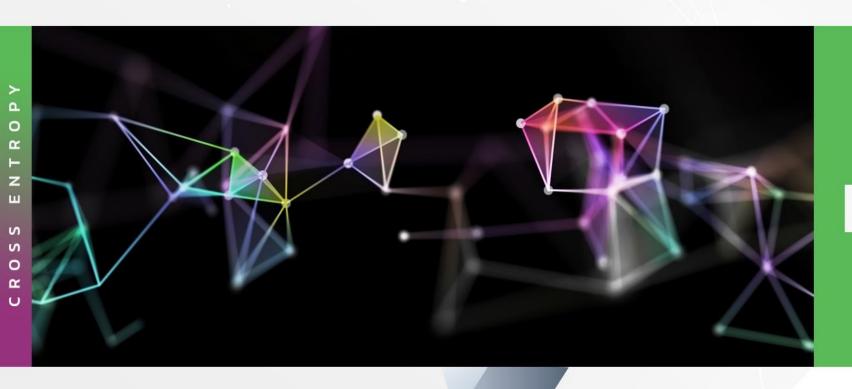
TAUTOLOGY INNOVATION SCHOOL





CROSSENTROPY

BY TAUTOLOGY

MADE BY TAUTOLOGY THAILAND
DO NOT PUBLISH WITHOUT PERMISSION

facebook/tautologyai www.tautology.live



Cross Entropy

2-class

$$Cost = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [y_i \log(\hat{y}_i) + (1 - y_i) \log(1 - \hat{y}_i)]$$

Multi-class

$$Cost = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{c=1}^{k} [y_{i,c} \log(\hat{y}_{i,c})]$$



Cross Entropy

- Information Theory
- Uncertainty
- Entropy
- KL Divergence



АUТЫ́LOGY



Information Theory

- Concept
- Definition
- Formation



Concept

แนวคิดของ information มี 2 ข้อ ดังต่อไปนี้

- 1. เหตุการณ์ที่มี**โอกาสเกิดขึ้นต่ำ** (low probability) จะมี **information สูง**
- 2. เหตุการณ์ที่มี**โอกาสเกิดขึ้นสูง** (high probability) จะมี **information ต่ำ**



Information Theory

- **✓・Concept**
 - Definition
 - Formation



Definition

- 1. เหตุการณ์ที่มีความน่าจะเป็น 100% จะไม่มี information ใด ๆ
- 2. ยิ่งเหตุการณ์มีโอกาสเกิดขึ้นน้อยเท่าไหร่ information ก็จะมีค่ามากขึ้นเท่านั้น
- 3.) Information รวมของสองเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกันจะเท่ากับผลรวมของ information ของสองเหตุการณ์นั้น ๆ



Information Theory

- **√** · Concept
- **✓•** Definition
 - Formation



เราต้องการหา function ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง information และ probability

information = f(probability)



กำหนดให้ I(x) คือ information ของเหตุการณ์ x และ p(x) คือ probability ของเหตุการณ์ x จะได้ว่า

$$I(x) = f(p(x))$$

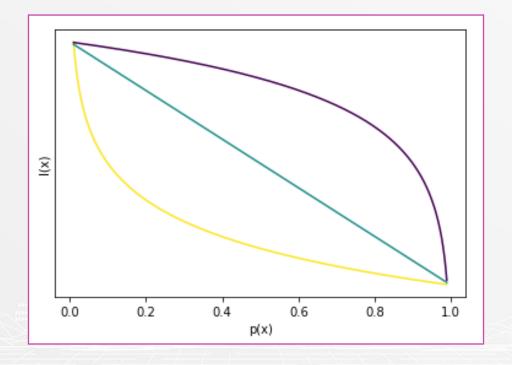


จาก definition ข้อที่ 1 "เหตุการณ์ที่มีความน่าจะเป็น 100% จะไม่มี information ใด ๆ" จะได้ว่า

ถ้า
$$p(x) = 1$$
 แล้ว $I(x) = f(1) = 0$



จาก definition ข้อที่ 2 "ยิ่งเหตุการณ์มีโอกาสเกิดขึ้นน้อยเท่าไหร่ information ก็จะมีค่ามากขึ้น เท่านั้น" จะได้ว่า ความสัมพันธ์ระหว่าง I(x) และ p(x) เป็นแบบ monotone function





