《高等数学》基本公式

第一章　函数、极限、连续

指数、对数基本公式

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n};\quad a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m};\quad a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

$$a^b=N\Leftrightarrow b=\log_a N$$

$$e^{\ln x}=x;\ \ln e^x=x;\ \log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N\ (M>0,\ N>0),$$

$$\log_a\frac{M}{N}=\log_a M+\log_a N\ (M>0,\ N>0),$$

$$\log_a N^{\mu}=\mu\cdot\log_a N\ (N>0);\ \log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}$$

基本初等函数

1. **幂函数**：形如 $y=x^{\alpha}$
2. **指数函数**：形如 $y=a^x$
3. **对数函数**：形如 $y=\log_a x,\ y=\ln x$
4. **三角函数**：$y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=\tan x,\ y=\cot x,\ y=\sec x,\ y=\csc x$
5. **反三角函数**：形如 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=arc\cot x$

单边极限：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$

单侧极限：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$

极限为零的量称为无穷小. 高(低)阶无穷小; 等价无穷小; 无穷小的阶.

$$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)$$

$$x\sim e^x-1,\quad 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\quad (1+x)^a-1\sim ax\ (a\neq 0)$$

两个重要极限

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}\quad\boxed{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e}$$

设 α (一个整体)为某过程中的无穷小，

$$1^0\ \lim_{\text{某过程}}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1;\qquad 2^0\ \lim_{\text{某过程}}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e.$$

连续的充要条件：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

一切初等函数在定义域内连续

间断点类型：第一类间断点:可去型,跳跃型. 第二类间断点:无穷型,振荡型.

定理 3（零点定理）设函数 $f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，且 $f(a)$与 $f(b)$异号，那么在开区间(a, b)内至少有一点ξ使 $f(\xi)=0$.

定理 4（介值定理）设函数 $f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，且在这区间的端点取不同的函数值

$$f(a)=A \text{ 及 } f(b)=B,$$

那么，对于 A 与 B 之间的任意一个数 C，在开区间(a, b)内至少有一点ξ，使得

$$f(\xi)=C.$$

渐近线

一般地，如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=c$，则直线 $y=c$ 称为函数 $y=f(x)$的图形的水平渐近线.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，则称直线 $x=x_0$ 是函数 $y=f(x)$ 的图形的铅直渐近线.

第二章 导数与微分

导数的定义： $y'\big|_{x=x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$C'=0$

$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$ ，其中 $\alpha\in R$

特殊地有：$(x)'=1$，$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，$(\dfrac{1}{x})'=-\dfrac{1}{x^2}$

$(a^x)'=a^x\ln a$，特殊地有，$(e^x)'=e^x$

$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$，特殊地有，$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

$(\sin x)'=\cos x$　　　$(\cos x)'=-\sin x$

$(\tan x)'=\sec^2 x$；　　　$(\cot x)'=-\csc^2 x$；

$(\sec x)'=\sec x\tan x$；　　　$(\csc x)'=-\csc x\cot x$

$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；　　　$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$；　　　$(arc\cot x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

导数几何意义： 曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,f(x_0))$ 处切线的斜率

可导连续关系： 可导必定连续，连续不一定可导，不连续则不可导.

$\boxed{[u\pm v]'=u'\pm v'}$

$\boxed{[u\cdot v]'=u'\cdot v+u\cdot v',\quad [c\cdot u]'=c\cdot u'}$

$\boxed{(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'}$

$\boxed{[\dfrac{u}{v}]'=\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}}$

微分 $dy=f'(x)dx$ 导数写为 $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$

$dC=0$　　　$d(x^{\mu})=\mu x^{\mu-1}dx$

特殊地，有 $d(x^2)=2xdx$，$d(\sqrt{x})=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$，$d(\dfrac{1}{x})=-\dfrac{1}{x^2}dx$

$d(a^x)=a^x\ln a dx$，特殊地，有　　$d(e^x)=e^x dx$

$d(\log_a x)=\dfrac{1}{x\ln a}dx$，特殊地，有　　$d(\ln x)=\dfrac{1}{x}dx$，

$d(\sin x)=\cos xdx$　　　$d(\cos x)=-\sin xdx$

$d(\tan x)=\sec^2 xdx$　　　$d(\cot x)=-\csc^2 xdx$

$d(\sec x)=\sec x\tan xdx$　　　$d(\csc x)=-\csc x\cot xdx$

$d(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$　　　$d(\arccos x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$d(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}dx$　　　　　　$d(arc\cot x)=-\frac{1}{1+x^2}dx$

