Stochastik

2019

Inhaltsverzeichnis

1 Grundbegriffe

1.1 Urbild

Seien A und B zwei Mengen, $f : A \to B$ eine Funktion und M eine Teilmenge von B. Die Menge

$$f^{-1}(M) := \{x \in A \mid f(x) \in M\} \tag{1}$$

wird Urbild von M unter f genannt. Das Urbild ist damit ein Wert der Urbildfunktion, die jedem Element M der Potenzmenge $\mathcal{P}(B)$ das Urbild $f^{-1}(M)$ als Element der Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ zuordnet.

In eigenen Worten: Die Funktion f bildet Elemente von A auf Elemente von B ab. Das Urbild von einer Teilmenge $M \subset B$ ist die Teilmenge aller Werte aus A die durch die Funktion auf Werte in M abgebildet werden.

Für das Urbild von einelementigen Teilmengen schreibt man auch:

$$f^{-1}(\{b\}) := f^{-1}(b). \tag{2}$$

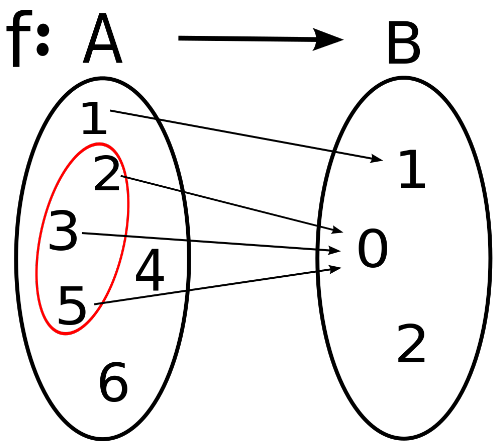

Abbildung 1: Beispiel: Das Urbild von $M = \{0\} \subset B$ ist $\{2, 3, 5\} \subset A$.

1.2 charakteristische Funktion

Gegeben sei eine bel. Grundmenge X und eine Teilmenge davon $T \subset X$. Die Funktion $\chi_T : X \to \{0, 1\}$ definiert durch

$$\chi_T(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in T \\ 0, & \text{falls } x \notin T \end{cases} \tag{3}$$

heißt charakteristische Funktion oder Indikatorfunktion der Menge T.

1.3 einfache Funktion

Sei (X, Σ) ein Messraum und V ein (reeller, oder komplexer) Banachraum. Eine Funktion $u : X \to V$ heißt einfache Funktion, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- u nimmt nur endlich viele Werte $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ an
- für alle $v \in V$ gilt $u^{-1}(\{v\}) \in \Sigma$, u ist also messbar

Wenn auf Σ noch ein Maß μ definiert ist, also ein Maßraum vorliegt, fordert man manchmal noch zusätzlich:

- $\mu(u^{-1}(V \setminus \{0\}))$ ist endlich

Die Forderungen sind äquivalent zu der Aussage, dass u die folgende Darstellung besitzt:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot \chi_{E_i}(x), \tag{4}$$

wobei die $v_i \in V$ und χ_{E_i} die charakteristische Funktion der messbaren Menge $u^{-1}(\{v_i\}) \in \Sigma$.

In eigenen Worten: Egal welches Argument x man der Fkt u übergibt, es muss ein Wert aus der endlichen Menge raus kommen. Messbarkeit wird in Sek. 6 behandelt, wobei hier nur gefordert wird, dass die Urbilder der Einelementmengen in Σ liegen. Allgemein sollte das Kriterium für beliebige Teilmengen von V gelten. In der letzten Forderung sieht es doch so aus, als wäre allgemeine Messbarkeit gefordert, da das Urbild einer mehr als ein Element großen Teilmenge von V vom Maß angenommen werden und daher in Σ liegen muss. Die letzte Forderung sagt aus, dass das Maß vom Urbild des Raumes ohne Null endlich sein soll. Also das Maß von der Teilmenge aller Elemente aus X, die durch u auf $V \setminus \{0\}$ abgebildet werden, soll endlich sein. Mal sehen wofür man das fordert. Zu der äquivalenten Formulierung: Die charakteristische Funktion ist 1, wenn das x in der Teilmenge von X liegt, welche durch u auf v_i abgebildet wird. Zur Summe trägt nur das v_i bei, dessen Urbild unter u das Argument x enthält. Die Funktion nimmt damit nur Werte asu V an, da die charakteristische Funktion nur einmal anschlägt und zwar genau dann, wenn das x im Urbild von einem bestimmten v_i liegt. Da die Funktion eindeutig zuweist, liegt aber jedes x nur in einem Urbild und daher ist die charakteristische Funktion nur dann 1, wenn Urbild von einem best. v_i und x zusammenpassen.

