第 2 章

ホモロジーの定義

補題 2.1: 商加群の普遍性

M, L を加群，$f\colon M \to L$ を準同型とする．部分加群 $N \subset M$ が

$$N \subset \operatorname{Ker} f$$

を充たすならば，準同型 $\bar{f}\colon M/N \to L$ であって標準射影

$$p\colon M \to M/N,\ x \mapsto x + N$$

に対して

$$f = \bar{f} \circ p$$

を充たす，i.e. 図式 2.1 を可換にするようなものが一意に存在する．このような準同型 $\bar{f}\colon M/N \to L$ を $f\colon M \to L$ によって M/N 上に**誘導される準同型** (induced homomorphism) と呼ぶ．

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & L \\
M/N \arrow[ur, dashed, "\exists!\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

図 2.1: 商加群の普遍性

証明【例??】を参照. ■

2.1 チェイン複体の定義と代数的性質

まず，チェイン複体の定義をする．この節では一貫して R を環とする．

定義 2.1: チェイン複体

左 R 加群の族 $\{C_q\}_{q\in\mathbb{Z}}$ と左 R 加群の準同型写像の族 $\{\partial_q : C_q \longrightarrow C_{q-1}\}_{q\in\mathbb{Z}}$ が成す R-**Mod** の図式

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{q+2}} C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \xrightarrow{\partial_{q-1}} \cdots \tag{2.1.1}$$

が**チェイン複体** (chain complex) であるとは，$\forall q \geq 0$ に対して

$$\partial_q \partial_{q+1} = 0$$

が成り立つことを言う．チェイン複体 (2.1.1) のことを $(\boldsymbol{C_\bullet}, \boldsymbol{\partial_\bullet})$ または単に $\boldsymbol{C_\bullet}$ と書く．

- C_q の元を $\boldsymbol{q}$**-チェイン** (q-chain),
- C_q の部分加群

$$\mathrm{Ker}\big(\partial_q : C_q \to C_{q-1}\big) \subset C_q$$

を**第** $\boldsymbol{q}$ **サイクル群**[a]，その元を $\boldsymbol{q}$**-サイクル** (q-cycle),

- C_q の部分加群

$$\mathrm{Im}\big(\partial_{q+1} : C_{q+1} \to C_q\big) \subset C_q$$

を**第** $\boldsymbol{q}$ **バウンダリー群**[b]，その元を $\boldsymbol{q}$**-バウンダリー** (q-boundary)

と呼ぶ．

[a] 記号としては $Z_q(C_\bullet)$ と書かれることが多い．
[b] 記号としては $B_q(C_\bullet)$ と書かれることが多い．

$\partial_q\partial_{q+1} = 0$ から $\mathrm{Im}\,\partial_{q+1} \subset \mathrm{Ker}\,\partial_q$ が言える[*1]．従って $\forall q \geq 0$ に対して商加群

$$\mathrm{Ker}\,\partial_q / \mathrm{Im}\,\partial_{q+1} \tag{2.1.2}$$

を定義することができる．

定義 2.2: ホモロジー群

式 (2.2) の商加群を**第** $\boldsymbol{q}$ **ホモロジー群**と呼び，$\boldsymbol{H_q(C_\bullet)}$ と書く．

2.1.1　チェイン写像

[*1] 任意の q-バウンダリー $b \in \mathrm{Im}\,\partial_{q+1}$ を 1 つとる．このときバウンダリー群の定義から，$q+1$-チェイン $b' \in C_{q+1}$ が存在して $b = \partial_{q+1}(b')$ と書ける．故に $\partial_q\partial_{q+1} = 0$ から $\partial_q(b) = \partial_{q+1}\big(\partial_q(b')\big) = 0$，i.e. $b \in \mathrm{Ker}\,\partial_q$ が成り立つ．

定義 2.3: チェイン写像

2 つのチェイン複体 $(C_\bullet, \partial_\bullet)$, $(D_\bullet, \partial'_\bullet)$ および準同型写像の族 $f_\bullet := \{f_q\colon C_q \longrightarrow D_q\}_{q\in\mathbb{Z}}$ を与える．$f_\bullet$ がチェイン複体 $C_\bullet$ からチェイン複体 $D_\bullet$ への**チェイン写像** (chain map) であるとは，$\forall q \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\partial'_q \circ f_q = f_{q-1} \circ \partial_q$$

が成り立つことを言う．i.e. 図式 2.2 が可換になると言うこと．チェイン写像 $f_\bullet$ のことを $\boldsymbol{f_\bullet\colon (C_\bullet, \partial_\bullet) \longrightarrow (D_\bullet, \partial'_\bullet)}$ や $\boldsymbol{f_\bullet\colon C_\bullet \longrightarrow D_\bullet}$ と書く．

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_{q+2}"] & C_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] \arrow[d, "f_{q+1}"] & C_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "f_q"] & C_{q-1} \arrow[r, "\partial_{q-1}"] \arrow[d, "f_{q-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial'_{q+2}"] & D_{q+1} \arrow[r, "\partial'_{q+1}"] & D_q \arrow[r, "\partial'_q"] & D_{q-1} \arrow[r, "\partial'_{q-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

図 2.2: チェイン写像

細かいことを言うと，チェイン複体は左 R 加群の圏 R-**Mod** の図式として定義された．従って，チェイン写像 $f_\bullet\colon (C_\bullet, \partial_\bullet) \longrightarrow (D_\bullet, \partial'_\bullet)$ という記法は R-**Mod** の可換図式 2.2 そのものの略記

$$\begin{tikzcd}
\Big(\cdots \arrow[r, "\partial_{q+2}"] & C_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] & C_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "f_\bullet"] & C_{q-1} \arrow[r, "\partial_{q-1}"] & \cdots\Big) \\
\Big(\cdots \arrow[r, "\partial'_{q+2}"] & D_{q+1} \arrow[r, "\partial'_{q+1}"] & D_q \arrow[r, "\partial'_q"] & D_{q-1} \arrow[r, "\partial'_{q-1}"] & \cdots\Big)
\end{tikzcd}$$

として理解できる．このときチェイン写像

$$\begin{tikzcd}
\Big(\cdots \arrow[r, "\partial_{q+2}"] & C_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] & C_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "f_\bullet"] & C_{q-1} \arrow[r, "\partial_{q-1}"] & \cdots\Big) \\
\Big(\cdots \arrow[r, "\partial'_{q+2}"] & D_{q+1} \arrow[r, "\partial'_{q+1}"] & D_q \arrow[r, "\partial'_q"] & D_{q-1} \arrow[r, "\partial'_{q-1}"] & \cdots\Big)
\end{tikzcd}$$

とチェイン写像

$$\begin{tikzcd}
\Big(\cdots \arrow[r, "\partial'_{q+2}"] & D_{q+1} \arrow[r, "\partial'_{q+1}"] & D_q \arrow[r, "\partial'_q"] \arrow[d, "g_\bullet"] & D_{q-1} \arrow[r, "\partial'_{q-1}"] & \cdots\Big) \\
\Big(\cdots \arrow[r, "\partial''_{q+2}"] & E_{q+1} \arrow[r, "\partial''_{q+1}"] & E_q \arrow[r, "\partial''_q"] & E_{q-1} \arrow[r, "\partial''_{q-1}"] & \cdots\Big)
\end{tikzcd}$$

の**合成**

$$\begin{tikzcd}
\Big(\cdots \arrow[r, "\partial_{q+2}"] & C_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] & C_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "g_\bullet \circ f_\bullet"] & C_{q-1} \arrow[r, "\partial_{q-1}"] & \cdots\Big) \\
\Big(\cdots \arrow[r, "\partial''_{q+2}"] & E_{q+1} \arrow[r, "\partial''_{q+1}"] & E_q \arrow[r, "\partial''_q"] & E_{q-1} \arrow[r, "\partial''_{q-1}"] & \cdots\Big)
\end{tikzcd}$$

を，R-**Mod** の可換図式[*2]

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_{q+2}"] & C_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] \arrow[d, "f_{q+1}"] & C_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "f_q"] & C_{q-1} \arrow[r, "\partial_{q-1}"] \arrow[d, "f_{q-1}"] & \cdots \\
\cdots & D_{q+1} \arrow[d, "g_{q+1}"] & D_q \arrow[d, "g_q"] & D_{q-1} \arrow[d, "g_{q-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial''_{q+2}"] & E_{q+1} \arrow[r, "\partial''_{q+1}"] & E_q \arrow[r, "\partial''_q"] & E_{q-1} \arrow[r, "\partial''_{q-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

によって定義する．するとチェイン写像 $1_{C_\bullet} \coloneqq \left\{1_{C_q}\colon C_q \longrightarrow C_q\right\}_{q\in\mathbb{Z}}$ が恒等射になり，もう 1 つのチェイン写像 $h_\bullet\colon (E_\bullet,\, \partial''_\bullet) \longrightarrow (F_\bullet,\, \partial'''_\bullet)$ を与えたとき明らかに結合則

$$(h_\bullet \circ g_\bullet) \circ f_\bullet = h_\bullet \circ (g_\bullet \circ f_\bullet)$$

が成り立つ．したがって R-**Mod** 上の**チェイン複体の圏 Chain** が

- チェイン複体を対象とする．
- チェイン写像を射とする．
- 射の合成を，上述の通りとする．

として構成された．

補題 2.2:

チェイン写像 $f_\bullet(C_\bullet,\, \partial_\bullet) \longrightarrow (D_\bullet,\, \partial'_\bullet)$ を与える．このとき，$\forall q \in \mathbb{Z}$ について以下が成り立つ：

$$
\begin{aligned}
f_q\big(\mathrm{Ker}\,\partial_q\big) &\subset \mathrm{Ker}\,\partial'_q \\
f_q\big(\mathrm{Im}\,\partial_{q+1}\big) &\subset \mathrm{Im}\,\partial'_{q+1}
\end{aligned}
$$

証明 一つ目は

$$
\begin{aligned}
z \in \mathrm{Ker}\,\partial_q \quad &\iff \quad \partial_q(z) = 0 \\
&\implies \quad \partial'_q\big(f_q(z)\big) = f_{q-1}\big(\partial_q(z)\big) = 0 \\
&\iff \quad f_q(z) \in \mathrm{Ker}\,\partial'_q
\end{aligned}
$$

より従う．二つ目は

$$
\begin{aligned}
b \in \mathrm{Im}\,\partial_{q+1} \quad &\iff \quad \exists \beta \in C_{q+1},\ b = \partial_{q+1}(\beta) \\
&\implies \quad f_q(b) = \partial'_{q+1}\big(f_{q+1}(\beta)\big) \in \mathrm{Im}\,\partial'_{q+1}
\end{aligned}
$$

より従う． ■

チェイン写像 $f_\bullet\colon (C_\bullet,\, \partial_\bullet) \longrightarrow (D_\bullet,\, \partial'_\bullet)$ を与える．標準的射影のことを

$$
\begin{aligned}
\pi_q\colon\ \mathrm{Ker}\,\partial_q &\longrightarrow H_q(C_\bullet),\ z \longmapsto z + \mathrm{Im}\,\partial_{q+1} \\
\varpi_q\colon\ \mathrm{Ker}\,\partial'_q &\longrightarrow H_q(D_\bullet),\ z \longmapsto z + \mathrm{Im}\,\partial'_{q+1}
\end{aligned}
$$

[*2] $\partial'_\bullet$ を顕に書いた図式の可換性から，この図式も可換である．

とおくと，補題 2.2 から

$$(\varpi_q \circ f_{q+1})\big(\operatorname{Im}\partial_q\big) \subset \varpi_q\big(\operatorname{Im}\partial'_{q+1}\big) = \{0_{H_q(C_\bullet)}\}$$

が成り立つ．i.e. $\operatorname{Im}\partial_{q+1} \subset \operatorname{Ker}(\varpi_q \circ f_q)$ である．従って商加群の普遍性から，次のような可換図式を書くことができる：

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker}\partial_q \arrow[r, "f_q"] \arrow[d, "\pi_q"] & \operatorname{Ker}\partial'_q \arrow[r, "\varpi_q"] & H_q(D_\bullet) \\
H_q(C_\bullet) \arrow[urr, dashed, red, "\exists!\overline{\varpi_q \circ f_q}"'] & &
\end{tikzcd}$$

図 2.3: 誘導準同型

定義 2.4: チェイン写像による誘導準同型

図式 2.3 中に赤色で示した well-defined な準同型

$$\overline{\varpi_q \circ f_q} \colon H_q(C_\bullet) \longrightarrow H_q(D_\bullet),\ z + \operatorname{Im}\partial_{q+1} \longmapsto f_q(z) + \operatorname{Im}\partial'_{q+1}$$

のことをチェイン写像 $f_\bullet \colon (C_\bullet,\ \partial_\bullet) \longrightarrow (D_\bullet,\ \partial'_\bullet)$ による**誘導準同型** (induced homomorphism) と呼び，$\boldsymbol{H_q(f_\bullet)}$ と書く．

代数トポロジーの教科書を読んでいると，しばしば誘導準同型 $H_q(f_\bullet)$ が $\boldsymbol{f_*}$ とか $\boldsymbol{f_\bullet}$ と略記されているのを目にする．このような記法は眼に優しい一方で，チェイン写像との区別が付きにくいという難点がある．

命題 2.1: H_q の関手性

(1) $\forall (C_\bullet,\ \partial_\bullet) \in \operatorname{Ob}(\mathbf{Chain})$ に対して

$$H_q(1_\bullet) = 1_{H_q(C_\bullet)}$$

が成り立つ．

(2) 2 つのチェイン写像 $f_\bullet \colon (C_\bullet,\ \partial_\bullet) \longrightarrow (D_\bullet,\ \partial'_\bullet)$, $g_\bullet \colon (D_\bullet,\ \partial'_\bullet) \longrightarrow (E_\bullet,\ \partial''_\bullet)$ を与える．このとき，チェイン写像の合成 $g_\bullet \circ f_\bullet \colon (C_\bullet,\ \partial_\bullet) \longrightarrow (E_\bullet,\ \partial''_\bullet)$ および $\forall q \in \mathbb{Z}$ に対して

$$H_q(g_\bullet \circ f_\bullet) = H_q(g_\bullet) \circ H_q(f_\bullet)$$

が成り立つ．

証明 (1) チェイン写像 $1_{C_\bullet} \colon (C_\bullet,\ \partial_\bullet) \longrightarrow (C_\bullet,\ \partial_\bullet)$ の誘導する準同型は

$$H_q(1_{C_\bullet}) \colon H_q(C_\bullet) \longrightarrow H_q(C_\bullet),\ z + \operatorname{Im}\partial_{q+1} \longmapsto 1_{C_q}(z) + \operatorname{Im}\partial_{q+1} = z + \operatorname{Im}\partial_{q+1}$$

である．i.e. $H_q(1_{C_\bullet}) = 1_{H_q(C_\bullet)}$ である．

(2) $g_\bullet \circ f_\bullet$ が誘導する準同型は可換図式[*3]

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\,\partial_q \arrow[r, "f_q"] \arrow[d] & \mathrm{Ker}\,\partial'_q \arrow[r, "g_q"] & \mathrm{Ker}\,\partial''_q \arrow[r] & H_q(E_\bullet) \\
H_q(C_\bullet) \arrow[urrr, dashed, red, "\exists! H_q(g_\bullet \circ f_\bullet)"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

によって特徴付けられる．一方，誘導準同型の図式 2.3 を組み合わせて可換図式[*4]

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\,\partial_q \arrow[r, "f_q"] \arrow[d] & \mathrm{Ker}\,\partial'_q \arrow[r, "g_q"] \arrow[d] & \mathrm{Ker}\,\partial''_q \arrow[r] & H_q(E_\bullet) \\
H_q(C_\bullet) \arrow[r, dashed, red, "\exists! H_q(f_\bullet)"] & H_q(D_\bullet) \arrow[urr, dashed, red, "\exists! H_q(g_\bullet)"] & &
\end{tikzcd}
$$

を書くこともできる．ところが，商加群の普遍性より 2 つの可換図式中の赤い矢印は一意である．i.e.

$$H_q(g_\bullet \circ f_\bullet) = H_q(g_\bullet) \circ H_q(f_\bullet)$$

が成り立つ．

■

命題 2.1 より

- チェイン複体 $C_\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Chain})$ をホモロジー群 $H_q(C_\bullet) \in \mathrm{Ob}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ に，
- チェイン写像 $f_\bullet \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Chain}}(C_\bullet,\, D_\bullet)$ を誘導準同型 $H_q(f_\bullet) \in \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}\big(H_q(C_\bullet),\, H_q(D_\bullet)\big)$ に

対応づける対応

$$H_q \colon \mathbf{Chain} \longrightarrow R\text{-}\mathbf{Mod}$$

が関手であることが分かった．

2.1.2　チェイン・ホモトピー

チェイン・ホモトピーの定義をする：

[*3] $\mathrm{Ker}\,\partial_q \longrightarrow H_q(C_\bullet)$ と $\mathrm{Ker}\,\partial''_q \longrightarrow H_q(E_\bullet)$ は標準的射影.
[*4] $\mathrm{Ker}\,\partial_q \longrightarrow H_q(C_\bullet)$ と $\mathrm{Ker}\,\partial'_q \longrightarrow H_q(D_\bullet)$ と $\mathrm{Ker}\,\partial''_q \longrightarrow H_q(E_\bullet)$ は標準的射影.

定義 2.5: チェイン・ホモトピー

2 つのチェイン複体 $(C_\bullet,\, \partial_\bullet)$, $(D_\bullet,\, \partial'_\bullet)$，および 2 つのチェイン写像 $f_\bullet,\, g_\bullet\colon (C_\bullet,\, \partial_\bullet) \longrightarrow (D_\bullet,\, \partial'_\bullet)$ を与える．

- 左 R 加群の準同型写像の族 $\Phi_\bullet = \left\{\Phi_q\colon C_q \to D_{q+1}\right\}_{q\in\mathbb{Z}}$ が $f_\bullet$ を $g_\bullet$ に繋ぐ**チェイン・ホモトピー** (chain homotopy) であるとは，$\forall q \in \mathbb{Z}$ に対して以下が成り立つことを言う：
$$\partial'_{q+1} \circ \Phi_q + \Phi_{q-1} \circ \partial_q = g_q - f_q$$
- $f_\bullet$ を $g_\bullet$ に繋ぐチェイン・ホモトピーが存在するとき，$f_\bullet$ と $g_\bullet$ は**チェイン・ホモトピック** (chain homotopic) であるといい，$\boldsymbol{f_\bullet \simeq g_\bullet}$ と書く．

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_{q+2}"] & C_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] \arrow[d] \arrow[dl, "\Phi_{q+1}"'] & C_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d] \arrow[dl, "\Phi_q"'] & C_{q-1} \arrow[r, "\partial_{q-1}"] \arrow[d] \arrow[dl, "\Phi_{q-1}"'] & \cdots \arrow[dl, "\Phi_{q-2}"'] \\
\cdots \arrow[r, "\partial'_{q+2}"] & D_{q+1} \arrow[r, "\partial'_{q+1}"] & D_q \arrow[r, "\partial'_q"] & D_{q-1} \arrow[r, "\partial'_{q-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

図 2.4: チェイン・ホモトピー

次の命題はチェイン・ホモトピーを考える強い動機となる．

命題 2.2:

チェイン写像 $f_\bullet,\, g_\bullet\colon (C_\bullet,\, \partial_\bullet) \longrightarrow (D_\bullet,\, \partial'_\bullet)$ がチェイン・ホモトピックならば，$\forall q \geq 0$ に対して
$$H_q(f_\bullet) = H_q(g_\bullet)\colon H_q(C_\bullet) \longrightarrow H_q(D_\bullet)$$
が成り立つ．

<u>証明</u> $f_\bullet$, $g_\bullet$ を繋ぐチェイン・ホモトピー $\Phi_\bullet$ が存在するとする．このとき誘導準同型の定義より $\forall u + \operatorname{Im}\partial_{q+1} \in H_q(C_\bullet)$ に対して

$$\begin{aligned}
\bigl(H_q(g_\bullet) - H_q(f_\bullet)\bigr)(u + \operatorname{Im}\partial_{q+1}) &= \bigl(g_q(u) + \operatorname{Im}\partial'_{q+1}\bigr) - \bigl(f_q(u) + \operatorname{Im}\partial'_{q+1}\bigr) \\
&= (g_q - f_q)(u) + \operatorname{Im}\partial'_{q+1} \\
&= \Bigl(\partial'_{q+1}\bigl(\Phi_q(u)\bigr) + \Phi_{q-1}\bigl(\partial_q(u)\bigr)\Bigr) + \operatorname{Im}\partial'_{q+1} \\
&= \Phi_{q-1}\bigl(\partial_q(u)\bigr) + \operatorname{Im}\partial'_{q+1}
\end{aligned}$$

だが，ホモロジー群の定義より $u \in \operatorname{Ker}\partial_q$ なので最右辺は $0_{H_q(D_\bullet)}$ である．i.e. $H_q(g_\bullet) - H_q(f_\bullet) = 0$ が言えた． ■

2.1.3 連結準同型とホモロジー長完全列

3 つのチェイン複体 $(A_\bullet\partial_\bullet), (B_\bullet, \partial'_\bullet), (C_\bullet, \partial''_\bullet)$ および二つのチェイン写像 $i_\bullet\colon (A_\bullet\partial_\bullet) \longrightarrow (B_\bullet, \partial'_\bullet)$, $p_\bullet\colon (B_\bullet\partial'_\bullet) \longrightarrow (C_\bullet, \partial''_\bullet)$ を与える．可換図式[*5]

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "\partial_{q+2}"] & \vdots \arrow[d, "\partial'_{q+2}"] & \vdots \arrow[d, "\partial''_{q+2}"] & \\
0 \arrow[r] & A_{q+1} \arrow[r, "i_{q+1}"] \arrow[d, "\partial_{q+1}"] & B_{q+1} \arrow[r, "p_{q+1}"] \arrow[d, "\partial'_{q+1}"] & C_{q+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_{q+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_q \arrow[r, "i_q"] \arrow[d, "\partial_q"] & B_q \arrow[r, "p_q"] \arrow[d, "\partial'_q"] & C_q \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_q"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{q-1} \arrow[r, "i_{q-1}"] \arrow[d, "\partial_{q-1}"] & B_{q-1} \arrow[r, "p_{q-1}"] \arrow[d, "\partial'_{q-1}"] & C_{q-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_{q-1}"] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