กำหนดให้เหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B เป็นอิสระต่อกัน และกำหนดให้เหตุการณ์ C เป็น เหตุการณ์ A และ B เกิดขึ้นพร้อมกัน จะได้ว่า

$$p(c) = p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$



จาก
$$I(x) = f(p(x))$$
 จะได้ว่า

$$I(c) = f(p(C))$$
$$= f(p(A) \cdot p(B))$$



จาก definition ข้อที่ 3 "Information รวมของสองเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกันจะเท่ากับผลรวม ของ information ของสองเหตุการณ์นั้น ๆ" จะได้ว่า

$$I(c) = f(p(C))$$

$$= f(p(A) \cdot p(B))$$

$$= f(p(A)) + f(p(B))$$



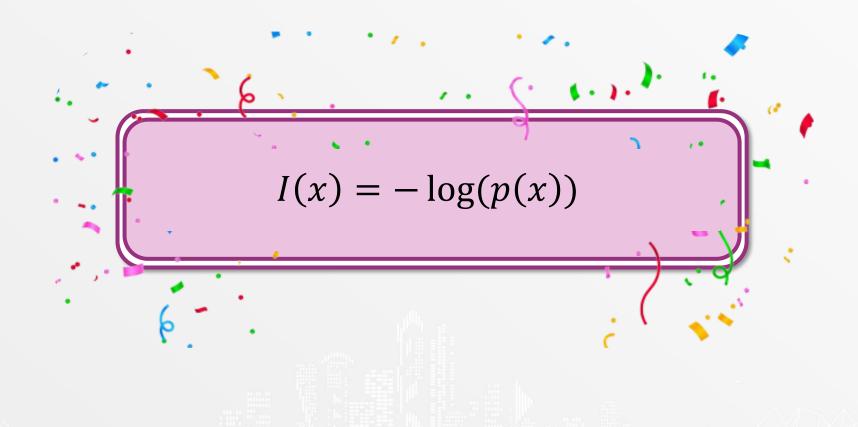
Function เพียงอันเดียวที่มีคุณสมบัติ

- 1. เป็น monotone function บนช่วง [0,1]
- 2. $f(\Box \cdot \triangle) = f(\Box) + f(\triangle)$
- 3. f(1) = 0



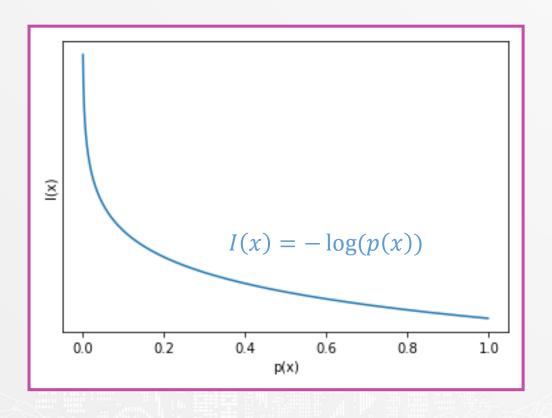
$$f(p(x)) = -\log(p(x))$$













Information Theory

- ✓ Concept
- **✓•** Definition
- **✓• Formation**



Cross Entropy

- **✓・Information Theory**
 - Uncertainty
 - Entropy
 - KL Divergence



Таиты́Logy



Uncertainty

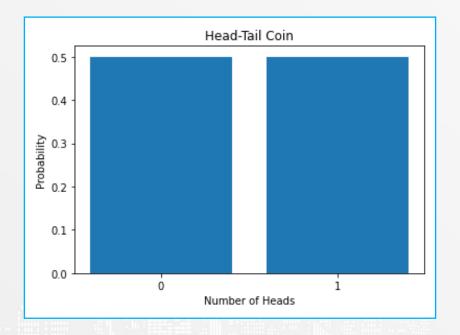
Uncertainty คือ ค่าที่ใช้บอกความไม่เป็นระเบียบ/ความยุ่งเหยิงของระบบ ซึ่งเป็นอีก หนึ่งชื่อเรียกของ information

