第 6 章

ファイバー束

6.1 層と Čech コホモロジー

位相空間 X を 1 つとって固定する．X の位相 $\mathscr{O}_X$ の上には圏の構造が入る：

- $\mathrm{Ob}(\mathbb{O}_X) \coloneqq \mathscr{O}_X$
- $\forall U,\, V \in \mathrm{Ob}(\mathbb{O}_X)$ に対して，射を

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{O}_X}(U,\, V) \coloneqq \begin{cases} \{\text{包含写像 } U \hookrightarrow V\}, & U \subset V \\ \emptyset, & U \not\subset V \end{cases}$$

と定義する．ただし，$U \subset V$ のとき $\mathrm{Hom}_{\mathbb{O}_X}(U,\, V)$ は一点集合である．

6.1.1 前層と層

定義 6.1: 前層

$\mathcal{C}$ を圏とする．位相空間 X 上の，$\mathcal{C}$ に値をとる**前層** (presheaf) とは，関手

$$P \colon \mathbb{O}_X^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{C}$$

のことを言う．
i.e. X の開集合 $U, V, W \in \mathrm{Ob}(\mathbb{O}_X)$ であって $W \subset V \subset U$ を充たすものに対して

- 圏 $\mathcal{C}$ における対象 $P(U) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- 圏 $\mathcal{C}$ における射 $P(V \hookrightarrow U) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(P(U),\, P(V)\big)$（これを**制限写像**と呼ぶ）

を対応させ，

- $P(U \overset{\mathrm{id}_U}{\hookrightarrow} U) = \mathrm{id}_{P(U)}$
- $P(W \hookrightarrow V \hookrightarrow U) = P(W \hookrightarrow V) \circ P(V \hookrightarrow U)$

を充たすようなもの[a]のこと．

[a] $W \hookrightarrow V \hookrightarrow U$ は開集合の包含写像の合成のことなので，$W \hookrightarrow U$ と書いても良い．

C^∞ 多様体 M に対して関手 $C^\infty \colon \mathbb{O}_M^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ を

- $C^\infty(U) \coloneqq \left\{\, f \colon U \longrightarrow \mathbb{R} \;\middle|\; C^\infty \text{ 関数} \,\right\}$
- $C^\infty(V \hookrightarrow U) \colon C^\infty(U) \longrightarrow C^\infty(V),\ f \longmapsto f|_V$

と定義すると C^∞ は前層になる．
より一般に，ファイバー束 $E \xrightarrow{\pi} B$ の底空間 B に対して関手 $\Gamma \colon \mathbb{O}_B^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ を

- $\Gamma(U) \coloneqq \left\{\, s \colon U \longrightarrow \pi^{-1}(U) \;\middle|\; \text{切断} \,\right\}$
- $\Gamma(V \hookrightarrow U) \colon \Gamma(U) \longrightarrow \Gamma(V),\ s \longmapsto s|_V$

と定義すると Γ は前層になる．
位相空間 X 上の，圏 $\mathcal{C}$ に値をとる前層の圏 $\mathrm{PSh}(X, \mathcal{C})$ とは，3 つ組

- $\mathrm{Ob}(\mathrm{PSh}(X, \mathcal{C})) \coloneqq \big\{\text{前層 } P \colon \mathbb{O}_X \longrightarrow \mathcal{C}\big\}$
- $\mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(X,\mathcal{C})}(P, Q) \coloneqq \big\{\text{自然変換 } \tau \colon P \longrightarrow Q\big\}$
- 自然変換の合成

のことである．射の方はわかりにくいかもしれないが，要は任意の前層 $P, Q \colon \mathbb{O}_X \longrightarrow \mathcal{C}$ に対する集合族

$$\tau \coloneqq \big\{\tau_U \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(P(U),\, Q(U)\big)\big\}_{U \in \mathrm{Ob}(\mathbb{O}_X^{\mathrm{op}})}$$

であって，X の任意の開集合 U, V s.t. $U \subset V$ に対して定まる図式

$$\begin{tikzcd}
P(U) \arrow[r, "P(V \hookrightarrow U)"] \arrow[d, "\tau_U"'] & P(V) \arrow[d, "\tau_V"] \\
Q(U) \arrow[r, "Q(V \hookrightarrow U)"] & Q(V)
\end{tikzcd}$$

が可換になるようなもののことである．証明はしないが，次の命題が成り立つことが知られている：

命題 6.1:

X を位相空間とする．圏 $\mathcal{A}$ がアーベル圏ならば，前層の圏 $\mathrm{PSh}(X,\, \mathcal{A})$ もアーベル圏である．

