Humphreys Chapter I Exercises 解答例（2023/10/16 実施分）

高間俊至

2023 年 12 月 12 日

[1, p.5, Exercise 8] と [1, p.14, Exercise 2] の解答例です．

【問題 1.1】p.3 および p.5 の Exercise 8

char $\mathbb{K} \neq 2$ とする，A_l, B_l, C_l, D_l 型の線型 Lie 代数の各々について基底を構成し，その次元を答えよ．ただし $\mathfrak{gl}(l, \mathbb{K})$ の標準的な基底を行列単位とし，e_{ij} と書く．

A_l 型　A_l 型の定義は

$$\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{K}) := \left\{ x \in \mathfrak{gl}(l+1, \mathbb{K}) \,\middle|\, \operatorname{Tr} x = 0 \right\}$$

であった．従って $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{K})$ の基底として，例えば

$$\begin{aligned} &\left\{ e_{ij} \,\middle|\, 1 \leq i \neq j \leq l+1 \right\} \\ \cup &\left\{ e_{ii} - e_{i+1,\, i+1} \,\middle|\, 1 \leq i \leq l \right\} \end{aligned}$$

を採ることができる．故に

$$\dim \mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{K}) = (l+1)^2 - (l+1) + l = (l+1)^2 - 1$$

である．

B_l 型　B_l 型の定義は，対称行列

$$s := \left[\begin{array}{c:cc} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \hdashline \mathbf{0} & O_l & \mathbb{1}_l \\ \mathbf{0} & \mathbb{1}_l & O_l \end{array}\right]$$

を用いて

$$\mathfrak{o}(2l+1, \mathbb{K}) := \left\{ x \in \mathfrak{gl}(2l+1, \mathbb{K}) \,\middle|\, x^\mathsf{T} s = -sx \right\} \tag{1.1}$$

であった．ただし O_l は全ての要素が $0 \in \mathbb{K}$ であるような $l \times l$ 行列である．$\forall x \in \mathfrak{o}(2l+1, \mathbb{K})$ を 1 つとり，行列の区分けを

$$x = \left[\begin{array}{c:cc} a & \boldsymbol{b}_1{}^\mathsf{T} & \boldsymbol{b}_2{}^\mathsf{T} \\ \hdashline \boldsymbol{c}_1 & M & N \\ \boldsymbol{c}_2 & P & Q \end{array}\right]$$

のように行うと

$$
\begin{aligned}
x^\top s &= \begin{bmatrix} a & \boldsymbol{c}_1{}^\top & \boldsymbol{c}_2{}^\top \\ \boldsymbol{b}_1 & M^\top & P^\top \\ \boldsymbol{b}_2 & N^\top & Q^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & O_l & \mathbb{1}_l \\ \mathbf{0} & \mathbb{1}_l & O_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \boldsymbol{c}_2{}^\top & \boldsymbol{c}_1{}^\top \\ \boldsymbol{b}_1 & P^\top & M^\top \\ \boldsymbol{b}_2 & Q^\top & N^\top \end{bmatrix} \\
sx &= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & O_l & \mathbb{1}_l \\ \mathbf{0} & \mathbb{1}_l & O_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \boldsymbol{b}_1{}^\top & \boldsymbol{b}_2{}^\top \\ \boldsymbol{c}_1 & M & N \\ \boldsymbol{c}_2 & P & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \boldsymbol{b}_1{}^\top & \boldsymbol{b}_2{}^\top \\ \boldsymbol{c}_2 & P & Q \\ \boldsymbol{c}_1 & M & N \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

と計算できるので，(1.1) の条件は

$$a = -a \iff a = 0 \tag{1.2}$$
$$\boldsymbol{b}_1 = -\boldsymbol{c}_2 \tag{1.3}$$
$$\boldsymbol{b}_2 = -\boldsymbol{c}_1 \tag{1.4}$$
$$P^\top = -P \tag{1.5}$$
$$M^\top = -Q \tag{1.6}$$
$$N^\top = -N \tag{1.7}$$

