พลังงานที่ใช้ในการเคลื่อนประจุแบบจุดท่ามกลางสนามไฟฟ้า (Energy Expanded in Moving a Point Charge in an Electric Field)

เป็นที่ทราบมาแล้วว่า แรงที่เกิดบนประจุที่ได้รับการวางท่ามกลางสนามไฟฟ้า มีค่าเป็น

$$\mathbf{F}_E = \mathbf{E}Q \qquad (1)$$

ถ้าต้องการเข็นประจุนี้ต้านสนามไฟฟ้า จะใช้แรงที่มีขนาดเท่ากับ (1) แต่มีทิศตรงข้าม นั่นคือ

$$\mathbf{F}_{\text{appl}} = -\mathbf{F}_E = -\mathbf{E}Q \qquad (2)$$

งานปริมาณน้อย ๆ ที่ใช้ในการเคลื่อนประจุต้านสนามไฟฟ้าสามารถหาได้จากสมการ

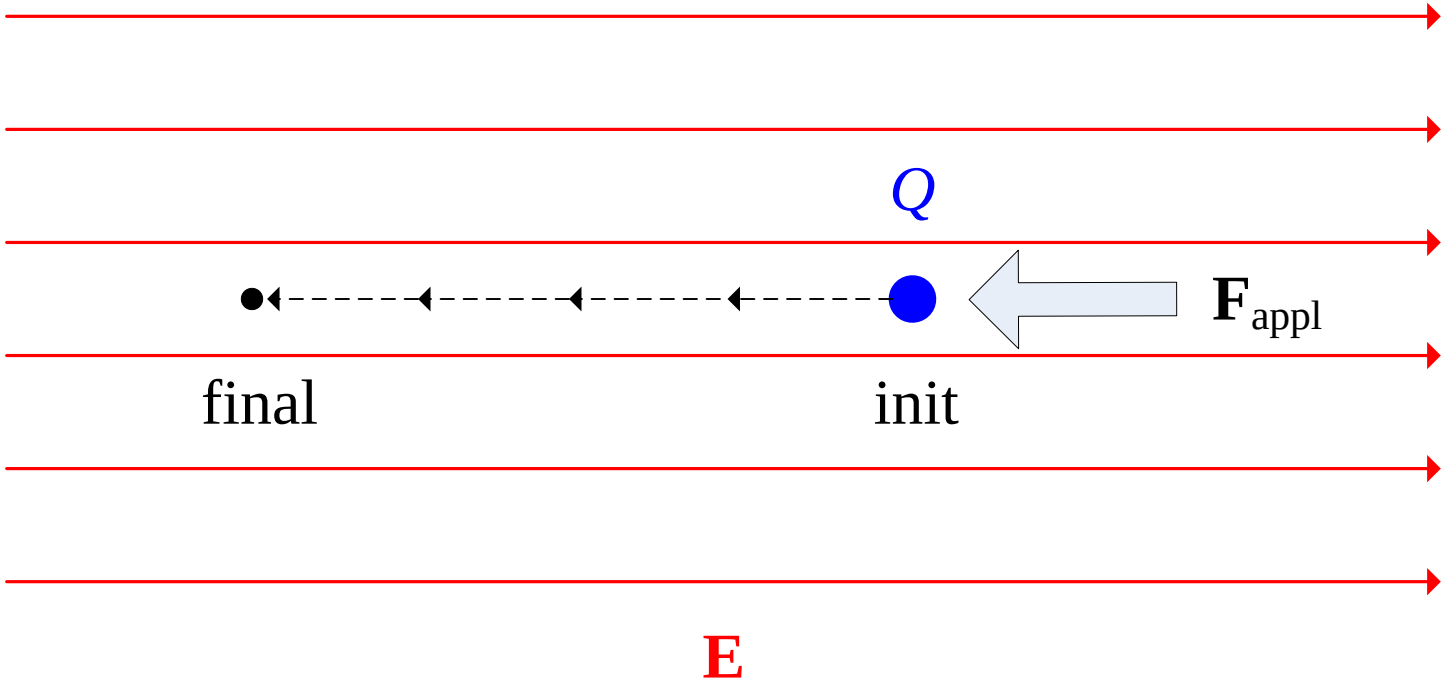
$$dW = \mathbf{F}_{\text{appl}} \cdot d\mathbf{l} = -\mathbf{E}Q \cdot d\mathbf{l} \qquad (3)$$

