第 3 章

ルート系

この章において，特に断らない限り体 $\mathbb{K}$ は代数閉体[*1]で，かつ $\mathrm{char}\,\mathbb{K}=0$ であるとする．また，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は常に有限次元であるとする．

3.1 公理的方法

Euclid 空間 (Euclid space) とは，

- 体 $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間 $\mathbb{E}$
- 対称かつ正定値な双線型形式 $(\ ,\ )_{\mathbb{E}} \colon \mathbb{E}\times\mathbb{E}\longrightarrow\mathbb{R}$

の組 $\bigl(\mathbb{E},\,(\ ,\ )_{\mathbb{E}}\bigr)$ のことを言う[*2]．Euclid 空間 $\bigl(\mathbb{E},\,(\ ,\ )_{\mathbb{E}}\bigr)$ の任意の元 $\alpha\in\mathbb{E}$ に対して，

- **鏡映面** (reflecting hyperplane)[*3]

$$\boldsymbol{P_\alpha} \coloneqq \bigl\{\,\beta\in\mathbb{E} \bigm| (\beta,\alpha)_{\mathbb{E}}=0\,\bigr\} = (\mathbb{R}\alpha)^{\perp}$$

- 鏡映面 P_α に関する**鏡映** (reflecting)

$$\boldsymbol{\sigma_\alpha}\colon \mathbb{E}\longrightarrow\mathbb{E},\ \beta\longmapsto\beta-2\frac{(\beta,\alpha)_{\mathbb{E}}}{(\alpha,\alpha)_{\mathbb{E}}}\alpha$$

を考える．

! $2\frac{(\beta,\,\alpha)}{(\alpha,\,\alpha)}\in\mathbb{R}$ が頻繁に登場するので，

$$[\![\beta,\alpha]\!] \coloneqq 2\frac{(\beta,\,\alpha)_{\mathbb{E}}}{(\alpha,\,\alpha)_{\mathbb{E}}}$$

と略記することにする．写像 $[\![\ ,\ ]\!]\colon\mathbb{E}\times\mathbb{E}\longrightarrow\mathbb{R}$ は記号的には内積のように見えるかもしれないが，あくまで第一引数についてのみ線型なのであって，対称でも双線型でもないことに注意．

[*1] つまり，定数でない任意の 1 変数多項式 $f(x)\in\mathbb{K}[x]$ に対してある $\alpha\in\mathbb{K}$ が存在して $f(\alpha)=0$ を充たす．

[*2] Euclid 空間と言って位相空間のことを指す場合があるが，そのときは双線型形式 $(\ ,\ )_{\mathbb{E}}$ を使って $\mathbb{E}$ 上の距離関数を $d_{\mathbb{E}}\colon\mathbb{E}\times\mathbb{E}\longrightarrow\mathbb{R}_{\geq 0}$，$(x,\,y)\longmapsto(x-y,x-y)_{\mathbb{E}}$ と定義し（これは通常 **Euclid 距離**と呼ばれる），$\mathbb{E}$ に $d_{\mathbb{E}}$ による距離位相を入れる．

[*3] 余次元 1 の部分 $\mathbb{R}$-ベクトル空間．最右辺は対称かつ非退化な双線型形式 $(\ ,\ )_{\mathbb{E}}$ による直交補空間の意味である．

σ_α は $\mathbb{R}$-線型でかつ $\forall\beta \in \mathbb{E}$ に対して

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha \circ \sigma_\alpha(\beta) &= \bigl(\beta - [\![\beta, \alpha]\!]\alpha\bigr) - \Bigl[\!\Bigl[\bigl(\beta - [\![\beta, \alpha]\!]\alpha\bigr), \alpha\Bigr]\!\Bigr]\alpha \\ &= \beta - [\![\beta, \alpha]\!]\alpha - [\![\beta, \alpha]\!]\alpha + [\![\beta, \alpha]\!][\![\alpha, \alpha]\!]\alpha \\ &= \beta - 2[\![\beta, \alpha]\!]\alpha + 2[\![\beta, \alpha]\!]\alpha \\ &= \beta\end{aligned}$$

を充たす，i.e. $\sigma_\alpha^{-1} = \sigma_\alpha$ なので，$\sigma_\alpha \in \mathrm{GL}(\mathbb{E})$ である．

補題 3.1.1: 鏡映の特徴付け

Euclid 空間 $\mathbb{E}$ と，

- $\mathbb{E} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\, \Phi$
- $\forall\alpha \in \Phi,\ \sigma_\alpha(\Phi) = \Phi$

を充たす $\mathbb{E}$ の有限部分集合 $\Phi \subset \mathbb{E}$ を与える．
このとき，$\sigma \in \mathrm{GL}(\mathbb{E})$ が

(RF-1) $\sigma(\Phi) = \Phi$
(RF-2) 余次元 1 の部分ベクトル空間 $P \subset \mathbb{E}$ が存在して，$\forall\beta \in P,\ \sigma(\beta) = \beta$ が成り立つ
(RF-3) $\exists\alpha \in \Phi \setminus \{0\},\ \sigma(\alpha) = -\alpha$

の 3 条件を満たすならば $\sigma = \sigma_\alpha$（かつ $P = P_\alpha$）である．

<u>証明</u> $\tau := \sigma \circ \sigma_\alpha \, (= \sigma \circ \sigma_\alpha^{-1})$ とおき，$\tau = \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$ であることを示す．
(RF-1) より $\tau(\Phi) = \Phi$, $\tau(\alpha) = \alpha$ が成り立つので $\tau|_{\mathbb{R}\alpha} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}\alpha}$ である．さらに $\mathbb{R}$-線型写像

$$\overline{\tau}\colon \mathbb{E}/\mathbb{R}\alpha \longrightarrow \mathbb{E}/\mathbb{R}\alpha,\ \beta + \mathbb{R}\alpha \longmapsto \tau(\beta) + \mathbb{R}\alpha$$

は well-defined だが，**(RF-2)** より $\overline{\tau} = \mathrm{id}_{\mathbb{E}/\mathbb{R}\alpha}$ である．よって τ の固有値は全て 1 であり，τ の最小多項式 $f(t)$ は $(t-1)^{\dim \mathbb{E}}$ の約元である．一方，Φ は有限集合なので，$\forall\beta \in \Phi$ に対してある $k_\beta \in \mathbb{N}$ が存在して $\tau^{k_\beta}(\beta) = \beta$ を充たす．ここで $k := \max\{k_\beta \mid \beta \in \Phi\}$ とおくと，**(RF-1)** より $\tau^k = \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$ が言える．よって $f(t)$ は $t^k - 1$ の約元でもある．従って，$f(t) = \gcd\bigl((t-1)^{\dim \mathbb{E}}, t^k - 1\bigr) = t - 1$ だと分かった．故に $\tau = \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$ である． ■

3.1.1 ルート系

前章で与えたルート系の公理を再掲するところから始めよう：

公理 3.1.1: ルート系

- 有限次元 Euclid 空間 $\bigl(\mathbb{E}, (\ ,\ )_{\mathbb{E}}\bigr)$
- $\mathbb{E}$ の部分集合 $\Phi \subset \mathbb{E}$

の組 $(\mathbb{E}, \Phi)$ が**ルート系** (root system) であるとは，以下の条件を充たすことを言う：

(Root-1) Φ は 0 を含まない有限集合で，かつ $\mathbb{E} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \Phi$ を充たす．

(Root-2) $\lambda\alpha \in \Phi \implies \lambda = \pm 1$

(Root-3) $\alpha, \beta \in \Phi \implies \sigma_\alpha(\beta) \in \Phi$

(Root-4) $\alpha, \beta \in \Phi \implies [\![\beta, \alpha]\!] \in \mathbb{Z}$

Φ の元のことを**ルート** (root) と呼ぶ．

! 本資料の以降では，文脈上直積集合の要素との混同が起きる恐れがないときは Euclid 空間 $(\mathbb{E}, (\ ,\ )_{\mathbb{E}})$ に備わっている双線型形式を $(\ ,\ )_{\mathbb{E}}$ と書く代わりに $(\ ,\ )$ と略記する．

ルート系と言ったときに，**(Root-2)** を除外する場合がある．その場合我々が採用した定義に該当するものは**簡約ルート系** (reduced root system) と呼ばれる．

定義 3.1.1:

ルート系 $(\mathbb{E}, \Phi)$ の**ランク** (rank) とは，$\dim \mathbb{E} \in \mathbb{N}$ のことを言う．

公理 **(Root-4)** は，任意のルートの 2 つ組の配位に非常に強い制約を与える．というのも，2 つのベクトルのなす角の定義を思い出すと，$\forall \alpha, \beta \in \Phi$ に対してある $\theta \in [0, \pi]$ が存在して

$$[\![\beta, \alpha]\!] = 2\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}\cos\theta \in \mathbb{Z} \tag{3.1.1}$$

$$[\![\alpha, \beta]\!][\![\beta, \alpha]\!] = 4\cos^2\theta \in \mathbb{Z} \tag{3.1.2}$$

が成り立たねばならないのである．$[\![\alpha, \beta]\!], [\![\beta, \alpha]\!] \in \mathbb{Z}$ かつ $0 \leq \cos^2\theta \leq 1$ なので，(3.1.2) から

$$\cos^2\theta = 0,\ \frac{(\pm1)\cdot(\pm1)}{4},\ \frac{(\pm1)\cdot(\pm2)}{4},\ \frac{(\pm1)\cdot(\pm3)}{4},\ \frac{(\pm1)\cdot(\pm4)}{4},\ \frac{(\pm2)\cdot(\pm2)}{4} \quad \text{(複号同順)}$$

しかあり得ないとわかる．**(Root-2)** も考慮すると，$\|\alpha\| \leq \|\beta\|$ ならば[*4]あり得る可能性は以下の通り[*5]：

表 3.1: 可能なルートの 2 つ組 α, β

$[\![\alpha,\beta]\!]$	$[\![\beta,\alpha]\!]$	θ	$\|\beta\|^2/\|\alpha\|^2$
0	0	$\frac{\pi}{2}$	-
1	1	$\frac{\pi}{3}$	1
-1	-1	$\frac{2\pi}{3}$	1
1	2	$\frac{\pi}{4}$	2
-1	-2	$\frac{3\pi}{4}$	2
1	3	$\frac{\pi}{6}$	3
-1	-3	$\frac{5\pi}{6}$	3
2	2	0	1
-2	-2	π	1

[*4] このとき (3.1.1) より $[\![\alpha,\beta]\!] \leq [\![\beta,\alpha]\!]$

[*5] 表 3.1 の最後の 2 段は $\beta = \pm\alpha$ の場合に相当する．

補題 3.1.2:

$(\mathbb{E},\,\Phi)$ をルート系とする．$\alpha\neq\pm\beta$ を充たす任意の $\alpha,\,\beta\in\Phi$ に対して以下が成り立つ：

(1) $(\alpha,\beta)>0 \implies \alpha-\beta\in\Phi$
(2) $(\alpha,\beta)<0 \implies \alpha+\beta\in\Phi$

証明 $(\alpha,\beta)>0$ とする．このとき $[\![\alpha,\beta]\!]>0$ であるから，表 3.1 より $[\![\alpha,\beta]\!], [\![\beta,\alpha]\!]$ の少なくとも一方は 1 に等しい．$[\![\alpha,\beta]\!]=1$ だとすると，**(Root-3)** から $\sigma_\beta(\alpha)=\alpha-\beta\in\Phi$ がいえる．$[\![\beta,\alpha]\!]=1$ ならば $\sigma_\alpha(\beta)=\beta-\alpha\in\Phi$ であり，$\sigma_{\beta-\alpha}(\beta-\alpha)=\alpha-\beta\in\Phi$ が従う．(2) は (1) において β の代わりに $-\beta=\sigma_\beta(\beta)\in\Phi$ を用いて同じ議論をすれば良い． ■

定義 3.1.2: α-string through β

$(\mathbb{E},\,\Phi)$ をルート系とする．$\alpha\neq\pm\beta$ を充たす任意の $\alpha,\,\beta\in\Phi$ に対して，Φ の部分集合

$$\left\{\,\beta+\lambda\alpha\in\mathbb{E}\;\middle|\;\lambda\in\mathbb{Z}\,\right\}\cap\Phi$$

のことを **$\boldsymbol{\alpha}$-string through $\boldsymbol{\beta}$** と呼ぶ．

命題 3.1.1: α-string through β の性質

$(\mathbb{E},\,\Phi)$ をルート系とする．$\alpha\neq\pm\beta$ を充たす任意の $\alpha,\,\beta\in\Phi$ に対して

$$r\coloneqq\max\left\{\,\lambda\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\;\middle|\;\beta-\lambda\alpha\in\Phi\,\right\},$$
$$q\coloneqq\max\left\{\,\lambda\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\;\middle|\;\beta+\lambda\alpha\in\Phi\,\right\}$$

とおく．このとき以下が成り立つ：

(1) α-string through β は $\mathbb{E}$ の部分集合

$$\left\{\,\beta+\lambda\alpha\in\mathbb{E}\;\middle|\;-r\leq\lambda\leq q\,\right\}\tag{3.1.3}$$

に等しい．i.e.

$$\lambda\in\mathbb{Z}\ \text{かつ}\ \beta+\lambda\alpha\in\Phi\quad\Longrightarrow\quad -r\leq\lambda\leq q$$

である．

(2) α-string through β は鏡映 σ_α の作用の下で不変である．
(3) $r-q=[\![\beta,\alpha]\!]$．特に α-string through β の長さは 4 以下である．

証明 (1) 背理法により示す．ある $-r<\lambda<q$ に対して $\beta+\lambda\alpha\notin\Phi$ であるとする．このときある $-r\leq s<p\leq q$ が存在して

$$\beta+s\alpha\in\Phi,\qquad \beta+(s+1)\alpha\notin\Phi,\qquad \beta+(p-1)\alpha\notin\Phi,\qquad \beta+p\alpha\in\Phi$$

を充たすが，補題 3.1.2 の対偶より $(\alpha,\beta+p\alpha)\leq 0\leq(\alpha,\beta+s\alpha)$ が成り立つ．よって $(s-p)(\alpha,\alpha)\geq 0$ である．然るに $s-p<0$ かつ $(\alpha,\alpha)>0$ なのでこれは矛盾である．

(2) $-r \le \forall\lambda \le q$ に対して

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha(\beta+\lambda\alpha) &= \beta+\lambda\alpha-[\![\beta,\alpha]\!]\alpha-\lambda[\![\alpha,\alpha]\!]\alpha\\ &= \beta+\bigl(-[\![\beta,\alpha]\!]-\lambda\bigr)\alpha\end{aligned}$$

が成り立つ．**(Root-3)** より $\beta+\bigl(-[\![\beta,\alpha]\!]-\lambda\bigr)\alpha\in\Phi$ が言える．さらに **(Root-4)** より $-[\![\beta,\alpha]\!]-\lambda\in\mathbb{Z}$ なので，(1) より $-r\le-[\![\beta,\alpha]\!]-\lambda\le q$ だと分かった．i.e. $\sigma_\alpha(\beta+\lambda\alpha)$ は α-string through β の元である．

(3) $r,\ q$ の定義より，(2) の証明において

$$\sigma_\alpha(\beta+q\alpha)=\beta-\bigl([\![\beta,\alpha]\!]+q\bigr)\alpha=\beta-r\alpha$$

が成り立たねばならない．よって

$$r-q=[\![\beta,\alpha]\!]$$

である．表 3.1 より $|r-q|\le 3$ であるから，集合 (3.1.3) の要素数は 4 以下である．

■

定義 3.1.3: 双対ルート系

ルート系 $(\mathbb{E},\ \Phi)$ に対して

$$\boldsymbol{\Phi}^\vee := \left\{\, \frac{2}{(\alpha,\ \alpha)}\alpha\in\mathbb{E} \;\middle|\; \alpha\in\Phi \,\right\}$$

とおき，組 $(\mathbb{E},\ \boldsymbol{\Phi}^\vee)$ のことを $(\mathbb{E},\ \Phi)$ の**双対ルート系** (dual root system) と呼ぶ．

$\alpha\in\Phi$ に対して

$$\boldsymbol{\alpha}^\vee := \frac{2}{(\alpha,\ \alpha)}\alpha\in\Phi^\vee$$

と書く．

双対ルート系がルート系の公理を充たすことを確認しよう：

(Root-1,2) $(\mathbb{E},\ \Phi)$ がルート系なので明らか．

(Root-3) $\forall\alpha^\vee,\ \beta^\vee\in\Phi^\vee$ をとる．このとき

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha^\vee}(\beta^\vee) &= \frac{2}{(\beta,\ \beta)}\beta-\left[\!\!\left[\frac{2}{(\beta,\ \beta)}\beta,\ \frac{2}{(\alpha,\ \alpha)}\alpha\right]\!\!\right]\frac{2}{(\alpha,\ \alpha)}\alpha\\ &= \frac{2}{(\beta,\ \beta)}\beta-\frac{\frac{2}{(\beta,\ \beta)}}{\frac{2}{(\alpha,\ \alpha)}}[\![\beta,\alpha]\!]\frac{2}{(\alpha,\ \alpha)}\alpha\\ &= \frac{2}{(\beta,\ \beta)}\sigma_\alpha(\beta)\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

だが，

$$\begin{aligned}\bigl(\sigma_\alpha(\beta),\sigma_\alpha(\beta)\bigr) &= (\beta,\beta)-2[\![\beta,\alpha]\!](\beta,\alpha)+[\![\beta,\alpha]\!]^2(\alpha,\alpha)\\ &= (\beta,\beta)-2[\![\beta,\alpha]\!](\beta,\alpha)+2[\![\beta,\alpha]\!](\beta,\alpha)\\ &= (\beta,\beta)\end{aligned}$$

なので

$$\sigma_{\alpha^\vee}(\beta^\vee) = \sigma_\alpha(\beta)^\vee \in \Phi^\vee$$

だと分かった．

(Root-4) $\forall \frac{2}{(\alpha,\alpha)}\alpha,\ \frac{2}{(\beta,\beta)}\beta \in \Phi^\vee$ をとる．このとき

$$\begin{aligned}
[\![\beta^\vee, \alpha^\vee]\!] &= \left[\!\!\left[\frac{2}{(\beta,\ \beta)}\beta,\ \frac{2}{(\alpha,\ \alpha)}\alpha\right]\!\!\right] \\
&= \frac{\frac{2}{(\beta,\beta)}}{\frac{2}{(\alpha,\alpha)}}[\![\beta,\alpha]\!] \\
&= \frac{\frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}}{\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}}[\![\beta,\alpha]\!] \\
&= \frac{[\![\alpha,\beta]\!]}{[\![\beta,\alpha]\!]}[\![\beta,\alpha]\!] \\
&= [\![\alpha,\beta]\!] \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

