第 3 章

コホモロジーの定義

まず，純粋に代数的な準備をする．

補題 3.1: 分裂補題

左 R 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i_1} M \xrightarrow{p_2} M_2 \longrightarrow 0 \tag{3.0.1}$$

が与えられたとする．このとき，以下の二つは同値である：

(1) 左 R 加群の準同型 $i_2\colon M_2 \longrightarrow M$ であって $p_2 \circ i_2 = 1_{M_2}$ を充たすものが存在する
(2) 左 R 加群の準同型 $p_1\colon M \longrightarrow M_1$ であって $p_1 \circ i_1 = 1_{M_1}$ を充たすものが存在する

証明 **(1) $\Longrightarrow$ (2)** 写像

$$p_1'\colon M \longrightarrow M,\ x \longmapsto x - i_2\big(p_2(x)\big)$$

を定義すると，

$$p_2\big(p_1'(x)\big) = p_2(x) - ((p_2 \circ i_2) \circ p_2)(x) = p_2(x) - p_2(x) = 0$$

が成り立つ．従って，(3.0.1) が完全列であることを使うと $p_1'(x) \in \operatorname{Ker} p_2 = \operatorname{Im} i_1$ である．さらに i_1 が単射であることから

$$\exists! y \in M_1,\ p_1'(x) = i_1(y)$$

が成り立つ．ここで写像

$$p_1\colon M \longrightarrow M_1,\ x \longmapsto y$$

を定義するとこれは準同型写像であり，$\forall x \in M_1$ に対して

$$p_1'\big(i_1(x)\big) = i_1(x) - (i_2 \circ (p_2 \circ i_1))(x) = i_1(x)$$

が成り立つ[*1]ことから

$$(p_1 \circ i_1)(x) = x$$

[*1] (3.0.1) が完全列であるため，$p_2 \circ i_1 = 0$

とわかる．i.e. $p_1 \circ i_1 = 1_{M_1}$

(1) $\Longleftarrow$ **(2)** (3.0.1) は完全列であるから $M_2 = \operatorname{Ker} 0 = \operatorname{Im} p_2$ である．従って $\forall x \in M_2 = \operatorname{Im} p_2$ に対して，$x = p_2(y)$ を充たす $y \in M$ が存在する．ここで写像

$$i_2 \colon M_2 \longrightarrow M,\ x \longmapsto y - i_1\bigl(p_1(y)\bigr)$$

は well-defined である．$x = p_2(y')$ を充たす勝手な元 $y' \in M$ をとってきたとき，$p_2(y - y') = 0$ より $y - y' \in \operatorname{Ker} p_2 = \operatorname{Im} i_1$ だから，i_1 の単射性から

$$\exists! z \in M_1, \quad y - y' = i_1(z)$$

が成り立ち，このとき

$$\Bigl(y - i_1\bigl(p_1(y)\bigr)\Bigr) - \Bigl(y' - i_1\bigl(p_1(y')\bigr)\Bigr) = i_1(z) - (i_1 \circ (p_1 \circ i_1))(z) = i_1(z) - i_1(z) = 0$$

とわかるからである．i_2 は準同型写像であり，$\forall x \in M_2$ に対して

$$(p_2 \circ i_2)(x) = p_2(y) - ((p_2 \circ i_1) \circ p_1)(y) = p_2(y) = x$$

なので $p_2 \circ i_2 = 1_{M_2}$.

■

系 3.1:

左 R 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i_1} M \xrightarrow{p_2} M_2 \longrightarrow 0$$

が補題 3.1 の条件を充たすならば

$$M \cong M_1 \oplus M_2$$

<u>**証明**</u> 補題 3.1 の条件 (1) が満たされているとする．このとき補題 3.1 証明から $\forall x \in M$ に対して

$$i_1\bigl(p_1(x)\bigr) = p_1'(x) = x - i_2\bigl(p_2(x)\bigr) \quad\Longleftrightarrow\quad i_1\bigl(p_1(x)\bigr) + i_2\bigl(p_2(x)\bigr) = x$$

また，完全列の定義から $p_2\bigl(i_1(x)\bigr) = 0$ であるから $\forall x \in M_2$ に対して

$$p_1'\bigl(i_2(x)\bigr) = i_2(x) - ((i_2 \circ p_2) \circ i_2)(x) = 0 = i_1(0)$$

