Analiza numeryczna (M) - pracownia 1

Implementacja i analiza metody obliczania logarytmu zaproponowanej w [1]

Maksymilian Polarczyk
Prowadzący: Paweł Woźny

Wrocław, 18 listopada 2018

Program zaimplementowano z wykorzystaniem języka **Julia**, w pliku `program.jl`. Wykresy zostały narysowane przy pomocy biblioteki **Plots** i razem z eksperymentami zamieszczone są w pliku `program.ipynb`.

1 Wstęp

Awad H. Al-Mohy przedstawił w swojeje pracy[1] udoskonaloną pod względem numerycznym metodę Briggsa obliczania logarytmu dla liczb ze zbioru $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Pierwotna metoda Henrego Briggsa opiera się na własności logarytmu $\log x = 2 \log x^{\frac{1}{2}}$ oraz przybliżeniu pierwszego rzędu $\log(1+x) \approx x$, które jest dobre dla x bliskich zera. Problem liczenia $\log a$ sprowadził więc, korzystając z powyższych własności, do problemu iteracyjnego liczenia wyrażenia $2^k log(a^{1/2^k} - 1)$. Wadą tej metody jest podatność na zjawisko utraty cyfr znaczących w arytmetyce zmiennopozycyjnej podczas obliczania kluczowej wartości

$$(a^{1/2^k} - 1) \tag{1}$$

H. Al-Mohy proponuje w swojej pracy przekształcenie tego wyrażenia, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia, do postaci:

$$a^{1/2^k} - 1 = \frac{a-1}{\prod_{i=1}^{k}(1 + a^{1/2^i})} \tag{2}$$

2 Uwarunkowanie zadania

Wiemy, że wskaźnik uwarunkowania zadania obliczania wartości funkcji zmiennej zespolonej $f_k(z) = z^{1/2^k} - 1$ w punkcie z można obliczyć korzystając ze wzoru:

$$cond(f_k, z) = \frac{|zf_k'(z)|}{|f_k(z)|} \tag{3}$$

Korzystając z oszacowań H. Al-Mohy-ego w [1] par. 3 otrzymujemy:

$$cond(f_k, z) \geqslant \tfrac{1}{(\log\rho^2+\theta^2)^{1/2}} \text{ dla } z = \rho e^{i\theta}$$

Z powyższego wynika, że współczynnik uwarunkowania może być duży, gdy ρ i θ są wystarczająco blisko odpowiednio 1 i 0, natomiast nie zależy on od doboru k [1] par. 3.

3 Algorytmy

3.1 Wersja Briggsa

Algorytm 1. *Obliczanie $log(x)$ ze wzoru (1)*

```
briggs1(x, k):
        for i = 1:k
                a = a^(1/2)
        r = (a - 1)
        return r * (2^k)
```

Algorytm 1 korzysta z oryginalnej postaci Briggsa (1) do wyliczenia wartości $\log(x)$. Procedura `briggs1(x, k)` zwraca liczbę będącą przybliżeniem wartości $\log x$. Jest ona jednak podatna na zjawisko utraty cyfr znaczących. Warunkiem koniecznym do wystąpienia utraty cyfr znaczących przy odejmowaniu dwóch liczb λ_1 i λ_2 jest $\frac{|\lambda_1 - \lambda_2|}{|\lambda 1|} \ll 1$. Zauważmy, że $\lim\limits_{k\to\infty} a^{1/2^k} = 1$. W związku z powyższym, błąd numeryczny przy liczeniu r może wystąpić jeśli $a \approx 1$, albo k jest na tyle duże, że $a^{1/2^k} \approx 1$. Można więc przypuszczać, że dla k większych od pewnego k_0 algorytm 1 zacznie stopniowo odbiegać od wartości dokładnej tracąc na precyzji. Eksperymenty 1-3 potwierdzają tę hipotezę.

