第 2 章

半単純 Lie 代数

この章以降，$\mathbb{K}$-ベクトル空間 V の零ベクトルを $0 \in V$ と書き，零ベクトル空間 $\{0\}$ のことも 0 と表記する[*1]．この章において，特に断らない限り体 $\mathbb{K}$ は代数閉体[*2]で，かつ $\mathrm{char}\,\mathbb{K} = 0$ であるとする．また，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は常に有限次元であるとする．

2.1 Lie の定理・Cartan の判定条件

2.1.1 Lie の定理

定理 2.1.1:

V を有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間とし，$\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ が可解であるとする．
このとき $V \neq 0$ ならば，$\forall x \in \mathfrak{gl}(V)$ は共通の固有ベクトルを持つ．

系 2.1.2: Lie の定理

V を有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間とし，$\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ が可解であるとする．
このとき $\forall x \in \mathfrak{g}$ は V のある共通の旗を安定化する．i.e. $\forall x \in \mathfrak{g}$ の表現行列を同時に上三角行列にするような V の基底が存在する．

系 2.1.3:

$\mathfrak{g}$ を可解 Lie 代数とする．このとき $\mathfrak{g}$ のイデアルの上昇列

$$0 = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$$

であって，$0 \leq \forall i \leq n$ に対して $\dim \mathfrak{g}_i = i$ を充たすようなものが存在する．

[*1] 記号の濫用だが，広く普及している慣習である．
[*2] つまり，定数でない任意の 1 変数多項式 $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ に対してある $\alpha \in \mathbb{K}$ が存在して $f(\alpha) = 0$ を充たす．

系 2.1.4:

$\mathfrak{g}$ を可解 Lie 代数とする．このとき

$$x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{ad}(x) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \text{ が冪零}$$

が成り立つ．特に，$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ は冪零 Lie 代数である．

2.1.2 Jordan-Chevalley 分解

この小節において体 $\mathbb{K}$ は代数閉体で，かつ標数は任意とする．

定義 2.1.1: 線型変換の半単純性

V を有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間とし，$x \in \mathrm{End}\, V$ とする．x が**半単純** (semisimple) であるとは，x の最小多項式が $\mathbb{K}$ 上で重根を持たないことを言う[a]．

[a] x が対角化可能であることと同値である．

命題 2.1.1: Jordan-Chevalley 分解

V を有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間とし，$x \in \mathrm{End}\, V$ を与える．このとき以下が成り立つ：

(1) 半単純な $x_s \in \mathrm{End}\, V$ と冪零な $x_n \in \mathrm{End}\, V$ が一意的に存在して，

$$x = x_s + x_n$$

と書ける．

(2) 定数項を持たない $p(t), q(t) \in \mathbb{K}[t]$ であって，$x_s = p(x)$, $x_n = q(x)$ を充たすものが存在する．特に $[x, x_s] = [x, x_n] = [x_s, x_n] = 0$ が成り立つ．

(3) 部分ベクトル空間 $A \subset B \subset V$ があって $x|_B : B \longrightarrow A$ であるとき，$x_s|_B$, $x_n|_B$ の値域もまた A に収まる．

補題 2.1.1:

V を有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間とし，$x \in \mathrm{End}\, V$ とその Jordan-Chevalley 分解 $x = x_s + x_n$ を与える．

このとき $\mathrm{ad}(x) \in \mathrm{End}(\mathfrak{gl}(V))$ の Jordan-Chevalley 分解 $\mathrm{ad}(x) = \mathrm{ad}(x)_s + \mathrm{ad}(x)_n$ は $\mathrm{ad}(x)_s = \mathrm{ad}(x_s)$, $\mathrm{ad}(x)_n = \mathrm{ad}(x_n)$ を充たす．

補題 2.1.2:

$\mathfrak{U}$ を有限次元 $\mathbb{K}$-代数とする．このとき微分代数 $\mathrm{Der}\, \mathfrak{U} \subset \mathrm{End}\, \mathfrak{U}$ の任意の元 $x \in \mathrm{Der}\, \mathfrak{U}$ の Jordan-Chevalley 分解 $x = x_s + x_n$ に対して $x_s, x_n \in \mathrm{Der}\, \mathfrak{U}$ が成り立つ．

2.1.3　Cartan の判定条件

定理 2.1.5: Cartan の判定条件

V を有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間とし，$\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ を与える．
このとき以下の 2 つは同値である：

(1) $\mathfrak{g}$ が可解
(2) $\forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $\forall y \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{Tr}(x \circ y) = 0$ が成り立つ

系 2.1.6:

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ を与える．
このとき $\forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $\forall y \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{Tr}\bigl(\mathrm{ad}(x) \circ \mathrm{ad}(y)\bigr) = 0$ が成り立つならば，$\mathfrak{g}$ は可解である．

2.2　Killing 形式

2.2.1　半単純性の判定条件

定義 2.2.1: Killing 形式

体 $\mathbb{K}$ 上の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の上の対称な双線型形式

$$\kappa\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K},\ (x,\ y) \longmapsto \mathrm{Tr}\bigl(\mathrm{ad}(x) \circ \mathrm{ad}(y)\bigr)$$

のことを $\mathfrak{g}$ の **Killing 形式** (Killing form) と呼ぶ．

定義 2.2.2: 双線型形式の radical

体 $\mathbb{K}$ 上の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の上の対称な双線型形式

$$\beta\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\longrightarrow\mathbb{K}$$

および任意の部分集合 $W\subset\mathfrak{g}$ を与える．

- $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間

$$W^{\perp}:=\left\{\,x\in\mathfrak{g}\;\middle|\;\forall w\in W,\ \beta(x,\,w)=0\,\right\}$$

  のことを W の β に関する**直交補空間** (orthogonal complement) と呼ぶ.
- $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間

$$S_{\beta}:=\mathfrak{g}^{\perp}=\left\{\,x\in\mathfrak{g}\;\middle|\;\forall y\in\mathfrak{g},\ \beta(x,\,y)=0\,\right\}$$

  のことを β の **radical** と呼ぶ.
- β が**非退化** (nondegenerate) であるとは，$S_{\beta}=0$ であることを言う[a].

[a] W が $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間のとき，β の W への制限 $\beta|_{W\times W}$ が**非退化** (nondegenerate) であるとは，$W\cap W^{\perp}=0$ であることを言う．

定理 2.2.1: Lie 代数の半単純性と Killing 形式の非退化性

$\mathfrak{g}$ が半単純 Lie 代数 $\iff$ $\mathfrak{g}$ の Killing 形式が非退化

2.2.2 単純イデアル

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ と，そのイデアルの族 $\left\{\mathfrak{i}_i\right\}_{i\in I}$ を与える．$\mathfrak{g}$ が $\left\{\mathfrak{i}_i\right\}_{i\in I}$ の**直和** (direct sum)[*3]であるとは，部分ベクトル空間の内部直和として

$$\mathfrak{g}=\bigoplus_{i\in I}\mathfrak{i}_i$$

が成り立つことを言う．

[*3] 厳密には，命題??の意味で**内部直和** (internal direct sum) と呼ぶべきだと思う．

定理 2.2.2: 半単純 Lie 代数の直和分解

$\mathfrak{g}$ を半単純 Lie 代数とする．このとき $\mathfrak{g}$ の単純イデアル $\mathfrak{i}_1, \dots, \mathfrak{i}_t$ が存在して以下を充たす：

(1)

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{t} \mathfrak{i}_i$$

(2) $\mathfrak{g}$ の任意の単純イデアルは $\mathfrak{i}_i$ のどれか 1 つと一致する．i.e. (1) の直和分解は一意である．

(3) $\mathfrak{i}_i$ 上の Killing 形式 $\kappa_{\mathfrak{i}_i}$ は $\kappa_{\mathfrak{i}_i \times \mathfrak{i}_i}$ に等しい．

系 2.2.3:

$\mathfrak{g}$ が半単純 Lie 代数ならば以下が成り立つ：

(1) $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$

(2) $\mathfrak{g}$ の任意のイデアルは半単純である．

(3) 任意の Lie 代数の準同型 $f\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ について，$\mathrm{Im}(\mathfrak{h})$ は半単純である．

(4) $\mathfrak{g}$ の任意のイデアルは $\mathfrak{g}$ の単純イデアルの直和である．

2.2.3 内部微分

定理 2.2.4:

半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して，

$$\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Der}\,\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

2.2.4 抽象 Jordan 分解

$\mathfrak{g}$ を半単純 Lie 代数とする．このとき $\mathfrak{g}$ の中心 $Z(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の可解イデアルなので 0 となる．i.e. $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ に関して $\mathrm{Ker}\,\mathrm{ad} = Z(\mathfrak{g}) = 0$ が言えるので ad は単射である．一方で定理 2.2.4 より $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Der}\,\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ なので，補題 2.1.2 を合わせると $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{ad}(x) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の Jordan-Chevalley 分解 $\mathrm{ad}(x) = \mathrm{ad}(x)_s + \mathrm{ad}(x)_n$ $\;^{\mathrm{w}/}\;$ $\mathrm{ad}(x)_s,\, \mathrm{ad}(x)_n \in \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ が存在する．

定義 2.2.3: 抽象 Jordan 分解

$\forall x \in \mathfrak{g}$ の**抽象 Jordan 分解**とは，$\mathrm{ad}(s_x) = \mathrm{ad}(x)_s$，$\mathrm{ad}(n_x) = \mathrm{ad}(x)_n$ を充たす $s_x,\, n_x \in \mathfrak{g}$ のこと．

ad が単射なので，$\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ における通常の Jordan-Chevalley 分解の一意性から $s_x,\, n_x$ は一意に決まる．さらに $\mathrm{ad}(x) = \mathrm{ad}(s_x) + \mathrm{ad}(n_x) = \mathrm{ad}(s_x + n_x)$ ということなので $x = s_x + n_x \in \mathfrak{g}$ が成り立つ．さらに命題 2.1.1-(2) より $0 = [\mathrm{ad}(s_x), \mathrm{ad}(n_x)] = \mathrm{ad}([s_x, n_x])$ なので $[s_x, n_x] = 0$ もわかる．

2.3 表現の完全可約性

2.3.1 $\mathfrak{g}$-加群と表現

この小節では $\mathbb{K}$ を任意の体とする．まず，環上の加群の定義を復習する：

公理 2.3.1: 環上の加群の公理

- R を環とする．**左 R 加群** (left R-module) とは，可換群 $(M, +, 0)$ と写像[a]

$$\cdot : R \times M \to M,\ (a, x) \mapsto a \cdot x$$

の組 $(M, +, \cdot\ )$ であって，$\forall x, x_1, x_2 \in M$，$\forall a, b \in R$ に対して以下を充たすもののことを言う：

(LM1) $a \cdot (b \cdot x) = (ab) \cdot x$

(LM2) $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$

(LM3) $a \cdot (x_1 + x_2) = a \cdot x_1 + a \cdot x_2$

(LM4) $1 \cdot x = x$

ただし，$1 \in R$ は環 R の乗法単位元である．

- R を環とする．**右 R 加群** (left R-module) とは，可換群 $(M, +, 0)$ と写像

$$\cdot : M \times R \to M,\ (x, a) \mapsto x \cdot a$$

の組 $(M, +, \cdot\ )$ であって，$\forall x, x_1, x_2 \in M$，$\forall a, b \in R$ に対して以下を充たすもののことを言う：

(RM1) $(x \cdot b) \cdot a = x \cdot (ba)$

(RM2) $x \cdot (a + b) = x \cdot a + x \cdot b$

(RM3) $(x_1 + x_2) \cdot a = x_1 \cdot a + x_2 \cdot a$

(RM4) $x \cdot 1 = x$

- R, S を環とする．**(R, S) 両側加群** ((R, S)-bimodule) とは，可換群 $(M, +, 0)$ と写像

$$\begin{aligned} \cdot_{\mathrm{L}} &: R \times M \to M,\ (a, x) \mapsto a \cdot_{\mathrm{L}} x \\ \cdot_{\mathrm{R}} &: M \times R \to M,\ (x, a) \mapsto x \cdot_{\mathrm{R}} a \end{aligned}$$

の組 $(M, +, \cdot_{\mathrm{L}}, \cdot_{\mathrm{R}})$ であって，$\forall x \in M$，$\forall a \in R$，$\forall b \in S$ に対して以下を充たすもののことを言う：

(BM1) 左スカラー乗法 $\cdot_{\mathrm{L}}$ に関して M は左 R 加群になる

(BM2) 右スカラー乗法 $\cdot_{\mathrm{R}}$ に関して M は右 S 加群になる

(BM3) $(a \cdot_{\mathrm{L}} x) \cdot_{\mathrm{R}} b = a \cdot_{\mathrm{L}} (x \cdot_{\mathrm{R}} b)$

[a] この写像 $\cdot$ は**スカラー乗法** (scalar multiplication) と呼ばれる．

R が**可換環**の場合，**(LM1)** と **(RM1)** が同値になるので，左 R 加群と右 R 加群の概念は同値になる．こ

れを単に ***R* 加群** (R-module) と呼ぶ．

R が体の場合，R 加群のことを ***R*-ベクトル空間**と呼ぶ．

以下では，なんの断りもなければ R 加群と言って左 R 加群を意味する．

$\mathfrak{g}$ を体 $\mathbb{K}$ 上の Lie 代数とする．このとき，環上の加群の公理を少し修正することで Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上の加群の概念を得る：

公理 2.3.2: Lie 代数上の加群

$\mathfrak{g}$ を体 $\mathbb{K}$ 上の Lie 代数とする．**$\mathfrak{g}$-加群**とは，$\mathbb{K}$-ベクトル空間 $(V,\,+,\,\cdot\,)$ と写像

$$\blacktriangleright\colon \mathfrak{g}\times V \longrightarrow V,\ (x,\,v) \longmapsto x \blacktriangleright v$$

の 4 つ組 $(V,\,+,\,\cdot\,,\,\blacktriangleright)$ であって，$\forall x,\,x_1,\,x_2 \in \mathfrak{g},\ \forall v,\,v_1,\,v_2 \in V,\ \forall \lambda,\,\mu \in \mathbb{K}$ に対して以下を充たすもののことを言う：

(M1) $(\lambda\cdot x_1 + \mu\cdot x_2) \blacktriangleright v = \lambda\cdot(x_1 \blacktriangleright v) + \mu\cdot(x_2 \blacktriangleright v)$

(M2) $x \blacktriangleright (\lambda\cdot v_1 + \mu\cdot v_2) = \lambda\cdot(x \blacktriangleright v_1) + \mu\cdot(x \blacktriangleright v_2)$

(M3) $[x,y] \blacktriangleright v = x \blacktriangleright (y \blacktriangleright v) - y \blacktriangleright (x \blacktriangleright v)$

同値な定義として，Lie 代数の表現

$$\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V),\ x \longmapsto \bigl(v \mapsto \phi(x)(v)\bigr)$$

について

$$\blacktriangleright\colon \mathfrak{g}\times V \longrightarrow V,\ (x,\,v) \longmapsto \phi(x)(v)$$

とおくことで得られる 4 つ組 $(V,\,+,\,\cdot\,,\,\blacktriangleright)$ のことである[a]．

[a] 【例??】より $\mathfrak{gl}(V)$ の Lie ブラケットは交換子だったので $[x,y] \blacktriangleright \text{-} = \phi([x,y]) = [\phi(x),\phi(y)] = \phi(x)\circ\phi(y) - \phi(y)\circ\phi(x) = x \blacktriangleright (y \blacktriangleright \text{-}) - y \blacktriangleright (x \blacktriangleright \text{-})$ となる．

$\mathfrak{g}$-加群に備わっている 3 つの演算（加法，スカラー乗法，左作用）をいちいち全て明記するのは面倒なので $(V,\,+,\,\cdot\,,\,\blacktriangleright)$ のことを「**$\mathfrak{g}$-加群 V**」と略記する．この略記において，今まで通りスカラー乗法 $\cdot$ は省略して λv の様に書き，左作用はなんの断りもなく $x \blacktriangleright v$ の様に書くことにする．

全く同様に代数上の加群，結合代数上の加群を定義することもできるが，本章では以降 $\mathfrak{g}$-加群と言ったら Lie 代数上の加群を指すことにする．Lie 代数の表現を考えることは $\mathfrak{g}$-加群を考えることと同値なのである．

定義 2.3.1: $\mathfrak{g}$-加群の準同型

$\mathfrak{g}$ を Lie 代数，$(V, +, \cdot, \blacktriangleright_1)$, $(W, +, \cdot, \blacktriangleright_2)$ を $\mathfrak{g}$-加群とする．

