

Дослідження властивостей вільного гіроскопу і визначення його моменту інерції

1. Теоретичний вступ і опис установки

Гіроскопом зветься симетричне тверде тіло, яке швидко обертається, ось обертання (ось симетрії) якого може змінювати власний напрямок в просторі. Звичайно гіроскоп являє собою масивний диск, який приводиться до обертання електричним шляхом, тому що він є ротором електродвигуна.

Зміну положення осі обертання в просторі можна здійснити за допомогою карданного підвісу (рис.1).

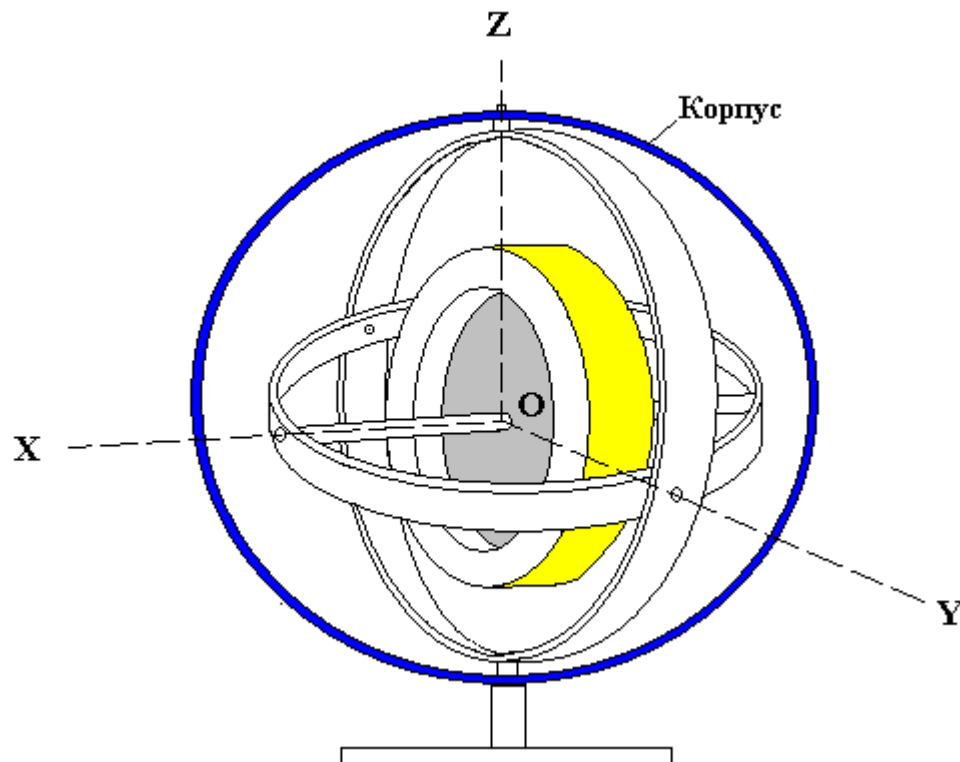


Рис.1

Такий гіроскоп має 3 ступині свободи, тому що може обертатися навколо 3-х взаємно перпендикулярних осей, які перетинаються в одній точці О. Осі обертання гіроскопу: ось власного обертання ОХ, яка зветься головною віссю, ось обертання ОУ внутрішнього кільця і ось обертання ОZ зовнішнього кільця, які знаходяться в загальному корпусі. Точка перетинання цих осей зветься точкою підвісу гіроскопу. Коли центр тяжіння усієї системи, яка складається з ротору і карданних кілець, співпадає з точкою підвісу, то гіроскоп зветься зрівноваженим чи астатичним гіроскопом.

Зрівноважений гіроскоп, до якого не прикладено зовнішніх сил, зветься **вільним гіроскопом**. Вільний гіроскоп має наступні властивості:

- 1) зберігає положення осі обертання в просторі;
- 2) є стійким до ударних дій;
- 3) має «надзвичайну» реакцію на дію зовнішньої сили (коли сила хоче повернути гіроскоп відносно однієї осі, то він повертається навколо другої, яка є перпендикулярною до цієї осі);
- 4) є безінерційним.

