第 4 章

ホモロジー代数

この章の主目標は普遍係数定理を証明することである．**単項イデアル整域** (principal ideal domain; PID) が重要となる．なお，この章の内容はほとんどが [?, 第 1, 3 章] に依存している．

まず，環 R の部分集合 $I \subset R$ が

(1) $0 \in I$
(2) $x, y \in I \implies x + y \in I$
(3) $a \in R,\ x \in I \implies ax \in I$ (resp. $xa \in I$)

を充たすとき，I は**左 (resp. 右) イデアル**であると言う[*1]．部分集合 $S = \{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset R$ を含む最小の左 (resp. 右) イデアル

$$\left\{ \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda x_\lambda \;\middle|\; a_\lambda \in R,\ \text{有限個を除く } \lambda\in\Lambda \text{ に対して } a_\lambda = 0 \right\}$$

のことを S の生成する R の左 (resp. 右) イデアルと呼び，一つの元で生成される**可換環** R のイデアルを**単項イデアル** (principal ideal) と呼ぶ．

定義 4.1: 単項イデアル整域

- 零環でない環 R が**整域** (integral domain) であるとは，

$$a, b \in R,\ ab = 0 \implies a = 0 \text{ または } b = 0$$

  が成り立つことを言う．
- 任意のイデアルが単項イデアルである（可換）整域を**単項イデアル整域**と呼ぶ．

命題 4.1: 単項イデアル整域上の自由加群

R を単項イデアル整域とするとき，R 上の自由加群の任意の部分加群は自由加群である．

証明 $R^{\oplus\Lambda}$ の部分加群 M を任意にとる．

[*1] R が可換環のときは左右の区別はないので単に**イデアル**と呼ぶ．

まず，Λ の任意の部分集合 $I \subset I' \subset \Lambda$ に対して自然な単射準同型

$$\begin{aligned} i_{II'} \colon R^{\oplus I} &\longrightarrow R^{\oplus I'},\ (x_i)_{i \in I} \longmapsto (y_{i'})_{i' \in I'}, \\ \text{w/}\ \ y_{i'} &:= \begin{cases} x_{i'}, & i' \in I \\ 0, & i' \notin I \end{cases} \end{aligned}$$

が存在する．以降では $i_{I\Lambda} \colon R^{\oplus I} \longrightarrow R^{\oplus \Lambda}$ によって $R^{\oplus I}$ を $R^{\oplus \Lambda}$ の部分加群と見做す．

次に，集合 $\mathcal{S} \subset 2^{\Lambda} \times 2^{M}$ を次のように定義する：$\forall (I,\, J) \in \mathcal{S}$ は

(1)

$$J \subset M \cap R^{\oplus I}$$

(2) 準同型写像

$$f_J \colon R^{\oplus J} \longrightarrow M \cap R^{\oplus I},\ (x_j)_{j \in J} \longmapsto \sum_{j \in J} x_j j \tag{4.0.1}$$

は同型写像となる

を充たすとする．そして $\mathcal{S}$ の上の順序関係 $\le$ を

$$(I,\, J) \le (I',\, J') \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} I \subset I' \ \text{かつ}\ J \subset J'$$

で定義する．このとき $(\mathcal{S},\, \le)$ は順序集合で，かつ $(\emptyset,\, \emptyset) \in \mathcal{S}$ なので $\mathcal{S}$ は空でない．

補題 4.1:

順序集合 $(\mathcal{S},\, \le)$ は帰納的順序集合である，i.e. $\mathcal{S}$ の任意の全順序部分集合 $\mathcal{S}' := \{(I_\sigma,\, J_\sigma)\}_{\sigma \in \Sigma}$ が上限を持つ．

証明 $I := \bigcup_{\sigma \in \Sigma} I_\sigma,\ J := \bigcup_{\sigma \in \Sigma} J_\sigma$ とおくと，明らかに $I \in 2^{\Lambda},\ J \in 2^{M}$ である．条件 (1) より $J_\sigma \subset M \cap R^{\oplus I_\sigma}$ で，かつ

$$f_{J_\sigma} \colon R^{\oplus J_\sigma} \longrightarrow M \cap R^{\oplus I_\sigma},\ (x_j)_{j \in J_\sigma} \longmapsto \sum_{j \in J_\sigma} x_j j$$

は同型写像となる．これらの $\sigma \in \Sigma$ に関する和集合をとると $J = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \subset M \cap R^{\oplus I}$ かつ

$$f_J \colon R^{\oplus J} \longrightarrow M \cap \{R\}_I,\ (x_j)_{j \in J} \longmapsto \sum_{j \in J} x_j j$$

は同型写像となる．故に $(I,\, J) \in \mathcal{S}$ であり，これが $\mathcal{S}'$ の上界を与える． ■

この補題から $(\mathcal{S},\, \le)$ に対して Zorn の補題を適用でき，極大元 $(I_0,\, J_0) \in \mathcal{S}$ の存在が言える．$I_0 = \Lambda$ ならば性質 (2) から $M \cong R^{\oplus J_0}$ が言えるので題意が示されたことになる．

$I_0 \subsetneq \Lambda$ を仮定する．仮定より $\mu \in \Lambda \setminus I_0$ をとることができる．$I_1 \coloneqq I_0 \cup \{\mu\}$ とおくと，μ 成分への標準的射影 $p_\mu \colon R^{\oplus I_1} \longrightarrow R$ を用いた完全列

$$0 \longrightarrow R^{\oplus I_0} \xrightarrow{i_{I_0 I_1}} R^{\oplus I_1} \xrightarrow{p_\mu} R \longrightarrow 0$$

が成り立つ．ここからさらに完全列

$$0 \longrightarrow M \cap R^{\oplus I_0} \xrightarrow{i_{I_0 I_1}} M \cap R^{\oplus I_1} \xrightarrow{p_\mu} (M \cap R^{\oplus I_1}) \longrightarrow 0 \tag{4.0.2}$$

が誘導されるが，$p_\mu(M \cap R^{\oplus I_1})$ は R の部分加群，i.e. イデアルなので，$\boldsymbol{R}$ **が単項イデアル整域**であることから，ある $a \in R$ を用いて Ra という形にかける．

$a = 0$ の場合 $p_\mu(M \cap R^{\oplus I_1}) = 0$ なので，(4.0.2) の完全性から $M \cap R^{\oplus I_0} \cong M \cap R^{\oplus I_1}$ となる．このとき $I_0 \subsetneq I_1$ かつ $(I_1, J_0) \subset \mathcal{S}$ となり (I_0, J_0) の極大性に矛盾．

$a \neq 0$ の場合 $p_\mu(M \cap R^{\oplus I_1}) = Ra$ の勝手な元は $x \in R$ を用いて xa と一意的に書ける．従って $p_\mu(b) = a$ を充たす $b \in M \cap R^{\oplus I_1}$ を一つ固定すると，

$$i \colon Ra \longrightarrow M \cap R^{\oplus I_1},\ xa \longmapsto xb$$

と定義した写像 i は well-defined．このとき $p_\mu\bigl(i(xa)\bigr) = p_\mu(xb) = xa$ が成立するので完全列 (4.0.2) は分裂する．従って系**??**から同型写像

$$g \colon (M \cap R^{\oplus I_0}) \oplus Ra \longrightarrow M \cap R^{\oplus I_1},\ (m,\, xa) \longmapsto i_{I_0 I_1}(m) + i(xa) = i_{I_0 I_1}(m) + xb$$

を得る．

ここで $J_1 \coloneqq J_0 \cup \{b\}$ とおき，同型写像 $h' \colon R \longrightarrow Ra,\ x \longmapsto xa$ を定める．このとき

$$h \coloneqq f_{J_0} \oplus h' \colon R^{\oplus J_1} = R^{\oplus J_0} \oplus R^{\oplus \{b\}} \longrightarrow (M \cap R^{\oplus I_0}) \oplus Ra$$

は同型写像で，定義 (4.0.1) から

$$\begin{aligned} g\Bigl(h\bigl((x_j)_{j \in J_0},\, x_b\bigr)\Bigr) &= g\Bigl(f_{J_0}\bigl((x_j)_{j \in J_0}\bigr),\, x_b a\Bigr) \\ &= f_{J_0}\bigl((x_j)_{j \in J_0}\bigr) + x_b b \\ &= f_{J_1}\Bigl(\bigl((x_j)_{j \in J_0},\, x_b\bigr)\Bigr) \end{aligned}$$

となる．よって $f_{J_1} \colon R^{\oplus J_1} \longrightarrow M \cap R^{\oplus I_1}$ が同型写像となって (2) が充たされ，$I_0 \subsetneq I_1$, $J_0 \subsetneq J_1$ かつ $(I_1, J_1) \in \mathcal{S}$ となって (I_0, J_0) の極大性に矛盾する．

以上より，背理法から $I_0 = \Lambda$ が言えて証明が完了する． ■

自由加群に関する次の命題は単純だが，後で使う：

命題 4.2:

任意の左 R 加群 M に対して，ある自由加群から M への全射準同型写像が存在する

証明 $R^{\oplus M}$ は自由加群であり，

$$f \colon R^{\oplus M} \longrightarrow M,\ (a_m)_{m \in M} \longmapsto \sum_{m \in M} a_m m$$

は全射準同型写像である． ■

4.1 諸定義

4.1.1 射影的加群

定義 4.2: 射影的加群

左 R 加群 P が**射影的加群** (projective module) であるとは，任意の左 R 加群の**全射準同型** $f\colon M \longrightarrow N$ および任意の準同型写像 $g\colon P \longrightarrow N$ に対し，左 R 加群の準同型写像 $h\colon P \longrightarrow M$ であって $f \circ h = g$ を充たすものが存在することを言う（図式 4.1）．

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\exists h"'] \arrow[d, "g"] \\ M \arrow[r, two heads, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

図 4.1: 射影的加群

命題 4.3:

左 R 加群の完全列

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

は，N が射影的加群ならば分裂する．

証明 図式の完全性から $g\colon M \longrightarrow N$ は全射準同型である．よって射影的加群の定義から以下の図式を可換にする $h\colon N \longrightarrow M$ が存在する：

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, equal, "1_N"] \\ M \arrow[r, "g"'] & N \end{tikzcd}$$

■

命題 4.4: 射影的加群の直和

左 R 加群の族 $\{P_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して以下の 2 つは同値：

(1) $\forall\lambda \in \Lambda$ に対して P_λ が射影的加群

(2) $\displaystyle\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$ が射影的加群

証明 標準的包含を $\iota_\lambda\colon P_\lambda \hookrightarrow \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$ と書く．

(1)$\Longrightarrow$(2) 仮定より，$\forall\lambda \in \lambda$ に対して，任意の全射準同型写像 $f\colon M \longrightarrow N$ および任意の準同型写像 $g\colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \longrightarrow N$ に対して，準同型写像 $h_\lambda\colon P_\lambda \longrightarrow M$ であって $f \circ h_\lambda = g \circ \iota_\lambda$ を充たすものが存在する．従って直和の普遍性より準同型写像

$$h\colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \longrightarrow M$$

であって $f \circ h_\lambda = h \circ \iota_\lambda$ を充たすものが一意的に存在する．このとき

$$(f \circ h) \circ \iota_\lambda = f \circ h_\lambda = g \circ \iota_\lambda$$

であるから，h の一意性から $f \circ h = g$.

(1)$\Longleftarrow$(2) $\lambda \in \Lambda$ を一つ固定し，任意の全射準同型写像 $f\colon M \longrightarrow N$ および任意の準同型写像 $g\colon P_\lambda \longrightarrow M$ を与える．直和の普遍性より準同型写像

$$h\colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \longrightarrow N$$

であって $h \circ \iota_\lambda = g$（$\forall\mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\},\ h \circ \iota_\lambda = 0$）を充たすものが一意的に存在する．さらに仮定より，準同型写像

$$\alpha\colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \longrightarrow M$$

であって $f \circ \alpha = h$ を充たすものが存在する．このとき

$$f \circ (\alpha \circ \iota_\lambda) = h \circ \iota_\lambda = g$$

なので $\beta := h \circ \iota_\lambda$ とおけば良い．

■

系 4.1: 自由加群は射影的加群

環 R 上の自由加群は射影的加群である

証明 R が射影的加群であることを示せば命題 4.4 より従う．

左 R 加群の全射準同型写像と準同型写像 $f\colon M \longrightarrow N,\ g\colon R \longrightarrow N$ を任意に与える．このときある $x \in M$ が存在して $f(x) = g(1)$ となる．この x に対して準同型写像 $h\colon R \longrightarrow M,\ a \longmapsto ax$ を定めると，$\forall a \in R$ に対して

$$f\bigl(h(a)\bigr) = f(ax) = af(x) = ag(1) = g(a)$$

が成り立つので $f \circ h = g$ となる． ■

命題 4.5:

左 R 加群 P について，次の 3 条件は同値である：

(1) P は射影的加群
(2) 左 R 加群 Q であって $P \oplus Q$ が自由加群になるものが存在する
(3) 任意の左 R 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

に対して，図式

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P,\, M_1) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(P,\, M_2) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(P,\, M_3) \longrightarrow 0 \tag{4.1.1}$$

は完全列である．

証明 **(1) $\Longrightarrow$ (2)** 全射準同型

$$f\colon R^{\oplus P} \longrightarrow P,\ (a_p)_{p\in P} \longmapsto \sum_{p\in P} a_p p$$

を考える．$Q \coloneqq \mathrm{Ker}\, f$ とおくと，図式

$$0 \longrightarrow Q \longrightarrow R^{\oplus P} \xrightarrow{f} P \longrightarrow 0$$

は完全列になるが，命題 4.3 よりこれは分裂する．従って命題??より

$$P \oplus Q \cong R^{\oplus P}$$

(2) $\Longrightarrow$ (1) 命題 4.4, 4.1 より明らか．

(1) $\Longleftrightarrow$ (3) 命題??より図式 (4.1.2) の g_* の全射性のみ確認すれば良い．i.e. (3) は任意の全射準同型写像 $g\colon M_2 \longrightarrow M_3$ と任意の準同型写像 $\varphi\colon P \longrightarrow M_3$ に対してある準同型写像 $\psi\colon P \longrightarrow M_2$ であって $g_*(\psi) = g \circ \psi = \varphi$ を充たすものが存在することと同値．このことは P が射影的加群であることに他ならない．

■

R が PID のときは嬉しいことが起こる：

系 4.2:

R が単項イデアル整域ならば，
R 加群 P が射影的加群 $\Longleftrightarrow$ R が自由加群

証明 $\Longrightarrow$ 命題 4.1 より明らか．

$\Longleftarrow$ 命題 4.5 より，ある R 加群 Q が存在して $P \bigoplus Q$ が自由加群になるので P は自由加群の部分加群と同型である．R が PID なので命題 4.1 より P は自由加群．

■

4.1.2　単射的加群

次に，**単射的加群**の定義をする：

定義 4.3: 単射的加群

左 R 加群 I が**単射的加群** (injective module) であるとは，任意の左 R 加群の**単射準同型** $f\colon M \longrightarrow N$ および任意の準同型写像 $g\colon M \longrightarrow I$ に対し，左 R 加群の準同型写像 $h\colon N \longrightarrow I$ であって $h \circ f = g$ を充たすものが存在することを言う（図式 4.2）．

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[dl, dashed, "\exists h"] \\ I & \end{tikzcd}$$

図 4.2: 単射的加群

命題 4.6:

左 R 加群の完全列

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

は，L が単射的加群ならば分裂する．

<u>**証明**</u> 図式の完全性から $f\colon L \longrightarrow M$ は単射である．よって単射的加群の定義から，以下の図式を可換にする $h\colon M \longrightarrow L$ が存在する：

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal, "1_L"'] & M \arrow[dl, dashed, "h"] \\ L & \end{tikzcd}$$

■

命題 4.7:

左 R 加群 P について，次の 2 条件は同値である：

(1) I は単射的加群
(2) 任意の左 R 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

に対して，図式

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M_3, I) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(M_2, I) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(M_1, I) \longrightarrow 0 \tag{4.1.2}$$

は完全列である．

<u>**証明**</u> 命題**??**より，f^* の全射性のみ確認すれば良い．(2) は任意の単射準同型写像 $f\colon M_1 \longrightarrow M_2$ および任意の準同型写像 $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M_1, I)$ に対して，ある $\psi \in \mathrm{Hom}_R\ M_2, I$ が存在して $\psi \circ f = \varphi$ を充たすことと同値であるが，これは単射的加群の定義そのものである． ■

定義 4.4: 非零因子

環 R の元 $a \in R$ が**非零因子** (non zero-diviser) であるとは，$\forall x \in R \setminus \{0\}$ に対して $ax \neq$ かつ $xa \neq 0$ であることを言う．

定義 4.5: 可除加群

左 R 加群 M が**可除加群** (divisable module) であるとは，$\forall x \in M$ と任意の R の非零因子 a に対して

$$\exists y \in M,\ ay = x$$

が成立することを言う．

命題 4.8:

環 R 上の単射的加群は可除加群である．

<u>**証明**</u> 環 R 上の単射的加群 I を任意にとり，$\forall x \in I$ および任意の R の非零因子 a を一つ固定する．このとき写像

$$f\colon R \longrightarrow R,\ b \longmapsto ba$$

は左 R 加群 R の単射準同型写像である．ここで左 R 加群の準同型写像 $g\colon R \longrightarrow I,\ b \longmapsto bx$ を考えると，I が単射的加群であることからある準同型写像 $h\colon R \longrightarrow I$ であって $h \circ f = g$ を充たすものが存在する．故に

$$x = g(1) = h\bigl(f(1)\bigr) = h(a) = ah(1)$$

となり，I は可除加群である． ■

R が PID のときは同値になる：

命題 4.9:

R が単項イデアル整域ならば，R 上の可除加群は単射的加群である．

証明 Zorn の補題を使って証明する．[?, 命題 1.98] を参照． ■

命題 4.10:

R を環とする．任意の左 R 加群 M に対して，M からある単射的加群への単射準同型写像が存在する．

この命題の証明において，単射的 $\mathbb{Z}$ 加群 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ が主要な役割を果たす．

証明

補題 4.2:

右 R 加群 P が射影的加群であるとき，左 R 加群 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ は単射的加群である．

証明 $f\colon M \longrightarrow N$ を左 R 加群の単射準同型写像，$g\colon M \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ を左 R 加群の準同型写像とする．f を $\mathbb{Z}$ 加群の単射準同型写像と見做せば，$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ が単射的加群であることから

$$f^*\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),\ h \longmapsto h \circ f$$

は右 R 加群の全射準同型写像となる．ここで右 R 加群の準同型写像

$$g'\colon P \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),\ x \longmapsto \bigl(m \mapsto g(m)(x)\bigr)$$

を定める．このとき P が射影的加群であることから，ある右 R 加群の準同型写像 $h'\colon P \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ であって $f^*(h') = g'$ を充たすものが存在する．さらにここで

$$h\colon N \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),\ n \longmapsto \bigl(x \mapsto h'(x)(n)\bigr)$$

と定義するとこれは左 R 加群の準同型写像となり，かつ

$$h\bigl(f(m)\bigr)(x) = h'(x)\bigl(f(m)\bigr) = (f^*(h'))(x)(m) = g'(x)(m) = g(m)(x)$$

だから $h \circ f = g$ となる．i.e. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ は単射的加群である． ■

補題 4.3:

左 R 加群 M に対して

$$\Phi\colon M \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\bigl(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\bigr),\ m \longmapsto \bigl(\varphi \mapsto \varphi(m)\bigr)$$

と定義した写像 Φ は左 R 加群の単射準同型である．

証明 $\forall a \in R,\ \forall \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ に対して

$$\bigl(a\Phi(m)\bigr)(\varepsilon) = \Phi(m)(\varphi a) = (\varphi a)(m) = \varphi(am) = \Phi(am)(\varphi)$$

より $a\Phi(m) = \Phi(am)$ となる．i.e. Φ は左 R 加群の準同型写像である．

次に $\mathrm{Ker}\,\Phi = \{0\}$ を示す．$\forall m \in M \setminus \{0\}$ を 1 つとって固定する．$\mathbb{Z}$ 加群の準同型写像

$$f\colon \mathbb{Z} \longrightarrow M,\ a \longmapsto am$$

を考える．$\mathbb{Z}$ が PID であることから，部分 $\mathbb{Z}$ 加群（i.e. $\mathbb{Z}$ のイデアル）$\mathrm{Ker}\,f$ はある非負整数 b を用いて $b\mathbb{Z}$ の形に書ける．特に $f(1) = m \neq 0$ なので $b = 0$ または $b \geq 2$ である．

$g\colon \mathrm{Im}\,f \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ を

$$\mathrm{Im}\,f \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/\,\mathrm{Ker}\,f = \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

で定める．ただし

$$i\colon \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z},\ n + b\mathbb{Z} \longmapsto \begin{cases} \frac{n}{2} + \mathbb{Z}, & b = 0 \\ \frac{n}{b} + \mathbb{Z}, & b \geq 2 \end{cases}$$

とする．$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ が単射的加群なので，$\mathbb{Z}$ 加群の準同型写像 $h\colon M \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ であって $h\,|_{\mathrm{Im}\,f} = g$ を充たすものが存在する．このとき

$$h(m) = g(m) = i(1 + b\mathbb{Z}) \neq 0$$

なので $\Phi(m)(h) = h(m) \neq 0$ となり，$\Phi(m)$ は零写像でないことが言えた．i.e. $\mathrm{Ker}\,\Phi = \{0\}$ ■

M を任意の左 R 加群とする．すると $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ は右 R 加群だから，命題 4.2 よりある射影的右 R 加群 P からの全射準同型写像 $f\colon P \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ が存在する．このとき $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}$ の左完全性から

$$f^*\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\bigl(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\bigr) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P,\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

は左 R 加群の単射準同型なので，補題 4.3 の Φ との合成 $f^* \circ \Phi\colon M \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P,\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ は左 R 加群の単射準同型写像である．さらに補題 4.2 から $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P,\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ は単射的加群なので証明が終わる． ■

4.1.3 平坦加群・無捻加群

定義 4.6: 平坦加群

左 R 加群 N が**平坦加群** (flat module) であるとは，任意の右 R 加群の単射準同型写像 $f\colon M \longrightarrow M'$ に対して $f \otimes 1_N\colon M \otimes_R N \longrightarrow M' \otimes_R N$ が単射であることを言う．

補題 4.4:

左 R 加群 N に対して以下の二つは同値.

(1) N は平坦加群

(2) 任意の右 R 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

に対して，図式

$$0 \longrightarrow M_1 \otimes_R N \xrightarrow{f \otimes 1_N} M_2 \otimes_R N \xrightarrow{g \otimes 1_N} M_3 \otimes_R N \longrightarrow 0$$

は完全列である

証明 テンソル積の右完全性より明らか. ■

命題 4.11: 平坦加群の直和

集合 Λ によって添字付けられた左 R 加群の族 $\{P_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ をとる. このとき

$\forall \lambda \in \Lambda$ に対して P_λ が平坦加群 $\iff$ $\displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda$ が平坦加群

証明 ($\Longrightarrow$) $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して P_λ が平坦加群ならば，任意の右 R 加群の単射準同型写像 $f \colon M \longrightarrow M'$ に対して $f \otimes 1_{P_\lambda} \colon M \otimes_R P_\lambda \longrightarrow M' \otimes_R P_\lambda$ は単射である. 故に

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda}(f \otimes 1_{P_\lambda}) \colon \bigoplus_{\lambda \in \Lambda}(M \otimes_R P_\lambda) \longrightarrow \bigoplus_{\lambda \in \Lambda}(M' \otimes_R P_\lambda)$$

は単射である. ここで加群の直和が帰納極限であること，および命題**??**を用いると

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda}(M \otimes_R P_\lambda) \cong M \otimes_R \left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda\right)$$

がわかる. この同一視を通じて

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda}(f \otimes 1_{P_\lambda}) = f \otimes 1_{\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda}$$

とすると右辺も単射であり，$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda$ は平坦加群である.

($\Longleftarrow$) $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda$ が平坦加群ならば任意の右 R 加群の単射準同型写像 $f \colon M \longrightarrow M'$ に対して $f \otimes 1_{\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda} = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda$ は単射となる. 従って $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して $f \otimes 1_{P_\lambda}$ も単射である.

■

系 4.3:

射影的加群 $\Longrightarrow$ 平坦加群

証明 任意の右 R 加群 M に対して $M \otimes_R R \cong M$ が成り立つことに注意する. 従って任意の右 R 加群の単射準同型写像 $f \colon M \longrightarrow M'$ に対して $f \otimes 1_R \colon M \otimes_R R \longrightarrow M' \otimes_R R$ は f と同一視できるので単射である，i.e. R は平坦加群である. 自由加群は R の直和と同型だから，命題 4.11 より自由加群は平坦加群である.

