第 7 章

ファイブレーション・コファイブレーション・ホモトピー群

(2023/5/11) この章は未完である

この章において $I \coloneqq [0,\ 1]$ とおく．

定義 7.1: 道

X を位相空間とする．

- X における**道** (path) とは，連続写像 $\alpha\colon I \longrightarrow X$ のこと．点 $\alpha(0),\ \alpha(1) \in Y$ のことをそれぞれ道 α の**始点**, **終点**と呼ぶ．特に始点と終点が一致する道のことを**ループ** (loop) と呼ぶ．
- 点 $x_0 \in X$ における**不変な道** (constant path) とは，定数写像 $\mathrm{const}_{x_0}\colon I \longrightarrow X,\ t \longmapsto x_0$ のこと．
- X における 2 つの道 $\alpha,\ \beta\colon I \longrightarrow X$ は $\alpha(1) = \beta(0)$ を充たすとする．このとき**道の積** (product path) を次のように定義する：

$$\alpha\beta\colon I \longrightarrow X,\ t \longmapsto \begin{cases} \alpha(2t), & t \in [0,\ \frac{1}{2}], \\ \beta(2t-1), & t \in (\frac{1}{2},\ 1] \end{cases}$$

- X における道 $\alpha\colon I \longrightarrow X$ の**逆の道** (inverse path) を次のように定義する：

$$\alpha^{-1}\colon I \longrightarrow X,\ t \longmapsto \alpha(1-t)$$

定義 7.2: ホモトピー

$X,\ Y$ を位相空間とする．

- 2 つの連続写像 $f_0,\ f_1\colon X \longrightarrow Y$ を繋ぐ**ホモトピー** (homotopy) とは，連続写像 $F\colon X \times I \longrightarrow Y$ であって

$$F|_{X\times\{0\}} = f_0, \quad F|_{X\times\{1\}} = f_1$$

を満たすもののことを言う．

- 2 つの連続写像 $f_0,\ f_1\colon X \longrightarrow Y$ が**ホモトピック** (homotopic) であるとは，f_0 と f_1 を繋ぐホモトピーが存在することを言う．$\boldsymbol{f_0 \simeq f_1}$ と書く．
- ホモトピックは集合 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\,Y)$ 上の同値関係 $\simeq$ をなす．ホモトピックによる $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\,Y)$ の同値類を α の**ホモトピー類** (homotopy class) と呼び $[\boldsymbol{\alpha}]$ と書く．
- 連続写像の組 $f\colon X \longrightarrow Y,\ g\colon Y \longrightarrow X$ が**ホモトピー同値写像** (homotopy equivalences) であるとは，$g \circ f,\ f \circ g$ がそれぞれ $\mathrm{id}_X,\,\mathrm{id}_Y$ にホモトピックであることを言う[a]．
- 位相空間 $X,\,Y$ の間にホモトピー同値写像が存在するとき，X と Y は同じ**ホモトピー型** (homotopy type) であるという．
- 一点と同じホモトピー型である空間は**可縮** (contractible) であると言われる．
- 商集合 $\left\{\, \alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(I,\ X) \;\middle|\; \alpha(0) = \alpha(1) = x_0 \,\right\} / \simeq$ の上に well-defined な群演算[b]

$$[\alpha]\cdot[\beta] \coloneqq [\alpha\beta]$$

を定めて群にしたものを X の点 x_0 における**基本群**と呼び，$\boldsymbol{\pi_1(X,\,x_0)}$ と書く．

[a] $f,\,g$ は互いに**ホモトピー逆写像** (homotopy inverse) であると言う場合がある．$f,\,g$ のどちらか一方のみを指してホモトピー同値写像という場合は，ホモトピー逆写像が存在することを意味する．

[b] 右辺に道の積を使った．

以後，ホモトピー $G\colon X \times I \longrightarrow Y$ と言うときは連続写像の族

$$G = \left\{ G_t\colon X \longrightarrow Y \right\}_{t \in I}$$

を意味するものとする[*1]．

7.1 ファイブレーション

7.1.1 HLP とファイブレーションの定義

持ち上げ (lifting) の問題とは，次のようなものである：

- 連続写像 $p\colon E \longrightarrow B,\ g\colon X \longrightarrow B$ が与えられる．
- このとき，連続写像 $\tilde{g}\colon X \longrightarrow E$ であって $g = p \circ \tilde{g}$ を充たすようなものは存在するか？

持ち上げと言う名前は，もしこのような $\tilde{f}$ が存在すれば図式

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[ur, dashed, "\tilde{g}"] \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

が可換になることに由来する．$\tilde{f}$ のことを f の**持ち上げ** (lifting) と呼ぶ．

[*1] これは自動的に 2 つの連続写像 $G_0,\,G_1\colon X \longrightarrow Y$ を繋ぐホモトピーになる．

定義 7.3: ホモトピー持ち上げ性質 (HLP)

連続写像 $p\colon E \longrightarrow B$ が位相空間 Y に対して**ホモトピー持ち上げ性質** (homotopy lifting property) を充たすとは，以下の条件を充たすことを言う：

(HLP) $\iota_0\colon Y \times \{0\} \hookrightarrow Y \times I$ を包含写像とする．

- 連続写像 $\tilde{g}\colon Y \times \{0\} \longrightarrow E$
- 連続写像 $G\colon Y \times I \longrightarrow B$

であって $G \circ \iota_0 = p \circ \tilde{g}$ を充たすもの[a]を任意に与えたとき，（必ずしも一意でない）連続写像 $\tilde{G}\colon Y \times I \longrightarrow E$ が存在して図式 7.1 が可換になる．

[a] i.e. $\forall y \in Y$ に対して $G(y, 0) = p\bigl(\tilde{g}(y)\bigr)$ を充たすもの．ホモトピー $G\colon Y \times I \longrightarrow B$ であって $G_0 = p \circ \tilde{g}$ を充たすもの，と言ってもよい．

$$
\begin{tikzcd}
Y \times \{0\} \arrow[r, "\forall \tilde{g}"] \arrow[d, hook, "\iota_0"] & E \arrow[d, "p"] \\
Y \times I \arrow[r, "\forall G"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{G}"] & B
\end{tikzcd}
$$

図 7.1: ホモトピー持ち上げ性質 (HLP)

定義 7.4: ファイブレーション

連続写像 $p\colon E \longrightarrow B$ が**ファイブレーション** (fibration)[a] であるとは，任意の位相空間 Y に対してホモトピー持ち上げ性質が成り立つことを言う．

[a] 訳語だと**ファイバー空間**と呼ぶこともある．なお，これは **Hurewicz fibration** の定義である．

補題 7.1:

連続写像 $p\colon B \times F \longrightarrow B,\ (b,\ f) \longmapsto b$ はファイブレーションである．

<u>**証明**</u> 任意の位相空間 X を 1 つ固定し，

- 連続写像 $\tilde{g}\colon X \times \{0\} \longrightarrow B \times F,\ x \longmapsto \bigl(\tilde{g}_1(x),\ \tilde{g}_2(x)\bigr)$
- 連続写像 $G\colon X \times I \longrightarrow B,\ (x,\ t) \longmapsto G(x,\ t)$

であって $G \circ \iota_0 = p \circ \tilde{g}$ を充たすものを任意に与える．このとき $\forall x \in X$ に対して $G(x,\ 0) = \tilde{g}_1(x)$ が成り立つ．従って連続写像 $\tilde{G}\colon X \times I \longrightarrow B \times F,\ (x,\ t) \longmapsto \bigl(G(x,\ t),\ \tilde{g}_2(x)\bigr)$ は $\forall (x,\ t) \in X \times I$ に対して

$$
\begin{aligned}
p\bigl(\tilde{G}(x,\ t)\bigr) &= G(x,\ t), \\
\tilde{G}\bigl(\iota_0(x)\bigr) &= \tilde{G}(x,\ 0) = \bigl(\tilde{g}_1(x),\ \tilde{g}_2(x)\bigr) = \tilde{g}(x)
\end{aligned}
$$

を充たすので X について HLP が成り立つことが示された． ■

次の定理の証明は煩雑なので省略する：

定理 7.1:

連続写像 $p\colon E \longrightarrow B$ を与える．B はパラコンパクトで，かつ B の開被覆 $\left\{U_\lambda\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ であって $\forall\lambda\in\Lambda$ に対して制限 $p|_{p^{-1}(U_\lambda)}\colon p^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\alpha$ がファイブレーションとなるようなものが存在するとする．このとき，$p\colon E \longrightarrow B$ はファイブレーションである．

次の意味で，ファイブレーションはファイバー束の拡張になっている．

系 7.2: ファイバー束はファイブレーション

パラコンパクトな位相空間 B と，その上のファイバー束 $\pi\colon E \longrightarrow B$ を与える．このとき π はファイブレーションである．

証明 ファイバー束の定義より π はある開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して $\forall\lambda\in\Lambda$, $\pi|_{\pi^{-1}(U_\lambda)}\colon \pi^{-1}(U_\lambda) \approx U_\lambda\times F \longrightarrow U_\lambda$ を充たす．従って補題 7.1 より $\forall\lambda\in\Lambda$ に対して $\pi|_{\pi^{-1}(U_\lambda)}$ はファイブレーションであるから，定理 7.1 より π もファイブレーションである． ■

定義 7.5: ファイブレーションの射

2 つのファイブレーション $p\colon E \longrightarrow B$, $p'\colon E' \longrightarrow B'$ を与える．
ファイブレーションの射とは，連続写像 $f\colon B \longrightarrow B'$, $\tilde{f}\colon E \longrightarrow E'$ の対 $(f, \tilde{f})$ であって図式 7.2 を可換にするもののこと．

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"] & E' \arrow[d, "p'"] \\
B \arrow[r, "f"] & B'
\end{tikzcd}$$

図 7.2: ファイブレーションの射

定義 7.6: ファイブレーションの引き戻し

$p\colon E \longrightarrow B$ をファイブレーション，$f\colon X \longrightarrow B$ を連続写像とする．
f による p の**引き戻し** (pullback) $q\colon f^*(E) \longrightarrow X$ を次のように定義する：

- 集合

$$f^*(E) \coloneqq \left\{\, (x,\, e) \in X\times E \;\middle|\; f(x) = p(e) \,\right\}$$

- 連続写像

$$q \coloneqq \mathrm{proj}_1|_{f^*(E)}$$

命題 7.1:

ファイブレーションの引き戻しはファイブレーションである．

証明 任意の位相空間 Y を 1 つ固定し，

- 連続写像 $\tilde{g}\colon Y \times \{0\} \longrightarrow f^*(E),\ y \longmapsto \bigl(\tilde{g}_1(y),\ \tilde{g}_2(y)\bigr)$
- 連続写像 $G\colon Y \times I \longrightarrow X,\ (y,\ t) \longmapsto G(y,\ t)$

であって $\forall y \in Y,\ G(y,\ 0) = q\bigl(\tilde{g}(y)\bigr) = \tilde{g}_1(y)$ を充たすものを任意にとる．

- 連続写像 $\tilde{g}_2\colon Y \times \{0\},\ y \longmapsto \tilde{g}_2(y)$
- 連続写像 $f \circ G\colon Y \times I \longrightarrow B$

は，$f^*(E)$ の定義により $\forall y \in Y$ に対して $f\bigl(G(y,\ 0)\bigr) = f\bigl(\tilde{g}_1(y)\bigr) = p\bigl(\tilde{g}_2(y)\bigr)$ を充たす．従って $p\colon E \longmapsto B$ がファイブレーションであることにより，ある連続写像 $\tilde{F}\colon Y \times I \longrightarrow E$ が存在して $p\bigl(\tilde{F}(y,\ t)\bigr) = f\bigl(G(y,\ t)\bigr),\ \tilde{F}(y,\ 0) = \tilde{g}_2(y)$ を充たす．従って連続写像

$$\tilde{G}\colon Y \times I \longrightarrow X \times E,\ (y,\ t) \longmapsto \bigl(G(x,\ t),\ \tilde{F}(x,\ t)\bigr)$$

を考えると，$\operatorname{Im}\tilde{G} \subset f^*(E)$ でかつ $\forall (y,\ t) \in Y \times I$ に対して

$$\begin{aligned} q\bigl(\tilde{G}(y,\ t)\bigr) &= G(y,\ t), \\ \tilde{G}(y,\ 0) &= \bigl(G(y,\ 0),\ \tilde{F}(y,\ 0)\bigr) = \bigl(\tilde{g}_1(y),\ \tilde{g}_2(y)\bigr) = \tilde{g}(y) \end{aligned}$$

が成り立つ．i.e. 連続写像 $\tilde{G}$ によって位相空間 Y に関する HLP が充たされる． ■

7.1.2 ファイブレーションのファイバー

定理 7.3: ファイバーの基本性質

B を弧状連結空間とし，ファイブレーション $p\colon E \longrightarrow B$ を与える．B の各点に対して定まる E の部分空間 $E_b \coloneqq p^{-1}(\{b\})$ のことを**ファイバー** (fiber) と呼ぶ．このとき，以下が成り立つ：

(1) **全てのファイバーは同じホモトピー型である**

(2) B 上の任意の道 $\alpha\colon I \longrightarrow B$ はホモトピー同値写像 $h_\alpha\colon E_{\alpha(0)} \longrightarrow E_{\alpha(1)}$ を引き起こし，そのホモトピー類 $\alpha_* \coloneqq [h_\alpha]$ は α と端点を共有し，かつホモトピックであるような道の取り方によらない．

(3) 特に，well-defined な群準同型

$$\begin{aligned} \psi\colon \pi_1(B,\ b_0) &\longrightarrow \left\{ \substack{\text{ホモトピー同値写像 } E_{b_0} \longrightarrow E_{b_0} \text{ の} \\ \text{ホモトピー類全体}} \right\} \\ [\alpha] &\longmapsto (\alpha^{-1})_* \end{aligned}$$

