論理学レポート

学籍番号 C5TB2006
氏名 安倍 大陽

第 I 部　授業内容のまとめ

論理学とは

論理学とは理屈を述べるための理屈であり、前提と結論に関する学問のことである。また、実生活の役に立つことは無いに等しく、学ぶという事象に満足する学問であるとも言えるかもしれない。効率化が騒がれる現代で論理学を学ぶことは非効率・非現代的の象徴であり愚行とも捉えられかねないが、自分なりの学ぶ意味を再構築するという点において重要な意味を持つ。かもしれない。

実生活の役に立たない論理学であるが、学問においてその多岐性は目を見張る物がある。特に情報領域においてはコンピュータの発展に大きく寄与しており、現代技術を支えている。現代という時代を支える一方で、学問としてはアンチ現代的であるがゆえに、矛盾的葛藤を内包した学問とも言える。かもしれない。また、数学、哲学の発展にも大きく発展したという歴史がある。論理学が確立した理論体系は様々な学問に幅広く影響を与えている。

論理学の特徴としてそのとっつきやすさが挙げられる。勉強を始めてから最新分野へ至るまで網羅すべき知識が他学問に比べても限られており、勉強しようと意気込んでからパイオニアになるまであまり時間を要しないという学問上大きなメリットも存在している。

論理学は立場によって捉え方が変わるという特徴もある。コンピューターサイエンス、哲学専攻の人たちにとっての論理学は、論理学者にとっての論理学とは別物である。今回の講義ではあくまで論理学者にとっての論理学、すなわち前提と結論に関する学問としての論理学を学修した。

学修の手順

本講義は全ての論理に対して、以下の手順で進められた。

STEP.1　形式言語の導入
STEP.2　意味論
STEP.3　証明論
STEP.4　意味論と証明論の関係

数学科においては意味論より先に証明論を学ぶ場合が多いが、本講義においては意味論から証明論という順で論理学について学修していった。

1　古典命題論理

1.1　論理学が扱う論理

まず初めに、論理学が扱う論理とは何なのか、例に従って簡単に確認する。

例 1.1.1. (推論)

- 「$1+1=2$」,「$1+1=2$」ならば『$1+1+1=3$』
  ゆえに、『$1+1+1=3$』
- 「仙台は日本の首都である」,「仙台は日本の首都である」ならば『東北地方に日本の首都はある』
  ゆえに、『東北地方に日本の首都はある』

1 つ目の例は確からしく見える。一方で、2 つ目の例は一見すると違和感がある。仙台は日本の首都ではないからだ。しかし、論理の構造に着目すると、2 つの例はどちらも同じ形をしていることがわかる。論理学とは、こうした論理の構造に焦点を当てた学問なのである。以下に授業で扱ったもう 1 つの例を提示しておく。

例 1.1.2. (推論)

- 「n は偶数である」ならば『n^2+3n+1 は奇数である。』
  ゆえに、『n^2+3n+1 は奇数でない』ならば「n は偶数ではない。」
- 「大森は仙台に住んでいる」ならば『大森は日本に住んでいる』
  ゆえに、『大森は日本に住んでいない』ならば「大森は仙台に住んでいない」

この例においても、どちらも対偶の形であるという点で共通している。論理学ではこうした論理の構造を形式言語を用いて表現していく。

1.2　古典命題論理

論理学の中でももっとも基本的な古典命題論理 (Classic Propositional Logic) についてまとめる。

STEP.1 形式言語の導入

定義 1.2.1. 古典命題論理の言語 $\mathcal{L}_{CPL}$(Classic Propositional Logic) は以下のものからなる。

- 命題変数: $p, q, r, \ldots$
- 論理結合子: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$
- カッコ: $(,)$

ここで、論理演算子はそれぞれ、$\neg$ は否定、$\wedge$ はかつ、$\vee$ はまたは、$\rightarrow$ はならばをそれぞれ表す。

定義 1.2.2. 言語 $\mathcal{L}_{CPL}$ が与えられているとき、論理式を以下のように定める。

- 命題変数は論理式である
- 2 つの論理式 A, B が与えられているとき、$\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B)$ も論理式である。

上の 2 つの条件によってのみ論理式は決まる。

これらによって言語 $\mathcal{L}_{CPL}$ は定められる。以下は定義に沿った例である。

例 1.2.3. (論理式)

