第 1 章

Lie 群と Lie 代数

本資料ではベクトル空間を英大文字で表記し，係数体を blackboardbold[*1]で表記する（e.g. 体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 L）．本章に限ってはベクトルを $x \in L$ のように英小文字で表記し，係数体の元は $\lambda \in \mathbb{K}$ のようにギリシャ文字で表記する．零ベクトルは $o \in L$ と書き[*2]，$0 \in \mathbb{K}$ を係数体の加法単位元，$1 \in \mathbb{K}$ を係数体の乗法単位元とする．ベクトル空間の加法を $+$ と書き，スカラー乗法は λx のように係数を左に書く．また，特に断りがなければ Einstein の規約を使う．

1.1　公理的 Lie 代数

この節では $\mathbb{K}$ を任意の体とする．Lie 代数を，純粋に代数学的な対象として扱うことを考える．幾何学的側面については後述する．

> **!** Lie 代数を表す記号は Fraktur という字体で書く慣例がある．例えば「Fraktur」という文字列は $\mathfrak{Fraktur}$ のようになる．LaTeX コマンドは数式モード中で `\mathfrak{}` とする．

公理 1.1.1: Lie 代数の公理

体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 $\mathfrak{g}$ の上に二項演算[a]

$$[\ ,\ ] \colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g},\ (x,\ y) \longmapsto [x, y]$$

が定義されていて，かつ以下の条件を充たすとき，$\mathfrak{g}$ は **Lie 代数** (Lie algebra) と呼ばれる：

(L-1)　$[\ ,\ ]$ は双線型写像である．i.e. $\forall x,\ x_i,\ y,\ y_i \in \mathfrak{g},\ \forall \lambda_i,\ \mu_i \in \mathbb{K}\ (i = 1,\ 2)$ に対して

$$\begin{aligned}[][\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y] &= \lambda_1 [x_1, y] + \lambda_2 [x_2, y], \\ [x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2] &= \mu_1 [x, y_1] + \mu_2 [x, y_2]\end{aligned}$$

が成り立つ．

(L-2)　$\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[x, x] = o$$

*1 LaTeX コマンドは`\mathbb`

*2 0 の濫用を回避するための苦肉の策です… 普通に不便なので次章以降では零ベクトルも 0 と書きます．

が成り立つ.

(L-3) $\forall x,\, y,\, z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = o$$

が成り立つ[b]（**Jacobi 恒等式**).

[a] ベクトル空間に備わっている加法とスカラー乗法の他に，追加で $[\,,]$ が定義されているという状況である．この付加的な二項演算はしばしば**括弧積** (bracket) とか**交換子** (commutator) とか **Lie ブラケット** (Lie bracket) とか呼ばれる．

[b] 結合律ではない！

公理 **(L-1)**, **(L-2)** から

$$o = [x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = [x, y] + [y, x]$$

が従う．i.e. $[x, y]$ は反交換 (anticommute) する：

(L'-2) $\forall x,\, y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[x, y] = -[y, x]$$

が成り立つ.

逆に **(L'-2)** を仮定すると

$$o = [x, x] + [x, x] = (1 + 1)[x, x]$$

が成り立つ[*3]ので，体 $\mathbb{K}$ において $1 + 1 \neq 0$ ならば $[x, x] = o$ が言える．i.e. $\mathrm{char}\,\mathbb{K} \neq 2$ ならば[*4] **(L'-2)** と **(L-2)** は同値である.

【例 1.1.1】3 次元実ベクトル空間

$\mathbb{R}^3$ を $\mathbb{R}$-ベクトル空間と見做す．$\mathbb{R}^3$ 上の Lie ブラケットを

$$[\,,]\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x,\, y) \longmapsto x \times y$$

によって定義する．ただし右辺の $\times$ はベクトル積である．このとき $\mathbb{R}^3$ が Lie 代数の公理を充たすことを確認しよう：

証明 $\mathbb{R}^3$ の元の成分を $x = (\, x_\mu \,)_{1 \leq \mu \leq 3}$ のように書く．ひたすら成分計算をする.

(L-1) ベクトル積の定義から

$$\begin{aligned}
([\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y])_\mu &= \epsilon_{\mu\nu\lambda}(\lambda_1 x_{1\nu} + \lambda_2 x_{2\nu}) y_\lambda \\
&= \lambda_1 \epsilon_{\mu\nu\lambda} x_{1\mu} y_\lambda + \lambda_2 \epsilon_{\mu\nu\lambda} x_{2\nu} y_\lambda \\
&= \lambda_1 [x_1, y] + \lambda_2 [x_2, y]
\end{aligned}$$

[*3] 2 つ目の等号ではスカラー乗法の分配律（ベクトル空間の公理である）を使った.

[*4] 体 $\mathbb{K}$ の**標数** (characteristic) を $\mathrm{char}\,\mathbb{K}$ と書いた.

が成り立つ．全く同様に

$$[x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2] = \mu_1 [x, y_1] + \mu_2 [x, y_2]$$

が示される．

(L-2) Levi-Civita 記号の添字に関する反対称性から

$$([x, x])_\mu = \epsilon_{\mu\nu\lambda} x_\nu x_\lambda = \epsilon_{\mu\nu\lambda} x_\lambda x_\nu = -\epsilon_{\mu\lambda\nu} x_\lambda x_\nu = (-[x, x])_\mu$$

$\operatorname{char} \mathbb{R} = 0 \neq 2$ なので，ここから $[x, x] = o$ が従う．

(L-3) 行と列をそれぞれ適切に入れ替えた単位行列の行列式を考えることで，恒等式 $\epsilon_{\mu\nu\lambda}\epsilon_{\rho\sigma\lambda} = \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}$ が成り立つことがわかる．従って

$$\begin{aligned}
([x, [y, z]])_\mu &= \epsilon_{\mu\nu\lambda} x_\nu \epsilon_{\lambda\rho\sigma} y_\rho z_\sigma \\
&= (\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}) x_\nu y_\rho z_\sigma \\
&= x_\nu y_\mu z_\nu - x_\nu y_\nu z_\mu
\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
([x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]])_\mu &= x_\nu y_\mu z_\nu - x_\nu y_\nu z_\mu + y_\nu z_\mu x_\nu - y_\nu z_\nu x_\mu + z_\nu x_\mu y_\nu - z_\nu x_\nu y_\mu \\
&= 0.
\end{aligned}$$

