Preuves en logique du premier ordre

David Delahaye

Faculté des Sciences
David.Delahaye@lirmm.fr

Licence L3 2024-2025

Logique du premier ordre (syntaxe)

Définitions préliminaires

- $\mathcal{V} \equiv$ ensemble de variables d'individu x, y, etc. ;
- $\mathcal{S}_{\mathcal{F}} \equiv$ ensemble de symboles de fonctions f, g, etc. ;
- $\mathcal{S}_{\mathcal{P}} \equiv$ ensemble de symboles de prédicats P, Q, etc. ;
- $\mathcal{S}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{S}_{\mathcal{P}} = \emptyset$;
- Arité (nombre d'arguments) $m : \mathcal{S}_{\mathcal{F}} \cup \mathcal{S}_{\mathcal{P}} \to \mathbb{N}$:
  - Exemple : pour $f(x, y)$ avec $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$, $m(f) = 2$;
  - Exemple : pour $P(x, y, z)$ avec $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$, $m(P) = 3$.

Logique du premier ordre (syntaxe)

Termes du premier ordre

- Plus petit ensemble $\mathcal{T}$ t.q. :
  - Si $x \in \mathcal{V}$ alors $x \in \mathcal{T}$;
  - Si $f \in \mathcal{S}_\mathcal{F}$ d'arité n et $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$ alors $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}$.
- Les constantes sont des fonctions d'arité 0 ;
- Important : dans un premier temps, nous ne considérerons que les fonctions d'arité 0 (constantes) dans nos exemples.

Formules du premier ordre

- Plus petit ensemble $\mathcal{F}$ t.q. :
  - Si $P \in \mathcal{S}_\mathcal{P}$ d'arité n et $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$ alors $P(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{F}$;
  - $\bot, \top \in \mathcal{F}$;
  - Si $\Phi \in \mathcal{F}$ alors $\neg\Phi \in \mathcal{F}$;
  - Si $\Phi, \Phi' \in \mathcal{F}$ alors $\Phi \wedge \Phi', \Phi \vee \Phi', \Phi \Rightarrow \Phi', \Phi \Leftrightarrow \Phi' \in \mathcal{F}$;
  - Si $x \in \mathcal{V}$ et $\Phi \in \mathcal{F}$ alors $\forall x.\Phi, \exists x.\Phi \in \mathcal{F}$.

Sémantique

Interprétation

- Une interprétation I est un ensemble non vide D_I, appelé le domaine de l'interprétation, muni d'éléments $I(c)$ de D_I pour chaque symbole de constante (fonction d'arité 0), et d'une application $I(P)$ de D_I^n vers $\mathcal{B}$ pour chaque symbole de prédicat P d'arité n.

Affectation

- Une affectation ρ est une application de $\mathcal{V}$ vers D_I ;
- Pour toute affectation ρ, $\rho[v/x]$ est l'affectation envoyant chaque variable y autre que x vers $\rho(y)$, et x vers v.

Remarque

- Important : dans un premier temps, nous ne considérerons que les fonctions d'arité 0 (constantes) dans la sémantique.

Sémantique

Définition

- Dans une interprétation I, et modulo l'affectation ρ, la sémantique des termes et des formules est définie par :
  - Si $x \in \mathcal{V}$ alors $[\![x]\!]^I_\rho = \rho(x)$;
  - Si $c \in \mathcal{S}_\mathcal{F}$ d'arité 0 (constante) alors $[\![c]\!]^I_\rho = I(c)$;
  - Si $P \in \mathcal{S}_\mathcal{P}$ d'arité n et $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$ alors $[\![P(t_1, \ldots, t_n)]\!]^I_\rho = I(P)([\![t_1]\!]^I_\rho, \ldots, [\![t_1]\!]^I_\rho)$;
  - $[\![\top]\!]^I_\rho = T$, $[\![\bot]\!]^I_\rho = F$;
  - Si $\Phi \in \mathcal{F}$ alors $[\![\neg\Phi]\!]^I_\rho = \neg_\mathcal{B}[\![\Phi]\!]^I_\rho$;
  - Si $\Phi, \Phi' \in \mathcal{F}$ alors :
    - $[\![\Phi \wedge \Phi']\!]^I_\rho = [\![\Phi]\!]^I_\rho \wedge_\mathcal{B} [\![\Phi']\!]^I_\rho$;
    - $[\![\Phi \vee \Phi']\!]^I_\rho = [\![\Phi]\!]^I_\rho \vee_\mathcal{B} [\![\Phi']\!]^I_\rho$;
    - $[\![\Phi \Rightarrow \Phi']\!]^I_\rho = [\![\Phi]\!]^I_\rho \Rightarrow_\mathcal{B} [\![\Phi']\!]^I_\rho$;
    - $[\![\Phi \Leftrightarrow \Phi']\!]^I_\rho = [\![\Phi]\!]^I_\rho \Leftrightarrow_\mathcal{B} [\![\Phi']\!]^I_\rho$.
  - Si $x \in \mathcal{V}$ et $\Phi \in \mathcal{F}$ alors :
    - $[\![\forall x.\Phi]\!]^I_\rho = \bigwedge_{v \in D_I} [\![\Phi]\!]^I_{\rho[v/x]}$;
    - $[\![\exists x.\Phi]\!]^I_\rho = \bigvee_{v \in D_I} [\![\Phi]\!]^I_{\rho[v/x]}$.

Systèmes de preuves (formelles)

Plusieurs systèmes

- Systèmes à la Frege-Hilbert ;
- Systèmes à la Gentzen :
  - Déduction naturelle ;
  - Calcul des séquents.

Adéquation vis-à-vis de la sémantique

- Correction et complétude par rapport à la sémantique ;
- Correction : si je trouve une preuve de P alors P est vraie ;
- Complétude : si P est vraie alors il existe une preuve de P ;
- Preuve $\equiv$ moyen syntaxique de vérifier la validité d'une formule.

Calcul des séquents de Gentzen

Notion de séquent

- $\Gamma \vdash \Delta$, où $\Gamma, \Delta \equiv$ ensembles de formules ;
- « $\vdash$ » se prononce « thèse » ;
- Sémantique du séquent classique :
  - Si $\Gamma = \phi_1, \ldots, \phi_n$ et $\Delta = \psi_1, \ldots, \psi_m$;
  - $\Gamma \vdash \Delta \equiv \phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n \Rightarrow \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m$.

Système de Gentzen

- Peu d'axiomes et beaucoup de règles de déduction (par rapport aux systèmes à la Frege-Hilbert) ;
- Système symétrique (règles gauches/droites pour chaque connecteur) ;
- Règle de coupure $\equiv$ règle identifiée (pas une combinaison de règles) ;
- Système adapté à la recherche de preuves (méthode des tableaux) ;
- Pour différentes logiques (classique, intuitionniste, linéaire, etc.).

Calcul des séquents de Gentzen

Règle de déduction (règle d'inférence ou de dérivation)

- Règle de la forme :

$$\frac{P_1 \qquad P_2 \qquad \ldots \qquad P_n}{C}\ nom$$

  où :
  - $P_1, P_2, \ldots, P_n, C$ sont des séquents ;
  - $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont les prémisses de la règle ;
  - C est la conclusion de la règle ;
  - *nom* est le nom de la règle.
- Sémantique :
  - La règle se lit du haut vers le bas ;
  - Si on a P_1, P_2, …, et P_n, alors on peut en déduire C.
- Si la règle n'a pas de prémisses, elle est appelée règle axiomatique ou plus simplement axiome.

