

第 2 章

半単純 Lie 代数

この章以降、 \mathbb{K} -ベクトル空間 V の零ベクトルを $0 \in V$ と書き、零ベクトル空間 $\{0\}$ のことも 0 と表記する^{*1}。この章において、特に断らない限り体 \mathbb{K} は代数閉体^{*2}で、かつ $\text{char } \mathbb{K} = 0$ であるとする。また、Lie 代数 \mathfrak{g} は常に有限次元であるとする。

2.1 Lie の定理・Cartan の判定条件

2.1.1 Lie の定理

定理 2.1.1:

V を有限次元 \mathbb{K} -ベクトル空間とし、 $\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ が可解であるとする。
このとき $V \neq 0$ ならば、 $\forall x \in \mathfrak{g}$ は共通の固有ベクトルを持つ。

系 2.1.2: Lie の定理

V を有限次元 \mathbb{K} -ベクトル空間とし、 $\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ が可解であるとする。
このとき $\forall x \in \mathfrak{g}$ は V のある共通の旗を安定化する。 i.e. $\forall x \in \mathfrak{g}$ の表現行列を同時に上三角行列にするような V の基底が存在する。

2.1.2 Jordan-Chevalley 分解

2.1.3 Cartan の判定条件

^{*1} 記号の濫用だが、広く普及している慣習である。

^{*2} つまり、定数でない任意の 1 変数多項式 $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ に対してある $\alpha \in \mathbb{K}$ が存在して $f(\alpha) = 0$ を満たす。

定理 2.1.3: Cartan の判定条件

V を有限次元 \mathbb{K} -ベクトル空間とし, $\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ を与える.
このとき以下の 2 つは同値である:

- (1) \mathfrak{g} が可解
- (2) $\forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \forall y \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{Tr}(x \circ y) = 0$ が成り立つ

系 2.1.4:

Lie 代数 \mathfrak{g} を与える.
このとき $\forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \forall y \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(x) \circ \mathrm{ad}(y)) = 0$ が成り立つならば, \mathfrak{g} は可解である.

2.2 Killing 形式

2.2.1 半単純性の判定条件

定義 2.2.1: Killing 形式

体 \mathbb{K} 上の Lie 代数 \mathfrak{g} の上の対称な双線型形式

$$\kappa: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}, (x, y) \longmapsto \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(x) \circ \mathrm{ad}(y))$$

のことを \mathfrak{g} の **Killing 形式** (Killing form) と呼ぶ.

定義 2.2.2: 双線型形式の radical

体 \mathbb{K} 上の Lie 代数 \mathfrak{g} の上の対称な双線型形式

$$\beta: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}$$

を与える.

- \mathfrak{g} の 部分ベクトル空間

$$S_\beta := \{ x \in \mathfrak{g} \mid \forall y \in \mathfrak{g}, \beta(x, y) = 0 \}$$

のことを β の **radical** と呼ぶ.

- β が**非退化** (nondegenerate) であるとは, $S_\beta = 0$ であることを言う.

定理 2.2.1: Lie 代数の半単純性と Killing 形式の非退化性

\mathfrak{g} が半単純 Lie 代数 $\iff \mathfrak{g}$ の Killing 形式が**非退化**

2.2.2 単純イデアル

Lie 代数 \mathfrak{g} と、そのイデアルの族 $\{i_i\}_{i \in I}$ を与える。 \mathfrak{g} が $\{i_i\}_{i \in I}$ の直和 (direct sum)^{*3} であるとは、部分ベクトル空間の内部直和として

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in I} i_i$$

が成り立つことを言う。

定理 2.2.2: 半単純 Lie 代数の直和分解

\mathfrak{g} を半単純 Lie 代数とする。このとき \mathfrak{g} の単純イデアル i_1, \dots, i_t が存在して以下を満たす：

(1)

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^t i_i$$

(2) \mathfrak{g} の任意の単純イデアルは i_i のどれか 1 つと一致する。 i.e. (1) の直和分解は一意である。

(3) i_i 上の Killing 形式 κ_{i_i} は $\kappa_{i_i \times i_i}$ に等しい。

系 2.2.3:

\mathfrak{g} が半単純 Lie 代数ならば以下が成り立つ：

(1) $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$

(2) \mathfrak{g} の任意のイデアルは半単純である。

(3) 任意の Lie 代数の準同型 $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ について、 $\text{Im}(\mathfrak{h})$ は半単純である。

(4) \mathfrak{g} の任意のイデアルは \mathfrak{g} の単純イデアルの直和である。

2.2.3 内部微分

2.2.4 抽象 Jordan 分解

2.3 表現の完全可約性

2.3.1 \mathfrak{g} -加群と表現

この小節では \mathbb{K} を任意の体とする。まず、環上の加群の定義を復習する：

^{*3} 厳密には、命題??の意味で内部直和 (internal direct sum) と呼ぶべきだと思う。

公理 2.3.1: 環上の加群の公理

- R を環とする. **左 R 加群** (left R -module) とは, 可換群 $(M, +, 0)$ と写像^a

$$\cdot : R \times M \rightarrow M, (a, x) \mapsto a \cdot x$$

の組 $(M, +, \cdot)$ であって, $\forall x, x_1, x_2 \in M, \forall a, b \in R$ に対して以下を充たすもののことを言う:

(LM1) $a \cdot (b \cdot x) = (ab) \cdot x$

(LM2) $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$

(LM3) $a \cdot (x_1 + x_2) = a \cdot x_1 + a \cdot x_2$

(LM4) $1 \cdot x = x$

ただし, $1 \in R$ は環 R の乗法単位元である.

- R を環とする. **右 R 加群** (right R -module) とは, 可換群 $(M, +, 0)$ と写像

$$\cdot : M \times R \rightarrow M, (x, a) \mapsto x \cdot a$$

の組 $(M, +, \cdot)$ であって, $\forall x, x_1, x_2 \in M, \forall a, b \in R$ に対して以下を充たすもののことを言う:

(RM1) $(x \cdot b) \cdot a = x \cdot (ba)$

(RM2) $x \cdot (a + b) = x \cdot a + x \cdot b$

(RM3) $(x_1 + x_2) \cdot a = x_1 \cdot a + x_2 \cdot a$

(RM4) $x \cdot 1 = x$

- R, S を環とする. **(R, S) 両側加群** $((R, S)$ -bimodule) とは, 可換群 $(M, +, 0)$ と写像

$$\cdot_L : R \times M \rightarrow M, (a, x) \mapsto a \cdot_L x$$

$$\cdot_R : M \times R \rightarrow M, (x, a) \mapsto x \cdot_R a$$

の組 $(M, +, \cdot_L, \cdot_R)$ であって, $\forall x \in M, \forall a \in R, \forall b \in S$ に対して以下を充たすもののことを言う:

(BM1) 左スカラー乗法 \cdot_L に関して M は左 R 加群になる

(BM2) 右スカラー乗法 \cdot_R に関して M は右 S 加群になる

(BM3) $(a \cdot_L x) \cdot_R b = a \cdot_L (x \cdot_R b)$

^a この写像 \cdot はスカラー乗法 (scalar multiplication) と呼ばれる.

