\ x \mapsto x + I$ は **R/I を剰余環と見做すと全射準同型写像になる**．また，$\operatorname{Ker}\pi = I$ である．π のことを**自然な全射準同型**と呼ぶ．

証明 加法 $+$ に関しては剰余群の全射準同型の場合と同様．後は定義 C.19-(2), (3) の成立を確かめれば良い．

剰余環の乗法の定義より，$\forall x,\, y \in R$ に対して

$$\pi(xy) = (xy) + I = (x+I)\cdot(y+I) = \pi(x)\cdot\pi(y)$$

だから乗法を保存する．乗法単位元に関しては

$$\pi(1_R) = 1_R + I = 1_{R/I}.$$

従って π は環の準同型である． ■

定義 C.26: 単項イデアル整域

任意のイデアルが単項イデアルである整域を**単項イデアル整域** (principal ideal domain; PID) と呼ぶ．

C.3.3 準同型定理

定理 C.9: 環の準同型定理 (第一同型定理)

環の準同型写像 $\phi\colon R \to S$ を与える．$\pi\colon R \to R/\operatorname{Ker}\phi$ を自然な準同型とする．このとき，図 C.1 が可換図式となるような準同型 $\psi\colon R/\operatorname{Ker}\phi \to S$ がただ一つ存在し，$\psi\colon R/\operatorname{Ker}\phi \to \operatorname{Im}\phi$ は同型写像になる．

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & S \\ R/\operatorname{Ker}\phi \arrow[ur, dashed, "\exists!\psi"'] & \end{tikzcd}$$

図 C.2: 環の準同型定理

証明 群の準同型定理により，ψ が加法群の準同型として一意的に存在し，$\operatorname{Im}\phi$ への加法群の同型となる．よって環の準同型の定義から，後は ψ が積を保つことを示せば良い．

$I := \operatorname{Ker}\phi$ とおく．R/I の勝手な 2 つの元は $x + I,\, y + I$ $(x,\, y \in R)$ と書ける．$\phi = \psi \circ \pi$ は環の準同型なので，

$$\psi(x + I)\psi(y + I) = \bigl(\psi \circ \pi(x)\bigr)\bigl(\psi \circ \pi(y)\bigr) = \phi(x)\phi(y) = \phi(xy) = \psi(xy + I).$$

従って，ψ は環の準同型. ■

定理 C.10: 環の準同型定理 (第三同型定理)

R を環，$I \subset J$ を自明でない両側イデアルとするとき，次が成り立つ：

(1) 環の準同型 $\phi\colon R/I \to R/J$ であって，$\phi(x + I) = x + J$ となるものが存在する．
(2) $\boldsymbol{(R/I)/(J/I) \cong R/J}$

C.3.4 環の直積

定義 C.27: 環の直積

$R_1,\, \ldots,\, R_n$ を環とする. 直積集合 $R := R_1 \times \cdots \times R_n$ の上に加法 $+\colon R \times R \to R$ と乗法 $\cdot\colon R \times R \to R$ を次のように定めると，組 $(R,\, +,\, \cdot\,)$ は環になる．この環を $R_1,\, \ldots,\, R_n$ の**直積**と呼ぶ：

$$\begin{aligned} (a_1,\, \ldots,\, a_n) + (b_1,\, \ldots,\, b_n) &:= (a_1 + b_1,\, \ldots,\, a_n + b_n), \\ (a_1,\, \ldots,\, a_n) \cdot (b_1,\, \ldots,\, b_n) &:= (a_1 b_1,\, \ldots,\, a_n b_n) \end{aligned}$$

C.3.5 中国式剰余定理

定理 C.11: 中国式剰余定理

$m,\, n \neq 0$ が互いに素な整数ならば以下が成り立つ：

$$\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

証明 写像 $\phi\colon \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を

$$\phi(x + mn\mathbb{Z}) := (x + m\mathbb{Z},\, x + n\mathbb{Z})$$

と定義する．明らかに ϕ は環の準同型写像である．

well-definedness

$\forall y \in x + mn\mathbb{Z}$ は $a \in \mathbb{Z}$ を使って $y = x + mna$ と書ける．従って $y \in x + m\mathbb{Z}$ かつ $y \in x + n\mathbb{Z}$ であり，ϕ の定義は剰余類 $x + mn\mathbb{Z}$ の代表元の取り方によらない．

ϕ は全単射

$|\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = mn < \infty$ だから，補題 D.2 より ϕ が全射であることを示せば十分．$\forall (x + m\mathbb{Z},\ y + n\mathbb{Z}) \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ をとる．仮定より m, n が互いに素なので，$\mathbb{Z}$ が単項イデアル整域であることから $ma + nb = 1$ を充たす $a, b \in \mathbb{Z}$ が存在する．従って $z := may + nbx$ とおくと，

$$z = may + (1 - ma)x = x + ma(y - x) = (1 - nb)y + nbx = y + nb(x - y)$$

が成立する．i.e. $z \in x + m\mathbb{Z}$ かつ $z \in y + n\mathbb{Z}$ であり，

$$(x + m\mathbb{Z},\ y + n\mathbb{Z}) = \phi(z + mn\mathbb{Z}) \in \operatorname{Im}\phi$$

が言えた．

■

系 C.12: 古典的な中国式剰余定理

$m, n \neq 0$ を互いに素な整数とする．$ma + nb = 1$ を充たす整数 $a, b \in \mathbb{Z}$ をとる．このとき $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ に対して $\boldsymbol{z := may + nbx}$ とおけば，

$$\begin{aligned} z &\equiv x \quad \mathrm{mod}\ m, \\ z &\equiv y \quad \mathrm{mod}\ n \end{aligned}$$

が成り立つ．

<u>**証明**</u> 定理 C.11 の証明から即座に従う． ■

より一般化すると次のようになる：

定理 C.13: 可換環における中国式剰余定理

R を<u>可換環</u>，$I_1, \dots, I_n \subsetneq R$ を両側イデアルとする．イデアルの和に関して

$$i \neq j \quad \Longrightarrow \quad I_i + I_j = R$$

が充たされている[a]とき，以下が成立する：

(1) $1 \leq \forall i \leq n,\ I_i + \prod_{j \neq i} I_j = R$

(2) $I_1 \cap \cdots \cap I_n = \prod_{i=1}^{n} I_j$

(3) $\boldsymbol{R/(I_1 \cap \cdots \cap I_n) \cong R/I_1 \times \cdots \times R/I_n}$

[a] このことを，イデアル $I_1, \dots, I_n$ は互いに素であると言う．

証明　(1) $i=1$ とする．$I_1+(I_2I_3\cdots I_n)$ は R のイデアルだから，$I_1+(I_2I_3\cdots I_n)\supset R$ を示せばよい．仮定より $2\leq\forall i\leq n$ に対して

$$\exists x_i\in I_1,\ \exists y_i\in I_i,\ x_i+y_i=1$$

である．このとき

$$(x_2+y_2)(x_3+y_3)\cdots(x_n+y_n)=1$$

であるが，左辺を展開すると $y_2y_3\cdots y_n\in I_2I_3\cdots I_n$ かつそれ以外の項は I_1 の元である．よって $1\in I_1+(I_2I_3\cdots I_n)$ であるが，イデアルの定義から $a\in R \implies a=a1\in I_1+(I_2I_3\cdots I_n)$ がわかる．

(2)　$n\geq 2$ に関する数学的帰納法により示す．

$n=2$ のとき，$I_1I_2\subset I_1\cap I_2$ は明らか．仮定より $x+y=1$ を充たす $x\in I_1,\ y\in I_2$ が存在する．従って

$$a\in I_1\cap I_2 \implies a=ax+ay$$

だが，$a\in I_2$ かつ $\boldsymbol{R}$ **が可換環である**ことから $ax\in I_1I_2$ であり，$a\in I_1$ であることから $ay\in I_1I_2$ である．よって $a\in I_1I_2$ が言えた．

$n-1$ まで成り立っているとすると，帰納法の仮定は

$$I_1\cap\cdots\cap I_{n-1}=I_1I_2\cdots I_{n-1}.$$

(1) より $(I_1\cdots I_{n-1})+I_n=R$ なので，$n=2$ の場合の証明から

$$I_1\cap\cdots\cap I_{n-1}\cap I_n=(I_1\cdots I_{n-1})\cap I_n=I_1\cdots I_{n-1}I_n.$$

(3)　$n\geq 2$ に関する数学的帰納法により示す．

$n=2$ のとき，準同型写像 $\phi\colon R\to R/I_1\times R/I_2$ を

$$\phi(a):=\big((a+I_1),\,(a+I_2)\big)$$

で定義する．

$$a\in\operatorname{Ker}\phi \iff \phi(a)=(I_1,\,I_2) \iff a\in I_1\ \text{かつ}\ a\in I_2$$

なので $\operatorname{Ker}\phi=I_1\cap I_2$ である．

$\forall c\in R/I_1\times R/I_2$ は $a,b\in R$ を使って $c=(a+I_1,\,b+I_2)$ と書ける．ここで仮定より，ある $x\in I_1,\ y\in I_2$ が存在して $x+y=1$ を充たすから，$z:=ay+bx$ とおくと

$$z=a+(b-a)x\in a+I_1,\quad z=b+(a-b)y\in b+I_2$$

である．i.e. $c=\phi(z)$ であり，$\operatorname{Im}\phi=R/I_1\times R/I_2$ がわかった．従って，環準同型定理より

$$R/(I_1\cap I_2)\cong R/I_1\times R/I_2$$

が示された．

$n-1$ まで成り立っているとすると，帰納法の仮定は

$$R/I_1 \cap \cdots \cap I_{n-1} \cong R/I_1 \times \cdots \times R/I_{n-1}.$$

$J := I_1 I_2 \cdots I_{n-1}$ とおく．(2) より $J = I_1 \cap \cdots \cap I_{n-1}$ である．よって **(1) からある $\boldsymbol{x \in J,\ y \in I_n}$ が存在して $\boldsymbol{x + y = 1}$ を充たす**ので，$n = 2$ の場合の証明をそのまま適用することができて，

$$\begin{aligned} R/(I_1 \cap \cdots \cap I_n) &= R/(J \cap I_n) \cong R/J \times R/I_n \\ &= R/(I_1 \cap \cdots \cap_{n-1}) \times R/I_n \\ &\cong R/I_1 \times \cdots \times R/I_n. \end{aligned}$$