- 線型写像 $f\colon V \longrightarrow W$ が **$\mathfrak{g}$-加群の準同型** (homomorphism of $\mathfrak{g}$-module) [a] であるとは，$\forall x \in \mathfrak{g}$, $\forall v \in V$ に対して
$$f(x \blacktriangleright_1 v) = x \blacktriangleright_2 f(v)$$
が成り立つこと[b]．
- $\mathfrak{g}$-加群の準同型 $f\colon V \longrightarrow W$ が**同型** (isomorphism) であるとは，f がベクトル空間の同型写像であることを言う．
- 同型な $\mathfrak{g}$-加群のことを，**同値な $\mathfrak{g}$ の表現** (equivalent representation of $\mathfrak{g}$) とも言う．

[a] **同変写像** (equivalent map) と言うこともある．**絡作用素** (intertwining operator)，**インタートウィナー** (intertwiner) と言う場合もあるが，そこまで普及していない気がする．
[b] スカラー乗法についての線型性の定義を $\blacktriangleright$ について拡張しただけ．

同値な定義だが，線型写像 $f\colon V \longrightarrow W$ が $\mathfrak{g}$-加群の準同型であるとは，Lie 代数の表現
$$\phi_1\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V),\ x \longmapsto \bigl(v \mapsto x \blacktriangleright_1 v\bigr)$$
$$\phi_2\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(W),\ x \longmapsto \bigl(v \mapsto x \blacktriangleright_2 v\bigr)$$
に関して
$$\forall x \in \mathfrak{g},\ f \circ \phi_1(x) = \phi_2(x) \circ f$$
が成り立つことを言う．

定義 2.3.2: 部分 $\mathfrak{g}$-加群

$\mathfrak{g}$-加群 V を与える．部分集合 $W \subset V$ が**部分 $\mathfrak{g}$-加群**であるとは，W が和，スカラー乗法，$\mathfrak{g}$ の左作用の全てについて閉じていること．i.e. $\forall w, w_1, w_2 \in W$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して
$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &\in W \\ \lambda w &\in W \\ x \blacktriangleright w &\in W \end{aligned}$$
が成り立つことを言う．

同値な定義として，以下の 2 つの条件が充たされることを言う：

(sub-M1) W が V の部分ベクトル空間

(sub-M2) Lie 代数の表現
$$\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V),\ x \longmapsto (v \longmapsto x \blacktriangleright v)$$

に関して

$$\forall x \in \mathfrak{g},\ \phi(x)(W) \subset W$$

が成り立つ．i.e. $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して W は $\phi(x)$-不変である．

【例 2.3.1】$\mathfrak{g}$-加群の準同型の核と像

$\mathfrak{g}$-加群 V, W とその間の $\mathfrak{g}$-加群の準同型 $f\colon V \longrightarrow W$ を与える．このとき

$$\begin{aligned} v \in \operatorname{Ker} f \quad &\Longrightarrow \quad \forall x \in \mathfrak{g},\ f(x \blacktriangleright v) = x \blacktriangleright f(v) = x \blacktriangleright 0 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathfrak{g},\ x \blacktriangleright v \in \operatorname{Ker} f, \\ w \in \operatorname{Im} f \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists v \in V,\ w = f(v) \quad \Longrightarrow \quad \forall x \in \mathfrak{g},\ x \blacktriangleright w = x \blacktriangleright f(v) = f(x \blacktriangleright v) \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathfrak{g},\ x \blacktriangleright w \in \operatorname{Im} f \end{aligned}$$

が言えるので $\operatorname{Ker} f,\ \operatorname{Im} f$ はそれぞれ V, W の部分 $\mathfrak{g}$-加群である．

2.3.2 $\mathfrak{g}$-加群の直和と既約性

この小節でも $\mathbb{K}$ を任意の体とする．

定義 2.3.3: $\mathfrak{g}$-加群の直和

$\mathfrak{g}$-加群の族 $\bigl\{(V_i,\ +,\ \cdot\ ,\ \blacktriangleright_i)\bigr\}_{i \in I}$ を与える．このとき

- 直和ベクトル空間 $\bigoplus_{i \in I} V_i$
- $\bigoplus_{i \in I} V_i$ への $\mathfrak{g}$ の左作用

$$\blacktriangleright\colon \mathfrak{g} \times \bigoplus_{i \in I} V_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} V_i,\ \bigl(x,\ (v_i)_{i \in I}\bigr) \longmapsto (x \blacktriangleright_i v_i)_{i \in I}$$

の組として得られる $\mathfrak{g}$-加群 $(\bigoplus_{i \in I} V_i,\ +,\ \cdot\ ,\ \blacktriangleright)$ を **$\mathfrak{g}$-加群の直和** (direct sum) と呼び[a]，$\boldsymbol{\bigoplus_{i \in I} V_i}$ と略記する．

[a] 系??の注と同様に，この定義は厳密には**外部直和** (external direct sum) と呼ぶべきだと思う．

定義 2.3.4: Lie 代数の表現の既約性

- $\mathfrak{g}$-加群 V が**既約** (irreducible)[a]であるとは，V の部分 $\mathfrak{g}$-加群が $0,\ V$ のちょうど2つ[b]だけであることを言う．
- $\mathfrak{g}$-加群 V が**完全可約** (completely reducible) であるとは，V が既約な部分 $\mathfrak{g}$-加群の直和[c]であることを言う．

[a] i.e. Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現 $(\phi,\ V)$ が**既約表現** (irreducible representation; irrep) だ，と言っても良い．
[b] つまり，零ベクトル空間 0 は既約な $\mathfrak{g}$-加群とは呼ばない．
[c] こちらの場合，厳密には**内部直和** (internal direct sum) と呼ぶべきだと思う．

次の補題は証明が少し厄介である：

補題 2.3.1: 完全可約の全射

$\mathfrak{g}$-加群の準同型 $p\colon V \longrightarrow W$ を与える．このとき p が全射かつ V が完全可約ならば，$\mathfrak{g}$-加群の短完全列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} p \hookrightarrow V \xrightarrow{p} W \longrightarrow 0$$

は分裂する．

<u>証明</u> V が完全可約という仮定から，既約な部分 $\mathfrak{g}$-加群の族 $\{V_i\}_{i \in I}$ が存在して，内部直和の意味で

$$V = \bigoplus_{i \in I} V_i$$

と書ける．ここで $\mathcal{S}$ を以下の条件を充たす組 $(J,\, V_J)$ 全体の集合とする：

- $J \subset I,\ V_J = \bigoplus_{j \in J} V_j \subset V$
- $\operatorname{Ker} p \cap V_J = 0$

$\mathcal{S}$ の上の 2 項関係を

$$(J,\, V_J) \leq (K,\, V_K) \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad J \subset K$$

と定義すると組 $(\mathcal{S},\, \leq)$ は順序集合になる．また $\mathcal{S}' = \bigl\{(J_a,\, V_{J_a})\bigr\}_{a \in A}$ を $\mathcal{S}$ の任意の全順序部分集合とすると $\Bigl(\bigcup_{a \in A} J_a,\, V_{\bigcup_{a \in A} J_a}\Bigr) \in \mathcal{S}$ であり[*4]，これが $\mathcal{S}'$ の上界を与える．i.e. $\mathcal{S}$ は帰納的順序集合である．したがって Zorn の補題を使うことができ，$\mathcal{S}$ は極大元 $(J_0,\, V_{J_0}) \in \mathcal{S}$ を持つ．

次に $V = \operatorname{Ker} p \oplus V_{J_0}$ を示す．$\mathcal{S}$ の定義から $\operatorname{Ker} p \cap V_{J_0} = 0$ なので，命題??より $V = \operatorname{Ker} p + V_{J_0}$ を示せば良い．$V \neq \operatorname{Ker} p + V_{J_0}$ を仮定すると，ある $k \in I \setminus J_0$ が存在して $V_k \not\subset \operatorname{Ker} p + V_{J_0}$ を充たす．V_k は既約なので $V_k \cap (\operatorname{Ker} p + V_{J_0}) = 0$ が成り立つが，このことは $(J_0,\, V_{J_0})$ の極大性に矛盾．よって背理法から $V = \operatorname{Ker} p + V_{J_0}$ が言えた．

以上より $W \cong V/\operatorname{Ker} p \cong V_{J_0}$ が言える．このとき包含準同型 $i\colon V_{J_0} \hookrightarrow V$ が $p \circ i = \mathrm{id}_{V_{J_0}}$ を充たすので証明が完了した． ■

命題 2.3.1: 完全可約性の特徴付け

以下の 2 つは同値である：

(1) $\mathfrak{g}$-加群 V が完全可約

(2) V の任意の部分 $\mathfrak{g}$-加群 $W \subset V$ に対して，部分 $\mathfrak{g}$-加群 $W^c \subset V$ [a]が存在して $V \cong W \oplus W^c$ を充たす．

[a] W の**補表現** (complement representation) と言う．

[*4] $V_{\bigcup_{a \in A} J_a} = \bigoplus_{j \in \bigcup_{a \in A} J_a} V_j = \bigcup_{a \in A} V_{J_a}$ なので，$\cap$ の分配律から $\operatorname{Ker} p \cap V_{\bigcup_{a \in A} J_a} = \operatorname{Ker} p \cap \bigcup_{a \in A} V_{J_a} = \bigcup_{a \in A} (\operatorname{Ker} p \cap V_{J_a}) = 0$ が言える．

証明 **(1) $\Longrightarrow$ (2)**　V が既約な部分 $\mathfrak{g}$-加群の族 $\{V_i\}_{i\in I}$ によって

$$V = \bigoplus_{i\in I} V_i$$

と書けるとする．V の任意の部分 $\mathfrak{g}$-加群 $W \subset V$ を 1 つ固定する．このとき標準的射影 $p\colon V \longrightarrow V/W$ は全射な $\mathfrak{g}$-加群の準同型なので，補題 2.3.1 から $\mathfrak{g}$-加群の短完全列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} p \cong W \hookrightarrow V \xrightarrow{p} V/W \longrightarrow 0$$

が分裂する．よって系??から

$$V \cong W \oplus (V/W)$$

が言えた．

(1) $\Longleftarrow$ (2)

V の既約な部分 $\mathfrak{g}$-加群全体の集合を $\mathcal{V}$ と書く．$\mathcal{S}$ を以下の条件を充たす組 $(I,\, V_I)$ 全体の集合とする：

- $I \subset \mathcal{V}$
- 内部直和の意味で $V_I = \bigoplus_{V_i\in I} V_i \subset V$

$\mathcal{S}$ 上の 2 項関係を

$$(I,\, V_I) \leq (J,\, V_J) \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad I \subset J$$

と定義すると組 $(\mathcal{S},\, \leq)$ は順序集合になる．V の 0 でない部分 $\mathfrak{g}$-加群のうち極小のものを V_1 とすると，定義から $V_1 \in \mathcal{V}$ なので $(\{V_1\},\, V_{V_1}) \in \mathcal{S}$ となり $\mathcal{S}$ は空でない．また $\mathcal{S}' = \{(J_a,\, V_{J_a})\}_{a\in A}$ を $\mathcal{S}$ の任意の全順序部分集合とすると $\left(\bigcup_{a\in A} J_a,\, V_{\bigcup_{a\in A} J_a}\right) \in \mathcal{S}$ であり，これが $\mathcal{S}'$ の上界を与える．i.e. $\mathcal{S}$ は帰納的順序集合である．したがって Zorn の補題を使うことができ，$\mathcal{S}$ は極大元 $(I_0,\, V_{I_0}) \in \mathcal{S}$ を持つ．このとき $V = V_{I_0}$ であることを背理法により示そう．

$V \neq V_{I_0}$ を仮定する．このとき (2) より V の 0 でない部分 $\mathfrak{g}$-加群 $V_{I_0}^c$ が存在して $V \cong V_{I_0} \oplus V_{I_0}^c$ を充たす．このとき $V_{I_0}^c$ に含まれる 0 でない極小の部分 $\mathfrak{g}$-加群 W をとることができるが，定義からこの W は既約である．よって

$$W \oplus V_{I_0} \subset V$$

もまた既約部分 $\mathfrak{g}$-加群の直和となり，V_{I_0} の極大性に矛盾する．

■

補題 2.3.2: Schur の補題

任意の体[a] $\mathbb{K}$ 上の $\mathfrak{g}$-加群 $V,\, W$，および 0 でない$\mathfrak{g}$-加群の準同型 $f\colon V \longrightarrow W$ を与える．このとき以下が成り立つ：

(1) V が既約ならば f は単射

(2) W が既約ならば f は全射

[a] 代数閉体でなくても良い

証明 (1)【例 2.3.1】より $\mathrm{Ker}\, f$ は V の部分 $\mathfrak{g}$-加群だが，V が既約なので $\mathrm{Ker}\, f = 0,\ V$ のどちらかである．仮定より f は 0 でないので $\mathrm{Ker}\, f = 0$，i.e. f は単射である．

(2)【例 2.3.1】より $\mathrm{Im}\, f$ は W の部分 $\mathfrak{g}$-加群だが，W が既約なので $\mathrm{Im}\, f = 0,\ W$ のどちらかである．仮定より f は 0 でないので $\mathrm{Im}\, f = W$，i.e. f は全射である．

■

系 2.3.1: 代数閉体上の Schur の補題

代数閉体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元 $\mathfrak{g}$-加群 V を与える．このとき V が既約ならば，任意の $\mathfrak{g}$-加群の自己準同型 $\phi \in \mathrm{End}\, V$ はある $\lambda \in \mathbb{K}$ を使って $\phi = \lambda\, \mathrm{id}_V$（i.e. スカラー倍）と書ける．

証明 仮定より V が既約なので，補題 2.3.2-(1), (2) より任意の $\mathfrak{g}$-加群の自己準同型 $\phi\colon V \longrightarrow V$ は $\mathfrak{g}$-加群の同型か 0 のどちらかである．ここで $\lambda \in \mathbb{K}$ を ϕ の固有値とする．$\mathbb{K}$ が代数閉体なので λ は確かに存在する．このとき写像 $\phi - \lambda\, \mathrm{id}_V \colon V \longrightarrow V$ もまた $\mathfrak{g}$-加群の自己準同型となるが，固有値の定義から $\det(\phi - \lambda\, \mathrm{id}_V) = 0$ なので同型写像ではあり得ない．よって $\phi - \lambda\, \mathrm{id}_V = 0 \iff \phi = \lambda\, \mathrm{id}_V$ である． ■

系 2.3.2: 可換な Lie 代数の有限次元既約表現

代数閉体上の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が可換ならば，$\mathfrak{g}$ の任意の有限次元既約表現は 1 次元である．

証明 $\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ を $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現とする．このとき $\mathfrak{g}$ が可換であることから $\forall x, y \in \mathfrak{g},\ \forall v \in V$ に対して

$$\begin{aligned}
\phi(x)(y \blacktriangleright v) &= \phi(x) \circ \phi(y)(v) \\
&= [\phi(x), \phi(y)](v) + \phi(y) \circ \phi(x)(v) \\
&= \phi([x, y])(v) + \phi(y) \circ \phi(x)(v) \\
&= \phi(0)(v) + \phi(y) \circ \phi(x)(v) \\
&= \phi(y) \circ \phi(x)(v) \\
&= y \blacktriangleright \bigl(\phi(x)(v)\bigr)
\end{aligned}$$

が言える．i.e. $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $\phi(x)\colon V \longrightarrow V$ は $\mathfrak{g}$-加群の準同型である．よって Schur の補題から $\phi(x)$ がスカラー倍だとわかる．故に V の任意の 1 次元部分ベクトル空間は自動的に部分 $\mathfrak{g}$-加群になる．然るに V は仮定より既約だから V の部分 $\mathfrak{g}$-加群は $0, V$ しかあり得ない．さらに $V \neq 0$ なので $\dim V = 1$ でなくてはならない． ■

2.3.3 $\mathfrak{g}$-加群の Hom とテンソル積

この小節でも $\mathbb{K}$ を任意の体とする．

定義 2.3.5: $\mathfrak{g}$-加群のテンソル積

$(V_1,\ +,\ \cdot\ ,\ \blacktriangleright_1)$, $(V_2,\ +,\ \cdot\ ,\ \blacktriangleright_2)$ を有限次元$\mathfrak{g}$-加群とする．このとき

- $\mathbb{K}$-ベクトル空間のテンソル積 $V_1 \otimes V_2$
- $V_1 \otimes V_2$ への $\mathfrak{g}$ の左作用[a]

$$\blacktriangleright\colon \mathfrak{g} \times (V_1 \otimes V_2) \longrightarrow V_1 \otimes V_2,\ (x,\ v_1 \otimes v_2) \longmapsto (x \blacktriangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (x \blacktriangleright_2 v_2)$$

