# 第 1 章

# Lie 群と Lie 代数

本資料ではベクトル空間を英大文字で表記し，係数体を blackboardbold[*1]で表記する（e.g. 体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 $L$）．本章に限ってはベクトルを $x \in L$ のように英小文字で表記し，係数体の元は $\lambda \in \mathbb{K}$ のようにギリシャ文字で表記する．零ベクトルは $o \in L$ と書き[*2]，$0 \in \mathbb{K}$ を係数体の加法単位元，$1 \in \mathbb{K}$ を係数体の乗法単位元とする．ベクトル空間の加法を $+$ と書き，スカラー乗法は $\lambda x$ のように係数を左に書く．

## 1.1 公理的 Lie 代数

この節では $\mathbb{K}$ を任意の体とする．

**公理 1.1.1: Lie 代数の公理**

体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 $L$ の上に二項演算[a]

$$[\,,\,]\colon L \times L \longrightarrow L,\ (x,\, y) \longmapsto [x, y]$$

が定義されていて，かつ以下の条件を充たすとき，$L$ は **Lie 代数** (Lie algebra) と呼ばれる：

**(L-1)** $[\,,\,]$ は双線型写像である．i.e. $\forall x,\, x_i,\, y,\, y_i \in L,\ \forall \lambda_i,\, \mu_i \in \mathbb{K}\ (i = 1,\, 2)$ に対して

$$\begin{aligned}[\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y] &= \lambda_1 [x_1, y] + \lambda_2 [x_2, y],\\ [x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2] &= \mu_1 [x, y_1] + \mu_2 [x, y_2]\end{aligned}$$

が成り立つ．

**(L-2)** $\forall x \in L$ に対して

$$[x, x] = o$$

が成り立つ．

**(L-3)** $\forall x,\, y,\, z \in L$ に対して

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = o$$

が成り立つ[b]（**Jacobi 恒等式**）．

[*1] LaTeX コマンドは`\mathbb`

[*2] 0 の濫用を回避するための苦肉の策です… 普通に不便なので次章以降では零ベクトルも 0 と書きます．

[a] ベクトル空間に備わっている加法とスカラー乗法の他に，追加で $[\,,]$ が定義されているという状況である．この付加的な二項演算はしばしば**括弧積** (bracket) とか**交換子** (commutator) とか **Lie ブラケット** (Lie bracket) とか呼ばれる．

[b] 結合律ではない！

公理 **(L-1)**, **(L-2)** から

$$o = [x+y, x+y] = [x,x] + [x,y] + [y,x] + [y,y] = [x,y] + [y,x]$$

が従う．i.e. $[x,y]$ は反交換 (anticommute) する：

**(L'-2)** $\forall x,\, y \in L$ に対して

$$[x,y] = -[y,x]$$

が成り立つ．

逆に **(L'-2)** を仮定すると

$$o = [x,x] + [x,x] = (1+1)[x,x]$$

が成り立つ[*3]ので，体 $\mathbb{K}$ において $1+1 \neq 0$ ならば $[x,x] = o$ が言える．i.e. $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$ ならば[*4] **(L'-2)** と **(L-2)** は同値である．

**【例 1.1.1】一般線形代数 $\mathfrak{gl}(V)$**

$V$ を体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．$V$ から $V$ への線型写像全体が成す集合を $\operatorname{End} V$ と書く[a]．$\operatorname{End} V$ の加法とスカラー乗法をそれぞれ

$$\begin{aligned} +\colon \operatorname{End} V \times \operatorname{End} V &\longrightarrow \operatorname{End} V,\ (f,\, g) \longmapsto \bigl(v \mapsto f(v) + g(v)\bigr) \\ \cdot\,\colon \mathbb{K} \times \operatorname{End} V &\longrightarrow \operatorname{End} V,\ (\lambda,\, f) \longmapsto \bigl(v \mapsto \lambda f(v)\bigr) \end{aligned}$$

として定義すると，組 $(\operatorname{End} V,\, +,\, \cdot\,)$ は体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間になる．以降では常に $\operatorname{End} V$ をこの方法でベクトル空間と見做す．

$\operatorname{End} V$ の上の Lie ブラケットを

$$[\,,]\colon \operatorname{End} V \times \operatorname{End} V \longrightarrow \operatorname{End} V,\ (f,\, g) \longmapsto fg - gf$$

と定義する．ただし右辺の $fg$ は写像の合成 $f \circ g$ の略記である．このとき組 $(\operatorname{End} V,\, +,\, \cdot\,,\, [\,,])$ が Lie 代数の公理を充たすことを確認しよう：

