

# 无穷小与无穷大

从来没有什么像无穷那样打动人类的心灵！

-----希尔伯特

授课教师 邹成

# 一、无穷小

1、定义：极限为零的量称为无穷小。

定义 1 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  (或  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ). 那末  
称函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时为无穷小.

例如,

⊖  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ ,  $\therefore$  函数  $\sin x$  是当  $x \rightarrow 0$  时的无穷小.

⊖  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ ,  $\therefore$  函数  $\frac{1}{x}$  是当  $x \rightarrow \infty$  时的无穷小.

⊖  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ ,  $\therefore$  数列  $\{\frac{(-1)^n}{n}\}$  是当  $n \rightarrow \infty$  时的无穷小.

**注意** (1) 无穷小是变量(0除外), 不能与很小的数混淆;

(2) 零是可以作为无穷小的唯一的数.

## 2、无穷小与函数极限的关系:

**定理 1**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) - A = \alpha(x),$

其中 $\alpha(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小.

**证 必要性** 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 令  $\alpha(x) = f(x) - A$ ,

则有  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ ,  $\therefore f(x) = A + \alpha(x)$ .

**充分性** 设  $f(x) = A + \alpha(x)$ ,

其中 $\alpha(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小,

则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (A + \alpha(x)) = A + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = A$ .

**意义** (1) 将一般极限问题转化为特殊极限问题(无穷小);

(2) 给出了函数  $f(x)$  在  $x_0$  附近的近似表达式  $f(x) \approx A$ , 误差为  $\alpha(x)$ .

### 3、无穷小的运算性质:

**定理2** 在同一过程中,有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

证:略

**注意** 无穷多个无穷小的代数和未必是无穷小.

例如,  $n \rightarrow \infty$  时,  $\frac{1}{n}$  是无穷小,

但  $n$  个  $\frac{1}{n}$  之和为 1 不是无穷小.

**定理3** 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

**推论1** 在同一过程中,有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小.

**推论2** 常数与无穷小的乘积是无穷小.

**例 1** 证明  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ .

**证** 因为  $\frac{\cos x}{x} = \frac{1}{x} \cdot \cos x$ , 其中  $\cos x$

为有界函数,  $\frac{1}{x}$  为当  $x \rightarrow \infty$  时的无穷小量

所以由定理3可知

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x} = 0.$$

例如, 当  $x \rightarrow 0$  时,  $x \sin \frac{1}{x}$ ,  $x^2 \arctan \frac{1}{x}$  都是无穷小



## 二、无穷大

绝对值无限增大的变量称为无穷大.

定义 2 设函数  $f(x)$  在  $x_0$  某一去心邻域内有定义 (或  $|x|$  大于某一正数时有定义). 如果

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \quad (\text{或} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty).$$

则称函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时为无穷大.

特殊情形：正无穷大，负无穷大.

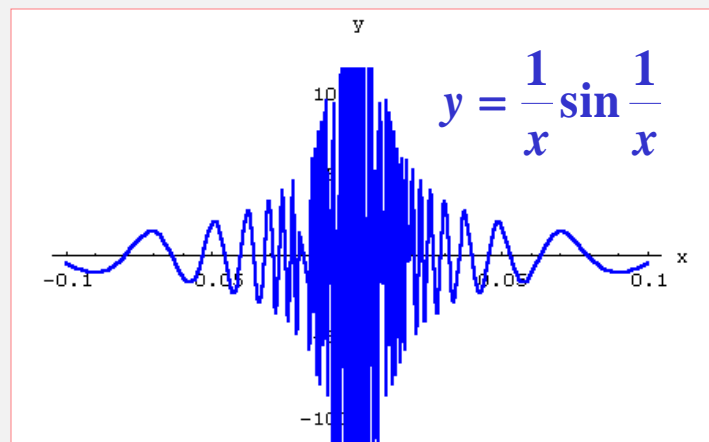
$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = +\infty \quad (\text{或} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = -\infty)$$

**注意** (1) 无穷大是变量,不能与很大的数混淆;

(2) 切勿将  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  认为极限存在.

(3) 无穷大是一种特殊的无界变量,但是无界变量未必是无穷大.

例如,当  $x \rightarrow 0$  时,  $y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$   
是一个无界变量,但不是无穷大.