であり，結局 $p_1\bigl(i_2(x)\bigr) = 0$ とわかる．

ここで準同型写像

$$\begin{aligned} f &\colon M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M,\ (x,\, y) \longmapsto i_1(x) + i_2(y), \\ g &\colon M \longrightarrow M_1 \oplus M_2,\ x \longmapsto \bigl(p_1(x),\, p_2(x)\bigr) \end{aligned}$$

を定めると

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x,\, y) &= \bigl(p_1(i_1(x)) + p_1(i_2(y)),\, p_2(i_1(x)) + p_2(i_2(x))\bigr) = (x,\, y), \\ (f \circ g)(x) &= i_1(p_1(x)) + i_2(p_2(x)) = x \end{aligned}$$

なので $f,\, g$ は同型写像. ■

定義 3.1: 分裂

左 R 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i_1} M \xrightarrow{p_2} M_2 \longrightarrow 0$$

が**分裂** (split) するとは，補題 3.1 の条件を充たすことをいう．

左 R 加群 N および左 R 加群の準同型 $f\colon M_1 \longrightarrow M_2$ に対して

$$f_*\colon \mathrm{Hom}_R(N,\, M_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N,\, M_2),\ \varphi \longmapsto f \circ \varphi$$
$$f^*\colon \mathrm{Hom}_R(M_2,\, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M_1,\, N),\ \varphi \longmapsto \varphi \circ f$$

とおく．f_*, f^* は $\mathbb{Z}$ 加群の準同型である．

命題 3.1:

(1) $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$ を左 R 加群の完全列，N を左 R 加群とすると，$\mathbb{Z}$ 加群[a]の完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N,\, M_1) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(N,\, M_2) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(N,\, M_3)$$

が成り立つ．

(2) $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$ を左 R 加群の完全列，N を左 R 加群とすると，$\mathbb{Z}$ 加群の完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M_3,\, N) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(M_2,\, N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(M_3,\, N)$$

が成り立つ．

(3) $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$ を**分裂する**左 R 加群の完全列，N を左 R 加群とすると，$\mathbb{Z}$ 加群の完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N,\, M_1) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(N,\, M_2) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(N,\, M_3) \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M_3,\, N) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(M_2,\, N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(M_1,\, N) \longrightarrow 0$$

が成り立つ．

[a] i.e. 和について可換群

証明 (1) まず，$\varphi \in \mathrm{Ker}\, f_* \iff f \circ \varphi = 0$ かつ f は単射なので $\mathrm{Ker}\, f_* \subset \mathrm{Im}\, 0$ である[*2]．$\mathrm{Ker}\, f_* \supset \mathrm{Im}\, 0$ は明らかであり，$\mathrm{Ker}\, f_* = \mathrm{Im}\, 0$ が言えた．

次に，$g \circ f = 0$ なので

$$\psi \in \mathrm{Im}\, f_* \iff \exists \alpha \in \mathrm{Hom}_R(N,\, M_1),\ \psi = f \circ \alpha \implies g_*(\psi) = g \circ f \circ \alpha = 0$$

が成り立ち，$\mathrm{Ker}\, g_* \supset \mathrm{Im}\, f_*$ がわかる．また，

$$\psi \in \mathrm{Ker}\, g_* \iff g \circ \psi = 0 \implies \mathrm{Im}\, \psi \subset \mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Im}\, f$$

[*2] $f\colon M_1 \to M_2$ は単射だから $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$．故に $\forall x \in N$ に対して $f(\varphi(x)) = 0 \iff \varphi(x) \in \mathrm{Ker}\, f = \{0\}$．i.e. $\varphi = 0$

が成り立つ．f は単射だから[*3]

$$\exists\beta \in \mathrm{Hom}_R\,(N,\, M_2), \quad \psi = f\circ\beta = f_*(\beta) \in \mathrm{Im}\, f_*$$

が成り立つ．i.e. $\mathrm{Ker}\, g_* \subset \mathrm{Im}\, f_*$ である．

(2)　まず，$\varphi \in \mathrm{Ker}\, g^* \iff \varphi\circ g = 0$ かつ g が全射なので $\mathrm{Ker}\, g_* \subset \mathrm{Im}\, 0$ である[*4]．$\mathrm{Ker}\, g^* \supset \mathrm{Im}\, 0$ は自明なので $\mathrm{Ker}\, g^* = \mathrm{Im}\, 0$ が言えた．

