初等函数

1，基本初等函数
2，复合函数
3，初等函数
4，函数基本性态

授课教师 邹成

一. 基本初等函数

幂函数 $y = x^{a}$(a 为任意实数);

指数函数 $y = a^{x}$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$);

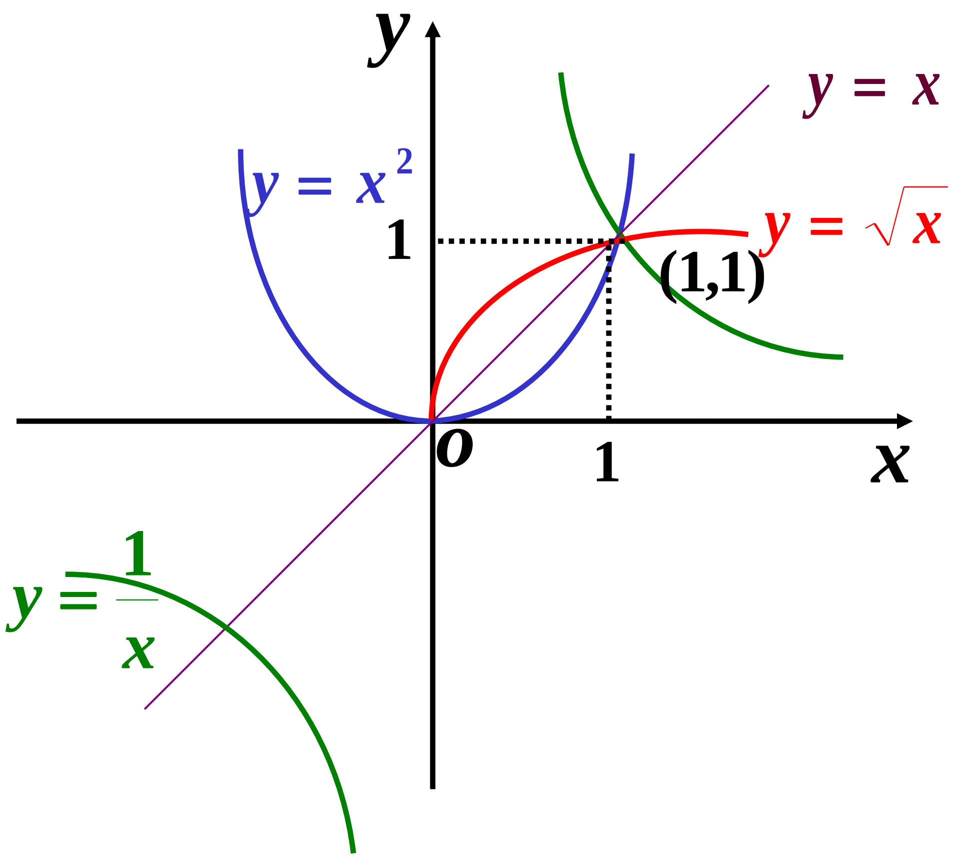
对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$);

三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$;

反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$;

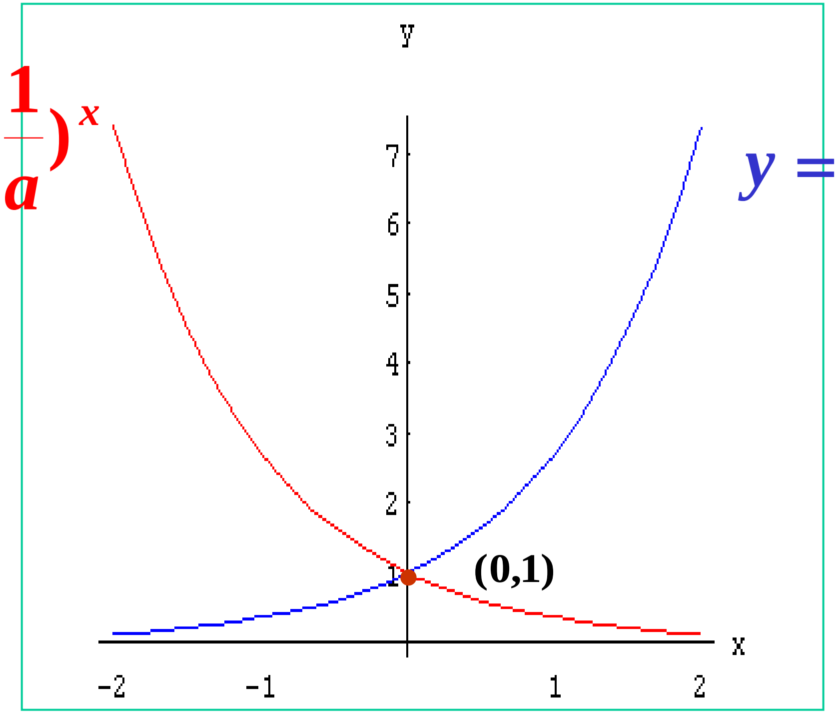
等五类函数统称为基本初等函数 .

