เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions)

- เงื่อนไขขอบเขต คือสมการที่บ่งถึงพฤติกรรมของ สนาม และความหนาแน่นฟลักซ์ ณ รอยต่อของตัวกลางสองตัว ซึ่ง ณ รอยต่อนี้ ชุดสมการของแมกซ์เวลล์ไม่สามารถนำมาวิเคราะห์ปัญหาได้โดยตรง

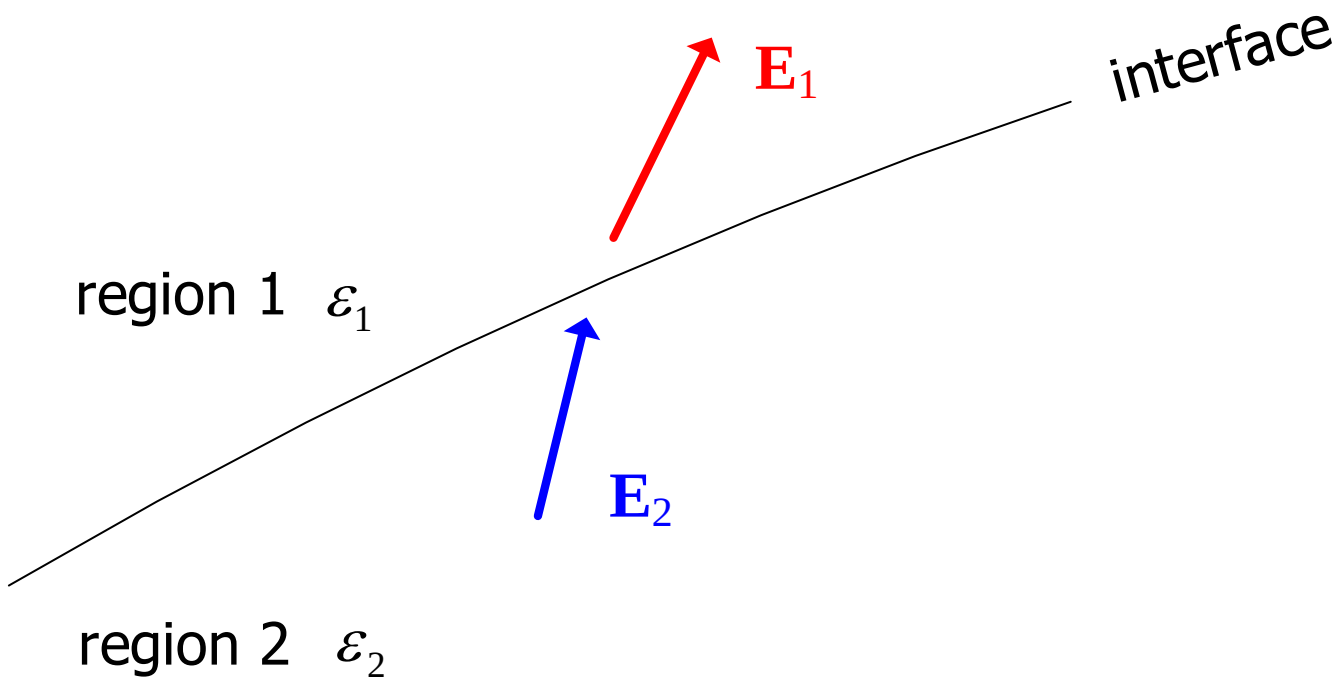
เงื่อนไขขอบเขตสำหรับสนามไฟฟ้า

พิจารณาบริเวณสองบริเวณ ดังแสดงในรูป 1

บริเวณที่หนึ่งบรรจุด้วยวัสดุไดอิเล็กทริกที่มีสภาพยอมเท่ากับ ε_1

บริเวณที่สองบรรจุด้วยวัสดุไดอิเล็กทริกที่มีสภาพยอมเท่ากับ ε_2

สนามไฟฟ้า ณ รอยต่อ ในตัวกลาง 1 และตัวกลาง 2 มีค่าเท่ากับ $\mathbf{E}_1$ และ $\mathbf{E}_2$ ตามลำดับ


