表現論 ノート

高間俊至

2023 年 11 月 27 日

本資料ではベクトル空間を英大文字で表記し，係数体を blackboardbold[*1]で表記する（e.g. 体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 L）.

[*1] LaTeX コマンドは`\mathbb`

目次

第 1 章

Lie 群と Lie 代数

この章は [1, Chapter I], [2, 第 1-3 章] に相当する．

本章に限ってはベクトルを $x \in L$ のように英小文字で表記し，係数体の元は $\lambda \in \mathbb{K}$ のようにギリシャ文字で表記する．零ベクトルは $o \in L$ と書き[*1]，$0 \in \mathbb{K}$ を係数体の加法単位元，$1 \in \mathbb{K}$ を係数体の乗法単位元とする．ベクトル空間の加法を $+$ と書き，スカラー乗法は λx のように係数を左に書く．また，特に断りがなければ Einstein の規約を使う．

1.1 公理的 Lie 代数

この節では，特に断りがなければ $\mathbb{K}$ を任意の体とする．Lie 代数を純粋に代数学的な対象として扱うことを考える．

! Lie 代数を表す記号は Fraktur という字体で書く慣例がある．例えば「Fraktur」という文字列は $\mathfrak{Fraktur}$ のようになる．LaTeX コマンドは数式モード中で `\mathfrak{}` とする．

公理 1.1.1: Lie 代数の公理

体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 $\mathfrak{g}$ の上に二項演算[a]

$$[\ ,\ ] \colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g},\ (x,\ y) \longmapsto [x, y]$$

が定義されていて，かつ以下の条件を充たすとき，$\mathfrak{g}$ は **Lie 代数** (Lie algebra) と呼ばれる：

(L-1) $[\ ,\ ]$ は双線型写像である．i.e. $\forall x,\ x_i,\ y,\ y_i \in \mathfrak{g},\ \forall \lambda_i,\ \mu_i \in \mathbb{K}\ (i = 1,\ 2)$ に対して

$$\begin{aligned}[\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y] &= \lambda_1 [x_1, y] + \lambda_2 [x_2, y], \\ [x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2] &= \mu_1 [x, y_1] + \mu_2 [x, y_2]\end{aligned}$$

が成り立つ．

(L-2) $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[x, x] = o$$

[*1] 0 の濫用を回避するための苦肉の策です… 普通に不便なので次章以降では零ベクトルも 0 と書きます．

が成り立つ．

(L-3)　$\forall x,\ y,\ z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = o$$

が成り立つ[b]（**Jacobi 恒等式**）．

[a] ベクトル空間に備わっている加法とスカラー乗法の他に，追加で $[\ ,\ ]$ が定義されているという状況である．この付加的な二項演算はしばしば**括弧積** (bracket) とか**交換子** (commutator) とか **Lie ブラケット** (Lie bracket) とか呼ばれる．

[b] 結合律ではない！

公理 **(L-1)**, **(L-2)** から

$$o = [x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = [x, y] + [y, x]$$

が従う．i.e. $[x, y]$ は反交換 (anticommute) する：

(L'-2)　$\forall x,\ y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[x, y] = -[y, x]$$

が成り立つ．

逆に **(L'-2)** を仮定すると

$$o = [x, x] + [x, x] = (1 + 1)[x, x]$$

が成り立つ[*2]ので，体 $\mathbb{K}$ において $1 + 1 \neq 0$ ならば $[x, x] = o$ が言える．i.e. $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$ ならば[*3] **(L'-2)** と **(L-2)** は同値である．

【例 1.1.1】3 次元実ベクトル空間

$\mathbb{R}^3$ を $\mathbb{R}$-ベクトル空間と見做す．$\mathbb{R}^3$ 上の Lie ブラケットを

$$[\ ,\ ]\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x,\ y) \longmapsto x \times y$$

によって定義する．ただし右辺の $\times$ はベクトル積である．このとき $\mathbb{R}^3$ が Lie 代数の公理を充たすことを確認しよう：

証明　$\mathbb{R}^3$ の元の成分を $x = (\,x_\mu\,)_{1 \leq \mu \leq 3}$ のように書く．ひたすら成分計算をする．

(L-1)　ベクトル積の定義から

$$\begin{aligned}
([\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y])_\mu &= \epsilon_{\mu\nu\lambda}(\lambda_1 x_{1\nu} + \lambda_2 x_{2\nu}) y_\lambda \\
&= \lambda_1 \epsilon_{\mu\nu\lambda} x_{1\mu} y_\lambda + \lambda_2 \epsilon_{\mu\nu\lambda} x_{2\nu} y_\lambda \\
&= \lambda_1 [x_1, y] + \lambda_2 [x_2, y]
\end{aligned}$$

[*2] 2 つ目の等号ではスカラー乗法の分配律（ベクトル空間の公理である）を使った．

[*3] 体 $\mathbb{K}$ の**標数** (characteristic) を $\operatorname{char}\mathbb{K}$ と書いた．

が成り立つ．全く同様に

$$[x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2] = \mu_1 [x, y_1] + \mu_2 [x, y_2]$$

が示される．

(L-2) Levi-Civita 記号の添字に関する反対称性から

$$([x, x])_\mu = \epsilon_{\mu\nu\lambda} x_\nu x_\lambda = \epsilon_{\mu\nu\lambda} x_\lambda x_\nu = -\epsilon_{\mu\lambda\nu} x_\lambda x_\nu = (-[x, x])_\mu$$

$\operatorname{char} \mathbb{R} = 0 \neq 2$ なので，ここから $[x, x] = o$ が従う．

(L-3) 行と列をそれぞれ適切に入れ替えた単位行列の行列式を考えることで，恒等式 $\epsilon_{\mu\nu\lambda}\epsilon_{\rho\sigma\lambda} = \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}$ が成り立つことがわかる．従って

$$\begin{aligned} ([x, [y, z]])_\mu &= \epsilon_{\mu\nu\lambda} x_\nu \epsilon_{\lambda\rho\sigma} y_\rho z_\sigma \\ &= (\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}) x_\nu y_\rho z_\sigma \\ &= x_\nu y_\mu z_\nu - x_\nu y_\nu z_\mu \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} ([x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]])_\mu &= x_\nu y_\mu z_\nu - x_\nu y_\nu z_\mu + y_\nu z_\mu x_\nu - y_\nu z_\nu x_\mu + z_\nu x_\mu y_\nu - z_\nu x_\nu y_\mu \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

$\mathbb{R}^3$ の標準的な基底

$$e_1 \coloneqq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 \coloneqq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 \coloneqq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

に対して

$$[e_i, e_j] = \epsilon_{ijk} e_k$$

が成り立つ．$\mathbb{R}^3$ の任意の 2 つの元に対する Lie ブラケットがこの恒等式によって完全に決まることを含意して，$3^3 = 27$ 個の実定数 ϵ_{ijk} のことを $\mathbb{R}^3$ の**構造定数** (structure constant) と呼ぶ．

【例 1.1.2】一般線形代数 $\mathfrak{gl}(V)$

V を体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．V から V への線型写像全体が成す集合を $\operatorname{End} V$ と書く[a]．$\operatorname{End} V$ の加法とスカラー乗法をそれぞれ

$$\begin{aligned} +\colon\ \operatorname{End} V \times \operatorname{End} V &\longrightarrow \operatorname{End} V,\ (x,\, y) \longmapsto \bigl(v \mapsto x(v) + y(v)\bigr) \\ \cdot\,\colon \mathbb{K} \times \operatorname{End} V &\longrightarrow \operatorname{End} V,\ (\lambda,\, x) \longmapsto \bigl(v \mapsto \lambda x(v)\bigr) \end{aligned}$$

として定義すると，組 $(\operatorname{End} V,\, +,\, \cdot\,)$ は体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間になる．以降では常に $\operatorname{End} V$ をこの方法でベクトル空間と見做す．

$\mathrm{End}\,V$ の上の Lie ブラケットを

$$[\,,\,]\colon \mathrm{End}\,V\times\mathrm{End}\,V \longrightarrow \mathrm{End}\,V,\ (x,\,y)\longmapsto xy-yx$$

と定義する．ただし右辺の xy などは写像の合成 $x\circ y$ の略記である．このとき組 $(\mathrm{End}\,V,\,+,\,\cdot\,,\,[\,,\,])$ が Lie 代数の公理を充たすことを確認しよう：

<u>**証明**</u> **(L-1)** $\forall v\in V$ を 1 つとる．定義に従ってとても丁寧に計算すると

$$\begin{aligned}
[\lambda_1x_1+\lambda_2x_2, y](v) &= \bigl((\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)y - y(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\bigr)(v)\\
&= (\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\bigl(y(v)\bigr) - y\bigl((\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)(v)\bigr)\\
&= (\lambda_1x_1)\bigl(y(v)\bigr)+(\lambda_2x_2)\bigl(y(v)\bigr) - y\bigl((\lambda_1x_1)(v)+(\lambda_2x_2)(v)\bigr)\\
&= \lambda_1x_1\bigl(y(v)\bigr)+\lambda_2x_2\bigl(y(v)\bigr)-\lambda_1y\bigl(x_1(v)\bigr)-\lambda_2y\bigl(x_2(v)\bigr)\\
&= \lambda_1\Bigl(x_1\bigl(y(v)\bigr)-y\bigl(x_1(v)\bigr)\Bigr)+\lambda_2\Bigl(x_2\bigl(y(v)\bigr)-y\bigl(x_2(v)\bigr)\Bigr)\\
&= \lambda_1[x_1,y](v)+\lambda_2[x_2,y](v)\\
&= \bigl(\lambda_1[x_1,y]+\lambda_2[x_2,y]\bigr)(v)
\end{aligned}$$

となる．ただし 4 つ目の等号で $y\in\mathrm{End}\,V$ が線型写像であることを使った．全く同様にして

$$[x,\mu_1y_1+\mu_2y_2](v)=\mu_1[x,y_1]+\mu_2[x,y_2]$$

を示すこともできる．

(L-2) 明らかに $[x,x]=xx-xx=o$ なのでよい．

(L-3) $[\,,\,]$ の双線型（**(L-1)**）から

$$\begin{aligned}
&[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]\\
&=[x,yz]-[x,zy]+[y,zx]-[y,xz]+[z,xy]-[z,yx]\\
&=xyz-yzx-xzy+zyx+yzx-zxy-yxz+xzy+zxy-xyz-zyx+yxz\\
&=o.
\end{aligned}$$

■

この Lie 代数 $(\mathrm{End}\,V,\,+,\,\cdot\,,\,[\,,\,])$ は**一般線形代数** (general linear algebra) と呼ばれ，記号として $\mathfrak{gl}(V)$ と書かれる．

$\dim V =: n<\infty$ のとき，$\mathrm{End}\,V$ は $n\times n$ $\mathbb{K}$-行列全体が成す $\mathbb{K}$ ベクトル空間 $\mathrm{M}(n,\,\mathbb{K})$ と同型である[b]．$\mathrm{M}(n,\,\mathbb{K})$ を Lie ブラケット $[x,y]:=xy-yx$ によって Lie 代数と見做す[c]ときは，この同型を意識して $\mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{K})$ と書く．さて，$\mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{K})$ の標準的な基底は所謂**行列単位**

$$e_{ij}:=\bigl[\delta_{i\mu}\delta_{j\nu}\bigr]_{1\le\mu,\,\nu\le n}=\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} & \\
\begin{pmatrix}0&\cdots&0&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&1&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&0&\cdots&0\end{pmatrix} & i
\end{array}$$

である．Einstein の規約を使って $e_{ij}e_{kl} = \left[\delta_{i\mu}\delta_{j\lambda}\delta_{k\lambda}\delta_{l\nu}\right]_{1\leq\mu,\,\nu\leq n} = \delta_{jk}\left[\delta_{i\mu}\delta_{l\nu}\right]_{1\leq\mu,\,\nu\leq n} = \delta_{jk}E_{il}$ と計算できるので，$\mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{K})$ の構造定数は

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{li}e_{kj}$$

となる[d]．

---

[a] **自己準同型** (endomorphism) の略である．

[b] V の基底 $e_1,\,\ldots,\,e_n$ を 1 つ固定する．このとき同型写像 $\varphi\colon V \longrightarrow \mathbb{K}^n,\ v^\mu e_\mu \longmapsto (v^\mu)_{1\leq\mu\leq n}$ を使って定義される線型写像 $\phi\colon \operatorname{End} V \longrightarrow \mathrm{M}(n,\,\mathbb{K}),\ f \longmapsto \varphi\circ f\circ\varphi^{-1}$ が所望の同型写像である．

[c] 右辺の xy は行列の積である．

[d] 少し紛らわしいかもしれないが，右辺において e_{il} は行列（行列の成分ではない！）で δ_{jk} はただの $\mathbb{K}$ の元である．以下では行列を指定する添字を $a,\,b,\,c,\,\ldots,\,i,\,j,\,k,\,\ldots$ で，行列の成分の添字を $\mu,\,\nu,\,\lambda,\,\ldots$ で書くことにする．つまり，例えば x_{ij} はある一つの行列を表す一方，$x_{ij\,\mu\nu}$ は行列 x_{ij} の第 $(\mu,\,\nu)$ 成分を表す．あまりにも紛らわしい場合には，行列の成分を表す際に $[x_{ij}]_{\mu\nu}$ のように角括弧で括ることにする．

1.1.1　線型 Lie 代数

定義 1.1.1: 部分 Lie 代数

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ が**部分 Lie 代数**であるとは，$\mathfrak{h}$ が Lie ブラケットについても閉じていることを言う．i.e. $\forall x,\,y \in \mathfrak{h},\ \forall\lambda \in \mathbb{K}$ に対して

$$x + y,\ \lambda x,\ [x, y] \in \mathfrak{h}$$

が成り立つこと．

この小節では以降，V を体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とする．

定義 1.1.2: 線型 Lie 代数

一般線形代数 $\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数のことを**線型 Lie 代数** (linear Lie algebra) と呼ぶ．

線型 Lie 代数として有名なものは**古典代数** (classical algebra) である．これは $A_l,\,B_l,\,C_l,\,D_l$ と呼ばれる 4 つの無限系列からなる．以下，$\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$ とする．

【例 1.1.3】線型 Lie 代数：A_l 型

$\dim V = l + 1$ とする．**特殊線形代数** $\mathfrak{sl}(V)$（または $\mathfrak{sl}(l+1,\,\mathbb{K})$）は次のように定義される：

$$\mathfrak{sl}(V) := \left\{\, x \in \mathfrak{gl}(V) \;\middle|\; \operatorname{Tr}(x) = 0 \,\right\}$$

$\mathfrak{sl}(V)$ が本当に線型 Lie 代数かどうか確認しよう．

証明 $\forall x,\, y \in \mathfrak{sl}(V)$ をとる．トレースの線形性および $\mathrm{Tr}(xy) = \mathrm{Tr}(yx)$ から

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(x+y) &= \mathrm{Tr}(x) + \mathrm{Tr}(y) = 0 + 0 = 0, \\
\mathrm{Tr}(\lambda x) &= \lambda\, \mathrm{Tr}(x) = \lambda 0 = 0, \\
\mathrm{Tr}([x,y]) &= \mathrm{Tr}(xy) - \mathrm{Tr}(yx) = \mathrm{Tr}(xy) - \mathrm{Tr}(xy) = 0
\end{aligned}
$$

が言えるので，$x+y,\, \lambda x,\, [x,y] \in \mathfrak{sl}(V)$ が言えた． ■

【例 1.1.2】で使った $\mathfrak{gl}(l+1,\, \mathbb{K})$ の標準的な基底で $\forall x \in \mathfrak{sl}(l+1,\, \mathbb{K})$ を $x = x^{ij} e_{ij}$ と展開すると，トレースレスであることから

$$
h_{ij} := \begin{cases} e_{ij} & i \neq j,\ 1 \le i,\, j \le l+1 \\ e_{ii} - e_{i+1,\, i+1} & 1 \le i = j \le l \end{cases}
$$

の $(l+1)^2 - 1$ 個の行列が $\mathfrak{sl}(l+1,\, \mathbb{K})$ の基底を成すことがわかる．従って $\dim \mathfrak{sl}(l+1,\, \mathbb{K}) = (l+1)^2 - 1$ である．

【例 1.1.4】線型 Lie 代数：B_l 型

$\dim V = 2l + 1$ とする．行列

$$
s := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1}_l \\ 0 & \mathbb{1}_l & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}(2l+1,\, \mathbb{K})
$$

により定まる V 上の非退化[a]かつ対称な双線型形式を f と書く[b]．このとき，**直交代数** (orthogonal algebra) $\mathfrak{o}(V)$（または $\mathfrak{o}(2l+1,\, \mathbb{K})$）が以下のように定義される：

$$
\mathfrak{o}(V) := \left\{\, x \in \mathfrak{gl}(V) \;\middle|\; f\bigl(x(v),\, w\bigr) = -f\bigl(v,\, x(w)\bigr),\ \forall v,\, w \in V \,\right\}
$$

$\mathfrak{o}(V)$ が本当に線型 Lie 代数かどうか確認しよう．

証明 $\forall x,\, y \in \mathfrak{o}(V)$ をとる．f の双線型性から $\forall v,\, w \in V$ に対して

$$
\begin{aligned}
f\bigl((x+y)(v),\, w\bigr) &= f\bigl(x(v),\, w\bigr) + f\bigl(y(v),\, w\bigr) \\
&= -f\bigl(v,\, x(w)\bigr) - f\bigl(v,\, y(w)\bigr) \\
&= -f\bigl(v,\, x(w) + y(w)\bigr) \\
&= -f\bigl(v,\, (x+y)(w)\bigr) \\
f\bigl((\lambda x)(v),\, w\bigr) &= \lambda f\bigl(x(v),\, w\bigr) \\
&= -\lambda f\bigl(v,\, x(w)\bigr) \\
&= -f\bigl(v,\, \lambda x(w)\bigr) \\
&= -f\bigl(v,\, (\lambda x)(w)\bigr) \\
f\bigl([x,y](v),\, w\bigr) &= f\bigl(x(y(v)),\, w\bigr) - f\bigl(y(x(v)),\, w\bigr) \\
&= -f\bigl(y(v),\, x(w)\bigr) + f\bigl(x(v),\, y(w)\bigr) \\
&= f\bigl(v,\, y(x(w))\bigr) - f\bigl(v,\, x(y(w))\bigr) \\
&= -f\bigl(v,\, [x,y](w)\bigr)
\end{aligned}
$$

が言えるので，$x+y,\ \lambda x,\ [x,y]\in\mathfrak{o}(V)$ が言えた． ■

[a]「$v\in V$ が $\forall w\in V$ に対して $f(v,\,w)=0$ を充たす $\implies$ $v=o$」かつ「$w\in V$ が $\forall v\in V$ に対して $f(v,\,w)=0$ を充たす $\implies$ $w=o$」

[b] $f\colon V\times V\longrightarrow\mathbb{K},\ (v,\,w)\longmapsto v^{\mathsf{T}}sw$ のこと．

【例 1.1.5】線型 Lie 代数：C_l 型

$\dim V=2l$ とする．行列

$$s:=\begin{bmatrix}0 & \mathbb{1}_l\\ -\mathbb{1}_l & 0\end{bmatrix}\in\mathrm{M}(2l,\,\mathbb{K})$$

により定まる V 上の非退化かつ歪対称な双線型形式を f と書く．このとき，**シンプレクティック代数** (symplectic algebra) $\mathfrak{sp}(V)$（または $\mathfrak{sp}(2l,\,\mathbb{K})$）が以下のように定義される：

$$\mathfrak{sp}(V):=\left\{\,x\in\mathfrak{gl}(V)\;\middle|\;f\bigl(x(v),\,w\bigr)=-f\bigl(v,\,x(w)\bigr),\ \forall v,\,w\in V\,\right\}$$

【例 1.1.4】と全く同様にして $\mathfrak{sp}(V)$ が線型 Lie 代数であることを証明できる．

【例 1.1.6】線型 Lie 代数：D_l 型

$\dim V=2l$ とし，行列

$$s:=\begin{bmatrix}0 & \mathbb{1}_l\\ \mathbb{1}_l & 0\end{bmatrix}\in\mathrm{M}(2l,\,\mathbb{K})$$

により定まる V 上の非退化かつ対称な双線型形式を f と書く．このとき，【例 1.1.4】と全く同様に**直交代数** (orthogonal algebra) $\mathfrak{o}(V)$（または $\mathfrak{o}(2l,\,\mathbb{K})$）が定義される．

さらに，古典代数以外の線型 Lie 代数をいくつか導入する．

【例 1.1.7】線型 Lie 代数：$\mathfrak{t}$

$n\times n$ 上三角行列全体の集合を $\mathfrak{t}(n,\,\mathbb{K})\subset\mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{K})$ と書く[a]：

$$\mathfrak{t}(n,\,\mathbb{K}):=\left\{\,\bigl[a_{\mu\nu}\bigr]_{1\le\mu,\,\nu\le n}\in\mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{K})\;\middle|\;\mu>\nu\implies a_{\mu\nu}=0\right\}$$

$\mathfrak{t}(n,\,\mathbb{K})$ が線型 Lie 代数であることを確認しよう．

<u>証明</u> $\forall x=\bigl[x_{\mu\nu}\bigr]_{1\le\mu,\,\nu\le n},\ y=\bigl[y_{\mu\nu}\bigr]_{1\le\mu,\,\nu\le n}\in\mathfrak{t}(n,\,\mathbb{K})$ をとる．このとき $1\le\nu<\mu\le n$ なる全ての $(\mu,\,\nu)$ に対して

$$\begin{aligned}
[x+y]_{\mu\nu}&=x_{\mu\nu}+y_{\mu\nu}=0+0=0\\
[\lambda x]_{\mu\nu}&=\lambda x_{\mu\nu}=\lambda 0=0\\
[xy]_{\mu\nu}&=\sum_{\lambda=1}^{n}x_{\mu\lambda}y_{\lambda\nu}=\sum_{\lambda=1}^{\nu}0y_{\lambda\nu}+\sum_{\lambda=\nu+1}^{n}x_{\mu\lambda}0=0
\end{aligned}$$

が成り立つので $x+y,\ \lambda x,\ [x,y] \in \mathfrak{t}(n,\ \mathbb{K})$ が言えた． ■

[a] $\mathfrak{t}$ の LaTeX コマンドは \mathfrak{t}

【例 1.1.8】線型 Lie 代数：$\mathfrak{n}$

$n \times n$ 上三角行列のうち対角成分が全て 0 であるもの全体がなす集合を $\mathfrak{n}(n,\ \mathbb{K}) \subset \mathfrak{gl}(n,\ \mathbb{K})$ と書く[a]：

$$\mathfrak{n}(n,\ \mathbb{K}) := \left\{ \left[a_{\mu\nu} \right]_{1 \le \mu,\, \nu \le n} \in \mathfrak{gl}(n,\ \mathbb{K}) \;\middle|\; \mu \ge \nu \quad \Longrightarrow \quad a_{\mu\nu} = 0 \right\}$$

$\mathfrak{n}(n,\ \mathbb{K})$ が線型 Lie 代数であることは【例 1.1.7】と全く同様に証明できる．

[a] $\mathfrak{n}$ の LaTeX コマンドは \mathfrak{n}

【例 1.1.9】線型 Lie 代数：$\mathfrak{d}$

$n \times n$ 対角行列全体がなす集合を $\mathfrak{d}(n,\ \mathbb{K}) \subset \mathfrak{gl}(n,\ \mathbb{K})$ と書く[a]：

$$\mathfrak{d}(n,\ \mathbb{K}) := \left\{ \left[a_{\mu\nu} \right]_{1 \le \mu,\, \nu \le n} \in \mathfrak{gl}(n,\ \mathbb{K}) \;\middle|\; \mu \ne \nu \quad \Longrightarrow \quad a_{\mu\nu} = 0 \right\}$$

$\mathfrak{d}(n,\ \mathbb{K})$ は明らかに線型 Lie 代数である．

[a] $\mathfrak{d}$ の LaTeX コマンドは \mathfrak{d}

公理 1.1.2: 代数

体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 $\mathfrak{U}$[a]の上に二項演算

$$*\colon \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{U},\ (x,\ y) \longmapsto x * y$$

が定義されていて，かつ以下の条件を充たすとき，$\mathfrak{U}$ は **$\mathbb{K}$-代数** ($\mathbb{K}$-algebra) と呼ばれる[b]：

(A-1) $*$ は双線型写像である．i.e. $\forall x,\ x_i,\ y,\ y_i \in \mathfrak{g},\ \forall \lambda_i,\ \mu_i \in \mathbb{K}\ (i = 1,\ 2)$ に対して

$$\begin{aligned}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) * y &= \lambda_1 x_1 * y + \lambda_2 x_2 * y,\\ x * (\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) &= \mu_1 x * y_1 + \mu_2 x * y_2\end{aligned}$$

が成り立つ．

[a] \mathfrak{U}

[b] 結合律は要請しない！ $*$ に関する結合律を公理に含める場合は**結合代数** (associative algebra) と言う．文献によっては代数と言って結合代数のことを指す場合があるので注意．

Lie 代数は $\mathbb{K}$-代数である．

定義 1.1.3: 代数の微分

$\mathbb{K}$-代数 $\mathfrak{U}$ の**微分** (derivation) とは，線型写像

$$d\colon \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{U}$$

であって Leibniz 則

$$d(x*y) = x*d(y) + d(x)*y$$

を充たすもののこと．

全ての $\mathfrak{U}$ の微分がなす集合を $\operatorname{Der}\mathfrak{U}$ と書く．

命題 1.1.1: 代数の微分がなす Lie 代数

$\operatorname{Der}\mathfrak{U}$ の上の加法，スカラー乗法，Lie ブラケットをそれぞれ

$$\begin{aligned} +\colon \operatorname{Der}\mathfrak{U}\times\operatorname{Der}\mathfrak{U} &\longrightarrow \operatorname{Der}\mathfrak{U},\ (d,\, e) \longmapsto \bigl(x \mapsto d(x)+e(x)\bigr) \\ \cdot\,\colon \mathbb{K}\times\operatorname{Der}\mathfrak{U} &\longrightarrow \operatorname{Der}\mathfrak{U},\ (\lambda,\, d) \longmapsto \bigl(x \mapsto \lambda d(x)\bigr) \\ [\ ,\,]\colon \operatorname{Der}\mathfrak{U}\times\operatorname{Der}\mathfrak{U} &\longrightarrow \operatorname{Der}\mathfrak{U},\ (d,\, e) \longmapsto \bigl(x \mapsto d(e(x)) - e(d(x))\bigr) \end{aligned}$$

と定義すると，組 $(\operatorname{Der}\mathfrak{U},\, +,\, \cdot\,,\, [\ ,\,])$ は $\mathfrak{gl}(\mathfrak{U})$ の部分 Lie 代数である．Lie 代数としての $\operatorname{Der}\mathfrak{U}$ のことを**微分代数** (derivation algebra) と呼ぶ[a]．

[a] https://mathworld.wolfram.com/DerivationAlgebra.html

証明 $\forall x,\, y \in \mathfrak{U}$ をとる．代数の微分は線型写像なので，$*$ の双線型性および微分の Leibniz 則から

$$\begin{aligned} (d+e)(x*y) &= x*d(y)+d(x)*y+x*e(y)+e(x)*y = x*(d+e)(y)+(d+e)(x)*y \\ (\lambda d)(x*y) &= \lambda\bigl(d(x)*y+x*d(y)\bigr) = \bigl(\lambda d(x)\bigr)*y + x*\bigl(\lambda d(y)\bigr) = (\lambda d)(x)*y + x*(\lambda d)(y) \end{aligned}$$

が成り立つ．i.e. $d+e,\, \lambda d \in \operatorname{Der}\mathfrak{U}$ が言えた．Lie ブラケットに関しては，

$$d\bigl(e(x*y)\bigr) = d\bigl(x*e(y)+e(x)*y\bigr) = x*d\bigl(e(y)\bigr) + d(x)*e(y) + e(x)*d(y) + d\bigl(e(x)\bigr)*y$$

に注意すると

$$\begin{aligned} [d,e](x*y) &= x*d\bigl(e(y)\bigr) + \cancel{d(x)*e(y)+e(x)*d(y)} + d\bigl(e(x)\bigr)*y \\ &\quad - x*e\bigl(d(y)\bigr) \cancel{-e(x)*d(y)-d(x)*e(y)} - e\bigl(d(x)\bigr)*y \\ &= x*[d,e](y) + [d,e](x)*y \end{aligned}$$

が成り立つ．i.e. $[d,e] \in \operatorname{Der}\mathfrak{U}$ が言えた． ■

【例 1.1.10】内部微分

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は $\mathbb{K}$-代数なので，その微分代数 $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$ を考えることができる．

ここで $x \in \mathfrak{g}$ を任意に取ろう．このとき，写像

$$\mathrm{ad}\, x \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g},\ z \longmapsto [x, z]$$

は線型写像で，Jacobi 恒等式から

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}\, x([z, w]) &= [x, [z, w]] \\ &= [[x, z], w] + [z, [x, w]] \\ &= [\mathrm{ad}\, x(z), w] + [z, \mathrm{ad}\, x(w)] \end{aligned}$$

を充たすことがわかる．これはまさに Leibniz 則なので，$\mathrm{ad}\, x \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ である．$\mathrm{ad}\, x$ の形で書ける $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ の元のことを**内部微分** (inner derivation) と呼ぶ[a]．

[a] $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ の元が内部微分でないとき，**外部微分** (outer derivation) であると言う．

1.1.2　イデアル・商代数

定義 1.1.4: Lie 代数のイデアル

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の部分集合 $\mathfrak{i}$ [a]が $\mathfrak{g}$ の**イデアル** (ideal) であるとは，以下の 2 条件を充たすことを言う：

(LI-1)　$\mathfrak{i}$ は $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間である．

(LI-2)　$\forall x \in \mathfrak{g}, \forall y \in \mathfrak{i}$ に対して $[x, y] \in \mathfrak{i}$

[a] `\mathfrak{i}`

【例 1.1.11】自明なイデアル

$\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $[x, o] = [x, x + (-x)] = [x, x] - [x, x] = o$ が成り立つので，$\{o\}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．また，Lie ブラケットについて閉じているので $\mathfrak{g}$ 自身もイデアルである．この 2 つを**自明なイデアル** (trivial ideal) と呼ぶ．

