第 1 章

ベクトル空間の話

[?] が前提としていそうな線型代数の知識をまとめておく．$\mathbb{K}$ を任意の体とする．また，選択公理を認める．

1.1 Hom ベクトル空間

定義 1.1.1: Hom ベクトル空間

任意の $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V,\ W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ を与える．このとき

- 台集合を
$$\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}\,(\boldsymbol{V},\ \boldsymbol{W}) \coloneqq \left\{\, f\colon V \longrightarrow W \;\middle|\; \mathbb{K}\text{-線型写像} \,\right\}$$
とする．
- 加法とスカラー乗法を，$\forall f,\ f_1,\ f_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\,(V,\ W),\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ について
$$\begin{aligned} f_1 + f_2 &\colon V \longrightarrow W,\ v \longmapsto f_1(v) + f_2(v) \\ \lambda f &\colon V \longrightarrow W,\ v \longmapsto \lambda\bigl(f(v)\bigr) \end{aligned}$$
と定める．

ことで得られる $\mathbb{K}$-ベクトル空間のことを $\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}\,(\boldsymbol{V},\ \boldsymbol{W})$ と書く．

特に $\mathbb{K}$ 自身を $\mathbb{K}$-ベクトル空間と見做したとき，
$$\boldsymbol{V^*} \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\,(V, \mathbb{K})$$
と書いて**双対ベクトル空間** (dual vector space) と呼ぶ．

特に有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間の場合は，双対ベクトル空間の基底が次のように構成される：

命題 1.1.1: 双対ベクトル空間の基底

有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 V とその基底 $\{e_\mu\}$ を与える．このとき $\dim V$ 個の線型写像 $\varepsilon^\mu \in V^*$ を

$$\varepsilon^\mu(e_\nu) := \delta^\mu_\nu$$

により定義すると，$\{\varepsilon^\mu\}$ は V^* の基底になる．

1.2 ベクトル空間のテンソル積

1.2.1 普遍性による定義

$\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V,\, W,\, Z$ を与える．このとき写像 $f\colon V \times W \longrightarrow Z$ が**双線型** (bilinear) であるとは，2 つの引数についてそれぞれ[*1] $\mathbb{K}$-線型であることを言う．i.e. $\forall v,\, v_1,\, v_2 \in V,\ \forall w,\, w_1,\, w_2 \in W,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ に対して

$$\begin{aligned}
f(v_1 + v_2,\, w) &= f(v_1,\, w) + f(v_2,\, w) \\
f(v,\, w_1 + w_2) &= f(v,\, w_1) + f(v,\, w_2) \\
f(\lambda v,\, w) &= \lambda f(v,\, w) \\
f(v,\, \lambda w) &= \lambda f(v,\, w)
\end{aligned}$$

が成り立つこと．同様に $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V_1,\, \ldots,\, V_n,\, W$ に関して，写像 $f\colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W$ が**多重線型** (multillinear) であるとは，全ての引数についてそれぞれ $\mathbb{K}$-線型であることを言う．

定義 1.2.1: ベクトル空間のテンソル積

$\mathbb{K}$ を任意の体とし，$\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V,\, W$ を与える．

- $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $\boldsymbol{V \otimes W}$
- 双線型写像 $\boldsymbol{\Phi}\colon V \times W \longrightarrow \boldsymbol{V \otimes W}$

の 2 つ組 $(V \otimes W,\, \Phi)$ が $V,\, W$ の**テンソル積** (tensor product) であるとは，以下の性質を充たすことをいう：

(テンソル積の普遍性)

任意の $\mathbb{K}$-ベクトル空間 Z および任意の双線型写像 $f\colon V \times W \longrightarrow Z$ に対して，以下の図式を可換にする線型写像 $\overline{f}\colon \boldsymbol{V \otimes W} \longrightarrow Z$ が一意的に存在する：

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\boldsymbol{\Phi}"'] & \forall Z \\
\boldsymbol{V \otimes W} \arrow[ur, dashed, "\exists!\,\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

[*1] つまり，直積ベクトル空間 $V \times W$ から Z への線型写像ではない．

テンソル積をとる操作は結合的かつ対称である. i.e. $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \cong (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ および $V_1 \otimes V_2 \cong V_2 \otimes V_1$ が成り立つ．従って以降では 3 つ以上のベクトル空間のテンソル積を括弧を省略して書く.

命題 1.2.1: テンソル積の一意性

テンソル積は，存在すればベクトル空間の同型を除いて一意である.

証明 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 $V,\, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ を与える. 体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間と双線型写像の組 $(\boldsymbol{T},\, \boldsymbol{\Phi}\colon V \times W \longrightarrow \boldsymbol{T})$ および $(\boldsymbol{T},\, \boldsymbol{\Phi'}\colon V \times W \longrightarrow \boldsymbol{T'})$ がどちらも $V,\, W$ のテンソル積であるとする．このときテンソル積の普遍性から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\Phi'"] \arrow[d, "\boldsymbol{\Phi}"'] & T' \\ \boldsymbol{T} \arrow[ur, dashed, "\exists! u"] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\boldsymbol{\Phi'}"'] & T \\ \boldsymbol{T'} \arrow[ur, dashed, "\exists! u'"] & \end{tikzcd}$$

が成り立つので，これらの図式を併せた $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{T} & \\ V \times W \arrow[u, "\boldsymbol{\Phi}"] \arrow[r, "\Phi'"] \arrow[d, "\boldsymbol{\Phi}"'] & T' \arrow[ul, dashed, "\exists! u'"'] \\ \boldsymbol{T} \arrow[ur, dashed, "\exists! u"] & \end{tikzcd}$$

が存在する．然るに $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\boldsymbol{\Phi}"] \arrow[d, "\boldsymbol{\Phi}"'] & \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{T} \arrow[ur, dashed, "\mathrm{id}_T"] & \end{tikzcd}$$

も成り立ち，テンソル積の普遍性より赤点線で書いた線型写像は一意でなくてはならないので,

$$u' \circ u = \mathrm{id}_T$$

がわかる．同様の議論から

$$u \circ u' = \mathrm{id}_{T'}$$

も従うので，線型写像 $u\colon \boldsymbol{T} \longrightarrow \boldsymbol{T'}$, $u'\colon \boldsymbol{T'} \longrightarrow \boldsymbol{T}$ は互いに逆写像，i.e. 同型写像である. ■

命題 1.2.1 からテンソル積の一意性が言えたが，そもそもテンソル積が存在しなければ意味がない．そこで，体 $\mathbb{K}$ 上の任意のベクトル空間 $V,\, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ を素材にしてテンソル積 $(V \otimes W,\, \Phi\colon V \times W \longrightarrow V \otimes W)$ を具体的に構成してみよう.

$\mathbb{K} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ なので，任意の集合 S に対してベクトル空間の直和

$$\mathbb{K}^{\oplus S} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$$

を考えることができる．$\mathbb{K}^{\oplus S}$ の元 f とは，命題 1.3.4 からわかるように有限個の元 $x_1, \dots, x_n \in S$ を除いた全ての $x \in S$ に対して値 $0 \in \mathbb{K}$ を返すような $\mathbb{K}$ 値関数 $f\colon S \longrightarrow \mathbb{K}$ のことである

ところで，$\forall x \in S$ に対して次のような関数 $\delta_x \in \mathbb{K}^{\oplus S}$ が存在する：

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}$$

この δ_x を x そのものと同一視してしまうことで，先述の $f \in \mathbb{K}^{\oplus (V\times W)}$ は

$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \qquad {}^{\mathrm{w}/} \quad \lambda_i \coloneqq f(x_i) \in \mathbb{K}$$

の形に一意的に書ける．[*2] この意味で，$\mathbb{K}^{\oplus (V\times W)}$ は $V \times W$ の元の**形式的な** $\mathbb{K}$ **係数線形結合**全体がなす $\mathbb{K}$ ベクトル空間と言うことができ，集合 $V \times W$ 上の**自由ベクトル空間**と呼ばれる．自由加群の特別な場合と言っても良い．自由ベクトル空間は次の普遍性によって特徴づけられる：

補題 1.2.1: 自由ベクトル空間の普遍性

任意の集合 S および任意の $\mathbb{K}$ ベクトル空間 $Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ を与える．包含写像

$$\iota\colon S \longrightarrow \mathbb{K}^{\oplus S},\ x \longmapsto \delta_x$$

を考える．このとき，任意の写像 $f\colon S \longrightarrow Z$ に対して線型写像 $u\colon \mathbb{K}^{\oplus S} \longrightarrow Z$ が一意的に存在して，図式 1.2 を可換にする：

```tikzcd
S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & \forall Z \\
\mathbb{K}^{\oplus S} \arrow[ur, dashed, "\exists! u"] &
```

図 1.2: 自由ベクトル空間の普遍性

__証明__ 写像

$$u\colon \mathbb{K}^{\oplus S} \longrightarrow Z,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{x_i} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

は右辺が有限和なので well-defined であり，$\forall x \in S$ に対して $u\bigl(\iota(x)\bigr) = f(x)$ を充たす．

別の線型写像 $g\colon \mathbb{K}^{\oplus S} \longrightarrow Z$ が $g \circ \iota = f$ を充たすとする．このとき $\forall x \in S$ に対して $g(\delta_x) = f(x)$ であるから，$\forall v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{x_i} \in \mathbb{K}^{\oplus S}$ に対して

$$g(v) = g\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(\delta_{x_i}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) = u(v)$$

[*2] というのも，このように書けば $\forall y \in S$ に対して

$$f(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{x_i}(y) = \begin{cases} f(x_i), & y = x_i \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

が言えるので．特に，この式の中辺は $\mathbb{K}$ の元の有限和なので意味を持つ．

が言える．よって $g = u$ である． ■

さて，自由加群の普遍性の図式とテンソル積の普遍性の図式はとても似ているので，$\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ の候補として $\mathbb{K}^{\oplus(V\times W)}$ を考えてみる．しかしそのままでは $\iota\colon V \times W \longrightarrow \mathbb{K}^{\oplus(V\times W)}$ が双線型写像になってくれる保証はない．そこで，

$$
\begin{aligned}
\iota(\lambda v,\, w) &\sim \lambda\iota(v,\, w),\\
\iota(v,\, \lambda w) &\sim \lambda\iota(v,\, w),\\
\iota(v_1 + v_2,\, w) &\sim \iota(v_1,\, w) + \iota(v_2,\, w),\\
\iota(v,\, w_1 + w_2) &\sim \iota(v,\, w_1) + \iota(v,\, w_2)
\end{aligned}
$$

を充たすような上手い同値関係による商ベクトル空間を構成する．

命題 1.2.2: テンソル積の構成

$\mathbb{K}^{\oplus(V\times W)}$ の部分集合

$$
\begin{aligned}
S_1 &\coloneqq \bigl\{\iota(\lambda v,\, w) - \lambda\iota(v,\, w) \bigm| \forall v \in V,\, \forall w \in W,\, \forall\lambda \in \mathbb{K}\bigr\},\\
S_2 &\coloneqq \bigl\{\iota(v,\, \lambda w) - \lambda\iota(v,\, w) \bigm| \forall v \in V,\, \forall w \in W,\, \forall\lambda \in \mathbb{K}\bigr\},\\
S_3 &\coloneqq \bigl\{\iota(v_1 + v_2,\, w) - \iota(v_1,\, w) - \iota(v_2,\, w) \bigm| \forall v_1,\, \forall v_2 \in V,\, \forall w \in W,\, \forall\lambda \in \mathbb{K}\bigr\},\\
S_4 &\coloneqq \bigl\{\iota(v,\, w_1 + w_2) - \iota(v,\, w_1) - \iota(v,\, w_2) \bigm| \forall v \in V,\, \forall w_1,\, w_2 \in W,\, \forall\lambda \in \mathbb{K}\bigr\}
\end{aligned}
$$

の和集合 $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ が生成する $\mathbb{K}$ ベクトル空間[a]を $\mathcal{R}$ と書き，商ベクトル空間 $\mathbb{K}^{\oplus(V\times W)}/\mathcal{R}$ の商写像を

$$
\pi\colon \mathbb{K}^{\oplus(V\times W)} \longrightarrow \mathbb{K}^{\oplus(V\times W)}/\mathcal{R},\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\iota(v_i,\, w_i) \longmapsto \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\iota(v_i,\, w_i)\right) + \mathcal{R}
$$

