Théorème de caractérisation des énumérables, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. E est énumérable si $\exists a, E = W_a = \{x, [a|x]\downarrow\}$
2. E admet une fonction d'énumération calculable $\exists b, E = Im[b|\cdot] = \{x, \exists y\, [b|y] = x\}$
3. E est vide ou admet une fonction d'énumération totale calculable $\exists b, E = Im[b|\cdot] = \{x, \exists y\, [b|y] = x\}$

Point Fixe : Soit f une fonction calculable totale. Il existe un programme n tel que la fonction calculée par n et par f(n) sont les mêmes : $\exists n, [n|\cdot] = [f(n)|\cdot]$

Langage : Regroupe les symboles de prédicat, de fonction et de constantes

Théorie : ensemble de formules qui sont finies

L-Structure : Un univers ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, etc.) et une interprétation pour des symboles de fonction (+, - ...), de prédicat (=, ⩽, ...) ou de constante (c, 0, ..)

Modèle : Une L-Structure qui rend vraie une théorie T.

Théorie d'un modèle : La théorie d'un modèle M, notée th(M) est l'ensemble des formules ϕ vraies dans M :

$th(M) = \{\phi \mid M \models \phi\}$

Equivalence élémentaire : Soient deux L-Structures M et N. On dit que M et N sont élémentairement équivalents noté $M \equiv N$ si elles satisfont les mêmes formules closes : $\forall \phi,\ M \models \phi \iff N \models \phi$

Correction (Soundness) : Soit T une théorie, M un modèle et ϕ une formule close, les 3 exprimés dans le même langage.
Si $T \vdash \phi$ et $M \models T$ alors $M \models \phi$

Isomorphisme des modèles : Deux modèles sur le même langage sont isomorphes s'il existe une bijection compatible avec les éléments du langage

Preuves

Lemme de Cohérence - Prouvabilité :

Soit T une théorie et ϕ une formule close. $T \vdash \phi \Leftrightarrow T \cup \{\neg\phi\} \vdash \bot$

Montrons que $T \vdash \phi \Rightarrow T \cup \{\neg\phi\} \vdash \bot$

Supposons que $T \vdash \phi$. En ajoutant des formules à T, on aura toujours $T \vdash \phi$. En particulier, si on ajoute $\neg\phi$ on a : $T \cup \{\neg\phi\} \vdash \phi$. Or si $\neg\phi$ est dans la théorie, alors on peut la prouver : $T \cup \{\neg\phi\} \vdash \neg\phi$ et donc d'après notre supposition, $T \cup \{\neg\phi\} \vdash \phi \wedge \neg\phi \Leftrightarrow T \cup \{\neg\phi\} \vdash \bot$.

Montrons que $T \cup \{\neg\phi\} \vdash \bot \Rightarrow T \vdash \phi$ Si on peut prouver $B(\bot)$ en supposant $A(\neg\phi)$ alors on peut prouver $A \to B$ sans A en hypothèse

Supposons que $T \cup \{\neg\phi\} \vdash \bot$. En introduisant l'implication : $T \vdash \neg\phi \to \bot$

Or on se rend compte que cette implication ne peut être vraie si $\neg\phi$ est vraie car $\bot$ est toujours faux.

Il faut donc que $\neg\phi$ soit faux, i.e, $\neg\phi \to \bot \Leftrightarrow \neg\neg\phi \Leftrightarrow \phi$. Donc $T \vdash \neg\phi \to \bot \Leftrightarrow T \vdash \phi$.

Lemme d'ajout

Soit T une théorie cohérente et ϕ une formule close. Alors soit $T \cup \{\phi\} \nvdash \bot$ soit $T \cup \{\neg\phi\} \nvdash \bot$

Par l'absurde. Supposons que $T \cup \{\phi\} \vdash \bot$ ET $T \cup \{\neg\phi\} \vdash \bot$ avec T cohérente. En utilisant le lemme de cohérence-prouvabilité prouvé plus haut, $T \cup \{\phi\} \vdash \bot \Leftrightarrow T \vdash \neg\phi$ et d'autre part, $T \cup \{\neg\phi\} \vdash \bot \Leftrightarrow T \vdash \phi$

On a donc $T \vdash \neg\phi \wedge \phi \Leftrightarrow T \vdash \bot$ donc T est incohérente, ce qui contredit la cohérence de T

① Théorème de complétude

Soit T une théorie et ϕ une formule close. Si ϕ est vraie dans tous les modèles de T, alors $T \vdash \phi$

② Théorème du MEL :

Une théorie est cohérente si et seulement si elle a un modèle

③ Théorème de compacité

Soit T une théorie. Si toute partie finie de T a un modèle, alors T a un modèle.

① ⇒ ② Supposons T cohérente, soit $T \nvdash \bot$. Par contraposée de ① et en prenant $\phi = \bot$, il existe un modèle de T où $\bot$ est faux. Donc en particulier il existe un modèle de T.

