

第 4 章

微分形式

4.1 外積代数

定義 4.1: 外積代数

V を体 \mathbb{K} 上のベクトル空間とする. このとき外積代数 (exterior algebra) $(\bigwedge^\bullet(V), +, \wedge)$ は, 以下のよう
に定義される \mathbb{K} 上の多元環 (定義??) である:

- (1) \mathbb{K} 上 V の元によって生成される
- (2) 単位元 1 を持つ
- (3) 任意の $x, y \in V$ に対して以下の関係式が成り立つ:

$$x \wedge y = -y \wedge x$$

$\forall x \in V$ の次数を 1 とおくことで, $\bigwedge^\bullet(V)$ の単項式の次数が定義される. 次数が k の単項式の \mathbb{K} 係数線型結合全体の集合を $\bigwedge^k(V)$ と書くと, 直和分解

$$\bigwedge^\bullet(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigwedge^k(V)$$

が成立する.

! $\bigwedge^0(V) = \mathbb{K}$ と約束する. また, 自然に $\bigwedge^1(V) \cong V$ である.

$\dim V = n < \infty$ とする. $\{e_i\}$ を V の基底とすると, $\bigwedge^k(V)$ の基底は $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$ の形をした単項式のうち, 互いに線形独立なものである. 定義 4.1-(3) より, 添字の組 (i_1, \dots, i_k) の中に互いに等しいものがあると 0 になり, また, 添字の順番を並べ替えただけの項は線形独立にならない. 以上の考察から, 次のようになる:

定義 4.2: 外積代数の基底

$\bigwedge^k(V)$ の基底として

$$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$$

をとることができる. このとき $\dim \bigwedge^k(V) = \binom{n}{k}$ である.

二項定理から, $\dim \bigwedge^\bullet(V) = 2^n$ である. また, $k > n$ のとき $\bigwedge^k(V) = \{0\}$ である.

4.2 交代形式

定義 4.3: 交代形式

V を \mathbb{K} 上のベクトル空間とする. $(0, r)$ 型テンソル $\omega \in \mathcal{T}_r^0(V)$ であって, 任意の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ に対して

$$\omega[X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)}] = \text{sgn } \sigma \omega[X_1, \dots, X_r], \quad X_i \in V$$

となるものを V 上の r 次交代形式と呼ぶ.

V 上の r 次交代形式全体の集合を $A^r(V)$ と書く. $A^r(V)$ はテンソル空間 $\mathcal{T}_r^0(V)$ の部分ベクトル空間である. 次数の異なる交代形式全体

$$A^\bullet(V) := \bigoplus_{r=0}^{\infty} A^r(V)$$

を考える. ただし $A^0(V) = \mathbb{K}$ と定義する. 交代性より $k > n$ のとき $A^k(V) = \{0\}$ になる.

定理 4.1: 外積代数と交代形式の同型

写像 $\iota: \bigwedge^\bullet(V^*) \rightarrow A^\bullet(V)$ を以下のように定義する:

まず, 写像 $\iota_k: \bigwedge^k(V^*) \rightarrow A^k(V)$ の $\omega = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \in \bigwedge^k(V^*)$ ($\alpha_i \in V^*$) への作用を

$$\iota_k(\omega)[X_1, \dots, X_k] := \det(\alpha_i[X_j])$$

と定義する. $\forall \omega \in \bigwedge^\bullet(V^*)$ に対する ι の作用は ι_k の作用を線形に拡張する.

このとき, ι は同型写像である.

証明 各 ι_k が同型写像であることを示せば良い^{*1}. V の基底 $\{e_i\}$ と V^* の基底 $\{e^i\}$ は $e^i[e_j] = \delta_j^i$ を充てているものとする. このとき $\bigwedge^k(V^*)$ の基底を

$$\{e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$$

にとれる. $\{\iota_k(e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}) \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\} \subset A^k(V)$ が $A^k(V)$ の基底を成すことを示す.

^{*1} 添字がややこしいのでこの証明では Einstein の規約を用いない.

ある $\lambda_{i_1 \dots i_k} \in \mathbb{K}$ に対して

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1 \dots i_k} \iota_k(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}) = 0 \in A^k(V)$$

ならば,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1 \dots i_k} \iota_k(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k})[e_{j_1}, \dots, e_{j_k}] \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1 \dots i_k} \det(e^{i_l}[e_{j_m}]) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1 \dots i_k} \det(\delta_{j_m}^{i_l}) \\ &= \lambda_{j_1 \dots j_k} \end{aligned}$$

なので線形独立である.

次に $\forall \omega \in A^k(V)$ を一つとる. このとき $\omega_{i_1 \dots i_k} := \omega[e_{i_1}, \dots, e_{i_k}]$ において

$$\tilde{\omega} := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} \in \bigwedge^k(V^*)$$

と定義すると

$$\iota_k(\tilde{\omega}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} \iota_k(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}) = \omega$$

なので ι_k は全射である. 従って $\iota_k: \bigwedge^k(V^*) \xrightarrow{\cong} A^k(V)$ である. ■



定理 4.1 において構成した ι_k は, 定数倍しても同型写像を与える. 文献によっては $1/k!$ 倍されていたりするので注意. $1/k!$ 倍する定義は, 特性類の一般論の記述に便利である.

系 4.2: 交代形式の外積

$\tilde{\omega} \in \bigwedge^k(V^*)$, $\tilde{\eta} \in \bigwedge^l(V^*)$ を与える. 同型写像 $\iota: \bigwedge^\bullet(V^*) \xrightarrow{\cong} A^\bullet(V)$ による対応を

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &\mapsto \omega := \iota(\tilde{\omega}), \\ \tilde{\eta} &\mapsto \eta := \iota(\tilde{\eta}), \\ \tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta} &\mapsto \omega \wedge \eta := \iota(\tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta}) \end{aligned}$$

とおくと, $A^\bullet(V)$ 上の外積 (exterior product) $\wedge: A^k(V) \times A^l(V) \rightarrow A^{k+l}(V)$ が次のようにして定まる:

$$\begin{aligned} &(\omega \wedge \eta)[X_1, \dots, X_{k+l}] \\ &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \text{sgn } \sigma \omega[X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}] \eta[X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+l)}] \end{aligned}$$

ただし, $X_i \in V$ は任意とする.

証明 ι_k の線形性から,

$$\tilde{\omega} = e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}, \quad \tilde{\eta} = e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_l}$$

について示せば十分. また, $\bigwedge^\bullet(V^*)$ 上の二項演算 \wedge の交代性から添字 $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l$ は全て異なるとしてよい.

ここで, 左辺を計算するために次のような置換 $\tau \in \mathfrak{S}_{k+l}$ を考える:

$$\tau := \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_k & j_1 & \dots & j_l \\ m_1 & \dots & m_k & m_{k+1} & \dots & m_{k+l} \end{pmatrix}, \quad m_1 < m_2 < \dots < m_{k+l}.$$

このとき

$$\tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta} = \operatorname{sgn} \tau e^{m_1} \wedge \dots \wedge e^{m_{k+l}}$$

である. したがって

$$(\omega \wedge \eta)[e_{m_1}, \dots, e_{m_{k+l}}] = \operatorname{sgn} \tau \iota_{k+l}(e^{m_1} \wedge \dots \wedge e^{m_{k+l}})[e_{m_1}, \dots, e_{m_{k+l}}] = \boxed{\operatorname{sgn} \tau}.$$

次に, 右辺を計算する.

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \operatorname{sgn} \sigma \omega[e_{\sigma(m_1)}, \dots, e_{\sigma(m_k)}] \eta[e_{\sigma(m_{k+1})}, \dots, e_{\sigma(m_{k+l})}] \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \operatorname{sgn} \sigma \iota_k(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k})[e_{\sigma\tau(i_1)}, \dots, e_{\sigma\tau(i_k)}] \iota_l(e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_l}) \eta[e_{\sigma\tau(j_1)}, \dots, e_{\sigma\tau(j_l)}] \quad (4.2.1) \end{aligned}$$

式 (4.2.1) の和において, $\exists \rho \in \mathfrak{S}_k, \exists \pi \in \mathfrak{S}_l, \sigma\tau(i_1 \cdots i_k) = \rho(i_1 \cdots i_k), \sigma\tau(j_1 \cdots j_l) = \pi(j_1 \cdots j_l)$ を満たすような $\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}$ の項のみが非ゼロである. そのような σ に対して $\sigma\tau = \rho\pi$, $\rho\pi(i_1 \cdots i_k) = \rho(i_1 \cdots i_k)$, $\rho\pi(j_1 \cdots j_l) = \pi(j_1 \cdots j_l)$ と書けるから

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \operatorname{sgn} \sigma \iota_k(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k})[e_{\sigma\tau(i_1)}, \dots, e_{\sigma\tau(i_k)}] \iota_l(e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_l}) \eta[e_{\sigma\tau(j_1)}, \dots, e_{\sigma\tau(j_l)}] \\ &= \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_k} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_l} \operatorname{sgn} \sigma \iota_k(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k})[e_{\rho(i_1)}, \dots, e_{\rho(i_k)}] \iota_l(e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_l}) \eta[e_{\pi(j_1)}, \dots, e_{\pi(j_l)}] \\ &= \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_k} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_l} \operatorname{sgn} \sigma \operatorname{sgn} \rho \operatorname{sgn} \pi \\ &= \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_k} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_l} \operatorname{sgn} \sigma \operatorname{sgn} \rho \pi \\ &= \boxed{k! l! \operatorname{sgn} \tau}. \end{aligned}$$

となる. よって示された. ■

4.3 C^∞ 多様体上の微分形式

前節の結果を用いて、局所座標に依存しない微分形式の定義を与えることができる。

定義 4.4: 微分形式

M を C^∞ 多様体とする。 ω が M 上の k -形式 (k -form) であるとは、各点 $p \in M$ において $\omega_p \in \bigwedge^k(T_p^*M)$ を対応させ、 ω_p が p に関して C^∞ 級である、i.e.

$$\omega_p = \omega_{i_1 \dots i_k}(p) (dx^{i_1})_p \wedge \dots \wedge (dx^{i_k})_p$$

の各係数 $\omega_{i_1 \dots i_k}(p)$ が C^∞ 関数であることを言う。

ベクトル束の言葉を使うと、

$$\Omega^k(M) = \bigcup_{p \in M} \bigwedge^k(T_p^*M) \text{ の } C^\infty \text{ 級の切断の全体}$$

となる。

もう一つの解釈は、交代形式の定義 4.3 を前面に押し出す方法である。この解釈では多元環 $C^\infty(M)$ 上の $(0, r)$ -階テンソル場 (定義??) としての側面が明らかになる：

定理 4.3: k 形式の同型

M を C^∞ 多様体とする。 M 上の k -形式全体の集合 $\Omega^k(M)$ は、

$$\begin{aligned} & \{ \tilde{\omega}: \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M) \\ & \quad | \tilde{\omega} \text{ は } C^\infty(M) \text{-加群として多重線型かつ交代的} \} \end{aligned}$$

と自然に同型である。

証明 $C^\infty(M)$ -加群として多重線型かつ交代的であるような写像 $\tilde{\omega}: \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ が与えられたとする。まず $\forall X_i \in \mathfrak{X}(M)$ に対して、 $\tilde{\omega}(X_1, \dots, X_k) \in C^\infty(M)$ の点 $p \in M$ における値が、各 X_i の点 p における値 $X_i|_p \in T_p M$ のみによって定まることを確認する。 $\tilde{\omega}$ の線形性から $\tilde{\omega}(X_1, \dots, X_i - Y_i, \dots, X_k) = \tilde{\omega}(X_1, \dots, X_i, \dots, X_k) - \tilde{\omega}(X_1, \dots, Y_i, \dots, X_k)$ なので、ある i について $X_i|_p = 0$ (0 写像) ならば $\tilde{\omega}(X_1, \dots, X_k)(p) = 0$ (実数) であることを確認すれば良い。 $i = 1$ としても一般性を失わない。 $(U; x^\mu)$ を p の周りのチャートとする。このとき U 上では $X^\mu \in C^\infty(U)$ を用いて

$$X_1 = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad X^\mu(p) = 0 \quad (4.3.1)$$

