函数的定义域

授课教师 邹成

定义域基本着手点：

- 1 分母≠0
- 2被开平方数≥0
- 3对数真数＞0
- 4反正（余）弦函数的定义域为[-1，1]
- 5其他情况

1.下列函数中，与函数$y=x(x\geq 0)$是同一个函数的是　　(　　)

A．$y=(\sqrt{x})^2$　　B．$y=\frac{x^2}{x}$

C．$y=\sqrt[3]{x^3}$　　D．$y=\sqrt{x^2}$

解析：　两个函数的定义域相同、对应法则也相同时为同一函数，故选A.

2. $f(x)=\begin{cases} 2e^{x-1} & (x<2) \\ \log_3\left(x^2-1\right) & (x\geq 2) \end{cases}$，则$f\left[f(2)\right]$的值为(　　)

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

解析：$f(2)=\log_3(2^2-1)=1$，

$f\left[f(2)\right]=f(1)=2e^{1-1}=2$，故选C.

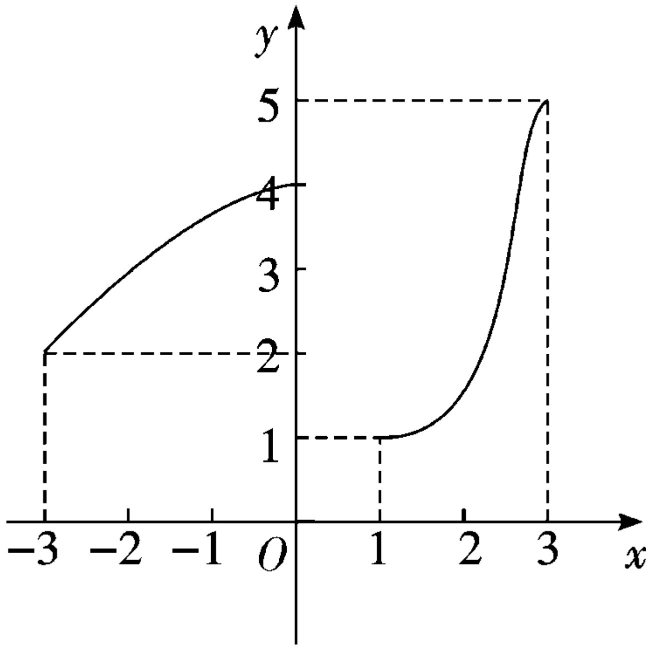
易错点：忽视自变量取值与对应函数关系式的联系，错用解析式.

3.已知函数$y=f(x)$的图象如图所示，则$y=f(x)$的定义域是__________，值域是__________.

解析：由图观察知，

定义域为$[-3,0]\cup[1,3]$，

值域为$[1,5]$.



4. $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}+\lg(4-x)$的定义域是__________.

解析：由$\begin{cases}x+2\geq 0\\ x-1\neq 0\\ 4-x>0\end{cases}$，得$-2\leq x<1$或$1<x<4$.

典例精讲

题型一　函数的定义式

例1.(1)函数$y=\sqrt{x^2-2x-3}+\log_2(x+2)$的定义域是____________；

(2)若函数$y=\dfrac{1}{2x^2+kx+1}$的定义域为**R**，则实数k的取值范围是____________.

解析： (1)由$\begin{cases} x^2-2x-3\geq 0 \\ x+3>0 \end{cases}$，

得$\{x \mid -2<x\leq -1或x\geq 3\}$，即为所求.

(2)由已知$2x^2+kx+1\neq 0$对$x\in \mathbf{R}$恒成立，

所以$\Delta=k^2-8<0$，解得$-2<k<2$.

素材1:(1)若$f(x+1)$的定义域为$[-2,3)$，则$f(2x-1)$的定义域为__________;

(2)若函数$f(x)=\dfrac{1}{e^x-x+m}$的定义域为**R**，则实数m的取值范围是__________.

解析： (1)因为$-2 \le x < 3$,

所以$-1 \le x+1 < 4$.

由$-1 \le 2x-1 < 4$，得$0 \le x < \dfrac{5}{2}$,

故$f(2x-1)$的定义域为$[0,\dfrac{5}{2})$.

解析： (2)由已知$e^x-x+m\neq 0$对$x\in\mathbf{R}$恒成立，

即$m\neq x-e^x$对$x\in\mathbf{R}$恒成立.

令$g(x)=x-e^x$，则$g'(x)=1-e^x$.

由$g'(x)=0$，得$x=0$，

故函数$g(x)$在$x=0$处取得最大值，

即$g(x)\leq g(0)=-1$，所以要使$m\neq x-e^x$

对$x\in\mathbf{R}$恒成立，则应有$m>-1$.

例.已知函数$y=\arcsin(x^2-1)+\arccos\dfrac{x}{2}$+arctanx, 则$y=f(x)$的定义域是__________.

解.由题意:

$$\begin{cases}-1\le x^2-1\le 1\\ -1\le \dfrac{x}{2}\le 1\\ x\in R\end{cases}\qquad \begin{cases}0\le x^2\le 2\\ -2\le x\le 2\\ x\in R\end{cases}\qquad \begin{cases}-\sqrt{2}\le x\le \sqrt{2}\\ -2\le x\le 2\\ x\in R\end{cases}$$

$$x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$$

例:　求下列函数的定义域.