1、幂函数 $y = x^{\mu}$ （μ是常数）



2、指数函数 $y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$ $\quad y = e^x$

$y = (\frac{1}{a})^x$

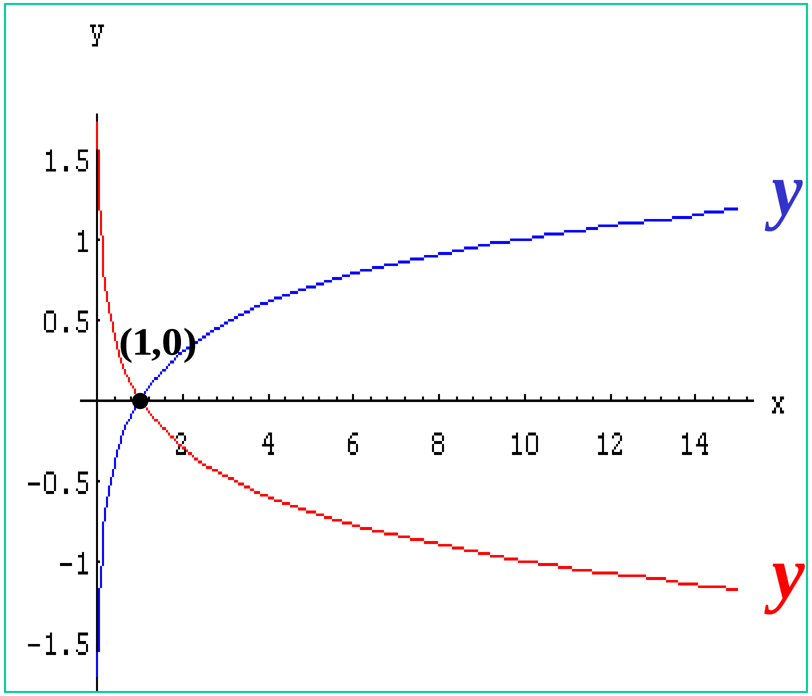


$y = a^x$

$(a > 1)$

3、对数函数 $y=\log_a x \quad (a>0, a\neq 1)$ $y=\ln x$

