

# Spálíkön

David Erik Mollberg

Guðjón Ingibergur Ólafsson

Gunnar Gylfason

Magnea Gunnarsdóttir  
Steindór Tryggvason

Rebekka Jóhannsdóttir  
Styrmir Gauti Fjeldsted

Róbert Árnason  
Vésteinn Sigurjónsson

20. janúar 2017

## 1 Inngangur

Spálíkön eru til margra hluta nytsamleg en mikilvægt er að velja rétt spálíkan að hverju sinni úr þeim hafsþjó af spálíkönnum sem til eru. Hvert spálíkan hefur sína eigin parametra sem ráða niðurstöðu líkansins en það getur ýmist verið mjög auðvelt og erfitt að nálgast þessa parametra.

Í þessari skýrslu verður farið yfir helstu tegundir spálíkana með það til hliðsjónar hversu góð nálgun þau eru við þjónustu með mismunandi millikomutíðni og afgreiðslutíma.

## 2 Sveiflur og leitni(e.trends)

Þegar spá þarf fyrir um sveiflur eða leitni sem eru í gangi þá þarf að passa að velja réttar spáaðferðir. Gagnlegt er að líta á vöxt fyrirtækisins og markaðarins í sölu/aðgerðum, þegar litið er á gögn um mánaða eða árabíl og augljóst mynstur er milli daga, vikna eða mánaða má áætla að mynstrið haldi áfram og hægt að yfirfara það í spá. Mikilvægt að hafa næg gögn yfirleitt miðað við tvö tímabil eða meira. [2]

### 2.1 Aðferðir

Árstíðarsveiflur eða vikusveiflu geta verið metna með árstíðarsveiflustöðul (e.seasonal index), getur verið háð eða óháð breytingu á meðal eftirspurnar. Leitni (e.trend) er auðvelt að meta bæði minkunn eða aukingu í eftirspurn, þá er hallatala bestu línu gegnum gagna punkta fundin, einnig getu verið enginn leitni ef eftirspurn helst stöðug. [5]

### 2.2 Jöfnur

$y$  = tímabilsgögn

$I$  = árstíðarstöðull

$L$  = fjöldi lotna á tímabili

$A_p$  = meðaltal fyrir lotu á tímabili

$m$  = hallatala bestu línu

$x$  = tími gagna

$\bar{X}$  = meðaltal tímabilsins

$\bar{Y}$  = meðaltal gagna tímabilsins

$b$  = skurðpunktur

$Y$  = jafna bestu línu

$$I = A_p / (y/L)$$

$$m = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}$$

$$b = \bar{Y} - m\bar{X}$$

$$Y = mx + b$$

### 3 Preföld veldisjöfnun

Þegar spáð er fyrir með veldisjöfnun og gögninn sem spáin byggir á innihalda línulega hneigð og árstíðarsveiflu þá þarf að beita þrefaldri veldisjöfnun. Til að geta beitt þessari spáaðferð þarf að lágmarki að hafa gögn fyrir tvær árstíðir.[4]

#### 3.1 Skilgreiningar á táknum

$F(t + m)$  = spá fyrir tímabilið  $t+m$

$S_t$  = veldisjöfnun fyrir tímabil  $t$

$b_t$  = línuleg hneigð jöfnin

$I_t$  = árstíðarsveiflujöfnun jöfnun fyrir tímabil  $t$

$y$  = gögn

$S$  = veldisjöfnuð gögn

$I$  = árstíðar stuðull

$b$  = línuleg hneigð bendill

$m$  = fasti

$t$  = tíma bendill

$L$  = fjöldi lotna í árstíð

$\alpha$  = fasti

$\beta$  = fasti

$\gamma$  = fasti

$A_p$  = meðaltal fyrir lotu í árstíð

#### 3.2 Jöfnur

$$S_t = \alpha \frac{y_t}{I_{t-L}} + (1 - \alpha)(S_{t-1} + b_{t-1})$$

$$b_t = \gamma(S_t - S_{t-1}) + (1 - \gamma) + (1 - \gamma)b_{t-1}$$

$$I_t = \beta \frac{y_t}{S_t} + (1 - \beta)I_{t-L}$$

$$F_t + m = (S_t + mb_t)I_{t-L+m}$$

$$b = \frac{1}{L} \left( \frac{y_{L+1} - y_1}{L} + \frac{y_{L+2} - y_2}{L} + \dots + \frac{y_{L+L} - y_L}{L} \right)$$

$$A_p = \frac{\sum_{i=1}^{t=10} y_i}{L}$$

## 4 Hreyfið meðaltal (e. Moving average)

Hreyfið meðaltal eða Moving Average er aðferð sem er nokkurskonar milli aðferð á milli tveggja mjög öfga-kenndra spálíkana. Það fyrr er hreint meðaltal sem telur besta forspáar gildið vera meðaltal af öllum þeim tímabilum (vikum, mánuðum eða árum) liðnum þar til nú. Það seinna er hið svokallaða Naive eða Constant módel sem telur besta forspáargildið fyrir morgundaginn það sem gerðist í dag og fyrri atburðir ónauðsynlegir. Hugmyndin á bakvið Moving Average er blanda af þessum tveim þar sem meðaltal er tekið af ákveðnum gildum í fortíðinni til þess að spá um fram í tímann. Þetta er aðferð sem er algeng og er mjög víða notuð, sem dæmi má nefna að hreyfið meðaltal og vegið hreyfið meðaltal notað í fjármálageiranum þegar fylgst er með þróun verða.

