

# Humphreys Chapter III Exercises

## 問題 (2024/1/8 実施分)

高間俊至

2024 年 1 月 8 日

[1, p.63, Exercise1, 3] の解答例です.

何の断りもない場合, 体  $\mathbb{K}$  は代数閉体でかつ  $\text{char } \mathbb{K} = 0$  であるとする.

Euclid 空間  $(\mathbb{E}, (\cdot, \cdot)_{\mathbb{E}})$  の任意の元  $\alpha \in \mathbb{E}$  に対して,

- 鏡映面 (reflecting hyperplane)\*1

$$P_{\alpha} := \{ \beta \in \mathbb{E} \mid (\beta, \alpha)_{\mathbb{E}} = 0 \} = (\mathbb{R}\alpha)^{\perp}$$

- 鏡映面  $P_{\alpha}$  に関する鏡映 (reflecting)

$$\sigma_{\alpha}: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}, \beta \mapsto \beta - 2 \frac{(\beta, \alpha)_{\mathbb{E}}}{(\alpha, \alpha)_{\mathbb{E}}} \alpha$$

を考える.

$2 \frac{(\beta, \alpha)_{\mathbb{E}}}{(\alpha, \alpha)_{\mathbb{E}}} \in \mathbb{R}$  が頻繁に登場するので,

$$[[\beta, \alpha]] := 2 \frac{(\beta, \alpha)_{\mathbb{E}}}{(\alpha, \alpha)_{\mathbb{E}}}$$

と略記することにする. 写像  $[[\cdot, \cdot]]: \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$  は記号的には内積のように見えるかもしれないが, あくまで第一引数についてのみ線型なのであって, 対称でも双線型でもないことに注意.

### 公理 6.1: ルート系

- 有限次元 Euclid 空間  $(\mathbb{E}, (\cdot, \cdot)_{\mathbb{E}})$
- $\mathbb{E}$  の部分集合  $\Phi \subset \mathbb{E}$

の組  $(\mathbb{E}, \Phi)$  が**ルート系** (root system) であるとは, 以下の条件を充たすことを言う:

**(Root-1)**  $\Phi$  は 0 を含まない有限集合で, かつ  $\mathbb{E} = \text{Span}_{\mathbb{R}} \Phi$  を充たす.

**(Root-2)**  $\lambda \alpha \in \Phi \implies \lambda = \pm 1$

**(Root-3)**  $\alpha, \beta \in \Phi \implies \sigma_{\alpha}(\beta) \in \Phi$

**(Root-4)**  $\alpha, \beta \in \Phi \implies [[\beta, \alpha]] \in \mathbb{Z}$

\*1 余次元 1 の部分  $\mathbb{R}$ -ベクトル空間. 最右辺は対称かつ非退化な双線型形式  $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{E}}$  による直交補空間の意味である.

$\Phi$  の元のことをルート (root) と呼ぶ.

### 定義 6.1: Weyl 群

$(\mathbb{E}, \Phi)$  をルート系とする.  $GL(\mathbb{E})$  の部分集合  $\{\sigma_\alpha \in GL(\mathbb{E}) \mid \alpha \in \Phi\}$  が生成する  $GL(\mathbb{E})$  の部分群のことをルート系  $(\mathbb{E}, \Phi)$  の **Weyl 群** (Weyl group) と呼び,  $\mathcal{W}_{\mathbb{E}}(\Phi)$  と書く.

### 定義 6.2: 双対ルート系

ルート系  $(\mathbb{E}, \Phi)$  に対して

$$\Phi^\vee := \left\{ \frac{2}{(\alpha, \alpha)} \alpha \in \mathbb{E} \mid \alpha \in \Phi \right\}$$

とおき, 組  $(\mathbb{E}, \Phi^\vee)$  のことを  $(\mathbb{E}, \Phi)$  の**双対ルート系** (dual root system) と呼ぶ.

$\alpha \in \Phi$  に対して

$$\alpha^\vee := \frac{2}{(\alpha, \alpha)} \alpha \in \Phi^\vee$$

と書く.

#### 【問題 6.1】 p.46 の Exercise 2

- (1) ルート系  $\Phi$  を与えたとき,  $\Phi$  の**双対ルート系**  $\Phi^\vee$  もまたルート系であることを示せ.
- (2)  $\Phi^\vee$  の Weyl 群は  $\Phi$  の Weyl 群と同型であることを示せ.
- (3)  $[\alpha^\vee, \beta^\vee] = [\beta, \alpha]$  を示せ.

#### 【問題 6.2】

ノートでは分類定理の  $A_l, B_l, C_l, D_l$  型の  $l$  に条件をつけたが, これは  $l$  が小さいところでは同型があるからである. この同型をできるだけ多く見つけてみよう.

#### 【問題 6.3】 p.63 の Exercise 1

Dynkin 図形から Cartan 行列を復元せよ.

#### 【問題 6.4】 p.63 の Exercise 3

$G_2$  の Cartan 行列から  $G_2$  のルート系を復元し, [1, p.44] の図と整合しているかどうか確認せよ.

#### 【問題 6.5】 p.63 の Exercise 5

- (1)  $B_l, C_l$  以外の既約なルート系はその**双対ルート系**とルート系として同型であることを示せ.
- (2)  $B_l, C_l$  は互いに双対ルート系であることを示せ.

## 参考文献

- [1] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory* (Springer, 1972).