Logique - Calculabilité - Complexité

Université de Montpellier

Entrainement de calculabilité - 2025

15 octobre 2025

Durée 1h30

Aucun document n'est autorisé

Pas de calculatrice, téléphone portable, montre programmable, appel à un ami, consultation d'internet, de Moodle *etc.*

Justifiez vos réponses avec grand soin!

Dans tout ce qui suit, comme dans le cours, le symbole $\prec$ désigne la *réduction many-one* ; les ensembles considérés sont des ensembles d'entiers, qu'ils contiennent des données ou des programmes. L'expression $[a|b]$ représente le calcul du programme a sur l'entrée b et $[a|b]\downarrow$ (resp. $[a|b]\uparrow$) exprime que ce calcul s'arrête (resp. ne s'arrête pas).

Exercice 1 Rice

Soit $A = \{x,\ \exists n > 0\ \forall y\ [x|y] = y^n\}$.

1. Exprimez cet ensemble avec des mots en Français.
2. Peut-on écrire $A = P_C$ pour une certaine propriété C où $P_C = \{x, [x|\cdot] \in C\}$? Si oui proposez une telle propriété, si non faites une preuve.
3. En appliquant proprement le théorème de Rice, montrez que A est indécidable.

Exercice 2 progressif

Soit g une fonction calculable totale qui ne s'annule jamais.
Soit $A = \{x, [x|0]\uparrow \text{ et } [x|g(x)] = 1\}$. On définit le programme p suivant :
$p : \langle x, y\rangle \mapsto$ `if` $[x|x]\downarrow$ `then { if` $y = 0$ `then` $\perp$ `else return 1}`
On définit aussi la fonction f par $f(x) = S_1^1\langle p, x\rangle$.

1. La fonction f est-elle calculable? est-elle totale? Justifier.
2. Soit x tel que $[x|x]\downarrow$. Quelle fonction est calculée par $y \mapsto [f(x)|y]$?
3. Soit x tel que $[x|x]\uparrow$. Quelle fonction est calculée par $y \mapsto [f(x)|y]$?
4. Montrez que $\mathbb{K} \prec A$.
5. Montrez que l'ensemble A n'est pas récursif.
6. Aurait-t'on pu montrer que A n'est pas récursif en appliquant le Théorème de Rice?
7. Ecrivez un programme q tel que les deux conditions suivantes soient vérifiées :
   - $\forall x\ [q|\langle x, 0\rangle]\downarrow \iff x \in \mathbb{K}$
   - $\forall x, y\ y \neq 0 \implies [q|\langle x, y\rangle] = 1$
8. Montrez que $\overline{\mathbb{K}} \prec A$.
9. Montrez que ni l'ensemble A ni l'ensemble $\overline{A}$ ne sont énumérables.

Exercice 3 énumérabilité

Soit $E = \{x,\ \exists y\ [x|y] = x\}$.

1. Exprimez cet ensemble avec des mots en Français.
2. Soit le programme *tata* : $y \mapsto$ `return` $(y \text{ div } 2)$. A-t-on *tata* $\in E$? A-t-on *tata* $\in \overline{E}$?
3. Montrez que E est énumérable.
4. Rappelez la définition d'un programme auto-reproducteur. Fixons un tel programme (qu'on notera α) et montrez que $\alpha \in E$. Soit $\beta \neq \alpha$ tel que $[\beta|\cdot] = [\alpha|\cdot]$ (ne vous inquiétez pas, il existe toujours un tel β, on l'a montré dans le cours et on le remontrera dans un exercice plus loin). Est-ce que $\beta \in E$?
5. Aurait-t'on pu montrer que E n'est pas récursif en appliquant le Théorème de Rice ?
6. Montrez que $\mathbb{K} \prec E$ et en déduire que E n'est pas récursif.

Exercice 4 points fixes

Soit $F : x \mapsto a$ où a est un entier fixé. Notons n_0 un point fixe de F.

1. Que calcule le programme n_0 ?
2. Est-ce que a est un point fixe de F ?

Soit b tel que $[b|\cdot] \neq [a|\cdot]$ et considérons la fonction F_1 suivante : F_1 vaut a partout sauf sur les entrées $x \in \{a, n_0\}$ auquel cas elle vaut b. Remarquons que F_1 est récursive et notons n_1 un de ses points fixes.

3. Peut-on avoir $n_1 = a$? $n_1 = n_0$? Que calcule n_1 ?
4. Montrez qu'il existe un programme partout convergent qui prend en entrée a et b et donne en sortie le point fixe n_1. En d'autres termes, il faut montrer que n_1 est récursif en $\langle a, b\rangle$.
5. En vous inspirant de ce qui précède, montrez qu'il existe un programme partout convergent *toto* qui, sur l'entrée $\langle a, b, i\rangle$ donne un programme noté n_i qui calcule la même fonction que a ($[a|\cdot] = [n_i|\cdot]$), tous les n_i étant différents quand i varie — a et b étant fixés.

Considérons maintenant deux programmes b_0 et b_1 qui calculent respectivement la fonction constante de valeur 0 et celle de valeur 1.

6. Si le programme a calcule la fonction constante de valeur 2, que donnent *toto*$\langle a, b_0, i\rangle$ et *toto*$\langle a, b_1, i\rangle$?
7. Si le programme a calcule la fonction constante de valeur 1, que donnent *toto*$\langle a, b_0, i\rangle$ et *toto*$\langle a, b_1, i\rangle$?
8. A l'aide de b_0, b_1 et *toto*, définissez un programme partout convergent qui, sur l'entrée $\langle a, i\rangle$, donne un programme n_i qui calcule la même fonction que a, tous les n_i étant différents quand i varie — a étant fixé.