### 4.1 Hvernig virkar hún

Til eru fleiri en ein útfærsla á þessari aðferð en sú einfaldasta er að taka venjulegt meðaltal af nýjustu  $m$  gildum tímabils, þar sem  $m$  er heiltala. Þetta er það sem kallast Simple Moving Average og er notað til þess að spá fyrir gildi  $Y$  fyrir tímabil  $t+1$ . Hreyfið meðaltal notar eftirfarandi formúlu.

$$Y_{x+1} = \frac{Y_t + Y_{t-1} + \dots + Y_{t-1+m}}{m}$$

Það gefur auga leið að hvert gildi í spálíkani hefur því vægi  $1/m$  og því fleiri gildi sem notuð eru í líkani því mýkri verða gildi sem koma úr líkaninu.

### 4.2 Forsendur

Hreyfið meðaltal er líkan sem krefst mikils magn af gögnum og hentar yfirleitt best þar sem sveiflur í gögnum eru minnisháttar, þó er hægt að nota hana þar sem árstíðabundin sveifla er. Til þess að líkanið taki við sér við slíkar aðstæður þarf þó að minnka  $m$ , við það erum við þó að fórna stöðugleika spánnar og líkanið verður kvikulla. Helstu kostir þessa líkans eru að það er einfalt og auðskiljanlegt og gefur góðar niðurstöður við stöðugar aðstæður. Helsti galli þessarar aðferðar er að hætta er á töf þegar kemur að sveiflum þegar valið er of stórt  $m$ , að líkanið taki seinna við sér við breytingum heldur en önnur líkön. Þó er hægt að bæta upp fyrir þessi töf með vigtuðu hreyfðu meðaltali en fjallað verður um það seinna. [1]

## 5 Vegið Hreyfið Meðaltal

Vegið hreyfið meðaltal er aðferð sem er mjög sambærileg og hreyfið meðaltal að mörgu leyti. Munurinn á þessum tveim aðferðum liggur helst í því að í þessari aðferð er sett aukið vægi á ákveðin gildi og þá langoftast er sett aukið vægi á nýjustu gildin. Þessi aðferð hentar einnig betur til að spá fyrir um trend. Val á vægisstuðlum er stundum byggt á reynslu en einnig eru til reikningsaðferðir til að finna þessa stuðla. Til þess að geta notað þessa aðferð þarf að velja eitthvert tímabil sem er svo skipt niður, hvernig tímabilinu er skipt niður fer alfarið eftir upplýsingum og hvað verið er að skoða. Einnig þarf að hafa upplýsingar um þetta tímabil, sem dæmi sölutölur eða innhringar. [3]

### 5.1 Skilgreiningar á táknum

$WMA$  = Vegið hreyfið meðaltal

$d_i$  = Tímabilið sem skoðað er. Teljarinn getur verið til dæmis dagar eða mánuðir

$S_i$  = Upplýsingar um til dæmis sölutölur eða innhringar. Teljarinn getur til dæmis verið dagar eða mánuðir

$D$  = Summan af fjölda tímabila.

$WT_i$  = Stuðullinn fyrir hvert tímabil.

$i$  = Teljari frá 1 og upp í óendanlegt.

## 5.2 Jöfnur

$$WT_i = \frac{d_i}{D}$$

$$WMA = \sum_{n=1}^{\infty} WT_i * S_i$$

## 6 Tímaháðar líkindadreifingar (stationary distributions)

Tímaháðar líkindadreifingar er í raun aðferð til að skoða hegðun dreifinga fyrir eitthvað kerfi, aðallega til að sjá hvort að dreifing geti haldið sér yfir mörg tímabil. Helst er þar talað um stationary Markov keðjur þar sem að skoðuð eru tilfelli í ótímaháðu umhverfi til að draga ályktun um hegðun kerfis þegar að tími skiptir máli. Þá er gert ráð fyrir því að stationary eiginleikar haldist yfir öll möguleg tímaástand. Einnig er oft talað um jaðardreyfingu á kyrrstæðu kerfi eða stöðugu tímabili sem stationary distribution. Í síðasta lagi nær það utan um joint probability distribution á stöðnuðu tímabili.

Skilyrði fyrir stationary distribution í Markov keðju er að allavega eitt jákvætt endurkvæmt ástand sé til (positive recurrent), veit ekki alveg hvort að okkar gagnagrunnur mundi falla undir þetta. Hvort að einungis þurfi að vera ein endurtekning eða kerfisbundnar endurtekningar í keðjunni.

