

第 1 章

Lie 群と Lie 代数

この章は [?, Chapter I], [?, 第 1-3 章] に相当する.

本章に限ってはベクトルを $x \in L$ のように英小文字で表記し, 係数体の元は $\lambda \in \mathbb{K}$ のようにギリシャ文字で表記する. 零ベクトルは $o \in L$ と書き^{*1}, $0 \in \mathbb{K}$ を係数体の加法単位元, $1 \in \mathbb{K}$ を係数体の乗法単位元とする. ベクトル空間の加法を $+$ と書き, スカラー乗法は λx のように係数を左に書く. また, 特に断りがなければ Einstein の規約を使う.

1.1 公理的 Lie 代数

この節では, 特に断りがなければ \mathbb{K} を任意の体とする. Lie 代数を純粋に代数的な対象として扱うことを考える.



Lie 代数を表す記号は Fraktur という字体で書く慣例がある. 例えば「Fraktur」という文字列は $\mathfrak{Fraktur}$ のようになる. L^AT_EX コマンドは数式モード中で `\mathfrak{}` とする.

公理 1.1.1: Lie 代数の公理

体 \mathbb{K} 上のベクトル空間 \mathfrak{g} の上に二項演算^a

$$[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}, (x, y) \longmapsto [x, y]$$

が定義されていて, かつ以下の条件を充たすとき, \mathfrak{g} は **Lie 代数** (Lie algebra) と呼ばれる:

(L-1) $[\cdot, \cdot]$ は双線型写像である. i.e. $\forall x, x_i, y, y_i \in \mathfrak{g}, \forall \lambda_i, \mu_i \in \mathbb{K} (i = 1, 2)$ に対して

$$[\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y] = \lambda_1 [x_1, y] + \lambda_2 [x_2, y],$$

$$[x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2] = \mu_1 [x, y_1] + \mu_2 [x, y_2]$$

が成り立つ.

(L-2) $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[x, x] = o$$

^{*1} 0 の濫用を回避するための苦肉の策です... 普通に不便なので次章以降では零ベクトルも 0 と書きます.

が成り立つ.

(L-3) $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

が成り立つ^b (Jacobi 恒等式).

^a ベクトル空間に備わっている加法とスカラー乗法の他に、追加で $[\cdot, \cdot]$ が定義されているという状況である. この付加的な二項演算はしばしば括弧積 (bracket) とか交換子 (commutator) とか Lie ブラケット (Lie bracket) とか呼ばれる.

^b 結合律ではない!

公理 (L-1), (L-2) から

$$0 = [x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = [x, y] + [y, x]$$

が従う. i.e. $[x, y]$ は反交換 (anticommute) する:

(L'-2) $\forall x, y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[x, y] = -[y, x]$$

が成り立つ.

逆に (L'-2) を仮定すると

$$0 = [x, x] + [x, x] = (1 + 1)[x, x]$$

が成り立つ^{*2}ので、体 \mathbb{K} において $1 + 1 \neq 0$ ならば $[x, x] = 0$ が言える. i.e. $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ ならば^{*3} (L'-2) と (L-2) は同値である.

【例 1.1.1】3次元実ベクトル空間

\mathbb{R}^3 を \mathbb{R} -ベクトル空間と見做す. \mathbb{R}^3 上の Lie ブラケットを

$$[\cdot, \cdot]: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \longmapsto x \times y$$

によって定義する. ただし右辺の \times はベクトル積である. このとき \mathbb{R}^3 が Lie 代数の公理を充たすことを確認しよう:

証明 \mathbb{R}^3 の元の成分を $x = (x_\mu)_{1 \leq \mu \leq 3}$ のように書く. ひたすら成分計算をする.

(L-1) ベクトル積の定義から

$$\begin{aligned} ([\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y])_\mu &= \epsilon_{\mu\nu\lambda} (\lambda_1 x_{1\nu} + \lambda_2 x_{2\nu}) y_\lambda \\ &= \lambda_1 \epsilon_{\mu\nu\lambda} x_{1\nu} y_\lambda + \lambda_2 \epsilon_{\mu\nu\lambda} x_{2\nu} y_\lambda \\ &= \lambda_1 [x_1, y]_\mu + \lambda_2 [x_2, y]_\mu \end{aligned}$$

^{*2} 2 つ目の等号ではスカラー乗法の分配律 (ベクトル空間の公理である) を使った.

^{*3} 体 \mathbb{K} の標数 (characteristic) を $\text{char } \mathbb{K}$ と書いた.

が成り立つ. 全く同様に

$$[x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2] = \mu_1 [x, y_1] + \mu_2 [x, y_2]$$

が示される.

(L-2) Levi-Civita 記号の添字に関する反対称性から

$$([x, x])_\mu = \epsilon_{\mu\nu\lambda} x_\nu x_\lambda = \epsilon_{\mu\nu\lambda} x_\lambda x_\nu = -\epsilon_{\mu\lambda\nu} x_\lambda x_\nu = -([x, x])_\mu$$

$\text{char } \mathbb{R} = 0 \neq 2$ なので, ここから $[x, x] = 0$ が従う.

(L-3) 行と列をそれぞれ適切に入れ替えた単位行列の行列式を考えることで, 恒等式 $\epsilon_{\mu\nu\lambda} \epsilon_{\rho\sigma\lambda} = \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho}$ が成り立つことがわかる. 従って

$$\begin{aligned} ([x, [y, z]])_\mu &= \epsilon_{\mu\nu\lambda} x_\nu \epsilon_{\lambda\rho\sigma} y_\rho z_\sigma \\ &= (\delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho}) x_\nu y_\rho z_\sigma \\ &= x_\nu y_\mu z_\nu - x_\nu y_\nu z_\mu \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} ([x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]])_\mu &= x_\nu y_\mu z_\nu - x_\nu y_\nu z_\mu + y_\nu z_\mu x_\nu - y_\nu z_\nu x_\mu + z_\nu x_\mu y_\nu - z_\nu x_\nu y_\mu \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

\mathbb{R}^3 の標準的な基底

$$e_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

に対して

$$[e_i, e_j] = \epsilon_{ijk} e_k$$

が成り立つ. \mathbb{R}^3 の任意の 2 つの元に対する Lie ブラケットがこの恒等式によって完全に決まることを含意して, $3^3 = 27$ 個の実定数 ϵ_{ijk} のことを \mathbb{R}^3 の**構造定数** (structure constant) と呼ぶ.

【例 1.1.2】一般線形代数 $\mathfrak{gl}(V)$

V を体 \mathbb{K} 上のベクトル空間とする. V から V への線型写像全体が成す集合を $\text{End } V$ と書く^a. $\text{End } V$ の加法とスカラー乗法をそれぞれ

$$\begin{aligned} + : \text{End } V \times \text{End } V &\longrightarrow \text{End } V, (x, y) \longmapsto (v \mapsto x(v) + y(v)) \\ \cdot : \mathbb{K} \times \text{End } V &\longrightarrow \text{End } V, (\lambda, x) \longmapsto (v \mapsto \lambda x(v)) \end{aligned}$$

として定義すると, 組 $(\text{End } V, +, \cdot)$ は体 \mathbb{K} 上のベクトル空間になる. 以降では常に $\text{End } V$ をこの方法でベクトル空間と見做す.

