第 5 章

積

この章では R を環とし，$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\ Y)$ および $M \in \mathrm{Ob}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ に対して次のような記法を使う：

- 位相空間 $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ に対して M 係数特異チェイン複体を $S_\bullet(X;M) := S_\bullet(X) \otimes_R M$ と書く．
- M 係数特異チェイン複体をとる関手 $S_\bullet(\text{-};M) \colon \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ の，$\mathbf{Top}$ における射 f に対する作用を
$$f_\bullet := S_\bullet(f;M) = S_\bullet(f) \otimes_R 1_M \colon S_\bullet(X;M) \longrightarrow S_\bullet(Y;M)$$
と書き，そこからさらに関手 $H_q \colon \mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod}) \longrightarrow R\text{-}\mathbf{Mod}$ を作用させるときも
$$f_q := H_q\bigl(S_\bullet(f;M)\bigr) \colon H_q\bigl(S_\bullet(X;M)\bigr) \longrightarrow H_q\bigl(S_\bullet(Y;M)\bigr)$$
と略記する．
- 反変関手 $\mathrm{Hom}_R(\text{-},\ M) \colon \mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod}) \longrightarrow \mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ の，$\mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ における射 $f_\bullet \colon S_\bullet(X;R) \longrightarrow S_\bullet(Y;R)$ に対する作用を
$$\begin{aligned} f^\bullet := \mathrm{Hom}_R\bigl(S_\bullet(f;R),\ M\bigr) \colon \mathrm{Hom}_R\bigl(S_\bullet(Y;R),\ M\bigr) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_R\bigl(S_\bullet(X;R),\ M\bigr), \\ \varphi &\longmapsto \varphi \circ f_\bullet \end{aligned} \tag{5.0.1}$$
と書く．そこからさらに関手 $H^q \colon \mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod}) \longrightarrow R\text{-}\mathbf{Mod}$ を作用させるときも
$$f^q := H^q\Bigl(\mathrm{Hom}_R\bigl(S_\bullet(f;R),\ M\bigr)\Bigr) \colon H^q\Bigl(\mathrm{Hom}_R\bigl(S_\bullet(Y;R),\ M\bigr)\Bigr) \longrightarrow H^q\Bigl(\mathrm{Hom}_R\bigl(S_\bullet(X;R),\ M\bigr)\Bigr) \tag{5.0.2}$$
と書く．
- 余計な煩雑さを避けるために
$$S_\bullet X := S_\bullet(X;R), \tag{5.0.3}$$
$$H_q X := H_q\bigl(S_\bullet(X;R)\bigr), \tag{5.0.4}$$
$$S^\bullet X := \mathrm{Hom}_R\bigl(S_\bullet(X;R),\ R\bigr),$$
$$H^q X := H^q\Bigl(\mathrm{Hom}_R\bigl(S_\bullet(X;R),\ R\bigr)\Bigr)$$
と略記することがある．

定義 5.1: 次数付き加群

(1) **次数付き左 $\boldsymbol{R}$ 加群** (graded left R module) $A_\bullet$ とは，左 R 加群の族 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ であるか，または 左 R 加群の直和分解 $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ のこと．

(2) 次数付き左 R 加群の準同型写像とは，集合 $\prod_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_R(A_n, B_n)$ の元のこと．

(3) 次数付き左 R 加群 $A_\bullet$ と次数付き右 R 加群 $B_\bullet$ のテンソル積とは，次数付き左 R 加群

$$(A_\bullet \otimes_R B_\bullet)_n := \bigoplus_{p+q=n} A_p \otimes_R B_q$$

のこと．

(4) 次数付き左 R 加群 $\mathrm{Hom}_R(A_\bullet, B_\bullet)$ を

$$\mathrm{Hom}_R(A_\bullet, B_\bullet)_n := \prod_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_R(A_k, B_{k+n})$$

と定める．

(5) **次数付き環** (graded ring) $R_\bullet$ とは，アーベル群の族 $\{R_n\}_{n\mathbb{Z}}$ であって，写像

$$R_\bullet \otimes R_\bullet \longrightarrow R_\bullet,\ a\otimes b \longmapsto ab$$

を持ち，$(ab)c = a(bc)$ が成り立つもののこと．i.e. 環 R であって直和分解 $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n$ を持ち，$R_k \cdot R_l \subset R_{k+l}$ を充たすもののこと．

(6) 次数付き環が**可換** (commutative) であるとは，$\forall a \in R_{|a|}$, $\forall b \in R_{|b|}$ に対して

$$ab = (-1)^{|a||b|} ba$$

が成り立つこと．

(7) 次数付き環 $R_\bullet$ 上の次数付き加群 $M_\bullet$ とは，環 $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n$ 上の加群であって $R_k \cdot M_l \subset M_{k+l}$ を充たすもの．

二重複体の全複体を複体のテンソル積として定める[*1]：

定義 5.2: 複体のテンソル積

複体 $(C^\bullet, d^\bullet)$, $(C'^\bullet, d'^\bullet)$ の**テンソル積** $(C^\bullet \otimes C'^\bullet, \delta^\bullet)$ とは，次数付き加群のテンソル積

$$(C^\bullet \otimes C'^\bullet)^n := \bigoplus_{p+q=n} C^p \otimes_R C'^q = \mathrm{Tot}(C^\bullet \otimes_R C'^*)$$

および射

$$\delta(z\otimes w) := dz \otimes w + (-1)^p z \otimes d'w \quad ^{\mathrm{w}/}\ z \in C^p$$

