表現論 ノート

高間俊至

2023 年 11 月 19 日

本資料ではベクトル空間を英大文字で表記し，係数体を blackboardbold[*1]で表記する（e.g. 体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 L）.

[*1] LaTeX コマンドは`\mathbb`

目次

第 1 章

Lie 群と Lie 代数

この章は [1, Chapter I], [2, 第 1-3 章] に相当する．

本章に限ってはベクトルを $x \in L$ のように英小文字で表記し，係数体の元は $\lambda \in \mathbb{K}$ のようにギリシャ文字で表記する．零ベクトルは $o \in L$ と書き[*1]，$0 \in \mathbb{K}$ を係数体の加法単位元，$1 \in \mathbb{K}$ を係数体の乗法単位元とする．ベクトル空間の加法を $+$ と書き，スカラー乗法は λx のように係数を左に書く．また，特に断りがなければ Einstein の規約を使う．

1.1　公理的 Lie 代数

この節では，特に断りがなければ $\mathbb{K}$ を任意の体とする．Lie 代数を純粋に代数学的な対象として扱うことを考える．

! Lie 代数を表す記号は Fraktur という字体で書く慣例がある．例えば「Fraktur」という文字列は $\mathfrak{Fraktur}$ のようになる．LaTeX コマンドは数式モード中で `\mathfrak{}` とする．

公理 1.1.1: Lie 代数の公理

体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 $\mathfrak{g}$ の上に二項演算[a]

$$[\ ,\ ]\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g},\ (x,\ y) \longmapsto [x, y]$$

が定義されていて，かつ以下の条件を充たすとき，$\mathfrak{g}$ は **Lie 代数** (Lie algebra) と呼ばれる：

(L-1)　$[\ ,\ ]$ は双線型写像である．i.e. $\forall x,\ x_i,\ y,\ y_i \in \mathfrak{g},\ \forall \lambda_i,\ \mu_i \in \mathbb{K}\ (i = 1,\ 2)$ に対して

$$\begin{aligned}[\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y] &= \lambda_1 [x_1, y] + \lambda_2 [x_2, y], \\ [x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2] &= \mu_1 [x, y_1] + \mu_2 [x, y_2]\end{aligned}$$

が成り立つ．

(L-2)　$\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[x, x] = o$$

[*1] 0 の濫用を回避するための苦肉の策です… 普通に不便なので次章以降では零ベクトルも 0 と書きます．

が成り立つ．

(L-3) $\forall x,\ y,\ z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = o$$

が成り立つ[b]（**Jacobi 恒等式**）．

[a] ベクトル空間に備わっている加法とスカラー乗法の他に，追加で $[\ ,\ ]$ が定義されているという状況である．この付加的な二項演算はしばしば**括弧積** (bracket) とか**交換子** (commutator) とか **Lie ブラケット** (Lie bracket) とか呼ばれる．

[b] 結合律ではない！

公理 **(L-1)**, **(L-2)** から

$$o = [x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = [x, y] + [y, x]$$

が従う．i.e. $[x, y]$ は反交換 (anticommute) する：

(L'-2) $\forall x,\ y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[x, y] = -[y, x]$$

が成り立つ．

逆に **(L'-2)** を仮定すると

$$o = [x, x] + [x, x] = (1 + 1)[x, x]$$

が成り立つ[*2]ので，体 $\mathbb{K}$ において $1 + 1 \neq 0$ ならば $[x, x] = o$ が言える．i.e. $\mathrm{char}\,\mathbb{K} \neq 2$ ならば[*3] **(L'-2)** と **(L-2)** は同値である．

【例 1.1.1】3 次元実ベクトル空間

$\mathbb{R}^3$ を $\mathbb{R}$-ベクトル空間と見做す．$\mathbb{R}^3$ 上の Lie ブラケットを

$$[\ ,\ ] \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x,\ y) \longmapsto x \times y$$

によって定義する．ただし右辺の $\times$ はベクトル積である．このとき $\mathbb{R}^3$ が Lie 代数の公理を充たすことを確認しよう：

証明 $\mathbb{R}^3$ の元の成分を $x = (\,x_\mu\,)_{1 \le \mu \le 3}$ のように書く．ひたすら成分計算をする．

(L-1) ベクトル積の定義から

$$\begin{aligned}([\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y])_\mu &= \epsilon_{\mu\nu\lambda}(\lambda_1 x_{1\nu} + \lambda_2 x_{2\nu}) y_\lambda \\ &= \lambda_1 \epsilon_{\mu\nu\lambda} x_{1\mu} y_\lambda + \lambda_2 \epsilon_{\mu\nu\lambda} x_{2\nu} y_\lambda \\ &= \lambda_1 [x_1, y] + \lambda_2 [x_2, y]\end{aligned}$$

[*2] 2 つ目の等号ではスカラー乗法の分配律（ベクトル空間の公理である）を使った．

[*3] 体 $\mathbb{K}$ の**標数** (characteristic) を $\mathrm{char}\,\mathbb{K}$ と書いた．

が成り立つ．全く同様に

$$[x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2] = \mu_1 [x, y_1] + \mu_2 [x, y_2]$$

が示される．

(L-2) Levi-Civita 記号の添字に関する反対称性から

$$([x, x])_\mu = \epsilon_{\mu\nu\lambda} x_\nu x_\lambda = \epsilon_{\mu\nu\lambda} x_\lambda x_\nu = -\epsilon_{\mu\lambda\nu} x_\lambda x_\nu = (-[x, x])_\mu$$

$\operatorname{char} \mathbb{R} = 0 \neq 2$ なので，ここから $[x, x] = o$ が従う．

(L-3) 行と列をそれぞれ適切に入れ替えた単位行列の行列式を考えることで，恒等式 $\epsilon_{\mu\nu\lambda}\epsilon_{\rho\sigma\lambda} = \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}$ が成り立つことがわかる．従って

$$\begin{aligned} ([x, [y, z]])_\mu &= \epsilon_{\mu\nu\lambda} x_\nu \epsilon_{\lambda\rho\sigma} y_\rho z_\sigma \\ &= (\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}) x_\nu y_\rho z_\sigma \\ &= x_\nu y_\mu z_\nu - x_\nu y_\nu z_\mu \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} ([x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]])_\mu &= x_\nu y_\mu z_\nu - x_\nu y_\nu z_\mu + y_\nu z_\mu x_\nu - y_\nu z_\nu x_\mu + z_\nu x_\mu y_\nu - z_\nu x_\nu y_\mu \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

$\mathbb{R}^3$ の標準的な基底

$$e_1 \coloneqq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 \coloneqq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 \coloneqq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

に対して

$$[e_i, e_j] = \epsilon_{ijk} e_k$$

が成り立つ．$\mathbb{R}^3$ の任意の 2 つの元に対する Lie ブラケットがこの恒等式によって完全に決まることを含意して，$3^3 = 27$ 個の実定数 ϵ_{ijk} のことを $\mathbb{R}^3$ の**構造定数** (structure constant) と呼ぶ．

【例 1.1.2】一般線形代数 $\mathfrak{gl}(V)$

V を体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．V から V への線型写像全体が成す集合を $\operatorname{End} V$ と書く[a]．$\operatorname{End} V$ の加法とスカラー乗法をそれぞれ

$$\begin{aligned} +\colon \operatorname{End} V \times \operatorname{End} V &\longrightarrow \operatorname{End} V,\ (x,\ y) \longmapsto \bigl(v \mapsto x(v) + y(v)\bigr) \\ \cdot\colon \mathbb{K} \times \operatorname{End} V &\longrightarrow \operatorname{End} V,\ (\lambda,\ x) \longmapsto \bigl(v \mapsto \lambda x(v)\bigr) \end{aligned}$$

として定義すると，組 $(\operatorname{End} V,\ +,\ \cdot\ )$ は体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間になる．以降では常に $\operatorname{End} V$ をこの方法でベクトル空間と見做す．

$\mathrm{End}\,V$ の上の Lie ブラケットを

$$[\ ,\ ]\colon \mathrm{End}\,V \times \mathrm{End}\,V \longrightarrow \mathrm{End}\,V,\ (x,\ y) \longmapsto xy - yx$$

と定義する．ただし右辺の xy などは写像の合成 $x \circ y$ の略記である．このとき組 $(\mathrm{End}\,V, +, \cdot\,, [\ ,\ ])$ が Lie 代数の公理を充たすことを確認しよう：

<u>**証明**</u> **(L-1)** $\forall v \in V$ を 1 つとる．定義に従ってとても丁寧に計算すると

$$\begin{aligned}
[\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y](v) &= \big((\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)y - y(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)\big)(v) \\
&= (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)\big(y(v)\big) - y\big((\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)(v)\big) \\
&= (\lambda_1 x_1)\big(y(v)\big) + (\lambda_2 x_2)\big(y(v)\big) - y\big((\lambda_1 x_1)(v) + (\lambda_2 x_2)(v)\big) \\
&= \lambda_1 x_1\big(y(v)\big) + \lambda_2 x_2\big(y(v)\big) - \lambda_1 y\big(x_1(v)\big) - \lambda_2 y\big(x_2(v)\big) \\
&= \lambda_1\Big(x_1\big(y(v)\big) - y\big(x_1(v)\big)\Big) + \lambda_2\Big(x_2\big(y(v)\big) - y\big(x_2(v)\big)\Big) \\
&= \lambda_1[x_1, y](v) + \lambda_2[x_2, y](v) \\
&= \big(\lambda_1[x_1, y] + \lambda_2[x_2, y]\big)(v)
\end{aligned}$$

となる．ただし 4 つ目の等号で $y \in \mathrm{End}\,V$ が線型写像であることを使った．全く同様にして

$$[x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2](v) = \mu_1[x, y_1] + \mu_2[x, y_2]$$

を示すこともできる．

(L-2) 明らかに $[x, x] = xx - xx = o$ なのでよい．

(L-3) $[\ ,\ ]$ の双線型（**(L-1)**）から

$$\begin{aligned}
&[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] \\
&= [x, yz] - [x, zy] + [y, zx] - [y, xz] + [z, xy] - [z, yx] \\
&= xyz - yzx - xzy + zyx + yzx - zxy - yxz + xzy + zxy - xyz - zyx + yxz \\
&= o.
\end{aligned}$$

■

この Lie 代数 $(\mathrm{End}\,V, +, \cdot\,, [\ ,\ ])$ は**一般線形代数** (general linear algebra) と呼ばれ，記号として $\boldsymbol{\mathfrak{gl}(V)}$ と書かれる．

$\dim V =: n < \infty$ のとき，$\mathrm{End}\,V$ は $n \times n$ $\mathbb{K}$-行列全体が成す $\mathbb{K}$ ベクトル空間 $\mathrm{M}(n, \mathbb{K})$ と同型である[b]．$\mathrm{M}(n, \mathbb{K})$ を Lie ブラケット $[x, y] := xy - yx$ によって Lie 代数と見做す[c]ときは，この同型を意識して $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ と書く．さて，$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ の標準的な基底は所謂**行列単位**

$$e_{ij} := \big[\,\delta_{i\mu}\delta_{j\nu}\big]_{1 \le \mu,\, \nu \le n} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & i \end{array}$$

である．Einstein の規約を使って $e_{ij}e_{kl} = \left[\delta_{i\mu}\delta_{j\lambda}\delta_{k\lambda}\delta_{l\nu}\right]_{1\leq\mu,\,\nu\leq n} = \delta_{jk}\left[\delta_{i\mu}\delta_{l\nu}\right]_{1\leq\mu,\,\nu\leq n} = \delta_{jk}E_{il}$ と計算できるので，$\mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{K})$ の構造定数は

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{li}e_{kj}$$

となる[d]．

[a] **自己準同型** (endomorphism) の略である．

[b] V の基底 $e_1,\,\ldots,\,e_n$ を 1 つ固定する．このとき同型写像 $\varphi\colon V \longrightarrow \mathbb{K}^n,\ v^\mu e_\mu \longmapsto (v^\mu)_{1\leq\mu\leq n}$ を使って定義される線型写像 $\phi\colon \operatorname{End} V \longrightarrow \mathrm{M}(n,\,\mathbb{K}),\ f \longmapsto \varphi\circ f\circ\varphi^{-1}$ が所望の同型写像である．

[c] 右辺の xy は行列の積である．

[d] 少し紛らわしいかもしれないが，右辺において e_{il} は行列（行列の成分ではない！）で δ_{jk} はただの $\mathbb{K}$ の元である．以下では行列を指定する添字を $a,\,b,\,c,\,\ldots,\,i,\,j,\,k,\,\ldots$ で，行列の成分の添字を $\mu,\,\nu,\,\lambda,\,\ldots$ で書くことにする．つまり，例えば x_{ij} はある一つの行列を表す一方，$x_{ij\,\mu\nu}$ は行列 x_{ij} の第 $(\mu,\,\nu)$ 成分を表す．あまりにも紛らわしい場合には，行列の成分を表す際に $[x_{ij}]_{\mu\nu}$ のように角括弧で括ることにする．

1.1.1 線型 Lie 代数

定義 1.1.1: 部分 Lie 代数

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間 $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ が**部分 Lie 代数**であるとは，$\mathfrak{h}$ が Lie ブラケットについても閉じていることを言う．i.e. $\forall x,\,y\in\mathfrak{h},\ \forall\lambda\in\mathbb{K}$ に対して

$$x+y,\ \lambda x,\ [x,y]\in\mathfrak{h}$$

が成り立つこと．

この小節では以降，V を体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とする．

定義 1.1.2: 線型 Lie 代数

一般線形代数 $\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数のことを**線型 Lie 代数** (linear Lie algebra) と呼ぶ．

線型 Lie 代数として有名なものは**古典代数** (classical algebra) である．これは $A_l,\,B_l,\,C_l,\,D_l$ と呼ばれる 4 つの無限系列からなる．以下，$\operatorname{char}\mathbb{K}\neq 2$ とする．

【例 1.1.3】線型 Lie 代数：A_l 型

$\dim V = l+1$ とする．**特殊線形代数** $\mathfrak{sl}(V)$（または $\mathfrak{sl}(l+1,\,\mathbb{K})$）は次のように定義される：

$$\mathfrak{sl}(V) \coloneqq \left\{\, x\in\mathfrak{gl}(V) \,\middle|\, \operatorname{Tr}(x)=0 \,\right\}$$

