2024 新高考 1 卷

一、选择题

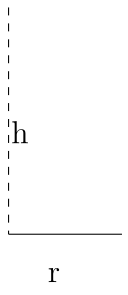
1. (5 分) 已知集合 $A=\{x|-5<x^3<5\},B=\{-3,-1,0,2,3\}$，则 $A\cap B$ （）
   - A. A. $\{-1,0\}$
   - B. B. $\{2,3\}$
   - C. C. $\{-3,-1,0\}$
   - D. D. $\{-1,0,2\}$

2. (5 分) 若 $\frac{z}{z-1}=1+i$，则 $z=(\ )$
   - A. A. $-1-i$
   - B. B. $-1+i$
   - C. C. $1-i$
   - D. D. $1+i$

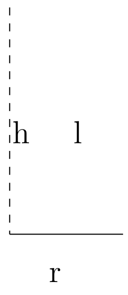
3. (5 分) 已知向量 $\boldsymbol{a}=(0,1),\boldsymbol{b}=(2,x)$，若 $\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a})$，则 $x=$
   - A. A. -2
   - B. B. -1
   - C. C. 1
   - D. D. 2

4. (5 分) 已知 $\cos(\alpha+\beta)=m,\tan\alpha\tan\beta=2$，则 $\cos(\alpha-\beta)=(\quad)$
   - A. A. $-3m$
   - B. B. $-\frac{m}{3}$
   - C. C. $\frac{m}{3}$
   - D. D. $3m$

5. (5 分) 已知圆柱和圆锥的底面半径相等，侧面积相等，且它们的高均为 $\sqrt{3}$，则圆锥的体积为（）
   - A. A. $2\sqrt{3}\pi$
   - B. B. $3\sqrt{3}\pi$
   - C. C. $6\sqrt{3}\pi$
   - D. D. $9\sqrt{3}\pi$



圆柱



圆锥

6. (5 分) 已知函数为 $f(x)=\begin{cases}-x^2-2ax-a, & x<0\\ e^x+\ln(x+1), & x\geq 0\end{cases}$，在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，则 a 取值的范围是（）

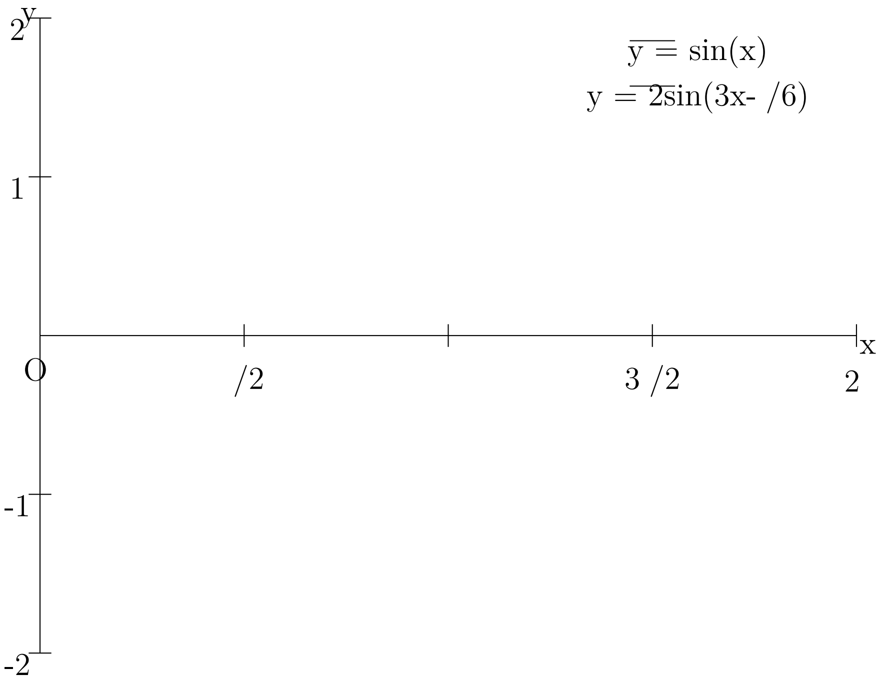
A. A. $(-\infty,0]$　　B. B. $[-1,0]$

C. C. $[-1,1]$　　D. D. $[0,+\infty)$

7. (5 分) 当 $x\in[0,2\pi]$ 时，曲线 $y=\sin x$ 与 $y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的交点个数为（ ）