งาน (work) ที่ใช้ทั้งหมดในการเคลื่อนจากจุดสองจุดสามารถหาได้จากการหาปริพันธ์ของ (3) ถ้าให้จุดเริ่มต้นแทนด้วย init และจุดสุดท้ายแทนด้วย final จะได้

$$W = -Q \int_{\text{init}}^{\text{final}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \qquad (4)$$

งานตาม (4) มีหน่วยเป็นจูล (Joule, J)

การเข็นประจุจากจุดเริ่มต้นไปยังจุดสุดท้ายแสดงได้ดังรูป 1



รูป 1

เช่นเดียวกับที่ได้ปฏิบัติในส่วนของสนามไฟฟ้า งานต่อหนึ่งหน่วยประจุก็สามารถหาได้ โดยการนำ Q หารตลอดทั้งสองข้างของ (4) ยังผลให้ (4) เปลี่ยนรูปเป็น

$$\frac{W}{Q} = -\int_{\text{init}}^{\text{final}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \qquad (5)$$

ปริมาณ $\frac{W}{Q}$ ได้รับการนิยามว่าเป็น ความต่างศักย์ (potential difference)

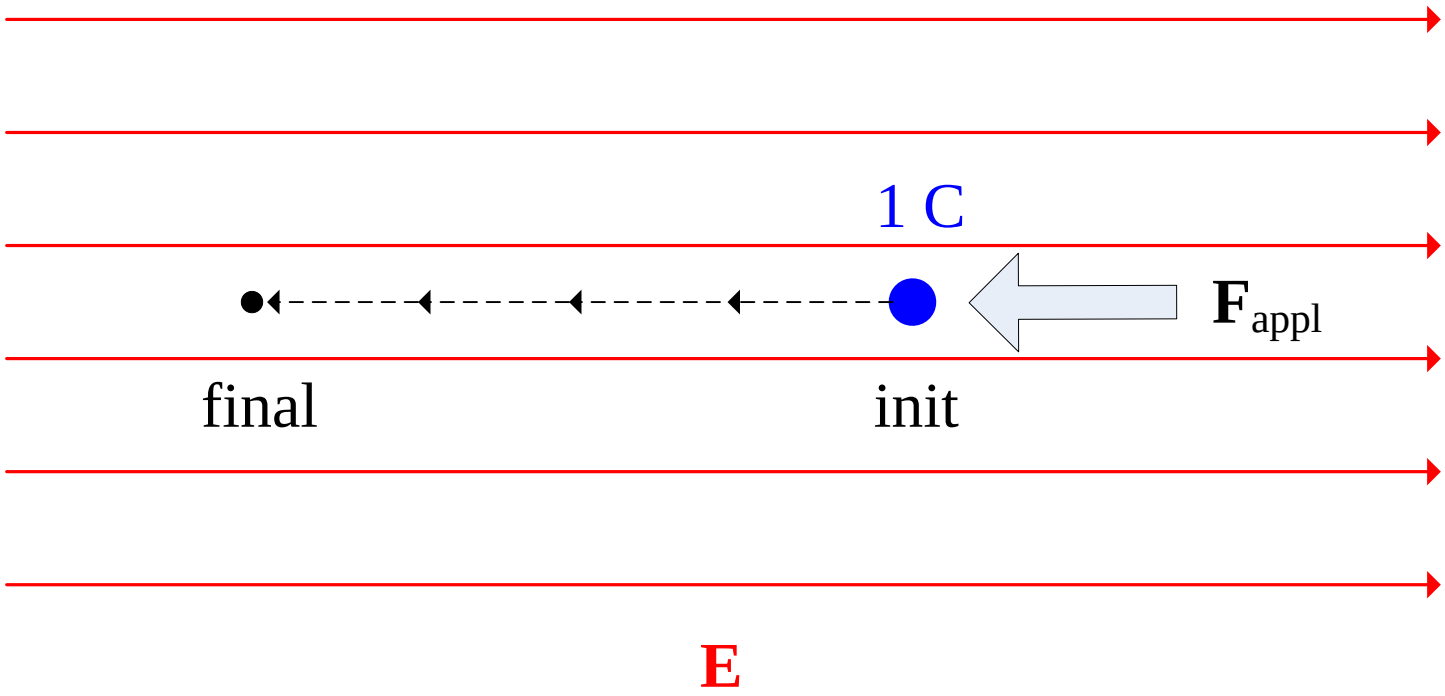
และแสดงได้ดังสมการ (6)

