第 4 章

コンパクト生成空間の圏

位相空間，特にコンパクト空間について基本的な事柄をまとめるところから始めよう．

- 位相空間 $(X, \mathscr{O})$ の位相の部分集合 $\mathcal{B} \subset \mathscr{O}$ が**開基** (open base) であるとは，$\forall U \in \mathscr{O}$ に対してある部分集合族 $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ が存在して
$$U = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$$
が成り立つこと．
- 位相空間 $(X, \mathscr{O})$ の位相の部分集合 $\mathcal{SB} \subset \mathscr{O}$ が**準基** (subbase) であるとは，
$$\left\{ S_1 \cap \cdots \cap S_n \;\middle|\; \{S_i\}_{i=1,\,\cdots\,,\,n} \subset \mathcal{SB},\ n = 0,\, 1,\, \dots \right\}$$
が開基になることをいう[*1]．
- 位相空間 X の<u>部分集合</u> $V \subset X$ が点 $x \in X$ の**近傍** (neighborhood) であるとは，X の開集合 U が存在して $x \in U \subset V$ を充たすことを言う．
- 位相空間 X の点 $x \in X$ の近傍全体の集合を $\mathcal{N}(x)$ と書く．部分集合 $\mathcal{B} \subset \mathcal{N}(x)$ が x の**基本近傍系** (neighborhood basis) であるとは，$\forall V \in \mathcal{N}(x)$ に対してある $B \in \mathcal{B}$ が存在して $B \subset V$ を充たすことを言う．

補題 4.1: 写像の連続性

$(X, \mathscr{O}_X)$, $(Y, \mathscr{O}_Y)$, $(Z, \mathscr{O}_Z)$ を位相空間，$\mathcal{SB}_Y \subset \mathscr{O}_Y$ を Y の準基，$\mathcal{B}_Y \subset \mathscr{O}_Y$ を Y の開基とする．直積集合 $X \times Y$ には積位相を入れる．i.e. 部分集合族
$$\mathcal{B}_{X \times Y} \coloneqq \left\{ U \times V \subset X \times Y \;\middle|\; U \in \mathscr{O}_X,\ V \in \mathscr{O}_Y \right\}$$
が $X \times Y$ の開基である．

(1) 写像 $f\colon X \longrightarrow Y$ が連続 $\iff$ $\forall S \in \mathcal{SB}_Y$ に対して $f^{-1}(S) \in \mathscr{O}_X$

(2) 写像 $f\colon X \longrightarrow Y$ が連続 $\iff$ $\forall B \in \mathcal{B}_Y$ に対して $f^{-1}(B) \in \mathscr{O}_X$

[*1] $n = 0$ のときは X である．

(3) $\forall x_0 \in X,\ \forall y_0 \in Y$ について，標準的包含

$$
\begin{aligned}
i_{1y_0} &\colon X \longrightarrow X \times Y,\ x \longmapsto (x,\, y_0) \\
i_{2x_0} &\colon Y \longrightarrow X \times Y,\ y \longmapsto (x_0,\, y)
\end{aligned}
$$

は連続である．

(4) 標準的射影

$$
\begin{aligned}
p_1 &\colon X \times Y \longrightarrow X,\ (x,\, y) \longmapsto x \\
p_2 &\colon X \times Y \longrightarrow Y,\ (x,\, y) \longmapsto y
\end{aligned}
$$

は連続である．

(5) 写像 $f\colon X \times Y \longrightarrow Z$ が連続ならば，$\forall x_0 \in X,\ \forall y_0 \in Y$ に対して制限 $f|_{\{x_0\}\times Y}$，$f|_{X\times\{y_0\}}$ も連続である．

(6) 写像 $f\colon Z \longrightarrow X \times Y,\ z \longmapsto \bigl(f_1(z),\, f_2(z)\bigr)$ が連続ならば写像 $f_1\colon Z \longrightarrow X,\ f_2\colon Z \longrightarrow Y$ も連続である．

証明 (1) **($\Longrightarrow$)** $\forall S \in \mathcal{SB}_Y$ は Y の開集合なので明らか．

($\Longleftarrow$) $\forall U \in \mathscr{O}_Y$ を 1 つとって固定する．準基の定義より集合

$$
\mathcal{B} \coloneqq \left\{ S_1 \cap \cdots \cap S_n \;\middle|\; \{S_i\}_{i=1,\,\cdots,\,n} \subset \mathcal{SB},\ n = 0,\, 1,\, \ldots \right\}
$$

は Y の開基だから，ある部分集合族 $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{B}$ が存在して $U = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ が成り立つ．示すべきは $f^{-1}(U) \in \mathscr{O}_X$ だが，

$$
f^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)
$$

なので $\forall \lambda \in \Lambda$ について $f^{-1}(B_\lambda) \in \mathscr{O}_X$ を示せば十分．ところで $B_\lambda \in \mathscr{B}$ なので，ある $S_1,\, \ldots,\, S_n \in \mathcal{SB}_Y$ が存在して $B_\lambda = \bigcap_{i=1}^n S_i$ と書ける．このとき仮定より

$$
f^{-1}(B_\lambda) = f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^n S_i\right) = \bigcap_{i=1}^n f^{-1}(S_i) \in \mathscr{O}_X
$$

が言える．

(2) 開基は準基でもあるので (1) より従う．

(3) 議論は全く同様なので i_{1y_0} についてのみ示す．$X \times Y$ の開基 $\mathcal{B}_{X\times Y}$ の任意の元はある $U \in \mathscr{O}_X,\ V \in \mathscr{O}_Y$ を用いて $U \times V$ と書ける．このとき $(i_{1y_0})^{-1}(U \times V) = U \in \mathscr{O}_X$ が成り立つから，(2) より i_{1y_0} は連続である．

(4) 議論は全く同様なので p_1 についてのみ示す．$\forall U \in \mathscr{O}_X$ を 1 つとる．$p_1^{-1}(U) = U \times Y$ だが，$Y \in \mathscr{O}_Y$ なので右辺は $\mathcal{B}_{X\times Y}$ に属する．i.e. $X \times Y$ の開集合である．

(5) $f|_{\{x_0\}\times Y} = f \circ i_{1x_0},\ f|_{X\times\{y_0\}} = f \circ i_{2x_0}$ である．(3) と仮定よりこれは連続写像の合成なので連続である．

(6) $f_1 = p_1 \circ f,\ f_2 = p_2 \circ f$ である．(4) と仮定よりこれは連続写像の合成なので連続である．

■

定義 4.1: 被覆

- 集合族 $\mathcal{U} := \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が集合 X の**被覆** (cover) であるとは,

$$X \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$$

が成り立つこと.
- 位相空間 X の被覆 $\mathcal{U} := \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が**開** (open) であるとは, $\forall\lambda \in \Lambda$ に対して U_λ が X の開集合であること.
- 位相空間 X の被覆 $\mathcal{V} := \{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が, 別の X の被覆 $\mathcal{U} := \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の**細分** (refinement) であるとは, $\forall V_\alpha \in \mathcal{V}$ に対してある $U_\lambda \in \mathcal{U}$ が存在して $V_\alpha \subset U_\lambda$ が成り立つこと.
- 位相空間 X の開被覆 $\mathcal{U} := \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が**局所有限** (locally finite) であるとは, $\forall x \in X$ に対して以下の条件が成り立つこと:

(locally finiteness) x のある近傍 $V \subset X$ が存在して集合

$$\{\, \lambda \in \Lambda \mid U_\lambda \cap V \neq \emptyset \,\}$$

が有限集合になる.

定義 4.2: パラコンパクト

位相空間 X が**パラコンパクト** (paracompact) であるとは, 任意の開被覆が局所有限かつ開な細分を持つこと.

定義 4.3: コンパクト

位相空間 X の部分集合 $A \subset X$ は, 以下の条件を充たすとき**コンパクト** (compact) であると言われる:

(Heine-Boral の性質) A の任意の開被覆 $\mathcal{U} := \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して, ある有限部分集合 $I \subset \Lambda$ が存在して $\{U_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{U}$ が A の開被覆となる[a].

[a] このことを「任意の開被覆は有限部分被覆を持つ」と表現する.

定義 4.4: 局所コンパクト

位相空間 X が**局所コンパクト** (locally compact) であるとは, $\forall x \in X$ が少なくとも 1 つのコンパクトな近傍を持つこと.

補題 4.2: コンパクト空間の閉集合

位相空間 X がコンパクトならば, X の任意の閉集合はコンパクトである.

