Sistema de Informação

Lógica para Computação

NOTAS DE AULA 6: Equivalência Lógica.

O que vamos estudar nesta Aula:

- **Conceito de Equivalência Lógica**
- **Exemplificação**
- **Regra de Equivalência: Dupla negação**
- **Regra de Equivalência: Regra de *Clavius***
- **Regra de Equivalência: Regra da Absorção**
- **Outras equivalências lógicas.**
- **Tautologia e Equivalência Lógica**
- **Método de demonstração por absurdo**
- **Regra de Exportação-Importação**
- **Proposições associadas a uma condicional**
- **Negação conjunta de duas proposições**
- **Negação disjunta de duas proposições**
- **Propriedades da Equivalência Lógica**

- **Conceito de Equivalência Lógica**: Diz-se que uma proposição $P(p,q,r,...)$ **logicamente equivalente** (ou abreviadamente, **é equivalente a**) uma proposição $Q(p,q,r,...)$, se a tabela-verdade da proposição P é idêntica tabela-verdade da proposição Q.

Notação: Dizemos que: $P\ equivale\ a\ Q$

$$P(p,q,r,...) \quad \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{é}\ equivalente\ a} \quad Q(p,q,r,...)$$

$$P \quad \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{é}\ equivalente\ a} \quad Q$$

$$P \Leftrightarrow Q$$

Em particular, se as proposição P e Q são ambas **Tautológicas** (t) ou **Contradições** (c) então são ambas **Equivalentes**, ou seja:

$$\text{Se V}(P) = t \text{ e V}(Q) = t \text{ então } P \Leftrightarrow Q$$

ou

$$\text{Se V}(P) = c \text{ e V}(Q) = c \text{ então } P \Leftrightarrow Q$$

➢ Regra de Equivalência: Dupla negação

Dada a proposição R:

$$R: \sim\sim p$$

Temos a Tabela-Verdade:

1° RESOLUÇÃO

COLUNA		
1	2	3
p	$\sim p$	$\sim\sim p$
F	V	F
V	F	V

Portanto; podemos deduzir a seguinte **Equivalência Lógica**:

➢ Equivalência Lógica 1:

$$p \Leftrightarrow \sim\sim p, \qquad ou\ seja, \qquad p \Leftrightarrow R$$

Prova disso são as **COLUNAS: 1 e 3** da Tabela-Verdade que são **Idênticas**.

A **Equivalência Lógica 1** acima é prova de uma **Regra de Inferência** denominada de **Dupla Negação**. Observe a proposição, a seguir:

p: O sol é quente.

Com isso, por **Dupla Negação** temos:

$\sim\sim p$: **NÃO** é verdade que o sol **NÃO** é quente. Ou seja: $\sim\sim p \Leftrightarrow p$

➢ Regra de Equivalência: Regra de *Clavius*

Dada a proposição composta R:

$$R: \sim p \rightarrow p$$

Temos a Tabela-Verdade: 1° RESOLUÇÃO

COLUNA		
1	2	3
p	$\sim p$	$R: \sim p \rightarrow p$
F	V	F
V	F	V

Portanto; podemos deduzir a seguinte **Equivalência Lógica**:

- **Equivalência Lógica 1:**

$$\sim p \rightarrow p \Leftrightarrow p, \quad ou\ seja, \quad R \Leftrightarrow p$$

Prova disso são as **COLUNAS: 1 e 3** da Tabela-Verdade que são **Idênticas**.

A **Equivalência Lógica 1** acima é prova de uma **Regra de Inferência** denominada de **Regra de *Clavius***.

