

第 1 章

Lie 群と Lie 代数

本資料ではベクトル空間を英大文字で表記し、係数体を blackboardbold^{*1}で表記する (e.g. 体 \mathbb{K} 上のベクトル空間 L). 本章に限ってはベクトルを $x \in L$ のように英小文字で表記し、係数体の元は $\lambda \in \mathbb{K}$ のようにギリシャ文字で表記する. 零ベクトルは $o \in L$ と書き^{*2}, $0 \in \mathbb{K}$ を係数体の加法単位元, $1 \in \mathbb{K}$ を係数体の乗法単位元とする. ベクトル空間の加法を $+$ と書き, スカラー乗法は λx のように係数を左に書く. また, 特に断りがなければ Einstein の規約を使う.

1.1 公理的 Lie 代数

この節では \mathbb{K} を任意の体とする. Lie 代数を, 純粋に代数的な対象として扱うことを考える. 幾何学的側面については後述する.



Lie 代数を表す記号は Fraktur という字体で書く慣例がある. 例えば「Fraktur」という文字列は $\mathfrak{Fraktur}$ のようになる. L^AT_EX コマンドは数式モード中で $\mathsf{\texttt{\textbackslash mathfrak{\texttt{<symbol>}}}}$ とする.

公理 1.1.1: Lie 代数の公理

体 \mathbb{K} 上のベクトル空間 \mathfrak{g} の上に二項演算^a

$$[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}, (x, y) \longmapsto [x, y]$$

が定義されていて, かつ以下の条件を満たすとき, \mathfrak{g} は **Lie 代数** (Lie algebra) と呼ばれる:

(L-1) $[\cdot, \cdot]$ は双線型写像である. i.e. $\forall x, x_i, y, y_i \in \mathfrak{g}, \forall \lambda_i, \mu_i \in \mathbb{K} (i = 1, 2)$ に対して

$$\begin{aligned} [\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y] &= \lambda_1 [x_1, y] + \lambda_2 [x_2, y], \\ [x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2] &= \mu_1 [x, y_1] + \mu_2 [x, y_2] \end{aligned}$$

が成り立つ.

(L-2) $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[x, x] = o$$

^{*1} L^AT_EX コマンドは $\mathsf{\texttt{\textbackslash mathbb{\texttt{<symbol>}}}}$

^{*2} 0 の濫用を回避するための苦肉の策です... 普通に不便なので次章以降では零ベクトルも o と書きます.

が成り立つ.

(L-3) $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

が成り立つ^b (Jacobi 恒等式).

^a ベクトル空間に備わっている加法とスカラー乗法の他に、追加で $[\cdot, \cdot]$ が定義されているという状況である. この付加的な二項演算はしばしば括弧積 (bracket) とか交換子 (commutator) とか Lie ブラケット (Lie bracket) とか呼ばれる.

^b 結合律ではない!

公理 (L-1), (L-2) から

$$0 = [x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = [x, y] + [y, x]$$

が従う. i.e. $[x, y]$ は反交換 (anticommute) する:

(L'-2) $\forall x, y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[x, y] = -[y, x]$$

が成り立つ.

逆に (L'-2) を仮定すると

$$0 = [x, x] + [x, x] = (1 + 1)[x, x]$$

が成り立つ^{*3}ので、体 \mathbb{K} において $1 + 1 \neq 0$ ならば $[x, x] = 0$ が言える. i.e. $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ ならば^{*4} (L'-2) と (L-2) は同値である.

【例 1.1.1】3次元実ベクトル空間

\mathbb{R}^3 を \mathbb{R} -ベクトル空間と見做す. \mathbb{R}^3 上の Lie ブラケットを

$$[\cdot, \cdot]: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \longmapsto x \times y$$

によって定義する. ただし右辺の \times はベクトル積である. このとき \mathbb{R}^3 が Lie 代数の公理を充たすことを確認しよう:

証明 \mathbb{R}^3 の元の成分を $x = (x_\mu)_{1 \leq \mu \leq 3}$ のように書く. ひたすら成分計算をする.

(L-1) ベクトル積の定義から

$$\begin{aligned} ([\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y])_\mu &= \epsilon_{\mu\nu\lambda} (\lambda_1 x_{1\nu} + \lambda_2 x_{2\nu}) y_\lambda \\ &= \lambda_1 \epsilon_{\mu\nu\lambda} x_{1\nu} y_\lambda + \lambda_2 \epsilon_{\mu\nu\lambda} x_{2\nu} y_\lambda \\ &= \lambda_1 [x_1, y]_\mu + \lambda_2 [x_2, y]_\mu \end{aligned}$$

^{*3} 2 つ目の等号ではスカラー乗法の分配律 (ベクトル空間の公理である) を使った.