証明 X の任意の閉集合 $F \subset X$ と，F の X における任意の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をとる．このとき

$$X = F \cup F^c = \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda\right) \cup F^c$$

が成り立つが，F^c は X の開集合なので部分集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \cup \{F^c\}$ は X の開被覆である．仮定より X はコンパクトだから，$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda$ が存在して $X = \left(\bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_i}\right) \cup F^c$ を充たす．このとき集合族 $\{U_{\lambda_i}\}_{1\leq i\leq n}$ が F の有限開被覆となる． ■

補題 4.3: Hausdorff 空間のコンパクト部分空間

X を Hausdorff 空間とする．

(1) X のコンパクト部分集合は閉集合である．
(2) X がコンパクトならば X の閉部分集合はコンパクトである．
(3) 位相空間 Y がコンパクトならば，任意の連続写像 $f\colon Y \longrightarrow X$ は閉写像である．
(4) (3) において f が全単射ならば同相である．

証明 (1) X のコンパクト部分集合 $K \subset X$ をとる．補集合 K^c が開集合であることを示す．
$\forall x \in K^c$ を 1 つとって固定する．X は Hausdorff 空間だから，$\forall k \in K$ に対してある x の開近傍 U_k と k の開近傍 V_k が存在して $U_k \cap V_k = \emptyset$ を充たす．このとき集合族 $\{V_k\}_{k\in K}$ は K の開被覆だから，<u>K のコンパクト性より</u> $\exists k_1, \dots, k_n \in K$，$K \subset \bigcup_{i=1}^n V_{k_i}$ が成り立つ．ここで $\bigcap_{i=1}^n U_{k_i} \subset \left(\bigcup_{i=1}^n V_{k_i}\right)^c \subset K^c$ が成り立つが，位相空間の公理により $\bigcap_{i=1}^n U_{k_i}$ は開集合であり，点 x の開近傍となる．以上の議論から K^c の任意の点は K^c に含まれる近傍を少なくとも 1 つ持つので K^c は開集合である．

(2) X の閉部分集合 A をとり，A の任意の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をとる．A は閉集合なので A^c は開集合であり，$\forall \lambda \in \Lambda$ に対して $U_\lambda \cup A^c$ は開集合．従って集合族 $\{U_\lambda \cup A^c\}_{\lambda\in\Lambda}$ は X の開被覆である．故に X のコンパクト性から $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda$，$\bigcup_{i=1}^n (U_\lambda \cup A^c) = \left(\bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_i}\right) \cup A^c = X$ が成り立つ．このとき $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の有限部分集合 $\{U_{\lambda_i}\}_{1\leq i\leq n}$ は A の開被覆である．i.e. A はコンパクトである．

(3) 補題 4.2 より Y の任意の閉集合 F はコンパクトであるから，$f(F)$ は X のコンパクト集合である．従って (1) より $f(F)$ は X の閉集合である．

(4) (3) より従う．

■

次の補題は，Hausdorff 空間のコンパクト集合が分離性の意味で点と同じように扱えることを示唆する：

補題 4.4: Hausdorff 空間のコンパクト集合の分離性

X を Hausdorff 空間とする．

(1) X のコンパクト部分集合 $C, D \subset X$ が $C \cap D = \emptyset$ を充しているとする．
このとき，X の開集合 $U, V \subset X$ であって

$$C \subset U \text{ かつ } D \subset V \text{ かつ } U \cap V = \emptyset$$

を充たすものが存在する．

(2) X がコンパクトであるとする．
このとき，X の任意の閉集合 $F \subset X$ と開集合 $U \subset X$ であって $F \subset U$ を充たすものに対して，X の開集合 $V \subset X$ であって $F \subset V$ かつ $\overline{V} \subset U$ を充たすものが存在する[a]．

(3) X がコンパクトであるとする．
このとき，X の任意の<u>有限</u>開被覆 $\{U_1, \cdots, U_n\}$ に対してある X の有限開被覆 $\{V_1, \ldots, V_n\}$ が存在して $\overline{V_i} \subset U_i$ $(1 \leq \forall i \leq n)$ を充たす[b]．

[a] 実は，この主張は X が正規空間であることと同値である．
[b] 一般に，この主張は X が正規空間のときに成り立つ．

証明 (1) まず $C = \{x\}$（1 点集合）の場合に示す．X は Hausdorff 空間だから，$\forall y \in D$ に対して X の開集合 $U_y, V_y \subset X$ が存在して $x \in U_y$ かつ $y \in V_y$ かつ $U_x \cap V_y = \emptyset$ を充たす．このとき $D \subset \bigcup_{y \in D} V_y$ だが，仮定より D はコンパクトなので $\exists y_1, \ldots, y_n \in D,\ D \subset \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$ が成り立つ．ここで $U \coloneqq \bigcap_{i=1}^n U_{y_i},\ V \coloneqq \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$ とおけば $U, V \subset X$ は X の開集合で，$C \subset U$ かつ $D \subset V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ を充たす．

次に C が任意のコンパクト集合の場合に示す．前半の議論より $\forall x \in C$ に対して X の開集合 $U_x, V_x \subset X$ が存在して $\{x\} \subset U_x$ かつ $D \subset V_x$ かつ $U_x \cap V_x = \emptyset$ を充たす．このとき $C \subset \bigcup_{x \in C} U_x$ だが，仮定より C はコンパクトなので $\exists x_1, \ldots, x_m \in C,\ C \subset \bigcup_{i=1}^m U_{x_i}$ が成り立つ．ここで $U \coloneqq \bigcup_{i=1}^m U_{x_i},\ V \coloneqq \bigcap_{i=1}^m V_{x_i}$ とおけば $U, V \subset X$ は X の開集合で，$C \subset U$ かつ $D \subset V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ を充たす．

(2) U^c は X の閉集合であり $F \cap U^c = \emptyset$ を充たす．かつ補題 4.3-(2) より F, U^c はコンパクトである．従って (1) から，X の開集合 $V, W \subset X$ であって $F \subset V$ かつ $U^c \subset W$ かつ $V \cap W = \emptyset$ を充たすものが存在する．このとき $V \subset W^c \subset U$ が成り立つが，W^c は X の閉集合なので $\overline{V} \subset W^c \subset U$ が言える[*2]．

(3) 勝手な X の有限開被覆 $\{U_1, \cdots, U_n\}$ を 1 つとる．$F_1 \coloneqq X \setminus (U_2 \cup \cdots \cup U_n)$ とおくと $F_1 \subset X$ は X の閉集合であり，$F_1 \subset U_1$ を充たす．従って (2) から X の開集合 $V_1 \subset X$ であって $F_1 \subset V_1$ かつ $\overline{V_1} \subset U_1$ を充たすものが存在する．このとき $X = F_1 \cup (\bigcup_{i=2}^n U_i) \subset V_1 \cup (\bigcup_{i=2}^n U_i)$ なので $\{V_1, U_2, \ldots, U_n\}$ は X の開被覆である．以上の操作を n 回繰り返すことにより X の開被覆 $\{V_1, \ldots, V_n\}$ であって $\overline{V_i} \subset U_i$ $(1 \leq \forall i \leq n)$ を充たすものが構成される．

■

[*2] V の閉包 $\overline{V}$ とは，V を含む最小の閉集合のことであった．

補題 4.5: tube lemma

X, Y を位相空間，C, D をそれぞれ X, Y のコンパクト集合とする．
積空間 $X \times Y$ の開集合 W であって $C \times D \subset W$ を充たすものが存在するならば，X の開集合 U および Y の開集合 V であって

$$C \subset U \quad かつ \quad D \subset V \quad かつ \quad U \times V \subset W$$

を充たすものが存在する．

証明 ■

4.1 コンパクト生成空間

この節の内容は，[?] による．

定義 4.5: コンパクト生成空間

位相空間 X は以下の 2 条件を満たすとき，**コンパクト生成空間** (compactly generated space) と呼ばれる：

(CG-1) X は Hausdorff 空間[a]
(CG-2) 部分集合 $A \subset X$ が閉集合 $\iff$ 任意のコンパクト集合 $C \subset X$ に対して $A \cap C$ が閉集合

[a] この要請は補題 4.3 に由来する

コンパクト生成空間の圏 CG を次のように定義する：

- $\mathrm{Ob}(\mathbf{CG})$ を全てのコンパクト生成空間の集まりとする．
- $\mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}}(X, Y)$ をコンパクト生成空間 X と Y の間の連続写像全体とする．
- 射の合成を通常の写像の合成とする．

CG は **Top** の充満部分圏である．特に **CG** は

(1) 全ての局所コンパクトな Hausdorff 空間
(2) 全ての第一可算公理を充たす Hausdorff 空間．特に全ての距離空間．
(3) CW-複体であって，各次元において有限個のセルを持つもの全体

