第 2 章

半単純 Lie 代数

この章において，特に断らない限り体 $\mathbb{K}$ は代数閉体[*1]で，かつ $\operatorname{char}\mathbb{K}=0$ であるとする．

2.1　Lie の定理・Cartan の判定条件

2.1.1　Lie の定理

2.1.2　Jordan-Chevalley 分解

2.1.3　Cartan の判定条件

2.2　Killing 形式

2.3　半単純性の判定条件

2.4　単純イデアル

2.5　内部微分

2.6　抽象 Jordan 分解

[*1] つまり，定数でない任意の 1 変数多項式 $f(x)\in\mathbb{K}[x]$ に対してある $\alpha\in\mathbb{K}$ が存在して $f(\alpha)=0$ を充たす．

2.7　表現の完全可約性

ベクトル空間のテンソル積について復習する：

定義 2.7.1: ベクトル空間のテンソル積

$\mathbb{K}$ を任意の体とし，$\mathbb{K}$-ベクトル空間 V, W を与える．

- $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $\boldsymbol{V \otimes W}$
- 双線型写像 $\boldsymbol{\Phi}\colon V \times W \longrightarrow \boldsymbol{V \otimes W}$

の組 $(V \otimes W, \Phi)$ が V, W の**テンソル積** (tensor product) であるとは，以下の性質を充たすことをいう：

テンソル積の普遍性

任意の $\mathbb{K}$-ベクトル空間 Z および任意の双線型写像 $f\colon V \times W \longrightarrow Z$ に対して，以下の図式を可換にする線型写像 $\overline{f}\colon \boldsymbol{V \otimes W} \longrightarrow Z$ が一意的に存在する：

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\boldsymbol{\Phi}"'] & \forall Z \\ \boldsymbol{V \otimes W} \arrow[ur, dashed, "\exists! \bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

テンソル積をとる操作は結合的である．i.e. $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \cong (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ が成り立つ．従って以降では 3 つ以上のベクトル空間のテンソル積を括弧を省略して書く．

命題 2.7.1: テンソル積の一意性

テンソル積は，存在すればベクトル空間の同型を除いて一意である．

証明　$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 $V, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ を与える．体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間と双線型写像の組 $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\Phi}\colon V \times W \longrightarrow \boldsymbol{T})$ および $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\Phi'}\colon V \times W \longrightarrow \boldsymbol{T'})$ がどちらも V, W のテンソル積であるとする．このときテンソル積の普遍性から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\Phi'"] \arrow[d, "\boldsymbol{\Phi}"'] & T' \\ \boldsymbol{T} \arrow[ur, dashed, "\exists! u"] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\boldsymbol{\Phi'}"'] & T \\ \boldsymbol{T'} \arrow[ur, dashed, "\exists! u'"] & \end{tikzcd}$$

が成り立つので，これらの図式を併せた $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$
\begin{tikzcd}
\boldsymbol{T} & \\
V \times W \arrow[u, "\boldsymbol{\Phi}"] \arrow[r, "\Phi'"] \arrow[d, "\boldsymbol{\Phi}"] & T' \arrow[ul, dashed, "\exists ! u'"'] \\
\boldsymbol{T} \arrow[ur, dashed, "\exists ! u"] &
\end{tikzcd}
$$

が存在する．然るに $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$
\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "\boldsymbol{\Phi}"] \arrow[d, "\boldsymbol{\Phi}"] & \boldsymbol{T} \\
\boldsymbol{T} \arrow[ur, dashed, "\mathrm{id}_{\boldsymbol{T}}"] &
\end{tikzcd}
$$

も成り立ち，テンソル積の普遍性より赤点線で書いた線型写像は一意でなくてはならないので，

$$u' \circ u = \mathrm{id}_{\boldsymbol{T}}$$

がわかる．同様の議論から

$$u \circ u' = \mathrm{id}_{\boldsymbol{T'}}$$

も従うので，線型写像 $u \colon \boldsymbol{T} \longrightarrow \boldsymbol{T'}$, $u' \colon \boldsymbol{T'} \longrightarrow \boldsymbol{T}$ は互いに逆写像，i.e. 同型写像である． ■

命題 2.7.1 からテンソル積の一意性が言えたが，そもそもテンソル積が存在しなければ意味がない．そこで，体 $\mathbb{K}$ 上の任意のベクトル空間 $V, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ を素材にしてテンソル積 $(V \otimes W,\ \Phi \colon V \times W \longrightarrow V \otimes W)$ を具体的に構成してみよう．

$\mathbb{K} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ なので，任意の集合 S に対してベクトル空間の直和

$$\mathbb{K}^{\oplus S} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$$

を考えることができる．$\mathbb{K}^{\oplus S}$ の元 f とは，有限個の元 $x_1, \dots, x_n \in S$ を除いた全ての $x \in S$ に対して値 $0 \in \mathbb{K}$ を返すような $\mathbb{K}$ 値関数 $f \colon S \longrightarrow \mathbb{K}$ のことである[*2]．

