第 1 章

集合と位相のあれこれ

一部の議論は開基だけでは不十分なので，**準開基**の概念を導入する：

定義 1.1: 準開基

位相空間 $(X, \mathscr{O})$ の位相の部分集合 $\mathcal{SB} \subset \mathscr{O}$ が**準開基** (subbase) であるとは，

$$\left\{ S_1 \cap \cdots \cap S_n \;\middle|\; \{S_i\}_{i=1,\,\cdots\,,\,n} \subset \mathcal{SB},\; n = 0,\, 1,\, \ldots \right\}$$

が $\mathscr{O}$ の開基になることをいう[a].

[a] $n = 0$ のときは X である.

次に，写像の連続性を判定する際に便利な補題を用意しておく：

補題 1.1: 写像の連続性

$(X, \mathscr{O}_X)$, $(Y, \mathscr{O}_Y)$, $(Z, \mathscr{O}_Z)$ を位相空間，$\mathcal{SB}_Y \subset \mathscr{O}_Y$ を Y の準開基，$\mathcal{B}_Y \subset \mathscr{O}_Y$ を Y の開基とする．

(1) 写像 $f\colon X \longrightarrow Y$ が連続 $\iff$ $\forall S \in \mathcal{SB}_Y$ に対して $f^{-1}(S) \in \mathscr{O}_X$

(2) 写像 $f\colon X \longrightarrow Y$ が連続 $\iff$ $\forall B \in \mathcal{B}_Y$ に対して $f^{-1}(B) \in \mathscr{O}_X$

証明 (1) $(\Longrightarrow)$ $\forall S \in \mathcal{SB}_Y$ は Y の開集合なので明らか.

$(\Longleftarrow)$ $\forall U \in \mathscr{O}_Y$ を 1 つとって固定する．準基の定義より集合

$$\mathcal{B} \coloneqq \left\{ S_1 \cap \cdots \cap S_n \;\middle|\; \{S_i\}_{i=1,\,\cdots\,,\,n} \subset \mathcal{SB},\; n = 0,\, 1,\, \ldots \right\}$$

は Y の開基だから，ある部分集合族 $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{B}$ が存在して $U = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ が成り立つ．示すべきは $f^{-1}(U) \in \mathscr{O}_X$ だが,

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$$

なので $\forall \lambda \in \Lambda$ について $f^{-1}(B_\lambda) \in \mathscr{O}_X$ を示せば十分．ところで $B_\lambda \in \mathscr{B}$ なので，ある

$S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{SB}_Y$ が存在して $B_\lambda = \bigcap_{i=1}^n S_i$ と書ける．このとき仮定より

$$f^{-1}(B_\lambda) = f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^n S_i\right) = \bigcap_{i=1}^n f^{-1}(S_i) \in \mathscr{O}_X$$

が言える．

(2) 開基は準開基でもあるので (1) より従う．

■

位相空間 X, Y の間の写像 $f\colon X \to Y$ の連続性の定義??から，X に開集合が多く，Y に開集合が少ないほど f は連続になりやすいと言える．

定義 1.2: 位相の強弱

集合 X 上に二つの位相 $\mathscr{O}_1, \mathscr{O}_2$ を与える．

$$\mathscr{O}_1 \subset \mathscr{O}_2$$

が成り立つことを，**$\mathscr{O}_1$ は $\mathscr{O}_2$ より弱い（weaker），粗い（coarser）** 位相であるとか，**$\mathscr{O}_2$ は $\mathscr{O}_1$ より強い（stronger），細かい（finer）** 位相であると表現する．

! 集合 X の部分集合族 $\mathcal{SB} \subset 2^X$ を準開基とする X の位相 $\mathscr{O} \subset 2^X$ は，**$\mathcal{SB}$ を含む X の位相のうち最弱のものである．**

1.1 位相空間の圏

第 1 章で積位相・商位相を定義した．これらは，ある位相空間 X, Y を素材にして新しい位相空間を作る手法であった．このような構成のフレームワークを圏の言葉を使って整理してみよう．

定義 1.3: 圏

圏 (category) $\mathcal{C}$ とは，以下の 4 種類のデータからなる：

- **対象** (object) と呼ばれる要素の集まり[a]

$$\mathbf{Ob}(\mathcal{C})$$

- $\forall A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，A から B への**射** (morphism) と呼ばれる要素の集合

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, B)$$

- $\forall A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，A 上の**恒等射** (identity morphism) と呼ばれる射

$$\mathbf{Id}_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, A)$$

- $\forall A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, B), \forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(B,\, C)$ に対して，f と g の**合成** (composite) と呼ばれる射 $\boldsymbol{g \circ f} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, C)$ を対応させる集合の写像

$$\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(B,\, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A,\, C),\ (f,\, g) \longmapsto g \circ f$$

これらの構成要素は，次の 2 条件を満たさねばならない：

(1) **(unitality)**：任意の射 $f\colon A \longrightarrow B$ に対して

$$f \circ \mathrm{Id}_A = f, \quad \mathrm{Id}_B \circ f = f$$

が成り立つ．

(2) **(associativity)**：任意の射 $f\colon A \longrightarrow B,\ g\colon B \longrightarrow C,\ h\colon C \longrightarrow D$ に対して

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

が成り立つ．

[a] $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ は，集合論では扱えないほど大きなものになっても良い．

!

要素 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\, B)$ を

$$\boldsymbol{f\colon A \longrightarrow B}$$

のように矢印で表すことがある．A は f の**始域** (domain)，B は f の**終域** (codomain) と呼ばれ，それぞれ

$$\mathbf{dom}\,\boldsymbol{f} \coloneqq A, \quad \mathbf{cod}\,\boldsymbol{f} \coloneqq B$$

と書かれる．

素直な例として，**集合と写像の圏 Sets** がある．これは

- $\mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ は，すべての集合の集まり．
- $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(X,\, Y)$ は，集合 X と Y の間の全ての写像がなす集合．
- 任意の集合 X に対して，恒等射 $\mathrm{Id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(X,\, X)$ とは，恒等写像 $\mathrm{id}_X\colon X \longrightarrow X$ のこと．
- 射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(X,\, Y)$，$g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Y,\, Z)$ の合成とは，写像の合成 $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$ のこと．

として構成される圏のことを言う．幾何学の舞台となる**位相空間の圏**は，よく **Top** と表記されるが，次のようにして構成される：

- $\mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ はすべての位相空間の集まり．
- $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\, Y)$ とは，位相空間 X と Y の間の全ての連続写像が成す集合．
- 任意の位相空間 X に対して，恒等射 $\mathrm{Id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\, X)$ とは恒等写像 $\mathrm{id}_X\colon X \longrightarrow X$ のこと[*1]．
- 射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\, Y)$，$g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Y,\, Z)$ の合成とは，写像の合成 $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$ のこと[*2]．

一般の圏 $\mathcal{C}$ において，射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, Y)$ はただの集合の要素なのであって写像とは限らない．従って f の性質を調べる際に元の行き先を具体的に追跡することができない場合もある．幸いにして，圏 **Sets**, **Top** における射は写像なので，このような心配はしなくても本書の中では問題ない．

[*1] 恒等写像 id_X は，X の任意の開集合 $U \subset X$ に対して $(\mathrm{id}_X)^{-1}(U) = U \subset X$ が X の開集合となるので連続写像である．

[*2] 命題??より，連続写像同士の合成は連続写像であることに注意．

1.1.1 始対象と終対象

定義 1.4: 始対象・終対象

圏 $\mathcal{C}$ を与える．

- 対象 $\boldsymbol{I} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が**始対象** (initial object) であるとは，$\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して射
$$\boldsymbol{I} \longrightarrow \forall Z$$
がただ一つだけ存在すること．
- 対象 $\boldsymbol{T} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が**終対象** (terminal object) であるとは，$\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して射
$$\forall Z \longrightarrow \boldsymbol{T}$$
がただ一つだけ存在すること．

この定義は，**任意の**対象に対してある**一意的な**射が存在する，という風な構造をしている．このような特徴付けを**普遍性** (universal property) と呼ぶ．

任意の圏において，2 つの対象が「交換可能」であることを表すのが**同型射**の概念である．

定義 1.5: 同型射

圏 $\mathcal{C}$ を与える．

- 射 $f\colon A \longrightarrow B$ が**同型射** (isomorphism) であるとは，射 $g\colon B \longrightarrow A$ が存在して $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ かつ $f \circ g = \mathrm{Id}_B$ を充たすこと．このとき f と g は互いの**逆射** (inverse) であると言い，$g = \boldsymbol{f^{-1}}$, $f = \boldsymbol{g}^{-1}$ と書く[a]．
- $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の間に同型射が存在するとき，対象 A と B は**同型** (isomorphic) であると言い，$\boldsymbol{A \cong B}$ と書く．

[a] 逆射は存在すれば一意である．

圏 **Sets** における同型射とは，全単射のことである．**圏 Top における同型射とは，同相写像に他ならない．**

命題 1.1: 始対象・終対象の一意性

圏 $\mathcal{C}$ の始対象・終対象は，存在すれば同型を除いて一意である．

<u>**証明**</u> $I, I' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ がどちらも始対象であるとする．始対象の普遍性により次のような射が一意的に存在する：

$$I \overset{a}{\dashrightarrow} I'$$

$$I \overset{b}{\dashrightarrow} I$$

これらを合成すると射 $b \circ a\colon I \longrightarrow I$ が得られるが，一方で圏の定義から恒等射 $\mathrm{Id}_I\colon I \longrightarrow I$ も存在する：

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[rr, dashed, "\mathrm{id}_I"] \arrow[dr, dashed, "a"'] & & I \\
& I' \arrow[ur, dashed, "b"'] &
\end{tikzcd}
$$

始対象の普遍性より射 $I \longrightarrow I$ は一意でなくてはならないから，$b \circ a = \mathrm{Id}_I$ である．全く同様の議論により $a \circ b = \mathrm{Id}_{I'}$ も従うので，I と I' は同型である．

終対象の一意性も全く同様の議論によって示せる． ■

基本的に，普遍性による定義には同じ論法が使える．命題 1.1 の主張には「存在すれば」と言う枕詞がついている．従って**考えている圏において実際に始対象・終対象が存在するかどうかは全く別の問題である．**

命題 1.2: 圏 Sets における始対象・終対象の存在

圏 $\mathbf{Sets}$ において，

- 空集合 $\emptyset$ は始対象である．
- 1 点集合 $\{\mathrm{pt}\}$ は終対象である．

証明 $\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ をとる．

- $\emptyset$ から Z への写像 f とは，部分集合 $f \subset \emptyset \times Z$ であって命題 $\forall s\ (s \in \emptyset \Longrightarrow \exists! t \in Z,\ (s,\, t) \in f)$ が真になるもののことであった．$s \in \emptyset$ は常に偽なのでこの命題は任意の $f \subset \emptyset \times Z$ について成り立つが，集合論の約束により $\emptyset \times Z = \emptyset$ なので結局 $f = \emptyset$ となって一意性が示された．
- Z から $\{\mathrm{pt}\}$ への写像は定数写像 $c\colon Z \longrightarrow \{\mathrm{pt}\},\ x \longmapsto \mathrm{pt}$ のみである．