図 2.5

において各列

$$0 \longrightarrow A_q \xrightarrow{i_q} B_q \xrightarrow{p_q} C_q \longrightarrow 0 \tag{2.1.3}$$

が完全であると仮定する．

定義 2.6: チェイン複体の短完全列

上述の仮定が成り立つとき，圏 **Chain** の図式

$$0 \longrightarrow (A_\bullet, \partial_\bullet) \xrightarrow{i_\bullet} (B_\bullet, \partial'_\bullet) \xrightarrow{p_\bullet} (C_\bullet, \partial''_\bullet) \longrightarrow 0$$

は**チェイン複体の短完全列**であると言われる．

命題 2.3: ホモロジー長完全列 (zig-zag lemma)

チェイン複体の短完全列

$$0 \longrightarrow A_q \xrightarrow{i_q} B_q \xrightarrow{p_q} C_q \longrightarrow 0$$

を与える．
このとき $\forall q \in \mathbb{Z}$ に対して**連結準同型** (connecting homomorphism) と呼ばれる準同型写像

$$\delta_q\colon H_q(C_\bullet) \longrightarrow H_{q-1}(A_\bullet)$$

[*5] $0 \longrightarrow A_\bullet$ の部分は包含写像 $0 \longmapsto 0$ で，$C_\bullet \longrightarrow 0$ の部分は零写像 $u \longmapsto 0$ であり，どちらも R 加群の準同型写像である．

が定まり，R-**Mod** の図式

$$
\begin{aligned}
\cdots \xrightarrow{\delta_{q+1}} H_q(A_\bullet) &\xrightarrow{H_q(i_\bullet)} H_q(B_\bullet) \xrightarrow{H_q(p_\bullet)} H_q(C_\bullet) \\
\xrightarrow{\delta_q} H_{q-1}(A_\bullet) &\xrightarrow{H_{q-1}(i_\bullet)} H_{q-1}(B_\bullet) \xrightarrow{H_{q-1}(p_\bullet)} H_{q-1}(C_\bullet) \xrightarrow{\delta_{q-1}} \cdots
\end{aligned}
\tag{2.1.4}
$$

は完全列になる．(2.1.4) のことを**ホモロジー長完全列** (homology long exact sequence) と呼ぶ．

<u>**証明**</u> チェイン複体の短完全列の定義より (2.1.3) が完全なので，$\forall q \in \mathbb{Z}$ に対して i_q は単射，p_q は全射で，かつ $\operatorname{Ker} p_q = \operatorname{Im} i_q$ が成り立つ．

連結準同型の構成

$\forall q \in \mathbb{Z}$ を 1 つ固定する．手始めに $\forall c \in \operatorname{Ker} \partial''_q$ の行き先 $a \in \operatorname{Ker} \partial_{q-1}$ を見繕う．

手順 (1) p_q は全射なので，ある $b \in B_q$ が存在して $c = p_q(b)$ と書ける：

$$
\begin{tikzcd}
\exists b \arrow[r, "p_q"] & c \arrow[d, "\partial''_q"] \\
& 0
\end{tikzcd}
$$

手順 (2) 図式 2.5 が可換なので

$$
p_{q-1}\bigl(\partial'_q b\bigr) = \partial''_q\bigl(p_q(b)\bigr) = \partial''_q c = 0 \quad \iff \quad \boldsymbol{\partial'_q b \in \operatorname{Ker} p_{q-1}}
$$

が成り立つ：

$$
\begin{tikzcd}
\exists b \arrow[r, "p_q"] \arrow[d, "\partial'_q"] & c \arrow[d, "\partial''_q"] \\
\partial'_q b \arrow[r, "p_{q-1}"] & 0
\end{tikzcd}
$$

手順 (3) $\operatorname{Ker} p_{q-1} = \operatorname{Im} i_{q-1}$ かつ i_{q-1} は単射なので，ある $a_b \in A_q$ が一意的に存在して $\partial'_q b = i_{q-1}(a_b)$ と書ける：

$$
\begin{tikzcd}
& \exists b \arrow[r, "p_q"] \arrow[d, "\partial'_q"] & c \arrow[d, "\partial''_q"] \\
\exists! a_b \arrow[r, "i_{q-1}"] & \partial'_q b \arrow[r, "p_{q-1}"] & 0
\end{tikzcd}
$$

手順 (4) 図式 2.5 が可換なので

$$
i_{q-2}\bigl(\partial_{q-1} a\bigr) = \partial'_{q-1}\bigl(i_{q-1} a\bigr) = \partial'_{q-1} \partial'_q b = 0
$$

が成り立つ．さらに i_{q-2} は単射，i.e. $\operatorname{Ker} i_{q-2} = \{0\}$ なので

$$
\partial_{q-1} a_b = 0 \quad \iff \quad \boldsymbol{a_b \in \operatorname{Ker} \partial_{q-1}}
$$

である：

$$
\begin{tikzcd}
 & \exists b \arrow[r, "p_q"] \arrow[d, "\partial'_q"] & c \arrow[d, "\partial''_q"] \\
\exists ! a_b \arrow[r, "i_{q-1}"] \arrow[d, "\partial_{q-1}"] & \partial'_q b \arrow[r, "p_{q-1}"] \arrow[d, "\partial'_{q-1}"] & 0 \\
\partial_{q-1} a_b \arrow[r, "i_{q-1}"] & 0 &
\end{tikzcd}
$$

補題 2.3: 連結準同型の定義

写像

$$\delta_q \colon H_q(C_\bullet) \longrightarrow H_{q-1}(A_\bullet),\ c + \operatorname{Im} \partial''_{q+1} \longmapsto a_b + \operatorname{Im} \partial_q$$

は well-defined な準同型写像である．

証明 まず写像

$$\psi_q \colon \operatorname{Ker} \partial''_q \longrightarrow H_{q-1}(A_\bullet),\ c \longmapsto a_b + \operatorname{Im} \partial_q$$

が well-defined な準同型写像であることを示す．

(well-definedness)

手順 (3) より $b \in p_q^{-1}(\{c\})$ が与えられると $a_b \in \operatorname{Ker} \partial_{q-1}$ が一意に定まるから，$a_b + \operatorname{Im} \partial_q$ が $b \in p_q^{-1}(\{c\})$ の取り方によらずに定まることを示せば良い．

別の $b' \in p_q^{-1}(\{c\})$ をとる．このとき

$$p_q(b') = p_q(b) \iff p_q(b' - b) = 0 \iff b' - b \in \operatorname{Ker} p_q = \operatorname{Im} i_q$$

が言えるので，ある $\alpha \in A_q$ が存在して $b' - b = i_q(\alpha)$ と書ける．さらに図式 2.5 の可換性から

$$i_{q-1}\bigl(\partial_q(\alpha)\bigr) = \partial'_q(i_q(a')) = \partial'_q(b' - b) \tag{2.1.5}$$

が成り立つ．一方，手順 (3), (4) より $\partial'_q b' = i_{q-1}(a_{b'})$ を充たす $a_{b'} \in \operatorname{Ker} \partial_{q-1}$ が一意的に存在する．このとき式 (2.1.5) から

$$i_{q-1}(a_{b'}) = \partial'_q b' = \partial'_q b + \partial'_q(b' - b) = i_{q-1}\bigl(a_b + \partial_q(\alpha)\bigr)$$

が成り立つが，i_{q-1} が単射なので

$$a_{b'} + \operatorname{Im} \partial_q = \bigl(a_b + \partial_q(\alpha)\bigr) = a_b + \operatorname{Im} \partial_q$$

が示された．

(準同型写像であること)

$\forall c_1, c_2 \in \operatorname{Ker} \partial''_q$ に対して $b_i \in p_q^{-1}(\{c_i\})$ (w/ $i = 1, 2$) をとり，手順 (3), (4) に従って $a_{b_i} \in \operatorname{Ker} \partial_{q-1}$ をとる．このとき $b_1 + b_2 \in p_q^{-1}(\{c_1 + c_2\})$ である．また，$\partial'_q(b_1 + b_2) = i_{q-1}(a_{b_1} + a_{b_2})$

かつ $a_{b_1}+a_{b_2}\in \operatorname{Ker}\partial_{q-1}$ が成り立つ[*6]ので $a_{b_1}+a_{b_2}=a_{b_1+b_2}$ である．従って

$$\begin{aligned}\psi_q(c_1+c_2)&=a_{b_1+b_2}+\operatorname{Im}\partial_q\\&=(a_{b_1}+a_{b_2})+\operatorname{Im}\partial_q\\&=(a_1+\operatorname{Im}\partial_q)+(a_2+\operatorname{Im}\partial_q)\\&=\psi_q(c_1)+\psi_q(c_2)\end{aligned}$$

が言えて加法についての証明が完了する．スカラー乗法に関しても同様である．

次に $\operatorname{Im}\partial''_{q+1}\subset\operatorname{Ker}\psi_q$ を示す．$\forall\partial''_{q+1}(c)\in\operatorname{Im}\partial''_{q+1}$ を 1 つとる．p_{q+1} は全射なので $b\in p_{q+1}^{-1}(\{c\})$ をとることができ，図式 2.5 の可換性から

$$p_q\bigl(\partial'_{q+1}(b)\bigr)=\partial''_{q+1}\bigl(p_{q+1}(b)\bigr)=\partial''_{q+1}c\in C_q \tag{2.1.6}$$

が成り立つ．ところで $\partial''_q\partial''_{q+1}=0$ より $\partial''_{q+1}(c)\in\operatorname{Im}\partial''_{q+1}\subset\operatorname{Ker}\partial''_q$ であるから，$\partial''_{q+1}(c)$ に対して手順 (1)-(4) を適用できる．特に (2.1.6) より手順 (1) の b として $\partial'_{q+1}(b)$ を選ぶことができ，手順 (3), (4) より $i_{q-1}(a_{\partial'_{q+1}(b)})=\partial'_q\partial'_{q+1}(b)=0$ を充たす $a_{\partial'_{q+1}(b)}\in\operatorname{Ker}\partial_{q-1}$ が一意的に存在する．ここで i_{q-1} は単射なので $a_{\partial'_{q+1}(b)}=0$ であり，

$$\psi_q(\partial''_{q+1}c)=a_{\partial'_{q+1}(b)}+\operatorname{Im}\partial_q=\operatorname{Im}\partial_q=0_{H_{q-1}(A_\bullet)}\iff\partial''_{q+1}c\in\operatorname{Ker}\psi_q$$

が示された．

以上の議論より商加群の普遍性が使えて，可換図式[*7]

$$\begin{tikzcd}\operatorname{Ker}\partial''_q \arrow[r, "\psi_q"] \arrow[d] & L \\ H_q(C_\bullet) \arrow[ur, dashed, "\exists!\delta_q"'] & \end{tikzcd}$$

が成り立つ．i.e. ψ_q が δ_q を一意的に誘導する．■

完全性

次に $\forall q\in\mathbb{Z}$ を 1 つ固定し，

$$H_q(A_\bullet)\xrightarrow{H_q(i_\bullet)}H_q(B_\bullet)\xrightarrow{H_q(p_\bullet)}H_q(C_\bullet)\xrightarrow{\delta_q}H_{q-1}(C_\bullet)\xrightarrow{H_{q-1}(i_\bullet)}H_{q-1}(B_\bullet)$$

が完全であることを示す．

$H_q(A_\bullet)\xrightarrow{H_q(i_\bullet)}H_q(B_\bullet)\xrightarrow{H_q(p_\bullet)}H_q(C_\bullet)$ (exact)

チェイン複体の短完全列の定義より $p_q\circ i_q=0$ なので，H_q の関手性より $H_q(p_\bullet)\circ H_q(i_\bullet)=0$, i.e. $\operatorname{Im}H_q(i_\bullet)\subset\operatorname{Ker}H_q(p_\bullet)$ が言える．

[*6] p_q, i_{q-1}, ∂'_q は全て左 R 加群の準同型写像なので．
[*7] $\operatorname{Ker}\partial''_q\longrightarrow H_q(C_\bullet)$ は標準的射影であり，$c\longmapsto c+\operatorname{Im}\partial''_{q+1}$ である．

次に $\operatorname{Im} H_q(i_\bullet) \supset \operatorname{Ker} H_q(p_\bullet)$ を示す．$\forall b + \operatorname{Im}\partial'_{q+1} \in \operatorname{Ker} H_q(p_\bullet)$ を 1 つとる．このとき $H_q(p_\bullet)(b + \operatorname{Im}\partial'_{q+1}) = p_q(b) + \operatorname{Im}\partial''_{q+1} = 0_{H_q(C_\bullet)}$ なので $p_q(b) \in \operatorname{Im}\partial''_{q+1}$ である．p_{q+1} の全射性も考慮するとある $b' \in B_{q+1}$ が存在して $p_q(b) = \partial''_{q+1}\bigl(p_{q+1}(b')\bigr)$ と書ける．ここで図式 2.5 の可換性から

$$0 = p_q(b) - \partial''_{q+1}\bigl(p_{q+1}(b')\bigr) = p_q(b - \partial'_{q+1}b') \quad\Longleftrightarrow\quad b - \partial'_{q+1}b' \in \operatorname{Ker} p_q = \operatorname{Im} i_q$$

が言える．故に i_q の単射性からある $a \in A_q$ が一意的に存在して $b - \partial'_{q+1}b' = i_q(a)$ が成り立つ．従って

$$b + \operatorname{Im}\partial'_{q+1} = \bigl(i_q(a) + \partial'_{q+1}b'\bigr) + \operatorname{Im}\partial'_{q+1} = i_q(a) + \operatorname{Im}\partial'_{q+1} = H_q(i_\bullet)(a + \operatorname{Im}\partial_{q+1}) \in \operatorname{Im} H_q(i_\bullet)$$

が示された．

$\boldsymbol{H_q(B_\bullet) \xrightarrow{H_q(p_\bullet)} H_q(C_\bullet) \xrightarrow{\delta_q} H_{q-1}(A_\bullet)}$ (exact)

まず $\operatorname{Im} H_q(p_\bullet) \subset \operatorname{Ker}\delta_q$ を示す．$\forall H_q(p_\bullet)(b + \operatorname{Im}\partial'_{q+1}) = p_q(b) + \operatorname{Im}\partial''_{q+1} \in \operatorname{Im} H_q(p_\bullet)$ を 1 つとる．このとき $p_q(b) \in \operatorname{Ker}\partial''_q$ (${}^{\mathrm{w}/}$ $b \in \operatorname{Ker}\partial'_q$) に手順 (1)-(4) を適用して得られる $a_b \in \operatorname{Ker}\partial_{q-1}$ は $0 = \partial'_q b = i_{q-1}(a_b)$ を充たすが，i_{q-1} は単射なので $a = 0$ が言える．従って

$$\delta_q\bigl(H_q(p_\bullet)(b + \operatorname{Im}\partial'_{q+1})\bigr) = a_b + \operatorname{Im}\partial_q = \operatorname{Im}\partial_q = 0_{H_{q-1}(A_\bullet)} \iff H_q(p_\bullet)(b + \operatorname{Im}\partial'_{q+1}) \in \operatorname{Ker}\delta_q$$

が示された．

次に $\operatorname{Im} H_q(p_\bullet) \supset \operatorname{Ker}\delta_q$ を示す．$\forall c + \operatorname{Im}\partial''_{q+1} \in \operatorname{Ker}\delta_q$ を 1 つとる．$c \in \operatorname{Ker}\partial''_q$ に対して手順 (1) を適用して $b \in B_q$ が得られ，この b に手順 (3)-(4) を適用して $a_b \in \operatorname{Ker}\partial_{q-1}$ が得られたとする．すると連結準同型の定義から $\delta_q(c + \operatorname{Im}\partial''_{q+1}) = a_b + \operatorname{Im}\partial_q = 0_{H_q(A_\bullet)}$ なので $a_b \in \operatorname{Im}\partial_q$ が成り立つ．i.e. ある $a' \in A_q$ が存在して $a_b = \partial_q(a')$ と書ける．ここで，手順 (3) および図式 2.5 の可換性から

$$\partial'_q b = i_{q-1}(a_b) = i_{q-1}(\partial_q(a')) = \partial'_q\bigl(i_q(a')\bigr) \quad\Longleftrightarrow\quad b - i_q(a') \in \operatorname{Ker}\partial'_q$$

が言える．従って $\bigl(b + i_q(a')\bigr) + \operatorname{Im}\partial'_{q+1} \in H_q(B_\bullet)$ であり，手順 (1) および $p_q \circ i_q = 0$ から

$$c + \operatorname{Im}\partial''_{q+1} = p_q(b) + \operatorname{Im}\partial''_{q+1} = p_q\bigl(b + i_q(a')\bigr) + \operatorname{Im}\partial''_{q+1} = H_q(p_\bullet)\Bigl(\bigl(b + i_q(a')\bigr)\Bigr)$$

i.e. $c + \operatorname{Im}\partial''_{q+1} \in \operatorname{Im} H_q(p_\bullet)$ が示された．

$\boldsymbol{H_q(C_\bullet) \xrightarrow{\delta_q} H_q(A_\bullet) \xrightarrow{H_{q-1}(i_\bullet)} H_{q-1}(B_\bullet)}$ (exact)

まず $\operatorname{Im}\delta_q \subset \operatorname{Ker} H_{q-1}(i_\bullet)$ を示す．$\forall\delta_q(c + \operatorname{Im}\partial''_{q+1}) = a_b + \operatorname{Im}\partial_q \in \operatorname{Im}\delta_q$ を 1 つとる．ただし $a_b \in \operatorname{Ker}\partial_{q-1}$ は，ある $b \in p_q^{-1}(\{c\})$ に手順 (3), (4) を施して得られる．このとき

$$H_{q-1}(i_\bullet)(a_b + \operatorname{Im}\partial_q) = i_{q-1}(a_b) + \operatorname{Im}\partial'_q = \partial'_q b + \operatorname{Im}\partial'_q = \operatorname{Im}\partial'_q = 0_{H_{q-1}(B_\bullet)}$$

が言える．

次に $\operatorname{Im}\delta_q \supset \operatorname{Ker} H_{q-1}(i_\bullet)$ を示す．$\forall a + \operatorname{Im}\partial_q \in \operatorname{Ker} H_{q-1}(i_\bullet)$ を 1 つとる．このとき $i_{q-1}(a) \in \operatorname{Im}\partial'_q$ だからある $b \in B_q$ が存在して $\partial'_q b = i_{q-1}(a)$ を充たす．$c := p_q(b)$ とおくと，図式 2.5 の可換性より $\partial''_q c = p_{q-1}(\partial'_q b) = p_{q-1}\bigl(i_{q-1}(a)\bigr) = 0 \iff c \in \operatorname{Ker}\partial''_q$ がわかる．従って $c + \operatorname{Im}\partial''_{q+1} \in H_q(C_\bullet)$ であり，手順 (1)-(4) の定義より

$$a + \operatorname{Im}\partial_q = \delta_q(c + \operatorname{Im}\partial''_{q+1}) \in \operatorname{Im}\delta_q$$

が示された．

q は任意だったので，図式 (2.1.3) が完全であることが示された． ■

2 つのチェイン複体の短完全列

$$
\begin{aligned}
&0 \longrightarrow (A_{1\bullet},\, \partial_{1\bullet}) \xrightarrow{i_{1\bullet}} (B_{1\bullet},\, \partial'_{1\bullet}) \xrightarrow{p_{1\bullet}} (C_{1\bullet},\, \partial''_{1\bullet}) \longrightarrow 0 \quad \text{(exact)}\\
&0 \longrightarrow (A_{2\bullet},\, \partial_{2\bullet}) \xrightarrow{i_{2\bullet}} (B_{2\bullet},\, \partial'_{2\bullet}) \xrightarrow{p_{2\bullet}} (C_{2\bullet},\, \partial''_{2\bullet}) \longrightarrow 0 \quad \text{(exact)}
\end{aligned}
$$

が与えられたとき，チェイン写像の 3 つ組

$$
\begin{aligned}
\alpha_\bullet &\colon (A_{1\bullet},\, \partial_{1\bullet}) \longrightarrow (A_{2\bullet},\, \partial_{2\bullet}),\\
\beta_\bullet &\colon (B_{1\bullet},\, \partial'_{1\bullet}) \longrightarrow (B_{2\bullet},\, \partial'_{2\bullet}),\\
\gamma_\bullet &\colon (C_{1\bullet},\, \partial''_{1\bullet}) \longrightarrow (C_{2\bullet},\, \partial''_{2\bullet})
\end{aligned}
$$

であって R-**Mod** の図式

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (A_{1\bullet},\, \partial_{1\bullet}) \arrow[r, "i_{1\bullet}"] \arrow[d, "\alpha_\bullet"] & (B_{1\bullet},\, \partial'_{1\bullet}) \arrow[r, "p_{1\bullet}"] \arrow[d, "\beta_\bullet"] & (C_{1\bullet},\, \partial''_{1\bullet}) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_\bullet"] & 0 & \text{(exact)}\\
0 \arrow[r] & (A_{2\bullet},\, \partial_{2\bullet}) \arrow[r, "i_{2\bullet}"] & (B_{2\bullet},\, \partial'_{2\bullet}) \arrow[r, "p_{2\bullet}"] & (C_{2\bullet},\, \partial''_{2\bullet}) \arrow[r] & 0 & \text{(exact)}
\end{tikzcd}
$$

を可換にするようなものを射と見做すことで，全てのチェイン複体の短完全列の集まりは圏 **SES**(**Chain**) を成す．**SES**(**Chain**) の射をあからさまに書くと，3 次元的な可換図式