Calcul des séquents de Gentzen

Arbre de preuve (arbre de dérivation)

- On part d'un séquent initial à démontrer ;
- On applique les règles en raisonnement abductif (raisonnement arrière), c'est-à-dire que l'on part de ce qu'on veut montrer pour aller vers les hypothèses/axiomes) ;
- On construit ainsi un arbre dont le séquent est la racine et les branches sont créées par les différentes prémisses des règles de déduction ;
- Dans une branche, on s'arrête lorsqu'on atteint une règle axiomatique, qui devient ainsi une feuille de l'arbre ;
- Un arbre de preuve est un arbre dont toutes les branches se terminent par une règle axiomatique (on parle alors de branche close).

Calcul des séquents classique (LK)

Règles

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash \Delta, A}\ \text{ax} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, B}\ \text{cut}$$

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ \text{cont}_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}\ \text{cont}_{\text{right}}$$

Calcul des séquents classique (LK)

Règles

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash \Delta, A}\text{ax} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, B}\text{cut}$$

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\text{cont}_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}\text{cont}_{\text{right}}$$

Calcul des séquents classique (LK)

Règles

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash \Delta, A}\ \mathrm{ax} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, B}\ \mathrm{cut}$$

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ \mathrm{cont}_{\mathrm{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}\ \mathrm{cont}_{\mathrm{right}}$$

Calcul des séquents classique (LK)

Règles

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta} \Rightarrow_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B} \Rightarrow_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B \qquad \Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Leftrightarrow B \vdash \Delta} \Leftrightarrow_{\text{left}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B \qquad \Gamma, B \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \Leftrightarrow B} \Leftrightarrow_{\text{right}}$$

Calcul des séquents classique (LK)

Règles

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta} \Rightarrow_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B} \Rightarrow_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B \qquad \Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Leftrightarrow B \vdash \Delta} \Leftrightarrow_{\text{left}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B \qquad \Gamma, B \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \Leftrightarrow B} \Leftrightarrow_{\text{right}}$$

Calcul des séquents classique (LK)

Règles

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ \wedge_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}\ \wedge_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}\ \vee_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}\ \neg_{\text{right}}$$

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}\ \bot_{\text{left}} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \Delta, \top}\ \top_{\text{right}}$$

Calcul des séquents classique (LK)

Règles

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\wedge_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}\wedge_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\vee_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}\vee_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\neg_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}\neg_{\text{right}}$$

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}\bot_{\text{left}} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \Delta, \top}\top_{\text{right}}$$

Calcul des séquents classique (LK)

Règles

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ \wedge_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}\ \wedge_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}\ \vee_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}\ \neg_{\text{right}}$$

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}\ \bot_{\text{left}} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \Delta, \top}\ \top_{\text{right}}$$

Calcul des séquents classique (LK)

Règles

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \wedge_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \wedge_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \vee_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \neg_{\text{right}}$$

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta} \bot_{\text{left}} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \Delta, \top} \top_{\text{right}}$$

Calcul des séquents classique (LK)

Règles

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x.A(x) \vdash \Delta}\,\forall_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A(x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x.A(x)}\,\forall_{\text{right}},\ x \notin \Gamma, \Delta$$

$$\frac{\Gamma, A(x) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x.A(x) \vdash \Delta}\,\exists_{\text{left}},\ x \notin \Gamma, \Delta \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A(t)}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x.A(x)}\,\exists_{\text{right}}$$

Remarques

- t est une « métavariable » représentant un terme quelconque ;
- Sachant que les variables sont des termes, on peut prendre une variable pour t.

Calcul des séquents classique (LK)

Règles

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x.A(x) \vdash \Delta}\ \forall_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A(x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x.A(x)}\ \forall_{\text{right}},\ \ x \notin \Gamma, \Delta$$

$$\frac{\Gamma, A(x) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x.A(x) \vdash \Delta}\ \exists_{\text{left}},\ \ x \notin \Gamma, \Delta \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A(t)}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x.A(x)}\ \exists_{\text{right}}$$

Remarques

- t est une « métavariable » représentant un terme quelconque ;
- Sachant que les variables sont des termes, on peut prendre une variable pour t.

Calcul des séquents classique (LK)

Règles

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x.A(x) \vdash \Delta}\,\forall_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A(x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x.A(x)}\,\forall_{\text{right}},\ x \notin \Gamma, \Delta$$

$$\frac{\Gamma, A(x) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x.A(x) \vdash \Delta}\,\exists_{\text{left}},\ x \notin \Gamma, \Delta \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A(t)}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x.A(x)}\,\exists_{\text{right}}$$

Remarques

- t est une « métavariable » représentant un terme quelconque ;
- Sachant que les variables sont des termes, on peut prendre une variable pour t.

Exemple de preuve

Négation et quantificateurs

$$P(x) \vdash P(x)$$
$$P(x) \vdash \exists x.P(x)$$
$$\neg(\exists x.P(x)), P(x) \vdash \bot$$
$$\neg(\exists x.P(x)) \vdash \neg P(x)$$
$$\neg(\exists x.P(x)) \vdash \forall x.\neg P(x)$$
$$\vdash \neg(\exists x.P(x)) \Rightarrow \forall x.\neg P(x)$$

Exemple de preuve

Négation et quantificateurs

$$P(x) \vdash P(x)$$

$$P(x) \vdash \exists x.P(x)$$

$$\neg(\exists x.P(x)), P(x) \vdash \bot$$

$$\neg(\exists x.P(x)) \vdash \neg P(x)$$

$$\dfrac{\neg(\exists x.P(x)) \vdash \forall x.\neg P(x)}{\vdash \neg(\exists x.P(x)) \Rightarrow \forall x.\neg P(x)} \Rightarrow_{\text{right}}$$

Exemple de preuve

Négation et quantificateurs

$$P(x) \vdash P(x)$$

$$P(x) \vdash \exists x.P(x)$$

$$\neg(\exists x.P(x)), P(x) \vdash \bot$$

$$\dfrac{\dfrac{\neg(\exists x.P(x)) \vdash \neg P(x)}{\neg(\exists x.P(x)) \vdash \forall x.\neg P(x)}\ \forall_{\text{right}}}{\vdash \neg(\exists x.P(x)) \Rightarrow \forall x.\neg P(x)}\ \Rightarrow_{\text{right}}$$

Exemple de preuve

Négation et quantificateurs

$$P(x) \vdash P(x)$$

$$P(x) \vdash \exists x.P(x)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\exists x.P(x)), P(x) \vdash \bot}{\neg(\exists x.P(x)) \vdash \neg P(x)}\,\neg_{\text{right}}}{\neg(\exists x.P(x)) \vdash \forall x.\neg P(x)}\,\forall_{\text{right}}}{\vdash \neg(\exists x.P(x)) \Rightarrow \forall x.\neg P(x)}\,\Rightarrow_{\text{right}}$$

