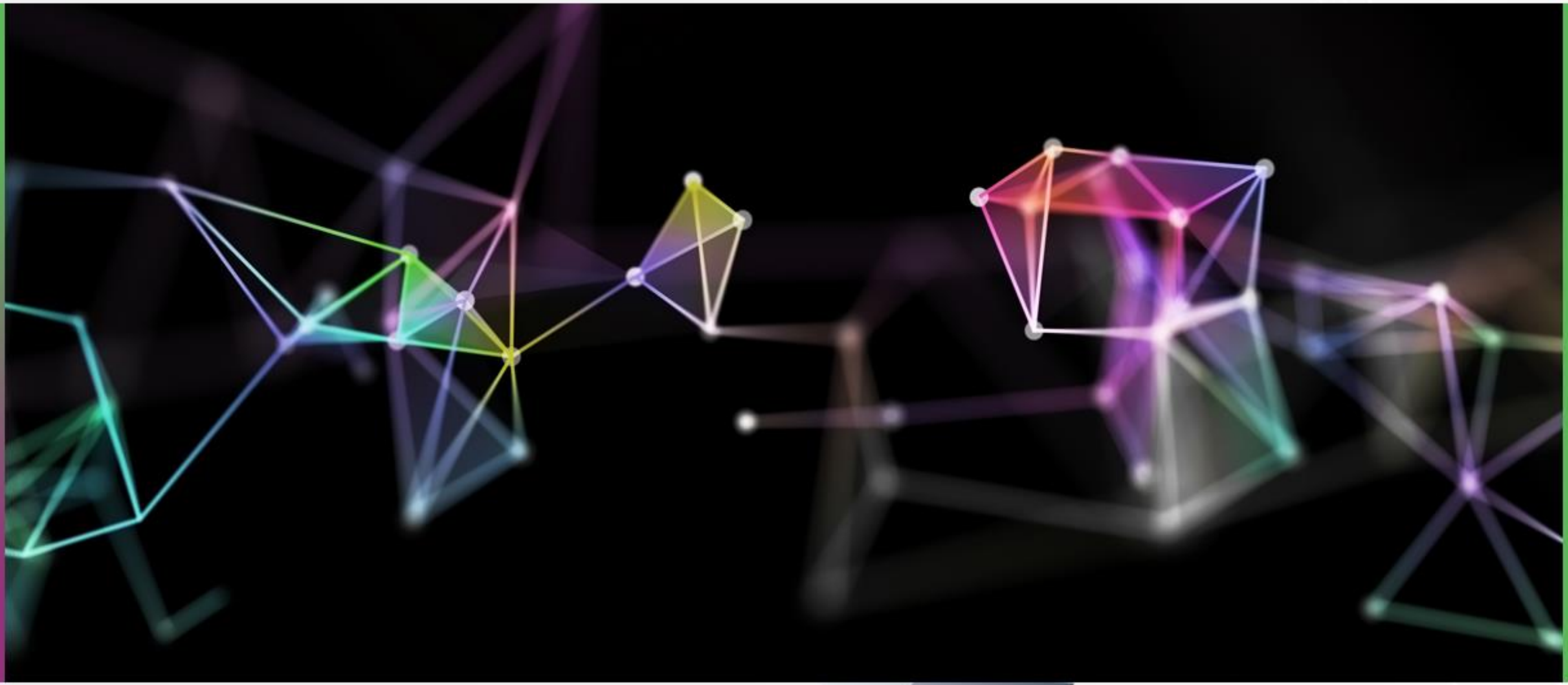
TAUTOLOGY
INNOVATION
SCHOOL

TAUTOLOGY

CROSS ENTROPY



CROSS ENTROPY

BY TAUTOLOGY

facebook/tautologyai
www.tautology.live

Cross Entropy

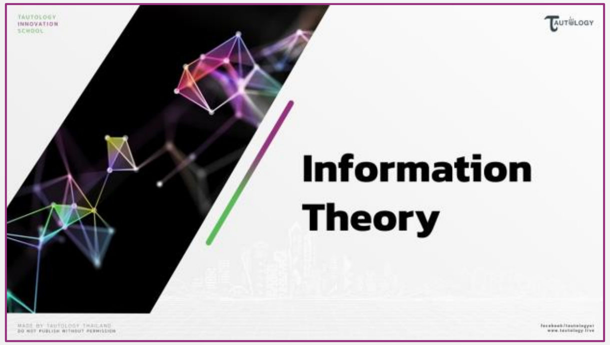
- 2-class

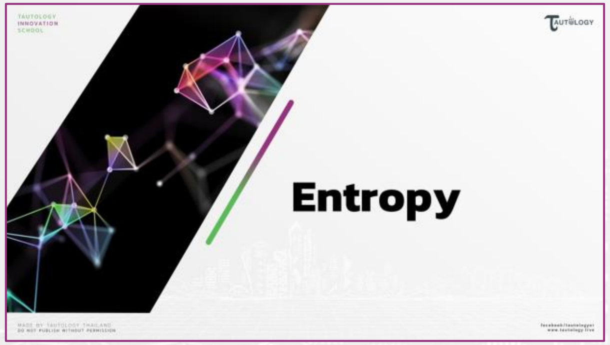
$$Cost = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[y_i \log(\hat{y}_i) + (1 - y_i)\log(1 - \hat{y}_i)]$$

- Multi-class

$$Cost = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=0}^{k-1}[y_{i,c} \log(\hat{y}_{i,c})]$$

Cross Entropy





TAUTOLOGY

Information Theory

Information Theory

Concept

Definition

Formation

Concept

แนวคิดของ information มี 2 ข้อ ดังต่อไปนี้

1. เหตุการณ์ที่มี**โอกาสเกิดขึ้นต่ำ** (low probability) จะมี **information สูง**
2. เหตุการณ์ที่มี**โอกาสเกิดขึ้นสูง** (high probability) จะมี **information ต่ำ**

Information Theory

Concept

Definition

Formation

Definition

1. เหตุการณ์ที่มีความน่าจะเป็น 100% จะไม่มี information ใด ๆ
2. ยิ่งเหตุการณ์มีโอกาสเกิดขึ้นน้อยเท่าไหร่ information ก็จะมีค่ามากขึ้นเท่านั้น
3. Information รวมของสองเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกันจะเท่ากับผลรวมของ information ของสองเหตุการณ์นั้น ๆ

Information Theory

- Concept ✓
- Definition ✓
- Formation

Formation

เราต้องการหา function ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง information และ probability

information = f(probability)

