

# 1 Matching

## 1.1 Definition

Sei  $G = (V, E)$  ein endlicher, ungerichteter Graph. Eine Menge  $M \subseteq E$  ist ein Matching, wenn es keine zwei Kanten in  $M$  gibt, welche inzident zum selben Knoten sind, also den selben Knoten enthalten.

**maximal matching** Ein Matching  $M$  heißt maximal matching (nicht erweiterbar), wenn es keine weitere Kante  $e \in E \setminus M$  gibt für welche  $\{e\} \cup M$  eine weiteres gültiges Matching wäre.

**maximum matching**  $M$  heißt maximum matching (größtmögliches Matching), falls  $M$  von allen möglichen Matchings die größte Kardinalität aufweist. Maximum matchings sind auch maximale Matchings und die Mächtigkeit eines Maximum matchings wird Matchingzahl genannt und als  $\nu(G)$  notiert.

**perfekte matchings**  $M$  ist perfekt, wenn  $2 \cdot |M| = V$  gilt, also jeder Knoten des Graphen einmal in den Kanten in  $M$  vorkommen. Perfekte Matchings sind maximum matchings und damit auch maximal.

## 1.2 Eigenschaften

Seien  $A$  und  $B$  zwei maximale matchings.

- Jede Kante in  $B \setminus A$  kann höchstens mit zwei Kanten in  $A \setminus B$  benachbart sein (Kanten nennt man benachbart, wenn sie einen Knoten teilen).  
*Eine Kante, die in  $B \setminus A$ , also in  $B$ , aber nicht in  $A$  vorkommt hat nur zwei Knoten und da  $A$  ein Matching ist, kann es in  $A$  nur maximal zwei Kanten geben, die inzident zu diesen Knoten sind (entweder zwei Kanten von denen jeweils eine inzident zu eine der beiden Knoten ist, oder nur einer der Knoten ist von  $A$  abgedeckt). Da es also nur maximal zwei Kanten in  $A$  geben kann, welche mit einer Kante in  $B \setminus A$  benachbart sein können, gilt dies auch für  $A \setminus B$  (die Menge wird dadurch ja nur kleiner, aber das gilt schon für die Größe).*
- Jede Kante in  $A \setminus B$  grenzt an (mindestens?) eine Kante in  $B \setminus A$ , weil  $B$  nicht erweiterbar ist.  
*Eine Kante, die in  $A \setminus B$  vorkommt, hat wieder zwei Knoten  $v, w$ . Es kann nicht sein, dass keiner von den beiden Knoten in einer Kante in  $B$  vorkommt, weil sonst könnte man  $B$  um die Kante  $\{v, w\}$  erweitern, was aber per Definition nicht möglich ist. Also werden entweder beide oder nur einer in Kanten von  $B$  berücksichtigt. So oder so ist mindestens ein Knoten in einer Kante in  $B$  drin und damit benachbart zur Anfangskante aus  $A \setminus B$ . Jetzt noch die Frage, warum in  $B \setminus A$ : Die Kanten, die jetzt  $v, w$  oder beide berücksichtigen können gar nicht Teil von  $A$  sein, da ja jeder Knoten nur einmal im Matching auftauchen darf.*

Es gilt also:

$$|A \setminus B| \leq 2 \cdot |B \setminus A| \quad (1)$$

$|B \setminus A|$  darf höchstens halb so klein sein, wie  $|A \setminus B|$ .

In wie fern liefern die Aussagen Hinweise zu den Größen der Mengen? Nach der zweiten Aussage gibt es zu jeder Kante in  $A \setminus B$  mindestens eine Nachbarkante in  $B \setminus A$ , jedoch können da Kanten auch mehrfach als angrenzende Kanten benutzt werden. Jedoch nach der ersten Aussage jede maximal doppelt.

Wenn das Gleichzeichen gilt, wird jeder Kante in  $A \setminus B$  eine Kante in  $B \setminus A$  zugeordnet, die noch zu genau einer anderen Kante benachbart ist. Da jede Kante benachbart mit mindestens einer ist,  $B \setminus A$  aber mindestens halb so groß sein muss, damit alle benachbart mit einer Kante aus der zweiten Menge sein können, ist das der worst case und ansonsten ist  $B \setminus A$  mehr als halb so groß. Wenn  $B \setminus A$  kleiner als halb so groß wie die linke Menge wäre, könnte nicht mehr jeder Kante eine andere als Nachbar zugeordnet werden, da jeder eine zugeordnet werden muss, aber für jeweils höchstens zwei Kanten nur ein Nachbar gemeinsam sein darf.

Jetzt da das geklärt ist, kann man schnell schreiben:

$$|A| = |(A \cap B) \cup (A \setminus B)| = |A \cap B| + |A \setminus B| \leq 2 \cdot |A \cap B| + 2 \cdot |B \setminus A| = 2 \cdot |(A \cap B) \cup (B \setminus A)| = 2 \cdot |B|,$$

also

$$|A| \leq 2 \cdot |B| \tag{2}$$

und da die Bezeichnungen  $A$  und  $B$  von Anfang an willkürlich gewählt waren, gilt das genauso auch anders herum.