บทนำ

- วิชาแม่เหล็กไฟฟ้า (Electromagnetics) คือ การศึกษาของผลของประจุไฟฟ้าในสภาวะพัก (rest) ในสภาวะเคลื่อนที่ (in motion) และในสภาวะเปลี่ยนตามเวลา (time varying)

  ประจุไฟฟ้าเป็นได้ทั้งประจุบวก และประจุลบ

- ประจุในสภาวะพักจะผลิตสนามไฟฟ้าสถิต (static electric field)

- ประจุที่เคลื่อนที่ (moving charge) ด้วยจำนวนประจุที่คงที่ต่อหนึ่งหน่วยเวลา จะผลิตกระแสไฟฟ้าตรง ซึ่งกระแสไฟฟ้าตรงจะก่อให้เกิดสนามแม่เหล็ก (magnetic field)

- ประจุเปลี่ยนตามเวลา (time-varying charge) จะผลิตสนามไฟฟ้าเปลี่ยนตามเวลา (time-varying electric field)

  สนามไฟฟ้าเปลี่ยนตามเวลาก็จะก่อให้เกิดสนามแม่เหล็กเปลี่ยนตามเวลา (time-varying magnetic field) อีกต่อหนึ่ง

  สนามแม่เหล็กเปลี่ยนตามเวลา ดังกล่าว จะก่อให้เกิดสนามไฟฟ้าเปลี่ยนตามเวลาต่อไปได้ จากนั้นจะก่อให้เกิดสนามแม่เหล็กเปลี่ยนตามเวลาอีกต่อหนึ่งได้

- ตามลักษณะที่ว่านี้ จะเห็นได้ว่า ถ้าประจุมีการเปลี่ยนตามเวลา จะเกิด สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก ติดตามกันไป (accompany)

ปริมาณในสาขาแม่เหล็กไฟฟ้า โดยมากแล้ว จะอยู่ในรูปเวกเตอร์

เพื่อที่จะเข้าใจ และวิเคราะห์ปริมาณต่าง ๆ ได้อย่างถูกต้อง จำเป็นต้อง ศึกษาถึงพื้นฐานของระบบพิกัด เสียก่อน ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

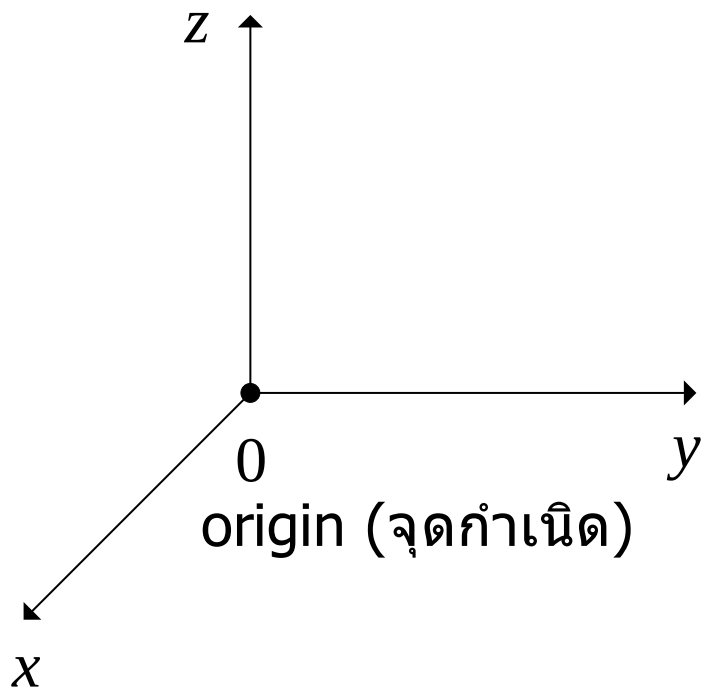
ระบบพิกัดฉาก
(The Rectangular Coordinate System)
หรือ ระบบพิกัดคาร์ทิเชียน
(Cartesian Coordinate System)

- เพื่อที่จะอธิบาย เวกเตอร์ได้อย่างถูกต้อง จำเป็นต้องอาศัย ระบบพิกัด (coordinate system)