Formation

กำหนดให้ $I(x)$ คือ information ของเหตุการณ์ x

และ $p(x)$ คือ probability ของเหตุการณ์ x

จะได้ว่า

$$I(x) = f(p(x))$$

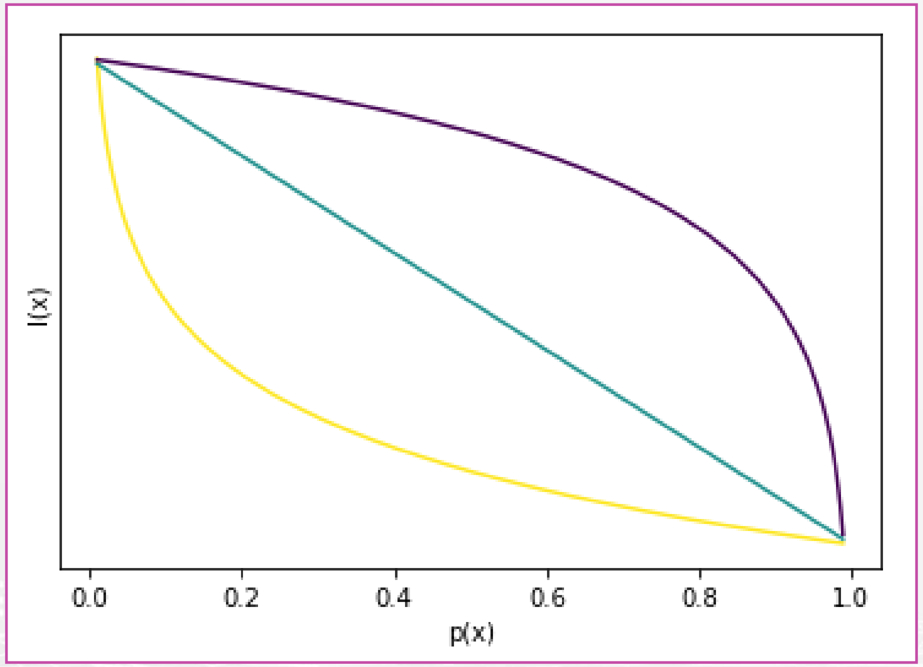
Formation

จาก definition ข้อที่ 1 “เหตุการณ์ที่มีความน่าจะเป็น 100% จะไม่มี information ใด ๆ” จะได้ว่า

ถ้า $p(x) = 1$ แล้ว $I(x) = f(1) = 0$

Formation

จาก definition ข้อที่ 2 “ยิ่งเหตุการณ์มีโอกาสเกิดขึ้นน้อยเท่าไหร่ information ก็จะมีค่ามากขึ้นเท่านั้น” จะได้ว่า ความสัมพันธ์ระหว่าง $I(x)$ และ $p(x)$ เป็นแบบ monotone function



Formation

กำหนดให้เหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B เป็นอิสระต่อกัน และกำหนดให้เหตุการณ์ C เป็นเหตุการณ์ A และ B เกิดขึ้นพร้อมกัน จะได้ว่า

$$p(C) = p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Formation

จาก $I(x) = f(p(x))$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} I(C) &= f\big(p(C)\big) \\ &= f\big(p(A) \cdot p(B)\big) \end{aligned}$$

Formation

จาก definition ข้อที่ 3 “Information รวมของสองเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกันจะเท่ากับผลรวมของ information ของสองเหตุการณ์นั้น ๆ” จะได้ว่า

$$\boxed{\begin{aligned} I(C) &= f\big(p(C)\big) \\ &= f\big(p(A)\cdot p(B)\big) \\ &= f\big(p(A)\big) + f\big(p(B)\big) \\ &= I(A) + I(B) \end{aligned}}$$

Formation

Function เพียงอันเดียวที่มีคุณสมบัติ

1. เป็น monotone function บนช่วง $[0,1]$
2. $f(\square \cdot \triangle) = f(\square) + f(\triangle)$
3. $f(1) = 0$