が言えた．

3.1.2 Weyl 群

定義 3.1.4: Weyl 群

$(\mathbb{E},\ \Phi)$ をルート系とする．$\mathrm{GL}(\mathbb{E})$ の部分集合 $\left\{\sigma_\alpha \in \mathrm{GL}(\mathbb{E}) \;\middle|\; \alpha \in \Phi\right\}$ が生成する $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$ の部分群のことをルート系 $(\mathbb{E},\ \Phi)$ の **Weyl 群** (Weyl group) と呼び，$\boldsymbol{\mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi)}$ と書く．

本資料の以降では，文脈上考えているルート系が明らかな場合 $\mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi)$ を $\mathscr{W}$ と略記する．

(Root3) より，$\forall \tau \in \mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi)$ の Φ への制限は全単射である．その上 **(Root-1)** から Φ は有限集合でかつ $\mathbb{E} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\,\Phi$ が成り立つので，$\mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi)$ を Φ に作用する対称群 $\mathfrak{S}_{|\Phi|}$ の部分群と同一視できる．特に $\mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi)$ は有限群である．

補題 3.1.3:

$(\mathbb{E},\ \Phi)$ をルート系とする．$\tau \in \mathrm{GL}(\mathbb{E})$ が $\tau(\Phi) = \Phi$ を充たすならば，$\forall \alpha,\ \beta \in \Phi$ に対して以下が成り立つ：

(1) $\tau \circ \sigma_\alpha \circ \tau^{-1} = \sigma_{\tau(\alpha)}$

(2) $[\![\beta, \alpha]\!] = [\![\tau(\beta), \tau(\alpha)]\!]$

証明 $\forall \alpha,\ \beta \in \Phi$ をとる．**(Root-3)** より $\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi$ なので，$\tau \circ \sigma_\alpha \circ \tau^{-1}\big(\tau(\beta)\big) = \tau \circ \sigma_\alpha(\beta) \in \Phi$ が成り立つ．一方で

$$\tau \circ \sigma_\alpha \circ \tau^{-1}\big(\tau(\beta)\big) = \tau\big(\beta - [\![\beta,\alpha]\!]\alpha\big) = \tau(\beta) - [\![\beta,\alpha]\!]\tau(\alpha) \tag{3.1.5}$$

である．$\beta \in \Phi$ は任意で $\tau \in \mathrm{GL}(\mathbb{E})$ は全単射なので

(RF-1) $\tau \circ \sigma_\alpha \circ \tau^{-1}(\Phi) = \Phi$

(RF-2) $\forall \beta \in P_\alpha,\ \tau \circ \sigma_\alpha \circ \tau^{-1}(\beta) = \beta$

(RF-3) $\tau(\alpha) \in \Phi \setminus \{0\},\ \tau \circ \sigma_\alpha \circ \tau^{-1}\bigl(\tau(\alpha)\bigr) = -\tau(\alpha)$

が成り立つことが分かった．よって補題 3.1.1 より $\tau \circ \sigma_\alpha \circ \tau^{-1} = \sigma_{\tau(\alpha)}$ である．

さらに (3.1.5) から

$$\tau(\beta) - [\![\beta, \alpha]\!]\tau(\alpha) = \sigma_{\tau(\alpha)}\bigl(\tau(\beta)\bigr) = \tau(\beta) - [\![\tau(\beta), \tau(\alpha)]\!]\tau(\alpha)$$

が分かるので (2) が従う． ■

定義 3.1.5: ルート系の同型

2 つのルート系 $(\mathbb{E}, \Phi)$, $(\mathbb{E}', \Phi')$ を与える．写像

$$\phi \colon \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}'$$

が**ルート系の同型写像** (isomorphism) であるとは，以下の 3 条件を満たすことを言う：

(1) ϕ は $\mathbb{R}$-ベクトル空間の同型写像

(2) $\phi(\Phi) = \Phi'$

(3) $\forall \alpha, \beta \in \Phi$ に対して $[\![\phi(\beta), \phi(\alpha)]\!] = [\![\beta, \alpha]\!]$

ルート系 $(\mathbb{E}, \Phi)$ の**自己同型** (automorphism) とは，$\phi \in \mathrm{GL}(\mathbb{E})$ であって $\phi(\Phi) = \Phi$ を充たすもののことを言う．これは補題 3.1.3-(2) により自動的にルート系の同型となる．ルート系の自己同型全体が写像の合成に関してなす群のことを**ルート系の自己同型群**と呼び，$\mathbf{Aut}\,\boldsymbol{\Phi}$ と書く．

ルート系の同型

$$\phi \colon (\mathbb{E}, \Phi) \longrightarrow (\mathbb{E}', \Phi')$$

について，$\forall \alpha, \beta \in \Phi$ に対して

$$\sigma_{\phi(\alpha)} \circ \phi(\beta) = \phi(\beta) - [\![\phi(\beta), \phi(\alpha)]\!]\phi(\alpha) = \phi\bigl(\beta - [\![\beta, \alpha]\!]\alpha\bigr) = \phi \circ \sigma_\alpha(\beta)$$

が成り立つ．i.e. ルート系の図式

$$\begin{tikzcd} \Phi \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\sigma_\alpha"'] & \Phi' \arrow[d, "\sigma_{\phi(\alpha)}"] \\ \Phi \arrow[r, "\phi"'] & \Phi' \end{tikzcd}$$

は可換である．よってルート系の同型は Weyl 群の自然な（群の）同型

$$\begin{aligned} \overline{\phi} \colon \mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi) &\longrightarrow \mathscr{W}_{\mathbb{E}'}(\Phi'), \\ \sigma &\longmapsto \phi \circ \sigma \circ \phi^{-1} \end{aligned}$$

を引き起こす．

補題 3.1.4:

ルート系 $(\mathbb{E}, \Phi)$ の Weyl 群 $\mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi)$ は，ルート系の自己同型群 $\mathrm{Aut}\,\Phi$ の正規部分群である．

証明 $\forall \sigma \in \mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi)$ を 1 つとる．このときある $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Phi$ が存在して $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \sigma_{\alpha_k}$ と書ける[*6]．従って $\forall \tau \in \mathrm{Aut}\,\Phi$ に対して，補題 3.1.3-(1) より

$$\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1} = (\tau \circ \sigma_{\alpha_1} \circ \tau^{-1}) \circ \cdots \circ (\tau \circ \sigma_{\alpha_k} \circ \tau^{-1}) = \sigma_{\tau(\alpha_1)} \circ \cdots \circ \sigma_{\tau(\alpha_k)} \in \mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi)$$

が成り立つ．i.e. $\mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi) \lhd \mathrm{Aut}\,\Phi$ である． ■

補題 3.1.5: 双対ルートの Weyl 群

$$\mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi) \cong \mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi^{\vee})$$

証明 (3.1.4) より，写像 $\sigma_\alpha \longmapsto \sigma_{\alpha^\vee}$ は同型写像である． ■

3.2 単純ルートと Weyl 群

この節では $(\mathbb{E}, \Phi)$ を任意のランク l のルート系とし，その Weyl 群を $\mathscr{W}$ と略記する．

3.2.1 ルート系の底と Weyl の区画

定義 3.2.1: ルート系の底

Φ の部分集合 $\Delta \subset \Phi$ が**底** (base) であるとは，以下を充たすことをいう：

(B-1) Δ は $\mathbb{R}$-ベクトル空間 $\mathbb{E}$ の基底である．

(B-2) $\forall \beta \in \Phi$ に対して整数の族 $\{\beta_\alpha\}_{\alpha \in \Delta} \in \prod_{\alpha \in \Delta} \mathbb{Z}$ が一意的に存在して

$$\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} \beta_\alpha \alpha$$

を充たし，$\forall \alpha \in \Delta,\ \beta_\alpha \geq 0$ であるか $\forall \alpha \in \Delta,\ \beta_\alpha \leq 0$ であるかのどちらかである．

- Δ の元のことを**単純ルート** (simple root) と呼ぶ．
- $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} \beta_\alpha \alpha \in \Phi$ に対して

$$\mathbf{ht}\,\boldsymbol{\beta} \coloneqq \sum_{\alpha \in \Delta} \beta_\alpha \in \mathbb{Z}$$

  と定義し，底 Δ に関するルート β の**高さ** (height) と呼ぶ．
- $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} \beta_\alpha \alpha \in \Phi$ が**正**（resp. **負**）であるとは，$\forall \alpha \in \Delta,\ \beta_\alpha \geq 0$（resp. $\forall \alpha \in \Delta,\ \beta_\alpha \leq 0$）

[*6] $\sigma_{\alpha_i}^{-1} = \sigma_{\alpha_i}$ なのでこれで良い．

が成り立つことを言い，$\boldsymbol{\beta} \succ \mathbf{0}$（resp. $\boldsymbol{\beta} \prec \mathbf{0}$）と書く[a].

- 正（resp. 負）のルート全体の集合のことを $\boldsymbol{\Phi}^+$（resp. $\boldsymbol{\Phi}^-$）と書く[b].
- $\mathbb{E}$ 上の半順序 $\prec \subset \mathbb{E} \times \mathbb{E}$ を

$$\mu \prec \lambda \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \exists! \{k_\alpha\}_{\alpha \in \Delta} \in \prod_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R}_{\geq 0}, \ \lambda - \mu = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$$

と定義する．

[a] LaTeX コマンドは $\succ$ が `\succ`，$\prec$ が `\prec` である．
[b] 明らかに $\Phi^- = -\Phi^+$ である．

$\prec$ が半順序になっていることを確認しておこう：

(反射律) $\forall \mu \in \mathbb{E}$ に対して $\mu - \mu = 0$ が成り立つので $\mu \prec \mu$ である．

(反対称律) $\mu \prec \lambda$ かつ $\lambda \prec \mu$ だとする．このとき $\{k_\alpha\}_{\alpha \in \Delta},\ \{l_\alpha\}_{\alpha \in \Delta} \in \prod_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R}_{\geq 0}$ が一意的に存在して

$$\lambda - \mu = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha, \qquad \mu - \lambda = \sum_{\alpha \in \Delta} l_\alpha \alpha$$

と書ける．辺々足すと **(B-1)** より $\forall \alpha \in \Delta$ に対して $k_\alpha + l_\alpha = 0$ だと分かるが，$k_\alpha \geq 0$ かつ $l_\alpha \geq 0$ なので $k_\alpha = l_\alpha = 0$，i.e. $\mu - \lambda = 0 \iff \mu = \lambda$ が言えた．

(推移律) $\mu \prec \lambda$ かつ $\lambda \prec \nu$ だとする．このとき $\nu - \mu = (\nu - \lambda) + (\lambda - \mu)$ なので明らかに $\mu \prec \nu$ である．

ルート系 $(\mathbb{E}, \Phi)$ の底を定義したのは良いが，存在しなくては意味がない．

補題 3.2.1:

Δ が Φ の底ならば，相異なる任意の 2 つの単純ルート $\alpha, \beta \in \Delta$ に対して $(\alpha, \beta) \leq 0$ であり，$\alpha - \beta \notin \Phi$ である．

証明 背理法により示す．$(\alpha, \beta) > 0$ だとする．仮定より $\alpha \neq \beta$ であり，かつ Δ の元の線型独立性から $\beta \neq -\alpha$ なので，補題 3.1.2 から $\alpha - \beta \in \Phi$ と言うことになる．然るにこのとき $\alpha - \beta \in \Phi$ が $\alpha, \beta \in \Delta$ の係数 $1, -1$ の線型結合で書けていることになり **(B-2)** に矛盾する． ■

定義 3.2.2:

$\forall\gamma\in\mathbb{E}$ に対して以下を定義する：

- Φ の部分集合
$$\boldsymbol{\Phi^+(\gamma)} := \{\, \alpha\in\Phi \mid (\gamma,\alpha)>0 \,\}$$
-
$$\gamma\in\mathbb{E}\setminus\bigcup_{\alpha\in\Phi}P_\alpha$$
のとき，γ は**正則** (regular) であるという．γ が正則でないとき**特異** (sigular) であると言う．
- $\alpha\in\Phi^+(\gamma)$ が
$$\exists\beta_1,\,\beta_2\in\Phi^+(\gamma),\ \alpha=\beta_1+\beta_2$$
を充たすとき，α は**分割可能** (decomposable) であると言う．分割可能でないとき**分割不可能** (indecomposable) であると言う．

γ が正則ならば $\forall\alpha\in\Phi$ に対して $(\gamma,\alpha)\neq 0$ なので，**(Root-2)** から $\Phi=\Phi^+(\gamma)\amalg\bigl(-\Phi^+(\gamma)\bigr)$（disjoint union）が成り立つ．

定理 3.2.1: 底の存在

正則な任意の $\gamma\in\mathbb{E}$ を与える．このとき集合
$$\Delta(\gamma) := \{\, \alpha\in\Phi^+(\gamma) \mid \text{分割不可能} \,\}$$
は Φ の底である．逆に Φ の任意の底 Δ に対してある正則な $\gamma\in\mathbb{E}$ が存在して $\Delta=\Delta(\gamma)$ となる．

証明 **step1: $\boldsymbol{\Phi^+(\gamma)}$ の任意の元は $\boldsymbol{\Delta(\gamma)}$ の $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-係数線型結合で書ける**

背理法により示す．$\Delta(\gamma)$ の $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-係数線型結合で書けない $\alpha\in\Phi^+(\gamma)$ が存在するとする．このとき，そのような α のうち (γ,α) が最小であるようなものが存在するのでそれを α_0 とおく．$\alpha_0\notin\Delta(\gamma)$ なので[*7] α_0 は分割可能であり，ある $\beta_1,\,\beta_2\in\Phi^+(\gamma)$ が存在して $\alpha=\beta_1+\beta_2$ と書ける．このとき
$$(\gamma,\alpha_0)=(\gamma,\beta_1)+(\gamma,\beta_2)>(\gamma,\beta_i)$$
が成り立つので，α_0 の最小性から $\beta_1,\,\beta_2$ はどちらも $\Delta(\gamma)$ の元の $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-係数線型結合で書ける．然るにこのとき α も $\Delta(\gamma)$ の元の $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-係数線型結合で書けることになって矛盾．

step2: $\boldsymbol{\alpha,\,\beta\in\Delta(\gamma)}$ かつ $\boldsymbol{\alpha\neq\beta}$ ならば，$\boldsymbol{(\alpha,\beta)\leq 0}$

背理法により示す．$(\alpha,\beta)>0$ を仮定する．このとき補題 3.1.2-(1) より $\alpha-\beta\in\Phi$ であり，$\beta-\alpha=\sigma_{\alpha-\beta}(\alpha-\beta)\in\Phi$ もわかる．よって $\alpha-\beta\in\Phi^+(\gamma)$ または $\beta-\alpha\in\Phi^+(\gamma)$ である．然るに前者の場合 $\alpha=\beta+(\alpha-\beta)$ なので $\alpha\in\Delta(\gamma)$ が分割可能ということになって矛盾し，後者の場合は $\beta=\alpha+(\beta-\alpha)$ なので $\beta\in\Delta(\gamma)$ が分割可能ということになって矛盾である．

[*7] $\alpha_0\in\Delta(\gamma)$ だとすると，$\alpha_0\in\Delta(\gamma)$ の係数 $1\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ の線型結合として書けていることになり矛盾．

step3: $\Delta(\gamma)$ の元は互いに線型独立

$\{k_\alpha\}_{\alpha\in\Delta(\gamma)} \in \prod_{\alpha\in\Delta}\mathbb{R}$ に対して $\sum_{\alpha\in\Delta(\gamma)} k_\alpha\alpha = 0$ を仮定する．$\forall\alpha\in\Delta(\gamma)$ に対して

$$\Delta^+(\gamma) \coloneqq \{\, \alpha\in\Delta(\gamma) \mid k_\alpha > 0 \,\}, \qquad \Delta^-(\gamma) \coloneqq \{\, \alpha\in\Delta(\gamma) \mid k_\alpha < 0 \,\}$$

とおくと $\Delta^+(\gamma)\cap\Delta^-(\gamma) = \emptyset$ で，仮定は

$$\sum_{\alpha\in\Delta^+(\gamma)} k_\alpha\alpha = \sum_{\alpha\in\Delta^-(\gamma)} (-k_\alpha)\alpha$$

と同値である．$\varepsilon \coloneqq \sum_{\alpha\in\Delta^+(\gamma)} k_\alpha\alpha$ とおくと，**step2** から

$$0 \le (\varepsilon,\varepsilon) = \sum_{\alpha\in\Delta^+(\gamma),\,\beta\in\Delta^-(\gamma)} k_\alpha(-k_\beta)(\alpha,\beta) \le 0$$

が成り立つので $\varepsilon = 0$ だとわかる．よって

$$0 = (\gamma,\varepsilon) = \sum_{\alpha\in\Delta^+(\gamma)} k_\alpha(\gamma,\alpha) = \sum_{\alpha\in\Delta^-(\gamma)} (-k_\alpha)(\gamma,\alpha)$$

であり，$\forall\alpha\in\Delta(\gamma)$，$k_\alpha = 0$ が言えた．

step4: $\Delta(\gamma)$ は Φ の底

$\Phi = \Phi^+(\gamma) \amalg \bigl(-\Phi^+(\gamma)\bigr)$ なので，**step1** と併せて **(B-2)** が，**step3** と併せて **(B-1)** が従う．

step5: 任意の底 Δ に対してある正則な $\gamma\in\mathbb{E}$ が存在して $\Delta = \Delta(\gamma)$ となる

Φ の底 Δ が与えられたとき，$\forall\alpha\in\Delta$ に対して $(\gamma,\alpha) > 0$ を充たす $\gamma\in\mathbb{E}$ をとる[*8]．**(B-2)** より γ は正則であり，かつ $\forall\beta = \sum_{\alpha\in\Delta}\beta_\alpha\alpha \in \Phi^+$ に対して

$$(\gamma,\beta) = \sum_{\alpha\in\Delta}\beta_\alpha(\gamma,\alpha) > 0$$

が成り立つので $\beta\in\Phi^+(\gamma)$，i.e. $\Phi^+ \subset \Phi^+(\gamma)$，$\Phi^- = -\Phi^- \subset -\Phi^+(\gamma)$ も分かる．ところが **step4** より $\Phi = \Phi^+ \amalg \Phi^- = \Phi^+(\gamma) \amalg \bigl(-\Phi^+(\gamma)\bigr)$ なので，$\Phi^+ = \Phi^+(\gamma)$ でなくてはいけない．従って $\forall\alpha\in\Delta$ は分割不可能であり[*9]，$\Delta \subset \Delta(\gamma)$ だと分かった．**(B-1)** および **step4** より $|\Delta| = |\Delta(\gamma)| = l$ なので[*10] $\Delta = \Delta(\gamma)$ が言えた．

