第 2 章

半単純 Lie 代数

この章以降，$\mathbb{K}$-ベクトル空間 V の零ベクトルを $0 \in V$ と書き，零ベクトル空間 $\{0\}$ のことも 0 と表記する[*1]．この章において，特に断らない限り体 $\mathbb{K}$ は代数閉体[*2]で，かつ $\operatorname{char} \mathbb{K} = 0$ であるとする．また，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は常に有限次元であるとする．

2.1 Lie の定理・Cartan の判定条件

2.1.1 Lie の定理

定理 2.1.1:

V を有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間とし，$\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ が可解であるとする．
このとき $V \neq 0$ ならば，$\forall x \in \mathfrak{gl}(V)$ は共通の固有ベクトルを持つ．

系 2.1.2: Lie の定理

V を有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間とし，$\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ が可解であるとする．
このとき $\forall x \in \mathfrak{g}$ は V のある共通の旗を安定化する．i.e. $\forall x \in \mathfrak{g}$ の表現行列を同時に上三角行列にするような V の基底が存在する．

2.1.2 Jordan-Chevalley 分解

2.1.3 Cartan の判定条件

[*1] 記号の濫用だが，広く普及している慣習である．
[*2] つまり，定数でない任意の 1 変数多項式 $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ に対してある $\alpha \in \mathbb{K}$ が存在して $f(\alpha) = 0$ を充たす．

定理 2.1.3: Cartan の判定条件

V を有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間とし，$\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ を与える．
このとき以下の 2 つは同値である：

(1) $\mathfrak{g}$ が可解
(2) $\forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}],\ \forall y \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{Tr}(x \circ y) = 0$ が成り立つ

系 2.1.4:

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ を与える．
このとき $\forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}],\ \forall y \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{Tr}\big(\mathrm{ad}(x) \circ \mathrm{ad}(y)\big) = 0$ が成り立つならば，$\mathfrak{g}$ は可解である．

2.2 Killing 形式

2.2.1 半単純性の判定条件

定義 2.2.1: Killing 形式

体 $\mathbb{K}$ 上の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の上の対称な双線型形式

$$\kappa \colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K},\ (x,\ y) \longmapsto \mathrm{Tr}\big(\mathrm{ad}(x) \circ \mathrm{ad}(y)\big)$$

のことを $\mathfrak{g}$ の **Killing 形式** (Killing form) と呼ぶ．

定義 2.2.2: 双線型形式の radical

体 $\mathbb{K}$ 上の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の上の対称な双線型形式

$$\beta \colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}$$

を与える．

- $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間

$$S_\beta := \left\{\, x \in \mathfrak{g} \;\middle|\; \forall y \in \mathfrak{g},\ \beta(x,\ y) = 0 \,\right\}$$

  のことを β の **radical** と呼ぶ．
- β が**非退化** (nondegenerate) であるとは，$S_\beta = 0$ であることを言う．

定理 2.2.1: Lie 代数の半単純性と Killing 形式の非退化性

$\mathfrak{g}$ が半単純 Lie 代数 $\iff$ $\mathfrak{g}$ の Killing 形式が非退化

2.2.2 単純イデアル

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ と，そのイデアルの族 $\{\mathfrak{i}_i\}_{i\in I}$ を与える．$\mathfrak{g}$ が $\{\mathfrak{i}_i\}_{i\in I}$ の**直和** (direct sum)[*3]であるとは，部分ベクトル空間の内部直和として

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in I} \mathfrak{i}_i$$

が成り立つことを言う．

定理 2.2.2: 半単純 Lie 代数の直和分解

$\mathfrak{g}$ を半単純 Lie 代数とする．このとき $\mathfrak{g}$ の単純イデアル $\mathfrak{i}_1, \dots, \mathfrak{i}_t$ が存在して以下を充たす：

(1)

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{t} \mathfrak{i}_i$$

(2) $\mathfrak{g}$ の任意の単純イデアルは $\mathfrak{i}_i$ のどれか 1 つと一致する．i.e. (1) の直和分解は一意である．

(3) $\mathfrak{i}_i$ 上の Killing 形式 $\kappa_{\mathfrak{i}_i}$ は $\kappa_{\mathfrak{i}_i\times\mathfrak{i}_i}$ に等しい．

系 2.2.3:

$\mathfrak{g}$ が半単純 Lie 代数ならば以下が成り立つ：

(1) $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$

(2) $\mathfrak{g}$ の任意のイデアルは半単純である．

(3) 任意の Lie 代数の準同型 $f\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ について，$\mathrm{Im}(\mathfrak{h})$ は半単純である．

(4) $\mathfrak{g}$ の任意のイデアルは $\mathfrak{g}$ の単純イデアルの直和である．

2.2.3 内部微分

2.2.4 抽象 Jordan 分解

2.3 表現の完全可約性

2.3.1 $\mathfrak{g}$-加群と表現

この小節では $\mathbb{K}$ を任意の体とする．まず，環上の加群の定義を復習する：

[*3] 厳密には，命題??の意味で**内部直和** (internal direct sum) と呼ぶべきだと思う．

公理 2.3.1: 環上の加群の公理

- R を環とする．**左 R 加群** (left R-module) とは，可換群 $(M,\,+,\,0)$ と写像[a]

$$\cdot : R \times M \to M,\ (a,\,x) \mapsto a \cdot x$$

の組 $(M,\,+,\,\cdot\,)$ であって，$\forall x,\,x_1,\,x_2 \in M$，$\forall a,\,b \in R$ に対して以下を充たすもののことを言う：

(LM1) $a \cdot (b \cdot x) = (ab) \cdot x$

(LM2) $(a+b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$

(LM3) $a \cdot (x_1 + x_2) = a \cdot x_1 + a \cdot x_2$

(LM4) $1 \cdot x = x$

ただし，$1 \in R$ は環 R の乗法単位元である．

- R を環とする．**右 R 加群** (left R-module) とは，可換群 $(M,\,+,\,0)$ と写像

$$\cdot : M \times R \to M,\ (x,\,a) \mapsto x \cdot a$$

の組 $(M,\,+,\,\cdot\,)$ であって，$\forall x,\,x_1,\,x_2 \in M$，$\forall a,\,b \in R$ に対して以下を充たすもののことを言う：

(RM1) $(x \cdot b) \cdot a = x \cdot (ba)$

(RM2) $x \cdot (a+b) = x \cdot a + x \cdot b$

(RM3) $(x_1 + x_2) \cdot a = x_1 \cdot a + x_2 \cdot a$

(RM4) $x \cdot 1 = x$

- $R,\,S$ を環とする．**$(R,\,S)$ 両側加群** ($(R,\,S)$-bimodule) とは，可換群 $(M,\,+,\,0)$ と写像

$$\begin{aligned} \cdot_{\mathrm{L}} &: R \times M \to M,\ (a,\,x) \mapsto a \cdot_{\mathrm{L}} x \\ \cdot_{\mathrm{R}} &: M \times R \to M,\ (x,\,a) \mapsto x \cdot_{\mathrm{R}} a \end{aligned}$$

の組 $(M,\,+,\,\cdot_{\mathrm{L}}\,,\,\cdot_{\mathrm{R}}\,)$ であって，$\forall x \in M$，$\forall a \in R$，$\forall b \in S$ に対して以下を充たすもののことを言う：

(BM1) 左スカラー乗法 $\cdot_{\mathrm{L}}$ に関して M は左 R 加群になる

(BM2) 右スカラー乗法 $\cdot_{\mathrm{R}}$ に関して M は右 S 加群になる

(BM3) $(a \cdot_{\mathrm{L}} x) \cdot_{\mathrm{R}} b = a \cdot_{\mathrm{L}} (x \cdot_{\mathrm{R}} b)$