uncertainty = Information



Uncertainty

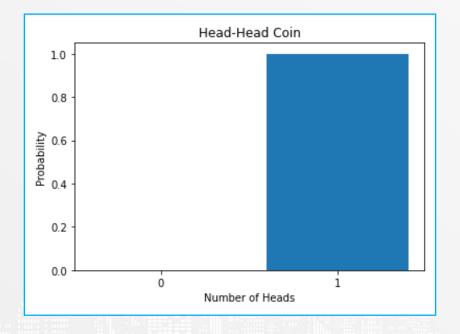
ระบบที่มีความยุ่งเหยิง





Uncertainty

ระบบที่ไม่มีความยุ่งเหยิง





Cross Entropy

- **✓・Information Theory**
- **✓・** Uncertainty
 - Entropy
 - KL Divergence







Entropy คือ ค่าที่บอกถึงค่าเฉลี่ยของ information หรือ uncertainty ในระบบ

$$H(P) = E[I(x)]$$



$$H(P) = E[I(x)]$$

$$= E[-\log(p(x))]$$

$$= -E[\log(p(x))]$$

$$= -\sum_{c=1}^{k} p(x_c) \log(p(x_c))$$

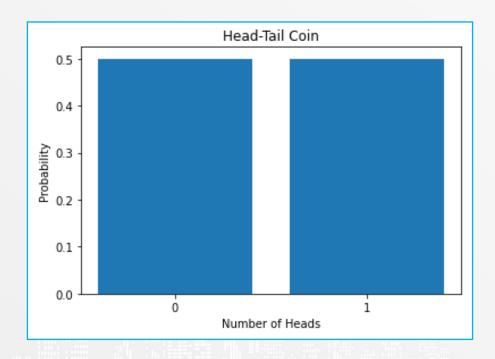


Entropy คือ ค่าที่บอกถึงค่าเฉลี่ยของ information หรือ uncertainty ของระบบ

$$H(P) = -\sum_{c=1}^{k} p(x_c) \log(p(x_c))$$



ตัวอย่าง (1)





ตัวอย่าง (1)

$$H(P) = -\sum_{c=1}^{2} p(x_c) \log(p(x_c))$$

$$= -p(x_1) \log(p(x_1)) - p(x_2) \log(p(x_2))$$

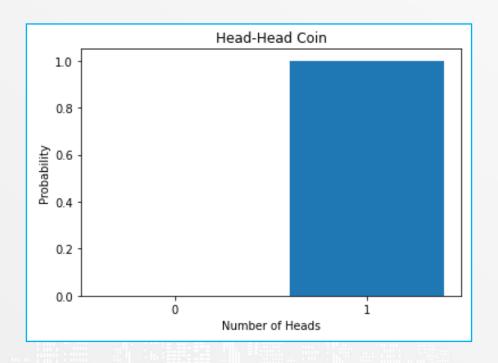
$$= -p(0) \log(p(0)) - p(1) \log(p(1))$$

$$= -\frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 0.6931$$



ตัวอย่าง (2)





ตัวอย่าง (2)

$$H(P) = -\sum_{c=1}^{2} p(x_c) \log(p(x_c))$$

$$= -p(x_1) \log(p(x_1)) - p(x_2) \log(p(x_2))$$

$$= -p(0) \log(p(0)) - p(1) \log(p(1))$$

$$= -0 \log(0) - 1 \log(1)$$

$$= 0$$



Cross Entropy

- **✓・Information Theory**
- **✓・** Uncertainty
- **✓・Entropy**
 - KL Divergence





KL Divergence

- What is KL Divergence?
- Origin of the Equation
- KL as Cost Function



What is KL Divergence?

KL Divergence คือ เครื่องมือที่ใช้ในการวัดความแตกต่างระหว่าง 2 distribution (P,Q) ว่า Q แตกต่างจาก P เท่าไหร่

$$D_{KL}(P \parallel Q) = -H(P) - \sum_{c=1}^{k} p(x_c) \log(q(x_c))$$



What is KL Divergence?

- ถ้า P และ Q เหมือนกันทุกประการ แล้ว $D_{KL}(P \parallel Q) = 0$
- ถ้า P และ Q แตกต่างกัน แล้ว $D_{KL}(P \parallel Q) > 0$ (ยิ่งแตกต่างมาก $D_{KL}(P \parallel Q)$ ยิ่งมีค่า มาก)

$$D_{KL}(P \parallel Q) = -H(P) - \sum_{c=1}^{k} p(x_c) \log(q(x_c))$$



KL Divergence

- **✓• What is KL Divergence?**
 - Origin of the Equation
 - KL as Cost Function



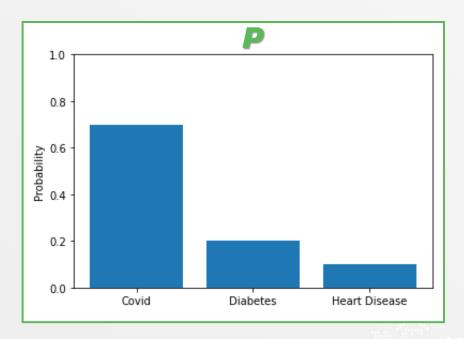
$$D_{KL}(P \parallel Q) = -H(P) - \sum_{c=1}^{k} p(x_c) \log(q(x_c))$$