ところで，$\forall x \in S$ に対して次のような関数 $\delta_x \in \mathbb{K}^{\oplus S}$ が存在する：

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}$$

この δ_x を x そのものと同一視してしまうことで，先述の $f \in \mathbb{K}^{\oplus (V \times W)}$ は

$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \quad {}^{\mathrm{w}/} \quad \lambda_i \coloneqq f(x_i) \in \mathbb{K}$$

[*2] これは集合論の記法である：ある集合 Λ から集合 A への写像 $a \colon \Lambda \longrightarrow A$ のことを Λ によって**添字づけられた** A の元の**族**と呼び，$\forall \lambda \in \Lambda$ に対して $a(\lambda) \in A$ のことを $\boldsymbol{a_\lambda}$ と書き，**$\boldsymbol{a \colon \Lambda \longrightarrow A}$ 自身のこと**を $\boldsymbol{(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}}$ と書くのである．なお，$\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ と書いたときは A の部分集合 $\{\, a(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda \,\} \subset A$ のことを意味する．

の形に一意的に書ける．[*3] この意味で，$\mathbb{K}^{\oplus(V\times W)}$ は $V\times W$ の元の**形式的な** $\mathbb{K}$ **係数線形結合**全体がなす $\mathbb{K}$ ベクトル空間と言うことができ，集合 $V\times W$ 上の**自由ベクトル空間**と呼ばれる．自由加群の特別な場合と言っても良い．自由ベクトル空間は次の普遍性によって特徴づけられる：

補題 2.7.1: 自由ベクトル空間の普遍性

任意の集合 S および任意の $\mathbb{K}$ ベクトル空間 $Z\in\mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ を与える．包含写像

$$\iota\colon S\longrightarrow\mathbb{K}^{\oplus S},\ x\longmapsto\delta_x$$

を考える．このとき，任意の写像 $f\colon S\longrightarrow Z$ に対して線型写像 $u\colon\mathbb{K}^{\oplus S}\longrightarrow Z$ が一意的に存在して，図式 2.2 を可換にする：

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & \forall Z \\
\mathbb{K}^{\oplus S} \arrow[ur, dashed, "\exists! u"] &
\end{tikzcd}$$

図 2.2: 自由ベクトル空間の普遍性

<u>**証明**</u> 写像

$$u\colon\mathbb{K}^{\oplus S}\longrightarrow Z,\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\delta_{x_i}\longmapsto\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$$

は右辺が有限和なので well-defined であり，$\forall x\in S$ に対して $u\bigl(\iota(x)\bigr)=f(x)$ を充たす．

別の線型写像 $g\colon\mathbb{K}^{\oplus S}\longrightarrow Z$ が $g\circ\iota=f$ を充たすとする．このとき $\forall x\in S$ に対して $g(\delta_x)=f(x)$ であるから，$\forall v=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\delta_{x_i}\in\mathbb{K}^{\oplus S}$ に対して

$$g(v)=g\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\delta_{x_i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g(\delta_{x_i})=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)=u(v)$$

が言える．よって $g=u$ である． ■

さて，自由加群の普遍性の図式とテンソル積の普遍性の図式はとても似ているので，$\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{W}\in\mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ の候補として $\mathbb{K}^{\oplus(V\times W)}$ を考えてみる．しかしそのままでは $\iota\colon V\times W\longrightarrow\mathbb{K}^{\oplus(V\times W)}$ が双線型写像になってくれる保証はない．そこで，

$$\begin{aligned}
\iota(\lambda v,\,w)&\sim\lambda\iota(v,\,w),\\
\iota(v,\,\lambda w)&\sim\lambda\iota(v,\,w),\\
\iota(v_1+v_2,\,w)&\sim\iota(v_1,\,w)+\iota(v_2,\,w),\\
\iota(v,\,w_1+w_2)&\sim\iota(v,\,w_1)+\iota(v,\,w_2)
\end{aligned}$$

[*3] というのも，このように書けば $\forall y\in S$ に対して

$$f(y)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\delta_{x_i}(y)=\begin{cases}f(x_i), & y=x_i\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