と同値である．ただし (1.2) の同値変形に $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$ であることを使った．(1.3) から

$$\left\{\, e_{1,\,1+i} - e_{1+l+i,\,1} \,\middle|\, 1 \le i \le l \,\right\}$$

が，(1.4) から

$$\left\{\, e_{1,\,1+l+i} - e_{1+i,\,1} \,\middle|\, 1 \le i \le l \,\right\}$$

が，(1.5) から

$$\left\{\, e_{1+l+i,\,1+j} - e_{1+l+j,\,1+i} \,\middle|\, 1 \le i < j \le l \,\right\}$$

が，(1.6) から

$$\left\{\, e_{1+j,\,1+i} - e_{1+l+i,\,1+l+j} \,\middle|\, 1 \le i,\, j \le l \,\right\}$$

が，(1.7) から

$$\left\{\, e_{1+i,\,1+l+j} - e_{1+j,\,1+l+i} \,\middle|\, 1 \le i < j \le l \,\right\}$$

が基底を構成することが分かった．以上をまとめると $\mathfrak{o}(2l+1,\,\mathbb{K})$ の基底として

$$
\begin{aligned}
&\left\{\, e_{1,\,1+i} - e_{1+l+i,\,1} \,\middle|\, 1 \le i \le l \,\right\} \\
\cup &\left\{\, e_{1,\,1+l+i} - e_{1+i,\,1} \,\middle|\, 1 \le i \le l \,\right\} \\
\cup &\left\{\, e_{1+l+i,\,1+j} - e_{1+l+j,\,1+i} \,\middle|\, 1 \le i < j \le l \,\right\} \\
\cup &\left\{\, e_{1+j,\,1+i} - e_{1+l+i,\,1+l+j} \,\middle|\, 1 \le i,\, j \le l \,\right\} \\
\cup &\left\{\, e_{1+i,\,1+l+j} - e_{1+j,\,1+l+i} \,\middle|\, 1 \le i < j \le l \,\right\}
\end{aligned}
$$

を採ることができる．故に

$$\dim \mathfrak{o}(2l+1,\,\mathbb{K}) = 2l + 2 \cdot \frac{l(l-1)}{2} + l^2 = 2l^2 + l$$

である．

C_l 型　C_l 型の定義は，歪対称行列

$$s := \begin{bmatrix} O_l & \mathbb{1}_l \\ -\mathbb{1}_l & O_l \end{bmatrix}$$

を用いて

$$\mathfrak{sp}(2l,\, \mathbb{K}) := \left\{\, x \in \mathfrak{gl}(2l,\, \mathbb{K}) \;\middle|\; x^{\mathsf{T}} s = -sx \,\right\} \tag{1.8}$$

であった．$\forall x \in \mathfrak{sp}(2l,\, \mathbb{K})$ を 1 つとり，行列の区分けを

$$x = \begin{bmatrix} M & N \\ P & Q \end{bmatrix}$$

のように行うと (1.8) の条件は

$$\begin{aligned} P^{\mathsf{T}} &= P \\ M^{\mathsf{T}} &= -Q \\ N^{\mathsf{T}} &= N \end{aligned}$$

と同値である．B_l 型のときと同様の考察から $\mathfrak{sp}(2l,\, \mathbb{K})$ の基底として

$$\begin{aligned} &\left\{\, e_{l+i,\, i} \;\middle|\; 1 \le i \le l \,\right\} \cup \left\{\, e_{l+i,\, j} + e_{l+j,\, i} \;\middle|\; 1 \le i < j \le l \,\right\} \\ \cup &\left\{\, e_{j,\, i} - e_{l+i,\, l+j} \;\middle|\; 1 \le i,\, j \le l \,\right\} \\ \cup &\left\{\, e_{i,\, l+i} \;\middle|\; 1 \le i \le l \,\right\} \cup \left\{\, e_{i,\, l+j} + e_{1+j,\, l+i} \;\middle|\; 1 \le i < j \le l \,\right\} \end{aligned}$$