■

系 C.14:

定理 C.13 の条件が成立しているとき，任意の整数 $a_1, \ldots, a_n$ に対して

$$R/(I_1^{a_1} \cap \cdots \cap I_n^{a_n}) \cong R/I_1^{a_1} \times \cdots \times R/I_n^{a_n}$$

証明 イデアル I, J が互いに素であるとき，$x \in I,\ y \in J$ であって $x + y = 1$ を充たすものを取ることができる．このとき，$\forall a, b \in \mathbb{Z}$ に対して

$$(x+y)^{a+b} = 1$$

であるが，左辺を展開して出現する項は全て I^a に属するか J^b に属するかのどちらかである．i.e. $1 \in I^a + J^b$ であるから，$I^a + J^b = R$ である． ■

C.4 加群

公理 C.2: 加群の公理

- R を環とする．**左 $\boldsymbol{R}$ 加群** (left R-module) とは，可換群 $(M, +, 0)$ と写像[a]

  $$\cdot : R \times M \to M,\ (a, x) \mapsto a \cdot x$$

  の組 $(M, +, \cdot\,)$ であって，$\forall x, x_1, x_2 \in M$，$\forall a, b \in R$ に対して以下を充たすもののことを言う：

  (LM1) $a \cdot (b \cdot x) = (ab) \cdot x$

  (LM2) $(a+b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$

  (LM3) $a \cdot (x_1 + x_2) = a \cdot x_1 + a \cdot x_2$

  (LM4) $1 \cdot x = x$

  ただし，$1 \in R$ は環 R の乗法単位元である．
- R を環とする．**右 $\boldsymbol{R}$ 加群** (left R-module) とは，可換群 $(M, +, 0)$ と写像

  $$\cdot : M \times R \to M,\ (x, a) \mapsto x \cdot a$$

  の組 $(M, +, \cdot\,)$ であって，$\forall x, x_1, x_2 \in M$，$\forall a, b \in R$ に対して以下を充たすもののことを言う：

(RM1) $(x \cdot b) \cdot a = x \cdot (ba)$

(RM2) $x \cdot (a + b) = x \cdot a + x \cdot b$

(RM3) $(x_1 + x_2) \cdot a = x_1 \cdot a + x_2 \cdot a$

(RM4) $x \cdot 1 = x$

- R, S を環とする．**(R, S) 両側加群** ((R, S)-bimodule) とは，可換群 $(M, +, 0)$ と写像

$$
\cdot_{\mathrm{L}} : R \times M \to M,\ (a, x) \mapsto a \cdot_{\mathrm{L}} x
$$
$$
\cdot_{\mathrm{R}} : M \times R \to M,\ (x, a) \mapsto x \cdot_{\mathrm{R}} a
$$

の組 $(M, +, \cdot_{\mathrm{L}}, \cdot_{\mathrm{R}})$ であって，$\forall x \in M,\ \forall a \in R,\ \forall b \in S$ に対して以下を充たすもののことを言う：

(BM1) 左スカラー乗法 $\cdot_{\mathrm{L}}$ に関して M は左 R 加群になる

(BM2) 右スカラー乗法 $\cdot_{\mathrm{R}}$ に関して M は右 S 加群になる

(BM3) $(a \cdot_{\mathrm{L}} x) \cdot_{\mathrm{R}} b = a \cdot_{\mathrm{L}} (x \cdot_{\mathrm{R}} b)$

[a] この写像 $\cdot$ は**スカラー乗法** (scalar multiplication) と呼ばれる．

R が**可換環**の場合，**(LM1)** と **(RM1)** が同値になるので，左 R 加群と右 R 加群の概念は同値になる．これを単に **R 加群** (R-module) と呼ぶ．

R が**体**の場合，R 加群のことを **R-ベクトル空間**と呼ぶ．

! 以下では，なんの断りもなければ R 加群と言って左 R 加群を意味する．

定義 C.28: 部分加群

R を環，M を R 加群とする．部分集合 $N \subset M$ が M の演算によって R 加群になるとき，N を M の**部分加群** (submodule) と呼ぶ．

命題 C.17: 部分加群の判定法

N が部分加群であることと次の条件が成り立つことは同値である：

(SM1) N は $+$ に関して M の部分群

(SM2) $a \in R,\ n \in N \implies an \in N$

定義 C.29: 部分加群の共通部分・和

M を R 加群，N_1, N_2 をその部分加群とする．このとき，以下の二つの集合は部分加群になる：

(1) $\boldsymbol{N_1 \cap N_2}$

(2) $\boldsymbol{N_1 + N_2} \coloneqq \{\, x + y \mid x \in N_1,\ y \in N_2 \,\}$

C.4.1 加群の生成

定義 C.30: 線形独立

M を R 加群，$S=\{x_1,\,\ldots,\,x_n\}$ を M の有限部分集合とする．

(1) S が**線形従属**であるとは，

$$\exists a_1,\,\ldots,\,a_n\in R^n \ \text{ s.t. } \exists i\in\{1,\,\ldots,\,n\},\ a_i\neq 0,\ a_1x_1+\cdots a_nx_n=0$$

が成り立つことを言う．

(2) S が線形従属でないとき，S は**線形独立** (linearly independent) であると言う．$\emptyset$ は線形独立であると見做す．

(3) 与えられた S に対して

$$a_1x_1+\cdots a_nx_n,\quad a_i\in R$$

の形をした R の元を S の**線型結合** (linear combination) と呼ぶ．0 は空集合の線形結合と見做す．

定義 C.31: 加群の生成

M を左 R 加群，Λ を任意の添字集合とする．任意の部分集合 $S:=\left\{x_\lambda\right\}_{\lambda\in\Lambda}\subset R$ を与える．

- S の任意の有限部分集合が定義 C.30 の意味で一次独立であるとき，S は一次独立であると言う．
- $$M=\left\{\sum_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda x_\lambda\ \middle|\ a_\lambda\in R,\ \substack{\text{有限個の添字 } i_1,\ldots,i_n \text{ を除いた}\\ \text{全ての添字 } \lambda\in\Lambda \text{ について } a_\lambda=0}\right\}$$
  が成り立つとき，S は M を**張る**，または**生成する** (generate) と言い，S のことを M の**生成系** (generator) と呼ぶ．
  特に $\Lambda=\{1,\,\ldots,\,n\}$ のとき，M は ***R* 上有限生成な加群** (finitely generated) と呼ばれる．
- S が一次独立で，かつ M を生成するとき，S を M の**基底** (basis) と言う．

命題 C.18: 部分加群の生成

M を左 R 加群，Λ を任意の添字集合とする．部分集合 $S:=\left\{x_\lambda\right\}_{\lambda\in\Lambda}\subset R$ を与える．このとき，集合

$$\langle S\rangle:=\left\{\sum_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda x_\lambda\ \middle|\ a_\lambda\in R,\ \substack{\text{有限個の添字 } i_1,\ldots,i_n \text{ を除いた}\\ \text{全ての添字 } \lambda\in\Lambda \text{ について } a_\lambda=0}\right\}\subset M$$

は M の部分加群になる．

<u>**証明**</u> 命題 C.17 の 2 条件を充していることを確認する．

(SM1) **加法単位元** 0 は空集合の線型結合と見做すので $0 \in \langle S \rangle$ である．

和，逆元について閉じていること $\langle S \rangle$ の勝手な 2 つの元 $u,\ v$ は $a_i,\ b_i \in R,\ x_i,\ y_i \in S$ によって

$$u = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n, \quad v = b_1 y_1 + \cdots + b_n y_n \quad (m,\ n < \infty)$$

と書ける．よって $u \pm v \in \langle S \rangle$ である．

(SM2) $c \in R$ ならば，$\forall v = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \in \langle S \rangle$ に対して

$$cv = (ca_1)x_1 + \cdots + (ca_n)x_n \in \langle S \rangle.$$

■

定義 C.32:

$\langle S \rangle$ のことを ***S* によって生成された部分加群**と呼ぶ．$\langle S \rangle$ のことを $\sum_{x \in S} Ax$ とも書く．$\Lambda = \{1,\ \ldots,\ n\}$ のときは $\langle x_1,\ \ldots,\ x_n \rangle$，あるいは $Ax_1 + \cdots + Ax_n$ とも書く．

! R のイデアルがイデアルとして有限生成であることは，R 加群として有限生成であることと同値である．

C.4.2 加群の準同型

定義 C.33: 加群の準同型

$M_1,\ M_2$ を環 R 上の加群とする．

- 写像 $f\colon M_1 \to M_2$ が $\forall a \in R \forall x \in M_1$ に対して以下の条件を充たすとき，f は ***R* 加群の準同型**であると言われる．
  (1) f は加法 $+$ に関して可換群の準同型である
  (2) $f(ax) = af(x)$
  R 加群の準同型全体の集合を $\mathbf{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{M_1},\ \boldsymbol{M_2})$ と書く．
- 写像 $f\colon M_1 \to M_2$ が R 加群の準同型であり，逆写像が存在してそれも R 加群の準同型であるとき，f を ***R* 加群の同型**と呼び，$M \cong N$ と書く．