の組として得られる $\mathfrak{g}$-加群 $(V_1 \otimes V_2,\ +,\ \cdot\ ,\ \blacktriangleright)$ を **$\mathfrak{g}$-加群のテンソル積** (tensor product) と呼び，$\boldsymbol{V_1 \otimes V_2}$ と略記する．

[a] 正確には，これの右辺を線型に拡張したもの

実際 $V_1 \otimes V_2$ が $\mathfrak{g}$-加群になっていることを確認しておこう：

$$\begin{aligned}
[x, y] \blacktriangleright (v_1 \otimes v_2) &= ([x, y] \blacktriangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes ([x, y] \blacktriangleright_2 v_2) \\
&= (x \blacktriangleright_1 y \blacktriangleright_1 v_1) \otimes v_2 - (y \blacktriangleright_1 x \blacktriangleright_1 v_1) \otimes v_2 \\
&\quad + v_1 \otimes (x \blacktriangleright_2 y \blacktriangleright_2 v_2) - v_1 \otimes (y \blacktriangleright_2 x \blacktriangleright_2 v_2) \\
&= \big((x \blacktriangleright_1 y \blacktriangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (x \blacktriangleright_2 y \blacktriangleright_2 v_2)\big) \\
&\quad - \big((y \blacktriangleright_1 x \blacktriangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (y \blacktriangleright_2 x \blacktriangleright_2 v_2)\big), \\
x \blacktriangleright y \blacktriangleright (v_1 \otimes v_2) - y \blacktriangleright x \blacktriangleright (v_1 \otimes v_2) &= x \blacktriangleright \big((y \blacktriangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (y \blacktriangleright_2 v_2)\big) \\
&\quad - y \blacktriangleright \big((x \blacktriangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (x \blacktriangleright_2 v_2)\big) \\
&= \big((x \blacktriangleright_1 y \blacktriangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (x \blacktriangleright_2 y \blacktriangleright_2 v_2)\big) \\
&\quad - \big((y \blacktriangleright_1 x \blacktriangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (y \blacktriangleright_2 x \blacktriangleright_2 v_2)\big)
\end{aligned}$$

なので

$$[x, y] \blacktriangleright (v_1 \otimes v_2) = x \blacktriangleright y \blacktriangleright (v_1 \otimes v_2) - y \blacktriangleright x \blacktriangleright (v_1 \otimes v_2)$$

がわかった．

定義 2.3.6: $\mathfrak{g}$-加群の双対

$(V,\ +,\ \cdot\ ,\ \blacktriangleright)$ を有限次元 $\mathfrak{g}$-加群とする．このとき

- 双対ベクトル空間 $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\ \mathbb{K})$
- V^* への $\mathfrak{g}$ の左作用

$$\blacktriangleright\colon \mathfrak{g} \times V^* \longrightarrow V^*,\ (x,\ f) \longmapsto \big(v \mapsto -f(x \blacktriangleright v)\big)$$

の組として得られる $\mathfrak{g}$-加群 $(V^*,\ +,\ \cdot\ ,\ \blacktriangleright)$ を **$\mathfrak{g}$-加群の双対** (dual)[a] と呼び，$\boldsymbol{V^*}$ と略記する．

[a] **反傾** (contragradient) と呼ぶ場合もあるようだが，現在はあまり使われていないような気がする．

実際 V^* が $\mathfrak{g}$-加群になっていることを確認しておこう：

$$
\begin{aligned}
([x,y] \blacktriangleright f)(v) &= -f([x,y] \blacktriangleright f)(v) \\
&= -f(x \blacktriangleright y \blacktriangleright v - y \blacktriangleright x \blacktriangleright v) \\
&= -f(x \blacktriangleright y \blacktriangleright v) + f(y \blacktriangleright x \blacktriangleright v) \\
&= (x \blacktriangleright f)(y \blacktriangleright v) - (y \blacktriangleright f)(x \blacktriangleright v) \\
&= -\bigl(y \blacktriangleright (x \blacktriangleright f)\bigr)(v) + \bigl(x \blacktriangleright (y \blacktriangleright f)\bigr)(v) \\
&= (x \blacktriangleright y \blacktriangleright f)(v) - (y \blacktriangleright x \blacktriangleright f)(v)
\end{aligned}
$$

なので

$$
[x,y] \blacktriangleright f = x \blacktriangleright y \blacktriangleright f - y \blacktriangleright x \blacktriangleright f
$$

がわかった．

ここで，$\mathbb{K}$-ベクトル空間の自然な同型（命題??）

$$
V^* \otimes W \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)
$$

の具体形が

$$
\alpha\colon f \otimes w \longmapsto \bigl(v \mapsto f(v) \cdot w\bigr) \tag{2.3.1}
$$

となっていたことを思い出そう．このことから，$\mathbb{K}$-ベクトル空間 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ の上の $\mathfrak{g}$ の左作用を

$$
x \blacktriangleright (f \otimes w) = -f(x \blacktriangleright \text{-}) \otimes w + f \otimes (x \blacktriangleright w)
$$

に着想を得て

$$
(x \blacktriangleright F)(v) = -F(x \blacktriangleright v) + x \blacktriangleright F(v) \quad (\forall F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W))
$$

と定義しようと思うのが自然である．というのも，こう定義することで $\mathbb{K}$-ベクトル空間の同型写像 (2.3.1) が

$$
\begin{aligned}
\alpha\bigl(x \blacktriangleright (f \otimes w)\bigr)(v) &= -\alpha\bigl(f(x \blacktriangleright \text{-}) \otimes w\bigr)(v) + \alpha\bigl(f \otimes (x \blacktriangleright w)\bigr)(v) \\
&= -f(x \blacktriangleright v) \cdot w + f(v) \cdot (x \blacktriangleright w) \\
&= -f(x \blacktriangleright v) \cdot w + x \blacktriangleright \bigl(f(v) \cdot w\bigr) \\
&= \bigl(x \blacktriangleright \alpha(f \otimes w)\bigr)(v)
\end{aligned}
$$

となって $\mathfrak{g}$-加群の同型写像になる！

定義 2.3.7: $\mathfrak{g}$-加群の Hom

$(V, +, \cdot, \blacktriangleright_1)$, $(W, +, \cdot, \blacktriangleright_2)$ を有限次元$\mathfrak{g}$-加群とする．このとき

- $\mathbb{K}$-ベクトル空間 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$[a]
- $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ への $\mathfrak{g}$ の左作用

$$
\blacktriangleright\colon \mathfrak{g} \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W),\ F \longmapsto \bigl(v \mapsto -F(x \blacktriangleright_1 v) + x \blacktriangleright_2 F(v)\bigr)
$$

の組として得られる $\mathfrak{g}$-加群 $\bigl(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W), +, \cdot, \blacktriangleright\bigr)$ を $\mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}\,\boldsymbol{(V, W)}$ と略記する．

[a] V から W への $\mathfrak{g}$-加群の準同型全体の集合ではない．

2.3.4 Casimir 演算子

この小節では $\mathbb{K}$ は標数 0 の体とする．

定義 2.3.8: 忠実な表現

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現 $\rho\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ が**忠実** (faithful)[a] であるとは，ρ が単射であることを言う．

[a] 群作用の文脈では**効果的な作用** (effective action) と呼ぶ．

補題 2.3.3:

- 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の忠実な有限次元表現 $\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$
- $\mathfrak{g}$ 上の対称な双線型形式

$$\beta\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K},\ (x,\,y) \longmapsto \mathrm{Tr}\big(\phi(x) \circ \phi(y)\big)$$

を与える．β の radical を

$$S_\beta := \left\{\, x \in \mathfrak{g} \,\middle|\, \forall y \in \mathfrak{g},\ \beta(x,\,y) = 0 \,\right\}$$

とおく．このとき以下が成り立つ：

(1) S_β は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．

(2) $S_\beta = 0$, i.e. β は非退化である．

証明 (1) Tr の循環性から

$$\begin{aligned}
\beta(x,\,[y,z]) &= \mathrm{Tr}\big(\phi(x) \circ \phi([y,z])\big) \\
&= \mathrm{Tr}\big(\phi(x) \circ \phi(y) \circ \phi(z)\big) - \mathrm{Tr}\big(\phi(x) \circ \phi(z) \circ \phi(y)\big) \\
&= \mathrm{Tr}\big(\phi(x) \circ \phi(y) \circ \phi(z)\big) - \mathrm{Tr}\big(\phi(y) \circ \phi(x) \circ \phi(z)\big) \\
&= \mathrm{Tr}\big(\phi([x,y]) \circ \phi(z)\big) \\
&= \beta([x,y],\,z)
\end{aligned}$$

が成り立つので，$\forall x \in \mathfrak{g},\ \forall y \in S_\beta$ に対して

$$\forall z \in \mathfrak{g},\ \beta([x,y],\,z) = -\beta(y,\,[x,z]) = 0$$

が成り立つ．i.e. $[x,y] \in S_\beta$ が言えた．

(2) S_β の定義から $[\phi(x),\phi(y)]$ の形をした $[\phi(S_\beta),\phi(S_\beta)]$ の任意の元および $\forall \phi(z) \in \phi(S_\beta)$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\big([\phi(x),\phi(y)] \circ \phi(z)\big) &= \mathrm{Tr}\big(\phi([x,y]) \circ \phi(z)\big) \\
&= \beta([x,y],\,z) \\
&= 0
\end{aligned}$$

が成り立つので，定理 2.1.5 より $\phi(S_\beta)$ は可解である．ϕ は忠実なので $\mathrm{Ker}\,\phi = 0$ であり，準同型定理から $\phi(S_\beta) \cong S_\beta/\,\mathrm{Ker}\,\phi = S_\beta$ が言える．従って (1) も併せると S_β は $\mathfrak{g}$ の可解イデアルである．仮定より $\mathfrak{g}$ は半単純だったから，半単純 Lie 代数の定義から $S_\beta = 0$ が言える．

■

補題 2.3.4:

- 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e_\mu\}$
- 対称かつ非退化な双線型形式 $\beta \in L(\mathfrak{g},\, \mathfrak{g};\, \mathbb{K})$ であって $\forall x,\, y,\, z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\beta(x,\, [y, z]) = \beta([x, y],\, z)$$

  を充たすもの

を与える．このとき以下が成り立つ：

(1) $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e^\mu\}$ であって[a]，$\forall(\mu,\, \nu) \in \{1,\, \dots,\, \dim \mathfrak{g}\}^2$ に対して

$$\beta(e_\mu,\, e^\nu) = \delta_\mu^\nu$$

を充たすものが一意的に存在する．

(2) $\forall x \in \mathfrak{g}$ を一つ固定する．このとき $\mathrm{ad}(x)\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の基底 $\{e_\mu\}$ による表現行列 $\bigl[{a_\mu}^\nu\bigr]_{1\le\mu,\,\nu\le\dim\mathfrak{g}}$ と，(1) の基底 $\{e^\mu\}$ による表現行列 $\bigl[{b^\mu}_\nu\bigr]_{1\le\mu,\,\nu\le\dim\mathfrak{g}}$ について

$${a_\mu}^\nu = -{b^\nu}_\mu$$

が成り立つ．

[a] $\mathfrak{g}^*$ の元ではないが，Einstein の規約との便宜上添字を上付きにする．

<u>証明</u>　(1) $\beta_{\mu\nu} \coloneqq \beta(e_\mu,\, e_\nu)$ とおく．このとき $x = x^\mu e_\mu \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned}
\forall y = y^\nu e_\nu \in \mathfrak{g},\ \beta(x,\, y) = 0 \quad &\iff \quad \forall \begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^{\dim\mathfrak{g}} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{\dim\mathfrak{g}},\ \beta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = 0 \\
&\iff \quad 1 \le \forall\nu \le \dim\mathfrak{g},\ \beta_{\nu\mu} x^\mu = 0 \\
&\iff \quad \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^{\dim\mathfrak{g}} \end{bmatrix} \in \mathrm{Ker}\bigl[\beta_{\mu\nu}\bigr] \subset \mathbb{K}^{\dim\mathfrak{g}}
\end{aligned}$$

が言える．ただし 2 つ目の同値変形で β が対称であることを使った．したがって β が非退化であることは $\mathrm{Ker}\bigl[\beta_{\mu\nu}\bigr] = 0$ と同値であり，このことはさらに補題??-(3) より $\det\bigl[\beta_{\mu\nu}\bigr] \neq 0$ と同値である[*5]．よって $\bigl[\beta_{\mu\nu}\bigr]$ の逆行列 $\bigl[\alpha^{\mu\nu}\bigr]$ が一意的に存在するので，$e^\mu \coloneqq e_\nu \alpha^{\mu\nu}$ と定めると，

$$\beta(e_\mu,\, e^\nu) = \alpha^{\nu\rho}\beta_{\mu\rho} = \delta_\mu^\nu$$

が成り立つ．

[*5] Cramer の公式は任意の体 $\mathbb{K}$ 上で成り立つ．

(2) $\mathrm{ad}(x)(e_\mu) =: a_\mu{}^\nu e_\nu$, $\mathrm{ad}(e^\mu) =: b^\mu{}_\nu e^\nu$ とおくと，

$$\begin{aligned}
a_\mu{}^\nu &= a_\mu{}^\rho \delta_\rho^\nu \\
&= a_\mu{}^\rho \beta(e_\rho,\, e^\nu) \\
&= \beta\bigl(\mathrm{ad}(x)(e_\mu),\, e^\nu\bigr) \\
&= \beta\bigl(-[e_\mu, x],\, e^\nu\bigr) \\
&= \beta\bigl(e_\mu,\, -\mathrm{ad}(x)e^\nu\bigr) \\
&= -b^\nu{}_\rho \beta\bigl(e_\mu,\, e^\rho\bigr) \\
&= -b^\nu{}_\mu
\end{aligned}$$

■

定義 2.3.9: 忠実な表現の Casimir 演算子

- 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の有限次元表現 $\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$
- 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e_\mu\}$
- 対称かつ非退化な双線型形式 $\beta \in L(\mathfrak{g},\, \mathfrak{g};\, \mathbb{K})$ であって $\forall x,\, y,\, z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\beta(x,\, [y, z]) = \beta([x, y],\, z)$$

  を充たすもの

を与える．与えられた $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e_\mu\}$ から補題 2.3.4 により構成した $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e^\mu\}$ をとる．このとき

- $\mathbb{K}$-線型変換

$$\boldsymbol{c_\phi(\beta)}\colon V \longrightarrow V,\ v \longmapsto \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(e^\mu)(v)$$

  を β, ϕ の前 Casimir 演算子と呼ぶ．
- ϕ が忠実な表現で，かつ

$$\beta(x,\, y) := \mathrm{Tr}\bigl(\phi(x) \circ \phi(y)\bigr)$$

  であるとき[a]，β, ϕ の前 Casimir 演算子のことを $\boldsymbol{\phi}$ **の Casimir 演算子** (Casimir operator of ϕ) と呼んで $\boldsymbol{c_\phi}$ と略記する．

[a] 補題 2.3.3 よりこの β は非退化である

命題 2.3.2: Casimir 演算子の性質

- 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の有限次元表現 $\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$
- 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e_\mu\}$
- 対称かつ非退化な双線型形式 $\beta \in L(\mathfrak{g},\, \mathfrak{g};\, \mathbb{K})$ であって $\forall x,\, y,\, z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\beta(x,\, [y, z]) = \beta([x, y],\, z)$$

  を充たすもの

を与える．与えられた $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e_\mu\}$ から補題 2.3.4 により構成した $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e^\mu\}$ をとる．

(1) 前 Casimir 演算子 $c_\phi(\beta) \in \mathrm{End}(V)$ は，$\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[\phi(x), c_\phi(\beta)] = 0$$

