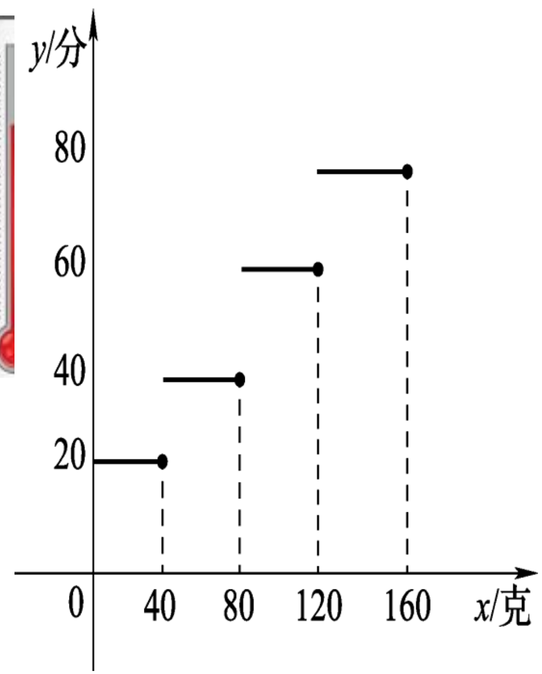
# 连续

# 一 函数的连续性

案例研究

**引例1 如图1所示，温度计中水银柱高度随温度的改变是如何变化的？**

引例2 如图2所示，邮费随邮件重量的增加是如何变化的？



# 1 函数的增量

**定义 1** 如果函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 的左右近旁有定义，当自变量由 $x_0$ 变到 $x_1$ 时，函数对应的值由 $f(x_0)$ 变到 $f(x_1)$，则差 $x_1-x_0$ 称为**自变量的增量（或改变量）**，记作 $\Delta x$，即

$$\Delta x = x_1 - x_0, \tag{1-1}$$

而差 $f(x_1)-f(x_0)$ 称为函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 的增量（或改变量），记作 $\Delta y$，即

$$\Delta y = f(x_1) - f(x_0). \tag{1-2}$$

由式（1-1）可得

$$x_1 = x_0 + \Delta x, \tag{1-3}$$

将式（1-3）代入式（1-2），得函数增量的另一种表达形式

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0). \tag{1-4}$$

设 $f(x)=x^2$，当自变量 $x$ 由 $x_0=1$ 变到 $x_1=1.01$ 时，对应的函数值由 $f(x_0)=f(1)=1$ 变到 $f(x_1)=f(1.01)=1.01^2=1.0201$，则自变量 $x$ 和函数 $f(x)$ 的改变量分别为

$$x_1-x_0=1.01-1=0.01,$$

$$f(x_1)-f(x_0)=1.0201-1=0.0201.$$


（1）$\Delta y$ 是一个整体记号，不能看作是 $\Delta$ 与 $y$ 的乘积.

（2）$\Delta x$，$\Delta y$ 可正可负，不一定是“增加”的量.

**例 1** 设 $f(x)=x^2+1$，求适合下列条件的自变量的增量 $\Delta x$ 和函数的增量 $\Delta y$ .

（1） $x$ 由 $1$ 变到 $0.5$ ；（2） $x$ 由 $1$ 变到 $1+\Delta x$ ；

（3） $x$ 由 $x_0$ 变到 $x_0+\Delta x$ .

**解** （1） $\Delta x=0.5-1=-0.5$ ，

$$\Delta y=f(0.5)-f(1)=(0.5^2+1)-(1^2+1)=-0.75 .$$

（2） $\Delta x=(1+\Delta x)-1=\Delta x$ ，

$$\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=[(1+\Delta x)^2+1]-(1^2+1)=2\Delta x+(\Delta x)^2 .$$

（3） $\Delta x=(x_0+\Delta x)-x_0=\Delta x$ ，

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=[(x_0+\Delta x)^2+1]-(x_0{}^2+1)=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2 .$$

# 2 函数连续的定义

观察图 3（a）知，函数 $y=f(x)$ 所表示的曲线在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处连续，当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\to 0$ .

观察图 3（b）知，函数 $y=g(x)$ 所表示的曲线在点 $M(x_0, g(x_0))$ 处不连续，当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y=g(x_0+\Delta x)-g(x_0)\to C\neq 0$ .

