第 1 章

Lie 群と Lie 代数

本資料ではベクトル空間を英大文字で表記し，係数体を blackboardbold[*1]で表記する（e.g. 体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 L）．本章に限ってはベクトルを $x \in L$ のように英小文字で表記し，係数体の元は $\lambda \in \mathbb{K}$ のようにギリシャ文字で表記する．零ベクトルは $o \in L$ と書き[*2]，$0 \in \mathbb{K}$ を係数体の加法単位元，$1 \in \mathbb{K}$ を係数体の乗法単位元とする．ベクトル空間の加法を $+$ と書き，スカラー乗法は λx のように係数を左に書く．

1.1 公理的 Lie 代数

この節では $\mathbb{K}$ を任意の体とする．

公理 1.1.1: Lie 代数の公理

体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 L の上に二項演算[a]

$$[\ ,\ ] \colon L \times L \longrightarrow L,\ (x,\ y) \longmapsto [x, y]$$

が定義されていて，かつ以下の条件を充たすとき，L は **Lie 代数** (Lie algebra) と呼ばれる：

(L-1) $[\ ,\ ]$ は双線型写像である．i.e. $\forall x,\ x_i,\ y,\ y_i \in L,\ \forall \lambda_i,\ \mu_i \in \mathbb{K}\ (i = 1,\ 2)$ に対して

$$\begin{aligned}[\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y] &= \lambda_1[x_1, y] + \lambda_2[x_2, y],\\ [x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2] &= \mu_1[x, y_1] + \mu_2[x, y_2]\end{aligned}$$

が成り立つ．

(L-2) $\forall x \in L$ に対して

$$[x, x] = o$$

が成り立つ．

(L-3) $\forall x,\ y,\ z \in L$ に対して

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = o$$

が成り立つ[b]（**Jacobi 恒等式**）．

[*1] LaTeX コマンドは`\mathbb`

[*2] 0 の濫用を回避するための苦肉の策です… 普通に不便なので次章以降では零ベクトルも 0 と書きます．

[a] ベクトル空間に備わっている加法とスカラー乗法の他に，追加で $[\,,]$ が定義されているという状況である．この付加的な二項演算はしばしば**括弧積** (bracket) とか**交換子** (commutator) とか **Lie ブラケット** (Lie bracket) とか呼ばれる．
[b] 結合律ではない！

公理 **(L-1)**, **(L-2)** から

$$o = [x+y, x+y] = [x,x] + [x,y] + [y,x] + [y,y] = [x,y] + [y,x]$$

が従う．i.e. $[x,y]$ は反交換 (anticommute) する：

(L'-2) $\forall x,\, y \in L$ に対して

$$[x,y] = -[y,x]$$

が成り立つ．

逆に **(L'-2)** を仮定すると

$$o = [x,x] + [x,x] = (1+1)[x,x]$$

が成り立つ[*3]ので，体 $\mathbb{K}$ において $1+1 \neq 0$ ならば $[x,x] = o$ が言える．i.e. $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$ ならば[*4] **(L'-2)** と **(L-2)** は同値である．

【例 1.1.1】一般線形代数 $\mathfrak{gl}(V)$

V を体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．V から V への線型写像全体が成す集合を $\operatorname{End} V$ と書く[a]．$\operatorname{End} V$ の加法とスカラー乗法をそれぞれ

$$\begin{aligned} +\colon \operatorname{End} V \times \operatorname{End} V &\longrightarrow \operatorname{End} V,\ (f,\, g) \longmapsto \bigl(v \mapsto f(v) + g(v)\bigr) \\ \cdot\,\colon \mathbb{K} \times \operatorname{End} V &\longrightarrow \operatorname{End} V,\ (\lambda,\, f) \longmapsto \bigl(v \mapsto \lambda f(v)\bigr) \end{aligned}$$

として定義すると，組 $(\operatorname{End} V,\, +,\, \cdot\,)$ は体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間になる．以降では常に $\operatorname{End} V$ をこの方法でベクトル空間と見做す．

$\operatorname{End} V$ の上の Lie ブラケットを

$$[\,,]\colon \operatorname{End} V \times \operatorname{End} V \longrightarrow \operatorname{End} V,\ (f,\, g) \longmapsto fg - gf$$

と定義する．ただし右辺の fg は写像の合成 $f \circ g$ の略記である．このとき組 $(\operatorname{End} V,\, +,\, \cdot\,,\, [\,,])$ が Lie 代数の公理を充たすことを確認しよう：

[*3] 2 つ目の等号ではスカラー乗法の分配律（ベクトル空間の公理である）を使った．
[*4] 体 $\mathbb{K}$ の**標数** (characteristic) を $\operatorname{char}\mathbb{K}$ と書いた．