を充たす．従って $c_\phi(\beta)$ は $\mathfrak{g}$-加群の準同型である．

(2) ϕ が忠実な表現ならば，Casimir 演算子 $c_\phi \in \mathrm{End}\, V$ について

$$\mathrm{Tr}\, c_\phi = \dim \mathfrak{g}$$

が成り立つ．

(3) $\mathbb{K}$ が代数閉体でかつ ϕ が忠実な表現でかつ ϕ が既約表現ならば，Casimir 演算子 $c_\phi \in \mathrm{End}\, V$ は $\mathfrak{g}$ の基底の取り方によらずに

$$c_\phi = \frac{\dim \mathfrak{g}}{\dim V}\, \mathrm{id}_V$$

と書ける．

証明 (1) $\forall x,\, y,\, z \in \mathrm{End}(V)$ に対して

$$[x, y \circ z] = [x, y] \circ z + y \circ [x, z]$$

が成り立つことと補題 2.3.4-(2) より，

$$\begin{aligned}
[\phi(x), c_\phi(\beta)] &= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} [\phi(x), \phi(e_\mu)] \circ \phi(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ [\phi(x), \phi(e^\mu)] \\
&= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \mathrm{ad}\big(\phi(x)\big)\big(\phi(e_\mu)\big) \circ \phi(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \mathrm{ad}\big(\phi(x)\big)\big(\phi(e^\mu)\big) \\
&= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi\big(\mathrm{ad}(x)(e_\mu)\big) \circ \phi(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi\big(\mathrm{ad}(x)(e^\mu)\big) \\
&= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} a_\mu{}^\nu \phi(e_\nu) \circ \phi(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} b^\mu{}_\nu \phi(e_\mu) \circ \phi(e^\nu) \\
&= 0
\end{aligned}$$

が言えた．

(2) 補題 2.3.4-(1) より

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\, c_\phi &= \sum_{\mu}^{\dim \mathfrak{g}} \mathrm{Tr}\big(\phi(e_\mu) \circ \phi(e^\mu)\big) \\
&= \sum_{\mu}^{\dim \mathfrak{g}} \beta(e_\mu,\, e^\mu) \\
&= \dim \mathfrak{g}
\end{aligned}$$

(3) $\mathbb{K}$ が代数閉体でかつ ϕ が既約なので，(1), (2) と代数閉体上の Schur の補題から $c_\phi\colon V \longrightarrow V$ は $(\dim \mathfrak{g}/\dim V)\,\mathrm{id}_V$ に等しい．

■

$\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ が忠実でない場合は次のように考える：まず，$\mathfrak{g}$ が半単純なので，$\mathrm{Ker}\,\phi$（$\mathfrak{g}$ のイデアルである）は系 2.2.3 から $\mathfrak{g}$ の単純イデアルの直和である．定理 2.2.2 を使って $\mathfrak{g}^\perp$ を $\mathfrak{g} =: \mathrm{Ker}\,\phi \oplus \mathfrak{g}^\perp$ で定義すると，$\mathfrak{g}^\perp \cong \mathfrak{g}/\mathrm{Ker}\,\phi$ なので，制限

$$\phi|_{\mathfrak{g}^\perp}\colon \mathfrak{g}^\perp \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

は忠実な表現になる．そして $\mathfrak{g}^\perp$ の基底に対して定義 2.3.9 を適用するのである．

2.3.5 Weyl の定理

この小節では $\mathbb{K}$ を標数 0 の体とする．[?, 第 7 章, p.80-86] に倣って Weyl の定理を証明する．

補題 2.3.5:

$\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ を半単純 Lie 代数の有限次元表現とする．このとき

$$\phi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{sl}(V)$$

が成り立つ．特に，$\dim V = 1$ ならば ϕ は零写像である[a]

[a] これを**自明な表現** (trivial representation) と言う．

証明【例??】より，$\mathfrak{sl}(V)$ の基底は行列単位 e_{ij} を使って

$$\{\, e_{ij} - e_{ji} \mid 1 \leq i \neq j \leq \dim V \,\} \cup \{\, e_{ii} - e_{i+1,i+1} \mid 1 \leq i \leq \dim V - 1 \,\} = [\{e_i\}, \{e_j\}]$$

と書けた．よって $\mathfrak{sl}(V) = [\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(V)]$ である．一方で $\mathfrak{g}$ が半単純なので系 2.2.3-(1) より $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ であるから，

$$\phi(\mathfrak{g}) = \phi([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = [\phi(\mathfrak{g}), \phi(\mathfrak{g})] \subset [\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(V)] = \mathfrak{sl}(V)$$

が言えた．特に $\dim V = 0$ ならば $\dim \mathfrak{sl}(V) = 1^2 - 1 = 0$ なので，$\mathrm{Im}\,\phi = 0$ である． ■

補題 2.3.6: Whitehead の補題

半単純 Lie 代数の有限次元表現 $\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ を与える．
このとき

$$\forall x,\, y \in \mathfrak{g},\ f([x, y]) = \phi(x) \circ f(y) - \phi(y) \circ f(x) \tag{2.3.2}$$

を充たす任意の$\mathbb{K}$-線型写像 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}, V)$ に対して，ある $v \in V$ が存在して

$$\forall x \in \mathfrak{g},\ f(x) = \phi(x)(v)$$

が成り立つ．

<u>証明</u> **case1: ϕ が既約かつ忠実な場合**

(2.3.2) を充たす任意の $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g},\, V)$ を 1 つとる．$\mathfrak{g}$ の基底 $\{e_\mu\}$ を 1 つ固定し，

$$\beta\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K},\ (x,\, y) \longmapsto \mathrm{Tr}\big(\phi(x) \circ \phi(y)\big)$$

を用いて補題 2.3.4-(1) の方法で対応する $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e^\mu\}$ を作る．このとき

$$v \coloneqq \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ f(e^\mu) \in V$$

とおくと，$\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して補題 2.3.4 と同じ記号の下で

$$\begin{aligned}
\phi(x)(v) &= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(x) \circ \phi(e_\mu) \circ f(e^\mu) \\
&= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} [\phi(x), \phi(e_\mu)] \circ f(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(x) \circ f(e^\mu) \\
&= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi\big(\mathrm{ad}(x)(e_\mu)\big) \circ f(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(x) \circ f(e^\mu) \\
&= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} a_\mu{}^\nu \phi(e_\nu) \circ f(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(x) \circ f(e^\mu) \\
c_\phi \circ f(x) &= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(e^\nu) \circ f(x) \\
&= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ f([e^\nu, x]) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(x) \circ f(e^\nu) \\
&= -\sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ f\big(\mathrm{ad}(x)(e^\nu)\big) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(x) \circ f(e^\nu) \\
&= -\sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} b^\nu{}_\mu \phi(e_\mu) \circ f(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(x) \circ f(e^\nu)
\end{aligned}$$

と計算できるので，補題 2.3.4-(2) から

$$\phi(x)(v) = c_\phi \circ f(x)$$

が言えた．仮定より $\mathfrak{g}$-加群 V は既約なので，Schur の補題-(1), (2) から $\mathfrak{g}$-加群の準同型 $c_\phi\colon V \longrightarrow V$ は $\mathfrak{g}$-加群の同型であり，$c_\phi^{-1}(v) \in V$ が所望のベクトルとなる．

case2: ϕ が忠実とは限らない既約表現の場合

(2.3.2) を充たす任意の $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g},\, V)$ を 1 つとる．このとき $\forall [x, y] \in [\mathrm{Ker}\,\phi, \mathrm{Ker}\,\phi]$ に対して

$$f([x,y]) = \phi(x) \circ f(y) - \phi(y) \circ f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad [x,y] \in \mathrm{Ker}\, f$$

が言えるが，仮定より $\mathfrak{g}$ は半単純なので，系 2.2.3-(3) よりそのイデアルである $\mathrm{Ker}\,\phi \subset \mathfrak{g}$ もまた半単純．故に系 2.2.3-(1) から $[\mathrm{Ker}\,\phi, \mathrm{Ker}\,\phi] = \mathrm{Ker}\,\phi$ であり，

$$\mathrm{Ker}\,\phi \subset \mathrm{Ker}\, f$$

がわかった．従ってこのとき商ベクトル空間の普遍性を使うことができ，以下の図式を可換にする $\overline{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V/\operatorname{Ker}\phi,\ \mathfrak{g})$ が一意的に存在する：

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & V \\
\mathfrak{g}/\operatorname{Ker}\phi \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{f}"']
\end{tikzcd}
$$

さらに商代数の普遍性から，表現 $\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ は以下の図式を可換にする表現 $\overline{\phi}\colon \mathfrak{g}/\operatorname{Ker}\phi \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ に一意的に持ち上がる：

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "p"'] & \mathfrak{gl}(V) \\
\mathfrak{g}/\operatorname{Ker}\phi \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{\phi}"']
\end{tikzcd}
$$

このとき $\overline{\phi}$ は $\mathfrak{g}/\operatorname{Ker}\phi$ の忠実な既約表現であり，$\overline{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}/\operatorname{Ker}\phi,\ V)$ は (2.3.2) を充たす．よって **case1** からある $v \in V$ があって

$$
\forall x \in \mathfrak{g},\ \overline{f}(x + \operatorname{Ker}\phi) = \overline{\phi}(x + \operatorname{Ker}\phi)(v) \quad\Longleftrightarrow\quad \forall x \in \mathfrak{g},\ f(x) = \phi(x)(v)
$$

が成り立つ．

case3: ϕ が一般の場合

(2.3.2) を充たす任意の $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g},\ V)$ を 1 つ固定する．このときある $v \in V$ が存在して $\forall x \in \mathfrak{g},\ f(x) = \phi(x)(v)$ が成り立つことを $\dim V$ に関する数学的帰納法により示す．$\dim V = 1$ のとき，補題 2.3.5 より ϕ が零写像なので $\forall v \in V$ に対して $\forall x \in \mathfrak{g},\ f(x) = \phi(x)(v)$ が成り立つ．

$\dim V > 1$ とする．$\mathfrak{g}$-加群 V が既約でないならば，部分 $\mathfrak{g}$-加群 $0 \subsetneq W \subsetneq V$ が存在する．標準的射影[*6] $p\colon V \longrightarrow V/W$ および $\forall x \in \mathfrak{g}$ について $W \subset \operatorname{Ker}\bigl(p \circ \phi(x)\bigr)$ であるから，商代数の普遍性より $\forall \phi(x) \in \phi(\mathfrak{g})$ に対して以下の図式を可換にする $\overline{\phi}(x) \in \mathfrak{gl}(V/W)$ が一意的に存在する：

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "p\circ\phi(x)"] \arrow[d, "p"'] & V/W \\
V/W \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{\phi}(x)"']
\end{tikzcd}
$$

このとき写像

$$
\phi_1\colon \mathfrak{g} \longmapsto \mathfrak{gl}(V/W),\ x \longmapsto \bigl(v + W \mapsto \overline{\phi}(x)(v + W)\bigr)
$$

は well-defined な Lie 代数の準同型なので $\mathfrak{g}$ の表現である．$f_1 := p \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g},\ V/W)$ は ϕ_1 に関して (2.3.2) を充たすので，帰納法の仮定より[*7]ある $v_1 + W \in V/W$ が存在して

$$
\forall x \in \mathfrak{g},\ f_1(x) = f(x) + W = \phi_1(x)(v_1 + W)
$$

[*6] このとき V の $\mathbb{K}$-ベクトル空間としての構造しか見ない．

[*7] $\dim V/W < \dim V$ なので帰納法の仮定が使える．

が成り立つ．ここで $f_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}, W)$ を

$$f_2(x) \coloneqq f(x) - \phi(x)(v_1)$$

と定義すると，f_2 は部分表現 $\phi|_W : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(W)$ に関して (2.3.2) を充たす．よって帰納法の仮定から[*8]ある $v_2 \in W$ が存在して

$$\forall x \in \mathfrak{g},\ f_2(x) = \phi|_W(x)(v_2)$$

が成り立つ．以上より，$v \coloneqq v_1 + v_2 \in V$ とおけば

$$\forall x \in \mathfrak{g},\ f(x) = f_2(x) + \phi(x)(v_1) = \phi|_W(x)(v_2) + \phi(x)(v_1) = \phi(x)(v)$$

が言えた．

■

定理 2.3.3: 完全可約性に関する Weyl の定理

$\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ が半単純 Lie 代数の有限次元表現ならば，ϕ は完全可約である．

証明 V の任意の部分 $\mathfrak{g}$-加群 $W \subset V$ を 1 つ固定する．このとき命題 2.3.1 より，部分 $\mathfrak{g}$-加群 $W^c \subset V$ が存在して $V \cong W \oplus W^c$ が成り立つことを示せば良い．

$\mathrm{End}\, V$ の部分ベクトル空間 L_W を

$$L_W \coloneqq \left\{ t \in \mathrm{End}\, V \;\middle|\; t(V) \subset W,\ t(W) = 0 \right\}$$

と定める．L_W への $\mathfrak{g}$ の左作用を

$$x \blacktriangleright t \coloneqq [\phi(x), t]$$

と定義すると，W が部分 $\mathfrak{g}$-加群であることおよび定義 2.3.7 より L_W は $\mathfrak{g}$-加群になる．i.e.

$$\tilde{\phi}\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(L_W),\ x \longmapsto \bigl(t \longmapsto x \blacktriangleright t\bigr)$$

は半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の有限次元表現である．

ここで $\mathbb{K}$-ベクトル空間 W への射影演算子[*9] $p\colon V \longrightarrow V$ を 1 つとり，$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}, L_W)$ を

$$f(x) \coloneqq [p, \phi(x)]$$

と定義しよう．このとき $\forall x, y \in \mathfrak{g}$ に対して Jacobi 恒等式から

$$\begin{aligned} f([x, y]) &= [p, [\phi(x), \phi(y)]] \\ &= [\phi(x), [p, \phi(y)]] - [\phi(y), [p, \phi(x)]] \\ &= [\phi(x), f(y)] - [\phi(y), f(x)] \\ &= \tilde{\phi}(x) \circ f(y) - \tilde{\phi}(y) \circ f(x) \end{aligned}$$

*8 $\dim W < \dim V$ なので帰納法の仮定が使える．

*9 $p^2 = p$ かつ $p|_W = \mathrm{id}_W$

が成り立つので，補題 2.3.6 からある $t \in L_W$ が存在して

$$\forall x \in \mathfrak{g},\ f(x) = \tilde{\phi}(x)(t) = [\phi(x), t]$$

が成り立つ．よってこのとき $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[\phi(x), p+t] = \tilde{\phi}\bigl(\phi(x)\bigr)(p+t) = -[p, \phi(x)] + [\phi(x), t] = -f(x) + [\phi(x), t] = 0$$

が言えた．i.e. $p+t \in \operatorname{End} V$ は $\mathfrak{g}$-加群の準同型である．さらに $t \in L_W$ であることから，$(p+t)(V) = W$ かつ $(p+t) \circ (p+t)|_W = \mathrm{id}_W$ が言える．i.e. $\mathfrak{g}$-加群の短完全列

$$0 \hookrightarrow \operatorname{Ker}(p+t) \hookrightarrow V \xrightarrow{p+t} W \longrightarrow 0$$

は分裂し，$\mathfrak{g}$-加群の直和として

$$V \cong W \oplus \operatorname{Ker}(p+t)$$

が言えた． ■

2.3.6 Jordan 分解の保存

この小節でも引き続き $\mathbb{K}$ を標数 0 の体とする．
部分 Lie 代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ に関して

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(x) \colon \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g},\ v \longmapsto [x, v]$$

と定義する[*10]．

定理 2.3.4: Jordan-Chevalley 分解と抽象 Jordan 分解

V を有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間とし，$\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ を半単純線型 Lie 代数とする．
このとき $\forall x \in \mathfrak{g}$ の Jordan-Chevalley 分解 $x = x_s + x_n$ について $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$ が成り立つ．特に，x の抽象 Jordan 分解 $s_x, n_x \in \mathfrak{g}$ に関して $x_s = s_x$，$x_n = n_x$ が成り立つ．

証明 後半の主張は Jordan-Chevalley 分解および抽象 Jordan 分解の一意性より従うので，前半を示せば良い．
$\forall x \in \mathfrak{g}$ を 1 つ固定し，x の Jordan-Chevalley 分解 $x = x_s + x_n$ をとる．$\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})}(x)(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$ なので命題 2.1.1-(3) より $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})}(x_s)(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})}(x_n)(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$ が言える．i.e. 正規化代数の言葉を使うと $x_s, x_n \in N_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g}) =: N$ が言える[*11]．
包含準同型 $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ によって V を $\mathfrak{g}$-加群と見做し，V の任意の部分 $\mathfrak{g}$-加群 W をとる．このとき部分 $\mathfrak{g}$-加群 $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{gl}(V)$ を

$$L_W := \bigl\{\, y \in \mathfrak{gl}(V) \bigm| y(W) \subset W \ \text{かつ}\ \operatorname{Tr}(y|_W) = 0 \,\bigr\}$$

[*10] $x \in \mathfrak{h}$ ならば，部分 Lie 代数の定義から $\operatorname{Im} \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(x) \subset \mathfrak{h}$ となる．この意味で $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{h})$ と書いても良い．
[*11] 補題 2.3.5 より $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}(V)$ なので $\mathfrak{g} \subsetneq N$ であることに注意

