表現論ゼミ 第 2 回

前田 陵汰

2023 年 10 月 23 日

半単純 Lie 代数

以下、体 $\mathbb{F}$ は代数閉体とし, 標数は 0 とする $(\mathrm{char}\mathbb{F} = 0)$. また, ベクトル空間は有限次元とする.

4　Lie の定理と Cartan の判定条件

4.1　Lie の定理

定理 4.1

L を $\mathfrak{gl}(V)$ の可解な部分代数とする. $V \neq 0$ ならば, ある $v \in V$があって, 任意の L の元に対して v は固有ベクトルとなる.

この定理から, 以下の系が従う.

系 4.1A (Lie's Theorem)

L を $\mathfrak{gl}(V)$ の可解な部分代数とする. このとき, L は適当な Vの基底に対して上三角行列となる[a].

[a] 本には "L stabilizes some flag in V. " とありました. flag が分からん...

系 4.1B

L が可解であるとき, 以下を満たすイデアルの列が存在する.

$$0 = L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_n = L, \quad \dim L_i = i \tag{1}$$

系 4.1.C

L が可解であるとき, $x \in [L, L] \Rightarrow \mathrm{ad}_{\mathrm{L}} x$ は冪零. 特に, $[L, L]$ は冪零 Lie 代数となる.

4.2 Jordan-Chevalley 分解

一般に行列は Jordan 標準形で表すことができる. これは対角成分と, その上に 1 または 0 が並んだ行列 (これは冪零) への分解と見ることができる. これを一般化しよう.

定義 4.2

$x \in \mathrm{End}\ V$ が半単純であるとは, x の最小多項式 (minimal polynomial) が重解を持たないことをいう.

!

上の定義はわかりにくいが, 実は

$$x \in \mathrm{End}\ V \text{ が半単純} \Leftrightarrow x \text{ は対角化可能}$$

である.
また, x の固有ベクトルが V の基底をなすことを半単純の定義とする場合もあり [2], これも対角化可能であることと同値である.

命題 4.2

$x \in \mathrm{End}\ V$とする.

(a) 以下を満たす x_s, x_n がただ一つ存在する.

$$x = x_s + x_n, \qquad x_s \text{ は半単純}, \ x_n \text{ は冪零}. \tag{2}$$

(b) 定数項をもたない一変数多項式 $p(T), q(T)$ があって, $x_s = p(x)$, $x_n = q(x)$. 特に, x と交換する End Vの元は x_s, x_n とも交換する.

(c) $A \subset B \subset V$が部分空間であって, x が B を A に写すならば, x_s, x_n もまた, B を A に写す.

この分解を Jordan-Chevalley 分解と呼ぶ. 有用性を見るために随伴表現を考える.

補題 4.2

$$x \text{ が半単純} \Rightarrow \mathrm{ad}\ x \text{ も半単純}$$

補題 3.2 では, x が冪零 $\Rightarrow$ ad x も冪零となることを示した.

補題 4.2A

$x \in \mathrm{End}\ V$が $x = x_s + x_n$ のように Jordan-Chevalley 分解されているとき, $\mathrm{ad}\ x \in \mathrm{End}(\mathrm{End}\ V)$ の分解は以下で与えられる.

$$\mathrm{ad}\ x = \mathrm{ad}\ x_s + \mathrm{ad}\ x_n \tag{3}$$

補題 4.2B

$\mathfrak{U}$ を $\mathbb{F}$-代数とする. このとき, Der $\mathfrak{U}$ の任意の元は, Der $\mathfrak{U}$ 内に半単純成分と冪零成分を持つ.

4.3　Cartan の判定条件

補題 4.3

$A \subset B$ を $\mathfrak{gl}(V)$ の部分空間とし, 集合 M を $M = \{x \in \mathfrak{gl}(V) | \ [x, B] \subset A\}$ とする. このとき, $x \in M$ が $\forall y \in M$ に対して $\mathrm{Tr}(xy) = 0$ を満たすならば, x は冪零である.

ここで有用な恒等式を述べておく.
$x, y, z \in \mathrm{End}\ (V)$ に対し,

$$\mathrm{Tr}([x, y]z) = \mathrm{Tr}(x[y, z]) \tag{4}$$

定理 4.3 (Cartan's Criterion)

L を $\mathfrak{gl}(V)$ の部分代数とする. 任意の $x \in [L, L]$, $y \in L$ に対して $\mathrm{Tr}(xy) = 0$ であるならば, L は可解 Lie 代数である.

系 4.3

L を Lie 代数とする. 任意の $x \in [L, L]$, $y \in L$ に対して $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}x\ \mathrm{ad}y) = 0$ であるならば, L は可解 Lie 代数である.

5　Killing 形式

5.1　半単純性の判定条件

定義 5.1A: Killing 形式

L を任意の Lie 代数とする. $x, y \in L$ に対し, Killing 形式 $\kappa(x, y)$ を次式で定義する.

$$\kappa(x, y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}x\ \mathrm{ad}y) \tag{5}$$

κ は対称な双線型写像であり, 次式の意味で結合則を満たす.

$$\kappa([x, y],\ z) = \kappa(x,\ [y, z]) \tag{6}$$

補題 5.1

I は L のイデアルとする. κ が L 上の Killing 形式, κ_I が I 上の Killing 形式とすると, $\kappa_I = \kappa|_{I \times I}$

定義 5.1B: 非退化

L 上の対称な双線型写像 $\beta(x, y)$ の radical S が 0 (零集合) のとき, β は非退化であるという. ここで, $S = \{x \in L | \beta(x, y) = 0 \text{ for } \forall y \in L\}$[a] .

[a] S は前回出てきた根基 (radical) と異なることに注意.

Killing 形式に対する S は, L のイデアルとなる ($\because$ 結合則).

κ が非退化であるかは次のようにして判定できる.

L の基底 $\{x_1, \dots, x_n\}$ をとり, 行列 $K_{ij} = \kappa(x_i, x_j)$ を定義する. このとき,

$$\kappa\text{が非退化} \ \Leftrightarrow \det K \neq 0 \tag{7}$$

定理 5.1

L を Lie 代数とする. このとき

$$L\text{が半単純} \ \Leftrightarrow \ \kappa\text{が非退化} \tag{8}$$

5.2 単純イデアル

定理 5.2

L を半単純 Lie 代数とする. このとき, L の単純なイデアル $L_1, \dots, L_t$ が存在して, L は L_i の直和で書ける. すなわち,

$$L = L_1 \oplus \dots \oplus L_t \tag{9}$$

また, L 上の単純なイデアルは L_i 以外に存在しない. さらに, L_i 上の Killing 形式は, L 上の Killing 形式を $L_i \times L_i$ 上に制限したものと一致する.

系 5.2

L を半単純 Lie 代数とする.

(a) $L = [L, L]$.
(b) L の任意のイデアル, および L を定義域とする任意の準同型写像の像も半単純 Lie 代数となる.
(c) L の任意のイデアルは, L の単純なイデアルの直和で書ける.

5.3 内部微分

定理 5.3

L が半単純 Lie 代数ならば, $\mathrm{ad}\ L = \mathrm{Der}\ L$. すなわち, 任意の微分は内部微分.

5.4 抽象 Jordan 分解

参考文献

[1] 田川 裕之, Lie 環論入門, `https://web.wakayama-u.ac.jp/~tagawa/lecture/liealgh.pdf`
[2] 対角化と固有値問題, `https://w.atwiki.jp/nopu/pages/138.html`