第 3 章

接空間・余接空間

多様体の接空間は，多様体上の C^∞ 関数に作用する写像として定義される．接空間はその定義から自然にベクトル空間になり，その双対ベクトル空間は余接空間と呼ばれる．さらに，適当な個数の接空間と余接空間のテンソル積をとることで任意の型のテンソル空間が構成される．

この章の内容に関しては [?, Chapter3, 8, 11, 12] が詳しい．

3.1 代数的準備

この章から，幾何学的構造と代数的構造を並行して扱う場面が増える．本章に登場する代数系は，主にベクトル空間と多元環である．

公理 3.1: ベクトル空間の公理

- 集合 V
- **加法**と呼ばれる写像

$$+\colon V \times V \longrightarrow V,\ (\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w}) \longmapsto \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$$

- **スカラー乗法**と呼ばれる写像

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V,\ (\lambda,\, \boldsymbol{v}) \longmapsto \lambda\boldsymbol{v}$$

の組[a] $(V,\, +,\, \cdot\,)$ が**体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間**であるとは，$\forall \boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w} \in V$ と $\forall \lambda,\, \mu \in \mathbb{K}$ に対して以下が成り立つことを言う[b]：

(V1) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$.

(V2) $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w})$.

(V3) 記号として $\boldsymbol{0}$ と書かれる V の元が存在して，$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{u}$ が成り立つ．

(V4) 記号として $-\boldsymbol{v}$ と書かれる V の元が存在して，$\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = (-\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ が成り立つ．

(V5) $\lambda(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{u} + \lambda\boldsymbol{v}$.

(V6) $(\lambda + \mu)\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{u}$.

(V7) $(\lambda\mu)\boldsymbol{u} = \lambda(\mu\boldsymbol{u})$.

(V8) $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$.

---

[a] 実際には，加法とスカラー乗法の記号を明記せずに「ベクトル空間 V」と言うことが多い．

[b] V の元の和をいちいち $+(\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w})$ と書くのは煩雑なので，全て $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ のように略記している．スカラー乗法についても同様に $\lambda \boldsymbol{v} := \cdot\,(\lambda,\, \boldsymbol{v})$ である．以降，ベクトル空間以外の代数系に関しても同じような略記を行う．

(V1)-(V4) は，組 $(V,\, +,\, \mathbf{0})$ が可換群であることを意味する．

3.1.1 ベクトル空間の圏

体 $\mathbb{K}$ 上の**ベクトル空間の圏** $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ は，

- $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間を対象とする
- 線型写像を射とする
- 合成は，線型写像の合成とする

ことで構成される．以下では，素材となる複数個のベクトル空間から新しいベクトル空間を構成する手法をいくつか紹介する．証明の詳細は付録 C の加群の項目を参照．

命題 3.1: 零ベクトル空間

1 点集合 $\{\mathbf{0}\} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ は $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の始対象かつ終対象である（このような対象を**零対象**と呼ぶ）．i.e. 任意の体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 $V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ に対して，写像

$$0\colon \{\mathbf{0}\} \longrightarrow V,\ \mathbf{0} \longmapsto \mathbf{0}$$

および

$$0\colon V \longrightarrow \{\mathbf{0}\},\ \boldsymbol{v} \longmapsto \mathbf{0}$$

は唯一の線型写像である．

命題 3.2: 直積ベクトル空間

体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 $V,\, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ を与える．

- 直積集合 $V \times W$ の上に

$$(\boldsymbol{v}_1,\, \boldsymbol{v}_2) + (\boldsymbol{w}_1,\, \boldsymbol{w}_2) := (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{w}_1,\, \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{w}_2),$$
$$\lambda(\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w}) := (\lambda\boldsymbol{v},\, \lambda\boldsymbol{w})$$

  として加法とスカラー乗法を定義することで得られるベクトル空間（**直積ベクトル空間**）$\boldsymbol{V \times W} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$
- **標準的射影**と呼ばれる 2 つの線型写像[a]

$$p_1\colon V \times W \longrightarrow V,\ (\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w}) \longmapsto \boldsymbol{v}$$
$$p_2\colon V \times W \longrightarrow V,\ (\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w}) \longmapsto \boldsymbol{w}$$

の組 $(V \times W,\, p_1,\, p_2)$ は（圏論的な）積である．i.e. 圏 $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ における積の普遍性を充たす．

[a] 実際はこれらが線型写像になることを証明する．

命題 3.2 の構成は，直積するベクトル空間が有限個でなくても良い．

命題 3.3: 直積ベクトル空間

A を任意の集合とし，A で添字づけられた，体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間の族 $\left\{V_\alpha \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})\right\}_{\alpha\in A}$ を与える．

- 直積集合 $\prod_{\alpha\in A} V_\alpha$ の上に[a]

$$
\begin{aligned}
(v_\alpha)_{\alpha\in A} + (w_\alpha)_{\alpha\in A} &:= (v_\alpha + w_\alpha)_{\alpha\in A} \\
\lambda(v_\alpha) &:= (\lambda v_\alpha)_{\alpha\in A}
\end{aligned}
$$

  として加法とスカラー情報を定義することで得られるベクトル空間 $\boldsymbol{\prod_{\alpha\in A} V_\alpha}$
- **標準的射影**と呼ばれる線型写像の族

$$
\left\{p_\alpha \colon \prod_{\beta\in A} V_\beta \longrightarrow V_\alpha,\ (v_\beta)_{\beta\in A} \longmapsto v_\alpha\right\}_{\alpha\in A}
$$

の組 $\left(\prod_{\alpha\in A} V_\alpha,\, \left\{p_\alpha\right\}_{\alpha\in A}\right)$ は（圏論的な）積である．i.e. 圏 $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ における積の普遍性を充たす．

[a] 直積集合の元は $(v_\alpha)_{\alpha\in A}$ の形をした記号で書かれる．

命題 3.4: 直和ベクトル空間

A を任意の集合とし，A で添字づけられた，体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間の族 $\left\{V_\alpha \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})\right\}_{\alpha\in A}$ を与える．

- 直積集合 $\prod_{\alpha\in A} V_\alpha$ の部分集合

$$
\bigoplus_{\boldsymbol{\alpha\in A}} \boldsymbol{V_\alpha} := \left\{ (x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \prod_{\alpha\in A} V_\alpha \;\middle|\; \begin{array}{c}\text{有限個の添字 } i_1, \dots, i_n \in \Lambda \text{ を除いた} \\ \text{全ての添字 } \alpha\in A \text{ について } x_\alpha = 0\end{array} \right\}
$$

  の上に

$$
\begin{aligned}
(v_\alpha)_{\alpha\in A} + (w_\alpha)_{\alpha\in A} &:= (v_\alpha + w_\alpha)_{\alpha\in A} \\
\lambda(v_\alpha) &:= (\lambda v_\alpha)_{\alpha\in A}
\end{aligned}
$$

  として加法とスカラー乗法を定義することで得られるベクトル空間 $\boldsymbol{\bigoplus_{\alpha\in A} V_\alpha}$
- **標準的包含**と呼ばれる線型写像の族

$$
\left\{i_\alpha \colon \longrightarrow V_\alpha \longrightarrow \prod_{\beta\in A} V_\beta,\ v \longmapsto (w_\beta)_{\beta\in A}\right\}_{\alpha\in A}
$$

ただし

$$w_\beta := \begin{cases} v, & \beta = \alpha \\ 0, & \beta \neq \alpha \end{cases}$$

とする．

の組 $\left(\bigoplus_{\alpha\in A} V_\alpha,\ \{i_\alpha\}_{\alpha\in A}\right)$ は（圏論的な）和である．i.e. 圏 $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ における和の普遍性を充たす．

与えられたベクトル空間の族が $\forall\alpha \in A$ について $V_\alpha = V$ のように共通している場合は $\boldsymbol{V^{\oplus A}}$ と略記する．

定義から明らかに，有限個のベクトル空間の直和は直積と同型になる．しかし，有限個でないときは必ずしも同型にならない．

命題 3.5: 商ベクトル空間

体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 $V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ と，その部分ベクトル空間 $W \subset V$ を与える．V 上の同値関係 $\sim\, \subset V \times V$ を

$$\boldsymbol{v} \sim \boldsymbol{w} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \in W$$

によって定義する．$\sim$ による $\boldsymbol{v} \in V$ の同値類を $\boldsymbol{v} + W$ と書き，商集合を $\boldsymbol{V/W}$ と書く．
$\forall \boldsymbol{v} + W,\ \boldsymbol{w} + W \in V/W,\ \forall\lambda \in \mathbb{K}$ に対して

$$(\boldsymbol{v} + W) + (\boldsymbol{w} + W) := (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) + W$$
$$\lambda \cdot (\boldsymbol{v} + W) := (\lambda\boldsymbol{v}) + W$$

のように加法とスカラー乗法を定義すると，組 $(V/W, +, \cdot\,)$ は体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間になる．このベクトル空間のことを V の W による**商ベクトル空間**と呼ぶ．

証明 V/W がベクトル空間になることの証明は命題??を参照． ■

3.1.2 双対ベクトル空間

$\mathbb{K}$ 自身が持つ加法 $+$ と乗法 $\cdot$ をそれぞれベクトル空間の加法とスカラー乗法と見做すことで，$\mathbb{K}$ は $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間になる．

定義 3.1: 双対空間

V を体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．集合

$$\boldsymbol{V^*} := \{\,\omega\colon V \to \mathbb{K} \mid \omega \text{ は線型写像}\,\} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}}(V, \mathbb{K})$$

の上の加法とスカラー乗法を，$\forall \omega,\, \sigma \in V^*$, $\forall a \in \mathbb{K}$ に対して

$$(\omega + \sigma)(v) := \omega(v) + \sigma(v),$$
$$(a\omega)(v) := a\omega(v)$$

（$\forall v \in V$）と定義すると，V^* はベクトル空間になる．このベクトル空間を**双対ベクトル空間** (dual vector space) と呼び，V^* の元を**余ベクトル** (covector) あるいは **1-形式** (1-form) と呼ぶ．

証明 $\forall \omega,\, \omega_1,\, \omega_2 \in V^*$ および $\forall a,\, b \in \mathbb{K}$ に対してベクトル空間の公理 3.1 を見たしていることを確認する．

(V1) 自明

(V2) 自明

(V3) $0 = \mathbf{0} \in V$（恒等的に 0 を返す写像）とすればよい．

(V4) $\forall v \in V,\ (-\omega)(v) := -\omega(v)$ とすればよい．

(V5) $\bigl(a(\omega_1 + \omega_2)\bigr)(v) = a(\omega_1(v) + \omega_2(v)) = a\omega_1(v) + a\omega_2(v) = (a\omega_1)(v) + (a\omega_2)(v)$.

(V6) $\bigl((a+b)\omega\bigr)(v) = (a+b)\omega(v) = a\omega(v) + b\omega(v) = (a\omega)(v) + (b\omega)(v) = (a\omega + b\omega)(v)$.

(V7) $\bigl((ab)\omega\bigr)(v) = (ab)\omega(v) = a(b\omega(v)) = a\bigl((b\omega)(v)\bigr) = \bigl(a(b\omega)\bigr)(v)$.

(V8) $(1\omega)(v) = 1\omega(v) = \omega(v)$.

■

命題 3.6: 有限次元ベクトル空間の双対空間の基底

$V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ は**有限次元**であるとし，V の基底 $\{\, e_i \,\}$ をとる．このとき，

$$e^i(e_k) = \delta^i_k$$

で定義される $\dim V$ 個の余ベクトル

$$e^i \colon V \to \mathbb{K},\ v = v^j e_j \mapsto v^i \quad (i = 1,\, \dots,\, \dim V)$$

の組 $\{\, e^i \,\}$ は V^* の基底である．

証明 $\omega \in V^*,\ v = v^i e_i \in V$ を任意にとる．このとき

$$\omega(v) = \omega(v^i e_i) = v^i \omega(e_i) = \omega(e_i) e^i(v) = \bigl(\omega(e_i) e^i\bigr)(v).$$

i.e. $\{e^i\}$ はベクトル空間 V^* を生成する．

また，$a_1,\, \dots,\, a_{\dim V} \in \mathbb{K}$ に対して $a_i e^i = 0$（零写像）が成り立つならば

$$a_k = a_i \delta^i_k = a_i e^i(e_k) = (a_i e^i)(e_k) = 0 \quad (1 \le \forall k \le \dim V)$$

である．i.e. $\dim V$ 個の余ベクトル $e^1,\, \dots,\, e^{\dim V} \in V^*$ は線型独立である． ■

$\forall V,\, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ および任意の線型写像 $f \colon V \longrightarrow W$ を与える．このとき，**双対線型写像** (dual linear map) を

$$\boldsymbol{f^*} : W^* \longrightarrow V^*,$$
$$\omega \longmapsto \bigl(v \longmapsto \omega \circ f(v)\bigr)$$

と定義する[*1].