3.2 Wersja H. Al-Mohy

Algorytm 2. *Obliczanie $log(x)$ ze wzoru (2)*

```
briggs2(x, k):
        k2 = k
        if arg(a) >= pi/2
                a, k2 = a^(1/2), k-1
        z0, a = a-1, a^(1/2)
        r = 1 + a
        for j = 1:k2-1
                a = a^(1/2)
                r = r(1 + a)
        r = (z0 / r)
        return r * (2^k)
```

Algorytm drugi korzysta z obserwacji, jakie poczynił Awad H. Al-Mohy w swojej pracy aby uniknąć zjawiska utraty cyfr znaczących. Jeśli a należy do $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, to iloczyn w mianowniku wyrażenia (2) jest ściśle dodatni, w związku z czym nie może nastąpić zjawisko utraty cyfr znaczących w arytmetyce zmiennopozycyjnej. Jeśli natomiast a jest liczbą zespoloną, formuła ta może zostać obliczona w postaci biegunowej:

$$a = \rho e^{i\theta}, \text{ gdzie } \rho = |a| \text{ oraz } \theta = arg(a), 0 < |\theta| < \pi$$

Badając zachowanie mianownika (2) w zależności od różnych ρ i θ, zauważyć można, że jeśli $|\theta| < \frac{\pi}{2}$, to korzystając ze standardowej formuły mnożenia dwóch liczb zespolonych $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$ nie występuje zjawisko utraty cyfr znaczących przy odejmowaniu [1] par. 2. Aby rozszerzyć ten fakt na dowolną liczbę zespoloną której $|arg(a)| < \pi$ należy policzyć najpierw $a^{1/2}$, dzięki czemu otrzymamy liczbę leżącą na prawej połowie płaszczyzny zespolonej (ponieważ nowy kąt θ jest o połowę mniejszy od poprzedniego). Zakładając numeryczną poprawność znajdywania pierwiastka liczby zespolonej otrzymujemy formułę odporną na zjawisko utraty cyfr znaczących (analiza i dowód: [1] par. 2).

4 Eksperymenty

4.1 Eksperyment 1 - porównanie błędów względnych obu algorytmów w pobliżu miejsc poza dziedziną ($\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$)

W eksperymencie generujemy liczby zespolone, o części rzeczywistej i zespolonej typu Float64, które znajdują się blisko krańców dziedziny funkcji (1). W tym celu posłużymy się funkcją `epsilons()` z opcjonalnym parametrem `maxk=54` oraz funkcją `complexMaxRelErr(z, err)` zwracającą błąd względny dwóch liczb zespolonych:

$$complexMaxRelErr(z, err) = \begin{cases} \frac{|z-exact|}{|exact|}, & \text{dla } |exact| \neq 0, \\ |z|, & \text{dla } |exact| = 0. \end{cases} \tag{4}$$

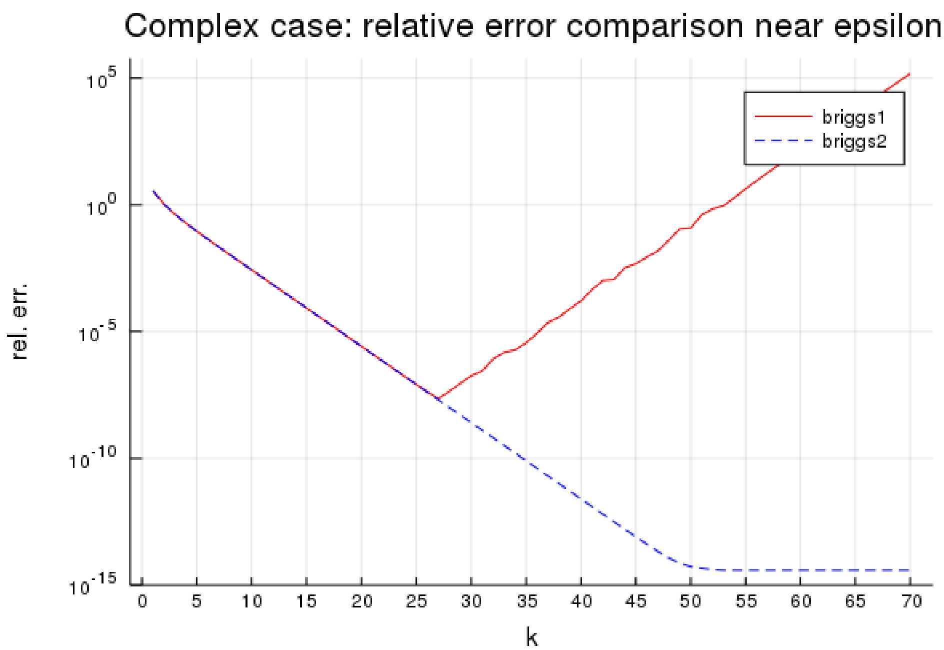
Aby dobrze przetestować nasz algorytm, sprawdzamy jak zachowuje się on dla małych, średnich i dużych zakresów liczbowych. W związku z tym, wewnątrz procedury `epsilons()` w pliku `program.jl` rozpatrujemy każdą parę zakresów z tablicy ϵ. Dla każdego zakresu generujemy odpowiednią ilość próbek w otoczeniu $[-\epsilon, +\epsilon]$. Następnie uruchamiamy oba algorytmy dla każdej próbki z tego otoczenia, zapamiętując jednocześnie maksymalny dotychczasowy błąd względny dla algorytmu 1 i 2 na tej parze zakresów(za wartość dokładną przyjmujemy wartość funkcji bibliotecznej $log(z)$). Dla ilości iteracji zaproponowanej przez Briggsa(k=54) otrzymujemy następujące maksymalne błędy względne:

$\Re$ \ $\Im$	1.00e-15	1.00e-07	1.00e+02	1.00e+09	1.00e+17
briggs1():					
1.00e-15	+5.48e-02	+1.16e-01	+9.30e-01	+1.99e-01	+1.09e-01
1.00e-07	+1.17e-01	+1.23e-01	+9.30e-01	+1.99e-01	+1.09e-01
1.00e+02	+1.00e+00	+1.00e+00	+9.81e-01	+1.99e-01	+1.09e-01
1.00e+09	+2.00e-01	+2.00e-01	+2.00e-01	+1.99e-01	+1.09e-01
1.00e+17	+1.09e-01	+1.09e-01	+1.09e-01	+1.09e-01	+1.01e-01
briggs2():					
1.00e-15	+1.86e-15	+1.20e-15	+3.08e-15	+3.54e-15	+3.80e-15
1.00e-07	+1.23e-15	+1.46e-15	+2.99e-15	+3.66e-15	+3.80e-15
1.00e+02	+3.00e-15	+3.56e-15	+3.09e-15	+3.80e-15	+3.79e-15
1.00e+09	+4.49e-15	+4.48e-15	+4.06e-15	+3.63e-15	+4.26e-15
1.00e+17	+4.25e-15	+4.25e-15	+4.25e-15	+4.44e-15	+3.70e-15

Można zauważyć, że algorytm 2 nie ma problemu z wartościami na krańcach swojej dziedziny. Pierwszy algorytm jest niestety obarczony bardzo dużym błędem. Zastanawiające jest, w jaki sposób Henry Briggs otrzymał dokładność do 14 cyfr w swoich tablicach logarytmów. Autor wyjaśnia, że Briggs liczył pierwiastki z dokładnością do 30 cyfr dziesiętnych. W następnym eksperymencie analizujemy dokładniej zależność błędu względnego algorytmów i liczby iteracji.

4.2 Eksperyment 2 - porównanie błędów względnych obu algorytmów dla różnych wartości k na liczbach zespolonych.

W tym eksperymencie porównujemy dokładność obu algorytmów dla coraz większych ilości iteracji operując na typie Float64. Sprawdzamy działanie algorytmu w otoczeniu $\epsilon = 10^1$ od punktu $(0 + 0i)$.

