第 9 章

ファイバー束

二つの C^∞ 多様体 B, N が与えられたとしよう．B を**底空間**，F を**ファイバー**と呼ぶことにする．このとき，大雑把に言うと，**局所的に**積多様体[*1] $B \times F$ と同一視される C^∞ 多様体 E のことを ***F* をファイバーとする *B* 上のファイバー束**と呼ぶ．もう少し真面目に言うと，M のチャート (U_i, φ) をとってきたときに積多様体

$$U_i \times F \tag{9.0.1}$$

と E の開集合との間に微分同相写像が存在することである．

しかし，これだけだと E の**大域的な**幾何構造が見えてこない．情報の欠落をなんとかするには M の開被覆 $\{U_i\}$ に関して局所的な積多様体 (9.0.1) の構造を張り合わせる必要がある．そのために，我々は全ての $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ 上において，**変換関数** $\{\Phi_{ij}\}$ を

$$\Phi_{ij} \colon F|_{U_i} \to F|_{U_j}$$

として用意する．変換関数の構成の如何によっては，ファイバー束 E の大域的な幾何構造は極めて複雑なものになりうる．

これだけだとよくわからないので，まず手始めに S^1 を底空間とするファイバー束を具体的に構成してみよう．1 次元実多様体 S^1 の C^∞ アトラス $\{(U_+, \varphi_+),\ (U_-, \varphi_-)\}$ を次のようにとる：

$$\begin{aligned}
U_+ &:= \left\{e^{\mathrm{i}\theta} \mid \theta \in (-\varepsilon,\, \pi + \varepsilon)\right\}, && \varphi_+ \colon U_+ \to \mathbb{R},\ e^{\mathrm{i}\theta} \mapsto \theta \\
U_- &:= \left\{e^{\mathrm{i}\theta} \mid \theta \in (\pi - \varepsilon,\, 2\pi + \varepsilon)\right\}, && \varphi_- \colon U_- \to \mathbb{R},\ e^{\mathrm{i}\theta} \mapsto \theta
\end{aligned}$$

ファイバー F としては 1 次元実多様体

$$F := [-1, 1] \subset \mathbb{R}$$

を選ぶ．このときファイバー束 E は積多様体 $U_+ \times F$ および $U_- \times F$ の二部分からなり，それぞれチャート

$$\big(U_+;\ \theta,\, t_+\big), \quad \big(U_-;\ \theta,\, t_-\big)$$

を持つ（当然だが $t_\pm \in [-1, 1]$ である）．なお，この時点では $U_+ \times F, U_- \times F$ の「つながり方」は未定義である．

[*1] 位相は積位相（定義**??**）を入れるのだった．

ところで，S^1 の開被覆 U_+, U_- は 2 ヶ所で重なっている：

$$\varphi_\pm(U_+ \cap U_-) = {\color{red}(-\varepsilon,\, 0] \cup [2\pi,\, 2\pi+\varepsilon)} \cup {\color{blue}(\pi-\varepsilon,\, \pi+\varepsilon)}$$

ここで，変換関数を

$$\Phi_{+-} \colon F|_{U_-} \to F|_{U_+},\ \begin{cases} t_+ = t_- & : \theta \in {\color{red}(-\varepsilon,\, 0] \cup [2\pi,\, 2\pi+\varepsilon)} \\ t_+ = t_- & : \theta \in {\color{blue}(\pi-\varepsilon,\, \pi+\varepsilon)} \end{cases}$$

と定義することでファイバー束 E は**円筒**と同相に，

$$\Phi_{+-} \colon F|_{U_-} \to F|_{U_+},\ \begin{cases} t_+ = t_- & : \theta \in {\color{red}(-\varepsilon,\, 0] \cup [2\pi,\, 2\pi+\varepsilon)} \\ t_+ = -t_- & : \theta \in {\color{blue}(\pi-\varepsilon,\, \pi+\varepsilon)} \end{cases}$$

と定義することでファイバー束 E は **Möbius の帯**と同相になる．前者は特に $E \approx S^2 \times F$ と言うことだが，このような状況を指してファイバー束 E は**自明束**であると表現する．

9.1 定義の精密化

ファイバー束のイメージが掴めたところで，数学的に厳密な定義を与える．まずは変換関数を入れる前の段階までの定式化である：

定義 9.1: 微分可能ファイバー束

C^∞ 多様体 F, E, B を与える．C^∞ 写像 $\pi \colon E \to B$ が与えられ，それが次の条件を充たすとき，組 $(E,\, \pi,\, B,\, F)$ を F をファイバーとする**微分可能ファイバー束** (differentiable fiber bundle) と呼ぶ：

(局所自明性)

$\forall b \in B$ に対して，b のある開近傍 U と微分同相写像 $\varphi \colon \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\simeq} U \times F$ が存在して

$$\forall u \in \pi^{-1}(U),\ \pi(u) = \mathrm{proj}_1 \circ \varphi(u)$$

となる，i.e. 図 9.1 が可換図式となる．ただし，proj_1 は第一成分への射影である：

$$\mathrm{proj}_1 \colon U \times F \to U,\ (p,\, f) \mapsto p$$

微分同相写像 φ のことを**局所自明化** (local trivialization) と呼ぶ．

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & U \times F \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$

図 9.1: 局所自明性

! 定義 9.1 において，π を連続写像に，φ を位相同型写像に置き換えると一般のファイバー束の定義が得られる．しかし，以降では微分可能ファイバー束しか考えないので定義 9.1 の条件を充たす $(E,\, \pi,\, B,\, F)$ のことを**ファイバー束**と呼ぶことにする．

ファイバー束 (E, π, B, F) に関して，

- E を**全空間** (total space)
- B を**底空間** (base space)
- F を**ファイバー** (fiber)
- π を**射影** (projection)

と呼ぶ[*2]．また，射影 π による 1 点集合 $\{b\}$ の逆像 $\pi^{-1}(\{b\}) \subset E$ のことを**点 b のファイバー** (fiber) と呼び，$F|_b$ と書く．