$\mathfrak{sl}(V)$ が本当に線型 Lie 代数かどうか確認しよう．

証明 $\forall x,\, y \in \mathfrak{sl}(V)$ をとる．トレースの線形性および $\mathrm{Tr}(xy) = \mathrm{Tr}(yx)$ から

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(x+y) &= \mathrm{Tr}(x) + \mathrm{Tr}(y) = 0 + 0 = 0,\\ \mathrm{Tr}(\lambda x) &= \lambda\,\mathrm{Tr}(x) = \lambda 0 = 0,\\ \mathrm{Tr}([x,y]) &= \mathrm{Tr}(xy) - \mathrm{Tr}(yx) = \mathrm{Tr}(xy) - \mathrm{Tr}(xy) = 0\end{aligned}$$

が言えるので，$x+y,\, \lambda x,\, [x,y] \in \mathfrak{sl}(V)$ が言えた． ■

【例 1.1.2】で使った $\mathfrak{gl}(l+1,\, \mathbb{K})$ の標準的な基底で $\forall x \in \mathfrak{sl}(l+1,\, \mathbb{K})$ を $x = x^{ij} e_{ij}$ と展開すると，トレースレスであることから

$$h_{ij} := \begin{cases} e_{ij} & i \neq j,\ 1 \le i,\, j \le l+1 \\ e_{ii} - e_{i+1,\, i+1} & 1 \le i = j \le l \end{cases}$$

の $(l+1)^2 - 1$ 個の行列が $\mathfrak{sl}(l+1,\, \mathbb{K})$ の基底を成すことがわかる．従って $\dim \mathfrak{sl}(l+1,\, \mathbb{K}) = (l+1)^2 - 1$ である．

【例 1.1.4】線型 Lie 代数：B_l 型

$\dim V = 2l+1$ とする．行列

$$s := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1}_l \\ 0 & \mathbb{1}_l & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}(2l+1,\, \mathbb{K})$$

により定まる V 上の非退化[a]かつ対称な双線型形式を f と書く[b]．このとき，**直交代数** (orthogonal algebra) $\mathfrak{o}(V)$（または $\mathfrak{o}(2l+1,\, \mathbb{K})$）が以下のように定義される：

$$\mathfrak{o}(V) := \left\{\, x \in \mathfrak{gl}(V) \;\middle|\; f\big(x(v),\, w\big) = -f\big(v,\, x(w)\big),\ \forall v,\, w \in V \,\right\}$$

$\mathfrak{o}(V)$ が本当に線型 Lie 代数かどうか確認しよう．

証明 $\forall x,\, y \in \mathfrak{o}(V)$ をとる．f の双線型性から $\forall v,\, w \in V$ に対して

$$\begin{aligned}
f\big((x+y)(v),\, w\big) &= f\big(x(v),\, w\big) + f\big(y(v),\, w\big)\\
&= -f\big(v,\, x(w)\big) - f\big(v,\, y(w)\big)\\
&= -f\big(v,\, x(w) + y(w)\big)\\
&= -f\big(v,\, (x+y)(w)\big)\\
f\big((\lambda x)(v),\, w\big) &= \lambda f\big(x(v),\, w\big)\\
&= -\lambda f\big(v,\, x(w)\big)\\
&= -f\big(v,\, \lambda x(w)\big)\\
&= -f\big(v,\, (\lambda x)(w)\big)\\
f\big([x,y](v),\, w\big) &= f\big(x(y(v)),\, w\big) - f\big(y(x(v)),\, w\big)\\
&= -f\big(y(v),\, x(w)\big) + f\big(x(v),\, y(w)\big)\\
&= f\big(v,\, y(x(w))\big) - f\big(v,\, x(y(w))\big)\\
&= -f\big(v,\, [x,y](w)\big)
\end{aligned}$$

が言えるので，$x+y,\ \lambda x,\ [x,y] \in \mathfrak{o}(V)$ が言えた． ■

[a]「$v \in V$ が $\forall w \in V$ に対して $f(v,\, w) = 0$ を充たす $\implies$ $v = o$」かつ「$w \in V$ が $\forall v \in V$ に対して $f(v,\, w) = 0$ を充たす $\implies$ $w = o$」

[b] $f\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{K},\ (v,\, w) \longmapsto v^{\mathsf{T}} s w$ のこと．

【例 1.1.5】線型 Lie 代数：C_l 型

$\dim V = 2l$ とする．行列

$$s := \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1}_l \\ -\mathbb{1}_l & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}(2l,\, \mathbb{K})$$

により定まる V 上の非退化かつ歪対称な双線型形式を f と書く．このとき，**シンプレクティック代数** (symplectic algebra) $\mathfrak{sp}(V)$（または $\mathfrak{sp}(2l,\, \mathbb{K})$）が以下のように定義される：

$$\mathfrak{sp}(V) := \left\{\, x \in \mathfrak{gl}(V) \;\middle|\; f\bigl(x(v),\, w\bigr) = -f\bigl(v,\, x(w)\bigr),\ \forall v,\, w \in V \,\right\}$$

【例 1.1.4】と全く同様にして $\mathfrak{sp}(V)$ が線型 Lie 代数であることを証明できる．

【例 1.1.6】線型 Lie 代数：D_l 型

$\dim V = 2l$ とし，行列

$$s := \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1}_l \\ \mathbb{1}_l & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}(2l,\, \mathbb{K})$$

により定まる V 上の非退化かつ対称な双線型形式を f と書く．このとき，【例 1.1.4】と全く同様に**直交代数** (orthogonal algebra) $\mathfrak{o}(V)$（または $\mathfrak{o}(2l,\, \mathbb{K})$）が定義される．

さらに，古典代数以外の線型 Lie 代数をいくつか導入する．

【例 1.1.7】線型 Lie 代数：$\mathfrak{t}$

$n \times n$ 上三角行列全体の集合を $\mathfrak{t}(n,\, \mathbb{K}) \subset \mathfrak{gl}(n,\, \mathbb{K})$ と書く[a]：

$$\mathfrak{t}(n,\, \mathbb{K}) := \left\{ \bigl[\, a_{\mu\nu} \,\bigr]_{1 \le \mu,\, \nu \le n} \in \mathfrak{gl}(n,\, \mathbb{K}) \;\middle|\; \mu > \nu \quad \Longrightarrow \quad a_{\mu\nu} = 0 \right\}$$

$\mathfrak{t}(n,\, \mathbb{K})$ が線型 Lie 代数であることを確認しよう．

<u>**証明**</u> $\forall x = \bigl[\, x_{\mu\nu} \,\bigr]_{1 \le \mu,\, \nu \le n},\ y = \bigl[\, y_{\mu\nu} \,\bigr]_{1 \le \mu,\, \nu \le n} \in \mathfrak{t}(n,\, \mathbb{K})$ をとる．このとき $1 \le \nu < \mu \le n$ なる全ての $(\mu,\, \nu)$ に対して

$$\begin{aligned}
[x+y]_{\mu\nu} &= x_{\mu\nu} + y_{\mu\nu} = 0 + 0 = 0 \\
[\lambda x]_{\mu\nu} &= \lambda x_{\mu\nu} = \lambda 0 = 0 \\
[xy]_{\mu\nu} &= \sum_{\lambda=1}^{n} x_{\mu\lambda} y_{\lambda\nu} = \sum_{\lambda=1}^{\nu} 0 y_{\lambda\nu} + \sum_{\lambda=\nu+1}^{n} x_{\mu\lambda} 0 = 0
\end{aligned}$$

が成り立つので $x+y,\ \lambda x,\ [x, y] \in \mathfrak{t}(n,\ \mathbb{K})$ が言えた． ■

[a] $\mathfrak{t}$ の LaTeX コマンドは \mathfrak{t}

【例 1.1.8】線型 Lie 代数：$\mathfrak{n}$

$n \times n$ 上三角行列のうち対角成分が全て 0 であるもの全体がなす集合を $\mathfrak{n}(n,\ \mathbb{K}) \subset \mathfrak{gl}(n,\ \mathbb{K})$ と書く[a]：

$$\mathfrak{n}(n,\ \mathbb{K}) := \left\{ \left[a_{\mu\nu} \right]_{1 \le \mu,\, \nu \le n} \in \mathfrak{gl}(n,\ \mathbb{K}) \;\middle|\; \mu \ge \nu \quad \Longrightarrow \quad a_{\mu\nu} = 0 \right\}$$

$\mathfrak{n}(n,\ \mathbb{K})$ が線型 Lie 代数であることは【例 1.1.7】と全く同様に証明できる．

[a] $\mathfrak{n}$ の LaTeX コマンドは \mathfrak{n}

【例 1.1.9】線型 Lie 代数：$\mathfrak{d}$

$n \times n$ 対角行列全体がなす集合を $\mathfrak{d}(n,\ \mathbb{K}) \subset \mathfrak{gl}(n,\ \mathbb{K})$ と書く[a]：

$$\mathfrak{d}(n,\ \mathbb{K}) := \left\{ \left[a_{\mu\nu} \right]_{1 \le \mu,\, \nu \le n} \in \mathfrak{gl}(n,\ \mathbb{K}) \;\middle|\; \mu \ne \nu \quad \Longrightarrow \quad a_{\mu\nu} = 0 \right\}$$

$\mathfrak{d}(n,\ \mathbb{K})$ は明らかに線型 Lie 代数である．

[a] $\mathfrak{d}$ の LaTeX コマンドは \mathfrak{d}

公理 1.1.2: 代数

体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 $\mathfrak{U}$[a]の上に二項演算

$$*\colon \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{U},\ (x,\ y) \longmapsto x * y$$

が定義されていて，かつ以下の条件を充たすとき，$\mathfrak{U}$ は **$\mathbb{K}$-代数** ($\mathbb{K}$-algebra) と呼ばれる[b]：

(A-1) $*$ は双線型写像である．i.e. $\forall x,\ x_i,\ y,\ y_i \in \mathfrak{g},\ \forall \lambda_i,\ \mu_i \in \mathbb{K}\ (i = 1,\ 2)$ に対して

$$\begin{aligned}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) * y &= \lambda_1 x_1 * y + \lambda_2 x_2 * y,\\ x * (\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) &= \mu_1 x * y_1 + \mu_2 x * y_2\end{aligned}$$

が成り立つ．

[a] \mathfrak{U}
[b] 結合律は要請しない！ $*$ に関する結合律を公理に含める場合は**結合代数** (associative algebra) と言う．文献によっては代数と言って結合代数のことを指す場合があるので注意．

Lie 代数は $\mathbb{K}$-代数である．

定義 1.1.3: 代数の微分

$\mathbb{K}$-代数 $\mathfrak{U}$ の**微分** (derivation) とは，線型写像

$$d \colon \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{U}$$

であって Leibniz 則

$$d(x * y) = x * d(y) + d(x) * y$$

を充たすもののこと．

全ての $\mathfrak{U}$ の微分がなす集合を $\operatorname{Der}\mathfrak{U}$ と書く．

命題 1.1.1: 代数の微分がなす Lie 代数

$\operatorname{Der}\mathfrak{U}$ の上の加法，スカラー乗法，Lie ブラケットをそれぞれ

$$\begin{aligned}
+ \colon \operatorname{Der}\mathfrak{U} \times \operatorname{Der}\mathfrak{U} &\longrightarrow \operatorname{Der}\mathfrak{U},\ (d,\ e) \longmapsto \big(x \mapsto d(x) + e(x)\big) \\
\cdot \colon \mathbb{K} \times \operatorname{Der}\mathfrak{U} &\longrightarrow \operatorname{Der}\mathfrak{U},\ (\lambda,\ d) \longmapsto \big(x \mapsto \lambda d(x)\big) \\
[\ ,] \colon \operatorname{Der}\mathfrak{U} \times \operatorname{Der}\mathfrak{U} &\longrightarrow \operatorname{Der}\mathfrak{U},\ (d,\ e) \longmapsto \big(x \mapsto d(e(x)) - e(d(x))\big)
\end{aligned}$$

と定義すると，組 $(\operatorname{Der}\mathfrak{U},\ +,\ \cdot\ ,\ [\ ,])$ は $\mathfrak{gl}(\mathfrak{U})$ の部分 Lie 代数である．Lie 代数としての $\operatorname{Der}\mathfrak{U}$ のことを**微分代数** (derivation algebra) と呼ぶ[a]．

[a] https://mathworld.wolfram.com/DerivationAlgebra.html

<u>**証明**</u> $\forall x,\ y \in \mathfrak{U}$ をとる．代数の微分は線型写像なので，$*$ の双線型性および微分の Leibniz 則から

$$\begin{aligned}
(d+e)(x*y) &= x*d(y) + d(x)*y + x*e(y) + e(x)*y = x*(d+e)(y) + (d+e)(x)*y \\
(\lambda d)(x*y) &= \lambda\big(d(x)*y + x*d(y)\big) = \big(\lambda d(x)\big)*y + x*\big(\lambda d(y)\big) = (\lambda d)(x)*y + x*(\lambda d)(y)
\end{aligned}$$

が成り立つ．i.e. $d+e,\ \lambda d \in \operatorname{Der}\mathfrak{U}$ が言えた．Lie ブラケットに関しては，

$$d\big(e(x*y)\big) = d\big(x*e(y) + e(x)*y\big) = x*d\big(e(y)\big) + d(x)*e(y) + e(x)*d(y) + d\big(e(x)\big)*y$$

に注意すると

$$\begin{aligned}
[d,e](x*y) &= x*d\big(e(y)\big) + \cancel{d(x)*e(y) + e(x)*d(y)} + d\big(e(x)\big)*y \\
&\quad - x*e\big(d(y)\big) \cancel{- e(x)*d(y) - d(x)*e(y)} - e\big(d(x)\big)*y \\
&= x*[d,e](y) + [d,e](x)*y
\end{aligned}$$

が成り立つ．i.e. $[d,e] \in \operatorname{Der}\mathfrak{U}$ が言えた． ■

【例 1.1.10】内部微分

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は $\mathbb{K}$-代数なので，その微分代数 $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$ を考えることができる．

ここで $x \in \mathfrak{g}$ を任意に取ろう．このとき，写像

$$\mathrm{ad}\, x \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g},\ z \longmapsto [x, z]$$