A. A. 3　　B. B. 4

C. C. 6　　D. D. 8



8. (5 分) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x)>f(x-1)+f(x-2)$，且当 $x<3$ 时 $f(x)=x$，则下列结论中一定正确的是（）

A. A. $f(10)>100$　　B. B. $f(20)>1000$

C. C. $f(10)<1000$　　D. D. $f(20)<10000$

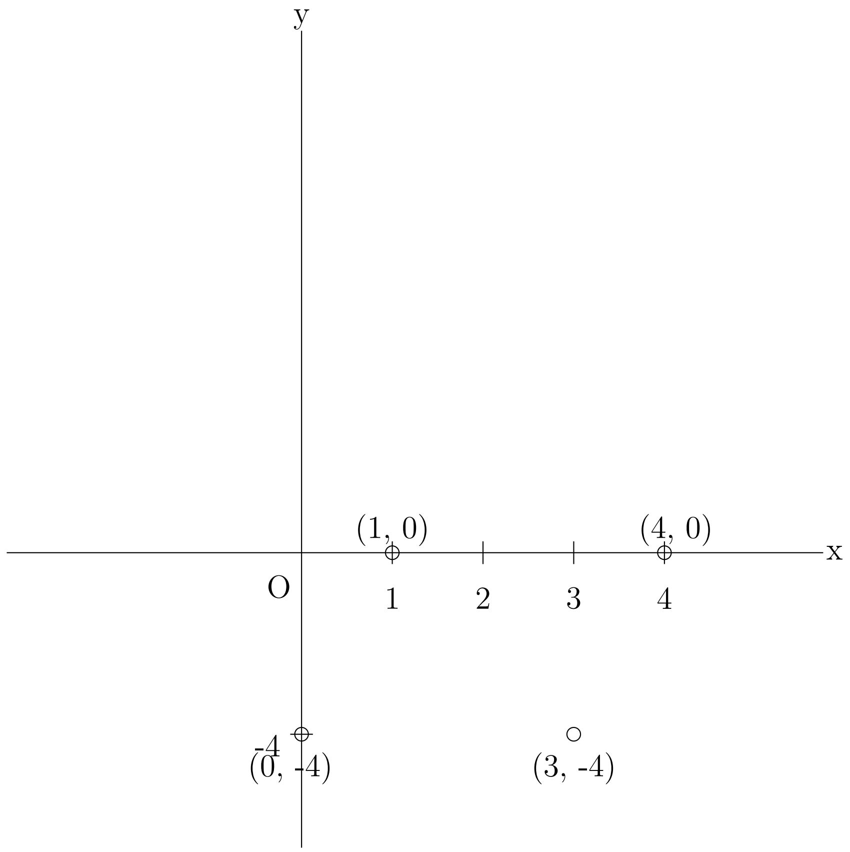
9. (6 分) 为了了解推动出口后的亩收入（单位：万元）情况，从该种植区抽取样本，得到推动出口后亩收入的样本均值 $\bar{x}=2.1$，样本方差 $s^2=0.01$，已知该种植区以往的亩收入 X 服从正态分布 $N(1.8,0.1^2)$，假设推动出口后的亩收

入 Y 服从正态分布 $N(\bar{x}, s^2)$，则 ( )（若随机变量 Z 服从正态分布 $N(u, \sigma^2)$，$P(Z < u+\sigma) \approx 0.8413$）