さて，N が射影的加群ならば命題 4.5 からある左 R 加群 N' であって $N \oplus N'$ が自由加群となるものが存在する．故に $N \oplus N'$ は平坦加群であり，命題 4.11 から N は平坦加群である． ■

系 4.4:

任意の左 R 加群 M に対して，ある平坦加群から M への全射準同型写像が存在する．

証明 命題 4.2 より，ある射影的加群から M への全射準同型写像が存在する．さらに系 4.3 から題意が示された． ■

無捻加群を定義し，平坦加群との関係を述べる：

定義 4.7: 捩れ元

左 R 加群 M の元 $x \in M$ が**捻れ元** (torsion element) であるとは，ある R の非零因子 a が存在して $ax = 0$ となることを言う．

定義 4.8: 無捻加群

左 R 加群 M が**無捻加群** (torsion-free module) であるとは，M が 0 以外の捻れ元を持たないことを言う．

命題 4.12:

環 R 上の平坦加群は無捻加群である．

証明 M を平坦加群とし，$a \in R$ を任意の非零因子とする．このとき写像 $f\colon R \longrightarrow R,\ x \longmapsto ax$ は右 R 加群の単射準同型写像なので $f \otimes 1_M\colon R \otimes_R M \longrightarrow R \otimes_R M$ は単射．

ここで $R \otimes_R M \cong M$ であることから $f \otimes 1_M$ は M 上の a 倍写像 $M \longrightarrow M,\ x \longmapsto ax$ と同一視できる．これが任意の非零因子 a に対して単射なので M は無捻加群である． ■

R が PID のときは嬉しいことが起こる：

命題 4.13:

R が単項イデアル整域ならば，左 R 加群 M について

M が無捻加群 $\iff$ M が平坦加群

証明 [?, 命題 1.109] を参照． ■

4.2 射影的分解と単射的分解

4.2.1 射影的分解

定義 4.9: 射影的分解

左（右）R 加群のチェイン複体

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

が完全列で，$\forall n \geq 0$ に対して P_n が射影的加群であるとき，組 $(P_\bullet, \partial_\bullet, \varepsilon)$ を M の**射影的分解** (projective resolution) と呼ぶ[a]．特に $\forall n \geq 0$ に対して P_n が自由加群ならば**自由分解** (free resolution) と呼ぶ．

[a] $(P_\bullet, \partial_\bullet) \xrightarrow{\varepsilon} M$ とか $P_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M$ などと略記することがある．

命題 4.14:

任意の左（右）R 加群 M は射影的分解を持つ．

証明 n に関する数学的帰納法より示す．まず $n = 0$ のとき，命題 4.2 から，ある射影的加群 P_0 と全射準同型写像 $\varepsilon\colon P_0 \longrightarrow M$ が存在するので良い．

次に，射影的加群 $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ の図式

$$P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

が完全列であると仮定する．$K_{n-1} \coloneqq \operatorname{Ker} \partial_{n-1}$ とおき，命題 4.2 を使って射影的加群 P_n と全射準同型写像 $p_n\colon P_n \longrightarrow K_n$ をとると，2 つの図式

$$P_n \xrightarrow{p_n} K_{n-1} \longrightarrow 0, \quad 0 \longrightarrow K_{n-1} \xrightarrow{\iota_{n-1}} P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

はどちらも完全列である．ただし $\iota_{n-1}\colon K_{n-1} \hookrightarrow P_{n-1}$ は標準的包含とした．このとき $\partial_n \coloneqq \iota_{n-1} \circ p_n$ とおくと，$\operatorname{Im} \iota_{n-1} = \operatorname{Ker} \partial_{n-1}$ かつ $\operatorname{Im} p_n = K_{n-1}$ であることから $\operatorname{Im} \partial_n = \operatorname{Im} \iota_{n-1} = \operatorname{Ker} \partial_{n-1}$ が成り立つので

$$P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

は完全列である． ■

命題 4.14 の構成において，$K_n = \operatorname{Ker} \partial_n$ 自身が射影的加群ならば図式

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow K_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

が M の射影的分解を与える．このような場合は K_n で完全列を打ち切ることができる．

定理 4.5:

任意の R 加群 M を与える．

(1) R が体ならば，M は図式

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{1} M \longrightarrow 0$$

を射影的分解にもつ．

(2) R が PID ならば，M は

$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

の形の図式を射影的分解にもつ．

証明 (1) R が体ならば M はベクトル空間であり，基底を持つ．i.e. 自由 R 加群なので命題 4.1 より射影的加群である．

(2) R が単項イデアル整域ならば，系 4.2 より射影的加群 P_0 は自由加群でもある．さらに命題 4.1 から，自由加群 P_0 の任意の部分加群は自由加群となる．従って $P_1 := \operatorname{Ker}\varepsilon$ とすればこれは自由加群であり，命題 4.1 より射影的加群でもある．

■

4.2.2 単射的分解

定義 4.10: 単射的分解

左（右）R 加群のコチェイン複体

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} I^0 \xrightarrow{d^0} \cdots \xrightarrow{d^{n-1}} I^n \xrightarrow{d^n} I^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \cdots$$

が完全列で，$\forall n \geq 0$ に対して I^n が単射的加群であるとき，組 $(I^\bullet, d^\bullet, i)$ を M の**単射的分解** (injective resolution) と呼ぶ[a]．

[a] $M \xrightarrow{i} (I^\bullet, d^\bullet)$ とか $M \xrightarrow{i} I^\bullet$ などと略記することがある．

命題 4.15:

任意の左（右）R 加群 M は単射的分解を持つ．

証明 命題 4.10 より，命題 4.5 の証明において矢印の向きを逆にすればよい． ■

定理 4.6:

R が PID ならば，M は

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow 0$$

の形の図式を単射的分解にもつ．

証明 命題 4.8 より単射的加群 I^0 は可除加群である．従って $I^1 := \operatorname{Coker} i$ とおくとこれは可除加群だが[*2]，R が PID であることから命題 4.9 が使えて I^1 は単射的加群でもある．故に，標準的射影 $p\colon I^0 \longrightarrow I^1$ を用いた完全列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} I^0 \xrightarrow{p} \operatorname{Coker} i \longrightarrow 0$$

は M の単射的分解になる． ■

4.3 Tor と Ext

4.3.1 複体の圏

本題に入る前に，複体に関して記号を整理する．まず，チェイン複体 $(M_\bullet, \partial_\bullet)$ は $M^n := M_{-n}$, $d^n := \partial_{-n}$ とおけばコチェイン複体 $(M^\bullet, d^\bullet)$ になる．このことを踏まえる場合は，今まではチェイン複体，コチェイン複体の圏を **Chain** と書いていたところを $\mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ に書き換えることにする（添字を非負整数ではなく $\mathbb{Z}$ 全体にとれるようになったため）．また，便宜上ただ **複体** (complex) と呼んだ時はコチェイン複体を指すことにする．

チェイン写像・コチェイン写像もまとめて**複体の射**と呼ぶことがある：

定義 4.11: 複体の射

加群の圏 R-**Mod** における複体 $M := (M^\bullet, d^\bullet)$ から複体 $M' := (M'^\bullet, d'^\bullet)$ への**射**とは，R-**Mod** における図式としての M から M' への射のことを言う．
i.e. R-**Mod** における射の族 $f^\bullet := (f^q\colon M^q \longrightarrow M'^q)_{q\in\mathbb{Z}}$ であって

$$\forall q \in \mathbb{Z},\ d'^q \circ f^q = f^{q+1} \circ d^q$$

を充たすもののこと．

R-**Mod** の対象 M は $M^0 = M$, $M^{n\neq 0} = 0$ とおくことで自然に複体 $M^\bullet$ と見做すことができるので，R-**Mod** は $\mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ の充満部分圏とみなせる．

次の命題はひとまず証明なしに認めることにする．

[*2] 可除加群の剰余加群は可除加群になる：可除 R 加群 M と部分加群 $N \subset M$ をとる．$x + N \in M/N$ と R の非零因子 a を任意にとる．このとき M が可除加群であることから $\exists y \in M$, $ay = x$ が成立するが，剰余加群のスカラー乗法の定義から $a(y + N) = (ay) + N = x + N$ が言える．

命題 4.16:

$\mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ はアーベル圏である．

複体の図式

$$M_1^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} M_2^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} M_3^\bullet$$

が**完全列**であるとは，$\forall q \in \mathbb{Z}$ に対して

$$M_1^q \xrightarrow{f^q} M_2^q \xrightarrow{g^q} M_3^q$$

が R-**Mod** における完全列であることと同値である．以下では R-**Mod** における短完全列の圏を $\mathbf{SES}(\mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod}))$ と書き，完全列の圏を $\mathbf{ES}(\mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod}))$ と書くことにする．文脈上 R-**Mod** が明らかな時は $\mathbf{SES}(\mathbf{Chain})$ や $\mathbf{ES}(\mathbf{Chain})$ と書くこともある．

命題 4.17: コホモロジーの関手性

$f^\bullet \colon (M^\bullet, d^\bullet) \longrightarrow (M'^\bullet, d'^\bullet)$ を複体の射とする時，$f^\bullet$ は自然にコホモロジーの射

$$H^q(f^\bullet) \colon H^q(M^\bullet) \longrightarrow H^q(M'^\bullet)$$

を誘導し，これにより H^q は共変関手 $\mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod}) \longrightarrow R\text{-}\mathbf{Mod}$ を定める．

<u>証明</u> 複体の射の定義より，$\forall q \in \mathbb{Z}$ に対して R-**Mod** における次の可換図式がある：

$$\begin{tikzcd}
M^{q-1} \arrow[r, "d^{q-1}"] \arrow[d, "f^{q-1}"] & M^q \arrow[d, "f^q"] \\
M'^{q-1} \arrow[r, "d'^{q-1}"] & M'^q
\end{tikzcd}$$

これに命題??を適用することで可換図式

$$\begin{tikzcd}
M^{q-1} \arrow[r, "d^{q-1}"] \arrow[d, "f^{q-1}"] & M^q \arrow[r, "\mathrm{coker}\, d^{q-1}"] \arrow[d, "f^q"] & \mathrm{Coker}\, d^{q-1} \arrow[d, "\overline{f^q}"] \\
M'^{q-1} \arrow[r, "d'^{q-1}"] & M'^q \arrow[r, "\mathrm{coker}\, d'^{q-1}"] & \mathrm{Coker}\, d'^{q-1}
\end{tikzcd}$$

を得，さらに赤色をつけた部分の可換図式に命題??を適用することで，可換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Im}\, d^{q-1} \arrow[r, "\mathrm{im}\, d^{q-1}"] \arrow[d, "\overline{\varphi^{q-1}}"] & M^q \arrow[r, "\mathrm{coker}\, d^{q-1}"] \arrow[d, "f^q"] & \mathrm{Coker}\, d^{q-1} \arrow[d, "\overline{f^q}"] \\
\mathrm{Im}\, d'^{q-1} \arrow[r, "\mathrm{im}\, d'^{q-1}"] & M'^q \arrow[r, "\mathrm{coker}\, d'^{q-1}"] & \mathrm{Coker}\, d'^{q-1}
\end{tikzcd}$$

が得られる．ただし $\mathrm{Ker}(\mathrm{coker}\, d^{q-1}) = \mathrm{Im}\, d^{q-1}$，$\ker(\mathrm{coker}\, d^{q-1}) = \mathrm{im}\, d^{q-1}$ を用いた．

一方，可換図式

$$
\begin{tikzcd}
M^q \arrow[r, "d^q"] \arrow[d, "f^q"] & M^{q+1} \arrow[d, "f^{q+1}"] \\
M'^q \arrow[r, "d'^q"] & M'^{q+1}
\end{tikzcd}
$$

に命題??を適用することで可換図式

$$
\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} d^q \arrow[r, "\ker d^q"] \arrow[d, "\overline{\psi^q}"] & M^q \arrow[r, "d^q"] \arrow[d, "f^q"] & M^{q+1} \arrow[d, "f^{q+1}"] \\
\operatorname{Ker} d'^q \arrow[r, "\ker d'^q"] & M'^q \arrow[r, "d'^q"] & M'^{q+1}
\end{tikzcd}
$$

を得る．その上複体の定義から $d^q \circ d^{q-1} = 0$ なので，一意的に存在する全射 $q \colon M^q \longrightarrow \operatorname{Im} d^q \quad \text{s.t.} \quad d^q = \operatorname{im} d^q \circ q$ を使って $0 = (d^q \circ \operatorname{im} d^{q-1}) \circ q$, i.e. $d^q \circ \operatorname{im} d^{q-1} = 0$ がいえて，単射 $\iota^q \colon \operatorname{Im} d^{q-1} \longrightarrow \operatorname{Ker} d^q$ であって $\ker d^q \circ \iota^q = \operatorname{im} d^{q-1}$ となるものが一意的に存在することがわかる．$d'^{\bullet}$ に関しても同様の構成が可能なので，以上の議論をまとめると可換図式

$$
\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} d^q \arrow[dr, "\ker d^q"] \arrow[ddd, "\overline{\psi^q}"'] & & \operatorname{Im} d^{q-1} \arrow[ll, "\iota^q"'] \arrow[dl, "\operatorname{im} d^{q-1}"'] \arrow[ddd, "\overline{\varphi^{q-1}}"] \\
& M^q \arrow[d, "f^q"] & \\
& M'^q & \\
\operatorname{Ker} d'^q \arrow[ur, "\ker d'^q"] & & \operatorname{Im} d'^{q-1} \arrow[ll, "\iota'^q"] \arrow[ul, "\operatorname{im} d'^{q-1}"']
\end{tikzcd}
$$

が得られた．さらに，赤色をつけた部分の可換図式に命題??を適用することで可換図式

$$
\begin{tikzcd}
\operatorname{Im} d^{q-1} \arrow[r, "\iota^q"] \arrow[d, "\overline{\varphi^{q-1}}"] & \operatorname{Ker} d^q \arrow[r, "\operatorname{coker} \iota^q"] \arrow[d, "\overline{\psi^q}"] & H^q(M^{\bullet}) \arrow[r] \arrow[d, "H^q(f^{\bullet})"] & 0 & \text{(exact)} \\
\operatorname{Im} d'^{q-1} \arrow[r, "\iota'^q"] & \operatorname{Ker} d^q \arrow[r, "\operatorname{coker} \iota'^q"] & H^q(M'^{\bullet}) \arrow[r] & 0 & \text{(exact)}
\end{tikzcd}
$$

が成り立つ．この構成は自然である． ■

命題 4.18: コホモロジー長完全列

$\mathbf{SES}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ の対象

$$0 \longrightarrow (M_1^\bullet,\, d_1^\bullet) \xrightarrow{f^\bullet} (M_2^\bullet,\, d_2^\bullet) \xrightarrow{g^\bullet} (M_3^\bullet,\, d_3^\bullet) \longrightarrow 0 \tag{4.3.1}$$

が与えられたとき，自然に完全列

$$\begin{aligned} \cdots &\xrightarrow{\delta^{q-1}} H^q(M_1^\bullet) \xrightarrow{H^q(f^\bullet)} H^q(M_2^\bullet) \xrightarrow{H^q(g^\bullet)} H^q(M_3^\bullet) \\ &\xrightarrow{\delta^q} H^{q+1}(M_1^\bullet) \xrightarrow{H^{q+1}(f^\bullet)} H^{q+1}(M_2^\bullet) \xrightarrow{H^{q+1}(g^\bullet)} H^{q+1}(M_3^\bullet) \\ &\xrightarrow{\delta^{q+1}} \cdots \end{aligned}$$

が誘導される．これを短完全列 (4.3.1) に伴う **コホモロジー長完全列** (long exact sequence of cohomologies) と呼ぶ．δ^q $(\forall q \in \mathbb{Z})$ を**連結射** (connecting morphism) と呼ぶ．

__証明__ $\forall q \in \mathbb{Z}$ に対して可換図式

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M_1^q \arrow[r, "f^q"] \arrow[d, "d_1^q"] & M_2^q \arrow[r, "g^q"] \arrow[d, "d_2^q"] & M_3^q \arrow[r] \arrow[d, "d_3^q"] & 0 & \text{(exact)} \\ 0 \arrow[r] & M_1^{q+1} \arrow[r, "f^{q+1}"] & M_2^{q+1} \arrow[r, "g^{q+1}"] & M_3^{q+1} \arrow[r] & 0 & \text{(exact)} \end{tikzcd}$$

が成り立つ．これに蛇の補題を用いて完全列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \operatorname{Ker} d_1^q \longrightarrow \operatorname{Ker} d_2^q \longrightarrow \operatorname{Ker} d_3^q, \\ \operatorname{Coker} d_1^q \longrightarrow \operatorname{Coker} d_2^q \longrightarrow \operatorname{Coker} d_3^q \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

を得る．

$d_i^q \circ d_i^{q-1} = d_i^{q+1} \circ d_i^q = 0$, i.e. $\operatorname{Im} d_i^{q-1} \subset \operatorname{Ker} d_i^q$, $\operatorname{Im} d_i^q \subset \operatorname{Ker} d_i^{q+1}$ より射

$$d_i^q \colon M_i^q \longrightarrow M_i^{q+1}$$

から自然に well-defined な射

$$\overline{d_i^q}\colon\ \operatorname{Coker} d_i^{q-1} \longrightarrow \operatorname{Ker} d_i^{q+1},\ x + \operatorname{Im} d_i^{q-1} \longmapsto d_i^q(x)$$

が誘導され，

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} \overline{d_i^q} &= \operatorname{Ker} d_i^q / \operatorname{Im} d_i^{q-1} = H^q(M_i^\bullet), \\ \operatorname{Coker} \overline{d_i^q} &= \operatorname{Ker} d_i^{q+1} / \operatorname{Im} d_i^q = H^{q+1}(M_i^\bullet) \end{aligned}$$

が成り立つ．i.e. 可換図式

$$\begin{tikzcd} & \operatorname{Coker} d_1^{q-1} \arrow[r, "\overline{f^q}"] \arrow[d, "\overline{d_1^q}"] & \operatorname{Coker} d_2^{q-1} \arrow[r, "\overline{g^q}"] \arrow[d, "\overline{d_2^q}"] & \operatorname{Coker} d_3^{q-1} \arrow[r] \arrow[d, "\overline{d_3^q}"] & 0 & \text{(exact)} \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} d_1^{q+1} \arrow[r, "\overline{f^{q+1}}"] & \operatorname{Ker} d_2^{q+1} \arrow[r, "\overline{g^{q+1}}"] & \operatorname{Ker} d_3^{q+1} & & \text{(exact)} \end{tikzcd}$$

があるが，これに蛇の補題を用いると完全列

$$\begin{aligned}&H^q(M_1^\bullet) \xrightarrow{H^q(f^\bullet)} H^q(M_2^\bullet) \xrightarrow{H^q(g^\bullet)} H^q(M_3^\bullet)\\ &\xrightarrow{\delta^q} H^{q+1}(M_1^\bullet) \xrightarrow{H^{q+1}(f^\bullet)} H^{q+1}(M_2^\bullet) \xrightarrow{H^{q+1}(g^\bullet)} H^{q+1}(M_3^\bullet)\end{aligned}$$

が得られる． ■

チェイン・ホモトピーも再掲する：

定義 4.12: 複体の射の間のホモトピー

$(M^\bullet, d^\bullet)$, $(M'^\bullet, d'^\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod}))$ とし，$f^\bullet, g^\bullet\colon (M^\bullet, d^\bullet) \longrightarrow (M'^\bullet, d'^\bullet)$ を 2 つの複体の射とする．この時，$f^\bullet, g^\bullet$ の間の**ホモトピー** (homotopy) とは射の族 $(h^q\colon M^q \longrightarrow M'^{q-1})_{q\in\mathbb{Z}}$ であって

$$\forall q \in \mathbb{Z},\ f^q - g^q = d'^{q-1} \circ h^q + h^{q+1} \circ d^q$$

が成り立つもののこと．$f^\bullet, g^\bullet$ の間にホモトピーが存在する時，$f^\bullet$ と $g^\bullet$ は**ホモトピック** (homotopic) であるといい，$\boldsymbol{f^\bullet \simeq g^\bullet}$ と書く．

命題 4.19: コホモロジーのホモトピー不変性

$(M^\bullet, d^\bullet)$, $(M'^\bullet, d'^\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod}))$ とし，$f^\bullet, g^\bullet\colon (M^\bullet, d^\bullet) \longrightarrow (M'^\bullet, d'^\bullet)$ を 2 つの複体の射であって互いにホモトピックなものとする．このとき $\forall q \in \mathbb{Z}$ に対して

$$H^q(f^\bullet) = H^q(g^\bullet)\colon H^q(M^\bullet) \longrightarrow H^q(M'^\bullet)$$

が成り立つ．

<u>証明</u> 命題 4.17 および命題??より，コホモロジーの射は

$$\begin{aligned}H^q(f^\bullet)\colon x + \mathrm{Im}\, d^{q-1} &\longmapsto f^q(x) + \mathrm{Im}\, d'^{q-1},\\ H^q(g^\bullet)\colon x + \mathrm{Im}\, d^{q-1} &\longmapsto g^q(x) + \mathrm{Im}\, d'^{q-1}\end{aligned}$$

と定義される．$\left(h^q\colon M^q \longrightarrow M'^{q-1}\right)_{q\in\mathbb{Z}}$ をホモトピーとすると，$\forall x \in \mathrm{Ker}\, d^q$ に対して

$$\begin{aligned}&H^q(f^\bullet)(x + \mathrm{Im}\, d^{q-1}) - H^q(g^\bullet)(x + \mathrm{Im}\, d^{q-1})\\ &= \left(f^q(x) + \mathrm{Im}\, d'^{q-1}\right) - \left(g^q(x) + \mathrm{Im}\, d'^{q-1}\right)\\ &= \left(f^q(x) - g^q(x)\right) + \mathrm{Im}\, d'^{q-1}\\ &= \Big(d'^{q-1}\big(h^q(x)\big) + h^{q+1}\big(d^q(x)\big)\Big) + \mathrm{Im}\, d'^{q-1}\\ &= h^{q+1}(0) + \mathrm{Im}\, d'^{q-1} = \mathrm{Im}\, d'^{q-1}\end{aligned}$$

が成り立つので証明が完了する． ■

次に，**二重複体**を定義しておく：

定義 4.13: 二重複体

R-**Mod** における図式 4.3 が**二重複体** (double complex) であるとは，$\forall p,\, q \in \mathbb{Z}$ に対して

$$
\begin{aligned}
d_1^{p+1,\, q} \circ d_1^{p,\, q} &= 0, \\
d_2^{p,\, q+1} \circ d_2^{p,\, q} &= 0, \\
d_2^{p+1,\, q} \circ d_1^{p,\, q} + d_1^{p,\, q+1} \circ d_2^{p,\, q} &= 0
\end{aligned}
\tag{4.3.2}
$$

が成り立つことを言う．これを $(M^{\bullet,\, *},\, d_1^{\bullet,\, *},\, d_2^{\bullet,\, *})$ または $M^{\bullet,\, *}$ と書く．

$$
\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d, "d_2^{p-1,\, q-2}"] & {} \arrow[d, "d_2^{p,\, q-2}"] & {} \arrow[d, "d_2^{p+1,\, q-2}"] & \\
\cdots \arrow[r, "d_1^{p-2,\, q-1}"] & M^{p-1,\, q-1} \arrow[r, "d_1^{p-1,\, q-1}"] \arrow[d, "d_2^{p-1,\, q-1}"] & M^{p,\, q-1} \arrow[r, "d_1^{p,\, q-1}"] \arrow[d, "d_2^{p,\, q-1}"] & M^{p+1,\, q-1} \arrow[r, "d_1^{p+1,\, q-1}"] \arrow[d, "d_2^{p+1,\, q-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d_1^{p-2,\, q}"] & M^{p-1,\, q} \arrow[r, "d_1^{p-1,\, q}"] \arrow[d, "d_2^{p-1,\, q}"] & M^{p,\, q} \arrow[r, "d_1^{p,\, q}"] \arrow[d, "d_2^{p,\, q}"] & M^{p+1,\, q} \arrow[r, "d_1^{p+1,\, q}"] \arrow[d, "d_2^{p+1,\, q}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d_1^{p-2,\, q+1}"] & M^{p-1,\, q+1} \arrow[r, "d_1^{p-1,\, q+1}"] \arrow[d, "d_2^{p-1,\, q+1}"] & M^{p,\, q+1} \arrow[r, "d_1^{p,\, q+1}"] \arrow[d, "d_2^{p,\, q+1}"] & M^{p+1,\, q+1} \arrow[r, "d_1^{p+1,\, q+1}"] \arrow[d, "d_2^{p+1,\, q+1}"] & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

図 4.3: 二重複体

二重複体の射は図式の射として定義する．つまり，二重複体の射 $f^{\bullet,\, *} \colon M^{\bullet,\, *} \longrightarrow N^{\bullet,\, *}$ を顕に書くと以下のような可換図式になっている：

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & & \\
\cdots \arrow[r] & M^{p-1,\,q-1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dddddr, red, "f^{p-1,\,q-1}"] & M^{p,\,q-1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dddddr, red, "f^{p,\,q-1}"] & M^{p+1,\,q-1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dddddr, red, "f^{p+1,\,q-1}"] & \cdots & \\
\cdots \arrow[r] & M^{p-1,\,q} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dddddr, red, "f^{p-1,\,q}"] & M^{p,\,q} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dddddr, red, "f^{p,\,q}"] & M^{p+1,\,q} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dddddr, red, "f^{p+1,\,q}"] & \cdots & \\
\cdots \arrow[r] & M^{p-1,\,q+1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dddddr, red, "f^{p-1,\,q+1}"] & M^{p,\,q+1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dddddr, red, "f^{p,\,q+1}"] & M^{p+1,\,q+1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dddddr, red, "f^{p+1,\,q+1}"] & \cdots & \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
 & & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
 & \cdots \arrow[r] & N^{p-1,\,q-1} \arrow[r] \arrow[d] & N^{p,\,q-1} \arrow[r] \arrow[d] & N^{p+1,\,q-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & \cdots \arrow[r] & N^{p-1,\,q-1} \arrow[r] \arrow[d] & N^{p,\,q-1} \arrow[r] \arrow[d] & N^{p+1,\,q-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & \cdots \arrow[r] & N^{p-1,\,q-1} \arrow[r] \arrow[d] & N^{p,\,q-1} \arrow[r] \arrow[d] & N^{p+1,\,q-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

この射によって R-**Mod** 上の二重複体全体は圏を成すので，これを $\mathrm{C}_2(R\text{-}\mathbf{Mod})$ と書く．$\mathrm{C}_2(R\text{-}\mathbf{Mod})$ はアーベル圏をなす.

> **!**
>
> 二重複体の定義を少し変形して，図式 4.3 が
>
> $$\begin{aligned} d_1^{p+1,\,q} \circ d_1^{p,\,q} &= 0, \\ d_2^{p,\,q+1} \circ d_2^{p,\,q} &= 0, \\ d_2^{p+1,\,q} \circ d_1^{p,\,q} &= d_1^{p,\,q+1} \circ d_2^{p,\,q} \end{aligned}$$
>
> を充たすものを考えることができる．これは複体 $(M^{\bullet,\,q},\, d_1^{\bullet,\,q})$ の複体をなす, i.e. $\mathbf{C}(\mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod}))$ の対象である．さらに $\left(M^{\bullet,\,*},\, d_1^{\bullet,\,*},\, (-1)^{\bullet} d_2^{\bullet,\,*}\right)$ を考えると二重複体になる．この対応により $\mathrm{C}_2(R\text{-}\mathbf{Mod}) \cong \mathbf{C}(\mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod}))$ である．

複体 $(M^{\bullet},\, d^{\bullet})$ は横に見るか縦に見るかの 2 通りの方法で二重複体になる．

(1) 横に見る：

$$
\begin{aligned}
M^{p,q} &= \begin{cases} M^p, & q = 0 \\ 0, & q \neq 0 \end{cases}, \\
d_1^{p,q} &= \begin{cases} d^p, & q = 0 \\ 0, & q \neq 0 \end{cases}, \qquad\qquad d_2^{p,q} = 0
\end{aligned}
$$

図式として顕に書くと以下の通り：

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d^{p-2}"] & M^{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "d^{p-1}"] & M^p \arrow[r, "d^p"] \arrow[d] & M^{p+1} \arrow[r, "d^{p+1}"] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

この二重複体 $(M^{\bullet,*}, d_1^{\bullet,*}, d_2^{\bullet,*})$ を $M^\bullet$ と書く.