は線型写像で，Jacobi 恒等式から

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}\, x([z, w]) &= [x, [z, w]] \\ &= [[x, z], w] + [z, [x, w]] \\ &= [\mathrm{ad}\, x(z), w] + [z, \mathrm{ad}\, x(w)]\end{aligned}$$

を充たすことがわかる．これはまさに Leibniz 則なので，$\mathrm{ad}\, x \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ である．$\mathrm{ad}\, x$ の形で書ける $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ の元のことを**内部微分** (inner derivation) と呼ぶ[a]．

[a] $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ の元が内部微分でないとき，**外部微分** (outer derivation) であると言う．

1.1.2　イデアル・商代数

定義 1.1.4: Lie 代数のイデアル

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の部分集合 $\mathfrak{i}$ [a]が $\mathfrak{g}$ の**イデアル** (ideal) であるとは，以下の 2 条件を充たすことを言う：

(LI-1)　$\mathfrak{i}$ は $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間である．

(LI-2)　$\forall x \in \mathfrak{g},\ \forall y \in \mathfrak{i}$ に対して $[x, y] \in \mathfrak{i}$

[a] `\mathfrak{i}`

【例 1.1.11】自明なイデアル

$\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $[x, o] = [x, x + (-x)] = [x, x] - [x, x] = o$ が成り立つので，$\{o\}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．また，Lie ブラケットについて閉じているので $\mathfrak{g}$ 自身もイデアルである．この 2 つを**自明なイデアル** (trivial ideal) と呼ぶ．

【例 1.1.12】中心

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の**中心** (center) は

$$Z(\mathfrak{g}) := \left\{ z \in \mathfrak{g} \,\middle|\, \forall x \in \mathfrak{g},\ [x, z] = o \right\}$$

と定義される．$o \in Z(\mathfrak{g})$ であることから $Z(\mathfrak{g})$ はイデアルである．$\mathfrak{g}$ が Lie ブラケットに関して可換である必要十分条件は $Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ が成り立つことである[a]．

[a] Lie 代数の公理 **(L'-1)** より，$[x, y] = [y, x]$ ならば $[x, y] = -[x, y] \iff [x, y] = o$ である．

補題 1.1.1: イデアル同士の演算

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とそのイデアル $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ を与える．このとき以下の 3 つが成り立つ：

(1) 集合 $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{j}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．

(2) 集合 $\mathfrak{i} + \mathfrak{j} := \left\{ x + y \;\middle|\; x \in \mathfrak{i},\, y \in \mathfrak{j} \right\}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．

(3) 集合 $[\mathfrak{i}, \mathfrak{j}] := \left\{ \sum_{i=1}^{n} [x_i, y_i] \;\middle|\; x_i \in \mathfrak{i},\, y_i \in \mathfrak{j};\, n < \infty \right\}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．

<u>証明</u>　(1) ほぼ自明．

(2) $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$ の勝手な元 $z + w$ と $\forall x \in \mathfrak{g}$ をとる．Lie ブラケットの双線型性から $[x, z + w] = [x, z] + [x, w]$ が言えるが，$\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ がイデアルであることにより $[x, z] \in \mathfrak{i}$, $[x, w] \in \mathfrak{j}$ なので右辺は $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$ に属する．

(3) $\forall x \in \mathfrak{g}$ を 1 つとる．Lie ブラケットの双線型性から，このとき $\forall z \in \mathfrak{i}$, $\forall w \in \mathfrak{j}$ に対して $[x, [z, w]] \in [\mathfrak{i}, \mathfrak{j}]$ が成り立つことを示せば良い．実際，Lie 代数の公理 **(L-2)**, **(L-3)** より

$$[x, [z, w]] = [[w, x], z] + [[x, z], w] = [z, [x, w]] + [[x, z], w]$$

が言えるが，$\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ がイデアルであることにより $[x, w] \in \mathfrak{j}$, $[x, z] \in \mathfrak{i}$ なので右辺は $[\mathfrak{i}, \mathfrak{j}]$ に属する．

■

【例 1.1.13】導来 Lie 代数

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の**導来代数** (derived algebra) とは，$\mathfrak{g}$ のイデアル $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ のこと．

定義 1.1.5: 単純 Lie 代数

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が**単純** (simple) であるとは，$\mathfrak{g}$ が自明なイデアル以外のイデアルを持たず，かつ $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \{o\}$ を充たすことを言う．

【例 1.1.14】単純 Lie 代数：$\mathfrak{sl}(2)$

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ のイデアル $\mathfrak{i}$ が与えられたとき，商群のときと同じ要領で商代数を構成できる．このことを復習しよう：

$\mathfrak{g}$ 上の同値関係を

$$\sim := \left\{ (x,\, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \;\middle|\; x - y \in \mathfrak{i} \right\}$$

と定義する[*4]．$\sim$ による $x \in \mathfrak{g}$ の同値類のことを $x + \mathfrak{i}$ と書き，商集合 $\mathfrak{g}/\sim$ のことを $\boldsymbol{\mathfrak{g}/\mathfrak{i}}$ と書く．全射 $p\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ を**標準的射影** (canonical projection) と呼ぶ．

*4 **(LI-1)** より $\mathfrak{i}$ は部分ベクトル空間なので反射律と対称律が言える．$x \sim y$ かつ $y \sim z$ ならば $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathfrak{i}$ なので $x \sim z$ であり，推移律が成り立つことがわかる．

定義 1.1.6: 商代数

集合 $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ の上には次のようにして well-defined な加法，スカラー乗法，Lie ブラケットが定義できる：

$$\begin{aligned}
+\colon \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \times \mathfrak{g}/\mathfrak{i} &\longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i},\ (x+\mathfrak{i},\ y+\mathfrak{i}) \longmapsto (x+y)+\mathfrak{i} \\
\cdot\colon \mathbb{K} \times \mathfrak{g}/\mathfrak{i} &\longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i},\ (\lambda,\ x+\mathfrak{i}) \longmapsto (\lambda x)+\mathfrak{i} \\
[\ ,]\colon \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \times \mathfrak{g}/\mathfrak{i} &\longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i},\ (x+\mathfrak{i},\ y+\mathfrak{i}) \longmapsto [x,y]+\mathfrak{i}
\end{aligned}$$

Lie 代数 $(\mathfrak{g}/\mathfrak{i},\ +,\ \cdot\ ,\ [\ ,])$ のことを**商代数** (quotient algebra) と呼ぶ．

<u>**証明**</u> well-definedness を示す．$x+\mathfrak{i} = x'+\mathfrak{i},\ y+\mathfrak{i} = y'+\mathfrak{i}$ ならば $x'-x,\ y'-y \in \mathfrak{i}$ であるから

$$\begin{aligned}
x'+y' &= (x+y)+(x'-x)+(y'-y) \in (x+y)+\mathfrak{i}, \\
\lambda x' &= \lambda x + \lambda(x'-x) \in (\lambda x)+\mathfrak{i}
\end{aligned}$$

が成り立つ．また，$\mathfrak{i}$ がイデアルであることにより

$$\begin{aligned}
[x', y'] &= [x+(x'-x), y+(y'-y)] \\
&= [x,y]+[x,y'-y]-[y,x'-x]+[x'-x,y'-y] \\
&\in [x,y]+\mathfrak{i}
\end{aligned}$$

が言える． ■

! 定義 1.1.6 による商代数の構成によって，標準的射影は自動的に Lie 代数の準同型写像になる：

$$\begin{aligned}
p(x+y) &= (x+y)+\mathfrak{i} =: (x+\mathfrak{i})+(y+\mathfrak{i}) = p(x)+p(y), \\
p(\lambda x) &= (\lambda x)+\mathfrak{i} =: \lambda(x+\mathfrak{i}) = \lambda p(x), \\
p([x,y]) &= [x,y]+\mathfrak{i} =: [(x+\mathfrak{i}),(y+\mathfrak{i})] = [p(x),p(y)].
\end{aligned}$$

定義 1.1.7: 正規化代数・中心化代数

- Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とその部分 Lie 代数（もしくは部分ベクトル空間）$\mathfrak{h}$ を与える．このとき $\mathfrak{h}$ の**正規化代数** (normalizer) を

$$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) := \{\, x \in \mathfrak{g} \mid \forall h \in \mathfrak{h},\ [x,h] \in \mathfrak{h} \,\}$$

  で定義する[a]．特に $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ のとき，$\mathfrak{h}$ は **self-normalizing** であると言う．
- Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とその<u>部分集合</u> X を与える．このとき X の**中心化代数** (centralizer) を

$$C_{\mathfrak{g}}(X) := \{\, x \in \mathfrak{g} \mid \forall z \in X,\ [x,z] = o \,\}$$

  と定義する[b]．

[a] $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ は $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数である：$\forall x,\ y \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ に対して，Jacobi 恒等式から $\forall z \in \mathfrak{h},\ [[x,y],z] = [x,[y,z]] - [y,[x,z]] \in \mathfrak{h}$ が言える．さらに，もし $\mathfrak{h}$ が部分 Lie 代数ならば，定義から $\mathfrak{h}$ を $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ の部分ベクトル空間と見做したときに $\mathfrak{h}$ は自動的にイデアルになる．特に，$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ は $\mathfrak{h} \subset N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ をイデアルとして持つ最大の部分 Lie 代数である．

[b] $C_{\mathfrak{g}}(X)$ が $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数であることは，$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ のときと全く同様にして示される．

【例 1.1.12】を思い出すと，$Z(\mathfrak{g}) = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ である．

1.1.3　準同型・表現

定義 1.1.8: Lie 代数の準同型

2 つの Lie 代数 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ を与える．写像 $f\colon \mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ が **Lie 代数の準同型** (homomorphism) であるとは，f が和，スカラー乗法，Lie ブラケットの全てを保存することを言う．i.e. $\forall x,\ y \in \mathfrak{g}$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ に対して

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y), \\ f(\lambda x) &= \lambda f(x), \\ f([x, y]) &= [f(x), f(y)] \end{aligned}$$

が成り立つこと．

全単射な Lie 代数の準同型のことを Lie 代数の**同型** (isomorphism) と呼ぶ.

Lie 代数の準同型 $f\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ の**核** (kernel), **像** (image) をそれぞれ

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &:= \left\{\, x \in \mathfrak{g} \;\middle|\; f(x) = o \,\right\}, \\ \operatorname{Im} f &:= \left\{\, f(x) \in \mathfrak{h} \;\middle|\; x \in \mathfrak{g} \,\right\} \end{aligned}$$

と定義すると $\operatorname{Ker} f$ はイデアルであり[*5]，$\operatorname{Im} f$ は部分 Lie 代数である[*6] .

[*5] $\forall x,\ y \in \operatorname{Ker} f$ に対して $f(x+y) = f(x) + f(y) = o + o = o$，$f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda o = o$ なので部分ベクトル空間，かつ $\forall z \in \mathfrak{g}$ に対して $f([z, x]) = [f(z), f(x)] = [f(z), o] = o$.

[*6] $\forall f(x),\ f(y) \in \operatorname{Im} f$ に対して $f(x) + f(y) = f(x+y)$，$\lambda f(x) = f(\lambda x)$; $[f(x), f(y)] = f([x, y])$

命題 1.1.2: 準同型定理

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ およびそのイデアル $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ を与える．このとき，任意のLie 代数の準同型 $f\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ に対して[a]以下が成り立つ：

(1) $\mathfrak{g}/\operatorname{Ker} f \cong \operatorname{Im} f$．また，$\mathfrak{i} \subset \operatorname{Ker} f$ が成り立つならば，以下の図式を可換にする Lie 代数の準同型 $\overline{f}\colon \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \longrightarrow \mathfrak{h}$ が一意的に存在する：

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & \forall\mathfrak{h} \\ & \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

図 1.1: 商代数の普遍性．p は標準的射影 $p\colon x \longmapsto x + \mathfrak{i}$ を表す．

(2) $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{j}$ が成り立つとする．このとき $\mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ は $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ のイデアルであり，自然な同型 $(\mathfrak{g}/\mathfrak{i})/(\mathfrak{j}/\mathfrak{i}) \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{j}$ が成り立つ．

(3) 自然な同型 $(\mathfrak{i}+\mathfrak{j})/\mathfrak{j} \cong \mathfrak{i}/(\mathfrak{i}\cap\mathfrak{j})$ が成り立つ．

[a] わざわざこのような記述をしたのは，(1) が商代数の**普遍性** (universal property) を意味していることを明示するためである．

<u>証明</u> (1) まず，$\mathfrak{i} \subset \operatorname{Ker} f$ ならば写像 $\overline{f}\colon \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \longrightarrow \operatorname{Im} f,\ x+\mathfrak{i} \longmapsto f(x)$ が well-defined な Lie 代数の準同型であることを示す．実際 $x+\mathfrak{i} = x'+\mathfrak{i}$ ならば $x'-x \in \mathfrak{i} \subset \operatorname{Ker} f$ であり，$\overline{f}(x'+\mathfrak{i}) = f(x') = f\bigl(x+(x'-x)\bigr) = f(x)+f(x'-x) = f(x) = \overline{f}(x+\mathfrak{i})$ が言えた．$\overline{f}$ が Lie 代数の準同型であることは f が Lie 代数の準同型であることから明らか．定義から $\overline{f}\circ p = f$ である．

次に $\overline{f}$ の一意性を示す．別の $\phi\colon \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \longrightarrow \mathfrak{h}$ が存在して $\phi\circ p = f$ が成り立つとする．このとき $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $\phi(x+\iota) = f(x)$ が成り立つので $\phi = \overline{f}$ である．

特に $\mathfrak{i} = \operatorname{Ker} f$ ならば，$\operatorname{Ker} \overline{f} = \{\operatorname{Ker} f\} = \{o\}$ なので $\overline{f}$ は単射であり $\mathfrak{g}/\operatorname{Ker} f \cong \operatorname{Im} f$ が言えた．

(2) $\mathfrak{i}\subset\mathfrak{j}$ のとき，イデアルの定義より $\mathfrak{i}$ は $\mathfrak{j}$ のイデアルでもある．よって商代数 $\mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ は well-defined．明らかに $\mathfrak{j}/\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ なので $\mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ は $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ の部分 Lie 代数だと分かった．ここで $\forall x+\mathfrak{i} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{i},\ \forall y+\mathfrak{i} \in \mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ をとると，$\mathfrak{j}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルであることから $[x+\mathfrak{i}, y+\mathfrak{i}] = [x,y]+\mathfrak{i} \in \mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ が従う[*7]．以上の議論から $\mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ が $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ のイデアルであることが示された．