A. A. $P(X > 2) > 0.2$
B. B. $P(X > 2) < 0.5$
C. C. $P(Y > 2) > 0.5$
D. D. $P(Y > 2) < 0.8$

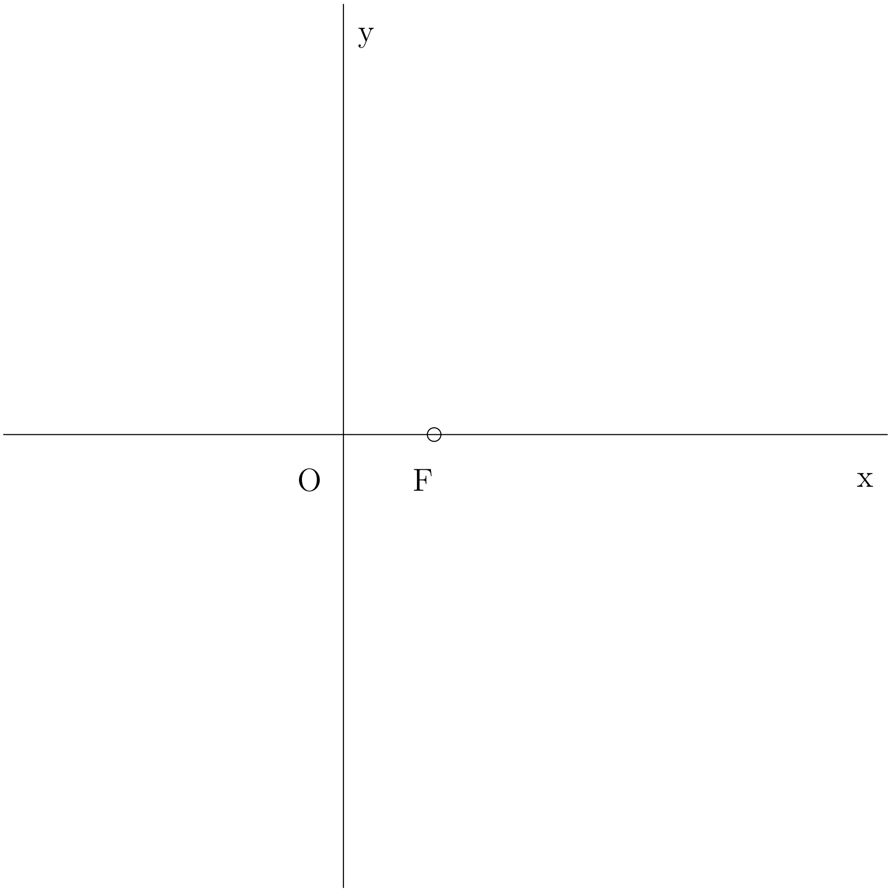
10. (6 分) 设函数 $f(x) = (x-1)^2(x-4)$，则 ( )

A. A. $x = 3$ 是 $f(x)$ 的极小值点
B. B. 当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) < f(x^2)$
C. C. 当 $1 < x < 2$ 时, $-4 < f(2x-1) < 0$
D. D. 当 $-1 < x < 0$ 时, $f(2-x) > f(x)$



11. (6 分) 造型　可以做成美丽的丝带，将其看作图中曲线 C 的一部分. 已知 C 过坐标原点 O. 且 C 上的点满足横坐标大于 -2，到点 $F(2,0)$ 的距离与到定直线 $x = a(a < 0)$ 的距离之积为 4，则（）

A. A. $a = -2$
B. B. 点 $(2\sqrt{2}, 0)$ 在 C 上
C. C. C 在第一象限的点的纵坐标的最大值为 1
D. D. 当点 (x_0, y_0) 在 C 上时, $y_0 \le \frac{4}{x_0+2}$



