第 2 章

アーベル圏

アーベル圏は，ホモロジー代数を適用できるという意味で R-**Mod** の一般化と言える．

定義 2.1: 始対象・終対象・零対象

圏 $\mathcal{C}$ を与える．

- $I \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が**始対象** (initial object) であるとは，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(I,\, A)$ が一元集合となること．
- $I \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が**終対象** (final object) であるとは，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\, I)$ が一元集合となること．
- 始対象かつ終対象であるような対象が存在するとき，それを**零対象** (zero object) と呼んで 0 と書く．
- 零対象が存在するとき, $\forall A,\, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $\exists! p \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\, 0)$ かつ $\exists! i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(0,\, B)$ である．このとき，一意に定まる射 $i \circ p \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\, B)$ のことを**零射** (zero morphimsm) と呼んで 0 と書く．

2.1 イコライザ

定義 2.2: イコライザ

圏 $\mathcal{C}$ と 2 つの射 $f_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\, B)$ $(i = 1,\, 2)$ を与える．
射 $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,\, A)$ が $f_1,\, f_2$ の**イコライザ** (equalizer) であるとは，$\forall X \in \mathrm{Ob}(C)$ に対して集合の写像

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, C) &\longrightarrow \left\{ \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, A) \;\middle|\; f_1 \circ \varphi = f_2 \circ \varphi \right\}, \\ \psi &\longmapsto g \circ \psi \end{aligned}$$

が well-defined な全単射となること（可換図式 2.1）．

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] & A \arrow[r, shift left, "f_1"] \arrow[r, shift right, "f_2"'] & B \\ \forall X \arrow[u, dashed, "\exists! \psi"] \arrow[ur, "\varphi"'] & & \end{tikzcd}$$

図 2.1: イコライザ

定義 2.3: コイコライザ

圏 $\mathcal{C}$ と 2 つの射 $f_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\, B)$ $(i = 1,\, 2)$ を与える．
射 $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,\, C)$ が $f_1,\, f_2$ の**コイコライザ** (coequalizer) であるとは，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して集合の写像

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,\, X) &\longrightarrow \left\{ \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,\, X) \mid \varphi \circ f_1 = \varphi \circ f_2 \right\}, \\ \psi &\longmapsto \psi \circ g \end{aligned}$$

が well-defined な全単射となること（可換図式 2.2)．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f_1"] \arrow[r, shift right, "f_2"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\varphi"'] & C \arrow[d, dashed, "\exists! \psi"] \\ & & \forall X \end{tikzcd}$$

図 2.2: コイコライザ

命題 2.1:

- イコライザは存在すれば単射[a]．
- コイコライザは存在すれば全射[b]．

[a] 故に部分対象
[b] 故に商対象

証明 イコライザ $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,\, A)$ の定義から集合の写像

$$g_* \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, A),\ \psi \longmapsto g \circ \psi$$

は単射．よって g は単射 (mono 射) である．
　コイコライザ $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,\, C)$ の定義から，集合の写像

$$h^* \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,\, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,\, X),\ \psi \longmapsto \psi \circ h$$

は単射．よって g は全射 (epi 射) である． ■

　R-**Mod** における核・余核，像・余像は，次のように一般化される：

定義 2.4: 核・余核

零対象を持つ圏 $\mathcal{C}$ を与え，$\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\, B)$ をとる．

- f と零射とのイコライザを f の**核** (kernel) と呼び，$\ker f \colon \mathrm{Ker}\, f \longrightarrow A$ と書く．
- f と零射とのコイコライザを f の**余核** (cokernel) と呼び，$\mathrm{coker}\, f \colon B \to \mathrm{Coker}\, f$ と書く．

定義 2.5: 像・余像

零対象を持ち，任意の射の核・余核が存在する圏 $\mathcal{C}$ を与え，$\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\, B)$ をとる．

- A の部分対象 $(\mathrm{Im}\, f,\, \mathrm{im}\, f) \coloneqq \big(\mathrm{Ker}(\mathrm{coker}\, f),\, \ker(\mathrm{coker}\, f)\big)$ のことを f の**像** (image) と呼ぶ．
- B の商対象 $(\mathrm{Coim}\, f,\, \mathrm{coim}\, f) \coloneqq \big(\mathrm{Coker}(\ker f),\, \mathrm{coker}(\ker f)\big)$ のことを f の**余像** (coimage) と呼ぶ．

!

