

Stochastik

Katrin Strassen, Robert Kummer

2019

Inhaltsverzeichnis

1	Grundbegriffe	1
1.1	Urbild	1
1.2	charakteristische Funktion	1
1.3	einfache Funktion	1
2	σ-Algebra	2
3	Wahrscheinlichkeitsmaß	2
4	Wahrscheinlichkeitsraum	3
5	Messraum	3
6	messbare Funktion	3
7	Zufallsvariable	3
7.1	Definition	3
7.2	Verteilung einer Zufallsvariablen	4

1 Grundbegriffe

1.1 Urbild

Seien A und B zwei Mengen, $f : A \rightarrow B$ eine Funktion und M eine Teilmenge von B . Die Menge

$$f^{-1}(M) := \{x \in A \mid f(x) \in M\} \quad (1)$$

wird Urbild von M unter f genannt. Das Urbild ist damit ein Wert der Urbildfunktion, die jedem Element M der Potenzmenge $\mathcal{P}(B)$ das Urbild $f^{-1}(M)$ als Element der Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ zuordnet.

In eigenen Worten: Die Funktion f bildet Elemente von A auf Elemente von B ab. Das Urbild von einer Teilmenge $M \subset B$ ist die Teilmenge aller Werte aus A die durch die Funktion auf Werte in M abgebildet werden.

Für das Urbild von einelementigen Teilmengen schreibt man auch:

$$f^{-1}(\{b\}) := f^{-1}(b). \quad (2)$$

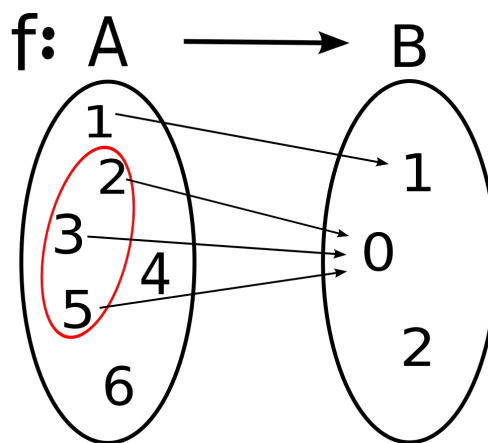


Abbildung 1: Beispiel: Das Urbild von $M = \{0\} \subset B$ ist $\{2, 3, 5\} \subset A$.

1.2 charakteristische Funktion

Gegeben sei eine bel. Grundmenge X und eine Teilmenge davon $T \subset X$. Die Funktion $\chi_T : X \rightarrow \{0, 1\}$ definiert durch

$$\chi_T(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in T \\ 0, & \text{falls } x \notin T \end{cases} \quad (3)$$

heißt charakteristische Funktion oder Indikatorfunktion der Menge T .

1.3 einfache Funktion

Sei (X, Σ) ein Messraum und V ein (reeller, oder komplexer) Banachraum. Eine Funktion $u : X \rightarrow V$ heißt einfache Funktion, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- u nimmt nur endlich viele Werte $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ an
- für alle $v \in V$ gilt $u^{-1}(\{v\}) \in \Sigma$, u ist also messbar

Wenn auf Σ noch ein Maß μ definiert ist, also ein Maßraum vorliegt, fordert man manchmal noch zusätzlich:

- $\mu(u^{-1}(V \setminus \{0\}))$ ist endlich

Die Forderungen sind äquivalent zu der Aussage, dass u die folgende Darstellung besitzt:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n v_i \cdot \chi_{E_i}(x), \quad (4)$$

wobei die $v_i \in V$ und χ_{E_i} die charakteristische Funktion der messbaren Menge $u^{-1}(\{v_i\}) \in \Sigma$.

In eigenen Worten: Egal welches Argument x man der Fkt u übergibt, es muss ein Wert aus der endlichen Menge raus kommen. Messbarkeit wird in Sek. 6 behandelt, wobei hier nur gefordert wird, dass die Urbilder der Enelementmengen in Σ liegen. Allgemein sollte das Kriterium für beliebige Teilmengen von V gelten. In der letzten Forderung sieht es doch so aus, als wäre allgemeine Messbarkeit gefordert, da das Urbild einer mehr als ein Element großen Teilmenge von V vom Maß angenommen werden und daher in Σ liegen muss. Die letzte Forderung sagt aus, dass das Maß vom Urbild des Raumes ohne Null endlich sein soll. Also das Maß von der Teilmenge aller Elemente aus X , die durch u auf $V \setminus \{0\}$ abgebildet werden, soll endlich sein. Mal sehen wofür man das fordert. Zu der äquivalenten Formulierung: Die charakteristische Funktion ist 1, wenn das x in der Teilmenge von X liegt, welche durch u auf v_i abgebildet wird. Zur Summe trägt nur das v_i bei, dessen Urbild unter u das Argument x enthält. Die Funktion nimmt damit nur Werte aus V an, da die charakteristische Funktion nur einmal anschlägt und zwar genau dann, wenn das x im Urbild von einem bestimmten v_i liegt. Da die Funktion eindeutig zuweist, liegt aber jedes x nur in einem Urbild und daher ist die charakteristische Funktion nur dann 1, wenn Urbild von einem best. v_i und x zusammenpassen.

2 σ -Algebra

Sei Ω eine nichtleere Menge und $\mathcal{P}(\Omega)$ die Potenzmenge dieser Menge. Eine Menge von Teilmengen $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ (auch Mengensystem genannt) heißt σ -Algebra auf, oder über Ω , wenn sie die folgenden drei Bedingungen erfüllt:

1. \mathcal{A} enthält die Grundmenge, also: $\Omega \in \mathcal{A}$
2. \mathcal{A} ist stabil bezüglich der Komplementbildung. Ist also $A \in \mathcal{A}$, dann ist auch $A^C \in \mathcal{A}$.
3. \mathcal{A} ist stabil bezüglich abzählbarer Vereinigungen. Sind also die Mengen A_1, A_2, A_3, \dots in \mathcal{A} enthalten, so ist auch $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ in \mathcal{A} enthalten.