9.1.1 ファイバー束の同型

C^∞ 多様体 F を共通のファイバーに持つ二つのファイバー束 (E_i, π_i, B_i, F) を考える．このとき，二つの底空間 B_i の間の C^∞ 写像と同様に，全空間 E_i の間の微分同相写像を考えることができる．これら二つの C^∞ 写像は**束写像** (bundle map) と呼ばれる．

定義 9.2: 束写像

ファイバー F を共有する二つのファイバー束 $\xi_i = (E_i, \pi_i, B_i, F)$ を与える．このとき ξ_1 から ξ_2 への**束写像** (bundle map) とは，二つの C^∞ 写像 $f\colon B_1 \to B_2$, $\tilde{f}\colon E_1 \to E_2$ であって図 9.2 が可換図式になり，かつ底空間 B_1 の各点 b において，**点 b のファイバー $\pi_1^{-1}(\{b\})$** $\subset E_1$ への $\tilde{f}$ の制限

$$\tilde{f}|_{\pi_1^{-1}(\{b\})}\colon \pi_1^{-1}(\{b\}) \to \tilde{f}\bigl(\pi_1^{-1}(\{b\})\bigr) \subset E_2$$

が微分同相写像になっているもののことを言う．

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ B_1 \arrow[r, "f"] & B_2 \end{tikzcd}$$

図 9.2: 束写像

定義 9.3: ファイバー束の同型

ファイバー F と底空間 B を共有する二つのファイバー束 $\xi_i = (E_i, \pi_i, B, F)$ を与える．このとき，ファイバー束 ξ_1 と ξ_2 が**同型** (isomorphic) であるとは，$f\colon B \to B$ が恒等写像となるような束写像 $\tilde{f}\colon E_1 \to E_2$ が存在することを言う．記号として $\xi_1 \simeq \xi_2$ とかく．

[*2] 紛らわしくないとき，ファイバー束 (E, π, B, F) のことを $\pi\colon E \to B$ ，または単に E と略記することがある．

$$
\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[rr, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\
& B &
\end{tikzcd}
$$

図 9.3: ファイバー束の同型

積束 $(B \times F, \mathrm{proj}_1, B, F)$ と同型なファイバー束を**自明束** (trivial bundle) と呼ぶ.

9.1.2　切断

ファイバー束 (E, π, B, F) は，射影 π によってファイバー F の情報を失う．F を復元するためにも，$s\colon B \to E$ なる写像の存在が必要であろう．

定義 9.4: 切断

ファイバー束 $\xi = (E, \pi, B, F)$ の**切断** (cross section) とは, C^∞ 写像 $s\colon B \to E$ であって $\pi \circ s = \mathrm{id}_B$ となるもののことを言う.

各点 $b \in B$ に対して，明らかに $s(b) \in \pi^{-1}(\{b\})$ である．

切断は**大域的な**対象であり, 与えられたファイバー束が切断を持つとは限らない. 一方, 各点 $b \in B$ の開近傍 U 上であれば, 図 9.1 の示す局所自明性から**局所切断** $s\colon U \to \pi^{-1}(U)$ が必ず存在する. $\mathrm{proj}_1^{-1}(\{b\}) = \{b\} \times F$ であることを考慮すると $\pi^{-1}(\{b\}) \simeq F$ とわかるので，局所切断 $s\colon U \to \pi^{-1}(U)$ は C^∞ 写像 $\tilde{s}\colon U \to F$ と一対一に対応する．

B 上の切断全体の集合を $\Gamma(B, E)$ と書くことにする．例えば $\Gamma(B, TB) \simeq \mathfrak{X}(B)$ である．

9.2　変換関数

つぎに，変換関数を定式化しよう．$\xi = (E, \pi, B, F)$ をファイバー束とする．底空間 B の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ をとると，定義 9.1 から，どの $\alpha \in \Lambda$ に対しても局所自明性（図 9.4a）が成り立つ．ここでもう一つの $\beta \in \Lambda$ をとり，$U_\alpha \cap U_\beta$ に関して局所自明性の図式を横に並べることで，自明束 $\mathrm{proj}_1\colon (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \to U_\alpha \cap U_\beta$ の自己同型（図 9.4c）が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
U_\alpha \times F \arrow[dr, "\mathrm{proj}_1"'] & \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[l, "\varphi_\alpha"'] \arrow[d, "\pi"] \\
& U_\alpha
\end{tikzcd}
$$

(a) U_α に関する局所自明性

$$
\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U_\beta) \arrow[r, "\varphi_\beta"] \arrow[d, "\pi"'] & U_\beta \times F \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\
U_\beta &
\end{tikzcd}
$$

(b) U_β に関する局所自明性

$$
\begin{tikzcd}
(U_\alpha \cap U_\beta) \times F \arrow[rr, "\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}"] \arrow[dr, "\mathrm{proj}_1"'] & & (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\
& U_\alpha \cap U_\beta &
\end{tikzcd}
$$

(c) 自明束 $(U_\alpha \cap U_\beta) \times F$ の自己同型

図 9.4: 局所自明性の結合

つまり，$F \to F$ の微分同相写像全体のなす群（**微分同相群**）を $\mathrm{Diff}\, F$ と書くとき写像

$$t_{\beta\alpha} \colon U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{Diff}\, F \tag{9.2.1}$$

が存在し，$\forall (b,\, f) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$ に対して

$$\left(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}\right)(b,\, f) = \left(b,\, t_{\beta\alpha}(b)(f)\right)$$

と作用する[*3].

定義 9.5: 変換関数

上の設定において，式 (9.2.1) の $t_{\alpha\beta}$ をファイバー束 ξ の**変換関数** (transition function) と呼ぶ.