が存在する．

- ファイブレーション $p\colon E \longrightarrow B$ が与えられたとき，勝手な点 $b \in B$ に対して定まる部分空間 $E_b \subset E$ と同じホモトピー型であるような任意の位相空間のことをファイブレーション $p\colon E \longrightarrow B$ の**ファイバー**と呼ぶ場合がある．
- F を B のある指定された点におけるファイバーとして，ファイブレーション $p\colon E \longrightarrow B$ のことを $\boldsymbol{F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B}$ と書くことがある．

これらの記法は定理 7.3-(1) に由来する．

証明 まず「h_α がホモトピー同値写像であること」を除いて (2) を示す．B は弧状連結なので，$\forall b_0,\, b_1 \in B$ および道 $\alpha\colon I \longrightarrow B$ s.t. $\alpha(0) = b_0,\, \alpha(1) = b_1$ を任意にとることができる．

- 包含写像 $\iota_{b_0}\colon E_{b_0} \hookrightarrow E$
- ホモトピー $H\colon E_{b_0} \times I \longrightarrow B,\ (e,\, t) \longmapsto \alpha(t)$

は以下の可換図式を充たす：

$$
\begin{tikzcd}
E_{b_0} \times \{0\} \arrow[r, hook, "\iota_{b_0}"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
E_{b_0} \times I \arrow[r, "H"] & B
\end{tikzcd}
$$

$p\colon E \longrightarrow B$ はファイブレーションなので，HLP により H の持ち上げ $\tilde{H}\colon E_{b_0} \times I \longrightarrow E$ が存在して以下の可換図式が成り立つ：

$$
\begin{tikzcd}
E_{b_0} \times \{0\} \arrow[r, hook, "\iota_{b_0}"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
E_{b_0} \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\exists \tilde{H}"] & B
\end{tikzcd}
$$

ホモトピー $\tilde{H}\colon E_{b_0} \times I \longrightarrow E$ は $\forall e \in E_{b_0}$ に対して $p\bigl(\tilde{H}(e,\, 1)\bigr) = H(e,\, 1) = \alpha(1) = b_1$ を充たすので $\operatorname{Im} \tilde{H}_1 \subset E_{b_1}$ がわかる．i.e. α によって連続写像 $h_\alpha \coloneqq \tilde{H}_1\colon E_{b_0} \longrightarrow E_{b_1}$ が引き起こされた．ここで $\alpha_* \coloneqq [\tilde{H}_1]$ と定める．これが道 α と端点を共有し，かつホモトピックであるような道の取り方によらないことを示す．h_α がホモトピー同値写像であることは後に (1) と同時に示す．

道 $\alpha'\colon I \longrightarrow B$ は α と同一の端点を持ち，かつ α にホモトピックであるとする．すると

- 包含写像 $E_{b_0} \hookrightarrow E$
- ホモトピー $H'\colon E_{b_0} \times I \longrightarrow B,\ (e,\, t) \longmapsto \alpha'(t)$

に対して HLP を用いることで次の可換図式が得られる：

$$
\begin{tikzcd}
E_{b_0} \times \{0\} \arrow[r, hook, "\iota_{b_0}"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
E_{b_0} \times I \arrow[r, "H'"] \arrow[ur, dashed, "\exists \tilde{H}'"] & B
\end{tikzcd}
$$

示すべきは $\tilde{H}_1 \simeq \tilde{H}'_1$ である．

α と α' を繋ぐホモトピー $F\colon I\times I \longrightarrow B$ をとる．すると連続写像

$$\Lambda\colon (E_{b_0}\times I)\times I \longrightarrow B,\ (e,\, s,\, t) \longmapsto F(s,\, t)$$

は H と H' を繋ぐホモトピーになる．このとき連続写像

$$\begin{aligned}\Gamma\colon (E_{b_0}\times I)\times\{0,\,1\}\cup(E_{b_0}\times\{0\})\times I &\longrightarrow E,\\ (e,\, s,\, t) &\longmapsto \begin{cases}\tilde{H}(e,\, s), & t=0\\ \tilde{H}'(e,\, s), & t=1\\ e, & s=0\end{cases}\end{aligned}$$

は図式

$$\begin{tikzcd}
(E_{b_0}\times I)\times\{0,\,1\}\cup(E_{b_0}\times\{0\})\times I \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
(E_{b_0}\times I)\times I \arrow[r, "\Lambda"] & B
\end{tikzcd}$$

を可換にする．

ところで $U \coloneqq I\times\{0,\,1\}\cup\{0\}\times I$ とおいたとき，同相写像 $\varphi\colon I^2 \longrightarrow I^2$ であって $\varphi(U) = I\times\{0\}$ とするようなものが存在する．この φ を使うと可換図式

$$\begin{tikzcd}
E_{b_0}\times I\times\{0\} \arrow[d, hook] & E_{b_0}\times U \arrow[l, "\mathrm{id}\times\varphi"'] \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
E_{b_0}\times I\times I & (E_{b_0}\times I)\times I \arrow[l, "\mathrm{id}\times\varphi"'] \arrow[r, "\Lambda"] & B
\end{tikzcd}$$

が得られる．$p\colon E \longrightarrow b$ はファイブレーションなので図式の外周部に HLP を使うことができて，Λ の持ち上げ $\tilde{\Lambda}\colon E_{b_0}\times I^2 \longrightarrow E$ を得る：

$$\begin{tikzcd}
E_{b_0}\times U \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
E_{b_0}\times I^2 \arrow[r, "\Lambda"] \arrow[ur, dashed, "\exists\tilde{\Lambda}"] & B
\end{tikzcd}$$

構成より $\tilde{\Lambda}$ は $\tilde{H}$ と $\tilde{H}'$ を繋ぐホモトピーであり，$E_{b_0}\times\{1\}\times I$ に制限することで $\tilde{H}_1$ と $\tilde{H}'_1$ を繋ぐホモトピーになる．以上で (2) の証明が部分的に完了した．

次に (1) および h_α がホモトピー同値写像であることを示す．2 つの道 $\alpha,\ \beta\colon I \longrightarrow B$ であって $\alpha(1) = \beta(0)$ を充たすものをとる．道の積の定義より $(\alpha\beta)_* = \beta_*\circ\alpha_*$ が成り立つ．特に $\beta = \alpha^{-1}$ の場合を考えると $(\alpha^{-1})_*\circ\alpha_* = (\mathrm{const}_{b_0})_* = [\mathrm{id}_{E_{b_0}}]$ が成り立つ．B は弧状連結空間なので (1) および (2) の証明が完了した．

最後に (3) を示す． ■

7.1.3 道の空間におけるファイブレーション

定義 7.7: path space と loop space

$(Y,\, y_0)$ を基点付き位相空間とする．

- **道の空間** (path space) とは，位相空間[a]

$$P_{y_0}Y := \left\{ \alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\,(I,\, Y) \;\middle|\; \alpha(0) = y_0 \right\} \subset \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\,(I,\, Y)$$

  のことを言う．

- **ループ空間** (loop space) とは，位相空間

$$\Omega_{y_0}Y := \left\{ \alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\,(I,\, Y) \;\middle|\; \alpha(0) = \alpha(1) = y_0 \right\} \subset \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\,(I,\, Y)$$

  のことを言う．

[a] コンパクト生成空間と見做して位相を入れる．

基点 $y_0 \in Y$ はしばしば省略して書かれる．

さらに，以降では次の記法を使うことがある：

- 位相空間 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\,(I,\, Y)$ のことを**自由な道の空間** (free path space) と呼び，$\boldsymbol{Y^I}$ と略記する場合がある．
- 連続写像[*2] $p\colon Y^I \longrightarrow Y,\ \alpha \longmapsto \alpha(1)$

命題 7.2:

Y を弧状連結空間とし，2 点 $y_0,\, y_1 \in Y$ をとる．このときループ空間 $\Omega_{y_0}Y,\ \Omega_{y_1}Y$ は同じホモトピー型である．

証明 Y は弧状連結なので $y_0,\, y_1$ を繋ぐ道 $\eta\colon I \longrightarrow Y$ が存在する．このとき連続写像[*3]

$$\begin{aligned} f\colon \Omega_{y_0}Y &\longrightarrow \Omega_{y_1}Y,\ \alpha \longmapsto \eta\alpha\eta^{-1}, \\ g\colon \Omega_{y_1}Y &\longrightarrow \Omega_{y_0}Y,\ \beta \longmapsto \eta^{-1}\beta\eta \end{aligned}$$

は $g \circ f \simeq \mathrm{id}_{\Omega_{y_0}Y},\ f \circ g \simeq \mathrm{id}_{\Omega_{y_1}Y}$ を充たす． ■

[*2] p の $P_{y_0}Y$ への制限もまた連続である．
[*3] 定義に道の積を使っている．

定理 7.4: 道の空間のファイブレーション

(1) 連続写像 $p\colon Y^I \longrightarrow Y,\ \alpha \longmapsto \alpha(1)$ はファイブレーションであり，点 y_0 におけるファイバーは $P_{y_0}Y$ と同相である．
(2) 連続写像 $p\colon P_{y_0} \longrightarrow Y,\ \alpha \longmapsto \alpha(1)$ はファイブレーションであり，点 y_0 におけるファイバーは $\Omega_{y_0}Y$ と同相である．
(3) Y^I は Y と同じホモトピー型である．$p\colon Y^I \longrightarrow Y$ がホモトピー同値写像となる．
(4) $P_{y_0}Y$ は可縮（i.e. 一点と同じホモトピー型を持つ）

証明 任意の位相空間 X を 1 つ固定する．

(1)
- 連続写像 $g\colon X \times \{0\} \longrightarrow Y^I$
- ホモトピー $H\colon X \times I \longrightarrow Y$

であって図式

$$\begin{tikzcd} X \times \{0\} \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook] & Y^I \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "H"] & Y \end{tikzcd}$$

を可換にするものを与える．このとき $\forall x \in X$ を 1 つ固定すると $g(x)$ は点 $H(x,\,0) \in Y$ を終点に持つ道となり，制限 $H|_{\{x\}\times I}\colon I \longrightarrow Y$ は $H(x,\,0)$ を終点に持つ道となる．従って H の持ち上げ $\tilde{H}\colon X \times I \longrightarrow Y^I$ は，（もし存在すれば）道 $\tilde{H}(x,\,0)$ が道 $g(x)$ に一致し，かつ道 $\tilde{H}(x,\,s)$ の終点が点 $H(x,\,s) \in Y$ に一致せねばならない．実際，写像 $\tilde{H}\colon X \times I \longrightarrow Y^I$ を

$$\tilde{H}(x,\,s)(t) := \begin{cases} g(x)\bigl((1+s)t\bigr), & t \in [0,\,\frac{1}{1+s}] \\ H\bigl(x,\,(1+s)t-1\bigr), & t \in [\frac{1}{1+s},\,1] \end{cases}$$

と定義するとこれは連続で[*4]，かつ $\forall s \in I$ に対して $\tilde{H}(x,\,0) = g(x),\ p\bigl(\tilde{H}(x,\,s)\bigr) = \tilde{H}(x,\,s)(1) = H(x,\,s)$ を充たす．i.e. 位相空間 X に対して HLP が充たされる．X は任意だったので $p\colon Y^I \longrightarrow y$ はファイブレーションである．

点 $y_0 \in Y$ におけるファイバー $p^{-1}(\{y_0\})$ は y_0 を終点とする Y の道全体の集合である．従って連続写像

$$\begin{aligned} P_{y_0}Y &\longrightarrow p^{-1}(\{y_0\}) \\ \alpha &\longmapsto \alpha(1-t) \end{aligned}$$

は同相 $p^{-1}(\{y_0\}) \approx P_{y_0}Y$ を与える．

(2) (1) と同様.

(3) 連続写像 $i\colon Y \longrightarrow Y^I,\ y \longmapsto (t \longmapsto y)$ を考えると，$p \circ i = \mathrm{id}_Y$ である．
一方，連続写像 $F\colon Y^I \times I \longrightarrow Y^I,\ (\alpha,\,s) \longmapsto \bigl(t \longmapsto \alpha(s(1-t)+t)\bigr)$ は $\mathrm{id}_{Y^I}\colon \alpha \longmapsto \alpha$ と $i \circ p\colon \alpha \longmapsto \bigl(t \longmapsto \alpha(1)\bigr) = i \circ p(\alpha)$ を繋ぐホモトピーである．i.e. $i \circ p \simeq \mathrm{id}_{Y^I}$ がわかった．

(4) (3) と同様.