$\begin{cases}x=\phi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 的导数 $\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$

第三章　导数的应用

洛必达法则：极限（记为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型）$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$

中值定理：

罗尔定理：如果函数 $y=f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，在开区间(a, b)内可导，且有 $f(a)=f(b)$，那么在(a, b)内至少存在一点ξ，使得 $f'(\xi)=0$.;

拉格朗日定理：如果函数 $f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，在开区间(a, b)内可导，那么在(a, b)内至少有一点$\xi(a<\xi<b)$，使得等式

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

成立.　　拉格朗日中值定理的几何意义: $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$，

（1）$f'(x)>0$，$y=f(x)$ 单增；

（2）$f'(x)<0$，$y=f(x)$ 在$[a,b]$上单减

满足 $f'(x_0)=0$ 的点 x_0 称为**驻点**.

函数 $f(x)$ 在点 x_0 取得极值，则有 $f'(x_0)=0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在.

极值第一种充分条件：用增减性画图表

极值第二种充分条件：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶导数且 $f'(x_0)=0$，则有

（1）当 $f''(x_0)<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；

（2）当 $f''(x_0)>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值；

（3）当 $f''(x_0)=0$ 时，无法判定.

函数的最值，可能在区间端点、驻点、不可导点的处取得。

设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内具有一阶和二阶导数，那么

（1）$f''(x)>0$，则 $f(x)$ 是凹的；

（2）$f''(x)<0$，则 $f(x)$ 是凸的.

连续曲线 $y=f(x)$ 上凹凸的分界点 (x_0, y_0) 称为这曲线的**拐点**.

设点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $f(x)$ 的拐点，则 $f''(x_0)=0$ 或 $f''(x_0)$ 不存在.

第四、五章　积分学

$\int_a^b f(x)dx$ 表示以被积函数 $f(x)$ 为曲边，以积分区间$[a,b]$为底边的曲边梯形的面积

定积分是一个和式的极限，因此**它是一个常数**。

变上（下）限函数的导数：$\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)\ (a\le x<b)$.

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{\varphi(x)}f(t)\mathrm{d}t=f[\varphi(x)]\varphi'(x)$　　$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)}f(t)\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{\psi(x)}^{a}f(t)\mathrm{d}t+\int_a^{\varphi(x)}f(t)\mathrm{d}t\right]=f[\varphi(x)]\varphi'(x)-f[\psi(x)]\psi'(x)$

$$\boxed{\int_a^a f(x)dx=0;\quad \int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx;\quad \int_a^b dx=b-a}$$

$$\boxed{\int_{-a}^{a}f(x)dx=\begin{cases}0 & \text{当}f(x)\text{为奇函数时}\\ 2\int_0^a f(x)dx & \text{当}f(x)\text{为偶函数时}\end{cases}}$$

定积分中值定理:如果函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，则在积分区间$[a, b]$上至少存在一个点ξ，

使下式成立: $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

$$\boxed{A=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx\text{；}A=\int_c^d[f(y)-g(y)]dy}$$

图形绕 x 轴旋而得的旋转体体积为：

$$\boxed{V=\pi\int_a^b[f^2(x)-g^2(x)]dx}$$

图形绕 y 轴旋而得的旋转体体积为：

$$\boxed{V=\pi\int_c^d[f^2(y)-g^2(y)]dy}$$

$F'(x)=f(x)$ 或 $dF(x)=f(x)dx$

则称函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的一个**原函数**.

$$\boxed{\int f(x)dx=F(x)+C}$$

$$\boxed{\text{（1）}(\int f(x)dx)'=f(x)\quad\text{或}\quad d[\int f(x)dx]=f(x)dx}$$

$$\boxed{\text{（2）}\int f'(x)dx=f(x)+C\quad\text{或}\quad\int df(x)=f(x)+C}$$

即一个函数先积分后求导（或求微分），则两者相互抵消.

