第 3 章

位相群

3.1 定義と基本的な性質

定義 3.1: 位相群

群 G が**位相群** (topological group) であるとは，集合としての G がHausdorff 空間であって，かつ積 $G\times G\longrightarrow G,\ (g,\,h)\longmapsto gh$ と逆元をとる写像 $G\longrightarrow G,\ g\longmapsto g^{-1}$ の両方が連続写像であることを言う．

- $\forall g\in G$ に対して定まる同相写像[*1]

$$L_g\colon G\longrightarrow G,\ x\longmapsto gx$$

  のことを**左移動** (left translation) と言う．写像 $L\colon G\longrightarrow \mathrm{Homeo}(G),\ g\longmapsto L_g$ は群準同型になる[*2].

- $\forall g\in G$ に対して定まる同相写像

$$R_g\colon G\longrightarrow G,\ x\longmapsto xg$$

  のことを**右移動** (right translation) と言う．群 G と同じ台集合を持つが積演算の順序が逆であるような位相群を G^{op} と書くとき，写像 $R\colon G^{\mathrm{op}}\longrightarrow \mathrm{Homeo}(G),\ g\longmapsto R_g$ は群準同型になる．[*3].

部分集合[*4] $A,\,B\subset G$ に対して

$$\begin{aligned} AB &\coloneqq \left\{\, ab \;\middle|\; a\in A,\, b\in B \,\right\},\\ A^{-1} &\coloneqq \left\{\, a^{-1} \;\middle|\; a\in A \,\right\},\\ A^n &\coloneqq \left\{\, a_1a_2\cdots a_n \;\middle|\; a_i\in A\in B \,\right\} \end{aligned}$$

[*1] 逆写像は $(L_g)^{-1}(x)=g^{-1}x$ である．$L_g,\,(L_g)^{-1}$ の連続性は位相群の定義より明らか.

[*2] 位相空間 G の同相群 $\mathrm{Homeo}(G)$ の群演算は写像の合成で，逆元は逆写像である．$\forall x\in G$ に対して，群 G の結合律から $L(gh)(x)=L_{gh}(x)=ghx=L_g\bigl(L_h(x)\bigr)=\bigl(L(g)\circ L(h)\bigr)(x)$ が，L_g が逆写像 $x\longmapsto g^{-1}x$ を持つことから $L(g^{-1})(x)=g^{-1}x=(L_g)^{-1}(x)=\bigl(L(g)\bigr)^{-1}(x)$ が従う．

[*3] 混乱を避けるために群 G^{op} の積を $*$ と書くことにする．$\forall x\in G$ に対して，群 G の積の結合律から $R(g*h)(x)=R_{g*h}(x)=R_{hg}(x)=xhg=R_g\bigl(R_h(x)\bigr)=\bigl(R(g)\circ R(h)\bigr)(x)$ が，R_g が逆写像 $x\longmapsto xg^{-1}$ を持つことから $R(g^{-1})(x)=xg^{-1}=(R_g)^{-1}(x)=\bigl(R(g)\bigr)^{-1}(x)$ が従う．

[*4] 部分群でなくてもよい

と書くことにする．

補題 3.1:

G を位相群とする．このとき $\forall g \in G$ に対して以下が成り立つ：

(1) $U \subset G$ が点 $1_G \in G$ の近傍 $\iff$ $gU \subset G$ が点 $g \in G$ の近傍

(2) $U \subset G$ が点 $1_G \in G$ の近傍 $\implies$ U^{-1}, $U \cap U^{-1}$ も点 $1_G \in G$ の近傍

(3) $U \subset G$ が点 $1_G \in G$ の近傍 $\implies$ 点 1_G の近傍 V であって $V = V^{-1}$ を充たすもの[a]が存在し，$V \subset U$ を充たす．
i.e. 1_G の近傍のうち対称であるものの全体は 1_G の基本近傍系を成す．

(4) $U \subset G$ が点 $g \in G$ の近傍 $\implies$ 点 $1_G \in G$ の近傍 $V \subset G$ であって $VgV \subset U$ を充たすものが存在する．

(5) $U \subset G$ が点 $1_G \in G$ の近傍で，かつ n が自然数 $\implies$ 点 $1_G \in G$ の近傍 $V \subset G$ であって $V^n \subset U$ を充たすものが存在する．