【例 1.1.12】中心

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の**中心** (center) は

$$Z(\mathfrak{g}) := \left\{\, z \in \mathfrak{g} \,\middle|\, \forall x \in \mathfrak{g},\ [x, z] = o \,\right\}$$

と定義される．$o \in Z(\mathfrak{g})$ であることから $Z(\mathfrak{g})$ はイデアルである．$\mathfrak{g}$ が Lie ブラケットに関して可換である必要十分条件は $Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ が成り立つことである[a]．

[a] Lie 代数の公理 **(L'-1)** より，$[x, y] = [y, x]$ ならば $[x, y] = -[x, y] \iff [x, y] = o$ である．

補題 1.1.1: イデアル同士の演算

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とそのイデアル $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ を与える．このとき以下の 3 つが成り立つ：

(1) 集合 $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{j}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．

(2) 集合 $\mathfrak{i} + \mathfrak{j} := \left\{ x + y \;\middle|\; x \in \mathfrak{i},\, y \in \mathfrak{j} \right\}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．

(3) 集合 $[\mathfrak{i}, \mathfrak{j}] := \left\{ \sum_{i=1}^{n} [x_i, y_i] \;\middle|\; x_i \in \mathfrak{i},\, y_i \in \mathfrak{j};\, n < \infty \right\}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．

<u>証明</u>　(1) ほぼ自明．

(2) $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$ の勝手な元 $z + w$ と $\forall x \in \mathfrak{g}$ をとる．Lie ブラケットの双線型性から $[x, z + w] = [x, z] + [x, w]$ が言えるが，$\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ がイデアルであることにより $[x, z] \in \mathfrak{i}$, $[x, w] \in \mathfrak{j}$ なので右辺は $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$ に属する．

(3) $\forall x \in \mathfrak{g}$ を 1 つとる．Lie ブラケットの双線型性から，このとき $\forall z \in \mathfrak{i}$, $\forall w \in \mathfrak{j}$ に対して $[x, [z, w]] \in [\mathfrak{i}, \mathfrak{j}]$ が成り立つことを示せば良い．実際，Lie 代数の公理 **(L-2)**, **(L-3)** より

$$[x, [z, w]] = [[w, x], z] + [[x, z], w] = [z, [x, w]] + [[x, z], w]$$

が言えるが，$\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ がイデアルであることにより $[x, w] \in \mathfrak{j}$, $[x, z] \in \mathfrak{i}$ なので右辺は $[\mathfrak{i}, \mathfrak{j}]$ に属する．

■

【例 1.1.13】導来 Lie 代数

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の**導来代数** (derived algebra) とは，$\mathfrak{g}$ のイデアル $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ のこと．

定義 1.1.5: 単純 Lie 代数

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が**単純** (simple) であるとは，$\mathfrak{g}$ が自明なイデアル以外のイデアルを持たず，かつ $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \{o\}$ を充たすことを言う．

【例 1.1.14】単純 Lie 代数：$\mathfrak{sl}(2)$

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ のイデアル $\mathfrak{i}$ が与えられたとき，商群のときと同じ要領で商代数を構成できる．このことを復習しよう：

$\mathfrak{g}$ 上の同値関係を

$$\sim := \left\{ (x,\, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \;\middle|\; x - y \in \mathfrak{i} \right\}$$

と定義する[*4]．$\sim$ による $x \in \mathfrak{g}$ の同値類のことを $x + \mathfrak{i}$ と書き，商集合 $\mathfrak{g}/\sim$ のことを $\boldsymbol{\mathfrak{g}/\mathfrak{i}}$ と書く．全射 $p\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ を**標準的射影** (canonical projection) と呼ぶ．

*4 **(LI-1)** より $\mathfrak{i}$ は部分ベクトル空間なので反射律と対称律が言える．$x \sim y$ かつ $y \sim z$ ならば $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathfrak{i}$ なので $x \sim z$ であり，推移律が成り立つことがわかる．

定義 1.1.6: 商代数

集合 $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ の上には次のようにして well-defined な加法，スカラー乗法，Lie ブラケットが定義できる：

$$\begin{aligned} +\colon \mathfrak{g}/\mathfrak{i}\times\mathfrak{g}/\mathfrak{i} &\longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i},\ (x+\mathfrak{i},\ y+\mathfrak{i}) \longmapsto (x+y)+\mathfrak{i} \\ \cdot\colon \mathbb{K}\times\mathfrak{g}/\mathfrak{i} &\longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i},\ (\lambda,\ x+\mathfrak{i}) \longmapsto (\lambda x)+\mathfrak{i} \\ [\ ,]\colon \mathfrak{g}/\mathfrak{i}\times\mathfrak{g}/\mathfrak{i} &\longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i},\ (x+\mathfrak{i},\ y+\mathfrak{i}) \longmapsto [x,y]+\mathfrak{i} \end{aligned}$$

Lie 代数 $(\mathfrak{g}/\mathfrak{i},\ +,\ \cdot\ ,\ [\ ,])$ のことを**商代数** (quotient algebra) と呼ぶ．

<u>**証明**</u> well-definedness を示す．$x+\mathfrak{i}=x'+\mathfrak{i},\ y+\mathfrak{i}=y'+\mathfrak{i}$ ならば $x'-x,\ y'-y\in\mathfrak{i}$ であるから

$$\begin{aligned} x'+y' &= (x+y)+(x'-x)+(y'-y)\in(x+y)+\mathfrak{i}, \\ \lambda x' &= \lambda x+\lambda(x'-x)\in(\lambda x)+\mathfrak{i} \end{aligned}$$

が成り立つ．また，$\mathfrak{i}$ がイデアルであることにより

$$\begin{aligned} [x',y'] &= [x+(x'-x), y+(y'-y)] \\ &= [x,y]+[x,y'-y]-[y,x'-x]+[x'-x,y'-y] \\ &\in [x,y]+\mathfrak{i} \end{aligned}$$

が言える． ■

! 定義 1.1.6 による商代数の構成によって，標準的射影は自動的に Lie 代数の準同型写像になる：

$$\begin{aligned} p(x+y) &= (x+y)+\mathfrak{i} =: (x+\mathfrak{i})+(y+\mathfrak{i}) = p(x)+p(y), \\ p(\lambda x) &= (\lambda x)+\mathfrak{i} =: \lambda(x+\mathfrak{i}) = \lambda p(x), \\ p([x,y]) &= [x,y]+\mathfrak{i} =: [(x+\mathfrak{i}),(y+\mathfrak{i})] = [p(x),p(y)]. \end{aligned}$$

定義 1.1.7: 正規化代数・中心化代数

- Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とその部分 Lie 代数（もしくは部分ベクトル空間）$\mathfrak{h}$ を与える．このとき $\mathfrak{h}$ の**正規化代数** (normalizer) を

$$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) := \left\{\, x\in\mathfrak{g} \;\middle|\; \forall h\in\mathfrak{h},\ [x,h]\in\mathfrak{h} \,\right\}$$

  で定義する[a]．特に $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}$ のとき，$\mathfrak{h}$ は **self-normalizing** であると言う．
- Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とその<u>部分集合</u> X を与える．このとき X の**中心化代数** (centralizer) を

$$C_{\mathfrak{g}}(X) := \left\{\, x\in\mathfrak{g} \;\middle|\; \forall z\in X,\ [x,z]=o \,\right\}$$

  と定義する[b]．

[a] $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ は $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数である：$\forall x,\, y\in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ に対して，Jacobi 恒等式から $\forall z\in\mathfrak{h},\ [[x,y],z]=[x,[y,z]]-[y,[x,z]]\in\mathfrak{h}$ が言える．さらに，もし $\mathfrak{h}$ が部分 Lie 代数ならば，定義から $\mathfrak{h}$ を $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ の部分ベクトル空間と見做したときに $\mathfrak{h}$ は自動的にイデアルになる．特に，$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ は $\mathfrak{h}\subset N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ をイデアルとして持つ最大の部分 Lie 代数である．

[b] $C_{\mathfrak{g}}(X)$ が $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数であることは，$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ のときと全く同様にして示される．

【例 1.1.12】を思い出すと，$Z(\mathfrak{g})=C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ である．

1.1.3 準同型・表現

定義 1.1.8: Lie 代数の準同型

2 つの Lie 代数 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ を与える．写像 $f\colon \mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ が **Lie 代数の準同型** (homomorphism) であるとは，f が和，スカラー乗法，Lie ブラケットの全てを保存することを言う．i.e. $\forall x,\ y \in \mathfrak{g},\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ に対して

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y), \\ f(\lambda x) &= \lambda f(x), \\ f([x, y]) &= [f(x), f(y)] \end{aligned}$$

が成り立つこと．

全単射な Lie 代数の準同型のことを Lie 代数の**同型** (isomorphism) と呼ぶ．

Lie 代数の準同型 $f\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ の**核** (kernel), **像** (image) をそれぞれ

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &:= \left\{ x \in \mathfrak{g} \;\middle|\; f(x) = o \right\}, \\ \operatorname{Im} f &:= \left\{ f(x) \in \mathfrak{h} \;\middle|\; x \in \mathfrak{g} \right\} \end{aligned}$$

と定義すると $\operatorname{Ker} f$ はイデアルであり[*5]，$\operatorname{Im} f$ は部分 Lie 代数である[*6]．

[*5] $\forall x,\ y \in \operatorname{Ker} f$ に対して $f(x+y) = f(x) + f(y) = o + o = o$，$f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda o = o$ なので部分ベクトル空間，かつ $\forall z \in \mathfrak{g}$ に対して $f([z, x]) = [f(z), f(x)] = [f(z), o] = o$.

[*6] $\forall f(x),\ f(y) \in \operatorname{Im} f$ に対して $f(x) + f(y) = f(x+y)$，$\lambda f(x) = f(\lambda x)$; $[f(x), f(y)] = f([x, y])$

命題 1.1.2: 準同型定理

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ およびそのイデアル $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ を与える．このとき，任意のLie 代数の準同型 $f\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ に対して[a]以下が成り立つ：

(1) $\mathfrak{g}/\operatorname{Ker} f \cong \operatorname{Im} f$．また，$\mathfrak{i} \subset \operatorname{Ker} f$ が成り立つならば，以下の図式を可換にする Lie 代数の準同型 $\overline{f}\colon \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \longrightarrow \mathfrak{h}$ が一意的に存在する：

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & \forall\mathfrak{h} \\ & \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

図 1.1: 商代数の普遍性．p は標準的射影 $p\colon x \longmapsto x+\mathfrak{i}$ を表す．

(2) $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{j}$ が成り立つとする．このとき $\mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ は $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ のイデアルであり，自然な同型 $(\mathfrak{g}/\mathfrak{i})/(\mathfrak{j}/\mathfrak{i}) \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{j}$ が成り立つ．

(3) 自然な同型 $(\mathfrak{i}+\mathfrak{j})/\mathfrak{j} \cong \mathfrak{i}/(\mathfrak{i}\cap\mathfrak{j})$ が成り立つ．

[a] わざわざこのような記述をしたのは，(1) が商代数の**普遍性** (universal property) を意味していることを明示するためである．

<u>証明</u>　(1)　まず，$\mathfrak{i} \subset \operatorname{Ker} f$ ならば写像 $\overline{f}\colon \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \longrightarrow \operatorname{Im} f,\ x+\mathfrak{i} \longmapsto f(x)$ が well-defined な Lie 代数の準同型であることを示す．実際 $x+\mathfrak{i} = x'+\mathfrak{i}$ ならば $x'-x \in \mathfrak{i} \subset \operatorname{Ker} f$ であり，$\overline{f}(x'+\mathfrak{i}) = f(x') = f\bigl(x+(x'-x)\bigr) = f(x)+f(x'-x) = f(x) = \overline{f}(x+\mathfrak{i})$ が言えた．$\overline{f}$ が Lie 代数の準同型であることは f が Lie 代数の準同型であることから明らか．定義から $\overline{f}\circ p = f$ である．

次に $\overline{f}$ の一意性を示す．別の $\phi\colon \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \longrightarrow \mathfrak{h}$ が存在して $\phi\circ p = f$ が成り立つとする．このとき $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $\phi(x+\iota) = f(x)$ が成り立つので $\phi = \overline{f}$ である．

特に $\mathfrak{i} = \operatorname{Ker} f$ ならば，$\operatorname{Ker}\overline{f} = \{\operatorname{Ker} f\} = \{o\}$ なので $\overline{f}$ は単射であり $\mathfrak{g}/\operatorname{Ker} f \cong \operatorname{Im} f$ が言えた．

(2)　$\mathfrak{i} \subset \mathfrak{j}$ のとき，イデアルの定義より $\mathfrak{i}$ は $\mathfrak{j}$ のイデアルでもある．よって商代数 $\mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ は well-defined．明らかに $\mathfrak{j}/\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ なので $\mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ は $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ の部分 Lie 代数だと分かった．ここで $\forall x+\mathfrak{i} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{i},\ \forall y+\mathfrak{i} \in \mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ をとると，$\mathfrak{j}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルであることから $[x+\mathfrak{i}, y+\mathfrak{i}] = [x,y]+\mathfrak{i} \in \mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ が従う[*7]．以上の議論から $\mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ が $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ のイデアルであることが示された．

さて，Lie 代数の全射準同型 $f\colon \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{j},\ x+\mathfrak{i} \longmapsto x+\mathfrak{j}$ は仮定より well-defined で[*8]，かつ $\operatorname{Ker} f = \mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ である．従って (1) より $\mathfrak{g}/\mathfrak{j} \cong (\mathfrak{g}/\mathfrak{i})/(\mathfrak{j}/\mathfrak{i})$ が言える．

(3) Lie 代数の全射準同型 $f\colon \mathfrak{i} \longrightarrow (\mathfrak{i}+\mathfrak{j})/\mathfrak{j},\ x \longmapsto x+\mathfrak{j}$ に対して $\operatorname{Ker} f = \mathfrak{i}\cap\mathfrak{j}$ である．従って (1) より $(\mathfrak{i}+\mathfrak{j})/\mathfrak{j} \cong \mathfrak{i}/(\mathfrak{i}\cap\mathfrak{j})$ が言える．

■

[*7] $[x,y] \in \mathfrak{j}$ なので．

[*8] $x+\mathfrak{i} = x'+\mathfrak{i} \implies x'-x \in \mathfrak{i} \subset \mathfrak{j} \implies f(x'+\mathfrak{i}) = (x+(x'-x))+\mathfrak{j} = x+\mathfrak{j} = f(x+\mathfrak{i})$

定義 1.1.9: Lie 代数の表現

V を $\mathbb{K}$-ベクトル空間とする．Lie 代数の準同型

$$\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

と V の組 $(\phi,\, V)$ のことを **Lie 代数の表現** (representation) と呼ぶ[a]．

[a] 「代数の表現」と言われたとき，代数**の表現**なのか**結合代数の表現**なのか **Lie 代数の表現**なのか文脈で判断しなくてはならないかもしれない．

【例 1.1.15】随伴表現

【例 1.1.10】で定義した $\mathrm{ad}(x)$ は，写像

$$\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Der}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}),\ x \longmapsto \bigl(z \mapsto [x, z]\bigr)$$

だと思うことができる．ad は明らかに線型写像で，かつ $\forall z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned}
[\mathrm{ad}\, x, \mathrm{ad}\, y](z) &= \mathrm{ad}\, x([y, z]) - \mathrm{ad}\, y([x, z]) \\
&= [x, [y, z]] - [y, [x, z]] \\
&= [x, [y, z]] + [y, [z, x]] \\
&= [[x, y], z] \\
&= \mathrm{ad}\, [x, y](z)
\end{aligned}$$

が成り立つので Lie 代数の準同型である．故に組 $(\mathrm{ad},\, \mathfrak{g})$ は Lie 代数の表現である．

$$x \in \mathrm{Ker}\, \mathrm{ad} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall y \in \mathfrak{g},\ [x, y] = o$$

より，【例 1.1.12】を思い出すと $\mathrm{Ker}\, \mathrm{ad} = Z(\mathfrak{g})$ と分かる．特に単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して $Z(\mathfrak{g}) = \{o\}$ なので ad は単射準同型である．i.e. 任意の単純 Lie 代数は線形 Lie 代数と同型である[a]．

[a] 単射準同型は包含準同型だと見做せる．

1.1.4 自己同型

定義 1.1.10: 自己同型

1.1.5 可解 Lie 代数

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ を与える．$D\mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ とおくと，【例 1.1.13】より $D\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．

定義 1.1.11: 可解 Lie 代数

導来列 (derived series) とは，イデアルの減少列

$$\mathfrak{g} = D^0\mathfrak{g} \supset D^1\mathfrak{g} \supset D^2\mathfrak{g} \supset \cdots$$

のこと．ある $n > 0$ に対して導来列が初めてゼロになって止まるとき，i.e. $D^n\mathfrak{g} = \{o\}$ が成り立つとき，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は**可解** (solvable) であると言われる．

命題 1.1.3:

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ および Lie 代数の準同型 $f\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ を与える．このとき以下が成り立つ：

(1) $\mathfrak{g}$ が可解ならば，$\mathfrak{g}$ の任意の部分 Lie 代数 $\mathfrak{a}$ は可解である．また，$\mathrm{Im}\, f$ も可解である．
(2) $\mathfrak{g}$ が可解ならば，$\mathfrak{g}$ の任意のイデアル $\mathfrak{a}$ について商代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ も可解である．
(3) $\mathfrak{g}$ のイデアル $\mathfrak{i}$ と商代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ がどちらも可解ならば，$\mathfrak{g}$ 自身も可解である．
(4) $\mathfrak{g}$ のイデアル $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ が可解ならば，イデアル $\mathfrak{i}+\mathfrak{j}$ も可解である．

証明 (1) 仮定より $\mathfrak{g}$ が可解なので，ある $n > 0$ に対して $D^n\mathfrak{g} = \{o\}$ となる．$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ ならば $D\mathfrak{a} \subset D\mathfrak{g}$ であるから，帰納的に $D^i\mathfrak{a} \subset D^i\mathfrak{g}$ $(i = 0, 1, \ldots)$ が分かる．よって $D^n\mathfrak{a} = \{o\}$ である．また，f が Lie 代数の準同型であることから $f(D\mathfrak{g}) = [f(\mathfrak{g}), f(\mathfrak{g})] = [\mathrm{Im}\, f, \mathrm{Im}\, f] = D(\mathrm{Im}\, f)$ であり，帰納的に $f(D^i\mathfrak{g}) = D^i(\mathrm{Im}\, f)$ が分かる．故に $D^n(\mathrm{Im}\, f) = f(\{o\}) = \{o\}$ である．

(2) 標準的射影 $p\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a},\ x \longmapsto x + \mathfrak{a}$ に対して (1) を適用すれば良い．

(3) 仮定より $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ が可解なので，ある $n > 0$ に対して $D^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{i}) = \{o\}$ と成る．標準的射影 $p\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ について，(1) の証明から $\{o\} = D^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{i}) = D^n(\mathrm{Im}\, p) = p(D^n\mathfrak{g})$ がわかる．従って $D^n\mathfrak{g} \subset \mathfrak{i}$ である．仮定より $\mathfrak{i}$ も可解だからある $m > 0$ に対して $D^m\mathfrak{i} = \{o\}$ となる．故に帰納的に $D^{n+m}\mathfrak{g} \subset \mathfrak{i}^m = \{o\}$ が示される．

(4) 準同型定理-(3) より

$$(\mathfrak{i}+\mathfrak{j})/\mathfrak{j} \cong \mathfrak{i}/(\mathfrak{i}\cap\mathfrak{j})$$

が成り立つ．仮定より $\mathfrak{i}$ は可解なので，(2) より右辺も可解．よって (3) より $\mathfrak{i}+\mathfrak{j}$ も可解である．

■

$\mathfrak{g}$ を有限次元Lie 代数とし，$\mathfrak{r}$ [*9]を $\mathfrak{g}$ の極大[*10]可解イデアルとしよう[*11]

補題 1.1.2:

$\mathfrak{r}$ は $\mathfrak{g}$ の全ての可解イデアルを含む．i.e. 最大 (maximal) の可解イデアルである．

証明 任意の $\mathfrak{g}$ の可解イデアル $\mathfrak{i}$ をとる．準同型定理-(3) より

$$(\mathfrak{i}+\mathfrak{r})/\mathfrak{i} \cong \mathfrak{r}/(\mathfrak{i}\cap\mathfrak{r})$$

[*9] \mathfrak{r}
[*10] $\mathfrak{r} \subsetneq \mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$ を充たす $\mathfrak{g}$ の可解イデアル $\mathfrak{i}$ が $\mathfrak{g}$ 以外に存在しない．
[*11] $\mathfrak{r}$ は少なくとも 1 つ存在する．$\mathfrak{g}$ が有限次元なので，$\mathfrak{g}$ の可解イデアルのうち次元が最大のものを取れば良い．

が成り立つ．$\mathfrak{r}$ は可解なので命題 1.1.3-(1) より $\mathfrak{r}/(\mathfrak{i}\cap\mathfrak{r})$ は可解であり，従って $(\mathfrak{i}+\mathfrak{r})/\mathfrak{i}$ も可解である．$\mathfrak{i}$ も可解なので命題 1.1.3-(3) より $\mathfrak{i}+\mathfrak{r}$ も可解である．然るに，$\mathfrak{r}$ の極大性により $\mathfrak{i}+\mathfrak{r}=\mathfrak{r}$ であるから $\mathfrak{i}\subset\mathfrak{r}$ が言えた． ■

定義 1.1.12: 根基

$\mathfrak{g}$ の最大可解イデアル[a] (maximal solvable ideal) $\mathfrak{r}$ のことを $\mathfrak{g}$ の**根基** (radical) と呼び，$\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ と書く．

[a] 補題 1.1.2 によりこれは一意的に存在する．

定義 1.1.13: 半単純 Lie 代数

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が**半単純** (semisimple) であるとは，$\operatorname{rad}\mathfrak{g}=\{o\}$ であることを言う．

1.1.6 冪零 Lie 代数

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して

$$C^0\mathfrak{g}\coloneqq\mathfrak{g},$$
$$C^n\mathfrak{g}\coloneqq\left[\mathfrak{g},C^{n-1}\mathfrak{g}\right]$$

のように帰納的にイデアルの減少列

$$\mathfrak{g}=C^0\mathfrak{g}\supset C^1\mathfrak{g}\supset C^2\mathfrak{g}\supset\cdots \tag{1.1.1}$$

を定義する．

定義 1.1.14: 冪零 Lie 代数

イデアルの減少列 (1.1.1) がある $n>0$ に対して初めてゼロになって止まるとき，i.e. $C^n\mathfrak{g}=\{o\}$ が成り立つとき，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は**冪零** (nilpotent) であると言われる．

! 線型写像 $x\colon\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}$ の冪零性との混同を避けるため，定義 1.1.14 の意味で冪零と言う場合は冪零 Lie 代数と言うことにする．

命題 1.1.4:

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ および Lie 代数の準同型 $f\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ を与える．このとき以下が成り立つ：

(1) $\mathfrak{g}$ が冪零 Lie 代数ならば，$\mathfrak{g}$ の任意の部分 Lie 代数 $\mathfrak{a}$ は冪零 Lie 代数である．また，$\mathrm{Im}\, f$ も冪零 Lie 代数である．

(2) $\mathfrak{g}$ が冪零 Lie 代数ならば，$\mathfrak{g}$ の任意のイデアル $\mathfrak{a}$ について商代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ も冪零 Lie 代数である．

(3) $\mathfrak{g}$ の中心による商代数 $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ が冪零 Lie 代数ならば $\mathfrak{g}$ は冪零 Lie 代数である．

(4) $\mathfrak{g}$ が冪零 Lie 代数かつ $\mathfrak{g} \neq \{o\}$ ならば，$Z(\mathfrak{g}) \neq \{o\}$ である．

(5) $\mathfrak{g}$ が冪零 Lie 代数ならば，$\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{ad}\, x$ は冪零である．

<u>証明</u> (1) 仮定より $\mathfrak{g}$ が冪零 Lie 代数なので，ある $n > 0$ に対して $C^n\mathfrak{g} = \{o\}$ となる．$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ ならば $C\mathfrak{a} \subset C\mathfrak{g}$ であるから，帰納的に $C^i\mathfrak{a} \subset C^i\mathfrak{g}$ $(i = 0, 1, \ldots)$ が分かる．よって $C^n\mathfrak{a} = \{o\}$ である．また，f が Lie 代数の準同型であることから $f(C\mathfrak{g}) = [f(\mathfrak{g}), f(\mathfrak{g})] = [\mathrm{Im}\, f, \mathrm{Im}\, f] = C(\mathrm{Im}\, f)$ であり，帰納的に $f(C^i\mathfrak{g}) = C^i(\mathrm{Im}\, f)$ が分かる．故に $C^n(\mathrm{Im}\, f) = f(\{o\}) = \{o\}$ である．

(2) 標準的射影 $p\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a},\ x \longmapsto x + \mathfrak{a}$ に対して (1) を適用すれば良い．

(3) 仮定より $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ が冪零 Lie 代数なので，ある $n > 0$ に対して $C^n(\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})) = \{o\}$ と成る．標準的射影 $p\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ について，(1) の証明から $\{o\} = C^n(\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})) = C^n(\mathrm{Im}\, p) = p(C^n\mathfrak{g})$ がわかる．従って $C^n\mathfrak{g} \subset Z(\mathfrak{g})$ である．故に中心の定義から $C^{n+1}\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, C^n\mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{g}, Z(\mathfrak{g})] = \{o\}$ が示された．

(4) 仮定より $\mathfrak{g}$ が冪零 Lie 代数なので，ある $n > 0$ に対して $C^{n-1}\mathfrak{g} \neq \{o\}$ かつ $C^n\mathfrak{g} = \{o\}$ となる．このとき $\{o\} = C^n\mathfrak{g} = \left[\mathfrak{g}, C^{n-1}\mathfrak{g}\right]$ なので中心の定義から $\{o\} \neq C^{n-1}\mathfrak{g} \subset Z(\mathfrak{g})$ が言える．

(5) 仮定より $\mathfrak{g}$ が冪零 Lie 代数なので，ある $n > 0$ に対して $C^n\mathfrak{g} = \{o\}$ となる．このとき $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して随伴表現 $\mathrm{ad}(x)\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ を考える．$\mathrm{ad}(x)(C^i\mathfrak{g}) = \left[x, C^i\mathfrak{g}\right] \subset \left[\mathfrak{g}, C^i\mathfrak{g}\right] = C^{i+1}\mathfrak{g}$ なので，イデアルの減少列 (1.1.1) に $\mathrm{ad}(x)$ を作用させると

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{\mathrm{ad}(x)} C^1\mathfrak{g} \xrightarrow{\mathrm{ad}(x)} \cdots \xrightarrow{\mathrm{ad}(x)} C^n\mathfrak{g} = \{o\}$$

となる．i.e. $\forall y \in \mathfrak{g}$ に対して $\left(\mathrm{ad}(x)\right)^n = 0$ である．

■

1.1.7 Engel の定理

補題 1.1.3: ad **の冪零性**

$x \in \mathfrak{gl}(V)$ が冪零ならば $\mathrm{ad}\, x \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(V))$ も冪零である．

<u>証明</u> x が冪零であるという仮定から，$x^n = 0$ を充たす $n \in \mathbb{N}$ が存在する．

さて，x による左移動と右移動をそれぞれ

$$\lambda_x\colon \mathfrak{gl}(V) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V),\ y \longmapsto \left(v \mapsto x(y(v))\right),$$
$$\rho_x\colon \mathfrak{gl}(V) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V),\ y \longmapsto \left(v \mapsto y(x(v))\right)$$

と定義しよう．$\forall y \in \mathfrak{gl}(V)$ を 1 つとると

$$(\lambda_x)^n(y) = x^n y = 0, \qquad (\rho_x)^n(y) = yx^n = 0 \tag{1.1.2}$$

が成り立つ．さらに $\rho_x(\lambda_x(y)) = xyx = \lambda_x(\rho_x(y))$ が成り立つ．i.e. $\rho_x\lambda_x = \lambda_x\rho_x$ である．従って二項定理が使えて[*12]，(1.1.2) から

$$\begin{aligned}(\operatorname{ad} x)^{2n-1} &= (\lambda_x - \rho_x)^{2n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} (\rho_x)^{2n-k-1}(\lambda_x)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} 0(\lambda_x)^k + \sum_{k=n}^{2n} -1\binom{2n-1}{k} (\rho_x)^{2n-k-1}0 \\ &= 0\end{aligned}$$

が言えた． ■

補題 1.1.4:

$V \neq \{o\}$ を有限次元ベクトル空間とし，$\mathfrak{gl}(V)$ の任意の部分 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ をとる．
このとき $\forall x \in \mathfrak{g}$ が冪零ならば，ある $v \in V \setminus \{o\}$ が存在して $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $x(v) = o$ が成り立つ．

証明 $\dim \mathfrak{g}$ に関する数学的帰納法により示す．$\dim \mathfrak{g} = 0$ のときは $\mathfrak{g} = \{0\}$ なので自明．
$\dim \mathfrak{g} > 0$ とし，$\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g}$ を任意に 1 つとる．

$\mathfrak{h} \subsetneq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ であること

補題 1.1.3 より，$\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}} \colon \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の[*13]像の全ての元は冪零である[*14]．ここで $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ の Lie ブラケットを忘れて $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間と見做したとき，商ベクトル空間 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ を構成できる[*15]．このとき，$\forall x \in \mathfrak{h}$ に対して写像

$$\overline{\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}}(x) \colon \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h},\ y + \mathfrak{h} \longmapsto \operatorname{ad}(x)(y) + \mathfrak{h}$$

が well-defined な線型写像であることを示す．実際 $y + \mathfrak{h} = y' + \mathfrak{h} \iff y' - y \in \mathfrak{h}$ ならば

$$\begin{aligned}\overline{\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}}(x)(y' + \mathfrak{h}) &= \operatorname{ad}(x)(y') + \mathfrak{h} \\ &= \bigl(\operatorname{ad}(x)(y) + \operatorname{ad}(x)(y' - y)\bigr) + \mathfrak{h} \\ &= \bigl(\operatorname{ad}(x)(y) + [x, y' - y]\bigr) + \mathfrak{h} \\ &= \operatorname{ad}(x)(y) + \mathfrak{h} \\ &= \overline{\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}}(x)(y + \mathfrak{h})\end{aligned}$$