Незмінність положення осі гіроскопу у просторі пояснюється з рівнянь моментів, тобто основного закону динаміки цього обертального руху:

$$\frac{dL}{dt} = \vec{M}_{\text{вн}}, \quad (1)$$

де L - момент імпульсу гіроскопу,

$M_{\text{вн}}$ - сумарний момент зовнішніх сил.

Тому, що моменти сил тертя в підшипниках малі і вони розташовані симетрично відносно точки O , а момент сили тяжіння відносно точки O (згідно з визначенням точки O співпадає з центром тяжіння) дорівнює нулю, то сумарний момент зовнішніх сил дорівнює нулю. Тому:

$$\frac{dL}{dt} = 0$$

$$L = \text{const} \quad (2)$$

Ми отримали закон збереження моменту імпульсу: **в замкненій системі сумарний момент імпульсу системи залишається незмінним.**

У симетричного тіла напрямки моменту імпульсу L і кутової швидкості ω співпадають, тому що вони визначаються однаковим правилом правого гвинта (правилом буравчика) і зв'язані співвідношенням

$$L = J\omega. \quad (3)$$

В цьому рівнянні J - момент інерції гіроскопу відносно осі симетрії (наприклад, для диска він визначається згідно з формулою $J = \frac{1}{2}mR^2$, де m - маса диска, а R - його радіус).

Тому, згідно з (2) і (3) кутова швидкість ω і ось обертання зберігають незмінним напрямком у просторі.

При ударних впливах на гіроскоп момент, який створюється зовнішньою силою, викликає зневажливо малу зміну величини моменту імпульсу $\Delta L = M_{\text{вн}} \cdot \Delta t$, тому що тривалість удару Δt дуже мала. Отже, напрямок осі гіроскопу, який співпадає з напрямком вектора L , протягом часу удара не встигає змінитися.

Щоб пояснити 3-ю «надзвичайну» властивість гіроскопа (гіроскопичний ефект), розглянемо його рух при постійно діючій на відстані r від точки O зовнішньої сили F (чи пари сил), яка спрямована вздовж вертикальної осі OZ (рис. 2). Ця сила створює обертальний момент $M_{\text{вн}}$ відносно центра O , який дорівнює векторному добутку

$$M_{\text{вн}} = r \times F \quad (4)$$

і який є орієнтовним вздовж горизонтальної осі OY згідно з правилом правого гвинта перпендикулярно до площі креслення. Згідно з формулою (1) за час dt вектор L отримує прирощення

$$dL = M_{\text{вн}} dt$$

Цей вектор прирощення моменту імпульсу весь час буде перпендикулярним до вектору L , тобто спрямован також як і вектор сили, яка викликала його. Це значить, що за час dt гіроскоп повертається навколо осі OZ на кут $d\varphi$, тобто момент імпульсу змінився не тільки за величиною, але ж і за напрямком і дорівнює

$$L' = L + dL$$

Ось гіроскопу переміщується в напрямку дії моменту сили, а не самої сили, що і обумовлює незвичайну реакцію гіроскопу на тривалу зовнішню дію. Гіроскоп починає обертатися навколо осі OZ з сталою кутовою швидкістю

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (5)$$

Таке рівномірне обертання головної осі гіроскопу навколо осі, яка співпадає з напрямком дії зовнішньої сили, зветься **прецесією**.

Прецесійний рух буде тривати протягом усього часу дії зовнішньої сили і закінчиться з закінченням її дії. Отже, **гіроскопичний ефект є безінерційним**.