全ての $U_\alpha \cap U_\beta$ に関する変換関数の族 $\{t_{\alpha\beta}\}$ が $\forall b \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ に対して条件

$$t_{\alpha\beta}(b) \circ t_{\beta\gamma}(b) = t_{\alpha\gamma}(b) \tag{9.2.2}$$

を充たすことは図式 9.4 より明かである．次の命題は，ファイバー束 $(E,\, \pi,\, B,\, F)$ を構成する「素材」には

- 底空間となる C^∞ 多様体 B
- ファイバーとなる C^∞ 多様体 F
- B の開被覆 $\{U_\lambda\}$
- (9.2.2) を充たす C^∞ 関数族 $\{t_{\alpha\beta} \colon U_\beta \cap U_\alpha \to \mathrm{Diff}\, F\}$

があれば十分であることを主張する：

[*3] なお $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ の作用で点 b が動かないのは，図式 9.4c が可換図式である，i.e. $\mathrm{proj}_1(b,\, f) = b = \left(\mathrm{proj}_1 \circ (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})\right)(b,\, f)$ であることによる.

命題 9.1: ファイバー束の復元

任意の C^∞ 多様体 $B,\ F$ を与える．
B の開被覆 $\{U_\lambda\}$ と，**コサイクル条件** (9.2.2) (cocycle condition) を充たす C^∞ 級関数の族 $\{t_{\alpha\beta}\colon U_\beta\cap U_\alpha \mapsto \mathrm{Diff}\,F\}$ が与えられたとき，ファイバー束 $\xi=(E,\,\pi,\,B,\,F)$ であって，その変換関数が $\{t_{\alpha\beta}\}$ となるものが存在する．

証明 まず手始めに，cocycle 条件 (9.2.2) より

$$t_{\alpha\alpha}(b)\circ t_{\alpha\alpha}(b)=t_{\alpha\alpha}(b),\quad \forall b\in U_\alpha$$

だから $t_{\alpha\alpha}(b)=\mathrm{id}_F$ であり，また

$$t_{\alpha\beta}(b)\circ t_{\beta\alpha}(b)=t_{\alpha\alpha}(b)=\mathrm{id}_F,\quad \forall b\in U_\alpha\cap U_\beta$$

だから $t_{\beta\alpha}(b)=t_{\alpha\beta}(b)^{-1}$ である．

開被覆 $\{U_\lambda\}$ の添字集合を Λ とする．このとき $\forall\lambda\in\Lambda$ に対して，$U_\lambda\subset B$ には底空間 B からの相対位相を入れ，$U_\lambda\times F$ にはそれと F の位相との積位相を入れることで，直和位相空間

$$\mathcal{E}:=\coprod_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda\times F$$

を作ることができる[*4]．$\mathcal{E}$ の任意の元は $(\lambda,\,b,\,f)\in\Lambda\times U_\lambda\times F$ と書かれる．

さて，$\mathcal{E}$ 上の二項関係 $\sim$ を以下のように定める：

$$\sim:=\left\{\bigl((\alpha,\,b,\,f),\,(\beta,\,c,\,h)\bigr)\in\mathcal{E}\times\mathcal{E}\;\middle|\;b=c,\ f=t_{\alpha\beta}(b)(h)\right\}$$

$\sim$ が同値関係の公理??を充たすことを確認する：

反射律 冒頭の議論から $t_{\alpha\alpha}(b)=\mathrm{id}_F$ なので良い．

対称律 冒頭の議論から $t_{\beta\alpha}(b)=t_{\alpha\beta}(b)^{-1}$ なので，

$$\begin{aligned}(\alpha,\,b,\,f)\sim(\beta,\,c,\,h)\quad&\Longrightarrow\quad b=c,\ f=t_{\alpha\beta}(b)(h)\\&\Longrightarrow\quad c=b,\ h=t_{\alpha\beta}(b)^{-1}(f)=t_{\beta\alpha}(b)(f)\\&\Longrightarrow\quad(\beta,\,c,\,h)\sim(\alpha,\,b,\,f).\end{aligned}$$

推移律 cocycle 条件 (9.2.2) より

$$\begin{aligned}(\alpha,\,b,\,f)\sim(\beta,\,c,\,h),\ (\beta,\,c,\,h)\sim(\gamma,\,d,\,k)\quad&\Longrightarrow\quad b=c,\ c=d,\ f=t_{\alpha\beta}(b)(h),\ h=t_{\beta\gamma}(c)(k)\\&\Longrightarrow\quad b=d,\ f=t_{\alpha\beta}(b)\circ t_{\beta\gamma}(b)(k)=t_{\alpha\gamma}(b)(k)\\&\Longrightarrow\quad(\alpha,\,b,\,f)\sim(\gamma,\,d,\,k).\end{aligned}$$

したがって $\sim$ は同値関係である．$\sim$ による $\mathcal{E}$ の商集合を E と書き，標準射影 (canonical injection) を $\mathrm{pr}\colon\mathcal{E}\to E,\ (\alpha,\,b,\,f)\mapsto[(\alpha,\,b,\,f)]$ と書くことにする．

[*4] $\mathcal{E}$ はいわば，「貼り合わせる前の互いにバラバラな素材（局所自明束 $U_\alpha\times F$）」である．証明の以降の部分では，これらの「素材」を $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ の部分に関して「良い性質 (9.2.2) を持った接着剤 $\{t_{\alpha\beta}\}$」を用いて「貼り合わせる」操作を，位相を気にしながら行う．

集合 E に商位相を入れて E を位相空間にする．このとき開集合 $\{\alpha\}\times U_\alpha\times F\subset\mathcal{E}$ は pr によって E の開集合 $\mathrm{pr}(\{\alpha\}\times U_\alpha\times F)\subset E$ に移される．ゆえに E は $\left\{\mathrm{pr}(\{\alpha\}\times U_\alpha\times V_\beta)\right\}$ を座標近傍にもつ C^∞ 多様体である（ここに $\{V_\beta\}$ は，C^∞ 多様体 F の座標近傍である）．

次に C^∞ 写像 $\pi\colon E\to B$ を

$$\pi\big([(\alpha,\,b,\,f)]\big)\coloneqq b$$

と定義すると，これは局所自明化

$$\varphi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha\times F,\ [(\alpha,\,b,\,f)]\mapsto(b,\,f)$$