R が可換環の場合, **(LM1)** と **(RM1)** が同値になるので, 左 R 加群と右 R 加群の概念は同値になる. これを単に **R 加群** (R -module) と呼ぶ.

R が体の場合, R 加群のことを **R -ベクトル空間** と呼ぶ.



以下では, なんの断りもなければ R 加群と言って左 R 加群を意味する.

\mathfrak{g} を体 \mathbb{K} 上の Lie 代数とする. このとき, **環上の加群の公理** を少し修正することで Lie 代数 \mathfrak{g} 上の加群の概念を得る:

公理 2.3.2: Lie 代数上の加群

\mathfrak{g} を体 \mathbb{K} 上の Lie 代数とする. **\mathfrak{g} -加群**とは, \mathbb{K} -ベクトル空間 $(V, +, \cdot)$ と写像

$$\blacktriangleright: \mathfrak{g} \times V \longrightarrow V, (x, v) \longmapsto x \blacktriangleright v$$

の 4 つ組 $(V, +, \cdot, \blacktriangleright)$ であって, $\forall x, x_1, x_2 \in \mathfrak{g}, \forall v, v_1, v_2 \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ に対して以下を充たすもののことを言う:

$$(M1) \quad (\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2) \blacktriangleright v = \lambda \cdot (x_1 \blacktriangleright v) + \mu \cdot (x_2 \blacktriangleright v)$$

$$(M2) \quad x \blacktriangleright (\lambda \cdot v_1 + \mu \cdot v_2) = \lambda \cdot (x \blacktriangleright v_1) + \mu \cdot (x \blacktriangleright v_2)$$

$$(M3) \quad [x, y] \blacktriangleright v = x \blacktriangleright (y \blacktriangleright v) - y \blacktriangleright (x \blacktriangleright v)$$

同値な定義として, Lie 代数の表現

$$\phi: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V), x \longmapsto (v \mapsto \phi(x)(v))$$

について

$$\blacktriangleright: \mathfrak{g} \times V \longrightarrow V, (x, v) \longmapsto \phi(x)(v)$$

とおくことで得られる 4 つ組 $(V, +, \cdot, \blacktriangleright)$ のことである^a.

^a 【例??】より $\mathfrak{gl}(V)$ の Lie ブラケットは交換子だったので $[x, y] \blacktriangleright - = \phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)] = \phi(x) \circ \phi(y) - \phi(y) \circ \phi(x) = x \blacktriangleright (y \blacktriangleright -) - y \blacktriangleright (x \blacktriangleright -)$ となる.

!

\mathfrak{g} -加群に備わっている 3 つの演算 (加法, スカラー乗法, 左作用) をいちいち全て明記するのは面倒なので $(V, +, \cdot, \blacktriangleright)$ のことを「 **\mathfrak{g} -加群 V** 」と略記する. この略記において, 今まで通りスカラー乗法 \cdot は省略して λv の様に見え, 左作用はなんの断りもなく $x \blacktriangleright v$ の様に見え書くことにする.

全く同様に代数上の加群, 結合代数上の加群を定義することもできるが, 本章では以降 **\mathfrak{g} -加群**と言ったら **Lie 代数上の加群**を指すことにする. Lie 代数の表現を考えることは \mathfrak{g} -加群を考えることと同値なのである.

定義 2.3.1: \mathfrak{g} -加群の準同型

\mathfrak{g} を Lie 代数, $(V, +, \cdot, \triangleright_1), (W, +, \cdot, \triangleright_2)$ を \mathfrak{g} -加群とする.

- 線型写像 $f: V \rightarrow W$ が \mathfrak{g} -加群の準同型 (homomorphism of \mathfrak{g} -module) ^a であるとは, $\forall x \in \mathfrak{g}, \forall v \in V$ に対して

$$f(x \triangleright_1 v) = x \triangleright_2 f(v)$$

が成り立つこと ^b.

- \mathfrak{g} -加群の準同型 $f: V \rightarrow W$ が同型 (isomorphism) であるとは, f が ベクトル空間の同型写像 であることを言う.
- 同型な \mathfrak{g} -加群のことを, 同値な \mathfrak{g} の表現 (equivalent representation of \mathfrak{g}) とも言う.

^a 同変写像 (equivalent map) と言うこともある. 絡作用素 (intertwining operator), インタートウィナー (intertwiner) と言う場合もあるが, そこまで普及していない気がする.

^b スカラー乗法についての線型性の定義を \triangleright について拡張しただけ.

同値な定義だが, 線型写像 $f: V \rightarrow W$ が \mathfrak{g} -加群の準同型であるとは, Lie 代数の表現

$$\phi_1: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V), x \mapsto (v \mapsto x \triangleright_1 v) \quad \phi_2: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(W), x \mapsto (v \mapsto x \triangleright_2 v)$$

に関して

$$\forall x \in \mathfrak{g}, f \circ \phi_1(x) = \phi_2(x) \circ f$$

が成り立つことを言う.

定義 2.3.2: 部分 \mathfrak{g} -加群

\mathfrak{g} -加群 V を与える. 部分集合 $W \subset V$ が部分 \mathfrak{g} -加群であるとは, W が和, スカラー乗法, \mathfrak{g} の左作用の全てについて閉じていること. i.e. $\forall w, w_1, w_2 \in W, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathfrak{g}$ に対して

$$w_1 + w_2 \in W$$

$$\lambda w \in W$$

$$x \triangleright w \in W$$

が成り立つことを言う.

同値な定義として, 以下の2つの条件が満たされることを言う:

(sub-M1) W が V の部分ベクトル空間

(sub-M2) Lie 代数の表現

$$\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V), x \mapsto (v \mapsto x \triangleright v)$$

に関して

$$\forall x \in \mathfrak{g}, \phi(x)(W) \subset W$$

が成り立つ. i.e. $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して W は $\phi(x)$ -不変である.

【例 2.3.1】 \mathfrak{g} -加群の準同型の核と像

\mathfrak{g} -加群 V, W とその間の \mathfrak{g} -加群の準同型 $f: V \rightarrow W$ を与える. このとき

$$\begin{aligned} v \in \text{Ker } f &\implies \forall x \in \mathfrak{g}, f(x \triangleright v) = x \triangleright f(v) = x \triangleright 0 = 0 \iff \forall x \in \mathfrak{g}, x \triangleright v \in \text{Ker } f, \\ w \in \text{Im } f &\iff \exists v \in V, w = f(v) \implies \forall x \in \mathfrak{g}, x \triangleright w = x \triangleright f(v) = f(x \triangleright v) \\ &\iff \forall x \in \mathfrak{g}, x \triangleright w \in \text{Im } f \end{aligned}$$

が言えるので $\text{Ker } f, \text{Im } f$ はそれぞれ V, W の部分 \mathfrak{g} -加群である.