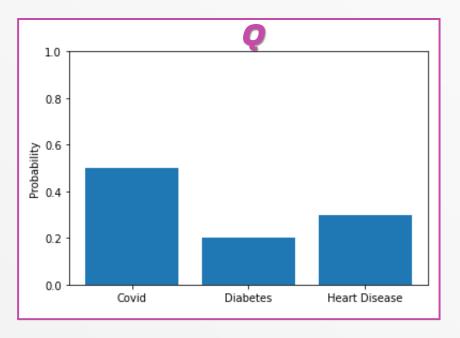






■
$$p(\iota \cup 1) = 0.2$$

•
$$p(หัวใจ) = 0.1$$

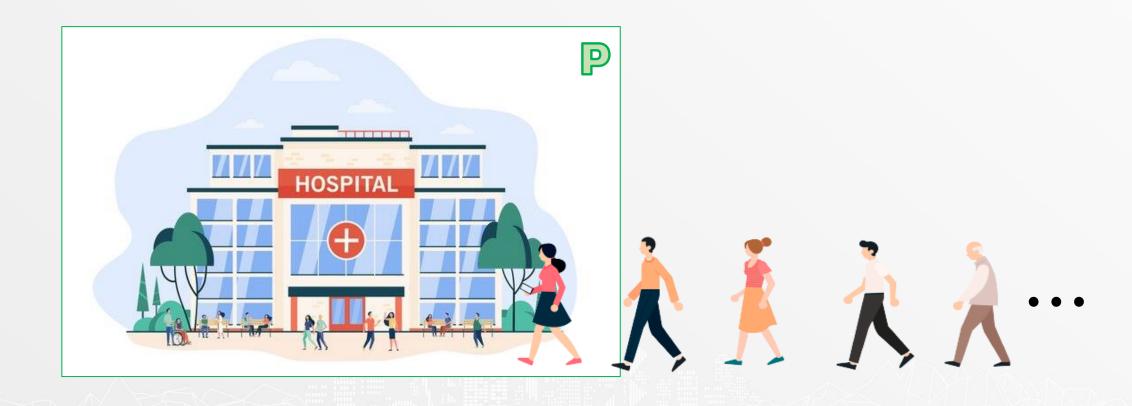


•
$$p(\bar{l} = \bar{l} = 0.5)$$

■
$$p(\text{IU1H21U}) = 0.2$$

•
$$p(หัวใจ) = 0.3$$











```
\frac{p(\mbox{โควิด})}{q(\mbox{โควิด})} \; \frac{p(\mbox{โควิด})}{q(\mbox{โควิด})} \; \frac{p(\mbox{เบาหวาน})}{q(\mbox{โควิด})} \; \frac{p(\mbox{โควิด})}{q(\mbox{โควิด})} \; \frac{p(\mbox{หัวใจ})}{q(\mbox{หัวใจ})} \; \dots
```

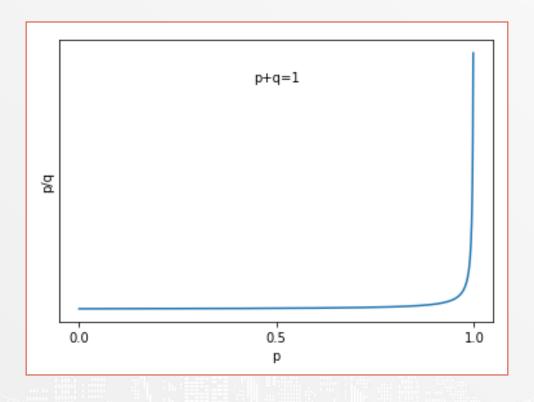




```
\frac{p(\text{โควิด})}{q(\text{โควิด})} \; \frac{p(\text{โควิด})}{q(\text{โควิด})} \; \frac{p(\text{เบาหวาน})}{q(\text{เบาหวาน})} \; \frac{p(\text{โควิด})}{q(\text{โควิด})} \; \frac{p(\text{หัวใจ})}{q(\text{หัวใจ})} \; \dots
```

หาค่าเฉลี่ย







```
\frac{p(\bar{\mathbf{l}}\mathbf{h}\bar{\mathbf{J}}\mathbf{0})}{q(\bar{\mathbf{l}}\mathbf{h}\bar{\mathbf{J}}\mathbf{0})} \; \frac{p(\bar{\mathbf{l}}\mathbf{h}\bar{\mathbf{J}}\mathbf{0})}{q(\bar{\mathbf{l}}\mathbf{h}\bar{\mathbf{J}}\mathbf{0})} \; \frac{p(\bar{\mathbf{l}}\mathbf{u})}{q(\bar{\mathbf{l}}\mathbf{u})} \; \frac{p(\bar{\mathbf{l}}\mathbf{h}\bar{\mathbf{J}}\mathbf{0})}{q(\bar{\mathbf{l}}\mathbf{h}\bar{\mathbf{J}}\mathbf{0})} \; \frac{p(\bar{\mathbf{l}}\bar{\mathbf{h}}\bar{\mathbf{J}}\mathbf{0})}{q(\bar{\mathbf{l}}\bar{\mathbf{h}}\bar{\mathbf{J}}\mathbf{0})} \; \frac{p(\bar{\mathbf{l}}\bar{\mathbf{h}}\bar{\mathbf{J}}\mathbf{0})}{q(\bar{\mathbf{l}}\bar{\mathbf{h}}\bar{\mathbf{J}}\mathbf{0})} \; \cdots
```