■

$\mathbb{R}^3$ の標準的な基底

$$e_1 \coloneqq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_1 \coloneqq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_1 \coloneqq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

に対して

$$[e_i, e_j] = \epsilon_{ijk} e_k$$

が成り立つ．$\mathbb{R}^3$ の任意の 2 つの元に対する Lie ブラケットがこの恒等式によって完全に決まることを含意して，$3^3 = 27$ 個の実定数 ϵ_{ijk} のことを $\mathbb{R}^3$ の**構造定数** (structure constant) と呼ぶ．

【例 1.1.2】一般線形代数 $\mathfrak{gl}(V)$

V を体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．V から V への線型写像全体が成す集合を $\operatorname{End} V$ と書く[a]．$\operatorname{End} V$ の加法とスカラー乗法をそれぞれ

$$\begin{aligned}
+ \colon \operatorname{End} V \times \operatorname{End} V &\longrightarrow \operatorname{End} V,\ (x,\ y) \longmapsto \bigl(v \mapsto x(v) + y(v)\bigr) \\
\cdot \colon \mathbb{K} \times \operatorname{End} V &\longrightarrow \operatorname{End} V,\ (\lambda,\ x) \longmapsto \bigl(v \mapsto \lambda x(v)\bigr)
\end{aligned}$$

として定義すると，組 $(\operatorname{End} V,\ +,\ \cdot\ )$ は体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間になる．以降では常に $\operatorname{End} V$ をこの方法でベクトル空間と見做す．

$\mathrm{End}\,V$ の上の Lie ブラケットを

$$[\ ,\ ] \colon \mathrm{End}\,V \times \mathrm{End}\,V \longrightarrow \mathrm{End}\,V,\ (x,\ y) \longmapsto xy - yx$$

と定義する．ただし右辺の xy などは写像の合成 $x \circ y$ の略記である．このとき組 $(\mathrm{End}\,V,\ +,\ \cdot\ ,\ [\ ,\ ])$ が Lie 代数の公理を充たすことを確認しよう：

<u>**証明**</u> **(L-1)** $\forall v \in V$ を 1 つとる．定義に従ってとても丁寧に計算すると

$$\begin{aligned}
[\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y](v) &= \big((\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)y - y(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)\big)(v) \\
&= (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)\big(y(v)\big) - y\big((\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)(v)\big) \\
&= (\lambda_1 x_1)\big(y(v)\big) + (\lambda_2 x_2)\big(y(v)\big) - y\big((\lambda_1 x_1)(v) + (\lambda_2 x_2)(v)\big) \\
&= \lambda_1 x_1\big(y(v)\big) + \lambda_2 x_2\big(y(v)\big) - \lambda_1 y\big(x_1(v)\big) - \lambda_2 y\big(x_2(v)\big) \\
&= \lambda_1\Big(x_1\big(y(v)\big) - y\big(x_1(v)\big)\Big) + \lambda_2\Big(x_2\big(y(v)\big) - y\big(x_2(v)\big)\Big) \\
&= \lambda_1[x_1, y](v) + \lambda_2[x_2, y](v) \\
&= \big(\lambda_1[x_1, y] + \lambda_2[x_2, y]\big)(v)
\end{aligned}$$

となる．ただし 4 つ目の等号で $y \in \mathrm{End}\,V$ が線型写像であることを使った．全く同様にして

$$[x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2](v) = \mu_1[x, y_1] + \mu_2[x, y_2]$$

を示すこともできる．

(L-2) 明らかに $[x, x] = xx - xx = o$ なのでよい．

(L-3) $[\ ,\ ]$ の双線型（**(L-1)**）から

$$\begin{aligned}
&[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] \\
&= [x, yz] - [x, zy] + [y, zx] - [y, xz] + [z, xy] - [z, yx] \\
&= xyz - yzx - xzy + zyx + yzx - zxy - yxz + xzy + zxy - xyz - zyx + yxz \\
&= o.
\end{aligned}$$

■

この Lie 代数 $(\mathrm{End}\,V,\ +,\ \cdot\ ,\ [\ ,\ ])$ は**一般線形代数** (general linear algebra) と呼ばれ，記号として $\boldsymbol{\mathfrak{gl}(V)}$ と書かれる．

$\dim V =: n < \infty$ のとき，$\mathrm{End}\,V$ は $n \times n$ $\mathbb{K}$-行列全体が成す $\mathbb{K}$ ベクトル空間 $\mathrm{M}(n,\ \mathbb{K})$ と同型である[b]．$\mathrm{M}(n,\ \mathbb{K})$ を Lie ブラケット $[x, y] := xy - yx$ によって Lie 代数と見做す[c]ときは，この同型を意識して $\mathfrak{gl}(n,\ \mathbb{K})$ と書く．さて，$\mathfrak{gl}(n,\ \mathbb{K})$ の標準的な基底は所謂**行列単位**

$$e_{ij} := \big[\,\delta_{i\mu}\delta_{j\nu}\,\big]_{1 \le \mu,\, \nu \le n} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

である．Einstein の規約を使って $e_{ij}e_{kl} = \bigl[\delta_{i\mu}\delta_{j\lambda}\delta_{k\lambda}\delta_{l\nu}\bigr]_{1\le\mu,\,\nu\le n} = \delta_{jk}\bigl[\delta_{i\mu}\delta_{l\nu}\bigr]_{1\le\mu,\,\nu\le n} = \delta_{jk}E_{il}$ と計算できるので，$\mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{K})$ の構造定数は