Formation

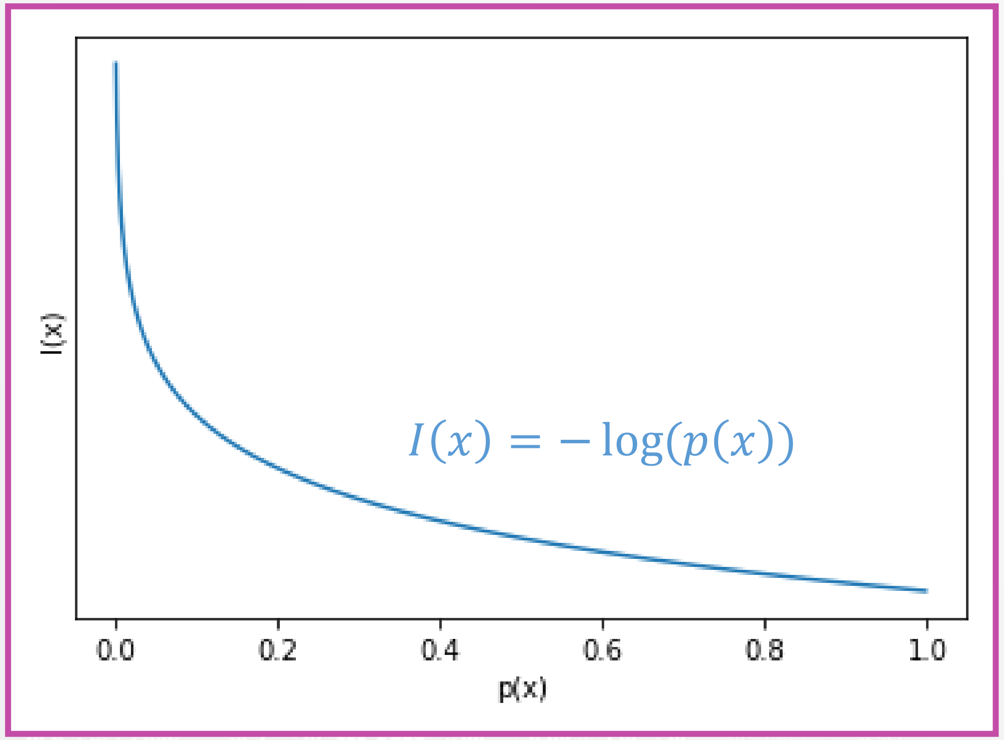
$$f\big(p(x)\big) = -\log(p(x))$$

Formation

$$I(x) = -\log(p(x))$$

Formation

ดังนั้น



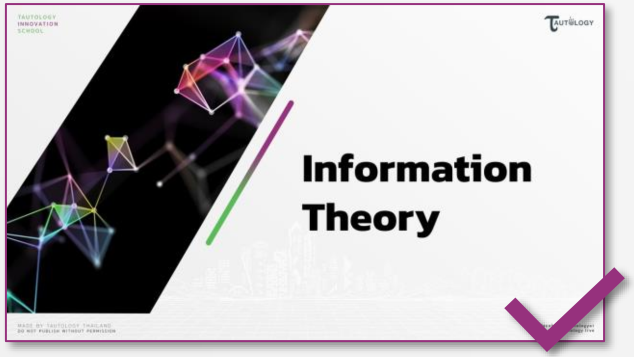
Information Theory

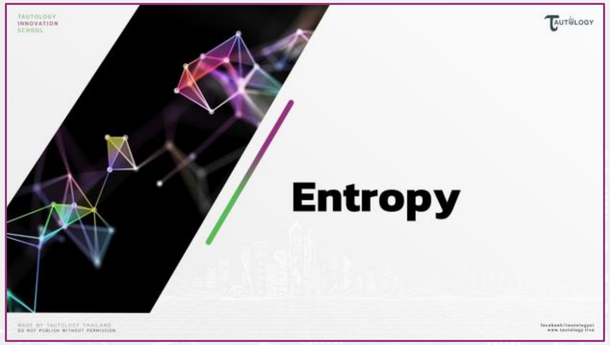
Concept

Definition

Formation

Cross Entropy





Uncertainty

Uncertainty

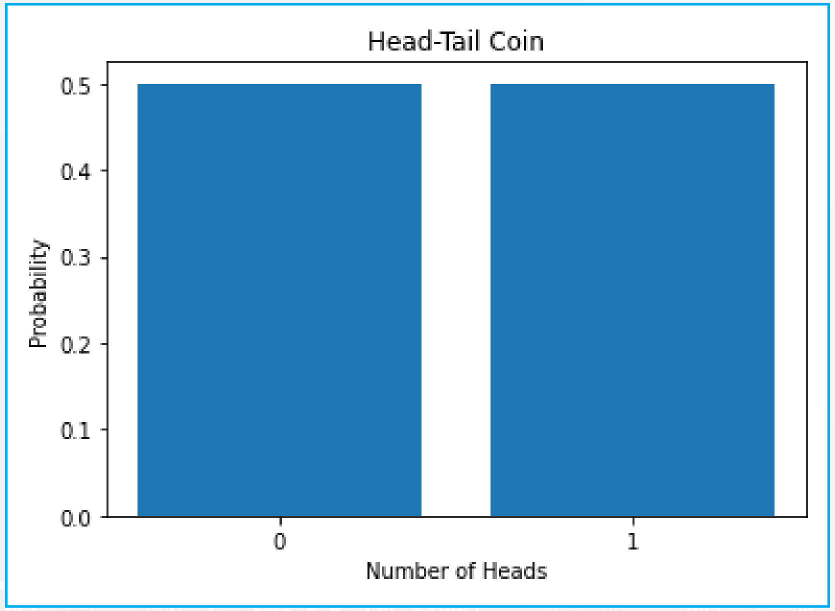
Uncertainty คือ ค่าที่ใช้บอกความไม่เป็นระเบียบ/ความยุ่งเหยิงของระบบ ซึ่งเป็นอีกหนึ่งชื่อเรียกของ information

uncertainty = information

TAUTOLOGY

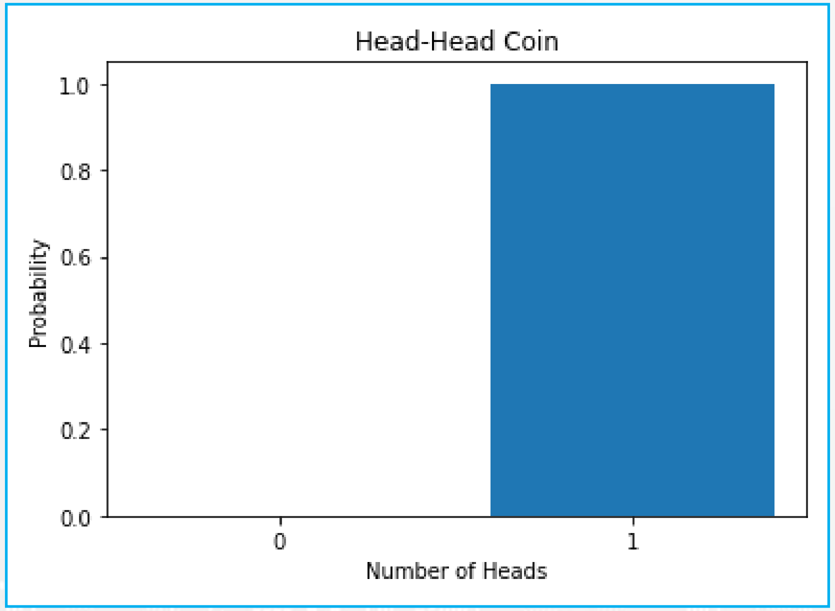
Uncertainty

- ระบบที่มีความยุ่งเหยิง

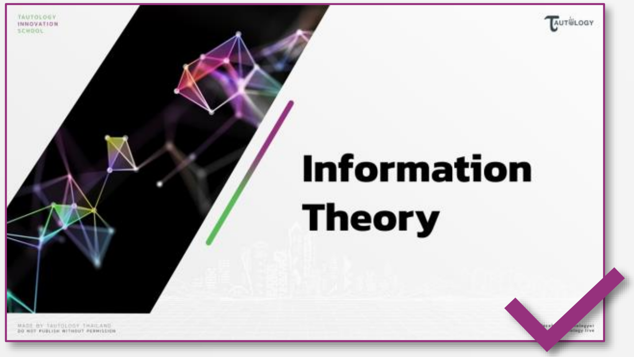


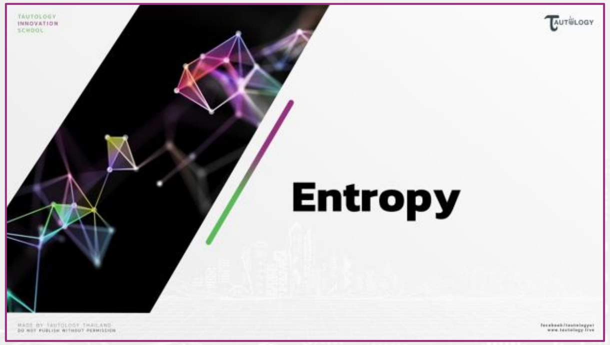
Uncertainty

- ระบบที่ไม่มีความยุ่งเหยิง



Cross Entropy





Entropy

Entropy

Entropy คือ ค่าที่บอกถึงค่าเฉลี่ยของ information หรือ uncertainty ในระบบ

$$H(P) = E[I(x)]$$

Entropy

$$
\begin{aligned}
H(P) &= E[I(x)] \\
&= E[-\log(p(x))] \\
&= -E[\log(p(x))] \\
&= -\sum_{c=0}^{k-1} p(x_c)\log(p(x_c))
\end{aligned}
$$

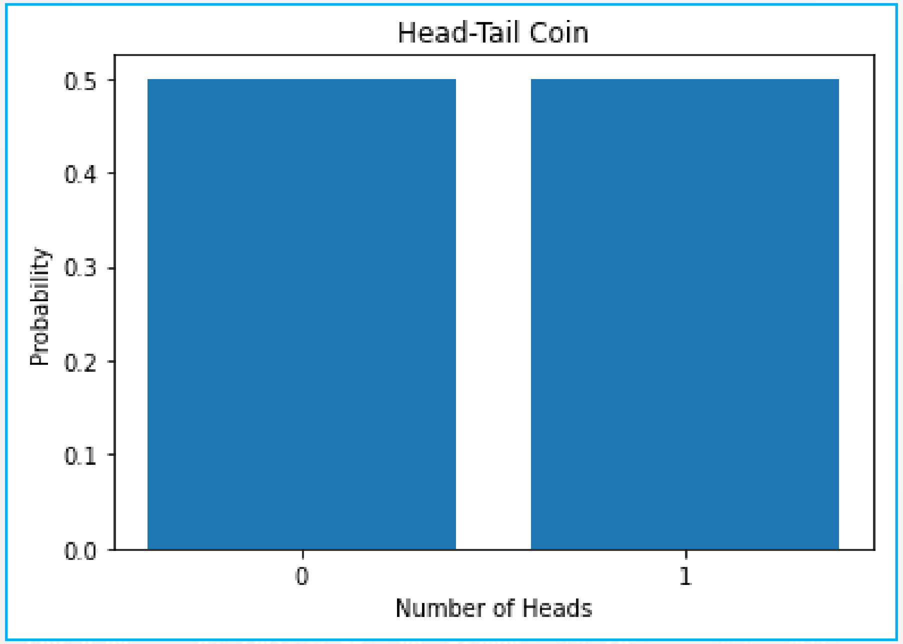
Entropy

Entropy คือ ค่าที่บอกถึงค่าเฉลี่ยของ information หรือ uncertainty ของระบบ

$$H(P) = -\sum_{c=0}^{k-1} p(x_c)\log(p(x_c))$$

Entropy

ตัวอย่าง (1)