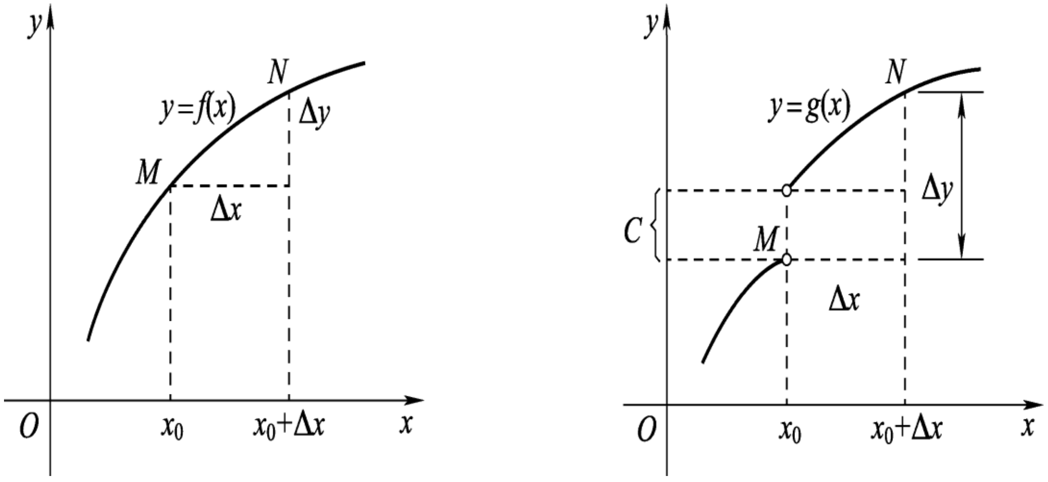



图 3

**定义 2** 设函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 的左右近旁有定义，如果当自变量 $x$ 在点 $x_0$ 处的增量 $\Delta x$ 趋于 0 时，函数 $y=f(x)$ 相应的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 也趋于 0，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处连续.

**例 2** 证明函数 $y=f(x)=x^2-2x+2$ 在点 $x=x_0$ 处连续.

**证明** 设自变量在点 $x=x_0$ 处有增量 $\Delta x$，则函数相应的增量是

$$\begin{aligned}\Delta y&=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\\&=[(x_0+\Delta x)^2-2(x_0+\Delta x)+2]-(x_0^2-2x_0+2)\\&=(\Delta x)^2+2x_0\Delta x-2\Delta x.\end{aligned}$$

因为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[(\Delta x)^2+2x_0\Delta x-2\Delta x]=0$，所以函数 $y=f(x)=x^2-2x+2$ 在点 $x=x_0$ 处连续.

在定义 2 中，如果令 $x = x_0 + \Delta x$，则 $\Delta y = f(x) - f(x_0)$．于是

$$f(x) = f(x_0) + \Delta y .$$

因为 $\Delta x \to 0 \Leftrightarrow x \to x_0$，$\Delta y \to 0 \Leftrightarrow f(x) \to f(x_0)$，所以，上述函数连续的定义又可叙述如下：

**定义 3** 设函数 $y = f(x)$ 在点 $x_0$ 及其左右近旁有定义，如果函数 $y = f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限存在，且等于它在点 $x_0$ 处的函数值，即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $y = f(x)$ 在点 $x_0$ 处连续．

由定义 3 知，$y = f(x)$ 在点 $x_0$ 连续必须满足以下三个条件：

（1）函数 $y = f(x)$ 在点 $x_0$ 处有定义，即 $f(x_0)$ 是一个确定的数；

（2）函数 $y = f(x)$ 在点 $x_0$ 处有极限，即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在；

（3）极限值等于函数值，即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$．

**例 3** 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ a + x, & x \geq 0, \end{cases}$ 当 $a$ 为何值时，才能使 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处连续？

**解** 要使 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处连续，则有 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 存在，从而有 $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+0} f(x)$．

又 $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-0} e^x = 1$，$\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+0} (a + x) = a$，所以 $a = 1$．

**定义 4** 如果函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处的左极限 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ 存在且等于 $f(x_0)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处**左连续**；如果函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处的右极限 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ 存在且等于 $f(x_0)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处**右连续**.

