极限与连续

函数的极限

数学是符号加逻辑。

——罗素

授课教师　邹成

引例　一个贮水池中有5000升的纯水，现用含盐30克/升的盐水以25升/分的速度注入水池中，求（1）经过t分钟后水池中盐的浓度；（2）随着时间的推移，池中盐的浓度将如何变化？

如何回答这个问题呢？这就是本章要研究的内容——函数的极限. **极限研究的就是这一变化趋势**，其思想可以追溯到古希腊阿基米德（Archimedes，公元前287年—公元前212年）时代，但直到19世纪才由维尔斯特拉斯(Weierstrass，1815—1892，德国数学家)加以完善，形成现代的极限公理体系.

在研究函数的极限时，自变量x的变化趋势一般有以下两种：

（1）自变量x的绝对值无限增大，记为：$x \to \infty$
（2）自变量x无限接近某一确定常数，记为：$x \to x_0$

一、$x \to \infty$自变量趋于无穷值时函数$f(x)$极限的定义

(1) $x \to +\infty$ 时函数 $f(x)$极限

如果当x取正值，并且无限增大时，函数 $f(x)$无限地接近于某一确定的常数a，则称常数a是函数 $f(x)$ 当 $x \to +\infty$时的极限，或称当 $x \to +\infty$时，函数 收敛于a

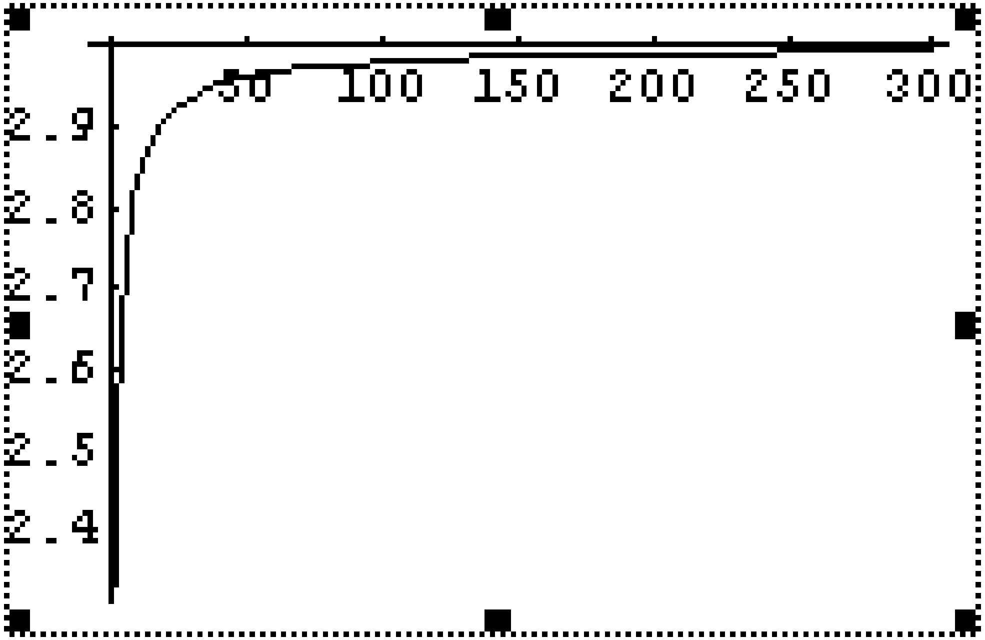
记为 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$

例1：求

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2x-1}{x^2-1}$$ =3

利用Mathematica画出如右图

```
In[1]:= f[x_]:=(3x^2-2x-1)/(x^2-1)
        Plot[f[x],{x,2,300}]
```