の組のこと．

[*1] $(d^{-p} \otimes 1_{C'^{-q+1}}) \circ (1_{C^{-p}} \otimes d'^{-q}) = d^{-p} \otimes d'^{-q} = (1_{C^{-p+1}} \otimes d'^{-q}) \circ (d^{-p} \otimes 1_{C'^{-q+1}})$ なので，$\left(C^\bullet \otimes_R C'^*,\ d^\bullet \otimes 1_{C'^*},\ (-1)^\bullet 1_{C^\bullet} \otimes d'^*\right)$ が二重複体になる．従って全複体の射の定義と定義 5.2 の δ の第 2 項の符号は整合的である．

5.1 Eilenberg-Zilber 写像

圏 $\mathbf{Top}^2$ を次のように定める[*2]：

- 位相空間の組 (X, Y) を対象とする．空間対ではなく，必ずしも $Y \subset X$ でなくて良い．
- 連続写像の組 (f, g) $^{\mathrm{w}/}$ $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X', X),\ g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Y', Y)$ を射とする．つまり，

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}^2}\big((X, Y), (X', Y')\big) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, X') \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Y, Y')$$

  とする．
- 合成は $(f, g) \circ (f', g') := (f \circ f', g \circ g')$ と定める．

まず，非輪状モデル定理を述べる．

定理 5.1: 非輪状モデル定理

任意の圏 $\mathcal{C}$ および関手 $F, F' : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ を与える．$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して定まる複体 $F(X)$ の第 $-n$ 項を $F^{-n}(X)$ と書く．
与えられた関手 $F, F' : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ は以下の条件を充たすとする：

(1) $\forall n < 0,\ F^{-n} = F'^{-n} = 0$

(2) $\mathcal{C}$ の一部の対象の集まり $\mathcal{M} \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が存在して以下を充たす：

(F) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ および $\forall n \geq 0$ に対して，左 R 加群 $F^{-n}(X)$ は集合

$$\left\{ F^{-n}(u)\big(F^{-n}(M)\big) \;\middle|\; u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, X),\ M \in \mathcal{M} \right\}$$

のある部分集合を基底にもつ自由 R 加群となる．このとき関手 $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ は **自由** (free) であると言われる．

(A) $\forall M \in \mathcal{M}$ および $\forall n \geq 1$ に対して $H^{-n}\big(F'(M)\big) = 0$ が成り立つ[a]このとき関手 $F' : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ は **非輪状** (acyclic) と呼ばれる．

このとき，自然変換 $\Phi : F \longrightarrow F'$ が自然なチェイン・ホモトピーを除いて一意に定まる．
特に，F, F' がどちらも自由かつ非輪状ならば $F \simeq F'$ であり，F, F' を結ぶどの自然変換も互いにチェイン・ホモトピックである．

[a] i.e. F' の左導来関手 $L_n F'$ に対して，$\forall M \in \mathcal{M},\ L_n F'(M) = 0$ が成り立つ．

<u>証明</u> [?, p.165 thorem 8] を参照． ■

***R* 係数**特異チェイン複体をとる関手 $S_\bullet(\text{-}; R) : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ が自由かつ非輪状であることは，$\mathcal{M} = \left\{\Delta^q\right\}_{q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ おくと確認できる．

[*2] 要は 2 つの $\mathbf{Top}$ を「直積」してできる圏．

定理 5.2: Eilenberg-Zilber の定理

2 つの関手 $F,\, F' \colon \mathbf{Top}^2 \longrightarrow \mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ を

$$\begin{aligned} F\big((X,\,Y)\big) &\coloneqq S_\bullet(X \times Y), \\ F'\big((X,\,Y)\big) &\coloneqq S_\bullet(X) \otimes_R S_\bullet(Y) \end{aligned}$$

と定めると，これらは自然同値である．i.e. 自然変換 $A\colon F \longrightarrow F'$, $B\colon F' \longrightarrow F$ が存在して，$\forall (X,\,Y) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top}^2)$ に対して合成

$$\begin{gathered} S_\bullet(X \times Y) \xrightarrow{A} S_\bullet(X) \otimes_R S_\bullet(Y) \xrightarrow{B} S_\bullet(X \times Y), \\ S_\bullet(X) \otimes_R S_\bullet(Y) \xrightarrow{B} S_\bullet(X \times Y) \xrightarrow{B} S_\bullet(X) \otimes_R S_\bullet(Y) \end{gathered}$$

が恒等写像にチェイン・ホモトピックで，かつ A（resp. B）は自然なチェイン・ホモトピックを除いて一意に定まる．特に，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して自然な同型

$$H_n(X \times Y) \xrightarrow{\cong} H_n\big(S_\bullet(X) \otimes_R S_\bullet(Y)\big) \tag{5.1.1}$$

がある．

<u>証明</u> $\mathcal{M} \coloneqq \big\{\, (\Delta^p\, \Delta^q) \,\big|\, p,\, q \geq 0 \,\big\}$ とおく．

(A) $\Delta^p \times \Delta^q \approx D^{p+q}$ であるから $\forall M \in \mathcal{M}$ は一点に可縮である．よって $\forall n \geq 1$ に対して $H^{-n}\big(F(M)\big) = 0$ であり F は非輪状．

一方，Künneth 公式より

$$\begin{aligned} H^{-n}\big(S_\bullet(X) \otimes_R S_\bullet(Y)\big) &\cong \left(\bigoplus_{p+q=n} H^{-p}\big(S_\bullet(X)\big) \otimes_R H^{-q}\big(S_\bullet(Y)\big) \right) \\ &\quad \oplus \left(\bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^R\big(H^{-p}\big(S_\bullet(X)\big),\, H^{-q}\big(S_\bullet(Y)\big)\big) \right) \end{aligned}$$

がわかるが，$\Delta^p \cong D^p$ より $\forall n \geq 1$ に対して右辺は 0 となり，F' が非輪状であることがわかった．