- P は論理式である。
- $\neg P, (\neg P \rightarrow \neg\neg P), \neg(P \rightarrow P)$ は論理式である。
- $P\neg \rightarrow \wedge$ や $\neg \rightarrow QPR$ は論理式ではない。

定義 1.2.4. 論理式の記述法は他にもあり、ここではポーランド記法を紹介する。ここで、n は $\neg$、c は $\rightarrow$、k は $\wedge$、a は $\vee$ にそれぞれ対応している。

例 1.2.5. (ポーランド記法)

$$\neg p : np \tag{1}$$

$$p \rightarrow q : cpq \tag{2}$$

$$p \wedge q : kpq \tag{3}$$

$$p \vee q : apq \tag{4}$$

$$(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)) : ccpqccqrcpr \tag{5}$$

STEP.2 意味論

ここでは論理式が、どの状況で真、偽になるかを定めていく。なお古典命題論理では

- 排中律（P である、または P でないが成立する原理）
- 無矛盾律（正しくてなおかつ間違っていることはない）

の 2 つの哲学により、真、偽という 2 つの状態にのみ従うとしている。

定義 1.2.6. 言語 $\mathcal{L}_{CPL}$ に対する解釈（INTERPRETATION）とは、命題変数全体から{T, F}への関数である。

定義 1.2.7. 言語 $\mathcal{L}_{CPL}$ に対して解釈 I が与えられたとき、論理式全体が{T,F}への (付値) 関数 v(valuation) を以下のように定める。

$$v(p) = I(p) \tag{6}$$

ここで p は命題変数である。

例 1.2.8. (付値)

$$v(\neg A) = T \iff v(A) = F \tag{7}$$
$$v(\neg A) = F \iff v(A) = T \tag{8}$$
$$v(A \wedge B) = T \iff v(A) = T \text{ かつ } v(B) = T \tag{9}$$
$$v(A \wedge B) = F \iff v(A) = F \text{ または } v(B) = F \tag{10}$$
$$v(A \vee B) = F \iff v(A) = T \text{ または } v(B) = T \tag{11}$$
$$v(A \vee B) = F \iff v(A) = F \text{ かつ } v(B) = F \tag{12}$$
$$v(A \to B) = T \iff v(A) = F \text{ または } v(B) = T \tag{13}$$
$$v(A \to B) = F \iff v(A) = T \text{ かつ } v(B) = F \tag{14}$$

STEP.3 証明論

証明論の展開方法は複数存在する。本講義では公理的方法を主に扱った。

定義 1.2.9. 古典命題論理の公理は以下の 11 個の図式からなる。

Ax.1	$A \to (B \to A)$
Ax.2	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
Ax.3	$(A \wedge B) \to A$
Ax.4	$(A \wedge B) \to B$
Ax.5	$(C \to A) \to ((C \to B) \to (C \to (A \wedge B)))$
Ax.6	$A \to (A \vee B)$
Ax.7	$B \to (A \vee B)$
Ax.8	$(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$
Ax.9	$(A \to \neg A) \to \neg A$
Ax.10	$A \to (\neg A \to B)$
Ax.11	$A \vee \neg A$

これらに加えて、以下の推論規則を加える。MP(MODUS PONENS)

$$\frac{A \quad A \to B}{B}$$

定義 1.2.10. 形式言語 $\mathcal{L}_{CPL}$ のもとで、体系 HCPL に対して、$\vdash_{CPL}$ を以下のように定める。$A1, \ldots, An, B$ を論理式とするとき、$A_1, \ldots, A_n \vdash B \iff$ ある論理式の列 $C_1, \ldots, C_n$ があって、Cn は B で書き、Ci は以下の 3 つの条件のうちの 1 つを満たす。

- C_i は $A_1, \ldots, A_n$ のうちの 1 つ
- C_i は Ax.1~Ax.11 のうちの 1 つ
- C_i はすでに出現している 2 つの論理式に対して、MP を適用することで得られる。

このとき、$\vdash_{CPL}$ を古典命題論理の証明論的帰結関係という。

STEP.4 意味論と証明論の関係

授業を休んだため省略。

2　様相論理

2.1　様相論理とは

様相論理とは、古典命題論理を拡張し、必然性や可能性といった様相概念を扱う論理である。古典命題論理では命題の真偽を 1 つの解釈の下で考えるのに対し、様相論理ではこれらの様相概念を解釈するために、複数の可能世界を用いた意味論が導入される。

