第 3 章

ルート系

この章において，特に断らない限り体 $\mathbb{K}$ は代数閉体[*1]で，かつ $\operatorname{char}\mathbb{K}=0$ であるとする．また，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は常に有限次元であるとする．

3.1　公理的方法

Euclid 空間 (Euclid space) とは，

- 体 $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間 $\mathbb{E}$
- 対称かつ正定値な双線型形式 $(\ ,\ )_{\mathbb{E}}\colon \mathbb{E}\times\mathbb{E}\longrightarrow\mathbb{R}$

の組 $\bigl(\mathbb{E},\,(\ ,\ )_{\mathbb{E}}\bigr)$ のことを言う[*2]．Euclid 空間 $\bigl(\mathbb{E},\,(\ ,\ )_{\mathbb{E}}\bigr)$ の任意の元 $\alpha\in\mathbb{E}$ に対して，

- **鏡映面** (reflecting hyperplane)[*3]

$$\boldsymbol{P_\alpha} \coloneqq \left\{\,\beta\in\mathbb{E}\;\middle|\;(\beta,\alpha)_{\mathbb{E}}=0\,\right\} = (\mathbb{R}\alpha)^{\perp}$$

- 鏡映面 P_α に関する**鏡映** (reflecting)

$$\boldsymbol{\sigma_\alpha}\colon \mathbb{E}\longrightarrow\mathbb{E},\ \beta\longmapsto\beta-2\frac{(\beta,\alpha)_{\mathbb{E}}}{(\alpha,\alpha)_{\mathbb{E}}}\alpha$$

を考える．

> !
>
> $2\frac{(\beta,\,\alpha)}{(\alpha,\,\alpha)}\in\mathbb{R}$ が頻繁に登場するので，
>
> $$[\![\beta,\alpha]\!] \coloneqq 2\frac{(\beta,\,\alpha)_{\mathbb{E}}}{(\alpha,\,\alpha)_{\mathbb{E}}}$$
>
> と略記することにする．写像 $[\![\ ,\ ]\!]\colon\mathbb{E}\times\mathbb{E}\longrightarrow\mathbb{R}$ は記号的には内積のように見えるかもしれないが，あくまで第一引数についてのみ線型なのであって，対称でも双線型でもないことに注意．

[*1] つまり，定数でない任意の 1 変数多項式 $f(x)\in\mathbb{K}[x]$ に対してある $\alpha\in\mathbb{K}$ が存在して $f(\alpha)=0$ を充たす．

[*2] Euclid 空間と言って位相空間のことを指す場合があるが，そのときは双線型形式 $(\ ,\ )_{\mathbb{E}}$ を使って $\mathbb{E}$ 上の距離関数を $d_{\mathbb{E}}\colon\mathbb{E}\times\mathbb{E}\longrightarrow\mathbb{R}_{\geq 0},\ (x,\,y)\longmapsto(x-y,x-y)_{\mathbb{E}}$ と定義し（これは通常 **Euclid 距離**と呼ばれる），$\mathbb{E}$ に $d_{\mathbb{E}}$ による距離位相を入れる．

[*3] 余次元 1 の部分 $\mathbb{R}$-ベクトル空間．最右辺は対称かつ非退化な双線型形式 $(\ ,\ )_{\mathbb{E}}$ による直交補空間の意味である．

σ_α は $\mathbb{R}$-線型でかつ $\forall \beta \in \mathbb{E}$ に対して

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha \circ \sigma_\alpha(\beta) &= \bigl(\beta - [\![\beta, \alpha]\!]\alpha\bigr) - \Bigl[\!\!\Bigl[\bigl(\beta - [\![\beta, \alpha]\!]\alpha\bigr), \alpha\Bigr]\!\!\Bigr]\alpha \\ &= \beta - [\![\beta, \alpha]\!]\alpha - [\![\beta, \alpha]\!]\alpha + [\![\beta, \alpha]\!][\![\alpha, \alpha]\!]\alpha \\ &= \beta - 2[\![\beta, \alpha]\!]\alpha + 2[\![\beta, \alpha]\!]\alpha \\ &= \beta\end{aligned}$$

を充たす，i.e. $\sigma_\alpha^{-1} = \sigma_\alpha$ なので，$\sigma_\alpha \in \mathrm{GL}(\mathbb{E})$ である．

補題 3.1.1: 鏡映の特徴付け

Euclid 空間 $\mathbb{E}$ と，

- $\mathbb{E} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\, \Phi$
- $\forall \alpha \in \Phi,\ \sigma_\alpha(\Phi) = \Phi$

を充たす $\mathbb{E}$ の有限部分集合 $\Phi \subset \mathbb{E}$ を与える．
このとき，$\sigma \in \mathrm{GL}(\mathbb{E})$ が

(RF-1) $\sigma(\Phi) = \Phi$
(RF-2) 余次元 1 の部分ベクトル空間 $P \subset \mathbb{R}$ が存在して，$\forall \beta \in P,\ \sigma(\beta) = \beta$ が成り立つ
(RF-3) $\exists \alpha \in \Phi \setminus \{0\},\ \sigma(\alpha) = -\alpha$