■

[*8] このような γ が存在することを示そう．**(B-1)** より Δ は $\mathbb{E}$ の基底だから，$\forall\alpha$ に対して $\gamma_\alpha\in\mathbb{E}$ を，$\mathbb{E}$ の部分ベクトル空間 $\mathrm{Span}_{\mathbb{K}}(\Delta\setminus\{\alpha\})$ の $(\ ,\ )$ に関する直交補空間 $\bigl(\mathrm{Span}_{\mathbb{K}}(\Delta\setminus\{\alpha\})\bigr)^\perp$ への α の射影とする．Δ の元は全て互いに線型独立なので $\gamma_\alpha \ne 0$ である．このとき，$\{k_\alpha\}_{\alpha\in\Delta} \in \prod_{\alpha\in\Delta}\mathbb{R}_{>0}$ に対して $\gamma \coloneqq \sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha\gamma_\alpha$ とおけば，$\forall\alpha\in\Delta$ に対して $(\gamma,\alpha) = k_\alpha(\gamma_\alpha,\alpha) > 0$ が成り立つ．

[*9] $\beta_1 = \sum_{\alpha\in\Delta}\beta_{1\alpha}\alpha$, $\beta_2 = \sum_{\alpha\in\Delta}\beta_{2\alpha}\alpha \in \Phi^+ = \Phi^+(\gamma)$ を用いて $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ と書けたとする．このとき Δ の元の線型独立性から $\beta_{1\alpha} + \beta_{2\alpha} = 1$ かつ $\forall\gamma\in\Delta\setminus\{\alpha\}$，$\beta_{1\gamma} + \beta_{2\gamma} = 0$ が成り立つが，**(B-2)** より $(\beta_{1\alpha},\,\beta_{2\alpha}) = (1,\,0)$ または $(0,\,1)$ かつ $\forall\gamma\in\Delta\setminus\{\alpha\}$，$\beta_{1\gamma} = \beta_{2\gamma} = 0$，i.e. $(\beta_1,\,\beta_2) = (\alpha,\,0)$ または $(0,\,\alpha)$ でなくてはならず，$0 \notin \Phi^+$ に矛盾．

[*10] [?] では集合の**濃度** (cardinality) の意味で $\mathrm{Card}\,\Delta$ と書かれていた．

定義 3.2.3: Weyl の区画

- 位相空間[a] $\mathbb{E}$ の部分空間 $\mathbb{E} \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha$ の連結成分の 1 つのことを（開な）**Weyl の区画** (Weyl chamber) [b]と呼ぶ．
- 正則な $\gamma \in \mathbb{E}$ が属する Weyl の区画のことを $\mathfrak{C}(\gamma)$ と書く[c].
- Φ の底 Δ に対して定理 3.2.1 の意味で $\Delta = \Delta(\gamma)$ ならば $\mathfrak{C}(\Delta) \coloneqq \mathfrak{C}(\gamma)$ とおき，**Δ に関する Weyl の基本区画** (fundamental Weyl chamber relative to Δ)[d] と呼ぶ．

---

[a] Euclid 空間の定義の脚注を参照.
[b] この訳語は筆者が勝手につけたものである．[?] では **Weyl の部屋**と呼ばれていた．
[c] LaTeX コマンドは `\mathfrak{C}`
[d] これの訳語は全く普及していない気がする．**Δ に関する基本的 Weyl の部屋**だと語感が悪いと思ったのでこのような訳語を充てた．

補題 3.2.2: Weyl の区画の基本性質

正則な任意の $\gamma, \gamma' \in \mathbb{E}$ および任意の Φ の底 Δ を与える．定理 3.2.1 によって得られる Φ の底を $\Delta(\gamma)$ と書く．

(1) $\mathfrak{C}(\gamma) = \mathfrak{C}(\gamma') \iff \Delta(\gamma) = \Delta(\gamma')$

(2) 写像

$$\begin{aligned} \{\, \Phi \text{ の底全体の集合} \,\} &\longrightarrow \{\, \text{Weyl の区画全体の集合} \,\}, \\ \Delta &\longmapsto \mathfrak{C}(\Delta) \end{aligned}$$

は全単射である．

(3) $\mathfrak{C}(\Delta) = \left\{\, \beta \in \mathbb{E} \;\middle|\; \forall \alpha \in \Delta,\ (\beta, \alpha) > 0 \,\right\}$

証明 (1) $\alpha \in \Phi$ に関する鏡映面 P_α に関して

$$P_\alpha^+ \coloneqq \left\{\, \beta \in \mathbb{E} \;\middle|\; (\beta, \alpha) > 0 \,\right\}, \qquad P_\alpha^- \coloneqq \left\{\, \beta \in \mathbb{E} \;\middle|\; (\beta, \alpha) < 0 \,\right\}$$

とおく．すると $\mathbb{E} \setminus P_\alpha = P_\alpha^+ \cup P_\alpha^-$（disjoint union）となるから，

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha &= \bigcap_{\alpha \in \Phi} (\mathbb{E} \setminus P_\alpha) \\ &= \bigcap_{\alpha \in \Phi} (P_\alpha^+ \cup P_\alpha^-) \\ &= \bigcup_{\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in \Phi} \in \prod_{\alpha \in \Phi} \{\pm\}} \bigcap_{\alpha \in \Phi} P_\alpha^{\mu_\alpha} \end{aligned}$$

である．最右辺の $\bigcap_{\alpha \in \Phi} P_\alpha^{\mu_\alpha}$ は凸集合の共通部分なので凸集合であり，従って連結である．さらに $\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in \Phi} \in \prod_{\alpha \in \Phi} \{\pm\}$ に関する重複を除いて位相空間の意味で disjoint であるから Weyl の区画であ

る[*11]．従って $\mathfrak{C}(\gamma)$ は，$\forall\alpha\in\Phi$ に対して

$$\mu_\alpha(\gamma) := \begin{cases} +, & (\gamma,\alpha) > 0, \\ -, & (\gamma,\alpha) < 0 \end{cases}$$

とおけば

$$\mathfrak{C}(\gamma) = \bigcap_{\alpha\in\Phi} P_\alpha^{\mu_\alpha(\gamma)} = \left\{\, \beta\in\mathbb{E} \;\middle|\; \forall\alpha\in\Phi,\ (\gamma,\alpha)(\beta,\alpha) > 0 \,\right\} \tag{3.2.1}$$

と書ける．よって

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}(\gamma) = \mathfrak{C}(\gamma') \quad &\iff \quad \forall\alpha\in\Phi,\ \mu_\alpha(\gamma) = \mu_\alpha(\gamma') \\ &\iff \quad \Phi^+(\gamma) = \Phi^+(\gamma') \\ &\iff \quad \Delta(\gamma) = \Delta(\gamma') \end{aligned}$$

が言える．

(2) (1)，定理 3.2.1，および Weyl の基本区画の定義から従う．

(3) $\Delta = \Delta(\gamma)$ を充たす正則な $\gamma\in\mathbb{E}$ を 1 つとる．すると (3.2.1) より

$$\mathfrak{C}(\Delta) = \left\{\, \beta\in\mathbb{E} \;\middle|\; \forall\alpha\in\Phi,\ (\gamma,\alpha)(\beta,\alpha) > 0 \,\right\}$$

だが，$\Phi = \Phi^+(\gamma) \amalg \bigl(-\Phi^+(\gamma)\bigr)$ でかつ $\Phi^+(\gamma)$ の定義より $\forall\alpha\in\Phi^+(\gamma)$ に対して $(\gamma,\alpha) > 0$ が成り立つので

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}(\Delta) &= \left\{\, \beta\in\mathbb{E} \;\middle|\; \forall\alpha\in\Phi^+(\gamma),\ (\beta,\alpha) > 0 \,\right\} \\ &= \left\{\, \beta\in\mathbb{E} \;\middle|\; \forall\alpha\in\Delta(\gamma),\ (\beta,\alpha) > 0 \,\right\} \end{aligned}$$

だと分かった．

■

補題 3.2.3: Weyl の区画と Weyl 群の関係

正則な任意の $\gamma\in\mathbb{E}$ および任意の Φ の底 Δ を与える．このとき $\forall\sigma\in\mathscr{W}$ に対して以下が成り立つ：

(1) $\sigma\bigl(\Delta(\gamma)\bigr) = \Delta\bigl(\sigma(\gamma)\bigr)$
(2) $\sigma(\Delta)$ もまた Φ の底である．
(3) $\sigma\bigl(\mathfrak{C}(\gamma)\bigr) = \mathfrak{C}\bigl(\sigma(\gamma)\bigr)$
(4) $\sigma\bigl(\mathfrak{C}(\Delta)\bigr) = \mathfrak{C}\bigl(\sigma(\Delta)\bigr)$

証明 鏡映は等長変換（isometry）なので $\bigl(\sigma(\alpha),\sigma(\beta)\bigr) = (\alpha,\beta)$ が成り立つ．

(1)

$$\begin{aligned} \sigma\bigl(\Phi^+(\gamma)\bigr) &= \left\{\, \sigma(\alpha)\in\Phi \;\middle|\; (\gamma,\alpha) = \bigl(\sigma(\gamma),\sigma(\alpha)\bigr) > 0 \,\right\} \\ &= \left\{\, \beta\in\Phi \;\middle|\; \bigl(\sigma(\gamma),\beta\bigr) > 0 \,\right\} \\ &= \Phi^+\bigl(\sigma(\gamma)\bigr) \end{aligned}$$

[*11] より厳密には，$\mathbb{E}\setminus\bigcup_{\alpha\in\Phi} P_\alpha$ の部分空間として開かつ閉 (clopen) であり，かつそれ自身連結なので，連結成分の 1 つだと分かる．

が分かる．従って $\sigma\big(\Delta(\gamma)\big) = \Delta\big(\sigma(\gamma)\big)$ である．

(2) 定理 3.2.1 より，ある正則な $\gamma \in \mathbb{E}$ が存在して $\Delta = \Delta(\gamma)$ と書ける．よって (1) から $\sigma(\Delta) = \Delta\big(\sigma(\gamma)\big)$ であるが，再度定理 3.2.1 より右辺は Φ の底である．

(3) (3.2.1)，および $\sigma(\Phi) = \Phi$ より

$$\begin{aligned}\sigma\big(\mathfrak{C}(\gamma)\big) &= \left\{\, \sigma(\beta) \in \mathbb{E} \;\middle|\; \forall\alpha \in \Phi,\ (\gamma,\alpha)(\beta,\alpha) = \big(\sigma(\gamma),\sigma(\alpha)\big)\big(\sigma(\beta),\sigma(\alpha)\big) > 0 \,\right\} \\ &= \left\{\, \beta \in \mathbb{E} \;\middle|\; \forall\alpha \in \Phi,\ \big(\sigma(\gamma),\alpha\big)\big(\beta,\alpha\big) > 0 \,\right\} \\ &= \mathfrak{C}\big(\sigma(\gamma)\big)\end{aligned}$$

(4) (4) および定理 3.2.1 より従う．

■

補題 3.2.3 より，写像[*12]

$$\pi_{\mathrm{W}} \colon \mathscr{W} \longrightarrow \mathrm{Isom}(\{\mathrm{Weyl} \text{ の区画}\}),\ \sigma \longmapsto \Big(\mathfrak{C}(\gamma) \mapsto \mathfrak{C}\big(\sigma(\gamma)\big)\Big) \tag{3.2.2}$$

$$\pi_{\mathrm{b}} \colon \mathscr{W} \longrightarrow \mathrm{Isom}(\{\Phi \text{ の底}\}),\ \sigma \longmapsto \Big(\Delta \mapsto \sigma(\Delta)\Big) \tag{3.2.3}$$

が群準同型であることが分かった．i.e. Weyl 群 $\mathscr{W}$ は Weyl の区画全体の集合，および Φ の底全体の集合に群として左作用する．

3.2.2 単純ルートに関する補題

この小節では Φ の任意の底 Δ を 1 つ固定する．

補題 3.2.4:

$\alpha \in \Phi \setminus \Delta$ が正ルートならば，ある $\beta \in \Delta$ が存在して $\alpha - \beta \in \Phi$ となる．特に，$\alpha - \beta \succ 0$ である．

証明 $\forall\beta \in \Delta$ に対して $(\alpha,\beta) \le 0$ が成り立つと仮定すると，定理 3.2.1 の **step3** の証明と同様の議論により $\Delta \cup \{\alpha\}$ が線型独立となり，Δ が $\mathbb{E}$ の基底であることに矛盾．よってある $\beta \in \Delta$ が存在して $(\alpha,\beta) > 0$ となる．$\alpha \notin \Delta$ なので $\alpha \neq \pm\beta$ であることと併せると，補題 3.1.2 が使えて $\alpha - \beta \in \Phi$ だと分かる．

仮定より $\alpha \succ 0$ なので $\{\alpha_\gamma\}_{\gamma\in\Delta} \in \prod_{\gamma\in\Delta} \mathbb{Z}_{\ge 0}$ が一意的に存在して $\alpha = \sum_{\gamma\in\Delta} \alpha_\gamma \gamma$ と書ける．$\alpha \notin \Delta$ なのである $\gamma \in \Delta \setminus \{\beta\}$ が存在して $\alpha_\gamma > 0$ を充たす．よって $\alpha - \beta \in \Phi$ を単純ルートで展開した $\mathbb{Z}$-係数のうち少なくとも 1 つは正である．よって (B-2) から $\alpha - \beta \succ 0$ が言える． ■

[*12] $\mathrm{Isom}(X)$ は距離空間 X 上の全単射な等長変換全体が写像の合成に関して成す群（**等長変換群**; isometry group）を意味する．

系 3.2.2:

$\forall\beta \in \Phi^+$ に対して $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Delta$ が存在して（重複も許す），

$$\beta = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j$$

かつ $1 \leq \forall i \leq k$ に対して

$$\sum_{j=1}^{i} \alpha_j \in \Phi$$

を充たす．

証明 仮定より $\{\beta_\gamma\}_{\gamma\in\Delta} \in \prod_{\gamma\in\Delta} \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が一意的に存在して $\beta = \sum_{\gamma\in\Delta} \beta_\gamma \gamma$ と書ける．$\mathrm{ht}\,\beta$ に関する数学的帰納法により示す．$\mathrm{ht}\,\beta = 1$ のときは $\beta \in \Delta \subset \Phi$ なので明らか．

$\mathrm{ht}\,\beta > 1$ とする．このとき $\beta \notin \Delta$ である．従って補題 3.2.4 が使えて $\beta - \gamma \in \Phi^+$ となる．よって帰納法の仮定から示された． ■

補題 3.2.5:

任意の単純ルート $\alpha \in \Delta$ に対して，$\sigma_\alpha \in \mathrm{GL}(\mathbb{E})$ は $\sigma_\alpha\big(\Phi^+ \setminus \{\alpha\}\big) = \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$ を充たす．

証明 $\forall\beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$ を 1 つとる．このとき $\{\beta_\gamma\}_{\gamma\in\Delta} \in \prod_{\gamma\in\Delta} \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が一意的に存在して $\beta = \sum_{\gamma\in\Delta} \beta_\gamma \gamma$ と書ける．$\beta \neq \pm\alpha$ だから，ある $\gamma \in \Delta \setminus \{\alpha\}$ が存在して $\beta_\gamma > 0$ となる．このとき $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - [\![\beta, \alpha]\!]\alpha$ の γ の係数は $k_\gamma > 0$ のままである．よって **(B-2)** から $\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi^+$ が言える．$\alpha = \sigma_\alpha(-\alpha) \neq \sigma_\alpha(\beta)$ なので $\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$ が言えた． ■

系 3.2.3:

$$\delta \coloneqq \frac{1}{2} \sum_{\beta\in\Phi^+} \beta$$

とおくと，$\forall\alpha \in \Delta$ に対して

$$\sigma_\alpha(\delta) = \delta - \alpha$$

が成り立つ．

証明 補題 3.2.5 より

$$\sigma_\alpha(\delta) = \sigma_\alpha\left(\sum_{\beta\in\Phi^+\setminus\{\alpha\}} \beta\right) + \sigma_\alpha(\alpha) = \delta - \alpha$$

■

補題 3.2.6:

重複を許して $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in \Delta$ を任意にとる．
このとき，もし $\sigma_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \sigma_{\alpha_{t-1}}(\alpha_t) \prec 0$ ならば，ある $1 \le s < t$ が存在して

$$\sigma_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \sigma_{\alpha_t} = \sigma_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \sigma_{\alpha_{s-1}} \circ \sigma_{\alpha_{s+1}} \circ \cdots \circ \sigma_{\alpha_{t-1}}$$

が成り立つ．

<u>証明</u> $\circ$ を省略し，$\sigma_i \coloneqq \sigma_{\alpha_i}$ と略記する．

$$\beta_i \coloneqq \begin{cases} \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{t-1}(\alpha_t), & 0 \le i \le t-2 \\ \alpha_t, & i = t-1 \end{cases}$$

とおく．$\beta_0 \prec 0$ かつ $\beta_{t-1} \succ 0$ なので，

$$s \coloneqq \min\left\{ i \in \mathbb{N} \,\middle|\, \beta_i \succ 0 \right\}$$

が存在する．このとき $\beta_s \in \Phi^+$ かつ $\sigma_s(\beta_s) = \beta_{s-1} \prec 0$ なので補題 3.2.5 より $\beta_s = \alpha_s$ でなくてはならない．$\sigma_{s+1} \cdots \sigma_{t-1} \in \mathscr{W}$ なので，このとき補題 3.1.3-(1) より

$$\sigma_s = \sigma_{\beta_s} = (\sigma_{s+1} \cdots \sigma_{t-1})\sigma_t(\sigma_{t-1} \cdots \sigma_{s+1})$$

だと分かる．よって

$$\begin{aligned} \sigma_1 \cdots \sigma_{s-1}\sigma_s\sigma_{s+1} \cdots \sigma_t &= \sigma_1 \cdots \sigma_{s-1}(\sigma_{s+1} \cdots \sigma_{t-1})\sigma_t(\sigma_{t-1} \cdots \sigma_{s+1})\sigma_{s+1} \cdots \sigma_t \\ &= \sigma_1 \cdots \sigma_{s-1}\sigma_{s+1} \cdots \sigma_t \end{aligned}$$

■

系 3.2.4:

$\sigma \in \mathscr{W}$ が，$\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in \Delta$ を用いて $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \sigma_{\alpha_t}$ と表示されているとする．このような σ の表示のうち t が最小のものに対しては $\sigma(\alpha_t) \prec 0$ である．