R が体または斜体のとき，R 加群の準同型のことを**線型写像**と呼ぶ．

命題 C.19: Hom_R **加群**

R を可換群とする．このとき，$\mathbf{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{M_1},\ \boldsymbol{M_2})$ の上の加法 $+$，スカラー乗法 $\cdot$ を次のように定めると，組 $\bigl(\mathrm{Hom}_R(M_1,\ M_2),\ +,\ \cdot\bigr)$ は左 R 加群になる：

(1) $\forall x \in M_1,\ (f+g)(x) := f(x) + g(x)$
(2) $\forall a \in R,\ \forall x \in M_1,\ (af)(x) := af(x)$

証明 命題 C.17 の 2 条件を充たしていることを確かめる．

(SM1)　$+$ に関して命題 C.3 の 3 条件を確認する．

(SG1)　零写像を 0 とすると，明らかに $0 \in \mathrm{Hom}_R(M_1, M_2)$ である．

(SG2)

$$
\begin{aligned}
& f, g \in \mathrm{Hom}_R(M_1, M_2) \\
\Longrightarrow\ & \forall a \in R, \forall x, y \in M_1, \\
& \quad (f+g)(x+y) = f(x)+g(x)+f(y)+g(y) = (f+g)(x)+(f+g)(y), \\
& \quad (f+g)(ax) = f(ax)+g(ax) = \bigl(a(f+g)\bigr)(x) \\
\Longrightarrow\ & f+g \in \mathrm{Hom}_R(M_1, M_2)
\end{aligned}
$$

ただし，赤文字の部分で R が $+$ について可換群であることを使った．

(SG3)

$$
\begin{aligned}
& f \in \mathrm{Hom}_R(M_1, M_2) \\
\Longrightarrow\ & \forall a \in R, \forall x, y \in M_1, \\
& \quad (-f)(x+y) = -f(x+y) = (-f)(x)+(-f)(y), \\
& \quad (-f)(ax) = -f(ax) = \bigl(a(-f)\bigr)(x) \\
\Longrightarrow\ & -f \in \mathrm{Hom}_R(M_1, M_2)
\end{aligned}
$$

(SM2)　R が可換環なので

$$
\begin{aligned}
& r \in R, f \in \mathrm{Hom}_R(M_1, M_2) \\
\Longrightarrow\ & \forall a \in R, \forall x, y \in M_1, \\
& \quad (rf)(x+y) = rf(x+y) = (rf)(x)+(rf)(y), \\
& \quad (rf)(ax) = raf(x) = arf(x) = \bigl(a(rf)\bigr)(x) \\
\Longrightarrow\ & af \in \mathrm{Hom}_R(M_1, M_2)
\end{aligned}
$$

である．

■

C.4.3　剰余加群

M を R 加群，$N \subset M$ を部分加群とする．M は $+$ に関して可換群なので N は $+$ に関して正規部分群であり，剰余群 M/N が定義できる．さらにスカラー乗法 $\cdot : R \times M/N \to M/N$ を上手く定義すれば M/N が左 R 加群になる：

定理 C.15: 剰余加群

左 R 加群 M とその部分加群 N を与える．このとき，加法に関する剰余類[a]全体の集合 M/N の上の 2 つの二項演算 $+\colon M/N \times M/N \to M/N$, $\cdot\colon R \times M/N \to M/N$ を

$$
\begin{aligned}
(x+N)+(y+N) &\coloneqq (x+y)+N \\
a\cdot(x+N) &\coloneqq (ax)+N
\end{aligned}
$$

と定義するとこれらは well-defined であり，かつ **$(M/N, +, \cdot)$ は R 加群をなす．** この環を M の N による**剰余加群** (quotient module) と言う．

[a] $+$ に関して可換群なので，左・右剰余類の区別はない．

<u>**証明**</u> 加法に関する well-definedness および可換群であることは，定理 C.2 より即座に従う．

well-definedness 加法に関する well-definedness は定理 C.2 より従う．スカラー乗法に関して示す．

剰余類剰余類 $x+N$ の勝手な元は $x' = x+n$ $(n \in N)$ とかける．故に $\forall a \in R$ に対して

$$
ax' = a(x+n) = ax+an
$$

であるが，N が M の部分加群であることにより $an \in N$ が言える．従って $ax' \in (ax)+N$ であり，乗法の定義は剰余類の代表元の取り方に依らない．

R 加群であること 左 R 加群の公理を充していることを確認すれば良い．

- **(LM1)** $a\cdot\bigl(b\cdot(x+N)\bigr) = a\cdot\bigl((bx)+N\bigr) = (abx)+N = (ab)\cdot(x+N)$
- **(LM2)** $(a+b)\cdot(x+N) = \bigl(ax+bx\bigr)+N = a\cdot(x+N)+b\cdot(x+N)$
- **(LM3)** $a\cdot\bigl((x+N)+(y+N)\bigr) = \bigl(a(x+y)\bigr)+N = (ax+ay)+N = a\cdot(x+N)+a\cdot(y+N)$
- **(LM4)** $1_R\cdot(x+N) = (1_R x)+N = x+N$

■

系 C.16: 剰余加群への自然な全射準同型

R 加群 M とその部分加群 N を与える．このとき標準射影（定義 1.2）$\pi\colon M \to N/I$, $x \mapsto x+N$ は **M/N を剰余加群と見做すと全射準同型写像になる．** また，$\operatorname{Ker}\pi = N$ である．π のことを**自然な全射準同型**と呼ぶ．

<u>**証明**</u> 加法 $+$ に関しては剰余群の全射準同型の場合と同様．後は定義 C.33-(2) の成立を確かめれば良い．

実際，剰余加群のスカラー乗法の定義より $\forall a \in R$, $\forall x \in M$ に対して

$$
\pi(ax) = (ax)+I = a\cdot(x+N) = a\cdot\pi(x)
$$

だから良い． ■

定義 C.34: 核・像・余核

$f\colon M \to N$ を R 加群の準同型とする．

(1) $\operatorname{Ker} f \coloneqq \left\{ x \in M \mid f(x) = 0 \right\}$ を f の**核** (kernel),
(2) $\operatorname{Im} f \coloneqq \left\{ f(x) \mid x \in M \right\}$ を f の**像** (image),
(3) $\operatorname{Coker} f \coloneqq N/\operatorname{Im} f$ を**余核** (cokernel) と呼ぶ.

命題 C.20:

加群の準同型写像 $f\colon M \to N$ を与える．$\operatorname{Ker} f, \operatorname{Im} f$ はそれぞれ M, N の部分 R 加群であり，$\operatorname{Coker} f$ は R 加群である．

証明 **$\operatorname{Ker} f \subset M$ は部分 R 加群**

命題 C.17 の 2 条件を充たしていることを確かめる．加法に関する群準同型の性質から $f(0_M) = 0_N$ が従う．加群の準同型の定義から

$$\begin{aligned} x, y \in \operatorname{Ker} f \quad &\Longrightarrow \quad f(x+y) = f(x) + f(y) = 0,\ f(-x) = -f(x) = 0 \\ &\Longrightarrow \quad x+y,\ -x \in \operatorname{Ker} f \end{aligned}$$

より $+$ に関して部分群であるとわかった（条件 **(SM1)**），

$$\forall a \in R, \forall x \in \operatorname{Ker} f,\ f(ax) = af(x) = a0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad ax \in \operatorname{Ker} f$$

より条件 **(SM2)** も充たす．

$\operatorname{Im} f \subset N$ は部分 R 加群

命題 C.17 の 2 条件を充たしていることを確かめる．まず，$0_N = f(0_M)$ である．

$$\begin{aligned} f(x),\ f(y) \in \operatorname{Im} f \quad &\Longrightarrow \quad f(x) + f(y) = f(x+y),\ -f(x) = f(-x) \\ &\Longrightarrow \quad 0,\ f(x) + f(y),\ -f(x) \in \operatorname{Im} f \end{aligned}$$

より $+$ に関して部分群であるとわかる（条件 **(SM1)**），

$$\forall a \in R, \forall f(x) \in \operatorname{Im} f,\ af(x) = f(ax) \in \operatorname{Im} f$$

より条件 **(SM2)** も充たす．

$\operatorname{Coker} f$ は R 加群

$\operatorname{Im} f$ が部分加群とわかったので，定理 C.15 から $\operatorname{Coker} f$ も R 加群である．

■

C.4.4 準同型定理

群，環の準同型定理（定理 C.17，定理 C.9）と同様に加群の準同型定理も成り立つ．証明はほとんど同じなので省略する．

定理 C.17: 加群の準同型定理 (第一同型定理)

R 加群の準同型写像 $\phi\colon M \to N$ を与える．$\pi\colon M \to M/\operatorname{Ker}\phi$ を自然な全射準同型とする．このとき，図 C.3 が可換図式となるような準同型 $\psi\colon M/\operatorname{Ker}\phi \to N$ がただ一つ存在し，$\psi\colon M/\operatorname{Ker}\phi \to \operatorname{Im}\phi$ は同型写像になる．

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & N \\ M/\operatorname{Ker}\phi \arrow[ur, dashed, "\exists!\psi"'] & \end{tikzcd}$$

図 C.3: 加群の準同型定理

定理 C.18: 環の準同型定理 (第二，第三同型定理)