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "\partial_{1\,q+2}"] & \vdots \arrow[d, "\partial'_{1\,q+2}"] & \vdots \arrow[d, "\partial''_{1\,q+2}"] & & & \\
0 \arrow[r] & A_{1\,q+1} \arrow[r, "i_{1\,q+1}"] \arrow[d, "\partial_{1\,q+1}"] \arrow[ddddr, "\alpha_{q+1}"] & B_{1\,q+1} \arrow[r, "p_{1\,q+1}"] \arrow[d, "\partial'_{1\,q+1}"] \arrow[ddddr, "\beta_{q+1}"] & C_{1\,q+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_{1\,q+1}"] \arrow[ddddr, "\gamma_{q+1}"] & 0 & \text{(exact)} & \\
0 \arrow[r] & A_{1\,q} \arrow[r, "i_{1\,q}"] \arrow[d, "\partial_{1\,q}"] \arrow[ddddr, "\alpha_q"] & B_{1\,q} \arrow[r, "p_{1\,q}"] \arrow[d, "\partial'_{1\,q}"] \arrow[ddddr, "\beta_q"] & C_{1\,q} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_{1\,q}"] \arrow[ddddr, "\gamma_q"] & 0 & \text{(exact)} & \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\
 & & \vdots \arrow[d, "\partial_{2\,q+2}"] & \vdots \arrow[d, "\partial'_{2\,q+2}"] & \vdots \arrow[d, "\partial''_{2\,q+2}"] & & \\
 & 0 \arrow[r] & A_{2\,q+1} \arrow[r, "i_{2\,q+1}"] \arrow[d, "\partial_{2\,q+1}"] & B_{2\,q+1} \arrow[r, "p_{2\,q+1}"] \arrow[d, "\partial'_{2\,q+1}"] & C_{2\,q+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_{2\,q+1}"] & 0 & \text{(exact)}\\
 & 0 \arrow[r] & A_{2\,q} \arrow[r, "i_{2\,q}"] \arrow[d, "\partial_{2\,q}"] & B_{2\,q} \arrow[r, "p_{2\,q}"] \arrow[d, "\partial'_{2\,q}"] & C_{2\,q} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_{2\,q}"] & 0 & \text{(exact)}\\
 & & \vdots & \vdots & \vdots & &
\end{tikzcd}
$$

になる．

同じように考えると, R-**Mod** の完全列全体の集まりは圏 $\mathbf{ES}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ を成す．つまり $\forall (M_\bullet,\, f_\bullet),\, (N_\bullet,\, g_\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{ES}(R\text{-}\mathbf{Mod}))$ の間の射とは，左 R 加群の準同型写像の族 $\varphi_\bullet := \left\{\varphi_q \colon M_q \longrightarrow N_q\right\}_q$ であって図式

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "f_{q+2}"] & M_{q+1} \arrow[r, "f_{q+1}"] \arrow[dr, "\varphi_{q+1}"] & M_q \arrow[r, "f_q"] \arrow[dr, "\varphi_q"] & M_{q-1} \arrow[r, "f_{q-1}"] \arrow[dr, "\varphi_{q-1}"] & \cdots \quad \text{(exact)} & \\
& \cdots \arrow[r, "f_{q+2}"] & N_{q+1} \arrow[r, "f_{q+1}"] & N_q \arrow[r, "f_q"] & N_{q-1} \arrow[r, "f_{q-1}"] & \cdots \quad \text{(exact)}
\end{tikzcd}
$$

を可換にするようなもののことである．

系 2.1: ホモロジー長完全列の自然性

ホモロジー長完全列は**自然**である．i.e. $\mathbf{SES}(\mathbf{Chain})$ の任意の 2 つの対象

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_1 &:= \left(0 \longrightarrow (A_{1\bullet},\, \partial_{1\bullet}) \xrightarrow{i_{1\bullet}} (B_{1\bullet},\, \partial'_{1\bullet}) \xrightarrow{p_{1\bullet}} (C_{1\bullet},\, \partial''_{1\bullet}) \longrightarrow 0 \quad \text{(exact)}\right) \\
\mathcal{C}_2 &:= \left(0 \longrightarrow (A_{2\bullet},\, \partial_{2\bullet}) \xrightarrow{i_{2\bullet}} (B_{2\bullet},\, \partial'_{2\bullet}) \xrightarrow{p_{2\bullet}} (C_{2\bullet},\, \partial''_{2\bullet}) \longrightarrow 0 \quad \text{(exact)}\right)
\end{aligned}
$$

とこれらを結ぶ任意の射 $(\alpha_\bullet,\, \beta_\bullet,\, \gamma_\bullet) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SES}(\mathbf{Chain})}(\mathcal{C}_1,\, \mathcal{C}_2)$ が与えられたとき，$\forall q \in \mathbb{Z}$ に対して図式 2.6 が可換になる．

特に，チェイン複体の短完全列からホモロジー長完全列を作る操作は関手 $\mathbf{SES}(\mathbf{Chain}) \longrightarrow \mathbf{ES}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ を定める．

$$
\begin{tikzcd}
H_q(A_{1\bullet}) \arrow[r, "H_q(i_{1\bullet})"] \arrow[ddr, "H_q(\alpha_\bullet)"] & H_q(B_{1\bullet}) \arrow[r, "H_q(p_{1\bullet})"] \arrow[ddr, "H_q(\beta_\bullet)"] & H_q(C_{1\bullet}) \arrow[dll, "\delta_{1\,q}"] \arrow[ddr, "H_q(\gamma_\bullet)"] & & \\
H_{q-1}(A_{1\bullet}) \arrow[r, "H_{q-1}(i_{1\bullet})"'] \arrow[ddr, "H_{q-1}(\alpha_\bullet)"'] & H_{q-1}(B_{1\bullet}) \arrow[r, "H_{q-1}(p_{1\bullet})"'] \arrow[ddr, "H_{q-1}(\beta_\bullet)"'] & H_{q-1}(C_{1\bullet}) \arrow[ddr, "H_{q-1}(\gamma_\bullet)"'] & \text{(exact)} & \\
& H_q(A_{2\bullet}) \arrow[r, "H_q(i_{2\bullet})"] & H_q(B_{2\bullet}) \arrow[r, "H_q(p_{2\bullet})"] & H_q(C_{2\bullet}) \arrow[dll, "\delta_{2\,q}"] & \\
& H_{q-1}(A_{2\bullet}) \arrow[r, "H_{q-1}(i_{2\bullet})"'] & H_{q-1}(B_{2\bullet}) \arrow[r, "H_{q-1}(p_{2\bullet})"'] & H_{q-1}(C_{2\bullet}) & \text{(exact)}
\end{tikzcd}
$$

図 2.6: ホモロジー長完全列の自然性

<u>**証明**</u> $\mathbf{SES}(\mathbf{Chain})$ の射の可換性および H_q の関手性から，図式

$$
\begin{tikzcd}
H_q(A_{1\bullet}) \arrow[r, "H_q(i_{1\bullet})"] \arrow[d, "H_q(\alpha_\bullet)"] & H_q(B_{1\bullet}) \arrow[r, "H_q(p_{1\bullet})"] \arrow[d, "H_q(\beta_\bullet)"] & H_q(C_{1\bullet}) \arrow[d, "H_q(\gamma_\bullet)"] \\
H_q(A_{2\bullet}) \arrow[r, "H_q(i_{2\bullet})"] & H_q(B_{2\bullet}) \arrow[r, "H_q(p_{2\bullet})"] & H_q(C_{2\bullet})
\end{tikzcd}
$$

が可換であることは明らか．よって図式

$$\begin{tikzcd} H_q(C_{1\bullet}) \arrow[r, "\delta_{1q}"] \arrow[d, "H_q(\gamma_\bullet)"] & H_{q-1}(A_{1\bullet}) \arrow[d, "H_{q-1}(\alpha_\bullet)"] \\ H_q(C_{2\bullet}) \arrow[r, "\delta_{2q}"] & H_{q-1}(A_{2\bullet}) \end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよい．

$\forall c + \operatorname{Im} \partial''_{1\,q+1} \in H_q(C_{1\bullet})$ を 1 つとる．$c \in \operatorname{Ker} \partial''_{1\,q}$ に対して $b \in {p_1}_q^{-1}(\{c\})$ をとり，手順 (3), (4) を通して $a_b \in \operatorname{Ker} \partial_{1\,q-1}$ を得たとする．このとき

$$\begin{aligned} c &= p_{1\,q}(b), \\ \partial'_{1\,q} b &= i_{1\,q-1}(a_b), \\ H_{q-1}(\alpha_\bullet)\big(\delta_{1\,q}(c + \operatorname{Im} \partial''_{1\,q+1})\big) &= \alpha_{q-1}(a_b) + \operatorname{Im} \partial_{2\,q} \end{aligned}$$

が成り立つ．ところで，**SES**(**Chain**) の射の可換性より

$$\begin{aligned} \gamma_q(c) &= \gamma_q\big(p_{1\,q}(b)\big) = p_{2\,q}\big(\beta_q(b)\big), \\ i_{2\,q-1}\big(\alpha_{q-1}(a_b)\big) &= \beta_{q-1}\big(i_{1\,q-1}(a_b)\big) = \beta_{q-1}(\partial'_{1\,q}(b)) = \partial'_{2\,q}(\beta_q(b)) \end{aligned}$$

が成り立つから，手順 (1)-(4) の定義より

$$\begin{aligned} \delta_{2\,q}\big(H_q(\gamma_\bullet)(c + \operatorname{Im} \partial''_{1\,q+1})\big) &= \delta_{2\,q}\big(\gamma_q(c) + \operatorname{Im} \partial''_{2\,q+1}\big) \\ &= \alpha_{q-1}(a_b) + \operatorname{Im} \partial_{2\,q} \\ &= H_{q-1}(\alpha_\bullet)\big(\delta_{1\,q}(c + \operatorname{Im} \partial''_{1\,q+1})\big) \end{aligned}$$

が示された． ■

2.2 整数係数特異ホモロジー

ここまでの議論は純粋に代数的なものであった．チェイン複体の理論を用いて位相空間の構造を調べるには，なんらかの関手

$$F_\bullet \colon \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Chain}$$

を構成する必要がある．この節ではこのような関手の具体例として整数係数特異ホモロジーを定義する．

定義 2.7: 非負なチェイン複体

$(C_\bullet, \partial_\bullet) \in \operatorname{Ob}(\mathbf{Chain})$ は $\forall q < 0$ に対して $C_q = 0$ であるとき**非負** (nonnegative) と呼ばれる．

2.2.1 標準 q 単体による構成

定義 2.8: 標準 q-単体

標準 q 単体 (standard q-simplex) Δ^q を次のように定義する：

$$\Delta^q \coloneqq \left\{ (x_0,\, x_1,\, \dots,\, x_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \,\middle|\, \sum_{i=0}^{q} x_i = 1,\ x_i \geq 0\ (0 \leq \forall i \leq q) \right\}$$

$\mathbb{R}^{q+1}$ の基底 $\{e_k^q\}_{k=0,\,\dots,\,q}$ を

$$e_k^q \coloneqq \bigl(0,\, \dots,\, 0,\, \underbrace{1}_{k},\, 0,\, \dots,\, 0\bigr)$$

で定義すると，$e_k^q \in \Delta^q$ である[*8]

定義 2.9: face map

$0 \leq i \leq q$ に対して，線型写像 $f_i^q \colon \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^{q+1}$ を

$$f_i^q(e_k^{q-1}) \coloneqq \begin{cases} e_k^q, & k < i \\ e_{k+1}^q & k \geq i \end{cases}$$

で定義する．このとき $f_i^q(\Delta^{q-1}) \subset \Delta^q$ が成立するから，連続写像

$$f_i^q\big|_{\Delta^{q-1}} \colon \Delta^{q-1} \longrightarrow \Delta^q$$

が構成できたことになる．$f_i^q\big|_{\Delta^{q-1}}$ は**面写像** (face map) と呼ばれる．

明かに

$$f_i^q\bigl((x_0,\, x_1,\, \dots,\, x_{q-1})\bigr) = (x_0,\, x_1,\, \dots,\, x_{i-1},\, 0,\, x_i,\, \dots,\, x_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q+1}$$

である．

定義 2.10: ($\mathbb{Z}$ 係数) 特異 q 単体

位相空間 X を与える．

- 集合 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^q,\, X)$ を X の**特異 q 単体** (sigular q-simplex) と呼ぶ．
- X の $\mathbb{Z}$ 係数**特異 q-チェイン** (singular q chain) $S_q(X)$ とは，特異 q 単体の生成する自由 $\mathbb{Z}$ 加群のこと．記号として

  $$\boldsymbol{S_q(X)} \coloneqq \mathbb{Z}^{\oplus \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^q,\, X)}$$

  と書く．

[*8] さらに，Δ^q は $\{e_k^q\}_{k=0,\,\dots,\,q}$ を含む最小の凸集合でもある．凸集合 $V \subset \mathbb{R}^{q+1}$ が $\{e_k^q\}_{k=0,\,\dots,\,q} \subset V$ を充たすならば，凸集合の性質から $e_0^q,\, \dots,\, e_q^q$ の凸結合もまた V に属するからである．

- **境界写像** (boundary map) $\partial_q \colon S_q(X) \longrightarrow S_{q-1}(X)$ を次のように定義する：

$$\partial_q(\sigma) \coloneqq \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \bigl(\sigma \circ f_i^q\bigr)$$

補題 2.4:

$$\partial_q \partial_{q+1} = 0$$

<u>**証明**</u> $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\left(\Delta^{q+1},\, X\right)$ の元は $S_{q+1}(X)$ の基底を成すので, $\forall \sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\left(\Delta^{q+1},\, X\right)$ に対して $\partial_q \partial_{q+1} \sigma = 0$ が成り立つことを示せば良い．まず，$i > j$ のとき

$$\left(f_i^{q+1} \circ f_j^q\right)(e_k^{q-1}) = \begin{cases} f_i^{q+1}(e_k^q), & k < j \\ f_i^{q+1}(e_{k+1}^q), & k \geq j \end{cases} = \begin{cases} e_k^{q+1}, & k < j < i \\ e_{k+1}^{q+1}, & k \geq j \text{ かつ } k+1 < i \\ e_{k+2}^{q+1}, & j < i \leq k+1 \end{cases}$$

$$\left(f_j^{q+1} \circ f_{i-1}^q\right)(e_k^{q-1}) = \begin{cases} f_j^{q+1}(e_k^q), & k < i-1 \\ f_j^{q+1}(e_{k+1}^q), & k \geq i-1 \end{cases} = \begin{cases} e_k^{q+1}, & k < j \leq i-1 \\ e_{k+1}^{q+1}, & k < i-1 \text{ かつ } k+1 \geq j \\ e_{k+2}^{q+1}, & j \leq i-1 \leq k \end{cases}$$

なので $f_i^{q+1} \circ f_j^q = f_j^{q+1} \circ f_{i-1}^q$ である．従って

$$\begin{aligned}
&\partial_q \partial_{q+1} \sigma = \sum_{i=0}^{q+1} \sum_{j=0}^{q} (-1)^{i+j} \bigl(\sigma \circ f_i^{q+1} \circ f_j^q\bigr) \\
&= \sum_{0 \leq j < i \leq q+1} (-1)^{i+j} \bigl(\sigma \circ f_i^{q+1} \circ f_j^q\bigr) + \sum_{0 \leq i \leq j \leq q} (-1)^{i+j} \bigl(\sigma \circ f_i^{q+1} \circ f_j^q\bigr) \\
&= \sum_{0 \leq j < i \leq q+1} (-1)^{i+j} \bigl(\sigma \circ f_j^{q+1} \circ f_{i-1}^q\bigr) + \sum_{0 \leq i \leq j \leq q} (-1)^{i+j} \bigl(\sigma \circ f_i^{q+1} \circ f_j^q\bigr) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

■

補題 2.4 より，定義 2.10 で作った加群と準同型の組

$$\bigl(S_\bullet(X),\, \partial_\bullet\bigr) \coloneqq \bigl\{S_q(X),\, \partial_q\bigr\}_{q \in \mathbb{Z}}$$

は $\mathbb{Z}$-$\mathbf{Mod}$ 上の非負なチェイン複体になる．

定義 2.11: ($\mathbb{Z}$ 係数) 特異チェイン複体

$\bigl(S_\bullet(X),\, \partial_\bullet\bigr) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Chain})$ のことを $\mathbb{Z}$ 係数**特異チェイン複体** (singular chain complex) と呼ぶ．

補題 2.5: 特異チェイン群が誘導するチェイン写像

連続写像 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ を任意に与える．
このとき f は $\mathbb{Z}$ 加群の準同型の族 $S_\bullet(f) \coloneqq \{S_q(f) \colon S_q(X) \to S_q(Y)\}_{q \geq 0}$ を次のようにして誘導する：

$$S_q(f) \colon S_q(X) \to S_q(Y),\ \sum_l a_l \sigma_l \mapsto \sum_l a_l (f \circ \sigma_l)$$

特に $S_\bullet(f)$ はチェイン写像 $S_\bullet(f) \colon (S_\bullet(X), \partial_\bullet^X) \longrightarrow (S_\bullet(Y), \partial_\bullet^Y)$ である．

証明 $\forall q \geq 0$ を 1 つとる．$\forall \sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^q, X)$ に対して $f \circ \sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^q, Y)$ なので[*9]，$S_q(f) \colon S_q(X) \to S_q(Y)$ は well-defined な準同型写像である．また，

$$\begin{aligned}
(\partial_q^Y \circ S_q(f))(\sigma) &= \sum_{i=0}^{q} (-1)^i (f \circ \sigma \circ f_i^q) \\
&= S_{q-1}(f) \left(\sum_{i=0}^{q} (-1)^i (\sigma \circ f_i^q) \right) \\
&= (S_{q-1}(f) \circ \partial_q^X)(\sigma)
\end{aligned}$$

が成り立つので $S_\bullet(f)$ はチェイン写像である． ■

定理 2.2: $S_\bullet$ の関手性

- 位相空間 $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ を**特異チェイン複体** $S_\bullet(X) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Chain})$ に，
- 連続写像 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ を補題 2.5 のチェイン写像 $S_\bullet(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Chain}}(S_\bullet(X), S_\bullet(Y))$ に

対応づける対応

$$S_\bullet \colon \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Chain}$$

は関手である．i.e. $\forall X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ と $\forall q \in \mathbb{Z}$ に対して以下が成り立つ：

(1) 恒等写像 $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, X)$ について

$$S_q(\mathrm{id}_X) = 1_{S_q(X)} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}}(S_q(X), S_q(X))$$

(2) 任意の連続写像 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Y, Z)$ について

$$S_q(g \circ f) = S_q(g) \circ S_q(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}}(S_q(X), S_q(Z))$$

証明 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^q, X)$ は自由 $\mathbb{Z}$ 加群 $S_q(X)$ の基底を成すので，$\forall \sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^q, X)$ について示せば十分である．

[*9] 連続写像の合成は連続

(1) 恒等写像 $\mathrm{id}_X\colon X\to X$ に対して

$$S_q(\mathrm{id}_X)(\sigma)=\mathrm{id}_X\circ\sigma=\sigma=1_{S_q(X)}(\sigma).$$

(2) **Top** における射の結合則より

$$S_q(g\circ f)(\sigma)=g\circ f\circ\sigma=g\circ(f\circ\sigma)=\bigl(S_q(g)\circ S_q(f)\bigr)(\sigma).$$

■

これで当初の目標が達成された．ここからさらにホモロジー群をとる関手を作用させることで関手

$$H_q\circ S_\bullet\colon \mathbf{Top}\longrightarrow\mathbf{Chain}\longrightarrow\mathbb{Z}\text{-}\mathbf{Mod}$$

が構成される．

定義 2.12: ($\mathbb{Z}$ 係数) 特異ホモロジー

位相空間 $X\in\mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ および $\forall q\geq 0$ に対して定まる $\mathbb{Z}$ 加群

$$H_q\bigl(S_\bullet(X)\bigr)=\frac{\mathrm{Ker}\bigl(\partial_q\colon S_q(X)\to S_{q-1}(X)\bigr)}{\mathrm{Im}\bigl(\partial_{q+1}\colon S_{q+1}(X)\to S_q(X)\bigr)}$$

を X の第 q $\mathbb{Z}$ 係数 **特異ホモロジー群** (singular homology group) と呼ぶ．

! $H_q\bigl(S_\bullet(X)\bigr)$ はよく $\boldsymbol{H_q(X)}$ と略記される．この章の以降でも，誤解の恐れがないときはこの略記を行う．また，記号の濫用だが，チェイン写像 $S_\bullet(f)$ のことを $\boldsymbol{f_\bullet}$ と略記し，$H_q\bigl(S_\bullet(f)\bigr)$ のことを $\boldsymbol{f_q}$ と略記する場合がある．

2.2.2 一点のホモロジー

命題 2.4: 一点のホモロジーは $\mathbb{Z}$

一点からなる位相空間 $*=\{*\}$ に対して以下が成り立つ：

$$H_q(*)=\begin{cases}0, & q\neq 0\\ \mathbb{Z}, & q=0\end{cases}$$

証明 任意の $q\geq 0$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^q,*)$ は一点集合であり，その元は定数写像である．それを $\sigma_q\colon\Delta^q\to *$ と書くと

$$S_q(*)=\mathbb{Z}\{\sigma_q\}\cong\mathbb{Z}$$

が成り立つ．境界写像は，$\sigma_q\circ f_i^q=\sigma_{q-1}$ に注意すると

$$\partial_q(\sigma_q)=\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\sigma_{q-1}=\begin{cases}\sigma_{q-1}, & q\text{ is even}\\ 0, & q\text{ is odd}\end{cases}$$

である．i.e. 位相空間 $*$ の整数係数特異チェイン複体は完全列[*10]

$$\cdots \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \cdots \xrightarrow{0} \mathbb{Z}$$

になる．故に

$$\begin{aligned} H_{q\geq 1}(*) &= \operatorname{Ker} \partial_q / \operatorname{Im} \partial_{q+1} = 0, \\ H_0(*) &= \operatorname{Ker} \partial_0 / \operatorname{Im} \partial_1 = \mathbb{Z}/\{0\} = \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

■

2.2.3　ホモトピー不変性

2 つの位相空間 $X,\ Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ をとり，その間の連続写像全体の集合 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\ Y)$ を考える．

定義 2.13: ホモトピック

- 2 つの連続写像 $f_0,\ f_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\ Y)$ が**ホモトピック** (homotopic) であるとは，連続写像 $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\big(X \times [0,\ 1],\ Y\big)$ が存在して

$$\begin{aligned} F|_{X\times\{0\}} &= f_0, \\ F|_{X\times\{1\}} &= f_1 \end{aligned}$$

  を充たすことを言い，$\boldsymbol{f_0 \simeq f_1}$ と書く．F のことを f_0 と f_1 を繋ぐ**ホモトピー** (homotopy) と呼ぶ．
- 連続写像の組 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\ Y)$，$g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Y,\ X)$ が**ホモトピー同値写像** (homotopy equivalence) であるとは，

$$\begin{aligned} g \circ f &\simeq \mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\ X), \\ f \circ g &\simeq \mathrm{id}_Y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Y,\ Y) \end{aligned}$$

