第 6 章

表現定理

この章では，$\mathfrak{g}$ は標数 0 の代数閉体 $\mathbb{K}$ 上の半単純 Lie 代数とし，$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の極大トーラス，Φ をルート系，$\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ を Φ の底，$\mathscr{W}$ を Weyl 群とする．

6.1 表現のウエイトと極大ベクトル

$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ で考えたウエイトを一般化する．$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の場合，極大トーラス $\mathfrak{h}$ は 1 次元線型空間だったので，ウエイトは固有値として定義された．$\mathfrak{h}$ が一般の次元の場合は，ルートのように $\mathfrak{h}^*$ の元として定義する．ルートと異なる点は，表現が随伴表現とは限らないことだけである．

6.1.1 ウエイト空間

定義 6.1.1: 表現のウエイト，ウエイト空間，ウエイトの集合

V を $\mathfrak{g}$-加群とし，極大トーラス $\mathfrak{h}$ を一つ固定する．$\lambda \in h^*$ に対し，

$$V_\lambda := \left\{ v \in V \;\middle|\; h \blacktriangleright v = \lambda(h)v \;(\forall h \in \mathfrak{h}) \right\}$$

が定義される．この内 $V_\lambda \neq 0$ のものを，**ウエイト空間** (weight space) と呼び，λ を V の**ウエイト** (weight)（より正確には $\mathfrak{h}$ の V 上のウエイト）と呼ぶ．
また V の**ウエイトの集合**を

$$\Pi(V) := \left\{ \mu \in \mathfrak{h}^* \;\middle|\; V_\mu \neq 0 \right\}$$

と定義する．

補題 6.1.1:

(1) $V' := \sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$ はベクトル空間の直和で，V の部分 $\mathfrak{g}$-加群．
(2) V が有限次元の場合，$V = V'$．
(3) $\mathfrak{g}_\alpha \blacktriangleright V_\lambda = V_{\lambda+\alpha}$，$(\forall \lambda \in \mathfrak{h}^*,\ \forall \alpha \in \Phi)$.

証明 (1) ウエイト $\lambda, \lambda' \in \mathfrak{h}$ に対し，$v \in V_\lambda \cap V'_\lambda \setminus \{0\}$ とする．任意の h に対し，

$$h \blacktriangleright v = \lambda(h)v = \lambda'(h)v \quad \Longleftrightarrow \quad (\lambda(h) - \lambda'(h))v = 0$$

であるから，$v \neq 0$ より $\lambda = \lambda'$ となる．よって，直和となる．

(2) $\mathfrak{g}$ は半単純なので，系??より $\mathfrak{h}^*$ の元を同時対角化できる．

(3) $x \in \mathfrak{g}_\alpha$，$h \in \mathfrak{h}$，$v \in V_\lambda$ とすると，

$$h \blacktriangleright (x \blacktriangleright v) = x \blacktriangleright (h \blacktriangleright v) + [h, x] \blacktriangleright v = (\lambda(h) + \alpha(h))(x \blacktriangleright v)$$

より，$\mathfrak{g}_\alpha \blacktriangleright V_\lambda = V_{\lambda+\alpha}$ となる．

■

6.1.2 最高ウエイト加群

極大ベクトルも同様に一般化する．

定義 6.1.2: ウエイトの極大ベクトル

$\mathfrak{g}$-加群 V に対し，ルートの底 Δ を固定する．V のそのウエイト λ の固有空間の元 $v^+ \neq 0$ が，

$$\mathfrak{g}_\alpha \blacktriangleright v^+ = 0 \quad (\forall \alpha \succ 0) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{g}_\alpha \blacktriangleright v^+ = 0 \quad (\forall \alpha \in \Delta)$$

を満たすとき，v^+ を**極大ベクトル** (maximal vector) と呼ぶ.

$\Longleftarrow$ は，命題??の $[g_\alpha, g_\beta] = g_{\alpha+\beta}$ より言える．

無限次元では存在は保証されない．一方有限次元では Borel 部分代数（極大可解部分代数，第 4 章）$\mathfrak{b}(\Delta) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ $(\mathfrak{n}^+ = \oplus_{\alpha \succ 0} \mathfrak{g}_\alpha)$ を考えると，Lie の定理と g_α の冪零性から，$\mathfrak{g}_\alpha$ の作用で 0 になるような $\mathfrak{b}(\Delta)$ の共通の固有ベクトルが存在する．

極大ベクトルで生成される $\mathfrak{g}$-加群を考える．

定義 6.1.3: 最高ウエイト加群

ウエイト λ の極大ベクトル v^+ と，$\mathfrak{g}$ の普遍包絡代数 $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ に対し，

$$V = \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \blacktriangleright v^+$$

を満たすとき，λ を V の**最高ウエイト** (highest weight) と呼び，V は（ウエイト λ の）**最高ウエイト加群**（または標準巡回 (stnadard cyclic) 加群）と呼ぶ.

最高ウエイト加群の構造は単純．命題??より，正ルート α に対し，$x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ を選ぶと，$y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ が存在し，$[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha \in \mathfrak{h}$ となる．

ルート系 $(\mathbb{E}, \Phi)$ で定義された半順序同様に，Lie 代数のウエイトの**半順序** $\prec \subset \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^*$ を

$$\mu \prec \lambda \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists! \{k_\alpha\}_{\alpha \in \Delta} \in \prod_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R}_{\geq 0},\ \lambda - \mu = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$$

と定義する．

補題 6.1.2:

加群 M の部分加群 N に対し,

$$N \text{ が極大} \iff \text{商加群 } M/N \text{ は既約}$$

証明 $\Leftrightarrow$ のどちらも対偶を示す.
($\Rightarrow$) 商加群の非自明部分加群 K が存在したとすると, $N \subsetneq K + N \subsetneq M$ より, N は極大でない.
($\Leftarrow$)$N \subsetneq K \subsetneq M$ を満たす部分加群 K が存在したとすると, M/K は M/N の非自明部分加群である. ■

定理 6.1.1:

V を最高ウエイト $\mathfrak{g}$-加群, λ を最高ウエイト, $v^+ \in V_\lambda$ を極大ベクトル, $\Phi^+ = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ を正ルートの集合とする.

(1) $V = \mathrm{Span}\{y_{\beta_1}^{i_1} \cdots y_{\beta_m}^{i_m} \blacktriangleright v^+ \ (i_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0})\}$. 特に, ウエイト空間の直和である.
(2) V の任意のウエイトについて, $\mu \prec \lambda$（最高ウエイトと呼ばれる所以).
(3) $\forall \mu \in \mathfrak{h}^*$ に対し, $\dim V_\mu < \infty$. また, $\dim V_\lambda = 1$.
(4) 任意の V の部分加群はウエイト空間の直和.
(5) V は直既約 $\mathfrak{g}$-加群であり, 唯一の極大部分加群と対応する既約な商 $\mathfrak{g}$-加群をもつ.
(6) 全ての非零な準同型な V の像もウエイト λ の最高ウエイト加群.

証明 **(1)** $\mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\alpha \prec 0} \mathfrak{g}_\alpha$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}(\Delta)$ を Borel 部分代数とする. 普遍包絡代数上の加群の定義と PBW 定理（の系??）より,

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \blacktriangleright v^+ = \mathfrak{U}(\mathfrak{n}^-)\mathfrak{U}(\mathfrak{b}) \blacktriangleright v^+ = \mathfrak{U}(\mathfrak{n}^-) \blacktriangleright (\mathbb{K}v^+) \quad (\because \mathfrak{b} \text{ の共通の固有ベクトル})$$

$\mathfrak{U}(\mathfrak{n}^-)$ の基底は $y_{\beta_1}^{i_1} \cdots y_{\beta_m}^{i_m}$ だったから, V はこのベクトルの集合で張られる.

(2) 補題 6.1.1 より,

$$v := y_{\beta_1}^{i_1} \cdots y_{\beta_m}^{i_m} v^+ \tag{6.1.1}$$

のウエイトは $\mu = \lambda - \sum_j i_j \beta_j$ であり, $\beta_j \in \Phi^+$ は単純ルートの和だったから, $\mu \prec \lambda$.

(3) $\sum_j i_j \beta_j = \sum_{i=1}^{l} k_i \alpha_i$ を満たす (i_j, β_j) の組み合わせは高々有限個だから, $\dim V_\mu < \infty$. 特に, ウエイト λ を持つ (6.1.1) の形のベクトルは v^+ しかないので, $\dim V_\mu = 1$.

(4) W を V の部分加群とする, $\forall w \in W \subset V$ は異なるウエイト空間 V_{μ_i} の元 v_i の和で書ける. $\forall v_i \in W$ を背理法で示す.
W は線型空間なので, $w = v_1 + \cdots + v_n \in W$, ($\forall v_i \notin W$) を（背理法の仮定として）仮定して良い.
$n = 1$ はあり得ないので, $n > 1$ とする. ここで,

$$\exists h \in \mathfrak{h}, \quad h \blacktriangleright w = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(h) v_i \in W \ \ \mu_1(h) \neq \mu_2(h)$$

とでき,

$$(h - \mu_1(h)1) \blacktriangleright w = \sum_{i=2}^{n} (\mu_i(h) - \mu_1(h)) v_i \in W \setminus \{0\}$$

となる. これを繰り返すと, $v_n \in W$ となり矛盾する.

