导数的概念

用一，从无，可生万物。

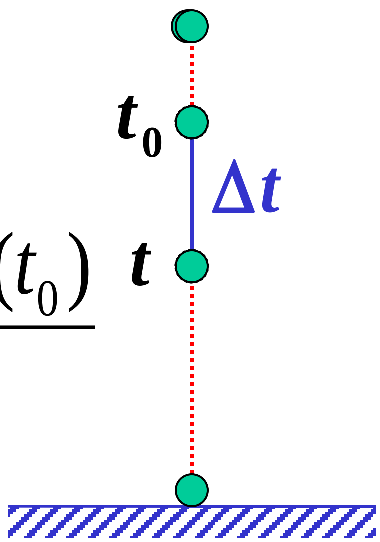
-----莱布尼兹

授课教师 邹成

一、问题的提出

1.自由落体运动的瞬时速度问题

如图，求t_0时刻的瞬时速度，



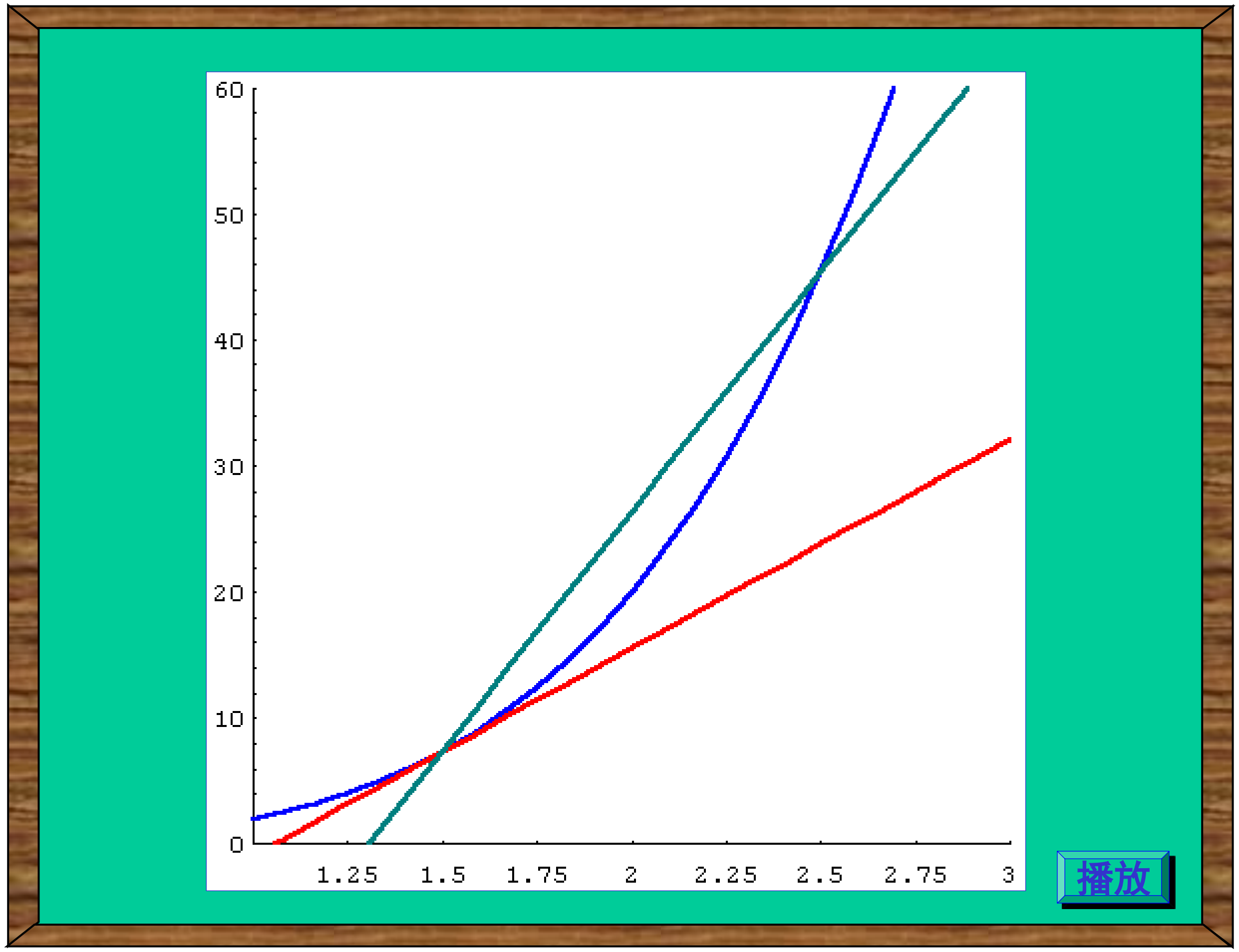
取一邻近于t_0的时刻t，运动时间Δt，

平均速度 $\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s - s_0}{t - t_0} = \dfrac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$