^{*4} 体 \mathbb{K} の標数 (characteristic) を $\text{char } \mathbb{K}$ と書いた.

が成り立つ. 全く同様に

$$[x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2] = \mu_1 [x, y_1] + \mu_2 [x, y_2]$$

が示される.

(L-2) Levi-Civita 記号の添字に関する反対称性から

$$([x, x])_\mu = \epsilon_{\mu\nu\lambda} x_\nu x_\lambda = \epsilon_{\mu\nu\lambda} x_\lambda x_\nu = -\epsilon_{\mu\lambda\nu} x_\lambda x_\nu = -([x, x])_\mu$$

$\text{char } \mathbb{R} = 0 \neq 2$ なので, ここから $[x, x] = 0$ が従う.

(L-3) 行と列をそれぞれ適切に入れ替えた単位行列の行列式を考えることで, 恒等式 $\epsilon_{\mu\nu\lambda} \epsilon_{\rho\sigma\lambda} = \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho}$ が成り立つことがわかる. 従って

$$\begin{aligned} ([x, [y, z]])_\mu &= \epsilon_{\mu\nu\lambda} x_\nu \epsilon_{\lambda\rho\sigma} y_\rho z_\sigma \\ &= (\delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho}) x_\nu y_\rho z_\sigma \\ &= x_\nu y_\mu z_\nu - x_\nu y_\nu z_\mu \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} ([x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]])_\mu &= x_\nu y_\mu z_\nu - x_\nu y_\nu z_\mu + y_\nu z_\mu x_\nu - y_\nu z_\nu x_\mu + z_\nu x_\mu y_\nu - z_\nu x_\nu y_\mu \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

\mathbb{R}^3 の標準的な基底

$$e_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

に対して

$$[e_i, e_j] = \epsilon_{ijk} e_k$$

が成り立つ. \mathbb{R}^3 の任意の 2 つの元に対する Lie ブラケットがこの恒等式によって完全に決まることを含意して, $3^3 = 27$ 個の実定数 ϵ_{ijk} のことを \mathbb{R}^3 の**構造定数** (structure constant) と呼ぶ.

【例 1.1.2】一般線形代数 $\mathfrak{gl}(V)$

V を体 \mathbb{K} 上のベクトル空間とする. V から V への線型写像全体が成す集合を $\text{End } V$ と書く^a. $\text{End } V$ の加法とスカラー乗法をそれぞれ

$$\begin{aligned} + : \text{End } V \times \text{End } V &\longrightarrow \text{End } V, (x, y) \longmapsto (v \mapsto x(v) + y(v)) \\ \cdot : \mathbb{K} \times \text{End } V &\longrightarrow \text{End } V, (\lambda, x) \longmapsto (v \mapsto \lambda x(v)) \end{aligned}$$

として定義すると, 組 $(\text{End } V, +, \cdot)$ は体 \mathbb{K} 上のベクトル空間になる. 以降では常に $\text{End } V$ をこの方法でベクトル空間と見做す.

$\text{End } V$ の上の Lie ブラケットを

$$[\cdot, \cdot]: \text{End } V \times \text{End } V \longrightarrow \text{End } V, (x, y) \longmapsto xy - yx$$

と定義する．ただし右辺の xy などは写像の合成 $x \circ y$ の略記である．このとき組 $(\text{End } V, +, \cdot, [\cdot, \cdot])$ が **Lie 代数の公理** を満たすことを確認しよう：

証明 (L-1) $\forall v \in V$ を 1 つとる．定義に従ってとても丁寧に計算すると

$$\begin{aligned} [\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y](v) &= ((\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)y - y(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2))(v) \\ &= (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)(y(v)) - y((\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)(v)) \\ &= (\lambda_1 x_1)(y(v)) + (\lambda_2 x_2)(y(v)) - y((\lambda_1 x_1)(v) + (\lambda_2 x_2)(v)) \\ &= \lambda_1 x_1(y(v)) + \lambda_2 x_2(y(v)) - \lambda_1 y(x_1(v)) - \lambda_2 y(x_2(v)) \\ &= \lambda_1 (x_1(y(v)) - y(x_1(v))) + \lambda_2 (x_2(y(v)) - y(x_2(v))) \\ &= \lambda_1 [x_1, y](v) + \lambda_2 [x_2, y](v) \\ &= (\lambda_1 [x_1, y] + \lambda_2 [x_2, y])(v) \end{aligned}$$