が成り立つので $\overline{\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}}(x)$ は well-defined であり，かつ $\operatorname{ad}(x)$ が線型写像なので線型写像である．以上の考察から，写像 $\overline{\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}} \colon \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}),\ x \longmapsto \overline{\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}}(x)$ は well-defined な Lie 代数の準同型で，$\operatorname{Im} \overline{\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}}$（もちろんこれは $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ の部分 Lie 代数である）の元は全て冪零である．

さて，$\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$ より $\dim \mathfrak{h} < \dim \mathfrak{g}$ であるから，帰納法の仮定よりある $v + \mathfrak{h} \in (\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \setminus \{\mathfrak{h}\}$ が存在して，$\forall \overline{\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}}(x) \in \operatorname{Im} \overline{\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}}$ に対して $\overline{\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}}}(x)(v + \mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ が成り立つ．i.e. ある $v \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ が存在して

[*12] 写像の合成の結合律を暗に使っている．
[*13] $\operatorname{ad} \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ への制限．
[*14] 仮定より $\forall x \in \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ が冪零なので．
[*15] 商代数の構成において Lie ブラケットを忘れることで商ベクトル空間が構成できる．この際 $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間でありさえすれば良い．

$\forall x \in \mathfrak{h}$ に対して $\mathrm{ad}|_{\mathfrak{h}}(x)(v) = [x, v] \in \mathfrak{h}$ が成り立つ．i.e. $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{h}$ の正規化代数 $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ の真部分集合である[*16]．

$\mathfrak{h}$ を，$\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g}$ を充たす極大[*17]部分 Lie 代数とする．$\mathfrak{h}$ の極大性と先ほど証明した事実から $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}$ でなくてはならない．従って正規化代数の定義の脚注から $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルであり，商代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ が well-defined である．もし $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h} > 1$ だとすると $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ の 1 次元部分 Lie 代数 $\mathbb{K}(x + \mathfrak{h})$ ($^{\mathrm{w}/}$ $x \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$) の，標準的射影による逆像が $\mathfrak{h}$ を真部分集合にもつ $\mathfrak{g}$ の真部分代数ということになり，$\mathfrak{h}$ の極大性に矛盾する．故に背理法から $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h} = 1$ であり，$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathbb{K}z$ ($^{\mathrm{w}/}$ $z \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$) だと分かった．

ここで $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間 $W := \{ v \in V \mid \forall y \in \mathfrak{h},\ y(v) = o \}$ を考える．$\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{g} - 1 < \dim \mathfrak{g}$ なので，帰納法の仮定より $W \neq \{o\}$ だと分かる[*18]．$\mathfrak{h}$ はイデアルなので，$\forall x \in \mathfrak{g}, \forall y \in \mathfrak{h}, \forall w \in W$ に対して $y(x(w)) = x(y(w)) - [x, y](w) = o$ が成り立つ．i.e. $\forall w \in W$ に対して $\forall x \in \mathfrak{g}$, $x(w) \in W$ が言える（W は x 不変）．故に $\forall z \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ の W における固有ベクトル $v \in W \setminus \{o\}$ が存在する[*19]．z は冪零なのでその固有値は 0 であり，$z(v) = o$ が成り立つ．

■

定理 1.1.1: Engel の定理

$\mathfrak{g}$ を有限次元Lie 代数とする．$\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{ad}\, x$ が冪零ならば，$\mathfrak{g}$ は冪零 Lie 代数である．

命題 1.1.4-(5) と併せて以下を得る：
有限次元Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が冪零 Lie 代数 $\iff$ $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{ad}\, x$ が冪零

証明 $\dim \mathfrak{g}$ に関する数学的帰納法により示す．$\dim \mathfrak{g} = 0, 1$ のときは自明．

$\dim \mathfrak{g} > 1$ とする．仮定より，$\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の部分 Lie 代数 $\mathrm{Im}\, \mathrm{ad}$ に対して補題 1.1.4 を使うことができる．すなわちある $v \in \mathfrak{g} \setminus \{o\}$ が存在して，$\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{ad}(x)(v) = [x, v] = o$ を充たす．i.e. $\mathfrak{g}$ の中心 $Z(\mathfrak{g})$ は非零である．このとき $\dim \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g}) < \dim \mathfrak{g}$ で，かつ $\forall x + Z(\mathfrak{g}) \in \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ に対して $\mathrm{ad}(x + Z(\mathfrak{g}))$ は冪零である．故に帰納法の仮定から $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ は冪零 Lie 代数である．従って命題 1.1.4-(3) より $\mathfrak{g}$ は冪零 Lie 代数である． ■

定義 1.1.15: 旗

- V を有限次元 $\mathbb{K}$ ベクトル空間とする．V の**旗** (flag) とは，部分ベクトル空間の増大列

$$\{o\} =: V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{\dim V} := V$$

  であって，$0 \leq \forall i \leq \dim V$ に対して $\dim V_i = i$ が成り立つようなもののこと．
- $x \in \mathrm{End}\, V$ が旗を**安定化する** (stabilize) とは，$0 \leq \forall i \leq \dim V$ に対して $xV_i \subset V_i$ が成り立つことを言う．

[*16] $\exists v \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \setminus \mathfrak{h}$ なので
[*17] $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{h}'$ でかつ $\mathfrak{h}' \subsetneq \mathfrak{g}$ を充たす $\mathfrak{h}'$ が存在しない．
[*18] 仮定より $\mathfrak{h}$ の全ての元は冪零．
[*19] $\forall z \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ はスカラー倍の違いしかないので，固有ベクトルは共通のものを取れる．

系 1.1.2:

$V \neq \{o\}$ を有限次元ベクトル空間とし，$\mathfrak{gl}(V)$ の任意の部分 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ をとる．
このとき $\forall x \in \mathfrak{g}$ が冪零ならば，$\forall x \in \mathfrak{g}$ によって同時に安定化される V の旗が存在する．

証明 $\dim V$ に関する数学的帰納法により示す．$\dim V = 0$ ならば $V = \{o\}$ なので示すべきことは何もない．$\dim V > 0$ とする．補題 1.1.4 より $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $xv = o$ を充たす $v \in V \setminus \{o\}$ が存在する．ここで $V_1 := \mathbb{K}v$ とおき，$W := V/V_1$ とする．$\forall x \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ に対して，$v \in V$ の採り方から明らかに $V_1 \subset \operatorname{Ker} x$ なので商ベクトル空間の普遍性[*20]を使うことができ，図式

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "x"] \arrow[d, "p"'] & V \arrow[r, "p"] & V/V_1 \\ V/V_1 \arrow[urr, dashed, "\exists! \overline{x}"] & & \end{tikzcd}$$

を可換にするような $\overline{x} \in \mathfrak{gl}(V/V_1)$ が一意的に存在する[*21]．このようにして得られる Lie 代数の単射準同型 $\overline{\ } : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V/V_1)$, $x \longmapsto \overline{x}$ によって $\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{gl}(V/V_1)$ の部分 Lie 代数と見做すと，明らかに $\mathfrak{g}$ の任意の元は冪零であり，かつ $\dim(V/V_1) = \dim V - 1 < \dim V$ なので帰納法の仮定が使えて，V/V_1 の旗

$$\{o\} = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_{\dim V - 1} = V/V_1$$

が存在して[*22] $\forall \overline{x} \in \mathfrak{g}$ がそれを同時に安定化する．このとき V の部分ベクトル空間の増大列

$$\{o\} \subset p^{-1}(W_0) \subset p^{-1}(W_1) \subset \cdots \subset p^{-1}(W_{\dim V - 1}) = V$$

は $\forall x \in \mathfrak{g}$ により安定化される[*23] ので帰納法が完成する． ■

補題 1.1.5:

$\mathfrak{g}$ を冪零 Lie 代数，$\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$ をそのイデアルとする．このとき，もし $\mathfrak{i} \neq \{o\}$ ならば $\mathfrak{i} \cap Z(\mathfrak{g}) \neq \{o\}$ である．

証明 イデアルの定義から，随伴表現 $\operatorname{ad}: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ は $\forall x \in \mathfrak{i}$ に対して $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})(x) = [\mathfrak{g}, x] \subset \mathfrak{i}$ を充たす．i.e. 部分 Lie 代数 $\operatorname{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{i})$ と見做すことができる．さらに仮定より $\mathfrak{i} \neq \{o\}$ なので補題 1.1.4 が使えて，ある $x \in \mathfrak{i} \setminus \{o\}$ が存在して $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})(x) = [\mathfrak{g}, x] = \{o\}$ を充たす．中心の定義を思い出すと，これは $x \in \mathfrak{i} \cap Z(\mathfrak{g})$ を意味する． ■

1.2 Lie 群と Lie 代数の関係

この節は [3, 第 5 章] による．

---

*20 命題 1.1.2-(1) の証明がそのまま適用できる．

*21 $p\colon V \longrightarrow V/V_1$ は標準的射影．

*22 V/V_1 の零ベクトルは V_1 であることに注意．

*23 $\forall x \in \mathfrak{g}$ をとる．このとき，旗 $W_0 \subset \cdots \subset W_{\dim V - 1}$ が $\overline{x}$ によって安定化されるので，$\forall w + V_1 \in W_i \quad (0 \leq \forall i \leq \dim V - 1)$ に対して $\overline{x}(w + V_1) \in W_i$ が成り立つ．$\forall v \in p^{-1}(W_i)$ に対して $p(v) = v + V_1 \in W_i$ なので，命題 1.1.2-(1) の証明から $x(v) + V_1 = \overline{x}(v + V_1)$ であることに注意すると $p\bigl(x(v)\bigr) = x(v) + V_1 = \overline{x}(v + V_1) \in W_i$, i.e. $x(v) \in p^{-1}(W_i)$ がわかった．

第 2 章

半単純 Lie 代数

この章以降，$\mathbb{K}$-ベクトル空間 V の零ベクトルを $0 \in V$ と書き，零ベクトル空間 $\{0\}$ のことも 0 と表記する[*1]．この章において，特に断らない限り体 $\mathbb{K}$ は代数閉体[*2]で，かつ $\operatorname{char}\mathbb{K} = 0$ であるとする．また，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は常に有限次元であるとする．

2.1 Lie の定理・Cartan の判定条件

2.1.1 Lie の定理

定理 2.1.1:

V を有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間とし，$\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ が可解であるとする．
このとき $V \neq 0$ ならば，$\forall x \in \mathfrak{gl}(V)$ は共通の固有ベクトルを持つ．

系 2.1.2: Lie の定理

V を有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間とし，$\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ が可解であるとする．
このとき $\forall x \in \mathfrak{g}$ は V のある共通の旗を安定化する．i.e. $\forall x \in \mathfrak{g}$ の表現行列を同時に上三角行列にするような V の基底が存在する．

2.1.2 Jordan-Chevalley 分解

この小節において体 $\mathbb{K}$ は代数閉体で，かつ標数は任意とする．

[*1] 記号の濫用だが，広く普及している慣習である．

[*2] つまり，定数でない任意の 1 変数多項式 $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ に対してある $\alpha \in \mathbb{K}$ が存在して $f(\alpha) = 0$ を充たす．

定義 2.1.1: 線型変換の半単純性

V を有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間とし，$x \in \operatorname{End} V$ とする．x が**半単純** (semisimple) であるとは，x の最小多項式が $\mathbb{K}$ 上で重根を持たないことを言う[a]．

[a] x が対角化可能であることと同値である．

命題 2.1.1: Jordan-Chevalley 分解

V を有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間とし，$x \in \operatorname{End} V$ を与える．このとき以下が成り立つ：

(1) 半単純な $x_s \in \operatorname{End} V$ と冪零な $x_n \in \operatorname{End} V$ が一意的に存在して，

$$x = x_s + x_n$$

と書ける．

(2) 定数項を持たない $p(t), q(t) \in \mathbb{K}[t]$ であって，$x_s = p(x)$, $x_n = q(x)$ を充たすものが存在する．特に $[x, x_s] = [x, x_n] = [x_s, x_n] = 0$ が成り立つ．

(3) 部分ベクトル空間 $A \subset B \subset V$ があって $x|_B \colon B \longrightarrow A$ であるとき，$x_s|_B$, $x_n|_B$ の値域もまた A に収まる．

補題 2.1.1:

V を有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間とし，$x \in \operatorname{End} V$ とその Jordan-Chevalley 分解 $x = x_s + x_n$ を与える．

このとき $\operatorname{ad}(x) \in \operatorname{End}(\mathfrak{gl}(V))$ の Jordan-Chevalley 分解 $\operatorname{ad}(x) = \operatorname{ad}(x)_s + \operatorname{ad}(x)_n$ は $\operatorname{ad}(x)_s = \operatorname{ad}(x_s)$, $\operatorname{ad}(x)_n = \operatorname{ad}(x_n)$ を充たす．

補題 2.1.2:

$\mathfrak{U}$ を有限次元 $\mathbb{K}$-代数とする．このとき微分代数 $\operatorname{Der} \mathfrak{U} \subset \operatorname{End} \mathfrak{U}$ の任意の元 $x \in \operatorname{Der} \mathfrak{U}$ の Jordan-Chevalley 分解 $x = x_s + x_n$ に対して $x_s, x_n \in \operatorname{Der} \mathfrak{U}$ が成り立つ．

2.1.3 Cartan の判定条件

定理 2.1.3: Cartan の判定条件

V を有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間とし，$\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ を与える．

このとき以下の 2 つは同値である：

(1) $\mathfrak{g}$ が可解

(2) $\forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $\forall y \in \mathfrak{g}$ に対して $\operatorname{Tr}(x \circ y) = 0$ が成り立つ

系 2.1.4:

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ を与える．
このとき $\forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}],\ \forall y \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{Tr}\big(\mathrm{ad}(x) \circ \mathrm{ad}(y)\big) = 0$ が成り立つならば，$\mathfrak{g}$ は可解である．

2.2 Killing 形式

2.2.1 半単純性の判定条件

定義 2.2.1: Killing 形式

体 $\mathbb{K}$ 上の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の上の対称な双線型形式

$$\kappa \colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K},\ (x,\, y) \longmapsto \mathrm{Tr}\big(\mathrm{ad}(x) \circ \mathrm{ad}(y)\big)$$

のことを $\mathfrak{g}$ の **Killing 形式** (Killing form) と呼ぶ．

定義 2.2.2: 双線型形式の radical

体 $\mathbb{K}$ 上の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の上の対称な双線型形式

$$\beta \colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}$$

を与える．

- $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間

  $$S_\beta := \left\{ x \in \mathfrak{g} \;\middle|\; \forall y \in \mathfrak{g},\ \beta(x,\, y) = 0 \right\}$$

  のことを β の **radical** と呼ぶ．
- β が**非退化** (nondegenerate) であるとは，$S_\beta = 0$ であることを言う．

定理 2.2.1: Lie 代数の半単純性と Killing 形式の非退化性

$\mathfrak{g}$ が半単純 Lie 代数 $\iff$ $\mathfrak{g}$ の Killing 形式が非退化

2.2.2 単純イデアル

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ と，そのイデアルの族 $\{\mathfrak{i}_i\}_{i \in I}$ を与える．$\mathfrak{g}$ が $\{\mathfrak{i}_i\}_{i \in I}$ の**直和** (direct sum)[*3]であるとは，部分ベクトル空間の内部直和として

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{i}_i$$

[*3] 厳密には，命題 A.3.4 の意味で**内部直和** (internal direct sum) と呼ぶべきだと思う．

が成り立つことを言う．

定理 2.2.2: 半単純 Lie 代数の直和分解

$\mathfrak{g}$ を半単純 Lie 代数とする．このとき $\mathfrak{g}$ の単純イデアル $\mathfrak{i}_1, \dots, \mathfrak{i}_t$ が存在して以下を充たす：

(1)

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{t} \mathfrak{i}_i$$

(2) $\mathfrak{g}$ の任意の単純イデアルは $\mathfrak{i}_i$ のどれか 1 つと一致する．i.e. (1) の直和分解は一意である．

(3) $\mathfrak{i}_i$ 上の Killing 形式 $\kappa_{\mathfrak{i}_i}$ は $\kappa_{\mathfrak{i}_i \times \mathfrak{i}_i}$ に等しい．

系 2.2.3:

$\mathfrak{g}$ が半単純 Lie 代数ならば以下が成り立つ：

(1) $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$

(2) $\mathfrak{g}$ の任意のイデアルは半単純である．

(3) 任意の Lie 代数の準同型 $f: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ について，$\mathrm{Im}(\mathfrak{h})$ は半単純である．

(4) $\mathfrak{g}$ の任意のイデアルは $\mathfrak{g}$ の単純イデアルの直和である．

2.2.3 内部微分

定理 2.2.4:

半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して，

$$\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Der}\,\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

2.2.4 抽象 Jordan 分解

$\mathfrak{g}$ を半単純 Lie 代数とする．このとき $\mathfrak{g}$ の中心 $Z(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の可解イデアルなので 0 となる．i.e. $\mathrm{ad}: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ に関して $\mathrm{Ker}\,\mathrm{ad} = Z(\mathfrak{g}) = 0$ が言えるので ad は単射である．一方で定理 2.2.4 より $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Der}\,\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ なので，補題 2.1.2 を合わせると $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{ad}(x) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の Jordan-Chevalley 分解 $\mathrm{ad}(x) = \mathrm{ad}(x)_s + \mathrm{ad}(x)_n$ $^{\mathrm{w}/}$ $\mathrm{ad}(x)_s,\ \mathrm{ad}(x)_n \in \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ が存在する．

定義 2.2.3: 抽象 Jordan 分解

$\forall x \in \mathfrak{g}$ の**抽象 Jordan 分解**とは，$\mathrm{ad}(s_x) = \mathrm{ad}(x)_s$，$\mathrm{ad}(n_x) = \mathrm{ad}(x)_n$ を充たす $s_x,\ n_x \in \mathfrak{g}$ のこと．

ad が単射なので，$\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ における通常の Jordan-Chevalley 分解の一意性から $s_x,\ n_x$ は一意に決まる．さらに $\mathrm{ad}(x) = \mathrm{ad}(s_x) + \mathrm{ad}(n_x) = \mathrm{ad}(s_x + n_x)$ ということなので $x = s_x + n_x \in \mathfrak{g}$ が成り立つ．さらに命題

2.1.1-(2) より $0=[\mathrm{ad}(s_x),\mathrm{ad}(n_x)]=\mathrm{ad}([s_x,n_x])$ なので $[s_x,n_x]=0$ もわかる．

2.3 表現の完全可約性

2.3.1 $\mathfrak{g}$-加群と表現

この小節では $\mathbb{K}$ を任意の体とする．まず，環上の加群の定義を復習する：

公理 2.3.1: 環上の加群の公理

- R を環とする．**左 R 加群** (left R-module) とは，可換群 $(M,\,+,\,0)$ と写像[a]

$$\cdot : R\times M\to M,\ (a,\,x)\mapsto a\cdot x$$

の組 $(M,\,+,\,\cdot\,)$ であって，$\forall x,\,x_1,\,x_2\in M,\ \forall a,\,b\in R$ に対して以下を充たすもののことを言う：

(LM1) $a\cdot(b\cdot x)=(ab)\cdot x$

(LM2) $(a+b)\cdot x=a\cdot x+b\cdot x$

(LM3) $a\cdot(x_1+x_2)=a\cdot x_1+a\cdot x_2$

(LM4) $1\cdot x=x$

ただし，$1\in R$ は環 R の乗法単位元である．

- R を環とする．**右 R 加群** (left R-module) とは，可換群 $(M,\,+,\,0)$ と写像

$$\cdot : M\times R\to M,\ (x,\,a)\mapsto x\cdot a$$

の組 $(M,\,+,\,\cdot\,)$ であって，$\forall x,\,x_1,\,x_2\in M,\ \forall a,\,b\in R$ に対して以下を充たすもののことを言う：

(RM1) $(x\cdot b)\cdot a=x\cdot(ba)$

(RM2) $x\cdot(a+b)=x\cdot a+x\cdot b$

(RM3) $(x_1+x_2)\cdot a=x_1\cdot a+x_2\cdot a$

(RM4) $x\cdot 1=x$

- $R,\,S$ を環とする．**$(R,\,S)$ 両側加群** ($(R,\,S)$-bimodule) とは，可換群 $(M,\,+,\,0)$ と写像

$$\cdot_{\mathrm{L}} : R\times M\to M,\ (a,\,x)\mapsto a\cdot_{\mathrm{L}}x$$
$$\cdot_{\mathrm{R}} : M\times R\to M,\ (x,\,a)\mapsto x\cdot_{\mathrm{R}}a$$

の組 $(M,\,+,\,\cdot_{\mathrm{L}}\,,\,\cdot_{\mathrm{R}}\,)$ であって，$\forall x\in M,\ \forall a\in R,\ \forall b\in S$ に対して以下を充たすもののことを言う：

(BM1) 左スカラー乗法 $\cdot_{\mathrm{L}}$ に関して M は左 R 加群になる

(BM2) 右スカラー乗法 $\cdot_{\mathrm{R}}$ に関して M は右 S 加群になる

(BM3) $(a\cdot_{\mathrm{L}}x)\cdot_{\mathrm{R}}b=a\cdot_{\mathrm{L}}(x\cdot_{\mathrm{R}}b)$

[a] この写像 $\cdot$ は**スカラー乗法** (scalar multiplication) と呼ばれる．

R が**可換環**の場合，**(LM1)** と **(RM1)** が同値になるので，左 R 加群と右 R 加群の概念は同値になる．これを単に $\boldsymbol{R}$ **加群** (R-module) と呼ぶ．

R が**体**の場合，R 加群のことを $\boldsymbol{R}$**-ベクトル空間**と呼ぶ．

! 以下では，なんの断りもなければ R 加群と言って左 R 加群を意味する．

$\mathfrak{g}$ を体 $\mathbb{K}$ 上の Lie 代数とする．このとき，環上の加群の公理を少し修正することで Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上の加群の概念を得る：

公理 2.3.2: Lie 代数上の加群

$\mathfrak{g}$ を体 $\mathbb{K}$ 上の Lie 代数とする．$\mathfrak{g}$**-加群**とは，$\mathbb{K}$-ベクトル空間 $(V,\,+,\,\cdot\,)$ と写像

$$\blacktriangleright\colon \mathfrak{g}\times V \longrightarrow V,\ (x,\,v)\longmapsto x\blacktriangleright v$$

の 4 つ組 $(V,\,+,\,\cdot\,,\,\blacktriangleright)$ であって，$\forall x,\,x_1,\,x_2\in\mathfrak{g},\ \forall v,\,v_1,\,v_2\in V,\ \forall\lambda,\,\mu\in\mathbb{K}$ に対して以下を充たすもののことを言う：

(M1) $(\lambda\cdot x_1+\mu\cdot x_2)\blacktriangleright v=\lambda\cdot(x_1\blacktriangleright v)+\mu\cdot(x_2\blacktriangleright v)$

(M2) $x\blacktriangleright(\lambda\cdot v_1+\mu\cdot v_2)=\lambda\cdot(x\blacktriangleright v_1)+\mu\cdot(x\blacktriangleright v_2)$

(M3) $[x,y]\blacktriangleright v=x\blacktriangleright(y\blacktriangleright v)-y\blacktriangleright(x\blacktriangleright v)$

同値な定義として，Lie 代数の表現

$$\phi\colon\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{gl}(V),\ x\longmapsto\big(v\mapsto\phi(x)(v)\big)$$

について

$$\blacktriangleright\colon\mathfrak{g}\times V\longrightarrow V,\ (x,\,v)\longmapsto\phi(x)(v)$$

とおくことで得られる 4 つ組 $(V,\,+,\,\cdot\,,\,\blacktriangleright)$ のことである[a]．

[a] 【例 1.1.2】より $\mathfrak{gl}(V)$ の Lie ブラケットは交換子だったので $[x,y]\blacktriangleright\text{-}=\phi([x,y])=[\phi(x),\phi(y)]=\phi(x)\circ\phi(y)-\phi(y)\circ\phi(x)=x\blacktriangleright(y\blacktriangleright\text{-})-y\blacktriangleright(x\blacktriangleright\text{-})$ となる．

! $\mathfrak{g}$-加群に備わっている 3 つの演算（加法，スカラー乗法，左作用）をいちいち全て明記するのは面倒なので $(V,\,+,\,\cdot\,,\,\blacktriangleright)$ のことを「$\mathfrak{g}$**-加群** $\boldsymbol{V}$」と略記する．この略記において，今まで通りスカラー乗法 $\cdot$ は省略して λv の様に書き，左作用はなんの断りもなく $x\blacktriangleright v$ の様に書くことにする．

全く同様に代数上の加群，結合代数上の加群を定義することもできるが，本章では以降 $\mathfrak{g}$-加群と言ったら Lie 代数上の加群を指すことにする．Lie 代数の表現を考えることは $\mathfrak{g}$-加群を考えることと同値なのである．

定義 2.3.1: $\mathfrak{g}$-加群の準同型

$\mathfrak{g}$ を Lie 代数，$(V,\,+,\,\cdot\,,\,\blacktriangleright_1)$, $(W,\,+,\,\cdot\,,\,\blacktriangleright_2)$ を $\mathfrak{g}$-加群とする．

- 線型写像 $f\colon V \longrightarrow W$ が **$\mathfrak{g}$-加群の準同型** (homomorphism of $\mathfrak{g}$-module) [a] であるとは，$\forall x \in \mathfrak{g},\ \forall v \in V$ に対して
$$f(x \blacktriangleright_1 v) = x \blacktriangleright_2 f(v)$$
が成り立つこと[b]．
- $\mathfrak{g}$-加群の準同型 $f\colon V \longrightarrow W$ が**同型** (isomorphism) であるとは，f がベクトル空間の同型写像であることを言う．
- 同型な $\mathfrak{g}$-加群のことを，**同値な $\mathfrak{g}$ の表現** (equivalent representation of $\mathfrak{g}$) とも言う．

[a] **同変写像** (equivalent map) と言うこともある．**絡作用素** (intertwining operator)，**インタートウィナー** (intertwiner) と言う場合もあるが，そこまで普及していない気がする．
[b] スカラー乗法についての線型性の定義を $\blacktriangleright$ について拡張しただけ．

同値な定義だが，線型写像 $f\colon V \longrightarrow W$ が $\mathfrak{g}$-加群の準同型であるとは，Lie 代数の表現
$$\phi_1 \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V),\ x \longmapsto \bigl(v \mapsto x \blacktriangleright_1 v\bigr)$$
$$\phi_2 \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(W),\ x \longmapsto \bigl(v \mapsto x \blacktriangleright_2 v\bigr)$$
に関して
$$\forall x \in \mathfrak{g},\ f \circ \phi_1(x) = \phi_2(x) \circ f$$
が成り立つことを言う．

定義 2.3.2: 部分 $\mathfrak{g}$-加群

$\mathfrak{g}$-加群 V を与える．部分集合 $W \subset V$ が**部分 $\mathfrak{g}$-加群**であるとは，W が和，スカラー乗法，$\mathfrak{g}$ の左作用の全てについて閉じていること．i.e. $\forall w,\,w_1,\,w_2 \in W,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in \mathfrak{g}$ に対して
$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &\in W \\ \lambda w &\in W \\ x \blacktriangleright w &\in W \end{aligned}$$
が成り立つことを言う．

同値な定義として，以下の 2 つの条件が充たされることを言う：

(sub-M1) W が V の部分ベクトル空間

(sub-M2) Lie 代数の表現
$$\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V),\ x \longmapsto (v \longmapsto x \blacktriangleright v)$$

に関して

$$\forall x \in \mathfrak{g},\ \phi(x)(W) \subset W$$

が成り立つ．i.e. $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して W は $\phi(x)$-不変である．

【例 2.3.1】$\mathfrak{g}$-加群の準同型の核と像

$\mathfrak{g}$-加群 $V,\ W$ とその間の $\mathfrak{g}$-加群の準同型 $f\colon V \longrightarrow W$ を与える．このとき

$$\begin{aligned}
v \in \operatorname{Ker} f \quad &\Longrightarrow \quad \forall x \in \mathfrak{g},\ f(x \blacktriangleright v) = x \blacktriangleright f(v) = x \blacktriangleright 0 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathfrak{g},\ x \blacktriangleright v \in \operatorname{Ker} f, \\
w \in \operatorname{Im} f \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists v \in V,\ w = f(v) \quad \Longrightarrow \quad \forall x \in \mathfrak{g},\ x \blacktriangleright w = x \blacktriangleright f(v) = f(x \blacktriangleright v) \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathfrak{g},\ x \blacktriangleright w \in \operatorname{Im} f
\end{aligned}$$

が言えるので $\operatorname{Ker} f,\ \operatorname{Im} f$ はそれぞれ $V,\ W$ の部分 $\mathfrak{g}$-加群である．

2.3.2　$\mathfrak{g}$-加群の直和と既約性

この小節でも $\mathbb{K}$ を任意の体とする．

定義 2.3.3: $\mathfrak{g}$-加群の直和

$\mathfrak{g}$-加群の族 $\big\{(V_i,\ +,\ \cdot\ ,\ \blacktriangleright_i)\big\}_{i\in I}$ を与える．このとき

- 直和ベクトル空間 $\bigoplus_{i\in I} V_i$
- $\bigoplus_{i\in I} V_i$ への $\mathfrak{g}$ の左作用

$$\blacktriangleright\colon \mathfrak{g} \times \bigoplus_{i\in I} V_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} V_i,\ \big(x,\ (v_i)_{i\in I}\big) \longmapsto (x \blacktriangleright_i v_i)_{i\in I}$$

の組として得られる $\mathfrak{g}$-加群 $(\bigoplus_{i\in I} V_i,\ +,\ \cdot\ ,\ \blacktriangleright)$ を **$\mathfrak{g}$-加群の直和** (direct sum) と呼び[a]，$\boldsymbol{\bigoplus_{i\in I} V_i}$ と略記する．

[a] 系 A.3.1 の注と同様に，この定義は厳密には**外部直和** (external direct sum) と呼ぶべきだと思う．

定義 2.3.4: Lie 代数の表現の既約性

- $\mathfrak{g}$-加群 V が**既約** (irreducible)[a]であるとは，V の部分 $\mathfrak{g}$-加群が $0,\ V$ のちょうど2つ[b]だけであることを言う．
- $\mathfrak{g}$-加群 V が**完全可約** (completely reducible) であるとは，V が既約な部分 $\mathfrak{g}$-加群の直和[c]であることを言う．

[a] i.e. Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現 $(\phi,\ V)$ が**既約表現** (irreducible representation; irrep) だ，と言っても良い．
[b] つまり，零ベクトル空間 0 は既約な $\mathfrak{g}$-加群とは呼ばない．
[c] こちらの場合，厳密には**内部直和** (internal direct sum) と呼ぶべきだと思う．