と定義する[12]．仮定より $\mathfrak{g}$ は半単純 Lie 代数なので系 2.2.3-(1) より $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ であり，$\mathfrak{g} \subset L_W$ が言える．さらにこのとき命題 2.1.1-(3) より $x_s,\, x_n \in L_W$ も言える[13]．

ここで

$$\mathfrak{g}' \coloneqq N \cap \left(\bigcap_{\substack{W \subset V, \\ \text{部分}\mathfrak{g}\text{-加群}}} L_W \right)$$

とおくと，$\mathfrak{g}'$ は $\mathfrak{g}$ をイデアルとしてもつ N の部分 Lie 代数であり，$\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $x_s,\, x_n \in \mathfrak{g}'$ だとわかる．

最後に $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$ が成り立つことを示す．包含準同型 $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{g}'$ は半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の有限次元表現なので，Weyl の定理よりある $\mathfrak{g}'$ の部分 $\mathfrak{g}$-加群 $\mathfrak{h}$ が存在して $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ と書ける（命題 2.3.1）．ここで W を V の任意の既約な部分 $\mathfrak{g}$-加群とする．もし $y \in \mathfrak{h}$ ならば，$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'] \subset \mathfrak{g}$[14]であることから $[\mathfrak{g}, y] = 0$，i.e. $y \colon V \longrightarrow V$ は $\mathfrak{g}$-加群の準同型である．よって代数閉体上の Schur の補題から $y|_W \colon W \longrightarrow W$ はスカラー倍である．一方で $y \in L_W$ でもあるので $\mathrm{Tr}(y|_W) = 0$ であり，$y|_W = 0$ だと分かった．Weyl の定理より V は既約な部分 $\mathfrak{g}$-加群の直和なので $y = 0$ が言えた．i.e. $\mathfrak{h} = 0$ である．

■

系 2.3.5:

$\mathfrak{g}$ を半単純 Lie 代数，$\phi \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ をその有限次元表現とする．
このとき $\forall x \in \mathfrak{g}$ の抽象 Jordan 分解 $x = s_x + n_x$ に対して，$\phi(x) = \phi(s_x) + \phi(n_x) \in \mathfrak{gl}(V)$ は Jordan-Chevalley 分解である．i.e. $\phi(x)_s = \phi(s_x)$，$\phi(x)_n = \phi(n_x)$ が成り立つ．

証明 s_x は半単純なので $\mathrm{ad}(s_x) \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ も半単純．i.e. $\mathrm{ad}(s_x)$ は対角化可能なので $\mathrm{ad}(s_x)$ の固有ベクトル全体がなす集合は $\mathfrak{g}$ の基底となる．従って $\mathrm{ad}_{\phi(\mathfrak{g})}\big(\phi(s_x)\big) \colon \phi(\mathfrak{g}) \longrightarrow \phi(\mathfrak{g})$ の $\phi(\mathfrak{g})$ の固有ベクトル全体がなす集合は $\phi(\mathfrak{g})$ の基底となる．i.e. $\mathrm{ad}_{\phi(\mathfrak{g})}\big(\phi(s_x)\big)$ は半単純である．同様に $\mathrm{ad}_{\phi(\mathfrak{g})}\big(\phi(n_x)\big)$ が冪零であることもわかるので，$\phi(x) = \phi(s_x) + \phi(n_x)$ は半単純 Lie 代数 $\phi(\mathfrak{g})$ における $\phi(x)$ の抽象 Jordan 分解である．よって定理 2.3.4 からこれは Jordan-Chevalley 分解と一致する． ■

！ 定理 2.3.4 および系 2.3.5 の意味で Jordan-Chevalley 分解と抽象 Jordan 分解は同一視できるので，以後抽象 Jordan 分解のことも $x = s_x + n_x$ の代わりに $x = \boldsymbol{x_s} + \boldsymbol{x_n}$ と表記する．

2.4 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の表現

[12] 例えば $L_V = \mathfrak{sl}(V)$ である
[13] $\mathrm{Tr}(x_n) = 0$ なので，$\mathrm{Tr}(x) = \mathrm{Tr}(x_s) = 0$．
[14] $\mathfrak{g}' \subset N$ だから

この節において常に $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ とし，$\mathfrak{g}$ の全ての表現は有限次元であるとする．**【例??】**に倣って $\mathfrak{g}$ の基底は

$$
\begin{aligned}
x &:= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
y &:= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
h &:= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

を採用する．このとき

$$
\begin{aligned}
[h, x] &= 2x, \\
[h, y] &= -2y, \\
[x, y] &= h
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

2.4.1 ウエイトと極大ベクトル

任意の $\mathfrak{g}$ の表現 $\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ を与える．h は半単純なので系 2.3.5 より $\phi(h)$ を対角化する V の基底がある．よって

$$V_\lambda := \left\{ v \in V \;\middle|\; h \blacktriangleright v = \lambda v \right\}$$

とおくと V は異なる λ に関する V_λ の内部直和になる（固有空間分解）[*15]：

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}} V_\lambda$$

特に $V_\lambda \neq 0$ のとき λ を h の**ウエイト** (weight) と呼び，V_λ を**ウェイト空間** (weight space) と呼ぶ．

補題 2.4.1:

$$v \in V_\lambda \quad \Longrightarrow \quad x \blacktriangleright v \in V_{\lambda+2},\ y \blacktriangleright v \in V_{\lambda-2}$$

証明

$$h \blacktriangleright (x \blacktriangleright v) = [h, x] \blacktriangleright v + x \blacktriangleright h \blacktriangleright v = (\lambda + 2) x \blacktriangleright v$$

■

$\dim V < \infty$ なので，$V_\lambda \neq 0$ かつ $V_{\lambda+2} = 0$ を充たす $\lambda \in \mathbb{K}$ が存在する．このとき $v \in V_\lambda \setminus \{0\}$ のことをウエイト λ の**極大ベクトル** (maximal vector) と呼ぶ．

[*15] λ が h の固有値でなければ $V_\lambda = 0$ となる．

2.4.2　既約表現の分類

$\mathfrak{g}$-加群 V は既約であるとする．極大ベクトル $v_0 \in V_\lambda$ をとり，

$$v_i := \begin{cases} 0, & i = -1 \\ \dfrac{1}{i!} y^i \blacktriangleright v_0, & i \geq 0 \end{cases}$$

とおく．

補題 2.4.2:

(1) $h \blacktriangleright v_i = (\lambda - 2i) v_i$
(2) $y \blacktriangleright v_i = (i+1) v_{i+1}$
(3) $x \blacktriangleright v_i = (\lambda - i + 1) v_{i-1}$ $^{\mathrm{w}/}$ $i \geq 0$

証明　(1) 補題 2.4.1 より明らか．

(2) v_i の定義より

$$y \blacktriangleright v_i = \frac{1}{i!} y^{i+1} \blacktriangleright v_0 = (i+1) v_{i+1}$$

(3) i に関する数学的帰納法により示す．$i = 0$ のときは自明．$i > 0$ とする．帰納法の仮定より $x \blacktriangleright v_{i-1} = (\lambda - i + 2) v_{i-2}$ であるから，

$$\begin{aligned} x \blacktriangleright v_i &= \frac{1}{i} x \blacktriangleright y \blacktriangleright v_{i-1} \\ &= \frac{1}{i} [x, y] \blacktriangleright v_{i-1} + \frac{1}{i} y \blacktriangleright (x \blacktriangleright v_{i-1}) \\ &= \frac{\lambda - 2i + 2}{i} v_{i-1} + \frac{(\lambda - i + 2)(i-1)}{i} v_{i-1} \\ &= (\lambda - i + 1) v_{i-1} \end{aligned}$$

が言えて帰納法が完成する．

■

補題 2.4.2-(1) より 0 でない $v_i \in V$ たちは全て線型独立であるが，$\dim V < \infty$ である．そこで

$$m := \min\left\{ m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \,\middle|\, v_m \neq 0 \text{ かつ } v_{m+1} = 0 \right\}$$

とおく．$\forall i > 0$ に対して帰納的に $v_{m+i} = 0$ がわかるので，補題 2.4.2-(1), (2), (3) より $\mathrm{Span}\{v_0, \ldots, v_m\} \subset V$ は非零な部分 $\mathfrak{g}$-加群である．$\mathfrak{g}$ は既約だったので $V = \mathrm{Span}\{v_0, \ldots, v_m\}$ が言えた．

補題 2.4.2-(3) を $i = m+1$ の場合に適用すると $0 = (\lambda - m) v_m$ となり，$\lambda = m = \dim V - 1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ がわかる．この m を $\mathfrak{g}$-加群 V の**最高ウエイト** (highest weight) と呼ぶ．さらに，補題 2.4.2-(1) より h のウエイトは全て異なる．i.e. $0 \leq \forall \mu \leq m$ に対して，対応するウエイト空間の次元 $\dim V_{m-2\mu} = 1$ である．特に最高ウエイトは $\dim V$ によって一意に決まるので，$v_0 \in V_m$ は零でないスカラー倍を除いて一意に定まる．

以上の考察をまとめて次の定理を得る：

定理 2.4.1:

V を $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の既約表現とする．

(1) $m := \dim V - 1$ とおくと $\mathbb{K}$-ベクトル空間として

$$V = \bigoplus_{\mu=0}^{m} V_{m-2\mu} \quad \text{w/} \quad 0 \le \forall \mu \le m,\ \dim V_{m-2\mu} = 1$$

が成り立つ．

(2) V の極大ベクトルは零でないスカラー倍を除いて一意に決まり，そのウエイトは m である．

(3) $\mathfrak{g}$ の V への作用は補題 2.4.2 によって完全に決まる．

系 2.4.2:

V を任意の有限次元 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群とする．このとき $\phi(h) \colon V \longrightarrow V$ の固有値は全て整数で，かつ自身にマイナス符号をつけたものとちょうど同じ回数だけ出現する．さらに，V の任意の既約表現への内部直和分解において，直和因子の個数はちょうど $\dim V_0 + \dim V_1$ 個である．

証明 $V = 0$ なら明らか．$V \neq 0$ とする．Weyl の定理により V を既約な部分 $\mathfrak{g}$-加群の直和に分解すると，既約な部分 $\mathfrak{g}$-加群は全て定理 2.4.1-(1) の形をしているので前半が従う．

後半を示す．V の既約な部分 $\mathfrak{g}$-加群への直和分解を

$$V = \bigoplus_{i} W_i$$

と書くと，定理 2.4.1 より $\forall i$ に対して何かしらの $m_i \ge 0$ が存在して $W_i \cong \bigoplus_{\mu=0}^{m_i} V_{m_i-2\mu}$ と書ける．逆に $\forall m \ge 0$ に対して，$\bigoplus_{\mu=0}^{m} V_{m-2\mu}$ と $\mathfrak{g}$-加群として同型な全ての W_i の直和を $V^{(m)}$ と書くと，

$$V = \bigoplus_{m=0}^{\infty} V^{(m)}$$

となる．よって $V^{(m)}$ の直和因子の個数を k_m とかくと

$$\dim V_\lambda = \sum_{\substack{m \ge |\lambda|, \\ m \equiv \lambda \mod 2}} k_m$$

となる．特に

$$\dim V_0 + \dim V_1 = \sum_{m=0}^{\infty} k_m$$

なので示された． ■

2.5 ルート空間分解

この節では体 $\mathbb{K}$ を標数 0 の代数閉体とし，$\mathfrak{g} \neq 0$ を体 $\mathbb{K}$-上の半単純 Lie 代数とする．

2.5.1 極大トーラスとルート

もし $\forall x \in \mathfrak{g}$ が冪零ならば $\mathrm{ad}(x) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ もまた冪零であり[*16]，従って Engel の定理から $\mathfrak{g}$ は冪零 Lie 代数となる．然るにこれは $\mathfrak{g}$ が半単純 Lie 代数であることに矛盾する[*17]．

従って冪零でない $x \in \mathfrak{g}$ が存在するが，このとき x の抽象 Jordan 分解[*18] $x = x_s + x_n \ ^{\text{w/}}\ x_s,\ x_n \in \mathfrak{g}$ において $x_s \neq 0$ である．このことは，半単純成分のみで構成される $\mathfrak{g}$ の自明でない部分 Lie 代数の存在を示唆する．

定義 2.5.1: トーラス

$\mathfrak{g}$ の 0 でない部分 Lie 代数 $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ が**トーラス** (toral subalgebra) であるとは，$\forall x \in \mathfrak{t}$ の抽象 Jordan 分解 $x = x_s + x_n$ において $x_n = 0$ であることを言う．

補題 2.5.1: トーラスは可換

$\mathfrak{g}$ の任意のトーラス $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ は Lie ブラケットについて可換である．

証明 $\mathfrak{t}$ を $\mathfrak{g}$ のトーラスとする．$\forall x \in \mathfrak{t}$ を 1 つ固定する．示すべきは $\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}}(x) = 0$ が成り立つことであるが，$\mathfrak{t}$ がトーラスであるという仮定より $\mathrm{ad}(x) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ は半単純 $\iff$ 対角化可能だから，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}}(x)$ の固有値が全て 0 であることを背理法により示す．

$\exists y \in \mathfrak{t} \setminus \{0\},\ \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\},\ [x, y] = \lambda y$ を仮定する．このとき $\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}}(y)(x) = -\lambda y$ は $\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}}(y)$ の固有値 0 に属する固有ベクトルである．一方で $y \in \mathfrak{t}$ なので $\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}}(y) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{t})$ は対角化可能であり，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}}(y)$ の固有ベクトル $v_1, \dots, v_{\dim \mathfrak{t}} \in \mathfrak{t} \setminus \{0\}$ は $\mathfrak{t}$ の基底をなす[*19]．従って $x = \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{t}} x^\mu v_\mu$ と書けるが，このとき

$$0 = \mathrm{ad}_{\mathfrak{t}}(y)\bigl(\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}}(y)(x)\bigr) = \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{t}} (\lambda_\mu)^2 x^\mu v_\mu$$

が成り立つので $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{\dim \mathfrak{t}} = 0$，i.e. $\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}}(y) = 0$ が分かった．然るにこれは仮定に矛盾し，背理法が完成した．■

$\mathfrak{g}$ のトーラスのうち極大なもの[*20]を 1 つ固定し，それを $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ と書こう．$\mathfrak{h}$ は**極大トーラス** (maximal toral subalgebra) と呼ばれる．

! 極大トーラスを $\mathfrak{t}$ ではなく $\mathfrak{h}$ と書くのは慣習である．後述する **Cartan 部分代数** (Cartan subalgebra; CSA) を $\mathfrak{h}$ と書く慣習と対応しているように思われる？

ここで，与えられた $h \in \mathfrak{h}$ に対して線型変換 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の固有値のうちのどれか 1 つを返す写像

$$\alpha \colon \mathfrak{h} \longrightarrow \mathbb{K},\ h \longmapsto \alpha(h) \quad ^{\text{w/}}\ \exists x \in \mathfrak{g} \setminus \{0\},\ \alpha(h)x := \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h)(x)$$

[*16] $\mathrm{ad} \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ は Lie 代数の準同型なので．

[*17] 一般に冪零 Lie 代数 $\Longrightarrow$ 可解 Lie 代数だが，系 2.2.3-(1) より $\mathfrak{g}$ が半単純 Lie 代数 $\Longrightarrow$ $\mathfrak{g}$ は可解 Lie 代数でない $\Longrightarrow$ $\mathfrak{g}$ は冪零 Lie 代数でない．
もしくは，命題??-(4) から $\mathfrak{g} \neq 0$ かつ $\mathfrak{g}$ が冪零 Lie 代数 $\Longrightarrow$ $\mathfrak{g}$ は半単純 Lie 代数でない

[*18] 系 2.3.5 の注意に従って抽象 Jordan 分解をこのように表記する．

[*19] 固有ベクトル v_μ は固有値 λ_μ に属するとする．なお，以下では Einstein の規約を使わない．

[*20] トーラス $\mathfrak{t} \subsetneq \mathfrak{g}$ が存在して $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{t}$ が成り立つならば $\mathfrak{t} = \mathfrak{h}$．

を考えよう．このとき $\mathfrak{g}_\alpha$ の部分ベクトル空間[*21] $\mathfrak{g}_\alpha$ を

$$\mathfrak{g}_\alpha := \left\{ x \in \mathfrak{g} \;\middle|\; \forall h \in \mathfrak{h},\ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h)(x) = \alpha(h)x \right\}$$

