第 9 章

ファイバー束

二つの C^∞ 多様体 $B,\, N$ が与えられたとしよう．B を**底空間**，F を**ファイバー**と呼ぶことにする．このとき，大雑把に言うと，**局所的に**積多様体[*1] $B \times F$ と同一視される C^∞ 多様体 E のことを **$\boldsymbol{F}$ をファイバーとする $\boldsymbol{B}$ 上のファイバー束**と呼ぶ．もう少し真面目に言うと，M のチャート $(U_i,\, \varphi)$ をとってきたときに積多様体

$$U_i \times F \tag{9.0.1}$$

と E の開集合との間に微分同相写像が存在することである．

しかし，これだけだと E の**大域的な**幾何構造が見えてこない．情報の欠落をなんとかするには M の開被覆 $\{U_i\}$ に関して局所的な積多様体 (9.0.1) の構造を張り合わせる必要がある．そのために，我々は全ての $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ 上において，**変換関数** $\{\Phi_{ij}\}$ を

$$\Phi_{ij} \colon F|_{U_i} \to F|_{U_j}$$

として用意する．変換関数の構成の如何によっては，ファイバー束 E の大域的な幾何構造は極めて複雑なものになりうる．

これだけだとよくわからないので，まず手始めに S^1 を底空間とするファイバー束を具体的に構成してみよう．1 次元実多様体 S^1 の C^∞ アトラス $\{(U_+,\, \varphi_+),\, (U_-,\, \varphi_-)\}$ を次のようにとる：

$$\begin{aligned}
U_+ &\coloneqq \left\{ e^{\mathrm{i}\theta} \;\middle|\; \theta \in (-\varepsilon,\, \pi + \varepsilon) \right\}, & \varphi_+ &\colon U_+ \to \mathbb{R},\; e^{\mathrm{i}\theta} \mapsto \theta \\
U_- &\coloneqq \left\{ e^{\mathrm{i}\theta} \;\middle|\; \theta \in (\pi - \varepsilon,\, 2\pi + \varepsilon) \right\}, & \varphi_- &\colon U_- \to \mathbb{R},\; e^{\mathrm{i}\theta} \mapsto \theta
\end{aligned}$$

ファイバー F としては 1 次元実多様体

$$F \coloneqq [-1,\, 1] \subset \mathbb{R}$$

を選ぶ．このときファイバー束 E は積多様体 $U_+ \times F$ および $U_- \times F$ の二部分からなり，それぞれチャート

$$\big(U_+;\, \theta,\, t_+\big), \quad \big(U_-;\, \theta,\, t_-\big)$$

を持つ（当然だが $t_\pm \in [-1,\, 1]$ である）．なお，この時点では $U_+ \times F,\, U_- \times F$ の「つながり方」は未定義である．

[*1] 位相は積位相（定義**??**）を入れるのだった．

ところで，S^1 の開被覆 U_+, U_- は 2 ヶ所で重なっている：

$$\varphi_{\pm}(U_+ \cap U_-) = (-\varepsilon,\, 0] \cup [2\pi,\, 2\pi+\varepsilon) \cup (\pi-\varepsilon,\, \pi+\varepsilon)$$

ここで，変換関数を

$$\Phi_{+-} \colon F|_{U_-} \to F|_{U_+},\ \begin{cases} t_+ = t_- & : \theta \in (-\varepsilon,\, 0] \cup [2\pi,\, 2\pi+\varepsilon) \\ t_+ = t_- & : \theta \in (\pi-\varepsilon,\, \pi+\varepsilon) \end{cases}$$

と定義することでファイバー束 E は**円筒**と同相に，

$$\Phi_{+-} \colon F|_{U_-} \to F|_{U_+},\ \begin{cases} t_+ = t_- & : \theta \in (-\varepsilon,\, 0] \cup [2\pi,\, 2\pi+\varepsilon) \\ t_+ = -t_- & : \theta \in (\pi-\varepsilon,\, \pi+\varepsilon) \end{cases}$$

と定義することでファイバー束 E は **Möbius の帯**と同相になる．前者は特に $E \approx S^2 \times F$ と言うことだが，このような状況を指してファイバー束 E は**自明束**であると表現する．

9.1　定義の精密化

ファイバー束のイメージが掴めたところで，数学的に厳密な定義を与える．まずは変換関数を入れる前の段階までの定式化である：

C^∞ 多様体 M の**微分同相群** (diffeomorphism group) $\mathbf{Diff}\, \boldsymbol{M}$ とは，

- 台集合 $\mathrm{Diff}\, M \coloneqq \left\{ f \colon M \longrightarrow M \;\middle|\; \text{微分同相写像} \right\}$
- 単位元を恒等写像
- 積を写像の合成

として構成される群のことを言う．

定義 9.1: Lie 群の作用

- Lie 群 G の C^∞ 多様体 M への**左作用**とは，群準同型 $\rho \colon G \longrightarrow \mathrm{Diff}\, M$ であって写像

$$\blacktriangleright \colon G \times M \longrightarrow M,\ (g,\, x) \longmapsto \rho(g)(x)$$

