第 2 章

多様体

集合の位相とは，異なる点同士の「近さ」の概念を定式化したものと言える．その意味で，集合 M の上に位相を定めて位相空間 $(M, \mathscr{O})$ を作れば，M のことを図形と呼べるであろう．さらに M に次のような要請を与える：

- M は Hausdorff 空間である
- M は**局所的に**我々のよく知る $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ と同一視できる

第一の要請により，点列の収束先が一意に定まることが保証される．第二の要請は，M 上の点を座標で表示できることを意味する．

2.1　位相多様体

2.1.1　定義

定義 2.1: 位相多様体

第 2 可算な Hausdorff 空間 $(M, \mathscr{O}_M)$ が n 次元**位相多様体** (topological manifold) であるとは，任意の点 $p \in M$ に対して

- p の開近傍 $p \in U \subset M$
- $\mathbb{R}^n$ の開集合 $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$
- 同相写像 $\varphi\colon U \xrightarrow{\approx} \varphi(U)$

の 3 つが存在することを言う．

少し技術的な話をすると，上述の定義において開集合 $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ を開球 $B_\varepsilon\big(0\big) \subset \mathbb{R}^n$ $(\varepsilon > 0)$ か，もしくは $\mathbb{R}^n$ そのものに置き換えても同値な定義が得られる[*1]．

[*1] $\forall p \in M$ に対して定義 2.1 の 3 つ組が与えられたとする．平行移動により $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$ を仮定して良い．このとき開集合の性質から $\varphi(p) \in B_\varepsilon(0) \subset \varphi(U)$ を充たす $\varepsilon > 0$ が存在するので M の開集合[*2] $\varphi^{-1}\big(B_\varepsilon(0)\big) \subset M$ と $B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^n$ と φ の制限 $\varphi|_{\varphi^{-1}\left(B_\varepsilon(0)\right)}$（これも同相写像になっている）が定義 2.1 の 3 つ組に相当するものになる．$B_\varepsilon(0) \approx \mathbb{R}^n$ は，例えば連続写像 $x \longmapsto \frac{x}{\varepsilon - |x|}$ が同相写像になっている．

$\mathbb{R}^n$ との局所的な同相の構造を入れたことで，位相多様体 M 上の点を座標表示することができるようになる．

定義 2.2: 局所座標

n 次元位相多様体 $(M, \mathscr{O}_M)$ を与える．M 上の任意の点 $p \in M$ をとり，p の開近傍 $p \in U \subset M$ であって $\mathbb{R}^n$ の開集合 $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ との同相写像 $\varphi\colon U \xrightarrow{\approx} \varphi(U)$ が存在するものをとる．このとき，

- $U \in \mathscr{O}_M$ を点 p の**座標近傍** (coordinate neighborhood) と呼ぶ．
- 組 (U, φ) のことを**チャート** (chart)，もしくは**局所座標系**と呼ぶ．
- 任意の点 $q \in U$ に対して，q が φ によって写像された行き先

$$\varphi(q) = \bigl(x^1(q), x^2(q), \dots, x^n(q)\bigr) \in \mathbb{R}^n$$

  のこと[a]を点 q の**局所座標** (local coordinate) と呼ぶ．
- $\mu = 1, \dots, n$ に対して定まる連続写像[b]

$$x^\mu\colon U \longrightarrow \mathbb{R},\ q \longmapsto x^\mu(q)$$

  のことを U 上の**座標関数**と呼ぶ．

[a] 添字が上付きになっている理由は後ほど明らかになる．
[b] 第 i 成分への射影 $\mathrm{pr}_i\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ (x^1, \dots, x^i, \dots, x^n) \longrightarrow x^i$ が連続であることに注意すると，$x^i = \mathrm{pr}_i \circ \varphi$ は連続写像同士の合成なので連続である．

チャートの座標関数を明示したいときは $\boldsymbol{(U, \varphi)}$ の代わりに $\boldsymbol{\bigl(U, (x^\mu)\bigr)}$ と書くことにする．また，チャート (U, φ) を具体的な写像として定義するときには

$$\varphi\colon U \longrightarrow \varphi(U),\ p \longmapsto \begin{pmatrix} x^1(p) \\ \vdots \\ x^n(p) \end{pmatrix}$$

のように丸括弧で囲まれた，縦に並んだ数の組として表記する[*3]．

位相多様体は，$\mathbb{R}^n$ から様々な性質を引き継ぐ，比較的扱いやすい位相空間である．例えば

命題 2.1: 位相多様体の位相的性質

位相多様体 M は

(1) 局所弧状連結
(2) M が弧状連結 $\iff$ M が連結
(3) 局所コンパクト
(4) パラコンパクト

[*3] 最右辺は n 個の実数の組という以上の情報は持たない．従って，例えば数ベクトルとしての構造を意識しないということである．数ベクトルと見做したいときは角括弧で $\begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$ と書くことにする．

(5) 基本群が可算濃度

<u>**証明**</u> [**?**, Proposition 11-16] を参照.

■

などが成り立つ.

2.1.2 アトラス

定義 2.2 は多様体 M の局所的な座標表示を与えた．座標近傍の M の全域にわたる和集合をとってみるとどうなるのだろうか[*4]？

定義 2.3: アトラス

$(M,\ \mathscr{O}_M)$ を位相多様体とする．チャートの族 $\{(U_\lambda,\ \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ は，座標近傍の族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathscr{O}_M$ が

$$M = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$$

を充たすとき，M の**アトラス** (atlas) であると言う．

座標近傍 U_α, U_β が重なってしまう場合を考える．空でない共通部分 $U_\alpha \cap U_\beta \in \mathscr{O}_M$ [*5]は 2 通りの同相写像 $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ を介して $\mathbb{R}^n$ の開集合と同相なので，U_α の座標表示 $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ と U_β の座標表示 $\varphi_\beta(U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$ の間に**同相写像**

$$f_{\beta\alpha} \coloneqq \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta),\ \varphi_\alpha(p) \longmapsto (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(p)$$

を構成することができる．同相写像 $f_{\beta\alpha}$ のことを**座標変換** (coordinate change) と呼ぶ[*6]（図 2.1).

[*4] 以降，文脈上明らかな時は位相多様体 $(M,\ \mathscr{O}_M)$ を略記して M と書く．
[*5] 位相空間の公理**??**より，これもまた開集合である．
[*6] **transition map** from φ_α to φ_β とも言う．

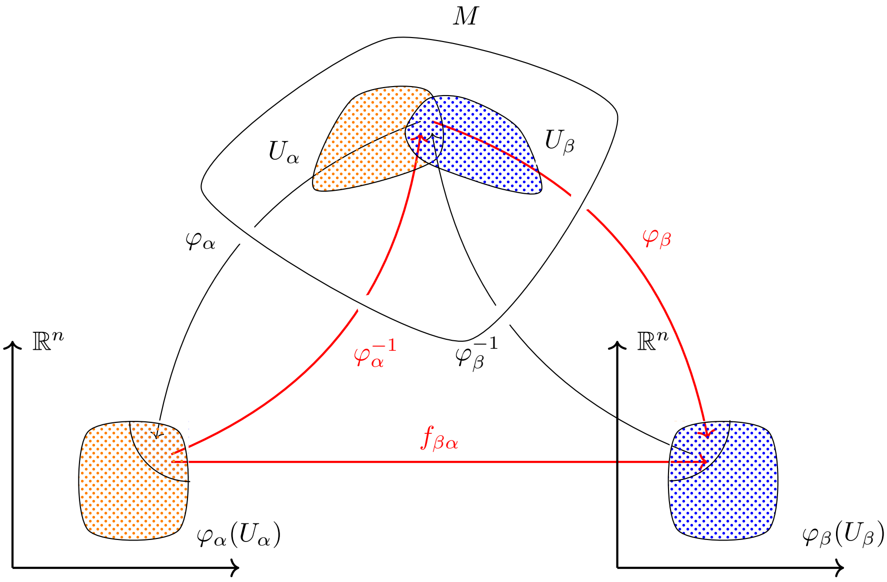


図 2.1: 座標変換の概念図.

> **!** **座標変換は，多様体 M 上の点を実際に動かすものではない．**あくまで点を表現する方法が変わっただけなのである．

座標関数を明示して $(U_\alpha,\, \varphi_\alpha) = \bigl(U_\alpha,\, (x^\mu)\bigr)$, $(U_\beta,\, \varphi_\beta) = \bigl(U_\beta,\, (x'^\mu)\bigr)$ と書くと，座標変換は n 個の実数を引数に持ち n 個の実数値を返す関数

$$f_{\beta\alpha} \colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta),\quad \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x'^1(x^1,\, \dots,\, x^n) \\ \vdots \\ x'^n(x^1,\, \dots,\, x^n) \end{pmatrix}$$

である．

【例 2.1.1】関数のグラフ

$U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とし，$f \colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ を n 変数の実数値連続関数とする．$\mathbb{R}^{n+1}$ の部分集合

$$\Gamma(f) := \bigl\{\, (x,\, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \bigm| x \in U,\ y = f(x) \,\bigr\}$$

に $\mathbb{R}^{n+1}$ からの相対位相を入れてできる位相空間のことを**関数 f のグラフ**と呼ぶ．連続写像[a]

$$\mathrm{proj}_1 \colon \Gamma(f) \longrightarrow U,\ (x,\, y) \longmapsto x$$

は，連続な逆写像

$$\mathrm{proj}_1^{-1} \colon U \longrightarrow \Gamma(f),\ x \longmapsto \bigl(x,\, f(x)\bigr)$$

