

# HAI718 Probabilité et statistiques

## Examen session 2 Mars 2023

**Exercice 1** Dans une urne se trouvent 3 boules blanches et 2 boules noires. On tire successivement deux boules sans remise. Calculer et comparer les probabilités des deux événements suivants :

- Tirer deux boules de même couleur
- Tirer deux boules de couleurs différentes

On suppose que  $U \sim \mathcal{N}(0, 1)$  (Loi normale centrée réduite).

**Exercice 2** Calculer les probabilités suivantes :  $P(U < 1.5)$  ;  $P(U > -1.5)$  ;  $P(-1.5 < U < 1.5)$

**Exercice 3** Trouver la valeur de  $u$  telle que :  $P(U > u) = 0.5$  ;  $P(U < u) = 0.5$  ;  $P(U < u) = 0.99$  ;

On suppose que  $X \sim \mathcal{N}(\mu = 2, \sigma^2 = 5^2)$  (Loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ).

**Exercice 4** Calculer les probabilités suivantes :  $P(X < 10)$  ;  $P(4 < X < 10)$

**Exercice 5** Trouver la valeur de  $x$  telle que :  $P(X < x) = 0.95$  ;  $P(3 - x < X < 3 + x) = 0.95$

**Exercice 6** Soit  $X_1, \dots, X_n$   $n$  variables aléatoires normales  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  et indépendantes. On note  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  la moyenne empirique. Quelle est la loi de  $\bar{X}$  ?

**Exercice 7** Appliquer le théorème de la limite centrale au cas de  $n$  variables indépendantes de Bernoulli  $Be(p)$ . Que vaut  $\bar{X}$  ? En déduire une approximation de la loi binomiale par une loi normale.

**Exercice 8** Dans le cadre d'un test statistique paramétrique, donner les définitions du risque de première espèce, du risque de deuxième espèce et de la puissance du teste. Accompagner votre réponse par des dessins montrant les courbes des densités de l'hypothèse nulle et l'hypothèse alternative.