M を R 加群，N_1, N_2 を部分加群とする．

(1) $\boldsymbol{(N_1 + N_2)/N_2 \cong N_1/N_1 \cap N_2}$

(2) $N_1 \subset N_2$ ならば $\boldsymbol{(M/N_1)/(N_2/N_1) \cong M/N_2}$

C.5 直積・直和・自由加群

R を環，Λ を任意の添字集合とする．$\forall\lambda \in \Lambda$ に対応して R 加群 M_λ が与えられているとする．R 加群の族 $\left\{(M_\lambda, +, \cdot)\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ の集合としての直積は

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = \left\{ (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \;\middle|\; \forall\lambda \in \Lambda,\ x_\lambda \in M_\lambda \right\}$$

と書かれるのだった．

定義 C.35: 加群の直積・直和

Λ, $\left\{(M_\lambda, +, \cdot)\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ を上述の通りにとる．

(1) 集合 $\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ の上の加法 $+$ およびスカラー乗法 $\cdot$ を次のように定めると，組 $\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, +, \cdot\right)$ は左 R 加群になる．これを加群の族 $\left\{(M_\lambda, +, \cdot)\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ の**直積** (direct product) と呼ぶ：

$$+\colon \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \times \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda,\ \left((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\right) \mapsto (x_\lambda + y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

$$\cdot\colon R \times \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda,\ \left(a, (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\right) \mapsto (a \cdot x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

添字集合 Λ が有限集合 $\{1, \ldots, n\}$ であるときは

$$M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$$

とも書く．

(2) 加群の直積 $\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda,\ +,\ \cdot\right)$ を与えると，次のように定義される部分集合 $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ は部分 R 加群をなす．これを加群の族 $\{(M_\lambda,\ +,\ \cdot)\}_{\lambda\in\Lambda}$ の**直和** (direct sum) と呼ぶ：

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda := \left\{ (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \;\middle|\; \begin{array}{c}\text{有限個の添字 } i_1, \dots, i_n \in \Lambda \text{ を除いた}\\ \text{全ての添字 } \lambda\in\Lambda \text{ について } x_\lambda = 0\end{array} \right\}$$

添字集合 Λ が有限集合 $\{1,\ \dots,\ n\}$ であるときは

$$M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$$

とも書く．

！ 添字集合 Λ が有限のときは R 加群として $\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ である．Λ が無限集合の時は，包含写像 $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \hookrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ によって準同型であるが，同型とは限らない．

定義 C.36: 標準射影，標準包含

加群の族 $\{(M_\lambda,\ +,\ \cdot)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を与える．

(1) 各添字 $\mu\in\Lambda$ に対して，次のように定義される写像 $\pi_\mu \colon \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to M_\mu$ のことを**標準射影** (canonical projection) と呼ぶ：

$$\pi_\mu\bigl((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\bigr) := x_\mu$$

(2) 各添字 $\mu\in\Lambda$ に対して，次のように定義される写像 $\iota_\mu \colon M_\mu \hookrightarrow \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ のことを**標準包含** (canonical inclusion) と呼ぶ：

$$\iota_\mu(x) := (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, \quad {}^{\mathrm{w}/}\ y_\lambda := \begin{cases} x, & : \lambda = \mu \\ 0. & : \text{otherwise} \end{cases}$$

加群の族をいちいち $\{(M_\lambda,\ +,\ \cdot)\}_{\lambda\in\Lambda}$ と書くと煩雑なので，以降では省略して $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と書くことにする．

C.5.1 普遍性

核，余核，直積，直和の普遍性による特徴付けを行う．これらは全て左 R 加群の圏 R-**Mod** における極限，余極限である．

命題 C.21: 核・余核の普遍性

左 R 加群の準同型写像 $f\colon M \longrightarrow M'$ を与える．また $i\colon \mathrm{Ker}\, f \hookrightarrow M,\ x \mapsto x$ を標準的包含，$p\colon M' \twoheadrightarrow \mathrm{Coker}\, f,\ x \mapsto x + \mathrm{Coker}\, f$ を標準的射影とする．このとき以下が成り立つ：

(核の普遍性) 任意の左 R 加群 N に対して，写像

$$\begin{aligned} i_*\colon \mathrm{Hom}_R(N,\, \mathrm{Ker}\, f) &\longrightarrow \left\{ g \in \mathrm{Hom}_R(N,\, M) \,\middle|\, f \circ g = 0 \right\}, \\ h &\longmapsto i \circ h \end{aligned}$$

は well-defined な全単射である．i.e. $f \circ g = 0$ を充たす任意の $g \in \mathrm{Hom}_R(N,\, M)$ に対して，ある $h \in \mathrm{Hom}_R(N,\, \mathrm{Ker}\, f)$ が一意的に存在して図式 C.4a を可換にする．

(余核の普遍性) 任意の左 R 加群 N に対して，写像

$$p^*\colon \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Coker}\, f,\, N) \longrightarrow \left\{ g \in \mathrm{Hom}_R(M',\, N) \,\middle|\, g \circ f = 0 \right\},\ h \longmapsto h \circ p$$

は well-defined な全単射である．i.e. $g \circ f = 0$ を充たす任意の $g \in \mathrm{Hom}_R(M',\, N)$ に対して，ある $h \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Coker}\, f,\, N)$ が一意的に存在して図式 C.4b を可換にする．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}\, f \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0"'] & M' \\ \forall N \arrow[u, dashed, "\exists! h"] \arrow[ur, "g"'] & & \end{tikzcd}$$

(a) 核の普遍性

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0"'] & M' \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "g"'] & \mathrm{Coker}\, f \arrow[d, dashed, "\exists! h"] \\ & & \forall N \end{tikzcd}$$

(b) 余核の普遍性

<u>証明</u> (1) **well-definedness** 核の定義により $f \circ i = 0$ だから，$\forall h \in \mathrm{Hom}_R(N,\, \mathrm{Ker}\, f)$，$f \circ \bigl(i_*(h)\bigr) = (f \circ i) \circ h = 0$.

全単射であること $\forall g \in \left\{ g \in \mathrm{Hom}_R(N,\, M) \,\middle|\, f \circ g = 0 \right\}$ をとる．このとき $\forall x \in N$ に対して $f\bigl(g(x)\bigr) = 0 \iff g(x) \in \mathrm{Ker}\, f$ なので，写像

$$h\colon N \longrightarrow \mathrm{Ker}\, f,\ x \longmapsto g(x)$$

は well-defined かつ $g = i \circ h \in \mathrm{Im}\, i_*$ が成り立つ．i.e. i_* は全射．

また，$h,\, h' \in \mathrm{Hom}_R(N,\, \mathrm{Ker}\, f)$ に対して

$$i_*(h) = i_*(h') \iff i \circ h = i \circ h' \implies \forall x \in N,\ i\bigl(h(x)\bigr) = i\bigl(h'(x)\bigr)$$

だが，i は単射なので $\forall x \in N,\ h(x) = h'(x) \iff h = h'$ が成り立つ．i.e. i_* は単射．

(2) **well-definedness** 余核の定義により $p \circ f = 0$ だから，$\forall h \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Coker}\, f,\, N)$，$p^*(h) \circ f = h \circ (p \circ f) = 0$.

全単射であること $\forall g \in \left\{ g \in \mathrm{Hom}_R(M',\, N) \,\middle|\, g \circ f = 0 \right\}$ をとる．このとき $\forall x' \in x + \mathrm{Coker}\, f$ はある $y \in M$ を用いて $x' = x + f(y)$ と書けるから

$$g(x') = g(x) + (g \circ f)(y) = g(x) \in N$$

が成り立つ．したがって写像

$$h\colon \operatorname{Coker} f \longrightarrow N,\ x + \operatorname{Im} f \longmapsto g(x)$$

は well-defined であり，かつ $g = h \circ p \in \operatorname{Im} p^*$ が成り立つ．i.e. p^* は全射．
また，$h,\, h' \in \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Coker} f,\, N)$ に対して

$$p^*(h) = p^*(h') \quad \Longrightarrow \quad h \circ p = h' \circ p$$

が成り立つが，p は全射なので $h = h'$ が言える．i.e. p^* は単射．

■

【例 C.5.1】商加群の普遍性

左 R 加群 M と，その任意の部分加群 $N \subset M$ を与える．包含準同型 $i\colon N \longrightarrow M,\, x \longmapsto x$ の余核の普遍性の図式は

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, shift left, "i"] \arrow[r, shift right, "0"'] & M' \arrow[r, "p"] \arrow[rd, "f"'] & \operatorname{Coker} i = M/N \arrow[d, dashed, "\exists! \overline{f}"] \\ & & \forall N \end{tikzcd}$$

のようになる．すなわち，任意の左 R 加群 N と，$f \circ i = 0$ を充たす任意の準同型写像 $f\colon M \longrightarrow N$ に対して，ある $\overline{f}\colon M/N \longrightarrow N$ が一意的に存在して可換図式

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & \forall N \\ M/N \arrow[ru, dashed, "\exists! \bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

が成り立つということである．$f \circ i = 0$ は $N \subset \operatorname{Ker} f$ と同値なので，次の命題が示されたことになる：

命題 C.22: 商加群の普遍性

$M,\, L$ を左 R 加群，$f\colon M \longrightarrow L$ を準同型とする．部分加群 $N \subset M$ が

$$N \subset \operatorname{Ker} f$$

を充たすならば，準同型 $\bar{f}\colon M/N \longrightarrow L$ であって標準的射影

$$p\colon M \longrightarrow M/N,\ x \longmapsto x + N$$

に対して図式 C.5 を可換にするようなものが<u>一意に</u>存在する．このような準同型 $\bar{f}\colon M/N \to L$ を $f\colon M \to L$ によって M/N 上に**誘導される準同型** (induced homomorphism) と呼ぶ．

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & L \\
M/N \arrow[ur, dashed, red, "\exists! \bar{f}"'] &
\end{tikzcd}
$$