と書き，$\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w} \coloneqq \pi\bigl(\iota(v,\, w)\bigr)$ とおく．このとき，

- $\mathbb{K}$ ベクトル空間 $\mathbb{K}^{\oplus(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W})}/\boldsymbol{\mathcal{R}}$
- 写像 $\boldsymbol{\Phi} = \pi \circ \iota\colon V \times W \longrightarrow \mathbb{K}^{\oplus(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W})}/\boldsymbol{\mathcal{R}},\ (v,\, w) \longmapsto v \otimes w$

の組は $V,\, W$ のテンソル積である．

[a] これらの元の形式的な $\mathbb{K}$ 係数線型結合全体が成すベクトル空間のこと．

証明 まず，$\boldsymbol{\Phi}$ が双線型写像であることを示す．商ベクトル空間の和とスカラー乗法の定義から

$$
\begin{aligned}
\Phi(\lambda v,\, w) &= \iota(v,\, w) + \mathcal{R} = \bigl(\lambda\iota(v,\, w) + \iota(\lambda v,\, w) - \lambda\iota(v,\, w)\bigr) + \mathcal{R}\\
&= \lambda\iota(v,\, w) + \mathcal{R} = \lambda\bigl(\iota(v,\, w) + \mathcal{R}\bigr) = \lambda\Phi(v,\, w)\\
\Phi(v_1 + v_2,\, w) &= \iota(v_1 + v_2,\, w) + \mathcal{R} = \bigl(\iota(v_1,\, w) + \iota(v_2,\, w) + \iota(v_1 + v_2,\, w) - \iota(v_1,\, w) - \iota(v_2,\, w)\bigr) + \mathcal{R}\\
&= \bigl(\iota(v_1,\, w) + \iota(v_2,\, w)\bigr) + \mathcal{R} = \bigl(\iota(v_1,\, w) + \mathcal{R}\bigr) + \bigl(\iota(v_2,\, w) + \mathcal{R}\bigr)\\
&= \Phi(v_1,\, w) + \Phi(v_2,\, w)
\end{aligned}
$$

が言える．第 2 引数に関しても同様であり，$\boldsymbol{\Phi}$ は双線型写像である．

次に，上述の構成がテンソル積の普遍性を充たすことを示す．$\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ と任意の双線型写像 $f\colon V \times W \longrightarrow Z$ を与える．自由ベクトル空間の普遍性から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & \forall Z \\
\mathbb{K}^{\oplus(V\times W)} \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{f}"] &
\end{tikzcd}$$

が存在する．f が双線型なので，

$$\begin{aligned}
\overline{f}\bigl(\iota(\lambda v,\, w)\bigr) &= f(\lambda v,\, w) = \lambda f(v,\, w) \\
&= \lambda \overline{f}\bigl(\iota(v,\, w)\bigr) = \overline{f}\bigl(\lambda\iota(v,\, w)\bigr), \\
\overline{f}\bigl(\iota(v_1 + v_2,\, w)\bigr) &= f(v_1 + v_2,\, w) = f(v_1,\, w) + f(v_2,\, w) \\
&= \overline{f}\bigl(\iota(v_1,\, w)\bigr) + \overline{f}\bigl(\iota(v_2,\, w)\bigr) = \overline{f}\bigl(\iota(v_1,\, w) + \iota(v_2,\, w)\bigr)
\end{aligned}$$

が成り立つ．第 2 引数についても同様なので，$\mathcal{R} \subset \mathrm{Ker}\,\overline{f}$ である．よって準同型定理から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & \forall Z \\
\mathbb{K}^{\oplus(V\times W)} \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{f}"] \arrow[d, "\pi"'] & \\
\mathbb{K}^{\oplus(V\times W)}/\mathcal{R} \arrow[uur, dashed, "\exists!u"'] &
\end{tikzcd}$$

が存在する．この図式の外周部はテンソル積の普遍性の図式である． ■

1.2.2 多重線型写像とテンソル積

任意の $\mathbb{K}$-ベクトル空間[*3] $V_1,\, \ldots,\, V_n,\, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ に対して，集合

$$\boldsymbol{L(V_1,\, \ldots,\, V_n;\, W)} \coloneqq \left\{\, F\colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W \;\middle|\; F \text{ は多重線型写像} \,\right\}$$

を考える．$L(V_1,\, \ldots,\, V_n;\, W)$ の上の加法とスカラー乗法を $\forall v_i \in V_i,\, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ に対して

$$\begin{aligned}
(F + G)(v_1,\, \ldots,\, v_n) &\coloneqq F(v_1,\, \ldots,\, v_n) + G(v_1,\, \ldots,\, v_n), \\
(\lambda F)(v_1,\, \ldots,\, v_n) &\coloneqq \lambda\bigl(F(v_1,\, \ldots,\, v_n)\bigr)
\end{aligned}$$

と定義すると $L(V_1,\, \ldots,\, V_n;\, W)$ は $\mathbb{K}$ ベクトル空間になる．特に，Hom の定義から $\mathbb{K}$-ベクトル空間の等式として

$$L(V;\, W) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\,(V,\, W)$$

が成り立つ．テンソル積の普遍性はこの等式を多重線型写像について一般化するものである．

[*3] 有限次元でなくても良い．

命題 1.2.3: 多重線型写像とテンソル積

任意の $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V_1, \dots, V_n, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ に対して，$\mathbb{K}$-ベクトル空間として

$$L(V_1, \dots, V_n; W) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, W)$$

が成り立つ．

<u>**証明**</u> テンソル積の普遍性から，$\mathbb{K}$-線型写像

$$\alpha \colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, W) \longrightarrow L(V_1, \dots, V_n; W),\ f \longmapsto f \circ \Phi$$

は全単射，i.e. $\mathbb{K}$-ベクトル空間の同型写像である． ■

1.2.3 有限次元ベクトル空間のテンソル積

命題 1.2.4: 有限次元テンソル積の基底

<u>有限次元</u> $\mathbb{K}$-ベクトル空間 V, W（$\dim V =: n,\ \dim W =: m$）を与える．$V, W$ の基底をそれぞれ $\{e_1, \dots, e_n\}, \{f_1, \dots, f_m\}$ と書く．このとき，集合

$$\mathcal{E} := \left\{ e_\mu \otimes f_\nu \,\middle|\, 1 \le \mu \le n,\ 1 \le \nu \le m \right\}$$

は $V \otimes W$ の基底である．従って $\dim V \otimes W = nm$ である．

<u>**証明**</u> テンソル積の構成から，$\forall t \in V \otimes W$ は有限個の $(v_i, w_i) \in V \times W$ $(i = 1, \dots l)$ を使って

$$t = \left(\sum_{i=1}^{l} t_i \iota(v_i, w_i) \right) = \sum_{i=1}^{l} t_i v_i \otimes w_i$$

と書ける．$v_i = {v_i}^\mu e_\mu,\ w_i = {w_i}^\mu f_\mu$ のように展開することで，

$$\begin{aligned} t &= \sum_{i=1}^{l} t_i ({v_i}^\mu e_\mu) \otimes ({w_i}^\nu f_\nu) \\ &= \sum_{i=1}^{l} t_i {v_i}^\mu {w_i}^\nu e_\mu \otimes f_\nu \end{aligned}$$

と書ける．ただし添字 μ, ν に関しては Einstein の規約を適用した．従って $\mathcal{E}$ は $V \otimes W$ を生成する．

$\mathcal{E}$ の元が線型独立であることを示す．

$$t^{\mu\nu} e_\mu \otimes e_\nu = 0$$

を仮定する．$\{e_\mu\}, \{f_\mu\}$ の双対基底をそれぞれ $\{\varepsilon^\mu\}, \{\eta^\nu\}$ と書き，全ての添字の組み合わせ $(\mu, \nu) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$ に対して双線型写像

$$\tau^{\mu\nu} \colon V \times W \longrightarrow \mathbb{R},\ (v, w) \longmapsto \varepsilon^\mu(v) \eta^\nu(w)$$

を定める．$\tau^{\mu\nu}$ は双線型なのでテンソル積の普遍性から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$
\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "\tau^{\mu\nu}"] \arrow[d, "\pi \circ \iota"'] & \mathbb{R} \\
\boldsymbol{V \otimes W} \arrow[ur, dashed, "\exists ! \overline{\tau}^{\mu\nu}"']
\end{tikzcd}
$$

が存在する．このことは,

$$
\begin{aligned}
0 &= \overline{\tau}^{\mu\nu}(t^{\rho\sigma} e_\rho \otimes f_\sigma) \\
&= t^{\rho\sigma}(\overline{\tau}^{\mu\nu} \circ \pi \circ \iota)(e_\rho,\, f_\sigma) \\
&= t^{\rho\sigma} \tau^{\mu\nu}(e_\rho,\, f_\sigma) = t^{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

を意味する．従って $\mathcal{E}$ の元は線型独立である． ■

これでもまだ直接の計算には向かない．より具体的な構成を探そう．$\forall \omega_i \in V_i^*$ に対して，$\boldsymbol{\omega_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\omega_n}$ と書かれる $L(V_1,\, \dots,\, V_n;\, \mathbb{K})$ の元を

$$
\boldsymbol{\omega_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\omega_n} \colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow \mathbb{K},\ (v_1,\, \dots,\, v_n) \longmapsto \prod_{i=1}^{n} \omega_i(v_i)
$$

によって定義する．ただし右辺の総積記号は $\mathbb{K}$ の積についてとる．

命題 1.2.5:

有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V,\, W$（$\dim V =: n,\, \dim W =: m$）の基底をそれぞれ $\{e_\mu\},\, \{f_\nu\}$ と書き，その双対基底をそれぞれ $\{\varepsilon^\mu\},\, \{\eta^\mu\}$ と書く．このとき，集合

$$
\mathcal{B} := \left\{\, \varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu \;\middle|\; 1 \le \mu \le n,\, 1 \le \nu \le m \,\right\}
$$

は $L(V,\, W;\, \mathbb{K})$ の基底である．従って $\dim L(V,\, W;\, \mathbb{K}) = nm$ である．

証明 $\forall F \in L(V,\, W;\, \mathbb{K})$ を 1 つとり，全ての添字の組み合わせ $(\mu,\, \nu)$ に対して

$$
F_{\mu\nu} := F(e_\mu,\, f_\nu)
$$

とおく．$\forall (v,\, w) \in V \times W$ を $v = v^\mu e_\mu,\ w = w^\nu f_\nu$ と展開すると，

$$
\begin{aligned}
F_{\mu\nu} \varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu(v,\, w) &= F_{\mu\nu} \varepsilon^\mu(v) \eta^\nu(w) \\
&= F_{\mu\nu} v^\mu w^\nu
\end{aligned}
$$

が成り立つ．一方，双線型性から

$$
F(v,\, w) = v^\mu w^\nu F(e_\mu,\, f_\nu) = F_{\mu\nu} v^\mu w^\nu
$$

も成り立つので $F = F_{\mu\nu} \varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu$ が言えた．i.e. 集合 $\mathcal{B}$ は $L(V,\, W;\, \mathbb{K})$ を生成する．

次に，$\mathcal{B}$ の元が線型独立であることを示す．

$$
F_{\mu\nu} \varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu = 0
$$

を仮定する．全ての添字の組み合わせについて，$(e_\mu,\, f_\nu)$ に左辺を作用させることで，$F_{\mu\nu} = 0$ が従う．i.e. $\mathcal{B}$ の元は互いに線型独立である． ■

命題 1.2.6: テンソル積の構成その 2

任意の有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V,\ W$ に対して

$$L(V,\ W;\ \mathbb{K}) \cong V^* \otimes W^*$$

命題 1.2.3 より，これは

$$L(V,\ W;\ \mathbb{K}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(V \otimes W,\ \mathbb{K}\right) = (V \otimes W)^* \cong V^* \otimes W^*$$