Exemple de preuve

Négation et quantificateurs

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(x) \vdash P(x)}{P(x) \vdash \exists x.P(x)}}{\neg(\exists x.P(x)), P(x) \vdash \bot}\ \neg_{\text{left}}}{\neg(\exists x.P(x)) \vdash \neg P(x)}\ \neg_{\text{right}}}{\neg(\exists x.P(x)) \vdash \forall x.\neg P(x)}\ \forall_{\text{right}}}{\vdash \neg(\exists x.P(x)) \Rightarrow \forall x.\neg P(x)}\ \Rightarrow_{\text{right}}
$$

Exemple de preuve

Négation et quantificateurs

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(x) \vdash P(x)}{P(x) \vdash \exists x.P(x)}\ \exists_{\text{right}}}{\neg(\exists x.P(x)), P(x) \vdash \bot}\ \neg_{\text{left}}}{\neg(\exists x.P(x)) \vdash \neg P(x)}\ \neg_{\text{right}}}{\neg(\exists x.P(x)) \vdash \forall x.\neg P(x)}\ \forall_{\text{right}}}{\vdash \neg(\exists x.P(x)) \Rightarrow \forall x.\neg P(x)}\ \Rightarrow_{\text{right}}$$

Exemple de preuve

Négation et quantificateurs

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P(x) \vdash P(x)}\;\mathsf{ax}}{P(x) \vdash \exists x.P(x)}\;\exists_{\mathsf{right}}}{\neg(\exists x.P(x)), P(x) \vdash \bot}\;\neg_{\mathsf{left}}}{\neg(\exists x.P(x)) \vdash \neg P(x)}\;\neg_{\mathsf{right}}}{\neg(\exists x.P(x)) \vdash \forall x.\neg P(x)}\;\forall_{\mathsf{right}}}{\vdash \neg(\exists x.P(x)) \Rightarrow \forall x.\neg P(x)}\;\Rightarrow_{\mathsf{right}}
$$

Exemple de preuve

Distribution du quantificateur existentiel sur la disjonction

$$P(x) \vdash P(x), \exists x.Q(x) \qquad Q(x) \vdash \exists x.P(x), Q(x)$$

$$P(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x) \qquad Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)$$

$$P(x) \vee Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)$$

$$\exists x.P(x) \vee Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)$$

$$\exists x.P(x) \vee Q(x) \vdash (\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))$$

$$\vdash (\exists x.P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))$$

Exemple de preuve

Distribution du quantificateur existentiel sur la disjonction

$$P(x) \vdash P(x), \exists x.Q(x) \qquad Q(x) \vdash \exists x.P(x), Q(x)$$

$$P(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x) \qquad Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)$$

$$P(x) \lor Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)$$

$$\exists x.P(x) \lor Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)$$

$$\cfrac{\exists x.P(x) \lor Q(x) \vdash (\exists x.P(x)) \lor (\exists x.Q(x))}{\vdash (\exists x.P(x) \lor Q(x)) \Rightarrow (\exists x.P(x)) \lor (\exists x.Q(x))} \Rightarrow_{\text{right}}$$

Exemple de preuve

Distribution du quantificateur existentiel sur la disjonction

$$P(x) \vdash P(x), \exists x.Q(x) \qquad Q(x) \vdash \exists x.P(x), Q(x)$$

$$P(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x) \qquad Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)$$

$$P(x) \vee Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)$$

$$\dfrac{\dfrac{\exists x.P(x) \vee Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}{\exists x.P(x) \vee Q(x) \vdash (\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))}\vee_{\text{right}}}{\vdash (\exists x.P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))}\Rightarrow_{\text{right}}$$

Exemple de preuve

Distribution du quantificateur existentiel sur la disjonction

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(x) \vdash P(x), \exists x.Q(x)}{P(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)} \quad \dfrac{Q(x) \vdash \exists x.P(x), Q(x)}{Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}}{P(x) \vee Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}}{\exists x.P(x) \vee Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}\exists_{\text{left}}}{\exists x.P(x) \vee Q(x) \vdash (\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))}\vee_{\text{right}}}{\vdash (\exists x.P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))}\Rightarrow_{\text{right}}$$

Exemple de preuve

Distribution du quantificateur existentiel sur la disjonction

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(x) \vdash P(x), \exists x.Q(x)}{P(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)} \qquad \dfrac{Q(x) \vdash \exists x.P(x), Q(x)}{Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}}{P(x) \vee Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}\ \vee_{\text{left}}}{\exists x.P(x) \vee Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}\ \exists_{\text{left}}}{\exists x.P(x) \vee Q(x) \vdash (\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))}\ \vee_{\text{right}}}{\vdash (\exists x.P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))}\ \Rightarrow_{\text{right}}
$$

Exemple de preuve

Distribution du quantificateur existentiel sur la disjonction

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(x) \vdash P(x), \exists x.Q(x)}{P(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}\ \exists_{\text{right}} \qquad \dfrac{Q(x) \vdash \exists x.P(x), Q(x)}{Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}}{\dfrac{P(x) \vee Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}{\exists x.P(x) \vee Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}\ \exists_{\text{left}}}\ \vee_{\text{left}}}{\exists x.P(x) \vee Q(x) \vdash (\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))}\ \vee_{\text{right}}}{\vdash (\exists x.P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))}\ \Rightarrow_{\text{right}}
$$

Exemple de preuve

Distribution du quantificateur existentiel sur la disjonction

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{}{P(x) \vdash P(x), \exists x.Q(x)}\,\text{ax}
}{P(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}\,\exists_{\text{right}}
\qquad
\begin{array}{c} Q(x) \vdash \exists x.P(x), Q(x) \\ Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x) \end{array}
}{P(x) \lor Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}\,\lor_{\text{left}}
}{\exists x.P(x) \lor Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}\,\exists_{\text{left}}
}{\exists x.P(x) \lor Q(x) \vdash (\exists x.P(x)) \lor (\exists x.Q(x))}\,\lor_{\text{right}}
}{\vdash (\exists x.P(x) \lor Q(x)) \Rightarrow (\exists x.P(x)) \lor (\exists x.Q(x))}\,\Rightarrow_{\text{right}}
$$

Exemple de preuve

Distribution du quantificateur existentiel sur la disjonction

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{\dfrac{}{P(x) \vdash P(x), \exists x.Q(x)}\,\text{ax}}{P(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}\,\exists_{\text{right}}
      \quad
      \dfrac{Q(x) \vdash \exists x.P(x), Q(x)}{Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}\,\exists_{\text{right}}
    }{P(x) \vee Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}\,\vee_{\text{left}}
  }{
    \dfrac{\exists x.P(x) \vee Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}{\exists x.P(x) \vee Q(x) \vdash (\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))}\,\vee_{\text{right}}
  }\,\exists_{\text{left}}
}{\vdash (\exists x.P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))}\,\Rightarrow_{\text{right}}
$$

Exemple de preuve

Distribution du quantificateur existentiel sur la disjonction

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P(x) \vdash P(x), \exists x.Q(x)}\,\text{ax}}{P(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}\,\exists_{\text{right}} \qquad \dfrac{\dfrac{}{Q(x) \vdash \exists x.P(x), Q(x)}\,\text{ax}}{Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}\,\exists_{\text{right}}}{P(x) \vee Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}\,\vee_{\text{left}}}{\exists x.P(x) \vee Q(x) \vdash \exists x.P(x), \exists x.Q(x)}\,\exists_{\text{left}}}{\exists x.P(x) \vee Q(x) \vdash (\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))}\,\vee_{\text{right}}}{\vdash (\exists x.P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))}\,\Rightarrow_{\text{right}}$$

Attention aux preuves fausses !

