

# 表現論 ノート

高間俊至

2023 年 12 月 25 日

本文中で

- 「章」と言ったら  $\text{\LaTeX}$  コマンド `\chapter{}` によって区切られる 1 部分を,
- 「節」と言ったら  $\text{\LaTeX}$  コマンド `\section{}` によって区切られる 1 部分を,
- 「小節」と言ったら  $\text{\LaTeX}$  コマンド `\subsection{}` によって区切られる 1 部分を

表すことにする. 節, 小節の見た目は以下の通りである:

## ■ 0.1 節の例

---

### 0.1.1 小節の例

---

本資料ではベクトル空間を英大文字で表記し, 係数体を blackboardbold<sup>\*1</sup>で表記する (e.g. 体  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間  $V$ ).

---

<sup>\*1</sup>  $\text{\LaTeX}$  コマンドは `\mathbb{b}`

# 目次

0.1	節の例 . . . . .	1
0.1.1	小節の例 . . . . .	1
第 1 章	Lie 群と Lie 代数 . . . . .	5
1.1	公理的 Lie 代数 . . . . .	5
1.1.1	線型 Lie 代数 . . . . .	9
1.1.2	イデアル・商代数 . . . . .	14
1.1.3	準同型・表現 . . . . .	17
1.1.4	自己同型 . . . . .	19
1.1.5	可解 Lie 代数 . . . . .	19
1.1.6	冪零 Lie 代数 . . . . .	21
1.1.7	Engel の定理 . . . . .	22
1.2	Lie 群と Lie 代数の関係 . . . . .	25
第 2 章	半単純 Lie 代数 . . . . .	26
2.1	Lie の定理・Cartan の判定条件 . . . . .	26
2.1.1	Lie の定理 . . . . .	26
2.1.2	Jordan-Chevalley 分解 . . . . .	27
2.1.3	Cartan の判定条件 . . . . .	28
2.2	Killing 形式 . . . . .	28
2.2.1	半単純性の判定条件 . . . . .	28
2.2.2	単純イデアル . . . . .	29
2.2.3	内部微分 . . . . .	30
2.2.4	抽象 Jordan 分解 . . . . .	30
2.3	表現の完全可約性 . . . . .	31
2.3.1	$\mathfrak{g}$ -加群と表現 . . . . .	31
2.3.2	$\mathfrak{g}$ -加群の直和と既約性 . . . . .	34
2.3.3	$\mathfrak{g}$ -加群の Hom とテンソル積 . . . . .	37
2.3.4	Casimir 演算子 . . . . .	40
2.3.5	Weyl の定理 . . . . .	44
2.3.6	Jordan 分解の保存 . . . . .	48
2.4	$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の表現 . . . . .	50

2.4.1	ウエイトと極大ベクトル	50
2.4.2	既約表現の分類	51
2.5	ルート空間分解	52
2.5.1	極大トーラスとルート	53
2.5.2	極大トーラスの中心化代数	56
2.5.3	直交性	57
2.5.4	整性	60
2.5.5	有理性	64
<b>第 3 章</b>	<b>ルート系</b>	<b>67</b>
3.1	公理的方法	67
3.1.1	ルート系	68
3.1.2	Weyl 群	72
3.2	単純ルートと Weyl 群	74
3.2.1	ルート系の底と Weyl の区画	74
3.2.2	単純ルートに関する補題	80
3.2.3	Weyl 群の性質	82
3.2.4	既約なルート系	85
3.3	ルート系の分類	88
3.3.1	Cartan 行列	89
3.3.2	Coxeter グラフと Dynkin 図形	91
3.3.3	ルート系の既約成分	92
3.3.4	ルート系の分類定理	93
<b>付録 A</b>	<b>ベクトル空間の話</b>	<b>102</b>
A.1	Hom ベクトル空間	102
A.2	ベクトル空間のテンソル積	103
A.2.1	普遍性による定義	103
A.2.2	多重線型写像とテンソル積	107
A.2.3	有限次元ベクトル空間のテンソル積	108
A.3	ベクトル空間の直積・直和	112
A.3.1	普遍性による定義	112
A.3.2	部分ベクトル空間の直和	116
A.4	階数・退化次数の定理	118
A.4.1	有限次元の場合	118
A.4.2	分裂補題と射影的加群	120
A.5	Jordan 標準形	124
A.5.1	上三角化	125
A.5.2	広義固有空間分解	127
A.5.3	多項式環・最小多項式	128



# 第 1 章

## Lie 群と Lie 代数

この章は [1, Chapter I], [2, 第 1-3 章] に相当する.

本章に限ってはベクトルを  $x \in L$  のように英小文字で表記し, 係数体の元は  $\lambda \in \mathbb{K}$  のようにギリシャ文字で表記する. 零ベクトルは  $o \in L$  と書き<sup>\*1</sup>,  $0 \in \mathbb{K}$  を係数体の加法単位元,  $1 \in \mathbb{K}$  を係数体の乗法単位元とする. ベクトル空間の加法を  $+$  と書き, スカラー乗法は  $\lambda x$  のように係数を左に書く. また, 特に断りがなければ Einstein の規約を使う.

### 1.1 公理的 Lie 代数

この節では, 特に断りがなければ  $\mathbb{K}$  を任意の体とする. Lie 代数を純粋に代数的な対象として扱うことを考える.



Lie 代数を表す記号は Fraktur という字体で書く慣例がある. 例えば「Fraktur」という文字列は  $\mathfrak{Fraktur}$  のようになる. L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X コマンドは数式モード中で  $\mathsf{\texttt{\textbackslash mathfrak{\texttt{}}}}$  とする.

#### 公理 1.1.1: Lie 代数の公理

体  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間  $\mathfrak{g}$  の上に二項演算<sup>a</sup>

$$[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}, (x, y) \longmapsto [x, y]$$

が定義されていて, かつ以下の条件を充たすとき,  $\mathfrak{g}$  は **Lie 代数** (Lie algebra) と呼ばれる:

**(L-1)**  $[\cdot, \cdot]$  は双線型写像である. i.e.  $\forall x, x_i, y, y_i \in \mathfrak{g}, \forall \lambda_i, \mu_i \in \mathbb{K} (i = 1, 2)$  に対して

$$[\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y] = \lambda_1 [x_1, y] + \lambda_2 [x_2, y],$$

$$[x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2] = \mu_1 [x, y_1] + \mu_2 [x, y_2]$$

が成り立つ.

**(L-2)**  $\forall x \in \mathfrak{g}$  に対して

$$[x, x] = o$$

<sup>\*1</sup> 0 の濫用を回避するための苦肉の策です... 普通に不便なので次章以降では零ベクトルも 0 と書きます.

が成り立つ.

(L-3)  $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}$  に対して

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

が成り立つ<sup>b</sup> (Jacobi 恒等式).

---

<sup>a</sup> ベクトル空間に備わっている加法とスカラー乗法の他に、追加で  $[\cdot, \cdot]$  が定義されているという状況である. この付加的な二項演算はしばしば括弧積 (bracket) とか交換子 (commutator) とか Lie ブラケット (Lie bracket) とか呼ばれる.

<sup>b</sup> 結合律ではない!

公理 (L-1), (L-2) から

$$0 = [x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = [x, y] + [y, x]$$

が従う. i.e.  $[x, y]$  は反交換 (anticommute) する:

(L'-2)  $\forall x, y \in \mathfrak{g}$  に対して

$$[x, y] = -[y, x]$$

が成り立つ.

逆に (L'-2) を仮定すると

$$0 = [x, x] + [x, x] = (1 + 1)[x, x]$$

が成り立つ<sup>\*2</sup>ので、体  $\mathbb{K}$  において  $1 + 1 \neq 0$  ならば  $[x, x] = 0$  が言える. i.e.  $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$  ならば<sup>\*3</sup> (L'-2) と (L-2) は同値である.

### 【例 1.1.1】3次元実ベクトル空間

$\mathbb{R}^3$  を  $\mathbb{R}$ -ベクトル空間と見做す.  $\mathbb{R}^3$  上の Lie ブラケットを

$$[\cdot, \cdot]: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \longmapsto x \times y$$

によって定義する. ただし右辺の  $\times$  はベクトル積である. このとき  $\mathbb{R}^3$  が Lie 代数の公理を充たすことを確認しよう:

**証明**  $\mathbb{R}^3$  の元の成分を  $x = (x_\mu)_{1 \leq \mu \leq 3}$  のように書く. ひたすら成分計算をする.

(L-1) ベクトル積の定義から

$$\begin{aligned} ([\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y])_\mu &= \epsilon_{\mu\nu\lambda} (\lambda_1 x_{1\nu} + \lambda_2 x_{2\nu}) y_\lambda \\ &= \lambda_1 \epsilon_{\mu\nu\lambda} x_{1\nu} y_\lambda + \lambda_2 \epsilon_{\mu\nu\lambda} x_{2\nu} y_\lambda \\ &= \lambda_1 [x_1, y]_\mu + \lambda_2 [x_2, y]_\mu \end{aligned}$$

---

<sup>\*2</sup> 2 つ目の等号ではスカラー乗法の分配律 (ベクトル空間の公理である) を使った.

<sup>\*3</sup> 体  $\mathbb{K}$  の標数 (characteristic) を  $\text{char } \mathbb{K}$  と書いた.

が成り立つ. 全く同様に

$$[x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2] = \mu_1 [x, y_1] + \mu_2 [x, y_2]$$

が示される.

**(L-2)** Levi-Civita 記号の添字に関する反対称性から

$$([x, x])_\mu = \epsilon_{\mu\nu\lambda} x_\nu x_\lambda = \epsilon_{\mu\nu\lambda} x_\lambda x_\nu = -\epsilon_{\mu\lambda\nu} x_\lambda x_\nu = -([x, x])_\mu$$

$\text{char } \mathbb{R} = 0 \neq 2$  なので, ここから  $[x, x] = 0$  が従う.

**(L-3)** 行と列をそれぞれ適切に入れ替えた単位行列の行列式を考えることで, 恒等式  $\epsilon_{\mu\nu\lambda} \epsilon_{\rho\sigma\lambda} = \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho}$  が成り立つことがわかる. 従って

$$\begin{aligned} ([x, [y, z]])_\mu &= \epsilon_{\mu\nu\lambda} x_\nu \epsilon_{\lambda\rho\sigma} y_\rho z_\sigma \\ &= (\delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho}) x_\nu y_\rho z_\sigma \\ &= x_\nu y_\mu z_\nu - x_\nu y_\nu z_\mu \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} ([x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]])_\mu &= x_\nu y_\mu z_\nu - x_\nu y_\nu z_\mu + y_\nu z_\mu x_\nu - y_\nu z_\nu x_\mu + z_\nu x_\mu y_\nu - z_\nu x_\nu y_\mu \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

$\mathbb{R}^3$  の標準的な基底

$$e_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

に対して

$$[e_i, e_j] = \epsilon_{ijk} e_k$$

が成り立つ.  $\mathbb{R}^3$  の任意の 2 つの元に対する Lie ブラケットがこの恒等式によって完全に決まることを含意して,  $3^3 = 27$  個の実定数  $\epsilon_{ijk}$  のことを  $\mathbb{R}^3$  の**構造定数** (structure constant) と呼ぶ.

### 【例 1.1.2】一般線形代数 $\mathfrak{gl}(V)$

$V$  を体  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間とする.  $V$  から  $V$  への線型写像全体が成す集合を  $\text{End } V$  と書く<sup>a</sup>.  $\text{End } V$  の加法とスカラー乗法をそれぞれ

$$\begin{aligned} + : \text{End } V \times \text{End } V &\longrightarrow \text{End } V, (x, y) \longmapsto (v \mapsto x(v) + y(v)) \\ \cdot : \mathbb{K} \times \text{End } V &\longrightarrow \text{End } V, (\lambda, x) \longmapsto (v \mapsto \lambda x(v)) \end{aligned}$$

として定義すると, 組  $(\text{End } V, +, \cdot)$  は体  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間になる. 以降では常に  $\text{End } V$  をこの方法でベクトル空間と見做す.



$\text{End } V$  の上の Lie ブラケットを

$$[\cdot, \cdot]: \text{End } V \times \text{End } V \longrightarrow \text{End } V, (x, y) \longmapsto xy - yx$$

と定義する。ただし右辺の  $xy$  などは写像の合成  $x \circ y$  の略記である。このとき組  $(\text{End } V, +, \cdot, [\cdot, \cdot])$  が **Lie 代数の公理** を満たすことを確認しよう：

**証明 (L-1)**  $\forall v \in V$  を 1 つとる。定義に従ってとても丁寧に計算すると

$$\begin{aligned} [\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y](v) &= ((\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)y - y(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2))(v) \\ &= (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)(y(v)) - y((\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)(v)) \\ &= (\lambda_1 x_1)(y(v)) + (\lambda_2 x_2)(y(v)) - y((\lambda_1 x_1)(v) + (\lambda_2 x_2)(v)) \\ &= \lambda_1 x_1(y(v)) + \lambda_2 x_2(y(v)) - \lambda_1 y(x_1(v)) - \lambda_2 y(x_2(v)) \\ &= \lambda_1 (x_1(y(v)) - y(x_1(v))) + \lambda_2 (x_2(y(v)) - y(x_2(v))) \\ &= \lambda_1 [x_1, y](v) + \lambda_2 [x_2, y](v) \\ &= (\lambda_1 [x_1, y] + \lambda_2 [x_2, y])(v) \end{aligned}$$

となる。ただし 4 つ目の等号で  $y \in \text{End } V$  が線型写像であることを使った。全く同様にして

$$[x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2](v) = \mu_1 [x, y_1] + \mu_2 [x, y_2]$$

を示すこともできる。

**(L-2)** 明らかに  $[x, x] = xx - xx = o$  なのでよい。

**(L-3)**  $[\cdot, \cdot]$  の双線型 (**(L-1)**) から

$$\begin{aligned} &[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] \\ &= [x, yz] - [x, zy] + [y, zx] - [y, xz] + [z, xy] - [z, yx] \\ &= xyz - yzx - xzy + zyx + yzx - zxy - yxz + xzy + zxy - xyz - zyx + yxz \\ &= o. \end{aligned}$$

■

この Lie 代数  $(\text{End } V, +, \cdot, [\cdot, \cdot])$  は **一般線形代数** (general linear algebra) と呼ばれ、記号として  $\mathfrak{gl}(V)$  と書かれる。

$\dim V =: n < \infty$  のとき、 $\text{End } V$  は  $n \times n$   $\mathbb{K}$ -行列全体が成す  $\mathbb{K}$  ベクトル空間  $M(n, \mathbb{K})$  と同型である<sup>b</sup>。  $M(n, \mathbb{K})$  を Lie ブラケット  $[x, y] := xy - yx$  によって Lie 代数と見做す<sup>c</sup>ときは、この同型を意識して  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$  と書く。さて、 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$  の標準的な基底は所謂**行列単位**

$$e_{ij} := [\delta_{i\mu} \delta_{j\nu}]_{1 \leq \mu, \nu \leq n} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \overset{j}{0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_i$$

である。Einstein の規約を使って  $e_{ij}e_{kl} = [\delta_{i\mu}\delta_{j\lambda}\delta_{k\lambda}\delta_{l\nu}]_{1\leq\mu,\nu\leq n} = \delta_{jk}[\delta_{i\mu}\delta_{l\nu}]_{1\leq\mu,\nu\leq n} = \delta_{jk}E_{il}$  と計算できるので、 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$  の構造定数は

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{li}e_{kj}$$

となる<sup>d</sup>。

<sup>a</sup> 自己準同型 (endomorphism) の略である。

<sup>b</sup>  $V$  の基底  $e_1, \dots, e_n$  を 1 つ固定する。このとき同型写像  $\varphi: V \rightarrow \mathbb{K}^n$ ,  $v^\mu e_\mu \mapsto (v^\mu)_{1\leq\mu\leq n}$  を使って定義される線型写像  $\phi: \text{End } V \rightarrow M(n, \mathbb{K})$ ,  $f \mapsto \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$  が所望の同型写像である。

<sup>c</sup> 右辺の  $xy$  は行列の積である。

<sup>d</sup> 少し紛らわしいかもしれないが、右辺において  $e_{il}$  は行列 (行列の成分ではない!) で  $\delta_{jk}$  はただの  $\mathbb{K}$  の元である。以下では行列を指定する添字を  $a, b, c, \dots, i, j, k, \dots$  で、行列の成分の添字を  $\mu, \nu, \lambda, \dots$  で書くことにする。つまり、例えば  $x_{ij}$  はある一つの行列を表す一方、 $x_{ij\mu\nu}$  は行列  $x_{ij}$  の第  $(\mu, \nu)$  成分を表す。あまりにも紛らわしい場合には、行列の成分を表す際に  $[x_{ij}]_{\mu\nu}$  のように角括弧で括弧することにする。

### 1.1.1 線型 Lie 代数

#### 定義 1.1.1: 部分 Lie 代数

**Lie 代数**  $\mathfrak{g}$  の部分ベクトル空間  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  が**部分 Lie 代数**であるとは、 $\mathfrak{h}$  が Lie ブラケットについても閉じていることを言う。i.e.  $\forall x, y \in \mathfrak{h}, \forall \lambda \in \mathbb{K}$  に対して

$$x + y, \lambda x, [x, y] \in \mathfrak{h}$$

が成り立つこと。

この小節では以降、 $V$  を体  $\mathbb{K}$  上の有限次元ベクトル空間とする。

#### 定義 1.1.2: 線型 Lie 代数

**一般線形代数**  $\mathfrak{gl}(V)$  の**部分 Lie 代数**のことを**線型 Lie 代数** (linear Lie algebra) と呼ぶ。

線型 Lie 代数として有名なものは**古典代数** (classical algebra) である。これは  $A_l, B_l, C_l, D_l$  と呼ばれる 4 つの無限系列からなる。以下、 $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$  とする。

#### 【例 1.1.3】線型 Lie 代数: $A_l$ 型

$\dim V = l + 1$  とする。**特殊線形代数**  $\mathfrak{sl}(V)$  (または  $\mathfrak{sl}(l + 1, \mathbb{K})$ ) は次のように定義される:

$$\mathfrak{sl}(V) := \{ x \in \mathfrak{gl}(V) \mid \text{Tr}(x) = 0 \}$$

$\mathfrak{sl}(V)$  が本当に**線型 Lie 代数**かどうか確認しよう。

証明  $\forall x, y \in \mathfrak{sl}(V)$  をとる. トレースの線形性および  $\text{Tr}(xy) = \text{Tr}(yx)$  から

$$\begin{aligned}\text{Tr}(x + y) &= \text{Tr}(x) + \text{Tr}(y) = 0 + 0 = 0, \\ \text{Tr}(\lambda x) &= \lambda \text{Tr}(x) = \lambda 0 = 0, \\ \text{Tr}([x, y]) &= \text{Tr}(xy) - \text{Tr}(yx) = \text{Tr}(xy) - \text{Tr}(xy) = 0\end{aligned}$$

が言えるので,  $x + y, \lambda x, [x, y] \in \mathfrak{sl}(V)$  が言えた. ■

**【例 1.1.2】** で使った  $\mathfrak{gl}(l+1, \mathbb{K})$  の標準的な基底で  $\forall x \in \mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{K})$  を  $x = x^{ij}e_{ij}$  と展開すると, トレースレスであることから

$$h_{ij} := \begin{cases} e_{ij} & i \neq j, 1 \leq i, j \leq l+1 \\ e_{ii} - e_{i+1, i+1} & 1 \leq i = j \leq l \end{cases}$$

の  $(l+1)^2 - 1$  個の行列が  $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{K})$  の基底を成すことがわかる. 従って  $\dim \mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{K}) = (l+1)^2 - 1$  である.

#### 【例 1.1.4】 線型 Lie 代数: $B_l$ 型

$\dim V = 2l + 1$  とする. 行列

$$s := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1}_l \\ 0 & \mathbb{1}_l & 0 \end{bmatrix} \in M(2l+1, \mathbb{K})$$

により定まる  $V$  上の非退化<sup>a</sup>かつ対称な双線型形式を  $f$  と書く<sup>b</sup>. このとき, 直交代数 (orthogonal algebra)  $\mathfrak{o}(V)$  (または  $\mathfrak{o}(2l+1, \mathbb{K})$ ) が以下のように定義される:

$$\mathfrak{o}(V) := \{ \textcolor{red}{x} \in \mathfrak{gl}(V) \mid f(\textcolor{red}{x}(v), w) = -f(v, \textcolor{red}{x}(w)), \forall v, w \in V \}$$

$\mathfrak{o}(V)$  が本当に線型 Lie 代数かどうか確認しよう.

証明  $\forall x, y \in \mathfrak{o}(V)$  をとる.  $f$  の双線型性から  $\forall v, w \in V$  に対して

$$\begin{aligned}f((x+y)(v), w) &= f(x(v), w) + f(y(v), w) \\ &= -f(v, x(w)) - f(v, y(w)) \\ &= -f(v, x(w) + y(w)) \\ &= -f(v, (x+y)(w)) \\ f((\lambda x)(v), w) &= \lambda f(x(v), w) \\ &= -\lambda f(v, x(w)) \\ &= -f(v, \lambda x(w)) \\ &= -f(v, (\lambda x)(w)) \\ f([x, y](v), w) &= f(x(y(v)), w) - f(y(x(v)), w) \\ &= -f(y(v), x(w)) + f(x(v), y(w)) \\ &= f(v, y(x(w))) - f(v, x(y(w))) \\ &= -f(v, [x, y](w))\end{aligned}$$

が言えるので,  $x + y, \lambda x, [x, y] \in \mathfrak{o}(V)$  が言えた. ■

---


$$\begin{aligned} &^a \text{「} v \in V \text{ が } \forall w \in V \text{ に対して } f(v, w) = 0 \text{ を満たす} \implies v = o \text{」かつ「} w \in V \text{ が } \forall v \in V \text{ に対して } f(v, w) = 0 \\ &\text{を満たす} \implies w = o \text{」} \\ &^b f: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}, (v, w) \longmapsto v^\top s w \text{ のこと.} \end{aligned}$$

**【例 1.1.5】線型 Lie 代数:  $C_l$  型**

$\dim V = 2l$  とする. 行列

$$s := \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_l \\ -\mathbf{1}_l & 0 \end{bmatrix} \in M(2l, \mathbb{K})$$

により定まる  $V$  上の非退化かつ歪対称な双線型形式を  $f$  と書く. このとき, シンプレクティック代数 (symplectic algebra)  $\mathfrak{sp}(V)$  (または  $\mathfrak{sp}(2l, \mathbb{K})$ ) が以下のように定義される:

$$\mathfrak{sp}(V) := \{ x \in \mathfrak{gl}(V) \mid f(x(v), w) = -f(v, x(w)), \forall v, w \in V \}$$

**【例 1.1.4】** と全く同様にして  $\mathfrak{sp}(V)$  が線型 Lie 代数であることを証明できる.

**【例 1.1.6】線型 Lie 代数:  $D_l$  型**

$\dim V = 2l$  とし, 行列

$$s := \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_l \\ \mathbf{1}_l & 0 \end{bmatrix} \in M(2l, \mathbb{K})$$

により定まる  $V$  上の非退化かつ対称な双線型形式を  $f$  と書く. このとき, **【例 1.1.4】** と全く同様に直交代数 (orthogonal algebra)  $\mathfrak{o}(V)$  (または  $\mathfrak{o}(2l, \mathbb{K})$ ) が定義される.

さらに, 古典代数以外の線型 Lie 代数をいくつか導入する.

**【例 1.1.7】線型 Lie 代数:  $\mathfrak{t}$**

$n \times n$  上三角行列全体の集合を  $\mathfrak{t}(n, \mathbb{K}) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$  と書く<sup>a</sup>:

$$\mathfrak{t}(n, \mathbb{K}) := \left\{ [a_{\mu\nu}]_{1 \leq \mu, \nu \leq n} \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \mid \mu > \nu \implies a_{\mu\nu} = 0 \right\}$$

$\mathfrak{t}(n, \mathbb{K})$  が線型 Lie 代数であることを確認しよう.

**証明**  $\forall x = [x_{\mu\nu}]_{1 \leq \mu, \nu \leq n}, y = [y_{\mu\nu}]_{1 \leq \mu, \nu \leq n} \in \mathfrak{t}(n, \mathbb{K})$  をとる. このとき  $1 \leq \nu < \mu \leq n$  なる全ての  $(\mu, \nu)$  に対して

$$\begin{aligned} [x + y]_{\mu\nu} &= x_{\mu\nu} + y_{\mu\nu} = 0 + 0 = 0 \\ [\lambda x]_{\mu\nu} &= \lambda x_{\mu\nu} = \lambda 0 = 0 \\ [xy]_{\mu\nu} &= \sum_{\lambda=1}^n x_{\mu\lambda} y_{\lambda\nu} = \sum_{\lambda=1}^{\nu} 0 y_{\lambda\nu} + \sum_{\lambda=\nu+1}^n x_{\mu\lambda} 0 = 0 \end{aligned}$$

が成り立つので  $x + y, \lambda x, [x, y] \in \mathfrak{t}(n, \mathbb{K})$  が言えた. ■

---

<sup>a</sup>  $\mathfrak{t}$  の L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X コマンドは `\mathfrak{t}`

#### 【例 1.1.8】線型 Lie 代数： $\mathfrak{n}$

$n \times n$  上三角行列のうち対角成分が全て 0 であるものの全体がなす集合を  $\mathfrak{n}(n, \mathbb{K}) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$  と書く<sup>a</sup>：

$$\mathfrak{n}(n, \mathbb{K}) := \left\{ [a_{\mu\nu}]_{1 \leq \mu, \nu \leq n} \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \mid \mu \geq \nu \implies a_{\mu\nu} = 0 \right\}$$

$\mathfrak{n}(n, \mathbb{K})$  が線型 Lie 代数であることは【例 1.1.7】と全く同様に証明できる.

---

<sup>a</sup>  $\mathfrak{n}$  の L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X コマンドは `\mathfrak{n}`

#### 【例 1.1.9】線型 Lie 代数： $\mathfrak{d}$

$n \times n$  対角行列全体がなす集合を  $\mathfrak{d}(n, \mathbb{K}) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$  と書く<sup>a</sup>：

$$\mathfrak{d}(n, \mathbb{K}) := \left\{ [a_{\mu\nu}]_{1 \leq \mu, \nu \leq n} \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \mid \mu \neq \nu \implies a_{\mu\nu} = 0 \right\}$$

$\mathfrak{d}(n, \mathbb{K})$  は明らかに線型 Lie 代数である.

---

<sup>a</sup>  $\mathfrak{d}$  の L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X コマンドは `\mathfrak{d}`

### 公理 1.1.2: 代数

体  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間  $\mathfrak{U}$ <sup>a</sup> の上に二項演算

$$*: \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{U}, (x, y) \longmapsto x * y$$

が定義されていて、かつ以下の条件を満たすとき、 $\mathfrak{U}$  は  $\mathbb{K}$ -代数 ( $\mathbb{K}$ -algebra) と呼ばれる<sup>b</sup>：

**(A-1)**  $*$  は双線型写像である. i.e.  $\forall x, x_i, y, y_i \in \mathfrak{g}, \forall \lambda_i, \mu_i \in \mathbb{K} (i = 1, 2)$  に対して

$$\begin{aligned} (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) * y &= \lambda_1 x_1 * y + \lambda_2 x_2 * y, \\ x * (\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) &= \mu_1 x * y_1 + \mu_2 x * y_2 \end{aligned}$$

が成り立つ.

---

<sup>a</sup> `\mathfrak{U}`

<sup>b</sup> 結合律は要請しない！  $*$  に関する結合律を公理に含める場合は結合代数 (associative algebra) と言う. 文献によっては代数と言って結合代数のことを指す場合があるので注意.

Lie 代数は  $\mathbb{K}$ -代数である.

### 定義 1.1.3: 代数の微分

$\mathbb{K}$ -代数  $\mathfrak{U}$  の微分 (derivation) とは, 線型写像

$$d: \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{U}$$

であって Leibniz 則

$$d(x * y) = x * d(y) + d(x) * y$$

を満たすもののこと.

全ての  $\mathfrak{U}$  の微分がなす集合を  $\text{Der } \mathfrak{U}$  と書く.

### 命題 1.1.1: 代数の微分がなす Lie 代数

$\text{Der } \mathfrak{U}$  の上の加法, スカラー乗法, Lie ブラケットをそれぞれ

$$+ : \text{Der } \mathfrak{U} \times \text{Der } \mathfrak{U} \longrightarrow \text{Der } \mathfrak{U}, (d, e) \longmapsto (x \mapsto d(x) + e(x))$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times \text{Der } \mathfrak{U} \longrightarrow \text{Der } \mathfrak{U}, (\lambda, d) \longmapsto (x \mapsto \lambda d(x))$$

$$[, ] : \text{Der } \mathfrak{U} \times \text{Der } \mathfrak{U} \longrightarrow \text{Der } \mathfrak{U}, (d, e) \longmapsto (x \mapsto d(e(x)) - e(d(x)))$$

と定義すると, 組  $(\text{Der } \mathfrak{U}, +, \cdot, [,])$  は  $\mathfrak{gl}(\mathfrak{U})$  の部分 Lie 代数である. Lie 代数としての  $\text{Der } \mathfrak{U}$  のことを微分代数 (derivation algebra) と呼ぶ<sup>a</sup>.

<sup>a</sup> <https://mathworld.wolfram.com/DerivationAlgebra.html>

**証明**  $\forall x, y \in \mathfrak{U}$  をとる. 代数の微分は線型写像なので,  $*$  の双線型性および微分の Leibniz 則から

$$\begin{aligned} (d + e)(x * y) &= x * d(y) + d(x) * y + x * e(y) + e(x) * y = x * (d + e)(y) + (d + e)(x) * y \\ (\lambda d)(x * y) &= \lambda(d(x) * y + x * d(y)) = (\lambda d(x)) * y + x * (\lambda d(y)) = (\lambda d)(x) * y + x * (\lambda d)(y) \end{aligned}$$

が成り立つ. i.e.  $d + e, \lambda d \in \text{Der } \mathfrak{U}$  が言えた. Lie ブラケットに関しては,

$$d(e(x * y)) = d(x * e(y) + e(x) * y) = x * d(e(y)) + d(x) * e(y) + e(x) * d(y) + d(e(x)) * y$$

に注意すると

$$\begin{aligned} [d, e](x * y) &= x * d(e(y)) + \cancel{d(x) * e(y)} + \cancel{e(x) * d(y)} + d(e(x)) * y \\ &\quad - x * e(d(y)) - \cancel{e(x) * d(y)} - \cancel{d(x) * e(y)} - e(d(x)) * y \\ &= x * [d, e](y) + [d, e](x) * y \end{aligned}$$

が成り立つ. i.e.  $[d, e] \in \text{Der } \mathfrak{U}$  が言えた. ■

### 【例 1.1.10】内部微分

Lie 代数  $\mathfrak{g}$  は  $\mathbb{K}$ -代数なので, その微分代数  $\text{Der } \mathfrak{g}$  を考えることができる.

ここで  $x \in \mathfrak{g}$  を任意にとろう。このとき、写像

$$\mathrm{ad} x: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}, z \longmapsto [x, z]$$

は線型写像で、Jacobi 恒等式から

$$\begin{aligned} \mathrm{ad} x([z, w]) &= [x, [z, w]] \\ &= [[x, z], w] + [z, [x, w]] \\ &= [\mathrm{ad} x(z), w] + [z, \mathrm{ad} x(w)] \end{aligned}$$

を充たすことがわかる。これはまさに Leibniz 則なので、 $\mathrm{ad} x \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$  である。 $\mathrm{ad} x$  の形で書ける  $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$  の元のことを内部微分 (inner derivation) と呼ぶ<sup>a</sup>。

<sup>a</sup>  $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$  の元が内部微分でないとき、外部微分 (outer derivation) であると言う。

### 1.1.2 イデアル・商代数

#### 定義 1.1.4: Lie 代数のイデアル

Lie 代数  $\mathfrak{g}$  の部分集合  $\mathfrak{i}$  が  $\mathfrak{g}$  のイデアル (ideal) であるとは、以下の 2 条件を充たすことを言う：

(LI-1)  $\mathfrak{i}$  は  $\mathfrak{g}$  の部分ベクトル空間である。

(LI-2)  $\forall x \in \mathfrak{g}, \forall y \in \mathfrak{i}$  に対して  $[x, y] \in \mathfrak{i}$

<sup>a</sup>  $\mathfrak{i}$

#### 【例 1.1.11】自明なイデアル

$\forall x \in \mathfrak{g}$  に対して  $[x, o] = [x, x + (-x)] = [x, x] - [x, x] = o$  が成り立つので、 $\{o\}$  は  $\mathfrak{g}$  のイデアルである。また、Lie ブラケットについて閉じているので  $\mathfrak{g}$  自身もイデアルである。この 2 つを自明なイデアル (trivial ideal) と呼ぶ。

#### 【例 1.1.12】中心

Lie 代数  $\mathfrak{g}$  の中心 (center) は

$$Z(\mathfrak{g}) := \{ z \in \mathfrak{g} \mid \forall x \in \mathfrak{g}, [x, z] = o \}$$

と定義される。 $o \in Z(\mathfrak{g})$  であることから  $Z(\mathfrak{g})$  はイデアルである。 $\mathfrak{g}$  が Lie ブラケットに関して可換である必要十分条件は  $Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$  が成り立つことである<sup>a</sup>。

<sup>a</sup> Lie 代数の公理 (L'-1) より、 $[x, y] = [y, x]$  ならば  $[x, y] = -[x, y] \iff [x, y] = o$  である。

### 補題 1.1.1: イdeal同士の演算

Lie 代数  $\mathfrak{g}$  とそのイdeal  $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$  を与える. このとき以下の3つが成り立つ:

- (1) 集合  $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{j}$  は  $\mathfrak{g}$  のイdealである.
- (2) 集合  $\mathfrak{i} + \mathfrak{j} := \{x + y \mid x \in \mathfrak{i}, y \in \mathfrak{j}\}$  は  $\mathfrak{g}$  のイdealである.
- (3) 集合  $[\mathfrak{i}, \mathfrak{j}] := \{\sum_{i=1}^n [x_i, y_i] \mid x_i \in \mathfrak{i}, y_i \in \mathfrak{j}; n < \infty\}$  は  $\mathfrak{g}$  のイdealである.

**証明** (1) ほぼ自明.

- (2)  $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$  の勝手な元  $z + w$  と  $\forall x \in \mathfrak{g}$  をとる. Lie ブラケットの双線型性から  $[x, z + w] = [x, z] + [x, w]$  と言えるが,  $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$  がイdealであることにより  $[x, z] \in \mathfrak{i}, [x, w] \in \mathfrak{j}$  なので右辺は  $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$  に属する.
- (3)  $\forall x \in \mathfrak{g}$  を1つとる. Lie ブラケットの双線型性から, このとき  $\forall z \in \mathfrak{i}, \forall w \in \mathfrak{j}$  に対して  $[x, [z, w]] \in [\mathfrak{i}, \mathfrak{j}]$  が成り立つことを示せば良い. 実際, Lie 代数の公理 (L-2), (L-3) より

$$[x, [z, w]] = [[w, x], z] + [[x, z], w] = [z, [x, w]] + [[x, z], w]$$

と言えるが,  $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$  がイdealであることにより  $[x, w] \in \mathfrak{j}, [x, z] \in \mathfrak{i}$  なので右辺は  $[\mathfrak{i}, \mathfrak{j}]$  に属する. ■

### 【例 1.1.13】導来 Lie 代数

Lie 代数  $\mathfrak{g}$  の導来代数 (derived algebra) とは,  $\mathfrak{g}$  のイdeal  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  のこと.

### 定義 1.1.5: 単純 Lie 代数

Lie 代数  $\mathfrak{g}$  が単純 (simple) であるとは,  $\mathfrak{g}$  が自明なイdeal以外のイdealを持たず, かつ  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \{0\}$  を満たすことを言う.

### 【例 1.1.14】単純 Lie 代数: $\mathfrak{sl}(2)$

$\text{char } \mathbb{K} \neq 2$  とする. 【例 1.1.3】に倣って  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$  の基底を

$$x := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad y := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad h := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

とする. この基底同士の Lie ブラケットは

$$[x, y] = h, \quad [h, x] = 2x, \quad [h, y] = -2y \quad (1.1.1)$$

と計算できる. よって  $[\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}), \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})] = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}) \neq \{0\}$  である.

ここで  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$  の任意のイdeal  $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$  をとる.  $\mathfrak{i} \neq \{0\}$  ならば  $ax + by + ch \in \mathfrak{i} \setminus \{0\}$  が存在し,

$$\begin{aligned} \text{ad}(x) \circ \text{ad}(x)(ax + by + ch) &= [x, [x, ax + by + ch]] = -2bx \in \mathfrak{i}, \\ \text{ad}(y) \circ \text{ad}(y)(ax + by + ch) &= [y, [y, ax + by + ch]] = -2ay \in \mathfrak{i} \end{aligned}$$

が成り立つ. 故にもし  $(a, b) \neq (0, 0)$  ならば  $x \in \mathfrak{i}$  または  $y \in \mathfrak{i}$  だが<sup>a</sup>, イdealの定義と (1.1.1) か



ら  $\mathfrak{i} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$  が言える. もし  $(a, b) = (0, 0)$  ならば  $ch \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}) \setminus \{0\}$  だが, このときもイデアルの定義と (1.1.1) から  $x, y \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$  が従う. i.e.  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$  は単純 Lie 代数である.

<sup>a</sup>  $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$  なので  $2 \neq 0$ .

Lie 代数  $\mathfrak{g}$  のイデアル  $\mathfrak{i}$  が与えられたとき, 商群のときと同じ要領で商代数を構成できる. このことを復習しよう:

$\mathfrak{g}$  上の同値関係を

$$\sim := \{ (x, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mid x - y \in \mathfrak{i} \}$$

と定義する<sup>\*4</sup>.  $\sim$  による  $x \in \mathfrak{g}$  の同値類のことを  $x + \mathfrak{i}$  と書き, 商集合  $\mathfrak{g}/\sim$  のことを  $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$  と書く. 全射  $p: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$  を標準的射影 (canonical projection) と呼ぶ.

#### 定義 1.1.6: 商代数

集合  $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$  の上には次のようにして well-defined な加法, スカラー乗法, Lie ブラケットが定義できる:

$$\begin{aligned} +: \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \times \mathfrak{g}/\mathfrak{i} &\rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i}, (x + \mathfrak{i}, y + \mathfrak{i}) \mapsto (x + y) + \mathfrak{i} \\ \cdot: \mathbb{K} \times \mathfrak{g}/\mathfrak{i} &\rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i}, (\lambda, x + \mathfrak{i}) \mapsto (\lambda x) + \mathfrak{i} \\ [, ]: \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \times \mathfrak{g}/\mathfrak{i} &\rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i}, (x + \mathfrak{i}, y + \mathfrak{i}) \mapsto [x, y] + \mathfrak{i} \end{aligned}$$

Lie 代数  $(\mathfrak{g}/\mathfrak{i}, +, \cdot, [, ],)$  のことを商代数 (quotient algebra) と呼ぶ.

**証明** well-definedness を示す.  $x + \mathfrak{i} = x' + \mathfrak{i}, y + \mathfrak{i} = y' + \mathfrak{i}$  ならば  $x' - x, y' - y \in \mathfrak{i}$  であるから

$$\begin{aligned} x' + y' &= (x + y) + (x' - x) + (y' - y) \in (x + y) + \mathfrak{i}, \\ \lambda x' &= \lambda x + \lambda(x' - x) \in (\lambda x) + \mathfrak{i} \end{aligned}$$

が成り立つ. また,  $\mathfrak{i}$  がイデアルであることにより

$$\begin{aligned} [x', y'] &= [x + (x' - x), y + (y' - y)] \\ &= [x, y] + [x, y' - y] - [y, x' - x] + [x' - x, y' - y] \\ &\in [x, y] + \mathfrak{i} \end{aligned}$$

が言える. ■

定義 1.1.6 による商代数の構成によって, 標準的射影は自動的に Lie 代数の準同型写像になる:

!

$$\begin{aligned} p(x + y) &= (x + y) + \mathfrak{i} =: (x + \mathfrak{i}) + (y + \mathfrak{i}) = p(x) + p(y), \\ p(\lambda x) &= (\lambda x) + \mathfrak{i} =: \lambda(x + \mathfrak{i}) = \lambda p(x), \\ p([x, y]) &= [x, y] + \mathfrak{i} =: [(x + \mathfrak{i}), (y + \mathfrak{i})] = [p(x), p(y)]. \end{aligned}$$

<sup>\*4</sup> (LI-1) より  $\mathfrak{i}$  は部分ベクトル空間なので反射律と対称律が言える.  $x \sim y$  かつ  $y \sim z$  ならば  $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathfrak{i}$  なので  $x \sim z$  であり, 推移律が成り立つことがわかる.

### 定義 1.1.7: 正規化代数・中心化代数

- Lie 代数  $\mathfrak{g}$  とその部分 Lie 代数 (もしくは部分ベクトル空間)  $\mathfrak{h}$  を与える. このとき  $\mathfrak{h}$  の正規化代数 (normalizer) を

$$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) := \{ x \in \mathfrak{g} \mid \forall h \in \mathfrak{h}, [x, h] \in \mathfrak{h} \}$$

で定義する<sup>a</sup>. 特に  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$  のとき,  $\mathfrak{h}$  は self-normalizing であると言う.

- Lie 代数  $\mathfrak{g}$  とその部分集合  $X$  を与える. このとき  $X$  の中心化代数 (centralizer) を

$$C_{\mathfrak{g}}(X) := \{ x \in \mathfrak{g} \mid \forall z \in X, [x, z] = o \}$$

と定義する<sup>b</sup>.

<sup>a</sup>  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  は  $\mathfrak{g}$  の部分 Lie 代数である:  $\forall x, y \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  に対して, Jacobi 恒等式から  $\forall z \in \mathfrak{h}, [[x, y], z] = [x, [y, z]] - [y, [x, z]] \in \mathfrak{h}$  が言える. さらに, もし  $\mathfrak{h}$  が部分 Lie 代数ならば, 定義から  $\mathfrak{h}$  を  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  の部分ベクトル空間と見做したときに  $\mathfrak{h}$  は自動的にイデアルになる. 特に,  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  は  $\mathfrak{h} \subset N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  をイデアルとして持つ最大の部分 Lie 代数である.

<sup>b</sup>  $C_{\mathfrak{g}}(X)$  が  $\mathfrak{g}$  の部分 Lie 代数であることは,  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  のときと全く同様にして示される.

【例 1.1.12】を思い出すと,  $Z(\mathfrak{g}) = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$  である.

### 1.1.3 準同型・表現

#### 定義 1.1.8: Lie 代数の準同型

2つの Lie 代数  $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$  を与える. 写像  $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  が Lie 代数の準同型 (homomorphism) であるとは,  $f$  が和, スカラー乗法, Lie ブラケットの全てを保存することを言う. i.e.  $\forall x, y \in \mathfrak{g}, \forall \lambda \in \mathbb{K}$  に対して

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y), \\ f(\lambda x) &= \lambda f(x), \\ f([x, y]) &= [f(x), f(y)] \end{aligned}$$

が成り立つこと.

全単射な Lie 代数の準同型のことを Lie 代数の同型 (isomorphism) と呼ぶ.

Lie 代数の準同型  $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  の核 (kernel), 像 (image) をそれぞれ

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &:= \{ x \in \mathfrak{g} \mid f(x) = o \}, \\ \text{Im } f &:= \{ f(x) \in \mathfrak{h} \mid x \in \mathfrak{g} \} \end{aligned}$$

と定義すると  $\text{Ker } f$  はイデアルであり<sup>\*5</sup>,  $\text{Im } f$  は部分 Lie 代数である<sup>\*6</sup>.

<sup>\*5</sup>  $\forall x, y \in \text{Ker } f$  に対して  $f(x+y) = f(x) + f(y) = o + o = o$ ,  $f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda o = o$  なので部分ベクトル空間, かつ  $\forall z \in \mathfrak{g}$  に対して  $f([z, x]) = [f(z), f(x)] = [f(z), o] = o$ .

<sup>\*6</sup>  $\forall f(x), f(y) \in \text{Im } f$  に対して  $f(x) + f(y) = f(x+y)$ ,  $\lambda f(x) = f(\lambda x)$ ;  $[f(x), f(y)] = f([x, y])$

### 命題 1.1.2: 準同型定理

Lie 代数  $\mathfrak{g}$  およびそのイデアル  $i, j$  を与える. このとき, 任意の Lie 代数の準同型  $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  に対して<sup>a</sup>以下が成り立つ:

- (1)  $\mathfrak{g}/\text{Ker } f \cong \text{Im } f$ . また,  $i \subset \text{Ker } f$  が成り立つならば, 以下の図式を可換にする Lie 代数の準同型  $\bar{f}: \mathfrak{g}/i \rightarrow \mathfrak{h}$  が一意的存在する:

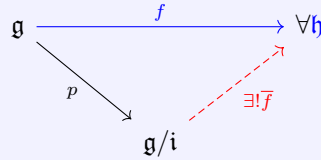


図 1.1: 商代数の普遍性.  $p$  は標準的射影  $p: x \mapsto x + i$  を表す.

- (2)  $i \subset j$  が成り立つとする. このとき  $j/i$  は  $\mathfrak{g}/i$  のイデアルであり, 自然な同型  $(\mathfrak{g}/i)/(j/i) \cong \mathfrak{g}/j$  が成り立つ.  
 (3) 自然な同型  $(i+j)/j \cong i/(i \cap j)$  が成り立つ.

<sup>a</sup> わざわざこのような記述をしたのは, (1) が商代数の普遍性 (universal property) を意味していることを明示するためである.

**証明** (1) まず,  $i \subset \text{Ker } f$  ならば写像  $\bar{f}: \mathfrak{g}/i \rightarrow \text{Im } f, x+i \mapsto f(x)$  が well-defined な Lie 代数の準同型であることを示す. 実際  $x+i = x'+i$  ならば  $x'-x \in i \subset \text{Ker } f$  であり,  $\bar{f}(x'+i) = f(x') = f(x + (x' - x)) = f(x) + f(x' - x) = f(x) = \bar{f}(x+i)$  が言えた.  $\bar{f}$  が Lie 代数の準同型であることは  $f$  が Lie 代数の準同型であることから明らか. 定義から  $\bar{f} \circ p = f$  である.

次に  $\bar{f}$  の一意性を示す. 別の  $\phi: \mathfrak{g}/i \rightarrow \mathfrak{h}$  が存在して  $\phi \circ p = f$  が成り立つとする. このとき  $\forall x \in \mathfrak{g}$  に対して  $\phi(x+i) = f(x)$  が成り立つので  $\phi = \bar{f}$  である.

特に  $i = \text{Ker } f$  ならば,  $\text{Ker } \bar{f} = \{\text{Ker } f\} = \{0\}$  なので  $\bar{f}$  は単射であり  $\mathfrak{g}/\text{Ker } f \cong \text{Im } f$  が言えた.

- (2)  $i \subset j$  のとき, イデアルの定義より  $i$  は  $j$  のイデアルでもある. よって商代数  $j/i$  は well-defined. 明らかに  $j/i \subset \mathfrak{g}/i$  なので  $j/i$  は  $\mathfrak{g}/i$  の部分 Lie 代数だと分かった. ここで  $\forall x+i \in \mathfrak{g}/i, \forall y+i \in j/i$  をとると,  $j$  が  $\mathfrak{g}$  のイデアルであることから  $[x+i, y+i] = [x, y] + i \in j/i$  が従う<sup>\*7</sup>. 以上の議論から  $j/i$  が  $\mathfrak{g}/i$  のイデアルであることが示された.

さて, Lie 代数の全射準同型  $f: \mathfrak{g}/i \rightarrow \mathfrak{g}/j, x+i \mapsto x+j$  は仮定より well-defined で<sup>\*8</sup>, かつ  $\text{Ker } f = j/i$  である. 従って (1) より  $\mathfrak{g}/j \cong (\mathfrak{g}/i)/(j/i)$  が言える.

- (3) Lie 代数の全射準同型  $f: i \rightarrow (i+j)/j, x \mapsto x+j$  に対して  $\text{Ker } f = i \cap j$  である. 従って (1) より  $(i+j)/j \cong i/(i \cap j)$  が言える.

<sup>\*7</sup>  $[x, y] \in j$  なので.

<sup>\*8</sup>  $x+i = x'+i \implies x'-x \in i \subset j \implies f(x'+i) = (x + (x' - x)) + j = x + j = f(x+i)$

### 定義 1.1.9: Lie 代数の表現

$V$  を  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間とする. Lie 代数の準同型

$$\phi: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

と  $V$  の組  $(\phi, V)$  のことを **Lie 代数の表現** (representation) と呼ぶ<sup>a</sup>.

<sup>a</sup> 「代数の表現」と言われたとき, 代数の表現なのか結合代数の表現なのか Lie 代数の表現なのか文脈で判断しなくてはならないかもしれない.

### 【例 1.1.15】 随伴表現

【例 1.1.10】 で定義した  $\text{ad}(x)$  は, 写像

$$\text{ad}: \mathfrak{g} \longrightarrow \text{Der}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), \quad x \longmapsto (z \mapsto [x, z])$$

だと思える.  $\text{ad}$  は明らかに線型写像で, かつ  $\forall z \in \mathfrak{g}$  に対して

$$\begin{aligned} [\text{ad } x, \text{ad } y](z) &= \text{ad } x([y, z]) - \text{ad } y([x, z]) \\ &= [x, [y, z]] - [y, [x, z]] \\ &= [x, [y, z]] + [y, [z, x]] \\ &= [[x, y], z] \\ &= \text{ad } [x, y](z) \end{aligned}$$

が成り立つので Lie 代数の準同型である. 故に組  $(\text{ad}, \mathfrak{g})$  は Lie 代数の表現である.

$$x \in \text{Ker ad} \iff \forall y \in \mathfrak{g}, [x, y] = 0$$

より, 【例 1.1.12】を思い出すと  $\text{Ker ad} = Z(\mathfrak{g})$  と分かる. 特に単純 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  に対して  $Z(\mathfrak{g}) = \{0\}$  なので  $\text{ad}$  は単射準同型である. i.e. 任意の単純 Lie 代数は線形 Lie 代数と同型である<sup>a</sup>.

<sup>a</sup> 単射準同型は包含準同型だと見做せる.

## 1.1.4 自己同型

### 定義 1.1.10: 自己同型

## 1.1.5 可解 Lie 代数

Lie 代数  $\mathfrak{g}$  を与える.  $D\mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  とおくと, 【例 1.1.13】より  $D\mathfrak{g}$  は  $\mathfrak{g}$  のイデアルである.

### 定義 1.1.11: 可解 Lie 代数

導来列 (derived series) とは, **イデアル** の減少列

$$\mathfrak{g} = D^0 \mathfrak{g} \supset D^1 \mathfrak{g} \supset D^2 \mathfrak{g} \supset \cdots$$

のこと. ある  $n > 0$  に対して導来列が初めてゼロになって止まるとき, i.e.  $D^n \mathfrak{g} = \{0\}$  が成り立つとき, Lie 代数  $\mathfrak{g}$  は**可解** (solvable) であると言われる.

### 命題 1.1.3:

Lie 代数  $\mathfrak{g}$  および Lie 代数の準同型  $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  を与える. このとき以下が成り立つ:

- (1)  $\mathfrak{g}$  が**可解**ならば,  $\mathfrak{g}$  の任意の**部分 Lie 代数**  $\mathfrak{a}$  は可解である. また,  $\text{Im } f$  も可解である.
- (2)  $\mathfrak{g}$  が**可解**ならば,  $\mathfrak{g}$  の任意の**イデアル**  $\mathfrak{a}$  について**商代数**  $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$  も可解である.
- (3)  $\mathfrak{g}$  のイデアル  $\mathfrak{i}$  と**商代数**  $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$  がどちらも可解ならば,  $\mathfrak{g}$  自身も可解である.
- (4)  $\mathfrak{g}$  のイデアル  $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$  が可解ならば, イデアル  $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$  も可解である.

**証明** (1) 仮定より  $\mathfrak{g}$  が可解なので, ある  $n > 0$  に対して  $D^n \mathfrak{g} = \{0\}$  となる.  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$  ならば  $D\mathfrak{a} \subset D\mathfrak{g}$  であるから, 帰納的に  $D^i \mathfrak{a} \subset D^i \mathfrak{g}$  ( $i = 0, 1, \dots$ ) が分かる. よって  $D^n \mathfrak{a} = \{0\}$  である. また,  $f$  が Lie 代数の準同型であることから  $f(D\mathfrak{g}) = [f(\mathfrak{g}), f(\mathfrak{g})] = [\text{Im } f, \text{Im } f] = D(\text{Im } f)$  であり, 帰納的に  $f(D^i \mathfrak{g}) = D^i(\text{Im } f)$  が分かる. 故に  $D^n(\text{Im } f) = f(\{0\}) = \{0\}$  である.

(2) 標準的射影  $p: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ ,  $x \mapsto x + \mathfrak{a}$  に対して (1) を適用すれば良い.

(3) 仮定より  $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$  が可解なので, ある  $n > 0$  に対して  $D^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{i}) = \{0\}$  と成る. 標準的射影  $p: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$  について, (1) の証明から  $\{0\} = D^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{i}) = D^n(\text{Im } p) = p(D^n \mathfrak{g})$  がわかる. 従って  $D^n \mathfrak{g} \subset \mathfrak{i}$  である. 仮定より  $\mathfrak{i}$  も可解だからある  $m > 0$  に対して  $D^m \mathfrak{i} = \{0\}$  となる. 故に帰納的に  $D^{n+m} \mathfrak{g} \subset \mathfrak{i}^m = \{0\}$  が示される.