2.3.2 \mathfrak{g} -加群の直和と既約性

この小節でも \mathbb{K} を任意の体とする.

定義 2.3.3: \mathfrak{g} -加群の直和

\mathfrak{g} -加群の族 $\{(V_i, +, \cdot, \triangleright_i)\}_{i \in I}$ を与える. このとき

- 直和ベクトル空間 $\bigoplus_{i \in I} V_i$
- $\bigoplus_{i \in I} V_i$ への \mathfrak{g} の左作用

$$\triangleright: \mathfrak{g} \times \bigoplus_{i \in I} V_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} V_i, (x, (v_i)_{i \in I}) \longmapsto (x \triangleright_i v_i)_{i \in I}$$

の組として得られる \mathfrak{g} -加群 $(\bigoplus_{i \in I} V_i, +, \cdot, \triangleright)$ を \mathfrak{g} -加群の直和 (direct sum) と呼び^a, $\bigoplus_{i \in I} V_i$ と略記する.

^a 系??の注と同様に, この定義は厳密には外部直和 (external direct sum) と呼ぶべきだと思う.

定義 2.3.4: Lie 代数の表現の既約性

- \mathfrak{g} -加群 V が既約 (irreducible)^a であるとは, V の部分 \mathfrak{g} -加群が 0 , V のちょうど2つ^bだけであることを言う.
- \mathfrak{g} -加群 V が完全可約 (completely reducible) であるとは, V が既約な部分 \mathfrak{g} -加群の直和^cであることを言う.

^a i.e. Lie 代数 \mathfrak{g} の表現 (ϕ, V) が既約表現 (irreducible representation; irrep) だ, と言っても良い.

^b つまり, 零ベクトル空間 0 は既約な \mathfrak{g} -加群とは呼ばない.

^c こちらの場合, 厳密には内部直和 (internal direct sum) と呼ぶべきだと思う.

次の補題は証明が少し厄介である:

補題 2.3.1: 完全可約の全射

\mathfrak{g} -加群の準同型 $p: V \rightarrow W$ を与える. このとき p が全射かつ V が完全可約ならば, \mathfrak{g} -加群の短完全列

$$0 \rightarrow \text{Ker } p \hookrightarrow V \xrightarrow{p} W \rightarrow 0$$

は分裂する.

証明 V が完全可約という仮定から, 既約な部分 \mathfrak{g} -加群の族 $\{V_i\}_{i \in I}$ が存在して, 内部直和の意味で

$$V = \bigoplus_{i \in I} V_i$$

と書ける. ここで \mathcal{S} を以下の条件を満たす組 (J, V_J) 全体の集合とする:

- $J \subset I, V_J = \bigoplus_{j \in J} V_j \subset V$
- $\text{Ker } p \cap V_J = 0$

\mathcal{S} の上の 2 項関係を

$$(J, V_J) \leq (K, V_K) \stackrel{\text{def}}{\iff} J \subset K$$

と定義すると組 (\mathcal{S}, \leq) は順序集合になる. また $\mathcal{S}' = \{(J_a, V_{J_a})\}_{a \in A}$ を \mathcal{S} の任意の全順序部分集合とすると $(\bigcup_{a \in A} J_a, \bigcup_{a \in A} V_{J_a}) \in \mathcal{S}$ であり^{*4}, これが \mathcal{S}' の上界を与える. i.e. \mathcal{S} は帰納的順序集合である. したがって Zorn の補題を使うことができ, \mathcal{S} は極大元 $(J_0, V_{J_0}) \in \mathcal{S}$ を持つ.

次に $V = \text{Ker } p \oplus V_{J_0}$ を示す. \mathcal{S} の定義から $\text{Ker } p \cap V_{J_0} = 0$ なので, 命題??より $V = \text{Ker } p + V_{J_0}$ を示せば良い. $V \neq \text{Ker } p + V_{J_0}$ を仮定すると, ある $k \in I \setminus J_0$ が存在して $V_k \not\subset \text{Ker } p + V_{J_0}$ を満たす. V_k は既約なので $V_k \cap (\text{Ker } p + V_{J_0}) = 0$ が成り立つが, このことは (J_0, V_{J_0}) の極大性に矛盾. よって背理法から $V = \text{Ker } p + V_{J_0}$ が言えた.

以上より $W \cong V / \text{Ker } p \cong V_{J_0}$ が言える. このとき包含準同型 $i: V_{J_0} \hookrightarrow V$ が $p \circ i = \text{id}_{V_{J_0}}$ を満たすので証明が完了した. ■

命題 2.3.1: 完全可約性の特徴付け

以下の 2 つは同値である:

- (1) \mathfrak{g} -加群 V が完全可約
- (2) V の任意の部分 \mathfrak{g} -加群 $W \subset V$ に対して, 部分 \mathfrak{g} -加群 $W^c \subset V$ ^a が存在して $V \cong W \oplus W^c$ を満たす.

^a W の補表現 (complement representation) と言う.

^{*4} $V_{\bigcup_{a \in A} J_a} = \bigoplus_{j \in \bigcup_{a \in A} J_a} V_j = \bigcup_{a \in A} V_{J_a}$ なので, \cap の分配律から $\text{Ker } p \cap V_{\bigcup_{a \in A} J_a} = \text{Ker } p \cap \bigcup_{a \in A} V_{J_a} = \bigcup_{a \in A} (\text{Ker } p \cap V_{J_a}) = 0$ が言える.

証明 (1) \implies (2) V が既約な部分 \mathfrak{g} -加群の族 $\{V_i\}_{i \in I}$ によって

$$V = \bigoplus_{i \in I} V_i$$

と書けるとする. V の任意の部分 \mathfrak{g} -加群 $W \subset V$ を 1 つ固定する. このとき標準的射影 $p: V \rightarrow V/W$ は全射な \mathfrak{g} -加群の準同型なので, 補題 2.3.1 から \mathfrak{g} -加群の短完全列

$$0 \longrightarrow \text{Ker } p \cong W \hookrightarrow V \xrightarrow{p} V/W \longrightarrow 0$$

が分裂する. よって系??から

$$V \cong W \oplus (V/W)$$

が言えた.

(1) \Leftarrow (2)

V の既約な部分 \mathfrak{g} -加群全体の集合を \mathcal{V} と書く. \mathcal{S} を以下の条件を満たす組 (I, V_I) 全体の集合とする:

- $I \subset \mathcal{V}$
- 内部直和の意味で $V_I = \bigoplus_{i \in I} V_i \subset V$

\mathcal{S} 上の 2 項関係を

$$(I, V_I) \leq (J, V_J) \stackrel{\text{def}}{\iff} I \subset J$$

と定義すると組 (\mathcal{S}, \leq) は順序集合になる. V の 0 でない部分 \mathfrak{g} -加群のうち極小のものを V_1 とすると, 定義から $V_1 \in \mathcal{V}$ なので $(\{V_1\}, V_{V_1}) \in \mathcal{S}$ となり \mathcal{S} は空でない. また $\mathcal{S}' = \{(J_a, V_{J_a})\}_{a \in A}$ を \mathcal{S} の任意の全順序部分集合とすると $(\bigcup_{a \in A} J_a, V_{\bigcup_{a \in A} J_a}) \in \mathcal{S}$ であり, これが \mathcal{S}' の上界を与える. i.e. \mathcal{S} は帰納的順序集合である. したがって Zorn の補題を使うことができ, \mathcal{S} は極大元 $(I_0, V_{I_0}) \in \mathcal{S}$ を持つ. このとき $V = V_{I_0}$ であることを背理法により示そう.