Entropy

ตัวอย่าง (1)

$$H(P) = -\sum_{c=0}^{1} p(x_c)\log(p(x_c))$$

$$= -p(x_0)\log(p(x_0)) - p(x_1)\log(p(x_1))$$

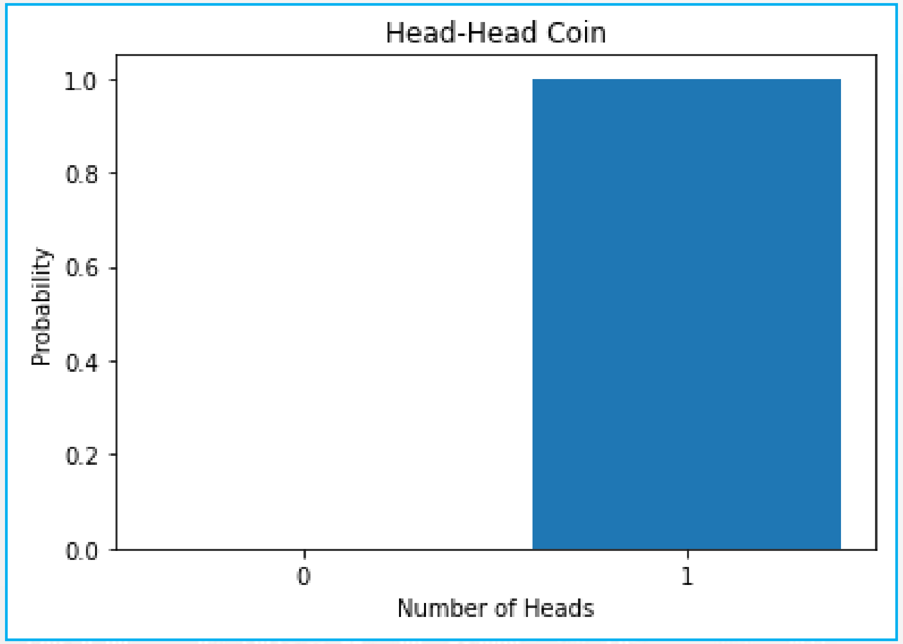
$$= -p(0)\log(p(0)) - p(1)\log(p(1))$$

$$= -\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 0.6931$$

Entropy

ตัวอย่าง (2)



Entropy

ตัวอย่าง (2)

$$H(P) = -\sum_{c=0}^{1} p(x_c)\log(p(x_c))$$

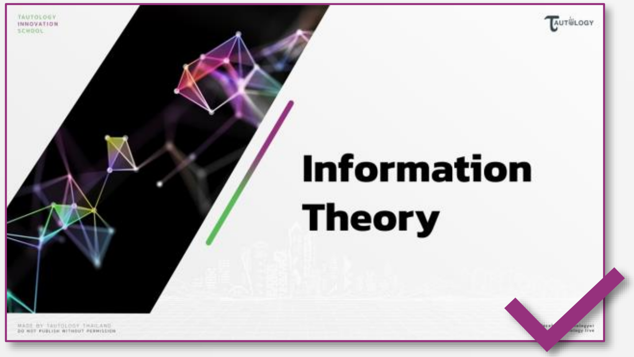
$$= -p(x_0)\log(p(x_0)) - p(x_1)\log(p(x_1))$$

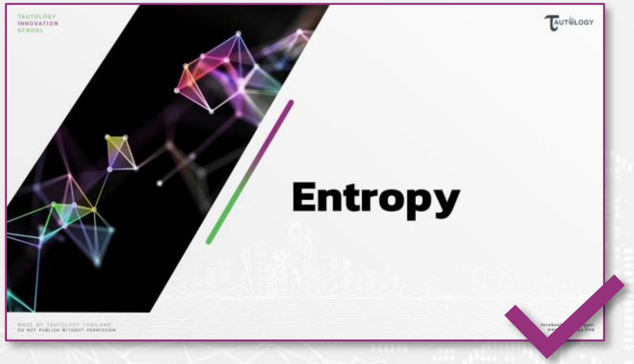
$$= -p(0)\log(p(0)) - p(1)\log(p(1))$$

$$= -0\log(0) - 1\log(1)$$

$$= 0$$

Cross Entropy





KL Divergence

KL Divergence

What is KL Divergence?

Origin of the Equation

KL as Cost Function

What is KL Divergence?

KL Divergence คือ เครื่องมือที่ใช้ในการวัดความแตกต่างระหว่าง 2 distribution (P, Q) ว่า Q แตกต่างจาก P เท่าไหร่

$$D_{KL}(P \parallel Q) = -H(P) - \sum_{c=0}^{k-1} p(x_c) \log(q(x_c))$$

What is KL Divergence?

- ถ้า P และ Q เหมือนกันทุกประการ แล้ว $D_{KL}(P \parallel Q) = 0$
- ถ้า P และ Q แตกต่างกัน แล้ว $D_{KL}(P \parallel Q) > 0$ (ยิ่งแตกต่างมาก $D_{KL}(P \parallel Q)$ ยิ่งมีค่ามาก)

$$D_{KL}(P \parallel Q) = -H(P) - \sum_{c=0}^{k-1} p(x_c) \log(q(x_c))$$

KL Divergence

What is KL Divergence?

