第 7 章

Riemann 幾何学

7.1　多脚場

計量 g の表現行列 $[\,g_{\mu\nu}\,]$ は多様体 M の各点 $p \in M$ において対称行列なので，直交行列を用いて対角化することができる．さらにスケール変換を施すことで，指数 $(i,\,j)$ の計量テンソルは

$$
\begin{aligned}
g_{\mu\nu} &= \mathring{g}_{ab}\, e^a{}_\mu e^b{}_\nu \\
\mathring{g}_{ab} &= \mathrm{diag}\big(\underbrace{-1,\,\dots,\,-1}_{i},\,\underbrace{1,\,\dots,\,1}_{j}\big)
\end{aligned}
\tag{7.1.1}
$$

と分解される．$e^a{}_\mu$ は**多脚場** (vierbein) と呼ばれる．この分解は双対基底 $\{\,(\mathrm{d}x^\mu)_p\,\}$ の取り替えに対応する：

$$
g_p = g_{\mu\nu}(\mathrm{d}x^\mu)_p \otimes (\mathrm{d}x^\nu)_p = \mathring{g}_{ab}\big(e^a{}_\mu(\mathrm{d}x^\mu)_p\big) \otimes \big(e^b{}_\nu(\mathrm{d}x^\nu)_p\big)
$$

こうして得られた T^*_pM の新しい基底を $\{\,\hat{\theta}^a\,\}$ と書こう．

$\{\,\hat{\theta}^a\,\}$ に双対的な T_pM の基底 $\{\,\hat{e}_b\,\}$ を $\hat{\theta}^a[\hat{e}_b] = \delta^a_b$ を充たす接ベクトルとして定義する．自然基底からの基底の取り替えを $\hat{e}_a = E_a{}^\nu \left(\dfrac{\partial}{\partial x^\nu}\right)_p$ とおくと

$$
\boxed{\delta^a_b} = \hat{\theta}^a[\hat{e}_b] = e^a{}_\mu(\mathrm{d}x^\mu)_p\left[E_b{}^\nu\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)_p\right] = e^a{}_\mu E_b{}^\nu(\mathrm{d}x^\mu)_p\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)_p\right] = e^a{}_\mu E_b{}^\nu \delta^\mu_\nu = \boxed{e^a{}_\mu E_b{}^\mu}
$$

であることがわかる．i.e. $[\,e^a{}_\mu\,]$ と $[\,E_b{}^\nu\,]$ は互いに逆行列である[*1]．この事実と $[\,g_{\mu\nu}\,]$ の逆行列 $[\,g^{\mu\nu}\,]$ を使うと，式 (7.1.1) から

$$
E_a{}^\mu = g^{\mu\nu}\mathring{g}_{ab}e^b{}_\nu
$$

であることがわかる．さらに，共役計量に対しては

$$
g^{\mu\nu} = \mathring{g}^{ab}E_a{}^\mu E_b{}^\nu
$$

が成立する．

[*1] 逆行列の存在は，$\det(e^a{}_\mu) = \sqrt{(-1)^i \det(g_{\mu\nu})} \neq 0$ であることによって保証されている．

$\{\hat{e}_a\}$ は正規直交系をなす：

$$g_p[\hat{e}_a,\,\hat{e}_b] = E_a{}^\mu E_b{}^\nu g_p\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu},\,\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right] = g_{\mu\nu}E_a{}^\mu E_b{}^\nu = \mathring{g}_{ab}.$$

この意味で $\{\,\hat{e}_a\,\}$ と $\{\,\hat{\theta}^a\,\}$ を**正規直交標構** (orthonormal frame) と呼ぶ．

7.2 接続形式・曲率形式

7.2.1 接束の接続・曲率

ベクトル束 $\pi\colon E \to M$ に対して，$\pi\circ\xi = \mathrm{id}_M$ となるような C^∞ 写像 $\xi\colon M \to E$ を**切断** (section) と呼ぶ．ベクトル束の切断全体の集合を $\Gamma(E)$ と書くと，$\Gamma(E)$ は $C^\infty(M)$-加群となる．

開集合 $U \subset M$ 上の n 個の切断の組 $\{\,\xi_i \mid \xi_i\colon U \to E\,\}$ であって，$\forall p \in U$ において $\{\,\xi_i(p)\,\}$ が E_p の基底となっているものを U 上の**フレーム** (frame) と呼ぶ．