[*4] コンパクト生成空間の位相を入れたため．

■

7.1.4 ファイブレーションのホモトピー

2 つのファイブレーションの射を繋ぐホモトピーを定義する．

定義 7.8: ファイブレーションのホモトピー

2 つのファイブレーション $p\colon E \longrightarrow B,\ p'\colon E' \longrightarrow B'$ およびそれらの間のファイブレーションの射 $(\tilde{f}_i,\, f_i), \quad i = 0, 1$ を与える．
$(\tilde{f}_0,\, f_0)$ と $(\tilde{f}_1,\, f_1)$ を繋ぐ**ファイバー・ホモトピー** (fiber homotopy) とは，

- ホモトピー $\tilde{H}\colon E \times I \longrightarrow E'$
- ホモトピー $H\colon B \times I \longrightarrow B'$

の組であって図式 7.3 を可換にし，

$$\begin{aligned} \tilde{H}_0 &= \tilde{f}_0, & \tilde{H}_1 &= \tilde{f}_1, \\ H_0 &= f_0, & H_1 &= f_1 \end{aligned}$$

を充たすもののこと，

$$\begin{tikzcd} E \times I \arrow[r, "\tilde{H}"] \arrow[d, "p \times \mathrm{id}_I"] & E' \arrow[d, "p"] \\ B \times I \arrow[r, "H"] & B' \end{tikzcd}$$

図 7.3: ファイバー・ホモトピー

定義 7.9: ファイブレーションのホモトピー同値

2 つのファイブレーション $p\colon E \longrightarrow B,\ p'\colon E' \longrightarrow B'$ が同じ**ファイバー・ホモトピー型** (fiber homotopy type) であるとは，2 つのファイブレーションの射 $(\tilde{f},\, \mathrm{id}_B),\ (\tilde{g},\, \mathrm{id}_B)$ w/ $\tilde{f}\colon E \longrightarrow E',\, \tilde{g}\colon E' \longrightarrow E$ であって，以下の条件をみたすものが存在することを言う：

- ホモトピー $\tilde{H}\colon E \times I \longrightarrow E$ であって $\forall (e,\, t) \in E \times I$ に対して
$$\begin{aligned} p\big(\tilde{H}(e,\, t)\big) &= p(e), \\ \tilde{H}_0 &= \tilde{g} \circ \tilde{f}, \\ \tilde{H}_1 &= \mathrm{id}_E \end{aligned}$$
を充たすものが存在する．

- ホモトピー $\tilde{G}\colon E'\times I \longrightarrow E'$ であって $\forall (e',\, t) \in E'\times I$ に対して

$$\begin{aligned} p'\big(\tilde{G}(e',\, t)\big) &= p'(e'),\\ \tilde{G}_0 &= \tilde{f}\circ\tilde{g},\\ \tilde{G}_1 &= \mathrm{id}_{E'} \end{aligned}$$

を充たすものが存在する．

i.e. 合成 $(\tilde{g}\circ\tilde{f},\, \mathrm{id}_B)$, $(\tilde{f}\circ\tilde{g},\, \mathrm{id}_B)$ がそれぞれ $(\mathrm{id}_E,\, \mathrm{id}_B)$, $(\mathrm{id}_{E'},\, \mathrm{id}_B)$ に，B についてはホモトピー $B\times I \longrightarrow B,\ (b,\, t) \longmapsto b$ を通じてファイバー・ホモトピックであるようなものが存在することを言う．
このとき 2 つの連続写像 $\tilde{f},\ \tilde{g}$ のことを**ファイバー・ホモトピー同値写像** (fiber homotopy equivalences) と呼ぶ.

! ファイバー・ホモトピー同値写像 $\tilde{f}\colon E \longrightarrow E'$ をファイバー E_{b_0} に制限した連続写像 $\tilde{f}|_{E_{b_0}}\colon E_{b_0} \longrightarrow E'_{b_0}$ はホモトピー同値写像である．

7.1.5 連続写像をファイブレーションに置き換える

連続写像 $f\colon X \longrightarrow Y$ を与える．この節では位相空間 X は空でなく，位相空間 Y は弧状連結であるとする．

定理 7.4-(1) と同様の理由により，連続写像 $q\colon Y^I \longrightarrow Y,\ \alpha \longmapsto \alpha(0)$ はファイブレーションである．

定義 7.10: mapping path space

- ファイブレーション $q\colon Y^I \longrightarrow Y,\ \alpha \longmapsto \alpha(0)$ の $f\colon X \longrightarrow Y$ に沿った引き戻し $P_f \coloneqq f^*(Y^I)$ は[a] **mapping path space** と呼ばれる（可換図式 7.4).

$$P_f \coloneqq \left\{\, (x,\, \alpha) \in X\times Y^I \;\middle|\; f(x) = q(\alpha) = \alpha(0) \,\right\}$$

である．
- 連続写像

$$p\colon P_f \longrightarrow Y,\ (x,\, \alpha) \longmapsto \alpha(1)$$

のことを **mapping path fibration** と呼ぶ[b].

[a] 命題 7.1 より $\mathrm{proj}_1\colon P_f \longrightarrow X$ もまたファイブレーションである．
[b] p がファイブレーションであることは定理 7.5 で示す．

$$
\begin{tikzcd}
P_f \arrow[r, "\mathrm{proj}_2"] \arrow[d, "\mathrm{proj}_1"'] & Y^I \arrow[d, "q"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}
$$

図 7.4: mapping path space

定理 7.5: ファイブレーションと連続写像のホモトピー同値性

任意の連続写像 $f\colon X \longrightarrow Y$ を与える．

(1) ホモトピー同値写像 $h\colon X \longrightarrow P_f$ であって図式 7.5 を可換にするものが存在する．
(2) mapping path fibration $p\colon P_f \longrightarrow Y$ はファイブレーションである．
(3) $f\colon X \longrightarrow Y$ がファイブレーションならば h はファイバー・ホモトピー同値写像である．

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\exists h"] \arrow[dr, "f"'] & & P_f \arrow[dl, "p"] \\
& Y &
\end{tikzcd}
$$

図 7.5: ファイブレーションと連続写像のホモトピー同値性

連続写像 $f\colon X \longrightarrow Y$ が与えられたとき，「$F \hookrightarrow X \xrightarrow{f} Y$ はファイブレーションである」と言うことがある．この場合 X とホモトピー同値な mapping path space P_f を使ってファイブレーション $F \hookrightarrow P_f \xrightarrow{p} Y$ を考えている．

<u>証明</u> (1) 連続写像 $h\colon X \longrightarrow P_f,\ x \longmapsto (x,\ \mathrm{const}_{f(x)})$ を考える．[*5]．すると $f = p \circ h$ であるから図式 7.5 は可換になる．

h のホモトピー逆写像が $\mathrm{proj}_1\colon P_f \longrightarrow X,\ (x,\ \alpha) \longmapsto x$ であることを示す．$\mathrm{proj}_1 \circ h = \mathrm{id}_X$ は即座に従う．一方，ホモトピー $F\colon P_f \times I \longrightarrow P_f,\ \big((x,\ \alpha),\ s\big) \longmapsto \big(x,\ (t \longmapsto \alpha(st))\big)$ は $\forall (x,\ \alpha) \in P_f$ に対して

$$
\begin{aligned}
F_0(x,\ \alpha) &= (x,\ \mathrm{const}_{\alpha(0)}), \\
F_1(x,\ \alpha) &= (x,\ \alpha)
\end{aligned}
$$

を充たす．P_f の定義より $\alpha(0) = f(x)$ が成り立つから $F_0 = h \circ \mathrm{proj}_1,\ F_1 = \mathrm{id}_{P_f}$ がわかる．i.e. F は $h \circ \mathrm{proj}_1$ と id_{P_f} を繋ぐホモトピーである．

(2) 任意の位相空間 A を一つ固定し，

- 連続写像 $g\colon A \times \{0\} \longrightarrow P_f,\ a \longmapsto \big(g_1(a),\ g_2(a)\big)$
- ホモトピー $H\colon A \times I \longrightarrow Y$

であって以下の可換図式を充たすものを任意に与える：

[*5] $\mathrm{const}_{f(x)}$ は不変な道 $I \longrightarrow Y,\ t \longmapsto f(x)$.

$$
\begin{tikzcd}
A \times \{0\} \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook] & P_f \arrow[d, "p"] \\
A \times I \arrow[r, "H"] & Y
\end{tikzcd}
$$

従って $\forall a \in A$ に対して $g_2(a)(1) = H(a, 0)$ が，P_f の定義より $g_2(a)(0) = f\big(g_1(a)\big)$ が成り立つ．
ここで写像 $\tilde{H}\colon A \times I \longrightarrow P_f,\ (a,\, s) \longmapsto \big(g_1(a),\, (t \longmapsto \tilde{H}_2(a,\, s)(t))\big)$ を

$$
\tilde{H}_2(a,\, s)(t) \coloneqq \begin{cases} g_2(a)\big((1+s)t\big), & t \in [0,\, \frac{1}{1+s}] \\ H\big(a,\, (1+s)t - 1\big), & t \in [\frac{1}{1+s},\, 1] \end{cases}
$$

で定義するとこれは連続で，かつ $\forall (a,\, s) \in A \times I$ に対して $p\big(\tilde{H}(a,\, s)\big) = \tilde{H}_2(a,\, s)(1) = H(a,\, s)$, $\tilde{H}(a,\, 0) = \big(g_1(a),\, g_2(a)\big) = g(a)$ を充たす．i.e. 連続写像 $\tilde{H}$ によって A に対する HLP が充たされる．A は任意だったので $p\colon P_f \longrightarrow Y$ はファイブレーションである．

(3) $f\colon X \longrightarrow Y$ がファイブレーションであるとする．(1) の証明において $h\colon X \longrightarrow P_f$ はファイブレーションの射である．
一方，$\mathrm{proj}_1\colon P_f \longrightarrow X$ はファイブレーションの射でない．従ってまずファイブレーションの射 $g\colon P_f \longrightarrow X$ を構成する必要がある．
- 連続写像 $\mathrm{proj}_1\colon P_f \longrightarrow X$
- ホモトピー $\gamma\colon P_f \times I \longrightarrow P_f,\ \big((x,\, \alpha),\, t\big) \longmapsto \alpha(t)$

を考えると，P_f の定義から $f \circ \mathrm{proj}_1(x,\, \alpha) = f(x) = \alpha(0) = \gamma\big((x,\, \alpha),\, 0\big)$ が成り立つ．$f\colon X \longrightarrow Y$ はファイブレーションなので HLP が成り立ち，以下の可換図式を得る：

$$
\begin{tikzcd}
P_f \times \{0\} \arrow[r, "\mathrm{proj}_1"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "f"] \\
P_f \times I \arrow[r, "\gamma"] \arrow[ur, dashed, "\exists \tilde{\gamma}"] & Y
\end{tikzcd}
$$

$\gamma_1(x,\, \alpha) = \alpha(1) = p(x,\, \alpha)$ であるから，$g\colon P_f \longrightarrow X,\ (x,\, \alpha) \longmapsto \tilde{\gamma}((x,\, \alpha),\, 1)$ と定めるとこれはファイブレーションの射になる．その上 $\tilde{\gamma}((x,\, \alpha),\, 0) = \mathrm{proj}_1$ であるから $g \simeq \mathrm{proj}_1$ であり，(1) から g が h のホモトピー逆写像であるとわかる．
あとは $g \circ f$ と id_X を繋ぐホモトピー $\tilde{H}\colon X \times I \longrightarrow X$ であって $f\big(\tilde{H}(x,\, t)\big) = f(x)$ を充たすものと，$f \circ g$ と id_{P_f} を繋ぐホモトピー $\tilde{G}\colon P_f \times I \longrightarrow P_f$ であって $p\big(\tilde{G}\big((x,\, \alpha),\, t\big)\big) = p(x,\, \alpha)$ を充たすものが存在することを示せばよい．実際

$$
\tilde{H}\colon X \times I \longrightarrow X,\ (x,\, t) \longmapsto \tilde{\gamma}\big((x,\, \mathrm{const}_{f(x)}),\, t\big)
$$

と定義すれば

$$
\begin{aligned}
f\big(\tilde{H}(x,\, t)\big) &= f\Big(\tilde{\gamma}\big((x,\, \mathrm{const}_{f(x)}),\, t\big)\Big) = \gamma(x,\, \mathrm{const}_{f(x)}) = f(x), \\
\tilde{H}|_{X \times \{0\}} &= \tilde{\gamma}\big((x,\, \mathrm{const}_{f(x)}),\, 0\big) = \mathrm{proj}_1(x,\, \mathrm{const}_{f(x)}) = x, \\
\tilde{H}|_{X \times \{1\}} &= \tilde{\gamma}\big((x,\, \mathrm{const}_{f(x)}),\, 1\big) = g(x,\, \mathrm{const}_{f(x)}) = (g \circ h)(x)
\end{aligned}
$$

が充たされる．一方

$$
\tilde{G}\colon P_f \times I \longrightarrow P_f,\ \big((x,\, \alpha),\, s\big) \longmapsto \Big(\tilde{\gamma}\big((x,\, \alpha),\, s\big),\, \big(t \longmapsto \alpha((1-t)s + t)\big)\Big)
$$

と定義すれば

$$
\begin{aligned}
p\Big(\tilde{G}\big((x,\,\alpha),\,s\big)\Big) &= p\Big(\tilde{\gamma}\big((x,\,\alpha),\,s\big),\,\big(t \longmapsto \alpha((1-t)s+t)\big)\Big) = \alpha(1) = p(x,\,\alpha) \\
\tilde{G}|_{P_f\times\{0\}}(x,\,\alpha) &= \Big(\tilde{\gamma}\big((x,\,\alpha),\,0\big),\,\big(t \longmapsto \alpha(t)\big)\Big) = \big(\mathrm{proj}_1(x,\,\alpha),\,\alpha\big) = (x,\,\alpha), \\
\tilde{G}|_{P_f\times\{1\}}(x,\,\alpha) &= \Big(\tilde{\gamma}\big((x,\,\alpha),\,1\big),\,\big(t \longmapsto \alpha(1)\big)\Big) = \big(g(x,\,\alpha),\,\mathrm{const}_{\alpha(1)}\big) \\
&= \big(g(x,\,\alpha),\,\mathrm{const}_{\gamma(x,\,\alpha,\,1)}\big) \\
&= \big(g(x,\,\alpha),\,\mathrm{const}_{f\left(\tilde{\gamma}(x,\,\alpha,\,1)\right)}\big) \\
&= \big(g(x,\,\alpha),\,\mathrm{const}_{f\left(g(x,\,\alpha)\right)}\big) = h\circ g(x,\,\alpha)
\end{aligned}
$$

が充たされる．

■

7.2　コファイブレーション

7.2.1　HEP とコファイブレーションの定義

拡張 (extension) の問題とは，次のようなものである：

- 連続写像 $i\colon A \longrightarrow X,\ f\colon A \longrightarrow Y$ が与えられる．
- このとき，連続写像 $\tilde{f}\colon X \longrightarrow Y$ であって $\tilde{f}\circ i = f$ を充たすようなものは存在するか？

この状況を可換図式で表すと

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "i"] \arrow[dr, "f"] & \\
X \arrow[r, dashed, "\tilde{f}"] & Y
\end{tikzcd}
$$