(4) **準同型定理**-(3) より

$$(\mathfrak{i} + \mathfrak{j})/\mathfrak{j} \cong \mathfrak{i}/(\mathfrak{i} \cap \mathfrak{j})$$

が成り立つ. 仮定より  $\mathfrak{i}$  は可解なので, (2) より右辺も可解. よって (3) より  $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$  も可解である. ■

$\mathfrak{g}$  を有限次元 Lie 代数とし,  $\mathfrak{r}$ <sup>\*9</sup> を  $\mathfrak{g}$  の極大<sup>\*10</sup>**可解**イデアルとしよう<sup>\*11</sup>

### 補題 1.1.2:

$\mathfrak{r}$  は  $\mathfrak{g}$  の全ての可解イデアルを含む. i.e. 最大 (maximal) の可解イデアルである.

**証明** 任意の  $\mathfrak{g}$  の可解イデアル  $\mathfrak{i}$  をとる. **準同型定理**-(3) より

$$(\mathfrak{i} + \mathfrak{r})/\mathfrak{i} \cong \mathfrak{r}/(\mathfrak{i} \cap \mathfrak{r})$$

<sup>\*9</sup>  $\mathfrak{r} = \bigcap \{ \mathfrak{r}' \mid \mathfrak{r}' \text{ は } \mathfrak{g} \text{ の可解イデアル} \}$

<sup>\*10</sup>  $\mathfrak{r} \subsetneq \mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$  を充たす  $\mathfrak{g}$  の可解イデアル  $\mathfrak{i}$  が  $\mathfrak{g}$  以外に存在しない.

<sup>\*11</sup>  $\mathfrak{r}$  は少なくとも 1 つ存在する.  $\mathfrak{g}$  が有限次元なので,  $\mathfrak{g}$  の可解イデアルのうち次元が最大のものを取れば良い.

が成り立つ.  $\mathfrak{r}$  は可解なので命題 1.1.3-(1) より  $\mathfrak{r}/(\mathfrak{i} \cap \mathfrak{r})$  は可解であり, 従って  $(\mathfrak{i} + \mathfrak{r})/\mathfrak{i}$  も可解である.  $\mathfrak{i}$  も可解なので命題 1.1.3-(3) より  $\mathfrak{i} + \mathfrak{r}$  も可解である. 然るに,  $\mathfrak{r}$  の極大性により  $\mathfrak{i} + \mathfrak{r} = \mathfrak{r}$  であるから  $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{r}$  が言えた. ■

#### 定義 1.1.12: 根基

$\mathfrak{g}$  の最大可解イデアル<sup>a</sup> (maximal solvable ideal)  $\mathfrak{r}$  のことを  $\mathfrak{g}$  の**根基** (radical) と呼び,  $\text{rad } \mathfrak{g}$  と書く.

<sup>a</sup> 補題 1.1.2 によりこれは一意的に存在する.

#### 定義 1.1.13: 半単純 Lie 代数

Lie 代数  $\mathfrak{g}$  が**半単純** (semisimple) であるとは,  $\text{rad } \mathfrak{g} = \{0\}$  であることを言う.

### 1.1.6 冪零 Lie 代数

Lie 代数  $\mathfrak{g}$  に対して

$$\begin{aligned} C^0 \mathfrak{g} &:= \mathfrak{g}, \\ C^n \mathfrak{g} &:= [\mathfrak{g}, C^{n-1} \mathfrak{g}] \end{aligned}$$

のように帰納的に**イデアル**の減少列

$$\mathfrak{g} = C^0 \mathfrak{g} \supset C^1 \mathfrak{g} \supset C^2 \mathfrak{g} \supset \cdots \quad (1.1.2)$$

を定義する.

#### 定義 1.1.14: 冪零 Lie 代数

イデアルの減少列 (1.1.2) がある  $n > 0$  に対して初めてゼロになって止まるとき, i.e.  $C^n \mathfrak{g} = \{0\}$  が成り立つとき, Lie 代数  $\mathfrak{g}$  は**冪零** (nilpotent) であると言われる.



線型写像  $x: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  の冪零性との混同を避けるため, 定義 1.1.14 の意味で冪零と言う場合は冪零 Lie 代数と言うことにする.

#### 命題 1.1.4:

Lie 代数  $\mathfrak{g}$  および Lie 代数の準同型  $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  を与える. このとき以下が成り立つ:

- (1)  $\mathfrak{g}$  が冪零 Lie 代数ならば,  $\mathfrak{g}$  の任意の部分 Lie 代数  $\mathfrak{a}$  は冪零 Lie 代数である. また,  $\text{Im } f$  も冪零 Lie 代数である.
- (2)  $\mathfrak{g}$  が冪零 Lie 代数ならば,  $\mathfrak{g}$  の任意のイデアル  $\mathfrak{a}$  について商代数  $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$  も冪零 Lie 代数である.
- (3)  $\mathfrak{g}$  の中心による商代数  $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$  が冪零 Lie 代数ならば  $\mathfrak{g}$  は冪零 Lie 代数である.
- (4)  $\mathfrak{g}$  が冪零 Lie 代数かつ  $\mathfrak{g} \neq \{0\}$  ならば,  $Z(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$  である.
- (5)  $\mathfrak{g}$  が冪零 Lie 代数ならば,  $\forall x \in \mathfrak{g}$  に対して  $\text{ad } x$  は冪零である.

**証明** (1) 仮定より  $\mathfrak{g}$  が冪零 Lie 代数なので, ある  $n > 0$  に対して  $C^n \mathfrak{g} = \{0\}$  となる.  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$  ならば  $C\mathfrak{a} \subset C\mathfrak{g}$  であるから, 帰納的に  $C^i \mathfrak{a} \subset C^i \mathfrak{g}$  ( $i = 0, 1, \dots$ ) が分かる. よって  $C^n \mathfrak{a} = \{0\}$  である. また,  $f$  が Lie 代数の準同型であることから  $f(C\mathfrak{g}) = [f(\mathfrak{g}), f(\mathfrak{g})] = [\text{Im } f, \text{Im } f] = C(\text{Im } f)$  であり, 帰納的に  $f(C^i \mathfrak{g}) = C^i(\text{Im } f)$  が分かる. 故に  $C^n(\text{Im } f) = f(\{0\}) = \{0\}$  である.

(2) 標準的射影  $p: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ ,  $x \mapsto x + \mathfrak{a}$  に対して (1) を適用すれば良い.

(3) 仮定より  $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$  が冪零 Lie 代数なので, ある  $n > 0$  に対して  $C^n(\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})) = \{0\}$  と成る. 標準的射影  $p: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$  について, (1) の証明から  $\{0\} = C^n(\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})) = C^n(\text{Im } p) = p(C^n \mathfrak{g})$  がわかる. 従って  $C^n \mathfrak{g} \subset Z(\mathfrak{g})$  である. 故に中心の定義から  $C^{n+1} \mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, C^n \mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{g}, Z(\mathfrak{g})] = \{0\}$  が示された.

(4) 仮定より  $\mathfrak{g}$  が冪零 Lie 代数なので, ある  $n > 0$  に対して  $C^{n-1} \mathfrak{g} \neq \{0\}$  かつ  $C^n \mathfrak{g} = \{0\}$  となる. このとき  $\{0\} = C^n \mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, C^{n-1} \mathfrak{g}]$  なので中心の定義から  $\{0\} \neq C^{n-1} \mathfrak{g} \subset Z(\mathfrak{g})$  が言える.

(5) 仮定より  $\mathfrak{g}$  が冪零 Lie 代数なので, ある  $n > 0$  に対して  $C^n \mathfrak{g} = \{0\}$  となる. このとき  $\forall x \in \mathfrak{g}$  に対して随伴表現  $\text{ad}(x): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  を考える.  $\text{ad}(x)(C^i \mathfrak{g}) = [x, C^i \mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{g}, C^i \mathfrak{g}] = C^{i+1} \mathfrak{g}$  なので, イデアルの減少列 (1.1.2) に  $\text{ad}(x)$  を作用させると

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{\text{ad}(x)} C^1 \mathfrak{g} \xrightarrow{\text{ad}(x)} \dots \xrightarrow{\text{ad}(x)} C^n \mathfrak{g} = \{0\}$$

となる. i.e.  $\forall y \in \mathfrak{g}$  に対して  $(\text{ad}(x))^n = 0$  である. ■

### 1.1.7 Engel の定理

#### 補題 1.1.3: $\text{ad}$ の冪零性

$x \in \mathfrak{gl}(V)$  が冪零ならば  $\text{ad } x \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(V))$  も冪零である.

**証明**  $x$  が冪零であるという仮定から,  $x^n = 0$  を満たす  $n \in \mathbb{N}$  が存在する.

さて,  $x$  による左移動と右移動をそれぞれ

$$\begin{aligned} \lambda_x: \mathfrak{gl}(V) &\rightarrow \mathfrak{gl}(V), y \mapsto (v \mapsto x(y(v))), \\ \rho_x: \mathfrak{gl}(V) &\rightarrow \mathfrak{gl}(V), y \mapsto (v \mapsto y(x(v))) \end{aligned}$$

と定義しよう.  $\forall y \in \mathfrak{gl}(V)$  を 1 つとると

$$(\lambda_x)^n(y) = x^n y = 0, \quad (\rho_x)^n(y) = y x^n = 0 \quad (1.1.3)$$

が成り立つ。さらに  $\rho_x(\lambda_x(y)) = xyx = \lambda_x(\rho_x(y))$  が成り立つ。i.e.  $\rho_x \lambda_x = \lambda_x \rho_x$  である。従って二項定理が使って<sup>\*12</sup>, (1.1.3) から

$$\begin{aligned} (\operatorname{ad} x)^{2n-1} &= (\lambda_x - \rho_x)^{2n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} (\rho_x)^{2n-k-1} (\lambda_x)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} 0(\lambda_x)^k + \sum_{k=n}^{2n} -1 \binom{2n-1}{k} (\rho_x)^{2n-k-1} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

が言えた。 ■

#### 補題 1.1.4:

$V \neq \{0\}$  を有限次元ベクトル空間とし,  $\mathfrak{gl}(V)$  の任意の部分 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  をとる。  
このとき  $\forall x \in \mathfrak{g}$  が冪零ならば, ある  $v \in V \setminus \{0\}$  が存在して  $\forall x \in \mathfrak{g}$  に対して  $x(v) = 0$  が成り立つ。

**証明**  $\dim \mathfrak{g}$  に関する数学的帰納法により示す。  $\dim \mathfrak{g} = 0$  のときは  $\mathfrak{g} = \{0\}$  なので自明。

$\dim \mathfrak{g} > 0$  とし,  $\mathfrak{g}$  の部分 Lie 代数  $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g}$  を任意に 1 つとる。

$\mathfrak{h} \subsetneq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  であること

補題 1.1.3 より,  $\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  の<sup>\*13</sup>像の全ての元は冪零である<sup>\*14</sup>。ここで  $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$  の Lie ブラケットを忘れて  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間と見做したとき, 商ベクトル空間  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  を構成できる<sup>\*15</sup>。このとき,  $\forall x \in \mathfrak{h}$  に対して写像

$$\overline{\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}}(x): \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}, y + \mathfrak{h} \mapsto \operatorname{ad}(x)(y) + \mathfrak{h}$$

が well-defined な線型写像であることを示す。実際  $y + \mathfrak{h} = y' + \mathfrak{h} \iff y' - y \in \mathfrak{h}$  ならば

$$\begin{aligned} \overline{\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}}(x)(y' + \mathfrak{h}) &= \operatorname{ad}(x)(y') + \mathfrak{h} \\ &= (\operatorname{ad}(x)(y) + \operatorname{ad}(x)(y' - y)) + \mathfrak{h} \\ &= (\operatorname{ad}(x)(y) + [x, y' - y]) + \mathfrak{h} \\ &= \operatorname{ad}(x)(y) + \mathfrak{h} \\ &= \overline{\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}}(x)(y + \mathfrak{h}) \end{aligned}$$

が成り立つので  $\overline{\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}}(x)$  は well-defined であり, かつ  $\operatorname{ad}(x)$  が線型写像なので線型写像である。以上の考察から, 写像  $\overline{\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}}: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}), x \mapsto \overline{\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}}(x)$  は well-defined な Lie 代数の準同型で,  $\operatorname{Im} \overline{\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}}$  (もちろんこれは  $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$  の部分 Lie 代数である) の元は全て冪零である。

さて,  $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$  より  $\dim \mathfrak{h} < \dim \mathfrak{g}$  であるから, 帰納法の仮定よりある  $v + \mathfrak{h} \in (\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \setminus \{0\}$  が存在して,  $\forall \overline{\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}}(x) \in \operatorname{Im} \overline{\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}}$  に対して  $\overline{\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}}(x)(v + \mathfrak{h}) = 0$  が成り立つ。i.e. ある  $v \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$  が存在して

<sup>\*12</sup> 写像の合成の結合律を暗に使っている。

<sup>\*13</sup>  $\operatorname{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  の  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  への制限。

<sup>\*14</sup> 仮定より  $\forall x \in \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  が冪零なので。

<sup>\*15</sup> 商代数の構成において Lie ブラケットを忘れることで商ベクトル空間が構成できる。この際  $\mathfrak{h}$  は  $\mathfrak{g}$  の部分ベクトル空間でありさえすれば良い。



$\forall x \in \mathfrak{h}$  に対して  $\text{ad}|_{\mathfrak{h}}(x)(v) = [x, v] \in \mathfrak{h}$  が成り立つ. i.e.  $\mathfrak{h}$  は  $\mathfrak{h}$  の正規化代数  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  の真部分集合である<sup>\*16</sup>.

$\mathfrak{h}$  を,  $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g}$  を満たす極大<sup>\*17</sup>部分 Lie 代数とする.  $\mathfrak{h}$  の極大性と先ほど証明した事実から  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}$  でなくてはならない. 従って正規化代数の定義の脚注から  $\mathfrak{h}$  は  $\mathfrak{g}$  のイデアルであり, 商代数  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  が well-defined である. もし  $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h} > 1$  だとすると  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  の 1 次元部分 Lie 代数  $\mathbb{K}(x + \mathfrak{h})$  ( $\forall x \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ ) の, 標準的射影による逆像が  $\mathfrak{h}$  を真部分集合にもつ  $\mathfrak{g}$  の真部分代数ということになり,  $\mathfrak{h}$  の極大性に矛盾する. 故に背理法から  $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h} = 1$  であり,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathbb{K}z$  ( $\forall z \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ ) だと分かった.

ここで  $\mathfrak{g}$  の部分ベクトル空間  $W := \{v \in V \mid \forall y \in \mathfrak{h}, y(v) = 0\}$  を考える.  $\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{g} - 1 < \dim \mathfrak{g}$  なので, 帰納法の仮定より  $W \neq \{0\}$  だと分かる<sup>\*18</sup>.  $\mathfrak{h}$  はイデアルなので,  $\forall x \in \mathfrak{g}, \forall y \in \mathfrak{h}, \forall w \in W$  に対して  $y(x(w)) = x(y(w)) - [x, y](w) = 0$  が成り立つ. i.e.  $\forall w \in W$  に対して  $\forall x \in \mathfrak{g}, x(w) \in W$  が言える ( $W$  は  $x$  不変). 故に  $\forall z \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$  の  $W$  における固有ベクトル  $v \in W \setminus \{0\}$  が存在する<sup>\*19</sup>.  $z$  は冪零なのでその固有値は 0 であり,  $z(v) = 0$  が成り立つ.

#### 定理 1.1.1: Engel の定理

$\mathfrak{g}$  を有限次元 Lie 代数とする.  $\forall x \in \mathfrak{g}$  に対して  $\text{ad } x$  が冪零ならば,  $\mathfrak{g}$  は冪零 Lie 代数である.



命題 1.1.4-(5) と併せて以下を得る:

有限次元 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  が冪零 Lie 代数  $\iff \forall x \in \mathfrak{g}$  に対して  $\text{ad } x$  が冪零

**証明**  $\dim \mathfrak{g}$  に関する数学的帰納法により示す.  $\dim \mathfrak{g} = 0, 1$  のときは自明.

$\dim \mathfrak{g} > 1$  とする. 仮定より,  $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  の部分 Lie 代数  $\text{Im ad}$  に対して補題 1.1.4 を使うことができる. すなわちある  $v \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$  が存在して,  $\forall x \in \mathfrak{g}$  に対して  $\text{ad}(x)(v) = [x, v] = 0$  を満たす. i.e.  $\mathfrak{g}$  の中心  $Z(\mathfrak{g})$  は非零である. このとき  $\dim \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g}) < \dim \mathfrak{g}$  で, かつ  $\forall x + Z(\mathfrak{g}) \in \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$  に対して  $\text{ad}(x + Z(\mathfrak{g}))$  は冪零である. 故に帰納法の仮定から  $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$  は冪零 Lie 代数である. 従って命題 1.1.4-(3) より  $\mathfrak{g}$  は冪零 Lie 代数である.

#### 定義 1.1.15: 旗

- $V$  を有限次元  $\mathbb{K}$  ベクトル空間とする.  $V$  の旗 (flag) とは, 部分ベクトル空間の増大列

$$\{0\} =: V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{\dim V} := V$$

であって,  $0 \leq \forall i \leq \dim V$  に対して  $\dim V_i = i$  が成り立つようなもののこと.

- $x \in \text{End } V$  が旗を安定化する (stabilize) とは,  $0 \leq \forall i \leq \dim V$  に対して  $xV_i \subset V_i$  が成り立つことを言う.

<sup>\*16</sup>  $\exists v \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \setminus \mathfrak{h}$  なので

<sup>\*17</sup>  $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{h}'$  であつ  $\mathfrak{h}' \subsetneq \mathfrak{g}$  を満たす  $\mathfrak{h}'$  が存在しない.

<sup>\*18</sup> 仮定より  $\mathfrak{h}$  の全ての元は冪零.

<sup>\*19</sup>  $\forall z \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  はスカラー倍の違いしかないので, 固有ベクトルは共通のものを取れる.

### 系 1.1.2:

$V \neq \{o\}$  を有限次元ベクトル空間とし,  $\mathfrak{gl}(V)$  の任意の部分 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  をとる.  
このとき  $\forall x \in \mathfrak{g}$  が冪零ならば,  $\forall x \in \mathfrak{g}$  によって同時に安定化される  $V$  の旗が存在する.

**証明**  $\dim V$  に関する数学的帰納法により示す.  $\dim V = 0$  ならば  $V = \{o\}$  なので示すべきことは何もない.  $\dim V > 0$  とする. 補題 1.1.4 より  $\forall x \in \mathfrak{g}$  に対して  $xv = o$  を充たす  $v \in V \setminus \{o\}$  が存在する. ここで  $V_1 := \mathbb{K}v$  とおき,  $W := V/V_1$  とする.  $\forall x \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$  に対して,  $v \in V$  の採り方から明らかに  $V_1 \subset \text{Ker } x$  なので商ベクトル空間の普遍性<sup>\*20</sup>を使うことができ, 図式

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{x} & V & \xrightarrow{p} & V/V_1 \\ p \downarrow & & \searrow \exists! \bar{x} & & \\ V/V_1 & & & & \end{array}$$

を可換にするような  $\bar{x} \in \mathfrak{gl}(V/V_1)$  が一意的に存在する<sup>\*21</sup>. このようにして得られる Lie 代数の単射準同型  $\bar{\cdot}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V/V_1)$ ,  $x \mapsto \bar{x}$  によって  $\mathfrak{g}$  を  $\mathfrak{gl}(V/V_1)$  の部分 Lie 代数と見做すと, 明らかに  $\mathfrak{g}$  の任意の元は冪零であり, かつ  $\dim(V/V_1) = \dim V - 1 < \dim V$  なので帰納法の仮定が使えて,  $V/V_1$  の旗

$$\{o\} = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_{\dim V - 1} = V/V_1$$

が存在して<sup>\*22</sup>  $\forall \bar{x} \in \mathfrak{g}$  がそれを同時に安定化する. このとき  $V$  の部分ベクトル空間の増大列

$$\{o\} \subset p^{-1}(W_0) \subset p^{-1}(W_1) \subset \cdots \subset p^{-1}(W_{\dim V - 1}) = V$$

は  $\forall x \in \mathfrak{g}$  により安定化される<sup>\*23</sup> ので帰納法が完成する. ■

### 補題 1.1.5:

$\mathfrak{g}$  を冪零 Lie 代数,  $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$  をそのイデアルとする. このとき, もし  $\mathfrak{i} \neq \{o\}$  ならば  $\mathfrak{i} \cap Z(\mathfrak{g}) \neq \{o\}$  である.

**証明** イデアルの定義から, 随伴表現  $\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  は  $\forall x \in \mathfrak{i}$  に対して  $\text{ad}(\mathfrak{g})(x) = [\mathfrak{g}, x] \subset \mathfrak{i}$  を充たす. i.e. 部分 Lie 代数  $\text{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{i})$  と見做することができる. さらに仮定より  $\mathfrak{i} \neq \{o\}$  なので補題 1.1.4 が使えて, ある  $x \in \mathfrak{i} \setminus \{o\}$  が存在して  $\text{ad}(\mathfrak{g})(x) = [\mathfrak{g}, x] = \{o\}$  を充たす. 中心の定義を思い出すと, これは  $x \in \mathfrak{i} \cap Z(\mathfrak{g})$  を意味する. ■

## 1.2 Lie 群と Lie 代数の関係

この節は [3, 第 5 章] による.

<sup>\*20</sup> 命題 1.1.2-(1) の証明がそのまま適用できる.

<sup>\*21</sup>  $p: V \rightarrow V/V_1$  は標準的射影.

<sup>\*22</sup>  $V/V_1$  の零ベクトルは  $V_1$  であることに注意.

<sup>\*23</sup>  $\forall x \in \mathfrak{g}$  をとる. このとき, 旗  $W_0 \subset \cdots \subset W_{\dim V - 1}$  が  $\bar{x}$  によって安定化されるので,  $\forall w + V_1 \in W_i$  ( $0 \leq i \leq \dim V - 1$ ) に対して  $\bar{x}(w + V_1) \in W_i$  が成り立つ.  $\forall v \in p^{-1}(W_i)$  に対して  $p(v) = v + V_1 \in W_i$  なので, 命題 1.1.2-(1) の証明から  $x(v) + V_1 = \bar{x}(v + V_1)$  であることに注意すると  $p(x(v)) = x(v) + V_1 = \bar{x}(v + V_1) \in W_i$ , i.e.  $x(v) \in p^{-1}(W_i)$  がわかった.

## 第 2 章

# 半単純 Lie 代数

この章以降、 $\mathbb{K}$ -ベクトル空間  $V$  の零ベクトルを  $0 \in V$  と書き、零ベクトル空間  $\{0\}$  のことも  $0$  と表記する<sup>\*1</sup>。この章において、特に断らない限り体  $\mathbb{K}$  は代数閉体<sup>\*2</sup>で、かつ  $\text{char } \mathbb{K} = 0$  であるとする。また、Lie 代数  $\mathfrak{g}$  は常に有限次元であるとする。

### 2.1 Lie の定理・Cartan の判定条件

#### 2.1.1 Lie の定理

##### 定理 2.1.1:

$V$  を有限次元  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間とし、 $\mathfrak{gl}(V)$  の部分 Lie 代数  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$  が可解であるとする。このとき  $V \neq 0$  ならば、 $\forall x \in \mathfrak{g}$  は共通の固有ベクトルを持つ。

##### 系 2.1.2: Lie の定理

$V$  を有限次元  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間とし、 $\mathfrak{gl}(V)$  の部分 Lie 代数  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$  が可解であるとする。このとき  $\forall x \in \mathfrak{g}$  は  $V$  のある共通の旗を安定化する。i.e.  $\forall x \in \mathfrak{g}$  の表現行列を同時に上三角行列にするような  $V$  の基底が存在する。

##### 系 2.1.3:

$\mathfrak{g}$  を可解 Lie 代数とする。このとき  $\mathfrak{g}$  のイデアルの上昇列

$$0 = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$$

であって、 $0 \leq \forall i \leq n$  に対して  $\dim \mathfrak{g}_i = i$  を満たすようなものが存在する。

<sup>\*1</sup> 記号の濫用だが、広く普及している慣習である。

<sup>\*2</sup> つまり、定数でない任意の 1 変数多項式  $f(x) \in \mathbb{K}[x]$  に対してある  $\alpha \in \mathbb{K}$  が存在して  $f(\alpha) = 0$  を満たす。

#### 系 2.1.4:

$\mathfrak{g}$  を可解 Lie 代数とする. このとき

$$x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \implies \text{ad}(x) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \text{ が冪零}$$

が成り立つ. 特に,  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  は冪零 Lie 代数である.

### 2.1.2 Jordan-Chevalley 分解

この小節において体  $\mathbb{K}$  は代数閉体で,  $\text{char}(\mathbb{K})$  は任意とする.

#### 定義 2.1.1: 線型変換の半単純性

$V$  を有限次元  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間とし,  $x \in \text{End } V$  とする.  $x$  が半単純 (semisimple) であるとは,  $x$  の最小多項式が  $\mathbb{K}$  上で重根を持たないことを言う<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>  $x$  が対角化可能であることと同値である.

#### 命題 2.1.1: Jordan-Chevalley 分解

$V$  を有限次元  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間とし,  $x \in \text{End } V$  を与える. このとき以下が成り立つ:

- (1) 半単純な  $x_s \in \text{End } V$  と冪零な  $x_n \in \text{End } V$  が一意的に存在して,

$$x = x_s + x_n$$

と書ける.

- (2) 定数項を持たない  $p(t), q(t) \in \mathbb{K}[t]$  であって,  $x_s = p(x)$ ,  $x_n = q(x)$  を充たすものが存在する. 特に  $[x, x_s] = [x, x_n] = [x_s, x_n] = 0$  が成り立つ.
- (3) 部分ベクトル空間  $A \subset B \subset V$  があって  $x|_B: B \rightarrow A$  であるとき,  $x_s|_B, x_n|_B$  の値域もまた  $A$  に収まる.

#### 補題 2.1.1:

$V$  を有限次元  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間とし,  $x \in \text{End } V$  とその Jordan-Chevalley 分解  $x = x_s + x_n$  を与える.

このとき  $\text{ad}(x) \in \text{End}(\mathfrak{gl}(V))$  の Jordan-Chevalley 分解  $\text{ad}(x) = \text{ad}(x)_s + \text{ad}(x)_n$  は  $\text{ad}(x)_s = \text{ad}(x_s)$ ,  $\text{ad}(x)_n = \text{ad}(x_n)$  を充たす.

#### 補題 2.1.2:

$\mathfrak{U}$  を有限次元  $\mathbb{K}$ -代数とする. このとき微分代数  $\text{Der } \mathfrak{U} \subset \text{End } \mathfrak{U}$  の任意の元  $x \in \text{Der } \mathfrak{U}$  の Jordan-Chevalley 分解  $x = x_s + x_n$  に対して  $x_s, x_n \in \text{Der } \mathfrak{U}$  が成り立つ.

### 2.1.3 Cartan の判定条件

#### 定理 2.1.5: Cartan の判定条件

$V$  を有限次元  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間とし,  $\mathfrak{gl}(V)$  の部分 Lie 代数  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$  を与える.  
このとき以下の 2 つは同値である:

- (1)  $\mathfrak{g}$  が可解
- (2)  $\forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \forall y \in \mathfrak{g}$  に対して  $\mathrm{Tr}(x \circ y) = 0$  が成り立つ

#### 系 2.1.6:

Lie 代数  $\mathfrak{g}$  を与える.  
このとき  $\forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \forall y \in \mathfrak{g}$  に対して  $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(x) \circ \mathrm{ad}(y)) = 0$  が成り立つならば,  $\mathfrak{g}$  は可解である.

## 2.2 Killing 形式

### 2.2.1 半単純性の判定条件

#### 定義 2.2.1: Killing 形式

体  $\mathbb{K}$  上の Lie 代数  $\mathfrak{g}$  の上の対称な双線型形式

$$\kappa: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}, (x, y) \longmapsto \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(x) \circ \mathrm{ad}(y))$$

のことを  $\mathfrak{g}$  の **Killing 形式** (Killing form) と呼ぶ.

### 定義 2.2.2: 双線型形式の radical

体  $\mathbb{K}$  上の Lie 代数  $\mathfrak{g}$  の上の対称な双線型形式

$$\beta: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}$$

および任意の部分集合  $W \subset \mathfrak{g}$  を与える.

- $\mathfrak{g}$  の部分ベクトル空間

$$W^\perp := \{ x \in \mathfrak{g} \mid \forall w \in W, \beta(x, w) = 0 \}$$

のことを  $W$  の  $\beta$  に関する直交補空間 (orthogonal complement) と呼ぶ.

- $\mathfrak{g}$  の部分ベクトル空間

$$S_\beta := \mathfrak{g}^\perp = \{ x \in \mathfrak{g} \mid \forall y \in \mathfrak{g}, \beta(x, y) = 0 \}$$

のことを  $\beta$  の radical と呼ぶ.

- $\beta$  が非退化 (nondegenerate) であるとは,  $S_\beta = 0$  であることを言う<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>  $W$  が  $\mathfrak{g}$  の部分ベクトル空間のとき,  $\beta$  の  $W$  への制限  $\beta|_{W \times W}$  が非退化 (nondegenerate) であるとは,  $W \cap W^\perp = 0$  であることを言う.

### 定理 2.2.1: Lie 代数の半単純性と Killing 形式の非退化性

$\mathfrak{g}$  が半単純 Lie 代数  $\iff \mathfrak{g}$  の Killing 形式が非退化

### 2.2.2 単純イデアル

Lie 代数  $\mathfrak{g}$  と, そのイデアルの族  $\{\mathfrak{i}_i\}_{i \in I}$  を与える.  $\mathfrak{g}$  が  $\{\mathfrak{i}_i\}_{i \in I}$  の直和 (direct sum)<sup>\*3</sup>であるとは, 部分ベクトル空間の内部直和として

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{i}_i$$

が成り立つことを言う.

<sup>\*3</sup> 厳密には, 命題 A.3.4 の意味で内部直和 (internal direct sum) と呼ぶべきだと思う.

### 定理 2.2.2: 半単純 Lie 代数の直和分解

$\mathfrak{g}$  を半単純 Lie 代数とする. このとき  $\mathfrak{g}$  の単純イデアル  $\mathfrak{i}_1, \dots, \mathfrak{i}_t$  が存在して以下を満たす:

(1)

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^t \mathfrak{i}_i$$

(2)  $\mathfrak{g}$  の任意の単純イデアルは  $\mathfrak{i}_i$  のどれか 1 つと一致する. i.e. (1) の直和分解は一意である.

(3)  $\mathfrak{i}_i$  上の Killing 形式  $\kappa_{\mathfrak{i}_i}$  は  $\kappa_{\mathfrak{i}_i \times \mathfrak{i}_i}$  に等しい.

### 系 2.2.3:

$\mathfrak{g}$  が半単純 Lie 代数ならば以下が成り立つ:

(1)  $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$

(2)  $\mathfrak{g}$  の任意のイデアルは半単純である.

(3) 任意の Lie 代数の準同型  $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  について,  $\text{Im}(f)$  は半単純である.

(4)  $\mathfrak{g}$  の任意のイデアルは  $\mathfrak{g}$  の単純イデアルの直和である.

## 2.2.3 内部微分

### 定理 2.2.4:

半単純 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  に対して,

$$\text{ad}(\mathfrak{g}) = \text{Der } \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

## 2.2.4 抽象 Jordan 分解

$\mathfrak{g}$  を半単純 Lie 代数とする. このとき  $\mathfrak{g}$  の中心  $Z(\mathfrak{g})$  は  $\mathfrak{g}$  の可解イデアルなので 0 となる. i.e.  $\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  に関して  $\text{Ker ad} = Z(\mathfrak{g}) = 0$  が言えるので  $\text{ad}$  は単射である. 一方で定理 2.2.4 より  $\text{ad}(\mathfrak{g}) = \text{Der } \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  なので, 補題 2.1.2 を合わせると  $\forall x \in \mathfrak{g}$  に対して  $\text{ad}(x) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  の Jordan-Chevalley 分解  $\text{ad}(x) = \text{ad}(x)_s + \text{ad}(x)_n$  w/  $\text{ad}(x)_s, \text{ad}(x)_n \in \text{ad}(\mathfrak{g})$  が存在する.

### 定義 2.2.3: 抽象 Jordan 分解

$\forall x \in \mathfrak{g}$  の抽象 Jordan 分解とは,  $\text{ad}(s_x) = \text{ad}(x)_s, \text{ad}(n_x) = \text{ad}(x)_n$  を満たす  $s_x, n_x \in \mathfrak{g}$  のこと.

$\text{ad}$  が単射なので,  $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  における通常の Jordan-Chevalley 分解の一意性から  $s_x, n_x$  は一意に決まる. さらに  $\text{ad}(x) = \text{ad}(s_x) + \text{ad}(n_x) = \text{ad}(s_x + n_x)$  ということなので  $x = s_x + n_x \in \mathfrak{g}$  が成り立つ. さらに命題 2.1.1-(2) より  $0 = [\text{ad}(s_x), \text{ad}(n_x)] = \text{ad}([s_x, n_x])$  なので  $[s_x, n_x] = 0$  もわかる.

## 2.3 表現の完全可約性

### 2.3.1 $\mathfrak{g}$ -加群と表現

この小節では  $\mathbb{K}$  を任意の体とする。まず、環上の加群の定義を復習する：

#### 公理 2.3.1: 環上の加群の公理

- $R$  を環とする。左  $R$  加群 (left  $R$ -module) とは、可換群  $(M, +, 0)$  と写像<sup>a</sup>

$$\cdot : R \times M \rightarrow M, (a, x) \mapsto a \cdot x$$

の組  $(M, +, \cdot)$  であって、 $\forall x, x_1, x_2 \in M, \forall a, b \in R$  に対して以下を充たすもののことを言う：

(LM1)  $a \cdot (b \cdot x) = (ab) \cdot x$

(LM2)  $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$

(LM3)  $a \cdot (x_1 + x_2) = a \cdot x_1 + a \cdot x_2$

(LM4)  $1 \cdot x = x$

ただし、 $1 \in R$  は環  $R$  の乗法単位元である。

- $R$  を環とする。右  $R$  加群 (right  $R$ -module) とは、可換群  $(M, +, 0)$  と写像

$$\cdot : M \times R \rightarrow M, (x, a) \mapsto x \cdot a$$

の組  $(M, +, \cdot)$  であって、 $\forall x, x_1, x_2 \in M, \forall a, b \in R$  に対して以下を充たすもののことを言う：

(RM1)  $(x \cdot b) \cdot a = x \cdot (ba)$

(RM2)  $x \cdot (a + b) = x \cdot a + x \cdot b$

(RM3)  $(x_1 + x_2) \cdot a = x_1 \cdot a + x_2 \cdot a$

(RM4)  $x \cdot 1 = x$

- $R, S$  を環とする。 $(R, S)$  両側加群  $((R, S)$ -bimodule) とは、可換群  $(M, +, 0)$  と写像

$$\cdot_L : R \times M \rightarrow M, (a, x) \mapsto a \cdot_L x$$

$$\cdot_R : M \times R \rightarrow M, (x, a) \mapsto x \cdot_R a$$

の組  $(M, +, \cdot_L, \cdot_R)$  であって、 $\forall x \in M, \forall a \in R, \forall b \in S$  に対して以下を充たすもののことを言う：

(BM1) 左スカラー乗法  $\cdot_L$  に関して  $M$  は左  $R$  加群になる

(BM2) 右スカラー乗法  $\cdot_R$  に関して  $M$  は右  $S$  加群になる

(BM3)  $(a \cdot_L x) \cdot_R b = a \cdot_L (x \cdot_R b)$

<sup>a</sup> この写像  $\cdot$  はスカラー乗法 (scalar multiplication) と呼ばれる。

$R$  が可換環の場合、(LM1) と (RM1) が同値になるので、左  $R$  加群と右  $R$  加群の概念は同値になる。こ



れを単に **R 加群** ( $R$ -module) と呼ぶ。

$R$  が体の場合,  $R$  加群のことを **R-ベクトル空間** と呼ぶ。

! 以下では, なんの断りもなければ  $R$  加群と言って左  $R$  加群を意味する。

$\mathfrak{g}$  を体  $\mathbb{K}$  上の **Lie 代数** とする。このとき, **環上の加群の公理** を少し修正することで Lie 代数  $\mathfrak{g}$  上の加群の概念を得る：

### 公理 2.3.2: Lie 代数上の加群

$\mathfrak{g}$  を体  $\mathbb{K}$  上の **Lie 代数** とする。 **$\mathfrak{g}$ -加群** とは,  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間  $(V, +, \cdot)$  と写像

$$\triangleright: \mathfrak{g} \times V \longrightarrow V, (x, v) \longmapsto x \triangleright v$$

の 4 つ組  $(V, +, \cdot, \triangleright)$  であって,  $\forall x, x_1, x_2 \in \mathfrak{g}, \forall v, v_1, v_2 \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$  に対して以下を満たすもののことを言う：

$$(M1) \quad (\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2) \triangleright v = \lambda \cdot (x_1 \triangleright v) + \mu \cdot (x_2 \triangleright v)$$

$$(M2) \quad x \triangleright (\lambda \cdot v_1 + \mu \cdot v_2) = \lambda \cdot (x \triangleright v_1) + \mu \cdot (x \triangleright v_2)$$

$$(M3) \quad [x, y] \triangleright v = x \triangleright (y \triangleright v) - y \triangleright (x \triangleright v)$$

同値な定義として, **Lie 代数の表現**

$$\phi: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V), x \longmapsto (v \mapsto \phi(x)(v))$$

について

$$\triangleright: \mathfrak{g} \times V \longrightarrow V, (x, v) \longmapsto \phi(x)(v)$$

とおくことで得られる 4 つ組  $(V, +, \cdot, \triangleright)$  のことである<sup>a</sup>。

<sup>a</sup> 【例 1.1.2】より  $\mathfrak{gl}(V)$  の Lie ブラケットは交換子だったので  $[x, y] \triangleright - = \phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)] = \phi(x) \circ \phi(y) - \phi(y) \circ \phi(x) = x \triangleright (y \triangleright -) - y \triangleright (x \triangleright -)$  となる。

!  $\mathfrak{g}$ -加群に備わっている 3 つの演算 (加法, スカラー乗法, 左作用) をいちいち全て明記するのは面倒なので  $(V, +, \cdot, \triangleright)$  のことを「 **$\mathfrak{g}$ -加群  $V$** 」と略記する。この略記において, 今まで通りスカラー乗法  $\cdot$  は省略して  $\lambda v$  の様に書き, 左作用はなんの断りもなく  $x \triangleright v$  の様に書くことにする。

全く同様に代数上の加群, 結合代数上の加群を定義することもできるが, 本章では以降  $\mathfrak{g}$ -加群と言ったら **Lie 代数上の加群** を指すことにする。**Lie 代数の表現** を考えることは  $\mathfrak{g}$ -加群を考えることと同値なのである。

### 定義 2.3.1: $\mathfrak{g}$ -加群の準同型

$\mathfrak{g}$  を **Lie 代数**,  $(V, +, \cdot, \triangleright_1)$ ,  $(W, +, \cdot, \triangleright_2)$  を  $\mathfrak{g}$ -**加群** とする.

- 線型写像  $f: V \rightarrow W$  が  $\mathfrak{g}$ -**加群の準同型** (homomorphism of  $\mathfrak{g}$ -module) <sup>a</sup> であるとは,  $\forall x \in \mathfrak{g}, \forall v \in V$  に対して

$$f(x \triangleright_1 v) = x \triangleright_2 f(v)$$

が成り立つこと <sup>b</sup>.

- $\mathfrak{g}$ -加群の準同型  $f: V \rightarrow W$  が **同型** (isomorphism) であるとは,  $f$  が ベクトル空間の同型写像 であることを言う.
- 同型な  $\mathfrak{g}$ -加群のことを, **同値な  $\mathfrak{g}$  の表現** (equivalent representation of  $\mathfrak{g}$ ) とも言う.

<sup>a</sup> 同変写像 (equivalent map) と言うこともある. 絡作用素 (intertwining operator), インタートウィナー (intertwiner) と言う場合もあるが, そこまで普及していない気がする.

<sup>b</sup> スカラー乗法についての線型性の定義を  $\triangleright$  について拡張しただけ.

同値な定義だが, 線型写像  $f: V \rightarrow W$  が  $\mathfrak{g}$ -加群の準同型であるとは, **Lie 代数の表現**

$$\phi_1: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V), x \mapsto (v \mapsto x \triangleright_1 v)$$

$$\phi_2: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(W), x \mapsto (v \mapsto x \triangleright_2 v)$$

に関して

$$\forall x \in \mathfrak{g}, f \circ \phi_1(x) = \phi_2(x) \circ f$$

が成り立つことを言う.

### 定義 2.3.2: 部分 $\mathfrak{g}$ -加群

$\mathfrak{g}$ -**加群**  $V$  を与える. 部分集合  $W \subset V$  が **部分  $\mathfrak{g}$ -加群** であるとは,  $W$  が和, スカラー乗法,  $\mathfrak{g}$  の左作用の全てについて閉じていること. i.e.  $\forall w, w_1, w_2 \in W, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathfrak{g}$  に対して

$$w_1 + w_2 \in W$$

$$\lambda w \in W$$

$$x \triangleright w \in W$$

が成り立つことを言う.

同値な定義として, 以下の2つの条件が満たされることを言う:

**(sub-M1)**  $W$  が  $V$  の部分ベクトル空間

**(sub-M2)** **Lie 代数の表現**

$$\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V), x \mapsto (v \mapsto x \triangleright v)$$

に関して

$$\forall x \in \mathfrak{g}, \phi(x)(W) \subset W$$

が成り立つ. i.e.  $\forall x \in \mathfrak{g}$  に対して  $W$  は  $\phi(x)$ -不変である.

### 【例 2.3.1】 $\mathfrak{g}$ -加群の準同型の核と像

$\mathfrak{g}$ -加群  $V, W$  とその間の  $\mathfrak{g}$ -加群の準同型  $f: V \longrightarrow W$  を与える. このとき

$$\begin{aligned} v \in \text{Ker } f &\implies \forall x \in \mathfrak{g}, f(x \blacktriangleright v) = x \blacktriangleright f(v) = x \blacktriangleright 0 = 0 \iff \forall x \in \mathfrak{g}, x \blacktriangleright v \in \text{Ker } f, \\ w \in \text{Im } f &\iff \exists v \in V, w = f(v) \implies \forall x \in \mathfrak{g}, x \blacktriangleright w = x \blacktriangleright f(v) = f(x \blacktriangleright v) \\ &\iff \forall x \in \mathfrak{g}, x \blacktriangleright w \in \text{Im } f \end{aligned}$$

が言えるので  $\text{Ker } f, \text{Im } f$  はそれぞれ  $V, W$  の部分  $\mathfrak{g}$ -加群である.

## 2.3.2 $\mathfrak{g}$ -加群の直和と既約性

この小節でも  $\mathbb{K}$  を任意の体とする.

### 定義 2.3.3: $\mathfrak{g}$ -加群の直和

$\mathfrak{g}$ -加群の族  $\{(V_i, +, \cdot, \blacktriangleright_i)\}_{i \in I}$  を与える. このとき

- 直和ベクトル空間  $\bigoplus_{i \in I} V_i$
- $\bigoplus_{i \in I} V_i$  への  $\mathfrak{g}$  の左作用

$$\blacktriangleright: \mathfrak{g} \times \bigoplus_{i \in I} V_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} V_i, (x, (v_i)_{i \in I}) \longmapsto (x \blacktriangleright_i v_i)_{i \in I}$$

の組として得られる  $\mathfrak{g}$ -加群  $(\bigoplus_{i \in I} V_i, +, \cdot, \blacktriangleright)$  を  $\mathfrak{g}$ -加群の直和 (direct sum) と呼び<sup>a</sup>,  $\bigoplus_{i \in I} V_i$  と略記する.

<sup>a</sup> 系 A.3.1 の注と同様に, この定義は厳密には外部直和 (external direct sum) と呼ぶべきだと思う.

### 定義 2.3.4: Lie 代数の表現の既約性

- $\mathfrak{g}$ -加群  $V$  が既約 (irreducible)<sup>a</sup> であるとは,  $V$  の部分  $\mathfrak{g}$ -加群が  $0, V$  のちょうど2つ<sup>b</sup>だけであることを言う.
- $\mathfrak{g}$ -加群  $V$  が完全可約 (completely reducible) であるとは,  $V$  が既約な部分  $\mathfrak{g}$ -加群の直和<sup>c</sup>であることを言う.

<sup>a</sup> i.e. Lie 代数  $\mathfrak{g}$  の表現  $(\phi, V)$  が既約表現 (irreducible representation; irrep) だ, と言っても良い.

<sup>b</sup> つまり, 零ベクトル空間  $0$  は既約な  $\mathfrak{g}$ -加群とは呼ばない.

<sup>c</sup> こちらの場合, 厳密には内部直和 (internal direct sum) と呼ぶべきだと思う.

次の補題は証明が少し厄介である：

### 補題 2.3.1: 完全可約の全射

**g-加群の準同型**  $p: V \longrightarrow W$  を与える. このとき  $p$  が全射かつ  $V$  が**完全可約**ならば, **g-加群の短完全列**

$$0 \longrightarrow \text{Ker } p \hookrightarrow V \xrightarrow{p} W \longrightarrow 0$$

は**分裂**する.

**証明**  $V$  が完全可約という仮定から, **既約な部分 g-加群**の族  $\{V_i\}_{i \in I}$  が存在して, **内部直和**の意味で

$$V = \bigoplus_{i \in I} V_i$$

と書ける. ここで  $S$  を以下の条件を充たす組  $(J, V_J)$  全体の集合とする：

- $J \subset I, V_J = \bigoplus_{j \in J} V_j \subset V$
- $\text{Ker } p \cap V_J = 0$

$S$  の上の 2 項関係を

$$(J, V_J) \leq (K, V_K) \stackrel{\text{def}}{\iff} J \subset K$$

と定義すると組  $(S, \leq)$  は順序集合になる. また  $S' = \{(J_a, V_{J_a})\}_{a \in A}$  を  $S$  の任意の全順序部分集合とすると  $(\bigcup_{a \in A} J_a, V_{\bigcup_{a \in A} J_a}) \in S$  であり<sup>\*4</sup>, これが  $S'$  の上界を与える. i.e.  $S$  は帰納的順序集合である. したがって Zorn の補題を使うことができ,  $S$  は極大元  $(J_0, V_{J_0}) \in S$  を持つ.

次に  $V = \text{Ker } p \oplus V_{J_0}$  を示す.  $S$  の定義から  $\text{Ker } p \cap V_{J_0} = 0$  なので, 命題 A.3.4 より  $V = \text{Ker } p + V_{J_0}$  を示せば良い.  $V \neq \text{Ker } p + V_{J_0}$  を仮定すると, ある  $k \in I \setminus J_0$  が存在して  $V_k \not\subset \text{Ker } p + V_{J_0}$  を充たす.  $V_k$  は既約なので  $V_k \cap (\text{Ker } p + V_{J_0}) = 0$  が成り立つが, このことは  $(J_0, V_{J_0})$  の極大性に矛盾. よって背理法から  $V = \text{Ker } p + V_{J_0}$  が言えた.

以上より  $W \cong V / \text{Ker } p \cong V_{J_0}$  が言える. このとき包含準同型  $i: V_{J_0} \hookrightarrow V$  が  $p \circ i = \text{id}_{V_{J_0}}$  を充たすので証明が完了した. ■

### 命題 2.3.1: 完全可約性の特徴付け

以下の 2 つは同値である：

- (1) **g-加群**  $V$  が**完全可約**
- (2)  $V$  の任意の**部分 g-加群**  $W \subset V$  に対して, **部分 g-加群**  $W^c \subset V$ <sup>a</sup>が存在して  $V \cong W \oplus W^c$  を充たす.

<sup>a</sup>  $W$  の**補表現** (complement representation) と言う.

<sup>\*4</sup>  $V_{\bigcup_{a \in A} J_a} = \bigoplus_{j \in \bigcup_{a \in A} J_a} V_j = \bigcup_{a \in A} V_{J_a}$  なので,  $\cap$  の分配律から  $\text{Ker } p \cap V_{\bigcup_{a \in A} J_a} = \text{Ker } p \cap \bigcup_{a \in A} V_{J_a} = \bigcup_{a \in A} (\text{Ker } p \cap V_{J_a}) = 0$  が言える.

証明 (1)  $\implies$  (2)  $V$  が既約な部分  $\mathfrak{g}$ -加群の族  $\{V_i\}_{i \in I}$  によって

$$V = \bigoplus_{i \in I} V_i$$

と書けるとする.  $V$  の任意の部分  $\mathfrak{g}$ -加群  $W \subset V$  を 1 つ固定する. このとき標準的射影  $p: V \rightarrow V/W$  は全射な  $\mathfrak{g}$ -加群の準同型なので, 補題 2.3.1 から  $\mathfrak{g}$ -加群の短完全列

$$0 \longrightarrow \text{Ker } p \cong W \hookrightarrow V \xrightarrow{p} V/W \longrightarrow 0$$

が分裂する. よって系 A.4.2 から

$$V \cong W \oplus (V/W)$$

が言えた.

(1)  $\Leftarrow$  (2)

$V$  の既約な部分  $\mathfrak{g}$ -加群全体の集合を  $\mathcal{V}$  と書く.  $\mathcal{S}$  を以下の条件を満たす組  $(I, V_I)$  全体の集合とする:

- $I \subset \mathcal{V}$
- 内部直和の意味で  $V_I = \bigoplus_{i \in I} V_i \subset V$

$\mathcal{S}$  上の 2 項関係を

$$(I, V_I) \leq (J, V_J) \stackrel{\text{def}}{\iff} I \subset J$$

と定義すると組  $(\mathcal{S}, \leq)$  は順序集合になる.  $V$  の 0 でない部分  $\mathfrak{g}$ -加群のうち極小のものを  $V_1$  とすると, 定義から  $V_1 \in \mathcal{V}$  なので  $(\{V_1\}, V_{V_1}) \in \mathcal{S}$  となり  $\mathcal{S}$  は空でない. また  $\mathcal{S}' = \{(J_a, V_{J_a})\}_{a \in A}$  を  $\mathcal{S}$  の任意の全順序部分集合とすると  $(\bigcup_{a \in A} J_a, V_{\bigcup_{a \in A} J_a}) \in \mathcal{S}$  であり, これが  $\mathcal{S}'$  の上界を与える. i.e.  $\mathcal{S}$  は帰納的順序集合である. したがって Zorn の補題を使うことができ,  $\mathcal{S}$  は極大元  $(I_0, V_{I_0}) \in \mathcal{S}$  を持つ. このとき  $V = V_{I_0}$  であることを背理法により示そう.

$V \neq V_{I_0}$  を仮定する. このとき (2) より  $V$  の 0 でない部分  $\mathfrak{g}$ -加群  $V_{I_0}^c$  が存在して  $V \cong V_{I_0} \oplus V_{I_0}^c$  を満たす. このとき  $V_{I_0}^c$  に含まれる 0 でない極小の部分  $\mathfrak{g}$ -加群  $W$  をとることができるが, 定義からこの  $W$  は既約である. よって

$$W \oplus V_{I_0} \subset V$$

もまた既約部分  $\mathfrak{g}$ -加群の直和となり,  $V_{I_0}$  の極大性に矛盾する. ■

### 補題 2.3.2: Schur の補題

任意の体<sup>a</sup>  $\mathbb{K}$  上の  $\mathfrak{g}$ -加群  $V, W$ , および 0 でない  $\mathfrak{g}$ -加群の準同型  $f: V \rightarrow W$  を与える. このとき以下が成り立つ:

- (1)  $V$  が既約ならば  $f$  は単射
- (2)  $W$  が既約ならば  $f$  は全射

---

<sup>a</sup> 代数閉体でなくても良い

**証明** (1) 【例 2.3.1】より  $\text{Ker } f$  は  $V$  の部分  $\mathfrak{g}$ -加群だが,  $V$  が既約なので  $\text{Ker } f = 0$ ,  $V$  のどちらかである. 仮定より  $f$  は 0 でないので  $\text{Ker } f = 0$ , i.e.  $f$  は単射である.

(2) 【例 2.3.1】より  $\text{Im } f$  は  $W$  の部分  $\mathfrak{g}$ -加群だが,  $W$  が既約なので  $\text{Im } f = 0$ ,  $W$  のどちらかである. 仮定より  $f$  は 0 でないので  $\text{Im } f = W$ , i.e.  $f$  は全射である. ■

### 系 2.3.1: 代数閉体上の Schur の補題

代数閉体  $\mathbb{K}$  上の有限次元  $\mathfrak{g}$ -加群  $V$  を与える. このとき  $V$  が既約ならば, 任意の  $\mathfrak{g}$ -加群の自己準同型  $\phi \in \text{End } V$  はある  $\lambda \in \mathbb{K}$  を使って  $\phi = \lambda \text{id}_V$  (i.e. スカラー倍) と書ける.

**証明** 仮定より  $V$  が既約なので, 補題 2.3.2-(1), (2) より任意の  $\mathfrak{g}$ -加群の自己準同型  $\phi: V \rightarrow V$  は  $\mathfrak{g}$ -加群の同型か 0 のどちらかである. ここで  $\lambda \in \mathbb{K}$  を  $\phi$  の固有値とする.  $\mathbb{K}$  が代数閉体なので  $\lambda$  は確かに存在する. このとき写像  $\phi - \lambda \text{id}_V: V \rightarrow V$  もまた  $\mathfrak{g}$ -加群の自己準同型となるが, 固有値の定義から  $\det(\phi - \lambda \text{id}_V) = 0$  なので同型写像ではあり得ない. よって  $\phi - \lambda \text{id}_V = 0 \iff \phi = \lambda \text{id}_V$  である. ■

### 系 2.3.2: 可換な Lie 代数の有限次元既約表現

代数閉体上の Lie 代数  $\mathfrak{g}$  が可換ならば,  $\mathfrak{g}$  の任意の有限次元既約表現は 1 次元である.