[a] この写像 $\cdot$ は**スカラー乗法** (scalar multiplication) と呼ばれる．

R が**可換環**の場合，**(LM1)** と **(RM1)** が同値になるので，左 R 加群と右 R 加群の概念は同値になる．これを単に **R 加群** (R-module) と呼ぶ．

R が**体**の場合，R 加群のことを **R-ベクトル空間**と呼ぶ．

! 以下では，なんの断りもなければ R 加群と言って左 R 加群を意味する．

$\mathfrak{g}$ を体 $\mathbb{K}$ 上の Lie 代数とする．このとき，環上の加群の公理を少し修正することで Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上の加群の概念を得る：

公理 2.3.2: Lie 代数上の加群

$\mathfrak{g}$ を体 $\mathbb{K}$ 上の Lie 代数とする．**$\mathfrak{g}$-加群**とは，$\mathbb{K}$-ベクトル空間 $(V,\,+,\,\cdot\,)$ と写像

$$\blacktriangleright\colon \mathfrak{g}\times V \longrightarrow V,\;(x,\,v)\longmapsto x\blacktriangleright v$$

の 4 つ組 $(V,\,+,\,\cdot\,,\,\blacktriangleright)$ であって，$\forall x,\,x_1,\,x_2\in\mathfrak{g},\;\forall v,\,v_1,\,v_2\in V,\;\forall\lambda,\,\mu\in\mathbb{K}$ に対して以下を充たすもののことを言う：

(M1) $(\lambda\cdot x_1+\mu\cdot x_2)\blacktriangleright v=\lambda\cdot(x_1\blacktriangleright v)+\mu\cdot(x_2\blacktriangleright v)$

(M2) $x\blacktriangleright(\lambda\cdot v_1+\mu\cdot v_2)=\lambda\cdot(x\blacktriangleright v_1)+\mu\cdot(x\blacktriangleright v_2)$

(M3) $[x,y]\blacktriangleright v=x\blacktriangleright(y\blacktriangleright v)-y(\blacktriangleright x\blacktriangleright v)$

同値な定義として，Lie 代数の表現

$$\phi\colon\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{gl}(V),\;x\longmapsto\bigl(v\mapsto\phi(x)(v)\bigr)$$

について

$$\blacktriangleright\colon\mathfrak{g}\times V\longrightarrow V,\;(x,\,v)\longmapsto\phi(x)(v)$$

とおくことで得られる 4 つ組 $(V,\,+,\,\cdot\,,\,\blacktriangleright)$ のことである[a]．

[a] **【例??】** より $\mathfrak{gl}(V)$ の Lie ブラケットは交換子だったので $[x,y]\blacktriangleright\text{-}=\phi([x,y])=[\phi(x),\phi(y)]=\phi(x)\circ\phi(y)-\phi(y)\circ\phi(x)=x\blacktriangleright(y\blacktriangleright\text{-})-y\blacktriangleright(x\blacktriangleright\text{-})$ となる．

! $\mathfrak{g}$-加群に備わっている 3 つの演算（加法，スカラー乗法，左作用）をいちいち全て明記するのは面倒なので $(V,\,+,\,\cdot\,,\,\blacktriangleright)$ のことを「**$\mathfrak{g}$-加群 V**」と略記する．この略記において，今まで通りスカラー乗法 $\cdot$ は省略して λv の様に書き，左作用はなんの断りもなく $x\blacktriangleright v$ の様に書くことにする．

全く同様に代数上の加群，結合代数上の加群を定義することもできるが，本章では以降 $\mathfrak{g}$-加群と言ったら Lie 代数上の加群を指すことにする．Lie 代数の表現を考えることは $\mathfrak{g}$-加群を考えることと同値なのである．

定義 2.3.1: $\mathfrak{g}$-加群の準同型

$\mathfrak{g}$ を Lie 代数，$(V, +, \cdot, \blacktriangleright_1)$, $(W, +, \cdot, \blacktriangleright_2)$ を $\mathfrak{g}$-加群とする．

- 線型写像 $f\colon V \longrightarrow W$ が **$\mathfrak{g}$-加群の準同型** (homomorphism of $\mathfrak{g}$-module) [a] であるとは，$\forall x \in \mathfrak{g},\ \forall v \in V$ に対して

$$f(x \blacktriangleright_1 v) = x \blacktriangleright_2 f(v)$$

  が成り立つこと[b]．
- $\mathfrak{g}$-加群の準同型 $f\colon V \longrightarrow W$ が**同型** (isomorphism) であるとは，f がベクトル空間の同型写像であることを言う．
- 同型な $\mathfrak{g}$-加群のことを，**同値な $\mathfrak{g}$ の表現** (equivalent representation of $\mathfrak{g}$) とも言う．

[a] **同変写像** (equivalent map) と言うこともある．**絡作用素** (intertwining operator)，**インタートウィナー** (intertwiner) と言う場合もあるが，そこまで普及していない気がする．
[b] スカラー乗法についての線型性の定義を $\blacktriangleright$ について拡張しただけ．

同値な定義だが，線型写像 $f\colon V \longrightarrow W$ が $\mathfrak{g}$-加群の準同型であるとは，Lie 代数の表現

$$\phi_1\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V),\ x \longmapsto \bigl(v \mapsto x \blacktriangleright_1 v\bigr) \phi_2\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(W),\ x \longmapsto \bigl(v \mapsto x \blacktriangleright_2 v\bigr)$$

に関して

$$\forall x \in \mathfrak{g},\ f \circ \phi_1(x) = \phi_2(x) \circ f$$

が成り立つことを言う．

定義 2.3.2: 部分 $\mathfrak{g}$-加群

$\mathfrak{g}$-加群 V を与える．部分集合 $W \subset V$ が**部分 $\mathfrak{g}$-加群**であるとは，W が和，スカラー乗法，$\mathfrak{g}$ の左作用の全てについて閉じていること．i.e. $\forall w,\ w_1,\ w_2 \in W,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &\in W \\ \lambda w &\in W \\ x \blacktriangleright w &\in W \end{aligned}$$

が成り立つことを言う．

同値な定義として，以下の 2 つの条件が充たされることを言う：

(sub-M1) W が V の部分ベクトル空間
(sub-M2) Lie 代数の表現

$$\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V),\ x \longmapsto (v \longmapsto x \blacktriangleright v)$$

に関して

$$\forall x \in \mathfrak{g},\ \phi(x)(W) \subset W$$

が成り立つ．i.e. $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して W は $\phi(x)$-不変である．

【例 2.3.1】$\mathfrak{g}$-加群の準同型の核と像

$\mathfrak{g}$-加群 $V,\, W$ とその間の $\mathfrak{g}$-加群の準同型 $f\colon V \longrightarrow W$ を与える．このとき

$$\begin{aligned} v \in \operatorname{Ker} f \quad &\Longrightarrow \quad \forall x \in \mathfrak{g},\ f(x \blacktriangleright v) = x \blacktriangleright f(v) = x \blacktriangleright 0 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathfrak{g},\ x \blacktriangleright v \in \operatorname{Ker} f, \\ w \in \operatorname{Im} f \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists v \in V,\ w = f(v) \quad \Longrightarrow \quad \forall x \in \mathfrak{g},\ x \blacktriangleright w = x \blacktriangleright f(v) = f(x \blacktriangleright v) \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathfrak{g},\ x \blacktriangleright w \in \operatorname{Im} f \end{aligned}$$