  が C^∞ 写像となるようなもののこと．$\boldsymbol{g} \blacktriangleright \boldsymbol{x} \coloneqq \blacktriangleright (g,\, x)$ と略記する．
- Lie 群 G の C^∞ 多様体 M への**右作用**とは，群準同型 $\rho \colon G^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Diff}\, M$ であって写像

$$\blacktriangleleft \colon M \times G \longrightarrow M,\ (x,\, g) \longmapsto \rho(g)(x)$$

  が C^∞ 写像となるようなもののこと．$\boldsymbol{x} \blacktriangleleft \boldsymbol{g} \coloneqq \blacktriangleleft (g,\, x)$ と略記する．
- Lie 群の左（resp. 右）作用が**自由** (free) であるとは，$\forall x \in X,\ \forall g \in G \setminus \{1_G\},\ g \blacktriangleright x \neq x$ 　(resp.　$x \blacktriangleleft g \neq x$) を充たすことを言う．
- Lie 群の左（resp. 右）作用が**効果的** (effective) であるとは，$\rho \colon G \longrightarrow \mathrm{Diff}\, M$ 　(resp.　$\rho \colon G^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Diff}\, M$) が単射であることを言う．

定義 9.2: C^∞ ファイバー束

Lie 群 G が C^∞ 多様体 F に効果的に作用しているとする．**C^∞ ファイバー束** (fiber bundle) とは，

- C^∞ 多様体 $E,\ B,\ F$
- C^∞ の全射 $\pi\colon E \longrightarrow B$
- Lie 群 G と，G の F への左作用 $\blacktriangleright\colon G \times F \longrightarrow F$
- B の開被覆 $\{\, U_\lambda \,\}_{\lambda \in \Lambda}$
- 微分同相写像の族

$$\left\{\, \varphi_\lambda\colon \pi^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times F \,\right\}_{\lambda \in \Lambda}$$

  であって，$\forall \lambda \in \Lambda$ に対して図 9.1 を可換にするもの．

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U_\lambda) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & U_\lambda \times F \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\
U_\lambda &
\end{tikzcd}$$

図 9.1: 局所自明性

- C^∞ 写像の族

$$\left\{\, t_{\alpha\beta}\colon B \longrightarrow G \;\middle|\; \forall (p,\ f) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times F,\ \varphi_\beta^{-1}(p,\ f) = \varphi_\alpha^{-1}\bigl(p,\ t_{\alpha\beta}(p) \blacktriangleright f\bigr) \,\right\}_{\alpha,\, \beta \in \Lambda}$$

の 6 つのデータの組みのこと．記号としては $\boldsymbol{(E,\ \pi,\ B,\ F)}$ や $\boldsymbol{F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B}$ と書く．

以下ではファイバー束と言ったら C^∞ ファイバー束のことを指すようにする．ファイバー束 $(E,\ \pi,\ B,\ F)$ に関して，

- E を**全空間** (total space)
- B を**底空間** (base space)
- F を**ファイバー** (fiber)
- π を**射影** (projection)
- φ_λ を**局所自明化** (local trivialization)
- $t_{\alpha\beta}$ を**変換関数** (transition map)

と呼ぶ[*2]．また，射影 π による 1 点集合 $\{b\}$ の逆像 $\pi^{-1}(\{b\}) \subset E$ のことを**点 b のファイバー** (fiber) と呼び，E_b と書く．

9.2　ベクトル束

[*2] 紛らわしくないとき，ファイバー束 $(E,\ \pi,\ B,\ F)$ のことを $\pi\colon E \to B$，または単に E と略記することがある．

定義 9.3: ベクトル束

ファイバーを n 次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 V とし，構造群を $\mathrm{GL}(n,\,\mathbb{K})$ とするようなファイバー束 $V \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ であって，その局所自明化 $\{\varphi_\lambda\colon \pi^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times V\}_{\lambda\in\Lambda}$ が以下の条件を充たすもののことを**階数 n のベクトル束** (vector bundle of rank n) と呼ぶ：

(vect-1)

$\forall\lambda \in \Lambda$ および $\forall x \in U_\lambda$ に対して，$\mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\alpha|_{\pi^{-1}(\{x\})}\colon \pi^{-1}(\{x\}) \longrightarrow V$ は $\mathbb{K}$-ベクトル空間の同型写像である．

ここで，第 3 章で雑に導入した接束を正確に構成しよう．

【例 9.2.1】接束

n 次元 C^∞ 多様体 M の接束は，構造群を $\mathrm{GL}(n,\,\mathbb{R})$ とするベクトル束 $\mathbb{R}^n \hookrightarrow TM \xrightarrow{\pi} M$ である．実際，M のチャート $\bigl(U_\lambda,\,(x^\mu)\bigr)$ に対して局所自明化は

$$\varphi_\lambda\colon \pi^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times \mathbb{R}^n,\ \left(p,\, v^\mu \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p\right) \longmapsto (p,\, \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix})$$

となり，チャート $\bigl(U_\alpha,\,(x^\mu)\bigr)$, $\bigl(U_\beta,\,(y^\mu)\bigr)$ に対して

$$\varphi_\beta^{-1}\bigl(p,\,(v^1,\,\dots,\,v^n)\bigr) = \varphi_\alpha^{-1}(p,\, \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1}(p) & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial y^n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial y^1}(p) & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix})$$