**証明**  $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  を  $\mathfrak{g}$  の有限次元既約表現とする. このとき  $\mathfrak{g}$  が可換であることから  $\forall x, y \in \mathfrak{g}, \forall v \in V$  に対して

$$\begin{aligned} \phi(x)(y \triangleright v) &= \phi(x) \circ \phi(y)(v) \\ &= [\phi(x), \phi(y)](v) + \phi(y) \circ \phi(x)(v) \\ &= \phi([x, y])(v) + \phi(y) \circ \phi(x)(v) \\ &= \phi(0)(v) + \phi(y) \circ \phi(x)(v) \\ &= \phi(y) \circ \phi(x)(v) \\ &= y \triangleright (\phi(x)(v)) \end{aligned}$$

が言える. i.e.  $\forall x \in \mathfrak{g}$  に対して  $\phi(x): V \rightarrow V$  は  $\mathfrak{g}$ -加群の準同型である. よって Schur の補題から  $\phi(x)$  がスカラー倍だとわかる. 故に  $V$  の任意の 1 次元部分ベクトル空間は自動的に部分  $\mathfrak{g}$ -加群になる. 然るに  $V$  は仮定より既約だから  $V$  の部分  $\mathfrak{g}$ -加群は 0,  $V$  しかあり得ない. さらに  $V \neq 0$  なので  $\dim V = 1$  でなくてはならない. ■

## 2.3.3 $\mathfrak{g}$ -加群の Hom とテンソル積

この小節でも  $\mathbb{K}$  を任意の体とする.

### 定義 2.3.5: $\mathfrak{g}$ -加群のテンソル積

$(V_1, +, \cdot, \triangleright_1), (V_2, +, \cdot, \triangleright_2)$  を有限次元  $\mathfrak{g}$ -加群 とする. このとき

- $\mathbb{K}$ -ベクトル空間のテンソル積  $V_1 \otimes V_2$
- $V_1 \otimes V_2$  への  $\mathfrak{g}$  の左作用<sup>a</sup>

$$\triangleright: \mathfrak{g} \times (V_1 \otimes V_2) \longrightarrow V_1 \otimes V_2, (x, v_1 \otimes v_2) \longmapsto (x \triangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (x \triangleright_2 v_2)$$

の組として得られる  $\mathfrak{g}$ -加群  $(V_1 \otimes V_2, +, \cdot, \triangleright)$  を  $\mathfrak{g}$ -加群のテンソル積 (tensor product) と呼び,  $V_1 \otimes V_2$  と略記する.

<sup>a</sup> 正確には, これの右辺を線型に拡張したもの

実際  $V_1 \otimes V_2$  が  $\mathfrak{g}$ -加群になっていることを確認しておこう:

$$\begin{aligned} [x, y] \triangleright (v_1 \otimes v_2) &= ([x, y] \triangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes ([x, y] \triangleright_2 v_2) \\ &= (x \triangleright_1 y \triangleright_1 v_1) \otimes v_2 - (y \triangleright_1 x \triangleright_1 v_1) \otimes v_2 \\ &\quad + v_1 \otimes (x \triangleright_2 y \triangleright_2 v_2) - v_1 \otimes (y \triangleright_2 x \triangleright_2 v_2) \\ &= ((x \triangleright_1 y \triangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (x \triangleright_2 y \triangleright_2 v_2)) \\ &\quad - ((y \triangleright_1 x \triangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (y \triangleright_2 x \triangleright_2 v_2)), \\ x \triangleright y \triangleright (v_1 \otimes v_2) - y \triangleright x \triangleright (v_1 \otimes v_2) &= x \triangleright ((y \triangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (y \triangleright_2 v_2)) \\ &\quad - y \triangleright ((x \triangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (x \triangleright_2 v_2)) \\ &= ((x \triangleright_1 y \triangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (x \triangleright_2 y \triangleright_2 v_2)) \\ &\quad - ((y \triangleright_1 x \triangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (y \triangleright_2 x \triangleright_2 v_2)) \end{aligned}$$

なので

$$[x, y] \triangleright (v_1 \otimes v_2) = x \triangleright y \triangleright (v_1 \otimes v_2) - y \triangleright x \triangleright (v_1 \otimes v_2)$$

がわかった.

### 定義 2.3.6: $\mathfrak{g}$ -加群の双対

$(V, +, \cdot, \triangleright)$  を有限次元  $\mathfrak{g}$ -加群 とする. このとき

- 双対ベクトル空間  $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$
- $V^*$  への  $\mathfrak{g}$  の左作用

$$\triangleright: \mathfrak{g} \times V^* \longrightarrow V^*, (x, f) \longmapsto (v \mapsto -f(x \triangleright v))$$

の組として得られる  $\mathfrak{g}$ -加群  $(V^*, +, \cdot, \triangleright)$  を  $\mathfrak{g}$ -加群の双対 (dual)<sup>a</sup> と呼び,  $V^*$  と略記する.

<sup>a</sup> 反傾 (contragradient) と呼ぶ場合もあるようだが, 現在はあまり使われていないような気がする.

実際  $V^*$  が  $\mathfrak{g}$ -加群になっていることを確認しておこう：

$$\begin{aligned}
([x, y] \triangleright f)(v) &= -f([x, y] \triangleright f)(v) \\
&= -f(x \triangleright y \triangleright v - y \triangleright x \triangleright v) \\
&= -f(x \triangleright y \triangleright v) + f(y \triangleright x \triangleright v) \\
&= (x \triangleright f)(y \triangleright v) - (y \triangleright f)(x \triangleright v) \\
&= -(y \triangleright (x \triangleright f))(v) + (x \triangleright (y \triangleright f))(v) \\
&= (x \triangleright y \triangleright f)(v) - (y \triangleright x \triangleright f)(v)
\end{aligned}$$

なので

$$[x, y] \triangleright f = x \triangleright y \triangleright f - y \triangleright x \triangleright f$$

がわかった。

ここで、 $\mathbb{K}$ -ベクトル空間の自然な同型（命題 A.2.7）

$$V^* \otimes W \cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$$

の具体形が

$$\alpha: f \otimes w \mapsto (v \mapsto f(v) \cdot w) \quad (2.3.1)$$

となっていたことを思い出そう。このことから、 $\mathbb{K}$ -ベクトル空間  $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$  の上の  $\mathfrak{g}$  の左作用を

$$x \triangleright (f \otimes w) = -f(x \triangleright -) \otimes w + f \otimes (x \triangleright w)$$

に着想を得て

$$(x \triangleright F)(v) = -F(x \triangleright v) + x \triangleright F(v) \quad (\forall F \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W))$$

と定義しようと思うのが自然である。というのも、こう定義することで  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間の同型写像 (2.3.1) が

$$\begin{aligned}
\alpha(x \triangleright (f \otimes w))(v) &= -\alpha(f(x \triangleright -) \otimes w)(v) + \alpha(f \otimes (x \triangleright w))(v) \\
&= -f(x \triangleright v) \cdot w + f(v) \cdot (x \triangleright w) \\
&= -f(x \triangleright v) \cdot w + x \triangleright (f(v) \cdot w) \\
&= (x \triangleright \alpha(f \otimes w))(v)
\end{aligned}$$

となって  **$\mathfrak{g}$ -加群の同型写像**になる！

### 定義 2.3.7: $\mathfrak{g}$ -加群の $\text{Hom}$

$(V, +, \cdot, \triangleright_1), (W, +, \cdot, \triangleright_2)$  を有限次元  **$\mathfrak{g}$ -加群** とする。このとき

- $\mathbb{K}$ -ベクトル空間  $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ <sup>a</sup>
- $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$  への  $\mathfrak{g}$  の左作用

$$\triangleright: \mathfrak{g} \times \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W), F \longmapsto (v \mapsto -F(x \triangleright_1 v) + x \triangleright_2 F(v))$$

の組として得られる  $\mathfrak{g}$ -加群  $(\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W), +, \cdot, \triangleright)$  を  **$\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$**  と略記する。

<sup>a</sup>  $V$  から  $W$  への  **$\mathfrak{g}$ -加群の準同型**全体の集合ではない。



### 2.3.4 Casimir 演算子

この小節では  $\mathbb{K}$  は標数 0 の体とする.

#### 定義 2.3.8: 忠実な表現

Lie 代数  $\mathfrak{g}$  の表現  $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  が忠実 (faithful)<sup>a</sup> であるとは,  $\rho$  が単射であることを言う.

<sup>a</sup> 群作用の文脈では効果的な作用 (effective action) と呼ぶ.

#### 補題 2.3.3:

- 半単純 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  の忠実な有限次元表現  $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$
- $\mathfrak{g}$  上の対称な双線型形式

$$\beta: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}, (x, y) \mapsto \text{Tr}(\phi(x) \circ \phi(y))$$

を与える.  $\beta$  の radical を

$$S_\beta := \{ x \in \mathfrak{g} \mid \forall y \in \mathfrak{g}, \beta(x, y) = 0 \}$$

とおく. このとき以下が成り立つ:

- (1)  $S_\beta$  は  $\mathfrak{g}$  のイデアルである.
- (2)  $S_\beta = 0$ , i.e.  $\beta$  は非退化である.

証明 (1)  $\text{Tr}$  の循環性から

$$\begin{aligned} \beta(x, [y, z]) &= \text{Tr}(\phi(x) \circ \phi([y, z])) \\ &= \text{Tr}(\phi(x) \circ \phi(y) \circ \phi(z)) - \text{Tr}(\phi(x) \circ \phi(z) \circ \phi(y)) \\ &= \text{Tr}(\phi(x) \circ \phi(y) \circ \phi(z)) - \text{Tr}(\phi(y) \circ \phi(x) \circ \phi(z)) \\ &= \text{Tr}(\phi([x, y]) \circ \phi(z)) \\ &= \beta([x, y], z) \end{aligned}$$

が成り立つので,  $\forall x \in \mathfrak{g}, \forall y \in S_\beta$  に対して

$$\forall z \in \mathfrak{g}, \beta([x, y], z) = -\beta(y, [x, z]) = 0$$

が成り立つ. i.e.  $[x, y] \in S_\beta$  が言えた.

(2)  $S_\beta$  の定義から  $[\phi(x), \phi(y)]$  の形をした  $[\phi(S_\beta), \phi(S_\beta)]$  の任意の元および  $\forall \phi(z) \in \phi(S_\beta)$  に対して

$$\begin{aligned} \text{Tr}([\phi(x), \phi(y)] \circ \phi(z)) &= \text{Tr}(\phi([x, y]) \circ \phi(z)) \\ &= \beta([x, y], z) \\ &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つので, 定理 2.1.5 より  $\phi(S_\beta)$  は可解である.  $\phi$  は忠実なので  $\text{Ker } \phi = 0$  であり, 準同型定理から  $\phi(S_\beta) \cong S_\beta / \text{Ker } \phi = S_\beta$  が言える. 従って (1) も併せると  $S_\beta$  は  $\mathfrak{g}$  の可解イデアルである. 仮定より  $\mathfrak{g}$  は半単純だったから, 半単純 Lie 代数の定義から  $S_\beta = 0$  が言える.

補題 2.3.4:

- 半単純 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  の基底  $\{e_\mu\}$
- 対称かつ非退化な双線型形式  $\beta \in L(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}; \mathbb{K})$  であって  $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}$  に対して

$$\beta(x, [y, z]) = \beta([x, y], z)$$

を充たすもの

を与える. このとき以下が成り立つ:

- (1)  $\mathfrak{g}$  の基底  $\{e^\mu\}$  であって<sup>a</sup>,  $\forall(\mu, \nu) \in \{1, \dots, \dim \mathfrak{g}\}^2$  に対して

$$\beta(e_\mu, e^\nu) = \delta_\mu^\nu$$

を充たすものが一意に存在する.

- (2)  $\forall x \in \mathfrak{g}$  を一つ固定する. このとき  $\text{ad}(x): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  の基底  $\{e_\mu\}$  による表現行列  $[a_\mu^\nu]_{1 \leq \mu, \nu \leq \dim \mathfrak{g}}$  と, (1) の基底  $\{e^\mu\}$  による表現行列  $[b^\mu_\nu]_{1 \leq \mu, \nu \leq \dim \mathfrak{g}}$  について

$$a_\mu^\nu = -b^\nu_\mu$$

が成り立つ.

<sup>a</sup>  $\mathfrak{g}^*$  の元ではないが, Einstein の規約との便宜上添字を上付きにする.

**証明** (1)  $\beta_{\mu\nu} := \beta(e_\mu, e_\nu)$  とおく. このとき  $x = x^\mu e_\mu \in \mathfrak{g}$  に対して

$$\begin{aligned} \forall y = y^\nu e_\nu \in \mathfrak{g}, \beta(x, y) = 0 &\iff \forall \begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^{\dim \mathfrak{g}} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{\dim \mathfrak{g}}, \beta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = 0 \\ &\iff 1 \leq \forall \nu \leq \dim \mathfrak{g}, \beta_{\mu\nu} x^\mu = 0 \\ &\iff \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^{\dim \mathfrak{g}} \end{bmatrix} \in \text{Ker}[\beta_{\mu\nu}] \subset \mathbb{K}^{\dim \mathfrak{g}} \end{aligned}$$

が言える. ただし 2 つ目の同値変形で  $\beta$  が対称であることを使った. したがって  $\beta$  が非退化であることは  $\text{Ker}[\beta_{\mu\nu}] = 0$  と同値であり, このことはさらに補題 A.4.1-(3) より  $\det[\beta_{\mu\nu}] \neq 0$  と同値である<sup>\*5</sup>. よって  $[\beta_{\mu\nu}]$  の逆行列  $[\alpha^{\mu\nu}]$  が一意に存在するので,  $e^\mu := e_\nu \alpha^{\mu\nu}$  と定めると,

$$\beta(e_\mu, e^\nu) = \alpha^{\nu\rho} \beta_{\mu\rho} = \delta_\mu^\nu$$

が成り立つ.

<sup>\*5</sup> Cramer の公式は任意の体  $\mathbb{K}$  上で成り立つ.

(2)  $\text{ad}(x)(e_\mu) =: a_\mu^\nu e_\nu$ ,  $\text{ad}(e^\mu) =: b^\mu_\nu e^\nu$  とおくと,

$$\begin{aligned} a_\mu^\nu &= a_\mu^\rho \delta_\rho^\nu \\ &= a_\mu^\rho \beta(e_\rho, e^\nu) \\ &= \beta(\text{ad}(x)(e_\mu), e^\nu) \\ &= \beta(-[e_\mu, x], e^\nu) \\ &= \beta(e_\mu, -\text{ad}(x)e^\nu) \\ &= -b^\nu_\rho \beta(e_\mu, e^\rho) \\ &= -b^\nu_\mu \end{aligned}$$

■

### 定義 2.3.9: 忠実な表現の Casimir 演算子

- 半単純 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  の有限次元表現  $\phi: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$
- 半単純 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  の基底  $\{e_\mu\}$
- 対称かつ非退化な双線型形式  $\beta \in L(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}; \mathbb{K})$  であって  $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}$  に対して

$$\beta(x, [y, z]) = \beta([x, y], z)$$

を満たすもの

を与える. 与えられた  $\mathfrak{g}$  の基底  $\{e_\mu\}$  から補題 2.3.4 により構成した  $\mathfrak{g}$  の基底  $\{e^\mu\}$  をとる. このとき

- $\mathbb{K}$ -線型変換

$$c_\phi(\beta): V \longrightarrow V, v \longmapsto \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(e^\mu)(v)$$

を  $\beta, \phi$  の前 Casimir 演算子と呼ぶ.

- $\phi$  が忠実な表現で, かつ

$$\beta(x, y) := \text{Tr}(\phi(x) \circ \phi(y))$$

であるとき<sup>a</sup>,  $\beta, \phi$  の前 Casimir 演算子のことを  $\phi$  の Casimir 演算子 (Casimir operator of  $\phi$ ) と呼んで  $c_\phi$  と略記する.

<sup>a</sup> 補題 2.3.3 よりこの  $\beta$  は非退化である

### 命題 2.3.2: Casimir 演算子の性質

- 半単純 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  の有限次元表現  $\phi: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$
- 半単純 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  の基底  $\{e_\mu\}$
- 対称かつ非退化な双線型形式  $\beta \in L(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}; \mathbb{K})$  であって  $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}$  に対して

$$\beta(x, [y, z]) = \beta([x, y], z)$$

を満たすもの

を与える. 与えられた  $\mathfrak{g}$  の基底  $\{e_\mu\}$  から補題 2.3.4 により構成した  $\mathfrak{g}$  の基底  $\{e^\mu\}$  をとる.

- (1) 前 Casimir 演算子  $c_\phi(\beta) \in \text{End}(V)$  は,  $\forall x \in \mathfrak{g}$  に対して

$$[\phi(x), c_\phi(\beta)] = 0$$

を充たす. 従って  $c_\phi(\beta)$  は  $\mathfrak{g}$ -加群の準同型である.

- (2)  $\phi$  が忠実な表現ならば, Casimir 演算子  $c_\phi \in \text{End } V$  について

$$\text{Tr } c_\phi = \dim \mathfrak{g}$$

が成り立つ.

- (3)  $\mathbb{K}$  が代数閉体でかつ  $\phi$  が忠実な表現でかつ  $\phi$  が既約表現ならば, Casimir 演算子  $c_\phi \in \text{End } V$  は  $\mathfrak{g}$  の基底の取り方によらずに

$$c_\phi = \frac{\dim \mathfrak{g}}{\dim V} \text{id}_V$$

と書ける.

**証明** (1)  $\forall x, y, z \in \text{End}(V)$  に対して

$$[x, y \circ z] = [x, y] \circ z + y \circ [x, z]$$

が成り立つことと補題 2.3.4-(2) より,

$$\begin{aligned} [\phi(x), c_\phi(\beta)] &= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} [\phi(x), \phi(e_\mu)] \circ \phi(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ [\phi(x), \phi(e^\mu)] \\ &= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \text{ad}(\phi(x))(\phi(e_\mu)) \circ \phi(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \text{ad}(\phi(x))(\phi(e^\mu)) \\ &= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(\text{ad}(x)(e_\mu)) \circ \phi(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(\text{ad}(x)(e^\mu)) \\ &= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} a_\mu^\nu \phi(e_\nu) \circ \phi(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} b^\mu_\nu \phi(e_\mu) \circ \phi(e^\nu) \\ &= 0 \end{aligned}$$

が言えた.

- (2) 補題 2.3.4-(1) より

$$\begin{aligned} \text{Tr } c_\phi &= \sum_{\mu}^{\dim \mathfrak{g}} \text{Tr}(\phi(e_\mu) \circ \phi(e^\mu)) \\ &= \sum_{\mu}^{\dim \mathfrak{g}} \beta(e_\mu, e^\mu) \\ &= \dim \mathfrak{g} \end{aligned}$$

(3)  $\mathbb{K}$  が代数閉体でかつ  $\phi$  が既約なので, (1), (2) と代数閉体上の Schur の補題から  $c_\phi: V \rightarrow V$  は  $(\dim \mathfrak{g} / \dim V) \text{id}_V$  に等しい. ■

$\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  が忠実でない場合は次のように考える: まず,  $\mathfrak{g}$  が半単純なので,  $\text{Ker } \phi$  ( $\mathfrak{g}$  のイデアルである) は系 2.2.3 から  $\mathfrak{g}$  の単純イデアルの直和である. 定理 2.2.2 を使って  $\mathfrak{g}^\perp$  を  $\mathfrak{g} =: \text{Ker } \phi \oplus \mathfrak{g}^\perp$  で定義すると,  $\mathfrak{g}^\perp \cong \mathfrak{g} / \text{Ker } \phi$  なので, 制限

$$\phi|_{\mathfrak{g}^\perp}: \mathfrak{g}^\perp \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

は忠実な表現になる. そして  $\mathfrak{g}^\perp$  の基底に対して定義 2.3.9 を適用するのである.

### 2.3.5 Weyl の定理

この小節では  $\mathbb{K}$  を標数 0 の体とする. [2, 第 7 章, p.80-86] に倣って Weyl の定理を証明する.

#### 補題 2.3.5:

$\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  を半単純 Lie 代数の有限次元表現とする. このとき

$$\phi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{sl}(V)$$

が成り立つ. 特に,  $\dim V = 1$  ならば  $\phi$  は零写像である<sup>a</sup>

<sup>a</sup> これを自明な表現 (trivial representation) と言う.

**証明** 【例 1.1.3】より,  $\mathfrak{sl}(V)$  の基底は行列単位  $e_{ij}$  を使って

$$\{e_{ij} - e_{ji} \mid 1 \leq i \neq j \leq \dim V\} \cup \{e_{ii} - e_{i+1,i+1} \mid 1 \leq i \leq \dim V - 1\} = [\{e_i\}, \{e_j\}]$$

と書けた. よって  $\mathfrak{sl}(V) = [\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(V)]$  である. 一方で  $\mathfrak{g}$  が半単純なので系 2.2.3-(1) より  $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  であるから,

$$\phi(\mathfrak{g}) = \phi([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = [\phi(\mathfrak{g}), \phi(\mathfrak{g})] \subset [\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(V)] = \mathfrak{sl}(V)$$

が言えた. 特に  $\dim V = 0$  ならば  $\dim \mathfrak{sl}(V) = 1^2 - 1 = 0$  なので,  $\text{Im } \phi = 0$  である. ■

#### 補題 2.3.6: Whitehead の補題

半単純 Lie 代数の有限次元表現  $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  を与える.

このとき

$$\forall x, y \in \mathfrak{g}, f([x, y]) = \phi(x) \circ f(y) - \phi(y) \circ f(x) \quad (2.3.2)$$

を満たす任意の  $\mathbb{K}$ -線型写像  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}, V)$  に対して, ある  $v \in V$  が存在して

$$\forall x \in \mathfrak{g}, f(x) = \phi(x)(v)$$

が成り立つ.

**証明 case1:  $\phi$  が既約かつ忠実な場合**

(2.3.2) を充たす任意の  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}, V)$  を 1 つとる.  $\mathfrak{g}$  の基底  $\{e_\mu\}$  を 1 つ固定し,

$$\beta: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}, (x, y) \longmapsto \text{Tr}(\phi(x) \circ \phi(y))$$

を用いて補題 2.3.4-(1) の方法で対応する  $\mathfrak{g}$  の基底  $\{e^\mu\}$  を作る. このとき

$$v := \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ f(e^\mu) \in V$$

とおくと,  $\forall x \in \mathfrak{g}$  に対して補題 2.3.4 と同じ記号の下で

$$\begin{aligned} \phi(x)(v) &= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(x) \circ \phi(e_\mu) \circ f(e^\mu) \\ &= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} [\phi(x), \phi(e_\mu)] \circ f(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(x) \circ f(e^\mu) \\ &= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(\text{ad}(x)(e_\mu)) \circ f(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(x) \circ f(e^\mu) \\ &= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} a_\mu^\nu \phi(e_\nu) \circ f(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(x) \circ f(e^\mu) \\ c_\phi \circ f(x) &= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(e^\nu) \circ f(x) \\ &= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ f([e^\nu, x]) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(x) \circ f(e^\nu) \\ &= - \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ f(\text{ad}(x)(e^\nu)) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(x) \circ f(e^\nu) \\ &= - \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} b_\mu^\nu \phi(e_\mu) \circ f(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(x) \circ f(e^\nu) \end{aligned}$$

と計算できるので, 補題 2.3.4-(2) から

$$\phi(x)(v) = c_\phi \circ f(x)$$

が言えた. 仮定より  $\mathfrak{g}$ -加群  $V$  は既約なので, Schur の補題-(1), (2) から  $\mathfrak{g}$ -加群の準同型  $c_\phi: V \longrightarrow V$  は  $\mathfrak{g}$ -加群の同型であり,  $c_\phi^{-1}(v) \in V$  が所望のベクトルとなる.

**case2:  $\phi$  が忠実とは限らない既約表現の場合**

(2.3.2) を充たす任意の  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}, V)$  を 1 つとる. このとき  $\forall [x, y] \in [\text{Ker } \phi, \text{Ker } \phi]$  に対して

$$f([x, y]) = \phi(x) \circ f(y) - \phi(y) \circ f(x) = 0 \iff [x, y] \in \text{Ker } f$$

が言えるが, 仮定より  $\mathfrak{g}$  は半単純なので, 系 2.2.3-(3) よりそのイデアルである  $\text{Ker } \phi \subset \mathfrak{g}$  もまた半単純. 故に系 2.2.3-(1) から  $[\text{Ker } \phi, \text{Ker } \phi] = \text{Ker } \phi$  であり,

$$\text{Ker } \phi \subset \text{Ker } f$$

がわかった。従ってこのとき **商ベクトル空間の普遍性** を使うことができ、以下の図式を可換にする  $\bar{f} \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V/\text{Ker } \phi, \mathfrak{g})$  が一意に存在する：

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{f} & V \\ p \downarrow & \nearrow \exists! \bar{f} & \\ \mathfrak{g}/\text{Ker } \phi & & \end{array}$$

さらに商代数の普遍性から、表現  $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  は以下の図式を可換にする表現  $\bar{\phi}: \mathfrak{g}/\text{Ker } \phi \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  に一意に持ち上がる：

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\phi} & \mathfrak{gl}(V) \\ p \downarrow & \nearrow \exists! \bar{\phi} & \\ \mathfrak{g}/\text{Ker } \phi & & \end{array}$$

このとき  $\bar{\phi}$  は  $\mathfrak{g}/\text{Ker } \phi$  の忠実な既約表現であり、 $\bar{f} \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}/\text{Ker } \phi, V)$  は (2.3.2) を満たす。よって **case1** からある  $v \in V$  があって

$$\forall x \in \mathfrak{g}, \bar{f}(x + \text{Ker } \phi) = \bar{\phi}(x + \text{Ker } \phi)(v) \iff \forall x \in \mathfrak{g}, f(x) = \phi(x)(v)$$

が成り立つ。

### case3: $\phi$ が一般の場合

(2.3.2) を満たす任意の  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}, V)$  を 1 つ固定する。このときある  $v \in V$  が存在して  $\forall x \in \mathfrak{g}, f(x) = \phi(x)(v)$  が成り立つことを  $\dim V$  に関する数学的帰納法により示す。  $\dim V = 1$  のとき、補題 2.3.5 より  $\phi$  が零写像なので  $\forall v \in V$  に対して  $\forall x \in \mathfrak{g}, f(x) = \phi(x)(v)$  が成り立つ。

$\dim V > 1$  とする。  $\mathfrak{g}$ -加群  $V$  が既約でないならば、部分  $\mathfrak{g}$ -加群  $0 \subsetneq W \subsetneq V$  が存在する。標準的射影<sup>\*6</sup>  $p: V \rightarrow V/W$  および  $\forall x \in \mathfrak{g}$  について  $W \subset \text{Ker}(p \circ \phi(x))$  であるから、商代数の普遍性より  $\forall \phi(x) \in \phi(\mathfrak{g})$  に対して以下の図式を可換にする  $\bar{\phi}(x) \in \mathfrak{gl}(V/W)$  が一意に存在する：

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{p \circ \phi(x)} & V/W \\ p \downarrow & \nearrow \exists! \bar{\phi}(x) & \\ V/W & & \end{array}$$

このとき写像

$$\phi_1: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V/W), x \mapsto (v + W \mapsto \bar{\phi}(x)(v + W))$$

は well-defined な Lie 代数の準同型なので  $\mathfrak{g}$  の表現である。  $f_1 := p \circ f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}, V/W)$  は  $\phi_1$  に関して (2.3.2) を満たすので、帰納法の仮定より<sup>\*7</sup> ある  $v_1 + W \in V/W$  が存在して

$$\forall x \in \mathfrak{g}, f_1(x) = f(x) + W = \phi_1(x)(v_1 + W)$$

<sup>\*6</sup> このとき  $V$  の  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間としての構造しか見ない。

<sup>\*7</sup>  $\dim V/W < \dim V$  なので帰納法の仮定が使える。

が成り立つ。ここで  $f_2 \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}, W)$  を

$$f_2(x) := f(x) - \phi(x)(v_1)$$

と定義すると,  $f_2$  は部分表現  $\phi|_W: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(W)$  に関して (2.3.2) を満たす。よって帰納法の仮定から\*8ある  $v_2 \in W$  が存在して

$$\forall x \in \mathfrak{g}, f_2(x) = \phi|_W(x)(v_2)$$

が成り立つ。以上より,  $v := v_1 + v_2 \in V$  とおけば

$$\forall x \in \mathfrak{g}, f(x) = f_2(x) + \phi(x)(v_1) = \phi|_W(x)(v_2) + \phi(x)(v_1) = \phi(x)(v)$$

が言えた。 ■

### 定理 2.3.3: 完全可約性に関する Weyl の定理

$\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  が半単純 Lie 代数の有限次元表現ならば,  $\phi$  は完全可約である。

**証明**  $V$  の任意の部分  $\mathfrak{g}$ -加群  $W \subset V$  を 1 つ固定する。このとき命題 2.3.1 より, 部分  $\mathfrak{g}$ -加群  $W^c \subset V$  が存在して  $V \cong W \oplus W^c$  が成り立つことを示せば良い。

$\text{End } V$  の部分ベクトル空間  $L_W$  を

$$L_W := \{ t \in \text{End } V \mid t(V) \subset W, t(W) = 0 \}$$

と定める。  $L_W$  への  $\mathfrak{g}$  の左作用を

$$x \blacktriangleright t := [\phi(x), t]$$

と定義すると,  $W$  が部分  $\mathfrak{g}$ -加群であることおよび定義 2.3.7 より  $L_W$  は  $\mathfrak{g}$ -加群になる。 i.e.

$$\tilde{\phi}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(L_W), x \mapsto (t \mapsto x \blacktriangleright t)$$

は半単純 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  の有限次元表現である。

ここで  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間  $W$  への射影演算子\*9  $p: V \rightarrow V$  を 1 つとり,  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}, L_W)$  を

$$f(x) := [p, \phi(x)]$$

と定義しよう。このとき  $\forall x, y \in \mathfrak{g}$  に対して Jacobi 恒等式から

$$\begin{aligned} f([x, y]) &= [p, [\phi(x), \phi(y)]] \\ &= [\phi(x), [p, \phi(y)]] - [\phi(y), [p, \phi(x)]] \\ &= [\phi(x), f(y)] - [\phi(y), f(x)] \\ &= \tilde{\phi}(x) \circ f(y) - \tilde{\phi}(y) \circ f(x) \end{aligned}$$

\*8  $\dim W < \dim V$  なので帰納法の仮定が使える。

\*9  $p^2 = p$  かつ  $p|_W = \text{id}_W$



が成り立つので、補題 2.3.6 からある  $t \in L_W$  が存在して

$$\forall x \in \mathfrak{g}, f(x) = \tilde{\phi}(x)(t) = [\phi(x), t]$$

が成り立つ。よってこのとき  $\forall x \in \mathfrak{g}$  に対して

$$[\phi(x), p+t] = \tilde{\phi}(\phi(x))(p+t) = -[p, \phi(x)] + [\phi(x), t] = -f(x) + [\phi(x), t] = 0$$

が言えた。i.e.  $p+t \in \text{End } V$  は  $\mathfrak{g}$ -加群の準同型である。さらに  $t \in L_W$  であることから、 $(p+t)(V) = W$  かつ  $(p+t) \circ (p+t)|_W = \text{id}_W$  が言える。i.e.  $\mathfrak{g}$ -加群の短完全列

$$0 \hookrightarrow \text{Ker}(p+t) \hookrightarrow V \xrightarrow{p+t} W \longrightarrow 0$$

は分裂し、 $\mathfrak{g}$ -加群の直和として

$$V \cong W \oplus \text{Ker}(p+t)$$

が言えた。 ■

### 2.3.6 Jordan 分解の保存

この小節でも引き続き  $\mathbb{K}$  を標数 0 の代数閉体とする。

部分 Lie 代数  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  に関して

$$\text{ad}_{\mathfrak{h}}(x): \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}, v \longmapsto [x, v]$$

と定義する<sup>\*10</sup>。

#### 定理 2.3.4: Jordan-Chevalley 分解と抽象 Jordan 分解

$V$  を有限次元  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間とし、 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$  を半単純線型 Lie 代数とする。

このとき  $\forall x \in \mathfrak{g}$  の Jordan-Chevalley 分解  $x = x_s + x_n$  について  $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$  が成り立つ。特に、 $x$  の抽象 Jordan 分解  $s_x, n_x \in \mathfrak{g}$  に関して  $x_s = s_x, x_n = n_x$  が成り立つ。

**証明** 後半の主張は Jordan-Chevalley 分解および抽象 Jordan 分解の一意性より従うので、前半を示せば良い。

$\forall x \in \mathfrak{g}$  を 1 つ固定し、 $x$  の Jordan-Chevalley 分解  $x = x_s + x_n$  をとる。  $\text{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(x)(\mathfrak{g}) = [x, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$  なので命題 2.1.1-(3) より  $\text{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(x_s)(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$ ,  $\text{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(x_n)(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$  が言える。i.e. 正規化代数の言葉を使うと  $x_s, x_n \in N_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g}) =: N$  が言える<sup>\*11</sup>。

包含準同型  $\iota: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ ,  $x \longmapsto x$  によって  $V$  を  $\mathfrak{g}$ -加群と見做し、 $V$  の任意の部分  $\mathfrak{g}$ -加群  $W$  をとる。このとき  $\mathfrak{gl}(V)$  の部分 Lie 代数  $L_W \subset \mathfrak{gl}(V)$  を

$$L_W := \{ y \in \mathfrak{gl}(V) \mid y(W) \subset W \text{ かつ } \text{Tr}(y|_W) = 0 \}$$

<sup>\*10</sup>  $x \in \mathfrak{h}$  ならば、部分 Lie 代数の定義から  $\text{Im ad}_{\mathfrak{h}}(x) \subset \mathfrak{h}$  となる。この意味で  $\text{ad}_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{h})$  と書いても良い。

<sup>\*11</sup> 補題 2.3.5 より  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}(V)$  なので  $\mathfrak{g} \subsetneq N$  であることに注意

と定義する<sup>\*12</sup>. 仮定より  $\mathfrak{g}$  は半単純 Lie 代数なので系 2.2.3-(1) より  $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  であり,  $\mathfrak{g} \subset L_W$  が言える. さらにこのとき命題 2.1.1-(3) より  $x_s, x_n \in L_W$  も言える<sup>\*13</sup>.

ここで

$$\mathfrak{g}' := N \cap \left( \bigcap_{\substack{W \subset V, \\ \text{部分}\mathfrak{g}\text{-加群}}} L_W \right)$$

とおくと,  $\mathfrak{g}'$  は  $\mathfrak{g}$  をイデアルとしてもつ  $N$  の部分 Lie 代数であり,  $\forall x \in \mathfrak{g}$  に対して  $x_s, x_n \in \mathfrak{g}'$  だとわかる.

最後に  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$  が成り立つことを示す. 随伴表現  $\text{ad}_{\mathfrak{g}'}: \mathfrak{g}' \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}')$  の  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}'$  への制限  $\text{ad}_{\mathfrak{g}'}|_{\mathfrak{g}}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}')$  によって  $\mathfrak{g}'$  を有限次元  $\mathfrak{g}$ -加群と見做すと  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}'$  自身は  $\mathfrak{g}'$  の部分  $\mathfrak{g}$ -加群なので<sup>\*14</sup>, 命題 2.3.1 および Weyl の定理よりある  $\mathfrak{g}'$  の部分  $\mathfrak{g}$ -加群  $\mathfrak{h}$  が存在して  $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$  と書ける. 示すべきは  $\mathfrak{h} = 0$  である. ここで  $V$  の任意の既約な部分  $\mathfrak{g}$ -加群  $W$  をとる<sup>\*15</sup>.  $\forall y \in \mathfrak{h}$  を 1 つとると,  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'] \subset \mathfrak{g}$ <sup>\*16</sup> であることから  $[\iota(\mathfrak{g}), y] = [\mathfrak{g}, y] = 0$ , i.e.  $y: V \rightarrow V$  は  $\mathfrak{g}$ -加群の準同型である. よって代数閉体上の Schur の補題から  $y|_W: W \rightarrow W$  はスカラー倍である. 一方で  $y \in L_W$  でもあるので  $\text{Tr}(y|_W) = 0$  であり,  $y|_W = 0$  だと分かった. Weyl の定理より  $V$  は既約な部分  $\mathfrak{g}$ -加群の直和であり,  $W$  は任意だったので  $y = 0$  が言えた. i.e.  $\mathfrak{h} = 0$  が示された. ■

#### 系 2.3.5:

$\mathfrak{g}$  を半単純 Lie 代数,  $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  をその有限次元表現とする.

このとき  $\forall x \in \mathfrak{g}$  の抽象 Jordan 分解  $x = s_x + n_x$  に対して,  $\phi(x) = \phi(s_x) + \phi(n_x) \in \mathfrak{gl}(V)$  は Jordan-Chevalley 分解である. i.e.  $\phi(x)_s = \phi(s_x)$ ,  $\phi(x)_n = \phi(n_x)$  が成り立つ.

**証明**  $s_x$  は半単純なので  $\text{ad}(s_x): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  も半単純. i.e.  $\text{ad}(s_x)$  は対角化可能なので  $\text{ad}(s_x)$  の固有ベクトル全体がなす集合は  $\mathfrak{g}$  の基底となる. 従って  $\text{ad}_{\phi(\mathfrak{g})}(\phi(s_x)): \phi(\mathfrak{g}) \rightarrow \phi(\mathfrak{g})$  の  $\phi(\mathfrak{g})$  の固有ベクトル全体がなす集合は  $\phi(\mathfrak{g})$  の基底となる. i.e.  $\text{ad}_{\phi(\mathfrak{g})}(\phi(s_x))$  は半単純である. 同様に  $\text{ad}_{\phi(\mathfrak{g})}(\phi(n_x))$  が冪零であることもわかるので,  $\phi(x) = \phi(s_x) + \phi(n_x)$  は半単純 Lie 代数  $\phi(\mathfrak{g})$  における  $\phi(x)$  の抽象 Jordan 分解である. よって定理 2.3.4 からこれは Jordan-Chevalley 分解と一致する. ■

! 定理 2.3.4 および系 2.3.5 の意味で Jordan-Chevalley 分解と抽象 Jordan 分解は同一視できるので, 以後抽象 Jordan 分解のことも  $x = s_x + n_x$  の代わりに  $x = x_s + x_n$  と表記する.

## 2.4 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の表現

<sup>\*12</sup> 例えば  $L_V = \mathfrak{sl}(V)$  である

<sup>\*13</sup>  $\text{Tr}(x_n) = 0$  なので,  $\text{Tr}(x) = \text{Tr}(x_s) = 0$ .

<sup>\*14</sup>  $\forall x \in \mathfrak{g}$  に対して  $\text{ad}_{\mathfrak{g}'}|_{\mathfrak{g}}(x)(\mathfrak{g}) = [x, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$ .

<sup>\*15</sup> ここでは包含準同型  $\iota: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  によって  $V$  を  $\mathfrak{g}$  加群と見做している.

<sup>\*16</sup>  $\mathfrak{g}' \subset N$  だから

この節において常に  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$  とし,  $\mathfrak{g}$  の全ての表現は有限次元であるとする. 【例 1.1.3】 に倣って  $\mathfrak{g}$  の基底は

$$x := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad y := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad h := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

を採用する. このとき

$$[h, x] = 2x, \quad [h, y] = -2y, \quad [x, y] = h$$

が成り立つ.

### 2.4.1 ウェイトと極大ベクトル

任意の  $\mathfrak{g}$  の表現  $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  を与える.  $h$  は半単純なので系 2.3.5 より  $\phi(h)$  を対角化する  $V$  の基底がある. よって

$$V_\lambda := \{ v \in V \mid h \blacktriangleright v = \lambda v \}$$

とおくと  $V$  は異なる  $\lambda$  に関する  $V_\lambda$  の内部直和になる (固有空間分解)<sup>\*17</sup>:

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}} V_\lambda$$

特に  $V_\lambda \neq 0$  のとき  $\lambda$  を  $h$  のウェイト (weight) と呼び,  $V_\lambda$  をウェイト  $\lambda$  のウェイト空間 (weight space of weight  $\lambda$ ) と呼ぶ.

#### 補題 2.4.1:

$$v \in V_\lambda \implies x \blacktriangleright v \in V_{\lambda+2}, y \blacktriangleright v \in V_{\lambda-2}$$

#### 証明

$$h \blacktriangleright (x \blacktriangleright v) = [h, x] \blacktriangleright v + x \blacktriangleright h \blacktriangleright v = (\lambda + 2)x \blacktriangleright v$$

■

$\dim V < \infty$  なので,  $V_\lambda \neq 0$  かつ  $V_{\lambda+2} = 0$  を満たす  $\lambda \in \mathbb{K}$  が存在する. 一般に, ウェイト  $\lambda$  のウェイト空間  $V_\lambda$  の非零な元  $v \in V_\lambda \setminus \{0\}$  であって,  $x \blacktriangleright v = 0 \in V_{\lambda+2}$  を満たすものはウェイト  $\lambda$  の極大ベクトル (maximal vector of weight  $\lambda$ ) と呼ばれる.

### 2.4.2 既約表現の分類

<sup>\*17</sup>  $\lambda$  が  $h$  の固有値でなければ  $V_\lambda = 0$  となる.

$\mathfrak{g}$ -加群  $V$  は既約であるとする. 極大ベクトル  $v_0 \in V_\lambda$  をとり,

$$v_i := \begin{cases} 0, & i = -1 \\ \frac{1}{i!} y^i \triangleright v_0, & i \geq 0 \end{cases}$$

とおく.

**補題 2.4.2:**

- (1)  $h \triangleright v_i = (\lambda - 2i)v_i$
- (2)  $y \triangleright v_i = (i + 1)v_{i+1}$
- (3)  $x \triangleright v_i = (\lambda - i + 1)v_{i-1} \quad \text{w/ } i \geq 0$

**証明** (1) 補題 2.4.1 より明らか.

(2)  $v_i$  の定義より

$$y \triangleright v_i = \frac{1}{i!} y^{i+1} \triangleright v_0 = (i + 1)v_{i+1}$$

(3)  $i$  に関する数学的帰納法により示す.  $i = 0$  のときは自明.  $i > 0$  とする. 帰納法の仮定より  $x \triangleright v_{i-1} = (\lambda - i + 2)v_{i-2}$  であるから,

$$\begin{aligned} x \triangleright v_i &= \frac{1}{i} x \triangleright y \triangleright v_{i-1} \\ &= \frac{1}{i} [x, y] \triangleright v_{i-1} + \frac{1}{i} y \triangleright (x \triangleright v_{i-1}) \\ &= \frac{\lambda - 2i + 2}{i} v_{i-1} + \frac{(\lambda - i + 2)(i - 1)}{i} v_{i-1} \\ &= (\lambda - i + 1)v_{i-1} \end{aligned}$$

が言えて帰納法が完成する. ■

補題 2.4.2-(1) より 0 でない  $v_i \in V$  たちは全て線型独立であるが,  $\dim V < \infty$  である. そこで

$$m := \min \{ m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid v_m \neq 0 \text{ かつ } v_{m+1} = 0 \}$$

とおく.  $\forall i > 0$  に対して帰納的に  $v_{m+i} = 0$  がわかるので, 補題 2.4.2-(1), (2), (3) より  $\text{Span}\{v_0, \dots, v_m\} \subset V$  は非零な部分  $\mathfrak{g}$ -加群である.  $\mathfrak{g}$  は既約だったので  $V = \text{Span}\{v_0, \dots, v_m\}$  が言えた.

補題 2.4.2-(3) を  $i = m + 1$  の場合に適用すると  $0 = (\lambda - m)v_m$  となり,  $\lambda = m = \dim V - 1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  がわかる. この  $m$  を  $\mathfrak{g}$ -加群  $V$  の **最高ウェイト** (highest weight) と呼ぶ. さらに, 補題 2.4.2-(1) より  $h$  のウェイトは全て異なる. i.e.  $0 \leq \forall \mu \leq m$  に対して, 対応するウェイト空間の次元  $\dim V_{m-2\mu} = 1$  である. 特に最高ウェイトは  $\dim V$  によって一意に決まるので,  $v_0 \in V_m$  は零でないスカラー倍を除いて一意に定まる.

以上の考察をまとめて次の定理を得る:

**定理 2.4.1:**

$V$  を  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$  の既約表現とする.

(1)  $m := \dim V - 1$  とおくと  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間として

$$V = \bigoplus_{\mu=0}^m V_{m-2\mu} \quad \text{w/ } 0 \leq \forall \mu \leq m, \dim V_{m-2\mu} = 1$$

が成り立つ.

(2)  $V$  の極大ベクトルは零でないスカラー倍を除いて一意に決まり, そのウェイトは  $m$  である.

(3)  $\mathfrak{g}$  の  $V$  への作用は補題 2.4.2 によって完全に決まる.

**系 2.4.2:**

$V$  を任意の有限次元  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群とする. このとき  $\phi(h): V \rightarrow V$  の固有値は全て整数で, かつ自身にマイナス符号をつけたものとちょうど同じ回数だけ出現する. さらに,  $V$  の任意の既約表現への内部直和分解において, 直和因子の個数はちょうど  $\dim V_0 + \dim V_1$  個である.

**証明**  $V = 0$  なら明らか.  $V \neq 0$  とする. Weyl の定理により  $V$  を既約な部分  $\mathfrak{g}$ -加群の直和に分解すると, 既約な部分  $\mathfrak{g}$ -加群は全て定理 2.4.1-(1) の形をしているので前半が従う.

後半を示す.  $V$  の既約な部分  $\mathfrak{g}$ -加群への直和分解を

$$V = \bigoplus_i W_i$$

と書くと, 定理 2.4.1 より  $\forall i$  に対して何かしらの  $m_i \geq 0$  が存在して  $W_i \cong \bigoplus_{\mu=0}^{m_i} V_{m_i-2\mu}$  と書ける. 逆に  $\forall m \geq 0$  に対して,  $\bigoplus_{\mu=0}^m V_{m-2\mu}$  と  $\mathfrak{g}$ -加群として同型な全ての  $W_i$  の直和を  $V^{(m)}$  と書くと,

$$V = \bigoplus_{m=0}^{\infty} V^{(m)}$$

となる. よって  $V^{(m)}$  の直和因子の個数を  $k_m$  とかくと

$$\dim V_{\lambda} = \sum_{\substack{m \geq |\lambda|, \\ m \equiv \lambda \pmod{2}}} k_m$$

となる. 特に

$$\dim V_0 + \dim V_1 = \sum_{m=0}^{\infty} k_m$$

なので示された. ■

## 2.5 ルート空間分解

この節では体  $\mathbb{K}$  を標数 0 の代数閉体とし,  $\mathfrak{g} \neq 0$  を体  $\mathbb{K}$ -上の半単純 Lie 代数とする.

## 2.5.1 極大トーラスとルート

もし  $\forall x \in \mathfrak{g}$  が冪零ならば  $\text{ad}(x) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  もまた冪零であり<sup>\*18</sup>, 従って Engel の定理から  $\mathfrak{g}$  は冪零 Lie 代数となる. 然るにこれは  $\mathfrak{g}$  が半単純 Lie 代数であることに矛盾する<sup>\*19</sup>.

従って冪零でない  $x \in \mathfrak{g}$  が存在するが, このとき  $x$  の抽象 Jordan 分解<sup>\*20</sup>  $x = x_s + x_n$  w/  $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$  において  $x_s \neq 0$  である. このことは, 半単純成分のみで構成される  $\mathfrak{g}$  の自明でない部分 Lie 代数の存在を示唆する.

### 定義 2.5.1: トーラス

$\mathfrak{g}$  の 0 でない部分 Lie 代数  $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$  がトーラス (toral subalgebra) であるとは,  $\forall x \in \mathfrak{t}$  の抽象 Jordan 分解  $x = x_s + x_n$  において  $x_n = 0$  であることを言う.

### 補題 2.5.1: トーラスは可換

$\mathfrak{g}$  の任意のトーラス  $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$  は Lie ブラケットについて可換である.

**証明**  $\mathfrak{t}$  を  $\mathfrak{g}$  のトーラスとする.  $\forall x \in \mathfrak{t}$  を 1 つ固定する. 示すべきは  $\text{ad}_{\mathfrak{t}}(x) = 0$  が成り立つことであるが,  $\mathfrak{t}$  がトーラスであるという仮定より  $\text{ad}(x) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  は半単純  $\iff$  対角化可能だから,  $\text{ad}_{\mathfrak{t}}(x)$  の固有値が全て 0 であることを背理法により示す.

$\exists y \in \mathfrak{t} \setminus \{0\}, \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, [x, y] = \lambda y$  を仮定する. このとき  $\text{ad}_{\mathfrak{t}}(y)(x) = -\lambda y$  は  $\text{ad}_{\mathfrak{t}}(y)$  の固有値 0 に属する固有ベクトルである. 一方で  $y \in \mathfrak{t}$  なので  $\text{ad}_{\mathfrak{t}}(y) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{t})$  は対角化可能であり,  $\text{ad}_{\mathfrak{t}}(y)$  の固有ベクトル  $v_1, \dots, v_{\dim \mathfrak{t}} \in \mathfrak{t} \setminus \{0\}$  は  $\mathfrak{t}$  の基底をなす<sup>\*21</sup>. 従って  $x = \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{t}} x^{\mu} v_{\mu}$  と書けるが, このとき

$$0 = \text{ad}_{\mathfrak{t}}(y)(\text{ad}_{\mathfrak{t}}(y)(x)) = \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{t}} (\lambda_{\mu})^2 x^{\mu} v_{\mu}$$

が成り立つ.  $v_{\mu}$  の線型独立性から  $(\lambda_{\mu})^2 x^{\mu} = 0$  だが,  $x$  は任意だったので  $\lambda_1 = \dots = \lambda_{\dim \mathfrak{t}} = 0$ <sup>\*22</sup>, i.e.  $\text{ad}_{\mathfrak{t}}(y) = 0$  が分かった. 然るにこれは仮定に矛盾し, 背理法が完成した. ■

$\mathfrak{g}$  のトーラスのうち極大なもの<sup>\*23</sup>を 1 つ固定し, それを  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  と書こう.  $\mathfrak{h}$  は極大トーラス (maximal toral subalgebra) と呼ばれる.



$\mathfrak{g}$  が半単純 Lie 代数なので,  $\mathfrak{g}$  の極大トーラスは後述する Cartan 部分代数 (Cartan subalgebra; CSA) と一致する. 極大トーラスを  $\mathfrak{t}$  ではなく  $\mathfrak{h}$  と書くのは慣習であり, CSA を  $\mathfrak{h}$  と書くことに対応していると思われる.

<sup>\*18</sup>  $\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  は Lie 代数の準同型なので.

<sup>\*19</sup> 一般に冪零 Lie 代数  $\implies$  可解 Lie 代数だが, 系 2.2.3-(1) より  $\mathfrak{g}$  が半単純 Lie 代数  $\implies \mathfrak{g}$  は可解 Lie 代数でない  $\implies \mathfrak{g}$  は冪零 Lie 代数でない.

もしくは, 命題 1.1.4-(4) から  $\mathfrak{g} \neq 0$  かつ  $\mathfrak{g}$  が冪零 Lie 代数  $\implies \mathfrak{g}$  は半単純 Lie 代数でない

<sup>\*20</sup> 系 2.3.5 の注意に従って抽象 Jordan 分解をこのように表記する.

<sup>\*21</sup> 固有ベクトル  $v_{\mu}$  は固有値  $\lambda_{\mu}$  に属するとする. なお, 以下では Einstein の規約を使わない.

<sup>\*22</sup> 体は整域なので.

<sup>\*23</sup> トーラス  $\mathfrak{t} \subsetneq \mathfrak{g}$  が存在して  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{t}$  が成り立つならば  $\mathfrak{t} = \mathfrak{h}$ .

ここで、与えられた  $h \in \mathfrak{h}$  に対して線型変換  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(h) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  の固有値のうちのどれか 1 つを返す写像

$$\alpha: \mathfrak{h} \longrightarrow \mathbb{K}, h \longmapsto \alpha(h) \quad \text{w/} \quad \exists x \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}, \alpha(h)x := \text{ad}_{\mathfrak{g}}(h)(x)$$

を考えよう. このとき  $\mathfrak{g}_{\alpha}$  の部分ベクトル空間<sup>\*24</sup>  $\mathfrak{g}_{\alpha}$  を

$$\mathfrak{g}_{\alpha} := \{x \in \mathfrak{g} \mid \forall h \in \mathfrak{h}, \text{ad}_{\mathfrak{g}}(h)(x) = \alpha(h)x\}$$

と定義すると,  $\mathfrak{g}_{\alpha} \neq 0$  ならば  $\alpha \in \mathfrak{h}^*$  だとわかる.<sup>\*25</sup> 一方, 補題 2.5.1 より  $\forall h, k \in \mathfrak{h}$  に対して  $[\text{ad}_{\mathfrak{g}}(h), \text{ad}_{\mathfrak{g}}(k)] = \text{ad}_{\mathfrak{g}}([h, k]) = \text{ad}_{\mathfrak{g}}(0) = 0$  が成り立つ, i.e.  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(h), \text{ad}_{\mathfrak{g}}(k) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  は互いに可換な線型変換なので,  $\forall \text{ad}_{\mathfrak{g}}(h) \in \text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  は同時対角化可能である. 従って  $\mathfrak{g}$  の固有空間分解

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_{\alpha} \quad (2.5.1)$$

が成り立つ. 特に  $\dim \mathfrak{g} < \infty$  であることから集合

$$\Phi := \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}_{\alpha} \neq 0\}$$

は有限集合になるので, (2.5.1) は有限個の直和として

$$\mathfrak{g} = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\alpha} \quad (2.5.2)$$

と書くこともできる<sup>\*26</sup>.  $\Phi$  の元のことを  $\mathfrak{g}$  のルート (root) と呼び, (2.5.2) のことを  $\mathfrak{g}$  のルート空間分解 (root space decomposition)<sup>\*27</sup> と呼ぶ.