根据极限存在的充要条件，有下面的结论：

如果函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处连续，则它在点 $x_0$ 处左连续且右连续；反之，如果函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处左连续且右连续，则它在 $x_0$ 点连续.

下面给出函数在区间上连续的概念.

如果函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内每一点都连续，则称函数 $f(x)$ 在开区间 $(a,b)$ 内连续，区间 $(a,b)$ 称为函数 $f(x)$ 的**连续区间**.

如果函数 $f(x)$ 在开区间 $(a,b)$ 内连续，且在点 $a$ 右连续，在点 $b$ 左连续，则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

在闭区间 $[a,b]$ 上连续的函数，是 $[a,b]$ 上的一条**连绵不断的曲线**，如图 1-36 所示.

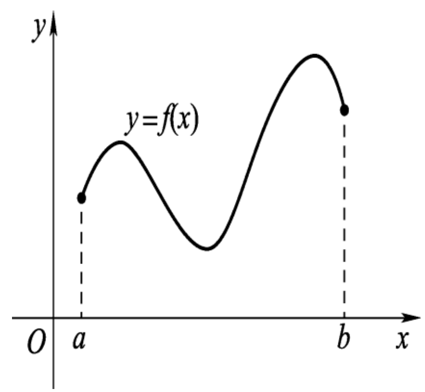



图1-36

注：

函数 $f(x)$在点 $x_0$处连续必须满足的三个条件：

(1) $f(x)$在点$x_0$处有定义;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

**例4** 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x \geq 0, \\ x-2, & x<0, \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

**解** $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+}(x+2) = 2 = f(0),$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-}(x-2) = -2 \neq f(0),$

右连续但不左连续，

故函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续.

**例 5** 试证明 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\le 0,\\ \cos x, & x>0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续.

**证** 因为

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\cos x=1,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(2x+1)=1.$$

且 $f(0)=1$，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处左，右连续，所以它在 $x=0$ 处连续 .

**例6** 试证函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 在$x=0$处连续.

**证** $\because \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0,$

又 $f(0)=0,\quad \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0),$

由定义2知

函数 $f(x)$在 $x=0$处连续.

# 二、函数的间断点

函数 $f(x)$在点 $x_0$处连续必须满足的三个条件：

(1) $f(x)$在点$x_0$处有定义;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

如果上述三个条件中只要有一个不满足, 则称函数 $f(x)$在点 $x_0$处不连续(或间断), 并称点$x_0$为 $f(x)$的不连续点(或间断点).

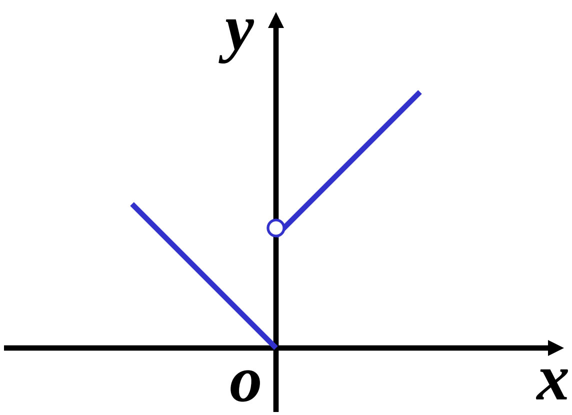
**1.跳跃间断点** 如果 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处左，右极限都存在，但 $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$，则称点 $x_0$ 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

**例1** 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ 1+x, & x>0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

**解** $f(0-0)=0,\qquad f(0+0)=1,$

$\Theta\ f(0-0)\neq f(0+0),$

$\therefore x=0$ 为函数的跳跃间断点.

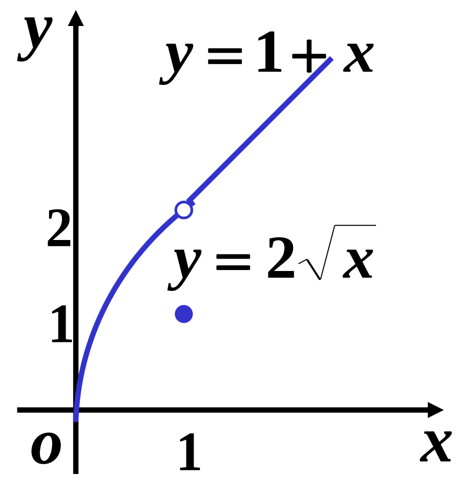


**2.可去间断点**如果 $f(x)$在点 $x_0$处的极限存在，但 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$，或 $f(x)$在点 $x_0$处无定义则称点 $x_0$为函数 $f(x)$的可去间断点.