- ระบบพิกัดที่คุ้นเคยกันมากที่สุด เห็นจะได้แก่ระบบพิกัดฉาก (rectangular coordinate system) หรือ ระบบพิกัดคาร์ทิเซียน (Cartesian coordinate system)

- ระบบพิกัดฉากจะประกอบด้วย แกนสามแกน ที่ตั้งฉากซึ่งกัน ดังในรูป 1 ในรูปนี้จะพบว่า แกนเหล่านี้คือ แกน x, y และ z

- การวางตัวของแกน x, y และ z จะเป็นไปตามกฎมือขวาดังนี้ การหมุน (rotation) จากแกน x ไปยังแกน y จะก่อให้เกิดแกน z

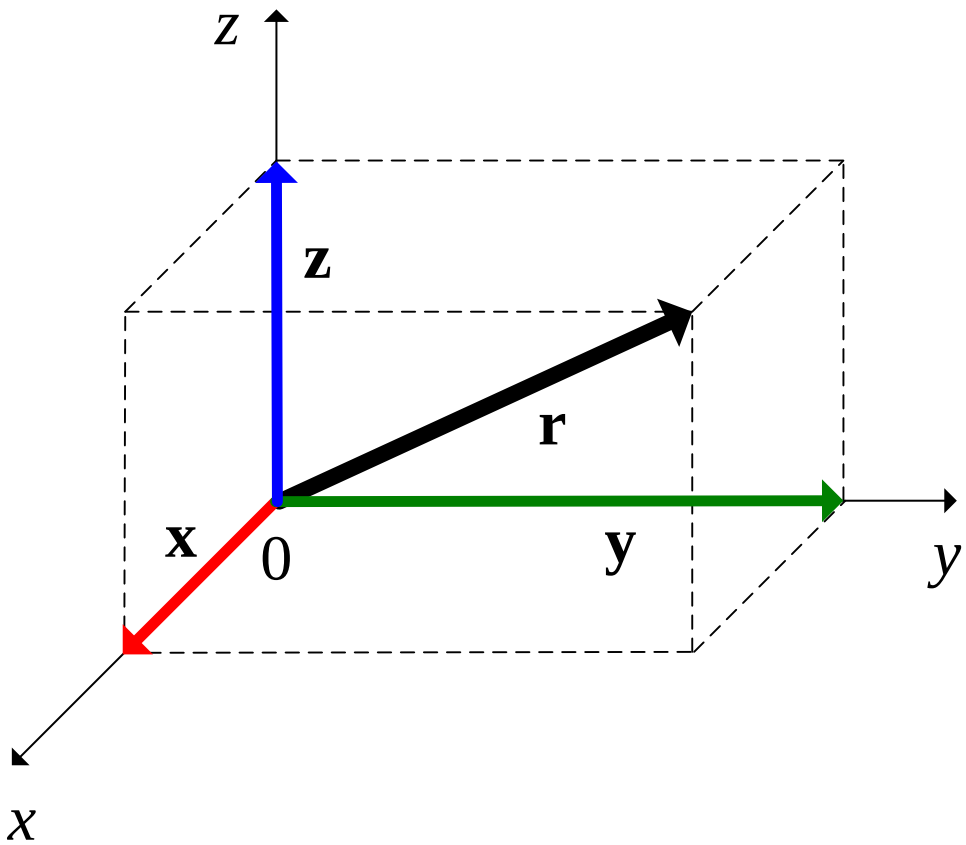


รูป 1

องค์ประกอบเวกเตอร์ และเวกเตอร์หน่วย (Vector Components and Unit Vector)

- เพื่อที่จะอธิบาย เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก จะพิจารณา เวกเตอร์ $\mathbf{r}$ ที่แสดงในรูป 2
- ในรูป 2 เวกเตอร์ตำแหน่ง (position vector) $\mathbf{r}$ จะได้รับการแทนให้อยู่ในรูปของ เวกเตอร์องค์ประกอบ (component vector) ทั้งหมดสามตัว ก็คือเวกเตอร์ $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ และ $\mathbf{z}$
- เวกเตอร์ $\mathbf{r}$ จะเกิดจากการรวมกัน (combination) ของเวกเตอร์องค์ประกอบเหล่านี้ ซึ่งสามารถเขียนในรูปสมการได้ดังนี้