$\mathbf{E}_1$
interface
region 1 ε_1
$\mathbf{E}_2$
region 2 ε_2

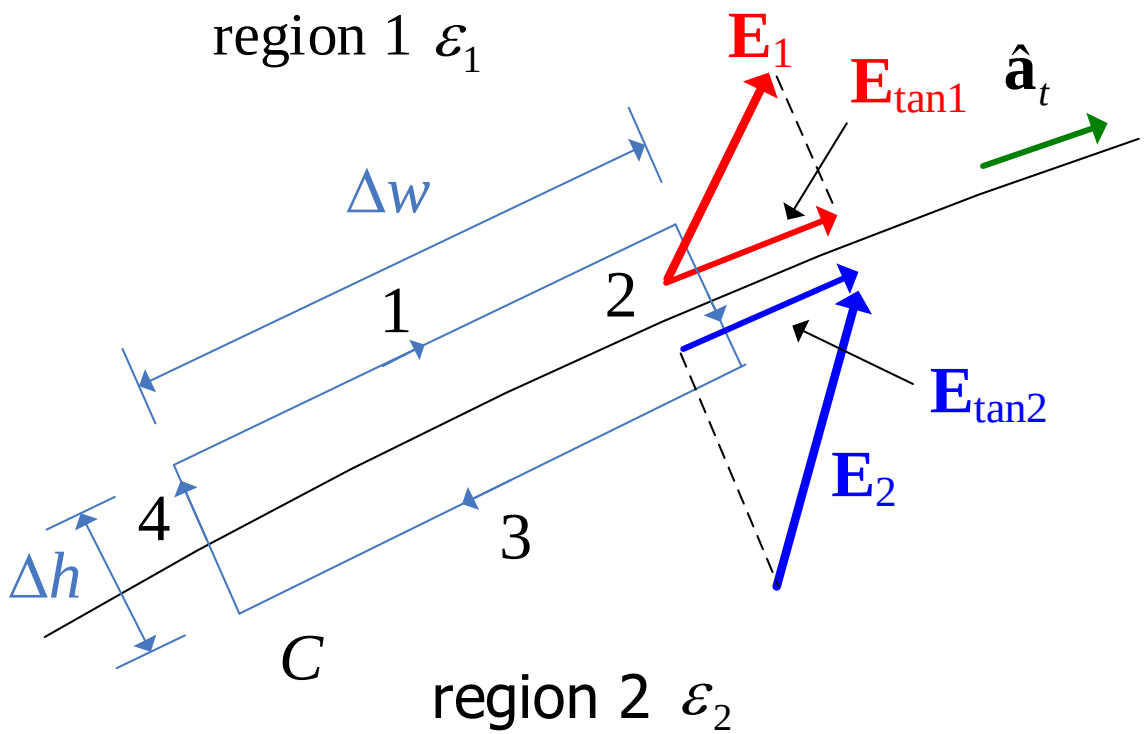
รูป 1

ความสัมพันธ์ของสนามไฟฟ้า ณ รอยต่อ ในตัวกลางทั้งสองตัว สามารถหาได้โดยใช้ กฎของการอนุรักษ์ของพลังงานในสนามสถิต กับรูป 1

กฎของการอนุรักษ์นี้มีว่า

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \qquad (1)$$

โดยที่ C คือ วงปิด (closed loop) ดังแสดงในรูป 2


region 1 ε_1
$\mathbf{E}_1$
$\mathbf{E}_{\tan 1}$
$\hat{\mathbf{a}}_t$
Δw
1
2
$\mathbf{E}_{\tan 2}$
$\mathbf{E}_2$
4
3
Δh
C
region 2 ε_2

รูป 2

กระจายด้านซ้ายของ (1) ได้

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \left(\int_1 + \int_2 + \int_3 + \int_4 \right) \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \qquad (2)$$

ผลการหาปริพันธ์ในเส้นทาง 2 และ 4 เป็น 0 เนื่องจาก Δh เข้าใกล้ศูนย์ สมการ (2) จึงลดรูปเป็น

$$\int_1 \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_3 \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} = 0 \qquad (3)$$

เมื่อ $\mathbf{E}_1$ และ $\mathbf{E}_2$ คือ สนามไฟฟ้า ณ รอยต่อในตัวกลาง 1 และ 2 ตามลำดับ

เมื่อระยะทาง Δw มีค่าน้อยๆ สนามไฟฟ้าจะมีค่าคงที่ ทำให้ได้

$$\mathbf{E}_1 \cdot \int_1 d\mathbf{l} + \mathbf{E}_2 \cdot \int_3 d\mathbf{l} = 0 \qquad (4)$$