次の補題は証明が少し厄介である：

補題 2.3.1: 完全可約の全射

$\mathfrak{g}$-加群の準同型 $p\colon V \longrightarrow W$ を与える．このとき p が全射かつ V が完全可約ならば，$\mathfrak{g}$-加群の短完全列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} p \hookrightarrow V \xrightarrow{p} W \longrightarrow 0$$

は分裂する．

<u>証明</u> V が完全可約という仮定から，既約な部分 $\mathfrak{g}$-加群の族 $\{V_i\}_{i\in I}$ が存在して，内部直和の意味で

$$V = \bigoplus_{i\in I} V_i$$

と書ける．ここで $\mathcal{S}$ を以下の条件を充たす組 $(J,\, V_J)$ 全体の集合とする：

- $J \subset I,\ V_J = \bigoplus_{j\in J} V_j \subset V$
- $\operatorname{Ker} p \cap V_J = 0$

$\mathcal{S}$ の上の 2 項関係を

$$(J,\, V_J) \le (K,\, V_K) \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad J \subset K$$

と定義すると組 $(\mathcal{S},\, \le)$ は順序集合になる．また $\mathcal{S}' = \{(J_a,\, V_{J_a})\}_{a\in A}$ を $\mathcal{S}$ の任意の全順序部分集合とすると $\left(\bigcup_{a\in A} J_a,\, V_{\bigcup_{a\in A} J_a}\right) \in \mathcal{S}$ であり[*4]，これが $\mathcal{S}'$ の上界を与える．i.e. $\mathcal{S}$ は帰納的順序集合である．したがって Zorn の補題を使うことができ，$\mathcal{S}$ は極大元 $(J_0,\, V_{J_0}) \in \mathcal{S}$ を持つ．

次に $V = \operatorname{Ker} p \oplus V_{J_0}$ を示す．$\mathcal{S}$ の定義から $\operatorname{Ker} p \cap V_{J_0} = 0$ なので，命題 A.3.4 より $V = \operatorname{Ker} p + V_{J_0}$ を示せば良い．$V \neq \operatorname{Ker} p + V_{J_0}$ を仮定すると，ある $k \in I \setminus J_0$ が存在して $V_k \not\subset \operatorname{Ker} p + V_{J_0}$ を充たす．V_k は既約なので $V_k \cap (\operatorname{Ker} p + V_{J_0}) = 0$ が成り立つが，このことは $(J_0,\, V_{J_0})$ の極大性に矛盾．よって背理法から $V = \operatorname{Ker} p + V_{J_0}$ が言えた．

以上より $W \cong V/\operatorname{Ker} p \cong V_{J_0}$ が言える．このとき包含準同型 $i\colon V_{J_0} \hookrightarrow V$ が $p \circ i = \mathrm{id}_{V_{J_0}}$ を充たすので証明が完了した． ■

命題 2.3.1: 完全可約性の特徴付け

以下の 2 つは同値である：

(1) $\mathfrak{g}$-加群 V が完全可約

(2) V の任意の部分 $\mathfrak{g}$-加群 $W \subset V$ に対して，部分 $\mathfrak{g}$-加群 $W^c \subset V$ [a]が存在して $V \cong W \oplus W^c$ を充たす．

[a] W の**補表現** (complement representation) と言う．

[*4] $V_{\bigcup_{a\in A} J_a} = \bigoplus_{j\in\bigcup_{a\in A} J_a} V_j = \bigcup_{a\in A} V_{J_a}$ なので，$\cap$ の分配律から $\operatorname{Ker} p \cap V_{\bigcup_{a\in A} J_a} = \operatorname{Ker} p \cap \bigcup_{a\in A} V_{J_a} = \bigcup_{a\in A}(\operatorname{Ker} p \cap V_{J_a}) = 0$ が言える．

証明 **(1) $\Longrightarrow$ (2)**　　V が既約な部分 $\mathfrak{g}$-加群の族 $\{V_i\}_{i\in I}$ によって

$$V = \bigoplus_{i\in I} V_i$$

と書けるとする．V の任意の部分 $\mathfrak{g}$-加群 $W \subset V$ を 1 つ固定する．このとき標準的射影 $p\colon V \longrightarrow V/W$ は全射な $\mathfrak{g}$-加群の準同型なので，補題 2.3.1 から $\mathfrak{g}$-加群の短完全列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} p \cong W \hookrightarrow V \xrightarrow{p} V/W \longrightarrow 0$$

が分裂する．よって系 A.4.2 から

$$V \cong W \oplus (V/W)$$

が言えた．

(1) $\Longleftarrow$ (2)

V の既約な部分 $\mathfrak{g}$-加群全体の集合を $\mathcal{V}$ と書く．$\mathcal{S}$ を以下の条件を充たす組 $(I,\, V_I)$ 全体の集合とする：

- $I \subset \mathcal{V}$
- 内部直和の意味で $V_I = \bigoplus_{V_i \in I} V_i \subset V$

$\mathcal{S}$ 上の 2 項関係を

$$(I,\, V_I) \leq (J,\, V_J) \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad I \subset J$$

と定義すると組 $(\mathcal{S},\, \leq)$ は順序集合になる．V の 0 でない部分 $\mathfrak{g}$-加群のうち極小のものを V_1 とすると，定義から $V_1 \in \mathcal{V}$ なので $(\{V_1\},\, V_{V_1}) \in \mathcal{S}$ となり $\mathcal{S}$ は空でない．また $\mathcal{S}' = \bigl\{(J_a,\, V_{J_a})\bigr\}_{a\in A}$ を $\mathcal{S}$ の任意の全順序部分集合とすると $\left(\bigcup_{a\in A} J_a,\, V_{\bigcup_{a\in A} J_a}\right) \in \mathcal{S}$ であり，これが $\mathcal{S}'$ の上界を与える．i.e. $\mathcal{S}$ は帰納的順序集合である．したがって Zorn の補題を使うことができ，$\mathcal{S}$ は極大元 $(I_0,\, V_{I_0}) \in \mathcal{S}$ を持つ．このとき $V = V_{I_0}$ であることを背理法により示そう．

$V \neq V_{I_0}$ を仮定する．このとき (2) より V の 0 でない部分 $\mathfrak{g}$-加群 $V_{I_0}^c$ が存在して $V \cong V_{I_0} \oplus V_{I_0}^c$ を充たす．このとき $V_{I_0}^c$ に含まれる 0 でない極小の部分 $\mathfrak{g}$-加群 W をとることができるが，定義からこの W は既約である．よって

$$W \oplus V_{I_0} \subset V$$

もまた既約部分 $\mathfrak{g}$-加群の直和となり，V_{I_0} の極大性に矛盾する．

■

補題 2.3.2: Schur の補題

任意の体[a] $\mathbb{K}$ 上の $\mathfrak{g}$-加群 $V,\, W$，および 0 でない$\mathfrak{g}$-加群の準同型 $f\colon V \longrightarrow W$ を与える．このとき以下が成り立つ：

(1) V が既約ならば f は単射

(2) W が既約ならば f は全射

[a] 代数閉体でなくても良い

証明 (1) **【例 2.3.1】**より $\mathrm{Ker}\, f$ は V の部分 $\mathfrak{g}$-加群だが，V が既約なので $\mathrm{Ker}\, f = 0, V$ のどちらかである．仮定より f は 0 でないので $\mathrm{Ker}\, f = 0$，i.e. f は単射である．

(2) **【例 2.3.1】**より $\mathrm{Im}\, f$ は W の部分 $\mathfrak{g}$-加群だが，W が既約なので $\mathrm{Im}\, f = 0, W$ のどちらかである．仮定より f は 0 でないので $\mathrm{Im}\, f = W$，i.e. f は全射である．

■

系 2.3.1: 代数閉体上の Schur の補題

代数閉体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 $\mathfrak{g}$-加群 V を与える．このとき V が既約ならば，任意の $\mathfrak{g}$-加群の自己準同型 $\phi \in \mathrm{End}\, V$ はある $\lambda \in \mathbb{K}$ を使って $\phi = \lambda\, \mathrm{id}_V$（i.e. スカラー倍）と書ける．

証明 仮定より V が既約なので，補題 2.3.2-(1), (2) より任意の $\mathfrak{g}$-加群の自己準同型 $\phi\colon V \longrightarrow V$ は $\mathfrak{g}$-加群の同型か 0 のどちらかである．ここで $\lambda \in \mathbb{K}$ を ϕ の固有値とする．$\mathbb{K}$ が代数閉体なので λ は確かに存在する．このとき写像 $\phi - \lambda\, \mathrm{id}_V\colon V \longrightarrow V$ もまた $\mathfrak{g}$-加群の自己準同型となるが，固有値の定義から $\det(\phi - \lambda\, \mathrm{id}_V) = 0$ なので同型写像ではあり得ない．よって $\phi - \lambda\, \mathrm{id}_V = 0 \iff \phi = \lambda\, \mathrm{id}_V$ である． ■

系 2.3.2: 可換な Lie 代数の有限次元既約表現

代数閉体上の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が可換ならば，$\mathfrak{g}$ の任意の有限次元既約表現は 1 次元である．

証明 $\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ を $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現とする．このとき $\mathfrak{g}$ が可換であることから $\forall x, y \in \mathfrak{g}, \forall v \in V$ に対して

$$
\begin{aligned}
\phi(x)(y \blacktriangleright v) &= \phi(x) \circ \phi(y)(v) \\
&= [\phi(x), \phi(y)](v) + \phi(y) \circ \phi(x)(v) \\
&= \phi([x, y])(v) + \phi(y) \circ \phi(x)(v) \\
&= \phi(0)(v) + \phi(y) \circ \phi(x)(v) \\
&= \phi(y) \circ \phi(x)(v) \\
&= y \blacktriangleright \big(\phi(x)(v)\big)
\end{aligned}
$$

が言える．i.e. $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $\phi(x)\colon V \longrightarrow V$ は $\mathfrak{g}$-加群の準同型である．よって Schur の補題から $\phi(x)$ がスカラー倍だとわかる．故に V の任意の 1 次元部分ベクトル空間は自動的に部分 $\mathfrak{g}$-加群になる．然るに V は仮定より既約だから V の部分 $\mathfrak{g}$-加群は $0, V$ しかあり得ない．さらに $V \neq 0$ なので $\dim V = 1$ でなくてはならない． ■

2.3.3 $\mathfrak{g}$-加群の Hom とテンソル積

この小節でも $\mathbb{K}$ を任意の体とする．

定義 2.3.5: $\mathfrak{g}$-加群のテンソル積

$(V_1, +, \cdot, \blacktriangleright_1), (V_2, +, \cdot, \blacktriangleright_2)$ を有限次元 $\mathfrak{g}$-加群とする．このとき

- $\mathbb{K}$-ベクトル空間のテンソル積 $V_1 \otimes V_2$
- $V_1 \otimes V_2$ への $\mathfrak{g}$ の左作用[a]

$$\blacktriangleright \colon \mathfrak{g} \times (V_1 \otimes V_2) \longrightarrow V_1 \otimes V_2,\ (x, v_1 \otimes v_2) \longmapsto (x \blacktriangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (x \blacktriangleright_2 v_2)$$

の組として得られる $\mathfrak{g}$-加群 $(V_1 \otimes V_2, +, \cdot, \blacktriangleright)$ を **$\mathfrak{g}$-加群のテンソル積** (tensor product) と呼び，$\boldsymbol{V_1 \otimes V_2}$ と略記する．

[a] 正確には，これの右辺を線型に拡張したもの

実際 $V_1 \otimes V_2$ が $\mathfrak{g}$-加群になっていることを確認しておこう：

$$\begin{aligned}
[x, y] \blacktriangleright (v_1 \otimes v_2) &= ([x, y] \blacktriangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes ([x, y] \blacktriangleright_2 v_2) \\
&= (x \blacktriangleright_1 y \blacktriangleright_1 v_1) \otimes v_2 - (y \blacktriangleright_1 x \blacktriangleright_1 v_1) \otimes v_2 \\
&\quad + v_1 \otimes (x \blacktriangleright_2 y \blacktriangleright_2 v_2) - v_1 \otimes (y \blacktriangleright_2 x \blacktriangleright_2 v_2) \\
&= \bigl((x \blacktriangleright_1 y \blacktriangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (x \blacktriangleright_2 y \blacktriangleright_2 v_2)\bigr) \\
&\quad - \bigl((y \blacktriangleright_1 x \blacktriangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (y \blacktriangleright_2 x \blacktriangleright_2 v_2)\bigr), \\
x \blacktriangleright y \blacktriangleright (v_1 \otimes v_2) - y \blacktriangleright x \blacktriangleright (v_1 \otimes v_2) &= x \blacktriangleright \bigl((y \blacktriangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (y \blacktriangleright_2 v_2)\bigr) \\
&\quad - y \blacktriangleright \bigl((x \blacktriangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (x \blacktriangleright_2 v_2)\bigr) \\
&= \bigl((x \blacktriangleright_1 y \blacktriangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (x \blacktriangleright_2 y \blacktriangleright_2 v_2)\bigr) \\
&\quad - \bigl((y \blacktriangleright_1 x \blacktriangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (y \blacktriangleright_2 x \blacktriangleright_2 v_2)\bigr)
\end{aligned}$$

なので

$$[x, y] \blacktriangleright (v_1 \otimes v_2) = x \blacktriangleright y \blacktriangleright (v_1 \otimes v_2) - y \blacktriangleright x \blacktriangleright (v_1 \otimes v_2)$$

がわかった．

定義 2.3.6: $\mathfrak{g}$-加群の双対

$(V, +, \cdot, \blacktriangleright)$ を有限次元 $\mathfrak{g}$-加群とする．このとき

- 双対ベクトル空間 $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$
- V^* への $\mathfrak{g}$ の左作用

$$\blacktriangleright \colon \mathfrak{g} \times V^* \longrightarrow V^*,\ (x, f) \longmapsto \bigl(v \mapsto -f(x \blacktriangleright v)\bigr)$$

の組として得られる $\mathfrak{g}$-加群 $(V^*, +, \cdot, \blacktriangleright)$ を **$\mathfrak{g}$-加群の双対** (dual)[a] と呼び，$\boldsymbol{V^*}$ と略記する．

[a] **反傾** (contragradient) と呼ぶ場合もあるようだが，現在はあまり使われていないような気がする．

実際 V^* が $\mathfrak{g}$-加群になっていることを確認しておこう：

$$\begin{aligned}([x,y] \blacktriangleright f)(v) &= -f([x,y] \blacktriangleright f)(v) \\ &= -f(x \blacktriangleright y \blacktriangleright v - y \blacktriangleright x \blacktriangleright v) \\ &= -f(x \blacktriangleright y \blacktriangleright v) + f(y \blacktriangleright x \blacktriangleright v) \\ &= (x \blacktriangleright f)(y \blacktriangleright v) - (y \blacktriangleright f)(x \blacktriangleright v) \\ &= -\bigl(y \blacktriangleright (x \blacktriangleright f)\bigr)(v) + \bigl(x \blacktriangleright (y \blacktriangleright f)\bigr)(v) \\ &= (x \blacktriangleright y \blacktriangleright f)(v) - (y \blacktriangleright x \blacktriangleright f)(v)\end{aligned}$$

なので

$$[x,y] \blacktriangleright f = x \blacktriangleright y \blacktriangleright f - y \blacktriangleright x \blacktriangleright f$$

がわかった．

ここで，$\mathbb{K}$-ベクトル空間の自然な同型（命題 A.2.7）

$$V^* \otimes W \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W)$$

の具体形が

$$\alpha\colon f \otimes w \longmapsto \bigl(v \mapsto f(v) \cdot w\bigr) \tag{2.3.1}$$

となっていたことを思い出そう．このことから，$\mathbb{K}$-ベクトル空間 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W)$ の上の $\mathfrak{g}$ の左作用を

$$x \blacktriangleright (f \otimes w) = -f(x \blacktriangleright \text{-}) \otimes w + f \otimes (x \blacktriangleright w)$$

に着想を得て

$$(x \blacktriangleright F)(v) = -F(x \blacktriangleright v) + x \blacktriangleright F(v) \quad (\forall F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W))$$

と定義しようと思うのが自然である．というのも，こう定義することで $\mathbb{K}$-ベクトル空間の同型写像 (2.3.1) が

$$\begin{aligned}\alpha\bigl(x \blacktriangleright (f \otimes w)\bigr)(v) &= -\alpha\bigl(f(x \blacktriangleright \text{-}) \otimes w\bigr)(v) + \alpha\bigl(f \otimes (x \blacktriangleright w)\bigr)(v) \\ &= -f(x \blacktriangleright v) \cdot w + f(v) \cdot (x \blacktriangleright w) \\ &= -f(x \blacktriangleright v) \cdot w + x \blacktriangleright \bigl(f(v) \cdot w\bigr) \\ &= \bigl(x \blacktriangleright \alpha(f \otimes w)\bigr)(v)\end{aligned}$$

となって $\mathfrak{g}$-加群の同型写像になる！

定義 2.3.7: $\mathfrak{g}$-加群の Hom

$(V,\, +,\, \cdot\,,\, \blacktriangleright_1)$, $(W,\, +,\, \cdot\,,\, \blacktriangleright_2)$ を有限次元$\mathfrak{g}$-加群とする．このとき

- $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W)$[a]
- $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W)$ への $\mathfrak{g}$ の左作用

$$\blacktriangleright\colon \mathfrak{g} \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W),\; F \longmapsto \bigl(v \mapsto -F(x \blacktriangleright_1 v) + x \blacktriangleright_2 F(v)\bigr)$$

の組として得られる $\mathfrak{g}$-加群 $\bigl(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W),\, +,\, \cdot\,,\, \blacktriangleright\bigr)$ を $\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}\,(\boldsymbol{V},\, \boldsymbol{W})$ と略記する．

[a] V から W への $\mathfrak{g}$-加群の準同型全体の集合ではない．

2.3.4　Casimir 演算子

この小節では $\mathbb{K}$ は標数 0 の体とする．

定義 2.3.8: 忠実な表現

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現 $\rho\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ が**忠実** (faithful)[a] であるとは，ρ が単射であることを言う．

[a] 群作用の文脈では**効果的な作用** (effective action) と呼ぶ．

補題 2.3.3:

- 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の忠実な有限次元表現 $\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$
- $\mathfrak{g}$ 上の対称な双線型形式

$$\beta\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K},\ (x,\, y) \longmapsto \mathrm{Tr}\bigl(\phi(x) \circ \phi(y)\bigr)$$

を与える．β の radical を

$$S_\beta \coloneqq \bigl\{\, x \in \mathfrak{g} \bigm| \forall y \in \mathfrak{g},\ \beta(x,\, y) = 0 \,\bigr\}$$

とおく．このとき以下が成り立つ：

(1) S_β は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．

(2) $S_\beta = 0$，i.e. β は非退化である．

証明　(1) Tr の循環性から

$$\begin{aligned}
\beta(x,\, [y, z]) &= \mathrm{Tr}\bigl(\phi(x) \circ \phi([y, z])\bigr) \\
&= \mathrm{Tr}\bigl(\phi(x) \circ \phi(y) \circ \phi(z)\bigr) - \mathrm{Tr}\bigl(\phi(x) \circ \phi(z) \circ \phi(y)\bigr) \\
&= \mathrm{Tr}\bigl(\phi(x) \circ \phi(y) \circ \phi(z)\bigr) - \mathrm{Tr}\bigl(\phi(y) \circ \phi(x) \circ \phi(z)\bigr) \\
&= \mathrm{Tr}\bigl(\phi([x, y]) \circ \phi(z)\bigr) \\
&= \beta([x, y],\, z)
\end{aligned}$$

が成り立つので，$\forall x \in \mathfrak{g},\ \forall y \in S_\beta$ に対して

$$\forall z \in \mathfrak{g},\ \beta([x, y],\, z) = -\beta(y,\, [x, z]) = 0$$

が成り立つ．i.e. $[x, y] \in S_\beta$ が言えた．

(2) S_β の定義から $[\phi(x), \phi(y)]$ の形をした $[\phi(S_\beta), \phi(S_\beta)]$ の任意の元および $\forall \phi(z) \in \phi(S_\beta)$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\bigl([\phi(x), \phi(y)] \circ \phi(z)\bigr) &= \mathrm{Tr}\bigl(\phi([x, y]) \circ \phi(z)\bigr) \\
&= \beta([x, y],\, z) \\
&= 0
\end{aligned}$$

が成り立つので，定理 2.1.3 より $\phi(S_\beta)$ は可解である．ϕ は忠実なので $\operatorname{Ker}\phi = 0$ であり，準同型定理から $\phi(S_\beta) \cong S_\beta / \operatorname{Ker}\phi = S_\beta$ が言える．従って (1) も併せると S_β は $\mathfrak{g}$ の可解イデアルである．仮定より $\mathfrak{g}$ は半単純だったから，半単純 Lie 代数の定義から $S_\beta = 0$ が言える．

■

補題 2.3.4:

- 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e_\mu\}$
- 対称かつ非退化な双線型形式 $\beta \in L(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}; \mathbb{K})$ であって $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\beta(x, [y, z]) = \beta([x, y], z)$$

  を充たすもの

を与える．このとき以下が成り立つ：

(1) $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e^\mu\}$ であって[a]，$\forall(\mu, \nu) \in \{1, \dots, \dim \mathfrak{g}\}^2$ に対して

$$\beta(e_\mu, e^\nu) = \delta_\mu^\nu$$

を充たすものが一意的に存在する．

(2) $\forall x \in \mathfrak{g}$ を一つ固定する．このとき $\mathrm{ad}(x) \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の基底 $\{e_\mu\}$ による表現行列 $\left[{a_\mu}^\nu\right]_{1 \le \mu, \nu \le \dim \mathfrak{g}}$ と，(1) の基底 $\{e^\mu\}$ による表現行列 $\left[{b^\mu}_\nu\right]_{1 \le \mu, \nu \le \dim \mathfrak{g}}$ について

$${a_\mu}^\nu = -{b^\nu}_\mu$$

が成り立つ．

[a] $\mathfrak{g}^*$ の元ではないが，Einstein の規約との便宜上添字を上付きにする．

証明 (1) $\beta_{\mu\nu} := \beta(e_\mu, e_\nu)$ とおく．このとき $x = x^\mu e_\mu \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned}
\forall y = y^\nu e_\nu \in \mathfrak{g},\ \beta(x, y) = 0 &\iff \forall \begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^{\dim \mathfrak{g}} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{\dim \mathfrak{g}},\ \beta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = 0 \\
&\iff 1 \le \forall \nu \le \dim \mathfrak{g},\ \beta_{\nu\mu} x^\mu = 0 \\
&\iff \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^{\dim \mathfrak{g}} \end{bmatrix} \in \mathrm{Ker}\left[\beta_{\mu\nu}\right] \subset \mathbb{K}^{\dim \mathfrak{g}}
\end{aligned}$$

が言える．ただし 2 つ目の同値変形で β が対称であることを使った．したがって β が非退化であることは $\mathrm{Ker}\left[\beta_{\mu\nu}\right] = 0$ と同値であり，このことはさらに補題 A.4.1-(3) より $\det\left[\beta_{\mu\nu}\right] \neq 0$ と同値である[*5]．よって $\left[\beta_{\mu\nu}\right]$ の逆行列 $\left[\alpha^{\mu\nu}\right]$ が一意的に存在するので，$e^\mu := e_\nu \alpha^{\mu\nu}$ と定めると，

$$\beta(e_\mu, e^\nu) = \alpha^{\nu\rho} \beta_{\mu\rho} = \delta_\mu^\nu$$

が成り立つ．

[*5] Cramer の公式は任意の体 $\mathbb{K}$ 上で成り立つ．

(2) $\mathrm{ad}(x)(e_\mu) =: a_\mu{}^\nu e_\nu,\ \mathrm{ad}(e^\mu) =: b^\mu{}_\nu e^\nu$ とおくと，

$$\begin{aligned} a_\mu{}^\nu &= a_\mu{}^\rho \delta^\nu_\rho \\ &= a_\mu{}^\rho \beta(e_\rho,\, e^\nu) \\ &= \beta\bigl(\mathrm{ad}(x)(e_\mu),\, e^\nu\bigr) \\ &= \beta\bigl(-[e_\mu, x],\, e^\nu\bigr) \\ &= \beta\bigl(e_\mu,\, -\mathrm{ad}(x)e^\nu\bigr) \\ &= -b^\nu{}_\rho \beta\bigl(e_\mu,\, e^\rho\bigr) \\ &= -b^\nu{}_\mu \end{aligned}$$

■

定義 2.3.9: 忠実な表現の Casimir 演算子

- 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の有限次元表現 $\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$
- 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e_\mu\}$
- 対称かつ非退化な双線型形式 $\beta \in L(\mathfrak{g},\, \mathfrak{g};\, \mathbb{K})$ であって $\forall x,\, y,\, z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\beta(x,\, [y, z]) = \beta([x, y],\, z)$$

  を充たすもの

を与える．与えられた $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e_\mu\}$ から補題 2.3.4 により構成した $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e^\mu\}$ をとる．このとき

- $\mathbb{K}$-線型変換

$$\boldsymbol{c_\phi(\beta)}\colon V \longrightarrow V,\ v \longmapsto \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(e^\mu)(v)$$

  を $\beta,\, \phi$ の前 Casimir 演算子と呼ぶ．
- ϕ が忠実な表現で，かつ

$$\beta(x,\, y) \coloneqq \mathrm{Tr}\bigl(\phi(x) \circ \phi(y)\bigr)$$

  であるとき[a]，$\beta,\, \phi$ の前 Casimir 演算子のことを **$\boldsymbol{\phi}$ の Casimir 演算子** (Casimir operator of ϕ) と呼んで $\boldsymbol{c_\phi}$ と略記する．

[a] 補題 2.3.3 よりこの β は非退化である

命題 2.3.2: Casimir 演算子の性質

- 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の有限次元表現 $\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$
- 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e_\mu\}$
- 対称かつ非退化な双線型形式 $\beta \in L(\mathfrak{g},\, \mathfrak{g};\, \mathbb{K})$ であって $\forall x,\, y,\, z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\beta(x,\, [y, z]) = \beta([x, y],\, z)$$

  を充たすもの

を与える．与えられた $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e_\mu\}$ から補題 2.3.4 により構成した $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e^\mu\}$ をとる．

(1) 前 Casimir 演算子 $c_\phi(\beta) \in \mathrm{End}(V)$ は，$\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[\phi(x), c_\phi(\beta)] = 0$$

を充たす．従って $c_\phi(\beta)$ は $\mathfrak{g}$-加群の準同型である．

(2) ϕ が忠実な表現ならば，Casimir 演算子 $c_\phi \in \mathrm{End}\, V$ について

$$\mathrm{Tr}\, c_\phi = \dim \mathfrak{g}$$

が成り立つ．

(3) $\mathbb{K}$ が代数閉体でかつ ϕ が忠実な表現でかつ ϕ が既約表現ならば，Casimir 演算子 $c_\phi \in \mathrm{End}\, V$ は $\mathfrak{g}$ の基底の取り方によらずに

$$c_\phi = \frac{\dim \mathfrak{g}}{\dim V}\, \mathrm{id}_V$$

と書ける．

証明 (1) $\forall x,\, y,\, z \in \mathrm{End}(V)$ に対して

$$[x, y \circ z] = [x, y] \circ z + y \circ [x, z]$$

が成り立つことと補題 2.3.4-(2) より，

$$\begin{aligned}
[\phi(x), c_\phi(\beta)] &= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} [\phi(x), \phi(e_\mu)] \circ \phi(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ [\phi(x), \phi(e^\mu)] \\
&= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \mathrm{ad}\big(\phi(x)\big)\big(\phi(e_\mu)\big) \circ \phi(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \mathrm{ad}\big(\phi(x)\big)\big(\phi(e^\mu)\big) \\
&= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi\big(\mathrm{ad}(x)(e_\mu)\big) \circ \phi(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi\big(\mathrm{ad}(x)(e^\mu)\big) \\
&= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} a_\mu{}^\nu \phi(e_\nu) \circ \phi(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} b^\mu{}_\nu \phi(e_\mu) \circ \phi(e^\nu) \\
&= 0
\end{aligned}$$

が言えた．

(2) 補題 2.3.4-(1) より

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\, c_\phi &= \sum_{\mu}^{\dim \mathfrak{g}} \mathrm{Tr}\big(\phi(e_\mu) \circ \phi(e^\mu)\big) \\
&= \sum_{\mu}^{\dim \mathfrak{g}} \beta(e_\mu,\, e^\mu) \\
&= \dim \mathfrak{g}
\end{aligned}$$

(3) $\mathbb{K}$ が代数閉体でかつ ϕ が既約なので，(1), (2) と代数閉体上の Schur の補題から $c_\phi\colon V \longrightarrow V$ は $(\dim \mathfrak{g}/\dim V)\,\mathrm{id}_V$ に等しい．

■

$\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ が忠実でない場合は次のように考える：まず，$\mathfrak{g}$ が半単純なので，$\mathrm{Ker}\,\phi$（$\mathfrak{g}$ のイデアルである）は系 2.2.3 から $\mathfrak{g}$ の単純イデアルの直和である．定理 2.2.2 を使って $\mathfrak{g}^\perp$ を $\mathfrak{g} =: \mathrm{Ker}\,\phi \oplus \mathfrak{g}^\perp$ で定義すると，$\mathfrak{g}^\perp \cong \mathfrak{g}/\mathrm{Ker}\,\phi$ なので，制限

$$\phi|_{\mathfrak{g}^\perp}\colon \mathfrak{g}^\perp \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

は忠実な表現になる．そして $\mathfrak{g}^\perp$ の基底に対して定義 2.3.9 を適用するのである．

2.3.5 Weyl の定理

この小節では $\mathbb{K}$ を標数 0 の体とする．[2, 第 7 章, p.80-86] に倣って Weyl の定理を証明する．

補題 2.3.5:

$\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ を半単純 Lie 代数の有限次元表現とする．このとき

$$\phi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{sl}(V)$$

が成り立つ．特に，$\dim V = 1$ ならば ϕ は零写像である[a]

[a] これを**自明な表現** (trivial representation) と言う．

証明【例 **1.1.3**】より，$\mathfrak{sl}(V)$ の基底は行列単位 e_{ij} を使って

$$\{\, e_{ij} - e_{ji} \mid 1 \le i \ne j \le \dim V \,\} \cup \{\, e_{ii} - e_{i+1,i+1} \mid 1 \le i \le \dim V - 1 \,\} = [\{e_i\}, \{e_j\}]$$

