Humphreys Chapter II Exercises
解答例（2023/12/11 実施分）

高間俊至

2023 年 12 月 12 日

[1, p.34, Exercise1, 2; p.40, Exercise1, 2, 10] の解答例です．

何の断りもない場合，体 $\mathbb{K}$ は代数閉体でかつ $\operatorname{char}\mathbb{K} = 0$ であるとする．また，$\mathfrak{g}$ は零でない体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とする．

2 $\mathfrak{sl}(2)$ の表現論

$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の基底として

$$x \coloneqq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad y \coloneqq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad h \coloneqq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

をとることができる．この基底同士の Lie ブラケットは

$$[x, y] = h, \qquad [h, x] = 2x, \qquad [h, y] = -2y \tag{2.1}$$

と計算できる．

$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の任意の有限次元表現 $\phi\colon \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$（同じことだが，有限次元 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群 V[*1]）において，

- $\mathbb{K}$-ベクトル空間 V のことを**表現空間**
- 表現空間 V の部分 $\mathbb{K}$-ベクトル空間

$$\boldsymbol{V_\lambda} \coloneqq \left\{ v \in V \;\middle|\; \phi(h)(v)\ (= h \blacktriangleright v) = \lambda v \right\}$$

  が 0 でないとき，**ウエイト $\boldsymbol{\lambda}$ のウエイト空間**
- ウエイト λ のウエイト空間 V_λ の非零な元 $v \in V_\lambda \setminus \{0\}$ であって，

$$\phi(x)(v)\ (= x \blacktriangleright v) = 0 \in V_{\lambda+2}$$

  を充たすもののことを**ウエイト $\boldsymbol{\lambda}$ の極大ベクトル**

と呼ぶのだった．以下の補題は任意の[*2] $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の有限次元に対して成り立つ：

[*1] $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の V への左作用を $\blacktriangleright\colon \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}) \times V \longrightarrow V,\ (x, v) \longmapsto x \blacktriangleright v \coloneqq \phi(x)(v)$ と書く．

[*2] 既約表現でなくとも良い

補題 2.1:

$$v \in V_\lambda \quad \Longrightarrow \quad x \blacktriangleright v \in V_{\lambda+2},\ y \blacktriangleright v \in V_{\lambda-2}$$

特に，$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の $m+1$ 次元既約表現は構造が完全に分かっている：

補題 2.2:

既約 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群 V においてウエイト λ の極大ベクトル $v_0 \in V_\lambda$ をとり[a]，

$$v_i \coloneqq \begin{cases} 0, & i = -1 \\ \dfrac{1}{i!} y^i \blacktriangleright v_0, & i \geq 0 \end{cases}$$

とおく．このとき以下が成り立つ：

(1) $h \blacktriangleright v_i = (\lambda - 2i) v_i$

(2) $y \blacktriangleright v_i = (i+1) v_{i+1}$

(3) $x \blacktriangleright v_i = (\lambda - i + 1) v_{i-1}$ ${}^{\mathrm{w}/}$ $i \geq 0$

[a] 極大ベクトルの存在証明が第 1 問である．

定理 2.1:

V を既約 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ 加群とする．

(1) $m \coloneqq \dim V - 1$ とおくと $\mathbb{K}$-ベクトル空間として

$$V = \bigoplus_{\mu=0}^{m} V_{m-2\mu} \quad {}^{\mathrm{w}/} \quad 0 \leq \forall \mu \leq m,\ \dim V_{m-2\mu} = 1$$

が成り立つ．

(2) V の極大ベクトルは零でないスカラー倍を除いて一意に決まり，そのウエイトは m である．

(3) $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の V への左作用は補題 2.2 によって完全に決まる．

定理 2.1 を鑑みて，$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の $m+1$ 次元既約表現を常に $\boldsymbol{V(m)}$ と書くことにする．これは Lie 代数の準同型と $\mathbb{K}$-ベクトル空間の組

$$\Big(\boldsymbol{\phi_m} \colon \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathfrak{gl}\big(\boldsymbol{V(m)}\big),\ \boldsymbol{V(m)}\Big)$$