$\text{End } V$ の上の Lie ブラケットを

$$[\cdot, \cdot]: \text{End } V \times \text{End } V \longrightarrow \text{End } V, (x, y) \longmapsto xy - yx$$

と定義する．ただし右辺の xy などは写像の合成 $x \circ y$ の略記である．このとき組 $(\text{End } V, +, \cdot, [\cdot, \cdot])$ が **Lie 代数の公理** を満たすことを確認しよう：

証明 (L-1) $\forall v \in V$ を 1 つとる．定義に従ってとても丁寧に計算すると

$$\begin{aligned} [\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y](v) &= ((\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)y - y(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2))(v) \\ &= (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)(y(v)) - y((\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)(v)) \\ &= (\lambda_1 x_1)(y(v)) + (\lambda_2 x_2)(y(v)) - y((\lambda_1 x_1)(v) + (\lambda_2 x_2)(v)) \\ &= \lambda_1 x_1(y(v)) + \lambda_2 x_2(y(v)) - \lambda_1 y(x_1(v)) - \lambda_2 y(x_2(v)) \\ &= \lambda_1 (x_1(y(v)) - y(x_1(v))) + \lambda_2 (x_2(y(v)) - y(x_2(v))) \\ &= \lambda_1 [x_1, y](v) + \lambda_2 [x_2, y](v) \\ &= (\lambda_1 [x_1, y] + \lambda_2 [x_2, y])(v) \end{aligned}$$

となる．ただし 4 つ目の等号で $y \in \text{End } V$ が線型写像であることを使った．全く同様にして

$$[x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2](v) = \mu_1 [x, y_1] + \mu_2 [x, y_2]$$

を示すこともできる．

(L-2) 明らかに $[x, x] = xx - xx = o$ なのでよい．

(L-3) $[\cdot, \cdot]$ の双線型 (**(L-1)**) から

$$\begin{aligned} &[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] \\ &= [x, yz] - [x, zy] + [y, zx] - [y, xz] + [z, xy] - [z, yx] \\ &= xyz - yzx - xzy + zyx + yzx - zxy - yxz + xzy + zxy - xyz - zyx + yxz \\ &= o. \end{aligned}$$

■

この Lie 代数 $(\text{End } V, +, \cdot, [\cdot, \cdot])$ は **一般線形代数** (general linear algebra) と呼ばれ、記号として $\mathfrak{gl}(V)$ と書かれる．

$\dim V =: n < \infty$ のとき、 $\text{End } V$ は $n \times n$ \mathbb{K} -行列全体が成す \mathbb{K} ベクトル空間 $M(n, \mathbb{K})$ と同型である^b． $M(n, \mathbb{K})$ を Lie ブラケット $[x, y] := xy - yx$ によって Lie 代数と見做す^cときは、この同型を意識して $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ と書く．さて、 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ の標準的な基底は所謂**行列単位**

$$e_{ij} := [\delta_{i\mu} \delta_{j\nu}]_{1 \leq \mu, \nu \leq n} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \overset{j}{0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_i$$

である。Einstein の規約を使って $e_{ij}e_{kl} = [\delta_{i\mu}\delta_{j\lambda}\delta_{k\lambda}\delta_{l\nu}]_{1\leq\mu,\nu\leq n} = \delta_{jk}[\delta_{i\mu}\delta_{l\nu}]_{1\leq\mu,\nu\leq n} = \delta_{jk}E_{il}$ と計算できるので、 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ の構造定数は

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{li}e_{kj}$$

となる^d。

^a 自己準同型 (endomorphism) の略である。

^b V の基底 e_1, \dots, e_n を 1 つ固定する。このとき同型写像 $\varphi: V \rightarrow \mathbb{K}^n$, $v^\mu e_\mu \mapsto (v^\mu)_{1\leq\mu\leq n}$ を使って定義される線型写像 $\phi: \text{End } V \rightarrow M(n, \mathbb{K})$, $f \mapsto \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ が所望の同型写像である。

^c 右辺の xy は行列の積である。

^d 少し紛らわしいかもしれないが、右辺において e_{il} は行列 (行列の成分ではない!) で δ_{jk} はただの \mathbb{K} の元である。以下では行列を指定する添字を $a, b, c, \dots, i, j, k, \dots$ で、行列の成分の添字を μ, ν, λ, \dots で書くことにする。つまり、例えば x_{ij} はある一つの行列を表す一方、 $x_{ij\mu\nu}$ は行列 x_{ij} の第 (μ, ν) 成分を表す。あまりにも紛らわしい場合には、行列の成分を表す際に $[x_{ij}]_{\mu\nu}$ のように角括弧で括弧することにする。

1.1.1 線型 Lie 代数

定義 1.1.1: 部分 Lie 代数

Lie 代数 \mathfrak{g} の部分ベクトル空間 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ が**部分 Lie 代数**であるとは、 \mathfrak{h} が Lie ブラケットについても閉じていることを言う。i.e. $\forall x, y \in \mathfrak{h}, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ に対して

$$x + y, \lambda x, [x, y] \in \mathfrak{h}$$

が成り立つこと。

この小節では以降、 V を体 \mathbb{K} 上の有限次元ベクトル空間とする。

定義 1.1.2: 線型 Lie 代数

一般線形代数 $\mathfrak{gl}(V)$ の**部分 Lie 代数**のことを**線型 Lie 代数** (linear Lie algebra) と呼ぶ。

線型 Lie 代数として有名なものは**古典代数** (classical algebra) である。これは A_l, B_l, C_l, D_l と呼ばれる 4 つの無限系列からなる。以下、 $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ とする。

【例 1.1.3】線型 Lie 代数: A_l 型

$\dim V = l + 1$ とする。**特殊線形代数** $\mathfrak{sl}(V)$ (または $\mathfrak{sl}(l + 1, \mathbb{K})$) は次のように定義される:

$$\mathfrak{sl}(V) := \{ x \in \mathfrak{gl}(V) \mid \text{Tr}(x) = 0 \}$$

$\mathfrak{sl}(V)$ が本当に**線型 Lie 代数**かどうか確認しよう。

証明 $\forall x, y \in \mathfrak{sl}(V)$ をとる. トレースの線形性および $\mathrm{Tr}(xy) = \mathrm{Tr}(yx)$ から

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(x + y) &= \mathrm{Tr}(x) + \mathrm{Tr}(y) = 0 + 0 = 0, \\ \mathrm{Tr}(\lambda x) &= \lambda \mathrm{Tr}(x) = \lambda 0 = 0, \\ \mathrm{Tr}([x, y]) &= \mathrm{Tr}(xy) - \mathrm{Tr}(yx) = \mathrm{Tr}(xy) - \mathrm{Tr}(xy) = 0\end{aligned}$$

が言えるので, $x + y, \lambda x, [x, y] \in \mathfrak{sl}(V)$ が言えた. ■

【例 1.1.2】 で使った $\mathfrak{gl}(l+1, \mathbb{K})$ の標準的な基底で $\forall x \in \mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{K})$ を $x = x^{ij}e_{ij}$ と展開すると, トレースレスであることから

$$h_{ij} := \begin{cases} e_{ij} & i \neq j, 1 \leq i, j \leq l+1 \\ e_{ii} - e_{i+1, i+1} & 1 \leq i = j \leq l \end{cases}$$

の $(l+1)^2 - 1$ 個の行列が $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{K})$ の基底を成すことがわかる. 従って $\dim \mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{K}) = (l+1)^2 - 1$ である.

【例 1.1.4】 線型 Lie 代数: B_l 型

$\dim V = 2l + 1$ とする. 行列

$$s := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1}_l \\ 0 & \mathbb{1}_l & 0 \end{bmatrix} \in M(2l+1, \mathbb{K})$$

により定まる V 上の非退化^aかつ対称な双線型形式を f と書く^b. このとき, 直交代数 (orthogonal algebra) $\mathfrak{o}(V)$ (または $\mathfrak{o}(2l+1, \mathbb{K})$) が以下のように定義される:

$$\mathfrak{o}(V) := \{ \textcolor{red}{x} \in \mathfrak{gl}(V) \mid f(\textcolor{red}{x}(v), w) = -f(v, \textcolor{red}{x}(w)), \forall v, w \in V \}$$

$\mathfrak{o}(V)$ が本当に線型 Lie 代数かどうか確認しよう.