層を定義する．大雑把に言うと，層とは前層であって，部分開被覆による貼り合わせを記述できるようなものである．

定義 6.2: 層

圏 $\mathcal{C}$ においていつでも積が存在するとする．前層 $F \in \mathrm{Ob}(\mathrm{PSh}(X,\, \mathcal{C}))$ が**層** (sheaf) であるとは，位相空間 X の任意の開集合 $U \in \mathrm{Ob}(\mathbb{O}_X)$ の任意の開被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ をとったときに以下が成り立つことを言う：

- $\mathcal{C}$ における射[a]

$$\prod_{i\in I} F(U_i) \xrightarrow{p_i} F(U_i) \xrightarrow{F(U_i \cap U_j \hookrightarrow U_i)} F(U_i \cap U_j), \quad \forall i \in I$$

  が引き起こす唯一の[b]射を

$$\pi_1 \colon \prod_{i\in I} F(U_i) \longrightarrow \prod_{i,\, j\in I} F(U_i \cap U_j),$$

- $\mathcal{C}$ における射

$$\prod_{i\in I} F(U_i) \xrightarrow{p_j} F(U_j) \xrightarrow{F(U_i \cap U_j \hookrightarrow U_i)} F(U_i \cap U_j), \quad \forall j \in I$$

  が引き起こす唯一の射を

$$\pi_2 \colon \prod_{i\in I} F(U_i) \longrightarrow \prod_{i,\, j\in I} F(U_i \cap U_j),$$

- $\mathcal{C}$ における射

$$F(U_i \hookrightarrow U) \colon F(U) \longrightarrow F(U_i), \quad \forall i \in I$$

  が引き起こす唯一の射を

$$\iota \colon F(U) \longrightarrow \prod_{i\in I} F(U_i)$$

とおいたとき, $\mathcal{C}$ における射 $\pi_1,\, \pi_2 \colon \prod_{i\in I} F(U_i) \longrightarrow \prod_{i,\, j\in I} F(U_i \cap U_j)$ のイコライザが $\iota \colon F(U) \longrightarrow \prod_{i\in I} F(U_i)$ と一致する．

[a] p_i は積の標準的射影
[b] 積の普遍性を使った

ややこしいようだが，$\mathcal{C} = \mathbf{Sets}$ の場合は同型

$$F(U) \xrightarrow{\cong} \left\{ (x_i)_i \in \prod_{i \in I} F(U_i) \;\middle|\; \substack{\forall i,\, j \in I, \\ F(U_i \cap U_j \hookrightarrow U_i)(x_i) = F(U_i \cap U_j \hookrightarrow U_j)(x_j)} \right\}$$

が ι によって誘導されることと同値である．

$\mathcal{C}$ がアーベル圏のときは，図式

$$0 \longrightarrow F(U) \xrightarrow{\iota} \prod_{i \in I} F(U_i) \xrightarrow{\pi_1 - \pi_2} \prod_{i,\, j \in I} F(U_i \cap U_j)$$

が完全列になることと同値である．

6.1.2　Čech コホモロジー

6.2　ファイバー束

6.2.1　位相群の作用

位相空間 X の**同相群** (homeomorphism group) $\mathrm{Homeo}(X)$ とは

- 集合 $\mathrm{Homeo}(X) \coloneqq \left\{ f \colon X \longrightarrow X \;\middle|\; \textbf{同相写像} \right\}$
- 単位元を恒等写像 id_X
- 群演算を連続写像の合成
- 逆元を逆写像

として定義される群のことを言う．

G を**位相群**とする．i.e. G は位相空間であり，かつ群であって写像

- 積 $\mu \colon G \times G \longrightarrow G,\ (g,\, h) \longmapsto gh$
- 逆元 $\pi \colon G \longrightarrow G,\ g \longmapsto g^{-1}$

が連続写像であるようなものである．

定義 6.3: 位相群の作用

- **位相群** G が位相空間 X へ**作用している**とは，群準同型 $\psi \colon G \longrightarrow \mathrm{Homeo}(X)$ が存在して写像

$$\Theta \colon G \times X \longrightarrow X,\ (g,\, x) \longmapsto \psi(g)(x)$$

が連続写像となることを言う．写像 Θ のことを G の X への**左作用** (left action) と呼び，$\boldsymbol{g \cdot x} \coloneqq \Theta(g,\, x)$ と略記する．
- 点 $x \in X$ の**軌道** (orbit) とは，集合

