

# Logique - Calculabilité - Complexité

Université de Montpellier

TD calculabilité n°2 - 2025

## Exercice 1 Ensembles énumérables

On veut montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $E$  est énumérable (rappel de la définition) : si  $\exists a \ E = W_a = \{x, [a|x] \downarrow\}$
  - (ii)  $E$  admet une fonction d'énumération calculable :  $\exists b, E = \text{Im}[b|\cdot] = \{x, \exists y [b|y] = x\}$
  - (iii)  $E$  est vide ou admet une fonction d'énumération totale calculable :  $\exists b, E = \text{Im}[b|\cdot] = \{x, \exists y [b|y] = x\}$
1. Montrez que (i)  $\implies$  (iii).
  2. Montrez que (iii)  $\implies$  (ii).
  3. Montrez que (ii)  $\implies$  (i).

## Exercice 2 Ensembles énumérables - mieux comprendre

1. Montrez que si  $E$  est un ensemble énumérable *infini* alors il admet une fonction d'énumération totale bijective
2. Soit  $E$  un ensemble infini. Montrez que  $E$  est récursif si et seulement si il admet une fonction d'énumération croissante.
3. Soit  $E$  un ensemble infini. Montrez que  $E$  est récursif si et seulement si il admet une fonction d'énumération strictement croissante.

## Exercice 3 Enumération des fonctions totales

Nous allons montrer dans cet exercice qu'il n'est pas possible d'avoir un système de programmation "raisonnable" où les programmes s'arrêtent toujours. Supposons que ce système existe et notons  $[x|y]'$  le résultat du calcul du  $x$ -ième programme sur l'entrée  $y$ .

1. On suppose que dans un de nos programmes on peut en appeler un autre, et que la fonction successeur soit calculable. Montrez que  $g : x \mapsto [x|x]' + 1$  est calculable dans ce système – on notera  $n$  son numéro :  $[n|\cdot]' = g(\cdot)$ .
2. Que vaut  $g(n)$ ? En déduire qu'un tel système n'existe pas.

## Exercice 4 Ensembles énumérables - clôture

Nous prouvons dans cet exercice que la classe des ensembles énumérables est bien close par union, intersection et produit cartésien. Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles énumérables.

1. Montrez que  $A \cup B$  est énumérable.
2. Montrez que  $A \cap B$  est énumérable.
3. Montrez que  $A \times B = \{ \langle x, y \rangle, x \in A \wedge y \in B \}$  est énumérable.