- **Regra de Equivalência: Regra de Absorção**

Dada as proposições compostas R e S a sequir:

$R: p \rightarrow p \wedge q$ e $S: p \rightarrow q$

Temos a Tabela-Verdade:

1° RESOLUÇÃO

COLUNA				
1	2	3	4	5
p	q	$p \wedge q$	$R: p \rightarrow p \wedge q$	$S: p \rightarrow q$
F	F	F	V	V
F	V	F	V	V
V	F	F	F	F
V	V	V	V	V

Portanto; podemos deduzir a seguinte **Equivalência Lógica**:

- **Equivalência Lógica 1:**

$$p \rightarrow p \wedge q \Leftrightarrow p \rightarrow q, \quad ou\ seja, \quad R \Leftrightarrow S$$

Prova disso são as **COLUNAS: 4 e 5** da Tabela-Verdade que são **Idênticas**.

A **Equivalência Lógica 1** acima é prova de uma **Regra de Inferência** denominada de **Regra de Absorção**.

- **Regra de Equivalência: Equivalência Condicional-Disjuntiva**

Dada as proposições compostas R e S a sequir:

$R: p \rightarrow q$ e $S: \sim p \vee q$

Temos a Tabela-Verdade:

1° RESOLUÇÃO

COLUNA				
1	2	3	4	5
p	q	$R: p \rightarrow q$	$\sim p$	$S: \sim p \vee q$
F	F	V	V	V
F	V	V	V	V
V	F	F	F	F
V	V	V	F	V

Portanto; podemos deduzir a seguinte **Equivalência Lógica**:

- **Equivalência Lógica 1:**

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q, \qquad ou\ seja, \qquad R \Leftrightarrow S$$

Prova disso são as **COLUNAS: 3 e 5** da Tabela-Verdade que são **Idênticas**.

A **Equivalência Lógica 1** acima é a prova de uma **Regra de Inferência** que relaciona os conectores: Condicional ($\rightarrow$) e Disjunção ($\vee$) em uma relação que podemos denominar de **Equivalência Condicional-Disjuntiva**.

- **Regra de Equivalência: Equivalência Bicondicional-Conjuntiva**

Dada as proposições compostas R e S a sequir:

$$R: p \leftrightarrow q \qquad \text{e} \qquad S: (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

Temos a Tabela-Verdade:

1° RESOLUÇÃO

COLUNA					
1	2	3	4	5	6
p	q	$R: p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$S: (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
F	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F
V	F	F	F	V	F
V	V	V	V	V	V

Portanto; podemos deduzir a seguinte **Equivalência Lógica 1**:

- **Equivalência Lógica 1:**

$$p \leftrightarrow q \iff (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p), \quad \textit{ou seja,} \quad R \iff S$$

Prova disso são as **COLUNAS: 3 e 6** da Tabela-Verdade que são **Idênticas**.

A **Equivalência Lógica 1** acima é a prova de uma **Regra de Inferência** que relaciona os conectores: Bicondicional ($\leftrightarrow$) e Conjunção (^) em uma relação que podemos denominar de **Equivalência Bicondicional-Conjuntiva**.

- **Regra de Equivalência: Equivalência Bicondicional-Disjuntiva**

Dada as proposições compostas R e S a sequir:

$R: p \leftrightarrow q$ e $S: (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

Temos a Tabela-Verdade:

1° RESOLUÇÃO

COLUNA							
1	2	3	4	5	6	7	8
p	q	$\sim p$	$\sim q$	$R: p \leftrightarrow q$	$p \wedge q$	$\sim p \wedge \sim q$	$S: (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
F	F	V	V	V	F	V	V
F	V	V	F	F	F	F	F
V	F	F	V	F	F	F	F
V	V	F	F	V	V	F	V

Portanto; podemos deduzir a seguinte **Equivalência Lógica 1**:

- **Equivalência Lógica 1:**

$$p \leftrightarrow q \iff (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q), \quad \textit{ou seja,} \quad R \iff S$$

Prova disso são as **COLUNAS: 5 e 8** da Tabela-Verdade que são **Idênticas**.

A **Equivalência Lógica 1** acima é a prova de uma **Regra de Inferência** que relaciona os conectores: Bicondicional ($\leftrightarrow$) e Disjunção ($\vee$) em uma relação que podemos denominar de **Equivalência Bicondicional-Disjuntiva**.