#### 命題 2.5.1:

$\kappa \in L(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}; \mathbb{K})$  を  $\mathfrak{g}$  の Killing 形式とする.  $\forall \alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$  に対して以下が成り立つ:

- (1)  $[\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{\beta}] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$
- (2)  $\alpha \neq 0 \implies \forall x \in \mathfrak{g}_{\alpha}$  に対して  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(x) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  は冪零である.
- (3)  $\alpha + \beta \neq 0 \implies \kappa$  について  $\mathfrak{g}_{\alpha}$  と  $\mathfrak{g}_{\beta}$  は直交する. i.e.  $\kappa|_{\mathfrak{g}_{\alpha} \times \mathfrak{g}_{\beta}} = 0$
- (4)  $\kappa$  に関する  $\mathfrak{g}_{\alpha}$  の直交補空間は

$$\mathfrak{g}_{\alpha}^{\perp} = \bigoplus_{\gamma \in \mathfrak{h}^* \setminus \{-\alpha\}} \mathfrak{g}_{\gamma}$$

と書ける.

<sup>\*24</sup>  $\alpha \neq 0$  のとき  $\mathfrak{g}_{\alpha}$  は部分 Lie 代数ではない. 実際,  $\forall x, y \in \mathfrak{g}_{\alpha}$  および  $\forall h \in \mathfrak{h}$  に対して  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(h)([x, y]) = [\text{ad}_{\mathfrak{g}}(h)(x), y] + [x, \text{ad}_{\mathfrak{g}}(h)(y)] = 2\alpha(h)[x, y]$  となり,  $\alpha(h) \neq 0$  ならば  $[x, y] \notin \mathfrak{g}_{\alpha}$  である.

<sup>\*25</sup>  $\mathfrak{g}_{\alpha} \neq 0$  なので  $x \in \mathfrak{g}_{\alpha} \setminus \{0\}$  が存在する. このとき  $\forall h, h_1, h_2 \in \mathfrak{h}, \forall \lambda \in \mathbb{K}$  に対して  $\alpha(h)x = \text{ad}_{\mathfrak{g}}(h)(x)$ ,  $\alpha(h_i)x = \text{ad}_{\mathfrak{g}}(h_i)(x)$  が成り立つが,  $\mathfrak{h}$  は  $\mathfrak{g}$  の部分 Lie 代数なので  $h_1 + h_2, \lambda h \in \mathfrak{h}$  であること, および  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  の線型性から

$$\begin{aligned} \alpha(h_1 + h_2)x &= \text{ad}_{\mathfrak{g}}(h_1 + h_2)(x) = \text{ad}_{\mathfrak{g}}(h_1)(x) + \text{ad}_{\mathfrak{g}}(h_2)(x) = (\alpha(h_1) + \alpha(h_2))x, \\ \alpha(\lambda h)x &= \text{ad}_{\mathfrak{g}}(\lambda h)(x) = \lambda \text{ad}_{\mathfrak{g}}(h)(x) = (\lambda \alpha(h))x \end{aligned}$$

が言える.  $x \neq 0$  なので  $\alpha(h_1 + h_2) = \alpha(h_1) + \alpha(h_2)$ ,  $\alpha(\lambda h) = \lambda \alpha(h)$ , i.e.  $\alpha: \mathfrak{h} \longrightarrow \mathbb{K}$  が線型写像であることが分かった.

<sup>\*26</sup> 中心化代数の定義を思い出すと  $\mathfrak{g}_0 = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  である.

<sup>\*27</sup> Cartan 分解 (Cartan decomposition) と呼ぶこともある.

**証明** (1)  $\forall x \in \mathfrak{g}_\alpha, \forall y \in \mathfrak{g}_\beta$  をとる. このとき  $\text{ad}_\mathfrak{g}: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  の像が微分であることから,  $\forall h \in \mathfrak{h}$  に対して

$$\begin{aligned}\text{ad}_\mathfrak{g}(h)([x, y]) &= [\text{ad}_\mathfrak{g}(h)(x), y] + [x, \text{ad}_\mathfrak{g}(h)(y)] \\ &= (\alpha(h) + \beta(h))[x, y] \\ &= (\alpha + \beta)(h)[x, y]\end{aligned}$$

が成り立つ. i.e.  $[x, y] \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$  である.

(2)  $\alpha \neq 0$  とし,  $\forall x \in \mathfrak{g}_\alpha$  を 1 つとる. (2.5.1) が  $\mathfrak{g}$  の直和分解なので,  $\forall \beta \in \mathfrak{h}^*$  に対してある  $n \in \mathbb{N}$  が存在して  $(\text{ad}_\mathfrak{g}(x))^n(\mathfrak{g}_\beta) = 0$  を満たすことを示せばよい.

$\forall n \in \mathbb{N}$  に対して  $(\text{ad}_\mathfrak{g}(x))^n(\mathfrak{g}_\beta) \neq 0$  が成り立つと仮定する. ところが (1) よりこれは  $0 \subsetneq (\text{ad}_\mathfrak{g}(x))^n(\mathfrak{g}_\beta) \subset \mathfrak{g}_{n\alpha+\beta}$  を意味し,  $\Phi \subset \mathfrak{h}^*$  が有限集合であることに矛盾する. 従って背理法により示された.

(3) 仮定より  $\alpha + \beta \neq 0 \in \mathfrak{h}^*$  なので, ある  $h \in \mathfrak{h}$  が存在して  $(\alpha + \beta)(h) \neq 0$  を満たす. このとき  $\forall (x, y) \in \mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_\beta$  をとると

$$\begin{aligned}\alpha(h)\kappa(x, y) &= \kappa(\text{ad}_\mathfrak{g}(h)(x), y) \\ &= -\kappa([x, h], y) \\ &= -\kappa(x, [h, y]) \\ &= -\kappa(x, \text{ad}_\mathfrak{g}(h)(y)) \\ &= -\beta(h)\kappa(x, y)\end{aligned}$$

が成り立つので  $\kappa(x, y) = 0$  が言えた.

(4) (3) より

$$\mathfrak{g}_\alpha^\perp \supset \bigoplus_{\gamma \in \mathfrak{h}^* \setminus \{-\alpha\}} \mathfrak{g}_\gamma \quad (2.5.3)$$

がわかる. 定理 2.2.1 より  $\kappa$  は非退化なので,  $\mathfrak{g}$  が有限次元であることから

$$\dim \mathfrak{g}_\alpha^\perp = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_\alpha$$

が成り立つ. よって (2.5.3) から  $\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_{-\alpha} \leq \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_\alpha \iff \dim \mathfrak{g}_\alpha \leq \dim \mathfrak{g}_{-\alpha}$  が言える.  $\alpha \in \mathfrak{h}^*$  は任意だったので  $\dim \mathfrak{g}_{-\alpha} \leq \dim \mathfrak{g}_\alpha$  も言えて  $\dim \mathfrak{g}_\alpha = \dim \mathfrak{g}_{-\alpha}$  が従う. 故に

$$\dim \mathfrak{g}_\alpha^\perp = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_\alpha = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_{-\alpha} = \dim \bigoplus_{\gamma \in \mathfrak{h}^* \setminus \{-\alpha\}} \mathfrak{g}_\gamma$$

が成り立ち, (2.5.3) の包含が等号だと分かった. ■

#### 系 2.5.1:

$\kappa|_{\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0}$  は非退化である.

**証明** 命題 2.5.1-(4) より  $\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{g}_0^\perp = 0$ , i.e.  $\kappa|_{\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0}$  は非退化である. ■



## 2.5.2 極大トーラスの中心化代数

### 補題 2.5.2:

$V$  を有限次元  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間とし,  $x, y \in \text{End } V$  は  $[x, y] = 0$  を満たす (i.e. 互いに可換) とする. このとき,  $x, y$  のどちらか一方が冪零ならば  $x \circ y$  も冪零である. 特に  $\text{Tr}(x \circ y) = 0$  が成り立つ.

**証明**  $x$  が冪零であるとする. このときある  $n > 0$  が存在して  $x^n = 0$  となるので,  $[x, y] = 0 \iff x \circ y = y \circ x$  より  $(x \circ y)^n = y^n \circ x^n = 0$  が言える. 特に  $x \circ y$  の表現行列を  $n(\dim V, \mathbb{K})$  の元にするような  $V$  の基底が存在するので  $\text{Tr}(x \circ y) = 0$  である. ■

### 命題 2.5.2:

$\mathfrak{g}$  の極大トーラス  $\mathfrak{h}$  に対して,

$$\mathfrak{h} = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) (= \mathfrak{g}_0)$$

**証明**  $C := C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  とおく. 命題 2.5.1 より  $\mathfrak{h}$  は可換なので  $\mathfrak{h} \subset C$  が成り立つ.  $x \in \mathfrak{g}$  の抽象 Jordan 分解を  $x = x_s + x_n$  と書く.

**step1:**  $\forall x = x_s + x_n \in C$  に対して  $x_s, x_n \in C$

$x \in C \iff \text{ad}_{\mathfrak{g}}(x)(\mathfrak{h}) = 0$  である. このとき命題 2.1.1-(3) より  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(x)_s(\mathfrak{h}) = \text{ad}_{\mathfrak{g}}(x)_n(\mathfrak{h}) = 0$  が言える. 系 2.3.5 より  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(x)_s = \text{ad}_{\mathfrak{g}}(x_s)$ ,  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(x)_n = \text{ad}_{\mathfrak{g}}(x_n)$  なので示された.

**step2:**  $\forall x = x_s + x_n \in C$  に対して  $x_s \in \mathfrak{h}$

$\forall x = x_s + x_n \in C$  をとる. このとき  $\forall h \in \mathfrak{h}$  に対して  $0 = \text{ad}_{\mathfrak{g}}(0) = \text{ad}_{\mathfrak{g}}([h, x]) = [\text{ad}_{\mathfrak{g}}(h), \text{ad}_{\mathfrak{g}}(x)] = 0$  が成り立つので  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(h), \text{ad}_{\mathfrak{g}}(x), \text{ad}_{\mathfrak{g}}(x_s) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  は同時対角化可能であり, 従って  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(h + x_s) = \text{ad}_{\mathfrak{g}}(h) + \text{ad}_{\mathfrak{g}}(x_s) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  もまた半単純だとわかる. 従って  $\mathfrak{h} + \mathbb{K}x_s$  は  $\mathfrak{h}$  を含む  $\mathfrak{g}$  のトーラスだが,  $\mathfrak{h}$  の極大性より  $\mathfrak{h} + \mathbb{K}x_s = \mathfrak{h}$ , i.e.  $x_s \in \mathfrak{h}$  が言えた.

**step3:**  $\kappa|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$  が非退化

$\forall h \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^{\perp}$  をとる. このとき  $\kappa(h, \mathfrak{h}) = 0$  が成り立つ. 示すべきは  $h = 0$  である.

ところで,  $x \in C$  が冪零ならば,  $[x, \mathfrak{h}] = 0$  かつ  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(x) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  が冪零であることから補題 2.5.2 が使えて  $\kappa(x, y) = \text{Tr}(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(x) \circ \text{ad}_{\mathfrak{g}}(y)) = 0$  が言える. i.e.  $\kappa(x, \mathfrak{h}) = 0$  が成り立つ. ここで  $\forall y = y_s + y_n \in C$  をとると, (step2) から  $y_s \in \mathfrak{h}$  なので  $h$  の取り方から  $\kappa(y_s, h) = 0$  がわかり, (step1) から  $y_n \in C$  がわかるが,  $y_n$  は冪零なので結局  $\kappa(y, h) = \kappa(y_n, h) = 0$  だと分かった.  $y \in C$  は任意だったのでこのことは  $h \in C^{\perp}$  を意味するが, 系 2.5.1 より  $\kappa|_{C \times C}$  は非退化なので  $h = 0$  が言えた\*28.

**step4:**  $C$  は冪零 Lie 代数

$\forall x = x_s + x_n \in C$  をとる. (step2) より  $x_s \in \mathfrak{h}$  であり,  $\text{ad}_C(x) = 0$  は冪零である. 一方  $\text{ad}_C(x_n)$  は定義から冪零なので,  $\text{ad}_C(x) = \text{ad}_C(x_s) + \text{ad}_C(x_n)$  も冪零である. よって Engel の定理から  $C$  は冪零 Lie 代数である.

**step5:**  $\mathfrak{h} \cap [C, C] = 0$

\*28  $\mathfrak{h} \subset C$  より  $h \in C \cap C^{\perp}$ .

$\kappa$  は Lie ブラケットについて結合的なので,  $[\mathfrak{h}, C] = 0$  と併せて  $\kappa(\mathfrak{h}, [C, C]) = 0$  を得る. 従って (step3) より  $\mathfrak{h} \cap [C, C] = 0$  が言えた.

#### step6: $C$ は可換

背理法により示す.  $[C, C] \neq 0$  とする. (step4) より  $C$  は冪零 Lie 代数で, かつ  $[C, C] \subset C$  はそのイデアルであるから, このとき補題 1.1.5 が使えて  $Z(C) \cap [C, C] \neq 0$  が言える. i.e.  $z = z_s + z_n \in (Z(C) \cap [C, C]) \setminus \{0\}$  が存在する. (step2), (step5) より  $z_n \neq 0$  でなくてはならない. よって (step1) から  $z_n \in C \setminus \{0\}$  ということになる. 一方, 命題 2.1.1-(2) より  $\forall c \in C$  に対して  $0 = [z, c] = [z_s, c] + [z_n, c]$  だが, (step2) より  $z_s \in \mathfrak{h}$  なので  $[z_s, c] = 0$  であり,  $[z_n, c] = 0$ , i.e.  $z_n \in Z(C)$  となる. よって補題 2.5.2 から  $\kappa(z_n, C) = 0$  が言えて, 系 2.5.1 から  $z_n = 0$  ということになり,  $z_n \neq 0$  と矛盾する.

#### step7: $C = \mathfrak{h}$

背理法により示す.  $C \neq \mathfrak{h}$  とすると, ある  $x = x_s + x_n \in C$  が存在して  $x_n \neq 0$  となる. このとき (step1) より  $x_n \in C \setminus \{0\}$  であり, (step6) および補題 2.5.2 から  $\forall y \in C$  に対して  $\kappa(x_n, y) = \text{Tr}(\text{ad}(x_n) \circ \text{ad}(y)) = 0$  を満たすことになり, 系 2.5.1 に矛盾する.

■

#### 系 2.5.2:

$\kappa|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$  は非退化である.

証明 系 2.5.1 に命題 2.5.2 を用いるだけである.

■

$\mathbb{K}$ -線型写像

$$\tilde{\kappa}: \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}^*, h \longmapsto (x \longmapsto \kappa(h, x)) \quad (2.5.4)$$

を考える. すると  $\kappa$  に関する  $\mathfrak{h}$  の直交補空間の定義を思い出して

$$\text{Ker } \tilde{\kappa} = \{h \in \mathfrak{h} \mid \forall x \in \mathfrak{h}, \kappa(h, x) = 0\} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp$$

となることがわかるが, 系 2.5.2 より  $\text{Ker } \tilde{\kappa} = 0$  が言える. i.e.  $\tilde{\kappa}$  は単射である.  $\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{h}^*$  なので, 補題 A.4.1-(3) から  $\tilde{\kappa}$  は  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間の同型写像である. 従って  $\forall \alpha \in \mathfrak{h}^*$  が与えられたとき,  $\forall h \in \mathfrak{h}$  に対して  $\alpha(h) = \kappa(t_\alpha, h) = \tilde{\kappa}(t_\alpha)(h)$  を満たすような  $t_\alpha \in \mathfrak{h}$  が存在する.

### 2.5.3 直交性

#### 命題 2.5.3: ルートの直交性

- 体  $\mathbb{K}$  上の有限次元半単純 Lie 代数  $\mathfrak{g}$
- $\mathfrak{g}$  の極大トーラス  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$
- $\mathfrak{h}$  のルート全体の集合  $\Phi \subset \mathfrak{h}^*$

を与える.  $\mathfrak{g}$  のルート空間分解を命題 2.5.2 によって

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\alpha}$$

と書く. このとき, 以下が成り立つ:

- (1)  $\mathfrak{h}^* = \text{Span } \Phi$
- (2)  $\alpha \in \Phi \implies -\alpha \in \Phi$
- (3)  $\forall \alpha \in \Phi$  および  $\forall x \in \mathfrak{g}_{\alpha}, \forall y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  に対して,  $[x, y] = \kappa(x, y)t_{\alpha}$
- (4)  $\alpha \in \Phi \implies [\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = \text{Span}\{t_{\alpha}\}$
- (5)  $\alpha \in \Phi \implies \alpha(t_{\alpha}) = \kappa(t_{\alpha}, t_{\alpha}) \neq 0$
- (6)  $\forall \alpha \in \Phi$  および  $\forall x_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{\alpha} \setminus \{0\}$  に対して  $y_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  が存在し,  $h_{\alpha} := [x_{\alpha}, y_{\alpha}] \in \mathfrak{h}$  とおくと

$$x_{\alpha} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad y_{\alpha} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad h_{\alpha} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

を線型に拡張することで定義される  $\mathbb{K}$ -線型写像

$$\text{Span}\{x_{\alpha}, y_{\alpha}, h_{\alpha}\} \longrightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$$

が Lie 代数の同型写像になる.

(7)

$$h_{\alpha} = \frac{2}{\kappa(t_{\alpha}, t_{\alpha})} t_{\alpha}, \quad h_{\alpha} = -h_{-\alpha}$$

**証明** (1) 背理法により示す.  $\mathfrak{h}^* \supsetneq \text{Span } \Phi$  を仮定する. このとき  $\text{Span } \Phi$  の基底  $\{\varepsilon^{\mu}\}_{1 \leq \mu \leq r}$  ( $r < \dim \mathfrak{h}$ ) を 1 つ固定すると, 線型独立な  $\dim \mathfrak{h} - r > 0$  個の元  $\varepsilon^{r+1}, \dots, \varepsilon^{\dim \mathfrak{h}} \in \mathfrak{h}^* \setminus \Phi$  が存在して  $\{\varepsilon^{\mu}\}_{1 \leq \mu \leq r} \cup \{\varepsilon^{\nu}\}_{r+1 \leq \nu \leq \dim \mathfrak{h}}$  が  $\mathfrak{h}^*$  の基底になる. さらに  $\dim \mathfrak{h} < \infty$  なので  $\mathfrak{h}^*$  の基底  $\{\varepsilon^{\mu}\}_{1 \leq \mu \leq \dim \mathfrak{h}}$  の双対基底  $\{e_{\mu} \in \mathfrak{h}\}_{1 \leq \mu \leq \dim \mathfrak{h}}$  をとることができるが, このとき  $r+1 \leq \nu \leq \dim \mathfrak{h}$  を充たす  $\nu$  が少なくとも 1 つ存在して  $e_{\nu} \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$  が  $\forall \alpha = \sum_{\mu=1}^r \alpha_{\mu} \varepsilon^{\mu} \in \Phi$  に対して  $\alpha(e_{\nu}) = \sum_{\mu=1}^r \alpha_{\mu} \varepsilon^{\mu}(e_{\nu}) = 0$  を充たす. このような  $e_{\nu}$  のうちのどれか 1 つを  $h$  とおこう.

このとき  $\mathfrak{g}_{\alpha}$  の定義から,  $\forall \alpha \in \Phi$  に対して  $[h, \mathfrak{g}_{\alpha}] = 0$  が成り立つ. 一方で, 補題 2.5.1 より  $[h, \mathfrak{h}] = 0$  であるから, 命題 2.5.2 より  $[h, \mathfrak{g}] = [h, \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\alpha}] = [h, \mathfrak{h}] \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} [h, \mathfrak{g}_{\alpha}] = 0 \iff h \in Z(\mathfrak{g})$  がわかる. 然るに  $\mathfrak{g}$  が半単純 Lie 代数であることから  $Z(\mathfrak{g}) = 0$  であり  $h = 0$  ということになって矛盾.

- (2)  $\alpha \in \Phi$  とする. 背理法により  $-\alpha \in \Phi$  を示す.  $-\alpha \notin \Phi$  を仮定する. このとき  $\mathfrak{g}_{-\alpha} = 0$  であるから  $\kappa|_{\mathfrak{g}_{\alpha} \times \mathfrak{g}_{-\alpha}} = 0$  であり, 命題 2.5.1-(3) と併せると  $\forall \beta \in \mathfrak{h}^*$  に対して  $\kappa|_{\mathfrak{g}_{\alpha} \times \mathfrak{g}_{\beta}} = 0$  がわかる. よって  $\kappa$  の双線型性から  $\kappa|_{\mathfrak{g}_{\alpha} \times \mathfrak{g}} = 0$ , i.e.  $\kappa$  の radical  $S_{\kappa}$  について  $0 \subsetneq \mathfrak{g}_{\alpha} \subset S_{\kappa}$  ということになって  $\mathfrak{g}$  が半単純 Lie 代数であることに矛盾 (定理 2.2.1).
- (3)  $\forall \alpha \in \Phi$  および  $\forall x \in \mathfrak{g}_{\alpha}, \forall y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  を 1 つずつとる.  $\forall h \in \mathfrak{h}$  を 1 つ固定しよう.  $\kappa \in L(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}; \mathbb{K})$  は対

称かつ Lie ブラケットについて結合的なので

$$\begin{aligned}
\kappa(h, [x, y]) &= \kappa([h, x], y) \\
&= \kappa(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(h)(x), y) \\
&= \alpha(h)\kappa(x, y) \\
&= \kappa(t_\alpha, h)\kappa(x, y) \\
&= \kappa(\kappa(x, y)t_\alpha, h) \\
&= \kappa(h, \kappa(x, y)t_\alpha)
\end{aligned}$$

がわかる.  $h \in \mathfrak{h}$  は任意だったので  $\kappa(h, [x, y] - \kappa(x, y)t_\alpha) = 0$ , i.e.  $\kappa$  に関する直交補空間の意味で  $[x, y] - \kappa(x, y)t_\alpha \in \mathfrak{h}^\perp$  だと分かった. 一方で, 命題 2.5.1-(1), 命題 2.5.2 より  $[x, y] \in \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$  が言えて, かつ定義より  $t_\alpha \in \mathfrak{h}$  なので,  $[x, y] - \kappa(x, y)t_\alpha \in \mathfrak{h}$  である. 以上より  $[x, y] - \kappa(x, y)t_\alpha \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp$  が分かったが, 系 2.5.2 より  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp = 0$  なので  $[x, y] - \kappa(x, y)t_\alpha = 0 \iff [x, y] = \kappa(x, y)t_\alpha$  が示された.

- (4)  $\alpha \in \Phi$  とする. (3) より,  $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \neq 0$  を示せば十分である.  $\alpha \in \Phi$  なので,  $x \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$  が存在する. もし  $\kappa|_{\{x\} \times \mathfrak{g}_{-\alpha}} = 0$  ならば (2) の証明と同様の議論により  $\kappa|_{\{x\} \times \mathfrak{g}} = 0$ , i.e.  $x \in S_\kappa$  という事になり定理 2.2.1 に矛盾. よって背理法からある  $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  が存在して  $\kappa(x, y) \neq 0$  を充たす. 従って (3) から  $[x, y] \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \setminus \{0\}$  が言えた.
- (5)  $\alpha \in \Phi$  とする. 背理法により  $\alpha(t_\alpha) \neq 0$  を示す.  $\alpha(t_\alpha) = 0$  を仮定すると,  $\forall x \in \mathfrak{g}_\alpha, \forall y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  に対して  $[t_\alpha, x] = 0 = [t_\alpha, y]$  となる. (4) と同様の議論により  $\kappa(x, y) \neq 0$  であるような  $x \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}, y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  が存在する.  $x, y$  のどちらか一方を  $\kappa(x, y)^{-1}$  倍することで, (3) において  $[x, y] = t_\alpha \in \mathfrak{h}$  となるようにできる. このとき  $\mathfrak{g}$  の部分 Lie 代数  $\mathfrak{s} := \operatorname{Span}\{x, y, t_\alpha\}$  は 3 次元の可解 Lie 代数であり,  $\mathfrak{s} \cong \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  である<sup>\*29</sup>. 従って系 2.1.4 が使えて,  $\forall s \in [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$  に対して  $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(s) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  は冪零である.  $t_\alpha \in [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$  なので  $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(t_\alpha)$  は冪零である. 一方で  $t_\alpha \in \mathfrak{h}$  なので  $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(t_\alpha)$  は半単純でもあるから  $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(t_\alpha) = 0 \iff t_\alpha \in \operatorname{Ker} \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} = 0 \implies t_\alpha = 0$  となるが, これは  $\alpha \in \Phi$  (従って  $\alpha \neq 0$ ) であることに矛盾する.
- (6)  $\forall \alpha \in \Phi$  および  $\forall x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$  を与える. このとき (4) の証明と同様の議論によりある  $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  が存在して  $\kappa(x_\alpha, y) \neq 0$  を充たす. さらに (5) から  $\kappa(t_\alpha, t_\alpha) \neq 0$  なので,

$$y_\alpha := \frac{2}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)\kappa(x_\alpha, y)}y$$

とおけば

$$\kappa(x_\alpha, y_\alpha) = \frac{2}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)}$$

を充たす. よってさらに

$$h_\alpha := \frac{2}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)}t_\alpha \in \mathfrak{h}$$

<sup>\*29</sup> 抽象 Jordan 分解の定義の直前で述べたように,  $\mathfrak{g}$  が半単純 Lie 代数ならば  $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  は単射である.

とおけば (3) より

$$\begin{aligned} [x_\alpha, y_\alpha] &= \kappa(x_\alpha, y_\alpha)t_\alpha = h_\alpha, \\ [h_\alpha, x_\alpha] &= \frac{2}{\alpha(t_\alpha)}[t_\alpha, x_\alpha] = \frac{2}{\alpha(t_\alpha)}\alpha(t_\alpha)x_\alpha = 2x_\alpha, \\ [h_\alpha, y_\alpha] &= \frac{2}{\alpha(t_\alpha)}[t_\alpha, y_\alpha] = \frac{2}{\alpha(t_\alpha)}(-\alpha(t_\alpha))y_\alpha = -2y_\alpha \end{aligned}$$

が成り立ち,  $\text{Span}\{x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha\} \subset \mathfrak{g}$  は  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$  と Lie 代数として同型になる.

(7) (6) の証明から即座に

$$h_\alpha = \frac{2}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)}t_\alpha$$

が従う.  $\kappa(t_\alpha, h) := \alpha(h)$  ( $\forall h \in \mathfrak{h}$ ) が  $t_\alpha$  の定義だったので,

$$\forall h \in \mathfrak{h}, \kappa(t_{-\alpha}, h) = -\alpha(h) = \kappa(-t_\alpha, h)$$

が言える. よって系 2.5.2 から  $t_{-\alpha} = -t_\alpha$  であり,

$$h_\alpha = -h_{-\alpha}$$

が言えた. ■

## 2.5.4 整性

命題 2.5.3-(6) で構成した  $(x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha) \in \mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha} \times \mathfrak{h}$  について,

$$\mathfrak{s}_\alpha := \text{Span}\{x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha\} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$$

とおく.

### 命題 2.5.4:

- 体  $\mathbb{K}$  上の有限次元半単純 Lie 代数  $\mathfrak{g}$
- $\mathfrak{g}$  の極大トーラス  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$
- $\mathfrak{h}$  のルート全体の集合  $\Phi \subset \mathfrak{h}^*$

を与える.  $\mathfrak{g}$  のルート空間分解を命題 2.5.2 によって

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

と書く. このとき,  $\forall \alpha, \beta \in \Phi$  に対して以下が成り立つ:

(1)  $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ . 特に  $\mathfrak{h}_\alpha := [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$  とおくと

$$\mathfrak{s}_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{h}_\alpha$$

が成り立ち,  $\forall x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$  に対して  $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha \in \mathfrak{h}_\alpha$  を充たす  $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  が一意的存在する.

- (2)  $\lambda\alpha \in \Phi \implies \lambda = +1$  または  $\lambda = -1$   
 (3)  $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$  で, かつ  $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in \Phi$   
 (4)  $\alpha + \beta \in \Phi \implies [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$   
 (5)  $\beta \neq \pm\alpha$  ならば,

$$r := \max\{\lambda \in \mathbb{Z} \mid \beta - \lambda\alpha \in \Phi\},$$

$$q := \max\{\lambda \in \mathbb{Z} \mid \beta + \lambda\alpha \in \Phi\}$$

とおいたとき  $-r \leq \forall \lambda \leq q$  に対して

$$\beta + \lambda\alpha \in \Phi \text{ かつ } \beta(h_\alpha) = r - q \in \mathbb{Z}$$

が成り立つ.

! (3) の  $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$  は **Cartan 数** (Cartan integer) と呼ばれる. (5) で得られた系列  $\{\beta + \lambda\alpha \in \Phi\}_{-r \leq \lambda \leq q}$  のことを  **$\alpha$ -string through  $\beta$**  と呼ぶ.

証明  $\forall \alpha \in \Phi$  を 1 つ固定する.  $\mathfrak{s}_\alpha$  の随伴表現

$$\text{ad}_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{s}_\alpha} : \mathfrak{s}_\alpha \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), x \longmapsto \text{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$$

によって  $\mathfrak{g}$  を  $\mathfrak{s}_\alpha$ -加群と見做す. このとき  $h_\alpha \in \mathfrak{s}_\alpha$  の,  $\mathfrak{g}$  におけるウェイト  $\mu$  の **ウェイト空間** を  $V_\mu \subset \mathfrak{g}$  と書く. **Weyl の定理** から  $\mathfrak{s}_\alpha$ -加群  $\mathfrak{g}$  は既約な部分  $\mathfrak{s}_\alpha$ -加群の族  $\{\mathfrak{w}_i\}_{i \in I}$  の ( $\mathfrak{s}_\alpha$ -加群としての) **直和**

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{w}_i$$

に分解し, それぞれの直和因子  $\mathfrak{w}_i$  の既約な部分  $\mathfrak{s}_\alpha \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群としての構造は定理 2.4.1 より定まる. 特に系 2.4.2 より

- $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(h_\alpha)$  の固有値 (i.e. 随伴表現  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{s}_\alpha}$  における  $h_\alpha \in \mathfrak{s}_\alpha$  のウェイト) は全て整数
- 偶数ウェイトのウェイト空間の直和として書ける  $\mathfrak{w}_i$  の個数は  $\dim V_0$  個
- 奇数ウェイトのウェイト空間の直和として書ける  $\mathfrak{w}_i$  の個数は  $\dim V_1$  個

が成り立つ.

(1), (2)

$\mathfrak{g}$  の 部分ベクトル空間

$$\mathfrak{m} := \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}^*} \mathfrak{g}_{\lambda\alpha} \subset \mathfrak{g}$$

を考える<sup>\*30</sup>. 命題 2.5.1-(1) より  $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*$  に対して

$$\begin{aligned} x_\alpha \triangleright \mathfrak{g}_{\lambda\alpha} &= \text{ad}_{\mathfrak{g}}(x_\alpha)(\mathfrak{g}_{\lambda\alpha}) = [x_\alpha, \mathfrak{g}_{\lambda\alpha}] \subset \mathfrak{g}_{(\lambda+1)\alpha}, \\ y_\alpha \triangleright \mathfrak{g}_{\lambda\alpha} &= \text{ad}_{\mathfrak{g}}(y_\alpha)(\mathfrak{g}_{\lambda\alpha}) = [y_\alpha, \mathfrak{g}_{\lambda\alpha}] \subset \mathfrak{g}_{(\lambda-1)\alpha}, \\ h_\alpha \triangleright \mathfrak{g}_{\lambda\alpha} &= \text{ad}_{\mathfrak{g}}(h_\alpha)(\mathfrak{g}_{\lambda\alpha}) = [h_\alpha, \mathfrak{g}_{\lambda\alpha}] \subset \mathfrak{g}_{\lambda\alpha} \end{aligned}$$

<sup>\*30</sup>  $\mathbb{K}^*$  の元は  $\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$  なる  $\mathbb{K}$ -線型写像ということなので, 要するにスカラー倍である.

が成り立つので,  $\mathfrak{m}$  は  $\mathfrak{g}$  の部分  $\mathfrak{s}_\alpha$ -加群である. また,  $\mathfrak{g}_\alpha$  の定義および命題 2.5.3-(5), (7) から,  $\lambda\alpha \in \Phi$  を充たす任意の  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  に対して

$$\forall x \in \mathfrak{g}_{\lambda\alpha}, h_\alpha \blacktriangleright x = \text{ad}_{\mathfrak{g}}(h_\alpha)(x) = \lambda\alpha(h_\alpha)x = 2\lambda x$$

が成り立つ. i.e.  $\mathfrak{g}_{\lambda\alpha} = V_{2\lambda} \cap \mathfrak{m}$  である. さらに補題 2.5.1 より  $h_\alpha \blacktriangleright \mathfrak{h} = \text{ad}_{\mathfrak{g}}(h_\alpha)(\mathfrak{h}) = [h_\alpha, \mathfrak{h}] = 0$  が言えるので,  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 = V_0 \cap \mathfrak{m}$  である.

ここで  $\dim(\text{Ker } \alpha) = \dim \mathfrak{h} - 1$  であり<sup>\*31</sup>,  $\forall h \in \text{Ker } \alpha$  に対して

$$\begin{aligned} x_\alpha \blacktriangleright h &= -\text{ad}_{\mathfrak{g}}(h)(x_\alpha) = \alpha(h)x_\alpha = 0, \\ y_\alpha \blacktriangleright h &= -\text{ad}_{\mathfrak{g}}(h)(y_\alpha) = -\alpha(h)x_\alpha = 0, \\ h_\alpha \blacktriangleright h &= -\text{ad}_{\mathfrak{g}}(h)(h_\alpha) = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ. i.e.  $\mathfrak{s}_\alpha$  は  $\text{Ker } \alpha$  に自明に作用するので,  $\text{Ker } \alpha$  は  $\dim \mathfrak{h} - 1$  個の自明な (従ってウエイト 0 の) 既約  $\mathfrak{s}_\alpha$ -部分加群の直和である. 一方,  $\mathfrak{s}_\alpha \subset \mathfrak{g}$  自身もまた  $\mathfrak{g}$  の既約な部分  $\mathfrak{s}_\alpha$ -加群であり, 命題 2.5.3-(6) より

$$\begin{aligned} h_\alpha \blacktriangleright x_\alpha &= \text{ad}_{\mathfrak{g}}(h_\alpha)(x_\alpha) = [h_\alpha, x_\alpha] = 2x_\alpha, \\ h_\alpha \blacktriangleright y_\alpha &= \text{ad}_{\mathfrak{g}}(h_\alpha)(y_\alpha) = [h_\alpha, y_\alpha] = -2y_\alpha, \\ h_\alpha \blacktriangleright h_\alpha &= \text{ad}_{\mathfrak{g}}(h_\alpha)(h_\alpha) = 0 \end{aligned}$$

が成り立つのでウエイト 0,  $\pm 2$  を持つ. i.e.  $\mathfrak{g}_{\pm\alpha} \subset \mathfrak{s}_\alpha$  である. 従って  $\text{Ker } \alpha \oplus \mathfrak{s}_\alpha$  は<sup>\*32</sup>  $(\dim \mathfrak{h} - 1) + 1 = \dim \mathfrak{h}$  個の, 偶数ウエイトを持つ既約な部分  $\mathfrak{s}_\alpha$ -加群の直和に分解するが, 系 2.4.2 よりこのような既約部分  $\mathfrak{s}_\alpha$ -加群の  $\mathfrak{m}$  内における総数は  $\dim(V_0 \cap \mathfrak{m}) = \dim \mathfrak{h}$  個なので, 結局  $\mathfrak{m}$  内の  $h_\alpha$  の偶数ウエイトは 0,  $\pm 2$  以外に出現しないことが分かった. 従って  $2\alpha, \frac{1}{2}\alpha \notin \Phi$  である<sup>\*33</sup>. このことから  $V_1 \cap \mathfrak{m} = 0$  がわかり, 系 2.4.2 から  $\mathfrak{m}$  内に奇数ウエイトが出現しないこともわかった. 以上の考察より

$$\mathfrak{m} = \text{Ker } \alpha \oplus \mathfrak{s}_\alpha$$

なので  $\mathbb{K}h_\alpha \subset \mathfrak{s}_\alpha$  であり,  $\dim \mathfrak{s}_\alpha = 3$  であることから  $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$  が言えた. 特に命題 2.5.3-(4) より  $\mathbb{K}h_\alpha = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] =: \mathfrak{h}_\alpha$  であり,

$$\mathfrak{s}_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{h}_\alpha$$

も言えた.

(3), (4), (5)

$\beta = \pm\alpha$  のとき,  $\alpha(h_\alpha) = 2$  なので (3) が成り立つ. よって以下では  $\forall \beta \in \Phi \setminus \{\pm\alpha\}$  を 1 つとる.  $\mathfrak{g}$  の部分ベクトル空間

$$\mathfrak{k} := \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta + \lambda\alpha}$$

<sup>\*31</sup>  $\alpha \neq 0$  なので  $\dim(\text{Im } \alpha) = 1$  である. よって階数・退化次元の定理から  $\dim(\text{Ker } \alpha) = \dim \mathfrak{h} - 1$ .

<sup>\*32</sup>  $\mathfrak{h} = \text{Ker } \alpha \oplus \mathbb{K}h_\alpha$  なので  $\text{Ker } \alpha \cap \mathfrak{s}_\alpha = 0$  である.

<sup>\*33</sup> 議論の冒頭で  $\alpha \in \Phi$  は任意にとっていたので, もし  $2\alpha \in \Phi$  ならば,  $\beta := 2\alpha \in \Phi$  とおいたときに  $2\beta = 4\alpha \in \Phi$  という事になり矛盾.  $\alpha = 2(\frac{1}{2}\alpha) \in \Phi$  なので  $\frac{1}{2}\alpha \notin \Phi$  も言えた.

を考える。命題 2.5.1-(1) より  $\forall \lambda \in \mathbb{Z}$  に対して

$$\begin{aligned} x_\alpha \blacktriangleright \mathfrak{g}_{\beta+\lambda\alpha} &= [x_\alpha, \mathfrak{g}_{\beta+\lambda\alpha}] \subset \mathfrak{g}_{\beta+(\lambda+1)\alpha}, \\ y_\alpha \blacktriangleright \mathfrak{g}_{\beta+\lambda\alpha} &= [y_\alpha, \mathfrak{g}_{\beta+\lambda\alpha}] \subset \mathfrak{g}_{\beta+(\lambda-1)\alpha}, \\ h_\alpha \blacktriangleright \mathfrak{g}_{\beta+\lambda\alpha} &= [h_\alpha, \mathfrak{g}_{\beta+\lambda\alpha}] \subset \mathfrak{g}_{\beta+\lambda\alpha} \end{aligned}$$

が成り立つので、 $\mathfrak{k}$  は  $\mathfrak{g}$  の部分  $\mathfrak{s}_\alpha$ -加群である。(1) において  $\alpha$  は任意だったので  $\forall \lambda \in \mathbb{Z}$  に対して  $\dim \mathfrak{g}_{\beta+\lambda\alpha} = 1$  である。 $\mathfrak{g}_\alpha$  の定義および命題 2.5.3-(5), (7) から、 $\beta + \lambda\alpha \in \Phi$  を充たす任意の  $\lambda \in \mathbb{Z}$  に対して

$$\forall x \in \mathfrak{g}_{\beta+\lambda\alpha}, h_\alpha \blacktriangleright x = (\beta(h_\alpha) + 2\lambda)x$$

が成り立つ。i.e.  $\mathfrak{g}_{\beta+\lambda\alpha} = V_{\beta(h_\alpha)+2\lambda} \cap \mathfrak{k}$  である。特に  $\beta(h_\alpha) + 2\lambda \in \mathbb{Z}$  なので  $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$  でなくてはならない ((3) の前半)。

$\alpha, \beta$  を固定したとき、 $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$  だと分かったので  $\beta(h_\alpha) \equiv 0, 1 \pmod{2}$  のどちらかである。 $\beta(h_\alpha) \equiv 0 \pmod{2}$  ならば

$$V_0 \cap \mathfrak{k} = \mathfrak{g}_{\beta - \frac{\beta(h_\alpha)}{2}\alpha}, \quad V_1 \cap \mathfrak{k} = 0$$

$\beta(h_\alpha) \equiv 1 \pmod{2}$  ならば

$$V_0 \cap \mathfrak{k} = 0, \quad V_1 \cap \mathfrak{k} = \mathfrak{g}_{\beta - \frac{\beta(h_\alpha)-1}{2}\alpha}$$

なので、いずれの場合も  $\dim(V_0 \cap \mathfrak{k}) + \dim(V_1 \cap \mathfrak{k}) = 1$  であり、系 2.4.2 より  $\mathfrak{k}$  は既約な  $\mathfrak{s}_\alpha \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ -加群であることが分かった。従って  $\mathfrak{k}$  の最高 (resp. 最低) ウェイト  $m$  (resp.  $l$ ) が存在し、

$$\begin{aligned} \beta(h_\alpha) + 2q &:= m, \\ \beta(h_\alpha) - 2r &:= l \end{aligned}$$

とおけば

$$\begin{aligned} q &= \max\{\lambda \in \mathbb{Z} \mid \beta + \lambda\alpha \in \Phi\}, \\ r &= \max\{\lambda \in \mathbb{Z} \mid \beta - \lambda\alpha \in \Phi\} \end{aligned}$$

が成り立ち、さらに定理 2.4.1-(1) より  $-r \leq \forall \lambda \leq q$  に対して  $\beta(h_\alpha) + 2\lambda = (\beta + \lambda\alpha)(h_\alpha)$  は  $\mathfrak{k}$  のウェイトなので

$$\beta + \lambda\alpha \in \Phi$$

である。特に  $l = -m$  なので

$$\beta(h_\alpha) = r - q \in \mathbb{Z}$$

が言えた ((5))。さらに  $q, r \geq 0$  なので  $-r \leq q - r \leq q$  が成り立ち、

$$\beta - \beta(h_\alpha)\alpha = \beta + (q - r)\alpha \in \Phi$$

が分かった ((3) の後半)。

(2) および  $0 \notin \Phi$  であることから  $\alpha + \beta \in \Phi$  ならば  $\beta \neq \pm\alpha$  である。よって補題 2.4.2 より  $x_\alpha \blacktriangleright \mathfrak{g}_\beta = [x_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \neq 0$  である。(1) より  $\dim \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} = 1$  なので、命題 2.5.1-(1) から  $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$  が言えた ((4))。

■



### 2.5.5 有理性

- 体  $\mathbb{K}$  上の有限次元半単純 Lie 代数  $\mathfrak{g}$
- $\mathfrak{g}$  の極大トーラス  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$
- $\mathfrak{h}$  のルート全体の集合  $\Phi \subset \mathfrak{h}^*$

を与える.  $\mathfrak{g}$  のルート空間分解を命題 2.5.2 によって

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\alpha}$$

と書く. 系 2.5.2 から得られる同型 (2.5.4) によって,  $\mathfrak{h}^*$  上に非退化かつ対称な双線型形式

$$(\cdot, \cdot) : \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^* \longrightarrow \mathbb{K}, (\alpha, \beta) \longmapsto \kappa(\tilde{\kappa}^{-1}(\alpha), \tilde{\kappa}^{-1}(\beta)) = \kappa(t_{\alpha}, t_{\beta})$$

を定義する.

命題 2.5.3-(1) より,  $\dim \mathfrak{h}$  個のルート  $\alpha^1, \dots, \alpha^{\dim \mathfrak{h}} \in \Phi$  であって  $\mathfrak{h}^*$  の  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間としての基底となるようなものが存在する.

#### 補題 2.5.3:

$\forall \beta \in \mathfrak{h}^*$  を基底  $\alpha^1, \dots, \alpha^{\dim \mathfrak{h}} \in \Phi$  で

$$\beta = c_{\mu} \alpha^{\mu}$$

と展開すると,  $1 \leq \forall \mu \leq \dim \mathfrak{h}$  に対して  $c_{\mu} \in \mathbb{Q}$  が成り立つ.

**証明** この証明では Einstein の規約を使わない.  $1 \leq \forall \mu \leq \dim \mathfrak{h}$  に対して

$$\frac{2(\alpha^{\mu}, \beta)}{(\alpha^{\mu}, \alpha^{\mu})} = \sum_{\nu=1}^{\dim \mathfrak{h}} c_{\nu} \frac{2(\alpha^{\mu}, \alpha^{\nu})}{(\alpha^{\mu}, \alpha^{\mu})} \quad (2.5.5)$$

命題 2.5.3-(7), 命題 2.5.4-(3) より  $\frac{2(\alpha^{\mu}, \beta)}{(\alpha^{\mu}, \alpha^{\mu})} = \frac{2}{\kappa(t_{\alpha^{\mu}}, t_{\alpha^{\mu}})} \beta(t_{\alpha^{\mu}}) = \beta(h_{\alpha^{\mu}}) \in \mathbb{Z}$  などが成り立つので, (2.5.5) は  $(c_{\nu}) \in \mathbb{K}^{\dim \mathfrak{h}}$  に関する  $\mathbb{Z}$ -係数線型連立方程式である. 特に  $\alpha^{\mu}$  は線型独立なので  $\det[(\alpha^{\mu}, \alpha^{\nu})]_{1 \leq \mu, \nu \leq \dim \mathfrak{h}} \neq 0$  であり,

$$\det \left[ \frac{2(\alpha^{\mu}, \alpha^{\nu})}{(\alpha^{\mu}, \alpha^{\mu})} \right]_{1 \leq \mu, \nu \leq \dim \mathfrak{h}} = \left( \prod_{\nu=1}^{\dim \mathfrak{h}} \frac{2}{(\alpha^{\mu}, \alpha^{\mu})} \right) \det[(\alpha^{\mu}, \alpha^{\nu})]_{1 \leq \mu, \nu \leq \dim \mathfrak{h}} \neq 0$$

i.e. (2.5.5) は  $\mathbb{Q}^{\dim \mathfrak{h}}$  に一意的な解を持つ. ■

補題 2.5.3 により,  $\text{Span}_{\mathbb{Q}} \Phi \subset \mathfrak{h}^*$  の次元が  $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{h}^*$  だと分かった.

$\forall \alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$  をとる. このとき  $\mathfrak{g}_{\alpha}$  の定義を思い出すと,  $\forall x \in \mathfrak{g}$  をルート空間分解することで  $x = x_0 + \sum_{\gamma \in \Phi} x_{\gamma}$   $\text{w/}$   $x_0 \in \mathfrak{h}, x_{\gamma} \in \mathfrak{g}_{\gamma}$  と書けるので

$$\begin{aligned} \text{ad}_{\mathfrak{g}}(t_{\alpha}) \circ \text{ad}_{\mathfrak{g}}(t_{\beta})(x) &= \sum_{\gamma \in \Phi} \text{ad}_{\mathfrak{g}}(t_{\alpha}) \circ \text{ad}_{\mathfrak{g}}(t_{\beta})(x_{\gamma}) \\ &= \sum_{\gamma \in \Phi} \gamma(t_{\alpha}) \gamma(t_{\beta}) \text{id}_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{g}_{\gamma}}(x_{\gamma}) \end{aligned}$$

となる．さらに命題 2.5.4-(1) より  $\dim \mathfrak{g}_\gamma = 1$  なので  $\mathrm{Tr}(\mathrm{id}_{\mathfrak{g}_\gamma}) = 1$  であり，

$$\begin{aligned}\kappa(t_\alpha, t_\beta) &= \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(t_\alpha) \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(t_\beta)(x)) \\ &= \sum_{\gamma \in \Phi} \gamma(t_\alpha) \gamma(t_\beta)\end{aligned}$$

が分かった．従って

$$\begin{aligned}(\alpha, \beta) &= \kappa(t_\alpha, t_\beta) \\ &= \sum_{\gamma \in \Phi} \gamma(t_\alpha) \gamma(t_\beta) \\ &= \sum_{\gamma \in \Phi} (\gamma, \alpha)(\gamma, \beta)\end{aligned}$$

が成り立つ．特に

$$\begin{aligned}(\beta, \beta) &= \sum_{\gamma \in \Phi} (\gamma, \beta)^2 \\ &= (\beta, \beta)^2 \left( \sum_{\gamma \in \Phi} \frac{1}{4} \left( \frac{2(\gamma, \beta)}{(\beta, \beta)} \right)^2 \right) \geq 0\end{aligned}$$

で  $\frac{2(\gamma, \beta)}{(\beta, \beta)} \in \mathbb{Z}$  であるから  $(\beta, \beta) \in \mathbb{Q}$  であり，従って  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}$  であることもわかった．このことから，

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} := \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}} \Phi$$

とおけば，制限

$$(\ , \ )|_{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}} : \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

は  $\mathbb{Q}$ -ベクトル空間  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$  上の正定値内積を定める．

**体の拡大**  $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$  によってベクトル空間の係数拡大  $\mathbb{E} := \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$  を行うことで， $(\ , \ )|_{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}}$  は  $\mathbb{E} \cong \mathbb{R}^{\dim \mathfrak{h}}$  上の正定値内積へと自然に拡張される．i.e. 組  $(\mathbb{E}, (\ , \ ))$  は Euclid 空間である！

本章の考察をまとめて次の定理を得る：

#### 定理 2.5.3:

- 体  $\mathbb{K}$  上の有限次元半単純 Lie 代数  $\mathfrak{g}$
- $\mathfrak{g}$  の極大トーラス  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$
- $\mathfrak{h}$  のルート全体の集合  $\Phi \subset \mathfrak{h}^*$
- **体の拡大**  $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$  による  $\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}} \Phi$  の係数拡大  $\mathbb{E}$
- $\mathbb{E}$ -上の正定値内積

$$(\ , \ ) : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}, (\alpha, \beta) \longmapsto \kappa(t_\alpha, t_\beta)$$

を与える．このとき以下が成り立つ：

- (1)  $\mathbb{E} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \Phi, \quad 0 \notin \Phi$
- (2)  $\lambda \alpha \in \Phi \implies \lambda = \pm 1$

$$(3) \alpha, \beta \in \Phi \implies \beta - 2 \frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha \in \Phi$$

$$(4) \alpha, \beta \in \Phi \implies 2 \frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}$$

定理 2.5.3 によって、半単純 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  とその極大トーラス  $\mathfrak{h}$  の組  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  から、Euclid 空間とその上のルート  $\Phi$  の組  $(\mathbb{E}, \Phi)$  の間の対応

$$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \longrightarrow (\mathbb{E}, \Phi)$$

が得られた事になる。定理 2.5.3 の条件を充たす組  $(\mathbb{E}, \Phi)$  はルート系 (root system) と呼ばれる：

#### 公理 2.5.1: ルート系

- 有限次元 Euclid 空間<sup>a</sup>  $(\mathbb{E}, (\cdot, \cdot))$
- $\mathbb{E}$  の部分集合  $\Phi \subset \mathbb{E}$

の組  $(\mathbb{E}, \Phi)$  がルート系 (root system) であるとは、以下の条件を充たすことを言う：

**(Root-1)**  $\Phi$  は 0 を含まない有限集合で、かつ  $\mathbb{E} = \text{Span}_{\mathbb{R}} \Phi$  を充たす。

**(Root-2)**  $\lambda \alpha \in \Phi \implies \lambda = \pm 1$

**(Root-3)**  $\alpha, \beta \in \Phi \implies \beta - 2 \frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha \in \Phi$

**(Root-4)**  $\alpha, \beta \in \Phi \implies 2 \frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}$

<sup>a</sup> 有限次元  $\mathbb{R}$ -ベクトル空間であって、対称かつ正定値な双線型形式  $(\cdot, \cdot): \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$  を持つもののこと。

実は、勝手なルート系が与えられると、それに対応する  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  が Lie 代数の同型を除いて一意に決まる事が後に明らかになる。差し当たって、まず次の章ではルート系  $(\mathbb{E}, \Phi)$  の完全な分類を行う。

## 第 3 章

# ルート系

この章において、特に断らない限り体  $\mathbb{K}$  は代数閉体<sup>\*1</sup>で、かつ  $\text{char } \mathbb{K} = 0$  であるとする。また、Lie 代数  $\mathfrak{g}$  は常に有限次元であるとする。

### 3.1 公理的方法

**Euclid 空間** (Euclid space) とは、

- 体  $\mathbb{R}$  上の有限次元ベクトル空間  $\mathbb{E}$
- 対称かつ正定値な双線型形式  $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{E}}: \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$

の組  $(\mathbb{E}, (\cdot, \cdot)_{\mathbb{E}})$  のことを言う<sup>\*2</sup>。Euclid 空間  $(\mathbb{E}, (\cdot, \cdot)_{\mathbb{E}})$  の任意の元  $\alpha \in \mathbb{E}$  に対して、

- 鏡映面 (reflecting hyperplane)<sup>\*3</sup>

$$P_{\alpha} := \{ \beta \in \mathbb{E} \mid (\beta, \alpha)_{\mathbb{E}} = 0 \} = (\mathbb{R}\alpha)^{\perp}$$

- 鏡映面  $P_{\alpha}$  に関する鏡映 (reflecting)

$$\sigma_{\alpha}: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}, \beta \mapsto \beta - 2 \frac{(\beta, \alpha)_{\mathbb{E}}}{(\alpha, \alpha)_{\mathbb{E}}} \alpha$$

を考える。

$2 \frac{(\beta, \alpha)_{\mathbb{E}}}{(\alpha, \alpha)_{\mathbb{E}}} \in \mathbb{R}$  が頻繁に登場するので、

$$[[\beta, \alpha]] := 2 \frac{(\beta, \alpha)_{\mathbb{E}}}{(\alpha, \alpha)_{\mathbb{E}}}$$

と略記することにする。写像  $[[\cdot, \cdot]]: \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$  は記号的には内積のように見えるかもしれないが、あくまで第一引数についてのみ線型なのであって、対称でも双線型でもないことに注意。

<sup>\*1</sup> つまり、定数でない任意の 1 変数多項式  $f(x) \in \mathbb{K}[x]$  に対してある  $\alpha \in \mathbb{K}$  が存在して  $f(\alpha) = 0$  を充たす。

<sup>\*2</sup> Euclid 空間と言って位相空間のことを指す場合があるが、そのときは双線型形式  $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{E}}$  を使って  $\mathbb{E}$  上の距離関数を  $d_{\mathbb{E}}: \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $(x, y) \mapsto (x - y, x - y)_{\mathbb{E}}$  と定義し (これは通常 **Euclid 距離** と呼ばれる),  $\mathbb{E}$  に  $d_{\mathbb{E}}$  による距離位相を入れる。

<sup>\*3</sup> 余次元 1 の部分  $\mathbb{R}$ -ベクトル空間。最右辺は対称かつ非退化な双線型形式  $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{E}}$  による直交補空間の意味である。

$\sigma_\alpha$  は  $\mathbb{R}$ -線型でかつ  $\forall \beta \in \mathbb{E}$  に対して

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha \circ \sigma_\alpha(\beta) &= (\beta - \llbracket \beta, \alpha \rrbracket \alpha) - \llbracket (\beta - \llbracket \beta, \alpha \rrbracket \alpha), \alpha \rrbracket \alpha \\ &= \beta - \llbracket \beta, \alpha \rrbracket \alpha - \llbracket \beta, \alpha \rrbracket \alpha + \llbracket \beta, \alpha \rrbracket \llbracket \alpha, \alpha \rrbracket \alpha \\ &= \beta - 2\llbracket \beta, \alpha \rrbracket \alpha + 2\llbracket \beta, \alpha \rrbracket \alpha \\ &= \beta\end{aligned}$$

を充たす, i.e.  $\sigma_\alpha^{-1} = \sigma_\alpha$  なので,  $\sigma_\alpha \in \text{GL}(\mathbb{E})$  である.

