表現論ゼミ 第 2 回

前田 陵汰

2023 年 10 月 30 日

半単純 Lie 代数

以下、体 $\mathbb{F}$ は代数閉体とし, 標数は 0 とする ($\mathrm{char}\mathbb{F} = 0$). また, ベクトル空間は有限次元とする.

4　Lie の定理と Cartan の判定条件

4.1　Lie の定理

定理 4.1

L を $\mathfrak{gl}(V)$ の可解な部分代数とする. $V \neq 0$ ならば, ある $v \in V$ があって, 任意の L の元に対して v は固有ベクトルとなる.

この定理から, 以下の系が従う.

系 4.1A (Lie's Theorem)

L を $\mathfrak{gl}(V)$ の可解な部分代数とする. このとき, L は適当な V の基底に対して上三角行列となる[a].

[a] 本には "L stabilizes some flag in V. " とありました. flag が分からん...

系 4.1B

L が可解であるとき, 以下を満たすイデアルの列が存在する.

$$0 = L_0 \subset L_1 \subset ... \subset L_n = L, \quad \dim L_i = i \tag{1}$$

系 4.1.C

L が可解であるとき, $x \in [L, L] \Rightarrow \mathrm{ad}_{\mathrm{L}} x$ は冪零. 特に, $[L, L]$ は冪零 Lie 代数となる.

4.2 Jordan-Chevalley 分解

一般に行列は Jordan 標準形で表すことができる. これは対角成分と, その上に 1 または 0 が並んだ行列 (これは冪零) への分解と見ることができる. これを一般化しよう.

定義 4.2

$x \in \mathrm{End}\ V$ が半単純であるとは, x の最小多項式 (minimal polynomial) が重解を持たないことをいう.

!

上の定義はわかりにくいが, 実は

$$x \in \mathrm{End}\ V \text{ が半単純} \Leftrightarrow x \text{ は対角化可能}$$

である.

また, x の固有ベクトルが V の基底をなすことを半単純の定義とする場合もあり [2], これも対角化可能であることと同値である.

命題 4.2

$x \in \mathrm{End}\ V$とする.

(a) 以下を満たす x_s, x_n がただ一つ存在する.

$$x = x_s + x_n, \qquad x_s \text{ は半単純}, \ x_n \text{ は冪零}. \tag{2}$$

(b) 定数項をもたない一変数多項式 $p(T), q(T)$ があって, $x_s = p(x)$, $x_n = q(x)$. 特に, x と交換する End Vの元は x_s, x_n とも交換する.

(c) $A \subset B \subset V$が部分空間であって, x が B を A に写すならば, x_s, x_n もまた, B を A に写す.

この分解を Jordan-Chevalley 分解と呼ぶ. 有用性を見るために随伴表現を考える.

補題 4.2

$$x \text{ が半単純} \Rightarrow \mathrm{ad}\ x \text{ も半単純}$$

補題 3.2 では, x が冪零 $\Rightarrow$ ad x も冪零となることを示した.

補題 4.2A

$x \in \mathrm{End}\ V$ が $x = x_s + x_n$ のように Jordan-Chevalley 分解されているとき, $\mathrm{ad}\ x \in \mathrm{End}(\mathrm{End}\ V)$ の分解は以下で与えられる.

$$\mathrm{ad}\ x = \mathrm{ad}\ x_s + \mathrm{ad}\ x_n \tag{3}$$

補題 4.2B

$\mathfrak{U}$ を $\mathbb{F}$-代数とする. このとき, Der $\mathfrak{U}$ の任意の元は, Der $\mathfrak{U}$ 内に半単純成分と冪零成分を持つ.

証明. $\delta \in \mathrm{Der}\ \mathfrak{U}$ とし, $\delta = \sigma(\text{半単純}) + \nu(\text{冪零})$ と分解できたとする. $\sigma \in \mathrm{Der}\ \mathfrak{U}$ を示す.

$\forall a \in \mathbb{F}$ に対し, $\mathfrak{U}_a = \{x \in \mathfrak{U} |\ (\delta - a\mathbb{1})^k x = 0 \text{ for } \exists k\}$ を定義. このとき以下が成立.

$$\mathfrak{U} = \bigoplus_a \mathfrak{U}_a \qquad (a \text{ は } \delta \ (\text{または}\sigma) \text{ の固有値}) \tag{4}$$

つまり, 適当な U_a の元を集めて基底とできる.