と書ける。ここで X_1 の座標表示 (4.3.1) の定義域を補題??を用いて M 全域に拡張することを考える。そのために $\bar{V} \subset U$ なる p の開近傍 V と、 V 常恒等的に 1 であり U の外側では 0 であるような C^∞ 関数 $h \in C^\infty(M)$ をとることができる。このとき

$$Y_i := h \frac{\partial}{\partial x^i}$$

とおくと $Y_i \in \mathfrak{X}(M)$ となり、 $\tilde{X}^\mu := h X^\mu$ とおけば $\tilde{X}^\mu \in C^\infty(M)$ となる。このとき

$$X_1 = X_1 + h^2(X_1 - X_1) = \tilde{X}^\mu Y_\mu + (1 - h^2)X_1 \in \mathfrak{X}(M)$$

の右辺は $V \subset U$ 上至る所で座標表示 (4.3.1) を再現することがわかる．従って $\tilde{\omega}$ の $C^\infty(M)$ -線形性から

$$\begin{aligned} & \tilde{\omega}(X_1, \dots, X_k)(p) \\ &= \tilde{X}^\mu(p) \tilde{\omega}(Y_\mu, X_2, \dots, X_k)(p) + (1 - h(p)^2) \tilde{\omega}(X_1, X_2, \dots, X_k)(p) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり，示された．

故に，次のような k -形式 ω の定義は well-defined である^{*2}：任意の k 個の接ベクトル $X_i \in T_p M$ が与えられたとき， k 個のベクトル場 $\tilde{X}_i \in \mathfrak{X}(M)$ であって $\tilde{X}_i|_p = X_i$ を充たすものたちを適当に選ぶ．そして

$$\omega_p[X_1, \dots, X_k] := \tilde{\omega}(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_k)(p)$$

と定めると，上述の議論から左辺は \tilde{X}_i の選び方に依らないのである．ベクトル場の C^∞ 性から ω_p が p に関して C^∞ 級であることは明らかなので，このようにして定義された対応 $\omega: p \mapsto \omega_p$ は微分形式である． ■

4.4 微分形式の演算

C^∞ 多様体 M 上の k -形式全体の集合を $\Omega^k(M)$ と書き，

$$A^\bullet(M) := \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(M)$$

として M 上の微分形式全体を考える． $A^\bullet(M)$ 上に様々な演算を定義する．

!

しばらくの間，微分形式全体 $\Omega^k(M)$ を定理 4.3 の意味で捉える．i.e. $\omega \in \Omega^k(M)$ は k 個のベクトル場に作用する．作用を受けるベクトル場は () で囲むことにする：

$$\omega: (X_1, \dots, X_k) \mapsto \omega(X_1, \dots, X_k)$$

4.4.1 外積

微分形式全体 $\Omega^k(M)$ を定理 4.3 の意味で捉える．このとき， k -形式と l -形式の外積

$$\wedge: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^l(M), (\omega, \eta) \mapsto \omega \wedge \eta$$

は，各点 $p \in M$ で

$$(\omega \wedge \eta)_p := \omega_p \wedge \eta_p \in A^{k+l}(T_p M)$$

と定義される双線型写像である．

^{*2} 定理 4.1 を使って各点 p において $\omega_p \in \bigwedge^k(T_p^* M)$ を $A^k(T_p M)$ の元と見做していることに注意

命題 4.1: 外積の性質

外積は以下の性質を持つ：

- (1) $\eta \wedge \omega = (-1)^{kl} \omega \wedge \eta$
- (2) 任意のベクトル場 $X_1, \dots, X_{k+l} \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\begin{aligned}
& (\omega \wedge \eta)(X_1, \dots, X_{k+l}) \\
&= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \text{sgn } \sigma \omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) \eta(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+l)})
\end{aligned}$$

証明 定理 4.3 より，各点 $p \in M$ において $(\omega \wedge \eta)_p$ を外積代数 $\bigwedge^{k+l}(T_p^*M)$ の元と見做してよい．

- (1) 外積代数の基底 $e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} \wedge e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_l}$ において e^{j_1} を一番左に持ってくると全体が $(-1)^k$ 倍される．これを l 回繰り返すと全体が $(-1)^{kl}$ 倍される．
- (2) $(\omega \wedge \eta)_p$ に対して定理 4.1 を用いればよい．

■

4.4.2 外微分

定義 4.5: 外微分 (局所表示)

M のチャート $(U; x^i)$ を与える． k -形式 $\omega \in \Omega^k(M)$ の座標表示が

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

と与えられたとき，**外微分** (exterior differentiation)

$$d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$$

は次のように定義される：

$$d\omega := \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

定理 4.4: 外微分 (内制的)

$\omega \in \Omega^k(M)$ を M 上の任意の k -形式とする. このとき, 任意のベクトル場 $X_1, \dots, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i(\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1})) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1}) \end{aligned}$$

ただし \hat{X}_i は X_i を省くことを意味する. また, $[X, Y]$ は **Lie 括弧積**と呼ばれる $\mathfrak{X}(M)$ 上の二項演算で, 以下のように定義される:

$$[X, Y]f := X(Yf) - Y(Xf)$$

定理 4.4 の $k = 1$ の場合を書くとき次の通り:

$$d\omega(X, Y) = (X\omega)(Y) - (Y\omega)(X) - \omega([X, Y]).$$

定理 4.5: 外微分の性質

外微分 d は以下の性質をみたす:

- (1) $d \circ d = 0$
- (2) $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta, \quad \omega \in \Omega^k(M)$

証明 $\forall \omega \in \Omega^k(M)$ と M のチャート $(U; x^i)$ をとる.

(1)

$$d^2\omega = \frac{\partial^2 \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

であるが, ω は C^∞ 級なので偏微分は可換である. 従って添字の対 μ, ν に関して対称かつ反対称な総和をとることになるから $d^2\omega = 0$ である.

(2) $\omega = \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$, $\eta = \eta_{j_1 \dots j_l} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}$ とする.

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= d(\omega_{i_1 \dots i_k} \eta_{j_1 \dots j_l} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}) \\ &= \left(\frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^\mu} \eta_{j_1 \dots j_l} + \omega_{i_1 \dots i_k} \frac{\partial \eta_{j_1 \dots j_l}}{\partial x^\mu} \right) dx^\mu \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \\ &= \left(\frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^\mu} dx^\mu \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \right) \wedge (\eta_{j_1 \dots j_l} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}) \\ &\quad + (-1)^k (\omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \wedge \left(\frac{\partial \eta_{j_1 \dots j_l}}{\partial x^\mu} dx^\mu \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \right) \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta \end{aligned}$$

■

4.4.3 引き戻し

二つの C^∞ 多様体 M, N と、その上の C^∞ 写像 $f: M \rightarrow N$ を与える。微分写像

$$f_*: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

が $f_* \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(T_p M, T_{f(p)} N)$ であることから、その引き戻し f^* を、 $\forall \alpha \in T_{f(p)}^* N, \forall X \in T_p M$ に対して次のように定義できる：

$$\begin{aligned} f^*: T_{f(p)}^* N &\rightarrow T_p^* M, \\ f^*(\alpha)[X] &:= \alpha[f_*(X)] \end{aligned}$$

$\bigwedge^1(T_{f(p)}^* N) \cong T_{f(p)}^* N$ を思い出すと、 f^* の定義域、値域は自然に点 p における k -形式へ拡張される。具体的には、 $\forall \omega \in \bigwedge^k(T_{f(p)}^* N), \forall X_i \in T_p M$ に対して

$$\begin{aligned} f^*: \bigwedge^k(T_{f(p)}^* N) &\rightarrow \bigwedge^k(T_p^* M), \\ f^*(\omega)[X_1, \dots, X_k] &:= \omega[f_*(X_1), \dots, f_*(X_k)] \end{aligned}$$

と定義する。さらに、各点 $p \in M$ について和集合をとることで k -形式全体に作用するようになる：

$$f^*: \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M),$$

$$f^*(\omega)(X_1, \dots, X_k) := \omega(f_*(X_1), \dots, f_*(X_k))$$

ただし $\forall \omega \in \Omega^k(N), \forall X_i \in \mathfrak{X}(M)$ である。 $f^*(\omega) \in \Omega^k(M)$ を f による $\omega \in \Omega^k(N)$ の引き戻しと呼ぶ。

命題 4.2: 引き戻しの性質

f^* は線型写像であり、以下の性質をみたす：

- (1) $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta)$
- (2) $d(f^*(\omega)) = f^*(d\omega)$

特に、性質 (1) から $f^*: A^\bullet(M) \rightarrow A^\bullet(N)$ は環準同型写像である。

証明 $k+l$ 個のベクトル場 $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ を任意にとる。

(1) 命題 4.1-(2) より

$$\begin{aligned} & (f^*(\omega) \wedge f^*(\eta))(X_1, \dots, X_{k+l}) \\ &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \text{sgn } \sigma (f^*(\omega))(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) (f^*(\eta))(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+l)}) \\ &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \text{sgn } \sigma \omega(f_*(X_{\sigma(1)}), \dots, f_*(X_{\sigma(k)})) \eta(f_*(X_{\sigma(k+1)}), \dots, f_*(X_{\sigma(k+l)})) \\ &= (\omega \wedge \eta)(f_*(X_1), \dots, f_*(X_{k+l})) \\ &= f^*(\omega \wedge \eta)(X_1, \dots, X_{k+l}) \end{aligned}$$

(2) 微分写像の定義 (??) から, $f_*: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(N)$ のベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ への作用は

$$(f_*X)h = X(h \circ f) \circ f^{-1} \in C^\infty(N), \quad \forall h \in C^\infty(N)$$

である. 故に Lie 括弧積との順序は

$$\begin{aligned} [f_*X, f_*Y]h &= f_*X((f_*Y)h) - f_*Y((f_*X)h) \\ &= X(((f_*Y)h) \circ f) \circ f^{-1} - Y(((f_*X)h) \circ f) \circ f^{-1} \\ &= X((Y(h \circ f) \circ f^{-1}) \circ f) \circ f^{-1} - Y((X(h \circ f) \circ f^{-1}) \circ f) \circ f^{-1} \\ &= (X(Y(h \circ f)) - Y(X(h \circ f))) \circ f^{-1} \\ &= [X, Y](h \circ f) \circ f^{-1} \\ &= (f_*[X, Y])h, \quad \forall h \in C^\infty(N) \end{aligned}$$

となり, 可換である. 従って定理 4.5 より

$$\begin{aligned} d(f^*(\omega))(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i((f^*\omega)(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1})) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} (f^*\omega)([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i(\omega(f_*(X_1), \dots, \widehat{f_*(X_i)}, \dots, f_*(X_{k+1}))) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega(f_*([X_i, X_j]), f_*(X_1), \dots, \widehat{f_*(X_i)}, \dots, \widehat{f_*(X_j)}, \dots, f_*(X_{k+1})) \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i(\omega(f_*(X_1), \dots, \widehat{f_*(X_i)}, \dots, f_*(X_{k+1}))) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([f_*(X_i), f_*(X_j)], f_*(X_1), \dots, \widehat{f_*(X_i)}, \dots, \widehat{f_*(X_j)}, \dots, f_*(X_{k+1})) \\ &= f^*(d\omega)(X_1, \dots, X_{k+1}). \end{aligned}$$

■

4.4.4 内部積と Lie 微分

定義 4.6: 内部積

$X \in \mathfrak{X}(M)$ を M 上の任意のベクトル場とする. このとき X による**内部積** (interior product)

$$i_X: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$$

が次のように定義される:

$$i_X(\omega)(X_1, \dots, X_{k-1}) := \omega(\textcolor{red}{X}, X_1, \dots, X_{k-1}), \quad \forall \omega \in \Omega^k(M), \forall X_i \in \mathfrak{X}(M)$$

ただし, $k = 0$ のときは $i_X = 0$ と定義する.

命題 4.3: 内部積の性質

$\forall \omega, \omega_1, \omega_2 \in \Omega^k(M), \forall f \in C^\infty(M)$ をとる.

(1) $\Omega^k(M)$ を $C^\infty(M)$ 加群と見たとき, $i_X \in \text{Hom}_{C^\infty(M)}(\Omega^k(M), \Omega^{k-1}(M))$ である :

$$i_X(\omega_1 + \omega_2) = i_X(\omega_1) + i_X(\omega_2), \quad i_X(f\omega) = f i_X(\omega).$$

(2) i_X は反微分である :

$$i_X(\omega \wedge \eta) = i_X(\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge i_X(\eta)$$

証明 (1) 定義より明らか.