と同値である．

証明 写像

$$\begin{aligned} \Phi\colon V^* \times W^* &\longrightarrow L(V,\ W;\ \mathbb{K}), \\ (\omega,\ \eta) &\longmapsto \bigl((v,\ w) \longmapsto \omega(v)\eta(w)\bigr) \end{aligned}$$

は双線型写像なのでテンソル積の普遍性から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd} V^* \times W^* \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi \circ \iota"'] & L(V,\ W;,\ \mathbb{K}) \\ \boldsymbol{V^* \otimes W^*} \arrow[ur, dashed, red, "\exists ! \overline{\Phi}"'] & \end{tikzcd}$$

が存在する．$V,\ W$（$\dim V = n,\ \dim W = m$）の基底をそれぞれ $\{e_\mu\},\ \{f_\nu\}$ と書き，その双対基底をそれぞれ $\{\varepsilon^\mu\},\ \{\eta^\mu\}$ と書く．命題 1.2.4 より $V^* \otimes W^*$ の基底として

$$\mathcal{E} := \left\{\, \varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu \;\middle|\; 1 \le \mu \le n,\ 1 \le \nu \le m \,\right\}$$

がとれ，命題 1.2.5 より $L(V,\ W;\ \mathbb{K})$ の基底として

$$\mathcal{B} := \left\{\, \varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu \;\middle|\; 1 \le \mu \le n,\ 1 \le \nu \le m \,\right\}$$

がとれる（記号が同じだが，違う定義である）．このとき，$\forall (v,\ w) \in V \times W$ に対して

$$\overline{\Phi}(\varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu)(v,\ w) = \overline{\Phi} \circ \pi \circ \iota(\varepsilon^\mu,\ \eta^\nu)(v,\ w) = \Phi(\varepsilon^\mu,\ \eta^\nu)(v,\ w) = \varepsilon^\mu(v)\eta^\nu(w) = \varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu(v,\ w)$$

が成り立つ（ただし，左辺の $\otimes$ は命題 1.2.2，右辺は命題 1.2.5 で定義したものである）ので，$\overline{\Phi}$ は $\mathcal{E}$ の元と $\mathcal{B}$ の元の 1 対 1 対応を与える．i.e. 同型写像である． ■

命題 1.2.7: テンソル積と Hom の同型

任意の有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V,\ W$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(V,\ W\right) \cong V^* \otimes W$$

証明 写像

$$\begin{aligned} \Phi\colon V^* \times W &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(V,\ W\right), \\ (\omega,\ w) &\longmapsto \bigl(v \longmapsto \omega(v)w\bigr) \end{aligned}$$

は双線型なので，テンソル積の普遍性から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$
\begin{tikzcd}
V^* \times W \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi\circ\iota"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W) \\
\boldsymbol{V^* \otimes W} \arrow[ur, dashed, red, "\exists!\overline{\Phi}"'] &
\end{tikzcd}
$$

が存在する．$V,\, W$（$\dim V = n,\, \dim W = m$）の基底をそれぞれ $\{e_\mu\},\, \{f_\nu\}$ と書き，その双対基底をそれぞれ $\{\varepsilon^\mu\},\, \{\eta^\mu\}$ と書く．命題 1.2.4 より $V^* \otimes W$ の基底として

$$
\mathcal{E} := \left\{\, \varepsilon^\mu \otimes f_\nu \;\middle|\; 1 \leq \mu \leq n,\, 1 \leq \nu \leq m \,\right\}
$$

がとれる．一方，$\forall \omega \in V^*,\ \forall w \in W$ に対して

$$
\omega \otimes w := \Phi(\omega,\, w) \colon V \longrightarrow W,\ v \longmapsto \omega(v)w \tag{1.2.1}
$$

とおくと $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W)$ の基底として

$$
\mathcal{B} := \left\{\, \varepsilon^\mu \otimes f_\nu \;\middle|\; 1 \leq \mu \leq n,\, 1 \leq \nu \leq m \,\right\}
$$

がとれる[*4]（記号が同じだが，$\mathcal{E}$ とは違う定義である）．このとき，$\forall v \in V$ に対して

$$
\overline{\Phi}(\varepsilon^\mu \otimes f_\nu)(v) = \overline{\Phi} \circ \pi \circ \iota(\varepsilon^\mu,\, f_\nu)(v) = \Phi(\varepsilon^\mu,\, f_\nu)(v) = \varepsilon^\mu(v) f_\nu = \varepsilon^\mu \otimes f_\nu(v)
$$

が成り立つ（ただし，左辺の $\otimes$ は命題 1.2.2，右辺は (1.2.1) で定義したものである）ので，$\overline{\Phi}$ は $\mathcal{E}$ の元と $\mathcal{B}$ の元の 1 対 1 対応を与える．i.e. 同型写像である．■

系 1.2.1:

任意の有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V_1,\, \ldots,\, V_n,\, W$ に対して

$$
L(V_1,\, \ldots,\, V_n;\, W) \cong V_1^* \otimes \cdots \otimes V_n^* \otimes W
$$

証明 命題 1.2.3 および命題 1.2.6, 1.2.7 から

$$
\begin{aligned}
L(V_1,\, \ldots,\, V_n;\, W) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n,\, W) \\
&\cong (V_1 \otimes \cdots \otimes V_n)^* \otimes W \\
&\cong V_1^* \otimes \cdots \otimes V_n^* \otimes W
\end{aligned}
$$

を得る．■

[*4] $\forall F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W)$ をとる．${F_\mu}^\nu := \eta^\nu\bigl(F(e_\mu)\bigr)$ とおく．このとき $\forall v = v^\mu e_\mu \in V$ に対して

$$
{F_\mu}^\nu \varepsilon^\mu \otimes f_\nu(v) = {F_\mu}^\nu \varepsilon^\mu(v) f_\nu = {F_\mu}^\nu v^\mu f_\nu
$$

一方で，線形性および双対基底の定義から

$$
F(v) = v^\mu F(e_\mu) = v^\mu \eta^\nu\bigl(F(e_\mu)\bigr) f_\nu = v^\mu {F_\mu}^\nu f_\nu
$$

が成り立つので $F = {F_\mu}^\nu \varepsilon^\mu \otimes f_\nu$ が言えた．i.e. $\mathcal{B}$ は $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W)$ を生成する．
次に，$\mathcal{B}$ の元が線型独立であることを示す．

$$
{F_\mu}^\nu \varepsilon^\mu \otimes f_\nu = 0
$$

を仮定する．$1 \leq \forall \mu \leq \dim V$ について右辺を e_μ に作用させることで ${F_\mu}^\nu f_\nu = 0$ が従うが，f_ν の線型独立性から ${F_\mu}^\nu = 0$ である．

系 1.2.2: Tensor-Hom adjunction

任意の有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V,\ W,\ Z$ に対して,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V \otimes W,\ Z) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\bigl(V,\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W,\ Z)\bigr)$$

証明 命題 1.2.6, 1.2.7 およびテンソル積の結合則より

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V \otimes W,\ Z) &\cong (V \otimes W)^* \otimes Z \\ &\cong V^* \otimes W^* \otimes Z \\ &\cong V^* \otimes (W^* \otimes Z) \\ &\cong V^* \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W,\ Z) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\bigl(V,\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W,\ Z)\bigr)\end{aligned}$$

■

! 系 1.2.2 は，有限次元ベクトル空間の圏が閉圏 (closed category) であることを意味する．

1.3 ベクトル空間の直積・直和

1.3.1 普遍性による定義

A を集合とする．集合 I を**添字集合** (index set) とする A の元の**族** (family) とは，写像 $a\colon I \longrightarrow A$ のことを言う．$\forall i \in I$ に対して $\boldsymbol{a_i} := a(i)$ と略記し，写像 $a\colon I \longrightarrow A$ 自身のことを $\boldsymbol{(a_i)_{i\in I}}$ や $\boldsymbol{\{a_i\}_{i\in I}}$ と略記する．集合族 $\{A_i\}_{i\in I}$ の**直積** (Cartesian product) とは，写像の集合

$$\prod_{i\in I} \boldsymbol{A_i} := \left\{ a\colon I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \;\middle|\; \forall i \in I,\ a(i) \in A_i \right\}$$

のこと．集合族の直積について定まる自然な全射

$$\pi_i\colon \prod_{j\in I} A_j \longrightarrow A_i,\ a \longmapsto a(i)$$

のことを**標準的射影** (canonical projection) と呼ぶ．族としての略記を使うと，直積は

$$\prod_{i\in I} A_i = \left\{ (a_i)_{i\in I} \;\middle|\; \forall i \in I,\ a_i \in A_i \right\}$$

と書くことができる．選択公理を認めたので空でない集合族の直積は空でない．

定義 1.3.1: 直積・直和-普遍性による定義

添字集合 I，および $\mathbb{K}$-ベクトル空間の族 $\{V_i\}_{i\in I}$ を与える．

(1)
- $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $\boldsymbol{P}$
- $\mathbb{K}$-線型写像の族 $\{\boldsymbol{\pi_i}\colon \boldsymbol{P} \longrightarrow V_i\}_{i\in I}$

の 2 つ組が $\mathbb{K}$-ベクトル空間の族 $\{V_i\}_{i\in I}$ の**直積** (product) であるとは，以下の性質を充たすことを言う：

(ベクトル空間の直積の普遍性)

$\forall W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ および任意の $\mathbb{K}$-線型写像の族 $\{f_i\colon W \longrightarrow V_i\}_{i\in I}$ に対して，以下の図式を可換にする $\mathbb{K}$-線型写像 $f\colon W \longrightarrow \boldsymbol{P}$ が一意的に存在する：

$$\begin{tikzcd} \forall W \arrow[d, dashed, "\exists! f"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\ \boldsymbol{P} \arrow[r, "\boldsymbol{\pi_i}"'] & V_i \end{tikzcd}$$

(2)
- $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $\boldsymbol{S}$
- $\mathbb{K}$-線型写像の族 $\{\boldsymbol{\iota_i}\colon V_i \longrightarrow \boldsymbol{S}\}_{i\in I}$

の 2 つ組が $\mathbb{K}$-ベクトル空間の族 $\{V_i\}_{i\in I}$ の**直和** (direct sum) であるとは，以下の性質を充たすことを言う：

(ベクトル空間の直和の普遍性)

$\forall W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ および任意の $\mathbb{K}$-線型写像の族 $\{f_i\colon V_i \longrightarrow W\}_{i\in I}$ に対して，以下の図式を可換にする $\mathbb{K}$-線型写像 $f\colon \boldsymbol{S} \longrightarrow W$ が一意的に存在する：

$$\begin{tikzcd} \forall W & \\ \boldsymbol{S} \arrow[u, dashed, "\exists! f"] & V_i \arrow[l, "\boldsymbol{\iota_i}"] \arrow[ul, "f_i"'] \end{tikzcd}$$

命題 1.3.1:

ベクトル空間の直和・直積は，存在すれば同型を除いて一意である．

証明 テンソル積の場合と全く同様． ■

命題 1.3.2: ベクトル空間の直和・直積の構成

添字集合 I，および $\mathbb{K}$-ベクトル空間の族 $\{V_i\}_{i\in I}$ を与える．

(1)
- 集合族の直積 $\prod_{i\in I} V_i$ の上に加法とスカラー乗法を

$$\begin{aligned} (v_i)_{i\in I} + (w_i)_{i\in I} &\coloneqq (v_i + w_i)_{i\in I} \\ \lambda(v_i)_{i\in I} &\coloneqq (\lambda v_i)_{i\in I} \end{aligned}$$

と定義することで得られる $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $\prod_{i\in I} V_i$
- $\forall i \in I$ に対して定まる $\mathbb{K}$-線型写像[a]

$$\pi_i\colon \prod_{j\in I} V_j \longrightarrow V_i,\ (v_j)_{j\in I} \longmapsto v_i$$

の 2 つ組は $\{V_i\}_{i\in I}$ の直積である．

(2)

- 集合族の直積 $\prod_{i\in I} V_i$ の部分集合

$$\bigoplus_{i\in I} V_i \coloneqq \left\{ (v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i \;\middle|\; \substack{\text{有限個の添字を除いた全ての } j\in I \\ \text{について } v_j=0\in V_j} \right\}$$

