# 第 1 章

# 必要最低限の圏論

## 1.1 諸定義

ものの集まりを**クラス** (class) と呼ぶことにする[*1]．3 つのもの $\mathcal{C}$ は以下の要素からなるとする：

(1) クラス $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$．その元は**対象** (object) と呼ばれる．
(2) $\forall X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して定まる集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, Y)$．
(3) $\forall X,\, Y,\, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して定まる写像 $\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, Z)$．

!

- 集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, Y)$ は記号として $\mathrm{Hom}(X,\, Y)$ とか $\mathcal{C}(X,\, Y)$ とも書かれる．
- 元 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, Y)$ のことを $X$ から $Y$ への**射** (morphism) と呼び，$\boldsymbol{f \colon X \to Y}$ と書く．
- 写像 $\circ$ のことを**合成** (composite) と呼ぶ．射 $f \colon X \to Y$ と $g \colon Y \to Z$ の合成は $\boldsymbol{g \circ f \colon X \to Z}$ と書かれる．

**定義 1.1: 圏**

$\mathcal{C}$ が**圏** (category) であるとは，次の 2 条件を充たすことを言う：

(1) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して**恒等射** (identity) と呼ばれる射 $1_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, X)$ が存在して，$\forall W,\; Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ および $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,\, X)$, $\forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, Y)$ について以下が成り立つ：

$$1_X \circ f = f, \quad g \circ 1_X = g$$

(2) $\forall X,\, Y,\, Z,\, W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, Y)$, $\forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\, Z)$, $\forall h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,\, W)$ に対して**結合則** (associativity) が成り立つ．i.e.

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, W)$$

- $\mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ を全ての集合とし，それらの間の全ての写像を射とし，$\circ$ を通常の写像の合成とするものの集まり $\mathbf{Sets}$ は圏を成す．

[*1] 集合全体の集合を考えると Russell のパラドクスに陥る．これを避けるために，集合よりも上位の概念であるクラスを新しく導入する必要がある．なお，考察の対象とする集合の範囲を**宇宙** (universe) という大きな集合に属するものに限る流儀もある．この場合，圏を扱うときに既知の集合論をそのまま適用できるが，集合論の公理に宇宙の存在の公理を追加する必要がある．

- $\mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ を全ての位相空間とし，それらの間の全ての連続写像を射とし，$\circ$ を通常の写像の合成とするものの集まり $\mathbf{Top}$ は圏を成す．
- 可換環 $R$ について，$\mathrm{Ob}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ を全ての $R$ 加群とし，それらの間の全ての $R$ 準同型を射とし，$\circ$ を通常の写像の合成とするものの集まり $R\text{-}\mathbf{Mod}$ は圏を成す．

**定義 1.2: 小圏・モノイド**

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が集合であるような圏 $\mathcal{C}$ は**小圏** (small category) と呼ばれる．
- $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が一点集合であるような圏 $\mathcal{C}$ は**モノイド** (monoid) と呼ばれる．

**定義 1.3: 単射，全射**

$\mathcal{C}$ を圏，$A,\ B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\ B)$ とする．

- $f$ が**単射** (monomorphism) であるとは，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して写像

$$\begin{aligned} f^*\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ A) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ B), \\ g &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$$

  が集合の写像として単射であること．
- $f$ が**全射** (epimorphism) であるとは，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対してに対して写像

$$\begin{aligned} {}^*f\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,\ X) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\ X), \\ g &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

  が集合の写像として単射であること．

**定義 1.4: 同型射**

圏 $\mathcal{C}$ と射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ Y)$ をとる．

- $f$ が**同型射** (isomorphism) であるとは，

$$\exists g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\ X), \quad g \circ f = 1_X \text{ かつ } f \circ g = 1_Y$$

  が成り立つことを言う．このときの射 $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\ X)$ のことを $f$ の**逆** (inverse) と呼ぶ．
- 同型射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ Y)$ が存在するとき，$X$ と $Y$ は**同型** (isomorphic) であると言う．
- 対象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ X)$ の元のうち同型射であるもの全体の集合は合成によって群を成す．この部分集合を $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ X)$ と書き，$X$ の $\mathcal{C}$ における**自己同型群** (automorphism group) と呼ぶ．

**定義 1.5: 部分対象**

$\mathcal{C}$ を圏とする．

- $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の **部分対象** (subobject) とは，$B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と単射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ の組 $(B, f)$ のことを言う．
- $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の部分対象 $(B, f)$，$(C, g)$ が**同値** (equivalent) であるとは，ある同型射 $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ であって $g \circ \varphi = f$ を充たすものが存在することを言う[a]．

[a] $B \simeq C$ や $f \simeq g$ と略記することがある．

**定義 1.6: 商対象**

$\mathcal{C}$ を圏とする．

- $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の **商対象** (quotient bject) とは，$B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と全射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, )$ の組 $(B, f)$ のことを言う．
- $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の部分対象 $(B, f)$，$(C, g)$ が**同値** (equivalent) であるとは，ある同型射 $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ であって $\varphi \circ f = g$ を充たすものが存在することを言う[a]．

