初等函数的连续性

授课教师 邹成

连续函数的运算法则及初等函数的连续性

定理 1 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在点 x_0 处连续，则它们的和 $f(x)+g(x)$、差 $f(x)-g(x)$、积 $f(x)\cdot g(x)$、商 $\dfrac{f(x)}{g(x)}\,(g(x)\neq 0)$ 在点 x_0 处连续.

定理 2 如果函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 连续，且 $u_0=\varphi(x_0)$，而函数 $y=f(u)$ 在点 u_0 连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 处连续.

由于基本初等函数在其定义域内每个区间上的图形都是一条连续的曲线，因此基本初等函数在其定义域内是连续的．根据基本初等函数的连续性及本节定理 1、定理 2，可得：

定理 3 所有初等函数在其定义区间内都是连续的.

求函数 $f(x)=\dfrac{x+1}{(x+4)(x-2)}$ 的连续区间.

因为分段函数一般不是初等函数，所以定理3对分段函数一般不成立．在讨论分段函数的连续性时，要根据连续的定义讨论分界点的连续性.

解 因为函数 $f(x)$ 是初等函数，所以根据定理 3，函数的连续区间就是它的定义区间．故所求函数的连续区间为 $(-\infty,-4)\cup(-4,2)\cup(2,+\infty)$.

例 6　设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin x+b, & x<0,\\ a, & x=0,\\ x\sin\dfrac{1}{x}+2, & x>0,\end{cases}$ 问 a，b 取何值时，$f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

解　要使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，需有 $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=f(0)$．由于

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}\left(\frac{1}{x}\sin x+b\right)=1+b,$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\left(x\cdot\sin\frac{1}{x}+2\right)=2,$$

$$f(0)=a,$$

因此，要使函数连续，需使 $1+b=2=a$，故

$$a=2，b=1.$$

如果 $f(x)$ 是初等函数，x_0 是其定义区间内的点，则 $f(x)$ 在 x_0 点连续．于是，根据连续性的定义，有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，这就是说，**初等函数对定义域内的点求极限，就是求它的函数值**.

注意到 $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$，因此有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$．这表明，**对于连续函数，极限符号与函数符号可以交换次序**，利用这一点，可方便地求出函数的极限.

例 8　求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln\sin x$．

例 7　求 $\lim\limits_{x\to 0} \cos(1+x)^{\frac{1}{x}}$．

解　因为 $f(x)=\ln\sin x$ 是初等函数，它的一个定义区间为 $(0,\pi)$，又 $x=\dfrac{\pi}{2}\in(0,\pi)$，所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln\sin x=\ln\sin\frac{\pi}{2}=0\ .$$

$\lim\limits_{x\to 0} \cos(1+x)^{\frac{1}{x}}=\cos\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\cos e$．

总之

基本初等函数**在定义区间内**连续

连续函数的**四则运算**的结果连续

连续函数的**复合函数**连续

} 初等函数在定义区间内连续

注意　1. 初等函数仅在其定义区间内连续，　但在其定义域内不一定连续.

例如，$y=\sqrt{\cos x-1}$, $D: x=0,\pm 2\pi,\pm 4\pi,\Lambda$

在这些孤立点的领域内没有定义.

$$y=\sqrt{x^2(x-1)^3},\ D: x=0 \quad \text{及} \quad x\geq 1.$$

在0点的领域内没有定义，函数在区间 $[1,+\infty)$ 上连续.

2. 初等函数求极限的方法(代入法)

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \quad (x_0\in \text{定义区间}).$$

闭区间上连续函数的性质

一、有界定理

定理1. 在闭区间上连续的函数在该区间上必定有界。

二、最值定理

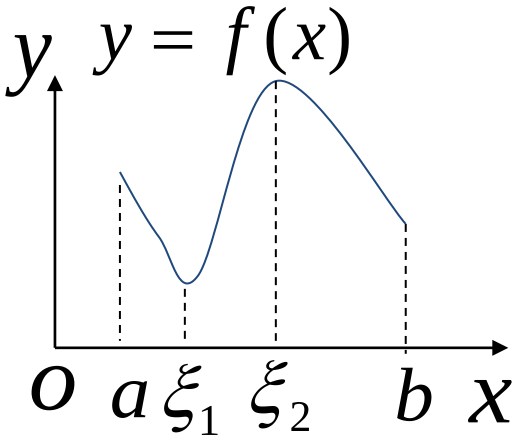
定理2. 在闭区间上连续的函数 在该区间上一定有最大值和最小值.

即: 设**f(x)在[a, b]上连续**, 则$\exists\, \xi_1, \xi_2 \in [a,b]$, 使

$$f(\xi_1)=\min_{a\le x\le b} f(x)$$

$$f(\xi_2)=\max_{a\le x\le b} f(x)$$

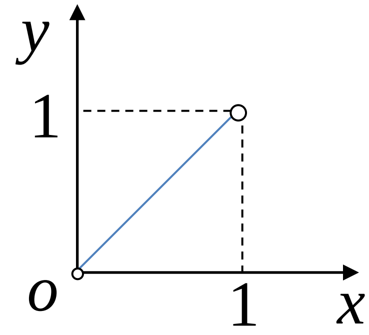
(证明略)



注意: 若函数在开区间上连续, 或在闭区间内有间断点， 结论不一定成立 .

