Humphreys Chapter III Exercises
問題（2024/1/15 実施分）

高間俊至

2024 年 1 月 15 日

[1, p.63, Exercise1, 3] の解答例です．
何の断りもない場合，体 $\mathbb{K}$ は代数閉体でかつ $\mathrm{char}\,\mathbb{K} = 0$ であるとする．
Euclid 空間 $\left(\mathbb{E}, (\ ,\ )_{\mathbb{E}}\right)$ の任意の元 $\alpha \in \mathbb{E}$ に対して，

- **鏡映面** (reflecting hyperplane)[*1]

$$\boldsymbol{P_\alpha} \coloneqq \left\{\, \beta \in \mathbb{E} \;\middle|\; (\beta, \alpha)_{\mathbb{E}} = 0 \,\right\} = (\mathbb{R}\alpha)^{\perp}$$

- 鏡映面 P_α に関する**鏡映** (reflecting)

$$\boldsymbol{\sigma_\alpha} \colon \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E},\ \beta \longmapsto \beta - 2\frac{(\beta, \alpha)_{\mathbb{E}}}{(\alpha, \alpha)_{\mathbb{E}}}\alpha$$

を考える．

> **!**
> $2\frac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{R}$ が頻繁に登場するので，
>
> $$[\![\beta, \alpha]\!] \coloneqq 2\frac{(\beta,\ \alpha)_{\mathbb{E}}}{(\alpha,\ \alpha)_{\mathbb{E}}}$$
>
> と略記することにする．写像 $[\![\ ,\ ]\!] \colon \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ は記号的には内積のように見えるかもしれないが，あくまで第一引数についてのみ線型なのであって，対称でも双線型でもないことに注意．

公理 6.1: ルート系

- 有限次元 Euclid 空間 $\left(\mathbb{E}, (\ ,\ )_{\mathbb{E}}\right)$
- $\mathbb{E}$ の部分集合 $\Phi \subset \mathbb{E}$

の組 $(\mathbb{E}, \Phi)$ が**ルート系** (root system) であるとは，以下の条件を充たすことを言う：

(Root-1) Φ は 0 を含まない有限集合で，かつ $\mathbb{E} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\,\Phi$ を充たす．
(Root-2) $\lambda\alpha \in \Phi \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \pm 1$
(Root-3) $\alpha,\ \beta \in \Phi \quad \Longrightarrow \quad \sigma_\alpha(\beta) \in \Phi$
(Root-4) $\alpha,\ \beta \in \Phi \quad \Longrightarrow \quad [\![\beta, \alpha]\!] \in \mathbb{Z}$

[*1] 余次元 1 の部分 $\mathbb{R}$-ベクトル空間．最右辺は対称かつ非退化な双線型形式 $(\ ,\ )_{\mathbb{E}}$ による直交補空間の意味である．

Φ の元のことを**ルート** (root) と呼ぶ．

定義 6.1: Weyl 群

$(\mathbb{E}, \Phi)$ をルート系とする．$\mathrm{GL}(\mathbb{E})$ の部分集合 $\left\{ \sigma_\alpha \in \mathrm{GL}(\mathbb{E}) \,\middle|\, \alpha \in \Phi \right\}$ が生成する $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$ の部分群のことをルート系 $(\mathbb{E}, \Phi)$ の **Weyl 群** (Weyl group) と呼び，$\mathscr{W}_{\mathbb{E}}(\boldsymbol{\Phi})$ と書く．

定義 6.2: 双対ルート系

ルート系 $(\mathbb{E}, \Phi)$ に対して

$$\boldsymbol{\Phi}^\vee := \left\{ \frac{2}{(\alpha,\, \alpha)}\alpha \in \mathbb{E} \,\middle|\, \alpha \in \Phi \right\}$$

とおき，組 $(\mathbb{E}, \boldsymbol{\Phi}^\vee)$ のことを $(\mathbb{E}, \Phi)$ の**双対ルート系** (dual root system) と呼ぶ．

$\alpha \in \Phi$ に対して

$$\boldsymbol{\alpha}^\vee := \frac{2}{(\alpha,\, \alpha)}\alpha \in \Phi^\vee$$

と書く．

【問題 6.1】p.46 の Exercise 2

(1) ルート系 Φ を与えたとき，Φ の双対ルート系 $\Phi^\vee$ もまたルート系であることを示せ．
(2) $\Phi^\vee$ の Weyl 群は Φ の Weyl 群と同型であることを示せ．
(3) $[\![\alpha^\vee, \beta^\vee]\!] = [\![\beta, \alpha]\!]$ を示せ．

【問題 6.2】

ノートでは分類定理の A_l, B_l, C_l, D_l 型の l に条件をつけたが，これは l が小さいところでは同型があるからである．この同型をできるだけ多く見つけてみよう．

【問題 6.3】p.63 の Exercise 1

Dynkin 図形から Cartan 行列を復元せよ．

【問題 6.4】p.63 の Exercise 3

G_2 の Cartan 行列から G_2 のルート系を復元し，[1, p.44] の図と整合しているかどうか確認せよ．

【問題 6.5】p.63 の Exercise 5

(1) B_l, C_l 以外の既約なルート系はその双対ルート系とルート系として同型であることを示せ．
(2) B_l, C_l は互いに双対ルート系であることを示せ．

位数 $2n$ の **2 面体群** (dihedral group) とは[*2],

$$\mathrm{D}_n \coloneqq \left\langle s,\, t \,\middle|\, s^2 = t^2 = 1_{D_n},\ (st)^n = 1_{D_n} \right\rangle$$

の生成元と関係式によって定義される有限群のことである.

【問題 6.6】p.63 の Exercise 4

(1) $A_1 \oplus A_1$, A_2, B_2, G_2 のルート系を図示せよ.

(2) 2 次元 Euclid 空間 $\mathbb{E}^2$ および Weyl 群について,

$$\begin{aligned} \mathscr{W}_{\mathbb{E}^2}(A_1 \oplus A_1) &\cong \mathrm{D}_2, \\ \mathscr{W}_{\mathbb{E}^2}(A_2) &\cong \mathrm{D}_3, \\ \mathscr{W}_{\mathbb{E}^2}(B_2) &\cong \mathrm{D}_4, \\ \mathscr{W}_{\mathbb{E}^2}(G_2) &\cong \mathrm{D}_6 \end{aligned}$$

を示せ.

参考文献

[1] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory* (Springer, 1972).

[*2] 抽象代数の分野だと D_{2n} と書く場合があるので注意.