第 4 章

小技集

この章では，これまでに登場した種々の定理の証明に使われる数学の小技を紹介する．

4.1　集合と写像の関係

補題 4.1: 集合論の小定理集

$f\colon X \to Y$ を写像とする．また，Λ, M を任意の添字集合とし，U, $U_\lambda \subset X$ $(\lambda \in \Lambda)$, V, $V_\mu \subset Y$ $(\mu \in M)$ とする．

(1)

$$f\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(U_\lambda)$$

(2)

$$f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda\right) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(U_\lambda)$$

(3)

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\mu\in M} V_\mu\right) = \bigcup_{\mu\in M} f^{-1}(V_\mu)$$

(4)

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\mu\in M} V_\mu\right) = \bigcap_{\mu\in M} f^{-1}(V_\mu)$$

(5)

$$f^{-1}\bigl(V^c\bigr) = \bigl(f^{-1}(V)\bigr)^c$$

(6)

$$f\bigl(f^{-1}(V)\bigr) = V \cap f(X)$$

(7)

$$f^{-1}\big(f(U)\big) \supset U$$

(8)

$$f(X) \setminus f(U) \subset f(U^c)$$

(9) 以下の 4 つは互いに同値である：

(a) 任意の集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset 2^X$ に対して

$$f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(U_\lambda)$$

(b)

$$\forall U \in 2^X,\ f^{-1}\big(f(U)\big) = U$$

(c)

$$\forall U \in 2^X,\ f(X) \setminus f(U) = f(U^c)$$

(d) f は単射

(10) 以下の 2 つは同値である：

(a)

$$\forall V \in 2^Y,\ f\big(f^{-1}(V)\big) = V$$

(b) f は全射

<u>証明</u> (1) **(⊂)：**

$$y \in f\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda\right) \implies \exists x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda,\ f(x) = y \implies \exists \alpha \in \Lambda,\ y \in f(U_\alpha) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(U_\lambda).$$

(⊃)：

$$y \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(U_\lambda) \implies \exists \alpha \in \Lambda,\ y \in f(U_\alpha) \implies y \in f\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda\right)$$

(2)

$$y \in f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda\right) \iff \exists x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda,\ y = f(x) \implies \forall \alpha \in \Lambda,\ y \in f(U_\alpha) \iff \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(U_\lambda).$$

(3) **(⊂)：**

$$x \in f^{-1}\left(\bigcup_{\mu\in M} V_\mu\right) \implies f(x) \in \bigcup_{\mu\in M} V_\mu \implies \exists \alpha \in M,\ f(x) \in V_\alpha \subset \bigcup_{\mu\in M} f^{-1}(V_\mu).$$

(⊃) :

$$x \in \bigcup_{\mu \in M} f^{-1}(V_\mu) \quad \Longrightarrow \quad \exists \alpha \in M,\ x \in f^{-1}(V_\alpha) \quad \Longrightarrow \quad x \in f^{-1}\Bigl(\bigcup_{\mu \in M} f^{-1}(V_\mu)\Bigr).$$

(4) **(⊂) :**

$$x \in f^{-1}\Bigl(\bigcap_{\mu \in M} V_\mu\Bigr) \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in \bigcap_{\mu \in M} V_\mu \quad \Longrightarrow \quad \forall \alpha \in M,\ f(x) \in V_\mu \quad \Longrightarrow \quad x \in \bigcap_{\mu \in M} f^{-1}(V_\mu).$$

(⊃) :

$$x \in \bigcap_{\mu \in M} f^{-1}\Bigl(V_\mu\Bigr) \quad \Longrightarrow \quad \forall \alpha \in M,\ f(x) \in V_\alpha \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in \bigcap_{\mu \in M} V_\mu \quad \Longrightarrow \quad x \in f^{-1}\Bigl(\bigcap_{\mu \in M} V_\mu\Bigr).$$

(5)

$$x \in f^{-1}\bigl(Y \setminus V\bigr) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \in Y \ \text{かつ}\ f(x) \notin V \quad \Longleftrightarrow \quad x \in f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(V)$$

(6)

$$\begin{aligned} y \in f\bigl(f^{-1}(V)\bigr) \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists x \in f^{-1}(V),\ y = f(x) \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists x \in U,\ f(x) \in V \ \text{かつ}\ y = f(x) \\ &\Longleftrightarrow \quad y \in V \ \text{かつ}\ y \in f(X) \end{aligned}$$

(7)

$$x \in U \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in f(U) \quad \Longleftrightarrow \quad x \in f^{-1}\bigl(f(U)\bigr)$$