เนื่องจาก $d\mathbf{l}$ ในเส้นทางที่ 1 มีทิศเดียวกันกับ $\hat{\mathbf{a}}_t$

แต่ $d\mathbf{l}$ ในเส้นทางที่ 3 มีทิศตรงกันข้ามกับ $\hat{\mathbf{a}}_t$ สมการ (4) จึงเขียนได้เป็น

$$\mathbf{E}_1 \cdot \Delta w \hat{\mathbf{a}}_t + \mathbf{E}_2 \cdot (-\Delta w \hat{\mathbf{a}}_t) = 0 \qquad (5)$$

เมื่อ

$\hat{\mathbf{a}}_t$ คือเวกเตอร์หน่วยที่สัมผัสกับรอยต่อ ดังแสดงในรูป 2

เนื่องจาก Δw มีค่าไม่เท่ากับศูนย์ จึงสามารถนำมาหารตลอดทั้งสองข้างของสมการ (5) ทำให้ได้

$$\mathbf{E}_1 \cdot \hat{\mathbf{a}}_t - \mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathbf{a}}_t = 0 \qquad (6)$$

ผลคูณจุดจะให้ผลลัพธ์เป็น

$$E_{\tan 1} - E_{\tan 2} = 0 \qquad (7)$$

เมื่อ

$E_{\tan 1}$ และ $E_{\tan 2}$ คือ ขนาดสนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสกับรอยต่อในตัวกลางที่ 1 และ 2 ตามลำดับ