3 Wahrscheinlichkeitsmaß

Gegeben sei eine Menge Ω , die Ergebnismenge und eine σ -Algebra Σ auf dieser Menge (das Ereignissystem).

Dann heißt eine Abbildung

$$P : \Sigma \rightarrow [0, 1] \quad (5)$$

Wahrscheinlichkeitsmaß, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt.

Normiertheit:

$$P(\Omega) = 1 \quad (6)$$

σ -Additivität: Für jede abzählbare Folge von paarweise disjunkten Mengen A_1, A_2, A_3, \dots aus Σ gilt

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \quad (7)$$

Es gilt also, dass die Wahrscheinlichkeit für die Vereinigung zweier Ereignisse gleich groß ist wie die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten der Ereignisse.

4 Wahrscheinlichkeitsraum

Sei Ω eine beliebige **Ergebnismenge**. Sie umfasst alle möglichen Ergebnisse von einem Zufallsvorgang. Beim Würfeln ergibt sich also beispielsweise $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Nun wird Σ als eine σ -Algebra über Ω definiert. Die Elemente von Σ werden auch Ereignisse genannt.

Als letztes wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P : \Sigma \rightarrow [0, 1]$ benötigt. Das Tripel (Ω, Σ, P) ist dann ein Wahrscheinlichkeitsraum.

5 Messraum

Ein Tupel (Ω, Σ) heißt Messraum, wenn Ω eine beliebige Grundmenge ist und Σ eine σ -Algebra über Ω ist.

In der Stochastik wird der Messraum auch Ereignisraum genannt und ist einfach ein Wahrscheinlichkeitsraum ohne Wahrscheinlichkeitsmaß.

Eine Menge S wird messbare Menge genannt, wenn $S \in \Sigma$ gilt.

6 messbare Funktion

Seien (Ω_1, Σ_1) und (Ω_2, Σ_2) zwei Messräume. Eine Funktion $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ wird Σ_1 - Σ_2 -messbar genannt, wenn für alle $S_2 \in \Sigma_2$ gilt, dass das Urbild von S_2 unter f ein Element aus Σ_1 ist:

$$f^{-1}(S_2) \in \Sigma_1. \quad (8)$$

In eigenen Worten: Aus Wahrscheinlichkeitssicht: Die Funktion f bildet Ergebnisse aus Ω_1 auf Ergebnisse in Ω_2 ab. Wenn ich mir ein Ereignis S_2 aus Σ_2 nehme, also eine Teilmenge von Ω_2 , müssen alle Ergebnisse aus Ω_1 , die durch die Funktion f auf Ergebnisse von S_2 abgebildet werden, zusammen ein Element von Σ_1 sein.

Das muss für alle $S \in \Sigma_2$ gelten. Egal, welches Ereignis S aus Σ_2 betrachtet wird, das Urbild von S unter f muss ein Element von Σ_1 sein. Zu jedem Element S der σ -Algebra Σ_2 muss es ein Element von Σ_1 geben, das das Urbild von S unter f ist.

7 Zufallsvariable

7.1 Definition

Eine Zufallsvariable (ZV) ist eine messbare Funktion von einem Wahrscheinlichkeitsraum in einen Messraum. Seien also (Ω, Σ, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und (Ω', Σ') ein Messraum. Eine Σ - Σ' -messbare Funktion $X : \Omega \rightarrow \Omega'$ heißt dann eine Ω' -Zufallsvariable auf Ω .

Beispiel: Es soll das Experiment des zweimaligen Würfels mit einem fairen Würfel betrachtet werden. Der dazugehörige Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Σ, P) sieht wie folgt aus:

- $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$ ist die Ergebnismenge aller möglichen Ergebnisse
- $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$ ist die Potenzmenge von Ω
- P ist das Wahrscheinlichkeitsmaß. Da die Würfe unabhängig sein sollen, sollen alle 36 möglichen Ergebnisse gleich wahrscheinlich sein. Daher gilt: $P(\{n_1, n_2\}) = \frac{1}{36}$ für $n_1, n_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Es sollen nun zwei Zufallsvariablen definiert werden. Die ZV X_1 für das Würfelergebnis des ersten Würfels und eine andere X_2 für die Summe der beiden Augenzahlen.

- $X_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \quad (n_1, n_2) \mapsto n_1$
- $X_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \quad (n_1, n_2) \mapsto n_1 + n_2$

Dabei wurde für Σ' die borelsche σ -Algebra auf den reellen Zahlen gewählt.

7.2 Verteilung einer Zufallsvariablen

Sei X wieder eine ZV von (Ω, Σ, P) in den Ereignisraum (Ω', Σ') . Dann heißt die durch

$$P_X(A') := P(X^{-1}(A')) \quad \text{für alle } A' \in \Sigma' \quad (9)$$

definierte Abbildung $P_X : \Sigma' \rightarrow [0, 1]$ die Verteilung der Zufallsvariablen X unter P . Hierbei bezeichnet $X^{-1}(A')$ das Urbild von A' unter X , also das Ereignis $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A'\} \in \Sigma$.

In eigenen Worten: Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis S' aus Σ' ist also die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $S = X^{-1}(S')$, das durch die ZV X auf S' abgebildet wird. Dazu braucht man auch die messbare Funktion X , da so die Urbilder für alle Ereignisse in Σ' immer in Σ liegen.