と定義すると，$\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ ならば $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ だとわかる．[*22] 一方，補題 2.5.1 より $\forall h, k \in \mathfrak{h}$ に対して $[\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h), \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(k)] = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}([h,k]) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(0) = 0$ が成り立つ，i.e. $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h)$，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(k) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ は互いに可換な線型変換なので，$\forall\, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h) \in \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ は同時対角化可能である．従って $\mathfrak{g}$ の固有空間分解

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha \tag{2.5.1}$$

が成り立つ．特に $\dim \mathfrak{g} < \infty$ であることから集合

$$\Phi := \left\{ \alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\} \;\middle|\; \mathfrak{g}_\alpha \neq 0 \right\}$$

は有限集合になるので，(2.5.1) は有限個の直和として

$$\mathfrak{g} = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \tag{2.5.2}$$

と書くこともできる[*23]．Φ の元のことを $\mathfrak{g}$ の**ルート** (root) と呼び，(2.5.2) のことを $\mathfrak{g}$ の**ルート空間分解** (root space decomposition)[*24] と呼ぶ．

命題 2.5.1:

$\kappa \in L(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}; \mathbb{K})$ を $\mathfrak{g}$ の Killing 形式とする．$\forall \alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$ に対して以下が成り立つ：

(1) $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$
(2) $\alpha \neq 0 \implies \forall x \in \mathfrak{g}_\alpha$ に対して $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ は冪零である．
(3) $\alpha + \beta \neq 0 \implies \kappa$ について $\mathfrak{g}_\alpha$ と $\mathfrak{g}_\beta$ は直交する．i.e. $\kappa|_{\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_\beta} = 0$
(4) κ に関する $\mathfrak{g}_\alpha$ の直交補空間は

$$\mathfrak{g}_\alpha{}^\perp = \bigoplus_{\gamma \in \mathfrak{h}^* \setminus \{-\alpha\}} \mathfrak{g}_\gamma$$

と書ける．

証明　(1) $\forall x \in \mathfrak{g}_\alpha$，$\forall y \in \mathfrak{g}_\beta$ をとる．このとき $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の像が微分であることから，$\forall h \in \mathfrak{h}$ に対

[*21] $\alpha \neq 0$ のとき $\mathfrak{g}_\alpha$ は部分 Lie 代数ではない．実際，$\forall x, y \in \mathfrak{g}_\alpha$ および $\forall h \in \mathfrak{h}$ に対して $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h)([x,y]) = [\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h)(x), y] + [x, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h)(y)] = 2\alpha(h)[x,y]$ となり，$\alpha(h) \neq 0$ ならば $[x,y] \notin \mathfrak{g}_\alpha$ である．

[*22] $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ なので $x \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ が存在する．このとき $\forall h, h_1, h_2 \in \mathfrak{h}$，$\forall \lambda \in \mathbb{K}$ に対して $\alpha(h)x = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h)(x)$，$\alpha(h_i)x = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h_i)(x)$ が成り立つが，$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数なので $h_1 + h_2, \lambda h \in \mathfrak{h}$ であること，および $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の線型性から

$$\alpha(h_1 + h_2)x = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h_1 + h_2)(x) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h_1)(x) + \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h_2)(x) = \big(\alpha(h_1) + \alpha(h_2)\big)x,$$
$$\alpha(\lambda h)x = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\lambda h)(x) = \lambda\, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h)(x) = \big(\lambda\alpha(h)\big)x$$

が言える．$x \neq 0$ なので $\alpha(h_1 + h_2) = \alpha(h_1) + \alpha(h_2)$，$\alpha(\lambda h) = \lambda\alpha(h)$，i.e. $\alpha \colon \mathfrak{h} \longrightarrow \mathbb{K}$ が線型写像であることが分かった．

[*23] 中心化代数の定義を思い出すと $\mathfrak{g}_0 = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ である．

[*24] **Cartan 分解** (Cartan decomposition) と呼ぶこともある．

して

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h)([x,y]) &= [\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h)(x),y]+[x,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h)(y)]\\ &= \bigl(\alpha(h)+\beta(h)\bigr)[x,y]\\ &= (\alpha+\beta)(h)[x,y]\end{aligned}$$

が成り立つ．i.e. $[x,y]\in\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ である．

(2) $\alpha\neq 0$ とし，$\forall x\in\mathfrak{g}_\alpha$ を 1 つとる．(2.5.1) が $\mathfrak{g}$ の直和分解なので，$\forall\beta\in\mathfrak{h}^*$ に対してある $n\in\mathbb{N}$ が存在して $\bigl(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)\bigr)^n(\mathfrak{g}_\beta)=0$ を充たすことを示せばよい．

$\forall n\in\mathbb{N}$ に対して $\bigl(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)\bigr)^n(\mathfrak{g}_\beta)\neq 0$ が成り立つと仮定する．ところが (1) よりこれは $0\subsetneq\bigl(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)\bigr)^n(\mathfrak{g}_\beta)\subset\mathfrak{g}_{n\alpha+\beta}$ を意味し，$\Phi\subset\mathfrak{h}^*$ が有限集合であることに矛盾する．従って背理法により示された．

(3) 仮定より $\alpha+\beta\neq 0\in\mathfrak{h}^*$ なので，ある $h\in\mathfrak{h}$ が存在して $(\alpha+\beta)(h)\neq 0$ を充たす．このとき $\forall(x,\,y)\in\mathfrak{g}_\alpha\times\mathfrak{g}_\beta$ をとると

$$\begin{aligned}\alpha(h)\kappa(x,\,y) &= \kappa\bigl(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h)(x),\,y\bigr)\\ &= -\kappa([x,h],\,y)\\ &= -\kappa(x,\,[h,y])\\ &= -\kappa\bigl(x,\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h)(y)\bigr)\\ &= -\beta(h)\kappa(x,\,y)\end{aligned}$$

が成り立つので $\kappa(x,\,y)=0$ が言えた．

(4) (3) より

$$\mathfrak{g}_\alpha{}^\perp\supset\bigoplus_{\gamma\in\mathfrak{h}^*\setminus\{-\alpha\}}\mathfrak{g}_\gamma \tag{2.5.3}$$

がわかる．定理 2.2.1 より κ は非退化なので，$\mathfrak{g}$ が有限次元であることから

$$\dim\mathfrak{g}_\alpha{}^\perp=\dim\mathfrak{g}-\dim\mathfrak{g}_\alpha$$

が成り立つ．よって (2.5.3) から $\dim\mathfrak{g}-\dim\mathfrak{g}_{-\alpha}\leq\dim\mathfrak{g}-\dim\mathfrak{g}_\alpha \iff \dim\mathfrak{g}_\alpha\leq\dim\mathfrak{g}_{-\alpha}$ が言える．$\alpha\in\mathfrak{h}^*$ は任意だったので $\dim\mathfrak{g}_{-\alpha}\leq\dim\mathfrak{g}_\alpha$ も言えて $\dim\mathfrak{g}_\alpha=\dim\mathfrak{g}_{-\alpha}$ が従う．故に

$$\dim\mathfrak{g}_\alpha{}^\perp=\dim\mathfrak{g}-\dim\mathfrak{g}_\alpha=\dim\mathfrak{g}-\dim\mathfrak{g}_{-\alpha}=\dim\bigoplus_{\gamma\in\mathfrak{h}^*\setminus\{-\alpha\}}\mathfrak{g}_\gamma$$

が成り立ち，(2.5.3) の包含が等号だと分かった．

■

系 2.5.1:

$\kappa|_{\mathfrak{g}_0\times\mathfrak{g}_0}$ は非退化である．

証明 命題 2.5.1-(4) より $\mathfrak{g}_0\cap\mathfrak{g}_0{}^\perp=0$，i.e. $\kappa|_{\mathfrak{g}_0\times\mathfrak{g}_0}$ は非退化である． ■

2.5.2 極大トーラスの中心化代数

補題 2.5.2:

V を有限次元 $\mathbb{K}$-ベクトル空間とし，$x,\, y \in \operatorname{End} V$ は $[x, y] = 0$ を充たす（i.e. 互いに可換）とする．このとき，$x,\, y$ のどちらか一方が冪零ならば $x \circ y$ も冪零である．特に $\operatorname{Tr}(x \circ y) = 0$ が成り立つ．

証明 x が冪零であるとする．このときある $n > 0$ が存在して $x^n = 0$ となるので，$[x, y] = 0 \iff x \circ y = y \circ x$ より $(x \circ y)^n = y^n \circ x^n = 0$ が言える．特に $x \circ y$ の表現行列を $\mathfrak{n}(\dim V, \mathbb{K})$ の元にするような V の基底が存在するので $\operatorname{Tr}(x \circ y) = 0$ である． ■

命題 2.5.2:

$\mathfrak{g}$ の極大トーラス $\mathfrak{h}$ に対して，

$$\mathfrak{h} = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \ (= \mathfrak{g}_0)$$

証明 $C := C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ とおく．命題 2.5.1 より $\mathfrak{h}$ は可換なので $\mathfrak{h} \subset C$ が成り立つ．$x \in \mathfrak{g}$ の抽象 Jordan 分解を $x = x_s + x_n$ と書く．

step1: $\forall x = x_s + x_n \in C$ に対して $x_s,\, x_n \in C$

$x \in C \iff \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(x)(\mathfrak{h}) = 0$ である．このとき命題 2.1.1-(3) より $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(x)_s(\mathfrak{h}) = \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(x)_n(\mathfrak{h}) = 0$ が言える．系 2.3.5 より $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(x)_s = \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(x_s)$, $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(x)_n = \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(x_n)$ なので示された．

step2: $\forall x = x_s + x_n \in C$ に対して $x_s \in \mathfrak{h}$

$\forall x = x_s + x_n \in C$ をとる．このとき $\forall h \in \mathfrak{h}$ に対して $0 = \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(0) = \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}([h, x]) = [\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(h), \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(x)] = 0$ が成り立つので $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(h),\, \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(x),\, \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(x_s) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ は同時対角化可能であり，従って $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(h + x_s) = \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(h) + \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(x_s) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ もまた半単純だとわかる．従って $\mathfrak{h} + \mathbb{K}x_s$ は $\mathfrak{h}$ を含む $\mathfrak{g}$ のトーラスだが，$\mathfrak{h}$ の極大性より $\mathfrak{h} + \mathbb{K}x_s = \mathfrak{h}$，i.e. $x \in \mathfrak{h}$ が言えた．

step3: $\kappa|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ が非退化

$\forall h \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^{\perp}$ をとる．このとき $\kappa(h, \mathfrak{h}) = 0$ が成り立つ．示すべきは $h = 0$ である．

ところで，$x \in C$ が冪零ならば，$[x, \mathfrak{h}] = 0$ かつ $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(x) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ が冪零であることから補題 2.5.2 が使えて $\kappa(x,\, y) = \operatorname{Tr}\bigl(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(x) \circ \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(y)\bigr) = 0$ が言える．i.e. $\kappa(x,\, \mathfrak{h}) = 0$ が成り立つ．ここで $\forall y = y_s + y_n \in C$ をとると，**(step2)** から $y_s \in \mathfrak{h}$ なので h の取り方から $\kappa(y_s,\, h) = 0$ がわかり，**(step1)** から $y_n \in C$ がわかるが，y_n は冪零なので結局 $\kappa(y,\, h) = \kappa(y_n,\, h) = 0$ だと分かった．$y \in C$ は任意だったのでこのことは $h \in C^{\perp}$ を意味するが，系 2.5.1 より $\kappa|_{C\times C}$ は非退化なので $h = 0$ が言えた[*25]．

step4: C は冪零 Lie 代数

$\forall x = x_s + x_n \in C$ をとる．**(step2)** より $x_s \in \mathfrak{h}$ であり，$\operatorname{ad}_C(x) = 0$ は冪零である．一方 $\operatorname{ad}_C(x_n)$ は定義から冪零なので，$\operatorname{ad}_C(x) = \operatorname{ad}_C(x_s) + \operatorname{ad}_C(x_n)$ も冪零である．よって Engel の定理から C は冪零 Lie 代数である．

step5: $\mathfrak{h} \cap [C,\, C] = 0$

[*25] $\mathfrak{h} \subset C$ より $h \in C \cap C^{\perp}$．

κ は Lie ブラケットについて結合的なので，$[\mathfrak{h}, C] = 0$ と併せて $\kappa(\mathfrak{h}, [C, C]) = 0$ を得る．従って **(step3)** より $\mathfrak{h} \cap [C, C] = 0$ が言えた．

step6: C は可換

背理法により示す．$[C, C] \neq 0$ とする．**(step4)** より C は冪零 Lie 代数で，かつ $[C, C] \subset C$ はそのイデアルであるから，このとき補題??が使えて $Z(C) \cap [C, C] \neq 0$ が言える．i.e. $z = z_s + z_n \in (Z(C) \cap [C, C]) \setminus \{0\}$ が存在する．**(step2)**, **(step5)** より $z_n \neq 0$ でなくてはならない．よって **(step1)** から $z_n \in C \setminus \{0\}$ と言うことになる．一方，命題 2.1.1-(2) より $\forall c \in C$ に対して $0 = [z, c] = [z_s, c] + [z_n, c]$ だが，**(step2)** より $z_s \in \mathfrak{h}$ なので $[z_s, c] = 0$ であり，$[z_n, c] = 0$，i.e. $z_n \in Z(C)$ となる．よって補題 2.5.2 から $\kappa(z_n, C) = 0$ が言えて，系 2.5.1 から $z_n = 0$ ということになり，$z_n \neq 0$ と矛盾する．

step7: $C = \mathfrak{h}$

背理法により示す．$C \neq \mathfrak{h}$ とすると，ある $x = x_s + x_n \in C$ が存在して $x_n \neq 0$ となる．このとき **(step1)** より $x_n \in C \setminus \{0\}$ であり，**(step6)** および補題 2.5.2 から $\forall y \in C$ に対して $\kappa(x_n, y) = \mathrm{Tr}\big(\mathrm{ad}(x_n) \circ \mathrm{ad}(y)\big) = 0$ を充たすことになり，系 2.5.1 に矛盾する．

■

系 2.5.2:

$\kappa|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$ は非退化である．

<u>証明</u> 系 2.5.1 に命題 2.5.2 を用いるだけである． ■

$\mathbb{K}$-線型写像

$$\tilde{\kappa} \colon \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}^*,\ h \longmapsto \big(x \longmapsto \kappa(h, x)\big) \tag{2.5.4}$$

を考える．すると κ に関する $\mathfrak{h}$ の直交補空間の定義を思い出して

$$\mathrm{Ker}\,\tilde{\kappa} = \big\{\, h \in \mathfrak{h} \,\big|\, \forall x \in \mathfrak{h},\ \kappa(h, x) = 0 \,\big\} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^{\perp}$$

となることがわかるが，系 2.5.2 より $\mathrm{Ker}\,\tilde{\kappa} = 0$ が言える．i.e. $\tilde{\kappa}$ は単射である．$\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{h}^*$ なので，補題??-(3) から **$\tilde{\kappa}$ は $\mathbb{K}$-ベクトル空間の同型写像である．** 従って $\forall \alpha \in \mathfrak{h}^*$ が与えられたとき，$\forall h \in \mathfrak{h}$ に対して $\alpha(h) = \kappa(\boldsymbol{t_\alpha}, h) = \tilde{\kappa}(\boldsymbol{t_\alpha})(h)$ を充たすような $\boldsymbol{t_\alpha} \in \mathfrak{h}$ が存在する．

2.5.3 直交性

命題 2.5.3: ルートの直交性

- 体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$
- $\mathfrak{g}$ の極大トーラス $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$
- $\mathfrak{h}$ のルート全体の集合 $\Phi \subset \mathfrak{h}^*$

を与える．$\mathfrak{g}$ のルート空間分解を命題 2.5.2 によって

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

と書く．このとき，以下が成り立つ：

(1) $\mathfrak{h}^* = \operatorname{Span}\Phi$
(2) $\alpha \in \Phi \implies -\alpha \in \Phi$
(3) $\forall \alpha \in \Phi$ および $\forall x \in \mathfrak{g}_\alpha,\ \forall y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ に対して，$[x, y] = \kappa(x,\, y)t_\alpha$
(4) $\alpha \in \Phi \implies [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = \operatorname{Span}\{t_\alpha\}$
(5) $\alpha \in \Phi \implies \alpha(t_\alpha) = \kappa(t_\alpha,\, t_\alpha) \neq 0$
(6) $\forall \alpha \in \Phi$ および $\forall x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ に対して $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ が存在し，$h_\alpha := [x_\alpha, y_\alpha] \in \mathfrak{h}$ とおくと

$$x_\alpha \longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad y_\alpha \longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad h_\alpha \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