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{li}e_{kj}$$

となる[d]．

[a] **自己準同型** (endomorphism) の略である．

[b] V の基底 $e_1,\,\ldots,\,e_n$ を 1 つ固定する．このとき同型写像 $\varphi\colon V \longrightarrow \mathbb{K}^n,\ v^\mu e_\mu \longmapsto (v^\mu)_{1\le\mu\le n}$ を使って定義される線型写像 $\phi\colon \operatorname{End} V \longrightarrow \mathrm{M}(n,\,\mathbb{K}),\ f \longmapsto \varphi\circ f\circ\varphi^{-1}$ が所望の同型写像である．

[c] 右辺の xy は行列の積である．

[d] 少し紛らわしいかもしれないが，右辺において e_{il} は行列（行列の成分ではない！）で δ_{jk} はただの $\mathbb{K}$ の元である．以下では行列を指定する添字を $a,\,b,\,c,\,\ldots,\,i,\,j,\,k,\,\ldots$ で，行列の成分の添字を $\mu,\,\nu,\,\lambda,\,\ldots$ で書くことにする．つまり，例えば x_{ij} はある一つの行列を表す一方，$x_{ij\,\mu\nu}$ は行列 x_{ij} の第 $(\mu,\,\nu)$ 成分を表す．あまりにも紛らわしい場合には，行列の成分を表す際に $[x_{ij}]_{\mu\nu}$ のように角括弧で括ることにする．

1.1.1　線型 Lie 代数

定義 1.1.1: 部分 Lie 代数

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間 $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ が**部分 Lie 代数**であるとは，$\mathfrak{h}$ が Lie ブラケットについても閉じていることを言う．i.e. $\forall x,\,y\in\mathfrak{h},\ \forall\lambda\in\mathbb{K}$ に対して

$$x+y,\ \lambda x,\ [x,y]\in\mathfrak{h}$$

が成り立つこと．

この小節では以降，V を体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とする．

定義 1.1.2: 線型 Lie 代数

一般線形代数 $\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数のことを**線型 Lie 代数** (linear Lie algebra) と呼ぶ．

線型 Lie 代数として有名なものは**古典代数** (classical algebra) である．これは $A_l,\,B_l,\,C_l,\,D_l$ と呼ばれる 4 つの無限系列からなる．以下，$\operatorname{char}\mathbb{K}\neq 2$ とする．

【例 1.1.3】線型 Lie 代数：A_l 型

$\dim V = l+1$ とする．**特殊線形代数** $\mathfrak{sl}(V)$（または $\mathfrak{sl}(l+1,\,\mathbb{K})$）は次のように定義される：

$$\mathfrak{sl}(V) \coloneqq \bigl\{\,x\in\mathfrak{gl}(V)\bigm|\operatorname{Tr}(x)=0\,\bigr\}$$

$\mathfrak{sl}(V)$ が本当に線型 Lie 代数かどうか確認しよう．

<u>証明</u> $\forall x,\, y \in \mathfrak{sl}(V)$ をとる．トレースの線形性および $\mathrm{Tr}(xy) = \mathrm{Tr}(yx)$ から

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(x+y) &= \mathrm{Tr}(x) + \mathrm{Tr}(y) = 0+0 = 0,\\ \mathrm{Tr}(\lambda x) &= \lambda\,\mathrm{Tr}(x) = \lambda 0 = 0,\\ \mathrm{Tr}([x,y]) &= \mathrm{Tr}(xy) - \mathrm{Tr}(yx) = \mathrm{Tr}(xy) - \mathrm{Tr}(xy) = 0\end{aligned}$$

が言えるので，$x+y,\, \lambda x,\, [x,y] \in \mathfrak{sl}(V)$ が言えた． ■

【例 1.1.2】で使った $\mathfrak{gl}(l+1,\, \mathbb{K})$ の標準的な基底で $\forall x \in \mathfrak{sl}(l+1,\, \mathbb{K})$ を $x = x^{ij} e_{ij}$ と展開すると，トレースレスであることから

$$h_{ij} := \begin{cases} e_{ij} & i \neq j,\ 1 \leq i,\, j \leq l+1 \\ e_{ii} - e_{i+1,\,i+1} & 1 \leq i = j \leq l \end{cases}$$

の $(l+1)^2 - 1$ 個の行列が $\mathfrak{sl}(l+1,\, \mathbb{K})$ の基底を成すことがわかる．従って $\dim \mathfrak{sl}(l+1,\, \mathbb{K}) = (l+1)^2 - 1$ である．

【例 1.1.4】線型 Lie 代数：B_l 型

$\dim V = 2l+1$ とする．行列

$$s := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1}_l \\ 0 & \mathbb{1}_l & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}(2l+1,\, \mathbb{K})$$

により定まる V 上の非退化[a]かつ対称な双線型形式を f と書く[b]．このとき，**直交代数** (orthogonal algebra) $\mathfrak{o}(V)$（または $\mathfrak{o}(2l+1,\, \mathbb{K})$）が以下のように定義される：

$$\mathfrak{o}(V) := \left\{\, x \in \mathfrak{gl}(V) \;\middle|\; f\big(x(v),\, w\big) = -f\big(v,\, x(w)\big),\ \forall v,\, w \in V \,\right\}$$

$\mathfrak{o}(V)$ が本当に線型 Lie 代数かどうか確認しよう．

<u>証明</u> $\forall x,\, y \in \mathfrak{o}(V)$ をとる．f の双線型性から $\forall v,\, w \in V$ に対して

$$\begin{aligned}f\big((x+y)(v),\, w\big) &= f\big(x(v),\, w\big) + f\big(y(v),\, w\big)\\ &= -f\big(v,\, x(w)\big) - f\big(v,\, y(w)\big)\\ &= -f\big(v,\, x(w) + y(w)\big)\\ &= -f\big(v,\, (x+y)(w)\big)\\ f\big((\lambda x)(v),\, w\big) &= \lambda f\big(x(v),\, w\big)\\ &= -\lambda f\big(v,\, x(w)\big)\\ &= -f\big(v,\, \lambda x(w)\big)\\ &= -f\big(v,\, (\lambda x)(w)\big)\\ f\big([x,y](v),\, w\big) &= f\big(x(y(v)),\, w\big) - f\big(y(x(v)),\, w\big)\\ &= -f\big(y(v),\, x(w)\big) + f\big(x(v),\, y(w)\big)\\ &= f\big(v,\, y(x(w))\big) - f\big(v,\, x(y(w))\big)\\ &= -f\big(v,\, [x,y](w)\big)\end{aligned}$$