などを含む便利な圏になっている．

4.1.1 等化写像

商位相は次の等化写像によって定義されるのだった：

定義 4.6: 等化写像

位相空間 $(X, \mathscr{O}_X)$, $(Y, \mathscr{O}_Y)$ の間の連続写像 $q\colon X \longrightarrow Y$ が**等化写像** (identification map)[a] であるとは，以下の条件を充たすこと：

(Quo-1) q は全射．

(Quo-2) $U \in \mathscr{O}_Y \iff q^{-1}(U) \in \mathscr{O}_X$

[a] **商写像** (quotient map) とか **proclusion** と呼ぶ場合もある．

同値関係 $\sim$ による商空間 $X/\sim$ を作る際の標準的射影 $\pi\colon X \longrightarrow X/\sim,\ x \longrightarrow [x]$ は等化写像である．しかし，積における第 i 成分のことも標準的射影と呼ぶので，この章では等化写像かつ標準的射影であるような π のことを**商写像** (quotient map) と呼ぶことにする．

命題 4.1: 等化写像の普遍性

全射連続写像 $q\colon X \longrightarrow Y$ に対して，以下は同値：

(1) q が等化写像．

(2) $\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ および任意の写像 $f\colon Y \longrightarrow Z$ を与える．このとき f が連続であることと $f \circ q$ が連続であることは同値である．i.e. **Top** の図式 4.1a は可換である．

(3) X の同値関係を

$$\sim \coloneqq \left\{ (x, y) \in X \times X \mid q(x) = q(y) \right\}$$

と定義する．このとき q の誘導する写像 $\overline{q}\colon X/\sim \longrightarrow Y,\ [x] \longmapsto q(x)$ は well-defined な同相写像である（可換図式 4.1b）．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "f\circ q"] & \\ Y \arrow[r, "f"] & \forall Z \end{tikzcd}$$

(a)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, "\overline{q}"'] & \end{tikzcd}$$

(b)

図 4.1: 等化写像の普遍性

<u>**証明**</u> 商位相の定義より商写像 $\pi\colon X \longrightarrow X/\sim,\ x \longrightarrow [x]$ は等化写像である．

(1) $\Longrightarrow$ (2) Z の任意の開集合 $U \subset X$ をとる．

$f \circ q$ が連続ならば $(f \circ q)^{-1}(U) = q^{-1}\bigl(f^{-1}(U)\bigr)$ が X の開集合であり，等化写像の条件 **(Quo-2)** より $f^{-1}(U)$ は Y の開集合である．i.e. f は連続写像である．逆に f が連続ならば $f \circ q$ は連続写像の合成なので連続である．

(2) $\Longrightarrow$ (3) $\forall y \in [x]$ に対して $q(y) = q(x)$ なので写像 $\overline{q}$ は well-defined である．逆写像は

$$\overline{q}^{-1} \colon Y \longrightarrow X/\sim,\ y \longmapsto [x] \quad {}^{\mathrm{w}/} \quad x \in q^{-1}(\{y\})$$

で与えられる．

まず $\overline{q}$ が連続であることを示す．Y の任意の開集合 $U \subset Y$ をとる．q は連続なので $\pi^{-1}\bigl(\overline{q}^{-1}(U)\bigr) = (\overline{q} \circ \pi)^{-1}(U) = q^{-1}(U)$ は X の開集合だが，π は等化写像だから等化写像の条件 **(Quo-2)** より $\overline{q}^{-1}(U)$ は $X/\sim$ の開集合である．

次に $\overline{q}^{-1}$ が連続であることを示す．$\forall x \in X$ に対して $\overline{q}^{-1} \circ q(x) = [x]$ が成り立つ，i.e. $\overline{q}^{-1} \circ q = \pi$ だから (2) より $\overline{q}^{-1}$ は連続である．

以上の議論より $\overline{q}$ は同相写像である．

(3) $\Longrightarrow$ (1) 任意の部分集合 $U \subset Y$ をとる．U が Y の開集合だとすると，q は連続だから $q^{-1}(U)$ は X の開集合である．

逆に　$q^{-1}(U)$ が X の開集合だとする．このとき $\pi^{-1}\bigl(\overline{q}^{-1}(U)\bigr) = q^{-1}(U)$ は X の開集合で，かつ π は等化写像だから $\overline{q}^{-1}(U)$ は $X/\sim$ の開集合である．仮定より $\overline{q}$ は同相写像だから $U = \overline{q}\bigl(\overline{q}^{-1}(U)\bigr)$ は Y の開集合である．

■

系 4.1: 商空間の普遍性

$X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ の上の同値関係 $\sim \subset X \times X$ および商写像 $\pi \colon X \longrightarrow X/\sim,\ x \longmapsto [x]$ を与える．このとき以下が成り立つ：

(商空間の普遍性) $\forall Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ および連続写像 $f \colon X \longrightarrow Y$ であって $\forall x, y \in X,\quad x \sim y \Longrightarrow g(x) = g(y)$ を充たすものを任意に与える．このとき連続写像 $\overline{f} \colon X/\sim \longrightarrow Y$ が一意的に存在して $\mathbf{Top}$ の可換図式 4.2 が成り立つ．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \forall Y \\ X/\sim \arrow[ur, dashed, "\exists ! \overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

図 4.2: 商空間の普遍性

<u>**証明**</u> f に関する仮定より写像 $\overline{f} \colon X/\sim \longrightarrow Y,\ [x] \longmapsto f(x)$ は well-defined であり，$f = \overline{f} \circ \pi$ が成り立つ．商位相の定義から π は等化写像なので，命題 4.1-(2) より $\overline{f}$ は連続である．

連続写像 $g \colon X/\sim \longrightarrow Y$ が可換図式 4.2 を充たすとする．このとき $\forall [x] \in X/\sim$ に対して $g([x]) = g \circ \pi(x) = f(x)$ が成り立つので $g = \overline{f}$ である．i.e. $\overline{f}$ は一意． ■

命題 4.2: 等化写像によるコンパクト生成空間の構成

$X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG})$, $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}_2)$ とする．このとき，等化写像 $q \colon X \longrightarrow Y$ が存在すれば $Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG})$ である．

証明 部分集合 $B \subset Y$ であって，Y の任意のコンパクト集合 $C \subset Y$ に対して $B \cap C$ が Y の閉集合となるようなものをとる．このとき B が Y の閉集合であることを示せば良い．

X のコンパクト集合 $K \subset X$ を任意にとる．q は連続だから $q(K)$ もコンパクトであり，B の選び方から $B \cap q(K)$ は Y の閉集合である．すると q は連続なので $q^{-1}\bigl(B \cap q(K)\bigr)$ は X の閉集合で，従って $q^{-1}\bigl(B \cap q(K)\bigr) \cap K = q^{-1}(B) \cap K$ は[*3] X の閉集合である．

仮定より X はコンパクト生成空間であり，コンパクト集合 $K \subset X$ は任意だったので，以上の議論から $q^{-1}(B)$ が X の閉集合であるとわかった．従って等化写像の条件 **(Quo-2)** より B は Y の閉集合である． ■

4.1.2 Hausdorff 空間の圏からの関手

Hausdorff 空間（T_2-空間）の圏 $\mathcal{T}_2$ とは，

- 対象は Hausdorff 空間
- 射は Hausdorff 空間の間の連続写像
- 合成は連続写像の合成

として定義される **Top** の充満部分圏である．$\mathcal{T}_2$ の任意の対象は次の方法でコンパクト生成空間にすることができる．混乱を避けるために，しばらくの間は位相空間の位相を明示する．すなわち，位相空間 $(X, \mathscr{O})$ と言ったとき X は集合で，$\mathscr{O}$ は X の上の位相を表す．

定義 4.7:

$(X, \mathscr{O}) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}_2)$ とする．このとき集合 X の上に以下のようにして定まる新しい位相 $\mathscr{K}$ を入れてできる位相空間 $(X, \mathscr{K})$ を $\boldsymbol{k(X)}$ と書く：

部分集合 $A \subset X$ が $k(X)$ の閉集合 $\iff$ $(X, \mathscr{O})$ の任意のコンパクト集合 $C \subset X$ に対して，集合 $A \cap C$ が $(X, \mathscr{O})$ の閉集合

命題 4.3: $k(X)$ の基本性質

定義 4.7 の $k(X)$ に対して以下が成り立つ：

(1) 恒等写像 $\mathrm{id}_X \colon k(X) \longrightarrow X$ は連続
(2) $k(X)$ は Hausdorff 空間
(3) $k(X)$ と $(X, \mathscr{O})$ は同じコンパクト集合を持つ
(4) $k(X)$ はコンパクト生成空間
(5) $(X, \mathscr{O}) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}) \implies k(X) = (X, \mathscr{O})$