$y=\lg x$



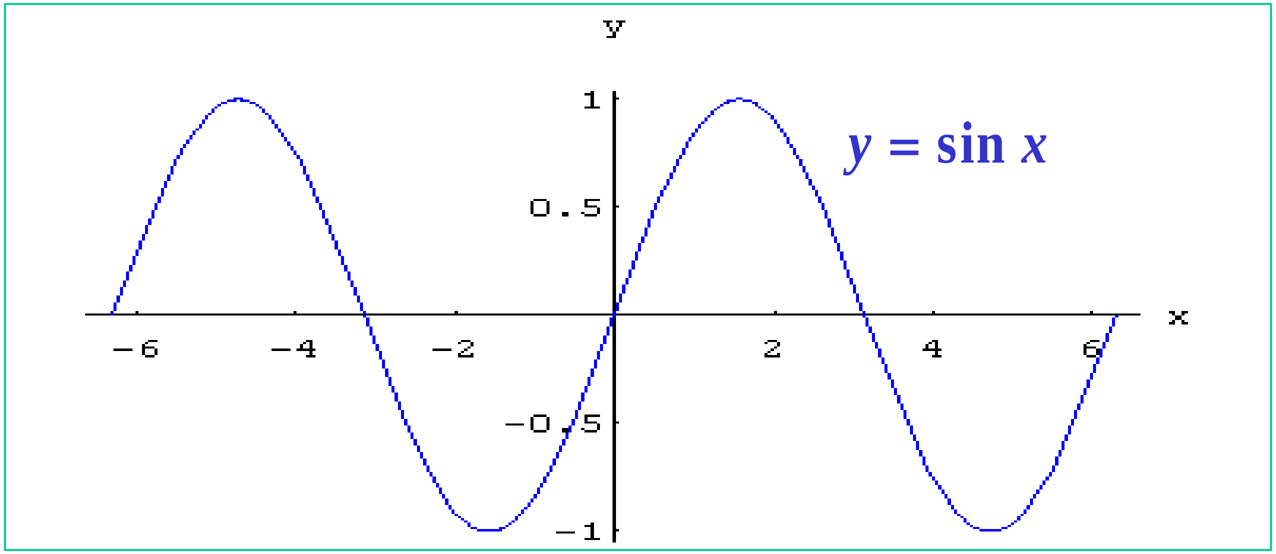
$y=\log_a x$

$(a>1)$

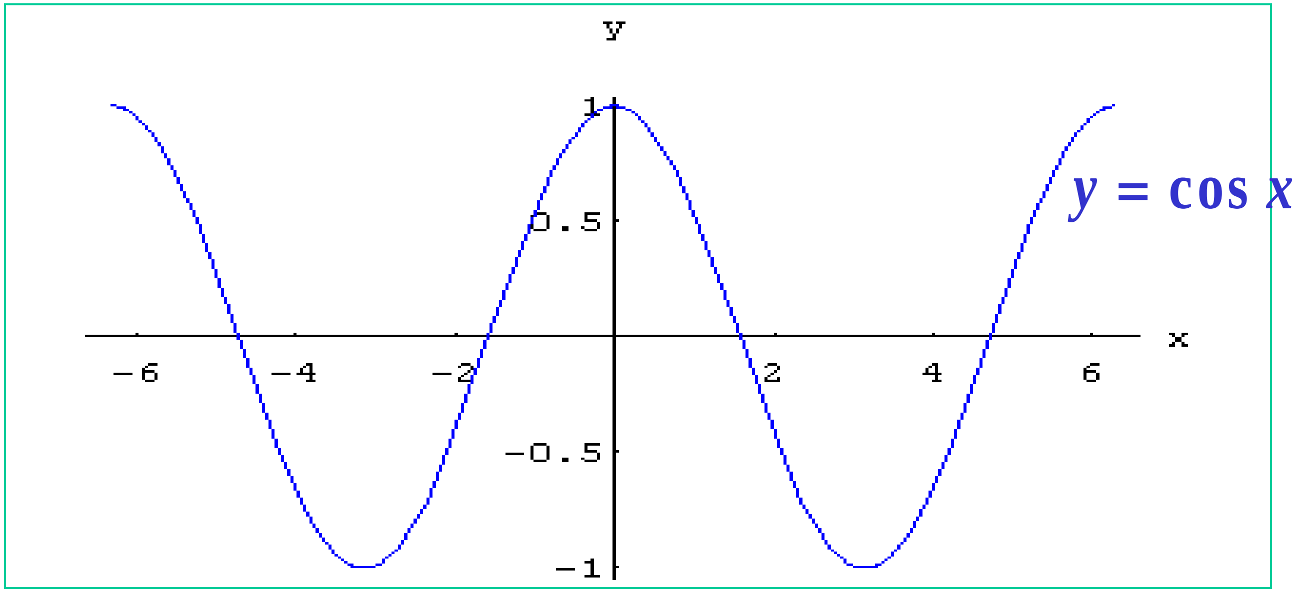
$y=\log_{\frac{1}{a}} x$

4、三角函数

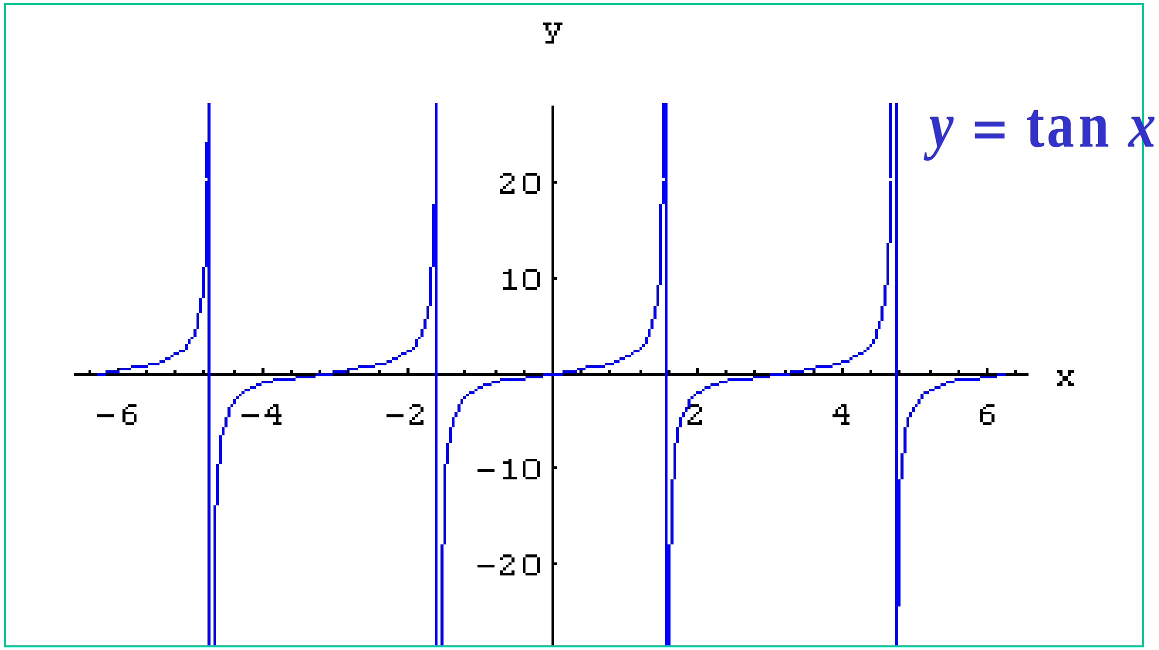
正弦函数 $y = \sin x$



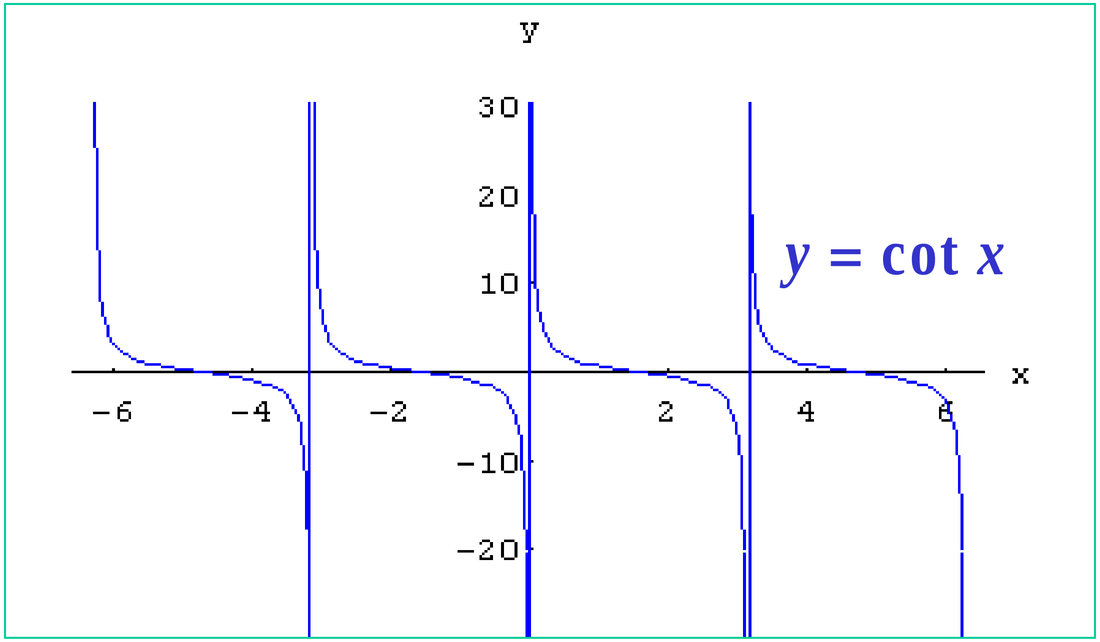