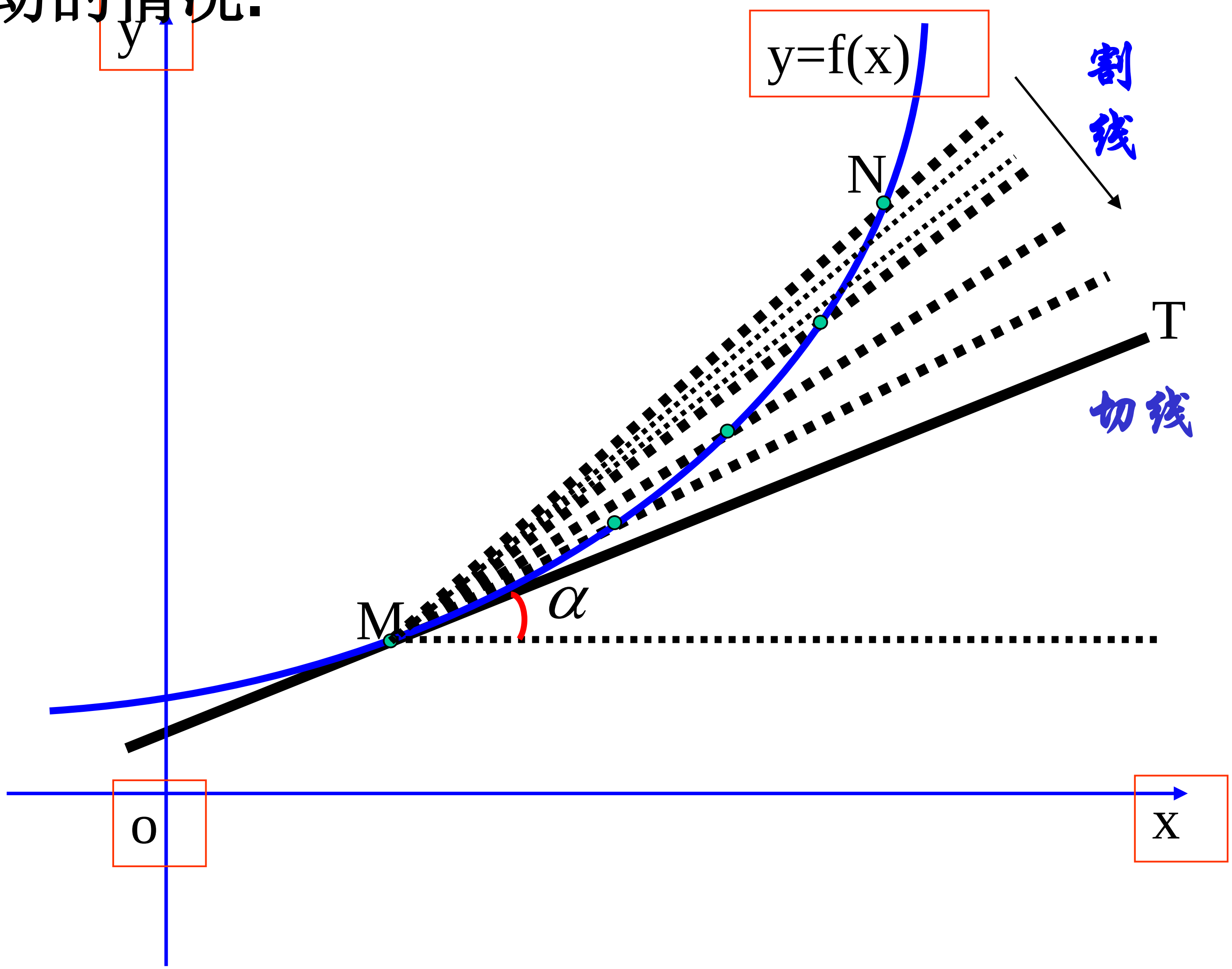
当$t \to t_0$时，取极限得

$$\text{瞬时速度 } v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

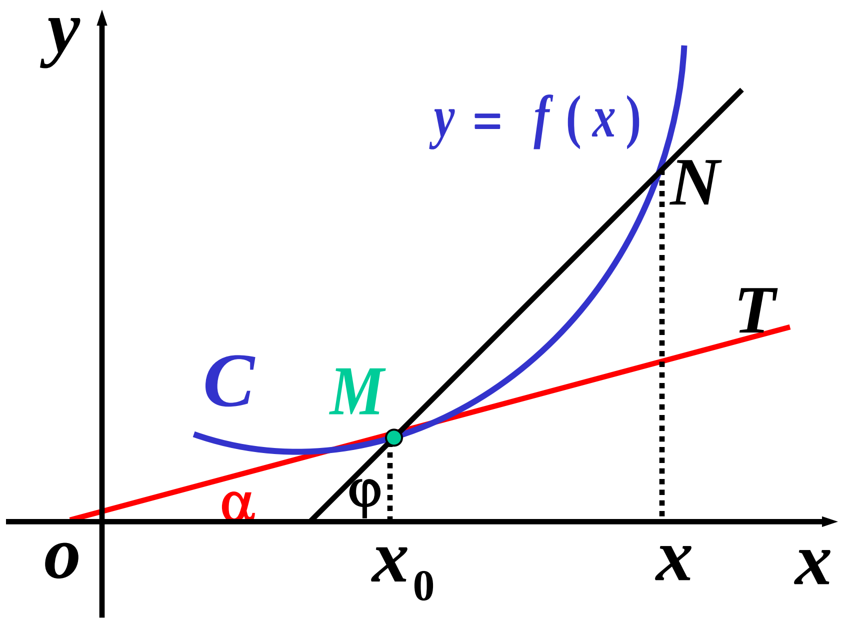
2.切线问题 割线的极限位置——切线位置



请看当点N沿着曲线逐渐向点M接近时,割线MN绕着点M逐渐转动的情况.



如图, 如果割线MN绕点M旋转而趋向极限位置MT,直线MT就称为曲线C在点M处的切线.



极限位置即

$$|MN| \to 0, \angle NMT \to 0.$$

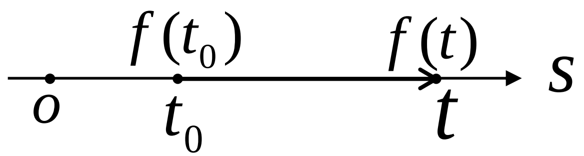
设 $M(x_0, y_0), N(x, y)$.

割线MN的斜率为 $\tan\varphi = \dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$,

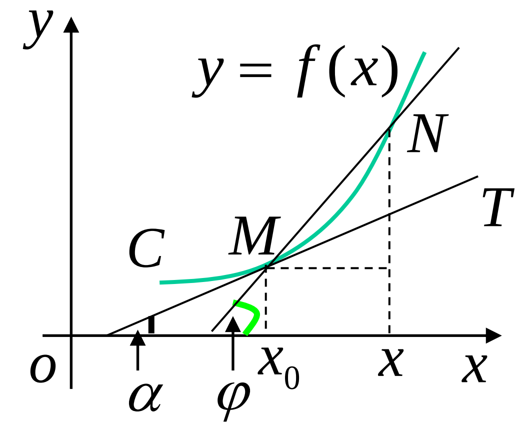
$N \xrightarrow{\text{沿曲线}C} M, x \to x_0, \quad \varphi \longrightarrow \alpha, \Delta x = x - x_0 \to 0$

切线MT的斜率为 $k = \tan\alpha = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

小结:



瞬时速度 $v=\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$



切线斜率 $k=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

两个问题的共性:

所求量为函数增量与自变量增量之比的极限.

