Humphreys Chapter II Exercises
解答例（2023/11/13 実施分）

高間俊至

2023 年 11 月 13 日

[1, p.24, Exercise1, 2] の解答例です．

何の断りもない場合，体 $\mathbb{K}$ は代数閉体でかつ $\mathrm{char}\,\mathbb{K}=0$ であるとする．また，$\mathfrak{g}$ は零でない体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とする．

> Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が冪零 Lie 代数 $\implies$ $\mathfrak{g}$ の Killing 形式が恒等的に 0

証明 $\mathfrak{g}$ が冪零 Lie 代数であるとする．このとき第 1 回資料の命題 1.1.4-(5) より，部分 Lie 代数 $\mathrm{Im}\,\mathrm{ad}\subset\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の任意の元 $\mathrm{ad}(x)\in\mathrm{Im}\,\mathrm{ad}$ は冪零である．従って $\mathrm{Im}\,\mathrm{ad}$ に対して Corollary 3.3 [1, p.13] を使うことができて，$\forall\,\mathrm{ad}(x)\in\mathrm{Im}\,\mathrm{ad}$ の表現行列を同時に $\mathfrak{n}(\dim\mathfrak{g},\,\mathbb{K})$ の元（i.e. 対角成分が全て 0 であるような上三角行列）にするような $\mathfrak{g}$ の基底が存在する．この基底の下では，$\forall\,\mathrm{ad}(x),\,\mathrm{ad}(y)\in\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ に対して $\mathrm{ad}(x)\circ\mathrm{ad}(y)$ の表現行列も $\mathfrak{n}(\dim\mathfrak{g},\,\mathbb{K})$ の元になるので $\mathrm{Tr}\big(\mathrm{ad}(x)\circ\mathrm{ad}(y)\big)=0$ が言えた．

■

> Lie 代数 $\mathfrak{g}$ およびその Killing 形式
>
> $$\kappa\colon\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\longrightarrow\mathbb{K},\ (x,\,y)\longmapsto\mathrm{Tr}\big(\mathrm{ad}(x)\circ\mathrm{ad}(y)\big)$$
>
> を与える．このとき以下の 2 つは同値である[a]：
>
> (1) $\mathfrak{g}$ が可解
>
> (2)
>
> $$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\subset\left\{\,x\in\mathfrak{g}\;\middle|\;\forall y\in\mathfrak{g},\ \kappa(x,\,y)=0\,\right\}$$
>
> [a] $\left\{\,x\in\mathfrak{g}\;\middle|\;\forall y\in\mathfrak{g},\ \kappa(x,\,y)=0\,\right\}$ を κ の **radical** と呼ぶのだった．

証明 (1) $\implies$ (2)

$\mathfrak{g}$ が可解であるとする．このとき第 1 回資料の命題 1.1.3-(1) より，Lie 代数の準同型 $\mathrm{ad}\colon\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の像 $\mathrm{Im}\,\mathrm{ad}\subset\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ もまた可解な部分 Lie 代数である．よって Lie の定理 [1, p.16, Corollary A] から，$\forall\,\mathrm{ad}(x)\in\mathrm{Im}\,\mathrm{ad}$ の表現行列を同時に $\mathfrak{t}(\dim\mathfrak{g},\,\mathbb{K})$ の元（i.e. 上三角行列）にするような $\mathfrak{g}$ の基底が存

在する．以下，$\mathfrak{g}$ の基底をこの特別な基底に固定する．

$[x, y]$ の形をした任意の $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ の元をとる．このとき $\mathrm{ad}([x, y]) = [\mathrm{ad}(x), \mathrm{ad}(y)] = \mathrm{ad}(x) \circ \mathrm{ad}(y) - \mathrm{ad}(y) \circ \mathrm{ad}(x)$ が成り立つ[*1]が，今の基底の下では $\mathrm{ad}(x)$, $\mathrm{ad}(y)$ の表現行列が上三角行列なので $\mathrm{ad}([x, y])$ の表現行列は $\mathfrak{n}(\dim \mathfrak{g}, \mathbb{K})$ の元（i.e. 対角成分が全て 0 であるような上三角行列）になる．このとき $\forall z \in \mathfrak{g}$ に対して[*2] $\mathrm{ad}([x, y]) \circ \mathrm{ad}(z)$ の表現行列もまた $\mathfrak{n}(\dim \mathfrak{g}, \mathbb{K})$ の元になるので $\kappa([x, y], z) = \mathrm{Tr}\big(\mathrm{ad}([x, y]) \circ \mathrm{ad}(z)\big) = 0$ が言える．$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ が $[x, y]$ の形をした元によって生成されること，および κ が双線型写像であることから証明が完了した．

(1) $\Longleftarrow$ (2)

Corollary [1, p.20] そのものである．

■

参考文献

[1] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory* (Springer, 1972).

[*1] ad は Lie 代数の準同型なので．$\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の Lie ブラケットは交換子だったことを思い出すと良い．

[*2] $\mathfrak{g}$ の基底の取り方から $\mathrm{ad}(z) \in \mathrm{Im}\,\mathrm{ad}$ の表現行列もまた上三角行列である．