(2) 縦に見る：

$$
M^{p,q} = \begin{cases} M^q, & p = 0 \\ 0, & p \neq 0 \end{cases},
$$

$$
d_1^{p,q} = 0, \qquad\qquad d_2^{p,q} = \begin{cases} d^q, & p = 0 \\ 0, & p \neq 0 \end{cases}
$$

図式として顕に書くと以下の通り：

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d, "d^{q-2}"] & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & M^{q-1} \arrow[r] \arrow[d, "d^{q-1}"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & M^q \arrow[r] \arrow[d, "d^q"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & M^{q+1} \arrow[r] \arrow[d, "d^{q+1}"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

この二重複体 $(M^{\bullet,\,*},\, d_1^{\bullet,\,*},\, d_2^{\bullet,\,*})$ を M^* と書く．

すなわち，射

$$
\begin{aligned}
f\colon (M^{\bullet},\, d_M^{\bullet}) &\longrightarrow (N^{\bullet,\,*},\, d_{N,\,1}^{\bullet,\,*},\, d_{N,\,2}^{\bullet,\,*}),\\
g\colon (M^{*},\, d_M^{*}) &\longrightarrow (N^{\bullet,\,*},\, d_{N,\,1}^{\bullet,\,*},\, d_{N,\,2}^{\bullet,\,*})
\end{aligned}
$$

とはそれぞれ複体の射

$$
\begin{aligned}
f^{\bullet}\colon (M^{\bullet},\, d_M^{\bullet}) &\longrightarrow (N^{\bullet,\,0},\, d_{N,\,1}^{\bullet,\,0}),\\
g^{\bullet}\colon (M^{\bullet},\, d_M^{\bullet}) &\longrightarrow (N^{0,\,\bullet},\, d_{N,\,2}^{0,\,\bullet})
\end{aligned}
$$

であって

$$
\begin{aligned}
d_{N,\,2}^{\bullet,\,0} \circ f^{\bullet} &= 0,\\
d_{N,\,1}^{0,\,\bullet} \circ g^{\bullet} &= 0
\end{aligned}
$$

を充たすものを表す．

定義 4.14: 全複体

R-**Mod** の二重複体 $M := \left(M^{\bullet,\,*},\, d_1^{\bullet,\,*},\, d_2^{\bullet,\,*}\right)$ が与えられ，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$
n = p + q \quad \text{かつ} \quad M^{p,\,q} \neq 0
$$

を充たす整数の組 $(p,\, q)$ が有限個であると仮定する[a]．

$$
\mathrm{Tot}(M)^n := \bigoplus_{p+q=n} M^{p,\,q}
$$

とおき，射

$$
d^n\colon \mathrm{Tot}(M)^n \longrightarrow \mathrm{Tot}(M)^{n+1}
$$

を，標準的包含 $\iota_{p,\,q}\colon M^{p,\,q} \hookrightarrow \mathrm{Tot}^{p+q} \quad {}^{\mathrm{w}/} \quad p+q=n$ と書いたときに

$$
d^n \circ \iota_{p,\,q} = \iota_{p+1,\,q} \circ d_1^{p,\,q} + \iota_{p,\,q+1} \circ d_2^{p,\,q}
$$

を充たす唯一の射とする．このとき組 $\mathrm{Tot}(M) := (\mathrm{Tot}(M)^{\bullet},\, d^{\bullet})$ がなす複体を二重複体 M の**全複体** (total complex) と呼ぶ．

[a] 実のところ R-**Mod** の直和は添字集合が有限でなくとも定義されるので，R-**Mod** のみを考えるならこの仮定は無くても良い．しかし，一般のアーベル圏においては可算個の和が定義されているとは限らないので，この仮定が必要になる場合がある．

念の為，全複体の定義において $d^{n+1} \circ d^n = 0$ が成り立つことを確認しておこう：

$$
\begin{aligned}
d^{p+q+1} \circ d^{p+q} \circ \iota_{p,\,q} &= d^{p+q+1} \circ \iota_{p+1,\,q} \circ d_1^{p,\,q} + d^{p+q+1} \circ \iota_{p,\,q+1} \circ d_2^{p,\,q}\\
&= \iota_{p+2,\,q} \circ \cancel{(d_1^{p+1,\,q} \circ d_1^{p,\,q})} + \iota_{p+1,\,q+1} \circ \cancel{(d_2^{p+1,\,q} \circ d_1^{p,\,q} + d_1^{p,\,q+1} \circ d_2^{p,\,q})} + \iota_{p,\,q+2} \circ (d_2^{q+1} \circ d_2^{q})\\
&= 0
\end{aligned}
$$

(4.3.2) の左辺の符号はこれが成り立つために必要なのである．

4.3.2 Tor と Ext の定義

任意の右 R 加群 L および左 R 加群 M を与える．命題 4.14 より，$L,\ M$ の射影的分解

$$P^{\bullet} \longrightarrow L \longrightarrow 0, \quad Q^{\bullet} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

をとることができる．このとき複体 $P^{\bullet} \otimes_R M,\ L \otimes_R Q^{\bullet}$，二重複体 $P^{\bullet} \otimes_R Q^{*}$ および射

$$P^{\bullet} \otimes_R Q^{*} \longrightarrow P^{\bullet} \otimes_R M, \tag{4.3.3}$$
$$P^{\bullet} \otimes_R Q^{*} \longrightarrow L \otimes_R Q^{*} \tag{4.3.4}$$

を構成することができる．

射影的加群は平坦加群だったので $\forall p,\ q \leq 0$ に対して $P^p,\ Q^q$ は平坦加群．従って補題 4.4 より射 (4.3.3), (4.3.4) はそれぞれ完全列

$$\cdots \longrightarrow P^p \otimes_R Q^{-1} \longrightarrow P^p \otimes_R Q^0 \longrightarrow P^p \otimes_R M \longrightarrow 0,$$
$$\cdots \longrightarrow P^{-1} \otimes_R Q^q \longrightarrow P^0 \otimes_R Q^q \longrightarrow L \otimes_R Q^q \longrightarrow 0$$

を誘導する．このような状況において，後述する二重複体がつくるスペクトル系列を考えることで，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対する自然な同型

$$H^{-n}(P^{\bullet} \otimes_R M) \cong H^{-n}\big(\mathrm{Tot}(P^{\bullet} \otimes_R Q^{*})\big) \cong H^{-n}(L \otimes_R Q^{\bullet}) \tag{4.3.5}$$

が存在することがわかる．

定義 4.15: Tor

$\forall n \geq 0$ に対して

$$\mathrm{Tor}_n^R(L,\ M) := H^{-n}(P^{\bullet} \otimes_R M) \cong H^{-n}\big(\mathrm{Tot}(P^{\bullet} \otimes_R Q^{*})\big) \cong H^{-n}(L \otimes_R Q^{\bullet})$$

と定義する．

$\mathrm{Tor}_n^R(L,\ M)$ は右完全関手（系**??**参照）

$$\text{-} \otimes_R M \colon \textbf{Mod-}R \longrightarrow \mathbb{Z}\textbf{-Mod},\ L \longmapsto L \otimes_R M$$

の n 番目の左導来関手を L に作用させて得られる $\mathbb{Z}$ 加群であり，かつ右完全関手

$$L \otimes_R \text{-} \colon R\textbf{-Mod} \longrightarrow \mathbb{Z}\textbf{-Mod},\ M \longmapsto L \otimes_R M$$

の n 番目の左導来関手を M に作用させて得られる $\mathbb{Z}$ 加群である．従って左導来関手の一般論から以下が従う：

命題 4.20: Tor の基本性質

(1) $\mathrm{Tor}_n^R(L,\,M)$ は射影的分解の取り方によらない．また，$M \longmapsto \mathrm{Tor}_n^R(L,\,M)$，$L \longmapsto \mathrm{Tor}_n^R(L,\,M)$ はそれぞれ関手

$$\mathrm{Tor}_n^R(L,\,\text{-})\colon R\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod},$$
$$\mathrm{Tor}_n^R(\text{-},\,M)\colon \mathbf{Mod}\text{-}R \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}$$

を定める．

(2) $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$ を**左** R 加群の短完全列とすると，自然に長完全列

$$\begin{aligned}
&\cdots \xrightarrow{\delta_{n+1}} \mathrm{Tor}_n^R(L,\,M_1) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(L,\,M_2) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(L,\,M_3)\\
&\cdots \xrightarrow{\delta_{n}} \mathrm{Tor}_{n-1}^R(L,\,M_1) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n-1}^R(L,\,M_2) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n-1}^R(L,\,M_3)\\
&\cdots \xrightarrow{\delta_{n-1}} \cdots
\end{aligned}$$

が誘導され，この対応により族 $\left(\mathrm{Tor}_n^R(L,\,\text{-})\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ は関手

$$\mathbf{SES}(R\text{-}\mathbf{Mod}) \longrightarrow \mathbf{ES}(\mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod})$$

を定める．

(3) $0 \longrightarrow L_1 \xrightarrow{f} L_2 \xrightarrow{g} L_3 \longrightarrow 0$ を**右** R 加群の短完全列とすると，自然に長完全列

$$\begin{aligned}
&\cdots \xrightarrow{\delta_{n+1}} \mathrm{Tor}_n^R(L_1,\,M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(L_2,\,M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(L_3,\,M)\\
&\cdots \xrightarrow{\delta_{n}} \mathrm{Tor}_{n-1}^R(L_1,\,M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n-1}^R(L_2,\,M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n-1}^R(L_3,\,M)\\
&\cdots \xrightarrow{\delta_{n-1}} \cdots
\end{aligned}$$

が誘導され，この対応により族 $\left(\mathrm{Tor}_n^R(\text{-},\,M)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ は関手

$$\mathbf{SES}(\mathbf{Mod}\text{-}R) \longrightarrow \mathbf{ES}(\mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod})$$

を定める．

(4) $\mathrm{Tor}_0^R(L,\,M) \cong L \otimes_R M$

同様にして Ext が定義される．

$\forall L,\,M \in R\text{-}\mathbf{Mod}$ または $\forall L,\,M \in \mathbf{Mod}\text{-}R$ を考える．命題 4.15 より，L の射影的分解

$$P^\bullet \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

および M の単射的分解

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I^\bullet$$

をとることができる．このとき複体

$$\begin{aligned}
&0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\left(P^0,\,M\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\left(P^{-1},\,M\right) \longrightarrow \cdots\\
&0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\left(L,\,I^0\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\left(L,\,I^1\right) \longrightarrow \cdots
\end{aligned}$$

ができるのでそれぞれ $\mathrm{Hom}_R(P^\bullet,\, M),\ \mathrm{Hom}_R(L,\, I^\bullet)$ と書く．さらに二重複体 $\mathrm{Hom}_R(P^\bullet,\, I^*)$ および射

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_R(P^\bullet,\, M) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P^\bullet,\, I^*),\\ \mathrm{Hom}_R(L,\, I^*) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P^\bullet,\, I^*)\end{aligned}$$

を構成できる．$\forall p \geq 0$ に対して P^{-p} は射影的加群なので命題 4.5 から

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P^{-p},\, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P^{-p},\, I^0) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P^{-p},\, I^1) \longrightarrow \cdots$$

は完全列になる．一方，$\forall p \geq 0$ に対して I^p は単射的加群なので命題 4.7 から

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(L,\, I^p) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P^0,\, I^p) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P^{-1},\, I^p) \longrightarrow \cdots$$

もまた完全列になる．このような状況において，二重複体がつくるスペクトル系列を考えれば $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対する自然な同型

$$H^n\bigl(\mathrm{Hom}_R(P^\bullet,\, M)\bigr) \cong H^n\bigl(\mathrm{Tot}(\mathrm{Hom}_R(P^\bullet,\, I^*))\bigr) \cong H^n\bigl(\mathrm{Hom}_R(L,\, I^\bullet)\bigr) \tag{4.3.6}$$

が存在することがわかる．

定義 4.16: Ext

$\forall n \geq 0$ に対して

$$\mathrm{Ext}^n_R(L,\, M) \coloneqq H^n\bigl(\mathrm{Hom}_R(P^\bullet,\, M)\bigr) \cong H^n\bigl(\mathrm{Tot}(\mathrm{Hom}_R(P^\bullet,\, I^*))\bigr) \cong H^n\bigl(\mathrm{Hom}_R(L,\, I^\bullet)\bigr)$$

と定義する．

$\mathrm{Ext}^n_R(L,\, M)$ は左完全関手（命題??参照）

$$\mathrm{Hom}_R(\text{-},\, M)\colon R\text{-}\mathbf{Mod}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod},\ L \longmapsto \mathrm{Hom}_R(L,\, M)$$

の n 番目の右導来関手を L に作用させて得られる $\mathbb{Z}$ 加群であり，かつ左完全関手（命題??参照）

$$\mathrm{Hom}_R(L,\, \text{-})\colon R\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod},\ M \longmapsto \mathrm{Hom}_R(L,\, M)$$

の n 番目の右導来関手を M に作用させて得られる $\mathbb{Z}$ 加群である．従って右導来関手の一般論から以下が従う：

命題 4.21: Ext の基本性質

(1) $\mathrm{Ext}^n_R(L,\, M)$ は L の射影的分解および M の単射的分解の取り方によらない．また，$M \longmapsto \mathrm{Ext}^n_R(L,\, M),\ L \longmapsto \mathrm{Ext}^n_R(L,\, M)$ はそれぞれ関手

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ext}^n_R(L,\, \text{-})\colon R\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod},\\ &\mathrm{Ext}^n_R(\text{-},\, M)\colon R\text{-}\mathbf{Mod}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}\end{aligned}$$

を定める．

(2) $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$ を**左** R 加群の短完全列とすると，自然に長完全列

$$
\begin{aligned}
&\cdots \xrightarrow{\delta^{n-1}} \mathrm{Ext}_R^n(L,\, M_1) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^n(L,\, M_2) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^n(L,\, M_3) \\
&\cdots \xrightarrow{\delta^{n}} \mathrm{Ext}_R^{n+1}(L,\, M_1) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n+1}(L,\, M_2) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n+1}(L,\, M_3) \\
&\cdots \xrightarrow{\delta^{n+1}} \cdots
\end{aligned}
$$

が誘導され，この対応により族 $\left(\mathrm{Ext}_R^n(L,\, \text{-})\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ は関手

$$
\mathbf{SES}(R\text{-}\mathbf{Mod}) \longrightarrow \mathbf{ES}(\mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod})
$$

を定める．

(3) $0 \longrightarrow L_1 \xrightarrow{f} L_2 \xrightarrow{g} L_3 \longrightarrow 0$ を**右** R 加群の短完全列とすると，自然に長完全列

$$
\begin{aligned}
&\cdots \xrightarrow{\delta^{n-1}} \mathrm{Ext}_R^n(L_3,\, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^n(L_2,\, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^n(L_1,\, M) \\
&\cdots \xrightarrow{\delta^{n}} \mathrm{Ext}_R^{n+1}(L_3,\, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n+1}(L_2,\, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n+1}(L_1,\, M) \\
&\cdots \xrightarrow{\delta^{n+1}} \cdots
\end{aligned}
$$

が誘導され，この対応により族 $\left(\mathrm{Ext}_R^n(\text{-},\, M)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ は関手

$$
\mathbf{SES}(R\text{-}\mathbf{Mod})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{ES}(\mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod})
$$

を定める．

(4) $\mathrm{Ext}_R^0(L,\, M) \cong \mathrm{Hom}_R\,(L,\, M)$

次の節ではまず導来関手の一般論を導入して命題 4.20, 4.21 を証明し，その後でスペクトル系列を導入して同型 (4.3.5), (4.3.6) を示す（後者の方が準備が大変）．

しかしその前に，定義 4.15, 4.16 から従ういくつかの事実を確認しておく．

4.3.3 Tor に関する小定理集

命題 4.22: Tor と直和の交換

- 右 R 加群の族 $\left\{L_i\right\}_{i\in I}$ および左 R 加群 M を与える．このとき以下の同型が成り立つ：

$$
\bigoplus_{i\in I} \mathrm{Tor}_n^R(L_i,\, M) \cong \mathrm{Tor}_n^R\left(\bigoplus_{i\in I} L_i,\, M\right) \tag{4.3.7}
$$

- 右 R 加群 L および左 R 加群の族 $\left\{M_i\right\}_{i\in I}$ を与える．このとき以下の同型が成り立つ：

$$
\bigoplus_{i\in I} \mathrm{Tor}_n^R(L,\, M_i) \cong \mathrm{Tor}_n^R\left(L,\, \bigoplus_{i\in I} M_i\right) \tag{4.3.8}
$$

証明 $Q^\bullet \longrightarrow M$ を M の射影的分解とする．テンソル積と直和は可換なので，$\forall p > 0$ に対して

$$\bigoplus_{i\in I}(L_i \otimes_R Q^{-p}) \cong \left(\bigoplus_{i\in I} L_i\right) \otimes_R Q^{-p}$$

が成り立つ．フィルタードな圏 $\mathcal{I}$ 上の R-**Mod** の図式において，コホモロジーをとる関手 H^{-n} と帰納極限は交換するので

$$\bigoplus_{i\in I} H^{-n}(L_i \otimes_R Q^\bullet) \cong H^{-n}\left(\left(\bigoplus_{i\in I} L_i\right) \otimes_R Q^\bullet\right)$$

がわかり，同型 (4.3.7) が言えた．同型 (4.3.8) に関しても同様である． ■

命題 4.23: 平坦性による Tor の特徴付け

任意の左 R 加群 M を与える．このとき以下は互いに同値である：

(1) M は平坦加群
(2) 任意の**右** R 加群 L と $\forall n \geq 1$ に対して $\mathrm{Tor}_n^R(L, M) = 0$
(3) 任意の**右** R 加群 L に対して $\mathrm{Tor}_1^R(L, M) = 0$
(4) 任意の R の右イデアル I に対して $\mathrm{Tor}_1^R(R/I, M) = 0$

証明 **(1) $\Longrightarrow$ (2)** M が平坦加群であるとする．

任意の右 R 加群 L と，その射影的分解 $(P^\bullet, d^\bullet) \longrightarrow L$ をとる．定義より，次数が 0 以下の部分のみをとった複体 $(P^\bullet, d^\bullet)$ は完全列だから，平坦加群の定義より $(P^\bullet \otimes_R M, d^\bullet \otimes_R 1_M)$ も完全列である．従って $\forall n \geq 1$ に対して

$$\mathrm{Tor}_n^R(L, M) = H^{-n}(P^\bullet \otimes_R M) = \frac{\mathrm{Ker}(d^{-n} \otimes_R 1_M)}{\mathrm{Im}(d^{-n+1} \otimes_R 1_M)} = 0$$

である．

(2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (4) R/I は右 R 加群になるのでよい．

(4) $\Longrightarrow$ (1) 左 R 加群 M が条件 (4) を充たしているとする．また，任意の右 R 加群の単射準同型写像 $f\colon L \longrightarrow L'$ を与える．示すべきは $f \otimes_R 1_M\colon L \otimes_R M \longrightarrow L' \otimes_R M$ が単射になることである．

単射 f を通して L を L' の部分加群と見做す．そして集合 $\mathcal{S}$ を

$$\mathcal{S} := \left\{ N \in \mathbf{Mod}\text{-}R \;\middle|\; L \subset N \subset L',\, N/L \text{ は有限生成} \right\}$$

とおき，$\mathcal{S}$ 上の順序 $\leq$ を

$$\leq := \left\{ (N,\, N') \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \;\middle|\; N \subset N' \right\}$$

と定義する．さらに $\forall N,\, N' \in \mathcal{S}$ に対して集合

$$J(N,\, N') := \begin{cases} \{*_{N,\, N'}\}, & N \leq N' \\ \emptyset, & N \not\leq N' \end{cases}$$

を定義し，合成を

$$\circ\colon J(N',\, N'') \times J(N,\, N') \longrightarrow J(N,\, N''),$$
$$\begin{cases} (*_{N',\, N''},\, *_{N,\, N'}) \longmapsto *_{N,\, N''}, & N \le N' \le N'' \\ \text{empty map}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義すると $\left(\mathcal{S},\, \{\, J(N,\, N')\,\}_{N,\, N' \in \mathcal{S}}\right)$ はフィルタードな圏になる．$N \le N'$ のときの包含写像を $i_{N,\, N'}\colon N \hookrightarrow N'$ とかくと $\left(\{N\}_{N\in\mathcal{S}},\, \{i_{N,\, N'}\}_{N\le N'}\right)$ はフィルタードな圏 $\mathcal{S}$ 上の図式となり，命題**??**の形をした帰納極限 $\varinjlim_{N\in\mathcal{S}} N$ が定義される．このとき $\mathcal{S}$ の定義より $\forall x \in L'$ に対して $x \in xR + L$ だが $xR + L \in \mathcal{S}$ なので $\varinjlim_{N\in\mathcal{S}} N \cong \bigcup_{N\in\mathcal{S}} N = L'$ となる．ここで，帰納極限とテンソル積は可換だから $L' \otimes_R M \cong \varinjlim_{N\in\mathcal{S}} (N \otimes_R M)$ であり，命題**??**の記号を用いて

$$f \otimes 1_M \colon L \otimes_R M \longrightarrow L' \otimes_R M,\ x \longmapsto [x]$$

とかける．従って

$$x \in \mathrm{Ker}(f \otimes_R 1_M) \quad\Longleftrightarrow\quad [x] = [0] \quad\Longleftrightarrow\quad \exists N \in \mathcal{S},\ (i_{L,\, N} \otimes 1_M)(x) = 0$$

が言える．

以上の考察から，$\forall N \in \mathcal{S}$ に対して $\mathrm{Ker}(i_{L,\, N} \otimes 1_M) = \{0\}$ であること，i.e. $i_{L,\, N} \otimes 1_M$ が単射であることを示せば良いとわかった．さらに話を簡単にすると，L'/L が有限生成であるような任意の単射準同型写像 $f\colon L \longrightarrow L'$ に対して $f \otimes_R 1_M$ が単射になることを示せば良いということになる．このようなとき $L' = L + x_1R + \cdots + x_nR$ と書けるが，$0 \le i \le n$ に対して $L'_i := L + x_1R + \cdots + x_iR$ とおき，標準的包含を $f_i\colon L'_{i-1} \hookrightarrow L'_i$ と書くと，$f \otimes_R 1_M$ の単射性は各 i についての $f_i \otimes_R 1_M$ の単射性に帰着される．その上 $L'_i/L'_{i-1} = (x_i + L'_{i-1})R$ なので，結局 $L'/L = xR$ と書けるような場合に，任意の単射準同型 $f\colon L \longrightarrow L'$ に対して $f \otimes 1_M$ も単射となることを示しさえすれば良い．

さて，$L' = L + xR$ と仮定しよう．すると右 R 加群の準同型 $g\colon R \longrightarrow L'/L,\ a \longmapsto xa + L$ は全射であるから，準同型定理により同型 $\overline{g}\colon R/\operatorname{Ker} g \xrightarrow{\cong} L'/L$ が誘導される．このとき $I := \operatorname{Ker} g$ は右イデアルである．よって短完全列

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} L' \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$$

があるが，これを元に Tor の基本性質-(3) の長完全列を構成して 1 次から 0 次にかけた部分を取ることで完全列

$$\mathrm{Tor}_1^R(R/I,\, M) \longrightarrow L \otimes_R M \xrightarrow{f\otimes 1_M} L' \otimes_R M$$

が得られる（基本性質-(4) も使った）．ここに仮定 $\mathrm{Tor}_1^R(R/I,\, M) = 0$ を使って $f \otimes 1_M$ が単射であることが示された．

■

定義 4.17: 平坦分解

左 R 加群 M の**平坦分解** (flat resolution) とは，左 R 加群の**完全列**

$$\cdots \longrightarrow Q^{-1} \longrightarrow Q^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

であって，$\forall n \ge 0$ に対して Q^{-n} が平坦加群であるようなもののこと．

命題 4.24: 平坦分解と Tor

(1) 任意の左 R 加群 M およびその平坦分解 $Q^\bullet \longrightarrow M$ を与える．このとき，任意の右 R 加群 L に対して

$$\mathrm{Tor}_n^R(L,\, M) \cong H^{-n}(L \otimes_R Q^\bullet)$$

が成り立つ[a]．

(2) 左 R 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

であって，M_3 が平坦加群であるようなものを与える．このとき，任意の右 R 加群 L に対して

$$0 \longrightarrow L \otimes_R M_1 \longrightarrow L \otimes_R M_2 \longrightarrow L \otimes_R M_3 \longrightarrow 0$$

は $\mathbb{Z}$ 加群の短完全列となる．

(3) 左 R 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

であって，$M_2,\, M_3$（$M_1,\, M_3$）が平坦加群であるようなものを与える．このとき，M_1（M_2）もまた平坦加群である．

[a] 平坦加群は射影的加群とは限らない！

<u>証明</u>　(1) 命題 4.23 より，平坦加群は R-**Mod** の $L \otimes_R$ - 非輪状対象である．従って $Q^\bullet \longrightarrow M$ は M の $L \otimes_R$ - 非輪状分解であり，左導来関手の一般論から

$$\mathrm{Tor}_n^R(L,\, M) \cong H^{-n}(L \otimes_R Q^\bullet)$$

が成り立つ．

(2) Tor の基本性質-(2) の長完全列の一部をとってくると，完全列

$$\mathrm{Tor}_1^R(L,\, M_3) \longrightarrow L \otimes_R M_1 \longrightarrow L \otimes_R M_2 \longrightarrow L \otimes_R M_3 \longrightarrow 0$$

を得る．命題 4.23-(3) より $\mathrm{Tor}_1^R(L,\, M_3) = 0$ だから示された．

(3) $M_2,\, M_3$ が平坦加群とする．Tor の基本性質より完全列

$$\mathrm{Tor}_{n+1}^R(L,\, M_3) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(L,\, M_1) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(L,\, M_2)$$

があるが, 仮定と命題 4.23 より $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(L,\, M_3) = \mathrm{Tor}_n^R(L,\, M_2) = 0$ となる. よって $\mathrm{Tor}_n^R(L,\, M_1) = 0$ であり，命題 4.23 から M_1 が平坦加群であるとわかる．

■

4.3.4 Ext に関する小定理集

命題 4.25: Ext と直積

- 左 R 加群の族 $\{L_i\}_{i\in I}$ および左 R 加群 M を与える．このとき以下の同型が成り立つ：

$$\prod_{i\in I}\mathrm{Ext}^n_R(L_i,\,M)\cong\mathrm{Ext}^n_R\left(\bigoplus_{i\in I}L_i,\,M\right)$$

- 左 R 加群 L および左 R 加群の族 $\{M_i\}_{i\in I}$ を与える．このとき以下の同型が成り立つ：

$$\prod_{i\in I}\mathrm{Ext}^n_R(L,\,M_i)\cong\mathrm{Ext}^n_R\left(L,\,\prod_{i\in I}M_i\right)$$

命題 4.26: 単射的加群による Ext の特徴付け

任意の左 R 加群 M を与える．このとき以下は互いに同値である：

(1) M は単射的加群
(2) 任意の左 R 加群 L と $\forall n\geq 1$ に対して $\mathrm{Ext}^n_R(L,\,M)=0$
(3) 任意の左 R 加群 L に対して $\mathrm{Ext}^1_R(L,\,M)=0$
(4) 任意の R の左イデアル I に対して $\mathrm{Ext}^1_R(R/I,\,M)=0$

命題 4.27: 射影的加群による Ext の特徴付け

任意の左 R 加群 L を与える．このとき以下は互いに同値である：

(1) L は射影的加群
(2) 任意の左 R 加群 M と $\forall n\geq 1$ に対して $\mathrm{Ext}^n_R(L,\,M)=0$
(3) 任意の左 R 加群 M に対して $\mathrm{Ext}^1_R(L,\,M)=0$

4.4 導来関手

この節では $\mathcal{A},\mathcal{B}$ を充分射影的対象を持つアーベル圏とし，アーベル圏でも通用する証明を目指す．

4.4.1 左導来関手

定義 4.18:

$F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ を加法的関手とする．このとき $\forall A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ に対して $L_nF(A) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ を次のように対応づける：
A の射影的分解 $(P^\bullet,\, d^\bullet) \longrightarrow A$ をとり，

$$L_nF(A) \coloneqq H^{-n}\big(F(P^\bullet)\big)$$

とする．

命題 4.28: 左導来関手の定義と基本性質

(1) 定義 4.18 の $L_nF(A)$ は射影的分解の取り方によらない．また，射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,\, A')$ に対して自然に $L_nF(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\big(L_nF(A) \longrightarrow L_nF(A')\big)$ が定まり，この対応によって L_nF は関手 $L_nF\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ を定める．この関手を**左導来関手** (left derived functor) と呼ぶ．

(2) $\mathcal{A}$ における短完全列 $0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{f} A_2 \xrightarrow{g} A_3 \longrightarrow 0$ に対して，自然に長完全列

$$\begin{aligned}\cdots &\xrightarrow{\delta_{n+1}} L_nF(A_1) \xrightarrow{L_nF(f)} L_nF(A_2) \xrightarrow{L_nF(g)} L_nF(A_3)\\ &\xrightarrow{\delta_n} L_{n-1}F(A_1) \xrightarrow{L_{n-1}F(f)} L_{n-1}F(A_2) \xrightarrow{L_{n-1}F(g)} L_{n-1}F(A_3)\\ &\xrightarrow{\delta_{n-1}} \cdots\end{aligned}$$

が誘導される．この対応により関手の族 $\{L_nF\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ は関手

$$\mathbf{SES}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbf{ES}(\mathcal{B})$$

を定める．

(3) $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ が射影的ならば $L_{n\geq 1}F(A) = 0$

(4) 自然変換 $\tau\colon L_0F \longrightarrow F$ があり，F が右完全ならばこれは自然同値である．

(5) F が完全ならば $L_{n\geq 1}F(A) = 0,\ \forall A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$

命題 4.28 を示すために，2 つの補題を用意する．

補題 4.5:

- 射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,\, N)$
- 射影的対象の族 $(P^{-n})_{n\in\mathbb{Z}}$ によって構成された複体

$$\cdots \xrightarrow{d^{-(n+1)}} P^{-n} \xrightarrow{d^{-n}} P^{-(n-1)} \xrightarrow{d^{-(n-1)}} \cdots \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \xrightarrow{d} M \longrightarrow 0$$

- $\mathcal{A}$ における完全列

$$\cdots \xrightarrow{e^{-(n+1)}} Q^{-n} \xrightarrow{e^{-n}} Q^{-(n-1)} \xrightarrow{e^{-(n-1)}} \cdots \xrightarrow{e^{-1}} Q^0 \xrightarrow{e} N \longrightarrow 0$$

を与える．このとき，図式 4.4 を可換にする複体の射 $f^\bullet\colon P^\bullet \longrightarrow Q^\bullet$ がホモトピー**を除いて一意に存在**する．

$$
\begin{tikzcd}
P^\bullet \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f^\bullet"'] & M \arrow[d, "f"] \\
Q^\bullet \arrow[r, "e"] & N
\end{tikzcd}
$$

図 4.4

証明 **$f^\bullet$ の構成**

まず P^0 が射影的かつ $e\colon Q^0 \longrightarrow N$ が全射なので次の図式を可換にする f^0 が存在する：

$$
\begin{tikzcd}
 & P^0 \arrow[dl, dashed, "\exists f^0"'] \arrow[d, "f\circ d"] \\
Q^0 \arrow[r, "e"] & N
\end{tikzcd}
$$

このとき命題**??**より次の図式を可換にする $\overline{f^0}$ が存在する：

$$
\begin{tikzcd}
P^{-1} \arrow[r, "\operatorname{coim} d^{-1}"] & \operatorname{Ker} d \arrow[r, "\ker d"] \arrow[d, dashed, "\exists \overline{f^0}"] & P^0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f^0"] & M \arrow[d, "f"] \\
Q^{-1} \arrow[r, "\operatorname{coim} e^{-1}"] & \operatorname{Ker} e \arrow[r, "\ker e"] & Q^0 \arrow[r, "e"] & N
\end{tikzcd}
$$

$Q^\bullet$ の完全性より $\operatorname{coim} e^{-1}\colon Q^{-1} \longrightarrow \operatorname{Ker} e = \operatorname{Im} e^{-1}$ は全射である．これと P^{-1} が射影的であることを使うと次の図式を可換にする f^{-1} が存在する：

$$
\begin{tikzcd}
 & P^{-1} \arrow[dl, dashed, "\exists f^1"'] \arrow[d, "\overline{f^0}\circ \operatorname{coim}^{-1} d^{-1}"] \\
Q \arrow[r, "\operatorname{coim} e^{-1}"] & N
\end{tikzcd}
$$

この f^{-1} は，$d^{-1} = \ker d \circ \operatorname{coim} d^{-1}$, $e^{-1} = \ker e \circ \operatorname{coim} e^{-1}$ および上 2 つの図式の可換性から

$$
e^{-1} \circ f^{-1} = \ker e \circ (\operatorname{coim} e^{-1} \circ f^{-1}) = (\ker e \circ \overline{f^0}) \circ \operatorname{coim} d^{-1} = f^0 \circ \ker d \circ \operatorname{coim} d^{-1} = f^0 \circ d^{-1}
$$

を充し，図式 4.4 の該当する部分を可換にする．以上の議論を繰り返せばよい．

ホモトピーを除いて一意

もう一つの複体の射 $g^\bullet\colon P^\bullet \longrightarrow Q^\bullet$ が図式 4.4 を可換にするとする．
$\varphi^{-n} := f^{-n} - g^{-n}$ とおく．$e\circ\varphi^0 = e\circ f^0 - e\circ g^0 = f\circ d - f\circ d = 0$ なので，ある射 $\overline{h^0}\colon P^0 \longrightarrow \operatorname{Ker} e$ で $\ker e \circ \overline{h^0} = \varphi^0$ を充たすものがある：

$$
\begin{tikzcd}
 & & P^0 \arrow[dl, dashed, "\exists \overline{h^0}"'] \arrow[d, "\varphi^0"] & \\
Q^{-1} \arrow[r, "\operatorname{coim} e^{-1}"] & \operatorname{Ker} e \arrow[r, "\ker e"] & Q^0 \arrow[r, "e"] & N
\end{tikzcd}
$$

さらに $\operatorname{coim} e^{-1}$ は全射かつ P^0 が射影的なので次の図式を可換にする射 h^0 が存在する：

$$\begin{tikzcd}
 & & P^0 \arrow[dll, dashed, "\exists h^0"'] \arrow[dl, "\overline{h^0}"] \arrow[d, "\varphi^0"] & \\
Q^{-1} \arrow[r, "\operatorname{coim} e^{-1}"] & \operatorname{Ker} e \arrow[r, "\ker e"] & Q^0 \arrow[r, "e"] & N
\end{tikzcd}$$

このとき

$$e^{-1} \circ h^0 = \ker e \circ \operatorname{coim} e^{-1} \circ h^0 = \ker e \circ \overline{h^0} = \varphi^0$$

なので h^0 は 0 次のホモトピーである．
次に $\psi^{-1} \coloneqq \varphi^{-1} - h^0 \circ d^{-1}$ とおく．すると

$$e^{-1} \circ \psi^{-1} = e^{-1} \circ \varphi^{-1} - e^{-1} \circ h^0 \circ d^{-1} = \varphi^0 \circ d^{-1} - \varphi^0 \circ d^{-1} = 0$$

なので，ある射 $\overline{h^{-1}} \colon P^{-1} \longrightarrow \operatorname{Ker} e^{-1}$ で $\ker e^{-1} \circ \overline{h^{-1}} = \psi^{-1}$ を充たすものがある：

$$\begin{tikzcd}
 & & P^{-1} \arrow[dl, dashed, "\exists \overline{h^{-1}}"'] \arrow[d, "\psi^{-1}"] & \\
Q^{-2} \arrow[r, "\operatorname{coim} e^{-2}"] & \operatorname{Ker} e^{-1} \arrow[r, "\ker e^{-1}"] & Q^{-1} \arrow[r, "e^{-1}"] & Q^0
\end{tikzcd}$$

さらに $\operatorname{coim} e^{-2}$ は全射かつ P^{-1} が射影的なので次の図式を可換にする射 h^{-1} が存在する：

$$\begin{tikzcd}
 & & P^{-1} \arrow[dll, dashed, "\exists h^{-1}"'] \arrow[dl, "\overline{h^{-1}}"] \arrow[d, "\psi^{-1}"] & \\
Q^{-2} \arrow[r, "\operatorname{coim} e^{-2}"] & \operatorname{Ker} e^{-1} \arrow[r, "\ker e^{-1}"] & Q^{-1} \arrow[r, "e^{-1}"] & Q^0
\end{tikzcd}$$

このとき

$$e^{-2} \circ h^{-1} = \ker e^{-1} \circ \operatorname{coim} e^{-2} \circ h^{-1} = \ker e^{-1} \circ \overline{h^{-1}} = \psi^{-1}$$

が成り立つ．i.e.

$$\varphi^{-1} = \psi^{-1} + h^0 \circ d^{-1} = e^{-2} \circ h^{-1} + h^0 \circ d^{-1}$$

であり，h^{-1} が 1 次のホモトピーであることがわかった．あとは同様の議論を繰り返せばよい．

■

補題 4.6: Horseshoe lemma

- $\mathcal{A}$ における完全列 $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$
- 射影的分解 $(P^\bullet,\, d_P^\bullet) \xrightarrow{d_P} L \longrightarrow 0, \quad (R^\bullet,\, d_R^\bullet) \xrightarrow{d_R} N \longrightarrow 0$
- $Q^{-n} \coloneqq P^{-n} \oplus R^{-n}$

を与える．このとき以下の条件を充たす可換図式 4.5 が存在する：

(1) $(Q^\bullet,\, d_Q^\bullet) \xrightarrow{d_Q} M \longrightarrow 0$ は M の 射影的分解

(2) 1 行目は複体の完全列である．特に $\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$0 \longrightarrow P^{-n} \xrightarrow{f^{-n}} Q^{-n} \xrightarrow{g^{-n}} R^{-n} \longrightarrow 0 \quad \text{(exact)}$$

は，f^{-n} が $Q^{-n} = P^{-n} \oplus Q^{-n}$ の第 1 成分への標準的包含，g^{-n} が第 2 成分への標準的射影となる．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (P^\bullet,\, d_P^\bullet) \arrow[r, "f^\bullet"] \arrow[d, "d_P"] & (Q^\bullet,\, d_Q^\bullet) \arrow[r, "g^\bullet"] \arrow[d, "d_Q"] & (R^\bullet,\, d_R^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "d_R"] & 0 & \text{(exact)} \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 & \text{(exact)}
\end{tikzcd}$$

図 4.5

証明 $\mathrm{pr}^{-n} \colon Q^{-n} \longrightarrow P^{-n},\, (x,\, y) \longmapsto x$ とおく．g は全射かつ R^0 は射影的なので次の図式を可換にする射 $h^0 \colon R^0 \longrightarrow M$ が存在する：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P^0 \arrow[r, "f^0"] \arrow[d, "d_P"] & Q^0 \arrow[r, "g^0"] & R^0 \arrow[r] \arrow[d, "d_R"] \arrow[dl, dashed, "\exists h^0"'] & 0 & \text{(exact)} \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \text{(exact)} \\
 & 0 & & 0 & & \\
 & \text{(exact)} & & \text{(exact)} & &
\end{tikzcd}$$

ここで $d_Q \colon Q^0 \longrightarrow M$ を $d_Q \coloneqq f \circ d_P \circ \mathrm{pr}^0 + h^0 \circ g^0$ とおく．このとき直上の図式の可換性と行の完全性から

$$d_Q \circ f^0 = f \circ d_P \circ (\mathrm{pr}^0 \circ f^0) + h^0 \circ (g^0 \circ f^0) = f \circ d_P,$$
$$g \circ d_Q = (g \circ f) \circ d_P \circ \mathrm{pr}^0 + (g \circ h^0) \circ g^0 = d_R \circ g^0$$

が成立するので d_Q は可換性を崩さない．

また，上の図式に蛇の補題を適用すると 2 つの完全列

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Ker} d_P \longrightarrow \operatorname{Ker} d_Q \xrightarrow{\overline{g^0}} \operatorname{Ker} d_R \\
&\xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker} d_P \longrightarrow \operatorname{Coker} d_Q \operatorname{Coker} d_R
\end{aligned}
\tag{4.4.1}
$$

が得られるが，列の完全性から d_P, d_R が全射で $\operatorname{Coker} d_P = \operatorname{Coker} d_R = 0$ となるから，(4.4.1) から $\operatorname{Coker} d_Q = 0. \iff d_Q$ が全射であるとわかる．また，このとき $\overline{g^0}$ が全射になる．

一方，(??) と射影的分解の完全性より，次の図式を可換にする射 $h^{-1} \colon R^{-1} \longrightarrow \operatorname{Ker} d_Q$ が存在する[*3]：

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P^{-1} \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[d, "d_P"] & Q^{-1} \arrow[r, "g^{-1}"] & R^{-1} \arrow[r] \arrow[d, "d_R"] \arrow[dl, dashed, "\exists h^{-1}"'] & 0 & \text{(exact)} \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} d_P \arrow[r, "\overline{f^0}"] \arrow[d] & \operatorname{Ker} d_Q \arrow[r, "\overline{g^0}"] & \operatorname{Ker} d_R \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \text{(exact)} \\
 & 0 & & 0 & & \\
 & \text{(exact)} & & \text{(exact)} & &
\end{tikzcd}
$$

ここで $d'^{-1}_Q \colon Q^{-1} \longrightarrow \operatorname{Ker} d_Q$ を $d'^{-1}_Q \coloneqq \overline{f^0} \circ \operatorname{coim} d_P^{-1} \circ \operatorname{pr}^{-1} + h^{-1} \circ g^{-1}$ とおくと，$\overline{g^0} \circ \overline{f^0} = 0$ より

$$
\begin{aligned}
d'^{-1}_Q \circ f^{-1} &= \overline{f^0} \circ \operatorname{coim} d_P^{-1} \circ (\operatorname{pr}^{-1} \circ f^{-1}) + h^{-1} \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = \overline{f^0} \circ \operatorname{coim} d_P^{-1}, \\
\overline{g^0} \circ d'^{-1}_Q &= (\overline{g^0} \circ \overline{f^0}) \circ \operatorname{coim} d_P^{-1} \circ \operatorname{pr}^{-1} + (\overline{g^0} \circ h^{-1}) \circ g^{-1} = \operatorname{coim} d_R^{-1} \circ g^{-1}
\end{aligned}
$$

なので上の図式の可換性を崩さない．再び蛇の補題を適用すると d'^{-1}_Q が全射であることが言える．すると $d_Q^{-1} \coloneqq \ker d_Q \circ d'^{-1}_Q$ とおくことで図式

$$
Q^{-1} \xrightarrow{d_Q^{-1}} Q^0 \xrightarrow{d_Q} M \longrightarrow 0
$$

は完全列になる．以上の議論を繰り返すことで，性質 (1), (2) を充たす可換図式 4.5 が構成される． ■

系 4.7:

- $\mathcal{A}$ における図式 4.6
- 射影的分解

$$
\begin{aligned}
(P^\bullet, d_P^\bullet) &\xrightarrow{d_P} L \longrightarrow 0, \\
(R^\bullet, d_R^\bullet) &\xrightarrow{d_R} N \longrightarrow 0
\end{aligned}
$$

- $Q^{-n} \coloneqq P^{-n} \oplus R^{-n}, \quad Q'^{-n} \coloneqq P'^{-n} \oplus R'^{-n}$

を与える．このとき可換図式 4.7 が存在し，上 2 行と下 2 行はそれぞれ図式 4.6 の上の行と下の行から補題 4.6 の方法で構成したものになっている．

[*3] P^{-1} が射影的かつ $\overline{g^0}$ が全射なので．

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 & \text{(exact)} \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f'"] & M \arrow[r, "g'"] & N \arrow[r] & 0 & \text{(exact)}
\end{tikzcd}
$$

図 4.6

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (P^\bullet,\, d_P^\bullet) \arrow[r, "f^\bullet"] \arrow[d, "d_P"] \arrow[ddr, dashed, red, "\alpha^\bullet"] & (Q^\bullet,\, d_Q^\bullet) \arrow[r, "g^\bullet"] \arrow[d, "d_Q"] \arrow[ddr, dashed, red, "\beta^\bullet"] & (R^\bullet,\, d_R^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "d_R"] \arrow[ddr, dashed, red, "\gamma^\bullet"] & 0 & & \text{(exact)} \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[ddr, dashed, blue, "\alpha"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[ddr, dashed, blue, "\beta"] & N \arrow[r] \arrow[ddr, dashed, blue, "\gamma"] & 0 & & \text{(exact)} \\
& 0 \arrow[r] & (P'^\bullet,\, d_{P'}^\bullet) \arrow[r, "f'^\bullet"] \arrow[d, "d_P"] & (Q'^\bullet,\, d_{Q'}^\bullet) \arrow[r, "g'^\bullet"] \arrow[d, "d'_Q"] & (R'^\bullet,\, d_{R'}^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "d_{R'}"] & 0 & \text{(exact)} \\
& 0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "f'"] & M' \arrow[r, "g'"] & N' \arrow[r] & 0 & \text{(exact)}
\end{tikzcd}
$$

図 4.7

証明 [?, 命題 3.21] を参照 ■

ここまでの準備の下，命題 4.28 を示そう：

証明 (1) $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ の二つの射影的分解 $(P^\bullet,\, d^\bullet) \xrightarrow{d} A,\ (Q^\bullet,\, e^\bullet) \xrightarrow{e} A$ をとると，補題 4.5 より複体の射 $\varphi^\bullet \colon P^\bullet \longrightarrow Q^\bullet,\ \psi^\bullet \colon Q^\bullet \longrightarrow P^\bullet$ であって $e \circ \varphi = d,\ d \circ \psi = e$ を充たすものが存在して

$$\psi \circ \varphi \simeq 1_{P^\bullet}, \quad \varphi \circ \psi \simeq 1_{Q^\bullet}$$

となる．加法的関手によってホモトピーは保存されるから

$$F(\psi) \circ F(\varphi) \simeq 1_{F(P^\bullet)}, \quad F(\varphi) \circ F(\psi) \simeq 1_{F(Q^\bullet)}$$

となり，

$$H^{-n}\bigl(F(\psi)\bigr) \circ H^{-n}\bigl(F(\varphi)\bigr) = 1_{H^{-n}(F(P^\bullet))}, \quad H^{-n}(F(\varphi)) \circ H^{-n}(F(\psi)) = 1_{H^{-n}(F(Q^\bullet))}$$

がわかる．i.e. $H^{-n}\bigl(F(P^\bullet)\bigr),\ H^{-n}\bigl(F(Q^\bullet)\bigr)$ は同型である．

$e \circ \varphi' = d$ を充たす別の複体の射 $\varphi' \colon P^\bullet \longrightarrow Q^\bullet$ があるとしても命題 4.5 より $\varphi \simeq \varphi'$ なので，$H^{-n}\bigl(F(P^\bullet)\bigr),\ H^{-n}\bigl(F(Q^\bullet)\bigr)$ の同型は φ の取り方に依らない．従って定義 4.18 の $L_n F(A) := H^{-n}\bigl(F(P^\bullet)\bigr)$ の右辺は A の射影的分解の取り方に依らない．

次に射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,\, A')$ がある場合を考える．$A,\ A'$ の射影的分解 $(P^\bullet,\, d^\bullet) \xrightarrow{d} A,\ (P'^\bullet,\, d'^\bullet) \xrightarrow{d'} A'$ をとると命題 4.5 より複体の射 $\varphi := P^\bullet \longrightarrow P'^\bullet$ で $d' \circ \varphi = f \circ d$ を充たすものがホモトピーを除い

て一意に定まる．このとき

$$H^{-n}\big(F(\varphi)\big) \colon L_nF(A) \longrightarrow L_nF(A')$$

が射 φ の取り方に依らずに定まる．

$$L_nF(1_A) = 1_{L_nF(A)},$$
$$L_nF(g \circ f) = L_nF(g) \circ L_nF(f)$$

も言えるので L_nF は関手である．

(2) 補題 4.6 より可換図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (P^\bullet,\, d_P^\bullet) \arrow[r, "f^\bullet"] \arrow[d, "d_P"] & (Q^\bullet,\, d_Q^\bullet) \arrow[r, "g^\bullet"] \arrow[d, "d_Q"] & (R^\bullet,\, d_R^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "d_R"] & 0 & \text{(exact)} \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "f"] & A_2 \arrow[r, "g"] & A_3 \arrow[r] & 0 & \text{(exact)}
\end{tikzcd}$$

で，$\forall n \geq 0$ に対して

$$0 \longrightarrow P^{-n} \xrightarrow{f^{-n}} Q^{-n} \xrightarrow{g^{-n}} R^{-n} \longrightarrow 0$$

が分裂完全列であり，全ての列が射影的分解となるようなものが存在する．加法的関手によって複体は保存されるので

$$0 \longrightarrow \big(F(P^\bullet),\, F(d_P^\bullet)\big) \longrightarrow \big(F(Q^\bullet),\, F(d_Q^\bullet)\big) \longrightarrow \big(F(R^\bullet),\, F(d_R^\bullet)\big) \longrightarrow 0$$

も完全列となるので，これのコホモロジー長完全列をとることで題意の長完全列を得る．

系 4.7 を使うと $\{L_nF\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が関手 $\mathbf{SES}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbf{ES}(\mathcal{A})$ を定めることもわかる．

(3) $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ が射影的ならば $A \xrightarrow{1_A} A$ が A の射影的分解になるので $n \geq 1$ に対して $L_nF(A) = H^{-n}(A) = 0$.

(4) A の射影的分解 $(P^\bullet,\, d^\bullet) \xrightarrow{d} A \longrightarrow 0$ をとると

$$F(d) \circ F(d^{-1}) = F(d \circ d^{-1}) = F(0) = 0$$

となる[*4]ので $F(d)$ は射

$$\operatorname{Coker} F(d^{-1}) \longrightarrow F(A)$$

を誘導するが，$L_0F(A) = \operatorname{Coker} F(d^{-1})$ であり，これが自然変換 $\tau \colon L_0F \longrightarrow F$ を定める．
F が右完全関手ならば

$$F(P^{-1}) \xrightarrow{F(d^{-1})} F(P^0) \xrightarrow{F(d)} F(A) \longrightarrow 0$$

が完全なので命題??-(2) より上述の射 $L_0F(A) \longrightarrow F(A)$ は同型となる．

(5) A の射影的分解 $(P^\bullet,\, d^\bullet) \xrightarrow{d} A \longrightarrow 0$ をとると F が完全関手ならば複体 $\{F(P^{-p}),\, F(d^{-p})\}_{p\geq 1}$ は完全になる．従って $n \geq 1$ に対して $L_nF(A) = H^{-n}(F(P^\bullet)) = 0$ となる．

■

[*4] 逆射ではない！

4.4.2　左 Cartan-Eilenberg 分解

次の命題は Künneth スペクトル系列を示す際に使う：

命題 4.29: 左 Cartan-Eilenberg 分解

$\mathcal{A}$ における複体 $(C^\bullet,\, d^\bullet)$ を任意に与える．このとき，ある二重複体からの射

$$(P^{\bullet,\,*},\, d_1^{\bullet,\,*},\, d_2^{\bullet,\,*}) \longrightarrow (C^\bullet,\, d^\bullet) \tag{4.4.2}$$

が存在して，

$$\begin{aligned}
Z^{-n,\,-m} &:= \operatorname{Ker} d_1^{-n,\,-m}, \\
B^{-n,\,-m} &:= \operatorname{Im} d_1^{-n-1,\,-m}, \\
H^{-n,\,-m} &:= Z^{-n,\,-m}/B^{-n,\,-m}
\end{aligned}$$

とおいたとき以下の条件を充たす：

(1) $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して $(P^{-n,\,\bullet},\, d_2^{-n,\,\bullet})$ は射影的分解.

(2) $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して，$d_2^{-n,\,-m}$ が引き起こす射による複体

$$\begin{aligned}
&(Z^{-n,\,-\bullet},\, d_{2,\,Z}^{-n,\,\bullet}), \\
&(B^{-n,\,-\bullet},\, d_{2,\,B}^{-n,\,\bullet}), \\
&(H^{-n,\,-\bullet},\, d_{2,\,H}^{-n,\,\bullet})
\end{aligned}$$

から定まる図式

$$\begin{aligned}
(Z^{-n,\,-\bullet},\, d_{2,\,Z}^{-n,\,\bullet}) &\longrightarrow \operatorname{Ker} d^{-n}, \\
(B^{-n,\,-\bullet},\, d_{2,\,B}^{-n,\,\bullet}) &\longrightarrow \operatorname{Im} d^{-n-1}, \\
(H^{-n,\,-\bullet},\, d_{2,\,H}^{-n,\,\bullet}) &\longrightarrow H^{-n}(C^\bullet)
\end{aligned}$$

が全て射影的分解.

(3) $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\begin{aligned}
C^{-n} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad P^{-n,\,\bullet} = 0, \\
H^{-n}(C^\bullet) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad H^{-n,\,\bullet} = 0.
\end{aligned}$$

<u>証明</u>　命題 4.5 より，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して射影的分解

$$(B^{-n,\,\bullet},\, d_{2,\,B}^{-n,\,\bullet}) \longrightarrow \operatorname{Im} d^{-n-1}, \tag{4.4.3}$$

$$(H^{-n,\,\bullet},\, d_{2,\,H}^{-n,\,\bullet}) \longrightarrow H^{-n}(C^\bullet) \tag{4.4.4}$$

をとることができる[*5]．これらと完全列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im} d^{-n-1} \xrightarrow{i^{-n}} \operatorname{Ker} d^{-n} \xrightarrow{\operatorname{coker} i^{-n}} H^{-n}(C^\bullet) \longrightarrow 0$$

[*5] この時点ではこのような記号でおいただけである.