**例2** 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1 \\ 1+x, & x > 1, \end{cases}$$

在 $x=1$处的连续性.



解 $\because \mathbf{f(1) = 1},$

$$f(1-0)=2, \qquad f(1+0)=2,$$

$$\therefore \lim_{x\to 1} f(x)=2 \neq f(1),$$

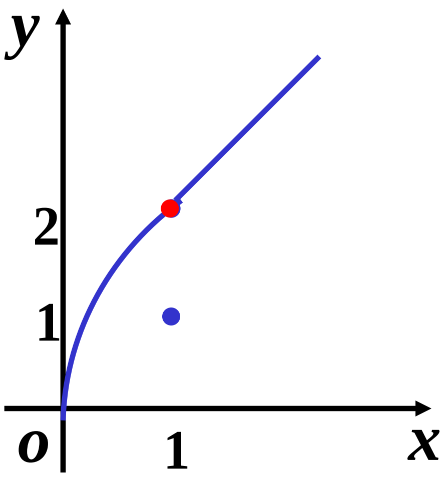
$\therefore x=0$为函数的可去间断点.

**注意** 可去间断点只要改变或者补充间断处函数的定义，则可使其变为连续点.

如例2中，令 $f(1)=2$,

则 $f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0\le x<1, \\ 1+x, & x\ge 1, \end{cases}$

在$x=1$处连续.




**跳跃间断点与可去间断点统称为第一类间断点.**

**特点** 函数在点$x_0$处的左、右极限都存在.

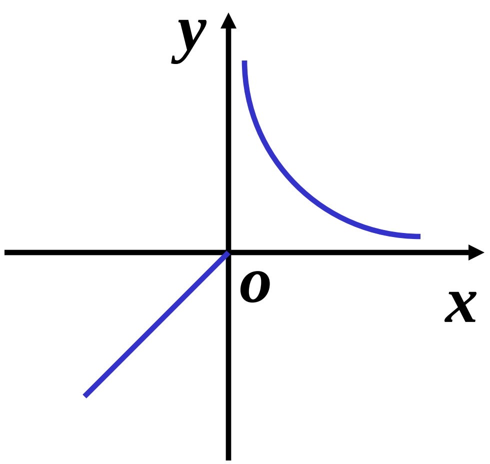
**3.第二类间断点** 如果 $f(x)$在点$x_0$处的左、右极限至少有一个不存在, 则称点$x_0$为函数 $f(x)$的<u>第二类间断点.</u>

**例3** 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ x, & x\le 0,\end{cases}$ 在$x=0$处的连续性.

**解** $f(0-0)=0,\quad f(0+0)=+\infty,$

$\therefore\ x=1$为函数的第二类间断点.

这种情况称为无穷间断点.

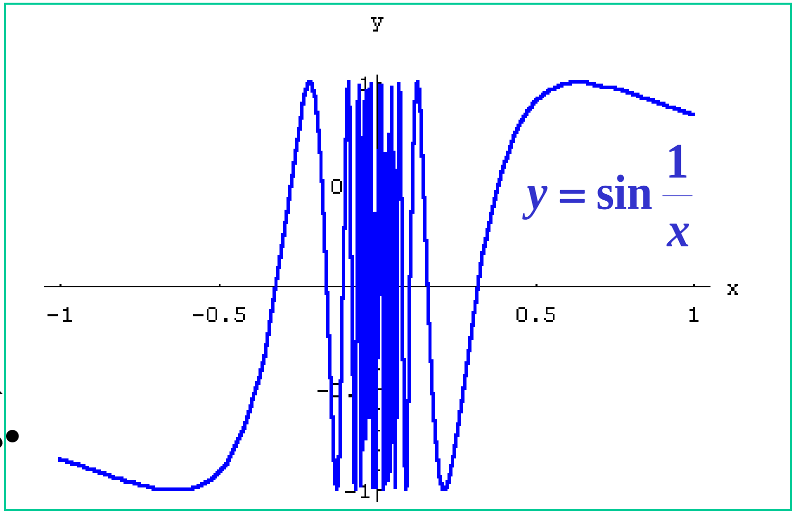


**例4** 讨论函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

**解** $\Theta$ 在 $x=0$ 处没有定义,

且 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

$\therefore\ x=0$ 为第二类间断点.