  が成り立つことを言う[a]．位相空間 $X,\ Y$ の間にホモトピー同値写像が存在するとき，X と Y は同じ**ホモトピー型** (homotopy type) である[b]と言う．
- 位相空間 X が**可縮** (contractible) であるとは，X が一点からなる位相空間 $\{\mathrm{pt}\} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ と同じホモトピー型であること．

[a] g は f の**ホモトピー逆写像** (homotopy inverse) であると言う．逆もまた然り．f または g のどちらか一方だけを指してホモトピー同値写像であると言った場合は，ホモトピー逆写像が存在することを意味する．
[b] **ホモトピー同値** (homotopy equivalent) であると言うこともある．

$\simeq\ \subset \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\ Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\ Y)$ は集合 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\ Y)$ 上の同値関係である．

次の命題は，**Top** におけるホモトピーと **Chain** におけるチェイン・ホモトピーの間に対応があることを主張する．証明には，$\Delta^q \times [0,\ 1]$ の三角形分割を利用して実際にチェイン・ホモトピーを構成する．このような構成法を**プリズム分解**と呼ぶ．

[*10] $\operatorname{Ker} \partial_q = \operatorname{Im} \partial_{q+1}$ であることは明らかであろう．

命題 2.5: ホモトピックはチェイン・ホモトピック

連続写像 $f,\, g\colon X \longrightarrow Y$ が互いにホモトピックならば，チェイン写像 $S_\bullet(f),\, S_\bullet(g)\colon \bigl(S_\bullet(X),\, \partial_\bullet^X\bigr) \longrightarrow \bigl(S_\bullet(Y),\, \partial_\bullet^Y\bigr)$ は互いにチェイン・ホモトピックである．

証明 $I := [0,\, 1]$ とおく．任意の $f,\, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\, Y)$ および任意の特異 q-単体 $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^q,\, X)$ を与える．$f,\, g$ が互いにホモトピックだとすると，連続写像 $F\colon X \times I \longrightarrow Y$ であって $F|_{X\times\{0\}} = f$ かつ $F|_{Y\times\{1\}} = g$ を充たすものが存在する．**プリズム** $\Delta^q \times I$ を定義域に持つような合成

$$F \circ (\sigma \times \mathrm{id}_I)\colon \Delta^q \times I \longrightarrow X \times I \longrightarrow Y$$

を考える．

次にプリズムの三角形分割を構成する．$\forall q \geq 0$ に対して $\mathbb{R}^{q+1}$ の基底 $\bigl\{e_i^q\bigr\}_{i=0,\, \dots,\, q}$ を

$$e_i^q := (0,\, \dots,\, 0,\, \underbrace{1}_{i},\, 0,\, \dots,\, 0)$$

にとる．そして $q+1$ 個の線型写像 $s_i^{q+1}\colon \mathbb{R}^{q+2} \longrightarrow \mathbb{R}^{q+1} \times \mathbb{R}$ を

$$s_i^{q+1}(e_k^{q+1}) := \begin{cases} (e_k^q,\, 0), & k \leq i \\ (e_{k-1}^q,\, 1), & k > i \end{cases}$$

と定義する．すると

$$s_i^{q+1}(x_0,\, \dots,\, x_{q+1}) = \Bigl((x_0,\, \dots,\, x_{i-1},\, x_i + x_{i+1},\, x_{i+2},\, \dots,\, x_{q+1}),\, \sum_{k=i+1}^{q+1} x_k\Bigr)$$

が成り立つので $s_i^{q+1}(\Delta^{q+1}) \subset \Delta^q \times I$ である．

ここで $\forall q \geq 0$ に対する（第 q）**プリズム演算子** (prism operators) $P_q\colon S_q(X) \longrightarrow S_{q+1}(Y)$ を，

$$P_q(\sigma) := \sum_{i=0}^{q} (-1)^i F \circ (\sigma \times \mathrm{id}_I) \circ s_i^{q+1}|_{\Delta^{q+1}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^{q+1},\, Y) \tag{2.2.1}$$

を充たすものとして定義する．以降では，プリズム演算子がチェイン写像 $S_\bullet(f),\, S_\bullet(g)$ を繋ぐチェイン・ホモトピーであることを示す．

補題 2.6:

2 つの包含写像を

$$\begin{aligned} i_0 &\colon \Delta^q \longrightarrow \Delta^q \times I,\ x \longmapsto (x,\, 0), \\ i_1 &\colon \Delta^q \longrightarrow \Delta^q \times I,\ x \longmapsto (x,\, 1) \end{aligned}$$

と定義する．このとき，$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^q,\, \Delta^q \times I)$ の元として以下の等式が成り立つ：

(1)

$$s_i^{q+1} \circ f_j^{q+1}|_{\Delta^q} = \begin{cases} (f_{j-1}^q|_{\Delta^{q-1}} \times \mathrm{id}_I) \circ s_i^q, & i < j-1 \\ (f_j^q|_{\Delta^{q-1}} \times \mathrm{id}_I) \circ s_{i-1}^q, & i > j \end{cases}$$

(2) $s_{j-1}^{q+1} \circ f_j^{q+1}|_{\Delta^q} = s_j^{q+1} \circ f_j^{q+1}|_{\Delta^q}$

(3) $s_q^{q+1} \circ f_{q+1}^{q+1}|_{\Delta^q} = i_0$

(4) $s_0^{q+1} \circ f_0^{q+1}|_{\Delta^q} = i_1$

ただし，$f_j^{q+1}|_{\Delta^q} \colon \Delta^q \longrightarrow \Delta^{q+1}$ は面写像である．

証明 面写像の制限の記号 $|_{\Delta^q}$ を省略する．$\mathbb{R}^{q+1}$ の基底 $\{e_k^q\}_{k=0,\,\ldots,\,q}$ を写像した先が一致していることを示す．

(1) $\boldsymbol{i < j-1}$

$$s_i^{q+1} \circ f_j^{q+1}(e_k^q) = \begin{cases} s_i^{q+1}(e_k^{q+1}), & k < j \\ s_i^{q+1}(e_{k+1}^{q+1}), & k \geq j \end{cases} = \begin{cases} (e_k^q,\, 0), & k \leq i \\ (e_{k-1}^q,\, 1), & i < k < j \\ (e_k^q,\, 1), & k \geq j \end{cases}$$

である．一方，

$$(f_{j-1}^q \times \mathrm{id}_I) \circ s_i^q(e_k^q) = \begin{cases} (f_{j-1}^q \times \mathrm{id}_I)(e_k^{q-1},\, 0), & k \leq i \\ (f_{j-1}^q \times \mathrm{id}_I)(e_{k-1}^{q-1},\, 1), & k > i \end{cases} = \begin{cases} (e_k^q,\, 0), & k \leq i \\ (e_{k-1}^q,\, 1), & i < k < j \\ (e_k^q,\, 1), & k \geq j \end{cases}$$

なので示された．

$\boldsymbol{i > j}$

$$s_i^{q+1} \circ f_j^{q+1}(e_k^q) = \begin{cases} s_i^{q+1}(e_k^{q+1}), & k < j \\ s_i^{q+1}(e_{k+1}^{q+1}), & k \geq j \end{cases} = \begin{cases} (e_k^q,\, 0), & k < j \\ (e_{k+1}^q,\, 1), & j \leq k \leq i-1 \\ (e_k^q,\, 1), & k > i-1 \end{cases}$$

である．一方，

$$(f_j^q \times \mathrm{id}_I) \circ s_{i-1}^q(e_k^q) = \begin{cases} (f_j^q \times \mathrm{id}_I)(e_k^{q-1},\, 0), & k \leq i-1 \\ (f_j^q \times \mathrm{id}_I)(e_{k-1}^{q-1},\, 1), & k > i-1 \end{cases} = \begin{cases} (e_k^q,\, 0), & k < j \\ (e_{k+1}^q,\, 1), & j \leq k \leq i-1 \\ (e_k^q,\, 1), & k > i-1 \end{cases}$$

なので示された．

(2)

$$s_{j-1}^{q+1} \circ f_j^{q+1}(e_k^q) = \begin{cases} s_{j-1}^{q+1}(e_k^{q+1}), & k < j \\ s_{j-1}^{q+1}(e_{k+1}^{q+1}), & k \geq j \end{cases} = \begin{cases} (e_k^q,\, 0), & k < j \\ (e_k^q,\, 1), & k \geq j \end{cases}$$

で，

$$s_j^{q+1} \circ f_j^{q+1}(e_k^q) = \begin{cases} s_j^{q+1}(e_k^{q+1}), & k < j \\ s_j^{q+1}(e_{k+1}^{q+1}), & k \geq j \end{cases} = \begin{cases} (e_k^q,\, 0), & k < j \\ (e_k^q,\, 1), & k \geq j \end{cases}$$

なので示された．

(3) 添字 k は $0 \leq k \leq q$ の範囲を動くので

$$s_q^{q+1} \circ f_{q+1}^{q+1}(e_k^q) = s_q^{q+1}(e_k^{q+1}) = (e_k^q,\, 0) = i_0(e_k^q).$$

(4) (3) と同様に考えて

$$s_0^{q+1} \circ f_0^{q+1}(e_k^q) = s_0^{q+1}(e_{k+1}^{q+1}) = (e_k^q,\, 1) = i_1(e_k^q).$$

■

引き続き制限の記号 $|_{\Delta^q}$ を省略する．プリズム演算子の定義 (2.2.1) より

$$\begin{aligned}
\partial_{q+1}^Y \circ P_q(\sigma) &= \sum_{j=0}^{q+1}\sum_{i=0}^{q}(-1)^{j+i} F \circ (\sigma \times \mathrm{id}_I) \circ s_i^{q+1} \circ f_j^{q+1} \\
&= \sum_{0 \leq i < j \leq q+1} (-1)^{i+j} F \circ (\sigma \times \mathrm{id}_I) \circ s_i^{q+1} \circ f_j^{q+1} \\
&\quad + \sum_{0 \leq j \leq i \leq q} (-1)^{i+j} F \circ (\sigma \times \mathrm{id}_I) \circ s_i^{q+1} \circ f_j^{q+1}
\end{aligned}$$

が成り立つ．$1 \leq \forall i \leq q$ に対しては最右辺の第 1 項から $i = j-1$ の項が，第 2 項から $i = j$ の項が出現するが，補題 2.6-(2) よりこれらは互いに打ち消しあって 0 になる．$(i,\, j) = (0,\, 0),\, (q,\, q+1)$ の 2 項は，補題 2.6-(3), (4) よりそれぞれ $S_q(f)(\sigma),\, -S_q(g)(\sigma)$ になる．従って残りの項は，補題 2.6-(1) より

$$\begin{aligned}
\partial_{q+1}^Y \circ P_q(\sigma) - S_q(f)(\sigma) + S_q(g)(\sigma) &= \sum_{0 \leq i < j-1 \leq q} (-1)^{i+j} F \circ (\sigma \times \mathrm{id}_I) \circ s_i^{q+1} \circ f_j^{q+1} \\
&\quad + \sum_{0 \leq j < i \leq q} (-1)^{i+j} F \circ (\sigma \times \mathrm{id}_I) \circ s_i^{q+1} \circ f_j^{q+1} \\
&= \sum_{0 \leq i < j-1 \leq q} (-1)^{i+j} F \circ \big((\sigma \circ f_{j-1}^q) \times \mathrm{id}_I\big) \circ s_i^q \\
&\quad + \sum_{0 \leq j < i \leq q} (-1)^{i+j} F \circ \big((\sigma \circ f_j^q) \times \mathrm{id}_I\big) \circ s_{i-1}^q \\
&= \sum_{0 \leq i < j' \leq q} (-1)^{i+j'+1} F \circ \big((\sigma \circ f_{j'}^q) \times \mathrm{id}_I\big) \circ s_i^q \\
&\quad + \sum_{0 \leq j \leq i' \leq q-1} (-1)^{i'+j+1} F \circ \big((\sigma \circ f_j^q) \times \mathrm{id}_I\big) \circ s_{i'}^q \\
&= -P_{q-1}\left(\sum_{j=0}^{q}(-1)^j \sigma \circ f_j^q\right) \\
&= -P_{q-1} \circ \partial_q^X(\sigma)
\end{aligned}$$

と分かる．i.e. P_q はチェイン・ホモトピーである．

■

系 2.3: ホモロジー群のホモトピー不変性

- 連続写像 $f, g\colon X \longrightarrow Y$ が互いにホモトピックならば，$\forall q \geq 0$ に対して $H_q\bigl(S_\bullet(f)\bigr) = H_q\bigl(S_\bullet(g)\bigr)\colon H_q(X) \longrightarrow H_q(Y)$ が成り立つ．
- 位相空間 X, Y が同じホモトピー型ならば $\forall q \geq 0$ に対して $H_q(X) \cong H_q(Y)$ である．

証明 定理 2.5 と命題 2.2 と H_q の関手性より従う． ■

5 章で解説する非輪状モデル定理を使うと，定理 2.5 をより一般的な文脈で証明することもできる．

2.3 Mayer-Vietoris 完全列

位相空間 X の部分空間 $A \subset X$ の X における内部を A° と書く．

定理 2.4: Mayer-Vietoris 完全列

X を位相空間，$U, V \subset X$ を部分集合で，

$$U^\circ \cup V^\circ = X$$

を充たすものとする．このとき $\forall q \geq 0$ について連結準同型

$$\partial_\bullet\colon H_q(X) \longrightarrow H_{q-1}(U \cap V)$$

が存在して，完全列

$$\begin{aligned}
\cdots \xrightarrow{i} H_q(U) \oplus H_q(V) \xrightarrow{j} H_q(X) &\xrightarrow{\partial_\bullet} H_{q-1}(U \cap V) \\
\xrightarrow{i} H_{q-1}(U) \oplus H_{q-1}(V) \xrightarrow{j} H_{q-1}(X) &\xrightarrow{\partial_\bullet} H_{q-2}(U \cap V) \\
\xrightarrow{i} \cdots \xrightarrow{i} H_0(U) \oplus H_0(V) &\xrightarrow{j} H_0(X) \to 0
\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，準同型 i, j は包含写像

$$\begin{aligned}
&i_U\colon U \cap V \hookrightarrow U, && i_V\colon U \cap V \hookrightarrow V, \\
&j_U\colon U \hookrightarrow X, && j_V\colon V \hookrightarrow X
\end{aligned}$$

の誘導準同型によって[a]

$$\begin{aligned}
i(w) &:= \Bigl((i_U)_q(w),\, -(i_V)_q(w) \Bigr), \\
j(u, v) &:= (j_U)_q(u) + (j_V)_q(v)
\end{aligned}$$

と定義される．ただし $w \in H_q(U \cap V)$，$u \in H_q(U)$，$v \in H_q(V)$ である．

---

[a] つまり，$(i_U)_q := \boldsymbol{H_q\bigl(S_\bullet(i_U)\bigr)}\colon H_q(U \cap V) \longrightarrow H_q(U)$ などとした．

位相空間 X, Y，および部分空間 $U, V \subset X$, $U', V' \subset Y$ と，連続写像 $f\colon X \longrightarrow Y$ であって以下の条件を充たすものが与えられたとき，連結準同型は図式 2.7 を可換にする：

- $U^\circ \cup V^\circ = X$ かつ $U'^\circ \cup V'^\circ = Y$
- $f(U) \subset U'$ かつ $f(V) \subset V'$

$$\begin{tikzcd}
H_q(X) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "f_q"] & H_{q+1}(U \cap V) \arrow[d, "f_q"] \\
H_q(Y) \arrow[r, "\partial_*"] & H_{q+1}(U' \cap V')
\end{tikzcd}$$

図 2.7: 連結準同型の自然性

この定理は次の命題から導かれる：

命題 2.6: 特異チェイン複体の切除対

$U, V \subset X$ が定理 2.4 の条件

$$U^\circ \cup V^\circ = X$$

を充たすとき，包含写像 $\iota\colon S_\bullet(U) + S_\bullet(V) \hookrightarrow S_\bullet(X)$ は $\forall q \geq 0$ についてホモロジー群の同型

$$H_q\big(S_\bullet(U) + S_\bullet(V)\big) \xrightarrow{\cong} H_q(X)$$

を誘導する．

証明 [?, 定理 2.4.2] を参照 ■

命題 2.6 を仮定して定理 2.4 を証明する．

証明 系列

$$0 \to S_q(U \cap V) \xrightarrow{i} S_q(U) \oplus S_q(V) \xrightarrow{j} S_q(U) + S_q(V) \to 0$$

は完全である．これのホモロジー完全列をとると

$$\cdots \xrightarrow{i} H_q(U) \oplus H_q(V) \xrightarrow{j} H_q\big(S_\bullet(U) + S_\bullet(V)\big) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(U \cap V) \xrightarrow{i} \cdots$$

が得られる．さらに命題 2.6 を使うことで

$$\cdots \xrightarrow{i} H_q(U) \oplus H_q(V) \xrightarrow{j} H_q(X) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(U \cap V) \xrightarrow{i} \cdots$$

が得られる．

f が誘導するチェイン写像 $f_*\colon S_\bullet(X) \longrightarrow S_\bullet(Y)$ によって

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_q(U\cap V) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"] & S_q(U)\oplus S_q(V) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "f_*"] & S_q(U)+S_q(V) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_q(U'\cap V') \arrow[r, "i_*"] & S_q(U')\oplus S_q(V') \arrow[r, "j_*"] & S_q(U')+S_q(V') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

が成り立つ．ここから連結準同型とホモロジー完全列の自然性を使うことで定理 2.4 の後半も示された． ■

2.4 空間対の特異ホモロジー

位相空間 X とその部分空間 $A \subset X$ の組 $(X,\, A)$ のことを**空間対** (pair) と呼ぶ．包含写像 $i\colon A \hookrightarrow X$ が誘導するチェイン写像 $i_\bullet\colon S_\bullet(A) \longrightarrow S_\bullet(X)$ を用いて，$\forall q \geq 0$ に対して $\mathbb{Z}$ 加群

$$S_q(X,\, A) := \frac{S_q(X)}{\mathrm{Im}\bigl(i_q\colon S_q(A) \longrightarrow S_q(X)\bigr)} = \mathrm{Coker}\bigl(i_q\colon S_q(A) \longrightarrow S_q(X)\bigr)$$

を考える．剰余類への標準的射影を

$$p_q\colon S_q(X) \longrightarrow S_q(X,\, A),\; u \longmapsto u + \mathrm{Im}\, i_q$$

と書く．

補題 2.7:

- 境界写像 $\partial_q\colon S_q(X) \longrightarrow S_{q-1}(X)$ は well-defined な準同型写像

$$\overline{\partial}_q\colon S_q(X,\, A) \longrightarrow S_{q-1}(X,\, A),\; u + \mathrm{Im}\, i_q \longmapsto \partial_q u + \mathrm{Im}\, i_{q-1}$$

  を一意的に誘導する．
- 準同型 $\overline{\partial}_q\colon S_q(X,\, A) \longrightarrow S_{q-1}(X,\, A)$ は

$$\overline{\partial}_{q-1}\overline{\partial}_q = 0$$

  を充たす．

<u>証明</u> $\partial_q\bigl(\mathrm{Im}\, i_q\bigr) \subset \mathrm{Im}\, i_{q-1}$ なので

$$u \in \mathrm{Im}\, i_q \quad\Longrightarrow\quad \partial_q u \in \mathrm{Im}\, i_{q-1} \quad\Longrightarrow\quad (p_{q-1}\circ\partial_q)(u) = 0_{S_{q-1}(X,\, A)}$$

i.e. $\mathrm{Im}\, i_q \subset \mathrm{Ker}(p_{q-1}\circ\partial_q)$ が言える．したがって商加群の普遍性が使えて以下の可換図式が成り立つ：

$$\begin{tikzcd}
S_q(X) \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "p_*"'] & S_{q-1}(X) \arrow[r, "p_{q-1}"] & S_{q-1}(X,\, A) \\
S_q(X,\, A) \arrow[urr, dashed, "\exists!\overline{\partial}_q"'] & &
\end{tikzcd}$$

後半は $\overline{\partial}_{q-1}\overline{\partial}_q(u + \mathrm{Im}\, i_q) = \partial_{q-1}\partial_q u + \mathrm{Im}\, i_{q-2} = 0_{S_{q-2}(X,\, A)}$ より従う． ■

以上の考察から，加群と準同型の族

$$S_\bullet(X,\,A) \coloneqq \left\{S_q(X,\,A),\,\overline{\partial}_q\right\}_{q\ge 0}$$

はチェイン複体を成す．

定義 2.14: 空間対のホモロジー群

チェイン複体 $S_\bullet(X,\,A)$ のホモロジー群を**空間対 $(\boldsymbol{S},\,\boldsymbol{A})$ の第 $\boldsymbol{q}$ のホモロジー群**と呼び，

$$H_q(X,\,A) \coloneqq \frac{\operatorname{Ker}\bigl(\partial_q\colon S_q(X,\,A)\to S_{q-1}(X,\,A)\bigr)}{\operatorname{Im}\bigl(\partial_{q+1}\colon S_{q+1}(X,\,A)\to S_q(X,\,A)\bigr)}$$

と書く．

2.4.1 空間対のホモロジー長完全列

包含準同型 $i_q\colon S_q(A)\longrightarrow S_q(X)$ は単射で，かつ標準的射影 $p_q\colon S_q(X)\longrightarrow S_q(X,\,A)$ は全射だから，系列

$$0\to S_\bullet(A)\xrightarrow{i_\bullet} S_\bullet(X)\xrightarrow{p_\bullet} S_\bullet(X,\,A)\to 0$$

は短完全列を成す．ここに短完全列のホモロジー長完全列を適用して，$\forall q\ge 1$ に連結準同型

$$\partial_\bullet\colon H_q(X,\,A)\longrightarrow H_{q-1}(A)$$

および**空間対 $(\boldsymbol{X},\,\boldsymbol{A})$ のホモロジー長完全列**

$$\begin{aligned}\cdots &\xrightarrow{i_q} H_q(X)\xrightarrow{p_q} H_q(X,\,A)\xrightarrow{\partial_\bullet} H_{q-1}(A)\\ &\xrightarrow{i_{q-1}} H_{q-1}(X)\xrightarrow{p_{q-1}} H_{q-1}(X,\,A)\xrightarrow{\partial_\bullet} H_{q-2}(A)\\ &\xrightarrow{i_{q-2}}\cdots\xrightarrow{i_0} H_0(X)\xrightarrow{p_0} H_0(X,\,A)\to 0\end{aligned}$$