<u>証明</u>

$$\sigma(\alpha_t) = \sigma_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \sigma_{\alpha_{t-1}}(-\alpha_t)$$

なので，もし $\sigma(\alpha_t) \succ 0$ ならば $\sigma_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \sigma_{\alpha_{t-1}}(\alpha_t) \prec 0$ となる．然るにこのとき補題 3.2.6 からある $1 \le s < \mathrm{len}(\sigma)$ が存在して

$$\sigma_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \sigma_{\alpha_t} = \sigma_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \sigma_{\alpha_{s-1}} \circ \sigma_{\alpha_{s+1}} \circ \cdots \circ \sigma_{\alpha_{t-1}}$$

が成り立ち，t の最小性に矛盾する．よって背理法から $\sigma(\alpha_t) \prec 0$ である． ■

3.2.3 Weyl 群の性質

準備が整ったので，Weyl 群の極めて重要な性質を示す．

定理 3.2.5: Weyl 群の性質

Φ の底 Δ を任意に与える．

(1) $\gamma \in \mathbb{E}$ が正則ならば，ある $\sigma \in \mathscr{W}$ が存在して，$\forall \alpha \in \Delta,\ \bigl(\sigma(\gamma), \alpha\bigr) > 0$ を充たす．
特に，Weyl 群の作用 (3.2.2)

$$\pi_{\mathrm{W}} \colon \mathscr{W} \longrightarrow \mathrm{Isom}(\{\text{Weyl の区画}\}),\ \sigma \longmapsto \Bigl(\mathfrak{C}(\gamma) \mapsto \mathfrak{C}\bigl(\sigma(\gamma)\bigr)\Bigr)$$

は**推移的** (transitive) [a]である．

(2) Δ' が Φ のもう 1 つの底ならば，ある $\sigma \in \mathscr{W}$ が存在して $\sigma(\Delta') = \Delta$ を充たす．
i.e. Weyl 群の作用 (3.2.3)

$$\pi_{\mathrm{b}} \colon \mathscr{W} \longrightarrow \mathrm{Isom}(\{\Phi \text{ の底}\}),\ \sigma \longmapsto \Bigl(\Delta \mapsto \sigma(\Delta)\Bigr)$$

は**推移的** (transitive) である．

(3) $\forall \alpha \in \Phi$ に対してある $\sigma \in \mathscr{W}$ が存在して $\sigma(\alpha) \in \Delta$ を充たす．

(4) $\mathscr{W}$ は集合 $\left\{ \sigma_\alpha \mid \alpha \in \Delta \right\} \subset \left\{ \sigma_\alpha \mid \alpha \in \Phi \right\}$ によって生成される．

(5) $\sigma \in \mathscr{W}$ が $\sigma(\Delta) = \Delta$ を充たすならば $\sigma = \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$ である．i.e. Weyl 群の作用 (3.2.2) は**自由** (free) である．

[a] i.e. 任意の Weyl の区画 $\mathfrak{C}(\gamma), \mathfrak{C}(\gamma')$ に対してある $\sigma \in \mathscr{W}$ が存在して $\pi_{\mathrm{W}}(\sigma)(\mathfrak{C}(\gamma)) = \mathfrak{C}(\gamma')$ を充たす．

証明 集合 $\left\{ \sigma_\alpha \mid \alpha \in \Delta \right\}$ によって生成される $\mathscr{W}$ の部分群を $\mathscr{W}'$ とする．まず (1)-(3) を $\mathscr{W}'$ において示してから $\mathscr{W}' = \mathscr{W}$ を示す．

(1) 正則な $\gamma \in \mathbb{E}$ を任意にとる．$\delta \coloneqq \frac{1}{2}\sum_{\beta \in \Phi^+} \beta$ とおき，$\sigma \in \arg\max_{\sigma \in \mathscr{W}'} \bigl(\sigma(\gamma), \delta\bigr)$ を 1 つとる[*13]．ここで $\forall \alpha \in \Delta$ を 1 つとると，$\sigma_\alpha \circ \sigma \in \mathscr{W}$ であるから系 3.2.3 より

$$\bigl(\sigma(\gamma), \delta\bigr) \geq \bigl(\sigma_\alpha \circ \sigma(\gamma), \delta\bigr) = \bigl(\sigma(\gamma), \sigma_\alpha(\delta)\bigr) = \bigl(\sigma(\gamma), \delta - \alpha\bigr) = \bigl(\sigma(\gamma), \delta\bigr) - \bigl(\sigma(\gamma), \alpha\bigr)$$

が分かる．よって $\bigl(\sigma(\gamma), \alpha\bigr) \geq 0$ が分かった．γ は正則なので $\bigl(\sigma(\gamma), \alpha\bigr) = \bigl(\gamma, \sigma^{-1}(\alpha)\bigr) > 0$ が言えた．補題 3.2.2-(3) より，このことは $\sigma(\gamma) \in \mathfrak{C}(\Delta)$ を意味する．従って $\pi_{\mathrm{W}}(\sigma)\bigl(\mathfrak{C}(\gamma)\bigr) = \mathfrak{C}\bigl(\sigma(\gamma)\bigr) = \mathfrak{C}(\Delta)$ であり，γ, Δ は任意だったので補題 3.2.2-(2) より π_{W} が推移的であることが分かった．

(2) 定理 3.2.1 より，$\Delta' = \Delta(\gamma')$ を充たす正則な $\gamma' \in \mathbb{E}$ が存在する．このとき (1) および補題 3.2.2-(3) よりある $\sigma \in \mathscr{W}'$ が存在して $\sigma(\gamma') \in \mathfrak{C}(\Delta)$ が成り立つから，再度補題 3.2.3 より $\sigma\bigl(\mathfrak{C}(\Delta')\bigr) = \sigma\bigl(\mathfrak{C}(\gamma')\bigr) = \mathfrak{C}\bigl(\sigma(\gamma')\bigr) = \mathfrak{C}(\Delta)$ が分かる．従って補題 3.2.2-(2) より $\sigma(\Delta') = \Delta$ である．

(3) $\forall \alpha \in \Phi$ を 1 つとる．(2) より，α が少なくとも 1 つの（Δ とは限らない）Φ の底に属することを言えば良い．

(Root-2) より $\forall \beta \in \Phi \setminus \{\pm\alpha\}$ に対して $\beta \notin \mathbb{K}\alpha$ であるから $\mathbb{K}\alpha \cap \mathbb{K}\beta = 0$ である．よって $P_\alpha \cap P_\beta = (\mathbb{K}\alpha)^\perp \cap (\mathbb{K}\beta)^\perp = (\mathbb{K}\alpha \oplus \mathbb{K}\beta)^\perp$ となる[*14]が，$\mathbb{K}\alpha \subsetneq \mathbb{K}\alpha \oplus \mathbb{K}\beta$ なので $P_\alpha \cap P_\beta = (\mathbb{K}\alpha \oplus \mathbb{K}\beta)^\perp \subsetneq (\mathbb{K}\alpha)^\perp = P_\alpha$ が成り立ち，$\exists \gamma \in P_\alpha \setminus (P_\alpha \cap P_\beta)$ が言える．ここで γ に Euclid 距離の

[*13] $\mathscr{W}' \subset \mathscr{W}$ は有限群なのでこのような σ は少なくとも 1 つ存在する．

[*14] $\perp$ は Euclid 空間に備わっている双線型形式 (,) に関する直交補空間の意味である．

意味で十分近い正則な $\gamma' \in \mathbb{E}$ を取れば，ある $\varepsilon > 0$ に対して $(\gamma', \alpha) = \varepsilon$ かつ $|(\gamma', \beta)| > \varepsilon$ を充たすようにできる．すると $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$ で，かつ $\beta \in \Phi \setminus \{\pm\alpha\}$ は任意だったので α は分割不可能であり，[*15]，$\alpha \in \Delta(\gamma')$ が言えた．

(4) $\mathscr{W} = \mathscr{W}'$ を言うには，$\forall \alpha \in \Phi$ に対して $\sigma_\alpha \in \mathscr{W}'$ が成り立つことを示せば十分である．ここで (3) よりある $\sigma \in \mathscr{W}'$ が存在して $\sigma(\alpha) \in \Delta$ を充たすようにできる．このとき補題 3.1.3-(1) より $\sigma_{\sigma(\alpha)} = \sigma \circ \sigma_\alpha \circ \sigma^{-1}$ であるので，$\sigma_{\alpha(\alpha)} \in \mathscr{W}'$ より $\sigma_\alpha = \sigma^{-1} \circ \sigma_{\sigma(\alpha)} \circ \sigma \in \mathscr{W}'$ が言えた．

(5) 背理法により示す．$\sigma(\Delta) = \Delta$ でかつ $\sigma \neq \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$ を仮定する．このとき (4) よりある $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \Delta$ が存在して $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \sigma_{\alpha_t}$ と表示できる．このような σ の表示のうち，t が最小のものをとる．然るにこのとき仮定より $\sigma(\alpha_t) \succ 0$ と言うことになって系 3.2.4 に矛盾．

■

定義 3.2.4: Weyl 群の簡約表示

Φ の底 Δ を任意に与える．

- $\forall \sigma \in \mathscr{W}$ に対して一意に定まる非負整数

$$\boldsymbol{\mathrm{len}(\sigma)} := \min\left\{ t \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \;\middle|\; \exists \alpha_1, \dots, \alpha_t \in \Delta,\ \sigma = \sigma_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \sigma_{\alpha_t} \right\}$$

  を Δ に関する σ の**長さ** (length) と呼ぶ．ただし $\mathrm{len}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}}) := 0$ と定義する．
- $\sigma \in \mathscr{W}$ の表示

$$\sigma = \sigma_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \sigma_{\alpha_{\mathrm{len}(\sigma)}} \quad {}^{\mathrm{w}/} \quad \alpha_i \in \Delta$$

  のことを Δ に関する σ の**簡約表示** (reduced presentation) と呼ぶ．

補題 3.2.7: 簡約表示の長さ

Φ の底 Δ を任意に与える．このとき $\forall \sigma \in \mathscr{W}$ に対して

$$\mathrm{len}(\sigma) = \left| \left\{ \beta \in \Phi \;\middle|\; \beta \succ 0 \text{ かつ } \sigma(\beta) \prec 0 \right\} \right|$$

が成り立つ．右辺を $\boldsymbol{n(\sigma)}$ とおく．

証明 $\forall \sigma \in \mathscr{W}$ を 1 つ固定する．$\mathrm{len}(\sigma)$ に関する数学的帰納法により示す．$\mathrm{len}(\sigma) = 0$ のときは $\sigma = \mathrm{id}$ なので良い[*16]．

$\mathrm{len}(\sigma) > \mathrm{len}(\tau)$ を充たす任意の $\tau \in \mathscr{W}$ に対して補題が成り立っているとする．$\sigma = \sigma_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \sigma_{\alpha_t}$ を Δ に関する σ の簡約表示とし，$\alpha := \alpha_t \in \Delta$ とおく．すると系 3.2.4 より $\sigma(\alpha) \prec 0$ であるから

$$\alpha \in \left\{ \beta \in \Phi \;\middle|\; \beta \succ 0 \text{ かつ } \sigma(\beta) \prec 0 \right\}$$

[*15] α が分割可能とする．このときある $\beta_1, \beta_2 \in \Phi^+(\gamma')$ が存在して $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ と書ける．ところが今 $(\gamma', \beta_i) > \varepsilon$ であるから，$\varepsilon = (\gamma', \alpha) = (\gamma', \beta_1) + (\gamma', \beta_2) > 2\varepsilon$ と言うことになり，$\varepsilon > 0$ に矛盾．

[*16] **(Root-1)** より $0 \notin \Phi$ である．

がわかる．一方で $\sigma\circ\sigma_\alpha(\alpha)=\sigma(-\alpha)\succ 0$ なので

$$\left\{\,\beta\in\Phi \;\middle|\; \beta\succ 0 \;\text{ かつ }\; \sigma\circ\sigma_\alpha(\beta)\prec 0\,\right\}=\left\{\,\beta\in\Phi^+\setminus\{\alpha\} \;\middle|\; \sigma\bigl(\sigma_\alpha(\beta)\bigr)\prec 0\,\right\}$$

であるが，補題 3.2.5 から最右辺は

$$\left\{\,\beta\in\Phi \;\middle|\; \beta\succ 0 \;\text{ かつ }\; \sigma(\beta)\prec 0\,\right\}\setminus\{\alpha\}$$

に等しい．よって

$$\begin{aligned}
n(\sigma\circ\sigma_\alpha)&=\left|\left\{\,\beta\in\Phi \;\middle|\; \beta\succ 0 \;\text{ かつ }\; \sigma\circ\sigma_\alpha(\beta)\prec 0\,\right\}\right|\\
&=\left|\left\{\,\beta\in\Phi \;\middle|\; \beta\succ 0 \;\text{ かつ }\; \sigma(\beta)\prec 0\,\right\}\setminus\{\alpha\}\right|\\
&=\left|\left\{\,\beta\in\Phi \;\middle|\; \beta\succ 0 \;\text{ かつ }\; \sigma(\beta)\prec 0\,\right\}\right|-1\\
&=n(\sigma)-1
\end{aligned}$$

だと分かった．ところで $\mathrm{len}(\sigma\circ\sigma_\alpha)=\mathrm{len}(\sigma_{\alpha_1}\circ\cdots\circ\sigma_{\alpha_{t-1}})=\mathrm{len}(\sigma)-1<\mathrm{len}(\sigma)$ であるから，帰納法の仮定より $\mathrm{len}(\sigma)-1=\mathrm{len}(\sigma\circ\sigma_\alpha)=n(\sigma\circ\sigma_\alpha)=n(\sigma)-1$ であり，$n(\sigma)=\mathrm{len}(\sigma)$ が言えた． ■

位相空間 X の部分空間 $A\subset X$ の閉包[*17]を $\overline{A}$ と書く．一般に，群 G の作用 $\blacktriangleright\colon G\times X\longrightarrow X$ の**基本領域** (fundamental domain) とは，X の部分空間 $A\subset X$ であって $\forall x\in X$ に対して $A\cap(G\blacktriangleright\{x\})$ が 1 点集合になるようなもののことを言う．

補題 3.2.8: Weyl 群の作用の基本領域

Φ の底 Δ を任意に与え，$\forall\lambda,\,\mu\in\overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$ をとる．
このとき $\exists\sigma\in\mathscr{W}$, $\sigma(\lambda)=\mu$ ならば，σ は点 λ を固定する鏡映の積で書ける．特に $\lambda=\mu$ である．

<u>**証明**</u> $\mathrm{len}(\sigma)$ に関する数学的帰納法により示す．$\mathrm{len}(\sigma)=0$ ならば明らか．

$\mathrm{len}(\sigma)>0$ とする．補題 3.2.7 より σ はある正ルートを負ルートに移す．よって $\sigma(\alpha)\prec 0$ を充たす $\alpha\in\Delta$ が存在する．このとき $\lambda,\,\mu\in\overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$ であることから

$$0\geq\bigl(\mu,\sigma(\alpha)\bigr)=\bigl(\sigma^{-1}(\mu),\alpha\bigr)=(\lambda,\alpha)\geq 0$$

となって $(\lambda,\alpha)=0$ が分かった．従って $\sigma_\alpha(\lambda)=\lambda$, $\sigma\circ\sigma_\alpha(\lambda)=\mu$ が言える．i.e. σ_α は λ を固定する鏡映である．さらに補題 3.2.5, 3.2.7 から $\mathrm{len}(\sigma\circ\sigma_\alpha)=\mathrm{len}(\sigma)-1$ であり，帰納法の仮定が使えて $\sigma=(\sigma\circ\sigma_\alpha)\circ\sigma_\alpha$ は λ を固定する鏡映の積で書ける． ■

3.2.4 既約なルート系

定義 3.2.5: ルート系の既約性

ルート系 $(\mathbb{E},\,\Phi)$ が**既約** (irreducible) であるとは，Φ が以下の条件を満たすことを言う：

(Root-irr)

Φ の部分集合 $\Phi_1,\,\Phi_2\subset\Phi$ が $\Phi=\Phi_1\amalg\Phi_2$ かつ $(\Phi_1,\Phi_2)=0$ を充たす $\Longrightarrow$ $\Phi_1=\emptyset$ または $\Phi_2=\emptyset$

[*17] $\overline{A}\coloneqq\bigcap_{F\colon\text{closed},\,A\subset F}F$

命題 3.2.1: ルート系の既約性の特徴付け

ルート系 $(\mathbb{E}, \Phi)$ を与え，Φ の底 Δ を 1 つ固定する．
このとき，以下の 2 つは同値である：

(1) Φ は既約
(2) Δ の部分集合 $\Delta_1, \Delta_2 \subset \Delta$ が $\Delta = \Delta_1 \amalg \Delta_2$ かつ $(\Delta_1, \Delta_2) = 0$ を充たす $\implies$ $\Delta_1 = \emptyset$ または $\Delta_2 = \emptyset$

証明 **(1) $\Longleftarrow$ (2)**

対偶を示す．Φ の空でない 2 つの部分集合 $\Phi_1, \Phi_2 \subset \Phi$ であって $\Phi = \Phi_1 \amalg \Phi_2$ かつ $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$ を充たすものが存在するとする．このとき $\Delta_i \coloneqq \Delta \cap \Phi_i$ $(i = 1, 2)$ とおくと $\Delta = \Delta_1 \amalg \Delta_2$ かつ $(\Delta_1, \Delta_2) = 0$ が成り立つ．あとは $\Delta_1 \neq \emptyset$ かつ $\Delta_2 \neq \emptyset$ を背理法により示す．Δ_1, Δ_2 のどちらかが空だと仮定する．議論は全く同様なので $\Delta_2 = \emptyset$ としよう．このとき $\Delta \subset \Phi_1$ なので仮定より $(\Delta, \Phi_2) = 0$ だが，**(B-1)** よりこのことは $(\mathbb{E}, \Phi_2) = 0$ を意味する．よって $\Phi_2 = \emptyset$ となり $\Phi_2 \neq \emptyset$ に矛盾．

(1) $\Longrightarrow$ (2)

Φ が既約だとする．このとき背理法によって (2) を示す．Δ の空でない 2 つの部分集合 $\Delta_1, \Delta_2 \subset \Delta$ であって $\Delta = \Delta_1 \amalg \Delta_2$ かつ $(\Delta_1, \Delta_2) = 0$ を充たすものが存在するとする．このとき定理 3.2.5-(3) より，

$$\Phi_i \coloneqq \left\{ \alpha \in \Phi \,\middle|\, \exists \sigma \in \mathscr{W},\ \sigma(\alpha) \in \Delta_i \right\}$$