の略記である．

任意の有限次元 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群 V に対して極大ベクトルが存在することを示せ．

証明 $\phi \colon \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ を与えられた $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の表現とする．$\mathfrak{b} \coloneqq \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{x, h\} \subset \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ とおくと，(2.1) よりこれは $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の部分 Lie 代数になる．さらに $[[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}], [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]] = [\mathbb{K}x, \mathbb{K}x] = 0$ が成り立つので $\mathfrak{b}$ は

可解である．よって部分 Lie 代数 $\phi(\mathfrak{b}) \subset \mathfrak{gl}(V)$ もまた可解である．よって定理 2.1.1（資料 p.25）を使うことができ，$\phi(\mathfrak{b})$ の任意の元は共通の固有ベクトル $v \in V \setminus \{0\}$ を持つ．x は冪零なので $\phi(x)$ もまた冪零であり，$\phi(x)(v) = x \blacktriangleright v = 0$ が言える．i.e. $\phi(h)(v) = h \blacktriangleright v = \lambda v$ とおくと $v \in V_\lambda \setminus \{0\}$ かつ $0 = x \blacktriangleright v$ が成り立ち，v はウエイト λ の極大ベクトルである． ■

> $\forall 0 \leq n \leq m$ に対して，Weyl の定理より $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群のテンソル積 $V(m) \otimes V(n)$ は既約部分 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群の直和に分解する．この直和分解を求めよ．

テンソル積表現 $\phi\colon \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathfrak{gl}\bigl(V(m) \otimes V(n)\bigr)$ のウエイト λ のウエイト空間を $\bigl(V(m) \otimes V(n)\bigr)_\lambda$ と書く代わりに V_λ と略記する．線型変換 $\phi(h) \in \mathfrak{gl}\bigl(V(m) \otimes V(n)\bigr)$ の固有空間分解を考えることで，ある $\Phi \subset \mathbb{K}$ が存在して

$$V(m) \otimes V(n) = \bigoplus_{\lambda \in \Phi} V_\lambda$$

が成り立つことがわかる．一方，Weyl の定理と定理 2.1-(1) より添字集合 $I \subset \mathbb{Z}$ および $V(m) \otimes V(n)$ の既約部分 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群の族 $\bigl\{V(k)\bigr\}_{k \in I}$ が存在して

$$V(m) \otimes V(n) = \bigoplus_{k \in I} V(k) = \bigoplus_{k \in I} \bigoplus_{\mu=0}^{k} V(k)_{k-2\mu}$$

と書けるので，

$$V(m) \otimes V(n) = \bigoplus_{\lambda \in \Phi} V_\lambda = \bigoplus_{k \in I} \bigoplus_{\mu=0}^{k} V(k)_{k-2\mu} \tag{2.2}$$

が成り立つ[*3]．このことから即座に $\Phi \subset \mathbb{Z}$ がわかる．求めるべきなのは集合 $I \subset \mathbb{Z}$ であるが，まず手始めに Φ を求め，次に Φ と I の関係を調べることにする．

$V(m)$, $V(n)$ の定理 2.1 に基づく基底をそれぞれ $\{e_\mu\}_{0 \leq \mu \leq m}$，$\{f_\nu\}_{0 \leq \nu \leq n}$ とおく．このとき補題 2.2 から

$$\begin{aligned}
h \blacktriangleright_{V(m)} e_\mu &= (m - 2\mu) e_\mu, \\
h \blacktriangleright_{V(n)} f_\nu &= (n - 2\nu) f_\nu, \\
x \blacktriangleright_{V(n)} e_\mu &= (m - \mu + 1) e_{\mu-1}, \\
x \blacktriangleright_{V(n)} f_\nu &= (n - \nu + 1) f_{\nu-1},
\end{aligned}$$

が成り立つ．このとき $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群のテンソル積の定義より

$$\begin{aligned}
h \blacktriangleright (e_\mu \otimes f_\nu) &= (h \blacktriangleright_{V(m)} e_\mu) \otimes f_\nu + e_\mu \otimes (h \blacktriangleright_{V(n)} f_\nu) \\
&= \bigl(m + n - 2(\mu + \nu)\bigr) e_\mu \otimes f_\nu
\end{aligned}$$