- 命題 2.1 から，$\mathrm{im}\, f$ は単射．また，コイコライザの定義から $\mathrm{coker}\, f \circ f = 0$ が成り立つ[a]から，イコライザの定義により $\ker(\mathrm{coker}\, f) \circ q = \mathrm{im}\, f \circ q = f$ を充たす射 $q \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\, \mathrm{Im}\, f)$ が一意的に存在する．
- 命題 2.1 から，$\mathrm{coim}\, f$ は全射．また，イコライザの定義から $f \circ \ker f = 0$ が成り立つ[b]から，コイコライザの定義により $i \circ \mathrm{coker}(\ker f) = i \circ \mathrm{coim}\, f = f$ を充たす射 $i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Coim}\, f,\, B)$ が一意的に存在する．

[a] $X = C$ とおいて $\mathrm{id}_C \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,\, C)$ の行き先を考えると $\mathrm{coker}\, f$ になるが，余核は零射とのコイコライザである．
[b] $X = C$ とおいて $\mathrm{id}_C \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,\, C)$ の行き先を考えると $\ker f$ になる．

2.2　アーベル圏に関わる諸定義

定義 2.6: アーベル圏

圏 $\mathcal{A}$ が**アーベル圏** (Abelian category) であるとは，以下を充たすことをいう：

(Ab1)　零対象 $0 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$.

(Ab2)　$\forall A_1,\, A_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ に対して積 $A_1 \times A_2$ と和 $A_1 \amalg A_2$ が存在する．

(Ab3)　$\mathcal{A}$ における任意の射は核，余核を持つ．

(Ab4)　$\mathcal{A}$ における任意の単射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,\, B)$ に対して $(A,\, f) \simeq \big(\mathrm{Ker}(\mathrm{coker}\, f),\, \ker(\mathrm{coker}\, f)\big)$ が[a]，任意の全射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A},\,\mathcal{B}}$ に対して $(B,\, f) \simeq \big(\mathrm{Coker}(\ker f),\, \mathrm{coker}(\ker f)\big)$ が成り立つ[b].

[a] 部分対象として同値
[b] 商対象として同値

定義 2.7: アーベル圏における完全列

- アーベル圏 $\mathcal{A}$ における図式

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

  が**完全** (exact) であるとは，B の部分対象として $(\operatorname{Ker} g,\ \ker g) \simeq (\operatorname{Im} f,\ \operatorname{im} f)$ であることを言う．

- $\mathcal{A}$ における図式

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$$

  が**完全**であるとは，$\forall i$ に対して図式 $A_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+2}$ が完全であること．

定義 2.8: アーベル圏の間の関手

$\mathcal{A},\ \mathcal{B}$ をアーベル圏，F を $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への関手とする．

- F が**加法的** (additive) であるとは，$\forall A,\ B \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A})$ に対して $F_{A,\,B} \colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A,\ B) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(F(A),\ F(B))$ が可換群の準同型写像となることを言う．
- F が**左完全** (left exact) であるとは，$\mathcal{A}$ における

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

  の形をした任意の完全列に対して

$$0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C)$$

  が $\mathcal{B}$ における完全列となることを言う．

- F が**右完全** (right exact) であるとは，$\mathcal{A}$ における

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

  の形をした任意の完全列に対して

$$F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0$$

  が $\mathcal{B}$ における完全列となることを言う．

- F が**完全** (exact) であるとは，任意の $\mathcal{A}$ における完全列

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

  に対して

$$F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C)$$

  が $\mathcal{B}$ における完全列となることを言う．

2.3 埋め込み定理

証明を省いて Mitchell の埋め込み定理を紹介する.

定理 2.1: Mitchell の埋め込み定理

$\mathcal{A}$ を小さなアーベル圏とするとき，ある環 R とある完全忠実充満関手 $\mathcal{A} \longrightarrow R\text{-}\mathbf{Mod}$ が存在する.