とおくと $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ となる．ここで $\forall \alpha_i \in \Delta_i$ に対して仮定より $[\![\alpha_i, \alpha_j]\!] = 0 \quad (i \neq j)$ であるから

$$(\sigma_{\alpha_1} \circ \sigma_{\alpha_2} - \sigma_{\alpha_2} \circ \sigma_{\alpha_1})(\beta) = [\![\beta, \alpha_2]\!][\![\alpha_2, \alpha_1]\!]\alpha_1 - [\![\beta, \alpha_1]\!][\![\alpha_1, \alpha_2]\!]\alpha_2 = 0$$

i.e. $\sigma_{\alpha_1} \circ \sigma_{\alpha_2} = \sigma_{\alpha_2} \circ \sigma_{\alpha_1}$ である．さらに $\sigma_{\alpha_i}(\alpha_j) = \alpha_j \quad (i \neq j)$ であるから $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \emptyset$ であり，$\Phi_i \subset \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}} \Delta_i$ である．よって背理法の仮定から $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$ となるが，仮定より Φ は既約なので $\Phi_1 = \emptyset$ または $\Phi_2 = \emptyset$ である．従って Δ_i のどちらかが空集合ということになって矛盾．

■

補題 3.2.9:

ルート系 $(\mathbb{E}, \Phi)$ を与え，Φ の底 Δ を任意にとる．
このとき Φ が既約ならば，半順序 $\prec$ に関して Φ は唯一の極大元 $\beta_0 \in \Phi$ を持つ[a]．特に $\beta_0 = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$ と書いたときに $\forall \alpha \in \Delta,\ k_\alpha > 0$ である．

[a] i.e. $\forall \alpha \in \Phi,\ \alpha \neq \beta_0 \implies \mathrm{ht}\,\alpha < \mathrm{ht}\,\beta_0$．さらに，$\forall \alpha \in \Delta,\ (\beta_0, \alpha) \geq 0$

証明 **(Root-1)** より $(\Phi, \prec)$ は有限な半順序集合だから極大元 $\beta_0 = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha \in \Phi$ を少なくとも 1 つ持つ．$\beta_0 \prec 0$ だとすると任意の単純ルート α に対して $\beta_0 \prec \alpha$ となり β_0 の極大性に矛盾．よって $\beta_0 \succ 0$ である．
まず $\forall \alpha \in \Delta,\ k_\alpha > 0$ を示そう．

$$\Delta_1 \coloneqq \left\{ \alpha \in \Delta \,\middle|\, k_\alpha > 0 \right\},$$
$$\Delta_2 \coloneqq \left\{ \alpha \in \Delta \,\middle|\, k_\alpha = 0 \right\}$$

とおくと $\Delta = \Delta_1 \amalg \Delta_2$ が成り立つ．$\Delta_2 = \emptyset$ を背理法により示す．$\Delta_2 \neq \emptyset$ を仮定する．$\beta_0 \neq 0$ なので $\Delta_1 \neq \emptyset$ だが，仮定より Φ が既約なので命題 3.2.1 から $(\Delta_1, \Delta_2) \neq 0$，i.e. ある $\alpha_1 \in \Delta_1$, $\alpha_2 \in \Delta_2$ が存在して $(\alpha_1, \alpha_2) < 0$ を満たす．従って

$$(\alpha_2, \beta_0) = k_{\alpha_1}(\alpha_2, \alpha_1) + \sum_{\gamma \in \Delta_1 \setminus \{\alpha_1\}} k_\gamma \underbrace{(\alpha_2, \gamma)}_{\leq 0\ (\because \text{ 補題 } 3.2.1)} < 0$$

ということになる．然るにこのとき補題 3.1.2 から $\alpha_2 + \beta_0 \in \Phi$ となり β_0 の極大性に矛盾する．

次に，$\forall \alpha \in \Delta$ に対して $(\alpha, \beta_0) \geq 0$ であることを背理法により示す．実際ある $\alpha \in \Delta$ に対して $(\alpha, \beta_0) < 0$ だとすると補題 3.1.2 から $\alpha + \beta_0 \in \Phi$ となり β_0 の極大性に矛盾する．次に，ある $\alpha_0 \in \Delta$ が存在して $(\alpha_0, \beta_0) > 0$ となることを背理法により示す．実際 $\forall \alpha \in \Delta$ に対して $(\alpha, \beta_0) = 0$ だとすると $\beta_0 \in (\mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \Delta)^\perp = \mathbb{E}^\perp = 0$ ということになり矛盾する．

最後に β_0 の一意性を示す．別の極大元 $\beta = \sum_{\gamma \in \Delta} \beta_\gamma \gamma \in \Phi$ をとる．上の議論は β にも当てはまるので $\forall \gamma \in \Delta$, $\beta_\gamma > 0$ であり，

$$(\beta, \beta_0) = \beta_{\alpha_0}(\alpha_0, \beta_0) + \sum_{\gamma \in \Delta \setminus \{\alpha_0\}} \beta_\gamma (\gamma, \beta_0) > 0$$

だと分かった．従って補題 3.1.2 から $\beta = \beta_0$ または $\beta - \beta_0 \in \Phi$ である．後者だと β, β_0 のどちらかの極大性に矛盾するので，背理法から証明が完成した． ■

補題 3.2.10:

Φ が既約ならば，Weyl 群の表現

$$\pi \colon \mathscr{W} \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{E}),\ \sigma \longmapsto \bigl(\gamma \mapsto \sigma(\gamma)\bigr)$$

は既約である．特に，$\forall \alpha \in \Phi$ に対して

$$\mathbb{E} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\bigl(\mathscr{W} \blacktriangleright \{\alpha\}\bigr)$$

が成り立つ[a]．

[a] $\blacktriangleright \colon \mathscr{W} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E},\ (\sigma, \gamma) \longmapsto \pi(\sigma)(\gamma)$ と定義した．

証明 $\mathbb{E}$ の 0 でない $\mathscr{W}$-不変な部分ベクトル空間 $W \subset \mathbb{E}$ を任意にとる．このとき W の直交補空間 $W^\perp$ について $\mathbb{E} = W \oplus W^\perp$ が成り立つ．$\forall \gamma \in W, \forall \delta \in W^\perp, \forall \sigma \in \mathscr{W}$ に対して $\bigl(\gamma, \sigma(\delta)\bigr) = \bigl(\sigma^{-1}(\gamma), \delta\bigr) = 0$ が成り立つので $\sigma(\delta) \in W^\perp$ であり，$W^\perp$ もまた $\mathscr{W}$-不変である．

さて，W は $\mathscr{W}$-不変なので $\forall \alpha \in \Phi$ に対して $\sigma_\alpha(W) = W$ が成り立つ．このときもし $\alpha \notin W$ かつ $W \not\subset P_\alpha$ だとすると $\gamma \in W \setminus P_\alpha$ が存在して $\sigma_\alpha(\gamma) = \gamma - [\![\gamma, \alpha]\!]\alpha \in W$ が成り立つが $[\![\gamma, \alpha]\!] \neq 0$ なので $\alpha \in W$ ということになり矛盾．よって $\alpha \in W$ または $W \subset P_\alpha = (\mathbb{K}\alpha)^\perp$ である．i.e. $\forall \alpha \in \Phi$ は W か $W^\perp$ のどちらか一方に含まれ，$\Phi = (\Phi \cap W) \amalg (\Phi \cap W^\perp)$ が成り立つ．然るに $\bigl(\Phi \cap W, \Phi \cap W^\perp\bigr) = 0$ かつ W は 0 でないので，Φ の既約性から $\Phi \cap W^\perp = \emptyset$ だと分かる．$\mathbb{E} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \Phi$ なので $W^\perp = 0$ が言えた．

$\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\bigl(\mathscr{W} \blacktriangleright \{\alpha\}\bigr)$ は 0 でない $\mathscr{W}$-不変な部分ベクトル空間なので，π が既約表現であることから $\mathbb{E} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\bigl(\mathscr{W} \blacktriangleright \{\alpha\}\bigr)$ である． ■

補題 3.2.11:

Φ が既約ならば，ルートの長さがとりうる値は高々 2 通りである．さらに，同じ長さのルートは互いに Weyl 群の作用により移り合う．

証明 $\forall\alpha, \beta \in \Phi$ をとる．補題 3.2.10 より $\mathbb{E} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\, \sigma(\alpha) \mid \sigma \in \mathscr{W} \,\}$ なので，ある $\sigma \in \mathscr{W}$ が存在して $(\sigma(\alpha), \beta) \neq 0$ を充たす[*18]．α と $\sigma(\alpha)$ を取り替えることで $(\alpha, \beta) \neq 0$ として良い．このとき表 3.1 より $\frac{\|\beta\|^2}{\|\alpha\|^2} \in \{1,\, 2,\, 3,\, \frac{1}{2},\, \frac{1}{3}\}$ である．

さて，互いに長さの異なる 3 つのルート $\alpha, \beta, \gamma \in \Phi$ が存在したとする．冒頭の議論からこのとき $(\alpha, \beta) \neq 0,\ (\gamma, \beta) \neq 0$ を仮定してよく，$\frac{\|\beta\|^2}{\|\alpha\|^2}, \frac{\|\gamma\|^2}{\|\beta\|^2}, \frac{\|\gamma\|^2}{\|\alpha\|^2} \in \{2,\, 3,\, \frac{1}{2},\, \frac{1}{3}\}$ である．然るにこのときどの組み合わせであっても $\frac{\|\gamma\|^2}{\|\alpha\|^2} = \frac{\|\beta\|^2}{\|\alpha\|^2}\frac{\|\gamma\|^2}{\|\beta\|^2} \notin \{2,\, 3,\, \frac{1}{2},\, \frac{1}{3}\}$ となり矛盾．故に前半が示された．

後半を示す．$\|\alpha\| = \|\beta\|$ とする．冒頭の議論から $(\alpha, \beta) \neq 0$ を仮定して良い．このとき表 3.1 から $[\![\alpha, \beta]\!] = [\![\beta, \alpha]\!] = \pm 1$ となる．必要ならば β を $-\beta = \sigma_\beta(\beta)$ に置き換えることで $[\![\alpha, \beta]\!] = 1$ にできる．すると

$$\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \circ \sigma_\alpha(\beta) = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta(\beta - \alpha) = \sigma_\alpha(-\beta - \alpha + \beta) = \alpha$$

であることが分かった． ■

補題 3.2.12:

Φ が既約ならば，補題 3.2.9 で得た極大ルート $\beta_0 \in \Phi$ の長さの値は，あり得る 2 通りのうち大きい方である．

証明 Φ の底 Δ および $\forall\alpha \in \Phi$ をとる．$(\beta_0, \beta_0) \geq (\alpha, \alpha)$ を示せば十分である．

さて，定理 3.2.5-(3) より，$\mathscr{W}$ の作用によって移すことで $\alpha \in \overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$ を仮定して良い．補題 3.2.9 より $\beta_0 - \alpha \succ 0$ なので，$\forall\gamma \in \overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$ に対して $(\gamma, \beta_0 - \alpha) \geq 0$ である．$\gamma = \beta_0, \alpha$ の場合を考えることで $(\beta_0, \beta_0) \geq (\beta_0, \alpha) \geq (\alpha, \alpha)$ が言えた． ■

3.3 ルート系の分類

この節では $(\mathbb{E}, \Phi)$ を任意のランク l のルート系とし，その Weyl 群を $\mathscr{W}$ と略記する．さらに Φ の底 Δ を 1 つ固定する．

3.3.1 Cartan 行列

[*18] $\forall\sigma \in \mathscr{W}$ に対して $(\sigma(\alpha), \beta) = 0$ だとすると $\beta \in (\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\, \sigma(\alpha) \mid \sigma \in \mathscr{W} \,\})^\perp = 0$ となり矛盾

$\Delta = \{\alpha_1,\, \dots,\, \alpha_l\}$ と書こう．

定義 3.3.1: Cartan 行列

ルート系 Φ の **Cartan 行列** (Cartan matrix) とは，

$$\begin{bmatrix} [\![\alpha_1, \alpha_1]\!] & \cdots & [\![\alpha_1, \alpha_l]\!] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [\![\alpha_l, \alpha_1]\!] & \cdots & [\![\alpha_l, \alpha_l]\!] \end{bmatrix} \in \mathrm{M}(l,\, \mathbb{Z})$$

のこと[a]．$[\![\alpha_\mu, \alpha_\nu]\!] \in \mathbb{Z}$ のことを **Cartan 整数** (Cartan integer) と呼ぶ．

[a] Δ は $\mathbb{E}$ の基底なので，Cartan 行列を $\mathrm{GL}(l,\, \mathbb{R})$ の元と見做すこともできる．

定理 3.2.5-(2) および補題 3.1.2-(2) より，Cartan 行列は底 Δ の取り方によらずに定まる[*19]！

命題 3.3.1: Cartan 行列によるルート系の特徴付け

- ランク l のルート系 $(\mathbb{E},\, \Phi),\, (\mathbb{E}',\, \Phi')$
- Φ の底 $\Delta = \{\alpha_1,\, \dots,\, \alpha_l\}$
- Φ' の底 $\Delta' = \{\alpha'_1,\, \dots,\, \alpha'_l\}$

を与える．このとき以下の 2 つは同値である：

(1) $1 \le \forall \mu,\, \nu \le l$ に対して $[\![\alpha_\mu, \alpha_\nu]\!] = [\![\alpha'_\mu, \alpha'_\nu]\!]$

(2) ルート系の同型写像

$$\phi\colon (\mathbb{E},\, \Phi) \longrightarrow (\mathbb{E}',\, \Phi')$$

が存在する．

証明 **(1) $\Longrightarrow$ (2)**

写像

$$\phi\colon \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}',\ \alpha_\mu \longmapsto \alpha'_\mu$$

がルート系の同型写像となることを示す．まず $\Delta,\, \Delta'$ はそれぞれ $\mathbb{E},\, \mathbb{E}'$ の基底なので，写像 $\phi\colon \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}'$ はベクトル空間の同型写像である．

次に，仮定より

$$\begin{aligned} \phi \circ \sigma_{\alpha_\mu} \circ \phi^{-1}(\alpha'_\nu) &= \phi \circ \sigma_{\alpha_\mu}(\alpha_\nu) \\ &= \phi(\alpha_\nu - [\![\alpha_\nu, \alpha_\mu]\!]\alpha_\mu) \\ &= \alpha'_\nu - [\![\alpha'_\nu, \alpha'_\mu]\!]\alpha'_\mu \\ &= \sigma_{\alpha'_\mu}(\alpha'_\nu) \end{aligned}$$

[*19] 単純ルートのラベル付けの任意性を除く．

が成り立つので $\phi \circ \sigma_{\alpha_\mu} \circ \phi^{-1} = \sigma_{\alpha'_\mu}$ が言える．$\mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi)$, $\mathscr{W}_{\mathbb{E}'}(\Phi')$ はそれぞれ $\{\, \sigma_{\alpha_\mu} \in \mathrm{GL}(\mathbb{E}) \mid \alpha_\mu \in \Delta \,\}$, $\{\, \sigma_{\alpha'_\mu} \in \mathrm{GL}(\mathbb{E}) \mid \alpha'_\mu \in \Delta' \,\}$ により生成されるので

$$\phi \circ \mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi) \circ \phi^{-1} = \mathscr{W}_{\mathbb{E}'}(\Phi')$$

だと分かった．よって定理 3.2.5-(3) より

$$\phi(\Phi) = \phi\big(\mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi) \blacktriangleright \Delta\big) = \phi \circ \mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi) \circ \phi^{-1} \circ \phi(\Delta) = \mathscr{W}_{\mathbb{E}'}(\Phi') \blacktriangleright \Delta' = \Phi'$$

が言えた．

(1) $\Longleftarrow$ (2)

ルート系の同型写像

$$\phi \colon (\mathbb{E},\, \Phi) \longrightarrow (\mathbb{E}',\, \Phi')$$

が存在するとする．このとき $\phi(\Delta)$ もまた Φ' の底になるので，補題 3.2.3-(1) よりある $\sigma' \in \mathscr{W}_{\mathbb{E}'}(\Phi')$ が存在して $\sigma'\big(\phi(\Delta)\big) = \Delta'$ を充たす．よって ϕ を $\sigma' \circ \phi$ に置き換えることで $\phi(\Delta) = \Delta'$ であるとして良い．さらに Δ, Δ' の添字を付け替えることで $\phi(\alpha_\mu) = \alpha'_\mu$ が成り立つとして良い．すると ϕ がルート系の同型写像であることから

$$[\![\alpha'_\mu, \alpha'_\nu]\!] = [\![\phi(\alpha_\mu), \phi(\alpha_\nu)]\!] = [\![\alpha_\mu, \alpha_\nu]\!]$$

が言える．

■

つまり，任意のルート系はその Cartan 行列が与えれれれば完全に[*20]復元できる！ 実際，例えば次の手順に従えば良い [?, p.56]：

(1) 相異なる任意の単純ルート $\alpha_\mu, \alpha_\nu \in \Delta$ をとってくる．すると補題 3.2.1 から

$$\max\{\, \lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \alpha_\mu - \lambda\alpha_\nu \in \Phi \,\} = 0$$

なので，命題 3.1.1-(4) から α_ν-string through α_μ は

$$\{\, \alpha_\mu + \lambda\alpha_\nu \mid 0 \leq \lambda \leq -[\![\alpha_\mu, \alpha_\nu]\!] \,\} \subset \Phi$$

と求まる．

(2) (1) を全ての $1 \leq \mu \neq \nu \leq l$ について繰り返せば，高さ 2 のルート全体の集合 $\Phi_{\mathrm{ht}=2} \coloneqq \{\, \alpha \in \Phi \mid \mathrm{ht}\,\alpha = 2 \,\}$ が求まる．このとき $\forall \alpha_\mu \in \Delta$, $\forall \alpha \in \Phi_{\mathrm{ht}=2}$ に対して $[\![\alpha, \alpha_\mu]\!] \in \mathbb{Z}$ を計算しておく．

(3) $\forall \alpha_\mu \in \Delta$ および $\forall \alpha \in \Phi_{\mathrm{ht}=2}$ に対して，補題 3.2.1 から

$$r \coloneqq \max\{\, \lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \alpha - \lambda\alpha_\mu \in \Phi \,\} = 0,\, 1$$

である．よって α_μ-string through α は (2) で計算しておいた $[\![\alpha, \alpha_\mu]\!] \in \mathbb{Z}$ を使って

$$\{\, \alpha + \lambda\alpha_\mu \mid -r \leq \lambda \leq r - (\alpha, \alpha_\mu) \,\} \subset \Phi$$