ย้ายข้างได้

$$E_{\tan 1} = E_{\tan 2} \qquad (8)$$

- ความหมายทางกายภาพของ (8) มีว่า

  สนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสกับรอยต่อ ต้องต่อเนื่อง

เงื่อนไขขอบเขตสำหรับความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า

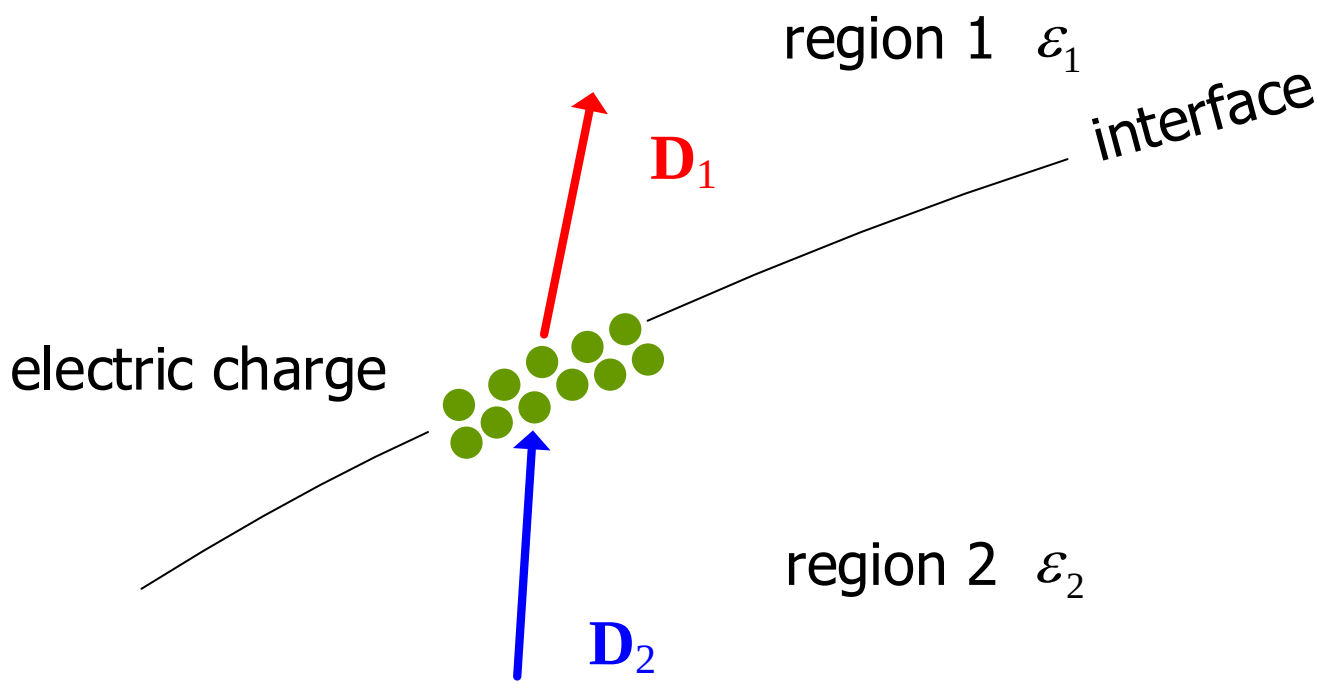
พิจารณาบริเวณสองบริเวณ ดังแสดงในรูป 3

บริเวณที่หนึ่งบรรจุด้วยวัสดุไดอิเล็กทริกที่มีสภาพยอมเท่ากับ ε_1

บริเวณที่สองบรรจุด้วยวัสดุไดอิเล็กทริกที่มีสภาพยอมเท่ากับ ε_2

ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า ณ รอยต่อ ในตัวกลาง 1 และตัวกลาง 2 มีค่าเท่ากับ $\mathbf{D}_1$ และ $\mathbf{D}_2$ ตามลำดับ

- มีประจุไฟฟ้าจำนวนหนึ่งอยู่ ณ รอยต่อ


region 1 ε_1
interface
$\mathbf{D}_1$
electric charge
region 2 ε_2
$\mathbf{D}_2$

รูป 3

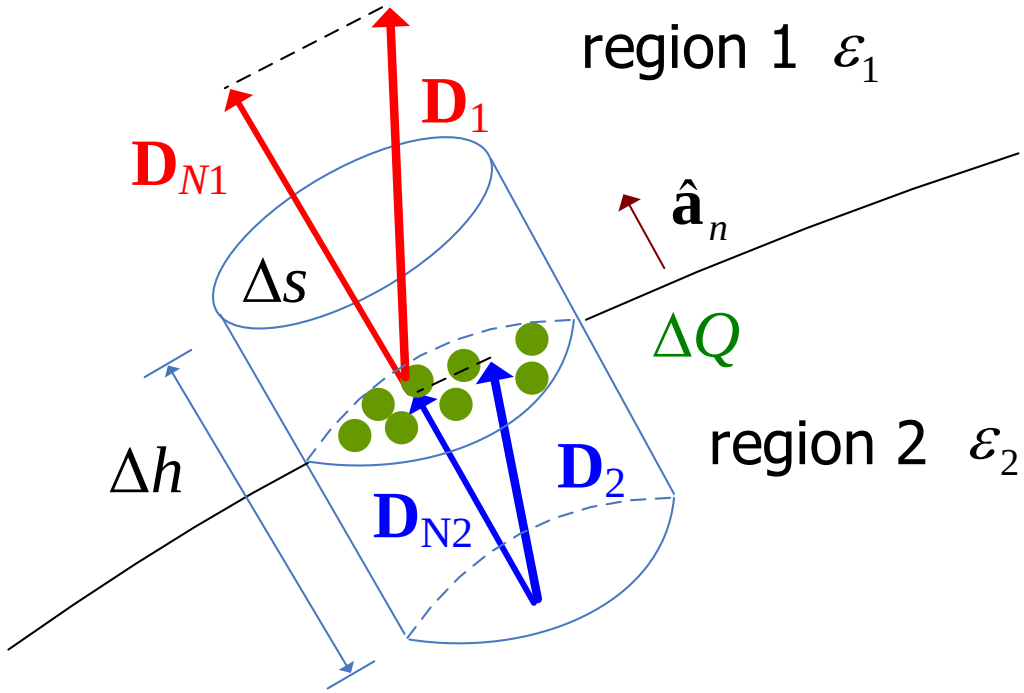
ความสัมพันธ์ของ ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า ณ รอยต่อ สามารถหาได้โดยการใช้กฎของเกาส์

