Sistema de Informação

Lógica para Computação

NOTAS DE AULA 5: Implicação lógica.

O que vamos estudar nesta Aula:

- **Conceito de Implicação lógica**
- **Regras de Inferência**
- **Regra de Inferência: Adição**
- **Regra de Inferência: Simplificação**
- **Regra de Inferência: Silogismo disjuntivo**
- **Regra de Inferência: *Modus Ponens***
- **Regra de Inferência: *Modus Tolles***
- **Tautologia e Implicação lógica**
- **Propriedades da implicação lógica**

- **Conceito de Implicação lógica**: Diz-se que uma proposição $P(p,q,r,...)$ **implica logicamente** (ou abreviadamente, **implica em**) uma proposição $Q(p,q,r,...)$, se Q é verdadeira ***todas as vezes*** que P é verdadeira.

$$\forall \mathrm{V}(P) = v \;\Rightarrow\; \mathrm{V}(Q) = v$$

Em outras palavras, todas as vezes que a proposição P for **Verdadeira (V)** obrigatoriamente a proposição Q também será **Verdadeira (V)** para afirmarmos que $P\ IMPLICA\ EM\ Q$. Por consequência disso, o $V(P) = V$ e $V(Q) = F$ é a condição contrária, ou seja, para dizermos que $P\ NÃO\ IMPLICA\ EM\ Q$.

Notação: Dizemos que: $P\ IMPLICA\ EM\ Q$

$$P(p,q,r,...) \underbrace{\Rightarrow}_{implica\ em\ ou\ podemos\ concluir} Q(p,q,r,...)$$

$$P \underbrace{\Rightarrow}_{implica\ em\ ou\ podemos\ concluir} Q$$

$$P \Rightarrow Q$$

EXEMPLOS DE IMPLICAÇÃO LÓGICA:

Dada as proposições compostas $R, S \ e \ T$:

$$R: p \leftrightarrow q, \qquad S: p \rightarrow q, \qquad T: q \rightarrow p$$

Temos a Tabela-Verdade:

1° RESOLUÇÃO

LINHA	p	q	$R: p \leftrightarrow q$	$S: p \rightarrow q$	$T: q \rightarrow p$
1	F	F	V	V	V
2	F	V	F	V	F
3	V	F	F	F	V
4	V	V	V	V	V

Podemos observar da Tabela-verdade acima que, as seguintes **implicações lógicas** podem ocorrer:

✓ **Implicação Lógica 1:**

$$p \leftrightarrow q \Rightarrow p \rightarrow q, ou \ seja, R \Rightarrow S$$

Prova disso são as LINHAS: 1 e 4 da Tabela-Verdade.

✓ **Implicação Lógica 2:**

$$p \leftrightarrow q \Rightarrow q \rightarrow s, ou \ seja, R \Rightarrow T$$

Prova disso são as LINHAS: 1 e 4 da Tabela-Verdade.

✓ **Implicação Lógica 3:**

$$p \Rightarrow q \rightarrow p, ou \ seja, p \Rightarrow T$$

Prova disso são as LINHAS: 3 e 4 da Tabela-Verdade.

✓ **Implicação Lógica 4:**

$$q \Rightarrow p \rightarrow q, ou \ seja, q \Rightarrow S$$

Prova disso são as LINHAS: 2 e 4 da Tabela-Verdade.

➢ **Regras de Inferência:** São ferramentas matemáticas deduzidas a partir da análise das **implicações lógicas** e são necessárias para efetuar:

1. Simplificação de expressões lógicas (Proposições compostas);
2. Prova de teoremas;
3. Métodos de dedução.

➢ Regra de Inferência: Adição

Dada a proposição composta R:

$$R: p \vee q$$

Temos a Tabela-Verdade:

1° RESOLUÇÃO

LINHA	p	q	$R: p \vee q$
1	F	F	F
2	F	V	V
3	V	F	V
4	V	V	V

Portanto; podemos deduzir as seguintes **implicações lógicas**:

- ✓ **Implicação Lógica 1:**

$$p \Rightarrow p \vee q, ou\ seja, p \Rightarrow R$$

Prova disso são as **LINHAS: 3 e 4** da Tabela-Verdade.

- ✓ **Implicação Lógica 2:**

$$q \Rightarrow p \vee q, ou\ seja, q \Rightarrow R$$

Prova disso são as **LINHAS: 2 e 4** da Tabela-Verdade.