に対して補題 4.6 を適用すると，$Z^{-n,\bullet} := B^{-n,\bullet} \oplus H^{-n,\bullet}$ とした可換図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (B^{-n,\bullet},\, d_{2,B}^{-n,\bullet}) \arrow[r, "i^{-n,\bullet}"] \arrow[d] & (Z^{-n,\bullet},\, d_{2,Z}^{-n,\bullet}) \arrow[r, "p^{-n,\bullet}"] \arrow[d] & (H^{-n,\bullet},\, d_{2,H}^{-n,\bullet}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \text{(exact)} \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Im} d^{-n-1} \arrow[r, "i^{-n}"] & \operatorname{Ker} d^{-n} \arrow[r, "\operatorname{coker} i^{-n}"] & H^{-n}(C^\bullet) \arrow[r] & 0 & \text{(exact)}
\end{tikzcd}$$

で，真ん中の列が射影的分解となるようなものが存在する．

一方，命題??-(3) より完全列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} d^{-n} \xrightarrow{\ker d^{-n}} C^{-n} \xrightarrow{\operatorname{coim} d^{-n}} \operatorname{Im} d^{-n} \longrightarrow 0$$

があるので，これと (4.4.3), (4.4.4) に補題 4.6 を適用すると，$Q^{-n,\bullet} := Z^{-n,\bullet} \oplus B^{-n+1,\bullet}$ とした可換図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (Z^{-n,\bullet},\, d_{2,Z}^{-n,\bullet}) \arrow[r, "\iota^{-n,\bullet}"] \arrow[d] & (Q^{-n,\bullet},\, d_{2,Q}^{-n,\bullet}) \arrow[r, "\pi^{-n,\bullet}"] \arrow[d] & (B^{-n+1,\bullet},\, d_{2,B}^{-n+1,\bullet}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \text{(exact)} \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} d^{-n} \arrow[r, "\ker d^{-n}"] & C^{-n} \arrow[r, "\operatorname{coim} d^{-n}"] & \operatorname{Im} d^{-n} \arrow[r] & 0 & \text{(exact)}
\end{tikzcd}$$

で真ん中の列が射影的分解となるようなものが存在する．ここで

$$d_{1,Q}^{-n,-m} := \iota^{-n+1,-m} \circ i^{-n+1,-m} \circ \pi^{-n,-m}$$

とおくと，上の図式の行の完全性より

$$\begin{aligned}
d_{1,Q}^{-n+1,-m} \circ d_{1,Q}^{-n,-m} &= (\iota^{-n+2,-m} \circ i^{-n+2,-m} \circ \pi^{-n+1,-m}) \circ (\iota^{-n+1,-m} \circ i^{-n+1,-m} \circ \pi^{-n,-m}) \\
&= \iota^{-n+2,-m} \circ i^{-n+2,-m} \circ (\pi^{-n+1,-m} \circ \iota^{-n+1,-m}) \circ i^{-n+1,-m} \circ \pi^{-n,-m} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.4.5}$$

が，射影的分解の完全性から

$$d_{2,Q}^{-n,-m+1} \circ d_{2,Q}^{-n,-m+1} = 0 \tag{4.4.6}$$

が，上の 2 つの図式の可換性から

$$\begin{aligned}
d_{2,Q}^{-n+1,-m} \circ d_{1,Q}^{-n,-m} &= (d_{2,Q}^{-n+1,-m} \circ \iota^{-n+1,-m}) \circ i^{-n+1,-m} \circ \pi^{-n,-m} \\
&= \iota^{-n+1,-m+1} \circ (d_{2,Z}^{-n+1,-m} \circ i^{-n+1,-m}) \circ \pi^{-n,-m} \\
&= \iota^{-n+1,-m+1} \circ i^{-n+1,-m+1} \circ (d_{2,B}^{-n+1,-m} \circ \pi^{-n,-m}) \\
&= (\iota^{-n+1,-m+1} \circ i^{-n+1,-m+1} \circ \pi^{-n,-m+1}) \circ d_{2,Q}^{-n,-m} \\
&= d_{1,Q}^{-n,-m+1} \circ d_{2,Q}^{-n,-m}
\end{aligned} \tag{4.4.7}$$

が従う．i.e. (4.4.5), (4.4.6), (4.4.7) より

$$(P^{\bullet,*},\, d_1^{\bullet,*},\, d_2^{\bullet,*}) := (Q^{\bullet,*},\, d_{1,Q}^{\bullet,*},\, (-1)^\bullet d_{2,Q}^{\bullet,*})$$

は $m > 0$ を見ると二重複体になり[*6]，$m = 0$ の部分から射 (4.4.2) が得られる．構成よりこの射は条件 (1), (2), (3) を充たす． ■

[*6] 符号については二重複体の定義の直下の注を参照．

4.4.3 右導来関手

$\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ に対して同様の議論をすれば右導来関手が得られる．ここでは結果だけ述べよう．
$\mathcal{A}$ を十分単射的対象を持つアーベル圏，$\mathcal{B}$ をアーベル圏とする．

定義 4.19:

$F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ をとする．このとき $\forall A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ に対して $R^nF(A) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ を次のように対応づける：
A の単射的分解 $A \longrightarrow (I^\bullet, d^\bullet)$ をとり，

$$R^nF(A) := H^n\big(F(I^\bullet)\big)$$

とする．

命題 4.30: 右導来関手の定義と基本性質

(1) 定義 4.19 の $R_nF(A)$ は射影的分解の取り方によらない．また，射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A')$ に対して自然に $R^nF(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\big(R^nF(A), R^nF(A')\big)$ が定まり，この対応によって L_nF は関手 $L_nF\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ になる．これを**右導来関手** (right derived functor) と呼ぶ．

(2) $\mathcal{A}$ における短完全列 $0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{f} A_2 \xrightarrow{g} A_3 \longrightarrow 0$ に対して，自然に長完全列

$$\begin{aligned}\cdots \xrightarrow{\delta^{n-1}} R^nF(A_1) &\xrightarrow{R^nF(f)} R^nF(A_2) \xrightarrow{R^nF(g)} R^nF(A_3)\\ &\xrightarrow{\delta^n} R^{n+1}F(A_1) \xrightarrow{R^{n+1}F(f)} R^{n+1}F(A_2) \xrightarrow{R^{n+1}F(g)} R^{n+1}F(A_3)\\ &\xrightarrow{\delta^{n+1}} \cdots\end{aligned}$$

が誘導される．この対応により関手の族 $\big\{R^nF\big\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ は関手

$$\mathbf{SES}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbf{ES}(\mathcal{B})$$

を定める．

(3) $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ が単射的ならば $R^{n\geq 1}F(A) = 0$

(4) 自然変換 $\tau\colon F \longrightarrow R^0F$ があり，F が右完全ならばこれは自然同値である．

(5) F が完全ならば $R^{n\geq 1}F(A) = 0,\ \forall A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$

これの証明には以下の 2 つの補題が必要になる：

補題 4.7:

- 射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,\, N)$
- 単射的対象の族 $\left(J^n\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ によって構成された複体

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\mathrm{e}} J^0 \xrightarrow{e^0} \cdots \xrightarrow{e^{n-1}} J^n \xrightarrow{e^n} J^{n+1} \xrightarrow{e^{n+1}} \cdots$$

- $\mathcal{A}$ における完全列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\mathrm{d}} I^0 \xrightarrow{d^0} \cdots \xrightarrow{d^{n-1}} I^n \xrightarrow{d^n} I^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \cdots \quad \text{(exact)}$$

を与える．このとき，以下の図式を可換にする複体の射 $f^\bullet\colon I^\bullet \longrightarrow J^\bullet$ がホモトピーを除いて一意に存在する：

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "f"'] & I^\bullet \arrow[d, "f^\bullet"] \\
N & J^\bullet
\end{tikzcd}$$

補題 4.8: Horseshoe lemma

- $\mathcal{A}$ における完全列 $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$
- 与えられた完全列の両端の加群の単射的分解 $L \xrightarrow{\mathrm{d}_I} (I^\bullet,\, d_I^\bullet)$, $N \xrightarrow{\mathrm{d}_K} (K^\bullet,\, d_K^\bullet)$

を与える．また，$J^n := I^n \oplus K^n$ とおく．このとき可換図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{d}_I"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\mathrm{d}_J"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{d}_K"] & 0 & \text{(exact)} \\
0 \arrow[r] & (I^\bullet,\, d_I^\bullet) \arrow[r, "f^\bullet"] & (J^\bullet,\, d_J^\bullet) \arrow[r, "g^\bullet"] & (K^\bullet,\, d_K^\bullet) \arrow[r] & 0 & \text{(exact)}
\end{tikzcd}$$

であって以下の条件を満たすものがある：

(1) 真ん中の列 $M \xrightarrow{\mathrm{d}_J} (J^\bullet,\, d_J^\bullet)$ は M の単射的分解である．

(2) 2 行目は複体の完全列である．

<u>証明</u> $\forall n \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned}
f^n\colon I^n &\longrightarrow J^n := I^n \oplus K^n,\; x \longmapsto (x,\, 0) \\
g^n\colon J^n &\longrightarrow K^n,\; (x,\, y) \longmapsto y \\
\mathrm{inj}_2^n\colon K^n &\longrightarrow J^n,\; y \longmapsto (0,\, y)
\end{aligned}$$

とおく．このとき

$$0 \longrightarrow I^n \xrightarrow{f^n} J^n \xrightarrow{g^n} K^n \longrightarrow 0$$

は完全列であり，かつ inj_2^n によって分裂する．

単射的分解の定義より I^0 は単射的対象なので，以下の図式を可換にする $h^0\colon M \longrightarrow I^0$ が存在する：

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{d}_I"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[dl, dashed, red, "h^0"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{d}_K"] & 0 & \text{(exact)} \\
0 \arrow[r] & I^0 \arrow[r, "f^0"] & J^0 \arrow[r, "g^0"] & K^0 \arrow[r] & 0 & \text{(exact)}
\end{tikzcd}
$$

このとき

$$
\mathrm{d}_J \coloneqq \mathrm{inj}_2^0 \circ \mathrm{d}_K \circ g + f^0 \circ h^0 \colon M \longrightarrow J^0
$$

と定義すると

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}_J \circ f &= \mathrm{inj}_2^0 \circ \mathrm{d}_K \circ \cancel{g \circ f} + f^0 \circ h^0 \circ f = f^0 \circ \mathrm{d}_I, \\
g^0 \circ \mathrm{d}_J &= \underbrace{g^0 \circ \mathrm{inj}_2^0}_{=\mathrm{id}_{K^0}} \circ \mathrm{d}_K \circ g + \cancel{g^0 \circ f^0} \circ h^0 = \mathrm{d}_K \circ g
\end{aligned}
$$

であり，図式

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{d}_I"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\mathrm{d}_J"] \arrow[dl, dashed, red, "h^0"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{d}_J"] & 0 & \text{(exact)} \\
0 \arrow[r] & I^0 \arrow[r, "f^0"] & J^0 \arrow[r, "g^0"] & K^0 \arrow[r] & 0 & \text{(exact)} \\
 & \text{(exact)} & & \text{(exact)} & &
\end{tikzcd}
$$

は可換．よって蛇の補題が使えて完全列

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}_I \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\mathrm{d}_J \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\mathrm{d}_K \\
&\xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}\,\mathrm{d}_I \longrightarrow \mathrm{Coker}\,\mathrm{d}_J \longrightarrow \mathrm{Coker}\,\mathrm{d}_K
\end{aligned}
$$

を得るが，図式の縦の完全性から $\mathrm{d}_I, \mathrm{d}_K$ は単射なので $\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}_J = 0$, i.e. 図式の真ん中の列の完全性も言える．

M の単射的分解の，$n = 1$ の部分の構成をする．I^1 は単射的対象なので以下の図式を可換にする $h^1 \colon J^0/\,\mathrm{Im}\,\mathrm{d}_J \longrightarrow J^1$ が存在する[*7]：

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I^0/\,\mathrm{Im}\,\mathrm{d}_I \arrow[r, "\overline{f^0}"] \arrow[d, "\mathrm{im}\, d_I^0"] & J^0/\,\mathrm{Im}\,\mathrm{d}_J \arrow[r, "\overline{g}"] \arrow[dl, dashed, red, "h^1"] & K^0/\,\mathrm{Im}\,\mathrm{d}_K \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{im}\, d_K^0"] & 0 & \text{(exact)} \\
0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r, "f^1"] & J^1 \arrow[r, "g^0"] & K^1 \arrow[r] & 0 & \text{(exact)}
\end{tikzcd}
$$

ここで

$$
\delta_J^0 \coloneqq \mathrm{inj}_2^1 \circ \mathrm{im}\, d_K^0 \circ \overline{g} + f^1 \circ h^1 \colon J^0/\,\mathrm{Im}\,\mathrm{d}_J \longrightarrow J^1
$$

[*7] 単射的分解の完全性により $I^0/\,\mathrm{Im}\,\mathrm{d}_I = I^0/\,\mathrm{Ker}\, d_I^0 \cong \mathrm{Im}\, d_I^0$ なので，縦の $\mathrm{im}\, d_I^0 \colon I^0/\,\mathrm{Im}\,\mathrm{d}_I \longrightarrow I^1$ と言うのは包含写像 $\mathrm{Im}\, d_I^0 \hookrightarrow I^1$ のことである．これは明らかに単射．

と定義すると

$$
\begin{aligned}
\delta_J^0 \circ \overline{f} &= \mathrm{inj}_2^1 \circ \operatorname{im} d_K^0 \circ \cancel{\overline{g} \circ \overline{f}} + f^1 \circ h^1 \circ f = f^1 \circ \delta_I^0, \\
g^0 \circ \delta_J^0 &= \underbrace{g^0 \circ \mathrm{inj}_2^1}_{=\mathrm{id}_{K^1}} \circ \operatorname{im} d_K^0 \circ \overline{g} + \cancel{g^0 \circ f^1} \circ h^1 = \delta_K^0 \circ \overline{g}
\end{aligned}
$$

なので，図式

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & I^0/\operatorname{Im}\mathrm{d}_I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\operatorname{im} d_I^0"] & I^0/\operatorname{Im}\mathrm{d}_J \arrow[r, "\overline{g}"] \arrow[d, "\delta_J^0"] \arrow[dl, dashed, "h^0"'] & N/\operatorname{Im}\mathrm{d}_K \arrow[r] \arrow[d, "\operatorname{im} d_J^0"] & 0 & (\text{exact}) \\
0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r, "f^1"] & J^1 \arrow[r, "g^1"] & K^1 \arrow[r] & 0 & (\text{exact}) \\
 & (\text{exact}) & & (\text{exact}) & &
\end{tikzcd}
$$

は可換．よって蛇の補題から δ_J^0 が単射であるとわかり，$d_J^0 \coloneqq \delta_J^0 \circ \operatorname{coker} \mathrm{d}_J \colon J^0 \longrightarrow J^1$ とおくと

$$
0 \longrightarrow M \xrightarrow{\mathrm{d}_J} J^0 \xrightarrow{d_J^0} J^1
$$

は完全列になっている．以上の議論を繰り返せば M の単射的分解が得られる． ■

4.4.4 右 Cartan-Eilenberg 分解

命題 4.31: 右 Cartan-Eilenberg 分解

$\mathcal{A}$ における複体 $(C^\bullet,\, d^\bullet)$ を任意に与える．このとき，ある二重複体への射

$$
(C^\bullet,\, d^\bullet) \longrightarrow (I^{\bullet,\,*},\, d_1^{\bullet,\,*},\, d_2^{\bullet,\,*}) \tag{4.4.8}
$$

が存在して，

$$
\begin{aligned}
Z^{n,\,m} &\coloneqq \operatorname{Ker} d_1^{n,\,m}, \\
B^{n,\,m} &\coloneqq \operatorname{Im} d_1^{n-1,\,m}, \\
H^{n,\,m} &\coloneqq Z^{n,\,m}/B^{n,\,m}
\end{aligned}
$$

とおいたとき以下の条件を充たす：

(1) $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して $C^n \longrightarrow (I^{n,\,\bullet},\, d_2^{n,\,\bullet})$ は単射的分解.

(2) $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して，$d_2^{n,\,m}$ が引き起こす射による複体

$$
\begin{aligned}
&(Z^{n,\,\bullet},\, d_{2,\,Z}^{n,\,\bullet}), \\
&(B^{n,\,\bullet},\, d_{2,\,B}^{n,\,\bullet}), \\
&(H^{n,\,\bullet},\, d_{2,\,H}^{n,\,\bullet})
\end{aligned}
$$

から定まる図式

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} d^n &\longrightarrow (Z^{n,\bullet},\ d_{2,\,Z}^{n,\bullet}) \\ \operatorname{Im} d^{n-1} &\longrightarrow (B^{n,\bullet},\ d_{2,\,B}^{n,\bullet}) \\ H^n(C^\bullet) &\longrightarrow (H^{n,\bullet},\ d_{2,\,H}^{n,\bullet}) \end{aligned}$$

が全て単射的分解.

(3) $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\begin{aligned} C^n = 0 \quad &\Longrightarrow \quad I^{n,\bullet} = 0, \\ H^n(C^\bullet) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad H^{n,\bullet} = 0. \end{aligned}$$

証明 命題 4.15 より，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して単射的分解

$$\operatorname{Im} d^{n-1} \longrightarrow (B^{n,\bullet},\ d_{2,\,B}^{n,\bullet}), \tag{4.4.9}$$

$$H^n(C^\bullet) \longrightarrow (H^{n,\bullet},\ d_{2,\,H}^{n,\bullet}) \tag{4.4.10}$$

をとることができる[*8]．これらと完全列[*9]

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im} d^{n-1} \xrightarrow{i^n} \operatorname{Ker} d^n \xrightarrow{\operatorname{coker} i^n} H^n(C^\bullet) \longrightarrow 0$$

に対して補題 4.8 を適用すると，$Z^{n,\bullet} := B^{n,\bullet} \oplus H^{n,\bullet}$ とした可換図式

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \operatorname{Im} d^{n-1} \arrow[r, "i^n"] \arrow[d] & \operatorname{Ker} d^n \arrow[r, "\operatorname{coker} i^n"] \arrow[d] & H^n(C^\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & 0 & (\text{exact}) \\ 0 \arrow[r] & (B^{n,\bullet},\ d_{2,\,B}^{n,\bullet}) \arrow[r, "i^{n,\bullet}"] & (Z^{n,\bullet},\ d_{2,\,Z}^{n,\bullet}) \arrow[r, "p^{n,\bullet}"] & (H^{n,\bullet},\ d_{2,\,H}^{n,\bullet}) \arrow[r] & 0 & (\text{exact}) \end{tikzcd}$$

で，真ん中の列が単射的分解となるようなものが存在する．

一方，完全列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} d^n \xrightarrow{\ker d^n} C^n \xrightarrow{\operatorname{coim} d^n} \operatorname{Im} d^n \longrightarrow 0$$

がある[*10]ので，これと単射的分解 (4.4.9), (4.4.10) に補題 4.8 を適用すると，$Q^{n,\bullet} := Z^{n,\bullet} \oplus B^{n+1,\bullet}$ とした可換図式

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} d^n \arrow[r, "\ker d^n"] \arrow[d] & C^n \arrow[r, "\operatorname{coim} d^n"] \arrow[d] & \operatorname{Im} d^n \arrow[r] \arrow[d] & 0 & (\text{exact}) \\ 0 \arrow[r] & (Z^{n,\bullet},\ d_{2,\,Z}^{n,\bullet}) \arrow[r, "\iota^{n,\bullet}"] & (Q^{n,\bullet},\ d_{2,\,Q}^{n,\bullet}) \arrow[r, "\pi^{-n,\bullet}"] & (B^{n+1,\bullet},\ d_{2,\,B}^{n+1,\bullet}) \arrow[r] & 0 & (\text{exact}) \end{tikzcd}$$

[*8] この時点ではこのような記号でおいただけである．

[*9] $\operatorname{coker} i^n \colon \operatorname{Ker} d^n \longrightarrow \operatorname{Coker} i^n$ は標準射影

[*10] $\operatorname{coim} d^n \colon C^n \longrightarrow C^n / \operatorname{Ker} d^n \cong \operatorname{Im} d^n$ は標準的射影.

で真ん中の列が単射的分解となるようなものが存在する．ここで

$$d_{1,Q}^{n,m} := \iota^{n+1,m} \circ i^{n+1,m} \circ \pi^{n,m}$$

とおいて

$$(I^{\bullet,*},\, d_1^{\bullet,*},\, d_2^{\bullet,*}) := (Q^{\bullet,*},\, d_{1,Q}^{\bullet,*},\, (-1)^{\bullet} d_{2,Q}^{\bullet,*})$$

と定義すればこれは二重複体になっていることが確認でき，$m=0$ の部分から所望の二重複体の射 (4.4.8) が得られる．構成よりこの射は条件 (1), (2), (3) を充たす．■

4.5　スペクトル系列

同型 (4.3.5), (4.3.6) を示すためにスペクトル系列を考察する．また，Künneth スペクトル系列を構成することで普遍係数定理を証明する．

(2023/5/11) この節は未完である．

4.5.1　filtration とスペクトル系列の定義

この節では $\mathcal{A}$ をアーベル圏とするが，Mitchell の埋め込み定理を用いて $\mathcal{A} = R\text{-}\mathbf{Mod}$ の場合のみを考えることも多い．まずアーベル圏における filtration の概念を導入する．

定義 4.20: フィルター付け

(1) $\forall E \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ を 1 つとる．E の**フィルター付け** (filtration) とは，
- $\mathcal{A}$ の対象の族 $\left(F^p E\right)_{p\in\mathbb{Z}}$
- 単射の族 $\left(i^p\colon F^{p+1}E \longrightarrow F^p E\right)_{p\in\mathbb{Z}}$
- 単射の族 $\left(\iota^p\colon F^p E \longrightarrow E\right)_{p\in\mathbb{Z}}$

の 3 つ組であって，

$$\iota^p \circ i^p = \iota^{p+1}$$

を充たすもののことを言う．

(2) 4 つ組み

$$\left(E,\, \left(F^pE\right)_{p\in\mathbb{Z}},\, \left(i^p\colon F^{p+1}E \longrightarrow F^pE\right)_{p\in\mathbb{Z}},\, \left(\iota^p\colon F^pE \longrightarrow E\right)_{p\in\mathbb{Z}}\right)$$

のことをアーベル圏 $\mathcal{A}$ における**フィルター付けされた対象** (filtered object) と呼ぶ．

(3) filtration が**有限** (finite) であるとは，ある $p_0, p_1 \in \mathbb{Z}$ が存在して ι^{p_0} が同型，ι^{p_1} が零写像となること．このとき

$$F^pE = \begin{cases} E, & p \le p_0 \\ 0, & p \ge p_1 \end{cases}$$

となる．

filtration や filtered object のことをそれぞれ

$$\left(F^p E\right)_{p\in\mathbb{Z}}, \quad \left(E,\, \left(F^p E\right)_{p\in\mathbb{Z}}\right)$$

と略記する．

定義 4.20 の単射 ι^p により F^pE は E の部分対象となる．特に $\mathcal{A} = R\text{-}\mathbf{Mod}$ のとき，左 R 加群 E の filtration $\left(F^p E\right)_{p\in\mathbb{Z}}$ とは，E の部分加群の列

$$\cdots \subset F^{p+1}E \subset F^pE \subset F^{p-1}E \subset \cdots$$

のことである．

複体の圏 $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ もアーベル圏なので，複体 $(E^\bullet,\, d^\bullet)$ の filtration$\left(F^p E^\bullet\right)_{p\in\mathbb{Z}}$ を考えることができる．$\mathcal{A} = R\text{-}\mathbf{Mod}$ のとき，それは

- $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対する E^n の filtration

  $$\cdots \subset F^{p+1}E^n \subset F^pE^n \subset F^{p-1}E^n \subset \cdots$$

  であって，
- $\forall n,\, p \in \mathbb{Z}$ に対して

  $$d^n(F^pE^n) \subset F^pE^{n+1}$$

  が成り立つ

もののこと．

次に，スペクトル系列を定義する．この定義は [?, 定義 3.49] によるものであり，収束を比較的簡単に扱うことができる．

定義 4.21: スペクトル系列

アーベル圏 $\mathcal{A}$ における**スペクトル系列** (spectral sequence) とは，次の 5 つ組みのことを言う：

(1) $\mathcal{A}$ の対象の族 $\left(E_r^{p,\,q}\right)_{p,\,q,\,r\in\mathbb{Z},\, r\geq 1}$

(2) $\mathcal{A}$ の**有限にフィルター付けされた対象**の族 $\left(E^n,\, \left(F^pE^n\right)_{p\in\mathbb{Z}}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$

(3) 射の族 $\left(d_r^{p,\,q} \colon E_r^{p,\,q} \longrightarrow E_r^{p+r,\,q-r+1}\right)_{p,\,q,\,r\in\mathbb{Z},\, r\geq 1}$

(4) 同型

$$\operatorname{Ker} d_r^{p,\,q} / \operatorname{Im} d_r^{p-r,\,q+r-1} \xrightarrow{\cong} E_{r+1}^{p,\,q}$$

(5) 同型

$$E_\infty^{p,\,q} \xrightarrow{\cong} F^pE^{p+q}/F^{p+1}E^{p+q}$$

ただし，(3) の射は以下の条件を充たす：

(SS1) $\forall p,\, q,\, r \in \mathbb{Z},\ r \geq 1$ に対して

$$d_r^{p,\,q} \circ d_r^{p-r,\,q+r-1} = 0.$$

(SS2) $\forall p,\, q \in \mathbb{Z}$ に対してある $r_0 \geq 1$ が存在し，

$$r \geq r_0 \quad \Longrightarrow \quad d_r^{p,\,q} = d_r^{p-r,\,q+r-1} = 0.$$

また，$E_\infty^{p,\,q}$ は次のように決める：

- 条件 **(SS1)** により射 $\mathrm{im}\, d_r^{p-r,\,q+r-1}$ は自然に単射

$$\mathrm{Im}\, d_r^{p-r,\,q+r-1} \longrightarrow \mathrm{Ker}\, d_r^{p,\,q}$$

を誘導する．条件 **(SS2)** を充たす $\forall r \geq r_0$ において，この単射は零写像

$$0 \longrightarrow E_r^{p,\,q} \quad (\forall p,\, q \in \mathbb{Z})$$

となる．
- (4) の同型は，条件 **(SS2)** を充たす $\forall r \geq r_0$ に対しては

$$\mathrm{Ker}\, d_r^{p,\,q} = E_r^{p,\,q} \cong E_{r+1}^{p,\,q}$$

になる．このとき

$$E_\infty^{p,\,q} := E_{r_0}^{p,\,q} = E_{r_0+1}^{p,\,q} = \cdots$$

と定義する．

! 定義 4.21 を，ある $r \geq 1$ を固定して

$$\boldsymbol{E_r^{p,\,q} \Longrightarrow E^{p+q}}$$

と略記することがある．

- $E_r^{p,\,q}$ をスペクトル系列の $\boldsymbol{E_r}$ **項**
- $E_\infty^{p,\,q}$ をスペクトル系列の $\boldsymbol{E_\infty}$ **項**
- E^n のことをスペクトル系列の **極限**

と言う．また，$r \geq 1$ が条件

$$\forall p,\, q \in \mathbb{Z},\ \forall s \geq r,\ d_s^{p,\,q} = 0$$

を充たすとき，スペクトル系列は $\boldsymbol{E_r}$ **退化**すると言う．

4.5.2 完全対によるスペクトル系列の構成

2 重複体は filtration を持つので，スペクトル系列が定まる．このような状況を一般化すると有界な次数 1 の二重次数付き完全対の概念に到達する．

まず，完全対と導来対を定義する：

定義 4.22: 完全対

アーベル圏 $\mathcal{A}$ を考える．

- $D,\ E \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$
- $i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(D,\ D)$
- $j \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(D,\ E)$
- $k \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(E,\ D)$

の 5 つ組み $(D,\ E,\ i,\ j,\ k)$ が **完全対** (exact couple) であるとは，

$$\mathrm{Im}\, i = \mathrm{Ker}\, j, \quad \mathrm{Im}\, j = \mathrm{Ker}\, k, \quad \mathrm{Im}\, k = \mathrm{Ker}\, i$$

を充たすことを言う（可換図式 4.8）．

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "i"] & & D \arrow[dl, "j"] \\ & E \arrow[ul, "k"] & \end{tikzcd}$$

図 4.8: 完全対

Mitchell の埋め込み定理によりアーベル圏 $\mathcal{A} = R\text{-}\mathbf{Mod}$ として考える．

命題 4.32: 導来対

$(D,\ E,\ i,\ j,\ k)$ を $\mathcal{A}$ における完全対とする．このとき

$$\begin{aligned} D' &:= \mathrm{Im}\, i, \\ E' &:= \mathrm{Coker}\bigl(\mathrm{Im}(j \circ k) \longrightarrow \mathrm{Ker}(j \circ k)\bigr), \\ i' &:= i|_{D'} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(D',\ D') \end{aligned}$$

とおく[a]．すると射

$$\begin{aligned} &j' \colon D' \longrightarrow E',\ a \longmapsto j(b) + \mathrm{Im}(j \circ k) \qquad {}^{\mathrm{w}/}\ b \in i^{-1}(\{a\}) \\ &k' \colon E' \longrightarrow D',\ a + \mathrm{Im}(j \circ k) \longmapsto k(a) \end{aligned}$$

は well-defined で，5 つ組み $(D',\ E',\ i',\ j',\ k')$ は完全対である．

[a] $k \circ j = 0$ なので，自然に単射 $\mathrm{Im}(j \circ k) \longrightarrow \mathrm{Ker}(j \circ k)$ が誘導される．

証明 $\mathcal{A} = R\text{-}\mathbf{Mod}$ として示せばよい．$\mathrm{Im}\, i' = \mathrm{Im}\, i^2$ に注意する．

well-definedness

別の $b' \in i^{-1}(\{a\})$ を任意にとると

$$i(b' - b) = i(b') - i(b) = a - a = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad b' - b \in \mathrm{Ker}\, i = \mathrm{Im}\, k$$

が成り立つので $j(b') \in j(b) + \operatorname{Im}(j \circ k)$，i.e. j' は well-defined.

一方，別の $a' \in a + \operatorname{Im}(j \circ k)$ はある $c \in E$ を用いて $a' = a + j\bigl(k(c)\bigr)$ と書けるので，$\operatorname{Im} j = \operatorname{Ker} k$ より

$$k(a') = k(a) + k\bigl(j(k(c))\bigr) = k(a)$$

がいえる．i.e. k' は well-defined.

