

# 表現論 ノート

高間俊至

2023 年 10 月 4 日

# 目次

第 1 章	Lie 群と Lie 代数	2
1.1	公理的 Lie 代数 . . . . .	2
参考文献		6

# 第 1 章

## Lie 群と Lie 代数

本資料ではベクトル空間を英大文字で表記し，係数体を **blackboardbold**<sup>\*1</sup> で表記する (e.g. 体  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間  $L$ )．本章に限ってはベクトルを  $x \in L$  のように英小文字で表記し，係数体の元は  $\lambda \in \mathbb{K}$  のようにギリシャ文字で表記する．零ベクトルは  $o \in L$  と書き<sup>\*2</sup>， $0 \in \mathbb{K}$  を係数体の加法単位元， $1 \in \mathbb{K}$  を係数体の乗法単位元とする．ベクトル空間の加法を  $+$  と書き，スカラー乗法は  $\lambda x$  のように係数を左に書く．

### 1.1 公理的 Lie 代数

この節では  $\mathbb{K}$  を任意の体とする．

#### 公理 1.1.1: Lie 代数の公理

体  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間  $L$  の上に二項演算<sup>a</sup>

$$[\cdot, \cdot]: L \times L \longrightarrow L, (x, y) \longmapsto [x, y]$$

が定義されていて，かつ以下の条件を充たすとき， $L$  は **Lie 代数** (Lie algebra) と呼ばれる：

**(L-1)**  $[\cdot, \cdot]$  は双線型写像である． i.e.  $\forall x, x_i, y, y_i \in L, \forall \lambda_i, \mu_i \in \mathbb{K} (i = 1, 2)$  に対して

$$\begin{aligned} [\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y] &= \lambda_1 [x_1, y] + \lambda_2 [x_2, y], \\ [x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2] &= \mu_1 [x, y_1] + \mu_2 [x, y_2] \end{aligned}$$

が成り立つ．

**(L-2)**  $\forall x \in L$  に対して

$$[x, x] = o$$

が成り立つ．

**(L-3)**  $\forall x, y, z \in L$  に対して

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = o$$

が成り立つ<sup>b</sup> (**Jacobi 恒等式**)．

<sup>\*1</sup> L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X コマンドは `\mathbb`

<sup>\*2</sup> 0 の濫用を回避するための苦肉の策です... 普通に不便なので次章以降では零ベクトルも  $o$  と書きます．

<sup>a</sup> ベクトル空間に備わっている加法とスカラー乗法の他に、追加で  $[\cdot, \cdot]$  が定義されているという状況である。この付加的な二項演算はしばしば括弧積 (bracket) とか交換子 (commutator) とか **Lie ブラケット** (Lie bracket) とか呼ばれる。  
<sup>b</sup> 結合律ではない！

公理 (L-1), (L-2) から

$$o = [x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = [x, y] + [y, x]$$

が従う。i.e.  $[x, y]$  は反交換 (anticommute) する：

(L'-2)  $\forall x, y \in L$  に対して

$$[x, y] = -[y, x]$$

が成り立つ。

逆に (L'-2) を仮定すると

$$o = [x, x] + [x, x] = (1 + 1)[x, x]$$

が成り立つ<sup>\*3</sup>ので、体  $\mathbb{K}$  において  $1 + 1 \neq 0$  ならば  $[x, x] = o$  が言える。i.e.  $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$  ならば<sup>\*4</sup> (L'-2) と (L-2) は同値である。

【例 1.1.1】一般線形代数  $\mathfrak{gl}(V)$

$V$  を体  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間とする。 $V$  から  $V$  への線型写像全体が成す集合を  $\text{End } V$  と書く<sup>a</sup>。  
 $\text{End } V$  の加法とスカラー乗法をそれぞれ

$$\begin{aligned} + : \text{End } V \times \text{End } V &\longrightarrow \text{End } V, (f, g) \longmapsto (v \mapsto f(v) + g(v)) \\ \cdot : \mathbb{K} \times \text{End } V &\longrightarrow \text{End } V, (\lambda, f) \longmapsto (v \mapsto \lambda f(v)) \end{aligned}$$

として定義すると、組  $(\text{End } V, +, \cdot)$  は体  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間になる。以降では常に  $\text{End } V$  をこの方法でベクトル空間と見做す。

$\text{End } V$  の上の Lie ブラケットを

$$[\cdot, \cdot] : \text{End } V \times \text{End } V \longrightarrow \text{End } V, (f, g) \longmapsto fg - gf$$

と定義する。ただし右辺の  $fg$  は写像の合成  $f \circ g$  の略記である。このとき組  $(\text{End } V, +, \cdot, [\cdot, \cdot])$  が **Lie 代数の公理** を満たすことを確認しよう：