(5) V の部分加群が V_λ を含むと，(1) より V 自身となる．(4) と合わせて，V の非自明な部分 $\mathfrak{g}$-加群は V_λ 以外のウエイト空間の直和でかけるから，これら全ての部分加群の和 W も部分 $\mathfrak{g}$-加群である．よって V は，唯一の極大部分加群 W と唯一の既約な商 $\mathfrak{g}$-加群（補題 6.1.2）をもつ．全ての非自明部分加群は W に含まれ，V_λ を含まないから，V は部分加群の和で表せない．i.e. 直既約 $\mathfrak{g}$-加群である．

(6) (1) の生成系を実際に準同型で送ったものなので，最高ウエイト加群．

■

系 6.1.2: $\mathfrak{g}$-加群の極大ベクトルの唯一性

既約な最高ウエイト $\mathfrak{g}$-加群 V の，（最高ウエイト λ の）v^+ は高々スカラー倍の違いを除いて唯一．

証明 w^+ をウエイト λ' の極大ベクトルとすると，$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \blacktriangleright w^+$ は V の部分加群である．V は既約だったので，$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \blacktriangleright w^+ = V$．定理 6.1.1(2) より，$\lambda = \lambda'$．よって定理 6.1.1(3) より，$w^+$ は v^+ のスカラー倍． ■

6.1.3　存在と唯一性

各ウエイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対し，（同型を除いて）唯一の既約な最高ウエイト $\mathfrak{g}$-加群が存在する事を示す（無限次元でも成立）．唯一性の方の証明は，第 4 章 14.2 の定理の証明と似ている上に単純になっているらしい．

定理 6.1.3: 唯一性

V, W を最高ウエイト λ の最高ウエイト加群とする．V, W が共に既約ならば同型．

証明 $\mathfrak{g}$-加群 $X = V \oplus W$ を考える．v^+, w^+ をそれぞれ V, W のウエイト λ の極大ベクトルとすると，

$$X = V \oplus W = (\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \blacktriangleright v^+) \oplus (\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \blacktriangleright w^+) = \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \blacktriangleright (v^+, w^+)$$

より $x^+ = (v^+, w^+)$ は X のウエイト λ の極大ベクトルとなる．x^+ で生成される X の（最高ウエイト）部分加群を Y とし，$p\colon\ Y \to V,\ p'\colon\ Y \to W$ をそれぞれ X の第一，第二引数を取ってくる射影に誘導される写像とすると，

$$\begin{aligned} p(x^+) = v^+, \quad p'(x^+) = w^+ \\ \operatorname{Im} p = V, \quad \operatorname{Im} p' = W \end{aligned}$$

より，$p,\ p'$ は共に $\mathfrak{g}$-加群の全射準同型．

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "p''"] \arrow[d, "p"'] & W \\ V \arrow[ur, "\sim"'] & \end{tikzcd}$$

よって加群の同型定理と定理 6.1.1(5) より，V, W は最高ウエイト加群 Y の既約な商加群として同型． ■

存在について，まず，**Verma 加群**と呼ばれる最高ウエイト加群 $M(\lambda)$ を 2 通りの方法で構成する．

まずは誘導加群の方法．Borel 部分代数を $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}(\Delta)$ とすると，$\mathfrak{b}$-加群としての最高ウエイト加群は極大ベクトル v^+ で生成される一次元部分加群を含む．よってまずは $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ を固定し，v^+ を基底に持つ一次元ベクトル空間 $\mathbb{K}_\lambda$ に対し，$\mathbb{K}_\lambda$ 上の $\mathfrak{b}$ の作用を

$$\begin{aligned} h \blacktriangleright v^+ &= \lambda(h)v^+ && (h \in \mathfrak{h}) \\ x_\alpha \blacktriangleright v^+ &= 0 && (x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha,\ \alpha \in \Phi^+) \end{aligned}$$

と定義する．$\mathbb{K}_\lambda$ は $\mathfrak{b}$-加群となる．それと同時に $\mathbb{K}_\lambda$ は $\mathfrak{U}(\mathfrak{b})$-加群でもあるので，テンソル積

$$M(\lambda) = \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathfrak{U}(\mathfrak{b})} \mathbb{K}_\lambda$$

を定義すると，自然な左作用

$$x \blacktriangleright (y \otimes v) = (xy) \otimes v, \quad (x, y \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}),\ v \in \mathbb{K}_\lambda)$$

により $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$-加群となる．

次に $M(\lambda)$ がウエイト λ の最高ウエイト加群であることを示す．$1 \otimes v^+$ は $M(\lambda)$ を生成する．また，PBW 定理の系??より，$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \simeq \mathfrak{U}(\mathfrak{n}^-) \otimes \mathfrak{U}(\mathfrak{b})$ は自由 $\mathfrak{U}(\mathfrak{b})$-加群であったから，$1 \otimes v^+$ は非零である．よって，$1 \otimes v^+$ はウエイト λ の極大ベクトルである．よって，$M(\lambda)$ を $\mathfrak{U}(\mathfrak{n}^-)$-加群と見ることができ，

$$M(\lambda) \simeq \mathfrak{U}(\mathfrak{n}^-) \otimes \mathbb{K} \simeq \mathfrak{U}(\mathfrak{n}^-)$$

となる．特に右側の同型に対応して，$1 \otimes v^+ \simeq a \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \subset \mathfrak{U}(\mathfrak{n}^-)$.

次に生成系と関係式の方法で構成し，同型であることを示す．

正ルートの集合 Φ^+ および，$h_\alpha - \lambda(h_\alpha)1$ $(\alpha \in \Phi)$ で生成される左イデアルを $I(\lambda)$ とする．

$$I(\lambda) \blacktriangleright v^+ = 0$$

より，$\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$-加群の準同型定理から，$\mathfrak{U}(\mathfrak{g})/I(\lambda) \to M(\lambda)$ は $1 + I(\lambda) \mapsto 1 \otimes v^+$ となる．再び，PBW 定理の系??より，$\mathfrak{U}(\mathfrak{b}) + I(\lambda) \mapsto \mathbb{K}(1 \otimes v^+)$ となる．よって，この標準的射影は一対一対応であり，

$$U(\mathfrak{g})/I(\lambda) \simeq \mathfrak{U}(\mathfrak{n}^-) \otimes \mathbb{K} \simeq M(\lambda)$$

定理 6.1.4: 既約最高ウエイト加群の存在

$\forall \lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対し，ウエイト λ の既約な最高ウエイト加群 $L(\lambda)$ が存在する．

<u>**証明**</u> 上で構成された $M(\lambda)$ は，ウエイト λ の最高ウエイト加群で，唯一の極大部分加群 $Y(\lambda)$ をもつ（定理 6.1.1(4)）．よって，

$$L(\lambda) = M(\lambda)/Y(\lambda)$$

はウエイト λ の既約最高ウエイト加群（定理 6.1.1(5)）． ■

ウエイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ の既約最高ウエイト加群 $L(\lambda)$ は一意的に定まるから，$L(\lambda)$ のウエイトの集合を $\Pi(\lambda) := \Pi(V)$ と書く．

定理 6.1.5: 有限次元既約加群の構造

V を有限次元既約 $\mathfrak{g}$-加群とすると，

$$\exists \lambda \in \mathfrak{h}^*, \quad V \simeq L(\lambda)$$

証明 有限次元には，ウエイト λ の極大ベクトル v^+ の存在が保証されていた．$L(\lambda) = \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \blacktriangleright v^+$ は既約 $\mathfrak{g}$-加群 V の部分加群で，非零なので $V \simeq L(\lambda)$. ■

定義 6.1.4: 基本表現

半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対し，基本ウエイト λ_i に対する表現 $\rho \colon \mathfrak{g} \longrightarrow L(\lambda_i)$ を $\mathfrak{g}$ の**基本表現**（fundamental representation）と呼ぶ.

6.2 有限次元加群

既約（最高ウエイト）$\mathfrak{g}$-加群 $L(\lambda)$ が有限次元であるためのウエイト λ の条件を調べる.

6.2.1 有限次元である必要条件

各単純ルート α_i に対し，

$$\mathfrak{s}_i := \mathfrak{g}_{\alpha_i} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha_i} \oplus [\mathfrak{g}_{\alpha_i}, \mathfrak{g}_{-\alpha_i}] \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$$

とする ($\simeq$ は定理??)．$L(\lambda)$ は有限次元 $\mathfrak{s}_i$-加群でもあり，$\mathfrak{g}$ の極大ベクトル v^+ は $\mathfrak{s}_i$ の極大ベクトルでもある．特に，$\mathfrak{s}_i$ の極大トーラス $\mathfrak{h}_i = [\mathfrak{g}_{\alpha_i}, \mathfrak{g}_{-\alpha_i}]$ に対し，$h_i \in \mathfrak{h}_i$ の作用は，固有値 $\lambda(h_i)$ で完全に決まる．その固有値が非負整数になることは既に知っている.

定理 6.2.1: ウエイトの整性の必要性

最高ウエイト λ の有限次元既約 $\mathfrak{g}$-加群を $L(\lambda)$，単純ルートを α_i，$h_i \in \mathfrak{h}_{\alpha_i} = [\mathfrak{g}_{\alpha_i}, -\mathfrak{g}_{\alpha_i}]$ とすると，$\lambda(\mathfrak{h}_i)$ は非負整数.

証明 定理??. ■

この定理の系??より，最高ウエイトでない任意の V のウエイト μ でも成り立つ:

$$\mu(h_i) = [\![\mu, \alpha_i]\!] \in \mathbb{Z}, \quad (1 \leq i \leq l)$$

これは，ルート系の整ウエイトに対応している．これを Lie 代数の**整ウエイト**と呼ぶのは自然だろう．優，強い優ウエイト[*1]，基本優ウエイトも同様に定義され，当然，ルート系の整ウエイトに対する定理は全て成り立つ.

6.2.2 有限次元である十分条件

[*1] ルート系で定義した優ウエイトについては，優かつ整と呼ぶ方が親切かもしれないが，ここでは単に優と呼ぶことにする.

定理 6.2.2: ウエイトの優性の十分性

$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ を優ウエイトとする．このとき，
既約 $\mathfrak{g}$-加群 $V = L(\lambda)$ は有限次元．また，V のウエイトの集合 $\Pi(\lambda)$ は，Weyl 群 $\mathscr{W}$ の作用によって置換され，$\dim V_\mu = \dim V_{\sigma\mu}$，$\forall \sigma \in \mathscr{W}$ を満たす．

系 6.2.3:

$\lambda \mapsto L(\lambda)$ は，優ウエイト Λ^* と有限次元既約 $\mathfrak{g}$-加群（の同型の類）の一対一対応を誘導する．

証明 優ウエイトは整ウエイトなので，有限次元であるための必要条件を満たす．定理 6.1.5 より一対一対応． ■

十分条件を証明しよう．

補題 6.2.1:

半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の普遍包絡代数を $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$，単純ルートを $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$，$x_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i} \setminus \{0\}$，$y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i} \setminus \{0\}, h_i = [x_i, y_i] \in \mathfrak{h}$ とすると，任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$1 \leq i, j \leq l$ に対し以下が成り立つ．

(1) $[h_j,\ y_i^{k+1}] = -(k+1)\alpha_i(h_j)y_i^{k+1}$
(2) $[x_j,\ y_i^{k+1}] = -(k+1)y_i^k(k-h_i)\delta_{ij}$

ただし，δ_{ij} は Kronecker のデルタ．

証明 **(a)** k についての数学的帰納法．$k=0$ は半単純 Lie 代数の関係式より明らか．ある k で成り立つとき，

$$[h_j, y_i^{k+1}] = [h_j, y_i]y_i^k + y_i[h_j, y_i^k] = -\alpha_i(h_j)y_i^{k+2} - (k+1)\alpha_i(h_j)y_i^{k+2} = -(k+2)\alpha_i(h_j)y_i^{k+2}$$

より任意の k で成り立つ．

(b) $i \neq j$ の場合は，補題??より $\alpha_j - \alpha_i$ がルートでないことから従う．
$i = j$ のとき，$k = 0$ は y_i, h_i の選び方より明らか．ある k で成り立つとき，

$$[x_i, y_i^{k+1}] = [x_i, y_i]y_i^k + y_i^k[x_i, y_i] = h_i y_i^k - (k+1)y_i^{k+1}(k-h_i) = -(k+2)y_i^{k+1}(k-h_i)$$