2 σ-Algebra

Sei Ω eine nichtleere Menge und $\mathcal{P}(\Omega)$ die Potenzmenge dieser Menge. Eine Menge von Teilmengen $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ (auch Mengensystem genannt) heißt σ-Algebra auf, oder über Ω, wenn sie die folgenden drei Bedingungen erfüllt:

1. $\mathcal{A}$ enthält die Grundmenge, also: $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $\mathcal{A}$ ist stabil bezüglich der Komplementbildung. Ist also $A \in \mathcal{A}$, dann ist auch $A^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A}$.
3. $\mathcal{A}$ ist stabil bezüglich abzählbarer Vereinigungen. Sind also die Mengen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ in $\mathcal{A}$ enthalten, so ist auch $\bigcup_{i=1}^{\infty}$ in $\mathcal{A}$ enthalten.

3 Wahrscheinlichkeitsmaß

Gegeben sei eine Menge Ω, die Ergebnismenge und eine σ-Algebra Σ auf dieser Menge (das Ereignissystem).

Dann heißt eine Abbildung

$$P : \Sigma \to [0, 1] \tag{5}$$

Wahrscheinlichkeitsmaß, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt.

Normiertheit:

$$P(\Omega) = 1 \tag{6}$$

σ-Additivität: Für jede abzählbare Folge von paarweise disjunkten Mengen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ aus Σ gilt

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \tag{7}$$

Es gilt also, dass die Wahrscheinlichkeit für die Vereinigung zweier Ereignisse gleich groß ist wie die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten der Ereignisse.

4 Wahrscheinlichkeitsraum

Sei Ω eine beliebige **Ergebnis**menge. Sie umfasst alle möglichen Ergebnisse von einem Zufallsvorgang. Beim Würfeln ergibt sich also beispielsweise $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Nun wird Σ als eine σ-Algebra über Ω definiert. Die Elemente von Σ werden auch Ereignisse genannt.
Als letztes wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P : \Sigma \to [0, 1]$ benötigt. Das Tripel (Ω, Σ, P) ist dann ein Wahrscheinlichkeitsraum.

5 Messraum

Ein Tupel (Ω, Σ) heißt Messraum, wenn Ω eine beliebige Grundmenge ist und Σ eine σ-Algebra über Ω ist.
In der Stochastik wird der Messraum auch Ereignisraum genannt und ist einfach ein Wahrscheinlichkeitsraum ohne Wahrscheinlichkeitsmaß.
Eine Menge S wird messbare Menge genannt, wenn $S \in \Sigma$ gilt.

6 messbare Funktion

Seien (Ω_1, Σ_1) und (Ω_2, Σ_2) zwei Messräume. Eine Funktion $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ wird Σ_1-Σ_2-messbar genannt, wenn für alle $S_2 \in \Sigma_2$ gilt, dass das Urbild von S_2 unter f ein Element aus Σ_1 ist:

$$f^{-1}(S_2) \in \Sigma_1. \tag{8}$$

In eigenen Worten: Aus Wahrscheinlichkeitssicht: Die Funktion f bildet Ergebnisse aus Ω_1 auf Ergebnisse in Ω_2 ab. Wenn ich mir ein Ereignis S_2 aus Σ_2 nehme, also eine Teilmenge von Ω_2, müssen alle Ergebnisse aus Ω_1, die durch die Funktion f auf Ergebnisse von S_2 abgebildet werden, zusammen ein Element von Σ_1 sein. Das muss für alle $S \in \Sigma_2$ gelten. Egal, welches Ereignis S aus Σ_2 betrachtet wird, das Urbild von S unter f muss ein Element von Σ_1 sein. Zu jedem Element S der σ-Algebra Σ_2 muss es ein Element von Σ_1 geben, das das Urbild von S unter f ist.