ここで次の恒等式を用いる.

$$(\delta-(a+b)\mathbb{1})^n[x,y]=\sum_{i=0}^{n}{}_nC_i\,[(\delta-a)^{n-i}x,(\delta-b)^iy] \tag{5}$$

十分大きな n を持ってくれば右辺は 0 とできるので, $x\in\mathfrak{U}_a,\ y\in\mathfrak{U}_b\ \Rightarrow\ [x,y]\in\mathfrak{U}_{a+b}$ が得られる.

$x\in\mathfrak{U}_a,\ y\in\mathfrak{U}_b$ に対し,

$$\begin{aligned}\sigma([x,y])&=(a+b)[x,y]\\&=[ax,y]+[x,by]\\&=[\sigma x,y]+[x,\sigma y]\end{aligned} \tag{6}$$

したがって σ はライプニッツ則を満たすので, $\sigma\in\mathrm{Der}\ \mathfrak{U}$. □

恒等式 (5) の証明は n に関する帰納法による. $n=0$ では明らかに成立. $n>0$ とする.

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=(\delta-(a+b))\ (\delta-(a+b))^{n-1}\ [x,y]\\&=(\delta-(a+b))\ \sum_{i=0}^{n-1}{}_{n-1}C_i\,[(\delta-a)^{n-1-i}x,(\delta-b)^iy]\\&=\sum_{i=0}^{n-1}{}_{n-1}C_i\,\{[(\delta-a)^{n-i}x,(\delta-b)^iy]+[(\delta-a)^{n-1-i}x,(\delta-b)^{i+1}y]\}\\&=\sum_{i=0}^{n-1}{}_{n-1}C_i\,[(\delta-a)^{n-i}x,(\delta-b)^iy]+\sum_{i=0}^{n-1}{}_{n-1}C_{i-1}\,[(\delta-a)^{n-i}x,(\delta-b)^iy]\\&=\sum_{i=0}^{n}{}_nC_i\,[(\delta-a)^{n-i}x,(\delta-b)^iy]=\ (\text{右辺})\end{aligned} \tag{7}$$

4.3 Cartan の判定条件

補題 4.3

$A\subset B$ を $\mathfrak{gl}(V)$ の部分空間とし, 集合 M を $M=\{x\in\mathfrak{gl}(V)|\ [x,B]\subset A\}$ とする. このとき, $x\in M$ が $\forall y\in M$ に対して $\mathrm{Tr}(xy)=0$ を満たすならば, x は冪零である.

証明. $x=s+n$ と分解し, V の基底を s が対角行列となるようにとる. $s=\mathrm{diag}\ (a_1,\dots,a_m)=0$ を示す.

E を $(a_1,\dots,a_m)$ で張られる $\mathbb{F}$ の部分空間とする. なお係数体は有理数体 $\mathbb{Q}$ とする. $E=0$ を示せばよく, 有限次元なので, $E^*=0$(双対空間) を示せば良い.

$\forall f\in E^*$ $(f:E\to\mathbb{Q}$, 線型写像) をとる. また, $y\in\mathfrak{gl}\,(V)$ を, $y=\mathrm{diag}(f(a_1),\dots,f(a_m))$

とする. $e_{ij} \in \mathfrak{gl}(V)$ に対し,

$$\text{ad } s\ (e_{ij}) = (a_i - a_j)e_{ij} \tag{8}$$
$$\text{ad } y\ (e_{ij}) = (f(a_i) - f(a_j))e_{ij} \tag{9}$$

であった (4.2 節). ここで, 定数項を持たない $\mathbb{F}$ 係数多項式 $r(t)$ を

$$r(a_i - a_j) = f(a_i) - f(a_j) \tag{10}$$

を満たすようにとる[*1]. 式 (8), (9) より,

$$\text{ad } y = r(\text{ad } s) \tag{11}$$

である. 命題 4.2, 補題 4.2A より, ad s は ad x の定数項を持たない多項式で書けるので, ad $= y$ も同様である. $x \in M$ より, ad x は B を A に写すから, ad y もまた B を A に写し, よって $y \in M$.