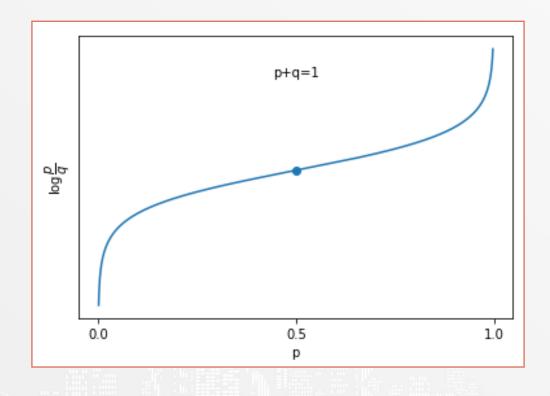




$$\log\left(\frac{p(\text{โควิด})}{q(\text{โควิด})}\right)\log\left(\frac{p(\text{โควิด})}{q(\text{โควิด})}\right)\log\left(\frac{p(\text{เบาหวาน})}{q(\text{เบาหวาน})}\right)\log\left(\frac{p(\text{โควิด})}{q(\text{โควิด})}\right)\log\left(\frac{p(\text{หัวใจ})}{q(\text{หัวใจ})}\right)...$$

หาค่าเฉลี่ย

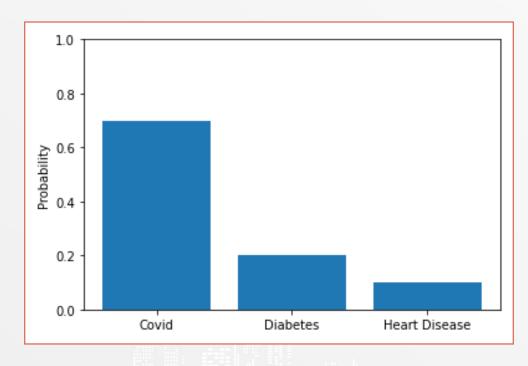






$$D_{KL}(P \parallel Q) = \frac{1}{n} \sum_{c=1}^{n} \log \left(\frac{p(x_c)}{q(x_c)} \right)$$





- $p(\bar{l} = 0.7)$
- p(IU1H21U) = 0.2
- p(หัวใจ) = 0.1



$$D_{KL}(P \parallel Q) = rac{1}{n} \Bigg[p(extbf{โควิด}) \cdot n \cdot \log igg(rac{p(extbf{โควิด})}{q(extbf{โควิด})} igg) + p(extbf{เบาหวาน}) \cdot n \cdot \log igg(rac{p(extbf{IUTHDTU})}{q(extbf{IUTHDTU})} igg) + p(extbf{หัวใจ}) \cdot n \cdot \log igg(rac{p(extbf{KDlo})}{q(extbf{KDlo})} igg) \Bigg]$$



$$D_{KL}(P \parallel Q) = p(โควิด) \cdot \log \left(\frac{p(โควิด)}{q(โควิด)} \right)$$
 $+p(เบาหวาน) \cdot \log \left(\frac{p(เบาหวาน)}{q(เบาหวาน)} \right)$ $+p(หัวใจ) \cdot \log \left(\frac{p(หัวใจ)}{q(หัวใจ)} \right)$



$$D_{KL}(P \parallel Q) = \sum_{c=1}^{k} p(x_c) \log \left(\frac{p(x_c)}{q(x_c)} \right)$$



$$D_{KL}(P \parallel Q) = \sum_{c=1}^{k} p(x_c) [\log(p(x_c)) - \log(q(x_c))]$$
$$= \sum_{c=1}^{k} [p(x_c) \log(p(x_c)) - p(x_c) \log(q(x_c))]$$

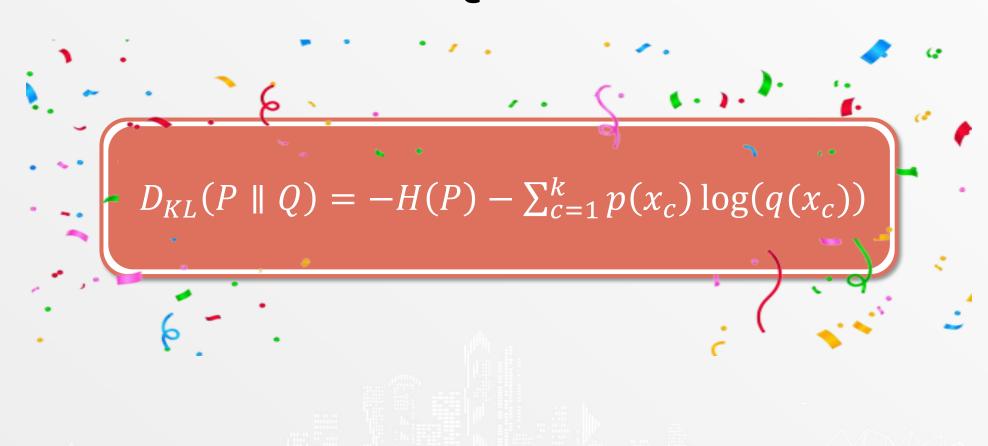


$$D_{KL}(P \parallel Q) = \sum_{c=1}^{k} p(x_c) \log(p(x_c)) - \sum_{c=1}^{k} p(x_c) \log(q(x_c))$$