(2) 命題 4.1 より

$$\begin{aligned} & i_X(\omega \wedge \eta)(X_1, \dots, X_{k+l-1}) \\ &= \omega \wedge \eta(X, X_1, \dots, X_{k+l-1}) \\ &= \frac{1}{k!l!} \sum_{i=1}^k \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l-1}} (-1)^{i+1} \text{sgn } \sigma \omega(X_{\sigma(1)}, \dots, \underbrace{X}_{i}, \dots, X_{\sigma(k-1)}) \eta(X_{\sigma(k)}, \dots, X_{\sigma(k+l-1)}) \\ &\quad + (-1)^k \frac{1}{k!l!} \sum_{j=1}^l \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l-1}} (-1)^{j+1} \text{sgn } \sigma \omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) \eta(X_{\sigma(k+1)}, \dots, \underbrace{X}_{j}, \dots, X_{\sigma(k+l-1)}) \\ &= (i_X(\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge i_X(\eta))(X_1, \dots, X_{k+l-1}). \end{aligned}$$

■

定義 4.7: Lie 微分

$X \in \mathfrak{X}(M)$ を M 上の任意のベクトル場とする. このとき X による **Lie 微分** (Lie derivative) が

$$\mathcal{L}_X: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$$

が次のように定義される :

$$\mathcal{L}_X(\omega)(X_1, \dots, X_k) := X(\omega(X_1, \dots, X_k)) - \sum_{i=1}^k \omega(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_k)$$

Lie 微分は定理 4.3 の条件を充している, i.e. $\mathcal{L}_X \omega$ は $C^\infty(M)$ 加群として多重線型かつ交代的であるから, 微分形式と呼ばれうる.

定理 4.6: Cartan の公式

$X, Y \in \mathfrak{X}(M), \omega \in \Omega^k(M)$ とする. このとき, 以下が成立する :

$$(1) i_{[X,Y]}(\omega) = [\mathcal{L}_X, i_Y]\omega$$

$$(2) \mathcal{L}_X = i_X d + di_X$$

証明 任意の $k-1$ 個のベクトル場 $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ をとる.

(1) $k=0$ のときは $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$ なので, 明らかである.

$k > 0$ とする. Lie 微分の定義 4.7 より

$$\begin{aligned} & (\mathcal{L}_X \mathbf{i}_Y(\omega))(X_1, \dots, X_{k-1}) \\ &= X((\mathbf{i}_Y(\omega))(X_1, \dots, X_{k-1})) - \sum_{i=1}^{k-1} (\mathbf{i}_Y(\omega))(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_{k-1}) \\ &= X(\omega(Y, X_1, \dots, X_{k-1})) - \sum_{i=1}^{k-1} \omega(Y, X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_{k-1}) \end{aligned}$$

である. 一方

$$\begin{aligned} & (\mathbf{i}_Y(\mathcal{L}_X \omega))(X_1, \dots, X_{k-1}) \\ &= (\mathcal{L}_X \omega)(Y, X_1, \dots, X_{k-1}) \\ &= X(\omega(Y, X_1, \dots, X_{k-1})) - \omega([X, Y], X_1, \dots, X_{k-1}) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{k-1} \omega(Y, X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_{k-1}) \end{aligned}$$

だから,

$$\begin{aligned} ([\mathcal{L}_X, \mathbf{i}_Y]\omega)(X_1, \dots, X_{k-1}) &= (\mathcal{L}_X \mathbf{i}_Y(\omega))(X_1, \dots, X_{k-1}) - (\mathbf{i}_Y(\mathcal{L}_X \omega))(X_1, \dots, X_{k-1}) \\ &= \mathbf{i}_{[X, Y]}(\omega)(X_1, \dots, X_{k-1}). \end{aligned}$$

(2) $k=0$ のときは $\mathcal{L}_\omega = X\omega$ ($\omega \in C^\infty(M)$) より明らか. $k > 0$ とする. 定理 4.5 より

$$\begin{aligned} & \mathbf{i}_X(d\omega)(X_1, \dots, X_k) \\ &= d\omega(X, X_1, \dots, X_k) \\ &= X\omega(X_1, \dots, X_k) + \sum_{i=1}^k (-1)^i X_i(\omega(X, X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^k (-1)^j \omega([X, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_k) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X, X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_k). \end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned} & d(\mathbf{i}_X(\omega))(X_1, \dots, X_k) \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} X_i(\omega(X, X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k)) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega(X, [X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_k) \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
& (i_X d + d i_X) \omega(X_1, \dots, X_k) \\
&= X \omega(X_1, \dots, X_k) + \sum_{j=1}^k (-1)^j \omega([X, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_k) \\
&= (\mathcal{L}_X \omega)(X_1, \dots, X_k).
\end{aligned}$$

■

Cartan の公式 4.6 より, Lie 微分の様々な性質が示される:

定理 4.7: Lie 微分の性質

$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\omega \in \Omega^k(M)$ とする. このとき, 以下が成立する:

- (1) $\mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta) = \mathcal{L}_X(\omega) \wedge \eta + \omega \wedge \mathcal{L}_X(\eta)$
- (2) $\mathcal{L}_X(d\omega) = d(\mathcal{L}_X(\omega))$
- (3) $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_{[X, Y]}$

証明 (1) Cartan の公式 4.6-(2) および内部積と外微分が共に反微分であることを利用すると

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta) \\
&= i_X(d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta) + d(i_X(\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge i_X(\eta)) \\
&= i_X(d\omega) \wedge \eta + \cancel{(-1)^{k+1} d\omega \wedge i_X(\eta)} + \cancel{(-1)^k i_X(\omega) \wedge d\eta} + (-1)^{2k} \omega \wedge i_X(d\eta) \\
&\quad + di_X(\omega) \wedge \eta + \cancel{(-1)^{k-1} i_X(\omega) \wedge d\eta} + \cancel{(-1)^k d\omega \wedge i_X(\eta)} + (-1)^{2k} \omega \wedge di_X(\eta) \\
&= \mathcal{L}_X(\omega) \wedge \eta + \omega \wedge \mathcal{L}_X(\eta).
\end{aligned}$$

(2) Cartan の公式 4.6-(2) から

$$\mathcal{L}_X(d\omega) = \cancel{i_X(d^2\omega)} + di_X(d\omega) = di_X(d\omega) + d^2i_X(\omega) = d(\mathcal{L}_X(\omega)).$$

(3) k に関する数学的帰納法により示す. $k=0$ のとき $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$ なので

$$\mathcal{L}_{[X, Y]} \omega = [X, Y] \omega = X(Y\omega) - Y(X\omega) = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] \omega$$

であり, 成立している.

$k \geq 0$ について正しいと仮定する. $\forall \omega \in \Omega^{k+1}(M)$ を一つとる. $\forall Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $i_Z \omega \in \Omega^k(M)$ だから, 帰納法の仮定より

$$\mathcal{L}_{[X, Y]} i_Z(\omega) = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] i_Z(\omega) \quad (4.4.1)$$

が成立する. 一方 Cartan の公式 4.6-(1) より

$$\mathcal{L}_{[X, Y]} i_Z = i_Z \mathcal{L}_{[X, Y]} + i_{[[X, Y], Z]} \quad (4.4.2)$$

である。さらに

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y i_Z &= \mathcal{L}_X (i_Z \mathcal{L}_Y + i_{[Y,Z]}) \\ &= i_Z \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y + i_{[X,Z]} \mathcal{L}_Y + i_{[Y,Z]} \mathcal{L}_X + i_{[X,[Y,Z]]},\end{aligned}\tag{4.4.3}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X i_Z &= i_Z \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X + i_{[Y,Z]} \mathcal{L}_X + i_{[X,Z]} \mathcal{L}_Y + i_{[Y,[X,Z]]}\end{aligned}\tag{4.4.4}$$

であることもわかる。式 (4.4.3)–(4.4.4) より

$$\begin{aligned}[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] i_Z &= i_Z [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] + i_{[X,[Y,Z]]} - i_{[Y,[X,Z]]}\end{aligned}$$

これを式 (4.4.2) から引いて Jacobi 恒等式 $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ を用いると

$$[(\mathcal{L}_{[X,Y]} - [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]), i_Z] = 0.$$

(4.4.1) に代入すると

$$i_Z (\mathcal{L}_{[X,Y]} - [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]) \omega = 0.$$

Z は任意だったから $(\mathcal{L}_{[X,Y]} - [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]) \omega = 0$ を得て証明が完了する。 ■

4.5 C^∞ 多様体の向き

4.5.1 C^∞ 多様体の向き付けとその特徴付け

有限次元ベクトル空間 V ($\dim V > 0$) の順序付き基底全体の集合を \mathcal{B}_V と書く。

- \mathcal{B}_V 上の同値関係を

$$(e_1, \dots, e_{\dim V}) \sim (f_1, \dots, f_{\dim V}) \iff \exists T = [T^\mu_\nu] \in \mathrm{GL}(\dim V), e_\mu = f_\nu T^\nu_\mu \text{ かつ } \det T > 0$$

で定め、この同値関係による同値類のことをベクトル空間 V の**向き** (orientation) と呼ぶ。

- ベクトル空間 V とその向き $\mathcal{O}_V \in \mathcal{B}_V / \sim$ の組 (V, \mathcal{O}_V) のことを**向き付けられたベクトル空間** (oriented vector space) と呼ぶ。
- 向き付けられたベクトル空間 (V, \mathcal{O}_V) の順序付き基底 $(e_1, \dots, e_{\dim V}) \in \mathcal{B}_V$ は、 $(e_1, \dots, e_{\dim V}) \in \mathcal{O}_V$ のとき**正の向き** (positively oriented), $(e_1, \dots, e_{\dim V}) \notin \mathcal{O}_V$ のとき**負の向き** (negatively oriented) であるという。

! $\dim V = 0$ のときは $\mathcal{O}_V \in \{\pm 1\}$ とする。

C^∞ 多様体 M の各点 $p \in M$ における接空間 $T_p M$ は有限次元ベクトル空間なので、上述の意味で向き $\mathcal{O}_{T_p M}$ を与えることができる。この各点各点で与えた接空間の向きたち $\{\mathcal{O}_{T_p M}\}_{p \in M}$ を次の意味で「連続に繋げる」ことができたとき、 C^∞ 多様体 M に**向き**が与えられたと言う：

定義 4.8: C^∞ 多様体の向き

境界なし/あり C^∞ 多様体 M を与える.

- M の各点の向き (pointwise orientation) とは, 族 $\{\mathcal{O}_{T_p M}\}_{p \in M}$ のこと.
- M の各点の向き $\{\mathcal{O}_{T_p M}\}_{p \in M}$ を与える. 開集合 $U \subset M$ 上の局所フレーム $(E_1, \dots, E_{\dim M})$ が**正の向き** (positively oriented) であるとは, $\forall p \in U$ において $(E_1|_p, \dots, E_{\dim M}|_p) \in \mathcal{O}_{T_p M}$ であることを言う. **負の向き** も同様に定義する.
- 与えられた M の各点の向き $\{\mathcal{O}_{T_p M}\}_{p \in M}$ が**連続** (continuous) であるとは, $\forall p \in M$ に対してある正の向きの局所フレーム $E^{(p)} := (E_1^{(p)}, \dots, E_{\dim M}^{(p)})$ が存在して $p \in \text{dom } E^{(p)}$ を満たすことを言う.
- M の**向き** (orientation) とは, M の各点の向きであって連続であるもののことを言う.
- M が**向き付け可能** (orientable) であるとは, M の向きが存在することを言う.
- M が向き付け可能なとき, 向き $\{\mathcal{O}_{T_p M}\}_{p \in M}$ と M の組 $(M, \{\mathcal{O}_{T_p M}\}_{p \in M})$ のことを**向きづけられた多様体** (oriented manifold) という.

補題 4.1:

- **向き付け可能**な境界あり/なし C^∞ 多様体 M の向き $\{\mathcal{O}_{T_p M}\}_{p \in M}$
- **連続**な開集合 $U \subset M$

を任意に与える. このとき, U 上の任意の局所フレーム $(E_1, \dots, E_{\dim M})$ は正の向きであるか負の向きであるかのどちらかである.