となる．故に変換関数は

$$t_{\alpha\beta}(p) := \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1}(p) & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial y^n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial y^1}(p) & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n}(p) \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(n,\,\mathbb{R})$$

で，ファイバーへの構造群の左作用とはただ単に n 次元の数ベクトルに行列を左から掛けることである．

9.3　束写像と C^∞ 切断

定義 9.4: 束写像

ファイバー F と構造群 G を共有する二つのファイバー束 $\xi_i = (E_i,\,\pi_i,\,B_i,\,F)$ を与える．

- ξ_1 から ξ_2 への**束写像** (bundle map) とは，二つの C^∞ 写像 $f\colon B_1 \to B_2$, $\tilde{f}\colon E_1 \to E_2$ の組であって図 9.2

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ B_1 \arrow[r, "f"] & B_2 \end{tikzcd}$$

図 9.2: 束写像

を可換にし，かつ底空間 B_1 の各点 b において，**点 b のファイバー $\pi_1^{-1}(\{b\})$** $\subset E_1$ への $\tilde{f}$ の制限

$$\tilde{f}|_{\pi_1^{-1}(\{b\})} : \pi_1^{-1}(\{b\}) \to \tilde{f}\big(\pi_1^{-1}(\{b\})\big) \subset E_2$$

が微分同相写像になっているもののことを言う．

- ファイバー束 ξ_1 と ξ_2 が**同型** (isomorphic) であるとは, $B_1 = B_2 = B$ であってかつ $f : B \to B$ が恒等写像となるような束写像 $\tilde{f} : E_1 \to E_2$ が存在することを言う．記号としては $\xi_1 \simeq \xi_2$ とかく．

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

図 9.3: ファイバー束の同型

- 積束 $(B \times F,\ \mathrm{proj}_1,\ B,\ F)$ と同型なファイバー束を**自明束** (trivial bundle) と呼ぶ.

ファイバー束 $(E,\ \pi,\ B,\ F)$ は，射影 π によってファイバー F の情報を失う．F を復元するためにも，$s : B \to E$ なる写像の存在が必要であろう．

定義 9.5: C^∞ 切断

ファイバー束 $\xi = (E,\ \pi,\ B,\ F)$ の C^∞ **切断** (cross section) とは，C^∞ 写像 $s : B \to E$ であって $\pi \circ s = \mathrm{id}_B$ となるもののことを言う．

ξ の切断全体の集合を $\boldsymbol{\Gamma(B,\ E)}$ あるいは $\boldsymbol{\Gamma(E)}$ と書く．

9.4　変換関数によるファイバー束の構成

$\xi = (E,\ \pi,\ B,\ F)$ をファイバー束とする．底空間 B の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ をとると，定義 9.2 から，どの $\alpha \in \Lambda$ に対しても局所自明性（図 9.4a）が成り立つ．ここでもう一つの $\beta \in \Lambda$ をとり，$U_\alpha \cap U_\beta$ に関して局所自明性の図式を横に並べることで，自明束 $\mathrm{proj}_1 : (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \to U_\alpha \cap U_\beta$ の束の自己同型（図 9.4c）が得られる．

$$\begin{tikzcd} U_\alpha \times F \arrow[dr, "\mathrm{proj}_1"'] & \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[l, "\varphi_\alpha"'] \arrow[d, "\pi"] \\ & U_\alpha \end{tikzcd}$$

(a) U_α に関する局所自明性

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_\beta) \arrow[r, "\varphi_\beta"] \arrow[d, "\pi"'] & U_\beta \times F \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\ U_\beta & \end{tikzcd}$$

(b) U_β に関する局所自明性

$$\begin{tikzcd} (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \arrow[rr, "\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}"] \arrow[dr, "\mathrm{proj}_1"'] & & (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\ & U_\alpha \cap U_\beta & \end{tikzcd}$$

(c) 自明束 $(U_\alpha \cap U_\beta) \times F$ の自己同型

図 9.4: 局所自明性の結合

全ての $U_\alpha \cap U_\beta$ に関する変換関数の族 $\{t_{\alpha\beta}\}$ が $\forall b \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ に対して条件

$$t_{\alpha\beta}(b)t_{\beta\gamma}(b) = t_{\alpha\gamma}(b) \tag{9.4.1}$$

を充たすことは図式 9.4 より明かである．次の命題は，ファイバー束 (E, π, B, F) を構成する「素材」には

- 底空間となる C^∞ 多様体 B
- ファイバーとなる C^∞ 多様体 F
- Lie 群 G と，その F への左作用 $\blacktriangleright : G \times F \longrightarrow F$
- B の開被覆 $\{U_\lambda\}$
- (9.4.1) を充たす C^∞ 写像の族 $\{t_{\alpha\beta} : U_\beta \cap U_\alpha \to G\}_{\alpha,\, \beta \in \Lambda}$