次に，$g\circ f = 0$ より

$$\psi \in \mathrm{Im}\, g^* \iff \exists\alpha \in \mathrm{Hom}_R\,(M_3,\, N),\ \psi = \alpha\circ g \implies f^*(\psi) = \alpha\circ g\circ f = 0$$

が成り立ち，$\mathrm{Ker}\, f^* \supset \mathrm{Im}\, g^*$ がわかる．また，

$$\psi \in \mathrm{Ker}\, f^* \iff \psi\circ f = 0 \implies \psi(\mathrm{Im}\, f) = 0$$

より $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, \psi$ であるから，商加群の普遍性より次の可換図式が成り立つ[*5]：

$$\begin{tikzcd}
M_2 \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "g"] & N \\
M_2/\,\mathrm{Im}\, f \cong M_3 \arrow[ur, "\exists! h"'] &
\end{tikzcd}$$

i.e. $\psi = h\circ g = g^*(h) \in \mathrm{Im}\, g^*$ であり，$\mathrm{Ker}\, f^* \subset \mathrm{Im}\, g^*$ がわかった．

(3)　与えられた完全列が分裂するので，

$$\begin{aligned}
&\exists i_2 \in \mathrm{Hom}_R\,(M_3,\, M_2),\ g\circ i_2 = 1_{M_3}\\
&\exists p_1 \in \mathrm{Hom}_R\,(M_2,\, M_1),\ p_1\circ f = 1_{M_1}
\end{aligned}$$

である．故に

$$\begin{aligned}
g_*\circ i_{2*} &= (g\circ i_2)_* = 1_{M_3 *} = 1_{\mathrm{Hom}_R\,(N,\, M_3)}\\
f^*\circ {p_1}^* &= (p_1\circ f)^* = {1_{M_1}}^* = 1_{\mathrm{Hom}_R\,(M_1,\, N)}
\end{aligned}$$

なので，$\forall\varphi \in \mathrm{Hom}_R\,(N,\, M_3)$, $\forall\psi \in \mathrm{Hom}_R\,(M_1,\, N)$ に対して

$$\begin{aligned}
\varphi &= g_*\bigl(i_{2*}(\varphi)\bigr) \in \mathrm{Im}\, g_*\\
\psi &= f^*\bigl({p_2}^*(\psi)\bigr) \in \mathrm{Im}\, f^*
\end{aligned}$$

が成り立つ．i.e. $\mathrm{Im}\, g_* = \mathrm{Ker}\, 0$, $\mathrm{Im}\, f^* = \mathrm{Ker}\, 0$ である．

残りは (1), (2) から従う．

■

[*3] したがって $\forall x \in N$ に対して $\exists! y \in \mathrm{Im}\, f \subset M_2$, $\psi(x) = f(y)$ であり，写像 $\beta\colon N \to M_2$, $x \mapsto y$ は well-defined.

[*4] $g\colon M_2 \to M_3$ が全射なので $\forall x \in M_3$, $\exists y \in M_2$, $x = g(y)$．故に $\varphi(x) = (\varphi\circ g)(y) = 0$．i.e. $\varphi = 0$.

[*5] $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$ が完全列なので $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, g$ かつ $M_3 = \mathrm{Im}\, g$．よって準同型定理から $M_2/\,\mathrm{Im}\, f = M_2/\,\mathrm{Ker}\, g \cong M_3$.

一般のコチェイン複体を定義する．

定義 3.2: コチェイン複体

R を可換環とする．加群と準同型の族 $C^\bullet = \left\{C^q,\, \delta^q\colon C^q \to C^{q+1}\right\}_{q\geq 0}$ が **R コチェイン複体**であるとは，$\forall q \geq 0$ について C^q が R-加群，δ^q が R 準同型であって

$$\delta^{q+1}\delta^q = 0$$

が成り立つことを言う．

- δ^q を**余境界写像** (coboundary map) と呼ぶ．
- C^q の部分加群

$$Z^q(C^\bullet) \coloneqq \mathrm{Ker}\bigl(\delta^q\colon C^q \to C^{q+1}\bigr)$$