の上に加法とスカラー乗法を

$$\begin{aligned}(v_i)_{i\in I} + (w_i)_{i\in I} &\coloneqq (v_i + w_i)_{i\in I} \\ \lambda(v_i)_{i\in I} &\coloneqq (\lambda v_i)_{i\in I}\end{aligned}$$

と定義することで得られる $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $\bigoplus_{i\in I} V_i$

- $\forall i \in I$ に対して定まる $\mathbb{K}$-線型写像[b]

$$\iota_i \colon V_i \longrightarrow \bigoplus_{j\in I} V_j,\ v \longmapsto (y_j)_{j\in I}$$
$$\text{w/}\quad y_j = \begin{cases} v, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$$

の 2 つ組は $\{V_i\}_{i\in I}$ の直和である．

[a] 集合 $\prod_{i\in I} V_i$ に入れたベクトル空間の構造の定義から，自動的に π_i は $\mathbb{K}$-線型写像になる．
[b] 集合 $\bigoplus_{i\in I} V_i$ に入れたベクトル空間の構造の定義から，自動的に ι_i は $\mathbb{K}$-線型写像になる．

構成から明らかに，添字集合 I が有限集合ならベクトル空間の直積と直和は同型である．

証明 (1) **f の存在**

任意の $\mathbb{K}$-ベクトル空間 W および任意の $\mathbb{K}$-線型写像の族 $\{ f_\lambda \colon N \to M_\lambda \}_{\lambda\in\Lambda}$ を与える．このとき写像 f を

$$f \colon W \longrightarrow \prod_{i\in I} V_i,\ w \longmapsto \bigl(f_i(w)\bigr)_{i\in I}$$

と定義すると，f は $\prod_{i\in I} V_i$ の $\mathbb{K}$-ベクトル空間としての構造の定義から自動的に $\mathbb{K}$-線型写像になり，$\forall i \in I$ および $\forall w \in W$ に対して

$$(\pi_i \circ f)(w) = f_i(w)$$

が成り立つ．i.e. 直積の普遍性の可換図式が成り立つ．

f の一意性

直積の普遍性の可換図式を充たす別の $\mathbb{K}$-線型写像 $g \colon W \to \prod_{i\in I} V_i$ が存在したとする．このとき $\forall i \in I$ および $\forall w \in W$ に対して

$$\pi_i\bigl(g(w)\bigr) = f_i(w) = \pi_i\bigl(f(w)\bigr)$$

が成り立つので $f = g$ が言える．i.e. f は一意である．

(2) **f の存在**

任意の $\mathbb{K}$-ベクトル空間 W および任意の $\mathbb{K}$-線型写像の族 $\left\{ f_i \colon M_i \to N \right\}_{i\in I}$ が与えられたとき，写像 f を

$$f \colon \bigoplus_{i\in I} V_i \to W,\ (v_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} f_i(v_i)$$

と定義する．右辺は有限和なので意味を持ち，f は $\bigoplus_{i\in I} V_i$ の $\mathbb{K}$-ベクトル空間としての構造の定義から自動的に $\mathbb{K}$-線型写像になる．このとき $\forall i \in I$ および $\forall v \in V_i$ に対して

$$f\bigl(\iota_i(v)\bigr) = f_i(v) + \sum_{j\in I\setminus\{i\}} f_j(0) = f_i(v)$$

が成り立つ．i.e. 直和の普遍性の可換図式が成り立つ．

f の一意性

直和の普遍性の可換図式を充たす別の $\mathbb{K}$-線型写像 $g \colon \bigoplus_{i\in I} V_i \to W$ が存在したとする．このとき $\forall (v_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} V_i$ に対して

$$g\bigl((v_i)_{i\in I}\bigr) = g\left(\sum_{i\in I} \iota_i(v_i)\right) = \sum_{i\in I} g\bigl(\iota_i(v_i)\bigr) = \sum_{i\in I} f_i(v_i) = f\bigl((v_i)_{i\in I}\bigr)$$

が成り立つので $f = g$ が言える．i.e. f は一意である．

■

命題 1.3.3: Hom と直積・直和の交換

任意の $\mathbb{K}$-ベクトル空間 W，添字集合 I，および $\mathbb{K}$-ベクトル空間の族 $\{V_i\}_{i\in I}$ を与える．このとき以下の 2 つの $\mathbb{K}$-ベクトル空間の同型が成り立つ：

(1)

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(W,\, \prod_{i\in I} V_i\right) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(W,\, V_i\right)$$

(2)

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(\bigoplus_{i\in I} V_i,\, W\right) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(V_i,\, W\right)$$

証明 (1) 直積の普遍性より，$\mathbb{K}$-線型写像

$$\alpha \colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(W,\, \prod_{i\in I} V_i\right) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(W,\, V_i\right),\ f \longmapsto (\pi_i \circ f)_{i\in I}$$

は全単射である．

(2) 直和の普遍性より，$\mathbb{K}$-線型写像

$$\beta \colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(\bigoplus_{i\in I} V_i,\, W\right) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(V_i,\, W\right),\ f \longmapsto (f \circ \iota_i)_{i\in I}$$

は全単射である．

■

命題 1.3.3 の同型は，$\mathbb{K}$-ベクトル空間の圏 $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ における（圏論的）極限，余極限に関する同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(W,\, \lim_{i\in I} V_i\right) \cong \lim_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(W,\, V_i\right)$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(\operatorname*{colim}_{i\in I} V_i,\, W\right) \cong \lim_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(V_i,\, W\right)$$

の一例である．

1.3.2 部分ベクトル空間の直和

$\mathbb{K}$-ベクトル空間 V の部分ベクトル空間の族 $\{W_i\}_{i\in I}$ の和空間とは，V の部分 $\mathbb{K}$-ベクトル空間

$$\sum_{i\in I} \boldsymbol{W_i} := \left\{ \sum_{i\in I} w_i \in V \;\middle|\; \begin{array}{c}\forall i\in I,\, w_i\in W_i \text{ かつ，有限個の添字を除いた} \\ \text{全ての } j\in I \text{ について } w_j = 0 \in W_j\end{array} \right\}$$

のこと．集合 $\bigcup_{i\in I} W_i$ が生成する（張る）部分 $\mathbb{K}$-ベクトル空間と言っても良い．

命題 1.3.4: 部分ベクトル空間の直和

$\mathbb{K}$-ベクトル空間 V の部分ベクトル空間の族 $\{W_i\}_{i\in I}$ が

$$\forall i \in I,\; W_i \cap \left(\sum_{j\in I\setminus\{i\}} W_j \right) = 0 \tag{1.3.1}$$

を充たすとする．このとき

- 和空間 $\sum_{i\in I} W_i$
- $\forall i \in I$ に対して定まる $\mathbb{K}$-線型写像

$$\iota_i \colon W_i \longrightarrow \sum_{j\in I} W_j,\; w \longmapsto w$$

の 2 つ組は $\{W_i\}_{i\in I}$ の直和である．

証明 $\forall w \in \sum_{i\in I} W_i$ を 1 つとる．まず，条件 (1.3.1) が充たされているならば $w = w_{i_1} + \cdots + w_{i_n}$ $(1 \leq \forall k \leq n,\; v_{i_k} \in W_{i_k})$ と書く方法が一意的に定まることを示す．$w = w_{i_1} + \cdots + w_{i_n} = w'_{j_1} + \cdots + w'_{j_m}$ が成り立つと仮定する．$A := \{i_1, \ldots, i_n\} \cup \{j_1, \ldots, j_m\} \subset I$ とおき，$\forall r \in A \setminus \{i_1, \ldots, i_n\}$ に対しては $w_r = 0$，$\forall s \in A \setminus \{j_1, \ldots, j_m\}$ に対しては $w'_s = 0$ とおくことで

$$w = \sum_{r\in A} w_r = \sum_{r\in A} w'_r \in \sum_{i\in I} W_i$$

と書ける[*5]．このとき $\forall r \in A$ について

$$w_r - w'_r = \sum_{s\in A\setminus\{r\}} (w'_s - w_s) \in W_r \cap \left(\sum_{s\in A\setminus\{r\}} W_s \right)$$

*5 $\sharp A \leq n + m < \infty$ なので左辺は有限和である．

が言えるが，条件 (1.3.1) より左辺は 0 である．i.e. $\forall r \in A$ に対して $w_r = w'_r$ が言えた．

次に**直和の普遍性**を示す．任意の $\mathbb{K}$-ベクトル空間 W および $\mathbb{K}$-線型写像の族 $\{f_i \colon V_i \longrightarrow W\}_{i \in I}$ を与える．このとき $\mathbb{K}$-線型写像

$$f \colon \sum_{i \in I} W_i \longrightarrow W,\ \sum_{i \in I} w_i \longmapsto \sum_{i \in I} f_i(w_i)$$

は先程の議論から well-defined であり[*6]，かつ $\forall i \in I,\ \forall w \in W_i$ に対して

$$f(w) = f_i(w) = f_i \circ \iota_i(w)$$

を充たす．i.e. $\forall i \in I$ に対して図式

$$\begin{tikzcd} \forall W & \\ \sum_{i \in I} W_i \arrow[u, dashed, "\exists! f"] & W_i \arrow[ul, "f_i"'] \arrow[l, "\iota_i"] \end{tikzcd}$$

は可換である．別の $\mathbb{K}$-線型写像 $g \colon \sum_{i \in I} W_i \longrightarrow W$ がこの図式を可換にするならば，線型性から $\forall w = \sum_{i \in I} w_i \in \sum_{i \in I} W_i$ に対して

$$g(w) = g\left(\sum_{i \in I} w_i\right) = \sum_{i \in I} g(w_i) = \sum_{i \in I} g \circ \iota_i(w_i) = \sum_{i \in I} f_i(w_i) = f(w)$$

が言える．i.e. $g = f$ であり，f は一意である．■

系 1.3.1: 内部直和

$\mathbb{K}$-ベクトル空間 V の部分ベクトル空間の族 $\{W_i\}_{i \in I}$ が

$$\forall i \in I,\ W_i \cap \left(\sum_{j \in I \setminus \{i\}} W_j\right) = 0$$

を充たすとする．このとき

$$\sum_{i \in I} W_i \cong \bigoplus_{i \in I} W_i$$

が成り立つ．ただし右辺は命題 1.3.2 で構成したベクトル空間の直和である．

! 結局同型ではあるのだが，系 1.3.1 において $\sum_{i \in I} W_I$ と $\bigoplus_{i \in I} W_i$ を区別するときは，前者を**内部直和** (internal direct sum)，後者を**外部直和** (external direct sum) と呼ぶ．

証明 命題 1.3.1 より従う．■

[*6] 右辺は有限和なので意味を持つ．

1.4　階数・退化次数の定理

1.4.1　有限次元の場合

V, W を**有限次元** $\mathbb{K}$ ベクトル空間とし，線型写像 $T\colon V \longrightarrow W$ を与える．V, W の基底 $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{\dim V}\}$, $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{\dim W}\}$ をとり，

$$T(\mathbf{e}_\mu) = T^\nu{}_\mu \mathbf{f}_\nu$$

のように左辺を展開したときに得られる行列

$$\begin{bmatrix} T^1{}_1 & \cdots & T^1{}_{\dim V} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T^{\dim W}{}_1 & \cdots & T^{\dim W}{}_{\dim V} \end{bmatrix}$$

は基底 $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{\dim V}\}$, $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{\dim W}\}$ に関する T の**表現表列**と呼ばれる．$\forall \boldsymbol{v} = v^\nu \mathbf{e}_\nu \in V$ に対して

$$T(\boldsymbol{v}) = T(v^\nu \mathbf{e}_\nu) = v^\nu T(\mathbf{e}_\nu) = v^\nu T^\mu{}_\nu \mathbf{f}_\mu$$

と書けるので，成分表示だけを見ると T はその表現行列を左から掛けることに相当する：

$$\begin{bmatrix} T^1{}_1 & \cdots & T^1{}_{\dim V} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T^{\dim W}{}_1 & \cdots & T^{\dim W}{}_{\dim V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^{\dim V} \end{bmatrix}$$

定義 1.4.1: 線型写像の階数

$\operatorname{Im} T$ の次元のことを T の**階数** (rank) と呼び，$\mathbf{rank}\,\boldsymbol{T}$ と書く．