図 C.5: 商加群の普遍性

命題 C.23: 直積・直和の普遍性

任意の添字集合 Λ，および加群の族 $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を与える．添字 $\mu \in \Lambda$ に対する標準射影，標準包含をそれぞれ $\pi_\mu,\ \iota_\mu$ と書く．

(1) 任意の左 R 加群 N に対して，写像

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_R\left(N,\ \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda\right) & \longrightarrow & \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_R\left(N,\ M_\lambda\right) \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
f & \longmapsto & \left\{\pi_\lambda \circ f\right\}_{\lambda\in\Lambda}
\end{array}
$$

は全単射である．i.e. 任意の左 R 加群 N，および任意の左 R 加群の準同型写像の族 $\left\{f_\lambda \colon N \to M_\lambda\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，$\forall\lambda\in\Lambda,\ \pi_\mu\circ f = f_\lambda$ を充たす準同型写像 $f\colon N \to \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ が一意的に存在する（図式 C.6a）．

(2) 任意の左 R 加群 N に対して，写像

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_R\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda,\ N\right) & \longrightarrow & \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_R\left(M_\lambda,\ N\right) \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
f & \longmapsto & \left\{f \circ \iota_\lambda\right\}_{\lambda\in\Lambda}
\end{array}
$$

は全単射である．i.e. 任意の左 R 加群 N，および任意の左 R 加群の準同型写像の族 $\left\{f_\lambda \colon M_\lambda \to N\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，$\forall\lambda\in\Lambda,\ f\circ\iota_\lambda = f_\lambda$ を充たす準同型写像 $f\colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to N$ が一意的に存在する（図式 C.6b）．

$$
\begin{tikzcd}
N \arrow[r, dashed, red, "\exists! f"] \arrow[dr, "f_\lambda"'] & \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \arrow[d, "\pi_\lambda"] \\
& M_\lambda
\end{tikzcd}
$$

(a) 直積の普遍性

$$
\begin{tikzcd}
M_\lambda \arrow[r, "\iota_\lambda"] \arrow[dr, "f_\lambda"'] & \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \arrow[d, dashed, red, "\exists! f"] \\
& N
\end{tikzcd}
$$

(b) 直和の普遍性

証明 (1) **存在** 左 R 加群の準同型写像の族 $\{\, f_\lambda \colon N \to M_\lambda \,\}_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられたとき，写像 f を

$$f \colon N \to \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda,\ x \mapsto \bigl(f_\lambda(x)\bigr)_{\lambda\in\Lambda}$$

と定義する．このとき $\forall\mu\in\Lambda, \forall x\in N$ に対して

$$(\pi_\mu \circ f)(x) = f_\mu(x)$$

なので図 C.6a は可換図式になる．

一意性 図 C.6a を可換図式にする別の準同型写像 $g \colon N \to \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ が存在したとする．このとき $\forall x\in N, \forall\lambda\in\Lambda$ に対して

$$\pi_\lambda\bigl(g(x)\bigr) = f_\lambda(x) = \pi_\lambda\bigl(f(x)\bigr)$$

なので $f(x) = g(x)$ となる．i.e. f は一意である．

(2) **存在** 左 R 加群の準同型写像の族 $\{\, f_\lambda \colon M_\lambda \to N \,\}_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられたとき，写像 f を

$$f \colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to N,\ (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mapsto \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x_\lambda)$$

と定義する．右辺は有限和なので意味を持つ．
このとき $\forall\mu\in\Lambda, \forall x\in M_\mu$ に対して

$$f\bigl(\iota_\mu(x)\bigr) = f_\mu(x_\mu) + \sum_{\lambda\neq\mu} f_\lambda(0) = f_\mu(x_\mu)$$

なので図 C.6b は可換図式になる．

一意性 図 C.6b を可換図式にする別の準同型写像 $g \colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to N$ が存在したとする．このとき $\forall (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}$ に対して

$$g\bigl((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\bigr) = g\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} \iota_\lambda(x_\lambda)\right) = \sum_{\lambda\in\Lambda} g\bigl(\iota_\lambda(x_\lambda)\bigr) = \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x_\lambda) = f\bigl((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\bigr)$$

なので $f = g$ となる．i.e. f は一意である．

■

C.5.2 自由加群

Λ を集合，M を左 R 加群とする．左 R 加群の族 $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，$\forall\lambda\in\Lambda,\ M_\lambda = M$ が成り立つとき

$$M^\Lambda := \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, \quad M^{\oplus\Lambda} := \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$$

と書く．得に $\Lambda = \{1, \ldots, n\}$ のとき $M^n, M^{\oplus n}$ と書くが，$M^n \cong M^{\oplus n}$ である．

定義 C.37: 自由加群

- ある集合 Λ に対して，左 R 加群 M が R 上の**自由加群** (free module) であるとは，以下を充たすことを言う：
$$M \cong R^{\oplus \Lambda} = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} R$$
- $R^{\oplus \Lambda}$ の元を
$$\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \lambda \quad {}^{\mathrm{w}/} \; a_\lambda \in R \text{ は有限個を除いて } 0$$
と書き，Λ の元の，R を係数とする**形式的な線型結合** (formal linear combination) という．
- 自由加群 $R^{\oplus \Lambda}$ の元のうち，第 $\lambda \in \Lambda$ 成分のみが $1 \in R$ で他が全て $0 \in R$ であるようなものを $\forall \lambda \in \Lambda$ について集めた族
$$\{ \iota_\lambda(1) \}_{\lambda \in \Lambda} \subset R^{\oplus \Lambda}$$
は $R^{\oplus \Lambda}$ の**基底** (basis) である．

命題 C.24: 基底を持つ R 加群は自由加群

R 加群 M が基底 S を持てば
$$M \cong R^{\oplus S}$$
である．

C.6 ベクトル空間

$\mathbb{K}$ を体とする．このとき $\mathbb{K}$ 加群のことを体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間と呼び，$\mathbb{K}$ 加群の準同型写像のことを**線型写像**と呼ぶのだった．

線型写像 $f\colon V \longrightarrow W$ の核，像，余核は左 R 加群の核，像，余核と全く同様に
$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &:= \{ \boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = 0 \}, \\ \operatorname{Im} f &:= \{ f(\boldsymbol{v}) \in W \mid \boldsymbol{v} \in V \}, \\ \operatorname{Coker} f &:= W / \operatorname{Im} f \end{aligned}$$
として定義される．$\operatorname{Ker} f, \operatorname{Im} f$ がそれぞれ V, W の部分ベクトル空間であることは，左 R 加群の場合と全く同じ議論によって示される．

C.6.1 階数・退化次数の定理

V, W を**有限次元** $\mathbb{K}$ ベクトル空間とし，線型写像 $T\colon V \longrightarrow W$ を与える．V, W の基底 $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{\dim V}\}$, $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{\dim W}\}$ をとり，

$$T(\mathbf{e}_\mu) = T^\nu{}_\mu \mathbf{f}_\nu$$

のように左辺を展開したときに得られる行列

$$\begin{bmatrix} T^1{}_1 & \cdots & T^1{}_{\dim V} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T^{\dim W}{}_1 & \cdots & T^{\dim W}{}_{\dim V} \end{bmatrix}$$

は基底 $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{\dim V}\}$, $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{\dim W}\}$ に関する T の**表現表列**と呼ばれる．$\forall \boldsymbol{v} = v^\nu \mathbf{e}_\nu \in V$ に対して

$$T(\boldsymbol{v}) = T(v^\nu \mathbf{e}_\nu) = v^\nu T(\mathbf{e}_\nu) = v^\nu T^\mu{}_\nu \mathbf{f}_\mu$$

と書けるので，成分表示だけを見ると T はその表現行列を左から掛けることに相当する：

$$\begin{bmatrix} T^1{}_1 & \cdots & T^1{}_{\dim V} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T^{\dim W}{}_1 & \cdots & T^{\dim W}{}_{\dim V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^{\dim V} \end{bmatrix}$$

定義 C.38: 線型写像の階数

$\mathrm{Im}\, T$ の次元のことを T の**階数** (rank) と呼び，$\mathbf{rank}\, \boldsymbol{T}$ と書く．

命題 C.25: 表現行列の標準形

V, W を**有限次元**ベクトル空間とし，任意の線型写像 $T\colon V \longrightarrow W$ を与える．このとき V, W の基底であって，T の表現行列を

$$\begin{bmatrix} I_{\mathrm{rank}\, T} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

の形にするものが存在する．

証明 $\mathrm{Im}\, T$ の基底 $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{\mathrm{rank}\, T}\}$ および $\mathrm{Ker}\, T$ の基底 $\{\mathbf{k}_1, \dots \mathbf{k}_{\dim(\mathrm{Ker}\, T)}\}$ を勝手にとる．像の定義から，$1 \leq \forall \mu \leq \mathrm{rank}\, T$ に対して $\mathbf{e}_\mu \in V$ が存在して $\mathbf{f}_\mu = T(\mathbf{e}_\mu)$ を充たす．

まず $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{\mathrm{rank}\, T}, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{\dim(\mathrm{Ker}\, T)}$ が V の基底を成すことを示す．

線型独立性

$$\sum_{\mu=1}^{\mathrm{rank}\, T} a^\mu \mathbf{e}_\mu + \sum_{\nu=1}^{\dim(\mathrm{Ker}\, T)} b^\nu \mathbf{k}_\nu = 0$$