กฎของเกาส์มีรูปทางคณิตศาสตร์ว่า

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q \qquad (9)$$

เพื่อความสะดวก พื้นที่ผิวปิด S ตาม (9) จะใช้กล่องรูปทรงกระบอก ดังแสดงในรูป 4

Q ตาม (9) คือประจุที่อยู่ภายในพื้นที่ผิวปิด ในที่นี้คือ ΔQ


region 1 ε_1
$\mathbf{D}_1$
$\mathbf{D}_{N1}$
$\hat{\mathbf{a}}_n$
Δs
ΔQ
Δh
region 2 ε_2
$\mathbf{D}_2$
$\mathbf{D}_{N2}$

รูป 4

เมื่อกระจายด้านซ้ายของ (9) ได้

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \left(\int_{\text{top}} + \int_{\text{bottom}} + \int_{\text{side}} \right) \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \Delta Q \qquad (10)$$

เพื่อที่จะหาสมการ ณ รอยต่อ จะให้ Δh มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ สมการ (10) จึงลดรูปเป็น

$$\int_{\text{top}} \mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{s} + \int_{\text{bottom}} \mathbf{D}_2 \cdot d\mathbf{s} = \Delta Q \qquad (11)$$

เมื่อ

$\mathbf{D}_1$ และ $\mathbf{D}_2$ คือ ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า ณ บริเวณรอยต่อใน

ตัวกลาง 1 และ 2 ตามลำดับ

เมื่อพื้นที่ Δs มีค่าน้อยๆ ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้าจะมีค่าคงที่ ทำให้ได้

$$\mathbf{D}_1 \cdot \int_{\text{top}} d\mathbf{s} + \mathbf{D}_2 \cdot \int_{\text{bottom}} d\mathbf{s} = \Delta Q \qquad (12)$$

เมื่อ $d\mathbf{s}$ มีทิศทางตั้งฉากกับพื้นผิว และ มีทิศพุ่งออกจากพื้นผิวปิด

เนื่องจาก $d\mathbf{s}$ ของด้าน top มีทิศเดียวกันกับ $\hat{\mathbf{a}}_n$

แต่ $d\mathbf{s}$ ในด้าน bottom มีทิศตรงกันข้ามกับ $\hat{\mathbf{a}}_n$ สมการ (12) จึงเขียนได้เป็น

$$\mathbf{D}_1 \cdot \Delta s \hat{\mathbf{a}}_n + \mathbf{D}_2 \cdot \Delta s(-\hat{\mathbf{a}}_n) = \Delta Q \qquad (13)$$

เมื่อ

$\hat{\mathbf{a}}_n$ คือเวกเตอร์หน่วยที่ตั้งฉากกับรอยต่อ ดังแสดงในรูป 4

เนื่องจาก Δs มีค่าไม่เท่ากับศูนย์ จึงสามารถนำมาหารตลอดทั้งสองข้างของสมการ ทำให้ได้

$$\mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{a}}_n - \mathbf{D}_2 \cdot \hat{\mathbf{a}}_n = \frac{\Delta Q}{\Delta s} \qquad (14)$$

ผลคูณจุดจะให้ผลลัพธ์เป็น

$$D_{N1} - D_{N2} = \frac{\Delta Q}{\Delta s} \qquad (15)$$

เมื่อ Δh มีค่าน้อยมากเข้าใกล้ศูนย์ประจุที่ดำรงอยู่ได้ในโครงสร้างนี้ได้ ก็คือ ความหนาแน่นประจุเชิงผิวเท่านั้น ฉะนั้น (15) สามารถเขียนได้เป็น

$$D_{N1} - D_{N2} = \frac{\rho_s \Delta s}{\Delta s} \qquad (16)$$

เมื่อ ρ_s คือความหนาแน่นประจุเชิงผิว มีหน่วยเป็น C/m^2

ทำให้ได้

$$D_{N1} - D_{N2} = \rho_s \qquad (17)$$

- ความหมายทางกายภาพของ (17) มีว่า

  ความไม่ต่อเนื่องของความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้าในแนวฉากกับรอยต่อจะมีค่าเท่ากับความหนาแน่นประจุไฟฟ้าเชิงผิวที่ตำแหน่งนั้น