命題 1.4.1: 表現行列の標準形

V, W を**有限次元**ベクトル空間とし，任意の線型写像 $T\colon V \longrightarrow W$ を与える．このとき V, W の基底であって，T の表現行列を

$$\begin{bmatrix} I_{\operatorname{rank} T} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

の形にするものが存在する．

<u>**証明**</u> $\operatorname{Im} T$ の基底 $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{\operatorname{rank} T}\}$ および $\operatorname{Ker} T$ の基底 $\{\mathbf{k}_1, \dots \mathbf{k}_{\dim(\operatorname{Ker} T)}\}$ を勝手にとる．像の定義から，$1 \leq \forall \mu \leq \operatorname{rank} T$ に対して $\mathbf{e}_\mu \in V$ が存在して $\mathbf{f}_\mu = T(\mathbf{e}_\mu)$ を充たす．

まず $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{\operatorname{rank} T}, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{\dim(\operatorname{Ker} T)}$ が V の基底を成すことを示す．

線型独立性

$$\sum_{\mu=1}^{\operatorname{rank} T} a^\mu \mathbf{e}_\mu + \sum_{\nu=1}^{\dim(\operatorname{Ker} T)} b^\nu \mathbf{k}_\nu = 0$$

を仮定する．左辺に T を作用させることで

$$\sum_{\mu=1}^{\operatorname{rank} T} a^\mu \mathbf{f}_\mu = 0$$

がわかるが，$\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{\operatorname{rank} T}$ は $\operatorname{Im} T$ の基底なので線型独立であり，$1 \le \forall \mu \le \operatorname{rank} T$ に対して $a_\mu = 0$ が言える．故に仮定から

$$\sum_{\nu=1}^{\dim(\operatorname{Ker} T)} b^\nu \mathbf{k}_\nu = 0$$

であるが，$\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{\dim(\operatorname{Ker} T)}$ は $\operatorname{Ker} T$ の基底なので線型独立であり，$1 \le \forall \nu \le \dim(\operatorname{Ker} T)$ に対して $b_\nu = 0$ が言える．i.e. $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{\operatorname{rank} T}, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{\dim(\operatorname{Ker} T)}$ は線型独立である．

V を生成すること　$\forall \boldsymbol{v} \in V$ を 1 つとる．このとき $T(\boldsymbol{v}) \in \operatorname{Im} T$ なので

$$T(\boldsymbol{v}) = \sum_{\mu=1}^{\operatorname{rank} T} v^\mu \mathbf{f}_\mu$$

と展開できる．ここで $\boldsymbol{w} := \sum_{\mu=1}^{\operatorname{rank} T} v^\mu \mathbf{e}_\mu \in V$ とおくと，$T(\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{w})$ が成り立つが，T が線型写像であることから $T(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) = 0 \iff \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \in \operatorname{Ker} T$ が言えて

$$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = \sum_{\nu=1}^{\dim(\operatorname{Ker} T)} w^\nu \mathbf{k}_\nu$$

と展開できる．従って

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} + (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) = \sum_{\mu=1}^{\operatorname{rank} T} v^\mu \mathbf{e}_\mu + \sum_{\nu=1}^{\dim(\operatorname{Ker} T)} w^\nu \mathbf{k}_\nu$$

であり，$\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{\operatorname{rank} T}, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{\dim(\operatorname{Ker} T)}$ は V を生成する．

$\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{\operatorname{rank} T}$ と線型独立な $\dim W - \operatorname{rank} T$ 個のベクトル $\tilde{\mathbf{f}}_{\operatorname{rank} T+1}, \dots, \tilde{\mathbf{f}}_{\dim W}$ をとると，

- V の基底 $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{\operatorname{rank} T}, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{\dim(\operatorname{Ker} T)}\}$
- W の基底 $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{\operatorname{rank} T}, \tilde{\mathbf{f}}_{\operatorname{rank} T+1}, \dots, \tilde{\mathbf{f}}_{\dim W}\}$

に関する T の表現行列は

$$\begin{bmatrix} I_{\operatorname{rank} T} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

になる．■

系 1.4.1: 階数・退化次数の定理（有限次元）

V, W を**有限次元**ベクトル空間とし，任意の線型写像 $T\colon V \longrightarrow W$ を与える．このとき

$$\dim V = \dim(\operatorname{Im} T) + \dim(\operatorname{Ker} T)$$

が成り立つ．

証明 命題 1.4.1 の証明より従う． ■

系 1.4.1 から便利な補題がいくつか従う：

補題 1.4.1: 有限次元ベクトル空間に関する小定理集

V, W を**有限次元**ベクトル空間とし，任意の線型写像 $T: V \longrightarrow W$ を与える．このとき以下が成り立つ：

(1) $\operatorname{rank} T \le \dim V$. 特に $\operatorname{rank} T = \dim V \iff T$ は単射
(2) $\operatorname{rank} T \le \dim W$. 特に $\operatorname{rank} T = \dim W \iff T$ は全射
(3) $\dim V = \dim W$ かつ T が単射 $\implies$ T は同型写像
(4) $\dim V = \dim W$ かつ T が全射 $\implies$ T は同型写像

証明 (1) 系 1.4.1 より

$$\dim V = \operatorname{rank} T + \dim(\operatorname{Ker} T) \ge \operatorname{rank} T$$

が成り立つ．特に命題??から T が単射 $\iff \operatorname{Ker} T = 0 \iff \dim(\operatorname{Ker} T) = 0 \iff \operatorname{rank} T = \dim V$ が従う．

(2) rank の定義より $\operatorname{rank} T \le \dim W$ は明らか．特に次元の等しい有限次元ベクトル空間は同型なので，T が全射 $\iff \operatorname{Im} T \cong W \iff \dim(\operatorname{Im} T) = \operatorname{rank} T = \dim W$ が言える．

(3) $\dim V = \dim W$ かつ T が単射とする．T が単射なので (1) より $\operatorname{rank} T = \dim V = \dim W$ が従い，(2) より T は全射でもある．

(4) $\dim V = \dim W$ かつ T が全射とする．T が全射なので (2) より $\operatorname{rank} T = \dim W = \dim V$ が従い，(1) より T は単射でもある．

■

1.4.2 分裂補題と射影的加群

実は，系 1.4.1 は有限次元でなくとも成り立つ．それどころか，左 R 加群の場合の分裂補題に一般化される．

補題 1.4.2: 分裂補題

左 R 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i_1} M \xrightarrow{p_2} M_2 \longrightarrow 0 \tag{1.4.1}$$

が与えられたとする．このとき，以下の二つは同値である：

(1) 左 R 加群の準同型 $i_2: M_2 \longrightarrow M$ であって $p_2 \circ i_2 = 1_{M_2}$ を充たすものが存在する
(2) 左 R 加群の準同型 $p_1: M \longrightarrow M_1$ であって $p_1 \circ i_1 = 1_{M_1}$ を充たすものが存在する

証明 **(1) $\Longrightarrow$ (2)** 写像

$$p_1': M \longrightarrow M,\ x \longmapsto x - i_2\big(p_2(x)\big)$$

を定義すると，

$$p_2\bigl(p_1'(x)\bigr) = p_2(x) - ((p_2 \circ i_2) \circ p_2)(x) = p_2(x) - p_2(x) = 0$$

が成り立つ．従って，(1.4.1) が完全列であることを使うと $p_1'(x) \in \operatorname{Ker} p_2 = \operatorname{Im} i_1$ である．さらに i_1 が単射であることから

$$\exists! y \in M_1,\ p_1'(x) = i_1(y)$$

が成り立つ．ここで写像

$$p_1 \colon M \longrightarrow M_1,\ x \longmapsto y$$

を定義するとこれは準同型写像であり，$\forall x \in M_1$ に対して

$$p_1'\bigl(i_1(x)\bigr) = i_1(x) - (i_2 \circ (p_2 \circ i_1))(x) = i_1(x)$$

が成り立つ[*7]ことから

$$(p_1 \circ i_1)(x) = x$$

とわかる．i.e. $p_1 \circ i_1 = 1_{M_1}$

(1) $\Longleftarrow$ (2) (1.4.1) は完全列であるから $M_2 = \operatorname{Ker} 0 = \operatorname{Im} p_2$ である．従って $\forall x \in M_2 = \operatorname{Im} p_2$ に対して，$x = p_2(y)$ を充たす $y \in M$ が存在する．ここで写像

$$i_2 \colon M_2 \longrightarrow M,\ x \longmapsto y - i_1\bigl(p_1(y)\bigr)$$

は well-defined である．$x = p_2(y')$ を充たす勝手な元 $y' \in M$ をとってきたとき，$p_2(y - y') = 0$ より $y - y' \in \operatorname{Ker} p_2 = \operatorname{Im} i_1$ だから，i_1 の単射性から

$$\exists! z \in M_1, \quad y - y' = i_1(z)$$

が成り立ち，このとき

$$\Bigl(y - i_1\bigl(p_1(y)\bigr)\Bigr) - \Bigl(y' - i_1\bigl(p_1(y')\bigr)\Bigr) = i_1(z) - (i_1 \circ (p_1 \circ i_1))(z) = i_1(z) - i_1(z) = 0$$

とわかるからである．i_2 は準同型写像であり，$\forall x \in M_2$ に対して

$$(p_2 \circ i_2)(x) = p_2(y) - ((p_2 \circ i_1) \circ p_1)(y) = p_2(y) = x$$

なので $p_2 \circ i_2 = 1_{M_2}$．

■

系 1.4.2:

左 R 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i_1} M \xrightarrow{p_2} M_2 \longrightarrow 0$$

が補題 1.4.2 の条件を充たすならば

$$M \cong M_1 \oplus M_2$$

[*7] (1.4.1) が完全列であるため，$p_2 \circ i_1 = 0$

証明 補題 1.4.2 の条件 (1) が満たされているとする．このとき補題 1.4.2 証明から $\forall x \in M$ に対して

$$i_1\bigl(p_1(x)\bigr) = p_1'(x) = x - i_2\bigl(p_2(x)\bigr) \quad\Longleftrightarrow\quad i_1\bigl(p_1(x)\bigr) + i_2\bigl(p_2(x)\bigr) = x$$

また，完全列の定義から $p_2\bigl(i_1(x)\bigr) = 0$ であるから $\forall x \in M_2$ に対して

$$p_1'\bigl(i_2(x)\bigr) = i_2(x) - ((i_2 \circ p_2) \circ i_2)(x) = 0 = i_1(0)$$

であり，結局 $p_1\bigl(i_2(x)\bigr) = 0$ とわかる．

ここで準同型写像

$$\begin{aligned} &f\colon M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M,\ (x,\, y) \longmapsto i_1(x) + i_2(y), \\ &g\colon M \longrightarrow M_1 \oplus M_2,\ x \longmapsto \bigl(p_1(x),\, p_2(x)\bigr) \end{aligned}$$

を定めると

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x,\, y) &= \bigl(p_1(i_1(x)) + p_1(i_2(y)),\, p_2(i_1(x)) + p_2(i_2(x))\bigr) = (x,\, y), \\ (f \circ g)(x) &= i_1(p_1(x)) + i_2(p_2(x)) = x \end{aligned}$$

なので $f,\, g$ は同型写像． ■

定義 1.4.2: 分裂

左 R 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i_1} M \xrightarrow{p_2} M_2 \longrightarrow 0$$

が**分裂** (split) するとは，補題 1.4.2 の条件を充たすことをいう．

定義 1.4.3: 射影的加群

左 R 加群 P が**射影的加群** (projective module) であるとは，任意の左 R 加群の**全射準同型** $f\colon M \longrightarrow N$ および任意の準同型写像 $g\colon P \longrightarrow N$ に対し，左 R 加群の準同型写像 $h\colon P \longrightarrow M$ であって $f \circ h = g$ を充たすものが存在することを言う（図式 1.3）．

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed, "\exists h"'] \\ M \arrow[r, two heads, "f"] & N \end{tikzcd}$$

図 1.3: 射影的加群

命題 1.4.2:

左 R 加群の完全列

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

は，N が射影的加群ならば分裂する．

証明 射影的加群の定義において $P = N$ とすることで，左 R 加群の準同型写像 $s\colon N \longrightarrow M$ であって $g \circ s = 1_N$ を充たすものが存在する． ■

命題 1.4.3: 射影的加群の直和

左 R 加群の族 $\{P_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して以下の 2 つは同値：

(1) $\forall\lambda \in \Lambda$ に対して P_λ が射影的加群

(2) $\displaystyle\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$ が射影的加群

証明 標準的包含を $\iota_\lambda\colon P_\lambda \hookrightarrow \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$ と書く．

(1)$\Longrightarrow$(2) 仮定より，$\forall\lambda \in \lambda$ に対して，任意の全射準同型写像 $f\colon M \longrightarrow N$ および任意の準同型写像 $g\colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \longrightarrow N$ に対して，準同型写像 $h_\lambda\colon P_\lambda \longrightarrow M$ であって $f \circ h_\lambda = g \circ \iota_\lambda$ を充たすものが存在する．従って直和の普遍性より準同型写像

$$h\colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \longrightarrow M$$

であって $f \circ h_\lambda = h \circ \iota_\lambda$ を充たすものが一意的に存在する．このとき

$$(f \circ h) \circ \iota_\lambda = f \circ h_\lambda = g \circ \iota_\lambda$$

であるから，h の一意性から $f \circ h = g$.