不定积分基本公式：

（1）$\int dx = x + C$

（2）$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$ （$\alpha\neq -1$）

它有三个特殊情况：

$\int xdx=\frac{1}{2}x^2+C$， $\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}+C$， $\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+C$

（3）$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$，特殊地，有 $\int e^x dx=e^x+C$

（4）$\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$

（5）$\int\sin xdx=-\cos x+C$

（6）$\int\cos xdx=\sin x+C$

（7）$\int\sec^2 xdx=\tan x+C$

（8）$\int\csc^2 xdx=-\cot x+C$

（9）$\int\sec x\tan xdx=\sec^2 x+C$

（10）$\int\csc x\cot xdx=-\csc x+C$

（11）$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C$

（12）$\int\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C$

微积分基本公式，也称为牛顿——莱布尼兹公式.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)\overset{\text{记为}}{=}[F(x)]_a^b\overset{\text{或}}{=}F（x）\Big|_a^b}$$

常见的凑微分（第一换元）公式：

（1）$dx=\frac{1}{a}d(ax+b)$，**其中** a 、b **是任意常数，且** $a\neq 0$.

（2）$x^{\alpha}dx=\frac{1}{\alpha+1}dx^{\alpha+1}$，**其中** $\alpha\neq -1$.

特殊地，有 $xdx=\frac{1}{2}dx^2$ ，$\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2d\sqrt{x}$ ，$\frac{1}{x^2}dx=-d(\frac{1}{x})$

以上三个用得较多，应单独记忆

（3）$\frac{1}{x}dx=d\ln x$ （4）$e^x dx=de^x$

（5）$\sin xdx=-d\cos x$ （6）$\cos xdx=d\sin x$

变量置换（第二换元）法：

1、被积函数含有一次根号 $\sqrt{ax+b}$

此种类型直接将一次根号当一个整体换元，即令 $\sqrt{ax+b}=t$ 即可

2．被积函数中含有二次根号

（1）被积函数含有 $\sqrt{a^2-x^2}$ 时，可令 $x=a\sin t$

其中 $t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

（2）被积函数含有 $\sqrt{a^2+x^2}$ 时，可令 $x=a\tan t$

其中 $t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

（3）被积函数含有 $\sqrt{x^2-a^2}$ 时，可令 $x=a\sec t$

其中 $t\in(0,\frac{\pi}{2})$ 或 $(\frac{\pi}{2},\pi)$

分部积分法公式 $\boxed{\int udv=uv-\int vdu}$

1)被积函数**只有一个**时的积分

这种类型的积分方法是：**直接使用分部积分法.**

2)幂函数 x^{α} 与三角或指数函数之积的积分

这种类型的积分方法是：**先将三角或指数凑人微分，再使用分部积分法.**

3)幂函数 x^{α} 与对数或反三角之积的积分　这种类型的积分方法是：**先将幂函数凑入微分，再使用分部积分法.**

有理函数的积分：按分式加减的原理，把一个分式分成可以积分的分式。

平面图形的面积：

（1）由曲线 $y=f(x)$，$y=g(x)$（其中 $f(x)\geq g(x)$）和直线 $x=a$，$x=b$ 围成图形的面积可用公式 $\boxed{A=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx}$

（2）由曲线 $x=f(y)$，$x=g(y)$（其中 $f(y)\geq g(y)$）和直线 $y=c$，$y=d$ 围成图形的面积可用公式 $\boxed{A=\int_c^d[f(y)-g(y)]dy}$

旋转体的体积：

（1）由曲线 $y=f(x)$，$y=g(x)$（其中 $f(x)\geq g(x)$）和直线 $x=a$，$x=b$ 围成的图形绕 x 轴旋而得的旋转体体积为：$\boxed{V=\pi\int_a^b[f^2(x)-g^2(x)]dx}$

（2）由曲线 $x=f(y)$，$x=g(y)$（其中 $f(y)\geq g(y)$）和直线 $y=c$，$x=d$ 围成的

图形绕 y 轴旋而得的旋转体体积为：$\boxed{V=\pi\int_c^d[f^2(y)-g^2(y)]dy}$

广义积分（或**反常积分**）：函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上的**广义积分**（或**反常积分**）. 记为

$\int_a^{+\infty}f(x)dx$，即 $\boxed{\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx，}$ 此时也称**广义积分收敛**，否则称为**发散**.