$\square$

② ⇒ ①. Prouvons la contraposée de ① Prenons une formule close ϕ telle que $T \nvdash \phi$. On veut trouver un modèle où ϕ est fausse. Si $T \nvdash \phi$ alors $T \cup \{\neg\phi\} \nvdash \bot$. On en déduit que $T \nvdash \neg\phi \to \bot$ qui est équivalent à $T \nvdash \phi$

En utilisant ②, on en déduit l'existence d'un modèle M tel que $M \vDash T \cup \{\neg\phi\}$ donc en particulier M est un modèle de T où ϕ est fausse

$\square$

Lemme du codage

Il existe une formule ϕ dans le langage de Peano telle que

$\forall x, y, z, t \;\; \phi(x, y, z, t) \Leftrightarrow step\langle x, y, t\rangle = z$

(Pas de démonstration demandée)

Théorie énumérable: on peut lister ses formules avec un programme

1er théorème d'incomplétude de Gödel:

Dans toute théorie cohérente énumérable et suffisamment puissante, il existe une formule close ni prouvable ni réfutable

Soit la formule suivante où ϕ représente la fonction step du Lemme de codage : $f(x) = \exists t \exists z, z \neq 0 \wedge \phi(x, x, t, z)$
Et soit un entier $n = S(\ldots S(0))$. Avec lui on construit la formule $f(n)$.

Si la théorie était complète, alors elle serait récursive. On pourrait donc tester si une formule donnée est prouvable ou réfutable. On pourrait faire ce test sur $f(n)$. Or, par définition de ϕ, on a $f(x) \Leftrightarrow [x|x]\downarrow \Leftrightarrow x \in K$.

On aurait donc décidé du problème de l'arrêt, ce qui est impossible. Donc la théorie est incomplète

Second théorème d'incomplétude de Gödel

Soit T une théorie cohérente énumérable et suffisamment puissante. Il existe une formule $coh(T)$ qui exprime la cohérence de T qui n'est ni prouvable ni réfutable

Soit $f(a)$ un incomplet de Gödel issu de la preuve du premier théorème d'incomplétude de Gödel. Pour rappel a est un programme et $f(a) = \exists t \exists z, z \neq 0 \wedge \phi(a, a, t, z)$ qui exprime la convergence de a sur lui-même.

Exprimons la cohérence de la théorie par l'arrêt d'un programme. Soit b un programme qui énumère les preuves de la théorie et qui s'arrête s'il énumère $\bot$. Donc b ne s'arrête pas ssi T est cohérente. Donc $\neg f(b)$ exprime la cohérence de T, comme $coh(T)$.

La preuve du 1er théorème d'incomplétude étant dans Peano, elle est aussi dans T et prouve $coh(T) \to \neg f(a)$.
Par l'absurde supposons que $T \vdash coh(T)$ alors par modus ponens on a $T \vdash \neg f(a)$ or $\neg f(a)$ est un incomplet de Gödel, ce n'est donc pas possible. Et donc $T \nvdash coh(T)$

Théorème de Henkin: Soit T une théorie et $\phi(x)$ une formule ne possédant que la variable x et soit c un symbole de constante n'apparaissant ni dans T, ni dans ϕ

1) Si $T \vdash \phi(c)$ alors $T \vdash \forall x\, \phi(x)$
2) Si $T \cup \{\exists x\, \phi(x)\} \nvdash \bot$ alors $T \cup \{\exists x\, \phi(x)\} \cup \{\phi(c)\} \nvdash \bot$

Supposons que $T \vdash \phi(c)$. Il existe une preuve de $\phi(c)$. Remplaçons c par x (nous le pouvons car c est "nouveau" n'apparaissant ni dans T ni dans ϕ). On obtient une preuve $T \vdash \phi(x)$. Par la règle d'introduction du $\forall$ on a $T \vdash \forall x\, \phi(x)$ (le $\phi(c)$ se transforme en $\forall x\, \phi(x)$ car c est quelconque, il joue le role de témoin, remplaçable par $\forall x$)

2) Par contraposée, Supposons $T \cup \{\exists x\, \phi(x), \phi(c)\} \vdash \bot$ alors d'après le lemme cohérence - prouvabilité, $T \cup \{\exists x\, \phi(x)\} \vdash \neg\phi(c)$ et par 1) $T \cup \{\exists x\, \phi(x)\} \vdash \forall x\, \neg\phi(x) \Longrightarrow T \cup \{\exists x\, \phi(x)\} \vdash \exists x\, \neg\phi(x)$ (si c'est vrai pour tout x, c'est vrai pour au moins 1) et comme tout axiome est un théorème, $T \cup \{\exists x\, \phi(x)\} \vdash \exists x\, \neg\phi(x) \wedge \exists x\, \phi(x)$

$\Longrightarrow T \cup \{\exists x\, \phi(x)\} \vdash \bot$