を持つので同相写像である．i.e. 組 $\bigl(\Gamma(f),\, \mathrm{proj}_1\bigr)$ は n 次元位相多様体 $\Gamma(f)$ のチャートである．チャートを 1 枚だけ含む族

$$\bigl\{\bigl(\Gamma(f),\, \mathrm{proj}_1\bigr)\bigr\}$$

は位相多様体 $\Gamma(f)$ のアトラスである．

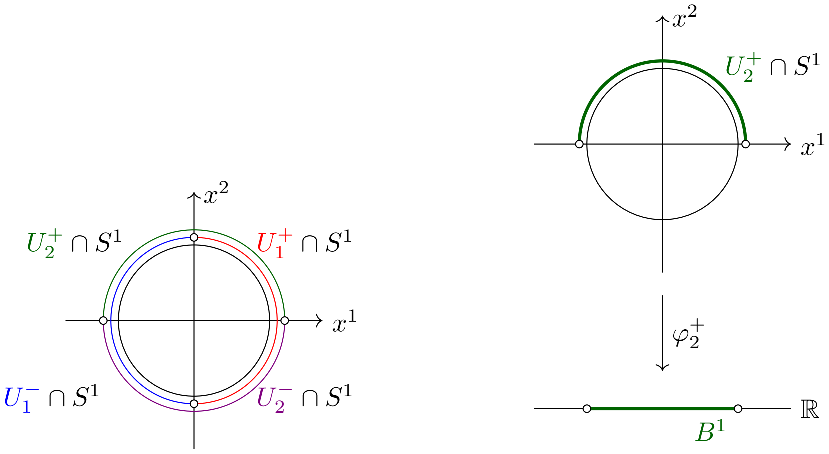
[a] これが連続であることは，直接的には命題**??**による．

【例 2.1.2】n 次元球面

$n \geq 0$ 次元球面 $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ と n 次元開球 $B^n \subset \mathbb{R}^n$ を

$$S^n := \left\{ (x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 = 1 \right\},$$
$$B^n := \left\{ (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 < 1 \right\}$$

として定義する．S^n には，$\mathbb{R}^{n+1}$ からの，B^n には $\mathbb{R}^n$ からの相対位相を入れて位相空間にする．これらは第 2 可算な Hausdorff 空間 $\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^n$ の部分空間なので，第 2 可算かつ Hausdorff である．



(a) S^1 のアトラス　(b) S^1 のチャート $(U_2^+ \cap S^1, \varphi_2^+)$

図 2.2: S^1 の場合

$i = 1, \dots, n+1$ に対して，$\mathbb{R}^{n+1}$ の開集合

$$U_i^+ := \left\{ (x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; x^i > 0 \right\}$$
$$U_i^- := \left\{ (x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; x^i < 0 \right\}$$

を定める．連続写像

$$f \colon B^n \longrightarrow \mathbb{R},\ (x^1, \dots, x^n) \longmapsto \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2}$$

を考える．すると $\forall (x^1, \dots, x^{n+1}) \in U_i^{\pm} \cap S^n$ は

$$(x^1, \dots, \widehat{x^i}, \dots, x^{n+1}) \in B^n,\ x^i = \pm f(x^1, \dots, \widehat{x^i}, \dots, x^{n+1})$$

を充たす．ただし $\widehat{x^i}$ は第 i 成分を除くことを意味する．つまり，$U_i^{\pm} \cap S^n$ は関数のグラフ

$$U_i^{\pm} \cap S^n = \left\{ (x^1, \dots, \widehat{x^i}, \dots, x^{n+1}; x^i) \in B^n \times \mathbb{R} \;\middle|\; x^i = \pm f(x^1, \dots, \widehat{x^i}, \dots, x^{n+1}) \right\}$$

である．故に第 i 成分以外への射影

$$\varphi_i^{\pm} \colon U_i^{\pm} \cap S^n \longrightarrow B^n,\ (x^1, \dots, x^{n+1}) \longmapsto \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ \widehat{x^i} \\ \vdots \\ x^{n+1} \end{pmatrix}$$

との組 $(U_i^{\pm}, \varphi_i^{\pm})$ は n 次元位相多様体 S^n のチャートである．$2n+2$ 枚のチャートからなる族

$$\left\{ (U_i^+, \varphi_i^+),\, (U_i^-, \varphi_i^-) \right\}_{i=1,\dots,n+1}$$

は S^n のアトラスとなる．

【例 2.1.3】n 次元実射影空間

$\mathbb{R}^{n+1}$ の 1 次元部分実ベクトル空間全体がなす集合の上に，商写像

$$\pi \colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}P^n,\ x \longmapsto \mathrm{Span}\{x\}$$

による商位相を入れてできる位相空間を n 次元**実射影空間** (real projective space) と呼び，$\mathbb{R}\boldsymbol{P^n}$ と書く．$\mathbb{R}^{n+1}$ の原点を通る直線全体がなす商位相空間と言っても良い．$[x] \coloneqq \pi(x) \in \mathbb{R}P^n$ と書くことにする．

補題 2.1:

(1) $\mathbb{R}P^n$ は Hausdorff 空間である．

(2) $\mathbb{R}P^n \approx S^n/\{\pm 1\}$ である．

証明　(1) $\langle \cdot | \cdot \rangle$ を Euclid 内積，$|\cdot|$ を Euclid ノルムとする．
$x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ が $[x] \neq [y]$ を充たすとする．このとき x, y は線型独立だから $\frac{|\langle x|y\rangle|}{|x||y|} \in [0, 1)$ である．よって $\frac{|\langle x|y\rangle|}{|x||y|} < r_1 < r_2 < 1$ を充たす実数 r_1, r_2 が存在する．
ここで写像

$$f \colon \mathbb{R}P^n \longrightarrow [0, 1],\ [u] \longmapsto \frac{|\langle x|u\rangle|}{|x||u|}$$

を考える．$[u] = [v] \in \mathbb{R}P^n$ ならばある $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して $u = \lambda v$ と書けるので $f([u]) = f([v])$ が言える．i.e. f は $[u]$ の代表元の取り方によらず，well-defined である．π が商写像でかつ $f \circ \pi$ が連続であることから f も連続である．従って，$[0, 1]$ の開集合 $[0, r_1), (r_2, 1] \subset [0, 1]$ の f による逆像 $U_1 \coloneqq f^{-1}\big([0, r_1)\big), U_2 \coloneqq f^{-1}\big((r_2, 1]\big)$ はどちらも $\mathbb{R}P^n$ の開集合で，かつ $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ である．$f([y]) \in [0, r_1)$ かつ $f([x]) = 1 \in (r_2, 1]$ なので $[y] \in U_1, [x] \in U_2$ であり，証明が完了した．

(2) $\forall x,\, y \in S^n$ について，$[x] = [y]$ ならば $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して $x = \lambda y$ と書けるが，$x,\, y \in S^n$ なので $1 = |x| = |\lambda y| = |\lambda|$ でなくてはならない．故に $\lambda \in \{\pm 1\}$ である．i.e. π の制限 $\pi|_{S^n} \colon S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ は 2 対 1 の連続写像である．従って商写像 $\varpi \colon S^n \longrightarrow S^n/\{\pm 1\},\ x \longmapsto \{\pm 1\}x$ が全単射連続写像 $\overline{\pi|_{S^n}} \colon S^n/\{\pm 1\} \longrightarrow \mathbb{R}P^n,\ \{\pm 1\}x \longmapsto [x]$ を一意的に誘導する．$\overline{\pi|_{S^n}}$ はコンパクト空間から Hausdorff 空間への連続な全単射だから同相写像である．

■

$S^n/\{\pm 1\}$ はコンパクトなので明らかに第 2 可算である．

$i = 1,\, \dots,\, n+1$ に対して，開集合 $\tilde{U}_i \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ を

$$\tilde{U}_i \coloneqq \left\{\, (x^1,\, \dots,\, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; x^i \neq 0 \,\right\}$$

とし，$U_i \coloneqq \pi(\tilde{U}_i)$ とおく．このとき $\pi^{-1}\bigl(\pi(\tilde{U}_i)\bigr)$ なので制限 $\pi|_{\tilde{U}_i}\tilde{U}_i \longrightarrow U_i$ は商写像である．

ここで写像

$$\varphi_i \colon U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ [x^1,\, \dots,\, x^{n+1}] \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{x^1}{x^i} \\ \vdots \\ \frac{x^{i-1}}{x^i} \\ \frac{x^{i+1}}{x^i} \\ \vdots \\ \frac{x^{n+1}}{x^i} \end{pmatrix}$$

を考える．φ_i は 0 でない定数倍に関して不変なので well-defined である．π が商写像で $\varphi_i \circ \pi$ が連続なので φ_i も連続である．さらに，

$$\varphi_i^{-1} \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow U_i,\ \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} \longmapsto [u^1,\, \dots,\, u^{i-1},\, 1,\, u^{i+1},\, \dots,\, u^n]$$

が連続な[a]逆写像なので φ_i は同相写像で，組 $(U_i,\, \varphi_i)$ は n 次元位相多様体 $\mathbb{R}P^n$ のチャートである．
$n+1$ 枚のチャートからなる族

$$\bigl\{(U_i,\, \varphi_i)\bigr\}_{i=1,\, \dots,\, n+1}$$

がアトラスとなる．

---

[a] 写像 $\psi_i \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\},\ (u^1,\, \dots,\, u^n) \longmapsto (u^1,\, \dots,\, u^{i-1},\, 1,\, u^{i+1},\, \dots,\, u^n)$ は明らかに連続なので，$\varphi_i^{-1} = \pi \circ \psi_i$ は連続写像の合成となって連続である．