第六章 微分方程

微分方程的概念

定义 1：含有未知函数导数（或微分）的方程称为**微分方程**，其中未知函数导数（或微分）的最高阶数，称为微分方程的**阶**.

如果一个函数 $y=f(x)$ 代入微分方程使其成立，则称函数 $y=f(x)$ 是微分方程的**解**.

指出：微分方程的解有两种形式：（1）解中含有任意的独立的常数，且其个数等于微分方程的阶数. 这样的解称为**微分方程的通解**（或**一般解**）. 如，例 1 中的 $M=Ce^{-kt}$.

（2）通解中任意常确定后的解，称为**特解**.

定义 3：为确定微分方程通解中的任意常数而需要的条件，称为初**始条件**.

形如：$y'=f(x)\cdot g(y)$ 或 $M_1(x)N(y)dx+M_2(x)N_2(y)dy=0$ 的微分方程称为**一阶可分离变量的** 微分方程.

齐 次 方 程 **形如** $\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$ 齐次方程的解法 **令** $u=\frac{y}{x}$.

一阶线性微分方程

定义：形如 $y'+P(x)\cdot y=Q(x)$ 一阶线性（非）齐次微分方程 $y'+P(x)\cdot y=0$ 的解

$\boxed{y=C\cdot e^{-\int P(x)dx}；\ y=C\cdot e^{-\int P(x)dx}+e^{-\int P(x)dx}\cdot\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx}$

二阶常系数线性齐次微分方程的解的解法

（1）当方程 $r^2+pr+q=0$ 有两个不等的实根 $r_1与r_2$ 时，则方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解为：$\boxed{y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}}$；

（2）当方程 $r^2+pr+q=0$ 有两个相等的实根 $r_1=r_2=r$ 时，则方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解为 $\boxed{y=(c_1+c_2x)e^{rx}}$.

（3）当方程 $r^2+pr+q=0$ 有一对共轭的复根 $r_1=\alpha-\beta i$ ， $r_2=\alpha+\beta i$ 时，

则方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解为 $\boxed{y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)}$

二阶常系数线性非齐次微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 解的结构 $y=Y+\overline{y}$：Y 是对应齐次方程的通解，$\overline{y}$ 是此方程的一个特解。

求方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 的特解，视 $f(x)$ 的两种情况列表如下：

$f(x)$ 的形式	特解 $\overline{y}$ 的形式	
$f(x)=P_n(x)e^{\lambda x}$ （$f(x)=P_n(x)$ 为 λ=0 时的情况）	λ 不是特征方程的根	$\overline{y}=Q_n(x)e^{\lambda x}$
	λ 是特征方程的单根	$\overline{y}=xQ_n(x)e^{\lambda x}$
	λ 是特征方程的重根	$\overline{y}=x^2Q_n(x)e^{\lambda x}$
$f(x)=a\cos\omega x+b\sin\omega x$	$\pm\omega i$ 不是特征根	$\overline{y}=A\cos\omega x+B\sin\omega x$
	$\pm\omega i$ 是特征根	$\overline{y}=x(A\cos\omega x+B\sin\omega x)$
$f(x)=e^{\lambda x}$	$\lambda+i\omega$ (或 $\lambda-i\omega$)不是特征方程的根	$y^*=e^{\lambda x}[R^{(1)}_m(x)\cos\omega x+R^{(2)}_m(x)\sin\omega x]$, $R^{(1)}_m(x)$、$R^{(2)}_m(x)$是 m 次多项式, $m=\max\{l, n\}$

$[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$	$\lambda+i\omega$（或 $\lambda-i\omega$)是特征方程的单根	$y^*=xe^{\lambda x}[R^{(1)}{}_m(x)\cos\omega x+R^{(2)}{}_m(x)\sin\omega x]$,

第七章　解析几何

向量的坐标表示法 $M\leftrightarrow \mathbf{r}=\overrightarrow{OM}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}\leftrightarrow(x, y, z)$

设 $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\boldsymbol{b}=(b_x, b_y, b_z)$

$\boldsymbol{b}//\boldsymbol{a}\Leftrightarrow(b_x, b_y, b_z)=\lambda(a_x, a_y, a_z)$，于是 $\dfrac{b_x}{a_x}=\dfrac{b_y}{a_y}=\dfrac{b_z}{a_z}$.