(1)$\Longleftarrow$(2) $\lambda \in \Lambda$ を一つ固定し，任意の全射準同型写像 $f\colon M \longrightarrow N$ および任意の準同型写像 $g\colon P_\lambda \longrightarrow M$ を与える．直和の普遍性より準同型写像

$$h\colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \longrightarrow N$$

であって $h \circ \iota_\lambda = g$（$\forall\mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}$, $h \circ \iota_\lambda = 0$）を充たすものが一意的に存在する．さらに仮定より，準同型写像

$$\alpha\colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \longrightarrow M$$

であって $f \circ \alpha = h$ を充たすものが存在する．このとき

$$f \circ (\alpha \circ \iota_\lambda) = h \circ \iota_\lambda = g$$

なので $\beta \coloneqq h \circ \iota_\lambda$ とおけば良い．

■

系 1.4.3: 自由加群は射影的加群

環 R 上の自由加群は射影的加群である

証明 R が射影的加群であることを示せば命題 1.4.3 より従う．

左 R 加群の全射準同型写像と準同型写像 $f\colon M \longrightarrow N,\ g\colon R \longrightarrow N$ を任意に与える．このときある $x \in M$ が存在して $f(x) = g(1)$ となる．この x に対して準同型写像 $h\colon R \longrightarrow M,\ a \longmapsto ax$ を定めると，$\forall a \in R$ に対して

$$f\bigl(h(a)\bigr) = f(ax) = af(x) = ag(1) = g(a)$$

が成り立つので $f \circ h = g$ となる． ■

V, W を任意の（有限次元とは限らない）$\mathbb{K}$ ベクトル空間，$T\colon V \longrightarrow W$ を任意の線型写像とする．

$$\begin{aligned} i_1 &\colon \operatorname{Ker} T \longrightarrow V,\ \boldsymbol{v} \longmapsto \boldsymbol{v}, \\ p_2 &\colon V \longrightarrow \operatorname{Im} T,\ \boldsymbol{v} \longmapsto T(\boldsymbol{v}), \end{aligned}$$

と定めると，i_1 は単射，p_2 は全射で，かつ $p_2 \circ i_1 = 0$ が成り立つ．よって $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の図式

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} T \xrightarrow{i_1} V \xrightarrow{p_2} \operatorname{Im} T \longrightarrow 0 \tag{1.4.2}$$

は短完全列だが，$\operatorname{Im} T$ はベクトル空間なので自由加群であり，系 1.4.3 より射影的加群でもある．従って命題 1.4.2 より短完全列 (1.4.2) は分裂し，系 1.4.2 から

$$V \cong \operatorname{Im} T \oplus \operatorname{Ker} T$$

が言える．

定理 1.4.4: 階数・退化次数の定理

V, W をベクトル空間とし，任意の線型写像 $T\colon V \longrightarrow W$ を与える．このとき

$$\dim V = \dim(\operatorname{Im} T) + \dim(\operatorname{Ker} T)$$

が成り立つ．

1.5 Jordan 標準形

この節では体 $\mathbb{K}$ は代数閉体であるとし，V を有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間とする．

定義 1.5.1: 広義固有空間

$x \in \operatorname{End} V$ を与える．$\forall \lambda \in \mathbb{K}$ に対して

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V(\lambda)} &:= \operatorname{Ker}(x - \lambda \operatorname{id}_V) = \left\{ v \in V \mid (x - \lambda \operatorname{id}_V)v = 0 \right\} \\ \boldsymbol{W(\lambda)} &:= \left\{ v \in V \mid \exists k > 0,\ (x - \lambda \operatorname{id}_V)^k v = 0 \right\} \end{aligned}$$

とおく．

- λ が x の**固有値** (eigenvalue) であるとは，$V(\lambda) \neq 0$ であることを言う．
- $V(\lambda)$ が固有値 λ に属する x の**固有空間** (eigenspace) であるとは，$V(\lambda) \neq 0$ であることを言う．

- $W(\lambda)$ が固有値 λ に属する x の**広義固有空間** (generalized eigenspace) であるとは，$W(\lambda) \neq 0$ であることを言う．

$V(\lambda) \subset W(\lambda) \subset V$ が x-不変な部分ベクトル空間であることは明らかである．

1.5.1 上三角化

補題 1.5.1: 旗と基底

V の旗

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{\dim V} = V$$

を与え，

$$\begin{aligned} V_1 &= \mathbb{K}e_1 \\ V_2/V_1 &= \mathbb{K}(e_2 + V_1) \\ V_3/V_2 &= \mathbb{K}(e_3 + V_2) \\ &\vdots \\ V_{\dim V}/V_{\dim V-1} &= \mathbb{K}(e_{\dim V} + V_{\dim V-1}) \end{aligned}$$

を充たす $e_i \in V_i \quad (1 \leq i \leq \dim V)$ をとる．このとき $1 \leq \forall i \leq \dim V$ に対して

$$V_i = \mathrm{Span}\{\, e_1, \ldots, e_i \,\}$$

が成り立つ．

証明 $1 \leq i \leq \dim V$ に関する数学的帰納法により示す．$i = 1$ のときは明らか．

$i > 1$ とする．

$$\lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j e_j = 0$$

を仮定する．両辺に標準的射影 $p_i\colon V_i \longrightarrow V_i/V_{i-1}$ を作用させることで

$$\lambda_i p(e_i) = \lambda_i(e_i + V_{i-1}) = 0$$

がわかるが，$e_i \in V_i$ の選び方から $e_i + V_{i-1} \neq 0$ なので $\lambda_i = 0$ が言える．よって

$$\sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j e_j = 0 \in V_{i-1}$$

となるが，帰納法の仮定より $e_1, \ldots, e_{i-1}$ は線型独立なので $1 \leq \forall j \leq i$，$\lambda_j = 0$ が言えた．i.e. $e_1, \ldots, e_i$ は線型独立である．旗の定義から $\dim V_i = i$ なので $e_1, \ldots, e_i$ は V_i の基底であり，帰納法が完成した． ■

$x \in \mathrm{End}\, V$ が**上三角化可能**であるとは，x によって安定化される V の旗が存在することを言う．というの

も，このとき補題 1.5.1 の基底をとると

$$
\begin{aligned}
x(e_1) &= {x^1}_1 e_1 \in V_1, \\
x(e_2) &= {x^1}_2 e_1 + {x^2}_2 e_2 \in V_2, \\
&\vdots \\
x(e_{\dim V}) &= {x^1}_{\dim V} e_1 + \cdots + {x^{\dim V}}_{\dim V} e_{\dim V} \in V_{\dim V}
\end{aligned}
$$

と書けるので，この基底に関する x の表現行列が

$$
\begin{bmatrix}
{x^1}_1 & {x^1}_2 & \cdots & {x^1}_{\dim V} \\
0 & {x^2}_2 & \cdots & {x^2}_{\dim V} \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & {x^{\dim V}}_{\dim V}
\end{bmatrix}
$$

という上三角行列になるのである．

定理 1.5.1: 上三角化

$\forall x \in \mathrm{End}\, V$ に対して，x によって安定化される V の旗が存在する．i.e. $\forall x \in \mathrm{End}\, V$ は上三角化可能である．

証明 $\dim V$ に関する数学的帰納法により示す．$\dim V = 0$ のときは明らかなので $\dim V > 0$ とする．$\forall x \in \mathrm{End}\, V$ を 1 つ固定する．仮定より $\mathbb{K}$ は代数閉体なので，x は重複も込めてちょうど $\dim V$ 個の固有値をもつ．それを $\lambda_1, \dots, \lambda_{\dim V}$ とおこう．$v_1 \in V(\lambda_1) \setminus \{0\}$ をとり，$V_1 := \mathbb{K} v_1$ とおく．標準的射影を $p \colon V \longrightarrow V/V_1$ と書くと，$\forall v \in V_1$ に対して $p \circ x(v) = p(\lambda_1 v) = 0$ が成り立つので $V_1 \subset \mathrm{Ker}\, p \circ x$ である．故に商ベクトル空間の普遍性を使うことができ，$\mathbb{K}$-ベクトル空間の図式

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "x"] \arrow[d, "p"'] & V \arrow[r, "p"] & V/V_1 \\
V/V_1 \arrow[urr, dashed, "\exists! \overline{x}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

を可換にするような $\mathbb{K}$-線型写像 $\overline{x} \in \mathrm{End}(V/V_1)$ が一意的に存在する．$\dim(V/V_1) = \dim V - 1$ なので帰納法の仮定が使えて，$\overline{x} \in \mathrm{End}(V/V_1)$ によって安定化される V/V_1 の旗

$$
0 = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_{\dim V - 1} = V/V_1
$$

が存在する．このとき $0 \le \forall i \le \dim V - 1$ を 1 つ固定すると $\forall w + V_1 \in W_i$ に対して $\overline{x}(w + V_1) \in W_i$ が成り立つ．商ベクトル空間の普遍性から $\overline{x}(w + V_1) = \overline{x} \circ p(w) = p \circ x(w)$ なので，$\forall v \in p^{-1}(W_i)$ に対して $p \circ x(v) = \overline{x} \circ p(v) \in W_i \iff x(v) \in p^{-1}(W_i)$ が分かった．i.e. V の部分空間の増大列

$$
0 \subset p^{-1}(W_0) \subset p^{-1}(W_1) \subset \cdots \subset p^{-1}(W_{\dim V - 1}) = V
$$

は x によって安定化される V の旗であり，帰納法が完成する． ■

! 定理 1.5.1 の証明から，もし $\mathbb{K}$ が代数閉体でなくても，$x \in \mathrm{End}\, V$ の固有値が全て $\mathbb{K}$ に含まれるならば x は上三角化可能である．

1.5.2　広義固有空間分解

定理 1.5.2: 広義固有空間分解-1

$x \in \mathrm{M}(n,\, \mathbb{K})$ を与え，

- x の相異なる全ての固有値を $\lambda_1,\, \ldots,\, \lambda_r$
- λ_i の重複度を p_i

とおく．このとき $\mathbb{K}^n$ の内部直和分解

$$\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} W(\lambda_i)$$

が一意的に存在し，かつ $\dim W(\lambda_i) = p_i$ である．

証明 $\boldsymbol{\dim W(\lambda_i) \geq p_i}$

仮定より $\mathbb{K}$ は代数閉体なので，定理 1.5.1 より $u \in \mathrm{GL}(n,\, \mathbb{K})$ が存在して $u^{-1}xu$ が上三角行列になる．$1 \leq i \leq r$ を 1 つ固定し，$u^{-1}xu$ の対角成分の最初の p_i 個が λ_i であると仮定しても一般性を失わない．このとき $u^{-1}(x - \lambda_i \mathbb{1}_n)u$ の対角成分の最初の p_i 個は 0 になるので $u^{-1}(x - \lambda_i \mathbb{1}_n)^{p_i}u$ の第 $1 \leq j \leq p_i$ 列は全て 0 となる．よって $u = [e_1\ \ldots\ e_n]$ とおいたとき $\mathrm{Span}\{e_1,\, \ldots,\, e_{p_i}\} \subset W(\lambda_i)$ である．u は正則行列なので $e_1,\, \ldots,\, e_{p_i}$ は線型独立であり，$\dim W(\lambda_i) \geq p_i$ だと分かった．