类似问题还有:

加速度 是速度增量与时间增量之比的极限

线密度 是质量增量与长度增量之比的极限

电流强度 是电量增量与时间增量之比的极限

变化率问题

二、导数的定义

定义 设函数$y=f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义，当自变量x在x_0处取得增量Δx(点$x_0+\Delta x$仍在该邻域内)时，相应地函数y取得增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；如果$\Delta y$与$\Delta x$之比当$\Delta x\to 0$时的极限存在，则称函数$y=f(x)$在点$x_0$处可导，并称这个极限为函数$y=f(x)$在点$x_0$处的导数，记为$y'\big|_{x=x_0}$，

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \text{或} \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0},$$

即 $$\left.y'\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

其它形式 $$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

关于导数的说明：

★　点导数是因变量在点x_0处的变化率，它反映了因变量随自变量的变化而变化的快慢程度.

★　如果函数$y=f(x)$在开区间I内的每点处都可导，就称函数$f(x)$在开区间I内可导.

★对于任一 $x \in I$,都对应着 $f(x)$ 的一个确定的导数值.这个函数叫做原来函数 $f(x)$ 的导函数.

记作 $y', f'(x), \frac{dy}{dx}$ 或 $\frac{df(x)}{dx}$.

即 $$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

或 $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

注意: 1. $f'(x_0) = f'(x)\big|_{x=x_0}$.

2. 利用导数定义求极限:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0) \qquad \text{(a)}$$

或 $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0) \qquad \text{(b)}$$

要注意保持在定义中的三处Δx与x_0(对式(a)) 或三处x与x_0(对式(b))的一致性, 及定义中加号和减号的位置.

例 1 试按导数定义求下列各极限(假设各极限均存在):

(1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(2x)-f(2a)}{x-a}$;　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$，　其中 $f(0)=0$.

解: (1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(2x)-f(2a)}{x-a}$

$$=\lim_{2x\to 2a}\frac{f(2x)-f(2a)}{2x-2a}\cdot 2$$

$$=2f'(2a)$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-0}{x-0}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=f'(0)$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

例2. 设 $f'(x_0)$ 存在, 求极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0-h)}{h}$.

解:
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$$
$$=2\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{2h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$$
$$=2f'(x_0)-\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{(-1)\cdot h}\cdot(-1)$$
$$=2f'(x_0)-(-1)f'(x_0)$$
$$=3f'(x_0)$$

练习1 设 $f'(x_0)$ 存在, 求极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-3h)}{h}$.

练习2 **试按导数定义求下列各极限(假设各极限均存在)**

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)}{x}$, 其中 $\boldsymbol{f(0)=0.}$

★ 单侧导数

1.左导数:

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

2.右导数:

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

★ 函数 $f(x)$在点x_0处可导$\Leftrightarrow$左导数$f'_-(x_0)$和右导数$f'_+(x_0)$都存在且相等.

★ 如果$f(x)$在开区间(a,b)内可导，且$f'_+(a)$及$f'_-(b)$都存在，就说$f(x)$在闭区间$[a,b]$上可导.

★ 设函数 $f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x \geq x_0 \\ \psi(x), & x < x_0\end{cases}$，讨论在点$x_0$的可导性.

若 $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\psi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)}{\Delta x}=f'_-(x_0)\text{存在},$$

若 $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x} = f'_+(x_0) \text{ 存在,}$$

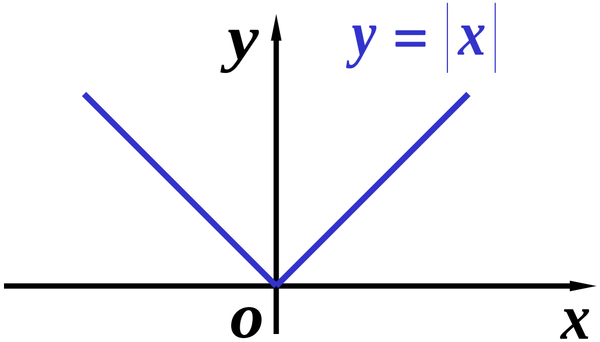
且 $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = a,$

则 $f(x)$在点x_0可导,

且 $f'(x_0) = a.$

例1 讨论函数 $f(x)=|x|$ 在$x=0$处的可导性.