より任意の k で成り立つ．

■

十分条件の証明のポイントは，V のウエイトが $\mathscr{W}$ で置換されることから $\Pi(\lambda)$ が有限個であることを示すことである（Serre の定理の証明同様）．

証明 g-加群 V を表現と見たい場合は ϕ とする．V のウエイト λ の極大ベクトルを v^+ とし，$m_i = \lambda(h_i)$ とする（仮定より λ は優ウエイトなので非負整数）．

Step 1: $w_i \coloneqq (y_i^{m_i+1} \blacktriangleright v^+) = 0$

$x_i \blacktriangleright v^+ = 0$ と補題 6.2.1(1) に注意すると，

$$x_i \blacktriangleright w_i = y_i^{m_i+1} \blacktriangleright (x_j \blacktriangleright v^+) - (m_i+1)y_i^{m_i} \blacktriangleright (m_i - m_i)v^+ = 0$$

となる．また，補題??より $\alpha_j-\alpha_i$ はルートでないから $x_j \blacktriangleright w_i = 0\ (1\le j\le l)$．もし $w\neq 0$ とすると，最高ウエイト $\lambda-(m_i+1)\alpha_i\neq\lambda$ が存在することになり．既約最高ウエイト加群の最高ウエイトの唯一性に反する．

Step 2: V **に非零な有限次元** $\mathfrak{s}_i$**-加群が含まれる**

部分空間 $V_i=\{v^+,\ y_i\blacktriangleright v^+,\ \dots,\ y_i^{m_i}\blacktriangleright v^+\}$ を考える．**(Step 1)** と合わせると y_i の作用について不変．補題 6.2.1(1) より x_i, h_i の作用についても不変．よって，$\mathfrak{s}_i$-加群として，V_i は V の部分加群．

Step 3: V **は有限次元部分** $\mathfrak{s}_i$**-加群の和**

$V'=\sum_{i=1}^l V_i$ とする．ここで，W を V の任意の有限次元 $\mathfrak{s}_i$-部分加群とすると，$x_i\blacktriangleright W,\ y_i\blacktriangleright W$ も有限次元 $\mathfrak{s}_i$-部分加群．命題??より，任意のルート $\alpha\in\Phi$，$x_\alpha=\mathfrak{g}_\alpha\setminus\{0\}$ に対し，$x_\alpha\blacktriangleright W$ は有限次元 $\mathfrak{s}_i$-部分加群となり，W の部分空間．よって，V' は $\mathfrak{g}$-加群．

V は既約で，**(Step 2)** より $V'\subset V$ は非零だったから，$V=V'$．

Step 4: $1\le i\le l$ **に対し，**$\phi(x_i)$，$\phi(y_i)$ **は** V **の局所冪零自己準同型**

補題 6.2.1，**(Step 1)** より，x_i, y_i の作用は局所冪零．Jordan 分解の保存より，$\phi(x_i)$，$\phi(y_i)$ も局所冪零．

Step 5: (Step 4) より $s_i=\exp\phi(x_i)\exp\phi(-y_i)\exp\phi(x_i)$ **は well-defined**　局所冪零の定義の後の文章参照のこと

Step 6: μ **を** V **のウエイトとすると，**$s_i(V_\mu)=V_{\sigma_i\mu}$ $(\sigma_i:\alpha_i$**に関する鏡映**$)$

(Step 3) より V_μ は有限次元 $\mathfrak{s}_i$-部分加群 $V'=V$ に含まれる．$s_i|_{V'}$ は存在しない $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ の既約表現の分類の自己同型 τ で，$s_i(V_\mu)=V_{\sigma_i\mu}$ が従う．

Step 7: ウエイトの集合 $\Pi(\lambda)$ **は** $\mathscr{W}$ **の作用で不変．また，**$\dim V_\mu=\dim V_{\sigma\mu}$ $(\forall\mu\in\Pi(\lambda),\ \forall\sigma\in\mathscr{W})$

Weyl 群 $\mathscr{W}$ は単純ルートに関する鏡映で生成されたから，**(Step 6)** より従う．

Step 8: $\Pi(\lambda)$ **は有限集合．**

補題??より，$\mu\prec\lambda$ を満たす優ウエイト μ の集合は有限なので，$\mathscr{W}$ で写した集合も有限．定理 6.1.1(2) より，$\Pi(\lambda)$ はこの部分集合だから，有限集合．

Step 9: V **は有限次元．**

定理 6.1.1(3) より V_μ $(\mu\in\Pi(\lambda))$ は有限次元．$\mu\in\Pi(\lambda)$ 上の和は有限和なので，定理 6.1.1(1) より V は有限次元．

■

6.2.3　ウエイト string とウエイト図

ここでも優ウエイト $\lambda\in\Lambda^+$ に対する有限次元既約 $\mathfrak{g}$-加群 $V=L(\lambda)$ を考える．
補題 6.1.1 より，部分加群 $W=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}V_{\mu+i\alpha}\subset V$ は S_α-不変．
$(\mu+\alpha\mathbb{Z})\cap\Pi(\lambda)$ なる整ウエイトの集合を $\boldsymbol{\alpha}$**-string through** $\boldsymbol{\mu}$ という．$\Pi(\lambda)$ は有限集合であったから，

$$r:=\max\left\{\,i\in\mathbb{Z}_{\ge 0}\ \middle|\ \mu-i\alpha\in\Pi(\lambda)\,\right\},$$
$$q:=\max\left\{\,i\in\mathbb{Z}_{\ge 0}\ \middle|\ \mu+i\alpha\in\Pi(\lambda)\,\right\}$$

が定義されるので，命題??と同様のものが成り立つ．

命題 6.2.1: α-string through μ の性質

$\alpha \neq \pm\mu$ を充たす任意の $\alpha \in \Phi$, $\mu \in \Pi(\lambda)$ に対して

$$\begin{aligned} r &\coloneqq \max\{\, i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \mu - i\alpha \in \Pi(\lambda) \,\}, \\ q &\coloneqq \max\{\, i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \mu + i\alpha \in \Pi(\lambda) \,\} \end{aligned}$$

とおく．このとき以下が成り立つ：

(1) α-string through μ は $\mathbb{E}$ の部分集合

$$\{\, \mu + i\alpha \in \mathbb{E} \mid -r \leq \lambda \leq q \,\}$$

に等しい．i.e.

$$i \in \mathbb{Z} \text{ かつ } \mu + i\alpha \in \Pi(\lambda) \implies -r \leq i \leq q$$

である．

(2) $\sigma_\alpha(\mu + i\alpha) = \mu - i\alpha$．i.e. α-string through μ は鏡映 σ_α の作用の下で不変である．

(3) $r - q = [\![\mu, \alpha]\!]$．特に α-string through μ の長さは 4 以下である．

(4) 優ウエイト λ に対し，$\Pi(\lambda)$ は飽和集合．

(5) 任意のウエイト μ について

$$\mu \in \Pi(\lambda) \iff \sigma(\mu) \prec \lambda \quad (\forall \sigma \in \mathscr{W})$$

証明 (1)-(3): 命題**??**の証明の Φ を $\Pi(\lambda)$ に，β を μ に直したもの．
(4): 以上から $\Pi(\lambda)$ は飽和集合の定義そのものを満たすと言える．
(5): 補題**??**と補題**??**を組み合わせると成り立つ． ■

ルートと $\Pi(\lambda)$ の元を書いた図を**ウエイト図** (weight diagram) と呼ぶ．あとで定義する重複度も書き込みたいので，具体例は次節に回す．

6.2.4 $L(\lambda)$ の生成系と関係式

$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \to M(\lambda) \to L(\lambda)$ という準同型を λ が優ウエイトの場合にさらに考察する．
$M(\lambda) = \mathfrak{U}(\mathfrak{g})/I(\lambda)$ であり，$I(\lambda)$ は $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ の左イデアルで，$M(\lambda)$ の極大ベクトル v^+ に対し，$I(\lambda) \blacktriangleright v^+ = 0$ となるものであった．
同様に $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ の左イデアルで，$L(\lambda)$ の極大ベクトルに作用すると 0 となるようなものを $J(\lambda)$ とする．
$I(\lambda) \subset J(\lambda)$ より，準同型

$$M(\lambda) = \mathfrak{U}(\mathfrak{g})/I(\lambda) \longrightarrow L(\lambda) \simeq \mathfrak{U}(\mathfrak{g})/J(\lambda)$$

を誘導する．また，定理 6.2.2 の証明 **(Step 1)** より，$y_i^{m_i+1} \in J(\lambda)$ である．

補題 6.2.2:

A を標数 0 の体 $\mathbb{K}$ 上の結合代数，$\operatorname{ad} y(z) = yz - zy$ $(y, z \in A)$ とすると，
$\forall y, z \in A$，$\forall k \in \mathbb{N}$ に対し，以下が成り立つ．

$$(\operatorname{ad} y^k)(z) = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (\operatorname{ad} y)^i (z) y^{k-i}$$

<u>**証明**</u> $(\operatorname{ad} y^1)(z) = (\operatorname{ad} y)^1(z)$．ある k で成り立つとき，以下より $k+1$ でも成り立つ．

$$\begin{aligned}(\operatorname{ad} y^{k+1})(z) &= \big(\operatorname{ad} y(z) y^k + \operatorname{ad} y^k(\operatorname{ad} y(z))\big) + \operatorname{ad} y^k(z) y = \sum_{i=1}^{k+1} \left(\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i} \right) (\operatorname{ad} y)^i(z) y^{k+1-i} \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k+1}{i} (\operatorname{ad} y)^i (z) y^{k+1-i}\end{aligned}$$

■

定理 6.2.4: $J(\lambda)$ の生成系

$\lambda \in \Lambda^+$，$m_i = [\![\lambda, \alpha_i]\!]$ $(1 \leq i \leq l)$ とすると，$J(\lambda)$ は $I(\lambda)$ と $y_i^{m_i+1}$ $(1 \leq i \leq l)$ で生成される．

<u>**証明**</u> $I(\lambda)$ と $y_i^{m_i+1}$ $(1 \leq i \leq l)$ で生成されるイデアルを $J'(\lambda)$ とする．まず，$L'(\lambda) = \mathfrak{U}(\mathfrak{g})/J'(\lambda)$ が有限次元であることを示す．
$I(\lambda) \subset J'(\lambda)$ より，$L'(\lambda)$ は $M(\lambda)$ の極大ベクトルに関する最高ウエイト加群．定理 6.2.2 の証明 **(Step 3)**「有限次元 $\mathfrak{s}_i$-部分加群の和」を示せば，**(Step 4)** 以降はそのまま使えて $L'(\lambda)$ は有限次元となる．その **(Step 3)** の証明の中でも，x_i，y_i が $L'(\lambda)$ 上局所冪零であることを示せば，有限次元となる．
x_i^k はウエイトを $k\alpha_i$ 増やすので，ある k で最高ウエイトを越えるため局所冪零．y_i^k については，まず定理 6.1.1(1) より，

$$V'(\lambda) = \operatorname{Span}\big\{ y_{i_1} \cdots y_{i_t} \;\big|\; 0 \leq i_j \leq l,\ t \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \big\}$$

