导数的基本运算

授课教师 邹成

常用导数公式

$$(c)' = 0. \qquad (x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}. \qquad (a^x)' = a^x \ln a.$$

$$(e^x)' = e^x. \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}. \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$(\sin x)' = \cos x. \qquad (\cos x)' = -\sin x.$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x. \qquad (\cot x)' = -\csc^2 x.$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x. \qquad (\csc x)' = -\csc x \cot x.$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \qquad (\operatorname{arc}\cot x)' = \frac{-1}{1 + x^2}.$$

一、和、差、积、商的求导法则

定理 如果函数$u(x)$, $v(x)$在点x处可导,则它们的和、差、积、商(分母不为零)在点x处也可导, 并且

(1) $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$;

(2) $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$;

(3) $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \quad (v(x) \neq 0)$.

证(1)、(2)略.

证(3) 设 $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)},(v(x)\neq 0)$,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{u(x+h)}{v(x+h)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x)-u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[u(x+h)-u(x)]v(x)-u(x)[v(x+h)-v(x)]}{v(x+h)v(x)h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}\cdot v(x)-u(x)\cdot\dfrac{v(x+h)-v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)}$$

$$=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

$\therefore\ f(x)$在x处可导.

推论 1 $(cu(x))' = cu'(x)$ (c 为常数).

推论 2 $$\left(\frac{1}{u(x)}\right)' = -\frac{u'(x)}{u^2(x)}.$$

推论 3 $$[u(x)v(x)w(x)]' = u'(x)v(x)w(x) + u(x)v'(x)w(x) + u(x)v(x)w'(x).$$

二、例题分析

例 1 设 $f(x) = 3x^4 - e^x + 5\cos x - 1$，求 $f'(x)$ 及 $f'(0)$.

解 根据推论 1 可得 $(3x^4)' = 3(x^4)'$，$(5\cos x)' = 5(\cos x)'$，又$(x^4)' = 4x^3$，$(\cos x)' = -\sin x$，$(e^x)' = e^x$， $(1)' = 0$，

故 $$f'(x) = (3x^4 - e^x + 5\cos x - 1)'$$

$$= (3x^4)' - (e^x)' + (5\cos x)' - (1)'$$

$$= 12x^3 - e^x - 5\sin x .$$

$$f'(0) = (12x^3 - e^x - 5\sin x)\big|_{x=0} = -1$$

例2 求 $y = x^3 - 2x^2 + \sin x$ 的导数．

解 $y' = 3x^2 - 4x + \cos x.$

例 3 设 $y = x\ln x$，求 y'.

解 根据乘法公式，有

$$y' = (x\ln x)'$$

$$= x(\ln x)' + (x)'\ln x$$

$$= x \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln x$$

$$= 1 + \ln x.$$

例4 求 $y = \sin 2x \cdot \ln x$ 的导数.

解 $\Theta\ y = 2\sin x \cdot \cos x \cdot \ln x$

$$y' = 2\cos x \cdot \cos x \cdot \ln x + 2\sin x \cdot (-\sin x) \cdot \ln x$$

$$+ 2\sin x \cdot \cos x \cdot \frac{1}{x}$$

$$= 2\cos 2x \ln x + \frac{1}{x}\sin 2x.$$

例 5 设 $y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$，求 y'.

解 根据除法公式，有

$$y'=\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)'=\frac{(x^2+1)(x-1)'-(x^2+1)'(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{(x^2+1)[(x)'-(1)']-[(x^2)'+(1)'](x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{(x^2+1)-2x(x-1)}{(x^2+1)^2}=\frac{2x-x^2+1}{(x^2+1)^2}.$$

例6 求 $y=\tan x$ 的导数 .

解 $$y'=(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$$

$$=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

即 $(\tan x)'=\sec^2 x.$

同理可得 $(\cot x)'=-\csc^2 x.$

例7 求 $y=\sec x$ 的导数 .

解 $y'=(\sec x)'=\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)'$

$$=\frac{-(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\tan x.$$

同理可得 $(\csc x)'=-\csc x\cot x.$

例8 设 $f(x)=\begin{cases} x, & x<0 \\ \ln(1+x), & x\geq 0 \end{cases}$，求$f'(x)$.

