Stochastik

Katrin Strassen, Robert Kummer

2019

Inhaltsverzeichnis

1 σ-Algebra

Sei Ω eine nichtleere Menge und $\mathcal{P}(\Omega)$ die Potenzmenge dieser Menge. Eine Menge von Teilmengen $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ (auch Mengensystem genannt) heißt σ-Algebra auf, oder über Ω, wenn sie die folgenden drei Bedingungen erfüllt:

1. $\mathcal{A}$ enthält die Grundmenge, also: $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $\mathcal{A}$ ist stabil bezüglich der Komplementbildung. Ist also $A \in \mathcal{A}$, dann ist auch $A^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A}$.
3. $\mathcal{A}$ ist stabil bezüglich abzählbarer Vereinigungen. Sind also die Mengen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ in $\mathcal{A}$ enthalten, so ist auch $\bigcup_{i=1}^{\infty}$ in $\mathcal{A}$ enthalten.

2 Wahrscheinlichkeitsmaß

Gegeben sei eine Menge Ω, die Ergebnismenge und eine σ-Algebra Σ auf dieser Menge (das Ereignissystem).

Dann heißt eine Abbildung

$$P : \Sigma \to [0, 1] \tag{1}$$

Wahrscheinlichkeitsmaß, wenn sie die folgenden Bedinungen erfüllt.

Normiertheit:

$$P(\Omega) = 1 \tag{2}$$

σ-Additivität: Für jede abzählbare Folge von paarweise disjunkten Mengen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ aus Σ gilt

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \tag{3}$$

Es gilt also, dass die Wahrscheinlichkeit für die Vereinigung zweier Ereignisse gleich groß ist wie die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten der Ereignisse.

3 Wahrscheinlichkeitsraum

Sei Ω eine beliebige **Ergebnis**menge. Sie umfasst alle möglichen Ergebnisse von einem Zufallsvorgang. Beim Würfeln ergibt sich also beispielsweise $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Nun wird Σ als eine σ-Algebra über Ω definiert. Die Elemente von Σ werden auch Ereignisse genannt.
Als letztes wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P : \Sigma \to [0, 1]$ benötigt. Das Tripel (Ω, Σ, P) ist dann ein Wahrscheinlichkeitsraum.

4 Messraum

Ein Tupel (Ω, Σ) heißt Messraum, wenn Ω eine beliebige Grundmenge ist und Σ eine σ-Algebra über Ω ist.

In der Stochastik wird der Messraum auch Ereignisraum genannt und ist einfach ein Wahrscheinlichkeitsraum ohne Wahrscheinlichkeitsmaß.

- Für jedes $x \in \Omega_0$ ist $K(x, \cdot)$ ein Maß auf (Ω_1, Σ_1).
- Für jedes $S \in \Sigma_1$ ist $K(\cdot, S)$ eine Σ_0-messbare Abbildung.