$$G \cdot x \coloneqq \left\{ g \cdot x \in X \;\middle|\; g \in G \right\}$$

のこと．

- 同値関係

$$\sim := \{\,(x,\,y) \in X \times X \mid y \in G \cdot x\,\}$$

による商集合を**軌道空間** (orbit space) と呼び $\boldsymbol{X/G}$ と書く．
- **不動点集合** (fixed set) とは，集合

$$X^G := \{\,x \in X \mid \forall g \in G,\ g \cdot x = x\,\}$$

のこと．
- 群の作用は $\forall x \in X,\ \forall g \in G \setminus \{1_G\},\ g \cdot x \neq x$ を充たすとき**自由** (free) と呼ばれる．**軌道空間**
- 群の作用は群準同型 $\psi\colon G \longrightarrow \mathrm{Homeo}(X)$ が単射のとき**効果的** (effective) と呼ばれる[a]．

[a] 従ってこのとき $\mathrm{Ker}\,\psi = \{1_G\}$ である．i.e. 自明な作用 $(g,\,x) \longmapsto x$ は $1_G \cdot x$ のみである．

! 定義 6.3 において，$\mathrm{Homeo}(X)$ に位相（コンパクト開位相など）を入れる場合がある．この場合は $G \longrightarrow \mathrm{Homeo}(X)$ が連続であることを定義とする．

6.2.2 ファイバー束

定義 6.4: ファイバー束

位相群 G は位相空間 F に効果的に作用しているとする．F をファイバー，G を**構造群** (structure group) に持つ**ファイバー束** (fiber bundle) とは，

- 位相空間 $E,\,B,\,F$
- 連続な全射 $\pi\colon E \longrightarrow B$
- 同相写像[a]の集合

$$\mathrm{LT}(B) := \{\,\varphi\colon U \times F \longrightarrow \pi^{-1}(U) \mid U \in \mathrm{Ob}(\mathbb{O}_B)\,\}.$$

$\mathrm{LT}(B)$ の元 $\varphi\colon U \times F \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ のことを $\boldsymbol{U}$ **上の局所自明化**と呼ぶ．
- 位相群 G

の 6 つ組であって以下を充たすもののこと：

(1) $\mathrm{LT}(B)$ の任意の元 $\varphi\colon U \times F \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ に対して図式 6.1 が可換になる．

(2) B の各点 $x \in B$ は，その上に局所自明化が存在するような開近傍 $x \in U \subset B$ を持つ．

(3) U 上の任意の局所自明化 $\varphi\colon U \times F \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ および B の開集合 $V \subset U$ に対して，制限 $\varphi|_{V \times F}$ は V 上の局所自明化になる．

(4) U 上の任意の局所自明化 $\varphi,\,\varphi'\colon U \times F \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ に対し，**変換関数** (transition function) と呼ばれる連続写像 $\theta_{\varphi,\,\varphi'}\colon U \longrightarrow G$ が存在して

$$\varphi'(u,\,f) = \varphi\bigl(u,\,\theta_{\varphi,\,\varphi'}(u) \cdot f\bigr) \quad \forall u \in U,\,\forall f \in F$$

が成り立つ．

(5) $\mathrm{LT}(B)$ は条件 (1)-(4) を充たす連続写像の集合として最大のものである．

このようなファイバー束を $\boldsymbol{F} \hookrightarrow \boldsymbol{E} \xrightarrow{\boldsymbol{\pi}} \boldsymbol{B}$ で表す．

[a] 部分空間 $\pi^{-1}(U) \subset E$ には E からの相対位相が入っているものとする．

$$
\begin{tikzcd}
U \times F \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\mathrm{proj}_1"'] & & \pi^{-1}(U) \arrow[dl, "\pi"] \\
& U &
\end{tikzcd}
$$

図 6.1: 局所自明性．proj_1 は第 1 成分への射影である．

命題 6.2: ファイバー束の復元

- 位相空間 $B,\ F$
- 位相群 G の F への作用
- 族 $\mathcal{T} := \bigl\{(U_\lambda,\, \theta_\lambda)\bigr\}_{\lambda\in\Lambda}$．ただし U_α は B の開集合で，$\theta_\alpha : U_\alpha \longrightarrow G$ は連続写像である．

が与えられ，以下の条件を充たしているとする：

(1)

$$B = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$$

(2)

$$(U_\alpha,\, \theta_\alpha) \in \mathcal{T} \text{ かつ } W \subset U_\alpha \quad \Longrightarrow \quad (W,\, \theta_\alpha|_W) \in \mathcal{T}$$

(3)

$$(U,\, \theta_\alpha),\, (U,\, \theta_\beta) \in \mathcal{T} \quad \Longrightarrow \quad (U,\, \theta_\alpha \cdot \theta_\beta) \in \mathcal{T}$$