命題 3.7:

$\forall V,\, W,\, Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ および任意の線型写像 $f : V \longrightarrow W,\ g : W \longrightarrow Z$ を与える．このとき，以下が成り立つ：

(1) $(\mathrm{id}_V)^* = \mathrm{id}_{V^*}$

(2) $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$

証明 (1) $\forall \omega \in V^*$ および $\forall v \in V$ に対して[*2]

$$(\mathrm{id}_V)^*(\omega)(v) = \omega \circ \mathrm{id}_V(v) = \omega(v)$$

なので $(\mathrm{id}_V)^*(\omega) = \omega$ である．i.e. $(\mathrm{id}_V)^* = \mathrm{id}_{V^*}$

(2) $\forall \omega \in Z^*$ および $\forall v \in V$ に対して

$$(f^* \circ g^*)(\omega)(v) = f^*(\omega \circ g)(v) = \omega \circ (g \circ f)(v) = (g \circ f)^*(\omega)(v)$$

が成り立つので $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ である．

■

命題 3.7 は

- $V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}^{\mathrm{op}})$ を $V^* \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ に
- $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}^{\mathrm{op}}}(V,\, W)$ を $f^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}}(V^*,\, W^*)$ に

対応づける対応

$$(\text{-})^* : \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$$

が関手である[*3]ことを意味する．

$\forall V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ を与える．$v \in V$ に対して**評価写像** $\mathrm{ev}_v : V^* \longrightarrow \mathbb{R},\ \omega \longmapsto \omega(v)$ を考えると，

$$\eta_V : V \longrightarrow V^{**},\qquad v \longmapsto \mathrm{ev}_v \tag{3.1.1}$$

は線型写像である．

命題 3.8:

V が**有限次元**ならば，$\eta_V : V \longrightarrow V^{**}$ はベクトル空間の同型写像である．

[*1] $f^* : W^* \longrightarrow V^*$ は線型写像に対して線型写像を返す写像なのでこのように書いた．

[*2] 引数が複数ある時は，左側から先に読む．今の場合，線型写像 $(\mathrm{id}_V)^*(\omega) : V \longrightarrow \mathbb{K}$ に引数 $v \in V$ を渡す，と読む．

[*3] 同じことだが，$(\text{-})^* : \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ は**反変関手** (contravariant functor) であると言っても良い．

証明 $\dim V < \infty$ なので，命題 3.6 より $\dim V = \dim V^{**}$ である．よって η_V が単射であることを示せば良い[*4]．$v \notin \{0\}$ とする．V の基底 $\{e^i\}$ であって $e^1 = v$ であるものをとり，その双対基底 $\{e^i\}$ をとると

$$\eta_V(v)(e^1) = e^1(v) = 1$$

が成り立つので $\eta_V(v) \neq 0$，i.e. $v \notin \operatorname{Ker} \eta_V$ がわかった．従って対偶から $\operatorname{Ker} \eta_V = \{0\}$ であり，η_V は単射である． ■

線型写像 $\eta_V \colon V \longrightarrow V^{**}$ は自然である．つまり，$\forall V,\, W \in \operatorname{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ および $\forall f \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}}(V,\, W)$ に対して，$\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\eta_V"] \arrow[d, "f"] & V^{**} \arrow[d, "f^{**}"] \\ W \arrow[r, "\eta_W"] & W^{**} \end{tikzcd}$$

が成り立つということである．実際，$\forall v \in V$ および $\forall \omega \in W^*$ に対して[*5]

$$\begin{aligned} (f^{**} \circ \eta_V)(v)(\omega) &= f^{**}(\mathrm{ev}_v)(\omega) \\ &= \mathrm{ev}_v \circ f^*(\omega) \\ &= \mathrm{ev}_v(\omega \circ f) \\ &= \omega\bigl(f(v)\bigr) \\ &= \mathrm{ev}_{f(v)}(\omega) \\ &= (\eta_W \circ f)(v)(\omega) \end{aligned}$$

が成り立つ [?, p.159, Example 7.12.].

定義 3.2: 自然変換

任意の圏 $\mathcal{C},\, \mathcal{D}$ および関手 $F,\, G \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ を与える．**自然変換** (natural transformation)

$$\eta \colon F \Longrightarrow G$$

は，$\mathcal{D}$ における射の族

$$\bigl\{\eta_X \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\bigl(F(X),\, G(X)\bigr)\bigr\}_{X \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})}$$

であって以下の性質を充たすもののことを言う：

(自然性条件) $\forall f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, Y)$ に対して図式 3.1 を可換にする．

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "F(f)"] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\eta_Y"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

図 3.1: 自然変換

[*4] η_V が単射 $\iff \operatorname{Ker} \eta_V = \{0\} \Longrightarrow \dim V = \dim(\operatorname{Im} \eta_V) \Longrightarrow V = \operatorname{Im} V$

[*5] $(f^{**} \circ \eta_V)(v) \in (W^*)^*$ が $\omega \in W^*$ に作用しているということである．

つまり，(3.1.1) で定義される線型写像の族

$$\eta \coloneqq \left\{ \eta_V \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}}(V,\, V^{**}) \right\}_{V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})}$$

は自然変換

$$\eta\colon 1_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}} \Longrightarrow (\text{-})^{**}$$

であると言える．

3.1.3　ベクトル空間のテンソル積

本章を皮切りにしてさまざまなテンソル積空間が登場するが，それらは全て以下に述べる定義の特殊な場合である．

$\mathbb{K}$ を体とする．$V,\, W,\, Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ を勝手にとる．写像 $f\colon V \times W \longrightarrow Z$ が**双線型写像** (bilinear map) であるとは，$\forall \boldsymbol{v}_1,\, \boldsymbol{v}_2,\, \boldsymbol{v} \in V,\ \forall \boldsymbol{w}_1,\, \boldsymbol{w}_2,\, \boldsymbol{w} \in W,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ に対して

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2,\, \boldsymbol{w}) &= f(\boldsymbol{v}_1,\, \boldsymbol{w}) + f(\boldsymbol{v}_2,\, \boldsymbol{w}), \\
f(\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) &= f(\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w}_1) + f(\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w}_2), \\
f(\lambda \boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w}) &= \lambda f(\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w}), \\
f(\boldsymbol{v},\, \lambda \boldsymbol{w}) &= \lambda f(\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w})
\end{aligned}$$

が成り立つことを言う．2 つの引数のそれぞれについて線型写像になっているということである．

定義 3.3: ベクトル空間のテンソル積

体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 $V,\, W$ の**テンソル積** (tensor product) とは，

- 記号として $\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W}$ と書かれる体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間
- 双線型写像 $\boldsymbol{\Phi}\colon V \times W \longrightarrow \boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W}$

の組であって，以下の性質を充たすもののこと：

(テンソル積の普遍性)　任意のベクトル空間 $Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ と任意の双線型写像 $f\colon V \times W \longrightarrow Z$ に対して，線型写像 $u\colon \boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W} \longrightarrow Z$ が一意的に存在して図式 3.2 を可換にする：

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\boldsymbol{\Phi}"'] & \forall Z \\
\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W} \arrow[ur, dashed, "\exists ! u"] &
\end{tikzcd}$$

図 3.2: テンソル積の普遍性

この定義を一般化すると加群のテンソル積になり，さらに一般化することでモノイダル圏の概念に到達するが，これ以上深入りしない．

命題 3.9: テンソル積の一意性

テンソル積は，存在すればベクトル空間の同型を除いて一意である．

証明 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 $V,\ W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ を与える．体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間と双線型写像の組 $(\boldsymbol{T},\ \boldsymbol{\Phi}\colon V \times W \longrightarrow \boldsymbol{T})$ および $(\boldsymbol{T},\ \boldsymbol{\Phi'}\colon V \times W \longrightarrow \boldsymbol{T'})$ がどちらも $V,\ W$ のテンソル積であるとする．このときテンソル積の普遍性から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$
\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "\Phi'"] \arrow[d, "\boldsymbol{\Phi}"'] & T' \\
\boldsymbol{T} \arrow[ur, dashed, "\exists! u"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\boldsymbol{\Phi'}"'] & T \\
\boldsymbol{T'} \arrow[ur, dashed, "\exists! u'"]
\end{tikzcd}
$$

が成り立つので，これらの図式を併せた $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$
\begin{tikzcd}
\boldsymbol{T} & \\
V \times W \arrow[u, "\boldsymbol{\Phi}"] \arrow[r, "\Phi'"] \arrow[d, "\boldsymbol{\Phi}"'] & T' \arrow[ul, dashed, "\exists! u'"'] \\
\boldsymbol{T} \arrow[ur, dashed, "\exists! u"] &
\end{tikzcd}
$$

が存在する．然るに $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$
\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "\boldsymbol{\Phi}"] \arrow[d, "\boldsymbol{\Phi}"'] & \boldsymbol{T'} \\
\boldsymbol{T} \arrow[ur, dashed, "\mathrm{id}_T"]
\end{tikzcd}
$$

も成り立ち，テンソル積の普遍性より赤点線で書いた線型写像は一意でなくてはならないので，

$$u' \circ u = \mathrm{id}_T$$

がわかる．同様の議論から

$$u \circ u' = \mathrm{id}_{T'}$$

も従うので，線型写像 $u\colon \boldsymbol{T} \longrightarrow \boldsymbol{T'},\ u'\colon \boldsymbol{T'} \longrightarrow \boldsymbol{T}$ は互いに逆写像，i.e. 同型写像である． ■

命題 3.9 からテンソル積の一意性が言えたが，そもそもテンソル積が存在しなければ意味がない．そこで，体 $\mathbb{K}$ 上の任意のベクトル空間 $V,\ W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ を素材にしてテンソル積 $(V \otimes W,\ \Phi\colon V \times W \longrightarrow V \otimes W)$ を具体的に構成してみよう．

$\mathbb{K} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ なので，任意の集合 S に対してベクトル空間の直和

$$\mathbb{K}^{\oplus S} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$$

を考えることができる．$\mathbb{K}^{\oplus S}$ の元 f とは，有限個の元 $x_1, \dots, x_n \in S$ を除いた全ての $x \in S$ に対して値 $0 \in \mathbb{K}$ を返すような $\mathbb{K}$ 値関数 $f\colon S \longrightarrow \mathbb{K}$ のことである[*6]．

ところで，$\forall x \in S$ に対して次のような関数 $\delta_x \in \mathbb{K}^{\oplus S}$ が存在する：

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}$$

この δ_x を x そのものと同一視してしまうことで，先述の $f \in \mathbb{K}^{\oplus(V \times W)}$ は

$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \qquad ^{\mathrm{w}/} \quad \lambda_i \coloneqq f(x_i) \in \mathbb{K}$$

の形に一意的に書ける．[*7] この意味で，$\mathbb{K}^{\oplus(V \times W)}$ は $V \times W$ の元の**形式的な** $\mathbb{K}$ **係数線形結合**全体がなす $\mathbb{K}$ ベクトル空間と言うことができ，集合 $V \times W$ 上の**自由ベクトル空間**と呼ばれる．自由加群の特別な場合と言っても良い．自由ベクトル空間は次の普遍性によって特徴づけられる：

補題 3.1: 自由ベクトル空間の普遍性

任意の集合 S および任意の $\mathbb{K}$ ベクトル空間 $Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ を与える．包含写像

$$\iota\colon S \longrightarrow \mathbb{K}^{\oplus S},\ x \longmapsto \delta_x$$

を考える．このとき，任意の写像 $f\colon S \longrightarrow Z$ に対して線型写像 $u\colon \mathbb{K}^{\oplus S} \longrightarrow Z$ が一意的に存在して，図式 3.4 を可換にする：

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & \forall Z \\ \mathbb{K}^{\oplus S} \arrow[ur, dashed, "\exists! u"] & \end{tikzcd}$$

図 3.4: 自由ベクトル空間の普遍性

<u>**証明**</u> 写像

$$u\colon \mathbb{K}^{\oplus S} \longrightarrow Z,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{x_i} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

は右辺が有限和なので well-defined であり，$\forall x \in S$ に対して $u\bigl(\iota(x)\bigr) = f(x)$ を充たす．

---

*6 これは集合論の記法である：ある集合 Λ から集合 A への写像 $a\colon \Lambda \longrightarrow A$ のことを Λ によって**添字づけられた** A の元の**族**と呼び，$\forall \lambda \in \Lambda$ に対して $a(\lambda) \in A$ のことを $\boldsymbol{a_\lambda}$ と書き，$\boldsymbol{a\colon \Lambda \longrightarrow A}$ **自身のことを** $\boldsymbol{(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}}$ と書くのである．なお，$\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ と書いたときは A の部分集合 $\{\, a(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda \,\} \subset A$ のことを意味する．

*7 というのも，このように書けば $\forall y \in S$ に対して

$$f(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{x_i}(y) = \begin{cases} f(x_i), & y = x_i \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

が言えるので．特に，この式の中辺は $\mathbb{K}$ の元の有限和なので意味を持つ．

別の線型写像 $g\colon \mathbb{K}^{\oplus S} \longrightarrow Z$ が $g\circ\iota = f$ を充たすとする．このとき $\forall x \in S$ に対して $g(\delta_x) = f(x)$ であるから，$\forall v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{x_i} \in \mathbb{K}^{\oplus S}$ に対して

$$g(v) = g\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(\delta_{x_i}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) = u(v)$$

