Stochastik

Katrin Strassen, Robert Kummer

2019

Inhaltsverzeichnis

1 Grundbegriffe

1.1 Urbild

Seien A und B zwei Mengen, $f : A \to B$ eine Funktion und M eine Teilmenge von B. Die Menge

$$f^{-1}(M) := \{x \in A \mid f(x) \in M\} \tag{1}$$

wird Urbild von M unter f genannt. Das Urbild ist damit ein Wert der Urbildfunktion, die jedem Element M der Potenzmenge $\mathcal{P}(B)$ das Urbild $f^{-1}(M)$ als Element der Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ zuordnet.

In eigenen Worten: Die Funktion f bildet Elemente von A auf Elemente von B ab. Das Urbild von einer Teilmenge $M \subset B$ ist die Teilmenge aller Werte aus A die durch die Funktion auf Werte in M abgebildet werden.

Für das Urbild von einelementigen Teilmengen schreibt man auch:

$$f^{-1}(\{b\}) := f^{-1}(b). \tag{2}$$

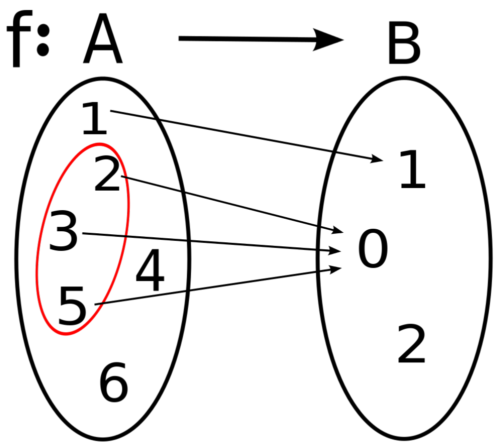

Abbildung 1: Beispiel: Das Urbild von $M = \{0\} \subset B$ ist $\{2, 3, 5\} \subset A$.

2 σ-Algebra

Sei Ω eine nichtleere Menge und $\mathcal{P}(\Omega)$ die Potenzmenge dieser Menge. Eine Menge von Teilmengen $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ (auch Mengensystem genannt) heißt σ-Algebra auf, oder über Ω, wenn sie die folgenden drei Bedingungen erfüllt:

1. $\mathcal{A}$ enthält die Grundmenge, also: $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $\mathcal{A}$ ist stabil bezüglich der Komplementbildung. Ist also $A \in \mathcal{A}$, dann ist auch $A^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A}$.
3. $\mathcal{A}$ ist stabil bezüglich abzählbarer Vereinigungen. Sind also die Mengen $A_1, A_2, A_3, \dots$ in $\mathcal{A}$ enthalten, so ist auch $\bigcup_{i=1}^{\infty}$ in $\mathcal{A}$ enthalten.

3 Wahrscheinlichkeitsmaß

Gegeben sei eine Menge Ω, die Ergebnismenge und eine σ-Algebra Σ auf dieser Menge (das Ereignissystem).

Dann heißt eine Abbildung

$$P : \Sigma \to [0, 1] \tag{3}$$

Wahrscheinlichkeitsmaß, wenn sie die folgenden Bedinungen erfüllt.

Normiertheit:

$$P(\Omega) = 1 \tag{4}$$

σ-Additivität: Für jede abzählbare Folge von paarweise disjunkten Mengen $A_1, A_2, A_3, \dots$ aus Σ gilt

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \tag{5}$$

Es gilt also, dass die Wahrscheinlichkeit für die Vereinigung zweier Ereignisse gleich groß ist wie die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten der Ereignisse.

4 Wahrscheinlichkeitsraum

Sei Ω eine beliebige **Ergebnis**menge. Sie umfasst alle möglichen Ergebnisse von einem Zufallsvorgang. Beim Würfeln ergibt sich also beispielsweise $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Nun wird Σ als eine σ-Algebra über Ω definiert. Die Elemente von Σ werden auch Ereignisse genannt.
Als letztes wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P : \Sigma \to [0, 1]$ benötigt. Das Tripel (Ω, Σ, P) ist dann ein Wahrscheinlichkeitsraum.