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z} \qquad (1)$$



รูป 2

- จะเห็นได้ว่าเวกเตอร์องค์ประกอบ ซึ่ง ก็คือ **x, y** และ **z** จะชี้ไปในทิศตามแกน x, y และ z ลำดับ

- การแสดงเวกเตอร์ **r** ตาม (1) จะก่อให้เกิดความไม่สะดวกเป็นอย่างมาก

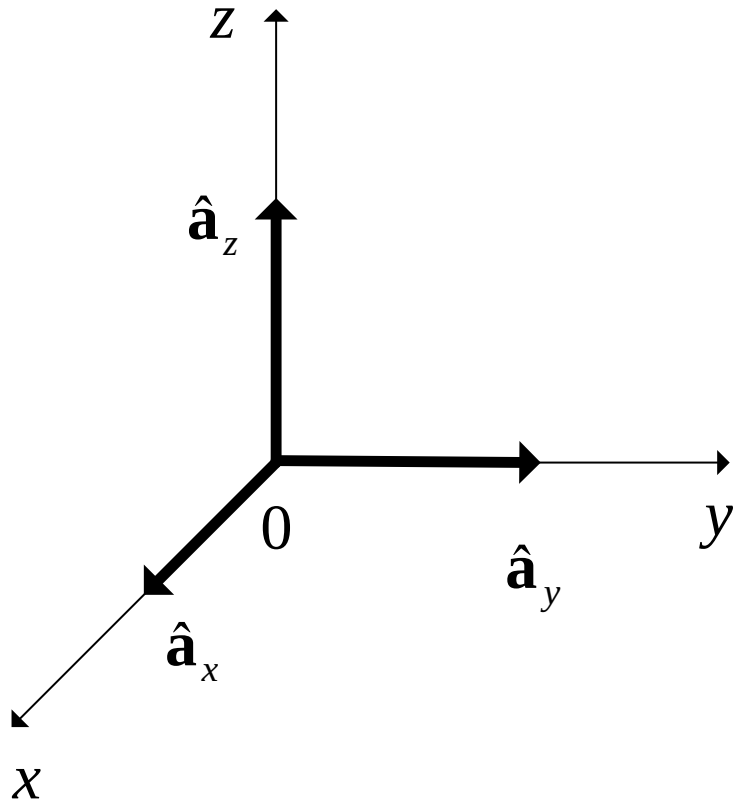
- เพื่อความสะดวกในการนำไปใช้ เวกเตอร์ **r** จะได้รับการเขียนเสียใหม่ โดยจะให้เวกเตอร์ **r** อิงกับเวกเตอร์มาตรฐานชุดหนึ่ง เวกเตอร์มาตรฐานที่ว่านี้ก็คือ เวกเตอร์หน่วย (unit vector) ในแนวแกน x, y และ z

ถ้าให้ เวกเตอร์หน่วยในแนวแกน x มีค่าเป็น $\hat{\mathbf{a}}_x$

เวกเตอร์หน่วยในแนวแกน y มีค่าเป็น $\hat{\mathbf{a}}_y$

เวกเตอร์หน่วยในแนวแกน z มีค่าเป็น $\hat{\mathbf{a}}_z$

ดังแสดงในรูป 3



รูป 3

เวกเตอร์ $\mathbf{r}$ สามารถเขียนได้เป็น

$$\mathbf{r} = r_x \hat{\mathbf{a}}_x + r_y \hat{\mathbf{a}}_y + r_z \hat{\mathbf{a}}_z \qquad (2)$$