解 当$x<0$时，$f'(x)=1$,

当$x>0$时，

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+x+h)-\ln(1+x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(1+\frac{h}{1+x})$$

$$=\frac{1}{1+x},$$

当$x=0$时,

$$f'_{-}(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{(0+h)-\ln(1+0)}{h}=1,$$

$$f'_{+}(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{\ln[1+(0+h)]-\ln(1+0)}{h}=1,$$

$$\therefore\ f'(0)=1.$$

$$\therefore\ f'(x)=\begin{cases}1, & x\le 0\\ \dfrac{1}{1+x}, & x>0\end{cases}.$$

三、小结

注意: $[u(x)\cdot v(x)]' \neq u'(x)+v'(x);$

$$[\frac{u(x)}{v(x)}]' \neq \frac{u'(x)}{v'(x)}.$$

分段函数求导时，分界点导数用左右导数求.

练 习 题

一、 填空题：

1、 设 $y=\sqrt{x}\cdot\sin x$，则 $y'=$ ____________.

2、 设 $y=3a^x+e^x-\dfrac{2}{x}$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$____________.

3、 设 $y=e^x(x^2-3x+1)$, 则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$ ____________.

4、 设 $y=2\tan x+\sec x-1$, 则 $y'=$___________.

5、 设 $y=f(x)=\dfrac{3}{5-x}+\dfrac{x^2}{5}$，则 $f'(0)=$_________.

二、计算下列各函数的导数：

1、$y=\dfrac{1}{1+x+x^2}$； 2、$y=\dfrac{10^x-1}{10^x+1}$；

3、$y=\dfrac{2\csc x}{1+x^2}$； 4、$f(x)=\dfrac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$，求$f'(4)$；

5、$y=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\left(\dfrac{x}{a}\right)^b \quad (a>0,b>0)$.

三、求抛物线$y=ax^2+bx+c$上具有水平切线的点.

四、写出曲线$y=x+\dfrac{1}{x}$与x轴交点处的切线方程.

练习题答案

一、1、$\sqrt{x}(\frac{\sin x}{2x}+\cos x)$； 2、$3a^x\ln a+e^x+\frac{2}{x^2}$；

3、-2； 4、$\sec x(2\sec x+\tan x)$； 5、$\frac{3}{25}$.

二、1、$-\frac{1+2x}{(1+x+x^2)^2}$； 2、$\frac{10^x\cdot 2\ln 10}{(10^x+1)^2}$；

3、$\frac{2\csc x[(1+x^2)\cot x+2x]}{(1+x^2)^2}$； 4、$-\frac{1}{18}$；

5、$(\frac{a}{b})^x(\frac{b}{x})^a(\frac{x}{a})^b(\ln\frac{a}{b}-\frac{a-b}{x})$.

三、$(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a})$.

四、$2x-y-2=0$和$2x-y+2=0$.

反函数、复合函数微分法

一、反函数的导数

定理 如果函数$x=\varphi(y)$在某区间I_y内单调、可导且$\varphi'(y)\neq 0$，那末它的反函数$y=f(x)$在对应区间I_x内也可导，且有

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(x)}.$$

即 反函数的导数等于直接函数导数的倒数.

证 任取$x \in I_x$，给x以增量Δx $(\Delta x \neq 0, x + \Delta x \in I_x)$

由$y = f(x)$的单调性可知 $\Delta y \neq 0$,

于是有 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}$, $\because f(x)$连续,

$\therefore \Delta y \to 0 \quad (\Delta x \to 0)$, 又知$\varphi'(y) \neq 0$

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\varphi'(y)}$$

即 $f'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(y)}$.

例1 求函数 $y = \arcsin x$ 的导数.

解 $\Theta\ x = \sin y$ 在 $I_y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内单调、可导,

且 $(\sin y)' = \cos y > 0$, $\quad \therefore$ 在 $I_x \in (-1,1)$ 内有

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

同理可得 $\quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}; \qquad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

例2 求函数 $y = \log_a x$ 的导数.