Origin of the Equation

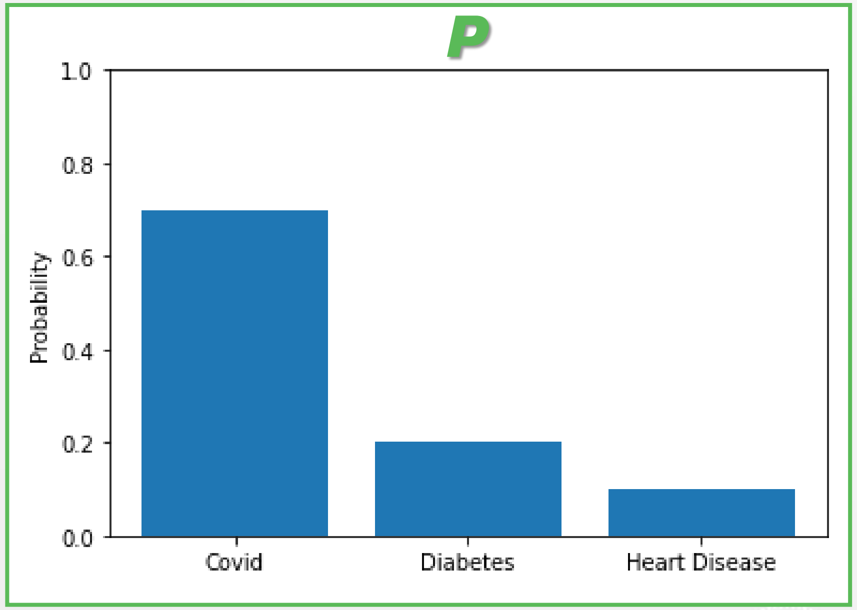
KL as Cost Function

Origin of the Equation

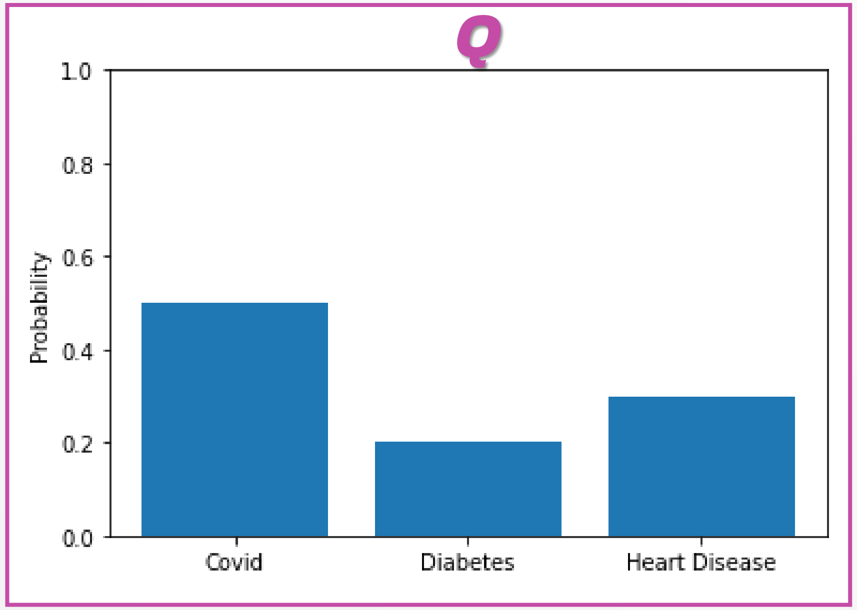
$$D_{KL}(P \parallel Q) = -H(P) - \sum_{c=0}^{k-1} p(x_c) \log(q(x_c))$$

Origin of the Equation

Origin of the Equation

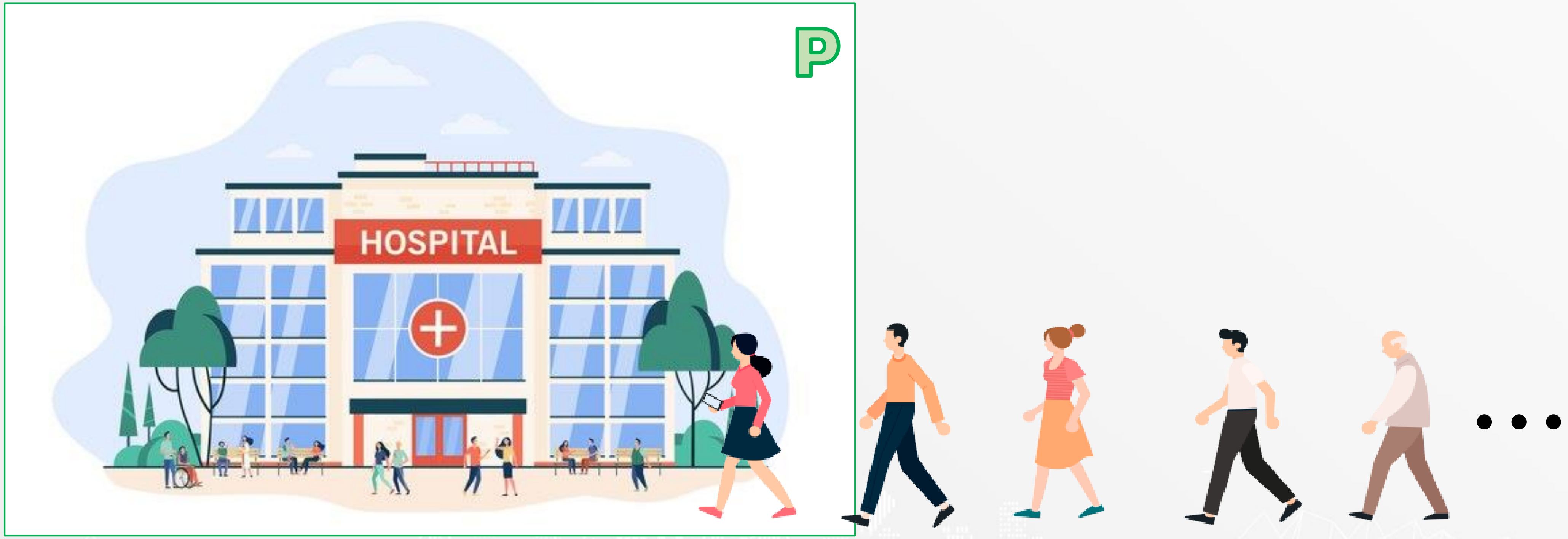


- $p(\text{โควิด}) = 0.7$
- $p(\text{เบาหวาน}) = 0.2$
- $p(\text{หัวใจ}) = 0.1$



- $p(\text{โควิด}) = 0.5$
- $p(\text{เบาหวาน}) = 0.2$
- $p(\text{หัวใจ}) = 0.3$

Origin of the Equation



Origin of the Equation

Origin of the Equation

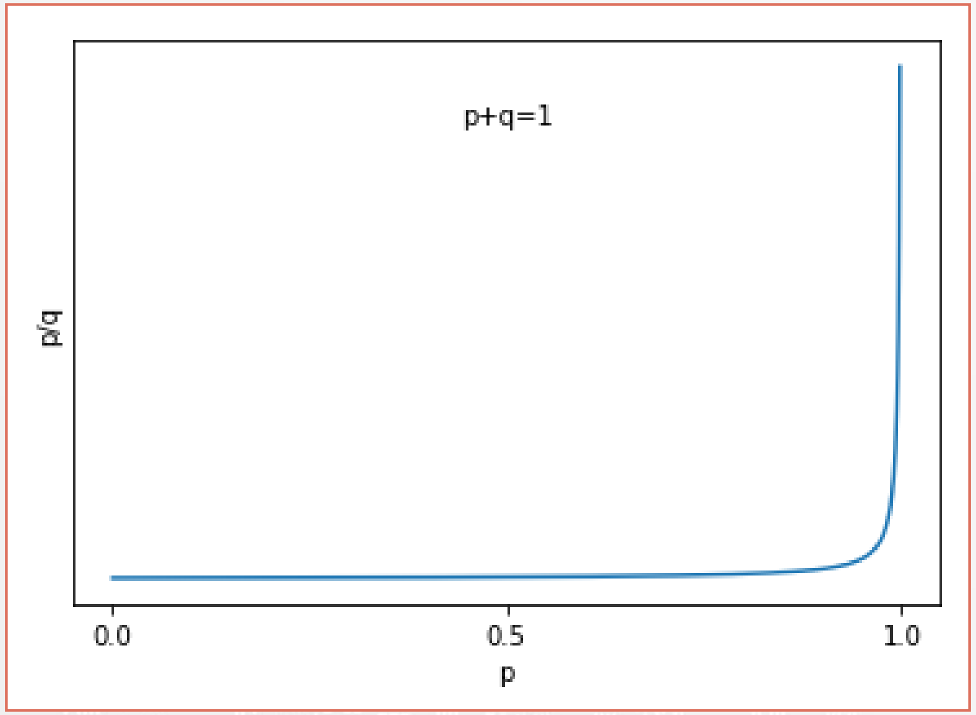
$$\frac{p(\text{โควิด})}{q(\text{โควิด})} \; \frac{p(\text{โควิด})}{q(\text{โควิด})} \; \frac{p(\text{เบาหวาน})}{q(\text{เบาหวาน})} \; \frac{p(\text{โควิด})}{q(\text{โควิด})} \; \frac{p(\text{หัวใจ})}{q(\text{หัวใจ})} \; \cdots$$

Origin of the Equation

$$\frac{p(\text{โควิด})}{q(\text{โควิด})} \quad \frac{p(\text{โควิด})}{q(\text{โควิด})} \quad \frac{p(\text{เบาหวาน})}{q(\text{เบาหวาน})} \quad \frac{p(\text{โควิด})}{q(\text{โควิด})} \quad \frac{p(\text{หัวใจ})}{q(\text{หัวใจ})} \quad \cdots$$