■

命題 1.3: 圏 Top における始対象・終対象の存在

圏 $\mathbf{Top}$ において，

- 空集合 $\emptyset$ は始対象である．
- 1 点が成す位相空間 $\{\mathrm{pt}\}$ は終対象である．

証明 $\forall (Z,\, \mathscr{O}_Z) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ をとる．**Sets における証明中に登場した射が連続写像であることを示せば良い．**

- $\mathbf{Sets}$ における証明から，写像 $\emptyset\colon \emptyset \longrightarrow Z$ が一意に存在する．明らかにこれは連続である．
- $\mathbf{Sets}$ における証明から，写像 $c\colon Z \longrightarrow \{\mathrm{pt}\}$ は定数写像のみである．位相空間の公理から $\{\mathrm{pt}\}$ の開集合は $\emptyset,\ \{\mathrm{pt}\}$ のみであり，$c^{-1}(\emptyset) = \emptyset,\ c^{-1}(\{\mathrm{pt}\}) = X$ はどちらも X の開集合なので c は連続である．

■

1.1.2　積と和

まず，任意の圏における積を普遍性を用いて定義する．

定義 1.6: 積

圏 $\mathcal{C}$ と，その対象 $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を与える．X と Y の**積** (product) とは,

- $\boldsymbol{X \times Y}$ と書かれる $\mathcal{C}$ の対象
- **標準的射影** (canonical projection) と呼ばれる 2 つの射

$$\boldsymbol{p_X} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\boldsymbol{X \times Y},\, X\right)$$
$$\boldsymbol{p_Y} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\boldsymbol{X \times Y},\, Y\right)$$

の組であって，以下の普遍性を充たすもののこと：

(積の普遍性)　$\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ および $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$, $\forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y)$ に対して，射 $f \times g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, \boldsymbol{X \times Y})$ が一意的に存在して図式 1.1 を可換にする．

$$\begin{tikzcd}
 & \forall Z \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\exists! f\times g"] \arrow[dr, "g"] & \\
X & \boldsymbol{X \times Y} \arrow[l, "\boldsymbol{p_X}"] \arrow[r, "\boldsymbol{p_Y}"'] & Y
\end{tikzcd}$$

図 1.1: 積の普遍性

命題 1.4: 積の一意性

圏 $\mathcal{C}$ の積は，存在すれば同型を除いて一意である．

<u>**証明**</u>　もう 1 つの圏 $\mathcal{C}$ の対象 $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と射 $\pi_X : P \longrightarrow X$, $\pi_Y : P \longrightarrow Y$ の組が積の普遍性を充している とする：

$$\begin{tikzcd}
 & \forall Z \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\exists! f\times g"] \arrow[dr, "g"] & \\
X & X \times Y \arrow[l, "p_X"] \arrow[r, "p_Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \forall Z \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\exists! h"] \arrow[dr, "g"] & \\
X & P \arrow[l, "\pi_X"] \arrow[r, "\pi_Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

このとき，$Z = X \times Y$, P と選ぶことで

$$
\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[dr, "\pi_Y"] \arrow[d, dashed, red, "\exists!\pi_X\times\pi_Y"] & \\
X & X\times Y \arrow[l, "p_X"] \arrow[r, "p_Y"'] \arrow[d, dashed, red, "\exists!h"] & Y \\
& P \arrow[ul, "\pi_X"] \arrow[ur, "\pi_Y"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& X\times Y \arrow[dl, "p_X"'] \arrow[dr, "p_Y"] \arrow[d, dashed, red, "\exists!h"] & \\
X & P \arrow[l, "\pi_X"] \arrow[r, "\pi_Y"'] \arrow[d, dashed, red, "\exists!\pi_X\times\pi_Y"] & Y \\
& X\times Y \arrow[ul, "p_X"] \arrow[ur, "p_Y"'] &
\end{tikzcd}
$$

が成り立つ．一方で可換図式

$$
\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[dr, "\pi_Y"] \arrow[dd, dashed, red, "\exists!\mathrm{Id}_P"] & \\
X & & Y \\
& P \arrow[ul, "\pi_X"] \arrow[ur, "\pi_Y"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& X\times Y \arrow[dl, "p_X"'] \arrow[dr, "p_Y"] \arrow[dd, dashed, red, "\exists!\mathrm{Id}_{X\times Y}"] & \\
X & & Y \\
& X\times Y \arrow[ul, "p_X"] \arrow[ur, "p_Y"'] &
\end{tikzcd}
$$

も成り立つが，積の普遍性から赤点線で書いた矢印は一意でなくてはならない．従って

$$
h\circ(\pi_X\times\pi_Y) = \mathrm{Id}_P \quad \text{かつ} \quad (\pi_X\times\pi_Y)\circ h = \mathrm{Id}_{X\times Y}
$$

が示された． ■

Sets における積とは，直積集合のことである．

命題 1.5: 圏 Sets における積の存在

圏 **Sets** とその対象 $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ に対して，

- 直積集合 $X\times Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$

- 標準的射影

$$p_X : X \times Y \longrightarrow X,\ (x,\ y) \longmapsto x$$
$$p_Y : X \times Y \longrightarrow Y,\ (x,\ y) \longmapsto y$$

の組は（圏論的な）積である．

<u>証明</u> $\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を 1 つとる．積の普遍性は，写像

$$\begin{aligned}\psi\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Z,\ X \times Y) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Z,\ X) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Z,\ Y) \\ f &\longmapsto \bigl(p_X \circ f,\ p_Y \circ f\bigr)\end{aligned}$$

が全単射であることと同値である．

(全射性)

$\forall (f_1,\ f_2) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Z,\ X) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Z,\ Y)$ を 1 つとる．このとき写像 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Z,\ X \times Y)$ を，$\forall z \in Z$ に対して

$$f(z) = \bigl(f_1(z),\ f_2(z)\bigr)$$

を充たすものとして定義すると

$$\begin{aligned}p_X \circ f(z) &= f_1(z), \\ p_Y \circ f(z) &= f_2(z)\end{aligned}$$

が成り立つので $(f_1,\ f_2) = \psi(f)$ である．

(単射性)

$f,\ g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Z,\ X \times Y)$ が $\psi(f) = \psi(g)$ を充たすとする．このとき $\forall z \in Z$ に対して $(x,\ y) \coloneqq g(z)$ とおけば

$$\begin{aligned}x &= p_X \circ g(z) = p_X \circ f(z), \\ y &= p_Y \circ g(z) = p_Y \circ f(z)\end{aligned}$$

が成り立つので，

$$g(z) = \bigl(x,\ y\bigr) = \bigl(p_X \circ f(z),\ p_Y \circ f(z)\bigr) = f(z)$$

が言える．i.e. $f = g$ であり，ψ は単射である．

■

圏 **Top** における（圏論的な）積を構成するには，**Sets** の積の上に適切な位相を入れると良い．つまり，位相空間 $(X,\ \mathscr{O}_X)$ と $(Y,\ \mathscr{O}_Y)$ の積とは，

- **Sets** の積 $X \times Y$ の上に，
- **Sets** の積の標準的射影 $p_X,\ p_Y$ が **Top** の射，i.e. 連続写像になるような位相 $\mathscr{O}_{X \times Y}$

を入れて構成される位相空間 $(X \times Y,\ \mathscr{O}_{X \times Y})$ のことである．幸い，見慣れた積空間はこれらの条件を充している：

命題 1.6: 圏 Top における積の存在

圏 **Top** とその対象 $(X,\ \mathscr{O}_X),\ (Y,\ \mathscr{O}_Y) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ に対して，

- **Sets** の積 $X \times Y$ の上に，部分集合族

$$\left\{\, U \times V \subset X \times Y \;\middle|\; U \in \mathscr{O}_X,\, V \in \mathscr{O}_Y \,\right\}$$

を開基とする位相 $\mathscr{O}_{X \times Y}$ を入れてできる位相空間

$$(X \times Y,\ \mathscr{O}_{X \times Y}) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$$

- **Sets** の積の標準的射影

$$\begin{aligned} p_X &: X \times Y \longrightarrow X,\ (x,\ y) \longmapsto x \\ p_Y &: X \times Y \longrightarrow Y,\ (x,\ y) \longmapsto y \end{aligned}$$

の組は（圏論的な）積である．

証明 $\forall U \in \mathscr{O}_X,\, \forall V \in \mathscr{O}_Y$ に対して

$$\begin{aligned} p_X^{-1}(U) &= U \times Y, \\ p_Y^{-1}(V) &= X \times V \end{aligned}$$

が成り立つが，$X \in \mathscr{O}_X,\, Y \in \mathscr{O}_Y$ なので右辺はどちらも開基に属する．i.e. $p_X^{-1}(U) \in \mathscr{O}_{X \times Y}$，$p_Y^{-1}(V) \in \mathscr{O}_{X \times Y}$ であり，$p_X,\, p_Y$ はどちらも連続である．積の普遍性は **Sets** の積の普遍性から従う． ■

系 1.1:

$\forall (X,\ \mathscr{O}_X),\ (Y,\ \mathscr{O}_Y),\ (Z,\ \mathscr{O}_Z) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ を与える．
このとき，写像 $f\colon Z \longrightarrow X \times Y,\ z \longmapsto \bigl(f_1(z),\ f_2(z)\bigr)$ が連続ならば 2 つの写像 $f_1\colon Z \longrightarrow X,\ z \longmapsto f_1(z),\ f_2\colon Z \longrightarrow Y,\ z \longmapsto f_2(z)$ はどちらも連続である．

証明 命題 1.6 より標準的射影 $p_X\colon X \times Y \longrightarrow X,\ p_Y\colon X \times Y \longrightarrow Y$ はどちらも連続だから，$f_1 = p_X \circ f,\ f_2 = p_Y \circ f$ はどちらも連続写像同士の合成となり，連続である． ■

位相 $\mathscr{O}_{X \times Y}$ の開基は

$$\begin{aligned} \left\{\, U \times V \;\middle|\; U \in \mathscr{O}_X,\, V \in \mathscr{O}_Y \,\right\} &= \left\{\, (U \cap X) \times (V \cap Y) \;\middle|\; U \in \mathscr{O}_X,\, V \in \mathscr{O}_Y \,\right\} \\ &= \left\{\, (U \times Y) \cap (X \times V) \;\middle|\; U \in \mathscr{O}_X,\, V \in \mathscr{O}_Y \,\right\} \end{aligned}$$