$$\text{potential difference} = -\int_{\text{init}}^{\text{final}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \qquad (6)$$

ความต่างศักย์ หมายถึง งาน (work) ที่ใช้ไปในการเคลื่อนประจุบวกขนาดหนึ่งหน่วย (unit positive charge) จากจุดหนึ่งไปยังจุดอีกจุดหนึ่งท่ามกลางสนามไฟฟ้า

ในที่นี้ จุดเริ่มต้นจะแทนด้วย init และจุดสิ้นสุดจะแทนด้วย final

การเคลื่อนประจุบวกขนาดหนึ่งหน่วยแสดงได้ดังรูป 2



รูป 2

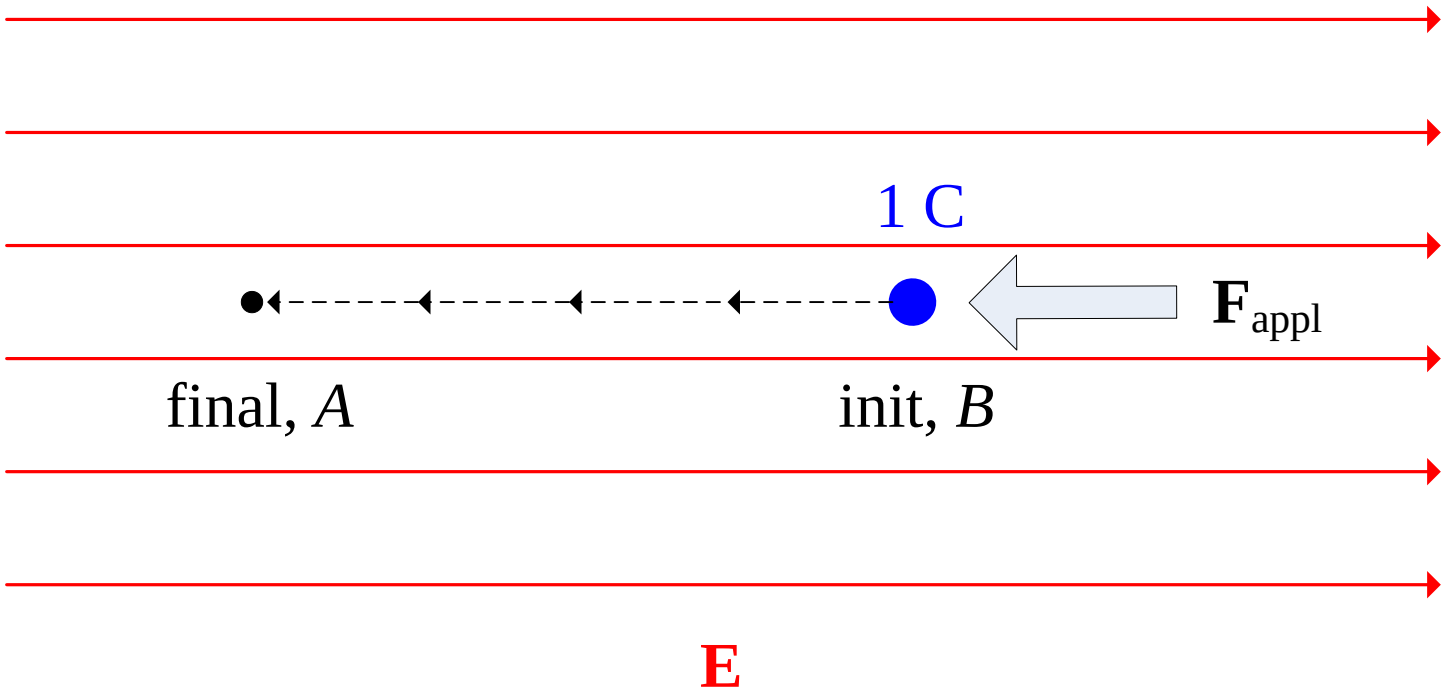
ถ้าให้จุดเริ่มต้นแทนด้วยจุด B และจุดสุดท้ายแทนด้วยจุด A ดังแสดงในรูป 3 ความต่างศักย์ที่ได้จะเป็นความต่างศักย์ระหว่างจุด A และ B ซึ่งเขียนแทนด้วย V_{AB} สามารถหาได้ดังนี้