が言えるので．特に，この式の中辺は $\mathbb{K}$ の元の有限和なので意味を持つ．

を充たすような上手い同値関係による商ベクトル空間を構成する．

命題 2.7.2: テンソル積の構成

$\mathbb{K}^{\oplus(V\times W)}$ の部分集合

$$
\begin{aligned}
S_1 &:= \bigl\{\iota(\lambda v,\, w) - \lambda\iota(v,\, w) \bigm| \forall v \in V,\, \forall w \in W,\, \forall \lambda \in \mathbb{K}\bigr\},\\
S_2 &:= \bigl\{\iota(v,\, \lambda w) - \lambda\iota(v,\, w) \bigm| \forall v \in V,\, \forall w \in W,\, \forall \lambda \in \mathbb{K}\bigr\},\\
S_3 &:= \bigl\{\iota(v_1 + v_2,\, w) - \iota(v_1,\, w) - \iota(v_2,\, w) \bigm| \forall v_1,\, \forall v_2 \in V,\, \forall w \in W,\, \forall \lambda \in \mathbb{K}\bigr\},\\
S_4 &:= \bigl\{\iota(v,\, w_1 + w_2) - \iota(v,\, w_1) - \iota(v,\, w_2) \bigm| \forall v \in V,\, \forall w_1,\, w_2 \in W,\, \forall \lambda \in \mathbb{K}\bigr\}
\end{aligned}
$$

の和集合 $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ が生成する $\mathbb{K}$ ベクトル空間[a]を $\mathcal{R}$ と書き，商ベクトル空間 $\mathbb{K}^{\oplus(V\times W)}/\mathcal{R}$ の商写像を

$$
\pi\colon \mathbb{K}^{\oplus(V\times W)} \longrightarrow \mathbb{K}^{\oplus(V\times W)}/\mathcal{R},\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \iota(v_i,\, w_i) \longmapsto \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \iota(v_i,\, w_i)\right) + \mathcal{R}
$$

と書き，$\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w} := \pi\bigl(\iota(v,\, w)\bigr)$ とおく．このとき，

- $\mathbb{K}$ ベクトル空間 $\boldsymbol{\mathbb{K}^{\oplus(V\times W)}/\mathcal{R}}$
- 写像 $\boldsymbol{\Phi} = \pi \circ \iota\colon V \times W \longrightarrow \boldsymbol{\mathbb{K}^{\oplus(V\times W)}/\mathcal{R}},\ (v,\, w) \longmapsto v \otimes w$

の組は $V,\, W$ のテンソル積である．

[a] これらの元の形式的な $\mathbb{K}$ 係数線型結合全体が成すベクトル空間のこと．

<u>**証明**</u> まず，$\boldsymbol{\Phi}$ が双線型写像であることを示す．商ベクトル空間の和とスカラー乗法の定義から

$$
\begin{aligned}
\Phi(\lambda v,\, w) &= \iota(v,\, w) + \mathcal{R} = \bigl(\lambda\iota(v,\, w) + \iota(\lambda v,\, w) - \lambda\iota(v,\, w)\bigr) + \mathcal{R}\\
&= \lambda\iota(v,\, w) + \mathcal{R} = \lambda\bigl(\iota(v,\, w) + \mathcal{R}\bigr) = \lambda\Phi(v,\, w)\\
\Phi(v_1 + v_2,\, w) &= \iota(v_1 + v_2,\, w) + \mathcal{R} = \bigl(\iota(v_1,\, w) + \iota(v_2,\, w) + \iota(v_1 + v_2,\, w) - \iota(v_1,\, w) - \iota(v_2,\, w)\bigr) + \mathcal{R}\\
&= \bigl(\iota(v_1,\, w) + \iota(v_2,\, w)\bigr) + \mathcal{R} = \bigl(\iota(v_1,\, w) + \mathcal{R}\bigr) + \bigl(\iota(v_2,\, w) + \mathcal{R}\bigr)\\
&= \Phi(v_1,\, w) + \Phi(v_2,\, w)
\end{aligned}
$$

が言える．第 2 引数に関しても同様であり，$\boldsymbol{\Phi}$ は双線型写像である．

次に，上述の構成がテンソル積の普遍性を充たすことを示す．$\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ と任意の双線型写像 $f\colon V \times W \longrightarrow Z$ を与える．自由ベクトル空間の普遍性から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$
\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & \forall Z \\
\mathbb{K}^{\oplus(V\times W)} \arrow[ur, dashed, "\exists! \overline{f}"] &
\end{tikzcd}
$$

が存在する．f が双線型なので，

$$
\begin{aligned}
\overline{f}\bigl(\iota(\lambda v,\, w)\bigr) &= f(\lambda v,\, w) = \lambda f(v,\, w) \\
&= \lambda \overline{f}\bigl(\iota(v,\, w)\bigr) = \overline{f}\bigl(\lambda\iota(v,\, w)\bigr), \\
\overline{f}\bigl(\iota(v_1 + v_2,\, w)\bigr) &= f(v_1 + v_2,\, w) = f(v_1,\, w) + f(v_2,\, w) \\
&= \overline{f}\bigl(\iota(v_1,\, w)\bigr) + \overline{f}\bigl(\iota(v_2,\, w)\bigr) = \overline{f}\bigl(\iota(v_1,\, w) + \iota(v_2,\, w)\bigr)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．第 2 引数についても同様なので，$\mathcal{R} \subset \operatorname{Ker} \overline{f}$ である．よって準同型定理から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$
\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & \forall Z \\
\mathbb{K}^{\oplus(V \times W)} \arrow[ur, dashed, "\exists! \overline{f}"] \arrow[d, "\pi"'] & \\
\mathbb{K}^{\oplus(V \times W)}/\mathcal{R} \arrow[uur, dashed, "\exists! u"'] &
\end{tikzcd}
$$