仮定より, Tr(xy) $= 0 \Rightarrow \sum a_i\ f(a_i) = 0$. f を作用させて, $\sum f(a_i)^2 = 0$. $f(a_i)$ は有理数なので, $f(a_i) = 0$ for $\forall a_i$. したがって, $f = 0$ となり, 題意は示された. □

ここで有用な恒等式を述べておく.
$x, y, z \in \text{End}\ (V)$ に対し,

$$\text{Tr}([x, y]\ z) = \text{Tr}(x\ [y, z]) \tag{12}$$

定理 4.3 (Cartan's Criterion)

L を $\mathfrak{gl}(V)$ の部分代数とする. 任意の $x \in [L, L]$, $y \in L$ に対して $\text{Tr}(xy) = 0$ であるならば, L は可解 Lie 代数である.

証明. L が可解であることを示すためには, $[L, L]$ が冪零 Lie 代数であることを示せば良い (命題 4.2C の逆) [*2]. 上の補題を, $A = [L, L]$, $B = L$ として適用したいので,
$M = \{x \in \mathfrak{gl}\ (L) | [x, L] \subset [L, L]\}$ とする. 明らかに, $L \subset M$ である[*3].
$\forall z \in M$, $p, q \in L$ (よって$[p, q] \in [L, L]$) をとる. 恒等式 (12) より,

$$\text{Tr}\ ([p, q]z) = \text{Tr}\ (p[q, z]) = \text{Tr}\ ([q, z]p) \tag{13}$$

---

*1 このような多項式の存在はラグランジュ補間 (Lagrange interpolation) によって保証される.
*2 教科書は "it is obvious" と言ってますが, 全然分かりません.
*3 この定理の仮定は, $\forall x \in [L, L]$, $\forall y \in L$ s.t. $\text{Tr}(xy) = 0$ であり, $y \in M$ ではないので, このままでは補題を適用できない.

$z \in M$ より, $[q,z] \in [L,L]$ なので, 定理の仮定から, $\mathrm{Tr}\ ([p,q]z) = 0$. 任意の $[L,L]$ の元は $[p,q]$ の和の形で書けるから,

$$\forall x \in [L,L],\ \forall z \in M \text{ s.t. } \mathrm{Tr}\ (xz) = 0 \tag{14}$$

よって補題より x は冪零であり, ad x も冪零. Engel の定理から, $[L,L]$ は冪零 Lie 代数となる. □

系 4.3

L を Lie 代数とする. 任意の $x \in [L,L]$, $y \in L$ に対して $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}x\ \mathrm{ad}y) = 0$ であるならば, L は可解 Lie 代数である.

証明. 定理 4.3 を $V \to L, \mathfrak{gl}\ (V)$の部分代数 $L \to \mathfrak{gl}\ (L)$の部分代数 ad (L) として適用する. 定理の仮定を満たすことを確認する. $x \in [L,L]$ より ad $x \in [\mathrm{ad}\ L, \mathrm{ad}\ L]$, $y \in L$ より ad $y \in$ ad L. また系の仮定から $\mathrm{Tr}\ (\mathrm{ad}\ x\ \mathrm{ad}\ y) = 0$. ゆえに定理を適用できて, ad L は可解である.

ad : $L \to \mathfrak{gl}(L)$ に対して Ker ad $= Z(L)$, Im ad $=$ ad L なので, 準同型定理より,

$$L/Z(L) \simeq \mathrm{ad}\ L \tag{15}$$

中心化代数 $Z(L)$ は定義から可解であるので, 命題 3.1(b) [*4]により, L は可解である. □

5 Killing 形式

5.1 半単純性の判定条件

定義 5.1A: Killing 形式

L を任意の Lie 代数とする. $x, y \in L$ に対し, Killing 形式 $\kappa(x,y)$ を次式で定義する.

$$\kappa(x,y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}x\ \mathrm{ad}y) \tag{16}$$

κ は対称な双線型写像であり, 次式の意味で結合則を満たす.

$$\kappa([x,y],\ z) = \kappa(x,\ [y,z]) \tag{17}$$

[*4] $\mathfrak{g}$ のイデアル $\mathfrak{i}$ と商代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ がどちらも可解ならば, g 自身も可解である.

補題 5.1

I は L のイデアルとする．κ が L 上の Killing 形式, κ_I が I 上の Killing 形式とすると, $\kappa_I = \kappa|_{I\times I}$

記号の意味がややこしいので補足.

κ_I ： I 上の Killing 形式．引数の x, y は初めから I の元のみ．ad x は大きさ $\dim I \times \dim I$ の行列.

$\kappa|_{I\times I}$ ： L 上の Killing 形式で, 定義域を $I \times I$ に制限したもの．引数の x, y は制限によって I の元のみになる．ad x は大きさ $\dim L \times \dim L$ の行列.