のようになる．

定義 7.11: ホモトピー拡張性質 (HEP)

連続写像 $i\colon A \longrightarrow X$ が位相空間 Y に対して**ホモトピー拡張性質** (homotopy extension property) を持つとは，以下の条件を充たすことをいう：

(HEP)　$\iota_0\colon A\times\{0\} \hookrightarrow A\times I$ を包含写像とする．

- 連続写像 $\tilde{f}\colon X\times\{0\} \longrightarrow Y$
- ホモトピー $H\colon A\times I \longrightarrow Y$

であって $H\circ\iota_0 = \tilde{f}\circ i$ を充たすもの[a]を任意に与えたとき，（必ずしも一意でない）連続写像 $\tilde{H}\colon X\times I \longrightarrow Y$ が存在して図式 7.6 が可換になる．

[a] i.e. $\forall a\in A$ に対して $H(a,\,0) = \tilde{f}\big(i(a)\big)$ を充たすもの．ホモトピー $H\colon A\times I \longrightarrow Y$ であって $H_0 = \tilde{f}\circ i$ を充たすもの，と言ってもよい．

$$\begin{tikzcd}
A \times \{0\} \arrow[rr, hook, "\iota_0"] \arrow[dd, "i"'] & & A \times I \arrow[dl, "\forall H"'] \arrow[dd, "i \times \mathrm{id}_I"] \\
& Y & \\
X \times \{0\} \arrow[rr, hook] \arrow[ur, "\forall \tilde{f}"] & & X \times I \arrow[ul, dashed, "\tilde{H}"]
\end{tikzcd}$$

図 7.6: ホモトピー拡張性質 (HEP)

定義 7.12: コファイブレーション

連続写像 $i\colon A \longrightarrow X$ が**コファイブレーション** (cofinration) であるとは，任意の位相空間 Y に対してホモトピー拡張性質が成り立つことを言う．

コファイブレーションはファイブレーションの双対概念である．ファイブレーション $p\colon E \longrightarrow B$ に対する HLP の図式を，currying [*6]$G\colon Y \times I \longrightarrow B \rightsquigarrow \lambda G\colon Y \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}}(I, B) = B^I$ を使って書き換えると

$$\begin{tikzcd}
E & E^I \arrow[l, "\text{eval.at0}"'] \arrow[d, "\hat{p}"] \\
Y \arrow[u, "\tilde{g}"] \arrow[ur, dashed, "\lambda \tilde{G}"] \arrow[r, "\lambda G"] & B^I
\end{tikzcd}$$

になる．一方，コファイブレーション $i\colon A \longrightarrow X$ の HEP の図式は

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook] \arrow[d, "\tilde{f}"] & X \times I \arrow[dl, dashed, "\tilde{H}"'] \\
Y & A \times I \arrow[l, "H"] \arrow[u, "i \times \mathrm{id}_I"']
\end{tikzcd}$$

と書ける．

「性質の良い」位相空間においては，任意のコファイブレーション $\iota\colon A \longrightarrow X$ は単射かつ閉写像（i.e. 像が X の閉集合）になる．特に空間対 (X, A) であって A が閉部分空間となっているものが与えられたとき，包含写像 $A \hookrightarrow X$ がコファイブレーションであるとは

- 任意の位相空間 Y
- 任意の連続写像 $f\colon X \longrightarrow Y$
- $h_0 = f|_A$ を充たす任意のホモトピー $h\colon A \times I \longrightarrow Y$

に対して拡張の問題

[*6] コンパクト生成空間の圏 **CG** が Cartesian closed category であることから，exponential が必ず存在する．故に λG は同型を除いて一意的に存在する．

$$\begin{tikzcd}
(X \times \{0\}) \cup (A \times I) \arrow[d, "i"] \arrow[dr, "f \cup h"] & \\
X \times I \arrow[r, dashed] & Y
\end{tikzcd}$$

が解を持つことを言う．このことに由来して**ホモトピー拡張性質**と呼ぶのである．

定義 7.13: 変位レトラクト (再掲)

空間対 $(X,\ A)$ を与える．

- A が X の**レトラクト** (retract) であるとは，ある連続写像 $r\colon X \longrightarrow A$ が存在して以下を充たすことを言う：
  (r) $r|_A = \mathrm{id}_A$
  r のことを**レトラクション** (retraction) と呼ぶ．
- A が X の**変位レトラクト** (deformation retract) であるとは，ある連続写像 $h\colon X \times I \longrightarrow X$ が存在して以下を充たすことを言う：
  (dr-1) $h|_{X\times\{0\}} = \mathrm{id}_X$
  (dr-2) $h|_{A\times\{t\}} = \mathrm{id}_A, \quad \forall t \in I$
  (dr-3) $h(x,\ 1) \in A, \quad \forall x \in X$

定義 7.14: NDR-pair

X をコンパクト生成空間とし，$A \subset X$ を部分空間とする．

- 空間対 $(X,\ A)$ が **NDR-対** (NDR-pair[a]) であるとは, ある 2 つの連続写像 $u\colon X \longrightarrow I,\ h\colon X \times I \longrightarrow X$ が存在して以下を充たすことを言う：
  (NDR-1) $A = u^{-1}(\{0\})$
  (NDR-2) $h|_{X\times\{0\}} = \mathrm{id}_X$
  (NDR-3) $h|_{A\times\{t\}} = \mathrm{id}_A, \quad \forall t \in I$
  (NDR-4) $h(x,\ 1) \in A, \quad \forall x \in X \setminus u^{-1}(\{1\})$
- 空間対 $(X,\ A)$ が **DR-対** (DR-pair) であるとは，ある 2 つの連続写像 $u\colon X \longrightarrow I,\ h\colon X \times I \longrightarrow X$ が存在して **(NDR-1)**, **(NDR-2)**, **(NDR-3)** と
  (DR-4) $h(x,\ 1) \in A, \quad \forall x \in X$
  を充たすことを言う．

[a] neighborhood deformation retract

! DR-対の定義は，**(NDR-1)** を充たす $u\colon X \longrightarrow I$ が存在すると言う意味で通常の変位レトラクトの定義よりも強い定義となっている．

補題 7.2:

2 つの空間対 $(X,\,A),\ (Y,\,B)$ を与える．

- 与えられた空間対の両方が NDR-対ならば，それらの積

$$(X,\,A)\times(Y,\,B) \coloneqq \bigl(X\times Y,\,(X\times B)\cup(A\times Y)\bigr)$$

  もまた NDR-対となる．
- どちらか一方が DR-対でもう一方が NDR-対ならば，積は DR-対である．

証明は [?, THEOREM 6.3.] による．

__証明__ $(X,\,A)$ が NDR-対であると仮定し，NDR-対の定義における連続写像 $u\colon Y\longrightarrow I,\ h\colon X\times I\longrightarrow X$ をとる．同様に $(X,\,A)$ が NDR-対であると仮定して，対応する連続写像 $v\colon Y\longrightarrow I,\ j\colon Y\times I\longrightarrow Y$ をとる．

ここで写像

$$w\colon X\times Y\longrightarrow I,\ (x,\,y)\longmapsto u(x)v(y)$$

およびホモトピー

$$\begin{aligned}
&q\colon (X\times Y)\times I\longrightarrow X\times Y,\\
&(x,\,y,\,t)\longmapsto \begin{cases} (x,\,y)=\bigl(h(x,\,t),\,j(y,\,t)\bigr), & x\in A\ \text{かつ}\ y\in B\\ \Bigl(h(x,\,t),\,j\bigl(y,\,\frac{u(x)}{v(y)}t\bigr)\Bigr), & u(x)\le v(y)\ \text{かつ}\ v(y)>0\\ \Bigl(h\bigl(x,\,\frac{v(y)}{u(x)}t\bigr),\,j(y,\,t)\Bigr), & u(x)\ge v(y)\ \text{かつ}\ u(x)>0\end{cases}
\end{aligned}$$

を考える．w は明らかに連続写像である．

q の連続性を示す．定義の下 2 行の部分は集合 $\left\{\,(x,\,y)\in X\times Y\;\middle|\;u(x)=v(y)>0\,\right\}$ 上で交わるが，この集合上でどちらも $\bigl(h(x,\,t),\,j(y,\,t)\bigr)$ となり一致する．従ってこれらは集合 $(X\times Y\setminus A\times B)\times I$ 上の連続写像を成す．あとは $\forall(x,\,y,\,t)\in A\times B\times I$ における q の連続性を示せば良い．

任意の開集合 $x\in U\subset X,\,y\in V\subset Y$ をとる．**(NDR-3)** より $\forall t\in I,\ h(x,\,t)=x\in U$ が成り立つから，包含関係 $\{x\}\times I\subset h^{-1}(U)$ が成り立つ．連続写像の定義より $h^{-1}(U)$ は $X\times I$ の開集合であり，かつ I はコンパクトだから，ある X の開集合 $x\in S\subset X$ が存在して $S\times I\subset h^{-1}(U)$ を充たす．同様の議論により，ある Y の開集合 $y\in T\subset Y$ が存在して $T\times I\subset j^{-1}(V)$ を充たす．従って点 $q(x,\,y,\,t)=(x,\,y)=\bigl(h(x,\,t),\,j(y,\,t)\bigr)\in A\times B$ の開近傍 $U\times V$ に対して，$(x,\,y,\,t)\in S\times T\times I\subset q^{-1}(U\times V)$ が成り立つ，i.e. $q^{-1}(U\times V)$ は点 $(x,\,y,\,t)$ の近傍となる．$U\times V$ の形をした $A\times B$ の開集合全体は積位相の開基をなすから，q が $A\times B\times I$ 上で連続であることが示された．

次に，w と q が **(NDR-1) - (NDR-4)** を充していることを示す．

(NDR-1) 明らかに $w^{-1}(\{0\})=(X\times B)\cup(A\times Y)$ である．

(NDR-2) $\forall(x,\,y)\in X\times Y$ に対して

$$q(x,\,y,\,0)=\bigl(h(x,\,0),\,j(y,\,0)\bigr)=(x,\,y).$$

(NDR-3) $\forall (x,\, y) \in (X \times B) \cup (A \times Y),\ \forall t \in I$ に対して

$$
q(x,\, y,\, t) = \begin{cases} (x,\, y), & (x,\, y) \in A \times B \\ \bigl(x,\, j(y,\, 0)\bigr) = (x,\, y), & (x,\, y) \in A \times (Y \setminus B) \\ \bigl(h(x,\, 0),\, y\bigr) = (x,\, y), & (x,\, y) \in (X \setminus A) \times B \end{cases}
$$

(NDR-4) $\forall (x,\, y) \in X \times Y$ に対して $w(x,\, y) = u(x)v(y) < 1 \iff (x,\, y) \in u(x) < 1$ または $v(y) < 1$ である．$w(x,\, y) = 0$ の場合は自明なので $0 < w(x,\, y) < 1$ を考える．$u(x) < 1$ の場合と $v(y) < 1$ の場合の議論は全く同様なので，前者のみ考える．

$$
q(x,\, y,\, 1) = \begin{cases} \Bigl(h(x,\, 1),\, j\bigl(y,\, \tfrac{u(x)}{v(y)}\bigr)\Bigr) \in A \times A, & u(x) \leq v(y) \text{ かつ } v(y) > 0 \\ \Bigl(h\bigl(x,\, \tfrac{v(y)}{u(x)}\bigr),\, j(y,\, 1)\Bigr) \in X \times B, & 1 > u(x) \geq v(y) \text{ かつ } u(x) > 0 \end{cases}
$$

以上より前半が示された．

$(X,\, A)$ が DR-対の場合は，上述の構成において u を $u' \coloneqq u/2$ に置き換える．すると $\forall (x,\, y) \in X \times Y$ に対して $w(x,\, y) < 1$ が成り立ち，従って $q(x,\, y,\, 1) \in (X \times B) \cup (A \times Y)$ が成り立つ．故に積は DR-対となり，証明が完了する． ■

定理 7.6: コファイブレーションの必要十分条件 (Steenrod)

以下は同値である：

(1) $(X,\, A)$ が NDR-対
(2) $\bigl(X \times I,\, (X \times \{0\}) \cup (A \times I)\bigr)$ が DR-対
(3) $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ が $X \times I$ のレトラクト
(4) 包含写像 $i\colon A \hookrightarrow X$ がコファイブレーション

<u>証明</u> **(1) $\implies$ (2)** $(I,\, \{0\})$ は DR-対だから，補題 7.2 より $(X,\, A) \times (I,\, \{0\}) = \bigl(X \times I,\, (X \times \{0\}) \cup (A \times I)\bigr)$ も DR 対である．

(2) $\implies$ (3) 明らか

(4) $\implies$ (3) $i\colon A \longrightarrow X$ がコファイブレーションだとすると，位相空間 $X \times \{0\} \cup A \times I$ に対して HEP を使うことで次の可換図式を得る：

$$
\begin{tikzcd}
A \times \{0\} \arrow[rr, hook, "\iota_0"] \arrow[dd, "i"'] & & A \times I \arrow[dl, "\mathrm{id}_{A \times I}"'] \arrow[dd, "i \times \mathrm{id}_I"] \\
& X \times \{0\} \cup A \times I & \\
X \times \{0\} \arrow[ur, "\mathrm{id}_X"] \arrow[rr, hook] & & X \times I \arrow[ul, dashed, "\exists r"]
\end{tikzcd}
$$

図式中の連続写像 $r\colon X \times I \longrightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$ はレトラクションになっている．

(3) $\implies$ (4) 連続写像 $r\colon X \times I \longrightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$ をレトラクションとする．

