Ordres, Treillis et Induction

Tous documents sur support papier autorisés. Durée : 2h00
Les deux parties sont indépendantes. Vous devrez rendre les réponses sur 2 copies séparées.

1 Partie sur les ordres et les treillis (1h) *À rendre sur une copie indépendante*

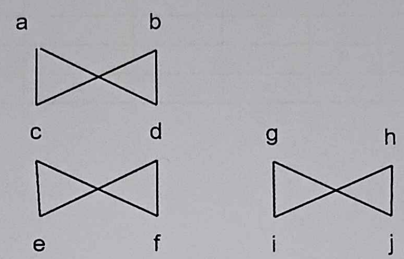

FIGURE 1 – Diagramme de Hasse d'un ordre.

Question 1. (0,5 pts) Dessinez le graphe de la relation d'ordre dont la figure 1 est le diagramme de Hasse.

Question 2. Pour le sous-ensemble $\{c, d\}$:
a- (0,5 pts) Donnez son ensemble de minorants, que l'on notera $Min(\{c, d\})$.
b- (0,25 pts) L'ensemble de minorants $Min(\{c, d\})$ admet-il un unique plus grand élément (justifiez en indiquant le cas échéant quel(s) est (sont) ce(s) plus grand(s) élément(s) ?
c- (0,5 pts) Donnez son ensemble de majorants, que l'on notera $Maj(\{c, d\})$.
d- (0,25 pts) L'ensemble de majorants $Maj(\{c, d\})$ admet-il un unique plus petit élément (justifiez) ?

Question 3. Pour le sous-ensemble $\{d, g\}$:
a- (0,5 pts) Donnez son ensemble de minorants, que l'on notera $Min(\{d, g\})$.
b- (0,5 pts) L'ensemble de minorants $Min(\{d, g\})$ admet-il un unique plus grand élément (justifiez en indiquant le cas échéant quel(s) est (sont) ce(s) plus grand(s) élément(s) ?

Question 4.
a- (1 pts) Le diagramme de Hasse de la figure 1 correspond à un ordre partiel qui n'est pas un treillis. Indiquez pourquoi avec trois exemples de situations présentes dans cet ordre partiel mais interdites dans un treillis.
b- (1,5 pts) Complétez le diagramme de Hasse en ajoutant un ou plusieurs nouveaux sommets et de nouvelles relations de manière à ce qu'il devienne le diagramme de Hasse d'un treillis. La relation d'ordre entre les sommets initiaux doit rester inchangée.

Question 5.

La table 1 décrit des ingrédients par leurs attributs. Un sous-ordre du treillis de concepts associé à cette table (l'AOC-poset) est montré à la figure 2.

a- (0,5 pts) Donnez l'intension et l'extension complètes du concept $CIng11$.

b- (0,5 pts) Donnez l'intension et l'extension complètes du concept $CIng9$.

c- (0,5 pts) Donnez l'intension et l'extension complètes du concept $CIng12$.

TABLE 1 – Contexte formel décrivant des ingrédients

Ingredient	vege	vegan	spring	summer	autumn
goatcheese	x			x	
burrata	x		x		
scallop			x		
tomato	x	x		x	
shallot	x	x			x
mushroom	x	x			x
eggplant	x	x		x	

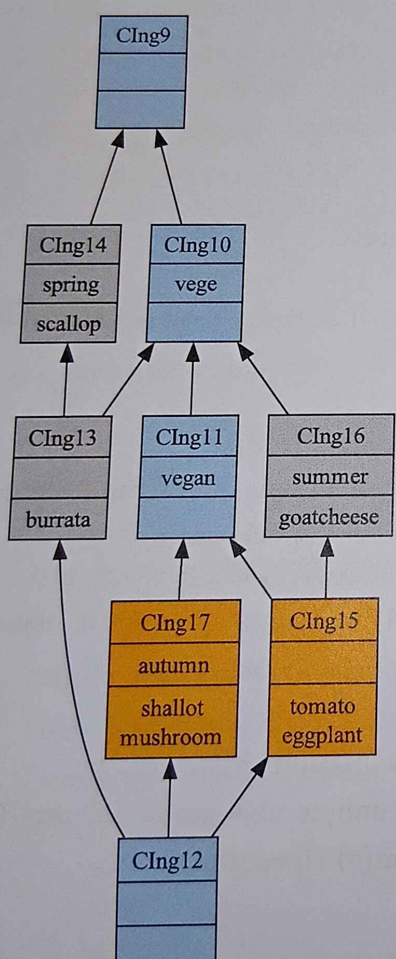

FIGURE 2 – Diagramme de Hasse d'un sous-ordre du treillis de concepts du contexte sur des ingrédients.