が言えるので $\operatorname{Ker} f,\, \operatorname{Im} f$ はそれぞれ $V,\, W$ の部分 $\mathfrak{g}$-加群である．

2.3.2 $\mathfrak{g}$-加群の直和と既約性

この小節でも $\mathbb{K}$ を任意の体とする．

定義 2.3.3: $\mathfrak{g}$-加群の直和

$\mathfrak{g}$-加群の族 $\{(V_i,\, +,\, \cdot\,,\, \blacktriangleright_i)\}_{i \in I}$ を与える．このとき

- 直和ベクトル空間 $\bigoplus_{i \in I} V_i$
- $\bigoplus_{i \in I} V_i$ への $\mathfrak{g}$ の左作用

$$\blacktriangleright \colon \mathfrak{g} \times \bigoplus_{i \in I} V_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} V_i,\ \bigl(x,\, (v_i)_{i \in I}\bigr) \longmapsto (x \blacktriangleright_i v_i)_{i \in I}$$

の組として得られる $\mathfrak{g}$-加群 $(\bigoplus_{i \in I} V_i,\, +,\, \cdot\,,\, \blacktriangleright)$ を **$\mathfrak{g}$-加群の直和** (direct sum) と呼び[a]，$\boldsymbol{\bigoplus_{i \in I} V_i}$ と略記する．

---

[a] 系??の注と同様に，この定義は厳密には**外部直和** (external direct sum) と呼ぶべきだと思う．

定義 2.3.4: Lie 代数の表現の既約性

- $\mathfrak{g}$-加群 V が**既約** (irreducible)[a]であるとは，V の部分 $\mathfrak{g}$-加群が $0,\, V$ のちょうど2 つ[b]だけであることを言う．
- $\mathfrak{g}$-加群 V が**完全可約** (completely reducible) であるとは，V が既約な部分 $\mathfrak{g}$-加群の直和[c]であることを言う．

---

[a] i.e. Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現 $(\phi,\, V)$ が**既約表現** (irreducible representation; irrep) だ，と言っても良い．
[b] つまり，零ベクトル空間 0 は既約な $\mathfrak{g}$-加群とは呼ばない．
[c] こちらの場合，厳密には**内部直和** (internal direct sum) と呼ぶべきだと思う．

次の補題は証明が少し厄介である：

補題 2.3.1: 完全可約の全射

$\mathfrak{g}$-加群の準同型 $p\colon V \longrightarrow W$ を与える．このとき p が全射かつ V が完全可約ならば，$\mathfrak{g}$-加群の短完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\, p \hookrightarrow V \xrightarrow{p} W \longrightarrow 0$$

は分裂する．

__証明__ V が完全可約という仮定から，既約な部分 $\mathfrak{g}$-加群の族 $\{V_i\}_{i\in I}$ が存在して，内部直和の意味で

$$V = \bigoplus_{i\in I} V_i$$

と書ける．ここで $\mathcal{S}$ を以下の条件を充たす組 $(J,\, V_J)$ 全体の集合とする：

- $J \subset I,\ V_J = \bigoplus_{j\in J} V_j \subset V$
- $\mathrm{Ker}\, p \cap V_J = 0$

$\mathcal{S}$ の上の 2 項関係を

$$(J,\, V_J) \le (K,\, V_K) \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad J \subset K$$

と定義すると組 $(\mathcal{S},\, \le)$ は順序集合になる．また $\mathcal{S}' = \bigl\{(J_a,\, V_{J_a})\bigr\}_{a\in A}$ を $\mathcal{S}$ の任意の全順序部分集合とすると $\Bigl(\bigcup_{a\in A} J_a,\, V_{\bigcup_{a\in A} J_a}\Bigr) \in \mathcal{S}$ であり[*4]，これが $\mathcal{S}'$ の上界を与える．i.e. $\mathcal{S}$ は帰納的順序集合である．したがって Zorn の補題を使うことができ，$\mathcal{S}$ は極大元 $(J_0,\, V_{J_0}) \in \mathcal{S}$ を持つ．

次に $V = \mathrm{Ker}\, p \oplus V_{J_0}$ を示す．$\mathcal{S}$ の定義から $\mathrm{Ker}\, p \cap V_{J_0} = 0$ なので，命題**??**より $V = \mathrm{Ker}\, p + V_{J_0}$ を示せば良い．$V \ne \mathrm{Ker}\, p + V_{J_0}$ を仮定すると，ある $k \in I \setminus J_0$ が存在して $V_k \not\subset \mathrm{Ker}\, p + V_{J_0}$ を充たす．V_k は既約なので $V_k \cap (\mathrm{Ker}\, p + V_{J_0}) = 0$ が成り立つが，このことは $(J_0,\, V_{J_0})$ の極大性に矛盾．よって背理法から $V = \mathrm{Ker}\, p + V_{J_0}$ が言えた．

以上より $W \cong V/\mathrm{Ker}\, p \cong V_{J_0}$ が言える．このとき包含準同型 $i\colon V_{J_0} \hookrightarrow V$ が $p \circ i = \mathrm{id}_{V_{J_0}}$ を充たすので証明が完了した． ■

命題 2.3.1: 完全可約性の特徴付け

以下の 2 つは同値である：

(1) $\mathfrak{g}$-加群 V が完全可約

(2) V の任意の部分 $\mathfrak{g}$-加群 $W \subset V$ に対して，部分 $\mathfrak{g}$-加群 $W^c \subset V$ [a]が存在して $V \cong W \oplus W^c$ を充たす．

[a] W の**補表現** (complement representation) と言う．

[*4] $V_{\bigcup_{a\in A} J_a} = \bigoplus_{j\in\bigcup_{a\in A} J_a} V_j = \bigcup_{a\in A} V_{J_a}$ なので，$\cap$ の分配律から $\mathrm{Ker}\, p \cap V_{\bigcup_{a\in A} J_a} = \mathrm{Ker}\, p \cap \bigcup_{a\in A} V_{J_a} = \bigcup_{a\in A}(\mathrm{Ker}\, p \cap V_{J_a}) = 0$ が言える．

証明 **(1) $\Longrightarrow$ (2)** V が既約な部分 $\mathfrak{g}$-加群の族 $\{V_i\}_{i\in I}$ によって

$$V = \bigoplus_{i\in I} V_i$$

と書けるとする．V の任意の部分 $\mathfrak{g}$-加群 $W \subset V$ を 1 つ固定する．このとき標準的射影 $p\colon V \longrightarrow V/W$ は全射な $\mathfrak{g}$-加群の準同型なので，補題 2.3.1 から $\mathfrak{g}$-加群の短完全列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} p \cong W \hookrightarrow V \xrightarrow{p} V/W \longrightarrow 0$$

が分裂する．よって系??から

$$V \cong W \oplus (V/W)$$

が言えた．

(1) $\Longleftarrow$ (2)

V の既約な部分 $\mathfrak{g}$-加群全体の集合を $\mathcal{V}$ と書く．$\mathcal{S}$ を以下の条件を充たす組 (I, V_I) 全体の集合とする：

- $I \subset \mathcal{V}$
- 内部直和の意味で $V_I = \bigoplus_{V_i\in I} V_i \subset V$

$\mathcal{S}$ 上の 2 項関係を

$$(I, V_I) \le (J, V_J) \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad I \subset J$$