【例 2.1.4】積多様体

次元 $m,\, n$ の位相多様体 $M,\, N$ を与える．このとき積空間 $M \times N$ は第 2 可算かつ Hausdorff であ流ことが知られている．

$\forall(p,\,q)\in M\times N$ に対して，$M,\,N$ のチャート $(U,\,\varphi),\,(V,\,\psi)$ が存在する．このとき写像

$$\varphi\times\psi\colon U\times V\longrightarrow\mathbb{R}^{m+n},\ (x,\,y)\longmapsto\bigl(\varphi(x),\,\psi(y)\bigr)$$

は $U\times V$ から $\mathbb{R}^{m+n}$ の開集合 $(\varphi\times\psi)(U\times V)$ への同相写像であり，組 $(U\times V,\,\varphi\times\psi)$ は $M\times N$ のチャートを定める．

トーラス $S^1\times S^1$ は積多様体の例である．より一般に，n 次元トーラスを n 個の S^1 の積多様体として定義する．

2.2　C^∞ 多様体

まず，$\mathbb{R}^n$ の微分同相を定義しておく．

定義 2.4:（$\mathbb{R}^n$ における）微分同相

$U,\,V$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合とする．同相写像 $\varphi\colon U\xrightarrow{\approx}V$ が**微分同相** (diffeomorphism) であるとは，φ とその逆写像 φ^{-1} がともに C^∞ 写像であることを言う．

2.2.1　C^∞ 構造

位相多様体 M のアトラスの座標変換は同相写像であったが，そのままだと微積分との相性が悪い．そこで，座標変換が何回でも微分可能であるような多様体を定義する．

定義 2.5: C^∞ 多様体

M を位相多様体とし，M のアトラス $\mathcal{S}=\bigl\{\,(U_\lambda,\,\varphi_\lambda)\,\bigr\}_{\lambda\in\Lambda}$ を与える．

- $\mathcal{S}$ が $\boldsymbol{C^\infty}$ **アトラス**であるとは，$\forall\alpha,\,\beta\in\Lambda$ に対して座標変換

$$f_{\beta\alpha}\colon\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\xrightarrow{\approx}\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$$

  が微分同相であること．
- $\mathcal{S}$ が $\boldsymbol{C^\infty}$ **アトラス**であるとき，$\mathcal{S}$ は M 上の $\boldsymbol{C^\infty}$ **構造**を定めるという．
- C^∞ 構造の与えられた多様体のことを $\boldsymbol{C^\infty}$ **多様体**と呼ぶ．

! 文献によっては C^∞ 多様体のことを指して**滑らかな多様体** (smooth manifold) とか，**可微分多様体**，**微分可能多様体** (differentiable manifold) と呼んでいることがあるので注意．この資料では以降一貫して C^∞ 多様体と言うことにする．

座標変換 $f_{\beta\alpha}$ の定義域と終域は $\mathbb{R}^n$ の開集合なので，$\mathbb{R}^n$ における微分同相の定義で十分なのである．なお，与えられた写像 $f\colon\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ が微分同相であるかどうかを判定する問題は，一般には容易でない．技術的には，例えば逆函数定理などが有用である：

定理 2.1: 逆函数定理

U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし，C^∞ 写像 $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ を与える．ある 1 点 $x \in U$ における φ の Jacobian が 0 でなければ，x のある開近傍 $x \in V \subset U$ が存在して $\varphi(V) \subset \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合となり，φ の制限

$$\varphi|_V : V \longrightarrow \varphi(V)$$

は微分同相になる．

証明 例えば [?, Theorem C.34] を参照． ■

【例 2.2.1】$\mathbb{R}^3$ のチャート

位相多様体 $\mathbb{R}^3$ の最も簡単なチャートは

- $U_1 := \mathbb{R}^3$ を点 p の座標近傍とする．
- 同相写像[a]

$$\varphi_1 \colon U_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x,\, y,\, z) \longmapsto \begin{pmatrix} x^1(x,\, y,\, z) \\ x^2(x,\, y,\, z) \\ x^3(x,\, y,\, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

の組 $(U_1,\, \varphi_1)$ で，チャートを 1 枚だけ含む族

$$\mathcal{A}_1 := \bigl\{(U_1,\, \varphi_1)\bigr\}$$

が $\mathbb{R}^3$ の C^∞ アトラスになる．

一方で，$\mathbb{R}^3$ の開集合

$$U_2 := \bigl\{\, (x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \bigm| x > 0,\, z > 0 \,\bigr\} = (0,\, \infty) \times \mathbb{R} \times (0,\, \infty),$$

の上で定義される連続写像

$$\varphi_2 \colon U_2 \longrightarrow \varphi_2(U_2),\ (x,\, y,\, z) \longmapsto \begin{pmatrix} r(x,\, y,\, z) \\ \theta(x,\, y,\, z) \\ \phi(x,\, y,\, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \arctan(y/z) \\ \arctan(y/x) \end{pmatrix}$$

を考える．$\varphi_2(U_2) = (0,\, \infty) \times (0,\, \pi/2) \times (-\pi/2,\, \pi/2)$ であり，逆写像

$$\varphi_2^{-1} \colon \varphi_2(U_2) \longrightarrow U_2,\ \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} \longmapsto (r\sin\theta\cos\phi,\, r\sin\theta\sin\phi,\, r\cos\theta)$$

も連続なので φ_2 は同相写像である．従って組 $(U_2,\, \varphi_2)$ もチャートと見做せる．このチャートは **3 次元極座標系**と呼ばれるものである．

$$\mathbb{R}^3 = U_1 \cup U_2$$

なので，チャートの族

$$\mathcal{A}_2 := \bigl\{(U_1,\, \varphi_1),\, (U_2,\, \varphi_2)\bigr\}$$

もまた位相多様体 $\mathbb{R}^3$ のアトラスになる．アトラス $\mathcal{A}_2$ におけるチャートの重なりは

$$U_1 \cap U_2 = U_2$$

で，この間の座標変換は

$$\begin{aligned}
\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} \colon \varphi_2(U_2) &\longrightarrow \varphi_1(U_2) \\
\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x^1(r,\, \theta,\, \phi) \\ x^2(r,\, \theta,\, \phi) \\ x^3(r,\, \theta,\, \phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin\theta \cos\phi \\ r \sin\theta \sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となる．$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ の Jacobian は

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial r} & \frac{\partial x^1}{\partial \theta} & \frac{\partial x^1}{\partial \phi} \\ \frac{\partial x^2}{\partial r} & \frac{\partial x^2}{\partial \theta} & \frac{\partial x^3}{\partial \phi} \\ \frac{\partial x^3}{\partial r} & \frac{\partial x^3}{\partial \theta} & \frac{\partial x^3}{\partial \phi} \end{vmatrix} = r^2 \sin\theta$$

で U_2 上の全ての点で正だから，逆関数定理により $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ が微分同相写像であるとわかる．つまり，アトラス $\mathcal{A}_2$ は C^∞ アトラスであり，$\mathbb{R}^3$ の C^∞ 構造の1つを定める．

他には $\mathbb{R}^3$ の開集合

$$U_3 \coloneqq \left\{\, (x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x > 0 \,\right\} = (0,\, \infty) \times \mathbb{R}^2$$

の上で定義される同相写像

$$\varphi_3 \colon U_3 \longrightarrow \varphi_3(U_3),\ (x,\, y,\, z) \longmapsto \begin{pmatrix} \rho(x,\, y,\, z) \\ \phi(x,\, y,\, z) \\ z(x,\, y,\, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \arctan(y/x) \\ z \end{pmatrix}$$

を考えることもできる．$\varphi_3(U_3) = (0,\, \infty) \times (-\pi/2,\, \pi/2) \times \mathbb{R}$ で，逆写像は

$$\varphi_3^{-1} \colon \varphi_3(U_3) \longrightarrow U_3,\ \begin{pmatrix} \rho \\ \phi \\ z \end{pmatrix} \longmapsto (\rho\cos\phi,\, \rho\sin\phi,\, z)$$

である．チャート $(U_3,\, \varphi_3)$ は**円筒座標系**として知られる．チャートの族

$$\mathcal{A}_3 \coloneqq \bigl\{ (U_1,\, \varphi_1),\, (U_3,\, \varphi_3) \bigr\}$$

は位相多様体 $\mathbb{R}^3$ のアトラスを成す．$\mathcal{A}_3$ におけるチャートの重なりは

$$U_1 \cap U_3 = U_3$$

で，座標変換は

$$\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1} \colon \varphi_3(U_3) \longrightarrow \varphi_1(U_3),\ \begin{pmatrix} \rho \\ \phi \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x^1(\rho,\, \phi,\, z) \\ x^2(\rho,\, \phi,\, z) \\ x^3(\rho,\, \phi,\, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\phi \\ \rho\sin\phi \\ z \end{pmatrix}$$

となる．$\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1}$ の Jacobian は ρ であるから $\varphi_3(U_3)$ の全ての点において正であり，逆関数定理から微分同相写像であるとわかる．つまり，アトラス $\mathcal{A}_3$ もまた C^∞ アトラスであり，$\mathbb{R}^3$ の上に $\mathcal{A}_2$ とは別の C^∞ 構造を定める．

[a] ややこしいようだが，左辺は位相多様体 $\mathbb{R}^3$ の点としての $(x,\, y,\, z)$ で，右辺はチャートの定義としての $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ である．実際のところは $\varphi_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ である．