となる．ただし 4 つ目の等号で $y \in \text{End } V$ が線型写像であることを使った．全く同様にして

$$[x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2](v) = \mu_1 [x, y_1] + \mu_2 [x, y_2]$$

を示すこともできる．

(L-2) 明らかに $[x, x] = xx - xx = o$ なのでよい．

(L-3) $[\cdot, \cdot]$ の双線型 ((L-1)) から

$$\begin{aligned} &[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] \\ &= [x, yz] - [x, zy] + [y, zx] - [y, xz] + [z, xy] - [z, yx] \\ &= xyz - yzx - xzy + zyx + yzx - zxy - yxz + xzy + zxy - xyz - zyx + yxz \\ &= o. \end{aligned}$$

■

この Lie 代数 $(\text{End } V, +, \cdot, [\cdot, \cdot])$ は**一般線形代数** (general linear algebra) と呼ばれ、記号として $\mathfrak{gl}(V)$ と書かれる．

$\dim V =: n < \infty$ のとき、 $\text{End } V$ は $n \times n$ \mathbb{K} -行列全体が成す \mathbb{K} ベクトル空間 $M(n, \mathbb{K})$ と同型である^b． $M(n, \mathbb{K})$ を Lie ブラケット $[x, y] := xy - yx$ によって Lie 代数と見做す^cときは、この同型を意識して $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ と書く．さて、 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ の標準的な基底は所謂**行列単位**

$$e_{ij} := [\delta_{i\mu} \delta_{j\nu}]_{1 \leq \mu, \nu \leq n} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \overset{j}{0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_i$$

である。Einstein の規約を使って $e_{ij}e_{kl} = [\delta_{i\mu}\delta_{j\lambda}\delta_{k\lambda}\delta_{l\nu}]_{1\leq\mu,\nu\leq n} = \delta_{jk}[\delta_{i\mu}\delta_{l\nu}]_{1\leq\mu,\nu\leq n} = \delta_{jk}E_{il}$ と計算できるので、 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ の構造定数は

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{li}e_{kj}$$

となる^d。

^a 自己準同型 (endomorphism) の略である。

^b V の基底 e_1, \dots, e_n を 1 つ固定する。このとき同型写像 $\varphi: V \rightarrow \mathbb{K}^n$, $v^\mu e_\mu \mapsto (v^\mu)_{1\leq\mu\leq n}$ を使って定義される線型写像 $\phi: \text{End } V \rightarrow M(n, \mathbb{K})$, $f \mapsto \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ が所望の同型写像である。

^c 右辺の xy は行列の積である。

^d 少し紛らわしいかもしれないが、右辺において e_{il} は行列 (行列の成分ではない!) で δ_{jk} はただの \mathbb{K} の元である。以下では行列を指定する添字を $a, b, c, \dots, i, j, k, \dots$ で、行列の成分の添字を μ, ν, λ, \dots で書くことにする。つまり、例えば x_{ij} はある一つの行列を表す一方、 $x_{ij\mu\nu}$ は行列 x_{ij} の第 (μ, ν) 成分を表す。あまりにも紛らわしい場合には、行列の成分を表す際に $[x_{ij}]_{\mu\nu}$ のように角括弧で括弧にすることにする。

1.1.1 線型 Lie 代数

定義 1.1.1: 部分 Lie 代数

Lie 代数 \mathfrak{g} の部分ベクトル空間 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ が**部分 Lie 代数**であるとは、 \mathfrak{h} が Lie ブラケットについても閉じていることを言う。i.e. $\forall x, y \in \mathfrak{h}, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ に対して

$$x + y, \lambda x, [x, y] \in \mathfrak{h}$$

が成り立つこと。

この小節では以降、 V を体 \mathbb{K} 上の有限次元ベクトル空間とする。

定義 1.1.2: 線型 Lie 代数

一般線形代数 $\mathfrak{gl}(V)$ の**部分 Lie 代数**のことを**線型 Lie 代数** (linear Lie algebra) と呼ぶ。

線型 Lie 代数として有名なものは**古典代数** (classical algebra) である。これは A_l, B_l, C_l, D_l と呼ばれる 4 つの無限系列からなる。以下、 $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ とする。