解 $$\Theta\ \frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{|h|}{h},$$



$$\lim_{h\to0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{h}{h}=1,$$

$$\lim_{h\to0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{-h}{h}=-1.$$

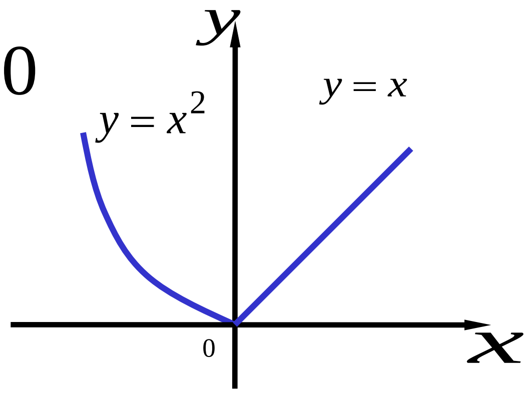
即 $f'_+(0)\neq f'_-(0)$, $\therefore$ 函数$y=f(x)$在$x=0$点不可导.

例2 讨论$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0 \\ x, & x>0 \end{cases}$，在0处的可导性。

解

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{h\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

$$f_-'(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{h\to 0^-}\frac{x^2}{x}=0$$



即 $f_+'(0)\ne f_-'(0)$,

在$x=0$处不可导.

注：$x=0$为$f(x)$的角点

三、由定义求导数

步骤：(1) 求增量 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$;

(2) 算比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$;

(3) 求极限 $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

例1 求函数 $f(x) = C$(C为常数)的导数.

解 $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{C - C}{h} = 0.$$

即 $(C)' = 0.$

例 2　求函数 $y = x^2$ 在任意点 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ 处的导数.

解　求法与例 1 一样.

第一步求 Δy:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2$$

$$= 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2.$$

第二步求 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x.$$

三步: $f'(x_0) = \lim\limits_{x? x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 2x_0.$

例3 设函数 $f(x)=\sin x$，求 $(\sin x)'$ 及 $(\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}$.

解 $$(\sin x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x.$$

即 $(\sin x)'=\cos x.$

$$\therefore (\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\cos x\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例4 求函数 $y = x^n$ (n为正整数)的导数.

解 $$(x^n)' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + \Lambda + h^{n-1}] = nx^{n-1}$$

即 $$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

更一般地 $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}.$ $(\mu \in R)$

例如, $$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$(x^{-1})' = (-1)x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}.$$

例 5 求 $f(x)=\mathrm{e}^x \ (x\in(-\infty,+\infty))$ 的导函数 .

解 $$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x+\Delta x}-\mathrm{e}^x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\mathrm{e}^x\cdot\frac{\mathrm{e}^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

$$=\mathrm{e}^x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=\mathrm{e}^x.$$

即 $$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x.$$

类似可得 $$(a^x)'=a^x\ln a\ .$$

例 6 求 $f(x)=\ln x\ (x\in(0,+\infty))$ 的导函数.

解 $$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta x}{x}}{\Delta x}=\frac{1}{x}.$$

即 $$(\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

类似可得 $$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}.$$

例7 求函数 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 的导数.

解 $$y' = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a (x+h) - \log_a x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\log_a (1 + \frac{h}{x})}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \log_a (1 + \frac{h}{x})^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x} \log_a e.$$

即 $$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e. \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

指出： 由导数的定义不难得到以下求导基本公式

$(c)' = 0$.

$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}$.　，其中$\alpha \in R$

特殊地有，$(x)' = 1$　$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$　$(\dfrac{1}{x})' = -\dfrac{1}{x^2}$

$(a^x)' = a^x \ln a$.　特殊地有，$(e^x)' = e^x$.

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$. 特殊地有，$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

$(\sin x)' = \cos x$.　$(\cos x)' = -\sin x$.

以上导数公式是学习微分学的最低要求，应熟记.

例 8 问曲线 $y = \ln x$ 上何处的切线平行直线 $y = x + 1$?

