Correction 24-25 s2 | Poba Stat

2025-12-30

F. B
Universite de Montpellier
2025
M1

Contents

I. Exercice 1

1.

$$P(U < 1.5) = 0.9332$$

2.

$$P(U > -1.5) = P(U < 1.5) = 0.9332$$

3.

$$P(-1.5 < U < 1.5) = P(U < 1.5) - P(U < -1.5)$$

$$0.9332 - P(U > 1.5) = 0.9332 - (1 - P(U < 1.5)) = 0.9332 - (1 - 0.9332) = 0.8664$$

II. Exercice 2

1.

$$P(U > u) = 0.5$$

$$P(U < -u) = 0.5$$

$$u = 0$$

2.

$$P(U < u) = 0.5$$

$$u = 0$$

3.

$$P(U < u) = 0.99 \to u \approx 2,2325$$

III. Exercice 3

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

1.

$$P(X < 10) = P\left(U < \frac{10 - 2}{5}\right) = P(U < 1.6) = 0.9452$$

2.

$$P(4 < X < 10) = 0.9452 - P(U < 0.4) = 0.9452 - 0.6554 = 0.2898$$

IV. Exercice 4

1.

$$P(X < x) = 0.95$$

$$P\left(U < \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = 0.95$$

$$\frac{x - 2}{5} = 1.645(\text{tableau})$$

$$x = 10.225$$

2. Ici on a 100% une faute de frappe et c est 2 a la place de 3

$$P(2 - x < X < 2 + x) = 0.95$$

$$P\left(\frac{(2 - x) - 2}{5} < U < \frac{(2 + x) - 2}{5}\right) = 0.95$$

$$P\left(\frac{-x}{5} < U < \frac{x}{5}\right) = 0,95$$

$$P(-t < U < t) = 0.95 \text{ avec } t = \frac{x}{5}$$

$$P(U < -t) - P(U < t) = 0.95$$

$$P(U > t) - 1 - P(U > t) = 0.95$$

$$1 - 2P(U > t) = 0.95$$

$$1 - 2(1 - P(U < t)) = 0.95$$

$$1 - 2 + 2P(U < t) = 0.95$$

$$2P(U < t) - 1 = 0.95$$

$$P(U < t) = \frac{1.95}{2} = 0.975$$

$$t = 1.96$$

$$x = 1.96 \times 5 = 9.8$$

V. Exercice 5

$X_1 \dots X_n$ suivent une loi normal d apres hyp :

$$N(\mu, \sigma^2)$$

$\sum_{i=1}^{n} X_i$ suis aussi une loi normal, c est la propriete des sommes qui dit : la somme de variables normales indépendantes suit une loi normale.

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n \times \mu, n \times \sigma^2)$$

On a aussi une propriete de linearite : si $Y \sim N(\mu, V)$ alors $a \times Y \sim N(a \times \mu, a^2 \times V)$, ici dans notre cas $a = \frac{1}{n}$

On calcul l'esperence et la variance de $\bar{X}$

- L'esperence : $E(\bar{X}) = \frac{1}{n} \times E(\sum X_i) = \frac{1}{n} \times (n \times \mu) = \mu$
- La variance : $V(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} \times V(\sum X_i) = \frac{1}{n^2} \times (n \times \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$

Don la moyenne empirique suit la loi normal

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

VI. Exercice 6

On considere n variables de bernuilli indépendantes $B_{e(p)}$:

- Esperence pour chaque $X_i = E(X_i) = p$
- Variance pour chaque $X_i = V(X_i) = p(1-p)$

Application de TCL :
Comme les variables sont indépendantes et de même loi, pour n assez grand, la moyenne empirique $\bar{X}$ suit approximativement une loi normale définie par l'espérance et la variance calculées juste avant.

$$\bar{X} \approx N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

Approximation de la loi Binomial
La somme $S_n = \sum_{\{i=1\}}^{n} X_i$ représente le nombre de succès et suit une Loi Binomiale $B(n,p)$. Or, on sait que $S_n = n \times \bar{X}$.Par propriété de linéarité sur la loi normale trouvée ci-dessus :

- moyenne : $n \times p$
- variance : $n^2 \times \frac{p(1-p)}{n} = n \times p(1-p)$

Donc La loi binomiale $B(n,p)$ peut être approximée (pour n grand) par la loi normale :

$$N(n \times p, n \times p(1-p))$$

VII. Exercice 7

- Risque de première espèce (α) : C'est la probabilité de rejeter H_0 à tort (rejeter l'hypothèse nulle alors qu'elle est vraie). C'est le "Faux Positif" :

$$P(\text{rejeter } H_0 \mid H_0 \text{ vrai}) = \alpha$$

- Risque de deuxième espèce (β) : C'est la probabilité d'accepter H_0 à tort (ne pas rejeter l'hypothèse nulle alors qu'elle est fausse). C'est le "Faux Négatif".

$$P(\text{accepter } H_0 \mid H_1 \text{ vrai}) = \beta$$

- Puissance du test ($1 - \beta$) : C'est la capacité du test à détecter une différence. C'est la probabilité de rejeter H_0 quand elle est fausse (ce qu'on veut !).