と求まる．

(4) (3) を全ての $1 \leq \mu \neq \nu \leq l$ について繰り返せば，高さ 3 のルート全体の集合 $\Phi_{\mathrm{ht}=3} \coloneqq \{\, \alpha \in \Phi \mid \mathrm{ht}\,\alpha = 3 \,\}$ が求まる．このとき $\forall \alpha_\mu \in \Delta$, $\forall \alpha \in \Phi_{\mathrm{ht}=3}$ に対して $[\![\alpha, \alpha_\mu]\!] \in \mathbb{Z}$ を計算しておく．

(5) 補題 3.2.4 より任意の正ルート α は正ルートと単純ルートの和の形で書けるので，(1)-(4) までの手順を十分な回数繰り返せば全ての正ルートが得られる．

従って，ルート系を分類するには Cartain 行列としてあり得るものを全て列挙できれば十分である．

3.3.2 Coxeter グラフと Dynkin 図形

まず，Cartan 行列 $\left[[\![\alpha_\mu, \alpha_\nu]\!]\right]_{1\leq\mu,\,\nu\leq l}$ について

(CM-1) $1 \leq \forall\mu \leq l$ に対して

$$[\![\alpha_\mu, \alpha_\mu]\!] = 2\frac{(\alpha_\mu, \alpha_\mu)}{(\alpha_\mu, \alpha_\mu)} = 2$$

なので，対角成分は常に 2 である．

(CM-2) 補題 3.2.1 より $\forall 1 \leq \mu \neq \nu \leq l$ について

$$[\![\alpha_\mu, \alpha_\nu]\!] \leq 0$$

なので，非対角成分は常に非正である．

(CM-3) 表 3.1 より $\forall 1 \leq \mu \neq \nu \leq l$ について

$$[\![\alpha_\mu, \alpha_\nu]\!][\![\alpha_\nu, \alpha_\mu]\!] = 0,\, 1,\, 2,\, 3$$

のいずれかである．とくに $[\![\alpha_\mu, \alpha_\nu]\!] = -1$ であるか $[\![\alpha_\nu, \alpha_\mu]\!] = -1$ であるかのどちらかである．

が即座にわかる．**(CM-1)** より，Cartan 行列を知りたければその非対角成分を完全に決定できれば十分である．

定義 3.3.2: Coxeter グラフと Dynkin 図形

ランク l のルート系 Φ の Cartan 行列 $\left[[\![\alpha_\mu, \alpha_\nu]\!]\right]_{1\leq\mu,\,\nu\leq l}$ を与える．Φ の **Dynkin 図形** (Dynkin diagram) [a] $\Gamma(\Phi)$ とは，以下のデータからなる：

- $\forall\alpha_\mu \in \Delta$ に対して頂点

$$\Gamma(\alpha_\mu) \coloneqq \underset{\mu}{\bullet}$$

  を持つ．i.e. $\Gamma(\Phi)$ は l 個の頂点を持つ．

- $\forall\alpha_\mu,\, \alpha_\nu \in \Delta$ に対して辺集合

$$\Gamma(\alpha_\mu,\, \alpha_\nu) \coloneqq \begin{cases} \emptyset, & \mu = \nu \ \text{または}\ [\![\alpha_\mu, \alpha_\nu]\!][\![\alpha_\nu, \alpha_\mu]\!] = 0 \\ \{\underset{\mu}{\bullet}\!\text{———}\!\underset{\nu}{\bullet}\}, & \mu \neq \nu \ \text{かつ}\ [\![\alpha_\mu, \alpha_\nu]\!][\![\alpha_\nu, \alpha_\mu]\!] = 1 \\ \{\underset{\mu}{\bullet}\!\Longrightarrow\!\underset{\nu}{\bullet}\}, & \mu \neq \nu \ \text{かつ}\ [\![\alpha_\mu, \alpha_\nu]\!][\![\alpha_\nu, \alpha_\mu]\!] = 2 \ \text{かつ}\ \|\alpha_\nu\| < \|\alpha_\mu\| \\ \{\underset{\mu}{\bullet}\!\Rrightarrow\!\underset{\nu}{\bullet}\}, & \mu \neq \nu \ \text{かつ}\ [\![\alpha_\mu, \alpha_\nu]\!][\![\alpha_\nu, \alpha_\mu]\!] = 3 \ \text{かつ}\ \|\alpha_\nu\| < \|\alpha_\mu\| \end{cases}$$

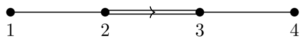
  を持つ．i.e. $\Gamma(\Phi)$ の辺集合に自己ループはなく，かつ $\underset{\mu}{\bullet}$ と $\underset{\nu}{\bullet}$ の間には $[\![\alpha_\mu, \alpha_\nu]\!][\![\alpha_\nu, \alpha_\mu]\!]$ 重

辺が存在する．特に $n \geq 2$ 重辺の場合，$\|\alpha_\nu\| < \|\alpha_\mu\|$（resp. $\|\alpha_\nu\| > \|\alpha_\mu\|$）ならば辺の上に右（resp. 左）向きの矢印が描かれる．

[a] [?, p.8] では “In fact, if we needed to make contact with an alien civilization and show them how sophisticated our civilization is, perhaps showing them Dynkin diagrams would be the best choice!” とまで言っている．実際，Dynkin 図形はルート系の分類以外にも様々な分類問題の文脈で登場する．例えば `https://ncatlab.org/nlab/show/ADE+classification` など．詳細は後の章で述べよう．

Dynkin 図形から矢印（i.e. 単純ルートの長さに関する情報）を取り除いたものを **Coxeter グラフ** (Coxeter graph) と呼ぶ．

与えられた Dynkin 図形から Cartain 行列を一意に復元できる．例えば



（これは F_4 と呼ばれるルート系を表す）に対応する Cartan 行列は

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

3.3.3 ルート系の既約成分

命題 3.2.1 より，Φ が既約であることと Δ が互いに直交する 2 つの真部分集合の disjoint union に分解しないことは同値である．このことから，

$$\Phi \text{ が既約} \iff \textbf{対応する Dynkin 図形が連結}$$

である．

命題 3.3.2:

任意のルート系 $(\mathbb{E}, \Phi)$ は既約なルート系 $\Phi_1, \ldots, \Phi_t$ の disjoint union に分解し，$\mathbb{E}_i \coloneqq \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \Phi_i$ とおくと直交直和の意味で

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{E}_t$$

が成り立つ．

証明 Φ の底 Δ に対応する Coxeter グラフが連結成分を t 個持つとする．このとき Coxeter グラフの各連結成分に対応して $\Delta = \Delta_1 \amalg \cdots \amalg \Delta_t$ と分解すると Coxeter グラフの定義から $i \neq j \implies (\Delta_i, \Delta_j) = 0$ である．よって $\mathbb{E}_i \coloneqq \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \Delta_i$ とおくと直交直和の意味で $\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{E}_t$ が成り立つ．さらにルート系の公理を充たす $\Phi_i \subset \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}} \Delta_i$ は明らかに $\mathbb{E}_i$ のルート系になる．Φ_i の Weyl 群 $\mathscr{W}_{\mathbb{E}_i}(\Phi_i)$ は $\left\{ \sigma_\alpha \in \mathrm{GL}(\mathbb{E}) \mid \alpha \in \Delta_i \right\}$ によって生成される $\mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi)$ の部分群の定義域を $\mathbb{E}_i$ に制限したものに等しい．さらに，$\alpha \notin \Delta_i \implies (\alpha, \Delta_i) = 0 \iff \Delta_i \subset P_\alpha \implies \sigma_\alpha|_{\mathbb{E}_i} = \mathrm{id}_{\mathbb{E}_i}$ なので $\mathbb{E}_i$ たちは $\mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\Phi)$-不

変である．よって $\forall\alpha \in \Phi$ に対して $\sigma_\alpha(\mathbb{E}_i) = \mathbb{E}_i$ なので，$\alpha \in \mathbb{E}_i$ または $\mathbb{E}_i \subset P_\alpha$ である．よってある $1 \le \exists i \le t$ が存在して $\alpha \in \Phi_i$ となる[*21]．i.e. $\Phi = \Phi_1 \amalg \cdots \amalg \Phi_t$ である． ■

従って，既約なルート系 $\iff$ 連結な Dynkin 図形を分類すれば十分である．

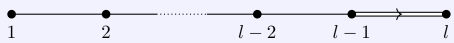
3.3.4 ルート系の分類定理

定理 3.3.1: 既約なルート系の分類定理

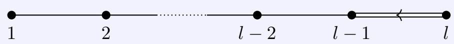
ランク l の既約なルート系 Φ を与える．このとき Φ の Dynkin 図形は以下のいずれかである：

A_l $(l \ge 1)$ 型:

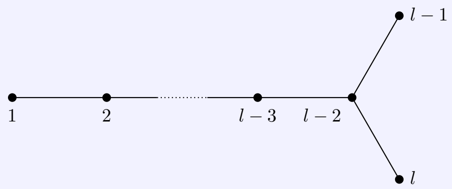
B_l $(l \ge 2)$ 型:



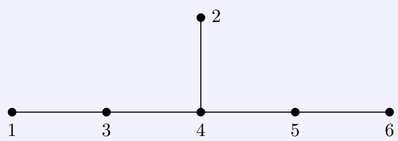
C_l $(l \ge 3)$ 型:



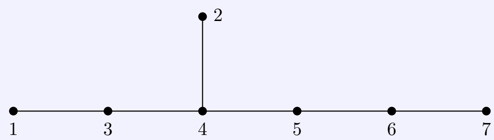
D_l $(l \ge 4)$ 型:



E_6 型:

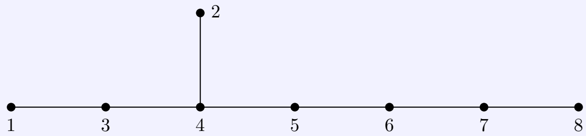


E_7 型:

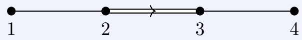


*21 $1 \le \forall i \le t$ に対して $\mathbb{E}_i \subset P_\alpha \iff (\alpha, \mathbb{E}_i) = 0$ だとすると $\alpha \in (\mathbb{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{E}_t)^\perp = 0$ となって $\alpha \in \Phi$ に矛盾．

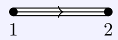
***E_8* 型:**



***F_4* 型:**



***G_2* 型:**



証明 まずは可能な Coxeter グラフを分類する.

- 任意次元の Euclid 空間 $\bigl(\mathbb{E}, (\ ,\ )\bigr)$
- 互いに線型独立な単位ベクトルの集合 $\mathfrak{U} := \{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathbb{E}$ であって，$1 \le \forall i \ne j \le n$ に対して

$$(e_i, e_j) \le 0 \quad \text{かつ} \quad 4(e_i, e_j)^2 \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$$

  を充たすもの（この条件を充たす $\mathbb{E}$ の部分集合は**許容できる** (admissible) と言うことにする）

を与える．任意の許容できる $\mathfrak{U} \subset \mathbb{E}$ にグラフ $\Gamma(\mathfrak{U})$ を割り当てる操作を次のように定義する：

- $\forall e_i \in \mathfrak{U}$ に対して頂点

$$\Gamma(e_i) = \bullet_i$$

  を対応付ける
- $\forall e_i,\ e_j \in \mathfrak{U}$ に対して辺集合

$$\Gamma(e_i,\ e_j) = \begin{cases} \emptyset, & i = j \ \ \text{または} \ \ 4(e_i, e_j)^2 = 0 \\ \{\bullet_i \!-\!-\!-\! \bullet_j\}, & i \ne j \ \ \text{かつ} \ \ 4(e_i, e_j)^2 = 1 \\ \{\bullet_i = \bullet_j\}, & i \ne j \ \ \text{かつ} \ \ 4(e_i, e_j)^2 = 2 \\ \{\bullet_i \equiv \bullet_j\}, & i \ne j \ \ \text{かつ} \ \ 4(e_i, e_j)^2 = 3 \end{cases}$$

  を対応付ける[*22].

i.e. $\Gamma(\mathfrak{U})$ の頂点集合は n 点集合 $\{\bullet_1, \dots, \bullet_n\}$ であり，$\Gamma(\mathfrak{U})$ の辺集合に自己ループはなく，かつ $\bullet_i$ と $\bullet_j$ の間には $4(e_i, e_j)^2$ 重辺が存在する.

[*22] $\bigl|\{\bullet_i \!-\!-\!-\! \bullet_j\}\bigr| = 1$, $\bigl|\{\bullet_i = \bullet_j\}\bigr| = 2$, $\bigl|\{\bullet_i \equiv \bullet_j\}\bigr| = 3$ と言うことである.

補題 3.3.1: step 1

$\forall e_i \in \mathfrak{U}$ に対して，$\mathfrak{U} \setminus \{e_i\}$ もまた許容できる．

証明 許容できることの定義から明らか． ■

補題 3.3.2: step 2

$$\left|\left\{ (e_i,\, e_j) \in \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \;\middle|\; i < j,\, \Gamma(e_i,\, e_j) \neq \emptyset \right\}\right| < n$$

証明 $e := \sum_{i=1}^{n} e_i$ とおく．e_i の線型独立性から $e \neq 0$ が言える．よって

$$0 < (e, e) = n + \sum_{i<j} 2(e_i, e_j) \tag{3.3.1}$$

が成り立つ．さて，$(e_i, e_j) \neq 0 \iff \Gamma(e_i,\, e_j) \neq \emptyset$ を充たす任意の $1 \leq i < j \leq n$ をとる．すると，$\mathfrak{U}$ が許容できるので $2(e_i, e_j) \leq -1$ が成り立つ．よって不等式 (3.3.1) からこのような $(i,\, j)$ の総数は $n-1$ 以下でなくてはいけない． ■

補題 3.3.3: step 3

$\Gamma(\mathfrak{U})$ はサイクルを含まない．

証明 補題 3.3.1 より $\mathfrak{U}$ の任意の空でない部分集合 $\mathfrak{C}$ もまた許容できるので，グラフ $\Gamma(\mathfrak{C})$ が定まる．今 $\{f_1, \cdots, f_k\} := \mathfrak{C}$ とおき，$\Gamma(\mathfrak{C})$ がサイクルになっている，i.e.

$$\Gamma(f_i,\, f_j) \begin{cases} \neq \emptyset, & |i-j| = 1 \text{ または } \{i,\, j\} = \{1,\, k\} \\ = \emptyset, & \text{otherwise} \end{cases}$$

であるとしよう．然るにこのとき

$$\left|\left\{ (f_i,\, f_j) \in \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \;\middle|\; i < j,\, \Gamma(f_i,\, f_j) \neq \emptyset \right\}\right| = k$$

となり **step 2** に矛盾． ■

補題 3.3.4: step 4

$\forall e_i \in \mathfrak{U}$ に対して

$$\left| \bigcup_{e_j \in \mathfrak{U} \setminus \{e_i\}} \Gamma(e_i,\, e_j) \right| \leq 3$$

証明 $\forall e \in \mathfrak{U}$ をとり，$\Gamma(e,\, e_j) \neq \emptyset$ を充たす $e_j \in \mathfrak{U}$ 全体の集合を $\{f_1, \ldots, f_k\} \subset \mathfrak{U}$ と書く．このとき $1 \leq \forall j \leq k$ に対して $(e, f_j) < 0$ が成り立つ．さらに補題 3.3.3 より $\Gamma(f_i)$ たちは非連結なので $1 \leq \forall i \neq j \leq k$ に対して $(f_i, f_j) = 0$ が成り立つ．i.e. f_i たちは正規直交する．

$\mathfrak{U}$ は線型独立なので，$\exists f_0 \in \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{e,\, f_1,\, \dots,\, f_k\} \cap \left(\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{f_1,\, \dots,\, f_k\}\right)^{\perp} \setminus \{0\}$ である．f_0 を適当に規格化して単位ベクトルにすることができる．すると $f_0,\, \dots,\, f_k$ の正規直交性から $e = \sum_{i=0}^{k} (e, f_i) f_i$ が成り立つので，

$$1 = (e, e) = \sum_{i=0}^{k} (e, f_i)^2 = (e, f_0)^2 + \sum_{i=1}^{k} (e, f_i)^2$$

が従い，f_0 の定義から $(e, f_0) \neq 0$ なので[*23]

$$\sum_{i=1}^{k} 4(e, f_i)^2 < 4$$

でなくてはいけない．$4(e, f_i)^2 = |\Gamma(e,\, f_i)|$ なので左辺は $\left|\bigcup_{e_j \in \mathfrak{U} \setminus \{e\}} \Gamma(e,\, e_j)\right|$ に等しい． ■

補題 3.3.5: step 5

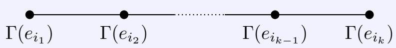
3 重辺を含む $\Gamma(\mathfrak{U})$ としてあり得るのは

のみである．

<u>**証明**</u> **step 4** より明らか． ■

補題 3.3.6: step 6

部分集合 $\{e_{i_1},\, \dots,\, e_{i_k}\} \subset \mathfrak{U}$ に対して

$\Gamma(\{e_{i_1},\, \dots,\, e_{i_k}\}) =$ 

が成り立つならば，集合

$$\mathfrak{U}' := \left(\mathfrak{U} \setminus \{e_{i_1},\, \dots,\, e_{i_k}\}\right) \cup \left\{\sum_{\mu=1}^{k} e_{i_\mu}\right\}$$

もまた許容できる．

<u>**証明**</u> 仮定より $1 \le \forall \mu < \nu \le k$ に対して

$$2(e_{i_\mu}, e_{i_\nu}) = \begin{cases} -1, & \nu = \mu + 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つので，$e := \sum_{\mu=1}^{k} e_{i_\mu}$ とおくと

$$(e, e) = k + \sum_{\mu<\nu} 2(e_{i_\mu}, e_{i_\nu}) = k - (k-1) = 1$$

[*23] $(e, f_0) = 0$ だとすると $f_0 \in \mathrm{Span}\{e,\, f_1,\, \dots,\, f_k\} \cap (\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{e\})^{\perp} \cap (\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{f_1,\, \dots,\, f_k\})^{\perp} = \mathrm{Span}\{e,\, f_1,\, \dots,\, f_k\} \cap (\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{e,\, f_1,\, \dots,\, f_k\})^{\perp} = 0$，i.e. $f_0 = 0$ となり矛盾．