【例 1.1.3】線型 Lie 代数: A_l 型

$\dim V = l + 1$ とする。**特殊線形代数** $\mathfrak{sl}(V)$ (または $\mathfrak{sl}(l + 1, \mathbb{K})$) は次のように定義される:

$$\mathfrak{sl}(V) := \{ x \in \mathfrak{gl}(V) \mid \text{Tr}(x) = 0 \}$$

$\mathfrak{sl}(V)$ が本当に**線型 Lie 代数**かどうか確認しよう。

証明 $\forall x, y \in \mathfrak{sl}(V)$ をとる. トレースの線形性および $\mathrm{Tr}(xy) = \mathrm{Tr}(yx)$ から

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(x + y) &= \mathrm{Tr}(x) + \mathrm{Tr}(y) = 0 + 0 = 0, \\ \mathrm{Tr}(\lambda x) &= \lambda \mathrm{Tr}(x) = \lambda 0 = 0, \\ \mathrm{Tr}([x, y]) &= \mathrm{Tr}(xy) - \mathrm{Tr}(yx) = \mathrm{Tr}(xy) - \mathrm{Tr}(xy) = 0\end{aligned}$$

が言えるので, $x + y, \lambda x, [x, y] \in \mathfrak{sl}(V)$ が言えた. ■

【例 1.1.2】 で使った $\mathfrak{gl}(l+1, \mathbb{K})$ の標準的な基底で $\forall x \in \mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{K})$ を $x = x^{ij}e_{ij}$ と展開すると, トレースレスであることから

$$h_{ij} := \begin{cases} e_{ij} & i \neq j, 1 \leq i, j \leq l+1 \\ e_{ii} - e_{i+1, i+1} & 1 \leq i = j \leq l \end{cases}$$

の $(l+1)^2 - 1$ 個の行列が $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{K})$ の基底を成すことがわかる. 従って $\dim \mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{K}) = (l+1)^2 - 1$ である.

【例 1.1.4】 線型 Lie 代数: B_l 型

$\dim V = 2l + 1$ とする. 行列

$$s := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1}_l \\ 0 & \mathbb{1}_l & 0 \end{bmatrix} \in M(2l+1, \mathbb{K})$$

により定まる V 上の非退化^aかつ対称な双線型形式を f と書く^b. このとき, 直交代数 (orthogonal algebra) $\mathfrak{o}(V)$ (または $\mathfrak{o}(2l+1, \mathbb{K})$) が以下のように定義される:

$$\mathfrak{o}(V) := \{ \textcolor{red}{x} \in \mathfrak{gl}(V) \mid f(\textcolor{red}{x}(v), w) = -f(v, \textcolor{red}{x}(w)), \forall v, w \in V \}$$

$\mathfrak{o}(V)$ が本当に線型 Lie 代数かどうか確認しよう.

証明 $\forall x, y \in \mathfrak{o}(V)$ をとる. f の双線型性から $\forall v, w \in V$ に対して

$$\begin{aligned}f((x+y)(v), w) &= f(x(v), w) + f(y(v), w) \\ &= -f(v, x(w)) - f(v, y(w)) \\ &= -f(v, x(w) + y(w)) \\ &= -f(v, (x+y)(w)) \\ f((\lambda x)(v), w) &= \lambda f(x(v), w) \\ &= -\lambda f(v, x(w)) \\ &= -f(v, \lambda x(w)) \\ &= -f(v, (\lambda x)(w)) \\ f([x, y](v), w) &= f(x(y(v)), w) - f(y(x(v)), w) \\ &= -f(y(v), x(w)) + f(x(v), y(w)) \\ &= f(v, y(x(w))) - f(v, x(y(w))) \\ &= -f(v, [x, y](w))\end{aligned}$$

が言えるので, $x + y, \lambda x, [x, y] \in \mathfrak{o}(V)$ が言えた. ■

^a 「 $v \in V$ が $\forall w \in V$ に対して $f(v, w) = 0$ を満たす $\implies v = o$ 」かつ「 $w \in V$ が $\forall v \in V$ に対して $f(v, w) = 0$ を満たす $\implies w = o$ 」
^b $f: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}, (v, w) \longmapsto v^T s w$ のこと.