ただし，$\forall u \in U$ に対して $(\theta_\alpha \cdot \theta_\beta)(u) := \theta_\alpha(u)\theta_\beta(u) \in G$ と略記した．

(4) $\mathcal{T}$ は条件 (1)-(3) を充たすもののうち最大の集合である．

このとき，ファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ であって，構造群を G，変換関数を θ_α とするものが存在する．

証明 $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して，$U_\lambda \subset B$ には底空間 B からの相対位相を入れ，$U_\lambda \times F$ にはそれと F の位相との積位相を入れることで，直和位相空間

$$\mathcal{E} := \coprod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \times F$$

を作ることができる[*1]．$\mathcal{E}$ の任意の元は $(\lambda,\, b,\, f) \in \Lambda \times U_\lambda \times F$ と書かれる．

[*1] $\mathcal{E}$ はいわば,「貼り合わせる前の互いにバラバラな素材（局所自明束 $U_\alpha \times F$）」である．証明の以降の部分では，これらの「素材」

さて，$\mathcal{E}$ 上の二項関係 $\sim$ を以下のように定める：

$$\sim \coloneqq \left\{ \big((\alpha,\, b,\, f),\, (\beta,\, c,\, h) \big) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \;\middle|\; b = c \text{ かつ } {}^{\exists (U_\lambda,\, \theta_\lambda) \in \mathcal{T} \text{ s.t. } U_\lambda \subset U_\alpha \cap U_\beta,}_{f = \theta_\lambda(c) \cdot h} \right\} \tag{6.2.1}$$

反射律 $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して定数写像 $1_\lambda \colon U_\lambda \longrightarrow G,\ u \longmapsto 1_G$ は連続である. 従って条件 (4) より $(U_\lambda,\, 1_\lambda) \in \mathcal{T}$ が言えるので，$\forall (\alpha,\, b,\, f) \in \mathcal{E}$ に対して $f = 1_G \cdot f = 1_\alpha(b) \cdot f$. i.e. $(\alpha,\, b,\, f) \sim (\alpha,\, b,\, f)$.

対称律 位相群の定義より，$\forall (U_\lambda,\, \theta_\lambda) \in \mathcal{T}$ に対して ${\theta_\lambda}^{\mathrm{inv}} \colon U_\lambda \longrightarrow G,\ u \longmapsto \theta_\lambda(u)^{-1}$ は連続写像であり，もし $(U_\lambda,\, {\theta_\lambda}^{\mathrm{inv}}) \in \mathcal{T}$ ならば条件 (2), (3) を充たす．よって条件 (4) より実際に $(U_\lambda,\, {\theta_\lambda}^{\mathrm{inv}}) \in \mathcal{T}$ であり，

$$\begin{aligned}
(\alpha,\, b,\, f) \sim (\beta,\, c,\, h) \quad &\Longrightarrow \quad b = c \text{ かつ } \exists (U_\lambda,\, \theta_\lambda) \in \mathcal{T},\, U_\lambda = U_\alpha \cap U_\beta,\ f = \theta_\lambda(c) \cdot h \\
&\Longrightarrow \quad b = c \text{ かつ } (U_\lambda,\, {\theta_\lambda}^{\mathrm{inv}}) \in \mathcal{T},\ {\theta_\lambda}^{\mathrm{inv}}(c) \cdot f = \big({\theta_\lambda}^{\mathrm{inv}}(c) \theta_\lambda(c)\big) \cdot h \\
&\Longleftrightarrow \quad c = b \text{ かつ } (U_\lambda,\, {\theta_\lambda}^{\mathrm{inv}}) \in \mathcal{T},\ h = {\theta_\lambda}^{\mathrm{inv}}(b) \cdot f \\
&\Longleftrightarrow \quad (\beta,\, c,\, h) \sim (\alpha,\, b,\, f).
\end{aligned}$$

推移律 条件 (2), (3) より

$$\begin{aligned}
&(\alpha,\, b,\, f) \sim (\beta,\, c,\, h),\ (\beta,\, c,\, h) \sim (\gamma,\, d,\, k) \\
&\quad \Longrightarrow \quad b = c \text{ かつ } c = d \\
&\qquad\quad \text{かつ } \exists (U_\lambda,\, \theta_\lambda),\, (U_\mu,\, \theta_\mu) \in \mathcal{T},\ U_\lambda = U_\alpha \cap U_\beta,\, U_\mu = U_\beta \cap U_\gamma,\ f = \theta_\lambda(c) \cdot h,\, h = \theta_\mu(d) \cdot k \\
&\quad \Longrightarrow \quad b = d \text{ かつ } (U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma,\, \theta_\beta \cdot \theta_\gamma) \in \mathcal{T},\ f = (\theta_\beta \cdot \theta_\gamma)(d) \cdot k \\
&\quad \Longleftrightarrow \quad (\alpha,\, b,\, f) \sim (\beta,\, d,\, k).
\end{aligned}$$