  を**第 q コサイクル群**，その元を **q-コサイクル** (q-cocycle)，
- C^q の部分加群

$$B^q(C^\bullet) \coloneqq \mathrm{Im}\bigl(\delta^{q-1}\colon C^{q-1} \to C^q\bigr)$$

  を**第 q コバウンダリー群**，その元を **q-コバウンダリー** (q-coboundary) と呼ぶ．

3.1　コチェイン写像

$C^\bullet = \left\{C^q,\, \delta^q\right\}_{q\geq 0}$，$D^\bullet = \left\{D^q,\, \delta'^q\right\}_{q\geq 0}$ をチェイン複体とする．

定義 3.3: コチェイン写像

準同型 $f_q\colon C^q \to D^q$ の族 $f_\bullet \coloneqq \left\{f_q\right\}_{q\geq 0}$ が**コチェイン写像** (cochain map) であるとは，$\forall q \geq 0$ に対して

$$\delta'^q \circ f_q = f_{q+1} \circ \delta^q$$

が成り立つことを言う．i.e. 図式 3.1 が可換になると言うこと．

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\delta^{q-2}"] & C^{q-1} \arrow[r, "\delta^{q-1}"] \arrow[d, "f_{q-1}"] & C^q \arrow[r, "\delta^q"] \arrow[d, "f_q"] & C^{q+1} \arrow[r, "\delta^{q+1}"] \arrow[d, "f_{q+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\delta'^{q-2}"] & D^{q-1} \arrow[r, "\delta'^{q-1}"] & D^q \arrow[r, "\delta'^q"] & D^{q+1} \arrow[r, "\delta'^{q+1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

図 3.1: コチェイン写像

補題 3.2:

$\forall q \geq 0$ について以下が成り立つ：

$$
\begin{aligned}
f_q\big(Z^q(C^\bullet)\big) &\subset Z^q(D^\bullet) \\
f_q\big(B^q(C^\bullet)\big) &\subset B^q(D^\bullet)
\end{aligned}
$$

<u>**証明**</u> 一つ目は

$$
\begin{aligned}
z \in Z^q(C^\bullet) = \operatorname{Ker}\delta^q \quad &\Longleftrightarrow \quad \delta^q(z) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \delta'^q\big(f_q(z)\big) = f_{q+1}\big(\delta^q(z)\big) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad f_q(z) \in Z^q(D^\bullet) = \operatorname{Ker}\delta'^q
\end{aligned}
$$

二つ目は

$$
\begin{aligned}
b \in B^q(C^\bullet) = \operatorname{Ker}\delta^q \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists \beta \in C^{q-1},\ b = \delta^{q-1}(\beta) \\
&\Longrightarrow \quad f_q(b) = \delta'^{q-1}\big(f_{q-1}(\beta)\big) \in B^q(D^\bullet) = \operatorname{Im}\delta'^{q-1}
\end{aligned}
$$

■

いま，コチェイン写像 $f_\bullet \coloneqq \big\{f_q\colon C^q \to D^q\big\}_{q\geq 0}$ を与える．標準射影を

$$
\pi\colon Z^q(D^\bullet) \to Z^q(D^\bullet)/B^q(D^\bullet), z \mapsto [z] = z + B^q(D^\bullet)
$$

とおくと，補題 3.2 から

$$
(\pi \circ f_q)\big(B^q(C^\bullet)\big) \subset \pi\big(B^q(D^\bullet)\big) = \{0_{Z^q(D^\bullet)/B^q(D^\bullet)}\}
$$

が成り立つ．i.e. $B^q(C^\bullet) \subset \operatorname{Ker}\pi \circ f_q$ である．よって商加群の普遍性から，次のような可換図式を書くことができる：

$$
\begin{tikzcd}
Z^q(C^\bullet) \arrow[r, "f_q"] \arrow[d, "p"'] & Z^q(D^\bullet) \arrow[r, "\pi"] & Z^q(D^\bullet)/B^q(D^\bullet) \\
Z^q(C^\bullet)/B^q(C^\bullet) \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{f_q}"] \arrow[urr, dashed, "\exists!\overline{\pi\circ f_q}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