โดยที่

r_x คือ องค์ประกอบของเวกเตอร์ $\mathbf{r}$ ในทิศ x, r_x เป็นค่าสเกลาร์

r_y คือ องค์ประกอบของเวกเตอร์ $\mathbf{r}$ ในทิศ y, r_y เป็นค่าสเกลาร์

r_z คือ องค์ประกอบของเวกเตอร์ $\mathbf{r}$ ในทิศ z, r_z เป็นค่าสเกลาร์

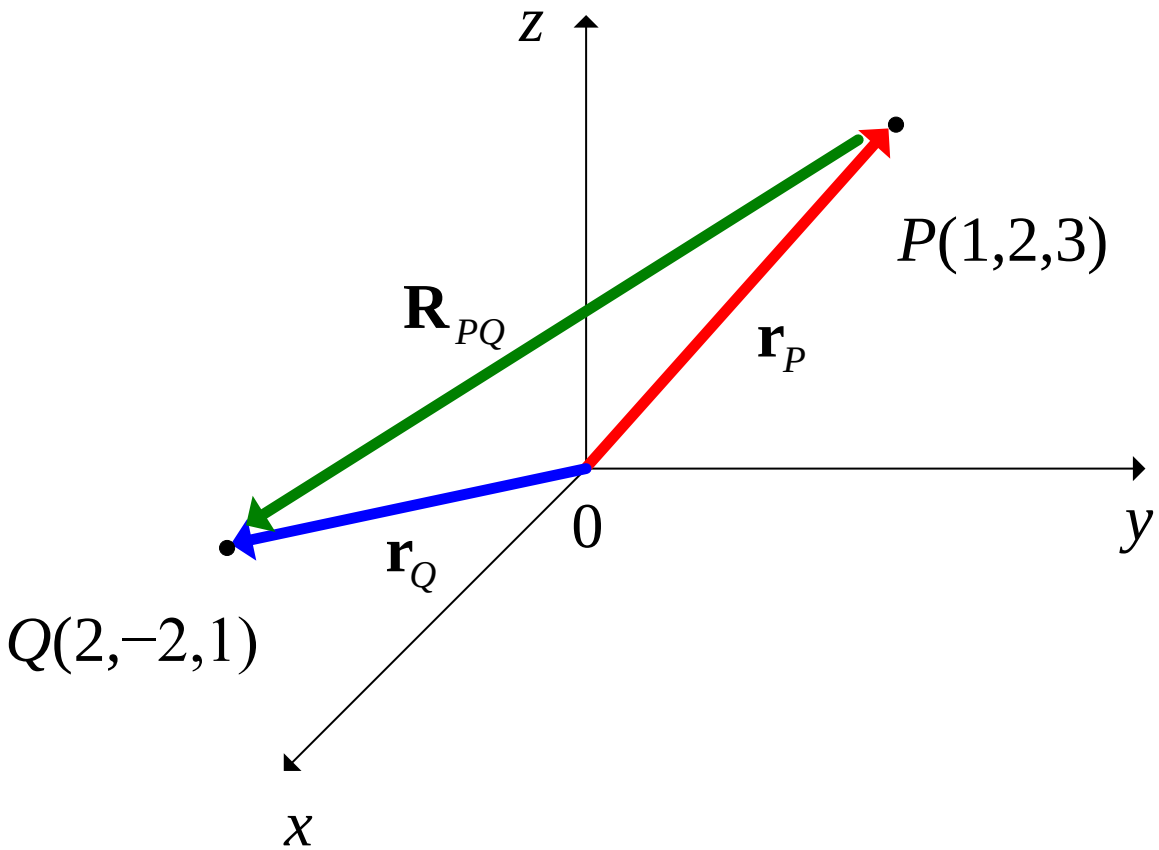
- พิจารณารูป 4 ในรูปนี้ เวกเตอร์ $\mathbf{r}_P$ จะชี้จากจุดกำเนิด (origin) ไปยังจุด $P(1,2,3)$

- เวกเตอร์ $\mathbf{r}_P$ สามารถเขียนได้เป็น

$$\mathbf{r}_P = \hat{\mathbf{a}}_x + 2\hat{\mathbf{a}}_y + 3\hat{\mathbf{a}}_z \qquad (3)$$

- ในทำนองเดียวกัน $\mathbf{r}_Q$ ซึ่งก็คือ เวกเตอร์ที่ชี้จากจุดกำเนิด ไปยังจุด $Q(2,-2,1)$ สามารถเขียนได้เป็น

$$\mathbf{r}_Q = 2\hat{\mathbf{a}}_x - 2\hat{\mathbf{a}}_y + \hat{\mathbf{a}}_z \qquad (4)$$