$V \neq V_{I_0}$ を仮定する. このとき (2) より V の 0 でない部分 \mathfrak{g} -加群 $V_{I_0}^c$ が存在して $V \cong V_{I_0} \oplus V_{I_0}^c$ を満たす. このとき $V_{I_0}^c$ に含まれる 0 でない極小の部分 \mathfrak{g} -加群 W をとることができるが, 定義からこの W は既約である. よって

$$W \oplus V_{I_0} \subset V$$

もまた既約部分 \mathfrak{g} -加群の直和となり, V_{I_0} の極大性に矛盾する. ■

補題 2.3.2: Schur の補題

任意の体^a \mathbb{K} 上の \mathfrak{g} -加群 V, W , および 0 でない \mathfrak{g} -加群の準同型 $f: V \rightarrow W$ を与える. このとき以下が成り立つ:

- (1) V が既約ならば f は単射
- (2) W が既約ならば f は全射

^a 代数閉体でなくても良い

証明 (1) 【例 2.3.1】より $\text{Ker } f$ は V の部分 \mathfrak{g} -加群だが, V が既約なので $\text{Ker } f = 0$, V のどちらかである. 仮定より f は 0 でないので $\text{Ker } f = 0$, i.e. f は単射である.

(2) 【例 2.3.1】より $\text{Im } f$ は W の部分 \mathfrak{g} -加群だが, W が既約なので $\text{Im } f = 0$, W のどちらかである. 仮定より f は 0 でないので $\text{Im } f = W$, i.e. f は全射である. ■

系 2.3.1: 代数閉体上の Schur の補題

代数閉体 \mathbb{K} 上の有限次元 \mathfrak{g} -加群 V を与える. このとき V が既約ならば, 任意の \mathfrak{g} -加群の自己準同型 $\phi \in \text{End } V$ はある $\lambda \in \mathbb{K}$ を使って $\phi = \lambda \text{id}_V$ (i.e. スカラー倍) と書ける.

証明 仮定より V が既約なので, 補題 2.3.2-(1), (2) より任意の \mathfrak{g} -加群の自己準同型 $\phi: V \rightarrow V$ は \mathfrak{g} -加群の同型か 0 のどちらかである. ここで $\lambda \in \mathbb{K}$ を ϕ の固有値とする. \mathbb{K} が代数閉体なので λ は確かに存在する. このとき写像 $\phi - \lambda \text{id}_V: V \rightarrow V$ もまた \mathfrak{g} -加群の自己準同型となるが, 固有値の定義から $\det(\phi - \lambda \text{id}_V) = 0$ なので同型写像ではあり得ない. よって $\phi - \lambda \text{id}_V = 0 \iff \phi = \lambda \text{id}_V$ である. ■

系 2.3.2: 可換な Lie 代数の有限次元既約表現

代数閉体上の Lie 代数 \mathfrak{g} が可換ならば, \mathfrak{g} の任意の有限次元既約表現は 1 次元である.

証明 $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ を \mathfrak{g} の有限次元既約表現とする. このとき \mathfrak{g} が可換であることから $\forall x, y \in \mathfrak{g}, \forall v \in V$ に対して

$$\begin{aligned} \phi(x)(y \triangleright v) &= \phi(x) \circ \phi(y)(v) \\ &= [\phi(x), \phi(y)](v) + \phi(y) \circ \phi(x)(v) \\ &= \phi([x, y])(v) + \phi(y) \circ \phi(x)(v) \\ &= \phi(0)(v) + \phi(y) \circ \phi(x)(v) \\ &= \phi(y) \circ \phi(x)(v) \\ &= y \triangleright (\phi(x)(v)) \end{aligned}$$

が言える. i.e. $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $\phi(x): V \rightarrow V$ は \mathfrak{g} -加群の準同型である. よって Schur の補題から $\phi(x)$ がスカラー倍だとわかる. 故に V の任意の 1 次元部分ベクトル空間は自動的に部分 \mathfrak{g} -加群になる. 然るに V は仮定より既約だから V の部分 \mathfrak{g} -加群は 0, V しかあり得ない. さらに $V \neq 0$ なので $\dim V = 1$ でなくてはならない. ■

2.3.3 \mathfrak{g} -加群の Hom とテンソル積

この小節でも \mathbb{K} を任意の体とする.

定義 2.3.5: \mathfrak{g} -加群のテンソル積

$(V_1, +, \cdot, \triangleright_1), (V_2, +, \cdot, \triangleright_2)$ を有限次元 \mathfrak{g} -加群 とする. このとき

- \mathbb{K} -ベクトル空間のテンソル積 $V_1 \otimes V_2$
- $V_1 \otimes V_2$ への \mathfrak{g} の左作用^a

$$\triangleright: \mathfrak{g} \times (V_1 \otimes V_2) \longrightarrow V_1 \otimes V_2, (x, v_1 \otimes v_2) \longmapsto (x \triangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (x \triangleright_2 v_2)$$

の組として得られる \mathfrak{g} -加群 $(V_1 \otimes V_2, +, \cdot, \triangleright)$ を \mathfrak{g} -加群のテンソル積 (tensor product) と呼び, $V_1 \otimes V_2$ と略記する.

^a 正確には, これの右辺を線型に拡張したもの

実際 $V_1 \otimes V_2$ が \mathfrak{g} -加群になっていることを確認しておこう:

$$\begin{aligned} [x, y] \triangleright (v_1 \otimes v_2) &= ([x, y] \triangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes ([x, y] \triangleright_2 v_2) \\ &= (x \triangleright_1 y \triangleright_1 v_1) \otimes v_2 - (y \triangleright_1 x \triangleright_1 v_1) \otimes v_2 \\ &\quad + v_1 \otimes (x \triangleright_2 y \triangleright_2 v_2) - v_1 \otimes (y \triangleright_2 x \triangleright_2 v_2) \\ &= ((x \triangleright_1 y \triangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (x \triangleright_2 y \triangleright_2 v_2)) \\ &\quad - ((y \triangleright_1 x \triangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (y \triangleright_2 x \triangleright_2 v_2)), \\ x \triangleright y \triangleright (v_1 \otimes v_2) - y \triangleright x \triangleright (v_1 \otimes v_2) &= x \triangleright ((y \triangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (y \triangleright_2 v_2)) \\ &\quad - y \triangleright ((x \triangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (x \triangleright_2 v_2)) \\ &= ((x \triangleright_1 y \triangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (x \triangleright_2 y \triangleright_2 v_2)) \\ &\quad - ((y \triangleright_1 x \triangleright_1 v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (y \triangleright_2 x \triangleright_2 v_2)) \end{aligned}$$

なので

$$[x, y] \triangleright (v_1 \otimes v_2) = x \triangleright y \triangleright (v_1 \otimes v_2) - y \triangleright x \triangleright (v_1 \otimes v_2)$$

がわかった.