証明 $\forall x, y \in \mathfrak{o}(V)$ をとる. f の双線型性から $\forall v, w \in V$ に対して

$$\begin{aligned}f((x+y)(v), w) &= f(x(v), w) + f(y(v), w) \\ &= -f(v, x(w)) - f(v, y(w)) \\ &= -f(v, x(w) + y(w)) \\ &= -f(v, (x+y)(w)) \\ f((\lambda x)(v), w) &= \lambda f(x(v), w) \\ &= -\lambda f(v, x(w)) \\ &= -f(v, \lambda x(w)) \\ &= -f(v, (\lambda x)(w)) \\ f([x, y](v), w) &= f(x(y(v)), w) - f(y(x(v)), w) \\ &= -f(y(v), x(w)) + f(x(v), y(w)) \\ &= f(v, y(x(w))) - f(v, x(y(w))) \\ &= -f(v, [x, y](w))\end{aligned}$$

が言えるので, $x + y, \lambda x, [x, y] \in \mathfrak{o}(V)$ が言えた. ■

^a 「 $v \in V$ が $\forall w \in V$ に対して $f(v, w) = 0$ を充たす $\implies v = o$ 」かつ「 $w \in V$ が $\forall v \in V$ に対して $f(v, w) = 0$ を充たす $\implies w = o$ 」
^b $f: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}, (v, w) \longmapsto v^T s w$ のこと.

【例 1.1.5】線型 Lie 代数: C_l 型

$\dim V = 2l$ とする. 行列

$$s := \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_l \\ -\mathbf{1}_l & 0 \end{bmatrix} \in M(2l, \mathbb{K})$$

により定まる V 上の非退化かつ歪対称な双線型形式を f と書く. このとき, シンプレクティック代数 (symplectic algebra) $\mathfrak{sp}(V)$ (または $\mathfrak{sp}(2l, \mathbb{K})$) が以下のように定義される:

$$\mathfrak{sp}(V) := \{ x \in \mathfrak{gl}(V) \mid f(x(v), w) = -f(v, x(w)), \forall v, w \in V \}$$

【例 1.1.4】と全く同様にして $\mathfrak{sp}(V)$ が線型 Lie 代数であることを証明できる.

【例 1.1.6】線型 Lie 代数: D_l 型

$\dim V = 2l$ とし, 行列

$$s := \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_l \\ \mathbf{1}_l & 0 \end{bmatrix} \in M(2l, \mathbb{K})$$

により定まる V 上の非退化かつ対称な双線型形式を f と書く. このとき, 【例 1.1.4】と全く同様に直交代数 (orthogonal algebra) $\mathfrak{o}(V)$ (または $\mathfrak{o}(2l, \mathbb{K})$) が定義される.

さらに, 古典代数以外の線型 Lie 代数をいくつか導入する.

【例 1.1.7】線型 Lie 代数: \mathfrak{t}

$n \times n$ 上三角行列全体の集合を $\mathfrak{t}(n, \mathbb{K}) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ と書く^a:

$$\mathfrak{t}(n, \mathbb{K}) := \left\{ [a_{\mu\nu}]_{1 \leq \mu, \nu \leq n} \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \mid \mu > \nu \implies a_{\mu\nu} = 0 \right\}$$

$\mathfrak{t}(n, \mathbb{K})$ が線型 Lie 代数であることを確認しよう.

証明 $\forall x = [x_{\mu\nu}]_{1 \leq \mu, \nu \leq n}, y = [y_{\mu\nu}]_{1 \leq \mu, \nu \leq n} \in \mathfrak{t}(n, \mathbb{K})$ をとる. このとき $1 \leq \nu < \mu \leq n$ なる全ての (μ, ν) に対して

$$\begin{aligned} [x + y]_{\mu\nu} &= x_{\mu\nu} + y_{\mu\nu} = 0 + 0 = 0 \\ [\lambda x]_{\mu\nu} &= \lambda x_{\mu\nu} = \lambda 0 = 0 \\ [xy]_{\mu\nu} &= \sum_{\lambda=1}^n x_{\mu\lambda} y_{\lambda\nu} = \sum_{\lambda=1}^{\nu} 0 y_{\lambda\nu} + \sum_{\lambda=\nu+1}^n x_{\mu\lambda} 0 = 0 \end{aligned}$$

が成り立つので $x + y, \lambda x, [x, y] \in \mathfrak{t}(n, \mathbb{K})$ が言えた. ■

^a \mathfrak{t} の L^AT_EX コマンドは `\mathfrak{t}`

【例 1.1.8】線型 Lie 代数： \mathfrak{n}

$n \times n$ 上三角行列のうち対角成分が全て 0 であるものの全体がなす集合を $\mathfrak{n}(n, \mathbb{K}) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ と書く^a：

$$\mathfrak{n}(n, \mathbb{K}) := \left\{ [a_{\mu\nu}]_{1 \leq \mu, \nu \leq n} \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \mid \mu \geq \nu \implies a_{\mu\nu} = 0 \right\}$$

$\mathfrak{n}(n, \mathbb{K})$ が線型 Lie 代数であることは【例 1.1.7】と全く同様に証明できる.

^a \mathfrak{n} の L^AT_EX コマンドは `\mathfrak{n}`

【例 1.1.9】線型 Lie 代数： \mathfrak{d}

$n \times n$ 対角行列全体がなす集合を $\mathfrak{d}(n, \mathbb{K}) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ と書く^a：

$$\mathfrak{d}(n, \mathbb{K}) := \left\{ [a_{\mu\nu}]_{1 \leq \mu, \nu \leq n} \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \mid \mu \neq \nu \implies a_{\mu\nu} = 0 \right\}$$

$\mathfrak{d}(n, \mathbb{K})$ は明らかに線型 Lie 代数である.

^a \mathfrak{d} の L^AT_EX コマンドは `\mathfrak{d}`

公理 1.1.2: 代数

体 \mathbb{K} 上のベクトル空間 \mathfrak{U} ^a の上に二項演算

$$*: \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{U}, (x, y) \longmapsto x * y$$

が定義されていて、かつ以下の条件を満たすとき、 \mathfrak{U} は \mathbb{K} -代数 (\mathbb{K} -algebra) と呼ばれる^b：

(A-1) $*$ は双線型写像である. i.e. $\forall x, x_i, y, y_i \in \mathfrak{g}, \forall \lambda_i, \mu_i \in \mathbb{K} (i = 1, 2)$ に対して

$$\begin{aligned} (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) * y &= \lambda_1 x_1 * y + \lambda_2 x_2 * y, \\ x * (\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) &= \mu_1 x * y_1 + \mu_2 x * y_2 \end{aligned}$$

が成り立つ.

^a `\mathfrak{U}`

^b 結合律は要請しない！ $*$ に関する結合律を公理に含める場合は結合代数 (associative algebra) と言う. 文献によっては代数と言って結合代数のことを指す場合があるので注意.

Lie 代数は \mathbb{K} -代数である.

定義 1.1.3: 代数の微分

\mathbb{K} -代数 \mathfrak{U} の微分 (derivation) とは, 線型写像

$$d: \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{U}$$

であって Leibniz 則

$$d(x * y) = x * d(y) + d(x) * y$$

を満たすもののこと.

全ての \mathfrak{U} の微分がなす集合を $\text{Der } \mathfrak{U}$ と書く.

命題 1.1.1: 代数の微分がなす Lie 代数

$\text{Der } \mathfrak{U}$ の上の加法, スカラー乗法, Lie ブラケットをそれぞれ

$$+ : \text{Der } \mathfrak{U} \times \text{Der } \mathfrak{U} \longrightarrow \text{Der } \mathfrak{U}, (d, e) \longmapsto (x \mapsto d(x) + e(x))$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times \text{Der } \mathfrak{U} \longrightarrow \text{Der } \mathfrak{U}, (\lambda, d) \longmapsto (x \mapsto \lambda d(x))$$

$$[,] : \text{Der } \mathfrak{U} \times \text{Der } \mathfrak{U} \longrightarrow \text{Der } \mathfrak{U}, (d, e) \longmapsto (x \mapsto d(e(x)) - e(d(x)))$$

と定義すると, 組 $(\text{Der } \mathfrak{U}, +, \cdot, [,])$ は $\mathfrak{gl}(\mathfrak{U})$ の部分 Lie 代数である. Lie 代数としての $\text{Der } \mathfrak{U}$ のことを微分代数 (derivation algebra) と呼ぶ^a.

