

Ordres, Treillis et Induction

Tous documents sur support papier autorisés. Durée : 2h00

Les deux parties sont indépendantes. Vous devrez rendre les réponses sur 2 copies séparées.

1 Partie sur les ordres et les treillis (1h) *À rendre sur une copie indépendante*

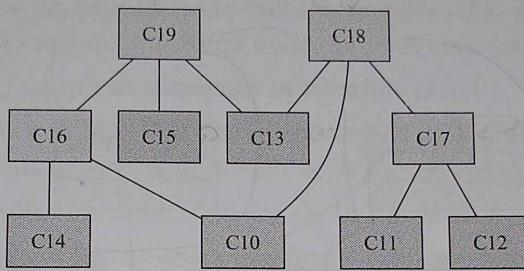


FIGURE 1 – Diagramme de Hasse d'un ordre *spécialisé*.

Question 1. (0,5 pts) Dessinez le graphe de la relation d'ordre dont la figure 1 est le diagramme de Hasse.

Question 2. Pour le sous-ensemble $\{C10, C13\}$:

- a- (0,5 pts) Donnez son ensemble de minorants, que l'on notera $\text{Min}(\{C10, C13\})$.
- b- (0,5 pts) L'ensemble de minorants $\text{Min}(\{C10, C13\})$ admet-il un unique plus grand élément (justifiez en indiquant le cas échéant quel(s) est (sont) ce(s) plus grand(s) élément(s) ?
- c- (0,5 pts) Donnez son ensemble de majorants, que l'on notera $\text{Maj}(\{C10, C13\})$.
- d- (1 pts) L'ensemble de majorants $\text{Maj}(\{C10, C13\})$ admet-il un unique plus petit élément (justifiez) ?

Question 3.

a- (1 pts) Le diagramme de Hasse de la figure 1 correspond à un ordre partiel qui n'est pas un treillis. Indiquez pourquoi avec trois exemples de situations présentes dans cet ordre partiel mais interdites dans un treillis.

b- (1,5 pts) Complétez le diagramme de Hasse en ajoutant un ou plusieurs nouveaux sommets et de nouvelles relations de manière à ce qu'il devienne le diagramme de Hasse d'un treillis. La relation d'ordre entre les sommets initiaux doit rester inchangée.

Question 4.

La table 1 décrit des événements météorologiques par leurs attributs. Un sous-ordre du treillis de concepts associé à cette table (l'AOC-poset) est montré à la figure 2.

- a- (0,5 pts) Donnez l'intension et l'extension complètes du concept $C_{weatherEvent_18}$.
 b- (0,5 pts) Donnez l'intension et l'extension complètes du concept $C_{weatherEvent_16}$.

TABLE 1 – Contexte formel décrivant des événements météo.

weatherEvent	vent violent	vent régulier	vent faible	neige	temp basse	temp haute	pluie	sable	faible humidité
blizzard	x				x	x			
typhon	x					x	x		
tempête sable	x					x	x		
refroidissement éolien	x					x		x	
brouillard givrant				x		x			x
lake effect snow		x		x	x				

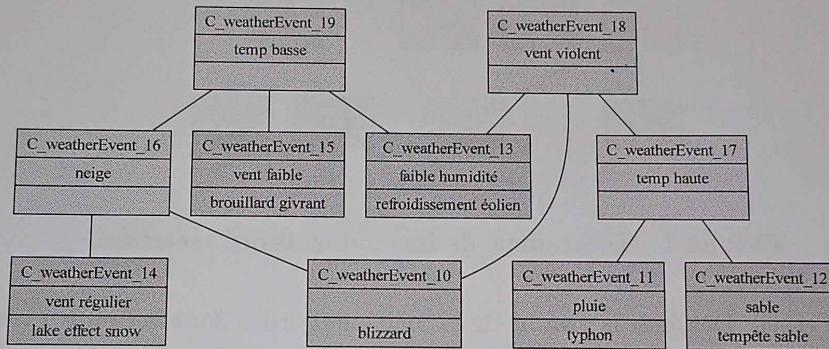
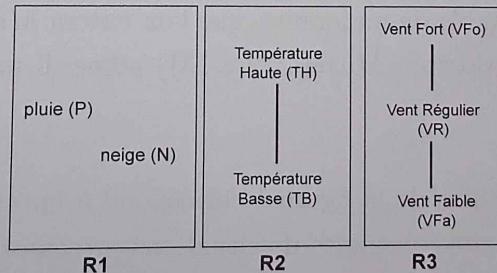


FIGURE 2 – Diagramme de Hasse d'un sous-ordre du treillis de concepts du contexte sur les événements météo.

FIGURE 3 – Diagrammes de Hasse des ordres R_1 (gauche), R_2 (milieu) et R_3 (droite).**Question 5.**

- a- (2,5 = 1 + 1,5 pts) Soient les trois ordres R_1 , R_2 et R_3 dont les diagrammes de Hasse sont donnés à la figure 3. Chaque terme composé est un sommet de l'ordre (par exemple $pluie(P)$ est un sommet). Dessinez le diagramme de Hasse du produit direct $R_1 \times R_2$ puis du produit direct $(R_1 \times R_2) \times R_3$.

- b- (1 pts) Pouvez-vous produire deux morphismes d'ordre différents depuis R_2 vers R_3 ? Si oui, décrivez-les et justifiez. Avez-vous une idée d'une signification à leur donner (bonus (0,5 pts)).

2 Partie sur l'induction (1h)

À rendre sur une copie indépendante

Exercice 1

On considère le type inductif \mathcal{N} des entiers naturels vu en cours. Dans ce qui suit, on supposera que les opérations arithmétiques sur \mathcal{N} sont connues et ont les propriétés usuelles (commutativité pour l'addition par exemple, etc.).

On se donne la relation inductive is_rel de type $\mathcal{N} \times \mathcal{N} \rightarrow Prop$ définie de la façon suivante :

- a. On a : $is_rel(O, O)$.
- b. Pour $n, s \in \mathcal{N}$, si $is_rel(n, s)$, alors on a : $is_rel(S\ n, s + (S\ O))$.

Étant donnée cette définition de relation inductive, répondre aux questions suivantes :

1. Donner trois exemples de propositions valides $is_rel(n, m)$, avec $n, m \in \mathcal{N}$. Vous devrez démontrer que les propositions que vous avez données sont valides.
2. Écrire une fonction f_{is_rel} qui implémente la relation is_rel .
3. Démontrer que la fonction f_{is_rel} est correcte vis-à-vis de la relation is_rel . Pour cela, vous utiliserez le schéma d'induction structurelle de \mathcal{N} .
4. Donner le schéma d'induction fonctionnelle de la fonction f_{is_rel} .
5. Démontrer que la fonction f_{is_rel} est correcte vis-à-vis de la relation is_rel . Pour cela, vous utiliserez le schéma d'induction fonctionnelle de f_{is_rel} précédemment écrit.

Exercice 2

Soit le système de réécriture \mathcal{R} défini par les règles suivantes :

$$\begin{cases} g(x, g(y, z)) \rightarrow g(g(x, y), z) \\ g(g(x, y), z) \rightarrow g(y, y) \end{cases}$$

Démontrer que le système \mathcal{R} termine en utilisant une interprétation polynomiale.

Pour cela, vous devrez :

1. Définir l'interprétation polynomiale I choisie.
2. Démontrer que l'ordre \succ (sur les termes) associé à \succ_I est un ordre de réduction.
3. Démontrer que $l \succ r$ pour toute règle de réécriture $l \rightarrow r \in \mathcal{R}$.