が存在する．この図式の外周部はテンソル積の普遍性の図式である． ■

命題 2.7.3: 有限次元テンソル積の基底

有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V,\, W$（$\dim V =: n,\ \dim W =: m$）を与える．$V,\, W$ の基底をそれぞれ $\{e_1,\, \dots,\, e_n\},\ \{f_1,\, \dots,\, f_m\}$ と書く．このとき，集合

$$
\mathcal{E} := \bigl\{\, e_\mu \otimes f_\nu \bigm| 1 \le \mu \le n,\, 1 \le \nu \le m \,\bigr\}
$$

は $V \otimes W$ の基底である．従って $\dim V \otimes W = nm$ である．

証明 テンソル積の構成から，$\forall t \in V \otimes W$ は有限個の $(v_i,\, w_i) \in V \times W$ $(i = 1, \dots l)$ を使って

$$
t = \left(\sum_{i=1}^{l} t_i \iota(v_i,\, w_i)\right) = \sum_{i=1}^{l} t_i v_i \otimes w_i
$$

と書ける．$v_i = {v_i}^\mu e_\mu,\ w_i = {w_i}^\mu f_\mu$ のように展開することで，

$$
\begin{aligned}
t &= \sum_{i=1}^{l} t_i ({v_i}^\mu e_\mu) \otimes ({w_i}^\nu f_\nu) \\
&= \sum_{i=1}^{l} t_i {v_i}^\mu {w_i}^\nu e_\mu \otimes f_\nu
\end{aligned}
$$

と書ける．ただし添字 $\mu,\, \nu$ に関しては Einstein の規約を適用した．従って $\mathcal{E}$ は $V \otimes W$ を生成する．

$\mathcal{E}$ の元が線型独立であることを示す．

$$
t^{\mu\nu} e_\mu \otimes e_\nu = 0
$$

を仮定する．$\{e_\mu\},\, \{f_\mu\}$ の双対基底をそれぞれ $\{\varepsilon^\mu\},\, \{\eta^\nu\}$ と書き，全ての添字の組み合わせ $(\mu,\, \nu) \in \{1,\, \dots,\, n\} \times \{1,\, \dots,\, m\}$ に対して双線型写像

$$
\tau^{\mu\nu} \colon V \times W \longrightarrow \mathbb{R},\ (v,\, w) \longmapsto \varepsilon^\mu(v)\eta^\nu(w)
$$

を定める．$\tau^{\mu\nu}$ は双線型なのでテンソル積の普遍性から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$
\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "\tau^{\mu\nu}"] \arrow[d, "\pi\circ\iota"'] & \mathbb{R} \\
\boldsymbol{V \otimes W} \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{\tau}^{\mu\nu}"'] &
\end{tikzcd}
$$

が存在する．このことは，

$$
\begin{aligned}
0 &= \overline{\tau}^{\mu\nu}(t^{\rho\sigma} e_\rho \otimes f_\sigma) \\
&= t^{\rho\sigma} (\overline{\tau}^{\mu\nu} \circ \pi \circ \iota)(e_\rho,\, f_\sigma) \\
&= t^{\rho\sigma} \tau^{\mu\nu}(e_\rho,\, f_\sigma) = t^{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

を意味する．従って $\mathcal{E}$ の元は線型独立である． ■

これでもまだ直接の計算には向かない．より具体的な構成を探そう．

任意の $\mathbb{K}$-ベクトル空間[*4] $V_1,\, \dots,\, V_n,\, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ に対して，集合

$$
\boldsymbol{L(V_1,\, \dots,\, V_n;\, W)} \coloneqq \left\{\, F\colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W \;\middle|\; F \text{ は多重線型写像} \,\right\}
$$

を考える．$L(V_1,\, \dots,\, V_n;\, W)$ の上の加法とスカラー乗法を $\forall v_i \in V_i,\, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ に対して

$$
\begin{aligned}
(F+G)(v_1,\, \dots,\, v_n) &\coloneqq F(v_1,\, \dots,\, v_n) + G(v_1,\, \dots,\, v_n), \\
(\lambda F)(v_1,\, \dots,\, v_n) &\coloneqq \lambda\bigl(F(v_1,\, \dots,\, v_n)\bigr)
\end{aligned}
$$