による局所自明性を持つ．従って組 $\xi=(E,\,\pi,\,B,\,F)$ はファイバー束になり，証明が終わる． ■

9.2.1　構造群

以上の議論から，任意の F をファイバーとするファイバー束が，底空間 B の開被覆 $\{U_\lambda\}$ に対して局所的な自明束 $U_\lambda\times F$ を変換関数 $\{t_{\alpha\beta}\}$ によって「張り合わせる」ことで構成されることがわかった．しかし，式 (9.2.1) の変換関数の値域として選んだ $\mathrm{Diff}\,F$ は集合として大きすぎて扱いが難しい．そこで，微分同相群 $\mathrm{Diff}\,F$ の代わりにその部分群 $G\subset\mathrm{Diff}\,F$ を使うと言う発想に至る．特に G として Lie 変換群[*5]を選ぶことが多い，これが**構造群**である．

定義 9.6: 構造群

ファイバー束 $\xi=(E,\,\pi,\,B,\,F)$ を与える．底空間 B の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と，各 U_λ に関する局所自明化 $\varphi_\lambda\colon\pi^{-1}(U_\lambda)\to U_\lambda\times F$ が与えられたとする．このとき，全ての添字の組 $\forall(\alpha,\,\beta)\in\Lambda\times\Lambda$ に対して，変換関数 $t_{\alpha\beta}\colon U_\alpha\cap U_\beta\to\mathrm{Diff}\,F$ と F 上のある Lie 変換群 $G\subset\mathrm{Diff}\,F$ が

$$\mathrm{Im}\,t_{\alpha\beta}\subset G$$

を充し，かつ $t_{\alpha\beta}$ 自身が C^∞ 級ならば，**開被覆と局所自明化の組 $\{U_\lambda\}\times\{\varphi_\lambda\}$** はファイバー束 ξ に G を**構造群** (structure group) とするファイバー束の構造を定めると言う．

構造群 G が指定されたファイバー束のことを記号として $(E,\,\pi,\,B,\,F,\,G)$ と書く．

構造群 G を指定する開被覆 $\{U_\lambda\}$ およびその上の局所自明化 $\{\varphi_\lambda\}$ を明記するときは**座標束**と呼び，記号として $\boldsymbol{\big(E,\,\pi,\,B,\,F,\,G,\,\{\varphi_\lambda\},\,\{U_\lambda\}\big)}$ と書く．座標束は多様体のアトラスと類似の概念である．

9.2.2　構造の類別

座標束 $(E,\,\pi,\,B,\,F,\,G,\,\{\varphi_\lambda\},\,\{U_\lambda\})$ を与える．ここで，底空間 B の開集合 U 上に別の局所自明化 $\varphi\colon\pi^{-1}(U)\to U\times F$ が与えられたとしよう．開被覆の添字集合を Λ とするとき，$\forall\alpha\in\Lambda$ に対して自明束 $(U\cap U_\alpha)\times F$ の自己同型

[*5] つまり，構造群 G はファイバー F に左から作用する．

$$
\begin{tikzcd}
(U_\alpha \cap U) \times F \arrow[rr, "\varphi\circ\varphi_\alpha^{-1}"] \arrow[dr, "\mathrm{proj}_1"'] & & (U_\alpha \cap U) \times F \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\
& U_\alpha \cap U &
\end{tikzcd}
$$

を考えることができる．このとき，ある写像 $t_\alpha\colon U_\alpha \cap U \to \mathrm{Diff}\, F$ が存在して

$$
(\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1})(b,\, f) = \bigl(b,\, t_\alpha(b)(f)\bigr)
$$

と書けるが，**$\mathrm{Im}\, t_\alpha \subset G$ とは限らない!**

定義 9.7: 許容

上述の設定において, 局所自明化 φ が座標束 $\bigl(E,\, \pi,\, B,\, F,\, G,\, \{\varphi_\lambda\},\, \{U_\lambda\}\bigr)$ の**許容される** (admissible) **局所自明化**であるとは，$\forall \alpha \in \Lambda$ に対して $\mathrm{Im}\, g_\alpha \subset G$ かつ g_α が C^∞ 級であることを言う．

全空間 E, 射影 π, 底空間 B, ファイバー F を持ち, G を構造群とする座標束全体の集合を $\mathscr{F}(E,\, B,\, F,\, G)$ と書こう．$(E,\, \pi,\, B,\, F,\, G,\, \{\varphi_\lambda\},\, \{U_\lambda\}) \in \mathscr{F}(E,\, B,\, F,\, G)$ のことを $(\{U_\lambda\},\, \{\varphi_\lambda\})$ と略記する．

定義 9.8: 座標束の同値関係

$\mathscr{F}(E,\, B,\, F,\, G)$ 上の同値関係 $\sim$ を以下のように定める：

$$
\sim \coloneqq \Bigl\{ \bigl((\{U_\lambda\},\, \{\varphi_\lambda\}),\, (\{V_\mu\},\, \{\psi_\mu\}) \bigr) \Bigm| \psi_\mu\ (\forall \mu)\ \text{は座標束}\ (\{U_\lambda\},\, \{\varphi_\lambda\})\ \text{に許容される} \Bigr\}
$$

同値関係 9.8 は

$$
\sim = \Bigl\{ \bigl((\{U_\lambda\},\, \{\varphi_\lambda\}),\, (\{V_\mu\},\, \{\psi_\mu\}) \bigr) \Bigm| (\{U_\lambda\} \cup \{V_\mu\},\, \{\varphi_\lambda\} \cup \{\psi_\mu\}) \in \mathscr{F}(E,\, B,\, F,\, G) \Bigr\}
$$

とも書けて，アトラスの同値関係**??**と似ている．

定義 9.9: G-束

同値関係 9.8 による同値類を **G-束** (G-bundle) と呼び，$\boldsymbol{(E,\, \pi,\, B,\, F,\, G)}$ と書く．

9.3 G-束

ほとんどファイバー束と同じ扱いである．

定義 9.10: G-束の束写像

ファイバー F を共有する二つの G-束 $\xi_i = (E_i,\, \pi_i,\, B_i,\, F,\, G)$ を与える．このとき ξ_1 から ξ_2 への**束写像** (bundle map) とは，ファイバー束の束写像（図式 9.2）であって，以下の条件を充たすもののことを言う：