定義 7.1: 接続

C^∞ 多様体 M のベクトル束 $\pi\colon E \to M$ の**接続** (connection) とは，$C^\infty(M)$-双線型写像

$$\nabla\colon \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$$

であって，$\forall f \in C^\infty(M)$, $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$, $\forall \xi \in \Gamma(E)$ に対して

(1) $\nabla_{fX}\xi = f\nabla_X\xi$
(2) $\nabla_X(f\xi) = f\nabla_X\xi + (Xf)\xi$

を充たすもののことを言う．$\nabla_X\xi$ を ξ の X による**共変微分** (covariant differential) と呼ぶ．

定義 7.2: 曲率

∇ をベクトル束 $\pi\colon E \to M$ 上の接続とする．このとき，$\forall X,\,Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$R(X,\,Y) \coloneqq \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$$

を対応付ける写像 R を，接続 ∇ の**曲率** (curvature) と呼ぶ．

補題 7.1: 曲率の性質

$\forall X,\,Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\forall f,\,g,\,h \in C^\infty(M)$, $\forall \xi \in \Gamma(E)$ に対して以下が成立する：

(1) $R(Y,\,X) = -R(X,\,Y)$
(2) $R(fX,\,gY)(h\xi) = fgh\,R(X,\,Y)(\xi)$

証明　(1) Lie 括弧積の定義より $[Y,\,X] = -[X,\,Y]$ であることと接続の定義 7.1-(2) から明らか．

(2)　まず，$f = g \equiv 1$ の場合を示す．接続の定義 7.1 から

$$\begin{aligned}\nabla_X \nabla_Y (h\xi) &= \nabla_X \big(h\nabla_Y \xi + (Yh)\xi\big) \\ &= h\nabla_X \nabla_Y \xi + (Xh)\nabla_Y \xi + (Yh)\nabla_X \xi + (XYh)\xi.\end{aligned}$$

同様にして

$$\nabla_Y \nabla_X (h\xi) = h\nabla_Y \nabla_X \xi + (Yh)\nabla_X \xi + (Xh)\nabla_Y \xi + (YXh)\xi.$$

となる．一方，

$$\nabla_{[X,Y]}(h\xi) = h\nabla_{[X,Y]}\xi + \big([X,Y]h\big)\xi = h\nabla_{[X,Y]}\xi + (XYh)\xi - (YXh)\xi$$

であるから，

$$\begin{aligned}\boxed{R(X,\,Y)(h\xi)} &= \nabla_X \nabla_Y (h\xi) - \nabla_X \nabla_Y (h\xi) - \nabla_{[X,Y]}(h\xi) \\ &= h\big(\nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[X,Y]}\xi\big) \\ &= \boxed{hR(X,\,Y)(\xi)}.\end{aligned} \tag{7.2.1}$$

次に，一般の $f,\,g$ を考える．接続の定義 7.1 から

$$\begin{aligned}R(fX\,gY) &= \nabla_{fX}\nabla_{gY} - \nabla_{gY}\nabla_{fX} - \nabla_{[fX,gY]} \\ &= f\nabla_X\big(g\nabla_Y\big) - g\nabla_Y\big(f\nabla_X\big) - \nabla_{[fX,gY]} \\ &= fg\nabla_X\nabla_Y + f(Xg)\nabla_Y - gf\nabla_Y\nabla_X - g(Yf)\nabla_X - \nabla_{[fX,gY]}.\end{aligned}$$

Lie 括弧積の公式 $[fX, gY] = fg[X,Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$ と接続の双線型性を使うと

$$\nabla_{[fX,gY]} = fg\nabla_{[X,Y]} + f(Xg)\nabla_Y - g(Yf)\nabla_X$$

だから，

$$R(fX\,gY) = fg\big(\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}\big) = fg\,R(X,\,Y).$$

式 (7.2.1) と併せて $R(fX,\,gY)(h\xi) = fgh\,R(X,\,Y)(\xi)$ を得る．

■

! 特に $\Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$ であるから，接束上の接続 ∇ に対して $R(X,\,Y)Z \quad \big(\forall X,\,Y,\,Z \in \mathfrak{X}(M)\big)$ は $(1,\,3)$-型テンソル場を成す．これを接続 ∇ の**曲率テンソル**と呼ぶ．