が成り立つ．i.e. $e_\mu \otimes f_\nu \in V_{m+n-2(\mu+\nu)}$ である．$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群 $V(m) \otimes V(n)$ の $\mathbb{K}$-ベクトル空間としての基底は $\{e_\mu \otimes f_\nu\}_{0 \leq \mu \leq m,\, 0 \leq \nu \leq n}$ なので，

$$V_{m+n-2k} = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}} \bigl\{\, e_\mu \otimes f_\nu \bigm| 0 \leq \mu \leq m,\, 0 \leq \nu \leq n,\, \mu + \nu = k \,\bigr\}$$

[*3] 従って $V(k)_{k-2\mu} = V_{k-2\mu} \cap V(k)$ と書くこともできる．

であり，かつ式 (2.2) において $\Phi = \left\{ m+n-2k \;\middle|\; 0 \le \mu \le m+n \right\}$ がわかった．

次に，式 (2.2) の添字集合 $I \subset \mathbb{Z}$ を求める．$0 \le k \le n$ に対して $v = \sum_{\mu=0}^{k} \lambda_\mu e_\mu \otimes f_{k-\mu} \in V_{m+n-2k}$ がウエイト $m+n-2k$ の極大ベクトルであるとする[*4]．このとき補題 2.2-(3) より

$$
\begin{aligned}
0 &= x \blacktriangleright v \\
&= \sum_{\mu=0}^{k} \lambda_\mu \big(x \blacktriangleright_{V(m)} e_\mu \otimes f_{k-\mu} + e_\mu \otimes (x \blacktriangleright_{V(n)} f_{k-\mu}) \big) \\
&= \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu (m-\mu+1) e_{\mu-1} \otimes f_{k-\mu} + \sum_{\mu=0}^{k-1} \lambda_\mu (n-k+\mu+1) e_\mu \otimes f_{k-\mu-1} \\
&= \sum_{\mu=1}^{k} \big(\lambda_\mu (m-\mu+1) + \lambda_{\mu-1}(n-k+\mu) \big) e_{\mu-1} \otimes f_{k-\mu}
\end{aligned}
$$

が成り立つので

$$
1 \le \forall \mu \le k,\ \lambda_\mu (m-\mu+1) + \lambda_{\mu-1}(n-k+\mu) = 0
$$

がわかった．今 $k \le n$ なので $m-\mu+1 \ge m-n+1 > 0,\ n-k+\mu \ge \mu > 0$ であり，

$$
\lambda_\mu = (-1)^\mu \frac{(n-k+\mu)!(m-\mu)!}{(n-k)!m!} \lambda_0
$$

が言える．よって $\lambda_0 \ne 0$ ならば $v \ne 0$ であり，ウエイト $m+n-2k$ の極大ベクトルが存在することが分かった．定理 2.1-(2) から，ウエイト $m+n-2k$ の極大ベクトル v は既約な $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群 $V(m+n-2k)$ を作る．よって

$$
\bigoplus_{k=0}^{n} V(m+n-2k) \subset V(m) \otimes V(n)
$$

が言えた．左辺の次元を計算すると

$$
\sum_{k=0}^{n} (m+n-2k+1) = (m+n+1)(n+1) - n(n+1) = (m+1)(n+1)
$$

であり右辺の次元と一致するので

$$
\bigoplus_{k=0}^{n} V(m+n-2k) = V(m) \otimes V(n)
$$

が得られた．i.e. $I = \left\{ m+n-2k \;\middle|\; 0 \le k \le n \right\} \subset \Phi$ と求まった．

3　ルート空間分解

一回目の演習回で扱った通り，A_l 型 Lie 代数の基底は

$$
\begin{aligned}
&\left\{ e_{ij} \;\middle|\; 1 \le i \ne j \le l+1 \right\} \\
\cup &\left\{ e_{ii} - e_{i+1,\, i+1} \;\middle|\; 1 \le i \le l \right\}
\end{aligned}
$$