$\xi_1,\, \xi_2$ の任意の許容される局所自明化 $\varphi\colon \pi_1^{-1}(U) \to U \times F$, $\psi\colon \pi_2^{-1}(V) \to V \times F$ に対して，自明束の束写像 $\psi \circ \tilde{f} \circ \varphi^{-1}\colon (U \cap f^{-1}(V)) \times F \to V \times F$（図式 9.5 の外周部）がある連続写像 $h\colon U \cap f^{-1}(V) \to \mathrm{Diff}\, F$ を用いて

$$(\psi \circ \tilde{f})(b,\, f) = \bigl(f(b),\, h(b)(f)\bigr)$$

と書かれるとき，$\mathrm{Im}\, h \subset G$ かつ h が C^∞ 級である．

$$\begin{tikzcd}
U \times F \arrow[dr, "\mathrm{proj}_1"'] & \pi_1^{-1}(U) \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \pi_2^{-1}(V) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi_2"] & V \times F \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\
& U \arrow[r, "f"] & V &
\end{tikzcd}$$

図 9.5: G-束の束写像

定義 9.11: G-束の同型

ファイバー F と底空間 B を共有する二つの G-束 $\xi_i = (E_i,\, \pi_i,\, B,\, F,\, G)$ を与える．このとき，G-束 ξ_1 と ξ_2 が**同型** (isomorphic) であるとは，$f\colon B \to B$ が恒等写像となるような G-束の束写像 $\tilde{f}\colon E_1 \to E_2$ が存在することを言う．記号として $\xi_1 \simeq \xi_2$ とかく．

定義 9.12: 縮小

G-束 $\xi = (E,\, \pi,\, B,\, F,\, G)$ を与える．$H \subset G$ を G の部分群とするとき，ある ξ の座標束 $\bigl(E,\, \pi,\, B,\, F,\, G,\, \{U_\lambda\},\, \{\varphi_\lambda\}\bigr)$ 上の変換関数の族 $\{t_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to G\}$ の像が $\mathrm{Im}\, t_{\alpha\beta} \subset H$ を充たすとき，***ξ* の構造群が *H* に縮小** (reduce) すると言う．

命題 9.1 と全く同様にして以下が示される：

命題 9.2: G-束の復元

任意の C^∞ 多様体 $B,\, F$ を与える．
B の開被覆 $\{U_\lambda\}$ と，**コサイクル条件** (9.2.2) (cocycle condition) を充たす C^∞ 級関数の族 $\{t_{\alpha\beta}\colon U_\beta \cap U_\alpha \mapsto G\}$ が与えられたとき，G-束 $\xi = (E,\, \pi,\, B,\, F,\, G)$ であって，その変換関数が $\{t_{\alpha\beta}\}$ となるものが存在する．

9.3.1　同伴束

命題 9.2 より，変換関数 $t_{\alpha\beta}$ はファイバー F の情報を何も持っていない．したがって Lie 群 G が別の C^∞ 多様体 F' に Lie 変換群として作用するならば，同じ変換関数だが異なるファイバーを持つ G-束 $\xi' = (E,\, \pi,\, B,\, F',\, G)$ を構成できる．

定義 9.13: 同伴束

上記の設定のとき，ξ と ξ' は互いに他の**同伴束** (associated bundle) であると言う．

9.3.2　誘導束

G-束 $\xi = (E,\, \pi,\, B,\, F,\, G)$ を与え，ξ の代表元となる座標束 $(E,\, \pi,\, B,\, F,\, G,\, \{U_\lambda\},\, \{\varphi_\lambda\})$ および変換関数 $t_{\alpha\beta} \colon U_\alpha \cap U_\beta \to G$ をとる．

ここで新しい C^∞ 多様体 M を導入し，底空間 B との間に C^∞ 写像 $f \colon M \to B$ が与えられたとする．命題 9.2 を用いて M を底空間とする G-束（座標束）を構成できる．

M の開被覆

まず，M の開被覆を構成しよう．f は連続写像だから（定義??）開集合 $U_\alpha \subset B$ の逆像 $f^{-1}(U_\alpha) \subset M$ は開集合である．$f^{-1}(\bigcup_\lambda U_\lambda) = \bigcup_\lambda f^{-1}(U_\lambda)$ なので，$\{f^{-1}(U_\lambda)\}$ が M の開被覆であるとわかる．

M の変換関数

次に，変換関数 $t^*_{\alpha\beta} \colon f^{-1}(U_\alpha) \cap f^{-1}(U_\beta) \to G$ を構成しよう．試しに

$$t^*_{\alpha\beta} \coloneqq t_{\alpha\beta} \circ f$$

とおいてみると，$t^*_{\alpha\beta}$ は明らかに C^∞ 級である．また，$\forall p \in f^{-1}(U_\alpha) \cap f^{-1}(U_\beta) \cap f^{-1}(U_\gamma)$ に対して

$$t^*_{\alpha\gamma}(p) = t_{\alpha\gamma}(f(p)) = t_{\alpha\beta}(f(p)) \circ t_{\beta\gamma}(f(p)) = t^*_{\alpha\beta}(p) \circ t^*_{\beta\gamma}(p)$$

なので cocycle 条件 (9.2.2) を充たす．

以上の考察と命題 9.2 から，$\{t_{\alpha\beta} \circ f\}$ を変換関数とする M 上の G-束が存在するとわかる．これを**誘導束** (induced bundle) と呼び，$f^*(\xi)$ と書く．

具体的には，

$$f^*E \coloneqq \bigl\{ (p,\, u) \in M \times E \bigm| f(p) = \pi(u) \bigr\}$$

とおけば G-束 $f^*(\xi) \coloneqq \bigl(f^*E,\, \mathrm{proj}_1,\, M,\, F,\, G\bigr)$ が誘導束になる．このとき G-束の束写像（定義 9.10）は $\mathrm{proj}_2 \colon (p,\, u) \mapsto u$ である：

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r, "\mathrm{proj}_2"] \arrow[d, "\mathrm{proj}_1"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