証明 背理法により示す. U 上の局所フレーム $E := (E_1, \dots, E_{\dim M})$ であって,

$$W := \{p \in U \mid E_p \in \mathcal{O}_{T_p M}\}$$

とおいたときに $W \neq \emptyset$ かつ $U \setminus W \neq \emptyset$ が成り立つものが存在するとする.

$\forall p \in W \subset M$ を1つ固定する. 仮定より各点の向き $\{\mathcal{O}_{T_p M}\}_{p \in M}$ は連続だから, ある正の向きの局所フレーム $F^{(p)}$ が存在して $p \in \text{dom } F^{(p)} =: V_p$ を満たす. このとき連続写像 $T: U \cap V_p \rightarrow \text{GL}(\dim M)$ を

$$E_\mu|_x =: F^{(p)}_\nu|_x [T(x)]^\nu_\mu \quad (\forall x \in U \cap V_p)$$

により定めると^{*3},

$$W \cap V_p = T^{-1}(\text{GL}_+(\dim M))$$

と書けるので $W \cap V_p$ は開集合であり^{*4}, かつ $p \in W \cap V_p \subset W$ を満たす. i.e. $\forall p \in W$ に対して W における p の開近傍 $W \cap U_p$ が存在するので, 命題??より W が開集合だと分かった. 同じ議論により $U \setminus W$ が開集合であることもわかるが, これは U の連結性に矛盾する. ■

^{*3} T の連続性は, $E, F^{(p)}$ が局所フレームであることによる.

^{*4} $\text{GL}_+(\dim M) := \{X \in \text{GL}(\dim M) \mid \det X > 0\}$ である. $\det: \text{GL}(\dim M) \rightarrow \mathbb{R}$ が連続写像なので $\text{GL}_+(\dim M) = \det^{-1}((0, \infty))$ は $\text{GL}(\dim M)$ の開集合である.

定義 4.8 の意味は直感的だが、扱い辛い。しかし、実は微分形式によって C^∞ 多様体の向きを特徴付けることができ計算上便利である：

命題 4.4: 微分形式による向きの特徴付け

境界あり/なし C^∞ 多様体 M を与える。

- (1) $\forall p \in M$ において 0 にならない $\omega \in \Omega^{\dim M}(M)$ が与えられたとする。このとき $\forall p \in M$ に対して

$$\mathcal{O}_{\omega_p} := \{ (e_1, \dots, e_{\dim M}) \in \mathcal{B}_{T_p M} \mid \omega_p(e_1, \dots, e_{\dim M}) > 0 \}$$

とおくと、族 $\{\mathcal{O}_{\omega_p}\}_{p \in M}$ は M の向きである。

- (2) M に向き $\{\mathcal{O}_{T_p M}\}_{p \in M}$ が与えられたとする。このとき $\forall p \in M$ および $\forall (e_1, \dots, e_{\dim M}) \in \mathcal{O}_{T_p M}$ に対して

$$\omega_p \neq 0 \text{ かつ } \omega_p(e_1, \dots, e_{\dim M}) > 0$$

を満たす $\omega \in \Omega^{\dim M}(M)$ が存在する。

証明 (1) $\forall p \in M$ において $\omega_p \neq 0$ とする。このとき $\forall (e_1, \dots, e_{\dim M}), (f_1, \dots, f_{\dim M}) \in \mathcal{B}_{T_p M}$ に対して、 $e_\mu = f_\nu T^\nu{}_\mu$ ならば、

$$\begin{aligned} \omega_p(e_1, \dots, e_{\dim M}) &= \omega_p(f_{\nu_1} T^{\nu_1}{}_1, \dots, f_{\nu_{\dim M}} T^{\nu_{\dim M}}{}_{\dim M}) \\ &= T^{\nu_1}{}_1 \cdots T^{\nu_{\dim M}}{}_{\dim M} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_{\dim M}} \omega_p(f_1, \dots, f_{\dim M}) \\ &= (\det T) \omega_p(f_1, \dots, f_{\dim M}) \end{aligned}$$

で $\det T \neq 0$ なので、

$$\begin{aligned} (e_1, \dots, e_{\dim M}) &\sim (f_1, \dots, f_{\dim M}) \\ &\stackrel{\text{def}}{\iff} \omega_p(e_1, \dots, e_{\dim M}), \omega_p(f_1, \dots, f_{\dim M}) \text{ が同符号} \end{aligned}$$

によって定めた $\mathcal{B}_{T_p M}$ の同値関係 \sim による同値類はベクトル空間 $T_p M$ の向きである。特に 2 つある同値類のうち ω_p の符号が正であるものを \mathcal{O}_{ω_p} とおいたので、族 $\{\mathcal{O}_{\omega_p}\}_{p \in M}$ は各点の向きである。

次に、各点の向き $\{\mathcal{O}_{\omega_p}\}_{p \in M}$ が連続であることを示す。 $\forall p \in M$ を一つ固定し、 p の連結な開近傍 $p \in U \subset M$ とその上の任意の局所フレーム $(E_1, \dots, E_{\dim M})$ をとる^{*5}。 (E_i) の双対フレームを (ϵ_i) とする。すると U 上で任意の $\omega \in \Omega^n(M)$ はある $f \in C^\infty(U)$ を使って $\omega = f \epsilon^1 \wedge \cdots \wedge \epsilon^{\dim M}$ の形で書ける。 ω が 0 にならないと言うことは f が 0 にならないので、 U 上至る所で $\omega(E_1, \dots, E_{\dim M}) = f \neq 0$ である。 i.e. $f(U) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ であるが、 U の連結性から $f(U) \subset \mathbb{R}_{>0}$ か $f(U) \subset \mathbb{R}_{<0}$ のどちらかしかない。

- (2) $\{\mathcal{O}_{T_p M}\}_{p \in M}$ を M の向きとする。このとき $\forall p \in M$ に対してある正の向きの局所フレーム $E^{(p)}$ が存在して $p \in \text{dom } E^{(p)}$ を満たす。そのような局所フレームの族 $\{E^{(p)}\}_{p \in M}$ を 1 つ固定する。すると M の部分集合族 $\mathcal{E} := \{\text{dom } E^{(p)}\}_{p \in M}$ は M の開被覆であるから、 \mathcal{E} に従属する C^∞ 級の 1 の分割 $\{\psi_p \in M \rightarrow [0, 1]\}_{p \in M}$ をとることができる。

^{*5} 例えば座標ベクトル場の定義域を十分小さく取れば良い。

ここで $\forall p \in M$ について $E^{(p)}$ の双対フレーム $\varepsilon^{(p)}$ をとり,

$$\omega^{(p)} := \varepsilon^{(p)1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{(p)\dim M}$$

と定義する. このとき $\forall x \in \text{dom } E^{(p)}$ および $(e_1, \dots, e_{\dim M}) \in \mathcal{O}_{T_x M}$ に対して, 向きの定義から $E^{(p)}|_x \in \mathcal{O}_{T_x M}$ であることと (1) の議論から $\omega^{(p)}|_x(E^{(p)}_1|_x, \dots, E^{(p)}_{\dim M}|_x) = 1 > 0$ と $\omega^{(p)}|_x(e_1, \dots, e_{\dim M})$ は同符号, i.e. 正である. したがって $\omega \in \Omega^{\dim M}(M)$ を

$$\omega := \sum_{p \in M} \psi_p \omega^{(p)}$$

で定義すると $\forall x \in M$ および $\forall (e_1, \dots, e_{\dim M}) \in \mathcal{O}_{T_x M}$ に対して

$$\omega_x(e_1, \dots, e_{\dim M}) = \sum_{\substack{p \in M, \\ x \in \text{dom } E^{(p)}}} \psi_p(x) \underbrace{\omega^{(p)}|_x(e_1, \dots, e_{\dim M})}_{>0}$$

であり, 1 の分割の性質-(4) から少なくとも 1 つの $p \in M$ について $\psi_p(x) > 0$ であるので, 左辺が正であることが示された. 構成から明らかに $\forall p \in M$ について $\omega_p \neq 0$ である. ■

命題 4.4 を踏まえて次のように定義する:

定義 4.9: 向き付け形式

境界あり/なし C^∞ 多様体 M の至る所で 0 にならない $\omega \in \Omega^{\dim M}(M)$ のことを向き付け形式 (orientation form) と呼ぶ.

向きの定義では局所フレームが登場したが, 実際には座標フレームを考えれば十分だとわかる:

定義 4.10: 向きづけられたアトラス

境界あり/なし多様体 M を与え^a, M の極大アトラス $\mathcal{A}^+ := \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda^+}$ を 1 つ固定する.

- M が向きづけられた多様体であるとする. このとき M のチャート $(U, (x^\mu)) \in \mathcal{A}^+$ が正の向き (positively oriented) であるとは, 座標フレーム $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{\dim M}})$ が正の向きであることを言う.
- (極大とは限らない) C^∞ アトラス $\mathcal{A} := \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda \subset \Lambda^+} \subset \mathcal{A}^+$ が向き付けられた C^∞ アトラス (oriented smooth atlas) であるとは, $\forall \alpha, \beta \in \Lambda \subset \Lambda^+$ に対して座標変換

$$\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha: \varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$$

の Jacobian が正であることを言う.

^a この時点では向き付け可能でなくても良い

命題 4.5: 向きづけられた C^∞ アトラスによる向きの特徴付け

境界あり/なし C^∞ 多様体 M を与え, M の極大アトラス $\mathcal{A}^+ := \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda^+}$ を1つ固定する.

- (1) M に向きづけられた C^∞ アトラス $\mathcal{A} := \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ が与えられたとする. このとき M の向き $\{\mathcal{O}_{T_p M}\}_{p \in M}$ であって, $\forall \alpha \in \Lambda$ について M のチャート $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ が正の向きになるようなものが一意的に存在する.
- (2) M に向き $\{\mathcal{O}_{T_p M}\}_{p \in M}$ が与えられたとする. このとき $\partial M = \emptyset$ または $\dim M > 1$ ならば, \mathcal{A}^+ の部分集合

$$\mathcal{A} := \{(U, \varphi) \in \mathcal{A}^+ \mid (U, \varphi) \text{ は正の向き}\}$$

は向きづけられた C^∞ アトラスである.

証明 (1) まず $\forall p \in M$ を1つ固定する. \mathcal{A} は M の C^∞ アトラスなので, ある $\alpha_p \in \Lambda$ が存在して $p \in U_{\alpha_p}$ を満たす. このときチャート $(U_{\alpha_p}, \varphi_{\alpha_p}) = (U_{\alpha_p}, (x^\mu)) \in \mathcal{A}$ について, 自然基底 $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{\dim M}}\Big|_p\right) \in \mathcal{B}_{T_p M}$ が属する $T_p M$ の向きを $\mathcal{O}_{T_p M}$ と定義する. $p \in U_{\beta_p}$ を満たす別の $\beta_p \in \Lambda$ に関しても, \mathcal{A} が向きづけられた C^∞ アトラスであるという仮定からチャート $(U_{\beta_p}, \varphi_{\beta_p}) = (U_{\beta_p}, (y^\mu)) \in \mathcal{A}$ について

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{\dim M}}\Big|_p\right) \sim \left(\frac{\partial}{\partial y^1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial y^{\dim M}}\Big|_p\right)$$

が成り立つ^{*6}ので, $\mathcal{O}_{T_p M}$ は well-defined である. 族 $\{\mathcal{O}_{T_p M}\}_{p \in M}$ は M の各点の向きであるが, 座標フレームは局所フレームなので M の向きでもある.

M にこの向きを与えたとき, 構成から明らかに $\forall (U, \varphi) \in \mathcal{A}$ は正の向きのチャートである.

- (2) \mathcal{A}^+ は M の C^∞ アトラスなので, $\forall p \in M$ に対して $\alpha_p \in \Lambda^+$ が存在して $p \in U_{\alpha_p}$ を満たす. 必要なら U_{α_p} を十分小さくすることで U_{α_p} は連結であるとして良い^{*7}. このときチャート $(U_{\alpha_p}, \varphi_{\alpha_p}) = (U_{\alpha_p}, (x^1, x^2, \dots)) \in \mathcal{A}^+$ に付随する座標フレームは補題 4.1 により正の向きであるか負の向きであるかのどちらかである. もしも負の向きならば, x^1 を $-x^1$ に置き換えた別の C^∞ チャート^{*8} $(U'_{\alpha_p}, \varphi'_{\alpha_p}) := (U_{\alpha_p}, (-x^1, x^2, \dots)) \in \mathcal{A}^+$ は正の向きである. よって \mathcal{A} は C^∞ アトラスを成す. \mathcal{A} に属する全てのチャートが正の向きなので, それらの間の変換関数の Jacobian もまた正でなくてはならない.