定義 2.3.6: \mathfrak{g} -加群の双対

$(V, +, \cdot, \triangleright)$ を有限次元 \mathfrak{g} -加群 とする. このとき

- 双対ベクトル空間 $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$
- V^* への \mathfrak{g} の左作用

$$\triangleright: \mathfrak{g} \times V^* \longrightarrow V^*, (x, f) \longmapsto (v \mapsto -f(x \triangleright v))$$

の組として得られる \mathfrak{g} -加群 $(V^*, +, \cdot, \triangleright)$ を \mathfrak{g} -加群の双対 (dual)^a と呼び, V^* と略記する.

^a 反傾 (contragradient) と呼ぶ場合もあるようだが, 現在はあまり使われていないような気がする.

実際 V^* が \mathfrak{g} -加群になっていることを確認しておこう：

$$\begin{aligned}
 ([x, y] \triangleright f)(v) &= -f([x, y] \triangleright f)(v) \\
 &= -f(x \triangleright y \triangleright v - y \triangleright x \triangleright v) \\
 &= -f(x \triangleright y \triangleright v) + f(y \triangleright x \triangleright v) \\
 &= (x \triangleright f)(y \triangleright v) - (y \triangleright f)(x \triangleright v) \\
 &= -(y \triangleright (x \triangleright f))(v) + (x \triangleright (y \triangleright f))(v) \\
 &= (x \triangleright y \triangleright f)(v) - (y \triangleright x \triangleright f)(v)
 \end{aligned}$$

なので

$$[x, y] \triangleright f = x \triangleright y \triangleright f - y \triangleright x \triangleright f$$

がわかった。

ここで、 \mathbb{K} -ベクトル空間の自然な同型（命題??）

$$V^* \otimes W \cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$$

の具体形が

$$\alpha: f \otimes w \mapsto (v \mapsto f(v) \cdot w) \quad (2.3.1)$$

となっていたことを思い出そう。このことから、 \mathbb{K} -ベクトル空間 $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ の上の \mathfrak{g} の左作用を

$$x \triangleright (f \otimes w) = -f(x \triangleright -) \otimes w + f \otimes (x \triangleright w)$$

に着想を得て

$$(x \triangleright F)(v) = -F(x \triangleright v) + x \triangleright F(v) \quad (\forall F \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W))$$

と定義しようと思うのが自然である。というのも、こう定義することで \mathbb{K} -ベクトル空間の同型写像 (2.3.1) が

$$\begin{aligned}
 \alpha(x \triangleright (f \otimes w))(v) &= -\alpha(f(x \triangleright -) \otimes w)(v) + \alpha(f \otimes (x \triangleright w))(v) \\
 &= -f(x \triangleright v) \cdot w + f(v) \cdot (x \triangleright w) \\
 &= -f(x \triangleright v) \cdot w + x \triangleright (f(v) \cdot w) \\
 &= (x \triangleright \alpha(f \otimes w))(v)
 \end{aligned}$$

となって **\mathfrak{g} -加群の同型写像**になる！

定義 2.3.7: \mathfrak{g} -加群の Hom

$(V, +, \cdot, \triangleright_1), (W, +, \cdot, \triangleright_2)$ を有限次元 **\mathfrak{g} -加群**とする。このとき

- \mathbb{K} -ベクトル空間 $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ ^a
- $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ への \mathfrak{g} の左作用

$$\triangleright: \mathfrak{g} \times \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W), F \longmapsto (v \mapsto -F(x \triangleright_1 v) + x \triangleright_2 F(v))$$

の組として得られる \mathfrak{g} -加群 $(\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W), +, \cdot, \triangleright)$ を **$\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$** と略記する。

^a V から W への **\mathfrak{g} -加群の準同型**全体の集合ではない。

2.3.4 Casimir 演算子

この小節では \mathbb{K} は標数 0 の体とする.

定義 2.3.8: 忠実な表現

Lie 代数 \mathfrak{g} の表現 $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ が**忠実** (faithful)^a であるとは, ρ が単射であることを言う.

^a 群作用の文脈では**効果的な作用** (effective action) と呼ぶ.

補題 2.3.3:

- 半単純 Lie 代数 \mathfrak{g} の**忠実な有限次元表現** $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$
- \mathfrak{g} 上の対称な双線型形式

$$\beta: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}, (x, y) \mapsto \text{Tr}(\phi(x) \circ \phi(y))$$

を与える. β の **radical** を

$$S_\beta := \{ x \in \mathfrak{g} \mid \forall y \in \mathfrak{g}, \beta(x, y) = 0 \}$$

とおく. このとき以下が成り立つ:

- (1) S_β は \mathfrak{g} のイデアルである.
- (2) $S_\beta = 0$, i.e. β は**非退化**である.

証明 (1) Tr の循環性から

$$\begin{aligned} \beta(x, [y, z]) &= \text{Tr}(\phi(x) \circ \phi([y, z])) \\ &= \text{Tr}(\phi(x) \circ \phi(y) \circ \phi(z)) - \text{Tr}(\phi(x) \circ \phi(z) \circ \phi(y)) \\ &= \text{Tr}(\phi(x) \circ \phi(y) \circ \phi(z)) - \text{Tr}(\phi(y) \circ \phi(x) \circ \phi(z)) \\ &= \text{Tr}(\phi([x, y]) \circ \phi(z)) \\ &= \beta([x, y], z) \end{aligned}$$

が成り立つので, $\forall x \in \mathfrak{g}, \forall y \in S_\beta$ に対して

$$\forall z \in \mathfrak{g}, \beta([x, y], z) = -\beta(y, [x, z]) = 0$$

が成り立つ. i.e. $[x, y] \in S_\beta$ が言えた.

(2) S_β の定義から $[\phi(x), \phi(y)]$ の形をした $[\phi(S_\beta), \phi(S_\beta)]$ の任意の元および $\forall \phi(z) \in \phi(S_\beta)$ に対して

$$\begin{aligned} \text{Tr}([\phi(x), \phi(y)] \circ \phi(z)) &= \text{Tr}(\phi([x, y]) \circ \phi(z)) \\ &= \beta([x, y], z) \\ &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つので, 定理 2.1.3 より $\phi(S_\beta)$ は可解である. ϕ は忠実なので $\text{Ker } \phi = 0$ であり, 準同型定理から $\phi(S_\beta) \cong S_\beta / \text{Ker } \phi = S_\beta$ が言える. 従って (1) も併せると S_β は \mathfrak{g} の可解イデアルである. 仮定より \mathfrak{g} は半単純だったから, 半単純 Lie 代数の定義から $S_\beta = 0$ が言える.