(F) $S_q(X \times Y)$ は $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}^2}\big((\Delta^q,\, \Delta^q),\, (X,\, Y)\big)$ を基底にもち，$S_\bullet(X) \otimes_R S_\bullet(Y) = \bigoplus_{p+q=n} S_p(X) \otimes_R S_q(Y)$ は $\coprod_{p+q=n} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}^2}\big((\Delta^p,\, \Delta^q),\, (X,\, Y)\big)$ を基底に持つ．i.e. $F,\, F'$ はどちらも自由である．

以上より非輪状モデル定理を使うことができて所望の自然変換 $A\colon F \longrightarrow F', B\colon F' \longrightarrow F$ の存在と，自然なチェイン・ホモトピックを除いた一意性が言えた．

同型 (5.1.1) は命題??より従う． ■

簡単のため，以降では Eilenberg-Zilber の定理における自然変換 $A,\, B$ を一つに固定する．複体をとる段階では積は $A,\, B$ に依存するが，命題??よりホモロジー・コホモロジーをとってしまえばこの依存性は消えるので問題ない．

5.2 クロス積

5.2.1 ホモロジーのクロス積

定義 5.3: ホモロジーの代数的クロス積

チェイン複体 $C_\bullet$, $D_\bullet$ を与える．自然な写像

$$\times_{\mathrm{alg}}\colon H_p(C_\bullet)\otimes_R H_q(D_\bullet)\longrightarrow H_{p+q}(C_\bullet\otimes D_\bullet)$$

を，well-defined な対応

$$[z]\otimes[w]\longmapsto[z\otimes w]$$

を線型に拡張することによって定義し[a]，ホモロジーの**代数的クロス積**と呼ぶ．$\times_{\mathrm{alg}}([z]\otimes[w])=[z\otimes w]$ のことを $[z]\times_{\mathrm{alg}}[w]$ と書く．

[a] [-] はホモロジー類をとることを意味する．

<u>証明</u> 複体 $C_\bullet$, $D_\bullet$ の射をそれぞれ $\partial_\bullet$, $\partial'_\bullet$ と書き，複体のテンソル積の射を $\delta_\bullet$ と書く．$\forall z\in\operatorname{Ker}\partial_p$, $\forall w\in\operatorname{Ker}\partial_q$ および $\forall\bar z\in C_{p+1}$, $\forall\bar w\in D_{q+1}$ に対して，

$$\begin{aligned}
&(z+\partial_{p+1}\bar z)\otimes(w+\partial'_{q+1}\bar w)-z\otimes w=z\otimes\partial'_{q+1}\bar w+\partial_{p+1}\bar z\otimes w+\partial_{p+1}\bar z\otimes\partial'_{q+1}\bar w\\
&=(-1)^p\big(\partial_p z\otimes\bar w+(-1)^p z\otimes\partial'_{q+1}\bar w\big)-(-1)^p\cancel{\partial_p z}\otimes\bar w\\
&\quad+\big(\partial_{p+1}\bar z\otimes w+(-1)^{p+1}\bar z\otimes\partial'_q w\big)-(-1)^{p+1}\bar z\otimes\cancel{\partial'_q w}\\
&\quad+\big(\partial_{p+1}\bar z\otimes\partial'_{q+1}\bar w+(-1)^{p+1}\bar z\otimes\partial'_q\partial'_{q+1}\bar w\big)\\
&=\delta_{p+q}\big((-1)^p z\otimes\bar w+\bar z\otimes w+\bar z\otimes\bar w\big)\in\operatorname{Im}\delta_{p+q}
\end{aligned}$$

より[*3] $[z]\times_{\mathrm{alg}}[w]$ は代表元の取り方によらず，$\times_{\mathrm{alg}}$ は well-defined である． ■

位相空間 $X, Y\in\mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ を与える．定義 5.3 より，特異チェイン複体の上に well-defined な写像

$$\times_{\mathrm{alg}}\colon H_p\big(S_\bullet(X)\big)\otimes_R H_q\big(S_\bullet(X)\big)\longrightarrow H_{p+q}\big(S_\bullet(X)\otimes_R S_\bullet(Y)\big)$$

がある．一方，Eilenberg-Zilber の定理より，B の取り方によらない同型

$$B_*\colon H_*\big(S_\bullet(X)\otimes_R S_\bullet(Y)\big)\xrightarrow{\cong}H_*\big(S_\bullet(X\times Y)\big)$$

がある（記号は記法 (5.0.1) の通り）．

[*3] $\partial_p z=0$, $\partial'_q w=0$ に注意．

定義 5.4: ホモロジーのクロス積

合成

$$\times := B_{p+q} \circ \times_{\mathrm{alg}} \colon H_p\bigl(S_\bullet(X)\bigr) \otimes_R H_q\bigl(S_\bullet(Y)\bigr) \longrightarrow H_{p+q}\bigl(S_\bullet(X \times Y)\bigr)$$

のことを，ホモロジーの**クロス積**と呼び，$\forall \alpha \in H_p\bigl(S_\bullet(X)\bigr)$，$\forall \beta \in H_p\bigl(S_\bullet(Y)\bigr)$ に対して $\alpha \times \beta := \times(\alpha \otimes \beta)$ と書く．

定理 5.3: Künneth 公式

R を単項イデアル整域とする．このとき $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して分裂する短完全列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow & \bigoplus_{p+q=n} H_p\bigl(S_\bullet(X)\bigr) \otimes_R H_q\bigl(S_\bullet(Y)\bigr) \\ & \xrightarrow{\times} H_n\bigl(S_\bullet(X \times Y)\bigr) \\ & \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^R\Bigl(H_p\bigl(S_\bullet(X)\bigr),\, H_q\bigl(S_\bullet(Y)\bigr)\Bigr) \end{aligned}$$