รูป 4

เวกเตอร์ที่ลากจากจุด $P(1,2,3)$ ถึงจุด $Q(2,-2,1)$ ดังแสดงในรูป 4 สามารถหาได้จาก

$$\mathbf{R}_{pQ} = \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_p \tag{5a}$$

$$= (2-1)\hat{\mathbf{a}}_x + (-2-2)\hat{\mathbf{a}}_y + (1-3)\hat{\mathbf{a}}_z \tag{5b}$$

$$= \hat{\mathbf{a}}_x - 4\hat{\mathbf{a}}_y - 2\hat{\mathbf{a}}_z \tag{5c}$$

ขนาดของเวกเตอร์ (Magnitude of Vector)

ถ้าให้เวกเตอร์ **B** เขียนได้เป็น

$$\mathbf{B} = B_x \hat{\mathbf{a}}_x + B_y \hat{\mathbf{a}}_y + B_z \hat{\mathbf{a}}_z \qquad (6)$$

ขนาดของเวกเตอร์ **B** เขียนแทนด้วย $|\mathbf{B}|$ หรือ รูปง่าย ๆ แทนด้วย B (ตัวบาง)
สามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

(ตัวหนา)

$$\boxed{|\mathbf{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} \qquad (7)}$$

เวกเตอร์หน่วย (unit vector) ในทิศทางของ **B** สามารถหาได้ดังนี้

$$\hat{\mathbf{a}}_B = \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} \qquad (8)$$

ตัวอย่าง จงหาเวกเตอร์หน่วยที่ลากจากจุดกำเนิด (origin) ไปยังจุด $G(2,-2,-1)$

ผลคูณจุด (Dot Product)

กำหนดให้ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{B}$ เป็นเวกเตอร์ ภายใต้การพิจารณา
ผลคูณจุด (dot product) หรือ ผลคูณเชิงสเกลาร์ (scalar product)
จะกำหนดโดย

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta_{AB} \qquad (9)$$

โดยที่ θ_{AB} คือ มุมระหว่าง เวกเตอร์ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{B}$ โดยให้เลือกใช้มุมที่น้อยกว่า หรือเท่ากับ 180 องศา

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ ใน (9) ให้อ่านว่า $\mathbf{A}$ ดอท $\mathbf{B}$

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ จะให้ผลลัพท์เป็นปริมาณสเกลาร์เสมอ ด้วยเหตุนี้จึงมีชื่อเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า ผลคูณเชิงสเกลาร์

ผลคูณจุดมีคุณสมบัติของการสลับที่ (commutative law) นั่นคือ

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A} \qquad (10)$$

เมื่อพิจารณา (10) จะพบว่ามุมระหว่างเวกเตอร์สองตัวไม่สามารถหาได้ง่ายนัก ในทางปฏิบัติ ผลคูณจุดสามารถหาค่าได้ง่ายขึ้นโดยใช้วิธีต่อไปนี้

ให้เวกเตอร์ **A** เขียนได้เป็น

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{a}}_x + A_y\hat{\mathbf{a}}_y + A_z\hat{\mathbf{a}}_z \qquad (11)$$

เวกเตอร์ **B** เขียนได้เป็น

$$\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{a}}_x + B_y\hat{\mathbf{a}}_y + B_z\hat{\mathbf{a}}_z \qquad (12)$$

โดยอาศัย กฎการกระจาย (distribution law) ผลคูณจุดสามารถหาได้ดังนี้

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \qquad (13)$$

ผลคูณจุดระหว่างเวกเตอร์ใด ๆ และเวกเตอร์ตนเอง จะเขียนได้เป็น

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = |\mathbf{A}|^2 \qquad (14)$$

$|\mathbf{A}|$ คือ ขนาดของเวกเตอร์ $\mathbf{A}$ Remind: $|\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

- การใช้งานที่สำคัญหนึ่งของ ผลคูณจุด คือ การหาองค์ประกอบ (component) ของเวกเตอร์ตัวหนึ่งในทิศทางของเวกเตอร์หน่วยอีกตัวหนึ่งที่กำหนดให้