従って $\sim$ は同値関係である．$E \coloneqq \mathcal{E}/\sim$ とおき，商写像を $\mathcal{E} \twoheadrightarrow E,\ (\alpha,\, b,\, f) \longmapsto [(\alpha,\, b,\, f)]$ と書くことにする．集合 E には商位相を入れる．

次に連続な全射 $\pi \colon E \twoheadrightarrow B$ を

$$\pi\big([(\lambda,\, b,\, f)] \big) \coloneqq b$$

と定義する．$\sim$ の定義 (6.2.1) より $(\lambda,\, b,\, f) \sim (\mu,\, c,\, h)$ ならば $b = c$ なので π は well-defined である．次に $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して

$$\varphi_\lambda \colon U_\lambda \times F \longrightarrow \pi^{-1}(U_\lambda),\ (b,\, f) \longmapsto [(\lambda,\, b,\, f)]$$

と定義して

$$\mathrm{LT}(B) \coloneqq \{\varphi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$$

とおく．

(1) $\forall \varphi_\lambda \in \mathrm{LT}(B)$ を 1 つとると，$\forall (b,\, f) \in U_\lambda \times F$ に対して

$$(\pi \circ \varphi_\lambda)(b,\, f) = \pi([(\lambda,\, b,\, f)]) = b = \mathrm{proj}_1(b,\, f)$$

が成り立つ．i.e. 集合 $\mathrm{LT}(B)$ の任意の元は局所自明性を充たす．

を $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ の部分に関して「良い性質を持った接着剤 $\{\theta_\lambda\}$」を用いて「貼り合わせる」操作を，位相を気にしながら行う．

(2) 条件-(2) より $\forall x \in B$ に対して $x \in U_\lambda$ となるような $\lambda \in \Lambda$ が存在する．構成より，このとき $\varphi_\lambda \in \mathrm{LT}(B)$ である．

(3) $\forall \varphi_\lambda \in \mathrm{LT}(B)$ を 1 つとる．条件-(2) より B の部分集合 W が $W \subset U_\lambda$ を充たすなら $(W, \theta_\lambda|_W) \in \mathcal{T}$ が成り立つ．従って $\exists \mu \in \Lambda,\ W = U_\mu$ が成り立つから，制限 $\varphi_\lambda|_{W\times F}$ は $\varphi_\mu \in \mathrm{LT}(B)$ と等しい．

(4) $\forall \varphi_\alpha, \varphi_\beta \in \mathrm{LT}(B)$ をとる．同値関係 (6.2.1) の定義より $\forall (b, f) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$ に対して

$$\varphi_\beta(b, f) = [(\beta, b, f)] = [(\alpha, b, \theta_\alpha(b)\cdot f)] = \varphi_\alpha\bigl(b, \theta_\alpha(b)\cdot f\bigr)$$

が成り立つ．

(5) 条件-(4) より，$\mathrm{LT}(B)$ はファイバー束の定義の条件-(5) を充たす．

以上で題意のファイバー束の構成が完了した． ■

6.3 例

6.3.1 S^2 上のファイバー束

- ファイバー S^1
- 底空間 S^2
- 構造群 $\mathrm{SO}(2)$

として，ファイバー束 $S^1 \hookrightarrow E \to S^2$ を構成しよう．

1 の原始 m 乗根を $\zeta_m \coloneqq e^{2\pi i/m}$ とおく．写像

$$\psi\colon \mathbb{Z}_m \longrightarrow \mathrm{Homeo}(S^{2n+1}),\ \zeta_m^k \longmapsto \bigl((z_1, \cdots, z_{n+1}) \longmapsto (\zeta_m^k z_1, \cdots, \zeta_m^k z_{n+1})\bigr)$$

は群準同型になる．実際，$\mathbb{Z}_m$ の勝手な元 ζ_m^k, ζ_m^l を取ってくると，$\forall z = (z_1, \cdots, z_{n+1}) \in S^{2n+1}$ に対して

$$\bigl|\psi(\zeta_m^k)(z)\bigr| = \sum_{i=1}^{n+1} \bigl|\zeta_m^k z_i\bigr|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} |z_i|^2 = 1$$