この例からも，C^∞ アトラスが複数存在し得ることがわかる．しかし，明かに $\mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$ もまた C^∞ アトラスになるので，$\mathcal{A}_2$ が定める C^∞ 構造と $\mathcal{A}_3$ が定める C^∞ 構造を区別するのは話を無駄にややこしくしているように思われる．そこで，考えられる限り最大の C^∞ アトラスを構成できると便利である．

定義 2.6: C^∞ アトラスの同値関係

C^∞ 多様体 M 上の C^∞ アトラス全体の集まりを $\mathscr{A}$ と書く．$\mathscr{A}$ 上の同値関係 $\sim$ を以下のように定める：

$$\sim \,:= \{(\mathcal{S},\, \mathcal{T}) \in \mathscr{A} \times \mathscr{A} \mid \mathcal{S} \cup \mathcal{T} \in \mathscr{A}\}$$

$\mathcal{S} \sim \mathcal{T}$ のとき，$\mathcal{S},\, \mathcal{T}$ は**両立する**と言う．

証明 同値関係の公理**??**を充していることを示す．

(1) $\mathcal{S} \cup \mathcal{S} = \mathcal{S}$ より反射律を充たす．
(2) $\mathcal{S} \cup \mathcal{T} = \mathcal{T} \cup \mathcal{S}$ より対称律を充たす．
(3) 任意のチャート $(S,\, \varphi) \in \mathcal{S}$, $(U,\, \psi) \in \mathcal{U}$ をとる．$\mathcal{S} \sim \mathcal{T}$ かつ $\mathcal{T} \sim \mathcal{U}$ のとき，$\varphi(S \cap U)$, $\psi(S \cap U)$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合でかつ $\psi \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(S \cap U) \to \psi(S \cap U)$ が微分同相であることを示せばよい．

　仮定よりそれぞれのチャートは $\forall (T_\lambda,\, \phi_\lambda) \in \mathcal{T}$ と両立するので，$\phi_\lambda(S \cap T_\lambda)$, $\phi_\lambda(U \cap T_\lambda) \subset \mathbb{R}^n$ は開集合である．ϕ_λ は同相写像なので全単射であり，従って補題**??**-(9) より

$$\phi_\lambda(S \cap T_\lambda) \cap \phi_\lambda(U \cap T_\lambda) = \phi_\lambda(S \cap U \cap T_\lambda)$$

が成り立つから，$\phi_\lambda(S \cap T_\lambda) \cap \phi_\lambda(U \cap T_\lambda)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である．$\varphi \circ \phi_\lambda^{-1}$ は同相写像であるから

$$\varphi(S \cap U \cap T_\lambda) = (\varphi \circ \phi_\lambda^{-1})(\phi_\lambda(S \cap U \cap T_\lambda))$$

も $\mathbb{R}^n$ の開集合である．ここで補題**??**-(1) を使うと[*7]，

$$\varphi(S \cap U) = \varphi(S \cap U \cap M) = \varphi\left(S \cap U \cap \left(\bigcup_\lambda T_\lambda\right)\right) = \varphi\left(\bigcup_\lambda S \cap U \cap T_\lambda\right) = \bigcup_\lambda \varphi(S \cap U \cap T_\lambda)$$

も $\mathbb{R}^n$ の開集合であると分かる．全く同様の議論により $\psi(S \cap U)$ も $\mathbb{R}^n$ の開集合．

　次に，$\psi \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(S \cap U) \to \psi(S \cap U)$ が微分同相であることを示す．仮定より任意のチャート $(T_\lambda,\, \phi_\lambda) \in \mathcal{T}$ に対して $\phi_\lambda \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(S \cap T_\lambda) \to \phi_\lambda(S \cap T_\lambda)$ は微分同相．従ってこれの $\varphi(S \cap U \cap T_\lambda)$ への制限

$$\phi_\lambda \circ \varphi^{-1}\Big|_{\varphi(S \cap U \cap T_\lambda)} \colon \varphi(S \cap U \cap T_\lambda) \to \phi_\lambda(S \cap U \cap T_\lambda)$$

[*7] 選択公理を認める．

もまた微分同相である．$\psi \circ \phi_\lambda^{-1}|_{\phi_\lambda(S\cap U\cap T_\lambda)}$ に関しても同様なので，これらの合成

$$\psi \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(S\cap U\cap T_\lambda) \to \psi(S\cap U\cap T_\lambda)$$

もまた微分同相．ここで φ, ψ が全単射であること，および $M = \bigcup_\lambda T_\lambda$ を使うと

$$\varphi(S\cap U) = \bigcup_\lambda \varphi(S\cap U\cap T_\lambda), \quad \psi(S\cap U) = \bigcup_\lambda \psi(S\cap U\cap T_\lambda)$$

が分かるので，

$$\psi \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(S\cap U) \to \psi(S\cap U)$$

も微分同相写像である．

■

定義 2.7: 微分構造・極大アトラス

C^∞ 多様体 M の C^∞ アトラス $\mathcal{S}$ を与える．

- 定義 2.6 で定めた同値関係による $\mathcal{S}$ の同値類 $[\mathcal{S}] \subset \mathscr{A}$ を M の**微分構造** (differential structure) と呼ぶ．
- C^∞ アトラス $\mathcal{S}$ の**極大アトラス** (maximal atlas) $\mathcal{S}^+$ を以下のように定義する：

$$\mathcal{S}^+ := \bigcup_{\mathcal{T}\in[\mathcal{S}]} \mathcal{T}.$$

! 実は，極大アトラスは 1 通りとは限らないことが知られている．しかし，本資料内ではあまり気にしなくても良い．

以降では，断らない限り多様体のアトラスは全て極大アトラスであるとする．

【例 2.2.2】S^n の微分構造

【例 2.1.2】で構成したアトラス

$$\mathcal{A}_{S^n} := \left\{ (U_i^\pm, \varphi_i^\pm) \right\}_{i=1,\,\dots,\,n+1}$$

の座標変換を顕に書くと，$i > j$ のとき

$$\varphi_i^\pm \circ (\varphi_j^\pm)^{-1} \colon \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ \widehat{u^i} \\ \vdots \\ \underbrace{\pm\sqrt{1-|\boldsymbol{u}|^2}}_{j} \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix}$$

で，$i = j$ のとき $\varphi_i^{\pm} \circ (\varphi_j^{\pm})^{-1} = \mathrm{id}_{B^n}$ であり，微分同相写像である．従って $\mathcal{A}_{S^n}$ は C^∞ アトラスで，これの極大アトラスを S^n の標準的な微分構造とする．

【例 2.2.3】立体射影

S^n の上に**【例 2.2.2】**の $\mathcal{A}_{S^n}$ とは異なる C^∞ アトラスを構成する．この方法は**立体射影** (stereographic projection) として知られる．

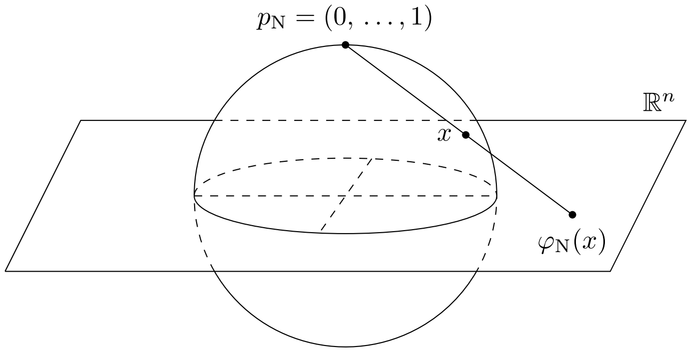


図 2.3: 立体射影

S^n の「北極点」を $p_{\mathrm{N}} = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ とおく．$U_{\mathrm{N}} \coloneqq S^n \setminus \{p_{\mathrm{N}}\}$ は S^n の開集合である．点 $x = (x^1, \ldots, x^{n+1}) \in U_{\mathrm{N}}$ を任意にとる．p_{N} と x を通る $\mathbb{R}^{n+1}$ の直線は $\{tx + (1-t)p_{\mathrm{N}}\}_{t\in\mathbb{R}}$ と書けるので，この直線と超平面 $x^{n+1} = 0$ の交点は，t の方程式 $tx^{n+1} + (1-t) = 0$ を解くことで

$$\frac{1}{1-x^{n+1}}x + \left(1 - \frac{1}{1-x^{n+1}}\right)p_{\mathrm{N}} = \left(\frac{x^1}{1-x^{n+1}}, \ldots, \frac{x^n}{1-x^{n+1}}, 0\right) \in \mathbb{R}^n \times \{0\}$$

のただ 1 つであることがわかる．以上の考察から同相写像

$$\varphi_{\mathrm{N}} \colon U_{\mathrm{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ (x^1, \ldots, x^{n+1}) \longmapsto \begin{pmatrix} {x_{\mathrm{N}}}^1(x^1, \ldots, x^{n+1}) \\ \vdots \\ {x_{\mathrm{N}}}^n(x^1, \ldots, x^{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^1}{1-x^{n+1}} \\ \vdots \\ \frac{x^n}{1-x^{n+1}} \end{pmatrix}$$

が得られる．逆写像を顕に書くと

$$\varphi_{\mathrm{N}}^{-1} \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n,\ \begin{pmatrix} {x_{\mathrm{N}}}^1 \\ \vdots \\ {x_{\mathrm{N}}}^n \end{pmatrix} \longmapsto \left(\frac{2{x_{\mathrm{N}}}^1}{|\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}|^2 + 1}, \ldots, \frac{2{x_{\mathrm{N}}}^n}{|\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}|^2 + 1}, \frac{|\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}|^2 - 1}{|\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}|^2 + 1}\right)$$