があれば十分であることを主張する：

命題 9.1: ファイバー束の構成

- C^∞ 多様体 B, F
- Lie 群 G と，G の F への左作用 $\blacktriangleright : G \times F \longrightarrow G$
- B の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$
- **コサイクル条件** (9.4.1) を充たす C^∞ 関数の族 $\{t_{\alpha\beta} : U_\beta \cap U_\alpha \to G\}$

を与える．このとき，構造群 G と変換関数 $\{t_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\, \beta \in \Lambda}$ を持つファイバー束 $\xi = (E, \pi, B, F)$ が存在する．

証明 まず手始めに，cocycle 条件 (9.4.1) より

$$t_{\alpha\alpha}(b)t_{\alpha\alpha}(b) = t_{\alpha\alpha}(b), \quad \forall b \in U_\alpha$$

だから $t_{\alpha\alpha}(b) = 1_G$ であり，また

$$t_{\alpha\beta}(b)t_{\beta\alpha}(b) = t_{\alpha\alpha}(b) = 1_G, \quad \forall b \in U_\alpha \cap U_\beta$$

だから $t_{\beta\alpha}(b) = t_{\alpha\beta}(b)^{-1}$ である．

開被覆 $\{U_\lambda\}$ の添字集合を Λ とする．このとき $\forall\lambda \in \Lambda$ に対して，$U_\lambda \subset B$ には底空間 B からの相対位相を入れ，$U_\lambda \times F$ にはそれと F の位相との積位相を入れることで，直和位相空間

$$\mathcal{E} := \coprod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \times F$$

を作ることができる[*3]．$\mathcal{E}$ の任意の元は $(\lambda,\, b,\, f) \in \Lambda \times U_\lambda \times F$ と書かれる．

さて，$\mathcal{E}$ 上の二項関係 $\sim$ を以下のように定める：

$$(\alpha,\, b,\, f) \sim \big(\beta,\, b,\, t_{\alpha\beta}(b) \blacktriangleright f\big) \quad \forall b \in U_\alpha \cap U_\beta,\, \forall f \in F$$

$\sim$ が同値関係の公理を充たすことを確認する：

反射律　冒頭の議論から $t_{\alpha\alpha}(b) = 1_G$ なので良い．

対称律　冒頭の議論から $t_{\beta\alpha}(b) = t_{\alpha\beta}(b)^{-1}$ なので，

$$\begin{aligned}
&(\alpha,\, b,\, f) \sim (\beta,\, c,\, h) \\
&\Longrightarrow \quad b = c \in U_\alpha \cap U_\beta \ \text{ かつ }\ f = t_{\alpha\beta}(b) \blacktriangleright h \\
&\Longrightarrow \quad c = b \in U_\alpha \cap U_\beta \ \text{ かつ }\ h = t_{\alpha\beta}(b)^{-1} \blacktriangleright f = t_{\beta\alpha}(b) \blacktriangleright f \\
&\Longrightarrow \quad (\beta,\, c,\, h) \sim (\alpha,\, b,\, f).
\end{aligned}$$

推移律　cocycle 条件 (9.4.1) より

$$\begin{aligned}
&(\alpha,\, b,\, f) \sim (\beta,\, c,\, h) \ \text{ かつ }\ (\beta,\, c,\, h) \sim (\gamma,\, d,\, k) \\
&\Longrightarrow \quad b = c \in U_\alpha \cap U_\beta \ \text{ かつ }\ c = d \in U_\beta \cap U_\gamma \ \text{ かつ }\ f = t_{\alpha\beta}(b) \blacktriangleright h,\, h = t_{\beta\gamma}(c) \blacktriangleright k \\
&\Longrightarrow \quad b = d \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \ \text{ かつ }\ f = \big(t_{\alpha\beta}(b) t_{\beta\gamma}(b)\big) \blacktriangleright k = t_{\alpha\gamma}(b) \blacktriangleright k \\
&\Longrightarrow \quad (\alpha,\, b,\, f) \sim (\gamma,\, d,\, k).
\end{aligned}$$

したがって $\sim$ は同値関係である．$\sim$ による $\mathcal{E}$ の商集合を E と書き，商写像を $\mathrm{pr}\colon \mathcal{E} \to E,\ (\alpha,\, b,\, f) \mapsto [(\alpha,\, b,\, f)]$ と書くことにする．

集合 E に商位相を入れて E を位相空間にする．このとき商位相の定義から開集合 $\{\alpha\} \times U_\alpha \times F \subset \mathcal{E}$ は pr によって E の開集合 $\mathrm{pr}(\{\alpha\} \times U_\alpha \times F) \subset E$ に移される．ゆえに E は $\big\{\, \mathrm{pr}(\{\alpha\} \times U_\alpha \times V_\beta) \,\big\}$ を座標近傍にもつ C^∞ 多様体である（ここに $\{V_\beta\}$ は，C^∞ 多様体 F の座標近傍である）．

次に C^∞ の全射 $\pi\colon E \longrightarrow B$ を

$$\pi\big(\, [(\alpha,\, b,\, f)] \,\big) := b$$

と定義すると，これは $\forall\alpha \in \Lambda$ に対して微分同相写像[*4]

$$\varphi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times F,\ [(\alpha,\, b,\, f)] \longmapsto (b,\, f)$$