2.2　様相論理

様相論理 (Modal Logic) についてまとめる。

STEP.1 形式言語の導入

定義 2.2.1. 様相論理の言語 $\mathcal{L}_{ML}$(Modal Logic) は以下のものからなる。

- 命題変数: $p, q, r, \ldots$
- 論理結合子: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$
- カッコ: $(,)$
- 様相演算子: $\Box, \Diamond$

ここで様相演算子はそれぞれ、$\Box$ は必然性を、$\Diamond$ は可能性を表す。

定義 2.2.2. 様相論理にもポーランド記法が存在し、以下のように記述する。ここで、$\Box$ は l に、$\Diamond$ は m にそれぞれ対応している。

例 2.2.3.

$$\Box p : lp \tag{15}$$

$$\Diamond\neg p : lnp \tag{16}$$

$$\Box(p \rightarrow q) : lcpq \tag{17}$$

$$\Box p \rightarrow \Diamond q : clpmq \tag{18}$$

STEP.2 意味論

ここでは可能世界意味論もしくはクリプト意味論とも呼ばれるものを紹介する。これはあくまで代表的なものであり、唯一絶対の意味論ではないことに注意したい。

定義 2.2.4. 言語 $\mathcal{L}_{ML}$ に対する $S5$ モデルとは、組<W, @, I>である。このとき、

- W は空でない集合
- @ は W に含まれる元のうちの 1 つ

- I は W と命題変数から$\{T, F\}$への関数

注意 2.2.5. ルイスとラングフォードは $S1$、$S2$、$S3$、$S4$、$S5$ の 5 つの体系を証明論の立場から導入した。ここでは特に $S5$ を扱う。

定義 2.2.6. 言語 $\mathcal{L}_{ML}$ に対して、$S5$ モデル$<W,\ @,\ I>$が与えられたとき、W と論理式全体から$\{T, F\}$への関数 v を以下のように定める。すべての W の元 (w) に対して、

$$v(w,p) = I(w,p)(p\text{は命題変数}) \tag{19}$$

また、

$$v(w,\neg A) = T \iff v(w,A) = F \tag{20}$$
$$v(w,\neg A) = F \iff v(w,A) = T \tag{21}$$

$$v(w,A \wedge B) = T \iff v(w,A) = T \text{ かつ } v(w,B) = T \tag{22}$$
$$v(w,A \wedge B) = F \iff v(w,A) = F \text{ または } v(w,B) = F \tag{23}$$

$$v(w,A \vee B) = T \iff v(w,A) = T \text{ または } v(w,B) = T \tag{24}$$
$$v(w,A \vee B) = F \iff v(w,A) = F \text{ かつ } v(w,B) = F \tag{25}$$

$$v(w,A \to B) = T \iff v(w,A) = F \text{ または } v(w,B) = T \tag{26}$$
$$v(w,A \to B) = F \iff v(w,A) = T \text{ かつ } v(w,B) = F \tag{27}$$

$$v(w,\Box A) = T \iff \text{すべての } W \text{ の元 } x \text{ に対して } v(x,A) = T \tag{28}$$
$$v(w,\Box A) = F \iff \text{ある } W \text{ の元 } x \text{ に対して } v(x,A) = F \tag{29}$$

$$v(w,\Diamond A) = T \iff \text{ある } W \text{ の元 } x \text{ に対して } v(x,A) = T \tag{30}$$
$$v(w,\Diamond A) = F \iff \text{すべての } W \text{ の元 } x \text{ に対して } v(x,A) = F \tag{31}$$

STEP.3 証明論

定義 2.2.7. 形式言語 $\mathcal{L}_{ML}$ のもとで体系 $HS5$ を以下のように定める。

Ax.1	$A \to (B \to A)$
Ax.2	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
Ax.3	$(A \land B) \to A$
Ax.4	$(A \land B) \to B$
Ax.5	$(C \to A) \to ((C \to B) \to (C \to (A \land B)))$
Ax.6	$A \to (A \lor B)$
Ax.7	$B \to (A \lor B)$
Ax.8	$(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \lor B) \to C))$
Ax.9	$(A \to \neg A) \to \neg A$
Ax.10	$A \to (\neg A \to B)$
Ax.11	$A \lor \neg A$
Ax.12	$\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box)$
Ax.13	$\Box A \to A$
Ax.14	$\Box A \to \Box\Box A$
Ax.15	$\neg\Box A \to \Box\neg\Box A$
Ax.16	$\Diamond A \to \neg\Box\neg A$
Ax.17	$\neg\Box\neg A \to \Diamond A$