[a] このような近傍は**対称** (symmetric) であると言われる．

証明 $\forall g \in G$ を 1 つとって固定する．左移動 L_g は同相写像なので 2 つの写像 L_g, $L_{g^{-1}}$ はどちらも連続である．

(1) **($\Longrightarrow$)** 近傍の定義より，ある G の開集合 V が存在して $1_G \in V \subset U$ を充たす．このとき $g \in gV \subset gU$ が成り立つが，$L_{g^{-1}}$ が連続写像なので集合 $gV = (L_{g^{-1}})^{-1}(V)$ は開集合である．i.e. gU は点 g の近傍である．

($\Longleftarrow$) 近傍の定義より，ある G の開集合 V が存在して $g \in V \subset gU$ を充たす．このとき $1_G \in g^{-1}V \subset U$ が成り立つが，L_g が連続写像なので集合 $g^{-1}V = (L_g)^{-1}(V)$ は開集合である．i.e. U は点 1_G の近傍である．

(2) 近傍の定義より，ある G の開集合 V が存在して $1_G \in V \subset U$ を充たす．このとき $1_G \in V^{-1} \subset U^{-1}$ が成り立つが，位相群の定義より逆元をとる写像 $\pi\colon x \longmapsto x^{-1}$ は連続であるから $V^{-1} = \pi^{-1}(V)$ は開集合である．i.e. U^{-1} は点 1_G の近傍である．
また，$1_G \in V \cap V^{-1} \subset U \cap U^{-1}$ も成り立つが，位相空間の公理により $V \cap V^{-1}$ も開集合である．i.e. $U \cap U^{-1}$ は点 1_G の近傍である．

(3) 近傍の定義より，ある G の開集合 W が存在して $1_G \in W \subset U$ を充たす．$V := W \cap W^{-1}$ とおくと $V \subset U$ であり，かつ W 自身も近傍なので (2) が使えて V は 1_G の近傍であるとわかる．また，$v \in V \iff v \in W$ かつ $v \in W^{-1} \iff v^{-1} \in W^{-1}$ かつ $v^{-1} \in W \iff v^{-1} \in V^{-1}$ が成り立つので $V = V^{-1}$ である．

(4) 近傍の定義より，ある G の開集合 W が存在して $g \in W \subset U$ を充たす．位相群の定義より写像 $\mu\colon G \times G \times G \longrightarrow G,\ (g, h, k) \longmapsto ghk$ は連続だから $\mu^{-1}(W)$ は開集合で，$(1_G, g, 1_G) \in \mu^{-1}(W)$ を充たす．従って[*5] 1_G の近傍 W_1, W_2 であって $W_1 \times \{g\} \times W_2 \subset \mu^{-1}(V)$ を充たすものが存在する．ここで $V := W_1 \cap W_2$ とおくと V は 1_G の近傍で，かつ $\mu(V \times \{g\} \times V) = VgV \subset U$ が成り立つ．

[*5] 位相空間 X の部分集合 $U \subset X$ が開集合である必要十分条件は，$\forall x \in U$ に対して U に含まれる X の近傍が存在すること．

(5) n 個の積をとる写像 $\mu\colon G\times\cdots\times G\longrightarrow G,\ (g_1,\,\ldots,\,g_n)\longmapsto g_1\cdots g_n$ は連続だから，(4) と同様にして証明できる．

■

命題 3.1:

位相群 G の任意の部分群 $H\subset G$ に対して，閉包 $\overline{H}$ もまた部分群である．特に $H\triangleleft G$ [a]ならば $\overline{H}\triangleleft G$ である．

[a] H は G の正規部分群

証明 位相群の定義より写像 $\mu\colon G\times G\longrightarrow G,\ (g,\,h)\longmapsto gh^{-1}$ は連続である．このとき

$$\mu(\overline{H}\times\overline{H})=\mu(\overline{H\times H})\subset\overline{\mu(H\times H)}=\overline{H}$$