Notagildi er ekki beint ein afmörkuð notkun heldur meira bara skilyrði fyrir notkun á öðrum líkindadreifingum til þess að sjá til þess að þær haldist óbreyttar yfir tímabil. Við munum þurfa að athuga hvort að okkar gagnagrunnur sé með stationary distribution.

## 7 Veldisjöfnun

Veldisjöfnun er góð leið til að spá fyrir um gögn þegar takmörkuð gögn eru fyrir hendi þar sem aðferðin krefst fárra parametra. Spáin gerir ráð fyrir að trend eða árstíðarsveifur seinustu ára haldi áfram og þess vegna stundum talað um að veldisjöfnun sé ekki hentugt fyrir langtíma spá þar sem trend eða árstíðarsveifur eiga til að deyja út til lengri tíma. Veldisjöfnunin nær ekki að grípa atburði sem eru ekki reglulegir eða atburði sem hreyfast til á dagatalinu, ekki alltaf á sama tíma árs. Veldisjöfnun getur spáð fyrir um level, trend og seasonality. Veldisjöfnun er oft notuð í framleiðsluspám og þá í verkröðun, vaktaskipulagi og innkaupum.

### 7.1 Einföld Veldisjöfnun

Með einfaldri veldisjöfnun er notað vegið meðaltal allra fyrri tímabila til þess að spá fyrir um framtíðina. Þetta hentar fyrir spár þar sem ekki eru trend, engar árstíðarsveifur og ekkert level í gögnunum. Formúlan sem er notuð til þess að spá um næsta tímabil er eftirfarandi:

$$ESF_{t+1} = ESF_t + \alpha(Ad_t - ESF_t)$$

Þar sem ESF stendur fyrir Exponential Smoothing Forecast, Ad er Actual demand og  $\alpha$  ræðsta af því hvort spáin eigi að vera stöðug eða kvik. Því stærra sem  $\alpha$  er því meira vægi er sett á ný gildi og því kvikari verður hún en þetta er venjulega fundið út frá reynslu og þá oftast notað það sem lágmarkar skekkju.

Í framleiðsluspám viljum við hafa stöðugleika og því gott að nota  $\alpha$  á bilinu 0,1-0,2.

## 7.2 Tvöföld Veldisjöfnun

Þar sem einföld veldisjöfnun nær illa að meðhöndla halla í gögnum (tímaseinkun) þá er hugmyndin að nota veldisjöfnun og leiðrétta hana fyrir halla. Þetta er kallað tvöföld veldisjöfnun og er kennd við Holt's aðferðina. Holt's aðferðin reiknar meðaltöl og lagfræðir þau með tillit til halla.

$$FIT_t = F_t + T_t$$

Þar sem  $F_t$  er einföld veldisjöfnun og  $T_t$  mat á halla línunnar.

Formúlan fyrir þessa aðferð er :

$$Ft = \alpha * At_1 + (1 - \alpha)[Ft_1 + Tt_1] = At_1 + (1 - \alpha)FIT_1$$

## 7.3 Þreföld Veldisjöfnun

Þreföld veldisjöfnun er aðferð sem notar bæði aðlögun að halla og árstíðastuðla og er kölluð Holt's-Winter aðferðin. Hér er árstíðarstuðullinn annað hvort margfaldaður eða bættur við Holt's aðferðina. Árstíðarstuðullinn er margfaldaður ef við seljum 10% fleiri íbúðir á sumrin en á veturnar. Árstíðarstuðullinn er hins vegar bættur við þegar við seljum t.d. 10.000 fleiri íbúðir í desember en við gerðum í nóvember.

## 8 Samantekt og niðurstöður

Það er ljóst að það eru til margar mismunandi tegundir spálíkana til og það er að mörgu að huga þegar að þarf að velja spálíkan sem hentar. Það er hægt að velja á milli þess að hafa kvika spá sem bregst hratt við breytingum og er því óstöðugari eða spá sem bregst hægar við. Til að leggja mat á spálíkanið er hægt að nota spálíkanið fyrir tímabil sem eru þegar til raungögn fyrir og bera saman niðurstöðurnar, t.d. með aðferð minnstu kvaðrata (e. Mean squared error).

## Heimildir

- [1] Duke. Moving average. <https://people.duke.edu/~rnau/411avg.htm>. Accessed: 2017-01-19.
- [2] H. Newspapers. Chron. <http://smallbusiness.chron.com/trend-forecasting-61347.html>. Accessed: 2017-01-20.
- [3] OANDA. Weighted moving average. <https://www.oanda.com/forex-trading/learn/forex-indicators/weighted-moving-average>. Accessed: 2017-01-19.
- [4] N. I. of Standards and Technology. Engineering statistics handbook. <http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/pmc/section4/pmc435.htm>. Accessed: 2010-09-30.
- [5] Study.com. What is a trend line in math?-definition, equation analysis. <http://study.com/academy/lesson/what-is-a-trend-line-in-math-definition-equation-analysis.html>. Accessed: 2017-01-20.