である．ここで，補題 6.2.2 を $A = \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ に対して考えると α-string の長さは高々 4 だから，和は $i = 3$ で止まる．つまり，$[y^{k+3}, z] = (\text{多項式}) \times y_i^k$．よって，

$$y_i^k y_{i_1} \cdots y_{i_t} \in J'(\lambda) \quad \Longrightarrow \quad y_i^{k+3} y_{i_0} y_{i_1} \cdots y_{i_t} \in J'(\lambda)$$

となる．$J'(\lambda)$ の定義より $y_i^{m_i+1} \in J'(\lambda)$ だから，単項式の長さ t に関する帰納法より，y_i は局所冪零．
　よって，$L'(\lambda)$ は有限次元最高ウエイト加群（または 0）なので，定理 6.1.1(5) より直既約で，完全可約性に関する Weyl の定理より既約（または 0）．一方定義より $J'(\lambda) \subset J(\lambda)$ なので，$L(\lambda) \subset L'(\lambda)$（より 0 でない）．同型でないと，$L'(\lambda)$ の既約性に矛盾するから，

$$L(\lambda) \simeq L'(\lambda) \quad \Longleftrightarrow \quad J(\lambda) \simeq J'(\lambda)$$

■

6.3 重複度公式

この節では有限次元加群を考える．

定義 6.3.1: ウエイトの重複度

$\mu \in \mathfrak{h}^*$ を整ウエイト，$\lambda \in \Lambda^+$ を優ウエイトとする．有限次元既約 $\mathfrak{g}$-加群 $L(\lambda)$ に対し，ウエイト μ のウエイト空間の次元

$$m_\lambda(\mu) := \dim L(\lambda)_\mu$$

のことを $L(\lambda)$ における μ の**重複度** (multiplicity) と呼ぶ（$L(\lambda)$ のウエイトでなければ 0 とする）．

目標は，ウエイトの重複度 $m_\lambda(\mu)$ に対する再帰的公式である，Freudenthal の公式を示すこと．

6.3.1 普遍 Casimir 演算子

完全可約性に関する Weyl の定理の証明で出てきた，半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現 ϕ に対して定義された Casimir 演算子 $c_\phi = c_\phi(\beta)$ を思い出そう．これを普遍包絡代数 $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ の表現 ϕ に対する演算子と見ると，

$$\begin{aligned} c_\phi &:= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu)\phi(e^\mu) = \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu e^\mu) \\ &= \phi(c_{\mathfrak{g}}(\beta)) \quad \left(c_{\mathfrak{g}}(\beta) := \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} e_\mu e^\mu \right) \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

と書ける．$c_{\mathfrak{g}}(\beta)$ は陽に ϕ に依存していない[*2]．そこで ϕ として $\mathfrak{g}$ の随伴表現を考える．その跡形式を Killing 形式 κ と呼んでいた．半単純 Lie 代数の Killing 形式は非退化であったから，κ に関する双対基底（ここでも補題??のように，$\mathfrak{g}^*$ の基底ではなく $\mathfrak{g}$ の基底）を構成できる．
命題??より，α，$\beta \in \mathfrak{h}^*$ に対し，$\alpha \neq -\beta$ であれば g_α と g_β は直交する．よって，$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$ 及び $\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$ それぞれで Killing 形式を考えれば良い．
まず，$\{x_\alpha \in \mathfrak{g}\ (\forall \alpha \in \Phi)\}$ と単純ルート α_i に対する $\{h_i = [x_{\alpha_i}, x_{-\alpha_i}]\ (1 \leq i \leq l)\}$ で $\mathfrak{g}$ の基底を張る．
κ に関する双対をそれぞれ x^α，h^i とすると，命題??より $x^\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ で，

$$[x_\alpha, x^\alpha] = t_\alpha = \frac{(\alpha, \alpha)}{2} h_\alpha$$

となる．このときの (6.3.1) で定義した $c_{\mathfrak{g}}(\beta) = c_{\mathfrak{g}}(\kappa)$ に注目する．

*2 $\beta(x, y) = \mathrm{Tr}(\phi(x)\phi(y))$ としていたので陰に依存している

定義 6.3.2: 普遍 Casimir 演算子

半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の普遍包絡代数を $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$，極大トーラス $\mathfrak{h}$ の基底を $\{h_i\}_{i=1}^{l}$，$x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$，$h_i, x_\alpha$ を Killing 形式 κ に関して双対をとったものをそれぞれ h^i, x^α とする．

$$c_{\mathfrak{g}} := \sum_{i=1}^{l} h_i h^i + \sum_{\alpha\in\Phi} x_\alpha x^\alpha \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$$

を（Killing 形式に関する）**普遍 Casimir 演算子** (universal Casimir operator) と呼ぶ.

縮約をとっているので，$c_{\mathfrak{g}}$ は基底によらない．命題**??**より $c_\phi(\kappa) = \phi(c_{\mathfrak{g}})$ と $\phi(\mathfrak{g})$ は可換なので，ϕ が既約なら $\phi(c_{\mathfrak{g}})$ はスカラーとして作用する．
c_ϕ と $\phi(c_{\mathfrak{g}})$ の関係を調べる．そのために ϕ の跡形式 $\beta(x,y) = \mathrm{Tr}(\phi(x)\phi(y))$ と κ の関係を調べる．

補題 6.3.1: 単純 Lie 代数の非退化対称結合双線型形式の同型性

$\mathfrak{g}$ を単純 Lie 代数とし，$f(x,y)$，$g(x,y)$ を $\mathfrak{g}$ 上の非退化で対称な双線型形式とし，$\beta = f, g$ について

$$\beta(x,[y,z]) = \beta([x,y],z) \tag{6.3.2}$$

を満たすとすると，

$$\exists a \in \mathbb{K}, \quad f = ag$$

証明　各非退化双線型形式 f, g で定まる同型 $\pi_f, \pi_g \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$，$x \mapsto s_f, s_g$ を

$$s_f(y) = f(x,y), \quad s_g(y) = g(x,y)$$

で定義する．$\mathfrak{g}^*$ は $\mathfrak{gl}(\mathbb{K})$ を返す $\mathfrak{g}$-加群と見れる．$\mathbb{K}$ は 1 次元線型空間なので，(6.3.2) より，$\{s_f\}, \{s_g\}$ は $\mathfrak{g}$-加群として同型.
よって，$\mathfrak{g}$-加群 $\pi_g^{-1} \circ \pi_f \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}$ 上の同型写像．$\mathfrak{g}$ は単純なので，既約 $\mathfrak{g}$-加群となり，代数閉体上の Schur の補題より $\pi_f^{-1}\pi_g$ はスカラー倍．i.e.

$$\forall x \in \mathfrak{g},\ \exists a \in \mathbb{K}, \quad \pi_g^{-1} \circ \pi_f(x) = ax \quad \Longleftrightarrow \quad \forall y \mathfrak{g},\ f(x,y) = g(ax,y)$$

となり，g の双線型性より $f = ag$. ■

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の非零の忠実な表現を ϕ とする．$\mathrm{Ker}\,\phi \subsetneq \mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルとなる．
$\mathfrak{g}$ が単純のとき，$\mathrm{Ker}\,\phi = \{0\}$ だから，$\beta(x,y) := \mathrm{Tr}(\phi(x)\phi(y))$ は非退化で (6.3.2) を満たす．$\phi = \mathrm{ad}$ の場合の Killing 形式 κ も含まれるから，補題 6.3.1 より，$\kappa = a\beta$ $(a \in \mathbb{K} \setminus \{0\})$ と書ける．β に関する双対ベクトルは，κ に関する双対ベクトルの $1/a$ 倍となるから，(6.3.1) より，

$$c_\phi(\kappa) = \phi(c_{\mathfrak{g}}) = \phi(c_{\mathfrak{g}}(a\beta)) = \frac{1}{a}\phi(c_{\mathfrak{g}}(\beta)) = \frac{1}{a}c_\phi$$

次に，$\mathfrak{g}$ が半単純 Lie 代数のとき．$\mathfrak{g}$ は単純 Lie 代数 g_i $(1 \le i \le t)$ の直和

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{t} \mathfrak{g}_i$$

で書ける．基底は各 $\mathfrak{g}_i$ の基底の和集合にとれるので，$\mathfrak{g}$ の普遍 Casimir 演算子は，$\mathfrak{g}_i$ の普遍 Casimir 演算子 $c_{\mathfrak{g}_i}$ の和で

$$c_{\mathfrak{g}} = \sum_{i=1}^{t} c_{\mathfrak{g}_i}$$

と書ける．定理??より，各 $\mathfrak{g}_i$ の Killing 形式は $\kappa|_{\mathfrak{g}_i \times \mathfrak{g}_i}$ に等しい．よって，

$$\phi(c_{\mathfrak{g}_i}) = \sum_{i=1}^{t} \frac{1}{a_i} c_{\phi|_{\mathfrak{g}_i}} \quad (a_i \in \mathbb{K})$$

と書ける．次に，この a_i の値の求め方を示す．

6.3.2 Freudenthal の公式

V のウエイト $\mu \in \Pi(\lambda)$ に対するウエイト空間 V_μ に対し，$\phi(x_\alpha)\phi(x^\alpha)$ は $V_\mu \longrightarrow V_{\mu-\alpha} \longrightarrow V_\mu$ より V_μ 上の線型変換なので，$\phi(c_{\mathfrak{Z}})|_{V_\mu}$ は V_μ 上の線型変換と見ることができる．ここで，V_μ 上の跡を調べる．

補題 6.3.2: ウエイト空間上の既約表現の跡形式

優ウエイト $\lambda \in \Lambda^+$ の既約な $\mathfrak{g}$-加群を $V = L(\lambda)$（表現と見たものを ϕ と書く），V のウエイトを $\mu \in \Lambda$，その重複度を $m(\mu)$ とすると，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_{V_\mu} \phi(c_{\mathfrak{g}}) &= (\mu, \mu) m(\mu) + \sum_{\alpha \in \Phi} \sum_{i=1}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha, \alpha) \\
&= (\mu, \mu + 2\delta) m(\mu) + 2 \sum_{\alpha \succ 0} \sum_{i=1}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha, \alpha)
\end{aligned}$$

