Stochastik

Katrin Strassen, Robert Kummer

2019

Inhaltsverzeichnis

1 Grundbegriffe

1.1 Urbild

Seien A und B zwei Mengen, $f : A \to B$ eine Funktion und M eine Teilmenge von B. Die Menge

$$f^{-1}(M) := \{x \in A \mid f(x) \in M\} \tag{1}$$

wird Urbild von M unter f genannt. Das Urbild ist damit ein Wert der Urbildfunktion, die jedem Element M der Potenzmenge $\mathcal{P}(B)$ das Urbild $f^{-1}(M)$ als Element der Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ zuordnet.

In eigenen Worten: Die Funktion f bildet Elemente von A auf Elemente von B ab. Das Urbild von einer Teilmenge $M \subset B$ ist die Teilmenge aller Werte aus A die durch die Funktion auf Werte in M abgebildet werden.

Für das Urbild von einelementigen Teilmengen schreibt man auch:

$$f^{-1}(\{b\}) := f^{-1}(b). \tag{2}$$

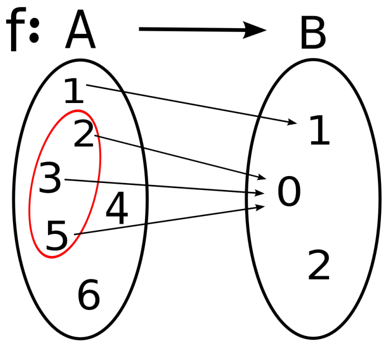

Abbildung 1: Beispiel: Das Urbild von $M = \{0\} \subset B$ ist $\{2, 3, 5\} \subset A$.

2 σ-Algebra

Sei Ω eine nichtleere Menge und $\mathcal{P}(\Omega)$ die Potenzmenge dieser Menge. Eine Menge von Teilmengen $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ (auch Mengensystem genannt) heißt σ-Algebra auf, oder über Ω, wenn sie die folgenden drei Bedingungen erfüllt:

1. $\mathcal{A}$ enthält die Grundmenge, also: $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $\mathcal{A}$ ist stabil bezüglich der Komplementbildung. Ist also $A \in \mathcal{A}$, dann ist auch $A^C \in \mathcal{A}$.
3. $\mathcal{A}$ ist stabil bezüglich abzählbarer Vereinigungen. Sind also die Mengen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ in $\mathcal{A}$ enthalten, so ist auch $\bigcup_{i=1}^{\infty}$ in $\mathcal{A}$ enthalten.

3 Wahrscheinlichkeitsmaß

Gegeben sei eine Menge Ω, die Ergebnismenge und eine σ-Algebra Σ auf dieser Menge (das Ereignissystem).

Dann heißt eine Abbildung

$$P : \Sigma \to [0, 1] \tag{3}$$

Wahrscheinlichkeitsmaß, wenn sie die folgenden Bedinungen erfüllt.

Normiertheit:

$$P(\Omega) = 1 \tag{4}$$

σ-Additivität: Für jede abzählbare Folge von paarweise disjunkten Mengen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ aus Σ gilt

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \tag{5}$$

Es gilt also, dass die Wahrscheinlichkeit für die Vereinigung zweier Ereignisse gleich groß ist wie die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten der Ereignisse.

4 Wahrscheinlichkeitsraum

Sei Ω eine beliebige **Ergebnis**menge. Sie umfasst alle möglichen Ergebnisse von einem Zufallsvorgang. Beim Würfeln ergibt sich also beispielsweise $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Nun wird Σ als eine σ-Algebra über Ω definiert. Die Elemente von Σ werden auch Ereignisse genannt.
Als letztes wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P : \Sigma \to [0, 1]$ benötigt. Das Tripel (Ω, Σ, P) ist dann ein Wahrscheinlichkeitsraum.

5 Messraum

Ein Tupel (Ω, Σ) heißt Messraum, wenn Ω eine beliebige Grundmenge ist und Σ eine σ-Algebra über Ω ist.
In der Stochastik wird der Messraum auch Ereignisraum genannt und ist einfach ein Wahrscheinlichkeitsraum ohne Wahrscheinlichkeitsmaß.
Eine Menge S wird messbare Menge genannt, wenn $S \in \Sigma$ gilt.

6 messbare Funktion

Seien (Ω_1, Σ_1) und (Ω_2, Σ_2) zwei Messräume. Eine Funktion $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ wird Σ_1-Σ_2-messbar genannt, wenn für alle $S_2 \in \Sigma_2$ gilt, dass das Urbild von S_2 unter f ein Element aus Σ_1 ist:

$$f^{-1}(S_2) \in \Sigma_1. \tag{6}$$

In eigenen Worten: Aus Wahrscheinlichkeitssicht: Die Funktion f bildet Ereignisse aus Ω_1 auf Ereignisse in Ω_2 ab. Wenn ich mir ein Ereignis S_2 aus Σ_2 nehme, also eine Teilmenge von Ω_2, müssen alle Ergebnisse aus Ω_1, die durch die Funktion f auf Ergebnisse von S_2 abgebildet werden, zusammen eine Teilmenge von $Omega_1$ und damit eine Element von Σ_1 sein.
Das muss für alle $S \in \Sigma_2$ gelten. Egal, welches Ereignis S aus Σ_2 betrachtet wird, das Urbild von S unter f muss ein Element von Σ_1 sein.