定義 7.3: 捩率

∇ を接束 $\pi\colon TM \to M$ 上の接続とする．このとき $\forall X,\,Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$T(X,\,Y) \coloneqq \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \in \mathfrak{X}(M)$$

を対応させる写像 T を**捩率** (torsion) と呼ぶ．T が定義する $(1,\,2)$-型テンソル場を**捩率テンソル**と呼ぶ．

7.2.2 微分形式による ∇, R の局所表示

∇ をベクトル束 $\pi\colon E \to M$ の接続，R をその曲率とする．

定義 7.4: 接続 1-形式

開集合 $M \subset U$ 上のフレーム $\{\xi_i\} \subset \Gamma(E|_U)$ が与えられているとする．このとき，$\forall X \in \mathfrak{X}(U)$ に対して

$$\omega^i_j(X)\xi_i := \nabla_X \xi_j$$

によって n^2 個の $\omega^i_j(X) \in C^\infty(U)$ を定義する．
n^2 個の $\omega^i_j\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathbb{R}$ をまとめて

$$\omega := (\omega^i_j)$$

と書き，**接続形式** (connection form) と呼ぶ．

接続の定義 7.1-(1) より，$\forall f \in C^\infty(U)$ に対して

$$\omega^i_j(fX)\xi_i = \nabla_{fX}\xi_j = f\nabla_X\xi_i = f\,\omega^i_j(X)s_i$$

が成り立つ．i.e. $\omega^i_j(fX) = f\,\omega^i_j(X)$ である．X に関する加法準同型性も同様に従うので，$\omega^i_j\colon \mathfrak{X}(U) \to \mathbb{R}$ は $C^\infty(U)$-線型写像である．従って命題??から $\omega^i_j \in \Omega^1(U)$ となる．これが ω が接続 1-形式と呼ばれる所以である．

! ω 自身は $n \times n$ 正則行列全体が作る Lie 代数 $\mathfrak{gl}(n)$ に値をとる 1-形式と見做される．

定義 7.5: 曲率 2-形式

開集合 $M \subset U$ 上のフレーム $\{\xi_i\} \subset \Gamma(E|_U)$ が与えられているとする．このとき，$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ に対して

$$\Omega^i_j(X, Y)\xi_i := R(X, Y)(\xi_j)$$

によって n^2 個の $\Omega^i_j(X, Y) \in C^\infty(U)$ を定義する．
n^2 個の $\Omega^i_j\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathbb{R}$ をまとめて

$$\Omega := (\omega^i_j)$$

と書き，**曲率形式** (curvature form) と呼ぶ．

補題??より，$\forall f, g \in C^\infty(U)$ に対して

(1) $\Omega^i_j(X, Y)\xi_i = R(X, Y)(\xi_i) = -R(Y, X)(\xi_i) = -\Omega^i_j(Y, X)\xi_i$
(2) $\Omega^i_j(fX, gY)\xi_i = R(fX, gY)(\xi_i) = fgR(X, Y)(\xi_i) = fg\Omega^i_j(X, Y)\xi_i$

が成り立つ．i.e. $\Omega^i_j(X, Y) = -\Omega^i_j(X, Y)$，$\Omega^i_j(fX, gY) = fg\Omega^i_j(X, Y)$ である．従って $\Omega^i_j\colon \mathfrak{X}(U)\times\mathfrak{X}(U) \to$

$\mathbb{R}$ は $C^\infty(U)$-双線型線型かつ交代的な写像である．故に命題??から $\Omega^i_j \in \Omega^2(U)$ となる．この意味で $\omega\colon \mathfrak{X}(U)\times\mathfrak{X}(U)\to\mathfrak{gl}(n)$ は 2-形式である．