^a <https://mathworld.wolfram.com/DerivationAlgebra.html>

証明 $\forall x, y \in \mathfrak{U}$ をとる. 代数の微分は線型写像なので, $*$ の双線型性および微分の Leibniz 則から

$$(d + e)(x * y) = x * d(y) + d(x) * y + x * e(y) + e(x) * y = x * (d + e)(y) + (d + e)(x) * y$$

$$(\lambda d)(x * y) = \lambda(d(x) * y + x * d(y)) = (\lambda d(x)) * y + x * (\lambda d(y)) = (\lambda d)(x) * y + x * (\lambda d)(y)$$

が成り立つ. i.e. $d + e, \lambda d \in \text{Der } \mathfrak{U}$ が言えた. Lie ブラケットに関しては,

$$d(e(x * y)) = d(x * e(y) + e(x) * y) = x * d(e(y)) + d(x) * e(y) + e(x) * d(y) + d(e(x)) * y$$

に注意すると

$$\begin{aligned} [d, e](x * y) &= x * d(e(y)) + \cancel{d(x) * e(y)} + \cancel{e(x) * d(y)} + d(e(x)) * y \\ &\quad - x * e(d(y)) - \cancel{e(x) * d(y)} - \cancel{d(x) * e(y)} - e(d(x)) * y \\ &= x * [d, e](y) + [d, e](x) * y \end{aligned}$$

が成り立つ. i.e. $[d, e] \in \text{Der } \mathfrak{U}$ が言えた. ■

【例 1.1.10】内部微分

Lie 代数 \mathfrak{g} は \mathbb{K} -代数なので, その微分代数 $\text{Der } \mathfrak{g}$ を考えることができる.

ここで $x \in \mathfrak{g}$ を任意にとろう。このとき、写像

$$\mathrm{ad} x: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}, z \longmapsto [x, z]$$

は線型写像で、Jacobi 恒等式から

$$\begin{aligned} \mathrm{ad} x([z, w]) &= [x, [z, w]] \\ &= [[x, z], w] + [z, [x, w]] \\ &= [\mathrm{ad} x(z), w] + [z, \mathrm{ad} x(w)] \end{aligned}$$

を充たすことがわかる。これはまさに Leibniz 則なので、 $\mathrm{ad} x \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ である。 $\mathrm{ad} x$ の形で書ける $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ の元のことを内部微分 (inner derivation) と呼ぶ^a。

^a $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ の元が内部微分でないとき、外部微分 (outer derivation) であると言う。

1.1.2 イデアル・商代数

定義 1.1.4: Lie 代数のイデアル

Lie 代数 \mathfrak{g} の部分集合 \mathfrak{i} ^a が \mathfrak{g} のイデアル (ideal) であるとは、以下の 2 条件を充たすことを言う：

(LI-1) \mathfrak{i} は \mathfrak{g} の部分ベクトル空間である。

(LI-2) $\forall x \in \mathfrak{g}, \forall y \in \mathfrak{i}$ に対して $[x, y] \in \mathfrak{i}$

^a \mathfrak{i}

【例 1.1.11】自明なイデアル

$\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $[x, o] = [x, x + (-x)] = [x, x] - [x, x] = o$ が成り立つので、 $\{o\}$ は \mathfrak{g} のイデアルである。また、Lie ブラケットについて閉じているので \mathfrak{g} 自身もイデアルである。この 2 つを自明なイデアル (trivial ideal) と呼ぶ。

【例 1.1.12】中心

Lie 代数 \mathfrak{g} の中心 (center) は

$$Z(\mathfrak{g}) := \{ z \in \mathfrak{g} \mid \forall x \in \mathfrak{g}, [x, z] = o \}$$

と定義される。 $o \in Z(\mathfrak{g})$ であることから $Z(\mathfrak{g})$ はイデアルである。 \mathfrak{g} が Lie ブラケットに関して可換である必要十分条件は $Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ が成り立つことである^a。

^a Lie 代数の公理 (L'-1) より、 $[x, y] = [y, x]$ ならば $[x, y] = -[x, y] \iff [x, y] = o$ である。

補題 1.1.1: イデアル同士の演算

Lie 代数 \mathfrak{g} とそのイデアル $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ を与える. このとき以下の 2 つが成り立つ:

- (1) 集合 $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{j}$ は \mathfrak{g} のイデアルである.
- (2) 集合 $\mathfrak{i} + \mathfrak{j} := \{x + y \mid x \in \mathfrak{i}, y \in \mathfrak{j}\}$ は \mathfrak{g} のイデアルである.
- (3) 集合 $[\mathfrak{i}, \mathfrak{j}] := \{\sum_{i=1}^n [x_i, y_i] \mid x_i \in \mathfrak{i}, y_i \in \mathfrak{j}; n < \infty\}$ は \mathfrak{g} のイデアルである.

証明 (1) ほぼ自明.

- (2) $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$ の勝手な元 $z + w$ と $\forall x \in \mathfrak{g}$ をとる. Lie ブラケットの双線型性から $[x, z + w] = [x, z] + [x, w]$ と言えるが, $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ がイデアルであることにより $[x, z] \in \mathfrak{i}, [x, w] \in \mathfrak{j}$ なので右辺は $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$ に属する.
- (3) $\forall x \in \mathfrak{g}$ を 1 つとる. Lie ブラケットの双線型性から, このとき $\forall z \in \mathfrak{i}, \forall w \in \mathfrak{j}$ に対して $[x, [z, w]] \in [\mathfrak{i}, \mathfrak{j}]$ が成り立つことを示せば良い. 実際, Lie 代数の公理 (L-2), (L-3) より

$$[x, [z, w]] = [[w, x], z] + [[x, z], w] = [z, [x, w]] + [[x, z], w]$$

と言えるが, $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ がイデアルであることにより $[x, w] \in \mathfrak{j}, [x, z] \in \mathfrak{i}$ なので右辺は $[\mathfrak{i}, \mathfrak{j}]$ に属する. ■

【例 1.1.13】導来 Lie 代数

Lie 代数 \mathfrak{g} の導来代数 (derived algebra) とは, \mathfrak{g} のイデアル $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ のこと.

定義 1.1.5: 単純 Lie 代数

Lie 代数 \mathfrak{g} が単純 (simple) であるとは, \mathfrak{g} が自明なイデアル以外のイデアルを持たず, かつ $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \{0\}$ を満たすことを言う.

【例 1.1.14】単純 Lie 代数: $\mathfrak{sl}(2)$

Lie 代数 \mathfrak{g} のイデアル \mathfrak{i} が与えられたとき, 商群のときと同じ要領で商代数を構成できる. このことを復習しよう:

\mathfrak{g} 上の同値関係を

$$\sim := \{(x, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mid x - y \in \mathfrak{i}\}$$

と定義する^{*4}. \sim による $x \in \mathfrak{g}$ の同値類のことを $x + \mathfrak{i}$ と書き, 商集合 \mathfrak{g}/\sim のことを $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ と書く. 全射 $p: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ を標準的射影 (canonical projection) と呼ぶ.

^{*4} (L-1) より \mathfrak{i} は部分ベクトル空間なので反射律と対称律と言える. $x \sim y$ かつ $y \sim z$ ならば $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathfrak{i}$ なので $x \sim z$ であり, 推移律が成り立つことがわかる.