解 $\Theta\ x = a^y$ 在 $I_y \in (-\infty, +\infty)$ 内单调、可导,

且 $(a^y)' = a^y \ln a \neq 0,\quad \therefore$ 在 $I_x \in (0, +\infty)$ 内有,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

特别地 $\quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}.$

二、复合函数的求导法则

定理 如果函数$u=\varphi(x)$在点x_0可导，而$y=f(u)$在点$u_0=\varphi(x_0)$可导，则复合函数$y=f[\varphi(x)]$在点x_0可导，且其导数为

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=f'(u_0)\cdot\varphi'(x_0).$$

即 因变量对自变量求导，等于因变量对中间变量求导，乘以中间变量对自变量求导.（链式法则）

证 由$y=f(u)$在点u_0可导，$\therefore \lim\limits_{\Delta u \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u_0)$

故 $\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u_0)+\alpha \quad (\lim\limits_{\Delta u \to 0}\alpha=0)$

则 $\Delta y=f'(u_0)\Delta u+\alpha\Delta u$

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}[f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}]$$

$$=f'(u_0)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x \to 0}\alpha\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$=f'(u_0)\varphi'(x_0).$$

推广 设 $y = f(u),\ u = \varphi(v),\ v = \psi(x)$,

则复合函数 $y = f\{\varphi[\psi(x)]\}$的导数为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

例3 求函数 $y = \ln\sin x$ 的导数.

解 $\Theta\ y = \ln u, u = \sin x.$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

例4 求函数 $y=(x^2+1)^{10}$ 的导数.

解 $\dfrac{dy}{dx}=10(x^2+1)^9\cdot(x^2+1)'$

$=10(x^2+1)^9\cdot 2x=20x(x^2+1)^9.$

例5 求函数 $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}$ 的导数. $(a>0)$

解 $y'=(\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2})'+(\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a})'$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+\dfrac{a^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}$

$=\sqrt{a^2-x^2}.$

三、小结

反函数的求导法则（注意成立条件）；

复合函数的求导法则

（注意函数的复合过程,合理分解正确使用链导法）；

已能求导的函数:可分解成基本初等函数,或常数与基本初等函数的和、差、积、商.

练 习 题

一、填空题：

1、设 $y=(2x+5)^4$，则 y' =________________.

2、设 $y=\sin^2 x$，则 y' =________________.

3、设 $y=\arctan(x^2)$，则 y' =________________.

4、设 $y=\ln\cos x$，则 y' =________________.

5、设 $y=10^{x\tan 2x}$，则 y' =________________.

6、设 $f(x)$可导，且 $y=f(x^2)$，

则 $\dfrac{dy}{dx}$ =________________.

7、设 $f(x)=e^{\tan^k x}$，则 $f'(x)$ =________________，

若 $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=e$，则 $k=$ ________________.

二、 求下列函数的导数：

1、 $y=\arccos\frac{1}{x}$； 2、 $y=\frac{\sin 2x}{x}$；

3、 $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$； 4、 $y=\ln(\csc x-\cot x)$；

5、 $y=(\arcsin\frac{x}{2})^2$； 6、 $y=e^{\arctan\sqrt{x}}$；

练习题答案

一、1、$8(2x+5)^3$； 2、$\sin 2x$； 3、$\dfrac{2x}{1+x^4}$；

4、$-\tan x$； 5、$10^{x\tan 2x}\ln 10(\tan 2x+2x\sec^2 2x)$；

6、$2xf'(x^2)$； 7、$e^{\tan^k x}\cdot k\tan^{k-1}x\cdot\sec^2 x$，$\dfrac{1}{2}$．

二、1、$\dfrac{|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}}$； 2、$\dfrac{2x\cos 2x-\sin 2x}{x^2}$；

3、$\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$； 4、$\csc x$；

5、$\dfrac{2\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}$； 6、$\dfrac{e^{\arctan\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}(1+x)}$；

高阶导数

一、高阶导数的定义

问题:变速直线运动的加速度.