が言えるので，$x+y,\ \lambda x,\ [x,y] \in \mathfrak{o}(V)$ が言えた． ■

---

[a]「$v \in V$ が $\forall w \in V$ に対して $f(v,\,w)=0$ を充たす $\implies$ $v=o$」かつ「$w \in V$ が $\forall v \in V$ に対して $f(v,\,w)=0$ を充たす $\implies$ $w=o$」

[b] $f\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{K},\ (v,\,w) \longmapsto v^{\mathsf{T}} s w$ のこと．

【例 1.1.5】線型 Lie 代数：C_l 型

$\dim V = 2l$ とする．行列

$$s := \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1}_l \\ -\mathbb{1}_l & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}(2l,\,\mathbb{K})$$

により定まる V 上の非退化かつ歪対称な双線型形式を f と書く．このとき，**シンプレクティック代数** (symplectic algebra) $\mathfrak{sp}(V)$（または $\mathfrak{sp}(2l,\,\mathbb{K})$）が以下のように定義される：

$$\mathfrak{sp}(V) := \left\{\, x \in \mathfrak{gl}(V) \;\middle|\; f\big(x(v),\,w\big) = -f\big(v,\,x(w)\big),\ \forall v,\,w \in V \,\right\}$$

【例 1.1.4】と全く同様にして $\mathfrak{sp}(V)$ が線型 Lie 代数であることを証明できる．

【例 1.1.6】線型 Lie 代数：D_l 型

$\dim V = 2l$ とし，行列

$$s := \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1}_l \\ \mathbb{1}_l & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}(2l,\,\mathbb{K})$$

により定まる V 上の非退化かつ対称な双線型形式を f と書く．このとき，【例 1.1.4】と全く同様に**直交代数** (orthogonal algebra) $\mathfrak{o}(V)$（または $\mathfrak{o}(2l,\,\mathbb{K})$）が定義される．

さらに，古典代数以外の線型 Lie 代数をいくつか導入する．

【例 1.1.7】線型 Lie 代数：$\mathfrak{t}$

$n \times n$ 上三角行列全体の集合を $\mathfrak{t}(n,\,\mathbb{K}) \subset \mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{K})$ と書く[a]：

$$\mathfrak{t}(n,\,\mathbb{K}) := \left\{ \big[\, a_{\mu\nu} \,\big]_{1 \le \mu,\,\nu \le n} \in \mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{K}) \;\middle|\; \mu > \nu \implies a_{\mu\nu} = 0 \right\}$$

$\mathfrak{t}(n,\,\mathbb{K})$ が線型 Lie 代数であることを確認しよう．

<u>**証明**</u> $\forall x = \big[\, x_{\mu\nu} \,\big]_{1 \le \mu,\,\nu \le n},\ y = \big[\, y_{\mu\nu} \,\big]_{1 \le \mu,\,\nu \le n} \in \mathfrak{t}(n,\,\mathbb{K})$ をとる．このとき $1 \le \nu < \mu \le n$ なる全ての $(\mu,\,\nu)$ に対して

$$\begin{aligned} [x+y]_{\mu\nu} &= x_{\mu\nu} + y_{\mu\nu} = 0 + 0 = 0 \\ [\lambda x]_{\mu\nu} &= \lambda x_{\mu\nu} = \lambda 0 = 0 \\ [xy]_{\mu\nu} &= \sum_{\lambda=1}^{n} x_{\mu\lambda} y_{\lambda\nu} = \sum_{\lambda=1}^{\nu} 0 y_{\lambda\nu} + \sum_{\lambda=\nu+1}^{n} x_{\mu\lambda} 0 = 0 \end{aligned}$$

が成り立つので $x+y,\ \lambda x,\ [x, y] \in \mathfrak{t}(n,\ \mathbb{K})$ が言えた． ■

---

[a] $\mathfrak{t}$ の LaTeX コマンドは `\mathfrak{t}`

【例 1.1.8】線型 Lie 代数：$\mathfrak{n}$

$n \times n$ 上三角行列のうち対角成分が全て 0 であるもの全体がなす集合を $\mathfrak{n}(n,\ \mathbb{K}) \subset \mathfrak{gl}(n,\ \mathbb{K})$ と書く[a]：

$$\mathfrak{n}(n,\ \mathbb{K}) := \left\{ \left[\, a_{\mu\nu} \,\right]_{1 \leq \mu,\, \nu \leq n} \in \mathfrak{gl}(n,\ \mathbb{K}) \;\middle|\; \mu \geq \nu \quad \Longrightarrow \quad a_{\mu\nu} = 0 \right\}$$

$\mathfrak{n}(n,\ \mathbb{K})$ が線型 Lie 代数であることは【例 1.1.7】と全く同様に証明できる．

---

[a] $\mathfrak{n}$ の LaTeX コマンドは `\mathfrak{n}`

【例 1.1.9】線型 Lie 代数：$\mathfrak{d}$

$n \times n$ 対角行列全体がなす集合を $\mathfrak{d}(n,\ \mathbb{K}) \subset \mathfrak{gl}(n,\ \mathbb{K})$ と書く[a]：

$$\mathfrak{d}(n,\ \mathbb{K}) := \left\{ \left[\, a_{\mu\nu} \,\right]_{1 \leq \mu,\, \nu \leq n} \in \mathfrak{gl}(n,\ \mathbb{K}) \;\middle|\; \mu \neq \nu \quad \Longrightarrow \quad a_{\mu\nu} = 0 \right\}$$

$\mathfrak{d}(n,\ \mathbb{K})$ は明らかに線型 Lie 代数である．

---

[a] $\mathfrak{d}$ の LaTeX コマンドは `\mathfrak{d}`

公理 1.1.2: 代数

体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 $\mathfrak{U}$[a]の上に二項演算

$$*\colon \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{U},\ (x,\ y) \longmapsto x * y$$