■

^{*6} 自然基底の間の基底の取り替え行列は Jacobi 行列である.

^{*7} \mathcal{A}^+ は極大アトラスなのでこのようなチャート $(U_{\alpha_p}, \varphi_{\alpha_p})$ を必ず含む.

^{*8} \mathcal{A}^+ は極大アトラスなのでこのようなチャートを必ず含む. なお, この構成は $\partial M \neq \emptyset$ かつ $\dim M = 1$ のとき境界チャートに適用することができない.

定義 4.11: 向き付けを保つ C^∞ 写像

向き付けられた C^∞ 多様体 $(M, \{\mathcal{O}_{T_p M}\}_{p \in M})$, $(N, \{\mathcal{O}_{T_q N}\}_{q \in N})$ と, 局所微分同相写像 $F: M \rightarrow N$ を与える.

- F が向きを保つ (orientation-preserving) とは, $\forall p \in M$ において同型写像 $T_p F: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ が $T_p F(\mathcal{O}_{T_p M}) = \mathcal{O}_{T_{F(p)} N}$ を満たすことを言う.
- F が向きを逆にする (orientation-reversing) とは, $\forall p \in M$ において同型写像 $T_p F: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ が $T_p F(\mathcal{O}_{T_p M}) = -\mathcal{O}_{T_{F(p)} N}$ を満たすことを言う.

4.5.2 新しい向きの構成

素材となる向き付けられた C^∞ 多様体から新しい向きづけられた多様体を作る方法をいくつか紹介する.

命題 4.6: 積多様体の向き

- 向き付けられた C^∞ 多様体 M_1, M_2
- C^∞ 写像

$$\begin{aligned}\pi_1: M_1 \times M_2 &\rightarrow M_1, (x, y) \mapsto x, \\ \pi_2: M_1 \times M_2 &\rightarrow M_2, (x, y) \mapsto y\end{aligned}$$

を与える. このとき, 積多様体 $M_1 \times M_2$ の向きであって以下を満たすもの (product orientation と言う) が一意的に存在する:

(product orientation)

M_i に与えられた向きを命題 4.4-(1) の方法で再現する向き付け形式 $\omega_i \in \Omega^{\dim M_i}(M_i)$ に関して, $\pi_1^* \omega_1 \wedge \pi_2^* \omega_2 \in \Omega^{\dim(M_1 \times M_2)}(M_1 \times M_2)$ は product orientation を命題 4.4-(1) の方法で再現する向き付け形式である.

証明 $n_i := \dim M_i$ とおく. $\forall (p, q) \in M_1 \times M_2$ を 1 つ固定する. ω_i は M_i 上至る所 0 でないので, ある $v_1, \dots, v_{n_1} \in T_p M_1$ および $w_1, \dots, w_{n_2} \in T_q M_2$ が存在して

$$\omega_1|_p(v_1, \dots, v_{n_1}) \neq 0, \quad \omega_2|_q(w_1, \dots, w_{n_2}) \neq 0$$

を満たす. ここで C^∞ 写像

$$\begin{aligned}\text{inj}_1^q: M_1 &\rightarrow M_1 \times M_2, x \mapsto (x, q) \\ \text{inj}_2^p: M_2 &\rightarrow M_1 \times M_2, x \mapsto (p, x)\end{aligned}$$

によって

$$\begin{aligned}V_i &:= T_p(\text{inj}_1^q)(v_i) \in T_{(p, q)}(M_1 \times M_2) \quad \text{w/ } i = 1, \dots, n_1, \\ V_{n_1+j} &:= T_q(\text{inj}_2^p)(w_j) \in T_{(p, q)}(M_1 \times M_2) \quad \text{w/ } j = 1, \dots, n_2\end{aligned}$$

を定義すると、命題??から

$$\begin{aligned} T_{(p,q)}\pi_1(V_i) &= v_i, & T_{(p,q)}\pi_2(V_i) &= 0, \\ T_{(p,q)}\pi_1(V_{n_1+j}) &= 0, & T_{(p,q)}\pi_2(V_{n_1+j}) &= w_j \end{aligned}$$

が言える。よって

$$\begin{aligned} & \pi_1^*\omega_1 \wedge \pi_2^*\omega_2|_{(p,q)}(V_1, \dots, V_{n_1}, V_{n_1+1}, \dots, V_{n_1+n_2}) \\ &= \frac{1}{n_1!n_2!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n_1+n_2}} \operatorname{sgn} \sigma \pi_1^*\omega_1|_{(p,q)}(V_{\sigma(1)}, \dots, V_{\sigma(n_1)}) \pi_2^*\omega_2|_{(p,q)}(V_{\sigma(n_1+1)}, \dots, V_{\sigma(n_1+n_2)}) \\ &= \frac{1}{n_1!n_2!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n_1+n_2}} \operatorname{sgn} \sigma \omega_1|_p(T_{(p,q)}\pi_1(V_{\sigma(1)}), \dots, T_{(p,q)}\pi_1(V_{\sigma(n_1)})) \\ & \quad \times \omega_2|_q(T_{(p,q)}\pi_2(V_{\sigma(n_1+1)}), \dots, T_{(p,q)}\pi_2(V_{\sigma(n_1+n_2)})) \\ &= \frac{1}{n_1!n_2!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n_1}, \tau \in \mathfrak{S}_{n_2}} \operatorname{sgn} \sigma \tau \omega_1|_p(T_{(p,q)}\pi_1(V_{\sigma(1)}), \dots, T_{(p,q)}\pi_1(V_{\sigma(n_1)})) \\ & \quad \times \omega_2|_q(T_{(p,q)}\pi_2(V_{n_1+\tau(1)}), \dots, T_{(p,q)}\pi_2(V_{n_1+\tau(n_2)})) \\ &= \omega_1|_p(v_1, \dots, v_{n_1}) \omega_2|_p(w_1, \dots, w_{n_2}) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

であり、 $\pi_1^*\omega_1 \wedge \pi_2^*\omega_2|_{(p,q)} \neq 0$ が言えた。 ■

定義 4.12: 局所微分同相写像

境界なし/あり C^∞ 多様体 M, N を与える。

C^∞ 写像 $F: M \rightarrow N$ が局所微分同相写像 (local diffeomorphism) であるとは、 $\forall p \in M$ が以下の条件を満たす近傍 $p \in U_p \subset M$ を持つことを言う：

- (1) $F(U_p) \subset N$ が開集合
- (2) $F|_{U_p}: U_p \rightarrow F(U_p)$ が微分同相写像

命題 4.7: 引き戻しによる向き

- 境界あり/なし C^∞ 多様体 M
- 向き付けられた境界あり/なし C^∞ 多様体 N
- 局所微分同相写像 $F: M \rightarrow N$

を与える。このとき M は F が向きを保つような向き (pullback orientation とする) を一意にもつ。

証明 N に与えられた向きを $\{\mathcal{O}_{T_q(N)}\}_{q \in N}$ と書く。 $\forall p \in M$ を1つ固定する。 F が局所微分同相写像なので、点 p における F の微分 $T_p F: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ はベクトル空間の同型写像である。よって $T_p M$ の向き $\mathcal{O}_{T_p M}$ であって $T_p F(\mathcal{O}_{T_p M}) = \mathcal{O}_{T_{F(p)} N}$ を満たすものが一意に存在する。

N の向き $\{\mathcal{O}_{T_q(N)}\}_{q \in N}$ を命題 4.4-(1) の方法で再現する向き付け形式 $\omega \in \Omega^{\dim N}(N)$ について、 $F^*\omega \in \Omega^{\dim M}(M)$ は明らかに M 上至る所 0 でなく、 $F^*\omega$ が命題 4.4-(1) の方法で作る M の向き $\{\mathcal{O}_{F^*\omega|_p}\}_{p \in M}$ は $\{\mathcal{O}_{T_p M}\}_{p \in M}$ と等しい。 ■

4.5.3 パラコンパクト・1の分割

ここでいったん1の分割の技巧を説明しよう。

定義 4.13: 局所有限

X を位相空間とし, $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を X の被覆とする. $\forall x \in X$ において, x の近傍 V であって, V と交わる U_λ が有限個であるようなものが存在するとき, \mathcal{U} は**局所有限** (locally finite) な被覆と呼ばれる.

X の**任意の開被覆**が局所有限な細分を持つとき, X は**パラコンパクト** (paracompact) であるという. この条件はコンパクトよりも弱い. 次の定理は, 全ての**多様体** (C^∞ 多様体だけでなく!) がパラコンパクトよりももう少し良い性質を持っていることを保証してくれる:

定理 4.8:

M を位相多様体とする. M の任意の開被覆に対して, その細分となる高々可算個の元からなる^a局所有限な開被覆 $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ であって, $\overline{V_i}$ が全てコンパクトとなるものが存在する.

必要ならば, さらに強い条件を充たすようにできる. i.e. 開被覆を成す各 V_i 上にチャート (V_i, ψ_i) をとることができて, $\psi_i(V_i) = D(3)$ ^bかつ $\{\psi_i^{-1}(D(1))\}_{i \in I}$ が既に M の開被覆となっている.

^a 添字集合 I の濃度 (cardinality) が $|I| \leq \aleph_0$.

^b 半径 3 の開円板. 記号の使い方は ?? を参照.

証明 [?, p.30, 命題 1.29] ■

位相空間 X の連続関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, f の値が 0 にならない点全体の集合を含む最小の開集合

$$\text{supp} f := \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$$

を f の **台** (support) と呼ぶ.

定義 4.14: 1 の分割

- 境界なし/あり C^∞ 多様体 M
- M の開被覆 $\mathcal{U} := \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$

を与える. \mathcal{U} に従属する C^∞ 級の 1 の分割^a (smooth partition of unity subordinate to \mathcal{U}) とは, C^∞ 関数の族 $\{\psi_\lambda: M \rightarrow \mathbb{R}\}_{\lambda \in \Lambda}$ であって以下の条件を満たすもののこと:

- (1) $\forall \lambda \in \Lambda, \forall p \in M$ に対して $\psi_\lambda(p) \in [0, 1]$
- (2) $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して $\text{supp } \psi_\lambda \subset U_\lambda$
- (3) M の部分集合族 $\{\text{supp } \psi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は局所有限である. i.e. $\forall p \in M$ に対してある開近傍 $p \in U_p \subset M$ が存在して, $\{\lambda \in \Lambda \mid U_p \cap \text{supp } \psi_\lambda \neq \emptyset\} \subset \Lambda$ が有限集合になる.
- (4) $\forall p \in M$ に対して^b $\sum_{\lambda \in \Lambda} \psi_\lambda(p) = 1$

^a 本資料では「 C^∞ 級の」を省略する

^b 条件 (3) により左辺の和は well-defined である.

命題 4.8: 1 の分割の存在

- 境界なし/あり C^∞ 多様体 M
- M の開被覆 $\mathcal{U} := \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$

を任意に与える. このとき, \mathcal{U} に従属する 1 の分割が存在する.

証明 かなり技術的なので省略する. 例えば [?, Theorem 2.23] を参照. ■

この存在定理のおかげで, ある 1 つのチャート (したがって $\mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n$) の上で定義した構造をアトラス全体にわたって「貼り合わせる」ことができる. したがって, しばしば $\mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n$ の上でだけ考えれば十分である.

4.5.4 部分多様体の C^∞ 構造

次に, 部分多様体に向きを入れる方法を考える. 然るに, そのためには部分多様体の C^∞ 構造を真面目に扱う必要がある. まずいくつかの定義を述べる:

定義 4.15: C^∞ 写像のランク

境界あり/なし C^∞ 多様体 M, N および C^∞ 写像 $F: M \rightarrow N$ を与える.