หาค่าเฉลี่ย

Origin of the Equation



Origin of the Equation

$$\frac{p(\text{โควิด})}{q(\text{โควิด})}\ \frac{p(\text{โควิด})}{q(\text{โควิด})}\ \frac{p(\text{เบาหวาน})}{q(\text{เบาหวาน})}\ \frac{p(\text{โควิด})}{q(\text{โควิด})}\ \frac{p(\text{หัวใจ})}{q(\text{หัวใจ})}\ \ldots$$

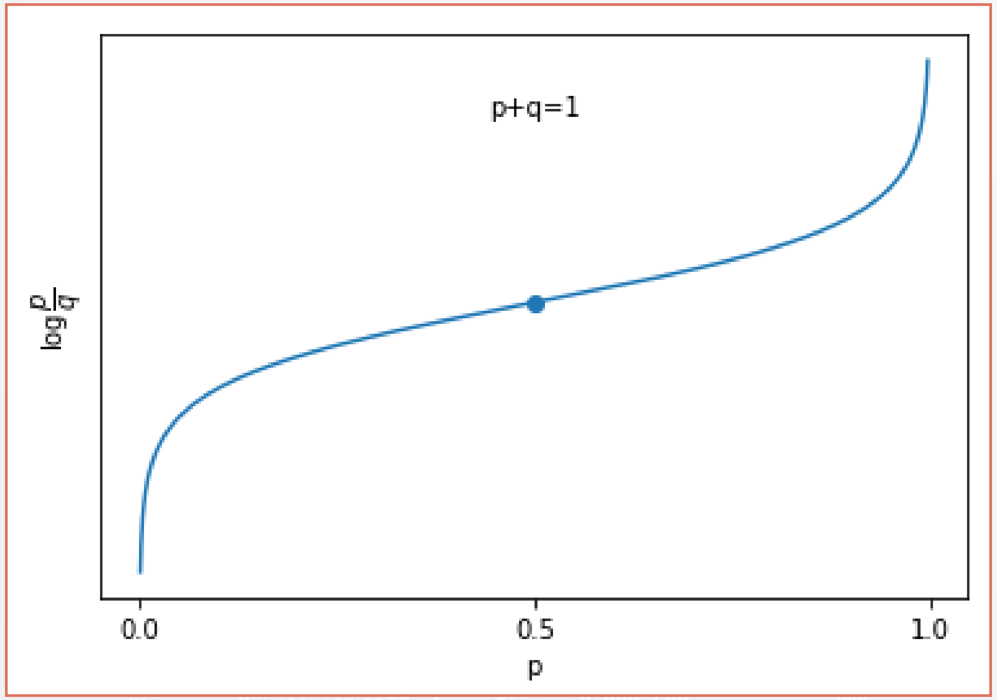
หาค่าเฉลี่ย ❌

Origin of the Equation

$$\log\left(\frac{p(\text{โควิด})}{q(\text{โควิด})}\right) \log\left(\frac{p(\text{โควิด})}{q(\text{โควิด})}\right) \log\left(\frac{p(\text{เบาหวาน})}{q(\text{เบาหวาน})}\right) \log\left(\frac{p(\text{โควิด})}{q(\text{โควิด})}\right) \log\left(\frac{p(\text{หัวใจ})}{q(\text{หัวใจ})}\right) \cdots$$

หาค่าเฉลี่ย

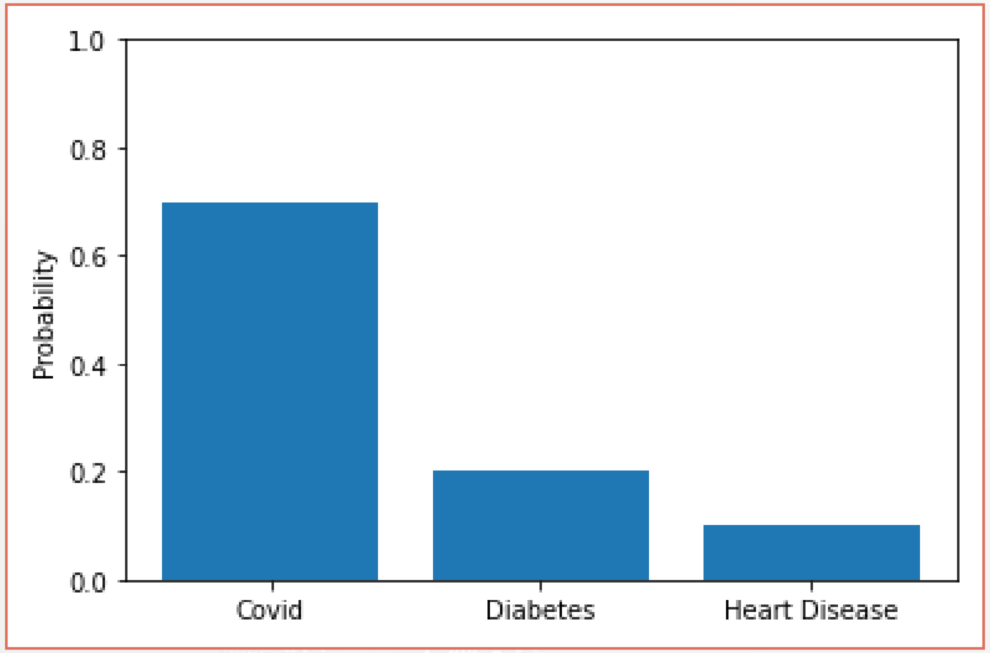
Origin of the Equation



Origin of the Equation

$$D_{KL}(P \parallel Q) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{p(x_i)}{q(x_i)}\right)$$

Origin of the Equation



- $p(\text{โควิด}) = 0.7$
- $p(\text{เบาหวาน}) = 0.2$
- $p(\text{หัวใจ}) = 0.1$

Origin of the Equation

$$D_{KL}(P \parallel Q) = \frac{1}{n}\Bigg[p(\text{โควิด}) \cdot n \cdot \log\left(\frac{p(\text{โควิด})}{q(\text{โควิด})}\right)$$

$$+p(\text{เบาหวาน}) \cdot n \cdot \log\left(\frac{p(\text{เบาหวาน})}{q(\text{เบาหวาน})}\right)$$

$$+p(\text{หัวใจ}) \cdot n \cdot \log\left(\frac{p(\text{หัวใจ})}{q(\text{หัวใจ})}\right)\Bigg]$$

Origin of the Equation

$$D_{KL}(P \parallel Q) = p(\text{โควิด}) \cdot \log\left(\frac{p(\text{โควิด})}{q(\text{โควิด})}\right)$$

$$+p(\text{เบาหวาน}) \cdot \log\left(\frac{p(\text{เบาหวาน})}{q(\text{เบาหวาน})}\right)$$

$$+p(\text{หัวใจ}) \cdot \log\left(\frac{p(\text{หัวใจ})}{q(\text{หัวใจ})}\right)$$

Origin of the Equation

$$D_{KL}(P \parallel Q) = \sum_{c=0}^{k-1} p(x_c) \log\left(\frac{p(x_c)}{q(x_c)}\right)$$