が言える．よって $g = u$ である． ■

さて，自由加群の普遍性の図式とテンソル積の普遍性の図式はとても似ているので，$\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{W} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ の候補として $\mathbb{K}^{\oplus(V\times W)}$ を考えてみる．しかしそのままでは $\iota\colon V\times W \longrightarrow \mathbb{K}^{\oplus(V\times W)}$ が双線型写像になってくれる保証はない．そこで，

$$\begin{aligned}
\iota(\lambda v,\, w) &\sim \lambda\iota(v,\, w),\\
\iota(v,\, \lambda w) &\sim \lambda\iota(v,\, w),\\
\iota(v_1+v_2,\, w) &\sim \iota(v_1,\, w) + \iota(v_2,\, w),\\
\iota(v,\, w_1+w_2) &\sim \iota(v,\, w_1) + \iota(v,\, w_2)
\end{aligned}$$

を充たすような上手い同値関係による商ベクトル空間を構成する．

命題 3.10: テンソル積

$\mathbb{K}^{\oplus(V\times W)}$ の部分集合

$$\begin{aligned}
S_1 &:= \bigl\{\iota(\lambda v,\, w) - \lambda\iota(v,\, w) \bigm| \forall v\in V,\, \forall w \in W,\, \forall\lambda\in\mathbb{K}\bigr\},\\
S_2 &:= \bigl\{\iota(v,\, \lambda w) - \lambda\iota(v,\, w) \bigm| \forall v\in V,\, \forall w \in W,\, \forall\lambda\in\mathbb{K}\bigr\},\\
S_3 &:= \bigl\{\iota(v_1+v_2,\, w) - \iota(v_1,\, w) - \iota(v_2,\, w) \bigm| \forall v_1,\, \forall v_2\in V,\, \forall w \in W,\, \forall\lambda\in\mathbb{K}\bigr\},\\
S_4 &:= \bigl\{\iota(v,\, w_1+w_2) - \iota(v,\, w_1) - \iota(v,\, w_2) \bigm| \forall v\in V,\, \forall w_1,\, w_2 \in W,\, \forall\lambda\in\mathbb{K}\bigr\}
\end{aligned}$$

の和集合 $S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4$ が生成する $\mathbb{K}$ ベクトル空間[a]を $\mathcal{R}$ と書き，商ベクトル空間 $\mathbb{K}^{\oplus(V\times W)}/\mathcal{R}$ の商写像を

$$\pi\colon \mathbb{K}^{\oplus(V\times W)} \longrightarrow \mathbb{K}^{\oplus(V\times W)}/\mathcal{R},\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\iota(v_i,\, w_i) \longmapsto \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\iota(v_i,\, w_i)\right) + \mathcal{R}$$

と書き，$\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w} := \pi\bigl(\iota(v,\, w)\bigr)$ とおく．このとき，

- $\mathbb{K}$ ベクトル空間 $\mathbb{K}^{\oplus(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W})}/\boldsymbol{\mathcal{R}}$
- 写像 $\boldsymbol{\Phi} = \pi\circ\iota\colon V\times W \longrightarrow \mathbb{K}^{\oplus(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W})}/\boldsymbol{\mathcal{R}},\ (v,\, w) \longmapsto v\otimes w$

の組は $V,\, W$ のテンソル積である．

[a] これらの元の形式的な $\mathbb{K}$ 係数線型結合全体が成すベクトル空間のこと．

証明 まず，$\mathbf{\Phi}$ が双線型写像であることを示す．商ベクトル空間の和とスカラー乗法の定義から

$$
\begin{aligned}
\Phi(\lambda v,\, w) &= \iota(v,\, w) + \mathcal{R} = \bigl(\lambda\iota(v,\, w) + \iota(\lambda v,\, w) - \lambda\iota(v,\, w)\bigr) + \mathcal{R} \\
&= \lambda\iota(v,\, w) + \mathcal{R} = \lambda\bigl(\iota(v,\, w) + \mathcal{R}\bigr) = \lambda\Phi(v,\, w) \\
\Phi(v_1 + v_2,\, w) &= \iota(v_1 + v_2,\, w) + \mathcal{R} = \bigl(\iota(v_1,\, w) + \iota(v_2,\, w) + \iota(v_1 + v_2,\, w) - \iota(v_1,\, w) - \iota(v_2,\, w)\bigr) + \mathcal{R} \\
&= \bigl(\iota(v_1,\, w) + \iota(v_2,\, w)\bigr) + \mathcal{R} = \bigl(\iota(v_1,\, w) + \mathcal{R}\bigr) + \bigl(\iota(v_2,\, w) + \mathcal{R}\bigr) \\
&= \Phi(v_1,\, w) + \Phi(v_2,\, w)
\end{aligned}
$$

が言える．第 2 引数に関しても同様であり，$\mathbf{\Phi}$ は双線型写像である．

次に，上述の構成がテンソル積の普遍性を充たすことを示す．$\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ と任意の双線型写像 $f\colon V \times W \longrightarrow Z$ を与える．自由ベクトル空間の普遍性から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$
\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & \forall Z \\
\mathbb{K}^{\oplus(V\times W)} \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{f}"] &
\end{tikzcd}
$$

が存在する．f が双線型なので，

$$
\begin{aligned}
\overline{f}\bigl(\iota(\lambda v,\, w)\bigr) &= f(\lambda v,\, w) = \lambda f(v,\, w) \\
&= \lambda\overline{f}\bigl(\iota(v,\, w)\bigr) = \overline{f}\bigl(\lambda\iota(v,\, w)\bigr), \\
\overline{f}\bigl(\iota(v_1 + v_2,\, w)\bigr) &= f(v_1 + v_2,\, w) = f(v_1,\, w) + f(v_2,\, w) \\
&= \overline{f}\bigl(\iota(v_1,\, w)\bigr) + \overline{f}\bigl(\iota(v_2,\, w)\bigr) = \overline{f}\bigl(\iota(v_1,\, w) + \iota(v_2,\, w)\bigr)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．第 2 引数についても同様なので，$\mathcal{R} \subset \mathrm{Ker}\,\overline{f}$ である．よって準同型定理から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$
\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & \forall Z \\
\mathbb{K}^{\oplus(V\times W)} \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{f}"] \arrow[d, "\pi"'] & \\
\mathbb{K}^{\oplus(V\times W)}/\mathcal{R} \arrow[uur, dashed, "\exists!u"'] &
\end{tikzcd}
$$

が存在する．この図式の外周部はテンソル積の普遍性の図式である． ■

命題 3.11: テンソル積の基底

V, W をそれぞれ n, m 次元の体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，V, W の基底をそれぞれ $\{e_1, \dots, e_n\}$, $\{f_1, \dots, f_m\}$ と書く．このとき，集合

$$
\mathcal{E} \coloneqq \left\{\, e_i \otimes f_j \;\middle|\; 1 \le i \le n,\, 1 \le j \le m \,\right\}
$$

は $V \otimes W$ の基底である．従って $\dim V \otimes W = nm$ である．

証明 テンソル積の構成から，$\forall t \in V \otimes W$ は有限個の $(v_i,\, w_i) \in V \times W\ (i = 1, \dots l)$ を使って

$$t = \left(\sum_{i=1}^{l} t_i \iota(v_i,\, w_i) \right) = \sum_{i=1}^{l} t_i v_i \otimes w_i$$

と書ける．$v_i = {v_i}^\mu e_\mu$, $w_i = {w_i}^\mu f_\mu$ のように展開することで，

$$\begin{aligned} t &= \sum_{i=1}^{l} t_i ({v_i}^\mu e_\mu) \otimes ({w_i}^\nu f_\nu) \\ &= \sum_{i=1}^{l} t_i {v_i}^\mu {w_i}^\nu e_\mu \otimes f_\nu \end{aligned}$$

と書ける．ただし添字 μ, ν に関しては Einstein の規約を適用した．従って $\mathcal{E}$ は $V \otimes W$ を生成する．

$\mathcal{E}$ の元が線型独立であることを示す．

$$t^{\mu\nu} e_\mu \otimes e_\nu = 0$$

を仮定する．$\{e_\mu\}, \{f_\mu\}$ の双対基底をそれぞれ $\{\varepsilon^\mu\}, \{\eta^\nu\}$ と書き，全ての添字の組み合わせ $(\mu,\, \nu) \in \{1,\, \dots,\, n\} \times \{1,\, \dots,\, m\}$ に対して双線型写像

$$\tau^{\mu\nu} \colon V \times W \longrightarrow \mathbb{R},\ (v,\, w) \longmapsto \varepsilon^\mu(v)\eta^\nu(w)$$

を定める．$\tau^{\mu\nu}$ は双線型なのでテンソル積の普遍性から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\tau^{\mu\nu}"] \arrow[d, "\pi \circ \iota"'] & \mathbb{R} \\ \boldsymbol{V \otimes W} \arrow[ur, dashed, "\exists!\tilde{\tau}^{\mu\nu}"'] & \end{tikzcd}$$

が存在する．このことは，

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{\tau}^{\mu\nu}(t^{\rho\sigma} e_\rho \otimes f_\sigma) \\ &= t^{\rho\sigma} (\tilde{\tau}^{\mu\nu} \circ \pi \circ \iota)(e_\rho,\, f_\sigma) \\ &= t^{\rho\sigma} \tau^{\mu\nu}(e_\rho,\, f_\sigma) = t^{\mu\nu} \end{aligned}$$

を意味する．従って $\mathcal{E}$ の元は線型独立である．■

これでもまだ直接の計算には向かない．より具体的な構成を探そう．

任意の $\mathbb{K}$-ベクトル空間[*8] $V_1,\, \dots, V_n,\, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ に対して，集合

$$\boldsymbol{L(V_1,\, \dots,\, V_n;\, W)} \coloneqq \left\{\, F \colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W \;\middle|\; F\ \text{は多重線型写像} \,\right\}$$

を考える．$L(V_1,\, \dots,\, V_n;\, W)$ の上の加法とスカラー乗法を $\forall v_i \in V_i,\, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ に対して

$$\begin{aligned} (F + G)(v_1,\, \dots,\, v_n) &\coloneqq F(v_1,\, \dots,\, v_n) + G(v_1,\, \dots,\, v_n), \\ (\lambda F)(v_1,\, \dots,\, v_n) &\coloneqq \lambda\big(F(v_1,\, \dots,\, v_n)\big) \end{aligned}$$

[*8] 有限次元でなくても良い．

と定義すると $L(V_1,\,\dots,\,V_n;\,W)$ は $\mathbb{K}$ ベクトル空間になる．特に，Hom の定義から $\mathbb{K}$-ベクトル空間の等式として

$$L(V;\,W) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\,(V,\,W)$$

が成り立つ．テンソル積の普遍性はこの等式を多重線型写像について次の意味で一般化する：

命題 3.12: 多重線型写像とテンソル積

任意の $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V_1,\,\dots,\,V_n,\,W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ に対して，$\mathbb{K}$-ベクトル空間として

$$L(V_1,\,\dots,\,V_n;\,W) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\,(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n,\,W)$$

が成り立つ．

証明 テンソル積の普遍性から，$\mathbb{K}$-線型写像

$$\alpha\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\,(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n,\,W) \longrightarrow L(V_1,\,\dots,\,V_n;\,W),\ f \longmapsto f \circ \Phi$$

は全単射，i.e. $\mathbb{K}$-ベクトル空間の同型写像である． ■

$\forall \omega_i \in V_i^*$ に対して，$\boldsymbol{\omega_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\omega_n}$ と書かれる $L(V_1,\,\dots,\,V_n;\,\mathbb{K})$ の元を

$$\boldsymbol{\omega_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\omega_n}\colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow \mathbb{K},\ (v_1,\,\dots,\,v_n) \longmapsto \prod_{i=1}^{n} \omega_i(v_i)$$

によって定義する．ただし右辺の総積記号は $\mathbb{K}$ の積についてとる．

命題 3.13:

有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V,\,W$（$\dim V =: n,\, \dim W =: m$）の基底をそれぞれ $\{e_\mu\},\,\{f_\nu\}$ と書き，その双対基底をそれぞれ $\{\varepsilon^\mu\},\,\{\eta^\mu\}$ と書く．このとき，集合

$$\mathcal{B} := \left\{\, \varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu \;\middle|\; 1 \le \mu \le n,\, 1 \le \nu \le m \,\right\}$$

は $L(V,\,W;\,\mathbb{K})$ の基底である．従って $\dim L(V,\,W;\,\mathbb{K}) = nm$ である．

証明 $\forall F \in L(V,\,W;\,\mathbb{K})$ を 1 つとり，全ての添字の組み合わせ $(\mu,\,\nu)$ に対して

$$F_{\mu\nu} := F(e_\mu,\,f_\nu)$$

とおく．$\forall (v,\,w) \in V \times W$ を $v = v^\mu e_\mu,\ w = w^\nu f_\nu$ と展開すると，

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}\varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu(v,\,w) &= F_{\mu\nu}\varepsilon^\mu(v)\eta^\nu(w) \\ &= F_{\mu\nu}v^\mu w^\nu \end{aligned}$$

が成り立つ．一方，双線型性から

$$F(v,\,w) = v^\mu w^\nu F(e_\mu,\,f_\nu) = F_{\mu\nu}v^\mu w^\nu$$

も成り立つので $F = F_{\mu\nu}\varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu$ が言えた．i.e. 集合 $\mathcal{B}$ は $L(V,\,W;\,\mathbb{K})$ を生成する．