が得られる．

2.4.2 誘導準同型

空間対 $(X,\,A),\,(Y,\,B)$ の間の連続写像とは，連続写像 $f\colon X\longrightarrow Y$ であって $f(A)\subset B$ を充たすもののことを言う．このとき $f_q\bigl(S_q(A)\bigr)\subset S_q(B)$ が成り立つ[*11] ので $\forall q\ge 0$ に対して準同型写像

$$\overline{f}_q\colon S_q(X,\,A)\longrightarrow S_q(Y,\,B),\ u+S_q(A)\longmapsto f_q(u)+S_q(B)$$

[*11] $\forall \sum_l a_l\sigma_l\in S_\bullet(A)$ について

$$f_q\left(\sum_l a_l\sigma_l\right) = f_q\left(i_q\left(\sum_l a_l\sigma_l\right)\right) = \sum_l a_l(f\circ i\circ\sigma_l)$$

だが，$\forall l$ について $\sigma_l\in\operatorname{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^q,\,A)$ なので $\operatorname{Im}\sigma_l\subset A$ であり，従って $\operatorname{Im}(f\circ i\circ\sigma_l) = f(\operatorname{Im}\sigma_l)\subset f(A)\subset B$ が言える．i.e. $f\circ i\circ\sigma_l\in\operatorname{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^q,\,B)$ である．

は well-defined である．故に補題 2.7 で定義した境界写像 $\overline{\partial}_q\colon S_q(X,\,A) \longrightarrow S_{q-1}(X,\,A)$, $\overline{\partial}'_q\colon S_q(Y,\,B) \longrightarrow S_{q-1}(Y,\,B)$ を使って well-defined な準同型

$$\overline{f}_q\colon H_q(X,\,A) \longrightarrow H_q(Y,\,B),\ \bigl(u + S_q(A)\bigr) + \operatorname{Im}\overline{\partial}_{q+1} \longmapsto \bigl(f_q(u) + S_q(B)\bigr) + \operatorname{Im}\overline{\partial}'_{q+1}$$

を定義できる[*12]．これを**誘導準同型**と呼ぶ．

2.4.3　切除同型

定理 2.5: 切除定理

位相空間 X と部分空間 $U,\,A \subset X$ が

$$U \subset X \text{ かつ } \overline{U} \subset A^\circ$$

を充たすとする．
このとき $\forall q \geq 0$ に対して包含写像[a] $i\colon X \setminus U \longrightarrow X$ の誘導準同型は同型である：

$$\overline{i}_q\colon H_q(X \setminus U,\, A \setminus U) \xrightarrow{\cong} H_q(X,\,A)$$

[a] これは空間対 $(X \setminus U,\, A \setminus U)$, $(X,\,A)$ の間の連続写像と見做せるので，前小節の構成を適用できる．

<u>**証明**</u> $B \coloneqq X \setminus U$ とおく．$A \cap B = A \setminus U$ であるから $S_q(A) \cap S_q(B) = S_q(A \cap B) = S_q(A \setminus U)$ が成り立つ．従って

$$S_q(X \setminus U,\, A \setminus U) = S_q(B,\, A \cap B) = \frac{S_q(B)}{S_q(A) \cap S_q(B)}$$

だが，第二同型定理により

$$S_q(X \setminus U,\, A \setminus U) \cong \frac{S_q(A) + S_q(B)}{S_q(A)}$$

がわかる．

ここで仮定より $X \setminus A^\circ \subset X \setminus \overline{U} = (X \setminus U)^\circ = B^\circ$ だから

$$X = A^\circ \cup \bigl(X \setminus A^\circ\bigr) \subset A^\circ \cup B^\circ$$

したがって $X = A^\circ \cup B^\circ$ が成り立つ．よって命題 2.6 が使えて，包含準同型 $\iota_q\colon S_q(A) + S_q(B) \hookrightarrow S_q(X)$ はチェイン・ホモトピー同値写像である．このとき 2 つの短完全列

$$0 \longrightarrow S_\bullet(A) \xrightarrow{i_*} S_\bullet(A) + S_\bullet(B) \xrightarrow{p_*} \frac{S_\bullet(A) + S_\bullet(B)}{S_\bullet(A)} \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow S_\bullet(A) \xrightarrow{i_*} S_\bullet(X) \xrightarrow{p_*} S_\bullet(X,\,A) \longrightarrow 0$$

の間の可換図式

[*12] 記号の濫用だが...

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & S_\bullet(A) & \longrightarrow & S_\bullet(A)+S_\bullet(B) & \longrightarrow & \frac{S_\bullet(A)+S_\bullet(B)}{S_\bullet(A)} & \longrightarrow & 0 \quad \text{(exact)} \\
 & & \Big\downarrow{=} & & \Big\downarrow{\iota_\bullet} & & \Big\downarrow{\bar{i}_\bullet} & & \\
0 & \longrightarrow & S_\bullet(A) & \longrightarrow & S_\bullet(X) & \longrightarrow & S_\bullet(X,\ A) & \longrightarrow & 0 \quad \text{(exact)}
\end{array}
$$

の横 2 列をホモロジー長完全列で繋ぎ 5 項補題を適用すれば，赤色をつけた部分から

$$
H_q\left(\frac{S_q(A)+S_q(B)}{S_q(A)}\right) \cong H_q(X,\ A)
$$

が従う． ■

2.4.4　空間対の Mayer-Vietoris 完全列

定理 2.6: 空間対の Mayer-Vietoris 完全列

空間の 3 対[a] $(X,\, X_1,\, A_1)$, $(X,\, X_2,\, A_2)$ が条件

$$A_1^\circ \cup A_2^\circ = A_1 \cup A_2, \quad X_1^\circ \cup X_2^\circ = X_1 \cup X_2$$

を充たすとする．このとき $\forall q \geq 1$ に対して**連結準同型**

$$\partial_\bullet \colon H_q(X_1 \cup X_2,\, A_1 \cup A_2) \longrightarrow H_q(X_1 \cap X_2,\, A_1 \cap A_2)$$

が存在して，完全列

$$\begin{aligned}
\cdots &\xrightarrow{i} H_q(X_1,\, A_1) \oplus H_q(X_2,\, A_2) \xrightarrow{j} H_q(X_1 \cup X_2,\, A_1 \cup A_2) \\
&\xrightarrow{\partial_\bullet} H_{q-1}(X_1 \cap X_2,\, A_1 \cap A_2) \\
&\xrightarrow{i} H_q(X_1,\, A_1) \oplus H_q(X_2,\, A_2) \xrightarrow{j} H_q(X_1 \cup X_2,\, A_1 \cup A_2) \\
&\xrightarrow{\partial_\bullet} \cdots \\
&\xrightarrow{i} H_0(X_1,\, A_1) \oplus H_0(X_2,\, A_2) \xrightarrow{j} H_0(X_1 \cup X_2,\, A_1 \cup A_2) \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，空間対の包含写像

$$\begin{aligned}
i_1 &\colon (X_1 \cap X_2,\, A_1 \cap A_2) \hookrightarrow (X_1,\, A_1), \\
i_2 &\colon (X_1 \cap X_2,\, A_1 \cap A_2) \hookrightarrow (X_2,\, A_2), \\
j_1 &\colon (X_1,\, A_1) \hookrightarrow (X_1 \cup X_2,\, A_1 \cup A_2), \\
j_2 &\colon (X_2,\, A_2) \hookrightarrow (X_1 \cup X_2,\, A_1 \cup A_2)
\end{aligned}$$

の誘導準同型によって

$$\begin{aligned}
i(w) &:= \Big((i_1)_q(w),\, -(i_2)_q(w) \Big), \\
j(u,\, v) &:= (j_1)_q(u) + (j_2)_q(v)
\end{aligned}$$

と定義する．ただし $w \in H_q(X_1 \cap X_2,\, A_1 \cap A_1)$, $u \in H_q(X_1,\, A_1)$, $v \in H_q(X_2,\, A_2)$ である．これらは自然である．

[a] つまり，$A_i \subset X_i \subset X$

証明 矢印が包含写像からなる可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & S_q(A_1 \cap A_2) & \longrightarrow & S_q(X_1 \cap X_2) & \longrightarrow & S_q(X_1 \cap X_2,\, A_1 \cap A_2) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & S_q(A_1) \oplus S_q(A_2) & \longrightarrow & S_q(X_1) \oplus S_q(X_2) & \longrightarrow & S_q(X_1,\, A_1) \oplus S_q(X_2,\, A_2) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & S_q(A_1) + S_q(A_2) & \longrightarrow & S_q(X_1) + S_q(X_2) & \longrightarrow & \frac{S_q(X_1)+S_q(X_2)}{S_q(A_1)+S_q(A_2)} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

を考える．この図式は横 3 行が全て完全で，縦 3 列のうち左側の 2 列も完全である．従って 9 項補題により右の縦列も完全になる．

こうしてチェイン複体の短完全列

$$
\begin{aligned}
&0 \longrightarrow S_\bullet(X_1 \cap X_2,\, A_1 \cap A_2) \longrightarrow S_\bullet(X_1,\, A_1) \oplus S_\bullet(X_2,\, A_2) \\
&\longrightarrow \frac{S_\bullet(X_1) + S_\bullet(X_2)}{S_\bullet(A_1) + S_\bullet(A_2)} \longrightarrow 0
\end{aligned}
$$

が得られ，ホモロジー長完全列

$$
\begin{aligned}
\cdots &\xrightarrow{i} H_q(X_1,\, A_1) \oplus H_q(X_2,\, A_2) \xrightarrow{j} H_q\left(\frac{S_\bullet(X_1) + S_\bullet(X_2)}{S_\bullet(A_1) + S_\bullet(A_2)}\right) \\
&\xrightarrow{\partial_\bullet} H_{q-1}(X_1 \cap X_2,\, A_1 \cap A_2) \\
&\xrightarrow{i} H_q(X_1,\, A_1) \oplus H_q(X_2,\, A_2) \xrightarrow{j} H_q\left(\frac{S_\bullet(X_1) + S_\bullet(X_2)}{S_\bullet(A_1) + S_\bullet(A_2)}\right) \\
&\xrightarrow{\partial_\bullet} \cdots \\
&\xrightarrow{i} H_0(X_1,\, A_1) \oplus H_0(X_2,\, A_2) \xrightarrow{j} H_0(X_1 \cup X_2,\, A_1 \cup A_2) \longrightarrow 0
\end{aligned}
\tag{2.4.1}
$$

が得られる．ここで，縦の矢印が包含準同型であるようなチェイン複体の短完全列の射

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_\bullet(A_1) + S_\bullet(A_2) \arrow[r] \arrow[d] & S_\bullet(X_1) + S_\bullet(X_2) \arrow[r] \arrow[d] & \frac{S_\bullet(X_1)+S_\bullet(X_2)}{S_\bullet(A_1)+S_\bullet(A_2)} \arrow[r] \arrow[d, red] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_\bullet(A_1 \cup A_2) \arrow[r] & S_\bullet(X_1 \cup X_2) \arrow[r] & S_\bullet(X_1 \cup X_2,\, A_1 \cup A_2) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

が存在する．仮定と命題 2.6 より縦の左 2 列は同型であり，ホモロジー長完全列と 5 項補題から赤色の矢印が同型だとわかる：

$$
H_q\left(\frac{S_\bullet(X_1) + S_\bullet(X_2)}{S_\bullet(A_1) + S_\bullet(A_2)}\right) \cong H_q(X_1 \cup X_2,\, A_1 \cup A_2)
$$

これを式 (2.4.1) に代入することで Mayer-Vietoris 完全列が得られる． ■

2.5　位相多様体への応用

特異ホモロジーの理論の応用として，位相多様体の向き付けを議論する．この節の内容は [?, 第 4 章] および [?, Appendix A] に大きく依存している．

2.5.1　写像度

定義 2.15: 写像度

ある $n \geq 1$ を固定する．$X,\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ が以下の条件を充たすとする：

(deg-1) X は Hausdorff 空間．

(deg-2) $H_n(X) \cong \mathbb{Z}$

(deg-3) $\forall p \in X$ について，空間対 $(X,\, \emptyset)$ から $(X,\, X \setminus \{p\})$ への包含写像[a]

$$j_p \colon (X,\, \emptyset) \longrightarrow (X,\, X \setminus \{p\}),\ x \longmapsto x$$

が誘導する準同型

$$(j_p)_n \colon H_n(X) \longrightarrow H_n(X,\, X \setminus \{p\})$$

は同型．

(deg-2) より $H_n(X)$ の生成元は ± 1 の 2 つである．$X,\, Y$ についてそれぞれどちらか一方を選び，それを $[X],\, [Y]$ とおく．

[a] 集合論の約束より空集合の像は空集合だから $j_p(\emptyset) = \emptyset \subset X \setminus \{p\}$.

連続写像 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\, Y)$ の**写像度** (mapping degree) とは，誘導準同型 $f_n \colon H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$ による生成元の像

$$f_n([X]) = d[Y]$$

によって一意に定まる $d \in \mathbb{Z}$ のこと．記号として $\boldsymbol{\deg(f)} \coloneqq d$ と書く．

補題 2.8:

条件 **(deg-1)-(deg-3)** を充たす位相空間はコンパクト空間である．

__証明__ 条件 **(deg-1)-(deg-3)** を充たす位相空間 X と，$H_n(X)$ の生成元 $[X] \in \{\pm 1\}$ を与える．$[X]$ の任意の代表元 $\sum_{i=1}^m a_i\sigma_i$ を 1 つとる．Δ^n はコンパクトで特異 n 単体の元 σ_i は連続写像だから $\bigcup_{i=1}^m \sigma_i(\Delta^n)$ もコンパクトである．

もし $\exists p \in X \setminus (\bigcup_{i=1}^m \sigma_i(\Delta^n))$ ならば，$1 \leq \forall i \leq m$，$\mathrm{Im}\, \sigma_i \subset X \setminus \{p\}$ なので $[X] = [\sum_{i=1}^m a_i\sigma_i] \in H_n(X \setminus \{p\}) = \mathrm{Ker}(j_p)_n$ が成り立つ．ところがこのとき $(j_p)_n([X]) = 0 \notin \{\pm 1\}$ が $H_n(X,\, X \setminus \{p\}) \cong \mathbb{Z}$ の生成元ということになり矛盾．従って $X = \bigcup_{i=1}^m \sigma_i(\Delta^n)$ であり，X はコンパクトである． ■

命題 2.7:

条件 **(deg-1)-(deg-3)** を充たす $X,\, Y,\, Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ をとり，それぞれの生成元 $[X],\, [Y],\, [Z]$ を与える．このとき連続写像 $f,\, f_1,\, f_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\, Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Y,\, Z)$ について以下が成り立つ：

(1) $\deg(\mathrm{id}_X) = 1$

(2) $\deg(g \circ f) = \deg(g)\deg(f)$

(3) $f_1 \simeq f_2 \quad \Longrightarrow \quad \deg(f_1) = \deg(f_2)$

(4) f がホモトピー同値写像 $\quad \Longrightarrow \quad \deg(f) = \pm 1$

(5) $\deg(f) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad f$ は全射

__証明__ (1) $S_\bullet$ および $H_\bullet$ が関手なので

$$(\mathrm{id}_X)_n = H_n\big(S_\bullet(\mathrm{id}_X)\big) = 1_{H_n(X)}$$

が成り立つ．よって $(\mathrm{id}_X)_n([X]) = [X]$.

(2) $S_\bullet$ および $H_\bullet$ が関手なので

$$(g \circ f)_n = H_n\big(S_\bullet(g \circ f)\big) = H_n\big(S_\bullet(g)\big) \circ H_n\big(S_\bullet(f)\big) = g_n \circ f_n$$

が成り立つ．よって $(g \circ f)_n([X]) = g_n\big(f_n([X])\big) = \deg(g)\deg(f)[Z]$．

(3) H_n のホモトピー不変性より

$$f_{1n} = H_n\big(S_\bullet(f_1)\big) = H_n\big(S_\bullet(f_2)\big) = f_{2n}$$

が成り立つ．

(4) $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Y, X)$ をホモトピー逆写像とする．すると (1)-(3) より

$$1 = \deg(\mathrm{id}_X) = \deg(g \circ f) = \deg(g)\deg(f)$$

かつ定義から $\deg(f), \deg(g) \in \mathbb{Z}$ なので $\deg(f) = \pm 1$．

(5) f が全射でないとする．このとき $p \in Y \setminus \mathrm{Im}\, f$ が存在する．従って包含写像 $i_p \colon Y \setminus \{p\} \hookrightarrow Y$ とおくと $f = i_p \circ f$ だから

$$\deg(f)[Y] = f_n([X]) = (i_p)_n \circ f_n([X])$$

となる．ところが完全列

$$H_n(Y \setminus \{p\}) \xrightarrow{(i_p)_n} H_n(Y) \xrightarrow{(j_p)_n} H_n(Y, Y \setminus \{p\})$$

があるので $(j_p)_n\big(\deg(f)[Y]\big) = (j_p)_n \circ (i_p)_n\big(f_n([X])\big) = 0$ となる．条件 **(deg-3)** より $(j_p)_n$ は同型だから $\deg(f) = 0$ が言えた．

■

補題 2.9: 一点を除く切除同型

X をHausdorff 空間とする．点 $p \in X$ および p の開近傍 $p \in U \subset X$ を与える．
このとき，包含写像 $\iota_{U,p} \colon (U, U \setminus \{p\}) \hookrightarrow (X, X \setminus \{p\})$ は同型

$$(\iota_{U,p})_\bullet \colon H_\bullet(U, U \setminus \{p\}) \xrightarrow[\text{exc}]{\cong} H_\bullet(X, X \setminus \{p\})$$

を誘導する．

証明 $X \setminus U$ は閉集合だから $\overline{X \setminus U} = X \setminus U \subset X \setminus \{p\}$ が成り立つ．ところで 1 点集合 $\{p\} \subset X$ は X のコンパクト集合だが，仮定より X は Hausdorff 空間なので，補題??-(1) から閉集合でもある．従って $X \setminus \{p\}$ は開集合となり $(X \setminus \{p\})^\circ = X \setminus \{p\}$ が成り立つ．以上の議論より $X \setminus U \subset X$ かつ $\overline{X \setminus U} \subset (X \setminus \{p\})^\circ$ が成り立つので切除定理が使えて証明が終わる． ■

定義 2.16: 向き・局所的写像度

条件 **(deg-1)-(deg-3)** を充たす $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ と，それぞれの生成元 $[X] \in H_n(X)$, $[Y] \in H_n(Y)$ を与える．

- 点 $p \in X$ における X の**向き** (orientation) とは，

$$[\boldsymbol{X}]_{\boldsymbol{p}} \coloneqq (j_p)_n([X]) \in H_n(X,\, X \setminus \{p\})$$

のこと[a]．
- 連続写像 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\, Y)$ がある点 $p \in X$ において以下の条件を充たすとする：

(局所同相的)

点 p の開近傍 $p \in U \subset X$ であって，制限 $f|_U : U \longrightarrow f(U)$ が同相写像となるようなものが存在する．

点 $p \in X$ における X の**局所的写像度** (local mapping degree) とは，

$$(\iota_{f(U),\, f(p)})_n \circ \overline{f}_n \circ (\iota_{U,\, p})_n^{-1}([X]_p) = \deg_p(f)[Y]_{f(p)} \in H_n(Y,\, Y \setminus \{f(p)\})$$

により一意に定まる $\boldsymbol{\deg_p(f)} \in \{\pm 1\}$ のこと．ただし補題 2.9 の記号を使った．

[a] **(deg-3)** より $[X]_p$ は $H_n(X,\, X \setminus \{p\})$ の生成元である．

命題 2.8:

条件 **(deg-1)-(deg-3)** を充たす $X,\, Y,\, Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ をとり，それぞれの生成元 $[X],\, [Y],\, [Z]$ を与える．連続写像 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\, Y),\, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Y,\, Z)$ はそれぞれ点 $p,\, f(p)$ において局所同相的であるとする．

このとき $g \circ f$ は p において局所同相的で，

$$\deg_p(g \circ f) = \deg_{f(p)}(g) \deg_p(f)$$

が成り立つ．

証明 仮定より開近傍 $p \in U \subset X,\ f(p) \in V \subset Y$ が存在して $f|_U : U \longrightarrow f(U),\ g|_V : V \longrightarrow g(V)$ が同相写像となる．このとき $U' \coloneqq f^{-1}\bigl(f(U) \cap V\bigr),\, V' \coloneqq f(U) \cap V,\, W' \coloneqq g\bigl(f(U) \cap V\bigr)$ とおくとこれらはそれぞれ $p,\, f(p),\, g\bigl(f(p)\bigr)$ の開近傍で，かつ制限 $g \circ f|_{U'} : U' \longrightarrow W'$ は同相写像である．i.e. $g \circ f$ は局所同相的である．$S_\bullet$ および H_n の関手性から $(g \circ f)_n = g_n \circ f_n$ が成り立つので

$$\begin{aligned}
&(\iota_{W',\, g(f(p))})_n \circ (g \circ f)_n \circ (\iota_{U',\, p})_n^{-1}([X]_p) \\
&= (\iota_{W',\, g(f(p))})_n \circ g_n \circ (\iota_{V',\, f(p)})^{-1} \circ (\iota_{V',\, f(p)}) \circ f_n \circ (\iota_{U',\, p})_n^{-1}([X]_p) \\
&= (\iota_{W',\, g(f(p))})_n \circ g_n \circ (\iota_{V',\, f(p)})^{-1}\bigl(\deg_p(f)[Y]_{f(p)}\bigr) \\
&= \deg_{f(p)}(g) \deg_p(f)[Z]_{g(f(p))}
\end{aligned}$$

が言える． ■

定理 2.7: 写像度の局所化

条件 **(deg-1)-(deg-3)** を充たす $X,\,Y,\,Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ をとり，それぞれの生成元 $[X],\,[Y],\,[Z]$ と連続写像 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\,(X,\,Y),\,g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\,(Y,\,Z)$ を与える．ある点 $q \in Y$ が存在して，$\forall p \in f^{-1}(\{q\})$ について f が局所同相的であるとする．
このとき $f^{-1}(\{q\})$ は有限集合であり，

$$\deg(f) = \sum_{p \in f^{-1}(\{q\})} \deg_p(f)$$

が成り立つ．

証明 条件 **(deg-1)** より $X,\,Y$ は Hausdorff 空間なので，補題**??**-(1) よりコンパクト集合 $\{q\} \subset Y$ は Y の閉集合である．したがって f の連続性から $f^{-1}(\{q\})$ は X の閉集合である．さらに補題 2.8 より X はコンパクト Hausdorff 空間なので，補題**??**-(2) より閉部分集合 $f^{-1}(\{q\}) \subset X$ はコンパクトである．

