Logique - Calculabilité - Complexité

Université de Montpellier

TD calculabilité n°1 - 2025

Exercice 1 Manipuler les définitions

1. Rappelez ce qu'est une fonction calculable. Montrez que les fonctions $x \mapsto 2x$, $(x, y) \mapsto x + y$ et $\perp\!\!\!\perp$ (où $\perp\!\!\!\perp$ est la fonction définie nulle part) sont calculables.
2. Rappelez ce qu'est un ensemble récursif. Montrez que l'ensemble de tous les entiers, l'ensemble vide et l'ensemble des entiers pairs sont récursifs.
3. Montrez que si E est un ensemble récursif, alors son complémentaire, $\overline{E}$, l'est également.
4. Rappelez ce qu'est un ensemble énumérable. Ecrivez un programme qui converge si et seulement si son entrée est paire. En déduire que l'ensemble des entiers pairs est énumérable.
5. Montrez que si E est un ensemble récursif, alors E et $\overline{E}$ sont tous deux énumérables.

Exercice 2 Propriétés de cloture des ensembles récursifs

Nous prouvons dans cet exercice que la classe des ensembles récursifs est close par union, intersection, produit cartésien, et complémentaire. La situation est un peu différente pour les ensembles énumérables. Soient A et B deux ensembles récursifs.

1. Montrez que $A \cup B$ est récursif.
2. Montrez que $A \cap B$ est récursif.
3. Montrez que $A \times B = \{< x, y >,\ x \in A \land y \in B\}$ est récursif.
4. Montrez que $\overline{A}$ est récursif (*c.f.* exercice précédent).
5. Montrez que $A \setminus B$ est récursif.

Exercice 3 `step`, convergence, projections et énumération

Considérons le programme suivant (remarquez qu'il s'appelle a et son entrée s'appelle y)

$[a|y]$:
  $z \leftarrow 0$
  while $\texttt{step}\langle y, \pi_1(z), \pi_2(z)\rangle = 0$ repeat :
    $z \leftarrow z + 1$
  return 17

1. Soit b un programme qui s'arrête sur au moins une entrée. Que vaut $[a|b]$?
2. Que vaut $[a|b]$ si le programme b ne s'arrête sur aucune entrée ?
3. Montrez que l'ensemble des programmes qui s'arrêtent sur au moins une entrée est énumérable.

Exercice 4 Ensembles énumérables

On veut montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) E est *énumérable* (rappel de la définition) : si $\exists a\ E = W_a = \{x,\ [a|x]\downarrow\}$

(ii) E admet une *fonction d'énumération* calculable : $\exists b, E = \mathrm{Im}[b|\cdot] = \{x,\ \exists y\ [b|y] = x\}$

(iii) E est vide ou admet une *fonction d'énumération totale* calculable : $\exists b, E = \mathrm{Im}[b|\cdot] = \{x,\ \exists y\ [b|y] = x\}$

1. Montrez que (i) $\implies$ (iii).
2. Montrez que (iii) $\implies$ (ii).
3. Montrez que (ii) $\implies$ (i).

Exercice 5 Ensembles énumérables - mieux comprendre

1. Montrez que si E est un ensemble énumérable *infini* alors il admet une fonction d'énumération totale bijective
2. Soit E un ensemble infini. Montrez que E est récursif si et seulement si il admet une fonction d'énumération croissante.
3. Soit E un ensemble infini. Montrez que E est récursif si et seulement si il admet une fonction d'énumération strictement croissante.