设 $s = f(t)$, 则瞬时速度为 $v(t) = f'(t)$

Θ 加速度 a 是速度 v 对时间 t 的变化率

$\therefore a(t) = v'(t) = [f'(t)]'.$

定义 如果函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在点 x 处可导,即

$$(f'(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

存在,则称 $(f'(x))'$ 为函数 $f(x)$ 在点 x 处的二阶导数.

记作 $f''(x), y'', \dfrac{d^2y}{dx^2}$ 或 $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}.$

二阶导数的导数称为三阶导数, $f'''(x),\ y''',\ \dfrac{d^3y}{dx^3}.$

三阶导数的导数称为四阶导数, $f^{(4)}(x),\ y^{(4)},\ \dfrac{d^4y}{dx^4}.$

一般地, 函数$f(x)$的$n-1$阶导数的导数称为函数$f(x)$的n阶导数,记作

$$f^{(n)}(x),\ y^{(n)},\ \frac{d^ny}{dx^n} \text{或} \frac{d^nf(x)}{dx^n}.$$

二阶和二阶以上的导数统称为**高阶导数**.

相应地, $f(x)$称为零阶导数; $f'(x)$称为一阶导数.

二、 高阶导数求法举例

1. 直接法: 由高阶导数的定义逐步求高阶导数.

例1 设 $y = \arctan x$, 求 $f''(0)$, $f'''(0)$.

解 $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\qquad$ $y'' = \left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)' = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$

$$y''' = \left(\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right)' = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$$

$$\therefore\ f''(0) = \left.\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right|_{x=0} = 0; \quad f'''(0) = \left.\frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}\right|_{x=0} = -2.$$

例2 设 $y = x^{\alpha}\ (\alpha \in R)$, 求$y^{(n)}$.

解 $y' = \alpha x^{\alpha-1}$

$$y'' = (\alpha x^{\alpha-1})' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

$$y''' = (\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2})' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$$

$\Lambda\ \Lambda$

$$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\Lambda\ (\alpha-n+1)x^{\alpha-n} \qquad (n \geq 1)$$

若α为自然数n,则

$$y^{(n)} = (x^{n})^{(n)} = n!, \qquad y^{(n+1)} = (n!)' = 0.$$

注意:求n阶导数时,求出1-3或4阶后,不要急于合并,分析结果的规律性,写出n阶导数.(数学归纳法证明)

例3 设 $y=\ln(1+x)$, 求$y^{(n)}$.

解 $y'=\dfrac{1}{1+x}$ $\qquad y''=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$

$y'''=\dfrac{2!}{(1+x)^3}$ $\qquad y^{(4)}=-\dfrac{3!}{(1+x)^4}$

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \qquad (n\geq 1,\ 0!=1)$$

例4 设 $y=\sin x$, 求$y^{(n)}$.

解 $y'=\cos x =\sin(x+\frac{\pi}{2})$

$$y''=\cos(x+\frac{\pi}{2}) =\sin(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=\sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$y'''=\cos(x+2\cdot\frac{\pi}{2})=\sin(x+3\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$y^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$$

同理可得 $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$

三、小结

高阶导数的定义及物理意义;

n阶导数的求法;

1.直接法;　　　　2.间接法.

练 习 题

一、 填空题：

1、 设$y=\dfrac{\sin t}{e^t}$则y''=__________.

2、 设$y=\tan x$, 则y''=__________.

3、 设$y=(1+x^2)\arctan x$，则y''=_________.

4、 设$y=xe^{x^2}$, 则y''=__________.

5、 设$y=f(x^2)$，$f''(x)$存在，则y''=__________.

6、 设$f(x)=(x+10)^6$, 则$f'''(2)$=__________.

7、 设$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$（$a_1,a_2,\cdots,a_n$都是常数），则$y^{(n)}$=____________.

8、设$f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$, 则$f^{(n+1)}(x)$=_____________.

练习题答案

一、1、$-2e^{-t}\cos t$；　　2、$2\sec^2 x\tan x$；

3、$2\arctan x+\dfrac{2x}{1+x^2}$；　　4、$2xe^{x^2}(3+2x^2)$；

5、$2f'(x^2)+4x^2f''(x^2)$；　　6、207360；

7、$n!$；　　8、$(n+1)!$.