定理 7.1: Cartan の構造方程式

ベクトル束の接続形式 ω と曲率形式 Ω は以下の等式をみたす：

$$\mathrm{d}\omega = -\omega\wedge\omega + \Omega$$

成分表示で

$$\mathrm{d}\omega^i_j = -\omega^i_k\wedge\omega^k_j + \omega^i_j.$$

証明 曲率形式の定義 7.4 から

$$R(X,Y)(\xi_j) = \Omega^i_j(X,Y)\xi_j$$

一方，曲率の定義 7.2 から

$$\begin{aligned}
R(X,Y)(\xi_j) &= \big(\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}\big)(\xi_j)\\
&= \nabla_X\omega^i_j(Y)\xi_i - \nabla_Y\omega^i_j(X)\xi_i - \omega^i_j([X,Y])\xi_i\\
&= \omega^k_j(Y)\omega^i_k(X)\xi_i + \big(X\omega^i_j(Y)\big)\xi_i\\
&\quad - \omega^k_j(X)\omega^i_k(Y)\xi_i - \big(Y\omega^i_j(X)\big)\xi_i\\
&\quad - \omega^i_j([X,Y])\xi_i
\end{aligned}$$

外微分の公式??と外積の性質??から

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega^i_j(X,Y) &= (X\omega^i_j)(Y) - (Y\omega^i_j)(X) - \omega^i_j([X,Y]),\\
\omega^i_k\wedge\omega^k_j(X,Y) &= \omega^i_k(X)\omega^k_j(Y) - \omega^i_k(Y)\omega^k_j(X)
\end{aligned}$$

なので，

$$\Omega^i_j(X,Y)\xi_j = R(X,Y)(\xi_j) = \big(\mathrm{d}\omega^i_j(X,Y) + \omega^i_k\wedge\omega^k_j(X,Y)\big)\xi_i.$$

■

系 7.2:（第 2）Bianchi の恒等式

接続形式 ω と曲率形式 Ω に対して以下の恒等式が成り立つ：

$$\mathrm{d}\Omega + \omega\wedge\Omega - \Omega\wedge\omega = 0$$

成分表示で

$$\mathrm{d}\Omega^i_j + \omega^i_k\wedge\Omega^k_j - \Omega^i_k\wedge\omega^k_j = 0$$

証明 構造方程式 7.1 の両辺の外微分をとることで，

$$\begin{aligned}
0 &= -\mathrm{d}\omega\wedge\omega - (-1)\omega\wedge\mathrm{d}\omega + \mathrm{d}\Omega\\
&= \omega\wedge\omega\wedge\omega - \Omega\wedge\omega - \omega\wedge\omega\wedge\omega + \omega\wedge\Omega + \mathrm{d}\Omega\\
&= \mathrm{d}\Omega + \omega\wedge\Omega - \Omega\wedge\omega.
\end{aligned}$$

■

7.3 Levi-Civita 接続

定義 7.6: 計量接続

(擬) Riemann 多様体 M が計量 $\langle\ ,\ \rangle\colon \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to C^\infty(M)$ を持つとする．M の接束 $\pi\colon TM\to M$ 上の接続 ∇ が計量と**両立する** (compatible) 接続，あるいは**計量接続** (metric connection) であるとは，∇ が $\forall X,\,Y,\,Z\in\mathfrak{X}(M)$ に対して以下の条件を充たすことを言う：

$$X\langle Y,\,Z\rangle = \langle\nabla_X Y,\,Z\rangle + \langle Y,\,\nabla_X Z\rangle$$

命題 7.1:

(擬) Riemann 多様体 M と，その座標近傍 U をとる．$\{\,\hat{e}_a\,\}$ を TU の正規直交標構，$\{\,\hat{\theta}^a\,\}\subset\Omega^1(U)$ をその双対基底とする．このとき以下の 2 条件を充たすような U 上の 1-形式 $\omega := (\omega^a{}_b)\colon \mathfrak{X}(U)\to\mathfrak{gl}(n)$ がただ一つ存在する：

(1) $\omega^a{}_b = -\omega^b{}_a$
(2) $\mathrm{d}\hat{\theta}^a = -\omega^a{}_b\wedge\hat{\theta}^b$

<u>**証明**</u> まず，$\mathrm{d}\hat{\theta}^a\in\Omega^2(U)$ を命題??の正規直交基底で展開する：

$$\mathrm{d}\hat{\theta}^a = \frac{1}{2}\alpha^a{}_{bc}\,\hat{\theta}^b\wedge\hat{\theta}^c,\quad \alpha^a{}_{bc} = -\alpha^a{}_{cb}$$