[*4] 当たり前だが，極大ベクトルのウエイトとしてあり得るのは Φ の元だけである．

B_l 型 Lie 代数の基底は

$$\begin{aligned}
&\left\{ e_{1,\,1+i} - e_{1+l+i,\,1} \,\middle|\, 1 \le i \le l \right\} \\
\cup &\left\{ e_{1,\,1+l+i} - e_{1+i,\,1} \,\middle|\, 1 \le i \le l \right\} \\
\cup &\left\{ e_{1+l+i,\,1+j} - e_{1+l+j,\,1+i} \,\middle|\, 1 \le i < j \le l \right\} \\
\cup &\left\{ e_{1+j,\,1+i} - e_{1+l+i,\,1+l+j} \,\middle|\, 1 \le i,\, j \le l \right\} \\
\cup &\left\{ e_{1+i,\,1+l+j} - e_{1+j,\,1+l+i} \,\middle|\, 1 \le i < j \le l \right\}
\end{aligned}$$

C_l 型 Lie 代数の基底は

$$\begin{aligned}
&\left\{ e_{l+i,\,i} \,\middle|\, 1 \le i \le l \right\} \cup \left\{ e_{l+i,\,j} + e_{l+j,\,i} \,\middle|\, 1 \le i < j \le l \right\} \\
\cup &\left\{ e_{j,\,i} - e_{l+i,\,l+j} \,\middle|\, 1 \le i,\, j \le l \right\} \\
\cup &\left\{ e_{i,\,l+i} \,\middle|\, 1 \le i \le l \right\} \cup \left\{ e_{i,\,l+j} + e_{1+j,\,l+i} \,\middle|\, 1 \le i < j \le l \right\}
\end{aligned}$$

D_l 型 Lie 代数の基底は

$$\begin{aligned}
&\left\{ e_{l+i,\,j} - e_{l+j,\,i} \,\middle|\, 1 \le i < j \le l \right\} \\
\cup &\left\{ e_{j,\,i} - e_{l+i,\,l+j} \,\middle|\, 1 \le i,\, j \le l \right\} \\
\cup &\left\{ e_{i,\,l+j} - e_{j,\,l+i} \,\middle|\, 1 \le i < j \le l \right\}
\end{aligned}$$

にとることができる．

> $\mathfrak{g}$ を $A_l,\, B_l,\, C_l,\, D_l$ 型 Lie 代数のどれかとする．このとき，$\mathfrak{g}$ の対角行列全体が成す部分 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ は次元 l の極大トーラスであることを示せ．

証明 $\mathfrak{h}$ は Lie ブラケットについて可換である．

$\mathfrak{g}$ のトーラス $\mathfrak{k} \subsetneq \mathfrak{g}$ が $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{k}$ を充たすとする．このとき $\forall x \in \mathfrak{k}$ は同時対角化可能なので結局 $x \in \mathfrak{h}$, i.e. $\mathfrak{h} = \mathfrak{k}$ である．上記の基底の対角成分の個数を数えることで，全ての場合に次元が l だとわかる． ■

> $\mathfrak{g}$ を A_l 型 Lie 代数とする．極大トーラス
>
> $$\mathfrak{h} := \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{l+1} \end{bmatrix} \in \mathrm{M}(l+1,\, \mathbb{K}) \,\middle|\, \sum_{\mu=1}^{l+1} \lambda_\mu = 0 \right\}$$
>
> に付随するルート系を求めよ．

$$\forall h = \begin{bmatrix} h_1 & & \\ & \ddots & \\ & & h_{l+1} \end{bmatrix} \in \mathfrak{h} \text{ に対して（Einstein の規約を使わない）}$$

$$\mathrm{ad}(h)(e_{ij}) = he_{ij} - e_{ij}h = (h_i - h_j)e_{ij}$$

が成り立つので，$\alpha_{ij} \in \mathfrak{h}^*$ を

$$\alpha_{ij}(h) \coloneqq h_i - h_j$$

で定義すれば

$$A_l \coloneqq \left\{\, \alpha_{ij} \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\} \;\middle|\; 1 \leq i \neq j \leq l+1 \,\right\}$$