Négation et quantificateurs

$$P(x) \vdash P(x)$$

$$\vdash P(x), \neg P(x)$$

$$\vdash P(x), \forall x.\neg P(x)$$

$$\vdash \exists x.P(x), \forall x.\neg P(x)$$

$$\neg(\exists x.P(x)) \vdash \forall x.\neg P(x)$$

$$\vdash \neg(\exists x.P(x)) \Rightarrow \forall x.\neg P(x)$$

Cette preuve est fausse car :

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A(x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x.A(x)}\ \forall_{\text{right}},\ x \notin \Gamma, \Delta$$

Et ici $x \in \Delta = P(x)$.

Donc attention aux conditions d'application des règles !

Attention aux preuves fausses !

Négation et quantificateurs

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(x) \vdash P(x)}{\vdash P(x), \neg P(x)}}{\vdash P(x), \forall x.\neg P(x)}}{\vdash \exists x.P(x), \forall x.\neg P(x)}}{\neg(\exists x.P(x)) \vdash \forall x.\neg P(x)}}{\vdash \neg(\exists x.P(x)) \Rightarrow \forall x.\neg P(x)} \Rightarrow_{\text{right}}$$

Cette preuve est fausse car :

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A(x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x.A(x)} \forall_{\text{right}}, \ x \notin \Gamma, \Delta$$

Et ici $x \in \Delta = P(x)$.

Donc attention aux conditions d'application des règles !

Attention aux preuves fausses !

Négation et quantificateurs

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} P(x) \vdash P(x) \\ \vdash P(x), \neg P(x) \\ \vdash P(x), \forall x.\neg P(x) \\ \vdash \exists x.P(x), \forall x.\neg P(x) \end{array}}{\neg(\exists x.P(x)) \vdash \forall x.\neg P(x)}\ \neg_{\text{left}}}{\vdash \neg(\exists x.P(x)) \Rightarrow \forall x.\neg P(x)}\ \Rightarrow_{\text{right}}
$$

Cette preuve est fausse car :

$$
\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A(x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x.A(x)}\ \forall_{\text{right}},\ \ x \notin \Gamma, \Delta
$$

Et ici $x \in \Delta = P(x)$.

Donc attention aux conditions d'application des règles !

Attention aux preuves fausses !

Négation et quantificateurs

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(x) \vdash P(x)}{\vdash P(x), \neg P(x)}}{\vdash P(x), \forall x.\neg P(x)}}{\vdash \exists x.P(x), \forall x.\neg P(x)}\ \exists_{\text{right}}}{\neg(\exists x.P(x)) \vdash \forall x.\neg P(x)}\ \neg_{\text{left}}}{\vdash \neg(\exists x.P(x)) \Rightarrow \forall x.\neg P(x)}\ \Rightarrow_{\text{right}}
$$

Cette preuve est fausse car :

$$
\frac{\Gamma \vdash \Delta, A(x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x.A(x)}\ \forall_{\text{right}},\ \ x \notin \Gamma, \Delta
$$

Et ici $x \in \Delta = P(x)$.

Donc attention aux conditions d'application des règles !

Attention aux preuves fausses !

Négation et quantificateurs

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(x) \vdash P(x)}{\vdash P(x), \neg P(x)}}{\vdash P(x), \forall x.\neg P(x)}\ \forall_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x), \forall x.\neg P(x)}\ \exists_{\text{right}}}{\neg(\exists x.P(x)) \vdash \forall x.\neg P(x)}\ \neg_{\text{left}}}{\vdash \neg(\exists x.P(x)) \Rightarrow \forall x.\neg P(x)}\ \Rightarrow_{\text{right}}$$

Cette preuve est fausse car :

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A(x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x.A(x)}\ \forall_{\text{right}},\ x \notin \Gamma, \Delta$$

Et ici $x \in \Delta = P(x)$.

Donc attention aux conditions d'application des règles !

Attention aux preuves fausses !

Négation et quantificateurs

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(x) \vdash P(x)}{\vdash P(x), \neg P(x)}\neg_{\text{right}}}{\vdash P(x), \forall x.\neg P(x)}\forall_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x), \forall x.\neg P(x)}\exists_{\text{right}}}{\neg(\exists x.P(x)) \vdash \forall x.\neg P(x)}\neg_{\text{left}}}{\vdash \neg(\exists x.P(x)) \Rightarrow \forall x.\neg P(x)}\Rightarrow_{\text{right}}$$

Cette preuve est fausse car :

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A(x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x.A(x)}\forall_{\text{right}},\ \ x \notin \Gamma, \Delta$$

Et ici $x \in \Delta = P(x)$.

Donc attention aux conditions d'application des règles !

Attention aux preuves fausses !

Négation et quantificateurs

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{P(x) \vdash P(x)}\ \mathsf{ax}}{\vdash P(x), \neg P(x)}\ \neg_{\mathsf{right}}}{\vdash P(x), \forall x.\neg P(x)}\ \forall_{\mathsf{right}}}{\vdash \exists x.P(x), \forall x.\neg P(x)}\ \exists_{\mathsf{right}}}{\neg(\exists x.P(x)) \vdash \forall x.\neg P(x)}\ \neg_{\mathsf{left}}}{\vdash \neg(\exists x.P(x)) \Rightarrow \forall x.\neg P(x)}\ \Rightarrow_{\mathsf{right}}$$

Cette preuve est fausse car :

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A(x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x.A(x)}\ \forall_{\mathsf{right}},\ \ x \notin \Gamma, \Delta$$

Et ici $x \in \Delta = P(x)$.

Donc attention aux conditions d'application des règles !

Quelle stratégie de preuve ?

Le nerf de la guerre : les quantificateurs

- Aucune stratégie pour les connecteurs, si ce n'est d'utiliser en priorité les règles qui ne branchent pas ;
- Pour les quantificateurs, utiliser les règles de Skolémisation en priorité ($\forall_{\text{right}}$, $\exists_{\text{left}}$), puis les règles d'instanciation ($\exists_{\text{right}}$, $\forall_{\text{left}}$) ;
- Les règles de Skolémisation donnent des variables qui peuvent être ensuite utilisées par les règles instanciation ;
- Les variables de Skolémisation peuvent être utilisées telles quelles ou dans des termes plus complexes (dans des applications de fonctions) ;
- Dans des cas rares, une instanciation factice peut être requise en priorité pour « dégager » une Skolémisation, mais c'est rare (voir la preuve du paradoxe des buveurs).

Exotisme de la logique classique

Une preuve étrange ?

Démontrer : $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$.

Cette formule est-elle valide ?

$$\Gamma \vdash P(a), P(a) \wedge P(b) \qquad \Gamma \vdash P(b), P(a) \wedge P(b)$$

$$\Gamma = P(a), P(b) \vdash P(a) \wedge P(b), P(a) \wedge P(b)$$

$$P(a) \vdash P(a) \wedge P(b), P(b) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$$

$$P(a) \vdash P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$$

$$\vdash P(a) \Rightarrow P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$$

$$\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$$

$$\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$$

Exotisme de la logique classique

Une preuve étrange ?