を満たす．

証明 $\mu \in \Lambda \setminus \Pi(\lambda)$ の場合は $V_\mu = 0$ より成立．以下，$\mu \in \Pi(\lambda)$ を考える．
上述のように，$\mathfrak{h}$ の基底 $\{h_i\}_{i=1}^{l}$，$\mathfrak{g}_\alpha$ の基底 $\{x_\alpha\}$ を固定し，Killing 形式 κ に関する双対基底を取る．
$\mu \in \Pi(\lambda)$ として，V_μ 上の $x_\alpha x^\alpha$，$h_i h^i$ の作用を直接見て，その和を調べる．

$(x_\alpha x^\alpha)$ $\mu + \alpha \notin \Pi(\lambda)$ とすると，α-string through μ は $\{\mu,\ \mu - \alpha,\ \ldots,\ \mu - r\alpha\}$ $(r = [\![\mu, \alpha]\!])$ となる．完全可約性に関する Weyl の定理より，ウエイト空間の直和

$$W := V_\mu \oplus \cdots \oplus V_{\mu - r\alpha}$$

はある既約 $\mathfrak{s}_\alpha$-加群の直和で表せる．$w_0 \in V_\mu$ を $\mathfrak{s}_\alpha$-加群としての極大ベクトルとすると，

$$w_i := \begin{cases} 0 & (i = -1) \\ \dfrac{(\alpha,\alpha)^i}{2^i} y^i \blacktriangleright w_0 & (i \geq 0) \end{cases}$$

に対し，$x^\alpha = \frac{(\alpha,\alpha)}{2} y_\alpha$，$t_\alpha = \frac{(\alpha,\alpha)}{2} h_\alpha$ と補題??より，

(1) $t_\alpha \blacktriangleright w_i = (r - 2i)\frac{(\alpha,\alpha)}{2} w_i$

(2) $x^\alpha \blacktriangleright w_i = w_{i+1}$

(3) $x_\alpha \blacktriangleright w_i = i(r-i+1)\frac{(\alpha,\alpha)}{2}w_{i-1}$ w/ $i \geq 0$

を満たす．特に，$w_m \in V_{\mu - m\alpha}$．よって，

$$x_\alpha x^\alpha \blacktriangleright w_i = (r-i)(i+1)\frac{(\alpha,\alpha)}{2}w_i \tag{6.3.3}$$

鏡映 $\sigma_\alpha \in \mathscr{W}$ に対し，$\sigma_\alpha(\mu - i\alpha) = \mu + (r-i)\alpha$ と定理 6.2.2 より，

$$m(\mu - i\alpha) = m(\mu - (r-i)\alpha) \quad (0 \leq i \leq r)$$

となる．最高ウエイト $r - 2i = (\mu - i\alpha)(h_\alpha)$ をもつベクトルの数を n_i $(0 \leq i \leq r/2)$ とすると，

$$m(\mu - i\alpha) = \sum_{j=0}^{i} n_i \quad \Longrightarrow \quad n_i = m(\mu - i\alpha) - m(\mu - (i-1)\alpha)$$

となる．$0 \leq j \leq i \leq r$ とする．最高ウエイト $r - 2j$ のウエイト空間は，(6.3.3) の $r \mapsto r-2j$, $i \mapsto j - i$ より，

$$\phi(x_\alpha)\phi(x^\alpha)w_{i-j} = (r-j-i)(i-j+1)\frac{(\alpha,\alpha)}{2}w_{i-j}$$

よって $0 \leq i \leq r/2$ に対しては，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_{V_{\mu - i\alpha}}\,\phi(x_\alpha)\phi(x^\alpha) &= \sum_{j=0}^{i} n_j(r-j-i)(i-j+1)\frac{(\alpha,\alpha)}{2} \\
&= \sum_{j=0}^{i}(m(\mu - j\alpha) - m(\mu-(j-1)\alpha))(r-j-i)(i-j+1)\frac{(\alpha,\alpha)}{2} \\
&= \sum_{j=0}^{i} m(\mu - j\alpha)((r-j-i)(i-j+1) - (r-j-i-1)(i-j))\frac{(\alpha,\alpha)}{2} \\
&= \sum_{j=0}^{i} m(\mu - j\alpha)(r-2j)\frac{(\alpha,\alpha)}{2} \\
&= \sum_{j=0}^{i} m(\mu - j\alpha)((\mu,\alpha) - j(\alpha,\alpha)) \quad \left(r = [\![\mu,\alpha]\!] = 2\frac{(\mu,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{i} m(\mu - j\alpha)(\mu - j\alpha, \alpha) \quad \left(0 \leq i \leq \frac{r}{2}\right)
\end{aligned} \tag{6.3.4}$$

となる．$r/2 \leq i \leq r$ の場合は和が $r - i$ までになるだけ．ただし，$\phi(x^\alpha)w_{i-(r-i)} = 0$ だから，

$$\mathrm{Tr}_{V_{\mu - i\alpha}}\,\phi(x_\alpha)\phi(x^\alpha) = \sum_{j=0}^{r-i-1} m(\mu - j\alpha)(\mu - j\alpha,\alpha) \quad \left(\frac{r}{2} < i \leq r\right) \tag{6.3.5}$$

となる．ここで，$m(\mu - j\alpha) = m(\mu - (r-j)\alpha)$ より，

$$\begin{aligned}
m(\mu - j\alpha)(\mu - j\alpha,\alpha) + m(\mu-(r-j)\alpha)(\mu - (r-j)\alpha, \alpha) &= m(\mu - j\alpha)(2\mu - r\alpha, \alpha) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{6.3.6}$$

なので，(6.3.4) を $i \geq r/2$ で考えた際の $r-i, \ldots, i$ の項の部分和は 0[*3] となり，(6.3.5) に等しい．i.e. (6.3.4) は任意の $i = 0, \ldots, r$ で成り立つ．

---

*3 $\mathrm{char}\,\mathbb{K} \neq 2$ より，$j = r/2$ の項も 0.

任意の $\nu \in \Pi(\lambda)$ は，$\nu + j\alpha = \mu$ の形にできる．$m(\nu + (j+i)\alpha) = 0$ $(i > 0)$ より，

$$\mathrm{Tr}_{V_\mu} \phi(x_\alpha)\phi(x^\alpha) = \sum_{i=0}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha) \quad (\mu \in \Pi(\lambda))$$

($h_i h^i$) $\kappa|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ は非退化だったから，

$$\exists t_\mu \in \mathfrak{h},\ \forall h \in \mathfrak{h}, \quad \mu(h) = \kappa(t_\mu, h)$$

を満たす．特に，$t_\mu = \kappa(t_\mu, h^i)h_i = \mu(h^i)h_i$ である．よって，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{l} \mathrm{Tr}_{V_\mu} \phi(h_i)\phi(h^i) &= m(\mu)\sum_{i=1}^{l} \mu(h_i)\mu(h^i) = m(\mu) \sum_{i,j=1}^{l} \mu(h^j)\kappa(h_j, h_i)\mu(h^i) \\ &= m(\mu)\kappa(t_\mu, t_\mu) = m(\mu)(\mu, \mu)\end{aligned}$$

以上より，

$$\mathrm{Tr}_{V_\mu} \phi(c_\mathfrak{g}) = (\mu, \mu)m(\mu) + \sum_{\alpha\in\Phi}\sum_{i=0}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha, \alpha)$$

ここで，(6.3.6) の $j \in \mathbb{Z}_{\geq r/2}$ の和をとると，

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha, \alpha) = 0$$

となるから，$\alpha \prec 0$ に対する $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ の和を $i < 0$ で書き直すと，

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{V_\mu} \phi(c_\mathfrak{g}) &= (\mu, \mu)m(\mu) + \sum_{\alpha\succ 0} m(\mu)(\mu, \alpha) + 2\sum_{\alpha\succ 0}\sum_{i=1}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha, \alpha) \\ &= (\mu, \mu + 2\delta)m(\mu) + 2\sum_{\alpha\succ 0}\sum_{i=1}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha, \alpha)\end{aligned}$$

となる（$\delta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\succ 0}\alpha$）． ■

定理 6.3.1: Freudenthal の公式

最高ウエイト $\lambda \in \Lambda^+$ の非零で忠実な既約 $\mathfrak{g}$-加群を $L(\lambda)$，整ウエイト $\mu \in \Lambda$ の重複度を $m(\lambda)$ とすると，以下を満たす．

$$\big((\lambda + \delta, \lambda + \delta) - (\mu + \delta, \mu + \delta)\big)m(\mu) = 2\sum_{\alpha\succ 0}\sum_{i=1}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha, \alpha)$$

証明 補題 6.3.2 の証明の続き．まず，命題**??**より $\phi(c_\mathfrak{g})$ はスカラー倍だったから，

$$\mathrm{Tr}_{V_\mu} \phi(c_\mathfrak{g}) = \phi(c_\mathfrak{g})m(\mu)$$

となる．ここで，

$$(\mu, \mu + 2\delta) = (\mu + \delta, \mu + \delta) - (\delta, \delta)$$

であり，$\mu = \lambda$ のときのこれは $\phi(c_\mathfrak{g})$（の固有値）に等しいから，Freudenthal の公式が成り立つ． ■

λ が最高ウエイトで，$m(\lambda) = 1$ だったから，この公式から $m(\mu)$ を一意的に求めることが可能．

6.3.3 具体例

6.3.4 代数的指標

定義 6.3.3: 群環

G を群，R を環とする．G で生成される自由 R-加群 $R[G]$ に対し，その積を R-係数の畳み込み

$$\left(\sum_{g\in G} a(g)g\right)\left(\sum_{h\in G} b(h)h\right) := \sum_{g,h\in G} a(g)b(h)(gh) = \sum_{g\in G} a*b(g)g \quad \left(a*b(g) := \sum_{h\in G} a(h)b(h^{-1}g)\right)$$

で定めた（G の和は実際は有限和なので well-defined）R 上の代数を**群環** (group ring) と呼ぶ．

ウエイト格子 $\Lambda \subset \mathfrak{h}^*$ は基本ウエイトで生成される $\mathbb{Z}$-加群だったので，スカラー倍の構造を忘れば加法群となる．よって，$\{e^\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ で生成される群環 $Z[\Lambda]$ が定義される（生成系を別の文字にしたのは，$Z[\Lambda]$ の和 $+$ と Λ の積 $+$ を区別するため．$e^\lambda e^\mu = e^{\lambda+\mu}$）．
また $Z[\Lambda]$ 上の Weyl 群 $\mathscr{W}$ の作用を

$$\sigma e^\lambda = e^{\sigma\lambda} \ (\sigma \in \mathscr{W})$$

で定義する．一般の有限次元 $\mathfrak{g}$-加群 V は，補題 6.1.1 よりウエイト空間の直和で書けるから，V のウエイトの集合 $\Pi(V)$ は有限集合．これに注意して指標を定義する．