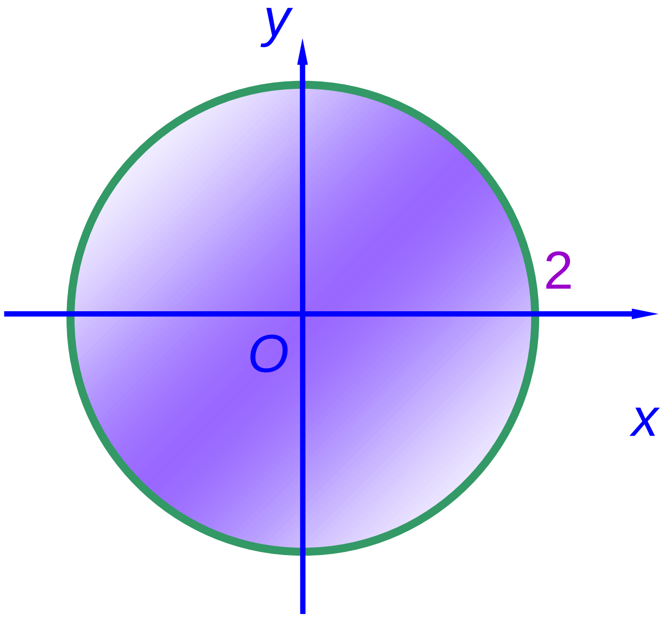
$$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$$

解（1）要使函数有意义，只需满足：

$$4-x^2-y^2\geq 0$$

即　$x^2+y^2\leq 4$

，因此其定义域为　$D=\{\,(x\,,\,y)\,|\,x^2+y^2\leq 4\}$



例　　求下列函数的定义域 D，并画出 D 的图形：

$$(1)\ z=\arcsin\frac{x}{2}+\arcsin\frac{y}{3};$$

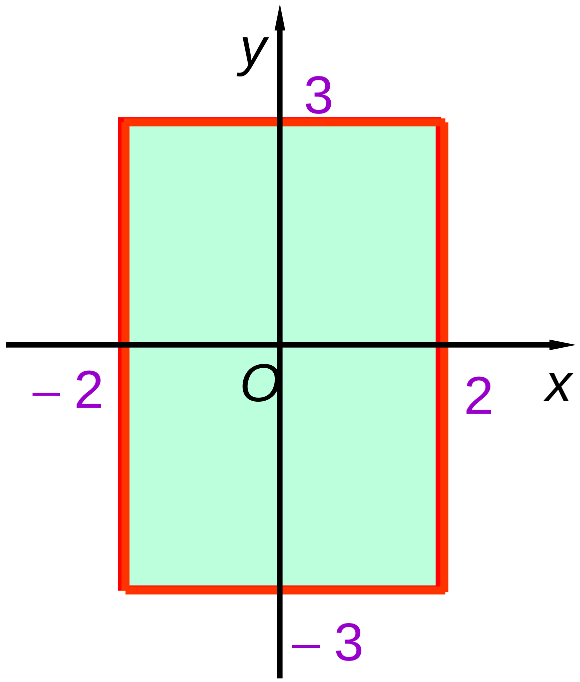
$$(2)\ z=\sqrt{4-x^2-y^2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}.$$

解　(1) 因为要使函数 $z=\arcsin\dfrac{x}{2}+\arcsin\dfrac{y}{3}$ 有意义，应有

$$\begin{cases} \left|\dfrac{x}{2}\right| \le 1, \\ \left|\dfrac{y}{3}\right| \le 1, \end{cases}$$

即 $$\begin{cases} -2 \le x \le 2, \\ -3 \le y \le 3, \end{cases}$$

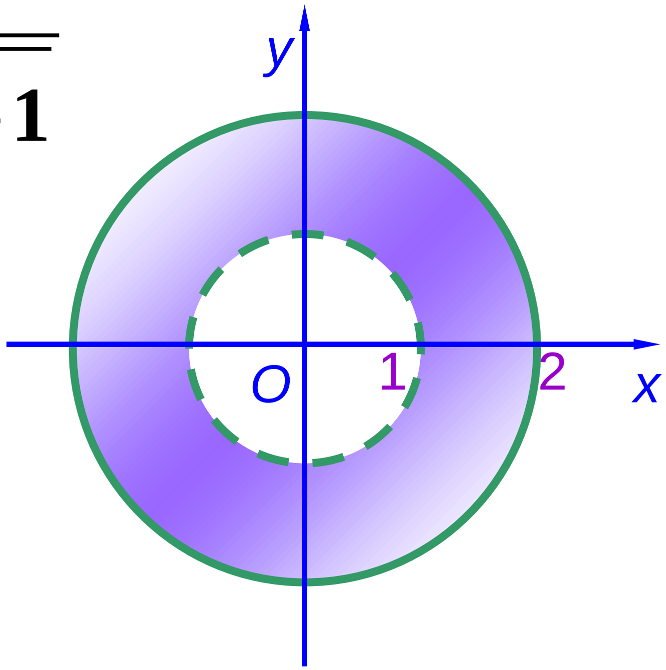
所以函数的定义域 D 是以 $x = \pm 2$, $y = \pm 3$ 为边界的矩形闭区域.



（2）因为要使函数

$$z=\sqrt{4-x^2-y^2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$$

有意义， 应有



$$\begin{cases}4-x^2-y^2\geq 0,\\ x^2+y^2-1>0,\end{cases}$$

即 $1<x^2+y^2\leq 4$

所以函数定义域是以原点为圆心的环形区域，

是有界区域.

练习

1、函数$z=\ln\sqrt{x^2-1}$的定义域是________

2、函数$z=\arccos\frac{x}{2}+\frac{2}{\sqrt{x-1}}$的定义域是________

3、函数$z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$的定义域是________________.

4、函数$z=\arcsin\frac{y}{x}$的定义域是________________.

5、函数$z=\frac{y^2+2x}{y^2-2x}$的间断点是________________.