Distribution Normale

- **Standardisation:**
  Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, alors
$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1).$$
- **Probabilités:**
$$P(a < X < b) = P\Big(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\Big).$$

Approximation Normale

- Pour $S_n \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ et $np, n(1-p)$ grands,
$$S_n \approx N\Big(np,\, np(1-p)\Big).$$
- Correction de continuité:
$$P(a \le S_n \le b) \approx P(a-0.5 < Y < b+0.5)$$
  avec $Y \sim N(np, np(1-p))$.

Théorème Central Limite

- Pour $X_i \sim \mathrm{Be}(p)$,
$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad E[\overline{X}] = p,\ \mathrm{Var}(\overline{X}) = \frac{p(1-p)}{n}.$$
- Pour large n,
$$\overline{X} \approx N\Big(p, \frac{p(1-p)}{n}\Big).$$

Erreurs de Test Statistique

- **Erreur de Type I (α):** Rejeter H_0 quand H_0 est vraie.
- **Erreur de Type II (β):** Accepter H_0 quand H_1 est vraie.
- **Puissance:** $1-\beta$, probabilité de rejeter H_0 quand H_1 est vraie.

Standardisation Z pour un Test

Pour un estimateur $\hat{p}$ et hypothèse $H_0 : p = p_0$,
$$Z = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}.$$

Exemple: Contrôle de Qualité d'un Sac

Données:

- $H_0 : p = 10\%$ contre $H_1 : p = 6\%$.
- Taille d'échantillon $n = 100$, seuil de décision $s = 8\%$.
- $X_i \sim \mathrm{Be}(p)$, $X = \sum_{i=1}^{100} X_i \sim B(100,p)$.
- $\hat{p} = \frac{X}{100} \approx N\Big(p, \frac{p(1-p)}{100}\Big)$.

Règle:
$$\text{Si } \hat{p} \le 0.08,\ \text{accepter } H_1;\ \text{sinon conserver } H_0.$$

Calcul des Risques

Type I Error (α):
$$\alpha = P(\hat{p} \le 0.08 \mid p = 0.10).$$

Sous H_0:
$$\sigma_{H_0} = \sqrt{\frac{0.10 \times 0.90}{100}} = 0.03.$$
$$Z = \frac{0.08-0.10}{0.03} \approx -0.667,$$
$$\alpha \approx P(Z \le -0.667) \approx 0.2525.$$

Type II Error (β):
$$\beta = P(\hat{p} > 0.08 \mid p = 0.06).$$

Sous H_1:
$$\sigma_{H_1} = \sqrt{\frac{0.06 \times 0.94}{100}} \approx 0.02375.$$
$$Z = \frac{0.08-0.06}{0.02375} \approx 0.842,$$
$$\beta \approx P(Z > 0.842) \approx 0.200.$$

Hypothèses Inversées

Pour $H_0 : p = 6\%$ vs. $H_1 : p = 10\%$ avec $s = 8\%$,
$$\alpha' = P(\hat{p} \le 0.08 \mid p = 0.06), \quad \beta' = P(\hat{p} > 0.08 \mid p = 0.10).$$

Calculer avec la même méthode en adaptant les paramètres.

Choix de $\alpha = 0.05$

Sous $H_0 : p = 0.10$, trouver s tel que
$$P\Big(\frac{\hat{p}-0.10}{0.03} \le \frac{s-0.10}{0.03}\Big) = 0.05.$$

Avec $Z_{0.05} = -1.645$,
$$\frac{s-0.10}{0.03} = -1.645,$$
$$s \approx 0.10 - 1.645 \times 0.03 = 0.05065.$$

Calcul de β avec ce nouveau s:
$$Z = \frac{0.05065-0.06}{0.02375} \approx -0.394,\ \beta \approx P(Z > -0.394) \approx 0.653.$$

Fixer $\alpha = \beta = 0.05$

Équations sous H_0 et H_1:
$$\frac{s-0.10}{\sqrt{0.09/n}} = -1.645,$$
$$\frac{s-0.06}{\sqrt{0.0564/n}} = 1.645.$$

Ici,
$$\sqrt{\frac{0.09}{n}} = \frac{0.10-s}{1.645}, \quad \sqrt{\frac{0.0564}{n}} = \frac{s-0.06}{1.645}.$$

Résoudre:
$$s = 0.10 - 1.645\sqrt{\tfrac{0.09}{n}}, \quad s = 0.06 + 1.645\sqrt{\tfrac{0.0564}{n}}.$$

Égaliser et trouver n, puis calculer s.

Urnes (b blanches, n noires)

- **Sans Remise:**
$$P(\mathrm{BB}) = \frac{b}{b+n}\cdot\frac{b-1}{b+n-1},\ P(\mathrm{BN}) = \frac{b}{b+n}\cdot\frac{n}{b+n-1}$$
$$P(\text{même}) = \frac{b(b-1)+n(n-1)}{(b+n)(b+n-1)},\ P(\text{diff}) = \frac{2bn}{(b+n)(b+n-1)}$$
- **Avec Remise:**
$$P(\mathrm{BB}) = (\frac{b}{b+n})^2,\ P(\mathrm{BN}) = \frac{bn}{(b+n)^2},\ P(\text{même}) = (\frac{b}{b+n})^2 + ($$
- **Général:** Pour k succès sur K tirages parmi N boules (n favorables):
$$P(k) = \frac{\binom{n}{k}\binom{N-n}{K-k}}{\binom{N}{K}}$$
- **Vérif:** $P(\text{même}) + P(\text{diff}) = 1$, $P(\text{même})_{\text{sans}} < P(\text{même})_{\text{avec}}$

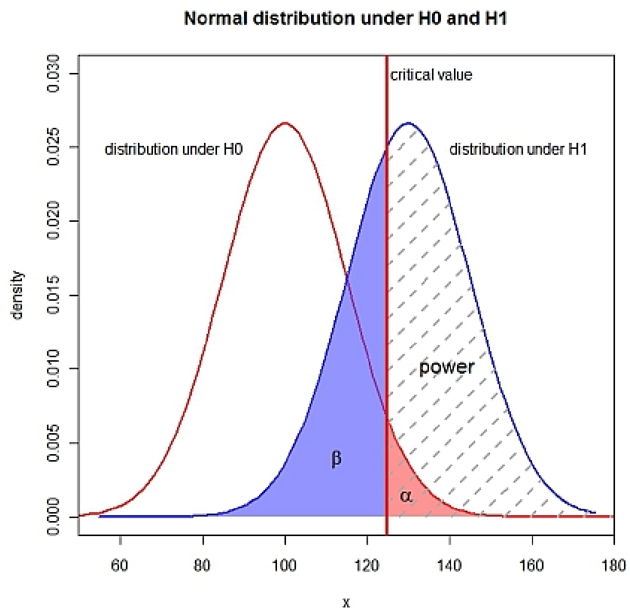

Figure 1: Type I et Type II Errors.