这种情况称为的振荡间断点.

**注意** 不要以为函数的间断点只是个别的几个点.

**例5** 当$a$取何值时,

函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ a+x, & x\ge 0,\end{cases}$ 在 $x=0$处连续.

**解** $\because \mathbf{f(0)=a},$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\cos x=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(a+x)=a,$$

要使 $f(0-0)=f(0+0)=f(0),\ \Rightarrow a=1,$

故当且仅当$a=1$时，函数 $f(x)$在 $x=0$处连续.

# 三、小结

**1.函数在一点连续必须满足的三个条件;**

**2.区间上的连续函数;**

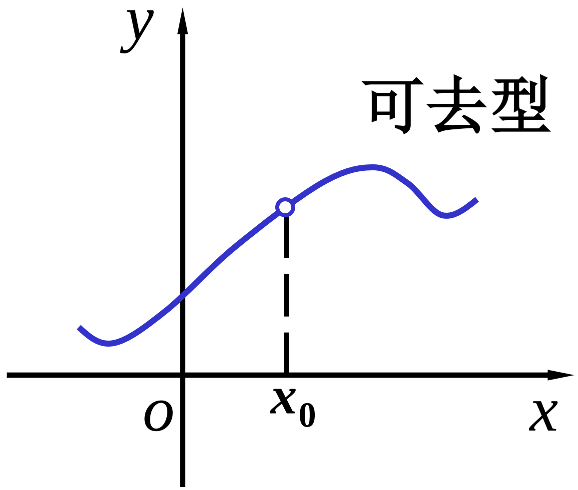
**3.间断点的分类与判别;**

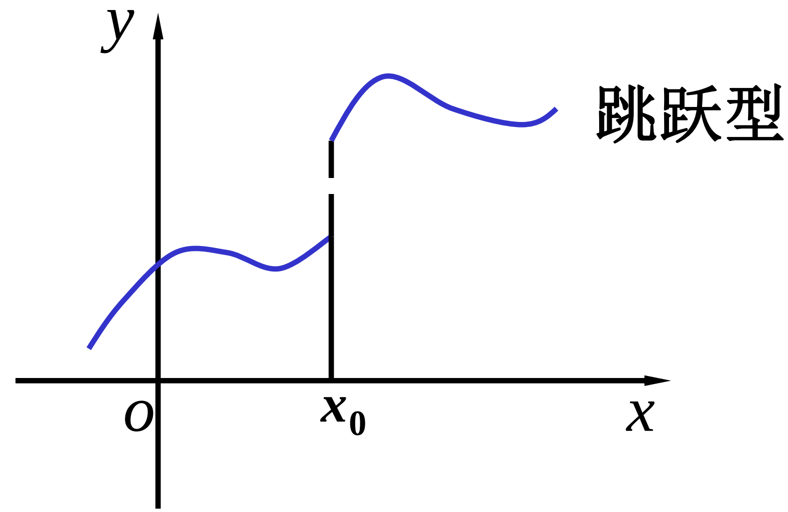
间断点

- 第一类间断点:可去型,跳跃型.
- 第二类间断点:无穷型,振荡型.