と定義すると $L(V_1,\, \dots,\, V_n;\, W)$ は $\mathbb{K}$ ベクトル空間になる．そして $\forall \omega_i \in V_i^*$ に対して，$\boldsymbol{\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_n}$ と書かれる $L(V_1,\, \dots,\, V_n;\, \mathbb{K})$ の元を

$$
\boldsymbol{\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_n} \colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow \mathbb{K},\ (v_1,\, \dots,\, v_n) \longmapsto \prod_{i=1}^{n} \omega_i(v_i)
$$

によって定義する．ただし右辺の総積記号は $\mathbb{K}$ の積についてとる．

命題 2.7.4:

有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V,\, W$（$\dim V \eqqcolon n,\, \dim W \eqqcolon m$）の基底をそれぞれ $\{e_\mu\},\, \{f_\nu\}$ と書き，その双対基底をそれぞれ $\{\varepsilon^\mu\},\, \{\eta^\mu\}$ と書く．このとき，集合

$$
\mathcal{B} \coloneqq \left\{\, \varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu \;\middle|\; 1 \le \mu \le n,\, 1 \le \nu \le m \,\right\}
$$

は $L(V,\, W;\, \mathbb{K})$ の基底である．従って $\dim L(V,\, W;\, \mathbb{K}) = nm$ である．

<u>証明</u> $\forall F \in L(V,\, W;\, \mathbb{K})$ を 1 つとり，全ての添字の組み合わせ $(\mu,\, \nu)$ に対して

$$
F_{\mu\nu} \coloneqq F(e_\mu,\, e_\nu)
$$

とおく．$\forall (v,\, w) \in V \times W$ を $v = v^\mu e_\mu$，$w = w^\nu f_\nu$ と展開すると，

$$
\begin{aligned}
F_{\mu\nu} \varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu (v,\, w) &= F_{\mu\nu} \varepsilon^\mu(v) \eta^\nu(w) \\
&= F_{\mu\nu} v^\mu w^\nu
\end{aligned}
$$

[*4] 有限次元でなくても良い．

が成り立つ．一方，双線型性から

$$F(v,\, w) = v^\mu w^\nu F(e_\mu,\, e_\nu) = F_{\mu\nu} v^\mu w^\nu$$

も成り立つので $F = F_{\mu\nu}\varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu$ が言えた．i.e. 集合 $\mathcal{B}$ は $L(V,\, W;\, \mathbb{K})$ を生成する．

次に，$\mathcal{B}$ の元が線型独立であることを示す．

$$F_{\mu\nu}\varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu = 0$$

を仮定する．全ての添字の組み合わせについて，$(e_\mu,\, f_\nu)$ に左辺を作用させることで，$F_{\mu\nu} = 0$ が従う．i.e. $\mathcal{B}$ の元は互いに線型独立である． ■

命題 2.7.5: テンソル積の構成その 2

任意の有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V,\, W$ に対して

$$L(V,\, W;\, \mathbb{K}) \cong V^* \otimes W^*$$

証明 写像

$$\begin{aligned}\Phi\colon V^* \times W^* &\longrightarrow L(V,\, W;\, \mathbb{K}),\\ (\omega,\, \eta) &\longmapsto \bigl((v,\, w) \longmapsto \omega(v)\eta(w)\bigr)\end{aligned}$$

は双線型写像なのでテンソル積の普遍性から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd} V^* \times W^* \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi\circ\iota"'] & L(V,\, W;,\, \mathbb{K}) \\ \boldsymbol{V^* \otimes W^*} \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{\Phi}"'] & \end{tikzcd}$$

が存在する．$V,\, W$（$\dim V = n,\, \dim W = m$）の基底をそれぞれ $\{e_\mu\},\, \{f_\nu\}$ と書き，その双対基底をそれぞれ $\{\varepsilon^\mu\},\, \{\eta^\mu\}$ と書く．命題 2.7.3 より $V^* \otimes W^*$ の基底として

$$\mathcal{E} := \left\{\, \varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu \;\middle|\; 1 \leq \mu \leq n,\, 1 \leq \nu \leq m \,\right\}$$

がとれ，命題 2.7.4 より $L(V,\, W;\, \mathbb{K})$ の基底として

$$\mathcal{B} := \left\{\, \varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu \;\middle|\; 1 \leq \mu \leq n,\, 1 \leq \nu \leq m \,\right\}$$

がとれる（記号が同じだが，違う定義である）．このとき，$\forall (v,\, w) \in V \times W$ に対して

$$\overline{\Phi}(\varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu)(v,\, w) = \overline{\Phi} \circ \pi \circ \iota(\varepsilon^\mu,\, \eta^\nu)(v,\, w) = \Phi(\varepsilon^\mu,\, \eta^\nu)(v,\, w) = \varepsilon^\mu(v)\eta^\nu(w) = \varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu(v,\, w)$$