の 3 条件を満たすならば $\sigma = \sigma_\alpha$（かつ $P = P_\alpha$）である．

証明 $\tau := \sigma \circ \sigma_\alpha\, (= \sigma \circ \sigma_\alpha^{-1})$ とおき，$\tau = \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$ であることを示す．
(RF-1) より $\tau(\Phi) = \Phi$，$\tau(\alpha) = \alpha$ が成り立つので $\tau|_{\mathbb{R}\alpha} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}\alpha}$ である．さらに $\mathbb{R}$-線型写像

$$\overline{\tau} \colon \mathbb{E}/\mathbb{R}\alpha \longrightarrow \mathbb{E}/\mathbb{R}\alpha,\ \beta + \mathbb{R}\alpha \longmapsto \tau(\beta) + \mathbb{R}\alpha$$

は well-defined だが，**(RF-2)** より $\overline{\tau} = \mathrm{id}_{\mathbb{E}/\mathbb{R}\alpha}$ である．よって τ の固有値は全て 1 であり，τ の最小多項式 $f(t)$ は $(t-1)^{\dim \mathbb{E}}$ の約元である．一方，Φ は有限集合なので，$\forall \beta \in \Phi$ に対してある $k_\beta \in \mathbb{N}$ が存在して $\tau^{k_\beta}(\beta) = \beta$ を充たす．ここで $k := \max\{k_\beta \mid \beta \in \Phi\}$ とおくと，**(RF-1)** より $\tau^k = \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$ が言える．よって $f(t)$ は $t^k - 1$ の約元でもある．従って，$f(t) = \gcd\bigl((t-1)^{\dim \mathbb{E}}, t^k - 1\bigr) = t - 1$ だと分かった．故に $\tau = \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$ である． ■

3.1.1 ルート系

前章で与えたルート系の公理を再掲するところから始めよう：

公理 3.1.1: ルート系

- 有限次元 Euclid 空間 $\bigl(\mathbb{E}, (\ ,\ )_{\mathbb{E}}\bigr)$
- $\mathbb{E}$ の部分集合 $\Phi \subset \mathbb{E}$

の組 $(\mathbb{E}, \Phi)$ が**ルート系** (root system) であるとは，以下の条件を充たすことを言う：

(Root-1) Φ は 0 を含まない有限集合で，かつ $\mathbb{E} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \Phi$ を充たす．
(Root-2) $\lambda\alpha \in \Phi \implies \lambda = \pm 1$
(Root-3) $\alpha, \beta \in \Phi \implies \sigma_\alpha(\beta) \in \Phi$
(Root-4) $\alpha, \beta \in \Phi \implies [\![\beta, \alpha]\!] \in \mathbb{Z}$

Φ の元のことを**ルート** (root) と呼ぶ．

! 本資料の以降では，文脈上直積集合の要素との混同が起きる恐れがないときは Euclid 空間 $(\mathbb{E}, (\ ,\ )_{\mathbb{E}})$ に備わっている双線型形式を $(\ ,\ )_{\mathbb{E}}$ と書く代わりに $(\ ,\ )$ と略記する．

ルート系と言ったときに，**(Root-2)** を除外する場合がある．その場合我々が採用した定義に該当するものは**簡約ルート系** (reduced root system) と呼ばれる．

定義 3.1.1:

ルート系 $(\mathbb{E}, \Phi)$ の**ランク** (rank) とは，$\dim \mathbb{E} \in \mathbb{N}$ のことを言う．

公理 **(Root-4)** は，任意のルートの 2 つ組の配位に非常に強い制約を与える．というのも，2 つのベクトルのなす角の定義を思い出すと，$\forall \alpha, \beta \in \Phi$ に対してある $\theta \in [0, \pi]$ が存在して

$$[\![\beta, \alpha]\!] = 2\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} \cos\theta \in \mathbb{Z} \tag{3.1.1}$$

$$[\![\alpha, \beta]\!][\![\beta, \alpha]\!] = 4\cos^2\theta \in \mathbb{Z} \tag{3.1.2}$$

が成り立たねばならないのである．$[\![\alpha, \beta]\!], [\![\beta, \alpha]\!] \in \mathbb{Z}$ かつ $0 \leq \cos^2\theta \leq 1$ なので，(3.1.2) から

$$\cos^2\theta = 0,\ \frac{(\pm1)\cdot(\pm1)}{4},\ \frac{(\pm1)\cdot(\pm2)}{4},\ \frac{(\pm1)\cdot(\pm3)}{4},\ \frac{(\pm1)\cdot(\pm4)}{4},\ \frac{(\pm2)\cdot(\pm2)}{4} \quad (\text{複号同順})$$

しかあり得ないとわかる．**(Root-2)** も考慮すると，$\|\alpha\| \leq \|\beta\|$ ならば[*4]あり得る可能性は以下の通り[*5]：

表 3.1: 可能なルートの 2 つ組 α, β

$[\![\alpha, \beta]\!]$	$[\![\beta, \alpha]\!]$	θ	$\|\beta\|^2/\|\alpha\|^2$
0	0	$\frac{\pi}{2}$	-
1	1	$\frac{\pi}{3}$	1
-1	-1	$\frac{2\pi}{3}$	1
1	2	$\frac{\pi}{4}$	2
-1	-2	$\frac{3\pi}{4}$	2
1	3	$\frac{\pi}{6}$	3
-1	-3	$\frac{5\pi}{6}$	3
2	2	0	1
-2	-2	π	1

[*4] このとき (3.1.1) より $[\![\alpha, \beta]\!] \leq [\![\beta, \alpha]\!]$
[*5] 表 3.1 の最後の 2 段は $\beta = \pm\alpha$ の場合に相当する．

補題 3.1.2:

$(\mathbb{E}, \Phi)$ をルート系とする．$\alpha \neq \pm\beta$ を充たす任意の $\alpha, \beta \in \Phi$ に対して以下が成り立つ：

(1) $(\alpha, \beta) > 0 \implies \alpha - \beta \in \Phi$
(2) $(\alpha, \beta) < 0 \implies \alpha + \beta \in \Phi$

<u>**証明**</u> $(\alpha, \beta) > 0$ とする．このとき $[\![\alpha, \beta]\!] > 0$ であるから，表 3.1 より $[\![\alpha, \beta]\!], [\![\beta, \alpha]\!]$ の少なくとも一方は 1 に等しい．$[\![\alpha, \beta]\!] = 1$ だとすると，**(Root-3)** から $\sigma_\beta(\alpha) = \alpha - \beta \in \Phi$ がいえる．$[\![\beta, \alpha]\!] = 1$ ならば $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \alpha \in \Phi$ であり，$\sigma_{\beta-\alpha}(\beta - \alpha) = \alpha - \beta \in \Phi$ が従う．(2) は (1) において β の代わりに $-\beta = \sigma_\beta(\beta) \in \Phi$ を用いて同じ議論をすれば良い． ■

定義 3.1.2: α-string through β

$(\mathbb{E}, \Phi)$ をルート系とする．$\alpha \neq \pm\beta$ を充たす任意の $\alpha, \beta \in \Phi$ に対して，Φ の部分集合

$$\left\{ \beta + \lambda\alpha \in \mathbb{E} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{Z} \right\} \cap \Phi$$

のことを **$\boldsymbol{\alpha}$-string through $\boldsymbol{\beta}$** と呼ぶ．

命題 3.1.1: α-string through β の性質

$(\mathbb{E}, \Phi)$ をルート系とする．$\alpha \neq \pm\beta$ を充たす任意の $\alpha, \beta \in \Phi$ に対して

$$\begin{aligned} r &:= \max\left\{ \lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \,\middle|\, \beta - \lambda\alpha \in \Phi \right\}, \\ q &:= \max\left\{ \lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \,\middle|\, \beta + \lambda\alpha \in \Phi \right\} \end{aligned}$$

とおく．このとき以下が成り立つ：

(1) α-string through β は $\mathbb{E}$ の部分集合

$$\left\{ \beta + \lambda\alpha \in \mathbb{E} \,\middle|\, -r \leq \lambda \leq q \right\} \tag{3.1.3}$$

に等しい．i.e. $-r \leq \forall\lambda \leq q$ に対して $\beta + \lambda\alpha \in \Phi$ である．

(2) α-string through β は鏡映 σ_α の作用の下で不変である．

(3) $r - q = [\![\beta, \alpha]\!]$．特に α-string through β の長さは 4 以下である．

<u>**証明**</u> (1) 背理法により示す．ある $-r < \lambda < q$ に対して $\beta + \lambda\alpha \notin \Phi$ であるとする．このときある $-r \leq s < p \leq q$ が存在して $\beta + s\alpha \in \Phi$, $\beta + (s-1)\alpha \notin \Phi$, $\beta + (p-1)\alpha \notin \Phi$, $\beta + p\alpha \in \Phi$ を充たすが，補題 3.1.2 の対偶よりこのとき $(\alpha, \beta + s\alpha) \leq 0 \leq (\alpha, \beta + p\alpha)$ が成り立つ．よって $(p - s)(\alpha, \alpha) \geq 0$ である．然るに $p < s$ かつ $(\alpha, \alpha) > 0$ なのでこれは矛盾である．

(2) $-r \leq \forall\lambda \leq q$ に対して

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha(\beta + \lambda\alpha) &= \beta + \lambda\alpha - [\![\beta, \alpha]\!]\alpha - \lambda[\![\alpha, \alpha]\!]\alpha \\ &= \beta - \big([\![\beta, \alpha]\!] + \lambda\big)\alpha \end{aligned}$$

が成り立つ．**(Root-3)** より最右辺は Φ の元であり，かつ **(Root-4)** より $[\![\beta, \alpha]\!] + \lambda \in \mathbb{Z}$ なので，(1)

より $-r \leq [\![\beta, \alpha]\!] + \lambda \leq q$ だと分かった．

(3) $r,\ q$ の定義より，(2) の証明において

$$\sigma_\alpha(\beta + q\alpha) = \beta - \big([\![\beta, \alpha]\!] + q\big)\alpha = \beta - r\alpha$$

が成り立たねばならない．よって

$$r - q = [\![\beta, \alpha]\!]$$

である．表 3.1 より $|r - q| \leq 3$ であるから，集合 (3.1.3) の要素数は 4 以下である．

■

3.1.2 Weyl 群

定義 3.1.3: Weyl 群

$(\mathbb{E},\ \Phi)$ をルート系とする．$\mathrm{GL}(\mathbb{E})$ の部分集合 $\left\{ \sigma_\alpha \in \mathrm{GL}(\mathbb{E}) \;\middle|\; \alpha \in \Phi \right\}$ が生成する $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$ の部分群のことをルート系 $(\mathbb{E},\ \Phi)$ の **Weyl 群** (Weyl group) と呼び，$\mathscr{W}_{\mathbb{E}}\boldsymbol{(\Phi)}$ と書く．

本資料の以降では，文脈上考えているルート系が明らかな場合 $\mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi)$ を $\mathscr{W}$ と略記する．