定義 1.1.6: 商代数

集合 $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ の上には次のようにして well-defined な加法, スカラー乗法, Lie ブラケットが定義できる:

$$\begin{aligned} +: \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \times \mathfrak{g}/\mathfrak{i} &\longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i}, (x + \mathfrak{i}, y + \mathfrak{i}) \longmapsto (x + y) + \mathfrak{i} \\ \cdot: \mathbb{K} \times \mathfrak{g}/\mathfrak{i} &\longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i}, (\lambda, x + \mathfrak{i}) \longmapsto (\lambda x) + \mathfrak{i} \\ [,]: \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \times \mathfrak{g}/\mathfrak{i} &\longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i}, (x + \mathfrak{i}, y + \mathfrak{i}) \longmapsto [x, y] + \mathfrak{i} \end{aligned}$$

Lie 代数 $(\mathfrak{g}/\mathfrak{i}, +, \cdot, [,],)$ のことを**商代数** (quotient algebra) と呼ぶ.

証明 well-definedness を示す. $x + \mathfrak{i} = x' + \mathfrak{i}, y + \mathfrak{i} = y' + \mathfrak{i}$ ならば $x' - x, y' - y \in \mathfrak{i}$ であるから

$$\begin{aligned} x' + y' &= (x + y) + (x' - x) + (y' - y) \in (x + y) + \mathfrak{i}, \\ \lambda x' &= \lambda x + \lambda(x' - x) \in (\lambda x) + \mathfrak{i} \end{aligned}$$

が成り立つ. また, \mathfrak{i} がイデアルであることにより

$$\begin{aligned} [x', y'] &= [x + (x' - x), y + (y' - y)] \\ &= [x, y] + [x, y' - y] - [y, x' - x] + [x' - x, y' - y] \\ &\in [x, y] + \mathfrak{i} \end{aligned}$$

が言える. ■

定義 1.1.6 による商代数の構成によって, 標準的射影は自動的に Lie 代数の準同型写像になる:

!

$$\begin{aligned} p(x + y) &= (x + y) + \mathfrak{i} =: (x + \mathfrak{i}) + (y + \mathfrak{i}) = p(x) + p(y), \\ p(\lambda x) &= (\lambda x) + \mathfrak{i} =: \lambda(x + \mathfrak{i}) = \lambda p(x), \\ p([x, y]) &= [x, y] + \mathfrak{i} =: [(x + \mathfrak{i}), (y + \mathfrak{i})] = [p(x), p(y)]. \end{aligned}$$

定義 1.1.7: 正規化代数・中心化代数

- **Lie 代数** \mathfrak{g} とその**部分 Lie 代数** (もしくは部分ベクトル空間) \mathfrak{h} を与える. このとき \mathfrak{h} の**正規化代数** (normalizer) を

$$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) := \{ x \in \mathfrak{g} \mid \forall h \in \mathfrak{h}, [x, h] \in \mathfrak{h} \}$$

で定義する^a. 特に $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ のとき, \mathfrak{h} は **self-normalizing** であると言う.

- **Lie 代数** \mathfrak{g} とその**部分集合** X を与える. このとき X の**中心化代数** (centralizer) を

$$C_{\mathfrak{g}}(X) := \{ x \in \mathfrak{g} \mid \forall z \in X, [x, z] = 0 \}$$

と定義する^b.

^a $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ は \mathfrak{g} の部分 Lie 代数である: $\forall x, y \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ に対して, Jacobi 恒等式から $\forall z \in \mathfrak{h}, [[x, y], z] = [x, [y, z]] - [y, [x, z]] \in \mathfrak{h}$ が言える. さらに, もし \mathfrak{h} が部分 Lie 代数ならば, 定義から \mathfrak{h} を $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ の部分ベクトル空間と見做したときに \mathfrak{h} は自動的に**イデアル**になる. 特に, $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ は $\mathfrak{h} \subset N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ をイデアルとして持つ最大の部分 Lie 代数である.

^b $C_{\mathfrak{g}}(X)$ が \mathfrak{g} の部分 Lie 代数であることは, $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ のときと全く同様にして示される.

【例 1.1.12】 を思い出すと, $Z(\mathfrak{g}) = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ である.

1.1.3 準同型・表現

定義 1.1.8: Lie 代数の準同型

2つの Lie 代数 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ を与える. 写像 $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ が Lie 代数の準同型 (homomorphism) であるとは, f が和, スカラー乗法, Lie ブラケットの全てを保存することを言う. i.e. $\forall x, y \in \mathfrak{g}, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ に対して

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y), \\ f(\lambda x) &= \lambda f(x), \\ f([x, y]) &= [f(x), f(y)] \end{aligned}$$

が成り立つこと.

全単射な Lie 代数の準同型のことを Lie 代数の同型 (isomorphism) と呼ぶ.

Lie 代数の準同型 $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ の核 (kernel), 像 (image) をそれぞれ

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &:= \{ x \in \mathfrak{g} \mid f(x) = o \}, \\ \text{Im } f &:= \{ f(x) \in \mathfrak{h} \mid x \in \mathfrak{g} \} \end{aligned}$$

と定義すると $\text{Ker } f$ はイデアルであり^{*5}, $\text{Im } f$ は部分 Lie 代数である^{*6}.

^{*5} $\forall x, y \in \text{Ker } f$ に対して $f(x+y) = f(x) + f(y) = o + o = o$, $f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda o = o$ なので部分ベクトル空間, かつ $\forall z \in \mathfrak{g}$ に対して $f([z, x]) = [f(z), f(x)] = [f(z), o] = o$.

^{*6} $\forall f(x), f(y) \in \text{Im } f$ に対して $f(x) + f(y) = f(x+y)$, $\lambda f(x) = f(\lambda x)$; $[f(x), f(y)] = f([x, y])$

命題 1.1.2: 準同型定理

Lie 代数 \mathfrak{g} およびそのイデアル $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ を与える. このとき, 任意の Lie 代数の準同型 $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ に対して^a以下が成り立つ:

- (1) $\mathfrak{g}/\text{Ker } f \cong \text{Im } f$. また, $\mathfrak{i} \subset \text{Ker } f$ が成り立つならば, 以下の図式を可換にする Lie 代数の準同型 $\psi: \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \rightarrow \mathfrak{h}$ が一意的存在する:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{f} & \forall \mathfrak{h} \\ & \searrow p & \nearrow \exists! \psi \\ & \mathfrak{g}/\mathfrak{i} & \end{array}$$

図 1.1: 商代数の普遍性. p は標準的射影 $p: x \mapsto x + \mathfrak{i}$ を表す.

- (2) $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{j}$ が成り立つとする. このとき $\mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ は $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ のイデアルであり, 自然な同型 $(\mathfrak{g}/\mathfrak{i})/(\mathfrak{j}/\mathfrak{i}) \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{j}$ が成り立つ.
 (3) 自然な同型 $(\mathfrak{i} + \mathfrak{j})/\mathfrak{j} \cong \mathfrak{i}/(\mathfrak{i} \cap \mathfrak{j})$ が成り立つ.

^a わざわざこのような記述をしたのは, (1) が商代数の普遍性 (universal property) を意味していることを明示するためである.

証明 (1) まず, $\mathfrak{i} \subset \text{Ker } f$ ならば写像 $\psi: \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \rightarrow \text{Im } f, x + \mathfrak{i} \mapsto f(x)$ が well-defined な Lie 代数の準同型であることを示す. 実際 $x + \mathfrak{i} = x' + \mathfrak{i}$ ならば $x' - x \in \mathfrak{i} \subset \text{Ker } f$ であり, $\psi(x' + \mathfrak{i}) = f(x') = f(x + (x' - x)) = f(x) + f(x' - x) = f(x) = \psi(x + \mathfrak{i})$ が言えた. ψ が Lie 代数の準同型であることは f が Lie 代数の準同型であることから明らか. 定義から $\psi \circ p = f$ である.