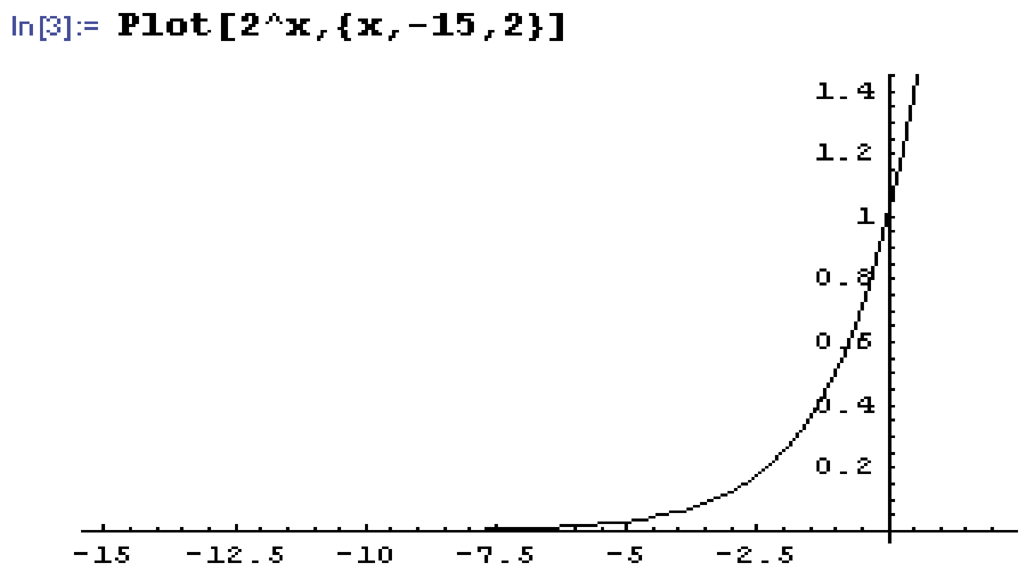
（2）当 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

如果当x取负值，且$|x|$无限增大时，函数 $f(x)$ 无限地接近于某一确定的常数a，则称常数a是函数 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的极限，或称当 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 收敛于a

记为 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$

例如 $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x = 0$

利用Mathematica画出图形。如右图



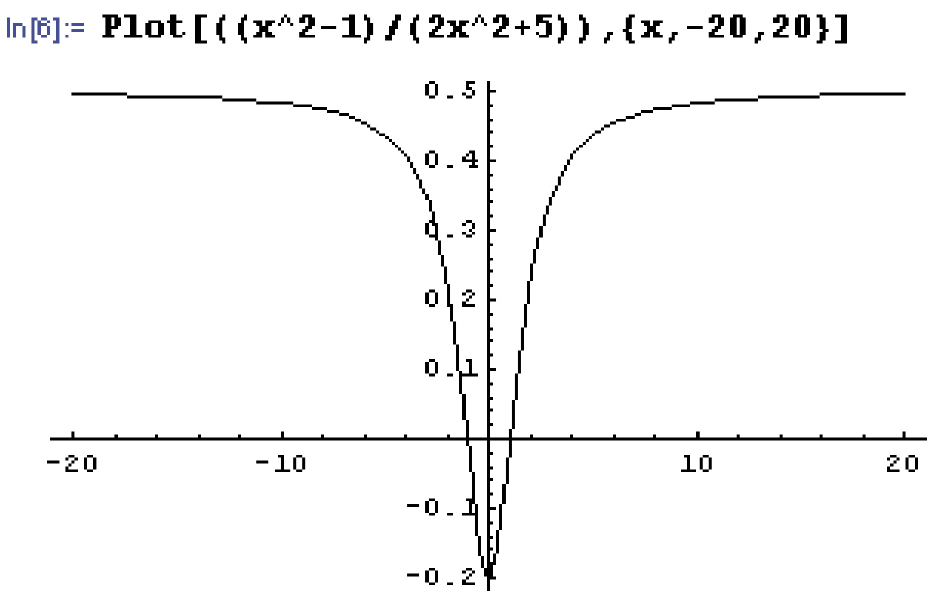
（3）当 $x \to \infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

如果当x的绝对值|x|无限增大时，函数 $f(x)$ 无限地接近于某一确定的常数a，则称常数a是函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限，或称当 $x \to \infty$时，函数 $f(x)$收敛于a