(8)

$$\begin{aligned} y \in f(X) \ \text{かつ}\ y \notin f(U) \quad &\Longleftrightarrow \quad \bigl(\exists x \in X,\ y = f(x)\bigr) \ \text{かつ}\ \bigl(\forall u \in U,\ y \neq f(u)\bigr) \\ &\Longrightarrow \quad \exists x \in X \setminus U,\ y = f(x) \qquad (4.1.1) \\ &\Longleftrightarrow \quad y \in f(U^c) \end{aligned}$$

(9) **(d) $\Longrightarrow$ (c) :**

f が単射なら (8) の証明中の命題 (4.1.1) が

$$\exists!\, x \in X \setminus U,\ y = f(x)$$

になり[*1], $\Longrightarrow$ の逆も成り立つ.

(c) $\Longrightarrow$ (b) :

仮定より, $\forall x \in X$ に対して

$$f(x) \in f(U) = f\bigl((X \setminus U)^c\bigr) \quad \Longrightarrow \quad f(x) \notin f(X \setminus U) \quad \Longrightarrow \quad x \in U$$

[*1] ∃! は「ただ一つ存在する」の意味である.

が成り立つ．i.e. (7) の証明において $\Longrightarrow$ の逆も成り立つ．

(b) $\Longrightarrow$ (a)：

$$y \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(U_\lambda) \iff \exists x \in X,\ \alpha \in \Lambda,\ \exists x_\alpha \in U_\alpha,\ y = f(x_\alpha).$$

ここで $\forall \alpha, \beta \in \Lambda$ をとり，一点集合 $\{x_\alpha\}, \{x_\beta\} \in 2^X$ に対して (b) を使うと

$$\{x_\alpha\} = f^{-1}\bigl(f(\{x_\alpha\})\bigr) = f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}\bigl(f(\{x_\beta\})\bigr) = \{x_\beta\}$$

がわかる．i.e. $\forall \alpha, \beta \in \Lambda,\ x_\alpha = x_\beta$. ゆえに (2) の証明における $\Longrightarrow$ の逆も成り立つ．

(a) $\Longrightarrow$ (d)：

$f(x_1) = f(x_2) = y$ とする．(a) から

$$f(\{x_1\} \cap \{x_2\}) = f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = \{y\} \neq \emptyset$$

だから $\{x_1\} \cap \{x_2\} \neq \emptyset$ でなくてはならない．i.e. $x_1 = x_2$.

(10) (6) より，$\forall V \in 2^Y$ に対して

$$f\bigl(f^{-1}(V)\bigr) = V \iff V = V \cap f(X) \iff V \subset f(X) \tag{4.1.2}$$

が成り立つ．

($\Longrightarrow$)：

仮定 (a) と命題 (4.1.2) より $Y \subset f(X)$. 一方 f が写像であることから $f(X) \subset Y$ であり，$f(X) = Y$ がわかる．

($\Longleftarrow$)：

仮定 (b) より $f(X) = Y$ であるから，$\forall V \in 2^Y$ に対して $V \subset f(X)$ が成り立つ．従って命題 (4.1.2) を使うことができて，(a) が成立する．

■

補題 4.2: 有限集合上の単射と全射

A, B が有限集合で，かつ $|A| = |B|$ ならば次の (1), (2) が成り立つ：

(1) $A \subset B \Longrightarrow A = B$

(2) $f\colon A \to B$ が写像ならば，f が単射であることと f が全射であることは同値である．

証明 (1) 仮定より $B = A \sqcup (B \setminus A)$ である．ゆえに $|B| = |A| + |B \setminus A|$ だが，仮定より $|A| = |B|$ なので $|B \setminus A| = 0$. i.e. $B \setminus A = \emptyset$ である．

(2) **($\Longrightarrow$)：**

f を単射とする．このとき仮定より $|f(A)| = |A| = |B|$ である．$f(A) \subset B$ でもあるから，(1) より $f(A) = B$ がわかる．

($\Longleftarrow$)：

f を全射とする．$\forall b \in B$ に対して，$a_b \in A$ であって $f(a_b) = b$ を充たすものを一つずつ選んでおき，A の部分集合 C を

$$C \coloneqq \left\{ a_b \in A \;\middle|\; b \in B \right\} \subset A$$

として定める．

$\forall b_1, b_2 \in B$ に対して，$b_1 \neq b_2$ かつ $a_{b_1} = a_{b_2}$ を仮定すると $b_1 = f(a_{b_1}) = f(a_{b_2}) = b_2$ となり矛盾である．よって背理法から $b_1 \neq b_2 \implies a_{b_1} \neq a_{b_2}$ であり，仮定から $|C| = |B| = |A|$ とわかる．$C \subset A$ でもあるから (1) が使えて $C = A$. これは $\forall b \in B$ に対して $f^{-1}(\{b\}) = \{a_b\}$（一点集合）であることを意味するから，f は単射である．