次に ψ の一意性を示す. 別の $\phi: \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \rightarrow \mathfrak{h}$ が存在して $\phi \circ p = f$ が成り立つとする. このとき $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $\phi(x + \mathfrak{i}) = f(x)$ が成り立つので $\phi = \psi$ である.

特に $\mathfrak{i} = \text{Ker } f$ ならば, $\text{Ker } \psi = \{\text{Ker } f\} = \{0\}$ なので ψ は単射であり $\mathfrak{g}/\text{Ker } f \cong \text{Im } f$ が言えた.

- (2) $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{j}$ のとき, **イデアルの定義**より \mathfrak{i} は \mathfrak{j} のイデアルでもある. よって商代数 $\mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ は well-defined. 明らかに $\mathfrak{j}/\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ なので $\mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ は $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ の部分 Lie 代数だと分かった. ここで $\forall x + \mathfrak{i} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{i}, \forall y + \mathfrak{i} \in \mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ をとると, \mathfrak{j} が \mathfrak{g} のイデアルであることから $[x + \mathfrak{i}, y + \mathfrak{i}] = [x, y] + \mathfrak{i} \in \mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ が従う^{*7}. 以上の議論から $\mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ が $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ のイデアルであることが示された.

さて, Lie 代数の全射準同型 $f: \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{j}, x + \mathfrak{i} \mapsto x + \mathfrak{j}$ は仮定より well-defined で^{*8}, かつ $\text{Ker } f = \mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ である. 従って (1) より $\mathfrak{g}/\mathfrak{j} \cong (\mathfrak{g}/\mathfrak{i})/(\mathfrak{j}/\mathfrak{i})$ が言える.

- (3) Lie 代数の全射準同型 $f: \mathfrak{i} \rightarrow (\mathfrak{i} + \mathfrak{j})/\mathfrak{j}, x \mapsto x + \mathfrak{j}$ に対して $\text{Ker } f = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{j}$ である. 従って (1) より $(\mathfrak{i} + \mathfrak{j})/\mathfrak{j} \cong \mathfrak{i}/(\mathfrak{i} \cap \mathfrak{j})$ が言える.

■

^{*7} $[x, y] \in \mathfrak{j}$ なので.

^{*8} $x + \mathfrak{i} = x' + \mathfrak{i} \implies x' - x \in \mathfrak{i} \subset \mathfrak{j} \implies f(x' + \mathfrak{i}) = (x + (x' - x)) + \mathfrak{j} = x + \mathfrak{j} = f(x + \mathfrak{i})$

定義 1.1.9: Lie 代数の表現

V を \mathbb{K} -ベクトル空間とする. Lie 代数の準同型

$$\phi: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

と V の組 (ϕ, V) のことを **Lie 代数の表現** (representation) と呼ぶ^a.

^a 「代数の表現」と言われたとき, **代数の表現**なのか**結合代数の表現**なのか**Lie 代数の表現**なのか文脈で判断しなくてはならないかもしれない.

【例 1.1.15】 随伴表現

【例 1.1.10】 で定義した $\text{ad}(x)$ は, 写像

$$\text{ad}: \mathfrak{g} \longrightarrow \text{Der}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), \quad x \longmapsto (z \mapsto [x, z])$$

だと思える. ad は明らかに線型写像で, かつ $\forall z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned} [\text{ad } x, \text{ad } y](z) &= \text{ad } x([y, z]) - \text{ad } y([x, z]) \\ &= [x, [y, z]] - [y, [x, z]] \\ &= [x, [y, z]] + [y, [z, x]] \\ &= [[x, y], z] \\ &= \text{ad } [x, y](z) \end{aligned}$$

が成り立つので Lie 代数の準同型である. 故に組 $(\text{ad}, \mathfrak{g})$ は **Lie 代数の表現**である.

$$x \in \text{Ker ad} \iff \forall y \in \mathfrak{g}, [x, y] = 0$$

より, 【例 1.1.12】を思い出すと $\text{Ker ad} = Z(\mathfrak{g})$ と分かる. 特に**単純 Lie 代数** \mathfrak{g} に対して $Z(\mathfrak{g}) = \{0\}$ なので ad は単射準同型である. i.e. **任意の単純 Lie 代数は線形 Lie 代数と同型である**^a.

^a 単射準同型は包含準同型だと見做せる.

1.1.4 自己同型

定義 1.1.10: 自己同型

1.1.5 可解 Lie 代数

Lie 代数 \mathfrak{g} を与える. $D\mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ とおくと, 【例 1.1.13】より $D\mathfrak{g}$ は \mathfrak{g} の**イデアル**である.

定義 1.1.11: 可解 Lie 代数

導来列 (derived series) とは, **イデアル** の減少列

$$\mathfrak{g} = D^0 \mathfrak{g} \supset D^1 \mathfrak{g} \supset D^2 \mathfrak{g} \supset \cdots$$

のこと. ある $n > 0$ に対して導来列が初めてゼロになって止まるとき, i.e. $D^n \mathfrak{g} = \{0\}$ が成り立つとき, Lie 代数 \mathfrak{g} は**可解** (solvable) であると言われる.

命題 1.1.3:

Lie 代数 \mathfrak{g} および Lie 代数の準同型 $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ を与える. このとき以下が成り立つ:

- (1) \mathfrak{g} が**可解**ならば, \mathfrak{g} の任意の**部分 Lie 代数** \mathfrak{a} は可解である. また, $\text{Im } f$ も可解である.
- (2) \mathfrak{g} が**可解**ならば, \mathfrak{g} の任意の**イデアル** \mathfrak{a} について**商代数** $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ も可解である.
- (3) \mathfrak{g} のイデアル \mathfrak{i} と**商代数** $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ がどちらも可解ならば, \mathfrak{g} 自身も可解である.
- (4) \mathfrak{g} のイデアル $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ が可解ならば, イデアル $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$ も可解である.

証明 (1) 仮定より \mathfrak{g} が可解なので, ある $n > 0$ に対して $D^n \mathfrak{g} = \{0\}$ となる. $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ ならば $D\mathfrak{a} \subset D\mathfrak{g}$ であるから, 帰納的に $D^i \mathfrak{a} \subset D^i \mathfrak{g}$ ($i = 0, 1, \dots$) が分かる. よって $D^n \mathfrak{a} = \{0\}$ である. また, f が Lie 代数の準同型であることから $f(D\mathfrak{g}) = [f(\mathfrak{g}), f(\mathfrak{g})] = [\text{Im } f, \text{Im } f] = D(\text{Im } f)$ であり, 帰納的に $f(D^i \mathfrak{g}) = D^i(\text{Im } f)$ が分かる. 故に $D^n(\text{Im } f) = f(\{0\}) = \{0\}$ である.

(2) 標準的射影 $p: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, $x \mapsto x + \mathfrak{a}$ に対して (1) を適用すれば良い.

(3) 仮定より $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ が可解なので, ある $n > 0$ に対して $D^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{i}) = \{0\}$ と成る. 標準的射影 $p: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ について, (1) の証明から $\{0\} = D^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{i}) = D^n(\text{Im } p) = p(D^n \mathfrak{g})$ がわかる. 従って $D^n \mathfrak{g} \subset \mathfrak{i}$ である. 仮定より \mathfrak{i} も可解だからある $m > 0$ に対して $D^m \mathfrak{i} = \{0\}$ となる. 故に帰納的に $D^{n+m} \mathfrak{g} \subset D^m \mathfrak{i} = \{0\}$ が示される.

(4) **準同型定理**-(3) より

$$(\mathfrak{i} + \mathfrak{j})/\mathfrak{j} \cong \mathfrak{i}/(\mathfrak{i} \cap \mathfrak{j})$$

が成り立つ. 仮定より \mathfrak{i} は可解なので, (2) より右辺も可解. よって (3) より $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$ も可解である. ■

\mathfrak{g} を有限次元 Lie 代数とし, \mathfrak{r} ^{*9} を \mathfrak{g} の極大^{*10}**可解**イデアルとしよう^{*11}

補題 1.1.2:

\mathfrak{r} は \mathfrak{g} の全ての可解イデアルを含む. i.e. 最大 (maximal) の可解イデアルである.