補題 2.3.4:

- 半単純 Lie 代数 \mathfrak{g} の基底 $\{e_\mu\}$
- 対称かつ非退化な双線型形式 $\beta \in L(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}; \mathbb{K})$ であって $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\beta(x, [y, z]) = \beta([x, y], z)$$

を満たすもの

を与える. このとき以下が成り立つ:

- (1) \mathfrak{g} の基底 $\{e^\mu\}$ であって^a, $\forall(\mu, \nu) \in \{1, \dots, \dim \mathfrak{g}\}^2$ に対して

$$\beta(e_\mu, e^\nu) = \delta_\mu^\nu$$

を満たすものが一意に存在する.

- (2) $\forall x \in \mathfrak{g}$ を一つ固定する. このとき $\text{ad}(x): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の基底 $\{e_\mu\}$ による表現行列 $[a_\mu^\nu]_{1 \leq \mu, \nu \leq \dim \mathfrak{g}}$ と, (1) の基底 $\{e^\mu\}$ による表現行列 $[b^\mu_\nu]_{1 \leq \mu, \nu \leq \dim \mathfrak{g}}$ について

$$a_\mu^\nu = -b^\nu_\mu$$

が成り立つ.

^a \mathfrak{g}^* の元ではないが, Einstein の規約との便宜上添字を上付きにする.

証明 (1) $\beta_{\mu\nu} := \beta(e_\mu, e_\nu)$ とおく. このとき $x = x^\mu e_\mu \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned} \forall y = y^\nu e_\nu \in \mathfrak{g}, \beta(x, y) = 0 &\iff \forall \begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^{\dim \mathfrak{g}} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{\dim \mathfrak{g}}, \beta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = 0 \\ &\iff 1 \leq \forall \nu \leq \dim \mathfrak{g}, \beta_{\nu\mu} x^\mu = 0 \\ &\iff \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^{\dim \mathfrak{g}} \end{bmatrix} \in \text{Ker}[\beta_{\mu\nu}] \subset \mathbb{K}^{\dim \mathfrak{g}} \end{aligned}$$

が言える. ただし 2 つ目の同値変形で β が対称であることを使った. したがって β が非退化であることは $\text{Ker}[\beta_{\mu\nu}] = 0$ と同値であり, このことはさらに補題??-(3) より $\det[\beta_{\mu\nu}] \neq 0$ と同値である^{*5}. よって $[\beta_{\mu\nu}]$ の逆行列 $[\alpha^{\mu\nu}]$ が一意に存在するので, $e^\mu := e_\nu \alpha^{\mu\nu}$ と定めると,

$$\beta(e_\mu, e^\nu) = \alpha^{\nu\rho} \beta_{\mu\rho} = \delta_\mu^\nu$$

が成り立つ.

^{*5} Cramer の公式は任意の体 \mathbb{K} 上で成り立つ.

(2) $\text{ad}(x)(e_\mu) =: a_\mu^\nu e_\nu$, $\text{ad}(e^\mu) =: b^\mu_\nu e^\nu$ とおくと,

$$\begin{aligned} a_\mu^\nu &= a_\mu^\rho \delta_\rho^\nu \\ &= a_\mu^\rho \beta(e_\rho, e^\nu) \\ &= \beta(\text{ad}(x)(e_\mu), e^\nu) \\ &= \beta(-[e_\mu, x], e^\nu) \\ &= \beta(e_\mu, -\text{ad}(x)e^\nu) \\ &= -b^\nu_\rho \beta(e_\mu, e^\rho) \\ &= -b^\nu_\mu \end{aligned}$$

■

定義 2.3.9: 忠実な表現の Casimir 演算子

- 半単純 Lie 代数 \mathfrak{g} の有限次元表現 $\phi: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$
- 半単純 Lie 代数 \mathfrak{g} の基底 $\{e_\mu\}$
- 対称かつ非退化な双線型形式 $\beta \in L(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}; \mathbb{K})$ であって $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\beta(x, [y, z]) = \beta([x, y], z)$$

を満たすもの

を与える. 与えられた \mathfrak{g} の基底 $\{e_\mu\}$ から補題 2.3.4 により構成した \mathfrak{g} の基底 $\{e^\mu\}$ をとる. このとき

- \mathbb{K} -線型変換

$$c_\phi(\beta): V \longrightarrow V, v \longmapsto \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(e^\mu)(v)$$

を β, ϕ の前 Casimir 演算子と呼ぶ.

- ϕ が忠実な表現で, かつ

$$\beta(x, y) := \text{Tr}(\phi(x) \circ \phi(y))$$

であるとき^a, β, ϕ の前 Casimir 演算子のことを ϕ の Casimir 演算子 (Casimir operator of ϕ) と呼んで c_ϕ と略記する.

^a 補題 2.3.3 よりこの β は非退化である

命題 2.3.2: Casimir 演算子の性質

- 半単純 Lie 代数 \mathfrak{g} の有限次元表現 $\phi: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$
- 半単純 Lie 代数 \mathfrak{g} の基底 $\{e_\mu\}$
- 対称かつ非退化な双線型形式 $\beta \in L(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}; \mathbb{K})$ であって $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\beta(x, [y, z]) = \beta([x, y], z)$$

を満たすもの

を与える. 与えられた \mathfrak{g} の基底 $\{e_\mu\}$ から補題 2.3.4 により構成した \mathfrak{g} の基底 $\{e^\mu\}$ をとる.

- (1) 前 Casimir 演算子 $c_\phi(\beta) \in \text{End}(V)$ は, $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[\phi(x), c_\phi(\beta)] = 0$$

を充たす. 従って $c_\phi(\beta)$ は \mathfrak{g} -加群の準同型である.

- (2) ϕ が忠実な表現ならば, Casimir 演算子 $c_\phi \in \text{End } V$ について

$$\text{Tr } c_\phi = \dim \mathfrak{g}$$

が成り立つ.

- (3) \mathbb{K} が代数閉体でかつ ϕ が忠実な表現でかつ ϕ が既約表現ならば, Casimir 演算子 $c_\phi \in \text{End } V$ は \mathfrak{g} の基底の取り方によらずに

$$c_\phi = \frac{\dim \mathfrak{g}}{\dim V} \text{id}_V$$

と書ける.

証明 (1) $\forall x, y, z \in \text{End}(V)$ に対して

$$[x, y \circ z] = [x, y] \circ z + y \circ [x, z]$$

が成り立つことと補題 2.3.4-(2) より,

$$\begin{aligned} [\phi(x), c_\phi(\beta)] &= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} [\phi(x), \phi(e_\mu)] \circ \phi(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ [\phi(x), \phi(e^\mu)] \\ &= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \text{ad}(\phi(x))(\phi(e_\mu)) \circ \phi(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \text{ad}(\phi(x))(\phi(e^\mu)) \\ &= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(\text{ad}(x)(e_\mu)) \circ \phi(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(\text{ad}(x)(e^\mu)) \\ &= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} a_\mu^\nu \phi(e_\nu) \circ \phi(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} b^\mu_\nu \phi(e_\mu) \circ \phi(e^\nu) \\ &= 0 \end{aligned}$$

が言えた.