■

4.2 C^∞ 関数の構成

$\mathbb{R}^n$ において原点を中心とする半径 r の開円板を $D(r)$ と書く．

C^∞ 級関数 $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を次のように定義する：

$$h(x) := \begin{cases} e^{-1/x} & : x > 0 \\ 0 & : x \leq 0 \end{cases}$$

この h を使って C^∞ 関数 $b\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を次のように定義する：

$$b(x) := \frac{h(4 - |\boldsymbol{x}|^2)}{h(4 - |\boldsymbol{x}|^2) + h(|\boldsymbol{x}|^2 - 1)}$$

この C^∞ 関数は以下の条件を充たす：

$$b(x) = \begin{cases} 1 & : x \in \overline{D(1)} \\ 0 & : x \notin D(2) \end{cases} \tag{4.2.1}$$

実際，$b(x)$ をプロットしてみると図 4.1 のようになる．

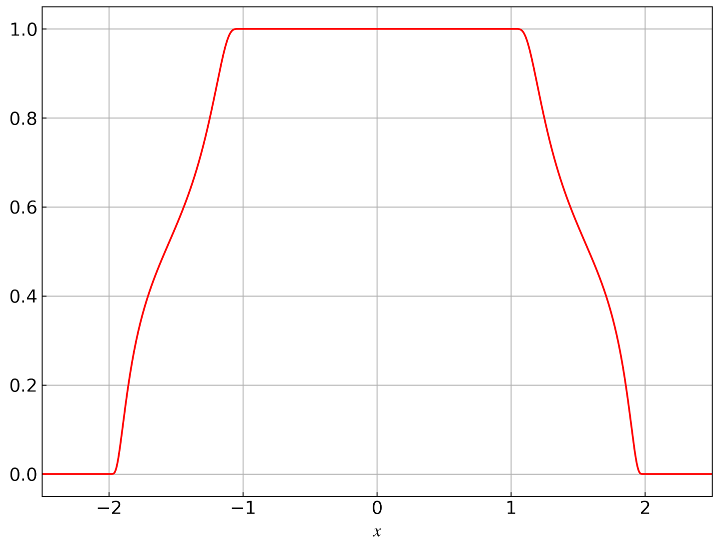

図 4.1: $b(x)$ のグラフ．$x \in [-1, 1]$ において $b(x) = 1$ であり，$|x| \geq 2$ に対して $b(x) = 0$ となっている様子が確認できる．

補題 4.3: C^∞ 関数の拡張

M を C^∞ 多様体とする．点 $p \in M$ の開近傍 U と U 上の C^∞ 関数 $f\colon U \to \mathbb{R}$ を任意にとる．このとき，$\overline{V} \subset U$ となる p の開近傍 V と，M 全体で定義された C^∞ 関数 $\tilde{f}\colon M \to \mathbb{R}$ で

$$\tilde{f}(q) = \begin{cases} f(q) & : q \in V \\ 0 & : q \notin U \end{cases}$$

を充たすものが存在する．

証明 点 p を含むチャート (W, φ) であって，$W \subset U$ かつ $\varphi(p) = 0$, $\varphi(W) \supset D(3)$ を充たすものをとる[*2]．

式 (4.2.1) の関数 b を使って C^∞ 関数 $\tilde{b}W \to \mathbb{R}$ を $\tilde{b} \coloneqq b \circ \varphi$ と定義する．その構成から明らかに $\varphi^{-1}(D(1))$ の外側で $\tilde{b}$ は 0 になる．故に $M \setminus W$ においては常に 0 と定義して $\tilde{b}$ の定義域を拡張することで，$\tilde{b} \in C^\infty(M)$ とすることができる．

ここで $V \coloneqq \varphi^{-1}(D(1))$ とおくと V は p の開近傍になるが，明らかに $\overline{V} \subset U$ であり，かつ V 上で $\tilde{b}$ は常に 1 である．このとき M 上の関数 $\tilde{f}$

$$\tilde{f}(q) \coloneqq \begin{cases} \tilde{b}(q)f(q) & : q \in V \\ 0 & : q \notin U \end{cases}$$

は C^∞ 級であり，求める性質を充している． ■

[*2] このようなチャートは，$\mathbb{R}^n$ の原点を中心とする相似拡大を施すことでいつでも作ることができる．