となる．組 $(U_{\mathrm{N}}, \varphi_{\mathrm{N}}) = \bigl(U_{\mathrm{N}}, ({x_{\mathrm{N}}}^\mu)\bigr)$ は位相多様体 S^n のチャートになる．

S^n の「南極点」を $p_{\mathrm{S}} = (0, \ldots, 0, -1)$ とおき，S^n の開集合 $U_{\mathrm{S}} \coloneqq S^n \setminus \{p_{\mathrm{S}}\}$ の上で同様の議論

を行うことで同相写像

$$\varphi_{\mathrm{S}} \colon U_{\mathrm{S}} \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ (x^1,\ \dots,\ x^{n+1}) \longmapsto \begin{pmatrix} {x_{\mathrm{S}}}^1(x^1,\ \dots,\ x^{n+1}) \\ \vdots \\ {x_{\mathrm{S}}}^n(x^1,\ \dots,\ x^{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^1}{1+x^{n+1}} \\ \vdots \\ \frac{x^n}{1+x^{n+1}} \end{pmatrix}$$

$$\varphi_{\mathrm{N}}^{-1} \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n,\ \begin{pmatrix} {x_{\mathrm{S}}}^1 \\ \vdots \\ {x_{\mathrm{S}}}^n \end{pmatrix} \longmapsto \left(\frac{2{x_{\mathrm{S}}}^1}{|\boldsymbol{x}_{\mathrm{S}}|^2+1},\ \dots,\ \frac{2{x_{\mathrm{S}}}^n}{|\boldsymbol{x}_{\mathrm{S}}|^2+1},\ -\frac{|\boldsymbol{x}|^2-1}{|\boldsymbol{x}|^2+1} \right)$$

が得られ，組 $(U_{\mathrm{S}},\ \varphi_{\mathrm{S}}) = \bigl(U_{\mathrm{S}},\ ({x_{\mathrm{S}}}^{\mu})\bigr)$ も位相多様体 S^n のチャートになる．さらに

$$S^n = U_{\mathrm{N}} \cup U_{\mathrm{S}}$$

が成り立つので，2 つのチャートを含む族

$$\mathcal{A}_{\mathrm{NS}} \coloneqq \bigl\{ (U_{\mathrm{N}},\ \varphi_{\mathrm{N}}),\ (U_{\mathrm{S}},\ \varphi_{\mathrm{S}}) \bigr\}$$

は S^n のアトラスである．チャートの重なりは $U_{\mathrm{N}} \cap U_{\mathrm{S}} = S^n \setminus \{p_{\mathrm{N}},\ p_{\mathrm{S}}\}$ なので $\varphi_{\mathrm{N}}(U_{\mathrm{N}} \cap U_{\mathrm{S}}) = \varphi_{\mathrm{S}}(U_{\mathrm{N}} \cap U_{\mathrm{S}}) = \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ であり，座標変換は

$$\varphi_{\mathrm{S}} \circ \varphi_{\mathrm{N}}^{-1} \colon \varphi_{\mathrm{N}}(U_{\mathrm{N}} \cap U_{\mathrm{S}}) \longrightarrow \varphi_{\mathrm{S}}(U_{\mathrm{N}} \cap U_{\mathrm{S}}),\ \begin{pmatrix} {x_{\mathrm{N}}}^1 \\ \vdots \\ {x_{\mathrm{N}}}^n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} {x_{\mathrm{N}}}^1/|\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}|^2 \\ \vdots \\ {x_{\mathrm{N}}}^n/|\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}|^2 \end{pmatrix}$$

で，C^∞ 級である．$\varphi_{\mathrm{N}} \circ \varphi_{\mathrm{S}}^{-1}$ も同様に C^∞ 級なので座標変換が微分同相写像であり，アトラス $\mathcal{A}_{\mathrm{NS}}$ は S^n 上の C^∞ アトラスである．

$\mathcal{A}_{\mathrm{NS}}$ が【例 **2.2.2**】の C^∞ アトラス $\mathcal{A}_{S^n}$ と両立することを確認する．まず $U_{n+1}^{\pm} \cap U_{\mathrm{N}}$ の上の座標変換は

$$\varphi_{n+1}^{\pm} \circ \varphi_{\mathrm{N}}^{-1} \colon \begin{pmatrix} {x_{\mathrm{N}}}^1 \\ \vdots \\ {x_{\mathrm{N}}}^n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{2{x_{\mathrm{N}}}^1}{|\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}|^2+1} \\ \vdots \\ \frac{2{x_{\mathrm{N}}}^n}{|\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}|^2+1} \end{pmatrix}$$

$$\varphi_{\mathrm{N}} \circ (\varphi_{n+1}^{\pm})^{-1} \colon \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{u^1}{1 \mp \sqrt{1-|\boldsymbol{u}|^2}} \\ \vdots \\ \frac{u^n}{1 \mp \sqrt{1-|\boldsymbol{u}|^2}} \end{pmatrix}$$

なので微分同相写像である．

次に $i=1,\,\dots,\,n$ に対しては $\{p_{\mathrm{N}},\,p_{\mathrm{S}}\}\not\subset U_i^{\pm}\cap U_{\mathrm{N}}$ なので，座標変換は

$$\varphi_i^{+}\circ\varphi_{\mathrm{N}}^{-1}\colon \begin{pmatrix} {x_{\mathrm{N}}}^1 \\ \vdots \\ {x_{\mathrm{N}}}^n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{2{x_{\mathrm{N}}}^1}{|\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}|^2+1} \\ \vdots \\ \widehat{\frac{2{x_{\mathrm{N}}}^i}{|\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}|^2+1}} \\ \vdots \\ \frac{2{x_{\mathrm{N}}}^n}{|\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}|^2+1} \end{pmatrix}$$

$$\varphi_{\mathrm{N}}\circ(\varphi_i^{\pm})^{-1}\colon \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{u^1}{1-u^n} \\ \vdots \\ \underbrace{\pm\dfrac{\sqrt{1-|\boldsymbol{u}|^2}}{1-u^n}}_{i} \\ \vdots \\ \frac{u^{n-1}}{1-u^n} \end{pmatrix}$$

で，微分同相写像である．φ_{S} に関しても同様に，座標変換が微分同相写像であることを直接確認できる．従って $\mathcal{A}_{\mathrm{NS}}$ は $\mathcal{A}_{S^n}$ と同じ極大アトラスに属し，S^n に同じ微分構造を定める．

【例 2.2.4】有限次元位相ベクトル空間

V を $n<\infty$ 次元ベクトル空間とする．V 上の任意のノルムによって V を距離空間と見做し，距離空間の標準的な位相を入れて位相空間にする．V の任意の基底 $\{e_1,\,\dots,\,e_n\}$ を 1 つとってベクトル空間の同型写像

$$e\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow V,\ (x^1,\,\dots,\,x^n)\longmapsto x^\mu e_\mu$$

を考えると，e は同相写像でもある．従って組 $(V,\,e^{-1})=\bigl(V,\,(x^\mu)\bigr)$ は位相多様体 V のチャートになる．この位相多様体 V の上の自然な C^∞ 構造は次のようにして定まる：
別の基底 $\{{e'}_1,\,\dots,\,{e'}_n\}$ による同相写像

$$e'\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow V,\ ({x'}^1,\,\dots,\,{x'}^n)\longmapsto {x'}^\mu {e'}_\mu$$

が定めるチャート $(V,\,e'^{-1})=\bigl(V,\,({x'}^\mu)\bigr)$ を考える．基底の取り替えを表す正則行列 $[T^\mu{}_\nu]$ が存在して

$$e_\mu = {e'}_\nu T^\nu{}_\mu$$

と書けるので，$\bigl(V,\,(x^\mu)\bigr)$ から $\bigl(V,\,({x'}^\mu)\bigr)$ への座標変換は

$${x'}^\mu(x^1,\,\dots,\,x^n)=T^\mu{}_\nu x^\nu \quad (\mu=1,\,\dots,\,n)$$

という微分同相写像になる．i.e. チャート $\bigl(V,\,(x^\mu)\bigr),\,\bigl(V,\,({x'}^\mu)\bigr)$ は両立する．アトラス $\bigl\{\bigl(V,\,(x^\mu)\bigr)\bigr\}$ の極大アトラスを V の標準的な微分構造として定める．

【例 2.2.5】行列空間

$m \times n$ 実行列全体の集合を $\mathbf{M}(\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}, \mathbb{R})$ と書く．$\mathrm{M}(m \times n, \mathbb{R})$ は行列の和と実数倍に関して mn 次元ベクトル空間をなすので，**【例 2.2.4】**によって C^∞ 多様体になる．特に，同相写像

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}(m \times n, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}^{mn}, \\
\begin{bmatrix}
x^1{}_1 & x^1{}_2 & \cdots & x^1{}_n & \\
x^2{}_1 & x^2{}_2 & \cdots & x^2{}_n & \\
 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x^m{}_1 & x^m{}_2 & \cdots & x^m{}_n &
\end{bmatrix} &\longmapsto
\begin{pmatrix}
x^1{}_1 \\ \vdots \\ x^1{}_n \\ x^2{}_1 \\ \vdots \\ x^m{}_n
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

などによってしばしば $\mathbb{R}^{mn}$ と同一視される．
同様に，$m \times n$ 複素行列全体の集合を $\mathrm{M}(m \times n, \mathbb{C})$ と書くとこれは $2mn$ 次元実 C^∞ 多様体になる．
なお，以降では行列のサイズが $n \times n$ の場合に限って $\mathbf{M}(\boldsymbol{n}, \mathbb{R})$, $\mathbf{M}(\boldsymbol{n}, \mathbb{C})$ と略記する．