次に，$\mathcal{B}$ の元が線型独立であることを示す．

$$F_{\mu\nu}\varepsilon^{\mu} \otimes \eta^{\nu} = 0$$

を仮定する．全ての添字の組み合わせについて，$(e_{\mu},\, f_{\nu})$ に左辺を作用させることで，$F_{\mu\nu} = 0$ が従う．i.e. $\mathcal{B}$ の元は互いに線型独立である． ■

命題 3.14: テンソル積の構成その 2

任意の有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V,\, W$ に対して

$$L(V,\, W;\, \mathbb{K}) \cong V^{*} \otimes W^{*}$$

！ 命題 3.12 より，これは

$$L(V,\, W;\, \mathbb{K}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\,(V \otimes W,\, \mathbb{K}) = (V \otimes W)^{*} \cong V^{*} \otimes W^{*}$$

を意味する．

証明 写像

$$\begin{aligned}\Phi\colon V^{*} \times W^{*} &\longrightarrow L(V,\, W;\, \mathbb{K}),\\ (\omega,\, \eta) &\longmapsto \big((v,\, w) \longmapsto \omega(v)\eta(w)\big)\end{aligned}$$

は双線型写像なのでテンソル積の普遍性から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd} V^{*} \times W^{*} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi \circ \iota"'] & L(V,\, W;,\, \mathbb{K}) \\ \boldsymbol{V^{*} \otimes W^{*}} \arrow[ur, dashed, "\exists ! \overline{\Phi}"'] & \end{tikzcd}$$

が存在する．$V,\, W$（$\dim V = n,\, \dim W = m$）の基底をそれぞれ $\{e_{\mu}\},\, \{f_{\nu}\}$ と書き，その双対基底をそれぞれ $\{\varepsilon^{\mu}\},\, \{\eta^{\mu}\}$ と書く．命題 3.11 より $V^{*} \otimes W^{*}$ の基底として

$$\mathcal{E} := \left\{\, \varepsilon^{\mu} \otimes \eta^{\nu} \;\middle|\; 1 \leq \mu \leq n,\, 1 \leq \nu \leq m \,\right\}$$

がとれ，命題 3.13 より $L(V,\, W;\, \mathbb{K})$ の基底として

$$\mathcal{B} := \left\{\, \varepsilon^{\mu} \otimes \eta^{\nu} \;\middle|\; 1 \leq \mu \leq n,\, 1 \leq \nu \leq m \,\right\}$$

がとれる（記号が同じだが，違う定義である）．このとき，$\forall (v,\, w) \in V \times W$ に対して

$$\overline{\Phi}(\varepsilon^{\mu} \otimes \eta^{\nu})(v,\, w) = \overline{\Phi} \circ \pi \circ \iota(\varepsilon^{\mu},\, \eta^{\nu})(v,\, w) = \Phi(\varepsilon^{\mu},\, \eta^{\nu})(v,\, w) = \varepsilon^{\mu}(v)\eta^{\nu}(w) = \varepsilon^{\mu} \otimes \eta^{\nu}(v,\, w)$$

が成り立つ（ただし，左辺の $\otimes$ は命題 3.10，右辺は命題 3.13 で定義したものである）ので，$\overline{\Phi}$ は $\mathcal{E}$ の元と $\mathcal{B}$ の元の 1 対 1 対応を与える．i.e. 同型写像である． ■

命題 3.15: テンソル積と Hom の同型

任意の有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V,\, W$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\,(V,\, W) \cong V^{*} \otimes W$$

<u>**証明**</u> 写像

$$\begin{aligned}\Phi\colon V^* \times W &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W), \\ (\omega,\, w) &\longmapsto \bigl(v \longmapsto \omega(v)w\bigr)\end{aligned}$$

は双線型なので，テンソル積の普遍性から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd} V^* \times W \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi\circ\iota"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W) \\ \boldsymbol{V^* \otimes W} \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{\Phi}"'] & \end{tikzcd}$$

が存在する．$V,\, W$（$\dim V = n,\, \dim W = m$）の基底をそれぞれ $\{e_\mu\},\, \{f_\nu\}$ と書き，その双対基底をそれぞれ $\{\varepsilon^\mu\},\, \{\eta^\mu\}$ と書く．命題 3.11 より $V^* \otimes W$ の基底として

$$\mathcal{E} \coloneqq \left\{\, \varepsilon^\mu \otimes f_\nu \;\middle|\; 1 \leq \mu \leq n,\, 1 \leq \nu \leq m \,\right\}$$

がとれる．一方，$\forall \omega \in V^*,\, \forall w \in W$ に対して

$$\omega \otimes w \coloneqq \Phi(\omega,\, w)\colon V \longrightarrow W,\; v \longmapsto \omega(v)w \tag{3.1.2}$$

とおくと $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W)$ の基底として

$$\mathcal{B} \coloneqq \left\{\, \varepsilon^\mu \otimes f_\nu \;\middle|\; 1 \leq \mu \leq n,\, 1 \leq \nu \leq m \,\right\}$$

がとれる[*9]（記号が同じだが，$\mathcal{E}$ とは違う定義である）．このとき，$\forall v \in V$ に対して

$$\overline{\Phi}(\varepsilon^\mu \otimes f_\nu)(v) = \overline{\Phi} \circ \pi \circ \iota(\varepsilon^\mu,\, f_\nu)(v) = \Phi(\varepsilon^\mu,\, f_\nu)(v) = \varepsilon^\mu(v) f_\nu = \varepsilon^\mu \otimes f_\nu(v)$$

が成り立つ（ただし，左辺の $\otimes$ は命題 3.10，右辺は (3.1.2) で定義したものである）ので，$\overline{\Phi}$ は $\mathcal{E}$ の元と $\mathcal{B}$ の元の 1 対 1 対応を与える．i.e. 同型写像である． ■

系 3.1:

任意の<u>有限次元</u> $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V_1,\, \dots,\, V_n,\, W$ に対して

$$L(V_1,\, \dots,\, V_n;\, W) \cong V_1^* \otimes \cdots \otimes V_n^* \otimes W$$

[*9] $\forall F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W)$ をとる．${F_\mu}^\nu \coloneqq \eta^\nu\bigl(F(e_\mu)\bigr)$ とおく．このとき $\forall v = v^\mu e_\mu \in V$ に対して

$${F_\mu}^\nu \varepsilon^\mu \otimes f_\nu(v) = {F_\mu}^\nu \varepsilon^\mu(v) f_\nu = {F_\mu}^\nu v^\mu f_\nu$$

一方で，線形性および双対基底の定義から

$$F(v) = v^\mu F(e_\mu) = v^\mu \eta^\nu\bigl(F(e_\mu)\bigr) f_\nu = v^\mu {F_\mu}^\nu f_\nu$$

が成り立つので $F = {F_\mu}^\nu \varepsilon^\mu \otimes f_\nu$ が言えた．i.e. $\mathcal{B}$ は $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W)$ を生成する．
次に，$\mathcal{B}$ の元が線型独立であることを示す．

$${F_\mu}^\nu \varepsilon^\mu \otimes f_\nu = 0$$

を仮定する．$1 \leq \forall \mu \leq \dim V$ について右辺を e_μ に作用させることで ${F_\mu}^\nu f_\nu = 0$ が従うが，f_ν の線型独立性から ${F_\mu}^\nu = 0$ である．

証明 命題 3.12 および命題 3.14, 3.15 から

$$
\begin{aligned}
L(V_1, \dots, V_n; W) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, W) \\
&\cong (V_1 \otimes \cdots \otimes V_n)^* \otimes W \\
&\cong V_1^* \otimes \cdots \otimes V_n^* \otimes W
\end{aligned}
$$

を得る． ■

系 3.2: Tensor-Hom adjunction

任意の有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 V, W, Z に対して，

$$
\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V \otimes W, Z) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\big(V, \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W, Z)\big)
$$

証明 命題 3.14, 3.15 およびテンソル積の結合則より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V \otimes W, Z) &\cong (V \otimes W)^* \otimes Z \\
&\cong V^* \otimes W^* \otimes Z \\
&\cong V^* \otimes (W^* \otimes Z) \\
&\cong V^* \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W, Z) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\big(V, \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W, Z)\big)
\end{aligned}
$$

■

3.1.4 多元環

公理 3.2: 体上の多元環

$\mathbb{K}$ を体とする．$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 $V \in \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の上に，加法とスカラー乗法の他にもう 1 つの 2 項演算

$$
* : V \times V \to V, \ (v, w) \mapsto v * w
$$

を与える．

このとき，V が $\mathbb{K}$ 上の**多元環** (algebra) [a]であるとは，以下の 2 条件が充たされていることを言う：

- 組 $\big(V, +, \cdot\big)$ が**環**
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall v, w \in V$ に対して

$$
\lambda v \cdot w = (\lambda v) \cdot w = v \cdot (\lambda w)
$$

[a] **代数**と訳されることもある．

定義 3.4: $C^\infty(M)$ 上の演算

$C^\infty(M)$ 上の和，積，スカラー乗法を以下のように定義すると，$C^\infty(M)$ は $\mathbb{R}$ 上の多元環になる：$\forall f,\, g \in C^\infty(M)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ および $\forall p \in M$ に対して

$$\begin{aligned}(f+g)(p) &:= f(p) + g(p)\\ (f\cdot g)(p) &:= f(p)g(p)\\ (\lambda f)(p) &:= \lambda f(p)\end{aligned}$$

<u>証明</u> 多元環の公理 3.2 を充していることを確認する．$C^\infty(M)$ が和とスカラー乗法に関して $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間であること，および和と積に関して環であることは明らかである．積に関しては，$\mathbb{R}$ が可換体であることから $\forall f,\, g \in C^\infty(M)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}\big(\lambda(f\cdot g)\big)(p) &= \lambda\big((f\cdot g)(p)\big)\\ &= \lambda f(p) g(p)\\ &= \big(\lambda f(p)\big)g(p) = \big((\lambda f)\cdot g\big)(p)\\ &= f(p)\big(\lambda g(p)\big) = \big(f\cdot(\lambda g)\big)(p)\end{aligned}$$

であるから示された． ■

3.2 接空間

n 次元実数ベクトル，すなわち n 個の実数の組 $v = (v^1,\, \ldots,\, v^n) \in \mathbb{R}^n$ の幾何学的な解釈とは，方向 $v/|v|$ を向いた長さ $|v|$ の「矢印」のことであり，「矢印」の始点はどこでも良かった．逆に始点がどこでも良いということは，Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の各点 $p \in \mathbb{R}^n$ の上に「矢印」全体がなすベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ が棲んでいると捉えても良い．この意味で，点 $p \in \mathbb{R}^n$ における**幾何学的接空間**を $\boldsymbol{\mathbb{R}^n_p} := \{p\} \times \mathbb{R}^n$ と書く．

接ベクトルを幾何学的接空間の元として捉える描像においては，例えば S^{n-1} の点 $p \in S^{n-1}$ における幾何学的接空間とは $\mathbb{R}^n_p$ の部分ベクトル空間

$$\left\{ v \in \mathbb{R}^n_p \;\middle|\; v \cdot p = 0 \right\}$$

のこと[*10]であり，直観的にも分かりやすい．しかし，全ての C^∞ 多様体 M が Euclid 空間の部分空間として実現されている<u>わけではない</u>．C^∞ 多様体の定義のみが与えられたときに使える情報は，C^∞ 関数と C^∞ 写像と C^∞ チャートだけなので，接空間の定義を修正する必要がある．方針としては，例えば次の 2 つが考えられる：

- 幾何学的接空間の元に，C^∞ 関数の方向微分としての役割を与える．
- C^∞ 曲線の速度ベクトルを考える．

まずは 1 つ目の方法を考えよう．

[*10] $\cdot$ は Euclid 内積とする．

$\mathbb{R}^n$ の場合，$v \in \mathbb{R}^n_p$ による，点 p における $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ の**方向微分**とは

$$\hat{D}_v|_p f \coloneqq \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(p+tv)\right|_{t=0} \tag{3.2.1}$$

で定義される写像 $\hat{D}_v|_p \colon C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ のことである．$\hat{D}_v|_p$ は Leibniz 則

$$\hat{D}_v|_p(fg) = f(p)\,\hat{D}_v|_p g + g(p)\,\hat{D}_v|_p f$$

を充し，$\mathbb{R}^n$ の標準的な基底 $\{e_i\}$ を使って $v = v^\mu e_\mu$ と展開したときには，デカルト座標 $\bigl(\mathbb{R}^n, (x^\mu)\bigr)$ において

$$\hat{D}_v|_p f = v^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(p) = \left(v^\mu \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p \right) f$$

と書ける．つまり，$\forall v \in \mathbb{R}^n_p$ に対して，方向微分 $\hat{D}_v|_p$ は $\{\, \partial/\partial x^\mu\,|_p \,\}_{\mu=1,\,\dots,\,n}$ を基底として展開できる．従って，v と $\hat{D}_v|_p$ を同一視すると $\mathbb{R}^n_p$ のベクトル空間の構造も反映してくれそうである．