任意の位相空間 Y を 1 つ固定する．

- 任意の連続写像 $f\colon X \longrightarrow Y$

- $h_0 = f|_A$ を充たす任意のホモトピー $h\colon A \times I \longrightarrow Y$

に対する拡張の問題

$$
\begin{tikzcd}
A \times \{0\} \arrow[rr, hook, "\iota_0"] \arrow[dd, "i"] & & A \times I \arrow[dl, "\forall h"'] \arrow[dd, "i \times \mathrm{id}_I"] \\
& Y & \\
X \times \{0\} \arrow[ur, "\forall f"] \arrow[rr, hook] & & X \times I \arrow[ul, dashed]
\end{tikzcd}
$$

は $f \circ r\colon X \times I \longrightarrow Y$ を解に持つ．

(3) $\Longrightarrow$ (1)

■

系 7.7:

空間対 $(X,\, A),\ (Y,\, B)$ の包含写像 $i\colon A \hookrightarrow X,\ j\colon B \hookrightarrow Y$ がどちらもコファイブレーションならば，積

$$(X,\, A) \times (Y,\, B) = \bigl(X \times Y,\, (X \times B) \cup (A \times Y)\bigr)$$

の包含写像もコファイブレーションとなる．

証明 補題 7.2 と定理 7.6-(1) より従う． ■

押し出しとコファイブレーションの関係を論じる．

定義 7.15: 押し出し

圏 $\mathcal{C}$ における射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\, B),\ g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\, C)$ の**押し出し**とは対象 $f_*C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と射 $i_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,\, f_*C),\ i_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,\, f_*C)$ の組であって，以下の普遍性を充たすもののこと：

(押し出しの普遍性) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して集合の写像

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f_*C,\, X) &\longrightarrow \bigl\{\, (\varphi_1,\, \varphi_2) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,\, X) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,\, X) \bigm| \varphi_1 \circ f = \varphi_2 \circ g \,\bigr\} \\
h &\longmapsto (h \circ i_1,\, h \circ i_2)
\end{aligned}
$$

が全単射になる（図式 7.7）．

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & B \arrow[d, "i_1"] \arrow[ddr, bend left, "\varphi_1"] & \\
C \arrow[r, "i_2"] \arrow[drr, bend right, "\varphi_2"'] & f_*C \arrow[dr, dashed, "\exists! h"] & \\
& & \forall X
\end{tikzcd}
$$

図 7.7: 押し出しの普遍性

押し出しは帰納極限である．故に存在すれば同型を除いて一意である．

さて，圏 **Top** において押し出しが必ず存在することを示そう．2 つの位相空間 $B, C \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ の disjoint union を，基点 $b_0 \in B$，$c_0 \in C$ を固定した上で

$$
B \amalg C \coloneqq \left\{ (b,\, c_0,\, 0) \,\middle|\, b \in B \right\} \cup \left\{ (b_0,\, c,\, 1) \,\middle|\, c \in C \right\}
$$

と定義する．

命題 7.3: 圏 Top における押し出し

圏 **Top** における図式 $(A,\, B,\, C;\;\; f\colon A \longrightarrow B,\, g\colon A \longrightarrow C)$ を任意に与える．位相空間 $f_*C \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ を

$$
f_*C \coloneqq \frac{B \amalg C}{f(a) \sim g(a)}
$$

で定める．包含写像と商写像の合成を $i_1\colon B \hookrightarrow f_*C$，$i_2\colon C \hookrightarrow f_*C$ とおくと，組 $(f_*C,\, i_1,\, i_2)$ は押し出しである．

定理 7.8: コファイブレーションの押し出し

押し出しの図式において $g\colon A \longrightarrow C$ がコファイブレーションであるとする．このとき $i_1\colon B \longrightarrow f_*C$ はコファイブレーションである．

証明 コンパクト生成な Hausdorff 空間の圏 **CG** で考える．**CG** が Cartesian closed category であることから必ず exponentials が存在する．従って HEP の問題

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"] & X \times I \arrow[dl, dashed] \\
Y & A \times I \arrow[u, "i \times \mathrm{id}_I"'] \arrow[l, "H"]
\end{tikzcd}
$$

は currying により

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\lambda H"] \arrow[d, "i"] & Y^I \arrow[d, "\mathrm{eval.at0}"] \\
X \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed] & Y
\end{tikzcd}
$$

と同値である．以降で HEP の問題を考えるときは後者として考えることにする．

任意の位相空間 $Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG})$ を一つ固定する．押し出しの図式の右側に HEP の問題をつなげた図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & B \arrow[r, "H"] \arrow[d, "i_1"] & Y^I \arrow[d, "\mathrm{eval.at}\,0"] \\ C \arrow[r, "i_2"] & f_*C \arrow[r, "h"] \arrow[ur, dashed] & Y \end{tikzcd}$$

を考える．$g\colon A \longrightarrow C$ がコファイブレーションであることにより，HLP の問題

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "H\circ f"] \arrow[d, "g"] & Y^I \arrow[d, "\mathrm{eval.at}\,0"] \\ C \arrow[r, "h\circ i_2"] \arrow[ur, dashed] & Y \end{tikzcd}$$

は解 $\tilde{H}\colon C \longrightarrow Y^I$ を持つ．従って押し出しの普遍性より可換図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & B \arrow[d, "i_1"] \arrow[ddr, bend left, "H"] & \\ C \arrow[r, "i_2"] \arrow[drr, bend right, "\tilde{H}"] & f_*C \arrow[dr, dashed, "\exists! j"] & \\ & & Y^I \end{tikzcd}$$

が得られる．図式の可換性より，連続写像 $j\colon f_*C \longrightarrow Y^I$ は $j \circ i_1 = H$ を充たす．ところで，このとき 2 つの可換図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & B \arrow[d, "i_1"] \arrow[ddr, bend left, "\mathrm{eval.at0}\circ H"] & \\ C \arrow[r, "i_2"] \arrow[drr, bend right, "\mathrm{eval.at}\,0\circ\tilde{H}"] & f_*C \arrow[dr, "h"] & \\ & & Y^I \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & B \arrow[d, "i_1"] \arrow[ddr, bend left, "\mathrm{eval.at0}\circ H"] & \\ C \arrow[r, "i_2"] \arrow[drr, bend right, "\mathrm{eval.at}\,0\circ\tilde{H}"] & f_*C \arrow[dr, "\mathrm{eval.at}\,0\circ j"] & \\ & & Y^I \end{tikzcd}$$

が成り立つが，押し出しの普遍性より $\mathrm{eval.at}\,0 \circ j = h$ でなくてはならない．

以上の議論により，$i_1\colon B \longrightarrow f_*C$ に対する HEP の問題が

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "H"] \arrow[d, "i_1"] & Y^I \arrow[d, "\mathrm{eval.at}\,0"] \\ f_*C \arrow[r, "h"] \arrow[ur, dashed, "j"] & Y \end{tikzcd}$$

として解決された．Y は任意であったから i_1 はコファイブレーションである．■

7.2.2 連続写像をコファイブレーションに置き換える

定義 7.16: 写像柱・写像錐

$f\colon A \longrightarrow X$ を連続写像とする．

- f の**写像柱** (mapping cylinder) を
$$M_f := \frac{(A \times I) \amalg X}{(a,\, 1) \sim f(a)}$$
で定義する．
- f の**写像錐** (mapping cone) を
$$C_f := \frac{M_f}{A \times \{0\}}$$
で定義する．

命題 7.3 より写像柱 M_f は図式

$$\begin{tikzcd} A \times \{1\} \arrow[r, "f \times 1"] \arrow[d, "g \times 1"] & X \times \{1\} \\ A \times I & \end{tikzcd}$$

の押し出しとしても得られる．このことは定理 7.5 を彷彿とさせる：

定理 7.9: コファイブレーションと連続写像のホモトピー同値性

任意の連続写像 $f\colon A \longrightarrow X$ を与える．包含写像 $i\colon A \hookrightarrow M_f,\ a \longmapsto [a,\, 0]$ を考える．

(1) ホモトピー同値写像 $h\colon M_f \longrightarrow X$ であって図式 7.9 を可換にするものが存在する．
(2) $i\colon A \longrightarrow M_f$ はコファイブレーションである．
(3) $f\colon A \longrightarrow X$ がコファイブレーションならば h はホモトピー同値写像である．特に h は**コファイバー** (cofiber) のホモトピー同値写像
$$C_f \longrightarrow X/f(A)$$
を引き起こす．

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "i"] & \\ X & & M_f \arrow[ll, "h"] \end{tikzcd}$$

図 7.9: コファイブレーションと連続写像のホモトピー同値性

証明 (1) 連続写像 $h\colon M_f \longrightarrow X$ を

$$h([a,\, s]) \coloneqq f(a), \quad h([x]) \coloneqq x$$

で定めると，図式 7.9 は可換になる．

包含写像と商写像の合成 $j\colon X \longrightarrow M_f,\; x \longmapsto [x]$ は $h \circ j = \mathrm{id}_X$ を充たす．ホモトピー $F\colon M_f \times I \longrightarrow M_f$ を

$$\begin{aligned} F([a,\, s],\, t) &\coloneqq [a,\, (1-t)s + t], \\ F([x],\, t) &\coloneqq [x] \end{aligned}$$

で定義すると $F_0 = \mathrm{id}_{M_f}$ かつ

$$\begin{aligned} F_1([a,\, s]) &= [a,\, 1] = [f(a)] = j \circ h([a,\, s]), \\ F_1([x]) &= [x] = j \circ h([x]) \end{aligned}$$

が成り立つ．i.e. $j \circ h \simeq \mathrm{id}_{M_f}$ である．

(2) 定理 7.6 より，レトラクション $R\colon M_f \times I \longrightarrow M_f \times \{0\} \cup A \times I$ を構成すれば良い．連続写像 $r\colon I \times I \longrightarrow I \times \{0\} \cup \{0\} \times I,\; (s,\, t) \longmapsto \bigl(r_1(s,\, t),\, r_2(s,\, t)\bigr)$ を $r|_{\{1\}\times I} = \{(1,\, 0)\}$ となるようにとる．そして連続写像 $R\colon M_f \times I \longrightarrow M_f \times \{0\} \cup A \times I$ を

$$R([a,\, s],\, t) \coloneqq \bigl([a,\, r_1(s,\, t)],\, r_2(s,\, t)\bigr), \quad R([x],\, t) \coloneqq ([x],\, 0)$$

と定義する．R の $M_f \times \{0\} \cup A \times I$ への制限[*7]は

$$\begin{aligned} R([a,\, s],\, 0) &= \bigl([a,\, r_1(s,\, 0)],\, r_2(s,\, 0)\bigr) = ([a,\, s],\, 0), \\ R([x],\, 0) &= ([x],\, 0), \\ R([a,\, 0],\, t) &= \bigl([a,\, r_1(0,\, t)],\, r_2(0,\, t)\bigr) = ([a,\, 0],\, t) \end{aligned}$$

を充たすのでレトラクションである．

(3) 定理 7.6 より，もし $f\colon A \hookrightarrow X$ がコファイブレーションならばレトラクション $r\colon X \times I \longrightarrow X \times \{1\} \cup f(A) \times I$ が存在する．また，自明な同相写像 $q\colon X \times \{1\} \cup f(A) \times I \xrightarrow{\approx} M_f$ がある．連続写像 $g\colon X \longrightarrow M_f,\; x \longmapsto q\bigl(r(x,\, 0)\bigr)$ とホモトピー $H \coloneqq h \circ q \circ r\colon X \times I \longrightarrow X$ を考える．すると

$$\begin{aligned} H_0(x) &= h \circ q \circ r(x,\, 0) = h \circ g(x), \\ H_1(x) &= h \circ q \circ r(x,\, 1) = h \circ q(x,\, 1) = h([x]) = x \end{aligned}$$

i.e. $H_0 = h \circ g,\; H_1 = \mathrm{id}_X$ が成り立つ．一方，ホモトピー $F\colon M_f \times I \longrightarrow M_f$ を

$$F([a,\, s],\, t) \coloneqq q \circ r\bigl(f(a),\, st\bigr), \quad F([x],\, t) \coloneqq q \circ r(x,\, t)$$

で定義する．すると

$$\begin{aligned} &F_0([a,\, s]) = q \circ r\bigl(f(a),\, 0\bigr) = g \circ h([a,\, s]), && F_0([x]) = q \circ r(x,\, 0) = g \circ h([x]), \\ &F_1([a,\, s]) = q \circ r\bigl(f(a),\, s\bigr) = q(f(a),\, s) = [a,\, s], && F_1([x]) = q \circ r(x,\, 1) = [x] \end{aligned}$$

i.e. $F_0 = g \circ h,\; H_1 = \mathrm{id}_{M_f}$ が成り立つ．

■

[*7] 正確には $M_f \times \{0\} \cup i(A) \times I$ への制限

7.3 ホモトピー集合

定義 7.17: ホモトピー集合

位相空間 X, Y を与える．

- X, Y の**ホモトピー集合** $[X, Y]$ を

$$[X, Y] \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)/\simeq$$

で定義する[a]．
- 空間対 $(X, \{x_0\})$, $(Y, \{y_0\})$ の間の射（**based map**）全体の集合をホモトピックで類別した商集合を**基点付きホモトピー集合**と呼び，$\boldsymbol{[X, Y]_0}$ と書く．

[a] X から Y への連続写像全体の集合はしばしば $\mathrm{Map}(X, Y)$ と書かれる．

- Y が弧状連結であるとする．このとき任意の定数写像は同一のホモトピー類に属する[*8]．このホモトピー類を**ホモトピー集合** $\boldsymbol{[X, Y]}$ **の基点**と呼ぶ．
- $[X, Y]_0$ の元のうち，唯一の定数写像 $x \longmapsto y_0$ が属するものが存在する．これを**基点付きホモトピー集合** $\boldsymbol{[X, Y]_0}$ **の基点**と呼ぶ．