$$V_{AB} = -\int_{B}^{A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \qquad (7)$$

เมื่อ

V_{AB} คืองานที่ใช้ในการเคลื่อนประจุหนึ่งหน่วยจากจุด B ไปจุด A

ความต่างศักย์ มีหน่วยเป็น จูลต่อคูลอมบ์ (joules per coulomb) หรือ โวลต์ (volt)



รูป 3

ในการคำนวณ หาค่า V_{AB} ตาม (7) จำเป็นที่จะต้องทราบ $d\mathbf{l}$
ซึ่ง $d\mathbf{l}$ จะมีรูปแตกต่างกันไป ตามระบบพิกัดที่ใช้ดังนี้

$$d\mathbf{l} = dx\hat{\mathbf{a}}_x + dy\hat{\mathbf{a}}_y + dz\hat{\mathbf{a}}_z \qquad (8)$$

ระบบพิกัดฉาก

$$d\mathbf{l} = d\rho\hat{\mathbf{a}}_\rho + \rho d\phi\hat{\mathbf{a}}_\phi + dz\hat{\mathbf{a}}_z \qquad (9)$$

ระบบพิกัด
ทรงกระบอก

$$d\mathbf{l} = dr\hat{\mathbf{a}}_r + rd\theta\hat{\mathbf{a}}_\theta + r\sin\theta d\phi\hat{\mathbf{a}}_\phi \qquad (10)$$