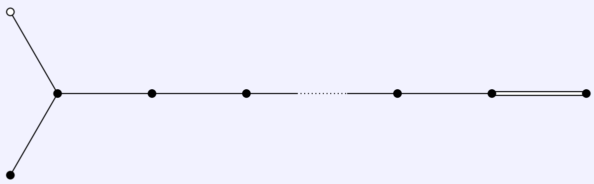
だとわかる. i.e. $e \in \mathfrak{U}'$ は単位ベクトルである. **step 3** より, $\forall f \in \mathfrak{U}' \setminus \{e\}$ に対して $\Gamma(f)$ は $\Gamma(e_{i_1}), \ldots, \Gamma(e_{i_k})$ の高々 1 つのみと連結になり得るので，$(e, f) = 0$ であるか，$1 \leq \exists! \mu \leq k$, $(e, f) = (e_{i_\mu}, f) \neq 0$ であるかのどちらかである．いずれの場合も $4(e, f)^2 \in \{0, 1, 2, 3\}$ なので $\mathfrak{U}'$ は許容できる． ■

補題 3.3.7: step 7

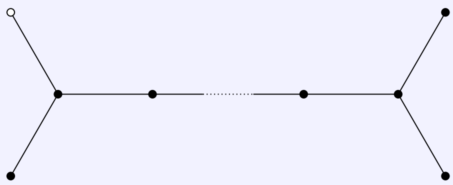
$\Gamma(\mathfrak{U})$ は以下の形をした部分グラフを含まない：

(1)

(2)



(3)



証明 $\Gamma(\mathfrak{U})$ が (1), (2), (3) の形をした部分グラフを含むとする．このとき **step 1**, **step 6** より 4 つの辺に繋がった頂点を持つグラフが許容されることになって **step 4** に矛盾． ■

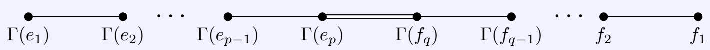
補題 3.3.8: step 8

連結なグラフ $\Gamma(\mathfrak{U})$ としてあり得るのは以下の 4 つの形のみである：

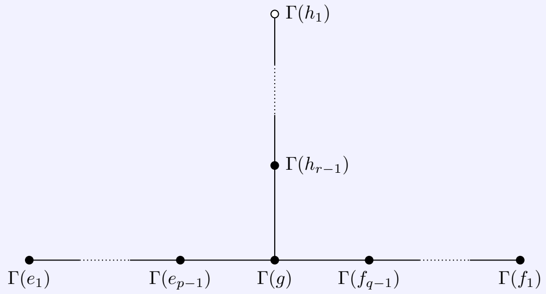
$\boldsymbol{A_n}$

$\boldsymbol{G_2}$

(1)

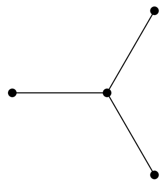


(2)



証明 **step 5** より，3 重辺を含む $\Gamma(\mathfrak{U})$ の形としてあり得るのは $\boldsymbol{G_2}$ のみである．

$\Gamma(\mathfrak{U})$ が 2 重辺を 2 つ以上含む場合，**step 1** により **step 7**-(1) の形に帰着されてしまうので矛盾．よって $\Gamma(\mathfrak{U})$ は 2 重辺を高々 1 つしか含まない．$\Gamma(\mathfrak{U})$ が 2 重辺を 1 つ持つ場合，**step 1** により **step 7**-(2) の形に帰着されてしまうので



(3.3.2)

の形の部分グラフを持たない．よって (1) の形のみがあり得る．

$\Gamma(\mathfrak{U})$ が 1 重辺しか持たないとする．**step 3** によりサイクルを持たないので，(3.3.2) の形をした部分グラフを含まないならばあり得る形は $\boldsymbol{A_n}$ のみである．**step 1** により **step 7**-(3) の形に帰着されてしまうので (3.3.2) の形をした部分グラフを 2 つ以上持つことはできない．よって (2) のみがあり得る． ■

補題 3.3.9: step 9

step 8-(1) の形としてあり得るのは

$\boldsymbol{F_4}$

$\boldsymbol{B_n}, \boldsymbol{C_n}$

のみである．

証明 $e := \sum_{i=1}^{p} ie_i,\ f := \sum_{j=1}^{q} jf_j$ とおく．頂点へのラベルの付け方から $1 \leq \forall i \leq p-1,\ 2(e_i, e_{i+1}) = -1$

かつ $1 \leq \forall j \leq q-1, 2(f_j, f_{j+1}) = -1$ で，他の場合は $(e_k, e_l) = (f_k, f_l) = 0$ になる．よって

$$(e, e) = \sum_{i=1}^{p} i^2 - \sum_{i=1}^{p-1} i(i+1) = \frac{p(p+1)}{2},$$
$$(f, f) = \sum_{j=1}^{q} j^2 - \sum_{j=1}^{q-1} j(j+1) = \frac{q(q+1)}{2}$$

が成り立つ．$4(e_p, f_q)^2 = 2$ かつ $1 \leq \forall i \leq p-1,\ 1 \leq \forall j \leq q-1,\ (e_i, f_j) = 0$ であるから

$$(e, f)^2 = p^2 q^2 (e_p, f_q)^2 = \frac{p^2 q^2}{2}$$

も成り立つ．従って，$e,\ f$ は明らかに線型独立なので Cauchy-Schwartz の不等式から

$$(e, f)^2 < (e, e)(f, f) \quad \iff \quad \frac{p^2 q^2}{2} < \frac{p(p+1)q(q+1)}{4} \quad \implies \quad (p-1)(q-1) < 2$$

でなくてはいけない．よってあり得るのは

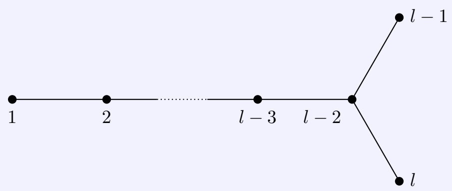
- $(p,\ q) = (2,\ 2)$（F_4 型）
- $(p,\ q) = (1,\ q),\ (p,\ 1)$（$B_n,\ C_n$ 型）

のみである． ■

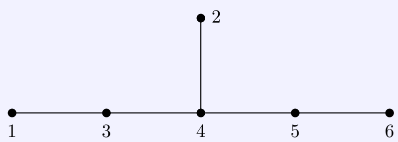
補題 3.3.10: step 10

step 8-(2) の形としてあり得るのは

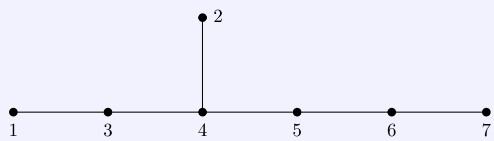
$\boldsymbol{D_n}$



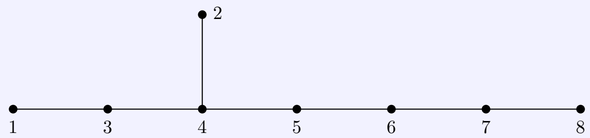
$\boldsymbol{E_6}$



$\boldsymbol{E_7}$



***E*$_8$**



のみである．

<u>**証明**</u> $e \coloneqq \sum_{i=1}^{p-1} ie_i,\ f \coloneqq \sum_{j=1}^{q-1} jf_j,\ h \coloneqq \sum_{k=1}^{r-1} kh_k$ とおく．$e,\ f,\ h$ は互いに直交し，$\mathfrak{U}$ の元の線型独立性から $g \notin \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{e,\ f,\ h\}$ である．このとき $\exists g_0 \in \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{g,\ e,\ f,\ h\} \cap \bigl(\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{e,\ f,\ h\}\bigr)^{\perp} \setminus \{0\}$ である．$g_0,\ e,\ f,\ h$ の直交性から

$$g = \frac{(g, g_0)}{(g_0, g_0)} g_0 + \frac{(g, e)}{(e, e)} e + \frac{(g, f)}{(f, f)} f + \frac{(g, h)}{(h, h)} h$$

が成り立つので

$$1 = \frac{(g_0, g)^2}{(g_0, g_0)(g, g)} + \frac{(e, g)^2}{(e, e)(g, g)} + \frac{(f, g)^2}{(f, f)(g, g)} + \frac{(h, g)^2}{(h, h)(g, g)}$$

であり，g_0 の定義から $(g, g_0) \neq 0$ なので，$\cos\theta_1 \coloneqq \frac{(e,g)}{\|e\|\|g\|}$, $\cos\theta_2 \coloneqq \frac{(f,g)}{\|f\|\|g\|}$, $\cos\theta_3 \coloneqq \frac{(h,g)}{\|h\|\|g\|}$ について

$$\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 < 1 \tag{3.3.3}$$

が成り立つ．また，**step 9** の証明と全く同じ計算をすることで

$$(e, e) = \frac{p(p-1)}{2}, \qquad (f, f) = \frac{q(q-1)}{2}, \qquad (h, h) = \frac{r(r-1)}{2}$$

が言えるので

$$\cos^2\theta_1 = \frac{(e, g)^2}{(e, e)(g, g)} = (p-1)^2 \frac{(e_{p-1}, g)^2}{(e, e)} = (p-1)^2 \frac{1/4}{p(p-1)/2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

が成り立つ[*24]．同様の計算により

$$\cos^2\theta_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{q}\right), \qquad \cos^2\theta_3 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{r}\right)$$

が従い，不等式 (3.3.3) は

$$1 < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \tag{3.3.4}$$

に帰着する．頂点のラベルを適当に入れ替えることで $1/p \leq 1/q \leq 1/r \leq 1/2$ が成り立つようにできる．すると，不等式 (3.3.4) から $1 < 3/r \leq 3/2$ であり，$r = 2$ が確定する．このとき不等式 (3.3.4) から $1/2 < 1/p + 1/q \leq 2/q \leq 1$ なので $2 \leq q < 4$ だとわかる．$q = 2$ ならば不等式 (3.3.4) は $0 < 1/p$ となるので p は任意の自然数値を取り得る．$q = 3$ ならば不等式 (3.3.4) より $1/6 < 1/p \iff p < 6$ でなくてはならない．纏めると，

[*24] $|\Gamma(e_{p-1},\ g)| = 1$ なので $(e_{p-1}, g)^2 = 1/4$ である．

- $(p,\ q,\ r) = (p,\ 2,\ 2)$（$D_n$ 型）
- $(p,\ q,\ r) = (3,\ 3,\ 2)$（$E_6$-型）
- $(p,\ q,\ r) = (4,\ 3,\ 2)$（$E_7$-型）
- $(p,\ q,\ r) = (5,\ 3,\ 2)$（$E_8$-型）

のみがあり得る． ■

これで Coxeter グラフの分類が完了した．$B_l,\ C_l$ 型以外の Dynkin 図形は，対応する Coxeter グラフから頂点へのラベルの付け方の不定性を除いて一意に定まるので証明が完了した． ■

3.4 ルート系の構成と自己同型

分類定理の締めとして，$A-G$ の各ルート系が存在することを示す．A_l, D_l に対して別の方法もあるが，ここでは各ルート系を直接構成することにする．これにより，Weyl 群の構造も具体的に明示される．
Weyl 群の生成系は，底 Δ に関する鏡映を含めば何でもいいことに注意（その方が見やすい場合もある）．

3.4.1 ルート系の構成

n 次元 Euclid 空間 $\bigl(\mathbb{E},\ (\ ,\ )\bigr)$ の正規直交基底を $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ と表す．また，何らかの有限個の基底により生成される $\mathbb{Z}$-加群のことを格子 (lattice) と呼ぶ．特に，正規直交基底により生成されるものを Λ と書く．

補題 3.4.1:

既約ルート系は，（0 でない）高々 2 通りの長さを持つ格子の部分集合として定義できる．i.e. 定理 3.3.1 に示された $A-G$ の各ルート系は存在する．

<u>証明</u> まず，格子や長さの選び方によらず Φ がルート系の公理の 1-3 を満たすことを示す．

(Root-1) 格子は離散的かつ，高々有限の長さを持つベクトルの集合はコンパクトだから，Φ は有限集合．かつ定義より 0 を含まないので，**(Root-1)** を満たす．

(Root-2) 等しい長さの格子ベクトルをすべて含むことから明らか．

(Root-3) **(Root-4)** を満たせば $\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi$ 鏡映で Λ に写る．σ_α は等長写像なので，**(Root-3)** を満たす．

よってあとは, **(Root-4)** は各ルート系ごとに示せばよい．実は長さの選び方は，C_l, G_2 型を除いて $1, 2$ のみにでき，$[\![\beta, \alpha]\!] = \frac{2}{(\alpha,\alpha)}(\beta, \alpha) \in \mathbb{Z}$ より明らかに **(Root-4)** を満たす．
以下，ルート系 Φ を明示したときの複合 $\pm$ は全て任意とする．また，先頭の複合が底を選んだ際のルートの正負に対応する．

A_l $(l \geq 1)$ **型**

$$\mathbb{E} = \bigl\{\, \alpha \in \mathbb{R}^{l+1} \bigm| (\alpha, \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{l+1}) = 0 \bigr\}, \quad \Phi = \bigl\{\, \alpha \in \Lambda \cap \mathbb{E} \bigm| (\alpha, \alpha) = 2 \bigr\} = \bigl\{\, \varepsilon_i - \varepsilon_j \bigm| i \neq j \bigr\}$$

とすると，$(\mathbb{E}, \Phi)$ はルート系となる．

$$\Delta = \bigl\{\, \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \bigm| i = 1, \dots, l \bigr\}$$

は，線型独立性と

$$\varepsilon_i - \varepsilon_j = (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}) + \cdots + (\varepsilon_{j-1} - \varepsilon_j), \quad (i < j) \tag{3.4.1}$$

より底となる．Cartan 行列は

$$[\![\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, \varepsilon_j - \varepsilon_{j+1}]\!] = 2\delta_{i,j} - \delta_{i,j\pm1} \tag{3.4.2}$$

より，A_l 型となっている．鏡映 σ_α は添字 (i,j) を入れ替えるので，Weyl 群は対称群 $\mathfrak{S}_{l+1}$ と同型.

B_l $(l \geq 2)$ 型

$$\mathbb{E} = \mathbb{R}^l, \quad \Phi = \left\{ \alpha \in \Lambda \,\middle|\, (\alpha,\alpha) = 1, 2 \right\} = \left\{ \pm(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j), \,\middle|\, i \neq j \right\} \cup \left\{ \pm\varepsilon_i, \,\middle|\, i \in 1, \ldots, l \right\}$$

とするとルート系となる．

$$\Delta = \left\{ \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \,\middle|\, i = 1, \ldots, l-1 \right\} \cup \{\varepsilon_l\}$$

は，線型独立性，(3.4.1) と，

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}) + \cdots + (\varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l) + \varepsilon_l \\ \varepsilon_i + \varepsilon_j &= (\varepsilon_i - \varepsilon_j) + 2\varepsilon_j \end{aligned}$$

より，底となる．Cartan 行列は，(3.4.2) と

$$[\![\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, \varepsilon_l]\!] = 2[\![\varepsilon_l, \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}]\!] = -2\delta_{i+1,l} \tag{3.4.3}$$

より，B_l 型となっている．鏡映 σ_{ε_i} は ε_i の符号の入れ替えだから，A_l 型の Weyl 群の結果と合わせると，B_l 型の Weyl 群 $\mathscr{W}$ は $\mathbb{Z}_2^l \rtimes \mathfrak{S}_l$

C_l $(l \geq 3)$ 型　B_l 型の双対で証明完了なので，詳細は省略．具体的なルート系だけ示しておく．

$$\mathbb{E} = \mathbb{R}^l, \quad \Phi = \left\{ \alpha \in I \,\middle|\, (\alpha,\alpha) = 2, 4 \right\}$$

D_l $(l \geq 4)$ 型

$$\mathbb{E} = \mathbb{R}^l, \quad \Phi = \left\{ \alpha \in I \,\middle|\, (\alpha,\alpha) = 2 \right\} = \left\{ \pm(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j), \,\middle|\, i \neq j \right\}$$

とするとルート系となる．

$$\Delta = \left\{ \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \,\middle|\, i = 1, \ldots, l-1 \right\} \cup \{\varepsilon_l + \varepsilon_{l+1}\}$$

は，線型独立性，(3.4.1) と，

$$\begin{aligned} \varepsilon_i + \varepsilon_j &= (\varepsilon_i - \varepsilon_j) + 2(\varepsilon_j - \varepsilon_{l-1}) + (\varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l) + (\varepsilon_{l-1} + \varepsilon_l) \quad (j \leq l-1) \\ \varepsilon_i + \varepsilon_l &= (\varepsilon_i - \varepsilon_{l-1}) + (\varepsilon_{l-1} + \varepsilon_l) \end{aligned}$$

より，底となる．Cartan 行列は，(3.4.2) と

$$[\![\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, \varepsilon_l + \varepsilon_{l+1}]\!] = -\delta_{i+1,l}$$

より，D_l 型となっている．$\sigma_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}\sigma_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}$ は 2 成分同時の符号の入れ替えで，この合成のみを含む部分群は，$i, i+1$ $(l = 1, \ldots, l-1)$ の符号の入れ替えで生成できる，互いに可換だから $\mathbb{Z}_2^{l-1}$．全体の Weyl 群は $\mathscr{W} = \mathbb{Z}_2^{l-1} \rtimes \mathfrak{S}_l$

E_l $(l=6,7,8)$ **型**　Λ' を Λ の内，成分和が偶数のものとすると，Λ の部分 $\mathbb{Z}$-加群である．

$$\mathbb{E}=\mathbb{R}^8, \qquad \Phi=\Phi_8 \coloneqq \left\{ \alpha\in\Lambda'+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}\varepsilon_i\mathbb{Z} \;\middle|\; (\alpha,\alpha)=2 \right\}$$
$$=\left\{\,\pm(\varepsilon_i\pm\varepsilon_j), \,\middle|\, i\neq j\right\}\cup\left\{ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}(-1)^{c_i}\varepsilon_i \;\middle|\; c_i=0,1,\ \sum_{i=1}^{8}c_i\in 2\mathbb{Z}\right\}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}=\left\{\,\alpha\in\mathbb{R}^8 \,\middle|\, (\alpha,\varepsilon_7+\varepsilon_8)=0\right\}, && \Phi=\mathbb{E}\cap\Phi_8\\
&\mathbb{E}=\left\{\,\alpha\in\mathbb{R}^8 \,\middle|\, (\alpha,\varepsilon_7+\varepsilon_8)=(\alpha,\varepsilon_6+\varepsilon_7)=0\right\}, && \Phi=\mathbb{E}\cap\Phi_8
\end{aligned}$$

とすると，いずれもルート系となる．

$$\Delta=\left\{\alpha_1\coloneqq\frac{1}{2}\left(\varepsilon_1+\varepsilon_8-\sum_{i=2}^{7}\varepsilon_i\right),\ \varepsilon_1+\varepsilon_2\right\}\cup\left\{\,\varepsilon_{i+1}-\varepsilon_i \,\middle|\, i=1,\dots,l-2\right\}$$