(Root3) より，$\forall \tau \in \mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi)$ の Φ への制限は全単射である．その上 **(Root-1)** から Φ は有限集合でかつ $\mathbb{E} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\, \Phi$ が成り立つので，$\mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi)$ を Φ に作用する対称群 $\mathfrak{S}_{|\Phi|}$ の部分群と同一視できる．特に $\mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi)$ は有限群である．

補題 3.1.3:

$(\mathbb{E},\ \Phi)$ をルート系とする．$\tau \in \mathrm{GL}(\mathbb{E})$ が $\tau(\Phi) = \Phi$ を充たすならば，$\forall \alpha,\ \beta \in \Phi$ に対して以下が成り立つ：

(1) $\tau \circ \sigma_\alpha \circ \tau^{-1} = \sigma_{\tau(\alpha)}$

(2) $[\![\beta, \alpha]\!] = [\![\tau(\beta), \tau(\alpha)]\!]$

証明 $\forall \alpha,\ \beta \in \Phi$ をとる．**(Root-3)** より $\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi$ なので，$\tau \circ \sigma_\alpha \circ \tau^{-1}\big(\tau(\beta)\big) = \sigma \circ \sigma_\alpha(\beta) \in \Phi$ が成り立つ．一方で

$$\tau \circ \sigma_\alpha \circ \tau^{-1}\big(\tau(\beta)\big) = \tau\big(\beta - [\![\beta, \alpha]\!]\alpha\big) = \tau(\beta) - [\![\beta, \alpha]\!]\tau(\alpha) \tag{3.1.4}$$

である．$\beta \in \Phi$ は任意で $\tau \in \mathrm{GL}(\mathbb{E})$ は全単射なので

(RF-1) $\tau \circ \sigma_\alpha \circ \tau^{-1}(\Phi) = \Phi$

(RF-2) $\forall \beta \in P_\alpha,\ \tau \circ \sigma_\alpha \circ \tau^{-1}(\beta) = \beta$

(RF-3) $\tau(\alpha) \in \Phi \setminus \{0\},\ \tau \circ \sigma_\alpha \circ \tau^{-1}\big(\tau(\alpha)\big) = -\tau(\alpha)$

が成り立つことが分かった．よって補題 3.1.1 より $\tau \circ \sigma_\alpha \circ \tau^{-1} = \sigma_{\tau(\alpha)}$ である．

さらに (3.1.4) から

$$\tau(\beta) - [\![\beta, \alpha]\!]\tau(\alpha) = \sigma_{\tau(\alpha)}\big(\tau(\beta)\big) = \tau(\beta) - [\![\tau(\beta), \tau(\alpha)]\!]\tau(\alpha)$$

が分かるので (2) が従う. ■

定義 3.1.4: ルート系の同型

2 つのルート系 $(\mathbb{E},\, \Phi)$, $(\mathbb{E}',\, \Phi')$ を与える．写像

$$\phi\colon \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}'$$

が**ルート系の同型写像** (isomorphism) であるとは，以下の 3 条件を満たすことを言う：

(1) ϕ は $\mathbb{R}$-ベクトル空間の同型写像

(2) $\phi(\Phi) = \Phi'$

(3) $\forall \alpha,\, \beta \in \Phi$ に対して $[\![\phi(\beta), \phi(\alpha)]\!] = [\![\beta, \alpha]\!]$

ルート系 $(\mathbb{E},\, \Phi)$ の**自己同型** (automorphism) とは，$\phi \in \mathrm{GL}(\mathbb{E})$ であって $\phi(\Phi) = \Phi$ を充たすもののことを言う．これは補題 3.1.3-(2) により自動的にルート系の同型となる．ルート系の自己同型全体が写像の合成に関してなす群のことを**ルート系の自己同型群**と呼び，$\mathbf{Aut}\,\mathbf{\Phi}$ と書く．

ルート系の同型

$$\phi\colon (\mathbb{E},\, \Phi) \longrightarrow (\mathbb{E}',\, \Phi')$$

について，$\forall \alpha,\, \beta \in \Phi$ に対して

$$\sigma_{\phi(\alpha)} \circ \phi(\beta) = \phi(\beta) - [\![\phi(\beta), \phi(\alpha)]\!]\phi(\alpha) = \phi\bigl(\beta - [\![\beta, \alpha]\!]\alpha\bigr) = \phi \circ \sigma_\alpha(\beta)$$

が成り立つ．i.e. ルート系の図式

$$\begin{tikzcd}
\Phi \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\sigma_\alpha"'] & \Phi' \arrow[d, "\sigma_{\phi(\alpha)}"] \\
\Phi \arrow[r, "\phi"'] & \Phi'
\end{tikzcd}$$

は可換である．よってルート系の同型は Weyl 群の自然な（群の）同型

$$\begin{aligned}\overline{\phi}\colon \mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi) &\longrightarrow \mathscr{W}_{\mathbb{E}'}(\Phi'), \\ \sigma &\longmapsto \phi \circ \sigma \circ \phi^{-1}\end{aligned}$$

を引き起こす．

補題 3.1.4:

ルート系 $(\mathbb{E},\, \Phi)$ の Weyl 群 $\mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi)$ は，ルート系の自己同型群 $\mathrm{Aut}\,\Phi$ の正規部分群である．

<u>**証明**</u> $\forall \sigma \in \mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi)$ を 1 つとる．このときある $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Phi$ が存在して $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \sigma_{\alpha_k}$ と書ける[*6]．従って $\forall \tau \in \mathrm{Aut}\,\Phi$ に対して，補題 3.1.3-(1) より

$$\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1} = (\tau \circ \sigma_{\alpha_1} \circ \tau^{-1}) \circ \cdots \circ (\tau \circ \sigma_{\alpha_k} \circ \tau^{-1}) = \sigma_{\tau(\alpha_1)} \circ \cdots \circ \sigma_{\tau(\alpha_k)} \in \mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi)$$