を仮定する．左辺に T を作用させることで

$$\sum_{\mu=1}^{\mathrm{rank}\, T} a^\mu \mathbf{f}_\mu = 0$$

がわかるが，$\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{\operatorname{rank} T}$ は $\operatorname{Im} T$ の基底なので線型独立であり，$1 \leq \forall\mu \leq \operatorname{rank} T$ に対して $a_\mu = 0$ が言える．故に仮定から

$$\sum_{\nu=1}^{\dim(\operatorname{Ker} T)} b^\nu \mathbf{k}_\nu = 0$$

であるが，$\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{\dim(\operatorname{Ker} T)}$ は $\operatorname{Ker} T$ の基底なので線型独立であり，$1 \leq \forall\nu \leq \dim(\operatorname{Ker} T)$ に対して $b_\nu = 0$ が言える．i.e. $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{\operatorname{rank} T}, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{\dim(\operatorname{Ker} T)}$ は線型独立である．

$\boldsymbol{V}$ を生成すること $\forall \boldsymbol{v} \in V$ を 1 つとる．このとき $T(\boldsymbol{v}) \in \operatorname{Im} T$ なので

$$T(\boldsymbol{v}) = \sum_{\mu=1}^{\operatorname{rank} T} v^\mu \mathbf{f}_\mu$$

と展開できる．ここで $\boldsymbol{w} \coloneqq \sum_{\mu=1}^{\operatorname{rank} T} v^\mu \mathbf{e}_\mu \in V$ とおくと，$T(\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{w})$ が成り立つが，T が線型写像であることから $T(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) = 0 \iff \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \in \operatorname{Ker} T$ が言えて

$$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = \sum_{\nu=1}^{\dim(\operatorname{Ker} T)} w^\nu \mathbf{k}_\nu$$

と展開できる．従って

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} + (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) = \sum_{\mu=1}^{\operatorname{rank} T} v^\mu \mathbf{e}_\mu + \sum_{\nu=1}^{\dim(\operatorname{Ker} T)} w^\nu \mathbf{k}_\nu$$

であり，$\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{\operatorname{rank} T}, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{\dim(\operatorname{Ker} T)}$ は V を生成する．

$\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{\operatorname{rank} T}$ と線型独立な $\dim W - \operatorname{rank} T$ 個のベクトル $\tilde{\mathbf{f}}_{\operatorname{rank} T+1}, \dots, \tilde{\mathbf{f}}_{\dim W}$ をとると，

- V の基底 $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{\operatorname{rank} T}, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{\dim(\operatorname{Ker} T)}\}$
- W の基底 $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{\operatorname{rank} T}, \tilde{\mathbf{f}}_{\operatorname{rank} T+1}, \dots, \tilde{\mathbf{f}}_{\dim W}\}$

に関する T の表現行列は

$$\begin{bmatrix} I_{\operatorname{rank} T} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

になる． ■

系 C.19: 階数・退化次数の定理（有限次元）

V, W を**有限次元**ベクトル空間とし，任意の線型写像 $T\colon V \longrightarrow W$ を与える．このとき

$$\dim V = \dim(\operatorname{Im} T) + \dim(\operatorname{Ker} T)$$

が成り立つ．

証明 命題 C.25 の証明より従う． ■

系 C.19 から便利な補題がいくつか従う：

補題 C.2: 有限次元ベクトル空間に関する小定理集

$V,\ W$ を**有限次元**ベクトル空間とし，任意の線型写像 $T\colon V \longrightarrow W$ を与える．このとき以下が成り立つ：

(1) $\operatorname{rank} T \le \dim V$. 特に $\operatorname{rank} T = \dim V \iff T$ は単射
(2) $\operatorname{rank} T \le \dim W$. 特に $\operatorname{rank} T = \dim W \iff T$ は全射
(3) $\dim V = \dim W$ かつ T が単射 $\implies$ T は同型写像
(4) $\dim V = \dim W$ かつ T が全射 $\implies$ T は同型写像

証明 (1) 系 C.19 より

$$\dim V = \operatorname{rank} T + \dim(\operatorname{Ker} T) \ge \operatorname{rank} T$$

が成り立つ．特に命題 C.9 から T が単射 $\iff \operatorname{Ker} T = 0 \iff \dim(\operatorname{Ker} T) = 0 \iff \operatorname{rank} T = \dim V$ が従う．

(2) rank の定義より $\operatorname{rank} T \le \dim W$ は明らか．特に次元の等しい有限次元ベクトル空間は同型なので，T が全射 $\iff \operatorname{Im} T \cong W \iff \dim(\operatorname{Im} T) = \operatorname{rank} T = \dim W$ が言える．

(3) $\dim V = \dim W$ かつ T が単射とする．T が単射なので (1) より $\operatorname{rank} T = \dim V = \dim W$ が従い，(2) より T は全射でもある．

(4) $\dim V = \dim W$ かつ T が全射とする．T が全射なので (2) より $\operatorname{rank} T = \dim W = \dim V$ が従い，(1) より T は単射でもある．

■

C.6.2 分裂補題と射影的加群

実は，系 C.19 は有限次元でなくとも成り立つ．それどころか，左 R 加群の場合の分裂補題に一般化される．

補題 C.3: 分裂補題

左 R 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i_1} M \xrightarrow{p_2} M_2 \longrightarrow 0 \tag{C.6.1}$$

が与えられたとする．このとき，以下の二つは同値である：

(1) 左 R 加群の準同型 $i_2\colon M_2 \longrightarrow M$ であって $p_2 \circ i_2 = 1_{M_2}$ を充たすものが存在する
(2) 左 R 加群の準同型 $p_1\colon M \longrightarrow M_1$ であって $p_1 \circ i_1 = 1_{M_1}$ を充たすものが存在する

証明 **(1) $\implies$ (2)** 写像

$$p_1'\colon M \longrightarrow M,\ x \longmapsto x - i_2\bigl(p_2(x)\bigr)$$

を定義すると，

$$p_2\bigl(p_1'(x)\bigr) = p_2(x) - ((p_2 \circ i_2) \circ p_2)(x) = p_2(x) - p_2(x) = 0$$

が成り立つ．従って，(C.6.1) が完全列であることを使うと $p'_1(x) \in \operatorname{Ker} p_2 = \operatorname{Im} i_1$ である．さらに i_1 が単射であることから

$$\exists! y \in M_1,\ p'_1(x) = i_1(y)$$

が成り立つ．ここで写像

$$p_1 \colon M \longrightarrow M_1,\ x \longmapsto y$$

を定義するとこれは準同型写像であり，$\forall x \in M_1$ に対して

$$p'_1\big(i_1(x)\big) = i_1(x) - (i_2 \circ (p_2 \circ i_1))(x) = i_1(x)$$

が成り立つ[*1]ことから

$$(p_1 \circ i_1)(x) = x$$

とわかる．i.e. $p_1 \circ i_1 = 1_{M_1}$

(1) $\Longleftarrow$ (2) (C.6.1) は完全列であるから $M_2 = \operatorname{Ker} 0 = \operatorname{Im} p_2$ である．従って $\forall x \in M_2 = \operatorname{Im} p_2$ に対して，$x = p_2(y)$ を充たす $y \in M$ が存在する．ここで写像

$$i_2 \colon M_2 \longrightarrow M,\ x \longmapsto y - i_1\big(p_1(y)\big)$$

は well-defined である．$x = p_2(y')$ を充たす勝手な元 $y' \in M$ をとってきたとき，$p_2(y - y') = 0$ より $y - y' \in \operatorname{Ker} p_2 = \operatorname{Im} i_1$ だから，i_1 の単射性から

$$\exists! z \in M_1, \quad y - y' = i_1(z)$$

が成り立ち，このとき

$$\Big(y - i_1\big(p_1(y)\big)\Big) - \Big(y' - i_1\big(p_1(y')\big)\Big) = i_1(z) - (i_1 \circ (p_1 \circ i_1))(z) = i_1(z) - i_1(z) = 0$$

とわかるからである．i_2 は準同型写像であり，$\forall x \in M_2$ に対して

$$(p_2 \circ i_2)(x) = p_2(y) - ((p_2 \circ i_1) \circ p_1)(y) = p_2(y) = x$$

なので $p_2 \circ i_2 = 1_{M_2}$．

■

系 C.20:

左 R 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i_1} M \xrightarrow{p_2} M_2 \longrightarrow 0$$

が補題 C.3 の条件を充たすならば

$$M \cong M_1 \oplus M_2$$

[*1] (C.6.1) が完全列であるため，$p_2 \circ i_1 = 0$

証明 補題 C.3 の条件 (1) が満たされているとする．このとき補題 C.3 証明から $\forall x \in M$ に対して

$$i_1\bigl(p_1(x)\bigr) = p_1'(x) = x - i_2\bigl(p_2(x)\bigr) \quad \Longleftrightarrow \quad i_1\bigl(p_1(x)\bigr) + i_2\bigl(p_2(x)\bigr) = x$$

また，完全列の定義から $p_2\bigl(i_1(x)\bigr) = 0$ であるから $\forall x \in M_2$ に対して

$$p_1'\bigl(i_2(x)\bigr) = i_2(x) - ((i_2 \circ p_2) \circ i_2)(x) = 0 = i_1(0)$$

であり，結局 $p_1\bigl(i_2(x)\bigr) = 0$ とわかる．

ここで準同型写像

$$\begin{aligned} &f\colon M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M,\ (x,\, y) \longmapsto i_1(x) + i_2(y), \\ &g\colon M \longrightarrow M_1 \oplus M_2,\ x \longmapsto \bigl(p_1(x),\, p_2(x)\bigr) \end{aligned}$$

を定めると

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x,\, y) &= \bigl(p_1(i_1(x)) + p_1(i_2(y)),\, p_2(i_1(x)) + p_2(i_2(x))\bigr) = (x,\, y), \\ (f \circ g)(x) &= i_1(p_1(x)) + i_2(p_2(x)) = x \end{aligned}$$