Démontrer : $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$.

Cette formule est-elle valide ?

$$\Gamma \vdash P(a), P(a) \wedge P(b) \qquad \Gamma \vdash P(b), P(a) \wedge P(b)$$

$$\Gamma = P(a), P(b) \vdash P(a) \wedge P(b), P(a) \wedge P(b)$$

$$P(a) \vdash P(a) \wedge P(b), P(b) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$$

$$P(a) \vdash P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$$

$$\vdash P(a) \Rightarrow P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$$

$$\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$$

$$\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$$

Exotisme de la logique classique

Une preuve étrange ?

Démontrer : $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b)$.

Cette formule est-elle valide ?

$$\Gamma \vdash P(a), P(a) \land P(b) \qquad \Gamma \vdash P(b), P(a) \land P(b)$$

$$\Gamma = P(a), P(b) \vdash P(a) \land P(b), P(a) \land P(b)$$

$$P(a) \vdash P(a) \land P(b), P(b) \Rightarrow P(a) \land P(b)$$

$$P(a) \vdash P(a) \land P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b)$$

$$\vdash P(a) \Rightarrow P(a) \land P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b)$$

$$\dfrac{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b)}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b)}\ \mathrm{cont}_{\mathrm{right}}$$

Exotisme de la logique classique

Une preuve étrange ?

Démontrer : $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$.

Cette formule est-elle valide ?

$$\Gamma \vdash P(a), P(a) \wedge P(b) \qquad \Gamma \vdash P(b), P(a) \wedge P(b)$$

$$\Gamma = P(a), P(b) \vdash P(a) \wedge P(b), P(a) \wedge P(b)$$

$$P(a) \vdash P(a) \wedge P(b), P(b) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$$

$$P(a) \vdash P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$$

$$\dfrac{\dfrac{\vdash P(a) \Rightarrow P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\ \exists_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\ \text{cont}_{\text{right}}$$

Exotisme de la logique classique

Une preuve étrange ?

Démontrer : $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$.

Cette formule est-elle valide ?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash P(a), P(a) \wedge P(b) \qquad \Gamma \vdash P(b), P(a) \wedge P(b)}{\Gamma = P(a), P(b) \vdash P(a) \wedge P(b), P(a) \wedge P(b)}}{P(a) \vdash P(a) \wedge P(b), P(b) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}}{P(a) \vdash P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}}{\vdash P(a) \Rightarrow P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)} \Rightarrow_{\text{right}}}{\dfrac{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)} \text{cont}_{\text{right}}} \exists_{\text{right}}$$

Exotisme de la logique classique

Une preuve étrange ?

Démontrer : $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$.

Cette formule est-elle valide ?

$$\Gamma \vdash P(a), P(a) \wedge P(b) \qquad \Gamma \vdash P(b), P(a) \wedge P(b)$$

$$\Gamma = P(a), P(b) \vdash P(a) \wedge P(b), P(a) \wedge P(b)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(a) \vdash P(a) \wedge P(b), P(b) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}{P(a) \vdash P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\ \exists_{\text{right}}}{\vdash P(a) \Rightarrow P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\ \Rightarrow_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\ \exists_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\ \text{cont}_{\text{right}}$$

Exotisme de la logique classique

Une preuve étrange ?

Démontrer : $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$.

Cette formule est-elle valide ?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash P(a), P(a) \wedge P(b) \qquad \Gamma \vdash P(b), P(a) \wedge P(b)}{\Gamma = P(a), P(b) \vdash P(a) \wedge P(b), P(a) \wedge P(b)}}{P(a) \vdash P(a) \wedge P(b), P(b) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\Rightarrow_{\text{right}}}{P(a) \vdash P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\exists_{\text{right}}}{\vdash P(a) \Rightarrow P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\Rightarrow_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\exists_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\text{cont}_{\text{right}}$$

Exotisme de la logique classique

Une preuve étrange ?

Démontrer : $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$.

Cette formule est-elle valide ?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash P(a), P(a) \wedge P(b) \qquad \Gamma \vdash P(b), P(a) \wedge P(b)}{\Gamma = P(a), P(b) \vdash P(a) \wedge P(b), P(a) \wedge P(b)}\wedge_{\text{right}}}{P(a) \vdash P(a) \wedge P(b), P(b) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\Rightarrow_{\text{right}}}{P(a) \vdash P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\exists_{\text{right}}}{\vdash P(a) \Rightarrow P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\Rightarrow_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\exists_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\text{cont}_{\text{right}}$$

Exotisme de la logique classique

Une preuve étrange ?

Démontrer : $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$.

Cette formule est-elle valide ?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash P(a), P(a) \wedge P(b)}\,\text{ax} \qquad \Gamma \vdash P(b), P(a) \wedge P(b)}{\Gamma = P(a), P(b) \vdash P(a) \wedge P(b), P(a) \wedge P(b)}\,\wedge_{\text{right}}}{P(a) \vdash P(a) \wedge P(b), P(b) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\,\Rightarrow_{\text{right}}}{P(a) \vdash P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\,\exists_{\text{right}}}{\vdash P(a) \Rightarrow P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\,\Rightarrow_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\,\exists_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\,\text{cont}_{\text{right}}$$

Exotisme de la logique classique

Une preuve étrange ?

Démontrer : $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$.

Cette formule est-elle valide ?

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash P(a), P(a) \wedge P(b)}\,\text{ax} \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash P(b), P(a) \wedge P(b)}\,\text{ax}}{\Gamma = P(a), P(b) \vdash P(a) \wedge P(b), P(a) \wedge P(b)}\,\wedge_{\text{right}}}{P(a) \vdash P(a) \wedge P(b), P(b) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\,\Rightarrow_{\text{right}}}{P(a) \vdash P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\,\exists_{\text{right}}}{\vdash P(a) \Rightarrow P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\,\Rightarrow_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b), \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\,\exists_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)}\,\text{cont}_{\text{right}}
$$

Exotisme de la logique classique

Paradoxe (pas si paradoxal) des buveurs

Énoncé : « Il y a quelqu'un dans un bar tel que, s'il boit alors tout le monde dans le bar boit ».

$$
\begin{array}{c}
P(x), P(y) \vdash P(y), \forall y.P(y) \\
P(x) \vdash P(y), P(y) \Rightarrow \forall y.P(y) \\
P(x) \vdash P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y) \\
P(x) \vdash \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y) \\
\vdash P(x) \Rightarrow \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y) \\
\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y) \\
\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)
\end{array}
$$

Exotisme de la logique classique

Paradoxe (pas si paradoxal) des buveurs

Énoncé : « Il y a quelqu'un dans un bar tel que, s'il boit alors tout le monde dans le bar boit ».

$$P(x), P(y) \vdash P(y), \forall y.P(y)$$
$$P(x) \vdash P(y), P(y) \Rightarrow \forall y.P(y)$$
$$P(x) \vdash P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)$$
$$P(x) \vdash \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)$$
$$\vdash P(x) \Rightarrow \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)$$
$$\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)$$
$$\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)$$

Exotisme de la logique classique

Paradoxe (pas si paradoxal) des buveurs

Énoncé : « Il y a quelqu'un dans un bar tel que, s'il boit alors tout le monde dans le bar boit ».

$$P(x), P(y) \vdash P(y), \forall y.P(y)$$
$$P(x) \vdash P(y), P(y) \Rightarrow \forall y.P(y)$$
$$P(x) \vdash P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)$$
$$P(x) \vdash \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)$$
$$\vdash P(x) \Rightarrow \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)$$
$$\frac{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\ \mathrm{cont}_{\mathrm{right}}$$

Exotisme de la logique classique

Paradoxe (pas si paradoxal) des buveurs

Énoncé : « Il y a quelqu'un dans un bar tel que, s'il boit alors tout le monde dans le bar boit ».