[*3] 2 つ目の等号ではスカラー乗法の分配律（ベクトル空間の公理である）を使った．

[*4] 体 $\mathbb{K}$ の**標数** (characteristic) を $\operatorname{char}\mathbb{K}$ と書いた．

**(L-1)** $\forall v \in V$ を 1 つとる．定義に従ってとても丁寧に計算すると

$$
\begin{aligned}
[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g](v) &= \big((\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)g - g(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)\big)(v) \\
&= (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)\big(g(v)\big) - g\big((\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(v)\big) \\
&= (\lambda_1 f_1)\big(g(v)\big) + (\lambda_2 f_2)\big(g(v)\big) - g\big((\lambda_1 f_1)(v) + (\lambda_2 f_2)(v)\big) \\
&= \lambda_1 f_1\big(g(v)\big) + \lambda_2 f_2\big(g(v)\big) - \lambda_1 g\big(f_1(v)\big) - \lambda_2 g\big(f_2(v)\big) \\
&= \lambda_1\Big(f_1\big(g(v)\big) - g\big(f_1(v)\big)\Big) + \lambda_2\Big(f_2\big(g(v)\big) - g\big(f_2(v)\big)\Big) \\
&= \lambda_1 [f_1, g](v) + \lambda_2 [f_2, g](v) \\
&= \big(\lambda_1 [f_1, g] + \lambda_2 [f_2, g]\big)(v)
\end{aligned}
$$

となる．ただし 4 つ目の等号で $g \in \operatorname{End} V$ が線型写像であることを使った．全く同様にして

$$
[f, \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2](v) = \mu_1 [f, g_1] + \mu_2 [f, g_2]
$$

を示すこともできる．

**(L-2)** 明らかに $[f, f] = ff - ff = o$ なのでよい．

**(L-3)** $[\,,]$ の双線型（**(L-1)**）から

$$
\begin{aligned}
&[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] \\
&= [f, gh] - [f, hg] + [g, hf] - [g, fh] + [h, fg] - [h, gf] \\
&= fgh - ghf - fhg + hgf + ghf - hfg - gfh + fhg + hfg - fgh - hgf + gfh \\
&= o.
\end{aligned}
$$

この Lie 代数 $(\operatorname{End} V, +, \cdot\,, [\,,])$ は**一般線形代数** (general linear algebra) と呼ばれ，記号として $\mathfrak{gl}(\boldsymbol{V})$ と書かれる．

$\dim V =: n < \infty$ のとき，$\operatorname{End} V$ は $n \times n$ $\mathbb{K}$-行列全体が成す $\mathbb{K}$ ベクトル空間 $\mathrm{M}(n, \mathbb{K})$ と同型である[b]．$\mathrm{M}(n, \mathbb{K})$ を Lie ブラケット $[X, Y] \coloneqq XY - YX$ によって Lie 代数と見做す[c]ときは，この同型を意識して $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ と書く．さて，$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ の標準的な基底は所謂**行列単位**

$$
E_{ij} \coloneqq \big[\,\delta_{i\mu}\delta_{j\nu}\big]_{1 \le \mu,\, \nu \le n} =
\begin{array}{c@{}c}
\begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}
$$

である．Einstein の規約を使って $E_{ij}E_{kl} = \big[\,\delta_{i\mu}\delta_{j\lambda}\delta_{k\lambda}\delta_{l\nu}\big]_{1 \le \mu,\, \nu \le n} = \delta_{jk}\big[\,\delta_{i\mu}\delta_{l\nu}\big]_{1 \le \mu,\, \nu \le n} = \delta_{jk}E_{il}$ と計算できるので，$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ の Lie ブラケットは

$$
[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{li}E_{kj}
$$

によって完全に決まる[d]．

---

[a] **自己準同型** (endomorphism) の略である．

[b] $V$ の基底 $e_1, \dots, e_n$ を 1 つ固定する．このとき同型写像 $\varphi\colon V \longrightarrow \mathbb{K}^n,\ v^\mu e_\mu \longmapsto (v^\mu)_{1\le\mu\le n}$ を使って定義される線型写像 $M\colon \operatorname{End} V \longrightarrow \mathrm{M}(n, \mathbb{K}),\ f \longmapsto \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ が所望の同型写像である．

[c] 右辺の $XY$ は行列の積である．

[d] $\forall X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ は $X = X^{ij}E_{ij},\ Y = Y^{ij}E_{ij}$ と展開できるので，Lie ブラケットの双線型性から $[X, Y] = X^{ij}Y^{kl}[E_{ij}, E_{kl}] = X^{ik}Y^{kl}E_{il} - X^{ij}Y^{ki}E_{jk} = (X^{ik}Y^{kj} - X^{ki}Y^{jk})E_{ij}$ と計算できる．

**定義 1.1.1: 部分 Lie 代数**