であるから，$\mathscr{O}_{X \times Y}$ は部分集合族

$$\begin{aligned} &\left\{\, (U \times Y) \;\middle|\; U \in \mathscr{O}_X \,\right\} \cup \left\{\, (X \times V) \;\middle|\; V \in \mathscr{O}_Y \,\right\} \\ =\ &\left\{\, p_X^{-1}(U) \subset X \times Y \;\middle|\; U \in \mathscr{O}_X \,\right\} \cup \left\{\, p_Y^{-1}(V) \subset X \times Y \;\middle|\; V \in \mathscr{O}_Y \,\right\} \end{aligned}$$

を準開基に持つ．

! つまり，位相 $\mathscr{O}_{X \times Y}$ とは，$\boldsymbol{p_X},\, \boldsymbol{p_Y}$ **の両方を連続にする最弱の位相である．**

定義 1.7: 和

圏 $\mathcal{C}$ と，その対象 $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を与える．X と Y の**和** (sum)，もしくは**余積** (coproduct) とは，

- $\boldsymbol{X \amalg Y}$ と書かれる $\mathcal{C}$ の対象
- **標準的包含** (canonical injection) と呼ばれる 2 つの射

$$\boldsymbol{i_X} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X,\ \boldsymbol{X \amalg Y}\right)$$
$$\boldsymbol{i_Y} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(Y,\ \boldsymbol{X \amalg Y}\right)$$

の組であって，以下の普遍性を充たすもののこと：

(和の普遍性) $\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ および $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ Z)$，$\forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\ Z)$ に対して，$f \amalg g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{X \amalg Y},\ Z)$ が一意的に存在して図式 1.2 を可換にする．

$$\begin{tikzcd} & & \forall Z & & \\ X \arrow[urr, "f"] \arrow[rr, "\boldsymbol{i_X}"'] & & \boldsymbol{X \amalg Y} \arrow[u, dashed, "\exists! f \amalg g"'] & & Y \arrow[ull, "g"'] \arrow[ll, "\boldsymbol{i_Y}"] \end{tikzcd}$$

図 1.2: 和の普遍性

命題 1.7: 和の一意性

圏 $\mathcal{C}$ の和は，存在すれば同型を除いて一意である．

証明 積の一意性の証明と全く同様の論法で示せる． ■

それでは，圏 **Sets** の和を構成してみよう．

命題 1.8: 圏 Sets における和の存在

圏 **Sets** とその対象 $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ に対して，

- 次のように定義される $\boldsymbol{X \sqcup Y} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$[a]

$$\boldsymbol{X \sqcup Y} := \left\{\, (1,\ x) \,\middle|\, x \in X \,\right\} \cup \left\{\, (2,\ y) \,\middle|\, y \in Y \,\right\}$$

  この集合は X と Y の**非交和** (disjoint union) と呼ばれる．

- 標準的包含

$$i_1 \colon X \longrightarrow X \sqcup Y,\ x \longmapsto (1,\ x)$$
$$i_2 \colon Y \longrightarrow X \sqcup Y,\ y \longmapsto (2,\ y)$$

の組は（圏論的な）和である．

[a] 接バンドルを念頭において，成分を通常の非交和とは逆の順番に書いた．

証明 $\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を 1 つとる．和の普遍性は，写像

$$\begin{aligned}\psi\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(X \sqcup Y,\, Z) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(X,\, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Y,\, Z) \\ f &\longmapsto \bigl(f \circ i_1,\, f \circ i_2\bigr)\end{aligned}$$

が全単射であることと同値である．

(全射性)

$\forall (f_0,\, f_1) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(X,\, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Y,\, Z)$ を 1 つとる．このとき写像 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(X \sqcup Y,\, Z)$ を，$\forall (\delta,\, z) \in X \sqcup Y$ に対して

$$f(\delta,\, z) = \begin{cases} f_1(z), & \delta = 1, \\ f_2(z), & \delta = 2 \end{cases}$$

を充たすものとして定義すると，$\forall x \in X,\, \forall y \in Y$ に対して

$$\begin{aligned} f \circ i_1(x) &= f_1(x), \\ f \circ i_2(y) &= f_2(y) \end{aligned}$$

が成り立つので $(f_1,\, f_2) = \psi(f)$ である．

(単射性)

$f,\, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(X \sqcup Y,\, Z)$ が $\psi(f) = \psi(g)$ を充たすとする．このとき $\forall (\delta,\, z) \in X \sqcup Y$ に対して $\delta = 1$ のとき

$$g \circ i_1(z) = f \circ i_1(z)$$

が，$\delta = 2$ のとき

$$g \circ i_2(z) = f \circ i_2(z)$$

がそれぞれ成り立つので，

$$g(\delta,\, z) = \begin{cases} f \circ i_1(z) = f(\delta,\, z), & \delta = 1 \\ f \circ i_2(z) = f(\delta,\, z), & \delta = 2 \end{cases}$$

が言える．i.e. $f = g$ であり，ψ は単射である．

■

圏 **Top** において，2 つの対象 $(X,\, \mathscr{O}_X),\, (Y,\, \mathscr{O}_Y) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ の（圏論的な）和を構成するには，**Sets の和** $X \amalg Y$ の上に適切な位相を入れて標準的包含 $i_1,\, i_2$ が連続になるようにすれば良い．

命題 1.9: 圏 Top における和の存在

圏 $\mathbf{Top}$ とその対象 $(X,\, \mathscr{O}_X),\, (Y,\, \mathscr{O}_Y) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ に対して，

- **Sets の和** $X \amalg Y$ の上に，位相

$$\mathscr{O}_{X \amalg Y} \coloneqq \left\{ U \subset X \amalg Y \;\middle|\; i_1^{-1}(U) \in \mathscr{O}_X \text{ かつ } i_2^{-1}(U) \in \mathscr{O}_Y \right\} \tag{1.1.1}$$

  を入れてできる位相空間

$$(X \amalg Y,\, \mathscr{O}_{X \amalg Y}) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top}).$$

  なお，$\mathscr{O}_{X \amalg Y}$ は**直和位相** (disjoint union topology) と呼ばれる．
- 標準的包含

$$\begin{aligned} i_1 \colon X &\longrightarrow X \amalg Y,\; x \longmapsto (0,\, x) \\ i_2 \colon Y &\longrightarrow X \amalg Y,\; y \longmapsto (1,\, y) \end{aligned}$$

の組は（圏論的な）和である．

<u>**証明**</u> 定義 (1.1.1) より，$\forall U \in \mathscr{O}_{X \amalg Y}$ に対して

$$\begin{aligned} i_1^{-1}(U) &\in \mathscr{O}_X, \\ i_2^{-1}(U) &\in \mathscr{O}_Y \end{aligned}$$

が成り立つ．i.e. $i_1,\, i_2$ はどちらも連続である．和の普遍性は **Sets** の和の普遍性から従う． ■

! 積位相とは対照的に，直和位相は**標準的包含 $i_1,\, i_1$ の両方を連続にする最強の位相である．**

1.1.3 等化子と余等化子

定義 1.8: 等化子

圏 $\mathcal{C}$ における対象 $X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と，それらの間の 2 つの射

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$$

を任意に与える．射 $f,\, g$ の**等化子** (equalizer) とは，

- $\mathcal{C}$ の対象 $\mathbf{Eq}(\boldsymbol{f},\, \boldsymbol{g}) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- 射 $\boldsymbol{e} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(\mathbf{Eq}(\boldsymbol{f},\, \boldsymbol{g}),\, X\big)$ であって $f \circ \boldsymbol{e} = g \circ \boldsymbol{e}$ を充たすもの

の組であって，以下の普遍性を充たすもののこと：

(等化子の普遍性) $\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ および $f \circ z = g \circ z$ を充たす任意の射 $z \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,\, X)$ に対して，射 $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(Z,\, \mathbf{Eq}(\boldsymbol{f},\, \boldsymbol{g})\big)$ が一意的に存在して図式 1.3 を可換にする．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Eq}(f,\, g) \arrow[r, "e"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \\
\forall Z \arrow[u, dashed, "\exists! u"] \arrow[ur, "z"'] & &
\end{tikzcd}
$$

図 1.3: 等化子の普遍性

命題 1.10: 等化子の一意性

圏 $\mathcal{C}$ の等化子は，存在すれば同型を除いて一意である．

<u>**証明**</u> 積の一意性と同様の論法で示せる． ■

Sets における等化子は，方程式 $f(x) = g(x)$ の解空間のようなものである．

命題 1.11: 圏 Sets における等化子の存在

$\forall X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ と，$\forall f,\, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}\,(X,\, Y)$ を与える．このとき，

- X の部分集合

$$
\mathrm{Eq}(f,\, g) \coloneqq \left\{\, x \in X \;\middle|\; f(x) = g(x) \,\right\} \tag{1.1.2}
$$

- 包含写像

$$
e \colon \mathrm{Eq}(f,\, g) \longrightarrow X,\; x \longmapsto x
$$

の組は写像 $f,\, g$ の等化子である．

<u>**証明**</u> $\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ を与える．等化子の普遍性は写像

$$
\begin{aligned}
\psi \colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}\,\bigl(Z,\, \mathrm{Eq}(f,\, g)\bigr) &\longrightarrow \left\{\, z \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}\,(Z,\, X) \;\middle|\; f \circ z = g \circ z \,\right\} \\
h &\longmapsto e \circ h
\end{aligned}
$$

が well-defined な全単射であることと同値である．

(well-definedness)

$\forall h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}\,\bigl(Z,\, \mathrm{Eq}(f,\, g)\bigr)$ を 1 つとる．集合 $\mathrm{Eq}(f,\, g)$ の定義 (1.1.2) から，このとき $\forall x \in Z$ に対して $f\bigl(e \circ h(x)\bigr) = f\bigl(h(x)\bigr) = g\bigl(h(x)\bigr) = g\bigl(e \circ h(x)\bigr)$ が言えるので ψ は well-defined である．

(全射性)

$f \circ z = g \circ z$ を充たす任意の射 $z \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}\,(Z,\, X)$ を与える．このとき $\forall x \in Z$ に対して $f\bigl(z(x)\bigr) = g\bigl(z(x)\bigr)$ が成り立つので $z(x) \in \mathrm{Eq}(f,\, g)$ であり，$z(x) = e \circ z(x)$ が言える．i.e. $z = \psi(z)$ である．

(単射性)

2 つの射 $h,\, k \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}\,\bigl(Z,\, \mathrm{Eq}(f,\, g)\bigr)$ が $\psi(h) = \psi(k)$ を充たすとする．このとき $\forall x \in Z$ に対して $h(x) = e \circ h(x) = \psi(h)(x) = \psi(k)(x) = e \circ k(x) = k(x)$ が成り立つので $h = k$ が言える．i.e.

