

**Examen**  
**Master 1 Informatique**  
**UE HAI718I**  
**Probabilités, statistiques**  
**Mardi 10 janvier 2023**

1h00 - Notes de cours, TD et TP autorisés

**A) Modélisation de densités de probabilité (6 pts)**

Soit les 3 distributions  $H1(x)$ ,  $H2(x)$  et  $H3(x)$ , toutes composées de 100 événements, représentant les occurrences pour  $x$  compris entre 0 et 31 :

$$H1(x) = \{0, 3, 1, 2, 2, 3, 3, 2, 4, 4, 5, 3, 6, 2, 7, 4, 8, 2, 9, 2, 10, 3, 11, 4, 12, 2, 13, 3, 14, 4, 15, 3, 16, 5, 17, 3, 18, 4, 19, 4, 20, 3, 21, 3, 22, 5, 23, 3, 24, 3, 25, 3, 26, 4, 27, 3, 28, 3, 29, 3, 30, 2, 31, 3\}$$

$$H2(x) = \{0, 0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, 0, 6, 1, 7, 2, 8, 3, 9, 6, 10, 18, 11, 40, 12, 18, 13, 6, 14, 3, 15, 2, 16, 1, 17, 0, 18, 0, 19, 0, 20, 0, 21, 0, 22, 0, 23, 0, 24, 0, 25, 0, 26, 0, 27, 0, 28, 0, 29, 0, 30, 0, 31, 0\}$$

$$H3(x) = \{0, 0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, 1, 6, 2, 7, 4, 8, 6, 9, 10, 10, 17, 11, 20, 12, 17, 13, 10, 14, 6, 15, 4, 16, 2, 17, 1, 18, 0, 19, 0, 20, 0, 21, 0, 22, 0, 23, 0, 24, 0, 25, 0, 26, 0, 27, 0, 28, 0, 29, 0, 30, 0, 31, 0\}$$

- 1) A partir de ces 3 distributions, calculer et tracer les densités de probabilité (ddp) correspondantes  $f1(x)$ ,  $f2(x)$  et  $f3(x)$ .
- 2) A partir de la fonction générique  $f(x) = C \exp(-K|x|^\alpha)$  en déduire la valeur de  $\alpha$  la plus pertinente pour chacune des ddp  $f1(x)$ ,  $f2(x)$  et  $f3(x)$ . Pour rappel,  $\alpha = 0$  : distribution uniforme ;  $\alpha = 1$  : distribution Laplacienne ;  $\alpha = 2$  : distribution Gaussienne.
- 3) Approcher la ddp  $f2(x)$  par une distribution Gaussienne en calculant  $moy2$  et  $sigm2$ , correspondant à la valeur moyenne et l'écart type (donner la formule obtenue). Tracer cette distribution sur la courbe représentant  $f2(x)$ .
- 4) Approcher la ddp  $f3(x)$  par une distribution Gaussienne en calculant  $moy3$  et  $sigm3$ , correspondant à la valeur moyenne et l'écart type (donner la formule obtenue). Tracer cette distribution sur la courbe représentant  $f3(x)$ .
- 5) Qu'en déduisez-vous ? Comment mesurer la distance ou la divergence entre une ddp et distribution Gaussienne qui l'approche ?

**B) Mélange de 2 Gaussiennes (4 pts)**

Soit la densité de probabilité (ddp) suivante  $f(x)$  représentant les probabilités pour  $x$  compris entre 0 et 31 :

$$H(x) = \{0, 0, 1, 0, 2, 0, 0, 1, 3, 0, 0, 2, 4, 0, 0, 5, 0, 0, 6, 0, 0, 3, 7, 0, 0, 4, 8, 0, 0, 6, 9, 0, 1, 10, 0, 15, 11, 0, 17, 12, 0, 14, 13, 0, 0, 6, 14, 0, 0, 5, 15, 0, 0, 3, 16, 0, 0, 2, 17, 0, 0, 1, 18, 0, 19, 0, 20, 0, 21, 0, 22, 0, 23, 0, 24, 0, 25, 0, 26, 0, 27, 0, 28, 0, 29, 0, 30, 0, 31, 0\}$$

- 1) Tracer  $f(x)$
- 2) En considérant que  $f(x)$  est un mélange de 2 gaussiennes, indiquer la valeur des 2 modes (valeurs maximales) et proposer une valeur de seuil séparant les 2 modes.
- 3) Pour chacun des modes, calculer la valeur moyenne et l'écart type  $\mu_1$ ,  $\sigma_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\sigma_2$ .
- 4) Par rapport aux probabilités par mode ( $\beta_1$  et  $\beta_2$ ), proposer un modèle de mélange de 2 Gaussiennes - paramètres à introduire  $\mu_1$ ,  $\sigma_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\sigma_2$  et  $\beta_1$  (sachant que  $\beta_2 = 1 - \beta_1$ ).