โดยสรุป

- เงื่อนไขขอบเขตสำหรับสนามไฟฟ้า และความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า สามารถเขียนได้เป็น

$$E_{\tan 1} = E_{\tan 2} \qquad (8)$$

รูปทั่วไป

และ

$$D_{N1} - D_{N2} = \rho_s \qquad (17)$$

รูปทั่วไป

กรณีพิเศษ 1

- ถ้า ณ บริเวณรอยต่อไปไม่มีประจุอยู่เลย ($\rho_s = 0$) สมการ (17) จะลดรูปเป็น

$$D_{N1} = D_{N2} \qquad (18)$$

สำหรับ กรณีพิเศษ 1 นี้ เงื่อนไขขอบเขตสำหรับสนามไฟฟ้าตามสมการ (8) ก็ยังคงใช้ได้ และมีรูปแบบดังเดิม

กรณีพิเศษ 2

- ถ้าบริเวณ 2 เป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ (Perfect Electric Conductor, PEC) (ตัวอย่างเช่นโลหะที่มีความนำสูง) ดังแสดงในรูป 5

เป็นที่ทราบแล้วว่า ภายในตัวนำนี้

สนามไฟฟ้ามีค่าเป็นศูนย์ $\mathbf{E} = 0$

ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้ามีค่าเป็นศูนย์ $\mathbf{D} = 0$

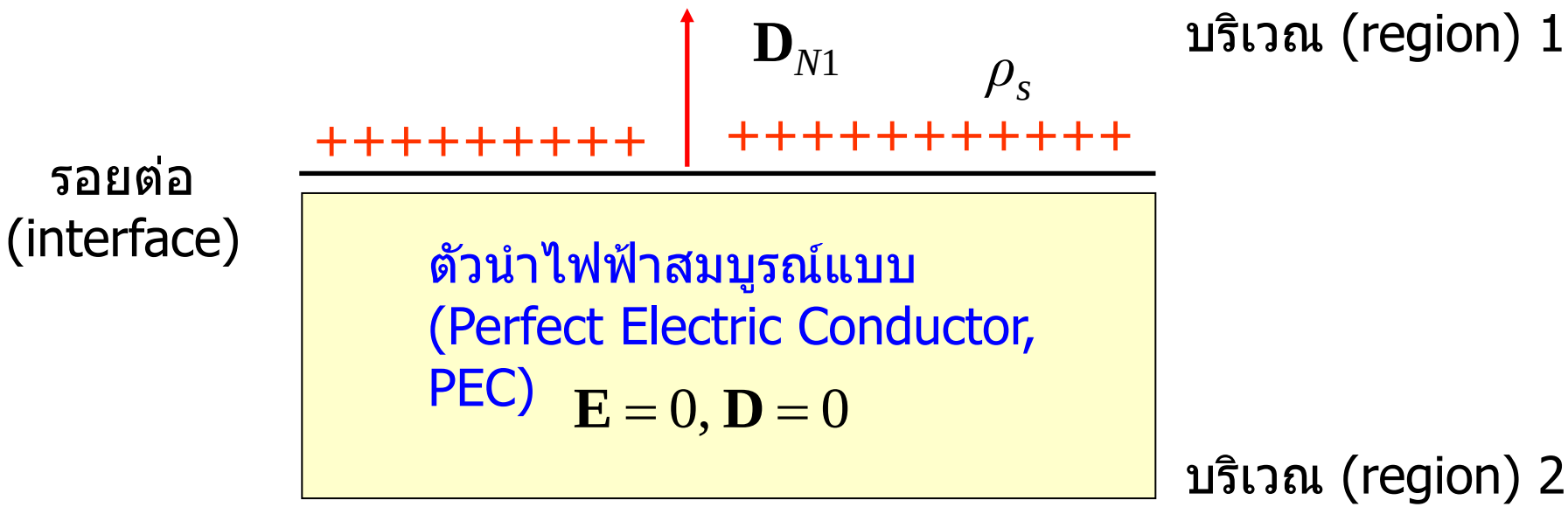
สำหรับตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ (PEC) สมการ (8) และ (17) จะลดรูปเป็น

$$E_{\tan 1} = \boxed{E_{\tan 2}}^{\,=0} \qquad (8) \qquad \longrightarrow \qquad E_{\tan 1} = 0 \qquad (19)$$

และ

$$D_{N1} - \boxed{D_{N2}}^{\,=0} = \rho_S \qquad (17) \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{D_{N1} = \rho_S \qquad (20)}$$

$\mathbf{D}_{N1}$ และ ρ_s ตาม (20) แสดงได้ดังรูป 5


$\mathbf{D}_{N1}$
ρ_s
บริเวณ (region) 1
รอยต่อ
(interface)
ตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ
(Perfect Electric Conductor,
PEC)
$\mathbf{E} = 0, \mathbf{D} = 0$
บริเวณ (region) 2