ψ は単射である．

■

これに位相を入れることで位相空間の圏 **Top** における等化写像が構成できる．

命題 1.12: 圏 Top における等化子の存在

$\forall (X, \mathscr{O}_X), (Y, \mathscr{O}_Y) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ と，$\forall f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ を与える．このとき，

- 圏 **Sets** における等化子 $\mathrm{Eq}(f, g)$ に X からの相対位相

$$\mathscr{O}_{\mathrm{Eq}(f, g)} := \left\{ U \cap \mathrm{Eq}(f, g) \,\middle|\, U \in \mathscr{O}_X \right\}$$

  を入れてできる位相空間

$$\big(\mathrm{Eq}(f, g), \mathscr{O}_{\mathrm{Eq}(f, g)}\big) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$$

- 包含写像

$$e \colon \mathrm{Eq}(f, g) \longrightarrow X, \ x \longmapsto x$$

の組は連続写像 f, g の等化子である．

<u>証明</u> $\forall U \in \mathscr{O}_X$ に対して

$$e^{-1}(U) = U \cap \mathrm{Eq}(f, g) \in \mathscr{O}_{\mathrm{Eq}(f, g)}$$

なので e は連続である．等化子の普遍性は **Sets** における等化子の普遍性から従う． ■

$\mathrm{Eq}(f, g)$ に入れた位相は包含写像 $\boldsymbol{e}$ **を連続にする最弱の位相**である．

定義 1.9: 余等化子

圏 $\mathcal{C}$ における対象 $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と，それらの間の 2 つの射

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$$

を任意に与える．射 f, g の**余等化子** (coequalizer) とは，

- $\mathcal{C}$ の対象 $\boldsymbol{Q} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- 射 $\boldsymbol{q} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, \boldsymbol{Q})$ であって $\boldsymbol{q} \circ f = \boldsymbol{q} \circ g$ を充たすもの

の組であって，以下の普遍性を充たすもののこと：

(余等化子の普遍性) $\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ および $z \circ f = z \circ g$ を充たす任意の射 $z \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ に対して，射 $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{Q}, Z)$ が一意的に存在して図式 1.4 を可換にする．

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "z"'] & \boldsymbol{Q} \arrow[d, dashed, "\exists! u"] \\
& & \forall Z
\end{tikzcd}
$$

図 1.4: 余等化子の普遍性

命題 1.13: 余等化子の一意性

圏 $\mathcal{C}$ の余等化子は，存在すれば同型を除いて一意である．

集合と写像の圏 **Sets** においては，余等化子はある種の商集合である．

命題 1.14: 圏 Sets における余等化子の存在

$\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ と，$\forall f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(X, Y)$ を与える．部分集合 $\sim \subset Y \times Y$ を，$\forall x \in X$ に対して $f(x) \sim g(x)$ を充たす Y の最小の同値関係とする．このとき，

- Y の商集合
$$Y/\sim \, := \{ [y] \mid y \in Y \}$$
- 商写像
$$q \colon Y \longrightarrow Y/\sim, \; y \longmapsto [y]$$

の組は写像 f, g の余等化子である．

<u>**証明**</u> 本題に入る前に，Y の同値関係 $\sim \subset Y \times Y$ は，$\forall x \in X$ に対して $\big(f(x), g(x)\big) \in R$ を充たす全ての同値関係[*3] $R \subset Y \times Y$ の共通部分であることに注意する．

$\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ を与える．余等化子の普遍性は写像

$$
\begin{aligned}
\psi \colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}\big(Y/\sim, Z\big) &\longrightarrow \{ z \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Y, Z) \mid z \circ f = z \circ g \} \\
h &\longmapsto h \circ q
\end{aligned}
$$

が well-defined な全単射であることと同値である．

(well-definedness)

$\forall h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Y/\sim, Z)$ を 1 つとる．同値関係 $\sim$ の定義から $\forall x \in X$ に対して $[f(x)] = [g(x)]$ が成り立つから $h \circ q\big(f(x)\big) = h\big([f(x)]\big) = h\big([g(x)]\big) = h \circ q\big(g(x)\big)$ が言える．i.e. $\psi(h) \circ f = \psi(h) \circ g$ なので ψ は well-defined である．

(全射性)

$z \circ f = z \circ g$ を充たす任意の射 $z \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Y, Z)$ を与える．Y の同値関係 $R_z \subset Y \times Y$ を

$$(y, y') \in R_z \quad \Longleftrightarrow \quad z(y) = z(y')$$

[*3] $Y \times Y$ はこの条件を充たす同値関係なので，$\sim$ の存在が言える．

によって定義する[*4]．このとき，$\forall x \in X$ に対して $z\bigl(f(x)\bigr) = z\bigl(g(x)\bigr)$ が成り立つので $\bigl(f(x),\, g(x)\bigr) \in R_z$ であり，$\sim\, \subset R_z$ が分かる．つまり $y \sim y' \implies (y,\, y') \in R_z \implies z(y) = z(y')$ なので，写像

$$\overline{z}\colon Y/\!\sim\, \longrightarrow Z,\; [y] \longmapsto z(y)$$

は $[y]$ の代表元の取り方によらず，well-defined である．故に $z = \overline{z} \circ q = \psi(\overline{z})$ である．

(単射性)

2 つの射 $h,\, k \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}\,(Y/\!\sim,\, Z)$ が $\psi(h) = \psi(k)$ を充たすとする．このとき $\forall y \in Y$ に対して $h \circ q(y) = k \circ q(y) \iff h([y]) = k([y])$ が成り立つので $h = k$ が言える．i.e. ψ は単射である．

■

命題 1.15: 圏 Top における余等化子の存在

$\forall (X,\, \mathscr{O}_X),\, (Y,\, \mathscr{O}_Y) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ と，$\forall f,\, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\,(X,\, Y)$ を与える．このとき，

- Sets の余等化子 $Y/\!\sim$ に Y からの商位相

  $$\mathscr{O}_{Y/\sim} := \bigl\{\, U \subset Y/\!\sim \bigm| q^{-1}(U) \in \mathscr{O}_X \,\bigr\}$$

  を入れてできる商位相空間

  $$\bigl(Y/\!\sim,\, \mathscr{O}_{Y/\sim}\bigr) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$$

- 商写像

  $$q\colon Y \longrightarrow Y/\!\sim,\; y \longmapsto [y]$$

の組は連続写像 $f,\, g$ の余等化子である．

<u>**証明**</u> $\forall U \in \mathscr{O}_{Y/\sim}$ に対して $q^{-1}(U) \in \mathscr{O}_{Y/\sim}$ なので q は連続である．余等化子の普遍性は Sets における余等化子の普遍性から従う． ■

! $Y/\!\sim$ に入れた位相は**商写像 q を連続にする最強の位相**であると言える．

1.1.4 引き戻しと押し出し

定義 1.10: 引き戻し

圏 $\mathcal{C}$ における対象 $X,\, Y,\, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と，それらの間の 2 つの射

[*4] z が写像であることから $z(y) = z(y)$ なので $(y,\, y) \in R_z$（反射律）が，$z(y) = z(y') \implies z(y') = z(y)$ なので $(y,\, y') \in R_z \implies (y',\, y) \in R_z$（対称律）が，$z(y) = z(y')$ かつ $z(y') = z(y'') \implies z(y) = z(y'')$ なので $(y,\, y'),\, (y',\, y'') \in R_z \implies (y,\, y'') \in R_z$（推移律）が従う．

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

を与える．射 f, g の**引き戻し** (pullback)[a] とは,

- $\mathcal{C}$ の対象 $\boldsymbol{P} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- 2 つの射 $\boldsymbol{\pi_1} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{P}, X)$, $\boldsymbol{\pi_2} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{P}, Y)$ であって $f \circ \boldsymbol{\pi_1} = g \circ \boldsymbol{\pi_2}$ を充たすもの：

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{P} \arrow[r, "\boldsymbol{\pi_2}"] \arrow[d, "\boldsymbol{\pi_1}"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

の組であって，以下の普遍性を充たすもののこと：

(引き戻しの普遍性) $\forall W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ および 2 つの射 $w_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X)$, $w_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y)$ であって $f \circ w_1 = g \circ w_2$ を充たすものに対して，射 $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, \boldsymbol{P})$ が一意的に存在して図式 1.5 を可換にする．

$$\begin{tikzcd} \forall W \arrow[dr, dashed, "\exists! u"] \arrow[drr, bend left, "w_2"] \arrow[ddr, bend right, "w_1"'] & & \\ & \boldsymbol{P} \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & X \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

図 1.5: 引き戻しの普遍性

対象 $\boldsymbol{P}$ はしばしば $\boldsymbol{X} \times_{\boldsymbol{Z}} \boldsymbol{Y}$ と書かれる．

[a] **ファイバー積** (fiber product) と呼ぶ場合がある．

命題 1.16: 引き戻しの一意性

圏 $\mathcal{C}$ の引き戻しは，存在すれば同型を除いて一意である．

命題 1.17: 圏 Sets における引き戻し

$\forall X,\, Y,\, Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ と，$\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(X,\, Z),\ \forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Y,\, Z)$ を与える．このとき，

- 集合

$$X \times_Z Y \coloneqq \left\{\, (x,\, y) \in X \times Y \;\middle|\; f(x) = g(y) \,\right\}$$

- Sets における積の標準的射影 $p_X,\, p_Y$ の制限

$$\pi_1 \coloneqq p_X|_{X\times_Z Y} \colon X \times_Z Y \longrightarrow X,\ (x,\, y) \longmapsto x$$
$$\pi_2 \coloneqq p_Y|_{X\times_Z Y} \colon X \times_Z Y \longrightarrow Y,\ (x,\, y) \longmapsto y$$

の組は写像 $f,\, g$ の引き戻しである．

証明 $\forall W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ を与える．引き戻しの普遍性は写像

$$\begin{aligned}\psi \colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(W,\, \boldsymbol{X} \times_{\boldsymbol{Z}} \boldsymbol{Y}) &\longrightarrow \left\{\, (w_1,\, w_2) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(W,\, X) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(W,\, Y) \;\middle|\; f \circ w_1 = g \circ w_2 \,\right\} \\ h &\longmapsto \bigl(\pi_1 \circ h,\, \pi_2 \circ h\bigr)\end{aligned}$$

が well-defined な全単射であることと同値である．

(well-definedness)

$\forall h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(W,\, \boldsymbol{X} \times_{\boldsymbol{Z}} \boldsymbol{Y})$ を 1 つとる．このとき $\forall x \in W$ に対して $h(x) = \bigl(h_1(x),\, h_2(x)\bigr) \in X \times_Z Y$ と書くと $f\bigl(h_1(x)\bigr) = g\bigl(h_2(x)\bigr)$ が成り立つ．$h_1(x) = \pi_1 \circ h(x),\ h_2(x) = \pi_2 \circ h(x)$ なので ψ が well-defined であることが示された．