$\hat{\theta}^b\wedge\hat{\theta}^c$ の線型独立性から，展開係数 $\alpha^a{}_{bc}$ は一意に定まる．

次に，$\omega^a{}_b$ を

$$\omega^a{}_b = \beta^a{}_{bc}\,\hat{\theta}^c$$

と表示し，命題の条件を充たすように $\beta^a{}_{bc}$ を決めることにする．まず，条件 (1) から

$$\beta^a{}_{bc} = -\beta^b{}_{ac} \tag{7.3.1}$$

が必要である．また，

$$\omega^a{}_b\wedge\hat{\theta}^b = -\beta^a{}_{bc}\,\hat{\theta}^b\wedge\hat{\theta}^c$$

だから，条件 (2) を充たすには

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\alpha^a{}_{bc}\,\hat{\theta}^b\wedge\hat{\theta}^c = \beta^a{}_{bc}\,\hat{\theta}^b\wedge\hat{\theta}^c\\ \iff\quad &\alpha^a{}_{bc} = \beta^a{}_{bc} - \beta^a{}_{cb}\end{aligned} \tag{7.3.2}$$

が必要である．

ここで，式 (7.3.2) の添字を交換することで

$$\begin{aligned}
\alpha^a{}_{bc} &= \beta^a{}_{bc} - \beta^a{}_{cb} \\
\alpha^b{}_{ac} &= \beta^b{}_{ac} - \beta^b{}_{ca} \\
\alpha^c{}_{ba} &= \beta^c{}_{ba} - \beta^c{}_{ab}
\end{aligned}$$

を得る．式 (7.3.1) を用いて整理すると

$$\begin{aligned}
\alpha^a{}_{bc} &= \beta^a{}_{bc} - \beta^a{}_{cb} \\
\alpha^b{}_{ac} &= -\beta^a{}_{bc} - \beta^b{}_{ca} \\
\alpha^c{}_{ba} &= -\beta^b{}_{ca} + \beta^a{}_{cb}
\end{aligned}$$

だから，これを $\beta^a{}_{bc}$ について解くと

$$\beta^a{}_{bc} = \frac{1}{2}\bigl(\alpha^a{}_{bc} - \alpha^b{}_{ac} + \alpha^c{}_{ba}\bigr)$$

を得る．右辺は一意に定まるので左辺も一意に定まる，i.e. $\omega^a{}_b$ は一意に定まる． ■

命題 7.1 で存在が示された 1-形式 $\omega = (\omega^a{}_b)$ を接続形式とする TU 上の接続 $\nabla\colon \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(U)$ が

$$\nabla \hat{e}_b \coloneqq \omega^a{}_b \otimes \hat{e}_a$$

と定義される．命題 7.1 の条件 (1) より，このとき ∇ は計量と両立する．

接束 TU の接続 ∇ は，余接束 T^*U の接続 ∇^* を誘導する．今回の場合は

$$\nabla^* \hat{\theta}^a \coloneqq -\omega^a{}_b \otimes \hat{\theta}^b$$

である．従って，命題 7.1 の条件 (2) は合成写像

$$\Gamma(T^*U) = \Omega^1(U) \xrightarrow{\nabla^*} \Gamma(T^*U \otimes T^*U) \xrightarrow{\wedge} \Gamma\bigl(\Omega^2(T^*U)\bigr) = \Omega^2(U)$$

が $\hat{\theta}^a$ を $\mathrm{d}\hat{\theta}^a$ に移すことを主張している．

定理 7.3: Levi-Civita 接続（接続形式）

任意の（擬）Riemann 多様体の接束は，その（擬）Riemann 計量と両立し，かつ合成写像 $\wedge \circ \nabla^*$ が外微分 d と一致するようなただ一つの接続 ∇ を持つ．この ∇ を **Levi-Civita 接続** (Levi-Civita connection) と呼ぶ．

7.4 接続係数による定式化

定理 7.4: Levi-Civita 接続（接続係数）

任意の（擬）Riemann 多様体 M には，その（擬）Riemann 計量 $\langle\ ,\ \rangle\colon \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to C^\infty(M)$ と両立する対称接続 ∇ がただ一つ存在する．i.e. ∇ は $\forall X,\,Y,\,Z\in\mathfrak{X}(M),\ \forall f\in C^\infty(M)$ に対して

(1) $\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]=T(X,\,Y)=0$
(2) $X\langle Y,\,Z\rangle=\langle\nabla_X Y,\,Z\rangle+\langle Y,\,\nabla_X Z\rangle$

