ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1-09

ВИЗНАЧЕННЯ МОМЕНТА ІНЕРЦІЇ РІЗНОМАНІТНИХ ТІЛ МЕТОДОМ КРУТИЛЬНИХ КОЛИВАНЬ.

1. Теоретичний вступ.

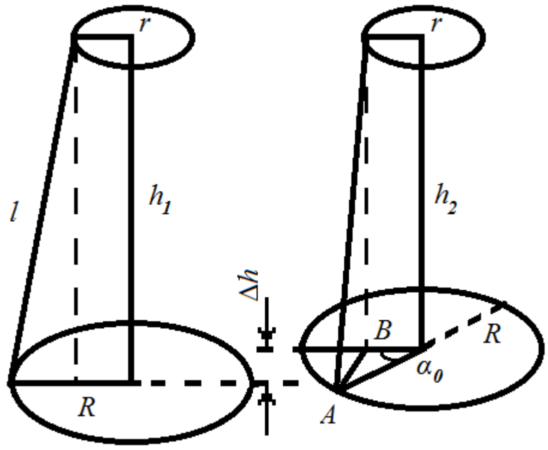
Гармонійні крутильні коливання – механічні періодичні коливання відносно осі, що проходить через центр мас тіла. Кут відхилення змінюється за гармонійним законом (законом синуса або косинуса):

$$\alpha(t) = \alpha_0 \sin\frac{2\pi}{T}t,$$

де T – період коливань.

Момент інерції тіла є мірою інертності в обертальному русі. В механічній коливальній системі момент інерції маятника J є одним з чинників, що визначають період коливань T.

В роботі використовують різновид маятника з так званим трифілярним підвісом.



Мал.1.

Трифілярний підвіс (мал.1.) складається з диска масою m і радіусом R , що підвішений на трьох симетрично розташованих металічних нитках. Зверху ці нитки симетрично закріплені по краю диска радіусом r.

Нижній диск повертають на невеликий кут α навколо вертикальної осі, що проходить через його центр диска перпендикулярно його площині. Центр мас системи трохи піднімається доверху на величину Δh. Виникає момент сили, що повертає диск у зворотному напрямку – виникають крутильні коливання.

У верхньому положенні система має потенціальну енергію

$$W_{\text{п}} = mg\Delta h.$$

У нижньому положенні (положенні рівноваги) диск має тільки кінетичну енергію обертального руху

$$W_{\text{к}} = \frac{1}{2}J\omega_{max}^2.$$

Нехтуючи втратами енергії на роботу проти сил тертя:

$$mg\Delta h = \frac{1}{2}J\omega_{max}^2.$$

Момент інерції диска

$$J = \frac{2mg\Delta h}{\omega_{max}^2}.$$

Кутова швидкість диска

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d}{dt}\alpha_0 \sin\frac{2\pi}{T}t = \frac{2\pi\alpha_0}{T}\cos\frac{2\pi}{T}t\,,$$

амплітуда коливань кутової швидкості

$$\omega_{max} = \frac{2\pi\alpha_0}{T}.$$

З геометрії мал.1:

$$h_1^2 = l^2 - (R-r)^2, \qquad h_2^2 = l^2 - AB^2 = l^2 - (R^2 + r^2 - 2Rr\cos\alpha_0)$$

Величина підйому диска

$$\Delta h = h_1 - h_2 = \frac{(h_1 - h_2)\cdot(h_1 + h_2)}{(h_1 + h_2)} = \frac{h_1^2 - h_2^2}{(h_1 + h_2)} \sim \frac{h_1^2 - h_2^2}{2l} =$$

$$= \frac{l^2 - (R^2 + r^2 - 2Rr) - l^2 + (R^2 + r^2 - 2Rr\cos\alpha_0)}{2l} =$$

$$= \frac{2Rr(1 - \cos\alpha_0)}{2l} = \frac{2Rr}{l}\sin^2\frac{\alpha_0}{2} \sim \frac{2Rr}{l}\frac{\alpha_0^2}{4} = \frac{Rr\alpha_0^2}{2l}.$$

Повертаючись до виразу момента інерції диска:

$$J = \frac{2mg\cdot Rr\alpha_0^2}{2l\cdot 4\pi^2\cdot\alpha_0^2}\cdot T^2 = k\cdot m\cdot T^2,$$

де $k = \dfrac{gRr}{4\pi^2 l} = const.$

Значення коефіцієнта k обчислюється з використанням даних конкретної установки .
Занотовують масу m_0 порожнього диска.