完全対であること

$\operatorname{Im} i' = \operatorname{Ker} j'$

$\forall x \in \operatorname{Im} i'$ は，ある $y \in D$ を用いて $x = i\bigl(i(y)\bigr)$ と書けるので

$$j'(x) = j\bigl(i(i(y))\bigr) + \operatorname{Im}(j \circ k) = \operatorname{Im}(j \circ k) \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \operatorname{Ker} j'$$

i.e. $\operatorname{Im} i' \subset \operatorname{Ker} j'$ が言えた．

$\forall x \in \operatorname{Ker} j'$ をとると $y \in D$ を用いて $x = i(y)$ と書ける．このとき $j'(x) = \operatorname{Im}(j \circ k)$．i.e. $j(y) \in \operatorname{Im}(j \circ k)$ が成り立つ．故にある $z \in E$ が存在して $j(y) = j\bigl(k(z)\bigr)$ と書ける．このとき $y - k(z) \in \operatorname{Ker} j = \operatorname{Im} i$ なので

$$x = i(y) - i\bigl(k(z)\bigr) = i\bigl(y - k(z)\bigr) \in \operatorname{Im} i^2 = \operatorname{Im} i'$$

i.e. $\operatorname{Ker} j' \subset \operatorname{Im} i'$ もわかった．

$\operatorname{Im} j' = \operatorname{Ker} k'$

$\forall j'(x) \in \operatorname{Im} j'$ は，$y \in i^{-1}(\{x\})$ を用いて $j'(x) = j(y) + \operatorname{Im}(j \circ k)$ と書かれる．このとき

$$k'\bigl(j'(x)\bigr) = k\bigl(j(y)\bigr) = 0$$

なので $j'(x) \in \operatorname{Ker} k'$．i.e. $\operatorname{Im} j' \subset \operatorname{Ker} k'$ が示された．

一方，$\forall x + \operatorname{Im}(j \circ k) \in \operatorname{Ker} k'$ $^{\mathrm{w}/}$ $x \in \operatorname{Ker}(j \circ k)$ に対して $k(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \operatorname{Ker} k = \operatorname{Im} j$ が成り立つ．故にある $y \in D$ を用いて $x = j(y)$ と書かれるので

$$x + \operatorname{Im}(j \circ k) = j(y) + \operatorname{Im}(j \circ k) = j'\bigl(i(y)\bigr).$$

i.e. $\operatorname{Ker} k' \subset \operatorname{Im} j'$ が言えた．

$\operatorname{Im} k' = \operatorname{Ker} i'$

$\forall x \in \operatorname{Im} k'$ はある $y \in \operatorname{Ker}(j \circ k)$ を用いて $x = k'(y + \operatorname{Im}(j \circ k)) = k(y)$ と書ける．従って $i'(x) = i\bigl(k(y)\bigr) = 0$．i.e. $\operatorname{Im} k' \subset \operatorname{Ker} i'$.

一方，$\forall x \in \operatorname{Ker} i'$ はある $y \in D$ を用いて $x = i(y)$ と書けて，さらに $i(y) \in \operatorname{Ker} i = \operatorname{Im} k$ なのである $z \in E$ を用いて $x = i(y) = k(z)$ と書ける．このとき $j\bigl(k(z)\bigr) = j\bigl(i(y)\bigr) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z \in \operatorname{Ker}(j \circ k)$ なので $x = k'(z + \operatorname{Im}(j \circ k)) \in \operatorname{Im} k'$．i.e. $\operatorname{Ker} i' \subset \operatorname{Im} k'$ が言えた．

■

定義 4.23: 導来対

- 命題 4.32 の 5 つ組み $(D',\, E',\, i',\, j',\, k')$ は完全対 $(D,\, E,\, i,\, j,\, k)$ の**導来対** (derived couple) と呼ばれる．
- $r \geq 1$ に対して，完全対 $(D,\, E,\, i,\, j,\, k)$ から導来対を作る操作を $r-1$ 回繰り返してできる完全対を $(D,\, E,\, i,\, j,\, k)$ の**第 r 導来対**と呼ぶ．

完全対 $(D,\ E,\ i,\ j,\ k)$ の第 r 導来対を直接定めることもできる．$r \geq 1$ を 1 つとって固定する．

$$D_r \coloneqq \operatorname{Im} i^{r-1}$$

とおき，ファイバー積を使って

$$Z_r \coloneqq \prod_{D,\ A \in \{\operatorname{Im} i^{r-1},\ E\}} A,$$

$$B_r \coloneqq \operatorname{Im}\bigl(\operatorname{Ker} i^{r-1} \xrightarrow{\ker i^{r-1}} D \xrightarrow{j} E\bigr)$$

と定める．

$$\begin{tikzcd}
\forall X \arrow[r, "g_1"] \arrow[dd, dashed, "\exists! g"'] \arrow[ddr] & \operatorname{Im} i^{r-1} \arrow[dr, "\operatorname{im} i^{r-1}"] & \\
 & & D \\
Z_r \arrow[r, "p_2"] \arrow[uur, "p_1"] & E \arrow[ur, "k"] &
\end{tikzcd}$$

図 4.9: ファイバー積による Z_r の定義

補題 4.9:

$\mathcal{A} = R$-**Mod** のとき，

$$Z_r = k^{-1}(\operatorname{Im} i^{r-1}), \quad B_r = j(\operatorname{Ker} i^{r-1})$$

<u>**証明**</u> $B_r = j(\operatorname{Ker} i^{r-1})$ は $\ker i^{r-1}$ が包含写像であることから明らか．

図式 4.10 において $Z_r = k^{-1}(\operatorname{Im} i^{r-1})$，$p_1 = k$ とし，p_2 は包含写像 $\iota\colon k^{-1}(\operatorname{Im} i^{r-1}) \hookrightarrow E$ とする．すると $\forall x \in k^{-1}(\operatorname{Im} i^{r-1})$ に対して $k(x) \in \operatorname{Im} i^{r-1}$ だから $k(x) = \operatorname{im} i^{r-1}\bigl(k(x)\bigr)$ であり

$$k\bigl(p_2(x)\bigr) = k(x) = \operatorname{im} i^{r-1}\bigl(p_1(x)\bigr)$$

が成り立つ．

次に，$\forall X \in R$-**Mod** および集合

$$\bigl\{\, (g_1,\ g_2) \in \operatorname{Hom}_R(X,\ \operatorname{Im} i^{r-1}) \times \operatorname{Hom}_R(X,\ E) \bigm| \operatorname{im} i^{r-1} \circ g_1 = k \circ g_2 \,\bigr\}$$

の任意の元 $(g_1,\ g_2)$ をとる．このとき $\operatorname{im} i^{r-1}$ は包含写像なので $g_1 = k \circ g_2$ であり，$\operatorname{Im} g_2 \subset k^{-1}(\operatorname{Im} i^{r-1})$ とわかる．故に $g_2 = \iota \circ g_2$．ここで $p_i \circ g_2 = p_i \circ g' \quad (i = 1,\ 2)$ を充たす別の $g' \in \operatorname{Hom}_R\bigl(X,\ k^{-1}(\operatorname{Im} i^{r-1})\bigr)$ をとると，$p_2 = \iota$ が単射であることから $g_2 = g'$．以上の考察から写像

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hom}_R\bigl(X,\ k^{-1}(\operatorname{Im} i^{r-1})\bigr) &\longrightarrow \bigl\{\, (g_1,\ g_2) \in \operatorname{Hom}_R(X,\ \operatorname{Im} i^{r-1}) \times \operatorname{Hom}_R(X,\ E) \bigm| \operatorname{im} i^{r-1} \circ g_1 = k \circ g_2 \,\bigr\} \\
g &\longmapsto \bigl(p_i \circ g\bigr)_{i=1,\ 2} = \bigl(k \circ g,\ \iota \circ g\bigr)
\end{aligned}$$

が全単射であることがわかった．i.e. $k^{-1}(\operatorname{Im} i^{r-1}) = \prod_{D,\ A \in \{\operatorname{Im} i^{r-1},\ E\}} A$ である．

■

このとき合成射

$$B_r \xrightarrow{\mathrm{im}(j\circ\ker i^{r-1})} E \xrightarrow{k} D$$

は零写像となる[*11]ので，B_r が自然に Z_r の部分対象になる．

<u>**証明**</u> Mitchell の埋め込み定理によって $\mathcal{A} = R\text{-}\mathbf{Mod}$ の場合に確認すればよい．このとき

$$Z_r = k^{-1}(\mathrm{Im}\, i^{r-1}), \quad B_r = j(\mathrm{Ker}\, i^{r-1})$$

であるから，$\forall x \in B_r$ をとってくると，ある $y \in \mathrm{Ker}\, i^{r-1}$ が存在して $x = j(y)$ と書ける．よって $k(x) = k\bigl(j(y)\bigr) = 0 \in \mathrm{Im}\, i^{r-1}$ なので $x \in Z_r$ でもある．i.e. $B_r \subset Z_r$． ■

自然な単射 $B_r \longrightarrow Z_r$ に対して

$$E_r \coloneqq \mathrm{Coker}(B_r \longrightarrow Z_r)$$

と定める．

命題 4.33: 第 r 導来対の同型

記号を上述の通りとし，さらに

$$i_r \coloneqq i|_{D_r} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(D_r,\, D_r)$$

とおく．すると射

$$\begin{aligned} j_r &\colon D_r \longrightarrow E_r,\ a \longmapsto j(b) + B_r \qquad {}^{\mathrm{w}/}\ b \in (i^{r-1})^{-1}(\{a\}) \\ k_r &\colon E_r \longrightarrow D_r,\ a + B_r \longmapsto k(a) \end{aligned}$$

は well-defined であり，5 つ組み $(D_r,\, E_r,\, i_r,\, j_r,\, k_r)$ は完全対 $(D,\, E,\, i,\, j,\, k)$ の第 $\boldsymbol{r}$ 導来対と同型である．

<u>**証明**</u> **well-definedness**

別の $b' \in (i^{r-1})^{-1}(\{a\})$ を任意にとると

$$i^{r-1}(b'-b) = i^{r-1}(b') - i^{r-1}(b) = a - a = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad b' - b \in \mathrm{Ker}\, i^{r-1}$$

なので，$j(b') - j(b) \in j(\mathrm{Ker}\, i^{r-1}) = B_r$ が言える．i.e. j_r は well-defined.

一方，別の $a' \in Z_r$ であって $a' \in a + B_r$ を充たすものをとると $a' - a \in B_r$ より

$$k(a') - k(a) \in k(B_r) \subset \mathrm{Im}(k\circ j) = 0$$

なので k' も well-defined.

[*11] まず完全対の定義から $k\circ j = 0$ なので $k\circ j\circ \ker i^{r-1} = 0$ が成り立つ．Abel 圏における任意の射は coim と im の合成で書けるので $k\circ \mathrm{im}(j\circ\ker i^{r-1})\circ \mathrm{coim}(j\circ \ker i^{r-1}) = 0$ だが，coim は全射なので結局 $k\circ \mathrm{im}(j\circ\ker i^{r-1}) = 0$ が言えた．

同型であること

$r \geq 2$ とし，$(D_{r-1}, E_{r-1}, i_{r-1}, j_{r-1}, k_{r-1})$ の導来対 $(D'_{r-1}, E'_{r-1}, i'_{r-1}, j'_{r-1}, k'_{r-1})$ が $(D_r, E_r, i_r, j_r, k_r)$ と同型であることを示す．また，Mitchell の埋め込み定理によって $\mathcal{A} = R\text{-}\mathbf{Mod}$ の場合に示せばよい．まず定義から即座に

$$D_r = D'_r = \operatorname{Im} i^{r-1},$$
$$i_r = i'_r = i|_{\operatorname{Im} i^{r-1}}$$

が従う．

$\boldsymbol{E_r \cong E'_{r-1}}$

示すべきは

$$E_r = Z_r/B_r \cong \operatorname{Ker}(j_{r-1} \circ k_{r-1})/\operatorname{Im}(j_{r-1} \circ k_{r-1}) = E'_{r-1} \tag{4.5.1}$$

である．そのために全射

$$g\colon Z_r \longrightarrow \operatorname{Ker}(j_{r-1} \circ k_{r-1})/\operatorname{Im}(j_{r-1} \circ k_{r-1})$$

であって，$\operatorname{Ker} g = B_r$ を充たすものを構成する．

$$f\colon Z_r \longrightarrow E_{r-1},\ a \longmapsto a + B_{r-1}$$

と定める．$a \in Z_r = k^{-1}(\operatorname{Im} i^{r-1})$ なので，ある $b \in D$ があって $k(a) = i^{r-1}(b)$ を充たす．すると

$$(j_{r-1} \circ k_{r-1})\big(f(a)\big) = j_{r-1}\big(k(a)\big) = j\big(i(b)\big) + B_{r-1} = B_{r-1}.$$

i.e. $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker}(j_{r-1} \circ k_{r-1})$ である．よって次のような射を定義できる：

$$\begin{aligned} g\colon Z_r &\longrightarrow \operatorname{Ker}(j_{r-1} \circ k_{r-1})/\operatorname{Im}(j_{r-1} \circ k_{r-1}), \\ a &\longmapsto f(a) + \operatorname{Im}(j_{r-1} \circ k_{r-1}) = (a + B_{r-1}) + \operatorname{Im}(j_{r-1} \circ k_{r-1}) \end{aligned}$$

g は全射

$\forall a + B_{r-1} \in \operatorname{Ker}(j_{r-1} \circ k_{r-1})$ を一つとる．$\operatorname{Ker}(j_{r-1} \circ k_{r-1}) \subset E_{r-1} = Z_{r-1}/B_{r-1}$ なので $a \in Z_{r-1}$ であるから，ある $b \in D$ が存在して $k(a) = i^{r-2}(b)$ と書ける．また，$(j_{r-1} \circ k_{r-1})(a + B_{r-1}) = j\big(b\big) + B_{r-1} = B_{r-1}$ なので $j(b) \in B_{r-1} = j(\operatorname{Ker} i^{r-2})$ である．故にある $c \in \operatorname{Ker} i^{r-2}$ が存在して $j(b) = j(c)$ と書ける．すると

$$j(b-c) = j(b) - j(c) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad b - c \in \operatorname{Ker} j = \operatorname{Im} i$$

となるのである $d \in D$ が存在して $b - c = i(d)$ と書ける．すると

$$k(a) = i^{r-2}(b) = i^{r-2}(b) - i^{r-2}(c) = i^{r-2}(b-c) = i^{r-1}(d) \in \operatorname{Im} i^{r-1}$$

なので $a \in Z_r$ が言えた．i.e. g は全射である．

$\boldsymbol{\operatorname{Ker} g \subset B_r}$

$\forall a \in \operatorname{Ker} g$ を一つとる．すると $a + B_{r-1} \in \operatorname{Im}(j_{r-1} \circ k_{r-1})$ だから，ある $b \in Z_{r-1}$ と $c \in D$ が存在して $k(b) = i^{r-2}(c)$ かつ $a - j(c) \in B_{r-1}$ を充たす．i.e. ある $d \in \operatorname{Ker} i^{r-2}$ が存在して $j(d) = a - j(c)$ を充たす．よって $a = j(c+d)$ と書けるが，

$$i^{r-1}(c+d) = i\big(i^{r-2}(c)\big) + i\big(i^{r-2}(d)\big) = i\big(k(b)\big) = 0 \quad\Longrightarrow\quad a \in j(\operatorname{Ker} i^{r-1}) = B_r$$

とわかる．i.e. $\operatorname{Ker} g \subset B_r$ が言えた．

$\mathrm{Ker}\, g \supset B_r$

$\forall a \in B_r$ を一つとると，ある $b \in \mathrm{Ker}\, i^{r-1}$ を用いて $a = j(b)$ と書ける．$i^{r-2}(b) \in \mathrm{Ker}\, i = \mathrm{Im}\, k$ だからある $c \in E$ があって $i^{r-2}(b) = k(c)$ と書けるが，このとき $c \in k^{-1}(\mathrm{Im}\, i^{r-2}) = Z_{r-1}$ である．よって

$$(j_{r-1} \circ k_{r-1})(c + B_{r-1}) = j_{r-1}\bigl(k(c)\bigr) = j_{r-1}\bigl(i^{r-2}(b)\bigr) = j(b) + B_{r-1} = a + B_{r-1}$$

i.e. $a + B_{r-1} \in \mathrm{Im}(j_{r-1} \circ k_{r-1})$ であり，$\mathrm{Ker}\, g \supset B_r$ が言えた．

このようにして構成された g に準同型定理を使うことで目的の同型 (4.5.1) が示された．

$j_r = j'_{r-1}$

g によって誘導される同型を

$$\begin{aligned} \psi \colon E_r &\xrightarrow{\cong} E'_{r-1}, \\ a + B_r &\longmapsto (a + B_{r-1}) + \mathrm{Im}(j_{r-1} \circ k_{r-1}) \end{aligned}$$

とおくと $j'_{r-1} = \psi \circ j_r$ である．

$k_r = k'_{r-1}$

同様に $k'_{r-1} \circ \psi = k_r$ がわかる．

■

二重次数付き完全対を定義する：

定義 4.24: 二重次数付き完全対

$r_0 \geq 1$ とする．

- $\mathcal{A}$ の対象の族 $\bigl(D^{p,\,q}\bigr)_{p,\,q\in\mathbb{Z}}$, $\bigl(E^{p,\,q}\bigr)_{p,\,q\in\mathbb{Z}}$
- $\mathcal{A}$ の射の族

$$\begin{aligned} &\bigl(i^{p,\,q} \colon D^{p,\,q} \longrightarrow D^{p-1,\,q+1}\bigr)_{p,\,q\in\mathbb{Z}}, \\ &\bigl(j^{p,\,q} \colon D^{p,\,q} \longrightarrow E^{p+r_0-1,\,q-r_0+1}\bigr)_{p,\,q\in\mathbb{Z}}, \\ &\bigl(k^{p,\,q} \colon E^{p,\,q} \longrightarrow D^{p+1,\,q}\bigr)_{p,\,q\in\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

を与える．このとき，5 つ組み $\Bigl((D^{p,\,q}),\, (E^{p,\,q}),\, (i^{p,\,q}),\, (j^{p,\,q}),\, (k^{p,\,q})\Bigr)$ が次数 r_0 の **二重次数付き完全対** (bigraded exact couple) であるとは，$\forall p,\, q \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\, i^{p,\,q} &= \mathrm{Ker}\, j^{p-1,\,q+1}, \\ \mathrm{Im}\, j^{p,\,q} &= \mathrm{Ker}\, k^{p+r_0-1,\,q-r_0+1}, \\ \mathrm{Im}\, k^{p,\,q} &= \mathrm{Ker}\, i^{p+1,\,q} \end{aligned}$$

が成り立つこと．

二重次数付き完全対が**有界**であるとは,

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \exists p_0,\ p_1 \in \mathbb{Z} \quad \text{s.t.} \quad p_0 \geq p_1,$$
$$p \geq p_0 \quad \Longrightarrow \quad D^{p,\, n-p} = 0,$$
$$p \leq p_1 \quad \Longrightarrow \quad i^{p,\, n-p} \text{ が同型}$$

が成り立つこと.

補題 4.10:

$\mathcal{A}$ 上の二重次数付き完全対 $\Big((D^{p,\,q}),\ (E^{p,\,q}),\ (i^{p,\,q}),\ (j^{p,\,q}),\ (k^{p,\,q}) \Big)$ を与える.

(1) $\mathcal{A} = R\text{-}\mathbf{Mod}$ とすると

$$\left(\bigoplus_{p,\,q} D^{p,\,q},\ \bigoplus_{p,\,q} E^{p,\,q},\ \bigoplus_{p,\,q} i^{p,\,q},\ \bigoplus_{p,\,q} j^{p,\,q},\ \bigoplus_{p,\,q} k^{p,\,q} \right)$$

は完全対である.

(2) $\mathcal{A}$ における有向グラフ $(\mathbb{Z},\ \leq)$ 上の図式

$$\left(\left(D^{-p,\,n+p}\right)_{p\in\mathbb{Z}},\ \left(\iota_{p,\,p'} \colon D^{-p,\,n+p} \longrightarrow D^{-p',\,n+p'}\right)_{(p,\,p')\in\mathbb{Z}^2,\,p\leq p'} \right)$$

を次のように定める：

$$\iota_{p,\,p'} \coloneqq i^{-(p'-1),\,n+(p'-1)} \circ \cdots \circ i^{-p,\,n+p}.$$

このとき，与えられた二重次数付き完全対が有界ならば，充分大きな $p_\infty \in \mathbb{Z}$ をとると

$$\varinjlim_{p\in\mathbb{Z}} D^{-p,\,n+p} = D^{-p_\infty,\,n+p_\infty}$$

が成り立つ.

(2) において $E^n \coloneqq \varinjlim_{p\in\mathbb{Z}} D^{-p,\,n+p}$ とおき，標準的包含を $\iota^{p,\,q} \colon D^{p,\,q} \longrightarrow E^{p+q}$ と書いて

$$F^pE \coloneqq \mathrm{Im}\left(\iota^{p,\,n-p} \colon D^{p,\,n-p} \longrightarrow E^n\right)$$

と定義すると，$\left(E^n,\ (F^pE^n)_{p\in\mathbb{Z}}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ は filtrered object になる.

証明 (1) 明らか

(2) 二重次数付き完全対 $\Big((D^{p,\,q}),\ (E^{p,\,q}),\ (i^{p,\,q}),\ (j^{p,\,q}),\ (k^{p,\,q}) \Big)$ の有界性から，ある $p_\infty \in \mathbb{Z}$ が存在して $\forall p \geq p_\infty$ に対して $\iota_{p_\infty,\,p}$ は同型となる．ここで $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ および集合

$$\left\{ \left(f_p\right)_{p\in\mathbb{Z}} \in \prod_{\pi\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\left(D^{-p,\,n+p},\ X\right) \,\middle|\, \forall p,\ p' \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } p \leq p',\quad f_{p'} \circ \iota_{p,\,p'} = f_p \right\}$$

の勝手な元 $\left(f_p\right)_{p\in\mathbb{Z}}$ をとる．すると $\forall p \in \mathbb{Z}$ に対して

$$f_p = f_{p_\infty} \circ \iota_{p,\, p_\infty}$$

が成り立つ．

$g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\left(D^{-p_\infty,\, n+p_\infty},\, X\right)$ であって，$\forall p \in \mathbb{Z}$ に対して $g \circ \iota_{p,\, p_\infty} = f_p$ を充たすものをもう一つとる．ここで $g \neq f_{p_\infty}$ と仮定すると，$\forall p \geq p_\infty$ に対して

$$f_{p_\infty} \neq g = f_p \circ \left(\iota_{p,\, p_\infty}\right)^{-1} = f_{p_\infty}$$

となり矛盾．従って $g = f_{p_\infty}$ がわかった．これは写像

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\left(D^{-p_\infty,\, n+p_\infty},\, X\right) \longrightarrow \left\{ \left(f_p\right)_{p\in\mathbb{Z}} \in \prod_{\pi\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\left(D^{-p,\, n+p},\, X\right) \,\middle|\, \forall p,\, p' \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } p \leq p', \quad f_{p'} \circ \iota_{p,\, p'} = f_p \right\},$$

$$g \longmapsto \left(g \circ \iota_{p,\, p_\infty}\right)_{p\in\mathbb{Z}}$$

が全単射であることを意味する．i.e. $\varinjlim_{p\in\mathbb{Z}} D^{-p,\, n+p} = D^{-p_\infty,\, n+p_\infty}$ である．

■

二重次数付き完全対の導来対を考えることもできる：

命題 4.34: 二重次数付き完全対の導来対

次数 r_0 の二重次数付き完全対 $\left(\left(D^{p,\,q}\right),\, \left(E^{p,\,q}\right),\, \left(i^{p,\,q}\right),\, \left(j^{p,\,q}\right),\, \left(k^{p,\,q}\right)\right)$ を与える．

$$\begin{aligned} D'^{p,\,q} &:= \mathrm{Im}\, i^{p+1,\, q-1}, \\ Z'^{p,\,q} &:= \mathrm{Ker}(j^{p+1,\,q} \circ k^{p,\,q}), \\ B'^{p,\,q} &:= \mathrm{Im}(j^{p-r_0+1,\, q+r_0-1} \circ k^{p-r_0,\, q+r_0-1}) \end{aligned}$$

とおくと自然な単射 $B'^{p,\,q} \longrightarrow Z'^{p,\,q}$ がある．この単射を使って

$$E'^{p,\,q} := \mathrm{Coker}(B'^{p,\,q} \longrightarrow Z'^{p,\,q})$$

とおく．さらに

$$(D,\, E,\, i,\, j,\, k) := \left(\bigoplus_{p,\,q} D^{p,\,q},\, \bigoplus_{p,\,q} E^{p,\,q},\, \bigoplus_{p,\,q} i^{p,\,q},\, \bigoplus_{p,\,q} j^{p,\,q},\, \bigoplus_{p,\,q} k^{p,\,q}\right)$$

の導来対を $(D',\, E',\, i',\, j',\, k')$ とおいて

$$\begin{aligned} i'^{p,\,q} &:= i'|_{D'^{p,\,q}}, \\ j'^{p,\,q} &:= j'|_{D'^{p,\,q}}, \\ k'^{p,\,q} &:= k'|_{E'^{p,\,q}} \end{aligned}$$

と定めると well-defined である．このとき 5 つ組み

$$\left(\left(D'^{p,\,q}\right),\, \left(E'^{p,\,q}\right),\, \left(i'^{p,\,q}\right),\, \left(j'^{p,\,q}\right),\, \left(k'^{p,\,q}\right)\right)$$

は次数 $r_0 + 1$ の二重次数付き完全対である（**導来対**）．

次数 r_0 の二重次数付き完全対 $\Bigl((D^{p,\,q}),\,(E^{p,\,q}),\,(i^{p,\,q}),\,(j^{p,\,q}),\,(k^{p,\,q})\Bigr)$ から導来対を得る操作を $r-1$ 回繰り返してできる次数 r_0+r-1 の二重次数付き完全対を**第 r 導来対**と呼ぶ.

<u>証明</u> まず二重次数付き完全対の定義から $k^{p,\,q}\circ j^{p-r_0+1,\,q+r_0-1}=0$ が成り立つので $B'^{p,\,q}$ は $Z'^{p,\,q}$ の部分対象であり，自然な単射 $B'^{p,\,q}\longrightarrow Z'^{p,\,q}$ がある.

以下では Mitchell の埋め込み定理より $\mathcal{A}=R\text{-}\mathbf{Mod}$ として考える．補題 4.10-(1) より $(D,\,E,\,i,\,j,\,k)$ は完全対である．$(D',\,E',\,i',\,j',\,k')$ をその導来対とすると，帰納極限同士が交換することから

$$
\begin{aligned}
D' &= \operatorname{Im}\Bigl(\bigoplus_{p,\,q} i^{p,\,q}\Bigr)=\bigoplus_{p,\,q}\operatorname{Im} i^{p,\,q}=\bigoplus_{p,\,q} D'^{p,\,q},\\
E' &= \bigoplus_{p,\,q} E'^{p,\,q}
\end{aligned}
$$

となる．また，

$$
\begin{aligned}
i'(D'^{p,\,q}) &\subset D'^{p-1,\,q+1},\\
j'(D'^{p,\,q}) &\subset E'^{p+r_0,\,q-r_0},\\
k'(E'^{p,\,q}) &\subset D'^{p+1,\,q}
\end{aligned}
$$

が成り立つので

$$
(D',\,E',\,i',\,j',\,k')=\Bigl(\bigoplus_{p,\,q} D'^{p,\,q},\,\bigoplus_{p,\,q} E'^{p,\,q},\,\bigoplus_{p,\,q} i'^{p,\,q},\,\bigoplus_{p,\,q} j'^{p,\,q},\,\bigoplus_{p,\,q} k'^{p,\,q}\Bigr)
$$

である． ■

完全対の第 r 導来対の場合と同様にして，二重次数付き完全対 $\Bigl((D^{p,\,q}),\,(E^{p,\,q}),\,(i^{p,\,q}),\,(j^{p,\,q}),\,(k^{p,\,q})\Bigr)$ の第 r 導来対を直接定めることもできる．簡単のため，<u>二重次数付き完全対の次数は 1 とする</u>.

まず記号として，射

$$
i^{p,\,q}\colon D^{p,\,q}\longrightarrow D^{p-1,\,q+1}
$$

を上手く $r-1$ 回合成した写像

$$
i^{p+1,\,q-1}\circ i^{p+2,\,q-2}\circ\cdots\circ i^{p+(r-1),\,q-(r-1)}\colon D^{p+(r-1),\,q-(r-1)}\longrightarrow D^{p,\,q}
$$

のことを $(i^{p,\,q})^{r-1}$ と略記する．そして

$$
D_r^{p,\,q}:=\operatorname{Im}\Bigl((i^{p,\,q})^{r-1}\colon D^{p+(r-1),\,q-(r-1)}\longrightarrow D^{p,\,q}\Bigr)
$$

とおく.