以上の 17 個の公理図式に加えて、以下の 2 つの推論規則を加える。

MP $$\frac{A \quad A \to B}{B}$$

RN $$\frac{A}{\Box A}$$

ここで、RN(Rule of Necessation) は必然化則である。

定義 2.2.8. 言語 $\mathcal{L}_{ML}$ のもとで、体系 $HS5$ に対して、Th_{S5}($S5$ の定理集合) を以下のように定める。

B は Th_{S5} に含まれる $\iff$ ある論理式列 $C_1, \ldots, C_k$ があって、C_k は B で、各 C_i は以下の 2 つの条件のうち 1 つを満たす。

- C_i は Ax.1~Ax.17 のうちの 1 つ。
- C_i はその前に出現している論理式に対して MP または RN を適用することで得られる。

定義 2.2.9. 言語 $\mathcal{L}_{ML}$ のもとで、体系 $HS5$ に対して、$\vdash_{HS5}$ を以下のように定める。
$A_1, \ldots, A_n, B$ を論理式とするとき、$A_1, \ldots, A_n \vdash_{HS5} B \iff$ ある論理式の列 $D_1, \ldots, D_l$ があって、D_l は B で、各 D_j は以下の 3 つの条件のうちの 1 つを満たす。

- D_j は $A_1, \ldots, A_n$ のうちの 1 つ
- D_j は Th_{S5} に含まれる
- D_j はその前に出現している論理式に対して MP を適用して得られる。

このとき $\vdash_{HS5}$ を様相論理 $S5$ の証明論的帰結関係という。

STEP.4 意味論と証明論の関係

定理 2.2.10. *(SAUL KRIPKE)*
言語 $\mathcal{L}_{ML}$ のもとで、$A_1, \ldots, A_n, B$ を論理式とするとき、以下が成り立つ。

$$A_1, \ldots, A_n \models_{S5} B \iff A_1, \ldots, A_n \vdash_{HS5} B \tag{32}$$

特に、

$$\models_{S5} B \iff B\text{は}Th_{S5}\text{に含まれる。} \tag{33}$$

3 述語論理

3.1 古典述語論理

STEP.1 形式言語の導入

定義 3.1.1. 古典述語論理の言語 $\mathcal{L}_{PL}$(Predicate Logic) は次のものからなる。

- 個体変項: $x, y, z, \ldots$
- 個体定項: $a, b, c, \ldots$
- 述語: $P, Q, R, \ldots$
- 論理結合子: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$
- 量化子: $\forall, \exists$
- カッコ: (,)

定義 3.1.2. 言語 $\mathcal{L}_{PL}$ が与えられたとき、論理式を以下のように定める。

- $t_1, \ldots, t_n$ が項であり、P が n 項連続のとき、$P_{t_1 \ldots t_n}$ は論理式である。(とくに原子式と呼ばれる)
- 2 つの論理式 A, B があるとき、A, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ は論理式である。
- 論理式 A と個体変項があるとき、$\forall_x A, \exists_x A$ は論理式である。

上の 3 つの条件によってのみ論理式は決まる。

STEP.2 意味論

定義 3.1.3. 言語 $\mathcal{L}_{PL}$ が与えられているとき、個体変項 x の出現が束縛されているとは、

$$\forall_x \ldots x \ldots \tag{34}$$

あるいは、

$$\exists_x \ldots x \ldots \tag{35}$$

のように出現することを言う。個体変項 x の出現が束縛されていないとき、x は自由であるという。すべての個体変項の出現が束縛されている論理式を閉じた論理式という。また、論理式 A において、自由に出現する個体変項 x をすべて項 t で置き換えて得られる論理式を $A_x(t)$ とかく。