による局所自明性を持つ．従って組 $\xi := (E,\, \pi,\, B,\, F)$ は構造群 G，局所自明化 $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$，変換関数 $\{t_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$ を持つファイバー束になり，証明が終わる．■

[*3] $\mathcal{E}$ はいわば，「貼り合わせる前の互いにバラバラな素材（局所自明束 $U_\alpha \times F$）」である．証明の以降の部分では，これらの「素材」を $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ の部分に関して「良い性質 (9.4.1) を持った接着剤 $\{t_{\alpha\beta}\}$」を用いて「貼り合わせる」操作を，位相を気にしながら行う．

[*4] 逆写像は $\varphi_\alpha^{-1}\colon U_\alpha \times F \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha),\ (b,\, f) \longmapsto [(\alpha,\, b,\, f)]$ である．φ_α も φ_α^{-1} も C^∞ 写像の合成で書けるので C^∞ 写像である．

9.5 主束とその同伴束

この節で導入する主束の同伴ベクトル束は，次章でゲージ場を導入する舞台となる．

定義 9.6: 主束

構造群を G に持つファイバー束 $\xi = (P,\, \pi,\, M,\, G)$ が**主束** (principal bundle) であるとは，G の G 自身への左作用が自然な左作用[a]であることを言う．

[a] つまり，$g \blacktriangleright x := gx$（Lie 群の積）である．

次の命題は証明の構成が極めて重要である：

命題 9.2: 主束の全空間への右作用

$\xi = (P,\, \pi,\, M,\, G)$ を主束とする．このとき，G の全空間 P への自由な右作用が自然に定義され，その軌道空間 (orbit space) P/G が M になる．

<u>**証明**</u> ξ の局所自明化を $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$，変換関数を $\{t_{\alpha\beta} \colon U_\alpha \cap U_\beta \to G\}_{\alpha,\,\beta \in \Lambda}$ と書く．$\forall u \in P,\, \forall g \in G$ をとる．$\pi(u) \in U_\alpha$ となる $\alpha \in \Lambda$ を選び，対応する局所自明化 φ_α による u の像を $\varphi_\alpha(u) =: (p,\, h) \in U_\alpha \times G$ とおく[*5]．このとき G の P への右作用 $\blacktriangleleft \colon P \times G \longrightarrow P$ を次のように定義する[*6]：

$$u \blacktriangleleft g := \varphi_\alpha^{-1}(p,\, hg) \tag{9.5.1}$$

$\blacktriangleleft$ の well-definedness

$\beta \neq \alpha$ に対しても $\pi(u) \in U_\beta$ であるとする．このとき $\varphi_\beta(u) = (p,\, h') \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times G$ と書けて，また変換関数の定義から

$$h' = t_{\alpha\beta}(p)h \quad \bigl(t_{\alpha\beta}(p) \in G\bigr)$$

である．したがって

$$\varphi_\beta^{-1}(p,\, h'g) = \varphi_\beta^{-1}\Bigl(p,\, \bigl(t_{\alpha\beta}(p)h\bigr)g\Bigr) = \varphi_\beta^{-1}\bigl(p,\, t_{\alpha\beta}(p)hg\bigr) = \varphi_\beta^{-1} \circ (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(p,\, hg) = \varphi_\alpha^{-1}(p,\, hg)$$

が分かり，式 (9.5.1) の右辺は局所自明化の取り方によらない．

$\blacktriangleleft$ は右作用　写像 $\rho \colon G^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Diff}\, P,\ g \longmapsto (u \longmapsto u \blacktriangleleft g)$ が群準同型であることを示す．

(1) $u \blacktriangleleft 1_G = \varphi_\alpha^{-1}(p,\, h1_G) = \varphi_\alpha^{-1}(p,\, h) = u$

(2) $\forall g_1,\, g_2 \in G$ をとる．

$$u \blacktriangleleft (g_1 g_2) = \varphi_\alpha^{-1}\bigl(p,\, (hg_1)g_2\bigr) = \varphi_\alpha^{-1}(p,\, hg_1) \blacktriangleleft g_2 = (u \blacktriangleleft g_1) \blacktriangleleft g_2$$

$\blacktriangleleft$ は自由

[*5] つまり，$p := \pi(u),\ h := \mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\alpha(u)$ と言うことである．
[*6] 右辺の hg は Lie 群の乗法である．

$\forall\alpha \in \Lambda$ に対して $\forall u = (p,\, g) \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ をとる．$u \blacktriangleleft g' = u$ ならば

$$u \blacktriangleleft g' = \varphi_\alpha^{-1}(p,\, gg') = u = \varphi_\alpha^{-1}(p,\, g1_G)$$

が成り立つが，局所自明化は全単射なので $gg' = g$ が言える．g は任意なので $g' = 1_G$ が分かった．

軌道空間が M

$\forall\alpha \in \Lambda$ に対して，G の右作用 (9.5.1) による $U \times G$ の軌道空間は $(U \times G)/G = U \times \{1_G\} = U$ となる．故に P 全域に対しては $P/G = B$ となる．

■

定理 9.1:

コンパクト Hausdorff 空間 P と，P に自由に作用しているコンパクト Lie 群 G を与える．この時，軌道空間への商写像

$$\pi\colon P \longrightarrow P/G$$

は主束である．

証明 ■

構造群を G とするファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ が与えられたとき，命題 9.1 を使うと，変換関数が共通の主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{p} M$ が存在することがわかる．このようにして得られる主束をファイバー束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ に**同伴する** (associated) 主束と呼ぶ．

【例 9.5.1】フレーム束

変換関数 $\{t_{\alpha\beta}\colon M \longrightarrow \mathrm{GL}(N,\, \mathbb{K})\}$ を持つ階数 N のベクトル束 $\mathbb{K}^N \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ に同伴する主束は，例えば次のようにして構成できる：$\forall x \in M$ に対して

$$P_x := \left\{ f \in \mathrm{Hom}\,(\mathbb{K}^N,\, E_x) \,\middle|\, \text{同型写像} \right\}$$

とし，

$$P := \coprod_{x \in M} P_x, \quad \varpi\colon P \longrightarrow M,\ (x,\, f) \longmapsto x$$

と定める．$\mathrm{GL}(N,\, \mathbb{K}) \hookrightarrow P \xrightarrow{\varpi} M$ に適切な局所自明化を入れて，変換関数が $\{t_{\alpha\beta}\colon M \longrightarrow \mathrm{GL}(N,\, \mathbb{K})\}$ となるような主束を構成する．

$\forall(x,\, f) \in P_x$ をとる．このとき $\mathbb{K}^N$ の標準基底を $e_1,\, \dots,\, e_N$ とすると，$f \in \mathrm{Hom}\,(\mathbb{K}^n,\, E_x)$ は E_x の基底 $f(e_1),\, \dots,\, f(e_N)$ と同一視される[a]ことに注意しよう．このことに由来して，$f_\mu := f(e_\mu)$ とおいて $f = (f_1,\, \dots,\, f_N) \in P_x$ と表すことにする．

E の局所自明化 $\{\varphi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{K}^n\}$ を与える．このとき，n 個の E の局所切断 $s_{\alpha 1}, \dots s_{\alpha N} \in \Gamma(E|_{U_\alpha})$ を

$$s_{\alpha\mu}(x) := \varphi_\alpha^{-1}(x,\, e_\mu)$$

と定義すると，$\forall x \in U_\alpha$ に対して $s_{\alpha 1}(x),\, \dots,\, s_{\alpha N}(x)$ が E_x の基底となる[b]．故に，P の局所切断 $p_\alpha \in \Gamma(P|_{U_\alpha})$ を

$$p_\alpha(x) \coloneqq \Big(x,\, \big(s_{\alpha 1}(x),\, \dots,\, s_{\alpha N}(x)\big)\Big) \in P_x$$

により定義できる．このとき，$\forall (x,\, f) = \big(x,\, (f_1,\, \dots,\, f_N)\big) \in \varpi^{-1}(U_\alpha)$ に対してある $g \in \mathrm{GL}(N,\, \mathbb{K})$ が存在して $f = p_\alpha(x) g$ と書ける．ただし g は基底の取り替え行列で，ただ単に行列の積として右から作用している．

ここで，目当ての P の局所自明化を

$$\psi_\alpha \colon \varpi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathrm{GL}(n,\, \mathbb{K}),\ (x,\, f) = \big(x,\, p_\alpha(x) g\big) \longmapsto (x,\, g)$$

と定義する．変換関数を計算すると

$$\begin{aligned}
\psi_\beta^{-1}(x,\, g) &= \big(x,\, p_\beta(x) g\big) \\
&= \Big(x,\, \big(s_{\beta 1}(x),\, \dots,\, s_{\beta N}(x)\big) g\Big) \\
&= \Big(x,\, \big(\varphi_\beta^{-1}(x,\, e_1),\, \dots,\, \varphi_\beta^{-1}(x,\, e_N)\big) g\Big) \\
&= \bigg(x,\, \Big(\varphi_\alpha^{-1}\big(x,\, t_{\alpha\beta}(x) e_1\big),\, \dots,\, \varphi_\alpha^{-1}\big(x,\, t_{\alpha\beta}(x) e_N\big)\Big) g\bigg)
\end{aligned}$$

となるが，e_μ が標準基底なので

$$t_{\alpha\beta}(x) e_\mu = \begin{bmatrix} t_{\alpha\beta}(x)^1{}_\mu \\ t_{\alpha\beta}(x)^2{}_\mu \\ \vdots \\ t_{\alpha\beta}(x)^n{}_\mu \end{bmatrix} = e_\nu t_{\alpha\beta}(x)^\nu{}_\mu$$