7 Zufallsvariable

7.1 Definition

Eine Zufallsvariable (ZV) ist eine messbare Funktion von einem Wahrscheinlichkeitsraum in einen Messraum. Seien also (Ω, Σ, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und (Ω', Σ') ein Messraum. Eine Σ-Σ'-messbare Funktion $X : \Omega \to \Omega'$ heißt dann eine Ω'-Zufallsvariable auf Ω.

Beispiel: Es soll das Experiment des zweimaligen Würfelns mit einem fairen Würfel betrachtet werden. Der dazugehörige Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Σ, P) sieht wie folgt aus:

- $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (6, 5), (6, 6)\}$ ist die Ergebnismenge aller möglichen Ergebnisse
- $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$ ist die Potenzmenge von Ω
- P ist das Wahrscheinlichkeitsmaß. Da die Würfe unabhängig sein sollen, sollen alle 36 möglichen Ergebnisse gleich wahrscheinlich sein. Daher gilt: $P(\{n_1, n_2\}) = \frac{1}{36}$ für $n_1, n_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Es sollen nun zwei Zufallsvariablen definiert werden. Die ZV X_1 für das Würfelergebnis des ersten Würfels und eine andere X_2 für die Summe der beiden Augenzahlen.

- $X_1 : \Omega \to \mathbb{R}; \qquad (n_1, n_2) \mapsto n_1$
- $X_2 : \Omega \to \mathbb{R}; \qquad (n_1, n_2) \mapsto n_1 + n_2$

Dabei wurde für Σ' die borelsche σ-Algebra auf den reellen Zahlen gewählt.

7.2 Verteilung einer Zufallsvariablen

Sei X wieder eine ZV von (Ω, Σ, P) in den Ereignisraum (Ω', Σ'). Dann heißt die durch

$$P_X(A') := P(X^{-1}(A')) \qquad \text{für alle } A' \in \Sigma' \tag{9}$$

definierte Abbildung $P_X : \Sigma' \to [0,1]$ die Verteilung der Zufallsvariablen X unter P. Hierbei bezeichnet $X^{-1}(A')$ das Urbild von A' unter X, also das Ereignis $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A'\} \in \Sigma$.

In eigenen Worten: Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis S' aus Σ' ist also die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $S = X^{-1}(S')$, das durch die ZV X auf S' abgebildet wird. Dazu braucht man auch die messbare Funktion X, da so die Urbilder für alle Ereignisse in Σ' immer in Σ liegen.

8 Verteilungsfunktion

8.1 Wahrscheinlichkeitsmaß

Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf dem Ereignisraum (sigma-Algebra auf einer Grundmenge) der reellen Zahlen. Dann heißt die Funktion

$$F_P : \mathbb{R} \to [0,1]$$

definiert durch

$$F_P(x) = P\left((-\infty, x]\right)$$

die Verteilungsfunktion von P.

In eigenen Worten: Die VF gibt also zu einem Punkt x an, mit welcher Wahrscheinlichkeit das W-Maß ein Ergebnis aus dem Ereignis aller Zahlen kleiner gleich x zulässt.

Wichtig: Die Verteilungsfunktion kann Sprünge haben. Sie ist nur dann invertierbar, wenn sie streng monoton wachsend und stetig ist.

8.2 Zufallsvariable

Die VF einer ZV ist die VF ihrer Verteilung.

9 Verallgemeinerte inverse Verteilungsfunktion / Quantilfunktion

Nicht jede Verteilungsfunktion ist einfach invertierbar. Jeder VF kann eine verallg. inv. VF zugeordnet werden. Diese ordnet jeder Zahl zwischen 0 und 1 den kleinsten Wert zu, an dem die Verteilungsfunktion die Zahl (Wahrscheinlichkeit) überschreitet.

Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Verteilungsfunktion, im Sinne, dass sie folgende Bedingungen erfüllt:

- F ist monoton wachsend
- F ist rechtsseitig stetig
- $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$
- $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$

Dann heißt die Funktion $F^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} | F(x) \geq u\}$$

die verallg. inv. VF von F.

Beispiel: Sei P ein W-Maß für die Beschreibung der Schuhgrößen der Europäer und sei die dazugehörige Verteilungsfunktion gegeben. Die entsprechende varallg. inv. VF gibt dann beispielsweise für die Stelle 0.9 die Schuhgröße s an, so dass (mehr als??) 90% der Europäer eine Schuhgröße kleiner als s tragen.

10 Quantil

10.1 Definition via Verteilungsfunktion