记为 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$

例如 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 + 5} = \dfrac{1}{2}$

利用Mathematica画出图形。如右图



指出：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ 称为**单边极限**

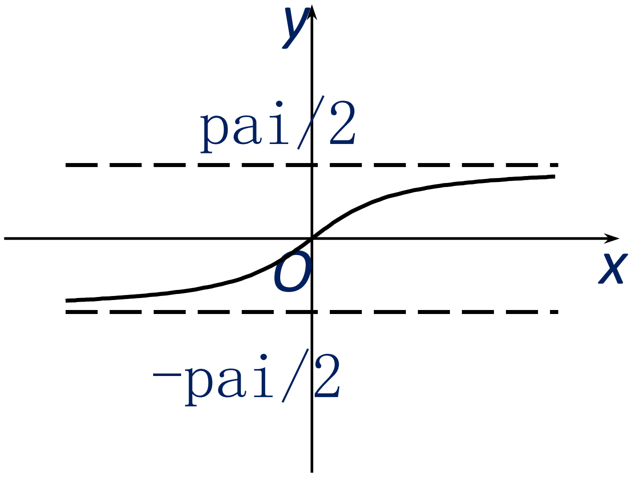
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 称为**双边极限**

定理1：$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$

指出：常用此定理判断极限是否存在

例 判断极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 是否存在

解 如图 所示



$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}\quad \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$$

所以， $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在

2.自变量趋于有限值时函数 极限的定义

（1）当x 时，函数 的极限

如果当x 从 的右侧无限地接近x_0时，函数 无限地接近于某一确定的常数a，则称常数a是函数 $f(x)$ 当x 时的右极限，或称函数 $f(x)$ 从x_0右侧收敛于a。记为 = a

（2）当x 时，函数 $f(x)$的极限

如果当x从 的左侧无限地接近 时，函数 $f(x)$

无限地接近于某一确定的常数a，则称常数a是函数 $f(x)$ 当x→ x_0 时的左极限，或称函数 $f(x)$ 从 x_0 左侧收敛于a 。记为 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = a$

例如函数

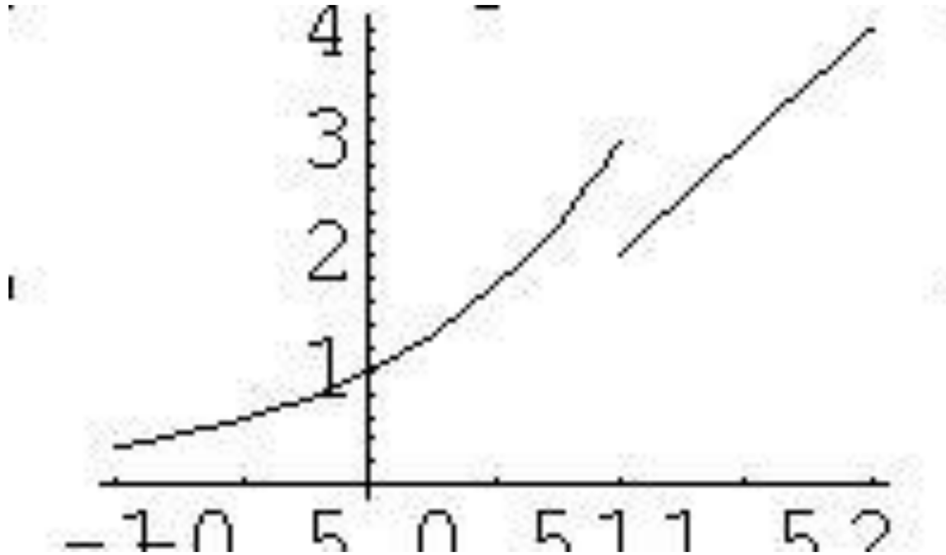
$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x>1 \\ 3^x, & x<1 \end{cases}$$

利用Mathematica画出图形。如右图

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3$$

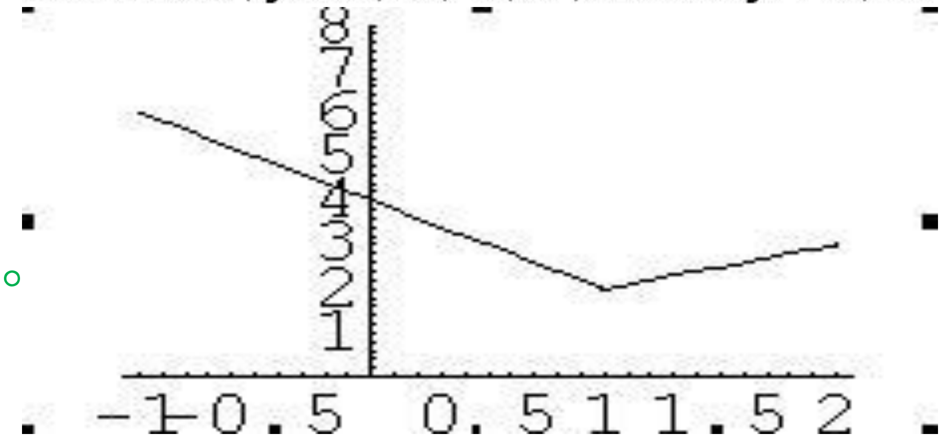
```
f[x_]:=2x/;1<x<2
g[x_]:=3^x/;-1<x<1
Plot[{f[x],g[x]},{x,-1,2}]
```