### 補題 3.1.1: 鏡映の特徴付け

Euclid 空間  $\mathbb{E}$  と,

- $\mathbb{E} = \text{Span}_{\mathbb{R}} \Phi$
- $\forall \alpha \in \Phi, \sigma_\alpha(\Phi) = \Phi$

を充たす  $\mathbb{E}$  の有限部分集合  $\Phi \subset \mathbb{E}$  を与える.

このとき,  $\sigma \in \text{GL}(\mathbb{E})$  が

**(RF-1)**  $\sigma(\Phi) = \Phi$

**(RF-2)** 余次元 1 の部分ベクトル空間  $P \subset \mathbb{E}$  が存在して,  $\forall \beta \in P, \sigma(\beta) = \beta$  が成り立つ

**(RF-3)**  $\exists \alpha \in \Phi \setminus \{0\}, \sigma(\alpha) = -\alpha$

の 3 条件を満たすならば  $\sigma = \sigma_\alpha$  (かつ  $P = P_\alpha$ ) である.

**証明**  $\tau := \sigma \circ \sigma_\alpha (= \sigma \circ \sigma_\alpha^{-1})$  とおき,  $\tau = \text{id}_{\mathbb{E}}$  であることを示す.

**(RF-1)** より  $\tau(\Phi) = \Phi$ ,  $\tau(\alpha) = \alpha$  が成り立つので  $\tau|_{\mathbb{R}\alpha} = \text{id}_{\mathbb{R}\alpha}$  である. さらに  $\mathbb{R}$ -線型写像

$$\bar{\tau}: \mathbb{E}/\mathbb{R}\alpha \longrightarrow \mathbb{E}/\mathbb{R}\alpha, \beta + \mathbb{R}\alpha \longmapsto \tau(\beta) + \mathbb{R}\alpha$$

は well-defined だが, **(RF-2)** より  $\bar{\tau} = \text{id}_{\mathbb{E}/\mathbb{R}\alpha}$  である. よって  $\tau$  の固有値は全て 1 であり,  $\tau$  の **最小多項式**  $f(t)$  は  $(t-1)^{\dim \mathbb{E}}$  の約元である. 一方,  $\Phi$  は有限集合なので,  $\forall \beta \in \Phi$  に対してある  $k_\beta \in \mathbb{N}$  が存在して  $\tau^{k_\beta}(\beta) = \beta$  を充たす. ここで  $k := \max\{k_\beta \mid \beta \in \Phi\}$  とおくと, **(RF-1)** より  $\tau^k = \text{id}_{\mathbb{E}}$  が言える. よって  $f(t)$  は  $t^k - 1$  の約元でもある. 従って,  $f(t) = \gcd((t-1)^{\dim \mathbb{E}}, t^k - 1) = t - 1$  だと分かった. 故に  $\tau = \text{id}_{\mathbb{E}}$  である. ■

### 3.1.1 ルート系

前章で与えたルート系の公理を再掲するところから始めよう:

#### 公理 3.1.1: ルート系

- 有限次元 Euclid 空間  $(\mathbb{E}, (\cdot, \cdot)_{\mathbb{E}})$
- $\mathbb{E}$  の部分集合  $\Phi \subset \mathbb{E}$

の組  $(\mathbb{E}, \Phi)$  が **ルート系** (root system) であるとは, 以下の条件を充たすことを言う:

**(Root-1)**  $\Phi$  は 0 を含まない有限集合で, かつ  $\mathbb{E} = \text{Span}_{\mathbb{R}} \Phi$  を充たす.

**(Root-2)**  $\lambda\alpha \in \Phi \implies \lambda = \pm 1$

**(Root-3)**  $\alpha, \beta \in \Phi \implies \sigma_{\alpha}(\beta) \in \Phi$

**(Root-4)**  $\alpha, \beta \in \Phi \implies \llbracket \beta, \alpha \rrbracket \in \mathbb{Z}$

$\Phi$  の元のことをルート (root) と呼ぶ.

! 本資料の以降では, 文脈上直積集合の要素との混同が起きる恐れがないときは **Euclid 空間**  $(\mathbb{E}, (\cdot, \cdot)_{\mathbb{E}})$  に備わっている双線型形式を  $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{E}}$  と書く代わりに  $(\cdot, \cdot)$  と略記する.

ルート系と言ったときに, **(Root-2)** を除外する場合がある. その場合我々が採用した定義に該当するものは簡約ルート系 (reduced root system) と呼ばれる.

#### 定義 3.1.1:

**ルート系**  $(\mathbb{E}, \Phi)$  の **ランク** (rank) とは,  $\dim \mathbb{E} \in \mathbb{N}$  のことを言う.

公理 **(Root-4)** は, 任意のルートの 2 つ組の配位に非常に強い制約を与える. というのも, 2 つのベクトルのなす角の定義を思い出すと,  $\forall \alpha, \beta \in \Phi$  に対してある  $\theta \in [0, \pi]$  が存在して

$$\llbracket \beta, \alpha \rrbracket = 2 \frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} \cos \theta \in \mathbb{Z} \quad (3.1.1)$$

$$\llbracket \alpha, \beta \rrbracket \llbracket \beta, \alpha \rrbracket = 4 \cos^2 \theta \in \mathbb{Z} \quad (3.1.2)$$

が成り立たねばならないのである.  $\llbracket \alpha, \beta \rrbracket, \llbracket \beta, \alpha \rrbracket \in \mathbb{Z}$  かつ  $0 \leq \cos^2 \theta \leq 1$  なので, (3.1.2) から

$$\cos^2 \theta = 0, \frac{(\pm 1) \cdot (\pm 1)}{4}, \frac{(\pm 1) \cdot (\pm 2)}{4}, \frac{(\pm 1) \cdot (\pm 3)}{4}, \frac{(\pm 1) \cdot (\pm 4)}{4}, \frac{(\pm 2) \cdot (\pm 2)}{4} \quad (\text{複号同順})$$

しかあり得ないとわかる. **(Root-2)** も考慮すると,  $\|\alpha\| \leq \|\beta\|$  ならば\*4 あり得る可能性は以下の通り\*5:

表 3.1: 可能なルートの 2 つ組  $\alpha, \beta$

$\llbracket \alpha, \beta \rrbracket$	$\llbracket \beta, \alpha \rrbracket$	$\theta$	$\ \beta\ ^2 / \ \alpha\ ^2$
0	0	$\frac{\pi}{2}$	-
1	1	$\frac{\pi}{3}$	1
-1	-1	$\frac{2\pi}{3}$	1
1	2	$\frac{\pi}{4}$	2
-1	-2	$\frac{3\pi}{4}$	2
1	3	$\frac{\pi}{6}$	3
-1	-3	$\frac{5\pi}{6}$	3
2	2	0	1
-2	-2	$\pi$	1

\*4 このとき (3.1.1) より  $\llbracket \alpha, \beta \rrbracket \leq \llbracket \beta, \alpha \rrbracket$

\*5 表 3.1 の最後の 2 段は  $\beta = \pm \alpha$  の場合に相当する.

**補題 3.1.2:**

$(\mathbb{E}, \Phi)$  をルート系とする.  $\alpha \neq \pm\beta$  を満たす任意の  $\alpha, \beta \in \Phi$  に対して以下が成り立つ:

- (1)  $(\alpha, \beta) > 0 \implies \alpha - \beta \in \Phi$
- (2)  $(\alpha, \beta) < 0 \implies \alpha + \beta \in \Phi$

**証明**  $(\alpha, \beta) > 0$  とする. このとき  $[\alpha, \beta] > 0$  であるから, 表 3.1 より  $[\alpha, \beta], [\beta, \alpha]$  の少なくとも一方は 1 に等しい.  $[\alpha, \beta] = 1$  だとすると, (Root-3) から  $\sigma_\beta(\alpha) = \alpha - \beta \in \Phi$  がいえる.  $[\beta, \alpha] = 1$  ならば  $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \alpha \in \Phi$  であり,  $\sigma_{\beta-\alpha}(\beta - \alpha) = \alpha - \beta \in \Phi$  が従う. (2) は (1) において  $\beta$  の代わりに  $-\beta = \sigma_\beta(\beta) \in \Phi$  を用いて同じ議論をすれば良い. ■

**定義 3.1.2:  $\alpha$ -string through  $\beta$**

$(\mathbb{E}, \Phi)$  をルート系とする.  $\alpha \neq \pm\beta$  を満たす任意の  $\alpha, \beta \in \Phi$  に対して,  $\Phi$  の部分集合

$$\{\beta + \lambda\alpha \in \mathbb{E} \mid \lambda \in \mathbb{Z}\} \cap \Phi$$

のことを  $\alpha$ -string through  $\beta$  と呼ぶ.

**命題 3.1.1:  $\alpha$ -string through  $\beta$  の性質**

$(\mathbb{E}, \Phi)$  をルート系とする.  $\alpha \neq \pm\beta$  を満たす任意の  $\alpha, \beta \in \Phi$  に対して

$$\begin{aligned} r &:= \max\{\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \beta - \lambda\alpha \in \Phi\}, \\ q &:= \max\{\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \beta + \lambda\alpha \in \Phi\} \end{aligned}$$

とおく. このとき以下が成り立つ:

- (1)  $\alpha$ -string through  $\beta$  は  $\mathbb{E}$  の部分集合

$$\{\beta + \lambda\alpha \in \mathbb{E} \mid -r \leq \lambda \leq q\} \tag{3.1.3}$$

に等しい. i.e.

$$\lambda \in \mathbb{Z} \text{ かつ } \beta + \lambda\alpha \in \Phi \implies -r \leq \lambda \leq q$$

である.

- (2)  $\alpha$ -string through  $\beta$  は鏡映  $\sigma_\alpha$  の作用の下で不変である.
- (3)  $r - q = [\beta, \alpha]$ . 特に  $\alpha$ -string through  $\beta$  の長さは 4 以下である.

**証明** (1) 背理法により示す. ある  $-r < \lambda < q$  に対して  $\beta + \lambda\alpha \notin \Phi$  であるとする. このときある  $-r \leq s < p < q$  が存在して

$$\beta + s\alpha \in \Phi, \quad \beta + (s+1)\alpha \notin \Phi, \quad \beta + (p-1)\alpha \notin \Phi, \quad \beta + p\alpha \in \Phi$$

を満たすが, 補題 3.1.2 の対偶より  $(\alpha, \beta + p\alpha) \leq 0 \leq (\alpha, \beta + s\alpha)$  が成り立つ. よって  $(s-p)(\alpha, \alpha) \geq 0$  である. 然るに  $s-p < 0$  かつ  $(\alpha, \alpha) > 0$  なのでこれは矛盾である.

(2)  $-r \leq \forall \lambda \leq q$  に対して

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha(\beta + \lambda\alpha) &= \beta + \lambda\alpha - \llbracket \beta, \alpha \rrbracket \alpha - \lambda \llbracket \alpha, \alpha \rrbracket \alpha \\ &= \beta + (-\llbracket \beta, \alpha \rrbracket - \lambda)\alpha\end{aligned}$$

が成り立つ. **(Root-3)** より  $\beta + (-\llbracket \beta, \alpha \rrbracket - \lambda)\alpha \in \Phi$  が言える. さらに **(Root-4)** より  $-\llbracket \beta, \alpha \rrbracket - \lambda \in \mathbb{Z}$  なので, (1) より  $-r \leq -\llbracket \beta, \alpha \rrbracket - \lambda \leq q$  だと分かった. i.e.  $\sigma_\alpha(\beta + \lambda\alpha)$  は  $\alpha$ -string through  $\beta$  の元である.

(3)  $r, q$  の定義より, (2) の証明において

$$\sigma_\alpha(\beta + q\alpha) = \beta - (\llbracket \beta, \alpha \rrbracket + q)\alpha = \beta - r\alpha$$

が成り立たねばならない. よって

$$r - q = \llbracket \beta, \alpha \rrbracket$$

である. 表 3.1 より  $|r - q| \leq 3$  であるから, 集合 (3.1.3) の要素数は 4 以下である. ■

### 定義 3.1.3: 双対ルート系

$\alpha$ -string through  $\beta$  (ルートの系)  $(\mathbb{E}, \Phi)$  に対して

$$\Phi^\vee := \left\{ \frac{2}{(\alpha, \alpha)} \alpha \in \mathbb{E} \mid \alpha \in \Phi \right\}$$

とおき, 組  $(\mathbb{E}, \Phi^\vee)$  のことを  $(\mathbb{E}, \Phi)$  の双対ルート系 (dual root system) と呼ぶ.

$\alpha \in \Phi$  に対して

$$\alpha^\vee := \frac{2}{(\alpha, \alpha)} \alpha \in \Phi^\vee$$

と書く.

双対ルート系が  $\alpha$ -string through  $\beta$  の公理を満たすことを確認しよう:

**(Root-1,2)**  $(\mathbb{E}, \Phi)$  がルート系なので明らか.

**(Root-3)**  $\forall \alpha^\vee, \beta^\vee \in \Phi^\vee$  をとる. このとき

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha^\vee}(\beta^\vee) &= \frac{2}{(\beta, \beta)} \beta - \left\llbracket \frac{2}{(\beta, \beta)} \beta, \frac{2}{(\alpha, \alpha)} \alpha \right\rrbracket \frac{2}{(\alpha, \alpha)} \alpha \\ &= \frac{2}{(\beta, \beta)} \beta - \frac{\frac{2}{(\beta, \beta)}}{\frac{2}{(\alpha, \alpha)}} \llbracket \beta, \alpha \rrbracket \frac{2}{(\alpha, \alpha)} \alpha \\ &= \frac{2}{(\beta, \beta)} \sigma_\alpha(\beta)\end{aligned}\tag{3.1.4}$$

だが,

$$\begin{aligned}(\sigma_\alpha(\beta), \sigma_\alpha(\beta)) &= (\beta, \beta) - 2\llbracket \beta, \alpha \rrbracket (\beta, \alpha) + \llbracket \beta, \alpha \rrbracket^2 (\alpha, \alpha) \\ &= (\beta, \beta) - 2\llbracket \beta, \alpha \rrbracket (\beta, \alpha) + 2\llbracket \beta, \alpha \rrbracket (\beta, \alpha) \\ &= (\beta, \beta)\end{aligned}$$



なので

$$\sigma_{\alpha^\vee}(\beta^\vee) = \sigma_\alpha(\beta)^\vee \in \Phi^\vee$$

だと分かった.

**(Root-4)**  $\forall \frac{2}{(\alpha, \alpha)}\alpha, \frac{2}{(\beta, \beta)}\beta \in \Phi^\vee$  をとる. このとき

$$\begin{aligned} \llbracket \beta^\vee, \alpha^\vee \rrbracket &= \left\llbracket \frac{2}{(\beta, \beta)}\beta, \frac{2}{(\alpha, \alpha)}\alpha \right\rrbracket \\ &= \frac{\frac{2}{(\beta, \beta)}}{\frac{2}{(\alpha, \alpha)}} \llbracket \beta, \alpha \rrbracket \\ &= \frac{\frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)}}{\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}} \llbracket \beta, \alpha \rrbracket \\ &= \frac{\llbracket \alpha, \beta \rrbracket}{\llbracket \beta, \alpha \rrbracket} \llbracket \beta, \alpha \rrbracket \\ &= \llbracket \alpha, \beta \rrbracket \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

が言えた.

### 3.1.2 Weyl 群

#### 定義 3.1.4: Weyl 群

$(\mathbb{E}, \Phi)$  をルート系とする.  $\text{GL}(\mathbb{E})$  の部分集合  $\{\sigma_\alpha \in \text{GL}(\mathbb{E}) \mid \alpha \in \Phi\}$  が生成する  $\text{GL}(\mathbb{E})$  の部分群のことをルート系  $(\mathbb{E}, \Phi)$  の **Weyl 群** (Weyl group) と呼び,  $\mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi)$  と書く.

！ 本資料の以降では, 文脈上考えているルート系が明らかな場合  $\mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi)$  を  $\mathscr{W}$  と略記する.

**(Root3)** より,  $\forall \tau \in \mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi)$  の  $\Phi$  への制限は全単射である. その上 **(Root-1)** から  $\Phi$  は有限集合でかつ  $\mathbb{E} = \text{Span}_{\mathbb{R}} \Phi$  が成り立つので,  $\mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi)$  を  $\Phi$  に作用する対称群  $\mathfrak{S}_{|\Phi|}$  の部分群と同一視できる. 特に  $\mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi)$  は有限群である.

#### 補題 3.1.3:

$(\mathbb{E}, \Phi)$  をルート系とする.  $\tau \in \text{GL}(\mathbb{E})$  が  $\tau(\Phi) = \Phi$  を満たすならば,  $\forall \alpha, \beta \in \Phi$  に対して以下が成り立つ:

- (1)  $\tau \circ \sigma_\alpha \circ \tau^{-1} = \sigma_{\tau(\alpha)}$
- (2)  $\llbracket \beta, \alpha \rrbracket = \llbracket \tau(\beta), \tau(\alpha) \rrbracket$

**証明**  $\forall \alpha, \beta \in \Phi$  をとる. **(Root-3)** より  $\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi$  なので,  $\tau \circ \sigma_\alpha \circ \tau^{-1}(\tau(\beta)) = \tau \circ \sigma_\alpha(\beta) \in \Phi$  が成り立つ. 一方で

$$\tau \circ \sigma_\alpha \circ \tau^{-1}(\tau(\beta)) = \tau(\beta - \llbracket \beta, \alpha \rrbracket \alpha) = \tau(\beta) - \llbracket \beta, \alpha \rrbracket \tau(\alpha) \quad (3.1.5)$$

である.  $\beta \in \Phi$  は任意で  $\tau \in \text{GL}(\mathbb{E})$  は全単射なので

$$\text{(RF-1)} \quad \tau \circ \sigma_\alpha \circ \tau^{-1}(\Phi) = \Phi$$

$$\text{(RF-2)} \quad \forall \beta \in P_\alpha, \tau \circ \sigma_\alpha \circ \tau^{-1}(\beta) = \beta$$

$$\text{(RF-3)} \quad \tau(\alpha) \in \Phi \setminus \{0\}, \tau \circ \sigma_\alpha \circ \tau^{-1}(\tau(\alpha)) = -\tau(\alpha)$$

が成り立つことが分かった。よって補題 3.1.1 より  $\tau \circ \sigma_\alpha \circ \tau^{-1} = \sigma_{\tau(\alpha)}$  である。

さらに (3.1.5) から

$$\tau(\beta) - \llbracket \beta, \alpha \rrbracket \tau(\alpha) = \sigma_{\tau(\alpha)}(\tau(\beta)) = \tau(\beta) - \llbracket \tau(\beta), \tau(\alpha) \rrbracket \tau(\alpha)$$

が分かるので (2) が従う。 ■

### 定義 3.1.5: ルート系の同型

2 つの **ルート系**  $(\mathbb{E}, \Phi)$ ,  $(\mathbb{E}', \Phi')$  を与える。写像

$$\phi: \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}'$$

が **ルート系の同型写像** (isomorphism) であるとは、以下の 3 条件を満たすことを言う：

- (1)  $\phi$  は  $\mathbb{R}$ -ベクトル空間の同型写像
- (2)  $\phi(\Phi) = \Phi'$
- (3)  $\forall \alpha, \beta \in \Phi$  に対して  $\llbracket \phi(\beta), \phi(\alpha) \rrbracket = \llbracket \beta, \alpha \rrbracket$

**ルート系**  $(\mathbb{E}, \Phi)$  の **自己同型** (automorphism) とは、 $\phi \in \text{GL}(\mathbb{E})$  であって  $\phi(\Phi) = \Phi$  を満たすものを言う。これは補題 3.1.3-(2) により自動的にルート系の同型となる。ルート系の自己同型全体が写像の合成に関してなす群のことを **ルート系の自己同型群** と呼び、 $\text{Aut } \Phi$  と書く。

### ルート系の同型

$$\phi: (\mathbb{E}, \Phi) \longrightarrow (\mathbb{E}', \Phi')$$

について、 $\forall \alpha, \beta \in \Phi$  に対して

$$\sigma_{\phi(\alpha)} \circ \phi(\beta) = \phi(\beta) - \llbracket \phi(\beta), \phi(\alpha) \rrbracket \phi(\alpha) = \phi(\beta - \llbracket \beta, \alpha \rrbracket \alpha) = \phi \circ \sigma_\alpha(\beta)$$

が成り立つ。i.e. ルート系の図式

$$\begin{array}{ccc} \Phi & \xrightarrow{\phi} & \Phi' \\ \sigma_\alpha \downarrow & & \downarrow \sigma_{\phi(\alpha)} \\ \Phi & \xrightarrow{\phi} & \Phi' \end{array}$$

は可換である。よってルート系の同型は **Weyl 群** の自然な (群の) 同型

$$\begin{aligned} \bar{\phi}: \mathcal{W}_{\mathbb{E}}(\Phi) &\longrightarrow \mathcal{W}_{\mathbb{E}'}(\Phi'), \\ \sigma &\longmapsto \phi \circ \sigma \circ \phi^{-1} \end{aligned}$$

を引き起こす。

補題 3.1.4:

ルート系  $(\mathbb{E}, \Phi)$  の Weyl 群  $\mathcal{W}_{\mathbb{E}}(\Phi)$  は, ルート系の自己同型群  $\text{Aut } \Phi$  の正規部分群である.

証明  $\forall \sigma \in \mathcal{W}_{\mathbb{E}}(\Phi)$  を 1 つとる. このときある  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Phi$  が存在して  $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \circ \dots \circ \sigma_{\alpha_k}$  と書ける<sup>\*6</sup>. 従って  $\forall \tau \in \text{Aut } \Phi$  に対して, 補題 3.1.3-(1) より

$$\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1} = (\tau \circ \sigma_{\alpha_1} \circ \tau^{-1}) \circ \dots \circ (\tau \circ \sigma_{\alpha_k} \circ \tau^{-1}) = \sigma_{\tau(\alpha_1)} \circ \dots \circ \sigma_{\tau(\alpha_k)} \in \mathcal{W}_{\mathbb{E}}(\Phi)$$

が成り立つ. i.e.  $\mathcal{W}_{\mathbb{E}}(\Phi) \triangleleft \text{Aut } \Phi$  である. ■

補題 3.1.5: 双対ルートの Weyl 群

$$\mathcal{W}_{\mathbb{E}}(\Phi) \cong \mathcal{W}_{\mathbb{E}}(\Phi^{\vee})$$

証明 (3.1.4) より, 写像  $\sigma_{\alpha} \mapsto \sigma_{\alpha^{\vee}}$  は同型写像である. ■

## 3.2 単純ルートと Weyl 群

この節では  $(\mathbb{E}, \Phi)$  を任意のランク  $l$  のルート系とし, その Weyl 群を  $\mathcal{W}$  と略記する.

### 3.2.1 ルート系の底と Weyl の区画

定義 3.2.1: ルート系の底

$\Phi$  の部分集合  $\Delta \subset \Phi$  が底 (base) であるとは, 以下を充たすことをいう:

(B-1)  $\Delta$  は  $\mathbb{R}$ -ベクトル空間  $\mathbb{E}$  の基底である.

(B-2)  $\forall \beta \in \Phi$  に対して整数の族  $\{\beta_{\alpha}\}_{\alpha \in \Delta} \in \prod_{\alpha \in \Delta} \mathbb{Z}$  が一意的に存在して

$$\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} \beta_{\alpha} \alpha$$

を充たし,  $\forall \alpha \in \Delta, \beta_{\alpha} \geq 0$  であるか  $\forall \alpha \in \Delta, \beta_{\alpha} \leq 0$  であるかのどちらかである.

- $\Delta$  の元のことを単純ルート (simple root) と呼ぶ.
- $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} \beta_{\alpha} \alpha \in \Phi$  に対して

$$\text{ht } \beta := \sum_{\alpha \in \Delta} \beta_{\alpha} \in \mathbb{Z}$$

と定義し, 底  $\Delta$  に関するルート  $\beta$  の高さ (height) と呼ぶ.

- $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} \beta_{\alpha} \alpha \in \Phi$  が正 (resp. 負) であるとは,  $\forall \alpha \in \Delta, \beta_{\alpha} \geq 0$  (resp.  $\forall \alpha \in \Delta, \beta_{\alpha} \leq 0$ )

<sup>\*6</sup>  $\sigma_{\alpha_i}^{-1} = \sigma_{\alpha_i}$  なのでこれで良い.

が成り立つことを言い,  $\beta \succ 0$  (resp.  $\beta \prec 0$ ) と書く<sup>a</sup>.

- 正 (resp. 負) のルート全体の集合のことを  $\Phi^+$  (resp.  $\Phi^-$ ) と書く<sup>b</sup>.
- $\mathbb{E}$  上の半順序  $\prec \subset \mathbb{E} \times \mathbb{E}$  を

$$\mu \prec \lambda \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists! \{k_\alpha\}_{\alpha \in \Delta} \in \prod_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R}_{\geq 0}, \lambda - \mu = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$$

と定義する.

<sup>a</sup> L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X コマンドは  $\succ$  が `\succ`,  $\prec$  が `\prec` である.

<sup>b</sup> 明らかに  $\Phi^- = -\Phi^+$  である.

$\prec$  が半順序になっていることを確認しておこう:

(反射律)  $\forall \mu \in \mathbb{E}$  に対して  $\mu - \mu = 0$  が成り立つので  $\mu \prec \mu$  である.

(反対称律)  $\mu \prec \lambda$  かつ  $\lambda \prec \mu$  だとする. このとき  $\{k_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}, \{l_\alpha\}_{\alpha \in \Delta} \in \prod_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R}_{\geq 0}$  が一意的に存在して

$$\lambda - \mu = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha, \quad \mu - \lambda = \sum_{\alpha \in \Delta} l_\alpha \alpha$$

と書ける. 辺々足すと (B-1) より  $\forall \alpha \in \Delta$  に対して  $k_\alpha + l_\alpha = 0$  だと分かるが,  $k_\alpha \geq 0$  かつ  $l_\alpha \geq 0$  なので  $k_\alpha = l_\alpha = 0$ , i.e.  $\mu - \lambda = 0 \iff \mu = \lambda$  が言えた.

(推移律)  $\mu \prec \lambda$  かつ  $\lambda \prec \nu$  だとする. このとき  $\nu - \mu = (\nu - \lambda) + (\lambda - \mu)$  なので明らかに  $\mu \prec \nu$  である.

ルート系  $(\mathbb{E}, \Phi)$  の底を定義したのは良いが, 存在しなくては意味がない.

#### 補題 3.2.1:

$\Delta$  が  $\Phi$  の底ならば, 相異なる任意の 2 つの単純ルート  $\alpha, \beta \in \Delta$  に対して  $(\alpha, \beta) \leq 0$  であり,  $\alpha - \beta \notin \Phi$  である.

**証明** 背理法により示す.  $(\alpha, \beta) > 0$  だとする. 仮定より  $\alpha \neq \beta$  であり, かつ  $\Delta$  の元の線型独立性から  $\beta \neq -\alpha$  なので, 補題 3.1.2 から  $\alpha - \beta \in \Phi$  ということになる. 然るにこのとき  $\alpha - \beta \in \Phi$  が  $\alpha, \beta \in \Delta$  の係数 1, -1 の線型結合で書けていることになり (B-2) に矛盾する. ■

### 定義 3.2.2:

$\forall \gamma \in \mathbb{E}$  に対して以下を定義する:

- $\Phi$  の部分集合

$$\Phi^+(\gamma) := \{ \alpha \in \Phi \mid (\gamma, \alpha) > 0 \}$$

- 

$$\gamma \in \mathbb{E} \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha$$

のとき,  $\gamma$  は**正則** (regular) であるという.  $\gamma$  が正則でないとき**特異** (singular) であるという.

- $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$  が

$$\exists \beta_1, \beta_2 \in \Phi^+(\gamma), \alpha = \beta_1 + \beta_2$$

を充たすとき,  $\alpha$  は**分割可能** (decomposable) であるという. 分割可能でないとき**分割不可能** (indecomposable) であるという.

$\gamma$  が正則ならば  $\forall \alpha \in \Phi$  に対して  $(\gamma, \alpha) \neq 0$  なので, (Root-2) から  $\Phi = \Phi^+(\gamma) \amalg (-\Phi^+(\gamma))$  (disjoint union) が成り立つ.

### 定理 3.2.1: 底の存在

**正則**な任意の  $\gamma \in \mathbb{E}$  を与える. このとき集合

$$\Delta(\gamma) := \{ \alpha \in \Phi^+(\gamma) \mid \text{分割不可能} \}$$

は  $\Phi$  の**底**である. 逆に  $\Phi$  の任意の底  $\Delta$  に対してある正則な  $\gamma \in \mathbb{E}$  が存在して  $\Delta = \Delta(\gamma)$  となる.

#### 証明 step1: $\Phi^+(\gamma)$ の任意の元は $\Delta(\gamma)$ の $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -係数線型結合で書ける

背理法により示す.  $\Delta(\gamma)$  の  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -係数線型結合で書けない  $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$  が存在するとする. このとき, そのような  $\alpha$  のうち  $(\gamma, \alpha)$  が最小であるようなものが存在するのでそれを  $\alpha_0$  とおく.  $\alpha_0 \notin \Delta(\gamma)$  なので<sup>\*7</sup>  $\alpha_0$  は分割可能であり, ある  $\beta_1, \beta_2 \in \Phi^+(\gamma)$  が存在して  $\alpha = \beta_1 + \beta_2$  と書ける. このとき

$$(\gamma, \alpha_0) = (\gamma, \beta_1) + (\gamma, \beta_2) > (\gamma, \beta_i)$$

が成り立つので,  $\alpha_0$  の最小性から  $\beta_1, \beta_2$  はどちらも  $\Delta(\gamma)$  の元の  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -係数線型結合で書ける. 然るにこのとき  $\alpha$  も  $\Delta(\gamma)$  の元の  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -係数線型結合で書けることになって矛盾.

#### step2: $\alpha, \beta \in \Delta(\gamma)$ かつ $\alpha \neq \beta$ ならば, $(\alpha, \beta) \leq 0$

背理法により示す.  $(\alpha, \beta) > 0$  を仮定する. このとき補題 3.1.2-(1) より  $\alpha - \beta \in \Phi$  であり,  $\beta - \alpha = \sigma_{\alpha-\beta}(\alpha - \beta) \in \Phi$  もわかる. よって  $\alpha - \beta \in \Phi^+(\gamma)$  または  $\beta - \alpha \in \Phi^+(\gamma)$  である. 然るに前者の場合  $\alpha = \beta + (\alpha - \beta)$  なので  $\alpha \in \Delta(\gamma)$  が分割可能ということになって矛盾し, 後者の場合は  $\beta = \alpha + (\beta - \alpha)$  なので  $\beta \in \Delta(\gamma)$  が分割可能ということになって矛盾である.

<sup>\*7</sup>  $\alpha_0 \in \Delta(\gamma)$  だとすると,  $\alpha_0 \in \Delta(\gamma)$  の係数  $1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  の線型結合として書けていることになり矛盾.

**step3:  $\Delta(\gamma)$  の元は互いに線型独立**

$\{k_\alpha\}_{\alpha \in \Delta(\gamma)} \in \prod_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R}$  に対して  $\sum_{\alpha \in \Delta(\gamma)} k_\alpha \alpha = 0$  を仮定する.  $\forall \alpha \in \Delta(\gamma)$  に対して

$$\Delta^+(\gamma) := \{\alpha \in \Delta(\gamma) \mid k_\alpha > 0\}, \quad \Delta^-(\gamma) := \{\alpha \in \Delta(\gamma) \mid k_\alpha < 0\}$$

とおくと  $\Delta^+(\gamma) \cap \Delta^-(\gamma) = \emptyset$  で, 仮定は

$$\sum_{\alpha \in \Delta^+(\gamma)} k_\alpha \alpha = \sum_{\alpha \in \Delta^-(\gamma)} (-k_\alpha) \alpha$$

と同値である.  $\varepsilon := \sum_{\alpha \in \Delta^+(\gamma)} k_\alpha \alpha$  とおくと, **step2** から

$$0 \leq (\varepsilon, \varepsilon) = \sum_{\alpha \in \Delta^+(\gamma), \beta \in \Delta^-(\gamma)} k_\alpha (-k_\beta) (\alpha, \beta) \leq 0$$

が成り立つので  $\varepsilon = 0$  だとわかる. よって

$$0 = (\gamma, \varepsilon) = \sum_{\alpha \in \Delta^+(\gamma)} k_\alpha (\gamma, \alpha) = \sum_{\alpha \in \Delta^-(\gamma)} (-k_\alpha) (\gamma, \alpha)$$

であり,  $\forall \alpha \in \Delta(\gamma)$ ,  $k_\alpha = 0$  が言えた.

**step4:  $\Delta(\gamma)$  は  $\Phi$  の底**

$\Phi = \Phi^+(\gamma) \amalg (-\Phi^+(\gamma))$  なので, **step1** と併せて **(B-2)** が, **step3** と併せて **(B-1)** が従う.

**step5: 任意の底  $\Delta$  に対してある正則な  $\gamma \in \mathbb{E}$  が存在して  $\Delta = \Delta(\gamma)$  となる**

$\Phi$  の底  $\Delta$  が与えられたとき,  $\forall \alpha \in \Delta$  に対して  $(\gamma, \alpha) > 0$  を充たす  $\gamma \in \mathbb{E}$  をとる<sup>\*8</sup>. **(B-2)** より  $\gamma$  は正則であり, かつ  $\forall \beta = \sum_{\alpha \in \Delta} \beta_\alpha \alpha \in \Phi^+$  に対して

$$(\gamma, \beta) = \sum_{\alpha \in \Delta} \beta_\alpha (\gamma, \alpha) > 0$$

が成り立つので  $\beta \in \Phi^+(\gamma)$ , i.e.  $\Phi^+ \subset \Phi^+(\gamma)$ ,  $\Phi^- = -\Phi^+ \subset -\Phi^+(\gamma)$  も分かる. ところが **step4** より  $\Phi = \Phi^+ \amalg \Phi^- = \Phi^+(\gamma) \amalg (-\Phi^+(\gamma))$  なので,  $\Phi^+ = \Phi^+(\gamma)$  でなくてはならない. 従って  $\forall \alpha \in \Delta$  は分割不可能であり<sup>\*9</sup>,  $\Delta \subset \Delta(\gamma)$  だと分かった. **(B-1)** および **step4** より  $|\Delta| = |\Delta(\gamma)| = l$  なので<sup>\*10</sup>  $\Delta = \Delta(\gamma)$  が言えた. ■

<sup>\*8</sup> このような  $\gamma$  が存在することを示そう. **(B-1)** より  $\Delta$  は  $\mathbb{E}$  の基底だから,  $\forall \alpha$  に対して  $\gamma_\alpha \in \mathbb{E}$  を,  $\mathbb{E}$  の部分ベクトル空間  $\text{Span}_{\mathbb{K}}(\Delta \setminus \{\alpha\})$  の  $(,)$  に関する直交補空間  $(\text{Span}_{\mathbb{K}}(\Delta \setminus \{\alpha\}))^\perp$  への  $\alpha$  の射影とする.  $\Delta$  の元は全て互いに線型独立なので  $\gamma_\alpha \neq 0$  である. このとき,  $\{k_\alpha\}_{\alpha \in \Delta} \in \prod_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R}_{>0}$  に対して  $\gamma := \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \gamma_\alpha$  とおけば,  $\forall \alpha \in \Delta$  に対して  $(\gamma, \alpha) = k_\alpha (\gamma_\alpha, \alpha) > 0$  が成り立つ.

<sup>\*9</sup>  $\beta_1 = \sum_{\alpha \in \Delta} \beta_{1\alpha} \alpha$ ,  $\beta_2 = \sum_{\alpha \in \Delta} \beta_{2\alpha} \alpha \in \Phi^+ = \Phi^+(\gamma)$  を用いて  $\alpha = \beta_1 + \beta_2$  と書けたとする. このとき  $\Delta$  の元の線型独立性から  $\beta_{1\alpha} + \beta_{2\alpha} = 1$  かつ  $\forall \gamma \in \Delta \setminus \{\alpha\}$ ,  $\beta_{1\gamma} + \beta_{2\gamma} = 0$  が成り立つが, **(B-2)** より  $(\beta_{1\alpha}, \beta_{2\alpha}) = (1, 0)$  または  $(0, 1)$  かつ  $\forall \gamma \in \Delta \setminus \{\alpha\}$ ,  $\beta_{1\gamma} = \beta_{2\gamma} = 0$ , i.e.  $(\beta_1, \beta_2) = (\alpha, 0)$  または  $(0, \alpha)$  でなくてはならず,  $0 \notin \Phi^+$  に矛盾.

<sup>\*10</sup> [1] では集合の濃度 (cardinality) の意味で  $\text{Card } \Delta$  と書かれていた.

### 定義 3.2.3: Weyl の区画

- 位相空間<sup>a</sup>  $\mathbb{E}$  の部分空間  $\mathbb{E} \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha$  の連結成分の 1 つのことを (開な) **Weyl の区画** (Weyl chamber)<sup>b</sup> と呼ぶ.
- **正則** な  $\gamma \in \mathbb{E}$  が属する Weyl の区画のことを  $\mathfrak{C}(\gamma)$  と書く<sup>c</sup>.
- $\Phi$  の **底**  $\Delta$  に対して定理 3.2.1 の意味で  $\Delta = \Delta(\gamma)$  ならば  $\mathfrak{C}(\Delta) := \mathfrak{C}(\gamma)$  とおき,  $\Delta$  に関する **Weyl の基本区画** (fundamental Weyl chamber relative to  $\Delta$ )<sup>d</sup> と呼ぶ.

<sup>a</sup> Euclid 空間の定義の脚注を参照.

<sup>b</sup> この訳語は筆者が勝手につけたものである. [2] では Weyl の部屋と呼ばれていた.

<sup>c</sup> L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X コマンドは `\mathfrak{C}`

<sup>d</sup> この訳語は全く普及していない気がする.  $\Delta$  に関する基本的 Weyl の部屋だと語感が悪いと思ったのでこのような訳語を充てた.

### 補題 3.2.2: Weyl の区画の基本性質

**正則** な任意の  $\gamma, \gamma' \in \mathbb{E}$  および任意の  $\Phi$  の **底**  $\Delta$  を与える. 定理 3.2.1 によって得られる  $\Phi$  の **底** を  $\Delta(\gamma)$  と書く.

- (1)  $\mathfrak{C}(\gamma) = \mathfrak{C}(\gamma') \iff \Delta(\gamma) = \Delta(\gamma')$   
 (2) 写像

$$\begin{aligned} \{\Phi \text{ の底全体の集合} \} &\longrightarrow \{\text{Weyl の区画全体の集合}\}, \\ \Delta &\longmapsto \mathfrak{C}(\Delta) \end{aligned}$$

は全単射である.

- (3)  $\mathfrak{C}(\Delta) = \{ \beta \in \mathbb{E} \mid \forall \alpha \in \Delta, (\beta, \alpha) > 0 \}$

**証明** (1)  $\alpha \in \Phi$  に関する鏡映面  $P_\alpha$  に関して

$$P_\alpha^+ := \{ \beta \in \mathbb{E} \mid (\beta, \alpha) > 0 \}, \quad P_\alpha^- := \{ \beta \in \mathbb{E} \mid (\beta, \alpha) < 0 \}$$

とおく. すると  $\mathbb{E} \setminus P_\alpha = P_\alpha^+ \cup P_\alpha^-$  (disjoint union) となるから,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha &= \bigcap_{\alpha \in \Phi} (\mathbb{E} \setminus P_\alpha) \\ &= \bigcap_{\alpha \in \Phi} (P_\alpha^+ \cup P_\alpha^-) \\ &= \bigcup_{\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in \Phi} \in \prod_{\alpha \in \Phi} \{\pm\}} \bigcap_{\alpha \in \Phi} P_\alpha^{\mu_\alpha} \end{aligned}$$

である. 最右辺の  $\bigcap_{\alpha \in \Phi} P_\alpha^{\mu_\alpha}$  は凸集合の共通部分なので凸集合であり, 従って連結である. さらに  $\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in \Phi} \in \prod_{\alpha \in \Phi} \{\pm\}$  に関する重複を除いて位相空間の意味で disjoint であるから Weyl の区画であ

る<sup>\*11</sup>. 従って  $\mathfrak{C}(\gamma)$  は,  $\forall \alpha \in \Phi$  に対して

$$\mu_\alpha(\gamma) := \begin{cases} +, & (\gamma, \alpha) > 0, \\ -, & (\gamma, \alpha) < 0 \end{cases}$$

とおけば

$$\mathfrak{C}(\gamma) = \bigcap_{\alpha \in \Phi} P_\alpha^{\mu_\alpha(\gamma)} = \{ \beta \in \mathbb{E} \mid \forall \alpha \in \Phi, (\gamma, \alpha)(\beta, \alpha) > 0 \} \quad (3.2.1)$$

と書ける. よって

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}(\gamma) = \mathfrak{C}(\gamma') &\iff \forall \alpha \in \Phi, \mu_\alpha(\gamma) = \mu_\alpha(\gamma') \\ &\iff \Phi^+(\gamma) = \Phi^+(\gamma') \\ &\iff \Delta(\gamma) = \Delta(\gamma') \end{aligned}$$

が言える.

(2) (1), 定理 3.2.1, および Weyl の基本区画の定義から従う.

(3)  $\Delta = \Delta(\gamma)$  を満たす正則な  $\gamma \in \mathbb{E}$  を 1 つとる. すると (3.2.1) より

$$\mathfrak{C}(\Delta) = \{ \beta \in \mathbb{E} \mid \forall \alpha \in \Phi, (\gamma, \alpha)(\beta, \alpha) > 0 \}$$

だが,  $\Phi = \Phi^+(\gamma) \amalg (-\Phi^+(\gamma))$  でかつ  $\Phi^+(\gamma)$  の定義より  $\forall \alpha \in \Phi^+(\gamma)$  に対して  $(\gamma, \alpha) > 0$  が成り立つので

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}(\Delta) &= \{ \beta \in \mathbb{E} \mid \forall \alpha \in \Phi^+(\gamma), (\beta, \alpha) > 0 \} \\ &= \{ \beta \in \mathbb{E} \mid \forall \alpha \in \Delta(\gamma), (\beta, \alpha) > 0 \} \end{aligned}$$

だと分かった. ■

### 補題 3.2.3: Weyl の区画と Weyl 群の関係

正則な任意の  $\gamma \in \mathbb{E}$  および任意の  $\Phi$  の底  $\Delta$  を与える. このとき  $\forall \sigma \in \mathcal{W}$  に対して以下が成り立つ:

- (1)  $\sigma(\Delta(\gamma)) = \Delta(\sigma(\gamma))$
- (2)  $\sigma(\Delta)$  もまた  $\Phi$  の底である.
- (3)  $\sigma(\mathfrak{C}(\gamma)) = \mathfrak{C}(\sigma(\gamma))$
- (4)  $\sigma(\mathfrak{C}(\Delta)) = \mathfrak{C}(\sigma(\Delta))$

**証明** 鏡映は等長変換 (isometry) なので  $(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\alpha, \beta)$  が成り立つ.

(1)

$$\begin{aligned} \sigma(\Phi^+(\gamma)) &= \{ \sigma(\alpha) \in \Phi \mid (\gamma, \alpha) = (\sigma(\gamma), \sigma(\alpha)) > 0 \} \\ &= \{ \beta \in \Phi \mid (\sigma(\gamma), \beta) > 0 \} \\ &= \Phi^+(\sigma(\gamma)) \end{aligned}$$

<sup>\*11</sup> より厳密には,  $\mathbb{E} \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha$  の部分空間として開かつ閉 (clopen) であり, かつそれ自身連結なので, 連結成分の 1 つだと分かる.



が分かる．従って  $\sigma(\Delta(\gamma)) = \Delta(\sigma(\gamma))$  である．

(2) 定理 3.2.1 より，ある正則な  $\gamma \in \mathbb{E}$  が存在して  $\Delta = \Delta(\gamma)$  と書ける．よって (1) から  $\sigma(\Delta) = \Delta(\sigma(\gamma))$  であるが，再度定理 3.2.1 より右辺は  $\Phi$  の底である．

(3) (3.2.1)，および  $\sigma(\Phi) = \Phi$  より

$$\begin{aligned}\sigma(\mathfrak{C}(\gamma)) &= \{ \sigma(\beta) \in \mathbb{E} \mid \forall \alpha \in \Phi, (\gamma, \alpha)(\beta, \alpha) = (\sigma(\gamma), \sigma(\alpha))(\sigma(\beta), \sigma(\alpha)) > 0 \} \\ &= \{ \beta \in \mathbb{E} \mid \forall \alpha \in \Phi, (\sigma(\gamma), \alpha)(\beta, \alpha) > 0 \} \\ &= \mathfrak{C}(\sigma(\gamma))\end{aligned}$$

(4) (4) および定理 3.2.1 より従う．

■

補題 3.2.3 より，写像<sup>\*12</sup>

$$\pi_W: \mathscr{W} \longrightarrow \text{Isom}(\{\text{Weyl の区画}\}), \sigma \longmapsto \left( \mathfrak{C}(\gamma) \mapsto \mathfrak{C}(\sigma(\gamma)) \right) \quad (3.2.2)$$

$$\pi_b: \mathscr{W} \longrightarrow \text{Isom}(\{\Phi \text{ の底}\}), \sigma \longmapsto \left( \Delta \mapsto \sigma(\Delta) \right) \quad (3.2.3)$$

が群準同型であることが分かった． i.e. Weyl 群  $\mathscr{W}$  は Weyl の区画全体の集合，および  $\Phi$  の底全体の集合に群として左作用する．

### 3.2.2 単純ルートに関する補題

この小節では  $\Phi$  の任意の底  $\Delta$  を 1 つ固定する．

#### 補題 3.2.4:

$\alpha \in \Phi \setminus \Delta$  が正ルートならば，ある  $\beta \in \Delta$  が存在して  $\alpha - \beta \in \Phi$  となる．特に， $\alpha - \beta \succ 0$  である．

**証明**  $\forall \beta \in \Delta$  に対して  $(\alpha, \beta) \leq 0$  が成り立つと仮定すると，定理 3.2.1 の **step3** の証明と同様の議論により  $\Delta \cup \{\alpha\}$  が線型独立となり， $\Delta$  が  $\mathbb{E}$  の基底であることに矛盾．よってある  $\beta \in \Delta$  が存在して  $(\alpha, \beta) > 0$  となる． $\alpha \notin \Delta$  なので  $\alpha \neq \pm\beta$  であることと併せると，補題 3.1.2 が使えて  $\alpha - \beta \in \Phi$  だと分かる．

仮定より  $\alpha \succ 0$  なので  $\{\alpha_\gamma\}_{\gamma \in \Delta} \in \prod_{\gamma \in \Delta} \mathbb{Z}_{\geq 0}$  が一意的に存在して  $\alpha = \sum_{\gamma \in \Delta} \alpha_\gamma \gamma$  と書ける． $\alpha \notin \Delta$  なのである  $\gamma \in \Delta \setminus \{\beta\}$  が存在して  $\alpha_\gamma > 0$  を充たす．よって  $\alpha - \beta \in \Phi$  を単純ルートで展開した  $\mathbb{Z}$ -係数のうち少なくとも 1 つは正である．よって (B-2) から  $\alpha - \beta \succ 0$  が言える．

■

<sup>\*12</sup>  $\text{Isom}(X)$  は距離空間  $X$  上の全単射な等長変換全体が写像の合成に関して成す群（等長変換群; isometry group）を意味する．

系 3.2.2:

$\forall \beta \in \Phi^+$  に対して  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Delta$  が存在して (重複も許す),

$$\beta = \sum_{j=1}^k \alpha_j$$

かつ  $1 \leq \forall i \leq k$  に対して

$$\sum_{j=1}^i \alpha_j \in \Phi$$

を充たす.

**証明** 仮定より  $\{\beta_\gamma\}_{\gamma \in \Delta} \in \prod_{\gamma \in \Delta} \mathbb{Z}_{\geq 0}$  が一意的に存在して  $\beta = \sum_{\gamma \in \Delta} \beta_\gamma \gamma$  と書ける.  $\text{ht } \beta$  に関する数学的帰納法により示す.  $\text{ht } \beta = 1$  のときは  $\beta \in \Delta \subset \Phi$  なので明らか.

$\text{ht } \beta > 1$  とする. このとき  $\beta \notin \Delta$  である. 従って補題 3.2.4 が使えて  $\beta - \gamma \in \Phi^+$  となる. よって帰納法の仮定から示された. ■

補題 3.2.5:

任意の単純ルート  $\alpha \in \Delta$  に対して,  $\sigma_\alpha \in \text{GL}(\mathbb{E})$  は  $\sigma_\alpha(\Phi^+ \setminus \{\alpha\}) = \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$  を充たす.

**証明**  $\forall \beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$  を 1 つとる. このとき  $\{\beta_\gamma\}_{\gamma \in \Delta} \in \prod_{\gamma \in \Delta} \mathbb{Z}_{\geq 0}$  が一意的に存在して  $\beta = \sum_{\gamma \in \Delta} \beta_\gamma \gamma$  と書ける.  $\beta \neq \pm \alpha$  だから, ある  $\gamma \in \Delta \setminus \{\alpha\}$  が存在して  $\beta_\gamma > 0$  となる. このとき  $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \llbracket \beta, \alpha \rrbracket \alpha$  の  $\gamma$  の係数は  $k_\gamma > 0$  のままである. よって (B-2) から  $\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi^+$  が言える.  $\alpha = \sigma_\alpha(-\alpha) \neq \sigma_\alpha(\beta)$  なので  $\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$  が言えた. ■

系 3.2.3:

$$\delta := \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Phi^+} \beta$$

とおくと,  $\forall \alpha \in \Delta$  に対して

$$\sigma_\alpha(\delta) = \delta - \alpha$$

が成り立つ.

**証明** 補題 3.2.5 より

$$\sigma_\alpha(\delta) = \sigma_\alpha \left( \sum_{\beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}} \beta \right) + \sigma_\alpha(\alpha) = \delta - \alpha$$

■

**補題 3.2.6:**

重複を許して  $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \Delta$  を任意にとる.

このとき, もし  $\sigma_{\alpha_1} \circ \dots \circ \sigma_{\alpha_{t-1}}(\alpha_t) \prec 0$  ならば, ある  $1 \leq s < t$  が存在して

$$\sigma_{\alpha_1} \circ \dots \circ \sigma_{\alpha_t} = \sigma_{\alpha_1} \circ \dots \circ \sigma_{\alpha_{s-1}} \circ \sigma_{\alpha_{s+1}} \circ \dots \circ \sigma_{\alpha_{t-1}}$$

が成り立つ.

**証明**  $\circ$  を省略し,  $\sigma_i := \sigma_{\alpha_i}$  と略記する.

$$\beta_i := \begin{cases} \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{t-1}(\alpha_t), & 0 \leq i \leq t-2 \\ \alpha_t, & i = t-1 \end{cases}$$

とおく.  $\beta_0 \prec 0$  かつ  $\beta_{t-1} \succ 0$  なので,

$$s := \min\{i \in \mathbb{N} \mid \beta_i \succ 0\}$$

が存在する. このとき  $\beta_s \in \Phi^+$  かつ  $\sigma_s(\beta_s) = \beta_{s-1} \prec 0$  なので補題 3.2.5 より  $\beta_s = \alpha_s$  でなくてはならない.  $\sigma_{s+1} \cdots \sigma_{t-1} \in \mathcal{W}$  なので, このとき補題 3.1.3-(1) より

$$\sigma_s = \sigma_{\beta_s} = (\sigma_{s+1} \cdots \sigma_{t-1})\sigma_t(\sigma_{t-1} \cdots \sigma_{s+1})$$

だと分かる. よって

$$\begin{aligned} \sigma_1 \cdots \sigma_{s-1} \sigma_s \sigma_{s+1} \cdots \sigma_t &= \sigma_1 \cdots \sigma_{s-1} (\sigma_{s+1} \cdots \sigma_{t-1}) \sigma_t (\sigma_{t-1} \cdots \sigma_{s+1}) \sigma_{s+1} \cdots \sigma_t \\ &= \sigma_1 \cdots \sigma_{s-1} \sigma_{s+1} \cdots \sigma_t \end{aligned}$$

■

**系 3.2.4:**

$\sigma \in \mathcal{W}$  が,  $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \Delta$  を用いて  $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \circ \dots \circ \sigma_{\alpha_t}$  と表示されているとする. このような  $\sigma$  の表示のうち  $t$  が最小のものに対しては  $\sigma(\alpha_t) \prec 0$  である.