(全射性)

$f \circ w_1 = g \circ w_2$ を充たす任意の写像の組 $(w_1,\, w_2) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(W,\, X) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(W,\, Y)$ をとる．このとき写像

$$w \colon W \longrightarrow X \times_Z Y$$

を $\forall x \in W$ に対して

$$w(x) \coloneqq \bigl(w_1(x),\, w_2(x)\bigr)$$

と定めると w は well-defined である．従って Sets における積の普遍性の証明から $(w_1,\, w_2) = \psi(w)$ である．

(単射性)

Sets における積の普遍性の証明と全く同様に示せる．

■

命題 1.18: 圏 Top における引き戻しの存在

$\forall (X,\, \mathscr{O}_X),\, (Y,\, \mathscr{O}_Y),\, (Z,\, \mathscr{O}_Z) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ と，$\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\, Z),\, \forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Y,\, Z)$ を与える．このとき，

- **Sets** の引き戻し $X \times_Z Y$ の上に積空間 $(X \times Y,\, \mathscr{O}_{X\times Y})$ からの相対位相

$$\mathscr{O}_{X\times_Z Y} \coloneqq \left\{ U \cap X \times_Z Y \;\middle|\; U \in \mathscr{O}_{X\times Y} \right\}$$

  を入れてできる位相空間

$$\left(X \times_Z Y,\, \mathscr{O}_{X\times_Z Y}\right) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$$

- **Top** における積の標準的射影 $p_X,\, p_Y$ の制限

$$\begin{aligned} \pi_1 &\coloneqq p_X|_{X\times_Z Y} \colon X \times_Z Y \longrightarrow X,\; (x,\, y) \longmapsto x \\ \pi_2 &\coloneqq p_Y|_{X\times_Z Y} \colon X \times_Z Y \longrightarrow Y,\; (x,\, y) \longmapsto y \end{aligned}$$

の組は連続写像 $f,\, g$ の引き戻しである．

__証明__ 命題 1.6 より $p_X,\, p_Y$ は連続なので，$\pi_1,\, \pi_2$ も連続である．引き戻しの普遍性は **Sets** における引き戻しの普遍性から従う． ■

$X \times_Z Y$ に入れた位相は **$\boldsymbol{\pi_1},\, \boldsymbol{\pi_2}$ を連続にする最弱の位相である．**

定義 1.11: 押し出し

圏 $\mathcal{C}$ における対象 $X,\, Y,\, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と，それらの間の 2 つの射

$$\begin{tikzcd} & Y \\ X & Z \arrow[l, "f"'] \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

を与える．射 $f,\, g$ の**押し出し** (pushout)[a] とは，

- $\mathcal{C}$ の対象 $\boldsymbol{P} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- 2 つの射 $\boldsymbol{\iota_1} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, \boldsymbol{P}),\, \boldsymbol{\iota_2} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\, \boldsymbol{P})$ であって $\boldsymbol{\iota_1} \circ f = \boldsymbol{\iota_2} \circ g$ を充たすもの：

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{P} & Y \arrow[l, "\boldsymbol{\iota_2}"'] \\ X \arrow[u, "\boldsymbol{\iota_1}"] & Z \arrow[l, "f"'] \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

の組であって，以下の普遍性を充たすもののこと：

(押し出しの普遍性) $\forall W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ および 2 つの射 $w_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, W),\; w_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\, W)$ であって $w_1 \circ f = w_2 \circ g$ を充たすものに対して，射 $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{P},\, W)$ が一意的に存在して図式 1.5 を可換にする．

$$
\begin{tikzcd}
\forall {\color{blue}W} & & \\
& \boldsymbol{P} \arrow[ul, dashed, red, "\exists! u"'] & Y \arrow[l, "\iota_2"'] \arrow[ull, bend right, blue, "w_2"'] \\
& X \arrow[u, "\iota_1"] \arrow[uul, bend left, blue, "w_1"] & Z \arrow[l, "f"'] \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}
$$

図 1.6: 押し出しの普遍性

対象 $\boldsymbol{P}$ はしばしば $\boldsymbol{X \amalg_Z Y}$ と書かれる．

[a] **ファイバー和** (fiber sum) と呼ぶ場合がある．

命題 1.19: 押し出しの一意性

圏 $\mathcal{C}$ の押し出しは，存在すれば同型を除いて一意である．

命題 1.20: 圏 Sets における押し出し

$\forall X,\, Y,\, Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ と，$\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Z,\, X)$，$\forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Z,\, Y)$ を与える．部分集合 $\sim \subset (X \amalg Y) \times (X \amalg Y)$ を，$\forall z \in Z$ に対して $\bigl(1,\, f(z)\bigr) \sim \bigl(2,\, g(z)\bigr)$ を充たす $X \amalg Y$ の最小の同値関係とする．このとき，

- Sets の和 $X \amalg Y$ の商集合

$$X \amalg_Z Y \coloneqq (X \amalg Y)/{\sim}$$

- Sets における和の標準的包含 $i_1,\, i_2$ と商写像 $q\colon X \amalg Y \longrightarrow X \amalg_Z Y,\ (\delta,\, w) \longmapsto [\delta,\, w]$ の合成

$$\begin{aligned}
\iota_1 &\coloneqq q \circ i_1 \colon X \longrightarrow X \amalg_Z Y,\ x \longmapsto [1,\, x] \\
\iota_2 &\coloneqq q \circ i_2 \colon Y \longrightarrow X \amalg_Z Y,\ y \longmapsto [2,\, y]
\end{aligned}$$

の組は写像 $f,\, g$ の押し出しである．

<u>**証明**</u> $\forall W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ を与える．押し出しの普遍性は写像

$$\begin{aligned}
\psi \colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(\boldsymbol{X \amalg_Z Y},\, W) &\longrightarrow \bigl\{\, (w_1,\, w_2) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(X,\, W) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Y,\, W) \bigm| w_1 \circ f = w_2 \circ g \,\bigr\} \\
h &\longmapsto \bigl(h \circ \iota_1,\, h \circ \iota_2\bigr)
\end{aligned}$$

が well-defined な全単射であることと同値である．

(well-definedness)

$\forall h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(W,\, \boldsymbol{X \times_Z Y})$ を 1 つとる．このとき同値関係 $\sim$ の定義から，$\forall z \in Z$ に対して $(h \circ \iota_1) \circ f(z) = h\bigl([1,\, f(z)]\bigr) = h\bigl([2,\, g(z)]\bigr) = (h \circ \iota_2) \circ g(z)$ が成り立つ．i.e. ψ は well-defined である．

(全射性)

$w_1 \circ f = w_2 \circ g$ を充たす任意の写像の組 $(w_1,\, w_2) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(X,\, W) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Y,\, W)$ をとる．同値関係 $R_{w_1 w_2} \subset (X \amalg Y) \times (X \amalg Y)$ を

$$\big((\delta,\, v),\, (\delta',\, v')\big) \in R_{w_1 w_2} \quad\Longleftrightarrow\quad w_\delta(v) = w_{\delta'}(v')$$

により定義する．このとき $\forall z \in Z$ に対して $w_1\big(f(z)\big) = w_2\big(g(z)\big)$ が成り立つので $\Big(\big(1,\, f(z)\big),\, \big(2,\, g(z)\big)\Big) \in R_{w_1 w_2}$ であり，同値関係 $\sim$ の最小性から $\sim\, \subset R_{w_1 w_2}$ が分かる．よって写像

$$\overline{w} \colon X \amalg_Z Y \longrightarrow W,\ [\delta,\, v] \longmapsto w_\delta(v)$$

は well-defined である．従って $(w_1,\, w_2) = \big(\overline{w} \circ \iota_1,\, \overline{w} \circ \iota_2\big) = \psi(\overline{w})$ が示された．

(単射性)

Sets における和の普遍性の証明と全く同様に示せる．

■

命題 1.21: 圏 Top における押し出しの存在

$\forall (X,\, \mathscr{O}_X),\, (Y,\, \mathscr{O}_Y),\, (Z,\, \mathscr{O}_Z) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ と，$\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Z,\, X),\, \forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Z,\, Y)$ を与える．このとき，

- **Sets の押し出し** $X \amalg_Z Y$ の上に直和位相空間 $(X \amalg Y,\, \mathscr{O}_{X \amalg Y})$ からの商位相

$$\mathscr{O}_{X \amalg_Z Y} \coloneqq \big\{\, U \subset X \amalg_Z Y \bigm| q^{-1}(U) \in \mathscr{O}_{X \amalg Y} \,\big\}$$

  を入れてできる位相空間

$$\big(X \amalg_Z Y,\, \mathscr{O}_{X \amalg_Z Y}\big) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$$

- **Top における和の標準的包含** $i_1,\, i_2$ と商写像 $q \colon X \amalg Y \longrightarrow X \amalg Y/{\sim},\ (\delta,\, z) \longmapsto [\delta,\, z]$ の合成

$$\begin{aligned} \iota_1 &\coloneqq q \circ i_1 \colon X \longrightarrow X \amalg_Z Y,\ x \longmapsto [0,\, x] \\ \iota_2 &\coloneqq q \circ i_2 \colon Y \longrightarrow X \amalg_Z Y,\ y \longmapsto [1,\, y] \end{aligned}$$

の組は連続写像 $f,\, g$ の押し出しである．

<u>証明</u> 命題 1.6 より $i_1,\, i_2$ は連続である．$\mathscr{O}_{X \amalg_Z Y}$ の定義より q も連続だから $\iota_2,\, \iota_2$ も連続である．押し出しの普遍性は **Sets における押し出しの普遍性**から従う． ■

$X \amalg_Z Y$ に入れた位相は $\iota_1,\, \iota_2$ を連続にする最強の位相である．

1.1.5 双対性

これまで登場した普遍性の図式を列挙してみよう．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} & \forall Z \arrow[l, dashed]
\end{tikzcd}
$$

(a) 終対象の普遍性

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{0} \arrow[r, dashed] & \forall Z
\end{tikzcd}
$$

(b) 始対象の普遍性

$$
\begin{tikzcd}
& \forall Z \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\exists! f\times g"] \arrow[dr, "g"] & \\
X & \boldsymbol{X \times Y} \arrow[l, "p_X"] \arrow[r, "p_Y"'] & Y
\end{tikzcd}
$$

(a) 積の普遍性

$$
\begin{tikzcd}
& \forall Z & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "i_X"'] & \boldsymbol{X \amalg Y} \arrow[u, dashed, "\exists! f\amalg g"'] & Y \arrow[l, "i_Y"] \arrow[ul, "g"']
\end{tikzcd}
$$

