极限的运算

授课教师　邹成

一、极限运算法则

定理 设 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$,则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$;

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$;

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$, 其中$B\neq 0$.

证 略

推论1 如果$\lim f(x)$存在,而c为常数,则

$$\lim[cf(x)] = c\lim f(x).$$

常数因子可以提到极限记号外面.

推论2 如果$\lim f(x)$存在,而n是正整数,则

$$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n.$$

二、极限的类型方法.

第一种、代入法.

例1 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+5}$.

解 $\Theta \lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5)=\lim\limits_{x\to 2}x^2-\lim\limits_{x\to 2}3x+\lim\limits_{x\to 2}5$

$$=(\lim_{x\to 2}x)^2-3\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}5$$

$$=2^2-3\cdot 2+5=3\neq 0,$$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-3x+5}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3-\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5)}=\frac{2^3-1}{3}=\frac{7}{3}.$$

第二种：倒数法

例2 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x-1}{x^2+2x-3}$.

解 $\Theta \lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x-3)=0,$ 商的法则不能用

又$\Theta \lim\limits_{x\to 1}(4x-1)=3\neq 0,$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{4x-1}=\frac{0}{3}=0.$$

由无穷小与无穷大的关系,得

$$\lim_{x\to 1}\frac{4x-1}{x^2+2x-3}=\infty.$$

第三种 分解因式法 ($\frac{0}{0}$型)

例3 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$.

解 $x\to1$时,分子,分母的极限都是零. ($\frac{0}{0}$型)

先约去不为零的无穷小因子$x-1$后再求极限.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x+3}=\frac{1}{2}.$$

(消去零因子法)

第四种 有理化法（$\frac{0}{0}$ 型）

例 4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

解 应当先将该函数的分子有理化，消去为零的因子 x，再计算极限，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}.$$

一般地，有 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\frac{1}{n}$，其中 n 为正整数.

例 5 计算$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}$.

解 $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}$

$$=\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{2x+1}+3)}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{(2x+1-9)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{2x+1}+3}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}.$$

第四种 分出无穷小法 $(\frac{\infty}{\infty}$型$)$

例6 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}$.

解 $x\to\infty$时, 分子,分母的极限都是无穷大$(\frac{\infty}{\infty}$型$)$

先用x^3去除分子分母,分出无穷小,再求极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^3}}{7+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^3}}=\frac{2}{7}.$$

(无穷小因子分出法)

小结: 当$a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, m$和$n$为非负整数时有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \Lambda + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \Lambda + b_n} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, \text{当} n = m, \\ 0, \text{当} n > m, \\ \infty, \text{当} n < m, \end{cases}$$

无穷小分出法: 以分母中自变量的最高次幂除分子,分母,以分出无穷小,然后再求极限.

例7 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$.

解 $n\to\infty$时,是无限多个无穷小之和.

先变形再求极限.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\Lambda+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\Lambda+n}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$$

第五种通分法 （$\infty-\infty$ 型）

例8 计算 $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)$.

解 由于括号内两项的极限都是无穷大，因此人们常称为 “$\infty-\infty$” 型极限，不能直接应用定理5． 一般的处理方法是先通分再运用前面介绍过的求极限的方法.

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-4}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x+2}=\frac{3}{4}.$$

第六种　无穷小性质法：

有界函数（常数、有极限函数）与无穷小的积为无穷小

例 9 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 2x}{x}=0.$

证 因为 $\dfrac{\sin 2x}{x}=\dfrac{1}{x}\cdot\sin 2x$，其中 $\sin 2x$

为有界函数，$\dfrac{1}{x}$ 为当 $x\to\infty$ 时的无穷小量

所以无穷小性质 可知 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 2x}{x}=0.$

例如,当 $x\to 0$ 时, $x\sin\dfrac{1}{x}, x^2\arctan\dfrac{1}{x}$ 都是无穷小

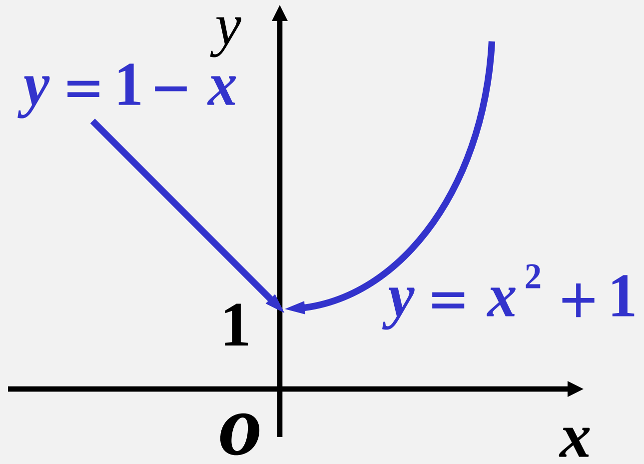
第七种 分段函数左右极限法

例10 设 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0\\ x^2+1, & x\geq 0\end{cases}$,求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

解 $x=0$是函数的分段点,两个单侧极限为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(1-x)=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2+1)=1,$$



左右极限存在且相等,

故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

三、小结

1、极限的四则运算法则及其推论;

2、求极限主要方法;

a.多项式与分式函数代入法求极限;

b.消去零因子法求极限;

c.无穷小因子分出法求极限;

d.利用无穷小运算性质求极限;

e.利用左右极限求分段函数极限.

练 习 题

一、填空题:

1、 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3}{x-3}=$ ____________.

2、 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}=$ ____________.

3、 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})(2-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x})=$ ____________.

4、 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}=$ ____________.

5、 $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=$ ____________.

6、 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\cos x}{e^x+e^{-x}}=$ ____________.

7、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^4-2x^2+x}{3x^2+2x}=$ ____________.

8、 $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}=$ ____________.

二、求下列各极限:

1、 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n})$

2、 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$

3、 $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3})$

4、 $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$

5、 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

6、 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2^{x}-1}{4^{x}+1}$

7、 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{m}-x^{n}}{x^{m}+x^{n}-2}$

练习题答案

一、1、-5；　　2、3；　　3、2；　　4、$\frac{1}{5}$；

5、0；　　6、0；　　7、$\frac{1}{2}$；　　8、$(\frac{3}{2})^{30}$．

二、1、2；　　2、$2x$；　　3、-1；　　4、-2；

5、$\frac{1}{2}$；　　6、0；　　7、$\frac{m-n}{m+n}$．