7.3.1 完全列

Sets における完全列の概念を定義する．

定義 7.18: Sets における完全列

圏 **Sets** における図式

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

が B において**完全** (exact) であるとは，C が基点 c_0 を持ち，かつ

$$\mathrm{Im}\, f = g^{-1}(\{c_0\})$$

が成り立つことを言う．

位相空間 X_1, X_2, Y と連続写像 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X_1, X_2)$ を任意に与える．このとき f は 2 通りの方法でホモトピー集合の間の連続写像を誘導する：

$$\begin{aligned} f_* \colon [Y, X_1] &\longrightarrow [Y, X_2], \\ [\alpha] &\longmapsto [f \circ \alpha] \end{aligned}$$

[*8] 定数写像 $f_0, f_1 \colon X \longrightarrow Y$ を任意にとり，$\{y_i\} \coloneqq \mathrm{Im}\, f_i$ とおく．Y が弧状連結なので y_0 と y_1 を繋ぐ道 $\alpha \colon I \longrightarrow Y$ が存在する．このときホモトピー $H \colon X \times I \longrightarrow Y$, $(x, t) \longmapsto \alpha(t)$ を考えると $H_0 = (x \longmapsto y_0) = f_0$, $H_1 = (x \longmapsto y_1) = f_1$ が成り立つので H が f_0 と f_1 を繋ぐ．

または

$$f^* \colon [X_2, Y] \longrightarrow [X_1, Y], \quad [\alpha] \longmapsto [\alpha \circ f]$$

と定義する．これらの定義の well-definedness を示す：

証明 $\alpha \simeq \beta$ なる $\alpha,\, \beta \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Y,\, X_1)$ をとると，ホモトピー $h\colon Y \times I \longrightarrow X_1$ であって $h_0 = \alpha,\ h_1 = \beta$ を充たすものが存在する．このとき新しいホモトピーを $\tilde{h}\colon Y \times I \longrightarrow X_2,\ (y,\, t) \longmapsto f\bigl(h(y,\, t)\bigr)$ と定めると $\tilde{h}_1 = f \circ \alpha,\ \tilde{h}_2 = f \circ \beta$ が成り立つ．i.e. $f \circ \alpha \simeq f \circ \beta$ であり，f_* は well-defined である．

同様に $\alpha \simeq \beta$ なる $\alpha,\, \beta \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X_2,\, Y)$ をとると，ホモトピー $g\colon X_2 \times I \longrightarrow Y$ であって $g_0 = \alpha,\ g_1 = \beta$ を充たすものが存在する．このとき新しいホモトピーを $\tilde{g}\colon X_1 \times I \longrightarrow Y,\ (y,\, t) \longmapsto h\bigl(f(y),\, t\bigr)$ と定めると $\tilde{g}_1 = \alpha \circ f,\ \tilde{g}_2 = \beta \circ f$ が成り立つ．i.e. $\alpha \circ f \simeq \beta \circ f$ であり，f^* は well-defined である． ■

次の 2 つの定理は代数トポロジーにおける長完全列の構成の要石となる．

定理 7.10: ファイブレーションの基本性質

B を弧状連結空間，$F \overset{i}{\hookrightarrow} E \overset{p}{\to} B$ をファイブレーションとする．
任意の位相空間 Y を与えたとき，圏 $\mathbf{CG}$ における図式

$$[Y, F] \xrightarrow{i_*} [Y, E] \xrightarrow{p_*} [Y, B]$$

は完全である．

証明 ホモトピー集合 $[Y, B]$ の基点を $[\mathrm{const}]$ と書く．

$\mathrm{Im}\, i_* \subset p_*^{-1}([\mathrm{const}])$

$\forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}}(Y,\, F)$ に対して $p_* \circ i_*([g]) = [p \circ i \circ g]$ である．ところで B の基点 b_0 に対して $F = p^{-1}(\{b_0\})$ だから，$\forall y \in Y$ に対して $p \circ i \circ g(y) = p\bigl(g(y)\bigr) = b_0$ が成り立つ．i.e. $p \circ i \circ g$ は定数写像であり，$p_* \circ i_*([g]) = [p \circ i \circ g] = [\mathrm{const}]$ が示された．

$\mathrm{Im} i_* \supset p_*^{-1}([\mathrm{const}])$

$p_*([f]) = [\mathrm{const}]$ を充たす任意の $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}}(Y,\, E)$ をとる．このとき $p \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}}(Y,\, B)$ は定数写像にホモトピックである，i.e. $p \circ f$ と定数写像 $Y \longrightarrow B,\ y \longmapsto b_0$ を繋ぐホモトピー $G\colon Y \times I \longrightarrow B$ が存在する．$p\colon E \longrightarrow B$ がファイブレーションなので，HLP の問題

$$\begin{tikzcd}
Y \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
Y \times I \arrow[r, "G"] \arrow[ur, dashed] & B
\end{tikzcd}$$

は解を持つ．それを $H\colon Y \times I \longrightarrow E$ とおくと，$\forall y \in Y$ に対して $p \circ H_1(y) = G_1(y) = b_0$ が成り立つことから $H_1(y) \in F = p^{-1}(\{b_0\})$ とわかる．i.e. $H_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}}(Y,\, F)$ である．$f \simeq H_1$ なので $[f] = [i \circ H_1] = i_*([H_1]) \in \mathrm{Im}\, i_*$ である．

■

定理 7.11: コファイブレーションの基本性質

$i\colon A \hookrightarrow X$ を，コファイバー[a] X/A を持つコファイブレーションとする．$q\colon X \twoheadrightarrow X/A$ を商写像とする．

任意の弧状連結な位相空間 Y を与えたとき，圏 $\mathbf{CG}$ における図式

$$[X/A, Y] \xrightarrow{q^*} [X, Y] \xrightarrow{i^*} [A, Y]$$

は完全である．

[a] 包含写像 $i\colon A \hookrightarrow X$ による接着空間 $X \cup_i A$ のこと．

証明 ホモトピー集合 $[A, Y]$ の基点を $[\mathrm{const}]$ と書く．

$\mathrm{Im}\, q^* \subset (i^*)^{-1}([\mathrm{const}])$

$\forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}}\,(X/A,\, X)$ に対して $i^* \circ q^*([g]) = [g \circ q \circ i]$ である．$q \circ i(A) = q(A)$ は一点集合だから $g \circ q \circ i \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}}\,(A,\, Y)$ は定数写像であり，$i^* \circ q^*([g]) = [g \circ q \circ i] = [\mathrm{const}]$ が示された．

$\mathrm{Im}\, q^* \supset (i^*)^{-1}([\mathrm{const}])$

$i^*([f]) = [\mathrm{const}]$ を充たす任意の $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}}\,(X\, Y)$ をとる．このとき $f \circ i \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}}\,(A,\, Y)$ は定数写像にホモトピックである，i.e. $f \circ i$ と定数写像を繋ぐホモトピー $h\colon A \times I \longrightarrow Y$ が存在する．$i\colon A \longrightarrow X$ がコファイブレーションなので，HEP の問題

$$\begin{tikzcd}
X \times \{0\} \arrow[r, "f \cup h"] \arrow[d, "i"'] & Y \\
X \times I \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

は解を持つ．それを $F\colon X \times I \longrightarrow Y$ とおくと $F_1 \simeq f$ で，かつ制限 $F_1|_A$ が定数写像となる．故に商位相の定義から，圏 $\mathbf{CG}$ における可換図式

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "q"'] & Y \\
X/A \arrow[ur, dashed, "\exists! g"] &
\end{tikzcd}$$

が存在する．故に $[f] = [F_1] = q^*([g]) \in \mathrm{Im}\, q^*$ である．

■

基点付きホモトピー集合に定理 7.10, 7.11 を拡張するために，コンパクト生成空間の圏を拡張する：

定義 7.19: 非退化な基点を持つコンパクト生成空間の圏

非退化な基点を持つコンパクト生成空間の圏 (category of compactly generated spaces with a non-degenerate base point) $\mathbf{CG}_*$ を以下のように定義する：

- 空間対 $(X,\, \{x_0\})$ であって，包含写像 $\{x_0\} \hookrightarrow X$ がコファイブレーションであるようなもの[a]を対象とする．
- 基点を保存する連続写像を射とする．
- 連続写像の合成を合成とする．

[a] 空間対 $(X,\, \{x_0\})$ が NDR-対である，と言っても良い（定理 7.6）．

定理 7.12: ファイブレーションの基本性質（基点付きの場合）

$F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ を，基点を保つファイブレーションとする．
任意の基点付き位相空間[a] $Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$ を与えたとき，圏 $\mathbf{CG}_*$ における図式

$$[Y, F]_0 \xrightarrow{i_*} [Y, E]_0 \xrightarrow{p_*} [Y, B]_0$$

は完全である．

[a] ホモトピー集合の基点が一意に決まるので弧状連結性は必要ない．

定理 7.13: コファイブレーションの基本性質（基点付きの場合）

$A \overset{i}{\hookrightarrow} X \xrightarrow{q} X/A$ を，基点を保つコファイブレーションとする．
任意の基点付き位相空間 $Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$ を与えたとき，圏 $\mathbf{CG}_*$ における図式

$$[X/A, Y]_0 \xrightarrow{q^*} [X, Y]_0 \xrightarrow{i^*} [A, Y]_0$$

は完全である．

7.3.2 スマッシュ積

定義 7.20: ウェッジ和とスマッシュ積

$(X,\ x_0),\ (Y,\ y_0) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$ を任意に与える．

- $(X,\ x_0)$ と $(Y,\ y_0)$ の**ウェッジ和** (wedge sum) を

$$X \vee Y := (X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y)$$

  で定義する[a]．これは圏 $\mathbf{CG}_*$ における和である．
- $(X,\ x_0)$ と $(Y,\ y_0)$ の**スマッシュ積** (smash product) を

$$X \wedge Y := \frac{X \times Y}{X \vee Y} = \frac{X \times Y}{(X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y)}$$

  で定義する．これは圏 $\mathbf{CG}_*$ における積<u>ではない</u>．

[a] 一点写像 $f\colon X \longrightarrow Y,\ x_0 \longmapsto y_0$ による接着空間 $X \cup_f Y$ のことをウェッジ和と言う場合もある．圏 $\mathbf{CG}_*$ においては同一視してしまって問題ない．

命題 7.4: 随伴定理

圏 $\mathbf{CG}_*$ における自然同値

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}_*}\bigl(X \wedge Y,\ Z\bigr) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}_*}\bigl(X,\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}_*}(Y,\ Z)\bigr)$$

が成り立つ．

定義 7.21: 懸垂・約懸垂・錐・約錐

$(X,\ x_0) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$ を任意に与える．

- X の**懸垂** (suspension) を

$$\mathrm{susp}(X) := \frac{X \times I}{(X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\})}$$

  で定義する．
- X の**約懸垂** (reduced suspension) を

$$SX := S^1 \wedge X = \frac{X \times I}{(X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \cup (\{x_0\} \times I)}$$

  で定義する．
- X の**錐** (cone) を

$$\mathrm{cone}(X) := \frac{X \times I}{X \times \{0\}}$$

  で定義する．
- X の**約錐** (reduced cone) を

$$CX := I \wedge X = \frac{X \times I}{(X \times \{0\}) \cup (\{x_0\} \times I)}$$

で定義する．

約懸垂・約錐は，圏 $\mathbf{CG}_*$ において関手的であるという点で懸垂・錐よりも便利である．

命題 7.5:

圏 $\mathbf{CG}_*$ において，商写像

$$\mathrm{susp}(X) \twoheadrightarrow SX, \quad \mathrm{cone}(X) \twoheadrightarrow CX$$

はどちらもホモトピー同値写像である．

命題 7.6:

$m,\, n \geq 0$ に対して以下が成り立つ：

(1) $SS^n \approx S^{n+1}$
(2) $CS^n \approx D^{n+1}$
(3) $S^m \wedge S^n \approx S^{m+n}$

命題 7.7:

$X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$ に対して自然な同相

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}_*}(SX,\, Y) \approx \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}_*}(X,\, \Omega Y)$$

が成り立つ．ただし $\Omega Y := \Omega_{y_0} Y = \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}_*}(S^1,\, Y)$ はループ空間である．

証明　約懸垂の定義と随伴定理より

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}_*}(SX,\, Y) &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}_*}(S^1 \wedge X,\, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}_*}(X \wedge S^1,\, Y) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}_*}\bigl(X,\, \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}_*}(S^1,\, Y)\bigr) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}_*}(X,\, \Omega Y)\end{aligned}$$

■

7.3.3 Puppe 系列

定義 7.22: ホモトピー・ファイバー

連続写像 $f\colon X \longrightarrow Y$ を任意に与える．

- f の**ホモトピー・ファイバー** (homotopy fiber) とは，f に対して定理 7.5 を使って得られるファイブレーション $p\colon P_f \longrightarrow Y$ のファイバーのこと．
- f の**ホモトピー・コファイバー** (homotopy cofiber) とは，f に対して定理 7.9 を使って得られるコファイブレーション $i\colon A \longrightarrow M_f$ のコファイバー，i.e. 写像錐 C_f のこと．

ファイブレーションのファイバーのホモトピー型は，もとのファイブレーションが「どの程度ホモトピー同値写像からずれているのか」の指標となる．任意の（ファイブレーションとは限らない）連続写像に関しても，そのホモトピー・ファイバーを見れば同じことができる．

さらに，ファイバーの包含写像 $F \hookrightarrow E$ のホモトピー・ファイバーをとることもできる．このような操作を帰納的に行うことで，ファイブレーションの長い系列を得る．

定理 7.14: ファイブレーション系列の素材

- $F \hookrightarrow E \xrightarrow{f} B$ をファイブレーション，Z を $F \hookrightarrow E$ のホモトピー・ファイバーとする．
  このとき Z はループ空間 ΩB と同じホモトピー型である．
- $A \overset{i}{\hookrightarrow} X \twoheadrightarrow X/A$ をコファイブレーション，W を $X \twoheadrightarrow X/A$ のホモトピー・コファイバーとする．
  このとき W は懸垂 $\mathrm{susp}(A)$ と同じホモトピー型である．