が存在する．

証明 自由加群からなる複体 $S_\bullet(X)$, $S_\bullet(Y)$ に対して Künneth 公式を適用してから Eilenberg-Zilber の定理を使う． ■

系 5.4: 体係数ホモロジーのクロス積

R が体ならば，ホモロジーのクロス積は次の同型を誘導する：

$$H_n\bigl(S_\bullet(X \times Y)\bigr) = \bigoplus_{p+q=n} H_p\bigl(S_\bullet(X)\bigr) \otimes_R H_q\bigl(S_\bullet(Y)\bigr)$$

証明 R が体ならば Tor_1^R は 0 になる（命題??および Tor の定義を参照）． ■

5.2.2 コホモロジーのクロス積

環 R 上のチェイン複体 $C_\bullet$ の双対チェイン複体を

$$C^\bullet := \mathrm{Hom}_R\left(C_\bullet,\, R\right)$$

で定義する．

定義 5.5: コホモロジーの代数的クロス積

チェイン複体 $C_\bullet$, $D_\bullet$ を与える．自然な写像

$$\times^{\mathrm{alg}} \colon H^p(C^\bullet) \otimes_R H^q(D^\bullet) \longrightarrow H^{p+q}\big((C_\bullet \otimes_R D_\bullet)^\bullet\big)$$

を，well-defined な対応

$$[\alpha] \otimes [\beta] \longmapsto \left[\sum_{i,\, |z_i|+|w_i|=p+q} z_i \otimes w_i \longmapsto \sum_{i,\, |z_i|+|w_i|=p+q} \alpha(z_i) \cdot \beta(w_i) \right]$$

を[a]線型に拡張することで定め，コホモロジーの**代数的クロス積**と呼ぶ．ただし α と z_i の次数が異なる場合は $\alpha(z_i) = 0$ で，β と w_i についても同様である．

[a] [-] はコホモロジー類をとることを意味する．

<u>証明</u> 複体 $C^\bullet$, $D^\bullet$ の射をそれぞれ $\partial^\bullet$, $\partial'^\bullet$ と書き，複体のテンソル積の射を $\delta^\bullet$ と書く．$\forall \alpha \in \operatorname{Ker} \partial^p$, $\forall \beta \in \operatorname{Ker} \partial'^q$ および $\forall \bar{\alpha} \in C^{p-1}$, $\forall \bar{\beta} \in D^{q-1}$ をとると

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,\, |z_i|+|w_i|=p+q} (\alpha + \partial^{p-1}\bar{\alpha})(z_i) \cdot (\beta + \partial'^{q-1}\bar{\beta})(w_i) - \sum_{i,\, |z_i|+|w_i|=p+q} \alpha(z_i) \cdot \beta(w_i) \\
&= \sum_{i,\, |z_i|+|w_i|=p+q} \big(\alpha(z_i) \cdot \bar{\beta}(\partial'_q w_i) + \bar{\alpha}(\partial_p z_i) \cdot \beta(w_i) + \bar{\alpha}(\partial_p z_i) \cdot \bar{\beta}(\partial'_q w_i)\big) \\
&= \sum_{i,\, (|z_i|,\, |w_i|)=(p,\, q)} \Big((-1)^{|z_i|}\big(\alpha(\partial_p z_i) \cdot \bar{\beta}(w_i) + (-1)^{|z_i|}\alpha(z_i) \cdot \bar{\alpha}(\partial'_q w_i)\big) \\
&\qquad + \big(\bar{\alpha}(\partial_p z_i) \cdot \beta(w_i) + (-1)^{|z_i|}\bar{\alpha}(z_i) \cdot \beta(\partial'_q w_i)\big) \\
&\qquad + \big(\bar{\alpha}(\partial_p z_i) \cdot \bar{\beta}(\partial'_q w_i) + (-1)^{|z_i|}\bar{\alpha}(z_i) \cdot \bar{\beta}(\partial'_{q-1}\partial'_q w_i)\big)\Big) \\
&= \sum_i \Big((-1)^{|z_i|}(\alpha \otimes \bar{\beta})\big(\delta_{p+q}(z_i \otimes w_i)\big) \\
&\qquad + (\bar{\alpha} \otimes \beta)\big(\delta_{p+q}(z_i \otimes w_i)\big) \\
&\qquad + (\bar{\alpha} \otimes \bar{\beta})\big(\delta_{p+q}(z_i \otimes \partial'_q w_i)\big)\Big) \\
&= \delta^{p+q-1}\big((-1)^p \alpha \otimes \bar{\beta} + \bar{\alpha} \otimes \beta + \bar{\alpha} \otimes \bar{\beta}\big)\left(\sum_i z_i \otimes w_i\right)
\end{aligned}$$

が成り立つ[*4]ので well-defined である． ■

特異チェイン複体に上述の構成を適用することで

$$\times^{\mathrm{alg}} \colon H^p\big(S_\bullet(X)\big) \otimes_R H^q\big(S_\bullet(X)\big) \longrightarrow H^{p+q}\Big(\big(S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(Y)\big)^\bullet\Big)$$

を得る．一方，Eilenberg-Zilber の定理からチェイン・ホモトピー同値写像

$$A \colon S_\bullet(X \times Y) \longrightarrow S_\bullet(X) \otimes_R S_\bullet(Y)$$

[*4] α, β の引数は次数がそれぞれ p, q でなければ 0 になることに注意する．

があるが，これの双対をとると

$$A^*\colon \big(S_\bullet(X)\otimes_R S_\bullet(Y)\big)^* \longrightarrow S^*(X\times Y)$$