と書けた．よって $\mathfrak{sl}(V) = [\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(V)]$ である．一方で $\mathfrak{g}$ が半単純なので系 2.2.3-(1) より $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ であるから，

$$\phi(\mathfrak{g}) = \phi([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = [\phi(\mathfrak{g}), \phi(\mathfrak{g})] \subset [\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(V)] = \mathfrak{sl}(V)$$

が言えた．特に $\dim V = 0$ ならば $\dim \mathfrak{sl}(V) = 1^2 - 1 = 0$ なので，$\mathrm{Im}\,\phi = 0$ である． ■

補題 2.3.6: Whitehead の補題

半単純 Lie 代数の有限次元表現 $\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ を与える．
このとき

$$\forall x, y \in \mathfrak{g},\ f([x, y]) = \phi(x) \circ f(y) - \phi(y) \circ f(x) \tag{2.3.2}$$

を充たす任意の $\mathbb{K}$-線型写像 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}, V)$ に対して，ある $v \in V$ が存在して

$$\forall x \in \mathfrak{g},\ f(x) = \phi(x)(v)$$

が成り立つ．

証明 **case1: ϕ が既約かつ忠実な場合**

(2.3.2) を充たす任意の $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g},\, V)$ を 1 つとる．$\mathfrak{g}$ の基底 $\{e_\mu\}$ を 1 つ固定し，

$$\beta\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K},\ (x,\, y) \longmapsto \mathrm{Tr}\big(\phi(x)\circ\phi(y)\big)$$

を用いて補題 2.3.4-(1) の方法で対応する $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e^\mu\}$ を作る．このとき

$$v := \sum_{\mu=1}^{\dim\mathfrak{g}} \phi(e_\mu)\circ f(e^\mu) \in V$$

とおくと，$\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して補題 2.3.4 と同じ記号の下で

$$\begin{aligned}
\phi(x)(v) &= \sum_{\mu=1}^{\dim\mathfrak{g}} \phi(x)\circ\phi(e_\mu)\circ f(e^\mu) \\
&= \sum_{\mu=1}^{\dim\mathfrak{g}} [\phi(x),\phi(e_\mu)]\circ f(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim\mathfrak{g}} \phi(e_\mu)\circ\phi(x)\circ f(e^\mu) \\
&= \sum_{\mu=1}^{\dim\mathfrak{g}} \phi\big(\mathrm{ad}(x)(e_\mu)\big)\circ f(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim\mathfrak{g}} \phi(e_\mu)\circ\phi(x)\circ f(e^\mu) \\
&= \sum_{\mu=1}^{\dim\mathfrak{g}} a_\mu{}^\nu\phi(e_\nu)\circ f(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim\mathfrak{g}} \phi(e_\mu)\circ\phi(x)\circ f(e^\mu) \\
c_\phi\circ f(x) &= \sum_{\mu=1}^{\dim\mathfrak{g}} \phi(e_\mu)\circ\phi(e^\nu)\circ f(x) \\
&= \sum_{\mu=1}^{\dim\mathfrak{g}} \phi(e_\mu)\circ f([e^\nu, x]) + \sum_{\mu=1}^{\dim\mathfrak{g}} \phi(e_\mu)\circ\phi(x)\circ f(e^\nu) \\
&= -\sum_{\mu=1}^{\dim\mathfrak{g}} \phi(e_\mu)\circ f\big(\mathrm{ad}(x)(e^\nu)\big) + \sum_{\mu=1}^{\dim\mathfrak{g}} \phi(e_\mu)\circ\phi(x)\circ f(e^\nu) \\
&= -\sum_{\mu=1}^{\dim\mathfrak{g}} b^\nu{}_\mu\phi(e_\mu)\circ f(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim\mathfrak{g}} \phi(e_\mu)\circ\phi(x)\circ f(e^\nu)
\end{aligned}$$

と計算できるので，補題 2.3.4-(2) から

$$\phi(x)(v) = c_\phi\circ f(x)$$

が言えた．仮定より $\mathfrak{g}$-加群 V は既約なので，Schur の補題-(1), (2) から $\mathfrak{g}$-加群の準同型 $c_\phi\colon V \longrightarrow V$ は $\mathfrak{g}$-加群の同型であり，$c_\phi^{-1}(v) \in V$ が所望のベクトルとなる．

case2: ϕ が忠実とは限らない既約表現の場合

(2.3.2) を充たす任意の $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g},\, V)$ を 1 つとる．このとき $\forall[x,y] \in [\mathrm{Ker}\,\phi, \mathrm{Ker}\,\phi]$ に対して

$$f([x,y]) = \phi(x)\circ f(y) - \phi(y)\circ f(x) = 0 \quad\iff\quad [x,y] \in \mathrm{Ker}\,f$$

が言えるが，仮定より $\mathfrak{g}$ は半単純なので，系 2.2.3-(3) よりそのイデアルである $\mathrm{Ker}\,\phi \subset \mathfrak{g}$ もまた半単純．故に系 2.2.3-(1) から $[\mathrm{Ker}\,\phi, \mathrm{Ker}\,\phi] = \mathrm{Ker}\,\phi$ であり，

$$\mathrm{Ker}\,\phi \subset \mathrm{Ker}\,f$$

がわかった．従ってこのとき商ベクトル空間の普遍性を使うことができ，以下の図式を可換にする $\overline{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V/\operatorname{Ker}\phi,\, \mathfrak{g})$ が一意的に存在する：

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & V \\
\mathfrak{g}/\operatorname{Ker}\phi \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{f}"']
\end{tikzcd}$$

さらに商代数の普遍性から，表現 $\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ は以下の図式を可換にする表現 $\overline{\phi}\colon \mathfrak{g}/\operatorname{Ker}\phi \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ に一意的に持ち上がる：

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "p"'] & \mathfrak{gl}(V) \\
\mathfrak{g}/\operatorname{Ker}\phi \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{\phi}"']
\end{tikzcd}$$

このとき $\overline{\phi}$ は $\mathfrak{g}/\operatorname{Ker}\phi$ の忠実な既約表現であり，$\overline{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}/\operatorname{Ker}\phi,\, V)$ は (2.3.2) を充たす．よって **case1** からある $v \in V$ があって

$$\forall x \in \mathfrak{g},\ \overline{f}(x+\operatorname{Ker}\phi) = \overline{\phi}(x+\operatorname{Ker}\phi)(v) \quad\Longleftrightarrow\quad \forall x \in \mathfrak{g},\ f(x) = \phi(x)(v)$$

が成り立つ．

case3: ϕ が一般の場合

(2.3.2) を充たす任意の $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g},\, V)$ を 1 つ固定する．このときある $v \in V$ が存在して $\forall x \in \mathfrak{g},\ f(x) = \phi(x)(v)$ が成り立つことを $\dim V$ に関する数学的帰納法により示す．$\dim V = 1$ のとき，補題 2.3.5 より ϕ が零写像なので $\forall v \in V$ に対して $\forall x \in \mathfrak{g},\ f(x) = \phi(x)(v)$ が成り立つ．

$\dim V > 1$ とする．$\mathfrak{g}$-加群 V が既約でないならば，部分 $\mathfrak{g}$-加群 $0 \subsetneq W \subsetneq V$ が存在する．標準的射影[*6] $p\colon V \longrightarrow V/W$ および $\forall x \in \mathfrak{g}$ について $W \subset \operatorname{Ker}\bigl(p \circ \phi(x)\bigr)$ であるから，商代数の普遍性より $\forall \phi(x) \in \phi(\mathfrak{g})$ に対して以下の図式を可換にする $\overline{\phi}(x) \in \mathfrak{gl}(V/W)$ が一意的に存在する：

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "p\circ\phi(x)"] \arrow[d, "p"'] & V/W \\
V/W \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{\phi}(x)"']
\end{tikzcd}$$

このとき写像

$$\phi_1\colon \mathfrak{g} \longmapsto \mathfrak{gl}(V/W),\ x \longmapsto \bigl(v+W \mapsto \overline{\phi}(x)(v+W)\bigr)$$

は well-defined な Lie 代数の準同型なので $\mathfrak{g}$ の表現である．$f_1 := p \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g},\, V/W)$ は ϕ_1 に関して (2.3.2) を充たすので，帰納法の仮定より[*7]ある $v_1 + W \in V/W$ が存在して

$$\forall x \in \mathfrak{g},\ f_1(x) = f(x) + W = \phi_1(x)(v_1 + W)$$

[*6] このとき V の $\mathbb{K}$-ベクトル空間としての構造しか見ない．

[*7] $\dim V/W < \dim V$ なので帰納法の仮定が使える．

が成り立つ．ここで $f_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g},\, W)$ を

$$f_2(x) \coloneqq f(x) - \phi(x)(v_1)$$

と定義すると，f_2 は部分表現 $\phi|_W \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(W)$ に関して (2.3.2) を充たす．よって帰納法の仮定から[*8]ある $v_2 \in W$ が存在して

$$\forall x \in \mathfrak{g},\ f_2(x) = \phi|_W(x)(v_2)$$

が成り立つ．以上より，$v \coloneqq v_1 + v_2 \in V$ とおけば

$$\forall x \in \mathfrak{g},\ f(x) = f_2(x) + \phi(x)(v_1) = \phi|_W(x)(v_2) + \phi(x)(v_1) = \phi(x)(v)$$

が言えた．

■

定理 2.3.3: 完全可約性に関する Weyl の定理

$\phi \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ が半単純 Lie 代数の有限次元表現ならば，ϕ は完全可約である．

証明 V の任意の部分 $\mathfrak{g}$-加群 $W \subset V$ を 1 つ固定する．このとき命題 2.3.1 より，部分 $\mathfrak{g}$-加群 $W^c \subset V$ が存在して $V \cong W \oplus W^c$ が成り立つことを示せば良い．

$\mathrm{End}\, V$ の部分ベクトル空間 L_W を

$$L_W \coloneqq \left\{\, t \in \mathrm{End}\, V \;\middle|\; t(V) \subset W,\ t(W) = 0 \,\right\}$$

と定める．L_W への $\mathfrak{g}$ の左作用を

$$x \blacktriangleright t \coloneqq [\phi(x), t]$$

と定義すると，W が部分 $\mathfrak{g}$-加群であることおよび定義 2.3.7 より L_W は $\mathfrak{g}$-加群になる．i.e.

$$\tilde{\phi} \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(L_W),\ x \longmapsto \bigl(t \longmapsto x \blacktriangleright t\bigr)$$

は半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の有限次元表現である．

ここで $\mathbb{K}$-ベクトル空間 W への射影演算子[*9] $p \colon V \longrightarrow V$ を 1 つとり，$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g},\, L_W)$ を

$$f(x) \coloneqq [p, \phi(x)]$$

と定義しよう．このとき $\forall x,\, y \in \mathfrak{g}$ に対して Jacobi 恒等式から

$$\begin{aligned} f([x,y]) &= [p, [\phi(x), \phi(y)]] \\ &= [\phi(x), [p, \phi(y)]] - [\phi(y), [p, \phi(x)]] \\ &= [\phi(x), f(y)] - [\phi(y), f(x)] \\ &= \tilde{\phi}(x) \circ f(y) - \tilde{\phi}(y) \circ f(x) \end{aligned}$$

[*8] $\dim W < \dim V$ なので帰納法の仮定が使える．

[*9] $p^2 = p$ かつ $p|_W = \mathrm{id}_W$

が成り立つので，補題 2.3.6 からある $t \in L_W$ が存在して

$$\forall x \in \mathfrak{g},\ f(x) = \tilde{\phi}(x)(t) = [\phi(x), t]$$

が成り立つ．よってこのとき $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[\phi(x), p+t] = \tilde{\phi}\big(\phi(x)\big)\big(p+t\big) = -[p, \phi(x)] + [\phi(x), t] = -f(x) + [\phi(x), t] = 0$$

が言えた．i.e. $p+t \in \mathrm{End}\, V$ は $\mathfrak{g}$-加群の準同型である．さらに $t \in L_W$ であることから，$(p+t)(V) = W$ かつ $(p+t) \circ (p+t)|_W = \mathrm{id}_W$ が言える．i.e. $\mathfrak{g}$-加群の短完全列

$$0 \hookrightarrow \mathrm{Ker}(p+t) \hookrightarrow V \xrightarrow{p+t} W \longrightarrow 0$$

は分裂し，$\mathfrak{g}$-加群の直和として

$$V \cong W \oplus \mathrm{Ker}(p+t)$$

が言えた． ■

2.3.6 Jordan 分解の保存

この小節でも引き続き $\mathbb{K}$ を標数 0 の体とする．

部分 Lie 代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ に関して

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(x) \colon \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g},\ v \longmapsto [x, v]$$

と定義する．

定理 2.3.4: Jordan-Chevalley 分解と抽象 Jordan 分解

V を有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間とし，$\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ を半単純線型 Lie 代数とする．
このとき $\forall x \in \mathfrak{g}$ の Jordan-Chevalley 分解 $x = x_s + x_n$ について $x_s,\ x_n \in \mathfrak{g}$ が成り立つ．特に，x の抽象 Jordan 分解 $s_x,\ n_x \in \mathfrak{g}$ に関して $x_s = s_x,\ x_n = n_x$ が成り立つ．

証明 後半の主張は Jordan-Chevalley 分解および抽象 Jordan 分解の一意性より従うので，前半を示せば良い．

$\forall x \in \mathfrak{g}$ を 1 つ固定し，x の Jordan-Chevalley 分解 $x = x_s + x_n$ をとる．$\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})}(x)(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$ なので命題 2.1.1-(3) より $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})}(x_s)(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})}(x_n)(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$ が言える．i.e. 正規化代数の言葉を使うと $x_s,\ x_n \in N_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g}) =: N$ が言える[*10]．

包含準同型 $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ によって V を $\mathfrak{g}$-加群と見做し，V の任意の部分 $\mathfrak{g}$-加群 W をとる．このとき部分 $\mathfrak{g}$-加群 $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{gl}(V)$ を

$$L_W \coloneqq \left\{\, y \in \mathfrak{gl}(V) \;\middle|\; y(W) \subset W \ \text{ かつ }\ \mathrm{Tr}(y|_W) = 0 \,\right\}$$

と定義する[*11]．仮定より $\mathfrak{g}$ は半単純 Lie 代数なので系 2.2.3-(1) より $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ であり，$\mathfrak{g} \subset L_W$ が言える．さらにこのとき命題 2.1.1-(3) より $x_s,\ x_n \in L_W$ も言える[*12]．

*10 補題 2.3.5 より $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}(V)$ なので $\mathfrak{g} \subsetneq N$ であることに注意
*11 例えば $L_V = \mathfrak{sl}(V)$ である
*12 $\mathrm{Tr}(x_n) = 0$ なので，$\mathrm{Tr}(x) = \mathrm{Tr}(x_s) = 0$.

ここで

$$\mathfrak{g}' := N \cap \left(\bigcap_{\substack{W \subset V, \\ \text{部分}\mathfrak{g}\text{-加群}}} L_W \right)$$

とおくと，$\mathfrak{g}'$ は $\mathfrak{g}$ をイデアルとしてもつ N の部分 Lie 代数であり，$\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $x_s, x_n \in \mathfrak{g}'$ だとわかる．

最後に $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$ が成り立つことを示す．包含準同型 $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{g}'$ は半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の有限次元表現なので，Weyl の定理よりある $\mathfrak{g}'$ の部分 $\mathfrak{g}$-加群 $\mathfrak{h}$ が存在して $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ と書ける（命題 2.3.1）．ここで W を V の任意の既約な部分 $\mathfrak{g}$-加群とする．もし $y \in \mathfrak{h}$ ならば，$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'] \subset \mathfrak{g}$*13であることから $[\mathfrak{g}, y] = 0$，i.e. $y\colon V \longrightarrow V$ は $\mathfrak{g}$-加群の準同型である．よって代数閉体上の Schur の補題から $y|_W\colon W \longrightarrow W$ はスカラー倍である．一方で $y \in L_W$ でもあるので $\mathrm{Tr}(y|_W) = 0$ であり，$y|_W = 0$ だと分かった．Weyl の定理より V は既約な部分 $\mathfrak{g}$-加群の直和なので $y = 0$ が言えた．i.e. $\mathfrak{h} = 0$ である．

■

系 2.3.5:

$\mathfrak{g}$ を半単純 Lie 代数，$\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ をその有限次元表現とする．
このとき $\forall x \in \mathfrak{g}$ の抽象 Jordan 分解 $x = s_x + n_x$ に対して，$\phi(x) = \phi(s_x) + \phi(n_x) \in \mathfrak{gl}(V)$ は Jordan-Chevalley 分解である．i.e. $\phi(x)_s = \phi(s_x)$，$\phi(x)_n = \phi(n_x)$ が成り立つ．

証明 s_x は半単純なので $\mathrm{ad}(s_x)\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ も半単純．i.e. $\mathrm{ad}(s_x)$ は対角化可能なので $\mathrm{ad}(s_x)$ の固有ベクトル全体がなす集合は $\mathfrak{g}$ の基底となる．従って $\mathrm{ad}_{\phi(\mathfrak{g})}\bigl(\phi(s_x)\bigr)\colon \phi(\mathfrak{g}) \longrightarrow \phi(\mathfrak{g})$ の $\phi(\mathfrak{g})$ の固有ベクトル全体がなす集合は $\phi(\mathfrak{g})$ の基底となる．i.e. $\mathrm{ad}_{\phi(\mathfrak{g})}\bigl(\phi(s_x)\bigr)$ は半単純である．同様に $\mathrm{ad}_{\phi(\mathfrak{g})}\bigl(\phi(n_x)\bigr)$ が冪零であることもわかるので，$\phi(x) = \phi(s_x) + \phi(n_x)$ は半単純 Lie 代数 $\phi(\mathfrak{g})$ における $\phi(x)$ の抽象 Jordan 分解である．よって定理 2.3.4 からこれは Jordan-Chevalley 分解と一致する． ■

! 定理 2.3.4 および系 2.3.5 の意味で Jordan-Chevalley 分解と抽象 Jordan 分解は同一視できるので，以後抽象 Jordan 分解のことも $x = s_x + n_x$ の代わりに $x = \boldsymbol{x_s} + \boldsymbol{x_n}$ と表記する．

2.4 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の表現

この節において常に $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ とし，$\mathfrak{g}$ の全ての表現は有限次元であるとする．【例 **1.1.3**】に倣って $\mathfrak{g}$ の基底は

$$x := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$y := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$h := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

*13 $\mathfrak{g}' \subset N$ だから

を採用する．このとき

$$
\begin{aligned}
[h, x] &= 2x, \\
[h, y] &= -2y, \\
[x, y] &= h
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

2.4.1　ウエイトと極大ベクトル

任意の $\mathfrak{g}$ の表現 $\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ を与える．h は半単純なので系 2.3.5 より $\phi(h)$ を対角化する V の基底がある．よって

$$V_\lambda := \left\{ v \in V \,\middle|\, h \blacktriangleright v = \lambda v \right\}$$

とおくと V は異なる λ に関する V_λ の内部直和になる（固有空間分解）[*14]：

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}} V_\lambda$$

特に $V_\lambda \neq 0$ のとき λ を h の**ウエイト** (weight) と呼び，V_λ を**ウェイト空間** (weight space) と呼ぶ．

補題 2.4.1:

$$v \in V_\lambda \quad \Longrightarrow \quad x \blacktriangleright v \in V_{\lambda+2},\ y \blacktriangleright v \in V_{\lambda-2}$$

証明

$$h \blacktriangleright (x \blacktriangleright v) = [h, x] \blacktriangleright v + x \blacktriangleright h \blacktriangleright v = (\lambda + 2) x \blacktriangleright v$$

■

$\dim V < \infty$ なので，$V_\lambda \neq 0$ かつ $V_{\lambda+2} = 0$ を充たす $\lambda \in \mathbb{K}$ が存在する．このとき $v \in V_\lambda \setminus \{0\}$ のことをウエイト λ の**極大ベクトル** (maximal vector) と呼ぶ．

2.4.2　既約表現の分類

$\mathfrak{g}$-加群 V は既約であるとする．極大ベクトル $v_0 \in V_\lambda$ をとり，

$$v_i := \begin{cases} 0, & i = -1 \\ \dfrac{1}{i!} y^i \blacktriangleright v_0, & i \geq 0 \end{cases}$$

とおく．

[*14] λ が h の固有値でなければ $V_\lambda = 0$ となる．

補題 2.4.2:

(1) $h \blacktriangleright v_i = (\lambda - 2i)v_i$

(2) $y \blacktriangleright v_i = (i+1)v_{i+1}$

(3) $x \blacktriangleright v_i = (\lambda - i + 1)v_{i-1} \quad {}^{\mathrm{w}/} \quad i \geq 0$

証明 (1) 補題 2.4.1 より明らか.

(2) v_i の定義より

$$y \blacktriangleright v_i = \frac{1}{i!} y^{i+1} \blacktriangleright v_0 = (i+1)v_{i+1}$$

(3) i に関する数学的帰納法により示す. $i = 0$ のときは自明. $i > 0$ とする. 帰納法の仮定より $x \blacktriangleright v_{i-1} = (\lambda - i + 2)v_{i-2}$ であるから,

$$\begin{aligned}
x \blacktriangleright v_i &= \frac{1}{i} x \blacktriangleright y \blacktriangleright v_{i-1} \\
&= \frac{1}{i}[x, y] \blacktriangleright v_{i-1} + \frac{1}{i} y \blacktriangleright (x \blacktriangleright v_{i-1}) \\
&= \frac{\lambda - 2i + 2}{i} v_{i-1} + \frac{(\lambda - i + 2)(i-1)}{i} v_{i-1} \\
&= (\lambda - i + 1)v_{i-1}
\end{aligned}$$

が言えて帰納法が完成する.

■

補題 2.4.2-(1) より 0 でない $v_i \in V$ たちは全て線型独立であるが, $\dim V < \infty$ である. そこで

$$m := \min\left\{ m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \;\middle|\; v_m \neq 0 \text{ かつ } v_{m+1} = 0 \right\}$$

とおく. $\forall i > 0$ に対して帰納的に $v_{m+i} = 0$ がわかるので, 補題 2.4.2-(1), (2), (3) より $\mathrm{Span}\{v_0, \dots, v_m\} \subset V$ は非零な部分 $\mathfrak{g}$-加群である. $\mathfrak{g}$ は既約だったので $V = \mathrm{Span}\{v_0, \dots, v_m\}$ が言えた.

補題 2.4.2-(3) を $i = m + 1$ の場合に適用すると $0 = (\lambda - m)v_m$ となり, $\lambda = m = \dim V - 1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ がわかる. この m を $\mathfrak{g}$-加群 V の**最高ウエイト** (highest weight) と呼ぶ. さらに, 補題 2.4.2-(1) より h のウエイトは全て異なる. i.e. $0 \leq \forall \mu \leq m$ に対して, 対応するウエイト空間の次元 $\dim V_{m-2\mu} = 1$ である. 特に最高ウエイトは $\dim V$ によって一意に決まるので, $v_0 \in V_m$ は零でないスカラー倍を除いて一意に定まる.

以上の考察をまとめて次の定理を得る：

定理 2.4.1:

V を $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の既約表現とする.

(1) $m := \dim V - 1$ とおくと $\mathbb{K}$-ベクトル空間として

$$V = \bigoplus_{\mu=0}^{m} V_{m-2\mu} \quad {}^{\mathrm{w}/} \quad 0 \leq \forall \mu \leq m, \ \dim V_{m-2\mu} = 1$$

が成り立つ.

(2) V の極大ベクトルは零でないスカラー倍を除いて一意に決まり, そのウエイトは m である.

(3) $\mathfrak{g}$ の V への作用は補題 2.4.2 によって完全に決まる．

系 2.4.2:

V を任意の有限次元 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群とする．このとき $\phi(h): V \longrightarrow V$ の固有値は全て整数で，かつ自身にマイナス符号をつけたものとちょうど同じ回数だけ出現する．さらに，V の任意の既約表現への内部直和分解において，直和因子の個数はちょうど $\dim V_0 + \dim V_1$ 個である．

<u>**証明**</u> $V = 0$ なら明らか．$V \neq 0$ とする．Weyl の定理により V を既約な部分 $\mathfrak{g}$-加群の直和に分解すると，既約な部分 $\mathfrak{g}$-加群は全て定理 2.4.1-(1) の形をしているので前半が従う．

後半を示す．V の既約な部分 $\mathfrak{g}$-加群への直和分解を

$$V = \bigoplus_i W_i$$

と書くと，定理 2.4.1 より $\forall i$ に対して何かしらの $m_i \geq 0$ が存在して $W_i \cong \bigoplus_{\mu=0}^{m_i} V_{m_i - 2\mu}$ と書ける．逆に $\forall m \geq 0$ に対して，$\bigoplus_{\mu=0}^{m} V_{m-2\mu}$ と $\mathfrak{g}$-加群として同型な全ての W_i の直和を $V^{(m)}$ と書くと，

$$V = \bigoplus_{m=0}^{\infty} V^{(m)}$$

となる．よって $V^{(m)}$ の直和因子の個数を k_m とかくと

$$\dim V_\lambda = \sum_{\substack{m \geq |\lambda|, \\ m \equiv \lambda \mod 2}} k_m$$

となる．特に

$$\dim V_0 + \dim V_1 = \sum_{m=0}^{\infty} k_m$$

なので示された． ■

2.5 ルート空間分解

2.5.1 極大トーラスとルート

2.5.2 極大トーラスの中心化代数

2.5.3 直交性

2.5.4 整性

2.5.5　有理性

付録 A

ベクトル空間の話

[1] が前提としていそうな線型代数の知識をまとめておく．$\mathbb{K}$ を任意の体とする．また，選択公理を認める．

A.1 Hom ベクトル空間

定義 A.1.1: Hom ベクトル空間

任意の $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V,\ W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ を与える．このとき

- 台集合を

$$\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}\left(\boldsymbol{V},\, \boldsymbol{W}\right) := \left\{\, f\colon V \longrightarrow W \,\middle|\, \mathbb{K}\text{-線型写像} \,\right\}$$

  とする．
- 加法とスカラー乗法を，$\forall f,\ f_1,\ f_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(V,\, W\right),\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ について

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 &\colon V \longrightarrow W,\ v \longmapsto f_1(v) + f_2(v) \\ \lambda f &\colon V \longrightarrow W,\ v \longmapsto \lambda\bigl(f(v)\bigr) \end{aligned}$$

  と定める．

ことで得られる $\mathbb{K}$-ベクトル空間のことを $\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}\left(\boldsymbol{V},\, \boldsymbol{W}\right)$ と書く．

特に $\mathbb{K}$ 自身を $\mathbb{K}$-ベクトル空間と見做したとき，

$$\boldsymbol{V}^{*} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(V, \mathbb{K}\right)$$

と書いて**双対ベクトル空間** (dual vector space) と呼ぶ．

特に有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間の場合は，双対ベクトル空間の基底が次のように構成される：

命題 A.1.1: 双対ベクトル空間の基底

有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 V とその基底 $\{e_\mu\}$ を与える．このとき $\dim V$ 個の線型写像 $\varepsilon^\mu \in V^*$ を

$$\varepsilon^\mu(e_\nu) \coloneqq \delta^\mu_\nu$$

により定義すると，$\{\varepsilon^\mu\}$ は V^* の基底になる．

A.2 ベクトル空間のテンソル積

A.2.1 普遍性による定義

$\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V,\, W,\, Z$ を与える．このとき写像 $f\colon V \times W \longrightarrow Z$ が**双線型** (bilinear) であるとは，2 つの引数についてそれぞれ[*1] $\mathbb{K}$-線型であることを言う．i.e. $\forall v,\, v_1,\, v_2 \in V,\ \forall w,\, w_1,\, w_2 \in W,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ に対して

$$\begin{aligned} f(v_1 + v_2,\, w) &= f(v_1,\, w) + f(v_2,\, w) \\ f(v,\, w_1 + w_2) &= f(v,\, w_1) + f(v,\, w_2) \\ f(\lambda v,\, w) &= \lambda f(v,\, w) \\ f(v,\, \lambda w) &= \lambda f(v,\, w) \end{aligned}$$

が成り立つこと．同様に $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V_1,\, \dots,\, V_n,\, W$ に関して，写像 $f\colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W$ が**多重線型** (multillinear) であるとは，全ての引数についてそれぞれ $\mathbb{K}$-線型であることを言う．

定義 A.2.1: ベクトル空間のテンソル積

$\mathbb{K}$ を任意の体とし，$\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V,\, W$ を与える．

- $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $\boldsymbol{V \otimes W}$
- 双線型写像 $\boldsymbol{\Phi}\colon V \times W \longrightarrow \boldsymbol{V \otimes W}$

の 2 つ組 $(V \otimes W,\, \Phi)$ が $V,\, W$ の**テンソル積** (tensor product) であるとは，以下の性質を充たすことをいう：

(テンソル積の普遍性)

任意の $\mathbb{K}$-ベクトル空間 Z および任意の双線型写像 $f\colon V \times W \longrightarrow Z$ に対して，以下の図式を可換にする線型写像 $\overline{f}\colon \boldsymbol{V \otimes W} \longrightarrow Z$ が一意的に存在する：

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\boldsymbol{\Phi}"'] & \forall Z \\ \boldsymbol{V \otimes W} \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

[*1] つまり，直積ベクトル空間 $V \times W$ から Z への線型写像ではない．

テンソル積をとる操作は結合的かつ対称である．i.e. $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \cong (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ および $V_1 \otimes V_2 \cong V_2 \otimes V_1$ が成り立つ．従って以降では 3 つ以上のベクトル空間のテンソル積を括弧を省略して書く．

命題 A.2.1: テンソル積の一意性

テンソル積は，存在すればベクトル空間の同型を除いて一意である．

証明 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 $V, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ を与える．体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間と双線型写像の組 $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\Phi}\colon V \times W \longrightarrow \boldsymbol{T})$ および $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\Phi'}\colon V \times W \longrightarrow \boldsymbol{T'})$ がどちらも V, W のテンソル積であるとする．このときテンソル積の普遍性から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$
\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "\Phi'"] \arrow[d, "\boldsymbol{\Phi}"'] & T' \\
\boldsymbol{T} \arrow[ur, dashed, "\exists! u"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\boldsymbol{\Phi'}"'] & T \\
\boldsymbol{T'} \arrow[ur, dashed, "\exists! u'"']
\end{tikzcd}
$$