と定義すると組 $(\mathcal{S}, \le)$ は順序集合になる．V の 0 でない部分 $\mathfrak{g}$-加群のうち極小のものを V_1 とすると，定義から $V_1 \in \mathcal{V}$ なので $(\{V_1\}, V_{V_1}) \in \mathcal{S}$ となり $\mathcal{S}$ は空でない．また $\mathcal{S}' = \left\{(J_a, V_{J_a})\right\}_{a\in A}$ を $\mathcal{S}$ の任意の全順序部分集合とすると $\left(\bigcup_{a\in A} J_a, V_{\bigcup_{a\in A} J_a}\right) \in \mathcal{S}$ であり，これが $\mathcal{S}'$ の上界を与える．i.e. $\mathcal{S}$ は帰納的順序集合である．したがって Zorn の補題を使うことができ，$\mathcal{S}$ は極大元 $(I_0, V_{I_0}) \in \mathcal{S}$ を持つ．このとき $V = V_{I_0}$ であることを背理法により示そう．

$V \neq V_{I_0}$ を仮定する．このとき (2) より V の 0 でない部分 $\mathfrak{g}$-加群 $V_{I_0}^c$ が存在して $V \cong V_{I_0} \oplus V_{I_0}^c$ を充たす．このとき $V_{I_0}^c$ に含まれる 0 でない極小の部分 $\mathfrak{g}$-加群 W をとることができるが，定義からこの W は既約である．よって

$$W \oplus V_{I_0} \subset V$$

もまた既約部分 $\mathfrak{g}$-加群の直和となり，V_{I_0} の極大性に矛盾する．

■

補題 2.3.2: Schur の補題

任意の体[a] $\mathbb{K}$ 上の $\mathfrak{g}$-加群 V, W，および 0 でない$\mathfrak{g}$-加群の準同型 $f\colon V \longrightarrow W$ を与える．このとき以下が成り立つ：

(1) V が既約ならば f は単射

(2) W が既約ならば f は全射

[a] 代数閉体でなくても良い

証明 (1)【例 **2.3.1**】より $\mathrm{Ker}\, f$ は V の部分 $\mathfrak{g}$-加群だが，V が既約なので $\mathrm{Ker}\, f = 0,\, V$ のどちらかである．仮定より f は 0 でないので $\mathrm{Ker}\, f = 0$，i.e. f は単射である．

(2)【例 **2.3.1**】より $\mathrm{Im}\, f$ は W の部分 $\mathfrak{g}$-加群だが，W が既約なので $\mathrm{Im}\, f = 0,\, W$ のどちらかである．仮定より f は 0 でないので $\mathrm{Im}\, f = W$，i.e. f は全射である．

■

系 2.3.1: 代数閉体上の Schur の補題

代数閉体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 $\mathfrak{g}$-加群 V を与える．このとき V が既約ならば，任意の $\mathfrak{g}$-加群の自己準同型 $\phi \in \mathrm{End}\, V$ はある $\lambda \in \mathbb{K}$ を使って $\phi = \lambda\, \mathrm{id}_V$（i.e. スカラー倍）と書ける．

証明 仮定より V が既約なので，補題 2.3.2-(1), (2) より任意の $\mathfrak{g}$-加群の自己準同型 $\phi\colon V \longrightarrow V$ は $\mathfrak{g}$-加群の同型か 0 のどちらかである．ここで $\lambda \in \mathbb{K}$ を ϕ の固有値とする．$\mathbb{K}$ が代数閉体なので λ は確かに存在する．このとき写像 $\phi - \lambda\, \mathrm{id}_V\colon V \longrightarrow V$ もまた $\mathfrak{g}$-加群の自己準同型となるが，固有値の定義から $\det(\phi - \lambda\, \mathrm{id}_V) = 0$ なので同型写像ではあり得ない．よって $\phi - \lambda\, \mathrm{id}_V = 0 \iff \phi = \lambda\, \mathrm{id}_V$ である． ■

系 2.3.2: 可換な Lie 代数の有限次元既約表現

代数閉体上の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が可換ならば，$\mathfrak{g}$ の任意の有限次元既約表現は 1 次元である．

証明 $\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ を $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現とする．このとき $\mathfrak{g}$ が可換であることから $\forall x, y \in \mathfrak{g},\ \forall v \in V$ に対して

$$
\begin{aligned}
\phi(x)(y \blacktriangleright v) &= \phi(x) \circ \phi(y)(v) \\
&= [\phi(x), \phi(y)](v) + \phi(y) \circ \phi(x)(v) \\
&= \phi([x, y])(v) + \phi(y) \circ \phi(x)(v) \\
&= \phi(0)(v) + \phi(y) \circ \phi(x)(v) \\
&= \phi(y) \circ \phi(x)(v) \\
&= y \blacktriangleright \bigl(\phi(x)(v)\bigr)
\end{aligned}
$$

が言える．i.e. $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $\phi(x)\colon V \longrightarrow V$ は $\mathfrak{g}$-加群の準同型である．よって Schur の補題から $\phi(x)$ がスカラー倍だとわかる．故に V の任意の 1 次元部分ベクトル空間は自動的に部分 $\mathfrak{g}$-加群になる．然るに V は仮定より既約だから V の部分 $\mathfrak{g}$-加群は $0, V$ しかあり得ない．さらに $V \neq 0$ なので $\dim V = 1$ でなくてはならない． ■

2.3.3 $\mathfrak{g}$-加群の Hom とテンソル積

この小節でも $\mathbb{K}$ を任意の体とする．

定義 2.3.5: $\mathfrak{g}$-加群のテンソル積

$(V_1,\, +,\, \cdot\,,\, \blacktriangleright_1),\, (V_2,\, +,\, \cdot\,,\, \blacktriangleright_2)$ を有限次元$\mathfrak{g}$-加群とする．このとき

- $\mathbb{K}$-ベクトル空間のテンソル積 $V_1 \otimes V_2$
- $V_1 \otimes V_2$ への $\mathfrak{g}$ の左作用[a]

$$\blacktriangleright \colon \mathfrak{g} \times (V_1 \otimes V_2) \longrightarrow V_1 \otimes V_2,\; (x,\, v_1 \otimes v_2) \longmapsto (x \blacktriangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (x \blacktriangleright_2 v_2)$$

の組として得られる $\mathfrak{g}$-加群 $(V_1 \otimes V_2,\, +,\, \cdot\,,\, \blacktriangleright)$ を **$\mathfrak{g}$-加群のテンソル積** (tensor product) と呼び，$\boldsymbol{V_1 \otimes V_2}$ と略記する．

[a] 正確には，これの右辺を線型に拡張したもの

実際 $V_1 \otimes V_2$ が $\mathfrak{g}$-加群になっていることを確認しておこう：

$$\begin{aligned}
[x,y] \blacktriangleright (v_1 \otimes v_2) &= ([x,y] \blacktriangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes ([x,y] \blacktriangleright_2 v_2) \\
&= (x \blacktriangleright_1 y \blacktriangleright_1 v_1) \otimes v_2 - (y \blacktriangleright_1 x \blacktriangleright_1 v_1) \otimes v_2 \\
&\quad + v_1 \otimes (x \blacktriangleright_2 y \blacktriangleright_2 v_2) - v_1 \otimes (y \blacktriangleright_2 x \blacktriangleright_2 v_2) \\
&= \bigl((x \blacktriangleright_1 y \blacktriangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (x \blacktriangleright_2 y \blacktriangleright_2 v_2)\bigr) \\
&\quad - \bigl((y \blacktriangleright_1 x \blacktriangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (y \blacktriangleright_2 x \blacktriangleright_2 v_2)\bigr), \\
x \blacktriangleright y \blacktriangleright (v_1 \otimes v_2) - y \blacktriangleright x \blacktriangleright (v_1 \otimes v_2) &= x \blacktriangleright \bigl((y \blacktriangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (y \blacktriangleright_2 v_2)\bigr) \\
&\quad - y \blacktriangleright \bigl((x \blacktriangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (x \blacktriangleright_2 v_2)\bigr) \\
&= \bigl((x \blacktriangleright_1 y \blacktriangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (x \blacktriangleright_2 y \blacktriangleright_2 v_2)\bigr) \\
&\quad - \bigl((y \blacktriangleright_1 x \blacktriangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (y \blacktriangleright_2 x \blacktriangleright_2 v_2)\bigr)
\end{aligned}$$