ระบบพิกัด
ทรงกลม

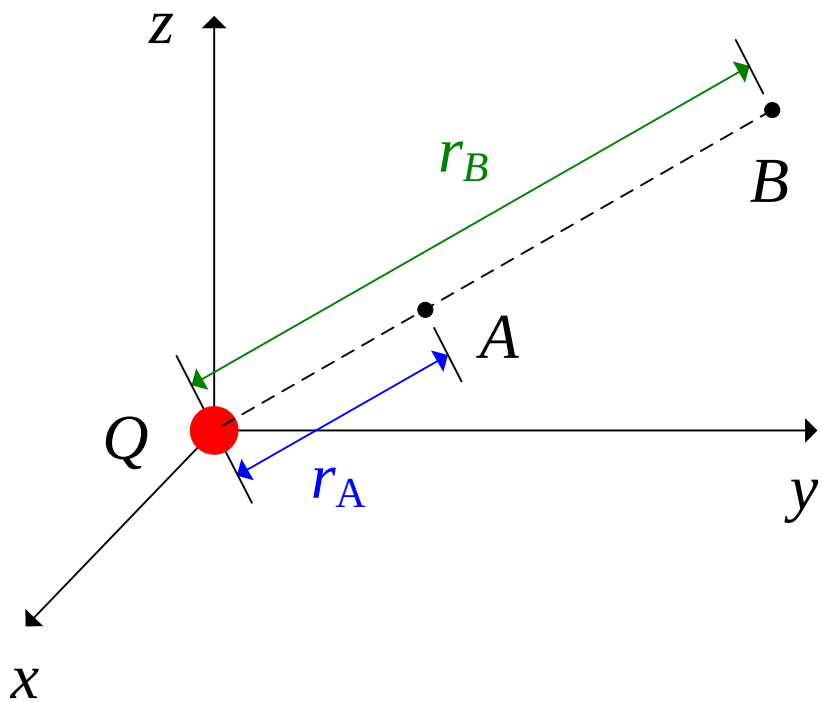
ตัวอย่าง จงหาความต่างศักย์ระหว่างจุด A และ B (V_{AB})

เมื่อ

จุด A คือจุดที่มีระยะในแนวรัศมี $r = r_A$ และ

จุด B คือจุดที่มีระยะในแนวรัศมี $r = r_B$ ดังแสดงในรูปประกอบ

ท่ามกลางสนามไฟฟ้าที่มีกำเนิดจากประจุแบบจุด Q ที่อยู่ ณ จุดกำเนิด (origin) และอยู่ในตัวกลางอวกาศว่าง



รูปประกอบตัวอย่าง

ศักย์ไฟฟ้า (Potential)

ความต่างศักย์ V_{AB} สามารถเขียนในรูปของผลต่างระหว่าง V_A และ V_B ได้เป็น

$$V_{AB} = V_A - V_B \qquad (11)$$

เมื่อ

V_A คือศักย์ไฟฟ้า (potential) ที่จุด A เทียบกับจุดอ้างอิงที่มีศักย์เป็นศูนย์

V_B คือศักย์ไฟฟ้า (potential) ที่จุด B เทียบกับจุดอ้างอิงที่มีศักย์เป็นศูนย์

จุดที่มีศักย์เป็นศูนย์ ในทางปฏิบัติ คือพื้นดิน (ground)

ในทางทฤษฎี จุดที่มีศักย์เป็นศูนย์จะแทนด้วยจุดที่อยู่ไกลออกไปมาก ๆ จากแหล่งกำเนิดซึ่งจุดที่ว่านี้ก็คือ อนันต์ (infinity)

- ถ้าให้จุด B อยู่ห่างจากแหล่งกำเนิดออกไปมาก ๆ จะได้ศักย์ไฟฟ้า ณ จุด B จะมีค่าเป็นศูนย์

แทนค่า $V_B = 0$ ลงในสมการ (11) ยังผลให้ได้

$$V_A = V_{AB} \tag{12}$$

เพื่อความง่าย จะละตัวห้อย (subscript) ใน (12) ทั้งหมด และแทนค่าที่ได้นี้ด้วย V

$$\boxed{V} \equiv V_A = V_{AB} \qquad (13)$$

V ที่ได้นี้ได้รับการเรียกว่า ศักย์ไฟฟ้า (potential) หรือศักย์ไฟฟ้าสัมบูรณ์ (absolute potential)

- V จะเป็นศักย์ไฟฟ้าที่จุดใด ๆ $P(x,y,z)$ เทียบกับจุดอนันต์ที่มีศักย์ไฟฟ้าเป็นศูนย์

การหาสนามไฟฟ้าจากเกรเดียนต์ของศักย์ไฟฟ้า

เมื่อทราบศักย์ไฟฟ้า สนามไฟฟ้าสามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\mathbf{E} = -\nabla V \qquad (14)$$