Origin of the Equation

$$D_{KL}(P \parallel Q) = \sum_{c=0}^{k-1} p(x_c)[\log(p(x_c)) - \log(q(x_c))]$$

$$= \sum_{c=0}^{k-1} [p(x_c) \log(p(x_c)) - p(x_c)\log(q(x_c))]$$

Origin of the Equation

$$D_{KL}(P \parallel Q) = \sum_{c=0}^{k-1} p(x_c)\log(p(x_c)) - \sum_{c=0}^{k-1} p(x_c)\log(q(x_c))$$

$$= -H(P) - \sum_{c=0}^{k-1} p(x_c)\log(q(x_c))$$

$$(\because H(P) = -\sum_{c=0}^{k-1} p(x_c)\log(p(x_c)))$$

Origin of the Equation

$$D_{KL}(P \parallel Q) = -H(P) - \sum_{c=0}^{k-1} p(x_c) \log(q(x_c))$$

KL Divergence

What is KL Divergence? ✓

Origin of the Equation ✓

KL as Cost Function

KL as Cost Function

- 2-class

$$Cost = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[y_i \log(\hat{y}_i) + (1 - y_i)\log(1 - \hat{y}_i)]$$

- Multi-class

$$Cost = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=0}^{k-1}\left[y_{i,c}\log\left(\hat{y}_{i,c}\right)\right]$$

KL as Cost Function

x_1	x_2	y_0	y_1	y_2
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
−1	0	0	0	1

ตารางแสดง dataset

Model

$\hat{y}_0$	$\hat{y}_1$	$\hat{y}_2$
0.5	0.3	0.2
0.2	0.7	0.1
⋮	⋮	⋮
0.1	0.3	0.6

ตารางแสดง $\hat{y}$ ที่ได้จาก model

KL as Cost Function

x_1	x_2	y_0	y_1	y_2
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
−1	0	0	0	1

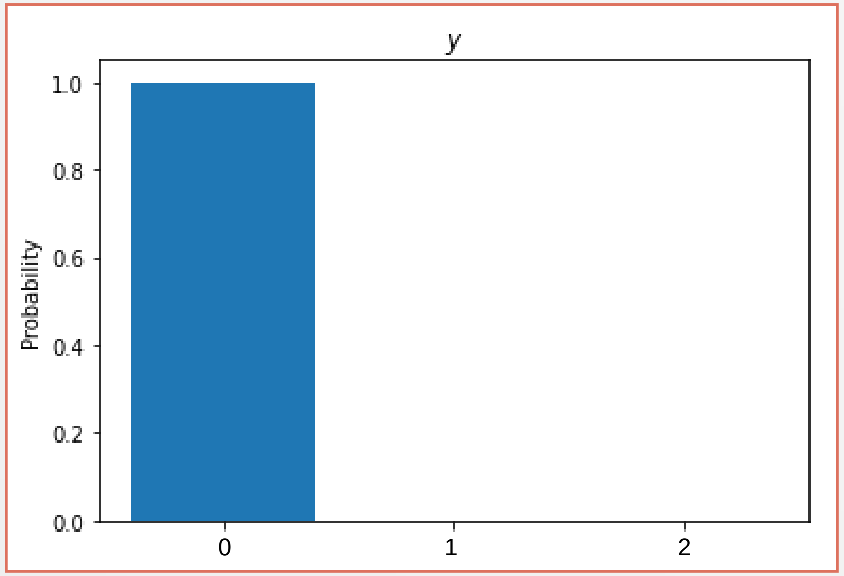
ตารางแสดง dataset

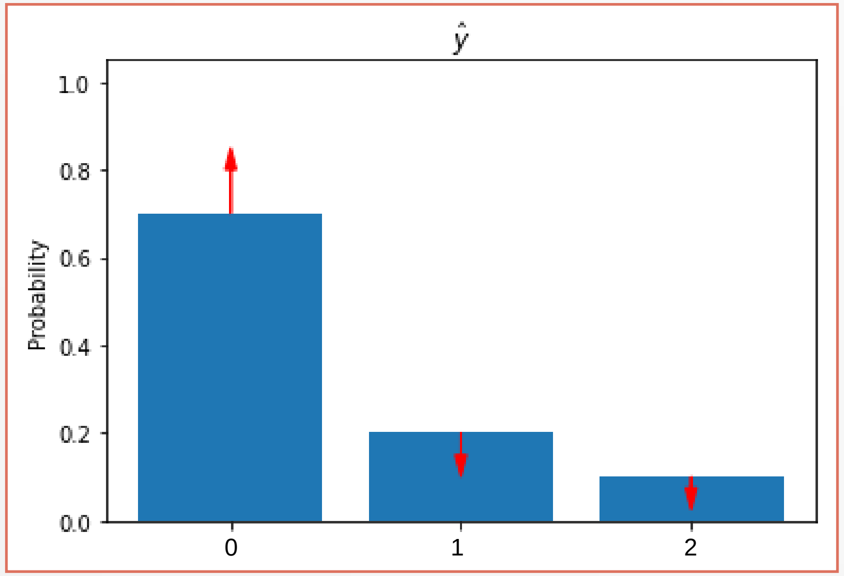
Model

$\hat{y}_0$	$\hat{y}_1$	$\hat{y}_2$
0.5	0.3	0.2
0.2	0.7	0.1
⋮	⋮	⋮
0.1	0.3	0.6

ตารางแสดง $\hat{y}$ ที่ได้จาก model

KL as Cost Function





$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 1$$

KL as Cost Function

Model

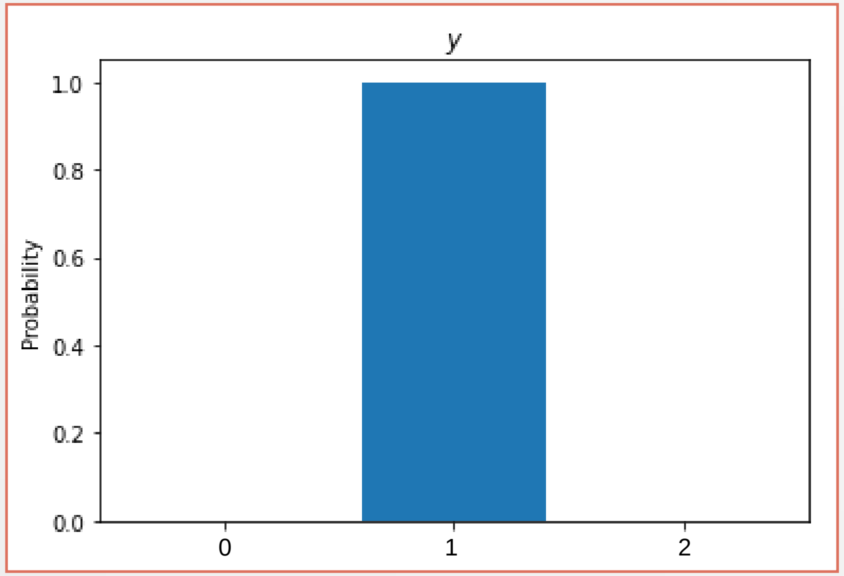
x_1	x_2	y_0	y_1	y_2
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
−1	0	0	0	1