- พิจารณารูป 5(a) องค์ประกอบชนิดสเกลาร์ของเวกเตอร์ $\mathbf{B}$

  ในทิศทาง (direction) ของเวกเตอร์หน่วย $\hat{\mathbf{a}}$ สามารถหาได้ดังนี้

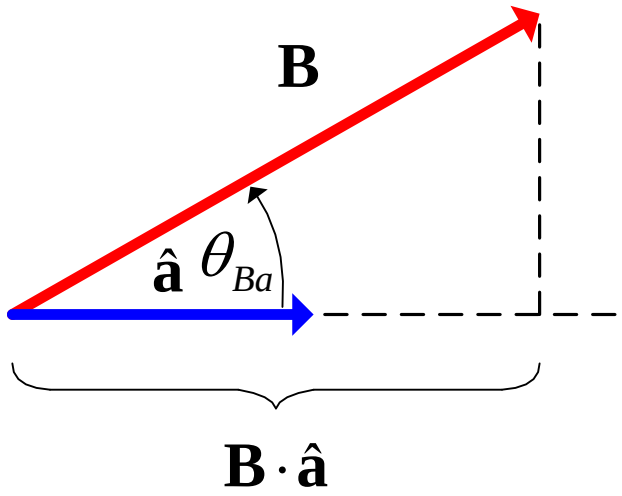
$$\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{a}} = |\mathbf{B}||\hat{\mathbf{a}}|\cos\theta_{Ba} = |\mathbf{B}|\cos\theta_{Ba} \qquad (15)$$

สมการ (15) จะมีให้ค่าที่เป็น บวก ถ้า $0 \le \theta_{Ba} < 90^\circ$ (มุมแหลม)

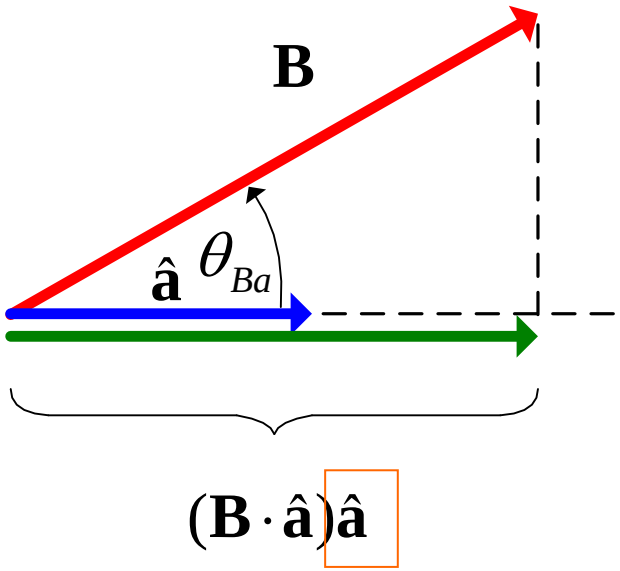
จะให้ค่าเป็นศูนย์ ถ้า $\theta_{Ba} = 90^\circ$ (มุมฉาก)

และจะให้ค่าที่เป็น ลบ ถ้า $90^\circ < \theta_{Ba} \le 180^\circ$ (มุมป้าน)

- องค์ประกอบชนิดเวกเตอร์ของ $\mathbf{B}$ ในทิศทางของเวกเตอร์หน่วย $\hat{\mathbf{a}}$ สามารถหาได้โดย การคูณองค์ประกอบชนิดสเกลาร์ที่หาได้จาก (15) ด้วยเวกเตอร์หน่วย $\hat{\mathbf{a}}$ ทำให้ได้องค์ประกอบชนิดเวกเตอร์ที่ว่านี้ มีค่าเป็น $(\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{a}})\hat{\mathbf{a}}$ ดังแสดงในรูป 5(b)



(a) องค์ประกอบชนิดสเกลาร์



(b) องค์ประกอบชนิดเวกเตอร์

รูป 5

การหาองค์ประกอบชนิดสเกลาร์ และองค์ประกอบชนิดเวกเตอร์จะได้รับการศึกษาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง กำหนดให้ $\mathbf{G} = 5\hat{\mathbf{a}}_x - 10\hat{\mathbf{a}}_y + 3\hat{\mathbf{a}}_z$ และเวกเตอร์หน่วย

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{1}{3}(2\hat{\mathbf{a}}_x + \hat{\mathbf{a}}_y - 2\hat{\mathbf{a}}_z)$$