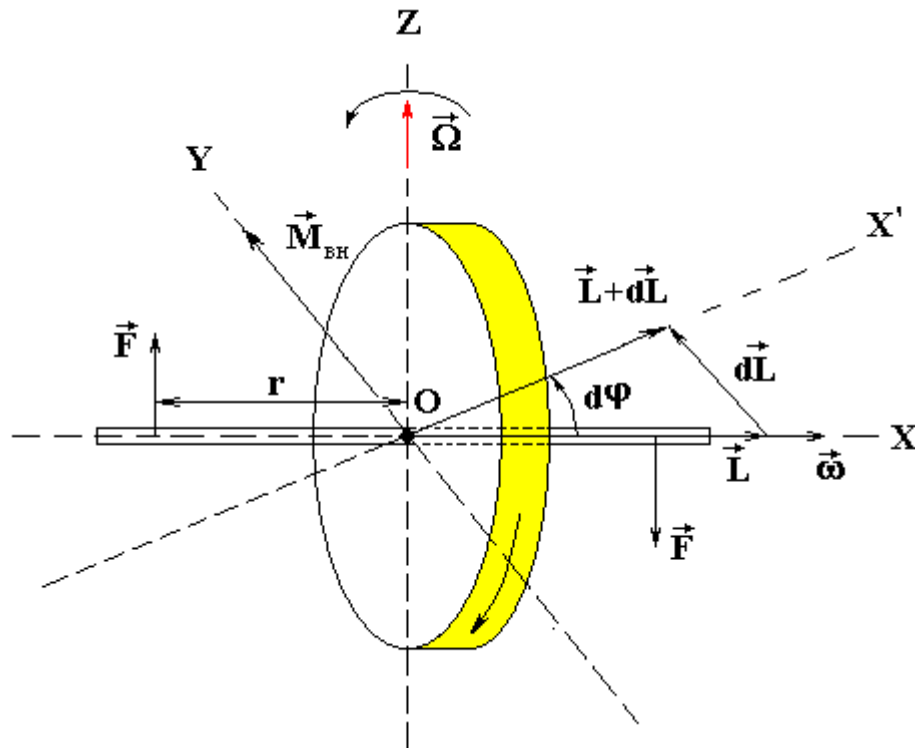


Рис. 2

Кутова швидкість прецесії Ω набагато менше власної кутової швидкості ω обертання гіроскопу. Отже можна вважати, що величина моменту імпульсу лишається незмінною, тому що вона визначається з основного значення ω ($|L| = J\omega = J\omega$) і змінюється тільки за напрямком. З векторного трикутника на рис. 2 випливає, що

$$|dL| = |L|d\varphi$$

Скористуємося цим рівнянням і формулою (5):

$$\Omega = \frac{|dL|}{|L|dt}$$

З формул (1) і (3), отримаємо:

$$\Omega = \frac{M_{\text{вн}}}{J\omega} \quad (6)$$

Якщо зовнішньою силою є сила тяжіння (в роботі підвішений вантаж), то її момент відносно точки підвісу O дорівнює

$$M_{\text{вн}} = mgr, \quad (7)$$

де r - плече сили $F = mg$.

Після об'єднання формул (7) і (6) остаточно отримаємо:

$$\Omega = \frac{mgr}{J\omega} \quad (8)$$

Таким чином, швидкість прецесії визначається величиною зовнішньої сили F , точкою її прикладення (плечем сили), кутовою швидкістю ω власного обертання гіроскопу і його моментом інерції J .

В експериментальній установці, яка зображена на рис.3, гіроскоп є металевий диск 1 (він об'єднан з ротором електродвигуна), який є розташований в корпусі 2. До нього прикріплена горизонтальна планка 3, яка має шкалу з поділеннями. Горизонтальне положення осі забезпечується тягарем 4, який може переміщуватися вздовж осі. При цьому забезпечується чи зрівноважний стан гіроскопу, чи створюється додатковий момент сили тяжіння, яка діє на гіроскоп при його обертанні. Гіроскоп є змонтованим на кронштейні 5 таким чином, що він має можливість власного обмеженого оберту в вертикальній площині. Кут оберту навколо вертикальної осі можна визначити за шкалою 6 за допомогою вказівника чи за допомогою електронного блока 7. Прилад дозволяє вимірювати кутову швидкість власного обертання гіроскопу (стрілкова шкала), час прецесії і кутову швидкість прецесії (цифрові шкали). Стрілкова шкала є проградуїрованою в одиницях $\text{об./хвил.} \cdot 10^3$.

