

Humphreys Chapter I Exercises

解答例 (2023/10/16 実施分)

高間俊至

2025 年 3 月 6 日

[1, p.5, Exercise 8] と [1, p.14, Exercise 2] の解答例です.

【問題 1.1】 p.3 および p.5 の Exercise 8

$\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ とする, A_l, B_l, C_l, D_l 型の線型 Lie 代数の各々について基底を構成し, その次元を答えよ. ただし $\mathfrak{gl}(l, \mathbb{K})$ の標準的な基底を行列単位とし, e_{ij} と書く.

A_l 型 A_l 型の定義は

$$\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{K}) := \{ x \in \mathfrak{gl}(l+1, \mathbb{K}) \mid \text{Tr } x = 0 \}$$

であった. 従って $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{K})$ の基底として, 例えば

$$\begin{aligned} & \{ e_{ij} \mid 1 \leq i \neq j \leq l+1 \} \\ & \cup \{ e_{ii} - e_{i+1, i+1} \mid 1 \leq i \leq l \} \end{aligned}$$

を採用することができる. 故に

$$\dim \mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{K}) = (l+1)^2 - (l+1) + l = (l+1)^2 - 1$$

である.

B_l 型 B_l 型の定義は, 対称行列

$$s := \begin{bmatrix} 1 & & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top \\ -\mathbf{0} & 1 & \overline{O}_l & -\mathbf{1}_l \\ \mathbf{0} & & \mathbf{1}_l & O_l \end{bmatrix}$$

を用いて

$$\mathfrak{o}(2l+1, \mathbb{K}) := \{ x \in \mathfrak{gl}(2l+1, \mathbb{K}) \mid x^\top s = -sx \} \quad (1.1)$$

であった. ただし O_l は全ての要素が $0 \in \mathbb{K}$ であるような $l \times l$ 行列である. $\forall x \in \mathfrak{o}(2l+1, \mathbb{K})$ を 1 つとり, 行列の区分けを

$$x = \begin{bmatrix} a & & \mathbf{b}_1^\top & \mathbf{b}_2^\top \\ -\mathbf{c}_1 & & M & -N \\ \mathbf{c}_2 & & P & Q \end{bmatrix}$$

のように行うと

$$\begin{aligned} x^T s &= \begin{bmatrix} a & c_1^T & c_2^T \\ b_1 & M^T & P^T \\ b_2 & N^T & Q^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & O_l & \mathbb{1}_l \\ \mathbf{0} & \mathbb{1}_l & O_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c_2^T & c_1^T \\ b_1 & P^T & M^T \\ b_2 & Q^T & N^T \end{bmatrix} \\ sx &= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & O_l & \mathbb{1}_l \\ \mathbf{0} & \mathbb{1}_l & O_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b_1^T & b_2^T \\ c_1 & M & N \\ c_2 & P & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b_1^T & b_2^T \\ c_2 & P & Q \\ c_1 & M & N \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と計算できるので, (1.1) の条件は

$$a = -a \iff a = 0 \quad (1.2)$$

$$b_1 = -c_2 \quad (1.3)$$

$$b_2 = -c_1 \quad (1.4)$$

$$P^T = -P \quad (1.5)$$

$$M^T = -Q \quad (1.6)$$

$$N^T = -N \quad (1.7)$$

と同値である. ただし (1.2) の同値変形に $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ であることを使った. (1.3) から

$$\{e_{1,1+i} - e_{1+l+i,1} \mid 1 \leq i \leq l\}$$

が, (1.4) から

$$\{e_{1,1+l+i} - e_{1+i,1} \mid 1 \leq i \leq l\}$$

が, (1.5) から

$$\{e_{1+l+i,1+j} - e_{1+l+j,1+i} \mid 1 \leq i < j \leq l\}$$

が, (1.6) から

$$\{e_{1+j,1+i} - e_{1+l+i,1+l+j} \mid 1 \leq i, j \leq l\}$$

が, (1.7) から

$$\{e_{1+i,1+l+j} - e_{1+j,1+l+i} \mid 1 \leq i < j \leq l\}$$

が基底を構成することが分かった. 以上をまとめると $\mathfrak{o}(2l+1, \mathbb{K})$ の基底として

$$\begin{aligned} &\{e_{1,1+i} - e_{1+l+i,1} \mid 1 \leq i \leq l\} \\ &\cup \{e_{1,1+l+i} - e_{1+i,1} \mid 1 \leq i \leq l\} \\ &\cup \{e_{1+l+i,1+j} - e_{1+l+j,1+i} \mid 1 \leq i < j \leq l\} \\ &\cup \{e_{1+j,1+i} - e_{1+l+i,1+l+j} \mid 1 \leq i, j \leq l\} \\ &\cup \{e_{1+i,1+l+j} - e_{1+j,1+l+i} \mid 1 \leq i < j \leq l\} \end{aligned}$$

を採ることができる. 故に

$$\dim \mathfrak{o}(2l+1, \mathbb{K}) = 2l + 2 \cdot \frac{l(l-1)}{2} + l^2 = 2l^2 + l$$

である.

