Correction 23-24 s1 | Poba Stat

2026-01-03

F. B
Universite de Montpellier
2025
M1

Contents

I. Exercice 1

$$X \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 2^2)$$

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 2}{2}$$

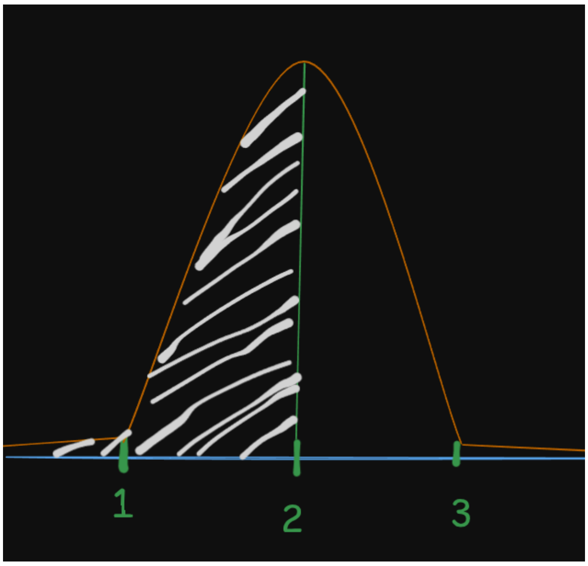
I.1.

a.

$$P(X < 2)$$

$$P\left(U < \frac{2-2}{2}\right)$$

$$P(U < 0) = 0.5$$



$$P(1 < X < 3)$$

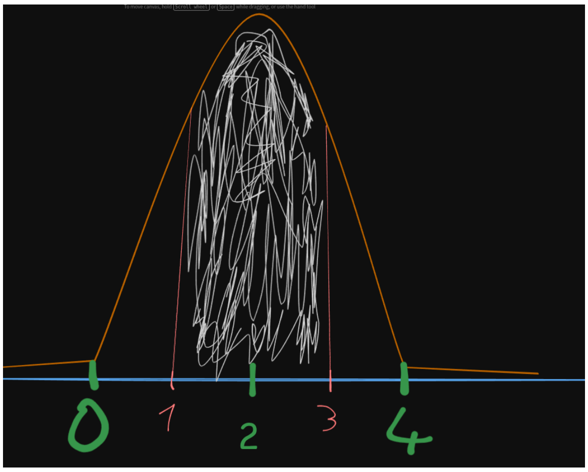
$$P(X < 3) - P(X < 1)$$

$$P\left(U < \frac{3-2}{2}\right) - P\left(U < \frac{1-2}{2}\right)$$

$$P\left(U < \frac{1}{2}\right) - P\left(U < -\frac{1}{2}\right)$$

$$2 \times P(U < 0.5) - 1$$

$$2 \times 0.691 - 1 = 0.383$$



b.

$$P(X < x) = 0.95$$

$$P\left(U < \frac{x-2}{2}\right) = 0.95$$

$$\frac{x-2}{2} = 1.6449(\text{tableau})$$

$$x = 5.2898$$

I.2.

a. On suit une loi normal

$$N(n \times \mu, n \times \sigma^2)$$

et donc $\bar{X}$ suit une loi normal :

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

b. C'est ici qu'intervient le Théorème de la limite centrale (TCL).

Ce théorème généralise le résultat précédent à une variable aléatoire quelconque. Si $X_1, ..., X_n$ est une suite de variables aléatoires de même loi et indépendantes, ayant une moyenne théorique μ et une variance σ^2 (écart-type σ), alors :

Lorsque n est suffisamment grand (en pratique $n \geq 30$), la moyenne empirique $\bar{X}$ suit approximativement la loi normale :

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

II. Exercice 2

$\mu = 75$
$\sigma = 5$

$$X \sim N(75, 5)$$

$$U = \frac{X - 75}{5}$$

II.1.

$$P(78 < X < 82)$$

$$P(X < 82) - P(X < 78)$$

$$P\left(U < \frac{82 - 75}{5}\right) - P\left(U < \frac{78 - 75}{5}\right)$$

$$P(U < 1.4) - P(U < 0.6)$$

$$0.9192 - 0.7257 = 0.1935$$

II.2.

10% de la population = 0.1

$$P(X > n) = 0.1$$

$$1 - P(X < n) = 0.1$$

$$P\left(U < \frac{n - 75}{5}\right) = 1 - 0.1$$

$$\frac{n - 75}{5} = 1.2816$$

$$n = 81.408 \text{ kg}$$

II.3.

n = 30

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{30} X_i$$

$$\text{la loi de } \bar{X} \text{ est alors } \; N\left(75, \frac{5^2}{30}\right) = N(75, 0.83)$$

On cherche le pourcentage de moyenne de l'echantillon qui depasse les 88kg

$$P(X > 88)$$

$$1 - P(X < 88)$$

$$1 - P\left(U < \frac{88 - 75}{\sqrt{0.83}}\right)$$

$$1 - P(U < 14.269) \approx 1 - P(U < 14.3)$$

or 14.3 est enorme et napparait meme pas sur le tableau donc la proba d etre en dessous est de 1 (100%). Donc la probabilité d'être au-dessus est bien :

$$1 - P(U < 14.3) = 1$$

$$P(U < 14.3) = 1 - 1 = 0$$

Donc la proba que on depasse 88kg est 0

III. Exercice 3

n = 30
$\bar{x} = 20.05$
$\sigma = 0.1$

III.1.

H_0 : hypothese nulle : la moyenne est bien celle prevu

$$H_0 : \mu = 20\text{mm}$$

H_1 : Il y a un problème. L'énoncé dit "si la longueur moyenne diffère". Il ne dit pas "plus grand" ou "plus petit", juste "différent".

$$H_1 : \mu \not\equiv 20\text{mm}$$

C est donc un test bilateral

III.2.

$\alpha = 0.05$
Il sagit dune approximation normal car n = 30

$$t_{H_0} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$t_{H_0} = \frac{20.05 - 20}{\frac{0.1}{5.47}}$$

$$t_{H_0} = \frac{0.05}{0.018} = 2.7$$

III.3.

On veut faire un test bilatéral (deux côtés) avec un risque total d'erreur de 5% ($\alpha = 0,05$).Cela veut dire qu'on doit couper les 5% d'erreurs en deux parties égales aux extrémités de la courbe :

- Une partie à l'extrême gauche (trop petit).
- Une partie à l'extrême droite (trop grand).

On divise le risque en 2 :

$$\frac{0.05}{2} = 0.025$$

On va ensuite faire

$$1 - 0.025 = 0.9750$$

On regarde le tableau pour 0.9750 on aura :

$$1.96$$

La zone de rejet est alors exterieur de ces bornes :

$$t > 1.96$$

$$t < -1.96$$

III.4.

Notre t_{H_0} est de 2.7 qui est superieur a 1.96, on rejette alors H_0