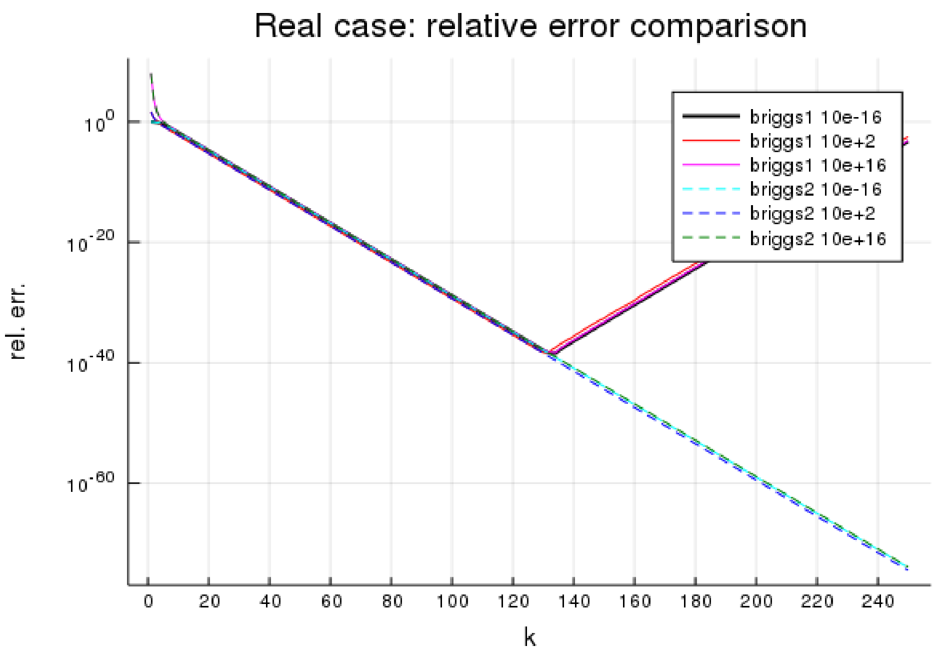


Rysunek 1: Błąd względny obu algorytmów dla liczb zespolonych i rosnących k

Wykres 1 informuje nas o bardzo ważnej własności algorytmu 1 – istenieje pewna graniczna wartość k, dla której każda kolejna iteracja coraz bardziej oddala nas od dokładnego wyniku. Co więcej, algorytm 1 jest w stanie obliczyć nie więcej połowę poprawnych cyfr znaczących w porównaniu do algorytmu 2.

4.3 Eksperyment 3 - błędy względne algorytmów dla precyzji 256-bitowej i zmiennych rzeczywistych.

Eksperyment 3 ilustruje zachowanie obu algorytmów na zmiennych rzeczywistych z zakresów odpowiednio $[10^{-16}, 10^2, 10^16]$ na 100 próbkach i k=200. Zakresy zostały dobrane tak, aby przetestować działanie na wartościach bardzo małych, średnich i bardzo dużych.



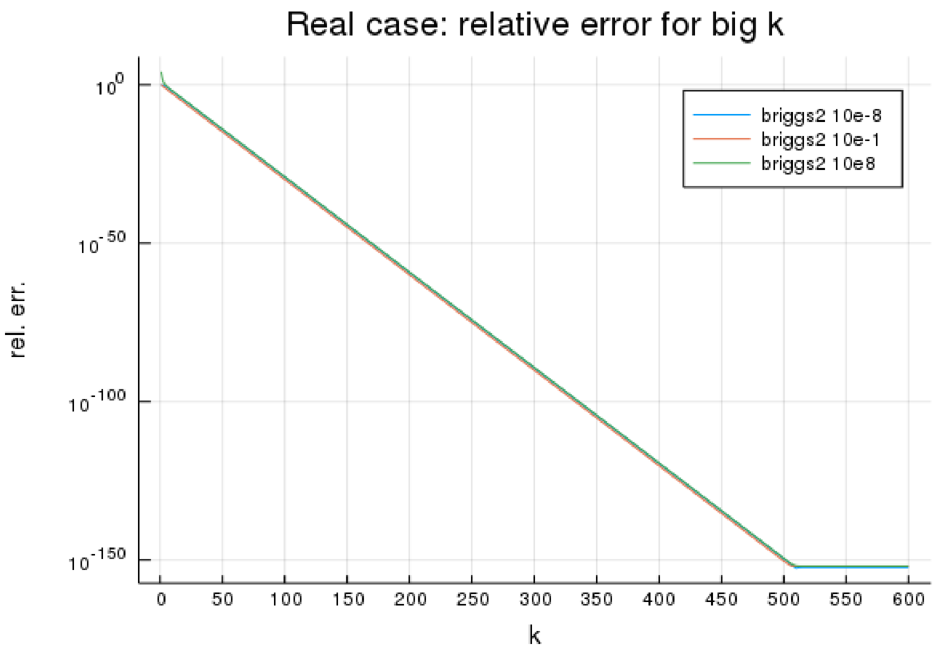
Rysunek 2: Błąd względny obu algorytmów dla liczb rzeczywistych w arytmetyce wysokiej precyzji