C_l 型 C_l 型の定義は, 歪対称行列

$$s := \begin{bmatrix} O_l & \mathbf{1}_l \\ -\mathbf{1}_l & O_l \end{bmatrix}$$

を用いて

$$\mathfrak{sp}(2l, \mathbb{K}) := \{ x \in \mathfrak{gl}(2l, \mathbb{K}) \mid x^\top s = -sx \} \quad (1.8)$$

であった. $\forall x \in \mathfrak{sp}(2l, \mathbb{K})$ を 1 つとり, 行列の区分けを

$$x = \begin{bmatrix} M & N \\ P & Q \end{bmatrix}$$

のように行うと (1.8) の条件は

$$\begin{aligned} P^\top &= P \\ M^\top &= -Q \\ N^\top &= N \end{aligned}$$

と同値である. B_l 型のとときと同様の考察から $\mathfrak{sp}(2l, \mathbb{K})$ の基底として

$$\begin{aligned} & \{ e_{l+i, i} \mid 1 \leq i \leq l \} \cup \{ e_{l+i, j} + e_{l+j, i} \mid 1 \leq i < j \leq l \} \\ & \cup \{ e_{j, i} - e_{l+i, l+j} \mid 1 \leq i, j \leq l \} \\ & \cup \{ e_{i, l+i} \mid 1 \leq i \leq l \} \cup \{ e_{i, l+j} + e_{l+j, l+i} \mid 1 \leq i < j \leq l \} \end{aligned}$$

を採ることができる^{*1}. 故に

$$\dim \mathfrak{sp}(2l, \mathbb{K}) = 2l + 2 \cdot \frac{l(l-1)}{2} + l^2 = 2l^2 + l$$

である.

D_l 型 D_l 型の定義は, 対称行列

$$s := \begin{bmatrix} O_l & \mathbf{1}_l \\ \mathbf{1}_l & O_l \end{bmatrix}$$

を用いて

$$\mathfrak{o}(2l, \mathbb{K}) := \{ x \in \mathfrak{gl}(2l, \mathbb{K}) \mid x^\top s = -sx \} \quad (1.9)$$

であった. $\forall x \in \mathfrak{o}(2l, \mathbb{K})$ を 1 つとり, 行列の区分けを

$$x = \begin{bmatrix} M & N \\ P & Q \end{bmatrix}$$

のように行うと (1.9) の条件は B_l 型のとときと同様に

$$\begin{aligned} P^\top &= -P \\ M^\top &= -Q \\ N^\top &= -N \end{aligned}$$

^{*1} $i \leq j$ のように等号を含むことに注意.

と同値である。 B_l 型のととき同様の考察から $\mathfrak{o}(2l, \mathbb{K})$ の基底として

$$\begin{aligned} & \{e_{l+i,j} - e_{l+j,i} \mid 1 \leq i < j \leq l\} \\ & \cup \{e_{j,i} - e_{l+i,l+j} \mid 1 \leq i, j \leq l\} \\ & \cup \{e_{i,l+j} - e_{j,l+i} \mid 1 \leq i < j \leq l\} \end{aligned}$$

を採ることができる。故に

$$\dim \mathfrak{o}(2l, \mathbb{K}) = 2 \cdot \frac{l(l-1)}{2} + l^2 = 2l^2 - l$$

である。

【問題 3.2】 p.14 の Exercise 2

標数が 2 でない体 \mathbb{K} 上の有限次元 Lie 代数 \mathfrak{g} を与える。このとき以下の (1), (2) が同値であることを示せ：

- (1) Lie 代数 \mathfrak{g} が可解
- (2) \mathfrak{g} の部分 Lie 代数の減少列

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_k = \{o\}$$

であって、 \mathfrak{g}_{i+1} が \mathfrak{g}_i のイデアルであり、かつ $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ が Lie ブラケットについて可換であるようなものが存在する。

! char $\mathbb{K} \neq 2$ なので、 $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ が Lie ブラケットについて可換であるとは $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ の任意の 2 つの元の Lie ブラケットが零ベクトルになることと同値である。

証明 $D\mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ とおき、帰納的に $D^{i+1}\mathfrak{g} := D^i\mathfrak{g}$ と定義する。