- (2) 補題 2.3.4-(1) より

$$\begin{aligned} \text{Tr } c_\phi &= \sum_{\mu}^{\dim \mathfrak{g}} \text{Tr}(\phi(e_\mu) \circ \phi(e^\mu)) \\ &= \sum_{\mu}^{\dim \mathfrak{g}} \beta(e_\mu, e^\mu) \\ &= \dim \mathfrak{g} \end{aligned}$$

(3) \mathbb{K} が代数閉体でかつ ϕ が既約なので, (1), (2) と代数閉体上の Schur の補題から $c_\phi: V \rightarrow V$ は $(\dim \mathfrak{g} / \dim V) \text{id}_V$ に等しい. ■

$\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ が忠実でない場合は次のように考える: まず, \mathfrak{g} が半単純なので, $\text{Ker } \phi$ (\mathfrak{g} のイデアルである) は系??から \mathfrak{g} の単純イデアルの直和である. 定理 2.2.2 を使って \mathfrak{g}^\perp を $\mathfrak{g} =: \text{Ker } \phi \oplus \mathfrak{g}^\perp$ で定義すると, $\mathfrak{g}^\perp \cong \mathfrak{g} / \text{Ker } \phi$ なので, 制限

$$\phi|_{\mathfrak{g}^\perp}: \mathfrak{g}^\perp \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

は忠実な表現になる. そして \mathfrak{g}^\perp の基底に対して定義 2.3.9 を適用するのである.

2.3.5 Weyl の定理

この小説では, \mathbb{K} を標数 0 の体とする.

補題 2.3.5:

$\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ を半単純 Lie 代数の有限次元表現とする. このとき

$$\phi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{sl}(V)$$

が成り立つ. 特に, $\dim V = 1$ ならば ϕ は零写像である^a

^a これを自明な表現 (trivial representation) と言う.

証明 【例??】より, $\mathfrak{sl}(V)$ の基底は行列単位 e_{ij} を使って

$$\{e_{ij} - e_{ji} \mid 1 \leq i \neq j \leq \dim V\} \cup \{e_{ii} - e_{i+1,i+1} \mid 1 \leq i \leq \dim V - 1\} = \{\{e_i\}, \{e_j\}\}$$

と書けた. よって $\mathfrak{sl}(V) = [\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(V)]$ である. 一方で \mathfrak{g} が半単純なので系 2.2.3-(1) より $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ であるから,

$$\phi(\mathfrak{g}) = \phi([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = [\phi(\mathfrak{g}), \phi(\mathfrak{g})] \subset [\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(V)] = \mathfrak{sl}(V)$$

が言えた. 特に $\dim V = 0$ ならば $\dim \mathfrak{sl}(V) = 1^2 - 1 = 0$ なので, $\text{Im } \phi = 0$ である. ■

補題 2.3.6: Whitehead の補題

半単純 Lie 代数の有限次元表現 $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ を与える.

このとき

$$\forall x, y \in \mathfrak{g}, f([x, y]) = \phi(x) \circ f(y) - \phi(y) \circ f(x) \quad (2.3.2)$$

を満たす任意の \mathbb{K} -線型写像 $f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}, V)$ に対して, ある $v \in V$ が存在して

$$\forall x \in \mathfrak{g}, f(x) = \phi(x)(v)$$

が成り立つ.

証明 case1: ϕ が既約かつ忠実な場合

(2.3.2) を充たす任意の $f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}, V)$ を 1 つとる. \mathfrak{g} の基底 $\{e_\mu\}$ を 1 つ固定し,

$$\beta: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}, (x, y) \longmapsto \text{Tr}(\phi(x) \circ \phi(y))$$

を用いて補題 2.3.4-(1) の方法で対応する \mathfrak{g} の基底 $\{e^\mu\}$ を作る. このとき

$$v := \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ f(e^\mu) \in V$$

とおくと, $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して補題 2.3.4 と同じ記号の下で

$$\begin{aligned} \phi(x)(v) &= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(x) \circ \phi(e_\mu) \circ f(e^\mu) \\ &= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} [\phi(x), \phi(e_\mu)] \circ f(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(x) \circ f(e^\mu) \\ &= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(\text{ad}(x)(e_\mu)) \circ f(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(x) \circ f(e^\mu) \\ &= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} a_\mu^\nu \phi(e_\nu) \circ f(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(x) \circ f(e^\mu) \\ c_\phi \circ f(x) &= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(e^\nu) \circ f(x) \\ &= \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ f([e^\nu, x]) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(x) \circ f(e^\nu) \\ &= - \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ f(\text{ad}(x)(e^\nu)) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(x) \circ f(e^\nu) \\ &= - \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} b_\mu^\nu \phi(e_\mu) \circ f(e^\mu) + \sum_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{g}} \phi(e_\mu) \circ \phi(x) \circ f(e^\nu) \end{aligned}$$

と計算できるので, 補題 2.3.4-(2) から

$$\phi(x)(v) = c_\phi \circ f(x)$$

が言えた. 仮定より \mathfrak{g} -加群 V は既約なので, Schur の補題-(1), (2) から \mathfrak{g} -加群の準同型 $c_\phi: V \longrightarrow V$ は \mathfrak{g} -加群の同型であり, $c_\phi^{-1}(v) \in V$ が所望のベクトルとなる.

case2: ϕ が忠実とは限らない既約表現の場合

(2.3.2) を充たす任意の $f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}, V)$ を 1 つとる. このとき $\forall [x, y] \in [\text{Ker } \phi, \text{Ker } \phi]$ に対して

$$f([x, y]) = \phi(x) \circ f(y) - \phi(y) \circ f(x) = 0 \iff [x, y] \in \text{Ker } f$$

が言えるが, 仮定より \mathfrak{g} は半単純なので, 系 2.2.3-(3) よりそのイデアルである $\text{Ker } \phi \subset \mathfrak{g}$ もまた半単純. 故に系 2.2.3-(1) から $[\text{Ker } \phi, \text{Ker } \phi] = \text{Ker } \phi$ であり,

$$\text{Ker } \phi \subset \text{Ker } f$$

がわかった。従ってこのとき商ベクトル空間の普遍性を使うことができ、以下の図式を可換にする $\bar{f} \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V/\text{Ker } \phi, \mathfrak{g})$ が一意に存在する：

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{f} & V \\ p \downarrow & \nearrow \exists! \bar{f} & \\ \mathfrak{g}/\text{Ker } \phi & & \end{array}$$