**証明**

$$\sigma(\alpha_t) = \sigma_{\alpha_1} \circ \dots \circ \sigma_{\alpha_{t-1}}(-\alpha_t)$$

なので, もし  $\sigma(\alpha_t) \succ 0$  ならば  $\sigma_{\alpha_1} \circ \dots \circ \sigma_{\alpha_{t-1}}(\alpha_t) \prec 0$  となる. 然るにこのとき補題 3.2.6 からある  $1 \leq s < \text{len}(\sigma)$  が存在して

$$\sigma_{\alpha_1} \circ \dots \circ \sigma_{\alpha_t} = \sigma_{\alpha_1} \circ \dots \circ \sigma_{\alpha_{s-1}} \circ \sigma_{\alpha_{s+1}} \circ \dots \circ \sigma_{\alpha_{t-1}}$$

が成り立ち,  $t$  の最小性に矛盾する. よって背理法から  $\sigma(\alpha_t) \prec 0$  である.

■

**3.2.3 Weyl 群の性質**

準備が整ったので, Weyl 群の極めて重要な性質を示す.

### 定理 3.2.5: Weyl 群の性質

$\Phi$  の底  $\Delta$  を任意に与える.

- (1)  $\gamma \in \mathbb{E}$  が正則ならば, ある  $\sigma \in \mathcal{W}$  が存在して,  $\forall \alpha \in \Delta, (\sigma(\gamma), \alpha) > 0$  を充たす.  
特に, Weyl 群の作用 (3.2.2)

$$\pi_W: \mathcal{W} \longrightarrow \text{Isom}(\{\text{Weyl の区画}\}), \sigma \longmapsto \left( \mathfrak{C}(\gamma) \mapsto \mathfrak{C}(\sigma(\gamma)) \right)$$

は推移的 (transitive) <sup>a</sup>である.

- (2)  $\Delta'$  が  $\Phi$  のもう 1 つの底ならば, ある  $\sigma \in \mathcal{W}$  が存在して  $\sigma(\Delta') = \Delta$  を充たす.  
i.e. Weyl 群の作用 (3.2.3)

$$\pi_b: \mathcal{W} \longrightarrow \text{Isom}(\{\Phi \text{ の底}\}), \sigma \longmapsto \left( \Delta \mapsto \sigma(\Delta) \right)$$

は推移的 (transitive) である.

- (3)  $\forall \alpha \in \Phi$  に対してある  $\sigma \in \mathcal{W}$  が存在して  $\sigma(\alpha) \in \Delta$  を充たす.  
(4)  $\mathcal{W}$  は集合  $\{\sigma_\alpha \mid \alpha \in \Delta\} \subset \{\sigma_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}$  によって生成される.  
(5)  $\sigma \in \mathcal{W}$  が  $\sigma(\Delta) = \Delta$  を充たすならば  $\sigma = \text{id}_{\mathbb{E}}$  である. i.e. Weyl 群の作用 (3.2.2) は自由 (free) である.

<sup>a</sup> i.e. 任意の Weyl の区画  $\mathfrak{C}(\gamma), \mathfrak{C}(\gamma')$  に対してある  $\sigma \in \mathcal{W}$  が存在して  $\pi_W(\sigma)(\mathfrak{C}(\gamma)) = \mathfrak{C}(\gamma')$  を充たす.

**証明** 集合  $\{\sigma_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$  によって生成される  $\mathcal{W}$  の部分群を  $\mathcal{W}'$  とする. まず (1)-(3) を  $\mathcal{W}'$  において示してから  $\mathcal{W}' = \mathcal{W}$  を示す.

- (1) 正則な  $\gamma \in \mathbb{E}$  を任意にとる.  $\delta := \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Phi^+} \beta$  とおき,  $\sigma \in \arg \max_{\sigma \in \mathcal{W}'} (\sigma(\gamma), \delta)$  を 1 つとる<sup>\*13</sup>. ここで  $\forall \alpha \in \Delta$  を 1 つとると,  $\sigma_\alpha \circ \sigma \in \mathcal{W}$  であるから系 3.2.3 より

$$(\sigma(\gamma), \delta) \geq (\sigma_\alpha \circ \sigma(\gamma), \delta) = (\sigma(\gamma), \sigma_\alpha(\delta)) = (\sigma(\gamma), \delta - \alpha) = (\sigma(\gamma), \delta) - (\sigma(\gamma), \alpha)$$

が分かる. よって  $(\sigma(\gamma), \alpha) \geq 0$  が分かった.  $\gamma$  は正則なので  $(\sigma(\gamma), \alpha) = (\gamma, \sigma^{-1}(\alpha)) > 0$  が言えた. 補題 3.2.2-(3) より, このことは  $\sigma(\gamma) \in \mathfrak{C}(\Delta)$  を意味する. 従って  $\pi_W(\sigma)(\mathfrak{C}(\gamma)) = \mathfrak{C}(\sigma(\gamma)) = \mathfrak{C}(\Delta)$  であり,  $\gamma, \Delta$  は任意だったので補題 3.2.2-(2) より  $\pi_W$  が推移的であることが分かった.

- (2) 定理 3.2.1 より,  $\Delta' = \Delta(\gamma')$  を充たす正則な  $\gamma' \in \mathbb{E}$  が存在する. このとき (1) および補題 3.2.2-(3) よりある  $\sigma \in \mathcal{W}'$  が存在して  $\sigma(\gamma') \in \mathfrak{C}(\Delta)$  が成り立つから, 再度補題 3.2.3 より  $\sigma(\mathfrak{C}(\Delta')) = \sigma(\mathfrak{C}(\gamma')) = \mathfrak{C}(\sigma(\gamma')) = \mathfrak{C}(\Delta)$  が分かる. 従って補題 3.2.2-(2) より  $\sigma(\Delta') = \Delta$  である.  
(3)  $\forall \alpha \in \Phi$  を 1 つとる. (2) より,  $\alpha$  が少なくとも 1 つの ( $\Delta$  とは限らない)  $\Phi$  の底に属することを言えば良い.

(Root-2) より  $\forall \beta \in \Phi \setminus \{\pm\alpha\}$  に対して  $\beta \notin \mathbb{K}\alpha$  であるから  $\mathbb{K}\alpha \cap \mathbb{K}\beta = 0$  である. よって  $P_\alpha \cap P_\beta = (\mathbb{K}\alpha)^\perp \cap (\mathbb{K}\beta)^\perp = (\mathbb{K}\alpha \oplus \mathbb{K}\beta)^\perp$  となる<sup>\*14</sup>が,  $\mathbb{K}\alpha \subsetneq \mathbb{K}\alpha \oplus \mathbb{K}\beta$  なので  $P_\alpha \cap P_\beta = (\mathbb{K}\alpha \oplus \mathbb{K}\beta)^\perp \subsetneq (\mathbb{K}\alpha)^\perp = P_\alpha$  が成り立ち,  $\exists \gamma \in P_\alpha \setminus (P_\alpha \cap P_\beta)$  が言える. ここで  $\gamma$  に Euclid 距離の

<sup>\*13</sup>  $\mathcal{W}' \subset \mathcal{W}$  は有限群なのでこのような  $\sigma$  は少なくとも 1 つ存在する.

<sup>\*14</sup>  $\perp$  は Euclid 空間に備わっている双線型形式  $(\cdot, \cdot)$  に関する直交補空間の意味である.

意味で十分近い正則な  $\gamma' \in \mathbb{E}$  を取れば, ある  $\varepsilon > 0$  に対して  $(\gamma', \alpha) = \varepsilon$  かつ  $|(\gamma', \beta)| > \varepsilon$  を満たすようにできる. すると  $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$  で, かつ  $\beta \in \Phi \setminus \{\pm\alpha\}$  は任意だったので  $\alpha$  は分割不可能であり, \*15,  $\alpha \in \Delta(\gamma')$  が言えた.

- (4)  $\mathscr{W} = \mathscr{W}'$  を言うには,  $\forall \alpha \in \Phi$  に対して  $\sigma_\alpha \in \mathscr{W}'$  が成り立つことを示せば十分である. ここで (3) よりある  $\sigma \in \mathscr{W}'$  が存在して  $\sigma(\alpha) \in \Delta$  を満たすようにできる. このとき補題 3.1.3-(1) より  $\sigma_{\sigma(\alpha)} = \sigma \circ \sigma_\alpha \circ \sigma^{-1}$  であるので,  $\sigma_{\sigma(\alpha)} \in \mathscr{W}'$  より  $\sigma_\alpha = \sigma^{-1} \circ \sigma_{\sigma(\alpha)} \circ \sigma \in \mathscr{W}'$  が言えた.
- (5) 背理法により示す.  $\sigma(\Delta) = \Delta$  かつ  $\sigma \neq \text{id}_{\mathbb{E}}$  を仮定する. このとき (4) よりある  $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \Delta$  が存在して  $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \circ \dots \circ \sigma_{\alpha_t}$  と表示できる. このような  $\sigma$  の表示のうち,  $t$  が最小のものをとる. 然るにこのとき仮定より  $\sigma(\alpha_t) \succ 0$  ということになって系 3.2.4 に矛盾.

■

#### 定義 3.2.4: Weyl 群の簡約表示

$\Phi$  の底  $\Delta$  を任意に与える.

- $\forall \sigma \in \mathscr{W}$  に対して一意に定まる非負整数

$$\text{len}(\sigma) := \min\{t \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \exists \alpha_1, \dots, \alpha_t \in \Delta, \sigma = \sigma_{\alpha_1} \circ \dots \circ \sigma_{\alpha_t}\}$$

を  $\Delta$  に関する  $\sigma$  の長さ (length) と呼ぶ. ただし  $\text{len}(\text{id}_{\mathbb{E}}) := 0$  と定義する.

- $\sigma \in \mathscr{W}$  の表示

$$\sigma = \sigma_{\alpha_1} \circ \dots \circ \sigma_{\alpha_{\text{len}(\sigma)}} \quad \text{w/} \quad \alpha_i \in \Delta$$

のことを  $\Delta$  に関する  $\sigma$  の簡約表示 (reduced presentation) と呼ぶ.

#### 補題 3.2.7: 簡約表示の長さ

$\Phi$  の底  $\Delta$  を任意に与える. このとき  $\forall \sigma \in \mathscr{W}$  に対して

$$\text{len}(\sigma) = |\{\beta \in \Phi \mid \beta \succ 0 \text{ かつ } \sigma(\beta) \prec 0\}|$$

が成り立つ. 右边を  $n(\sigma)$  とおく.

**証明**  $\forall \sigma \in \mathscr{W}$  を 1 つ固定する.  $\text{len}(\sigma)$  に関する数学的帰納法により示す.  $\text{len}(\sigma) = 0$  のときは  $\sigma = \text{id}$  なので良い \*16.

$\text{len}(\sigma) > \text{len}(\tau)$  を満たす任意の  $\tau \in \mathscr{W}$  に対して補題が成り立っているとする.  $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \circ \dots \circ \sigma_{\alpha_t}$  を  $\Delta$  に関する  $\sigma$  の簡約表示とし,  $\alpha := \alpha_t \in \Delta$  とおく. すると系 3.2.4 より  $\sigma(\alpha) \prec 0$  であるから

$$\alpha \in \{\beta \in \Phi \mid \beta \succ 0 \text{ かつ } \sigma(\beta) \prec 0\}$$

\*15  $\alpha$  が分割可能とする. このときある  $\beta_1, \beta_2 \in \Phi^+(\gamma')$  が存在して  $\alpha = \beta_1 + \beta_2$  と書ける. ところが今  $(\gamma', \beta_i) > \varepsilon$  であるから,  $\varepsilon = (\gamma', \alpha) = (\gamma', \beta_1) + (\gamma', \beta_2) > 2\varepsilon$  ということになり,  $\varepsilon > 0$  に矛盾.

\*16 (Root-1) より  $0 \notin \Phi$  である.

がわかる．一方で  $\sigma \circ \sigma_\alpha(\alpha) = \sigma(-\alpha) \succ 0$  なので

$$\{\beta \in \Phi \mid \beta \succ 0 \text{ かつ } \sigma \circ \sigma_\alpha(\beta) \prec 0\} = \{\beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\} \mid \sigma(\sigma_\alpha(\beta)) \prec 0\}$$

であるが，補題 3.2.5 から最右辺は

$$\{\beta \in \Phi \mid \beta \succ 0 \text{ かつ } \sigma(\beta) \prec 0\} \setminus \{\alpha\}$$

に等しい．よって

$$\begin{aligned} n(\sigma \circ \sigma_\alpha) &= |\{\beta \in \Phi \mid \beta \succ 0 \text{ かつ } \sigma \circ \sigma_\alpha(\beta) \prec 0\}| \\ &= |\{\beta \in \Phi \mid \beta \succ 0 \text{ かつ } \sigma(\beta) \prec 0\} \setminus \{\alpha\}| \\ &= |\{\beta \in \Phi \mid \beta \succ 0 \text{ かつ } \sigma(\beta) \prec 0\}| - 1 \\ &= n(\sigma) - 1 \end{aligned}$$

だと分かった．ところで  $\text{len}(\sigma \circ \sigma_\alpha) = \text{len}(\sigma_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \sigma_{\alpha_{t-1}}) = \text{len}(\sigma) - 1 < \text{len}(\sigma)$  であるから，帰納法の仮定より  $\text{len}(\sigma) - 1 = \text{len}(\sigma \circ \sigma_\alpha) = n(\sigma \circ \sigma_\alpha) = n(\sigma) - 1$  であり， $n(\sigma) = \text{len}(\sigma)$  が言えた． ■

位相空間  $X$  の部分空間  $A \subset X$  の閉包<sup>\*17</sup>を  $\overline{A}$  と書く．一般に，群  $G$  の作用  $\triangleright: G \times X \rightarrow X$  の**基本領域** (fundamental domain) とは， $X$  の部分空間  $A \subset X$  であって  $\forall x \in X$  に対して  $A \cap (G \triangleright \{x\})$  が 1 点集合になるようなものを言う．

#### 補題 3.2.8: Weyl 群の作用の基本領域

$\Phi$  の**底**  $\Delta$  を任意に与え， $\forall \lambda, \mu \in \overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$  をとる．

このとき  $\exists \sigma \in \mathcal{W}$ ， $\sigma(\lambda) = \mu$  ならば， $\sigma$  は点  $\lambda$  を固定する鏡映の積で書ける．特に  $\lambda = \mu$  である．

**証明**  $\text{len}(\sigma)$  に関する数学的帰納法により示す． $\text{len}(\sigma) = 0$  ならば明らか．

$\text{len}(\sigma) > 0$  とする．補題 3.2.7 より  $\sigma$  はある**正ルート**を負ルートに移す．よって  $\sigma(\alpha) \prec 0$  を充たす  $\alpha \in \Delta$  が存在する．このとき  $\lambda, \mu \in \overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$  であることから

$$0 \geq (\mu, \sigma(\alpha)) = (\sigma^{-1}(\mu), \alpha) = (\lambda, \alpha) \geq 0$$

となって  $(\lambda, \alpha) = 0$  が分かった．従って  $\sigma_\alpha(\lambda) = \lambda$ ， $\sigma \circ \sigma_\alpha(\lambda) = \mu$  が言える．i.e.  $\sigma_\alpha$  は  $\lambda$  を固定する鏡映である．さらに補題 3.2.5, 3.2.7 から  $\text{len}(\sigma \circ \sigma_\alpha) = \text{len}(\sigma) - 1$  であり，帰納法の仮定が使えて  $\sigma = (\sigma \circ \sigma_\alpha) \circ \sigma_\alpha$  は  $\lambda$  を固定する鏡映の積で書ける． ■

### 3.2.4 既約なルート系

#### 定義 3.2.5: ルート系の既約性

**ルート系**  $(\mathbb{E}, \Phi)$  が**既約** (irreducible) であるとは， $\Phi$  が以下の条件を満たすことを言う：

**(Root-irr)**

$\Phi$  の部分集合  $\Phi_1, \Phi_2 \subset \Phi$  が  $\Phi = \Phi_1 \amalg \Phi_2$  かつ  $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$  を充たす  $\implies \Phi_1 = \emptyset$  または  $\Phi_2 = \emptyset$

<sup>\*17</sup>  $\overline{A} := \bigcap_{F: \text{closed}, A \subset F} F$

### 命題 3.2.1: ルート系の既約性の特徴付け

ルート系  $(\mathbb{E}, \Phi)$  を与え,  $\Phi$  の底  $\Delta$  を 1 つ固定する.

このとき, 以下の 2 つは同値である:

- (1)  $\Phi$  は既約
- (2)  $\Delta$  の部分集合  $\Delta_1, \Delta_2 \subset \Delta$  が  $\Delta = \Delta_1 \amalg \Delta_2$  かつ  $(\Delta_1, \Delta_2) = 0$  を満たす  $\implies \Delta_1 = \emptyset$  または  $\Delta_2 = \emptyset$

#### 証明 (1) $\longleftarrow$ (2)

対偶を示す.  $\Phi$  の空でない 2 つの部分集合  $\Phi_1, \Phi_2 \subset \Phi$  であって  $\Phi = \Phi_1 \amalg \Phi_2$  かつ  $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$  を満たすものが存在するとする. このとき  $\Delta_i := \Delta \cap \Phi_i$  ( $i = 1, 2$ ) とおくと  $\Delta = \Delta_1 \amalg \Delta_2$  かつ  $(\Delta_1, \Delta_2) = 0$  が成り立つ. あとは  $\Delta_1 \neq \emptyset$  かつ  $\Delta_2 \neq \emptyset$  を背理法により示す.  $\Delta_1, \Delta_2$  のどちらかが空だと仮定する. 議論は全く同様なので  $\Delta_2 = \emptyset$  としよう. このとき  $\Delta \subset \Phi_1$  なので仮定より  $(\Delta, \Phi_2) = 0$  だが, (B-1) よりこのことは  $(\mathbb{E}, \Phi_2) = 0$  を意味する. よって  $\Phi_2 = \emptyset$  となり  $\Phi_2 \neq \emptyset$  に矛盾.

#### (1) $\implies$ (2)

$\Phi$  が既約だとする. このとき背理法によって (2) を示す.  $\Delta$  の空でない 2 つの部分集合  $\Delta_1, \Delta_2 \subset \Delta$  であって  $\Delta = \Delta_1 \amalg \Delta_2$  かつ  $(\Delta_1, \Delta_2) = 0$  を満たすものが存在するとする. このとき定理 3.2.5-(3) より,

$$\Phi_i := \{ \alpha \in \Phi \mid \exists \sigma \in \mathcal{W}, \sigma(\alpha) \in \Delta_i \}$$

とおくと  $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$  となる. ここで  $\forall \alpha_i \in \Delta_i$  に対して仮定より  $[\alpha_i, \alpha_j] = 0$  ( $i \neq j$ ) であるから

$$(\sigma_{\alpha_1} \circ \sigma_{\alpha_2} - \sigma_{\alpha_2} \circ \sigma_{\alpha_1})(\beta) = [\beta, \alpha_2][\alpha_2, \alpha_1]\alpha_1 - [\beta, \alpha_1][\alpha_1, \alpha_2]\alpha_2 = 0$$

i.e.  $\sigma_{\alpha_1} \circ \sigma_{\alpha_2} = \sigma_{\alpha_2} \circ \sigma_{\alpha_1}$  である. さらに  $\sigma_{\alpha_i}(\alpha_j) = \alpha_j$  ( $i \neq j$ ) であるから  $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \emptyset$  であり,  $\Phi_i \subset \text{Span}_{\mathbb{Z}} \Delta_i$  である. よって背理法の仮定から  $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$  となるが, 仮定より  $\Phi$  は既約なので  $\Phi_1 = \emptyset$  または  $\Phi_2 = \emptyset$  である. 従って  $\Delta_i$  のどちらかが空集合ということになって矛盾. ■

### 補題 3.2.9:

ルート系  $(\mathbb{E}, \Phi)$  を与え,  $\Phi$  の底  $\Delta$  を任意にとる.

このとき  $\Phi$  が既約ならば, 半順序  $\prec$  に関して  $\Phi$  は唯一の極大元  $\beta_0 \in \Phi$  を持つ<sup>a</sup>. 特に  $\beta_0 = \sum_{\alpha \in \Delta} k_{\alpha} \alpha$  と書いたときに  $\forall \alpha \in \Delta, k_{\alpha} > 0$  である.

<sup>a</sup> i.e.  $\forall \alpha \in \Phi, \alpha \neq \beta_0 \implies \text{ht } \alpha < \text{ht } \beta_0$ . さらに,  $\forall \alpha \in \Delta, (\beta_0, \alpha) \geq 0$

証明 (Root-1) より  $(\Phi, \prec)$  は有限な半順序集合だから極大元  $\beta_0 = \sum_{\alpha \in \Delta} k_{\alpha} \alpha \in \Phi$  を少なくとも 1 つ持つ.  $\beta_0 \prec 0$  だとすると任意の単純ルート  $\alpha$  に対して  $\beta_0 \prec \alpha$  となり  $\beta_0$  の極大性に矛盾. よって  $\beta_0 \succ 0$  である. まず  $\forall \alpha \in \Delta, k_{\alpha} > 0$  を示そう.

$$\begin{aligned} \Delta_1 &:= \{ \alpha \in \Delta \mid k_{\alpha} > 0 \}, \\ \Delta_2 &:= \{ \alpha \in \Delta \mid k_{\alpha} = 0 \} \end{aligned}$$

とおくと  $\Delta = \Delta_1 \amalg \Delta_2$  が成り立つ。  $\Delta_2 = \emptyset$  を背理法により示す。  $\Delta_2 \neq \emptyset$  を仮定する。  $\beta_0 \neq 0$  なので  $\Delta_1 \neq \emptyset$  だが、仮定より  $\Phi$  が既約なので命題 3.2.1 から  $(\Delta_1, \Delta_2) \neq 0$ , i.e. ある  $\alpha_1 \in \Delta_1, \alpha_2 \in \Delta_2$  が存在して  $(\alpha_1, \alpha_2) < 0$  を満たす。従って

$$(\alpha_2, \beta_0) = k_{\alpha_1}(\alpha_2, \alpha_1) + \sum_{\gamma \in \Delta_1 \setminus \{\alpha_1\}} k_{\gamma} \underbrace{(\alpha_2, \gamma)}_{\leq 0 (\because \text{補題 3.2.1})} < 0$$

ということになる。然るにこのとき補題 3.1.2 から  $\alpha_2 + \beta_0 \in \Phi$  となり  $\beta_0$  の極大性に矛盾する。

次に、 $\forall \alpha \in \Delta$  に対して  $(\alpha, \beta_0) \geq 0$  であることを背理法により示す。実際ある  $\alpha \in \Delta$  に対して  $(\alpha, \beta_0) < 0$  だとすると補題 3.1.2 から  $\alpha + \beta_0 \in \Phi$  となり  $\beta_0$  の極大性に矛盾する。次に、ある  $\alpha_0 \in \Delta$  が存在して  $(\alpha_0, \beta_0) > 0$  となることを背理法により示す。実際  $\forall \alpha \in \Delta$  に対して  $(\alpha, \beta_0) = 0$  だとすると  $\beta_0 \in (\text{Span}_{\mathbb{R}} \Delta)^{\perp} = \mathbb{E}^{\perp} = 0$  ということになり矛盾する。

最後に  $\beta_0$  の一意性を示す。別の極大元  $\beta = \sum_{\gamma \in \Delta} \beta_{\gamma} \gamma \in \Phi$  をとる。上の議論は  $\beta$  にも当てはまるので  $\forall \gamma \in \Delta, \beta_{\gamma} > 0$  であり、

$$(\beta, \beta_0) = \beta_{\alpha_0}(\alpha_0, \beta_0) + \sum_{\gamma \in \Delta \setminus \{\alpha_0\}} \beta_{\gamma}(\gamma, \beta_0) > 0$$

だと分かった。従って補題 3.1.2 から  $\beta = \beta_0$  または  $\beta - \beta_0 \in \Phi$  である。後者だと  $\beta, \beta_0$  のどちらかの極大性に矛盾するので、背理法から証明が完成した。 ■

#### 補題 3.2.10:

$\Phi$  が既約ならば、Weyl 群の表現

$$\pi: \mathscr{W} \longrightarrow \text{GL}(\mathbb{E}), \sigma \longmapsto (\gamma \mapsto \sigma(\gamma))$$

は既約である。特に、 $\forall \alpha \in \Phi$  に対して

$$\mathbb{E} = \text{Span}_{\mathbb{R}}(\mathscr{W} \blacktriangleright \{\alpha\})$$

が成り立つ<sup>a</sup>。

---

<sup>a</sup>  $\blacktriangleright: \mathscr{W} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}, (\sigma, \gamma) \longmapsto \pi(\sigma)(\gamma)$  と定義した。

**証明**  $\mathbb{E}$  の 0 でない  $\mathscr{W}$ -不変な部分ベクトル空間  $W \subset \mathbb{E}$  を任意にとる。このとき  $W$  の直交補空間  $W^{\perp}$  について  $\mathbb{E} = W \oplus W^{\perp}$  が成り立つ。  $\forall \gamma \in W, \forall \delta \in W^{\perp}, \forall \sigma \in \mathscr{W}$  に対して  $(\gamma, \sigma(\delta)) = (\sigma^{-1}(\gamma), \delta) = 0$  が成り立つので  $\sigma(\delta) \in W^{\perp}$  であり、 $W^{\perp}$  もまた  $\mathscr{W}$ -不変である。

さて、 $W$  は  $\mathscr{W}$ -不変なので  $\forall \alpha \in \Phi$  に対して  $\sigma_{\alpha}(W) = W$  が成り立つ。このときもし  $\alpha \notin W$  かつ  $W \not\subset P_{\alpha}$  だとすると  $\gamma \in W \setminus P_{\alpha}$  が存在して  $\sigma_{\alpha}(\gamma) = \gamma - \llbracket \gamma, \alpha \rrbracket \alpha \in W$  が成り立つが  $\llbracket \gamma, \alpha \rrbracket \neq 0$  なので  $\alpha \in W$  ということになり矛盾。よって  $\alpha \in W$  または  $W \subset P_{\alpha} = (\mathbb{K}\alpha)^{\perp}$  である。i.e.  $\forall \alpha \in \Phi$  は  $W$  か  $W^{\perp}$  のどちらか一方に含まれ、 $\Phi = (\Phi \cap W) \amalg (\Phi \cap W^{\perp})$  が成り立つ。然るに  $(\Phi \cap W, \Phi \cap W^{\perp}) = 0$  かつ  $W$  は 0 でないので、 $\Phi$  の既約性から  $\Phi \cap W^{\perp} = \emptyset$  だと分かる。  $\mathbb{E} = \text{Span}_{\mathbb{R}} \Phi$  なので  $W^{\perp} = 0$  が言えた。

$\text{Span}_{\mathbb{R}}(\mathscr{W} \blacktriangleright \{\alpha\})$  は 0 でない  $\mathscr{W}$ -不変な部分ベクトル空間なので、 $\pi$  が既約表現であることから  $\mathbb{E} = \text{Span}_{\mathbb{R}}(\mathscr{W} \blacktriangleright \{\alpha\})$  である。 ■



### 補題 3.2.11:

$\Phi$  が既約ならば、ルートの長さがとりうる値は高々 2 通りである。さらに、同じ長さのルートは互いに Weyl 群の作用により移り合う。

**証明**  $\forall \alpha, \beta \in \Phi$  をとる。補題 3.2.10 より  $\mathbb{E} = \text{Span}_{\mathbb{R}}\{\sigma(\alpha) \mid \sigma \in \mathcal{W}\}$  なので、ある  $\sigma \in \mathcal{W}$  が存在して  $(\sigma(\alpha), \beta) \neq 0$  を充たす<sup>\*18</sup>。  $\alpha$  と  $\sigma(\alpha)$  を取り替えることで  $(\alpha, \beta) \neq 0$  として良い。このとき表 3.1 より  $\frac{\|\beta\|^2}{\|\alpha\|^2} \in \{1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$  である。

さて、互いに長さの異なる 3 つのルート  $\alpha, \beta, \gamma \in \Phi$  が存在したとする。冒頭の議論からこのとき  $(\alpha, \beta) \neq 0, (\gamma, \beta) \neq 0$  を仮定してよく、  $\frac{\|\beta\|^2}{\|\alpha\|^2}, \frac{\|\gamma\|^2}{\|\beta\|^2}, \frac{\|\gamma\|^2}{\|\alpha\|^2} \in \{2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$  である。然るにこのときどの組み合わせであっても  $\frac{\|\gamma\|^2}{\|\alpha\|^2} = \frac{\|\beta\|^2}{\|\alpha\|^2} \frac{\|\gamma\|^2}{\|\beta\|^2} \notin \{2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$  となり矛盾。故に前半が示された。

後半を示す。  $\|\alpha\| = \|\beta\|$  とする。冒頭の議論から  $(\alpha, \beta) \neq 0$  を仮定して良い。このとき表 3.1 から  $[\alpha, \beta] = [\beta, \alpha] = \pm 1$  となる。必要ならば  $\beta$  を  $-\beta = \sigma_{\beta}(\beta)$  に置き換えることで  $[\alpha, \beta] = 1$  にできる。すると

$$\sigma_{\alpha} \circ \sigma_{\beta} \circ \sigma_{\alpha}(\beta) = \sigma_{\alpha} \circ \sigma_{\beta}(\beta - \alpha) = \sigma_{\alpha}(-\beta - \alpha + \beta) = \alpha$$

であることが分かった。 ■

### 補題 3.2.12:

$\Phi$  が既約ならば、補題 3.2.9 で得た極大ルート  $\beta_0 \in \Phi$  の長さの値は、あり得る 2 通りのうち大きい方である。

**証明**  $\Phi$  の底  $\Delta$  および  $\forall \alpha \in \Phi$  をとる。  $(\beta_0, \beta_0) \geq (\alpha, \alpha)$  を示せば十分である。

さて、定理 3.2.5-(3) より、  $\mathcal{W}$  の作用によって移すことで  $\alpha \in \overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$  を仮定して良い。補題 3.2.9 より  $\beta_0 - \alpha \succ 0$  なので、  $\forall \gamma \in \overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$  に対して  $(\gamma, \beta_0 - \alpha) \geq 0$  である。  $\gamma = \beta_0, \alpha$  の場合を考えることで  $(\beta_0, \beta_0) \geq (\beta_0, \alpha) \geq (\alpha, \alpha)$  が言えた。 ■

## 3.3 ルート系の分類

この節では  $(\mathbb{E}, \Phi)$  を任意のランク  $l$  のルート系とし、その Weyl 群を  $\mathcal{W}$  と略記する。さらに  $\Phi$  の底  $\Delta$  を 1 つ固定する。

### 3.3.1 Cartan 行列

<sup>\*18</sup>  $\forall \sigma \in \mathcal{W}$  に対して  $(\sigma(\alpha), \beta) = 0$  だとすると  $\beta \in (\text{Span}_{\mathbb{R}}\{\sigma(\alpha) \mid \sigma \in \mathcal{W}\})^{\perp} = 0$  となり矛盾

$\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$  と書こう.

### 定義 3.3.1: Cartan 行列

ルート系  $\Phi$  の **Cartan 行列** (Cartan matrix) とは,

$$\begin{bmatrix} [[\alpha_1, \alpha_1]] & \cdots & [[\alpha_1, \alpha_l]] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [[\alpha_l, \alpha_1]] & \cdots & [[\alpha_l, \alpha_l]] \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(l, \mathbb{Z})$$

のこと<sup>a</sup>.  $[[\alpha_\mu, \alpha_\nu]] \in \mathbb{Z}$  のことを **Cartan 整数** (Cartan integer) と呼ぶ.

<sup>a</sup>  $\Delta$  は  $\mathbb{E}$  の基底なので Cartan 行列は  $\mathrm{GL}(l, \mathbb{Z})$  の元である.

定理 3.2.5-(2) および補題 3.1.2-(2) より, Cartan 行列は底  $\Delta$  の取り方によらずに定まる<sup>\*19</sup>!

### 命題 3.3.1: Cartan 行列によるルート系の特徴付け

- ランク  $l$  のルート系  $(\mathbb{E}, \Phi), (\mathbb{E}', \Phi')$
- $\Phi$  の底  $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$
- $\Phi'$  の底  $\Delta' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_l\}$

を与える. このとき以下の 2 つは同値である:

- (1)  $1 \leq \mu, \nu \leq l$  に対して  $[[\alpha_\mu, \alpha_\nu]] = [[\alpha'_\mu, \alpha'_\nu]]$
- (2) ルート系の同型写像

$$\phi: (\mathbb{E}, \Phi) \longrightarrow (\mathbb{E}', \Phi')$$

が存在する.

### 証明 (1) $\implies$ (2)

写像

$$\phi: \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}', \alpha_\mu \longmapsto \alpha'_\mu$$

がルート系の同型写像となることを示す. まず  $\Delta, \Delta'$  はそれぞれ  $\mathbb{E}, \mathbb{E}'$  の基底なので, 写像  $\phi: \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}'$  はベクトル空間の同型写像である.

次に, 仮定より

$$\begin{aligned} \phi \circ \sigma_{\alpha_\mu} \circ \phi^{-1}(\alpha'_\nu) &= \phi \circ \sigma_{\alpha_\mu}(\alpha_\nu) \\ &= \phi(\alpha_\nu - [[\alpha_\nu, \alpha_\mu]]\alpha_\mu) \\ &= \alpha'_\nu - [[\alpha'_\nu, \alpha'_\mu]]\alpha'_\mu \\ &= \sigma_{\alpha'_\mu}(\alpha'_\nu) \end{aligned}$$

<sup>\*19</sup> 単純ルートのラベル付けの任意性を除く.

が成り立つので  $\phi \circ \sigma_{\alpha_\mu} \circ \phi^{-1} = \sigma_{\alpha'_\mu}$  が言える.  $\mathcal{W}_{\mathbb{E}}(\Phi), \mathcal{W}_{\mathbb{E}'}(\Phi')$  はそれぞれ  $\{\sigma_{\alpha_\mu} \in \text{GL}(\mathbb{E}) \mid \alpha_\mu \in \Delta\}, \{\sigma_{\alpha'_\mu} \in \text{GL}(\mathbb{E}) \mid \alpha'_\mu \in \Delta'\}$  により生成されるので

$$\phi \circ \mathcal{W}_{\mathbb{E}}(\Phi) \circ \phi^{-1} = \mathcal{W}_{\mathbb{E}'}(\Phi')$$

だと分かった. よって定理 3.2.5-(3) より

$$\phi(\Phi) = \phi(\mathcal{W}_{\mathbb{E}}(\Phi) \blacktriangleright \Delta) = \phi \circ \mathcal{W}_{\mathbb{E}}(\Phi) \circ \phi^{-1} \circ \phi(\Delta) = \mathcal{W}_{\mathbb{E}'}(\Phi') \blacktriangleright \Delta' = \Phi'$$

が言えた.

(1)  $\iff$  (2)

ルート系の同型写像

$$\phi: (\mathbb{E}, \Phi) \longrightarrow (\mathbb{E}', \Phi')$$

が存在するとする. このとき  $\phi(\Delta)$  もまた  $\Phi'$  の底になるので, 補題 3.2.3-(1) よりある  $\sigma' \in \mathcal{W}_{\mathbb{E}'}(\Phi')$  が存在して  $\sigma'(\phi(\Delta)) = \Delta'$  を充たす. よって  $\phi$  を  $\sigma' \circ \phi$  に置き換えることで  $\phi(\Delta) = \Delta'$  であるとして良い. さらに  $\Delta, \Delta'$  の添字を付け替えることで  $\phi(\alpha_\mu) = \alpha'_\mu$  が成り立つとして良い. すると  $\phi$  がルート系の同型写像であることから

$$[\alpha'_\mu, \alpha'_\nu] = [\phi(\alpha_\mu), \phi(\alpha_\nu)] = [\alpha_\mu, \alpha_\nu]$$

が言える. ■

つまり, 任意のルート系はその Cartan 行列が与えられれば完全に<sup>\*20</sup>復元できる! 実際, 例えば次の手順に従えば良い [1, p.56]:

(1) 相異なる任意の単純ルート  $\alpha_\mu, \alpha_\nu \in \Delta$  をとってくる. すると補題 3.2.1 から

$$\max\{\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \alpha_\mu - \lambda\alpha_\nu \in \Phi\} = 0$$

なので, 命題 3.1.1-(4) から  $\alpha_\nu$ -string through  $\alpha_\mu$  は

$$\{\alpha_\mu + \lambda\alpha_\nu \mid 0 \leq \lambda \leq -[\alpha_\mu, \alpha_\nu]\} \subset \Phi$$

と求まる.

(2) (1) を全ての  $1 \leq \mu \neq \nu \leq l$  について繰り返せば, 高さ 2 のルート全体の集合  $\Phi_{\text{ht}=2} := \{\alpha \in \Phi \mid \text{ht } \alpha = 2\}$  が求まる. このとき  $\forall \alpha_\mu \in \Delta, \forall \alpha \in \Phi_{\text{ht}=2}$  に対して  $[\alpha, \alpha_\mu] \in \mathbb{Z}$  を計算しておく.

(3)  $\forall \alpha_\mu \in \Delta$  および  $\forall \alpha \in \Phi_{\text{ht}=2}$  に対して, 補題 3.2.1 から

$$r := \max\{\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \alpha - \lambda\alpha_\mu \in \Phi\} = 0, 1$$

である. よって  $\alpha_\mu$ -string through  $\alpha$  は (2) で計算しておいた  $[\alpha, \alpha_\mu] \in \mathbb{Z}$  を使って

$$\{\alpha + \lambda\alpha_\mu \mid -r \leq \lambda \leq r - (\alpha, \alpha_\mu)\} \subset \Phi$$

と求まる.

(4) (3) を全ての  $1 \leq \mu \neq \nu \leq l$  について繰り返せば, 高さ 3 のルート全体の集合  $\Phi_{\text{ht}=3} := \{\alpha \in \Phi \mid \text{ht } \alpha = 3\}$  が求まる. このとき  $\forall \alpha_\mu \in \Delta, \forall \alpha \in \Phi_{\text{ht}=3}$  に対して  $[\alpha, \alpha_\mu] \in \mathbb{Z}$  を計算しておく.

(5) 補題 3.2.4 より任意の正ルート  $\alpha$  は正ルートと単純ルートの和の形で書けるので, (1)-(4) までの手順を十分な回数繰り返せば全ての正ルートが得られる.

従って, ルート系を分類するには Cartain 行列としてあり得るものを全て列挙できれば十分である.

### 3.3.2 Coxeter グラフと Dynkin 図形

まず, Cartan 行列  $[[\alpha_\mu, \alpha_\nu]]_{1 \leq \mu, \nu \leq l}$  について

(CM-1)  $1 \leq \mu \leq l$  に対して

$$[[\alpha_\mu, \alpha_\mu]] = 2 \frac{(\alpha_\mu, \alpha_\mu)}{(\alpha_\mu, \alpha_\mu)} = 2$$

なので, 対角成分は常に 2 である.

(CM-2) 補題 3.2.1 より  $\forall 1 \leq \mu \neq \nu \leq l$  について

$$[[\alpha_\mu, \alpha_\nu]] \leq 0$$

なので, 非対角成分は常に非正である.

(CM-3) 表 3.1 より  $\forall 1 \leq \mu \neq \nu \leq l$  について

$$[[\alpha_\mu, \alpha_\nu]][[\alpha_\nu, \alpha_\mu]] = 0, 1, 2, 3$$

のいずれかである. とくに  $[[\alpha_\mu, \alpha_\nu]] = -1$  であるか  $[[\alpha_\nu, \alpha_\mu]] = -1$  であるかのどちらかである.

が即座にわかる. (CM-1) より, Cartan 行列を知りたいければその非対角成分を完全に決定できれば十分である.

#### 定義 3.3.2: Coxeter グラフと Dynkin 図形

ランク  $l$  のルート系  $\Phi$  の Cartan 行列  $[[\alpha_\mu, \alpha_\nu]]_{1 \leq \mu, \nu \leq l}$  を与える.  $\Phi$  の Dynkin 図形 (Dynkin diagram)  ${}^a\Gamma(\Phi)$  とは, 以下のデータからなる:

- $\forall \alpha_\mu \in \Delta$  に対して頂点

$$\Gamma(\alpha_\mu) := \underset{\mu}{\bullet}$$

を持つ. i.e.  $\Gamma(\Phi)$  は  $l$  個の頂点を持つ.

- $\forall \alpha_\mu, \alpha_\nu \in \Delta$  に対して辺集合

$$\Gamma(\alpha_\mu, \alpha_\nu) := \begin{cases} \emptyset, & \mu = \nu \text{ または } [[\alpha_\mu, \alpha_\nu]][[\alpha_\nu, \alpha_\mu]] = 0 \\ \{ \underset{\mu}{\bullet} \text{ --- } \underset{\nu}{\bullet} \}, & \mu \neq \nu \text{ かつ } [[\alpha_\mu, \alpha_\nu]][[\alpha_\nu, \alpha_\mu]] = 1 \\ \{ \underset{\mu}{\bullet} \text{ } \rightrightarrows \underset{\nu}{\bullet} \}, & \mu \neq \nu \text{ かつ } [[\alpha_\mu, \alpha_\nu]][[\alpha_\nu, \alpha_\mu]] = 2 \text{ かつ } \|\alpha_\nu\| < \|\alpha_\mu\| \\ \{ \underset{\mu}{\bullet} \text{ } \rightrightarrows \rightrightarrows \underset{\nu}{\bullet} \}, & \mu \neq \nu \text{ かつ } [[\alpha_\mu, \alpha_\nu]][[\alpha_\nu, \alpha_\mu]] = 3 \text{ かつ } \|\alpha_\nu\| < \|\alpha_\mu\| \end{cases}$$

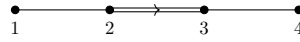
を持つ. i.e.  $\Gamma(\Phi)$  の辺集合に自己ループはなく, かつ  $\underset{\mu}{\bullet}$  と  $\underset{\nu}{\bullet}$  の間には  $[[\alpha_\mu, \alpha_\nu]][[\alpha_\nu, \alpha_\mu]]$  重

辺が存在する．特に  $n \geq 2$  重辺の場合， $\|\alpha_\nu\| < \|\alpha_\mu\|$  (resp.  $\|\alpha_\nu\| > \|\alpha_\mu\|$ ) ならば辺の上に右 (resp. 左) 向きの矢印が描かれる．

<sup>a</sup> [4, p.8] では “In fact, if we needed to make contact with an alien civilization and show them how sophisticated our civilization is, perhaps showing them Dynkin diagrams would be the best choice!” とまで言っている．実際，Dynkin 図形はルート系の分類以外にも様々な分類問題の文脈で登場する．例えば <https://ncatlab.org/nlab/show/ADE+classification> など．詳細は後の章で述べよう．

Dynkin 図形から矢印 (i.e. **単純ルートの長さに関する情報**) を取り除いたものを **Coxeter グラフ** (Coxeter graph) と呼ぶ．

与えられた Dynkin 図形から Cartan 行列を一意的に復元できる．例えば



(これは  $F_4$  と呼ばれるルート系を表す) に対応する Cartan 行列は

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

### 3.3.3 ルート系の既約成分

命題 3.2.1 より， $\Phi$  が**既約**であることと  $\Delta$  が互いに直交する 2 つの真部分集合の disjoint union に分解しないことは同値である．このことから，

$$\Phi \text{ が既約} \iff \text{対応する Dynkin 図形が連結}$$

である．

#### 命題 3.3.2:

任意のルート系  $(\mathbb{E}, \Phi)$  は**既約なルート系**  $\Phi_1, \dots, \Phi_t$  の disjoint union に分解し， $\mathbb{E}_i := \text{Span}_{\mathbb{R}} \Phi_i$  とおくと直交直和の意味で

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{E}_t$$

が成り立つ．

**証明**  $\Phi$  の底  $\Delta$  に対応する **Coxeter グラフ** が連結成分を  $t$  個持つとする．このとき Coxeter グラフの各連結成分に対応して  $\Delta = \Delta_1 \amalg \dots \amalg \Delta_t$  と分解すると Coxeter グラフの定義から  $i \neq j \implies (\Delta_i, \Delta_j) = 0$  である．よって  $\mathbb{E}_i := \text{Span}_{\mathbb{R}} \Delta_i$  とおくと直交直和の意味で  $\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{E}_t$  が成り立つ．さらに **ルート系の公理** を充たす  $\Phi_i \subset \text{Span}_{\mathbb{Z}} \Delta_i$  は明らかに  $\mathbb{E}_i$  のルート系になる． $\Phi_i$  の **Weyl 群**  $\mathcal{W}_{\mathbb{E}_i}(\Phi_i)$  は  $\{\sigma_\alpha \in \text{GL}(\mathbb{E}) \mid \alpha \in \Delta_i\}$  によって生成される  $\mathcal{W}_{\mathbb{E}}(\Phi)$  の部分群の定義域を  $\mathbb{E}_i$  に制限したものに等しい．さらに， $\alpha \notin \Delta_i \implies (\alpha, \Delta_i) = 0 \iff \Delta_i \subset P_\alpha \implies \sigma_\alpha|_{\mathbb{E}_i} = \text{id}_{\mathbb{E}_i}$  なので  $\mathbb{E}_i$  たちは  $\mathcal{W}_{\mathbb{E}}(\Phi)$ -不

変である．よって  $\forall \alpha \in \Phi$  に対して  $\sigma_\alpha(\mathbb{E}_i) = \mathbb{E}_i$  なので， $\alpha \in \mathbb{E}_i$  または  $\mathbb{E}_i \subset P_\alpha$  である．よってある  $1 \leq \exists i \leq t$  が存在して  $\alpha \in \Phi_i$  となる<sup>\*21</sup>．i.e.  $\Phi = \Phi_1 \amalg \cdots \amalg \Phi_t$  である． ■

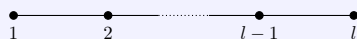
従って，既約なルート系  $\iff$  連結な Dynkin 図形を分類すれば十分である．

### 3.3.4 ルート系の分類定理

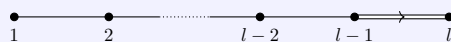
#### 定理 3.3.1: 既約なルート系の分類定理

ランク  $l$  の既約なルート系  $\Phi$  を与える．このとき  $\Phi$  の Dynkin 図形は以下のいずれかである：

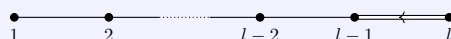
$A_l$  ( $l \geq 1$ ) 型:



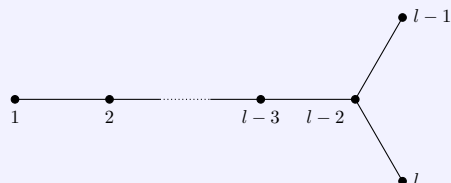
$B_l$  ( $l \geq 2$ ) 型:



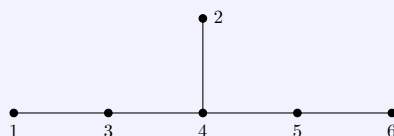
$C_l$  ( $l \geq 3$ ) 型:



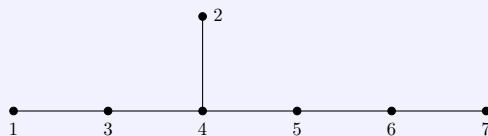
$D_l$  ( $l \geq 4$ ) 型:



$E_6$  型:

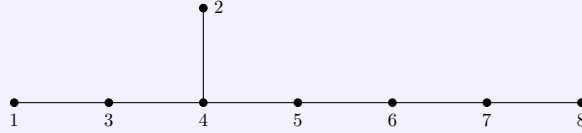


$E_7$  型:

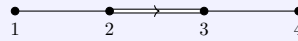


<sup>\*21</sup>  $1 \leq \forall i \leq t$  に対して  $\mathbb{E}_i \subset P_\alpha \iff (\alpha, \mathbb{E}_i) = 0$  だとすると  $\alpha \in (\mathbb{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{E}_t)^\perp = 0$  となって  $\alpha \in \Phi$  に矛盾．

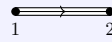
$E_8$  型:



$F_4$  型:



$G_2$  型:



証明 まずは可能な **Coxeter グラフ** を分類する.

- 任意次元の **Euclid 空間**  $(\mathbb{E}, (\cdot, \cdot))$
- 互いに線型独立な 単位ベクトル の集合  $\mathfrak{U} := \{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathbb{E}$  であって,  $1 \leq i \neq j \leq n$  に対して

$$(e_i, e_j) \leq 0 \text{ かつ } 4(e_i, e_j)^2 \in \{0, 1, 2, 3\}$$

を充たすもの (この条件を充たす  $\mathbb{E}$  の部分集合は **許容できる** (admissible) と言うことにする)

を与える. 任意の許容できる  $\mathfrak{U} \subset \mathbb{E}$  にグラフ  $\Gamma(\mathfrak{U})$  を割り当てる操作を次のように定義する:

- $\forall e_i \in \mathfrak{U}$  に対して頂点

$$\Gamma(e_i) = \bullet_i$$

を対応付ける

- $\forall e_i, e_j \in \mathfrak{U}$  に対して辺集合

$$\Gamma(e_i, e_j) = \begin{cases} \emptyset, & i = j \text{ または } 4(e_i, e_j)^2 = 0 \\ \{\bullet_i \text{ --- } \bullet_j\}, & i \neq j \text{ かつ } 4(e_i, e_j)^2 = 1 \\ \{\bullet_i \text{ === } \bullet_j\}, & i \neq j \text{ かつ } 4(e_i, e_j)^2 = 2 \\ \{\bullet_i \text{ \text{triple arrow} } \bullet_j\}, & i \neq j \text{ かつ } 4(e_i, e_j)^2 = 3 \end{cases}$$

を対応付ける **\*22**.

i.e.  $\Gamma(\mathfrak{U})$  の頂点集合は  $n$  点集合  $\{\bullet_1, \dots, \bullet_n\}$  であり,  $\Gamma(\mathfrak{U})$  の辺集合に自己ループはなく, かつ  $\bullet_i$  と  $\bullet_j$  の間には  $4(e_i, e_j)^2$  重辺が存在する.

---

**\*22**  $\left| \{\bullet_i \text{ --- } \bullet_j\} \right| = 1, \left| \{\bullet_i \text{ === } \bullet_j\} \right| = 2, \left| \{\bullet_i \text{ \text{triple arrow} } \bullet_j\} \right| = 3$  と言うことである.

**補題 3.3.1: step 1**

$\forall e_i \in \mathfrak{U}$  に対して,  $\mathfrak{U} \setminus \{e_i\}$  もまた許容できる.

証明 許容できることの定義から明らか. ■

**補題 3.3.2: step 2**

$$|\{(e_i, e_j) \in \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \mid i < j, \Gamma(e_i, e_j) \neq \emptyset\}| < n$$

証明  $e := \sum_{i=1}^n e_i$  とおく.  $e_i$  の線型独立性から  $e \neq 0$  が言える. よって

$$0 < (e, e) = n + \sum_{i < j} 2(e_i, e_j) \quad (3.3.1)$$

が成り立つ. さて,  $(e_i, e_j) \neq 0 \iff \Gamma(e_i, e_j) \neq \emptyset$  を充たす任意の  $1 \leq i < j \leq n$  をとる. すると,  $\mathfrak{U}$  が許容できるので  $2(e_i, e_j) \leq -1$  が成り立つ. よって不等式 (3.3.1) からこのような  $(i, j)$  の総数は  $n-1$  以下でなくてはならない. ■

**補題 3.3.3: step 3**

$\Gamma(\mathfrak{U})$  はサイクルを含まない.

証明 補題 3.3.1 より  $\mathfrak{U}$  の任意の空でない部分集合  $\mathfrak{C}$  もまた許容できるので, グラフ  $\Gamma(\mathfrak{C})$  が定まる. 今  $\{f_1, \dots, f_k\} := \mathfrak{C}$  とおき,  $\Gamma(\mathfrak{C})$  がサイクルになっている, i.e.

$$\Gamma(f_i, f_j) \begin{cases} \neq \emptyset, & |i - j| = 1 \text{ または } \{i, j\} = \{1, k\} \\ = \emptyset, & \text{otherwise} \end{cases}$$

であるとしよう. 然るにこのとき

$$|\{(f_i, f_j) \in \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \mid i < j, \Gamma(f_i, f_j) \neq \emptyset\}| = k$$

となり **step 2** に矛盾. ■

**補題 3.3.4: step 4**

$\forall e_i \in \mathfrak{U}$  に対して

$$\left| \bigcup_{e_j \in \mathfrak{U} \setminus \{e_i\}} \Gamma(e_i, e_j) \right| \leq 3$$

証明  $\forall e \in \mathfrak{U}$  をとり,  $\Gamma(e, e_j) \neq \emptyset$  を充たす  $e_j \in \mathfrak{U}$  全体の集合を  $\{f_1, \dots, f_k\} \subset \mathfrak{U}$  と書く. このとき  $1 \leq \forall j \leq k$  に対して  $(e, f_j) < 0$  が成り立つ. さらに補題 3.3.3 より  $\Gamma(f_i)$  たちは非連結なので  $1 \leq \forall i \neq j \leq k$  に対して  $(f_i, f_j) = 0$  が成り立つ. i.e.  $f_i$  たちは正規直交する.