(b) 和の普遍性

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Eq}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}) \arrow[r, "\boldsymbol{e}"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \\
\forall Z \arrow[u, dashed, "\exists! u"] \arrow[ur, "z"'] & &
\end{tikzcd}
$$

(a) 等化子の普遍性

$$
\begin{tikzcd}
\boldsymbol{Q} \arrow[d, dashed, "\exists! u"'] & X \arrow[l, "\boldsymbol{q}"'] \arrow[dl, "z"] & Y \arrow[l, shift right, "g"'] \arrow[l, shift left, "f"] \\
\forall Z & &
\end{tikzcd}
$$

(b) 余等化子の普遍性

$$
\begin{tikzcd}
\forall W \arrow[drr, bend left, "w_2"] \arrow[dr, dashed, "\exists! u"] \arrow[ddr, bend right, "w_1"'] & & \\
& \boldsymbol{P} \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X \arrow[r, "f"] & Z
\end{tikzcd}
$$

(a) 引き戻しの普遍性

$$
\begin{tikzcd}
\forall W & & \\
& \boldsymbol{P} \arrow[ul, dashed, "\exists! u"'] & Y \arrow[l, "\iota_2"'] \arrow[ull, bend right, "w_2"'] \\
& X \arrow[u, "\iota_1"] \arrow[uul, bend left, "w_1"] & Z \arrow[l, "f"] \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}
$$

(b) 押し出しの普遍性

今や法則は一目瞭然である．つまり，**右の図式は左の図式の射の向きを逆にしたものだと言える．**

定義 1.12: 反対圏

圏 $\mathcal{C}$ の**反対圏** (opposite category)[a] $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ とは,

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) := \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(A, B) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$
- 合成

$$
\circ^{\mathrm{op}} \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(B, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(A, C),\ (f, g) \longmapsto g \circ f
$$

は，$\mathcal{C}$ における合成を $\circ$ と書いたときに

$$
g \circ^{\mathrm{op}} f := f \circ g
$$

と定める．

のようにして構成される圏のことである．要するに，$\mathcal{C}$ と対象は同じだが**矢印が全て逆向き**になっているような圏のこと．

[a] **双対圏** (dual category) とも言う．

これまでに登場した圏 **Top** における構成は，

(1) まず圏 **Sets** において普遍性を充たすような対象を構成し，
(2) **Sets** における普遍性に登場する射が連続になるような上手い位相を入れる

という流れであった．そして注意 1.1.2, 1.1.2, 1.1.3, 1.1.3, 1.1.4, 1.1.4 から，**位相の入れ方にも一種の双対性が見てとれる**：

最弱の位相	最強の位相
始対象	終対象
積	和
等化子	余等化子
引き戻し	押し出し

こうして我々は，**始位相**と**終位相**の概念にたどり着く．

定義 1.13: 始位相

- 集合 $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$
- 位相空間の族 $\{(Y_\lambda,\, \mathscr{O}_\lambda) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})\}_{\lambda \in \Lambda}$
- 写像の族 $\mathcal{F} := \{\varphi_\lambda \colon X \longrightarrow Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$

を与える．写像の族 $\mathcal{F}$ によって誘導される X の**始位相** (initial topology)[a] とは，X の位相のうち，$\forall \lambda \in \Lambda$ について φ_λ を連続にする**最弱の**位相のこと．

[a] **極限位相** (limit topology) や，**射影的位相** (projective topology) と呼ぶことがある．

明示的には，X の部分集合族

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left\{\, \varphi_\lambda^{-1}(U) \subset X \;\middle|\; U \in \mathscr{O}_\lambda \,\right\}$$

を準開基とする X の位相のことを言う．

定義 1.14: 終位相

- 集合 $Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$
- 位相空間の族 $\{(X_\lambda,\, \mathscr{O}_\lambda) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})\}_{\lambda \in \Lambda}$

- 写像の族 $\mathcal{F} \coloneqq \{\varphi_\lambda\colon X_\lambda \longrightarrow Y\}_{\lambda\in\Lambda}$

を与える．写像の族 $\mathcal{F}$ によって誘導される Y の**終位相** (final topology)[a] とは，Y の位相のうち，$\forall\lambda \in \Lambda$ について φ_λ を連続にする**最強の**位相のこと．

[a] **余極限位相** (colimit topology) や，**帰納的位相** (inductive topology) と呼ぶことがある．

明示的には，Y の部分集合族

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\{\, U \subset Y \mid \varphi_\lambda^{-1}(U) \in \mathscr{O}_\lambda \,\}$$

のことである．

1.1.6　極限と余極限

実は，終対象，積，等化子，引き戻しおよびそれらの双対は全て統一的に理解できる．それは**極限**とその双対（**余極限**）である．極限の定義の準備をする．

定義 1.15: 関手

2 つの圏 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ をとる．

$$\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{\mathcal{C}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{D}}$$

と書かれる $\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への**関手** (functor) は，以下の 2 つの対応付けからなる：

- $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ にはある対象 $\boldsymbol{F(X)} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ を対応させ，
- $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ にはある射 $\boldsymbol{F(f)} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(X), F(Y)\big)$ を対応させる．

これらの構成要素は次の 2 条件を充たさねばならない：

(1) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$$

が成り立つ．

(2) $\forall X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ および $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $\forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ に対して

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

が成り立つ．

これまでもなんとなく**図式**という用語を使ってきたが，正確な定義は次のようになる．

定義 1.16: 図式

圏 $\mathcal{C}$ における **$\mathcal{I}$ 型** (type $\mathcal{I}$) の**図式** (diagram) とは，圏 $\mathcal{I}$ からの関手

$$\boldsymbol{D} \colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$$

のこと．圏 $\mathcal{I}$ は**添字圏** (indexing category) と呼ばれる．

定義 1.16 はかなり抽象的だが，例えば添字圏 $\mathcal{I}$ として**有向グラフ**から作られる**自由圏**を考えてみると，見慣れた（手でかけるサイズの）可換図式がきっちり定義されていることが確認できる．

定義 1.17: 有向グラフ

- **頂点** (vertex) 集合 V
- **辺** (edge) 集合 E
- **始点関数** (source function) $s \colon E \longrightarrow V$
- **終点関数** (target function) $t \colon E \longrightarrow V$

の 4 つ組 $\Gamma := (V,\, E,\, s,\, t)$ のことを**有向グラフ** (directed graph) と呼ぶ．頂点 $v,\, w \in V$ に対して $s(e) = v,\; t(e) = w$ を充たすような辺 $e \in E$ のことを，**$\boldsymbol{v}$ から $\boldsymbol{w}$ へ向かう辺**と呼ぶ．

- 有向グラフ Γ の長さ $n \geq 0$ の**道** (path) とは組 $(v;\, e_1,\, \dots,\, e_n) \in V \times E^n$ であって以下を充たすもののこと[a]：
  (1) $s(e_1) = v$
  (2) $\forall i \in \{1,\, \dots,\, n-1\}$ に対して $t(e_i) = s(e_{i+1})$
- Γ の長さ n の道 $p := (v;\, e_1,\, \dots,\, e_n)$ の**始点**を

$$\boldsymbol{s(p)} := v$$

  と定義する．p の**終点**は

$$\boldsymbol{t(p)} := \begin{cases} v, & n = 0 \\ t(e_n), & n \geq 1 \end{cases}$$

  と定義する．
- Γ の 2 つの道 $p := (v;\, e_1,\, \dots,\, e_n),\, q := (w;,\, f_1,\, \dots,\, f_m)$ が $t(p) = s(q)$ を充たすとき，$p,\, q$ の**連結**と呼ばれる長さ $n+m$ の道を

$$\boldsymbol{p \circ q} := \bigl(v;\, e_1,\, \dots,\, e_n,\, f_1,\, \dots,\, f_m\bigr) \in V \times E^{n+m}$$

  によって定義する．
- Γ の 2 つの道 $p,\, q$ が**平行** (parallel) であるとは，

$$s(p) = s(q) \;\text{ かつ }\; t(p) = t(q)$$

  が成り立つこと．

[a] 長さ 0 の道とは $(v) \in V$ のことである．つまり，文字通り**辺を 1 回も辿らない**．

定義 1.18: 自由圏

任意の有向グラフ $\Gamma = (V, E, s, t)$ に対して，Γ 上の**自由圏** (free category) $\mathbf{Free}(\Gamma)$ を次のように定義する：

- 対象は Γ の頂点とする：$\mathrm{Ob}(\mathbf{Free}(\Gamma)) := \Gamma$
- $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Free}(\Gamma)}(v, w)$ は v から w へのすべての道が成す集合とする．
- 対象 v 上の恒等射は v を始点とする長さ 0 の道とする．
- 射の合成は道の連結とする．

自由圏の例をいくつか挙げる．

【例 1.1.1】自由圏 0

頂点も辺も空であるような有向グラフを素材とする自由圏

$$\mathbf{0} := \mathbf{Free}\left(\boxed{}\right)$$

においては $\mathrm{Ob}(\mathbf{0}) = \emptyset$ で，射も空である．

【例 1.1.2】自由圏 1

自由圏

$$\mathbf{1} := \mathbf{Free}\left(\boxed{\overset{v_1}{\bullet}}\right)$$

においては $\mathrm{Ob}(\mathbf{1}) = \{v_1\}$ で，射は $\mathrm{Hom}_{\mathbf{1}}(v_1, v_1) = \{(v_1)\}$ の 1 つしかない．
一方，自由圏

$$\mathbf{1'} := \mathbf{Free}\left(\boxed{\begin{tikzcd} \overset{v_1}{\bullet} \arrow[loop right, "e_1"] \end{tikzcd}}\right)$$

を考えると，

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{1'}}(v_1, v_1) = \{\, (v_1),\ (v_1;\, e_1),\ (v_1;\, e_1) \circ (v_1;\, e_1),\ \ldots \}$$

のように無限個の射がある．

【例 1.1.3】自由圏 $\boldsymbol{n}$

$$\mathbf{2} := \mathbf{Free}\left(\boxed{\overset{v_1}{\bullet} \xrightarrow{e_1} \overset{v_2}{\bullet}}\right)$$

においては $\mathrm{Ob}(\mathbf{2}) = \{v_1,\ v_2\}$ で，射は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{2}}(v_1,\ v_1) &= \{(v_1)\} \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{2}}(v_2,\ v_2) &= \{(v_2)\} \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{2}}(v_1,\ v_2) &= \{(v_1;\ e_1)\}
\end{aligned}
$$

