Humphreys Chapter II Exercises
解答例（2023/11/13 実施分）

高間俊至

2025 年 3 月 6 日

[1, p.24, Exercise1, 2] の解答例です．

何の断りもない場合，体 $\mathbb{K}$ は代数閉体でかつ $\operatorname{char}\mathbb{K} = 0$ であるとする．また，$\mathfrak{g}$ は零でない体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とする．

【問題 5.1】p.24 の Exercise 1

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が冪零 Lie 代数 $\implies$ $\mathfrak{g}$ の Killing 形式が恒等的に 0

証明 $\mathfrak{g}$ が冪零 Lie 代数であるとする．このとき第 1 回資料の命題 1.1.4-(5) より，部分 Lie 代数 $\operatorname{Im}\operatorname{ad} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の任意の元 $\operatorname{ad}(x) \in \operatorname{Im}\operatorname{ad}$ は冪零である．従って $\operatorname{Im}\operatorname{ad}$ に対して Corollary 3.3 [1, p.13] を使うことができて，$\forall \operatorname{ad}(x) \in \operatorname{Im}\operatorname{ad}$ の表現行列を同時に $\mathfrak{n}(\dim\mathfrak{g}, \mathbb{K})$ の元（i.e. 対角成分が全て 0 であるような上三角行列）にするような $\mathfrak{g}$ の基底が存在する．この基底の下では，$\forall \operatorname{ad}(x), \operatorname{ad}(y) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ に対して $\operatorname{ad}(x) \circ \operatorname{ad}(y)$ の表現行列も $\mathfrak{n}(\dim\mathfrak{g}, \mathbb{K})$ の元になるので $\operatorname{Tr}\big(\operatorname{ad}(x) \circ \operatorname{ad}(y)\big) = 0$ が言えた．

■

【問題 5.2】p.24 の Exercise 2

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ およびその Killing 形式

$$\kappa\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K},\ (x,\, y) \longmapsto \operatorname{Tr}\big(\operatorname{ad}(x) \circ \operatorname{ad}(y)\big)$$

を与える．このとき以下の 2 つは同値である[a]：

(1) $\mathfrak{g}$ が可解

(2)

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \left\{\, x \in \mathfrak{g} \;\middle|\; \forall y \in \mathfrak{g},\ \kappa(x,\, y) = 0 \,\right\}$$

[a] $\left\{\, x \in \mathfrak{g} \;\middle|\; \forall y \in \mathfrak{g},\ \kappa(x,\, y) = 0 \,\right\}$ を κ の **radical** と呼ぶのだった．

証明 (1) $\implies$ (2)

$\mathfrak{g}$ が可解であるとする．このとき第 1 回資料の命題 1.1.3-(1) より，Lie 代数の準同型 $\operatorname{ad}\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の像 $\operatorname{Im}\operatorname{ad} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ もまた可解な部分 Lie 代数である．よって Lie の定理 [1, p.16, Corollary A] から，$\forall \operatorname{ad}(x) \in \operatorname{Im}\operatorname{ad}$ の表現行列を同時に $\mathfrak{t}(\dim\mathfrak{g}, \mathbb{K})$ の元（i.e. 上三角行列）にするような $\mathfrak{g}$ の基底が存

在する．以下，$\mathfrak{g}$ の基底をこの特別な基底に固定する．

$[x,y]$ の形をした任意の $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ の元をとる．このとき $\mathrm{ad}([x,y]) = [\mathrm{ad}(x), \mathrm{ad}(y)] = \mathrm{ad}(x) \circ \mathrm{ad}(y) - \mathrm{ad}(y) \circ \mathrm{ad}(x)$ が成り立つ[*1]が，今の基底の下では $\mathrm{ad}(x)$, $\mathrm{ad}(y)$ の表現行列が上三角行列なので $\mathrm{ad}([x,y])$ の表現行列は $\mathfrak{n}(\dim \mathfrak{g}, \mathbb{K})$ の元（i.e. 対角成分が全て 0 であるような上三角行列）になる．このとき $\forall z \in \mathfrak{g}$ に対して[*2] $\mathrm{ad}([x,y]) \circ \mathrm{ad}(z)$ の表現行列もまた $\mathfrak{n}(\dim \mathfrak{g}, \mathbb{K})$ の元になるので $\kappa([x,y], z) = \mathrm{Tr}\big(\mathrm{ad}([x,y]) \circ \mathrm{ad}(z)\big) = 0$ が言える．$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ が $[x,y]$ の形をした元によって生成されること，および κ が双線型写像であることから証明が完了した．

(1) $\Longleftarrow$ (2)

Corollary [1, p.20] そのものである．

■

参考文献

[1] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory* (Springer, 1972).

[*1] ad は Lie 代数の準同型なので．$\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の Lie ブラケットは交換子だったことを思い出すと良い．

[*2] $\mathfrak{g}$ の基底の取り方から $\mathrm{ad}(z) \in \mathrm{Im}\,\mathrm{ad}$ の表現行列もまた上三角行列である．