和空間 $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{r} W(\lambda_i)}$ が内部直和

r に関する数学的帰納法により示す．$r = 1$ のときは明らかなので $r > 1$ とする．$w_i \in W(\lambda_i)$ に対して

$$\sum_{i=1}^{r} w_i = 0 \tag{1.5.1}$$

が成り立つと仮定する．このとき $w_1 = \cdots = w_r = 0$ であることを示せば良い．広義固有空間の定義からある $k_r > 0$ が存在して $(x - \lambda_r \mathbb{1}_n)^{k_r} w_r = 0$ が成り立つので，

$$(x - \lambda_r \mathbb{1}_n)^{k_r} \left(\sum_{i=1}^{r} w_i \right) = \sum_{i=1}^{r-1} (x - \lambda_r \mathbb{1}_n)^{k_r} w_i = 0$$

が言える．$W(\lambda_i)$ は x-不変なので，帰納法の仮定から $1 \leq \forall i \leq r-1$ に対して $(x - \lambda_r \mathbb{1}_n)^{k_r} w_i = 0$ である．ここである $1 \leq j \leq r-1$ が存在して $w_j \neq 0$ であると仮定する．このとき $k_j > 0$ を $(x - \lambda_j \mathbb{1}_n)^{k_j} w_j = 0$ を充たす最小の自然数とする．このとき $x(x - \lambda_j \mathbb{1}_n)^{k_j - 1} w_j = \lambda_j (x - \lambda_j \mathbb{1}_n)^{k_j - 1} w_j$ なので

$$\begin{aligned}
0 &= (x - \lambda_j \mathbb{1}_n)^{k_j - 1} (x - \lambda_r \mathbb{1}_n)^{k_r} w_j \\
&= (x - \lambda_r \mathbb{1}_n)^{k_r} (x - \lambda_j \mathbb{1}_n)^{k_j - 1} w_j \\
&= (\lambda_j - \lambda_r)^{k_r} (x - \lambda_j \mathbb{1}_n)^{k_j - 1} w_j
\end{aligned}$$

が成り立つが，$\lambda_j \neq \lambda_r$ なので $(x - \lambda_j \mathbb{1}_n)^{k_j - 1} w_j = 0$ と言うことになって k_j の最小性に矛盾する．よって背理法から $1 \leq \forall j \leq r-1$ に対して $w_j = 0$ が言えた．仮定 (1.5.1) より $w_r = 0$ も言えて帰納法が完成する．

代数学の基本定理より $\sum_{i=1}^{r} p_i = n$ が言える．$\bigoplus_{i=1}^{r} W(\lambda_i) \subset \mathbb{K}^n$ であることも踏まえると，以上の議論から $\dim W(\lambda_i) = p_i$ が分かった．従って $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} W(\lambda_i)$ である．直和の普遍性よりこの内部直和分解は一意である． ■

1.5.3 多項式環・最小多項式

定理 1.5.2 の証明に多項式環を利用することもできる．まず一般論から入る．R を環とし，R の**単元** (unit)[*8] 全体がなす集合を $\boldsymbol{R}^{\times}$ と書く．$R^{\times}$ は環の積に関して群となる．特に，R が体ならば $R^{\times} = R \setminus \{0\}$ となる．

n 個の変数 $t_1, \dots, t_n$ を持つ R 係数多項式全体[*9]の集合を $R[t_1, \dots, t_n]$ と書く．$R[t_1, \dots, t_n]$ の上の加法と乗法をそれぞれ

$$f(t_1, \dots, t_n) + g(t_1, \dots, t_n) \coloneqq \sum_{i_1, \dots, i_n} (a_{i_1 \dots i_n} + b_{i_1 \dots i_n}) t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n},$$

$$f(t_1, \dots, t_n) g(t_1, \dots, t_n) \coloneqq \sum_{i_1, \dots, i_n} \left(\sum_{j_1 + k_1 = i_1} \cdots \sum_{j_n + k_n = i_n} a_{j_1 \dots j_n} b_{k_1 \dots k_n} \right) t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n}$$

で定義する[*10]と $R[t_1, \dots, t_n]$ 自身が環になる．ただし $f(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1 \dots i_n} t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n}$，$g(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} b_{i_1 \dots i_n} t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n} \in R[t_1, \dots, t_n]$ とおいた．ある 1 つの変数に注目して項を整理することで，帰納的に自然な（環の）同型 $R[t_1, \dots, t_n] \cong (R[t_1, \dots, t_{n-1}])[t_n] \cong \dots \cong (\cdots((R[t_1])[t_2]) \cdots [t_{n-1}])[t_n]$ が得られる．

定義 1.5.2: 多項式の基本概念

$f(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1 \dots i_n} t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n} \in R[t_1, \dots, t_n]$ を与える．

- $f(t_1, \dots, t_n) \neq 0$ ならば，f の**次数** (degree) を

$$\boldsymbol{\deg f} \coloneqq \max\{ i_1 + \cdots + i_n \mid a_{i_1 \dots i_n} \neq 0 \}$$

  と定義する．$f(t_1, \dots, t_n) \neq 0$ ならば $\deg f \coloneqq -\infty$ と定義する．
- $(x_1, \dots, x_n) \in R^n$ の f への**代入**とは，値

$$\sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \in R$$

  のこと[a]．記号としては $f(x_1, \dots, x_n)$ と書く．
- $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ を充たす $(x_1, \dots, x_n) \in R^n$ のことを f の**根** (root) と呼ぶ．
- $n = 1$ のとき，f の最高次係数が $1 \in R$ ならば f は**モニック** (monic) であると呼ばれる．

[a] 非ゼロな係数は有限個なので，この和は意味を持つ．

[*8] **可逆元** (invertible element) と言う場合もある．

[*9] 直和の構成と同様に，非ゼロの係数は有限個であるとする．より厳密には，写像 $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n \longrightarrow R$ であって有限個の $(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ を除いて 0 を返すようなものと変数 $(t_1, \dots, t_n)$ の組のことである．

[*10] 乗法の記号は慣例に従って省略した．

最高次係数が単元であるような多項式によって，多項式を割り算することができる：

命題 1.5.1: 多項式の割り算

1 変数多項式 $f(t), g(t) \in R[t]$ および単元 $u \in R^{\times}$ を与える．
このとき $f(t)$ がモニックならば，以下を充たす $q(t), r(t) \in R[t]$ が一意的に存在する：

$$g(t) = q(t)\bigl(uf(t)\bigr) + r(t), \quad \deg r < \deg f$$

<u>証明</u> $f(t)$ はモニックであるとする．

$q(t), r(t)$ の存在

$g(t) = 0$ のときは $q(t) = r(t) = 0$ とすれば良い．$g(t) \neq 0$ のとき，$\deg g$ に関する数学的帰納法により示す．$\deg g < \deg f$ のときは $q(t) = 0$, $r(t) = g(t)$ とおけば良い．

$\deg g \geq \deg f$ とする．

$$f(t) =: \sum_{i=0}^{\deg f} a_i t^i, \quad g(t) =: \sum_{i=0}^{\deg g} b_i t^i$$

とおくと仮定から $a_{\deg f} = 1$ である．このとき

$$q_1(t) := b_{\deg g}\boldsymbol{u^{-1}} t^{\deg g - \deg f}, \quad g_1(t) := g(t) - q_1(x)\bigl(uf(t)\bigr)$$

と定義すると $\deg g_1 < \deg g$ が成り立つ．$g_1(t) = 0$ ならば $q(t) = q_1(t)$, $r(t) = 0$ とすれば良い．$g_1(t) \neq 0$ ならば，帰納法の仮定より $q_2(t), r_2(t) \in R[t]$ が存在して

$$g_1(t) = q_2(t)\bigl(uf(t)\bigr) + r_2(t)$$

と書け，かつ $\deg r_2 < \deg f$ が成り立つ．すると

$$g(t) = \bigl(q_1(t) + q_2(t)\bigr)\bigl(uf(t)\bigr) + r_2(t)$$

であるから，$q(t) = q_1(t) + q_2(t)$, $r(t) = r_2(t)$ とすれば良い．

$q(t), r(t)$ の一意性

$g(t) = q_1(t)\bigl(uf(t)\bigr) + r_1(t) = q_2(t)\bigl(uf(t)\bigr) + r_2(t)$ かつ $\deg r_i < \deg f$ が成り立つとする．このとき

$$\bigl(q_1(t) - q_2(t)\bigr)\bigl(uf(t)\bigr) = r_2(t) - r_1(t)$$

が成り立つが，$q_1(t) - q_2(t) \neq 0$ だとすると $\deg f \leq \max\{\deg r_1, \deg r_2\}$ と言うことになり矛盾．よって背理法から $q_1(t) = q_2(t)$ が言えて，$r_1(t) = r_2(t)$ も従う．

■

特に R が体ならば $R^{\times} = R \setminus \{0\}$ なので，任意のゼロでない多項式同士の割り算をすることができる．多変数の場合も，ある 1 つの変数に関する最高次係数が単元ならば割り算ができる．

定義 1.5.3: 環のイデアル

R を環とする．

- 部分集合 $I \subset R$ が左 (resp. 右) **イデアル** (ideal) であるとは，$\forall r \in R,\ \forall x \in I$ に対して $rx \in I$（resp. $xr \in I$）が成り立つことを言う．左イデアルかつ右イデアルのとき**両側イデアル**と呼ぶ．R が可換環のときは左，右イデアルの区別はなく，単に**イデアル** (ideal) と呼ぶ．
- 可換環 R のイデアル $I \subsetneq R$ が**素イデアル** (prime ideal) であるとは，

$$r,\, s \notin I \quad \Longrightarrow \quad rs \notin I$$

が成り立つことを言う．
- 可換環 R のイデアル $I \subsetneq R$ が**極大イデアル** (maximal ideal) であるとは，$I \subset J \subsetneq R$ なる任意のイデアル J に対して $I = J$ が成り立つことを言う．

定義 1.5.4: 整域

R を可換環とする．

- R が**整域** (integral domain) であるとは，$\forall a, b \in R \setminus \{0\}$ に対して $ab \neq 0$ が成り立つことを言う．
- **整域** R および $a \in R, b \in R \setminus \{0\}$ を与える．b が a の**約元**であるとは，ある $c \in R$ が存在して $a = bc$ となることを言い，$\boldsymbol{b \mid a}$ と書く．
- **整域** R および $(a_1, \dots, a_n) \in R^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}, b \in R$ を与える．b が $a_1, \dots, a_n$ の**公約元**であるとは，

$$1 \leq \forall i \leq n,\ b \mid a_i$$

が成り立つことを言う．他の任意の公約元 $c \in R$ に対して $c \mid b$ が成り立つとき，b は**最大公約元** (greatest common deviser; GCD) と呼ばれ，$\boldsymbol{\gcd(a_1, \dots, a_n)}$ と書く．
- **整域** R および $b_1, \dots, b_n \in R \setminus \{0\}, a \in R$ を与える．a が $b_1, \dots, b_n$ の**公倍元**であるとは，

$$1 \leq \forall i \leq n,\ b_i \mid a$$

が成り立つことを言う．他の任意の公倍元 $c \in R$ に対して $b \mid c$ が成り立つとき，b は**最小公倍元** (least common multiple; LCM) と呼ばれ，$\boldsymbol{\mathrm{lcm}(a_1, \dots, a_n)}$ と書く．
- R が**単項イデアル整域** (principal ideal domain; PID) であるとは，R の任意のイデアル $I \subset R$ に対してある $r \in R$ が存在して $I = Rr$ を充たすこと．

R を整域とし，$r \in R \setminus \{0\}$ を与える．

- r が**素元**であるとは，r が生成するイデアル $Rr \subset R$ が素イデアルであることを言う．
- r が**既約元**であるとは，$r \notin R^\times$ で，かつ $\forall a, b \in R$ に対して

$$r = ab \quad \Longrightarrow \quad a \in R^\times \ \text{または}\ b \in R^\times$$