なので $\mathrm{Im}\,\psi \subset \mathrm{Homeo}(S^{2n+1})$ であり，かつ

$$\psi(1)(z) = z = \mathrm{id}_{S^{2n+1}}(z),$$
$$\psi(\zeta_m^k\zeta_m^l)(z) = \zeta_m^k\zeta_m^l z = \zeta_m^k(\zeta_m^l z) = \Bigl(\psi(\zeta_m^k)\circ\psi(\zeta_m^l)\Bigr)(z)$$

が成り立つ．さらに写像

$$\mathbb{Z}_m \times S^{2n+1} \longrightarrow S^{2n+1},\ (\zeta_m^k, z) \longmapsto \psi(\zeta_m^k)(z)$$

は連続写像だから，$\mathbb{Z}_m$ の S^{2n+1} への作用が定義された．

定義 6.5: レンズ空間

- $2n+1$ 次元の**レンズ空間** (lens space) とは，$\mathbb{Z}_m$ の S^{2n+1} への作用による軌道空間

$$L_m^{2n+1} \coloneqq S^{2n+1}/\mathbb{Z}_m$$

のことを言う．
- 自然な包含 $S^{2n+1} \hookrightarrow S^{2n+3}$, $(z_1, \cdots, z_{n+1}) \longmapsto (z_1, \cdots, z_{n+1}, 0)$ によって，$2n+1$ 次元レンズ空間の族 $\left\{L_m^{2n+1}\right\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ は有向集合 $(\mathbb{Z}_{\geq 0}, \leq)$ 上の図式をなす．**無限次元レンズ空間**とは，この図式上の帰納極限

$$\boldsymbol{L_m^{\infty}} \coloneqq \varinjlim_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} L_m^{2n+1}$$

のことを言う．

$m \geq 1$ とし，3 次元レンズ空間 L_m^3 を考える．$(z_1, z_2) \in S^3$ の同値類を $[(z_1, z_2)] \in S^3/\mathbb{Z}_m$ と書くと，写像

$$\pi\colon L_m^3 \longrightarrow S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\},\ [(z_1, z_2)] \longmapsto \frac{z_1}{z_2}$$

は[*2]well-defined な全射になる．

$\boldsymbol{m=0}$ 全空間 $E = S^2 \times S^1$ として，自明束

$$S^1 \hookrightarrow S^2 \times S^1 \xrightarrow{\mathrm{proj}_1} S^2$$

$\boldsymbol{m=1}$ 全空間 $E = L_1^3 = S^3$ として，**Hopf-fibration**

$$S^1 \hookrightarrow S^3 \xrightarrow{\pi} S^2$$

$\boldsymbol{m>1}$ Hopf 写像 $S^3 \longrightarrow S^2$ は商写像 $S^3 \twoheadrightarrow L_m^3$ を使った合成

$$S^3 \twoheadrightarrow L_m^3 \xrightarrow{\pi} S^2$$

からなる．このときファイバーは $S^1/\mathbb{Z}_m \approx S^1$ となり，結果的に S^1 バンドル

$$S^1 \hookrightarrow S^3 \to S^2$$

が実現される．

6.4 主束

位相群 G は，自分自身に**左移動** (left transition) として左から作用しているとする：

$$G \longrightarrow \mathrm{Homeo}(G),\ g \longmapsto (x \longmapsto gx)$$

[*2] $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ と言うのは，Riemann 球面を考えている．

定義 6.6: 主束

位相空間 B 上の**主 G 束** (principal G-bundle) とは，ファイバー束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} B$ であって，構造群 G がファイバー G に左移動として作用しているもののこと．

命題 6.3: 主 G 束における右作用

主 G 束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} B$ を与える．このとき，位相群 G は全空間 P に右から自由に作用し，その軌道空間が B になる．

証明 $\forall p \in P$ を 1 つとる．$p \in \pi^{-1}(U)$ を充たす任意の B の開集合 $U \subset B$ をとり，その上の任意の局所自明化 $\varphi\colon U \times G \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ をとる．φ は同相写像だから $\varphi(u,\, g) = p$ を充たす $u \in U,\, g \in G$ が存在する．以上の準備の下で，写像 $\phi\colon P \times G \longrightarrow P$ を

$$\phi(p,\, g') \coloneqq \varphi(u,\, gg')$$

と定義する．

ϕ は well-defined U 上の別の局所自明化 $\varphi'\colon U \times G \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ をとる．このとき変換関数 $\theta_{\varphi,\,\varphi'}\colon U \longrightarrow G$ が存在して

$$p = \varphi(u,\, g) = \varphi'(u,\, \theta_{\varphi,\,\varphi'}(u) \cdot g)$$

が成り立つ．故に

$$\varphi(u,\, gg') = \varphi'\big(u,\, \theta_{\varphi,\,\varphi'}(u) \cdot (gg')\big) = \varphi'\big(u,\, (\theta_{\varphi,\,\varphi'}(u) \cdot g)g'\big)$$

