

Examen
Master 1 Informatique
UE HAI718I
Probabilités, statistiques
Mardi 10 janvier 2023

1h00 - Notes de cours, TD et TP autorisés

A) Modélisation de densités de probabilité (6 pts)

Soit les 3 distributions $H1(x)$, $H2(x)$ et $H3(x)$, toutes composées de 100 évènements, représentant les occurrences pour x compris entre 0 et 31 :

$H1(x) = \{0\ 3, 1\ 2, 2\ 3, 3\ 2, 4\ 4, 5\ 3, 6\ 2, 7\ 4, 8\ 2, 9\ 2, 10\ 3, 11\ 4, 12\ 2, 13\ 3, 14\ 4, 15\ 3, 16\ 5, 17\ 3, 18\ 4, 19\ 4, 20\ 3, 21\ 3, 22\ 5, 23\ 3, 24\ 3, 25\ 3, 26\ 4, 27\ 3, 28\ 3, 29\ 3, 30\ 2, 31\ 3\}$

$H2(x) = \{0\ 0, 1\ 0, 2\ 0, 3\ 0, 4\ 0, 5\ 0, 6\ 1, 7\ 2, 8\ 3, 9\ 6, 10\ 18, 11\ 40, 12\ 18, 13\ 6, 14\ 3, 15\ 2, 16\ 1, 17\ 0, 18\ 0, 19\ 0, 20\ 0, 21\ 0, 22\ 0, 23\ 0, 24\ 0, 25\ 0, 26\ 0, 27\ 0, 28\ 0, 29\ 0, 30\ 0, 31\ 0\}$

$H3(x) = \{0\ 0, 1\ 0, 2\ 0, 3\ 0, 4\ 0, 5\ 1, 6\ 2, 7\ 4, 8\ 6, 9\ 10, 10\ 17, 11\ 20, 12\ 17, 13\ 10, 14\ 6, 15\ 4, 16\ 2, 17\ 1, 18\ 0, 19\ 0, 20\ 0, 21\ 0, 22\ 0, 23\ 0, 24\ 0, 25\ 0, 26\ 0, 27\ 0, 28\ 0, 29\ 0, 30\ 0, 31\ 0\}$

- 1) A partir de ces 3 distributions, calculer et tracer les densités de probabilité (ddp) correspondantes $f1(x)$, $f2(x)$ et $f3(x)$.
- 2) A partir de la fonction générique $f(x) = C \cdot \exp(-K|x|^\alpha)$ en déduire la valeur de α la plus pertinente pour chacune des ddp $f1(x)$, $f2(x)$ et $f3(x)$. Pour rappel, $\alpha = 0$: distribution uniforme ; $\alpha = 1$: distribution Laplacienne ; $\alpha = 2$: distribution Gaussienne.
- 3) Approcher la ddp $f2(x)$ par une distribution Gaussienne en calculant $moy2$ et $sigm2$, correspondant à la valeur moyenne et l'écart type (donner la formule obtenue). Tracer cette distribution sur la courbe représentant $f2(x)$.
- 4) Approcher la ddp $f3(x)$ par une distribution Gaussienne en calculant $moy3$ et $sigm3$, correspondant à la valeur moyenne et l'écart type (donner la formule obtenue). Tracer cette distribution sur la courbe représentant $f2(x)$.
- 5) Qu'en déduisez-vous ? Comment mesurer la distance ou la divergence entre une ddp et distribution Gaussienne qui l'approche ?

B) Mélange de 2 Gaussiennes (4 pts)

Soit la densité de probabilité (ddp) suivante $f(x)$ représentant les probabilités pour x compris entre 0 et 31 :

$H(x) = \{0\ 0, 1\ 0, 2\ 0.01, 3\ 0.02, 4\ 0.05, 5\ 0.06, 6\ 0.03, 7\ 0.04, 8\ 0.06, 9\ 0.1, 10\ 0.15, 11\ 0.17, 12\ 0.14, 13\ 0.06, 14\ 0.05, 15\ 0.03, 16\ 0.02, 17\ 0.01, 18\ 0, 19\ 0, 20\ 0, 21\ 0, 22\ 0, 23\ 0, 24\ 0, 25\ 0, 26\ 0, 27\ 0, 28\ 0, 29\ 0, 30\ 0, 31\ 0\}$

- 1) Tracer $f(x)$
- 2) En considérant que $f(x)$ est un mélange de 2 gaussiennes, indiquer la valeur des 2 modes (valeurs maximales) et proposer une valeur de seuil séparant les 2 modes.
- 3) Pour chacun des modes, calculer la valeur moyenne et l'écart type $\mu1$, $\sigma1$, $\mu2$, $\sigma2$.
- 4) Par rapport aux probabilités par mode ($\beta1$ et $\beta2$), proposer un modèle de mélange de 2 Gaussiennes - paramètres à introduire $\mu1$, $\sigma1$, $\mu2$, $\sigma2$ et $\beta1$ (sachant que $\beta2 = 1 - \beta1$).