(1) \implies (2) \mathfrak{g} の導来列そのものが (2) の条件を充たしていることを示す。仮定より \mathfrak{g} が可解なので、ある $k > 0$ が存在して $D^k\mathfrak{g} = \{o\}$ となる。また、第 1 回の資料の補題 1.1.1 (p.13) より $D^{i+1}\mathfrak{g} = D(D^i\mathfrak{g}) \subset D^i\mathfrak{g}$ は $D^i\mathfrak{g}$ のイデアルであり、商代数 $D^i\mathfrak{g}/D^{i+1}\mathfrak{g}$ が定義できる。あとは $D^i\mathfrak{g}/D^{i+1}\mathfrak{g}$ が Lie ブラケットについて可換であることを示せばよい。

$i = 0$ のとき、 $\forall x + D\mathfrak{g}, y + D\mathfrak{g} \in \mathfrak{g}/D\mathfrak{g} = D^0\mathfrak{g}/D^1\mathfrak{g}$ をとる^{*2}。商代数の Lie ブラケットの定義と $[x, y] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = D\mathfrak{g}$ であることから

$$[x + D\mathfrak{g}, y + D\mathfrak{g}] = [x, y] + D\mathfrak{g} = D\mathfrak{g}$$

なので^{*3}、 $D^0\mathfrak{g}/D^1\mathfrak{g}$ は Lie ブラケットについて可換である。 $i > 0$ のときも全く同様に示される。

(1) \longleftarrow (2) (2) の条件を充たす部分 Lie 代数の減少列 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_k = \{o\}$ が与えられたとき、 $0 \leq i \leq k$ に対して $D^i\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_i$ が成り立つ^{*4}ことを i についての数学的帰納法により示す。

^{*2} $D^0\mathfrak{g}/D^1\mathfrak{g}$ の任意の元は $x + D\mathfrak{g}$ の形で書ける。標準的射影 $p: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/D\mathfrak{g}, x \longmapsto x + D\mathfrak{g}$ が全射であるとも言える。

^{*3} 商代数 $D^0\mathfrak{g}/D^1\mathfrak{g}$ の加法単位元 (零ベクトル) は $D\mathfrak{g}$ である。

^{*4} つまり、導来列は (2) の条件を充たす部分 Lie 代数の減少列のうち最小のものである。なお明示していなかったが、 \subset は $=$ も含むとする。一方、真 (proper) の包含は \subsetneq と書く。

$i = 0$ のときは $D^0 \mathfrak{g} = \mathfrak{g} \subset \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0$ なので明らか. $i > 0$ のとき, $D^{i-1} \mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_{i-1}$ が示されているとする. このとき $D^i \mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_i$ であることを 2 段階に分けて示す:

$$D\mathfrak{g}_{i-1} \subset \mathfrak{g}_i$$

$\forall x, y \in \mathfrak{g}_{i-1}$ に対して, $\mathfrak{g}_{i-1}/\mathfrak{g}_i$ が可換であるという仮定から

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_i &= [x + \mathfrak{g}_i, y + \mathfrak{g}_i] = [x, y] + \mathfrak{g}_i \\ \iff [x, y] &\in \mathfrak{g}_i \end{aligned}$$

が言える^{*5}. 従って $D\mathfrak{g}_{i-1} \subset \mathfrak{g}_i$ である^{*6}.

$$D^i \mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_i$$

帰納法の仮定より $D(D^{i-1} \mathfrak{g}) \subset D\mathfrak{g}_{i-1}$ が言える^{*7}ので,

$$D^i \mathfrak{g} = D(D^{i-1} \mathfrak{g}) \subset D\mathfrak{g}_{i-1} \subset \mathfrak{g}_i$$

が示された. ■

参考文献

[1] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory* (Springer, 1972).

^{*5} 商代数 $\mathfrak{g}_{i-1}/\mathfrak{g}_i$ の加法単位元 (零ベクトル) は \mathfrak{g}_i である.

^{*6} $D\mathfrak{g}_{i-1}$ の勝手な元は, ある $n < \infty$ を用いて $\sum_{i=1}^n [x_i, y_i]$ と書ける. \mathfrak{g}_i は部分 Lie 代数であり, 加法について閉じているので $\sum_{i=1}^n [x_i, y_i] \in \mathfrak{g}_i$ が言える.

^{*7} 任意のイデアル $\mathfrak{i}, \mathfrak{j} \subset \mathfrak{g}$ に対して, $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{j}$ ならば D の定義から $D\mathfrak{i} \subset D\mathfrak{j}$ が成り立つ.