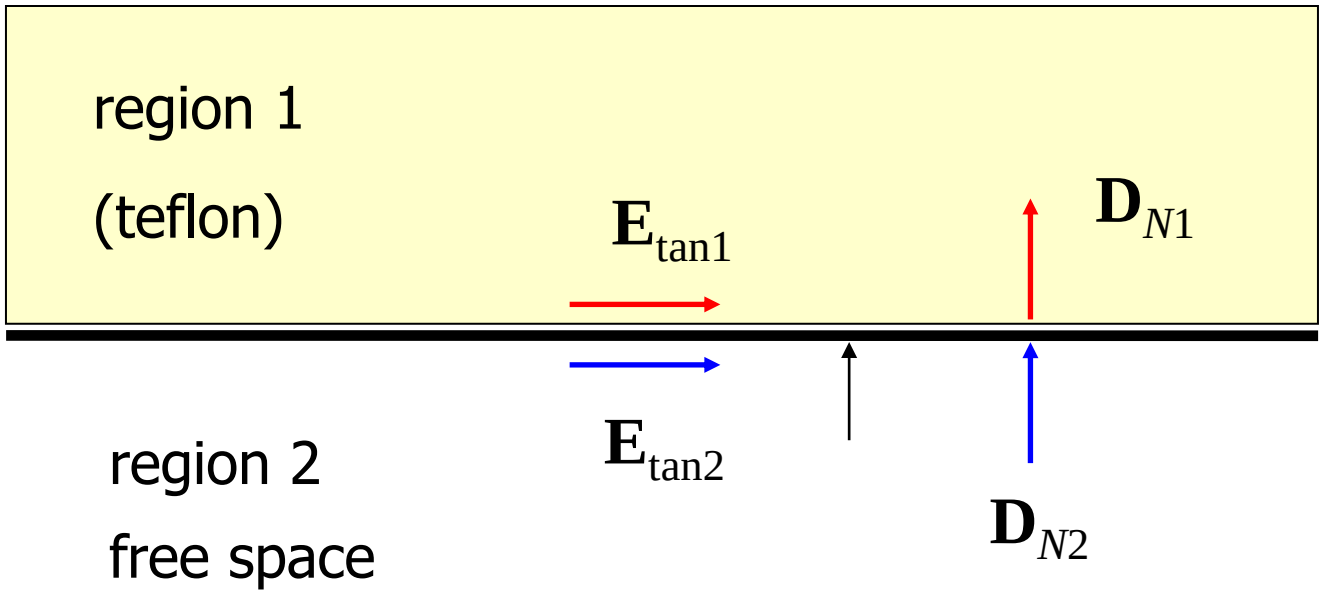
รูป 5

ตัวอย่าง โครงสร้างดังแสดงในรูป 6 ประกอบด้วยบริเวณสองตัว ที่มีค่าสภาพยอมแตกต่างกัน บริเวณ 1 เป็นเทฟลอน (teflon) ที่มีสภาพยอมสัมพัทธ์เท่ากับ 2.1 บริเวณ 2 เป็นอวกาศว่าง

กำหนดให้ ณ รอยต่อ
ขนาดของสนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสในบริเวณ 2 ($E_{\tan 2}$) มีค่าเท่ากับ 45 N/C
และ ขนาดของความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้าในแนวฉาก
ในบริเวณ 2 (D_{N2}) มีค่าเท่ากับ 20 C/m^2

กำหนดให้ไม่มีแหล่งกำเนิดใด ๆ ณ บริเวณรอยต่อ

จงหา ปริมาณต่อไปนี้ ณ รอยต่อ ในบริเวณ 1
(ก) ขนาดของสนามไฟฟ้าในแนวสัมผัส
(ข) ขนาดของความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้าในแนวสัมผัส
(ค) ขนาดของความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้าในแนวฉาก
(ง) ขนาดของสนามไฟฟ้าในแนวฉาก


region 1
(teflon)
$\mathbf{E}_{\tan 1}$
$\mathbf{D}_{N1}$
$\mathbf{E}_{\tan 2}$
region 2
free space
$\mathbf{D}_{N2}$

รูป 6