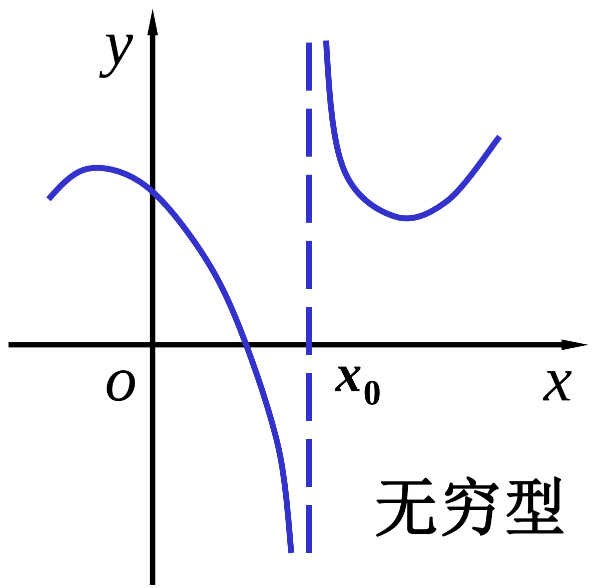
**(见下图)**

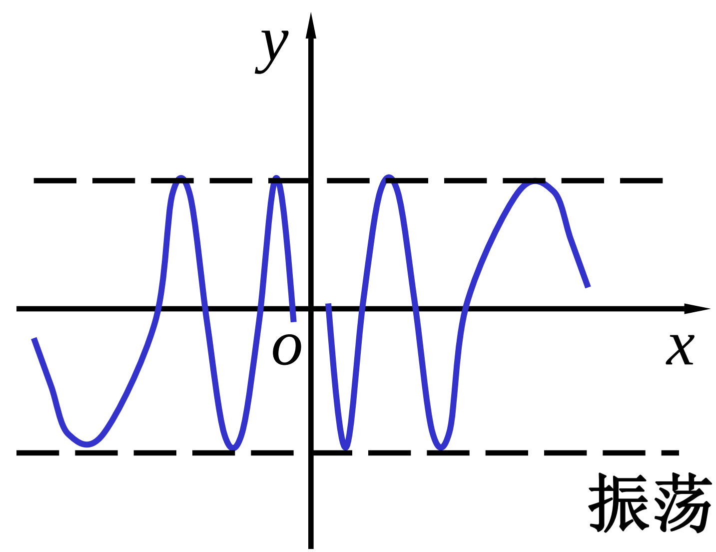
第一类间断点




第二类间断点



# 练 习 题

## 一、 填空题:

1、 指出 $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 在 $x=1$ 是第________类间断点；在 $x=2$ 是第______类间断点 .

2、 指出 $y=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$ 在 $x=0$ 是第_________类间断点；在 $x=1$ 是第_______类间断点；在 $x=-1$ 是第______类间断点 .

二、　指出下列函数在指定范围内的间断点，并说明这些间断点的类型，如果是可去间断点，则补充或改变函数的定义使它连续．

1、 $f(x)=\begin{cases} x-1, x\le 1 \\ 3-x, x>1 \end{cases}$ 在 $x\in R$ 上．

2、 $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1-x}$，在 $x\in R$ 上．．

# 练习题答案

一、1、一类, 二类;　　2、一类, 一类, 二类.

二、1、$\boldsymbol{x=1}$为第一类间断点;

2、$x=1$为可去间断点,

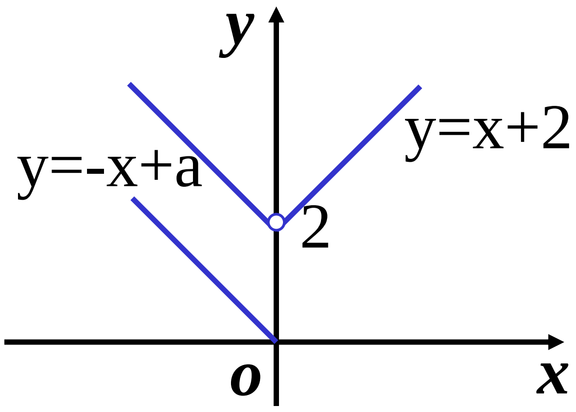
$x=1$为第一类间断点.

,

**例** 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\geq 0, \\ -x+a, & x<0, \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续或间断时，a的取值情况？

**解** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2)=\mathbf{2}=f(0)$, 右连续,

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x+a)=a$




只须左连续即可

故取a=2时，函数在0处有连续，a不等于2时，都是间断的。

**例** 函数$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0, \\ x^2+b, & x<=0, \end{cases}$ 在$x=0$

处连续，求b的值.

**解** $\because \lim\limits_{x\to 0+0} x\sin\dfrac{1}{x}=0,$ 右极限存在

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0} x^2+b=b$$

又 $f(0)=b,$

由连续的定义知

函数$f(x)$在$x=0$处连续,必须有b=0.