証明. まず, 線形代数における事実を確認しよう.

V をベクトル空間, W をその部分空間とする．写像 $\phi : V \to V$ の像が Im $\phi \subset W$ を満たす時,

$$\mathrm{Tr}\phi = \mathrm{Tr}(\phi|_W) \tag{18}$$

ここで, $\phi|_W$ は定義域を W に制限した, $\dim W \times \dim W$ の行列である.

補題に戻る．$x, y \in I$ なので, Im $(\mathrm{ad}\ x)(\mathrm{ad}\ y) \subset I$．よって,

$$\begin{aligned}\kappa|_{I\times I} &= \mathrm{Tr}((\mathrm{ad}\ x)(\mathrm{ad}\ y)) \\ &= \mathrm{Tr}((\mathrm{ad}\ x)(\mathrm{ad}\ y)|_I) \\ &= \mathrm{Tr}((\mathrm{ad}_I\ x)(\mathrm{ad}_I\ y)) = \kappa_I\end{aligned} \tag{19}$$

□

定義 5.1B: 非退化

L 上の対称な双線型写像 $\beta(x, y)$ の radical S が 0 (零集合) のとき, β は非退化であるという．ここで, $S = \{x \in L | \beta(x, y) = 0 \text{ for } \forall y \in L\}$[a] .

[a] この S は双線型写像に対する根基 (radical)． 前回出てきたのは Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対する根基 (radical)．名前は同じだが別のもの.

Killing 形式に対する S は, L のイデアルとなる ($\because$ 結合則).

κ が非退化であるかは次のようにして判定できる[*5].

L の基底 $\{x_1, \dots, x_n\}$ をとり, 行列 $K_{ij} = \kappa(x_i, x_j)$ を定義する．このとき,

$$\kappa\text{が非退化} \iff \det K \neq 0 \tag{20}$$

[*5] 教科書に判定法として載っていましたが, なぜこれで判定できるのかが不明です．わかる人助けて.

定理 5.1

L を Lie 代数とする．このとき

$$L が半単純 \;\Leftrightarrow\; \kappa が非退化 \tag{21}$$

証明． $(\Rightarrow)$

仮定より, Rad $L = 0$ である．S を κ の radical とする．S の定義より,

$$\mathrm{Tr}\ (\mathrm{ad}\ x\ \mathrm{ad}\ y) = 0 \text{ for } \forall x \in S, \forall y \in L\ (特に, y \in [S, S])$$

よって補題 4.3 により, S は可解イデアルとなり, $S \subset$ Rad $L = 0$．したがって κ は非退化である．

$(\Leftarrow)$

仮定より, $S = 0$.

$$\mathrm{Rad}\ L = 0 \;\Leftrightarrow\; 0でない可換イデアルは存在しない^{*6} \tag{22}$$

なので, 右側の命題を示す．

I を L の可換イデアルとする．$\forall x \in I, y \in L$ に対し,

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}\ x\ \mathrm{ad}\ y &: L \to L \to I \\ (\mathrm{ad}\ x\ \mathrm{ad}\ y)^2 &: L \to [I, I] = 0 \end{aligned} \tag{23}$$

よって, ad x ad y は冪零であり, Tr (ad x ad y) $= \kappa(x, y) = 0$．ゆえに, $x \in S \;\Rightarrow\; I \subset S$ となるが, $S = 0$ なので $I = 0$ であり, 題意は示された． □

5.2 単純イデアル

定理 5.2

L を半単純 Lie 代数とする．このとき, L の単純なイデアル $L_1, \ldots, L_t$ が存在して, L は L_i の直和で書ける．すなわち,

$$L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_t \tag{24}$$

また, L 上の単純なイデアルは L_i 以外に存在しない．さらに, L_i 上の Killing 形式は, L 上の Killing 形式で定義域を $L_i \times L_i$ 上に制限したものと一致する．

---

*6 対偶で考えると分かりやすい．可換イデアルとは, イデアル内の元同士がすべて可換であることを指す．

証明. (1) まず, 半単純な Lie 代数がイデアルの直和で書けることを示す.

L を半単純 Lie 代数とし, I を任意のイデアルとし,
$I^{\perp} = \{x \in L|\ \kappa(x, y) = 0 \text{ for } \forall y \in I\}$ とおく. κ が結合則 (式 (17)) を満たすので, $I^{\perp}$ はイデアルである[*7].