<u>証明</u>

- 与えられたファイバーは，ある点 $b_0 \in B$ を使って $F = f^{-1}(\{b_0\})$ と書ける．F の点 $e_0 \in F$ を 1 つ選んで基点とする．mapping path fibration $p\colon P_f \longrightarrow Y$ は

$$\begin{aligned} P_f &\coloneqq \{\, (e,\, \alpha) \in E \times B^I \mid f(e) = \alpha(0) \,\}, \\ p(e,\, \alpha) &\coloneqq \alpha(1) \end{aligned}$$

によって構成され，連続写像

$$h\colon E \longrightarrow P_f,\ e \longmapsto \bigl(e,\, \mathrm{const}_{f(e)}\bigr)$$

がファイバー・ホモトピー同値写像になるのだった．i.e. $(P_f)_0 \coloneqq p^{-1}(\{b_0\})$ とおくと，ファイブレーション $(P_f)_0 \hookrightarrow P_f \xrightarrow{p} B$ は $F \hookrightarrow E \xrightarrow{f} B$ にファイバー・ホモトピー同値である．

連続写像 $\mathrm{proj}_1\colon (P_f)_0 \longrightarrow E,\ (e,\, \alpha) \longmapsto e$ を考える．

$$\mathrm{proj}_1^{-1}(\{e_0\}) = \{\, (e_0,\, \alpha) \in E \times B^I \mid f(e_0) = b_0 = \alpha(0),\, \alpha(1) = b_0 \,\}$$

より明らかに $\mathrm{proj}_1^{-1}(\{e_0\}) \approx \Omega_{b_0} B$ である．

次に $\Omega_{b_0} B \hookrightarrow (P_f)_0 \xrightarrow{\mathrm{proj}_1} E$ がファイブレーションであることを示す．任意の位相空間 A に対して HLP の問題

$$\begin{tikzcd} A \times \{0\} \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook] & (P_f)_0 \arrow[d, "\mathrm{proj}_1"] \\ A \times I \arrow[r, "G"] \arrow[ur, dashed] & E \end{tikzcd}$$

を考える．$g(a) \coloneqq \bigl(g_1(a),\, g_2(a)\bigr)$ とおいた上でホモトピー $\tilde{G}\colon A \times I \longrightarrow (P_f)_0$ を

$$\tilde{G}(a,\, s) = \left(G(a,\, s),\, t \mapsto \begin{cases} f\bigl(G\bigl(a,\, s - (1+s)t\bigr)\bigr), & t \in [0,\, \frac{s}{1+s}] \\ g_2(a)\bigl((1+s)t - s\bigr), & t \in [\frac{s}{1+s},\, 1] \end{cases}\right)$$

で定義すると

$$\begin{aligned} \tilde{G}_0(a) &= \bigl(G_0(a),\, t \mapsto g_2(a)(t)\bigr) = g(a), \\ \mathrm{proj}_1 \circ \tilde{G}_t(a) &= G_t(a) \end{aligned}$$

が成り立つので解になっている．よって $\Omega_{b_0}B \hookrightarrow (P_f)_0 \xrightarrow{\mathrm{proj}_1} E$ がファイブレーションであることが示された．

最後に ΩB が $F \hookrightarrow E$ のホモトピー・ファイバーであることを示す．$E \xrightarrow{h} P_f$ がファイバー・ホモトピー同値写像であることから，制限 $h|_F \colon F \longrightarrow (P_f)_0$ はホモトピー同値写像である．従って図式

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dr, hook] & & (P_f)_0 \arrow[dl, "\mathrm{proj}_1"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

から，ファイブレーション $\Omega_{b_0}B \hookrightarrow (P_f)_0 \xrightarrow{\mathrm{proj}_1} E$ が $F \hookrightarrow E$ に関して定理 7.5 の要件を充していることがわかった．

•

■

基点付き空間 $(X,\, x_0)$ のループ空間 ΩX は，それ自身が定数ループ const_{x_0} を基点とする基点付き空間になっている．故に ΩX のループ空間を考えることができる．この操作を X に対して n 回施して得られる基点付き位相空間を $\Omega^n X$ と書く．

定理 7.15: ファイブレーション・コファイブレーション系列

(1) $A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\iota} X/A$ をコファイブレーションとする．このとき圏 $\mathbf{CG}$ における図式

$$\begin{aligned} &A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\iota} X/A \\ &\to \mathrm{susp}(A) \xrightarrow{\mathrm{susp}\, i} \mathrm{susp}(X) \xrightarrow{\mathrm{susp}\, \iota} \mathrm{susp}(X/A) \\ &\to \mathrm{susp}^2(A) \xrightarrow{\mathrm{susp}\, i} \cdots \\ &\to \mathrm{susp}^n(A) \xrightarrow{\mathrm{susp}^n\, i} \mathrm{susp}^n(X) \xrightarrow{\mathrm{susp}^n\, \iota} \mathrm{susp}^n(X/A) \to \cdots \end{aligned}$$

が存在して赤色をつけた射はホモトピー同値写像になっている．

(2) $A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\iota} X/A$ を基点を保つコファイブレーションとする．このとき圏 $\mathbf{CG}_*$ における図式

$$\begin{aligned} &A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\iota} X/A \\ &\to SA \xrightarrow{Si} SX \xrightarrow{S\iota} S(X/A) \\ &\to S^2A \xrightarrow{S^2 i} \cdots \\ &\to S^nA \xrightarrow{S^n i} S^nX \xrightarrow{S^n\iota} S^n(X/A) \to \cdots \end{aligned}$$

が存在して赤色をつけた射はホモトピー同値写像になっている．

(3) $F \overset{i}{\hookrightarrow} E \xrightarrow{p} B$ をファイブレーションとする．このとき圏 $\mathbf{CG}$ における図式

$$\begin{aligned}
\cdots \longrightarrow &\Omega^n F \xrightarrow{\Omega^n i} \Omega^n E \xrightarrow{\Omega^n p} \Omega^n B \\
\longrightarrow &\Omega^{n-1} F \xrightarrow{\Omega^{n-1} i} \cdots \\
\longrightarrow &\Omega F \xrightarrow{\Omega i} \Omega E \xrightarrow{-\Omega^n p} \Omega B \\
\longrightarrow &F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B
\end{aligned}$$

が存在して赤色をつけた射はホモトピー同値写像になっている．

次に，定理 7.15 の系列のホモトピー集合をとることを考える．適切な場合においてホモトピー集合をとると群構造が入るからである．

定義 7.23: H 空間

$(Y, y_0) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$ が **H 空間**であるとは，次の条件をみたす 2 つの連続写像

$$\begin{aligned}
\mu &: Y \times Y \longrightarrow Y, \\
\nu &: Y \longrightarrow Y
\end{aligned}$$

が存在すること：

(1) 第 j 成分への包含写像 $\iota_j : Y \longrightarrow Y \times Y$ に対し，連続写像

$$Y \xrightarrow{\iota_1} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y, \quad Y \xrightarrow{\iota_2} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y$$

がどちらも $\mathrm{id}_Y : y \longrightarrow Y$ にホモトピック

(2) 連続写像

$$Y \times Y \times Y \xrightarrow{\mathrm{id}_Y \times \mu} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y, \quad Y \times Y \times Y \xrightarrow{\mu \times \mathrm{id}_Y} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y$$

が互いにホモトピック

(3) 連続写像

$$Y \xrightarrow{\mathrm{id}_Y \times \nu} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y$$

は定数写像 $\mathrm{const}_{y_0} : Y \longrightarrow Y,\ y \longmapsto y_0$ にホモトピック．

定義 7.24: 余 H 空間

$(Y, y_0) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$ が**余 H 空間**であるとは，次の条件をみたす 2 つの連続写像

$$\begin{aligned}
\mu &: Y \longrightarrow Y \vee Y, \\
\nu &: Y \longrightarrow Y
\end{aligned}$$

が存在すること：

(1) 第 j 成分への標準的射影 $\pi_j\colon Y\times Y \longrightarrow Y$ に対して，連続写像

$$Y \xrightarrow{\mu} Y\vee Y \xrightarrow{\pi_1} Y,\quad Y \xrightarrow{\mu} Y\vee Y \xrightarrow{\pi_2} Y$$

がどちらも $\mathrm{id}_Y\colon y \longrightarrow Y$ にホモトピック

(2) 連続写像

$$Y \xrightarrow{\mu} Y\vee Y \xrightarrow{\mathrm{id}_Y\vee\mu} Y\vee Y\vee Y,\quad Y \xrightarrow{\mu} Y\vee Y \xrightarrow{\mu\vee\mathrm{id}_Y} Y\vee Y\vee Y$$

が互いにホモトピック．

(3) 連続写像

$$Y \xrightarrow{\mu} Y\vee Y \xrightarrow{\mathrm{id}_Y\vee\nu} Y$$

は定数写像 $\mathrm{const}_{y_0}\colon Y \longrightarrow Y,\ y \longmapsto y_0$ にホモトピック．

定理 7.16: ホモトピー集合の群構造

- $\forall X\in\mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$ に対して集合 $[X,Y]_0$ が自然な群構造を持つ $\iff$ Y が H 空間
- $\forall X\in\mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$ に対して集合 $[Y,X]_0$ が自然な群構造を持つ $\iff$ Y が余 H 空間

証明

- $(\Longrightarrow)$ $\forall X\in\mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$ に対して $[X,Y]_0$ が自然な群演算

$$\begin{aligned}\cdot\,&\colon [X,Y]_0\times[X,Y]_0 \longrightarrow [X,Y]_0\\ {}^{-1}&\colon [X,Y]_0 \longrightarrow [X,Y]_0\end{aligned}$$

を持っているとする．$X=Y\times Y$ として，各成分への射影 $p_i\colon Y\times Y\longrightarrow Y$ のホモトピー類 $[p_i]\in[Y\times Y,Y]$ を考える．仮定の群の積 $\cdot$ を使って $[\mu]:=[p_1]\cdot[p_2]$ とおく．連続写像 $\mu\colon Y\times Y\longrightarrow Y$ はホモトピー類 $[\mu]$ の任意の元とする．一方，連続写像 $\nu\colon Y\longrightarrow Y$ は，恒等写像 $\mathrm{id}_Y\colon Y\longrightarrow Y$ のホモトピー類 $[\mathrm{id}_Y]\in[Y,Y]_0$ の，群 $[Y,Y]_0$ における逆元 $[\mathrm{id}_Y]^{-1}\in[Y,Y]_0$ の任意の代表元 $\nu\colon Y\longrightarrow Y$ とする．

$\forall X\in\mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_0)$ を 1 つとる．任意の連続写像 $f,\,g\colon X\longrightarrow Y$ に対して $(f,\,g)\colon X\longrightarrow Y\times Y,\ x\longmapsto \big(f(x),\,g(x)\big)$ と書く[*9]．連続写像 $(f,\,g)$ は連続写像

$$(f,\,g)^*\colon [Y\times Y,Y]_0 \longrightarrow [X,Y]_0,\ [h]\longmapsto [h\circ(f,\,g)]$$

を誘導する．このとき群の積の X に関する自然性から

$$\begin{aligned}[\mu\circ(f,\,g)] &= (f,\,g)^*([\mu]) = (f,\,g)^*([p_1]\cdot[p_2])\\ &= (f,\,g)^*[p_1]\cdot(f,\,g)^*[p_2] = [f]\cdot[g]\end{aligned}\tag{7.3.1}$$

が成り立つ．

次に $X=\{x_0\}$ とする．唯一の連続写像 $c\colon Y\longrightarrow X,\ y\longmapsto x_0$ は群準同型

$$c^*\colon [X,Y]_0 \longmapsto [Y,Y]_0,\ [f]\longmapsto[f\circ c]$$

[*9] $f\times g$ ではない．

を誘導する．ところで群 $[X,Y]_0$ はただ 1 つの元 $[x_0 \longmapsto y_0]$ からなるのでこれは単位元である．故に c^* が群準同型であることから

$$c^*([x_0 \longmapsto y_0]) = [\mathrm{const}_{y_0}]$$

が群 $[Y,Y]_0$ の単位元だとわかる．

さて，μ, ν が H 空間の定義の (1)-(3) を充していることを示そう：

(1) $\iota_1 = (\mathrm{id}_Y,\, \mathrm{const}_{y_0})$, $\iota_2 = (\mathrm{const}_{y_0},\, \mathrm{id}_Y)$ であることに注意する．式 (7.3.1) を使うと

$$\begin{aligned}
[\mu \circ \iota_1] &= [\mu \circ (\mathrm{id}_Y,\, \mathrm{const}_{y_0})] = [\mathrm{id}_Y] \cdot [\mathrm{const}_{y_0}] = [\mathrm{id}_Y], \\
[\mu \circ \iota_2] &= [\mu \circ (\mathrm{const}_{y_0},\, \mathrm{id}_Y)] = [\mathrm{const}_{y_0}] \cdot [\mathrm{id}_Y] = [\mathrm{id}_Y]
\end{aligned}$$

なので $\mu \circ \iota_i \simeq \mathrm{id}_Y$ が示された．

(2) $\pi_i \colon Y \times Y \times Y \longrightarrow Y$ を第 i 成分からの射影とする．このとき式 (7.3.1) を使うと

$$\begin{aligned}
[\mu \circ (\mathrm{id}_Y \times \mu)] &= (\mathrm{id}_Y \times \mu)^*([\mu]) = (\mathrm{id}_Y \times \mu)^*([p_1]) \cdot (\mathrm{id}_Y \times \mu)^*([p_2]) \\
&= [\pi_1] \cdot [\mu \circ (\pi_2,\, \pi_3)] = [\pi_1] \cdot ([\pi_2] \cdot [\pi_3]), \\
[\mu \circ (\mu \times \mathrm{id}_Y)] &= (\mu \times \mathrm{id}_Y)^*([\mu]) = (\mu \times \mathrm{id}_Y)^*([p_1]) \cdot (\mu \times \mathrm{id}_Y)^*([p_2]) \\
&= [\mu \circ (\pi_1,\, \pi_2)] \cdot [\pi_3] = ([\pi_1] \cdot [\pi_2]) \cdot [\pi_3]
\end{aligned}$$