図 3.2: 誘導準同型

定義 3.4: コチェイン写像による誘導準同型

図式 3.2 中の赤字で示した準同型は**誘導準同型** (induced homomorphism) と呼ばれ，コホモロジー群の間の準同型を定める：

$$
f_* \coloneqq \overline{\pi \circ f_q}\colon H^q(C^\bullet) \to H^q(D^\bullet),\ [z] \mapsto [f_q(z)]
$$

3.2 特異コホモロジー

しばらくの間 $\mathbb{Z}$ 加群 M を一つ取って固定する．

定義 3.5: 特異 q コチェイン

位相空間 X および $\forall q \geq 0$ に対して

$$S^q(X;\, M) \coloneqq \mathrm{Hom}\bigl(S_q(X),\, M\bigr)$$

と定義される $S^q(X;\, M)$ の元は**特異 $\boldsymbol{q}$ コチェイン** (sigular q-cochain) と呼ばれる．

双線型写像

$$\langle\ ,\ \rangle\colon S^q(X;\, M) \times S_q(X) \to M,\ (u,\, c) \mapsto u(c)$$

は **Kronecker pairing** と呼ばれる．

定義 3.6: 特異コチェインの余境界写像

境界写像 $\partial_{q+1}\colon S_{q+1}(X) \to S_q(X)$ の双対写像を

$$\delta^q\colon S^q(X;\, M) \to S^{q+1}(X;\, M),\ u \mapsto u \circ \partial_{q+1}$$

と書く．

定義より以下が成り立つ：

$$\langle \delta^q u,\, c\rangle = \langle u,\, \partial_{q+1} c\rangle$$

前節の議論により

$$\delta^q \delta^{q-1} = 0$$

は分かっている．これは

$$\mathrm{Im}\,\delta^{q-1} \subset \mathrm{Ker}\,\delta^q$$

を意味するので，

$$Z^q\bigl(S^\bullet(X;\, M)\bigr) \coloneqq \mathrm{Ker}\,\delta^q$$
$$B^q\bigl(S^\bullet(X;\, M)\bigr) \coloneqq \mathrm{Im}\,\delta^{q-1}$$

と書くと次のような構成ができる：

定義 3.7: 特異コホモロジー

族 $\bigl\{S^q(X;\, M),\, \delta^q\bigr\}_{q\geq 0}$ は位相空間 X の**特異コチェイン複体** (singular cochain complex) と呼ばれ，そのコホモロジーは

$$H^q(X;\, M) \coloneqq Z^q\bigl(S^\bullet(X;\, M)\bigr)/B^q\bigl(S^\bullet(X;\, M)\bigr)$$

と書かれる．$H^q(X;\, M)$ は $\mathbb{Z}$ 加群 M に値を持つ X の**特異コホモロジー群** (singular cohomology group with coefficients in the $\mathbb{Z}$ module M) と呼ばれる．

3.2.1 Kronecker 写像

Kronecker pairing は双線型写像

$$\langle\ ,\ \rangle \colon H^q(X;\, M) \times H_q(X) \to M,\ ([u],\, [z]) \mapsto u(z) \tag{3.2.1}$$

を誘導する.

補題 3.3:

上で定義した写像 $\langle\ ,\ \rangle \colon H^q(X;\, M) \times H_q(X) \to M$ は well-defined である.

証明 $\forall f \in S^{q-1}(X;\, M),\ \forall c \in S_{q+1}(X)$ に対して

$$\begin{aligned} u + \delta^{q-1} f &\in [u] = u + \operatorname{Im} \delta^{q-1}, \\ z + \partial_{q+1} c &\in [z] = z + \operatorname{Im} \partial_{q+1} \end{aligned}$$

である. これらの pairing を計算すると

$$\begin{aligned} (u + \delta^{q-1} f)(z + \partial_{q+1} c) &= (u + f\partial_q)(z + \partial_{q+1} c) \\ &= u(z) + f\big(\partial_q z\big) + u\big(\partial_{q+1} c\big) + \partial_q \partial_{q+1} c \\ &= u(z) + f\big(\partial_q z\big) + (\delta^q u)(c) \end{aligned}$$

$u \in \operatorname{Ker} \delta^q,\ z \in \operatorname{Ker} \partial_q$ なので結局

$$(u + \delta^{q-1} f)(z + \partial_{q+1} c) = u(z)$$

が従う. ■

定義 3.8: Kronecker 写像

(3.2.1) の双線型写像が定める準同型

$$\kappa \colon H^q(X;\, M) \to \operatorname{Hom}\big(H_q(X),\, M\big),\ [u] \mapsto \langle [u],\, \text{-} \rangle$$

を **Kronecker 写像** (Kronecker map) と呼ぶ.

