Humphreys Chapter II Exercises 解答例（2023/12/11 実施分）

高間俊至

2023 年 12 月 11 日

[1, p.30, Exercise1] の解答例です．

何の断りもない場合，体 $\mathbb{K}$ は代数閉体でかつ $\operatorname{char}\mathbb{K} = 0$ であるとする．また，$\mathfrak{g}$ は零でない体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 Lie 代数とする．

2　$\mathfrak{sl}(2)$ の表現論

$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の $m+1$ 次元既約表現を $V(m)$ と書く．$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の基底として

$$x \coloneqq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad y \coloneqq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad h \coloneqq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

をとることができる．この基底同士の Lie ブラケットは

$$[x, y] = h, \qquad [h, x] = 2x, \qquad [h, y] = -2y$$

と計算できる．

任意の有限次元 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群 V に対して極大ベクトルが存在する．

$\forall 0 \le n \le m$ に対して，Weyl の定理より $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群のテンソル積 $V(m) \otimes V(n)$ は既約部分 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群の直和に分解する．この直和分解を求めよ．

3　ルート空間分解

一回目の演習回で扱った通り，A_l 型 Lie 代数の基底は

$$\left\{\, e_{ij} \;\middle|\; 1 \le i \ne j \le l+1 \,\right\}$$
$$\cup \left\{\, e_{ii} - e_{i+1,\, i+1} \;\middle|\; 1 \le i \le l \,\right\}$$

B_l 型 Lie 代数の基底は

$$\begin{aligned}
&\left\{\, e_{1,\,1+i} - e_{1+l+i,\,1} \,\middle|\, 1 \leq i \leq l \,\right\} \\
\cup &\left\{\, e_{1,\,1+l+i} - e_{1+i,\,1} \,\middle|\, 1 \leq i \leq l \,\right\} \\
\cup &\left\{\, e_{1+l+i,\,1+j} - e_{1+l+j,\,1+i} \,\middle|\, 1 \leq i < j \leq l \,\right\} \\
\cup &\left\{\, e_{1+j,\,1+i} - e_{1+l+i,\,1+l+j} \,\middle|\, 1 \leq i,\, j \leq l \,\right\} \\
\cup &\left\{\, e_{1+i,\,1+l+j} - e_{1+j,\,1+l+i} \,\middle|\, 1 \leq i < j \leq l \,\right\}
\end{aligned}$$

C_l 型 Lie 代数の基底は

$$\begin{aligned}
&\left\{\, e_{l+i,\,i} \,\middle|\, 1 \leq i \leq l \,\right\} \cup \left\{\, e_{l+i,\,j} + e_{l+j,\,i} \,\middle|\, 1 \leq i < j \leq l \,\right\} \\
\cup &\left\{\, e_{j,\,i} - e_{l+i,\,l+j} \,\middle|\, 1 \leq i,\, j \leq l \,\right\} \\
\cup &\left\{\, e_{i,\,l+i} \,\middle|\, 1 \leq i \leq l \,\right\} \cup \left\{\, e_{i,\,l+j} + e_{1+j,\,l+i} \,\middle|\, 1 \leq i < j \leq l \,\right\}
\end{aligned}$$

D_l 型 Lie 代数の基底は

$$\begin{aligned}
&\left\{\, e_{l+i,\,j} - e_{l+j,\,i} \,\middle|\, 1 \leq i < j \leq l \,\right\} \\
\cup &\left\{\, e_{j,\,i} - e_{l+i,\,l+j} \,\middle|\, 1 \leq i,\, j \leq l \,\right\} \\
\cup &\left\{\, e_{i,\,l+j} - e_{j,\,l+i} \,\middle|\, 1 \leq i < j \leq l \,\right\}
\end{aligned}$$

にとることができる．

$\mathfrak{g}$ を A_l, B_l, C_l, D_l 型 Lie 代数のどれかとする．このとき，$\mathfrak{g}$ の対角行列全体が成す部分 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ は次元 l の極大トーラスであることを示せ．

$\mathfrak{g}$ を A_l 型 Lie 代数とする．極大トーラス

$$\mathfrak{h} := \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{l+1} \end{bmatrix} \in \mathrm{M}(l+1,\, \mathbb{K}) \,\middle|\, \sum_{\mu=1}^{l+1} \lambda_\mu = 0 \right\}$$

に付随するルート系を求めよ．

$\mathfrak{g}$ を D_l 型 Lie 代数とする．極大トーラス

$$\mathfrak{h} := \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_l & & & \\ & & & -\lambda_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -\lambda_l \end{bmatrix} \in \mathrm{M}(2l,\, \mathbb{K}) \right\}$$

に付随するルート系を求めよ．

$\mathfrak{g}$ を C_l 型 Lie 代数とする．極大トーラス

$$\mathfrak{h} := \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_l & & & \\ & & & -\lambda_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -\lambda_l \end{bmatrix} \in \mathrm{M}(2l,\, \mathbb{K}) \right\}$$

に付随するルート系を求めよ．

$\mathfrak{g}$ を B_l 型 Lie 代数とする．極大トーラス

$$\mathfrak{h} := \left\{ \begin{bmatrix} 0 & & & & & & \\ & \lambda_1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \lambda_l & & & \\ & & & & -\lambda_1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & -\lambda_l \end{bmatrix} \in \mathrm{M}(2l+1,\, \mathbb{K}) \right\}$$

に付随するルート系を求めよ．

4, 5, 7 次元の半単純 Lie 代数が存在しないことを示せ

<u>証明</u> ■

参考文献

[1] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory* (Springer, 1972).