図 9.6: 誘導束の束写像

$\varphi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times F$ を ξ の局所自明化とすると，$f^*(\xi)$ の局所自明化は

$$\tilde{\varphi}\colon \mathrm{proj}^{-1}\bigl(f^{-1}(U)\bigr) \to f^{-1}(U) \times F,\ \bigl(p,\ u\bigr) \mapsto \bigl(p,\ \varphi(u)\bigr)$$

となる：

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(U) \times F \arrow[dr, "\mathrm{proj}_1"'] & \mathrm{proj}_1^{-1}\bigl(f^{-1}(U)\bigr) \arrow[l, "\tilde{\varphi}"'] \arrow[r, "\mathrm{proj}_2"] \arrow[d, "\mathrm{proj}_1"'] & \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & U \times F \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\ & f^{-1}(U) \arrow[r, "f"] & U & \end{tikzcd}$$

図 9.7: $f^*(\xi)$ の局所自明化

9.4 主束

定義 9.14: 主束

G を Lie 群とする．G-束 $\xi = (P,\ \pi,\ M,\ G,\ G)$ は，G の G 自身への作用が自然な**左作用**であるとき，**主束** (principal bundle) あるいは**主 G-束** (principal G-bundle) と呼ばれる．

主束 $(P,\ \pi,\ M,\ G,\ G)$ は $(P,\ \pi,\ M,\ G)$ とか $P(M,\ G)$ と書かれることもある．

命題 9.3: 全空間への右作用

$\xi = (P,\ \pi,\ M,\ G)$ を主 G-束とする．このとき，G の全空間 P への右作用が自然に定義される．この作用は任意のファイバーをそれ自身の上にうつす**推移的かつ自由な作用**（定義??）であり，その商空間は底空間 M と一致する．

証明 まず座標束 $(P,\ \pi,\ M,\ G,\ \{U_\lambda\},\ \{\varphi_\lambda\})$ をとり，関数の族 $\{t_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to G\}$ を座標束に対応する変換関数族とする．

$\forall u \in P,\ \forall g \in G$ をとる．$\pi(u) \in U_\alpha$ となる α を選び，対応する局所自明化が $\varphi_\alpha(u) = (p,\ h) \in U_\alpha \times G$ であるとする．このとき写像 $\phi\colon P \times G \to P$ を次のように定義する[*6]：

$$\phi(u,\ g) \coloneqq \varphi_\alpha^{-1}(p,\ h \cdot g) \tag{9.4.1}$$

ϕ の well-definedness

[*6] G の G 自身への右作用は，G の右からの積演算を選ぶ．この作用は推移的かつ効果的である．

$\beta \neq \alpha$ に対しても $\pi(u) \in U_\beta$ であるとする．このとき $\varphi_\beta(u) = (p,\, h') \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times G$ と書けて，また変換関数の定義から

$$h' = t_{\alpha\beta}(p) \cdot h \quad \bigl(t_{\alpha\beta}(p) \in G\bigr)$$

である．したがって

$$\varphi_\beta^{-1}(p,\, h' \cdot g) = \varphi_\beta^{-1}\bigl(p,\, t_{\alpha\beta}(p) \cdot h \cdot g\bigr) = \varphi_\beta^{-1}\bigl(p,\, t_{\alpha\beta}(p) \cdot (h \cdot g)\bigr) = \varphi_\beta^{-1} \circ (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(p,\, h \cdot g) = \varphi_\alpha^{-1}(p,\, h \cdot g)$$

が分かり，式 (9.4.1) の右辺は座標束の取り方によらない．

ϕ は右作用

定義??の 2 条件を充たしていることを確認する．

(1) $\phi(u,\, 1_G) = \varphi_\alpha^{-1}(p,\, h \cdot 1_G) = \varphi_\alpha^{-1}(p,\, h) = u$ よりよい．

(2) $\forall g_1,\, g_2 \in G$ をとる．

$$\phi(u,\, g_1 g_2) = \varphi_\alpha^{-1}\bigl(p,\, (h \cdot g_1) \cdot g_2\bigr) = \phi\bigl(\varphi_\alpha^{-1}(p,\, h \cdot g_1),\, g_2\bigr) = \phi\bigl(\phi(u,\, g_1),\, g_2\bigr)$$

よりよい．

ϕ は推移的かつ自由

G の G 自身への右作用が推移的なので $\phi\colon \pi^{-1}(p) \times G \to \pi^{-1}(p)$ も明らかに推移的．また $\forall u \in \pi^{-1}(p)$ に対して，$\phi(u,\, g) = u$ ならば

$$\phi(u,\, g) = \varphi_\alpha^{-1}(p,\, h \cdot g) = u = \varphi_\alpha^{-1}(p,\, h \cdot 1_G)$$

であり，φ_α が全単射であることから $g = 1_G$ である．i.e. 安定化群は $\forall u \in \pi^{-1}(p)$ に対して自明であるからこの作用は自由である．

■

命題 9.4:

主 G-束 $\xi = (P,\, \pi,\, M,\, G)$ が自明束になるための必要十分条件は，それが切断（定義 9.4）を持つことである．

証明 ($\Longrightarrow$)　ξ が自明束ならば切断をもつことは明らか．

($\Longleftarrow$)　切断 $s\colon M \to P$ が存在するとする．命題 9.3 より G は P に右から自由に作用する．従って $p \in M$ のファイバー $\pi^{-1}(p)$ 上の任意の 2 点 $\forall u,\, v \in \pi^{-1}(p)$ に対して，ただ一つの $g \in G$ が存在して $v = u \cdot g$ となる．

ここで，写像 $\tilde{f}\colon P \to M \times G$ を次のように定義する：

$u,\, s(\pi(u)) \in \pi^{-1}(\pi(u))$ だから

$$\exists! g \in G,\, u = s(\pi(u)) \cdot g$$

であり，この g を用いて

$$\tilde{f}(u) \coloneqq \bigl(\pi(u),\, g\bigr)$$

とする．この $\tilde{f}$ が下図を可換図式にすることは明らかであり，$(P, \pi, M, G) \cong (M \times G, \mathrm{proj}_1, M, G)$ が示された．