【例 1.1.5】線型 Lie 代数: C_l 型

$\dim V = 2l$ とする. 行列

$$s := \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_l \\ -\mathbf{1}_l & 0 \end{bmatrix} \in M(2l, \mathbb{K})$$

により定まる V 上の非退化かつ歪対称な双線型形式を f と書く. このとき, シンプレクティック代数 (symplectic algebra) $\mathfrak{sp}(V)$ (または $\mathfrak{sp}(2l, \mathbb{K})$) が以下のように定義される:

$$\mathfrak{sp}(V) := \{ x \in \mathfrak{gl}(V) \mid f(x(v), w) = -f(v, x(w)), \forall v, w \in V \}$$

【例 1.1.4】と全く同様にして $\mathfrak{sp}(V)$ が線型 Lie 代数であることを証明できる.

【例 1.1.6】線型 Lie 代数: D_l 型

$\dim V = 2l$ とし, 行列

$$s := \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_l \\ \mathbf{1}_l & 0 \end{bmatrix} \in M(2l, \mathbb{K})$$

により定まる V 上の非退化かつ対称な双線型形式を f と書く. このとき, 【例 1.1.4】と全く同様に直交代数 (orthogonal algebra) $\mathfrak{o}(V)$ (または $\mathfrak{o}(2l, \mathbb{K})$) が定義される.

さらに, 古典代数以外の線型 Lie 代数をいくつか導入する.

【例 1.1.7】線型 Lie 代数: \mathfrak{t}

$n \times n$ 上三角行列全体の集合を $\mathfrak{t}(n, \mathbb{K}) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ と書く^a:

$$\mathfrak{t}(n, \mathbb{K}) := \left\{ [a_{\mu\nu}]_{1 \leq \mu, \nu \leq n} \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \mid \mu > \nu \implies a_{\mu\nu} = 0 \right\}$$

$\mathfrak{t}(n, \mathbb{K})$ が線型 Lie 代数であることを確認しよう.

証明 $\forall x = [x_{\mu\nu}]_{1 \leq \mu, \nu \leq n}, y = [y_{\mu\nu}]_{1 \leq \mu, \nu \leq n} \in \mathfrak{t}(n, \mathbb{K})$ をとる. このとき $1 \leq \nu < \mu \leq n$ なる全ての (μ, ν) に対して

$$\begin{aligned} [x + y]_{\mu\nu} &= x_{\mu\nu} + y_{\mu\nu} = 0 + 0 = 0 \\ [\lambda x]_{\mu\nu} &= \lambda x_{\mu\nu} = \lambda 0 = 0 \\ [xy]_{\mu\nu} &= \sum_{\lambda=1}^n x_{\mu\lambda} y_{\lambda\nu} = \sum_{\lambda=1}^{\nu} 0 y_{\lambda\nu} + \sum_{\lambda=\nu+1}^n x_{\mu\lambda} 0 = 0 \end{aligned}$$

が成り立つので $x + y, \lambda x, [x, y] \in \mathfrak{t}(n, \mathbb{K})$ が言えた. ■

^a \mathfrak{t} の L^AT_EX コマンドは `\mathfrak{t}`

【例 1.1.8】線型 Lie 代数： \mathfrak{n}

$n \times n$ 上三角行列のうち対角成分が全て 0 であるものの全体がなす集合を $\mathfrak{n}(n, \mathbb{K}) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ と書く^a：

$$\mathfrak{n}(n, \mathbb{K}) := \left\{ [a_{\mu\nu}]_{1 \leq \mu, \nu \leq n} \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \mid \mu \geq \nu \implies a_{\mu\nu} = 0 \right\}$$

$\mathfrak{n}(n, \mathbb{K})$ が線型 Lie 代数であることは【例 1.1.7】と全く同様に証明できる.

^a \mathfrak{n} の L^AT_EX コマンドは `\mathfrak{n}`

【例 1.1.9】線型 Lie 代数： \mathfrak{d}

$n \times n$ 対角行列全体がなす集合を $\mathfrak{d}(n, \mathbb{K}) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ と書く^a：

$$\mathfrak{d}(n, \mathbb{K}) := \left\{ [a_{\mu\nu}]_{1 \leq \mu, \nu \leq n} \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \mid \mu \neq \nu \implies a_{\mu\nu} = 0 \right\}$$

$\mathfrak{d}(n, \mathbb{K})$ は明らかに線型 Lie 代数である.