$\mathfrak{U}$  は線型独立なので,  $\exists f_0 \in \text{Span}_{\mathbb{R}}\{e, f_1, \dots, f_k\} \cap (\text{Span}_{\mathbb{R}}\{f_1, \dots, f_k\})^\perp \setminus \{0\}$  である.  $f_0$  を適当に規格化して単位ベクトルにすることができる. すると  $f_0, \dots, f_k$  の正規直交性から  $e = \sum_{i=0}^k (e, f_i) f_i$  が成り立つので,

$$1 = (e, e) = \sum_{i=0}^k (e, f_i)^2 = (e, f_0)^2 + \sum_{i=1}^k (e, f_i)^2$$

が従い,  $f_0$  の定義から  $(e, f_0) \neq 0$  なので<sup>\*23</sup>

$$\sum_{i=1}^k 4(e, f_i)^2 < 4$$

でなくてはならない.  $4(e, f_i)^2 = |\Gamma(e, f_i)|$  なので左辺は  $\left| \bigcup_{e \in \mathfrak{U} \setminus \{e\}} \Gamma(e, e_j) \right|$  に等しい. ■

#### 補題 3.3.5: step 5

3 重辺を含む  $\Gamma(\mathfrak{U})$  としてあり得るのは



のみである.

証明 **step 4** より明らか. ■

#### 補題 3.3.6: step 6

部分集合  $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\} \subset \mathfrak{U}$  に対して

$$\Gamma(\{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\}) = \begin{array}{ccccccc} & \bullet & & \bullet & & \dots & \bullet & & \bullet \\ \Gamma(e_{i_1}) & & \Gamma(e_{i_2}) & & & & \Gamma(e_{i_{k-1}}) & & \Gamma(e_{i_k}) \end{array}$$

が成り立つならば, 集合

$$\mathfrak{U}' := (\mathfrak{U} \setminus \{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\}) \cup \left\{ \sum_{\mu=1}^k e_{i_\mu} \right\}$$

もまた許容できる.

証明 仮定より  $1 \leq \forall \mu < \nu \leq k$  に対して

$$2(e_{i_\mu}, e_{i_\nu}) = \begin{cases} -1, & \nu = \mu + 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つので,  $e := \sum_{\mu=1}^k e_{i_\mu}$  とおくと

$$(e, e) = k + \sum_{\mu < \nu} 2(e_{i_\mu}, e_{i_\nu}) = k - (k - 1) = 1$$

<sup>\*23</sup>  $(e, f_0) = 0$  だとすると  $f_0 \in \text{Span}\{e, f_1, \dots, f_k\} \cap (\text{Span}_{\mathbb{R}}\{e\})^\perp \cap (\text{Span}_{\mathbb{R}}\{f_1, \dots, f_k\})^\perp = \text{Span}\{e, f_1, \dots, f_k\} \cap (\text{Span}_{\mathbb{R}}\{e, f_1, \dots, f_k\})^\perp = 0$ , i.e.  $f_0 = 0$  となり矛盾.

だとわかる. i.e.  $e \in \mathfrak{U}'$  は単位ベクトルである. **step 3** より,  $\forall f \in \mathfrak{U}' \setminus \{e\}$  に対して  $\Gamma(f)$  は  $\Gamma(e_{i_1}), \dots, \Gamma(e_{i_k})$  の高々 1 つのみと連結になり得るので,  $(e, f) = 0$  であるか,  $1 \leq \exists! \mu \leq k, (e, f) = (e_{i_\mu}, f) \neq 0$  であるかのどちらかである. いずれの場合も  $4(e, f)^2 \in \{0, 1, 2, 3\}$  なので  $\mathfrak{U}'$  は許容できる. ■

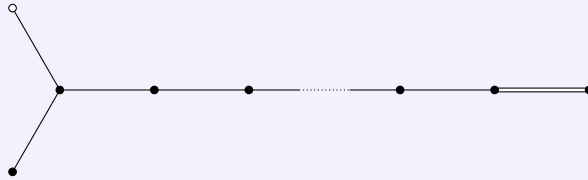
#### 補題 3.3.7: step 7

$\Gamma(\mathfrak{U})$  は以下の形をした部分グラフを含まない:

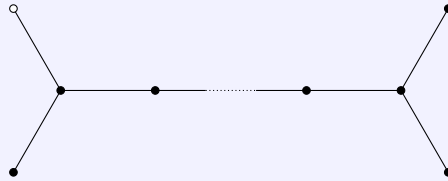
(1)



(2)



(3)

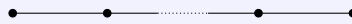


**証明**  $\Gamma(\mathfrak{U})$  が (1), (2), (3) の形をした部分グラフを含むとする. このとき **step 1**, **step 6** より 4 つの辺に繋がった頂点を持つグラフが許容されることになって **step 4** に矛盾. ■

#### 補題 3.3.8: step 8

連結なグラフ  $\Gamma(\mathfrak{U})$  としてあり得るのは以下の 4 つの形のみである:

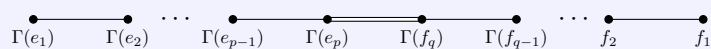
$A_n$



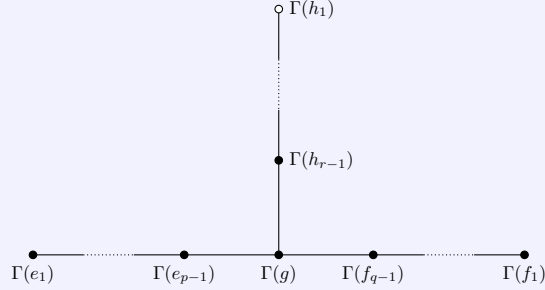
$G_2$



(1)

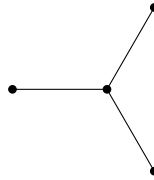


(2)



**証明** **step 5** より, 3 重辺を含む  $\Gamma(\mathcal{U})$  の形としてあり得るのは  $G_2$  のみである.

$\Gamma(\mathcal{U})$  が 2 重辺を 2 つ以上含む場合, **step 1** により **step 7**-(1) の形に帰着されてしまうので矛盾. よって  $\Gamma(\mathcal{U})$  は 2 重辺を高々 1 つしか含まない.  $\Gamma(\mathcal{U})$  が 2 重辺を 1 つ持つ場合, **step 1** により **step 7**-(2) の形に帰着されてしまうので



(3.3.2)

の形の部分グラフを持たない. よって (1) の形のみがあり得る.

$\Gamma(\mathcal{U})$  が 1 重辺しか持たないとする. **step 3** によりサイクルを持たないので, (3.3.2) の形をした部分グラフを含まないならばあり得る形は  $A_n$  のみである. **step 1** により **step 7**-(3) の形に帰着されてしまうので (3.3.2) の形をした部分グラフを 2 つ以上持つことはできない. よって (2) のみがあり得る. ■

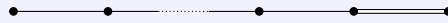
#### 補題 3.3.9: step 9

**step 8**-(1) の形としてあり得るのは

$F_4$



$B_n, C_n$



のみである.

**証明**  $e := \sum_{i=1}^p i e_i$ ,  $f := \sum_{j=1}^q j f_j$  とおく. 頂点へのラベルの付け方から  $1 \leq \forall i \leq p-1$ ,  $2(e_i, e_{i+1}) = -1$

かつ  $1 \leq \forall j \leq q-1, 2(f_j, f_{j+1}) = -1$  で、他の場合は  $(e_k, e_l) = (f_k, f_l) = 0$  になる。よって

$$(e, e) = \sum_{i=1}^p i^2 - \sum_{i=1}^{p-1} i(i+1) = \frac{p(p+1)}{2},$$

$$(f, f) = \sum_{j=1}^q j^2 - \sum_{j=1}^{q-1} j(j+1) = \frac{q(q+1)}{2}$$

が成り立つ。  $4(e_p, f_q)^2 = 2$  かつ  $1 \leq \forall i \leq p-1, 1 \leq \forall j \leq q-1, (e_i, f_j) = 0$  であるから

$$(e, f)^2 = p^2 q^2 (e_p, f_q)^2 = \frac{p^2 q^2}{2}$$

も成り立つ。従って、 $e, f$  は明らかに線型独立なので Cauchy-Schwartz の不等式から

$$(e, f)^2 < (e, e)(f, f) \iff \frac{p^2 q^2}{2} < \frac{p(p+1)q(q+1)}{4} \implies (p-1)(q-1) < 2$$

でなくてはいけない。よってあり得るのは

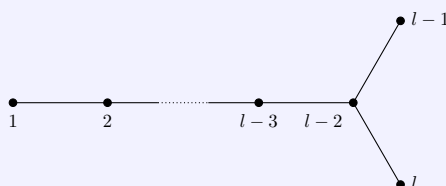
- $(p, q) = (2, 2)$  ( $F_4$  型)
- $(p, q) = (1, q), (p, 1)$  ( $B_n, C_n$  型)

のみである。 ■

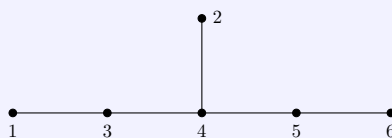
#### 補題 3.3.10: step 10

**step 8-(2)** の形としてあり得るのは

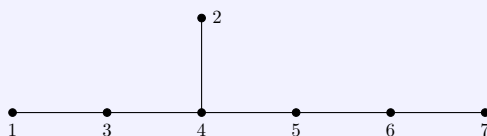
$D_n$



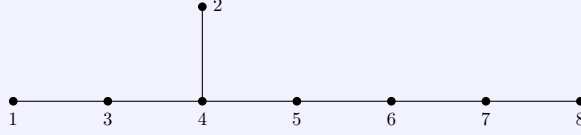
$E_6$



$E_7$



$E_8$



のみである.

**証明**  $e := \sum_{i=1}^{p-1} ie_i$ ,  $f := \sum_{j=1}^{q-1} jf_j$ ,  $h := \sum_{k=1}^{r-1} kh_k$  とおく.  $e, f, h$  は互いに直交し,  $\mathfrak{u}$  の元の線型独立性から  $g \notin \text{Span}_{\mathbb{R}}\{e, f, h\}$  である. このとき  $\exists g_0 \in \text{Span}_{\mathbb{R}}\{g, e, f, h\} \cap (\text{Span}_{\mathbb{R}}\{e, f, h\})^\perp \setminus \{0\}$  である.  $g_0, e, f, h$  の直交性から

$$g = \frac{(g, g_0)}{(g_0, g_0)}g_0 + \frac{(g, e)}{(e, e)}e + \frac{(g, f)}{(f, f)}f + \frac{(g, h)}{(h, h)}h$$

が成り立つので

$$1 = \frac{(g_0, g)^2}{(g_0, g_0)(g, g)} + \frac{(e, g)^2}{(e, e)(g, g)} + \frac{(f, g)^2}{(f, f)(g, g)} + \frac{(h, g)^2}{(h, h)(g, g)}$$

であり,  $g_0$  の定義から  $(g, g_0) \neq 0$  なので,  $\cos \theta_1 := \frac{(e, g)}{\|e\|\|g\|}$ ,  $\cos \theta_2 := \frac{(f, g)}{\|f\|\|g\|}$ ,  $\cos \theta_3 := \frac{(h, g)}{\|h\|\|g\|}$  について

$$\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_3 < 1 \quad (3.3.3)$$

が成り立つ. また, **step 9** の証明と全く同じ計算をすることで

$$(e, e) = \frac{p(p-1)}{2}, \quad (f, f) = \frac{q(q-1)}{2}, \quad (h, h) = \frac{r(r-1)}{2}$$

が言えるので

$$\cos^2 \theta_1 = \frac{(e, g)^2}{(e, e)(g, g)} = (p-1)^2 \frac{(e_{p-1}, g)^2}{(e, e)} = (p-1)^2 \frac{1/4}{p(p-1)/2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

が成り立つ<sup>\*24</sup>. 同様の計算により

$$\cos^2 \theta_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{q}\right), \quad \cos^2 \theta_3 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{r}\right)$$

が従い, 不等式 (3.3.3) は

$$1 < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \quad (3.3.4)$$

に帰着する. 頂点のラベルを適当に入れ替えることで  $1/p \leq 1/q \leq 1/r \leq 1/2$  が成り立つようにできる. すると, 不等式 (3.3.4) から  $1 < 3/r \leq 3/2$  であり,  $r = 2$  が確定する. このとき不等式 (3.3.4) から  $1/2 < 1/p + 1/q \leq 2/q \leq 1$  なので  $2 \leq q < 4$  だとわかる.  $q = 2$  ならば不等式 (3.3.4) は  $0 < 1/p$  となるので  $p$  は任意の自然数値を取り得る.  $q = 3$  ならば不等式 (3.3.4) より  $1/6 < 1/p \iff p < 6$  でなくてはならない. 纏めると,

<sup>\*24</sup>  $|\Gamma(e_{p-1}, g)| = 1$  なので  $(e_{p-1}, g)^2 = 1/4$  である.

- $(p, q, r) = (p, 2, 2)$  ( $D_n$  型)
- $(p, q, r) = (3, 3, 2)$  ( $E_6$ -型)
- $(p, q, r) = (4, 3, 2)$  ( $E_7$ -型)
- $(p, q, r) = (5, 3, 2)$  ( $E_8$ -型)

のみがあり得る. ■

これで Coxeter グラフの分類が完了した.  $B_l, C_l$  型以外の Dynkin 図形は, 対応する Coxeter グラフから頂点へのラベルの付け方の不定性を除いて一意に定まるので証明が完了した. ■

## 付録 A

# ベクトル空間の話

[1] が前提としていそうな線型代数の知識をまとめておく． $\mathbb{K}$  を任意の体とする．また，選択公理を認める．

### A.1 Hom ベクトル空間

#### 定義 A.1.1: Hom ベクトル空間

任意の  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間  $V, W \in \text{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$  を与える．このとき

- 台集合を

$$\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) := \{ f: V \longrightarrow W \mid \mathbb{K}\text{-線型写像} \}$$

とする．

- 加法とスカラー乗法を， $\forall f, f_1, f_2 \in \mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W), \forall \lambda \in \mathbb{K}$  について

$$f_1 + f_2: V \longrightarrow W, v \longmapsto f_1(v) + f_2(v)$$

$$\lambda f: V \longrightarrow W, v \longmapsto \lambda(f(v))$$

と定める．

ことで得られる  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間のことを  $\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$  と書く．

特に  $\mathbb{K}$  自身を  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間と見做したとき，

$$V^* := \mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$$

と書いて**双対ベクトル空間** (dual vector space) と呼ぶ．

特に有限次元  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間の場合は，双対ベクトル空間の基底が次のように構成される：

### 命題 A.1.1: 双対ベクトル空間の基底

有限次元  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間  $V$  とその基底  $\{e_\mu\}$  を与える. このとき  $\dim V$  個の線型写像  $\varepsilon^\mu \in V^*$  を

$$\varepsilon^\mu(e_\nu) := \delta_\nu^\mu$$

により定義すると,  $\{\varepsilon^\mu\}$  は  $V^*$  の基底になる.

## A.2 ベクトル空間のテンソル積

### A.2.1 普遍性による定義

$\mathbb{K}$ -ベクトル空間  $V, W, Z$  を与える. このとき写像  $f: V \times W \rightarrow Z$  が**双線型** (bilinear) であるとは, 2 つの引数についてそれぞれ<sup>\*1</sup>  $\mathbb{K}$ -線型であることを言う. i.e.  $\forall v, v_1, v_2 \in V, \forall w, w_1, w_2 \in W, \forall \lambda \in \mathbb{K}$  に対して

$$\begin{aligned} f(v_1 + v_2, w) &= f(v_1, w) + f(v_2, w) \\ f(v, w_1 + w_2) &= f(v, w_1) + f(v, w_2) \\ f(\lambda v, w) &= \lambda f(v, w) \\ f(v, \lambda w) &= \lambda f(v, w) \end{aligned}$$

が成り立つこと. 同様に  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間  $V_1, \dots, V_n, W$  に関して, 写像  $f: V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$  が**多重線型** (multilinear) であるとは, 全ての引数についてそれぞれ  $\mathbb{K}$ -線型であることを言う.

### 定義 A.2.1: ベクトル空間のテンソル積

$\mathbb{K}$  を任意の体とし,  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間  $V, W$  を与える.

- $\mathbb{K}$ -ベクトル空間  $V \otimes W$
- 双線型写像  $\Phi: V \times W \rightarrow V \otimes W$

の2つ組  $(V \otimes W, \Phi)$  が  $V, W$  の**テンソル積** (tensor product) であるとは, 以下の性質を満たすことをいう:

#### (テンソル積の普遍性)

任意の  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間  $Z$  および任意の双線型写像  $f: V \times W \rightarrow Z$  に対して, 以下の図式を可換にする線型写像  $\bar{f}: V \otimes W \rightarrow Z$  が一意に存在する:

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{f} & Z \\ \Phi \downarrow & \nearrow \exists! \bar{f} & \\ V \otimes W & & \end{array}$$

<sup>\*1</sup> つまり, **直積ベクトル空間**  $V \times W$  から  $Z$  への線型写像ではない.



テンソル積をとる操作は結合的かつ対称である. i.e.  $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \cong (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$  および  $V_1 \otimes V_2 \cong V_2 \otimes V_1$  が成り立つ. 従って以降では3つ以上のベクトル空間のテンソル積を括弧を省略して書く.

**命題 A.2.1: テンソル積の一意性**

**テンソル積**は, 存在すればベクトル空間の同型を除いて一意である.

**証明**  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間  $V, W \in \text{Ob}(\text{Vec}_{\mathbb{K}})$  を与える. 体  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間と双線型写像の組  $(T, \Phi: V \times W \rightarrow T)$  および  $(T', \Phi': V \times W \rightarrow T')$  がどちらも  $V, W$  の**テンソル積**であるとする. このとき**テンソル積の普遍性**から  $\text{Vec}_{\mathbb{K}}$  の可換図式

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\Phi'} & T' \\ \downarrow \Phi & \searrow \exists! u & \\ T & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\Phi} & T \\ \downarrow \Phi' & \searrow \exists! u' & \\ T' & & \end{array}$$

が成り立つので, これらの図式を併せた  $\text{Vec}_{\mathbb{K}}$  の可換図式

$$\begin{array}{ccc} & & T \\ & \nearrow \Phi & \\ V \times W & \xrightarrow{\Phi'} & T' \\ & \searrow \Phi & \\ & & T \end{array}$$

(赤点線:  $\exists! u'$  (上),  $\exists! u$  (下))

が存在する. 然るに  $\text{Vec}_{\mathbb{K}}$  の可換図式

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\Phi} & T \\ \downarrow \Phi & \searrow \text{id}_T & \\ T & & \end{array}$$

も成り立ち, **テンソル積の普遍性**より赤点線で書いた線型写像は一意でなくてはならないので,

$$u' \circ u = \text{id}_T$$

がわかる. 同様の議論から

$$u \circ u' = \text{id}_{T'}$$

も従うので, 線型写像  $u: T \rightarrow T', u': T' \rightarrow T$  は互いに逆写像, i.e. 同型写像である. ■

命題 A.2.1 からテンソル積の一意性が言えたが, そもそもテンソル積が存在しなければ意味がない. そこで, 体  $\mathbb{K}$  上の任意のベクトル空間  $V, W \in \text{Ob}(\text{Vec}_{\mathbb{K}})$  を素材にして**テンソル積**  $(V \otimes W, \Phi: V \times W \rightarrow V \otimes W)$  を具体的に構成してみよう.

$\mathbb{K} \in \text{Ob}(\text{Vec}_{\mathbb{K}})$  なので, 任意の集合  $S$  に対して**ベクトル空間の直和**

$$\mathbb{K}^{\oplus S} \in \text{Ob}(\text{Vec}_{\mathbb{K}})$$

を考えることができる． $\mathbb{K}^{\oplus S}$  の元  $f$  とは，命題 A.3.4 からわかるように有限個の元  $x_1, \dots, x_n \in S$  を除いた全ての  $x \in S$  に対して値  $0 \in \mathbb{K}$  を返すような  $\mathbb{K}$  値関数  $f: S \rightarrow \mathbb{K}$  のことである

ところで， $\forall x \in S$  に対して次のような関数  $\delta_x \in \mathbb{K}^{\oplus S}$  が存在する：

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}$$

この  $\delta_x$  を  $x$  そのものと同一視してしまうことで，先述の  $f \in \mathbb{K}^{\oplus(V \times W)}$  は

$$f = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \quad \text{w/ } \lambda_i := f(x_i) \in \mathbb{K}$$

の形に一意的に書ける．<sup>\*2</sup> この意味で， $\mathbb{K}^{\oplus(V \times W)}$  は  $V \times W$  の元の形式的な  $\mathbb{K}$  係数線形結合全体がなす  $\mathbb{K}$  ベクトル空間とすることができ，集合  $V \times W$  上の自由ベクトル空間と呼ばれる．自由加群の特別な場合と言っても良い．自由ベクトル空間は次の普遍性によって特徴づけられる：

#### 補題 A.2.1: 自由ベクトル空間の普遍性

任意の集合  $S$  および任意の  $\mathbb{K}$  ベクトル空間  $Z \in \text{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$  を与える．包含写像

$$\iota: S \rightarrow \mathbb{K}^{\oplus S}, x \mapsto \delta_x$$

を考える．このとき，任意の写像  $f: S \rightarrow Z$  に対して線型写像  $u: \mathbb{K}^{\oplus S} \rightarrow Z$  が一意的に存在して，図式 A.2 を可換にする：

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & Z \\ \downarrow \iota & \searrow \exists! u & \\ \mathbb{K}^{\oplus S} & & \end{array}$$

図 A.2: 自由ベクトル空間の普遍性

証明 写像

$$u: \mathbb{K}^{\oplus S} \rightarrow Z, \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{x_i} \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

は右辺が有限和なので well-defined であり， $\forall x \in S$  に対して  $u(\iota(x)) = f(x)$  を満たす．

別の線型写像  $g: \mathbb{K}^{\oplus S} \rightarrow Z$  が  $g \circ \iota = f$  を満たすとする．このとき  $\forall x \in S$  に対して  $g(\delta_x) = f(x)$  であるから， $\forall v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{x_i} \in \mathbb{K}^{\oplus S}$  に対して

$$g(v) = g\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{x_i}\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i g(\delta_{x_i}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) = u(v)$$

<sup>\*2</sup> というのも，このように書けば  $\forall y \in S$  に対して

$$f(y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{x_i}(y) = \begin{cases} f(x_i), & y = x_i \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

が言えるので．特に，この式の中辺は  $\mathbb{K}$  の元の有限和なので意味を持つ．

が言える． よって  $g = u$  である． ■

さて、自由加群の普遍性の図式とテンソル積の普遍性の図式はとても似ているので、 $V \otimes W \in \text{Ob}(\text{Vec}_{\mathbb{K}})$  の候補として  $\mathbb{K}^{\oplus(V \times W)}$  を考えてみる． しかしそのままでは  $\iota: V \times W \rightarrow \mathbb{K}^{\oplus(V \times W)}$  が双線型写像になってくれる保証はない． そこで、

$$\begin{aligned}\iota(\lambda v, w) &\sim \lambda \iota(v, w), \\ \iota(v, \lambda w) &\sim \lambda \iota(v, w), \\ \iota(v_1 + v_2, w) &\sim \iota(v_1, w) + \iota(v_2, w), \\ \iota(v, w_1 + w_2) &\sim \iota(v, w_1) + \iota(v, w_2)\end{aligned}$$

を満たすような上手い同値関係による商ベクトル空間を構成する．

#### 命題 A.2.2: テンソル積の構成

$\mathbb{K}^{\oplus(V \times W)}$  の部分集合

$$\begin{aligned}S_1 &:= \{ \iota(\lambda v, w) - \lambda \iota(v, w) \mid \forall v \in V, \forall w \in W, \forall \lambda \in \mathbb{K} \}, \\ S_2 &:= \{ \iota(v, \lambda w) - \lambda \iota(v, w) \mid \forall v \in V, \forall w \in W, \forall \lambda \in \mathbb{K} \}, \\ S_3 &:= \{ \iota(v_1 + v_2, w) - \iota(v_1, w) - \iota(v_2, w) \mid \forall v_1, \forall v_2 \in V, \forall w \in W, \forall \lambda \in \mathbb{K} \}, \\ S_4 &:= \{ \iota(v, w_1 + w_2) - \iota(v, w_1) - \iota(v, w_2) \mid \forall v \in V, \forall w_1, w_2 \in W, \forall \lambda \in \mathbb{K} \}\end{aligned}$$

の和集合  $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$  が生成する  $\mathbb{K}$  ベクトル空間<sup>a</sup>を  $\mathcal{R}$  と書き、商ベクトル空間  $\mathbb{K}^{\oplus(V \times W)} / \mathcal{R}$  の商写像を

$$\pi: \mathbb{K}^{\oplus(V \times W)} \rightarrow \mathbb{K}^{\oplus(V \times W)} / \mathcal{R}, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i \iota(v_i, w_i) \mapsto \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \iota(v_i, w_i) \right) + \mathcal{R}$$

と書き、 $v \otimes w := \pi(\iota(v, w))$  とおく． このとき、

- $\mathbb{K}$  ベクトル空間  $\mathbb{K}^{\oplus(V \times W)} / \mathcal{R}$
- 写像  $\Phi = \pi \circ \iota: V \times W \rightarrow \mathbb{K}^{\oplus(V \times W)} / \mathcal{R}, (v, w) \mapsto v \otimes w$

の組は  $V, W$  のテンソル積である．

<sup>a</sup> これらの元の形式的な  $\mathbb{K}$  係数線型結合全体が成すベクトル空間のこと．

**証明** まず、 $\Phi$  が双線型写像であることを示す． 商ベクトル空間の和とスカラー乗法の定義から

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda v, w) &= \iota(v, w) + \mathcal{R} = (\lambda \iota(v, w) + \iota(\lambda v, w) - \lambda \iota(v, w)) + \mathcal{R} \\ &= \lambda \iota(v, w) + \mathcal{R} = \lambda (\iota(v, w) + \mathcal{R}) = \lambda \Phi(v, w) \\ \Phi(v_1 + v_2, w) &= \iota(v_1 + v_2, w) + \mathcal{R} = (\iota(v_1, w) + \iota(v_2, w) + \iota(v_1 + v_2, w) - \iota(v_1, w) - \iota(v_2, w)) + \mathcal{R} \\ &= (\iota(v_1, w) + \iota(v_2, w)) + \mathcal{R} = (\iota(v_1, w) + \mathcal{R}) + (\iota(v_2, w) + \mathcal{R}) \\ &= \Phi(v_1, w) + \Phi(v_2, w)\end{aligned}$$

が言える． 第 2 引数に関しても同様であり、 $\Phi$  は双線型写像である．

次に、上述の構成がテンソル積の普遍性を満たすことを示す。  $\forall Z \in \text{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$  と任意の双線型写像  $f: V \times W \longrightarrow Z$  を与える。自由ベクトル空間の普遍性から  $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$  の可換図式

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{f} & Z \\ \downarrow \iota & \nearrow \exists! \bar{f} & \\ \mathbb{K}^{\oplus(V \times W)} & & \end{array}$$

が存在する。  $f$  が双線型なので、

$$\begin{aligned} \bar{f}(\iota(\lambda v, w)) &= f(\lambda v, w) = \lambda f(v, w) \\ &= \lambda \bar{f}(\iota(v, w)) = \bar{f}(\lambda \iota(v, w)), \\ \bar{f}(\iota(v_1 + v_2, w)) &= f(v_1 + v_2, w) = f(v_1, w) + f(v_2, w) \\ &= \bar{f}(\iota(v_1, w)) + \bar{f}(\iota(v_2, w)) = \bar{f}(\iota(v_1, w) + \iota(v_2, w)) \end{aligned}$$

が成り立つ。第2引数についても同様なので、  $\mathcal{R} \subset \text{Ker } \bar{f}$  である。よって準同型定理から  $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$  の可換図式

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{f} & Z \\ \downarrow \iota & \nearrow \exists! \bar{f} & \\ \mathbb{K}^{\oplus(V \times W)} & \nearrow \exists! u & \\ \downarrow \pi & & \\ \mathbb{K}^{\oplus(V \times W)} / \mathcal{R} & & \end{array}$$

が存在する。この図式の外周部はテンソル積の普遍性の図式である。 ■

### A.2.2 多重線型写像とテンソル積

任意の  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間<sup>\*3</sup>  $V_1, \dots, V_n, W \in \text{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$  に対して、集合

$$L(V_1, \dots, V_n; W) := \{ F: V_1 \times \dots \times V_n \longrightarrow W \mid F \text{ は多重線型写像} \}$$

を考える。  $L(V_1, \dots, V_n; W)$  の上の加法とスカラー乗法を  $\forall v_i \in V_i, \forall \lambda \in \mathbb{K}$  に対して

$$\begin{aligned} (F + G)(v_1, \dots, v_n) &:= F(v_1, \dots, v_n) + G(v_1, \dots, v_n), \\ (\lambda F)(v_1, \dots, v_n) &:= \lambda(F(v_1, \dots, v_n)) \end{aligned}$$

と定義すると  $L(V_1, \dots, V_n; W)$  は  $\mathbb{K}$  ベクトル空間になる。特に、Hom の定義から  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間の等式として

$$L(V; W) = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$$

が成り立つ。テンソル積の普遍性はこの等式を多重線型写像について一般化するものである。

---

<sup>\*3</sup> 有限次元でなくても良い。

**命題 A.2.3: 多重線型写像とテンソル積**

任意の  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間  $V_1, \dots, V_n, W \in \text{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$  に対して,  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間として

$$L(V_1, \dots, V_n; W) \cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1 \otimes \dots \otimes V_n, W)$$

が成り立つ.

**証明** テンソル積の普遍性から,  $\mathbb{K}$ -線型写像

$$\alpha: \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1 \otimes \dots \otimes V_n, W) \longrightarrow L(V_1, \dots, V_n; W), f \longmapsto f \circ \Phi$$

は全単射, i.e.  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間の同型写像である. ■

### A.2.3 有限次元ベクトル空間のテンソル積

**命題 A.2.4: 有限次元テンソル積の基底**

有限次元  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間  $V, W$  ( $\dim V =: n, \dim W =: m$ ) を与える.  $V, W$  の基底をそれぞれ  $\{e_1, \dots, e_n\}, \{f_1, \dots, f_m\}$  と書く. このとき, 集合

$$\mathcal{E} := \{e_\mu \otimes f_\nu \mid 1 \leq \mu \leq n, 1 \leq \nu \leq m\}$$

は  $V \otimes W$  の基底である. 従って  $\dim V \otimes W = nm$  である.

**証明** テンソル積の構成から,  $\forall t \in V \otimes W$  は有限個の  $(v_i, w_i) \in V \times W$  ( $i = 1, \dots, l$ ) を使って

$$t = \left( \sum_{i=1}^l t_i t(v_i, w_i) \right) = \sum_{i=1}^l t_i v_i \otimes w_i$$

と書ける.  $v_i = v_i^\mu e_\mu, w_i = w_i^\nu f_\nu$  のように展開することで,

$$\begin{aligned} t &= \sum_{i=1}^l t_i (v_i^\mu e_\mu) \otimes (w_i^\nu f_\nu) \\ &= \sum_{i=1}^l t_i v_i^\mu w_i^\nu e_\mu \otimes f_\nu \end{aligned}$$

と書ける. ただし添字  $\mu, \nu$  に関しては Einstein の規約を適用した. 従って  $\mathcal{E}$  は  $V \otimes W$  を生成する.

$\mathcal{E}$  の元が線型独立であることを示す.

$$t^{\mu\nu} e_\mu \otimes e_\nu = 0$$

を仮定する.  $\{e_\mu\}, \{f_\mu\}$  の双対基底をそれぞれ  $\{\varepsilon^\mu\}, \{\eta^\nu\}$  と書き, 全ての添字の組み合わせ  $(\mu, \nu) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$  に対して双線型写像

$$\tau^{\mu\nu}: V \times W \longrightarrow \mathbb{R}, (v, w) \longmapsto \varepsilon^\mu(v) \eta^\nu(w)$$

を定める.  $\tau^{\mu\nu}$  は双線型なのでテンソル積の普遍性から  $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$  の可換図式

$$\begin{array}{ccc}
V \times W & \xrightarrow{\tau^{\mu\nu}} & \mathbb{R} \\
\downarrow \pi \circ \iota & \nearrow \exists! \bar{\tau}^{\mu\nu} & \\
V \otimes W & & 
\end{array}$$

が存在する．このことは，

$$\begin{aligned}
0 &= \bar{\tau}^{\mu\nu}(t^{\rho\sigma}e_\rho \otimes f_\sigma) \\
&= t^{\rho\sigma}(\bar{\tau}^{\mu\nu} \circ \pi \circ \iota)(e_\rho, f_\sigma) \\
&= t^{\rho\sigma}\tau^{\mu\nu}(e_\rho, f_\sigma) = t^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

を意味する．従って  $\mathcal{E}$  の元は線型独立である． ■

これでもまだ直接の計算には向かない．より具体的な構成を探そう． $\forall \omega_i \in V_i^*$  に対して， $\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_n$  と書かれる  $L(V_1, \dots, V_n; \mathbb{K})$  の元を

$$\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_n: V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow \mathbb{K}, (v_1, \dots, v_n) \longmapsto \prod_{i=1}^n \omega_i(v_i)$$

によって定義する．ただし右辺の総積記号は  $\mathbb{K}$  の積についてとる．

#### 命題 A.2.5:

有限次元  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間  $V, W$  ( $\dim V =: n, \dim W =: m$ ) の基底をそれぞれ  $\{e_\mu\}, \{f_\nu\}$  と書き，その双対基底をそれぞれ  $\{\varepsilon^\mu\}, \{\eta^\nu\}$  と書く．このとき，集合

$$\mathcal{B} := \{ \varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu \mid 1 \leq \mu \leq n, 1 \leq \nu \leq m \}$$

は  $L(V, W; \mathbb{K})$  の基底である．従って  $\dim L(V, W; \mathbb{K}) = nm$  である．

証明  $\forall F \in L(V, W; \mathbb{K})$  を1つとり，全ての添字の組み合わせ  $(\mu, \nu)$  に対して

$$F_{\mu\nu} := F(e_\mu, f_\nu)$$

とおく． $\forall (v, w) \in V \times W$  を  $v = v^\mu e_\mu, w = w^\nu f_\nu$  と展開すると，

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu} \varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu(v, w) &= F_{\mu\nu} \varepsilon^\mu(v) \eta^\nu(w) \\
&= F_{\mu\nu} v^\mu w^\nu
\end{aligned}$$

が成り立つ．一方，双線型性から

$$F(v, w) = v^\mu w^\nu F(e_\mu, f_\nu) = F_{\mu\nu} v^\mu w^\nu$$

も成り立つので  $F = F_{\mu\nu} \varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu$  が言えた．i.e. 集合  $\mathcal{B}$  は  $L(V, W; \mathbb{K})$  を生成する．

次に， $\mathcal{B}$  の元が線型独立であることを示す．

$$F_{\mu\nu} \varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu = 0$$

を仮定する．全ての添字の組み合わせについて， $(e_\mu, f_\nu)$  に左辺を作用させることで， $F_{\mu\nu} = 0$  が従う．i.e.  $\mathcal{B}$  の元は互いに線型独立である． ■

**命題 A.2.6: テンソル積の構成その 2**

任意の有限次元  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間  $V, W$  に対して

$$L(V, W; \mathbb{K}) \cong V^* \otimes W^*$$

命題 A.2.3 より, これは



$$L(V, W; \mathbb{K}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V \otimes W, \mathbb{K}) = (V \otimes W)^* \cong V^* \otimes W^*$$

と同値である.

**証明** 写像

$$\begin{aligned} \Phi: V^* \times W^* &\longrightarrow L(V, W; \mathbb{K}), \\ (\omega, \eta) &\longmapsto ((v, w) \longmapsto \omega(v)\eta(w)) \end{aligned}$$

は双線型写像なのでテンソル積の普遍性から  $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$  の可換図式

$$\begin{array}{ccc} V^* \times W^* & \xrightarrow{\Phi} & L(V, W; \mathbb{K}) \\ \pi \circ \iota \downarrow & \nearrow \exists! \bar{\Phi} & \\ V^* \otimes W^* & & \end{array}$$

が存在する.  $V, W$  ( $\dim V = n, \dim W = m$ ) の基底をそれぞれ  $\{e_{\mu}\}, \{f_{\nu}\}$  と書き, その双対基底をそれぞれ  $\{\varepsilon^{\mu}\}, \{\eta^{\nu}\}$  と書く. 命題 A.2.4 より  $V^* \otimes W^*$  の基底として

$$\mathcal{E} := \{ \varepsilon^{\mu} \otimes \eta^{\nu} \mid 1 \leq \mu \leq n, 1 \leq \nu \leq m \}$$

がとれ, 命題 A.2.5 より  $L(V, W; \mathbb{K})$  の基底として

$$\mathcal{B} := \{ \varepsilon^{\mu} \otimes \eta^{\nu} \mid 1 \leq \mu \leq n, 1 \leq \nu \leq m \}$$

がとれる (記号が同じだが, 違う定義である). このとき,  $\forall (v, w) \in V \times W$  に対して

$$\bar{\Phi}(\varepsilon^{\mu} \otimes \eta^{\nu})(v, w) = \bar{\Phi} \circ \pi \circ \iota(\varepsilon^{\mu}, \eta^{\nu})(v, w) = \Phi(\varepsilon^{\mu}, \eta^{\nu})(v, w) = \varepsilon^{\mu}(v)\eta^{\nu}(w) = \varepsilon^{\mu} \otimes \eta^{\nu}(v, w)$$

が成り立つ (ただし, 左辺の  $\otimes$  は命題 A.2.2, 右辺は命題 A.2.5 で定義したものである) ので,  $\bar{\Phi}$  は  $\mathcal{E}$  の元と  $\mathcal{B}$  の元の 1 対 1 対応を与える. i.e. 同型写像である. ■

**命題 A.2.7: テンソル積と Hom の同型**

任意の有限次元  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間  $V, W$  に対して

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \cong V^* \otimes W$$

**証明** 写像

$$\begin{aligned} \Phi: V^* \times W &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W), \\ (\omega, w) &\longmapsto (v \longmapsto \omega(v)w) \end{aligned}$$

は双線型なので, テンソル積の普遍性から  $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$  の可換図式

$$\begin{array}{ccc}
V^* \times W & \xrightarrow{\Phi} & \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \\
\pi \circ \iota \downarrow & \nearrow \exists! \overline{\Phi} & \\
V^* \otimes W & & 
\end{array}$$

が存在する.  $V, W$  ( $\dim V = n, \dim W = m$ ) の基底をそれぞれ  $\{e_\mu\}, \{f_\nu\}$  と書き, その双対基底をそれぞれ  $\{\varepsilon^\mu\}, \{\eta^\mu\}$  と書く. 命題 A.2.4 より  $V^* \otimes W$  の基底として

$$\mathcal{E} := \{ \varepsilon^\mu \otimes f_\nu \mid 1 \leq \mu \leq n, 1 \leq \nu \leq m \}$$

がとれる. 一方,  $\forall \omega \in V^*, \forall w \in W$  に対して

$$\omega \otimes w := \Phi(\omega, w): V \longrightarrow W, v \longmapsto \omega(v)w \quad (\text{A.2.1})$$

とおくと  $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$  の基底として

$$\mathcal{B} := \{ \varepsilon^\mu \otimes f_\nu \mid 1 \leq \mu \leq n, 1 \leq \nu \leq m \}$$

がとれる<sup>\*4</sup> (記号が同じだが,  $\mathcal{E}$  とは違う定義である). このとき,  $\forall v \in V$  に対して

$$\overline{\Phi}(\varepsilon^\mu \otimes f_\nu)(v) = \overline{\Phi} \circ \pi \circ \iota(\varepsilon^\mu, f_\nu)(v) = \Phi(\varepsilon^\mu, f_\nu)(v) = \varepsilon^\mu(v)f_\nu = \varepsilon^\mu \otimes f_\nu(v)$$

が成り立つ (ただし, 左辺の  $\otimes$  は命題 A.2.2, 右辺は (A.2.1) で定義したものである) ので,  $\overline{\Phi}$  は  $\mathcal{E}$  の元と  $\mathcal{B}$  の元の 1 対 1 対応を与える. i.e. 同型写像である. ■

#### 系 A.2.1:

任意の有限次元  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間  $V_1, \dots, V_n, W$  に対して

$$L(V_1, \dots, V_n; W) \cong V_1^* \otimes \cdots \otimes V_n^* \otimes W$$

**証明** 命題 A.2.3 および命題 A.2.6, A.2.7 から

$$\begin{aligned}
L(V_1, \dots, V_n; W) &\cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, W) \\
&\cong (V_1 \otimes \cdots \otimes V_n)^* \otimes W \\
&\cong V_1^* \otimes \cdots \otimes V_n^* \otimes W
\end{aligned}$$

を得る. ■

<sup>\*4</sup>  $\forall F \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$  をとる.  $F_\mu{}^\nu := \eta^\nu(F(e_\mu))$  とおく. このとき  $\forall v = v^\mu e_\mu \in V$  に対して

$$F_\mu{}^\nu \varepsilon^\mu \otimes f_\nu(v) = F_\mu{}^\nu \varepsilon^\mu(v) f_\nu = F_\mu{}^\nu v^\mu f_\nu$$

一方で, 線形性および双対基底の定義から

$$F(v) = v^\mu F(e_\mu) = v^\mu \eta^\nu(F(e_\mu)) f_\nu = v^\mu F_\mu{}^\nu f_\nu$$

が成り立つので  $F = F_\mu{}^\nu \varepsilon^\mu \otimes f_\nu$  が言えた. i.e.  $\mathcal{B}$  は  $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$  を生成する.

次に,  $\mathcal{B}$  の元が線型独立であることを示す.

$$F_\mu{}^\nu \varepsilon^\mu \otimes f_\nu = 0$$

を仮定する.  $1 \leq \forall \mu \leq \dim V$  について右辺を  $e_\mu$  に作用させることで  $F_\mu{}^\nu f_\nu = 0$  が従うが,  $f_\nu$  の線型独立性から  $F_\mu{}^\nu = 0$  である.



### 系 A.2.2: Tensor-Hom adjunction

任意の有限次元  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間  $V, W, Z$  に対して,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V \otimes W, Z) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W, Z))$$

**証明** 命題 A.2.6, A.2.7 およびテンソル積の結合則より

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V \otimes W, Z) &\cong (V \otimes W)^* \otimes Z \\ &\cong V^* \otimes W^* \otimes Z \\ &\cong V^* \otimes (W^* \otimes Z) \\ &\cong V^* \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W, Z) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W, Z)) \end{aligned}$$

! 系 A.2.2 は, 有限次元ベクトル空間の圏が閉圏 (closed category) であることを意味する.

## A.3 ベクトル空間の直積・直和

### A.3.1 普遍性による定義

$A$  を集合とする. 集合  $I$  を添字集合 (index set) とする  $A$  の元の族 (family) とは, 写像  $a: I \rightarrow A$  のことを言う.  $\forall i \in I$  に対して  $a_i := a(i)$  と略記し, 写像  $a: I \rightarrow A$  自身のことを  $(a_i)_{i \in I}$  や  $\{a_i\}_{i \in I}$  と略記する. 集合族  $\{A_i\}_{i \in I}$  の直積 (Cartesian product) とは, 写像の集合

$$\prod_{i \in I} A_i := \left\{ a: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \mid \forall i \in I, a(i) \in A_i \right\}$$

のこと. 集合族の直積について定まる自然な全射

$$\pi_i: \prod_{j \in I} A_j \rightarrow A_i, a \mapsto a(i)$$

のことを標準的射影 (canonical projection) と呼ぶ. 族としての略記を使うと, 直積は

$$\prod_{i \in I} A_i = \left\{ (a_i)_{i \in I} \mid \forall i \in I, a_i \in A_i \right\}$$

と書くことができる. 選択公理を認めたので空でない集合族の直積は空でない.

#### 定義 A.3.1: 直積・直和-普遍性による定義

添字集合  $I$ , および  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間の族  $\{V_i\}_{i \in I}$  を与える.

- (1)
  - $\mathbb{K}$ -ベクトル空間  $P$
  - $\mathbb{K}$ -線型写像の族  $\{\pi_i: P \rightarrow V_i\}_{i \in I}$

の2つ組が  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間の族  $\{V_i\}_{i \in I}$  の直積 (product) であるとは、以下の性質を満たすことを言う：

**(ベクトル空間の直積の普遍性)**

$\forall W \in \text{Ob}(\text{Vec}_{\mathbb{K}})$  および任意の  $\mathbb{K}$ -線型写像の族  $\{f_i: W \rightarrow V_i\}_{i \in I}$  に対して、以下の図式を可換にする  $\mathbb{K}$ -線型写像  $f: W \rightarrow P$  が一意的に存在する：

$$\begin{array}{ccc} \forall W & & \\ \text{\color{red} $\exists! f$} \downarrow & \searrow f_i & \\ P & \xrightarrow{\pi_i} & V_i \end{array}$$

- (2) •  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間  $S$   
 •  $\mathbb{K}$ -線型写像の族  $\{\iota_i: V_i \rightarrow S\}_{i \in I}$

の2つ組が  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間の族  $\{V_i\}_{i \in I}$  の直和 (direct sum) であるとは、以下の性質を満たすことを言う：

**(ベクトル空間の直和の普遍性)**

$\forall W \in \text{Ob}(\text{Vec}_{\mathbb{K}})$  および任意の  $\mathbb{K}$ -線型写像の族  $\{f_i: V_i \rightarrow W\}_{i \in I}$  に対して、以下の図式を可換にする  $\mathbb{K}$ -線型写像  $f: S \rightarrow W$  が一意的に存在する：

$$\begin{array}{ccc} \forall W & & \\ \text{\color{red} $\exists! f$} \uparrow & \nwarrow f_i & \\ S & \xleftarrow{\iota_i} & V_i \end{array}$$

**命題 A.3.1:**

ベクトル空間の直和・直積は、存在すれば同型を除いて一意である。

証明 テンソル積の場合と全く同様。 ■

**命題 A.3.2: ベクトル空間の直和・直積の構成**

添字集合  $I$ 、および  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間の族  $\{V_i\}_{i \in I}$  を与える。

- (1) • 集合族の直積  $\prod_{i \in I} V_i$  の上に加法とスカラー乗法を

$$\begin{aligned} (v_i)_{i \in I} + (w_i)_{i \in I} &:= (v_i + w_i)_{i \in I} \\ \lambda(v_i)_{i \in I} &:= (\lambda v_i)_{i \in I} \end{aligned}$$

と定義することで得られる  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間  $\prod_{i \in I} V_i$

- $\forall i \in I$  に対して定まる  $\mathbb{K}$ -線型写像<sup>a</sup>

$$\pi_i: \prod_{j \in I} V_j \rightarrow V_i, (v_j)_{j \in I} \mapsto v_i$$

の2つ組は  $\{V_i\}_{i \in I}$  の直積である。

(2) • 集合族の直積  $\prod_{i \in I} V_i$  の部分集合

$$\bigoplus_{i \in I} V_i := \left\{ (v_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} V_i \mid \begin{array}{l} \text{有限個の添字を除いた全ての } j \in I \\ \text{について } v_j = 0 \in V_j \end{array} \right\}$$

の上に加法とスカラー乗法を

$$\begin{aligned} (v_i)_{i \in I} + (w_i)_{i \in I} &:= (v_i + w_i)_{i \in I} \\ \lambda(v_i)_{i \in I} &:= (\lambda v_i)_{i \in I} \end{aligned}$$

と定義することで得られる  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間  $\bigoplus_{i \in I} V_i$

•  $\forall i \in I$  に対して定まる  $\mathbb{K}$ -線型写像<sup>b</sup>

$$\begin{aligned} \iota_i: V_i &\longrightarrow \bigoplus_{j \in I} V_j, \quad v \longmapsto (y_j)_{j \in I} \\ w/ \quad y_j &= \begin{cases} v, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases} \end{aligned}$$

の2つ組は  $\{V_i\}_{i \in I}$  の直和である.

<sup>a</sup> 集合  $\prod_{i \in I} V_i$  に入れたベクトル空間の構造の定義から, 自動的に  $\pi_i$  は  $\mathbb{K}$ -線型写像になる.

<sup>b</sup> 集合  $\bigoplus_{i \in I} V_i$  に入れたベクトル空間の構造の定義から, 自動的に  $\iota_i$  は  $\mathbb{K}$ -線型写像になる.

! 構成から明らかに, 添字集合  $I$  が有限集合ならベクトル空間の直積と直和は同型である.

#### 証明 (1) $f$ の存在

任意の  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間  $W$  および任意の  $\mathbb{K}$ -線型写像の族  $\{f_\lambda: N \rightarrow M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  を与える. このとき写像  $f$  を

$$f: W \longrightarrow \prod_{i \in I} V_i, \quad w \longmapsto (f_i(w))_{i \in I}$$

と定義すると,  $f$  は  $\prod_{i \in I} V_i$  の  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間としての構造の定義から自動的に  $\mathbb{K}$ -線型写像になり,  $\forall i \in I$  および  $\forall w \in W$  に対して

$$(\pi_i \circ f)(w) = f_i(w)$$

が成り立つ. i.e. 直積の普遍性の可換図式が成り立つ.

#### $f$ の一意性

直積の普遍性の可換図式を充たす別の  $\mathbb{K}$ -線型写像  $g: W \rightarrow \prod_{i \in I} V_i$  が存在したとする. このとき

$\forall i \in I$  および  $\forall w \in W$  に対して

$$\pi_i(g(w)) = f_i(w) = \pi_i(f(w))$$

が成り立つので  $f = g$  が言える. i.e.  $f$  は一意である.

#### (2) $f$ の存在

任意の  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間  $W$  および任意の  $\mathbb{K}$ -線型写像の族  $\{f_i: M_i \rightarrow N\}_{i \in I}$  が与えられたとき、写像  $f$  を

$$f: \bigoplus_{i \in I} V_i \rightarrow W, (v_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} f_i(v_i)$$

と定義する。右辺は有限和なので意味を持ち、 $f$  は  $\bigoplus_{i \in I} V_i$  の  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間としての構造の定義から自動的に  $\mathbb{K}$ -線型写像になる。このとき  $\forall i \in I$  および  $\forall v \in V_i$  に対して

$$f(\iota_i(v)) = f_i(v) + \sum_{j \in I \setminus \{i\}} f_j(0) = f_i(v)$$

が成り立つ。i.e. 直和の普遍性の可換図式が成り立つ。

$f$  の一意性

直和の普遍性の可換図式を充たす別の  $\mathbb{K}$ -線型写像  $g: \bigoplus_{i \in I} V_i \rightarrow W$  が存在したとする。このとき

$\forall (v_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} V_i$  に対して

$$g((v_i)_{i \in I}) = g\left(\sum_{i \in I} \iota_i(v_i)\right) = \sum_{i \in I} g(\iota_i(v_i)) = \sum_{i \in I} f_i(v_i) = f((v_i)_{i \in I})$$

が成り立つので  $f = g$  が言える。i.e.  $f$  は一意である。

■

### 命題 A.3.3: Hom と直積・直和の交換

任意の  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間  $W$ ，添字集合  $I$ ，および  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間の族  $\{V_i\}_{i \in I}$  を与える。このとき以下の2つの  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間の同型が成り立つ：

(1)

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(W, \prod_{i \in I} V_i\right) \cong \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W, V_i)$$

(2)

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(\bigoplus_{i \in I} V_i, W\right) \cong \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V_i, W)$$

証明 (1) 直積の普遍性より、 $\mathbb{K}$ -線型写像

$$\alpha: \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(W, \prod_{i \in I} V_i\right) \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W, V_i), f \longmapsto (\pi_i \circ f)_{i \in I}$$

は全単射である。

(2) 直和の普遍性より、 $\mathbb{K}$ -線型写像

$$\beta: \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(\bigoplus_{i \in I} V_i, W\right) \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V_i, W), f \longmapsto (f \circ \iota_i)_{i \in I}$$

は全単射である。

■

命題 A.3.3 の同型は、 $\mathbb{K}$ -ベクトル空間の圏  $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$  における（圏論的）極限、余極限に関する同型

!

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W, \lim_{i \in I} V_i) &\cong \lim_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W, V_i) \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathrm{colim}_{i \in I} V_i, W) &\cong \lim_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V_i, W)\end{aligned}$$

の一例である。

### A.3.2 部分ベクトル空間の直和

$\mathbb{K}$ -ベクトル空間  $V$  の部分ベクトル空間の族  $\{W_i\}_{i \in I}$  の和空間とは、 $V$  の部分  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間

$$\sum_{i \in I} W_i := \left\{ \sum_{i \in I} w_i \in V \mid \forall i \in I, w_i \in W_i \text{ かつ, 有限個の添字を除いた全ての } j \in I \text{ について } w_j = 0 \in W_j \right\}$$

のこと。集合  $\bigcup_{i \in I} W_i$  が生成する（張る）部分  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間と言っても良い。

#### 命題 A.3.4: 部分ベクトル空間の直和

$\mathbb{K}$ -ベクトル空間  $V$  の部分ベクトル空間の族  $\{W_i\}_{i \in I}$  が

$$\forall i \in I, W_i \cap \left( \sum_{j \in I \setminus \{i\}} W_j \right) = 0 \quad (\text{A.3.1})$$

を充たすとする。このとき

- 和空間  $\sum_{i \in I} W_i$
- $\forall i \in I$  に対して定まる  $\mathbb{K}$ -線型写像

$$\iota_i: W_i \longrightarrow \sum_{j \in I} W_j, w \longmapsto w$$

の2つ組は  $\{W_i\}_{i \in I}$  の直和である。

**証明**  $\forall w \in \sum_{i \in I} W_i$  を1つとる。まず、条件 (A.3.1) が充たされているならば  $w = w_{i_1} + \cdots + w_{i_n}$  ( $1 \leq k \leq n, w_{i_k} \in W_{i_k}$ ) と書く方法が一意的に定まることを示す。 $w = w_{i_1} + \cdots + w_{i_n} = w'_{j_1} + \cdots + w'_{j_m}$  が成り立つと仮定する。 $A := \{i_1, \dots, i_n\} \cup \{j_1, \dots, j_m\} \subset I$  とおき、 $\forall r \in A \setminus \{i_1, \dots, i_n\}$  に対しては  $w_r = 0$ ,  $\forall s \in A \setminus \{j_1, \dots, j_m\}$  に対しては  $w'_s = 0$  とおくことで

$$w = \sum_{r \in A} w_r = \sum_{r \in A} w'_r \in \sum_{i \in I} W_i$$

と書ける\*5。このとき  $\forall r \in A$  について

$$w_r - w'_r = \sum_{s \in A \setminus \{r\}} (w'_s - w_s) \in W_r \cap \left( \sum_{s \in A \setminus \{r\}} W_s \right)$$

\*5  $\#A \leq n + m < \infty$  なので左辺は有限和である。

が言えるが、条件 (A.3.1) より左辺は 0 である. i.e.  $\forall r \in A$  に対して  $w_r = w'_r$  が言えた.