以上の構成を念頭に置いて，まず $\mathbb{R}^n$ の接空間を構成する．

3.2.1 $\mathbb{R}^n$ の接空間

写像 $w \colon C^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ が点 $p \in \mathbb{R}^n$ における**微分**であるとは，

- w は $\mathbb{R}$ 線型写像[*11]
- $\forall f,\, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して **Leibniz 則**を充たす：

$$w(fg) = f(p)w(g) + g(p)w(f)$$

ことを言う．点 p における微分全体がなす集合を $\boldsymbol{T_p}\mathbb{R}^n$ とおいて，$T_p\mathbb{R}^n$ の上の和とスカラー乗法を

$$(w_1 + w_2)(f) \coloneqq w_1(f) + w_2(f)$$
$$(\lambda w)(f) \coloneqq \lambda w(f)$$

と定義することで $T_p\mathbb{R}^n$ は実ベクトル空間になる[*12]．

補題 3.2:

$\forall p \in \mathbb{R}^n$ を与え，$\forall w \in T_p\mathbb{R}^n$ および $\forall f,\, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ をとる．

(1) f が定数写像ならば $w(f) = 0$

(2) $f(p) = g(p) = 0$ ならば $w(fg) = 0$

<u>証明</u>　(1) $f_1 \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ y \longmapsto 1$ に対して

$$w(f_1) = w(f_1 f_1) = f_1(p)w(f_1) + f_1(p)w(f_1) = 2w(f_1)$$

なので $w(f_1) = 0$ が言えた．一般の $\lambda \in \mathbb{R}$ を返す定数写像 f については，w が線型写像であることから $w(f) = w(\lambda f_1) = \lambda w(f_1) = 0$ となって従う．

*11 定義 3.4 により $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ は多元環になる．

*12 $\mathbb{R}$ が体なのでほぼ自明である．

(2) w の Leibniz 則より明らか．

■

命題 3.16: $\mathbb{R}^n_p$ と $T_p\mathbb{R}^n$

$\forall p \in \mathbb{R}^n$ を 1 つ与える．

(1) $\forall v \in \mathbb{R}^n_p$ に対して (3.2.1) で定義された**方向微分**は $\hat{D}_v|_p \in T_p\mathbb{R}^n$ を充たす．

(2) 写像 $D|_p \colon \mathbb{R}^n_p \longrightarrow T_p\mathbb{R}^n,\ v \longmapsto \hat{D}_v|_p$ はベクトル空間の同型写像である．

証明 (1) $\hat{D}_v|_p$ の線形性および Leibniz 則から明らか．

(2) $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ を 1 つとる．線形性は明らかである．

(単射性) $\forall v \in \operatorname{Ker} D|_p$ を 1 つとる．このとき $D|_p(v) = 0$ が成り立つ．このとき $\mathbb{R}^n$ の標準的な基底 $\{e_\mu\}$ によって $v = v^\mu e_\mu$ と展開すると，デカルト座標 $\bigl(\mathbb{R}^n, (x^\mu)\bigr)$ において

$$D|_p(v)(f) = v^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(p) = 0$$

が成り立つ．ここで f として $x^\nu \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ を選ぶと

$$v^\mu \delta^\nu_\mu = v^\nu = 0$$

がわかるので，$v = 0$ である．i.e. $\operatorname{Ker} D|_p = \{0\}$ であり，$D|_p$ は単射である．

(全射性) $\forall w \in T_p\mathbb{R}^n$ を 1 つとる．f は C^∞ 級なので，$\forall x \in \mathbb{R}^n$ に対して $\varepsilon(x) \coloneqq x - p$ とおくと Taylor の定理より

$$f(x) = f(p) + \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(p)\,\varepsilon^\mu(x) + \varepsilon^\mu(x)\varepsilon^\nu(x)\int_0^1 \mathrm{d}t\, \frac{\partial^2 f}{\partial x^\mu \partial x^\nu}(x + t\varepsilon)$$

が成り立つ．第 3 項は $x = p$ において 0 になる関数 2 つの C^∞ 関数 $\varepsilon^\mu(x),\ \varepsilon^\nu(x)$ の積だから，補題 3.2-(2) より w を作用させると消える．従って補題 3.2-(1) および w の線型性から

$$\begin{aligned}
w(f) &= w\bigl(f(p)\bigr) + w\left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu}(p)\,\varepsilon^\mu\right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(p)\, w(\varepsilon^\mu) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(p)\bigl(w(x^\mu) - w(p^\mu)\bigr) \\
&= w(x^\mu)\frac{\partial f}{\partial x^\mu}(p) \\
&= \hat{D}|_p\bigl(w(x^\mu)e_\mu\bigr)(f)
\end{aligned}$$

がわかる．i.e. $w = \hat{D}|_p\bigl(w(x^\mu)e_\mu\bigr) \in \operatorname{Im} \hat{D}|_p$ である．

■

系 3.3: $T_x\mathbb{R}^n$ の自然基底

$\mu = 1, \ldots, n$ に対して

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p : C^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(p)$$

によって定義される線型写像の組

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p$$

は $T_p\mathbb{R}^n$ の基底をなす．

3.2.2　C^∞ 多様体の接空間

$\mathbb{R}^n$ における構成を一般化する．

定義 3.5: 接空間

M を C^∞ 多様体とし，**任意の点** $p \in M$ **を一つとる．** 写像

$$v\colon C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

が $\forall f,\, g \in C^\infty(M)$ と $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ に対して以下の 2 条件を充たすとき，v は M の点 p における**接ベクトル** (tangent vector) と呼ばれる：

(線形性)

$$\begin{aligned} v(f+g) &= v(f) + v(g), \\ v(\lambda f) &= \lambda v(f) \end{aligned}$$

(Leibnitz 則)

$$v(fg) = v(f)\,g(p) + f(p)\,v(g)$$

M の点 p における接ベクトル全体がなす集合を $\boldsymbol{T_pM}$ と書き，M の点 p における**接空間** (tangent space) と呼ぶ．

定義 3.6: 接空間の演算

$\forall v,\, w \in T_pM$ に以下のようにして和とスカラー乗法を定義することで，T_pM はベクトル空間になる：

(1) $(v+w)(f) \coloneqq v(f) + w(f)$
(2) $(\lambda v)(f) \coloneqq \lambda v(f)$

ただし，$f \in C^\infty(M)$ は任意とする．

証明　ベクトル空間の公理 3.1 を充していることを確認すればよい．

(V1) 自明

(V2) 自明

(V3) $\mathbf{0} = 0 \in T_pM$（恒等的に 0 を返す写像）とすればよい．

(V4) $\forall f \in C^\infty(M),\ (-v)(f) = -v(f)$ とすればよい．

(V5) $\lambda(u+v)(f) = \lambda(u(f)+v(f)) = \lambda u(f) + \lambda v(f) = (\lambda u)(f) + (\lambda v)(f)$.

(V6) $\big((\lambda+\mu)u\big)(f) = (\lambda+\mu)u(f) = \lambda u(f) + \mu u(f) = (\lambda u)(f) + (\mu u)(f) = (\lambda u + \mu u)(f)$.

(V7) $\big((\lambda\mu)u\big)(f) = (\lambda\mu)u(f) = \lambda(\mu u(f)) = \lambda\big((\mu u)(f)\big)$.

(V8) $(1u)(f) = 1u(f) = u(f)$.

■

補題 3.3:

（境界なし/あり）C^∞ 多様体 M を与える．$\forall p \in M, \forall w \in T_pM$ および $\forall f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ をとる．

(1) f が定数写像ならば $w(f) = 0$

(2) $f(p) = g(p) = 0$ ならば $w(fg) = 0$

証明 (1) C^∞ 関数 $f_1\colon M \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto 1$ に対して

$$w(f_1) = w(f_1 f_1) = f_1(p)w(f_1) + f_1(p)w(f_1) = 2w(f_1)$$

なので $w(f_1) = 0$ が言えた．一般の $\lambda \in \mathbb{R}$ を返す定数写像 f については，w が線型写像であることから $w(f) = w(\lambda f_1) = \lambda w(f_1) = 0$ となって従う．

(2) w の Leibniz 則より明らか．

■

接ベクトルの定義は局所的だが，それが作用する $C^\infty(M)$ の定義域は M 全体であり，大域的である．読者はこのことに疑問を感じるかもしれない．しかし，**接ベクトルの $C^\infty(M)$ への作用は 1 点の開近傍上（しかも，その開近傍は好きなように採れる！）のみで完全に決まる**．

命題 3.17: 接ベクトルの局所性

（境界なし/あり）C^∞ 多様体 M を与え，$\forall p \in M$ と $\forall v \in T_pM$ を 1 つとる．
$f, g \in C^\infty(M)$ が p のある開近傍 $p \in U \subset M$ 上で一致するならば $v(f) = v(g)$ である．

証明 補題??から，p の開近傍 $p \in V \subset M$ であって $\overline{V} \subset U$ を充たすものの上では恒等的に 1 であり，かつ $M \setminus U$ において 0 になる C^∞ 関数 $\tilde{b}$ が存在する．このとき $(f-g)\tilde{b} = 0 \in C^\infty(M)$ である．従って Leibniz 則から

$$0 = v\big((f-g)\tilde{b}\big) = v(f-g)\tilde{b}(p) + (f-g)(p)v(\tilde{b}) = v(f-g) = v(f) - v(g)$$

とわかる．i.e. $v(f) = v(g)$ である． ■

3.3　C^∞ 写像の微分

定義 3.7: C^∞ 写像の微分

（境界なし/あり）C^∞ 多様体 $M,\ N$ とそれらの間の C^∞ 写像

$$F\colon M \longrightarrow N$$

を与える．点 $p \in M$ における F の**微分** (differential of f at p) とは，接空間の間の**線型写像**

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T_p F}\colon T_p M &\longrightarrow T_{F(p)} N \\ v &\longmapsto \bigl(f \longmapsto v(f \circ F)\bigr) \end{aligned}$$

のこと．

証明　命題??-(3) より $f \circ F \in C^\infty(M)$ なので $T_p F$ は well-defined である．$T_p F$ の線形性を確認する．実際，接空間上の加法とスカラー倍の定義から $\forall v,\ w \in T_p M,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ および $\forall f \in C^\infty(N)$ に対して

$$\begin{aligned} T_p F(v + w)(f) &= (v + w)(f \circ F) \\ &= v(f \circ F) + w(f \circ F) \\ &= T_p F(v)(f) + T_p F(w)(f) \\ &= \bigl(T_p F(v) + T_p F(w)\bigr)(f), \\ T_p F(\lambda v)(f) &= (\lambda v)(f \circ F) = \lambda v(f \circ F) = \lambda T_p F(v)(f) \end{aligned}$$

が成り立つ．■

命題 3.18: T_p の関手性

（境界なし/あり）C^∞ 多様体 $M\ N,\ P$ とそれらの間の C^∞ 写像

$$F\colon M \longrightarrow N, \quad G\colon N \longrightarrow P$$

を与える．このとき $\forall p \in M$ に対して以下が成り立つ：

(1) $T_p(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{T_p M}$

(2) $T_p(G \circ F) = T_{F(p)} G \circ T_p F$

(3) $F\colon M \longrightarrow N$ が微分同相写像ならば $T_p F\colon T_p M \longrightarrow T_{F(p)} N$ はベクトル空間の同型写像である．

証明　$\forall v \in T_p M$ をとる．

(1) $\forall f \in C^\infty(M)$ に対して

$$T_p(\mathrm{id}_M)(v)(f) = v(f \circ \mathrm{id}_M) = v(f)$$

が成り立つので $T_p(\mathrm{id}_M)(v) = v$，i.e. $T_p(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{T_p M}$ が示された．

(2) $\forall f \in C^\infty(P)$ に対して

$$(T_{F(p)} G \circ T_p F)(v)(f) = T_p F(v)(f \circ G) = v(f \circ G \circ F) = T_p(G \circ F)(v)(f)$$

が成り立つ.