なので

$$[x,y] \blacktriangleright (v_1 \otimes v_2) = x \blacktriangleright y \blacktriangleright (v_1 \otimes v_2) - y \blacktriangleright x \blacktriangleright (v_1 \otimes v_2)$$

がわかった．

定義 2.3.6: $\mathfrak{g}$-加群の双対

$(V,\, +,\, \cdot\,,\, \blacktriangleright)$ を有限次元$\mathfrak{g}$-加群とする．このとき

- 双対ベクトル空間 $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, \mathbb{K})$
- V^* への $\mathfrak{g}$ の左作用

$$\blacktriangleright \colon \mathfrak{g} \times V^* \longrightarrow V^*,\; (x,\, f) \longmapsto \bigl(v \mapsto -f(x \blacktriangleright v)\bigr)$$

の組として得られる $\mathfrak{g}$-加群 $(V^*,\, +,\, \cdot\,,\, \blacktriangleright)$ を **$\mathfrak{g}$-加群の双対** (dual)[a] と呼び，$\boldsymbol{V^*}$ と略記する．

[a] **反傾** (contragradient) と呼ぶ場合もあるようだが，現在はあまり使われていないような気がする．

実際 V^* が $\mathfrak{g}$-加群になっていることを確認しておこう：

$$\begin{aligned}([x,y] \blacktriangleright f)(v) &= -f([x,y] \blacktriangleright f)(v) \\ &= -f(x \blacktriangleright y \blacktriangleright v - y \blacktriangleright x \blacktriangleright v) \\ &= -f(x \blacktriangleright y \blacktriangleright v) + f(y \blacktriangleright x \blacktriangleright v) \\ &= (x \blacktriangleright f)(y \blacktriangleright v) - (y \blacktriangleright f)(x \blacktriangleright v) \\ &= -\bigl(y \blacktriangleright (x \blacktriangleright f)\bigr)(v) + \bigl(x \blacktriangleright (y \blacktriangleright f)\bigr)(v) \\ &= (x \blacktriangleright y \blacktriangleright f)(v) - (y \blacktriangleright x \blacktriangleright f)(v)\end{aligned}$$

なので

$$[x,y] \blacktriangleright f = x \blacktriangleright y \blacktriangleright f - y \blacktriangleright x \blacktriangleright f$$

がわかった．

ここで，$\mathbb{K}$-ベクトル空間の自然な同型（命題??）

$$V^* \otimes W \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W)$$

の具体形が

$$\alpha\colon f \otimes w \longmapsto \bigl(v \mapsto f(v) \cdot w\bigr) \tag{2.3.1}$$

となっていたことを思い出そう．このことから，$\mathbb{K}$-ベクトル空間 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W)$ の上の $\mathfrak{g}$ の左作用を

$$x \blacktriangleright (f \otimes w) = -f(x \blacktriangleright \text{-}) \otimes w + f \otimes (x \blacktriangleright w)$$

に着想を得て

$$(x \blacktriangleright F)(v) = -F(x \blacktriangleright v) + x \blacktriangleright F(v) \quad (\forall F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W))$$

と定義しようと思うのが自然である．というのも，こう定義することで $\mathbb{K}$-ベクトル空間の同型写像 (2.3.1) が

$$\begin{aligned}\alpha\bigl(x \blacktriangleright (f \otimes w)\bigr)(v) &= -\alpha\bigl(f(x \blacktriangleright \text{-}) \otimes w\bigr)(v) + \alpha\bigl(f \otimes (x \blacktriangleright w)\bigr)(v) \\ &= -f(x \blacktriangleright v) \cdot w + f(v) \cdot (x \blacktriangleright w) \\ &= -f(x \blacktriangleright v) \cdot w + x \blacktriangleright \bigl(f(v) \cdot w\bigr) \\ &= \bigl(x \blacktriangleright \alpha(f \otimes w)\bigr)(v)\end{aligned}$$

となって $\mathfrak{g}$-加群の同型写像になる！

定義 2.3.7: $\mathfrak{g}$-加群の Hom

$(V,\, +,\, \cdot\,,\, \blacktriangleright_1)$, $(W,\, +,\, \cdot\,,\, \blacktriangleright_2)$ を有限次元$\mathfrak{g}$-加群とする．このとき

- $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W)$[a]
- $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W)$ への $\mathfrak{g}$ の左作用

$$\blacktriangleright\colon \mathfrak{g} \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W),\ F \longmapsto \bigl(v \mapsto -F(x \blacktriangleright_1 v) + x \blacktriangleright_2 F(v)\bigr)$$

の組として得られる $\mathfrak{g}$-加群 $\bigl(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W),\, +,\, \cdot\,,\, \blacktriangleright\bigr)$ を $\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}\,(\boldsymbol{V},\, \boldsymbol{W})$ と略記する．

[a] V から W への $\mathfrak{g}$-加群の準同型全体の集合ではない．

2.3.4 Casimir 演算子

この小節では $\mathbb{K}$ は標数 0 の体とする．

定義 2.3.8: 忠実な表現

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現 $\rho\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ が**忠実** (faithful)[a] であるとは，ρ が単射であることを言う．

[a] 群作用の文脈では**効果的な作用** (effective action) と呼ぶ．

補題 2.3.3:

- 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の忠実な有限次元表現 $\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$
- $\mathfrak{g}$ 上の対称な双線型形式

$$\beta\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K},\ (x,\,y) \longmapsto \mathrm{Tr}\bigl(\phi(x) \circ \phi(y)\bigr)$$

を与える．β の radical を

$$S_\beta \coloneqq \left\{\, x \in \mathfrak{g} \;\middle|\; \forall y \in \mathfrak{g},\ \beta(x,\,y) = 0 \,\right\}$$

とおく．このとき以下が成り立つ：

(1) S_β は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．

(2) $S_\beta = 0$，i.e. β は非退化である．

証明 (1) Tr の循環性から

$$\begin{aligned}\beta(x,\,[y,z]) &= \mathrm{Tr}\bigl(\phi(x) \circ \phi([y,z])\bigr) \\ &= \mathrm{Tr}\bigl(\phi(x) \circ \phi(y) \circ \phi(z)\bigr) - \mathrm{Tr}\bigl(\phi(x) \circ \phi(z) \circ \phi(y)\bigr) \\ &= \mathrm{Tr}\bigl(\phi(x) \circ \phi(y) \circ \phi(z)\bigr) - \mathrm{Tr}\bigl(\phi(y) \circ \phi(x) \circ \phi(z)\bigr) \\ &= \mathrm{Tr}\bigl(\phi([x,y]) \circ \phi(z)\bigr) \\ &= \beta([x,y],\,z)\end{aligned}$$

が成り立つので，$\forall x \in \mathfrak{g},\ \forall y \in S_\beta$ に対して

$$\forall z \in \mathfrak{g},\ \beta([x,y],\,z) = -\beta(y,\,[x,z]) = 0$$

が成り立つ．i.e. $[x,y] \in S_\beta$ が言えた．

(2) S_β の定義から $[\phi(x),\phi(y)]$ の形をした $[\phi(S_\beta),\phi(S_\beta)]$ の任意の元および $\forall\phi(z) \in \phi(S_\beta)$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\bigl([\phi(x),\phi(y)] \circ \phi(z)\bigr) &= \mathrm{Tr}\bigl(\phi([x,y]) \circ \phi(z)\bigr) \\ &= \beta([x,y],\,z) \\ &= 0\end{aligned}$$