次に直和の普遍性を示す. 任意の  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間  $W$  および  $\mathbb{K}$ -線型写像の族  $\{f_i: V_i \rightarrow W\}_{i \in I}$  を与える. このとき  $\mathbb{K}$ -線型写像

$$f: \sum_{i \in I} W_i \rightarrow W, \sum_{i \in I} w_i \mapsto \sum_{i \in I} f_i(w_i)$$

は先程の議論から well-defined であり<sup>\*6</sup>, かつ  $\forall i \in I, \forall w \in W_i$  に対して

$$f(w) = f_i(w) = f_i \circ \iota_i(w)$$

を充たす. i.e.  $\forall i \in I$  に対して図式

$$\begin{array}{ccc} & \forall W & \\ \uparrow \exists! f & \swarrow f_i & \\ \sum_{i \in I} W_i & \xleftarrow{\iota_i} & W_i \end{array}$$

は可換である. 別の  $\mathbb{K}$ -線型写像  $g: \sum_{i \in I} W_i \rightarrow W$  がこの図式を可換にするならば, 線型性から  $\forall w = \sum_{i \in I} w_i \in \sum_{i \in I} W_i$  に対して

$$g(w) = g\left(\sum_{i \in I} w_i\right) = \sum_{i \in I} g(w_i) = \sum_{i \in I} g \circ \iota_i(w_i) = \sum_{i \in I} f_i(w_i) = f(w)$$

が言える. i.e.  $g = f$  であり,  $f$  は一意である. ■

#### 系 A.3.1: 内部直和

$\mathbb{K}$ -ベクトル空間  $V$  の部分ベクトル空間の族  $\{W_i\}_{i \in I}$  が

$$\forall i \in I, W_i \cap \left(\sum_{j \in I \setminus \{i\}} W_j\right) = 0$$

を充たすとする. このとき

$$\sum_{i \in I} W_i \cong \bigoplus_{i \in I} W_i$$

が成り立つ. ただし右辺は命題 A.3.2 で構成したベクトル空間の直和である.

! 結局同型ではあるのだが, 系 A.3.1 において  $\sum_{i \in I} W_i$  と  $\bigoplus_{i \in I} W_i$  を区別するときは, 前者を内部直和 (internal direct sum), 後者を外部直和 (external direct sum) と呼ぶ.

証明 命題 A.3.1 より従う. ■

<sup>\*6</sup> 右辺は有限和なので意味を持つ.

## A.4 階数・退化次数の定理

### A.4.1 有限次元の場合

$V, W$  を有限次元  $\mathbb{K}$  ベクトル空間とし、線型写像  $T: V \rightarrow W$  を与える。  $V, W$  の基底  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{\dim V}\}, \{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{\dim W}\}$  をとり、

$$T(\mathbf{e}_\mu) = T^\nu_\mu \mathbf{f}_\nu$$

のように左辺を展開したときに得られる行列

$$\begin{bmatrix} T^1_1 & \cdots & T^1_{\dim V} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T^{\dim W}_1 & \cdots & T^{\dim W}_{\dim V} \end{bmatrix}$$

は基底  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{\dim V}\}, \{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{\dim W}\}$  に関する  $T$  の表現行列と呼ばれる。  $\forall \mathbf{v} = v^\nu \mathbf{e}_\nu \in V$  に対して

$$T(\mathbf{v}) = T(v^\nu \mathbf{e}_\nu) = v^\nu T(\mathbf{e}_\nu) = v^\nu T^\mu_\nu \mathbf{f}_\mu$$

と書けるので、成分表示だけを見ると  $T$  はその表現行列を左から掛けることに相当する：

$$\begin{bmatrix} T^1_1 & \cdots & T^1_{\dim V} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T^{\dim W}_1 & \cdots & T^{\dim W}_{\dim V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^{\dim V} \end{bmatrix}$$

#### 定義 A.4.1: 線型写像の階数

$\text{Im } T$  の次元のことを  $T$  の階数 (rank) と呼び、 $\text{rank } T$  と書く。

#### 命題 A.4.1: 表現行列の標準形

$V, W$  を有限次元ベクトル空間とし、任意の線型写像  $T: V \rightarrow W$  を与える。このとき  $V, W$  の基底であって、 $T$  の表現行列を

$$\begin{bmatrix} I_{\text{rank } T} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

の形にするものが存在する。

**証明**  $\text{Im } T$  の基底  $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{\text{rank } T}\}$  および  $\text{Ker } T$  の基底  $\{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{\dim(\text{Ker } T)}\}$  を勝手にとる。像の定義から、 $1 \leq \mu \leq \text{rank } T$  に対して  $\mathbf{e}_\mu \in V$  が存在して  $\mathbf{f}_\mu = T(\mathbf{e}_\mu)$  を充たす。

まず  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{\text{rank } T}, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{\dim(\text{Ker } T)}$  が  $V$  の基底を成すことを示す。

線型独立性

$$\sum_{\mu=1}^{\text{rank } T} a^\mu \mathbf{e}_\mu + \sum_{\nu=1}^{\dim(\text{Ker } T)} b^\nu \mathbf{k}_\nu = 0$$

を仮定する．左辺に  $T$  を作用させることで

$$\sum_{\mu=1}^{\text{rank } T} a^\mu \mathbf{f}_\mu = 0$$

がわかるが,  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{\text{rank } T}$  は  $\text{Im } T$  の基底なので線型独立であり,  $1 \leq \forall \mu \leq \text{rank } T$  に対して  $a_\mu = 0$  と言える．故に仮定から

$$\sum_{\nu=1}^{\dim(\text{Ker } T)} b^\nu \mathbf{k}_\nu = 0$$

であるが,  $\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{\dim(\text{Ker } T)}$  は  $\text{Ker } T$  の基底なので線型独立であり,  $1 \leq \forall \nu \leq \dim(\text{Ker } T)$  に対して  $b_\nu = 0$  と言える．i.e.  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{\text{rank } T}, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{\dim(\text{Ker } T)}$  は線型独立である．

$V$  を生成すること  $\forall \mathbf{v} \in V$  を 1 つとる．このとき  $T(\mathbf{v}) \in \text{Im } T$  なので

$$T(\mathbf{v}) = \sum_{\mu=1}^{\text{rank } T} v^\mu \mathbf{f}_\mu$$

と展開できる．ここで  $\mathbf{w} := \sum_{\mu=1}^{\text{rank } T} v^\mu \mathbf{e}_\mu \in V$  とおくと,  $T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{w})$  が成り立つが,  $T$  が線型写像であることから  $T(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = 0 \iff \mathbf{v} - \mathbf{w} \in \text{Ker } T$  が言えて

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \sum_{\nu=1}^{\dim(\text{Ker } T)} w^\nu \mathbf{k}_\nu$$

と展開できる．従って

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \sum_{\mu=1}^{\text{rank } T} v^\mu \mathbf{e}_\mu + \sum_{\nu=1}^{\dim(\text{Ker } T)} w^\nu \mathbf{k}_\nu$$

であり,  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{\text{rank } T}, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{\dim(\text{Ker } T)}$  は  $V$  を生成する．

$\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{\text{rank } T}$  と線型独立な  $\dim W - \text{rank } T$  個のベクトル  $\tilde{\mathbf{f}}_{\text{rank } T+1}, \dots, \tilde{\mathbf{f}}_{\dim W}$  をとると,

- $V$  の基底  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{\text{rank } T}, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{\dim(\text{Ker } T)}\}$
- $W$  の基底  $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{\text{rank } T}, \tilde{\mathbf{f}}_{\text{rank } T+1}, \dots, \tilde{\mathbf{f}}_{\dim W}\}$

に関する  $T$  の表現行列は

$$\begin{bmatrix} I_{\text{rank } T} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

になる． ■

#### 系 A.4.1: 階数・退化次数の定理 (有限次元)

$V, W$  を有限次元ベクトル空間とし, 任意の線型写像  $T: V \longrightarrow W$  を与える．このとき

$$\dim V = \dim(\text{Im } T) + \dim(\text{Ker } T)$$

が成り立つ．



**証明** 命題 A.4.1 の証明より従う. ■

系 A.4.1 から便利な補題がいくつか従う:

**補題 A.4.1: 有限次元ベクトル空間に関する小定理集**

$V, W$  を有限次元ベクトル空間とし, 任意の線型写像  $T: V \rightarrow W$  を与える. このとき以下が成り立つ:

- (1)  $\text{rank } T \leq \dim V$ . 特に  $\text{rank } T = \dim V \iff T$  は単射
- (2)  $\text{rank } T \leq \dim W$ . 特に  $\text{rank } T = \dim W \iff T$  は全射
- (3)  $\dim V = \dim W$  かつ  $T$  が単射  $\implies T$  は同型写像
- (4)  $\dim V = \dim W$  かつ  $T$  が全射  $\implies T$  は同型写像

**証明** (1) 系 A.4.1 より

$$\dim V = \text{rank } T + \dim(\text{Ker } T) \geq \text{rank } T$$

が成り立つ. 特に命題??から  $T$  が単射  $\iff \text{Ker } T = 0 \iff \dim(\text{Ker } T) = 0 \iff \text{rank } T = \dim V$  が従う.

- (2) **rank の定義**より  $\text{rank } T \leq \dim W$  は明らか. 特に次元の等しい有限次元ベクトル空間は同型なので,  $T$  が全射  $\iff \text{Im } T \cong W \iff \dim(\text{Im } T) = \text{rank } T = \dim W$  が言える.
- (3)  $\dim V = \dim W$  かつ  $T$  が単射とする.  $T$  が単射なので (1) より  $\text{rank } T = \dim V = \dim W$  が従い, (2) より  $T$  は全射でもある.
- (4)  $\dim V = \dim W$  かつ  $T$  が全射とする.  $T$  が全射なので (2) より  $\text{rank } T = \dim W = \dim V$  が従い, (1) より  $T$  は単射でもある. ■

## A.4.2 分裂補題と射影的加群

実は, 系 A.4.1 は有限次元でなくとも成り立つ. それどころか, 左  $R$  加群の場合の**分裂補題**に一般化される.

**補題 A.4.2: 分裂補題**

左  $R$  加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i_1} M \xrightarrow{p_2} M_2 \longrightarrow 0 \quad (\text{A.4.1})$$

が与えられたとする. このとき, 以下の二つは同値である:

- (1) 左  $R$  加群の準同型  $i_2: M_2 \rightarrow M$  であって  $p_2 \circ i_2 = 1_{M_2}$  を満たすものが存在する
- (2) 左  $R$  加群の準同型  $p_1: M \rightarrow M_1$  であって  $p_1 \circ i_1 = 1_{M_1}$  を満たすものが存在する

証明 (1)  $\implies$  (2) 写像

$$p'_1: M \longrightarrow M, x \longmapsto x - i_2(p_2(x))$$

を定義すると,

$$p_2(p'_1(x)) = p_2(x) - ((p_2 \circ i_2) \circ p_2)(x) = p_2(x) - p_2(x) = 0$$

が成り立つ. 従って, (A.4.1) が完全列であることを使うと  $p'_1(x) \in \text{Ker } p_2 = \text{Im } i_1$  である. さらに  $i_1$  が単射であることから

$$\exists! y \in M_1, p'_1(x) = i_1(y)$$

が成り立つ. ここで写像

$$p_1: M \longrightarrow M_1, x \longmapsto y$$

を定義するとこれは準同型写像であり,  $\forall x \in M_1$  に対して

$$p'_1(i_1(x)) = i_1(x) - (i_2 \circ (p_2 \circ i_1))(x) = i_1(x)$$

が成り立つ<sup>\*7</sup> ことから

$$(p_1 \circ i_1)(x) = x$$

とわかる. i.e.  $p_1 \circ i_1 = 1_{M_1}$

(1)  $\Longleftarrow$  (2) (A.4.1) は完全列であるから  $M_2 = \text{Ker } 0 = \text{Im } p_2$  である. 従って  $\forall x \in M_2 = \text{Im } p_2$  に対して,  $x = p_2(y)$  を充たす  $y \in M$  が存在する. ここで写像

$$i_2: M_2 \longrightarrow M, x \longmapsto y - i_1(p_1(y))$$

は well-defined である.  $x = p_2(y')$  を充たす勝手な元  $y' \in M$  をとってきたとき,  $p_2(y - y') = 0$  より  $y - y' \in \text{Ker } p_2 = \text{Im } i_1$  だから,  $i_1$  の単射性から

$$\exists! z \in M_1, y - y' = i_1(z)$$

が成り立ち, このとき

$$(y - i_1(p_1(y))) - (y' - i_1(p_1(y')))) = i_1(z) - (i_1 \circ (p_1 \circ i_1))(z) = i_1(z) - i_1(z) = 0$$

とわかるからである.  $i_2$  は準同型写像であり,  $\forall x \in M_2$  に対して

$$(p_2 \circ i_2)(x) = p_2(y) - ((p_2 \circ i_1) \circ p_1)(y) = p_2(y) = x$$

なので  $p_2 \circ i_2 = 1_{M_2}$ .

■

---

<sup>\*7</sup> (A.4.1) が完全列であるため,  $p_2 \circ i_1 = 0$

系 A.4.2:

左  $R$  加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i_1} M \xrightarrow{p_2} M_2 \longrightarrow 0$$

が補題 A.4.2 の条件を満たすならば

$$M \cong M_1 \oplus M_2$$

**証明** 補題 A.4.2 の条件 (1) が満たされているとする. このとき補題 A.4.2 証明から  $\forall x \in M$  に対して

$$i_1(p_1(x)) = p'_1(x) = x - i_2(p_2(x)) \iff i_1(p_1(x)) + i_2(p_2(x)) = x$$

また, 完全列の定義から  $p_2(i_1(x)) = 0$  であるから  $\forall x \in M_2$  に対して

$$p'_1(i_2(x)) = i_2(x) - ((i_2 \circ p_2) \circ i_2)(x) = 0 = i_1(0)$$

であり, 結局  $p_1(i_2(x)) = 0$  とわかる.

ここで準同型写像

$$\begin{aligned} f: M_1 \oplus M_2 &\longrightarrow M, (x, y) \longmapsto i_1(x) + i_2(y), \\ g: M &\longrightarrow M_1 \oplus M_2, x \longmapsto (p_1(x), p_2(x)) \end{aligned}$$

を定めると

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x, y) &= (p_1(i_1(x)) + p_1(i_2(y)), p_2(i_1(x)) + p_2(i_2(y))) = (x, y), \\ (f \circ g)(x) &= i_1(p_1(x)) + i_2(p_2(x)) = x \end{aligned}$$

なので  $f, g$  は同型写像. ■

**定義 A.4.2: 分裂**

左  $R$  加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i_1} M \xrightarrow{p_2} M_2 \longrightarrow 0$$

が**分裂** (split) するとは, 補題 A.4.2 の条件を満たすことをいう.

**定義 A.4.3: 射影的加群**

左  $R$  加群  $P$  が**射影的加群** (projective module) であるとは, 任意の左  $R$  加群の**全射準同型**  $f: M \longrightarrow N$  および任意の準同型写像  $g: P \longrightarrow N$  に対し, 左  $R$  加群の準同型写像  $h: P \longrightarrow M$  であって  $f \circ h = g$  を満たすものが存在することを言う (図式 A.3).

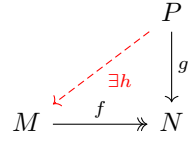


図 A.3: 射影的加群

**命題 A.4.2:**

左  $R$  加群の完全列

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

は,  $N$  が射影的加群ならば分裂する.

**証明** 射影的加群の定義において  $P = N$  とすることで, 左  $R$  加群の準同型写像  $s: N \longrightarrow M$  であって  $g \circ s = 1_N$  を満たすものが存在する. ■

**命題 A.4.3: 射影的加群の直和**

左  $R$  加群の族  $\{P_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  に対して以下の 2 つは同値:

- (1)  $\forall \lambda \in \Lambda$  に対して  $P_\lambda$  が射影的加群
- (2)  $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda$  が射影的加群

**証明** 標準的包含を  $\iota_\lambda: P_\lambda \hookrightarrow \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda$  と書く.

**(1)  $\implies$  (2)** 仮定より,  $\forall \lambda \in \Lambda$  に対して, 任意の全射準同型写像  $f: M \longrightarrow N$  および任意の準同型写像  $g: \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda \longrightarrow N$  に対して, 準同型写像  $h_\lambda: P_\lambda \longrightarrow M$  であって  $f \circ h_\lambda = g \circ \iota_\lambda$  を満たすものが存在する. 従って直和の普遍性より準同型写像

$$h: \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda \longrightarrow M$$

であって  $f \circ h_\lambda = h \circ \iota_\lambda$  を満たすものが一意的に存在する. このとき

$$(f \circ h) \circ \iota_\lambda = f \circ h_\lambda = g \circ \iota_\lambda$$

であるから,  $h$  の一意性から  $f \circ h = g$ .

**(1)  $\impliedby$  (2)**  $\lambda \in \Lambda$  を一つ固定し, 任意の全射準同型写像  $f: M \longrightarrow N$  および任意の準同型写像  $g: P_\lambda \longrightarrow M$  を与える. 直和の普遍性より準同型写像

$$h: \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda \longrightarrow N$$

であって  $h \circ \iota_\lambda = g$  ( $\forall \mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}, h \circ \iota_\mu = 0$ ) を満たすものが一意的に存在する. さらに仮定より, 準同型写像

$$\alpha: \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda \longrightarrow M$$

であって  $f \circ \alpha = h$  を満たすものが存在する. このとき

$$f \circ (\alpha \circ \iota_\lambda) = h \circ \iota_\lambda = g$$

なので  $\beta := h \circ \iota_\lambda$  とおけば良い. ■

#### 系 A.4.3: 自由加群は射影的加群

環  $R$  上の自由加群は射影的加群である

**証明**  $R$  が射影的加群であることを示せば命題 A.4.3 より従う.

左  $R$  加群の全射準同型写像と準同型写像  $f: M \rightarrow N$ ,  $g: R \rightarrow N$  を任意に与える. このときある  $x \in M$  が存在して  $f(x) = g(1)$  となる. この  $x$  に対して準同型写像  $h: R \rightarrow M$ ,  $a \mapsto ax$  を定めると,  $\forall a \in R$  に対して

$$f(h(a)) = f(ax) = af(x) = ag(1) = g(a)$$

が成り立つので  $f \circ h = g$  となる. ■

$V, W$  を任意の (有限次元とは限らない)  $\mathbb{K}$  ベクトル空間,  $T: V \rightarrow W$  を任意の線型写像とする.

$$\begin{aligned} i_1: \text{Ker } T &\rightarrow V, v \mapsto v, \\ p_2: V &\rightarrow \text{Im } T, v \mapsto T(v), \end{aligned}$$

と定めると,  $i_1$  は単射,  $p_2$  は全射で, かつ  $p_2 \circ i_1 = 0$  が成り立つ. よって  $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$  の図式

$$0 \rightarrow \text{Ker } T \xrightarrow{i_1} V \xrightarrow{p_2} \text{Im } T \rightarrow 0 \quad (\text{A.4.2})$$

は短完全列だが,  $\text{Im } T$  はベクトル空間なので自由加群であり, 系 A.4.3 より射影的加群でもある. 従って命題 A.4.2 より短完全列 (A.4.2) は分裂し, 系 A.4.2 から

$$V \cong \text{Im } T \oplus \text{Ker } T$$

と言える.

#### 定理 A.4.4: 階数・退化次数の定理

$V, W$  をベクトル空間とし, 任意の線型写像  $T: V \rightarrow W$  を与える. このとき

$$\dim V = \dim(\text{Im } T) + \dim(\text{Ker } T)$$

が成り立つ.

## A.5 Jordan 標準形

この節では体  $\mathbb{K}$  は代数閉体であるとし,  $V$  を有限次元  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間とする.

### 定義 A.5.1: 広義固有空間

$x \in \text{End } V$  を与える.  $\forall \lambda \in \mathbb{K}$  に対して

$$V(\lambda) := \text{Ker}(x - \lambda \text{id}_V) = \{v \in V \mid (x - \lambda \text{id}_V)v = 0\}$$

$$W(\lambda) := \{v \in V \mid \exists k > 0, (x - \lambda \text{id}_V)^k v = 0\}$$

とおく.

- $\lambda$  が  $x$  の固有値 (eigenvalue) であるとは,  $V(\lambda) \neq 0$  であることを言う.
- $V(\lambda)$  が固有値  $\lambda$  に属する  $x$  の固有空間 (eigenspace) であるとは,  $V(\lambda) \neq 0$  であることを言う.
- $W(\lambda)$  が固有値  $\lambda$  に属する  $x$  の広義固有空間 (generalized eigenspace) であるとは,  $W(\lambda) \neq 0$  であることを言う.

$V(\lambda) \subset W(\lambda) \subset V$  が  $x$ -不変な部分ベクトル空間であることは明らかである.

### A.5.1 上三角化

#### 補題 A.5.1: 旗と基底

$V$  の旗

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{\dim V} = V$$

を与え,

$$\begin{aligned} V_1 &= \mathbb{K}e_1 \\ V_2/V_1 &= \mathbb{K}(e_2 + V_1) \\ V_3/V_2 &= \mathbb{K}(e_3 + V_2) \\ &\vdots \\ V_{\dim V}/V_{\dim V-1} &= \mathbb{K}(e_{\dim V} + V_{\dim V-1}) \end{aligned}$$

を充たす  $e_i \in V_i$  ( $1 \leq i \leq \dim V$ ) をとる. このとき  $1 \leq \forall i \leq \dim V$  に対して

$$V_i = \text{Span}\{e_1, \dots, e_i\}$$

が成り立つ.

**証明**  $1 \leq i \leq \dim V$  に関する数学的帰納法により示す.  $i = 1$  のときは明らか.

$i > 1$  とする.

$$\lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j e_j = 0$$

を仮定する．両辺に標準的射影  $p_i: V_i \rightarrow V_i/V_{i-1}$  を作用させることで

$$\lambda_i p(e_i) = \lambda_i(e_i + V_{i-1}) = 0$$

がわかるが,  $e_i \in V_i$  の選び方から  $e_i + V_{i-1} \neq 0$  なので  $\lambda_i = 0$  が言える．よって

$$\sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j e_j = 0 \in V_{i-1}$$

となるが, 帰納法の仮定より  $e_1, \dots, e_{i-1}$  は線型独立なので  $1 \leq \forall j \leq i, \lambda_j = 0$  が言えた．i.e.  $e_1, \dots, e_i$  は線型独立である．旗の定義から  $\dim V_i = i$  なので  $e_1, \dots, e_i$  は  $V_i$  の基底であり, 帰納法が完成した. ■

$x \in \text{End } V$  が上三角化可能であるとは,  $x$  によって安定化される  $V$  の旗が存在することを言う．というのも, このとき補題 A.5.1 の基底をとると

$$\begin{aligned} x(e_1) &= x^1_1 e_1 \in V_1, \\ x(e_2) &= x^1_2 e_1 + x^2_2 e_2 \in V_2, \\ &\vdots \\ x(e_{\dim V}) &= x^1_{\dim V} e_1 + \dots + x^{\dim V}_{\dim V} e_{\dim V} \in V_{\dim V} \end{aligned}$$

と書けるので, この基底に関する  $x$  の表現行列が

$$\begin{bmatrix} x^1_1 & x^1_2 & \dots & x^1_{\dim V} \\ 0 & x^2_2 & \dots & x^2_{\dim V} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x^{\dim V}_{\dim V} \end{bmatrix}$$

という上三角行列になるのである．

#### 定理 A.5.1: 上三角化

$\forall x \in \text{End } V$  に対して,  $x$  によって安定化される  $V$  の旗が存在する．i.e.  $\forall x \in \text{End } V$  は上三角化可能である．

**証明**  $\dim V$  に関する数学的帰納法により示す． $\dim V = 0$  のときは明らかなので  $\dim V > 0$  とする． $\forall x \in \text{End } V$  を1つ固定する．仮定より  $\mathbb{K}$  は代数閉体なので,  $x$  は重複も込めてちょうど  $\dim V$  個の固有値をもつ．それを  $\lambda_1, \dots, \lambda_{\dim V}$  とおこう． $v_1 \in V(\lambda_1) \setminus \{0\}$  をとり,  $V_1 := \mathbb{K}v_1$  とおく．標準的射影を  $p: V \rightarrow V/V_1$  と書くと,  $\forall v \in V_1$  に対して  $p \circ x(v) = p(\lambda_1 v) = 0$  が成り立つので  $V_1 \subset \text{Ker } p \circ x$  である．故に商ベクトル空間の普遍性を使うことができ,  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間の図式

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{x} & V & \xrightarrow{p} & V/V_1 \\ p \downarrow & & & \nearrow \exists! \bar{x} & \\ V/V_1 & & & & \end{array}$$

を可換にするような  $\mathbb{K}$ -線型写像  $\bar{x} \in \text{End}(V/V_1)$  が一意的に存在する． $\dim(V/V_1) = \dim V - 1$  なので帰納法の仮定が使えて,  $\bar{x} \in \text{End}(V/V_1)$  によって安定化される  $V/V_1$  の旗

$$0 = W_0 \subset W_1 \subset \dots \subset W_{\dim V - 1} = V/V_1$$

が存在する. このとき  $0 \leq \forall i \leq \dim V - 1$  を 1 つ固定すると  $\forall w + V_1 \in W_i$  に対して  $\bar{x}(w + V_1) \in W_i$  が成り立つ. 商ベクトル空間の普遍性から  $\bar{x}(w + V_1) = \bar{x} \circ p(w) = p \circ x(w)$  なので,  $\forall v \in p^{-1}(W_i)$  に対して  $p \circ x(v) = \bar{x} \circ p(v) \in W_i \iff x(v) \in p^{-1}(W_i)$  が分かった. i.e.  $V$  の部分空間の増大列

$$0 \subset p^{-1}(W_0) \subset p^{-1}(W_1) \subset \cdots \subset p^{-1}(W_{\dim V - 1}) = V$$

は  $x$  によって安定化される  $V$  の旗であり, 帰納法が完成する. ■

! 定理 A.5.1 の証明から, もし  $\mathbb{K}$  が代数閉体でなくても,  $x \in \text{End } V$  の固有値が全て  $\mathbb{K}$  に含まれるならば  $x$  は上三角化可能である.

## A.5.2 広義固有空間分解

### 定理 A.5.2: 広義固有空間分解-1

$x \in M(n, \mathbb{K})$  を与え,

- $x$  の相異なる全ての固有値を  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$
- $\lambda_i$  の重複度を  $p_i$

とおく. このとき  $\mathbb{K}^n$  の内部直和分解

$$\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^r W(\lambda_i)$$

が一意的に存在し, かつ  $\dim W(\lambda_i) = p_i$  である.

### 証明 $\dim W(\lambda_i) \geq p_i$

仮定より  $\mathbb{K}$  は代数閉体なので, 定理 A.5.1 より  $u \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$  が存在して  $u^{-1}xu$  が上三角行列になる.  $1 \leq i \leq r$  を 1 つ固定し,  $u^{-1}xu$  の対角成分の最初の  $p_i$  個が  $\lambda_i$  であると仮定しても一般性を失わない. このとき  $u^{-1}(x - \lambda_i \mathbb{1}_n)u$  の対角成分の最初の  $p_i$  個は 0 になるので  $u^{-1}(x - \lambda_i \mathbb{1}_n)^{p_i}u$  の第  $1 \leq j \leq p_i$  列は全て 0 となる. よって  $u = [e_1 \dots e_n]$  とおいたとき  $\text{Span}\{e_1, \dots, e_{p_i}\} \subset W(\lambda_i)$  である.  $u$  は正則行列なので  $e_1, \dots, e_{p_i}$  は線型独立であり,  $\dim W(\lambda_i) \geq p_i$  だと分かった.

### 和空間 $\sum_{i=1}^r W(\lambda_i)$ が内部直和

$r$  に関する数学的帰納法により示す.  $r = 1$  のときは明らかなので  $r > 1$  とする.  $w_i \in W(\lambda_i)$  に対して

$$\sum_{i=1}^r w_i = 0 \tag{A.5.1}$$

が成り立つと仮定する. このとき  $w_1 = \cdots = w_r = 0$  であることを示せば良い. 広義固有空間の定義からある  $k_r > 0$  が存在して  $(x - \lambda_r \mathbb{1}_n)^{k_r} w_r = 0$  が成り立つので,

$$(x - \lambda_r \mathbb{1}_n)^{k_r} \left( \sum_{i=1}^r w_i \right) = \sum_{i=1}^{r-1} (x - \lambda_r \mathbb{1}_n)^{k_r} w_i = 0$$



が言える.  $W(\lambda_i)$  は  $x$ -不変なので, 帰納法の仮定から  $1 \leq \forall i \leq r-1$  に対して  $(x - \lambda_r \mathbf{1}_n)^{k_r} w_i = 0$  である. ここである  $1 \leq j \leq r-1$  が存在して  $w_j \neq 0$  であると仮定する. このとき  $k_j > 0$  を  $(x - \lambda_j \mathbf{1}_n)^{k_j} w_j = 0$  を満たす最小の自然数とする. このとき  $x(x - \lambda_j \mathbf{1}_n)^{k_j-1} w_j = \lambda_j(x - \lambda_j \mathbf{1}_n)^{k_j-1} w_j$  なので

$$\begin{aligned} 0 &= (x - \lambda_j \mathbf{1}_n)^{k_j-1} (x - \lambda_r \mathbf{1}_n)^{k_r} w_j \\ &= (x - \lambda_r \mathbf{1}_n)^{k_r} (x - \lambda_j \mathbf{1}_n)^{k_j-1} w_j \\ &= (\lambda_j - \lambda_r)^{k_r} (x - \lambda_j \mathbf{1}_n)^{k_j-1} w_j \end{aligned}$$

が成り立つが,  $\lambda_j \neq \lambda_r$  なので  $(x - \lambda_j \mathbf{1}_n)^{k_j-1} w_j = 0$  ということになって  $k_j$  の最小性に矛盾する. よって背理法から  $1 \leq \forall j \leq r-1$  に対して  $w_j = 0$  が言えた. 仮定 (A.5.1) より  $w_r = 0$  も言えて帰納法が完成する.

代数学の基本定理より  $\sum_{i=1}^r p_i = n$  が言える.  $\bigoplus_{i=1}^r W(\lambda_i) \subset \mathbb{K}^n$  であることも踏まえると, 以上の議論から  $\dim W(\lambda_i) = p_i$  が分かった. 従って  $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^r W(\lambda_i)$  である. **直和の普遍性** よりこの内部直和分解は一意である. ■

### A.5.3 多項式環・最小多項式

定理 A.5.2 の証明に多項式環を利用することもできる. まず一般論から入る.  $R$  を環とし,  $R$  の単元 (unit)<sup>\*8</sup> 全体がなす集合を  $R^\times$  と書く.  $R^\times$  は環の積に関して群となる. 特に,  $R$  が体ならば  $R^\times = R \setminus \{0\}$  となる.

$n$  個の変数  $t_1, \dots, t_n$  を持つ  $R$  係数多項式全体<sup>\*9</sup>の集合を  $R[t_1, \dots, t_n]$  と書く.  $R[t_1, \dots, t_n]$  の上の加法と乗法をそれぞれ

$$\begin{aligned} f(t_1, \dots, t_n) + g(t_1, \dots, t_n) &:= \sum_{i_1, \dots, i_n} (a_{i_1 \dots i_n} + b_{i_1 \dots i_n}) t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n}, \\ f(t_1, \dots, t_n) g(t_1, \dots, t_n) &:= \sum_{i_1, \dots, i_n} \left( \sum_{j_1+k_1=i_1} \cdots \sum_{j_n+k_n=i_n} a_{j_1 \dots j_n} b_{k_1 \dots k_n} \right) t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n} \end{aligned}$$

で定義する<sup>\*10</sup>と  $R[t_1, \dots, t_n]$  自身が環になる. ただし  $f(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1 \dots i_n} t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n}$ ,  $g(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} b_{i_1 \dots i_n} t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n} \in R[t_1, \dots, t_n]$  とおいた. ある 1 つの変数に注目して項を整理することで, 帰納的に自然な (環の) 同型  $R[t_1, \dots, t_n] \cong (R[t_1, \dots, t_{n-1}])[t_n] \cong \dots \cong (\cdots ((R[t_1])[t_2]) \cdots [t_{n-1}])[t_n]$  が得られる.

<sup>\*8</sup> 可逆元 (invertible element) と言う場合もある.

<sup>\*9</sup> **直和の構成**と同様に, 非ゼロの係数は有限個であるとする. より厳密には, 写像  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n \rightarrow R$  であって有限個の  $(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  を除いて 0 を返すようなものと変数  $(t_1, \dots, t_n)$  の組のことである.

<sup>\*10</sup> 乗法の記号は慣例に従って省略した.

### 定義 A.5.2: 多項式の基本概念

$f(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1 \dots i_n} t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n} \in R[t_1, \dots, t_n]$  を与える.

- $f(t_1, \dots, t_n) \neq 0$  ならば,  $f$  の次数 (degree) を

$$\deg f := \max\{i_1 + \cdots + i_n \mid a_{i_1 \dots i_n} \neq 0\}$$

と定義する.  $f(t_1, \dots, t_n) \neq 0$  ならば  $\deg f := -\infty$  と定義する.

- $(x_1, \dots, x_n) \in R^n$  の  $f$  への代入とは, 値

$$\sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \in R$$

のこと<sup>a</sup>. 記号としては  $f(x_1, \dots, x_n)$  と書く.

- $f(x_1, \dots, x_n) = 0$  を満たす  $(x_1, \dots, x_n) \in R^n$  のことを  $f$  の根 (root) と呼ぶ.
- $n = 1$  のとき,  $f$  の最高次係数が  $1 \in R$  ならば  $f$  はモニック (monic) であると呼ばれる.

<sup>a</sup> 非ゼロな係数は有限個なので, この和は意味を持つ.

最高次係数が単元であるような多項式によって, 多項式を割り算することができる:

### 命題 A.5.1: 多項式の割り算

1 変数多項式  $f(t), g(t) \in R[t]$  および単元  $u \in R^\times$  を与える.

このとき  $f(t)$  がモニックならば, 以下を満たす  $q(t), r(t) \in R[t]$  が一意に存在する:

$$g(t) = q(t)(uf(t)) + r(t), \quad \deg r < \deg f$$

証明  $f(t)$  はモニックであるとする.

#### $q(t), r(t)$ の存在

$g(t) = 0$  のときは  $q(t) = r(t) = 0$  とすれば良い.  $g(t) \neq 0$  のとき,  $\deg g$  に関する数学的帰納法により示す.  $\deg g < \deg f$  のときは  $q(t) = 0, r(t) = g(t)$  とおけば良い.

$\deg g \geq \deg f$  とする.

$$f(t) =: \sum_{i=0}^{\deg f} a_i t^i, \quad g(t) =: \sum_{i=0}^{\deg g} b_i t^i$$

とおくと仮定から  $a_{\deg f} = 1$  である. このとき

$$q_1(t) := b_{\deg g} u^{-1} t^{\deg g - \deg f}, \quad g_1(t) := g(t) - q_1(t)(uf(t))$$

と定義すると  $\deg g_1 < \deg g$  が成り立つ.  $g_1(t) = 0$  ならば  $q(t) = q_1(t), r(t) = 0$  とすれば良い.  $g_1(t) \neq 0$  ならば, 帰納法の仮定より  $q_2(t), r_2(t) \in R[t]$  が存在して

$$g_1(t) = q_2(t)(uf(t)) + r_2(t)$$

と書け、かつ  $\deg r_2 < \deg f$  が成り立つ。すると

$$g(t) = (q_1(t) + q_2(t))(uf(t)) + r_2(t)$$

であるから、 $q(t) = q_1(t) + q_2(t)$ ,  $r(t) = r_2(t)$  とすれば良い。

**$q(t), r(t)$  の一意性**

$g(t) = q_1(t)(uf(t)) + r_1(t) = q_2(t)(uf(t)) + r_2(t)$  かつ  $\deg r_i < \deg f$  が成り立つとする。このとき

$$(q_1(t) - q_2(t))(uf(t)) = r_2(t) - r_1(t)$$

が成り立つが、 $q_1(t) - q_2(t) \neq 0$  だとすると  $\deg f \leq \max\{\deg r_1, \deg r_2\}$  ということになり矛盾。  
よって背理法から  $q_1(t) = q_2(t)$  が言えて、 $r_1(t) = r_2(t)$  も従う。

■

特に  $R$  が体ならば  $R^\times = R \setminus \{0\}$  なので、任意のゼロでない多項式同士の割り算をすることができる。多変数の場合も、ある 1 つの変数に関する最高次係数が単元ならば割り算ができる。

#### 定義 A.5.3: 環のイデアル

$R$  を環とする。

- 部分集合  $I \subset R$  が左 (resp. 右) **イデアル** (ideal) であるとは、 $\forall r \in R, \forall x \in I$  に対して  $rx \in I$  (resp.  $xr \in I$ ) が成り立つことを言う。左イデアルかつ右イデアルのとき**両側イデアル**と呼ぶ。 $R$  が可換環のときは左、右イデアルの区別はなく、単に**イデアル** (ideal) と呼ぶ。
- 可換環  $R$  のイデアル  $I \subsetneq R$  が**素イデアル** (prime ideal) であるとは、

$$r, s \notin I \implies rs \notin I$$

が成り立つことを言う。

- 可換環  $R$  のイデアル  $I \subsetneq R$  が**極大イデアル** (maximal ideal) であるとは、 $I \subset J \subsetneq R$  なる任意のイデアル  $J$  に対して  $I = J$  が成り立つことを言う。

#### 定義 A.5.4: 整域

$R$  を可換環とする。

- $R$  が**整域** (integral domain) であるとは、 $\forall a, b \in R \setminus \{0\}$  に対して  $ab \neq 0$  が成り立つことを言う。
- 整域**  $R$  および  $a \in R, b \in R \setminus \{0\}$  を与える。 $b$  が  $a$  の**約元**であるとは、ある  $c \in R$  が存在して  $a = bc$  となることを言い、 $b \mid a$  と書く。
- 整域**  $R$  および  $(a_1, \dots, a_n) \in R^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ ,  $b \in R$  を与える。 $b$  が  $a_1, \dots, a_n$  の**公約元**であるとは、

$$1 \leq \forall i \leq n, b \mid a_i$$

が成り立つことを言う。他の任意の公約元  $c \in R$  に対して  $c \mid b$  が成り立つとき、 $b$  は**最大公約元** (greatest common deviser; GCD) と呼ばれ、 $\gcd(a_1, \dots, a_n)$  と書く。

- 整域  $R$  および  $b_1, \dots, b_n \in R \setminus \{0\}$ ,  $a \in R$  を与える.  $a$  が  $b_1, \dots, b_n$  の公倍数であるとは,

$$1 \leq \forall i \leq n, b_i \mid a$$

が成り立つことを言う. 他の任意の公倍数  $c \in R$  に対して  $b \mid c$  が成り立つとき,  $b$  は最小公倍数 (least common multiple; LCM) と呼ばれ,  $\text{lcm}(a_1, \dots, a_n)$  と書く.

- $R$  が単項イデアル整域 (principal ideal domain; PID) であるとは,  $R$  の任意のイデアル  $I \subset R$  に対してある  $r \in R$  が存在して  $I = Rr$  を満たすこと.

$R$  を整域とし,  $r \in R \setminus \{0\}$  を与える.

- $r$  が素元であるとは,  $r$  が生成するイデアル  $Rr \subset R$  が素イデアルであることを言う.
- $r$  が既約元であるとは,  $r \notin R^\times$  で, かつ  $\forall a, b \in R$  に対して

$$r = ab \implies a \in R^\times \text{ または } b \in R^\times$$

が成り立つことを言う.  $r$  が既約でなければ可約と言う.

- 既約元  $r, s$  が同伴であるとは, ある  $u \in R^\times$  が存在して  $r = su$  と書けることを言う.

#### 命題 A.5.2: 素イデアルと極大イデアルの特徴付け

可換環  $R$  のイデアル  $I$  に対し, 以下が成り立つ:

- (1)  $I$  が素イデアル  $\iff R/I$  は整域
- (2)  $I$  が極大イデアル  $\iff R/I$  は体

証明 (1)

■

GCD, LCM は存在すれば単元の積を除いて一意である.

#### 定義 A.5.5: 種々の整域

$R$  を整域とする.

- $R$  が Euclid 整域 (Euclid domain) であるとは, 以下の条件を満たす写像  $\phi: R \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  が存在することを言う:

(ED)  $\forall a \in R, \forall b \in R \setminus \{0\}$  に対して  $q, r \in R$  が存在して

$$a = qb + r$$

かつ

$$r = 0 \text{ または } \phi(r) < \phi(b)$$

が成り立つ.

- $R$  が単項イデアル整域 (principal ideal domain; PID) であるとは,  $R$  の任意のイデアル  $I \subset R$  に対してある  $r \in R$  が存在して  $I = Rr$  を満たすこと.

- $R$  が一意分解整域 (unique factorization domain: UFD) であるとは、以下の 2 条件を満たすこと：
  - (UFD-1)  $\forall r \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})$  に対して、素元  $p_1, \dots, p_n \in R$  が存在して  $r = p_1 \cdots p_n$  と書ける。このとき  $p_1, \dots, p_n$  を  $r$  の素因子、素因子の積  $p_1 \cdots p_n$  を  $a$  の素元分解と呼ぶ。
  - (UFD-2)  $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_m \in R$  が素元ならば  $n = m$  であり、かつある  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  が存在して、 $1 \leq i \leq n$  に対して  $p_i$  と  $q_{\sigma(i)}$  が同伴となる。

次の定理は整域の理論において極めて重要である：

#### 定理 A.5.3:

Euclid 整域  $\implies$  単項イデアル整域  $\implies$  一意分解整域

#### 証明 Euclid 整域 $\implies$ PID

$R$  が Euclid 整域であるとする。  $R = \{0\}$  ならば  $R = R0$  となるので PID である。

$R \neq \{0\}$  とする。  $R$  の任意の非自明なイデアル  $I$  をとる。  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$  は整列集合なので  $\phi(x) := \min\{\phi(y) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid y \in I \setminus \{0\}\}$  が存在する。 Euclid 整域の定義から  $\forall z \in I$  に対してある  $q, r \in R$  が存在して

$$z = qx + r$$

かつ  $r = 0$  または  $\phi(r) < \phi(x)$  が成り立つが、もし  $r \neq 0$  ならば  $r \in I \setminus \{0\}$  となり  $x$  の最小性に矛盾する。 よって  $r = 0$  であり、  $I = Rx$  が言えた。

PID  $\implies$  UFD

■

#### 系 A.5.4:

任意の体<sup>a</sup>  $\mathbb{K}$  に対して  $\mathbb{K}[t]$  は Euclid 整域である。従って PID でもあり UFD でもある。

<sup>a</sup> 定義から可換である。

証明 命題 A.5.1 より従う。

■

#### 命題 A.5.3:

可換環  $R$  について以下が成り立つ：

- (1)  $R$  が整域ならば、 $R$  の任意の素元は既約元である。
- (2)  $R$  が UFD ならば、 $R$  の任意の既約元は素元である。
- (3)  $R$  が PID ならば、 $R$  の任意の  $\{0\}$  でない素イデアルは極大イデアルである。

証明 (1)  $R$  が整域だとする。このとき任意の素元  $p \in R \setminus \{0\}$  をとると、 $Rp \subsetneq R$  なので  $p \notin R^\times$  である。  
 $a, b \in R$  に対して  $p = ab$  が成り立つとする。  $Rp$  が素イデアルなので  $a \in Rp$  または  $b \in Rp$  が成り立つ。  
 $R$  は可換なので  $a \in Rp$  としても一般性を失わない。このときある  $q \in R$  が存在して  $a = qp$  と

書ける.  $ab = p$  なので  $qpb = pqb = p \iff p(qb - 1) = 0$  が成り立つ.  $R$  は整域で  $p \neq 0$  なので  $qb - 1 = 0 \iff qb = 1$ , i.e.  $b \in R^\times$  が分かった. よって  $p$  は既約である.

(2)  $R$  が UFD だとする. このとき任意の既約元  $p \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})$  をとると, その素元分解  $p = p_1 \cdots p_n$  ( $n \geq 1$ ) が存在する.  $n \geq 2$  だとすると,  $p_1 \notin R^\times$  なので  $p$  の既約性から  $q := p_2 \cdots p_n \in R^\times$  となる. 然るにこのとき  $Rq \subset Rp_2 \subsetneq R$  となり矛盾. よって背理法から  $n = 1$  が言えた.

(3)  $R$  のゼロでない任意の素イデアル  $I$  をとる.  $R$  は PID なので  $p \in R$  が存在して  $I = Rp$  と書けるが, 素元の定義からこのとき  $p \in R$  は素元であり, および命題 A.5.3-(1) から既約元である.

ここで,  $I \subset J \subsetneq R$  なる任意のイデアル  $J$  をとる.  $R$  は PID なので  $q \in R$  が存在して  $J = Rq$  と書けるが,  $Rq \subsetneq R$  なので  $q \notin R^\times$  である. このときある  $u \in R$  が存在して  $p = qu$  と書けるが,  $p$  は既約元なので  $u \in R^\times$  でなくてはならない. よって  $Rp = Rq$  となり,  $Rp$  は極大イデアルである. 命題 A.5.2-(2) より  $R/Rp$  は体である. ■

#### 命題 A.5.4: 単項イデアル整域における Bézout の等式

$R$  を PID とする. このとき,  $\forall (a_1, a_2) \in R^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,  $\forall b \in R$  に対して以下は同値である:

- (1)  $Ra_1 + Ra_2 = Rb$
- (2)  $\gcd(a_1, a_2) = b$

#### 証明

(1)  $\implies$  (2)

$Ra_1 + Ra_2 = Rb$  とする. このとき  $a_i \in Rb$  ( $i = 1, 2$ ) なのである  $q_i \in R$  が存在して  $a_i = q_i b$  と書ける. i.e.  $b \mid a_i$  である.

$c \in R$  を  $a_1, a_2$  の任意の公約元とする. このときある  $r_i \in R$  が存在して  $a_i = r_i c$  と書ける. 仮定より  $b \in Ra_1 + Ra_2$  なので,  $s_i \in R$  が存在して

$$b = s_1 a_1 + s_2 a_2 = (s_1 r_1 + s_2 r_2) c$$

と書ける. i.e.  $c \mid b$  が言えた.

(1)  $\longleftarrow$  (2)

$\gcd(a_1, a_2) = b$  とする.  $R$  は PID なので, ある  $c \in R$  が存在して  $Ra_1 + Ra_2 = Rc$  と書ける. 必要性の証明から  $c = \gcd(a_1, a_2)$  が言えるので,  $u \in R^\times$  が存在して  $b = uc$  と書ける. よって  $Ra_1 + Ra_2 = Rc = Rb$  である. ■

#### 系 A.5.5: 単項イデアル整域における Bézout の等式

$R$  を PID とする. このとき,  $\forall (a_1, \dots, a_n) \in R^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ ,  $\forall b \in R$  に対して以下は同値である:

- (1)  $Ra_1 + \cdots + Ra_n = Rb$
- (2)  $\gcd(a_1, \dots, a_n) = b$

### 定義 A.5.6: 体の拡大

- 体  $\mathbb{L}$  が体  $\mathbb{K}$  の**拡大体** (extention field) であるとは,  $\mathbb{K}$  が  $\mathbb{L}$  の部分体になっていることを言う. このことを記号で  $\mathbb{L}/\mathbb{K}$  と書き, **体の拡大** (field extention) であると言う.
- $\mathbb{L}/\mathbb{K}$  を体の拡大とすると, 部分体  $\mathbb{M} \subset \mathbb{L}$  であって  $\mathbb{K} \subset \mathbb{M}$  を満たすものを  $\mathbb{L}/\mathbb{K}$  の**中間体** と呼ぶ.
- $\mathbb{L}/\mathbb{K}$  を体の拡大とすると,  $\mathbb{L}$  を  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間と見做したときの次元を  $\mathbb{L}$  の  $\mathbb{K}$  上の**拡大次数**と呼び,  $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$  と書く.
- $\mathbb{L}/\mathbb{K}$  を体の拡大とする.  $x \in \mathbb{L}$  が  $\mathbb{K}$  上**代数的**であるとは,  $x$  がある  $\mathbb{K}$ -係数多項式  $f(t) \in \mathbb{K}[t] \setminus \{0\}$  の**根**となっていること<sup>a</sup>を言う.  $\forall x \in \mathbb{L}$  が  $\mathbb{K}$  上代数的ならば, 体の拡大  $\mathbb{L}/\mathbb{K}$  は**代数拡大**であるという.

<sup>a</sup>  $x \in \mathbb{K}$  とは限らないので, 先ほど採用した定義によると厳密には根とは呼べない.

### 命題 A.5.5: 最小多項式の存在

$\mathbb{L}/\mathbb{K}$  を**体の代数拡大**とし,  $\forall \alpha \in \mathbb{L}$  を1つ与える. このとき  $I_\alpha := \{f(t) \in \mathbb{K}[t] \mid f(\alpha) = 0\}$  とおくと, 以下の条件を満たす  $f(t) \in I_\alpha$  が定数倍を除いて一意に存在する:

- (1)  $f(t) \neq 0$
- (2)  $f(t)$  は  $I_\alpha$  の元のうち  $\deg f$  が最小のものの1つである.
- (3)  $f(t)$  は  $I_\alpha$  の全ての元の**約元**である.
- (4)  $f(t)$  は**既約**

#### 証明 $\mathbb{K}$ -結合代数の準同型

$$\phi: \mathbb{K}[t] \longrightarrow \mathbb{L}, g(t) \longmapsto g(\alpha)$$

に関して  $\text{Ker } \phi = I_\alpha$  であり, 従って  $I_\alpha$  は  $\mathbb{K}[t]$  の**イデアル**である.  $\alpha$  は  $\mathbb{K}$  上代数的なので  $I_\alpha \neq \{0\}$  であり, 系 A.5.4 より  $\mathbb{K}[t]$  は **PID** なので, ある  $f(t) \in \mathbb{K}[t]$  が存在して  $I_\alpha = \mathbb{K}[t]f(t)$  と書ける. このとき定理 A.5.3 の証明から  $f(t)$  は  $I_\alpha \setminus \{0\}$  の元のうち次数が最小であり,  $\mathbb{K}[t]^\times = \mathbb{K} \setminus \{0\}$  なので定数倍を除いて一意に定まる.

あとは  $f(x)$  の既約性を示す. 実際, 準同型定理から  $\mathbb{K}[t]/I_\alpha \cong \text{Im } \phi = \mathbb{K}[\alpha]$  が言えるが,  $\mathbb{K}[\alpha]$  は体なので命題 A.5.2-(2) より  $I_\alpha = \mathbb{K}[t]f(t)$  は**素イデアル**であり, **素元の定義**から  $f(t)$  は素元. よって命題 A.5.3-(1) から  $f(x)$  は既約元である. ■

### 定義 A.5.7: 最小多項式

命題 A.5.5 の  $f(t) \in I_\alpha$  が**モニック**ならば,  $f(t)$  のことを  $\alpha$  の  $\mathbb{K}$  上の**最小多項式** (minimal polynomial) と呼ぶ.

命題 A.5.5 では  $\mathbb{L}/\mathbb{K}$  を体の代数拡大としたが,  $\mathbb{L}$  を  $M(n, \mathbb{K})$  に置き換えても (1)-(3) はほぼ同じ証明により成り立つ<sup>\*11</sup>. このようなときも  $f(t) \in I_\alpha$  のことを  $\alpha \in M(n, \mathbb{K})$  の**最小多項式**と呼ぶ. では, 定理 A.5.2

<sup>\*11</sup>  $I_\alpha \neq \{0\}$  の証明のみ変更を要する.

の別証明を与えよう：

**定理 A.5.6: 広義固有空間分解-2**

$x \in M(n, \mathbb{K})$  を与え,

- $x$  の相異なる全ての固有値を  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$
- $\lambda_i$  の重複度を  $p_i$

とおく. このとき  $\mathbb{K}^n$  の内部直和分解

$$\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^r W(\lambda_i)$$

が一意的に存在し, かつ  $\dim W(\lambda_i) = p_i$  である.

証明  $1 \leq i \leq k$  に対して  $\phi_i(t) := \prod_{j \neq i} (t - \lambda_j)^{p_j} \in \mathbb{K}[t]$  とおく. ■



## 参考文献

- [1] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory* (Springer, 1972).
- [2] 佐武一郎, **リー環の話** (日本評論社, 1987).
- [3] 小林俊行 and 大島利雄, **リー群と表現論** (岩波書店, 2005).
- [4] P. I. Etingof *et al.*, *Introduction to representation theory* (American Mathematical Soc., 2011).