Натиснення клавіші «Мережа» викликає вмикання приладу. При натисненні клавіші «Скид» здійснюється перевод блока вимірювань в вихідне нульове положення і починається процес відліку, а при натисненні клавіші «Стоп» можна зупинити відлік кута і часу прецесії.

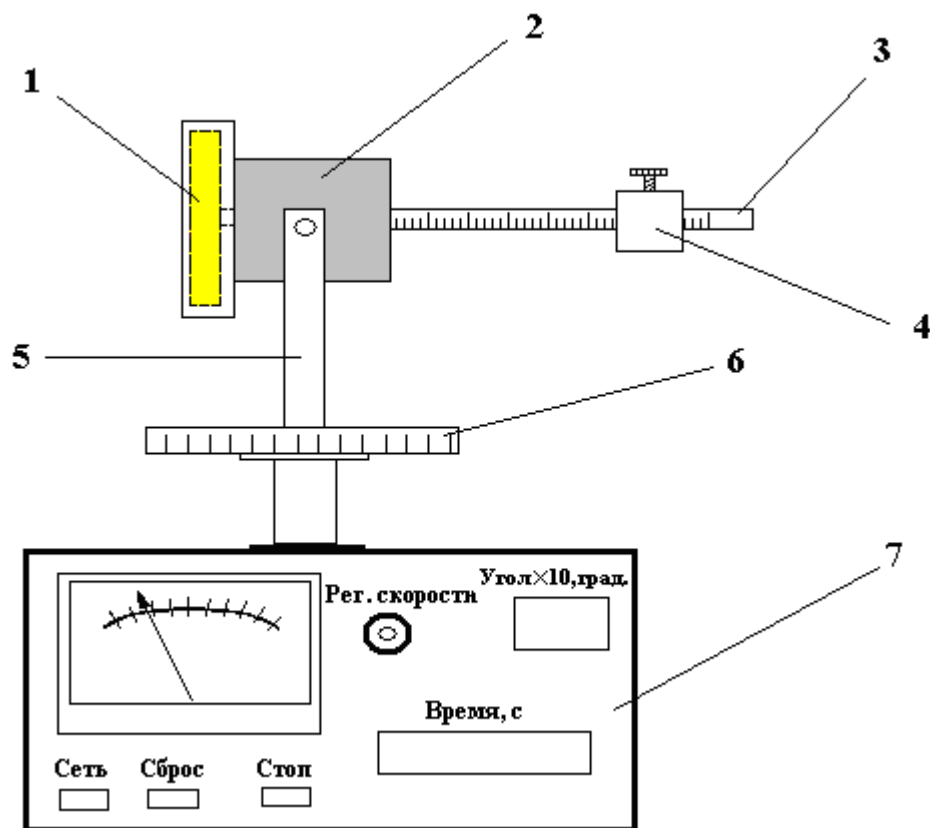


Рис. 3

2. Підготовка установки до роботи

1. Встановити ручку «Регулювання швидкості» в крайнє ліве положення.
2. Переконатися, що усі кнопки приладу знаходяться в відтиснутому стані.
3. Переміщувати тягар і добитися зрівноважного (горизонтального) положення гіроскопу.

4. За допомогою легких поштовхів в різних напрямках треба переконатися в тому, що гіроскоп, який не обертається поводитися, як звичайне тіло, яке змінює власне положення в просторі під зовнішнім впливом.
5. Включити вилку приладу в мережу.

3. Порядок роботи

Вправа 1

Визначення залежності кутової швидкості прецесії гіроскопу від кутової швидкості власного обертання.