であり，ϕ は局所自明化の取り方によらない．

ϕ は自由 $\forall p \in \pi^{-1}(U)$ をとる．$\phi(p,\, g') = p$ ならば

$$\phi(p,\, g') = \varphi(u,\, gg') = p = \varphi(u,\, g1_G)$$

が成り立つが，局所自明化は全単射なので $gg' = g \implies g' = 1_G$ が従う．i.e. 右作用 ϕ は自由である．

軌道空間が B G の $U \times G$ への右作用による軌道空間は $(U \times G)/G = U \times \{1_G\} = U$ となる[*3]から，G の P への右作用 $\phi\colon P \times G \longrightarrow P$ による軌道空間は $P/G = B$ となる．

■

定理 6.1:

コンパクト Hausdorff 空間 P と，P に自由に作用しているコンパクト Lie 群 G を与える．このとき，軌道空間への商写像

$$\pi\colon P \twoheadrightarrow P/G$$

は主 G 束である．

[*3] $\forall g \in G$ に対して $g = 1_G \cdot g \in 1_G \cdot G$ である．

証明 ■

6.4.1　主束からファイバー束を構成する

位相群 G が位相空間 F, F' の両方に作用しているとする．このとき G を構造群に持つファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ を与えると，命題 6.2 より全く同一の変換関数を持つ別のファイバー束 $F' \hookrightarrow E' \xrightarrow{\pi'} B$ を定義することができる．このような操作を**ファイバーの取り替え**と呼ぶ．特に，ファイバーの取り替えによって，構造群 G を持つファイバー束

$$
\begin{tikzcd}
F \arrow[r] & E \arrow[d, "\pi"] \\
& B
\end{tikzcd}
$$

から主 G 束

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r] & P(E) \arrow[d, "\pi"] \\
& B
\end{tikzcd}
$$

を得ることができる（これを **underlying principal bundle** と呼ぶ）．

逆に，命題 6.2 を使って与えられた主 G 束と位相群 G の位相空間 F への作用からファイバー束を得ることもできる命題 6.2 を使わない構成法もある：

命題 6.4: Borel 構成

$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} B$ を主 G 束とし，位相群 G の位相空間 F への作用 $\Theta\colon G \times F \longrightarrow F$ を与える．

- 積空間 $P \times F$ 上の同値関係を次のように定義する[a]：

$$\sim \coloneqq \left\{ \left((p,\, f),\, (p \cdot g,\, g^{-1} \cdot f) \right) \in (P \times F) \times (P \times F) \;\middle|\; g \in G \right\}$$

  同値関係 $\sim$ による商空間を $P \times_G F \coloneqq (P \times F)/\sim$ とおく．

- $(p,\, f) \in P \times F$ の $\sim$ による同値類を $[p,\, f]$ と書く．このとき写像

$$q\colon P \times_G F \longrightarrow B,\; [p,\, f] \longmapsto \pi(p)$$

  は well-defined である．

このとき，$F \hookrightarrow P \times_G F \xrightarrow{q} B$ は構造群 G を持ち，**変換関数が $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} B$ と同じ**であるようなファイバー束になる．

[a] G は命題 6.3 の方法で P に右から自由に作用しているとする．

証明 ■

定理 6.2:

弧状連結（かつ半局所単連結な）空間 B 上の任意の局所係数は，可換群 A を用いて

$$A \hookrightarrow \tilde{B} \times_{\pi_1(B)} A \xrightarrow{q} B$$

の形をとる．i.e. B の普遍被覆空間 $\tilde{B}$ による主 $\pi_1(B)$ 束 $\pi_1(B) \hookrightarrow \tilde{B} \xrightarrow{\pi} B$ から Borel 構成によって得られる．ただし，基本群 $\pi_1(B)$ の可換群 A への作用は，群準同型 $\pi_1(B) \longrightarrow \mathrm{Aut}(A)$ によって与えられる．

6.5　構造群の収縮

G を構造群とするファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ を，部分位相群 $H \subset G$ を構造群に持つファイバー束と見做せる場合がある．このようなとき，構造群が $\boldsymbol{H}$ **に収縮した** (reduced to H) という．

命題 6.5:

位相群 G およびその位相部分群 $H \subset G$ を与える．H は G に左移動として作用し，$H \hookrightarrow Q \xrightarrow{\pi} B$ が主 H 束であるとする．
このとき，Borel 構成による $G \hookrightarrow Q \times_H G \xrightarrow{q} B$ は主 G 束である．