になる（記号は (5.0.1)）．さらにコホモロジーを取ることで，A の取り方によらない同型

$$A^*\colon H^\bullet\big(S_\bullet(X)\otimes_R S_\bullet(Y)\big)^\bullet \longrightarrow H^\bullet\big(S^\bullet(X\times Y)\big)$$

を得る（記号は (5.0.2) の通り）．

定義 5.6: コホモロジーのクロス積

合成

$$\times := A^*\circ\times^{\mathrm{alg}}\colon H^p\big(S^\bullet(X)\big)\otimes H^q\big(S^\bullet(Y)\big)\longrightarrow H^{p+q}\big(S^\bullet(X\times Y)\big)$$

のことをコホモロジーの**クロス積**と呼ぶ．

5.3　カップ積とキャップ積

この節では，原則として記法 (5.0.3), (5.0.4) を使う．

対角写像を

$$\Delta\colon X\longrightarrow X\times X,\ x\longmapsto (x,\,x)$$

とおくと $\Delta\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\,X\times X)$ である．このとき記法 (5.0.2) に則って

$$\Delta^\bullet\colon H^\bullet(X\times X)\longrightarrow H^\bullet(X)$$

と略記する．

5.3.1　カップ積と特異コホモロジーの環構造

定義 5.7: カップ積

$\forall a\in H^p(X),\ \forall b\in H^q(X)$ の**カップ積** (cup product) を次のように定義する：

$$\boldsymbol{a}\smile\boldsymbol{b}:=\Delta^{p+q}\big(a\times b\big)\in H^{p+q}(X)$$

つまり，

$$\smile\colon H^p(X)\otimes_R H^q(X)\longrightarrow H^{p+q}(X)$$

となる．バランス写像 $\Phi\colon H^p(X)\times H^q(Y)\longrightarrow H^p(X)\otimes_R H^q(Y)$ を合成することで

$$\smile\colon H^p(X)\times H^q(X)\longrightarrow H^{p+q}(X)$$

と書くこともできる．

補題 5.1: カップ積の基本性質

$\forall (f,\, g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}^2}\big((X',\, Y'),\, (X,\, Y)\big)$ および $\forall a,\, b \in H^\bullet(X)$, $\forall c \in H^\bullet(Y)$ をとる. $\mathrm{pr}_i \colon X \times Y \longrightarrow X_i$ $(i = 1,\, 2)$ を射影とする.

(1) $a \smile b = \Delta^\bullet(a \times b)$
(2) $a \times b = {\mathrm{pr}_X}^\bullet(a) \smile {\mathrm{pr}_Y}^\bullet(b)$
(3) $f^\bullet(a \smile b) = f^\bullet(a) \smile f^\bullet(b)$
(4) $(f \times g)^\bullet(a \times c) = f^\bullet(a) \times g^\bullet(c)$

__証明__ (1)　カップ積の定義.

(4)　Eilenberg-Zilber の定理において $A,\, B$ が自然変換であることから従う.

(3)　$(f \times f) \circ \Delta = \Delta \circ f$ であることと (4) から

$$\begin{aligned} f^\bullet(a) \smile f^\bullet(b) &= \Delta^\bullet(f^\bullet(a) \times g^\bullet(b)) = \big((f \times f) \circ \Delta\big)^\bullet(a \times b) \\ &= (\Delta \circ f)^\bullet(a \times b) = f^\bullet\big(\Delta^\bullet(a \times b)\big) = f^\bullet(a \smile b) \end{aligned}$$

(2)　$(\mathrm{pr}_X \times \mathrm{pr}_Y) \circ \Delta_{X \times Y} = \mathrm{id}_{X \times Y}$ であることと (4)

$$\begin{aligned} {\mathrm{pr}_X}^\bullet(a) \smile {\mathrm{pr}_Y}^\bullet(b) &= \Delta_{X \times Y}^\bullet\big({\mathrm{pr}_X}^\bullet(a) \times {\mathrm{pr}_Y}^\bullet(c)\big) \\ &= \Delta_{X \times Y}^\bullet\big((\mathrm{pr}_X \times \mathrm{pr}_Y)^\bullet(a \times c)\big) \\ &= \big((\mathrm{pr}_X \times \mathrm{pr}_Y) \circ \Delta_{X \times Y}\big)^\bullet(a \times c) \\ &= \mathrm{id}_{X \times Y}^\bullet(a \times c) = a \times c \end{aligned}$$

■

定義 5.8: 対角近似

$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ に対して，チェイン複体の射

$$\tau \colon S_\bullet(X) \longrightarrow S_\bullet(X) \otimes_R S_\bullet(X)$$

は以下の条件を充たすとき**対角近似** (diagonal approximation) と呼ばれる：

(1) 任意の 0-単体 σ に対して $\tau(\sigma) = \sigma \otimes \sigma$
(2) τ は連続写像に関して自然である. i.e. $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\, Y)$ に対して図式 5.1 が可換になる

$$\begin{tikzcd} S_\bullet(X) \arrow[r, "S_\bullet(f)"] \arrow[d, "\tau"] & S_\bullet(Y) \arrow[d, "\tau"] \\ S_\bullet(X) \otimes_R S_\bullet(X) \arrow[r] & S_\bullet(Y) \otimes_R S_\bullet(Y) \end{tikzcd}$$

図 5.1: 対角近似の自然性

対角近似と Eilenberg-Zilber map は，片方が与えられるともう一方も定まる．従って，状況に応じて便利な方を使えば良い.