$$= -H(P) - \sum_{c=1}^{k} p(x_c) \log(q(x_c))$$

$$(\because H(P) = -\sum_{c=1}^{k} p(x_c) \log(p(x_c)))$$







KL Divergence

- **✓• What is KL Divergence?**
- **✓•** Origin of the Equation
 - KL as Cost Function



2-class

$$Cost = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [y_i \log(\hat{y}_i) + (1 - y_i) \log(1 - \hat{y}_i)]$$

Multi-class

$$Cost = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{c=1}^{k} [y_{i,c} \log(\hat{y}_{i,c})]$$



x ₁	x ₂	y ₁	y ₂	y ₃
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
:	i	:	:	:
-1	0	0	0	1

ตารางแสดง dataset

Model	
моаеі	

$\hat{\mathbf{y}}_1$	$\hat{\mathbf{y}}_2$	$\hat{\mathbf{y}}_3$
0.5	0.3	0.2
0.2	0.7	0.1
:	:	:
0.1	0.3	0.6

ตารางแสดง \hat{y} ที่ได้จาก model



Model	

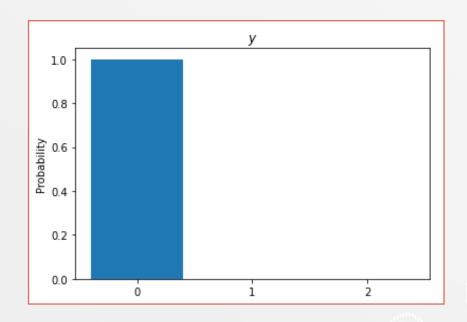
	x ₁	x ₂	y ₁	У2	y ₃
	0	1	1	0	0
	1	0	0	1	0
	:	:	:	:	:
•	-1	0	0	0	1

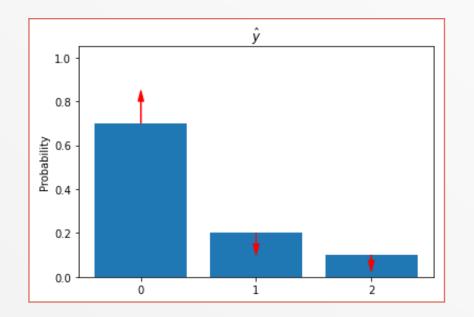
ตารางแสดง dataset

$\hat{\mathbf{y}}_1$	$\hat{\mathbf{y}}_2$	\hat{y}_3
0.5	0.3	0.2
0.2	0.7	0.1
:	:	:
0.1	0.3	0.6

ตารางแสดง \hat{y} ที่ได้จาก model







$$x_1=0,$$

$$x_1=0, \qquad x_2=1$$

MADE BY TAUTOLOGY THAILAND DO NOT PUBLISH WITHOUT PERMISSION



KL as Cost Function

N	1odel	

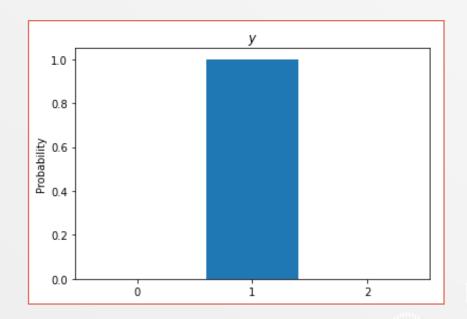
x ₁	x ₂	y ₁	y ₂	y ₃
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
÷	÷	:	÷	:
-1	0	0	0	1

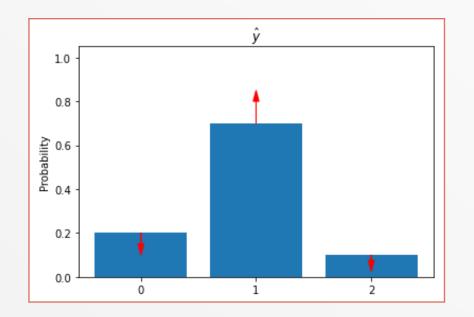
ตารางแสดง dataset

\hat{y}_1	$\hat{\mathbf{y}}_2$	$\hat{\mathbf{y}}_3$
0.5	0.3	0.2
0.2	0.7	0.1
÷	:	÷
0.1	0.3	0.6