[*6] $\sigma_{\alpha_i}^{-1} = \sigma_{\alpha_i}$ なのでこれで良い．

が成り立つ．i.e. $\mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi) \lhd \mathrm{Aut}\,\Phi$ である． ■

定義 3.1.5: 双対ルート系

ルート系 $(\mathbb{E},\,\Phi)$ に対して

$$\mathbf{\Phi}^{\vee} := \left\{ \frac{2}{(\alpha,\,\alpha)}\alpha \in \mathbb{E} \;\middle|\; \alpha \in \Phi \right\}$$

とおき，組 $(\mathbb{E},\,\mathbf{\Phi}^{\vee})$ のことを $(\mathbb{E},\,\Phi)$ の**双対ルート系** (dual root system) と呼ぶ．

$\alpha \in \Phi$ に対して

$$\boldsymbol{\alpha}^{\vee} := \frac{2}{(\alpha,\,\alpha)}\alpha \in \Phi^{\vee}$$

と書く．

双対ルート系がルート系の公理を充たすことを確認しよう：

(Root-1,2) $(\mathbb{E},\,\Phi)$ がルート系なので明らか．

(Root-3) $\forall \alpha^{\vee},\,\beta^{\vee} \in \Phi^{\vee}$ をとる．このとき

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha^{\vee}}(\beta^{\vee}) &= \frac{2}{(\beta,\,\beta)}\beta - \left[\!\left[\frac{2}{(\beta,\,\beta)}\beta,\, \frac{2}{(\alpha,\,\alpha)}\alpha \right]\!\right] \frac{2}{(\alpha,\,\alpha)}\alpha \\
&= \frac{2}{(\beta,\,\beta)}\beta - \frac{\frac{2}{(\beta,\,\beta)}}{\frac{2}{(\alpha,\,\alpha)}} [\![\beta, \alpha]\!] \frac{2}{(\alpha,\,\alpha)}\alpha \\
&= \frac{2}{(\beta,\,\beta)}\sigma_{\alpha}(\beta)
\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

だが，

$$\begin{aligned}
\big(\sigma_{\alpha}(\beta), \sigma_{\alpha}(\beta)\big) &= (\beta, \beta) - 2[\![\beta, \alpha]\!](\beta, \alpha) + [\![\beta, \alpha]\!]^2(\alpha, \alpha) \\
&= (\beta, \beta) - 2[\![\beta, \alpha]\!](\beta, \alpha) + 2[\![\beta, \alpha]\!](\beta, \alpha) \\
&= (\beta, \beta)
\end{aligned}$$

なので

$$\sigma_{\alpha^{\vee}}(\beta^{\vee}) = \sigma_{\alpha}(\beta)^{\vee} \in \Phi^{\vee}$$

だと分かった．

(Root-4) $\forall \frac{2}{(\alpha,\alpha)}\alpha,\ \frac{2}{(\beta,\beta)}\beta \in \Phi^\vee$ をとる．このとき

$$\begin{aligned}
[\![\beta^\vee, \alpha^\vee]\!] &= \left[\!\!\left[\frac{2}{(\beta,\ \beta)}\beta,\ \frac{2}{(\alpha,\ \alpha)}\alpha\right]\!\!\right] \\
&= \frac{\frac{2}{(\beta,\beta)}}{\frac{2}{(\alpha,\alpha)}}[\![\beta, \alpha]\!] \\
&= \frac{\frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}}{\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}}[\![\beta, \alpha]\!] \\
&= \frac{[\![\alpha, \beta]\!]}{[\![\beta, \alpha]\!]}[\![\beta, \alpha]\!] \\
&= [\![\alpha, \beta]\!] \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

が言えた．

補題 3.1.5:

$$\mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi) \cong \mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi^\vee)$$

証明 (3.1.5) より，写像 $\sigma_\alpha \longmapsto \sigma_{\alpha^\vee}$ は同型写像である． ■

3.2 単純ルートと Weyl 群

この節では $(\mathbb{E},\ \Phi)$ を任意のランク l のルート系とし，その Weyl 群を $\mathscr{W}$ と略記する．

3.2.1 ルート系の底と Weyl の区画

定義 3.2.1: ルート系の底

Φ の部分集合 $\Delta \subset \Phi$ が**底** (base) であるとは，以下を充たすことをいう：

(B-1) Δ は $\mathbb{R}$-ベクトル空間 $\mathbb{E}$ の基底である．

(B-2) $\forall \beta \in \Phi$ に対して整数の族 $\{\beta_\alpha\}_{\alpha\in\Delta} \in \prod_{\alpha\in\Delta}\mathbb{Z}$ が一意的に存在して

$$\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} \beta_\alpha \alpha$$

を充たし，$\forall \alpha \in \Delta,\ \beta_\alpha \geq 0$ であるか $\forall \alpha \in \Delta,\ \beta_\alpha \leq 0$ であるかのどちらかである．

- Δ の元のことを**単純ルート** (simple root) と呼ぶ．
- $\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} \beta_\alpha \alpha \in \Phi$ に対して

$$\mathbf{ht}\,\boldsymbol{\beta} \coloneqq \sum_{\alpha\in\Delta} \beta_\alpha \in \mathbb{Z}$$