補題 5.2: Eilenberg-Zilber map と対角近似の関係

$A\colon S_\bullet(X \times Y) \xrightarrow{A} S_\bullet(X) \otimes_R S_\bullet(X)$ を与えると，対応する対角近似 $\tau\colon S_\bullet(X) \longrightarrow S_\bullet(X) \otimes_R S_\bullet(X)$ が

$$\tau = A \circ \Delta_\bullet$$

によって定まる．
逆に，対角近似 τ が与えられると対応する A が

$$A = (\mathrm{pr}_X \otimes \mathrm{pr}_Y) \circ \tau$$

によって定まる．

証明 関手 $S_\bullet(\text{-})\colon \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{C}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ は自由で，関手 $S_\bullet(\text{-}) \otimes_R S_\bullet(\text{-})$ は非輪状である．従って非輪状モデル定理より対角近似 τ が自然なチェイン・ホモトピーを除いて一意に定まる．特に，Eilenberg-Zilber map $A\colon S_\bullet(X \times Y) \xrightarrow{A} S_\bullet(X) \otimes_R S_\bullet(X)$ に対して $\tau = A \circ \Delta_\bullet$ は対角近似である．[*5]

逆に $(\mathrm{pr}_X \otimes \mathrm{pr}_Y) \circ \tau$ は関手 $F\colon (X,\, Y) \longmapsto S_\bullet(X \times Y)$，$F'\colon (X,\, Y) \longmapsto S_\bullet(X) \otimes_R S_\bullet(Y)$ の間の自然変換となる．そして定理 5.2 より，これは Eilenberg-Zilber map と自然にホモトピックである． ■

定理 5.5: 特異コホモロジーの環構造

全ての特異 0 単体を $1 \in R$ に移すコサイクルのコホモロジー類を $1 \in H^0(X)$ と書く．$\forall a,\, b,\, c \in H^\bullet(X)$ に対して以下が成り立つ：

(1) $1 \smile a = a = a \smile 1$
(2) $(a \smile b) \smile c = a \smile (b \smile c)$
(3) $a \smile b = (-1)^{|a||b|} b \smile a$

従って，組 $\bigl(H^\bullet(X),\, +,\, \smile\bigr)$ は次数付き可換環になる．

証明 (1)

■

5.3.2 キャップ積と特異ホモロジーの加群構造

Kronecker ペアリング

$$\langle\,,\,\rangle : S^\bullet(X) \times S_\bullet(X) \longrightarrow R$$

[*5] 従ってカップ積の定義を

$$a \smile b = \tau^\bullet(a \times^{\mathrm{alg}} b)$$

とすることもできる．

は，$a \in S^q(X)$, $z \in S_p(X)$ に対して

$$\langle a,\, z\rangle := \begin{cases} a(z), & p = q \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

として定めた．これを拡張して部分的な evaluation

$$E\colon S^\bullet X \otimes_R S_\bullet X \otimes_R S_\bullet X \longrightarrow S_\bullet X$$

を，次数が合っている時に

$$E(a \otimes z \otimes w) := a(w) \otimes z$$

として定める（定義域の一般の元に対してはこれを線型に拡張する）．

定義 5.9: コチェインのキャップ積

$\forall a \in S^q(X)$, $\forall z \in S_{p+q}(X)$ に対して**キャップ積** (cap product) を，Eilenberg-Zilber の定理の A を用いて

$$\frown\colon S^q(X) \times S_{p+q}(X) \longrightarrow S_q(X),\ (a,\, z) \longmapsto E\bigl(a \otimes (A \circ \Delta_\bullet)(z)\bigr)$$

または，対角近似 τ を用いて

$$a \frown z = E\bigl(a \otimes \tau(z)\bigr)$$

としてもよい．

補題 5.3:

特異ホモロジー，コホモロジーの境界写像をそれぞれ $\partial_\bullet$, $\delta^\bullet$ と書く．$\forall \alpha \in S^q(X), \forall z \in S_{p+q}(X)$ に対して以下が成り立つ：

$$\partial_p(a \frown z) = (-1)^p \delta^q \alpha \frown z + \alpha \frown \partial_{p+q} z$$

<u>証明</u> $\tau(z) = \sum_{i,\ |x_i|+|y_i|=p+q} x_i \otimes y_i$ と書ける．このとき

$$\begin{aligned} \theta_p(\alpha \frown z) &= \partial_p \left(\sum_{i,\ |y_i|=q} \alpha(y_i) \cdot x_i \right) = \sum_{i,\ |y_i|=q} \alpha(y_i) \cdot \partial_p x_i, \\ \delta^q \alpha \frown z &= \sum_i \delta^p \alpha(y_i) \cdot x_i = \sum_{i,\ |y_i|=q+1} \alpha(\partial_{q+1} y_i) \cdot x_i \end{aligned}$$

なので，τ がチェイン複体の射であることに注意すると

$$\begin{aligned} \alpha \frown \partial_{p+q} z &= E(\alpha \otimes \tau(\partial_{p+q} z)) = E(\alpha \otimes \partial_{p+q}(\tau(z))) \\ &= E\left(\alpha \otimes \left(\sum_{i,\ |x_i|+|y_i|=p+q} \partial_{|x_i|} x_i \otimes y_i + \sum_{i,\ |x_i|+|y_i|=p+q} (-1)^{|x_i|} x_i \otimes \partial_{|y_i|} y_i \right)\right) \\ &= \sum_{i,\ |y_i|=q} \alpha(y_i) \cdot \partial_p x_i + \sum_{i,\ |y_i|=q+1} (-1)^{p-1} \alpha(\partial_{q+1} y_i) \cdot x_i \\ &= \partial_p(a \frown z) + (-1)^{p-1} \delta^q \alpha \frown z \end{aligned}$$