余弦函数 $y = \cos x$



正切函数 $y = \tan x$

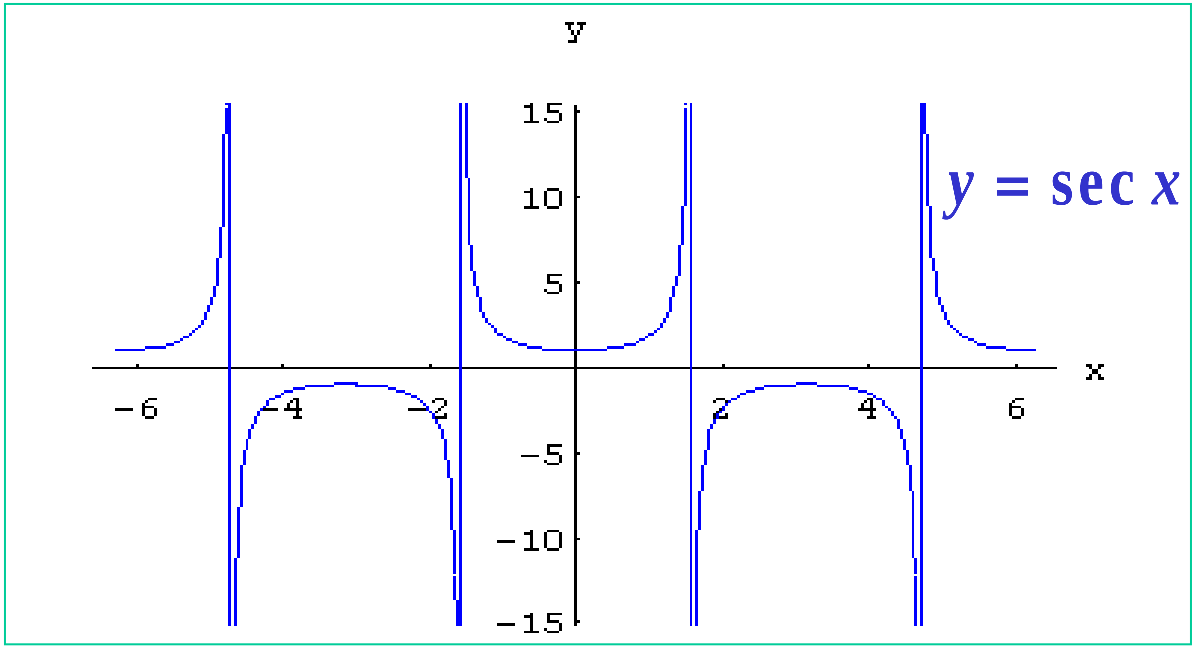


余切函数 $y = \cot x$

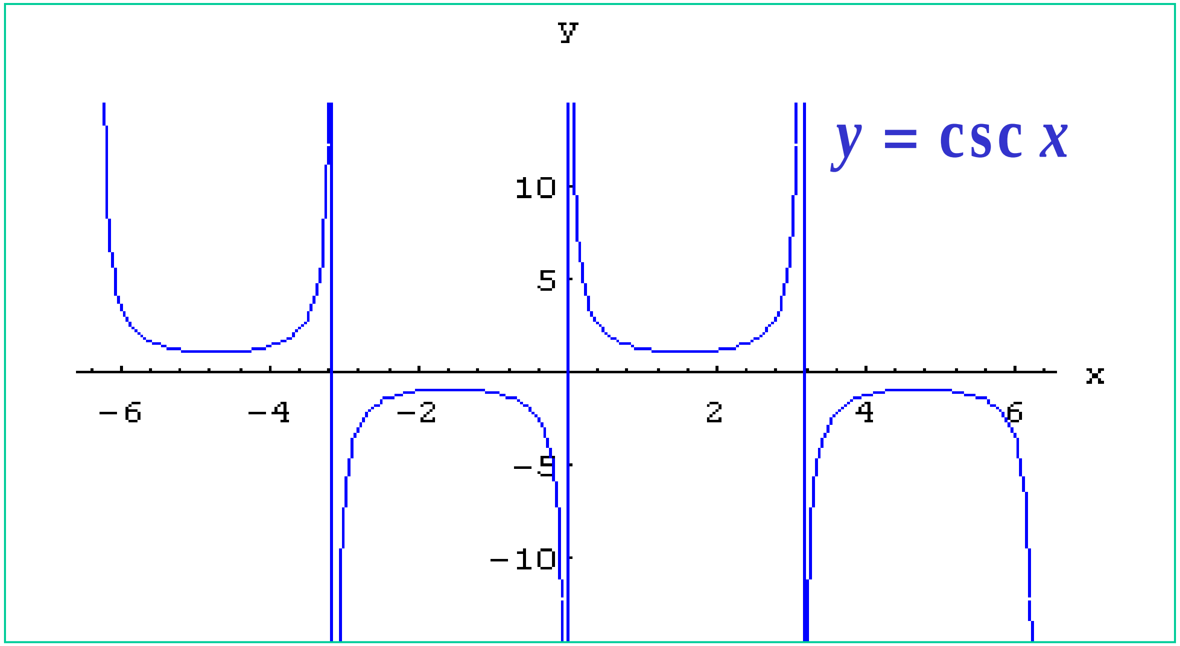


正割函数 $y = \sec x$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$