の 3 つである．同様にして自由圏 $\mathbf{3},\ \mathbf{4},\ \dots$ を定義できる．

以降では文脈上明らかな場合は有向グラフとそれを素材にした自由圏の違いを無視する．可換図式の定式化は次のようになる：

定義 1.19: 可換図式

圏 $\mathcal{C}$ における $\mathcal{I}$ 型の図式 $D\colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ が**可換図式** (commutative diagram) であるとは，$\mathcal{I}$ における全ての平行な射の組 $f,\ g\colon i \longrightarrow j$ に対して $D(f) = D(g)$ が成り立つこと．

【例 1.1.4】積の普遍性の図式

$$
\mathcal{I} := \mathbf{Free}\left(\begin{tikzcd}
& 4 \arrow[dl, "e_{41}"'] \arrow[d, "e_{43}"] \arrow[dr, "e_{42}"] & \\
1 & 3 \arrow[l, "e_{31}"] \arrow[r, "e_{32}"'] & 2
\end{tikzcd}\right)
$$

と定義すると，$\mathcal{I}$ における平行な射は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(4,\ 1) &= \left\{ e_{41},\ e_{31} \circ e_{43} \right\}, \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(4,\ 2) &= \left\{ e_{42},\ e_{32} \circ e_{43} \right\}
\end{aligned}
$$

である．一般に平行な道の間には**道の等式**を課すことができる．今回の場合

$$
\begin{aligned}
e_{41} &= e_{31} \circ e_{43}, \\
e_{42} &= e_{32} \circ e_{43}
\end{aligned}
$$

の 2 つを課すことで図式

$$
D\colon \boxed{\begin{array}{c}
\begin{tikzcd}
& 4 \arrow[dl, "e_{41}"'] \arrow[d, "e_{43}"] \arrow[dr, "e_{42}"] & \\
1 & 3 \arrow[l, "e_{31}"] \arrow[r, "e_{32}"'] & 2
\end{tikzcd} \\[1em]
e_{41} = e_{31} \circ e_{43}, \qquad\qquad e_{42} = e_{32} \circ e_{43}
\end{array}} \longrightarrow \mathcal{C}
$$

はちょうど圏 $\mathcal{C}$ における積の普遍性を表す可換図式になる．

圏 $\mathcal{C}$ における図式の概念が定義されたので，極限の定義を始める．

定義 1.20: 錐の圏

$D\colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ を図式とする．

- D 上の**錐** (cone) とは，
  - $\mathcal{C}$ の対象 $\boldsymbol{C} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
  - $\mathcal{C}$ の射の族 $\boldsymbol{c}_\bullet \coloneqq \left\{\boldsymbol{c}_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\boldsymbol{C},\, D(i)\right)\right\}_{i\in\mathrm{Ob}(\mathcal{I})}$

  の組 $(\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{c}_\bullet)$ であって，$\forall i,\, j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ および $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i,\, j)$ に対して

$$\boldsymbol{c}_j = \boldsymbol{c}_i \circ D(f)$$

  を充たす，i.e. 以下の図式を可換にするもののこと．

$$\begin{tikzcd} & \boldsymbol{C} \arrow[dl, bend right, "\boldsymbol{c}_i"'] \arrow[dr, bend left, "\boldsymbol{c}_j"] & \\ D(i) \arrow[rr, "D(f)"] & & D(j) \end{tikzcd}$$

- **錐の射** (morphism of cones)

$$(\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{c}_\bullet) \xrightarrow{\color{red}u} (\boldsymbol{C'},\, \boldsymbol{c'_\bullet})$$

  とは，$\mathcal{C}$ の射 ${\color{red}u} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{C'})$ であって，$\forall i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ に対して

$$\boldsymbol{c}_i = {\color{red}u} \circ \boldsymbol{c}'_i$$

  を充たす，i.e. 以下の図式を可換にするもののこと．

$$\begin{tikzcd} & \boldsymbol{C} \arrow[ddl, bend right, "\boldsymbol{c}_i"'] \arrow[d, red, "u"] \\ & \boldsymbol{C'} \arrow[dl, bend right, "\boldsymbol{c}'_i"] \\ D(i) & \end{tikzcd}$$

D 上の錐と錐の射を全て集めたものは圏 $\mathbf{Cone}(D)$ を成す．

定義 1.21: 極限

図式 $D\colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ の**極限** (limit)[a]とは，圏 $\mathbf{Cone}(D)$ の終対象のこと．記号として $\left(\varprojlim \boldsymbol{D},\, \boldsymbol{p}_\bullet\right)$ と書く．i.e. 極限 $\left(\varprojlim \boldsymbol{D},\, \boldsymbol{p}_\bullet\right) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cone}(D))$ は，以下の普遍性を充たす：

(極限の普遍性)

$\forall({\color{blue}\boldsymbol{C}},\, {\color{blue}\boldsymbol{c}_\bullet}) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cone}(D))$ に対して，錐の射 ${\color{red}u} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cone}(D)}\left(({\color{blue}\boldsymbol{C}},\, {\color{blue}\boldsymbol{c}_\bullet}),\, \left(\varprojlim \boldsymbol{D},\, \boldsymbol{p}_\bullet\right)\right)$ が一

意的に存在して，$\forall i,\, j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ および $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}\,(i,\, j)$ に対して図式を可換にする．

$$
\begin{tikzcd}
 & \forall \boldsymbol{C} \arrow[d, dashed, "\exists ! u"] \arrow[ddl, bend right, "\boldsymbol{c}_i"'] \arrow[ddr, bend left, "\boldsymbol{c}_j"] & \\
 & \varprojlim \boldsymbol{D} \arrow[dl, bend right, "\boldsymbol{p}_i"'] \arrow[dr, bend left, "\boldsymbol{p}_j"] & \\
D(i) \arrow[rr, "F(f)"] & & D(j)
\end{tikzcd}
$$

図 1.11: 極限の普遍性

---

[a] **普遍錐** (universal cone) とも言う．

命題 1.22: 極限の一意性

図式 $D\colon \mathcal{I},\, \mathcal{C}$ の極限は，存在すれば同型を除いて一意である．

__証明__ 終対象の一意性より明らか． ■

【例 1.1.5】終対象

何もない圏 $\mathbf{0}$ を添字圏とする図式 $D\colon \mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{C}$ の上の極限は終対象である：

$$\varprojlim D \cong \boldsymbol{T}.$$

【例 1.1.6】積

図式

$$D\colon \mathbf{Free}\left(\boxed{\overset{1}{\bullet} \qquad \overset{2}{\bullet}}\right) \longrightarrow \mathcal{C}$$

の上の錐 $\bigl(\boldsymbol{C},\, \{\boldsymbol{c}_1,\, \boldsymbol{c}_2\}\bigr) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cone}(D))$ は

$$
\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{C} \arrow[dl, bend right, "\boldsymbol{c}_1"'] \arrow[dr, bend left, "\boldsymbol{c}_2"] & \\
D(1) & & D(2)
\end{tikzcd}
$$

の形をしている．この図式 D の極限は積である：

$$\bigl(\varprojlim D,\, \{\boldsymbol{p}_1,\, \boldsymbol{p}_2\}\bigr) \cong \bigl(D(1) \times D(2),\, \{p_{D(1)},\, p_{D(2)}\}\bigr).$$

【例 1.1.7】等化子

図式

$$D\colon \mathbf{Free}\left(\boxed{\begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \overset{2}{\bullet} \end{tikzcd}}\right) \longrightarrow \mathcal{C}$$

の上の錐 $\left(\boldsymbol{C},\, \{\boldsymbol{c}_1,\, \boldsymbol{c}_2\}\right) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cone}(D))$ は

$$\begin{tikzcd}
D(1) \arrow[r, shift left, "D(f)"] \arrow[r, shift right, "D(g)"'] & D(2) \\
\boldsymbol{C} \arrow[u, "\boldsymbol{c}_1"] \arrow[ur, bend right, "\boldsymbol{c}_2"]
\end{tikzcd}$$

の形をした可換図式を成す．図式の可換性から

$$D(f) \circ \boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{c}_2 \ \ \text{かつ} \ \ D(g) \circ \boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{c}_2$$

が成り立つので，結局 $D(f) \circ \boldsymbol{c}_1 = D(f) \circ \boldsymbol{c}_2$ が成り立つ．この場合，$\boldsymbol{c}_2$ は冗長なので省略すると等化子の普遍性の図式を得る．つまり，$\left(\varprojlim D,\, \{\boldsymbol{p}_1\}\right)$ は射 $D(f),\, D(g)$ のイコライザとなる．

【例 1.1.8】引き戻し

図式

$$D\colon \mathbf{Free}\left(\boxed{\begin{tikzcd} & \overset{2}{\bullet} \arrow[d, "g"'] \\ \overset{1}{\bullet} \arrow[r, "f"] & \overset{3}{\bullet} \end{tikzcd}}\right) \longrightarrow \mathcal{C}$$

の上の錐 $\left(\boldsymbol{C},\, \{\boldsymbol{c}_1,\, \boldsymbol{c}_2,\, \boldsymbol{c}_3\}\right) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cone}(D))$ は

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{C} \arrow[r, bend left, "\boldsymbol{c}_2"] \arrow[dr, bend left, "\boldsymbol{c}_3"] \arrow[d, bend right, "\boldsymbol{c}_1"] & D(2) \arrow[d, "D(g)"] \\
D(1) \arrow[r, "D(f)"] & D(3)
\end{tikzcd}$$

の形をした可換図式を成す．図式の可換性から $\boldsymbol{c}_3$ は冗長なので省略すると引き戻しの普遍性の図式が得られる．従って

$$\left(\varprojlim D,\, \{\boldsymbol{p}_1,\, \boldsymbol{p}_2\}\right) \cong \left(D(1) \times_{D(3)} D(2),\, \{\pi_1,\, \pi_2\}\right)$$

である．

命題 1.23: 極限の存在

圏 $\mathcal{C}$ が任意の図式 $D\colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ に対して極限を持つ必要十分条件は，圏 $\mathcal{C}$ において常に積とイコライザが存在することである．

証明 $\mathcal{I}$ の全ての射の集まりを $\mathrm{Mor}(\mathcal{I})$ と書くことにする．$\Longrightarrow$ はすでに確認したので，$\Longleftarrow$ を示す．圏 $\mathcal{C}$ において常に積とイコライザが存在するとする．

任意の型 $\mathcal{I}$ を持つ図式

$$D : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$$

を与える．仮定より $\mathcal{C}$ は常に積を持つから，極限の第 1 候補として

$$\prod_{i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})} D(i)$$

を考えることができる．$\forall j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ について，$D(j)$ へ伸びる標準的射影 $p_j : \prod_{i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})} D(i) \longrightarrow D(j)$ があるからである．しかし，$\forall i,\, j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ および $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i,\, j)$ に関して図式

$$\begin{tikzcd}
 & \prod_{i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})} D(i) \arrow[dl, bend right, "p_i"'] \arrow[dr, bend left, "p_j"] & \\
D(i) \arrow[rr, "D(f)"] & & D(j)
\end{tikzcd}$$

