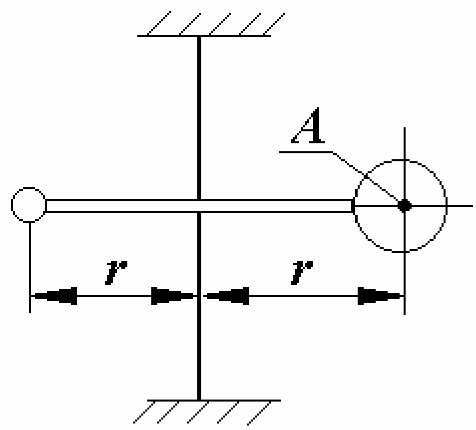
Лабораторна робота N 1-11
ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТІ КУЛІ ЗА ДОПОМОГОЮ КРУТИЛЬНО-БАЛІСТИЧНОГО МАЯТНИКА

1. ТЕОРЕТИЧНІ СВІДОМОСТІ ТА ОПИС УСТАНОВКИ

Крутильно-балістичний маятник призначений для вивчення законів обертального руху. Він являє собою масивне тіло зі значним моментом інерції *J*, підвішене на пружній струні (мал. 1).

В результаті удару кулі в точку А маятник відхиляється від положення рівноваги.



Кінетична енергія маятника почне поступово переходити в потенціальну енергію пружної деформації струни, що закручується. Потім починається процес переходу потенціальної енергії в кінетичну і т.д. Маятник робить гармонічні коливання, період яких значно більше часу зіткнення.

Рис. 1

На підставі закону збереження моменту імпульсу можна записати:

$$mvr = (J_n + J)\cdot\omega_0.$$

де ω_0 – початкова кутова швидкість маятника;

J_n – момент інерції кулі відносно осі обертання маятника;

J – момент інерції маятника;

m – маса кулі.

Тому що $J_n << J$, то $mvr = J\cdot\omega_0$, звідки

$$v = \frac{J\cdot\omega_0}{mr}. \qquad (1)$$

Величини m і r можуть бути безпосередньо виміряні. Отже, для визначення швидкості кулі v потрібно знайти момент інерції і початкову кутову швидкість маятника.

Для визначення J і ω_0 скористаємося законом збереження механічної енергії, другим законом динаміки і теорією гармонічних коливань.

Вправа 1.

Визначення кутової швидкості маятника.

Кінетична енергія обертального руху маятника

$$E_k = \frac{J \cdot \omega^2}{2}.$$

переходить у потенціальну енергію, яка дорівнює роботі по закручуванню струни. На підставі закону Гука пружний момент струни пропорційний куту повороту α маятника: $M = -K\alpha$ (де K – коефіцієнт пропорційності, що називається модулем крутіння). Елементарна робота з закручування струни на кут $d\alpha$ дорівнює

$$dA = M \cdot d\alpha = -K \cdot \alpha \cdot d\alpha.$$

Після інтегрування одержимо:

$$A = -\frac{K \cdot \alpha^2}{2}.$$

Тоді потенціальна енергія пружної струни буде дорівнювати

$$E_p = -A = \frac{K \cdot \alpha^2}{2}.$$

Нехтуючи незначними втратами на тертя, одержимо на підставі закону збереження енергії:

$$\frac{J\omega^2}{2} = \frac{K\alpha^2}{2}$$

або

$$\sqrt{\frac{J}{K}} = \frac{\alpha}{\omega_0} \qquad (2)$$

На підставі другого закону динаміки для обертального руху

$$M = J \cdot \varepsilon, \qquad (3)$$

де $\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$ – кутове прискорення.

Одержавши від кулі кінетичну енергію, маятник буде виконувати коливання під дією пружного моменту струни, який дорівнює

$$M = -K \cdot \alpha.$$

Знак мінус обраний тому, що пружний момент нитки спрямований убік, протилежний відхиленню маятника.

Рівняння (3) можна переписати у виді

$$J \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2} + K \cdot \alpha = 0. \tag{4}$$

Властивим розв’язком цього рівняння є

$$\alpha = A \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{K}{J}} \cdot t\right)$$

у чому можна переконатися безпосередньою підстановкою.