数量积：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

向量积：$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\theta$

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=0$; $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$；交换律 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=a_yb_z\boldsymbol{i}+a_zb_x\boldsymbol{j}+a_xb_y\boldsymbol{k}-a_yb_x\boldsymbol{k}-a_xb_z\boldsymbol{j}-a_zb_y\boldsymbol{i}$$

$$=(a_y b_z-a_z b_y)\,\boldsymbol{i}+(a_z b_x-a_x b_z)\,\boldsymbol{j}+(a_x b_y-a_y b_x)\,\boldsymbol{k}..$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle A=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|.$$

方向角和方向余弦：$\cos\alpha=\dfrac{a_x}{|\mathrm{a}|}=\dfrac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$，$\cos\beta=\dfrac{a_y}{|\mathrm{a}|}=\dfrac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$，$\cos\gamma=\dfrac{a_z}{|\mathrm{a}|}=\dfrac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$，

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

平面的点法式方程 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

平面的一般方程 $Ax+By+Cz+D=0$.

两平面的夹角 $\cos\theta=|\cos(\boldsymbol{n}_1\hat{,}\ \boldsymbol{n}_2)|=\dfrac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$.

空间直线的一般方程 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$.

点到平面的距离为

$$d=|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\boldsymbol{e}_n|=\frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

对称式方程或点向式方程 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$

直线的参数方程 $\begin{cases}x=x_0+mt\\y=y_0+nt\\z=z_0+pt\end{cases}$..

两直线的夹角 $\cos\varphi=|\cos(\boldsymbol{s}_1\hat{,}\ \boldsymbol{s}_2)|=\dfrac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$

直线与平面的夹角 $\sin\varphi=\dfrac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$

第八章 多元微积分

函数 $z=f(x, y)$在点(x_0, y_0)处对 x 的偏导数，记作 $f_x(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$

高阶偏导数

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y),\ \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y),\ \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y).$$

其中 $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y)$，$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y)$**称为混合偏导数，且** $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

***z*=*f*(*x*, *y*)的全微分可写作** $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$.

多元复合函数的求导法则 $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}$. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$

隐函数 $F(x, f(x))\equiv 0$ 的求导法则 $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$.

隐函数 $F(x, y, z)=0$ 的求导法则 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$.

空间曲线 $x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\omega(t)$的切线与法平面

切线方程为 $\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$.

其法平面方程为 $\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$.

曲面 *F*(*x*, *y*, *z*)=0 的切平面与法线,切平面的方程式是

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)+F_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0)+F_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0)=0.$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

(多元极值必要条件) 设函数 $z=f(x, y)$在点(x_0, y_0)具有偏导数，且在点(x_0, y_0)处有极值，则有 $f_x(x_0, y_0)=0, f_y(x_0, y_0)=0$.

(多元极值充分条件) 设函数 $z=f(x, y)$在点(x_0, y_0)的某邻域内连续且有一阶及二阶连续偏导数，又 $f_x(x_0, y_0)=0, f_y(x_0, y_0)=0$，令

$$f_{xx}(x_0, y_0)=A, f_{xy}(x_0, y_0)=B, f_{yy}(x_0, y_0)=C,$$

则 $f(x, y)$在(x_0, y_0)处是否取得极值的条件如下:

(1) $AC-B^2>0$ 时具有极值，且当 $A<0$ 时有极大值，当 $A>0$ 时有极小值;

(2) $AC-B^2<0$ 时没有极值;

(3) $AC-B^2=0$ 时可能有极值，也可能没有极值.

条件极值----拉格朗日乘数法：要找函数 $z=f(x, y)$在条件$\varphi(x, y)=0$ 下的可能极值点，可以先构成辅助函数 $F(x, y)=f(x, y)+\lambda\varphi(x, y)$,

其中λ为某一常数. 然后解方程组

$$\begin{cases}F_x(x,y)=f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0\\F_y(x,y)=f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0.\\\varphi(x,y)=0\end{cases}$$

由这方程组解出 x, y 及λ, 则其中(x, y)就是所要求的可能的极值点.