が成り立つこと，およびベクトル束の定義から $\mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\alpha|_{E_x} \colon E_x \longrightarrow \mathbb{K}^N$ が $\mathbb{K}$-ベクトル空間の同型写像であることに注意すると

$$\begin{aligned}
&\bigg(x,\, \Big(\varphi_\alpha^{-1}\big(x,\, t_{\alpha\beta}(x) e_1\big),\, \dots,\, \varphi_\alpha^{-1}\big(x,\, t_{\alpha\beta}(x) e_N\big)\Big) g\bigg) \\
&= \bigg(x,\, \Big(\varphi_\alpha^{-1}\big(x,\, e_\nu\big) t_{\alpha\beta}(x)^\nu{}_1,\, \dots,\, \varphi_\alpha^{-1}\big(x,\, e_\nu\big) t_{\alpha\beta}(x)^\nu{}_N\Big) g\bigg) \\
&= \bigg(x,\, \Big(\varphi_\alpha^{-1}\big(x,\, e_1\big),\, \dots,\, \varphi_\alpha^{-1}\big(x,\, e_N\big)\Big) t_{\alpha\beta}(x) g\bigg) \\
&= \Big(x,\, \big(s_{\alpha 1}(x),\, \dots,\, s_{\alpha N}(x)\big) t_{\alpha\beta}(x) g\Big) \\
&= \big(x,\, p_\alpha(x) t_{\alpha\beta}(x) g\big) \\
&= \psi_\alpha^{-1}\big(x,\, t_{\alpha\beta}(x) g\big)
\end{aligned}$$

だとわかり，目標が達成された．この $\mathrm{GL}(N,\, \mathbb{K}) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ のことを**フレーム束**と呼ぶ．

---

[a] 実際 $\forall v = v^\mu e_\mu \in \mathbb{K}^n$ に対して $f(v) = v^\mu f(e_\mu)$ が成り立つので，$f(e_1),\, \dots,\, f(e_N) \in E_x$ が指定されれば f が一意的に決まる．

[b] ベクトル束の定義から $\mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\alpha|_{E_x} \colon E_x \longrightarrow \mathbb{K}^N$ が $\mathbb{K}$-ベクトル空間の同型写像であるため．

逆に，与えられた主束を素材にして，変換関数を共有するファイバー束を構成することができる．

命題 9.3: Borel 構成

$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ を主束とし，Lie 群 G の C^∞ 多様体への左作用 $\blacktriangleright \colon G \times F \longrightarrow F$ を与える．(9.5.1) で定義された G の P への右作用を $\blacktriangleleft \colon P \times G \longrightarrow P$ と書く．

- 積多様体 $P \times F$ への G の新しい右作用 $\blacktriangleleft \colon (P \times F) \times G \longrightarrow P \times F$ を

$$(u,\, f) \blacktriangleleft g \coloneqq (u \blacktriangleleft g,\, g^{-1} \blacktriangleright f)$$

と定義し，この右作用による $P \times F$ の軌道空間を $\boldsymbol{P \times_G F} \coloneqq (P \times F)/G$ と書く．

- 商写像 $\varpi \colon P \times F \longrightarrow P \times_G F,\ (u,\, f) \longmapsto (u,\, f) \blacktriangleleft G$ による $(u,\, f) \in P \times F$ の像を $u \times_G f \in P \times_G F$ と書く．このとき写像

$$q \colon P \times_G F \longrightarrow M,\ u \times_G f \longmapsto \pi(u)$$

が well-defined になる．

このとき，$F \hookrightarrow P \times_G F \xrightarrow{q} M$ は構造群 G をもち，変換関数が $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ のそれと同じであるようなファイバー束である．

証明 q の well-definedness は，(9.5.1) で定義した右作用 $\blacktriangleleft$ が $\pi(u)$ を不変に保つので明らか．

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ の開被覆，局所自明化，変換関数をそれぞれ $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda},\, \{\varphi_\lambda \colon \pi^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times G\}_{\lambda\in\Lambda},\, \left\{t_{\alpha\beta} \colon M \longrightarrow G\right\}_{\alpha,\,\beta\in\Lambda}$ と書く．また，$\forall \lambda \in \Lambda$ に対して局所切断 $s_\lambda \in \Gamma(P|_{U_\alpha})$ を

$$s_\lambda \colon M \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha),\ x \longmapsto \varphi_\lambda^{-1}(x,\, 1_G)$$

と定義する．

このとき，$\forall \lambda \in \Lambda$ に対して C^∞ 写像

$$\psi_\lambda \colon q^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times F,\ s_\lambda(x) \times_G f \longmapsto \bigl(x,\, f\bigr) \tag{9.5.2}$$

が well-defined な[*7] 微分同相写像になる[*8] ので，族

$$\bigl\{\psi_\lambda \colon q^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times F\bigr\}_{\lambda\in\Lambda}$$