を採ることができる[*1]．故に

$$\dim \mathfrak{sp}(2l,\, \mathbb{K}) = 2l + 2 \cdot \frac{l(l-1)}{2} + l^2 = 2l^2 + l$$

である．

D_l 型　D_l 型の定義は，対称行列

$$s := \begin{bmatrix} O_l & \mathbb{1}_l \\ \mathbb{1}_l & O_l \end{bmatrix}$$

を用いて

$$\mathfrak{o}(2l,\, \mathbb{K}) := \left\{\, x \in \mathfrak{gl}(2l,\, \mathbb{K}) \;\middle|\; x^{\mathsf{T}} s = -sx \,\right\} \tag{1.9}$$

であった．$\forall x \in \mathfrak{o}(2l,\, \mathbb{K})$ を 1 つとり，行列の区分けを

$$x = \begin{bmatrix} M & N \\ P & Q \end{bmatrix}$$

のように行うと (1.9) の条件は B_l 型のときと同様に

$$\begin{aligned} P^{\mathsf{T}} &= -P \\ M^{\mathsf{T}} &= -Q \\ N^{\mathsf{T}} &= -N \end{aligned}$$

*1 $i \le j$ のように等号を含むことに注意.

と同値である．B_l 型のときと同様の考察から $\mathfrak{o}(2l,\,\mathbb{K})$ の基底として

$$\begin{aligned}&\left\{\, e_{l+i,\,j} - e_{l+j,\,i} \;\middle|\; 1 \le i < j \le l \,\right\}\\ \cup&\left\{\, e_{j,\,i} - e_{l+i,\,l+j} \;\middle|\; 1 \le i,\, j \le l \,\right\}\\ \cup&\left\{\, e_{i,\,l+j} - e_{j,\,l+i} \;\middle|\; 1 \le i < j \le l \,\right\}\end{aligned}$$

を採ることができる．故に

$$\dim \mathfrak{o}(2l,\,\mathbb{K}) = 2 \cdot \frac{l(l-1)}{2} + l^2 = 2l^2 - l$$

である．

【問題 3.2】p.14 の Exercise 2

標数が 2 でない体 $\mathbb{K}$ 上の<u>有限次元</u> Lie 代数 $\mathfrak{g}$ を与える．このとき以下の (1), (2) が同値であることを示せ：

(1) Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が可解

(2) $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数の減少列

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_k = \{o\}$$

であって，$\mathfrak{g}_{i+1}$ が $\mathfrak{g}_i$ のイデアルであり，かつ $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ が Lie ブラケットについて可換であるようなものが存在する．

! $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$ なので，$\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ が Lie ブラケットについて可換であるとは $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ の任意の 2 つの元の Lie ブラケットが零ベクトルになることと同値である．

<u>**証明**</u> $D\mathfrak{g} \coloneqq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ とおき，帰納的に $D^{i+1}\mathfrak{g} \coloneqq D^i\mathfrak{g}$ と定義する．

(1) $\Longrightarrow$ (2) $\mathfrak{g}$ の導来列そのものが (2) の条件を充たしていることを示す．仮定より $\mathfrak{g}$ が可解なので，ある $k > 0$ が存在して $D^k\mathfrak{g} = \{o\}$ となる．また，第 1 回の資料の**補題 1.1.1**（p.13）より $D^{i+1}\mathfrak{g} = D(D^i\mathfrak{g}) \subset D^i\mathfrak{g}$ は $D^i\mathfrak{g}$ のイデアルであり，商代数 $D^i\mathfrak{g}/D^{i+1}\mathfrak{g}$ が定義できる．あとは $D^i\mathfrak{g}/D^{i+1}\mathfrak{g}$ が Lie ブラケットについて可換であることを示せばよい．

