Analiza numeryczna (M) - pracownia 2
Interpolacja krzywych 2D

Maksymilian Polarczyk
Prowadzący: Paweł Woźny

Wrocław, 5 grudnia 2018

Program zaimplementowano z wykorzystaniem języka **Julia**, w pliku `program.jl`. Wykresy zostały narysowane przy pomocy biblioteki **Plots** i razem z eksperymentami zamieszczone są w pliku `program.ipynb`.

1 Wstęp

Interpolacja kształtów jest ważnym zagadnieniem w grafice komputerowej. Krzywa taka dla zadanych węzłów x musi przyjmować zadane wartości a dodatkowo powinna w gładki i ciągły sposób przechodzić przez kolejne punkty w przestrzeni 2D. Istnieje wiele metod interpolowania takich krzywych. W tej pracy zajmujemy się trzema(czterema?) z nich: podziałem na ciągi punktów i interpolowania wielomianami, interpolowanie za pomocą funkcji sklejanych, za pomocą funkcji sklejanych parametrycznych(oraz Dyskretna Transformata Fouriera osobno dla węzłów i wartości funkcji ?).

2 Interpolacja Wielomianowa

Wiemy, że aby interpolować funkcję f w punktach $\{x_0, x_1, ...x_n\}$

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, x_1, ..., x_n] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j) \tag{1}$$

gdzie iloraz $f[x_0, x_1, ..., x_n]$ to uogólniony iloraz różnicowy spełniający zależności:

$$f[x_k] = f(x_k)$$

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \tag{2}$$

Korzystając z powyższej własności można zaimplementować algorytm obliczania kolejnych wartości ilorazu różnicowego:

Algorytm 1. *Obliczanie ilorazów różnicowych*

```
for i in 0:n
        d[i] := y[i]
for j in 1:n
  for i in n:j
    d[i] := (d[i] - d[i-1])/(x[i]-x[i-j])
```

2.1 Podział na ciągi węzłów

Głównym problemem w interpolacji wielomianowej jest jej niedokładność na końcach przedziałów przy dużej ilości węzłów interpolacyjnych (efekt Rungiego). Aby Móc dobrze przybliżać dowolny kształt 2D musimy podzielić wejściowy ciąg węzłów na podciągi o monotonnie zmiennych wartościach x. Dodatkowo, w wypadku pionowych linii mamy bardzo duże zmiany wartości funkcji interpolującej dla małych zmian x. Efekt ten powoduje, że często funkcja na danym przedziale posiada bardzo ostre i długie "kolce".

2.2 Krzywe sklejane

Jednym z możliwych rozwiązań problemu jest interpolacja naturalną funkcją sklejaną III stopnia. Dla danej liczby naturalnej n, danych węzłów $x_0, x_1, \ldots, x_n \quad (a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b)$ i danej funkcji f naturalną funkcją sklejaną interpolującą III stopnia nazywamy s, określoną w przedziale $[a, b]$ i spełniającą następujące warunki:

1. s, s', s'' są ciągłe w $[a, b]$
2. w każdym z przedziałów $[x_{k-1}, x_k] \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$ funkcja s jest wielomianem stopnia co najwyżej trzeciego
3. $s(x_k) = f(x_k) \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$
4. $s''(a) = s''(b) = 0$

Z (TODO referencja kincaid) wiemy, że naturalna funkcja sklejana III stopnia wyraża się wzorem:

$$\begin{aligned} s_k(x) = \frac{1}{6h_k} M_{k-1}(x_k - x)^3 + \frac{1}{6h_k} M_k(x - x_{k-1})^3) + \\ \left(\frac{y_{k-1}}{h_k} - \frac{1}{6} M_{k-1} h_k \right)(x_k - x) + \left(\frac{y_k}{h_k} - \frac{1}{6} M_k h_k \right)(x - x_{k-1}) \end{aligned} \tag{3}$$

Gdzie $M_k = s'' x_k, \quad h_k = x_k - x_{k-1}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$
Do zastosowania wzoru (3) potrzebujemy obliczyć współczynniki M_k, będące

drugą pochodną funkcji sklejanej w węzłach interpolacji. Wyznacza się je z następującego układu równań:

$$\lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1-\lambda_k) M_{k+1} = 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}] \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \quad (4)$$

gdzie $\lambda_k = \frac{h_k}{h_k - h_{k+1}}, \quad h_k = x_k - x_{k-1}$

3 Wnioski

Literatura