(L-1) $\forall v \in V$ を 1 つとる．定義に従ってとても丁寧に計算すると

$$\begin{aligned}
[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g](v) &= \big((\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)g - g(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)\big)(v) \\
&= (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)\big(g(v)\big) - g\big((\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(v)\big) \\
&= (\lambda_1 f_1)\big(g(v)\big) + (\lambda_2 f_2)\big(g(v)\big) - g\big((\lambda_1 f_1)(v) + (\lambda_2 f_2)(v)\big) \\
&= \lambda_1 f_1\big(g(v)\big) + \lambda_2 f_2\big(g(v)\big) - \lambda_1 g\big(f_1(v)\big) - \lambda_2 g\big(f_2(v)\big) \\
&= \lambda_1\Big(f_1\big(g(v)\big) - g\big(f_1(v)\big)\Big) + \lambda_2\Big(f_2\big(g(v)\big) - g\big(f_2(v)\big)\Big) \\
&= \lambda_1 [f_1, g](v) + \lambda_2 [f_2, g](v) \\
&= \big(\lambda_1 [f_1, g] + \lambda_2 [f_2, g]\big)(v)
\end{aligned}$$

となる．ただし 4 つ目の等号で $g \in \operatorname{End} V$ が線型写像であることを使った．全く同様にして

$$[f, \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2](v) = \mu_1 [f, g_1] + \mu_2 [f, g_2]$$

を示すこともできる．

(L-2) 明らかに $[f, f] = ff - ff = o$ なのでよい．

(L-3) $[\,,]$ の双線型（**(L-1)**）から

$$\begin{aligned}
&[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] \\
&= [f, gh] - [f, hg] + [g, hf] - [g, fh] + [h, fg] - [h, gf] \\
&= fgh - ghf - fhg + hgf + ghf - hfg - gfh + fhg + hfg - fgh - hgf + gfh \\
&= o.
\end{aligned}$$

この Lie 代数 $(\operatorname{End} V, +, \cdot\,, [\,,])$ は**一般線形代数** (general linear algebra) と呼ばれ，記号として $\boldsymbol{\mathfrak{gl}(V)}$ と書かれる．

$\dim V =: n < \infty$ のとき，$\operatorname{End} V$ は $n \times n$ $\mathbb{K}$-行列全体が成す $\mathbb{K}$ ベクトル空間 $\mathrm{M}(n, \mathbb{K})$ と同型である[b]．$\mathrm{M}(n, \mathbb{K})$ を Lie ブラケット $[x, y] \coloneqq xy - yx$ によって Lie 代数と見做す[c]ときは，この同型を意識して $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ と書く．さて，$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ の標準的な基底は所謂**行列単位**

$$e_{ij} \coloneqq \big[\,\delta_{i\mu}\delta_{j\nu}\big]_{1\le\mu,\,\nu\le n} = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array}$$

である．Einstein の規約を使って $e_{ij}e_{kl} = \big[\,\delta_{i\mu}\delta_{j\lambda}\delta_{k\lambda}\delta_{l\nu}\big]_{1\le\mu,\,\nu\le n} = \delta_{jk}\big[\,\delta_{i\mu}\delta_{l\nu}\big]_{1\le\mu,\,\nu\le n} = \delta_{jk}E_{il}$ と計算できるので，$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ の Lie ブラケットは

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{li}e_{kj}$$

によって完全に決まる．

---

[a] **自己準同型** (endomorphism) の略である．

[b] V の基底 $e_1, \ldots, e_n$ を 1 つ固定する．このとき同型写像 $\varphi\colon V \longrightarrow \mathbb{K}^n,\ v^\mu e_\mu \longmapsto (v^\mu)_{1\le\mu\le n}$ を使って定義される線型写像 $\phi\colon \operatorname{End} V \longrightarrow \mathrm{M}(n, \mathbb{K}),\ f \longmapsto \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ が所望の同型写像である．

[c] 右辺の xy は行列の積である．

1.1.1 線型 Lie 群

定義 1.1.1: 部分 Lie 代数

Lie 代数 L の部分ベクトル空間 $M \subset L$ が**部分 Lie 代数**であるとは，M が Lie ブラケットについても閉じていることを言う．i.e. $\forall x,\, y \in M,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ に対して

$$x + y,\ \lambda x,\ [x, y] \in M$$

が成り立つこと．

この小節では以降，V を体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とする．

定義 1.1.2: 線型 Lie 群

一般線形代数 $\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数のことを**線型 Lie 群** (linear Lie algebra) と呼ぶ．