$\forall x \in [I \cap I^{\perp}, I \cap I^{\perp}] \subset I^{\perp}, \forall y \in I \cap I^{\perp} \subset I$ に対し,

$$\mathrm{Tr}\ (\mathrm{ad}\ x \mathrm{ad}\ y) = \kappa(x, y) = 0 \tag{26}$$

よって, Cartan の判定条件 (系 4.3) より, $I \cap I^{\perp}$ は可解となるが, L が半単純であることから, $I \cap I^{\perp} = 0$. これと $\mathrm{dim} I + \mathrm{dim} I^{\perp} = \mathrm{dim} L$[*8]により, $L = I \oplus I^{\perp}$ と書ける.

(2) 次に, L が単純なイデアルの直和で書けることを示す.

L が非自明なイデアルを持たない場合, すでに L は単純である.

L が非自明なイデアルを持つ場合, 極小イデアルの一つを L_1 として, $L = L_1 \oplus L_1^{\perp}$ と分解できる. L が 0 でない可解イデアルを持たないので, L_1 もまた 0 でない可解イデアルを持たず半単純である. これと極小であることから, L_1 は単純イデアルとなる. 同様の理由で $L_1^{\perp}$ も半単純なので, この操作を繰り返し行うことで, L を単純なイデアルの直和で表せる.

(3) 最後に L_i 以外の単純イデアルが存在しないことを示し, 直和の分解が一意的であることを示す.

I を L の単純イデアルとする. $Z(L) = 0$ なので, $[I, L]$ は 0 でない I のイデアルとなる ($\because [I, L] = 0 \ \Rightarrow \ I \subset Z(L)$). さらに I が単純であることから, $[I, L] = I$. 一方で, L の直和分解より,

$$[I, L] = [I, L_1] \oplus ... \oplus [I, L_t] \tag{27}$$

各 $[I, L_i]$ は I のイデアルとなるから, 0 または I. よって左辺と比較して, ただ一つの k に対して $I = [I, L_k]$ で, それ以外の L_i に対して $[I, L_i] = 0$. ゆえに $I \subset L_k$ となるが, L_k が単純なので $I = L_k$.

以上より, L_i 以外の単純イデアルは存在せず, 直和分解は一意的である.

[*7] $x \in I^{\perp}, z \in L \Rightarrow [x, z] \in I^{\perp}$ を示す. $y \in I$ として,

$$\kappa([x, z]\ y) = \kappa(x\ [y, z]) = 0 \quad (\because [y, z] \in I) \tag{25}$$

よって, $[x, z] \in I^{\perp}$.

[*8] 文献 [3] の 27 ページに証明が載っていましたが, イマイチ不完全な感じがします (行列 $\mathbb{B}'$ がフルランクな理由がわからない).

(4) 補題 5.1 により, L_i 上の Killing 形式は, L 上の Killing 形式で定義域を $L_i \times L_i$ に制限したものと一致する. $\square$

系 5.2

L を半単純 Lie 代数とする.

(a) $L = [L, L]$.
(b) L の任意のイデアル, および L を定義域とする任意の準同型写像の像も半単純 Lie 代数となる.
(c) L の任意のイデアルは, 適当な L の単純イデアルの直和で書ける.

証明. (a)

$$\begin{aligned}[L, L] &= \bigoplus_i [L, L_i] \\ &= \bigoplus_i L_i \qquad (\because [L, L_i] \neq \{0\}) \\ &= L\end{aligned} \tag{28}$$

(b)

L のイデアル $\tilde{L}$ が半単純でないと仮定して矛盾を導く. $\tilde{L}$ が半単純でないので, 定理 5.1 より, $\tilde{L}$ の Killing 形式 $\tilde{\kappa}$ は退化である. すなわち,

$$\exists a \in \tilde{L} \backslash \{0\} \ \mathrm{s.t.} \tilde{\kappa}(a, x) = 0 \ \mathrm{for} \forall x \in \tilde{L} \tag{29}$$

補題 5.1 より, a は $\kappa(a, x) = 0$ for $\forall x \in \tilde{L}$ を満たすので, $a \in \tilde{L}^{\perp}$ [*9]となるが, $\tilde{L} \cap \tilde{L}^{\perp} = \{0\}$ なのでこれは矛盾. よって $\tilde{L}$ は半単純である.