が成り立つ（ただし，左辺の $\otimes$ は命題 2.7.2，右辺は命題 2.7.4 で定義したものである）ので，$\overline{\Phi}$ は $\mathcal{E}$ の元と $\mathcal{B}$ の元の 1 対 1 対応を与える．i.e. 同型写像である． ■

系 2.7.1:

任意の有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V,\, W$ に対して

$$L(V;\, W) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W) \cong V^* \otimes W$$

証明 写像

$$\begin{aligned}\Phi\colon V^* \times W &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W),\\ (\omega,\, w) &\longmapsto \bigl(v \longmapsto \omega(v)w\bigr)\end{aligned}$$

は双線型なので，テンソル積の普遍性から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd} V^* \times W \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi\circ\iota"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W) \\ \boldsymbol{V^* \otimes W} \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{\Phi}"'] & \end{tikzcd}$$

が存在する．$V,\, W$（$\dim V = n,\, \dim W = m$）の基底をそれぞれ $\{e_\mu\},\, \{f_\nu\}$ と書き，その双対基底をそれぞれ $\{\varepsilon^\mu\},\, \{\eta^\mu\}$ と書く．命題 2.7.3 より $V^* \otimes W*$ の基底として

$$\mathcal{E} \coloneqq \left\{\, \varepsilon^\mu \otimes f_\nu \;\middle|\; 1 \le \mu \le n,\, 1 \le \nu \le m \,\right\}$$

がとれる．一方，$\forall \omega \in V^*,\, \forall w \in W$ に対して

$$\omega \otimes w \coloneqq \Phi(\omega,\, w)\colon V \longrightarrow W,\; v \longmapsto \omega(v)w \tag{2.7.1}$$

とおくと $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W)$ の基底として

$$\mathcal{B} \coloneqq \left\{\, \varepsilon^\mu \otimes f_\nu \;\middle|\; 1 \le \mu \le n,\, 1 \le \nu \le m \,\right\}$$

がとれる[*5]（記号が同じだが，$\mathcal{E}$ とは違う定義である）．このとき，$\forall v \in V$ に対して

$$\overline{\Phi}(\varepsilon^\mu \otimes f_\nu)(v) = \overline{\Phi} \circ \pi \circ \iota(\varepsilon^\mu,\, f_\nu)(v) = \Phi(\varepsilon^\mu,\, f_\nu)(v) = \varepsilon^\mu(v) f_\nu = \varepsilon^\mu \otimes f_\nu(v)$$

が成り立つ（ただし，左辺の $\otimes$ は命題 2.7.2，右辺は (2.7.1) で定義したものである）ので，$\overline{\Phi}$ は $\mathcal{E}$ の元と $\mathcal{B}$ の元の 1 対 1 対応を与える．i.e. 同型写像である． ■

系 2.7.2:

任意の有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V_1,\, \ldots,\, V_n,\, W$ に対して

$$L(V_1,\, \ldots,\, V_n;\, W) \cong V_1^* \otimes \cdots \otimes V_n^* \otimes W$$

証明 命題 2.7.5, 系 2.7.1 をあわせて

$$L(V_1,\, \ldots,\, V_n;\, W) \cong L(V_1,\, \ldots,\, V_n;\, \mathbb{K}) \otimes W \cong V_1^* \otimes \cdots \otimes V_n^* \otimes W$$

を得る． ■

---

*5 $\forall F \in L(V;\, W)$ をとる．${F_\mu}^\nu \coloneqq \eta^\nu\bigl(F(e_\mu)\bigr)$ とおく．このとき $\forall v = v^\mu e_\mu \in V$ に対して

$${F_\mu}^\nu \varepsilon^\mu \otimes f_\nu(v) = {F_\mu}^\nu \varepsilon^\mu(v) f_\nu = {F_\mu}^\nu v^\mu f_\nu$$

一方で，線形性および双対基底の定義から

$$F(v) = v^\mu F(e_\mu) = v^\mu \eta^\nu\bigl(F(e_\mu)\bigr) f_\nu = v^\mu {F_\mu}^\nu f_\nu$$

が成り立つので $F = {F_\mu}^\nu \varepsilon^\mu \otimes f_\nu$ が言えた．i.e. $\mathcal{B}$ は $L(V;\, W)$ を生成する．
次に，$\mathcal{B}$ の元が線型独立であることを示す．

$${F_\mu}^\nu \varepsilon^\mu \otimes f_\nu = 0$$

を仮定する．$1 \le \forall \mu \le \dim V$ について右辺を e_μ に作用させることで ${F_\mu}^\nu f_\nu = 0$ が従うが，f_ν の線型独立性から ${F_\mu}^\nu = 0$ である．