証明 ■

定義 6.7: 収縮可能

- 与えられた主 G 束 $G \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ に対して，構造群 G が部分群 $H \subset G$ に**収縮できる**とは，ある主 H 束 $H \hookrightarrow Q \xrightarrow{q} B$ が存在して可換図式 6.2 が成り立ち，かつ写像 r が G-同値になることを言う．
- (必ずしも主束でない)一般のファイバー束に対して構造群が収縮するとは, underlying principal bundle が収縮することをいう．

$$\begin{tikzcd}
Q \times_H G \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "q"'] & & E \arrow[dl, "\pi"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

図 6.2: 構造群の収縮

6.6　束写像と引き戻し

定義 6.8: 束写像

構造群 G およびファイバー F を持つ 2 つのファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$, $F \hookrightarrow E' \xrightarrow{\pi'} B'$ を与える．**ファイバー束の射** (morphism of fiber bundle) とは，連続写像の組 $(\tilde{f}\colon E \longrightarrow E',\ f\colon B \longrightarrow B')$ であって以下の条件を充たすもののこと：

- 図式 6.3 が可換になる
- $\forall b \in B$ に対し，$b \in U$ を充たす B の任意の開集合 U と，その上の任意の局所自明化 $\phi\colon U \times F \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ をとる．また，$f(b) \in U'$ を充たす任意の B' の開集合 U'，および U' 上の任意の局所自明化 $\phi'\colon U' \times F \longrightarrow \pi'^{-1}(U')$ をとる．このとき，合成

$$\{b\} \times F \xrightarrow{\phi} \pi^{-1}(\{b\}) \xrightarrow{\tilde{f}} p'^{-1}\bigl(\{f(b)\}\bigr) \xrightarrow{\phi'^{-1}} \bigl\{f(b)\bigr\} \times F$$

は連続写像 $F \longmapsto F,\ f \longmapsto \theta_{\phi,\,\phi'}(b) \cdot f$ に等しい．
- 特に，写像 $U \cap f^{-1}(U') \longrightarrow G,\ b \longmapsto \theta_{\phi,\,\phi'}(b)$ は連続である．

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\pi"] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\
B \arrow[r, "f"] & B'
\end{tikzcd}$$

図 6.3: 束写像

- **ファイバー束の同型射**とは，定義 6.8 の意味での束写像 $(\tilde{f},\ f)$ であって，逆向きの束写像 $(\tilde{g},\ g)$ が存在して合成が恒等射になるようなもののことを言う．
- **ゲージ変換** (gauge transformation) とは，ファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ から自分自身への束写像 $(g,\ \mathrm{id}_B)$ のことを言う．i.e. 図式 6.4 が可換になる．

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\pi"'] & & E \arrow[dl, "\pi"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

図 6.4: ゲージ変換

ゲージ変換全体の集合は群をなす

定義 6.9: 引き戻し

構造群 G を持つファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ と，連続写像 $f\colon B' \longrightarrow B$ を与える．ファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ の**引き戻し** (pullback) とは，以下の 2 つ組のことを言う：

- 位相空間

$$f^*(E) \coloneqq \left\{ (b',\, e) \in B' \times E \;\middle|\; \pi(e) = f(b') \right\}$$

- 連続な全射

$$q\colon f^*(E) \longrightarrow B',\ (b',\, e) \longmapsto b'$$

引き戻しの定義から，図式 6.5 は可換図式になる．

$$\begin{tikzcd}
f^*(E) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "q"] & E \arrow[d, "\pi"] \\
B' \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

図 6.5: 引き戻し

命題 6.6:

ファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ の引き戻しは構造群 G を持つファイバー束 $F \hookrightarrow f^*(E) \xrightarrow{q} B'$ をなす．また，標準的射影 $f^*(E) \longrightarrow E$ は束写像になる．

<u>**証明**</u> ■

命題 6.7:

構造群 G を持つ 2 つのファイバー束 $F \hookrightarrow E' \xrightarrow{\pi'} B'$, $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ と，定義 6.8 の意味での束写像 $(\tilde{f},\, f)$ を与える（可換図式 6.6a）．このとき図式 6.6b に示す分解 $f^* \circ \beta = \tilde{f}$ が存在して $(\beta,\, \mathrm{id}_{B'})$ が束写像となる．

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\pi'"] & E \arrow[d, "\pi"] \\
B' \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

(a)

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[r, dashed, "\beta"] \arrow[dr, "\pi'"] & f^*(E) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "q"] & E \arrow[d, "\pi"] \\
& B' \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

(b)