を線型に拡張することで定義される $\mathbb{K}$-線型写像

$$\operatorname{Span}\bigl\{\, x_\alpha,\, y_\alpha,\, h_\alpha \,\bigr\} \longrightarrow \mathfrak{sl}(2,\, \mathbb{K})$$

が Lie 代数の同型写像になる．
(7)

$$h_\alpha = \frac{2}{\kappa(t_\alpha,\, t_\alpha)} t_\alpha, \quad h_\alpha = -h_{-\alpha}$$

証明 (1) 背理法により示す．$\mathfrak{h}^* \supsetneq \operatorname{Span}\Phi$ ならば非零な $\beta \in \mathfrak{h}^* \setminus \operatorname{Span}\Phi$ が存在する．従って非零な[*26] $h \in \Bigl(\bigcap_{\alpha \in \Phi} \operatorname{Ker}\alpha\Bigr) \setminus \operatorname{Ker}\beta$ が存在する．このとき $\mathfrak{g}_\alpha$ の定義から，$\forall \alpha \in \Phi$ に対して $[h, \mathfrak{g}_\alpha] = 0$ が成り立つ．一方で，補題 2.5.1 より $[h, \mathfrak{h}] = 0$ であるから，命題 2.5.2 より $[h, \mathfrak{g}] = \bigl[h, \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha\bigr] = [h, \mathfrak{h}] \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} [h, \mathfrak{g}_\alpha] = 0 \iff h \in Z(\mathfrak{g})$ がわかる．然るに $\mathfrak{g}$ が半単純 Lie 代数であることから $Z(\mathfrak{g}) = 0$ であり $h = 0$ と言うことになって矛盾．

(2) $\alpha \in \Phi$ とする．背理法により $-\alpha \in \Phi$ を示す．$-\alpha \notin \Phi$ を仮定する．このとき $\mathfrak{g}_{-\alpha} = 0$ であるから $\kappa|_{\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}} = 0$ であり，命題 2.5.1-(3) と併せると $\forall \beta \in \mathfrak{h}^*$ に対して $\kappa|_{\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_\beta} = 0$ がわかる．よって κ の双線型性から $\kappa|_{\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}} = 0$，i.e. κ の radical S_κ について $0 \subsetneq \mathfrak{g}_\alpha \subset S_\kappa$ と言うことになって $\mathfrak{g}$ が半単純 Lie 代数であることに矛盾（定理 2.2.1）．

(3) $\forall \alpha \in \Phi$ および $\forall x \in \mathfrak{g}_\alpha,\ \forall y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ を 1 つずつとる．$\forall h \in \mathfrak{h}$ を 1 つ固定しよう．$\kappa \in L(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}; \mathbb{K})$ は対称かつ Lie ブラケットについて結合的なので

$$\begin{aligned}
\kappa(h,\, [x, y]) &= \kappa([h, x],\, y) \\
&= \kappa\bigl(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(h)(x),\, y\bigr) \\
&= \alpha(h)\kappa(x,\, y) \\
&= \kappa(t_\alpha,\, h)\kappa(x,\, y) \\
&= \kappa\bigl(\kappa(x,\, y)t_\alpha,\, h\bigr) \\
&= \kappa\bigl(h,\, \kappa(x,\, y)t_\alpha\bigr)
\end{aligned}$$

がわかる．$h \in \mathfrak{h}$ は任意だったので $\kappa\bigl(h,\, [x, y] - \kappa(x,\, y)t_\alpha\bigr) = 0$，i.e. κ に関する直交補空間の意味で

[*26] $\beta\colon \mathfrak{h} \longrightarrow \mathbb{K}$ は $\mathbb{K}$-線型写像なので，もし $h = 0$ ならば $h \in \operatorname{Ker}\beta$ となって矛盾．

$[x, y] - \kappa(x, y)t_\alpha \in \mathfrak{h}^\perp$ だと分かった．一方で，命題 2.5.1-(1)，命題 2.5.2 より $[x, y] \in \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ が言えて，かつ定義より $t_\alpha \in \mathfrak{h}$ なので，$[x, y] - \kappa(x, y)t_\alpha \in \mathfrak{h}$ である．以上より $[x, y] - \kappa(x, y)t_\alpha \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp$ が分かったが，系 2.5.2 より $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp = 0$ なので $[x, y] - \kappa(x, y)t_\alpha = 0 \iff [x, y] = \kappa(x, y)t_\alpha$ が示された．

(4) $\alpha \in \Phi$ とする．(3) より，$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \neq 0$ を示せば十分である．$\alpha \in \Phi$ なので，$x \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ が存在する．もし $\kappa|_{\{x\}\times\mathfrak{g}_{-\alpha}} = 0$ ならば (2) の証明と同様の議論により $\kappa|_{\{x\}\times\mathfrak{g}} = 0$，i.e. $x \in S_\kappa$ と言う事になり定理 2.2.1 に矛盾．よって背理法からある $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ が存在して $\kappa(x, y) \neq 0$ を充たす．従って (3) から $[x, y] \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \setminus \{0\}$ が言えた．

(5) $\alpha \in \Phi$ とする．背理法により $\alpha(t_\alpha) \neq 0$ を示す．$\alpha(t_\alpha) = 0$ を仮定すると，$\forall x \in \mathfrak{g}_\alpha$，$\forall y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ に対して $[t_\alpha, x] = 0 = [t_\alpha, y]$ となる．(4) と同様の議論により $\kappa(x, y) \neq 0$ であるような $x \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$，$y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ が存在する．x, y のどちらか一方を $\kappa(x, y)^{-1}$ 倍することで，(3) において $[x, y] = t_\alpha \in \mathfrak{h}$ となるようにできる．このとき $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{s} \coloneqq \mathrm{Span}\{x, y, t_\alpha\}$ は 3 次元の可解 Lie 代数であり，$\mathfrak{s} \cong \mathrm{ad}_\mathfrak{g}(\mathfrak{s}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ である[*27]．従って系 2.1.4 が使えて，$\forall s \in [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$ に対して $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(s) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ は冪零である．$t_\alpha \in [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$ なので $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(t_\alpha)$ は冪零である．一方で $t_\alpha \in \mathfrak{h}$ なので $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(t_\alpha)$ は半単純でもあるから $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(t_\alpha) = 0 \iff t_\alpha \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{ad}_\mathfrak{g} = 0 \implies t_\alpha = 0$ となるが，これは $\alpha \in \Phi$（従って $\alpha \neq 0$）であることに矛盾する．

(6) $\forall \alpha \in \Phi$ および $\forall x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ を与える．このとき (4) の証明と同様の議論によりある $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ が存在して $\kappa(x_\alpha, y) \neq 0$ を充たす．さらに (5) から $\kappa(t_\alpha, t_\alpha) \neq 0$ なので，

$$y_\alpha \coloneqq \frac{2}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)\kappa(x_\alpha, y)} y$$

とおけば

$$\kappa(x_\alpha, y_\alpha) = \frac{2}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)}$$

を充たす．よってさらに

$$h_\alpha \coloneqq \frac{2}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)} t_\alpha \in \mathfrak{h}$$

とおけば (3) より

$$\begin{aligned}
[x_\alpha, y_\alpha] &= \kappa(x_\alpha, y_\alpha)t_\alpha = h_\alpha, \\
[h_\alpha, x_\alpha] &= \frac{2}{\alpha(t_\alpha)}[t_\alpha, x_\alpha] = \frac{2}{\alpha(t_\alpha)}\alpha(t_\alpha)x_\alpha = 2x_\alpha, \\
[h_\alpha, y_\alpha] &= \frac{2}{\alpha(t_\alpha)}[t_\alpha, y_\alpha] = \frac{2}{\alpha(t_\alpha)}\bigl(-\alpha(t_\alpha)\bigr)y_\alpha = -2y_\alpha
\end{aligned}$$

が成り立ち，$\mathrm{Span}\bigl\{x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha\bigr\} \subset \mathfrak{g}$ は $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ と Lie 代数として同型になる．

(7) (6) の証明から即座に

$$h_\alpha = \frac{2}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)} t_\alpha$$

[*27] 抽象 Jordan 分解の定義の直前で述べたように，$\mathfrak{g}$ が半単純 Lie 代数ならば $\mathrm{ad}_\mathfrak{g} \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ は単射である．

が従う．$\kappa(t_\alpha,\, h) := \alpha(h) \quad (\forall h \in \mathfrak{h})$ が t_α の定義だったので，

$$\forall h \in \mathfrak{h},\ \kappa(t_{-\alpha},\, h) = -\alpha(h) = \kappa(-t_\alpha,\, h)$$

が言える．よって系 2.5.2 から $t_{-\alpha} = -t_\alpha$ であり，

$$h_\alpha = -h_{-\alpha}$$

が言えた．

■

2.5.4 整性

命題 2.5.3-(6) で構成した $(x_\alpha,\, y_\alpha,\, h_\alpha) \in \mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha} \times \mathfrak{h}$ について，

$$\mathfrak{s}_\alpha := \mathrm{Span}\{\, x_\alpha,\, y_\alpha,\, h_\alpha \,\} \cong \mathfrak{sl}(2,\, \mathbb{K})$$

とおく．

命題 2.5.4:

- 体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$
- $\mathfrak{g}$ の極大トーラス $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$
- $\mathfrak{h}$ のルート全体の集合 $\Phi \subset \mathfrak{h}^*$

を与える．$\mathfrak{g}$ のルート空間分解を命題 2.5.2 によって

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

と書く．このとき，$\forall \alpha,\, \beta \in \Phi$ に対して以下が成り立つ：

(1) $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$．特に $\mathfrak{h}_\alpha := [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ とおくと

$$\mathfrak{s}_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{h}_\alpha$$

が成り立ち，$\forall x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ に対して $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha \in \mathfrak{h}_\alpha$ を充たす $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ が一意的に存在する．

(2) $\lambda\alpha \in \Phi \quad \Longrightarrow \quad \lambda = +1$ または $\lambda = -1$

(3) $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ で，かつ $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in \Phi$

(4) $\alpha + \beta \in \Phi \quad \Longrightarrow \quad [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$

(5) $\beta \neq \pm\alpha$ ならば，

$$r := \max\{\, \lambda \in \mathbb{Z} \mid \beta - \lambda\alpha \in \Phi \,\},$$
$$q := \max\{\, \lambda \in \mathbb{Z} \mid \beta + \lambda\alpha \in \Phi \,\}$$

とおいたとき $-r \leq \forall\lambda \leq q$ に対して

$$\beta + \lambda\alpha \in \Phi \ \text{かつ}\ \beta(h_\alpha) = r - q \in \mathbb{Z}$$

が成り立つ．

(3) の $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ は **Cartan 数** (Cartan integer) と呼ばれる. (5) で得られた系列 $\{\beta+\lambda\alpha \in \Phi\}_{-r\le\lambda\le q}$ のことを **$\boldsymbol{\alpha}$-string through $\boldsymbol{\beta}$** と呼ぶ.

<u>**証明**</u> $\forall\alpha \in \Phi$ を 1 つ固定する．$\mathfrak{s}_\alpha$ の随伴表現

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{s}_\alpha} : \mathfrak{s}_\alpha \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}),\ x \longmapsto \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$$

によって $\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{s}_\alpha$-加群と見做す．このとき $h \in \mathfrak{s}_\alpha$ の，<u>$\mathfrak{g}$ における</u>ウエイト μ のウエイト空間を $V_\mu \subset \mathfrak{g}$ と書く．Weyl の定理から $\mathfrak{s}_\alpha$-加群 $\mathfrak{g}$ は既約な部分 $\mathfrak{s}_\alpha$-加群の族 $\{\mathfrak{w}_i\}_{i\in I}$ の（$\mathfrak{s}_\alpha$-加群としての）直和

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in I} \mathfrak{w}_i$$

に分解し，それぞれの直和因子 $\mathfrak{w}_i$ の既約な部分 $\mathfrak{s}_\alpha \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群としての構造は定理 2.4.1 より定まる．特に系 2.4.2 より

- $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h_\alpha)$ の固有値（i.e. 随伴表現 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{s}_\alpha}$ における $h_\alpha \in \mathfrak{s}_\alpha$ のウエイト）は全て整数
- 偶数ウエイトのウエイト空間の直和として書ける $\mathfrak{w}_i$ の個数は $\dim V_0$ 個
- 奇数ウエイトのウエイト空間の直和として書ける $\mathfrak{w}_i$ の個数は $\dim V_1$ 個

が成り立つ．

(1), (2)

$\mathfrak{g}$ の<u>部分ベクトル空間</u>

$$\mathfrak{m} := \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{K}^*} \mathfrak{g}_{\lambda\alpha} \subset \mathfrak{g}$$

を考える[*28]．命題 2.5.1-(1) より $\forall\lambda \in \mathbb{K}^*$ に対して

$$\begin{aligned} x_\alpha \blacktriangleright \mathfrak{g}_{\lambda\alpha} &= \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x_\alpha)(\mathfrak{g}_{\lambda\alpha}) = [x_\alpha, \mathfrak{g}_{\lambda\alpha}] \subset \mathfrak{g}_{(\lambda+1)\alpha}, \\ y_\alpha \blacktriangleright \mathfrak{g}_{\lambda\alpha} &= \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(y_\alpha)(\mathfrak{g}_{\lambda\alpha}) = [y_\alpha, \mathfrak{g}_{\lambda\alpha}] \subset \mathfrak{g}_{(\lambda-1)\alpha}, \\ h_\alpha \blacktriangleright \mathfrak{g}_{\lambda\alpha} &= \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h_\alpha)(\mathfrak{g}_{\lambda\alpha}) = [h_\alpha, \mathfrak{g}_{\lambda\alpha}] \subset \mathfrak{g}_{\lambda\alpha} \end{aligned}$$

が成り立つので，$\mathfrak{m}$ は $\mathfrak{g}$ の部分 $\mathfrak{s}_\alpha$-加群である．また，$\mathfrak{g}_\alpha$ の定義および命題 2.5.3-(5), (7) から，$\lambda\alpha \in \Phi$ を充たす任意の $\lambda \in \mathbb{K}^*$ に対して

$$\forall x \in \mathfrak{g}_{\lambda\alpha},\ h_\alpha \blacktriangleright x = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h_\alpha)(x) = \lambda\alpha(h_\alpha)x = 2\lambda x$$

が成り立つ．i.e. $\mathfrak{g}_{\lambda\alpha} = V_{2\lambda} \cap \mathfrak{m}$ である．さらに補題 2.5.1 より $h_\alpha \blacktriangleright \mathfrak{h} = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h_\alpha)(\mathfrak{h}) = [h_\alpha, \mathfrak{h}] = 0$ が言えるので，$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 = V_0 \cap \mathfrak{m}$ である．

ここで $\dim(\mathrm{Ker}\,\alpha) = \dim\mathfrak{h} - 1$ であり[*29]，$\forall h \in \mathrm{Ker}\,\alpha$ に対して

$$\begin{aligned} x_\alpha \blacktriangleright h &= -\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h)(x_\alpha) = \alpha(h)x_\alpha = 0, \\ y_\alpha \blacktriangleright h &= -\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h)(y_\alpha) = -\alpha(h)x_\alpha = 0, \\ h_\alpha \blacktriangleright h &= -\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h)(h_\alpha) = 0 \end{aligned}$$

[*28] $\mathbb{K}^*$ の元は $\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ なる $\mathbb{K}$-線型写像ということなので，要するにスカラー倍である．
[*29] $\alpha \neq 0$ なので $\dim(\mathrm{Im}\,\alpha) = 1$ である．よって階数・退化次元の定理から $\dim(\mathrm{Ker}\,\alpha) = \dim\mathfrak{h} - 1$.