定義 6.3.4: 代数的指標

半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ のウエイト格子を $\Lambda \subset \mathfrak{h}^*$，有限次元 $\mathfrak{g}$-加群を V，ウエイト $\mu \in \Pi(V)$ の重複度を $m_\lambda(\mu)$ とする．群環 $\mathbb{Z}[\Lambda]$ の元

$$\mathrm{ch}_V := \sum_{\mu\in\Pi(V)} m_\lambda(\mu)e^\mu = \sum_{\mu\in\Lambda} m_\lambda(\mu)e^\mu$$

を**代数的指標** (algebraic character) や**形式的指標** (formal character)，または単に**指標**と呼ぶ．
特に既約加群 $L(\lambda)$ に対しては，$\mathrm{ch}_{L(\lambda)} = \mathrm{ch}_\lambda$ とも書く．

補題 6.3.3: 既約最高ウエイト加群の指標の $\mathscr{W}$-不変性

ch_λ は Weyl 群 $\mathscr{W}$ の作用の下で不変．

<u>証明</u> 定理**??**より，$m_\lambda(\mu) = m_\lambda(\mathscr{W}\mu)$ なので $\mathscr{W}$-不変． ■

有限次元加群 V について，完全可約性に関する Weyl の定理より，直和分解 $V = \bigoplus_{i=1}^t L(\lambda_i)$ に対し，

$$\mathrm{ch}_V = \sum_{i=1}^t \mathrm{ch}_{\lambda_i}$$

と書ける．よって $\{\mathrm{ch}_\lambda\}$ が線型独立であれば，加群の直和と代数的指標の和が一対一に対応する．
また補題 6.3.3 より，ch_V も $\mathscr{W}$ の作用の下で不変．
よって線型独立性と，$\mathscr{W}$-不変性が有限次元加群の代数的指標となる必要十分条件であることを示そう．

命題 6.3.1: 有限次元加群の代数的指標，代数的指標の和

不変式 $\mathbb{Z}[\Lambda]^{\mathscr{W}}$ は $\{\mathrm{ch}_\lambda \,|\lambda \in \Lambda^+\}$ で生成される．
i.e. $f \in \mathbb{Z}[\Lambda]$ が Weyl 群 $\mathscr{W}$ の作用の下で不変とすると，f は ch_λ $(\lambda \in \Lambda^+)$ の $\mathbb{Z}$-係数線型結合で一意的に書ける．特に，

$$\mathrm{ch}_\lambda = \sum_{\mu \in \mathscr{W}\lambda} e^\mu$$

<u>証明</u> **(存在)** $f = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) e^\lambda$ $(c(\lambda) \in \mathbb{Z})$ と書くと，$\mathscr{W}$ の作用で不変だから，

$$f = \sum_{\lambda \in \Pi} c(\lambda) \sum_{\mu \in \mathscr{W}\lambda} e^\mu \quad \Big(\Pi = \{\lambda \in \Lambda^+ \mid c(\lambda) \neq 0\}\Big)$$

と書ける．$M_f = \bigcup_{\lambda \in \Pi} \{\mu \in \Lambda^+ | \mu \prec \lambda\}$ とすると，補題??より有限集合．
ここで，$\lambda \in M_f$ が極大のとき，補題 6.3.3 より，$f' = f - c(\lambda)\,\mathrm{ch}_\lambda$ も $\mathscr{W}$ の作用の下で不変．$L(\lambda)$ のウエイトの集合 $\Pi(\lambda)$ は飽和集合だから，$\mu \prec \lambda$ なる優ウエイトを全て含み，かつ $\lambda \notin M_{f'}$ より，$M_{f'} \subsetneq M_f$．
よって，$|M_f|$ についての帰納法で，$|M'_f| = 0$ になるまでこれを繰り返せば，$\mathscr{W}$-不変性より $f' = 0$ になる．特に $|M_f| = 1$ の場合，

$$f = c(\lambda) \sum_{\mu \in \mathscr{W}\lambda} e^\mu$$

であり，$f = \mathrm{ch}_\lambda$ のとき，最高ウエイト加群のウエイト空間の重複度は 1 だから，$c(\lambda) = 1$．
(一意性) $f = \sum_{\lambda \in \Pi} c(\lambda)\,\mathrm{ch}_\lambda = \sum_{\lambda' \in \Pi'} c'(\lambda')\,\mathrm{ch}_{\lambda'}$ $\big(0 \notin c(\Pi), c'(\Pi')\big)$ と書けたとする．
$\lambda \in \Pi$ のうち，極大なものを λ_0 とすると，$\lambda_0 \prec \lambda'_0$ を満たす $\lambda'_0 \in \Pi'$ が存在する．すると，$\lambda'_0 \prec \lambda$ となる $\lambda \in \Pi$ が存在するが，それは λ_0 しかないから，

$$\lambda_0 \prec \lambda'_0 \prec \lambda_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_0 = \lambda'_0$$

次に，$f - c(\lambda_0)\,\mathrm{ch}_{\lambda_0}$ を考えると，同様の議論から，$c(\lambda_0) - c'(\lambda'_0) = 0$ となる．これを繰り返せば，$\Pi = \Pi', c = c'$ が言えるので，f の展開は一意．

■

次に代数的指標の積の性質を確認しよう．

命題 6.3.2: 代数的指標の積

V, W を有限次元 $\mathfrak{g}$-加群とすると，

$$\mathrm{ch}_{V \otimes W} = \mathrm{ch}_V\,\mathrm{ch}_W$$

<u>証明</u> $\mathfrak{g}$-加群のテンソル積の定義より，ウエイト空間どうしのテンソル積 $V_\mu \otimes W_\nu$ はウエイト $\mu + \nu$ のウエイト空間．つまり，

$$m_{V \otimes W}(\mu + \nu) = \sum_{\pi + \pi' = \mu + \nu} m_V(\pi) m_W(\pi')$$

となる．右辺は $\mathrm{ch}_V\,\mathrm{ch}_W$ の $e^{\mu+\nu}$ の係数に等しい． ■

特に，V, W の最高ウエイトをそれぞれ λ_V, λ_W とすると，$\mathfrak{g}$-加群 $V \otimes W$ の既約分解には，$L(\lambda_V + \lambda_W)$ が含まれる．

6.4 指標

6.4.1 不変式論

定義 6.4.1: 多項式函数環

体 $\mathbb{K}$ 上の線型空間 V に対し，V^* に対する対称代数

$$\mathbb{K}[V] \coloneqq S(V^*)$$

を V 上の**多項式函数環** (ring of polynomial functions) と呼ぶ．

V を有限次元とし，V^* の基底を $(f^1, \dots, f^n)$ と取ると，$\mathbb{K}[V]$ は n 変数多項式代数 $\mathbb{K}[f^1, \dots, f^n]$ と同型である．
ウエイト格子 Λ は $\mathfrak{h}^*$ を張るから，$\lambda \in \Lambda$ の多項式は $\mathbb{K}[\mathfrak{h}]$ を張る．

定義 6.4.2: 誘導される多項式函数環の加群

群を G，体 $\mathbb{K}$ 上の線型空間を V とする．V が G-加群のとき，V^* 上の G-加群が

$$(g \blacktriangleright f)(v) \coloneqq f(g^{-1} \blacktriangleright v) \quad (\forall v \in V,\ g \in G,\ f \in V^*)$$

により定義される．
また，V^* が G-加群の（または誘導された）とき，多項式函数環 $\mathbb{K}[V]$ 上の G-加群が

$$g \blacktriangleright (f_1 \cdots f_n) \coloneqq (g \blacktriangleright f_1) \cdots (g \blacktriangleright f_n)$$

を線型に拡張としたものとして定義される．

定義 6.4.3: 不変式

G を群，体 $\mathbb{K}$ 上の線型空間を V とする．$\mathbb{K}[V]$ が（定義 6.4.2 により誘導された）G-加群のとき，この作用で不変な集合

$$\mathbb{K}[V]^G \coloneqq \left\{ f \in \mathbb{K}[V] \;\middle|\; G \blacktriangleright f = f \right\}$$

は $\mathbb{K}$-可換結合代数をなす．これを V 上の G-**不変多項式** (G-invariant polynomials on V) あるいは単に**不変式** (invariants) と呼ぶ．

$\mathbb{K}[V]^G$ が G の作用で閉じていることを具体的に示すと以下（$g \in G, \lambda \in \mathbb{K},\ f_1, f_2 \in \mathbb{K}[V]^G$）：

$$\begin{aligned} g \blacktriangleright (f_1 + f_2) &= g \blacktriangleright f_1 + g \blacktriangleright f_2 = f_1 + f_2 \\ g \blacktriangleright (\lambda f_1) &= \lambda (g \blacktriangleright f_1) = \lambda f_1 \\ g \blacktriangleright (f_1 f_2) &= (g \blacktriangleright f_1)(g \blacktriangleright f_2) = f_1 f_2 \end{aligned}$$

Weyl 群 $\mathscr{W}$ は $\mathfrak{h}^*$ に作用するから，$\mathscr{W}$-不変式 $\mathbb{K}[\mathfrak{h}]^{\mathscr{W}}$ が定義される．また，$\mathfrak{g}$ の内部自己同型 $\operatorname{Inn}\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}$ に作用するから，$\operatorname{Inn}\mathfrak{g}$-不変式 $\mathbb{K}[\mathfrak{g}]^{\operatorname{Inn}\mathfrak{g}}$ が定義される．

定義 6.4.4: 余不変式

G を群，体 $\mathbb{K}$ 上の線型空間を V とする．多項式代数 $\mathbb{K}[V]$ が（定義 6.4.2 により誘導された）G-加群のとき，軌道空間

$$\mathbb{K}[V]_G \coloneqq \mathbb{K}[V]/G$$

は $\mathbb{K}$-可換結合代数をなす．これを V 上の G-**余不変多項式** (G-coinvariant polynomials on V) あるいは単に**余不変式** (coinvariants) と呼ぶ．

定理 6.4.1: 有限群上の不変式と余不変式の同型性

有限群上の不変式と余不変式は同型．

<u>証明</u>

$$p_G \colon \mathbb{K}[V] \longrightarrow \mathbb{K}[V], \quad x \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (g \blacktriangleright x)$$

は不変式 $\mathbb{K}[V]^G$ への（代数の）射影．よって，$\mathbb{K}[V]^G$ はある商代数と同型だが，

$$p_G(x) = p_G(y) \iff \exists g \in G,\ x = g \blacktriangleright y \quad (x, y \in \mathbb{K}[V])$$

より $\mathbb{K}[V]^G$ と $\mathbb{K}[V]_G$ は同型． ■

ϕ を $\mathfrak{g}$ の表現とする．$\mathbb{K}[\mathfrak{g}]^{\mathrm{Inn}\,\mathfrak{g}}$ の元として，**跡多項式** (trace polynomial)

$$t \colon x \mapsto \mathrm{Tr}\bigl(\phi(x)^k\bigr) \quad (x \in \mathfrak{g})$$

があることを見よう．まず $\mathrm{tr} \circ \phi$ は線型なので，$\mathrm{tr} \circ \phi \in \mathfrak{g}^*$．

テンソル積と Hom の同型より $\mathrm{End}(V) \simeq V^* \otimes V$ なので，$\mathrm{Tr} \colon \mathrm{End}(V) \longrightarrow \mathbb{K}$ は

$$V^* \otimes V \longrightarrow \mathrm{End}(V), \quad h \otimes v \mapsto (w \mapsto h(w)v)$$

$\mathrm{Tr}(h \otimes v) = h(v)$.