余割函数 $\quad y = \csc x \quad \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$



特殊角的三角函数值

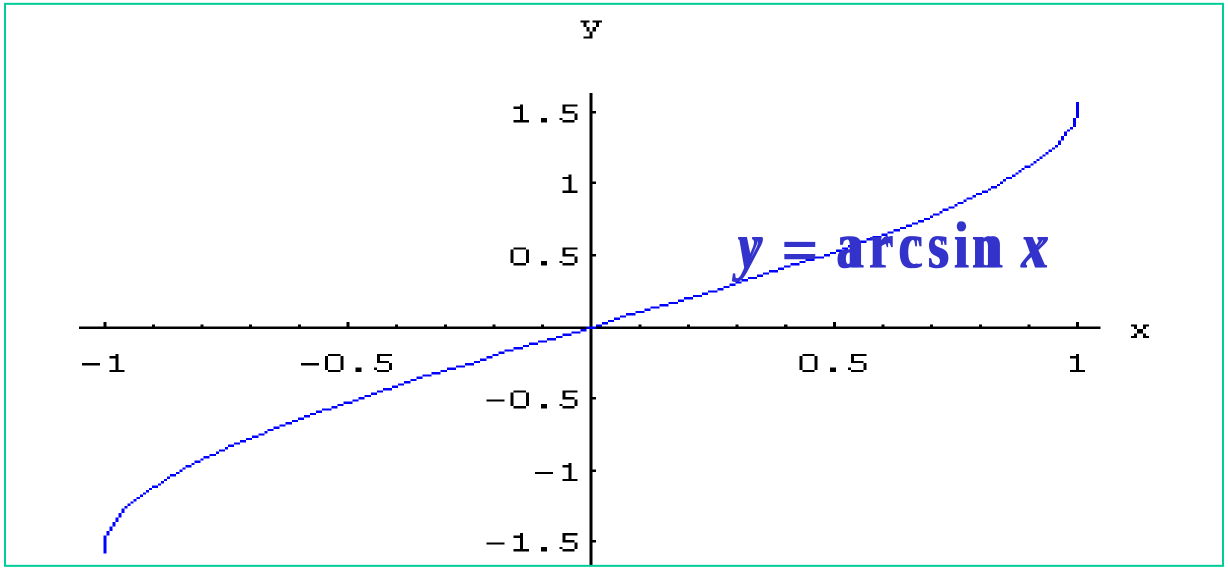
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	0	不存在	0
$\cot x$	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	不存在	0	不存在