が成り立つので，これらの図式を併せた $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$
\begin{tikzcd}
\boldsymbol{T} & \\
V \times W \arrow[u, "\boldsymbol{\Phi}"] \arrow[r, "\Phi'"] \arrow[d, "\boldsymbol{\Phi}"'] & T' \arrow[ul, dashed, "\exists! u'"'] \\
\boldsymbol{T} \arrow[ur, dashed, "\exists! u"']
\end{tikzcd}
$$

が存在する．然るに $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$
\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "\boldsymbol{\Phi}"] \arrow[d, "\boldsymbol{\Phi}"'] & \boldsymbol{T} \\
\boldsymbol{T} \arrow[ur, dashed, "\mathrm{id}_T"']
\end{tikzcd}
$$

も成り立ち，テンソル積の普遍性より赤点線で書いた線型写像は一意でなくてはならないので，

$$u' \circ u = \mathrm{id}_T$$

がわかる．同様の議論から

$$u \circ u' = \mathrm{id}_{T'}$$

も従うので，線型写像 $u\colon \boldsymbol{T} \longrightarrow \boldsymbol{T'}$, $u'\colon \boldsymbol{T'} \longrightarrow \boldsymbol{T}$ は互いに逆写像，i.e. 同型写像である． ■

命題 A.2.1 からテンソル積の一意性が言えたが，そもそもテンソル積が存在しなければ意味がない．そこで，体 $\mathbb{K}$ 上の任意のベクトル空間 $V, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ を素材にしてテンソル積 $(V \otimes W, \Phi\colon V \times W \longrightarrow V \otimes W)$ を具体的に構成してみよう．

$\mathbb{K} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ なので，任意の集合 S に対してベクトル空間の直和

$$\mathbb{K}^{\oplus S} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$$

を考えることができる．$\mathbb{K}^{\oplus S}$ の元 f とは，命題 A.3.4 からわかるように有限個の元 $x_1, \dots, x_n \in S$ を除いた全ての $x \in S$ に対して値 $0 \in \mathbb{K}$ を返すような $\mathbb{K}$ 値関数 $f\colon S \longrightarrow \mathbb{K}$ のことである

ところで，$\forall x \in S$ に対して次のような関数 $\delta_x \in \mathbb{K}^{\oplus S}$ が存在する：

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}$$

この δ_x を x そのものと同一視してしまうことで，先述の $f \in \mathbb{K}^{\oplus(V\times W)}$ は

$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \quad {}^{\mathrm{w}/} \quad \lambda_i := f(x_i) \in \mathbb{K}$$

の形に一意的に書ける．[*2] この意味で，$\mathbb{K}^{\oplus(V\times W)}$ は $V \times W$ の元の**形式的な** $\mathbb{K}$ **係数線形結合**全体がなす $\mathbb{K}$ ベクトル空間と言うことができ，集合 $V \times W$ 上の**自由ベクトル空間**と呼ばれる．自由加群の特別な場合と言っても良い．自由ベクトル空間は次の普遍性によって特徴づけられる：

補題 A.2.1: 自由ベクトル空間の普遍性

任意の集合 S および任意の $\mathbb{K}$ ベクトル空間 $Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ を与える．包含写像

$$\iota\colon S \longrightarrow \mathbb{K}^{\oplus S},\ x \longmapsto \delta_x$$

を考える．このとき，任意の写像 $f\colon S \longrightarrow Z$ に対して線型写像 $u\colon \mathbb{K}^{\oplus S} \longrightarrow Z$ が一意的に存在して，図式 A.2 を可換にする：

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & \forall Z \\ \mathbb{K}^{\oplus S} \arrow[ur, dashed, "\exists! u"'] & \end{tikzcd}$$

図 A.2: 自由ベクトル空間の普遍性

証明 写像

$$u\colon \mathbb{K}^{\oplus S} \longrightarrow Z,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{x_i} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

は右辺が有限和なので well-defined であり，$\forall x \in S$ に対して $u\bigl(\iota(x)\bigr) = f(x)$ を充たす．

別の線型写像 $g\colon \mathbb{K}^{\oplus S} \longrightarrow Z$ が $g \circ \iota = f$ を充たすとする．このとき $\forall x \in S$ に対して $g(\delta_x) = f(x)$ であるから，$\forall v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{x_i} \in \mathbb{K}^{\oplus S}$ に対して

$$g(v) = g\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(\delta_{x_i}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) = u(v)$$

[*2] というのも，このように書けば $\forall y \in S$ に対して

$$f(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{x_i}(y) = \begin{cases} f(x_i), & y = x_i \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

が言えるので．特に，この式の中辺は $\mathbb{K}$ の元の有限和なので意味を持つ．

が言える．よって $g = u$ である． ■

さて，自由加群の普遍性の図式とテンソル積の普遍性の図式はとても似ているので，$\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ の候補として $\mathbb{K}^{\oplus(V \times W)}$ を考えてみる．しかしそのままでは $\iota\colon V \times W \longrightarrow \mathbb{K}^{\oplus(V \times W)}$ が双線型写像になってくれる保証はない．そこで，

$$
\begin{aligned}
\iota(\lambda v,\, w) &\sim \lambda\iota(v,\, w), \\
\iota(v,\, \lambda w) &\sim \lambda\iota(v,\, w), \\
\iota(v_1 + v_2,\, w) &\sim \iota(v_1,\, w) + \iota(v_2,\, w), \\
\iota(v,\, w_1 + w_2) &\sim \iota(v,\, w_1) + \iota(v,\, w_2)
\end{aligned}
$$

を充たすような上手い同値関係による商ベクトル空間を構成する．

命題 A.2.2: テンソル積の構成

$\mathbb{K}^{\oplus(V \times W)}$ の部分集合

$$
\begin{aligned}
S_1 &:= \bigl\{ \iota(\lambda v,\, w) - \lambda\iota(v,\, w) \bigm| \forall v \in V,\, \forall w \in W,\, \forall \lambda \in \mathbb{K} \bigr\}, \\
S_2 &:= \bigl\{ \iota(v,\, \lambda w) - \lambda\iota(v,\, w) \bigm| \forall v \in V,\, \forall w \in W,\, \forall \lambda \in \mathbb{K} \bigr\}, \\
S_3 &:= \bigl\{ \iota(v_1 + v_2,\, w) - \iota(v_1,\, w) - \iota(v_2,\, w) \bigm| \forall v_1,\, \forall v_2 \in V,\, \forall w \in W,\, \forall \lambda \in \mathbb{K} \bigr\}, \\
S_4 &:= \bigl\{ \iota(v,\, w_1 + w_2) - \iota(v,\, w_1) - \iota(v,\, w_2) \bigm| \forall v \in V,\, \forall w_1,\, w_2 \in W,\, \forall \lambda \in \mathbb{K} \bigr\}
\end{aligned}
$$

の和集合 $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ が生成する $\mathbb{K}$ ベクトル空間[a]を $\mathcal{R}$ と書き，商ベクトル空間 $\mathbb{K}^{\oplus(V \times W)}/\mathcal{R}$ の商写像を

$$
\pi\colon \mathbb{K}^{\oplus(V \times W)} \longrightarrow \mathbb{K}^{\oplus(V \times W)}/\mathcal{R},\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \iota(v_i,\, w_i) \longmapsto \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \iota(v_i,\, w_i) \right) + \mathcal{R}
$$

と書き，$\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w} := \pi\bigl(\iota(v,\, w)\bigr)$ とおく．このとき，

- $\mathbb{K}$ ベクトル空間 $\mathbb{K}^{\oplus(\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{W})}/\boldsymbol{\mathcal{R}}$
- 写像 $\boldsymbol{\Phi} = \pi \circ \iota\colon V \times W \longrightarrow \mathbb{K}^{\oplus(\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{W})}/\boldsymbol{\mathcal{R}},\; (v,\, w) \longmapsto v \otimes w$

の組は $V,\, W$ のテンソル積である．

[a] これらの元の形式的な $\mathbb{K}$ 係数線型結合全体が成すベクトル空間のこと．

証明 まず，$\boldsymbol{\Phi}$ が双線型写像であることを示す．商ベクトル空間の和とスカラー乗法の定義から

$$
\begin{aligned}
\Phi(\lambda v,\, w) &= \iota(v,\, w) + \mathcal{R} = \bigl(\lambda\iota(v,\, w) + \iota(\lambda v,\, w) - \lambda\iota(v,\, w)\bigr) + \mathcal{R} \\
&= \lambda\iota(v,\, w) + \mathcal{R} = \lambda\bigl(\iota(v,\, w) + \mathcal{R}\bigr) = \lambda\Phi(v,\, w) \\
\Phi(v_1 + v_2,\, w) &= \iota(v_1 + v_2,\, w) + \mathcal{R} = \bigl(\iota(v_1,\, w) + \iota(v_2,\, w) + \iota(v_1 + v_2,\, w) - \iota(v_1,\, w) - \iota(v_2,\, w)\bigr) + \mathcal{R} \\
&= \bigl(\iota(v_1,\, w) + \iota(v_2,\, w)\bigr) + \mathcal{R} = \bigl(\iota(v_1,\, w) + \mathcal{R}\bigr) + \bigl(\iota(v_2,\, w) + \mathcal{R}\bigr) \\
&= \Phi(v_1,\, w) + \Phi(v_2,\, w)
\end{aligned}
$$

が言える．第 2 引数に関しても同様であり，$\boldsymbol{\Phi}$ は双線型写像である．

次に，上述の構成がテンソル積の普遍性を充たすことを示す．$\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ と任意の双線型写像 $f\colon V \times W \longrightarrow Z$ を与える．自由ベクトル空間の普遍性から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & \forall Z \\ \mathbb{K}^{\oplus(V \times W)} \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

が存在する．f が双線型なので，

$$\begin{aligned}
\overline{f}\big(\iota(\lambda v,\, w)\big) &= f(\lambda v,\, w) = \lambda f(v,\, w) \\
&= \lambda \overline{f}\big(\iota(v,\, w)\big) = \overline{f}\big(\lambda\iota(v,\, w)\big), \\
\overline{f}\big(\iota(v_1 + v_2,\, w)\big) &= f(v_1 + v_2,\, w) = f(v_1,\, w) + f(v_2,\, w) \\
&= \overline{f}\big(\iota(v_1,\, w)\big) + \overline{f}\big(\iota(v_2,\, w)\big) = \overline{f}\big(\iota(v_1,\, w) + \iota(v_2,\, w)\big)
\end{aligned}$$

が成り立つ．第 2 引数についても同様なので，$\mathcal{R} \subset \mathrm{Ker}\,\overline{f}$ である．よって準同型定理から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & \forall Z \\ \mathbb{K}^{\oplus(V \times W)} \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{f}"'] \arrow[d, "\pi"'] & \\ \mathbb{K}^{\oplus(V \times W)}/\mathcal{R} \arrow[uur, dashed, "\exists!u"'] & \end{tikzcd}$$

が存在する．この図式の外周部はテンソル積の普遍性の図式である． ■

A.2.2 多重線型写像とテンソル積

任意の $\mathbb{K}$-ベクトル空間[*3] $V_1,\, \dots,\, V_n,\, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ に対して，集合

$$\boldsymbol{L(V_1,\, \dots,\, V_n;\, W)} \coloneqq \left\{\, F\colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W \;\middle|\; F \text{ は多重線型写像} \,\right\}$$

を考える．$L(V_1,\, \dots,\, V_n;\, W)$ の上の加法とスカラー乗法を $\forall v_i \in V_i,\, \forall\lambda \in \mathbb{K}$ に対して

$$\begin{aligned}
(F + G)(v_1,\, \dots,\, v_n) &\coloneqq F(v_1,\, \dots,\, v_n) + G(v_1,\, \dots,\, v_n), \\
(\lambda F)(v_1,\, \dots,\, v_n) &\coloneqq \lambda\big(F(v_1,\, \dots,\, v_n)\big)
\end{aligned}$$

と定義すると $L(V_1,\, \dots,\, V_n;\, W)$ は $\mathbb{K}$ ベクトル空間になる．特に，Hom の定義から $\mathbb{K}$-ベクトル空間の等式として

$$L(V;\, W) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\,(V,\, W)$$

が成り立つ．テンソル積の普遍性はこの等式を多重線型写像について一般化するものである．

[*3] 有限次元でなくても良い．

命題 A.2.3: 多重線型写像とテンソル積

任意の $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V_1, \dots, V_n, W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ に対して，$\mathbb{K}$-ベクトル空間として

$$L(V_1, \dots, V_n; W) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, W)$$

が成り立つ．

<u>**証明**</u> テンソル積の普遍性から，$\mathbb{K}$-線型写像

$$\alpha \colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, W) \longrightarrow L(V_1, \dots, V_n; W),\ f \longmapsto f \circ \Phi$$

は全単射，i.e. $\mathbb{K}$-ベクトル空間の同型写像である． ■

A.2.3 有限次元ベクトル空間のテンソル積

命題 A.2.4: 有限次元テンソル積の基底

<u>有限次元</u> $\mathbb{K}$-ベクトル空間 V, W（$\dim V =: n,\ \dim W =: m$）を与える．$V, W$ の基底をそれぞれ $\{e_1, \dots, e_n\}, \{f_1, \dots, f_m\}$ と書く．このとき，集合

$$\mathcal{E} \coloneqq \left\{ e_\mu \otimes f_\nu \;\middle|\; 1 \le \mu \le n,\ 1 \le \nu \le m \right\}$$

は $V \otimes W$ の基底である．従って $\dim V \otimes W = nm$ である．

<u>**証明**</u> テンソル積の構成から，$\forall t \in V \otimes W$ は有限個の $(v_i, w_i) \in V \times W$ $(i = 1, \dots l)$ を使って

$$t = \left(\sum_{i=1}^{l} t_i \iota(v_i, w_i) \right) = \sum_{i=1}^{l} t_i v_i \otimes w_i$$

と書ける．$v_i = {v_i}^\mu e_\mu,\ w_i = {w_i}^\mu f_\mu$ のように展開することで，

$$\begin{aligned} t &= \sum_{i=1}^{l} t_i ({v_i}^\mu e_\mu) \otimes ({w_i}^\nu f_\nu) \\ &= \sum_{i=1}^{l} t_i {v_i}^\mu {w_i}^\nu e_\mu \otimes f_\nu \end{aligned}$$

と書ける．ただし添字 μ, ν に関しては Einstein の規約を適用した．従って $\mathcal{E}$ は $V \otimes W$ を生成する．

$\mathcal{E}$ の元が線型独立であることを示す．

$$t^{\mu\nu} e_\mu \otimes e_\nu = 0$$

を仮定する．$\{e_\mu\}, \{f_\mu\}$ の双対基底をそれぞれ $\{\varepsilon^\mu\}, \{\eta^\nu\}$ と書き，全ての添字の組み合わせ $(\mu, \nu) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$ に対して双線型写像

$$\tau^{\mu\nu} \colon V \times W \longrightarrow \mathbb{R},\ (v, w) \longmapsto \varepsilon^\mu(v)\eta^\nu(w)$$

を定める．$\tau^{\mu\nu}$ は双線型なのでテンソル積の普遍性から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$
\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "\tau^{\mu\nu}"] \arrow[d, "\pi\circ\iota"'] & \mathbb{R} \\
\boldsymbol{V \otimes W} \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{\tau}^{\mu\nu}"'] &
\end{tikzcd}
$$

が存在する．このことは，

$$
\begin{aligned}
0 &= \overline{\tau}^{\mu\nu}(t^{\rho\sigma}e_\rho \otimes f_\sigma) \\
&= t^{\rho\sigma}(\overline{\tau}^{\mu\nu} \circ \pi \circ \iota)(e_\rho,\, f_\sigma) \\
&= t^{\rho\sigma}\tau^{\mu\nu}(e_\rho,\, f_\sigma) = t^{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

を意味する．従って $\mathcal{E}$ の元は線型独立である． ■

これでもまだ直接の計算には向かない．より具体的な構成を探そう．$\forall \omega_i \in V_i^*$ に対して，$\boldsymbol{\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_n}$ と書かれる $L(V_1,\, \dots,\, V_n;\, \mathbb{K})$ の元を

$$
\boldsymbol{\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_n} \colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow \mathbb{K},\ (v_1,\, \dots,\, v_n) \longmapsto \prod_{i=1}^{n} \omega_i(v_i)
$$

によって定義する．ただし右辺の総積記号は $\mathbb{K}$ の積についてとる．

命題 A.2.5:

有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V,\, W$（$\dim V =: n,\, \dim W =: m$）の基底をそれぞれ $\{e_\mu\},\, \{f_\nu\}$ と書き，その双対基底をそれぞれ $\{\varepsilon^\mu\},\, \{\eta^\mu\}$ と書く．このとき，集合

$$
\mathcal{B} := \left\{\, \varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu \;\middle|\; 1 \le \mu \le n,\, 1 \le \nu \le m \,\right\}
$$

は $L(V,\, W;\, \mathbb{K})$ の基底である．従って $\dim L(V,\, W;\, \mathbb{K}) = nm$ である．

<u>証明</u> $\forall F \in L(V,\, W;\, \mathbb{K})$ を 1 つとり，全ての添字の組み合わせ $(\mu,\, \nu)$ に対して

$$
F_{\mu\nu} := F(e_\mu,\, f_\nu)
$$

とおく．$\forall (v,\, w) \in V \times W$ を $v = v^\mu e_\mu,\ w = w^\nu f_\nu$ と展開すると，

$$
\begin{aligned}
F_{\mu\nu}\varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu(v,\, w) &= F_{\mu\nu}\varepsilon^\mu(v)\eta^\nu(w) \\
&= F_{\mu\nu}v^\mu w^\nu
\end{aligned}
$$

が成り立つ．一方，双線型性から

$$
F(v,\, w) = v^\mu w^\nu F(e_\mu,\, f_\nu) = F_{\mu\nu}v^\mu w^\nu
$$

も成り立つので $F = F_{\mu\nu}\varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu$ が言えた．i.e. 集合 $\mathcal{B}$ は $L(V,\, W;\, \mathbb{K})$ を生成する．

次に，$\mathcal{B}$ の元が線型独立であることを示す．

$$
F_{\mu\nu}\varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu = 0
$$

を仮定する．全ての添字の組み合わせについて，$(e_\mu,\, f_\nu)$ に左辺を作用させることで，$F_{\mu\nu} = 0$ が従う．i.e. $\mathcal{B}$ の元は互いに線型独立である． ■

命題 A.2.6: テンソル積の構成その 2

任意の有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V,\ W$ に対して

$$L(V,\ W;\ \mathbb{K}) \cong V^* \otimes W^*$$

命題 A.2.3 より，これは

$$L(V,\ W;\ \mathbb{K}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V \otimes W,\ \mathbb{K}) = (V \otimes W)^* \cong V^* \otimes W^*$$

と同値である．

証明 写像

$$\begin{aligned}\Phi\colon V^* \times W^* &\longrightarrow L(V,\ W;\ \mathbb{K}),\\ (\omega,\ \eta) &\longmapsto \bigl((v,\ w) \longmapsto \omega(v)\eta(w)\bigr)\end{aligned}$$

は双線型写像なのでテンソル積の普遍性から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$\begin{tikzcd} V^* \times W^* \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi\circ\iota"'] & L(V,\ W;,\ \mathbb{K}) \\ \boldsymbol{V^* \otimes W^*} \arrow[ur, dashed, red, "\exists!\overline{\Phi}"'] & \end{tikzcd}$$

が存在する．$V,\ W$（$\dim V = n,\ \dim W = m$）の基底をそれぞれ $\{e_\mu\},\ \{f_\nu\}$ と書き，その双対基底をそれぞれ $\{\varepsilon^\mu\},\ \{\eta^\mu\}$ と書く．命題 A.2.4 より $V^* \otimes W^*$ の基底として

$$\mathcal{E} := \bigl\{\, \varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu \bigm| 1 \le \mu \le n,\ 1 \le \nu \le m \,\bigr\}$$

がとれ，命題 A.2.5 より $L(V,\ W;\ \mathbb{K})$ の基底として

$$\mathcal{B} := \bigl\{\, \varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu \bigm| 1 \le \mu \le n,\ 1 \le \nu \le m \,\bigr\}$$

がとれる（記号が同じだが，違う定義である）．このとき，$\forall (v,\ w) \in V \times W$ に対して

$$\overline{\Phi}(\varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu)(v,\ w) = \overline{\Phi} \circ \pi \circ \iota(\varepsilon^\mu,\ \eta^\nu)(v,\ w) = \Phi(\varepsilon^\mu,\ \eta^\nu)(v,\ w) = \varepsilon^\mu(v)\eta^\nu(w) = \varepsilon^\mu \otimes \eta^\nu(v,\ w)$$

が成り立つ（ただし，左辺の $\otimes$ は命題 A.2.2，右辺は命題 A.2.5 で定義したものである）ので，$\overline{\Phi}$ は $\mathcal{E}$ の元と $\mathcal{B}$ の元の 1 対 1 対応を与える．i.e. 同型写像である． ■

命題 A.2.7: テンソル積と Hom の同型

任意の有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V,\ W$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\ W) \cong V^* \otimes W$$

証明 写像

$$\begin{aligned}\Phi\colon V^* \times W &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\ W),\\ (\omega,\ w) &\longmapsto \bigl(v \longmapsto \omega(v)w\bigr)\end{aligned}$$

は双線型なので，テンソル積の普遍性から $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の可換図式

$$
\begin{tikzcd}
V^* \times W \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi\circ\iota"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W) \\
\boldsymbol{V^* \otimes W} \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{\Phi}"'] &
\end{tikzcd}
$$

が存在する．$V,\, W$（$\dim V = n,\, \dim W = m$）の基底をそれぞれ $\{e_\mu\},\, \{f_\nu\}$ と書き，その双対基底をそれぞれ $\{\varepsilon^\mu\},\, \{\eta^\mu\}$ と書く．命題 A.2.4 より $V^* \otimes W$ の基底として

$$
\mathcal{E} \coloneqq \left\{\, \varepsilon^\mu \otimes f_\nu \;\middle|\; 1 \le \mu \le n,\, 1 \le \nu \le m \,\right\}
$$

がとれる．一方，$\forall \omega \in V^*,\, \forall w \in W$ に対して

$$
\omega \otimes w \coloneqq \Phi(\omega,\, w) \colon V \longrightarrow W,\; v \longmapsto \omega(v)w \tag{A.2.1}
$$

とおくと $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W)$ の基底として

$$
\mathcal{B} \coloneqq \left\{\, \varepsilon^\mu \otimes f_\nu \;\middle|\; 1 \le \mu \le n,\, 1 \le \nu \le m \,\right\}
$$

がとれる[*4]（記号が同じだが，$\mathcal{E}$ とは違う定義である）．このとき，$\forall v \in V$ に対して

$$
\overline{\Phi}(\varepsilon^\mu \otimes f_\nu)(v) = \overline{\Phi} \circ \pi \circ \iota(\varepsilon^\mu,\, f_\nu)(v) = \Phi(\varepsilon^\mu,\, f_\nu)(v) = \varepsilon^\mu(v) f_\nu = \varepsilon^\mu \otimes f_\nu(v)
$$

が成り立つ（ただし，左辺の $\otimes$ は命題 A.2.2，右辺は (A.2.1) で定義したものである）ので，$\overline{\Phi}$ は $\mathcal{E}$ の元と $\mathcal{B}$ の元の 1 対 1 対応を与える．i.e. 同型写像である． ■

系 A.2.1:

任意の有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V_1,\, \ldots,\, V_n,\, W$ に対して

$$
L(V_1,\, \ldots,\, V_n;\, W) \cong V_1^* \otimes \cdots \otimes V_n^* \otimes W
$$

証明 命題 A.2.3 および命題 A.2.6, A.2.7 から

$$
\begin{aligned}
L(V_1,\, \ldots,\, V_n;\, W) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n,\, W) \\
&\cong (V_1 \otimes \cdots \otimes V_n)^* \otimes W \\
&\cong V_1^* \otimes \cdots \otimes V_n^* \otimes W
\end{aligned}
$$

を得る． ■

[*4] $\forall F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W)$ をとる．${F_\mu}^\nu \coloneqq \eta^\nu\bigl(F(e_\mu)\bigr)$ とおく．このとき $\forall v = v^\mu e_\mu \in V$ に対して

$$
{F_\mu}^\nu \varepsilon^\mu \otimes f_\nu(v) = {F_\mu}^\nu \varepsilon^\mu(v) f_\nu = {F_\mu}^\nu v^\mu f_\nu
$$

一方で，線形性および双対基底の定義から

$$
F(v) = v^\mu F(e_\mu) = v^\mu \eta^\nu\bigl(F(e_\mu)\bigr) f_\nu = v^\mu {F_\mu}^\nu f_\nu
$$

が成り立つので $F = {F_\mu}^\nu \varepsilon^\mu \otimes f_\nu$ が言えた．i.e. $\mathcal{B}$ は $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\, W)$ を生成する．

次に，$\mathcal{B}$ の元が線型独立であることを示す．

$$
{F_\mu}^\nu \varepsilon^\mu \otimes f_\nu = 0
$$

を仮定する．$1 \le \forall \mu \le \dim V$ について右辺を e_μ に作用させることで ${F_\mu}^\nu f_\nu = 0$ が従うが，f_ν の線型独立性から ${F_\mu}^\nu = 0$ である．

系 A.2.2: Tensor-Hom adjunction

任意の有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $V,\ W,\ Z$ に対して，

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V \otimes W,\ Z) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\bigl(V,\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W,\ Z)\bigr)$$

証明 命題 A.2.6, A.2.7 およびテンソル積の結合則より

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V \otimes W,\ Z) &\cong (V \otimes W)^* \otimes Z \\ &\cong V^* \otimes W^* \otimes Z \\ &\cong V^* \otimes (W^* \otimes Z) \\ &\cong V^* \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W,\ Z) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\bigl(V,\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W,\ Z)\bigr)\end{aligned}$$

■

! 系 A.2.2 は，有限次元ベクトル空間の圏が閉圏 (closed category) であることを意味する．

A.3 ベクトル空間の直積・直和

A.3.1 普遍性による定義

A を集合とする．集合 I を**添字集合** (index set) とする A の元の**族** (family) とは，写像 $a\colon I \longrightarrow A$ のことを言う．$\forall i \in I$ に対して $\boldsymbol{a_i} := a(i)$ と略記し，写像 $a\colon I \longrightarrow A$ 自身のことを $\boldsymbol{(a_i)_{i\in I}}$ や $\boldsymbol{\{a_i\}_{i\in I}}$ と略記する．集合族 $\{A_i\}_{i\in I}$ の**直積** (Cartesian product) とは，写像の集合

$$\prod_{i\in I} \boldsymbol{A_i} := \left\{ a\colon I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \;\middle|\; \forall i \in I,\ a(i) \in A_i \right\}$$

のこと．集合族の直積について定まる自然な全射

$$\pi_i\colon \prod_{j\in I} A_j \longrightarrow A_i,\ a \longmapsto a(i)$$

のことを**標準的射影** (canonical projection) と呼ぶ．族としての略記を使うと，直積は

$$\prod_{i\in I} A_i = \left\{ (a_i)_{i\in I} \;\middle|\; \forall i \in I,\ a_i \in A_i \right\}$$

と書くことができる．選択公理を認めたので空でない集合族の直積は空でない．

定義 A.3.1: 直積・直和-普遍性による定義

添字集合 I，および $\mathbb{K}$-ベクトル空間の族 $\{V_i\}_{i\in I}$ を与える．

(1)
- $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $\boldsymbol{P}$
- $\mathbb{K}$-線型写像の族 $\{\boldsymbol{\pi_i}\colon \boldsymbol{P} \longrightarrow V_i\}_{i\in I}$

の 2 つ組が $\mathbb{K}$-ベクトル空間の族 $\{V_i\}_{i\in I}$ の**直積** (product) であるとは，以下の性質を充たすことを言う：

(ベクトル空間の直積の普遍性)

$\forall W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ および任意の $\mathbb{K}$-線型写像の族 $\{f_i\colon W \longrightarrow V_i\}_{i\in I}$ に対して，以下の図式を可換にする $\mathbb{K}$-線型写像 $f\colon W \longrightarrow \boldsymbol{P}$ が一意的に存在する：

$$
\begin{tikzcd}
\forall W \arrow[d, dashed, "\exists! f"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\
\boldsymbol{P} \arrow[r, "\boldsymbol{\pi_i}"'] & V_i
\end{tikzcd}
$$

(2)
- $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $\boldsymbol{S}$
- $\mathbb{K}$-線型写像の族 $\{\boldsymbol{\iota_i}\colon V_i \longrightarrow \boldsymbol{S}\}_{i\in I}$

の 2 つ組が $\mathbb{K}$-ベクトル空間の族 $\{V_i\}_{i\in I}$ の**直和** (direct sum) であるとは，以下の性質を充たすことを言う：

(ベクトル空間の直和の普遍性)

$\forall W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}})$ および任意の $\mathbb{K}$-線型写像の族 $\{f_i\colon V_i \longrightarrow W\}_{i\in I}$ に対して，以下の図式を可換にする $\mathbb{K}$-線型写像 $f\colon \boldsymbol{S} \longrightarrow W$ が一意的に存在する：

$$
\begin{tikzcd}
\forall W & \\
\boldsymbol{S} \arrow[u, dashed, "\exists! f"] & V_i \arrow[l, "\boldsymbol{\iota_i}"] \arrow[ul, "f_i"']
\end{tikzcd}
$$

命題 A.3.1:

ベクトル空間の直和・直積は，存在すれば同型を除いて一意である．

<u>**証明**</u> テンソル積の場合と全く同様． ■

命題 A.3.2: ベクトル空間の直和・直積の構成

添字集合 I，および $\mathbb{K}$-ベクトル空間の族 $\{V_i\}_{i\in I}$ を与える．

(1)
- 集合族の直積 $\prod_{i\in I} V_i$ の上に加法とスカラー乗法を

$$
\begin{aligned}
(v_i)_{i\in I} + (w_i)_{i\in I} &\coloneqq (v_i + w_i)_{i\in I} \\
\lambda(v_i)_{i\in I} &\coloneqq (\lambda v_i)_{i\in I}
\end{aligned}
$$

と定義することで得られる $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $\prod_{i\in I} V_i$
- $\forall i \in I$ に対して定まる $\mathbb{K}$-線型写像[a]

$$
\pi_i\colon \prod_{j\in I} V_j \longrightarrow V_i,\ (v_j)_{j\in I} \longmapsto v_i
$$