が成り立つ．i.e. $\mathfrak{s}_\alpha$ は $\mathrm{Ker}\,\alpha$ に自明に作用するので，$\mathrm{Ker}\,\alpha$ は $\dim\mathfrak{h}-1$ 個の自明な（従ってウエイト 0 の）既約 $\mathfrak{s}_\alpha$-部分加群の直和である．一方，$\mathfrak{s}_\alpha \subset \mathfrak{g}$ 自身もまた $\mathfrak{g}$ の既約な部分 $\mathfrak{s}_\alpha$-加群であり，命題 2.5.3-(6) より

$$\begin{aligned} h_\alpha \blacktriangleright x_\alpha &= \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h_\alpha)(x_\alpha) = [h_\alpha, x_\alpha] = 2x_\alpha, \\ h_\alpha \blacktriangleright y_\alpha &= \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h_\alpha)(x_\alpha) = [h_\alpha, x_\alpha] = -2y_\alpha, \\ h_\alpha \blacktriangleright h_\alpha &= \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h_\alpha)(h_\alpha) = 0 \end{aligned}$$

が成り立つのでウエイト $0, \pm 2$ を持つ．i.e. $\mathfrak{g}_{\pm\alpha} \subset \mathfrak{s}_\alpha$ である．従って $\mathrm{Ker}\,\alpha \oplus \mathfrak{s}_\alpha$ は[*30]$(\dim\mathfrak{h}-1)+1 = \dim\mathfrak{h}$ 個の，偶数ウエイトを持つ既約な部分 $\mathfrak{s}_\alpha$-加群の直和に分解するが，系 2.4.2 よりこのような既約部分 $\mathfrak{s}_\alpha$-加群の $\mathfrak{m}$ 内における総数は $\dim(V_0 \cap \mathfrak{m}) = \dim\mathfrak{h}$ 個なので，結局 $\mathfrak{m}$ 内の h_α の偶数ウエイトは $0, \pm 2$ 以外に出現しないことが分かった．従って $2\alpha, \frac{1}{2}\alpha \notin \Phi$ である[*31]．このことから $V_1 \cap \mathfrak{m} = 0$ がわかり，系 2.4.2 から $\mathfrak{m}$ 内に奇数ウエイトが出現しないこともわかった．以上の考察より

$$\mathfrak{m} = \mathrm{Ker}\,\alpha \oplus \mathfrak{s}_\alpha$$

なので $\mathbb{K}h_\alpha \subset \mathfrak{s}_\alpha$ であり，$\dim\mathfrak{s}_\alpha = 3$ であることから $\dim\mathfrak{g}_\alpha = 1$ が言えた．特に命題 2.5.3-(4) より $\mathbb{K}h_\alpha = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] =: \mathfrak{h}_\alpha$ であり，

$$\mathfrak{s}_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{h}_\alpha$$

も言えた．

(3), (4), (5)

$\beta = \pm\alpha$ のとき，$\alpha(h_\alpha) = 2$ なので (3) が成り立つ．よって以下では $\forall\beta \in \Phi \setminus \{\pm\alpha\}$ を 1 つとる．$\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間

$$\mathfrak{k} := \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta+\lambda\alpha}$$

を考える．命題 2.5.1-(1) より $\forall\lambda \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\begin{aligned} x_\alpha \blacktriangleright \mathfrak{g}_{\beta+\lambda\alpha} &= [x_\alpha, \mathfrak{g}_{\beta+\lambda\alpha}] \subset \mathfrak{g}_{\beta+(\lambda+1)\alpha}, \\ y_\alpha \blacktriangleright \mathfrak{g}_{\beta+\lambda\alpha} &= [y_\alpha, \mathfrak{g}_{\beta+\lambda\alpha}] \subset \mathfrak{g}_{\beta+(\lambda-1)\alpha}, \\ h_\alpha \blacktriangleright \mathfrak{g}_{\beta+\lambda\alpha} &= [h_\alpha, \mathfrak{g}_{\beta+\lambda\alpha}] \subset \mathfrak{g}_{\beta+\lambda\alpha} \end{aligned}$$

が成り立つので，$\mathfrak{k}$ は $\mathfrak{g}$ の部分 $\mathfrak{s}_\alpha$-加群である．(1) において α は任意だったので $\forall\lambda \in \mathbb{Z}$ に対して $\dim\mathfrak{g}_{\beta+\lambda\alpha} = 1$ である．$\mathfrak{g}_\alpha$ の定義および命題 2.5.3-(5), (7) から，$\beta + \lambda\alpha \in \Phi$ を充たす任意の $\lambda \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\forall x \in \mathfrak{g}_{\beta+\lambda\alpha},\ h_\alpha \blacktriangleright x = \bigl(\beta(h_\alpha) + 2\lambda\bigr)x$$

が成り立つ．i.e. $\mathfrak{g}_{\beta+\lambda\alpha} = V_{\beta(h_\alpha)+2\lambda} \cap \mathfrak{k}$ である．特に $\beta(h_\alpha) + 2\lambda \in \mathbb{Z}$ なので $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ でなくてはならない（**(3) の前半**）．

[*30] $\mathfrak{h} = \mathrm{Ker}\,\alpha \oplus \mathbb{K}h_\alpha$ なので $\mathrm{Ker}\,\alpha \cap \mathfrak{s}_\alpha = 0$ である．

[*31] 議論の冒頭で $\alpha \in \Phi$ は任意にとっていたので，もし $2\alpha \in \Phi$ ならば，$\beta := 2\alpha \in \Phi$ とおいたときに $2\beta = 4\alpha \in \Phi$ という事になり矛盾．$\alpha = 2(\frac{1}{2}\alpha) \in \Phi$ なので $\frac{1}{2}\alpha \notin \Phi$ も言えた．

α, β を固定したとき，$\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ だと分かったので $\beta(h_\alpha) \equiv 0, 1 \mod 2$ のどちらかである．$\beta(h_\alpha) \equiv 0 \mod 2$ ならば

$$V_0 \cap \mathfrak{k} = \mathfrak{g}_{\beta - \frac{\beta(h_\alpha)}{2}\alpha}, \quad V_1 \cap \mathfrak{k} = 0$$

$\beta(h_\alpha) \equiv 1 \mod 2$ ならば

$$V_0 \cap \mathfrak{k} = 0, \quad V_1 \cap \mathfrak{k} = \mathfrak{g}_{\beta - \frac{\beta(h_\alpha)-1}{2}\alpha}$$

なので，いずれの場合も $\dim(V_0 \cap \mathfrak{k}) + \dim(V_1 \cap \mathfrak{k}) = 1$ であり，系 2.4.2 より $\mathfrak{k}$ は既約な $\mathfrak{s}_\alpha \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-加群であることが分かった．従って $\mathfrak{k}$ の最高（resp. 最低）ウエイト m（resp. l）が存在し，

$$\begin{aligned} \beta(h_\alpha) + 2q &:= m, \\ \beta(h_\alpha) - 2r &:= l \end{aligned}$$

とおけば

$$\begin{aligned} q &= \max\{\, \lambda \in \mathbb{Z} \,|\, \beta + \lambda\alpha \in \Phi \,\}, \\ r &= \max\{\, \lambda \in \mathbb{Z} \,|\, \beta - \lambda\alpha \in \Phi \,\} \end{aligned}$$

が成り立ち，さらに定理 2.4.1-(1) より $-r \leq \forall\lambda \leq q$ に対して $\beta(h_\alpha) + 2\lambda = (\beta + \lambda\alpha)(h_\alpha)$ は $\mathfrak{k}$ のウエイトなので

$$\beta + \lambda\alpha \in \Phi$$

である．特に $l = -m$ なので

$$\beta(h_\alpha) = r - q \in \mathbb{Z}$$

が言えた（**(5)**）．さらに $q, r \geq 0$ なので $-r \leq q - r \leq q$ が成り立ち，

$$\beta - \beta(h_\alpha)\alpha = \beta + (q - r)\alpha \in \Phi$$

が分かった（**(3) の後半**）．

(2) および $0 \notin \Phi$ であることから $\alpha + \beta \in \Phi$ ならば $\beta \neq \pm\alpha$ である．よって補題 2.4.2 より $x_\alpha \blacktriangleright \mathfrak{g}_\beta = [x_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \neq 0$ である．(1) より $\dim \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} = 1$ なので，命題 2.5.1-(1) から $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ が言えた（**(4)**）．

■

2.5.5 有理性

- 体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$
- $\mathfrak{g}$ の極大トーラス $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$
- $\mathfrak{h}$ のルート全体の集合 $\Phi \subset \mathfrak{h}^*$

を与える．$\mathfrak{g}$ のルート空間分解を命題 2.5.2 によって

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

と書く．系 2.5.2 から得られる同型 (2.5.4) によって，$\mathfrak{h}^*$ 上に非退化かつ対称な双線型形式

$$(\, , \,) \colon \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^* \longrightarrow \mathbb{K}, \ (\alpha, \beta) \longmapsto \kappa\bigl(\tilde{\kappa}^{-1}(\alpha), \tilde{\kappa}^{-1}(\beta)\bigr) = \kappa(t_\alpha, t_\beta)$$

を定義する．

命題 2.5.3-(1) より，$\dim \mathfrak{h}$ 個のルート $\alpha_1, \dots, \alpha_{\dim \mathfrak{h}} \in \Phi$ であって $\mathfrak{h}$ の $\mathbb{K}$-ベクトル空間としての基底となるようなものが存在する．

補題 2.5.3:

$\forall \beta \in \mathfrak{h}^*$ を基底 $\alpha_1, \dots, \alpha_{\dim \mathfrak{h}} \in \Phi$ で

$$\beta = c^\mu \alpha_\mu$$

と展開すると，$1 \leq \forall \mu \leq \dim \mathfrak{h}$ に対して $c^\mu \in \mathbb{Q}$ が成り立つ．

証明 $1 \leq \forall \mu \leq \dim \mathfrak{h}$ に対して

$$\frac{2(\alpha_\mu, \beta)}{(\alpha_\mu, \alpha_\mu)} = \sum_{\nu=1}^{\dim \mathfrak{h}} c^\nu \frac{2(\alpha_\mu, \alpha_\nu)}{(\alpha_\mu, \alpha_\mu)} \tag{2.5.5}$$

命題 2.5.3-(7)，命題 2.5.4-(3) より $\frac{2(\alpha_\mu, \beta)}{(\alpha_\mu, \alpha_\mu)} = \frac{2}{\kappa(t_{\alpha_\mu}, t_{\alpha_\mu})}\beta(t_{\alpha_\mu}) = \beta(h_{a_\mu}) \in \mathbb{Z}$ などが成り立つので，(2.5.5) は $(c^\nu) \in \mathbb{K}^{\dim \mathfrak{h}}$ に関する $\mathbb{Z}$-係数線型連立方程式である．特に α_μ は線型独立なので $\det\bigl[(\alpha_\mu, \alpha_\nu)\bigr] \neq 0$ であり，

$$\det\left[\frac{2(\alpha_\mu, \alpha_\nu)}{(\alpha_\mu, \alpha_\mu)}\right] = \left(\prod_{\nu=1}^{\dim \mathfrak{h}} \frac{2}{(\alpha_\mu, \alpha_\mu)}\right) \det\bigl[(\alpha_\mu, \alpha_\nu)\bigr] \neq 0$$

i.e. (2.5.5) は $\mathbb{Q}^{\dim \mathfrak{h}}$ に一意的な解を持つ． ■

補題 2.5.3 により，$\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}} \Phi \subset \mathfrak{h}^*$ の次元が $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{h}^*$ だと分かった．

$\forall \alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$ をとる．このとき $\mathfrak{g}_\alpha$ の定義を思い出すと，$\forall x \in \mathfrak{g}$ をルート空間分解することで $x = x_0 + \sum_{\gamma \in \Phi} x_\gamma$ w/ $x_0 \in \mathfrak{h}$, $x_\gamma \in \mathfrak{g}_\gamma$ と書けるので

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(t_\alpha) \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(t_\beta)(x) &= \sum_{\gamma \in \Phi} \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(t_\alpha) \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(t_\beta)(x_\gamma) \\
&= \sum_{\gamma \in \Phi} \gamma(t_\alpha)\gamma(t_\beta)\, \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{g}_\gamma}(x_\gamma)
\end{aligned}$$

となる．さらに命題 2.5.4-(1) より $\dim \mathfrak{g}_\gamma = 1$ なので $\mathrm{Tr}\bigl(\mathrm{id}_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{g}_\gamma}\bigr) = 1$ であり，

$$\begin{aligned}
\kappa(t_\alpha, t_\beta) &= \mathrm{Tr}\bigl(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(t_\alpha) \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(t_\beta)(x)\bigr) \\
&= \sum_{\gamma \in \Phi} \gamma(t_\alpha)\gamma(t_\beta)
\end{aligned}$$

が分かった．従って

$$\begin{aligned}(\alpha,\,\beta) &= \kappa(t_\alpha,\,t_\beta)\\ &= \sum_{\gamma\in\Phi}\gamma(t_\alpha)\gamma(t_\beta)\\ &= \sum_{\gamma\in\Phi}(\gamma,\,\alpha)(\gamma,\,\beta)\end{aligned}$$

が成り立つ．特に

$$\begin{aligned}(\beta,\,\beta) &= \sum_{\gamma\in\Phi}(\gamma,\,\beta)^2\\ &= (\beta,\,\beta)^2\left(\sum_{\gamma\in\Phi}\frac{1}{4}\left(\frac{2(\gamma,\,\beta)}{(\beta,\,\beta)}\right)^2\right) \geq 0\end{aligned}$$

で $\frac{2(\gamma,\,\beta)}{(\beta,\,\beta)} \in \mathbb{Z}$ であるから $(\beta,\,\beta) \in \mathbb{Q}$ であり，従って $(\alpha,\,\beta) \in \mathbb{Q}$ であることもわかった．このことから，

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \coloneqq \operatorname{Span}_{\mathbb{Q}} \Phi$$

とおけば，制限

$$(\ ,\ )|_{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\times\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}} \colon \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

は $\mathbb{Q}$-ベクトル空間 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ 上の正定値内積を定める．

体の拡大 $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ によってベクトル空間の係数拡大 $\mathbb{E} \coloneqq \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ を行うことで，$(\ ,\ )|_{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}}$ は $\mathbb{E} \cong \mathbb{R}^{\dim \mathfrak{h}}$ 上の正定値内積へと自然に拡張される．i.e. 組 $\bigl(\mathbb{E},\,(\ ,\ )\bigr)$ は Euclid 空間である！

本章の考察をまとめて次の定理を得る：

定理 2.5.3:

- 体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$
- $\mathfrak{g}$ の極大トーラス $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$
- $\mathfrak{h}$ のルート全体の集合 $\Phi \subset \mathfrak{h}^*$
- 体の拡大 $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ による $\operatorname{Span}_{\mathbb{Q}} \Phi$ の係数拡大 $\mathbb{E}$
- $\mathbb{E}$-上の正定値内積

$$(\ ,\ ) \colon \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R},\ (\alpha,\,\beta) \longmapsto \kappa(t_\alpha,\,t_\beta)$$

を与える．このとき以下が成り立つ：

(1) $\mathbb{E} = \operatorname{Span}_{\mathbb{R}} \Phi,\quad 0 \notin \Phi$

(2) $\lambda\alpha \in \Phi \quad\Longrightarrow\quad \lambda = \pm 1$

(3) $\alpha,\,\beta \in \Phi \quad\Longrightarrow\quad \beta - \frac{2(\beta,\,\alpha)}{(\alpha,\,\alpha)}\alpha \in \Phi$

(4) $\alpha,\,\beta \in \Phi \quad\Longrightarrow\quad \frac{2(\beta,\,\alpha)}{(\alpha,\,\alpha)} \in \mathbb{Z}$

定理 2.5.3 によって，半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とその極大トーラス $\mathfrak{h}$ の組 $(\mathfrak{g},\,\mathfrak{h})$ から，Euclid 空間とその上のルート Φ の組 $(\Phi,\,\mathbb{E})$ の間の対応

$$(\mathfrak{g},\,\mathfrak{h}) \longrightarrow (\Phi,\,\mathbb{E})$$

が得られた事になる．定理 2.5.3 の条件を充たす組 $(\Phi, \mathbb{E})$ は**ルート系** (root system) と呼ばれる：

公理 2.5.1: ルート系

- 有限次元 Euclid 空間[a] $\bigl(\mathbb{E}, (\ ,\ )\bigr)$
- $\mathbb{E}$ の部分集合 $\Phi \subset \mathbb{E}$

の組 $(\Phi, \mathbb{E})$ が**ルート系** (root system) であるとは，以下の条件を充たすことを言う：

(Root-1) Φ は 0 を含まない有限集合で，かつ $\mathbb{E} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \Phi$ を充たす．

(Root-2) $\lambda\alpha \in \Phi \implies \lambda = \pm 1$

(Root-3) $\alpha, \beta \in \Phi \implies \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha \in \Phi$

(Root-4) $\alpha, \beta \in \Phi \implies \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}$

[a] 有限次元 $\mathbb{R}$-ベクトル空間であって，対称かつ正定値な双線型形式 $(\ ,\ ) \colon \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ を持つもののこと．

実は，勝手なルート系が与えられると，それに対応する $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ が Lie 代数の同型を除いて一意に決まることが後に明らかになる．差し当たって，まず次の章ではルート系 $(\Phi, \mathbb{E})$ の完全な分類を行う．