(3) $F\colon M \longrightarrow N$ が微分同相写像ならば C^∞ 写像 $F^{-1}\colon N \longrightarrow M$ が存在して $F^{-1}\circ F = \mathrm{id}_M$ が成り立つ．(1), (2) より

$$\begin{aligned} T_p(F^{-1}\circ F) &= T_{F(p)}(F^{-1})\circ T_p(F) \\ &= T_p(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{T_pM}, \\ T_{F(p)}(F\circ F^{-1}) &= T_p(F)\circ T_{F(p)}(F^{-1}) \\ &= T_{F(p)}(\mathrm{id}_N) = \mathrm{id}_{T_{F(p)}N} \end{aligned}$$

がわかる．$T_{F(p)}(F^{-1})$ は線型写像なので $T_p(F)$ は $T_{F(p)}(F^{-1})$ を逆に持つベクトル空間の同型写像である．

■

圏の言葉で整理すると，

- $(M,\, p) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Diff}_0)$ に対して，点 p における接空間 $T_pM \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{R}})$ を，
- $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Diff}_0}\big((M,\, p),\, (N,\, q)\big)$ に対して[*13]，F の微分 $T_pF \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}}(T_pM,\, T_qN)$ を

対応づける対応

$$T_p\colon \mathbf{Diff}_0 \longrightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$$

は関手である（$\mathbf{Diff}_0$ は $\mathbf{Diff}_{\mathbf{b}0}$ に置き換えても良い）．

3.3.1 接空間の性質

命題 3.19: 接空間の局所性

（境界なし/あり）C^∞ 多様体 M と M の開集合 $U \subset M$ を与える．U を【例??】の方法で C^∞ 多様体と見做す．
このとき，$\forall p \in U$ における包含写像 $\iota\colon U \hookrightarrow M$ の微分 $T_p\iota\colon T_pU \longrightarrow T_pM$ はベクトル空間の同型写像である．

! 以降では命題 3.19 により，なんの断りもなく T_pM と T_pU を同一視する場合がある．

証明 (単射性)　$\forall v \in \mathrm{Ker}(T_p\iota)$ をとる．このとき $\forall f \in C^\infty(M)$ に対して $T_p\iota(v)(f) = v(f\circ\iota) = 0$ が成り立つ．
p の開近傍 $p \in V$ であって $\overline{V} \subset U$ を充たすものをとる．すると補題??より，$\forall g \in C^\infty(U)$ に対して $\tilde{g} \in C^\infty(M)$ が存在して V 上至る所で $g = \tilde{g}$ が成り立つ．故に命題 3.17 から

$$v(g) = v(\tilde{g}|_U) = v(\tilde{g}\circ\iota) = T_p\iota(v)(\tilde{g}) = 0$$

が従う．i.e. $\mathrm{Ker}(T_p\iota) = \{0\}$ であり，$T_p\iota$ は単射である．

[*13] このように書いたときは $q = F(p)$ が暗に仮定される．

(全射性) $\forall w \in T_pM$ を 1 つとる．補題??を使って $v \in T_pU$ を

$$v\colon C^\infty(U) \longrightarrow \mathbb{R},\ g \longmapsto w(\tilde{g})$$

と定義すると，命題 3.17 から $\forall f \in C^\infty(M)$ に対して

$$T_p\iota(v)(f) = v(f \circ \iota) = w(\widetilde{f|_U}) = w(f)$$

が言える．

■

系 3.3 から，境界の無い n 次元 C^∞ 多様体の接空間の次元は n になることが予想される．実は，境界付き C^∞ 多様体の境界点における接空間も n 次元である．

命題 3.20: 接空間の次元

（境界なし/あり）n 次元 C^∞ 多様体 M の $\forall p \in M$ における接空間は n 次元である．

<u>証明</u> $\forall p \in M$ を 1 つとり，p を含む任意の C^∞ チャート (U, φ) をとる．

(境界がない場合) $\varphi\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ は微分同相写像なので，命題 3.18-(3) より $T_p\varphi\colon T_pU \longrightarrow T_{\varphi(p)}\big(\varphi(U)\big)$ は同型写像である．その上命題 3.19 より $T_pU \cong T_pM,\ T_{\varphi(p)}\big(\varphi(U)\big) \cong T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ なので，系 3.3 から $\dim T_pM = \dim T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n = n$ だとわかる．

(境界付きの場合)

補題 3.4:

包含写像 $\iota\colon \mathbb{H}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ を考える．$\forall p \in \partial\mathbb{H}^n$ に対して $T_p\iota\colon T_p\mathbb{H}^n \longrightarrow T_p\mathbb{R}^n$ は同型写像である．

<u>証明</u> $\forall v \in \operatorname{Ker} T_p\iota$ をとる．$\forall f \in C^\infty(\mathbb{H}^n)$ に対して，補題??を使って定義域を $\mathbb{R}^n$ に拡張した C^∞ 関数を $\tilde{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ と書く．すると

$$v(f) = v(\tilde{f} \circ \iota) = T_p\iota(v)(\tilde{f}) = 0$$

が従う．i.e. $\operatorname{Ker} T_p\iota = \{0\}$ であり，$T_p\iota$ は単射である．
次に $T_p\iota$ の全射性を示す．$\forall w \in T_p\mathbb{R}^n$ をとる．写像

$$v\colon C^\infty(\mathbb{H}^n) \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longmapsto w(\tilde{f})$$

を定義する．系 3.3 により $w = w^\mu\ \partial/\partial x^\mu\ |_p$ と書けるが，これは $\forall f \in C^\infty(\mathbb{H}^n)$ に対して

$$v(f) = w^\mu \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^\mu}(p)$$

を意味する．f の C^∞ 性から $\partial\tilde{f}\Big/\partial x^\mu\ (p)$ の値は $\mathbb{H}^n$ 側のみによって決まるので v の定義は f の定義域の拡張の仕方によらない．以上の考察から v は well-defined で，$v \in T_p\mathbb{H}^n$ だとわかる．従って $\forall g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$T_p\iota(v)(g) = v(g \circ \iota) = w(\widetilde{g|_{\mathbb{H}^n}}) = w(g)$$

が言える．i.e. $w \in \operatorname{Im} T_p\iota$ である． ■

$p \in \operatorname{Int} M$ ならば，命題 3.19 より $T_p(\operatorname{Int} M) \cong T_pM$ である．$\operatorname{Int} M$ は境界が空の n 次元 C^∞ 多様体なので $\dim T_pM = n$ が従う．

$p \in \partial M$ とする．$(U,\, \varphi)$ を p を含む境界チャートとする．命題 3.18-(3) より $T_pU \cong T_{\varphi(p)}\bigl(\varphi(U)\bigr)$ が，命題 3.19 より $T_pM \cong T_pU,\ T_{\varphi(p)}\bigl(\varphi(U)\bigr) \cong T_{\varphi(p)}\mathbb{H}^n$ が従う．補題 3.4 より $T_{\varphi(p)}\mathbb{H}^n \cong T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ であるから，$T_pM \cong T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ がわかる．よって $\dim T_pM = n$ である．

■

命題 3.21: 積多様体の接空間

$M,\, N$ を境界を持たない C^∞ 多様体とし，$\pi_1 \colon M \times N \longrightarrow M,\ \pi_2 \colon M \times N \longrightarrow N$ を第 i 成分への射影とする．
このとき $\forall (p,\, q) \in M \times N$ に対して，写像

$$\begin{aligned} \alpha \colon T_{(p,\,q)}(M \times N) &\longrightarrow T_pM \oplus T_qN, \\ v &\longmapsto \bigl(T_{(p,\,q)}\pi_1(v),\, T_{(p,\,q)}\pi_2(v)\bigr) \end{aligned}$$

はベクトル空間の同型写像である．

証明 直和ベクトル空間の定義から α は線型写像である．
C^∞ 写像

$$\begin{aligned} \iota_1 &\colon M \longrightarrow M \times N,\ x \longmapsto (x,\, q) \\ \iota_2 &\colon N \longrightarrow M \times N,\ y \longmapsto (p,\, y) \end{aligned}$$

を用いて線型写像

$$\beta \colon T_pM \oplus T_qN \longrightarrow T_{(p,\,q)}(M \times N),\ (v,\, w) \longmapsto T_p\iota_1(v) + T_q\iota_2(w)$$

を定める．$\pi_1 \circ \iota_1 = \mathrm{id}_M,\ \pi_2 \circ \iota_2 = \mathrm{id}_N$ であり，かつ $\pi_1 \circ \iota_2,\ \pi_2 \circ \iota_1$ は定数写像なので補題 3.3-(1) より微分すると消える．従って $\forall (v,\, w) \in T_pM \oplus T_qN$ に対して

$$\begin{aligned} \alpha \circ \beta(v,\, w) &= \alpha\bigl(T_p\iota_1(v) + T_q\iota_2(w)\bigr) \\ &= \bigl(T_{(p,\,q)}(\pi_1 \circ \iota_1)(v) + T_{(p,\,q)}(\pi_1 \circ \iota_2)(w),\, T_{(p,\,q)}(\pi_2 \circ \iota_1)(v) + T_{(p,\,q)}(\pi_2 \circ \iota_2)(w)\bigr) \\ &= (v,\, w) \end{aligned}$$

が言えて，α が全射だとわかる．$\dim T_{(p,\,q)}(M \times N) = \dim\bigl(T_pM \oplus T_qN\bigr)$ なので α が同型写像であることが示された． ■

3.4 座標表示

これまでの議論は抽象的で，具体的な計算に向かない．そこで，チャートによる成分表示を求める

3.4.1　接ベクトルの表示

（境界なし）n 次元 C^∞ 多様体 M と，その C^∞ チャート $(U, \varphi) = \bigl(U, (x^\mu)\bigr)$ を与える．φ は微分同相写像なので，命題 3.18-(3) より φ の点 $p \in U$ における微分

$$T_p\varphi \colon T_pM \longrightarrow T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n \tag{3.4.1}$$

は同型写像である[*14]．

系 3.3 より，ベクトル空間 $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ の基底として

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_{\varphi(p)}, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_{\varphi(p)}$$

をとることができる．これを (3.4.1) の同型写像を使って T_pM に戻したものを T_pM の**自然基底**と呼ぶ[*15]：

$$\boxed{\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p} := (T_p\varphi)^{-1}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\varphi(p)}\right) = T_{\varphi(p)}(\varphi^{-1})\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\varphi(p)}\right) \tag{3.4.2}$$

実際に勝手な $f \in C^\infty(U)$ に作用させてみると，系 3.3 より

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p(f) = T_{\varphi(p)}(\varphi^{-1})\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\varphi(p)}\right)(f) = \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\varphi(p)}(f\circ\varphi^{-1}) = \boxed{\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^\mu}\bigl(\varphi(p)\bigr)}$$

だとわかった．最右辺を座標 (x^μ) を顕にして書くと

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p(f) = \frac{\partial f(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^\mu}(p^1, \dots, p^n)$$

と言うことである．ただし $(p^1, \dots, p^n) := \varphi(p) = \bigl(x^1(p), \dots, x^n(p)\bigr)$ とおいた．

M が境界付きの場合でも，$p \in \operatorname{Int} M$ ならば何も変える必要はない．$p \in \partial M$ の場合に限って同型 (3.4.1) に登場する $\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{H}^n$ に置き換える必要があるが，補題 3.4 の同型 $T_{\varphi(p)}\mathbb{H}^n \cong T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ を挟んでいると思って同じ $\partial/\partial x^\mu\,|_{\varphi(p)}$ の記号を使う．この場合，(3.4.2) の第 $\mu < n$ 成分は境界なしの場合と全く同じだが，n 成分

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p$$

だけは片側偏微分係数と解釈すべきである．

[*14] 命題 3.19 によって T_pU と T_pM，$T_{\varphi(p)}\bigl(\varphi(U)\bigr)$ と $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ を同一視した．

[*15] 命題 3.18-(3) を使っている．

命題 3.22: 自然基底

(境界なし/あり) n 次元 C^∞ 多様体 M の各点 $p \in M$ において，接空間 T_pM は n 次元ベクトル空間である．p を含む任意の C^∞ チャート $(U, \varphi) = \bigl(U, (x^\mu)\bigr)$ に対して，(3.4.2) で定義される**自然基底**

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p$$

が T_pM の基底となる．

3.4.2 微分の座標表示

(境界なし/あり) m 次元 C^∞ 多様体 M，n 次元 C^∞ 多様体 N，および C^∞ 写像

$$F\colon M \longrightarrow N$$

を与える．F の点 $p \in M$ における微分は

$$\begin{aligned} T_pF\colon T_pM &\longrightarrow T_{F(p)}N, \\ v &\longmapsto \bigl(f \longmapsto v(f \circ F)\bigr) \end{aligned}$$

と定義された．M の C^∞ チャート $(U, \varphi) = \bigl(U, (x^\mu)\bigr)$ と N の C^∞ チャート $(V, \psi) = \bigl(V, (y^\mu)\bigr)$ によって T_pF を座標表示してみよう．そのためには自然基底の行き先を調べれば良い．

手始めに，Euclid 空間の開集合 $M \subset \mathbb{R}^m$, $N \subset \mathbb{R}^n$ の場合を考える．チャートを $\bigl(U, (x^\mu)\bigr) = (M, \mathrm{id}_M)$, $\bigl(V, (y^\mu)\bigr) = (N, \mathrm{id}_N)$ として

$$F(x^1, \ldots, x^m) = \begin{pmatrix} F^1(x^1, \ldots, x^m) \\ \vdots \\ F^n(x^1, \ldots, x^m) \end{pmatrix}$$

と書くと，$\forall f \in C^\infty(N)$ に対して

$$\begin{aligned} T_pF\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p\right)(f) &= \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p (f \circ F) \\ &= \frac{\partial f}{\partial y^\nu}\bigl(F(p)\bigr)\frac{\partial F^\nu}{\partial x^\mu}(p) \\ &= \left(\frac{\partial F^\nu}{\partial x^\mu}(p)\left.\frac{\partial}{\partial y^\nu}\right|_{F(p)}\right)(f) \end{aligned}$$

が成り立つ．i.e.

$$\boxed{T_pF\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p\right) = \frac{\partial F^\nu}{\partial x^\mu}(p)\left.\frac{\partial}{\partial y^\nu}\right|_{F(p)}} \tag{3.4.3}$$