次に $E_r^{p,\,q}$ であるが，完全対の第 r 導来対の場合と同様にファイバー積を使って

$$
\begin{aligned}
Z_r &:= \prod_{D^{p+1,\,q},\,A\in\{\operatorname{Im}(i^{p+1,\,q})^{r-1},\,E^{p,\,q}\}} A,\\
B_r &:= \operatorname{Im}\Bigl(\operatorname{Ker}(i^{p-(r-1),\,q+(r-1)})^{r-1}\xrightarrow{\ker(i^{p-(r-1),\,q+(r-1)})^{r-1}} D^{p,\,q}\xrightarrow{j^{p,\,q}} E^{p,\,q}\Bigr)
\end{aligned}
$$

と定める．

$$\begin{tikzcd}
\forall X \arrow[r, "g_1"] \arrow[ddr] \arrow[dd, dashed, "\exists! g"'] & \mathrm{Im}(i^{p+1,\,q})^{r-1} \arrow[dr, "\mathrm{im}(i^{p+1,\,q})^{r-1}"] & \\
 & & D^{p+1,\,q} \\
Z_r^{p,\,q} \arrow[uur, "p_1"] \arrow[r, "p_2"] & E^{p,\,q} \arrow[ur, "k^{p,\,q}"] &
\end{tikzcd}$$

図 4.10: ファイバー積による $Z_r^{p,\,q}$ の定義

次の補題は補題 4.11 と同様に示される．

補題 4.11:

$\mathcal{A} = R$-**Mod** のとき，

$$Z_r^{p,\,q} = (k^{p,\,q})^{-1}\left(\mathrm{Im}(i^{p+1,\,q})^{r-1}\right), \quad B_r^{p,\,q} = j^{p,\,q}\left(\mathrm{Ker}(i^{p-(r-1),\,q+(r-1)})^{r-1}\right)$$

もとの二重次数付き完全対の次数が 1 なので $\mathrm{Im}\, j^{p,\,q} = \mathrm{Ker}\, k^{p,\,q}$ が成り立つことから，合成射

$$B_r \xrightarrow{\mathrm{im}\left(j^{p,\,q}\mathrm{oker}(i^{p-(r-1),\,q+(r-1)})^{r-1}\right)} E^{p,\,q} \xrightarrow{k^{p,\,q}} D^{p+1,\,q}$$

は零写像となり，B_r が自然に Z_r の部分対象になる．ここで，自然な単射 $B_r^{p,\,q} \longrightarrow Z_r^{p,\,q}$ に対して

$$E_r^{p,\,q} \coloneqq \mathrm{Coker}(B_r^{p,\,q} \longrightarrow Z_r^{p,\,q})$$

と定める．

射 $i_r^{p,\,q}$, $j_r^{p,\,q}$, $k_r^{p,\,q}$ は次のように定義する[*12]．まず

$$(D,\, E,\, i,\, j,\, k) \coloneqq \left(\bigoplus_{p,\,q} D^{p,\,q},\, \bigoplus_{p,\,q} E^{p,\,q},\, \bigoplus_{p,\,q} i^{p,\,q},\, \bigoplus_{p,\,q} j^{p,\,q},\, \bigoplus_{p,\,q} k^{p,\,q}\right)$$

*12 以降では $\mathcal{A} = R$-**Mod** とする．

とおくと，補題 4.10-(1) よりこれは完全対である．命題 4.33 を使うと，その第 r 導来対を直接構成できる[*13]：

$$
\begin{aligned}
D_r &:= \bigoplus_{p,\,q} \mathrm{Im}(i^{p,\,q})^{r-1}, \\
B_r &:= \bigoplus_{p,\,q} \mathrm{Im}\Big(\mathrm{Ker}\big(i^{p-(r-1),\,q+(r-1)}\big)^{r-1} \xrightarrow{\ker\left(i^{p-(r-1),\,q+(r-1)}\right)^{r-1}} D^{p,\,q} \xrightarrow{j^{p,\,q}} E^{p,\,q}\Big), \\
Z_r &:= \bigoplus_{p,\,q} (k^{p,\,q})^{-1}\big(\mathrm{Im}(i^{p+1,\,q})^{r-1}\big), \\
E_r &:= \mathrm{Coker}(B_r \hookrightarrow Z_r) = Z_r/B_r, \\
i_r &:= i|_{D_r} \colon D_r \longrightarrow D_r, \\
j_r &\colon D_r \longrightarrow E_r,\ \longmapsto j(b) + B_r \quad \text{w/}\ \ b \in (i^{r-1})^{-1}(\{a\}), && (4.5.2) \\
k_r &\colon E_r \longrightarrow D_r,\ a + B_r \longmapsto k(a) \quad \text{w/}\ \ a \in Z_r && (4.5.3)
\end{aligned}
$$

射 $i_r,\, j_r,\, k_r$ は直和 $\bigoplus_{p,\,q}$ の形をしているので，第 $p,\, q$ 成分を取り出して

$$
\begin{aligned}
i_r^{p,\,q} &:= i_r|_{D_r^{p,\,q}}, \\
j_r^{p,\,q} &:= j_r|_{D_r^{p,\,q}}, \\
k_r^{p,\,q} &:= k_r|_{E_r^{p,\,q}},
\end{aligned}
$$

とおく[*14]．このとき[*15]

$$
(D_r,\, E_r,\, i_r,\, j_r,\, k_r) := \left(\bigoplus_{p,\,q} D_r^{p,\,q},\, \bigoplus_{p,\,q} E_r^{p,\,q},\, \bigoplus_{p,\,q} i_r^{p,\,q},\, \bigoplus_{p,\,q} j_r^{p,\,q},\, \bigoplus_{p,\,q} k_r^{p,\,q}\right)
$$

なので，$\Big((D_r^{p,\,q}),\, (E_r^{p,\,q}),\, (i_r^{p,\,q}),\, (j_r^{p,\,q}),\, (k_r^{p,\,q})\Big)$ が次数 r の[*16]二重次数付き完全対だとわかる．さらに命題 4.33 の同型を使うことで次の命題が成り立つことが言える：

命題 4.35: 二重次数付き完全対の第 r 導来対の表示

記号を上述の通りとする．このとき，$\Big((D_r^{p,\,q}),\, (E_r^{p,\,q}),\, (i_r^{p,\,q}),\, (j_r^{p,\,q}),\, (k_r^{p,\,q})\Big)$ は $\Big((D^{p,\,q}),\, (E^{p,\,q}),\, (i^{p,\,q}),\, (j^{p,\,q}),\, (k^{p,\,q})\Big)$ の第 r 導来対と同型である．

次の定理は，有界な次数 1 の二重次数付き完全対が与えられると自然にスペクトル系列が構成されることを主張する：

[*13] フィルタードな帰納極限（i.e. 直和）と有限な射影極限（i.e. Ker）が可換であることを暗に使っている

[*14] より厳密には，i_r の定義域の制限は第 $(p,\, q)$ 成分への標準的包含 $\iota_{p,\,q} := D_r^{p,\,q} \hookrightarrow D_r$ を用いて $\iota_{p,\,q}(D_r^{p,\,q})$ とする．$j_r,\, k_r$ の制限も同様．

[*15] E_r に関しては，射影極限（i.e. 直和）と射影極限（i.e. Coker）が交換することを用いている．

[*16] 素材となる $\Big((D^{p,\,q}),\, (E^{p,\,q}),\, (i^{p,\,q}),\, (j^{p,\,q}),\, (k^{p,\,q})\Big)$ の次数は 1 としていたのだった．

定理 4.8: スペクトル系列の構成

次数 1 の 有界な 二重次数付き完全対 $\Big((D^{p,q}),\,(E^{p,q}),\,(i^{p,q}),\,(j^{p,q}),\,(k^{p,q})\Big)$ を与え，これの第 r 導来対を $\Big((D_r^{p,q}),\,(E_r^{p,q}),\,(i_r^{p,q}),\,(j_r^{p,q}),\,(k_r^{p,q})\Big)$ とおく．

$$d_r^{p,q} := j_r^{p+1,q} \circ k_r^{p,q} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\big(E_r^{p,q},\, E_r^{p+r,q-r+1}\big)$$

と定め，filtered object を補題 4.10-(2) の通りに定める．このとき，

(1) 対象の族 $(E_r^{p,q})$

(2) **有限に**フィルター付けされた対象の族 $\Big(E^n,\,(F^pE)_{p\in\mathbb{Z}}\Big)_{n\in\mathbb{Z}}$

(3) 射の族 $\big(d_r^{p,q}\colon E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r,q-r+1}\big)_{p,q,r\in\mathbb{Z},\,r\geq 1}$

はスペクトル系列

$$E_1^{p,q} \quad\Longrightarrow\quad E^{p+q}$$

を自然に定める．

証明 スペクトル系列の定義の条件と同型 (4), (5) を確認すればよい．$\mathcal{A} = R$-**Mod** として考える．

(SS1)

定義 (4.5.3) より，$\forall a + B_r^{p,q} \in E_r^{p,q}$ に対して

$$k_r^{p,q}(a + B_r^{p,q}) = k^{p,q}(a) \in \mathrm{Im}(i^{p+1,q})^{r-1}$$

が成り立つ．故に定義 (4.5.2) より，$b \in (i^{p+1,q})^{-1}(\{k^{p,q}(a)\}) \subset D^{p+r,q-r+1}$ を任意にとると

$$\begin{aligned}d_r^{p,q}(a + B_r^{p,q}) &= (j_r^{p+1,q} \circ k_r^{p,q})(a + B_r^{p,q}) = j_r\big(k^{p,q}(a)\big)\\ &= j^{p+r,q-r+1}(b) + B_r^{p+r,q-r+1} \in E^{p+r,q-r+1}\end{aligned}$$

となる．これと $\mathrm{Im}\, j^{p+r,q-r+1} = \mathrm{Ker}\, k^{p+r,q-r+1}$ より，

$$\begin{aligned}(d_r^{p+r,q-r+1} \circ d_r^{p,q})(a + B_r^{p,q}) &= (j_r^{p+r+1,q-r+1} \circ (k_r^{p+r,q-r+1} \circ j_r^{p+1,q}) \circ k_r^{p,q})(a + B_r^{p,q})\\ &= j_r^{p+r+1,q-r+1}\Big(k_r^{p+r,q-r+1}\big(j^{p+r,q-r+1}(b)\big)\Big) = 0\end{aligned}$$

i.e. $d_r^{p+r,q-r+1} \circ d_r^{p,q} = 0$ が示された．

(SS2)

与えられた二重次数付き完全対 $\Big((D^{p,q}),\,(E^{p,q}),\,(i^{p,q}),\,(j^{p,q}),\,(k^{p,q})\Big)$ が有界であるという仮定より，$p \gg 0$ および $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$D^{p,n-p} = D^{p+1,n-p} = 0$$

が成り立つ．従って

$$E^{p,n-p} = \mathrm{Ker}(k^{p,n-p}\colon E^{p,n-p} \longrightarrow 0) = \mathrm{Im}(j^{p,n-p}\colon 0 \longrightarrow E^{p,n-p}) = 0.$$

である．また，$p \ll 0$ に対して $i^{p+1,\,n-p}$, $i^{p+1,\,n-p-1}$ が同型，i.e. 単射かつ全射であるから

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} k^{p,\,n-p} &= \operatorname{Ker} i^{p+1,\,n-p} = 0,\\ \operatorname{Ker} j^{p,\,n-p} &= \operatorname{Im} i^{p+1,\,n-p-1} = D^{p,\,n-p}\end{aligned}$$

が成り立つ．故に

$$E^{p,\,n-p} = \operatorname{Ker} k^{p,\,n-p} = \operatorname{Im}(j^{p,\,n-p}\colon D^{p,\,n-p} \longrightarrow E^{p,\,n-p}) = 0$$

が言えた．

以上の考察から，$r \gg 0$ および $\forall (p,\,q) \in \mathbb{Z}^2$ に対して $E^{p+r,\,q-r+1} = E^{p-r,\,q+r-1} = 0$ がわかり，従って $d_r^{p,\,q} = d_r^{p-r,\,q+r-1} = 0$ である．

同型 (4)

二重次数付き完全対の第 r 導来対（これは次数 r の二重次数付き完全対である）から第 $r+1$ 導来対を構成する操作の定義より

$$E_{r+1}^{p,\,q} = \frac{\operatorname{Ker}(j_r^{p+1} \circ k_r^{p,\,q})}{\operatorname{Im}(j_r^{p-r+1,\,q+r-1} \circ k^{p-r,\,q+r-1})} = \frac{\operatorname{Ker} d_r^{p,\,q}}{\operatorname{Im} d_r^{p-r,\,q+r-1}}$$

が言えるが，これがまさに所望の同型である．

同型 (5)

与えられた二重次数付き完全対 $\bigl((D^{p,\,q}),\,(E^{p,\,q}),\,(i^{p,\,q}),\,(j^{p,\,q}),\,(k^{p,\,q})\bigr)$ が有界であるという仮定より，$r \gg 0$ および $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して $D^{p+r,\,q-r+1} = 0$ なので

$$\begin{aligned}&\operatorname{Im}\bigl((i^{p+1,\,q})^{r-1}\colon 0 \longrightarrow D^{p+1,\,q}\bigr) = 0.\\ \therefore\quad &Z_r^{p,\,q} = (k^{p,\,q})^{-1}(\{0\}) = \operatorname{Ker} k^{p,\,q}.\end{aligned} \tag{4.5.4}$$

また，補題 4.10 より $E^{p+q} = D^{p-r+1,\,q+r-1}$ なので

$$\begin{aligned}&\operatorname{Ker}\bigl((i^{p-r+1,\,q+r-1})^{r-1}\colon D^{p,\,q} \longrightarrow E^{p+q}\bigr) = \operatorname{Ker}(\iota^{p,\,q}\colon D^{p,\,q} \longrightarrow E^{p+q}).\\ \therefore\quad &B_r^{p,\,q} = j^{p,\,q}(\operatorname{Ker} \iota^{p,\,q}).\end{aligned} \tag{4.5.5}$$

(4.5.5), (4.5.4) より，十分大きな r および $\forall p,\,n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$E_r^{p,\,n-p} = \frac{Z_r^{p,\,n-p}}{B_r^{p,\,n-p}} = \frac{\operatorname{Ker} k^{p,\,n-p}}{j^{p,\,n-p}(\operatorname{Ker} \iota^{p,\,n-p})}$$

となることがわかった．従って示すべきは

$$E_r^{p,\,n-p} \cong \frac{F^p E^n}{F^{p+1} E^n} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{\operatorname{Ker} k^{p,\,n-p}}{j^{p,\,n-p}(\operatorname{Ker} \iota^{p,\,n-p})} \cong \frac{\operatorname{Im} \iota^{p,\,n-p}}{\operatorname{Im} \iota^{p+1,\,n-p-1}}$$

である．

ここで合成射

$$\begin{aligned}&f_1\colon D^{p,\,n-p} \xrightarrow{\iota^{p,\,n-p}} \operatorname{Im} \iota^{p,\,n-p} \twoheadrightarrow \frac{\operatorname{Im} \iota^{p,\,n-p}}{\operatorname{Im} \iota^{p+1,\,n-(p+1)}},\\ &f_2\colon D^{p,\,n-p} \xrightarrow{j^{p,\,n-p}} \operatorname{Im} j^{p,\,n-p} = \operatorname{Ker} k^{p,\,n-p} \twoheadrightarrow \frac{\operatorname{Ker} k^{p,\,n-p}}{j^{p,\,n-p}(\operatorname{Ker} \iota^{p,\,n-p})}\end{aligned}$$

を考えると，$f_1,\ f_2$ はどちらも全射で

$$\operatorname{Ker} f_1 = \operatorname{Ker} f_2 = \operatorname{Ker} \iota^{p,\,n-p} + \operatorname{Im} i^{p+1,\,n-p-1}$$

が成り立つ．故に準同型定理から $f_1,\ f_2$ はそれぞれ同型

$$\begin{aligned}\overline{f_1}\colon \frac{D^{p,\,n-p}}{\operatorname{Ker} \iota^{p,\,n-p} + \operatorname{Im} i^{p+1,\,n-p-1}} &\xrightarrow{\cong} \frac{\operatorname{Im} \iota^{p,\,n-p}}{\operatorname{Im} \iota^{p+1,\,n-(p+1)}},\\ \overline{f_2}\colon \frac{D^{p,\,n-p}}{\operatorname{Ker} \iota^{p,\,n-p} + \operatorname{Im} i^{p+1,\,n-p-1}} &\xrightarrow{\cong} \frac{\operatorname{Ker} k^{p,\,n-p}}{j^{p,\,n-p}(\operatorname{Ker} \iota^{p,\,n-p})}\end{aligned}$$

を誘導する．このとき $\overline{f_1} \circ \overline{f_2}^{-1}$ が欲しかった同型となる．

■

さらに，filtered な複体から自然にスペクトル系列が構成されることもわかる：

定理 4.9: フィルター付けされた複体によるスペクトル系列

$(K^\bullet,\ (F^pK^\bullet)_{p\in\mathbb{Z}})$ を，$\mathcal{A}$ における filtered な複体であって，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して K^n の**有限な** filtration が $(F^pK^n)_{p\in\mathbb{Z}}$ であるようなものとする．このとき，自然にスペクトル系列

$$E_1^{p,\,q} = H^{p+q}(F^pK^\bullet/F^{p+1}K^\bullet) \quad\Longrightarrow\quad E^{p+q} = H^{p+q}(K^\bullet)$$

が構成される．

<u>**証明**</u>

$$\begin{aligned}D^{p,\,q} &:= H^{p+q}(F^pK^\bullet),\\ E^{p,\,q} &:= H^{p+q}(F^pK^\bullet/F^{p+1}K^\bullet)\end{aligned}$$

とおくと，複体の完全列

$$0 \longrightarrow F^{p+1}K^\bullet \longrightarrow F^pK^\bullet \longrightarrow F^pK^\bullet/F^{p+1}K^\bullet \longrightarrow 0$$

がある．これのコホモロジー長完全列

$$\begin{aligned}\cdots &\xrightarrow{k^{p,\,q-1}} D^{p+1,\,q-1} \xrightarrow{i^{p+1,\,q-1}} D^{p,\,q} \xrightarrow{j^{p,\,q}} E^{p,\,q}\\ &\xrightarrow{k^{p,\,q}} D^{p+1,\,q} \xrightarrow{i^{p+1,\,q}} D^{p,\,q+1} \xrightarrow{j^{p,\,q+1}} E^{p,\,q+1}\\ &\xrightarrow{k^{p,\,q+1}} \cdots\end{aligned} \tag{4.5.6}$$

によって射の族

$$\begin{aligned}&\left(i^{p,\,q}\colon D^{p,\,q} \longrightarrow D^{p-1,\,q+1}\right)_{p,\,q\in\mathbb{Z}},\\ &\left(j^{p,\,q}\colon D^{p,\,q} \longrightarrow E^{p,\,q}\right)_{p,\,q\in\mathbb{Z}},\\ &\left(k^{p,\,q}\colon E^{p,\,q} \longrightarrow D^{p+1,\,q}\right)_{p,\,q\in\mathbb{Z}}\end{aligned}$$

が定まる．図式 (4.5.6) の完全性から $\Big((D^{p,\,q}),\ (E^{p,\,q}),\ (i^{p,\,q}),\ (j^{p,\,q}),\ (k^{p,\,q})\Big)$ が次数 1 の 二重次数付き完全対であることがわかる．有界性は，filtration が有限であることから従う．よって定理 4.8 が使えて題意のスペクトル系列が構成される． ■

4.6 スペクトル系列の計算例

4.6.1 E_r 項が疎な場合

4.6.2 二重複体によるスペクトル系列

アーベル圏 $\mathcal{A}$ における二重複体 $(K^{\bullet,\,*},\ \delta_1^{\bullet,\,*},\ \delta_2^{\bullet,\,*})$ は，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$K^{a,\,b} \neq 0 \ \text{ かつ } \ a+b=n$$

を充たす $(a,\,b) \in \mathbb{Z}^2$ が有限個であると仮定する．

定理 4.10: 二重複体によるスペクトル系列

$\forall p \in \mathbb{Z}$ に対して $K^{\bullet,\,*}$ の部分対象 $F^pK^{\bullet,\,*}$ を

$$F^pK^{a,\,b} := \begin{cases} K^{a,\,b}, & a \geq p \\ 0, & a < p \end{cases}$$

と定義し，

$$\begin{aligned} K^\bullet &:= \mathrm{Tot}(K^{\bullet,\,*}), \\ F^pK^\bullet &:= \mathrm{Tot}(F^pK^{\bullet,\,*}) \end{aligned}$$

とおく．このとき組 $\left(K^\bullet,\ \left(F^pK^\bullet\right)_{p\in\mathbb{Z}}\right)$ は filtered な複体で，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して $\left(F^pK^n\right)_{p\in\mathbb{Z}}$ は K^n の**有限な** filtration になる．また，自然にスペクトル系列

$$E_1^{p,\,q} = H^q(K^{p,\,\bullet}) \quad \Longrightarrow \quad E^{p+q} = H^{p+q}(K^\bullet)$$

が構成される．

<u>**証明**</u> $\mathcal{A} = R$-**Mod** とする．$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して，構成より明らかに

$$\cdots \subset F^{p+1}K^n \subset F^pK^n \subset F^{p-1}K^n \subset \cdots \subset K^n$$

が成り立つ．さらに二重複体 $(K^{\bullet,\,*},\ \delta_1^{\bullet,\,*},\ \delta_2^{\bullet,\,*})$ の全複体の射 $d^n\colon K^n = \mathrm{Tot}(K^{\bullet,\,*})^n \longrightarrow K^{n+1} = \mathrm{Tot}(K^{\bullet,\,*})^{n+1}$ の定義より，$\forall p \in \mathbb{Z}$ を一つ固定したときに

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ d^n(F^pK^n) \subset F^pK^{n+1}$$

が成り立つ．i.e. $\left(K^\bullet,\ \left(F^pK^\bullet\right)_{p\in\mathbb{Z}}\right)$ は filtered な複体で，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して $\left(F^pK^\bullet\right)_{p\in\mathbb{Z}}$ は K^n の**有限な** filtration になっている．

また，$\forall p \in \mathbb{Z}$ を一つ固定すると $\forall n \in \mathbb{Z},\ F^pK^n = \bigoplus_{a+b=n,\,a\geq p} K^{a,\,b},\quad F^{p+1}K^n = \bigoplus_{a+b=n,\,a\geq p+1} K^{a,\,b}$ だから $F^pK^n/F^{p+1}K^n = K^{p,\,n-p}$ である．従って $F^pK^\bullet/F^{p+1}K^\bullet = \left(K^{p,\,\bullet-p},\ \delta_2^{p,\,\bullet-p}\right)$ であることがわかるが，$H^{p+q}(K^{p,\,\bullet-p}) = H^q(K^{p,\,\bullet})$ なので，定理 4.9 より題意が従う． ■

系 4.11:

$\forall p \in \mathbb{Z}$ に対して $K^{\bullet,*}$ の部分対象 $F^pK^{\bullet,*}$ を

$$F^pK^{a,b} := \begin{cases} K^{a,b}, & b \geq p \\ 0, & b < p \end{cases}$$

と定義し，

$$K^{\bullet} := \mathrm{Tot}(K^{\bullet,*}),$$
$$F^pK^{\bullet} := \mathrm{Tot}(F^pK^{\bullet,*})$$

とおく．このとき組 $\left(K^{\bullet}, \left(F^pK^{\bullet}\right)_{p\in\mathbb{Z}}\right)$ は filtered な複体で，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して $\left(F^pK^n\right)_{p\in\mathbb{Z}}$ は K^n の**有限な** filtration になる．また，自然にスペクトル系列

$$E_1^{p,q} = H^q(K^{\bullet,p}) \quad \Longrightarrow \quad E^{p+q} = H^{p+q}(K^{\bullet})$$

が構成される．

証明 定理 4.10 と全く同様にして示せる． ■

定理 4.10 のスペクトル系列の E_2 項を計算しよう．E_1 項がわかっているのでスペクトル系列の定義の **同型 (4)** を使えば良い．スペクトル系列の定義の **(3) の射**は

$$d_1^{p,q} \colon E_1^{p,q} = H^q(K^{p,\bullet}) \longrightarrow E_1^{p+1,q} = H^q(K^{p+1,\bullet})$$

となるが，系 4.11 の構成より

$$d_1^{p,q} = H^q(\delta_1^{p,\bullet})$$

がわかる．よって

$$E_2^{p,q} = \frac{\mathrm{Ker}\, d_1^{p,q}}{\mathrm{Im}\, d_1^{p-1,q}} = \frac{\mathrm{Ker}\, H^q(\delta_1^{p,\bullet})}{\mathrm{Im}\, H^q(\delta_1^{p-1,\bullet})}$$

と求まった．これは，複体

$${H^q}_{\mathrm{II}}(K^{\bullet,*}) := \cdots \xrightarrow{H^q(\delta_1^{p-1,\bullet})} H^q(K^{p,\bullet}) \xrightarrow{H^q(\delta_1^{p,\bullet})} H^q(K^{p+1,\bullet}) \xrightarrow{H^q(\delta_1^{p+1,\bullet})} \cdots$$

の p 次コホモロジーを ${H^p}_{\mathrm{I}}\big({H^q}_{\mathrm{II}}(K^{\bullet,*})\big)$ と書いたときに

$$E_2^{p,q} = {H^p}_{\mathrm{I}}\big({H^q}_{\mathrm{II}}(K^{\bullet,*})\big) \tag{4.6.1}$$

が成り立つことを意味する．

添字の役割を逆にすることで

$$E_2^{p,q} = {H^p}_{\mathrm{II}}\big({H^q}_{\mathrm{I}}(K^{\bullet,*})\big) \tag{4.6.2}$$

もわかる．

系 4.12:

$A^\bullet$ をアーベル圏 $\mathcal{A}$ における複体，$K^{\bullet,*}$ を二重複体とする[a].