証明 任意の \mathfrak{g} の可解イデアル \mathfrak{i} をとる. **準同型定理**-(3) より

$$(\mathfrak{i} + \mathfrak{r})/\mathfrak{i} \cong \mathfrak{r}/(\mathfrak{i} \cap \mathfrak{r})$$

^{*9} $\mathfrak{r} = \bigcap \{ \mathfrak{h} \mid \mathfrak{h} \text{ は } \mathfrak{g} \text{ の可解イデアル} \}$

^{*10} $\mathfrak{r} \subsetneq \mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$ を充たす \mathfrak{g} の可解イデアル \mathfrak{i} が \mathfrak{g} 以外に存在しない.

^{*11} \mathfrak{r} は少なくとも 1 つ存在する. \mathfrak{g} が有限次元なので, \mathfrak{g} の可解イデアルのうち次元が最大のものを取れば良い.

が成り立つ. \mathfrak{r} は可解なので命題 1.1.3-(1) より $\mathfrak{r}/(\mathfrak{i} \cap \mathfrak{r})$ は可解であり, 従って $(\mathfrak{i} + \mathfrak{r})/\mathfrak{i}$ も可解である. \mathfrak{i} も可解なので命題 1.1.3-(3) より $\mathfrak{i} + \mathfrak{r}$ も可解である. 然るに, \mathfrak{r} の極大性により $\mathfrak{i} + \mathfrak{r} = \mathfrak{r}$ であるから $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{r}$ が言えた. ■

定義 1.1.12: 根基

\mathfrak{g} の最大可解イデアル^a (maximal solvable ideal) \mathfrak{r} のことを \mathfrak{g} の**根基** (radical) と呼び, $\text{rad } \mathfrak{g}$ と書く.

^a 補題 1.1.2 によりこれは一意的に存在する.

定義 1.1.13: 半単純 Lie 代数

Lie 代数 \mathfrak{g} が**半単純** (semisimple) であるとは, $\text{rad } \mathfrak{g} = \{0\}$ であることを言う.

1.1.6 冪零 Lie 代数

Lie 代数 \mathfrak{g} に対して

$$\begin{aligned} C^0 \mathfrak{g} &:= \mathfrak{g}, \\ C^n \mathfrak{g} &:= [\mathfrak{g}, C^{n-1} \mathfrak{g}] \end{aligned}$$

のように帰納的に**イデアル**の減少列

$$\mathfrak{g} = C^0 \mathfrak{g} \supset C^1 \mathfrak{g} \supset C^2 \mathfrak{g} \supset \cdots \quad (1.1.1)$$

を定義する.

定義 1.1.14: 冪零 Lie 代数

イデアルの減少列 (1.1.1) がある $n > 0$ に対して初めてゼロになって止まるとき, i.e. $C^n \mathfrak{g} = \{0\}$ が成り立つとき, Lie 代数 \mathfrak{g} は**冪零** (nilpotent) であると言われる.



線型写像 $x: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ の冪零性との混同を避けるため, 定義 1.1.14 の意味で冪零と言う場合は冪零 Lie 代数と言うことにする.

命題 1.1.4:

Lie 代数 \mathfrak{g} および Lie 代数の準同型 $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ を与える. このとき以下が成り立つ:

- (1) \mathfrak{g} が冪零 Lie 代数ならば, \mathfrak{g} の任意の部分 Lie 代数 \mathfrak{a} は冪零 Lie 代数である. また, $\text{Im } f$ も冪零 Lie 代数である.
- (2) \mathfrak{g} が冪零 Lie 代数ならば, \mathfrak{g} の任意のイデアル \mathfrak{a} について商代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ も冪零 Lie 代数である.
- (3) \mathfrak{g} の中心による商代数 $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ が冪零 Lie 代数ならば \mathfrak{g} は冪零 Lie 代数である.
- (4) \mathfrak{g} が冪零 Lie 代数かつ $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ ならば, $Z(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$ である.
- (5) \mathfrak{g} が冪零 Lie 代数ならば, $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $\text{ad } x$ は冪零である.

証明 (1) 仮定より \mathfrak{g} が冪零 Lie 代数なので, ある $n > 0$ に対して $C^n \mathfrak{g} = \{0\}$ となる. $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ ならば $C\mathfrak{a} \subset C\mathfrak{g}$ であるから, 帰納的に $C^i \mathfrak{a} \subset C^i \mathfrak{g}$ ($i = 0, 1, \dots$) が分かる. よって $C^n \mathfrak{a} = \{0\}$ である. また, f が Lie 代数の準同型であることから $f(C\mathfrak{g}) = [f(\mathfrak{g}), f(\mathfrak{g})] = [\text{Im } f, \text{Im } f] = C(\text{Im } f)$ であり, 帰納的に $f(C^i \mathfrak{g}) = C^i(\text{Im } f)$ が分かる. 故に $C^n(\text{Im } f) = f(\{0\}) = \{0\}$ である.

(2) 標準的射影 $p: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, $x \mapsto x + \mathfrak{a}$ に対して (1) を適用すれば良い.

(3) 仮定より $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ が冪零 Lie 代数なので, ある $n > 0$ に対して $C^n(\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})) = \{0\}$ と成る. 標準的射影 $p: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ について, (1) の証明から $\{0\} = C^n(\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})) = C^n(\text{Im } p) = p(C^n \mathfrak{g})$ がわかる. 従って $C^n \mathfrak{g} \subset Z(\mathfrak{g})$ である. 故に中心の定義から $C^{n+1} \mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, C^n \mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{g}, Z(\mathfrak{g})] = \{0\}$ が示された.

(4) 仮定より \mathfrak{g} が冪零 Lie 代数なので, ある $n > 0$ に対して $C^{n-1} \mathfrak{g} \neq \{0\}$ かつ $C^n \mathfrak{g} = \{0\}$ となる. このとき $\{0\} = C^n \mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, C^{n-1} \mathfrak{g}]$ なので中心の定義から $\{0\} \neq C^{n-1} \mathfrak{g} \subset Z(\mathfrak{g})$ が言える.

(5) 仮定より \mathfrak{g} が冪零 Lie 代数なので, ある $n > 0$ に対して $C^n \mathfrak{g} = \{0\}$ となる. このとき $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して随伴表現 $\text{ad}(x): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ を考える. $\text{ad}(x)(C^i \mathfrak{g}) = [x, C^i \mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{g}, C^i \mathfrak{g}] = C^{i+1} \mathfrak{g}$ なので, イデアルの減少列 (1.1.1) に $\text{ad}(x)$ を作用させると

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{\text{ad}(x)} C^1 \mathfrak{g} \xrightarrow{\text{ad}(x)} \dots \xrightarrow{\text{ad}(x)} C^n \mathfrak{g} = \{0\}$$

となる. i.e. $\forall y \in \mathfrak{g}$ に対して $(\text{ad}(x))^n = 0$ である. ■

1.1.7 Engel の定理

補題 1.1.3: ad の冪零性

$x \in \mathfrak{gl}(V)$ が冪零ならば $\text{ad } x \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(V))$ も冪零である.

証明 x が冪零であるという仮定から, $x^n = 0$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ が存在する.

