Logique - Calculabilité - Complexité

Université de Montpellier
Examen de LCC - 2024-2025
17 janvier 2025

Durée 3h
Aucun document n'est autorisé
Pas de calculatrice, téléphone portable, montre programmable, oreillettes appel à un ami, consultation d'internet, de Moodle *etc.*

Justifiez vos réponses avec grand soin !

Dans tout ce qui suit, comme dans le cours, le symbole $\prec$ désigne la *réduction many-one* ; les ensembles considérés sont des ensembles d'entiers. L'expression $[a|b]$ représente le calcul du programme a sur l'entrée b et $[a|b]\downarrow$ exprime que ce calcul s'arrête. Les formules sont au premier ordre et les théories égalitaires.

Exercice 1 énumérations

1 1. Soit E un ensemble infini énumérable dont la fonction d'énumération f vérifie $\forall x\ f(x) > 2^x$. Montrez que E est récursif.

1 2. Montrez qu'un ensemble A est récursif si et seulement si ($A \prec \mathbb{K}$ et $A \prec \overline{\mathbb{K}}$).

Exercice 2 réductions

Soit A l'ensemble des programmes qui convergent sur les entrées paires et y donnent toujours la même valeur, et qui divergent les entrées impaires.

1 1. Ecrivez A sous la forme d'une formule du type $A = \{x, \ \dots \}$.

1 2. En utilisant avec soin le théorème de Rice, montrez que A n'est pas récursif.

1 3. Montrez que $\mathbb{K} \prec A$.

2 4. Montrez que $\mathbb{K} \prec \overline{A}$ (où $\overline{A}$ est le complémentaire de A).

1 5. Montrez que ni A ni $\overline{A}$ ne sont énumérables.

Exercice 3 minimalité

On rappelle qu'une infinité de programmes calculent une fonction calculable donnée. On dit qu'un programme est *minimal* s'il est le plus petit programme de cet ensemble de programmes qui calculent tous la même fonction.
En d'autres termes n est *minimal* si $\forall m\ [m|\cdot] = [n|\cdot] \implies m \geq n$.

1 1. Quel est le plus petit programme minimal ? Montrez qu'il existe une infinité de programmes minimaux.

On suppose maintenant que la propriété d'être minimal est décidable.

1 2. Montrez que la fonction F qui à x associe le plus petit programme minimal strictement supérieur à x est récursive.

1 3. Que calcule un point fixe de F ? Conclure.

Exercice 4 modèles finis et infinis

1 1. Enoncez les théorèmes de complétude et de compacité.

1 2. Montrez directement que la complétude implique la compacité.

1 3. Montrez que si une théorie T cohérente n'a que des modèles finis, alors il existe un entier N tel que le nombre d'éléments de l'univers de tout modèle de T est inférieur à N.

2 4. Soit T une théorie récursive (on connait un programme a qui nous dit si une formule est dans la théorie ou pas). Supposons qu'on sache que T est cohérente et n'a que des modèles finis. Peut-on calculer N ?

Exercice 5 théories complètes et incomplètes

On dit qu'une théorie cohérente T est *maximale* si pour toute formule close ϕ, soit la théorie $T \cup \{\phi\}$ est élémentairement équivalente à T soit elle est incohérente.

1 1. Montrez que toute théorie cohérente maximale est complète et que toute théorie cohérente complète est maximale.

1 2. Soit T une théorie cohérente. Montrez qu'il existe T' maximale cohérente qui contient T.

2 3. Supposons que T soit une théorie récursive cohérente et ϕ une formule close. On sait que l'une au moins des deux théories $T \cup \{\phi\}$ et $T \cup \{\neg\phi\}$ est cohérente. Existe-t-il un programme qui à partir d'un algorithme de décision de T et de la formule ϕ détermine une théorie cohérente parmi ces deux théories ?

On rappelle ci-dessous l'arithmétique de Peano.

Langage

constante : "0"

fonctions : "$s(\_)$" unaire "$\cdot$" binaire "$+$" binaire

Formules

$$
\begin{array}{ll}
 & \forall x \quad (x + 0 = x) \\
\forall x \quad \neg(s(x) = 0) & \forall x \forall y \quad (x + s(y) = s(x + y)) \\
\forall x \quad (x = 0 \vee \exists y \, (x = s(y))) & \forall x \quad (x \cdot 0 = 0) \\
\forall x \forall y \quad (s(x) = s(y) \Rightarrow x = y) & \forall x \forall y \quad (x \cdot s(y) = (x \cdot y) + x)
\end{array}
$$

Pour toute formule $\phi(x, x_1, \ldots, x_n)$, si on note $n+1$ son nombre de variables libres,

$$
\begin{array}{l}
\forall x_1 \ldots \forall x_n \\
\quad [\phi(0, x_1, \ldots, x_n) \wedge (\forall y \; \phi(y, x_1, \ldots, x_n) \Rightarrow \phi(s(y), x_1, \ldots, x_n))] \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \forall x \; \phi(x, x_1, \ldots, x_n)
\end{array}
$$

1 4. La théorie PA est-elle une théorie finie ? récursive ? énumérable ? (expliquez et justifiez précisément ce que vous affirmez).

On appelle Q la théorie PA sans le schéma de récurrence, c'est-à-dire avec uniquement les 7 premiers axiomes. On rappelle qu'il existe une formule ϕ dans le langage de PA (voir ci-dessus), telle que

$$\forall x, y, z, t, \; \phi(x, y, z, t) \Leftrightarrow \mathit{step}\langle x, y, t\rangle = z \;.$$

1 5. Ecrivez une formule $f(x)$ exprimant que $[x|x]$ diverge.

1 6. Enoncez et montrez le premier théorème d'incomplétude de Gödel pour la théorie Q.

Supposons maintenant qu'on puisse décider si une formule de ce langage est démontrable sans axiomes (*i.e.* $\{\psi, \; \emptyset \vdash \psi\}$ est récursif).

1 7. Montrez que $\{\phi, \; \mathrm{Q} \vdash \phi\}$ serait récursif ; déduire de ce qui précède qu'il n'existe pas d'algorithme permettant de décider si une formule donnée est démontrable sans axiomes.

Barème indicatif. Les réponses aux questions seront toutes comptabilisées avec le même coefficient, sauf les réponses aux questions 2.4 4.4 et 5.3 qui ont un coefficent double. Un bonus limité à 2 points pourra être accordé si des réponses ou des groupes de réponses sont particulièrement bien rédigées.