は，線型独立性と，(3.4.1) などより底となる．Cartan 行列を計算すると，E_l 型となっている．Weyl 群 $\mathscr{W}$ は有限の時間の計算で求めることができる．

F_4 **型**

$$\mathbb{E}=\mathbb{R}^4, \quad \Phi=\left\{ \alpha\in I+\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4}{2}\mathbb{Z} \;\middle|\; (\alpha,\alpha)=1,2\right\}$$
$$=\left\{\,\pm\varepsilon_i\right\}\cup\left\{\,\pm(\varepsilon_i\pm\varepsilon_j), \,\middle|\, i\neq j\right\}\cup\left\{\pm\frac{1}{2}(\varepsilon_1\pm\varepsilon_2\pm\varepsilon_3\pm\varepsilon_4)\right\}$$

とすると，$(\mathbb{E},\Phi)$ はルート系となる．

$$\Delta=\left\{\varepsilon_2-\varepsilon_3,\varepsilon_3-\varepsilon_4,\varepsilon_4,\frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)\right\}$$

は，線型独立性と，(3.4.1) などより底となる．Cartan 行列は，(3.4.2), (3.4.3) と

$$\begin{aligned}
&\left[\!\left[\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1},\frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)\right]\!\right]=0 \quad (i=2,3)\\
&\left[\!\left[\varepsilon_4,\frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)\right]\!\right]=\left[\!\left[\frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4),\varepsilon_4\right]\!\right]=-1
\end{aligned}$$

より，F_4 型となっている．Weyl 群 $\mathscr{W}$ は，実は D_4 型の Weyl 群が正規部分群になっている．残りは Δ の後ろ二つの単純ルートで生成できるので，A_2 型の Weyl 群と同型．よって，構造の一例は $(\mathbb{Z}_2^3\rtimes\mathfrak{S}_4)\rtimes\mathfrak{S}_3\simeq\mathbb{Z}_2^5\rtimes(\mathfrak{S}_3\times\mathfrak{S}_3)$ であり，D_4 型の $\operatorname{Aut}\Phi$ とも同型である．

G_2 **型**　2 次元なので，簡単に絵は書けるが，一応今までと同じ方法で示す．

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}&=\left\{\,\alpha\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, (\alpha,\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)=0\right\}\\
\Phi&=\left\{\,\alpha\in I\cap\mathbb{E} \,\middle|\, (\alpha,\alpha)=2,6\right\}\\
&=\pm\{\varepsilon_1-\varepsilon_2,\varepsilon_2-\varepsilon_3,\varepsilon_1-\varepsilon_3,2\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3,2\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_1,-2\varepsilon_3+\varepsilon_1+\varepsilon_2\}
\end{aligned}$$

とすると，ルート系となる．実際，

$$\Delta=\left\{\alpha_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2,\ \alpha_2=2\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_1\right\}$$

表 3.2: 既約ルート系の構造

型	正ルート数	Weyl 群の構造	Weyl 群の位数	Γ	Cartan 行列式
A_l	$\frac{(l+1)l}{2}$	$\mathfrak{S}_{l+1}$	$(l+1)!$	$\mathbb{Z}_2 \quad (l \geq 2)$	$l+1$
B_l, C_l	l^2	$\mathbb{Z}_2^l \rtimes \mathfrak{S}_l$	$2^l l!$	1	2
D_l	$l^2 - l$	$\mathbb{Z}_2^{l-1} \rtimes \mathfrak{S}_l$	$2^{l-1}l!$	$\begin{cases} \mathfrak{S}_3 & (l=4) \\ \mathbb{Z}_2 & (l>4) \end{cases}$	4
E_6	36		$72 \times 6!$	$\mathbb{Z}_2$	3
E_7	63		$72 \times 8!$	1	2
E_8	120		$192 \times 10!$	1	1
F_4	24	$(\mathbb{Z}_2^3 \rtimes \mathfrak{S}_4) \rtimes \mathfrak{S}_3$	1152	1	1
G_2	6	D_6	12	1	1

は，線型独立性と，

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 - \varepsilon_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_3 &= 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 &= 3\alpha_1 + \alpha_2 \\ -2\varepsilon_3 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 &= 3\alpha_1 + 2\alpha_2 \end{aligned}$$

より，底となる．Cartan 行列は，

$$[\![\alpha_1, \alpha_2]\!] = -1, \quad [\![\alpha_2, \alpha_1]\!] = -3$$

より，G_2 型となっている．Weyl 群 $\mathscr{W}$ は二面体群 $\mathrm{D}_6 = \mathbb{Z}_6 \rtimes \mathbb{Z}_2$.

■

3.4.2 ルート系の同型

定理 3.4.1: ルート系の自己同型の全体像

ルート系 Φ の底 Δ を固定する．この底を保つ同型写像

$$\Gamma = \left\{ \sigma = \operatorname{Aut}\Phi \;\middle|\; \sigma(\Delta) = \Delta \right\}$$

に対し，

$$\operatorname{Aut}\Phi = \mathscr{W} \rtimes \Gamma \tag{3.4.4}$$

となる．.

<u>**証明**</u> Weyl 群の作用の自由性（定理 3.2.5）より，$\Gamma \cap \mathscr{W} = \{1\}$ である．また，$\forall \tau \in \operatorname{Aut}\Phi$ について，$\tau(\Delta)$ も底である．Weyl 群の作用が推移的（定理 3.2.5）なので，

$$\forall \tau \in \operatorname{Aut}\Phi, \ \exists \sigma \in \mathscr{W}, \quad \sigma\tau(\Delta) = \Delta \quad \Longleftrightarrow \quad \tau \in \mathscr{W}\Gamma$$

である．補題 3.1.4 より，$\mathscr{W}$ は正規部分群であったから，(3.4.4) が成り立つ． ■

ルート系の同型写像は $[\![,]\!]$ を保つ．よって，Γ は **Dynkin 図形の自己同型** (diagram automorphism) 群である．この結果は，表 3.2 にまとまっている．特に，D_4 のそれは Triality（双対 (duality) の類推）と呼ばれる．

3.5 ウエイトの抽象論

ルート系 $(\mathbb{E}, \Phi)$ の Weyl 群を $\mathscr{W}$ とする．

3.5.1 ウエイト

定義 3.5.1: 整ウエイト，ルート格子 (root lattice)

ルート系 Φ により定まる

$$\Lambda_{\mathrm{w}} = \left\{\lambda \in \mathbb{E} \,\middle|\, [\![\lambda, \Phi]\!] \subset \mathbb{Z}\right\}$$

は，$[\![,]\!]$ の第一引数線型性より $\mathbb{Z}$-加群である．これを**ウエイト格子** (weight lattice) と呼び，その元を**整ウエイト** (integral weight) と呼ぶ．また，Φ で生成される $\mathbb{Z}$-加群

$$\Lambda_{\mathrm{r}} = \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}} \Phi$$

を**ルート格子** (root lattice) と呼ぶ．

定義より明らかに，

$$\Phi \subset \Lambda_{\mathrm{w}} \subset \mathbb{E}$$

である．また底 Δ を固定すると，exercise10.1（演習回でやった双対ルートの話）より

$$[\![\lambda, \Phi]\!] = [\![\Phi^\vee, \lambda^\vee]\!] \in \mathbb{Z}$$

なので，$[\![,]\!]$ の第一引数線型性の線型性から，$\Delta^\vee$ だけ，双対を戻すと Δ だけを調べれば良い:

$$[\![\lambda, \Phi]\!] \subset \mathbb{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad [\![\lambda, \Delta]\!] \subset \mathbb{Z}$$

定義 3.5.2: 優ウエイト，強い優ウエイト

ルート系 Φ の底 Δ を選ぶ．整ウエイト $\lambda \in \Lambda_{\mathrm{w}}$ が**優** (dominant) であるとは，

$$[\![\lambda, \Delta]\!] \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

を満たすことをいう．その集合を Λ_{w}^+ と書く．また，整ウエイト $\lambda \in \Lambda_{\mathrm{w}}$ が**強い優** (strongly dominant) であるとは，

$$[\![\lambda, \Delta]\!] \subset \mathbb{Z}_{>0}$$

を満たすことをいう．

Weyl の区画の言葉で言えば，優ウエイトの集合 Λ_{w}^+ は $\Lambda_{\mathrm{w}} \cap \overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$，強い優ウエイトの集合は $\Lambda_{\mathrm{w}} \cap \mathfrak{C}(\Delta)$ となる．

底の双対 $\Delta^\vee$ は，双対ルート系の底となるので，Euclid 空間の基底を張る．これに対する Euclid 空間の双対的な基底をとることを考える．

定義 3.5.3: 基本優ウエイト

優ウエイトのうち，

$$[\![\lambda_i, \alpha_j]\!] = (\lambda_i, \alpha_j^\vee) = \delta_{ij}, \quad (\forall i, j = 1, \ldots, n)$$

を満たす λ_i のことを（底 Δ に関する）**基本優ウエイト** (fundamental dominant weight) と呼ぶ．その集合を Δ_{w} と書く．

Δ_{w} は $\mathbb{E}$ の基底なので，任意のベクトル $v \in \mathbb{E}$ は

$$v = \sum_{i=1}^{l} v_i \lambda_i, \quad \left(v_i = \sum_{i=1}^{l} v_i [\![\lambda_i, \alpha_j]\!] = [\![v, \alpha_j]\!] \right) \tag{3.5.1}$$

と書ける．係数 v_i は，$[\![,]\!]$ の第一引数線型性より従う．

定理 3.5.1: ウエイト格子の基底

Δ_{w} はウエイト格子の基底である．また，（強い）優ウエイトは非負（正）整数線型結合で書ける．

証明 任意のウエイトを (3.5.1) のように展開した係数は，整ウエイトの定義より整数．優ウエイトの場合は，非負整数．強い優ウエイトの場合は，正整数． ■

定義 3.5.4: ルート系の基本群

$$\Lambda_{\mathrm{w}} / \Lambda_{\mathrm{r}}$$

で定まる商は，有限な $\mathbb{Z}$-加群をなす．これをルート系 Φ の**基本群** (fundamental group) と呼ぶ．

証明 単純ルートを (3.5.1) のように展開した係数は，Cartan 整数そのもの．よって，ルート格子 Λ_{r} はウエイト格子 Λ_{w} の部分加群である．
Cartan 行列は，ウェイト格子 Λ_{w} の基底からルート格子 Λ_{r} の基底への変換を表している．この行列式が，基本群の位数となる（$\mathbb{Z}/(p\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_p$ のイメージ）．i.e. 有限． ■

PID（単項イデアル整域）上の有限生成加群の構造定理より，基本群は $\mathbb{Z}_p$ (p : 素数) の直積で書ける．表 3.2 にある行列式の値から，A_l, D_l 型以外は巡回群や自明な群だとわかる．実際は，D_l 型のうち，l が偶数の場合は $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ であり，他は全て単一の巡回群となる（Cartan 逆行列から具体的に示される）．

3.5.2 優ウエイト

Weyl 群 $\mathscr{W}$ は等長写像の群なので，$\mathbb{E}$ 上の内積を保つ．よって，$\mathscr{W}(\Lambda) \simeq \Lambda$ である．

補題 3.5.1:

(1) 各ウエイトは $\sigma \in \mathscr{W}$ で別の優ウエイトと 1 対 1 で移り合う．

(2) $\forall \lambda \in \Lambda_{\mathrm{w}}^{+},\ \forall \sigma \in \lambda, \quad \sigma\lambda \prec \lambda$

(3) λ が強い優ウエイトのとき，$\sigma\lambda = \lambda \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma = 1$.

証明 定理 3.2.8 と，exercise10.14（$\mathbb{E}$ の任意の点は，$\overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$ の点から，$\mathscr{W}$ で写る）より直ちに従う． ■

定義 3.2.1 で定義した半順序 $\prec$ について，μ が優だとしても $\mu \prec \lambda$ なる λ が優とは限らないが，ある種の制限を与える．

補題 3.5.2:

$\forall \lambda \in \Lambda^{+}$ に対し，$\mu \prec \lambda$ を満たす整（，優，強い優）ウェイト μ の数は有限．

証明 $\lambda + \mu \in \Lambda^{+}$ である．また $\prec$ の定義より，$\lambda - \mu$ は正ルートの線型結合で書けるから，$\lambda - \mu \in \Lambda^{+}$．よって，

$$0 \leq (\lambda + \mu, \lambda - \mu) = (\lambda, \lambda) - (\mu, \mu)$$

となり，μ はコンパクト集合 $\left\{ v \in \mathbb{E} \,\middle|\, (v, v) \in (\lambda, \lambda) \right\}$ の元．μ は格子（離散集合）の元でもあるから，$\mu \prec \lambda$ なる整ウエイトは有限個． ■

3.5.3 ウエイト δ

系??で定義した $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\beta \succ 0} \beta$ について考察する．

補題 3.5.3:

$$\delta = \sum_{j=1}^{l} \lambda_j$$

である．よって，δ は強い優ウエイトである．

証明 系??より，$\sigma_{\alpha_j} \delta = \delta - \alpha_j \ (\alpha_j \in \Delta)$．射影の定義より，$[\![\delta, \alpha_j]\!] = 1$ である．(3.5.1) より，これはウエイト格子の基底 Δ_{w} での展開係数でもある:

$$\delta = \sum_{j=1}^{l} [\![\delta, \alpha_j]\!] \lambda_j = \sum_{j=1}^{l} \lambda_j$$

■

補題 3.5.4:

$\forall\mu\in\Lambda^+,\forall\sigma\in\mathscr{W}$ に対し，$\nu=\sigma^{-1}\mu$ とすると，以下を満たす:

$$(\nu+\delta,\nu+\delta)\le(\mu+\delta,\mu+\delta) \tag{3.5.2}$$

ただし，等号成立は $\nu=\mu$ に限る．

<u>**証明**</u> σ は等長写像なので，

$$\begin{aligned}(\nu+\delta,\nu+\delta)&=(\sigma(\nu+\delta),\sigma(\nu+\delta))=(\mu+\sigma\delta,\mu+\sigma\delta)\\&=(\mu,\mu)+2(\mu,\delta)+(\delta,\delta)-2(\mu,\delta)+2(\mu,\sigma\delta)\quad(\because(\delta,\delta)=(\sigma\delta,\sigma\delta))\\&=(\mu+\delta,\mu+\delta)-2(\mu,\delta-\sigma\delta)\end{aligned}$$

μ は優ウエイトで，$\delta-\sigma\delta$ は正ルートの和で書けるから，$(\mu,\delta-\sigma\delta)\ge0$ より，(3.5.3) を満たす．等号成立条件は，

$$(\mu,\delta-\sigma\delta)=0\quad\Longleftrightarrow\quad(\mu,\delta)=(\mu,\sigma\delta)=(\nu,\delta)\quad\Longleftrightarrow\quad(\mu-\nu,\delta)=0$$

で，$\mu-\nu$ は正ルートの和で書け，δ は strongly 優なので，$\mu=\nu$． ■

3.5.4 ウエイトの飽和集合

定義 3.5.5: 飽和集合，最高ウエイト

ウエイト格子 Λ_w の部分集合 Π に対し，

$$\forall\lambda\in\Pi,\ \forall\alpha\in\Phi,\ \forall i=0,\dots,[\![\lambda,\alpha]\!],\quad\lambda-i\alpha\in\Pi$$

を満たすとき，Π は**飽和**している (saturated) と呼ぶ．また，$\exists\lambda\in\Lambda_\mathrm{w}^+\cap\Pi$ について，

$$\mu\prec\lambda\quad(\forall\mu\in\Pi)$$

を満たすとき，Π は**最高ウエイト** (highest weight) を持つという．

鏡映の定義より，$\sigma_\alpha\lambda=\lambda-[\![\lambda,\alpha]\!]\alpha$ だったから，$\mathscr{W}(\Pi)\subset\Pi$ となる．

【例 3.5.1】自明な飽和集合

零ベクトルの単元集合 $\{0\}$ は，0 を最高ウエイトとする飽和集合．
また，半単純 Lie 代数のルート系について，$\Phi\cup\{0\}$ は飽和集合．特に，既約なルート系に対しては補題 3.2.9 より，半順序 $\prec$ に関する極大ルートを持っていた．

飽和集合に関するいくつかの補題を示そう．

補題 3.5.5:

最高ウエイトを持つ飽和集合は有限．

証明 補題 3.5.2. ■

補題 3.5.6:

Π を飽和集合とし，λ をその最高ウエイトとすると以下を満たす:

$$\forall \mu \in \Lambda^+,\ \mu \prec \lambda \quad \Longrightarrow \quad \mu \in \Pi$$

証明 $\mu \prec \lambda \in \Pi$ より，

$$\forall i = 1, \ldots, l,\ \exists k_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad \mu' = \mu + \sum_{i=1}^{l} k_i \alpha_i \in \Pi$$

とできる．$\mu' \neq \mu$ のとき，

$$\exists j \in \{1, \ldots, l\}, \quad (\mu' - \mu, \alpha_j),\ k_j > 0$$

である（存在しないとすると，$(\mu' - \mu, \mu' - \mu) > 0$ に矛盾）．よって，$[\![\mu' - \mu, \alpha_j]\!]$ となる．μ は優ウェイトなので，$[\![\mu, \alpha_j]\!] \geq 0$ だから，$[\![\mu', \alpha_j]\!] > 0$．飽和集合の定義より，新たな Π の元 $\mu' - [\![\mu', \alpha_j]\!]\alpha_j$ が得られた．これを有限回繰り返せば，$\mu' = \mu$ となる． ■

補題 3.5.7:

Π を飽和集合，λ をその最高ウエイト，$\mu \in \Pi$ とすると，以下を満たす:

$$(\mu + \delta, \mu + \delta) \leq (\lambda + \delta, \lambda + \delta) \tag{3.5.3}$$

ただし，等号成立は $\mu = \lambda$ に限る．

証明 補題 3.5.1, 3.5.4 より，μ が優ウエイトの場合を調べればよい．λ は最高ウエイトなので，$\mu = \lambda - \pi$ とすると，π は正ルートの和で書ける．すると，

$$\begin{aligned}(\lambda + \delta, \lambda + \delta) - (\mu + \delta, \mu + \delta) &= (\lambda + \delta, \mu + \delta + \pi) - (\lambda + \delta - \pi, \mu + \delta) \\ &= (\lambda + \delta, \pi) + (\pi, \mu + \delta) \geq 0 \quad (\because \mu, \lambda, \delta \in \Lambda^+)\end{aligned}$$

となる．$\lambda + \delta$ は強い優ウエイトなので，等号成立は $\pi = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = \mu$. ■