As implicações lógicas 1 e 2 acima são provas de uma **Regra de Inferência** denominada de **Adição**. Observe a *Premissa* (Proposição sempre Verdadeira), a seguir:

p: O sol é quente. Ou seja, $V(p) = v$

Com isso, por **Adição** temos:

q: Vila Velha é uma Capital

R: O sol é quente ou Vila Velha é uma Capital

$$V(R): V(p)\ ou\ q$$

$$V(R): v\ ou\ q$$

$$V(R): v$$

$$\therefore p \Rightarrow R$$

É possível perceber que; o valor lógico de R NÃO depende do valor lógico de q. Com isso, a premissa p verdadeira implica na proposição R, que por **Adição**, também é Verdadeira.

➢ Regra de Inferência: Simplificação

Dada a proposição composta R:

$$R: p \wedge q$$

Temos a Tabela-Verdade:

1° RESOLUÇÃO

LINHA	p	q	$R: p \wedge q$
1	F	F	F
2	F	V	F
3	V	F	F
4	V	V	V

Portanto; podemos deduzir as seguintes **implicações lógicas**:

- ✓ **Implicação Lógica 1:**

$$p \wedge q \Rightarrow p, ou\ seja, R \Rightarrow p$$

Prova disso é a **LINHA: 4** da Tabela-Verdade.

- ✓ **Implicação Lógica 2:**

$$p \wedge q \Rightarrow q, ou\ seja, R \Rightarrow q$$

Prova disso é a **LINHA: 4** da Tabela-Verdade.

As implicações lógicas 1 e 2 acima são provas de uma **Regra de Inferência** denominada de **Simplificação**. Observe a *Premissa* (Proposição sempre Verdadeira), a seguir:

R: O sol é quente **e** a neve é branca. Ou seja, $V(R) = v$

Com isso, por **Simplificação** temos:

p: O sol é quente; **portanto**, $V(p) = v$

q: a neve é branca; **portanto**, $V(q) = v$

$$V(R): V(p)\ e\ V(q)$$

$$V(R): v\ e\ v$$

$$V(R): v$$

$$\therefore R \Rightarrow p\ ou\ R \Rightarrow q$$

É possível perceber que; o valor lógico da premissa R é verdadeiro se e somente se os valores lógicos das proposições p e q forem simultaneamente verdadeiras.

➢ Regra de Inferência: Silogismo disjuntivo

Dada as proposições compostas R e S:

$$R: (p \vee q) \wedge {\sim}p \qquad S: (p \vee q) \wedge {\sim}q$$

Temos a Tabela-Verdade:

1° RESOLUÇÃO

LINHA	p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(p \vee q)$	$R: (p \vee q) \wedge {\sim}p$	$S: (p \vee q) \wedge {\sim}q$
1	F	F	V	V	F	F	F
2	F	V	V	F	V	V	F
3	V	F	F	V	V	F	V
4	V	V	F	F	V	F	F

Portanto; podemos deduzir as seguintes **implicações lógicas**:

✓ **Implicação Lógica 1:**

$$(p \vee q) \wedge {\sim}p \Rightarrow q, ou\ seja, R \Rightarrow q$$

Prova disso é a **LINHA: 2** da Tabela-Verdade.

✓ **Implicação Lógica 2:**

$$(p \vee q) \wedge {\sim}q \Rightarrow p, ou\ seja, S \Rightarrow p$$

Prova disso é a **LINHA: 3** da Tabela-Verdade.

As implicações lógicas 1 e 2 acima são provas de uma **Regra de Inferência** denominada de **Silogismo disjuntivo**. Observe a *Premissa* (Proposição sempre Verdadeira), a seguir:

$R: (p \vee q) \wedge {\sim}p$. Ou seja, $V(R) = v$

Com isso; podemos deduzir que:

$$\therefore V({\sim}p) = v$$

$$\therefore V(p) = f$$

$$\therefore V(q) = v$$

$$\therefore V(R): (f \vee v) \wedge v \ = \ v$$

$$\therefore \ R \Rightarrow q$$

silogismo

substantivo masculino
lóg raciocínio dedutivo estruturado formalmente a partir de duas proposições (premissas), das quais se obtém por inferência uma terceira (conclusão) [p.ex.: "todos os homens são mortais; os gregos são homens; logo, os gregos são mortais"].