$i = 0$ のとき，$\forall x + D\mathfrak{g},\, y + D\mathfrak{g} \in \mathfrak{g}/D\mathfrak{g} = D^0\mathfrak{g}/D^1\mathfrak{g}$ をとる[*2]．商代数の Lie ブラケットの定義と $[x, y] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = D\mathfrak{g}$ であることから

$$[x + D\mathfrak{g}, y + D\mathfrak{g}] = [x, y] + D\mathfrak{g} = D\mathfrak{g}$$

なので[*3]，$D^0\mathfrak{g}/D^1\mathfrak{g}$ は Lie ブラケットについて可換である．$i > 0$ のときも全く同様に示される．

(1) $\Longleftarrow$ (2) (2) の条件を充たす部分 Lie 代数の減少列 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_k = \{o\}$ が与えられたとき，$0 \le \forall i \le k$ に対して $D^i\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_i$ が成り立つ[*4]ことを i についての数学的帰納法により示す．

---

*2 $D^0\mathfrak{g}/D^1\mathfrak{g}$ の任意の元は $x + D\mathfrak{g}$ の形で書ける．標準的射影 $p\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/D\mathfrak{g},\ x \longmapsto x + D\mathfrak{g}$ が全射であるとも言える．

*3 商代数 $D^0\mathfrak{g}/D^1\mathfrak{g}$ の加法単位元（零ベクトル）は $D\mathfrak{g}$ である．

*4 つまり，**導来列は (2) の条件を充たす部分 Lie 代数の減少列のうち最小のものである**．なお明示していなかったが，$\subset$ は $=$ も含むとする．一方，真 (**proper**) の包含は $\subsetneq$ と書く．

$i=0$ のときは $D^0\mathfrak{g}=\mathfrak{g}\subset\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0$ なので明らか．$i>0$ のとき，$D^{i-1}\mathfrak{g}\subset\mathfrak{g}_{i-1}$ が示されているとする．このとき $D^i\mathfrak{g}\subset\mathfrak{g}_i$ であることを 2 段階に分けて示す：

$\boldsymbol{D\mathfrak{g}_{i-1}\subset\mathfrak{g}_i}$

$\forall x,\, y\in\mathfrak{g}_{i-1}$ に対して，$\mathfrak{g}_{i-1}/\mathfrak{g}_i$ が可換であると言う仮定から

$$\begin{aligned} & \mathfrak{g}_i=[x+\mathfrak{g}_i, y+\mathfrak{g}_i]=[x,y]+\mathfrak{g}_\mathrm{i} \\ \Longleftrightarrow\quad & [x,y]\in\mathfrak{g}_i \end{aligned}$$

が言える[*5]．従って $D\mathfrak{g}_{i-1}\subset\mathfrak{g}_i$ である[*6]．

$\boldsymbol{D^i\mathfrak{g}\subset\mathfrak{g}_i}$

帰納法の仮定より $D(D^{i-1}\mathfrak{g})\subset D\mathfrak{g}_{i-1}$ が言える[*7]ので,

$$D^i\mathfrak{g}=D(D^{i-1}\mathfrak{g})\subset D\mathfrak{g}_{i-1}\subset\mathfrak{g}_i$$

が示された．

■

参考文献

[1] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory* (Springer, 1972).

[*5] 商代数 $\mathfrak{g}_{i-1}/\mathfrak{g}_i$ の加法単位元（零ベクトル）は $\mathfrak{g}_i$ である．

[*6] $D\mathfrak{g}_{\mathrm{i-1}}$ の勝手な元は，ある $n<\infty$ を用いて $\sum_{i=1}^n[x_i,y_i]$ と書ける．$\mathfrak{g}_i$ は部分 Lie 代数であり，加法について閉じているので $\sum_{i=1}^n[x_i,y_i]\in\mathfrak{g}_i$ が言える．

[*7] 任意のイデアル $\mathfrak{i},\mathfrak{j}\subset\mathfrak{g}$ に対して，$\mathfrak{i}\subset\mathfrak{j}$ ならば D の定義から $D\mathfrak{i}\subset D\mathfrak{j}$ が成り立つ．