ที่มาสมการ $Naive\ Bayes$

ต้องการพิสูจน์ว่า

$$C = \max_{k \in K}\left(P(C_k | F_1, F_2, \ldots, F_D)\right) = \max_{k \in K}\left(P(C_k)\prod_{d=1}^{D} P(F_d | C_k)\right)$$

จาก $Bayes'\ Theorem$

เรารู้ว่า $P(A | B) = \dfrac{P(B | A)P(A)}{P(B)}$

$$\max_{k \in K}\left(P(C_k | F_1, F_2, \ldots, F_D)\right) = \max_{k \in K}\left(\frac{P(F_1, F_2, \ldots, F_D | C_k)P(C_k)}{P(F_1, F_2, \ldots, F_D)}\right)$$

$$= \max_{k \in K}\left(\frac{P(C_k)P(F_1, F_2, \ldots, F_D | C_k)}{P(F_1, F_2, \ldots, F_D)}\right)$$

เนื่องจากเราพิจารณาค่า $\max_{k \in K}$ และ $P(F_1, F_2, \ldots, F_D)$ เป็นค่าคงที่

ดังนั้น

$$\max_{k \in K}\left(P(C_k | F_1, F_2, \ldots, F_D)\right) = \max_{k \in K}\left(P(C_k)P(F_1, F_2, \ldots, F_D | C_k)\right)$$

สิ่งที่เราต้องทำต่อคือ

$$\max_{k \in K}\left(P(C_k | F_1, F_2, \ldots, F_D)\right) = \max_{k \in K}\left(P(C_k)P(F_1, F_2, \ldots, F_D | C_k)\right)$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \max_{k \in K}\left(P(C_k)\prod_{d=1}^{D} P(F_d | C_k)\right)$$

$$
\begin{aligned}
\max_{k \in K}\left(P(C_k | F_1, F_2, \dots, F_D)\right) &= \max_{k \in K}\left(P(C_k)P(F_1, F_2, \dots, F_D | C_k)\right) \\
&= P(C_k)P(F_1, F_2, \dots, F_D | C_k) \\
&= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&= P(C_k)\prod_{d=1}^{D} P(F_d | C_k) \\
&= \max_{k \in K}\left(P(C_k)\prod_{d=1}^{D} P(F_d | C_k)\right)
\end{aligned}
$$

จาก $Product\ Rule$

เรารู้ว่า $P(A, B) = P(A | B)P(B)$

ซึ่งสามารถแสดงในรูปของ $Bayes$ ได้ดังนี้ $P(A, B | Z) = P(A | B, Z)P(B | Z)$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
P(F_1, F_2, \dots, F_D | C_k) &= P(F_1 | F_2, \dots, F_D, C_k)P(F_2, \dots, F_D | C_k) \\
P(F_2, \dots, F_D | C_k) &= P(F_2 | F_3, \dots, F_D, C_k)P(F_3, \dots, F_D | C_k) \\
P(F_3, \dots, F_D | C_k) &= P(F_3 | F_4, \dots, F_D, C_k)P(F_4, \dots, F_D | C_k) \\
&\vdots \\
P(F_{D-1}, F_D | C_k) &= P(F_{D-1} | F_D, C_k)P(F_D | C_k)
\end{aligned}
$$

นั่นคือ

$$
P(F_1, F_2, \dots, F_D | C_k) = P(F_1 | F_2, \dots, F_D, C_k)P(F_2, \dots, F_D | C_k)\dots P(F_{D-1} | F_D, C_k)P(F_D | C_k)
$$

จาก $Conditional\ Independence$

เรารู้ว่า

$$
\left.\begin{aligned}
P(X | Y) &= P(X) \\
P(X | Y, Z) &= P(X | Y)
\end{aligned}\right\} \quad \text{X is independent from Y}
$$

We have the assumption that $F_1, F_2, \dots, F_D$ are all independent.

เรามีสมมติฐานว่า $F_1, F_2, \ldots, F_D$ เป็นอิสระต่อกัน

$$\begin{aligned}
P(F_1 | F_2, \ldots, F_D, C_k) &= P(F_1 | C_k) \\
P(F_2 | F_3, \ldots, F_D, C_k) &= P(F_2 | C_k) \\
P(F_3 | F_4, \ldots, F_D, C_k) &= P(F_3 | C_k) \\
&\vdots \\
P(F_{D-1} | F_D, C_k) &= P(F_{D-1} | C_k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(F_1, F_2, \ldots, F_D | C_k) &= P(F_1 | C_k)P(F_2 | C_k)\ldots P(F_D | C_k) \\
&= \prod_{d=1}^{D} P(F_d | C_k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(C_k)P(F_1, F_2, \ldots, F_D | C_k) &= P(C_k)P(F_1 | C_k)P(F_2 | C_k)\ldots P(F_D | C_k) \\
&= P(C_k)\prod_{d=1}^{D} P(F_d | C_k)
\end{aligned}$$