➢ **Regra de Inferência:** ***Modus Ponens*** (Tradução Latim: “*A maneira que afirma afirmando*”)

Dada a proposição composta R:

$$R: (p \to q) \wedge p$$

Temos a Tabela-Verdade:

1° RESOLUÇÃO

LINHA	p	q	$(p \to q)$	$R: (p \to q) \wedge p$
1	F	F	V	F
2	F	V	V	F
3	V	F	F	F
4	V	V	V	V

Portanto; podemos deduzir a seguinte **implicação lógica**:

✓ **Implicação Lógica 1:**

$$(p \to q) \wedge p \Rightarrow q, ou\ seja, R \Rightarrow q$$

Prova disso é a **LINHA: 4** da Tabela-Verdade.

A implicação lógica 1 acima é a prova de uma **Regra de Inferência** denominada de ***Modus Ponens***. Observe as *<u>Premissas</u>* (Proposição sempre Verdadeira), a seguir:

$$V(p \to q) = v \qquad \text{e} \qquad V(p) = v$$

$p \to q$: **se** Hoje é Sábado **então** Luana vai ao *Shopping*; **portanto**, $V(p \to q) = v$
p: Hoje é Sábado; **portanto**, $V(p) = v$
Então; q: Luana vai ao *Shopping*.

Por dedução matemática, temos:

$$R \Rightarrow q$$

$$V(R) = v \Rightarrow \mathrm{V}(q) \stackrel{?}{=} v$$

$$(p \to q) \wedge p = v$$

$$\therefore V(p) = v$$

$$(v \to q) \wedge v = v$$

PROVA: LINHA 4 DA TABELA

$$\therefore V(q) = v$$

$$(v \rightarrow v) \wedge v = v$$

$$v \wedge v = v$$

$$v = v \quad C.Q.D$$

$$\therefore V(q) = v$$

$$R \Rightarrow q$$

- **Regra de Inferência: *Modus Tollens*** (Tradução Latim: "*modo que nega*")

Dada as proposições a seguir:

$$R: (p \rightarrow q) \wedge \sim q \quad e \quad \sim p$$

Temos a Tabela-Verdade:

1° RESOLUÇÃO

LINHA	p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(p \rightarrow q)$	$R: (p \rightarrow q) \wedge \sim q$
1	F	F	V	V	V	V
2	F	V	V	F	V	F
3	V	F	F	V	F	F
4	V	V	F	F	V	F

Portanto; podemos deduzir a seguinte **implicação lógica**:

- ✓ **Implicação Lógica 1:**

$$(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p, ou\ seja, R \Rightarrow \sim p$$

Prova disso é a **LINHA: 1** da Tabela-Verdade.

A implicação lógica 1 acima é a prova de uma **Regra de Inferência** denominada de ***Modus Tollens***. Note porém que, existem outras implicações lógicas nesta mesma tabela, como por exemplo: $\sim p \Rightarrow p \rightarrow q$; entretanto estamos interessados apenas na implicação lógica que deduz a **Regra de Inferência**: ***Modus Tollens***.

Observe as *Premissas* (Proposição sempre Verdadeira), a seguir:

$$V(p \rightarrow q) = v \qquad e \qquad V(\sim q) = v$$

$p \rightarrow q$: **se** Hoje é Sábado **então** Luana vai ao *Shopping*; **portanto**, $V(p \rightarrow q) = v$

$\sim q$: Luana **NÃO** vai ao *Shopping*; **portanto**, $V(\sim q) = v$

Então; $\sim p$: Hoje **NÃO** é Sábado.

Por dedução matemática, temos:

$$R \Rightarrow \sim p$$

$$V(R) = v \Rightarrow \mathrm{V}(\sim p) \stackrel{?}{=} v$$

$$(p \to q) \wedge \sim \mathrm{q} \ = v$$

$$\therefore V(\sim q) = v$$

$$\therefore V(q) = f$$

$$(p \to f) \wedge v \ = v$$ PROVA: **LINHA 1** DA TABELA

$$\therefore V(p) = f$$

$$(f \to f) \wedge v \ = v$$

$$v \wedge v \ = v$$

$$v \ = v \quad C.Q.D$$

$$\therefore V(\sim p) = v$$

$$R \Rightarrow \sim p$$

➢ **Tautologia e Implicação lógica**

Teorema: Podemos dizer que:

$$\boxed{\begin{array}{c} se\ R \Rightarrow S\ então \\ A\ condicional\ R \to\ S\ \text{é}\ uma\ Tautologia. \end{array}}$$

EXEMPLO: Dada as proposições R e S:

$$R: (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \qquad \text{e} \qquad S: (p \rightarrow r)$$

Temos a Tabela-Verdade:

1° RESOLUÇÃO

LINHA	p	q	r	$(p \rightarrow q)$	$(q \rightarrow r)$	$R: (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	$S: (p \rightarrow r)$	$R \rightarrow S$
1	F	F	F	V	V	V	V	**V**
2	F	F	V	V	V	V	V	**V**
3	F	V	F	V	F	F	V	**V**
4	F	V	V	V	V	V	V	**V**
5	V	F	F	F	V	F	F	**V**
6	V	F	V	F	V	F	V	**V**
7	V	V	F	V	F	F	F	**V**
8	V	V	V	V	V	V	V	**V**
COLUNA	1	2	3	4	5	6	7	8

Portanto; podemos deduzir a seguinte **implicação lógica**:

- ✓ **Implicação Lógica 1:**

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r), ou\ seja, R \Rightarrow S$$

Prova disso são as **LINHAS: 1, 2, 4 e 8** da Tabela-Verdade.

A **Implicação Lógica 1** acima é a prova de uma **Regra de Inferência** denominada de ***Silogismo Hipotético***. Além disso, a **coluna 8** da tabela é um exemplo de aplicação do teorema descrito acima, pois a condicional $R \rightarrow S$ resulta em uma **Tautologia**.

➢ Propriedades da implicação lógica

- ***Reflexiva:***

$$P(p, q, r, \ldots) \Rightarrow P(p, q, r, \ldots)$$

a) Transitiva:

$$\boldsymbol{Se}\ P(p, q, r, \ldots) \Rightarrow Q(p, q, r, \ldots)\ \boldsymbol{e}\ Q(p, q, r, \ldots) \Rightarrow R(p, q, r, \ldots)\ \boldsymbol{então}\ P(p, q, r, \ldots) \Rightarrow R(p, q, r, \ldots)$$

Observação: A **propriedade transitiva** da implicação lógica é também provada pela **Regra de Inferência: Silogismo Hipotético**.

Exercícios de Fixação

1. Confirmar ou não, através de Tabela-Verdade (1° Forma Normal), as seguintes implicações lógicas:

a) $q \Rightarrow p \rightarrow q$

b) $q \Rightarrow (\sim q \leftrightarrow \sim p) \vee q$

c) $(\sim p \vee q) \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow p \rightarrow q$

d) $R: p \wedge \sim(p \vee \sim q) \Rightarrow S: \sim p \wedge q$

e) $\sim(p \vee \sim q) \Rightarrow \sim p$

f) $(a \vee \sim b \rightarrow \sim c) \wedge c \Rightarrow \sim a \wedge b$

g) $\sim(\sim q \rightarrow p) \Rightarrow \sim p$

h) $(\sim(p \wedge \sim q) \rightarrow \sim p) \wedge p \Rightarrow \sim q$

2. Confirmar ou não, através de Tabela-Verdade (1° Forma Normal), as seguintes implicações lógicas por **Tautologia**:

a) $\sim p \Rightarrow \sim q \vee \sim p$

b) $p \wedge (\sim q \rightarrow \sim p) \Rightarrow q \vee \sim p$

c) $\sim p \wedge (\sim q \rightarrow p) \Rightarrow q$

d) $(p \rightarrow \sim q \vee p) \wedge (\sim p \wedge q) \Rightarrow \sim p$

3. Indique a Regra de Inferência que justifique a validade das implicações lógicas a seguir:

a) $p \rightarrow q \Rightarrow (p \rightarrow q) \vee \sim r$

b) $((q \vee r) \rightarrow \sim p) \wedge \sim\sim p \Rightarrow \sim(q \vee r)$

c) $((p \wedge q) \vee (\sim p \wedge r)) \wedge \sim(p \wedge q) \Rightarrow \sim p \wedge r$

d) $((r \vee s \vee \sim q) \rightarrow q) \wedge (r \vee s \vee \sim q) \Rightarrow q$

e) $(p \leftrightarrow \sim q) \wedge (p \rightarrow \sim q) \Rightarrow (p \rightarrow \sim q)$

f) $q \wedge (\sim p \wedge q \rightarrow \sim q) \Rightarrow \sim(\sim p \wedge q)$

g) $(\sim p \rightarrow \sim q) \wedge \sim\sim q \Rightarrow \sim\sim p$

h) $(p \leftrightarrow q) \wedge \sim(p \leftrightarrow q) \Rightarrow r$

<u>Capítulo 5</u>: **<u>Exercícios: 2 até 6</u>** (Página 54)

ALENCAR FILHO, Edgard de. Iniciação à lógica matemática. 21. ed. São Paulo: Nobel, 2002. 203 p. ISBN 852130403X