が成り立つことを言う．r が既約でなければ**可約**と言う．

- 既約元 r, s が**同伴**であるとは，ある $u \in R^{\times}$ が存在して $r = su$ と書けることを言う．

命題 1.5.2: 素イデアルと極大イデアルの特徴付け

可換環 R のイデアル I に対し，以下が成り立つ：

(1) I が素イデアル $\iff$ R/I は整域

(2) I が極大イデアル $\iff$ R/I は体

証明 (1)

■

GCD, LCM は存在すれば単元の積を除いて一意である．

定義 1.5.5: 種々の整域

R を整域とする．

- R が **Euclid 整域** (Euclid domain) であるとは，以下の条件を充たす写像 $\phi\colon R\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在することを言う：

  (ED) $\forall a \in R,\ \forall b \in R\setminus\{0\}$ に対して $q, r \in R$ が存在して
  $$a = qb + r$$
  かつ
  $$r = 0 \text{ または } \phi(r) < \phi(b)$$
  が成り立つ．
- R が**単項イデアル整域** (principal ideal domain; PID) であるとは，R の任意のイデアル $I \subset R$ に対してある $r \in R$ が存在して $I = Rr$ を充たすこと．
- R が**一意分解整域** (unique factorization domain: UFD) であるとは，以下の 2 条件を充たすこと：

  (UFD-1) $\forall r \in R\setminus(R^{\times}\cup\{0\})$ に対して，素元 $p_1, \dots, p_n \in R$ が存在して $r = p_1 \cdots p_n$ と書ける．このとき $p_1, \dots, p_n$ を r の**素因子**，素因子の積 $p_1 \cdots p_n$ を a の**素元分解**と呼ぶ．

  (UFD-2) $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_m \in R$ が素元ならば $n = m$ であり，かつある $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ が存在して，$1 \leq \forall i \leq n$ に対して p_i と $q_{\sigma(i)}$ が同伴となる．

次の定理は整域の理論において極めて重要である：

定理 1.5.3:

Euclid 整域 $\Longrightarrow$ 単項イデアル整域 $\Longrightarrow$ 一意分解整域

証明 Euclid 整域 $\Longrightarrow$ PID

R が Euclid 整域であるとする．$R=\{0\}$ ならば $R=R0$ となるので PID である．

$R\neq\{0\}$ とする．R の任意の非自明なイデアル I をとる．$\mathbb{Z}_{\geq 0}$ は整列集合なので $\phi(x) := \min\{\,\phi(y)\in\mathbb{Z}_{\geq 0} \mid y\in I\setminus\{0\}\,\}$ が存在する．Euclid 整域の定義から $\forall z\in I$ に対してある $q, r\in R$ が存在して

$$z=qx+r$$

かつ $r=0$ または $\phi(r)<\phi(x)$ が成り立つが，もし $r\neq 0$ ならば $r\in I\setminus\{0\}$ となり x の最小性に矛盾する．よって $r=0$ であり，$I=Rx$ が言えた．

PID $\implies$ UFD

■

系 1.5.4:

任意の体[a] $\mathbb{K}$ に対して $\mathbb{K}[t]$ は Euclid 整域である．従って PID でもあり UFD でもある．

[a] 定義から可換である．

証明　命題 1.5.1 より従う．■

命題 1.5.3:

可換環 R について以下が成り立つ：

(1) R が整域ならば，R の任意の素元は既約元である．
(2) R が UFD ならば，R の任意の既約元は素元である．
(3) R が PID ならば，R の任意の $\{0\}$ でない素イデアルは極大イデアルである．

証明　(1) R が整域だとする．このとき任意の素元 $p\in R\setminus\{0\}$ をとると，$Rp\subsetneq R$ なので $p\notin R^{\times}$ である．$a, b\in R$ に対して $p=ab$ が成り立つとする．Rp が素イデアルなので $a\in Rp$ または $b\in Rp$ が成り立つ．R は可換なので $a\in Rp$ としても一般性を失わない．このときある $q\in R$ が存在して $a=qp$ と書ける．$ab=p$ なので $qpb=pqb=p \iff p(qb-1)=0$ が成り立つ．R は整域で $p\neq 0$ なので $qb-1=0 \iff qb=1$, i.e. $b\in R^{\times}$ が分かった．よって p は既約である．

(2) R が UFD だとする．このとき任意の既約元 $p\in R\setminus(R^{\times}\cup\{0\})$ をとると，その素元分解 $p=p_1\cdots p_n \quad (n\geq 1)$ が存在する．$n\geq 2$ だとすると，$p_1\notin R^{\times}$ なので p の既約性から $q:=p_2\cdots p_n\in R^{\times}$ となる．然るにこのとき $Rq\subset Rp_2\subsetneq R$ となり矛盾．よって背理法から $n=1$ が言えた．

(3) R のゼロでない任意の素イデアル I をとる．R は PID なので $p\in R$ が存在して $I=Rp$ と書けるが，素元の定義からこのとき $p\in R$ は素元であり，および命題 1.5.3-(1) から既約元である．
ここで，$I\subset J\subsetneq R$ なる任意のイデアル J をとる．R は PID なので $q\in R$ が存在して $J=Rq$ と書けるが，$Rq\subsetneq R$ なので $q\notin R^{\times}$ である．このときある $u\in R$ が存在して $p=qu$ と書けるが，p は既約元なので $u\in R^{\times}$ でなくてはならない．よって $Rp=Rq$ となり，Rp は極大イデアルである．命題 1.5.2-(2) より R/Rp は体である．

■

命題 1.5.4: 単項イデアル整域における Bézout の等式

R を PID とする．このとき，$\forall (a_1,\, a_2) \in R^2 \setminus \{(0,\, 0)\}$, $\forall b \in R$ に対して以下は同値である：

(1) $Ra_1 + Ra_2 = Rb$
(2) $\gcd(a_1,\, a_2) = b$

証明

(1) $\Longrightarrow$ (2)

$Ra_1 + Ra_2 = Rb$ とする．このとき $a_i \in Rb \quad (i = 1,\, 2)$ なのである $q_i \in R$ が存在して $a_i = q_i b$ と書ける．i.e. $b \mid a_i$ である．

$c \in R$ を $a_1,\, a_2$ の任意の公約元とする．このときある $r_i \in R$ が存在して $a_i = r_i c$ と書ける．仮定より $b \in Ra_1 + Ra_2$ なので，$s_i \in R$ が存在して

$$b = s_1 a_1 + s_2 a_2 = (s_1 r_1 + s_2 r_2) c$$

と書ける．i.e. $c \mid b$ が言えた．

(1) $\Longleftarrow$ (2)

$\gcd(a_1,\, a_2) = b$ とする．R は PID なので，ある $c \in R$ が存在して $Ra_1 + Ra_2 = Rc$ と書ける．必要性の証明から $c = \gcd(a_1,\, a_2)$ が言えるので，$u \in R^\times$ が存在して $b = uc$ と書ける．よって $Ra_1 + Ra_2 = Rc = Rb$ である． ■

系 1.5.5: 単項イデアル整域における Bézout の等式

R を PID とする．このとき，$\forall (a_1,\, \ldots,\, a_n) \in R^n \setminus \{(0,\, \ldots,\, 0)\}$, $\forall b \in R$ に対して以下は同値である：

(1) $Ra_1 + \cdots + Ra_n = Rb$
(2) $\gcd(a_1,\, \ldots,\, a_n) = b$

定義 1.5.6: 体の拡大

- 体 $\mathbb{L}$ が体 $\mathbb{K}$ の**拡大体** (extention field) であるとは，$\mathbb{K}$ が $\mathbb{L}$ の部分体になっていることを言う．このことを記号で $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ と書き，**体の拡大** (field extention) であると言う．
- $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ を体の拡大とするとき，部分体 $\mathbb{M} \subset \mathbb{L}$ であって $\mathbb{K} \subset \mathbb{M}$ を充たすものを $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ の**中間体**と呼ぶ．
- $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ を体の拡大とするとき，$\mathbb{L}$ を $\mathbb{K}$-ベクトル空間と見做したときの次元を $\mathbb{L}$ の $\mathbb{K}$ 上の**拡大次数**と呼び，$[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$ と書く．
- $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ を体の拡大とする．$x \in \mathbb{L}$ が $\mathbb{K}$ 上**代数的**であるとは，x がある $\mathbb{K}$-係数多項式 $f(t) \in \mathbb{K}[t] \setminus \{0\}$ の根となっていること[a]を言う．$\forall x \in \mathbb{L}$ が $\mathbb{K}$ 上代数的ならば，体の拡大 $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ は**代数拡大**であるという．

[a] $x \in \mathbb{K}$ とは限らないので，先ほど採用した定義によると厳密には根とは呼べない．

命題 1.5.5: 最小多項式の存在

$\mathbb{L}/\mathbb{K}$ を体の代数拡大とし，$\forall\alpha \in \mathbb{L}$ を 1 つ与える．このとき $I_\alpha := \{\, f(t) \in \mathbb{K}[t] \mid f(\alpha) = 0 \,\}$ とおくと，以下の条件を充たす $f(t) \in I_\alpha$ が定数倍を除いて一意的に存在する：

(1) $f(t) \neq 0$
(2) $f(t)$ は I_α の元のうち $\deg f$ が最小のものの 1 つである．
(3) $f(t)$ は I_α の全ての元の約元である．
(4) $f(t)$ は既約

証明 $\mathbb{K}$-結合代数の準同型

$$\phi\colon \mathbb{K}[t] \longrightarrow \mathbb{L},\ g(t) \longmapsto g(\alpha)$$

に関して $\operatorname{Ker}\phi = I_\alpha$ であり，従って I_α は $\mathbb{K}[t]$ のイデアルである．α は $\mathbb{K}$ 上代数的なので $I_\alpha \neq \{0\}$ であり，系 1.5.4 より $\mathbb{K}[t]$ は PID なので，ある $f(t) \in \mathbb{K}[t]$ が存在して $I_\alpha = \mathbb{K}[t]f(t)$ と書ける．このとき定理 1.5.3 の証明から $f(t)$ は $I_\alpha \setminus \{0\}$ の元のうち次数が最小であり，$\mathbb{K}[t]^\times = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ なので定数倍を除いて一意に定まる．

あとは $f(x)$ の既約性を示す．実際，準同型定理から $\mathbb{K}[t]/I_\alpha \cong \operatorname{Im}\phi = \mathbb{K}[\alpha]$ が言えるが，$\mathbb{K}[\alpha]$ は体なので命題 1.5.2-(2) より $I_\alpha = \mathbb{K}[t]f(t)$ は素イデアルであり，素元の定義から $f(t)$ は素元．よって命題 1.5.3-(1) から $f(x)$ は既約元である． ■

定義 1.5.7: 最小多項式

命題 1.5.5 の $f(t) \in I_\alpha$ がモニックならば，$f(t)$ のことを α の $\mathbb{K}$ 上の**最小多項式** (minimal polynomial) と呼ぶ．

命題 1.5.5 では $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ を体の代数拡大としたが，$\mathbb{L}$ を $\mathrm{M}(n, \mathbb{K})$ に置き換えても (1)-(3) はほぼ同じ証明により成り立つ[*11]．このようなときも $f(t) \in I_\alpha$ のことを $\alpha \in \mathrm{M}(n, \mathbb{K})$ の**最小多項式**と呼ぶ．では，定理 1.5.2 の別証明を与えよう：

定理 1.5.6: 広義固有空間分解-2

$x \in \mathrm{M}(n, \mathbb{K})$ を与え，

- x の相異なる全ての固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_r$
- λ_i の重複度を p_i

とおく．このとき $\mathbb{K}^n$ の内部直和分解

$$\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} W(\lambda_i)$$

が一意的に存在し，かつ $\dim W(\lambda_i) = p_i$ である．

[*11] $I_\alpha \neq \{0\}$ の証明のみ変更を要する．

証明 $1 \leq \forall i \leq k$ に対して $\phi_i(t) \coloneqq \prod_{j \neq i}(t - \lambda_i)^{p_i} \in \mathbb{K}[t]$ とおく. ■