証明 (1) $A \subset X$ が $(X, \mathscr{O})$ において閉集合かつ $C \subset X$ が $(X, \mathscr{O})$ においてコンパクトであるとする．補題 4.3-(1) より C は $(X, \mathscr{O})$ の閉集合であり，従って $A \cap C$ も $(X, \mathscr{O})$ の閉集合である．故に A は $k(X)$ の閉集合でもある．

(2) (1) より従う．

[*3] $K \subset q^{-1}\bigl(q(K)\bigr)$ である．

(3) $A \subset X$ が $k(X)$ においてコンパクトならば，(1) より A は $(X, \mathscr{O})$ においてもコンパクトである．
逆に $A \subset X$ が $(X, \mathscr{O})$ においてコンパクトであるとする．A に $(X, \mathscr{O})$ からの相対位相を入れてできる位相空間を $(A, \mathscr{O}_A)$ と書き，$k(X)$ からの相対位相を入れてできる位相空間を $k(A)$ と書く．すると (1) より恒等写像 $\mathrm{id}_A : k(A) \longrightarrow A$ は連続である．逆写像（恒等写像）の連続性を示す．$k(A)$ の任意の閉集合 $B \subset A$ をとる．コンパクト生成空間の定義から $B \cap A = B$ は $(A, \mathscr{O}_A)$ の閉集合であるから，恒等写像 $\mathrm{id}_A : A \longrightarrow k(A)$ は連続写像である．以上の議論から $(A, \mathscr{O}_A) \approx k(A)$ であり，A は $k(X)$ においてもコンパクトである．

(4) コンパクト生成空間の定義の **(CG1)** は (2) から，**(CG2)** は (3) から従う．

(5) (4) より従う．

■

$\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}_2)$ の間の任意の写像 $f : X \longrightarrow Y$ に対して，集合の写像としては同一な $\mathbf{CG}$ の写像 $k(f) : k(X) \longrightarrow k(Y),\ x \longmapsto f(x)$ を対応づける．

補題 4.6:

$X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}),\ Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}_2)$ とする．
写像 $f : X \longrightarrow Y$ は，X の任意のコンパクト集合 $C \subset X$ に対して C への制限 $f|_C : C \longrightarrow Y$ が連続ならば，連続である．

証明 $A \subset Y$ を任意の閉集合，$C \subset X$ を任意のコンパクト集合とする．$f|_C$ が連続なので $f(C) \subset Y$ もコンパクト．さらに仮定より Y が Hausdorff 空間なので補題 4.3 より $f(C)$ は閉集合である．従って $A \cap f(C)$ も閉集合であり，故に $f|_C$ の連続性から

$$(f|_C)^{-1}\bigl(A \cap f(C)\bigr) = (f|_C)^{-1}(A) \cap (f|_C)^{-1}\bigl(f(C)\bigr) = f^{-1}(A) \cap C$$

も閉集合である．仮定より X はコンパクト生成空間だから $f^{-1}(A)$ は閉集合であることがわかった．i.e. f は連続である． ■

命題 4.4: $k(f)$ の基本性質

$X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}_2)$ を与える．

(1) 写像 $f : X \longrightarrow Y$ が X の任意のコンパクト集合の上で連続ならば $k(f)$ は連続である．
(2) 恒等写像 $k(X) \longrightarrow X$ はホモトピー群，特異ホモロジー・コホモロジーの同型を誘導する．

証明 (1) 補題 4.6 より $k(f)$ が $k(X)$ の任意のコンパクト集合の上で連続であることを示せば良い．$C' \subset k(X)$ を $k(X)$ のコンパクト集合とする．命題 4.3-(3), (1) より C' は X のコンパクト集合でもあり，恒等写像 $C' \longrightarrow C$ が同相写像となる．$f|_C$ が連続であるという仮定から $f(C) \subset Y$ は Y のコンパクト集合であり，故に $f(C') \subset k(Y)$ は $k(Y)$ のコンパクト集合である．故に $k(f)|_{C'} : C' \longrightarrow f(C')$ は連続写像の合成

$$C' \xrightarrow{\mathrm{id}} C \xrightarrow{f} f(C) \xrightarrow{\mathrm{id}} f(C')$$

と等しく，連続である．

(2) (1) より従う.

■

命題 4.3, 4.4 により，対応

$$k\colon \mathcal{T}_2 \longrightarrow \mathbf{CG}$$

は関手になる.

4.1.3 圏 CG の積

$\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG})$ に対して，通常の積空間（これは圏 **Top** の積である）$X \times Y$ は必ずしも **CG** の対象ではない．しかし，次のように定義したものは圏 **CG** の積になる.

定義 4.8: 圏 CG の積

$\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG})$ に対して**積**を次のように定義する：

$$X \times_{\mathbf{CG}} Y \coloneqq k(X \times Y)$$

ただし右辺の $\times$ は通常の積空間をとることを意味する.

命題 4.5:

定義 4.8 の $\times_{\mathbf{CG}}$ は圏 **CG** における積の普遍性を充たす．i.e. 圏 **CG** は常に積を持つ.

証明 $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG})$ をとる．命題 4.3-(1) より恒等写像 $\mathrm{id}\colon X \times_{\mathbf{CG}} Y \longrightarrow X \times Y$ は連続である．補題 4.1-(4) より射影 $p_1\colon X \times Y \longrightarrow X,\ p_2\colon X \times Y \longrightarrow Y$ はどちらも連続だから，合成 $p_i \circ \mathrm{id}$ は連続である．i.e. $p_i \circ \mathrm{id}$ は **CG** の射である.

ここで $\forall W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG})$ および任意の **CG** の射 $f_1\colon W \longrightarrow X,\ f_2\colon W \longrightarrow Y$ を与える．積空間 $\times$ は **Top** における積だから，積の普遍性により射 $g\colon W \longrightarrow X \times Y$ が一意的に存在して $f_i = p_i \circ g$ を充たす．関手 k を作用させて命題 4.3-(5) を使うことで，所望の可換図式

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, dashed, "\exists! k(g)"] \arrow[dr, "f_i"'] & X \times_{\mathbf{CG}} Y \arrow[d, "p_i \circ \mathrm{id}"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

を得る．ただし $X_1 \coloneqq X,\ X_2 \coloneqq Y$ とおいた. ■

補題 4.7:

$\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}_2)$ に対して

$$k(X \times Y) = k(X) \times_{\mathbf{CG}} k(Y)$$

が成り立つ.

証明 集合としての等式が成り立つことは明らかなので，両辺の位相が等しいことを示す．

命題 4.3-(1) より恒等写像 $k(X) \longrightarrow X$, $k(Y) \longrightarrow Y$ は連続だから，恒等写像 $g\colon k(X) \times k(Y) \longrightarrow X \times Y$ も連続である．従って，$k(X) \times k(Y)$ のコンパクト集合は $X \times Y$ のコンパクト集合でもある．

逆に任意のコンパクト集合 $A \subset X \times Y$ をとる．補題 4.1-(4) より第 i 成分への射影 $p_i\colon X \times Y \longrightarrow X_i$ $(i = 1, 2)$ は連続なので $p_i(A) \subset X_i$ はどちらも X_i のコンパクト集合であり，故に命題 4.3-(3) より $k(X_i)$ のコンパクト集合でもある．従って $p_1(A) \times p_2(A)$ は $k(X) \times k(Y)$ のコンパクト集合であり，制限 $g|_{p_1(A) \times p_2(A)}\colon p_1(A) \times p_2(A) \longrightarrow p_1(A) \times p_2(A)$ はコンパクト集合から Hausdorff 空間への連続な全単射なので同相写像である（補題 4.3-(4)）．$A \subset p_1(A) \times p_2(A)$ であるから A は $k(X) \times k(Y)$ のコンパクト集合でもある．

以上の議論より $k(X) \times k(Y)$ と $X \times Y$ が同じコンパクト集合を持つことがわかった．従って k の定義より，$k(X) \times_{\mathbf{CG}} k(Y) = k\bigl(k(X) \times k(Y)\bigr)$ と $k(X \times Y)$ の位相は等しい． ■

命題 4.6: 圏 CG における等化写像の直積

$X_i, Y_i \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG})$ $(i = 1, 2)$ および $\mathbf{CG}$ の射としての等化写像 $q_i\colon X_i \longrightarrow Y_i$ を与える．このとき

$$q_1 \times q_2\colon X_1 \times_{\mathbf{CG}} X_2 \longrightarrow Y_1 \times_{\mathbf{CG}} Y_2$$

は $\mathbf{CG}$ の射として等化写像である．

4.1.4 圏 CG の関数空間

圏 $\mathbf{Top}$ において集合 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ を位相空間にしたい場合，よく**コンパクト開位相**を入れる．