は必ずしも可換になってくれない．そこで，この非可換性を図式

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})} D(i) \arrow[r, shift left, "\phi"] \arrow[r, shift right, "\psi"'] & \prod_{f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{I})} D(\mathrm{cod}\, f)
\end{tikzcd}$$

の等化子

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{E} \arrow[r, "\boldsymbol{e}"] & \prod_{i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})} D(i) \arrow[r, shift left, "\phi"] \arrow[r, shift right, "\psi"'] & \prod_{f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{I})} D(\mathrm{cod}\, f)
\end{tikzcd}$$

によって補正することを考える．仮定より $\mathcal{C}$ は常に等化子を持つのでこのような構成は可能である．ただし ϕ, ψ は $\prod_{f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{I})} D(\mathrm{cod}\, f)$[*5]に関する 2 つの積の普遍性の図式

$$\begin{tikzcd}
 & \prod_{i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})} D(i) \arrow[dl, bend right, "p_{\mathrm{cod}\, f}"'] \arrow[d, dashed, "\exists ! \phi"] \\
D(\mathrm{cod}\, f) & \prod_{f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{I})} D(\mathrm{cod}\, f) \arrow[l, "p_f"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \prod_{i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})} D(i) \arrow[dl, bend right, "D(f) \circ p_{\mathrm{dom}\, f}"'] \arrow[d, dashed, "\exists ! \psi"] \\
D(\mathrm{cod}\, f) & \prod_{f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{I})} D(\mathrm{cod}\, f) \arrow[l, "p_f"]
\end{tikzcd}$$

によって特徴づけられている．

- 等化子 $\boldsymbol{E} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- 射の族 $\boldsymbol{\pi}_{\bullet} \coloneqq \left\{ p_i \circ \boldsymbol{e} \right\}_{i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})}$

[*5] $\prod_{i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})} D(i)$ とは添字集合が異なるので，標準的射影も違うものになっていることに注意．

の組 $\big(\boldsymbol{E},\, \boldsymbol{\pi}_\bullet\big)$ が図式 D の極限であることを示す．まず $\forall i,\, j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ および $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}\,(i,\, j)$ に対して

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\pi}_j = p_j \circ \boldsymbol{e} = p_{\mathrm{cod}\, f} \circ \boldsymbol{e} = p_f \circ (\phi \circ \boldsymbol{e}),\\ D(f) \circ \boldsymbol{\pi}_i = D(f) \circ p_i \circ \boldsymbol{e} = (D(f) \circ p_{\mathrm{dom}\, f}) \circ \boldsymbol{e} = p_f \circ (\psi \circ \boldsymbol{e})\end{aligned}$$

が成り立つが，等化子の定義より $\phi \circ \boldsymbol{e} = \psi \circ \boldsymbol{e}$ が成り立つので図式

$$\begin{tikzcd} & \boldsymbol{E} \arrow[dl, bend right, "\boldsymbol{\pi}_i"'] \arrow[dr, bend left, "\boldsymbol{\pi}_j"] & \\ D(i) \arrow[rr, "D(f)"] & & D(j) \end{tikzcd}$$

は可換である．i.e. $(\boldsymbol{E},\, \boldsymbol{\pi}_i) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cone}(D))$ が分かった．

次に錐 $(\boldsymbol{E},\, \boldsymbol{\pi}_i)$ が $\mathbf{Cone}(D)$ の終対象であることを示す．$\forall(\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{c}_\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cone}(D))$ をとる．そして積の普遍性の図式を使って $\forall i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ について $c_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,\big(\boldsymbol{C},\, D(i)\big)$ を

$$\begin{tikzcd} & \boldsymbol{C} \arrow[dl, bend right, "c_i"'] \arrow[d, dashed, red, "\exists! \overline{c}"] \\ D(i) & \prod_{i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})} D(i) \arrow[l, "p_i"] \end{tikzcd}$$

のように一意に分解する．このとき錐の定義から $\forall i,\, j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ および $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}\,(i,\, j)$ に対して $\boldsymbol{c}_j = D(f) \circ \boldsymbol{c}_i$ が成り立つので，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}_j &= p_j \circ \overline{c} = p_{\mathrm{cod}\, f} \circ \overline{c} = p_f \circ (\phi \circ \overline{c})\\ &= D(f) \circ \boldsymbol{c}_i = D(f) \circ p_{\mathrm{dom}\, f} \circ \overline{c} = p_f \circ (\psi \circ \overline{c})\end{aligned}$$

が言える．従って $\prod_{f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{I})} D(\mathrm{cod}\, f)$ に関する積の普遍性から $\phi \circ \overline{c} = \psi \circ \overline{c}$ が言えて，等化子の普遍性の図式

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{E} \arrow[r, "\boldsymbol{e}"] & \prod_{i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})} D(i) \arrow[r, shift left, red, "\phi"] \arrow[r, shift right, blue, "\psi"'] & \prod_{f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{I})} D(\mathrm{cod}\, f) \\ \boldsymbol{C} \arrow[u, dashed, red, "\exists! u"] \arrow[ur, "\overline{c}"'] & & \end{tikzcd}$$

を書くことができる．このとき $\forall i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ に関して

$$\boldsymbol{c}_i = p_i \circ \overline{c} = p_i \circ \boldsymbol{e} \circ u = \boldsymbol{\pi}_i \circ u$$

が成り立つので $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\boldsymbol{C},\, \boldsymbol{E})$ は一意な錐の射だと分かった． ■

命題 1.23 の証明は具体的に極限を構成する手法を与えている点でも重要である．圏 **Sets** における等化子の構成を思い出すと，**Sets** における極限を書き下すことができる：

系 1.2: 圏 Sets における極限

任意の図式 $D\colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ を与える．$\mathcal{I}$ の全ての射の集まりを $\mathrm{Mor}(\mathcal{I})$ と書く．このとき，

- $\displaystyle\prod_{i\in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})} D(i)$ の部分集合

$$\varprojlim D := \left\{ (x_i)_{i\in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})} \in \prod_{i\in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})} D(i) \;\middle|\; \forall f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{I}),\ x_{\mathrm{cod}\, f} = D(f)(x_{\mathrm{dom}\, f}) \right\} \tag{1.1.3}$$

- 写像の族

$$\boldsymbol{p}_\bullet := \left\{\boldsymbol{p}_i \colon \varprojlim D \longrightarrow D(i),\ (x_j)_{j\in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})} \longmapsto x_i\right\}_{i\in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})}$$

の組は図式 D の極限である．

この公式いくつかの例で確認してみよう．

【例 1.1.9】終対象

対象も射もない図式

$$D\colon \mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

を考える．添字集合 Λ を持つ直積は Λ からの写像だから，今の場合 $\prod_{i\in \mathrm{Ob}(\mathbf{0})} D(i) = \emptyset$ である．公式 (1.1.3) の条件は $\forall f \ \big(f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{I}) \implies x_{\mathrm{cod}\, f} = D(f)(x_{\mathrm{dom}\, f})\big)$ と読めるが，$\mathrm{Mor}(\mathcal{I}) = \emptyset$ なのでこの命題は常に真である．従って公式 (1.1.3) が表すものは 1 元集合

$$\varprojlim D = \{\emptyset\}$$

であり，**Sets における終対象**である．

【例 1.1.10】積

図式

$$D\colon \mathbf{Free}\left(\boxed{\overset{1}{\bullet} \qquad \overset{2}{\bullet}}\right) \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

は対象をちょうど 2 つ持つが射を持たない．$\mathrm{Mor}(\mathcal{I}) = \emptyset$ なので公式 (1.1.3) の条件は常に充たされ，結局

$$\varprojlim D = D(1) \times D(2)$$

がわかる．これは **Sets における積**である．なお，この議論は射を持たない圏を添字圏に持つ任意の図式に対して有効である．

【例 1.1.11】等化子

図式

$$D\colon \mathbf{Free}\left(\boxed{\begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \overset{2}{\bullet} \end{tikzcd}}\right) \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

の極限を公式 (1.1.3) を使って書き下すと

$$\begin{aligned}\varinjlim D &= \left\{\, (x_1,\, x_2) \in D(1) \times D(2) \;\middle|\; x_2 = D(f)(x_1) \;\text{ かつ }\; x_2 = D(g)(x_1) \,\right\}\\ &\cong \left\{\, x_1 \in D(1) \;\middle|\; D(f)(x_1) = D(g)(x_1) \,\right\}\end{aligned}$$

となり[a]，**Sets における等化子**と同型である．

[a] **Sets** における同型なので，これらの間には全単射が存在すると言うことである．

【例 1.1.12】引き戻し

図式

$$D\colon \mathbf{Free}\left(\boxed{\begin{tikzcd} & \overset{2}{\bullet} \arrow[d, "g"'] \\ \overset{1}{\bullet} \arrow[r, "f"] & \overset{3}{\bullet} \end{tikzcd}}\right) \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

の極限を公式 (1.1.3) を使って書き下すと

$$\begin{aligned}\varinjlim D &= \left\{\, (x_1,\, x_2,\, x_3) \in D(1) \times D(2) \times D(3) \;\middle|\; x_3 = D(f)(x_1) \;\text{ かつ }\; x_3 = D(g)(x_2) \,\right\}\\ &\cong \left\{\, (x_1,\, x_2) \in D(1) \times D(2) \;\middle|\; D(f)(x_1) = D(g)(x_2) \,\right\}\end{aligned}$$

となり，**Sets における引き戻し**と同型である．

系 1.3: 圏 Sets における極限

任意の図式 $D\colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathbf{Top}$ を与える．$\mathcal{I}$ の全ての射の集まりを $\mathrm{Mor}(\mathcal{I})$ と書く．このとき，

- **Sets** における極限 $\left(\varprojlim D,\, \boldsymbol{p}_\bullet\right)$ に，写像の族 $\boldsymbol{p}_\bullet$ によって誘導される $\varprojlim D$ の始位相 $\mathscr{O}_{\boldsymbol{p}_\bullet}$ を入れてできる位相空間

$$\left(\varprojlim D,\, \mathscr{O}_{\boldsymbol{p}_\bullet}\right)$$

- 写像の族

$$\boldsymbol{p}_\bullet := \left\{\boldsymbol{p}_i\colon \varprojlim D \longrightarrow D(i),\ (x_j)_{j\in\mathrm{Ob}(\mathcal{I})} \longmapsto x_i\right\}_{i\in\mathrm{Ob}(\mathcal{I})}$$

の組は図式 D の極限である．

証明 始位相は $\forall p_i \in \boldsymbol{p}_\bullet$ を連続にする位相である．極限の普遍性は命題 1.23 の証明から従う． ■