と定義し，底 Δ に関するルート β の**高さ** (height) と呼ぶ．

- $\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} \beta_\alpha \alpha \in \Phi$ が**正**（resp. **負**）であるとは，$\forall\alpha \in \Delta,\ \beta_\alpha \geq 0$（resp. $\forall\alpha \in \Delta,\ \beta_\alpha \leq 0$）が成り立つことを言い，$\boldsymbol{\beta \succ 0}$（resp. $\boldsymbol{\beta \prec 0}$）と書く[a]．
- 正（resp. 負）のルート全体の集合のことを $\boldsymbol{\Phi^+}$（resp. $\boldsymbol{\Phi^-}$）と書く[b]．
- $\mathbb{E}$ 上の半順序 $\prec \subset \mathbb{E}\times\mathbb{E}$ を

$$\mu \prec \lambda \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists! \{k_\alpha\}_{\alpha\in\Delta} \in \prod_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R}_{\geq 0},\ \lambda - \mu = \sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha \alpha$$

と定義する．

[a] LaTeX コマンドは $\succ$ が `\succ` , $\prec$ が `\prec` である．
[b] 明らかに $\Phi^- = -\Phi^+$ である．

$\prec$ が半順序になっていることを確認しておこう：

(反射律) $\forall\mu \in \mathbb{E}$ に対して $\mu - \mu = 0$ が成り立つので $\mu \prec \mu$ である．

(反対称律) $\mu \prec \lambda$ かつ $\lambda \prec \mu$ だとする．このとき $\{k_\alpha\}_{\alpha\in\Delta},\ \{l_\alpha\}_{\alpha\in\Delta} \in \prod_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R}_{\geq 0}$ が一意的に存在して

$$\lambda - \mu = \sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha \alpha, \qquad \mu - \lambda = \sum_{\alpha\in\Delta} l_\alpha \alpha$$

と書ける．辺々足すと **(B-1)** より $\forall\alpha \in \Delta$ に対して $k_\alpha + l_\alpha = 0$ だと分かるが，$k_\alpha \geq 0$ かつ $l_\alpha \geq 0$ なので $k_\alpha = l_\alpha = 0$，i.e. $\mu - \lambda = 0 \iff \mu = \lambda$ が言えた．

(推移律) $\mu \prec \lambda$ かつ $\lambda \prec \nu$ だとする．このとき $\nu - \mu = (\nu - \lambda) + (\lambda - \mu)$ なので明らかに $\mu \prec \nu$ である．

ルート系 $(\mathbb{E}, \Phi)$ の底を定義したのは良いが，存在しなくては意味がない．

補題 3.2.1:

Δ が Φ の底ならば，相異なる任意の 2 つの単純ルート $\alpha, \beta \in \Delta$ に対して $(\alpha, \beta) \leq 0$ であり，$\alpha - \beta \notin \Delta$ である．

証明 背理法により示す．$(\alpha, \beta) > 0$ だとする．仮定より $\alpha \neq \beta$ であり，かつ Δ の元の線型独立性から $\beta \neq -\alpha$ なので，補題 3.1.2 から $\alpha - \beta \in \Delta$ と言うことになる．然るにこのとき $\alpha - \beta \in \Phi$ が $\alpha, \beta \in \Delta$ の係数 $1, -1$ の線型結合で書けていることになり **(B-2)** に矛盾する． ■

定義 3.2.2:

$\forall\gamma \in \mathbb{E}$ に対して以下を定義する：

- Φ の部分集合

$$\boldsymbol{\Phi^+(\gamma)} \coloneqq \left\{\, \alpha \in \Phi \;\middle|\; (\gamma, \alpha) > 0 \,\right\}$$

-

$$\gamma \in \mathbb{E} \setminus \bigcup_{\alpha\in\Phi} P_\alpha$$

  のとき，γ は**正則** (regular) であるという．γ が正則でないとき**特異** (sigular) であると言う．

- $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$ が

$$\exists \beta_1,\, \beta_2 \in \Phi^+(\gamma),\; \alpha = \beta_1 + \beta_2$$

  を充たすとき，α は**分割可能** (decomposable) であると言う．分割可能でないとき**分割不可能** (indecomposable) であると言う．

γ が正則ならば $\forall\alpha \in \Phi$ に対して $(\gamma, \alpha) \neq 0$ なので，$\Phi = \Phi^+(\gamma) \amalg \left(-\Phi^+(\gamma)\right)$（disjoint union）が成り立つ．

定理 3.2.1: 底の存在

正則な任意の $\gamma \in \mathbb{E}$ を与える．このとき集合

$$\Delta(\gamma) \coloneqq \left\{\, \alpha \in \Phi^+(\gamma) \;\middle|\; \text{分割不可能} \,\right\}$$

は Φ の底である．逆に Φ の任意の底 Δ に対してある正則な $\gamma \in \mathbb{E}$ が存在して $\Delta = \Delta(\gamma)$ となる．

証明 **step1: $\boldsymbol{\Phi^+(\gamma)}$ の任意の元は $\boldsymbol{\Delta(\gamma)}$ の $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-係数線型結合で書ける**

背理法により示す．$\Delta(\gamma)$ の $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-係数線型結合で書けない $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$ が存在するとする．このとき，そのような α のうち (γ, α) が最小であるようなものが存在するのでそれを α_0 とおく．$\alpha_0 \notin \Delta(\gamma)$ なので[*7] α_0 は分割可能であり，ある $\beta_1,\, \beta_2 \in \Phi^+(\gamma)$ が存在して $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ と書ける．このとき

$$(\gamma, \alpha_0) = (\gamma, \beta_1) + (\gamma, \beta_2) > (\gamma, \beta_i)$$