さらに商代数の普遍性から、表現 $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ は以下の図式を可換にする表現 $\bar{\phi}: \mathfrak{g}/\text{Ker } \phi \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ に一意に持ち上がる：

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\phi} & \mathfrak{gl}(V) \\ p \downarrow & \nearrow \exists! \bar{\phi} & \\ \mathfrak{g}/\text{Ker } \phi & & \end{array}$$

このとき $\bar{\phi}$ は $\mathfrak{g}/\text{Ker } \phi$ の忠実な既約表現であり、 $\bar{f} \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}/\text{Ker } \phi, V)$ は (2.3.2) を満たす。よって **case1** からある $v \in V$ があって

$$\forall x \in \mathfrak{g}, \bar{f}(x + \text{Ker } \phi) = \bar{\phi}(x + \text{Ker } \phi)(v) \iff \forall x \in \mathfrak{g}, f(x) = \phi(x)(v)$$

が成り立つ。

case3: ϕ が一般の場合

(2.3.2) を満たす任意の $f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}, V)$ を 1 つ固定する。このときある $v \in V$ が存在して $\forall x \in \mathfrak{g}, f(x) = \phi(x)(v)$ が成り立つことを $\dim V$ に関する数学的帰納法により示す。 $\dim V = 1$ のとき、補題 2.3.5 より ϕ が零写像なので $\forall v \in V$ に対して $\forall x \in \mathfrak{g}, f(x) = \phi(x)(v)$ が成り立つ。

$\dim V > 0$ とする。 \mathfrak{g} -加群 V が既約でないならば、部分 \mathfrak{g} -加群 $0 \subsetneq W \subsetneq V$ が存在する。標準的射影^{*6} $p: V \rightarrow V/W$ および $\forall x \in \mathfrak{g}$ について $W \subset \text{Ker } p \circ \phi(x)$ であるから、商代数の普遍性より $\forall \phi(x) \in \phi(\mathfrak{g})$ に対して以下の図式を可換にする $\bar{\phi}(x) \in \mathfrak{gl}(V/W)$ が一意に存在する：

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{p \circ \phi(x)} & V/W \\ p \downarrow & \nearrow \exists! \bar{\phi}(x) & \\ V/W & & \end{array}$$

このとき写像

$$\phi_1: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V/W), x \mapsto (v + W \mapsto \bar{\phi}(x)(v + W))$$

は well-defined な Lie 代数の準同型なので \mathfrak{g} の表現である。 $f_1 := p \circ f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}, V/W)$ は ϕ_1 に関して (2.3.2) を満たすので、帰納法の仮定より^{*7} ある $v_1 + W \in V/W$ が存在して

$$\forall x \in \mathfrak{g}, f_1(x) = f(x) + W = \phi_1(x)(v_1 + W)$$

^{*6} このとき V の \mathbb{K} -ベクトル空間としての構造しか見ない。

^{*7} $\dim V/W < \dim V$ なので帰納法の仮定が使える。

が成り立つ。ここで $f_2 \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}, W)$ を

$$f_2(x) := f(x) - \phi(x)(v_1)$$

と定義すると, f_2 は部分表現 $\phi|_W: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(W)$ に関して (2.3.2) を満たす。よって帰納法の仮定から*8ある $v_2 \in V$ が存在して

$$\forall x \in \mathfrak{g}, f_2(x) = \phi|_W(x)(v_2)$$

が成り立つ。以上より, $v := v_1 + v_2 \in V$ とおけば

$$\forall x \in \mathfrak{g}, f(x) = f_2(x) + \phi(x)(v_1) = \phi|_W(x)(v_2) + \phi(x)(v_1) = \phi(x)(v)$$

が言えた。 ■

定理 2.3.3: 完全可約性に関する Weyl の定理

$\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ が半単純 Lie 代数の有限次元表現ならば, ϕ は完全可約である。

証明 V の任意の部分 \mathfrak{g} -加群 $W \subset V$ を 1 つ固定する。このとき命題 2.3.1 より, 部分 \mathfrak{g} -加群 $W^c \subset V$ が存在して $V \cong W \oplus W^c$ が成り立つことを示せば良い。

$\text{End } V$ の部分ベクトル空間 L_W を

$$L_W := \{ t \in \text{End } V \mid t(V) \subset W, t(W) = 0 \}$$

と定める。 L_W への \mathfrak{g} の左作用を

$$x \blacktriangleright t := [\phi(x), t]$$

と定義すると, W が部分 \mathfrak{g} -加群であることおよび定義 2.3.7 より L_W は \mathfrak{g} -加群になる。 i.e.

$$\tilde{\phi}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(L_W), x \mapsto (t \mapsto x \blacktriangleright t)$$

は半単純 Lie 代数 \mathfrak{g} の有限次元表現である。

ここで \mathbb{K} -ベクトル空間 W への射影演算子*9 $p: V \rightarrow V$ を 1 つとり, $f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}, L_W)$ を

$$f(x) := [p, \phi(x)]$$

と定義しよう。このとき $\forall x, y \in \mathfrak{g}$ に対して Jacobi 恒等式から

$$\begin{aligned} f([x, y]) &= [p, [\phi(x), \phi(y)]] \\ &= [\phi(x), [p, \phi(y)]] - [\phi(y), [p, \phi(x)]] \\ &= [\phi(x), f(y)] - [\phi(y), f(x)] \\ &= \tilde{\phi}(x) \circ f(y) - \tilde{\phi}(y) \circ f(x) \end{aligned}$$

*8 $\dim W < \dim V$ なので帰納法の仮定が使える。

*9 $p^2 = p$ かつ $p|_W = \text{id}_W$

が成り立つので、補題 2.3.6 からある $t \in L_W$ が存在して

$$\forall x \in \mathfrak{g}, f(x) = \tilde{\phi}(x)(t) = [\phi(x), t]$$

が成り立つ。よってこのとき $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[\phi(x), p+t] = \tilde{\phi}(\phi(x))(p+t) = -[p, \phi(x)] + [\phi(x), t] = -f(x) + [\phi(x), t] = 0$$

が言えた。i.e. $p+t \in \text{End } V$ は \mathfrak{g} -加群の準同型である。さらに $t \in L_W$ であることから、 $(p+t)(V) = W$ かつ $(p+t) \circ (p+t)|_W = \text{id}_W$ が言える。i.e. \mathfrak{g} -加群の短完全列

$$0 \hookrightarrow \text{Ker}(p+t) \hookrightarrow V \xrightarrow{p+t} W \longrightarrow 0$$

は分裂し、 \mathfrak{g} -加群の直和として

$$V \cong W \oplus \text{Ker}(p+t)$$

が言えた。 ■

2.3.6 Jordan 分解の保存

2.4 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ の表現

2.4.1 ウェイトと極大ベクトル

2.4.2 既約加群の分類

2.5 ルート空間分解

2.5.1 極大トーラスとルート

2.5.2 極大トーラスの中心化代数

2.5.3 直交性

2.5.4 整性

2.5.5 有理性