ตารางแสดง \hat{y} ที่ได้จาก model







$$x_1 = 1$$
,

$$x_1=1, \qquad x_2=0$$



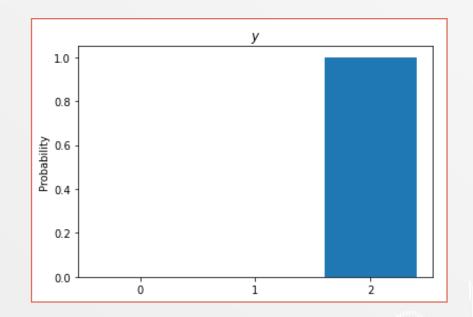
Model

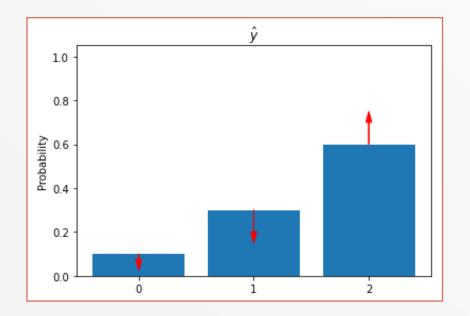
$\mathbf{x_1}$	x ₂	y 1	y 2	y ₃	$\hat{\mathrm{y}}_1$	$\hat{\mathbf{y}}_2$	$\hat{\mathtt{y}}_3$
0	1	1	0	0	0.5	0.3	0.2
1	0	0	1	0	0.2	0.7	0.1
:	÷	i	÷	÷	:	:	:
-1	0	0	0	1	0.1	0.3	0.6

ตารางแสดง dataset

ตารางแสดง \hat{y} ที่ได้จาก model







$$x_1 = -1, \qquad x_2 = 0$$

$$x_2 = 0$$



$$D_{KL}(P \parallel Q) = -H(P) - \sum_{c=1}^{k} p(x_c) \log(q(x_c))$$



$$D_{KL}(\mathbf{y}_i, \hat{\mathbf{y}}_i) = -H(\mathbf{y}_i) - \sum_{c=1}^k y_{i,c} \log(\hat{y}_{i,c})$$



x ₁	x ₂	y ₁	y ₂	y ₃
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
i	:	:	:	:
-1	0	0	0	1

$$D_{KL}(\mathbf{y_i}, \hat{\mathbf{y}_i}) = -H(\mathbf{y_i}) - \sum_{c=1}^{k} y_{i,c} \log(\hat{y}_{i,c})$$



x ₁	x ₂	y ₁	y ₂	У3
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
:	i	:	:	:
-1	0	0	0	1

กาคงที่
$$D_{KL}(\mathbf{y_i}, \hat{\mathbf{y}_i}) = -H(\mathbf{y_i}) - \sum_{c=1}^{k} y_{i,c} \log(\hat{y}_{i,c})$$



x ₁	x ₂	y ₁	y ₂	у ₃
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
i	i	:	:	:
-1	0	0	0	1

$$D_{KL}(\mathbf{y_i}, \hat{\mathbf{y_i}}) \propto -\sum_{c=1}^{k} y_{i,c} \log(\hat{y}_{i,c})$$



$$D_{KL}(\mathbf{y_i}, \hat{\mathbf{y}_i}) \propto -\sum_{c=1}^k y_{i,c} \log(\hat{y}_{i,c})$$



x ₁	x ₂	y ₁	y ₂	y ₃
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
:	:	:	:	:
-1	0	0	0	1

$\hat{\mathbf{y}}_1$	$\hat{\mathrm{y}}_2$	$\hat{\mathbf{y}}_3$
0.5	0.3	0.2
0.2	0.7	0.1
:	:	:
0.1	0.3	0.6

$$D_{KL}(\mathbf{y_i}, \hat{\mathbf{y}_i}) \propto -\sum_{c=1}^k y_{i,c} \log(\hat{y}_{i,c})$$



x ₁	x ₂	y ₁	y ₂	y ₃
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
:	i	:	i	i
-1	0	0	0	1

$\hat{\mathbf{y}}_1$	$\hat{\mathrm{y}}_2$	$\hat{\mathbf{y}}_3$
0.5	0.3	0.2
0.2	0.7	0.1
:	:	:
0.1	0.3	0.6

$$\sum_{i=1}^{n} D_{KL}(\mathbf{y}_i, \hat{\mathbf{y}}_i) \propto -\sum_{i=1}^{n} \sum_{c=1}^{k} y_{i,c} \log(\hat{y}_{i,c})$$



เราต้องการ model ที่ทำให้ $\sum_{i=1}^n D_{KL}(\mathbf{y_i}, \hat{\mathbf{y}_i})$ มีค่าน้อยที่สุด ($\hat{\mathbf{y}_i}$ เหมือนกับ \mathbf{y}_i บนทุก sample มากที่สุด)



x ₁	x ₂	y ₁	y ₂	y ₃
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
:	:	:	:	:
-1	0	0	0	1