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(x), P(y) \vdash P(y), \forall y.P(y)}{P(x) \vdash P(y), P(y) \Rightarrow \forall y.P(y)}}{P(x) \vdash P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}}{P(x) \vdash \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}}{\vdash P(x) \Rightarrow \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}}{\dfrac{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\ \mathrm{cont}_{\mathrm{right}}}\ \exists_{\mathrm{right}}$$

Exotisme de la logique classique

Paradoxe (pas si paradoxal) des buveurs

Énoncé : « Il y a quelqu'un dans un bar tel que, s'il boit alors tout le monde dans le bar boit ».

$$P(x), P(y) \vdash P(y), \forall y.P(y)$$
$$P(x) \vdash P(y), P(y) \Rightarrow \forall y.P(y)$$
$$P(x) \vdash P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(x) \vdash \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}{\vdash P(x) \Rightarrow \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\ \Rightarrow_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\ \exists_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\ \text{cont}_{\text{right}}$$

Exotisme de la logique classique

Paradoxe (pas si paradoxal) des buveurs

Énoncé : « Il y a quelqu'un dans un bar tel que, s'il boit alors tout le monde dans le bar boit ».

$$P(x), P(y) \vdash P(y), \forall y.P(y)$$

$$P(x) \vdash P(y), P(y) \Rightarrow \forall y.P(y)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(x) \vdash P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}{P(x) \vdash \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\ \forall_{\text{right}}}{\vdash P(x) \Rightarrow \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\ \Rightarrow_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\ \exists_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\ \text{cont}_{\text{right}}$$

Exotisme de la logique classique

Paradoxe (pas si paradoxal) des buveurs

Énoncé : « Il y a quelqu'un dans un bar tel que, s'il boit alors tout le monde dans le bar boit ».

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(x), P(y) \vdash P(y), \forall y.P(y)}{P(x) \vdash P(y), P(y) \Rightarrow \forall y.P(y)}}{P(x) \vdash P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\,\exists_{\text{right}}}{P(x) \vdash \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\,\forall_{\text{right}}}{\vdash P(x) \Rightarrow \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\,\Rightarrow_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\,\exists_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\,\text{cont}_{\text{right}}
$$

Exotisme de la logique classique

Paradoxe (pas si paradoxal) des buveurs

Énoncé : « Il y a quelqu'un dans un bar tel que, s'il boit alors tout le monde dans le bar boit ».

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{P(x), P(y) \vdash P(y), \forall y.P(y)}{P(x) \vdash P(y), P(y) \Rightarrow \forall y.P(y)}\;\Rightarrow_{\text{right}}}{P(x) \vdash P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\;\exists_{\text{right}}}{P(x) \vdash \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\;\forall_{\text{right}}}{\vdash P(x) \Rightarrow \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\;\Rightarrow_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\;\exists_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\;\text{cont}_{\text{right}}$$

Exotisme de la logique classique

Paradoxe (pas si paradoxal) des buveurs

Énoncé : « Il y a quelqu'un dans un bar tel que, s'il boit alors tout le monde dans le bar boit ».

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P(x), P(y) \vdash P(y), \forall y.P(y)}\ \text{ax}}{P(x) \vdash P(y), P(y) \Rightarrow \forall y.P(y)}\ \Rightarrow_{\text{right}}}{P(x) \vdash P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\ \exists_{\text{right}}}{P(x) \vdash \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\ \forall_{\text{right}}}{\vdash P(x) \Rightarrow \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\ \Rightarrow_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y), \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\ \exists_{\text{right}}}{\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)}\ \text{cont}_{\text{right}}
$$

Propriétés

Prouvabilité

- $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable dans LK, noté $\Gamma \vdash_{\mathrm{LK}} \Delta$, ssi il existe une dérivation dans LK se terminant sur $\Gamma \vdash \Delta$.

Correction

- Notation : $\Gamma \models \Delta \equiv \Gamma \models \bigvee_{\Phi \in \Delta} \Phi$;
- Si $\Gamma \vdash_{\mathrm{LK}} \Delta$ alors $\Gamma \models \Delta$.

Complétude

- Si $\Gamma \models \Delta$ alors $\Gamma \vdash_{\mathrm{LK}} \Delta$.

Élimination des coupures

- Il existe un algorithme qui prend une preuve dans LK et la transforme en une preuve sans coupure du même séquent.

Correction

Démonstration

- Si $\Gamma \vdash_{\mathrm{LK}} \Delta$ alors $\Gamma \models \Delta$;
- Par induction sur la relation $\Gamma \vdash_{\mathrm{LK}} \Delta$:
  - Plusieurs cas selon les règles de LK ;
  - Par exemple, cas de $\Rightarrow_{\mathrm{right}}$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B} \Rightarrow_{\mathrm{right}}$$

- On doit démontrer que $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$ sachant que :
  $\Gamma \vdash_{\mathrm{LK}} \Delta, A \Rightarrow B$ ($\mathcal{H}_1$),
  Si $\Gamma, A \vdash_{\mathrm{LK}} \Delta, B$ alors $\Gamma, A \models \Delta, B$ ($\mathcal{H}_2$) ;
- Si $\Gamma \vdash_{\mathrm{LK}} \Delta, A \Rightarrow B$ ($\mathcal{H}_1$) alors $\Gamma, A \vdash_{\mathrm{LK}} \Delta, B$ (définition de $\vdash_{\mathrm{LK}}$) (1) ;
- En utilisant ($\mathcal{H}_2$) et (1), on en déduit que $\Gamma, A \models \Delta, B$ (2).

Correction

Démonstration

- Si $\Gamma \vdash_{\text{LK}} \Delta$ alors $\Gamma \models \Delta$;
- Par induction sur la relation $\Gamma \vdash_{\text{LK}} \Delta$:
  - Plusieurs cas selon les règles de LK ;
  - Par exemple, cas de $\Rightarrow_{\text{right}}$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B} \Rightarrow_{\text{right}}$$

    - On doit démontrer que $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$ sachant que :
      $\Gamma \vdash_{\text{LK}} \Delta, A \Rightarrow B$ ($\mathcal{H}_1$),
      Si $\Gamma, A \vdash_{\text{LK}} \Delta, B$ alors $\Gamma, A \models \Delta, B$ ($\mathcal{H}_2$) ;
    - Si $\Gamma \vdash_{\text{LK}} \Delta, A \Rightarrow B$ ($\mathcal{H}_1$) alors $\Gamma, A \vdash_{\text{LK}} \Delta, B$ (définition de $\vdash_{\text{LK}}$) (1) ;
    - En utilisant ($\mathcal{H}_2$) et (1), on en déduit que $\Gamma, A \models \Delta, B$ (2).

