

# Calculabilité

## Glossaire

Calculable : Une fonction (ou un problème) est calculable si il existe un algorithme / procédure qui pour chaque entrée, produit une réponse en temps fini / nombre fini d'étapes

Non calculable : Une fonction est non calculable si aucun algorithme / procédure permet de calculer sa valeur pour chaque entrée ne donne pas de résultat en temps fini

Décidable / Récursif : Un algorithme peut donner une réponse oui / non en temps fini. La fonction caractéristique du problème est calculable

Semi-décidable / Récursivement énumérable : Un algorithme peut donner la réponse oui / non pour tout entrée appartenant à l'ensemble, mais peut ne jamais s'arrêter pour les entrées n'appartenant pas à l'ensemble

Indécidable : Aucuns algorithmes ne peut, pour toute entrée, déterminer en temps fini si celle-ci appartient ou non à l'ensemble. Sa fonction caractéristique est non calculable

Triviale : Soit toujours vrai, soit toujours faux

Fonction total : Fonction dont le domaine de définition est  $\mathbb{N}$  tout entier

Fonction non total : Fonction dont le domaine de définition n'est pas  $\mathbb{N}$  tout entier. Exemple  $1/x$

Fonction caractéristique :

$$X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Fonction semi-caractéristique :

$$X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E, \\ \text{non définie} & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec  $E$  ensemble des entiers.  $E$  est décidable si sa fonction caractéristique est calculable

Ensemble dénombrable : Ensemble dont les éléments peuvent être mis en correspondance bijective avec l'ensemble  $\mathbb{N}$

Ensemble indénombrable : Ensemble dont les éléments ne peuvent pas être mis en correspondance bijective avec l'ensemble  $\mathbb{N}$ . Exemple : ensemble  $\mathbb{R}$

Ensemble énumérable : Ensemble du domaine d'une fonction calculable

Ensemble récursif : Ensemble admettant sa fonction caractéristique total et calculable

## Notions

Fonctions de  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  partielles (ou total)

Une fonction partielle est calculable

Ensemble vide énumérable (ex : programme qui return 0 tout le temps)

$A$  récursif  $\Rightarrow A$  énumérable  $A$  récursif  $\Rightarrow \text{compl}(A)$  récursif  $A$  énumérable et  $\text{compl}(A)$  énumérable  $\Rightarrow A$  récursif (POST)  $A < B \Leftrightarrow \exists f \text{ calculable } \forall x \ x \text{ appartient } A \Leftrightarrow f(x) \text{ appartient } B$  Si  $A < B$  alors

$B \text{ rec/enum} \Rightarrow A \text{ rec/enum}$  Si  $A < B$  alors  $A \text{ pas enum} \Rightarrow B \text{ pas enum}$  Rice : Si  $A = [x \mid [x \mid .]]$  appartient  $C$  ] ( $C$  prop sur les fonctions) et  $A$  non trivial  $\Rightarrow A$  non récursif

## Notions de base

### Encodage entrées sorties

Transformer suite de lettre  $(x_1, x_2, \dots)$  en entier  $\rightarrow$  1 devant  $(1, x_1, x_2, \dots)$  soit nombre binaire et  $-1$  pour revenir au mot

Exemple :  $24 + 1 = 25$  et 25 en binaire on enlève le 1 devant = 24

### Programme

a un programme valide / non valide

$[a \mid x] = y$  Execution a sur entrée x et renvoie de y

$[a \mid x] \downarrow$  Converge (finti et renvoie une valeur)

$[a \mid x] \uparrow$  Diverge (plante, erreur ou boucle infinie)

$[a \mid .] : x \rightarrow \{ \text{si } [a \mid x] \downarrow \text{ alors } [a \mid x] \text{ sinon non définie} \}$

### Théorème de Post

Si  $E$  est énumérable et  $\text{compl}(E)$  énumérable alors  $E$  est récursif

$E = \text{dom } [a \mid .] = W_a$

$\text{compl}(E) = W_b$

### Temps

$\text{Step} \langle a, x, t \rangle = \{$

0 si on n'obtient pas de convergence de  $[a \mid x]$  dans un temps t

$1 + [a \mid x]$  sinon

$\}$