が成り立つので，定理 2.1.3 より $\phi(S_\beta)$ は可解である．ϕ は忠実なので $\mathrm{Ker}\,\phi = 0$ であり，準同型定理から $\phi(S_\beta) \cong S_\beta/\,\mathrm{Ker}\,\phi = S_\beta$ が言える．従って (1) も併せると S_β は $\mathfrak{g}$ の可解イデアルである．仮定より $\mathfrak{g}$ は半単純だったから，半単純 Lie 代数の定義から $S_\beta = 0$ が言える．

■

補題 2.3.4:

- 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e_\mu\}$
- 対称かつ非退化な双線型形式 $\beta \in L(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}; \mathbb{K})$ であって $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\beta(x, [y, z]) = \beta([x, y], z)$$

を充たすもの

を与える．このとき以下が成り立つ：

(1) $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e^\mu\}$ であって[a]，$\forall(\mu, \nu) \in \{1, \ldots, \dim \mathfrak{g}\}^2$ に対して

$$\beta(e_\mu, e^\nu) = \delta^\nu_\mu$$

を充たすものが一意的に存在する．

(2) $\forall x \in \mathfrak{g}$ を一つ固定する．このとき $\mathrm{ad}(x)\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の基底 $\{e_\mu\}$ による表現行列 $\left[a_\mu{}^\nu\right]_{1\leq\mu,\,\nu\leq\dim\mathfrak{g}}$ と，(1) の基底 $\{e^\mu\}$ による表現行列 $\left[b^\mu{}_\nu\right]_{1\leq\mu,\,\nu\leq\dim\mathfrak{g}}$ について

$$a_\mu{}^\nu = -b^\nu{}_\mu$$

が成り立つ．

[a] $\mathfrak{g}^*$ の元ではないが，Einstein の規約との便宜上添字を上付きにする．

証明 (1) $\beta_{\mu\nu} \coloneqq \beta(e_\mu, e_\nu)$ とおく．このとき $x = x^\mu e_\mu \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned}
\forall y = y^\nu e_\nu \in \mathfrak{g},\ \beta(x, y) = 0 \quad &\iff \quad \forall \begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^{\dim\mathfrak{g}} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{\dim\mathfrak{g}},\ \beta_{\mu\nu}x^\mu y^\nu = 0 \\
&\iff \quad 1 \leq \forall\nu \leq \dim\mathfrak{g},\ \beta_{\nu\mu}x^\mu = 0 \\
&\iff \quad \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^{\dim\mathfrak{g}} \end{bmatrix} \in \mathrm{Ker}\left[\beta_{\mu\nu}\right] \subset \mathbb{K}^{\dim\mathfrak{g}}
\end{aligned}$$

が言える．ただし 2 つ目の同値変形で β が対称であることを使った．したがって β が非退化であることは $\mathrm{Ker}\left[\beta_{\mu\nu}\right] = 0$ と同値であり，このことはさらに補題??-(3) より $\det\left[\beta_{\mu\nu}\right] \neq 0$ と同値である[*5]．よって $\left[\beta_{\mu\nu}\right]$ の逆行列 $\left[\alpha^{\mu\nu}\right]$ が一意的に存在するので，$e^\mu \coloneqq e_\nu \alpha^{\mu\nu}$ と定めると，

$$\beta(e_\mu, e^\nu) = \alpha^{\nu\rho}\beta_{\mu\rho} = \delta^\nu_\mu$$

が成り立つ．

[*5] Cramer の公式は任意の体 $\mathbb{K}$ 上で成り立つ．

(2) $\mathrm{ad}(x)(e_\mu) =: a_\mu{}^\nu e_\nu,\ \mathrm{ad}(e^\mu) =: b^\mu{}_\nu e^\nu$ とおくと，

$$\begin{aligned}
a_\mu{}^\nu &= a_\mu{}^\rho \delta^\nu_\rho \\
&= a_\mu{}^\rho \beta(e_\rho,\, e^\nu) \\
&= \beta\big(\mathrm{ad}(x)(e_\mu),\, e^\nu\big) \\
&= \beta\big(-[e_\mu, x],\, e^\nu\big) \\
&= \beta\big(e_\mu,\, -\mathrm{ad}(x)e^\nu\big) \\
&= -b^\nu{}_\rho \beta\big(e_\mu,\, e^\rho\big) \\
&= -b^\nu{}_\mu
\end{aligned}$$

■

定義 2.3.9: 忠実な表現の Casimir 演算子

- 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の有限次元表現 $\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$
- 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e_\mu\}$
- 対称かつ非退化な双線型形式 $\beta \in L(\mathfrak{g},\, \mathfrak{g};\, \mathbb{K})$ であって $\forall x,\, y,\, z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\beta(x,\, [y, z]) = \beta([x, y],\, z)$$

を充たすもの

を与える．与えられた $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e_\mu\}$ から補題 2.3.4 により構成した $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e^\mu\}$ をとる．このとき

- $\mathbb{K}$-線型変換

$$\boldsymbol{c_\phi(\beta)}\colon V \longrightarrow V,\ v \longmapsto \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(e^\mu)(v)$$

を $\beta,\, \phi$ の前 Casimir 演算子と呼ぶ．
- ϕ が忠実な表現で，かつ

$$\beta(x,\, y) := \mathrm{Tr}\big(\phi(x) \circ \phi(y)\big)$$

であるとき[a]，$\beta,\, \phi$ の前 Casimir 演算子のことを **$\boldsymbol{\phi}$ の Casimir 演算子** (Casimir operator of ϕ) と呼んで $\boldsymbol{c_\phi}$ と略記する．

[a] 補題 2.3.3 よりこの β は非退化である

命題 2.3.2: Casimir 演算子の性質

- 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の有限次元表現 $\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$
- 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e_\mu\}$
- 対称かつ非退化な双線型形式 $\beta \in L(\mathfrak{g},\, \mathfrak{g};\, \mathbb{K})$ であって $\forall x,\, y,\, z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\beta(x,\, [y, z]) = \beta([x, y],\, z)$$

を充たすもの

を与える．与えられた $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e_\mu\}$ から補題 2.3.4 により構成した $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e^\mu\}$ をとる．

(1) 前 Casimir 演算子 $c_\phi(\beta) \in \mathrm{End}(V)$ は，$\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[\phi(x), c_\phi(\beta)] = 0$$

