Correction 22-23 s1 2 | Poba Stat

2026-01-07

F. B
Universite de Montpellier
2025
M1

Contents

I. Exercice 1

- 1000kg
- $m = 75\text{kg}$
- $\sigma = 4\text{kg}$
- depasse pas 10^{-6} = risque tolere

I.1.

$$X \sim N(75, 4)$$

Y_n represente le poids de n personne :

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

D'après les propriétés de la loi Normale (la somme de variables normales indépendantes est une variable normale) :

- Esperence = $E(Y_n) = n \times E(X_i) = n \times 75 = 75n$
- Variance = $V(Y_n) = n \times V(X_i) = n \times 4^2 = 16n$
- Ecart Type = $\sqrt{16n} = 4\sqrt{n}$

Donc

$$Y_n \sim N(75, 16n)$$

I.2.

On regarde le tableau et pour 10^{-6} on a 4.7534.
Donc on cherche :

$$P(T > t) \leq 4.75$$

$$1 - P(T < t) \leq 4.75$$

$$P(T < t) \geq 4.75$$

On cherche $t \geq 4.75$

I.3.

Le "risque de surcharge" correspond à la probabilité que le poids total Y_n dépasse la charge maximale de 1000 kg.On veut que :

$$P(Y_n > 1000) \leq 10^{-6}$$

On centre et réduit la variable Y_n pour utiliser la loi normale standard T :

$$P\left(\frac{Y_n - 75n}{4\sqrt{n}} > \frac{1000 - 75n}{4\sqrt{n}}\right) \leq 10^{-6}$$

Qui revient d'ecrire

$$P\left(T > \frac{1000 - 75n}{4\sqrt{n}}\right) \leq 10^{-6}$$

Or d'apres la quesiton 2 on peut ecrire

$$\frac{1000 - 75n}{4\sqrt{n}} \geq 4.75$$

C est ca la condition final

I.4.

$x = \sqrt{n}$

$$\frac{1000 - 75n}{4\sqrt{n}} \geq 4.75$$

$$\frac{1000 - 75x^2}{4x} \geq 4.75$$

$$1000 - 75x^2 \geq 4.75 \times 4x$$

$$1000 - 75x^2 \geq 19x$$

$$75x^2 + 19x - 1000 \leq 0$$

$$\Delta = b^2 - 4 \times a \times c$$

$$\Delta = (19)^2 - (4 \times 75 \times -1000)$$

$$\Delta = 300361x^2$$

$$\Delta \approx 548$$

$$\text{comme} \quad \sqrt{\Delta} > 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-19 + 548}{2 \times 75} \qquad x_2 = \frac{-19 - 548}{2 \times 75}$$

$$x_1 = 3.52 \qquad x_2 = -3.78$$

Donc on cherche $x \leq 3.52$, or $x = \sqrt{n}$, donc on cherche $n \leq 3.52^2 \leq 12.39$. Comme n doit être un nombre entier de personnes, on arrondit à l'entier inférieur. On peut autoriser au maximum 12 personnes dans l'ascenseur.

II.

Pour tester la moyenne d'une population inconnue à partir d'un échantillon aléatoire $(X_1, X_2, ..., X_n)$, la statistique la plus naturelle est la Moyenne Empirique de l'échantillon. On la note $\bar{X}$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- Esperence = E($\bar{X}$) $= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} \times (\mu \times n) = \mu$
- Variance = $V\left(\bar{X}\right) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2}(n \times \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$

Car toutes les observations ont la même variance σ^2 et utes les observations X_i viennent de la même population, elles ont la même moyenne μ ($E(X_i) = \mu$).

III.

Les tests statistiques paramétriques permettent de comparer la moyenne d'un échantillon à une valeur théorique.

IV.

L'erreur de première espèce est définie comme la probabilité de rejeter H_0 alors qu'elle est vraie.