จงหา

ก. องค์ประกอบชนิดสเกลาร์ของเวกเตอร์ **G** ในทิศทางของ $\hat{\mathbf{a}}$

ข. องค์ประกอบชนิดเวกเตอร์ของเวกเตอร์ **G** ในทิศทางของ $\hat{\mathbf{a}}$

ผลคูณไขว้ (Cross Product)

กำหนดให้ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{B}$ เป็นเวกเตอร์ภายใต้การพิจารณา
ผลคูณไขว้ (cross product) หรือ ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (vector product) จะกำหนดโดย

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{a}}_N |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin\theta_{AB} \qquad (16)$$

โดยที่ θ_{AB} คือ มุมระหว่าง เวกเตอร์ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{B}$ โดยให้เลือกใช้มุมที่น้อยกว่า หรือเท่ากับ 180 องศา

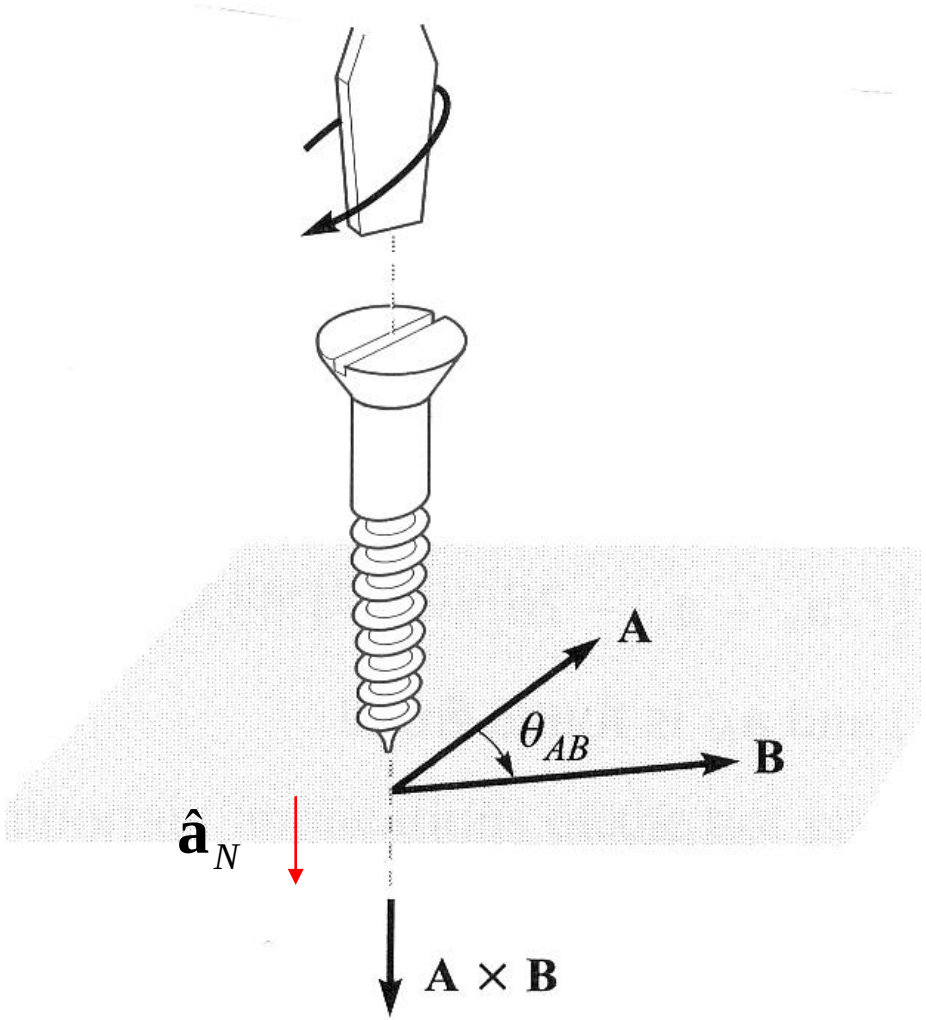
$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ ให้อ่านว่า "$\mathbf{A}$ ครอส $\mathbf{B}$"

$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ จะให้ผลผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์เสมอ ด้วยเหตุนี้จึงมีชื่อเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า ผลคูณเชิงเวกเตอร์