- 点 $p \in M$ における F のランク (rank) とは, 線型写像 $T_p F: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ のランク, i.e. $\dim(\text{Im}(T_p F)) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ のこと. $\forall p \in M$ における F のランクが等しいとき, F は定ランク (constant rank) であると言い, $\text{rank } F := \dim(\text{Im}(T_p F))$ と書く.
- 点 $p \in M$ における F のランクが $\min\{\dim M, \dim N\}$ に等しいとき, F は点 p においてフルランク (full rank at p) であると言う. $\text{rank } F = \min\{\dim M, \dim N\}$ ならば F はフルランク (full rank) であると言う.

位相空間 M, N を与える. 連続写像 $F: M \rightarrow N$ が**位相的埋め込み** (topological embedding) であるとは, $F(M) \subset N$ に N からの相対位相を入れたときに写像 $F: M \rightarrow F(M)$ が同相写像になることを言う.

定義 4.16: C^∞ 沈めこみ・ C^∞ はめ込み・ C^∞ 埋め込み

境界あり/なし C^∞ 多様体 M, N および**定ランク**の C^∞ 写像 $F: M \rightarrow N$ を与える.

- F が C^∞ **沈め込み** (smooth submersion) であるとは, $\forall p \in M$ において $T_p F: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ が全射である, i.e. $\text{rank } F = \dim N$ であることを言う.
- F が C^∞ **はめ込み** (smooth immersion) であるとは, $\forall p \in M$ において $T_p F: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ が単射である, i.e. $\text{rank } F = \dim M$ であること^aを言う.
- F が C^∞ **埋め込み** (smooth embedding) であるとは, F が C^∞ はめ込みであってかつ位相的埋め込みであることを言う.

^a 階数・退化次元の定理から $\dim(\text{Ker } T_p F) + \dim(\text{Im } T_p F) = \dim M$ なので, $\text{rank } F = \dim(\text{Im } T_p F) = \dim M \implies \dim(\text{Ker } T_p F) = 0 \iff \text{Ker } T_p F = 0$

定義 4.17: 部分多様体

境界あり/なし C^∞ 多様体 (M, \mathcal{O}_M) を与え^a, その極大アトラス \mathcal{A}_M^+ を1つ固定する. M の**部分集合**^b $S \subset M$ を与える.

- S が M の境界あり/なし C^∞ **部分多様体** (smooth submanifold) であるとは, S に位相^c \mathcal{O}_S と C^∞ アトラス^d \mathcal{A}_S が与えられていて $(S, \mathcal{O}_S, \mathcal{A}_S)$ が境界あり/なし C^∞ 多様体になっていることを言う.
- 境界あり/なし C^∞ 部分多様体 $(S, \mathcal{O}_S, \mathcal{A}_S)$ が M には**め込まれた** (境界あり/なし) C^∞ **部分多様体** (immersed submanifold) であるとは, C^∞ アトラス \mathcal{A}_S に関して包含写像 $\iota: S \hookrightarrow M$ が C^∞ **はめ込み**になっていることを言う.
- 境界あり/なし C^∞ 部分多様体 $(S, \mathcal{O}_S, \mathcal{A}_S)$ が M に**埋め込まれた** (境界あり/なし) C^∞ **部分多様体** (embedded submanifold) であるとは, 位相 \mathcal{O}_S が位相空間 (M, \mathcal{O}_M) からの相対位相であり, かつ C^∞ アトラス \mathcal{A}_S に関して包含写像 $\iota: S \hookrightarrow M$ が C^∞ **埋め込み**になっていることを言う.

^a \mathcal{O}_M は M の位相

^b この時点では S の位相を指定していない.

^c 位相空間 (M, \mathcal{O}_M) からの相対位相でなくても良い

^d $\mathcal{A}_S \subset \mathcal{A}_M^+$ でなくても良い

M にはめ込まれた C^∞ 部分多様体 $(S, \mathcal{O}_S, \mathcal{A}_S)$ について, $\dim M - \dim S$ を S の**余次元** (codimension) と呼ぶ.

混乱の恐れがない場合, 以下では C^∞ 部分多様体の位相と C^∞ アトラスを明示しない. また, 特に断らずに部分多様体と言ったら C^∞ 部分多様体のことを指すものとする.

定義 4.18: スライスチャート

境界あり/なし C^∞ 多様体 M を与え, その極大アトラス \mathcal{A}_M^+ を 1 つ固定する. 部分集合 $S \subset M$ を与える.

- M のチャート $(U, \varphi) = (U, (x^\mu)) \in \mathcal{A}_M^+$ が S に関する内部 k -スライスチャートであるとは,

$$\varphi(S \cap U) = \{ (x^1, \dots, x^k, c^{k+1}, \dots, c^{\dim M}) \in \varphi(U) \mid c^{k+1}, \dots, c^{\dim M} \text{ は定数} \}$$

が成り立つことを言う.

- M のチャート $(U, \varphi) = (U, (x^\mu)) \in \mathcal{A}_M^+$ が S に関する境界 k -スライスチャートであるとは,

$$\varphi(S \cap U) = \{ (x^1, \dots, x^k, c^{k+1}, \dots, c^{\dim M}) \in \varphi(U) \mid x^k \geq 0 \text{ かつ } c^{k+1}, \dots, c^{\dim M} \text{ は定数} \}$$

が成り立つことを言う.

S に関する境界 k -スライスチャートを考えない場合は, S に関する内部 k -スライスチャートのことを単に S に関する k -スライスチャートと呼ぶ.

定理 4.9: スライスチャートによる埋め込まれた C^∞ 部分多様体の特徴付け

- 境界を持たない C^∞ 多様体 M とその極大アトラス \mathcal{A}_M^+
- C^∞ 写像

$$\pi: \mathbb{R}^{\dim M} \longrightarrow \mathbb{R}^k, (x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^{\dim M}) \longmapsto (x^1, \dots, x^k)$$

- 部分集合 $S \subset M$

を与える. このとき, 以下の 2 つが成り立つ.

- (1) S が埋め込まれた境界なし C^∞ 部分多様体 $\implies \forall p \in S$ に対して, p を含む S に関する $\dim S$ -スライスチャート $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_M^+$ が存在する.
- (2) $\forall p \in S$ に対して, p を含む S に関する k -スライスチャート $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_M^+$ が存在する. $\implies S$ は M からの相対位相によって k 次元の位相多様体になり, かつ S の C^∞ アトラス

$$\mathcal{A}_S := \{ (S \cap U, \pi \circ \varphi|_{S \cap U}) \mid (U, \varphi) \in \mathcal{A}_M^+ \text{ s.t. } S \text{ に関する } k\text{-スライスチャート} \}$$

が S に与える C^∞ 構造に関して S は M に埋め込まれた境界なし C^∞ 部分多様体になる.

もしくは, S に境界がある場合は次の通り:

- (1) S が埋め込まれた境界付き C^∞ 部分多様体 $\implies \forall p \in S$ に対して, p を含む S に関する内部 $\dim S$ -スライスチャート $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_M^+$ が存在するか, p を含む S に関する境界 $\dim S$ -スライスチャート $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_M^+$ が存在するかのどちらかである.
- (2) $\forall p \in S$ に対して, p を含む S に関する内部 $\dim S$ -スライスチャート $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_M^+$ が存在するか, p を含む S に関する境界 $\dim S$ -スライスチャート $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_M^+$ が存在するかのどちら

かである. $\implies S$ は M からの相対位相によって k 次元の境界付き位相多様体になり, かつ S の C^∞ アトラス

$$\mathcal{A}_S := \{ (S \cap U, \pi \circ \varphi|_{S \cap U}) \mid (U, \varphi) \in \mathcal{A}_M^+ \text{ s.t. } S \text{ に関する } k\text{-スライスチャート} \}$$

が S に与える C^∞ 構造に関して S は M に埋め込まれた境界付き C^∞ 部分多様体になる.

証明 S の包含写像を $\iota: S \hookrightarrow M$ とおく. まずは S の境界がない場合に示す.

- (1) $\forall p \in S$ を 1 つ固定する. $(S, \mathcal{O}_S, \mathcal{A}_S)$ が埋め込まれた C^∞ 部分多様体だとする. このとき ι は C^∞ 埋め込み, 従って定ランク写像であるから, 局所的ランク定理により p を含む C^∞ チャート $(U, \varphi) \in \mathcal{O}_S$, $(V, \psi) \in \mathcal{O}_M$ が存在して, $\forall (x^1, \dots, x^{\dim S}) \in \varphi(U)$ に対して

$$\psi \circ \iota|_U \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^{\dim S}) = (x^1, \dots, x^{\dim S}, 0, \dots, 0)$$

を充たす. ここで $B_\varepsilon^{\dim S}(\varphi(p)) \subset \varphi(U)$ かつ $B_\varepsilon^{\dim M}(\psi(p)) \subset \psi(V)$ を充たすような十分小さい $\varepsilon > 0$ をとり, $U_0 := \varphi^{-1}(B_\varepsilon^{\dim S}(\varphi(p))) \subset U$, $V_0 := \psi^{-1}(B_\varepsilon^{\dim M}(\psi(p))) \subset V$ とおく. すると $U_0 \in \mathcal{O}_S$ であるが, \mathcal{O}_S は M からの相対位相なので, ある M の開集合 $W \subset M$ が存在して $U_0 = S \cap W$ と書ける. このとき $(V_0 \cap W, \psi|_{V_0 \cap W}) \in \mathcal{A}_M^+$ は

$$\psi|_{V_0 \cap W}((V_0 \cap W) \cap U) = \psi(U_0) = \psi \circ \varphi^{-1}(B_\varepsilon^{\dim S}(\varphi(p))) = \psi \circ \iota|_U \circ \varphi^{-1}(B_\varepsilon^{\dim S}(\varphi(p)))$$

を充たすので, S に関する $\dim S$ -スライスチャートになっている.

- (2) まず, S に M からの相対位相 \mathcal{O}_S を入れて位相空間にしたときにそれが位相多様体になっていることを示す. 位相空間 (S, \mathcal{O}_S) が第 2 可算な Hausdorff 空間であることは明らかなので, あとは $\forall p \in S$ に対して

- p の開近傍 $p \in V \subset S$
- \mathbb{R}^k の開集合 $\psi(V) \subset \mathbb{R}^k$
- 同相写像 $\psi: V \xrightarrow{\sim} \psi(V)$

が存在することを言えば良い. 実際, 点 p を含む k -スライスチャート $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_M^+$ をとり,

$$V := U \cap S, \quad \psi := \pi \circ \varphi|_V: V \longrightarrow \psi(V)$$

とおくと連続写像 $\psi: V \longrightarrow \psi(V)$ は同相写像である. と言うのも, C^∞ 写像

$$j: \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^{\dim M}, (x^1, \dots, x^k) \longmapsto (x^1, \dots, x^k, c^{k+1}, \dots, c^{\dim M})$$

を使って定義される連続写像

$$\varphi^{-1} \circ j|_{\psi(V)}: \psi(V) \longrightarrow V$$

が ψ の逆写像になっているからである.

次に, \mathcal{A}_S が位相多様体 (S, \mathcal{O}_S) に C^∞ 構造を定めることを示す. 仮定より \mathcal{A}_S は S の開被覆を与える. よって座標変換が C^∞ 級であることを示せば良い. 実際, $U \cap U' \neq \emptyset$ を充たす 2 つの S に関する k -スライスチャート $(U, \varphi), (U', \varphi') \in \mathcal{A}_M^+$ をとると, 対応する \mathcal{A}_S の座標変換は

$$(\pi \circ \varphi'|_{S \cap U'}) \circ (\pi \circ \varphi|_{S \cap U})^{-1} = \pi \circ \varphi'|_{S \cap U'} \circ \varphi \circ j|_{\pi(\varphi(S \cap U \cap U'))}$$

であり, C^∞ 写像の合成で書けているので C^∞ 写像である.

最後に, C^∞ 多様体 $(S, \mathcal{O}_S, \mathcal{A}_S)$ が M に埋め込まれた C^∞ 部分多様体であることを示す. \mathcal{O}_S が M からの相対位相なので包含写像 ι が**位相的埋め込み**であることは明らか. $\forall p \in S$ を一つ固定する. このとき p の近傍における包含写像 ι の座標表示であって

$$(x^1, \dots, x^k) \mapsto (x^1, \dots, x^k, c^{k+1}, \dots, c^{\dim M})$$

の形のものが必ず存在し, その微分 (i.e. Jacobi 行列) は単射なので, ι は C^∞ はめ込みだと分かった.