が定義されていて，かつ以下の条件を充たすとき，$\mathfrak{U}$ は **$\mathbb{K}$-代数** ($\mathbb{K}$-algebra) と呼ばれる[b]：

(A-1) $*$ は双線型写像である．i.e. $\forall x,\ x_i,\ y,\ y_i \in \mathfrak{g},\ \forall \lambda_i,\ \mu_i \in \mathbb{K}\ (i = 1,\ 2)$ に対して

$$\begin{aligned}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) * y &= \lambda_1 x_1 * y + \lambda_2 x_2 * y, \\ x * (\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) &= \mu_1 x * y_1 + \mu_2 x * y_2\end{aligned}$$

が成り立つ．

---

[a] `\mathfrak{U}`
[b] 結合律は要請しない！ $*$ に関する結合律を公理に含める場合は**結合代数** (associative algebra) と言う．文献によっては代数と言って結合代数のことを指す場合があるので注意．

Lie 代数は $\mathbb{K}$-代数である．

定義 1.1.3: 代数の微分

$\mathbb{K}$-代数 $\mathfrak{U}$ の**微分** (derivation) とは，線型写像

$$d\colon \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{U}$$

であって Leibniz 則

$$d(x * y) = x * d(y) + d(x) * y$$

を充たすもののこと．

全ての $\mathfrak{U}$ の微分がなす集合を $\operatorname{Der}\mathfrak{U}$ と書く．

命題 1.1.1: 代数の微分がなす Lie 代数

$\operatorname{Der}\mathfrak{U}$ の上の加法，スカラー乗法，Lie ブラケットをそれぞれ

$$\begin{aligned}
+\colon \operatorname{Der}\mathfrak{U} \times \operatorname{Der}\mathfrak{U} &\longrightarrow \operatorname{Der}\mathfrak{U},\ (d,\ e) \longmapsto \bigl(x \mapsto d(x) + e(x)\bigr)\\
\cdot\,\colon \mathbb{K} \times \operatorname{Der}\mathfrak{U} &\longrightarrow \operatorname{Der}\mathfrak{U},\ (\lambda,\ d) \longmapsto \bigl(x \mapsto \lambda d(x)\bigr)\\
[\ ,\,]\colon \operatorname{Der}\mathfrak{U} \times \operatorname{Der}\mathfrak{U} &\longrightarrow \operatorname{Der}\mathfrak{U},\ (d,\ e) \longmapsto \bigl(x \mapsto d(e(x)) - e(d(x))\bigr)
\end{aligned}$$

と定義すると，組 $(\operatorname{Der}\mathfrak{U},\ +,\ \cdot\ ,\ [\ ,\,])$ は $\mathfrak{gl}(\mathfrak{U})$ の部分 Lie 代数である．Lie 代数としての $\operatorname{Der}\mathfrak{U}$ のことを**微分代数** (derivation algebra) と呼ぶ[a]．

[a] https://mathworld.wolfram.com/DerivationAlgebra.html

__証明__ $\forall x,\ y \in \mathfrak{U}$ をとる．代数の微分は線型写像なので，$*$ の双線型性および微分の Leibniz 則から

$$\begin{aligned}
(d+e)(x*y) &= x*d(y) + d(x)*y + x*e(y) + e(x)*y = x*(d+e)(y) + (d+e)(x)*y\\
(\lambda d)(x*y) &= \lambda\bigl(d(x)*y + x*d(y)\bigr) = \bigl(\lambda d(x)\bigr)*y + x*\bigl(\lambda d(y)\bigr) = (\lambda d)(x)*y + x*(\lambda d)(y)
\end{aligned}$$

が成り立つ．i.e. $d+e,\ \lambda d \in \operatorname{Der}\mathfrak{U}$ が言えた．Lie ブラケットに関しては，

$$d\bigl(e(x*y)\bigr) = d\bigl(x*e(y) + e(x)*y\bigr) = x*d\bigl(e(y)\bigr) + d(x)*e(y) + e(x)*d(y) + d\bigl(e(x)\bigr)*y$$

に注意すると

$$\begin{aligned}
[d,e](x*y) &= x*d\bigl(e(y)\bigr) + \cancel{d(x)*e(y) + e(x)*d(y)} + d\bigl(e(x)\bigr)*y\\
&\quad - x*e\bigl(d(y)\bigr) \cancel{- e(x)*d(y) - d(x)*e(y)} - e\bigl(d(x)\bigr)*y\\
&= x*[d,e](y) + [d,e](x)*y
\end{aligned}$$

が成り立つ．i.e. $[d,e] \in \operatorname{Der}\mathfrak{U}$ が言えた． ■

【例 1.1.10】内部微分

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は $\mathbb{K}$-代数なので，その微分代数 $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$ を考えることができる．

ここで $x \in \mathfrak{g}$ を任意に取ろう．このとき，写像

$$\mathrm{ad}\, x \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g},\ z \longmapsto [x, z]$$

は線型写像で，Jacobi 恒等式から

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}\, x([z, w]) &= [x, [z, w]] \\ &= [[x, z], w] + [z, [x, w]] \\ &= [\mathrm{ad}\, x(z), w] + [z, \mathrm{ad}\, x(w)]\end{aligned}$$

を充たすことがわかる．これはまさに Leibniz 則なので，$\mathrm{ad}\, x \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ である．$\mathrm{ad}\, x$ の形で書ける $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ の元のことを**内部微分** (inner derivation) と呼ぶ[a]．

[a] $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ の元が内部微分でないとき，**外部微分** (outer derivation) であると言う．

1.1.2 イデアル・商代数

定義 1.1.4: Lie 代数のイデアル

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の部分集合 $\mathfrak{i}$ [a]が $\mathfrak{g}$ の**イデアル** (ideal) であるとは，以下の 2 条件を充たすことを言う：

(LI-1) $\mathfrak{i}$ は $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間である．

(LI-2) $\forall x \in \mathfrak{g},\ \forall y \in \mathfrak{i}$ に対して $[x, y] \in \mathfrak{i}$