[a] $B \simeq C$ や $f \simeq g$ と略記することがある．

**定義 1.7: 充満部分圏**

2 つの圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ をとる．圏 $\mathcal{D}$ が $\mathcal{C}$ の**充満部分圏** (full subcategory) であるとは，次の 2 条件が充たされることを言う：

(1) クラス $\mathrm{Ob}(\mathcal{D}) \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$,

(2) $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}), \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

**定義 1.8: 反対圏**

圏 $\mathcal{C}$ に対して，その**反対圏** (opposite category) $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ を次のように定義する：

$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) &:= \mathrm{Ob}(\mathcal{C}), \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X, Y) &:= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \quad \forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) \end{aligned}$$

## 1.2 関手と自然変換

圏を対象と考えたとき，射にあたるのは**関手** (functor) である．
$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を圏とする．$\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ の間の対応

$$F \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

は次の 2 種類の対応付けから成るとする：

(1) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，記号 $F(X)$ で書かれる $\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ の元を一意に対応づける[*2].

(2) $\forall X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，射を移す写像

$$F\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X,\, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,\bigl(F(X),\, F(Y)\bigr),\ f \longmapsto F(f)$$

を対応付ける.

**定義 1.9: 共変関手**

$F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ が**共変関手** (covariant functor) であるとは，以下の 2 条件を充たすことを言う：

**(恒等射を保つ)** $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$F(1_X) = 1_{F(X)} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,\bigl(F(X),\, F(X)\bigr)$$

が成り立つ.

**(合成を保つ)** $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X,\, Y),\ \forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,(Y,\, Z)$ に対して

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,\bigl(F(X),\, F(Z)\bigr)$$

が成り立つ.

射の向きを逆にすると**反変関手**の定義になる．いま $\mathcal{C},\, \mathcal{D}$ を圏とし，$\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ の間の対応

$$F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

は次の 2 種類の対応付けから成るとする：

(1) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，記号 $F(X)$ で書かれる $\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ の元を一意に対応づける.

(2) $\forall X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，射を移す写像

$$F\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X,\, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,\bigl(F(Y),\, F(X)\bigr),\ f \longmapsto F(f)$$

**定義 1.10: 反変関手**

$F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が**反変関手** (contravariant functor) であるとは，以下の 2 条件を充たすことを言う：

**(恒等射を保つ)** $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$F(1_X) = 1_{F(X)} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,\bigl(F(X),\, F(X)\bigr)$$

が成り立つ.

**(合成を保つ)** $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X,\, Y),\ \forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,(Y,\, Z)$ に対して

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,\bigl(F(Z),\, F(X)\bigr)$$

が成り立つ.

関手を対象と考えたときに，射にあたるものが次に定義する**自然変換**である：

[*2] いわば，「写像」$F\colon \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ とでも言うべきもの.

**定義 1.11: 自然変換**

2 つの共変関手 $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ について，以下のような対応 $\varphi\colon F \to G$ のことを**自然変換** (natural transformation) と呼ぶ：

(1) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，射

$$\varphi_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\bigl(F(X), G(X)\bigr)$$

を対応付ける．

(2) $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ について図式 1.1 が可換になる．

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\varphi_X"] & F(Y) \arrow[d, "\varphi_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

図 1.1: 自然変換

共変関手 $F$ から $G$ への自然変換全体が成すクラスを $\mathbf{Nat}(F, G)$ と書くことにする．

**定義 1.12: 自然同値**

2 つの共変関手 $F, G\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ の間の自然変換 $\varphi\colon F \longrightarrow G$ を与える．

- $\varphi$ が**自然同値** (natural equivalence) であるとは，$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $\varphi_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\bigl(F(X), G(X)\bigr)$ が同型射であることを言う．
- 共変関手 $F, G$ が**自然同値** (naturally equivalent) であるとは，$F$ から $G$ への自然同値が存在することを言う．
- 共変関手 $F$ に対し，$\mathrm{id}F(X)\colon F(X) \longrightarrow F(X)$ により定まる $F$ から $F$ 自身への自然変換 $\varphi$ を**恒等自然変換** (identity natural transformation) と呼ぶ．

**定義 1.13:**

共変関手 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ を与える.

- $F$ が**忠実** (faithful) であるとは, $\forall X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して写像

$$F\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X,\, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,\bigl(F(X),\, F(Y)\bigr),\ f \longmapsto F(f)$$

  が単射であること.
- $F$ が**充満** (full) であるとは, $\forall X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して写像

$$F\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X,\, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,\bigl(F(X),\, F(Y)\bigr),\ f \longmapsto F(f)$$

  が全射であること.
- $F$ が**本質的全射** (essentially surjective) であるとは, $\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ に対して $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が存在して $F(X)$ が $Y$ と同型になること.

忠実充満関手のことを**埋め込み**と呼ぶことがある.