定義 4.9: コンパクト開位相

$(X, \mathscr{O}_X), (Y, \mathscr{O}_Y)$ を位相空間とし，X のコンパクト集合全体の集合を $\mathscr{C}_X \subset 2^X$ とおく[a]．$C \in \mathscr{C}_X$, $U \in \mathscr{O}_Y$ に対して

$$W(C, U) \coloneqq \bigl\{ \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y) \bigm| \varphi(C) \subset U \bigr\} \subset \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$$

とおく．

集合 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ の**コンパクト開位相** (compact-open topology) とは，部分集合の族

$$\bigl\{W(C, U)\bigr\}_{C \in \mathscr{C}_X,\, U \in \mathscr{O}_Y}$$

を準基とする[b]位相のこと．

[a] 2^X は X の冪集合（部分集合全体の集合）

[b] 開基であるとは限らない．

集合 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ にコンパクト開位相を入れてできる位相空間のことを $\boldsymbol{C(X, Y)}$ と書くことにする．

補題 4.8:

位相空間 X, Y を与える．Y が Hausdorff 空間ならば，位相空間 $C(X, Y)$ も Hausdorff 空間である．

証明 互いに異なる任意の 2 点 $f, g \in C(X, Y)$ をとる．このときある $x_0 \in X$ に関して $f(x_0) \neq g(x_0)$ が成り立つ．仮定より Y は Hausdorff 空間なので，ある Y の開集合 $U, V \subset Y$ が存在して $f(x_0) \in U$ かつ $g(x_0) \in V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ を充たす．

ここで一点集合 $\{x_0\}$ はコンパクトなので，コンパクト開位相の定義より $C(X, Y)$ の部分集合 $W(\{x_0\}, U)$, $W(\{x_0\}, V)$ は開集合．さらに U, V の選び方から $f \in W(\{x_0\}, U)$ かつ $g \in W(\{x_0\}, V)$ かつ $W(\{x_0\}, U) \cap W(\{x_0\}, V) = \emptyset$ が成り立つ． ■

つまり，対応 $C\colon (X, Y) \longrightarrow C(X, Y)$ は圏 $\mathcal{T}_2$ において閉じている．しかし，$X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG})$ であっても $C(X, Y)$ がコンパクト生成空間になるとは限らない．

定義 4.10:

$X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}_2)$ とする．このとき $C(X, Y) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}_2)$ に関手 k を作用させて得られるコンパクト生成空間を

$$\mathbf{Map}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \coloneqq k\big(C(X, Y)\big)$$

と書く．

補題 4.9: evaluation の連続性

- $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}_2)$ に対して，写像

$$\varepsilon\colon C(X, Y) \times X \longrightarrow Y,\ (f, x) \longmapsto f(x)$$

  は，X の任意のコンパクト集合の上で連続である．
- $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG})$ に対して写像

$$k(\varepsilon)\colon \mathrm{Map}(X, Y) \times_{\mathbf{CG}} X \longrightarrow Y,\ (f, x) \longmapsto f(x)$$

  は連続である．i.e. ε は $\mathbf{CG}$ の射である．

証明
- 任意のコンパクト集合 $C \subset X$ および任意の開集合 $U \subset Y$ をとる．そして点 $\forall (f, x) \in (\varepsilon|_{C(X,Y)\times C})^{-1}(U)$ を一つ固定する．i.e. $x \in C$ かつ $f(x) \in U$ が成り立つ．

  $f|_C$ は連続だから $(f|_C)^{-1}(U) \subset C$ は C の開集合，i.e. 点 x の開近傍である．そして C はコンパクト Hausdorff 空間だから[*4] x のコンパクトな近傍 M が存在して $x \in M \subset (f|_C)^{-1}(U) \subset C$ を充たす．このときコンパクト開位相の定義より部分集合 $W(M, U) \subset C(X, Y)$ は開集合であり，従って $W(M, U) \times M \subset (\varepsilon|_{C(X,Y)\times C})^{-1}(U)$ は点 $(f, x) \in (\varepsilon|_{C(X,Y)\times C})^{-1}(U)$ の近傍である．(f, x) は任意だったので $(\varepsilon|_{C(X,Y)\times C})^{-1}(U)$ が開集合であることが示された．i.e. ε の制限 $\varepsilon|_{C(X,Y)\times C}$ は連続

[*4] コンパクト Hausdorff 空間は局所コンパクトである．そして局所コンパクト Hausdorff 空間の各点において，コンパクト閉近傍全体の集合は基本近傍系を成す．

である．

- 命題 4.4-(1) より，前半の ε に k を使った写像 $k(\varepsilon)\colon k\big(C(X,\,Y)\times Y\big) \longrightarrow k(Y)$ は連続である．$k(\varepsilon)$ の定義域および値域に関しては，命題 4.3-(5) と補題 4.7 より $k\big(C(X,\,Y)\times Y\big) = k\big(C(X,\,Y)\big)\times_{\mathbf{CG}} k(Y) = \mathrm{Map}(X,\,Y) \times_{\mathbf{CG}} Y,\ k(Y) = Y$ がわかるので証明が完了する．

■

補題 4.10:

$X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}),\ Y \in \mathcal{T}_2$ ならば

$$\mathrm{Map}(X,\,k(Y)) = \mathrm{Map}(X,\,Y) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG})$$

定理 4.2:

$X,\,Y,\,Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG})$ ならば

$$\mathrm{Map}(X,\,Y \times_{\mathbf{CG}} Z) = \mathrm{Map}(X,\,Y) \times_{\mathbf{CG}} \mathrm{Map}(X,\,Z)$$

が成り立つ．

<u>証明</u> 圏 $\mathbf{CG}$ における積の普遍性より，写像

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}}\,(X,\,Y \times_{\mathbf{CG}} Z) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}}\,(X,\,Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}}\,(X,\,Z) \\ f &\longmapsto (p_1 \circ f,\, p_2 \circ f)\end{aligned}$$

は well-defined な全単射である[*5]．

次に，左辺と右辺の位相が等しいことを示す．そのためにまず

$$C(X,\,Y \times Z) = C(X,\,Y) \times C(X,\,Z) \tag{4.1.1}$$

を示そう．積空間 $C(X,\,Y) \times C(X,\,Z)$ の準基の任意の元は，定義 4.9 の記号を使って $W(C,\,U) \times W(D,\,V)$ と書かれる．ただし $C,\,D$ は X のコンパクト集合で，$U,\,V$ はそれぞれ $Y,\,Z$ の開集合である．このとき写像 φ による逆像は

$$\varphi^{-1}\big(W(C,\,D) \times W(D,\,V)\big) = W(C,\,U \times Z) \cap W(D,\,Y \times V)$$

なので $C(X,\,Y \times Z)$ の開集合である．従って補題 4.1-(1) より φ が連続である．

逆に $C(X,\,Y \times Z)$ の準基の任意の元は $W(C,\,U \times V)$ の形をしている．このとき写像 φ^{-1} による逆像は

$$(\varphi^{-1})^{-1}\big(W(C,\,U \times V)\big) = W(C,\,U) \times W(C,\,V)$$

なので $C(X,\,Y) \times C(X,\,Z)$ の開集合である．従って補題 4.1-(1) より φ^{-1} も連続であり，φ が同相写像であることが示された．

式 (4.1.1) に k を使うと，補題 4.7, 4.10 より

$$\begin{aligned}k\big(C(X,\,Y \times Z)\big) &= \mathrm{Map}(X,\,k(Y \times Z)) = \mathrm{Map}(X,\,Y \times_{\mathbf{CG}} Z) \\ &= k\big(C(X,\,Y) \times C(X,\,Z)\big) = \mathrm{Map}(X,\,Y) \times_{\mathbf{CG}} \mathrm{Map}(X,\,Z)\end{aligned}$$

[*5] 補題 4.1-(4) より $p_i \circ f$ は連続写像なので φ は well-defined．なお，φ の定義域と値域は**ただの集合**であって，この時点ではまだコンパクト開位相を入れていない．

が従う． ■

定理 4.3: 随伴定理

$X,\ Y,\ Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG})$ ならば

$$\mathrm{Map}(X \times_{\mathbf{CG}} Y,\ Z) = \mathrm{Map}(X,\ \mathrm{Map}(Y,\ Z))$$

が成り立つ．

<u>証明</u> まず，$\mathcal{T}_2$ における写像

$$\mu\colon C(X \times_{\mathbf{CG}} Y,\ Z) \longrightarrow C\bigl(X,\ C(Y,\ Z)\bigr),\ f \longmapsto \bigl(x \longmapsto (y \longmapsto f(x,\ y))\bigr) \tag{4.1.2}$$

が well-defined であることを示す．$\forall f \in C(X \times_{\mathbf{CG}} Y,\ Z)$ を 1 つ固定する．補題 4.1-(5) より $\forall x \in X$ に対して写像 $\mu(f)(x) = f|_{\{x\}\times Y}$ は連続なので $\mu(f)(x) \in C(Y,\ Z)$ がわかる．よって示すべきは $\mu(f) \in C\bigl(X,\ C(Y,\ Z)\bigr)$ である．