[a] \mathfrak{i}

【例 1.1.11】自明なイデアル

$\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $[x, o] = [x, x + (-x)] = [x, x] - [x, x] = o$ が成り立つので，$\{o\}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．また，Lie ブラケットについて閉じているので $\mathfrak{g}$ 自身もイデアルである．この 2 つを**自明なイデアル** (trivial ideal) と呼ぶ．

【例 1.1.12】中心

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の**中心** (center) は

$$Z(\mathfrak{g}) := \left\{ z \in \mathfrak{g} \,\middle|\, \forall x \in \mathfrak{g},\ [x, z] = o \right\}$$

と定義される．$o \in Z(\mathfrak{g})$ であることから $Z(\mathfrak{g})$ はイデアルである．$\mathfrak{g}$ が Lie ブラケットに関して可換である必要十分条件は $Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ が成り立つことである[a]．

[a] Lie 代数の公理 **(L'-1)** より，$[x, y] = [y, x]$ ならば $[x, y] = -[x, y] \iff [x, y] = o$ である．

補題 1.1.1: イデアル同士の演算

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とそのイデアル $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ を与える．このとき以下の 2 つが成り立つ：

(1) 集合 $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{j}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．

(2) 集合 $\mathfrak{i} + \mathfrak{j} := \left\{ x + y \,\middle|\, x \in \mathfrak{i},\, y \in \mathfrak{j} \right\}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．

(3) 集合 $[\mathfrak{i}, \mathfrak{j}] := \left\{ \sum_{i=1}^{n} [x_i, y_i] \,\middle|\, x_i \in \mathfrak{i},\, y_i \in \mathfrak{j};\, n < \infty \right\}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．

証明　(1) ほぼ自明．

(2) $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$ の勝手な元 $z + w$ と $\forall x \in \mathfrak{g}$ をとる．Lie ブラケットの双線型性から $[x, z + w] = [x, z] + [x, w]$ が言えるが，$\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ がイデアルであることにより $[x, z] \in \mathfrak{i}$, $[x, w] \in \mathfrak{j}$ なので右辺は $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$ に属する．

(3) $\forall x \in \mathfrak{g}$ を 1 つとる．Lie ブラケットの双線型性から，このとき $\forall z \in \mathfrak{i}$, $\forall w \in \mathfrak{j}$ に対して $[x, [z, w]] \in [\mathfrak{i}, \mathfrak{j}]$ が成り立つことを示せば良い．実際，Lie 代数の公理 **(L-2)**, **(L-3)** より

$$[x, [z, w]] = [[w, x], z] + [[x, z], w] = [z, [x, w]] + [[x, z], w]$$

が言えるが，$\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ がイデアルであることにより $[x, w] \in \mathfrak{j}$, $[x, z] \in \mathfrak{i}$ なので右辺は $[\mathfrak{i}, \mathfrak{j}]$ に属する．

■

【例 1.1.13】導来 Lie 代数

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の**導来代数** (derived algebra) とは，$\mathfrak{g}$ のイデアル $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ のこと．

定義 1.1.5: 単純 Lie 代数

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が**単純** (simple) であるとは，$\mathfrak{g}$ が自明なイデアル以外のイデアルを持たず，かつ $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \{o\}$ を充たすことを言う．

【例 1.1.14】単純 Lie 代数：$\mathfrak{sl}(2)$

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ のイデアル $\mathfrak{i}$ が与えられたとき，商群のときと同じ要領で商代数を構成できる．このことを復習しよう：

$\mathfrak{g}$ 上の同値関係を

$$\sim := \left\{ (x,\, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \,\middle|\, x - y \in \mathfrak{i} \right\}$$

と定義する[*5]．$\sim$ による $x \in \mathfrak{g}$ の同値類のことを $x + \mathfrak{i}$ と書き，商集合 $\mathfrak{g}/\sim$ のことを $\boldsymbol{\mathfrak{g}/\mathfrak{i}}$ と書く．全射 $p\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ を**標準的射影** (canonical projection) と呼ぶ．

*5 **(LI-1)** より $\mathfrak{i}$ は部分ベクトル空間なので反射律と対称律が言える．$x \sim y$ かつ $y \sim z$ ならば $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathfrak{i}$ なので $x \sim z$ であり，推移律が成り立つことがわかる．

定義 1.1.6: 商代数

集合 $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ の上には次のようにして well-defined な加法，スカラー乗法，Lie ブラケットが定義できる：

$$
\begin{aligned}
+\colon \mathfrak{g}/\mathfrak{i}\times\mathfrak{g}/\mathfrak{i} &\longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i},\ (x+\mathfrak{i},\ y+\mathfrak{i}) \longmapsto (x+y)+\mathfrak{i}\\
\cdot : \mathbb{K}\times\mathfrak{g}/\mathfrak{i} &\longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i},\ (\lambda,\ x+\mathfrak{i}) \longmapsto (\lambda x)+\mathfrak{i}\\
[\ ,]\colon \mathfrak{g}/\mathfrak{i}\times\mathfrak{g}/\mathfrak{i} &\longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i},\ (x+\mathfrak{i},\ y+\mathfrak{i}) \longmapsto [x,y]+\mathfrak{i}
\end{aligned}
$$

Lie 代数 $(\mathfrak{g}/\mathfrak{i},\ +,\ \cdot\ ,\ [\ ,])$ のことを**商代数** (quotient algebra) と呼ぶ．

証明 well-definedness を示す．$x+\mathfrak{i}=x'+\mathfrak{i},\ y+\mathfrak{i}=y'+\mathfrak{i}$ ならば $x'-x,\ y'-y\in\mathfrak{i}$ であるから

$$
\begin{aligned}
x'+y' &= (x+y)+(x'-x)+(y'-y)\in(x+y)+\mathfrak{i},\\
\lambda x' &= \lambda x+\lambda(x'-x)\in(\lambda x)+\mathfrak{i}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．また，$\mathfrak{i}$ がイデアルであることにより

$$
\begin{aligned}
[x',y'] &= [x+(x'-x),y+(y'-y)]\\
&= [x,y]+[x,y'-y]-[y,x'-x]+[x'-x,y'-y]\\
&\in [x,y]+\mathfrak{i}
\end{aligned}
$$