を充たす．従って $c_\phi(\beta)$ は $\mathfrak{g}$-加群の準同型である．

(2) ϕ が忠実な表現ならば，Casimir 演算子 $c_\phi \in \mathrm{End}\, V$ について

$$\mathrm{Tr}\, c_\phi = \dim \mathfrak{g}$$

が成り立つ．

(3) $\mathbb{K}$ が代数閉体でかつ ϕ が忠実な表現でかつ ϕ が既約表現ならば，Casimir 演算子 $c_\phi \in \mathrm{End}\, V$ は $\mathfrak{g}$ の基底の取り方によらずに

$$c_\phi = \frac{\dim \mathfrak{g}}{\dim V} \mathrm{id}_V$$

と書ける．

証明 (1) $\forall x,\, y,\, z \in \mathrm{End}(V)$ に対して

$$[x, y \circ z] = [x, y] \circ z + y \circ [x, z]$$

が成り立つことと補題 2.3.4-(2) より，

$$\begin{aligned}
[\phi(x), c_\phi(\beta)] &= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} [\phi(x), \phi(e_\mu)] \circ \phi(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ [\phi(x), \phi(e^\mu)] \\
&= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \mathrm{ad}\big(\phi(x)\big)\big(\phi(e_\mu)\big) \circ \phi(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \mathrm{ad}\big(\phi(x)\big)\big(\phi(e^\mu)\big) \\
&= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi\big(\mathrm{ad}(x)(e_\mu)\big) \circ \phi(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi\big(\mathrm{ad}(x)(e^\mu)\big) \\
&= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} a_\mu{}^\nu \phi(e_\nu) \circ \phi(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} b^\mu{}_\nu \phi(e_\mu) \circ \phi(e^\nu) \\
&= 0
\end{aligned}$$

が言えた．

(2) 補題 2.3.4-(1) より

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\, c_\phi &= \sum_{\mu}^{\dim \mathfrak{g}} \mathrm{Tr}\big(\phi(e_\mu) \circ \phi(e^\mu)\big) \\
&= \sum_{\mu}^{\dim \mathfrak{g}} \beta(e_\mu,\, e^\nu) \\
&= \dim \mathfrak{g}
\end{aligned}$$

(3) $\mathbb{K}$ が代数閉体でかつ ϕ が既約なので，(1), (2) と代数閉体上の Schur の補題から $c_\phi\colon V \longrightarrow V$ は $(\dim\mathfrak{g}/\dim V)\,\mathrm{id}_V$ に等しい．

■

$\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ が忠実でない場合は次のように考える：まず，$\mathfrak{g}$ が半単純なので，$\mathrm{Ker}\,\phi$（$\mathfrak{g}$ のイデアルである）は系??から $\mathfrak{g}$ の単純イデアルの直和である．定理 2.2.2 を使って $\mathfrak{g}^\perp$ を $\mathfrak{g} =: \mathrm{Ker}\,\phi \oplus \mathfrak{g}^\perp$ で定義すると，$\mathfrak{g}^\perp \cong \mathfrak{g}/\mathrm{Ker}\,\phi$ なので，制限

$$\phi|_{\mathfrak{g}^\perp}\colon \mathfrak{g}^\perp \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

は忠実な表現になる．そして $\mathfrak{g}^\perp$ の基底に対して定義 2.3.9 を適用するのである．

2.3.5 Weyl の定理

この小節では $\mathbb{K}$ を標数 0 の体とする．[?, 第 7 章, p.80-86] に倣って Weyl の定理を証明する．

補題 2.3.5:

$\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ を半単純 Lie 代数の有限次元表現とする．このとき

$$\phi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{sl}(V)$$

が成り立つ．特に，$\dim V = 1$ ならば ϕ は零写像である[a]

[a] これを**自明な表現** (trivial representation) と言う．

証明【例??】より，$\mathfrak{sl}(V)$ の基底は行列単位 e_{ij} を使って

$$\left\{\, e_{ij} - e_{ji} \;\middle|\; 1 \le i \ne j \le \dim V \,\right\} \cup \left\{\, e_{ii} - e_{i+1,i+1} \;\middle|\; 1 \le i \le \dim V - 1 \,\right\} = [\{e_i\}, \{e_j\}]$$

と書けた．よって $\mathfrak{sl}(V) = [\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(V)]$ である．一方で $\mathfrak{g}$ が半単純なので系 2.2.3-(1) より $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ であるから，

$$\phi(\mathfrak{g}) = \phi([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = [\phi(\mathfrak{g}), \phi(\mathfrak{g})] \subset [\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(V)] = \mathfrak{sl}(V)$$

が言えた．特に $\dim V = 0$ ならば $\dim \mathfrak{sl}(V) = 1^2 - 1 = 0$ なので，$\mathrm{Im}\,\phi = 0$ である．■

補題 2.3.6: Whitehead の補題

半単純 Lie 代数の有限次元表現 $\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ を与える．
このとき

$$\forall x,\, y \in \mathfrak{g},\ f([x, y]) = \phi(x) \circ f(y) - \phi(y) \circ f(x) \tag{2.3.2}$$

を充たす任意の$\mathbb{K}$-線型写像 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}, V)$ に対して，ある $v \in V$ が存在して

$$\forall x \in \mathfrak{g},\ f(x) = \phi(x)(v)$$

が成り立つ．

証明 **case1: ϕ が既約かつ忠実な場合**

(2.3.2) を充たす任意の $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g},\, V)$ を 1 つとる．$\mathfrak{g}$ の基底 $\{e_\mu\}$ を 1 つ固定し，

$$\beta\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K},\ (x,\, y) \longmapsto \mathrm{Tr}\big(\phi(x) \circ \phi(y)\big)$$

を用いて補題 2.3.4-(1) の方法で対応する $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e^\mu\}$ を作る．このとき

$$v \coloneqq \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ f(e^\mu) \in V$$

とおくと，$\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して補題 2.3.4 と同じ記号の下で

$$\begin{aligned}
\phi(x)(v) &= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(x) \circ \phi(e_\mu) \circ f(e^\mu) \\
&= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} [\phi(x), \phi(e_\mu)] \circ f(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(x) \circ f(e^\mu) \\
&= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi\big(\mathrm{ad}(x)(e_\mu)\big) \circ f(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(x) \circ f(e^\mu) \\
&= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} a_\mu{}^\nu \phi(e_\nu) \circ f(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(x) \circ f(e^\mu) \\
c_\phi \circ f(x) &= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(e^\nu) \circ f(x) \\
&= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ f([e^\nu, x]) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(x) \circ f(e^\nu) \\
&= -\sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ f\big(\mathrm{ad}(x)(e^\nu)\big) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(x) \circ f(e^\nu) \\
&= -\sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} b^\nu{}_\mu \phi(e_\mu) \circ f(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(x) \circ f(e^\nu)
\end{aligned}$$

と計算できるので，補題 2.3.4-(2) から

$$\phi(x)(v) = c_\phi \circ f(x)$$

が言えた．仮定より $\mathfrak{g}$-加群 V は既約なので，Schur の補題-(1), (2) から $\mathfrak{g}$-加群の準同型 $c_\phi\colon V \longrightarrow V$ は $\mathfrak{g}$-加群の同型であり，$c_\phi^{-1}(v) \in V$ が所望のベクトルとなる．

case2: ϕ が忠実とは限らない既約表現の場合

(2.3.2) を充たす任意の $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g},\, V)$ を 1 つとる．このとき $\forall [x,y] \in [\mathrm{Ker}\,\phi, \mathrm{Ker}\,\phi]$ に対して

$$f([x,y]) = \phi(x) \circ f(y) - \phi(y) \circ f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad [x,y] \in \mathrm{Ker}\, f$$

が言えるが，仮定より $\mathfrak{g}$ は半単純なので，系 2.2.3-(3) よりそのイデアルである $\mathrm{Ker}\,\phi \subset \mathfrak{g}$ もまた半単純．故に系 2.2.3-(1) から $[\mathrm{Ker}\,\phi, \mathrm{Ker}\,\phi] = \mathrm{Ker}\,\phi$ であり，

$$\mathrm{Ker}\,\phi \subset \mathrm{Ker}\, f$$

がわかった．従ってこのとき商ベクトル空間の普遍性を使うことができ，以下の図式を可換にする $\overline{f} \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V/\operatorname{Ker}\phi,\, \mathfrak{g})$ が一意的に存在する：