<sup>\*3</sup> 2 つ目の等号ではスカラー乗法の分配律 (ベクトル空間の公理である) を使った。

<sup>\*4</sup> 体  $\mathbb{K}$  の標数 (characteristic) を  $\text{char } \mathbb{K}$  と書いた。

**(L-1)**  $\forall v \in V$  を 1 つとる. 定義に従ってとても丁寧に計算すると

$$\begin{aligned}
[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g](v) &= ((\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)g - g(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2))(v) \\
&= (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(g(v)) - g((\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(v)) \\
&= (\lambda_1 f_1)(g(v)) + (\lambda_2 f_2)(g(v)) - g((\lambda_1 f_1)(v) + (\lambda_2 f_2)(v)) \\
&= \lambda_1 f_1(g(v)) + \lambda_2 f_2(g(v)) - \lambda_1 g(f_1(v)) - \lambda_2 g(f_2(v)) \\
&= \lambda_1 (f_1(g(v)) - g(f_1(v))) + \lambda_2 (f_2(g(v)) - g(f_2(v))) \\
&= \lambda_1 [f_1, g](v) + \lambda_2 [f_2, g](v) \\
&= (\lambda_1 [f_1, g] + \lambda_2 [f_2, g])(v)
\end{aligned}$$

となる. ただし 4 つ目の等号で  $g \in \text{End } V$  が線型写像であることを使った. 全く同様にして

$$[f, \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2](v) = \mu_1 [f, g_1] + \mu_2 [f, g_2]$$

を示すこともできる.

**(L-2)** 明らかに  $[f, f] = ff - ff = o$  なのでよい.

**(L-3)**  $[\cdot, \cdot]$  の双線型 (**(L-1)**) から

$$\begin{aligned}
&[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] \\
&= [f, gh] - [f, hg] + [g, hf] - [g, fh] + [h, fg] - [h, gf] \\
&= fgh - ghf - fhg + hgf + ghf - hfg - gfh + fhg + hfg - fgh - hgf + gfh \\
&= o.
\end{aligned}$$

この Lie 代数  $(\text{End } V, +, \cdot, [\cdot, \cdot])$  は**一般線形代数** (general linear algebra) と呼ばれ, 記号として  $\mathfrak{gl}(V)$  と書かれる.

$\dim V =: n < \infty$  のとき,  $\text{End } V$  は  $n \times n$   $\mathbb{K}$ -行列全体が成す  $\mathbb{K}$  ベクトル空間  $M(n, \mathbb{K})$  と同型である<sup>b</sup>.  $M(n, \mathbb{K})$  を Lie ブラケット  $[X, Y] := XY - YX$  によって Lie 代数と見做す<sup>c</sup>ときは, この同型を意識して  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$  と書く. さて,  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$  の標準的な基底は所謂**行列単位**

$$E_{ij} := [\delta_{i\mu} \delta_{j\nu}]_{1 \leq \mu, \nu \leq n} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \overbrace{0}^j & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ i\{0 & \cdots & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

である. Einstein の規約を使って  $E_{ij}E_{kl} = [\delta_{i\mu} \delta_{j\lambda} \delta_{k\lambda} \delta_{l\nu}]_{1 \leq \mu, \nu \leq n} = \delta_{jk} [\delta_{i\mu} \delta_{l\nu}]_{1 \leq \mu, \nu \leq n} = \delta_{jk} E_{il}$  と計算できるので,  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$  の Lie ブラケットは

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk} E_{il} - \delta_{li} E_{kj}$$

によって完全に決まる<sup>d</sup>.

<sup>a</sup> 自己準同型 (endomorphism) の略である.

<sup>b</sup>  $V$  の基底  $e_1, \dots, e_n$  を 1 つ固定する. このとき同型写像  $\varphi: V \longrightarrow \mathbb{K}^n$ ,  $v^\mu e_\mu \longmapsto (v^\mu)_{1 \leq \mu \leq n}$  を使って定義される線型写像  $M: \text{End } V \longrightarrow M(n, \mathbb{K})$ ,  $f \longmapsto \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$  が所望の同型写像である.

<sup>c</sup> 右辺の  $XY$  は行列の積である.

<sup>d</sup>  $\forall X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$  は  $X = X^{ij} E_{ij}$ ,  $Y = Y^{ij} E_{ij}$  と展開できるので, Lie ブラケットの双線型性から  $[X, Y] = X^{ij} Y^{kl} [E_{ij}, E_{kl}] = X^{ik} Y^{kl} E_{il} - X^{ij} Y^{ki} E_{jk} = (X^{ik} Y^{kj} - X^{ki} Y^{jk}) E_{ij}$  と計算できる.

## 参考文献