5、反三角函数

定义域： $x \in [-1,1].$

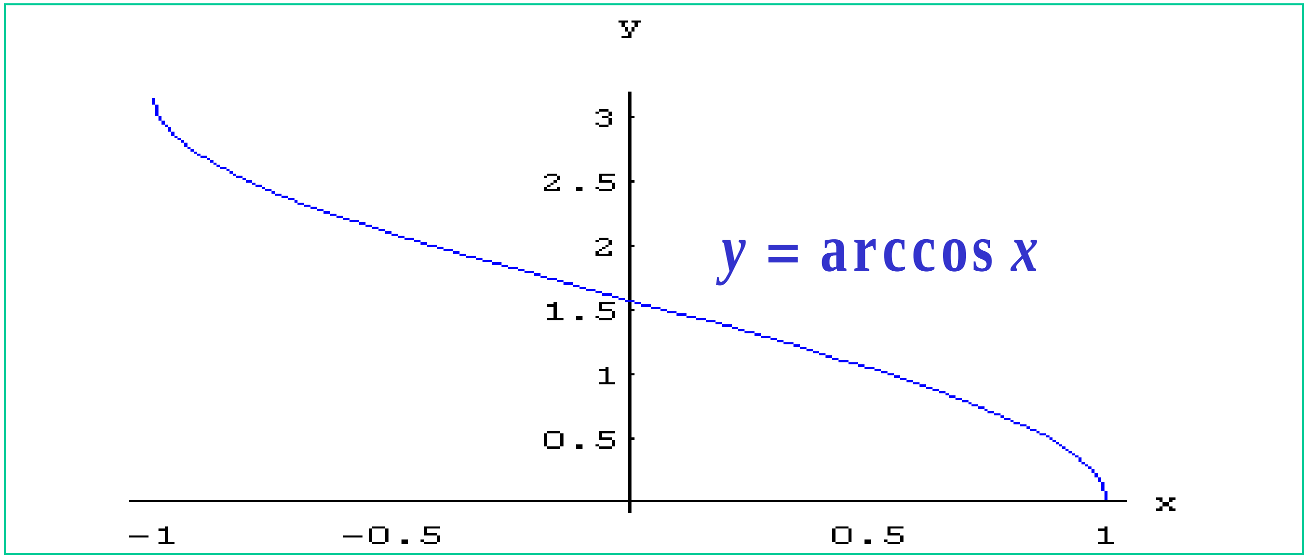
反正弦函数 $y = \arcsin x$

值域： $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$



如 $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \ldots\ldots$

反余弦函数 $y = \arccos x$

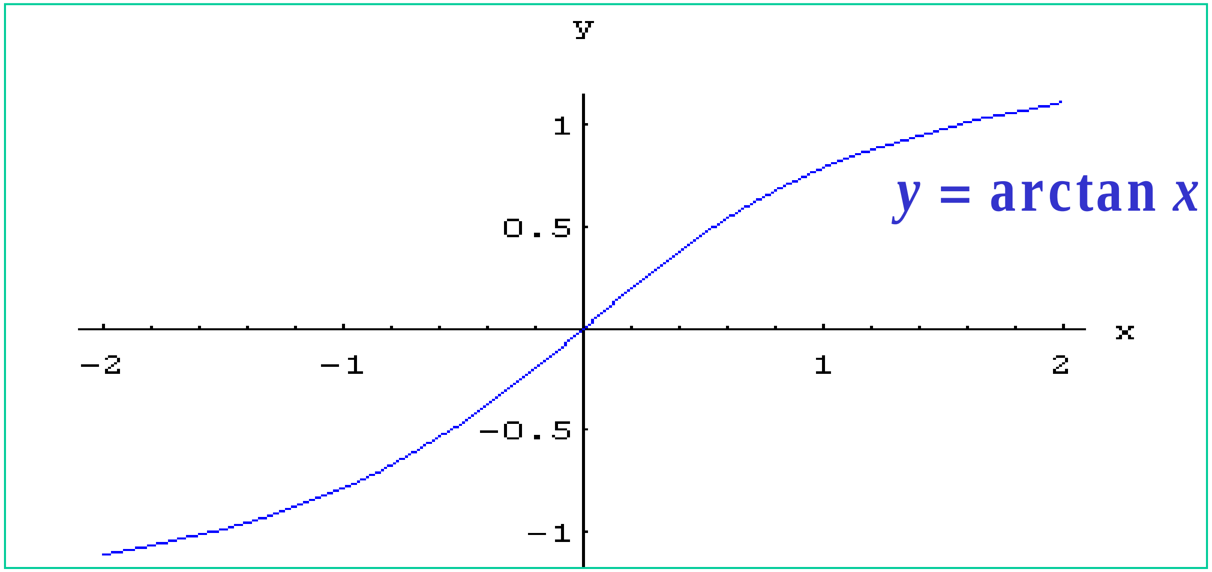


定义域： $x \in [-1, 1]$.