なので f, g は同型写像． ■

定義 C.39: 分裂

左 R 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i_1} M \xrightarrow{p_2} M_2 \longrightarrow 0$$

が**分裂** (split) するとは，補題 C.3 の条件を充たすことをいう．

定義 C.40: 射影的加群

左 R 加群 P が**射影的加群** (projective module) であるとは，任意の左 R 加群の**全射準同型** $f\colon M \longrightarrow N$ および任意の準同型写像 $g\colon P \longrightarrow N$ に対し，左 R 加群の準同型写像 $h\colon P \longrightarrow M$ であって $f \circ h = g$ を充たすものが存在することを言う（図式 C.7）．

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed, "\exists h"'] \\ M \arrow[r, two heads, "f"] & N \end{tikzcd}$$

図 C.7: 射影的加群

命題 C.26:

左 R 加群の完全列

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

は，N が射影的加群ならば分裂する．

証明 射影的加群の定義において $P = N$ とすることで，左 R 加群の準同型写像 $s\colon N \longrightarrow M$ であって $g \circ s = 1_N$ を充たすものが存在する． ■

命題 C.27: 射影的加群の直和

左 R 加群の族 $\{P_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して以下の 2 つは同値：

(1) $\forall\lambda \in \Lambda$ に対して P_λ が射影的加群

(2) $\displaystyle\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$ が射影的加群

証明 標準的包含を $\iota_\lambda\colon P_\lambda \hookrightarrow \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$ と書く．

(1)⟹(2) 仮定より，$\forall\lambda \in \lambda$ に対して，任意の全射準同型写像 $f\colon M \longrightarrow N$ および任意の準同型写像 $g\colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \longrightarrow N$ に対して，準同型写像 $h_\lambda\colon P_\lambda \longrightarrow M$ であって $f \circ h_\lambda = g \circ \iota_\lambda$ を充たすものが存在する．従って直和の普遍性より準同型写像

$$h\colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \longrightarrow M$$

であって $f \circ h_\lambda = h \circ \iota_\lambda$ を充たすものが一意的に存在する．このとき

$$(f \circ h) \circ \iota_\lambda = f \circ h_\lambda = g \circ \iota_\lambda$$

であるから，h の一意性から $f \circ h = g$.

(1)⟸(2) $\lambda \in \Lambda$ を一つ固定し，任意の全射準同型写像 $f\colon M \longrightarrow N$ および任意の準同型写像 $g\colon P_\lambda \longrightarrow M$ を与える．直和の普遍性より準同型写像

$$h\colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \longrightarrow N$$

であって $h \circ \iota_\lambda = g$（$\forall\mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}$, $h \circ \iota_\lambda = 0$）を充たすものが一意的に存在する．さらに仮定より，準同型写像

$$\alpha\colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \longrightarrow M$$

であって $f \circ \alpha = h$ を充たすものが存在する．このとき

$$f \circ (\alpha \circ \iota_\lambda) = h \circ \iota_\lambda = g$$

なので $\beta := h \circ \iota_\lambda$ とおけば良い．

■

系 C.21: 自由加群は射影的加群

環 R 上の自由加群は射影的加群である

証明 R が射影的加群であることを示せば命題 C.27 より従う．

左 R 加群の全射準同型写像と準同型写像 $f\colon M \longrightarrow N,\ g\colon R \longrightarrow N$ を任意に与える．このときある $x \in M$ が存在して $f(x) = g(1)$ となる．この x に対して準同型写像 $h\colon R \longrightarrow M,\ a \longmapsto ax$ を定めると，$\forall a \in R$ に対して

$$f\bigl(h(a)\bigr) = f(ax) = af(x) = ag(1) = g(a)$$

が成り立つので $f \circ h = g$ となる．■

V, W を任意の（有限次元とは限らない）$\mathbb{K}$ ベクトル空間，$T\colon V \longrightarrow W$ を任意の線型写像とする．

$$\begin{aligned} i_1 &\colon \operatorname{Ker} T \longrightarrow V,\ \boldsymbol{v} \longmapsto \boldsymbol{v}, \\ p_2 &\colon V \longrightarrow \operatorname{Im} T,\ \boldsymbol{v} \longmapsto T(\boldsymbol{v}), \end{aligned}$$

と定めると，i_1 は単射，p_2 は全射で，かつ $p_2 \circ i_1 = 0$ が成り立つ．よって $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の図式

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} T \xrightarrow{i_1} V \xrightarrow{p_2} \operatorname{Im} T \longrightarrow 0 \tag{C.6.2}$$

は短完全列だが，$\operatorname{Im} T$ はベクトル空間なので自由加群であり，系 C.21 より射影的加群でもある．従って命題 C.26 より短完全列 (C.6.2) は分裂し，系 C.20 から

$$V \cong \operatorname{Im} T \oplus \operatorname{Ker} T$$

が言える．

定理 C.22: 階数・退化次数の定理

V, W をベクトル空間とし，任意の線型写像 $T\colon V \longrightarrow W$ を与える．このとき

$$\dim V = \dim(\operatorname{Im} T) + \dim(\operatorname{Ker} T)$$

が成り立つ．

付録 D

小技集

この章では，これまでに登場した種々の定理の証明に使われる数学の小技を紹介する．

D.1　集合と写像の関係

補題 D.1: 集合論の小定理集

$f\colon X \to Y$ を写像とする．また，Λ, M を任意の添字集合とし，$U, U_\lambda \subset X$ $(\lambda \in \Lambda)$, $V, V_\mu \subset Y$ $(\mu \in M)$ とする．

(1)

$$f\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(U_\lambda)$$

(2)

$$f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda\right) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(U_\lambda)$$

(3)

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\mu\in M} V_\mu\right) = \bigcup_{\mu\in M} f^{-1}(V_\mu)$$

(4)

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\mu\in M} V_\mu\right) = \bigcap_{\mu\in M} f^{-1}(V_\mu)$$

(5)

$$f^{-1}(V^c) = \left(f^{-1}(V)\right)^c$$

(6)

$$f\left(f^{-1}(V)\right) = V \cap f(X)$$

(7)

$$f^{-1}\bigl(f(U)\bigr) \supset U$$

(8)

$$f(X) \setminus f(U) \subset f(U^c)$$

(9) 以下の 4 つは互いに同値である：

(a) 任意の集合族 $\{\, U_\lambda \,\}_{\lambda \in \Lambda} \subset 2^X$ に対して

$$f\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f(U_\lambda)$$

(b)

$$\forall U \in 2^X,\ f^{-1}\bigl(f(U)\bigr) = U$$

(c)

$$\forall U \in 2^X,\ f(X) \setminus f(U) = f(U^c)$$

(d) f は単射

(10) 以下の 2 つは同値である：

(a)

$$\forall V \in 2^Y,\ f\bigl(f^{-1}(V)\bigr) = V$$

(b) f は全射

<u>証明</u> (1) ($\subset$)：

$$y \in f\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda\right) \implies \exists x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda,\ f(x) = y \implies \exists \alpha \in \Lambda,\ y \in f(U_\alpha) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(U_\lambda).$$

($\supset$)：

$$y \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(U_\lambda) \implies \exists \alpha \in \Lambda,\ y \in f(U_\alpha) \implies y \in f\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda\right)$$

(2)

$$y \in f\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda\right) \iff \exists x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda,\ y = f(x) \implies \forall \alpha \in \Lambda,\ y \in f(U_\alpha) \iff \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f(U_\lambda).$$

(3) ($\subset$)：

$$x \in f^{-1}\left(\bigcup_{\mu \in M} V_\mu\right) \implies f(x) \in \bigcup_{\mu \in M} V_\mu \implies \exists \alpha \in M,\ f(x) \in V_\alpha \subset \bigcup_{\mu \in M} f^{-1}(V_\mu).$$

(⊃):

$$x \in \bigcup_{\mu\in M} f^{-1}(V_\mu) \implies \exists \alpha \in M,\ x \in f^{-1}(V_\alpha) \implies x \in f^{-1}\Bigl(\bigcup_{\mu\in M} f^{-1}(V_\mu)\Bigr).$$

(4) **(⊂):**

$$x \in f^{-1}\Bigl(\bigcap_{\mu\in M} V_\mu\Bigr) \implies f(x) \in \bigcap_{\mu\in M} V_\mu \implies \forall \alpha \in M,\ f(x) \in V_\mu \implies x \in \bigcap_{\mu\in M} f^{-1}(V_\mu).$$

(⊃):

$$x \in \bigcap_{\mu\in M} f^{-1}\Bigl(V_\mu\Bigr) \implies \forall \alpha \in M,\ f(x) \in V_\alpha \implies f(x) \in \bigcap_{\mu\in M} V_\mu \implies x \in f^{-1}\Bigl(\bigcap_{\mu\in M} V_\mu\Bigr).$$

(5)

$$x \in f^{-1}\bigl(Y \setminus V\bigr) \iff f(x) \in Y \text{ かつ } f(x) \notin V \iff x \in f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(V)$$

(6)

$$\begin{aligned} y \in f\bigl(f^{-1}(V)\bigr) &\iff \exists x \in f^{-1}(V),\ y = f(x) \\ &\iff \exists x \in U,\ f(x) \in V \text{ かつ } y = f(x) \\ &\iff y \in V \text{ かつ } y \in f(X) \end{aligned}$$

(7)

$$x \in U \implies f(x) \in f(U) \iff x \in f^{-1}\bigl(f(U)\bigr)$$

(8)

$$\begin{aligned} y \in f(X) \text{ かつ } y \notin f(U) &\iff \bigl(\exists x \in X,\ y = f(x)\bigr) \text{ かつ } \bigl(\forall u \in U,\ y \neq f(u)\bigr) \\ &\implies \exists x \in X \setminus U,\ y = f(x) \qquad \text{(D.1.1)} \\ &\iff y \in f(U^c) \end{aligned}$$

(9) **(d) $\implies$ (c):**

f が単射なら (8) の証明中の命題 (D.1.1) が

$$\exists!\, x \in X \setminus U,\ y = f(x)$$

になり[*1], $\implies$ の逆も成り立つ.

