Exercice 1 - Rice

Soit l'ensemble A défini par :

$$A = \{x, \exists n > 0, \forall y, [x \mid y] = y^n\}$$

1. **Exprimez cet ensemble avec des mots en Français.**

Réponse : A est l'ensemble des programmes qui calculent une fonction puissance non constante, c'est-à-dire une fonction de la forme $y \mapsto y^n$ pour un certain entier $n > 0$.

2. **Peut-on écrire $A = P_{\mathcal{C}}$ pour une certaine propriété $\mathcal{C}$ où $P_{\mathcal{C}} = \{x, [x \mid \cdot] \in \mathcal{C}\}$? Si oui proposez une telle propriété, sinon faites une preuve**

Réponse : Oui, $\mathcal{C} = \{monomes\}$.

3. **En appliquant proprement le théorème de Rice, montrez que A est indécidable.**

Réponse : On sait que $A = \{x \mid [x \mid \cdot] \in \mathcal{C}\}$ donc pour affirmer que A est indécidable avec Rice, il suffit de montrer que $\mathcal{C}$ est non-trivial. Or, $(y \mapsto \perp) \notin \mathcal{C}$ et $(y \mapsto y) \in \mathcal{C}$. Donc $\mathcal{C}$ est indécidable

Exercice 2 - Progressif

Soit g une fonction calculable totale qui ne s'annule jamais.

Soit l'ensemble A défini par :

$$A = \{x, [x \mid 0] \uparrow \text{ et } [x \mid g(x)] = 1\}$$

On définit le programme p suivant :

$$p : \langle x, y \rangle \mapsto \text{ if } [x \mid x] \downarrow \text{ then } \{\text{if } y = 0 \text{ then } \perp \text{ else return } 1\}$$

On définit aussi la fonction f par $f(x) = S_1^1 \langle p, x \rangle$

1. **La fonction f est-elle calculable ? est-elle totale ? Justifier**

Réponse : f est calculable et totale par le théorème SNM

2. **Soit x tel que $[x \mid x] \downarrow$. Quelle fonction est calculée par $y \mapsto [f(x) \mid y]$?**

Réponse : $[f(x) \mid \cdot]$ la fonction égale à 1 sauf en 0 où elle n'est pas définie

3. **Soit x tel que $[x \mid x]\uparrow$. Quelle fonction est calculée par $y \mapsto [f(x) \mid y]$?**

Réponse : $[f(x) \mid \cdot] = \perp\!\!\!\perp$ c'est-à-dire la fonction définie nulle part.

4. **Montrez que $\mathbb{K} \prec A$.**

Réponse : Il faut montrer que $\exists h$ calculable totale telle que $\forall x, x \in \mathbb{K} \Leftrightarrow h(x) \in A$
On prend $h = f$: f est bien calculable totale
On vérifie que $\forall x, x \in \mathbb{K} \Leftrightarrow f(x) \in A$

Soit $x \in \mathbb{K}$.

— Si $[x \mid x]\downarrow$, d'après la 2.2, $[f(x) \mid \cdot]$ est constante et égale à 1 sauf où $[f(x) \mid b]$, $[f(x) \mid 0]\uparrow$ et $[f(x) \mid g(f(x))] = 1$ car $g(f(x)) \neq 0$. Donc $f(x) \in A$
— Si $[x \mid x]\uparrow$ alors $[f(x) \mid g(f(x))]\uparrow$ (voir 2.3). Donc $f(x) \notin A$

Donc on a bien $\mathbb{K} \prec A$

5. **Montrez que l'ensemble A n'est pas récursif**

Réponse : A n'est pas récursif car $\mathbb{K} \prec A$ et $\mathbb{K}$ n'est pas récursif

6. **Aurait-on pu montrer que A n'et pas récursif en appliquant le Théorème de Rice ?**

Réponse : Non, car on ne peut pas exprimer A de la forme $A\{x, [x \mid \cdot] \in \mathcal{C}\}$. On aurait besoin d'exprimer une condition sur l'entrée $g(x)$ mais une fonction ne connaît pas son numéro de programme.

7. **Ecrivez un programme q tel que les deux conditions suivantes soit vérifiées :**

- $\forall x [q \mid \langle x, 0\rangle]\downarrow \Leftrightarrow x \in \mathbb{K}$
- $\forall x, y \quad y \neq 0 \Rightarrow [q \mid \langle x, y\rangle] = 1$

Réponse :

```
[q |⟨x,y⟩] :
    if y = 0 then
        return [x | x]
    else return 1
```

8. **Montrez que $\overline{\mathbb{K}} \prec A$**

Réponse : On pose $\forall x, f(x) = S_1^1\langle x, y\rangle$, f est calculable totale par SNM

- Si $x \in \overline{\mathbb{K}}$ alors $[x \mid x] \uparrow$, donc $[f(x) \mid 0] \uparrow$ et $[f(x) \mid g(f(x))] = 1$ car g ne s'annule jamais. Donc $f(x) \in A$
- Si $x \notin \overline{\mathbb{K}}$ alors $[x \mid x] \downarrow$, donc $[f(x) \mid 0] \downarrow$ donc $f(x) \notin A$

f est bien une fonction calculable totale telle que $\forall x, x \in \overline{\mathbb{K}} \Leftrightarrow f(x) \in A$, donc $\overline{\mathbb{K}} \prec A$

9. **Montrez que ni l'ensemble A ni son complémentaire $\overline{A}$ ne sont énumérables**

Réponse :

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\mathbb{K}} \text{ non énumérable} \\ \overline{\mathbb{K}} \prec A \end{array}\right\} A \text{ non énumérable}$$

Exercice 3 - Énumérabilité

Soit l'ensemble E défini par :

$$E = \{x, \exists y \;\; [x \mid y] = x\}$$

Rappel : div est la division entière

1. **Exprimez cet ensemble avec des mots en Français.**

Réponse : E est l'ensemble des programmes pour lesquels il existe une entrée sur laquelle ils renvoient leur numéro.