^a \mathfrak{d} の L^AT_EX コマンドは `\mathfrak{d}`

公理 1.1.2: 代数

体 \mathbb{K} 上のベクトル空間 \mathfrak{U} ^a の上に二項演算

$$*: \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{U}, (x, y) \longmapsto x * y$$

が定義されていて、かつ以下の条件を満たすとき、 \mathfrak{U} は \mathbb{K} -代数 (\mathbb{K} -algebra) と呼ばれる^b：

(A-1) $*$ は双線型写像である. i.e. $\forall x, x_i, y, y_i \in \mathfrak{g}, \forall \lambda_i, \mu_i \in \mathbb{K} (i = 1, 2)$ に対して

$$\begin{aligned} (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) * y &= \lambda_1 x_1 * y + \lambda_2 x_2 * y, \\ x * (\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) &= \mu_1 x * y_1 + \mu_2 x * y_2 \end{aligned}$$

が成り立つ.

^a `\mathfrak{U}`

^b 結合律は要請しない！ $*$ に関する結合律を公理に含める場合は結合代数 (associative algebra) と言う. 文献によっては代数と言って結合代数のことを指す場合があるので注意.

Lie 代数は \mathbb{K} -代数である.

定義 1.1.3: 代数の微分

\mathbb{K} -代数 \mathfrak{U} の微分 (derivation) とは, 線型写像

$$d: \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{U}$$

であって Leibniz 則

$$d(x * y) = x * d(y) + d(x) * y$$

を満たすもののこと.

全ての \mathfrak{U} の微分がなす集合を $\text{Der } \mathfrak{U}$ と書く.

命題 1.1.1: 代数の微分がなす Lie 代数

$\text{Der } \mathfrak{U}$ の上の加法, スカラー乗法, Lie ブラケットをそれぞれ

$$+ : \text{Der } \mathfrak{U} \times \text{Der } \mathfrak{U} \longrightarrow \text{Der } \mathfrak{U}, (d, e) \longmapsto (x \mapsto d(x) + e(x))$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times \text{Der } \mathfrak{U} \longrightarrow \text{Der } \mathfrak{U}, (\lambda, d) \longmapsto (x \mapsto \lambda d(x))$$

$$[,] : \text{Der } \mathfrak{U} \times \text{Der } \mathfrak{U} \longrightarrow \text{Der } \mathfrak{U}, (d, e) \longmapsto (x \mapsto d(e(x)) - e(d(x)))$$

と定義すると, 組 $(\text{Der } \mathfrak{U}, +, \cdot, [,])$ は $\mathfrak{gl}(\mathfrak{U})$ の部分 Lie 代数である. Lie 代数としての $\text{Der } \mathfrak{U}$ のことを微分代数 (derivation algebra) と呼ぶ^a.

^a <https://mathworld.wolfram.com/DerivationAlgebra.html>

証明 $\forall x, y \in \mathfrak{U}$ をとる. 代数の微分は線型写像なので, $*$ の双線型性および微分の Leibniz 則から

$$\begin{aligned} (d + e)(x * y) &= x * d(y) + d(x) * y + x * e(y) + e(x) * y = x * (d + e)(y) + (d + e)(x) * y \\ (\lambda d)(x * y) &= \lambda(d(x) * y + x * d(y)) = (\lambda d(x)) * y + x * (\lambda d(y)) = (\lambda d)(x) * y + x * (\lambda d)(y) \end{aligned}$$

が成り立つ. i.e. $d + e, \lambda d \in \text{Der } \mathfrak{U}$ が言えた. Lie ブラケットに関しては,

$$d(e(x * y)) = d(x * e(y) + e(x) * y) = x * d(e(y)) + d(x) * e(y) + e(x) * d(y) + d(e(x)) * y$$

に注意すると

$$\begin{aligned} [d, e](x * y) &= x * d(e(y)) + \cancel{d(x) * e(y)} + \cancel{e(x) * d(y)} + d(e(x)) * y \\ &\quad - x * e(d(y)) - \cancel{e(x) * d(y)} - \cancel{d(x) * e(y)} - e(d(x)) * y \\ &= x * [d, e](y) + [d, e](x) * y \end{aligned}$$

が成り立つ. i.e. $[d, e] \in \text{Der } \mathfrak{U}$ が言えた. ■

【例 1.1.10】内部微分

Lie 代数 \mathfrak{g} は \mathbb{K} -代数なので, その微分代数 $\text{Der } \mathfrak{g}$ を考えることができる.