補題 4.11:

写像 $\mu(f)\colon X \longrightarrow C(Y,\ Z)$ は連続である．

<u>証明</u> 位相空間 $C(Y,\ Z)$ の準基に属する開集合 $W(C,\ U)$ を任意にとる．コンパクト開位相の定義より C は Y のコンパクト集合で U は Z の開集合である．補題 4.1-(1) より $V := \mu(f)^{-1}\bigl(W(C,\ U)\bigr)$ が X の開集合であることを示せば良い．

$\forall x_0 \in V$ を 1 つとる．このとき $\mu(f)(x_0) = f|_{\{x_0\}\times Y} \in W(C,\ U)$ だから $\mu(f)(x_0)(C) = f(\{x_0\}\times C) \subset U$ である．i.e. $\{x_0\} \times C \subset f^{-1}(U)$ が成り立つ．f は連続だから $f^{-1}(U)$ は $X \times Y$ の開集合である．すると補題 4.5 が使えて，$x_0 \in U'$ かつ $C \subset V'$ かつ $U' \times V' \subset f^{-1}(U)$ を充たす X の開集合 U' と Y の開集合 V' の存在が言える．このとき $\mu(f)(U')(C) = f(U' \times C) \subset f(U' \times V') \subset U$ が成り立つので $U' \subset V$ である．i.e. U' は x_0 の開近傍でかつ $U' \subset V$ を充たす．x_0 は任意だったので V は開集合である． ■

次に μ が連続であることを示す．補題 4.9 より evaluation

$$\varepsilon\colon C(X \times_{\mathbf{CG}} Y,\ Z) \times_{\mathbf{CG}} X \times_{\mathbf{CG}} Y \longrightarrow Z$$

は連続である[*6]．よって補題 4.11 を使うと

$$\mu \circ \varepsilon\colon C(X \times_{\mathbf{CG}} Y,\ Z) \times_{\mathbf{CG}} X \longrightarrow C(Y,\ Z)$$

も連続．再度補題 4.11 を使うことで

$$\mu \circ \mu \circ \varepsilon\colon C(X \times_{\mathbf{CG}} Y,\ Z) \longrightarrow C\bigl(X,\ C(Y,\ Z)\bigr)$$

が連続であるとわかる．その上 $\mu \circ \mu \circ \varepsilon = \mu$ であるから μ が連続であることが示された．

[*6] $X \times_{\mathbf{CG}} Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG})$ なので．

次に μ が連続な逆写像を持つことを示す．

$$
\begin{aligned}
\varepsilon' &\colon C\bigl(X,\, C(Y,\, Z)\bigr) \times_{\mathbf{CG}} X \longrightarrow Z, \\
\varepsilon'' &\colon C(Y,\, Z) \times_{\mathbf{CG}} Y \longrightarrow Z
\end{aligned}
$$

をどちらも evaluation とすると，補題 4.9 よりこれらは連続である．よって合成

$$
\varepsilon'' \circ (\varepsilon' \times \mathrm{id}_Y) \colon C\bigl(X,\, C(Y,\, Z)\bigr) \times_{\mathbf{CG}} X \times_{\mathbf{CG}} Y \longrightarrow Z
$$

は連続である．補題 4.11 を使うことで

$$
\mu \circ \bigl(\varepsilon'' \circ (\varepsilon' \times \mathrm{id}_Y)\bigr) \colon C\bigl(X,\, C(Y,\, Z)\bigr) \longrightarrow C(X \times_{\mathbf{CG}} Y,\, Z)
$$

も連続であるとわかる．その上 $\mu \circ \bigl(\varepsilon'' \circ (\varepsilon' \times \mathrm{id}_Y)\bigr) = \mu^{-1}$ である．以上で式 (4.1.2) の μ が $\mathcal{T}_2$ の同相写像であることが示された．

最後に式 (4.1.2) に k を作用させて右辺に補題 4.10 を使うことで

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Map}(X \times_{\mathbf{CG}} Y,\, Z) &= k\Bigl(C\bigl(X,\, C(Y,\, Z)\bigr)\Bigr) \\
&= k\Bigl(C\bigl(X,\, k(C(Y,\, Z))\bigr)\Bigr) \\
&= \mathrm{Map}(X,\, \mathrm{Map}(Y,\, Z))
\end{aligned}
$$

がわかり，証明が完了する．

■

4.2 基点付きコンパクト生成空間

4.2.1 基点付き空間

空間対 (topological pair) とは，位相空間 X とその部分空間 $A \subset X$ の組 $(X,\, A)$ のことを言う．空間対の圏 **Pair** を[*7]次のように定義する：

- 対象を空間対とする．
- $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Pair}}\bigl((X,\, A),\, (Y,\, B)\bigr)$ を，連続写像 $f\colon X \longrightarrow Y$ であって $f(A) \subset B$ を充たすもの全体の集合とする．
- 合成を写像の合成とする．

空間の 3 対 (topological triad) とは，位相空間 X とその部分空間 $A_1,\, A_2 \subset X$ の 3 つ組 $(X,\, A_1,\, A_2)$ のことを言う．空間の 3 対の圏 **Tri** を[*8]次のように定義する：

- 対象を空間の 3 対とする．
- $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Tri}}\bigl((X,\, A_1,\, A_2),\, (Y,\, B_1,\, B_2)\bigr)$ を，連続写像 $f\colon X \longrightarrow Y$ であって $f(A_1) \subset B_1$ かつ $f(A_2) \subset B_2$ を充たすもの全体の集合とする．

[*7] この記号は一般的でないかもしれない．

[*8] この記号は一般的でないかもしれない．

- 合成を写像の合成とする．

3 対 $(X,\, A_1,\, A_2) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Tri})$ に対して $A_2 = \emptyset$ とすれば空間対になる．

定義 4.11: 基点付き空間

基点付き空間 (based space) とは，空間対 $(X,\, \{x_0\}) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Pair})$ のことを言い，$\boldsymbol{(X,\, x_0)}$ と略記される．

基点付きコンパクト生成空間の圏 $\mathbf{CG}_0$ を次のように定義する：

- $\mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_0)$ を基点付き空間 $(X,\, x_0)$ であって，かつ X がコンパクト生成空間であるもの集まりとする．
- $\mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}_0}\big((X,\, x_0),\, (Y,\, y_0)\big)$ は基点を保つ連続写像全体の集合とする．
- 合成を写像の合成とする．

$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG})$ に対して $X^+ := X \amalg \{\mathrm{pt}\}$ とおいて基点を付け，$\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}}(X,\, Y)$ に対して $f^+ \colon X^+ \longrightarrow Y^+$ を $f^+(x,\, 1) := \big(f(x),\, 1\big)$，$f^+(\mathrm{pt}, 2) := (\mathrm{pt},\, 2)$ で定義すると $X^+ \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_0)$，$f^+ \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}_0}(X^+,\, Y^+)$ が成り立つ．この対応 ${}^+ \colon \mathbf{CG} \longrightarrow \mathbf{CG}_0$ は忠実な関手だから $\mathbf{CG}$ を $\mathbf{CG}_0$ の部分圏と見做すことができる．

4.2.2 圏 CG_0 の積と和

命題 4.7: 圏 $\mathbf{CG}_0$ の積

$(X,\, x_0),\, (Y,\, y_0) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_0)$ に対して，

$$\big(X \times_{\mathbf{CG}} Y,\, (x_0,\, y_0)\big) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_0)$$

は積の普遍性を充たす．i.e. 圏 $\mathbf{CG}_0$ は常に積を持つ．

証明 $\forall (W,\, w_0) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_0)$ および任意の $\mathbf{CG}_0$ の射 $f_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}_0}\big((W,\, w_0),\, (X,\, x_0)\big)$，$f_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}_0}\big((W,\, w_0),\, (Y,\, y_0)\big)$ を与える．命題 4.5 より圏 $\mathbf{CG}$ における積の普遍性の可換図式

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, dashed, "\exists! g"] \arrow[dr, "f_2"] & \\
X & X \times_{\mathbf{CG}} Y \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & Y
\end{tikzcd}$$

が成り立つ．あとは $p_1,\, p_2,\, g$ が基点を保つことを示せば良い．

実際 $p_1(x_0,\, y_0) = x_0$，$p_2(x_0,\, y_0) = y_0$ なので $p_i\ (i = 1,\, 2)$ は圏 $\mathbf{CG}_0$ の射である．また，図式の可換性から $p_1 \circ g(w_0) = f_1(w_0) = x_0$ かつ $p_2 \circ g(w_0) = f_2(w_0) = y_0$ が成り立つ．故に $g(w_0) \in p_1^{-1}(\{x_0\}) \cap p_2^{-1}(\{y_0\}) = \{(x_0,\, y_0)\}$ が言える．i.e. g も $\mathbf{CG}_0$ の射である． ■