1. Натиснути клавішу «Мережа» і встановити ручкою «Регулювання швидкості» число обертів двигуна $n = 3000$ об/хвил.
2. За допомогою легких поштовхів у різноманітних напрямках переконатися в тому, що гіроскоп, який обертається, не змінює свого положення в просторі.
3. Не вимикаючи прилад, перемістити тягар з початкового положення на $r = 4$ см до краю шкали (почнеться прецесійний рух в горизонтальній площині).
4. Натиснути кнопку «Скид» і після обертів гіроскопа на кут 40° (по шкалі прилада цьому куту відповідає значення **04**) натиснути кнопку «Стоп».
5. Значення кута обертів $\Delta\varphi$ і часу прецесії Δt , які фіксуються відповідними шкалами прилада, занести до табл. 1.

Табл. 1

№п/п	Власна кутова швидкість. ω , об/хвил.	Власна кут. швидкість. ω , рад/с	Кут обертів. $\Delta\varphi$, град.	Кут обертів. $\Delta\varphi$, рад.	Час прецесії, t , с	Швидкість прецесії Ω , рад/с
1						
2						
3						
4						
5						

6. Висловити кут обертів $\Delta\varphi$ в радіанах і власну кутову швидкість в рад/с згідно з формулами

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi(\text{град.})}{360}, \quad \omega = \frac{2\pi(\text{об / мин})}{60} \quad \text{і занести до таблиці.}$$

7. Обчислити швидкість прецесії з формули $\Omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$.
8. Повторювати дію з п. 4 – 7 при збільшенні кожний раз числа обертів на 1000 і довести його значення до $n = 7000$ об/хвил.
9. Побудувати графік залежності $\Omega = f(\omega)$.

Вправа 2

Визначення залежності кутової швидкості прецесії гіроскопу від обертального моменту зовнішньої сили.

1. Повернути тягарь в початкове (зрівноважене) положення.
2. Ручкою «Регулювання швидкості» встановити число обертів двигуна $n = 4000$ об/хвил.

2. Перемістити тягарь на відстань $r = 1\text{см}$ до краю шкали.
3. Виконати п. 4-7 з вправи 1.
3. Не змінюючи числа обертів двигуна і переміщуючи кожен раз тягарь на 1см, повторити вимірювання ще 4 рази .
4. Дані вимірювань занести до табл.2.

Табл.2

№ п/п	$P=mg$, Н	r , м	$M_{\text{вн}}$, Н·м	$\Delta\varphi$, град.	$\Delta\varphi$, рад.	t , с	Ω , рад/с	J , кг·м ²	ΔJ_i , кг·м ²	$(\Delta J_i)^2$
1										
2										
3										
4										
5										

5. Згідно з отриманими даними побудувати **графік залежності** $\Omega = f(M_{\text{вн}})$.
Момент зовнішньої сили розраховувати згідно з формулою

$$M_{\text{вн}} = mgr,$$

де $m = 0,375\text{кг}$ - маса тягаря; $g = 9,81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ - прискорення вільного падіння.

6. Обчислити момент інерції J гіроскопу з формули (8), знайти його середнє значення \bar{J} і оцінити похибки з формули

$$\sigma_J = t_s \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=5} \Delta J_i^2}{N(N-1)}},$$

де N – число вимірювань; t_s - коефіцієнт Стюдента, який має значення $t_s = 2,78$ для $N=5$ и довірчій імовірності $P=0,95$. Кінцевий результат записати в вигляді:

$$J = (\bar{J} \pm \sigma_J) \text{ед.изм.}$$

7. Зробити висновки з обох вправ.

4. Контрольні питання:

1. Який прилад зветься гіроскопом?
2. Сформулювати основний закон динаміки обертального руху абсолютно твердого тіла відносно нерухомої осі.
3. Який рух гіроскопу зветься прецесією?
4. Від чого і яким чином залежить кутова швидкість прецесії?
5. Сформулювати правило правого гвинта для визначення напрямку векторів кутової швидкості і моменту імпульсу L

Список літератури

1. Савельев И.В. Курс физики. Т.1.- М.:Наука, 1982. – с.190-197.
2. Трофимова Т.И. Курс физики. – М.: Высшая школа, 1994. – с.255-261.