を充たす．このような ∇ を **Levi-Civita 接続**と呼ぶ．

補題 7.2:

$(0,\,1)$-型テンソル場 $\alpha\colon\mathfrak{X}(M)\to C^\infty(M)$ が $\alpha\in\mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}\bigl(\mathfrak{X}(M),\,C^\infty(M)\bigr)$ であるならば，$V\in\mathfrak{X}(M)$ であって $\alpha(X)=\langle V,\,X\rangle,\ \forall X\in\mathfrak{X}(M)$ であるものがただ一つ存在する．

証明 M のチャート $(U;\,x^\mu)$ に対して α を $\alpha=\alpha_\mu\,\mathrm{d}x^\mu$ と局所表示する．このとき，$V:=g^{\mu\nu}\alpha_\nu\partial_\mu$ が求めるベクトル場である． ■

証明 題意を充たす接続 ∇ が存在すると仮定する．このとき条件 (2) より

$$\begin{aligned}X\langle Y,\,Z\rangle&=\langle\nabla_X Y,\,Z\rangle+\langle Y,\,\nabla_X Z\rangle\\Y\langle Z,\,X\rangle&=\langle\nabla_Y Z,\,X\rangle+\langle Z,\,\nabla_Y X\rangle\\Z\langle X,\,Y\rangle&=\langle\nabla_Z X,\,Y\rangle+\langle X,\,\nabla_Z Y\rangle\end{aligned}$$

が成立する．これを $\langle\nabla_X Y,\,Z\rangle$ について解いて条件 (1) を用いると

$$\begin{aligned}\langle\nabla_X Y,\,Z\rangle=\frac{1}{2}\bigl(&X\langle Y,\,Z\rangle+Y\langle Z,\,X\rangle-Z\langle X,\,Y\rangle\\&+\langle[X,Y],\,Z\rangle-\langle[Y,Z],\,X\rangle+\langle[Z,X],\,Y\rangle\bigr)\end{aligned}\tag{7.4.1}$$

となるから，補題 7.2 より $\nabla_X Y$ は一意である．

次に，∇ が存在することを示す．実際，$\forall X,\,Y\in\mathfrak{X}(M)$ に対して $\alpha\colon\mathfrak{X}(M)\to C^\infty(M)$ を，$\alpha(Z)$ として式 (7.4.1) の右辺によって定義する．この α は $C^\infty(f)$-線型なので $\alpha(Z)=\langle\nabla_X Y,\,Z\rangle$ なる $\nabla_X Y\in\mathfrak{X}(M)$ が存在する．この $\nabla_X Y$ が接続の定義 7.1 および条件 (1)，(2) を充たすことは，Lie 括弧積の性質から直接示される． ■

Levi-Civita 接続 ∇ に対して，

$$\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M),\ (X,\,Y)\mapsto\nabla_X Y$$

と定義される写像は Y に関して $C^\infty(M)$-線型でないため，$C^\infty(M)$-加群としては $(1,\,2)$-型テンソル場ではない．

定義 7.7: 接続係数

M のチャート $(U;\, x^\mu)$ に対して，n^3 個の C^∞ 関数 $\varGamma^\mu_{\nu\lambda} \colon U \to \mathbb{R}$ が

$$\varGamma^\mu_{\nu\lambda}\partial_\mu \coloneqq \nabla_{\partial_\nu}\partial_\lambda$$

として定まる．これを**接続係数**，もしくは **Christoffel 記号**と呼ぶ．

Christoffel 記号を使って共変微分 $\nabla_X Y$ を成分表示すると，接続の定義 7.1-(2) に注意[*2]して

$$\begin{aligned}\boxed{\nabla_X Y} &= \nabla_{X^\mu\partial_\mu}(Y^\nu\partial_\nu) = X^\mu\nabla_{\partial_\mu}(Y^\nu\partial_\nu) \\ &= X^\mu(\partial_\mu Y^\nu)\partial_\nu + X^\mu Y^\nu \nabla_{\partial_\mu}\partial_\nu \\ &= \boxed{\left(X(Y^\nu) + \varGamma^\nu_{\mu\lambda}X^\mu Y^\lambda\right)\partial_\nu}\end{aligned}$$