が成り立つので $\overline{H}$ は部分群である[*6]．

$H\triangleleft G$ とすると，$\forall g\in G$ に対して写像 $L_g\circ R_{g^{-1}}: G\longrightarrow G,\ h\longmapsto ghg^{-1}$ が同相写像であること[*7]により

$$g\overline{H}g^{-1}=L_g\circ R_{g^{-1}}(\overline{H})=\overline{L_g\circ R_{g^{-1}}(H)}=\overline{H}\quad(\forall g\in G)$$

が言える．i.e. $\overline{H}\triangleleft G$ である． ■

命題 3.2: 位相群の剰余類による商集合は Hausdorff

H を位相群 G の閉部分群とする．左剰余類 gH による商集合 G/H に，商写像 $\varpi\colon G\longrightarrow G/H$ によって誘導される商位相を入れて位相空間にしたものを考える．このとき G/H は Hausdorff 空間であり，かつ ϖ は連続な開写像[a]である．

[a] 開集合を開集合に移す写像．

証明 **ϖ は連続な開写像**

商位相の定義より ϖ は連続である．G の任意の開集合 $U\subset G$ をとる．このとき

$$\varpi(U)=UH=\bigcup_{h\in H}Uh=\bigcup_{h\in H}R_h(U)$$

が成り立つが，$\forall h\in H$ に対して右移動 R_h は同相写像なので $R_h(U)$ は開集合であり，位相空間の公理から $\varpi(U)$ が開集合であることがわかった．

G/H は Hausdorff 空間

異なる 2 点 $g_1H,\,g_2H\in G/H$ を任意にとる．このとき $g_1H\neq g_2H\iff g_1^{-1}g_2\notin H\iff g_1^{-1}g_2\in H^c$ が成り立つ．

[*6] 部分集合 $A\subset G$ について $\mu(A)\subset A$ が成り立つならば $1_G\in A$ かつ A は群演算（乗法および逆元）について閉じていることが言える．

[*7] ここで使っているのは連続性と単射性である．集合の写像 $f\colon A\longrightarrow B$ が単射であるならば任意の部分集合 $U_1\,U_2\subset A$ に対して $f(U_1\cap U_2)=f(U_1)\cap f(U_2)$ が成り立つ．

ところで，仮定より H は閉集合であるから補集合 H^c は開集合である．故に H^c は点 $g_1^{-1}g_2 \in G$ の開近傍であるから補題 3.1-(4) が使えて，点 1_G の近傍 $U \subset G$ であって $U(g_1^{-1}g_2)U \subset H^c \iff U(g_1^{-1}g_2)U \cap H = \emptyset$ を充たすものが存在することがわかる．補題 3.1-(3) より U として $U = U^{-1}$ を充たすものを取ることができるから，$(g_1^{-1}g_2)H \cap UH = \emptyset$ が言える．故に $g_2U \cap g_1UH = \emptyset$ である．さらに $H^2 = H$ なので $g_2UH \cap g_1UH = \emptyset$ がわかる．

ところで ϖ は開写像だから $g_iUH = \varpi(g_iU)$ は G/H の開集合である．$g_iH \in g_iUH$ であるから G/H が Hausdorff 空間であることが示された．

■

命題 3.3: 位相群の剰余群は位相群

命題 3.2 と同様の設定を考える．このとき H が位相群 G の閉正規部分群ならば，剰余群[a] G/H は位相群である．

[a] 一般に位相群とは限らない．

証明 H が正規部分群であることから写像

$$\psi \coloneqq \varpi \times \varpi \colon G \times G \longrightarrow (G/H) \times (G/H),\ (g_1,\, g_2) \longmapsto (g_1H,\, g_2H)$$
$$\eta \colon G \times G \longrightarrow G,\ (g_1,\, g_2) \longmapsto g_1^{-1}g_2$$
$$\mu \colon (G/H) \times (G/H) \longrightarrow G/H,\ (g_1H,\, g_2H) \longmapsto (g_1^{-1}g_2)H$$

は well-defined である．このとき以下の可換図式が成り立つ：

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\psi"] & G \arrow[d, "\varpi"] \\ (G/H) \times (G/H) \arrow[r, "\mu"] & G/H \end{tikzcd}$$

μ が連続であることを示せばよい．実際，G が位相群なので η は連続であり，命題 3.2 より $\varpi,\, \psi$ は連続だから μ は連続である．■