さて，Lie 代数の全射準同型 $f\colon \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{j},\ x+\mathfrak{i} \longmapsto x+\mathfrak{j}$ は仮定より well-defined で[*8]，かつ $\operatorname{Ker} f = \mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ である．従って (1) より $\mathfrak{g}/\mathfrak{j} \cong (\mathfrak{g}/\mathfrak{i})/(\mathfrak{j}/\mathfrak{i})$ が言える．

(3) Lie 代数の全射準同型 $f\colon \mathfrak{i} \longrightarrow (\mathfrak{i}+\mathfrak{j})/\mathfrak{j},\ x \longmapsto x+\mathfrak{j}$ に対して $\operatorname{Ker} f = \mathfrak{i}\cap\mathfrak{j}$ である．従って (1) より $(\mathfrak{i}+\mathfrak{j})/\mathfrak{j} \cong \mathfrak{i}/(\mathfrak{i}\cap\mathfrak{j})$ が言える．

■

[*7] $[x,y] \in \mathfrak{j}$ なので．

[*8] $x+\mathfrak{i} = x'+\mathfrak{i} \implies x'-x \in \mathfrak{i}\subset\mathfrak{j} \implies f(x'+\mathfrak{i}) = (x+(x'-x))+\mathfrak{j} = x+\mathfrak{j} = f(x+\mathfrak{i})$

定義 1.1.9: Lie 代数の表現

V を $\mathbb{K}$-ベクトル空間とする．Lie 代数の準同型

$$\phi \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

と V の組 $(\phi,\, V)$ のことを **Lie 代数の表現** (representation) と呼ぶ[a]．

[a] 「代数の表現」と言われたとき，代数**の表現**なのか**結合代数の表現**なのか **Lie 代数の表現**なのか文脈で判断しなくてはならないかもしれない．

【例 1.1.15】随伴表現

【例 1.1.10】で定義した $\mathrm{ad}(x)$ は，写像

$$\mathrm{ad} \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Der}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}),\ x \longmapsto \bigl(z \mapsto [x, z]\bigr)$$

だと思うことができる．ad は明らかに線型写像で，かつ $\forall z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned}
[\mathrm{ad}\, x, \mathrm{ad}\, y](z) &= \mathrm{ad}\, x([y, z]) - \mathrm{ad}\, y([x, z]) \\
&= [x, [y, z]] - [y, [x, z]] \\
&= [x, [y, z]] + [y, [z, x]] \\
&= [[x, y], z] \\
&= \mathrm{ad}\, [x, y](z)
\end{aligned}$$

が成り立つので Lie 代数の準同型である．故に組 $(\mathrm{ad},\, \mathfrak{g})$ は Lie 代数の表現である．

$$x \in \mathrm{Ker}\, \mathrm{ad} \iff \forall y \in \mathfrak{g},\ [x, y] = o$$

より，**【例 1.1.12】**を思い出すと $\mathrm{Ker}\, \mathrm{ad} = Z(\mathfrak{g})$ と分かる．特に単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して $Z(\mathfrak{g}) = \{o\}$ なので ad は単射準同型である．i.e. 任意の単純 Lie 代数は線形 Lie 代数と同型である[a]．

[a] 単射準同型は包含準同型だと見做せる．

1.1.4 自己同型

定義 1.1.10: 自己同型

1.1.5 可解 Lie 代数

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ を与える．$D\mathfrak{g} \coloneqq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ とおくと，**【例 1.1.13】**より $D\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．

定義 1.1.11: 可解 Lie 代数

導来列 (derived series) とは，イデアルの減少列

$$\mathfrak{g} = D^0\mathfrak{g} \supset D^1\mathfrak{g} \supset D^2\mathfrak{g} \supset \cdots$$

のこと．ある $n > 0$ に対して導来列が初めてゼロになって止まるとき，i.e. $D^n\mathfrak{g} = \{o\}$ が成り立つとき，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は**可解** (solvable) であると言われる．

命題 1.1.3:

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ および Lie 代数の準同型 $f \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ を与える．このとき以下が成り立つ：

(1) $\mathfrak{g}$ が可解ならば，$\mathfrak{g}$ の任意の部分 Lie 代数 $\mathfrak{a}$ は可解である．また，$\operatorname{Im} f$ も可解である．
(2) $\mathfrak{g}$ が可解ならば，$\mathfrak{g}$ の任意のイデアル $\mathfrak{a}$ について商代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ も可解である．
(3) $\mathfrak{g}$ のイデアル $\mathfrak{i}$ と商代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ がどちらも可解ならば，$\mathfrak{g}$ 自身も可解である．
(4) $\mathfrak{g}$ のイデアル $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ が可解ならば，イデアル $\mathfrak{i}+\mathfrak{j}$ も可解である．

証明 (1) 仮定より $\mathfrak{g}$ が可解なので，ある $n > 0$ に対して $D^n\mathfrak{g} = \{o\}$ となる．$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ ならば $D\mathfrak{a} \subset D\mathfrak{g}$ であるから，帰納的に $D^i\mathfrak{a} \subset D^i\mathfrak{g}$ $(i = 0, 1, \dots)$ が分かる．よって $D^n\mathfrak{a} = \{o\}$ である．また，f が Lie 代数の準同型であることから $f(D\mathfrak{g}) = [f(\mathfrak{g}), f(\mathfrak{g})] = [\operatorname{Im} f, \operatorname{Im} f] = D(\operatorname{Im} f)$ であり，帰納的に $f(D^i\mathfrak{g}) = D^i(\operatorname{Im} f)$ が分かる．故に $D^n(\operatorname{Im} f) = f(\{o\}) = \{o\}$ である．

(2) 標準的射影 $p \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a},\ x \longmapsto x + \mathfrak{a}$ に対して (1) を適用すれば良い．

(3) 仮定より $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ が可解なので，ある $n > 0$ に対して $D^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{i}) = \{o\}$ と成る．標準的射影 $p \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ について，(1) の証明から $\{o\} = D^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{i}) = D^n(\operatorname{Im} p) = p(D^n\mathfrak{g})$ がわかる．従って $D^n\mathfrak{g} \subset \mathfrak{i}$ である．仮定より $\mathfrak{i}$ も可解だからある $m > 0$ に対して $D^m\mathfrak{i} = \{o\}$ となる．故に帰納的に $D^{n+m}\mathfrak{g} \subset \mathfrak{i}^m = \{o\}$ が示される．

(4) 準同型定理-(3) より

$$(\mathfrak{i}+\mathfrak{j})/\mathfrak{j} \cong \mathfrak{i}/(\mathfrak{i}\cap\mathfrak{j})$$

が成り立つ．仮定より $\mathfrak{i}$ は可解なので，(2) より右辺も可解．よって (3) より $\mathfrak{i}+\mathfrak{j}$ も可解である．

■

$\mathfrak{g}$ を有限次元Lie 代数とし，$\mathfrak{r}$ [*9]を $\mathfrak{g}$ の極大[*10]可解イデアルとしよう[*11]

補題 1.1.2:

$\mathfrak{r}$ は $\mathfrak{g}$ の全ての可解イデアルを含む．i.e. 最大 (maximal) の可解イデアルである．

証明 任意の $\mathfrak{g}$ の可解イデアル $\mathfrak{i}$ をとる．準同型定理-(3) より

$$(\mathfrak{i}+\mathfrak{r})/\mathfrak{i} \cong \mathfrak{r}/(\mathfrak{i}\cap\mathfrak{r})$$

[*9] \mathfrak{r}
[*10] $\mathfrak{r} \subsetneq \mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$ を充たす $\mathfrak{g}$ の可解イデアル $\mathfrak{i}$ が $\mathfrak{g}$ 以外に存在しない．
[*11] $\mathfrak{r}$ は少なくとも 1 つ存在する．$\mathfrak{g}$ が有限次元なので，$\mathfrak{g}$ の可解イデアルのうち次元が最大のものを取れば良い．

が成り立つ．$\mathfrak{r}$ は可解なので命題 1.1.3-(1) より $\mathfrak{r}/(\mathfrak{i}\cap\mathfrak{r})$ は可解であり，従って $(\mathfrak{i}+\mathfrak{r})/\mathfrak{i}$ も可解である．$\mathfrak{i}$ も可解なので命題 1.1.3-(3) より $\mathfrak{i}+\mathfrak{r}$ も可解である．然るに，$\mathfrak{r}$ の極大性により $\mathfrak{i}+\mathfrak{r}=\mathfrak{r}$ であるから $\mathfrak{i}\subset\mathfrak{r}$ が言えた． ■

定義 1.1.12: 根基

$\mathfrak{g}$ の最大可解イデアル[a] (maximal solvable ideal) $\mathfrak{r}$ のことを $\mathfrak{g}$ の**根基** (radical) と呼び，$\mathrm{rad}\,\mathfrak{g}$ と書く．

[a] 補題 1.1.2 によりこれは一意的に存在する．

定義 1.1.13: 半単純 Lie 代数

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が**半単純** (semisimple) であるとは，$\mathrm{rad}\,\mathfrak{g}=\{o\}$ であることを言う．

1.1.6 冪零 Lie 代数

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned} C^0\mathfrak{g} &:= \mathfrak{g}, \\ C^n\mathfrak{g} &:= \left[\mathfrak{g}, C^{n-1}\mathfrak{g}\right] \end{aligned}$$

のように帰納的にイデアルの減少列

$$\mathfrak{g}=C^0\mathfrak{g}\supset C^1\mathfrak{g}\supset C^2\mathfrak{g}\supset\cdots \tag{1.1.1}$$

を定義する．

定義 1.1.14: 冪零 Lie 代数

イデアルの減少列 (1.1.1) がある $n>0$ に対して初めてゼロになって止まるとき，i.e. $C^n\mathfrak{g}=\{o\}$ が成り立つとき，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は**冪零** (nilpotent) であると言われる．

! 線型写像 $x\colon\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}$ の冪零性との混同を避けるため，定義 1.1.14 の意味で冪零と言う場合は冪零 Lie 代数と言うことにする．

命題 1.1.4:

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ および Lie 代数の準同型 $f\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ を与える．このとき以下が成り立つ：

(1) $\mathfrak{g}$ が冪零 Lie 代数ならば，$\mathfrak{g}$ の任意の部分 Lie 代数 $\mathfrak{a}$ は冪零 Lie 代数である．また，$\operatorname{Im} f$ も冪零 Lie 代数である．

(2) $\mathfrak{g}$ が冪零 Lie 代数ならば，$\mathfrak{g}$ の任意のイデアル $\mathfrak{a}$ について商代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ も冪零 Lie 代数である．

(3) $\mathfrak{g}$ の中心による商代数 $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ が冪零 Lie 代数ならば $\mathfrak{g}$ は冪零 Lie 代数である．

(4) $\mathfrak{g}$ が冪零 Lie 代数かつ $\mathfrak{g} \neq \{o\}$ ならば，$Z(\mathfrak{g}) \neq \{o\}$ である．

(5) $\mathfrak{g}$ が冪零 Lie 代数ならば，$\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $\operatorname{ad} x$ は冪零である．

証明 (1) 仮定より $\mathfrak{g}$ が冪零 Lie 代数なので，ある $n > 0$ に対して $C^n\mathfrak{g} = \{o\}$ となる．$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ ならば $C\mathfrak{a} \subset C\mathfrak{g}$ であるから，帰納的に $C^i\mathfrak{a} \subset C^i\mathfrak{g}$ $(i = 0, 1, \dots)$ が分かる．よって $C^n\mathfrak{a} = \{o\}$ である．また，f が Lie 代数の準同型であることから $f(C\mathfrak{g}) = [f(\mathfrak{g}), f(\mathfrak{g})] = [\operatorname{Im} f, \operatorname{Im} f] = C(\operatorname{Im} f)$ であり，帰納的に $f(C^i\mathfrak{g}) = C^i(\operatorname{Im} f)$ が分かる．故に $C^n(\operatorname{Im} f) = f(\{o\}) = \{o\}$ である．

(2) 標準的射影 $p\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a},\ x \longmapsto x + \mathfrak{a}$ に対して (1) を適用すれば良い．

(3) 仮定より $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ が冪零 Lie 代数なので，ある $n > 0$ に対して $C^n(\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})) = \{o\}$ と成る．標準的射影 $p\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ について，(1) の証明から $\{o\} = C^n(\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})) = C^n(\operatorname{Im} p) = p(C^n\mathfrak{g})$ がわかる．従って $C^n\mathfrak{g} \subset Z(\mathfrak{g})$ である．故に中心の定義から $C^{n+1}\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, C^n\mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{g}, Z(\mathfrak{g})] = \{o\}$ が示された．

(4) 仮定より $\mathfrak{g}$ が冪零 Lie 代数なので，ある $n > 0$ に対して $C^{n-1}\mathfrak{g} \neq \{o\}$ かつ $C^n\mathfrak{g} = \{o\}$ となる．このとき $\{o\} = C^n\mathfrak{g} = \left[\mathfrak{g}, C^{n-1}\mathfrak{g}\right]$ なので中心の定義から $\{o\} \neq C^{n-1}\mathfrak{g} \subset Z(\mathfrak{g})$ が言える．

(5) 仮定より $\mathfrak{g}$ が冪零 Lie 代数なので，ある $n > 0$ に対して $C^n\mathfrak{g} = \{o\}$ となる．このとき $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して随伴表現 $\operatorname{ad}(x)\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ を考える．$\operatorname{ad}(x)(C^i\mathfrak{g}) = \left[x, C^i\mathfrak{g}\right] \subset \left[\mathfrak{g}, C^i\mathfrak{g}\right] = C^{i+1}\mathfrak{g}$ なので，イデアルの減少列 (1.1.1) に $\operatorname{ad}(x)$ を作用させると

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{\operatorname{ad}(x)} C^1\mathfrak{g} \xrightarrow{\operatorname{ad}(x)} \cdots \xrightarrow{\operatorname{ad}(x)} C^n\mathfrak{g} = \{o\}$$

となる．i.e. $\forall y \in \mathfrak{g}$ に対して $\left(\operatorname{ad}(x)\right)^n = 0$ である．