解 设点 (x_0, y_0) 处的切线平行直线 $y = x + 1$，根据导数的几何意义及导函数与导数的关系，可知

$$(\ln x)'|_{x=x_0} = \frac{1}{x_0} = 1.$$

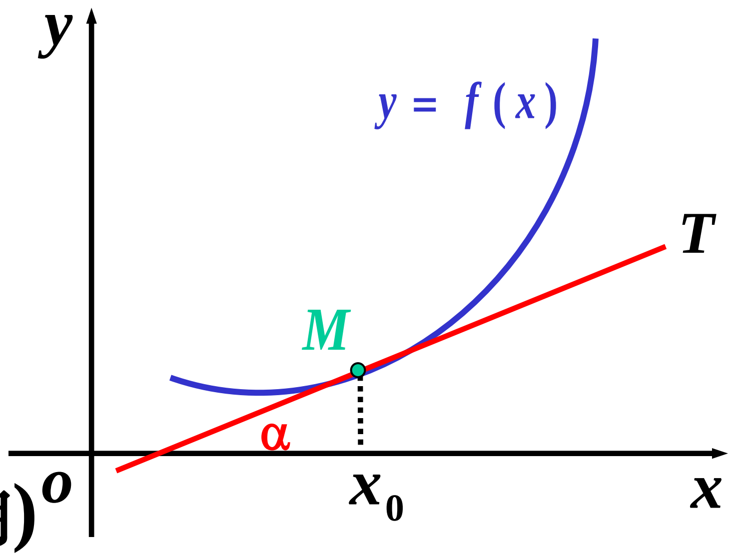
即 $x_0 = 1$，代入 $y = \ln x$ 中，得 $y_0 = 0$， 所以曲线在点 $(1, 0)$ 处的切线平行直线 $y = x + 1$.

四、导数的几何意义与物理意义

1.几何意义

$f'(x_0)$表示曲线$y=f(x)$在点$M(x_0,f(x_0))$处的切线的斜率,即

$f'(x_0)=\tan\alpha$, (α为倾角)



切线方程为 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$

法线方程为 $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$

例 求等边双曲线$y=\frac{1}{x}$在点$(\frac{1}{2},2)$处的切线的斜率,并写出在该点处的切线方程和法线方程.

解 由导数的几何意义, 得切线斜率为

$$k=y'\Big|_{x=\frac{1}{2}}=(\frac{1}{x})'\Big|_{x=\frac{1}{2}}=-\frac{1}{x^2}\Big|_{x=\frac{1}{2}}=-4.$$

所求切线方程为$y-2=-4(x-\frac{1}{2})$, 即$4x+y-4=0$.

法线方程为 $y-2=\frac{1}{4}(x-\frac{1}{2})$, 即$2x-8y+15=0$.

五、可导与连续的关系

定理　凡可导函数都是连续函数.

证　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)\qquad\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$$

$$\alpha\to 0\quad(\Delta x\to 0)\qquad \Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x]=0$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

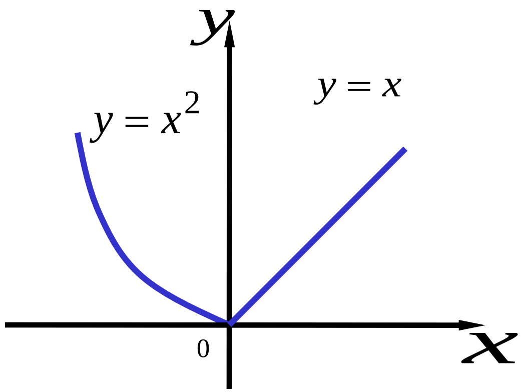
注意：该定理的逆定理不成立.

★ 连续函数不存在导数举例

1\. 函数 $f(x)$连续，若 $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$则称点 x_0 为函数 $f(x)$的角点，函数在角点不可导.

例如，

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x \le 0 \\ x, & x > 0 \end{cases},$$



在 $x=0$处不可导，$x=0$为 $f(x)$的角点.