定義 3.1.4. 言語 $\mathcal{L}_{PL}$ に対する解釈とは、組 $\mathfrak{I} =< D, I >$ である。このとき、

- D: 空でない集合

- I: 関数であって、個体定項 C に対して $I(C)$ は D に含まれる元であり、n 項述語 P に対して、$I(P)$ は D^n の部分集合

をそれぞれ対応させるものである。

定義 3.1.5. 言語 $\mathcal{L}_{PL}$ に対する $\mathfrak{I} =< D, I >$ が与えられたとき、$\mathcal{L}_{PL}(\mathfrak{I})$ における閉じた論理式全体から $\{T, F\}$ への関数 v を以下のように定める。

$$v(P_{0_{a_1 \dots a_n}}) = T \iff < I(a_1), \dots, I(a_n) > \in I(P) \tag{36}$$
$$v(P_{0_{a_1 \dots a_n}}) = F \iff < I(a_1), \dots, I(a_n) > \notin I(P) \tag{37}$$

$$v(\neg A) = T \iff v(A) = F \tag{38}$$
$$v(\neg A) = F \iff v(A) = T \tag{39}$$
$$v(A \wedge B) = T \iff v(A) = T \text{ かつ } v(B) = T \tag{40}$$
$$v(A \wedge B) = F \iff v(A) = F \text{ または } v(B) = F \tag{41}$$
$$v(A \vee B) = F \iff v(A) = T \text{ または } v(B) = T \tag{42}$$
$$v(A \vee B) = F \iff v(A) = F \text{ かつ } v(B) = F \tag{43}$$
$$v(A \to B) = T \iff v(A) = F \text{ または } v(B) = T \tag{44}$$
$$v(A \to B) = F \iff v(A) = T \text{ かつ } v(B) = F \tag{45}$$
$$v(\forall_x A) = T \iff \text{すべての}D\text{の元}d\text{に対して、}v(A_x(k_d)) = T \tag{46}$$
$$v(\forall_x A) = F \iff \text{ある}D\text{の元}d\text{に対して、}v(A_x(k_d)) = F \tag{47}$$
$$v(\exists_x A) = T \iff \text{ある}D\text{の元}d\text{に対して、}v(A_x(k_d)) = T \tag{48}$$
$$v(\exists_x A) = F \iff \text{すべての}D\text{の元}d\text{に対して、}v(A_x(k_d)) = F \tag{49}$$

定義 3.1.6. $A_1, \dots, A_n, B$ を閉じた論理式とする。このとき、$A_1, \dots, A_n \models_{PL} B \iff v(A_1) = T, \dots, v(A_n) = T$かつ$v(B) = F$ となるような解釈 $\mathfrak{I}$ がない

ここで、$\models_{PL}$ を古典述語論理の意味論的帰結関係という。

第 II 部　講義を受けての感想

論理学の講義は非常に面白かった。一見すると当たり前に思えることを理屈立てて考え直す姿勢は特に印象に残っている。先生は論理学は学んだところで意味はないとおっしゃっていたが、当たり前を疑う姿勢を授業を通して感じ取れたので、個人的には意味のある講義だと感じた。授業内容については、各論理に対して同じステップを適用していたので、難しくはあるもののあまり抵抗なく進められた。しかし、様相論理は可能世界の扱い方にまだ慣れないと感じたので、もう少し自分で勉強してみたいと思う。また、授業内容とはあまり関係はないが、冒頭の雑談タイム然り先生の人柄が個人的に興味深かった。生業としている学問に対して意味がないと言ってみたり、雑談すべきか迷いながら雑談したりしている姿から、一旦立ち止まって当たり前を疑ってかかる論理学者の気概を感じられワクワクした。悪あがきはしてみるもんだという発言には正直感動した。私はたびたび講義を休んでしまっていたため、単位を取れるのか不安、仮に取れたとしても申し訳ない、と感じていた。しかし、この言葉を聞いて、できるだけ悪あがきしてみようと思えた。実際今こうしてレポートをなんとなくそこそこ真面目に後ろめたくなく書けている。以前の私ならば、おこがましくはあるが、授業を休んだ身分で少しでもいい成績を取ろうとするのは申し訳ないと思っていた。だが頑張ってみたいという葛藤があった。授業中何気なく放った一言かもしれないが、私にとっては結構印象に残った言葉であり、暫くの間は足掻いてみてもいいと思えた。そんな性根で質問しに行った際も、暖かく接してくださって、悪あがきも悪くないと思えてしまった。そんなこんなで諦めずにしっかり向き合う姿勢を確立していけたらと思う。