Вправа 1.

Визначення моментів інерції тіл.

1. Відхиляють ненавантажений (порожній) диск на кут $\approx 10°$ відносно вертикалі і відпускають. Секундоміром вимірюють час повних 10 коливань диска Δt_0. Обчислюють період коливань порожнього диска $T_0 = \frac{1}{10}\Delta t_0$. Обчислюють момент інерції порожнього диска

$$J_0 = k\cdot m_0\cdot T_0^2.$$

2. Розміщують на диску досліджуване тіло (циліндр) масою m_1. Повторюють виміри, знаходять період коливань навантаженого диска T_1 і обчислюють момент інерції диска з тілом:

$$J_{0+1} = k\cdot(m_0 + m_1)\cdot T_1^2.$$

Знаходять момент інерції тіла $J_1 = J_{0+1} - J_{0.}$

3. Виміряти за допомогою штангенциркуля діаметр циліндра D. Обчислити теоретичне значення момента інерції циліндра

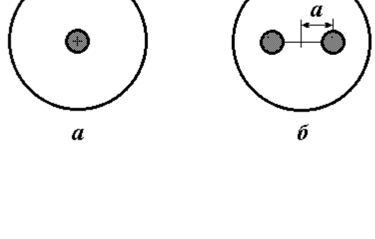
$$J_{\text{теор}} = \frac{1}{2}m_1R^2 = \frac{1}{8}m_1D^2.$$

4. Співставляють експериментальні і теоретичні значення моментів інерції J_1 і $J_{\text{теор}}$. Визначають абсолютну похибку $\Delta J_1 = \left|J_1 - J_{\text{теор}}\right|$ і відносну похибку

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta J_1}{J_{\text{ц}_a}}\cdot 100\%.$$

Вправа 2.

Перевірка теореми Гюйгенса-Штейнера.



Мал.2.

1. Розміщують на диску циліндр масою $m_ц$ (мал 2*а*). Повторюють виміри, знаходять період коливань диска з циліндром T_2 і обчислюють момент інерції диска з циліндром:

$$J_{0+ц} = k \cdot \left(m_0 + m_ц\right) \cdot T_2^2.$$

Знаходять момент інерції циліндра $J_ц = J_{0+ц} - J_0$.

2. Розміщують на диску два однакові циліндра масою $m_ц$ кожен (мал 2*б*). Вимірюють відстань a. Повторюють виміри, знаходять період коливань диска з циліндрами T_3 і обчислюють момент інерції диска з циліндрами:

$$J_{0+2ц} = k \cdot \left(m_0 + 2 \cdot m_ц\right) \cdot T_3^2.$$

Знаходять момент інерції системи двох циліндрів $J_{2ц} = J_{0+2ц} - J_0$. Знаходять момент інерції одного циліндра відносно осі, що зміщена на відстань a від центра мас циліндра

$$J_{ц_a} = \frac{1}{2} J_{2ц} = J_{експ}.$$

3. Розраховують момент інерції циліндра відносно осі, що зміщена на відстань a від центра мас циліндра згідно теореми Гюйгенса-Штейнера:

$$J_{ц_a} = J_ц + m_ц a^2 = J_{розр}.$$

4. Співставляють експериментальні і розраховані значення моментів інерції $J_{експ}$ і $J_{розр}$. Визначають абсолютну похибку $\Delta J_2 = \left|J_{експ} - J_{розр}\right|$ і відносну похибку

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta J_2}{J_{ц_a}}$$