- ขนาดของ $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ จะมีค่าเท่ากับ ขนาดของเวกเตอร์ **A** คูณกับเวกเตอร์ **B** และคูณกับ sin ของมุม (ข้างน้อย) ระหว่าง **A** กับ **B**

- ทิศของ $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ ใน (16) ระบุโดย $\hat{\mathbf{a}}_N$

โดยที่ $\hat{\mathbf{a}}_N$ จะตั้งฉาก (perpendicular) กับระนาบที่บรรจุ (contain) เวกเตอร์ **A** และ **B** โดยที่มีทิศทางเป็นไปตามสกรูมือขวา ดังแสดงในรูป 6



รูป 6

การสลับลำดับของเวกเตอร์ และ จะทำให้ได้ผลลัพธ์มีเครื่องหมายตรงกันข้ามกับคำตอบเดิม นั่นคือ

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \qquad (17)$$

- เช่นเดียวกันกับกรณีผลคูณจุด จะพบว่ามุมระหว่าง เวกเตอร์สองตัว ไม่สามารถหาได้ง่ายนัก นอกจากนั้นแล้วเวกเตอร์ $\hat{\mathbf{a}}_N$ ยังหาได้ยากอีกด้วย

- ในทางปฏิบัติ ค่าผลคูณไขว้สามารถหาได้ง่ายขึ้นโดยใช้วิธีการกระจายดังนี้

ให้ เวกเตอร์ **A** เขียนได้เป็น

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{a}}_x + A_y\hat{\mathbf{a}}_y + A_z\hat{\mathbf{a}}_z \qquad (18)$$

เวกเตอร์ **B** เขียนได้เป็น

$$\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{a}}_x + B_y\hat{\mathbf{a}}_y + B_z\hat{\mathbf{a}}_z \qquad (19)$$

โดยอาศัยกฎการกระจาย ผลคูณไขว้สามารถเขียนได้เป็น

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = A_x B_x \hat{\mathbf{a}}_x \times \hat{\mathbf{a}}_x + A_x B_y \hat{\mathbf{a}}_x \times \hat{\mathbf{a}}_y + A_x B_z \hat{\mathbf{a}}_x \times \hat{\mathbf{a}}_z$$

$$+A_y B_x \hat{\mathbf{a}}_y \times \hat{\mathbf{a}}_x + A_y B_y \hat{\mathbf{a}}_y \times \hat{\mathbf{a}}_y + A_y B_z \hat{\mathbf{a}}_y \times \hat{\mathbf{a}}_z$$

$$+A_z B_x \hat{\mathbf{a}}_z \times \hat{\mathbf{a}}_x + A_z B_y \hat{\mathbf{a}}_z \times \hat{\mathbf{a}}_y + A_z B_z \hat{\mathbf{a}}_z \times \hat{\mathbf{a}}_z \qquad (20)$$

เป็นที่ทราบแล้วว่า $\hat{\mathbf{a}}_x \times \hat{\mathbf{a}}_y = \hat{\mathbf{a}}_z$, $\hat{\mathbf{a}}_y \times \hat{\mathbf{a}}_z = \hat{\mathbf{a}}_x$ และ $\hat{\mathbf{a}}_z \times \hat{\mathbf{a}}_x = \hat{\mathbf{a}}_y$

จะได้

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=(A_yB_z-A_zB_y)\hat{\mathbf{a}}_x+(A_zB_x-A_xB_z)\hat{\mathbf{a}}_y+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{\mathbf{a}}_z \tag{21}$$

สมการ (21) สามารถเขียนให้อยู่ในรูป ดีเทอร์มิแนนท์ (determinant) ได้เป็น

$$\boxed{\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{a}}_x & \hat{\mathbf{a}}_y & \hat{\mathbf{a}}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} \qquad (22)}$$

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $\mathbf{A} = 2\hat{\mathbf{a}}_x - 3\hat{\mathbf{a}}_y + \hat{\mathbf{a}}_z$ และ $\mathbf{B} = -4\hat{\mathbf{a}}_x - 2\hat{\mathbf{a}}_y + 5\hat{\mathbf{a}}_z$

จงหาผลคูณไขว้ $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$