ここで $x \in \mathfrak{g}$ を任意にとろう。このとき、写像

$$\mathrm{ad} x: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}, z \longmapsto [x, z]$$

は線型写像で、Jacobi 恒等式から

$$\begin{aligned} \mathrm{ad} x([z, w]) &= [x, [z, w]] \\ &= [[x, z], w] + [z, [x, w]] \\ &= [\mathrm{ad} x(z), w] + [z, \mathrm{ad} x(w)] \end{aligned}$$

を充たすことがわかる。これはまさに Leibniz 則なので、 $\mathrm{ad} x \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ である。 $\mathrm{ad} x$ の形で書ける $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ の元のことを内部微分 (inner derivation) と呼ぶ^a。

^a $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ の元が内部微分でないとき、外部微分 (outer derivation) であると言う。

1.1.2 イデアル・商代数

定義 1.1.4: Lie 代数のイデアル

Lie 代数 \mathfrak{g} の部分集合 \mathfrak{i} ^a が \mathfrak{g} のイデアル (ideal) であるとは、以下の 2 条件を充たすことを言う：

(LI-1) \mathfrak{i} は \mathfrak{g} の部分ベクトル空間である。

(LI-2) $\forall x \in \mathfrak{g}, \forall y \in \mathfrak{i}$ に対して $[x, y] \in \mathfrak{i}$

^a \mathfrak{i}

【例 1.1.11】自明なイデアル

$\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $[x, o] = [x, x + (-x)] = [x, x] - [x, x] = o$ が成り立つので、 $\{o\}$ は \mathfrak{g} のイデアルである。また、Lie ブラケットについて閉じているので \mathfrak{g} 自身もイデアルである。この 2 つを自明なイデアル (trivial ideal) と呼ぶ。

【例 1.1.12】中心

Lie 代数 \mathfrak{g} の中心 (center) は

$$Z(\mathfrak{g}) := \{ z \in \mathfrak{g} \mid \forall x \in \mathfrak{g}, [x, z] = o \}$$

と定義される。 $o \in Z(\mathfrak{g})$ であることから $Z(\mathfrak{g})$ はイデアルである。 \mathfrak{g} が Lie ブラケットに関して可換である必要十分条件は $Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ が成り立つことである^a。

^a Lie 代数の公理 (L'-1) より、 $[x, y] = [y, x]$ ならば $[x, y] = -[x, y] \iff [x, y] = o$ である。

補題 1.1.1: イdeal同士の Lie ブラケットはイdeal

Lie 代数 \mathfrak{g} とそのイdeal $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ を与える. このとき $[\mathfrak{i}, \mathfrak{j}]$ もまた \mathfrak{g} のイdealである.

証明 $\forall x \in \mathfrak{g}$ を1つとる. Lie ブラケットの双線型性から, このとき $\forall z \in \mathfrak{i}, \forall w \in \mathfrak{j}$ に対して $[x, [z, w]] \in [\mathfrak{i}, \mathfrak{j}]$ が成り立つことを示せば良い. 実際, Lie 代数の公理 (L-2), (L-3) より

$$[x, [z, w]] = [[w, x], z] + [[x, z], w] = [z, [x, w]] + [[x, z], w]$$

が言えるが, $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ がイdealであることにより $[x, w] \in \mathfrak{j}, [x, z] \in \mathfrak{i}$ なので右辺は $[\mathfrak{i}, \mathfrak{j}]$ に属する. ■

【例 1.1.13】導来 Lie 代数

Lie 代数 \mathfrak{g} の導来代数 (derived algebra) とは, \mathfrak{g} のイdeal $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ のこと.

定義 1.1.5: 単純 Lie 代数

Lie 代数 \mathfrak{g} が単純 (simple) であるとは, \mathfrak{g} が自明なイdeal以外のイdealを持たず, かつ $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \{0\}$ を満たすことを言う.

【例 1.1.14】単純 Lie 代数: $\mathfrak{sl}(2)$

Lie 代数 \mathfrak{g} のイdeal \mathfrak{i} が与えられたとき, 商群のときと同じ要領で商代数を構成できる. このことを復習しよう:

\mathfrak{g} 上の同値関係を

$$\sim := \{ (x, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mid x - y \in \mathfrak{i} \}$$

と定義する^{*5}. \sim による $x \in \mathfrak{g}$ の同値類のことを $x + \mathfrak{i}$ と書き, 商集合 \mathfrak{g}/\sim のことを $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ と書く. 全射 $p: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ を標準的射影 (canonical projection) と呼ぶ.