3.2.2 関手性

$f \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\, Y)$ をとる. 補題??より, f はチェイン写像

$$f_* \colon S_\bullet(X) \longrightarrow S_\bullet(Y)$$

を誘導した.

一方,

$$f^* \colon S^q(Y;\, M) \longrightarrow S^q(X;\, M),\ u \longmapsto u \circ f_*$$

という準同型も考えられる．f_* がチェイン写像であることから

$$\begin{aligned}(\delta^q \circ f^*)(u) &= f^*(u) \circ \partial_{q+1} \\ &= u \circ (f_* \circ \partial_{q+1}) \\ &= (u \circ \partial'_{q+1}) \circ f_* \\ &= f^*(u \circ \partial'_{q+1}) \\ &= (f^* \circ \delta'^q)(u)\end{aligned}$$

が成立するので f^* はコチェイン写像の要件を充たす．従ってコチェイン写像による誘導準同型を考えることができる：

$$f^* \colon H^q(Y;\, M) \longrightarrow H^q(X;\, M),\; [u] \mapsto [f^*(u)]$$

$\forall [u] \in H^q(Y;\, M),\; [z] \in H_q(X)$ に対して

$$\begin{aligned}\langle f^*[u],\, [z] \rangle &= \langle [f^* u],\, [z] \rangle \\ &= (f^* \circ u)(z) \\ &= (u \circ f_*)(z) \\ &= u\big(f_*(z)\big) \\ &= \langle [u],\, f_*[z] \rangle\end{aligned}$$

が成り立つ．この意味で f^* は f_* の一種の双対写像であると言える．

命題 3.2: コホモロジーの関手性

H^q は位相空間の圏 **Top** から $\mathbb{Z}$ 加群の圏 $\mathbb{Z}$-**Mod** への**反変**関手となる．i.e. $\forall X,\, Y,\, Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ と $\forall q \geq 0$ に対して以下が成り立つ：

(1) 恒等写像 $1_X \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\, X)$ について

$$(1_X)^* = 1_{H^q(X;\, M)} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}}\big(H^q(X;\, M),\, H^q(X;\, M)\big)$$

(2) 連続写像 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\, Y),\; g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Y,\, Z)$ について

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}}\big(H^q(Z;,\, M),\, H_q(X;\, M)\big)$$

3.3 コホモロジーの Eilenberg-Steenrod 公理系

公理 3.1: コホモロジーの Eilenberg-Steenrod 公理系

コホモロジー理論は

$$H^{\bullet}\colon \{\text{pairs, ct. maps}\} \longrightarrow \{\text{graded } R \text{ modules, homomorphisms}\}$$

なる反変関手であって，以下の公理を充たすものである：

(ES-ch1) 任意の空間対 $(X,\, A)$ および非負整数 $q \geq 0$ に対して**自然な**準同型

$$\delta\colon H^q(A) \longrightarrow H^{q+1}(X,\, A)$$

が存在して，包含写像 $i\colon A \hookrightarrow X,\ j\colon X \hookrightarrow (X,\, A)$ を用いて次のホモロジー長完全列が誘導される：

$$\cdots \to H^{q-1}(A) \xrightarrow{\delta} H^q(X,\, A) \xrightarrow{j^*} H_q(X) \to \cdots$$

(ES-ch2) 2 つの連続写像 $f,\, g\colon (X,\, A) \to (Y,\, B)$ がホモトピックならば，誘導準同型 $f^*,\, g^*\colon H^q(Y,\, B) \to H^q(X,\, A)$ は

$$f^* = g^*$$

となる．

(ES-h3) $U \subset X$ かつ $\overline{U} \subset \mathrm{Int}(A)$ ならば，包含写像 $i\colon (X \setminus U,\, A \setminus U) \longrightarrow (X,\, A)$ が誘導する準同型

$$i^*\colon H^q(X,\, A) \longrightarrow H^q(X \setminus U,\, A \setminus U)$$

は $\forall q \geq 0$ に対して同型となる．

(ES-h4) $q \neq 0$ ならば $H^q(*) = 0$.