が成り立つので，α_0 の最小性から $\beta_1,\, \beta_2$ はどちらも $\Delta(\gamma)$ の元の $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-係数線型結合で書ける．然るにこのとき α も $\Delta(\gamma)$ の元の $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-係数線型結合で書けることになって矛盾．

step2: $\boldsymbol{\alpha, \beta \in \Delta(\gamma)}$ かつ $\boldsymbol{\alpha \neq \beta}$ ならば，$\boldsymbol{(\alpha, \beta) \leq 0}$

背理法により示す．$(\alpha, \beta) > 0$ を仮定する．このとき補題 3.1.2-(1) より $\alpha - \beta \in \Phi$ であり，$\beta - \alpha = \sigma_{\alpha-\beta}(\alpha - \beta) \in \Phi$ もわかる．よって $\alpha - \beta \in \Phi^+(\gamma)$ または $\beta - \alpha \in \Phi^+(\gamma)$ である．然るに前者の場合 $\alpha = \beta + (\alpha - \beta)$ なので $\alpha \in \Delta(\gamma)$ が分割可能ということになって矛盾し，後者の場合は $\beta = \alpha + (\beta - \alpha)$ なので $\beta \in \Delta(\gamma)$ が分割可能ということになって矛盾である．

[*7] $\alpha_0 \in \Delta(\gamma)$ だとすると，$\alpha_0 \in \Delta(\gamma)$ の係数 $1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ の線型結合として書けていることになり矛盾．

step3: $\mathbf{\Delta}(\gamma)$ の元は互いに線型独立

$\{k_\alpha\}_{\alpha\in\Delta(\gamma)} \in \prod_{\alpha\in\Delta}\mathbb{R}$ に対して $\sum_{\alpha\in\Delta(\gamma)} k_\alpha\alpha = 0$ を仮定する．$\forall\alpha\in\Delta(\gamma)$ に対して

$$s_\alpha := \begin{cases} k_\alpha, & k_\alpha > 0 \\ 0, & k_\alpha \le 0 \end{cases} \qquad\qquad t_\alpha := \begin{cases} -k_\alpha, & k_\alpha < 0 \\ 0, & k_\alpha \ge 0 \end{cases}$$

とおくと，仮定より

$$\sum_{\alpha\in\Delta(\gamma)} s_\alpha\alpha = \sum_{\alpha\in\Delta(\gamma)} t_\alpha\alpha$$

が成り立つ．$\varepsilon := \sum_{\alpha\in\Delta} s_\alpha\alpha$ とおくと，**step2** から

$$0 \le (\varepsilon,\varepsilon) = \sum_{\alpha,\,\beta\in\Delta(\gamma),\ \alpha\neq\beta} s_\alpha t_\beta(\alpha,\beta) \le 0$$

が成り立つので $\varepsilon = 0$ だとわかる．よって

$$0 = (\gamma,\varepsilon) = \sum_{\alpha\in\Delta(\gamma)} s_\alpha(\gamma,\alpha) = \sum_{\alpha\in\Delta(\gamma)} t_\alpha(\gamma,\alpha)$$

であり，$\forall\alpha\in\Delta(\gamma)$，$s_\alpha = t_\alpha = 0$ が言えた．

step4: $\mathbf{\Delta}(\gamma)$ は $\mathbf{\Phi}$ の底

$\Phi = \Phi^+(\gamma)\amalg\bigl(-\Phi^+(\gamma)\bigr)$ なので，**step1** と併せて **(B-2)** が，**step3** と併せて **(B-1)** が従う．

step5: 任意の底 $\mathbf{\Delta}$ に対してある正則な $\gamma\in\mathbb{E}$ が存在して $\mathbf{\Delta}=\mathbf{\Delta}(\gamma)$ となる

Φ の底 Δ が与えられたとき，$\forall\alpha\in\Delta$ に対して $(\gamma,\alpha)>0$ を充たす $\gamma\in\mathbb{E}$ をとる*8．**(B-2)** より γ は正則であり，かつ $\forall\beta = \sum_{\alpha\in\Delta}\beta_\alpha\alpha\in\Phi^+$ に対して

$$(\gamma,\beta) = \sum_{\alpha\in\Delta}\beta_\alpha(\gamma,\alpha) > 0$$

が成り立つので $\beta\in\Phi^+(\gamma)$，i.e. $\Phi^+\subset\Phi^+(\gamma)$，$\Phi^- = -\Phi^- \subset -\Phi^+(\gamma)$ も分かる．ところが **step4** より $\Phi = \Phi^+\amalg\Phi^- = \Phi^+(\gamma)\amalg\bigl(-\Phi^+(\gamma)\bigr)$ なので，$\Phi^+ = \Phi^+(\gamma)$ でなくてはいけない．従って $\forall\alpha\in\Delta$ は分割不可能であり*9，$\Delta\subset\Delta(\gamma)$ だと分かった．**(B-1)** および **step4** より $|\Delta| = |\Delta(\gamma)| = l$ なので*10 $\Delta = \Delta(\gamma)$ が言えた．