S の境界がある場合, (1) において $p \in \partial S$ のときは境界がある場合の局所的ランク定理を使えば良い. (2) は内部スライスチャートの場合と境界スライスチャートの場合とで全く同じ議論ができる. ■

境界付き C^∞ 多様体 M の境界 ∂M に M からの相対位相を入れると $\dim M - 1$ 次元の境界を持たない位相多様体になることは命題??-(2) で見たが, その際は ∂M の C^∞ 構造については何も言及していなかった. ここでそれが明らかになる:

定理 4.10: 境界の C^∞ 構造

- 境界付き C^∞ 多様体 (M, \mathcal{O}_M) とその極大アトラス \mathcal{A}_M^+
- C^∞ 写像

$$\pi: \mathbb{R}^{\dim M} \longrightarrow \mathbb{R}^{\dim M-1}, (x^1, \dots, x^{\dim M-1}, x^{\dim M}) \mapsto (x^1, \dots, x^{\dim M-1})$$

を与える. このとき, M の境界 ∂M に M からの相対位相 $\mathcal{O}_{\partial M}$ を入れてできる $\dim M - 1$ 次元位相多様体 $(\partial M, \mathcal{O}_{\partial M})$ について以下が成り立つ:

(1) $(\partial M, \mathcal{O}_{\partial M})$ は

$$\mathcal{A}_{\partial M} := \{ (\partial M \cap U, \pi \circ \varphi|_{\partial M \cap U}) \mid (U, \varphi) \in \mathcal{A}_M^+ \text{ s.t. 境界チャート} \}$$

を C^∞ アトラスに持つ.

(2) C^∞ 多様体 $(\partial M, \mathcal{O}_{\partial M}, \mathcal{A}_{\partial M})$ は M に proper に^a**埋め込まれた C^∞ 部分多様体**になる.

^a つまり, 包含写像 $\iota: \partial M \rightarrow M$ による M の任意のコンパクト集合 $K \subset M$ の逆像 $\iota^{-1}(K) \subset \partial M$ がコンパクト

証明 包含写像を $\iota: \partial M \hookrightarrow M$ と書く.

(1) ∂M の定義から, $\forall p \in \partial M$ に対して境界チャート $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_M^+$ が存在して $p \in U$ を満たす. i.e. $\mathcal{A}_{\partial M}$ は ∂M の開被覆を与えるので, あとは $\mathcal{A}_{\partial M}$ の座標変換が C^∞ 級であることを示せば良い. 実際, 任意の境界チャート $(U, \varphi) = (U, (x^\mu)) \in \mathcal{A}_M^+$ に関して

$$\varphi|_{\partial M \cap U}: p \mapsto (x^1(p), \dots, x^{\dim M-1}(p), 0)$$

であるから, C^∞ 写像

$$j: \mathbb{R}^{\dim M-1} \longrightarrow \mathbb{R}^{\dim M}, (x^1, \dots, x^{\dim M-1}) \mapsto (x^1, \dots, x^{\dim M-1}, 0)$$

を使って

$$(\pi \circ \varphi|_{\partial M \cap U})^{-1} = \varphi^{-1} \circ j|_{\pi(\varphi(\partial M \cap U))}$$

と書けるので, $U \cap U' \neq \emptyset$ を充たす 2 つの境界チャート $(U, \varphi), (U', \varphi') \in \mathcal{A}_M^+$ をとると, 対応する $\mathcal{A}_{\partial M}$ の座標変換は

$$(\pi \circ \varphi'|_{\partial M \cap U'}) \circ (\pi \circ \varphi|_{\partial M \cap U})^{-1} = \pi \circ \varphi'|_{\partial M \cap U'} \circ \varphi^{-1} \circ j|_{\pi(\varphi(\partial M \cap U \cap U'))}$$

と C^∞ 写像の合成で書けるので C^∞ 写像である.

- (2) $\forall p \in \partial M$ を 1 つ固定する. このとき p を含む境界チャート $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_M^+$ が存在するので, $(V, \psi) := (\partial M \cap U, \pi \circ \varphi|_{\partial M \cap U}) \in \mathcal{A}_{\partial M}$ と $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_M^+$ による包含写像 ι の座標表示は

$$\varphi \circ \iota \circ \psi^{-1} = \varphi \circ \iota \circ \varphi^{-1} \circ j|_{\pi(\varphi(\partial M \cap U))} = j|_{\pi(\varphi(\partial M \cap U))}$$

である. 従って $T_{\psi(p)}(\varphi \circ \iota \circ \psi^{-1})$ は明らかに単射なので連鎖率および ψ, φ が微分同相写像であることから $T_p \iota$ は単射だとわかる. よって ι は **C^∞ はめ込み**である. $\mathcal{O}_{\partial M}$ が M からの相対位相であることから包含写像 ι が位相的埋め込みであることは明らか.

■

実は, もう少し緻密な考察をすると定理 4.9, 4.10 で構成した C^∞ 構造は微分同相を除いて一意であることがわかる [?, p.114, Theorem 5.31] が, 議論が若干技術的なのでここでは省略する.

4.5.5 C^∞ 部分多様体の向き付け

ここでは特に, **はめ込まれた or 埋め込まれた境界あり/なし C^∞ 部分多様体**のみ考える.

- **向きづけられた境界あり/なし C^∞ 多様体** $(M, \{\mathcal{O}_{T_p M}\}_{p \in M})$
- M に**はめ込まれた余次元 1 の境界あり/なし C^∞ 部分多様体** $S \subset M$

が与えられたとき, 包含写像を $\iota_S: S \hookrightarrow M$ と書くことにする.

定義 4.19: 部分多様体に沿ったベクトル場

- 境界あり/なし C^∞ 多様体 M
- M にはめ込まれた境界あり/なし C^∞ 部分多様体 $S \subset M$

を与える. S に沿ったベクトル場とは, 接束

$$\mathbb{R}^{\dim M} \hookrightarrow TM \xrightarrow{\pi} M$$

の部分束

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{\dim M} &\hookrightarrow \underbrace{\coprod_{p \in S} T_p M}_{=: TM|_S} \xrightarrow{\pi} S \\ &\cup \\ &TS \end{aligned}$$

の C^∞ 切断のことを言う^a.

^a S の接束 TS の C^∞ 切断ではない. また, $\mathfrak{X}(M)|_S \subsetneq TM|_S$ である.

$X \in \Gamma(TM|_S)$ が至る所で S に接さないとは, $\forall p \in S$ において $X_p \in T_p M \setminus T_p \iota_S(T_p S)$ が成り立つことを言う.

命題 4.9: 余次元 1 の部分多様体の向き

- 向きづけられた境界あり/なし C^∞ 多様体 $(M, \{\mathcal{O}_{T_p M}\}_{p \in M})$
- M にはめ込まれた余次元 1 の境界あり/なし C^∞ 部分多様体 $S \subset M$

を与える. このとき, S に沿った, 至る所で S に接さないベクトル場 $N \in \Gamma(TM|_S)$ が存在するならば, 以下が成り立つ:

- (1) 与えられた M の向きを命題 4.4-(1) の方法で再現する M の向き付け形式 $\omega \in \Omega^{\dim M}(M)$ に対して, $\iota_S^*(i_N(\omega)) \in \Omega^{\dim M-1}(S)$ は S の向き付け形式である.
- (2) $\forall p \in S$ に対して

$$\mathcal{O}_{N_p} := \left\{ (e_1, \dots, e_{\dim M-1}) \in \mathcal{B}_{T_p S} \mid (N_p, T_p \iota_S(e_1), \dots, T_p \iota_S(e_{\dim M-1})) \in \mathcal{O}_{T_p M} \right\}$$

と定義すると, 族 $\{\mathcal{O}_{N_p}\}_{p \in S}$ は S の向きであり, (1) の向き付け形式 $\iota_S^*(i_N(\omega))$ によって 4.4-(1) の方法で再現される.

証明 (1) $\iota_S^*(i_N(\omega))$ が $\forall p \in S$ において 0 にならないことを示す.

仮定より S がはめ込まれた C^∞ 部分多様体でかつ N は至る所 S に接さないので, $T_p \iota_S: T_p S \rightarrow T_p M$ は単射でかつ $\forall (e_1, \dots, e_{\dim M-1}) \in \mathcal{B}_{T_p S}$ に対して $(N_p, T_p \iota_S(e_1), \dots, T_p \iota_S(e_{\dim M-1})) \in \mathcal{B}_{T_p M}$

である。よって

$$\iota_S^*(i_N(\omega))|_p(e_1, \dots, e_{\dim M-1}) = \omega_p(N_p, T_p \iota_S(e_1), \dots, T_p \iota_S(e_{\dim M-1})) \neq 0$$

が言えた。

(2) (1) の証明より明らか。

■

S に沿った、至る所で S に接さないベクトル場 $N \in \Gamma(TM|_S)$ はいつでも存在するとは限らないので、 N をどのようにして構成するかが問題となる。 $S = \partial M$ の場合はいつでも N を作ることができる：

定義 4.20: 境界における内向き/外向きの接ベクトル

境界付き C^∞ 多様体 M と, $\forall p \in \partial M$ を 1 つ与える。

- $v \in T_p M$ が内向きであるとは、ある $\varepsilon > 0$ と C^∞ 曲線 $\gamma: [0, \varepsilon) \rightarrow M$ が存在して $\gamma((0, \varepsilon)) \subset \text{Int } M$, $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = v$ を満たすことを言う。
- $v \in T_p M$ が外向きであるとは、ある $\varepsilon > 0$ と C^∞ 曲線 $\gamma: (-\varepsilon, 0] \rightarrow M$ が存在して $\gamma((-\varepsilon, 0)) \subset \text{Int } M$, $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = v$ を満たすことを言う。

点 $p \in M$ における内向きの接ベクトル全体の集合を $T_p^+ M$, 外向きの接ベクトル全体の集合を $T_p^- M$ と書く。

補題 4.2: 内向き/外向きの接ベクトルの特徴付け

境界付き C^∞ 多様体 M と, $\forall p \in \partial M$ を 1 つ与える。 p を含む境界チャート $(U, \varphi) = (U, (x^\mu))$ を 1 つ固定する。

- (1) $v \in T_p M$ が内向き $\iff v = v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_p$ と展開したときに $v^{\dim M} > 0$
- (2) $v \in T_p M$ が外向き $\iff v = v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_p$ と展開したときに $v^{\dim M} < 0$
- (3) 集合として

$$T_p M = T_p \iota_{\partial M}(T_p(\partial M)) \sqcup T_p^+ M \sqcup T_p^- M$$

が成り立つ。特に $v \in T_p^+ M \iff -v \in T_p^- M$ である。

証明 (1) (\implies)

C^∞ 関数

$$\gamma^\mu := x^\mu \circ \gamma: [0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R} \quad \mu \neq \dim M$$

$$\gamma^\mu := x^\mu \circ \gamma: [0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{H} \quad \mu = \dim M$$

を考える。このとき

$$v^\mu = \frac{d\gamma^\mu}{dt}(0)$$

なので Taylor の定理より $\gamma^\mu(t) = \gamma^\mu(0) + tv^\mu + \mathcal{O}(t^2)$ だとわかるが、 $p = \gamma(0) \in \partial M$ なので $\gamma^{\dim M}(0) = 0$ 。よって $v^{\dim M} > 0$ でなくてはならない。

(\Leftarrow)

C^∞ 曲線 $\gamma: [0, \varepsilon) \rightarrow M$ を

$$\gamma(t) := \varphi^{-1}(x^1(p) + tv^1, \dots, tv^{\dim M})$$

で定義すると $\gamma((0, \varepsilon)) \subset \text{Int } M$, $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = v$ を充たす.

(2) (1) と全く同様

(3) 命題??より, $v \in T_p \iota_{\partial M}(T_p(\partial M)) \iff v = v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_p$ と展開したときに $v^{\dim M} = 0$ である. ■

命題 4.10: 境界に沿った外向きベクトル場

境界付き C^∞ 多様体 M を与える. このとき, ∂M に沿ったベクトル場 $X \in \Gamma(TM|_{\partial M})$ であって, $\forall p \in \partial M$ において X_p が外向き (内向き) であるものが存在する.