次に, 準同型像も半単純であることを示す[*10]. $f : L \to \mathrm{Im}\ f$ (準同型) に対し, 準同型定理より,

$$\mathrm{Im}\ f \simeq L/\mathrm{Ker}\ f \simeq (\mathrm{Ker}\ f)^{\perp} \tag{30}$$

定理 5.2 の証明 (1) より, $(\mathrm{Ker}\ f)^{\perp}$ も L のイデアルなので, 半単純. よって $\mathrm{Im}\ f$ も半単純である.

(c)

上記 (b) の主張, および直和分解の一意性から従う. $\square$

---

*9 $\tilde{L}^{\perp} = \left\{ x \in L \middle| \ \kappa(x, y) = 0 \text{ for } \forall y \in \tilde{L} \right\}$

*10 調べても出てこなくて, 合ってるか微妙です.

5.3 内部微分

定理 5.3

L が半単純 Lie 代数ならば, $\mathrm{ad}\ L = \mathrm{Der}\ L$. すなわち, 任意の微分は内部微分.

一般の Lie 代数 L に対して, $\mathrm{ad}\ L$ は $\mathrm{Der}\ L$ のイデアルであることを確認しておこう.
$\delta \in \mathrm{Der}\ L, \mathrm{ad}\ x \in \mathrm{ad}\ L, v \in L$ に対し,

$$\begin{aligned}[\delta, \mathrm{ad}\ x](v) &= \delta[x, v] - \mathrm{ad}\ x(\delta v) \\ &= [\delta x, v] + [x, \delta v] - [x, \delta v] \\ &= \mathrm{ad}\ \delta x(v)\end{aligned} \tag{31}$$

よって, $[\delta, \mathrm{ad}\ x] \in \mathrm{ad}\ L$.

証明. L が半単純なので, $Z(L) = \{0\}$. つまり, $\mathrm{Ker}\ \mathrm{ad} = \{0\}$ なので, L と $\mathrm{ad}\ L$ は同型であり, 特に $\mathrm{ad}\ L$ は半単純.
$M = \mathrm{ad}\ L$ とおく. $M^{\perp} = \{x \in D | \ \kappa(x, y) = 0 \text{ for } \forall y \in M\}$ とすれば, 定理 5.2 の証明 (1) より, $M \cap M^{\perp}$. よって, $[M, M^{per}] \subset M$ かつ $[M, M^{per}] \subset M^{\perp}$ より, $[M, M^{per}] = \{0\}$.

したがって, $\forall \delta \in I$ に対して,

$$\mathrm{ad}\ \delta x = [\delta, \mathrm{ad}\ x] = 0 \ \Rightarrow \ \delta x = 0 \text{ for } \forall x \in L \tag{32}$$

つまり, $\delta = 0$ であり, $I = \{0\}$. したがって, $\mathrm{Der}\ L = M = \mathrm{ad}\ L$. □

5.4 抽象 Jordan 分解

L を半単純 Lie 代数とする. 補題 4.2B より, $\mathrm{Der}\ L$ は $\mathrm{Der}\ L$ 内に半単純成分と冪零成分を持つ[*11]. いま, $\mathrm{Der}\ L = \mathrm{ad}\ L$ であり, L と $\mathrm{ad}\ L$ は一対一対応である. よって, $\forall x \in L$ に対して $\exists s, n \in L$ s.t.

$$\mathrm{ad}\ x = \mathrm{ad}\ s + \mathrm{ad}\ n \qquad (s\text{は半単純}, n\text{は冪零}) \tag{33}$$

よって, $x = s + n$ と分解することができ, これを抽象 Jordan 分解と呼ぶ. s, n はそれぞれ半単純成分, 冪零成分と呼ばれる[*12].

[*11] この補題は L が半単純でなくても成り立つ
[*12] 線型写像でない Lie 代数に対して ”半単純成分”, ” 冪零成分” を定義できる.

特に L が線形 Lie 代数である場合, $\forall x \in L$ は $x = x_s + s_n$ と Jordan-Chevalley 分解できる. これが抽象 Jordan 分解によって得られた s, n と一致することは 6.4 節で確認する.

参考文献

[1] 田川 裕之, Lie 環論入門, https://web.wakayama-u.ac.jp/~tagawa/lecture/liealgh.pdf

[2] 対角化と固有値問題, https://w.atwiki.jp/nopu/pages/138.html

[3] 渡邉 究, 数学特別講義 X, 代数学特論 V (リー代数入門) http://www.rimath.saitama-u.ac.jp/lab.jp/kwatanab/lie-algebra2015.pdf