となって示された． ■

補題 5.3 により，次の定義が well-defined になる．

定義 5.10: キャップ積

キャップ積 (cap product) を次のように定義する：

$$\begin{aligned}\frown\colon H^q(X) \times H_{p+q}(X) &\longrightarrow H_p(X), \\ ([\alpha],\, [z]) &\longmapsto [\alpha \frown z]\end{aligned}$$

定理 5.6: 特異ホモロジーの加群構造

$\forall a,\, b \in H^\bullet(X),\ \forall z \in H_\bullet(X)$ に対して以下が成り立つ：

(1) $\langle a,\, b \frown z\rangle = \langle a \smile b,\, z\rangle$
(2) $a \frown (b \frown z) = (a \smile b) \frown z$

(2) より，組 $\big(H_\bullet(X),\, +,\, \frown\big)$ は左 $H^\bullet(X)$ 加群になる．

__証明__ $a = [\alpha],\, b = [\beta]$ とおき，$\tau(z) = \sum_{i,\, |x_i|+|y_i|=|z|} x_i \otimes y_i$ とおく．

(1) コチェインのキャップ積の定義より

$$\begin{aligned}\langle a,\, b \frown z\rangle &= \alpha\left(E\left(\beta \otimes \sum_{i,\, |x_i|+|y_i|=|z|} x_i \otimes y_i\right)\right) \\ &= \alpha \sum_{i,\, |x_i|+|y_i|=|z|} x_i \cdot \beta(y_i) \\ &= \sum_{i,\, |x_i|+|y_i|=|z|} \alpha(x_i)\beta(y_i).\end{aligned}$$

一方，コホモロジーの代数的クロス積の定義より

$$\begin{aligned}\langle a \smile b,\, z\rangle &= \big(\tau^\bullet(a \times^{\mathrm{alg}} b)\big)(z) \\ &= (a \times^{\mathrm{alg}} b)\big(\tau(z)\big) \\ &= \sum_{i,\, |x_i|+|y_i|=|z|} \alpha(x_i)\beta(y_i)\end{aligned}$$

が成り立つ．よって $\langle a,\, b \frown z\rangle = \langle a \smile b,\, z\rangle$ が言えた．

(2) $\forall c \in H^{|z|-|b|-|a|}$ を与える．このとき $\smile$ の結合則より

$$\langle c,\, a \frown (b \frown z)\rangle = \langle c \smile a,\, b \frown z\rangle = \langle c \smile (a \smile b),\, z\rangle = \langle c,\, (a \smile b) \frown z\rangle$$

が成り立ち，証明が完了する．

■

5.3.3　スラント積

定義 5.11: コチェインのスラント積

Eilenberg-Zilber の定理における写像 $A\colon S_\bullet(X \times Y) \longrightarrow S_\bullet(X) \otimes_R S_\bullet(Y)$ を用いて，コチェインの**スラント積** (slant product) を次のように定義する：

$$\backslash\colon S^q(Y) \times S_{p+q}(X \times Y) \longrightarrow S_p(X),\ (\alpha,\, z) \longmapsto E\bigl(\alpha \otimes A(z)\bigr)$$

定義 5.12: スラント積

スラント積 (slant product) を次のように定義する：

$$\begin{aligned}\backslash\colon H^q(Y) \times H_{p+q}(X \times Y) &\longrightarrow H_p(X),\\ ([\alpha],\, [z]) &\longmapsto [\alpha\backslash z]\end{aligned}$$

対応関係は

- カップ積 $\leftrightarrow$ クロス積
- キャップ積 $\leftrightarrow$ **スラント積**

のようになっている．例えば定理 5.6-(1) と対応して

$$\langle a,\, b\backslash z\rangle = \langle a \times b,\, z\rangle$$

が成り立つ．

5.4　Alexander-Whitney 対角近似

5.5　空間対のカップとキャップ

$(X,\, A),\, (Y,\, B)$ を空間対とする．標準的射影

$$S_\bullet X \otimes_R S_\bullet Y \twoheadrightarrow \frac{S_\bullet X}{S_\bullet A} \otimes_R \frac{S_\bullet Y}{S_\bullet B}$$

の核は $S_\bullet A \otimes_R S_\bullet Y + S_\bullet X \otimes_R S_\bullet B$ なので準同型定理から自然な同型

$$\frac{S_\bullet X}{S_\bullet A} \otimes_R \frac{S_\bullet Y}{S_\bullet B} \cong \frac{S_\bullet X \otimes_R S_\bullet Y}{S_\bullet A \otimes_R S_\bullet Y + S_\bullet X \otimes_R S_\bullet B}$$

が従う．$X = Y$ とすると，対角近似 $\tau\colon S_\bullet X \longrightarrow S_\bullet(X) \otimes_R S_\bullet(X)$ は $\tau(S_\bullet A) \subset S_\bullet A \otimes_R S_\bullet A,\ \tau(S_\bullet B) \subset S_\bullet B \otimes_R S_\bullet B$ を充たす．従って合成

$$S_\bullet X \xrightarrow{\tau} S_\bullet X \otimes_R S_\bullet X \twoheadrightarrow \frac{S_\bullet X \otimes_R S_\bullet X}{S_\bullet A \otimes_R S_\bullet X + S_\bullet X \otimes_R S_\bullet B}$$

の核は $S_\bullet A + S_\bullet B$ だから，準同型

$$\overline{\tau}\colon \frac{S_\bullet X}{S_\bullet A + S_\bullet B} \longrightarrow \frac{S_\bullet X \otimes_R S_\bullet X}{S_\bullet A \otimes_R S_\bullet X + S_\bullet X \otimes_R S_\bullet B}$$