より，$t \in \mathbb{K}[\mathfrak{g}]$ となる．

内部自己同型 τ_α $(\alpha \in \Phi)$ に対し，$\tau_\alpha|_{\mathfrak{h}} = \sigma_\alpha \in \mathscr{W}$ であり，σ_α は $\mathscr{W}$ を生成した．
よって射影 $\mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{h}^*$ を多項式函数へ拡張したものを $p \colon \mathbb{K}[\mathfrak{g}] \longrightarrow \mathbb{K}[\mathfrak{h}]$ とすると，p は不変式の代数準同型

$$\theta \colon \mathbb{K}[\mathfrak{g}]^{\mathrm{Inn}\,\mathfrak{g}} \longrightarrow \mathbb{K}[\mathfrak{h}]^{\mathscr{W}}$$

を誘導する．

定理 6.4.2: Chevalley の制限定理

$\mathfrak{g}$ を半単純 Lie 代数，$\mathfrak{h}$ をその極大トーラス，$\mathscr{W}$ を Weyl 群とする．不変式の代数準同型

$$\theta \colon \mathbb{K}[\mathfrak{g}]^{\mathrm{Inn}\,\mathfrak{g}} \longrightarrow \mathbb{K}[\mathfrak{h}]^{\mathscr{W}}$$

は同型．

<u>証明</u> (Steinberg)

全射性　$p_{\operatorname{Inn}\mathfrak{g}}(\lambda^k)$ $(\lambda \in \Lambda^+,\ k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ を考えれば良い．基本ウエイト

単射性　省略

■

跡多項式の集合を $T \subset \mathbb{K}[\mathfrak{g}]^{\operatorname{Inn}\mathfrak{g}}$ とする．Chevalley の制限定理の証明より，$\theta|_T$ は全単射となる．つまり，次の定理が成り立つ．

定理 6.4.3: $\mathbb{K}[\mathfrak{g}]^{\operatorname{Inn}\mathfrak{g}}$ の構造

$\mathbb{K}[\mathfrak{g}]^{\operatorname{Inn}\mathfrak{g}}$ は跡多項式で生成される．

6.4.2　最高ウエイト加群と指標

普遍包絡代数 $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ の中心を $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}))$ とする．$\mathfrak{g}$ の自己同型 $\tau \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ は，$\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ の自己同型に一意的に拡張される．

定理 6.4.4:

$\mathfrak{g}$ を半単純 Lie 代数，$\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ をその普遍包絡代数，$\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ をその中心とすると，

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\operatorname{Inn}\mathfrak{g}} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$$

<u>証明</u>　$\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ は中心だから，

$$0 = [x, \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})] = \operatorname{ad} x(\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})) \quad \Longrightarrow \quad \exp \operatorname{ad} x(z) = z \quad (\forall z \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}))$$

つまり，任意の $\sigma \in \operatorname{Inn}\mathfrak{g}$ に対し $z \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ は σ-不変だから，$\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\operatorname{Inn}\mathfrak{g}} \supset \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$.
逆の包含を示す．$x_\alpha \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$ を固定する．$(\operatorname{ad} x_\alpha)^t \neq 0$，$(\operatorname{ad} x_\alpha)^{t+1} = 0$ とする．
今，体 $\mathbb{K}$ は無限集合だったから，異なるスカラー $a_1, \ldots, a_{t+1}$ を選べる．このとき，仮定より $\exp \operatorname{ad} a_i x_\alpha = \exp(a_i \operatorname{ad} x_\alpha)$ も x を固定する．ここで，Vandermonde 行列式について，

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \frac{a_1^2}{2!} & \cdots & \frac{a_1^t}{t!} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_{t+1} & \frac{a_{t+1}^2}{2!} & \cdots & \frac{a_{t+1}^t}{t!} \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{t+1} \frac{1}{k!} \prod_{1 \leq i < j \leq t+1} (a_j - a_i) \neq 0$$

だから，$\operatorname{Span}\{\exp(a_i \operatorname{ad} x_\alpha)\} = \operatorname{Span}\{1, \operatorname{ad} x_\alpha, \ldots (\operatorname{ad} x_\alpha)^t\}$．よって，

$$\exists b_i \in \mathbb{K}, \quad \operatorname{ad} x_\alpha = \sum_{i=1}^{t+1} b_i \exp(a_i \operatorname{ad} x_\alpha) = \sum_{i=1}^{t+1} b_i \exp(\operatorname{ad}(a_i x_\alpha)) = \sum_{i=0}^{t+1} b_i$$

と書ける．$\operatorname{ad} x_\alpha$ が冪零だから $\sum_{i=1}^{t+1} b_i = 0$ となり，$\operatorname{ad} x_\alpha(\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\operatorname{Inn}\mathfrak{g}}) = 0$．ところで，$x_\alpha$ は $\mathfrak{g}$ を生成するから，$\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\operatorname{Inn}\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. ■

ここで，任意のウエイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対する Verma 加群 $M(\lambda)$ を考える．$h \in \mathfrak{h}$ とすると，ウエイト λ の極大

ベクトル v^+ に対し，

$$h \blacktriangleright z \blacktriangleright v^+ = z \blacktriangleright h \blacktriangleright v^+ = \lambda(h) z \blacktriangleright v^+ \quad (z \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}))$$
$$\mathfrak{g}_\alpha \blacktriangleright z \blacktriangleright v^+ = z \blacktriangleright \mathfrak{g}_\alpha \blacktriangleright v^+ = 0 \quad (\alpha \in \Phi^+)$$

となるから，$z \blacktriangleright v^+$ は最高ウエイト λ の極大ベクトル．定理 6.1.1 より最高ウエイトの重複度 $m(\lambda)$ は 1 だから，$z \blacktriangleright v^+ = \chi_\lambda(z) v^+$ と書ける．

定義 6.4.5: 指標

最高ウエイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ の Verma 加群に対し，極大ベクトルに作用したときの固有値を返す $\mathbb{K}$-代数の準同型

$$\chi_\lambda : \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathbb{K}, \quad z \mapsto \chi_\lambda(z)$$

を λ の**指標** (character) と呼ぶ．

$\forall x \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ に対し，$x \blacktriangleright v^+$ は $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ の固有ベクトル．$M(\lambda)$ は最高ウエイト加群だったから，$M(\lambda)$ の全体が $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ の作用で不変．よって，任意の $M(\lambda)$ の部分 $\mathfrak{g}$-加群は $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ の作用で不変で，同じ指標 χ_λ をもつ．

命題 6.4.1:

整ウエイト $\lambda \in \Lambda$，単純ルート $\alpha \in \Delta$，整数 $m = [\![\lambda, \alpha]\!]$ に対し，$m \geq 0$ のとき，$y_\alpha^{m+1} + I(\lambda)$ $(M(\lambda) = \mathfrak{U}(\mathfrak{g})/I(\lambda))$ はウエイト $\lambda - (m+1)\alpha$ の極大ベクトル．

<u>**証明**</u> $h_\alpha - [\![\lambda, \alpha]\!] \in I(\lambda)$ なので，補題 6.2.1 より従う． ■

ウエイト $\lambda - ([\![\lambda, \mu]\!] + 1)\alpha$ の極大ベクトルで生成される最高ウエイト加群は $M(\lambda)$ の部分 $\mathfrak{g}$-加群．指標の定義の直後の議論よりこの命題 6.4.1 の系として以下が成り立つ．

系 6.4.5:

$[\![\lambda, \alpha]\!] \geq 0$ のとき，$\mu = \lambda - ([\![\lambda, \alpha]\!] + 1)\alpha$ とすると，$\chi_\mu = \chi_\lambda$．

極大トーラス $\mathfrak{h}$ と Weyl 群 $\mathscr{W}$ に対し，軌道空間 $\mathfrak{h}^*/\mathscr{W}$ は同値類であった．よって，$(\mathfrak{h}^* + \delta)/\mathscr{W}$ も同値類となる．

系 6.4.6:

任意の整ウエイト $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対し，

$$\mathscr{W}(\mu + \delta) = \mathscr{W}(\lambda + \delta) \quad \Longrightarrow \quad \chi_\lambda = \chi_\mu$$

<u>**証明**</u> $\mathscr{W} = \langle \sigma_\alpha | \alpha \in \Delta \rangle$ だから，$\mu = \sigma_\alpha(\lambda + \delta) - \delta$ の場合を示せば良い．系??と σ_α の定義より，

$$\mu = \sigma_\alpha \lambda - \alpha = \lambda - ([\![\lambda, \alpha]\!] + 1)\alpha$$

となる．λ は整ウエイトだから，$[\![\lambda, \alpha]\!] \in \mathbb{Z}$．
$[\![\lambda, \alpha]\!] = -1$ のとき，$\lambda = \mu$ なので $\chi_\lambda = \chi_\mu$ は明らか．

そうでないとき，$[\![\mu,\alpha]\!]+1=-([\![\lambda,\alpha]\!]+1)$ だから，$[\![\lambda,\alpha]\!],[\![\mu,\alpha]\!]$ のいずれかは非負．よっていずれかが系 6.4.5 の仮定を満たすから，$\chi_\lambda=\chi_\mu$ は等しい． ■

$\mathfrak{g}$ の基底を $\{x_\alpha,y_\alpha,|\alpha\prec 0\}$（$x_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$，$y_\alpha\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$）と $\{h_i|1\le i\le l\}$（ルート系の底 $\Delta=\{\alpha_i,\dots,\alpha_l\}$ に対し $h_i=h_{\alpha_i}$）ととる．$\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{U}(\mathfrak{h})$ の PBW 基底は $\{y_\alpha\},\{h_i\}$, $\{x_\alpha\}$ の順に全順序となるようにとる．また，$p\colon\mathfrak{U}(\mathfrak{g})\longrightarrow\mathfrak{U}(\mathfrak{h})$ を射映とする．
極大トーラス $\mathfrak{h}$ は可換だったから，$\mathfrak{U}(\mathfrak{h})=S(\mathfrak{h})$ なので，以下では特に $S(\mathfrak{h})$ と書く．