なので，群 $[Y \times Y \times Y, Y]$ の結合律から $\mu \circ (\mathrm{id}_Y \times \mu) \simeq \mu \circ (\mu \times \mathrm{id}_Y)$ が示された．

(3) ν の定義から

$$\begin{aligned}
[\mu \circ (\mathrm{id}_Y \times \nu)] &= (\mathrm{id}_Y \times \nu)^*([\mu]) = (\mathrm{id}_Y \times \nu)^*([p_1]) \cdot (\mathrm{id}_Y \times \nu)^*([p_2]) \\
&= [\mathrm{id}_Y] \cdot [\nu] = [\mathrm{id}_Y] \cdot [\mathrm{id}_Y]^{-1} = [\mathrm{const}_{y_0}]
\end{aligned}$$

なので $\mu \circ (\mathrm{id}_Y \times \nu) \simeq \mathrm{const}_{y_0}$ が示された．

($\Longleftarrow$) Y が H 空間であるとする．$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$ を 1 つとる．このとき連続写像 $\mu \colon Y \times Y \longrightarrow Y$ は連続写像

$$\mu_* \colon [X, Y \times Y]_0 \longrightarrow [X,Y]_0,\ [f] \longmapsto [\mu \circ f]$$

を誘導する．自然同型

$$\theta \colon [X,Y]_0 \times [X,Y]_0 \xrightarrow{\cong} [X, Y \times Y]_0$$

との合成を $\tilde{\mu} \coloneqq \mu_* \circ \theta \colon [X,Y]_0 \times [X,Y]_0 \longrightarrow [X,Y]_0$ とおく． 同様に連続写像 $\nu \colon Y \longrightarrow Y$ は連続写像

$$\nu_* \colon [X,Y]_0 \longrightarrow [X,Y]_0,\ [f] \longmapsto [\nu \circ f]$$

を誘導する．

H 空間の定義より，集合 $[X,Y]_0$ は $\tilde{\mu}$ を積，ν_* を逆元とする群となる．以上の構成は X について自然である．

■

特に，ループ空間 ΩX が H 空間であり，約懸垂 SX が余 H 空間であることは注目すべきである．

系 7.17:

$X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$ をとる．

(1) $[X, \Omega Y]_0 = [SX, Y]_0$ は群．
(2) $\left[X, \Omega^2 Y\right]_0 = [SX, \Omega Y]_0 = \left[S^2 X, Y\right]_0$ は $\mathbb{Z}$ 加群．

<u>証明</u> ■

定理 7.12, 7.13 とファイブレーション・コファイブレーション系列と系 7.17 を組み合わせることで重要な完全列が得られる：

定理 7.18: Puppe 系列

$Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$ を任意に与える．

(1) $F \hookrightarrow E \to B$ がファイブレーションならば，圏 $\mathbf{CG}_*$ における完全列

$$\begin{aligned}\cdots \to [Y, \Omega^n F]_0 \to [Y, \Omega^n E]_0 \to [Y, \Omega^n B]_0 \to \\ \cdots [Y, \Omega B]_0 \to [Y, F]_0 \to [Y, E]_0 \to [Y, B]_0\end{aligned}$$

がある．この完全列は

- $n \geq 0$ の部分は **Sets** の完全列
- $n \geq 1$ の部分は群の完全列
- $n \geq 2$ の部分は $\mathbb{Z}$ 加群の完全列

となっている．

(2) $A \to X \to X/A$ がコファイブレーションならば，圏 $\mathbf{CG}_*$ における完全列

$$\begin{aligned}\cdots \to [S^n(X/A), Y]_0 \to [S^n X, Y]_0 \to [S^n A, Y]_0 \to \\ \cdots [SA, Y]_0 \to [X/A, Y]_0 \to [X, Y]_0 \to [A, Y]_0\end{aligned}$$

がある．この完全列は

- $n \geq 0$ の部分は **Sets** の完全列
- $n \geq 1$ の部分は群の完全列
- $n \geq 2$ の部分は $\mathbb{Z}$ 加群の完全列

となっている．

7.4　ホモトピー群

定義 7.25: ホモトピー群

$(X,\, x_0) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$ を任意に与える．基点付き空間 X の**第 $\boldsymbol{n}$ ホモトピー群** (n-th homotopy group) とは，

$$\boldsymbol{\pi_n(X,\, x_0)} \coloneqq [S^n, X]_0$$

のことを言う．これは $n=0$ のとき集合，$n=1$ のとき群，$n \geq 2$ のとき $\mathbb{Z}$ 加群である．

命題 7.6 と約懸垂の定義，および系 7.17-(1) より

$$\pi_n(X,\, x_0) = [S^n, X]_0 = \left[S^1 \wedge S^{n-1}, X\right]_0 = \left[SS^{n-1}, X\right]_0 = \left[S^{n-1}, \Omega X\right]_0 = \pi_{n-1}(\Omega X)$$

がわかる．この操作を $k \leq n$ 回繰り返すことで

$$\pi_n(X,\, x_0) = \pi_{n-k}(\Omega^k X)$$

がわかる．特に $\pi_n(X) = \pi_1(\Omega^{n-1} X)$ が成り立つ．

$Y = S^0 \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$ として Puppe 系列を使うと，即座に次の長完全列が得られる：

定理 7.19: ファイブレーションのホモトピー長完全列

$F \hookrightarrow E \to B$ をファイブレーションとする．このとき圏 $\mathbf{CG}_*$ の図式

$$\begin{aligned}\cdots \pi_n(F) \to \pi_n(E) \to \pi_n(B) \to \pi_{n-1}(F) \to \cdots \\ \to \pi_1(F) \to \pi_1(E) \to \pi_1(B) \to \pi_0(F) \to \pi_0(E) \to \pi_0(B)\end{aligned}$$

は完全列である．特に

- $n \geq 0$ の部分は **Sets** の完全列
- $n \geq 1$ の部分は群の完全列
- $n \geq 2$ の部分は $\mathbb{Z}$ 加群の完全列

となっている．

7.5 相対ホモトピー群

この節は未完である．参考になる文献としては，[?, ChapterIV]，[?, Chap 7] などがある．

定義 7.26: 相対ホモトピー群

空間対 (X, A) であって基点 $x_0 \in A \subset X$ を持つものを任意に与える．また，$p := (1, 0, \cdots, 0) \in S^{n-1} \subset D^n$ とおく．
このとき，空間対 (X, A) の**相対ホモトピー群**（$n = 1$ のときは集合）とは

$$\boldsymbol{\pi_n(X,\, A,\, x_0)} := \left[(D^n,\, S^{n-1},\, p), (X,\, A,\, x_0)\right]$$

のこと．i.e. 空間対の圏の射[a]$(D^n,\, S^{n-1}) \to (X,\, A)$ であって基点を保つもののホモトピー類全体の集合のこと．

[a] $(X,\, A)$, $(Y,\, B)$ を空間対としたとき，連続写像 $f\colon X \longrightarrow Y$ であって，$f(A) \subset B$ を充たすもののこと．

!

対応 $\pi_n(\text{-})$ は

- $n = 1$ のとき空間対の圏から **Sets** への関手
- $n = 2$ のとき空間対の圏から群の圏への関手
- $n \geq 3$ のとき空間対の圏から $\mathbb{Z}$-**Mod** への関手

である．

つまり，$\pi_n(X,\, A,\, x_0)$ の代表元は連続写像 $f\colon D^n \longrightarrow X$ であって $f(S^{n-1}) \subset A$, $f(p) = x_0$ を充たすものであり，ホモトピー類 $[f] \in \pi_n(X,\, A,\, x_0)$ の元 g はホモトピー $H\colon D^n \times I \longrightarrow X$ であって $H_t(S^{n-1}) \subset A$, $H_t(p) = x_0$ $(\forall t \in I)$ を充たすものによって f と繋がっている．

定理 7.20: 相対ホモトピー群の長完全列

相対ホモトピー群は

- $n \geq 2$ のとき群
- $n \geq 3$ のとき $\mathbb{Z}$ 加群

である．さらに，圏 $\mathbf{CG}_*$ における完全列

$$\begin{aligned}
\cdots \to \pi_n(A) \to \pi_n(X) \to \pi_n(X,\, A)& \\
\to \pi_{n-1}(A) \to \cdots& \\
\to \pi_1(A) \to \pi_1(X) \to \pi_1(X,\, A) \to \pi_0(A) \to \pi_0(X)&
\end{aligned}$$

がある．

<u>**証明**</u> ■

補題 7.3:

$F \hookrightarrow E \xrightarrow{f} B$ をファイブレーションとする．$A \subset B$ を部分空間とし，$G := f^{-1}(A)$ とおく．このとき $F \hookrightarrow G \xrightarrow{f}$ はファイブレーションである．
このとき，$\forall k \geq 1$ について，f は同型 $f_*\colon \pi_k(E,\, G) \longrightarrow \pi_k(B,\, A)$ を誘導する．特に $A = \{b_0\}$ とすると可換図式 7.10 が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \pi_k(F) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \pi_k(E) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \pi_k(E,\, F) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \pi_{k-1}(F) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \cdots (\text{exact}) \\
\cdots \arrow[r] & \pi_k(F) \arrow[r] & \pi_k(E) \arrow[r] & \pi_k(B) \arrow[r] & \pi_{k-1}(F) \arrow[r] & \cdots (\text{exact})
\end{tikzcd}$$

図 7.10

証明 ■

7.6 ホモトピー集合への基本群の作用

$X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CG}_*)$ とし，Y を基点付き空間とする．

定義 7.27:

連続写像[a] $f_0,\, f_1\colon X \longrightarrow Y$ と道 $u\colon I \longrightarrow Y$ をとり，f_0 と f_1 を繋ぐホモトピー $H\colon X \times I \longrightarrow Y$ が $F_t(x_0) = u(t)$ を充しているとする．このとき f_0 は f_1 に $\boldsymbol{u}$ **に沿って freely homotopic** であると言い，$f_0 \underset{u}{\simeq} f_1$ と書く．

[a] 基点を保たなくても良い

! $f_0,\, f_1$ が基点を保つ連続写像ならば u はループになる．i.e. 基点付き連続写像の free homotopy は $\pi_1(Y,\, y_0)$ の要素を引き起こす．

補題 7.4:

(1) $f_0\colon X \longrightarrow Y$ と道 $u\colon I \longrightarrow y$ であって $u(0) = f_0(x_0)$ を充たすものが与えられたとき，f_0 と u に沿って freely homotopic な $f_1\colon X \longrightarrow Y$ が存在する．

(2) $f_0 \underset{u}{\simeq} f_1$ かつ $f_0 \underset{u}{\simeq} f_2$ かつ $u \simeq v\ (\mathrm{rel}\, \partial I)$ ならば $f_0 \underset{\mathrm{const}}{\simeq} f_1$

(3) $f_0 \underset{u}{\simeq} f_1$ かつ $f_1 \underset{u}{\simeq} f_2 \implies f_0 \underset{uv}{\simeq} f_2$

証明 (1) 仮定より $(X,\, \{x_0\})$ が NDR-対（i.e. コファイブレーション）なので明らか．
(2) $(I,\, \partial I)$, $(X,\, x_0)$ が NDR-対なので，補題 7.2 により $\bigl(X \times I,\, X \times \partial I \cup \{x_0\} \times I\bigr)$ も NDR-対である．よって HEP の問題

$$
\begin{tikzcd}
X \times I \times \{0\} \cup X \times \{0,\, 1\} \times I \cup \{x_0\} \times I \times I \arrow[r] \arrow[d] & Y \\
X \times I \times I \arrow[ur, dashed, red] &
\end{tikzcd}
$$

は解 $H\colon X \times I \times I \longrightarrow Y$ を持つ．

(3) 自明

■

7.6.1 基本群の作用

$\pi_1(Y,\, y_0)$ の $[X, Y]_0$ への作用

$$\Theta\colon \pi_1(Y,\, y_0) \times [X, Y]_0 \longrightarrow [X, Y]_0,\ ([u],\, [f]) \longmapsto [u] \cdot [f]$$

を，$f \underset{u}{\simeq} f_1$ なる $f_1\colon X \longrightarrow Y$ を用いて $[u] \cdot [f] \coloneqq [f_1]$ と定めよう．well-definedness を確認する：

<u>**証明**</u> 補題 7.4-(2) より $[f_1]$ が u によらないことがわかる．

$[f] = [g] \in [X, Y]_0$ かつ $g \underset{u}{\simeq} g_1$ とする．すると

$$f_1 \underset{u^{-1}}{\simeq} f \underset{\mathrm{const}}{\simeq} g \underset{u}{\simeq} g_1$$

が成り立つ．補題 7.4-(3) より f_1 と g_1 は基点付きホモトピーである． ■

定理 7.21:

Y が<u>弧状連結</u>ならば $[X, Y]$ は作用 Θ による $[X, Y]_0$ の軌道空間である．

<u>**証明**</u> 基点を無かったことにする忘却関手

$$\Phi\colon [X, Y]_0 \longrightarrow [X, Y]$$

が商写像になることを示す. $\Phi([u]{\cdot}[f]) = [f]$ であり, $\Phi([f_0]) = \Phi([f_1])$ ならばある u が存在して $[u]{\cdot}[f_0] = [f_1]$ となる．i.e. $[f_1] \in \pi(Y,\, y_0) \cdot [f_0]$ である．Φ が全射であることは，補題 7.4-(3) および Y が弧状連結であることから従う． ■

系 7.22:

Y が<u>弧状連結かつ単連結</u>ならば忘却関手 $[X, Y]_0 \longrightarrow [X, Y]$ は全単射になる．

7.6.2 被覆空間による方法

7.7 Hurewicz の定理

未完