Correction

Démonstration

- Si $\Gamma \vdash_{\mathsf{LK}} \Delta$ alors $\Gamma \models \Delta$;
- Par induction sur la relation $\Gamma \vdash_{\mathsf{LK}} \Delta$:
  - Plusieurs cas selon les règles de LK ;
  - Par exemple, cas de $\Rightarrow_{\text{right}}$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B} \Rightarrow_{\text{right}}$$

    - On doit démontrer que $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$ sachant que :
      $\Gamma \vdash_{\mathsf{LK}} \Delta, A \Rightarrow B$ $(\mathcal{H}_1)$,
      Si $\Gamma, A \vdash_{\mathsf{LK}} \Delta, B$ alors $\Gamma, A \models \Delta, B$ $(\mathcal{H}_2)$;
    - Si $\Gamma \vdash_{\mathsf{LK}} \Delta, A \Rightarrow B$ $(\mathcal{H}_1)$ alors $\Gamma, A \vdash_{\mathsf{LK}} \Delta, B$ (définition de $\vdash_{\mathsf{LK}}$) (1) ;
    - En utilisant $(\mathcal{H}_2)$ et (1), on en déduit que $\Gamma, A \models \Delta, B$ (2).

Correction

Démonstration

- Si $\Gamma \vdash_{\mathrm{LK}} \Delta$ alors $\Gamma \models \Delta$;
- Par induction sur la relation $\Gamma \vdash_{\mathrm{LK}} \Delta$:
  - Plusieurs cas selon les règles de LK ;
  - Par exemple, cas de $\Rightarrow_{\text{right}}$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B} \Rightarrow_{\text{right}}$$

- On doit démontrer que $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$ sachant que :
  $\Gamma \vdash_{\mathrm{LK}} \Delta, A \Rightarrow B$ ($\mathcal{H}_1$),
  Si $\Gamma, A \vdash_{\mathrm{LK}} \Delta, B$ alors $\Gamma, A \models \Delta, B$ ($\mathcal{H}_2$) ;
- Si $\Gamma \vdash_{\mathrm{LK}} \Delta, A \Rightarrow B$ ($\mathcal{H}_1$) alors $\Gamma, A \vdash_{\mathrm{LK}} \Delta, B$ (définition de $\vdash_{\mathrm{LK}}$) (1) ;
- En utilisant ($\mathcal{H}_2$) et (1), on en déduit que $\Gamma, A \models \Delta, B$ (2).

Correction

Démonstration

- Si $\Gamma \vdash_{\text{LK}} \Delta$ alors $\Gamma \models \Delta$;
- Par induction sur la relation $\Gamma \vdash_{\text{LK}} \Delta$:
  - Plusieurs cas selon les règles de LK ;
  - Par exemple, cas de $\Rightarrow_{\text{right}}$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B} \Rightarrow_{\text{right}}$$

    - On doit démontrer que $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$ sachant que :
      $\Gamma \vdash_{\text{LK}} \Delta, A \Rightarrow B$ ($\mathcal{H}_1$),
      Si $\Gamma, A \vdash_{\text{LK}} \Delta, B$ alors $\Gamma, A \models \Delta, B$ ($\mathcal{H}_2$) ;
    - Si $\Gamma \vdash_{\text{LK}} \Delta, A \Rightarrow B$ ($\mathcal{H}_1$) alors $\Gamma, A \vdash_{\text{LK}} \Delta, B$ (définition de $\vdash_{\text{LK}}$) (1) ;
    - En utilisant ($\mathcal{H}_2$) et (1), on en déduit que $\Gamma, A \models \Delta, B$ (2).

Correction

Démonstration

- Si $\Gamma \vdash_{\text{LK}} \Delta$ alors $\Gamma \models \Delta$;
- Par induction sur la relation $\Gamma \vdash_{\text{LK}} \Delta$:
  - Plusieurs cas selon les règles de LK ;
  - Par exemple, cas de $\Rightarrow_{\text{right}}$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B}\Rightarrow_{\text{right}}$$

  - On doit démontrer que $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$ sachant que :
    $\Gamma \vdash_{\text{LK}} \Delta, A \Rightarrow B$ ($\mathcal{H}_1$),
    Si $\Gamma, A \vdash_{\text{LK}} \Delta, B$ alors $\Gamma, A \models \Delta, B$ ($\mathcal{H}_2$) ;
  - Si $\Gamma \vdash_{\text{LK}} \Delta, A \Rightarrow B$ ($\mathcal{H}_1$) alors $\Gamma, A \vdash_{\text{LK}} \Delta, B$ (définition de $\vdash_{\text{LK}}$) (1) ;
  - En utilisant ($\mathcal{H}_2$) et (1), on en déduit que $\Gamma, A \models \Delta, B$ (2).

Correction

Démonstration

- Si $\Gamma \vdash_{LK} \Delta$ alors $\Gamma \models \Delta$;
- Par induction sur la relation $\Gamma \vdash_{LK} \Delta$:
  - Plusieurs cas selon les règles de LK ;
  - Par exemple, cas de $\Rightarrow_{right}$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B} \Rightarrow_{right}$$

    - On doit démontrer que $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$ sachant que :
      $\Gamma \vdash_{LK} \Delta, A \Rightarrow B$ ($\mathcal{H}_1$),
      Si $\Gamma, A \vdash_{LK} \Delta, B$ alors $\Gamma, A \models \Delta, B$ ($\mathcal{H}_2$) ;
    - Si $\Gamma \vdash_{LK} \Delta, A \Rightarrow B$ ($\mathcal{H}_1$) alors $\Gamma, A \vdash_{LK} \Delta, B$ (définition de $\vdash_{LK}$) (1) ;
    - En utilisant ($\mathcal{H}_2$) et (1), on en déduit que $\Gamma, A \models \Delta, B$ (2).

Correction

Démonstration

- On doit démontrer que $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$ sachant que $\Gamma, A \models \Delta, B$ (2) ;
- Selon (2), deux cas :
  - Soit $\Gamma, A \models B$ (3), deux cas selon les modèles de Γ :
    - Soit les modèles de Γ valident A, alors ils valident B (3), puis $A \Rightarrow B$;
    - Soit les modèles de Γ ne valident pas A, alors ils valident $A \Rightarrow B$;
    - Donc $\Gamma \models A \Rightarrow B$, puis $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$.
  - Soit $\Gamma, A \models \Delta$ (4), deux cas selon les modèles de Γ :
    - Soit les modèles de Γ valident A, alors ils valident Δ (4) ;
    - Soit les modèles de Γ ne valident pas A, alors ils valident $A \Rightarrow B$;
    - Donc $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$.