定義 1.1.6: 商代数

集合 $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ の上には次のようにして well-defined な加法, スカラー乗法, Lie ブラケットが定義できる:

$$\begin{aligned} +: \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \times \mathfrak{g}/\mathfrak{i} &\longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i}, (x + \mathfrak{i}, y + \mathfrak{i}) \longmapsto (x + y) + \mathfrak{i} \\ \cdot: \mathbb{K} \times \mathfrak{g}/\mathfrak{i} &\longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i}, (\lambda, x + \mathfrak{i}) \longmapsto (\lambda x) + \mathfrak{i} \\ [,]: \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \times \mathfrak{g}/\mathfrak{i} &\longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{i}, (x + \mathfrak{i}, y + \mathfrak{i}) \longmapsto [x, y] + \mathfrak{i} \end{aligned}$$

Lie 代数 $(\mathfrak{g}/\mathfrak{i}, +, \cdot, [,])$ のことを商代数 (quotient algebra) と呼ぶ.

^{*5} (L-1) より \mathfrak{i} は部分ベクトル空間なので反射律と対称律が言える. $x \sim y$ かつ $y \sim z$ ならば $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathfrak{i}$ なので $x \sim z$ であり, 推移律が成り立つことがわかる.

証明 well-definedness を示す. $x + \mathfrak{i} = x' + \mathfrak{i}$, $y + \mathfrak{i} = y' + \mathfrak{i}$ ならば $x' - x, y' - y \in \mathfrak{i}$ であるから

$$\begin{aligned} x' + y' &= (x + y) + (x' - x) + (y' - y) \in (x + y) + \mathfrak{i}, \\ \lambda x' &= \lambda x + \lambda(x' - x) \in (\lambda x) + \mathfrak{i} \end{aligned}$$

が成り立つ. また, \mathfrak{i} がイデアルであることにより

$$\begin{aligned} [x', y'] &= [x + (x' - x), y + (y' - y)] \\ &= [x, y] + [x, y' - y] - [y, x' - x] + [x' - x, y' - y] \\ &\in [x, y] + \mathfrak{i} \end{aligned}$$

と言える. ■

定義 1.1.7: 正規化代数・中心化代数

- Lie 代数 \mathfrak{g} とその部分 Lie 代数 (もしくは部分ベクトル空間) \mathfrak{h} を与える. このとき \mathfrak{h} の正規化代数 (normalizer) を

$$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) := \{ x \in \mathfrak{g} \mid \forall h \in \mathfrak{h}, [x, h] \in \mathfrak{h} \}$$

で定義する^a. 特に $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ のとき, \mathfrak{h} は self-normalizing であると言う.

- Lie 代数 \mathfrak{g} とその部分集合 X を与える. このとき X の中心化代数 (centralizer) を

$$C_{\mathfrak{g}}(X) := \{ x \in \mathfrak{g} \mid \forall z \in X, [x, z] = 0 \}$$

と定義する^b.

^a $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ は \mathfrak{g} の部分 Lie 代数である: $\forall x, y \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ に対して, Jacobi 恒等式から $\forall z \in \mathfrak{h}, [[x, y], z] = [x, [y, z]] - [y, [x, z]] \in \mathfrak{h}$ と言える. さらに, もし \mathfrak{h} が部分 Lie 代数ならば, 定義から \mathfrak{h} を $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ の部分ベクトル空間と見做したときに \mathfrak{h} は自動的にイデアルになる. 特に, $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ は $\mathfrak{h} \subset N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ をイデアルとして持つ最大の部分 Lie 代数である.

^b $C_{\mathfrak{g}}(X)$ が \mathfrak{g} の部分 Lie 代数であることは, $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ のときと同様にして示される.

【例 1.1.12】を思い出すと, $Z(\mathfrak{g}) = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ である.

1.1.3 準同型・表現

定義 1.1.8: Lie 代数の準同型

命題 1.1.2: 準同型定理

定義 1.1.9: Lie 代数の表現

【例 1.1.15】随伴表現

1.1.4 自己同型

定義 1.1.10: 自己同型

1.1.5 可解 Lie 代数

定義 1.1.11: 可解 Lie 代数

命題 1.1.3:

定義 1.1.12: 根基

定義 1.1.13: 半単純 Lie 代数

1.1.6 冪零 Lie 代数

定義 1.1.14: 冪零 Lie 代数

定理 1.1.1: Engel の定理