である．

次に一般の $M,\ N$ を考える．$\widehat{F} := \psi \circ F \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \longrightarrow \psi(V)$ の実態は m 変数の $\mathbb{R}^n$ 値関数なので，$(x^1, \dots, x^m) \in \varphi\big(U \cap F^{-1}(V)\big)$ に対して

$$\widehat{F}(x^1, \dots, x^m) = \begin{pmatrix} \widehat{F}^1(x^1, \dots, x^m) \\ \vdots \\ \widehat{F}^n(x^1, \dots, x^m) \end{pmatrix}$$

とおく．

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "T_pF"] \arrow[d, "T_p\varphi"] & T_{F(p)}N \arrow[d, "T_{F(p)}\psi"] \\ \textcolor{red}{T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^m} \arrow[r, "T_{\varphi(p)}(\widehat{F})"] & \textcolor{red}{T_{\psi(F(p))}\mathbb{R}^n} \end{tikzcd}$$

の構造[*16]を意識して辛抱強く計算すると

$$\begin{aligned} \boxed{T_pF\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p \right)} &= T_pF\left((T_p\varphi)^{-1}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\varphi(p)} \right) \right) \\ &= T_pF \circ T_{\varphi(p)}(\varphi^{-1})\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\varphi(p)} \right) \\ &= T_{\varphi(p)}(F \circ \varphi^{-1})\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\varphi(p)} \right) \\ &= T_{\psi(F(p))}(\psi^{-1})\left(T_{\varphi(p)}\widehat{F}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\varphi(p)} \right) \right) \\ &= T_{\psi(F(p))}(\psi^{-1})\left(\frac{\partial \widehat{F}^\nu}{\partial x^\mu}\big(\varphi(p)\big) \left.\frac{\partial}{\partial y^\nu}\right|_{\widehat{F}(\varphi(p))} \right) \\ &= \boxed{\frac{\partial \widehat{F}^\nu}{\partial x^\mu}\big(\varphi(p)\big) \left.\frac{\partial}{\partial y^\mu}\right|_{F(p)}} \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

とわかる．ただし最後の 2 つの等号に (3.4.3) を使った．

この結果は味わい深い．$\forall v = v^\mu \ \partial/\partial x^\mu\ |_p \in T_pM$ への T_pF の作用が

$$T_pF\left(v^\mu \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p \right) = \frac{\partial \widehat{F}^\nu}{\partial x^\mu}\big(\varphi(p)\big) v^\mu \left.\frac{\partial}{\partial y^\nu}\right|_{F(p)}$$

となると言うことなので，行列表示すると

$$T_pF\left(\begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \widehat{F}^1}{\partial x^1}\big(\varphi(p)\big) & \cdots & \frac{\partial \widehat{F}^1}{\partial x^n}\big(\varphi(p)\big) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \widehat{F}^m}{\partial x^1}\big(\varphi(p)\big) & \cdots & \frac{\partial \widehat{F}^m}{\partial x^n}\big(\varphi(p)\big) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix}$$

のように Jacobi 行列が出現する！

---

*16 赤色をつけた部分に座標表示が棲んでいる．

3.4.3 座標変換の座標表示

C^∞ 多様体 M の 2 つの C^∞ チャート $(U, \varphi) = \bigl(U, (x^\mu)\bigr)$, $(V, \psi) = \bigl(V, (x'^\mu)\bigr)$ をとる．座標変換とは，微分同相写像

$$\psi \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V), \\ \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x'^1(x^1, \ldots, x^n) \\ \vdots \\ x'^n(x^1, \ldots, x^n) \end{pmatrix}$$

のことであった．このとき，点 $p \in U \cap V$ における自然基底 $\partial/\partial x^\mu \,|_p$ と $\partial/\partial x'^\mu \,|_p$ はどのような関係にあるのだろうか？ 命題 3.18 から，点 $\varphi(p) \in \varphi(U \cap V)$ における座標変換の微分は同型写像

$$T_{\varphi(p)}(\psi \circ \varphi^{-1}) \colon T_p\mathbb{R}^n \longrightarrow T_p\mathbb{R}^\ltimes$$

になる．これは $T_p\mathbb{R}^n$ の自然基底に

$$T_{\varphi(p)}(\psi \circ \varphi^{-1}) \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|_{\varphi(p)} \right) = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}(\varphi(p)) \left. \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \right|_{\psi(p)}$$

なる変換を引き起こす．従って

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|_p &= T_{\varphi(p)}(\varphi^{-1}) \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|_{\varphi(p)} \right) \\ &= T_{\varphi(p)}(\psi^{-1}) \circ T_{\varphi(p)}(\psi \circ \varphi^{-1}) \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|_{\varphi(p)} \right) \\ &= \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}(\varphi(p)) \left. \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \right|_p \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

だとわかる．

この T_pM における基底の取り替えによって，接ベクトル $v = v^\mu \,\partial/\partial x^\mu \,|_p = v'^\mu \,\partial/\partial x'^\mu \,|_p \in T_pM$ の成分は

$$\boxed{v'^\nu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}(\varphi(p))\, v^\mu}$$

なる変換を受ける．つまり，一般相対論で反変ベクトルと呼ばれるものは，時空と言う 4 次元 C^∞ 多様体 M の上の 1 点 $p \in M$ における接ベクトルのことに他ならない．

3.4.4 曲線の速度ベクトルとしての接ベクトル

$\mathbb{R}$ の開区間から C^∞ 多様体 M への C^∞ 写像のことを M の C^∞ **曲線**と呼ぶ．

C^∞ 曲線

$$\gamma \colon (a, b) \to M$$

がある時刻 $t_0 \in (a,\, b)$ において点 $p = \gamma(t_0) \in M$ を通るとする．このとき，曲線 γ の点 p における**速度ベクトル** $\dot{\gamma}(t_0) \in T_pM$ が次のように定義される：

$$\dot{\gamma}(t_0) \coloneqq T_{t_0}\gamma \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0} \right)$$

ここに，$\mathrm{d}/\mathrm{d}t\,|_{t_0}$ は 1 次元 C^∞ 多様体 $(a,\, b)$ の点 t_0 における接空間の自然基底である．速度ベクトルは $\forall f \in C^\infty(M)$ に対して

$$\dot{\gamma}(t_0)(f) = T_{t_0}\gamma \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0} \right)(f) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0} (f \circ \gamma) = \frac{\mathrm{d}(f \circ \gamma)}{\mathrm{d}t}(t_0)$$

と作用する．

点 $p\,(= c(t_0))$ 周りのチャート $(U,\, \varphi) = \bigl(U,\, (x^\mu)\bigr)$ をとると，公式 (3.4.4) により

$$\dot{\gamma}(t_0) = \frac{\mathrm{d}\gamma^\mu}{\mathrm{d}t}(t_0) \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\gamma(t_0)} \tag{3.4.6}$$

である．ただし，

$$\gamma \circ \varphi^{-1}(t) = \bigl(\gamma^1(t),\, \dots,\, \gamma^n(t)\bigr)$$

とおいた．このことから，γ を任意にとることで，接空間 T_pM の任意の元を速度ベクトルとして表示できそうな気がしてくる．

命題 3.23: 速度ベクトルの集合としての接空間

（境界なし/あり）n 次元 C^∞ 多様体 M を与える．$\forall p \in M$ を 1 つとる．このとき，$\forall v \in T_pM$ は何かしらの C^∞ 曲線の速度ベクトルである．

証明 まず $p \in \operatorname{Int} M$ とする．p を含む C^∞ チャート $(U,\, \varphi) = \bigl(U,\, (x^\mu)\bigr)$ をとり，$v \in T_pM$ を自然基底で $v = v^\mu\, \partial/\partial x^\mu\,|_p$ のように展開する．ここで十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して C^∞ 曲線 $\gamma\colon (-\varepsilon,\, \varepsilon) \longrightarrow M$ を

$$\gamma(t) \coloneqq \varphi^{-1}(tv^1,\, \dots,\, tv^n) \tag{3.4.7}$$

によって定義すると，(3.4.6) により

$$\dot{\gamma}(0) = v^\mu \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\gamma(0)} = v$$

が成り立つ．

次に $p \in \partial M$ とする．$(U,\, \varphi) = \bigl(U,\, (x^\mu)\bigr)$ を C^∞ 級の境界チャートとし，$v \in T_pM$ を自然基底で $v = v^\mu\, \partial/\partial x^\mu\,|_p$ のように展開する．このとき (3.4.7) の γ を使って

$$\tilde{\gamma} \coloneqq \begin{cases} \gamma, & v^n = 0 \\ \gamma|_{[0,\, \varepsilon)}, & v^n > 0 \\ \gamma|_{(-\varepsilon,\, 0]}, & v^n < 0 \end{cases}$$

と定義した C^∞ 曲線 $\tilde{\gamma}$ は常に $\varphi \circ \tilde{\gamma}(t)$ の第 n 成分が正なので $\mathbb{H}^n$ に属し，$\tilde{\gamma}(0) = p$ かつ $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = v$ を充たす． ■

!

これまでは C^∞ 写像 $F\colon M \longrightarrow N$ の微分を $\boldsymbol{T_p F}$ と書いた．この記法は定義域が明確になると言う利点があるが，やや煩雑である．そこで，以降では誤解の恐れがない場合は

$$\boldsymbol{F_*} \quad \mathbf{d}\boldsymbol{F_p}$$

などと略記することにする．

3.5　接束

n 次元 C^∞ 多様体 M の各点の上に n 次元ベクトル空間が棲んでいると言うような描像を直接定式化しよう．

定義 3.8: 接束

（境界なし/あり）C^∞ 多様体 M を与える．

- disjoint union

$$TM := \coprod_{p \in M} T_p M$$

- 写像（**射影**と呼ばれる）

$$\pi\colon TM \longrightarrow M,\ (p,\, v) \longmapsto p$$

の組のことを M の**接束** (tangent bandle) と呼ぶ．

$\dim M = n$ とする．接束はそれ自身が自然に 2n 次元 C^∞ 多様体になり，射影 π は C^∞ 写像になる．このことを大雑把に確認する[*17]には，M の位相と C^∞ アトラスのみを使って TM に位相と C^∞ アトラスを入れることができることを見ればよい：

$\mathcal{S}$ を M のアトラスとする．一点 $p \in M$ を任意にとり，p の周りのチャート $(U,\, \varphi) \in \mathcal{S}$ を一つとる．命題 3.18-(3) より，微分同相写像 $\varphi\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ は同型写像 $T_p\varphi\colon T_pM \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ を誘導する．これを $\forall v \in T_pM$ に対して

$$T_p\varphi(v) = v^\mu \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\varphi(p)}$$

と書く．ここで，写像 $\tilde{\varphi}_U\colon \pi^{-1}(U) \longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ を

$$\tilde{\varphi}_U(v) := \bigl(x^1(p),\, \dots,\, x^n(p);\ v^1,\, \dots,\, v^n\bigr)$$

として定義すれば，$\tilde{\varphi}$ は全単射になる．TM の位相 $\mathscr{O}_{TM}$ は，各 U に対して次の条件を充たすものとして定義する：

(1) $\pi^{-1}(U) \in \mathscr{O}_{TM}$

*17 接束の C^∞ 構造のちゃんとした構成は付録 B および【例??】で扱う．

(2) $\tilde{\varphi}_U$ は同相写像である

TM のアトラスは,

$$\tilde{\mathcal{S}} := \left\{ \left(\pi^{-1}(U),\, \tilde{\varphi}_U \right) \,\middle|\, (U,\, \varphi) \in \mathcal{S} \right\}$$

とおけば良い．接ベクトルの変換則から $\tilde{\mathcal{S}}$ の座標変換は全て C^∞ 級である．

3.6　ベクトル場

公理 3.3: 環上の加群

R を環とする．**左 R 加群**とは，可換群（Abel 群）$(M,\, +)$ と，M 上の二項演算（スカラー乗法）$\cdot : R \times M \to M,\ (r,\, x) \mapsto rx$ の組で，以下の性質を充たすものである．以下，$x,\, y,\, z \in M$ かつ $a,\, b \in R$ とする：

(M1) $a(bx) = (ab)x$
(M2) $(a+b)x = ax + bx$
(M3) $a(x+y) = ax + ay$
(M4) $1x = x$

定義 3.5 は C^∞ 多様体の一点 $p \in M$ における接ベクトルを定義したものであった．次で定義するベクトル場は p を M 全域で動かして得られる構造である[*18]．

定義 3.9: ベクトル場

C^∞ 多様体 M を与える．M 上の C^∞ **ベクトル場** X は，各点 p における接ベクトル $X_p \in T_pM$ を対応させ，X_p が p に関して C^∞ 級に動くもののことである．i.e. 点 p を含むチャート $\big(U,\, (x^i)\big)$ を与えると，点 p において X は

$$X_p = X^\mu(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p \in T_pM$$

の**局所表示**を持つが，この各係数 $a^i(p)$ が C^∞ 関数になっていることを言う．

M 上のベクトル場全体の集合を $\boldsymbol{\mathfrak{X}(M)}$ と書く．

定義 3.10:

$\mathfrak{X}(M)$ の和とスカラー乗法を次のように定義すると，$\mathfrak{X}(M)$ は $C^\infty(M)$ 上の加群になる：

(1) $\forall X,\, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $(X+Y)_p := X_p + Y_p$
(2) $\forall f \in C^\infty(M)$ および $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $(fX)_p := f(p)X_p$