の 2 つ組は $\{V_i\}_{i\in I}$ の直積である．

(2) • 集合族の直積 $\prod_{i\in I} V_i$ の部分集合

$$\bigoplus_{i\in I} V_i := \left\{ (v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i \;\middle|\; \substack{\text{有限個の添字を除いた全ての } j\in I \\ \text{について } v_j=0\in V_j} \right\}$$

の上に加法とスカラー乗法を

$$\begin{aligned}(v_i)_{i\in I} + (w_i)_{i\in I} &:= (v_i + w_i)_{i\in I} \\ \lambda(v_i)_{i\in I} &:= (\lambda v_i)_{i\in I}\end{aligned}$$

と定義することで得られる $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $\bigoplus_{i\in I} V_i$

• $\forall i \in I$ に対して定まる $\mathbb{K}$-線型写像[b]

$$\begin{aligned}&\iota_i \colon V_i \longrightarrow \bigoplus_{j\in I} V_j,\; v \longmapsto (y_j)_{j\in I} \\ &\text{w/}\quad y_j = \begin{cases} v, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}\end{aligned}$$

の 2 つ組は $\{V_i\}_{i\in I}$ の直和である．

[a] 集合 $\prod_{i\in I} V_i$ に入れたベクトル空間の構造の定義から，自動的に π_i は $\mathbb{K}$-線型写像になる．
[b] 集合 $\bigoplus_{i\in I} V_i$ に入れたベクトル空間の構造の定義から，自動的に ι_i は $\mathbb{K}$-線型写像になる．

! 構成から明らかに，添字集合 I が有限集合ならベクトル空間の直積と直和は同型である．

証明 (1) **f の存在**

任意の $\mathbb{K}$-ベクトル空間 W および任意の $\mathbb{K}$-線型写像の族 $\{ f_\lambda \colon N \to M_\lambda \}_{\lambda\in\Lambda}$ を与える．このとき写像 f を

$$f \colon W \longrightarrow \prod_{i\in I} V_i,\; w \longmapsto \bigl(f_i(w)\bigr)_{i\in I}$$

と定義すると，f は $\prod_{i\in I} V_i$ の $\mathbb{K}$-ベクトル空間としての構造の定義から自動的に $\mathbb{K}$-線型写像になり，$\forall i \in I$ および $\forall w \in W$ に対して

$$(\pi_i \circ f)(w) = f_i(w)$$

が成り立つ．i.e. 直積の普遍性の可換図式が成り立つ．

f の一意性

直積の普遍性の可換図式を充たす別の $\mathbb{K}$-線型写像 $g \colon W \to \prod_{i\in I} V_i$ が存在したとする．このとき $\forall i \in I$ および $\forall w \in W$ に対して

$$\pi_i\bigl(g(w)\bigr) = f_i(w) = \pi_i\bigl(f(w)\bigr)$$

が成り立つので $f = g$ が言える．i.e. f は一意である．

(2) **f の存在**

任意の $\mathbb{K}$-ベクトル空間 W および任意の $\mathbb{K}$-線型写像の族 $\{\, f_i\colon M_i \to N \,\}_{i\in I}$ が与えられたとき，写像 f を

$$f\colon \bigoplus_{i\in I} V_i \to W,\ (v_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} f_i(v_i)$$

と定義する．右辺は有限和なので意味を持ち，f は $\bigoplus_{i\in I} V_i$ の $\mathbb{K}$-ベクトル空間としての構造の定義から自動的に $\mathbb{K}$-線型写像になる．このとき $\forall i \in I$ および $\forall v \in V_i$ に対して

$$f\bigl(\iota_i(v)\bigr) = f_i(v) + \sum_{j\in I\setminus\{i\}} f_j(0) = f_i(v)$$

が成り立つ．i.e. 直和の普遍性の可換図式が成り立つ．

f の一意性

直和の普遍性の可換図式を充たす別の $\mathbb{K}$-線型写像 $g\colon \bigoplus_{i\in I} V_i \to W$ が存在したとする．このとき $\forall (v_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} V_i$ に対して

$$g\bigl((v_i)_{i\in I}\bigr) = g\left(\sum_{i\in I} \iota_i(v_i)\right) = \sum_{i\in I} g\bigl(\iota_i(v_i)\bigr) = \sum_{i\in I} f_i(v_i) = f\bigl((v_i)_{i\in I}\bigr)$$

が成り立つので $f = g$ が言える．i.e. f は一意である．

■

命題 A.3.3: Hom と直積・直和の交換

任意の $\mathbb{K}$-ベクトル空間 W，添字集合 I，および $\mathbb{K}$-ベクトル空間の族 $\{V_i\}_{i\in I}$ を与える．このとき以下の 2 つの $\mathbb{K}$-ベクトル空間の同型が成り立つ：

(1)

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(W,\, \prod_{i\in I} V_i\right) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\,(W,\, V_i)$$

(2)

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(\bigoplus_{i\in I} V_i,\, W\right) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\,(V_i,\, W)$$

証明 (1) 直積の普遍性より，$\mathbb{K}$-線型写像

$$\alpha\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(W,\, \prod_{i\in I} V_i\right) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\,(W,\, V_i),\ f \longmapsto (\pi_i \circ f)_{i\in I}$$

は全単射である．

(2) 直和の普遍性より，$\mathbb{K}$-線型写像

$$\beta\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(\bigoplus_{i\in I} V_i,\, W\right) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\,(V_i,\, W),\ f \longmapsto (f \circ \iota_i)_{i\in I}$$

は全単射である．

■

!

命題 A.3.3 の同型は，$\mathbb{K}$-ベクトル空間の圏 $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ における（圏論的）極限，余極限に関する同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(W,\, \lim_{i\in I} V_i\right) \cong \lim_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(W,\, V_i\right)$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(\operatorname*{colim}_{i\in I} V_i,\, W\right) \cong \lim_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(V_i,\, W\right)$$

の一例である．

A.3.2　部分ベクトル空間の直和

$\mathbb{K}$-ベクトル空間 V の部分ベクトル空間の族 $\left\{W_i\right\}_{i\in I}$ の和空間とは，V の部分 $\mathbb{K}$-ベクトル空間

$$\sum_{\boldsymbol{i\in I}} \boldsymbol{W_i} \coloneqq \left\{ \sum_{i\in I} w_i \in V \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall i\in I,\, w_i\in W_i \text{ かつ，有限個の添字を除いた} \\ \text{全ての } j\in I \text{ について } w_j = 0 \in W_j \end{array} \right\}$$

のこと．集合 $\bigcup_{i\in I} W_i$ が生成する（張る）部分 $\mathbb{K}$-ベクトル空間と言っても良い．

命題 A.3.4: 部分ベクトル空間の直和

$\mathbb{K}$-ベクトル空間 V の部分ベクトル空間の族 $\left\{W_i\right\}_{i\in I}$ が

$$\forall i \in I,\; W_i \cap \left(\sum_{j\in I\setminus\{i\}} W_j \right) = 0 \tag{A.3.1}$$

を充たすとする．このとき

- 和空間 $\sum_{i\in I} W_i$
- $\forall i \in I$ に対して定まる $\mathbb{K}$-線型写像

$$\iota_i \colon W_i \longrightarrow \sum_{j\in I} W_j,\; w \longmapsto w$$

の 2 つ組は $\left\{W_i\right\}_{i\in I}$ の直和である．

__証明__ $\forall w \in \sum_{i\in I} W_i$ を 1 つとる．まず，条件 (A.3.1) が充たされているならば $w = w_{i_1} + \cdots + w_{i_n}$ $(1 \leq \forall k \leq n,\; v_{i_k} \in W_{i_k})$ と書く方法が一意的に定まることを示す．$w = w_{i_1} + \cdots + w_{i_n} = w'_{j_1} + \cdots + w'_{j_m}$ が成り立つと仮定する．$A \coloneqq \{i_1, \dots, i_n\} \cup \{j_1, \dots, j_m\} \subset I$ とおき，$\forall r \in A \setminus \{i_1, \dots, i_n\}$ に対しては $w_r = 0$, $\forall s \in A \setminus \{j_1, \dots, j_m\}$ に対しては $w'_s = 0$ とおくことで

$$w = \sum_{r\in A} w_r = \sum_{r\in A} w'_r \in \sum_{i\in I} W_i$$

と書ける[*5]．このとき $\forall r \in A$ について

$$w_r - w'_r = \sum_{s\in A\setminus\{r\}} (w'_s - w_s) \in W_r \cap \left(\sum_{s\in A\setminus\{r\}} W_s \right)$$

*5 $\sharp A \leq n + m < \infty$ なので左辺は有限和である．

が言えるが，条件 (A.3.1) より左辺は 0 である．i.e. $\forall r \in A$ に対して $w_r = w'_r$ が言えた．

次に直和の普遍性を示す．任意の $\mathbb{K}$-ベクトル空間 W および $\mathbb{K}$-線型写像の族 $\left\{f_i \colon V_i \longrightarrow W\right\}_{i\in I}$ を与える．このとき $\mathbb{K}$-線型写像

$$f \colon \sum_{i\in I} W_i \longrightarrow W,\ \sum_{i\in I} w_i \longmapsto \sum_{i\in I} f_i(w_i)$$

は先程の議論から well-defined であり[*6]，かつ $\forall i \in I,\ \forall w \in W_i$ に対して

$$f(w) = f_i(w) = f_i \circ \iota_i(w)$$

を充たす．i.e. $\forall i \in I$ に対して図式

$$\begin{tikzcd}
\forall W & \\
\sum_{i\in I} W_i \arrow[u, dashed, "\exists! f"] & W_i \arrow[l, "\iota_i"] \arrow[ul, "f_i"']
\end{tikzcd}$$

は可換である．別の $\mathbb{K}$-線型写像 $g \colon \sum_{i\in I} W_i \longrightarrow W$ がこの図式を可換にするならば，線型性から $\forall w = \sum_{i\in I} w_i \in \sum_{i\in I} W_i$ に対して

$$g(w) = g\left(\sum_{i\in I} w_i\right) = \sum_{i\in I} g(w_i) = \sum_{i\in I} g \circ \iota_i(w_i) = \sum_{i\in I} f_i(w_i) = f(w)$$

が言える．i.e. $g = f$ であり，f は一意である． ■

系 A.3.1: 内部直和

$\mathbb{K}$-ベクトル空間 V の部分ベクトル空間の族 $\left\{W_i\right\}_{i\in I}$ が

$$\forall i \in I,\ W_i \cap \left(\sum_{j\in I\setminus\{i\}} W_j\right) = 0$$

を充たすとする．このとき

$$\sum_{i\in I} W_i \cong \bigoplus_{i\in I} W_i$$

が成り立つ．ただし右辺は命題 A.3.2 で構成したベクトル空間の直和である．

! 結局同型ではあるのだが，系 A.3.1 において $\sum_{i\in I} W_I$ と $\bigoplus_{i\in I} W_i$ を区別するときは，前者を**内部直和** (internal direct sum)，後者を**外部直和** (external direct sum) と呼ぶ．

<u>**証明**</u> 命題 A.3.1 より従う． ■

[*6] 右辺は有限和なので意味を持つ．

A.4　階数・退化次数の定理

A.4.1　有限次元の場合

V, W を**有限次元** $\mathbb{K}$ ベクトル空間とし，線型写像 $T\colon V \longrightarrow W$ を与える．V, W の基底 $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{\dim V}\}$, $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{\dim W}\}$ をとり，

$$T(\mathbf{e}_\mu) = T^\nu{}_\mu \mathbf{f}_\nu$$

のように左辺を展開したときに得られる行列

$$\begin{bmatrix} T^1{}_1 & \cdots & T^1{}_{\dim V} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T^{\dim W}{}_1 & \cdots & T^{\dim W}{}_{\dim V} \end{bmatrix}$$

は基底 $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{\dim V}\}$, $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{\dim W}\}$ に関する T の**表現表列**と呼ばれる．$\forall \boldsymbol{v} = v^\nu \mathbf{e}_\nu \in V$ に対して

$$T(\boldsymbol{v}) = T(v^\nu \mathbf{e}_\nu) = v^\nu T(\mathbf{e}_\nu) = v^\nu T^\mu{}_\nu \mathbf{f}_\mu$$

と書けるので，成分表示だけを見ると T はその表現行列を左から掛けることに相当する：

$$\begin{bmatrix} T^1{}_1 & \cdots & T^1{}_{\dim V} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T^{\dim W}{}_1 & \cdots & T^{\dim W}{}_{\dim V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^{\dim V} \end{bmatrix}$$

定義 A.4.1: 線型写像の階数

$\mathrm{Im}\, T$ の次元のことを T の**階数** (rank) と呼び，$\mathbf{rank}\, \boldsymbol{T}$ と書く．

命題 A.4.1: 表現行列の標準形

V, W を**有限次元**ベクトル空間とし，任意の線型写像 $T\colon V \longrightarrow W$ を与える．このとき V, W の基底であって，T の表現行列を

$$\begin{bmatrix} I_{\mathrm{rank}\, T} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

の形にするものが存在する．

<u>**証明**</u> $\mathrm{Im}\, T$ の基底 $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{\mathrm{rank}\, T}\}$ および $\mathrm{Ker}\, T$ の基底 $\{\mathbf{k}_1, \dots \mathbf{k}_{\dim(\mathrm{Ker}\, T)}\}$ を勝手にとる．像の定義から，$1 \leq \forall \mu \leq \mathrm{rank}\, T$ に対して $\mathbf{e}_\mu \in V$ が存在して $\mathbf{f}_\mu = T(\mathbf{e}_\mu)$ を充たす．

まず $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{\mathrm{rank}\, T}, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{\dim(\mathrm{Ker}\, T)}$ が V の基底を成すことを示す．

線型独立性

$$\sum_{\mu=1}^{\mathrm{rank}\, T} a^\mu \mathbf{e}_\mu + \sum_{\nu=1}^{\dim(\mathrm{Ker}\, T)} b^\nu \mathbf{k}_\nu = 0$$

を仮定する．左辺に T を作用させることで

$$\sum_{\mu=1}^{\mathrm{rank}\, T} a^\mu \mathbf{f}_\mu = 0$$

がわかるが，$\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{\mathrm{rank}\, T}$ は $\mathrm{Im}\, T$ の基底なので線型独立であり，$1 \leq \forall \mu \leq \mathrm{rank}\, T$ に対して $a_\mu = 0$ が言える．故に仮定から

$$\sum_{\nu=1}^{\dim(\mathrm{Ker}\, T)} b^\nu \mathbf{k}_\nu = 0$$

であるが，$\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{\dim(\mathrm{Ker}\, T)}$ は $\mathrm{Ker}\, T$ の基底なので線型独立であり，$1 \leq \forall \nu \leq \dim(\mathrm{Ker}\, T)$ に対して $b_\nu = 0$ が言える．i.e. $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{\mathrm{rank}\, T}, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{\dim(\mathrm{Ker}\, T)}$ は線型独立である．

V を生成すること　$\forall \boldsymbol{v} \in V$ を 1 つとる．このとき $T(\boldsymbol{v}) \in \mathrm{Im}\, T$ なので

$$T(\boldsymbol{v}) = \sum_{\mu=1}^{\mathrm{rank}\, T} v^\mu \mathbf{f}_\mu$$

と展開できる．ここで $\boldsymbol{w} := \sum_{\mu=1}^{\mathrm{rank}\, T} v^\mu \mathbf{e}_\mu \in V$ とおくと，$T(\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{w})$ が成り立つが，T が線型写像であることから $T(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) = 0 \iff \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \in \mathrm{Ker}\, T$ が言えて

$$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = \sum_{\nu=1}^{\dim(\mathrm{Ker}\, T)} w^\nu \mathbf{k}_\nu$$

と展開できる．従って

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} + (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) = \sum_{\mu=1}^{\mathrm{rank}\, T} v^\mu \mathbf{e}_\mu + \sum_{\nu=1}^{\dim(\mathrm{Ker}\, T)} w^\nu \mathbf{k}_\nu$$

であり，$\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{\mathrm{rank}\, T}, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{\dim(\mathrm{Ker}\, T)}$ は V を生成する．

$\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{\mathrm{rank}\, T}$ と線型独立な $\dim W - \mathrm{rank}\, T$ 個のベクトル $\tilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{rank}\, T+1}, \dots, \tilde{\mathbf{f}}_{\dim W}$ をとると，

- V の基底 $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{\mathrm{rank}\, T}, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{\dim(\mathrm{Ker}\, T)}\}$
- W の基底 $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{\mathrm{rank}\, T}, \tilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{rank}\, T+1}, \dots, \tilde{\mathbf{f}}_{\dim W}\}$

に関する T の表現行列は

$$\begin{bmatrix} I_{\mathrm{rank}\, T} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

になる．■

系 A.4.1: 階数・退化次数の定理（有限次元）

V, W を**有限次元**ベクトル空間とし，任意の線型写像 $T\colon V \longrightarrow W$ を与える．このとき

$$\dim V = \dim(\mathrm{Im}\, T) + \dim(\mathrm{Ker}\, T)$$

が成り立つ．

証明 命題 A.4.1 の証明より従う． ■

系 A.4.1 から便利な補題がいくつか従う：

補題 A.4.1: 有限次元ベクトル空間に関する小定理集

V, W を**有限次元**ベクトル空間とし，任意の線型写像 $T\colon V \longrightarrow W$ を与える．このとき以下が成り立つ：

(1) $\operatorname{rank} T \le \dim V$. 特に $\operatorname{rank} T = \dim V \iff T$ は単射
(2) $\operatorname{rank} T \le \dim W$. 特に $\operatorname{rank} T = \dim W \iff T$ は全射
(3) $\dim V = \dim W$ かつ T が単射 $\implies$ T は同型写像
(4) $\dim V = \dim W$ かつ T が全射 $\implies$ T は同型写像

証明 (1) 系 A.4.1 より

$$\dim V = \operatorname{rank} T + \dim(\operatorname{Ker} T) \ge \operatorname{rank} T$$

が成り立つ．特に命題??から T が単射 $\iff \operatorname{Ker} T = 0 \iff \dim(\operatorname{Ker} T) = 0 \iff \operatorname{rank} T = \dim V$ が従う．

(2) rank の定義より $\operatorname{rank} T \le \dim W$ は明らか．特に次元の等しい有限次元ベクトル空間は同型なので，T が全射 $\iff \operatorname{Im} T \cong W \iff \dim(\operatorname{Im} T) = \operatorname{rank} T = \dim W$ が言える．

(3) $\dim V = \dim W$ かつ T が単射とする．T が単射なので (1) より $\operatorname{rank} T = \dim V = \dim W$ が従い，(2) より T は全射でもある．

(4) $\dim V = \dim W$ かつ T が全射とする．T が全射なので (2) より $\operatorname{rank} T = \dim W = \dim V$ が従い，(1) より T は単射でもある．

■

A.4.2 分裂補題と射影的加群

実は，系 A.4.1 は有限次元でなくとも成り立つ．それどころか，左 R 加群の場合の分裂補題に一般化される．

補題 A.4.2: 分裂補題

左 R 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i_1} M \xrightarrow{p_2} M_2 \longrightarrow 0 \tag{A.4.1}$$

が与えられたとする．このとき，以下の二つは同値である：

(1) 左 R 加群の準同型 $i_2\colon M_2 \longrightarrow M$ であって $p_2 \circ i_2 = 1_{M_2}$ を充たすものが存在する
(2) 左 R 加群の準同型 $p_1\colon M \longrightarrow M_1$ であって $p_1 \circ i_1 = 1_{M_1}$ を充たすものが存在する

<u>**証明**</u> **(1) $\Longrightarrow$ (2)** 写像

$$p_1'\colon M \longrightarrow M,\ x \longmapsto x - i_2\bigl(p_2(x)\bigr)$$

を定義すると，

$$p_2\bigl(p_1'(x)\bigr) = p_2(x) - ((p_2 \circ i_2) \circ p_2)(x) = p_2(x) - p_2(x) = 0$$

が成り立つ．従って，(A.4.1) が完全列であることを使うと $p_1'(x) \in \operatorname{Ker} p_2 = \operatorname{Im} i_1$ である．さらに i_1 が単射であることから

$$\exists! y \in M_1,\ p_1'(x) = i_1(y)$$

が成り立つ．ここで写像

$$p_1\colon M \longrightarrow M_1,\ x \longmapsto y$$

を定義するとこれは準同型写像であり，$\forall x \in M_1$ に対して

$$p_1'\bigl(i_1(x)\bigr) = i_1(x) - (i_2 \circ (p_2 \circ i_1))(x) = i_1(x)$$

が成り立つ[*7]ことから

$$(p_1 \circ i_1)(x) = x$$

とわかる．i.e. $p_1 \circ i_1 = 1_{M_1}$

(1) $\Longleftarrow$ (2) (A.4.1) は完全列であるから $M_2 = \operatorname{Ker} 0 = \operatorname{Im} p_2$ である．従って $\forall x \in M_2 = \operatorname{Im} p_2$ に対して，$x = p_2(y)$ を充たす $y \in M$ が存在する．ここで写像

$$i_2\colon M_2 \longrightarrow M,\ x \longmapsto y - i_1\bigl(p_1(y)\bigr)$$

は well-defined である．$x = p_2(y')$ を充たす勝手な元 $y' \in M$ をとってきたとき，$p_2(y - y') = 0$ より $y - y' \in \operatorname{Ker} p_2 = \operatorname{Im} i_1$ だから，i_1 の単射性から

$$\exists! z \in M_1, \quad y - y' = i_1(z)$$

が成り立ち，このとき

$$\Bigl(y - i_1\bigl(p_1(y)\bigr)\Bigr) - \Bigl(y' - i_1\bigl(p_1(y')\bigr)\Bigr) = i_1(z) - (i_1 \circ (p_1 \circ i_1))(z) = i_1(z) - i_1(z) = 0$$

とわかるからである．i_2 は準同型写像であり，$\forall x \in M_2$ に対して

$$(p_2 \circ i_2)(x) = p_2(y) - ((p_2 \circ i_1) \circ p_1)(y) = p_2(y) = x$$

なので $p_2 \circ i_2 = 1_{M_2}$．

■

[*7] (A.4.1) が完全列であるため，$p_2 \circ i_1 = 0$

系 A.4.2:

左 R 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i_1} M \xrightarrow{p_2} M_2 \longrightarrow 0$$

が補題 A.4.2 の条件を充たすならば

$$M \cong M_1 \oplus M_2$$

<u>**証明**</u> 補題 A.4.2 の条件 (1) が満たされているとする．このとき補題 A.4.2 証明から $\forall x \in M$ に対して

$$i_1\bigl(p_1(x)\bigr) = p_1'(x) = x - i_2\bigl(p_2(x)\bigr) \quad\Longleftrightarrow\quad i_1\bigl(p_1(x)\bigr) + i_2\bigl(p_2(x)\bigr) = x$$

また，完全列の定義から $p_2\bigl(i_1(x)\bigr) = 0$ であるから $\forall x \in M_2$ に対して

$$p_1'\bigl(i_2(x)\bigr) = i_2(x) - ((i_2 \circ p_2) \circ i_2)(x) = 0 = i_1(0)$$

であり，結局 $p_1\bigl(i_2(x)\bigr) = 0$ とわかる．

ここで準同型写像

$$\begin{aligned} f\colon M_1 \oplus M_2 &\longrightarrow M,\ (x,\, y) \longmapsto i_1(x) + i_2(y), \\ g\colon M &\longrightarrow M_1 \oplus M_2,\ x \longmapsto \bigl(p_1(x),\, p_2(x)\bigr) \end{aligned}$$

を定めると

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x,\, y) &= \bigl(p_1(i_1(x)) + p_1(i_2(y)),\, p_2(i_1(x)) + p_2(i_2(x))\bigr) = (x,\, y), \\ (f \circ g)(x) &= i_1(p_1(x)) + i_2(p_2(x)) = x \end{aligned}$$

なので $f,\, g$ は同型写像. ■

定義 A.4.2: 分裂

左 R 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i_1} M \xrightarrow{p_2} M_2 \longrightarrow 0$$

が**分裂** (split) するとは，補題 A.4.2 の条件を充たすことをいう．

定義 A.4.3: 射影的加群

左 R 加群 P が**射影的加群** (projective module) であるとは，任意の左 R 加群の**全射準同型** $f\colon M \longrightarrow N$ および任意の準同型写像 $g\colon P \longrightarrow N$ に対し，左 R 加群の準同型写像 $h\colon P \longrightarrow M$ であって $f \circ h = g$ を充たすものが存在することを言う（図式 A.3).

$$
\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed, "\exists h"'] \\
M \arrow[r, two heads, "f"] & N
\end{tikzcd}
$$

図 A.3: 射影的加群

命題 A.4.2:

左 R 加群の完全列

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

は，N が射影的加群ならば分裂する．

証明 射影的加群の定義において $P = N$ とすることで，左 R 加群の準同型写像 $s\colon N \longrightarrow M$ であって $g \circ s = 1_N$ を充たすものが存在する． ■

命題 A.4.3: 射影的加群の直和

左 R 加群の族 $\{P_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して以下の 2 つは同値：

(1) $\forall\lambda \in \Lambda$ に対して P_λ が射影的加群

(2) $\displaystyle\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$ が射影的加群

証明 標準的包含を $\iota_\lambda\colon P_\lambda \hookrightarrow \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$ と書く．

(1)$\Longrightarrow$(2) 仮定より，$\forall\lambda \in \lambda$ に対して，任意の全射準同型写像 $f\colon M \longrightarrow N$ および任意の準同型写像 $g\colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \longrightarrow N$ に対して，準同型写像 $h_\lambda\colon P_\lambda \longrightarrow M$ であって $f \circ h_\lambda = g \circ \iota_\lambda$ を充たすものが存在する．従って直和の普遍性より準同型写像

$$h\colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \longrightarrow M$$

であって $f \circ h_\lambda = h \circ \iota_\lambda$ を充たすものが一意的に存在する．このとき

$$(f \circ h) \circ \iota_\lambda = f \circ h_\lambda = g \circ \iota_\lambda$$

であるから，h の一意性から $f \circ h = g$.