∇V ให้อ่านว่า เกรเดียนต์ V (gradient V) ในระบบพิกัดฉากมีค่าเป็น

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{a}}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathbf{a}}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{a}}_z \qquad (15)$$

- ∇V เป็นปริมาณเวกเตอร์ และชี้ไปในทิศที่ศักย์ไฟฟ้าเพิ่มสูงสุด (maximum increasing) เทียบกับระยะทางที่เปลี่ยนไป

∇V ในระบบพิกัดทรงกระบอกมีค่าเป็น

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\hat{\mathbf{a}}_{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\mathbf{a}}_{\phi} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{a}}_{z} \qquad (16)$$

∇V ในระบบพิกัดทรงกลมมีค่าเป็น

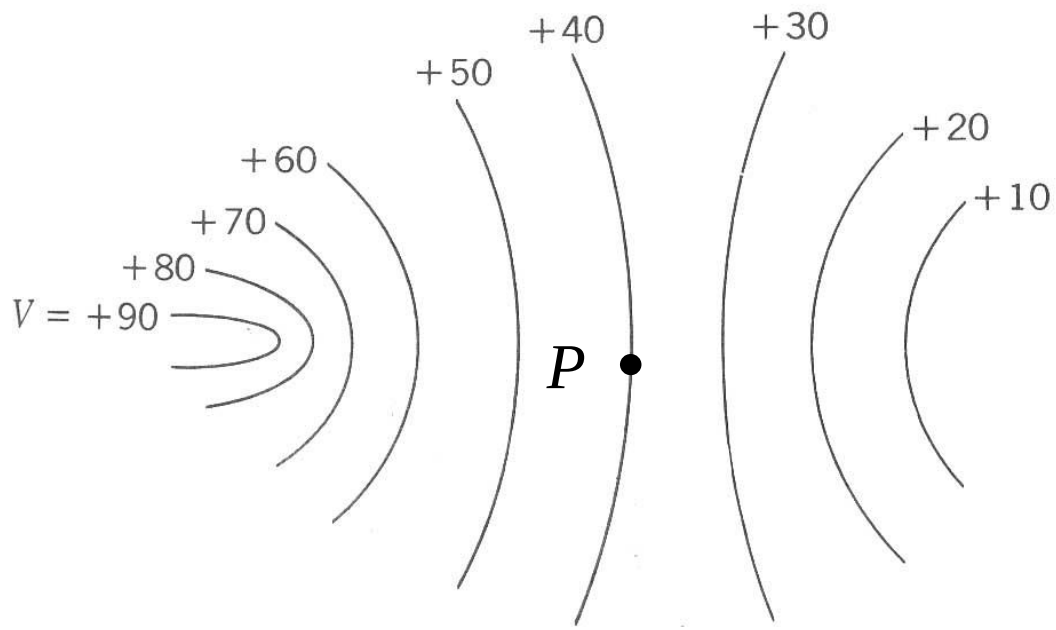
$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{a}}_{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\mathbf{a}}_{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\mathbf{a}}_{\phi} \qquad (17)$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ศักย์ไฟฟ้า $V = 2x^2y - 5z$

จงหาปริมาณต่าง ๆ ต่อไปนี้ เมื่อตัวกลางภายใต้การพิจารณาเป็นอวกาศว่าง

(ก) สนามไฟฟ้าที่จุดในระบบพิกัดฉาก $P(-4,3,6)$

(ข) ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้ารูปทั่วไป

(ค) ความหนาแน่นประจุไฟฟ้าเชิงปริมาตรที่จุดในระบบพิกัดฉาก $P(-4,3,6)$

ตัวอย่าง จงหาทิศของเกรเดียนต์ของ V (∇V) และทิศของสนามไฟฟ้า ($\mathbf{E}$) ณ ตำแหน่ง P ที่อยู่ในบริเวณที่มีศักย์ไฟฟ้าแสดงดังรูปข้างล่างนี้