2.7.1 $\mathfrak{g}$-加群と表現

まず，環上の加群の定義を復習する：

公理 2.7.1: 環上の加群の公理

- R を環とする．**左 R 加群** (left R-module) とは，可換群 $(M, +, 0)$ と写像[a]

$$\cdot : R \times M \to M, \ (a, x) \mapsto a \cdot x$$

の組 $(M, +, \cdot)$ であって，$\forall x, x_1, x_2 \in M, \ \forall a, b \in R$ に対して以下を充たすもののことを言う：

(LM1) $a \cdot (b \cdot x) = (ab) \cdot x$

(LM2) $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$

(LM3) $a \cdot (x_1 + x_2) = a \cdot x_1 + a \cdot x_2$

(LM4) $1 \cdot x = x$

ただし，$1 \in R$ は環 R の乗法単位元である．

- R を環とする．**右 R 加群** (left R-module) とは，可換群 $(M, +, 0)$ と写像

$$\cdot : M \times R \to M, \ (x, a) \mapsto x \cdot a$$

の組 $(M, +, \cdot)$ であって，$\forall x, x_1, x_2 \in M, \ \forall a, b \in R$ に対して以下を充たすもののことを言う：

(RM1) $(x \cdot b) \cdot a = x \cdot (ba)$

(RM2) $x \cdot (a + b) = x \cdot a + x \cdot b$

(RM3) $(x_1 + x_2) \cdot a = x_1 \cdot a + x_2 \cdot a$

(RM4) $x \cdot 1 = x$

- R, S を環とする．**(R, S) 両側加群** ((R, S)-bimodule) とは，可換群 $(M, +, 0)$ と写像

$$\begin{aligned} \cdot_{\mathrm{L}} &: R \times M \to M, \ (a, x) \mapsto a \cdot_{\mathrm{L}} x \\ \cdot_{\mathrm{R}} &: M \times R \to M, \ (x, a) \mapsto x \cdot_{\mathrm{R}} a \end{aligned}$$

の組 $(M, +, \cdot_{\mathrm{L}}, \cdot_{\mathrm{R}})$ であって，$\forall x \in M, \ \forall a \in R, \ \forall b \in S$ に対して以下を充たすもののことを言う：

(BM1) 左スカラー乗法 $\cdot_{\mathrm{L}}$ に関して M は左 R 加群になる

(BM2) 右スカラー乗法 $\cdot_{\mathrm{R}}$ に関して M は右 S 加群になる

(BM3) $(a \cdot_{\mathrm{L}} x) \cdot_{\mathrm{R}} b = a \cdot_{\mathrm{L}} (x \cdot_{\mathrm{R}} b)$

[a] この写像 $\cdot$ は**スカラー乗法** (scalar multiplication) と呼ばれる．

R が**可換環**の場合，**(LM1)** と **(RM1)** が同値になるので，左 R 加群と右 R 加群の概念は同値になる．これを単に **R 加群** (R-module) と呼ぶ．

R が**体**の場合，R 加群のことを **R-ベクトル空間**と呼ぶ．

! 以下では，なんの断りもなければ R 加群と言って左 R 加群を意味する．

$\mathfrak{g}$ を体 $\mathbb{K}$ 上の Lie 代数とする．このとき，環上の加群の公理を少し修正することで Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上の加群の概念を得る：

公理 2.7.2: Lie 代数上の加群

$\mathfrak{g}$ を体 $\mathbb{K}$ 上の Lie 代数とする．**$\mathfrak{g}$-加群**とは，$\mathbb{K}$-ベクトル空間 $(V,\, +,\, \cdot\,)$ と写像

$$\blacktriangleright\colon \mathfrak{g}\times V \longrightarrow V,\ (x,\, v) \longmapsto x \blacktriangleright v$$

の 4 つ組 $(V,\, +,\, \cdot\, ,\, \blacktriangleright)$ であって，$\forall x,\, x_1,\, x_2 \in \mathfrak{g},\ \forall v,\, v_1,\, v_2 \in V,\ \forall \lambda,\, \mu \in \mathbb{K}$ に対して以下を充たすもののことを言う：

(M1) $(\lambda\cdot x_1 + \mu\cdot x_2) \blacktriangleright v = \lambda\cdot(x_1 \blacktriangleright v) + \mu\cdot(x_2 \blacktriangleright v)$

(M2) $x \blacktriangleright (\lambda\cdot v_1 + \mu\cdot v_2) = \lambda\cdot(x \blacktriangleright v_1) + \mu\cdot(x \blacktriangleright v_2)$

(M3) $[x, y] \blacktriangleright v = x \blacktriangleright (y \blacktriangleright v) - y(\blacktriangleright x \blacktriangleright v)$

同値な定義として，Lie 代数の表現

$$\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V),\ x \longmapsto \big(v \mapsto \phi(x)(v)\big)$$