2. **Soit le programme** *tata* : $y \mapsto$ return $(y \;\; div \;\; 2)$. **A-t-on** *tata* $\in E$ **? A-t-on** *tata* $\in \overline{E}$ **?**

Réponse : *tata* $\in E$ car $[tata \mid 2tata] = tata$, donc *tata* $\notin \overline{E}$

3. **Montrez que E est énumérable**

Réponse : Pour cela, on définit le programme q tel que $\forall x \;\; [q \mid x] \downarrow \Leftrightarrow x \in E$

```
[q | x]
    z = 0
    while step<x,π1(z),π2(z)> ≠ 1
        z = z + 1
    return 5
```

On a bien $\forall x, [q \mid x] \downarrow \Leftrightarrow x \in E \iff$ si $x \in E$ alors $\exists y \;\; [x \mid y] = x$

En particulier $[x \mid y] \downarrow$ donc $\exists t$ tel que *step*$\langle x, y, t\rangle \neq 0$ et même *step*$\langle x, y, t\rangle = x + 1$ donc lorsque $z = \langle y, t\rangle$ la boucle while s'arrête et le programme converge

Soit x tel que $[q \mid x] \downarrow$
Il existe z tel que *step*$\langle x, \pi_1(z), \pi_2(z)\rangle = x + 1$.
Cela signifie que $[x \mid \pi_1(z)] = x$, donc $x \in E$

4. **Rappelez la définition d'un programme auto-reproducteur. Fixons un tel programme (qu'on notera α) et montrez que $\alpha \in E$. Soit $\beta \neq \alpha$ tel que $[\beta \mid \cdot] = [\alpha \mid \cdot]$. Est-ce que $\beta \in E$?**

Réponse : x est auto-reproducteur si $\forall y \;\; [x \mid y] = x$

Soit α un programme auto-reproducteur, $\alpha \in E$ car $\forall y \;\; [\alpha \mid y] = \alpha$ donc $[\alpha \mid 5] = \alpha$

Soit $\beta \neq \alpha$ mais $[\beta \mid \cdot] = [\alpha \mid \cdot] \qquad \forall y \;\; [\beta \mid y] = [\alpha \mid y] = \alpha \neq \beta$ donc $\beta \notin E7$

5. **Aurait-on pu montrer que E n'est pas récursif en appliquant le Théorème de Rice ?**

Réponse : Non, voir 2.6

6. **Montrez que $\mathbb{K} \prec E$ et en déduire que E n'est pas récursif**

Réponse : On définit :

```
[p |⟨x,y⟩]
    if [x | x]↓ return y
```

On définit $\forall x \;\; f(x) = S_1^1\langle p, x\rangle$. f est calculable totale par SNM

Soit $x \in \mathbb{K}$, $[f(x) \mid x] = [S_1^1\langle p, x\rangle \mid y] = [p \mid \langle x, y\rangle] = y$

Donc lorsque $y = f(x)$, on a bien $[f(x) \mid f(x)] = f(x)$ donc $f(x) \in E$

Si $x \notin \mathbb{K}$ alors $\forall y \;\; [f(x) \mid y] = \perp$ donc en particulier $f(x) \notin E$

On a donc montré que $\forall x, x \in \mathbb{K} \Leftrightarrow f(x) \in E$, donc $\mathbb{K} \prec E$

E n'est donc pas récursif sinon $\mathbb{K}$ le serait aussi

Exercice 4 - Points fixes

Soit $F : x \mapsto a$ où a est un entier fixé. Notons n_0 un point fixe de F.

1. **Que calcule le programme n_0 ?**

Réponse : $\forall y \;\; [n_0 \mid y] = [F(n_0) \mid y] = [a \mid y]$

Complément d'énoncé

Soit b tel que $[b \mid \cdot] \neq [a \mid \cdot]$ et considérons la fonction F_1 suivante :

$$F_1 \begin{cases} \{a, n_0\} \to b \\ \_ \to a \end{cases}$$

$\forall y, [n_1 \mid y] = [F_1(n_1) \mid y]$

3. **Peut-on avoir $n_1 = a$? $n_1 = n_0$? Que calcule n_1 ?**

Réponse :

Si $n_1 = a, [F_1(n_1) \mid y] = [b \mid y]$ mais aussi $= [n_1 \mid y] = [a \mid y]$ Bzzzzzzt contradiction

$[n_1 \mid y] = [F_1(n_1) \mid y] = [a \mid y]$ n_1 calcule la même chose que a