[*18] なお，ここでのベクトル場の扱いはかなり大雑把である．ちゃんとした扱いは定義??以下を参照．

証明 公理 3.3 を充していることを確認すればよい． ■

定義 3.9 は，接束の言葉を使っても定義できる．すなわち，C^∞ 多様体 M 上の**ベクトル場** (vector field) X とは，連続写像

$$X\colon M \longrightarrow TM,\ p \longmapsto X_p$$

であって，条件

$$\pi \circ X = \mathrm{id}_M$$

を充たすもののことを言う．この条件は $X_p \in T_pM$ を含意している．C^∞ **ベクトル場** $X\colon M \longrightarrow TM$ とは，TM に C^∞ 構造を入れたときに C^∞ 写像となるようなベクトル場のことである．

3.6.1 ベクトル場の微分としての特徴付け

接ベクトルは函数の方向微分を与えた．このことに着想を得て，$C^\infty(M)$ へのベクトル場の作用に新しい解釈を付与できる．i.e. 点 $p \in M$ におけるベクトル場 X の $f \in C^\infty(M)$ への作用 $X_p(f)$ を

$$(Xf)(p) \coloneqq X_p(f) = \left(a^i(p)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right)(f) = a^i(p)\,\frac{\partial}{\partial x^i}\bigl(f \circ \varphi^{-1}\bigr)\bigl(\varphi(p)\bigr)$$

とおき，点 p に $X_p(f) \in \mathbb{R}$ を対応付ける写像になっていると見做す解釈である．このようにして M 上の C^∞ 関数 Xf が得られる．なお，紛らわしいが，Xf のことを **ベクトル場 X による f の微分**と呼ぶ．

上述の解釈から自然に定まる写像

$$\mathfrak{X}(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M),\ (X,\ f) \mapsto Xf$$

は，f に関しては以下の性質を持つ：

命題 3.24:

$f,\, g \in C^\infty(M),\ a,\, b \in \mathbb{R}$ に対して以下が成立する：

(1) $X(af + bg) = a\,Xf + b\,Xg$
(2) $X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$

定義 3.11: ベクトル場による微分

命題 3.24 の性質を充たす写像 $X\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M),\ f \mapsto Xf$ を，一般に $\mathbb{R}$ 上の多元環 $C^\infty(M)$ の**微分** (derivation) と呼ぶ．

3.7 余接空間

定義 3.5 より，T_pM はベクトル空間である．従って定義 3.1 による双対ベクトル空間 T_p^*M を考えることができる．

定義 3.12: 余接空間

（境界なし/あり）C^∞ 多様体 M を与える．一点 $p \in M$ における接空間 T_pM の双対ベクトル空間 T_p^*M を点 $p \in M$ における**余接空間** (cotangent space) と呼ぶ．

接束の場合と同様に，**余接束**を考えることができる．すなわち（境界なし/あり）C^∞ 多様体 M の**余接束** (cotangent bundle) とは，

- disjoint union

$$\boldsymbol{T^*M} \coloneqq \coprod_{p \in M} T_p^*M$$

- 射影

$$\pi \colon \boldsymbol{T^*M} \longrightarrow M,\ (p,\, \omega) \longmapsto p$$

の組のことである．**余ベクトル場**，もしくは **1-形式**とは，C^∞ 写像

$$\omega \colon M \longrightarrow T^*M,\ p \longmapsto \omega_p$$

であって，条件

$$\pi \circ \omega = \mathrm{id}_M$$

を充たすもののことを言う．

3.7.1 余接空間の基底

$f \in C^\infty(M)$ を与えたとき，f **の微分** (differential of f) と呼ばれる余ベクトル場 $\mathbf{d}\boldsymbol{f} \in T^*M$ を次のように定義する：

$$\mathrm{d}f_p\,(v) \coloneqq v(f) \quad (v \in T_pM)$$

点 $p \in M$ を含むチャート $\bigl(U,\, (x^\mu)\bigr)$ をとり，自然基底 $\{\partial/\partial x^\mu\,|_p\}$ の双対基底を $\{\lambda^\mu|_p\}$ とおく．座標関数 $x^\mu \colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ は $C^\infty(U)$ の元なので，x^μ の微分を考えることができる：

$$\mathrm{d}x^\mu\,|_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right|_p \right) = \left.\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right|_p (x^\mu) = \delta^\mu_\nu$$

つまり，$\mathrm{d}x^\mu\,|_p = \lambda^\mu|_p$ である．こうして，T_p^*M の基底は

$$\{\, \mathrm{d}x^\mu\,|_p \,\}$$

であることがわかった．

3.7.2 座標表示

異なるチャート $\big(U,\,(x^{\mu})\big)$, $\big(V,\,(x'^{\mu})\big)$ を採った時の，$U \cap V$ における $\omega \in T_p^* M$ の成分表示の変換則を見る．ω は座標によらないので $\omega = \omega_\mu \, \mathrm{d}x^\mu = \omega'_\mu \, \mathrm{d}x'^\mu$ であり，と書ける．公式 (3.4.5) を使うと

$$\boxed{\omega_\mu} = \omega\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p\right) = \omega\left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\big(\varphi(p)\big)\left.\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right|_p\right) = \boxed{\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\big(\varphi(p)\big)\,\omega'_\nu}$$

とわかる．これは一般相対論で登場する共変ベクトルの変換則である．

3.8 C^∞ 多様体上のテンソル

命題 3.12 によるテンソル積の構成において，$V \in \mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ 上の**共変 $\boldsymbol{k}$-テンソル**空間を

$$\boldsymbol{T_k(V)} \coloneqq \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{k} \cong L(\underbrace{V,\,\ldots,\,V}_{k};\,\mathbb{K})$$

と定める．同様に**反変 $\boldsymbol{k}$-テンソル**空間を

$$\boldsymbol{T^k(V)} \coloneqq \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{k} \cong L(\underbrace{V^*,\,\ldots,\,V^*}_{k};\,\mathbb{K})$$

と定める．さらに $\boldsymbol{(r,\,s)}$ **型の混合テンソル**を

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T^r_s(V)} &\coloneqq \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{r} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{s} \\ &\cong L(\underbrace{V^*,\,\ldots,\,V^*}_{r},\,\underbrace{V,\,\ldots,\,V}_{s};\,\mathbb{K})\end{aligned}$$

と定める．各種のテンソル空間の基底は命題 3.11 により構成できる．

（境界なし/あり）C^∞ 多様体 M 上の点 $p \in M$ における $(r,\,s)$ 型テンソルとは，テンソル空間 $\mathcal{T}^r_s(T_pM)$ の元のことを言う．$\forall T_p \in \mathcal{T}^r_s(T_pM)$ の，チャート $\big(U,\,(x^i)\big)$ における局所座標表示は

$$T_p = T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}(p)\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right)_p \otimes \cdots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right)_p \otimes (\mathrm{d}x^{j_1})_p \otimes \cdots \otimes (\mathrm{d}x^{j_s})_p$$

と書かれる．

3.8.1 テンソルの作用

$T_p \in T^r_s(T_pM)$ の r 個の 1-形式 $\alpha_a = \alpha_{a\mu}(\mathrm{d}x^\mu)_p \in T^*_pM$ と s 個の接ベクトル $w_b = {w_b}^\nu \left(\dfrac{\partial}{\partial x^\nu}\right)_p \in V$ への作用を丁寧に見ると，

$$
\begin{aligned}
&T_p\left[\alpha_1,\,\dots,\,\alpha_r;\ w_1,\,\dots,\,w_s\right] \\
&= T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}(p)\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right)_p \otimes\cdots\otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right)_p \otimes (\mathrm{d}x^{j_1})_p\otimes\cdots\otimes(\mathrm{d}x^{j_s})_p\right)\left[\alpha_{a\mu}(\mathrm{d}x^\mu)_p;\ w_{b\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)_p\right] \\
&= \sum_{\substack{i_1\dots i_r;\\ j_1\dots j_s}} T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}(p) \prod_{\substack{1\le a\le r,\\ 1\le b\le s}} \left(\sum_\mu \alpha_{a\mu}(\mathrm{d}x^\mu)_p\right)\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_a}}\right)_p\right](\mathrm{d}x^{j_b})_p\left[\sum_\nu {w_b}^\nu\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)_p\right] \\
&= \sum_{i_1\dots i_r;\, j_1\dots j_s} T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}(p) \prod_{a,\,b}\left(\sum_\mu \alpha_{a\mu}(\mathrm{d}x^\mu)_p\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_a}}\right)_p\right]\right)\left(\sum_\nu {w_b}^\mu(\mathrm{d}x^{j_b})_p\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)_p\right]\right) \\
&= \sum_{i_1\dots i_r;\, j_1\dots j_s} T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}(p) \prod_{a,\,b}\left(\sum_\mu \alpha_{a\mu}\delta^{i_a}_\mu\right)\left(\sum_\nu {w_b}^\mu\delta^{j_b}_\nu\right) \\
&= \sum_{i_1\dots i_r;\, j_1\dots j_s} T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}(p) \prod_{a,\,b}\alpha_{a i_a}{w_b}^{j_b} \\
&= T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}(p)\alpha_{1i_1}\cdots\alpha_{r i_r}{w_1}^{j_1}\cdots{w_s}^{j_s}.
\end{aligned}
\tag{3.8.1}
$$

ただし，2 行目と最終行にのみ Einstein の規約を用いた．

3.8.2　成分表示の変換則

テンソルの成分が座標変換の下でどのような変換を受けるかどうかを観察しよう．もう一つのチャート $\left(V,\,(y^i)\right)$ をとる．$T_p\left(\alpha_1,\,\dots,\,\alpha_r;\ w_1,\,\dots,\,w_s\right)$ は局所座標によらないので，余ベクトルと接ベクトルの変換則を式 (3.8.1) に適用することで

$$
\begin{aligned}
&T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}(p)\alpha_{1i_1}\cdots\alpha_{ri_r}{w_1}^{j_1}\cdots{w_s}^{j_s} \\
&= T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}(p)\tilde\alpha_{1k_1}\frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{i_1}}(p)\cdots\tilde\alpha_{rk_r}\frac{\partial y^{k_r}}{\partial x^{i_r}}(p){\tilde w_1}{}^{l_1}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{l_1}}(p)\cdots{\tilde w_s}{}^{j_s}\frac{\partial x^{j_s}}{\partial y^{l_s}}(p) \\
&= T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}(p)\frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{i_1}}(p)\cdots\frac{\partial y^{k_r}}{\partial x^{i_r}}(p)\frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{l_1}}(p)\cdots\frac{\partial x^{j_s}}{\partial y^{l_s}}(p)\tilde\alpha_{1k_1}\cdots\tilde\alpha_{1k_r}{\tilde w_1}{}^{l_1}\cdots{\tilde w_1}{}^{l_s} \\
&= \tilde T^{k_1\dots k_r}_{l_1\dots l_s}(p)\tilde\alpha_{1k_1}\cdots\tilde\alpha_{1k_r}{\tilde w_1}{}^{l_1}\cdots{\tilde w_1}{}^{l_s}
\end{aligned}
$$

とわかる．従って

$$
\tilde T^{k_1\dots k_r}_{l_1\dots l_s}(p) = T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}(p)\frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{i_1}}(p)\cdots\frac{\partial y^{k_r}}{\partial x^{i_r}}(p)\frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{l_1}}(p)\cdots\frac{\partial x^{j_s}}{\partial y^{l_s}}(p)
$$

である．一般相対性理論で使うテンソルの定義を再現している．

3.8.3　テンソル場

ベクトル場の定義 3.9 と同様にして，テンソル場を定義できる

定義 3.13: テンソル場

C^∞ 多様体 M 上の**テンソル場** T とは，各点 $\forall p \in M$ に対してテンソル $T_p \in T^r_s(T_pM)$ を対応させ，局所座標表示

$$T_p = T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \right)_p \otimes \cdots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \right)_p \otimes (\mathrm{d}x^{j_1})_p \otimes \cdots \otimes (\mathrm{d}x^{j_s})_p \in \mathcal{T}^r_s(T_pM)$$

の全係数 $T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}(p)$ が C^∞ 関数になっているようなもののことを言う．

接束と同様の定義も可能である．すなわち，（境界なし/あり）C^∞ 多様体 M 上の**共変 $\boldsymbol{k}$-テンソルの束**を

$$\boldsymbol{T_k(T^*M)} \coloneqq \coprod_{p \in M} T_k(T^*_pM)$$

と定める．同様に**反変 $\boldsymbol{k}$-テンソルの束**を

$$\boldsymbol{T^k(TM)} \coloneqq \coprod_{p \in M} T^k(T_pM)$$

と定める．さらに **$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})$ 型**の**混合テンソルの束**を

$$\boldsymbol{T^r_s(TM)} \coprod_{p \in M} T^r_s(T_pM)$$

と定める．

特に，(r, s) 型の**テンソル場** T とは，C^∞ 写像

$$T \colon M \longrightarrow T^r_s(TM)$$

であって，射影 $\pi \colon T^r_s(TM) \longrightarrow M$ について

$$\pi \circ T = \mathrm{id}_M$$

を充たすもののことである．