二重积分：$\iint\limits_D 1\cdot d\sigma=\iint\limits_D d\sigma=\sigma$ (σ为 D 的面积).

在 D 上, $f(x, y)\le g(x, y)$, 则有不等式 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\le\iint\limits_D g(x,y)d\sigma$.

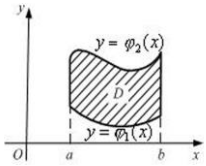
利用直角坐标计算二重积分

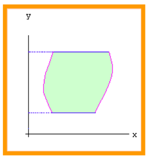
X—型区域:

$D: a\le x\le b$， $\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)$, .

Y—型区域:

$D: c\le y\le d$, $\psi_1(x)\le y\le\psi_2(x)$.





极坐标计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$.

对弧长的曲线积分 .

$f(x,y)ds=f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$,

$\int_L f(x,y)ds=\int_a^b f[x,\psi(x)]\sqrt{1+\psi'^2(x)}dx$.

对坐标的曲线积分

(1) 如果把 L 分成 L_1 和 L_2, 则

$$\int_L P\,dx+Q\,dy=\int_{L_1} P\,dx+Q\,dy+\int_{L_2} P\,dx+Q\,dy.$$

(2) 设 L 是有向曲线弧, $-L$ 是与 L 方向相反的有向曲线弧, 则

$$\int_{-L} P(x,y)dx+Q(x,y)d=-\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

格林公式

平面区域 D 的边界曲线 L, 我们规定 L 的正向为逆时针方向

$$\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\oint_L Pdx+Qdy,$$

平面上曲线积分与路径无关的条件 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

第九章　无穷级数

收±收=收；收±发=发；发±发=?

等比级数(几何级数) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n$ ($a\ne0$)， 如果 $|q|<1$, 则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n$ 收敛, 其和为 $\frac{a}{1-q}$； 如果 $|q|\ge1$, 则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n$ 发散。

如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to0}u_n=0$.由此知，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=l>0$(或 $\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=+\infty$)，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散;

p–级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 当 $p>1$ 时收敛，当 $p\le 1$ 时发散.调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的.

比较审敛法:大的收小的收，小的发大的发；2 比较审敛法的极限形式 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$ （①当 $0<l<+\infty$ 同时收敛或同时发散.② $l=0/+\infty$ 大的收小的收，小的发大的发）

（若是 n 的多项式，分子最高指数低于分母最高指数一次以上的收）

比值审敛法(达朗贝尔判别法): 如果 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，则当 $\rho<1$ 时级数收敛；当 $\rho>1$(或 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty$)时级数发散；当 $\rho=1$ 时级数可能收敛也可能发散.

根值审敛法(柯西判别法): $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$，

则当 $\rho<1$ 时级数收敛；当 $\rho>1$(或 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=+\infty$)时级数发散；当 $\rho=1$ 时级数可能收敛也可能发散.

交错级数及其莱布尼茨审敛法： 如果交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 满足条件:

(1) $u_n\ge u_{n+1}$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)； (2) $\lim_{n\to\infty}u_n=0$，

则级数收敛,

绝对收敛与条件收敛:

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛；若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，则称级 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛.

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，$\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\rho$，$R=\begin{cases}+\infty & \rho=0\\ \frac{1}{\rho} & \rho\ne 0\\ 0 & \rho=+\infty\end{cases}$ 收敛半径与收敛区间：正数 R 通常叫做幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的**收敛半径**. 开区间 $(-R, R)$ 叫做幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的**收敛区间**. 再由幂级数在 $x=\pm R$ 处的收敛性就可以决定它的收敛域. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的**收敛域**是 $(-R, R)$(或 $[-R, R)$、$(-R, R]$、$[-R, R]$之一.