既約最高ウエイト加群 $L(\lambda)$ の極大ベクトル v^+ に対する $z\in\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ の作用を考える．
単項式 $\prod_{\alpha\succ 0}y_\alpha^{i_\alpha}\prod_{i=1}^{l}h_\alpha^{k_\alpha}\prod_{\alpha\succ 0}x_\alpha^{j_\alpha}$ はある α に対して $j_\alpha>0$ ならば，v^+ に作用すると 0．逆に全ての α に対して $j_\alpha=0$ の場合はウェイト $\lambda-i_\alpha\alpha$ のベクトルに送る．つまり，指標 χ_λ に関与するのは，$S(\mathfrak{h})$ の線型結合部分のみであり，

$$\chi_\lambda=\lambda\circ p|_{\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})\cap S(\mathfrak{h})}$$

となる（$\lambda\colon\mathfrak{U}(\mathfrak{h})\longrightarrow\mathbb{K}$ は $\lambda\colon\mathfrak{h}\longrightarrow\mathbb{K}$ の標準的拡大）．χ_λ,λ は代数準同型だから，$p|_{\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})\cap S(\mathfrak{h})}$ は代数準同型となる．

$\mathfrak{h}$ の同型 $h_i\mapsto h_i-1$ $(\forall i=1,\dots,k)$ を $\mathfrak{U}(\mathfrak{h})\simeq S(\mathfrak{h})$ に線型に拡張したものを η とすると，可換 Lie 代数の同型．δ は基本ウエイトの和だったから，$\delta(h_i)=1$．δ も同様に $S(\mathfrak{h})$ に拡大すると，

$$(\lambda+\delta)\circ\eta(h_i)=(\lambda+\delta)(h_i-1)=(\lambda(h_i)+1)-(\lambda+\delta)1=\lambda(h_i)$$
$$\therefore(\lambda+\delta)\circ\eta=\lambda$$

となる．$\psi=\eta\circ p|_{\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})\cap S(\mathfrak{h})}$ とすると，(**??**) と合わせて，

$$\chi_\lambda=(\lambda+\delta)\circ\psi$$

補題 6.4.1:

任意のウエイト $\lambda,\mu\in\mathfrak{h}^*$ に対し，

$$\chi_\lambda=\chi_\mu\quad\Longrightarrow\quad\mathscr{W}\lambda=\mathscr{W}\mu$$

証明 先程定義した ψ は λ に（汎函数として）依存しないので，系 6.4.6 より，整ウエイト $\lambda\in\Lambda$ に対し $\chi_\lambda=(\mathscr{W}\lambda)\circ\psi$ となる．つまり，ψ は $\mathscr{W}$ 不変で Λ は $S(\mathfrak{h})$ を生成するから，$\operatorname{Im}\psi\subset S(\mathfrak{h})^{\mathscr{W}}\subset S(\mathfrak{h})$.
逆にこのとき，$\forall\lambda\in\mathfrak{h}^*$ で $\chi_\lambda=\chi_{\mathscr{W}\lambda}$．つまり，系 6.4.6 が $\lambda,\mu\in\mathfrak{h}^*$ でも成り立つことになる． ■

補題 6.4.2:

$\lambda_1,\lambda_2\in\mathfrak{h}^*$ について，$\mathscr{W}\lambda_1\neq\mathscr{W}\lambda_2$ とすると，

$$\exists x\in S(\mathfrak{h})^{\mathscr{W}}(=\mathbb{K}[\mathfrak{h}^*]),\quad\lambda_1(x)\neq\lambda_2(x)$$

証明 $\lambda_1(y)\neq 0$ を満たす $y\in\mathfrak{h}$ を選ぶ．$\mathscr{W}$ は有限群なので，

$$y\prod_{\mu\in(\mathscr{W}\lambda\setminus\lambda_1)\cup\mathscr{W}\lambda_2}(y-\mu(y))\in S(\mathfrak{h})$$

が定義でき，さらに $\mathscr{W}$ の作用の和をとったもの x が定義できる．すると $x\in S(\mathfrak{h})^{\mathscr{W}}$ かつ，

$$\lambda_1(x)\neq 0=\lambda_2(x)$$

■

定理 6.4.7: Harish-Chandra 同型

$\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ に対し，
$$\chi_\lambda = \chi_\mu \quad \Longleftrightarrow \quad \mathscr{W}\lambda = \mathscr{W}\mu$$

証明 補題 6.4.1 を示したから，その逆（つまり $\Longleftarrow$）を示せば良い．

補題 6.4.2 を示したから，$\chi_\lambda = (\lambda+\delta)\circ\psi$ より $\operatorname{Im}\psi \subset S(\mathfrak{h})^{\mathscr{W}}$ を示せば良い．

命題??の意味での結合代数の次数付けについて $S \simeq \operatorname{gr} S$ となること，PBW 定理，さらに群作用の不変性が Ker が 0 の準同型で保存されること，定理 6.4.4 に注意して以下の図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{gr} S(\mathfrak{g})^{\operatorname{Inn}\mathfrak{g}} \arrow[r, leftrightarrow] & \operatorname{gr}\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\operatorname{Inn}\mathfrak{g}} & \\
S(\mathfrak{g})^{\operatorname{Inn}\mathfrak{g}} \arrow[u, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[r, "\pi"] & \mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\operatorname{Inn}\mathfrak{g}} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \arrow[u, "p_G"] \arrow[r, "\psi"] & \mathfrak{U}(\mathfrak{h})^{\mathscr{W}} = S(\mathfrak{h})^{\mathscr{W}} \arrow[d, leftrightarrow] \\
\mathbb{K}[\mathfrak{g}]^{\operatorname{Inn}\mathfrak{g}} \arrow[rr, "\theta"'] & & \mathbb{K}[\mathfrak{h}]^{\mathscr{W}}
\end{tikzcd}$$

ただし，$S(\cdot)$ と $\mathbb{K}[\cdot]$ の同型性は Killing 形式による双対による．
π が準同型であれば簡単だが，単なる線型写像ではあっても代数の準同型ではない[*4]．しかし，π を除いて，$S(\mathfrak{h})^{\mathscr{W}}$ を $S(\mathfrak{h})$ にすれば可換図式であり，標準的射映（の拡張）p_G と，$\operatorname{gr}\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\operatorname{Inn}\mathfrak{g}}$ から $S(\mathfrak{h})^{\mathscr{W}}$ まで反時計回りに移す写像は全て準同型で，その合成は ψ に等しい[*5]．群作用の不変性が Ker が 0 の準同型で保存されるから，$\operatorname{Im}\psi \subset S(\mathfrak{h})^{\mathscr{W}} \subset S(\mathfrak{h})$[*6]． ■

6.5 指標の諸公式

この節では有限次元 $\mathfrak{g}$-加群の指標や重複度に関する公式を示す．

6.5.1 いくつかの $\mathfrak{h}^*$ の函数

$\lambda \in \Lambda^+$ に対する $L(\lambda)$ の代数的指標 ch_λ は自由 $\mathbb{Z}$-加群でもあった．$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対する（任意の）最高ウエイト加群（の直和加群）上に代数的指標を一般化しよう．
最高ウエイト加群の直和の代数的指標の展開係数 $f(g)$ は，定理 6.1.1(2)(3) より

$$\mathfrak{X} := \Bigl\{ f\colon \mathfrak{h}^* \longrightarrow \mathbb{K} \Bigm| \operatorname{supp} f = \bigcup_{\text{有限和}} \{\lambda - \sum_{\alpha \succ 0} k_\alpha \alpha, k_\alpha \in \mathbb{Z}\} \Bigr\}$$

[*4] $\operatorname{gr}\mathfrak{U}$ を考えていることから，$\mathfrak{U}$ の最高次係数は変わらないことはわかる．準同型でないのは低次項は変わることがあるため．
[*5] [?] ではここを逆向きに追っている．
[*6] つまり，$S(\mathfrak{h})^{\mathscr{W}}$ のままでも可換図式となる．

なる集合に含まれる．$\forall f, g \in \mathfrak{X}$ に対し，最高ウエイト加群の直和分解の際の最高ウエイトの（有限）集合を Λ_f, Λ_g とする．$\forall \mu \in \operatorname{supp} g$ に対し，

$$\{\nu \in \mathfrak{h}^* | f(\nu) g(\mu - \nu) \neq 0\}$$

は $\mathfrak{X}$ の定義より離散集合．かつ，

$$\exists \lambda_f \in \Lambda_f,\ \lambda_g \in \Lambda_g, \quad \lambda - \lambda_g \prec \nu \prec \lambda_f$$

より全ての (λ_f, λ_g) の合併を考えるとコンパクト集合．よって有限集合だから，代数的指標の積が，任意の最高ウエイト加群のとしても well-defined.

ここで，生成子 e^λ は特性函数

$$e^\lambda(\lambda) = 1, \quad e^\lambda(\mathfrak{h}^* \setminus \{\lambda\}) = 0$$

と同一視できる．また $\mathfrak{X}$ に対する Weyl 群 $\mathscr{W}$ の作用は定義 6.4.2 のように自然に誘導される．特に，$\sigma(e^\lambda) = e^{\sigma\lambda}$.

$p(\lambda)$ を $-\lambda = \sum_{\alpha \prec 0} k_\alpha \alpha$ を満たす非負整数の集合 $\{k_\alpha\}$ の数とする．当然 λ がルート格子上に無い場合は，$p(\lambda) = 0$.

Kostant 函数

定理 6.5.1: Kostant の重複度公式

優ウエイト $\lambda \in \Lambda^+$ に対し，既約最高ウエイト加群 $L(\lambda)$ のウエイト μ の重複度は以下

$$m_\lambda(\mu) = \sum_{\sigma \in \mathscr{W}} sn(\sigma) p(\mu + \delta - \sigma(\lambda + \delta))$$

定理 6.5.2: Weyl の指標公式

優ウエイト $\lambda \in \Lambda^+$ に対し，以下が成り立つ：

$$\left(\sum_{\sigma \in \mathscr{W}} sn(\sigma) \varepsilon_{\sigma\delta}\right) * \mathrm{ch}_\lambda = \sum_{\sigma \in \mathscr{W}} sn(\sigma) \varepsilon_{\sigma(\lambda+\delta)}$$

定理 6.5.3: Steinberg の公式

優ウエイト $\lambda, \lambda', \lambda'' \in \Lambda^+$ に対し，$L(\lambda') \otimes L(\lambda'')$ の直和分解した際の $L(\lambda)$ の個数は以下：

$$\sum_{\sigma, \sigma' \in \mathscr{W}} sn(\sigma\tau) p(\lambda + 2\delta - \sigma(\lambda' + \delta) - \sigma'(\lambda'' + \delta))$$