がルート全体の集合となる．実際，上述の A_l 型の基底の取り方から

$$\mathfrak{g} = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\left\{\, e_{ii} - e_{i+1,i+1} \;\middle|\; 1 \leq i \leq l \,\right\} \oplus \bigoplus_{1 \leq i \neq j \leq l+1} \mathbb{K} e_{ij} \tag{3.1}$$

が言えるが，明らかに $\mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\left\{\, e_{ii} - e_{i+1,i+1} \;\middle|\; 1 \leq i \leq l \,\right\} = \mathfrak{h}$ なので

$$\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}} \coloneqq \left\{\, x \in \mathfrak{g} \;\middle|\; \forall h \in \mathfrak{h},\ \mathrm{ad}(h)(x) = \alpha_{ij}(h)x \,\right\} = \mathbb{K} e_{ij}$$

と併せると (3.1) がルート空間分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha_{ij} \in A_l} \mathfrak{g}_{\alpha_{ij}}$$

になっていることがわかった．

$\mathfrak{g}$ を D_l 型 Lie 代数とする．極大トーラス

$$\mathfrak{h} \coloneqq \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_l & & & \\ & & & -\lambda_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -\lambda_l \end{bmatrix} \in \mathrm{M}(2l, \mathbb{K}) \right\}$$

に付随するルート系を求めよ．

$\mathfrak{g}$ を C_l 型 Lie 代数とする．極大トーラス

$$\mathfrak{h} \coloneqq \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_l & & & \\ & & & -\lambda_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -\lambda_l \end{bmatrix} \in \mathrm{M}(2l, \mathbb{K}) \right\}$$

に付随するルート系を求めよ．

$\mathfrak{g}$ を B_l 型 Lie 代数とする．極大トーラス

$$\mathfrak{h} := \left\{ \begin{bmatrix} 0 & & & & & & \\ & \lambda_1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \lambda_l & & & \\ & & & & -\lambda_1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & -\lambda_l \end{bmatrix} \in \mathrm{M}(2l+1, \mathbb{K}) \right\}$$

に付随するルート系を求めよ．

4, 5, 7 次元の半単純 Lie 代数が存在しないことを示せ

証明 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とその極大トーラス $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ をとる．$\mathfrak{h} \neq 0$ なので $\dim \mathfrak{h} > 0$ である．このときルート空間分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

が成り立つ．

ところで，$\alpha \in \Phi \implies -\alpha \in \Phi$ かつ $\forall \alpha \in \Phi$ に対して $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ なのである整数 k が存在して

$$0 < \dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{g} - \sum_{\alpha \in \Phi} \dim \mathfrak{g}_\alpha = \dim \mathfrak{g} - 2k$$

と書ける．一方で $\mathfrak{h}^* = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}} \Phi = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}} \{\pm\alpha_1, \ldots, \pm\alpha_k\}$ であるから $\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{h}^* \leq k$ である．よって

$$\frac{1}{3} \dim \mathfrak{g} \leq k < \frac{1}{2} \dim \mathfrak{g}$$

が成り立たねばならない．

- $\dim \mathfrak{g} = 4$ だとすると $k \notin \mathbb{Z}$ となり矛盾．
- $\dim \mathfrak{g} = 5$ だとすると $k = 2$ に確定する．このとき $\pm\alpha_1 \neq \pm\alpha_2$（複合任意）を充たす $\alpha_1, \alpha_2 \in \Phi$ が取れるが，$\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{h}^* = 1$ となるのである $\lambda \in \mathbb{K}$ が存在して $\alpha_2 = \lambda\alpha_1$ と書ける．すると $\lambda\alpha_1 \in \Phi$ なので $\lambda = \pm 1$ のどちらかでなくてはいけず，$\pm\alpha_1 \neq \pm\alpha_2$ に矛盾する．
- $\dim \mathfrak{g} = 7$ だとすると $k = 3$ に確定する．すると $\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{h}^* = 1$ となり $\dim \mathfrak{g} = 5$ のときと同様の議論から矛盾する．

よって背理法から $\dim \mathfrak{g} \neq 4, 5, 7$ が示された． ■

参考文献

[1] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory* (Springer, 1972).