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & M \times G \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

図 9.8: 主 G-束の同型

■

9.5 ベクトル束

定義 9.15: ベクトル束

M を n 次元 C^∞ 多様体とする．ファイバー束（定義 9.1）$\xi = (E, \pi, M, F)$ が k 次元**ベクトル束** (vector bundle) であるとは，$F = \mathbb{R}^k$ であり，かつ M の任意の開集合 U および $\forall p \in U$ に対して U 上の**局所自明化の $\boldsymbol{\pi^{-1}(p)}$ への制限が線型同型写像**になっていることを言う．
$F = \mathbb{C}^k$ のときは ξ は k 次元**複素ベクトル束**と呼ばれる．

ξ は $E \xrightarrow{\pi} M$ と略記されることがある．また，k を**ファイバー次元**と呼び，記号として $\dim E$ と書く．$E_p := \pi^{-1}(p)$ を**点 $\boldsymbol{p} \in M$ におけるファイバー**と呼ぶことがある．
k 次元ベクトル束の変換関数は $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ の元である．

! ベクトル束の束写像および同型の概念はファイバー束の場合（定義 9.2, 9.3）とほぼ同様に定義されるが，束写像 $\tilde{f} \colon E_1 \to E_2$ が C^∞ 写像であるだけでなく，$\forall p \in M$ におけるファイバー E_{1p} への制限 $\tilde{f}|_{E_{1p}} \colon E_{1p} \to E_{2f(p)}$ が線型同型写像であるという点が異なる．

定義 9.16: ゼロ切断

$\xi = (E, \pi, M)$ の切断（定義 9.4）のうち以下の条件を充たすものを**ゼロ切断** (zero section) と呼ぶ：

$$\forall p \in M,\ s(p) = \mathbf{0} \in E_p$$

! ゼロ切断の定義式を充たすように作った写像 $s_0 \colon M \to E$ は明らかに C^∞ 写像で，かつ $\pi \circ s_0 = \mathrm{id}_M$ を充たす．i.e. 任意のベクトル束には零切断が存在する．

9.5.1 局所フレーム

定義 9.17: 局所フレーム

k 次元ベクトル束 $E \xrightarrow{\pi} M$ および M の開集合 U を与える．U 上の E の**局所フレーム** (local frame) とは，順序付けられた k 個の局所切断の組 $\{\, s_i \colon U \to E \,\}_{1 \le i \le k}$ であって，$\forall p \in U$ に対して $\{\, s_i(p) \,\}$ が $\pi^{-1}(p)$ の基底を成すもののことを言う．

命題 9.5: 局所自明化と局所フレーム

k 次元ベクトル束 $E \xrightarrow{\pi} M$ および M の開集合 U を与える．U 上の局所自明化（図 9.1）を与えることと局所フレームを与えることは同値である．

証明 ($\Longrightarrow$)　局所自明化 $\varphi \colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ が与えられたとする．$\mathbb{R}^k$ の標準基底を $\hat{e}_i$（第 i 成分のみ 1 の k 次元数ベクトル）とおくと，$\forall p \in U$ に対して $\varphi|_{E_p} \colon E_p \to \{p\} \times \mathbb{R}^k$ が線型同型写像であることから $s_i(p) := \varphi^{-1}(p,\, \hat{e}_i)$ が E_p の基底を成す．

($\Longleftarrow$)　局所フレーム $\{\, s_i \colon U \to E \,\}_{1 \le i \le k}$ が与えられたとする．このとき局所フレームの定義から，$\forall p \in U$ および $v_p \in E_p$ に対して

$$\exists!(c_1,\, \dots,\, c_k) \in \mathbb{R}^k,\ v_p = \sum_{i=1}^{k} c_i\, s_i(p)$$

が成り立つ．したがって，写像 $\varphi \colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ を

$$\varphi(p,\, v_p) := (p;\, c_1,\, \dots,\, c_k)$$

と定義すれば φ は局所自明化になる． ■

系 9.1:

ベクトル束 $E \xrightarrow{\pi} M$ が自明束になる必要十分条件は，M 上の大域的なフレームが存在することである．

系 9.2:

ベクトル束 $E \xrightarrow{\pi} M$ が自明束になる必要十分条件は，$\forall p \in M$ において $s(p) \neq \mathbf{0}$ となる $s \in \Gamma(E)$ が存在することである．このような s を**ゼロにならない切断** (non-zero section) と呼ぶ．

9.5.2 切断のなすベクトル空間

ベクトル束 $E \xrightarrow{\pi} M$ の切断全体の集合を $\Gamma(E,\, M)$ または $\Gamma(E)$ と書く．

定義 9.18: $\Gamma(E)$ の演算

$\Gamma(E)$ 上の和とスカラー倍を次のように定義すると，$\Gamma(E)$ は $\mathbb{K}$-ベクトル空間になる：
$\forall s,\, s_1,\, s_2 \in \Gamma(E),\, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ に対して

(1) $(s_1 + s_2)(p) := s_1(p) + s_2(p), \quad \forall p \in M$
(2) $(\lambda s) := \lambda s(p), \quad \forall p \in M$

また，$\forall f \in C^\infty(M)$ に対して

(2') $\quad (fs)(p) := f(p)s(p), \quad \forall p \in M$

とおけば $\Gamma(E)$ は $C^\infty(M)$-加群になる．

9.5.3 ベクトル束の計量

定義 9.19: ベクトル束の Riemann 計量

ベクトル束 $E \xrightarrow{\pi} M$ 上の Riemann 計量は，$\forall p \in M$ における正定値内積 $g_p \colon E_p \times E_p \to \mathbb{R}$ であって，p に関して C^∞ 級であるものをいう．
i.e. U を M の開集合とし，$\{\, s_i \colon U \to E \,\}$ を U 上の局所フレームとするとき，U 上の関数

$$g_p\bigl(s_i(p),\, s_j(p)\bigr) \quad \forall p \in U$$

が C^∞ 関数となることである．
複素ベクトル束については Hermite 内積として定義する．

命題 9.6:

任意のベクトル束には計量が存在する．

9.6 ベクトル束の構成法

9.6.1 部分束

定義 9.20: 制限

ベクトル束 $E \xrightarrow{\pi} M$ を与える．M の任意の部分多様体（定義??）N に対して

$$E|_N := \pi^{-1}(N)$$

とおき，射影 $\pi_N \colon E|_N \to N$ を $\pi_N := \pi|_{E|_N}$ によって定義すれば $E|_N \xrightarrow{\pi_N} N$ はベクトル束になる．
これを E の N への**制限** (restriction) と呼ぶ．

定義 9.21: 部分束

ベクトル束 $E \xrightarrow{\pi} M$ を与える．ベクトル束 $F \xrightarrow{\pi} M$ が E の**部分束** (subbundle) であるとは，全空間 F が E の部分多様体であり，$\forall p \in M$ におけるファイバー F_p が E_p の部分ベクトル空間になっていることを言う．

N を C^∞ 多様体 M の部分多様体とすると，TN は $TM|_N$ の部分束になる．

9.6.2 商束

定義 9.22: 商束

ベクトル束 $E \xrightarrow{\pi} M$ とその部分束 $F \xrightarrow{\pi} M$ が与えられたとする．このとき $\forall p \in M$ において商ベクトル空間 E_p/F_p を考え，

$$E/F \coloneqq \bigcup_{p \in M} E_p/F_p$$

とおくと，自然な射影 $\pi\colon E/F \to M,\ x_p + F_p \mapsto p$ はベクトル束を成す．この $E/F \xrightarrow{\pi} M$ を E の F による**商束** (quotient buncle) と呼ぶ．

<u>証明</u> ■

$\dim E = n, \dim F = m$ とおくと $\dim E/F = n - m$ である．

定義 9.23: 法束

N を M の C^∞ 部分多様体とする．このとき接束 TN は $TM|_N$ の部分束であるから，商束 $TM|_N/TN$ を定義できる．これを N の M における**法束** (normal bundle) と呼ぶ．

C^∞ 多様体 M に Riemann 計量を入れると，部分ベクトル空間 $T_pN \subset T_pM$ の直交法空間 $(T_pN)^\perp$ が定義できる．このとき

$$\bigcup_{p \in M} (T_pN)^\perp$$

は $TM|_N$ の部分束になる．一方，標準射影 $\mathrm{pr}\colon T_pM \to T_pM/T_pN,\ x \mapsto x + T_pN$ の $(T_pN)^\perp$ への制限 $\mathrm{pr}|_{(T_pN)^\perp}$ は線型同型写像だからベクトル束の同型

$$\bigcup_{p \in M} (T_pN)^\perp \cong TM|_N/TN$$

がわかる．

9.6.3 Whitney 和

定義 9.24: Whitney 和

底空間 M を共有する 2 つのベクトル束 $\pi_i\colon E_i \to M$ を与える．このとき

$$E_1 \oplus E_2 \coloneqq \left\{ (u_1,\, u_2) \in E_1 \times E_2 \,\middle|\, \pi_1(u_1) = \pi_2(u_2) \right\}$$

とおいて

$$\pi\colon E_1 \oplus E_2 \to M,\ (u_1,\, u_2) \mapsto \pi_1(u_1)\ \bigl(= \pi_2(u_2)\bigr)$$

と定義すると $\pi\colon E_1 \oplus E_2 \to M$ はベクトル束になる．これを **Whitney 和** (Whitney sum) と呼ぶ．

射影 $\pi_1 \times \pi_2\colon E_1 \times E_2 \to M \times M,\ (u_1,\, u_2) \mapsto \bigl(\pi_1(u_1),\, \pi_2(u_2)\bigr)$ と定義すると，Whitney 和は $f(p) \coloneqq (p,\, p)$ で定義される C^∞ 写像 $f\colon M \to M \times M$ による $E_1 \times E_2$ の引き戻し束である（図 9.9）．

$$\begin{tikzcd}
E_1 \oplus E_2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E_1 \times E_2 \arrow[d, "\pi_1 \times \pi_2"] \\
M \arrow[r, "f"] & M \times M
\end{tikzcd}$$

図 9.9: Whitney 和

9.6.4 双対束

定義 9.25: 双対束

ベクトル束 $\pi\colon E \to M$ を与える．このとき $\forall p \in M$ におけるベクトル空間 E_p の双対ベクトル空間 E_p^* を用いて

$$E^* \coloneqq \bigcup_{p \in M} E_p^*$$

とおくと $\pi\colon E^* \to M$ はベクトル束になる．これを**双対束** (dual bundle) と呼ぶ．

! 実ベクトル束 E の双対束は E に Riemann 計量を入れると自然に $E \cong E^*$ となるが，複素ベクトル束 E の場合は必ずしもこの同型は成り立たない．

特に M の接束 TM の双対束 T^*M を**余接束** (cotangent bundle) と呼ぶ．

9.6.5 テンソル積束

定義 9.26: テンソル積束

ベクトル束 $\pi_i\colon E_i \to M$ を与える．このとき $\forall p \in M$ におけるベクトル空間 E_{ip} のテンソル積空間 $E_1 \otimes E_2$ を用いて

$$E_1 \otimes E_2 \coloneqq \bigcup_{p \in M} E_{1p} \otimes E_{2p}$$

とおくと $\pi\colon E_1 \otimes E_2 \to M$ はベクトル束になる．これを**テンソル積束** (tensor product bundle) と呼ぶ.

定義 9.27: 外積束

ベクトル束 $\pi\colon E \to M$ を与える．このとき $\forall p \in M$ におけるベクトル空間 E_{ip} の r 次の外積代数 $\bigwedge^r(E_p)$ を用いて

$$\bigwedge^r(E) \coloneqq \bigcup_{p \in M} \bigwedge^r(E_p)$$

とおくと $\pi\colon \bigwedge^r(E) \to M$ はベクトル束になる.

例えば C^∞ 多様体 M 上の k 次の微分形式全体の集合 $\Omega^k(M)$ は

$$\Omega^k(M) = \Gamma\left(\bigwedge^k(T^*M)\right)$$

と書かれる.