(c) $\implies$ (b):

仮定より, $\forall x \in X$ に対して

$$f(x) \in f(U) = f\bigl((X \setminus U)^c\bigr) \implies f(x) \notin f(X \setminus U) \implies x \in U$$

[*1] ∃! は「ただ一つ存在する」の意味である.

が成り立つ．i.e. (7) の証明において $\Longrightarrow$ の逆も成り立つ．

(*b*) $\Longrightarrow$ (*a*)：

$$y \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(U_\lambda) \quad\Longleftrightarrow\quad \exists x \in X,\ \alpha \in \Lambda,\ \exists x_\alpha \in U_\alpha,\ y = f(x_\alpha).$$

ここで $\forall\alpha, \beta \in \Lambda$ をとり，一点集合 $\{x_\alpha\}, \{x_\beta\} \in 2^X$ に対して (b) を使うと

$$\{x_\alpha\} = f^{-1}\big(f(\{x_\alpha\})\big) = f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}\big(f(\{x_\beta\})\big) = \{x_\beta\}$$

がわかる．i.e. $\forall\alpha, \beta \in \Lambda,\ x_\alpha = x_\beta$. ゆえに (2) の証明における $\Longrightarrow$ の逆も成り立つ．

(*a*) $\Longrightarrow$ (*d*)：

$f(x_1) = f(x_2) = y$ とする．(a) から

$$f(\{x_1\} \cap \{x_2\}) = f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = \{y\} \neq \emptyset$$

だから $\{x_1\} \cap \{x_2\} \neq \emptyset$ でなくてはならない．i.e. $x_1 = x_2$.

(10) (6) より，$\forall V \in 2^Y$ に対して

$$f\big(f^{-1}(V)\big) = V \quad\Longleftrightarrow\quad V = V \cap f(X) \quad\Longleftrightarrow\quad V \subset f(X) \tag{D.1.2}$$

が成り立つ．

($\Longrightarrow$)：

仮定 (a) と命題 (D.1.2) より $Y \subset f(X)$. 一方 f が写像であることから $f(X) \subset Y$ であり，$f(X) = Y$ がわかる．

($\Longleftarrow$)：

仮定 (b) より $f(X) = Y$ であるから，$\forall V \in 2^Y$ に対して $V \subset f(X)$ が成り立つ．従って命題 (D.1.2) を使うことができて，(a) が成立する．

■

補題 D.2: 有限集合上の単射と全射

A, B が有限集合で，かつ $|A| = |B|$ ならば次の (1), (2) が成り立つ：

(1) $A \subset B \quad\Longrightarrow\quad A = B$

(2) $f\colon A \to B$ が写像ならば，f が単射であることと f が全射であることは同値である．

証明 (1) 仮定より $B = A \sqcup (B \setminus A)$ である．ゆえに $|B| = |A| + |B \setminus A|$ だが，仮定より $|A| = |B|$ なので $|B \setminus A| = 0$. i.e. $B \setminus A = \emptyset$ である．

(2) **($\Longrightarrow$)：**

f を単射とする．このとき仮定より $|f(A)| = |A| = |B|$ である．$f(A) \subset B$ でもあるから，(1) より $f(A) = B$ がわかる．

($\Longleftarrow$)：

f を全射とする．$\forall b \in B$ に対して，$a_b \in A$ であって $f(a_b) = b$ を充たすものを一つずつ選んでおき，A の部分集合 C を

$$C := \left\{\, a_b \in A \;\middle|\; b \in B \,\right\} \subset A$$

として定める．

$\forall b_1, b_2 \in B$ に対して，$b_1 \neq b_2$ かつ $a_{b_1} = a_{b_2}$ を仮定すると $b_1 = f(a_{b_1}) = f(a_{b_2}) = b_2$ となり矛盾である．よって背理法から $b_1 \neq b_2 \implies a_{b_1} \neq a_{b_2}$ であり，仮定から $|C| = |B| = |A|$ とわかる．$C \subset A$ でもあるから (1) が使えて $C = A$. これは $\forall b \in B$ に対して $f^{-1}(\{b\}) = \{a_b\}$（一点集合）であることを意味するから，f は単射である．

■

D.2 C^∞ 関数の構成

$\mathbb{R}^n$ において原点を中心とする半径 r の開円板を $D(r)$ と書く．

C^∞ 級関数 $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を次のように定義する：

$$h(x) := \begin{cases} e^{-1/x} & : x > 0 \\ 0 & : x \leq 0 \end{cases}$$

この h を使って C^∞ 関数 $b\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を次のように定義する：

$$b(x) := \frac{h(4 - |\boldsymbol{x}|^2)}{h(4 - |\boldsymbol{x}|^2) + h(|\boldsymbol{x}|^2 - 1)}$$

この C^∞ 関数は以下の条件を充たす：

$$b(x) = \begin{cases} 1 & : x \in \overline{D(1)} \\ 0 & : x \notin D(2) \end{cases} \tag{D.2.1}$$

実際，$b(x)$ をプロットしてみると図 D.1 のようになる．

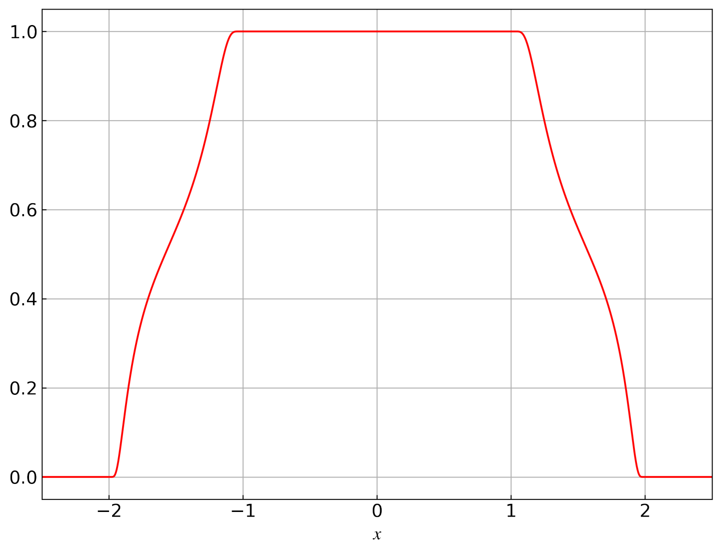


図 D.1: $b(x)$ のグラフ．$x \in [-1, 1]$ において $b(x) = 1$ であり，$|x| \geq 2$ に対して $b(x) = 0$ となっている様子が確認できる．

補題 D.3: C^∞ 関数の拡張

M を C^∞ 多様体とする．点 $p \in M$ の開近傍 U と U 上の C^∞ 関数 $f\colon U \to \mathbb{R}$ を任意にとる．このとき，$\overline{V} \subset U$ となる p の開近傍 V と，M 全体で定義された C^∞ 関数 $\tilde{f}\colon M \to \mathbb{R}$ で

$$\tilde{f}(q) = \begin{cases} f(q) & : q \in V \\ 0 & : q \notin U \end{cases}$$

を充たすものが存在する．

<u>**証明**</u> 点 p を含むチャート (W, φ) であって，$W \subset U$ かつ $\varphi(p) = 0$, $\varphi(W) \supset D(3)$ を充たすものをとる[*2]．

式 (D.2.1) の関数 b を使って C^∞ 関数 $\tilde{b}W \to \mathbb{R}$ を $\tilde{b} \coloneqq b \circ \varphi$ と定義する．その構成から明らかに $\varphi^{-1}(D(1))$ の外側で $\tilde{b}$ は 0 になる．故に $M \setminus W$ においては常に 0 と定義して $\tilde{b}$ の定義域を拡張することで，$\tilde{b} \in C^\infty(M)$ とすることができる．

ここで $V \coloneqq \varphi^{-1}(D(1))$ とおくと V は p の開近傍になるが，明らかに $\overline{V} \subset U$ であり，かつ V 上で $\tilde{b}$ は常に 1 である．このとき M 上の関数 $\tilde{f}$

$$\tilde{f}(q) \coloneqq \begin{cases} \tilde{b}(q) f(q) & : q \in V \\ 0 & : q \notin U \end{cases}$$

は C^∞ 級であり，求める性質を充している． ■

[*2] このようなチャートは，$\mathbb{R}^n$ の原点を中心とする相似拡大を施すことでいつでも作ることができる．

参考文献

[1] Steve Awodey. *Category Theory*. Oxford University Press, second edition, 2010.

[2] Tohru Eguchi, Peter B. Gilkey, and Andrew J. Hanson. Gravitation, gauge theories and differential geometry. *Physics reports*, Vol. 66, No. 6, pp. 213–393, 1980.

[3] Brendan Fong and David I. Spivak. 活躍する圏論. 共立出版, 2023. 川辺治之 訳.

[4] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer New York, NY, second edition, 2012.

[5] 志甫淳. 層とホモロジー代数. 共立出版, 2016.

[6] 松坂和夫. 集合・位相入門. 岩波書店, 1968.

[7] 森田茂之. 微分形式の幾何学. 岩波書店, 2005.

[8] 雪江明彦. 代数学 1・2・3. 日本評論社, 2010.

[9] 野村隆昭. 球面調和関数と群の表現. 日本評論社, 2018.