ところで，仮定より $\forall p \in f^{-1}(\{q\})$ に対して p の開近傍 $p \in U_p \subset X$ が存在して制限 $f|_{U_p} \colon U_p \longrightarrow f(U_p)$ が同相写像になる．i.e. $f|_{U_p}$ は全単射なので $U_p \cap f^{-1}(\{q\}) = (f|_{U_p})^{-1}(\{q\}) = \{p\}$ が成り立つ．このとき $f^{-1}(\{q\}) \subset \bigcup_{p \in f^{-1}\{q\}} U_p$ だが $f^{-1}(\{q\})$ はコンパクトなので $\exists p_1,\,\dots,\,p_m \in f^{-1}(\{q\}),\ f^{-1}(\{q\}) \subset \bigcup_{i=1}^m U_{p_i}$ が言える．よって

$$f^{-1}(\{q\}) = \left(\bigcup_{i=1}^m U_p\right) \cap f^{-1}(\{q\}) = \bigcup_{i=1}^m (U_{p_i} \cap f^{-1}(\{q\})) = \bigcup_{i=1}^m \{p_i\} = \{p_1,\,\dots,\,p_m\}$$

であり，$f^{-1}(\{q\})$ が有限集合であることが示された．

後半の証明をする．上述の記号を $U_i \coloneqq U_{p_i}\ (i = 1,\,\dots,\,m)$ と再定義する．また，q の開近傍 $q \in V \subset Y$ を $f(U_i) \subset V\ (1 \le \forall i \le m)$ を充たすようにとる．X は Hausdorff 空間なので $i \neq j \implies U_i \cap U_j = \emptyset$ を充たすようにできる．このとき $U \coloneqq \bigcup_{i=1}^m U_i$ は非交和になるため，

$$\begin{aligned}
S_\bullet(U,\,U \setminus \{p_1,\,\dots,\,p_m\}) &= \frac{S_\bullet\left(\coprod_{i=1}^m U_i\right)}{S_\bullet\left(\coprod_{i=1}^m (U_i \setminus \{p_i\})\right)} \\
&= \frac{\bigoplus_{i=1}^m S_\bullet(U_i)}{\bigoplus_{i=1}^m S_\bullet(U_i \setminus \{p_i\})} \\
&\cong \bigoplus_{i=1}^m \frac{S_\bullet(U_i)}{S_\bullet(U_i \setminus \{p_i\})} \\
&= \bigoplus_{i=1}^m S_\bullet(U_i,\,U_i \setminus \{p_i\})
\end{aligned}$$

が成り立ち[*13]，これの第 n ホモロジーをとることで

$$H_n\big(U,\, U\setminus\{p_1,\,\dots,\,p_m\}\big)\cong\bigoplus_{i=1}^{m}H_n(U_i,\,U_i\setminus\{p_i\})$$

がわかる．補題 2.9 より

$$(\iota_{U_i,\,p_i})\colon H_n(U_i,\,U_i\setminus\{p_i\})\xrightarrow{\cong}H_n(X,\,X\setminus\{p_i\})\cong\mathbb{Z} \tag{2.5.1}$$

だから $H_n\big(U,\,U\setminus\{p_1,\,\dots,\,p_m\}\big)\cong\mathbb{Z}^{\oplus m}$ である．また，U は Hausdorff 空間 X の開集合なので $X\setminus U=\overline{X\setminus U}\subset X\setminus\{p_1,\,\dots,\,p_m\}=\big(X\setminus\{p_1,\,\dots,\,p_m\}\big)^{\circ}$ が成り立つ．よって切除定理を使うことができて

$$H_n\big(U,\,U\setminus\{p_1,\,\dots,\,p_m\}\big)\cong H_n\big(X,\,X\setminus\{p_1,\,\dots,\,p_m\}\big)\cong\mathbb{Z}^{\oplus m} \tag{2.5.2}$$

が成り立つ．

ところで，2 つの包含写像

$$\begin{aligned}k_i\colon U_i\hookrightarrow X,\ x\longmapsto x,\\ \pi_i\colon X\hookrightarrow X,\ x\longmapsto x\end{aligned}$$

はそれぞれ $k_i(U_i\setminus\{p_i\})\subset X\setminus\{p_1,\,\dots,\,p_m\}$ および $\pi_i(X\setminus\{p_1,\,\dots,\,p_m\})\subset X\setminus\{p_i\}$ を充たす．従って誘導準同型

$$\begin{aligned}(\overline{k_i})_n\colon H_n(U_i,\,U_i\setminus\{p_i\})&\longrightarrow H_n(X,\,X\setminus\{p_1,\,\dots,\,p_m\})\cong\mathbb{Z}^{\oplus m},\\ u&\longmapsto\big(0,\,\dots,\,\underbrace{(\iota_{U_i,\,p_i})_n(u)}_{i},\,\dots,\,0\big)\end{aligned} \tag{2.5.3}$$

および

$$\begin{aligned}(\overline{\pi_i})_n\colon H_n(X,\,X\setminus\{p_1,\,\dots,\,p_m\})\cong\mathbb{Z}^{\oplus m}&\longrightarrow H_n(X,\,X\setminus\{p_i\}),\\ (u_1,\,\dots,\,u_m)&\longmapsto u_i\end{aligned} \tag{2.5.4}$$

を考えることができる．さらに包含写像

$$j\colon(X,\,\emptyset)\hookrightarrow\big(X,\,X\setminus P\big),\ x\longmapsto x$$

の誘導準同型

$$\overline{j}_n\colon H_n(X)\longrightarrow H_n(X,\,X\setminus P) \tag{2.5.5}$$

を考えることができる．(2.5.1), (2.5.2), (2.5.3), (2.5.4), (2.5.5) を併せると以下の可換図式[*14]が成り立つ[*15]：

[*13] Δ^q は弧状連結なので連続写像によって U の弧状連結成分に移される．故に $\forall q\geq 0$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^q,\,\coprod_{i=1}^{m}U_i)=\coprod_{i=1}^{m}\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^q,\,U_i)$ が成り立ち，$S_q(\coprod_{i=1}^{m}U_i)=\mathbb{Z}^{\bigoplus\coprod_{i=1}^{m}\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^q,\,U_i)}=\bigoplus_{i=1}^{m}\mathbb{Z}^{\bigoplus\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^q,\,U_i)}=\bigoplus_{i=1}^{m}S_q(U_i)$ がわかる．同様の議論で $S_q\big(\coprod_{i=1}^{m}(U_i\setminus\{p_i\})\big)=\bigoplus_{i=1}^{m}S_q(U_i\setminus\{p_i\})$ も従う．3 行目の同型は，全射準同型 $\psi\colon\bigoplus_{i=1}^{m}S_\bullet(U_i)\longrightarrow\bigoplus_{i=1}^{m}\frac{S_\bullet(U_i)}{S_\bullet(U_i\setminus\{p_i\})}$, $(u_1,\,\dots,\,u_m)\longmapsto\big(u_1+S_\bullet(U_1\setminus\{p_1\}),\,\dots,\,u_m+S_\bullet(U_m\setminus\{p_m\})\big)$ について $\mathrm{Ker}\,\psi=\bigoplus_{i=1}^{m}S_\bullet(U_i\setminus\{p_i\})$ なので準同型定理を適用すれば従う．

[*14] 連続写像の段階で可換なので，関手 $S_\bullet$, H_n を作用させても可換である．

[*15] $(\iota_{W,\,w})_n$ や $(j_x)_n$ の矢印は同型である．

$$
\begin{tikzcd}
 & H_n(X) \arrow[r, "f_n"] \arrow[dl, "(j_{p_i})_n"'] \arrow[d, "\overline{j}_n"'] & H_n(Y) \arrow[d, "(j_q)_n"] \\
H_n(X,\, X \setminus \{p_i\}) & H_n(X,\, X \setminus P) \arrow[l, "(\overline{\pi_i})_n"] \arrow[r, "\overline{f}_n"] & H_n(Y,\, Y \setminus \{q\}) \\
 & H_n(U_i,\, U_i \setminus \{p_i\}) \arrow[ul, "(\iota_{U_i,\, p_i})_n"] \arrow[u, "(\overline{k_i})_n"] \arrow[r, "\overline{f}_n"] & H_n(V,\, V \setminus \{q\}) \arrow[u, "(\iota_{V,\, q})_n"']
\end{tikzcd}
$$

図式中の $H_n(X)$ から出発して $[X] \in H_n(X)$ の行き先を考える．写像度の定義と局所的写像度の定義より

$$(j_q)_n \circ f_n([X]) = \deg(f)[Y]_{f(q)}$$

である．一方，左上の三角形の可換性から

$$[X]_{p_i} = (\overline{\pi_i})_n \circ \overline{j}_n([X]) \quad (1 \le \forall i \le m)$$

が得られる．故に (2.5.3), (2.5.4) より

$$\overline{j}_n([X]) = \left([X]_{p_1},\, [X]_{p_2},\, \dots,\, [X]_{p_m}\right) = \sum_{i=1}^{m} (\overline{k_i})_n \circ (\iota_{U_i,\, p_i})_n^{-1}([X]_{p_i})$$

が言える．さらに右下の四角形の可換性から

$$
\begin{aligned}
\overline{f}_n \circ (\overline{k_i})_n \circ (\iota_{U_i,\, p_I})_n^{-1}([X]_{p_i}) &= (\iota_{V,\, q})_n \circ \overline{f}_n \circ (\iota_{U_i,\, p_i})_n^{-1}([X]_{p_i}) \\
&= \deg_{p_i}(f)[Y]_{f(p_i)} \\
&= \deg_{p_i}(f)[Y]_q
\end{aligned}
$$

が分かる．従って右上の四角形の可換性から

$$
\begin{aligned}
& (j_q)_n \circ f_n([X]) = \overline{f}_n \circ \overline{j}_n([X]) \\
\iff \quad & \deg(f)[Y]_{f(q)} = \sum_{i=1}^{m} \overline{f}_n \circ (\overline{k_i})_n \circ (\iota_{U_i,\, p_I})_n^{-1}([X]_{p_i}) = \left(\sum_{i=1}^{m} \deg_{p_i}(f) \right) [Y]_q
\end{aligned}
$$

が成り立つ．$[Y]_q$ は $H_n(Y,\, Y \setminus \{q\})$ の生成元であり，示された． ■

定理 2.8: Jacobi 行列との関係

$U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とし，C^∞ 微分同相写像 $f \colon U_1 \longrightarrow U_2$ を与える．
このとき $\forall x \in U_1$ に対して

$$\deg_x f = \frac{\det(Jf)_x}{|\det(Jf)_x|}$$

が成り立つ．ただし $(Jf)_x$ は f の点 x における Jacobi 行列である．

2.5.2 位相多様体の境界と向き付け

まず，位相多様体の境界と向き付けについて述べる．

$\mathbb{R}^n$ の**閉じた上半空間** (closed upper half space) およびその境界を $n > 0$ のとき

$$\mathbb{H}^n := \left\{ (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x^n \geq 0 \right\}$$
$$\partial\mathbb{H}^n := \left\{ (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x^n = 0 \right\}$$

と定義し，$n = 0$ のとき

$$\mathbb{H}^0 := \{0\}$$
$$\partial\mathbb{H}^0 := \emptyset$$

と定義する．

定義 2.17: 境界付き位相多様体

- Hausdorff 空間 $(M, \mathscr{O})$ は，その上の任意の点が $\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{H}^n$ と同相になるような開近傍を持つとき，n 次元**境界付き位相多様体** (topological manifold with boundary) と呼ばれる．
- 境界付き位相多様体 $(M, \mathscr{O})$ の開集合 $U \in \mathscr{O}$ であって，$\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{H}^n$ の開集合 V との同相写像 $\varphi\colon U \to V$ が存在するとき，組 (U, φ) を M の**チャート** (chart) と呼ぶ．

必要ならば，境界付き位相多様体 M のチャート (U, φ) のうち，$\varphi(U)$ が $\mathbb{R}^n$ と同相なものを**内部チャート** (interior chart)，$\varphi(U)$ が $\mathbb{H}^n$ の開集合と同相で，かつ $\varphi(U) \cap \partial\mathbb{H}^n \neq \emptyset$ を充たすものを**境界チャート** (boundary chart) と呼ぶことにしよう．

定義 2.18: 内部・境界

$(M, \mathscr{O})$ を境界付き位相多様体とし，$\forall p \in M$ を一つとる．

(1) p が M の**内点** (interior point) であるとは，ある内部チャート (U, φ) が存在して $p \in U$ となること．

(2) p が M の**境界点** (boundary point) であるとは，ある境界チャート (U, φ) が存在して $\varphi(p) \in \partial\mathbb{H}^n$ となること．

M の内点全体の集合を**境界付き位相多様体 M の内部** (interior) と呼び，$\mathbf{Int}\, M$ と書く．M の境界点全体の集合を**境界付き位相多様体 M の境界** (boundary) と呼び，$\boldsymbol{\partial M}$ と書く．

定義から明らかなように，$\forall p \in M$ は内点または境界点である．というのも，$p \in M$ が境界点でないならば，p は内点であるか，または境界チャート (U, φ) に対して $p \in U$ かつ $\varphi(p) \notin \partial\mathbb{H}^n$ を充たす．後者の場合 φ の $U \cap \varphi^{-1}\bigl(\mathrm{Int}\ \mathbb{H}^n\bigr)$ への制限は内部チャートになり，かつ $p \in U \cap \varphi^{-1}\bigl(\mathrm{Int}\ \mathbb{H}^n\bigr)$ を充たすので，p は M の内点なのである．

しかしながら，あるチャートに関しては内点だが，別のチャートに関しては境界点であるような点 $p \in M$ が存在しないことは非自明である．この問題はホモロジーによって解決できる．

命題 2.9: ホモロジーによる位相多様体の境界の特徴付け

n 次元境界付き位相多様体 M に対して以下が成り立つ：

$$\begin{aligned}\operatorname{Int} M &= \{\, p \in M \mid H_n(M,\, M \setminus \{p\}) = \mathbb{Z} \,\} \\ \partial M &= \{\, p \in M \mid H_n(M,\, M \setminus \{p\}) = 0 \,\}\end{aligned}$$

証明 任意の点 $p \in M$ と p を含むチャート $(\varphi,\, U)$ をとる．補題 2.9 より切除同型

$$H_n(M,\, M \setminus \{p\}) \underset{\text{exc}}{\cong} H_n(U,\, U \setminus \{p\}) \cong H_n(\varphi(U),\, \varphi(U) \setminus \{\varphi(p)\}) \tag{2.5.6}$$

が成り立つ．

$p \in \operatorname{Int} M$ ならば，式 (2.5.6) において $(U,\, \varphi)$ を内部チャートとして

$$H_n(M,\, M \setminus \{p\}) \underset{\text{exc}}{\cong} H_n(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^n \setminus \{\varphi(p)\}) = \mathbb{Z}$$

が成り立つ．逆に $H_n(M,\, M \setminus \{p\}) = \mathbb{Z} \cong H_n(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^n \setminus \{\varphi(p)\})$ ならば p を含む内部チャートが存在する．従って $p \in \operatorname{Int} M \iff H_n(M,\, M \setminus \{p\}) = \mathbb{Z}$ である．

$p \in \partial M$ ならば，式 (2.5.6) において $(U,\, \varphi)$ を境界チャートとして

$$H_n(M,\, M \setminus \{p\}) \underset{\text{exc}}{\cong} H_n(\mathbb{H}^n,\, \mathbb{H}^n \setminus \{\varphi(p)\}) = 0$$

が成り立つ．逆に $H_n(M,\, M \setminus \{p\}) = 0 \cong H_n(\mathbb{H}^n,\, \mathbb{H}^n \setminus \{\varphi(p)\})$ ならば p を含む境界チャートが存在する．従って $p \in \partial M \iff H_n(M,\, M \setminus \{p\}) = 0$ である． ■

系 2.9: 多様体の境界の性質

境界付き位相多様体 M に対して以下が成り立つ：

(1) $M = \operatorname{Int} M \sqcup \partial M$

(2) $\partial(\partial M) = \emptyset$

証明 (1) 命題 2.9 と $\mathbb{Z} \ncong 0$ より従う．

(2) $\forall p \in \partial M$ に対して，ある境界チャート $(U,\, \varphi)$ が存在して $\varphi(p) \in \partial\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ を充たす．このとき $\varphi(U) \cap \partial\mathbb{H}^n = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$ は $\mathbb{R}^{n-1}$ における $\varphi(p)$ の開近傍であり，局所座標の制限 $\varphi|_{\varphi^{-1}\left(\varphi(U) \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})\right)}$ は同相写像である．従って

$$\begin{aligned}H_{n-1}(\partial M,\, \partial M \setminus \{p\}) &\underset{\text{exc}}{\cong} H_{n-1}\bigl(\varphi(U) \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}),\, \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \setminus \{\varphi(p)\}\bigr) \\ &\cong H_{n-1}\bigl(\mathbb{H}^n \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}),\, \mathbb{H}^n \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \setminus \{\varphi(p)\}\bigr) \\ &= H_{n-1}(\mathbb{R}^{n-1},\, \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{\varphi(p)\}) \\ &\cong \mathbb{Z}\end{aligned}$$

であり，命題 2.9 から $\partial M = \operatorname{Int}(\partial M)$ が従う．(1) よりこのことは $\partial(\partial M) = \emptyset$ を意味する． ■

! 位相空間 X の部分空間 $A \subset X$ の境界を $\operatorname{bd}(A)$ と書くと，必ずしも $\operatorname{bd}\bigl(\operatorname{bd}(A)\bigr) = \emptyset$ は成り立たない．このことから，位相多様体の境界と部分空間の境界は別物であるとわかる．

次に，位相多様体の向きを定義する．

定義 2.19: 位相多様体の向き付け

境界付き位相多様体 M とそのアトラス $\big\{(U_\lambda,\, \varphi_\lambda)\big\}_{\lambda\in\Lambda}$ を与える．

- M が**向き付けられている** (oriented) とは，$\forall\alpha,\, \beta \in \Lambda$ および $\forall p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap \mathbf{Int}\, M$ に対して，座標変換 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ の p における局所的写像度が

$$\deg_{\varphi_\alpha(p)}(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) = +1$$

を充たすこと．

- チャート $(U,\, \varphi)$ が**正の** (positive)（resp. **負の** (negative)）チャートであるとは，$\forall\lambda \in \Lambda$ および $\forall p \in U \cap U_\alpha \cap \mathbf{Int}\, M$ に対して $\deg_{\varphi_\alpha(p)}(\varphi_\beta \circ \varphi^{-1}) = +1$（resp. -1）が成り立つこと[a]

---

[a] $\forall p \in U$ に対してある $\lambda \in \Lambda$ が存在して $p \in U_\lambda$ かつ $\deg_{\varphi(p)}(\varphi_\lambda \circ \varphi^{-1}) = +1$（resp. -1）が成り立つことと同値．

基準となる $H_n(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$ の生成元を決めよう．まず $H_n(\Delta^n,\, \partial\Delta^n)$ の生成元を求める．

補題 2.10:

恒等写像のホモロジー類 $[\mathrm{id}_{\Delta^n}]$ は $H_n(\Delta^n,\, \partial\Delta^n) \cong \mathbb{Z}$ の生成元である．

<u>**証明**</u>　[?, 定理 4.1.10] を参照

■

次に $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ の $\mathbb{R}^n$ への埋め込み

$$\iota_n \colon \Delta^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n,\, (x^0,\, x^1,\, \dots,\, x^n) \longmapsto (x^1 - x^0,\, x^2 - x^0,\, \dots,\, x^n - x^0)$$

を考える．点

$$p_0 \coloneqq \frac{1}{n+1}\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \Delta^n$$

は $\iota_n(p_0) = 0 \in \mathbb{R}^n$ を充たすから，切除同型

$$(\iota_n)_n \colon H_n(\Delta^n,\, \Delta^n \setminus \{p_0\}) \xrightarrow{\cong} H_n(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

がある．さらに同型 $H_n(\Delta^n,\, \Delta^n \setminus \{p_0\}) \cong H_n(\Delta^n,\, \partial\Delta^n)$ を合成することで

$$\boldsymbol{\mu_0} \coloneqq (\iota_n)_n([\mathrm{id}_{\Delta^n}]) = [\iota_n] \in H_n(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

が生成元となる．

補題 2.11: 生成元の基点の平行移動

$\forall x \in \mathbb{R}^n$ に関する同型写像

$$H_n(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \xrightarrow{\cong} H_n(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^n \setminus \{x\})$$

が成り立つ．

証明 $x \in B_r(0)$ となるように正数 $r > 0$ をとる．$\mathbb{R}^n$ は Hausdorff 空間なのでコンパクト部分空間 $\{x\} \subset \mathbb{R}^n$ は閉集合であり，$\overline{\big(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_r(0)\big)} = \mathbb{R}^n \setminus B_r(0) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{x\} = (\mathbb{R}^n \setminus \{x\})^\circ$ が成り立つ．故に切除定理が使えて，包含写像 $\big(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_r(0)\big) \hookrightarrow \big(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}\big)$ が誘導する準同型は同型になる．従って図式

$$H_n(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \xleftarrow[\text{exc}]{\cong} H_n\big(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_r(0)\big) \xrightarrow[\text{exc}]{\cong} H_n(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^n \setminus \{x\})$$

から所望の同型が得られる． ■

補題 2.11 の同型による μ_0 の像を $\boldsymbol{\mu_x}$ と書くことにする．

∂M に自然に向きが定まることを示す．$\widehat{D}^n := D^{n-1} \times [0,\, 1]$ とおく．$\widehat{D}^n$ は n 次元境界付き位相多様体で，$\partial \widehat{D}^n = D^{n-1} \times \{0,\, 1\} \cup S^{n-2} \times [0,\, 1]$ である．

補題 2.12:

$n \geq 2$ とし，$p \in (\widehat{D}^n)^\circ,\, q \in (D^{n-1})^\circ$ を任意にとる．
連結準同型 $\partial_\bullet \colon H_n(\widehat{D}^n,\, \widehat{D}^n \setminus \{p\}) \longrightarrow H_{n-1}(\widehat{D}^n)$ を用いた図式

$$\begin{aligned}
H_n(\widehat{D}^n,\, \widehat{D}^n \setminus \{p\}) &\xrightarrow{\partial_\bullet} H_{n-1}(\widehat{D}^n \setminus \{p\}) \\
&\xrightarrow{\cong} H_{n-1}(\partial \widehat{D}^n) \\
&\xrightarrow[\text{exc}]{\cong} H_{n-1}\big(\partial \widehat{D}^n,\, \partial \widehat{D}^n \setminus \{(q,\, 0)\}\big) \cong H_{n-1}(D^{n-1},\, D^{n-1} \setminus \{q\})
\end{aligned}$$

がある．特に，生成元 $\mu_p \in H_n(\widehat{D}^n,\, \widehat{D}^n \setminus \{p\})$ は $(-1)^n \mu_q \in H_{n-1}(D^{n-1},\, D^{n-1} \setminus \{q\})$ に写像される．

証明 p と $\partial \widehat{D}^n$ を結ぶ線分を用いてホモトピーを構成することで，部分空間 $\partial \widehat{D}^n \subset \widehat{D}^n \setminus \{p\}$ はレトラクション $r \colon \widehat{D}^n \setminus \{p\} \longrightarrow \partial \widehat{D}^n$ によって $\widehat{D}^n \setminus \{p\}$ の変位レトラクトになる．従って r の誘導準同型は同型 $H_{n-1}(\widehat{D}^n \setminus \{p\}) \xrightarrow{\cong} H_{n-1}(\partial \widehat{D}^n)$ を与える[*16]．

$p = \big(0,\, \ldots,\, 0,\, \frac{1}{n+1}\big),\, q = 0$ として良い．連続写像

$$h_n \colon \Delta^n \longrightarrow \widehat{D}^n,\; (x^0,\, \ldots,\, x^{n-1},\, x^n) \longmapsto (x^1 - x^0,\, \ldots,\, x^{n-1} - x^0,\, x^n)$$

を考えると，連続写像

$$H \colon \Delta^n \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n,\; \big((x^0,\, \ldots,\, x^{n-1},\, x^n),\, t\big) \longmapsto (x^1 - x^0,\, \ldots,\, x^{n-1} - x^0,\, x^n - tx^0)$$

[*16] 位相空間 X の部分空間 $A \subset X$ を与える．連続写像 $r \colon X \longrightarrow A$ がレトラクションであるとは，包含写像を $i \colon A \hookrightarrow X$ と書いたときに $r \circ i = \mathrm{id}_A$ が成り立つことを言う．$A \subset X$ が X の変位レトラクトであるとは，あるレトラクション $r \colon X \longrightarrow A$ が存在して $i \circ r$ と r がホモトピックになることを言う．このとき A と X は同じホモトピー型であり，レトラクション r と包含写像 i がホモトピー同値写像となる．

が h_n と ι_n を繋ぐホモトピーになる．i.e. $[h_n] = [\iota_n] = \mu_p \in H_n(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^n \setminus \{p\}) \underset{\text{exc}}{\cong} H_n(\widehat{D}^n,\, \widehat{D}^n \setminus \{p\})$ は生成元である．このとき

$$\partial_\bullet(\mu_p) = \partial_\bullet([h_n]) = \left[\sum_{i=0}^{n} (-1)^i h_n \circ f_i^{n-1}\right]$$

だが，$i < n$ のとき $r \circ h_n \circ f_i^{n-1}(\Delta^{n-1}) \subset \partial \widehat{D}^n \setminus \{(q,\, 0)\}$ なので

$$\partial_\bullet(\mu_p) = (-1)^n [r \circ h_n \circ d_n^{n-1}] = (-1)^n [\iota_{n-1}] = (-1)^n \mu_q \in H_{n-1}(D^{n-1},\, D^{n-1} \setminus \{q\})$$

が成り立つ． ■

補題 2.13:

開集合 $U_1,\, U_2 \subset \mathbb{H}^n$ と同相写像 $f\colon U_1 \xrightarrow{\cong} U_2$ を与える．
制限 $f|_{\operatorname{Int} U_1}\colon \operatorname{Int} U_1 \longrightarrow \operatorname{Int} U_2$ が向きを保つならば，$f|_{\partial U_1}\colon \partial U_1 \longrightarrow \partial U_2$ も向きを保つ．

証明 命題 2.5 により $f(\operatorname{Int} U_1) = f(\operatorname{Int} U_2)$，$f(\partial U_1) = \partial U_2$ が成り立つ．$\forall q_1 \in \partial U_1$ に対して $q_2 \coloneqq f(q_1) \in \partial U_2$ とおき，$f_n(\mu_{q_1}) = \mu_{q_2}$ であることを示す．

円板 $q_2 \in D_2^{n-1} \times \{0\} \subset \partial U_2$ をとり，$\varepsilon_2 > 0$ を $\widehat{D}_2^n \coloneqq D_2^{n-1} \times [0,\, \varepsilon_2] \subset U_2$ を充たすようにとり，円板 $q_1 \in D_1^{n-1} \times \{0\} \subset \partial U_1$ および $\varepsilon_1 > 0$ を $\widehat{D}_1^n \coloneqq D_1^{n-1} \times [0,\, \varepsilon_1] \subset f^{-1}(\widehat{D}_2^n)$ を充たすようにとる．そして $p_1 \coloneqq (q_1,\, \rho_1/2) \in \operatorname{Int} \widehat{D}_1^n$，$p_2 \coloneqq f(p_1) \in \operatorname{Int} \widehat{D}_2^n$ とおく．

p_2 と $\partial \widehat{D}_2$ の点を結ぶ線分を使って変位レトラクション $r\colon \widehat{D}_2^n \setminus \{p_2\} \longrightarrow \partial \widehat{D}_2$ をとる．このとき横 2 行が補題 2.12 の図式と同じであるような可換図式

$$\begin{CD}
H_n(\widehat{D}_1^n,\, \widehat{D_1}^n \setminus \{p_1\}) @>{\partial_\bullet}>> H_{n-1}(\widehat{D}_1^n \setminus \{p_1\}) @<{\cong}<< H_{n-1}(\partial \widehat{D}_1^n) @>{\cong}>{\text{exc}}> H_{n-1}(\partial \widehat{D}_1^n,\, \partial \widehat{D}_1^n \setminus \{q_1\}) \\
@V{f_n}VV @V{f_n}VV @V{(r \circ f)_{n-1}}VV @V{f_{n-1}}VV \\
H_n(\widehat{D}_2^n,\, \widehat{D_2}^n \setminus \{p_2\}) @>{\partial_\bullet}>> H_{n-1}(\widehat{D}_2^n \setminus \{p_1\}) @>{r_{n-1}}>> H_{n-1}(\partial \widehat{D}_2^n) @>{\cong}>{\text{exc}}> H_{n-1}(\partial \widehat{D}_2^n,\, \partial \widehat{D}_2^n \setminus \{q_2\})
\end{CD}$$

がある．補題 2.12 より，生成元 $\mu_{p_i} \in H_n(\widehat{D}_i^n,\, \widehat{D}_i^n) \quad (i = 1,\, 2)$ はそれぞれ $(-1)^n \mu_{q_i} \in H_{n-1}(\partial \widehat{D}_i^n,\, \partial \widehat{D}_i^n \setminus \{q_i\})$ に写像される．仮定より $f_n(\mu_{p_1}) = \mu_{p_2}$ であるから，図式を左上の $H_n(\widehat{D}_1^n,\, \widehat{D_1}^n \setminus \{p_1\})$ から右下の $H_{n-1}(\partial \widehat{D}_2^n,\, \partial \widehat{D}_2^n \setminus \{q_2\})$ にかけて追跡することで

$$f_n(\mu_{q_1}) = \mu_{q_2}$$

がわかる． ■

命題 2.10: 幾何学的に誘導された向き

n 次元境界付き位相多様体 M がアトラス $\bigl\{(U_\lambda,\, \varphi_\lambda)\bigr\}_{\lambda \in \Lambda}$ によって向き付けられているとする．
このとき境界 ∂M は向き付け可能である．

証明 仮定より $\forall \alpha,\, \beta \in \Lambda$ および $\forall p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap \operatorname{Int} M$ に対して $\deg_{\varphi_\alpha(p)}(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) = +1$ が成り立つ．i.e. $\mathbb{R}^n$ の開集合 $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$，$\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ の上の同相写像 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}\colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ の制限 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{\operatorname{Int}\left(\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)\right)}\colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta \cap \operatorname{Int} M) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta \cap \operatorname{Int} M)$ は向きを保つ．すると補題 2.13 より制限 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{\partial\left(\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)\right)}\colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta \cap \partial M) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta \cap \partial M)$ も向きを保つ． ■

2.5.3　基本類

部分空間 $K \subset L \subset X$ に関して，包含写像 $(X, X \setminus L) \longrightarrow (X, X \setminus K)$ を $\boldsymbol{j_K^L}$ または単に $\boldsymbol{j_K}$ と書く．特に $K = \{p\}$（1 点からなる空間）のときは $\boldsymbol{j_p^L}$ と略記する．

部分空間の減少列 $K \subset L \subset H \subset X$ が与えられたとき，包含写像の段階で

$$j_K^L \circ j_L^H = j_K^H \colon (X, X \setminus H) \longrightarrow (X, X \setminus K)$$

が成り立つので，$S_\bullet$，H_q が関手であることから

$$(j_K^L)_q \circ (j_L^H)_q = (j_K^L \circ j_L^H)_q = (j_K^H)_q \colon H_q(X, X \setminus H) \longrightarrow H_q(X, X \setminus K)$$

が成り立つことに注意する．

また，空間対 (X, A) に関して，特に断らない限り $H_q(X, A)$ の元を $[u]$ と書く．つまり $u \in \mathrm{Ker}\big(\overline{\partial}_q \colon S_q(X)/S_q(A) \longrightarrow S_{q-1}(X)/S_{q-1}(A)\big)$ で，$[u] := u + \mathrm{Im}\, \overline{\partial}_{q+1}$ とする．

補題 2.14:

n 次元境界付き位相多様体 M と，M の任意のコンパクト集合 $K \subset \mathrm{Int}\, M$ を与える．このとき以下が成り立つ：

(1) $q > n$ ならば $H_q(M, M \setminus K) = 0$

(2) $q = n$ のとき，$\forall [u] \in H_q(M, M \setminus K)$ に対して[a]

$$[u] = 0 \iff \forall p \in K,\ (j_p^K)_q([u]) = 0 \in H_q(M, M \setminus \{p\})$$

[a] つまり，$\forall p \in K$ に対して $\mathrm{Ker}(j_p)_n = \{0\}$，i.e. $(j_p)_n$ は単射である．

証明 (case-1):Mayer-Vietoris 完全列による貼り合わせ

M を任意の n 次元境界付き位相多様体とし，コンパクト集合 $K_1, K_2 \subset \mathrm{Int}\, M$ を与える．このとき $K_1, K_2, K_1 \cap K_2$ について (1), (2) が成り立つならば $K_1 \cup K_2$ についても (1), (2) が成り立つことを示す．

(1)　M は Hausdorff 空間なので K_i $(i = 1, 2)$ は閉集合．故に $M \setminus K_i$ は開集合であり，$(M \setminus K_i)^\circ = M \setminus K_i \subset M$ が成り立つ．従って

$$\begin{aligned}(M \setminus K_1)^\circ \cup (M \setminus K_2)^\circ &= (M \setminus K_1) \cup (M \setminus K_2) = M \setminus (K_1 \cap K_2)\\ M^\circ \cup M^\circ &= M \cup M = M\end{aligned}$$

であり，空間対の Mayer-Vietoris 完全列の条件が充たされいるので $\forall q \geq 0$ に対して完全列

$$\begin{aligned}&H_{q+1}\big(M, M \setminus (K_1 \cap K_2)\big) \xrightarrow{\overline{\partial}_\bullet} H_q\big(M, M \setminus (K_1 \cup K_2)\big)\\ &\xrightarrow{\left((j_{K_1}^{K_1 \cup K_2})_q,\, -(j_{K_2}^{K_1 \cup K_2})_q\right)} H_q(M, M \setminus K_1) \oplus H_q(M, M \setminus K_2)\end{aligned} \tag{2.5.7}$$

が成り立つ．$q > n$ ならば，(1) の仮定よりこの完全列は

$$0 \longrightarrow H_q\big(M, M \setminus (K_1 \cup K_2)\big) \longrightarrow 0$$

となるので $H_q\bigl(M,\, M\setminus(K_1\cup K_2)\bigr)=0$ が言える．i.e. $K_1\cup K_2$ について (1) が言えた．

(2) ホモロジー類 $[u]\in H_n\bigl(M,\, M\setminus(K_1\cup K_2)\bigr)$ が $\forall p\in K_1\cup K_2$ に対して $(j_p^{K_1\cup K_2})_n([u])=0$ を充しているとする．このとき $\forall p\in K_i$ $(i=1,\,2)$ に対して

$$(j_p^{K_i})_n\circ(j_{K_i}^{K_1\cup K_2})_n([u])=(j_p^{K_1\cup K_2})_n([u])=0\in H_n(M,\, M\setminus\{p\})$$

が成り立つので，K_i に関する (2) の仮定より $(j_{K_i}^{K_1\cup K_2})_n([u])=0$ が言える．故に (2.5.7) の完全列から

$$[u]\in \operatorname{Ker}\Bigl(\,(j_{K_1}^{K_1\cup K_2})_q,\; -(j_{K_2}^{K_1\cup K_2})_q\,\Bigr)=\operatorname{Im}\overline{\partial}_\bullet$$

が言えるが，$K_1\cap K_2$ に関する (1) の仮定より $H_{n+1}(M,\, M\setminus(K_1\cap K_2))=0$ なので $[u]=0$ が言えた．逆は明らかなので $K_1\cup K_2$ に関して (2) が示された．

(case-2):$M=\mathbb{R}^n$ で K がコンパクト凸集合の場合

$\forall p\in K$ を 1 つとる．このとき K は有界閉集合だから[*17]，十分大きな $r>0$ に対して開球 $B_r(p)$ は K を含む．連続写像

$$R\colon M\setminus\{p\}\longrightarrow \partial\overline{B}_r(p),\; x\longmapsto p+r\frac{x-p}{\|x-p\|}$$

はレトラクションで，ホモトピー

$$F\colon (M\setminus\{p\})\times[0,\,1]\longrightarrow M\setminus\{p\},\; (x,\,t)\longmapsto(1-t)x+tR(x)$$

が id_X と $i\circ R$ を繋ぐ[*18]．i.e. 部分空間 $\partial\overline{B}_r(p)\subset M\setminus\{p\}$ は $M\setminus\{p\}$ の変位レトラクトである．一方，K の凸性から $\forall(x,\,t)\in(M\setminus K)\times[0,\,1]$ に対して $F(x,\,t)\in M\setminus K$ が言える．よってホモトピー F の制限 $F|_{(X\setminus K)\times[0,\,1]}$ が id_X と $i\circ R|_{X\setminus K}$ を繋ぐ．i.e. 部分空間 $\partial\overline{B}_r(p)\subset M\setminus K$ は $M\setminus K$ の変位レトラクトである．以上より，包含写像 $M\setminus K\hookrightarrow M\setminus\{p\}$ はホモトピー同値写像である．横 2 列が短完全列であるような図式[*19]

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_\bullet(M\setminus K) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & S_\bullet(M) \arrow[r] \arrow[d, "="] & S_\bullet(M,\, M\setminus K) \arrow[r] \arrow[d, "(j_p^K)_\bullet"] & 0 & \text{(exact)} \\
0 \arrow[r] & S_\bullet(M\setminus\{0\}) \arrow[r] & S_\bullet(M) \arrow[r] & S_\bullet(M,\, M\setminus\{p\}) \arrow[r] & 0 & \text{(exact)}
\end{tikzcd}$$

をホモロジー長完全列を使って横に繋ぐと $\forall q\geq 0$ に対して[*20]

$$\begin{tikzcd}
H_q(M\setminus K) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_q(M) \arrow[r] \arrow[d, "="] & H_q(M,\, M\setminus K) \arrow[r] \arrow[d, "(j_p^K)_q"] & H_{q-1}(M\setminus K) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_{q-1}(M) \arrow[d, "="] & \text{(exact)} \\
H_q(M\setminus\{p\}) \arrow[r] & H_q(M) \arrow[r] & H_q(M,\, M\setminus\{p\}) \arrow[r] & H_{q-1}(M\setminus\{p\}) \arrow[r] & H_{q-1}(M) & \text{(exact)}
\end{tikzcd}$$

なる可換図式が得られる．これに 5 項補題を用いると，赤色をつけた部分から $\forall q\geq 0$ に関する同型

$$(j_p^K)_n\colon H_q(M,\, M\setminus K)\xrightarrow{\cong} H_q(M,\, M\setminus\{p\}) \tag{2.5.8}$$

[*17] $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合は有界閉集合．

[*18] $i\colon\partial\overline{B}_r(p)\hookrightarrow M\setminus\{p\}$ は包含写像．

[*19] $S_\bullet(M\setminus K)\longrightarrow S_\bullet(M)$ は包含準同型で，$S_\bullet(M)\longrightarrow S_\bullet(M,\, M\setminus K)=\frac{S_\bullet(M)}{S_\bullet(M\setminus K)}$ は標準的射影である．

[*20] $q=0$ のときは $0\xrightarrow{=}0$ を右側に 2 つ並べれば良い．

が得られるが，点 p は任意だったので (2) が示された．特に $q > n$ のとき

$$H_q(M,\, M \setminus K) \cong H_q(M,\, M \setminus K) \cong H_q(D^n,\, D^n \setminus \{0\}) \cong 0$$

なので (1) も示された．

(case-3):$M = \mathbb{R}^n$ の場合

K が有限個のコンパクト凸集合の和集合として書ける場合

まず，N 個のコンパクト凸集合 $K_1, \dots, K_N$ を使って $K = \bigcup_{i=1}^N K_i$ と書ける場合に (1), (2) が成り立つことを N に関する数学的帰納法により示す．$N = 1$ の場合は **(case-2)** で示した．K が $N-1$ 個のコンパクト集合の和集合として書ける場合に (1), (2) が成立しているとする．このとき $K_1 \cap \left(\bigcup_{i=2}^N K_i \right) = \bigcup_{i=2}^N (K_1 \cap K_i)$ であって，$2 \leq \forall i \leq N$ について $K_1 \cap K_i$ はコンパクトだから，帰納法の仮定より $K_1 \cap \left(\bigcup_{i=2}^N K_i \right)$ について補題が成り立つ．故に **(case-1)** から $K_1 \cup \left(\bigcup_{i=2}^N K_i \right) = \bigcup_{i=1}^N K_i$ についても補題が成立する．帰納法が完了し，$K = \bigcup_{i=1}^N K_i$ の場合に (1), (2) が成り立つことが言えた．

K が任意のコンパクト集合の場合

次に，K が任意のコンパクト集合である場合を示す．$\forall [u] \in H_q(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^n \setminus K)$ を 1 つ固定し，$u = \gamma + S_q(\mathbb{R}^n \setminus K)$ を充たす特異 q-チェイン $\gamma \in S_q(\mathbb{R}^n)$ を 1 つとる．$u \in \operatorname{Ker} \overline{\partial}_\bullet$ なので

$$\overline{\partial}_q \bigl(\gamma + S_{q-1}(\mathbb{R}^n \setminus K)\bigr) = \partial_q \gamma + S_{q-1}(\mathbb{R}^n \setminus K) = 0_{S_{q-1}(\mathbb{R}^n)/S_{q-1}(\mathbb{R}^n \setminus K)} = S_{q-1}(\mathbb{R}^n \setminus K),$$

i.e. $\partial_q \gamma \in S_{q-1}(\mathbb{R}^n \setminus K)$ が言える．一方，特異 q-チェインの定義より m 個の連続写像 $\sigma_i \colon \Delta^{q-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を用いて $\partial_q \gamma = \sum_{i=1}^m a_i \sigma_i$ と書ける．

ここで $A \coloneqq \bigcup_{i=1}^m \sigma_i(\Delta^{q-1})$ とおくと，Δ^{q-1} はコンパクトなので[*21] $A \subset \mathbb{R}^n$ もコンパクト．かつ $\partial_q \gamma \in S_q(\mathbb{R}^n \setminus K)$ より $A \subset \mathbb{R}^n \setminus K$, i.e. $K \cap A = \emptyset$ が言える．故に??-(1) から，$\forall p \in K$ に対してある正数 $r_p > 0$ および $\mathbb{R}^n$ の開集合 $U_p \subset \mathbb{R}^n$ が存在して $A \subset U_p$ かつ $B_{r_p}(p) \cap U_p = \emptyset$ を充たす．このとき $B_{r_p}(p) \subset \mathbb{R}^n \setminus U_p \subset \mathbb{R}^n \setminus A$ が成り立つが，$\mathbb{R}^n \setminus U_p$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合なので $\overline{B}_{r_p}(p) \subset \mathbb{R}^n \setminus U_p \subset \mathbb{R}^n \setminus A$ が言える．従って

$$K \subset \bigcup_{p \in K} \overline{B}_{r_p}(p) \subset \mathbb{R}^n \setminus A$$

が成り立つが，K はコンパクトなので

$$\exists p_1, \dots, p_N \in K,\ K \subset \bigcup_{i=1}^N \overline{B}_{r_{p_i}}(p_i) \subset \mathbb{R}^n \setminus A$$

が成り立つ．$L \coloneqq \bigcup_{i=1}^N \overline{B}_{r_{p_i}}(p_i)$ とおくと $A \subset \mathbb{R}^n \setminus L$ だから $\partial_q \gamma \in S_{q-1}(\mathbb{R}^n \setminus L)$ である．i.e. $u' \coloneqq \gamma + S_q(\mathbb{R}^n \setminus L)$ とおくとこれはチェイン複体 $S_\bullet(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^n \setminus L)$ のサイクルである．従って

$$[u] = (j_K^L)_q([u']) \tag{2.5.9}$$

が成り立つ．

[*21] $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合はコンパクト集合．

ところで，$\overline{B}_{r_{p_i}}(p_i)$ $(1 \le \forall i \le N)$ は $\mathbb{R}^n$ のコンパクト凸集合だから **(case-3)** の前半より $L = \bigcup_{i=1}^{N} \overline{B}_{r_{p_i}}(p_i)$ に対して (1), (2) が成り立つ．従って $q > n$ ならば $[u'] \in H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus L) = 0$ であり，(2.5.9) から $[u] = 0$ が示された．