## 例2 填空：

1.  $x \rightarrow 1$ 时,  $\lg x$ 是无穷 ( ) ; 6.  $x \rightarrow ( )$ 时,  $\lg x$ 是无穷小 ;  
2.  $x \rightarrow 0^+$ 时,  $\lg x$ 是无穷 ( ) ; 7.  $x \rightarrow ( )$ 时,  $\lg x$ 是无穷大 ;  
3.  $x \rightarrow 1$ 时,  $\frac{x-1}{x+1}$ 是无穷 ( ) ; 8.  $x \rightarrow ( )$ 时,  $\frac{1}{x+2}$ 是无穷小 ;  
4.  $x \rightarrow -1$ 时,  $\frac{4}{x+1}$ 是无穷 ( ) ; 9.  $x \rightarrow ( )$ 时,  $\frac{x-1}{x+2}$ 是无穷大 ;  
5.  $x \rightarrow 0^+$ 时,  $e^{\frac{1}{x}}$ 是无穷 ( ) ; 10.  $x \rightarrow ( )$ 时,  $2^{\frac{1}{x}}$ 是无穷小 ;

解

1. 小, 2. 大, 3. 小, 4. 大, 5. 大,  
6.  $x \rightarrow 1$  ; 7.  $x \rightarrow 0^+$  或  $+\infty$  ; 8.  $x \rightarrow \infty$  ; 9.  $x \rightarrow -2$  ; 10.  $x \rightarrow 0^-$

### 三、无穷小与无穷大的关系

**定理4** 在同一过程中, 无穷大的倒数为无穷小;  
恒不为零的无穷小的倒数为无穷大.

证 略

**意义** 关于无穷大的讨论,都可归结为关于无穷小的讨论.

**例3** 求  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{x^2+x-2}$ .

**解**  $\because \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x - 2) = 0$   
又  $\because \lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1) \neq 0$

商的法则不能用

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x - 1} = 0$$

由无穷小与无穷大的关系,得

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{x^2+x-2} = \infty.$$

## 四、小结

无穷小与无穷大是相对于过程而言的.

1、主要内容: 定义、性质、关系.

2、几点注意:

- (1) 无穷小 (大) 是变量, 不能与很小 (大) 的数混淆, 零是唯一的无穷小的数;
- (2) 无穷多个无穷小的代数和 (乘积) 未必是无穷小;
- (3) 无界变量未必是无穷大.

## 练习题

一、填空题:

1、凡无穷小量皆以\_\_\_\_\_为极限.

2、在\_\_\_\_\_条件下,直线  $y = c$  是函数  $y = f(x)$  的水平渐近线.

3、 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  \_\_\_\_\_  $f(x) = A + \alpha$  ,  
( 其中  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha = 0$  ).

4、在同一过程中,若  $f(x)$  是无穷大,  
则\_\_\_\_\_是无穷小.

二、问:当  $x \rightarrow \square$  时,函数  $y = \frac{1+2x}{x}$

是无穷大(小)?

三、问: 函数  $y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ , 当

$x \rightarrow +\infty$  时,这个函数是不是无穷大?

# 练习:

## 1. 判断下列对错:

- (1) 无穷大量就是其值越来越大的量; ( )
- (2) 无穷小量就是趋于0的量; ( )
- (3) 无穷小量都是变量; ( )
- (4)  $10^{100}$ 是一个很大的数, 为无穷大; ( )
- (5) 无穷小与无穷大是倒数关系. ( )

## 2. 填空:

- 1)  $x \rightarrow 0$ 时,  $3x$ 是无穷 ( ) ;
- 2)  $x \rightarrow 0^+$ 时,  $\log_2 x$ 是无穷 ( ) ;
- 3)  $x \rightarrow \infty$ 时,  $\frac{1}{x+1}$ 是无穷 ( ) ;
- 4)  $x \rightarrow -1$ 时,  $\frac{1}{x+1}$ 是无穷 ( ) ;
- 5)  $x \rightarrow 0^-$ 时,  $3^{\frac{1}{x}}$ 是无穷 ( ) ;
- 6)  $x \rightarrow ( )$ 时,  $\log_{0.5} x$ 是无穷小 ;
- 7)  $x \rightarrow ( )$ 时,  $\ln x$ 是无穷大 ;
- 8)  $x \rightarrow ( )$ 时,  $\frac{2}{x+1}$ 是无穷小 ;
- 9)  $x \rightarrow ( )$ 时,  $\frac{x-1}{x+2}$ 是无穷大 ;
- 10)  $x \rightarrow ( )$ 时,  $2^{\frac{1}{x}}$ 是无穷小 ;