（3）当x$\rightarrow x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

如果当 x 从 x_0的无限地接近x_0时，函数 $f(x)$ 无限地接近于某一确定的常数a，则称常数a是函数 $f(x)$ 当x$\rightarrow x_0$ 时极限，或称当x $\rightarrow x_0$时，函数 $f(x)$收敛于a 。记为$\lim\limits_{x\rightarrow x_0} f(x)$ = a

```
f[x_]:=x+1/;1<x<2
g[x_]:=4-2x/;-1<x<1
Plot[{f[x],g[x]},{x,-1,2},PlotRange→{0,8}]
```



例如函数

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x>1 \\ 4-2x, & x<1 \end{cases}$$

利用Mathematica画出图形。

如右图 $\lim\limits_{x\rightarrow 1} f(x)$ = 2

定理2： $\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A$

指出：此定理常用来判断分段函数（或有绝对值的函数）在分界点处的极限是否存在。

例 2 试求函数

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & -\infty<x<0, \\ x^2, & 0\le x\le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 处的极限．

解 (1) 因为 $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x+1)=1.$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x^2=0.$$

函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处左、右极限存在但不相等，所以当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的极限不存在.

（2）因为

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 1 = 1.$$

函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处左、右极限存在而且相等，所以当 $x \to 1$ 时， $f(x)$ 的极限存在且

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1.$$

二、函数极限的性质

性质1 极限的唯一性。

函数 $y=f(x)$ 在同一个点不能有两个不同的极限，即若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=B$，则 $A=B$。

性质2 局部有界性。

函数在存在极限的点的附近局部有界，即若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 则存在 x_0 的某一去心邻域，使得函数 $f(x)$ 在这个去心邻域内有界.

性质3 (局部)保号性

函数$y=f(x)$有极限A，A>0或A<0,　则在该过程中必存在“一个时刻”或范围，使得在该“时刻以后”或在该范围内，恒有 $f(x)>0$ 或 $f(x)<0$

推论：若函数 $f(x)\geq 0$ 或 $f(x)\leq 0$, 且存在极限A,

则　$A\geq 0$ 或 $A\leq 0$

即：**函数与极限值在某一范围内具有相同的符号**

例 易知: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$, 由于2>0,因此在x=1的附近必有 $\frac{x^2-1}{x-1}>0$

练习：

1．观察下列数列当 $n\to\infty$ 时的变化趋势，如果极限存在，写出它们的极限：

（1）$x_n=\frac{1}{n^2}+1$；　　（2）$x_n=(-1)^n$

（3）$x_n=(-1)^n\frac{1}{2^n}$；　　（4）$x_n=\frac{n-1}{n+1}$

2．如果 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=$ ________.

3．如果 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$，$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=4$，则 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=$________ .

4．已知 $f(x)=\begin{cases}2x & x\le 0\\ x+1 & x>0\end{cases}$，

求 $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$，$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

生命有终点，学习无极限！

课后习题：

极限

1．如果 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=$ ________.

2．如果 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$， $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ________ .

3．已知 $f(x)=\begin{cases} 2x & x\le 0 \\ x+1 & x>0 \end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$， $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$， $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

4．已知某城市出租车的收费 y（单位：元）与路程 x（单位：km）之间的函数关系为

$f(x)=\begin{cases} 1.2x+5 & 0<x\le 7 \\ 2.1x-1.3 & x>7 \end{cases}$，求 $f(7)$， $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$.

5．讨论极限 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{|x-2|}$ 的存在性.