線型 Lie 群として有名なものは**古典代数** (classical algebra) である．これは $A_l,\, B_l,\, C_l,\, D_l$ と呼ばれる 4 つの無限系列からなる．以下，$\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$ とする．

【例 1.1.2】線型 Lie 群：A_l 型

$\dim V = l + 1$ とする．**特殊線形代数** $\mathfrak{sl}(V)$（または $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{K})$）は次のように定義される：

$$\mathfrak{sl}(V) := \left\{ x \in \mathfrak{gl}(V) \,\middle|\, \operatorname{Tr}(x) = 0 \right\}$$

$\mathfrak{sl}(V)$ が本当に線型 Lie 群かどうか確認しよう．

<u>証明</u> $\forall x,\, y \in \mathfrak{sl}(V)$ をとる．トレースの線形性および $\operatorname{Tr}(xy) = \operatorname{Tr}(yx)$ から

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}(x + y) &= \operatorname{Tr}(x) + \operatorname{Tr}(y) = 0 + 0 = 0, \\
\operatorname{Tr}(\lambda x) &= \lambda \operatorname{Tr}(x) = \lambda 0 = 0, \\
\operatorname{Tr}([x, y]) &= \operatorname{Tr}(xy) - \operatorname{Tr}(yx) = \operatorname{Tr}(xy) - \operatorname{Tr}(xy) = 0
\end{aligned}$$

が言えるので，$x + y,\ \lambda x,\ [x, y] \in \mathfrak{sl}(V)$ が言えた． ■

【例 1.1.1】で使った $\mathfrak{gl}(l+1, \mathbb{K})$ の標準的な基底で $\forall x \in \mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{K})$ を $x = x^{ij} e_{ij}$ と展開すると，トレースレスであることから

$$h_{ij} := \begin{cases} e_{ij} & i \neq j,\ 1 \leq i, j \leq l + 1 \\ e_{ii} - e_{i+1,\, i+1} & 1 \leq i = j \leq l \end{cases}$$

の $(l+1)^2 - 1$ 個の行列が $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{K})$ の基底を成すことがわかる．従って $\dim \mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{K}) = (l+1)^2 - 1$ である．

【例 1.1.3】線型 Lie 群：B_l 型

$\dim V = 2l+1$ とする．行列

$$s \coloneqq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1}_l \\ 0 & \mathbb{1}_l & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}(2l+1,\, \mathbb{K})$$

により定まる V 上の非退化かつ対称な双線型形式を f と書く[a]．このとき，**直交代数** (orthogonal algebra) $\mathfrak{o}(V)$（または $\mathfrak{o}(2l+1,\, \mathbb{K})$）が以下のように定義される：

$$\mathfrak{o}(V) \coloneqq \left\{\, x \in \mathfrak{gl}(V) \;\middle|\; f\bigl(x(v),\, w\bigr) = -f\bigl(v,\, x(w)\bigr),\ \forall v,\, w \in V \,\right\}$$

$\mathfrak{o}(V)$ が本当に線型 Lie 群かどうか確認しよう．

<u>**証明**</u> $\forall x,\, y \in \mathfrak{o}(V)$ をとる．f の双線型性から $\forall v,\, w \in V$ に対して

$$\begin{aligned}
f\bigl((x+y)(v),\, w\bigr) &= f\bigl(x(v),\, w\bigr) + f\bigl(y(v),\, w\bigr) \\
&= -f\bigl(v,\, x(w)\bigr) - f\bigl(v,\, y(w)\bigr) \\
&= -f\bigl(v,\, x(w) + y(w)\bigr) \\
&= -f\bigl(v,\, (x+y)(w)\bigr) \\
f\bigl((\lambda x)(v),\, w\bigr) &= \lambda f\bigl(x(v),\, w\bigr) \\
&= -\lambda f\bigl(v,\, x(w)\bigr) \\
&= -f\bigl(v,\, \lambda x(w)\bigr) \\
&= -f\bigl(v,\, (\lambda x)(w)\bigr) \\
f\bigl([x,y](v),\, w\bigr) &= f\bigl(x(y(v)),\, w\bigr) - f\bigl(y(x(v)),\, w\bigr) \\
&= -f\bigl(y(v),\, x(w)\bigr) + f\bigl(x(v),\, y(w)\bigr) \\
&= f\bigl(v,\, y(x(w))\bigr) - f\bigl(v,\, x(y(w))\bigr) \\
&= -f\bigl(v,\, [x,y](w)\bigr)
\end{aligned}$$

が言えるので，$x+y,\, \lambda x,\, [x,y] \in \mathfrak{o}(V)$ が言えた． ■

---

[a] $f\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{K},\ (v,\, w) \longmapsto v^{\mathsf{T}} s w$ のこと．