【例 2.2.6】開部分多様体

$U \subset \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合とする．このとき U は n 次元位相多様体であり，1 枚のみのチャートを持つアトラス $\{(U, \mathrm{id}_U)\}$ が U 上の C^∞ 構造を定める．
より一般に，M を C^∞ 多様体，$\mathcal{A}_M$ を M の C^∞ アトラスとし，$U \subset M$ を M の開集合とする．このとき，

$$\mathcal{A}_U \coloneqq \left\{ (V, \psi) \in \mathcal{A}_M \;\middle|\; V \subset U \right\}$$

は U の C^∞ アトラスになる．このようにして M の開集合に C^∞ 構造を入れてできる C^∞ 多様体のことを**開部分多様体** (open submanifold) と呼ぶ．

【例 2.2.7】C^∞ 積多様体

M, N を C^∞ 多様体とする．**【例 2.1.4】**による積多様体 $M \times N$ のチャートは $(U_1 \times U_2, \varphi_1 \times \varphi_2)$ の形をしているが，任意の座標変換

$$(\varphi_1 \times \varphi_2) \circ (\psi_1 \times \psi_2)^{-1} = (\varphi_1 \circ \psi_1^{-1}) \times (\varphi_2 \circ \psi_2^{-1})$$

は C^∞ 級なので $M \times N$ は C^∞ 多様体でもある．

2.2.2　複素多様体・および Lie 群の定義

この小節では複素多様体と Lie 群の定義のみ行う．複素関数 $f\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ が**正則** (holomorphic) であるとは，$f(z^1, \dots, z^m) = f_1(x^1, \dots, x^m;\ y^1, \dots, y^m) + \mathrm{i} f_2(x^1, \dots, x^m;\ y^1, \dots, y^m)$ が各変数 $z^\mu = x^\mu + \mathrm{i} y^\mu$

に関して **Cauchy-Riemann の関係式**

$$\frac{\partial f_1}{\partial x^\mu} = \frac{\partial f_2}{\partial y^\mu}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x^\mu} = -\frac{\partial f_1}{\partial y^\mu}$$

を充たすことを言う．

写像 $(f^1, \dots, f^n)\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ は，各関数 f^λ が正則であるとき正則であると言う．

複素多様体の定義は，C^∞ 多様体の定義のうち，座標変換の「 C^∞ 級」を「正則」に置き換えることで得られる：

定義 2.8: 複素多様体

M を位相空間とする．集合族 $\mathcal{S} = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda) \mid \varphi_\lambda\colon U_\lambda \xrightarrow{\approx} \mathbb{C}^m\}_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられ，

- $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が M の開被覆
- 全ての座標変換 $f_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ が<u>正則</u>

であるとき，M は**複素多様体**と呼ばれる．

座標近傍が $\mathbb{C}^m$ と同相のとき，m を**複素次元**と呼んで $\mathbf{dim}_{\mathbb{C}}\, \boldsymbol{M} = m$ と書く．こきときの実次元 $2m$ は単に $\mathbf{dim}\, \boldsymbol{M} = 2m$ である．

M のアトラスの上には，定義 2.6 で定めた同値関係が定まる．

定義 2.9: 複素構造

複素多様体 M のアトラス $\mathcal{S}$ を与える．定義 2.6 で定めた同値関係による $\mathcal{S}$ の同値類 $[\mathcal{S}]$ を M の**複素構造** (complex structure) と呼ぶ．

Lie 群と一般線形群を定義する．

定義 2.10: Lie 群

群 G が同時に C^∞ 多様体の構造を持ち，群の二項演算 $\cdot\colon G\times G \to G,\ (g, h) \mapsto gh$ および逆元をとる演算 $^{-1}\colon G \to G,\ g \mapsto g^{-1}$ がともに C^∞ 級であるとき，G を **Lie 群** (Lie group) と呼ぶ．G が複素多様体であり，上述の 2 つの演算が正則写像であるときは G を**複素 Lie 群**と呼ぶ．

【例 2.2.8】一般線形群

$n \times n$ 実正則行列全体がなす群を**一般線形群** (general linear group) と呼び，$\mathbf{GL}(\boldsymbol{n}, \mathbb{R})$ と書く．

いま，$n \times n$ 行列全体の集合 $\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$ を**【例 2.2.5】**の方法により C^∞ 多様体と見做す．このとき写像

$$\det\colon \mathrm{M}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} {x^1}_1 & \cdots & {x^1}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {x^n}_1 & \cdots & {x^n}_n \end{bmatrix} \longmapsto \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}\sigma\, {x^1}_{\sigma(1)} {x^2}_{\sigma(2)} \cdots {x^n}_{\sigma(n)}$$

は連続であり，$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ は $\mathbb{R}$ の開集合なので，$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \subset \mathrm{M}(n, \mathbb{R})$ は $\mathrm{M}(n, \mathbb{R}) \approx$

$\mathbb{R}^{n^2}$ の開集合だとわかる．従って $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ は n^2 次元 C^∞ 多様体である．群演算は明らかに C^∞ 級なので，$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ は Lie 群である．
同様に，$n \times n$ 複素正則行列全体がなす群 (**複素一般線形群**) $\mathbf{GL}(\boldsymbol{n}, \mathbb{C})$ は $2n^2$ 次元 C^∞ 多様体になる．

2.3 境界付き多様体

$\mathbb{R}^n$ の**閉じた上半空間** (closed upper half space) およびその境界を $n > 0$ のとき

$$\mathbb{H}^n \coloneqq \left\{ (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n \geq 0 \right\}$$
$$\partial\mathbb{H}^n \coloneqq \left\{ (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n = 0 \right\}$$

と定義し，$n = 0$ のとき

$$\mathbb{H}^0 \coloneqq \{0\}$$
$$\partial\mathbb{H}^0 \coloneqq \emptyset$$

と定義する．これは Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の部分空間の境界の定義と一致している．

定義 2.11: 境界付き位相多様体

第 2 可算な Hausdorff 空間[a] $(M, \mathscr{O})$ は，その上の任意の点が $\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{H}^n$ と同相になるような近傍を持つとき，n 次元**境界付き位相多様体** (topological manifold with boundary) と呼ばれる．

[a] 位相多様体と同様，第 2 可算性を課すことも多い．

境界付き位相多様体のチャートの定義は位相多様体のチャートの定義とほとんど同じである：

定義 2.12: 境界付き位相多様体のチャート

境界付き位相多様体 $(M, \mathscr{O})$ の開集合 $U \in \mathscr{O}$ であって，$\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{H}^n$ の開集合 V との同相写像 $\varphi\colon U \to V$ が存在するとき，組 (U, φ) を M の**チャート** (chart) と呼ぶ.

必要ならば，境界付き位相多様体 M のチャート (U, φ) のうち，$\varphi(U)$ が $\mathbb{R}^n$ と同相なものを**内部チャート** (interior chart)，$\varphi(U)$ が $\mathbb{H}^n$ の開集合と同相で，かつ $\varphi(U) \cap \partial\mathbb{H}^n \neq \emptyset$ を充たすものを**境界チャート** (boundary chart) と呼ぶことにしよう．

定義 2.13: 内部・境界

$(M, \mathscr{O})$ を境界付き位相多様体とし，$\forall p \in M$ を一つとる．

(1) p が M の**内点** (interior point) であるとは，ある内部チャート (U, φ) が存在して $p \in U$ となること．

(2) p が M の**境界点** (boundary point) であるとは，ある境界チャート (U, φ) が存在して $\varphi(p) \in \partial\mathbb{H}^n$ となること．

M の内点全体の集合を**境界付き位相多様体 M の内部** (interior) と呼び，$\mathrm{Int}\, M$ と書く．M の境界点全体の集合を**境界付き位相多様体 M の境界** (boundary) と呼び，∂M と書く．

定義から明らかなように，$\forall p \in M$ は内点または境界点である．というのも，$p \in M$ が境界点でないならば，p は内点であるか，または境界チャート (U, φ) に対して $p \in U$ かつ $\varphi(p) \notin \partial\mathbb{H}^n$ を充たす．後者の場合 φ の $U \cap \varphi^{-1}\bigl(\mathrm{Int}\ \mathbb{H}^n\bigr)$ への制限は内部チャートになり，かつ $p \in U \cap \varphi^{-1}\bigl(\mathrm{Int}\ \mathbb{H}^n\bigr)$ を充たすので，p は M の内点なのである．

しかしながら，あるチャートに関しては内点だが，別のチャートに関しては境界点であるような点 $p \in M$ が存在しないことは非自明である．この問題は次の命題によって肯定的に解決される．

定理 2.2: 多様体の境界の位相的不変性

境界付き位相多様体 $(M, \mathscr{O})$ に対して以下が成り立つ：

$$M = \mathrm{Int}\, M \sqcup \partial M$$

定理 2.2 はホモロジーを使った議論によって証明できるが，ここでは省略する．

!