となる．

7.4.1 テンソル場の共変微分

（擬）Riemann 多様体 M を与える．U を M の開集合とし，$\mathfrak{T}(U) \coloneqq \bigoplus_{r,\,s=0}^\infty \mathfrak{T}^r_s(U)$ を U 上のテンソル場（定義??）全体が作る $C^\infty(U)$-多元環とする．$\mathcal{C} \colon \mathfrak{T}^r_s(U) \to \mathfrak{T}^{r-1}_{s-1}(U)$ で縮約を表す．

命題 7.2: 共偏微分の一般化

$X \in \mathfrak{X}(U)$ に対して，写像

$$\nabla_X \colon \mathfrak{T}(U) \to \mathfrak{T}(U)$$

であって次の条件を充たすものが一意に存在する：

(1) ∇_X はテンソル場の型を保つ $\mathbb{R}$-線型写像であり，$\forall T,\, T' \in \mathfrak{T}(U)$ に対して

$$\begin{aligned}\nabla_X\left(T \otimes T'\right) &= \nabla_X T \otimes T' + T \otimes \nabla_X T', \\ \nabla_X \mathcal{C}(T) &= C\left(\nabla_X T\right)\end{aligned}$$

を充たす．i.e. ∇_X は微分である．

(2) ∇_X は $\mathfrak{T}^0_0(U) = C^\infty(U)$ 上

$$\nabla_X f \coloneqq Xf, \quad \forall C^\infty(U)$$

であり，$\mathfrak{T}^1_0(U) = \mathfrak{X}(U)$ 上は Levi-Civita 接続による共変微分である．

(3) $V \subset U$ を開集合とすると，$\left.(\nabla_X T)\right|_V = \nabla_{X|_V}\left(T|_V\right)$

<u>証明</u> まず，$\mathfrak{T}^0_1(U) = \Omega^1(U)$ への作用を構成する．<u>duality pairing</u> $\langle\ ,\ \rangle \colon \Omega^1(U) \times \mathfrak{X}(U) \to C^\infty(U)$ は (1, 1)-

[*2] $X,\, Y$ は**ベクトル場**なので，自然基底ベクトル場 $\partial_\mu \in \mathfrak{X}(U)$ による展開係数は C^∞ 関数である．

型テンソル場を作り，定義から $\forall\omega \in \Omega^1(U)$, $\forall Y \in \mathfrak{X}(U)$ に対して $\langle \omega,\, Y\rangle = \omega \otimes Y$ であるから，条件 (1) により

$$\nabla_X \langle \omega,\, Y\rangle = \langle \nabla_X\omega,\, Y\rangle + \langle \omega,\, \nabla_X Y\rangle$$

でなくてはならない．一方，条件 (2) から

$$\nabla_X \langle \omega,\, Y\rangle = X\bigl(\langle \omega,\, Y\rangle\bigr)$$

である．従って $\nabla_X\omega \in \Omega^1(U)$ は，与えられた ω に対して $\langle \omega,\, Y\rangle \coloneqq \omega(Y)$ であったから

$$(\nabla_X\omega)(Y) \coloneqq X\bigl(\omega(Y)\bigr) - \omega\bigl(\nabla_X Y\bigr), \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(U)$$

と定義される．これは一意的であり，(3) を充たす．

次に，$\omega \in \mathfrak{T}^0_s(U)$ の場合を構成する．$s = 1$ の場合と同様に $\forall Y_1,\, \dots,\, Y_s \in \mathfrak{X}(U)$ に対して

$$\begin{aligned}\bigl(\nabla_X\omega\bigr)(Y_1,\, \dots,\, Y_s) \coloneqq\ & X\bigl(\omega(X_1,\, \dots,\, X_s)\bigr)\\ & - \sum_{i=1}^{s} \omega\bigl(Y_1,\, \dots,\, \nabla_X Y_i,\, \dots,\, Y_s\bigr)\end{aligned}$$

と $\nabla_X\omega \in \mathfrak{T}^0_s(U)$ を定義すればよい．

最後に, $T \in \mathfrak{T}^r_s(U)$ の場合を構成する．定義**??**から $\omega_1,\, \dots,\, \omega_r \in \Omega^1(U)$ に対して $T(\omega_1,\, \dots,\, \omega_r) \in \mathfrak{T}^0_s(U)$ になることを考慮して

$$\begin{aligned}\bigl(\nabla_X T\bigr)(\omega_1,\, \dots,\, \omega_r) \coloneqq\ & \nabla_X T\bigl(\omega_1,\, \dots,\, \omega_r\bigr)\\ & - \sum_{i=1}^{r} T\bigl(\omega_1,\, \dots,\, \nabla_X\omega_i,\, \dots,\, \omega_s\bigr)\end{aligned}$$