ところが，$\mathbf{CG}_0$ の和は disjoint unionではない．と言うのも，$(X,\, x_0),\, (Y,\, y_0) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_0)$ に対して，$X \amalg Y$ の「基点」と呼ぶべきものは標準的包含の像 $\iota_1(\{x_0\}) \cup \iota_2(\{y_0\}) = \{(x_0,\, 1),\, (y_0,\, 2)\}$ であり，1 点で

はなくなってしまう．解決策は，x_0 と y_0 を同一視することである．このような操作はウェッジ和と呼ばれるのだった：

命題 4.8: 圏 $\mathbf{CG}_0$ の和

$(X,\, x_0),\ (Y,\, y_0) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_0)$ に対して，$\sim\, \subset (X \amalg Y) \times (X \amalg Y)$ を $(x_0,\, 1) \sim (y_0,\, 2)$ を充たす最小の同値関係とする[a]．同値関係 $\sim$ による商空間を $X \vee Y$，商写像を $q\colon X \amalg Y \longrightarrow X \vee Y,\ x \longmapsto [x]$ と書くとき，

$$\big(X \vee Y,\, [(x_0,\, 1)]\big) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_0)$$

は和の普遍性を充たす．i.e. $\mathbf{CG}_0$ は常に和を持つ．

[a] つまり同値類を部分集合と見做したとき，$(x_0,\, 1) \sim (y_0,\, 2)$ を充たす同値類全体の共通部分のこと．

<u>**証明**</u> $\forall (W,\, w_0) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_0)$ および任意の $\mathbf{CG}_0$ の射 $f_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}_0}\big((X,\, x_0),\, (W,\, w_0)\big)$，$f_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}_0}\big((Y,\, y_0),\, (W,\, w_0)\big)$ を与える．$X \amalg Y$ は圏 $\mathbf{CG}$ における和だから，和の普遍性の可換図式

$$\begin{tikzcd} & W & \\ X \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "\iota_1"'] & X \amalg Y \arrow[u, dashed, "\exists! g"] & Y \arrow[ul, "f_2"'] \arrow[l, "\iota_2"] \end{tikzcd}$$

が成り立つ．ただし $\iota_i\colon X_i \longrightarrow X \amalg Y,\ x \longmapsto (x,\, i)\ (i = 1,\, 2)$ は標準的包含である．また，商空間の普遍性から $\mathbf{CG}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd} X \amalg Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & W \\ X \vee Y \arrow[ur, dashed, "\exists! h"] & \end{tikzcd}$$

が成り立つ．あとは $\tilde{\iota}_i \coloneqq q \circ \iota_i$ とおいて，$\tilde{\iota}_1,\, \tilde{\iota}_2,\, h$ が基点を保つことを示せば良い．

実際 $\tilde{\iota}_1(x_0) = [(x_0,\, 1)] = [(y_0,\, 2)] = \tilde{\iota}_2(y_0)$ が成り立つので $\tilde{\iota}_i\ (i = 1,\, 2)$ は圏 $\mathbf{CG}_0$ の射である．また，図式の可換性から $h \circ \tilde{\iota}_1(x_0) = g \circ \iota_1(x_0) = f_1(x_0) = w_0$ かつ $h \circ \tilde{\iota}_2(y_0) = g \circ \iota_2(y_0) = f_2(y_0) = w_0$ が成り立つ．故に $h\big([(x_0,\, 1)]\big) = w_0$ であり，h は $\mathbf{CG}_0$ の射である．

以上の議論から，$\mathbf{CG}_0$ の可換図式

$$\begin{tikzcd} & W & \\ X \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "\tilde{\iota}_1"'] & X \vee Y \arrow[u, dashed, "\exists! h"] & Y \arrow[ul, "f_2"'] \arrow[l, "\tilde{\iota}_2"] \end{tikzcd}$$

が成り立つ． ■

$\mathbf{CG}_0$ の和と積の関係は，次の可換図式によって特徴付けられる：

$$\begin{tikzcd}
 & X \vee Y \arrow[dd, hook, "j"] & \\
X \arrow[ur, "\tilde{\iota}_1"] & & Y \arrow[ul, "\tilde{\iota}_2"'] \\
 & X \times_{\mathbf{CG}} Y \arrow[ul, "p_1"] \arrow[ur, "p_2"'] &
\end{tikzcd}$$

ここに基点を保つ連続写像 $j\colon X \vee Y \hookrightarrow X \times_{\mathbf{CG}} Y$ は

$$j\bigl([(x,\,1)]\bigr) \coloneqq (x,\,y_0), \quad j\bigl([(y,\,2)]\bigr) \coloneqq (x_0,\,y)$$

で定義される単射である．

$$j(X \vee Y) = X \times_{\mathbf{CG}} \{y_0\} \cup \{x_0\} \times_{\mathbf{CG}} Y$$

であり，よく $X \vee Y$ と同一視される．

4.2.3　圏 CG_0 の関数空間

定義 4.12: 基点付き関数空間

$X,\,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}_2)$ とし，$(X,\,x_0),\,(Y,\,y_0)$ を基点付き空間とする．

- 基点を保つ連続写像全体の集合 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}_0}\bigl((X,\,x_0),\,(Y,\,y_0)\bigr)$ にコンパクト開位相を入れてできる位相空間を

$$\boldsymbol{C_0(X,\,Y)} \coloneqq C\bigl((X,\,x_0),\,(Y,\,y_0)\bigr)$$

  と書くことにする[a]．
- $C_0(X,\,Y)$ に関手 k を作用させて得られるコンパクト生成空間を

$$\mathbf{Map_0(\boldsymbol{X},\,\boldsymbol{Y})} \coloneqq k\bigl(C_0(X,\,Y)\bigr)$$

  と書く．$\mathrm{Map}_0(X,\,Y)$ の基点は唯一の[b]定数写像 $\mathrm{const}_{y_0}\colon X \longrightarrow Y,\ x \longmapsto y_0$ である．i.e. 組 $\bigl(\mathrm{Map}_0(X,\,Y),\,\mathrm{const}_{y_0}\bigr) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_0)$ である．

[a] 補題 4.6 より $C_0(X,\,Y) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}_2)$ である．
[b] 基点を保たないといけないので．

$\mathrm{Map}_0(X,\,Y)$ に関する随伴定理を述べるためにいくつかの下準備をする．

空間対 $(X,\,A) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Pair})$ を与える．X 上の同値関係を

$$\sim \coloneqq \bigl\{\,(x,\,y) \in X \times X \bigm| x = y \text{ または } \{x,\,y\} \subset A\,\bigr\} \tag{4.2.1}$$

と定義し，$\sim$ による商空間を $\boldsymbol{X/A} \coloneqq X/\sim$，商写像を $q\colon X \longrightarrow X/A$ と書く．このような構成は **collapse $\boldsymbol{A}$ to a point** と呼ばれる．

X/A に基点を付けたい場合は，一点集合 $\boldsymbol{a_0} := q(A)$ を基点に選ぶ．このとき等化写像 $q\colon X \longrightarrow X/A$ はそのまま **Pair** の射 $q\colon (X,\, A) \longrightarrow (X/A,\, a_0)$ と見做すことができる．X/A の重要な具体例としては，次のスマッシュ積がある：

定義 4.13: スマッシュ積（再掲）

$(X,\, x_0),\ (Y,\, y_0) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_0)$ に対して，**スマッシュ積**を

$$\boldsymbol{X \wedge Y} := \frac{X \times_{\mathbf{CG}} Y}{X \vee Y} = \frac{X \times_{\mathbf{CG}} Y}{X \times_{\mathbf{CG}} \{y_0\} \cup \{x_0\} \times_{\mathbf{CG}} Y}$$

と定義する．$q\colon X \times_{\mathbf{CG}} Y \longrightarrow X \wedge Y,\ (x,\, y) \longmapsto x \wedge y$ を商写像とするとき，$x_0 \wedge y = x_0 \wedge y_0 = x \wedge y_0\ (\forall x \in X,\, \forall y \in Y)$ が $X \wedge Y$ の基点となる．

X/A を作る際に A を X の閉集合とすることが多いが，これは次の補題による：

補題 4.12:

A が閉集合のとき，商写像の制限 $q|_{X \setminus A}\colon X \setminus A \longrightarrow q(X \setminus A)$ は同相写像である．