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛域 I 上可积，并且有逐项积分公式

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛区间 $(-R, R)$ 内可导，并且有逐项求导公式

展开式小结:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots(-1<x<1)$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^{n+1}x^n+\cdots(-1<x<1)$$

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots\frac{1}{n!}x^n+\cdots(-\infty<x<+\infty),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots (-\infty < x < +\infty),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots (-\infty < x < +\infty),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots (-1 < x \le 1),$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots (-1 < x \le 1)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots (-1 < x < 1).$$

第十章　线性代数

- **行列式**

行列式和它的转置行列式相等 $D^T = D$

对换行列式的两行（列），行列式变号

如果行列式中有两行（列）相同或成比例，那么此行列式等于 0

行列式的某一行（列）中所有的元素都乘同一数 k，等于用数 k 乘此行列式

把行列式的某一行（列）的各元素乘同一数然后加到另一行（列）对应的元素上去，行列式不变

行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的各元素与其对应的代数余子式乘积之和

行列式某一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零

- **矩阵**

由 $m\times n$ 个数　a_{ij} 排成的 m 行 n 列的数表称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵，为表示他是一个整体，总是加一个括弧，用大写黑体字母表示它，这 $m\times n$ 个数是矩阵 A 的元素，简称为元。

行数和列数都等于 n 的矩阵称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵。

只有一行的矩阵叫行向量，只有一列的矩阵叫列向量。元素都是 0 的矩阵叫零矩阵。

对于非齐次线性方程组，有系数矩阵，未知数矩阵，常数项矩阵，增广矩阵。

从左上角到右下角的直线以外的元素都是 0，这种矩阵叫对角矩阵，对角线上都是 1，叫单位矩阵。

- 矩阵加法满足交换律和结合律

A（mxs）、$B(sxn)$，矩阵 A 乘矩阵 B 的乘积为矩阵 C（mxn）。

矩阵乘法满足结合律和分配律

$EA = AE = A$　（E 为单位矩阵）

矩阵的幂：A^k，显然只有方阵的幂才有意义

- 矩阵的转置：把矩阵 A 的行换成同序数的列得到一个新矩阵，叫做 A 的转置矩阵，记作 A^T

  性质：

1. $(A^T)^T = A^T$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(AB)^T = B^T A^T$

- 由 n 阶方阵 A 的元素所构成的行列式，称为方阵 A 的行列式，记作 det$A$ 或 $|A|$

$|AB| = |BA| = |B||A|$

- 行列式 $|A|$ 的各个元素的代数余子式构成的矩阵叫 A 的伴随矩阵 A^*

$AA^* = A^*A = |A|E$

- 对于 n 阶矩阵 A，如果存在 n 阶矩阵 B，使：

$AB=BA=E$

则说矩阵 A 是可逆的，B 是 A 的逆矩阵。

若矩阵 A 可逆，则 |A| 不等于 0.

若矩阵 A 可逆，且

$A^{-1}=|A|A^{*}$,其中 A^{*}是 A 的伴随矩阵。

当|A|=0 时，A 称为奇异矩阵，否则是非奇异矩阵

$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

$(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$

- 设 A 是一个 mxn 矩阵，对 A 施行一次初等行变换，相当于在 A 的左边乘相应的 m 阶初等矩阵，对 A 施行一次初等列变换，相当于在 A 的右边乘相应的 n 阶初等矩阵

方阵可逆的充分必要条件是 A 能通过初等变换到 E

如何利用行列式性质求解线性方程组？克拉默法则

- **矩阵的秩**

定义：在 mxn 矩阵 A 中，任取 k 行和 k 列，位于这些行列交叉处的 k*k 个元素，不改变它们在 A 中所处的位置次序而得的 k 阶行列式，称为矩阵 A 的 k 阶子式

设在矩阵 A 中有一个不等于 0 的 r 阶子式 D，且所有 r+1 阶子式也全等于 0，因此把 r 阶非零子式称为最高阶非零子式，数 r 称为矩阵 A 的秩，记作 R(A)，并规定零矩阵的秩等于 0.

性质：

$R(A^{T})=R(A)$

可逆矩阵又称满秩矩阵，不可逆矩阵又称为降秩矩阵

- 解非齐次线性方程组，n 元线性方程组 Ax = b：

无解的充要条件是 R(A) <R(A,b)

有唯一解的充要条件是 R(A) = R(A,b) = n

有无限多解的充要条件是 R(A) = R(A,b) < n

- 解线性齐次方程组，n 元线性方程组 Ax = 0：

均有解,至少有一组零解;

有无限多解的充要条件是 R(A) < n