と $\bigl(\nabla_X T\bigr)(\omega_1,\, \dots,\, \omega_r) \in \mathfrak{T}^0_s(U)$ を定義すればよい． ■

7.4.2　曲線に沿った共変微分

C^∞ 曲線 $c\colon [a,\, b] \to M$ を与える．

C^∞ 曲線 c に沿ったベクトル場 $Y(t)$ を考える．i.e. $\forall t \in [a,\, b]$ に対して

$$Y(t) \in T_{c(t)}M$$

であり，かつ

$$Y(t) \circ c\colon [a,\, b] \to TM$$

が C^∞ 級写像である状況である．このとき $\dot c(t) \in TM$ だから $\nabla_{\dot c(t)}$ を考えることができる．各点 $c(t) \in M$ において丁寧に計算すると

$$\begin{aligned}&\bigl(\nabla_{\dot c(t)} Y\bigr)\bigl(c(t)\bigr)\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^\mu \circ c)(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_{c(t)} [Y^\nu(t)] \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)_{c(t)} + \mathit{\Gamma}^\nu_{\mu\lambda}\bigl(c(t)\bigr)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^\mu \circ c)(t) Y^\lambda(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)_{c(t)}\\ &= \left(\frac{\mathrm{d}Y^\nu}{\mathrm{d}t}(t) + \mathit{\Gamma}^\nu_{\mu\lambda}\bigl(c(t)\bigr)\dot x^\mu(t) Y^\lambda(t)\right) (\partial_\nu)_{c(t)}\end{aligned}$$

なので，結局

$$\nabla_{\dot{c}(t)} Y = \left(\frac{\mathrm{d}Y^\nu}{\mathrm{d}t} + \mathit{\Gamma}^\nu_{\mu\lambda} \dot{x}^\mu Y^\lambda \right) \partial_\nu$$

とわかった．

定義 7.8: 平行

C^∞ 曲線 $c\colon [a,\, b] \to M$ に沿ったベクトル場 $Y(t)$ が c **に沿って平行**であるとは，

$$\nabla_{\dot{c}(t)} Y \equiv 0$$

であることを言う．

定義 7.8 をチャート $(U;\ x^\mu)$ に関して局所表示すると

$$\frac{\mathrm{d}Y^\nu}{\mathrm{d}t} + \mathit{\Gamma}^\nu_{\mu\lambda} \dot{x}^\mu Y^\lambda = 0 \quad (\mu = 1,\, \dots,\, n)$$

なる 1 階線形常微分方程式系が得られる．常微分方程式の一般論から，c に沿って平行な C^∞ 級のベクトル場 $Y(t)$ であって，初期条件 $Y(a) = u \in T_{c(a)}M$ を充たすものがただ一つ存在する．解の線形性も考慮すると，写像

$$T_{c(a)}M \ni u \mapsto Y \in TM$$

は単射な線型写像である．特に，線型写像

$$P(c)\colon T_{c(a)}M \to T_{c(b)}M,\ u \mapsto Y(b)$$

を c に沿った**平行移動**と呼ぶ．$P(c)$ は全単射であり，これによって $T_{c(a)}M \cong T_{c(b)}M$ である．また，Levi-Civita 接続の定義 7.4-(2) から $P(c)$ は内積を保つ．

異なる 2 点 $p,\, q \in M$ を結ぶ C^∞ 曲線 c が与えられれば，Levi-Civita 接続により接空間 $T_pM,\, T_qM$ の間に計量同型写像が存在する．

7.4.3 測地線

定義 7.9: 測地線

（擬）Riemann 多様体の上に Levi-Civita 接続 ∇ を与える．C^∞ 曲線 $c\colon [a,\, b] \to M$ が以下の条件を充たすとき，c は**測地線** (geodesic) と呼ばれる：

$$\nabla_{\dot{c}(t)} \dot{c}(t) = 0.$$

定義 7.9 は，「接ベクトル場 $\dot{c}$ が c 自身に沿って平行である」ことを定式化したものである．