5 Messraum

Ein Tupel (Ω, Σ) heißt Messraum, wenn Ω eine beliebige Grundmenge ist und Σ eine σ-Algebra über Ω ist.
In der Stochastik wird der Messraum auch Ereignisraum genannt und ist einfach ein Wahrscheinlichkeitsraum ohne Wahrscheinlichkeitsmaß.
Eine Menge S wird messbare Menge genannt, wenn $S \in \Sigma$ gilt.

6 messbare Funktion

Seien (Ω_1, Σ_1) und (Ω_2, Σ_2) zwei Messräume. Eine Funktion $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ wird Σ_1-Σ_2-messbar genannt, wenn für alle $S_2 \in \Sigma_2$ gilt, dass das Urbild von S_2 unter f ein Element aus Σ_1 ist:

$$f^{-1}(S_2) \in \Sigma_1. \tag{6}$$

In eigenen Worten: Aus Wahrscheinlichkeitssicht: Die Funktion f bildet Ereignisse aus Ω_1 auf Ereignisse in Ω_2 ab. Wenn ich mir ein Ereignis S_2 aus Σ_2 nehme, also eine Teilmenge von Ω_2, müssen alle Ergebnisse aus Ω_1, die durch die Funktion f auf Ergebnisse von S_2 abgebildet werden, zusammen ein Element von Σ_1 sein.
Das muss für alle $S \in \Sigma_2$ gelten. Egal, welches Ereignis S aus Σ_2 betrachtet wird, das Urbild von S unter f muss ein Element von Σ_1 sein. Zu jedem Element S der σ-Algebra Σ_2 muss es ein Element von Σ_1 geben, das das Urbild von S unter f ist.

7 Zufallsvariable

7.1 Definition

Eine Zufallsvariable (ZV) ist eine messbare Funktion von einem Wahrscheinlichkeitsraum in einen Messraum. Seien also (Ω, Σ, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und (Ω', Σ') ein Messraum. Eine Σ-Σ'-messbare Funktion $X : \Omega \to \Omega'$ heißt dann eine Ω'-Zufallsvariable auf Ω.

Beispiel: Es soll das Experiment des zweimaligen Würfelns mit einem fairen Würfel betrachtet werden. Der dazugehörige Warscheinlichkeitsraum (Ω, Σ, P) sieht wie folgt aus:

- $\Omega = \{(1,1), (1,2), \ldots, (6,5), (6,6)\}$ ist die Ergebnismenge aller möglichen Ergebnisse
- $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$ ist die Potenzmenge von Ω
- P ist das Wahrscheinlichkeitsmaß. Da die Würfe unabhängig sein sollen, sollen alle 36 möglichen Ergebnisse gleichwahrscheinlich sein. Daher gilt: $P(\{n_1, n_2\}) = \frac{1}{36}$ für $n_1, n_2 \in \{1,2,3,4,5,6\}$

Es sollen nun zwei Zufallsvariablen definiert werden. Die ZV X_1 für das Würfelergebnis des ersten Würfels und eine andere X_2 für die Summe der beiden Augenzahlen.

- $X_1 : \Omega \to \mathbb{R}; \qquad (n_1, n_2) \mapsto n_1$
- $X_2 : \Omega \to \mathbb{R}; \qquad (n_1, n_2) \mapsto n_1 + n_2$

Dabei wurde für Σ' die borelsche σ-Algebra auf den reellen Zahlen gewählt.

7.2 Verteilung einer Zufallsvariablen

Sei X wieder eine ZV von (Ω, Σ, P) in den Ereignisraum (Ω', Σ'). Dann heißt die durch

$$P_X(A') := P(X^{-1}(A')) \qquad \text{für alle } A' \in \Sigma' \tag{7}$$

definierte Abbildung $P_X : \Sigma' \to [0,1]$ die Verteilung der Zufallsvariablen X unter P. Hierbei bezeichnet $X^{-1}(A')$ das Urbild von A' unter X, also das Ereignis $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A'\} \in \Sigma$.

In eigenen Worten: Die Wahrscheinlichkeit für ein Eregnis S' aus Σ' ist also die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $S = X^{-1}(S')$, das durch die ZV X auf S' abgebildet wird. Dazu braucht man auch die messbare Funktion X, da so die Urbilder für alle Ereignisse in Σ' immer in Σ liegen.