Correction

Démonstration

- On doit démontrer que $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$ sachant que $\Gamma, A \models \Delta, B$ (2) ;
- Selon (2), deux cas :
  - Soit $\Gamma, A \models B$ (3), deux cas selon les modèles de Γ :
    - Soit les modèles de Γ valident A, alors ils valident B (3), puis $A \Rightarrow B$;
    - Soit les modèles de Γ ne valident pas A, alors ils valident $A \Rightarrow B$;
    - Donc $\Gamma \models A \Rightarrow B$, puis $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$.
  - Soit $\Gamma, A \models \Delta$ (4), deux cas selon les modèles de Γ :
    - Soit les modèles de Γ valident A, alors ils valident Δ (4) ;
    - Soit les modèles de Γ ne valident pas A, alors ils valident $A \Rightarrow B$;
    - Donc $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$.

Correction

Démonstration

- On doit démontrer que $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$ sachant que $\Gamma, A \models \Delta, B$ (2) ;
- Selon (2), deux cas :
  - Soit $\Gamma, A \models B$ (3), deux cas selon les modèles de Γ :
    - Soit les modèles de Γ valident A, alors ils valident B (3), puis $A \Rightarrow B$;
    - Soit les modèles de Γ ne valident pas A, alors ils valident $A \Rightarrow B$;
    - Donc $\Gamma \models A \Rightarrow B$, puis $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$.
  - Soit $\Gamma, A \models \Delta$ (4), deux cas selon les modèles de Γ :
    - Soit les modèles de Γ valident A, alors ils valident Δ (4) ;
    - Soit les modèles de Γ ne valident pas A, alors ils valident $A \Rightarrow B$;
    - Donc $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$.

Correction

Démonstration

- On doit démontrer que $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$ sachant que $\Gamma, A \models \Delta, B$ (2) ;
- Selon (2), deux cas :
  - Soit $\Gamma, A \models B$ (3), deux cas selon les modèles de Γ :
    - Soit les modèles de Γ valident A, alors ils valident B (3), puis $A \Rightarrow B$;
    - Soit les modèles de Γ ne valident pas A, alors ils valident $A \Rightarrow B$;
    - Donc $\Gamma \models A \Rightarrow B$, puis $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$.
  - Soit $\Gamma, A \models \Delta$ (4), deux cas selon les modèles de Γ :
    - Soit les modèles de Γ valident A, alors ils valident Δ (4) ;
    - Soit les modèles de Γ ne valident pas A, alors ils valident $A \Rightarrow B$;
    - Donc $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$.

Correction

Démonstration

- On doit démontrer que $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$ sachant que $\Gamma, A \models \Delta, B$ (2) ;
- Selon (2), deux cas :
  - Soit $\Gamma, A \models B$ (3), deux cas selon les modèles de Γ :
    - Soit les modèles de Γ valident A, alors ils valident B (3), puis $A \Rightarrow B$;
    - Soit les modèles de Γ ne valident pas A, alors ils valident $A \Rightarrow B$;
    - Donc $\Gamma \models A \Rightarrow B$, puis $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$.
  - Soit $\Gamma, A \models \Delta$ (4), deux cas selon les modèles de Γ :
    - Soit les modèles de Γ valident A, alors ils valident Δ (4) ;
    - Soit les modèles de Γ ne valident pas A, alors ils valident $A \Rightarrow B$;
    - Donc $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$.

Correction

Démonstration

- On doit démontrer que $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$ sachant que $\Gamma, A \models \Delta, B$ (2) ;
- Selon (2), deux cas :
  - Soit $\Gamma, A \models B$ (3), deux cas selon les modèles de Γ :
    - Soit les modèles de Γ valident A, alors ils valident B (3), puis $A \Rightarrow B$;
    - Soit les modèles de Γ ne valident pas A, alors ils valident $A \Rightarrow B$;
    - Donc $\Gamma \models A \Rightarrow B$, puis $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$.
  - Soit $\Gamma, A \models \Delta$ (4), deux cas selon les modèles de Γ :
    - Soit les modèles de Γ valident A, alors ils valident Δ (4) ;
    - Soit les modèles de Γ ne valident pas A, alors ils valident $A \Rightarrow B$;
    - Donc $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$.

Correction

Démonstration

- On doit démontrer que $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$ sachant que $\Gamma, A \models \Delta, B$ (2) ;
- Selon (2), deux cas :
  - Soit $\Gamma, A \models B$ (3), deux cas selon les modèles de Γ :
    - Soit les modèles de Γ valident A, alors ils valident B (3), puis $A \Rightarrow B$;
    - Soit les modèles de Γ ne valident pas A, alors ils valident $A \Rightarrow B$;
    - Donc $\Gamma \models A \Rightarrow B$, puis $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$.
  - Soit $\Gamma, A \models \Delta$ (4), deux cas selon les modèles de Γ :
    - Soit les modèles de Γ valident A, alors ils valident Δ (4) ;
    - Soit les modèles de Γ ne valident pas A, alors ils valident $A \Rightarrow B$;
    - Donc $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$.

Correction

Démonstration

- On doit démontrer que $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$ sachant que $\Gamma, A \models \Delta, B$ (2) ;
- Selon (2), deux cas :
  - Soit $\Gamma, A \models B$ (3), deux cas selon les modèles de Γ :
    - Soit les modèles de Γ valident A, alors ils valident B (3), puis $A \Rightarrow B$;
    - Soit les modèles de Γ ne valident pas A, alors ils valident $A \Rightarrow B$;
    - Donc $\Gamma \models A \Rightarrow B$, puis $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$.
  - Soit $\Gamma, A \models \Delta$ (4), deux cas selon les modèles de Γ :
    - Soit les modèles de Γ valident A, alors ils valident Δ (4) ;
    - Soit les modèles de Γ ne valident pas A, alors ils valident $A \Rightarrow B$;
    - Donc $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$.

Correction

Démonstration

- On doit démontrer que $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$ sachant que $\Gamma, A \models \Delta, B$ (2) ;
- Selon (2), deux cas :
  - Soit $\Gamma, A \models B$ (3), deux cas selon les modèles de Γ :
    - Soit les modèles de Γ valident A, alors ils valident B (3), puis $A \Rightarrow B$;
    - Soit les modèles de Γ ne valident pas A, alors ils valident $A \Rightarrow B$;
    - Donc $\Gamma \models A \Rightarrow B$, puis $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$.
  - Soit $\Gamma, A \models \Delta$ (4), deux cas selon les modèles de Γ :
    - Soit les modèles de Γ valident A, alors ils valident Δ (4) ;
    - Soit les modèles de Γ ne valident pas A, alors ils valident $A \Rightarrow B$;
    - Donc $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$.

Correction

Démonstration

- On doit démontrer que $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$ sachant que $\Gamma, A \models \Delta, B$ (2) ;
- Selon (2), deux cas :
  - Soit $\Gamma, A \models B$ (3), deux cas selon les modèles de Γ :
    - Soit les modèles de Γ valident A, alors ils valident B (3), puis $A \Rightarrow B$;
    - Soit les modèles de Γ ne valident pas A, alors ils valident $A \Rightarrow B$;
    - Donc $\Gamma \models A \Rightarrow B$, puis $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$.
  - Soit $\Gamma, A \models \Delta$ (4), deux cas selon les modèles de Γ :
    - Soit les modèles de Γ valident A, alors ils valident Δ (4) ;
    - Soit les modèles de Γ ne valident pas A, alors ils valident $A \Rightarrow B$;
    - Donc $\Gamma \models \Delta, A \Rightarrow B$.