■

*8 このような γ が存在することを示そう．**(B-1)** より Δ は $\mathbb{E}$ の基底だから，$\forall\alpha$ に対して $\gamma_\alpha\in\mathbb{E}$ を，$\mathbb{E}$ の部分ベクトル空間 $\mathrm{Span}_{\mathbb{K}}(\Delta\setminus\{\alpha\})$ の $(\ ,\ )$ に関する直交補空間 $\bigl(\mathrm{Span}_{\mathbb{K}}(\Delta\setminus\{\alpha\})\bigr)^\perp$ への α の射影とする．Δ の元は全て互いに線型独立なので $\gamma_\alpha\neq 0$ である．このとき，$\{k_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}\in\prod_{\alpha\in\Delta}\mathbb{R}_{>0}$ に対して $\gamma := \sum_{\alpha\in\Delta}k_\alpha\gamma_\alpha$ とおけば，$\forall\alpha\in\Delta$ に対して $(\gamma,\alpha) = k_\alpha(\gamma_\alpha,\alpha) > 0$ が成り立つ．

*9 $\beta_1 = \sum_{\alpha\in\Delta}\beta_{1\alpha}\alpha$, $\beta_2 = \sum_{\alpha\in\Delta}\beta_{2\alpha}\alpha\in\Phi^+ = \Phi^+(\gamma)$ を用いて $\alpha = \beta_1+\beta_2$ と書けたとする．このとき Δ の元の線型独立性から $\beta_{1\alpha}+\beta_{2\alpha} = 1$ かつ $\forall\gamma\in\Delta\setminus\{\alpha\}$，$\beta_{1\gamma}+\beta_{2\gamma} = 0$ が成り立つが，**(B-2)** より $(\beta_{1\alpha},\,\beta_{2\alpha}) = (1,\,0)$ または $(0,\,1)$ かつ $\forall\gamma\in\Delta\setminus\{\alpha\}$，$\beta_{1\gamma} = \beta_{2\gamma} = 0$，i.e. $(\beta_1,\,\beta_2) = (\alpha,\,0)$ または $(0,\,\alpha)$ でなくてはならず，$0\notin\Phi^+$ に矛盾．

*10 [?] では集合の**濃度** (cardinality) の意味で $\mathrm{Card}\,\Delta$ と書かれていた．

定義 3.2.3: Weyl の区画

- 位相空間[a] $\mathbb{E}$ の部分空間 $\mathbb{E}\setminus\bigcup_{\alpha\in\Phi}P_\alpha$ の連結成分の 1 つのことを（開な）**Weyl の区画** (Weyl chamber) [b]と呼ぶ．
- 正則な $\gamma\in\mathbb{E}$ が属する Weyl の区画のことを $\boldsymbol{\mathfrak{C}(\gamma)}$ と書く[c]．
- Φ の底 Δ に対して定理 3.2.1 の意味で $\Delta=\Delta(\gamma)$ ならば $\boldsymbol{\mathfrak{C}(\Delta)}\coloneqq\mathfrak{C}(\gamma)$ とおき，**$\boldsymbol{\Delta}$ に関する Weyl の基本区画** (fundamental Weyl chamber relative to Δ)[d] と呼ぶ．

---

[a] Euclid 空間の定義の脚注を参照．
[b] この訳語は筆者が勝手につけたものである．[?] では **Weyl の部屋**と呼ばれていた．
[c] LaTeX コマンドは `\mathfrak{C}`
[d] これの訳語は全く普及していない気がする．**$\boldsymbol{\Delta}$ に関する基本 Weyl の部屋**だと語感が悪いと思ったのでこのような訳語を充てた．

補題 3.2.2: Weyl の区画の基本性質

正則な任意の $\gamma,\ \gamma'\in\mathbb{E}$ および任意の Φ の底 Δ を与える．定理 3.2.1 によって得られる Φ の底を $\Delta(\gamma)$ と書く．

(1) $\mathfrak{C}(\gamma)=\mathfrak{C}(\gamma')\quad\Longleftrightarrow\quad\Delta(\gamma)=\Delta(\gamma')$

(2) 写像

$$\begin{aligned}\{\,\text{底全体の集合}\,\}&\longrightarrow\{\,\text{Weyl の区画全体の集合}\,\},\\ \Delta&\longmapsto\mathfrak{C}(\Delta)\end{aligned}$$

は全単射である．

(3) $\mathfrak{C}(\Delta)=\left\{\,\gamma\in\mathbb{E}\;\middle|\;\forall\alpha\in\Delta,\ (\gamma,\alpha)>0\,\right\}$

<u>証明</u>　(1)

■

補題 3.2.3: Weyl の区画と Weyl 群の関係

正則な任意の $\gamma\in\mathbb{E}$ および任意の Φ の底 Δ を与える．このとき以下が成り立つ：

(1) $\forall\sigma\in\mathscr{W}$ に対して $\sigma\bigl(\Delta(\gamma)\bigr)=\Delta\bigl(\sigma(\gamma)\bigr)$

(2) $\forall\sigma\in\mathscr{W}$ に対して $\sigma(\Delta)$ もまた Φ の底である．

(3) $\sigma\bigl(\mathfrak{C}(\gamma)\bigr)=\mathfrak{C}\bigl(\sigma(\gamma)\bigr)$

(4) $\sigma\bigl(\mathfrak{C}(\Delta)\bigr)=\mathfrak{C}\bigl(\sigma(\Delta)\bigr)$

<u>証明</u>　(1)

■

3.2.2　単純ルートの性質

3.2.3　Weyl 群の性質

3.2.4　既約なルート系

3.3　ルート系の分類