論理学を学ぶだけでなく、学びの姿勢に対し自分に問い、現時点での答えをある程度しっかりとしたものにできたので、この講義を受けてよかったと心から思っている。

第 III 部　演習問題

小問 1. $\models ((A \to B) \to A) \to A$

$$v_0(((A \to B) \to A) \to A) = F \tag{50}$$

となる解釈 I_0 があるとする。このとき (50) と $\to$ の偽条件より、

$$v_0((A \to B) \to A) = T \tag{51}$$

$$v_0(A) = F \tag{52}$$

が同時に成り立つ。また、(51) と $\to$ の真理条件から、

$$v_0(A \to B) = F \tag{53}$$

$$v_0(A) = T \tag{54}$$

の少なくとも一方は成り立つ。このとき、(53) と $\to$ の偽条件より、

$$v_0(A) = T \tag{55}$$

$$v_0(B) = F \tag{56}$$

が同時に成り立つ。しかし、(53) のときは (52) と (55) より矛盾し、(54) のときも (52) と矛盾する。

したがって、解釈 I_0 は存在しない。　$\Box$

小問 2. $\models ((A \to B) \lor (B \to C))$

$$v_0((A \to B) \lor (B \to C)) = F \tag{57}$$

となる解釈 I_0 があるとする。(57) と $\lor$ の偽条件より、

$$v_0(A \to B) = F \tag{58}$$

$$v_0(B \to C) = F \tag{59}$$

が同時に成り立つ。このとき、(58) と $\to$ の偽条件から、

$$v_0(A) = T \tag{60}$$

$$v_0(B) = F \tag{61}$$

が同時に成り立つ。また、(59) と $\to$ の偽条件から、

$$v_0(B) = T \tag{62}$$

$$v_0(C) = F \tag{63}$$

が同時に成り立つ。しかし、(61) と (62) は矛盾する。
したがって解釈 I_0 は存在しない。 □

小問 3. $\models \neg(A \to B) \to A$

$$v_0(\neg(A \to B) \to A) = F \tag{64}$$

となる解釈 I_0 があるとする。(64) と $\to$ の偽条件より、

$$v_0(\neg(A \to B)) = T \tag{65}$$

$$v_0(A) = F \tag{66}$$

が同時に成り立つ。(65) と $\neg$ の真理条件から、

$$v_0(A \to B) = F \tag{67}$$

(67) と $\to$ の偽条件より、

$$v_0(A) = T \tag{68}$$

$$v_0(B) = F \tag{69}$$

が同時に成り立つ。しかし、(66) と (68) は矛盾する。
したがって、解釈 I_0 は存在しない。 □

小問 4. $\models ((A \to B) \to B) \to A$

$$v_0(((A \to B) \to B) \to A) = F \tag{70}$$

となる解釈 I_0 があるとする。このとき (70) と $\to$ の偽条件より、

$$v_0((A \to B) \to B) = T \tag{71}$$

$$v_0(A) = F \tag{72}$$

が同時に成り立つ。また、(71) と $\to$ の真理条件から、

$$v_0(A \to B) = F \tag{73}$$

$$v_0(B) = T \tag{74}$$

の少なくとも一方は成り立つ。このとき、(73) が成り立つと仮定すると $\to$ の偽条件より、

$$v_0(A) = T \tag{75}$$

$$v_0(B) = F \tag{76}$$

が同時に成り立つ。しかしこれは、(72) と (75) で矛盾が生じる。
一方、(73) が成り立たないと仮定すると $v_0(A \to B) = T$ であり、これと $\to$ の真理条件から、

$$v_0(A) = F \tag{77}$$

$$v_0(B) = T \tag{78}$$

の少なくとも一方が成り立つ。このとき、$v_0(A) = F$、$v_0(B) = T$ であれば矛盾は生じず解釈 I_0 を定めることができる。このとき反例は $v_0(A) = F$、$v_0(B) = T$ $\square$

小問 5. $A \to B \models \neg A \to \neg B$

$$v_0(A \to B) = T \tag{79}$$

$$v_0(\neg A \to \neg B) = F \tag{80}$$

が同時に成り立つ解釈 I_0 があるとする。このとき、(80) と $\to$ の偽条件より、

$$v_0(\neg A) = T \tag{81}$$

$$v_0(\neg B) = F \tag{82}$$

が同時に成り立つ。また (81)、(82) それぞれについて $\neg$ の真理、偽条件から、

$$v_0(A) = F \tag{83}$$

$$v_0(B) = T \tag{84}$$

が同時に成り立つ。実際、$v_0(A) = F$、$v_0(B) = T$ と定めれば (79) においても矛盾は生じず解釈 I_0 を定めることができる。したがって、反例は $v_0(A) = F$、$v_0(B) = T$ $\square$