Величина $\sqrt{K/J}$ в останньому виразі відіграє роль властивої кругової частоти, що, по визначенню, дорівнює (див. формули (1),(2)):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{J}} = \frac{2\pi}{T_0}$$

Таким чином, маятник буде виконувати гармонічні коливання з періодом

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{K}}. \tag{5}$$

Підставляючи в (5) вираження для $\sqrt{J/K}$ з рівняння (2), одержимо

$$T_0 = 2\pi \cdot \frac{\alpha}{\omega_0}$$

звідки початкова кутова швидкість маятника дорівнює

$$\omega_0 = 2\pi \cdot \frac{\alpha}{T_0}. \tag{6}$$

Вправа 2.

Визначення моменту інерції маятника.

Для визначення моменту інерції маятника скористаємося формулою (5), переписаної у виді

$$T_{c1} \cdot K = 4\pi^2 \cdot J.$$

Якщо до стрижня маятника на відстані r_1 вправо і вліво від осі обертання (рис. 2) прикріпити дві кулі маси m_1 кожна, (причому r_1 значно більше радіуса кулі), то момент інерції системи

$$J_1 = J + 2m_1r_1^2, \tag{7}$$

де $m_1 \cdot r_1^2$ – момент інерції однієї кулі щодо осі маятника.

На підставі формули (7) період вільних коливань маятника змінюється:

$$T_{c2}\cdot K = 4\pi^2\,(J + 2m_1r_1^2). \qquad (8)$$

Розділивши (8) на (7),

$$\frac{T_{c2}^2}{T_{c1}^2} = 1 + \frac{2m_1r_1^2}{J} \quad \text{або} \quad \frac{T_{c2}^2 - T_{c1}^2}{T_{c1}^2} = \frac{2m_1r_1^2}{J},$$

звідки

$$J = 2m_1r_1^2 \cdot \frac{T_{c1}^2}{T_{c2}^2 - T_{c1}^2}. \qquad (9)$$

2. ОПИС УСТАНОВКИ.

Крутильно-балістичний маятник, використовуваний у даній роботі, виконано у вигляді хрестовини з двома тягарцями ***1***, *2*, які можна переміщувати, мішенню (диском) ***M*** і підвісом (рис. 2).

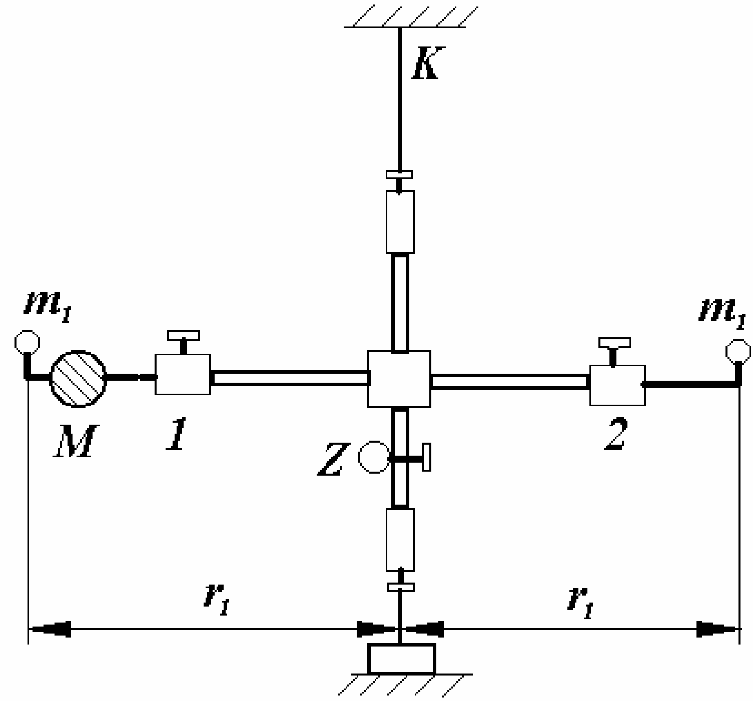


Рис. 2.