■

1.1.7 Engel の定理

補題 1.1.3: ad **の冪零性**

$x \in \mathfrak{gl}(V)$ が冪零ならば $\operatorname{ad} x \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(V))$ も冪零である．

証明 x が冪零であるという仮定から，$x^n = 0$ を充たす $n \in \mathbb{N}$ が存在する．

さて，x による左移動と右移動をそれぞれ

$$\lambda_x\colon \mathfrak{gl}(V) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V),\ y \longmapsto \left(v \mapsto x(y(v))\right),$$
$$\rho_x\colon \mathfrak{gl}(V) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V),\ y \longmapsto \left(v \mapsto y(x(v))\right)$$

と定義しよう．$\forall y \in \mathfrak{gl}(V)$ を 1 つとると

$$(\lambda_x)^n(y) = x^n y = 0, \qquad (\rho_x)^n(y) = yx^n = 0 \tag{1.1.2}$$

が成り立つ．さらに $\rho_x(\lambda_x(y)) = xyx = \lambda_x(\rho_x(y))$ が成り立つ．i.e. $\rho_x\lambda_x = \lambda_x\rho_x$ である．従って二項定理が使えて[*12]，(1.1.2) から

$$\begin{aligned}
(\operatorname{ad} x)^{2n-1} &= (\lambda_x - \rho_x)^{2n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} (\rho_x)^{2n-k-1} (\lambda_x)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} 0 (\lambda_x)^k + \sum_{k=n}^{2n} -1 \binom{2n-1}{k} (\rho_x)^{2n-k-1} 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

が言えた． ■

補題 1.1.4:

$V \neq \{o\}$ を有限次元ベクトル空間とし，$\mathfrak{gl}(V)$ の任意の部分 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ をとる．
このとき $\forall x \in \mathfrak{g}$ が冪零ならば，ある $v \in V \setminus \{o\}$ が存在して $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $x(v) = o$ が成り立つ．

証明 $\dim \mathfrak{g}$ に関する数学的帰納法により示す．$\dim \mathfrak{g} = 0$ のときは $\mathfrak{g} = \{0\}$ なので自明．
$\dim \mathfrak{g} > 0$ とし，$\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g}$ を任意に 1 つとる．

$\mathfrak{h} \subsetneq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ であること

補題 1.1.3 より，$\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}} \colon \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の[*13]像の全ての元は冪零である[*14]．ここで $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ の Lie ブラケットを忘れて $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間と見做したとき，商ベクトル空間 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ を構成できる[*15]．このとき，$\forall x \in \mathfrak{h}$ に対して写像

$$\overline{\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}}(x) \colon \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h},\ y + \mathfrak{h} \longmapsto \operatorname{ad}(x)(y) + \mathfrak{h}$$

が well-defined な線型写像であることを示す．実際 $y + \mathfrak{h} = y' + \mathfrak{h} \iff y' - y \in \mathfrak{h}$ ならば

$$\begin{aligned}
\overline{\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}}(x)(y' + \mathfrak{h}) &= \operatorname{ad}(x)(y') + \mathfrak{h} \\
&= \big(\operatorname{ad}(x)(y) + \operatorname{ad}(x)(y' - y)\big) + \mathfrak{h} \\
&= \big(\operatorname{ad}(x)(y) + [x, y' - y]\big) + \mathfrak{h} \\
&= \operatorname{ad}(x)(y) + \mathfrak{h} \\
&= \overline{\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}}(x)(y + \mathfrak{h})
\end{aligned}$$

が成り立つので $\overline{\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}}(x)$ は well-defined であり，かつ $\operatorname{ad}(x)$ が線型写像なので線型写像である．以上の考察から，写像 $\overline{\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}} \colon \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}),\ x \longmapsto \overline{\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}}(x)$ は well-defined な Lie 代数の準同型で，$\operatorname{Im} \overline{\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}}$（もちろんこれは $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ の部分 Lie 代数である）の元は全て冪零である．

さて，$\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$ より $\dim \mathfrak{h} < \dim \mathfrak{g}$ であるから，帰納法の仮定よりある $v + \mathfrak{h} \in (\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \setminus \{\mathfrak{h}\}$ が存在して，$\forall \overline{\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}}(x) \in \operatorname{Im} \overline{\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}}$ に対して $\overline{\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}}(x)(v + \mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ が成り立つ．i.e. ある $v \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ が存在して

[*12] 写像の合成の結合律を暗に使っている．
[*13] $\operatorname{ad} \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ への制限．
[*14] 仮定より $\forall x \in \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ が冪零なので．
[*15] 商代数の構成において Lie ブラケットを忘れることで商ベクトル空間が構成できる．この際 $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間でありさえすれば良い．

$\forall x \in \mathfrak{h}$ に対して $\mathrm{ad}|_{\mathfrak{h}}(x)(v) = [x, v] \in \mathfrak{h}$ が成り立つ．i.e. $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{h}$ の正規化代数 $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ の真部分集合である[*16]．

$\mathfrak{h}$ を，$\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g}$ を充たす極大[*17]部分 Lie 代数とする．$\mathfrak{h}$ の極大性と先ほど証明した事実から $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}$ でなくてはならない．従って正規化代数の定義の脚注から $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルであり，商代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ が well-defined である．もし $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h} > 1$ だとすると $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ の 1 次元部分 Lie 代数 $\mathbb{K}(x + \mathfrak{h})$ ($^{\mathrm{w}/}$ $x \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$) の，標準的射影による逆像が $\mathfrak{h}$ を真部分集合にもつ $\mathfrak{g}$ の真部分代数ということになり，$\mathfrak{h}$ の極大性に矛盾する．故に背理法から $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h} = 1$ であり，$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathbb{K}z$ ($^{\mathrm{w}/}$ $z \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$) だと分かった．

ここで $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間 $W := \left\{ v \in V \mid \forall y \in \mathfrak{h},\ y(v) = o \right\}$ を考える．$\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{g} - 1 < \dim \mathfrak{g}$ なので，帰納法の仮定より $W \neq \{o\}$ だと分かる[*18]．$\mathfrak{h}$ はイデアルなので，$\forall x \in \mathfrak{g}, \forall y \in \mathfrak{h}, \forall w \in W$ に対して $y(x(w)) = x(y(w)) - [x, y](w) = o$ が成り立つ．i.e. $\forall w \in W$ に対して $\forall x \in \mathfrak{g}$, $x(w) \in W$ が言える（W は x 不変）．故に $\forall z \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ の W における固有ベクトル $v \in W \setminus \{o\}$ が存在する[*19]．z は冪零なのでその固有値は 0 であり，$z(v) = o$ が成り立つ．

■

定理 1.1.1: Engel の定理

$\mathfrak{g}$ を有限次元Lie 代数とする．$\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{ad}\, x$ が冪零ならば，$\mathfrak{g}$ は冪零 Lie 代数である．

命題 1.1.4-(5) と併せて以下を得る：
有限次元Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が冪零 Lie 代数 $\iff$ $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{ad}\, x$ が冪零

証明 $\dim \mathfrak{g}$ に関する数学的帰納法により示す．$\dim \mathfrak{g} = 0, 1$ のときは自明．

$\dim \mathfrak{g} > 1$ とする．仮定より，$\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の部分 Lie 代数 $\mathrm{Im}\,\mathrm{ad}$ に対して補題 1.1.4 を使うことができる．すなわちある $v \in \mathfrak{g} \setminus \{o\}$ が存在して，$\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{ad}(x)(v) = [x, v] = o$ を充たす．i.e. $\mathfrak{g}$ の中心 $Z(\mathfrak{g})$ は非零である．このとき $\dim \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g}) < \dim \mathfrak{g}$ で，かつ $\forall x + Z(\mathfrak{g}) \in \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ に対して $\mathrm{ad}(x + Z(\mathfrak{g}))$ は冪零である．故に帰納法の仮定から $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ は冪零 Lie 代数である．従って命題 1.1.4-(3) より $\mathfrak{g}$ は冪零 Lie 代数である． ■

定義 1.1.15: 旗

- V を有限次元 $\mathbb{K}$ ベクトル空間とする．V の**旗** (flag) とは，部分ベクトル空間の増大列

$$\{o\} =: V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{\dim V} := V$$

  であって，$0 \leq \forall i \leq \dim V$ に対して $\dim V_i = i$ が成り立つようなもののこと．
- $x \in \mathrm{End}\, V$ が旗を**安定化する** (stabilize) とは，$0 \leq \forall i \leq \dim V$ に対して $xV_i \subset V_i$ が成り立つことを言う．

[*16] $\exists v \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \setminus \mathfrak{h}$ なので
[*17] $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{h}'$ でかつ $\mathfrak{h}' \subsetneq \mathfrak{g}$ を充たす $\mathfrak{h}'$ が存在しない．
[*18] 仮定より $\mathfrak{h}$ の全ての元は冪零．
[*19] $\forall z \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ はスカラー倍の違いしかないので，固有ベクトルは共通のものを取れる．

系 1.1.2:

$V \neq \{o\}$ を有限次元ベクトル空間とし，$\mathfrak{gl}(V)$ の任意の部分 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ をとる．
このとき $\forall x \in \mathfrak{g}$ が冪零ならば，$\forall x \in \mathfrak{g}$ によって安定化される V の旗が存在する．

証明 $\dim V$ に関する数学的帰納法により示す．$\dim V = 0$ ならば $V = \{o\}$ なので示すべきことは何もない．$\dim V > 0$ とする．補題 1.1.4 より $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $xv = o$ を充たす $v \in V \setminus \{o\}$ が存在する．ここで $V_1 \coloneqq \mathbb{K}v$ とおき，$W \coloneqq V/V_1$ とする．$\forall x \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ に対して，$v \in V$ の採り方から明らかに $V_1 \subset \operatorname{Ker} x$ なので商ベクトル空間の普遍性[20]を使うことができ，図式

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "x"] \arrow[d, "p"'] & V \arrow[r, "p"] & V/V_1 \\
V/V_1 \arrow[urr, dashed, "\exists! \overline{x}"] & &
\end{tikzcd}$$

を可換にするような $\overline{x} \in \mathfrak{gl}(V/V_1)$ が一意的に存在する[21]．このようにして得られる Lie 代数の単射準同型 $\overline{} \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V/V_1)$, $x \longmapsto \overline{x}$ によって $\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{gl}(V/V_1)$ の部分 Lie 代数と見做すと，明らかに $\mathfrak{g}$ の任意の元は冪零であり，かつ $\dim(V/V_1) = \dim V - 1 < \dim V$ なので帰納法の仮定が使えて，V/V_1 の旗

$$\{o\} = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_{\dim V - 1} = V/V_1$$

が存在して[22] $\forall \overline{x} \in \mathfrak{g}$ がそれを安定化する．このとき V の部分ベクトル空間の増大列

$$\{o\} \subset p^{-1}(W_0) \subset p^{-1}(W_1) \subset \cdots \subset p^{-1}(W_{\dim V - 1}) = V$$

は $\forall x \in \mathfrak{g}$ により安定化される[23] ので帰納法が完成する． ■

補題 1.1.5:

$\mathfrak{g}$ を冪零 Lie 代数，$\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$ をそのイデアルとする．このとき，もし $\mathfrak{i} \neq \{o\}$ ならば $\mathfrak{i} \cap Z(\mathfrak{g}) \neq \{o\}$ である．

証明 イデアルの定義から，随伴表現 $\mathrm{ad} \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ は $\forall x \in \mathfrak{i}$ に対して $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})(x) = [\mathfrak{g}, x] \subset \mathfrak{i}$ を充たす．i.e. 部分 Lie 代数 $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{i})$ と見做すことができる．さらに仮定より $\mathfrak{i} \neq \{o\}$ なので補題 1.1.4 が使えて，ある $x \in \mathfrak{i} \setminus \{o\}$ が存在して $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})(x) = [\mathfrak{g}, x] = \{o\}$ を充たす．中心の定義を思い出すと，これは $x \in \mathfrak{i} \cap Z(\mathfrak{g})$ を意味する． ■

1.2 Lie 群と Lie 代数の関係

この節は [3, 第 5 章] による．

[20] 命題 1.1.2-(1) の証明がそのまま適用できる．
[21] $p \colon V \longrightarrow V/V_1$ は標準的射影．
[22] V/V_1 の零ベクトルは V_1 であることに注意．
[23] $\forall x \in \mathfrak{g}$ をとる．このとき，旗 $W_0 \subset \cdots \subset W_{\dim V - 1}$ が $\overline{x}$ によって安定化されるので，$\forall w + V_1 \in W_i \quad (0 \leq \forall i \leq \dim V - 1)$ に対して $\overline{x}(w + V_1) \in W_i$ が成り立つ．$\forall v \in p^{-1}(W_i)$ に対して $p(v) = v + V_1 \in W_i$ なので，命題 1.1.2-(1) の証明から $x(v) + V_1 = \overline{x}(v + V_1)$ であることに注意すると $p\bigl(x(v)\bigr) = x(v) + V_1 = \overline{x}(v + V_1) \in W_i$, i.e. $x(v) \in p^{-1}(W_i)$ がわかった．

第 2 章

半単純 Lie 代数

この章において，特に断らない限り体 $\mathbb{K}$ は代数閉体[*1]で，かつ $\operatorname{char}\mathbb{K}=0$ であるとする．

2.1 Lie の定理・Cartan の判定条件

2.1.1 Lie の定理

2.1.2 Jordan-Chevalley 分解

2.1.3 Cartan の判定条件

2.2 Killing 形式

2.3 半単純性の判定条件

2.4 単純イデアル

2.5 内部微分

2.6 抽象 Jordan 分解

[*1] つまり，定数でない任意の 1 変数多項式 $f(x)\in\mathbb{K}[x]$ に対してある $\alpha\in\mathbb{K}$ が存在して $f(\alpha)=0$ を充たす．

2.7　表現の完全可約性

ベクトル空間のテンソル積について復習する：

定義 2.7.1: ベクトル空間のテンソル積

$\mathbb{K}$ を任意の体とし，$\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V,\ W$ を与える．

- $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $\boldsymbol{V \otimes W}$
- 双線型写像 $\boldsymbol{\Phi}\colon V \times W \longrightarrow \boldsymbol{V \otimes W}$

の組 $(V \otimes W,\ \Phi)$ が $V,\ W$ の**テンソル積** (tensor product) であるとは，以下の性質を充たすことをいう：