が言える． ■

! 定義 1.1.6 による商代数の構成によって，標準的射影は自動的に Lie 代数の準同型写像になる：

$$
\begin{aligned}
p(x+y) &= (x+y)+\mathfrak{i} =: (x+\mathfrak{i})+(y+\mathfrak{i}) = p(x)+p(y),\\
p(\lambda x) &= (\lambda x)+\mathfrak{i} =: \lambda(x+\mathfrak{i}) = \lambda p(x),\\
p([x,y]) &= [x,y]+\mathfrak{i} =: [(x+\mathfrak{i}),(y+\mathfrak{i})] = [p(x),p(y)].
\end{aligned}
$$

定義 1.1.7: 正規化代数・中心化代数

- Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とその部分 Lie 代数（もしくは部分ベクトル空間）$\mathfrak{h}$ を与える．このとき $\mathfrak{h}$ の**正規化代数** (normalizer) を

$$
N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) := \left\{\, x\in\mathfrak{g} \;\middle|\; \forall h\in\mathfrak{h},\ [x,h]\in\mathfrak{h} \,\right\}
$$

  で定義する[a]．特に $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}$ のとき，$\mathfrak{h}$ は **self-normalizing** であると言う．
- Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とその部分集合 X を与える．このとき X の**中心化代数** (centralizer) を

$$
C_{\mathfrak{g}}(X) := \left\{\, x\in\mathfrak{g} \;\middle|\; \forall z\in X,\ [x,z]=o \,\right\}
$$

  と定義する[b]．

[a] $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ は $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数である：$\forall x,\,y\in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ に対して，Jacobi 恒等式から $\forall z\in\mathfrak{h}$，$[[x,y],z]=[x,[y,z]]-[y,[x,z]]\in\mathfrak{h}$ が言える．さらに，もし $\mathfrak{h}$ が部分 Lie 代数ならば，定義から $\mathfrak{h}$ を $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ の部分ベクトル空間と見做したときに $\mathfrak{h}$ は自動的にイデアルになる．特に，$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ は $\mathfrak{h}\subset N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ をイデアルとして持つ最大の部分 Lie 代数である．

[b] $C_{\mathfrak{g}}(X)$ が $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数であることは，$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ のときと全く同様にして示される．

【例 1.1.12】を思い出すと，$Z(\mathfrak{g})=C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ である．

1.1.3 準同型・表現

定義 1.1.8: Lie 代数の準同型

2 つの Lie 代数 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ を与える．写像 $f\colon \mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ が **Lie 代数の準同型** (homomorphism) であるとは，f が和，スカラー乗法，Lie ブラケットの全てを保存することを言う．i.e. $\forall x,\ y \in \mathfrak{g},\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ に対して

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y), \\ f(\lambda x) &= \lambda f(x), \\ f([x, y]) &= [f(x), f(y)] \end{aligned}$$

が成り立つこと．

全単射な Lie 代数の準同型のことを Lie 代数の**同型** (isomorphism) と呼ぶ．

Lie 代数の準同型 $f\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ の**核** (kernel), **像** (image) をそれぞれ

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &:= \left\{ x \in \mathfrak{g} \mid f(x) = o \right\}, \\ \operatorname{Im} f &:= \left\{ f(x) \in \mathfrak{h} \mid x \in \mathfrak{g} \right\} \end{aligned}$$

と定義すると $\operatorname{Ker} f$ はイデアルであり[*6]，$\operatorname{Im} f$ は部分 Lie 代数である[*7]．

命題 1.1.2: 準同型定理

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ およびそのイデアル $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ を与える．このとき，任意のLie 代数の準同型 $f\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ に対して[a]以下が成り立つ：

(1) $\mathfrak{g}/\operatorname{Ker} f \cong \operatorname{Im} f$．また，$\mathfrak{i} \subset \operatorname{Ker} f$ が成り立つならば，以下の図式を可換にする Lie 代数の準同型 $\psi\colon \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \longrightarrow \mathfrak{h}$ が一意的に存在する：

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & \forall\mathfrak{h} \\ & \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \arrow[ur, dashed, "\exists!\psi"'] & \end{tikzcd}$$

図 1.1: 商代数の普遍性．p は標準的射影 $p\colon x \longmapsto x + \mathfrak{i}$ を表す．

(2) $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{j}$ が成り立つとする．このとき $\mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ は $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ のイデアルであり，自然な同型 $(\mathfrak{g}/\mathfrak{i})/(\mathfrak{j}/\mathfrak{i}) \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{j}$ が成り立つ．

(3) 自然な同型 $(\mathfrak{i}+\mathfrak{j})/\mathfrak{j} \cong \mathfrak{i}/(\mathfrak{i} \cap \mathfrak{j})$ が成り立つ．

[a] わざわざこのような記述をしたのは，(1) が商代数の**普遍性** (universal property) を意味していることを明示するためである．

[*6] $\forall x,\ y \in \operatorname{Ker} f$ に対して $f(x+y) = f(x) + f(y) = o + o = o$，$f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda o = o$ なので部分ベクトル空間，かつ $\forall z \in \mathfrak{g}$ に対して $f([z, x]) = [f(z), f(x)] = [f(z), o] = o$．

[*7] $\forall f(x),\ f(y) \in \operatorname{Im} f$ に対して $f(x) + f(y) = f(x+y)$，$\lambda f(x) = f(\lambda x)$; $[f(x), f(y)] = f([x, y])$

証明 (1) まず，$\iota \subset \operatorname{Ker} f$ ならば写像 $\psi\colon \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \longrightarrow \operatorname{Im} f,\ x+\mathfrak{i} \longmapsto f(x)$ が well-defined な Lie 代数の準同型であることを示す．実際 $x+\mathfrak{i} = x'+\mathfrak{i}$ ならば $x'-x \in \mathfrak{i} \subset \operatorname{Ker} f$ であり，$\psi(x'+\mathfrak{i}) = f(x') = f\bigl(x+(x'-x)\bigr) = f(x)+f(x'-x) = f(x) = \psi(x+\mathfrak{i})$ が言えた．ψ が Lie 代数の準同型であることは f が Lie 代数の準同型であることから明らか．定義から $\psi \circ p = f$ である．