Хрестовина підвішена на сталевому дроті до настінного кронштейна ***K***. Диск (мішень) прикріплений до кінця горизонтальної штанги наглухо і має картонну і повстяну прокладки для затримання кулі. Кут відхилення маятника при влученні кулі в диск відраховується за шкалою за допомогою світлового “зайчика”, відбитого від дзеркала ***Z***, що встановлено на вертикальному плечі хрестовини. Цей кут легко визначити в такий спосіб. Тому що при відбиванні кут падіння дорівнює куту відбивання, то “зайчик” відхиляється на кут, у два рази більший, ніж маятник (рис. 3):

$$tg(2\alpha)=\frac{a}{b} \qquad (10)$$

де α – відлік по шкалі; b відстань від осі обертання до шкали.

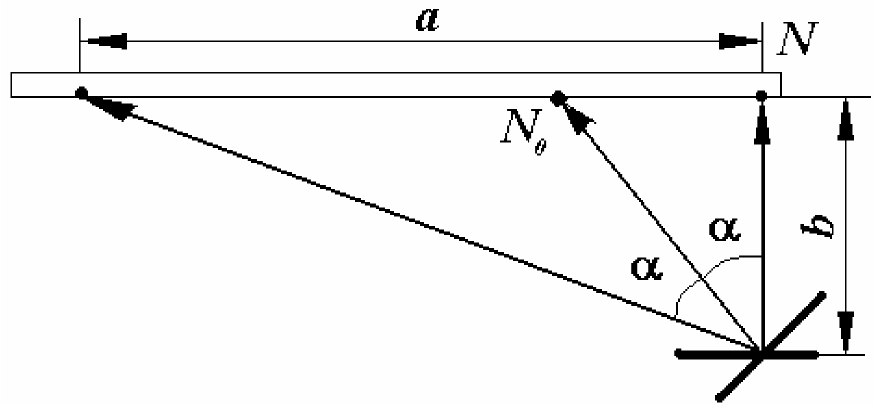


Рис. 3

3. ПОСЛІДОВНІСТЬ ВИКОНАННЯ РОБОТИ.

1. Визначають на технічних терезах масу кулі m, маса сфери m_1 $= 0,5$ *кг*.

2. Включають освітлювач і, відхиливши рукою маятник на невеликий кут, визначають період коливань T_c, вимірявши за допомогою секундоміра три рази час *20* повних коливань.

3. Встановлюють у ліву і праву чашки дві кулі і знаходять період коливань маятника T_1 (див. п. 2).

4. Обчислюють момент інерції маятника за формулою

$$J=\frac{T_{c1}^2}{T_{c2}^2-T_{c1}^2}\cdot 2m_1r_1^2.$$

5. Знімають кулі і роблять *5* разів постріли, відзначаючи по шкалі максимальне відхилення “зайчика” α і відстань r від точки влучення кулі до осі обертання маятника.

6. За формулою (10) знаходять α (у радіанах).

7. Обчислюють швидкість кулі за формулою

$$v=\frac{J\omega_0}{mr}=\frac{2\pi J\alpha}{mrT_0}.$$

8. Результати вимірів і обчислень заносять у таблицю 1.

Таблиця 1

№ п/п	m, *кг*	m_1, *кг*	t_1, *с*	T_1, *с*	t_2, *с*	T_2, *с*	J, *кгм*^{2}	a, *м*	r, *м*	α, *рад*	b, *м*	v, *м/с*	Δv, *м/с*

9. Знаходять середнє арифметичне відхилення

$$\bar{v} = \frac{1}{N} \cdot \sum_i v_i$$

10. Обчислюють середнє квадратичне відхилення результату

$$S(\bar{v}) = \sqrt{\frac{\sum(\delta v_i)^2}{N(N-1)}},$$

де $\delta v_i = \left| v_i - \bar{v} \right|$ – випадкове відхилення результату виміру.

11. Обчислюють довірчу границю випадкової похибки

$$\varepsilon = t_s \cdot S(\bar{v})$$

12. Обчислюють довірчий інтервал

$$\Delta = \sqrt{\varepsilon^2 + \theta^2}$$

де θ – інструментальна похибка.

13. Обчислюють відносну похибку виміру

$$\mu = \frac{\Delta}{\bar{v}} \cdot 100\%.$$

14. Остаточний результат записують у вигляді:

$$v = (\bar{v} \pm \Delta);\text{......}\mu =$$