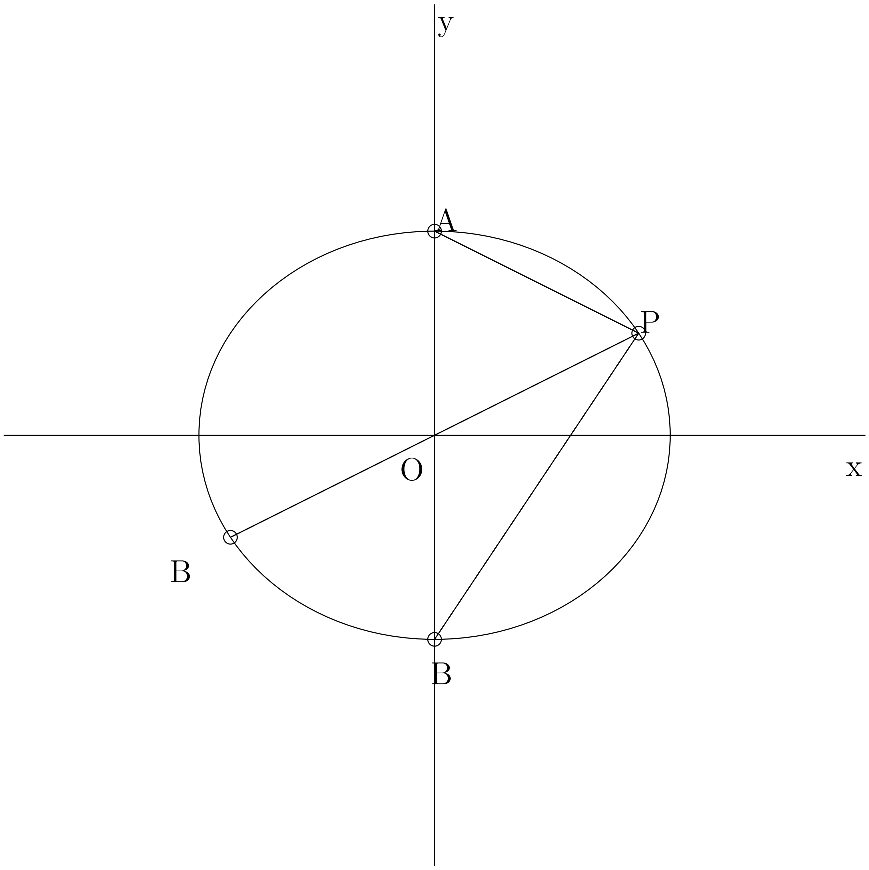
三、解答题

12. (15 分) 已知 $A(0,3)$ 和 $P\left(3,\frac{3}{2}\right)$ 为椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上两点。

(1) 求 C 的离心率;

(2) 若过 P 的直线 l 交 C 于另一点 B，且 $\triangle ABP$ 的面积为 9，求 l 的方程。

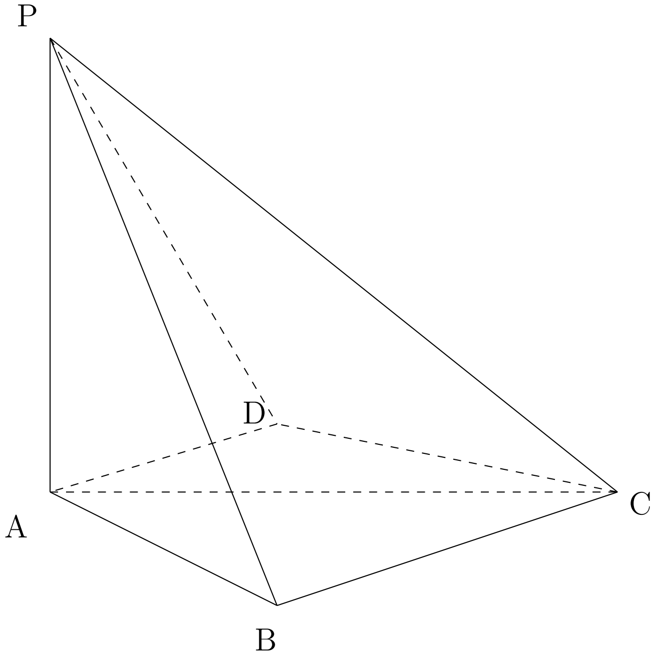
>



13. (15 分) 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$PA=AC=2$，$BC=1,AB=\sqrt{3}$.

（1）若 $AD\perp PB$，证明：$AD//$ 平面 PBC；

（2）若 $AD\perp DC$，且二面角 $A-CP-D$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$，求 AD.



14. (17 分) 已知函数 $f(x) = \ln \frac{x}{2-x} + ax + b(x-1)^3$

(1) 若 $b = 0$，且 $f'(x) \geq 0$，求 a 的最小值;

(2) 证明：曲线 $y = f(x)$ 是中心对称图形;

(3) 若 $f(x) > -2$ 当且仅当 $1 < x < 2$，求 b 的取值范围.

15. (17 分) 设 m 为正整数，数列 $a_1, a_2, \ldots, a_{4m+2}$ 是公差不为 0 的等差数列，若从中删去两项 a_i 和 $a_j (i < j)$ 后剩余的 $4m$ 项可被平均分为 m 组，且每组的 4 个数都能构成等差数列，则称数列 $a_1, a_2, \ldots, a_{4m+2}$ 是 (i, j)-可分数列。

(1) 写出所有的 (i, j), $1 \leq i < j \leq 6$，使数列 $a_1, a_2, \ldots, a_6$ 是 (i, j)-可分数列;

(2) 当 $m \geq 3$ 时，证明：数列 $a_1, a_2, \ldots, a_{4m+2}$ 是 $(2, 13)$-可分数列;

(3) 从 $1, 2, \ldots, 4m+2$ 中一次任取两个数 i 和 $j (i < j)$，记数列 $a_1, a_2, \ldots, a_{4m+2}$ 是 (i, j)-可分数列的概率为 P_m，证明：$P_m > \frac{1}{8}$。