[*7] $\forall u \times_G f \in q^{-1}(U_\lambda)$ をとる．このとき $q(u \times_G f) = \pi(u) \in U_\lambda$ なので $u \in P$ に主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ の局所自明化 $\varphi_\lambda \colon \pi^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times F$ を作用させることができる．従って $g(u) \coloneqq \mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\lambda(u) \in G$ とおけば，G の P への右作用の定義 (9.5.1) から $u = \varphi_\lambda^{-1}\bigl(\pi(u),\, g(u)\bigr) = \varphi_\lambda^{-1}\bigl(\pi(u),\, 1_G\bigr) \blacktriangleleft g(u) = s_\lambda\bigl(\pi(u)\bigr) \blacktriangleleft g(u)$ が成り立ち，$u \times_G f = \Bigl(s_\lambda\bigl(\pi(u)\bigr) \blacktriangleleft g(u)\Bigr) \times_G f = s_\lambda\bigl(\pi(u)\bigr) \times_G \bigl(g(u) \blacktriangleright f\bigr)$ と書くことができる．よって ψ_λ **の定義** (9.5.2) **において** $\boldsymbol{\psi_\lambda(u \times_G f) = \bigl(\pi(u),\, g(u) \blacktriangleright f\bigr)}$ **であり**，全ての $q^{-1}(U_\lambda)$ の元の行き先が定義されていることがわかった．次に $u \times_G f = u' \times_G f' \in q^{-1}(U_\lambda)$ であるとする．このとき右作用 $\blacktriangleleft$ の定義からある $h \in G$ が存在して $u' = \varphi_\lambda^{-1}\bigl(\pi(u'),\, g(u')\bigr) = u \blacktriangleleft h = \varphi_\lambda^{-1}\bigl(\pi(u),\, g(u)h\bigr),\ f' = h^{-1} \blacktriangleright f$ が成り立つので，$\pi(u') = \pi(u),\ g(u') = g(u)h,\ f' = h^{-1} \blacktriangleright f$ が言える．従って $\psi_\lambda(u' \times_G f') = \bigl(\pi(u'),\, g(u') \blacktriangleright f'\bigr) = \Bigl(\pi(u),\, \bigl(g(u)h\bigr) \blacktriangleright \bigl(h^{-1} \blacktriangleright f\bigr)\Bigr) = \bigl(\pi(u),\, g(u) \blacktriangleright h \blacktriangleright h^{-1} \blacktriangleright f\bigr) = \bigl(\pi(u),\, g(u) \blacktriangleright f\bigr) = \psi_\lambda(u \times_G f)$ が成り立ち，ψ_λ が well-defined であることが示された．

[*8] $\pi \colon P \longrightarrow M,\ g \coloneqq \mathrm{proj}_2 \circ \varphi_\lambda \colon q^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow G,\ \blacktriangleright \colon G \times F \longrightarrow F$ は全て C^∞ 写像の合成の形をしているので C^∞ 写像であり，$\psi_\lambda \coloneqq \bigl(\pi \times (\blacktriangleright \circ (g \times \mathrm{id}_F))\bigr)$ もこれらの合成として書けている（写像 $\times, \mathrm{id}_F$ はもちろん C^∞ 級である）ので C^∞ 写像である．well-definedness の証明と同じ議論で ψ_λ の単射性がわかる．全射性は定義 (9.5.2) より明らか．逆写像 $(x,\, f) \longmapsto s_\lambda(x) \times_G f$ も，C^∞ 写像たちの合成 $q \circ (s_\lambda \times \mathrm{id}_F)$ なので C^∞ 写像である．

を $F \hookrightarrow P \times_G F \xrightarrow{q} M$ の局所自明化にとる．すると $\forall \alpha,\, \beta \in \Lambda,\ \forall (x,\, f) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$ に対して

$$
\begin{aligned}
\psi_\beta^{-1}(x,\, f) &= s_\beta(x) \times_G f \\
&= \varphi_\beta^{-1}(x,\, 1_G) \times_G f \\
&= \varphi_\alpha^{-1}(x,\, t_{\alpha\beta}(x) 1_G) \times_G f \\
&= \varphi_\alpha^{-1}(x,\, 1_G t_{\alpha\beta}(x)) \times_G f \\
&= \bigl(\varphi_\alpha^{-1}(x,\, 1_G) \blacktriangleleft t_{\alpha\beta}(x)\bigr) \times_G f \\
&= \bigl(s_\alpha(x) \blacktriangleleft t_{\alpha\beta}(x)\bigr) \times_G f \\
&= \Bigl(\bigl(s_\alpha(x) \blacktriangleleft t_{\alpha\beta}(x)\bigr) \blacktriangleleft t_{\alpha\beta}(x)^{-1}\Bigr) \times_G \bigl(t_{\alpha\beta}(x) \blacktriangleright f\bigr) \\
&= s_\alpha(x) \times_G \bigl(t_{\alpha\beta}(x) \blacktriangleright f\bigr) \\
&= \psi_\alpha^{-1}(x,\, t_{\alpha\beta}(x) \blacktriangleright f)
\end{aligned}
$$

が成り立つので $F \hookrightarrow P \times_G F \xrightarrow{q} M$ の変換関数は

$$
\bigl\{\, t_{\alpha\beta} \colon M \longrightarrow G \,\bigr\}_{\alpha,\, \beta \in \Lambda}
$$

である． ■

【例 9.5.2】同伴ベクトル束

主束 $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ を任意に与える．Lie 群 G の，N 次元 $\mathbb{K}$ ベクトル空間 V への左作用とは，Lie 群 G の N 次元表現 $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ のことに他ならない[a]．このとき，命題 9.3 の方法によって構成される階数 N のベクトル束のことを $\boldsymbol{P \times_\rho V}$ と書き，**同伴ベクトル束** (associated vector bundle) と呼ぶ．

[a] $\mathrm{End}\, V$ に標準的な C^∞ 構造を入れて Lie 群と見做したものを $\mathrm{GL}(V)$ と書いた．