Znów widać przewagę algorytmu 2. Przy czterokrotnym zwiększeniu precyzji algorytm 1 zwiększył swoją dokładność około czterokrotnie, z kolei algorytm 2 – ponad $5,5$–krotnie (przez dokładność rozumiemy ilość poprawnych znaczących cyfr dziesiętnych).

Z wykresu można też wywnioskować, że obie metody nie wymagają odpowiedniego dobierania liczby iteracji k w zależności od argumentu x. Oba algorytmy posiadają tę samą właściwość: zarówno dla dużych jak i małych argumentów rząd błędu względnego dla ustalonych k jest taki sam.

4.4 Eksperyment 4 - monotoniczność wartości błędu względnego algorytmu 2 dla dużych k i argumentów z $\Re$.

Ostatni eksperyment prezentuje zbieżność algorytmu 2 dla dużych k i stabilność metody liczenia logarytmu za pomocą ulepszonej metody Briggsa.



Rysunek 3: Błąd względny obu algorytmów dla liczb rzeczywistych w arytmetyce wysokiej precyzji

Obliczenia wykonywane zostały na liczbach typu BigFloat o precyzji 512 bitów. Z danych na wykresie 3 wynika, że algorytm 2 jest zbieżny w tempie liniowym. Co więcej, zaletą drugiej wersji algorytmu jest jego zachowanie dla bardzo dużych k: kolejne przybliżenia po osiągnięciu granicznej dokładności nie powodują utraty dotychczasowego przybliżenia, jak miało to miejsce w wypadku algorytmu 2.

5 Wnioski

W arytmetyce zmiennopozycyjnej pewne matematycznie równoznaczne wyrażenia mogą nie być numerycznie tożsame. W związku z tym różne matematyczne sformułowania tego samego problemu mogą skutkować mniej lub bardziej dokładnymi i stabilnymi algorytmami numerycznymi.

Metoda zaprezentowana przez Awada H. Al-Mohy-ego wykazuje się dużą dokładnością i odpornością na błędy numeryczne. W przeciwieństwie do oryginalnej metody z każdą iteracją produkuje nie gorsze przybliżenia. Dużymi zaletami algorytmu są jego poprawność dla liczb zespolonych, liniowa asymptotyczna złożoność(zakładając stały czas wyznaczania pierwiastka i mnożenia liczb zespolonych) oraz prostota implementacji. Wadą może być natomiast konieczność liczenia pierwiastka, który nieoptymalnie zaimplementowany może mocno zaburzać wynik. Należy pamiętać, że o ile udoskonalony algorytm pozwala na uniknięcie problemu utraty cyfr znaczących przy odejmowaniu, to nie rozwiązuje on problemu złego uwarunkowania zadania w pobliżu punktu $(1 + 0i)$, gdyż jest to cecha zadania, a nie metody. Co więcej do dziedziny algorytmu nie należą liczby leżące na ujemnej półosi rzeczywistej, więc aby obliczyć wartości funkcji $\log(z)$ dla całej płaszczyzny zespolonej trzeba posiłkować się innymi metodami: algorytm Feynmana, rozwinięcie w szereg funkcji $artanh(z)$, przybliżanie za pomocą średnich arytmetycznych i geometrycznych, przybliżanie za pomocą szeregu harmonicznego i stałej Eulera-Mascheroniego lun innych. Algorytm sprawdza się natomiast bardzo dobrze dla dodatnich liczb rzeczywistych — najczęściej wykorzystywanych wartości.

Literatura

[1] Awad H. Al-Mohy, *A more accurate Briggs method for the logarithm*, Numerical Algorithms (2011), w druku, DOI: 10.1007/s11075-011-9496-z.