2. 设函数 $f(x)$在点 x_0连续，但

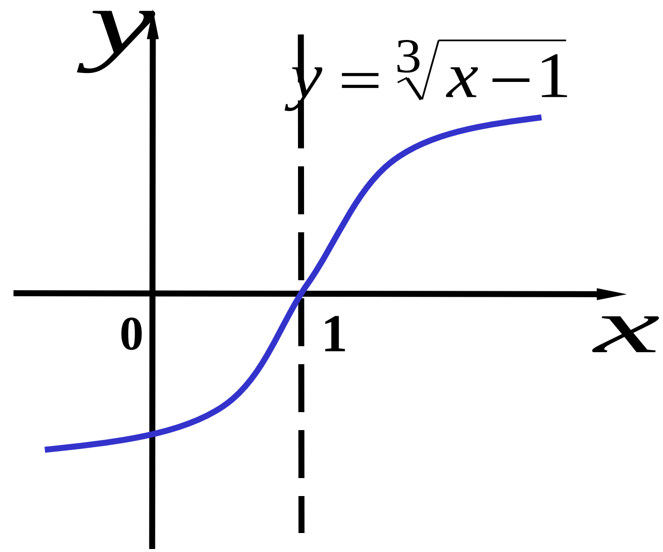
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\infty,$$

称函数 $f(x)$在点 x_0有无穷导数.(不可导)

例如,

$$f(x)=\sqrt[3]{x-1},$$

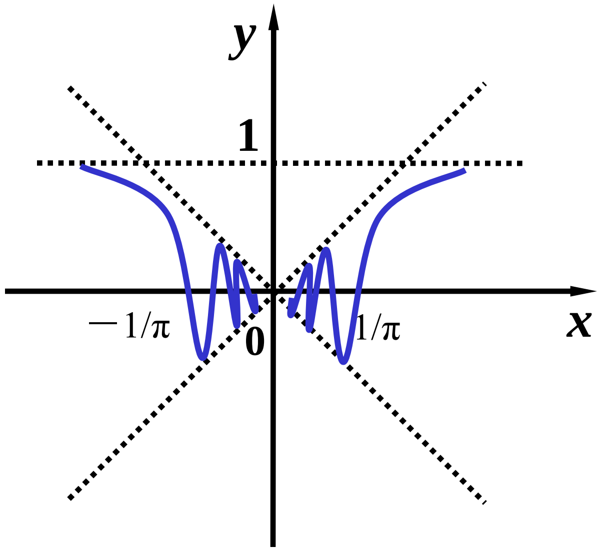
在 $x=1$处不可导.



3. 函数 $f(x)$在连续点的左右导数都不存在(指摆动不定)，则 x_0点不可导.

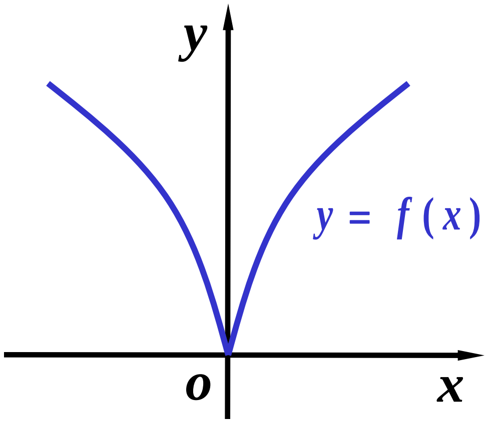
例如,

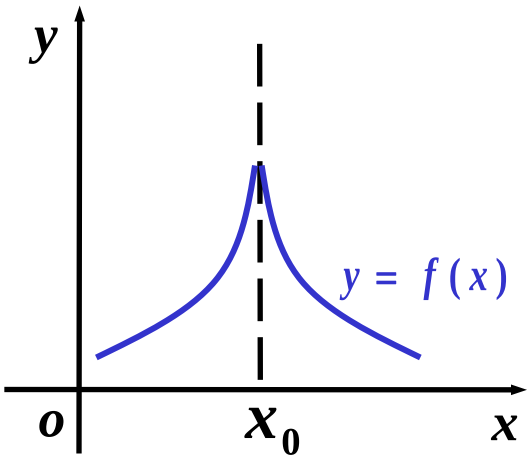
$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases},$$



在$x=0$处不可导.

