第2章

アーベル圏

アーベル圏は、ホモロジー代数を適用できるという意味で R-Mod の一般化と言える.

定義 2.1: 始対象・終対象・零対象

圏 C を与える.

- $I \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が始対象 (initial object) であるとは、 $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(I,A)$ が一元 集合となること.
- $I \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が終対象 (final object) であるとは、 $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, I)$ が一元集合となること.
- 始対象かつ終対象であるような対象が存在するとき、それを零対象 (zero object) と呼んで 0 と
 書く
- 零対象が存在するとき, $\forall A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $\exists! p \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, 0)$ かつ $\exists! i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(0, B)$ である. このとき, 一意に定まる射 $i \circ p \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ のことを零射 (zero morphimsm) と 呼んで 0 と書く.

2.1 イコライザ

定義 2.2: イコライザ

圏 C と 2 つの射 $f_i \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ (i = 1, 2) を与える.

射 $g \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C,A)$ が f_1,f_2 のイコライザ (equalizer) であるとは、 $\forall X \in \operatorname{Ob}(C)$ に対して集合の写像

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, C) \longrightarrow \left\{ \varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) \mid f_{1} \circ \varphi = f_{2} \circ \varphi \right\},$$

$$\psi \longmapsto g \circ \psi$$

が well-defined な全単射となること (可換図式 2.1).

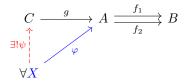


図 2.1: イコライザ

定義 2.3: コイコライザ

圏 C と 2 つの射 $f_i \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ (i = 1, 2) を与える.

射 $g \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C)$ が f_1, f_2 の**コイコライザ** (coequalizer) であるとは, $\forall X \in \operatorname{Ob}(C)$ に対して集合の写像

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C, X) \longrightarrow \left\{ \varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X) \mid \varphi \circ f_{1} = \varphi \circ f_{2} \right\},$$

$$\psi \longmapsto \psi \circ g$$

が well-defined な全単射となること (可換図式 2.2).

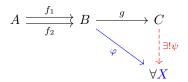


図 2.2: コイコライザ

命題 2.1:

- イコライザは存在すれば単射^a.
- コイコライザは存在すれば全射 b .
- ^a 故に部分対象
- b 故に商対象

証明 イコライザ $g \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$ の定義から集合の写像

$$g_* : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, C) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A), \ \psi \longmapsto g \circ \psi$$

は単射. よって g は単射 (mono 射) である.

コイコライザ $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ の定義から、集合の写像

$$h^* : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C, X) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X), \ \psi \longmapsto \psi \circ h$$

は単射. よって g は全射 (epi 射) である.

R-Mod における核・余核、像・余像は、次のように一般化される:

定義 2.4: 核・余核

零対象を持つ圏 \mathcal{C} を与え、 $\forall f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ をとる.

- f と零射とのイコライザを f の核 (kernel) と呼び、 $\ker f \colon \operatorname{Ker} f \longrightarrow A$ と書く.
- f と零射とのコイコライザを f の余核 (cokernel) と呼び、coker $f: B \to \text{Coker } f$ と書く.

定義 2.5: 像・余像

零対象を持ち、任意の射の核・余核が存在する圏 \mathcal{C} を与え、 $\forall f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ をとる.

- A の部分対象 $(\operatorname{Im} f, \operatorname{im} f) \coloneqq (\operatorname{Ker}(\operatorname{coker} f), \operatorname{ker}(\operatorname{coker} f))$ のことを f の像 (image) と呼ぶ.
- B の商対象 $(\operatorname{Coim} f, \operatorname{coim} f) \coloneqq \left(\operatorname{Coker}(\ker f), \operatorname{coker}(\ker f)\right)$ のことを f の余像 $(\operatorname{coimage})$ と呼ぶ.
- 命題 2.1 から、im f は単射.また、コイコライザの定義から coker $f\circ f=0$ が成り立つ a から、イコライザの定義により ker(coker f) \circ q= im $f\circ q=f$ を充たす射 $q\in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\operatorname{Im} f)$ が一意的に存在する.
- 命題 2.1 から、coim f は全射. また、イコライザの定義から $f \circ \ker f = 0$ が成り立つ b から、コイコライザの定義により $i \circ \operatorname{coker}(\ker f) = i \circ \operatorname{coim} f = f$ を充たす射 $i \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\operatorname{Coim} f, B)$ が一意的に存在する.

 $^aX=C$ とおいて $\mathrm{id}_C\in\mathrm{Hom}_\mathcal{C}\left(C,C
ight)$ の行き先を考えると $\mathrm{coker}\,f$ になるが、 $\mathrm{_fk}$ 体は零射とのコイコライザである。 $^bX=C$ とおいて $\mathrm{id}_C\in\mathrm{Hom}_\mathcal{C}\left(C,C
ight)$ の行き先を考えると $\mathrm{ker}\,f$ になる.

2.2 アーベル圏に関わる諸定義

定義 2.6: アーベル圏

圏 A が**アーベル圏** (Abelian category) であるとは、以下を充たすことをいう:

- (Ab1) 零対象 $0 \in Ob(A)$.
- (Ab2) $\forall A_1, A_2 \in Ob(A)$ に対して積 $A_1 \times A_2$ と和 $A_1 \coprod A_2$ が存在する.
- (Ab3) A における任意の射は核、余核を持つ.
- (Ab4) A における任意の単射 $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ に対して $(A, f) \simeq (\operatorname{Ker}(\operatorname{coker} f), \operatorname{ker}(\operatorname{coker} f))$ がa, 任意の全射 $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$ に対して $(B, f) \simeq (\operatorname{Coker}(\operatorname{ker} f), \operatorname{coker}(\operatorname{ker} f))$ が成り立つb.

^a 部分対象として同値

^b 商対象として同値

定義 2.7: アーベル圏における完全列

• アーベル圏 A における図式

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

が完全 (exact) であるとは、B の部分対象として (Ker g, ker g) \simeq (Im f, im f) であることを言う.

A における図式

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$$

が完全であるとは、 $\forall i$ に対して図式 $A_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+2}$ が完全であること.

定義 2.8: アーベル圏の間の関手

A, B をアーベル圏, F を A から B への関手とする.

- F が加法的 (additive) であるとは、 $\forall A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ に対して $F_{A,B} \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(F(A),F(B))$ が可換群の準同型写像となることを言う.
- F が左完全 (left exact) であるとは, A における

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

の形をした任意の完全列に対して

$$0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C)$$

が \mathcal{B} における完全列となることを言う.

• F が右完全 (right exact) であるとは、A における

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

の形をした任意の完全列に対して

$$F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0$$

が \mathcal{B} における完全列となることを言う.

• F が完全 (exact) であるとは、任意の $\mathcal A$ における完全列

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

に対して

$$F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C)$$

が \mathcal{B} における完全列となることを言う.

2.3 埋め込み定理

証明を省いて Mitchell の埋め込み定理を紹介する.

定理 2.1: Mitchell の埋め込み定理

A を小さなアーベル圏とするとき、ある環 R とある完全忠実充満関手 $A \longrightarrow R$ -Mod が存在する.