テンソル積の普遍性

任意の $\mathbb{K}$-ベクトル空間 Z および任意の双線型写像 $f\colon V \times W \longrightarrow Z$ に対して，以下の図式を可換にする線型写像 $\overline{f}\colon \boldsymbol{V \otimes W} \longrightarrow Z$ が一意的に存在する：

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\boldsymbol{\Phi}"'] & \forall Z \\
\boldsymbol{V \otimes W} \arrow[ur, dashed, "\exists! \bar{f}"']
\end{tikzcd}$$

テンソル積をとる操作は結合的である．i.e. $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \cong (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ が成り立つ．従って以降では 3 つ以上のベクトル空間のテンソル積を括弧を省略して書く．

命題 2.7.1: テンソル積の一意性

テンソル積は，存在すればベクトル空間の同型を除いて一意である．

<u>**証明**</u> $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 $V,\ W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ を与える．体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間と双線型写像の組 $(\boldsymbol{T},\ \boldsymbol{\Phi}\colon V \times W \longrightarrow \boldsymbol{T})$ および $(\boldsymbol{T},\ \boldsymbol{\Phi'}\colon V \times W \longrightarrow \boldsymbol{T'})$ がどちらも $V,\ W$ のテンソル積であるとする．このときテンソル積の普遍性から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "\Phi'"] \arrow[d, "\boldsymbol{\Phi}"'] & T' \\
\boldsymbol{T} \arrow[ur, dashed, "\exists! u"]
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\boldsymbol{\Phi'}"'] & T \\
\boldsymbol{T'} \arrow[ur, dashed, "\exists! u'"]
\end{tikzcd}$$

が成り立つので，これらの図式を併せた $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$
\begin{tikzcd}
\boldsymbol{T} & \\
V \times W \arrow[u, "\boldsymbol{\Phi}"] \arrow[r, "\Phi'"] \arrow[d, "\boldsymbol{\Phi}"'] & T' \arrow[ul, dashed, "\exists! u'"'] \\
\boldsymbol{T} \arrow[ur, dashed, "\exists! u"] &
\end{tikzcd}
$$

が存在する．然るに $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$
\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "\boldsymbol{\Phi}"] \arrow[d, "\boldsymbol{\Phi}"'] & \boldsymbol{T} \\
\boldsymbol{T} \arrow[ur, dashed, "\mathrm{id}_{\boldsymbol{T}}"] &
\end{tikzcd}
$$

も成り立ち，テンソル積の普遍性より赤点線で書いた線型写像は一意でなくてはならないので，

$$u' \circ u = \mathrm{id}_{\boldsymbol{T}}$$

がわかる．同様の議論から

$$u \circ u' = \mathrm{id}_{\boldsymbol{T'}}$$

も従うので，線型写像 $u \colon \boldsymbol{T} \longrightarrow \boldsymbol{T'}$, $u' \colon \boldsymbol{T'} \longrightarrow \boldsymbol{T}$ は互いに逆写像，i.e. 同型写像である． ■

命題 2.7.1 からテンソル積の一意性が言えたが，そもそもテンソル積が存在しなければ意味がない．そこで，体 $\mathbb{K}$ 上の任意のベクトル空間 $V, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ を素材にしてテンソル積 $(V \otimes W,\ \Phi \colon V \times W \longrightarrow V \otimes W)$ を具体的に構成してみよう．

$\mathbb{K} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ なので，任意の集合 S に対してベクトル空間の直和

$$\mathbb{K}^{\oplus S} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$$

を考えることができる．$\mathbb{K}^{\oplus S}$ の元 f とは，有限個の元 $x_1, \dots, x_n \in S$ を除いた全ての $x \in S$ に対して値 $0 \in \mathbb{K}$ を返すような $\mathbb{K}$ 値関数 $f \colon S \longrightarrow \mathbb{K}$ のことである[*2]．

ところで，$\forall x \in S$ に対して次のような関数 $\delta_x \in \mathbb{K}^{\oplus S}$ が存在する：

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}$$

この δ_x を x そのものと同一視してしまうことで，先述の $f \in \mathbb{K}^{\oplus (V \times W)}$ は

$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \quad {}^{\mathrm{w}/} \quad \lambda_i \coloneqq f(x_i) \in \mathbb{K}$$

[*2] これは集合論の記法である：ある集合 Λ から集合 A への写像 $a \colon \Lambda \longrightarrow A$ のことを Λ によって**添字づけられた** A の元の**族**と呼び，$\forall \lambda \in \Lambda$ に対して $a(\lambda) \in A$ のことを $\boldsymbol{a_\lambda}$ と書き，$\boldsymbol{a \colon \Lambda \longrightarrow A}$ **自身のこと**を $\boldsymbol{(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}}$ と書くのである．なお，$\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ と書いたときは A の部分集合 $\{\, a(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda \,\} \subset A$ のことを意味する．

の形に一意的に書ける．[*3] この意味で，$\mathbb{K}^{\oplus(V\times W)}$ は $V \times W$ の元の**形式的な** $\mathbb{K}$ **係数線形結合**全体がなす $\mathbb{K}$ ベクトル空間と言うことができ，集合 $V \times W$ 上の**自由ベクトル空間**と呼ばれる．自由加群の特別な場合と言っても良い．自由ベクトル空間は次の普遍性によって特徴づけられる：

補題 2.7.1: 自由ベクトル空間の普遍性

任意の集合 S および任意の $\mathbb{K}$ ベクトル空間 $Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ を与える．包含写像

$$\iota\colon S \longrightarrow \mathbb{K}^{\oplus S},\ x \longmapsto \delta_x$$

を考える．このとき，任意の写像 $f\colon S \longrightarrow Z$ に対して線型写像 $u\colon \mathbb{K}^{\oplus S} \longrightarrow Z$ が一意的に存在して，図式 2.2 を可換にする：

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & \forall Z \\
\mathbb{K}^{\oplus S} \arrow[ur, dashed, "\exists! u"] &
\end{tikzcd}$$

図 2.2: 自由ベクトル空間の普遍性

<u>**証明**</u> 写像

$$u\colon \mathbb{K}^{\oplus S} \longrightarrow Z,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{x_i} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

は右辺が有限和なので well-defined であり，$\forall x \in S$ に対して $u\bigl(\iota(x)\bigr) = f(x)$ を充たす．

別の線型写像 $g\colon \mathbb{K}^{\oplus S} \longrightarrow Z$ が $g \circ \iota = f$ を充たすとする．このとき $\forall x \in S$ に対して $g(\delta_x) = f(x)$ であるから，$\forall v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{x_i} \in \mathbb{K}^{\oplus S}$ に対して

$$g(v) = g\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(\delta_{x_i}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) = u(v)$$

が言える．よって $g = u$ である． ■

さて，自由加群の普遍性の図式とテンソル積の普遍性の図式はとても似ているので，$\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ の候補として $\mathbb{K}^{\oplus(V\times W)}$ を考えてみる．しかしそのままでは $\iota\colon V \times W \longrightarrow \mathbb{K}^{\oplus(V\times W)}$ が双線型写像になってくれる保証はない．そこで，

$$\begin{aligned}
\iota(\lambda v,\, w) &\sim \lambda\iota(v,\, w),\\
\iota(v,\, \lambda w) &\sim \lambda\iota(v,\, w),\\
\iota(v_1 + v_2,\, w) &\sim \iota(v_1,\, w) + \iota(v_2,\, w),\\
\iota(v,\, w_1 + w_2) &\sim \iota(v,\, w_1) + \iota(v,\, w_2)
\end{aligned}$$

[*3] というのも，このように書けば $\forall y \in S$ に対して

$$f(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{x_i}(y) = \begin{cases} f(x_i), & y = x_i \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

が言えるので．特に，この式の中辺は $\mathbb{K}$ の元の有限和なので意味を持つ．

を充たすような上手い同値関係による商ベクトル空間を構成する．

命題 2.7.2: テンソル積の構成

$\mathbb{K}^{\oplus(V\times W)}$ の部分集合

$$
\begin{aligned}
S_1 &:= \left\{ \iota(\lambda v,\, w) - \lambda\iota(v,\, w) \;\middle|\; \forall v\in V,\, \forall w\in W,\, \forall\lambda\in\mathbb{K} \right\},\\
S_2 &:= \left\{ \iota(v,\, \lambda w) - \lambda\iota(v,\, w) \;\middle|\; \forall v\in V,\, \forall w\in W,\, \forall\lambda\in\mathbb{K} \right\},\\
S_3 &:= \left\{ \iota(v_1+v_2,\, w) - \iota(v_1,\, w) - \iota(v_2,\, w) \;\middle|\; \forall v_1,\, \forall v_2\in V,\, \forall w\in W,\, \forall\lambda\in\mathbb{K} \right\},\\
S_4 &:= \left\{ \iota(v,\, w_1+w_2) - \iota(v,\, w_1) - \iota(v,\, w_2) \;\middle|\; \forall v\in V,\, \forall w_1,\, w_2\in W,\, \forall\lambda\in\mathbb{K} \right\}
\end{aligned}
$$

の和集合 $S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4$ が生成する $\mathbb{K}$ ベクトル空間[a]を $\mathcal{R}$ と書き，商ベクトル空間 $\mathbb{K}^{\oplus(V\times W)}/\mathcal{R}$ の商写像を

$$
\pi\colon \mathbb{K}^{\oplus(V\times W)} \longrightarrow \mathbb{K}^{\oplus(V\times W)}/\mathcal{R},\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\iota(v_i,\, w_i) \longmapsto \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\iota(v_i,\, w_i)\right) + \mathcal{R}
$$

と書き，$\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w} := \pi\bigl(\iota(v,\, w)\bigr)$ とおく．このとき，

- $\mathbb{K}$ ベクトル空間 $\mathbb{K}^{\oplus\boldsymbol{(V\times W)}}/\boldsymbol{\mathcal{R}}$
- 写像 $\boldsymbol{\Phi} = \pi\circ\iota\colon V\times W \longrightarrow \mathbb{K}^{\oplus\boldsymbol{(V\times W)}}/\boldsymbol{\mathcal{R}},\ (v,\, w)\longmapsto v\otimes w$

の組は $V,\, W$ のテンソル積である．

[a] これらの元の形式的な $\mathbb{K}$ 係数線型結合全体が成すベクトル空間のこと．

<u>**証明**</u> まず，$\boldsymbol{\Phi}$ が双線型写像であることを示す．商ベクトル空間の和とスカラー乗法の定義から

$$
\begin{aligned}
\Phi(\lambda v,\, w) &= \iota(v,\, w) + \mathcal{R} = \bigl(\lambda\iota(v,\, w) + \iota(\lambda v,\, w) - \lambda\iota(v,\, w)\bigr) + \mathcal{R}\\
&= \lambda\iota(v,\, w) + \mathcal{R} = \lambda\bigl(\iota(v,\, w) + \mathcal{R}\bigr) = \lambda\Phi(v,\, w)\\
\Phi(v_1+v_2,\, w) &= \iota(v_1+v_2,\, w) + \mathcal{R} = \bigl(\iota(v_1,\, w) + \iota(v_2,\, w) + \iota(v_1+v_2,\, w) - \iota(v_1,\, w) - \iota(v_2,\, w)\bigr) + \mathcal{R}\\
&= \bigl(\iota(v_1,\, w) + \iota(v_2,\, w)\bigr) + \mathcal{R} = \bigl(\iota(v_1,\, w) + \mathcal{R}\bigr) + \bigl(\iota(v_2,\, w) + \mathcal{R}\bigr)\\
&= \Phi(v_1,\, w) + \Phi(v_2,\, w)
\end{aligned}
$$

が言える．第 2 引数に関しても同様であり，$\boldsymbol{\Phi}$ は双線型写像である．

次に，上述の構成がテンソル積の普遍性を充たすことを示す．$\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ と任意の双線型写像 $f\colon V\times W \longrightarrow Z$ を与える．自由ベクトル空間の普遍性から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$
\begin{tikzcd}
V\times W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & \forall Z \\
\mathbb{K}^{\oplus(V\times W)} \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}
$$

が存在する．f が双線型なので，

$$
\begin{aligned}
\overline{f}\bigl(\iota(\lambda v,\, w)\bigr) &= f(\lambda v,\, w) = \lambda f(v,\, w) \\
&= \lambda \overline{f}\bigl(\iota(v,\, w)\bigr) = \overline{f}\bigl(\lambda\iota(v,\, w)\bigr), \\
\overline{f}\bigl(\iota(v_1 + v_2,\, w)\bigr) &= f(v_1 + v_2,\, w) = f(v_1,\, w) + f(v_2,\, w) \\
&= \overline{f}\bigl(\iota(v_1,\, w)\bigr) + \overline{f}\bigl(\iota(v_2,\, w)\bigr) = \overline{f}\bigl(\iota(v_1,\, w) + \iota(v_2,\, w)\bigr)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．第 2 引数についても同様なので，$\mathcal{R} \subset \operatorname{Ker} \overline{f}$ である．よって準同型定理から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$
\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & \forall Z \\
\mathbb{K}^{\oplus(V \times W)} \arrow[ur, dashed, "\exists! \overline{f}"] \arrow[d, "\pi"'] & \\
\mathbb{K}^{\oplus(V \times W)}/\mathcal{R} \arrow[uur, dashed, "\exists! u"'] &
\end{tikzcd}
$$

が存在する．この図式の外周部はテンソル積の普遍性の図式である．■

命題 2.7.3: 有限次元テンソル積の基底

有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V,\, W$（$\dim V =: n,\ \dim W =: m$）を与える．$V,\, W$ の基底をそれぞれ $\{e_1,\, \dots,\, e_n\},\ \{f_1,\, \dots,\, f_m\}$ と書く．このとき，集合

$$
\mathcal{E} := \bigl\{\, e_\mu \otimes f_\nu \bigm| 1 \le \mu \le n,\ 1 \le \nu \le m \,\bigr\}
$$

は $V \otimes W$ の基底である．従って $\dim V \otimes W = nm$ である．

証明 テンソル積の構成から，$\forall t \in V \otimes W$ は有限個の $(v_i,\, w_i) \in V \times W\ (i = 1,\, \dots l)$ を使って

$$
t = \left(\sum_{i=1}^{l} t_i \iota(v_i,\, w_i) \right) = \sum_{i=1}^{l} t_i v_i \otimes w_i
$$