次に $q = n$ として (2) を示す．$\forall p \in K$ に対して $(j_p^K)_n([u]) = 0$ であるとする．このとき

$$(j_p^L)_n([u']) = (j_p^K)_n \circ (j_K^L)_n([u']) = (j_p^K)_n([u]) = 0$$

が成り立つ．特に $p_i \in K$ だから，$1 \le \forall i \le N$ に対して

$$(j_{p_i}^L)_n([u']) = (j_{p_i}^{\overline{B}_{r_{p_i}}(p_i)})_n \circ (j_{\overline{B}_{r_{p_i}}(p_i)}^L)([u']) = 0$$

が言える．さらに (2.5.8) より $(j_{p_i}^{\overline{B}_{r_{p_i}}(p_i)})_n \colon H_n\bigl(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_{r_{p_i}}(p_i)\bigr) \xrightarrow{\cong} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{p_i\})$ は同型だから，$(j_{\overline{B}_{r_{p_i}}(p_i)}^L)([u']) = 0$ が分かり，$\forall p \in L$ に対して

$$(j_p)_n([u']) = (j_p^{\overline{B}_{r_{p_i}}(p_i)})_n \circ (j_{\overline{B}_{r_{p_i}}(p_i)}^L)([u']) = 0 \qquad \text{w/} \quad p \in \overline{B}_{r_{p_i}}(p_i)$$

が言える．**(case-3)** の前半より L に対して (2) が成り立つから $[u'] = 0$ が言えて，式 (2.5.9) から $[u] = 0$ が示された．

(case-4):M が任意の位相多様体の場合

仮定より $K \subset \operatorname{Int} M$ であるから，$\overline{\partial M} = \partial M \subset M \setminus K = (M \setminus K)^\circ$ が成り立つ[*22]．従って切除定理から

$$H_q(M,\, M \setminus K) \underset{\text{exc}}{\cong} H_q\bigl(M \setminus \partial M,\, (M \setminus K) \setminus \partial M\bigr) = H_q(\operatorname{Int} M,\, \operatorname{Int} M \setminus K)$$

が成り立つ．故に $\partial M = \emptyset$ としても一般性を損なわない．このとき任意のチャートは内部チャートになる．

***K* がある 1 つのチャートに含まれる場合**

まず，あるチャート (U, φ) が存在して $K \subset U$ となる場合に示す．このとき $\overline{M \setminus U} = M \setminus U \subset M \setminus K = (M \setminus K)^\circ$ なので切除定理が使えて，

$$H_q(M,\, M \setminus K) \underset{\text{exc}}{\cong} H_q(U,\, U \setminus K) \underset{\varphi_q}{\cong} H_q\bigl(\varphi(U),\, \varphi(U) \setminus \varphi(K)\bigr) \underset{\text{exc}}{\cong} H_q\bigl(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^n \setminus \varphi(K)\bigr)$$

が成り立つ．故に **(case-3)** より $q > n$ のとき $H_q(M,\, M \setminus K) = 0$ が成り立つ．$q = n$ のとき，$[u] \in H_q(M,\, M \setminus K)$ が $\forall p \in K$ について $(j_p^K)_n([u]) = 0$ を充たすとする．このとき $S_\bullet$, H_q の関手性から，$\forall x \in \varphi(K)$ について

$$\begin{aligned}
(j_x^{\varphi(K)})_n\bigl(\varphi_n([u])\bigr) &= (j_x^{\varphi(K)} \circ \varphi)_n([u]) \\
&= (\varphi \circ j_{\varphi^{-1}(x)}^K)_n([u]) \\
&= (\varphi)_n \circ (j_{\varphi^{-1}(x)}^K)_n([u]) \\
&= 0
\end{aligned}$$

が成り立つので，コンパクト集合 $\varphi(K) \subset \mathbb{R}^n$ に関する **(case-3)** から $\varphi_n([u]) = 0$ がわかる．φ_n は同型なので $[u] = 0$ が従う．

[*22] ∂M は閉集合で，M が Hausdorff 空間なのでコンパクト集合 K は閉集合．

K が 1 つのチャートに含まれるコンパクト集合の有限個の和集合で書ける場合

次に，各々があるチャートに含まれるような N 個のコンパクト集合 $K_1, \dots, K_N$ を用いて $K = \bigcup_{i=1}^{N} K_i$ と書ける場合を N に関する数学的帰納法により示す．$N = 1$ の場合は 1 段落前で示した．$N-1$ まで示されているとする．このとき $K_1 \cap \left(\bigcup_{i=2}^{N} K_i\right) = \bigcup_{i=1}^{N} (K_1 \cap K_i)$ だが $K_1 \cap K_i$ はチャート (U_i, φ_i) に含まれるから帰納法の仮定により $K_1 \cap \left(\bigcup_{i=2}^{N} K_i\right) = \bigcup_{i=2}^{N} (K_1 \cap K_i)$ に対して (1), (2) が成り立つ．故に **(case-1)** より $\bigcup_{i=1}^{N} K_i$ についても (1), (2) が成り立ち，帰納法が完了する．

K が任意のコンパクト集合の場合

最後に，K が任意のコンパクト集合の場合に示す．K はコンパクトだから M の有限個のチャート $(U_1, \varphi_1), \dots, (U_N, \varphi_N)$ が存在して $K \subset \bigcup_{i=1}^{N} U_i$ を充たす．K はコンパクト Hausdorff 空間だから K の有限開被覆 $\{U_1, \dots, U_N\}$ に対して補題**??**-(3) を使うことができて，K の開被覆 $\{V_1, \dots, V_N\}$ であって $\overline{V_i} \subset U_i$ $(1 \le \forall i \le N)$ を充たすものが存在する．補題**??**-(2) より $K_i := \overline{V_i} \cap K \subset U_i$ $(1 \le \forall i \le N)$ は K のコンパクト集合で，$K = \bigcup_{i=1}^{N} K_i$ を充たす．従って前段落の議論から (1), (2) が成り立つ．

■

定理 2.10: カラー近傍の存在

M を，$\partial M \neq \emptyset$ なる n 次元コンパクト境界付き位相多様体とする．
このとき ∂M の開近傍 $\partial M \subset O \subset M$ と同相写像

$$F \colon \partial M \times [0, 1) \xrightarrow{\cong} O$$

が存在して，

$$F|_{\partial M \times \{0\}} = \mathrm{id}_{\partial M}$$

を充たす．

証明 [**?**, 定理 4.5.8] を参照． ■

系 2.11:

n 次元コンパクト位相多様体 M は $\mathrm{Int}\, M$ と同じホモトピー型である．

証明 定理 2.10 によりカラー近傍 $F \colon \partial M \times [0, 1) \xrightarrow{\cong} U$ をとる．このとき $X \setminus F\big(\partial M \times [0, \frac{1}{2})\big)$ は $M, \mathrm{Int}\, M$ の変位レトラクトである． ■

命題 2.11:

M を向き付けられた n 次元境界付き位相多様体とする．
このとき $\mathrm{Int}\, M$ の任意のコンパクト集合 $K \subset \mathrm{Int}\, M$ に対して以下を充たすホモロジー類 $\mu_K \in H_n(M,\, M \setminus K)$ が一意的に存在する：

$$\forall p \in K,\ (j_p^K)_n(\mu_K) = \mu_p \in H_n(M,\, M \setminus \{p\}) \tag{2.5.10}$$

<u>証明</u> 切除同型 $H_q(M,\, M \setminus K) \underset{\text{exc}}{\cong} H_q(\mathrm{Int}\, M,\, \mathrm{Int}\, M \setminus K)$ により $M = \mathrm{Int}\, M$ を仮定しても一般性を失わない．補題 2.14-(2) より $(j_p^K)_n \colon H_n(M,\, M \setminus K) \longrightarrow H_n(M,\, M \setminus \{p\})$ は単射だから，(2.5.10) を充たす $\mu_K \in H_n(M,\, M \setminus K)$ はもし存在すれば一意である．

(case-1) 2 つのコンパクト集合 $K_1,\, K_2 \subset M$ において $\mu_{K_1},\, \mu_{K_2}$ が存在するならば $K_1 \cup K_2$ においても $\mu_{K_1 \cup K_2}$ が存在することを示す．Mayer-Vietoris 完全列

$$\begin{aligned}
&H_q\big(M,\, M \setminus (K_1 \cup K_2)\big) \\
&\xrightarrow{\left((j_{K_1}^{K_1 \cup K_2})_q,\, -(j_{K_2}^{K_1 \cup K_2})_q\right)} H_q(M,\, M \setminus K_1) \oplus H_q(M,\, M \setminus K_2) \\
&\xrightarrow{(j_{K_1 \cap K_2}^{K_1})_q + (j_{K_1 \cap K_2}^{K_2})_q} H_q\big(M,\, M \setminus (K_1 \cap K_2)\big)
\end{aligned}$$

を使う．$(\mu_{K_1},\, -\mu_{K_2}) \in H_q(M,\, M \setminus K_1) \oplus H_q(M,\, M \setminus K_2)$ について

$$\begin{aligned}
(j_p^{K_1 \cap K_2})_n \circ \big((j_{K_1 \cap K_2}^{K_1})_n + (j_{K_1 \cap K_2}^{K_2})_n\big)(\mu_{K_1},\, -\mu_{K_2}) &= (j_p^{K_1 \cap K_2})_n\big((j_{K_1 \cap K_2}^{K_1})_n(\mu_{K_1}) - (j_{K_1 \cap K_2}^{K_2})_n(\mu_{K_2})\big) \\
&= (j_p^{K_1})(\mu_{K_1}) - (j_p^{K_2})(\mu_{K_2}) \\
&= \mu_p - \mu_p = 0
\end{aligned}$$

でかつ $(j_p^{K_1 \cap K_2})_n$ は単射なので，$(j_{K_1 \cap K_2}^{K_1})_n(\mu_{K_1}) - (j_{K_1 \cap K_2}^{K_2})_n(\mu_{K_2}) = 0$，i.e. $(\mu_{K_1},\, -\mu_{K_2}) \in \mathrm{Ker}\big((j_{K_1 \cap K_2}^{K_1})_n + (j_{K_1 \cap K_2}^{K_2})_n\big) = \mathrm{Im}\big((j_{K_1}^{K_1 \cup K_2})_q,\, -(j_{K_2}^{K_1 \cup K_2})_q\big)$ が言える．よってある $\mu_{K_1 \cup K_2} \in H_q\big(M,\, M \setminus (K_1 \cup K_2)\big)$ が存在して

$$(j_{K_1}^{K_1 \cup K_2})_n(\mu_{K_1 \cup K_2}) = \mu_{K_1} \quad \text{かつ} \quad -(j_{K_2}^{K_1 \cup K_2})_n(\mu_{K_1 \cup K_2}) = -\mu_{K_2}$$

を充たす．

(case-2) $M = \mathbb{R}^n$ とする．コンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ は有界閉集合だから，十分大きい $R > 0$ に対して $K \subset \overline{B}_R(0)$ を充たす．
ここで $\mu_K := (j_K^{\overline{B}_R(0)})_q(\mu_{\overline{B}_R(0)})$ とおくと $\forall p \in K \subset \overline{B}_R(0)$ に対して

$$(j_p^K)_q(\mu_K) = (j_p^K)_q \circ (j_K^{\overline{B}_R(0)})_q(\mu_{\overline{B}_R(0)}) = (j_p^{\overline{B}_R(0)})(\mu_{\overline{B}_R(0)}) = \mu_p$$

が成り立つ．

(case-3) M が任意の位相多様体であり，ある正のチャート $(U,\, \varphi)$ であって $K \subset U$ を充たすものが存在する場合を考える．
切除同型 $H_n\big(\varphi(U),\, \varphi(U) \setminus \varphi(K)\big) \underset{\text{exc}}{\cong} H_n\big(\mathbb{R}^n,\, \mathbb{R}^n \setminus \varphi(K)\big)$ によって **(case-2)** の $\mu_{\varphi(K)}$ を $H_n\big(\varphi(U),\, \varphi(U) \setminus \varphi(K)\big)$ へ写像した上で $\mu_K := (\varphi^{-1})_q(\mu_{\varphi(K)}) \in H_n(U,\, U \setminus K)$ とおくと，$H_n(U,\, U \setminus K) \underset{\text{exc}}{\cong} H_n(M,\, M \setminus K)$ により μ_K が所望のホモロジー類である．

(case-4) $K=\bigcup_{i=1}^{N} K_i$ で $1\leq \forall i \leq N$ に対してる正のチャート $(U_i,\,\varphi_i)$ が存在して $K_i \subset U_i$ を充たす場合を考える．このとき各 i について **(case-3)** より μ_{K_i} が存在するから，**(case-1)** によって N についての数学的帰納法を進めることができて証明が完了する．

(case-5) M が任意の位相多様体であり，コンパクト集合 $K \subset M$ も任意の場合を考える．K はコンパクトなので，**(case-4)** の条件を充たす有限個のコンパクト集合 $K_1,\,\dots,\,K_N$ が存在して $K\subset \bigcup_{i=1}^{N} K_i$ となる．このとき

$$\mu_K \coloneqq (j_K^{\bigcup_{i=1}^{N} K_i})_n(\mu_{\bigcup_{i=1}^{N} K_i})$$

とおけば良い．

■

定理 2.12: 基本類の存在

向き付けられた，コンパクトで連結な n 次元境界付き位相多様体 M を与える．
このとき M は

$$H_n(M,\,\partial M)\cong \mathbb{Z}$$

を充し，生成元 $[\boldsymbol{M}] \in H_n(M,\,\partial M)$ であって以下を充たすものが存在する：

$$\forall p\in \operatorname{Int} M,\quad (j_p^{\operatorname{Int} M})_n([M]) = \mu_p \in H_n(M,\,M\setminus\{p\})$$

特に，$\forall p \in \operatorname{Int} M$ について，包含準同型

$$(j_p^{\operatorname{Int} M})_n\colon H_n(M,\,\partial M)\longrightarrow H_n(M,\,M\setminus\{p\})$$

は同型である．

証明 カラー近傍 $F\colon \partial M\times[0,\,1)\xrightarrow{\cong} U$ をとる．系 2.11 より M は $\operatorname{Int} M$ と同じホモトピー型であり，連結である．

$\delta\in(0,\,1)$ に対して $K_\delta \coloneqq X\setminus F\big(\partial M\times[0,\,\delta)\big)$ とおく．K_δ はコンパクト空間 M の閉部分集合なので，補題 **??**よりコンパクト集合である．よって K_δ に命題 2.11 を適用してホモロジー類 $\mu_{K_\delta}\in H_n(\operatorname{Int} M,\,\operatorname{Int} M\setminus K_\delta)$ をとる．ところで $M\setminus K_\delta = F\big(\partial M\times[0,\,\delta)\big)\simeq \partial M$ だから，包含準同型による図式

$$H_n(\operatorname{Int} M,\,\operatorname{Int} M\setminus K_\delta)\xrightarrow[\text{exc}]{\cong} H_n(M,\,M\setminus K_\delta)\xrightarrow{\cong} H_n(M,\,\partial M)$$

がある．この図式による $\mu_{K_\delta}\in H_n(\operatorname{Int} M,\,\operatorname{Int} M\setminus K_\delta)$ の行き先を $[M]\in H_n(M,\,\partial M)$ と定義する．

$[X]$ が $\delta\in(0,\,1)$ の取り方によらないことを示す．$0<\delta<\delta'<1$ とする．μ_{K_δ} の定義から $\forall p\in K_{\delta'}\subset K_\delta$ について

$$\mu_p = (j_p^{K_\delta})_n(\mu_{K_\delta}) = (j_p^{K_{\delta'}})_n\circ (j_{K_{\delta'}}^{K_\delta})(\mu_{K_\delta})$$

が成り立つが，$\mu_{K'_\delta}$ の一意性から $(j_{K_{\delta'}}^{K_\delta})_n(\mu_{K_\delta}) = \mu_{K_{\delta'}}$ でなくてはならない．この考察から $\forall p\in\operatorname{Int} M$ に対して $(j_p^{\operatorname{Int} M})_n([M]) = \mu_p\in H_n(M,\,M\setminus\{p\})$ も言える．

最後に $\forall p \in \operatorname{Int} M$ について，包含準同型

$$(j_p^{\operatorname{Int} M})_n \colon H_n(M, \partial M) \longrightarrow H_n(M, M \setminus \{p\})$$

が同型写像になることを示す． ■

定理 2.13:

連結な n 次元境界付き位相多様体 M を与える．このとき以下が成り立つ：

(1) $H_n(M) = 0$ または $\mathbb{Z}$ である．特に

$$H_n(M) = \mathbb{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad M \text{ はコンパクトかつ向き付け可能かつ } \partial M = \emptyset$$

である．

(2) $H_n(M, \partial M) = 0$ または $\mathbb{Z}$ である．特に

$$H_n(M, \partial M) = \mathbb{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad M \text{ はコンパクトかつ向き付け可能}$$

である．

2.6 チェイン複体上のテンソルと Hom 関手

この節は**普遍係数定理**への布石である．R 加群のチェイン複体 $\{C_q, \partial_q\}_q$ を与える．ここで，q チェインが自由加群であることは仮定しないものとする．

特異ホモロジーは二つの共変関手の合成であったことに注意する：

$$\begin{aligned} S_\bullet &\colon \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Chain} \\ H_\bullet &\colon \mathbf{Chain} \longrightarrow R\text{-}\mathbf{Mod} \end{aligned}$$

ここで，新しい代数的対応

$$\mathbf{Chain} \longrightarrow \mathbf{Chain}$$

を $S_\bullet$ と $H_\bullet$ の間に挟んでみよう．

2.6.1 チェイン複体と R 加群のテンソル積

R 加群 M をとり，対応

$$\{C_q, \partial_q\}_q \longrightarrow \{C_q \otimes M, \partial_q \otimes \mathrm{id}_M\}_q$$

を考える．ただし

$$(\partial_\bullet \otimes \mathrm{id}_M)\left(\sum_i c_i \otimes m_i\right) := \sum_i \partial_\bullet(c_i) \otimes m_i$$

である．$(\partial \otimes \mathrm{id})^2 = 0$ なので $\left\{C_q \otimes M,\, \partial_q \otimes \mathrm{id}_M\right\}_q$ はチェイン複体である．この操作はホモロジー群の係数を取り替える操作に対応する．

補題 2.15:

この対応は共変関手である．

定義 2.20: M 係数ホモロジー

チェイン複体 $C_\bullet \otimes M$ のホモロジー群は**係数 M のホモロジー群**を作る：

$$H_q(C_\bullet;\, M) \coloneqq \frac{\operatorname{Ker} \partial_q\bigl(C_q \otimes M \to C_{q-1} \otimes M\bigr)}{\operatorname{Im} \partial_{q+1}\bigl(C_{q+1} \otimes M \to C_q \otimes M\bigr)}$$

2.6.2 $\mathrm{Hom}_R\,(C_\bullet,\, M)$

$$\left\{C_q,\, \partial_q\right\}_q \longrightarrow \left\{\mathrm{Hom}_R\,(C_q\, M),\, \delta_q\right\}_q$$

なる対応は関手である．ただし準同型 δ は ∂ の双対である．あからさまには次の通り：

$$\begin{gathered}\delta \colon \mathrm{Hom}_R\, C_\bullet,\, M \to \mathrm{Hom}_R\,(C_\bullet,\, M),\\ (\delta f)(c) \coloneqq f(\partial c) \quad \forall f \in \mathrm{Hom}_R\,(C_\bullet,\, M),\ \forall c \in C_\bullet\end{gathered}$$

このとき，

$$(\delta^2 f)(c) = f(\partial^2 c) = f(0) = 0$$

なので，δ もまた複体である．しかし，次の 2 点に注意：

(1) δ は添字を増加させる方向に作用する．i.e.

$$\delta \colon \mathrm{Hom}_R\,(C_q,\, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\,(C_{q+1},\, M)$$

(2) この対応は**反変関手**である．$\forall M \in \mathrm{Ob}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ に対して $\mathrm{Hom}(\text{-},\, M) \colon \mathrm{Ob}(R\text{-}\mathbf{Mod})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ob}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ なる関手が反変関手だからである．

詳細は次章に譲るが，コホモロジーの定義はここから生じる．

定義 2.21: コホモロジー

$$H^q(C_\bullet;\, M) \coloneqq \frac{\operatorname{Ker}\bigl(\delta \colon \mathrm{Hom}_R\,(C_q,\, M) \to \mathrm{Hom}_R\,(C_{q+1},\, M)\bigr)}{\operatorname{Im}\bigl(\delta \colon \mathrm{Hom}_R\,(C_{q-1},\, M) \to \mathrm{Hom}_R\,(C_q,\, M)\bigr)}$$

は係数 M を持つ $(C_\bullet,\, \partial)$ **のコホモロジー**と呼ばれる．

2.7 Eilenberg-Steenrod 公理系

公理 2.1: ホモロジーの Eilenberg-Steenrod 公理系

ホモロジー理論は

$$H_\bullet\colon \{\text{pairs, ct. maps}\} \longrightarrow \{\text{graded } R \text{ modules, homomorphisms}\}$$

なる共変関手であって，以下の公理を充たすものである：

(ES-h1) 任意の空間対 $(X,\, A)$ および非負整数 $q \geq 0$ に対して**自然な**準同型

$$\partial\colon H_q(X,\, A) \longrightarrow H_{q-1}(A)$$

が存在して，包含写像 $i\colon A \hookrightarrow X,\ j\colon X \hookrightarrow (X,\, A)$ を用いて次のホモロジー長完全列が誘導される：

$$\cdots \to H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X,\, A) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(A) \to \cdots$$

(ES-h2) 2 つの連続写像 $f,\, g\colon (X,\, A) \to (Y,\, B)$ がホモトピックならば，誘導準同型 $f_*,\, g_*\colon H_q(X,\, A) \to H_q(Y,\, B)$ は

$$f_* = g_*$$

となる．

(ES-h3) $U \subset X$ かつ $\overline{U} \subset \mathrm{Int}(A)$ ならば，包含写像 $i\colon (X \setminus U,\, A \setminus U) \longrightarrow (X,\, A)$ が誘導する準同型

$$i_*\colon H_q(X \setminus U,\, A \setminus U) \longrightarrow H_q(X,\, A)$$

は $\forall q \geq 0$ に対して同型となる．

(ES-h4) $q \neq 0$ ならば $H_q(*) = 0$.