如 $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}, \arccos 1 = 0 \ldots\ldots$

值域： $y \in [0, \pi]$.

反正切函数 $y = \arctan x$



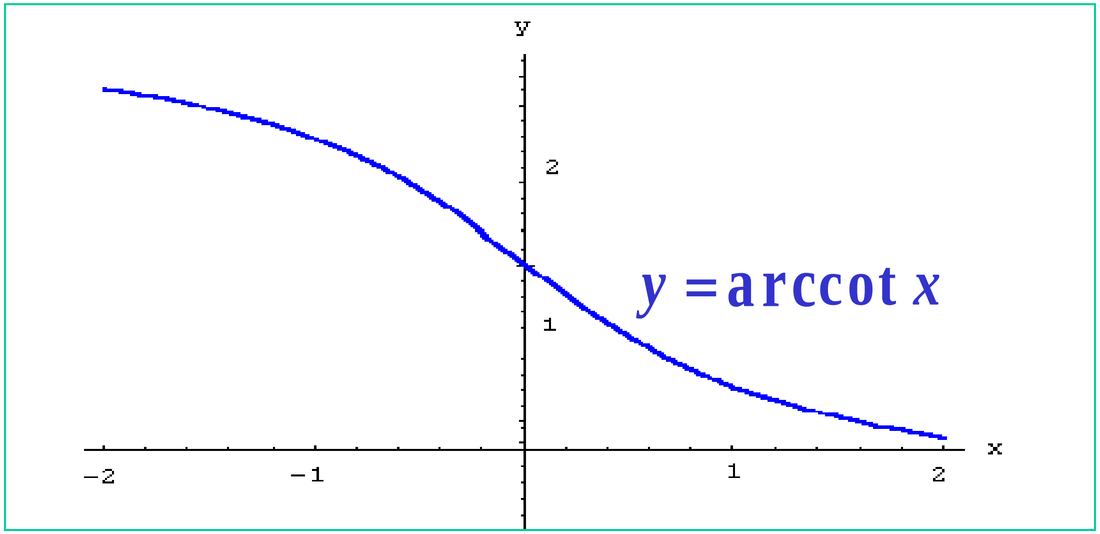
定义域: $x \in (-\infty, +\infty)$.

值域: $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$

定义域: $x \in (-\infty, +\infty)$.

值域: $y \in (0, \pi)$.



幂函数,指数函数,对数函数,三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

由基本初等函数和常数经过有限次四则运算得到的函数，称为简单函数。

二、复合函数

设 $y=\sqrt{u},\ u=1-x^2,\ \longrightarrow\ y=\sqrt{1-x^2}$

定义：设函数 $y=f(u)$ 的定义域 D_f，而函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 Z_φ，若 $D_f \cap Z_\varphi \neq \varnothing$，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为 x 的<u>复合函数</u>.

$x \leftarrow$ 自变量，$u \leftarrow$ 中间变量，$y \leftarrow$ 因变量,

注意: 1.不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的;

例如 $y=\arcsin u,\ \ u=2+x^2;$ $y\neq\arcsin(2+x^2)$

2.复合函数可以由两个以上的函数经过复合构成.

例如 $y=\sqrt{\tan x},$ 由 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=\tan x$ 复合的。

例如 $y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}},$ $y=\sqrt{u},\quad u=\cot v,\quad v=\frac{x}{2}.$

例1 指出 $y=e^{\sin x}, y=\arccos^2(x-1), y=\lg^3\sqrt{x^2+1}$ 是由哪些函数复合而成的.

解 $y=e^{\sin x}$ 是由 $y=e^u$ 和 $u=\sin x$ 复合而成的。

$y=\arccos^2(x-1)$ 是由 $y=u^2$ 和 $u=\arccos v$

$v=x-1$ 复合而成的。

$y=\lg^3\sqrt{x^2+1}$ 是由 $y=u^3$，$u=\lg v$

$v=\sqrt{w}$ 和 $w=x^2-1$ 复合而成的。

例2 指出 $y=(3x+5)^{10}, y=\sqrt{\log_a(\sin x+2^x)}$ 是由哪些函数复合而成的.

解 $y=(3x+5)^{10}$ 是由 $y=u^{10}$ 和 $u=3x+5$ 复合而成的. $y=\sqrt{\log_a(\sin x+2^x)}$ 是由 $y=\sqrt{u}, u=\log_a v$, $v=\sin x+2^x$ 复合而成的.

三、初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用<u>一个式子表示</u>的函数,称为<u>初等函数</u>.

四、函数的基本性态

1. 奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域关于原点对称，如果对于定义域中的任何 x，都有 $f(x) = f(-x)$，则称 $y = f(x)$ 为偶函数；如果有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数. 不是偶函数也不是奇函数的函数，称为非奇非偶函数.