$\hat{\mathbf{y}}_1$	$\hat{\mathbf{y}}_2$	$\hat{\mathbf{y}}_3$
0.5	0.3	0.2
0.2	0.7	0.1
÷	:	:
0.1	0.3	0.6

$$\min D_{KL}(\mathbf{y}_i, \hat{\mathbf{y}}_i) \equiv \min -\sum_{i=1}^n \sum_{c=1}^k y_{i,c} \log(\hat{y}_{i,c})$$

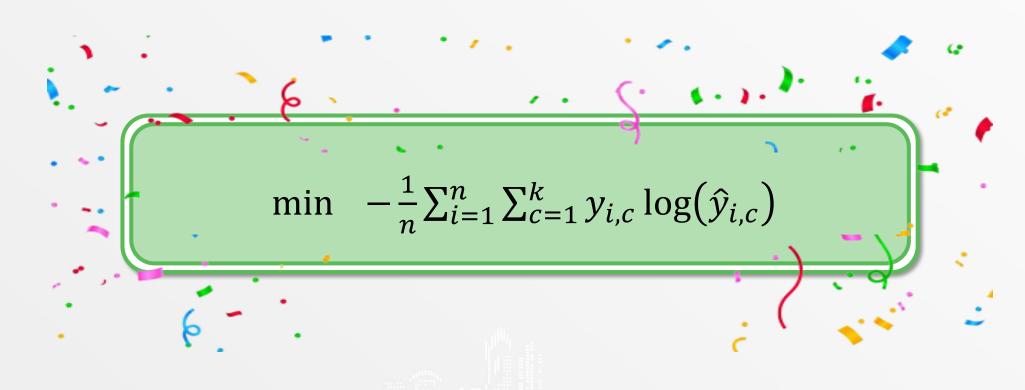


$$\min -\sum_{i=1}^{n} \sum_{c=1}^{k} y_{i,c} \log(\hat{y}_{i,c})$$



เพื่อความสะดวกในการใช้ gradient descent เราจึงใช้ ค่าเฉลี่ยของ cross entropy ในการ train model







2-class

$$Cost = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [y_i \log(\hat{y}_i) + (1 - y_i) \log(1 - \hat{y}_i)]$$

Multi-class

$$Cost = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{c=1}^{k} [y_{i,c} \log(\hat{y}_{i,c})]$$



พิจารณา Cost สำหรับ 2-class

$$Cost = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{c=1}^{k} y_{i,c} \log(\hat{y}_{i,c})$$

$$= -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{c=1}^{2} y_{i,c} \log(\hat{y}_{i,c})$$

$$= -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [y_{i,1} \log(\hat{y}_{i,1}) + y_{i,2} \log(\hat{y}_{i,2})]$$



พิจารณา Cost สำหรับ 2-class

$$Cost = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [y_{i,1} \log(\hat{y}_{i,1}) + y_{i,2} \log(\hat{y}_{i,2})]$$

$$= -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [y_{i,1} \log(\hat{y}_{i,1}) + (1 - y_{i,1}) \log(1 - \hat{y}_{i,1})]$$

$$(\because y_{i,1} + y_{i,2} = 1)$$

$$\hat{y}_{i,1} + \hat{y}_{i,2} = 1)$$



y_1	${oldsymbol y}_2$
1	0
0	1
i i	ŧ
1	0



у
1
1
:
0

$$: y_1 + y_2 = 1$$



$\widehat{oldsymbol{y}}_{oldsymbol{1}}$	$\widehat{oldsymbol{y}}_2$
0.7	0.3
0.2	0.8
i i	i
0.6	0.4



ŷ	
0.7	
0.2	
:	
0.6	

$$: \hat{y}_1 + \hat{y}_2 = 1$$



พิจารณา Cost สำหรับ 2-class

$$Cost = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[y_{i,1} \log(\hat{y}_{i,1}) + (1 - y_{i,1}) \log(1 - \hat{y}_{i,1}) \right]$$
$$= -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[y_{i} \log(\hat{y}_{i}) + (1 - y_{i}) \log(1 - \hat{y}_{i}) \right]$$



2-class

$$Cost = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [y_i \log(\hat{y}_i) + (1 - y_i) \log(1 - \hat{y}_i)]$$

Multi-class

$$Cost = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{c=1}^{k} [y_{i,c} \log(\hat{y}_{i,c})]$$



KL Divergence

- ✓ What is KL Divergence?
- **✓•** Origin of the Equation
- **✓• KL as Cost Function**



Cross Entropy

- **✓・Information Theory**
- **✓•** Uncertainty
- **✓・Entropy**
- KL Divergence