証明 同値関係の定義 (4.2.1) より $\forall x,\, y \in X \setminus A$ に対して $x \neq y \implies x \not\sim y \implies q(x) \neq q(y)$ が成り立つ．i.e. $q|_{X \setminus A}\colon X \setminus A \longrightarrow q(X \setminus A)$ は連続な全単射である．ところで A が X の閉集合なので $X \setminus A$ は X の開集合．故に $X \setminus A$ の任意の開集合 $U \subset X \setminus A$ は X においても開である．$q|_{X \setminus A}$ が全単射なので $(q|_{X \setminus A})^{-1}\bigl(q|_{X \setminus A}(U)\bigr) = q^{-1}\bigl(q(U)\bigr) = U$ が X の開集合ということになるが，q は等化写像だから $q|_{X \setminus A}(U)$ は X/A の開集合である．i.e. $q|_{X \setminus A}\colon X \setminus A \longrightarrow q(X \setminus A)$ は全単射な開写像であるから同相写像である． ■

! 暫くの間 $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG})$ とし，部分空間 $A \subset X$ を閉集合でかつ X/A が Hausdorff 空間となるようにとる．すると補題 4.2 より $X/A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG})$ である．特に $(X/A,\, a_0) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_0)$ となる．

補題 4.13:

$(X,\, x_0),\ (Y,\, y_0) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_0)$ とする．
このとき写像

$$q^*\colon C_0(X/A,\, Y) \longrightarrow C\bigl((X,\, A),\, (Y,\, y_0)\bigr),\ f \longmapsto f \circ q$$

は well-defined な全単射連続写像で，コンパクト集合の 1 対 1 対応を与える．
特に自然同値

$$\mathrm{Map}_0(X/A,\, Y) = \mathrm{Map}((X,\, A),\, (Y,\, y_0))$$

が成り立つ．

証明 q が全射連続写像なので q^* は well-defined かつ全単射な連続写像である．

コンパクト集合 $F \subset C\bigl((X,\, A),\, (Y,\, y_0)\bigr)$ を任意に取ったとき，逆写像 q^{*-1} が F の上で連続であることを示す．任意の 1 点 $g_0 \in F$ および $C_0(X/A,\, Y)$ の準基に属する開集合 $W(C,\, U) \subset C_0(X/A,\, Y)$ であって

$q^{*-1}(g_0) \in W(C, U)$ を充たすものをとる．このとき $g_0 \circ q(C) \subset U$ が成り立つ．

$a_0 \notin C$ ならば補題 4.12 より $q^{-1}(C) = (q|_{X \setminus A})^{-1}(C)$ は X のコンパクト集合である．よってコンパクト開位相の定義から $W\bigl(q^{-1}(C), U\bigr)$ は g_0 を含む $C\bigl((X, A), (Y, y_0)\bigr)$ の開集合で $q^{*-1}\bigl(W\bigl(q^{-1}(C), U\bigr)\bigr) \subset W(C, U)$ を充たす．

$a_0 \in C$ とする．F はコンパクトなので補題 4.9-(1) より evaluation $\varepsilon\colon F \times X \longrightarrow X$ は連続である．$e(F \times A) = y_0$ が成り立つ．また，命題 4.6 より $\mathbf{CG}$ における等化写像 $\mathrm{id}_F\colon F \longrightarrow F$, $q\colon X \longrightarrow X/A$ の直積 $\mathrm{id}_F \times q\colon F \times X \longrightarrow F \times (X/A)$ は等化写像なので，商空間の普遍性より $\mathbf{CG}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd}
F \times X \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\mathrm{id}_F \times q"'] & Y \\
F \times (X/A) \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{\varepsilon}"'] &
\end{tikzcd}$$

が成り立つ．$\overline{\varepsilon}(g_0, a_0) \in U$ なので，g_0 の開近傍 $g_0 \in V \subset F$ および a_0 の開近傍 $a_0 \in N \subset X/A$ が存在して $\overline{\varepsilon}(V \times N) \subset U$ を充たす．ここで $C' \coloneqq C \setminus (C \cap N)$ とおくと C' はコンパクト空間 C の閉集合なので補題 4.2 よりコンパクト．かつ $a_0 \notin C'$ である．従って $V \cap W\bigl(h^{-1}(C'), U\bigr)$ は g_0 の F における開近傍である．$\forall g \in V \cap W\bigl(h^{-1}(C'), U\bigr)$ は $g\bigl(h^{-1}(C)\bigr) \subset U$ かつ $g\bigl(h^{-1}(C')\bigr) \subset U$ を充たす．$C \subset C' \cup N$ であるから $h^{*-1}(g) \in W(C, U)$ である．

以上の議論と命題 4.4-(1) より，$k(q^*)^{-1} = k(q^{*-1})\colon \mathrm{Map}((X, A), (Y, y_0)) \longrightarrow \mathrm{Map}_0(X/A, Y)$ は連続である．i.e. $k(q^*)\colon \mathrm{Map}_0(X/A, Y) \longrightarrow \mathrm{Map}((X, A), (Y, y_0))$ は同相写像である． ■

定理 4.4: 圏 $\mathbf{CG}_0$ における随伴定理

$(X, x_0), (Y, y_0), (Z, z_0) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_0)$ ならば

$$\mathrm{Map}_0(X \wedge Y, Z) = \mathrm{Map}_0\bigl(X, \mathrm{Map}_0(Y, Z)\bigr)$$

が成り立つ．

<u>証明</u> $W \coloneqq X \times_{\mathbf{CG}} \{y_0\} \cup \{x_0\} \times_{\mathbf{CG}} Y$ とおくと，スマッシュ積の定義より $X \wedge Y = X \times_{\mathbf{CG}} Y/W$ である．補題 4.13 より

$$\mathrm{Map}_0(X \times_{\mathbf{CG}} Y/W, Z) = \mathrm{Map}((X \times_{\mathbf{CG}} Y, W), (Z, z_0))$$

が成り立つ．右辺は $\mathrm{Map}(X \times_{\mathbf{CG}} Y, Z)$ の部分空間である．

ところで，$\mathbf{CG}$ の随伴定理より $\mathrm{Map}(X \times_{\mathbf{CG}} Y, Z) = \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y, Z))$ が成り立つ．この同相によって

$$\mathrm{Map}((X \times_{\mathbf{CG}} Y, W), (Z, z_0)) = \mathrm{Map}_0\bigl(X, \mathrm{Map}_0(Y, Z)\bigr)$$

が言える． ■

4.3 非退化な基点を持つコンパクト生成空間

非退化な基点を持つコンパクト生成空間の圏 $\mathbf{CG}_*$ を次のように定義する：

- $\mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$ は基点付きコンパクト生成空間 $(X,\,x_0)$ であって NDR 対でもあるもの全体とする[*9].
- $\mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}_*}\big((X,\,x_0),\,(Y,\,y_0)\big)$ は基点を保つ連続写像全体の集合とする.
- 合成を写像の合成とする.

$\mathbf{CG}_*$ は $\mathbf{CG}_0$ の充満部分圏である.

補題 4.14:

$(X,\,A),\,(Y,\,B)$ を NDR 対とすると,

$$
\begin{array}{cccc}
 & & X\times B & \\
X\times Y & X\times B\cup A\times Y & & A\times B \\
 & & A\times Y &
\end{array}
$$

を組み合わせて得られる 9 個の全ての空間対は NDR 対である.

証明 ■

補題 4.14 より,積は $\mathbf{CG}_0$ と全く同様に構成できる.

命題 4.9: 圏 $\mathbf{CG}_*$ の積

$(X,\,x_0),\,(Y,\,y_0)\in\mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$ に対して,

$$\big(X\times_{\mathbf{CG}}Y,\,(x_0,\,y_0)\big)\in\mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$$

は積の普遍性を充たす.i.e. 圏 $\mathbf{CG}_*$ は常に積を持つ.

和も $\mathbf{CG}_*$ と同じである.

命題 4.10: 圏 $\mathbf{CG}_*$ の和

$(X,\,x_0),\,(Y,\,y_0)\in\mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$ に対して,$\sim\,\subset(X\amalg Y)\times(X\amalg Y)$ を $(x_0,\,1)\sim(y_0,\,2)$ を充たす最小の同値関係とする[a].同値関係 $\sim$ による商空間を $X\vee Y$,商写像を $q\colon X\amalg Y\longrightarrow X\vee Y,\ x\longmapsto[x]$ と書くとき,

$$\big(X\vee Y,\,[(x_0,\,1)]\big)\in\mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$$

は和の普遍性を充たす.i.e. $\mathbf{CG}_*$ は常に和を持つ.

[a] つまり同値類を部分集合と見做したとき,$(x_0,\,1)\sim(y_0,\,2)$ を充たす同値類全体の共通部分のこと.

[*9] i.e. 包含写像 $\{x_0\}\hookrightarrow X$ はコファイブレーションである