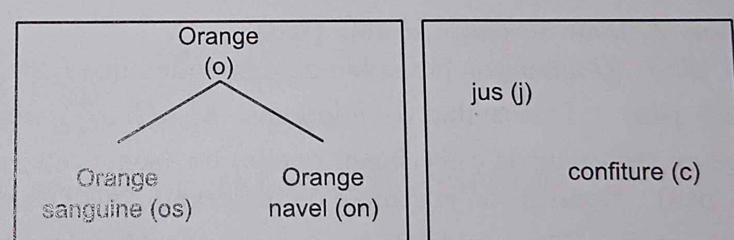

FIGURE 3 – Diagrammes de Hasse des ordres R_1 (gauche), R_2 (droite).

Question 6.

a- (2 pts) Soient les deux ordres R_1 et R_2 dont les diagrammes de Hasse sont donnés à la figure 3. Dessinez le diagramme de Hasse du produit direct $R_1 \times R_2$.

b- (0,5 pts) Pouvez-vous produire un morphisme d'ordre depuis R_1 vers R_2 ? Si oui, décrivez-le. Quelle que soit la réponse, justifiez-la avec précision.

c- (0,5 pts) Pouvez-vous produire un morphisme d'ordre depuis R_2 vers R_1 ? Si oui, décrivez-le. Quelle que soit la réponse, justifiez-la avec précision.

2 Partie sur l'induction(1h) *À rendre sur une copie indépendante*

Exercice 1

On considère le type inductif $\mathcal{N}$ des entiers naturels vu en cours. Dans ce qui suit, on supposera que les opérations arithmétiques sur $\mathcal{N}$ sont connues et ont les propriétés usuelles (commutativité pour l'addition par exemple, etc.).

On se donne la relation inductive is_rel de type $\mathcal{N} \times \mathcal{N} \rightarrow Prop$ définie de la façon suivante :

a. On a : $is\_rel(O, O)$.

b. Pour $n, s \in \mathcal{N}$, si $is\_rel(n, s)$, alors on a : $is\_rel(S\ n, (S\ (S\ s)))$.

Étant donnée cette définition de relation inductive, répondre aux questions suivantes :

1. Donner trois exemples de propositions valides $is\_rel(n, m)$, avec $n, m \in \mathcal{N}$. Vous devrez démontrer que les propositions que vous avez données sont valides.
2. Écrire une fonction f_{is_rel} qui implémente la relation is_rel.
3. Démontrer que la fonction f_{is_rel} est correcte vis-à-vis de la relation is_rel. Pour cela, vous utiliserez le schéma d'induction structurelle de $\mathcal{N}$.
4. Donner le schéma d'induction fonctionnelle de la fonction f_{is_rel}.
5. Démontrer que la fonction f_{is_rel} est correcte vis-à-vis de la relation is_rel. Pour cela, vous utiliserez le schéma d'induction fonctionnelle de f_{is_rel} précédemment écrit.

Exercice 2

Soit le système de réécriture $\mathcal{R}$ défini par les règles suivantes :

$$\begin{cases} g(g(x,y),z) \rightarrow g(x,g(y,z)) \\ g(f(x),f(y)) \rightarrow f(g(x,y)) \\ g(f(x),g(y,z)) \rightarrow g(g(x,y),z) \end{cases}$$

Démontrer que le système $\mathcal{R}$ termine en utilisant une interprétation polynomiale.

Pour cela, vous devrez :

1. Définir l'interprétation polynomiale I choisie.
2. Démontrer que l'ordre $\succ$ (sur les termes) associé à $\succ_I$ est un ordre de réduction.
3. Démontrer que $l \succ r$ pour toute règle de réécriture $l \rightarrow r \in \mathcal{R}$.