4. 若$f'(x_0)=\infty$，且在点x_0的两个单侧导数符号相反，则称点x_0为函数$f(x)$的尖点(不可导点).





例 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$,

在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

解 Θ $\sin\dfrac{1}{x}$ 是有界函数, $\therefore \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$

Θ $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ $\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

但在 $x=0$ 处有 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{(0+\Delta x)\sin\dfrac{1}{0+\Delta x}-0}{\Delta x}=\sin\dfrac{1}{\Delta x}$

当 $\Delta x\to 0$ 时, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 在 -1 和 1 之间振荡而极限不存在.

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

六、小结

1. 导数的实质：增量比的极限;

2. $f'(x_0)=a \Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=a$;

3. 导数的几何意义：切线的斜率;

4. 函数可导一定连续，但连续不一定可导;

5. 求导数最基本的方法：由定义求导数.

6. 判断可导性
   - 不连续,一定不可导.
   - 连续
     - 直接用定义;
     - 看左右导数是否存在且相等.

思考题

函数 $f(x)$ 在某点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 与导函数 $f'(x)$ 有什么区别与联系？

思考题解答

由导数的定义知，$f'(x_0)$是一个具体的数值，$f'(x)$是由于$f(x)$在某区间I上每一点都可导而定义在I上的一个新函数，即$\forall x \in I$，有唯一值$f'(x)$与之对应，所以两者的区别是：一个是数值，另一个是函数．两者的联系是：在某点x_0处的导数$f'(x_0)$即是导函数$f'(x)$在x_0处的函数值．

练习题

一、 填空题：

1、 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$处可导，即 $f'(x_0)$存在，则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_,$$

.

2、 已知物体的运动规律为$s=t^2$（米），则该物体在 $t=2$秒时的速度为________.

3、 设 $y_1(x)=\sqrt[3]{x^2}$，$y_2(x)=\dfrac{1}{x^2}$，$y_3(x)=\dfrac{x^2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^5}}$，则

它们的导数分别为$\dfrac{dy_1}{dx}=$__________________，

$\dfrac{dy_2}{dx}=$________________，$\dfrac{dy_3}{dx}=$________________.

4、 设 $f(x)=x^2$，则 $f[f'(x)]=$ ________________；

$f'[f(x)]=$ ________________.

5、 曲 线 $y=e^x$ 在 点 $(0,1)$ 处 的 切 线 方 程 为 ________________.

二、在下列各题中均假定 $f'(x_0)$存在，按照导数的定义观察下列极限，分析并指出A表示什么？

1、$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A$；

三、证明：若 $f(x)$为偶函数且 $f'(0)$存在，则 $f'(0)=0$.

四、　设函数 $f(x)=\begin{cases} x^k \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 问 k 满足什么条件，$f(x)$ 在 $x=0$ 处（1）连续；（2）可导；（3）导数连续.

五、　设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ ax+b, & x > 1 \end{cases}$，为了使函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且可导，a, b 应取什么值.

六、　已知 $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$，求 $f'(x)$.

练习题答案

一、1、$f'(x_0)$；　　2、$-f'(x_0)$；

3、$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}, -\frac{2}{x^3}, \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$；　　3、$4x^2, 2x^2$；

5、$x - y + 1 = 0$.

二、1、$f'(x_0)$；　　2、$f'(0)$；　　3、$2f'(x_0)$.

四、(1) 当$k > 0$时，$f(x)$在$x = 0$处连续；

(2) 当$k > 1$时，$f(x)$在$x = 0$处可导，且$f'(0) = 0$；

(3) 当$k > 2$及$x \neq 0$时，$f'(x)$在$x = 0$处连续.

五、$a = 2, b = -1$.

六、$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}.$$

补充例练：

1, 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, x \le 0 \\ ax+b, x>0 \end{cases}$，为了使函数 $\boldsymbol{f(x)}$在 $x=0$ 处连续且可导， $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$应取什么值.

2, 已知 $f(x)=\begin{cases} 2e^x+a & x<0 \\ x^2+bx+1 & x \ge 0 \end{cases}$

问：（1）欲使函数在 0 处连续，a, b为何值？

（2）欲使函数在 0 处可导，a, b为何值？