(1)$\Longleftarrow$(2) $\lambda \in \Lambda$ を一つ固定し，任意の全射準同型写像 $f\colon M \longrightarrow N$ および任意の準同型写像 $g\colon P_\lambda \longrightarrow M$ を与える．直和の普遍性より準同型写像

$$h\colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \longrightarrow N$$

であって $h \circ \iota_\lambda = g$（$\forall\mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}$, $h \circ \iota_\lambda = 0$）を充たすものが一意的に存在する．さらに仮定より，準同型写像

$$\alpha\colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \longrightarrow M$$

であって $f \circ \alpha = h$ を充たすものが存在する．このとき

$$f \circ (\alpha \circ \iota_\lambda) = h \circ \iota_\lambda = g$$

なので $\beta := h \circ \iota_\lambda$ とおけば良い．

■

系 A.4.3: 自由加群は射影的加群

環 R 上の自由加群は射影的加群である

証明 R が射影的加群であることを示せば命題 A.4.3 より従う．

左 R 加群の全射準同型写像と準同型写像 $f\colon M \longrightarrow N,\ g\colon R \longrightarrow N$ を任意に与える．このときある $x \in M$ が存在して $f(x) = g(1)$ となる．この x に対して準同型写像 $h\colon R \longrightarrow M,\ a \longmapsto ax$ を定めると，$\forall a \in R$ に対して

$$f\bigl(h(a)\bigr) = f(ax) = af(x) = ag(1) = g(a)$$

が成り立つので $f \circ h = g$ となる． ■

V, W を任意の（有限次元とは限らない）$\mathbb{K}$ ベクトル空間，$T\colon V \longrightarrow W$ を任意の線型写像とする．

$$\begin{aligned} i_1 &\colon \operatorname{Ker} T \longrightarrow V,\ \boldsymbol{v} \longmapsto \boldsymbol{v}, \\ p_2 &\colon V \longrightarrow \operatorname{Im} T,\ \boldsymbol{v} \longmapsto T(\boldsymbol{v}), \end{aligned}$$

と定めると，i_1 は単射，p_2 は全射で，かつ $p_2 \circ i_1 = 0$ が成り立つ．よって $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ の図式

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} T \xrightarrow{i_1} V \xrightarrow{p_2} \operatorname{Im} T \longrightarrow 0 \tag{A.4.2}$$

は短完全列だが，$\operatorname{Im} T$ はベクトル空間なので自由加群であり，系 A.4.3 より射影的加群でもある．従って命題 A.4.2 より短完全列 (A.4.2) は分裂し，系 A.4.2 から

$$V \cong \operatorname{Im} T \oplus \operatorname{Ker} T$$

が言える．

定理 A.4.4: 階数・退化次数の定理

V, W をベクトル空間とし，任意の線型写像 $T\colon V \longrightarrow W$ を与える．このとき

$$\dim V = \dim(\operatorname{Im} T) + \dim(\operatorname{Ker} T)$$

が成り立つ．

A.5 Jordan 標準形

この節では体 $\mathbb{K}$ は代数閉体であるとし，V を有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間とする．

定義 A.5.1: 広義固有空間

$x \in \operatorname{End} V$ を与える．$\forall \lambda \in \mathbb{K}$ に対して

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{V(\lambda)} &:= \operatorname{Ker}(x - \lambda\, \mathrm{id}_V) = \left\{ v \in V \,\middle|\, (x - \lambda\, \mathrm{id}_V) v = 0 \right\} \\
\boldsymbol{W(\lambda)} &:= \left\{ v \in V \,\middle|\, \exists k > 0,\ (x - \lambda\, \mathrm{id}_V)^k v = 0 \right\}
\end{aligned}
$$

とおく．

- λ が x の**固有値** (eigenvalue) であるとは，$V(\lambda) \neq 0$ であることを言う．
- $V(\lambda)$ が固有値 λ に属する x の**固有空間** (eigenspace) であるとは，$V(\lambda) \neq 0$ であることを言う．
- $W(\lambda)$ が固有値 λ に属する x の**広義固有空間** (generalized eigenspace) であるとは，$W(\lambda) \neq 0$ であることを言う．

$V(\lambda) \subset W(\lambda) \subset V$ が x-不変な部分ベクトル空間であることは明らかである．

A.5.1　上三角化

補題 A.5.1: 旗と基底

V の旗

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{\dim V} = V$$

を与え，

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \mathbb{K} e_1 \\
V_2 / V_1 &= \mathbb{K}(e_2 + V_1) \\
V_3 / V_2 &= \mathbb{K}(e_3 + V_2) \\
&\vdots \\
V_{\dim V} / V_{\dim V - 1} &= \mathbb{K}(e_{\dim V} + V_{\dim V - 1})
\end{aligned}
$$

を充たす $e_i \in V_i \quad (1 \leq i \leq \dim V)$ をとる．このとき $1 \leq \forall i \leq \dim V$ に対して

$$V_i = \operatorname{Span}\left\{ e_1,\, \ldots,\, e_i \right\}$$

が成り立つ．

証明 $1 \leq i \leq \dim V$ に関する数学的帰納法により示す．$i = 1$ のときは明らか．

$i > 1$ とする．

$$\lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j e_j = 0$$

を仮定する．両辺に標準的射影 $p_i\colon V_i \longrightarrow V_i/V_{i-1}$ を作用させることで

$$\lambda_i p(e_i) = \lambda_i(e_i + V_{i-1}) = 0$$

がわかるが，$e_i \in V_i$ の選び方から $e_i + V_{i-1} \neq 0$ なので $\lambda_i = 0$ が言える．よって

$$\sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j e_j = 0 \in V_{i-1}$$

となるが，帰納法の仮定より $e_1, \dots, e_{i-1}$ は線型独立なので $1 \leq \forall j \leq i$, $\lambda_j = 0$ が言えた．i.e. $e_1, \dots, e_i$ は線型独立である．旗の定義から $\dim V_i = i$ なので $e_1, \dots, e_i$ は V_i の基底であり，帰納法が完成した． ■

$x \in \operatorname{End} V$ が**上三角化可能**であるとは，x によって安定化される V の旗が存在することを言う．というのも，このとき補題 A.5.1 の基底をとると

$$\begin{aligned}
x(e_1) &= x^1{}_1 e_1 \in V_1, \\
x(e_2) &= x^1{}_2 e_1 + x^2{}_2 e_2 \in V_2, \\
&\ \vdots \\
x(e_{\dim V}) &= x^1{}_{\dim V} e_1 + \cdots + x^{\dim V}{}_{\dim V} e_{\dim V} \in V_{\dim V}
\end{aligned}$$

と書けるので，この基底に関する x の表現行列が

$$\begin{bmatrix} x^1{}_1 & x^1{}_2 & \cdots & x^1{}_{\dim V} \\ 0 & x^2{}_2 & \cdots & x^2{}_{\dim V} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x^{\dim V}{}_{\dim V} \end{bmatrix}$$

という上三角行列になるのである．

定理 A.5.1: 上三角化

$\forall x \in \operatorname{End} V$ に対して，x によって安定化される V の旗が存在する．i.e. $\forall x \in \operatorname{End} V$ は上三角化可能である．

証明 $\dim V$ に関する数学的帰納法により示す．$\dim V = 0$ のときは明らかなので $\dim V > 0$ とする．$\forall x \in \operatorname{End} V$ を 1 つ固定する．仮定より $\mathbb{K}$ は代数閉体なので，x は重複も込めてちょうど $\dim V$ 個の固有値をもつ．それを $\lambda_1, \dots, \lambda_{\dim V}$ とおこう．$v_1 \in V(\lambda_1) \setminus \{0\}$ をとり，$V_1 := \mathbb{K} v_1$ とおく．標準的射影を $p\colon V \longrightarrow V/V_1$ と書くと，$\forall v \in V_1$ に対して $p \circ x(v) = p(\lambda_1 v) = 0$ が成り立つので $V_1 \subset \operatorname{Ker} p \circ x$ である．故に商ベクトル空間の普遍性を使うことができ，$\mathbb{K}$-ベクトル空間の図式

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "x"] \arrow[d, "p"'] & V \arrow[r, "p"] & V/V_1 \\
V/V_1 \arrow[urr, dashed, "\exists! \overline{x}"'] & &
\end{tikzcd}$$

を可換にするような $\mathbb{K}$-線型写像 $\overline{x} \in \operatorname{End}(V/V_1)$ が一意的に存在する．$\dim(V/V_1) = \dim V - 1$ なので帰納法の仮定が使えて，$\overline{x} \in \operatorname{End}(V/V_1)$ によって安定化される V/V_1 の旗

$$0 = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_{\dim V - 1} = V/V_1$$

が存在する．このとき $0 \leq \forall i \leq \dim V - 1$ を 1 つ固定すると $\forall w + V_1 \in W_i$ に対して $\overline{x}(w + V_1) \in W_i$ が成り立つ．商ベクトル空間の普遍性から $\overline{x}(w + V_1) = \overline{x} \circ p(w) = p \circ x(w)$ なので，$\forall v \in p^{-1}(W_i)$ に対して $p \circ x(v) = \overline{x} \circ p(v) \in W_i \iff x(v) \in p^{-1}(W_i)$ が分かった．i.e. V の部分空間の増大列

$$0 \subset p^{-1}(W_0) \subset p^{-1}(W_1) \subset \cdots \subset p^{-1}(W_{\dim V-1}) = V$$

は x によって安定化される V の旗であり，帰納法が完成する． ■

> ! 定理 A.5.1 の証明から，もし $\mathbb{K}$ が代数閉体でなくても，$x \in \mathrm{End}\, V$ の固有値が全て $\mathbb{K}$ に含まれるならば x は上三角化可能である．

A.5.2 広義固有空間分解

定理 A.5.2: 広義固有空間分解-1

$x \in \mathrm{M}(n, \mathbb{K})$ を与え，

- x の相異なる全ての固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$
- λ_i の重複度を p_i

とおく．このとき $\mathbb{K}^n$ の内部直和分解

$$\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} W(\lambda_i)$$

が一意的に存在し，かつ $\dim W(\lambda_i) = p_i$ である．

証明 $\dim W(\lambda_i) \geq p_i$

仮定より $\mathbb{K}$ は代数閉体なので，定理 A.5.1 より $u \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ が存在して $u^{-1}xu$ が上三角行列になる．$1 \leq i \leq r$ を 1 つ固定し，$u^{-1}xu$ の対角成分の最初の p_i 個が λ_i であると仮定しても一般性を失わない．このとき $u^{-1}(x - \lambda_i \mathbb{1}_n)u$ の対角成分の最初の p_i 個は 0 になるので $u^{-1}(x - \lambda_i \mathbb{1}_n)^{p_i}u$ の第 $1 \leq j \leq p_i$ 列は全て 0 となる．よって $u = [e_1 \ \ldots \ e_n]$ とおいたとき $\mathrm{Span}\{e_1, \ldots, e_{p_i}\} \subset W(\lambda_i)$ である．u は正則行列なので $e_1, \ldots, e_{p_i}$ は線型独立であり，$\dim W(\lambda_i) \geq p_i$ だと分かった．

和空間 $\sum_{i=1}^{r} W(\lambda_i)$ が内部直和

r に関する数学的帰納法により示す．$r = 1$ のときは明らかなので $r > 1$ とする．$w_i \in W(\lambda_i)$ に対して

$$\sum_{i=1}^{r} w_i = 0 \tag{A.5.1}$$

が成り立つと仮定する．このとき $w_1 = \cdots = w_r = 0$ であることを示せば良い．広義固有空間の定義からある $k_r > 0$ が存在して $(x - \lambda_r \mathbb{1}_n)^{k_r} w_r = 0$ が成り立つので，

$$(x - \lambda_r \mathbb{1}_n)^{k_r} \left(\sum_{i=1}^{r} w_i \right) = \sum_{i=1}^{r-1} (x - \lambda_r \mathbb{1}_n)^{k_r} w_i = 0$$

が言える．$W(\lambda_i)$ は x-不変なので，帰納法の仮定から $1 \leq \forall i \leq r-1$ に対して $(x-\lambda_r \mathbb{1}_n)^{k_r} w_i = 0$ である．ここである $1 \leq j \leq r-1$ が存在して $w_j \neq 0$ であると仮定する．このとき $k_j > 0$ を $(x-\lambda_j \mathbb{1}_n)^{k_j} w_j = 0$ を充たす最小の自然数とする．このとき $x(x-\lambda_j \mathbb{1}_n)^{k_j-1} w_j = \lambda_j (x-\lambda_j \mathbb{1}_n)^{k_j-1} w_j$ なので

$$
\begin{aligned}
0 &= (x-\lambda_j \mathbb{1}_n)^{k_j-1}(x-\lambda_r \mathbb{1}_n)^{k_r} w_j \\
&= (x-\lambda_r \mathbb{1}_n)^{k_r}(x-\lambda_j \mathbb{1}_n)^{k_j-1} w_j \\
&= (\lambda_j-\lambda_r)^{k_r}(x-\lambda_j \mathbb{1}_n)^{k_j-1} w_j
\end{aligned}
$$

が成り立つが，$\lambda_j \neq \lambda_r$ なので $(x-\lambda_j \mathbb{1}_n)^{k_j-1} w_j = 0$ と言うことになって k_j の最小性に矛盾する．よって背理法から $1 \leq \forall j \leq r-1$ に対して $w_j = 0$ が言えた．仮定 (A.5.1) より $w_r = 0$ も言えて帰納法が完成する．

代数学の基本定理より $\sum_{i=1}^{r} p_i = n$ が言える．$\bigoplus_{i=1}^{r} W(\lambda_i) \subset \mathbb{K}^n$ であることも踏まえると，以上の議論から $\dim W(\lambda_i) = p_i$ が分かった．従って $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} W(\lambda_i)$ である．直和の普遍性よりこの内部直和分解は一意である． ■

A.5.3　多項式環・最小多項式

定理 A.5.2 の証明に多項式環を利用することもできる．まず一般論から入る．R を環とし，R の**単元** (unit)[*8] 全体がなす集合を $\boldsymbol{R}^{\times}$ と書く．$R^{\times}$ は環の積に関して群となる．特に，R が体ならば $R^{\times} = R \setminus \{0\}$ となる．

n 個の変数 $t_1, \ldots, t_n$ を持つ R 係数多項式全体[*9]の集合を $R[t_1, \ldots, t_n]$ と書く．$R[t_1, \ldots, t_n]$ の上の加法と乗法をそれぞれ

$$
\begin{aligned}
f(t_1, \ldots, t_n) + g(t_1, \ldots, t_n) &\coloneqq \sum_{i_1, \ldots, i_n} (a_{i_1 \ldots i_n} + b_{i_1 \ldots i_n}) t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n}, \\
f(t_1, \ldots, t_n) g(t_1, \ldots, t_n) &\coloneqq \sum_{i_1, \ldots, i_n} \left(\sum_{j_1+k_1=i_1} \cdots \sum_{j_n+k_n=i_n} a_{j_1 \ldots j_n} b_{k_1 \ldots k_n} \right) t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n}
\end{aligned}
$$

で定義する[*10]と $R[t_1, \ldots, t_n]$ 自身が環になる．ただし $f(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{i_1, \ldots, i_n} a_{i_1 \ldots i_n} t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n}$, $g(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{i_1, \ldots, i_n} b_{i_1 \ldots i_n} t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n} \in R[t_1, \ldots, t_n]$ とおいた．ある 1 つの変数に注目して項を整理することで，帰納的に自然な（環の）同型 $R[t_1, \ldots, t_n] \cong (R[t_1, \ldots, t_{n-1}])[t_n] \cong \ldots \cong (\cdots((R[t_1])[t_2]) \cdots [t_{n-1}])[t_n]$ が得られる．

*8 **可逆元** (invertible element) と言う場合もある．

*9 直和の構成と同様に，非ゼロの係数は有限個であるとする．より厳密には，写像 $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n \longrightarrow R$ であって有限個の $(i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ を除いて 0 を返すようなものと変数 $(t_1, \ldots, t_n)$ の組のことである．

*10 乗法の記号は慣例に従って省略した．

定義 A.5.2: 多項式の基本概念

$f(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{i_1, \ldots, i_n} a_{i_1 \ldots i_n} t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n} \in R[t_1, \ldots, t_n]$ を与える．

- $f(t_1, \ldots, t_n) \neq 0$ ならば，f の**次数** (degree) を
$$\boldsymbol{\deg f} := \max\{i_1 + \cdots + i_n \mid a_{i_1 \ldots i_n} \neq 0\}$$
と定義する．$f(t_1, \ldots, t_n) \neq 0$ ならば $\deg f := -\infty$ と定義する．
- $(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ の f への**代入**とは，値
$$\sum_{i_1, \ldots, i_n} a_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \in R$$
のこと[a]．記号としては $f(x_1, \ldots, x_n)$ と書く．
- $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ を充たす $(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ のことを f の**根** (root) と呼ぶ．
- $n = 1$ のとき，f の最高次係数が $1 \in R$ ならば f は**モニック** (monic) であると呼ばれる．

[a] 非ゼロな係数は有限個なので，この和は意味を持つ．

最高次係数が単元であるような多項式によって，多項式を割り算することができる：

命題 A.5.1: 多項式の割り算

1 変数多項式 $f(t), g(t) \in R[t]$ および単元 $u \in R^\times$ を与える．
このとき $f(t)$ がモニックならば，以下を充たす $q(t), r(t) \in R[t]$ が一意的に存在する：

$$g(t) = q(t)\bigl(uf(t)\bigr) + r(t), \quad \deg r < \deg f$$

証明 $f(t)$ はモニックであるとする．

$q(t), r(t)$ の存在

$g(t) = 0$ のときは $q(t) = r(t) = 0$ とすれば良い．$g(t) \neq 0$ のとき，$\deg g$ に関する数学的帰納法により示す．$\deg g < \deg f$ のときは $q(t) = 0$，$r(t) = g(t)$ とおけば良い．

$\deg g \geq \deg f$ とする．

$$f(t) =: \sum_{i=0}^{\deg f} a_i t^i, \quad g(t) =: \sum_{i=0}^{\deg g} b_i t^i$$

とおくと仮定から $a_{\deg f} = 1$ である．このとき

$$q_1(t) := b_{\deg g} \boldsymbol{u^{-1}} t^{\deg g - \deg f}, \quad g_1(t) := g(t) - q_1(x)\bigl(uf(t)\bigr)$$

と定義すると $\deg g_1 < \deg g$ が成り立つ．$g_1(t) = 0$ ならば $q(t) = q_1(t)$，$r(t) = 0$ とすれば良い．$g_1(t) \neq 0$ ならば，帰納法の仮定より $q_2(t), r_2(t) \in R[t]$ が存在して

$$g_1(t) = q_2(t)\bigl(uf(t)\bigr) + r_2(t)$$

と書け，かつ $\deg r_2 < \deg f$ が成り立つ．すると

$$g(t) = \bigl(q_1(t) + q_2(t)\bigr)\bigl(uf(t)\bigr) + r_2(t)$$

であるから，$q(t) = q_1(t) + q_2(t)$, $r(t) = r_2(t)$ とすれば良い．

$q(t)$, $r(t)$ の一意性

$g(t) = q_1(t)\bigl(uf(t)\bigr) + r_1(t) = q_2(t)\bigl(uf(t)\bigr) + r_2(t)$ かつ $\deg r_i < \deg f$ が成り立つとする．このとき

$$\bigl(q_1(t) - q_2(t)\bigr)\bigl(uf(t)\bigr) = r_2(t) - r_1(t)$$

が成り立つが，$q_1(t) - q_2(t) \neq 0$ だとすると $\deg f \leq \max\{\deg r_1, \deg r_2\}$ と言うことになり矛盾．よって背理法から $q_1(t) = q_2(t)$ が言えて，$r_1(t) = r_2(t)$ も従う．

■

特に R が体ならば $R^\times = R \setminus \{0\}$ なので，任意のゼロでない多項式同士の割り算をすることができる．多変数の場合も，ある 1 つの変数に関する最高次係数が単元ならば割り算ができる．

定義 A.5.3: 環のイデアル

R を環とする．

- 部分集合 $I \subset R$ が左 (resp. 右) **イデアル** (ideal) であるとは，$\forall r \in R,\ \forall x \in I$ に対して $rx \in I$（resp. $xr \in I$）が成り立つことを言う．左イデアルかつ右イデアルのとき**両側イデアル**と呼ぶ．R が可換環のときは左，右イデアルの区別はなく，単に**イデアル** (ideal) と呼ぶ．
- 可換環 R のイデアル $I \subsetneq R$ が**素イデアル** (prime ideal) であるとは，

$$r,\, s \notin I \quad \Longrightarrow \quad rs \notin I$$

  が成り立つことを言う．
- 可換環 R のイデアル $I \subsetneq R$ が**極大イデアル** (maximal ideal) であるとは，$I \subset J \subsetneq R$ なる任意のイデアル J に対して $I = J$ が成り立つことを言う．

定義 A.5.4: 整域

R を可換環とする．

- R が**整域** (integral domain) であるとは，$\forall a, b \in R \setminus \{0\}$ に対して $ab \neq 0$ が成り立つことを言う．
- **整域** R および $a \in R, b \in R \setminus \{0\}$ を与える．b が a の**約元**であるとは，ある $c \in R$ が存在して $a = bc$ となることを言い，$\boldsymbol{b \mid a}$ と書く．
- **整域** R および $(a_1, \ldots, a_n) \in R^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}, b \in R$ を与える．b が $a_1, \ldots, a_n$ の**公約元**であるとは，

$$1 \leq \forall i \leq n,\ b \mid a_i$$

  が成り立つことを言う．他の任意の公約元 $c \in R$ に対して $c \mid b$ が成り立つとき，b は**最大公約元** (greatest common deviser; GCD) と呼ばれ，$\boldsymbol{\gcd(a_1, \ldots, a_n)}$ と書く．

- **整域** R および $b_1, \dots, b_n \in R \setminus \{0\}$, $a \in R$ を与える．a が $b_1, \dots, b_n$ の**公倍元**であるとは，

$$1 \leq \forall i \leq n, \ b_i \mid a$$

が成り立つことを言う．他の任意の公倍元 $c \in R$ に対して $b \mid c$ が成り立つとき，b は**最小公倍元** (least common multiple; LCM) と呼ばれ，$\mathbf{lcm}(a_1, \dots, a_n)$ と書く．
- R が**単項イデアル整域** (principal ideal domain; PID) であるとは，R の任意のイデアル $I \subset R$ に対してある $r \in R$ が存在して $I = Rr$ を充たすこと．

R を整域とし，$r \in R \setminus \{0\}$ を与える．

- r が**素元**であるとは，r が生成するイデアル $Rr \subset R$ が素イデアルであることを言う．
- r が**既約元**であるとは，$r \notin R^\times$ で，かつ $\forall a, b \in R$ に対して

$$r = ab \quad \Longrightarrow \quad a \in R^\times \ \text{または} \ b \in R^\times$$

が成り立つことを言う．r が既約でなければ**可約**と言う．
- 既約元 r, s が**同伴**であるとは，ある $u \in R^\times$ が存在して $r = su$ と書けることを言う．

命題 A.5.2: 素イデアルと極大イデアルの特徴付け

可換環 R のイデアル I に対し，以下が成り立つ：

(1) I が素イデアル $\iff$ R/I は整域
(2) I が極大イデアル $\iff$ R/I は体

証明　(1)

■

GCD, LCM は存在すれば単元の積を除いて一意である．

定義 A.5.5: 種々の整域

R を整域とする．

- R が **Euclid 整域** (Euclid domain) であるとは，以下の条件を充たす写像 $\phi \colon R \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在することを言う：
  (ED)　$\forall a \in R, \ \forall b \in R \setminus \{0\}$ に対して $q, r \in R$ が存在して

$$a = qb + r$$

かつ

$$r = 0 \ \text{または} \ \phi(r) < \phi(b)$$

が成り立つ．
- R が**単項イデアル整域** (principal ideal domain; PID) であるとは，R の任意のイデアル $I \subset R$ に対してある $r \in R$ が存在して $I = Rr$ を充たすこと．

- R が**一意分解整域** (unique factorization domain: UFD) であるとは，以下の 2 条件を充たすこと：

  (UFD-1) $\forall r \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})$ に対して，素元 $p_1, \dots, p_n \in R$ が存在して $r = p_1 \cdots p_n$ と書ける．このとき $p_1, \dots, p_n$ を r の**素因子**，素因子の積 $p_1 \cdots p_n$ を a の**素元分解**と呼ぶ．

  (UFD-2) $p_1, \dots, p_n,\ q_1, \dots, q_m \in R$ が素元ならば $n = m$ であり，かつある $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ が存在して，$1 \leq \forall i \leq n$ に対して p_i と $q_{\sigma(i)}$ が同伴となる．

次の定理は整域の理論において極めて重要である：

定理 A.5.3:

Euclid 整域 $\implies$ 単項イデアル整域 $\implies$ 一意分解整域

証明 **Euclid 整域 $\implies$ PID**

R が Euclid 整域であるとする．$R = \{0\}$ ならば $R = R0$ となるので PID である．

$R \neq \{0\}$ とする．R の任意の非自明なイデアル I をとる．$\mathbb{Z}_{\geq 0}$ は整列集合なので $\phi(x) := \min\{\, \phi(y) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid y \in I \setminus \{0\} \,\}$ が存在する．Euclid 整域の定義から $\forall z \in I$ に対してある $q, r \in R$ が存在して

$$z = qx + r$$

かつ $r = 0$ または $\phi(r) < \phi(x)$ が成り立つが，もし $r \neq 0$ ならば $r \in I \setminus \{0\}$ となり x の最小性に矛盾する．よって $r = 0$ であり，$I = Rx$ が言えた．

PID $\implies$ UFD

■

系 A.5.4:

任意の体[a] $\mathbb{K}$ に対して $\mathbb{K}[t]$ は Euclid 整域である．従って PID でもあり UFD でもある．

[a] 定義から可換である．

証明 命題 A.5.1 より従う． ■

命題 A.5.3:

可換環 R について以下が成り立つ：

(1) R が整域ならば，R の任意の素元は既約元である．
(2) R が UFD ならば，R の任意の既約元は素元である．
(3) R が PID ならば，R の任意の $\{0\}$ でない素イデアルは極大イデアルである．

証明 (1) R が整域だとする．このとき任意の素元 $p \in R \setminus \{0\}$ をとると，$Rp \subsetneq R$ なので $p \notin R^\times$ である．$a, b \in R$ に対して $p = ab$ が成り立つとする．Rp が素イデアルなので $a \in Rp$ または $b \in Rp$ が成り立つ．R は可換なので $a \in Rp$ としても一般性を失わない．このときある $q \in R$ が存在して $a = qp$ と

書ける．$ab = p$ なので $qpb = pqb = p \iff p(qb-1) = 0$ が成り立つ．R は整域で $p \neq 0$ なので $qb - 1 = 0 \iff qb = 1$, i.e. $b \in R^\times$ が分かった．よって p は既約である．

(2) R が UFD だとする．このとき任意の既約元 $p \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})$ をとると，その素元分解 $p = p_1 \cdots p_n \quad (n \geq 1)$ が存在する．$n \geq 2$ だとすると，$p_1 \notin R^\times$ なので p の既約性から $q := p_2 \cdots p_n \in R^\times$ となる．然るにこのとき $Rq \subset Rp_2 \subsetneq R$ となり矛盾．よって背理法から $n = 1$ が言えた．

(3) R のゼロでない任意の素イデアル I をとる．R は PID なので $p \in R$ が存在して $I = Rp$ と書けるが，素元の定義からこのとき $p \in R$ は素元であり，および命題 A.5.3-(1) から既約元である．
ここで，$I \subset J \subsetneq R$ なる任意のイデアル J をとる．R は PID なので $q \in R$ が存在して $J = Rq$ と書けるが，$Rq \subsetneq R$ なので $q \notin R^\times$ である．このときある $u \in R$ が存在して $p = qu$ と書けるが，p は既約元なので $u \in R^\times$ でなくてはならない．よって $Rp = Rq$ となり，Rp は極大イデアルである．命題 A.5.2-(2) より R/Rp は体である．

■

命題 A.5.4: 単項イデアル整域における Bézout の等式

R を PID とする．このとき，$\forall (a_1, a_2) \in R^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $\forall b \in R$ に対して以下は同値である：

(1) $Ra_1 + Ra_2 = Rb$
(2) $\gcd(a_1, a_2) = b$

証明

(1) $\Longrightarrow$ (2)

$Ra_1 + Ra_2 = Rb$ とする．このとき $a_i \in Rb \quad (i = 1, 2)$ なのである $q_i \in R$ が存在して $a_i = q_i b$ と書ける．i.e. $b \mid a_i$ である．

$c \in R$ を a_1, a_2 の任意の公約元とする．このときある $r_i \in R$ が存在して $a_i = r_i c$ と書ける．仮定より $b \in Ra_1 + Ra_2$ なので，$s_i \in R$ が存在して

$$b = s_1 a_1 + s_2 a_2 = (s_1 r_1 + s_2 r_2) c$$

と書ける．i.e. $c \mid b$ が言えた．

(1) $\Longleftarrow$ (2)

$\gcd(a_1, a_2) = b$ とする．R は PID なので，ある $c \in R$ が存在して $Ra_1 + Ra_2 = Rc$ と書ける．必要性の証明から $c = \gcd(a_1, a_2)$ が言えるので，$u \in R^\times$ が存在して $b = uc$ と書ける．よって $Ra_1 + Ra_2 = Rc = Rb$ である．■

系 A.5.5: 単項イデアル整域における Bézout の等式

R を PID とする．このとき，$\forall (a_1, \ldots, a_n) \in R^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$, $\forall b \in R$ に対して以下は同値である：

(1) $Ra_1 + \cdots + Ra_n = Rb$
(2) $\gcd(a_1, \ldots, a_n) = b$

定義 A.5.6: 体の拡大

- 体 $\mathbb{L}$ が体 $\mathbb{K}$ の**拡大体** (extention field) であるとは，$\mathbb{K}$ が $\mathbb{L}$ の部分体になっていることを言う．このことを記号で $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ と書き，**体の拡大** (field extention) であると言う．
- $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ を体の拡大とするとき，部分体 $\mathbb{M} \subset \mathbb{L}$ であって $\mathbb{K} \subset \mathbb{M}$ を充たすものを $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ の**中間体**と呼ぶ．
- $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ を体の拡大とするとき，$\mathbb{L}$ を $\mathbb{K}$-ベクトル空間と見做したときの次元を $\mathbb{L}$ の $\mathbb{K}$ 上の**拡大次数**と呼び，$[\mathbb{L}:\mathbb{K}]$ と書く．
- $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ を体の拡大とする．$x \in \mathbb{L}$ が $\mathbb{K}$ 上**代数的**であるとは，x がある $\mathbb{K}$-係数多項式 $f(t) \in \mathbb{K}[t] \setminus \{0\}$ の根となっていること[a]を言う．$\forall x \in \mathbb{L}$ が $\mathbb{K}$ 上代数的ならば，体の拡大 $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ は**代数拡大**であるという．

[a] $x \in \mathbb{K}$ とは限らないので，先ほど採用した定義によると厳密には根とは呼べない．

命題 A.5.5: 最小多項式の存在

$\mathbb{L}/\mathbb{K}$ を体の代数拡大とし，$\forall \alpha \in \mathbb{L}$ を 1 つ与える．このとき $I_\alpha := \left\{ f(t) \in \mathbb{K}[t] \;\middle|\; f(\alpha) = 0 \right\}$ とおくと，以下の条件を充たす $f(t) \in I_\alpha$ が定数倍を除いて一意的に存在する：

(1) $f(t) \neq 0$
(2) $f(t)$ は I_α の元のうち $\deg f$ が最小のものの 1 つである．
(3) $f(t)$ は I_α の全ての元の約元である．
(4) $f(t)$ は既約

__証明__ $\mathbb{K}$-結合代数の準同型

$$\phi\colon \mathbb{K}[t] \longrightarrow \mathbb{L},\ g(t) \longmapsto g(\alpha)$$

に関して $\operatorname{Ker}\phi = I_\alpha$ であり，従って I_α は $\mathbb{K}[t]$ のイデアルである．α は $\mathbb{K}$ 上代数的なので $I_\alpha \neq \{0\}$ であり，系 A.5.4 より $\mathbb{K}[t]$ は PID なので，ある $f(t) \in \mathbb{K}[t]$ が存在して $I_\alpha = \mathbb{K}[t]f(t)$ と書ける．このとき定理 A.5.3 の証明から $f(t)$ は $I_\alpha \setminus \{0\}$ の元のうち次数が最小であり，$\mathbb{K}[t]^\times = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ なので定数倍を除いて一意に定まる．

あとは $f(x)$ の既約性を示す．実際，準同型定理から $\mathbb{K}[t]/I_\alpha \cong \operatorname{Im}\phi = \mathbb{K}[\alpha]$ が言えるが，$\mathbb{K}[\alpha]$ は体なので命題 A.5.2-(2) より $I_\alpha = \mathbb{K}[t]f(t)$ は素イデアルであり，素元の定義から $f(t)$ は素元．よって命題 A.5.3-(1) から $f(x)$ は既約元である． ■

定義 A.5.7: 最小多項式

命題 A.5.5 の $f(t) \in I_\alpha$ がモニックならば，$f(t)$ のことを α の $\mathbb{K}$ 上の**最小多項式** (minimal polynomial) と呼ぶ．

命題 A.5.5 では $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ を体の代数拡大としたが，$\mathbb{L}$ を $\mathrm{M}(n, \mathbb{K})$ に置き換えても (1)-(3) はほぼ同じ証明により成り立つ[*11]．このようなときも $f(t) \in I_\alpha$ のことを $\alpha \in \mathrm{M}(n, \mathbb{K})$ の**最小多項式**と呼ぶ．では，定理 A.5.2

[*11] $I_\alpha \neq \{0\}$ の証明のみ変更を要する．

の別証明を与えよう：

定理 A.5.6: 広義固有空間分解-2

$x \in \mathrm{M}(n, \mathbb{K})$ を与え，

- x の相異なる全ての固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_r$
- λ_i の重複度を p_i

とおく．このとき $\mathbb{K}^n$ の内部直和分解

$$\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} W(\lambda_i)$$

が一意的に存在し，かつ $\dim W(\lambda_i) = p_i$ である．

証明 $1 \leq \forall i \leq k$ に対して $\phi_i(t) \coloneqq \prod_{j \neq i} (t - \lambda_i)^{p_i} \in \mathbb{K}[t]$ とおく． ■

参考文献

[1] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory* (Springer, 1972).

[2] 佐武一郎, **リー環の話** (日本評論社, 1987).

[3] 小林俊行 and 大島利雄, **リー群と表現論** (岩波書店, 2005).