について

$$\blacktriangleright\colon \mathfrak{g}\times V \longrightarrow V,\ (x,\, v) \longmapsto \phi(x)(v)$$

とおくことで得られる 4 つ組 $(V,\, +,\, \cdot\, ,\, \blacktriangleright)$ のことである[a]．

[a] 【例??】より $\mathfrak{gl}(V)$ の Lie ブラケットは交換子だったので $[x,y] \blacktriangleright \text{-} = \phi([x,y]) = [\phi(x),\phi(y)] = \phi(x)\circ\phi(y) - \phi(y)\circ\phi(x) = x \blacktriangleright (y \blacktriangleright \text{-}) - y \blacktriangleright (x \blacktriangleright \text{-})$ となる．

! $\mathfrak{g}$-加群に備わっている 3 つの演算（加法，スカラー乗法，左作用）をいちいち全て明記するのは面倒なので $(V,\, +,\, \cdot\, ,\, \blacktriangleright)$ のことを「**$\mathfrak{g}$-加群 V**」と略記する．この略記において，今まで通りスカラー乗法 $\cdot$ は省略して λv の様に書き，左作用はなんの断りもなく $x \blacktriangleright v$ の様に書くことにする．

全く同様に代数上の加群，結合代数上の加群を定義することもできるが，本章では以降 $\mathfrak{g}$-加群と言ったら Lie 代数上の加群を指すことにする．Lie 代数の表現を考えることは $\mathfrak{g}$-加群を考えることと同値なのである．

定義 2.7.2: $\mathfrak{g}$-加群の準同型

$\mathfrak{g}$ を Lie 代数，V, W を $\mathfrak{g}$-加群とする．線型写像 $f\colon V \longrightarrow W$ が **$\mathfrak{g}$-加群の準同型** (homomorphism of $\mathfrak{g}$-module) [a] であるとは，$\forall x \in \mathfrak{g},\ \forall v \in V$ に対して

$$f(x \blacktriangleright v) = x \blacktriangleright f(v)$$

が成り立つこと[b]．

[a] **同変写像** (equivalent map) と言うこともある．**絡作用素** (intertwining operator)，**インタートウィナー** (intertwiner) と言う場合もあるが，そこまで普及していない気がする．

[b] スカラー乗法についての線型性の定義を $\blacktriangleright$ について拡張しただけ．

- $\mathfrak{g}$-加群の準同型 $f\colon V \longrightarrow W$ が**同型** (isomorphism) であるとは，f がベクトル空間の同型写像であることを言う．
- 同型な $\mathfrak{g}$-加群のことを，**同値な $\mathfrak{g}$ の表現** (equivalent representation of $\mathfrak{g}$) とも言う．

定義 2.7.3: 部分 $\mathfrak{g}$-加群

$\mathfrak{g}$-加群 V を与える．部分集合 $W \subset V$ が**部分 $\mathfrak{g}$-加群**であるとは，W が和，スカラー乗法，$\mathfrak{g}$ の左作用の全てについて閉じていること．i.e. $\forall w,\ w_1,\ w_2 \in W,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &\in W \\ \lambda w &\in W \\ x \blacktriangleright w &\in W \end{aligned}$$

が成り立つことを言う．

定義 2.7.4: Lie 代数の表現の既約性

- $\mathfrak{g}$-加群 V が**既約** (irreducible)[a]であるとは，V の部分 $\mathfrak{g}$-加群が $0,\ V$ のちょうど2つ[b]だけであることを言う．
- $\mathfrak{g}$-加群 V が**完全可約** (completely reducible) であるとは，V が既約な部分 $\mathfrak{g}$-加群の直和であることを言う．

[a] i.e. Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現 $(\phi,\ V)$ が**既約表現** (irreducible representation; irrep) だ，と言っても良い．

[b] つまり，零ベクトル空間 0 は既約な $\mathfrak{g}$-加群とは呼ばない．

命題 2.7.6: 完全可約性

以下の 2 つは同値である：

(1) $\mathfrak{g}$-加群 V が完全可約

(2) V の任意の部分 $\mathfrak{g}$-加群 $W \subset V$ に対して，部分 $\mathfrak{g}$-加群 $W^c \subset V$ [a]が存在して $V \cong W \oplus W^c$ を充たす．

[a] W の補空間 (complement) と言う．

証明 ■

2.7.2 表現の Casimir 元

2.7.3 Weyl の定理

2.7.4 Jordan 分解の保存

2.8 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の表現

2.8.1 ウエイトと極大ベクトル

2.8.2 既約加群の分類

2.9 ルート空間分解

2.9.1 極大トーラスとルート

2.9.2 極大トーラスの中心化代数

2.9.3 直交性

2.9.4 整性

2.9.5 有理性