が誘導される．

コホモロジーの代数的クロス積と $\overline{\tau}^\bullet$ の合成

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_R\left(\frac{S_\bullet X}{S_\bullet A},\, R\right) \otimes_R \mathrm{Hom}_R\left(\frac{S_\bullet X}{S_\bullet B},\, R\right) &\xrightarrow{\times^{\mathrm{alg}}} \mathrm{Hom}_R\left(\frac{S_\bullet X}{S_\bullet A} \otimes_R \frac{S_\bullet Y}{S_\bullet B},\, R\right) \\
&\cong \mathrm{Hom}_R\left(\frac{S_\bullet X \otimes_R S_\bullet X}{S_\bullet A \otimes_R S_\bullet X + S_\bullet X \otimes_R S_\bullet B},\, R\right) \\
&\xrightarrow{\overline{\tau}^\bullet} \mathrm{Hom}_R\left(\frac{S_\bullet X}{S_\bullet A + S_\bullet B},\, R\right)
\end{aligned}$$

のコホモロジーをとることでカップ積

$$H^p(X,\, A) \times H^q(X,\, B) \longrightarrow H^{p+q}\left(\mathrm{Hom}_R\left(\frac{S_\bullet X}{S_\bullet A + S_\bullet B},\, R\right)\right) \tag{5.5.1}$$

を誘導する．

定義 5.13: 切除対

位相空間 X と，その部分空間 $A,\, B \subset X$ を与える．標準的包含

$$S_\bullet(A) + S_\bullet(B) \hookrightarrow S_\bullet(A \cup B)$$

がチェイン・ホモトピー同値写像であるとき，部分空間の対 $\{A,\, B\}$ を**切除対** (excisive pair) と呼ぶ．

チェイン・ホモトピーは加法的関手によって保存されるから，切除対 $\{A,\, B\}$ に対して

$$\mathrm{Hom}_R\left(S_\bullet(A \cup B),\, R\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\left(S_\bullet(A) + S_\bullet(B),\, R\right)$$

もまたチェイン・ホモトピー同値写像である．従って命題??より同型

$$H^q(A \cup B) \cong H^q\Big(\mathrm{Hom}_R\left(S_\bullet(A) + S_\bullet(B),\, R\right)\Big) \tag{5.5.2}$$

を誘導する．

切除対 $\{A,\, B\}$ に対して，横の 2 行が完全な図式

$$0 \longrightarrow S_\bullet A + S_\bullet B \longrightarrow S_\bullet X \longrightarrow \frac{S_\bullet X}{S_\bullet A + S_\bullet B} \longrightarrow 0$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_\bullet(A) + S_\bullet(B) \arrow[r] \arrow[d, hook] & S_\bullet X \arrow[r] \arrow[d, "1"] & \frac{S_\bullet(X)}{S_\bullet(A)+S_\bullet(B)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 & (\mathrm{exact}) \\
0 \arrow[r] & S_\bullet(A \cup B) \arrow[r] & S_\bullet X \arrow[r] & \frac{S_\bullet(X)}{S_\bullet(A \cup B)} \arrow[r] & 0 & (\mathrm{exact})
\end{tikzcd}$$

がある．これのコホモロジー長完全列をとると，同型 (5.5.2) により可換図式

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots \longrightarrow & H^q(S_\bullet(A)+S_\bullet(B))^\bullet & \longrightarrow & H^q(X) & \longrightarrow & H^q\left(\frac{S_\bullet(X)}{S_\bullet(A)+S_\bullet(B)}\right)^\bullet & \xrightarrow{\delta^q} & H^{q+1}(S_\bullet(A)+S_\bullet(B))^\bullet & \longrightarrow & H^{q+1}(X) & \longrightarrow \cdots \\
& \downarrow\cong & & \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow\cong & & \downarrow = & \\
\cdots \longrightarrow & H^q(A\cup B) & \longrightarrow & H^q(X) & \longrightarrow & H^q(X,\, A\cup B) & \xrightarrow{\delta'^q} & H^{q+1}(A\cup B) & \longrightarrow & H^{q+1}(X) & \longrightarrow \cdots
\end{array}
$$

が得られる．5 項補題により，赤色をつけた写像

$$H^q\left(\mathrm{Hom}_R\left(\frac{S_\bullet(X)}{S_\bullet(A)+S_\bullet(B)},\, R\right)\right) \longrightarrow H^q(X,\, A\cup B)$$

が同型であることがわかる．従って式 (5.5.1) から次の定理が言える：

定理 5.7: 空間対のカップ積

$\{A,\, B\}$ が切除対ならば，写像

$$\smile\colon H^p(X,\, A)\times H^q(X,\, B) \longrightarrow H^{p+q}(X,\, A\cup B)$$

は well-defined である．

!

- $\{A,\, A\}$ は常に切除対である．従って $H^\bullet(X,\, A)$ は空間対のカップ積によって環になる．
- $\{A,\, \emptyset\}$ も常に切除対である．従って

$$\smile\colon H^p(X,\, A)\times H^q(X) \longrightarrow H^{p+q}(X,\, A)$$

は常に well-defined.

キャップ積に関しても同様の定理が成り立つ：

定理 5.8: 空間対のキャップ積

$\{A,\, B\}$ が切除対ならば，写像

$$\frown\colon H^q(X,\, A)\times H_{p+q}(X,\, A\cup B) \longrightarrow H_p(X,\, B)$$

は well-defined である．

5.6 Poincarë 双対

定理 5.9: Poincarë 双対定理

M をコンパクトな向き付け可能な n 次元位相多様体とする．
このとき，左 R 加群 π に対して以下の同型がある：

$$\frown [M]\colon H^p(M;\pi) \xrightarrow{\cong} H_{n-p}(M;\pi)$$

ただし，$[M]$ は M の基本類である．

<u>証明</u>　[?, p.276] や [?, p.241] などを参照． ■