(1) 次のどちらか一方を仮定する：

(a) 射 $f^\bullet \colon A^\bullet \longrightarrow K^{\bullet,*}$ であって，$\forall p \in \mathbb{Z}$ に対して $f^p \colon A^p \longrightarrow K^{p,\bullet}$ がコホモロジーの同型

$$\left.\begin{matrix} A^p, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\cong} H^n(K^{p,\bullet})$$

を誘導するようなものが存在する．

(b) 二重複体の射 $f^{\bullet,*} \colon K^{\bullet,*} \longrightarrow A^\bullet$ であって，$\forall p \in \mathbb{Z}$ に対して $f^{p,\bullet} \colon K^{p,\bullet} \longrightarrow A^p$ がコホモロジーの同型

$$H^n(K^{p,\bullet}) \xrightarrow{\cong} \begin{cases} A^p, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

を誘導するようなものが存在する．

このとき，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して自然な同型

$$H^n(A^\bullet) \cong H^n(\operatorname{Tot} K^{\bullet,*})$$

がある．

(2) 次のどちらか一方を仮定する：

(a) 射 $f^* \colon A^\bullet \longrightarrow K^{\bullet,*}$ であって，$\forall q \in \mathbb{Z}$ に対して $f^q \colon A^q \longrightarrow K^{\bullet,q}$ がコホモロジーの同型

$$\left.\begin{matrix} A^q, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\cong} H^n(K^{\bullet,q})$$

を誘導するようなものが存在する．

(b) 二重複体の射 $f^{\bullet,*} \colon K^{\bullet,*} \longrightarrow A^\bullet$ であって，$\forall q \in \mathbb{Z}$ に対して $f^{\bullet,q} \colon K^{\bullet,q} \longrightarrow A^q$ がコホモロジーの同型

$$H^n(K^{\bullet,q}) \xrightarrow{\cong} \begin{cases} A^q, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

を誘導するようなものが存在する．

このとき，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して自然な同型

$$H^n(A^\bullet) \cong H^n(\operatorname{Tot} K^{\bullet,*})$$

がある．

[a] $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して，$K^{a,b} \neq 0$，$a+b=n$ を充たす $(a,\, b) \in \mathbb{Z}^2$ が有限個であると仮定する．

系 4.12 の条件を少し強めて，より見やすい形に直してみる．

(1)（a）(1)-(a) の条件に，さらに条件

$$b < 0 \quad \Longrightarrow \quad K^{a,\,b} = 0$$

をつけると，これは $\forall p \in \mathbb{Z}$ に対して定まる図式

$$0 \longrightarrow A^p \xrightarrow{f^p} K^{p,\,0} \longrightarrow K^{p,\,1} \longrightarrow K^{p,\,2} \longrightarrow \cdots$$

が完全であることと同値である．

（b）(1)-(b) の条件に，さらに条件

$$b > 0 \quad \Longrightarrow \quad K^{a,\,b} = 0$$

をつけると，これは $\forall p \in \mathbb{Z}$ に対して定まる図式

$$\cdots \longrightarrow K^{p,\,-2} \longrightarrow K^{p,\,-1} \longrightarrow K^{p,\,0} \xrightarrow{f^{p,\,0}} A^p \longrightarrow 0$$

が完全であることと同値である．

(2)（a）(2)-(a) の条件に，さらに条件

$$a < 0 \quad \Longrightarrow \quad K^{a,\,b} = 0$$

をつけると，これは $\forall q \in \mathbb{Z}$ に対して定まる図式

$$0 \longrightarrow A^q \xrightarrow{f^q} K^{0,\,q} \longrightarrow K^{1,\,q} \longrightarrow K^{2,\,q} \longrightarrow \cdots$$

が完全であることと同値である．

（b）(2)-(b) の条件に，さらに条件

$$a > 0 \quad \Longrightarrow \quad K^{a,\,b} = 0$$

をつけると，これは $\forall q \in \mathbb{Z}$ に対して定まる図式

$$\cdots \longrightarrow K^{-2,\,q} \longrightarrow K^{-1,\,q} \longrightarrow K^{0,\,q} \xrightarrow{f^{0,\,q}} A^q \longrightarrow 0$$

が完全であることと同値である．

証明 (1) 仮定より複体の同型

$$H^q{}_{\mathrm{II}}(K^{\bullet,\,*}) \cong \begin{cases} \cdots \longrightarrow A^{p-1} \longrightarrow A^p \longrightarrow A^{p+1} \longrightarrow \cdots, & q = 0 \\ \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots, & q \neq 0 \end{cases}$$

が成り立つ．よって (4.6.1) から従うスペクトル系列

$$E_2^{p,\,q} = H^p{}_{\mathrm{I}}\bigl(H^q{}_{\mathrm{II}}(K^{\bullet,\,*})\bigr) \quad \Longrightarrow \quad H^{p+q}(\mathrm{Tot}\, K^{\bullet,\,*})$$

において

$$E_2^{p,\,q} = \begin{cases} H^q(A^\bullet), & q=0 \\ 0, & q\neq 0 \end{cases}$$

となるので $H^n(A^\bullet) = E_2^{p,\,0} \cong E^n = H^n(\mathrm{Tot}\, K^{\bullet,\,*})$ となる．

(2) (4.6.2) から従うスペクトル系列

$$E_2^{p,\,q} = H^p{}_{\mathrm{II}}\bigl(H^q{}_{\mathrm{I}}(K^{\bullet,\,*})\bigr) \quad\Longrightarrow\quad H^{p+q}(\mathrm{Tot}\, K^{\bullet,\,*})$$

を用いて (1) と同様の議論をすれば証明できる．

■

(4.3.5) はまさに系 4.12 の条件を充たしており，同型 (4.3.5) が示されたことになる．

4.6.3 Künneth スペクトル系列と普遍係数定理

補題 4.12:

右 R 加群の複体 $(L^\bullet,\, d_L^\bullet)$ と左 R 加群の複体 $(M^\bullet,\, d_M^\bullet)$ を与える．$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して $\mathrm{Im}\, d_M^n,\ H^n(M^\bullet)$ が平坦加群であると仮定する．

このとき，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して自然な同型

$$\bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(M^\bullet) \xrightarrow{\cong} H^n\bigl(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)\bigr)$$

が成り立つ．

証明 $Z^n := \mathrm{Ker}\, d_M^n,\ B^n := \mathrm{Im}\, d_M^{n-1}$ とおく．するとコホモロジーの定義により，$\forall j \in \mathbb{Z}$ に対して短完全列

$$0 \longrightarrow B^j \longrightarrow Z^j \longrightarrow H^j(M^\bullet) \longrightarrow 0 \tag{4.6.3}$$

がある．仮定より $H^j(M^\bullet)$ は平坦加群なので，(4.6.3) に命題 4.24-(2) を使うことができて，$\forall i,\, j \in \mathbb{Z}$ に対して短完全列

$$0 \longrightarrow H^i(L^\bullet) \otimes_R B^j \xrightarrow{\alpha_{i,\,j}} H^i(L^\bullet) \otimes_R Z^j \longrightarrow H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(M^\bullet) \longrightarrow 0$$

を得る．さらに，直和は完全列を保存するので $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して短完全列

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R B^j \xrightarrow{\bigoplus_{i+j=n} \alpha_{i,\,j}} \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R Z^j \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(M^\bullet) \longrightarrow 0$$

を得る．

次に，$(B^\bullet,\, 0)$, $(Z^\bullet,\, 0)$ を複体と見做すことで，標準的包含 $Z^n \hookrightarrow M^n$ および $d^n = d_M^n \colon M^n \longrightarrow B^{n+1}$ は自然に複体の射 $Z^\bullet \to M^\bullet,\ d^\bullet \colon M^\bullet,\, B^{\bullet+1}$ を定める．また，複体の短完全列

$$0 \longrightarrow Z^\bullet \longrightarrow M^\bullet \xrightarrow{d^\bullet} B^{\bullet+1} \longrightarrow 0 \tag{4.6.4}$$

がある．仮定より B^n は平坦加群なので，(4.6.4) に命題 4.24-(2) を使うことができて，二重複体の短完全列

$$0 \longrightarrow L^\bullet \otimes_R Z^* \longrightarrow L^\bullet \otimes_R M^* \xrightarrow{1_{L^\bullet} \otimes d^*} L^\bullet \otimes_R B^{*+1} \longrightarrow 0$$

を得る．全複体をとる操作は完全関手なので[*17]短完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R Z^*) \longrightarrow \mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*) \longrightarrow \mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R B^{*+1}) \longrightarrow 0$$

があるが，これのコホモロジー長完全列を取ることで

$$\begin{aligned}
&\cdot \longrightarrow H^{n-1}\big(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R Z^*)\big) \longrightarrow H^{n-1}\big(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)\big) \longrightarrow H^{n-1}\big(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R B^{*+1})\big) \\
&\xrightarrow{\beta} H^{n}\big(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R Z^*)\big) \longrightarrow H^{n}\big(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)\big) \longrightarrow H^{n}\big(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R B^{*+1})\big) \\
&\longrightarrow \cdots
\end{aligned}$$

を得る．然るに複体 $B^\bullet$, $Z^\bullet$ を構成する準同型写像は零写像だから

$$\begin{aligned}
H^{n-1}\big(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R B^{*+1})\big) &= \bigoplus_{i+j=n-1} H^i(L^\bullet) \otimes_R B^{j+1} \\
&= \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R B^{j}, \\
H^{n}\big(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R Z^*)\big) &= \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R Z^{j}
\end{aligned}$$

が成り立つ．このとき

$$\beta = \bigoplus_{i+j=n} (-1)^i \alpha_{ij} \colon \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R B^j \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R Z^j$$

とかけ，かつ β は $\forall n$ に対して単射である．よって，横の 2 つの写像が同型であるような次の可換図式がある：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R B^j \arrow[r, "\bigoplus_{i+j=n}(-1)^i"] \arrow[d, "\bigoplus_{i+j=n} \alpha_{ij}"] & \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R B^j \arrow[d, "\beta"] \\
\bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R Z^j \arrow[r, "1"] \arrow[d] & \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R Z^j \arrow[d] \\
\bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(M^\bullet) \arrow[d] & H^n\big(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)\big) \arrow[d] \\
0 & 0 \\
\text{(exact)} & \text{(exact)}
\end{tikzcd}$$

*17 R-**Mod** においては単に直和である．

この可換図式から同型

$$\bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet)\otimes_R H^j(M^\bullet) \xrightarrow{\cong} H^n\bigl(\mathrm{Tot}(L^\bullet\otimes_R M^*)\bigr)$$

が誘導される（ホモロジー長完全列と 5 項補題による）. ■

定理 4.13: Künneth スペクトル系列

右 R 加群の複体 $(L^\bullet,\, d_L^\bullet)$ と左 R 加群の複体 $(M^\bullet,\, d_M^\bullet)$ を与える．次の条件のいずれかが満たされているとする：

(1) $L^\bullet$ または $M^\bullet$ が平坦加群からなる複体であり，かつ $L^\bullet,\, M^\bullet$ の両方が上に有界である．
(2) $L^\bullet$ が平坦加群からなる複体であり，かつある $N\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して，$\forall M\in R$-**Mod** が $\forall n<-N,\ P^n=0$ を充たすような射影的分解 $P^\bullet\longrightarrow M$ を持つ．
(3) $M^\bullet$ が平坦加群からなる複体であり，かつある $N\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して，$\forall M\in$ **Mod**-R が $\forall n<-N,\ P^n=0$ を充たすような射影的分解 $P^\bullet\longrightarrow M$ を持つ．

このとき，スペクトル系列

$$E_2^{p,\,q}=\bigoplus_{i+j=n}\mathrm{Tor}^R_{-p}\bigl(H^i(L^\bullet),\,H^j(M^\bullet)\bigr)\quad\Longrightarrow\quad H^{p+q}\bigl(\mathrm{Tot}(L^\bullet\otimes_R M^*)\bigr)$$

が構成される．

! R が単項イデアル整域のとき，$N=1$ として条件 (2), (3) の後半が充たされる（定理 4.5）.

証明 条件 (1), (2) において $L^\bullet$ が平坦加群からなる複体であるとして証明する．

複体 $M^\bullet$ の左 Cartan-Eilenberg 分解 $Q^{\bullet,\,*}\longrightarrow M^\bullet$ をとる．ただし条件 (2) の場合は $\forall n\in\mathbb{Z},\,\forall m<-N,\ Q^{n,\,m}=0$ を充たすようにとる．三重複体 $L^\bullet\otimes_R Q^{*,\,\blacktriangle}$ の 3 つ目の添字 n を固定したときにできる二重複体たちの全複体 $\mathrm{Tot}(L^\bullet\otimes_R Q^{*,\,n})$ は，n を動かすことで二重複体

$$\cdots\longrightarrow\mathrm{Tot}(L^\bullet\otimes_R Q^{*,\,n-1})\longrightarrow\mathrm{Tot}(L^\bullet\otimes_R Q^{*,\,n})\longrightarrow\cdots$$

になる[*18]．これを $\mathrm{Tot}_2(L^\bullet\otimes_R Q^{*,\,\blacktriangle})$ と書き，その次数 $(a,\,b)$ の項を $\mathrm{Tot}_2(L^\bullet\otimes_R Q^{*,\,\blacktriangle})^{a,\,b}:=\bigoplus_{i+j=a}L^i\otimes_R Q^{j,\,b}$ とおく．

仮定 (1) のとき $\mathrm{Tot}_2(L^\bullet\otimes_R Q^{*,\,\blacktriangle})^{a,\,b}$ は $a\gg 0$ または $b>0$ のとき 0
仮定 (2) のとき $\mathrm{Tot}_2(L^\bullet\otimes_R Q^{*,\,\blacktriangle})^{a,\,b}$ は $b<-N$ または $b>0$ のとき 0

だから，$\forall n\in\mathbb{Z}$ に対して $\mathrm{Tot}_2(L^\bullet\otimes_R Q^{*,\,\blacktriangle})^{a,\,b}\neq 0,\ a+b=n$ を充たす $(a,\,b)\in\mathbb{Z}^2$ は有限個である．

左 Cartan-Eilenberg 分解の定義より，$\forall n\in\mathbb{Z}$ に対して $Q^{n,\,\bullet}\longrightarrow M^n\longrightarrow 0$ は完全列で，かつ仮定より $\forall m\in\mathbb{Z},\ L^m$ は平坦加群なので，$\forall m,\,n\in\mathbb{Z}$ に対して命題 4.24-(2) より完全列

$$\cdots\longrightarrow L^m\otimes_R Q^{n,\,-1}\longrightarrow L^m\otimes_R Q^{n,\,0}\longrightarrow L^m\otimes_R M^n\longrightarrow 0$$

*18 $\mathrm{Tot}\bigl(\mathrm{Tot}_2(L^\bullet\otimes_R Q^{*,\,\blacktriangle})\bigr)=\mathrm{Tot}(L^\bullet\otimes_R Q^{*,\,\blacktriangle})$ となるような二重複体．

を得る．これの直和を取る事で，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して完全列

$$\cdots \operatorname{Tot}_2(L^\bullet \otimes_R Q^{*,\blacktriangle})^{n,-1} \longrightarrow \operatorname{Tot}_2(L^\bullet \otimes_R Q^{*,\blacktriangle})^{n,0} \longrightarrow \operatorname{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)^n \longrightarrow 0$$

が得られる．

以上の考察より，複体 $\operatorname{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)$ と二重複体 $\operatorname{Tot}_2(L^\bullet \otimes_R Q^{*,\blacktriangle})$ の組に対して系 4.12 を使うことができて，自然な同型

$$H^n\big(\operatorname{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)\big) \cong H^n\Big(\operatorname{Tot}\big(\operatorname{Tot}_2(L^\bullet \otimes_R Q^{*,\blacktriangle})\big)\Big) = H^n\big(\operatorname{Tot}(L^\bullet \otimes_R Q^{*,\blacktriangle})\big)$$

があるとわかった．

一方，$Q^{\bullet,*} \longrightarrow M^\bullet$ が左 Cartan-Eilenberg 分解なので補題 4.12 を使うことができて[*19]同型

$$H^q\big(\operatorname{Tot}(L^\bullet \otimes_R Q^{*,p})\big) \cong \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(Q^{\bullet,p})$$

がわかる．従って $\operatorname{Tot}_2(L^\bullet \otimes_R Q^{*,\blacktriangle})$ の 1 つ目の添字について第 q 次コホモロジーをとると複体

$$\cdots \longrightarrow H^q\big(\operatorname{Tot}(L^\bullet \otimes_R Q^{*,p-1})\big) \longrightarrow H^q\big(\operatorname{Tot}(L^\bullet \otimes_R Q^{*,p})\big) \longrightarrow H^q\big(\operatorname{Tot}(L^\bullet \otimes_R Q^{*,p+1})\big) \longrightarrow \cdots$$

が得られるが，これは複体

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(Q^{\bullet,p-1}) \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(Q^{\bullet,p}) \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(Q^{\bullet,p+1}) \longrightarrow \cdots$$

に等しい．さらにこの複体の p 次コホモロジーをとると，$H^j(Q^{\bullet,*}) \longrightarrow H^j(M^\bullet)$ が射影的分解であることと H^p と直和が交換することから，Tor の定義より

$$H^p{}_{\mathrm{II}}\Big(H^q{}_{\mathrm{I}}\big(\operatorname{Tot}_2(L^\bullet \otimes_R Q^{*,\blacktriangle})\big)\Big) = \bigoplus_{i+j=n} \operatorname{Tor}^R_{-p}\big(H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(M^\bullet)\big)$$

が言える．左辺は $\operatorname{Tot}_2(L^\bullet \otimes_R Q^{*,\blacktriangle})$ により構成される二重複体によるスペクトル系列の E_2 項だから，スペクトル系列

$$\bigoplus_{i+j=n} \operatorname{Tor}^R_{-p}\big(H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(M^\bullet)\big) \quad \Longrightarrow \quad H^{p+q}\big(\operatorname{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)\big)$$

がある． ■

[*19] 射影的加群は平坦加群（系 4.3）

系 4.14: Künneth 公式

R を単項イデアル整域とし，2 つの R 加群の複体 $(L^\bullet,\, d_L^\bullet)$, $(M^\bullet,\, d_M^\bullet)$ であって，いずれかが無捻加群からなるようなものを与える．

- このとき，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して次の完全列が存在する：

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(M^\bullet) &\xrightarrow{f} H^n\bigl(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)\bigr) \\ \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n+1} \mathrm{Tor}_1^R\bigl(H^i(L^\bullet),\, H^j(M^\bullet)\bigr) &\longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{4.6.5}$$

- さらに $L^\bullet$, $M^\bullet$ が**共に**自由加群からなる複体ならば完全列 (4.6.5) は分裂し，同型

$$H^n\bigl(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)\bigr) \cong \left(\bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(M^\bullet) \right) \oplus \left(\bigoplus_{i+j=n+1} \mathrm{Tor}_1^R\bigl(H^i(L^\bullet),\, H^j(M^\bullet)\bigr) \right)$$

が成り立つ．

証明 R が P.I.D. なので，定理 4.13 の条件 (2) または (3) が充たされて Künneth スペクトル系列が存在する．さらに定理 4.5 より $\forall n \geq 2$, $\mathrm{Tor}_n^R(\text{-},\,\text{-}) = 0$ が言える．よって $p \neq -1,\, 0$ のとき $E_2^{p,\,q} = 0$ となり，完全列 (4.6.5) を得る．

後半を示す．仮定より自由加群の部分加群 $\mathrm{Im}\, d_L^i \subset L^{i+1}$ もまた自由加群になる（命題 4.1）．故に命題??から完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\, d_L^i \xrightarrow{\ker d_L^i} L^i \xrightarrow{\mathrm{coim}\, d_L^i} \mathrm{Im}\, d_L^i \longrightarrow 0$$

は分裂する．i.e. 準同型写像 $s_i \colon L^i \longrightarrow \mathrm{Ker}\, d_L^i$ が存在して $s_i \circ \ker d_L^i = 1_{\mathrm{Ker}\, d_L^i}$ を充たす．d_M^j についても同様に，準同型写像 $s'_j \colon M^j \longrightarrow \mathrm{Ker}\, d_M^j$ が存在して $s'_j \circ \ker d_M^j = 1_{\mathrm{Ker}\, d_M^j}$ を充たす．

写像 t_i, t'_j をそれぞれ

$$\begin{aligned} t_i &\colon L^i \xrightarrow{s_i} \mathrm{Ker}\, d_L^i \hookrightarrow H^i(L^\bullet), \\ t'_j &\colon M^j \xrightarrow{s'_j} \mathrm{Ker}\, d_M^j \hookrightarrow H^j(M^\bullet) \end{aligned}$$

で定義し，

$$g_n \coloneqq \bigoplus_{i+j=n} t_i \otimes t'_j$$

とおく．$\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)^n = \bigoplus_{i+j=n} L^i \otimes_R M^j$ だから

$$g_n \colon \mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)^n \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(M^\bullet)$$

である．このとき $\forall x \in L^i$ に対して $d_L^i(x) \in \mathrm{Im}\, d_L^i \subset \mathrm{Ker}\, d_L^{i+1}$ だから $s_{i+1}\bigl(d_L^i(x)\bigr) = d_L^i(x) \in \mathrm{Im}\, d_L^i$ であり，$t_{i+1}\bigl(d_L^i(x)\bigr) = 0 + \mathrm{Im}\, d_L^i (= 0)$ が言える．同様にして $\forall y \in M^j$ に対して $t'_{j+1}\bigl(d_M^j(y)\bigr) = 0$ が言えるので，結局

$$(t_{i+1} \otimes t'_j) \circ (d_L^i \otimes 1) = (t_i \otimes t'_{j+1}) \circ (1 \otimes d_M^j) = 0$$

がわかった．故に全複体の射 $d^{n-1}\colon \mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)^{n-1} \longrightarrow \mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)^n$ に対して $g_n \circ d^{n-1} = 0$ であるから，準同型定理（第 3 同型定理）により g_n は準同型

$$\overline{g_n}\colon H^n\big(\mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)\big) \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(M^\bullet)$$

を自然に誘導する．

$\forall x \in \mathrm{Ker}\, d_L^i$ に対して $s_i(x) = x$ だから $t_i(x) = x + \mathrm{Im}\, d_L^{i-1}$ であり，同様に $\forall y \in \mathrm{Ker}\, d_M^j$ に対して $t'_j(y) = y + \mathrm{Im}\, d_M^{j-1}$ である．よって $i + j = n$ ならば，$\forall x \otimes y \in L^i \otimes_R M^j \subset \mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)^n$ に対して

$$g_n(x \otimes y) = (x + \mathrm{Im}\, d_L^{i-1}) \otimes (y + \mathrm{Im}\, d_M^{j-1})$$

が成り立つ．従って $\forall x \otimes y \in \mathrm{Ker}\big(d^n\colon \mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)^n \longrightarrow \mathrm{Tot}(L^\bullet \otimes_R M^*)^{n+1}\big)$ に対して

$$\overline{g_n}\big(x \otimes y + \mathrm{Im}\, d^{n-1}\big) = (x + \mathrm{Im}\, d_L^{i-1}) \otimes (y + \mathrm{Im}\, d_M^{j-1})$$

が成り立つので $\overline{g_n} \circ f = 1$ が言えた．i.e. 完全列 (4.6.5) は分裂する． ■

系 4.15: 普遍係数定理

R を単項イデアル整域とし，R 加群 M および R 加群の複体 $(L^\bullet,\, d_L^\bullet)$ であって，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して L^n が無捻加群であるようなものを与える．

- このとき，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して次の完全列が存在する：

$$0 \longrightarrow H^n(L^\bullet) \otimes_R M \xrightarrow{f} H^n(L^\bullet \otimes_R M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R\big(H^{n+1}(L^\bullet),\, M\big) \longrightarrow 0 \qquad (4.6.6)$$

- さらに $L^\bullet$ が自由加群からなる複体ならば完全列 (4.6.6) は分裂し，同型

$$H^n\big(L^\bullet \otimes_R M\big) \cong \big(H^n(L^\bullet) \otimes_R M\big) \oplus \mathrm{Tor}_1^R\big(H^{n+1}(L^\bullet),\, M\big)$$

  が成り立つ．

<u>証明</u> Künneth 公式において，複体 $M^\bullet = M$ とおけば完全列 (4.6.6) が得られる．

後半を示す．系 4.14 と同様に準同型 $s_n\colon L^n \longrightarrow \mathrm{Ker}\, d_L^n$ であって $s_n \circ \ker d_L^n = 1$ となるものが存在する．ここで写像 g_n を

$$g_n\colon L^n \otimes_R M \xrightarrow{s_n \otimes 1_M} \mathrm{Ker}\, d_L^n \otimes M \hookrightarrow H^n(L^\bullet) \otimes_R M$$

と定義すると，$\forall x \in L^n$ に対して $d_L^n(x) \in \mathrm{Ker}\, d_L^{n+1}$ より $s_{n+1}\big(d_L^n(x)\big) = d_L^n(x)$ であり，$g_n \circ (d_L^{n-1} \otimes 1_M) = 0$ が従う．よって g_n は自然に準同型写像

$$\overline{g_n}\colon H^n(L^\bullet \otimes M) \longrightarrow H^n(L^\bullet) \otimes_R M$$

を引き起こす．これは $\forall x \otimes y \in \mathrm{Ker}(d_L^n \otimes 1_M)$ に対して

$$\overline{g_n}\big(x \otimes y + \mathrm{Im}(d_L^{n-1} \otimes 1_M)\big) = (x + \mathrm{Im}\, d_L^{n-1}) \otimes y$$

と作用するので $\overline{g_n} \circ f = 1$ が言えた． ■

Ext に関してもほとんど同様である：

補題 4.13:

左 R 加群の複体 $(L^\bullet,\, d_L^\bullet)$, $(M^\bullet,\, d_M^\bullet)$ を与える．次の 2 条件のいずれかを仮定する：

(1) $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して $\operatorname{Im} d_L^n$, $H^n(L^\bullet)$ が射影的加群
(2) $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して $\operatorname{Im} d_M^n$, $H^n(M^\bullet)$ が単射的加群

このとき，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して自然な同型

$$H^n\Bigl(\mathrm{Tot}\bigl(\mathrm{Hom}_R\,(L^\bullet,\, M^*)\bigr)\Bigr) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{j-i=n} \mathrm{Hom}_R\,\bigl(H^i(L^\bullet),\, H^j(M^\bullet)\bigr)$$

が成り立つ．

定理 4.16: Künneth スペクトル系列

右 R 加群の複体 $(L^\bullet,\, d_L^\bullet)$, $(M^\bullet,\, d_M^\bullet)$ を与える．次の条件のいずれかが満たされているとする：

(1) $L^\bullet$ が射影的加群からなる複体であるか，または $M^\bullet$ が単射的加群からなる複体であり，$L^\bullet$ が上に有界かつ $M^\bullet$ が下に有界である．
(2) $L^\bullet$ が射影的加群からなる複体であり，かつある $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して，$\forall M \in R$-**Mod** が $\forall n > N$, $I^n = 0$ を充たすような単射的分解 $M \longrightarrow I^\bullet$ を持つ．
(3) $M^\bullet$ が単射的加群からなる複体であり，かつある $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して，$\forall M \in$ **Mod**-R が $\forall n < -N$, $P^n = 0$ を充たすような射影的分解 $P^\bullet \longrightarrow M$ を持つ．

このとき，スペクトル系列

$$E_2^{p,\,q} = \bigoplus_{-i+j=n} \mathrm{Ext}_R^p\bigl(H^i(L^\bullet),\, H^j(M^\bullet)\bigr) \quad\Longrightarrow\quad H^{p+q}\Bigl(\mathrm{Tot}\bigl(\mathrm{Hom}_R\,(L^\bullet,\, M^*)\bigr)\Bigr)$$

が構成される．

系 4.17: Künneth 公式

R を単項イデアル整域とし，2 つの R 加群の複体 $(L^\bullet,\, d_L^\bullet)$, $(M^\bullet,\, d_M^\bullet)$ であって，

(1) $L^\bullet$ は自由加群からなる複体であるか，
(2) $M^\bullet$ は可除加群からなる複体であるか

のどちらかであるとする．
このとき，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して次の分裂する完全列が存在する：

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow \bigoplus_{-i+j=n-1} \mathrm{Ext}_R^1\bigl(H^i(L^\bullet) \otimes_R H^j(M^\bullet)\bigr) \longrightarrow H^n\Bigl(\mathrm{Tot}\bigl(\mathrm{Hom}_R\,(L^\bullet,\, M^*)\bigr)\Bigr)\\ \longrightarrow \bigoplus_{-i+j=n} \mathrm{Hom}_R\,\bigl(H^i(L^\bullet),\, H^j(M^\bullet)\bigr) \longrightarrow 0\end{aligned}$$

系 4.18: 普遍係数定理

R を単項イデアル整域とし，R 加群 M および R 加群の複体 $(L^\bullet,\, d_L^\bullet)$ であって，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して L^n が自由加群であるようなものを与える．このとき，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して次の分裂する短完全列が存在する：

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R\bigl(H^{-n+1}(L^\bullet),\, M\bigr) \longrightarrow H^n\bigl(\mathrm{Hom}_R\,(L^\bullet,\, M)\bigr) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\,\bigl(H^{-n}(L^\bullet),\, M\bigr) \longrightarrow 0$$