証明 M の全ての境界チャートの集合を $\{(U_\alpha, (x_\alpha^\mu))\}_{\alpha \in A}$ と書くと, 開集合族 $\mathcal{U} := \{U_\alpha \cap \partial M\}_{\alpha \in A}$ は ∂M の開被覆である. 命題 4.10 より ∂M は C^∞ 多様体だから, \mathcal{U} に従属する 1 の分割 $\{\psi_\alpha: \partial M \rightarrow [0, 1]\}_{\alpha \in A}$ をとることができる.

ところで, 補題 4.2-(2) より $\forall \alpha \in A$ および $\forall p \in U_\alpha$ について $-\frac{\partial}{\partial x_\alpha^{\dim M}} \Big|_p \in T_p M$ は外向きであるから,

$$X := - \sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha^{\dim M}} \Big|_{\partial M} \in \Gamma(TM|_{\partial M})$$

は ∂M 上至る所外向きである. ■

補題 4.2-(3) より ∂M に沿った至る所外向きなベクトル場は至る所 ∂M に接さない^aので, 次のことがわかる:

命題 4.11: 境界の向き

1 次元以上の向きづけられた境界付き C^∞ 多様体 $(M, \{\mathcal{O}_{T_p M}\}_{p \in M})$ を与える. このとき $\dim M - 1$ 次元 C^∞ 多様体^a ∂M は向き付け可能であり, 任意の ∂M に沿った外向きベクトル場 $N \in \Gamma(TM|_{\partial M})$ が命題 4.9-(2) の方法で ∂M に与える向き $\{\mathcal{O}_{N_p}\}_{p \in \partial M}$ は, N の取り方によらずに一意に定まる.

^a ∂M の C^∞ 構造は命題 4.10 によって指定されるものである.

証明 命題 4.10 より ∂M が向き付け可能だとわかる.

勝手な 2 つの ∂M に沿った外向きベクトル場 N, N' をとる. $\forall p \in \partial M$ を一つ固定し, p を含む境界チャート $(U, (x^\mu))$ を 1 つとる. すると

$$\left(N_p, \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{\dim M-1}} \Big|_p \right), \left(N'_p, \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{\dim M-1}} \Big|_p \right) \in \mathcal{B}_{T_p M}$$

であるが、両者の間の変換行列は

$$\begin{bmatrix} N^{\dim M}(p)/N'^{\dim M}(p) & 0 & \cdots & 0 \\ * & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ * & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

の形をしているのでその行列式は $N^{\dim M}(p)/N'^{\dim M}(p)$ に等しく、補題 4.2-(2) から正だとわかる。よって $\mathcal{O}_{N_p} = \mathcal{O}_{N'_p}$ が言えた。 ■

【例 4.5.1】 \mathbb{H}^n の境界の向き

\mathbb{H}^n に \mathbb{R}^n からの標準的な向きを入れたとき、 $\partial\mathbb{H}^n$ に命題 4.11 の向きを入れてみよう。ベクトル場 $-\frac{\partial}{\partial x^n}|_{\partial\mathbb{H}^n}$ は $\partial\mathbb{H}^n$ に沿った外向きベクトル場だから、 \mathbb{H}^n の向き付け形式 $\omega \in \Omega^n(\mathbb{H}^n)$ に対して

$$i_{-\frac{\partial}{\partial x^n}}(\omega) \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}} \right) = (-1)^n \omega \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}, \frac{\partial}{\partial x^n} \right)$$

が $\partial\mathbb{H}^n$ の向きを定めている。i.e. n が偶数のとき \mathbb{R}^{n-1} の標準的な向きと同一だが、 n が奇数のときは逆になる。

4.6 微分形式の積分

4.6.1 $\mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n$ の場合

定義 4.21: 積分領域

$\mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n$ の**積分領域** (domain of integration) とは、 $\mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n$ の有界な部分集合であって境界が零集合であるようなもののこと。

積分領域 $D \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n$ を 1 つ固定する。 $\forall \omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \in \Omega^n(\overline{D})$ の D 上の積分を

$$\int_D \omega := \int_D dx^1 \cdots dx^n f$$

で定義する。

命題 4.12: 微分同相写像による引き戻しの積分

- 開積分領域 $D, E \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n$
- C^∞ 写像 $F: \overline{D} \rightarrow \overline{E}$ であって, $F|_D: D \rightarrow E$ が向きを保つ or 逆にする微分同相写像であるもの

を与える. このとき $\forall \omega \in \Omega^n(\overline{E})$ に対して

$$\int_D F^* \omega = \begin{cases} + \int_E \omega, & F \text{ が向きを保つ} \\ - \int_E \omega, & F \text{ が向きを逆にする} \end{cases}$$

が成り立つ.

証明 D, E の標準的な座標をそれぞれ $(x^\mu), (y^\mu)$ と書いて区別する. $\omega = f dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n$ と書くと, 補題 ?? より

$$\begin{aligned} F^* \omega &= (f \circ F) d(y^1 \circ F) \wedge \cdots \wedge d(y^n \circ F) \\ &= (f \circ F)(\det DF) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \end{aligned}$$

が成り立つ. よって変数変換公式から

$$\begin{aligned} \int_E \omega &= \int_E dy^1 \cdots dy^n f \\ &= \int_D dx^1 \cdots dx^n |\det DF| (f \circ F) \\ &= \pm \int_D dx^1 \cdots dx^n (\det DF) (f \circ F) \\ &= \pm \int_D (f \circ F)(\det DF) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \pm \int_D F^* \omega \end{aligned}$$

■

一般の開集合 $U \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n$ 上の, コンパクト台を持つ $\omega \in \Omega^n(U)$ を積分するには, $\text{supp } \omega \subset D$ を充たす積分領域 D に ω の定義域を拡張して

$$\int_U \omega := \int_D \omega$$

とすれば良い. このとき命題 4.12 は任意の $\mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n$ の開集合に対して成り立つ*9.

4.6.2 一般の C^∞ 多様体の場合

*9 証明には若干の技術的な注意が必要

向き付けられた C^∞ 多様体 M と、そのチャート (U, φ) をとる。コンパクト台を持つ $\omega \in \Omega^n(U)$ を与えたとき、 M 上の ω の積分を

$$\int_M \omega := \begin{cases} + \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \omega, & (U, \varphi) \text{ は正の向き} \\ - \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \omega, & (U, \varphi) \text{ は負の向き} \end{cases}$$

この定義がチャートの取り方によらないことを示そう。 $(U, \varphi), (\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ を、 $\text{supp } \omega \subset U \cap \tilde{U}$ を満たす M のチャートとする。どちらのチャートも向きが同じならば、座標変換 $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap \tilde{U}) \rightarrow \tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U})$ は向きを保つ微分同相写像なので、命題 4.12 から

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\varphi}(\tilde{U})} (\tilde{\varphi}^{-1})^* \omega &= \int_{\tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U})} (\varphi^{-1} \circ \varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1})^* \omega \\ &= \int_{\tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U})} (\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1})^* ((\varphi^{-1})^* \omega) \\ &= \int_{\varphi(U \cap \tilde{U})} (\varphi^{-1})^* \omega \\ &= \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \omega \end{aligned}$$

が成り立つ。違う向きならば、座標変換 $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap \tilde{U}) \rightarrow \tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U})$ が向きを逆にする微分同相写像なので命題 4.12 から $-$ が出て、定義の $-$ を相殺する。

M 上の積分にするには、正 or 負の向きの座標近傍からなる $\text{supp } \omega$ の有限開被覆 $\{U_i\}_{i \in I}$ と、それに従属する 1 の分割 $\{\psi_i: M \rightarrow [0, 1]\}_{i \in I}$ をとってきて

$$\int_M \omega := \sum_{i \in I} \int_M \psi_i \omega$$

と定義すれば良い。この定義は 1 の分割の取り方によらない。

命題 4.13: 微分同相写像による引き戻しの積分

- 空でない向き付けられた C^∞ 多様体 M, N
- 向きを保つ or 逆にする 微分同相写像 $F: M \rightarrow N$

を与える。このときコンパクト台を持つ任意の $\omega \in \Omega^n(N)$ に対して

$$\int_M F^* \omega = \begin{cases} + \int_N \omega, & F \text{ が向きを保つ} \\ - \int_N \omega, & F \text{ が向きを逆にする} \end{cases}$$

が成り立つ。

証明 1 の分割を使って貼り合わせれば良いので、単一のチャートについてのみ示す。 (U, φ) を正の向きの N のチャートであって $\text{supp } \omega \subset U$ を満たすものとする。このとき $(F^{-1}(U), \varphi \circ F)$ は、 F が向きを保つなら正の向きの M のチャートであって $\text{supp } F^* \omega \subset F^{-1}(U)$ を満たし、 F が向きを逆にする場合は負の向きのチャートである。命題 4.12 より示された。 ■

4.7 ベクトル空間に値をとる微分形式

k -形式 $\omega \in \Omega^k(M)$ は $\forall p \in M$ において多重線型写像

$$\omega_p := T_p M \times \cdots \times T_p M \rightarrow \mathbb{K}$$

を対応させ、それが p に関して C^∞ 級につながっているものであった。ここで、値域 \mathbb{K} を一般の \mathbb{K} -ベクトル空間 V に置き換えてみる：

$$\omega_p := T_p M \times \cdots \times T_p M \rightarrow V$$

このようなものの全体の集合を $\Omega^k(M; V)$ と書くことにする。 V の基底を $\{\hat{e}_i\}_{1 \leq i \leq r}$ とおくと

$$\omega(X_1, \dots, X_k) = \sum_{i=1}^r \omega_i(X_1, \dots, X_k) \hat{e}_i, \quad \omega_i \in \Omega^k(M)$$

と展開できる。 \hat{e}_i は $A^\bullet(M)$ の演算と無関係である。

4.7.1 外微分

定義 4.5, 4.4 による外微分を $\{\hat{e}_i\}_{1 \leq i \leq r}$ による展開係数に適用するだけである：

$$\begin{aligned} d : \Omega^k(M; V) &\rightarrow \Omega^{k+1}(M; V), \\ d\omega &:= \sum_{i=1}^r d\omega_i \hat{e}_i \end{aligned}$$

4.7.2 外積

外積をとった後の値域はテンソル積 $V \otimes W$ である：

$$\begin{aligned} \wedge : \Omega^k(M; V) \times \Omega^l(M; W) &\rightarrow \Omega^{k+l}(M; V \otimes W), \\ (\omega \wedge \eta)(X_1, \dots, X_{k+l}) &:= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \text{sgn } \sigma \omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) \otimes \eta(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+l)}) \end{aligned}$$

予め $\omega = \sum_{i=1}^r \omega_i \hat{e}_i$, $\eta = \sum_{i=1}^s \eta_i \hat{f}_i$ と展開しておくと

$$\omega \wedge \eta = \sum_{i,j} \omega_i \wedge \eta_j \hat{e}_i \otimes \hat{f}_j$$

と書ける。外微分は基底 $\{\hat{e}_i \otimes \hat{f}_j\}$ には作用しないので、命題 4.5-(2) はそのまま成り立つ：

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$$

4.7.3 括弧積

双線型写像 $[\cdot, \cdot]: V \times V \rightarrow V$ が Lie 代数の公理を充てしているとする。このとき

$$[\cdot, \cdot]: \Omega^k(M; V) \times \Omega^l(M; V) \xrightarrow{\wedge} \Omega^{k+l}(M; V \otimes V) \xrightarrow{[\cdot, \cdot]} \Omega^{k+l}(M; V),$$

$$[\omega, \eta] := \sum_{i,j} \omega_i \wedge \eta_j [\hat{e}_i, \hat{e}_j]$$

と定義する。命題 4.1-(1), 4.5-(2) から

$$[\eta, \omega] = \sum_{i,j} \eta_j \wedge \omega_i [\hat{e}_j, \hat{e}_i] = \sum_{i,j} (-1)^{kl} \omega_i \wedge \omega_j \cdot -[\hat{e}_i, \hat{e}_j] = (-1)^{kl+1} [\omega, \eta]$$

$$d[\omega, \eta] = \sum_{i,j} d(\omega_i \wedge \eta_j) [\hat{e}_i, \hat{e}_j] = [d\omega, \eta] + (-1)^k [\omega, d\eta]$$

がわかる。