さて, x による左移動と右移動をそれぞれ

$$\begin{aligned} \lambda_x: \mathfrak{gl}(V) &\rightarrow \mathfrak{gl}(V), y \mapsto (v \mapsto x(y(v))), \\ \rho_x: \mathfrak{gl}(V) &\rightarrow \mathfrak{gl}(V), y \mapsto (v \mapsto y(x(v))) \end{aligned}$$

と定義しよう. $\forall y \in \mathfrak{gl}(V)$ を 1 つとると

$$(\lambda_x)^n(y) = x^n y = 0, \quad (\rho_x)^n(y) = y x^n = 0 \quad (1.1.2)$$

が成り立つ. さらに $\rho_x(\lambda_x(y)) = xyx = \lambda_x(\rho_x(y))$ が成り立つ. i.e. $\rho_x\lambda_x = \lambda_x\rho_x$ である. 従って二項定理が使って^{*12}, (1.1.2) から

$$\begin{aligned} (\operatorname{ad} x)^{2n-1} &= (\lambda_x - \rho_x)^{2n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} (\rho_x)^{2n-k-1} (\lambda_x)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} 0(\lambda_x)^k + \sum_{k=n}^{2n} -1 \binom{2n-1}{k} (\rho_x)^{2n-k-1} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

が言えた. ■

補題 1.1.4:

$V \neq \{0\}$ を有限次元ベクトル空間とし, $\mathfrak{gl}(V)$ の任意の部分 Lie 代数 \mathfrak{g} をとる.
このとき $\forall x \in \mathfrak{g}$ が冪零ならば, ある $v \in V \setminus \{0\}$ が存在して $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $x(v) = 0$ が成り立つ.

証明 $\dim \mathfrak{g}$ に関する数学的帰納法により示す. $\dim \mathfrak{g} = 0$ のときは $\mathfrak{g} = \{0\}$ なので自明.

$\dim \mathfrak{g} > 0$ とし, \mathfrak{g} の部分 Lie 代数 $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g}$ を任意に 1 つとる.

$\mathfrak{h} \subsetneq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ であること

補題 1.1.3 より, $\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の^{*13}像の全ての元は冪零である^{*14}. ここで $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ の Lie ブラケットを忘れて \mathbb{K} 上のベクトル空間と見做したとき, 商ベクトル空間 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ を構成できる^{*15}. このとき, $\forall x \in \mathfrak{h}$ に対して写像

$$\overline{\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}}(x): \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}, y + \mathfrak{h} \mapsto \operatorname{ad}(x)(y) + \mathfrak{h}$$

が well-defined な線型写像であることを示す. 実際 $y + \mathfrak{h} = y' + \mathfrak{h} \iff y' - y \in \mathfrak{h}$ ならば

$$\begin{aligned} \overline{\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}}(x)(y' + \mathfrak{h}) &= \operatorname{ad}(x)(y') + \mathfrak{h} \\ &= (\operatorname{ad}(x)(y) + \operatorname{ad}(x)(y' - y)) + \mathfrak{h} \\ &= (\operatorname{ad}(x)(y) + [x, y' - y]) + \mathfrak{h} \\ &= \operatorname{ad}(x)(y) + \mathfrak{h} \\ &= \overline{\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}}(x)(y + \mathfrak{h}) \end{aligned}$$

が成り立つので $\overline{\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}}(x)$ は well-defined であり, $\operatorname{ad}(x)$ が線型写像であることから線型写像である. 以上の考察から, 写像 $\overline{\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}}: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}), x \mapsto \overline{\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}}(x)$ は well-defined な Lie 代数の準同型で, $\operatorname{Im} \overline{\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}}$ (もちろんこれは $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ の部分 Lie 代数である) の元は全て冪零である.

さて, $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$ より $\dim \mathfrak{h} < \dim \mathfrak{g}$ であるから, 帰納法の仮定よりある $v + \mathfrak{h} \in (\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \setminus \{0\}$ が存在して, $\forall \overline{\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}}(x) \in \operatorname{Im} \overline{\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}}$ に対して $\overline{\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}}(x)(v + \mathfrak{h}) = 0$ が成り立つ. i.e. ある $v \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ が存在して

^{*12} 写像の合成の結合律を暗に使っている.

^{*13} $\operatorname{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ への制限.

^{*14} 仮定より $\forall x \in \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ が冪零なので.

^{*15} 商代数の構成において Lie ブラケットを忘れることで商ベクトル空間が構成できる. この際 \mathfrak{h} は \mathfrak{g} の部分ベクトル空間でありさえすれば良い.

$\forall x \in \mathfrak{h}$ に対して $\text{ad}|_{\mathfrak{h}}(x)(v) = [x, v] \in \mathfrak{h}$ が成り立つ. i.e. \mathfrak{h} は \mathfrak{h} の正規化代数 $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ の真部分集合である^{*16}.

\mathfrak{h} を, $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g}$ を満たす極大^{*17}部分 Lie 代数とする. \mathfrak{h} の極大性と先ほど証明した事実から $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}$ でなくてはならない. 従って正規化代数の定義の脚注から \mathfrak{h} は \mathfrak{g} のイデアルであり, 商代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ が well-defined である. もし $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h} > 1$ だとすると $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ の 1 次元部分 Lie 代数 $\mathbb{K}(x + \mathfrak{h})$ ($\forall x \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$) の, 標準的射影による逆像が \mathfrak{h} を真部分集合にもつ \mathfrak{g} の真部分代数ということになり, \mathfrak{h} の極大性に矛盾する. 故に背理法から $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h} = 1$ であり, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathbb{K}z$ ($\forall z \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$) だと分かった.

ここで \mathfrak{g} の部分ベクトル空間 $W := \{v \in V \mid \forall y \in \mathfrak{h}, y(v) = 0\}$ を考える. $\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{g} - 1 < \dim \mathfrak{g}$ なので, 帰納法の仮定より $W \neq \{0\}$ だと分かる^{*18}. \mathfrak{h} はイデアルなので, $\forall x \in \mathfrak{g}, \forall y \in \mathfrak{h}, \forall w \in W$ に対して $y(x(w)) = x(y(w)) - [x, y](w) = 0$ が成り立つ. i.e. $\forall w \in W$ に対して $\forall x \in \mathfrak{g}, x(w) \in W$ が言える (W は x 不変). 故に $\forall z \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ の W における固有ベクトル $v \in W \setminus \{0\}$ が存在する^{*19}. z は冪零なのでその固有値は 0 であり, $z(v) = 0$ が成り立つ.

定理 1.1.1: Engel の定理

\mathfrak{g} を有限次元 Lie 代数とする. $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $\text{ad } x$ が冪零ならば, \mathfrak{g} は冪零 Lie 代数である.



命題 1.1.4-(5) と併せて以下を得る:

有限次元 Lie 代数 \mathfrak{g} が冪零 Lie 代数 $\iff \forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $\text{ad } x$ が冪零

証明 $\dim \mathfrak{g}$ に関する数学的帰納法により示す. $\dim \mathfrak{g} = 0, 1$ のときは自明.

$\dim \mathfrak{g} > 1$ とする. 仮定より, $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の部分 Lie 代数 Im ad に対して補題 1.1.4 を使うことができる. すなわちある $v \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$ が存在して, $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $\text{ad}(x)(v) = [x, v] = 0$ を満たす. i.e. \mathfrak{g} の中心 $Z(\mathfrak{g})$ は非零である. このとき $\dim \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g}) < \dim \mathfrak{g}$ で, かつ $\forall x + Z(\mathfrak{g}) \in \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ に対して $\text{ad}(x + Z(\mathfrak{g}))$ は冪零である. 故に帰納法の仮定から $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ は冪零 Lie 代数である. 従って命題 1.1.4-(3) より \mathfrak{g} は冪零 Lie 代数である.

1.2 Lie 群と Lie 代数の関係

この節は [?, 第 5 章] による.

^{*16} $\exists v \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \setminus \mathfrak{h}$ なので

^{*17} $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{h}'$ でかつ $\mathfrak{h}' \subsetneq \mathfrak{g}$ を満たすものが存在しない.

^{*18} 仮定より \mathfrak{h} の全ての元は冪零.

^{*19} $\forall z \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ はスカラー倍の違いしかないので, 固有ベクトルは共通のものを取れる.