位相空間の部分空間の内部，境界の定義と，境界付き位相多様体の内点・境界の定義は別物であることに注意すべきである．

例えば n 次元閉球

$$\overline{B^n} \coloneqq \left\{\, (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; |\boldsymbol{x}|^2 \leq 1 \,\right\}$$

は定義 2.11 から境界付き位相多様体であり，その境界（空でない）は $n-1$ 次元球面 S^{n-1} である．一方 $\overline{B^n}$ を Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の部分空間と見做した場合の部分空間の境界は S^{n-1} だが，$\overline{B^n}$ を $\overline{B^n}$ 自身の部分空間と見做す場合，部分空間の境界は空集合である[a]．

このような事情があるので，部分空間の境界を**位相的境界** (topological boundary)，境界付き位相多様体の境界付き位相多様体の内点・境界を**多様体の境界** (manifold boundary) と呼んで違いを明確にする場合がある．

[a] $\overline{B^n} \setminus \overline{B^n} = \emptyset$ なので．

命題 2.2: 位相多様体の境界の基本性質

M を n 次元境界付き位相多様体とする．

(1) $\mathrm{Int}\,M \subset M$ は M の開集合で，n 次元の境界を持たない位相多様体である．

(2) $\partial M \subset M$ は M の閉集合で，$n-1$ 次元の境界を持たない位相多様体である．

証明 (1) $\forall x \in \mathrm{Int}\,M$ をとる．このときある内部チャート (U, φ) が存在して $x \in U$ となる．

まず，$\mathrm{Int}\,M$ が開集合であることを示す．命題??より，そのためには $U \subset \mathrm{Int}\,M$ を示せば良い．$\forall y \in U$ を 1 つとる．このとき $\varphi(y) \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ だが，$\varphi(U)$ は開集合なので命題??より $\varphi(y)$ の開近傍 $\varphi(y) \in V \subset \varphi(U)$ が存在する．φ は同相写像で全単射なので $y \in \varphi^{-1}(V) \subset U$ が言えて，$(\varphi^{-1}(V), \varphi|_{\varphi^{-1}(V)})$ が y を含む内部チャートだとわかる．よって $y \in \mathrm{Int}\,M$ であり，$U \subset \mathrm{Int}\,M$ が示された．

$\mathrm{Int}\,M$ は第 2 可算な Hausdorff 空間 M の部分空間なので第 2 可算かつ Hausdorff であり，$\mathrm{Int}\,M$ の任意の点はある内部チャートに含まれるので，$\mathrm{Int}\,M$ は n 次元位相多様体である．

(2) 定理 2.2 より $\partial M = M \setminus \mathrm{Int}\,M$ である．従って (1) より ∂M は M の閉集合である．∂M は第 2 可算な Hausdorff 空間 M の部分空間なので第 2 可算かつ Hausdorff である．

$\forall x \in \partial M$ と，x を含む境界チャート (U, φ) をとる．このとき $\varphi(x) \in \partial\mathbb{H}^n$ である．相対位相の定義より，$V := \varphi(U) \cap \partial\mathbb{H}^n$ とおくと V は $\partial\mathbb{H}^n \approx \mathbb{R}^{n-1}$ の開集合である．φ は連続なので $\varphi^{-1}(V) \subset \partial M$ は ∂M の開集合であり，$(\varphi^{-1}(V), \varphi|_{\varphi^{-1}(V)})$ は x を含む ∂M のチャートである．以上で ∂M が $n-1$ 次元位相多様体であることが示された．

■

命題 2.3: 境界付き位相多様体の基本性質

M を n 次元境界付き位相多様体とする．

(1) M は局所弧状連結

(2) M は局所コンパクト

(3) M はパラコンパクト

(4) 基本群が可算濃度

証明 [?, Proposition 1.40] を参照 ■

C^∞ 構造を意識するとき，命題 2.2 に相当する命題が成り立つ．

定理 2.3: 多様体の境界の C^∞ 不変性

M を n 次元境界付き C^∞ 多様体とする．点 $p \in M$ を含む C^∞ の境界チャート (U, φ) が 1 つでも存在して $\varphi(p) \in \partial\mathbb{H}^n$ を充たすならば，p を含む全ての C^∞ チャート (V, ψ) は境界チャートでかつ $\psi(p) \in \partial\mathbb{H}^n$ を充たす．

以降では，境界なしでも境界付きでもどちらの場合にも成り立つ主張であることを強調したい場合には **（境界なし/あり）** と書くことにする．

2.4 C^∞ 写像

連続写像によって，異なる位相空間のトポロジーを比較できるようになった[*8]．同じような形で異なる C^∞ 多様体の C^∞ 構造を比較したい．

定義 2.14: C^∞ 関数

（境界なし/あり）C^∞ 多様体 M と，M の C^∞ アトラス $\mathcal{A}$ を 1 つとる．
M 上の実数値関数 $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ が **C^∞ 関数** (smooth function) であるとは，$\forall p \in M$ に対して以下を充たすチャート $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ が存在することを言う：

- $p \in U$
- $f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ が $\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{H}^n$ の開集合 $\varphi(U)$ 上の C^∞ 関数となる．

M 上の C^∞ 関数全体の集合を $\boldsymbol{C^\infty(M)}$ と書く．

補題 2.2:

（境界なし/あり）C^∞ 多様体 M と，M の C^∞ アトラス $\mathcal{A}$ を 1 つとり，その上の C^∞ 関数 $f \in C^\infty(M)$ を任意にとる．このとき，任意のチャート $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ に対して $f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ は C^∞ 級である．

証明 $\forall p \in U$ を 1 つとると，f が C^∞ 関数であることからあるチャート $(V, \psi) \in \mathcal{A}$ が存在して $f \circ \varphi^{-1}\colon \psi(V) \longrightarrow \mathbb{R}$ が C^∞ 級になる．M が C^∞ 多様体であることから，座標変換 $\psi \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$ は微分同相写像であり，$f \circ \varphi^{-1} = (f \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \varphi^{-1})\colon \varphi(U \cap V) \longrightarrow \mathbb{R}$ は C^∞ 級写像である．$p \in U$ は任意なので $f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ が C^∞ 級であることが示された． ■

C^∞ 級関数 $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ とチャート $(U, \varphi) = \bigl(U, (x^\mu)\bigr)$ に対して，$f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ とは n 変数の実数値関数 $f(x^1, \dots, x^n)$ のことに他ならない．この表式のことを f の**座標表示**と呼ぶことがある．

次に定義する C^∞ 写像は，異なる C^∞ 多様体の間の対応を与えるものである．

定義 2.15: C^∞ 写像

（境界なし/あり）C^∞ 多様体 M, N を与え，M, N それぞれの C^∞ アトラス $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を一つずつとる．
写像 $f\colon M \longrightarrow N$ が **C^∞ 写像** (smooth map) であるとは，$\forall p \in M$ に対して以下を充たす M のチャート $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ と N のチャート $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ が存在することを言う：

- $p \in U$ かつ $f(p) \in V$
- $f(U) \subset V$
- $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \longrightarrow \psi(V)$ が C^∞ 級（図 2.4）

[*8] つまり，連続写像は位相空間の圏 **Top** の射である．

補題 2.3:

（境界なし/あり）C^∞ 多様体 M, N と M, N それぞれの C^∞ アトラス $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を 1 つずつとり，C^∞ 写像 $f\colon M \longrightarrow N$ を与える．このとき，任意のチャート $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ に対して $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ は C^∞ 級である．

証明 $\forall (U, \varphi) \in \mathcal{A}$ および $\forall (V, \psi) \in \mathcal{B}$ をとる．$U \cap f^{-1}(V) = \emptyset$ ならば確認することは何もない．$U \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$ とし，$\forall p \in U \cap f^{-1}(V)$ を 1 つとる．すると $f(p) \in V$ が成り立つので，f が C^∞ 写像であることからあるチャート $(U', \varphi') \in \mathcal{A}$, $(V', \psi') \in \mathcal{B}$ が存在して $p \in U'$ かつ $f(p) \in V'$ かつ $f(U') \subset V'$ かつ $\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1}\colon \varphi'(U') \longrightarrow \psi'(V')$ が C^∞ 級になる．座標変換は微分同相写像なので

$$\begin{aligned}\psi \circ f \circ \varphi^{-1} &= \psi \circ (\psi'^{-1} \circ \psi') \circ f \circ (\varphi'^{-1} \circ \varphi) \circ \varphi \\ &= (\psi \circ \psi'^{-1}) \circ (\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1}) \circ (\varphi' \circ \varphi^{-1})\colon \varphi\big(U \cap U' \cap f^{-1}(V)\big) \longrightarrow \psi(V)\end{aligned}$$

は C^∞ 級である．p は任意だったので，$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi\big(U \cap f^{-1}(V)\big) \longrightarrow \psi(V)$ は C^∞ 級である． ■

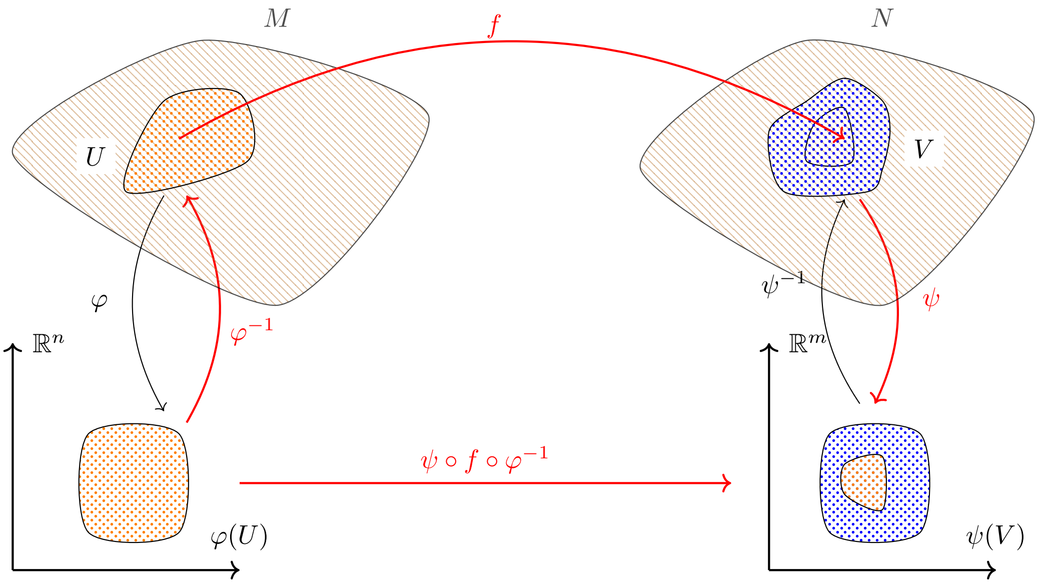


図 2.4: C^∞ 写像．M の次元を n，N の次元を m とした．

補題 2.4: C^∞ 写像の局所性

（境界なし/あり）C^∞ 多様体 M, N および写像 $f\colon M \longrightarrow N$ を任意に与える．

(1) $\forall p \in M$ に対して，$f|_U$ を C^∞ 写像にするような近傍 $p \in U \subset M$ が存在する
$\implies$ f は C^∞ 写像