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & V \\
\mathfrak{g}/\operatorname{Ker}\phi \arrow[ur, dashed, "\exists ! \bar{f}"']
\end{tikzcd}$$

さらに商代数の普遍性から，表現 $\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ は以下の図式を可換にする表現 $\overline{\phi}\colon \mathfrak{g}/\operatorname{Ker}\phi \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ に一意的に持ち上がる：

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "p"'] & \mathfrak{gl}(V) \\
\mathfrak{g}/\operatorname{Ker}\phi \arrow[ur, dashed, "\exists ! \bar{f}"']
\end{tikzcd}$$

このとき $\overline{\phi}$ は $\mathfrak{g}/\operatorname{Ker}\phi$ の忠実な既約表現であり，$\overline{f} \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}/\operatorname{Ker}\phi,\, V)$ は (2.3.2) を充たす．よって **case1** からある $v \in V$ があって

$$\forall x \in \mathfrak{g},\ \overline{f}(x + \operatorname{Ker}\phi) = \overline{\phi}(x + \operatorname{Ker}\phi)(v) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathfrak{g},\ f(x) = \phi(x)(v)$$

が成り立つ．

case3: ϕ が一般の場合

(2.3.2) を充たす任意の $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g},\, V)$ を 1 つ固定する．このときある $v \in V$ が存在して $\forall x \in \mathfrak{g},\ f(x) = \phi(x)(v)$ が成り立つことを $\dim V$ に関する数学的帰納法により示す．$\dim V = 1$ のとき，補題 2.3.5 より ϕ が零写像なので $\forall v \in V$ に対して $\forall x \in \mathfrak{g},\ f(x) = \phi(x)(v)$ が成り立つ．

$\dim V > 0$ とする．$\mathfrak{g}$-加群 V が既約でないならば，部分 $\mathfrak{g}$-加群 $0 \subsetneq W \subsetneq V$ が存在する．標準的射影[*6] $p\colon V \longrightarrow V/W$ および $\forall x \in \mathfrak{g}$ について $W \subset \operatorname{Ker} p \circ \phi(x)$ であるから，商代数の普遍性より $\forall \phi(x) \in \phi(\mathfrak{g})$ に対して以下の図式を可換にする $\overline{\phi}(x) \in \mathfrak{gl}(V/W)$ が一意的に存在する：

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "p\circ\phi(x)"] \arrow[d, "p"'] & V/W \\
V/W \arrow[ur, dashed, "\exists ! \overline{\phi}(x)"']
\end{tikzcd}$$

このとき写像

$$\phi_1 : \mathfrak{g} \longmapsto \mathfrak{gl}(V/W),\ x \longmapsto \bigl(v + W \mapsto \overline{\phi}(x)(v + W)\bigr)$$

は well-defined な Lie 代数の準同型なので $\mathfrak{g}$ の表現である．$f_1 \coloneqq p \circ f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g},\, V/W)$ は ϕ_1 に関して (2.3.2) を充たすので，帰納法の仮定より[*7]ある $v_1 + W \in V/W$ が存在して

$$\forall x \in \mathfrak{g},\ f_1(x) = f(x) + W = \phi_1(x)(v_1 + W)$$

[*6] このとき V の $\mathbb{K}$-ベクトル空間としての構造しか見ない．

[*7] $\dim V/W < \dim V$ なので帰納法の仮定が使える．

が成り立つ．ここで $f_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g},\, W)$ を

$$f_2(x) \coloneqq f(x) - \phi(x)(v_1)$$

と定義すると，f_2 は部分表現 $\phi|_W \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(W)$ に関して (2.3.2) を充たす．よって帰納法の仮定から[*8]ある $v_2 \in V$ が存在して

$$\forall x \in \mathfrak{g},\ f_2(x) = \phi|_W(x)(v_2)$$

が成り立つ．以上より，$v \coloneqq v_1 + v_2 \in V$ とおけば

$$\forall x \in \mathfrak{g},\ f(x) = f_2(x) + \phi(x)(v_1) = \phi|_W(x)(v_2) + \phi(x)(v_1) = \phi(x)(v)$$

が言えた．

■

定理 2.3.3: 完全可約性に関する Weyl の定理

$\phi \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ が半単純 Lie 代数の有限次元表現ならば，ϕ は完全可約である．

証明 V の任意の部分 $\mathfrak{g}$-加群 $W \subset V$ を 1 つ固定する．このとき命題 2.3.1 より，部分 $\mathfrak{g}$-加群 $W^c \subset V$ が存在して $V \cong W \oplus W^c$ が成り立つことを示せば良い．

$\mathrm{End}\, V$ の部分ベクトル空間 L_W を

$$L_W \coloneqq \left\{\, t \in \mathrm{End}\, V \;\middle|\; t(V) \subset W,\ t(W) = 0 \,\right\}$$

と定める．L_W への $\mathfrak{g}$ の左作用を

$$x \blacktriangleright t \coloneqq [\phi(x), t]$$

と定義すると，W が部分 $\mathfrak{g}$-加群であることおよび定義 2.3.7 より L_W は $\mathfrak{g}$-加群になる．i.e.

$$\tilde{\phi} \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(L_W),\ x \longmapsto \bigl(t \longmapsto x \blacktriangleright t\bigr)$$

は半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の有限次元表現である．

ここで $\mathbb{K}$-ベクトル空間 W への射影演算子[*9] $p \colon V \longrightarrow V$ を 1 つとり，$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g},\, L_W)$ を

$$f(x) \coloneqq [p, \phi(x)]$$

と定義しよう．このとき $\forall x,\, y \in \mathfrak{g}$ に対して Jacobi 恒等式から

$$\begin{aligned} f([x,y]) &= [p, [\phi(x), \phi(y)]] \\ &= [\phi(x), [p, \phi(y)]] - [\phi(y), [p, \phi(x)]] \\ &= [\phi(x), f(y)] - [\phi(y), f(x)] \\ &= \tilde{\phi}(x) \circ f(y) - \tilde{\phi}(y) \circ f(x) \end{aligned}$$

[*8] $\dim W < \dim V$ なので帰納法の仮定が使える．

[*9] $p^2 = p$ かつ $p|_W = \mathrm{id}_W$

が成り立つので，補題 2.3.6 からある $t \in L_W$ が存在して

$$\forall x \in \mathfrak{g},\ f(x) = \tilde{\phi}(x)(t) = [\phi(x), t]$$

が成り立つ．よってこのとき $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[\phi(x), p+t] = \tilde{\phi}\big(\phi(x)\big)\big(p+t\big) = -[p, \phi(x)] + [\phi(x), t] = -f(x) + [\phi(x), t] = 0$$

が言えた．i.e. $p + t \in \operatorname{End} V$ は $\mathfrak{g}$-加群の準同型である．さらに $t \in L_W$ であることから，$(p+t)(V) = W$ かつ $(p+t) \circ (p+t)|_W = \mathrm{id}_W$ が言える．i.e. $\mathfrak{g}$-加群の短完全列

$$0 \hookrightarrow \operatorname{Ker}(p+t) \hookrightarrow V \xrightarrow{p+t} W \longrightarrow 0$$

は分裂し，$\mathfrak{g}$-加群の直和として

$$V \cong W \oplus \operatorname{Ker}(p+t)$$

が言えた． ■

2.3.6 Jordan 分解の保存

2.4 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の表現

2.4.1 ウエイトと極大ベクトル

2.4.2 既約加群の分類

2.5 ルート空間分解

2.5.1 極大トーラスとルート

2.5.2 極大トーラスの中心化代数

2.5.3 直交性

2.5.4 整性

2.5.5 有理性