➢ Tautologia e Equivalência Lógica

Teorema: Podemos dizer que:

$$se\ R \Leftrightarrow S\ então$$

$$A\ bicondicional\ R \leftrightarrow S\ \text{é}\ uma\ Tautologia.$$

EXEMPLO 1 (Método de demonstração por absurdo): Dada as proposições R e S:

$R: (p \wedge \sim q \rightarrow c)$ e $S: (p \rightarrow q)$ $, onde\ c: contradição$

Temos a Tabela-Verdade:

1° RESOLUÇÃO

COLUNA							
1	2	3	4	5	6	7	**8**
p	q	$\sim q$	c	$p \wedge \sim q$	$R: (p \wedge \sim q \rightarrow c)$	$S: (p \rightarrow q)$	$\boldsymbol{R \leftrightarrow S}$
F	F	V	F	F	V	V	**V**
F	V	F	F	F	V	V	**V**
V	F	V	F	V	F	F	**V**
V	V	F	F	F	V	V	**V**

Portanto; podemos deduzir a seguinte **Equivalência Lógica**:

➢ Equivalência Lógica 1:

$$(p \wedge \sim q \rightarrow c) \Leftrightarrow (p \rightarrow q), \quad ou\ seja, \quad R \Leftrightarrow S$$

Prova disso são as **COLUNAS: 6 e 7** da Tabela-Verdade que são **Idênticas**.

A **Equivalência Lógica 1** acima é a prova de uma **Regra de Inferência** denominada de ***Método de demonstração por absurdo***. Além disso, a **coluna 8** da tabela é um exemplo de aplicação do teorema descrito acima, pois a bicondicional $R \leftrightarrow S$ resulta em uma **Tautologia**.

EXEMPLO 2 (Método de Exportação - Importação): Dada as proposições R e S:

$R: p \wedge q \rightarrow r$ e $S: (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

Temos a Tabela-Verdade:

1° RESOLUÇÃO

COLUNA							
1	2	3	4	5	6	7	**8**
p	q	r	$p \wedge q$	$R: p \wedge q \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$S: (p \rightarrow (q \rightarrow r))$	$\boldsymbol{R \leftrightarrow S}$
F	F	F	F	V	V	V	**V**
F	F	V	F	V	V	V	**V**
F	V	F	F	V	F	V	**V**
F	V	V	F	V	V	V	**V**
V	F	F	F	V	V	V	**V**
V	F	V	F	V	V	V	**V**
V	V	F	V	F	F	F	**V**
V	V	V	V	V	V	V	**V**

Portanto; podemos deduzir a seguinte **Equivalência Lógica**:

- **Equivalência Lógica 1:**

$$(p \wedge q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r)), \quad ou\ seja, \quad R \Leftrightarrow S$$

Prova disso são as **COLUNAS: 5 e 7** da Tabela-Verdade que são **Idênticas**.

A **Equivalência Lógica 1** acima é a prova de uma **Regra de Inferência** denominada **Método de Exportação-Importação**. Além disso, a **coluna 8** da tabela é um exemplo de aplicação do teorema descrito acima, pois a bicondicional $R \leftrightarrow S$ resulta em uma **Tautologia**.

- **Proposições associadas a uma condicional**

Dada a condicional $p \rightarrow q$, chama-se proposições associadas a $p \rightarrow q$ as três seguintes proposições condicionais que contêm p e q:

a) ***Proposição recíproca de*** $R: p \to q$: $S: q \to p$

b) ***Proposição contrária de*** $R: p \to q$: $T: \sim p \to \sim q$

c) ***Proposição contrapositiva de*** $R: p \to q$: $U: \sim q \to \sim p$

Com isso, temos a seguinte tabela-verdade:

1° RESOLUÇÃO

COLUNA							
1	2	3	4	5	6	7	8
p	q	$\sim p$	$\sim q$	$R: p \to q$	$U: \sim q \to \sim p$	$S: q \to p$	$T: \sim p \to \sim q$
F	F	V	V	V	V	V	**V**
F	V	V	F	V	V	F	**F**
V	F	F	V	F	F	V	**V**
V	V	F	F	V	V	V	**V**

Podemos afirmar que:

(i) A condicional $R: p \to q$ e sua contrapositiva $U: \sim q \to \sim p$ são equivalentes:

$$p \to q \Leftrightarrow \sim q \to \sim p, \quad ou\ seja, \quad R \Leftrightarrow U$$

(ii) A recíproca $S: q \to p$ e a contrária $T: \sim p \to \sim q$ da condicional $R: p \to q$ são equivalentes:

$$q \to p \Leftrightarrow \sim p \to \sim q, \quad ou\ seja, \quad S \Leftrightarrow T$$

- **Negação Conjunta de duas proposições**

Chama-se **Negação Conjunta** de duas proposições p e q a proposição "não p e não q", isto é, em linguagem formal: $\sim p \wedge \sim q$.

A **Negação Conjunta** de duas preposições pode ser indicada por $p \downarrow q$.

Logo: $p \downarrow q \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

Com isso, temos a seguinte tabela-verdade:

1° RESOLUÇÃO

COLUNA					
1	2	3	4	5	6
p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$p \downarrow q$
F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F
V	V	F	F	F	F

As colunas: 5 e 6 representam a mesma operação lógica e são equivalentes. Com isso, a conjunção dupla é representada pelo conectivo $\downarrow$ denominado de conectivo de ***Scheffer***.

- **Negação Disjunta de duas proposições**

Chama-se **Negação Disjunta** de duas proposições p e q a proposição "não p ou não q", isto é, em linguagem formal: $\sim p \vee \sim q$.

A **Negação Disjunta** de duas preposições pode ser indicada por $p \uparrow q$.

Logo: $p \uparrow q \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

Com isso, temos a seguinte tabela-verdade:

1° RESOLUÇÃO

COLUNA					
1	2	3	4	5	6
p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$p \uparrow q$
F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	V
V	V	F	F	F	F

As colunas: 5 e 6 representam a mesma operação lógica e são equivalentes. Com isso, a disjunção dupla é representada pelo conectivo $\uparrow$ denominado de conectivo de ***Scheffer***.

- **Propriedades da Equivalência Lógica**

I. Reflexiva:

$$P(p,q,r,\ldots) \Leftrightarrow P(p,q,r,\ldots)$$

II. Transitiva:

Se $P(p,q,r,\ldots) \Leftrightarrow Q(p,q,r,\ldots)$ e $Q(p,q,r,\ldots) \Leftrightarrow R(p,q,r,\ldots)$ então $P(p,q,r,\ldots) \Leftrightarrow R(p,q,r,\ldots)$

III. Simétrica:

Se $P(p,q,r,\ldots) \Leftrightarrow Q(p,q,r,\ldots)$ então $Q(p,q,r,\ldots) \Leftrightarrow P(p,q,r,\ldots)$

Exercícios de Fixação

Os exercícios: 3, 7, 8, 9, 10, 11 e 12 do **Capítulo 6**: Página 64.

LIVRO: ALENCAR FILHO, Edgard de.

Iniciação à lógica matemática. 21. ed. São Paulo: Nobel, 2002. 203 p. ISBN 852130403X

Exercícios Complementar

1. Confirmar ou refutar, através de Tabela-Verdade, as seguintes equivalências lógicas por **Tautologia**:

a) $\sim p \rightarrow q \Leftrightarrow p \wedge \sim q$

b) $p \rightarrow q \wedge q \Leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

c) $\sim p \wedge (\sim q \rightarrow p) \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$

d) $p \rightarrow q \wedge r \rightarrow \sim q \Leftrightarrow r \rightarrow \sim p$