と書ける．$v_i = {v_i}^\mu e_\mu,\ w_i = {w_i}^\mu f_\mu$ のように展開することで，

$$
\begin{aligned}
t &= \sum_{i=1}^{l} t_i ({v_i}^\mu e_\mu) \otimes ({w_i}^\nu f_\nu) \\
&= \sum_{i=1}^{l} t_i {v_i}^\mu {w_i}^\nu e_\mu \otimes f_\nu
\end{aligned}
$$

と書ける．ただし添字 $\mu,\, \nu$ に関しては Einstein の規約を適用した．従って $\mathcal{E}$ は $V \otimes W$ を生成する．

$\mathcal{E}$ の元が線型独立であることを示す．

$$
t^{\mu\nu} e_\mu \otimes e_\nu = 0
$$

を仮定する．$\{e_\mu\},\, \{f_\mu\}$ の双対基底をそれぞれ $\{\varepsilon^\mu\},\, \{\eta^\nu\}$ と書き，全ての添字の組み合わせ $(\mu,\, \nu) \in \{1,\, \dots,\, n\} \times \{1,\, \dots,\, m\}$ に対して双線型写像

$$
\tau^{\mu\nu} \colon V \times W \longrightarrow \mathbb{R},\ (v,\, w) \longmapsto \varepsilon^\mu(v) \eta^\nu(w)
$$

を定める．$\tau^{\mu\nu}$ は双線型なのでテンソル積の普遍性から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$
\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "\tau^{\mu\nu}"] \arrow[d, "\pi\circ\iota"'] & \mathbb{R} \\
\boldsymbol{V \otimes W} \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{\tau}^{\mu\nu}"']
\end{tikzcd}
$$

が存在する．このことは，

$$
\begin{aligned}
0 &= \overline{\tau}^{\mu\nu}(t^{\rho\sigma}e_\rho \otimes f_\sigma) \\
&= t^{\rho\sigma}(\overline{\tau}^{\mu\nu} \circ \pi \circ \iota)(e_\rho,\, f_\sigma) \\
&= t^{\rho\sigma}\tau^{\mu\nu}(e_\rho,\, f_\sigma) = t^{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

を意味する．従って $\mathcal{E}$ の元は線型独立である． ■

これでもまだ直接の計算には向かない．より具体的な構成を探そう．

任意の $\mathbb{K}$-ベクトル空間[*4] $V_1,\, \ldots,\, V_n,\, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ に対して，集合

$$
\boldsymbol{L(V_1,\, \ldots,\, V_n;\, W)} \coloneqq \left\{\, F\colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W \;\middle|\; F \text{ は多重線型写像} \,\right\}
$$

を考える．$L(V_1,\, \ldots,\, V_n;\, W)$ の上の加法とスカラー乗法を $\forall v_i \in V_i,\, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ に対して

$$
\begin{aligned}
(F+G)(v_1,\, \ldots,\, v_n) &\coloneqq F(v_1,\, \ldots,\, v_n) + G(v_1,\, \ldots,\, v_n), \\
(\lambda F)(v_1,\, \ldots,\, v_n) &\coloneqq \lambda\bigl(F(v_1,\, \ldots,\, v_n)\bigr)
\end{aligned}
$$

と定義すると $L(V_1,\, \ldots,\, V_n;\, W)$ は $\mathbb{K}$ ベクトル空間になる．そして $\forall \omega_i \in V_i^*$ に対して，$\boldsymbol{\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_n}$ と書かれる $L(V_1,\, \ldots,\, V_n;\, \mathbb{K})$ の元を

$$
\boldsymbol{\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_n}\colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow \mathbb{K},\ (v_1,\, \ldots,\, v_n) \longmapsto \prod_{i=1}^{n} \omega_i(v_i)
$$

によって定義する．ただし右辺の総積記号は $\mathbb{K}$ の積についてとる．

命題 2.7.4:

有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V,\, W$（$\dim V \eqqcolon n,\, \dim W \eqqcolon m$）の基底をそれぞれ $\{e_\mu\},\, \{f_\nu\}$ と書き，その双対基底をそれぞれ $\{\varepsilon^\mu\},\, \{\eta^\mu\}$ と書く．このとき，集合

$$
\mathcal{B} \coloneqq \left\{\, \varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu \;\middle|\; 1 \le \mu \le n,\, 1 \le \nu \le m \,\right\}
$$

は $L(V,\, W;\, \mathbb{K})$ の基底である．従って $\dim L(V,\, W;\, \mathbb{K}) = nm$ である．

証明 $\forall F \in L(V,\, W;\, \mathbb{K})$ を 1 つとり，全ての添字の組み合わせ $(\mu,\, \nu)$ に対して

$$
F_{\mu\nu} \coloneqq F(e_\mu,\, e_\nu)
$$

とおく．$\forall (v,\, w) \in V \times W$ を $v = v^\mu e_\mu,\ w = w^\nu f_\nu$ と展開すると，

$$
\begin{aligned}
F_{\mu\nu}\varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu(v,\, w) &= F_{\mu\nu}\varepsilon^\mu(v)\eta^\nu(w) \\
&= F_{\mu\nu}v^\mu w^\nu
\end{aligned}
$$

[*4] 有限次元でなくても良い．

が成り立つ．一方，双線型性から

$$F(v,\, w) = v^\mu w^\nu F(e_\mu,\, e_\nu) = F_{\mu\nu} v^\mu w^\nu$$

も成り立つので $F = F_{\mu\nu}\varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu$ が言えた．i.e. 集合 $\mathcal{B}$ は $L(V,\, W;\, \mathbb{K})$ を生成する．

次に，$\mathcal{B}$ の元が線型独立であることを示す．

$$F_{\mu\nu}\varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu = 0$$

を仮定する．全ての添字の組み合わせについて，$(e_\mu,\, f_\nu)$ に左辺を作用させることで，$F_{\mu\nu} = 0$ が従う．i.e. $\mathcal{B}$ の元は互いに線型独立である． ■

命題 2.7.5: テンソル積の構成その 2

任意の有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V,\, W$ に対して

$$L(V,\, W;\, \mathbb{K}) \cong V^* \otimes W^*$$

証明 写像

$$\begin{aligned} \Phi\colon V^* \times W^* &\longrightarrow L(V,\, W;\, \mathbb{K}), \\ (\omega,\, \eta) &\longmapsto \big((v,\, w) \longmapsto \omega(v)\eta(w)\big) \end{aligned}$$

は双線型写像なのでテンソル積の普遍性から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd} V^* \times W^* \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi \circ \iota"'] & L(V,\, W;\, ,\, \mathbb{K}) \\ \boldsymbol{V^* \otimes W^*} \arrow[ur, dashed, "\exists! \overline{\Phi}"'] & \end{tikzcd}$$

が存在する．$V,\, W$（$\dim V = n,\, \dim W = m$）の基底をそれぞれ $\{e_\mu\},\, \{f_\nu\}$ と書き，その双対基底をそれぞれ $\{\varepsilon^\mu\},\, \{\eta^\mu\}$ と書く．命題 2.7.3 より $V^* \otimes W^*$ の基底として

$$\mathcal{E} \coloneqq \left\{\, \varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu \;\middle|\; 1 \leq \mu \leq n,\, 1 \leq \nu \leq m \,\right\}$$

がとれ，命題 2.7.4 より $L(V,\, W;\, \mathbb{K})$ の基底として

$$\mathcal{B} \coloneqq \left\{\, \varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu \;\middle|\; 1 \leq \mu \leq n,\, 1 \leq \nu \leq m \,\right\}$$

がとれる（記号が同じだが，違う定義である）．このとき，$\forall (v,\, w) \in V \times W$ に対して

$$\overline{\Phi}(\varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu)(v,\, w) = \overline{\Phi} \circ \pi \circ \iota(\varepsilon^\mu,\, \eta^\nu)(v,\, w) = \Phi(\varepsilon^\mu,\, \eta^\nu)(v,\, w) = \varepsilon^\mu(v)\eta^\nu(w) = \varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu(v,\, w)$$

が成り立つ（ただし，左辺の $\otimes$ は命題 2.7.2，右辺は命題 2.7.4 で定義したものである）ので，$\overline{\Phi}$ は $\mathcal{E}$ の元と $\mathcal{B}$ の元の 1 対 1 対応を与える．i.e. 同型写像である． ■

系 2.7.1:

任意の有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V,\, W$ に対して

$$L(V;\, W) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W) \cong V^* \otimes W$$

証明 写像

$$\begin{aligned}\Phi \colon V^* \times W &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W), \\ (\omega,\, w) &\longmapsto \bigl(v \longmapsto \omega(v)w\bigr)\end{aligned}$$

は双線型なので，テンソル積の普遍性から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd} V^* \times W \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi\circ\iota"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W) \\ \boldsymbol{V^* \otimes W} \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{\Phi}"'] & \end{tikzcd}$$

が存在する．$V,\, W$（$\dim V = n,\ \dim W = m$）の基底をそれぞれ $\{e_\mu\},\, \{f_\nu\}$ と書き，その双対基底をそれぞれ $\{\varepsilon^\mu\},\, \{\eta^\mu\}$ と書く．命題 2.7.3 より $V^* \otimes W*$ の基底として

$$\mathcal{E} \coloneqq \bigl\{\, \varepsilon^\mu \otimes f_\nu \bigm| 1 \le \mu \le n,\, 1 \le \nu \le m \,\bigr\}$$

がとれる．一方，$\forall \omega \in V^*,\ \forall w \in W$ に対して

$$\omega \otimes w \coloneqq \Phi(\omega,\, w) \colon V \longrightarrow W,\ v \longmapsto \omega(v)w \tag{2.7.1}$$

とおくと $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W)$ の基底として

$$\mathcal{B} \coloneqq \bigl\{\, \varepsilon^\mu \otimes f_\nu \bigm| 1 \le \mu \le n,\, 1 \le \nu \le m \,\bigr\}$$

がとれる[*5]（記号が同じだが，$\mathcal{E}$ とは違う定義である）．このとき，$\forall v \in V$ に対して

$$\overline{\Phi}(\varepsilon^\mu \otimes f_\nu)(v) = \overline{\Phi} \circ \pi \circ \iota(\varepsilon^\mu,\, f_\nu)(v) = \Phi(\varepsilon^\mu,\, f_\nu)(v) = \varepsilon^\mu(v) f_\nu = \varepsilon^\mu \otimes f_\nu(v)$$

が成り立つ（ただし，左辺の $\otimes$ は命題 2.7.2，右辺は (2.7.1) で定義したものである）ので，$\overline{\Phi}$ は $\mathcal{E}$ の元と $\mathcal{B}$ の元の 1 対 1 対応を与える．i.e. 同型写像である． ■

系 2.7.2:

任意の有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V_1,\, \dots,\, V_n,\, W$ に対して

$$L(V_1,\, \dots,\, V_n;\, W) \cong V_1^* \otimes \cdots \otimes V_n^* \otimes W$$

証明 命題 2.7.5, 系 2.7.1 をあわせて

$$L(V_1,\, \dots,\, V_n;\, W) \cong L(V_1,\, \dots,\, V_n;\, \mathbb{K}) \otimes W \cong V_1^* \otimes \cdots \otimes V_n^* \otimes W$$

を得る． ■

[*5] $\forall F \in L(V;\, W)$ をとる．${F_\mu}^\nu \coloneqq \eta^\nu\bigl(F(e_\mu)\bigr)$ とおく．このとき $\forall v = v^\mu e_\mu \in V$ に対して

$${F_\mu}^\nu \varepsilon^\mu \otimes f_\nu(v) = {F_\mu}^\nu \varepsilon^\mu(v) f_\nu = {F_\mu}^\nu v^\mu f_\nu$$

一方で，線形性および双対基底の定義から

$$F(v) = v^\mu F(e_\mu) = v^\mu \eta^\nu\bigl(F(e_\mu)\bigr) f_\nu = v^\mu {F_\mu}^\nu f_\nu$$

が成り立つので $F = {F_\mu}^\nu \varepsilon^\mu \otimes f_\nu$ が言えた．i.e. $\mathcal{B}$ は $L(V;\, W)$ を生成する．

次に，$\mathcal{B}$ の元が線型独立であることを示す．

$${F_\mu}^\nu \varepsilon^\mu \otimes f_\nu = 0$$

を仮定する．$1 \le \forall \mu \le \dim V$ について右辺を e_μ に作用させることで ${F_\mu}^\nu f_\nu = 0$ が従うが，f_ν の線型独立性から ${F_\mu}^\nu = 0$ である．

2.7.1　$\mathfrak{g}$-加群と表現

まず，環上の加群の定義を復習する：

公理 2.7.1: 環上の加群の公理

- R を環とする．**左 R 加群** (left R-module) とは，可換群 $(M,\,+,\,0)$ と写像[a]

$$\cdot\,:\,R\times M\to M,\;(a,\,x)\mapsto a\cdot x$$

の組 $(M,\,+,\,\cdot\,)$ であって，$\forall x,\,x_1,\,x_2\in M,\;\forall a,\,b\in R$ に対して以下を充たすもののことを言う：

(LM1)　$a\cdot(b\cdot x)=(ab)\cdot x$

(LM2)　$(a+b)\cdot x=a\cdot x+b\cdot x$

(LM3)　$a\cdot(x_1+x_2)=a\cdot x_1+a\cdot x_2$

(LM4)　$1\cdot x=x$

ただし，$1\in R$ は環 R の乗法単位元である．

- R を環とする．**右 R 加群** (left R-module) とは，可換群 $(M,\,+,\,0)$ と写像

$$\cdot\,:\,M\times R\to M,\;(x,\,a)\mapsto x\cdot a$$

の組 $(M,\,+,\,\cdot\,)$ であって，$\forall x,\,x_1,\,x_2\in M,\;\forall a,\,b\in R$ に対して以下を充たすもののことを言う：