例 3 证明$f(x)=x^4\sin x^3$为奇函数.

证 因为$f(x)=x^4\sin x^3$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,

且有 $f(-x)=(-x)^4\sin(-x)^3=-x^4\sin x^3=-f(x)$,

所以该函数为奇函数

注：小结，关于奇偶性

（1）奇•奇=偶　　奇+奇=奇

（2）奇•偶=奇

（3）偶•偶=偶　　偶+偶=偶

（4）奇函数与奇函数复合为奇函数

（5）偶函数与偶函数复合为偶函数

（6）偶函数与奇函数复合为偶函数

PS:(1),(2),(3)需记住，(4),(5),(6)了解即可

2. 周期性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，若存在正数 T，使得对于一切实数 x，都有：

$$f(x+T) = f(x).$$

则称 $y = f(x)$ 为周期函数.

规定： 若其中存在一个最小正数 T 满足上式，则规定 T 为周期函数 $f(x)$的最小正周期，简称周期.

例如 y=sin$x$, y=tan$x$的周期分别为函数 2π，π .

3. 单调性

设 x_1 和 x_2 为区间 (a, b) 内的任意两个数，

若当 $x_1 < x_2$ 时，函数 $y = f(x)$ 满足

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称该函数在区间 (a, b) 内单调增加，或称递增；

若当 $x_1 < x_2$ 时有

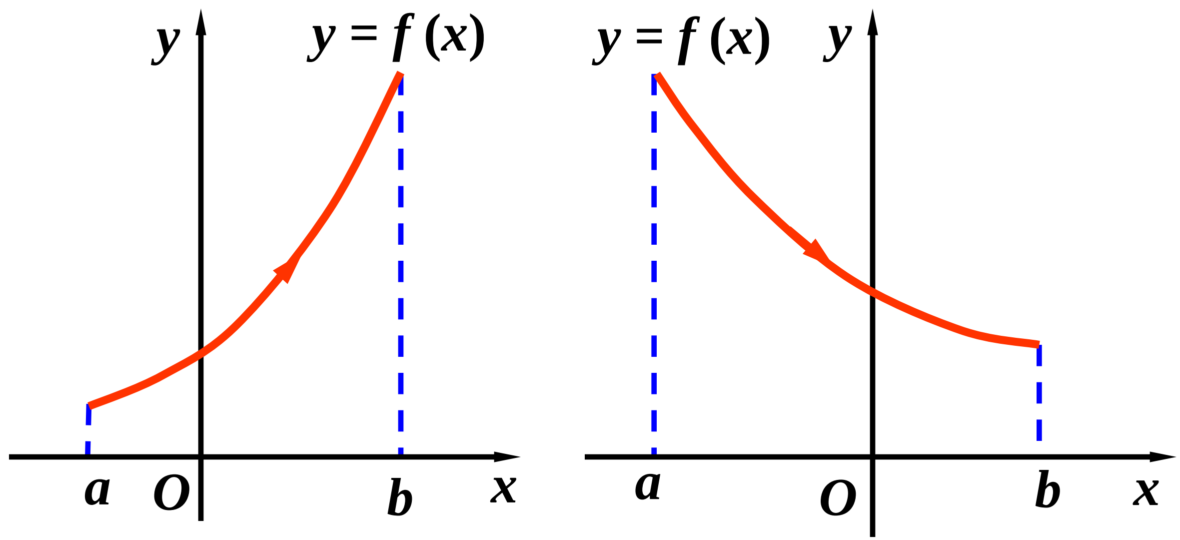
$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称该函数在区间 (a, b) 内单调减少，或称递减；

例如，$y = \tan x$在$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$内递增，$y = \cot x$在 $(0, \pi)$ 内递减 .

函数的递增、递减统称函数是单调的. 从几何直观来看，递增，就是当 x 自左向右变化时，函数的图形上升；

递减，就是当 x 自左向右变化时，函数的图形下降 .



4. 有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在一个正数 M，当 $x \in I$ 时，恒有

$$|f(x)| \leq M$$

成立，则称函数 $f(x)$ 为在 I 上的有界函数， 如果不存在这样的正数 M，则称函数 $f(x)$ 为在 I 上的无界函数 .

五、小结

函数的分类:

- 函数
  - 初等函数
    - 代数函数
      - 有理函数
        - 有理整函数(多项式函数)
        - 有理分函数(分式函数)
      - 无理函数
    - 超越函数
  - 非初等函数(分段函数, 有无穷多项等函数)

练 习 题

一、填空题:

1、幂函数，指数函数，对数函数，三角函数和反三角函数统称__________.

2、函数 $f(x)$ 的定义域为$[1,3]$，则函数 $f(\ln x)$ 的定义域为__________.

3、由函数 $y=e^{u}$，$u=x^{2}$ 复合而成的函数为______.

4、函数 $y=\sin\ln 2x$ 由__________复合而成.

$y=\arctan^{2}\sin(x-3)$由__________复合而成.