Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Кафедра конструювання електронно-обчислювальної апаратури

Лабораторна робота
З МОДвІ №2

на тему:

«Розрахунок значення функції за допомогою її розкладу в ряди»

Виконав Дем’янчук Т. М.
студент ІІ-го курсу ФЕЛ
гр. ДК-12
Дата виконання: 20.03.2023
Перевірив:
доцент Бондаренко Н. О.

Київ 2023

Основні теоретичні відомості

• **Знакопочерговим** називається ряд, сусідні члени якого мають протилежні знаки.

• Ряд називається **знакосталим**, якщо він знакододатний або знаковід'ємний.

• Теореми збіжності рядів:

1. Ознака Лейбніца

Ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots$$

де усі елементи a_n або додатні або від'ємні, називається знакопереміжним рядом.

Ознака Лейбніца: якщо послідовність $\{|a_n|\}$ спадає монотонно[1] і $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, тобто:

1. $0 < a_{n+1} < a_n$;
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,

то знакопереміжний ряд є збіжним.

2. **Теорема Рімана про умовно збіжний ряд** — теорема стверджує, що перестановкою членів умовно збіжного ряду можна побудувати ряд, що збігається до якої завгодно суми чи взагалі розходиться.

• **Абсолютна похибка вимірювання** — абсолютна різниця між результатом вимірювання та істинним значенням вимірюваної величини.

• **Відносна похибка вимірювання** — це похибка вимірювання, виражена як відношення абсолютної похибки до результату вимірювання.

• **Значущі цифри числа** – це всі цифри числа починаючи з першої не нульової зліва.

Значуща цифра називається вірною*, якщо абсолютна похибка числа не перевищує ½ одиниці розряду, що відповідає цій цифрі.*

Приклад 1. Нехай x^*=14,537 і відомо, що $\Delta(x^*)$=0,04. Скільки вірних значущих цифр має число x^*?

Розв'язання. Маємо $\Delta(x^*)>0{,}5\cdot10^{-2}$ і $\Delta(x^*)<0{,}5\cdot10^{-1}$. Отже у числа x^* вірними будуть значущі цифри 1,4,5, а цифри 3 і 7 – сумнівні.

Приклад 2. Нехай x^*=8,677142 і $\Delta(x^*)=3\cdot10^{-4}$. Скільки вірних значущих цифр має число x^*?

Розв'язання. Оскільки $\Delta(x^*)=0{,}3\cdot10^{-3}<0{,}5\cdot10^{-3}$, то x^* має вірні три значущі цифри після коми, тобто вірними будуть значущі цифри 8,6,7,7.

Приклад 3. Нехай x^*=0,046725 і $\Delta(x^*)$=0,008. Скільки вірних значущих цифр має число x^*?

Розв'язання. Маємо $\Delta(x^*)=0{,}0\cdot10^{-2}>0{,}5\cdot10^{-2}$. Отже у числа x^* всі значущі цифри сумнівні.

Завдання
Створити програму, яка буде обраховувати наближене значення функції **ln(x)** в заданій точці x із заданою точністю $\varepsilon=10^{-2}$, шляхом її розкладу в ряд Тейлора, або Маклорена.

Рішення
1. Розкладено функцію **ln(x)** в степеневий ряд та визначено інтервал збіжності цього ряду.

$f(x)=\ln(x)$, розкладемо по с-м $x-1$

Скористаємось формулою для розкладу функції $\ln(1+x)$ в степеневий ряд:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{n}+\ldots,\quad x\in(-1;1]$$

$$\ln(x)=\ln(1+x-1),\quad z=x-1\Rightarrow \ln(1+x-1)=\ln(1+z)=$$

$$=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}+\ldots,\quad z\in(-1;1]$$

$$\ln(x)=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}+\ldots,$$

$(x-1)\in(-1;1]\Rightarrow -1<x-1\leqslant 1\Rightarrow 0<x\leqslant 2$ - обл. збіжності ряду

1.1. Перевірено ряд на збіжність

Перевірка збіжності ряду:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|,\quad c_n=(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n},\quad c_{n+1}=(-1)^{n+2}\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}\cdot(x-1)^{n+1}}{n+1}\times\frac{n}{(-1)^{n+1}\cdot(x-1)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n(x-1)^{n+1}}{(n+1)(x-1)^n}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n(x-1)}{n+1}\right|=|x-1|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right|=|x-1|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right|=|x-1|\Rightarrow$$

$\Rightarrow R=|x-1|$ $\quad |x-1|<1\Rightarrow -1<x-1<1\Rightarrow 0<x<2$

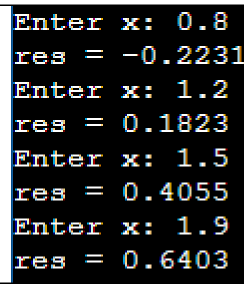
2. Визначено 3 значення функції, з точністю $\varepsilon=10^{-2}$, що підпадають під значення функції, що можуть бути отримані в результаті підстановки значень аргумента із області

збіжності в розклад функції **ln(x)** до степеневого ряду, аби пізніше перевірити значення, що буде обраховувати програма.

Значення функції **ln(x)**	Значення аргумента функції **ln(x)** (в межах області збіжності)
-0.223	0.8
0.182	1.2
0.405	1.5
0.642	1.9

Таблиця 1.

3. Отримано результати роботи програми для набору вхідних значень x із **таблиці 1** в пункті 2.



4. Обчислено абсолютну, відносну похибки, а також визначено вірні значущі цифри результату.

4.1. Абсолютна похибка:

$$\Delta = 0.6403 - 0.6418 = 0.0015$$

4.2. Відносна похибка:

$$\sigma = \frac{\Delta}{0.6403} = \frac{0.0015}{0.6403} \approx 0.0023$$

4.3. Значущі цифри результату:

6, 4, 0, 3

4.4. Вірні значущі цифри результату:

Всі значущі цифри сумнівні

Висновок

Виконуючи дану лабораторну роботу було:

1. На її початку наведено основні теоретичні відомості.
2. Сформульовано завдання.
3. У пункті 1 – теоретично розкладено функції **ln(x)** в степеневий ряд.
4. У пункті 1.1. – перевірено ряд на збіжність та знайдено радіус його збіжності.
5. У пункті 2. – за допомогою калькулятора знайдено значення розкладуваної функції в деяких точках.
6. У пункті 3. – наведно результат роботи написаної програми.
7. У пункті 4. – визначено абсолютну, відносну похибки, а також значущі цифри рузультату та вірні значущі цифри результату.

Помічено, що при розрахунках деяких значень функції в конкретних точках ці значення розходять з тими, що видає калькулятор. Похибка викликана можливостями комп’ютера.