(RM1)　$(x\cdot b)\cdot a=x\cdot(ba)$

(RM2)　$x\cdot(a+b)=x\cdot a+x\cdot b$

(RM3)　$(x_1+x_2)\cdot a=x_1\cdot a+x_2\cdot a$

(RM4)　$x\cdot 1=x$

- $R,\,S$ を環とする．**$(R,\,S)$ 両側加群** ($(R,\,S)$-bimodule) とは，可換群 $(M,\,+,\,0)$ と写像

$$\begin{aligned}\cdot_{\mathrm{L}}\,&:\,R\times M\to M,\;(a,\,x)\mapsto a\cdot_{\mathrm{L}}x\\ \cdot_{\mathrm{R}}\,&:\,M\times R\to M,\;(x,\,a)\mapsto x\cdot_{\mathrm{R}}a\end{aligned}$$

の組 $(M,\,+,\,\cdot_{\mathrm{L}}\,,\,\cdot_{\mathrm{R}}\,)$ であって，$\forall x\in M,\;\forall a\in R,\;\forall b\in S$ に対して以下を充たすもののことを言う：

(BM1)　左スカラー乗法 $\cdot_{\mathrm{L}}$ に関して M は左 R 加群になる

(BM2)　右スカラー乗法 $\cdot_{\mathrm{R}}$ に関して M は右 S 加群になる

(BM3)　$(a\cdot_{\mathrm{L}}x)\cdot_{\mathrm{R}}b=a\cdot_{\mathrm{L}}(x\cdot_{\mathrm{R}}b)$

[a] この写像 $\cdot$ は**スカラー乗法** (scalar multiplication) と呼ばれる．

R が**可換環**の場合，**(LM1)** と **(RM1)** が同値になるので，左 R 加群と右 R 加群の概念は同値になる．これを単に **R 加群** (R-module) と呼ぶ．

R が**体**の場合，R 加群のことを **R-ベクトル空間**と呼ぶ．

以下では，なんの断りもなければ R 加群と言って左 R 加群を意味する．

$\mathfrak{g}$ を体 $\mathbb{K}$ 上の Lie 代数とする．このとき，環上の加群の公理を少し修正することで Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上の加群の概念を得る：

公理 2.7.2: Lie 代数上の加群

$\mathfrak{g}$ を体 $\mathbb{K}$ 上の Lie 代数とする．**$\mathfrak{g}$-加群**とは，$\mathbb{K}$-ベクトル空間 $(V,\,+,\,\cdot\,)$ と写像

$$\blacktriangleright\colon \mathfrak{g}\times V \longrightarrow V,\ (x,\,v)\longmapsto x\blacktriangleright v$$

の 4 つ組 $(V,\,+,\,\cdot\,,\,\blacktriangleright)$ であって，$\forall x,\,x_1,\,x_2\in\mathfrak{g},\ \forall v,\,v_1,\,v_2\in V,\ \forall\lambda,\,\mu\in\mathbb{K}$ に対して以下を充たすもののことを言う：

(M1) $(\lambda\cdot x_1+\mu\cdot x_2)\blacktriangleright v=\lambda\cdot(x_1\blacktriangleright v)+\mu\cdot(x_2\blacktriangleright v)$

(M2) $x\blacktriangleright(\lambda\cdot v_1+\mu\cdot v_2)=\lambda\cdot(x\blacktriangleright v_1)+\mu\cdot(x\blacktriangleright v_2)$

(M3) $[x,y]\blacktriangleright v=x\blacktriangleright(y\blacktriangleright v)-y(\blacktriangleright x\blacktriangleright v)$

同値な定義として，Lie 代数の表現

$$\phi\colon\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{gl}(V),\ x\longmapsto\bigl(v\mapsto\phi(x)(v)\bigr)$$

について

$$\blacktriangleright\colon\mathfrak{g}\times V\longrightarrow V,\ (x,\,v)\longmapsto\phi(x)(v)$$

とおくことで得られる 4 つ組 $(V,\,+,\,\cdot\,,\,\blacktriangleright)$ のことである[a]．

[a] 【例 1.1.2】より $\mathfrak{gl}(V)$ の Lie ブラケットは交換子だったので $[x,y]\blacktriangleright\text{-}=\phi([x,y])=[\phi(x),\phi(y)]=\phi(x)\circ\phi(y)-\phi(y)\circ\phi(x)=x\blacktriangleright(y\blacktriangleright\text{-})-y\blacktriangleright(x\blacktriangleright\text{-})$ となる．

$\mathfrak{g}$-加群に備わっている 3 つの演算（加法，スカラー乗法，左作用）をいちいち全て明記するのは面倒なので $(V,\,+,\,\cdot\,,\,\blacktriangleright)$ のことを「**$\mathfrak{g}$-加群 V**」と略記する．この略記において，今まで通りスカラー乗法 $\cdot$ は省略して λv の様に書き，左作用はなんの断りもなく $x\blacktriangleright v$ の様に書くことにする．

全く同様に代数上の加群，結合代数上の加群を定義することもできるが，本章では以降 $\mathfrak{g}$-加群と言ったら Lie 代数上の加群を指すことにする．Lie 代数の表現を考えることは $\mathfrak{g}$-加群を考えることと同値なのである．

定義 2.7.2: $\mathfrak{g}$-加群の準同型

$\mathfrak{g}$ を Lie 代数，V, W を $\mathfrak{g}$-加群とする．線型写像 $f\colon V \longrightarrow W$ が **$\mathfrak{g}$-加群の準同型** (homomorphism of $\mathfrak{g}$-module) [a] であるとは，$\forall x \in \mathfrak{g},\ \forall v \in V$ に対して

$$f(x \blacktriangleright v) = x \blacktriangleright f(v)$$

が成り立つこと[b].

[a] **同変写像** (equivalent map) と言うこともある．**絡作用素** (intertwining operator)，**インタートウィナー** (intertwiner) と言う場合もあるが，そこまで普及していない気がする．

[b] スカラー乗法についての線型性の定義を $\blacktriangleright$ について拡張しただけ．

- $\mathfrak{g}$-加群の準同型 $f\colon V \longrightarrow W$ が**同型** (isomorphism) であるとは，f がベクトル空間の同型写像であることを言う．
- 同型な $\mathfrak{g}$-加群のことを，**同値な $\mathfrak{g}$ の表現** (equivalent representation of $\mathfrak{g}$) とも言う．

定義 2.7.3: 部分 $\mathfrak{g}$-加群

$\mathfrak{g}$-加群 V を与える．部分集合 $W \subset V$ が**部分 $\mathfrak{g}$-加群**であるとは，W が和，スカラー乗法，$\mathfrak{g}$ の左作用の全てについて閉じていること．i.e. $\forall w,\ w_1,\ w_2 \in W,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &\in W \\ \lambda w &\in W \\ x \blacktriangleright w &\in W \end{aligned}$$

が成り立つことを言う．

定義 2.7.4: Lie 代数の表現の既約性

- $\mathfrak{g}$-加群 V が**既約** (irreducible)[a]であるとは，V の部分 $\mathfrak{g}$-加群が 0, V のちょうど2つ[b]だけであることを言う．
- $\mathfrak{g}$-加群 V が**完全可約** (completely reducible) であるとは，V が既約な部分 $\mathfrak{g}$-加群の直和であることを言う．

[a] i.e. Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現 (ϕ, V) が**既約表現** (irreducible representation; irrep) だ，と言っても良い．

[b] つまり，零ベクトル空間 0 は既約な $\mathfrak{g}$-加群とは呼ばない．

命題 2.7.6: 完全可約性

以下の 2 つは同値である：

(1) $\mathfrak{g}$-加群 V が完全可約

(2) V の任意の部分 $\mathfrak{g}$-加群 $W \subset V$ に対して，部分 $\mathfrak{g}$-加群 $W^c \subset V$ [a]が存在して $V \cong W \oplus W^c$ を充たす．

[a] W の**補空間** (complement) と言う．

証明 ■

2.7.2 表現の Casimir 元

2.7.3 Weyl の定理

2.7.4 Jordan 分解の保存

2.8 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の表現

2.8.1 ウエイトと極大ベクトル

2.8.2 既約加群の分類

2.9 ルート空間分解

2.9.1 極大トーラスとルート

2.9.2 極大トーラスの中心化代数

2.9.3 直交性

2.9.4 整性

2.9.5 有理性

付録 A

ベクトル空間の話

[1] が前提としていそうな線型代数の知識をまとめておく．$\mathbb{K}$ を任意の体とする．また，選択公理を認める．

A.1　ベクトル空間の直積・直和

A を集合とする．集合 I を**添字集合** (index set) とする A の元の**族** (family) とは，写像 $a\colon I \longrightarrow A$ のことを言う．$\forall i \in I$ に対して $\boldsymbol{a_i} \coloneqq a(i)$ と略記し，写像 $a\colon I \longrightarrow A$ 自身のことを $\boldsymbol{(a_i)_{i\in I}}$ や $\boldsymbol{\{a_i\}_{i\in I}}$ と略記する．集合族 $\{A_i\}_{i\in I}$ の**直積** (Cartesian product) とは，写像の集合

$$\prod_{\boldsymbol{i\in I}} \boldsymbol{A_i} \coloneqq \left\{ a\colon I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \;\middle|\; \forall i \in I,\ a(i) \in A_i \right\}$$

のこと．集合族の直積について定まる自然な全射

$$\pi_i\colon \prod_{j\in I} A_j \longrightarrow A_i,\ a \longmapsto a(i)$$

のことを**標準的射影** (canonical projection) と呼ぶ．族としての略記を使うと，直積は

$$\prod_{i\in I} A_i = \left\{ (a_i)_{i\in I} \;\middle|\; \forall i \in I,\ a_i \in A_i \right\}$$

と書くことができる．選択公理を認めたので空でない集合族の直積は空でない．

定義 A.1.1: 直積・直和-普遍性による定義

添字集合 I，および $\mathbb{K}$-ベクトル空間の族 $\{V_i\}_{i\in I}$ を与える．

(1)
- $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $\boldsymbol{P}$
- $\mathbb{K}$-線型写像の族 $\{\boldsymbol{\pi_i}\colon \boldsymbol{P} \longrightarrow V_i\}_{i\in I}$

の 2 つ組が $\mathbb{K}$-ベクトル空間の族 $\{V_i\}_{i\in I}$ の**直積** (product) であるとは，以下の性質を充たすことを言う：

(ベクトル空間の直積の普遍性)

$\forall W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ および任意の $\mathbb{K}$-線型写像の族 $\{f_i\colon W \longrightarrow V_i\}_{i\in I}$ に対して，以下の図式を可換にする $\mathbb{K}$-線型写像 $f\colon W \longrightarrow \boldsymbol{P}$ が一意的に存在する：

$$\begin{tikzcd} \forall W \arrow[d, dashed, "\exists ! f"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\ \boldsymbol{P} \arrow[r, "\boldsymbol{\pi_i}"'] & V_i \end{tikzcd}$$

(2)
- $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $\boldsymbol{S}$
- $\mathbb{K}$-線型写像の族 $\left\{\boldsymbol{\iota_i} \colon V_i \longrightarrow \boldsymbol{S}\right\}_{i \in I}$

の 2 つ組が $\mathbb{K}$-ベクトル空間の族 $\left\{V_i\right\}_{i \in I}$ の**直和** (direct sum) であるとは，以下の性質を充たすことを言う：

(ベクトル空間の直和の普遍性)

$\forall W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ および任意の $\mathbb{K}$-線型写像の族 $\left\{f_i \colon V_i \longrightarrow W\right\}_{i \in I}$ に対して，以下の図式を可換にする $\mathbb{K}$-線型写像 $f \colon \boldsymbol{S} \longrightarrow W$ が一意的に存在する：

$$\begin{tikzcd} \forall W & \\ \boldsymbol{S} \arrow[u, dashed, "\exists ! f"] & V_i \arrow[l, "\boldsymbol{\iota_i}"] \arrow[ul, "f_i"'] \end{tikzcd}$$

命題 A.1.1:

ベクトル空間の直和・直積は，存在すれば同型を除いて一意である．

証明 テンソル積の場合と全く同様． ■

命題 A.1.2: 直和・直積の構成

添字集合 I, および $\mathbb{K}$-ベクトル空間の族 $\{V_i\}_{i\in I}$ を与える.

(1)
- 集合族の直積 $\prod_{i\in I} V_i$ の上に加法とスカラー乗法を

$$\begin{aligned}(v_i)_{i\in I} + (w_i)_{i\in I} &\coloneqq (v_i + w_i)_{i\in I} \\ \lambda (v_i)_{i\in I} &\coloneqq (\lambda v_i)_{i\in I}\end{aligned}$$

  と定義することで得られる $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $\prod_{i\in I} V_i$
- $\mathbb{K}$-線型写像[a]

$$\pi_i \colon \prod_{j\in I} V_j \longrightarrow V_i,\ (v_j)_{j\in I} \longmapsto v_i$$

の 2 つ組は $\{V_i\}_{i\in I}$ の直積である.

(2)
- 集合族の直積 $\prod_{i\in I} V_i$ の部分集合

$$\bigoplus_{i\in I} V_i \coloneqq \left\{ (v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i \;\middle|\; \begin{gathered}\text{有限個の添字を除いた全ての } j\in I \\ \text{について } v_j = 0 \in V_j\end{gathered} \right\}$$

  の上に加法とスカラー乗法を

$$\begin{aligned}(v_i)_{i\in I} + (w_i)_{i\in I} &\coloneqq (v_i + w_i)_{i\in I} \\ \lambda (v_i)_{i\in I} &\coloneqq (\lambda v_i)_{i\in I}\end{aligned}$$

  と定義することで得られる $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $\bigoplus_{i\in I} V_i$
- $\mathbb{K}$-線型写像[b]

$$\iota_i \colon V_i \longrightarrow \bigoplus_{j\in I} V_j,\ v \longmapsto (y_j)_{j\in I}$$

$$\text{w/}\quad y_j = \begin{cases} v, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$$

の 2 つ組は $\{V_i\}_{i\in I}$ の直和である.

[a] 集合 $\prod_{i\in I} V_i$ に入れたベクトル空間の構造の定義から, 自動的に p_i は $\mathbb{K}$-線型写像になる.
[b] 集合 $\bigoplus_{i\in I} V_i$ に入れたベクトル空間の構造の定義から, 自動的に i_i は $\mathbb{K}$-線型写像になる.

証明 ■

参考文献

[1] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory* (Springer, 1972).
[2] 佐武一郎, **リー環の話** (日本評論社, 1987).
[3] 小林俊行 and 大島利雄, **リー群と表現論** (岩波書店, 2005).