(2) f が C^∞ 写像 $\implies$ M の任意の開集合 U に対して $f|_U$ が C^∞ 写像

証明 M の開集合には【例 2.2.6】の C^∞ 構造を入れて C^∞ 多様体と見做す．

(1) $\forall p \in M$ をとり，仮定の条件を充たす近傍 $p \in U \subset M$ をとる．すると $f|_U$ が C^∞ 写像になる

ので，U のチャート (U', φ') と N のチャート (V, ψ) が存在して $p \in U'$ かつ $f(p) \in V$ かつ $f|_U(U') = f(U') \subset V$ かつ $\psi \circ f \circ \varphi'^{-1}$ が C^∞ 級になる．$U' \subset U$ は U の開集合で $U \subset M$ は M の開集合なので U' は M の開集合でもあり，組 (U', φ') は p を含む M のチャートである．従って $f\colon M \longrightarrow N$ は C^∞ 写像である．

(2) M の任意の開集合 $U \subset M$ をとる．仮定より，$\forall p \in U$ に対して M のチャート (U', φ') と N のチャート (V, ψ) が存在して $p \in U'$ かつ $f(p) \in V$ かつ $f(U') \subset V$ かつ $\psi \circ f \circ \varphi'^{-1}$ が C^∞ 級となる．このとき相対位相の定義より $U' \cap U$ は U の開集合なので $(U' \cap U, \varphi'|_{U' \cap U})$ は U のチャートで，$p \in U \cap U'$ かつ $f(U \cap U') \subset f(U') \subset V$ かつ制限 $\psi \circ f \circ \varphi'^{-1}|_{U' \cap U}$ は C^∞ 級になる．i.e. $f|_U$ は C^∞ 写像である．

■

系 2.4: C^∞ 写像の貼り合わせ補題

（境界なし/あり）C^∞ 多様体 M, N を与える．このとき

- M の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$
- C^∞ 写像の族 $\{F_\lambda\colon U_\lambda \longrightarrow N\}_{\lambda \in \Lambda}$ であって，$\forall \alpha, \beta \in \Lambda$ に対して

$$F_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = F_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$$

  を充たすもの

を与えると，$\forall \lambda \in \Lambda$ に対して $F|_{U_\lambda} = F_\lambda$ を充たすような C^∞ 写像 $F\colon M \longrightarrow N$ が一意的に存在する．

命題 2.4: C^∞ 写像の基本性質

（境界なし/あり）C^∞ 多様体 M, N, P を与える．

(1) 写像 $f\colon M \longrightarrow N$ が C^∞ 写像ならば，f は連続である．
(2) 恒等写像 $\mathrm{id}_M\colon M \longrightarrow N$ は C^∞ 写像である．
(3) 写像 $f\colon M \longrightarrow N,\ g\colon N \longrightarrow P$ が C^∞ 写像ならば，$g \circ f\colon M \longrightarrow P$ も C^∞ 写像である．

証明 (1) $\forall p \in M$ を 1 つとる．仮定より f は C^∞ 写像なので，ある M のチャート (U, φ) と N のチャート (V, ψ) が存在して $p \in U$ かつ $f(p) \in V$ かつ $f(U) \subset V$ かつ $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ が $\mathbb{R}^n$ の C^∞ 級関数になる．従って $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ は連続である．φ, ψ は同相写像なので $f|_U = \psi^{-1} \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi\colon U \longrightarrow V$ は連続である．p は任意だったので $f\colon M \longrightarrow N$ は連続である．

(2) $\forall p \in M$ を 1 つとり，p を含む C^∞ チャート (U, φ) をとる．すると $\mathrm{id}_M(p) \in U$ で，かつ $\varphi \circ \mathrm{id}_M \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_{\varphi(U)}$ は Euclild 空間の部分空間上の恒等写像なので C^∞ 級である．

(3) $\forall p \in M$ を 1 つとる．仮定より g は C^∞ 写像なので，N, P の C^∞ チャート (V, θ), (W, ψ) が存在して $f(p) \in V$ かつ $g\big(f(p)\big) \in W$ かつ $g(V) \subset W$ かつ $\psi \circ g \circ \theta^{-1}\colon \theta(V) \longrightarrow \psi(W)$ が C^∞ 級になる．さらに仮定より f も C^∞ 写像なので (1) より連続であり，$f^{-1}(V) \subset M$ は点 p の開近傍になる．従って M のチャート (U, φ) が存在して $p \in U \subset f^{-1}(V)$ を充たす．補題 2.3 か

ら，$\theta \circ f \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U) \longrightarrow \theta(V)$ は C^∞ 級である．以上の考察から $g\bigl(f(U)\bigr) \subset g(V) \subset W$ かつ $\psi \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1} = (\psi \circ g \circ \theta^{-1}) \circ (\theta \circ f \circ \varphi^{-1}) \colon \varphi(U) \longrightarrow \psi(W)$ は C^∞ 級になる．

■

2.4.1 微分同相

これまでに登場した微分同相は，Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の開集合上に定義されていたが，一般の C^∞ 多様体の開集合の上に一般化すると次のようになる：

定義 2.16: 微分同相

（境界なし/あり）C^∞ 多様体 M, N を与える．全単射な C^∞ 写像 $f \colon M \to N$ は，その逆写像 $f^{-1} \colon N \to M$ もまた C^∞ 級写像であるとき，**微分同相写像** (diffeomorphism) と呼ばれる．
また, M から N への微分同相写像が存在するとき, 多様体 M と N は互いに**微分同相** (diffeomorphic) であると言う．このことを $\boldsymbol{M \approx N}$ などと書く．

命題 2.5: 微分同相写像の基本性質

(1) 微分同相写像の合成は微分同相写像である．
(2) 微分同相写像は同相写像である．
(3) 微分同相写像 $f \colon M \longrightarrow N$ の，任意の開集合 $U \subset M$ 上への制限 $f|_U \colon U \longrightarrow f(U)$ もまた微分同相写像である．

微分同相 $M \approx N$ は明らかに同値関係を作る．よって全ての（境界なし/あり）C^∞ 多様体の集まりを $\simeq$ によって類別することができる．そして，微分同相写像によって保存される C^∞ 多様体の性質（微分同相不変量）が重要になる．多様体の次元は微分同相不変量の 1 つである．

命題 2.6: 多様体の境界の微分同相不変性

M, N を境界付き C^∞ 多様体とし，$f \colon M \longrightarrow N$ を微分同相写像とする．このとき $f(\partial M) = \partial N$ で，制限 $f|_{\mathrm{Int}\, M} \colon \mathrm{Int}\, M \longrightarrow \mathrm{Int}\, N$ は微分同相写像である．

証明　[?, Theorem 1.46] ■

2.5 多様体の圏

これまでの議論を圏の言葉で整理しよう．**位相多様体の圏 Man** は

- 位相多様体を対象とする
- 連続写像を射とする
- 恒等射は恒等写像とする．
- 合成は，写像の合成とする

ことによって定義される．**境界付き位相多様体の圏 $\mathbf{Man_b}$** も同様に

- 境界付き位相多様体を対象とする
- 連続写像を射とする
- 合成は，連続写像の合成とする

として定義できる．

同様に，**C^∞ 多様体の圏 $\mathbf{Diff}$** は[*9]

- C^∞ 多様体を対象とする
- C^∞ 写像を射とする
- 恒等射は恒等写像とする（命題 2.4-(2)）
- 合成は，C^∞ 写像の合成とする（命題 2.4-(3)）

ことによって定義され，**境界付き C^∞ 多様体の圏 $\mathbf{Diff_b}$** は

- 境界付き位相多様体を対象とする
- C^∞ 写像を射とする
- 恒等射は恒等写像とする
- 合成は，写像の合成とする

である．

これらと同時に，**基点** (base point) 付きの場合を考えておくと後々便利である．**基点付き集合**とは，集合 $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ と X の 1 要素 $x \in X$ の組 (X, x) のことを言う．基点付き集合 (X, x), (Y, y) の間の**基点を保つ写像**とは，集合の写像 $f\colon X \longrightarrow Y$ であって $f(x) = y$ を充たすもののことを言う．このとき，

- 基点付き集合を対象とする
- 基点を保つ写像を射とする
- 恒等射は恒等写像とする
- 合成は，基点を保つ写像の合成とする

ことで，**基点付き集合と写像の圏 $\mathbf{Sets}_0$** が構成される．同様の構成を $\mathbf{Man}$, $\mathbf{Diff}$ に使うことで，圏 $\mathbf{Man}_0$, $\mathbf{Diff}_0$ が定義される．

[*9] 圏の記号は [?] に倣った．