

HAI718I PROBABILITÉS, STATISTIQUES EXAMEN FINAL - JANVIER 2024

Durée de l'examen : 1h. Documents non autorisés, sauf une feuille A4 recto-verso et les tables statistiques.

Exercice 1 Calcul de probabilités.

1. On suppose que $X \sim \mathcal{N}(\mu = 2, \sigma^2 = 2^2)$ (Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$).
 - (a) Calculer les probabilités suivantes à l'aide des tables statistiques, et dessiner (rapidement) l'aire sous la courbe de la loi normale qui correspond à chaque probabilité : $P(X < 2)$ et $P(1 < X < 3)$.
 - (b) Trouver la valeur de x telle que $P(X < x) = 0.95$.
2. Soit X_1, \dots, X_n un ensemble de n variables aléatoires indépendantes et suivant toutes une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On note $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ la moyenne empirique.
 - (a) Quelle est la loi de \bar{X} ?
 - (b) Que dire sur \bar{X} si on ne sait plus que les X_i suivent une loi normale mais restent indépendantes, de moyenne μ et de variance σ^2 ?

Exercice 2 On suppose que les hommes de plus de 50 ans ont des poids distribués approximativement selon une loi normale avec une moyenne théorique $\mu = 75\text{kg}$ et un écart-type $\sigma = 5\text{kg}$.

1. Si on tire au hasard un individu dans cette population, calculer la probabilité pour qu'il ait un poids compris entre 78 et 82kg.
2. Quel poids dépassent les 10% des individus les plus lourds de cette population ?
3. On extrait au hasard un échantillon de 30 individus. Quelle est la probabilité pour que la moyenne de cet échantillon dépasse 88kg ?

Exercice 3 Supposons que vous travaillez dans une usine de production de boulons, et vous êtes responsable du contrôle qualité. Le processus de fabrication est censé produire des boulons dont la longueur moyenne est de 20 mm. Cependant, des doutes ont été émis quant à la conformité de cette moyenne.

Vous prélevez un échantillon aléatoire de 30 boulons et mesurez leurs longueurs. Les données sont fournis ci-dessous. La question est de savoir si la longueur moyenne des boulons diffère significativement de la valeur théorique de 20 mm. Utilisez un test paramétrique d'hypothèses pour résoudre ce problème.

- (a) Formulez les hypothèses nulle H_0 et alternative H_1 ?
- (b) On choisit un niveau de signification de $\alpha = 0.05$. Calculez la statistique de test.
- (c) Déterminez la zone de rejet.
- (d) Prenez une décision sur la base de la statistique de test.

Données :

- Taille de l'échantillon : $n = 30$

- Les longueurs de votre échantillon sont les suivantes :

19.8, 20.2, 20.0, 19.9, 20.1, 20.3, 20.2, 19.8, 20.0, 19.9, 19.8, 20.2, 20.0, 19.9, 20.1, 20.3, 20.2, 19.8, 20.0, 19.9, 20.1, 19.8, 20.0, 20.2, 20.1, 19.9, 20.0, 19.8, 20.2, 20.1, 20.1, 19.8, 20.0, 20.2, 20.1, 19.9, 20.0, 19.8, 20.2, 20.1, 19.9, 20.3, 20.0, 19.0, 19.8, 20.1, 20.2, 20.0, 19.9, 19.8, 20.1, 19.9, 20.3, 20.0, 19.8, 20.1, 20.2, 20.0, 19.9, 19.8, 20.1, 19.9, 20.3, 20.0, 19.8, 20.1, 20.2, 20.0, 19.9, 19.8, 20.1

- Moyenne de l'échantillon : $\bar{x} = 20.05$

- Écart-type de l'échantillon : $\sigma = 0.1$