次に ψ の一意性を示す．別の $\phi\colon \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \longrightarrow \mathfrak{h}$ が存在して $\phi \circ p = f$ が成り立つとする．このとき $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $\phi(x+\iota) = f(x)$ が成り立つので $\phi = \psi$ である．

特に $\mathfrak{i} = \operatorname{Ker} f$ ならば，$\operatorname{Ker}\psi = \{\operatorname{Ker} f\} = \{o\}$ なので ψ は単射であり $\mathfrak{g}/\operatorname{Ker} f \cong \operatorname{Im} f$ が言えた．

(2) $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{j}$ のとき，イデアルの定義より $\mathfrak{i}$ は $\mathfrak{j}$ のイデアルでもある．よって商代数 $\mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ は well-defined．明らかに $\mathfrak{j}/\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ なので $\mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ は $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ の部分 Lie 代数だと分かった．ここで $\forall x+\mathfrak{i} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{i},\ \forall y+\mathfrak{i} \in \mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ をとると，$\mathfrak{j}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルであることから $[x+\mathfrak{i}, y+\mathfrak{i}] = [x,y]+\mathfrak{i} \in \mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ が従う[*8]．以上の議論から $\mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ が $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ のイデアルであることが示された．

さて，Lie 代数の全射準同型 $f\colon \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{j},\ x+\mathfrak{i} \longmapsto x+\mathfrak{j}$ は仮定より well-defined で[*9]，かつ $\operatorname{Ker} f = \mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ である．従って (1) より $\mathfrak{g}/\mathfrak{j} \cong (\mathfrak{g}/\mathfrak{i})/(\mathfrak{j}/\mathfrak{i})$ が言える．

(3) Lie 代数の全射準同型 $f\colon \mathfrak{i} \longrightarrow (\mathfrak{i}+\mathfrak{j})/\mathfrak{j},\ x \longmapsto x+\mathfrak{j}$ に対して $\operatorname{Ker} f = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{j}$ である．従って (1) より $(\mathfrak{i}+\mathfrak{j})/\mathfrak{j} \cong \mathfrak{i}/(\mathfrak{i}\cap\mathfrak{j})$ が言える．

■

定義 1.1.9: Lie 代数の表現

V を $\mathbb{K}$-ベクトル空間とする．Lie 代数の準同型

$$\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

と V の組 (ϕ, V) のことを **Lie 代数の表現** (representation) と呼ぶ[a]．

[a] 「代数の表現」と言われたとき，代数**の表現**なのか**結合代数の表現**なのか **Lie 代数の表現**なのか文脈で判断しなくてはならないかもしれない．

【例 1.1.15】随伴表現

【例 1.1.10】で定義した $\operatorname{ad}(x)$ は，写像

$$\operatorname{ad}\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \operatorname{Der}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}),\ x \longmapsto \bigl(z \mapsto [x,z]\bigr)$$

だと思うことができる．ad は明らかに線型写像で，かつ $\forall z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned}
[\operatorname{ad} x, \operatorname{ad} y](z) &= \operatorname{ad} x([y,z]) - \operatorname{ad} y([x,z]) \\
&= [x,[y,z]] - [y,[x,z]] \\
&= [x,[y,z]] + [y,[z,x]] \\
&= [[x,y],z] \\
&= \operatorname{ad}\,[x,y](z)
\end{aligned}$$

[*8] $[x,y] \in \mathfrak{j}$ なので．

[*9] $x+\mathfrak{i} = x'+\mathfrak{i} \implies x'-x \in \mathfrak{i} \subset \mathfrak{j} \implies f(x'+\mathfrak{i}) = (x+(x'-x))+\mathfrak{j} = x+\mathfrak{j} = f(x+\mathfrak{i})$

が成り立つので Lie 代数の準同型である．故に組 $(\mathrm{ad}, \mathfrak{g})$ は Lie 代数の表現である．

$$x \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{ad} \iff \forall y \in \mathfrak{g},\ [x, y] = o$$

より，【例 1.1.12】を思い出すと $\mathrm{Ker}\,\mathrm{ad} = Z(\mathfrak{g})$ と分かる．特に単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して $Z(\mathfrak{g}) = \{o\}$ なので ad は単射準同型である．i.e. 任意の単純 Lie 代数は線形 Lie 代数と同型である[a]．

[a] 単射準同型は包含準同型だと見做せる．

1.1.4 自己同型

定義 1.1.10: 自己同型

1.1.5 可解 Lie 代数

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ を与える．$D\mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ とおくと，【例 1.1.13】より $D\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．

定義 1.1.11: 可解 Lie 代数

導来列 (derived series) とは，イデアルの減少列

$$\mathfrak{g} = D^0\mathfrak{g} \supset D^1\mathfrak{g} \supset D^2\mathfrak{g} \supset \cdots$$

のこと．ある $n \geq 0$ に対して導来列が止まるとき，i.e. $D^n\mathfrak{g} = \{o\}$ が成り立つとき，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は**可解** (solvable) であると言われる．

命題 1.1.3:

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ および Lie 代数の準同型 $f\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ を与える．このとき以下が成り立つ：

(1) $\mathfrak{g}$ が可解ならば，$\mathfrak{g}$ の任意の部分 Lie 代数および $\mathrm{Im}\, f$ も可解である．
(2) $\mathfrak{g}$ のイデアル $\mathfrak{i}$ および商代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ がどちらも可解ならば，$\mathfrak{g}$ 自身も可解である．
(3) $\mathfrak{g}$ のイデアル $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ が可解ならば，イデアル $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$ も可解である．

証明 (1)

■

定義 1.1.12: 根基

定義 1.1.13: 半単純 Lie 代数

1.1.6 冪零 Lie 代数

定義 1.1.14: 冪零 Lie 代数

定理 1.1.1: Engel の定理