例如， $y = x,\ x \in (0,1)$

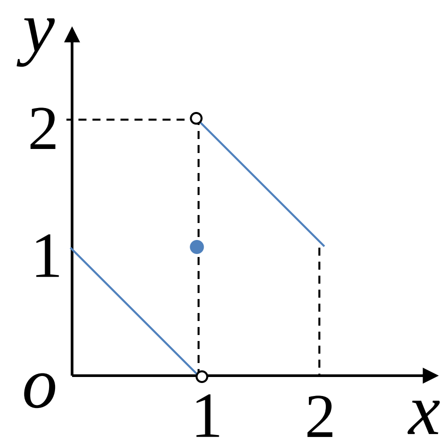
无最大值和最小值



又如，

$$f(x)=\begin{cases} -x+1, & 0\le x<1 \\ 1, & x=1 \\ -x+3, & 1<x\le 2 \end{cases}$$

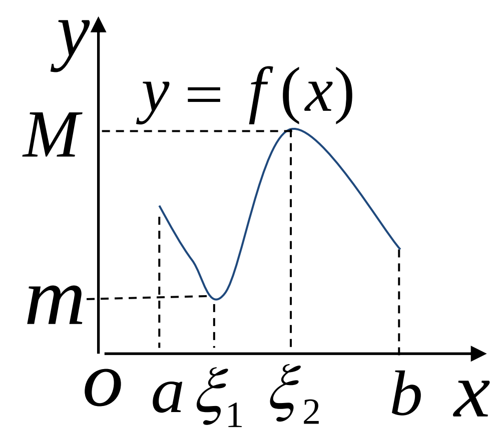
也无最大值和最小值



定理3. 在闭区间上连续的函数在该区间上有界.

证: 设 $f(x)\in C[a,b]$, 由定理 1 可知有

$$M=\max_{x\in[a,b]} f(x),\quad m=\min_{x\in[a,b]} f(x)$$



故 $\forall x\in[a,b]$, 有 $m\le f(x)\le M$,

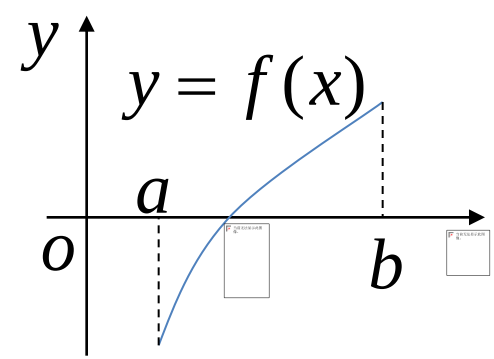
因此 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

二、介值定理

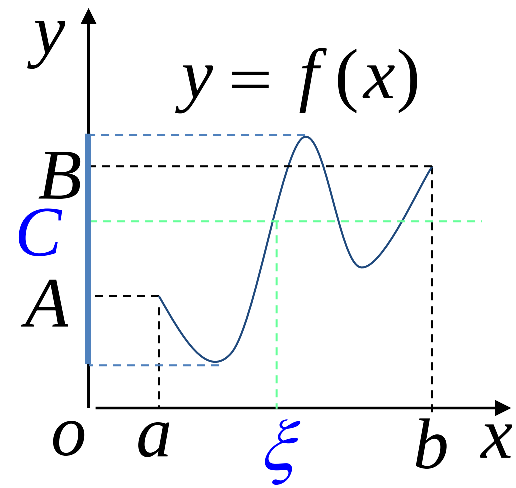
定理4. (零点定理) $f(x)\in C[a,b]$,

且 $f(a)f(b)<0$ $\Longrightarrow$ 至少有一点

$\xi\in(a,b)$, 使 $f(\xi)=0$. (证明略)



定理5. (介值定理) 设 $f(x)\in C[a,b]$, 且 $f(a)=A$, $f(b)=B$, $A\neq B$, 则对 A 与 B 之间的任一数 C, 至少有一点 $\xi\in(a,b)$, 使 $f(\xi)=C$.



证: 作辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-C$$

则 $\varphi(x)\in C[a,b]$, 且

$$\varphi(a)\,\varphi(b)=(A-C)(B-C)<0$$

故由零点定理知, 至少有一点 $\xi\in(a,b)$, 使 $\varphi(\xi)=0$, 即

$$f(\xi)=C.$$

推论: 在闭区间上的连续函数必取得介于最小值与最大值之间的任何值 .

例1. 证明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根 .

证: 显然 $f(x)=x^3-4x^2+1\in C[0,1]$, 又

$$f(0)=1>0,\quad f(1)=-2<0$$

故据零点定理, 至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使 $f(\xi)=0$,

即

$$\xi^3-4\xi^2+1=0$$

例 40 证明方程 $x^3-3x=1$ 在区间 $(1,2)$ 内至少有一根.

证明 设 $f(x)=x^3-3x-1$, 易知函数 $f(x)$ 在闭区间 $[1,2]$ 上连续, 又

$$f(1)=-3<0,\quad f(2)=1>0$$

根据零点存在定理, 在 $(1,2)$ 内至少存在一点 ξ, 使得

$$f(\xi)=0$$

即

$$\xi^3-3\xi-1=0\quad(1<\xi<2)$$

即方程 $x^3-3x=1$ 在区间 $(1,2)$ 内至少有一根 ξ.

内容小结

1. 闭区间上连续函数的性质

有界性定理　最大最小值定理

零点定理　介值定理

注意应用条件: (1) 闭区间;　(2) 连续函数.

2. 证明方程有根的解题思路

(1) 直接法: 先利用最大最小值定理, 再利用介值定理;

(2) 辅助函数法: 先作辅助函数 $F(x)$, 再利用零点定理.

练习　证明方程 $x^3+x-1=0$ 只有一个实根.