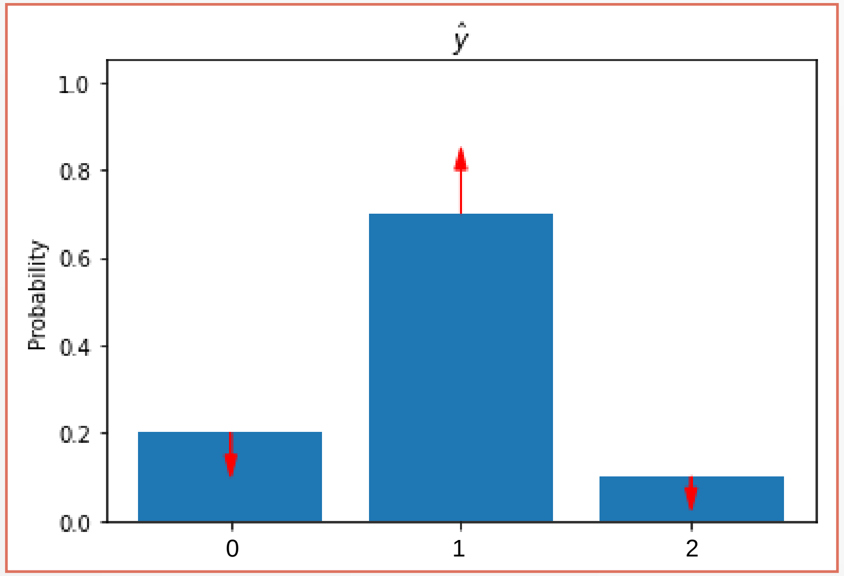
ตารางแสดง dataset

$\hat{y}_0$	$\hat{y}_1$	$\hat{y}_2$
0.5	0.3	0.2
0.2	0.7	0.1
⋮	⋮	⋮
0.1	0.3	0.6

ตารางแสดง $\hat{y}$ ที่ได้จาก model

KL as Cost Function





$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 0$$

KL as Cost Function

Model

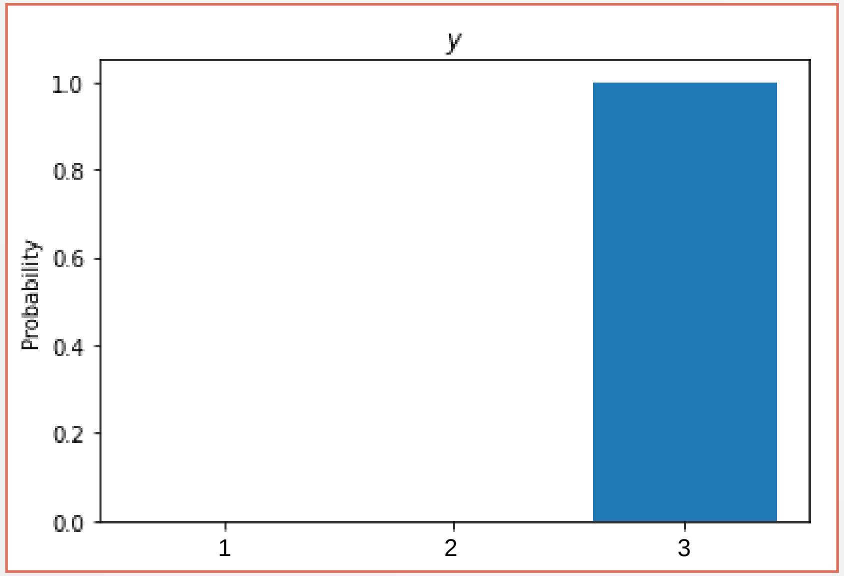
x_1	x_2	y_0	y_1	y_2
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
-1	0	0	0	1

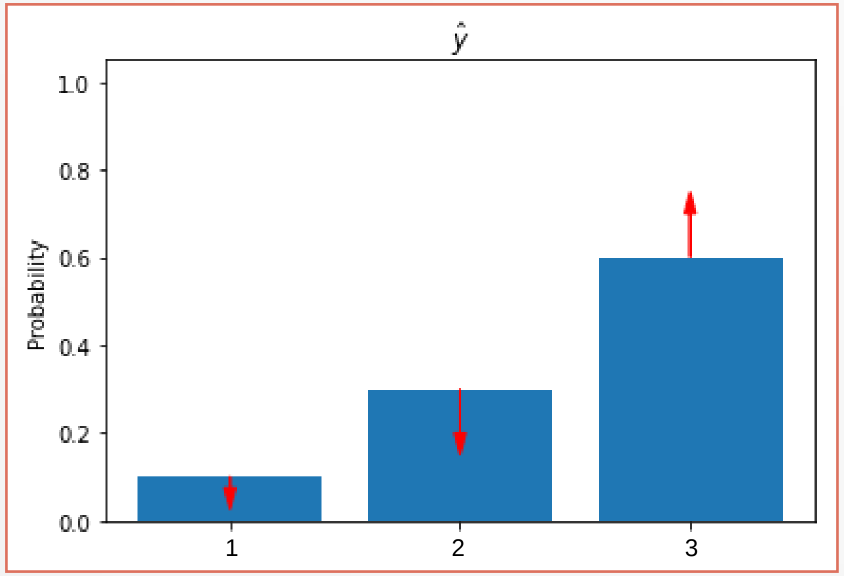
ตารางแสดง dataset

$\hat{y}_0$	$\hat{y}_1$	$\hat{y}_2$
0.5	0.3	0.2
0.2	0.7	0.1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0.1	0.3	0.6

ตารางแสดง $\hat{y}$ ที่ได้จาก model

KL as Cost Function





$$x_1 = -1, \qquad x_2 = 0$$

KL as Cost Function

$$D_{KL}(P \parallel Q) = -H(P) - \sum_{c=0}^{k-1} p(x_c) \log(q(x_c))$$

$$D_{KL}(\mathbf{y}_i, \hat{\mathbf{y}}_i) = -H(\mathbf{y}_i) - \sum_{c=0}^{k-1} y_{i,c} \log\left(\hat{y}_{i,c}\right)$$

KL as Cost Function

$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
-1	0	0	0	1

$$D_{KL}(\mathbf{y}_i, \hat{\mathbf{y}}_i) = -H(\mathbf{y}_i) - \sum_{c=0}^{k-1} y_{i,c} \log\left(\hat{y}_{i,c}\right)$$

KL as Cost Function

$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
−1	0	0	0	1

ค่าคงที่

$$D_{KL}(\mathbf{y}_i, \hat{\mathbf{y}}_i) = -H(\mathbf{y}_i) - \sum_{c=0}^{k-1} y_{i,c} \log\left(\hat{y}_{i,c}\right)$$

KL as Cost Function

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
−1	0	0	0	1

$$D_{KL}(\mathbf{y}_i, \hat{\mathbf{y}}_i) \propto -\sum_{c=0}^{k-1} y_{i,c} \log\left(\hat{y}_{i,c}\right)$$

KL as Cost Function

$$D_{KL}(\mathbf{y}_i, \hat{\mathbf{y}}_i) \propto -\sum_{c=0}^{k-1} y_{i,c} \log\left(\hat{y}_{i,c}\right)$$

KL as Cost Function

$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
-1	0	0	0	1

$\hat{\mathbf{y}}_1$	$\hat{\mathbf{y}}_2$	$\hat{\mathbf{y}}_3$
0.5	0.3	0.2
0.2	0.7	0.1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0.1	0.3	0.6

$$D_{KL}(\mathbf{y}_i, \hat{\mathbf{y}}_i) \propto -\sum_{c=0}^{k-1} y_{i,c} \log\left(\hat{y}_{i,c}\right)$$

KL as Cost Function

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
-1	0	0	0	1

$\hat{y}_1$	$\hat{y}_2$	$\hat{y}_3$
0.5	0.3	0.2
0.2	0.7	0.1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0.1	0.3	0.6

$$\sum_{i=1}^{n} D_{KL}(\mathbf{y}_i, \hat{\mathbf{y}}_i) \propto -\sum_{i=1}^{n} \sum_{c=0}^{k-1} y_{i,c} \log(\hat{y}_{i,c})$$

KL as Cost Function

เราต้องการ model ที่ทำให้ $\sum_{i=1}^{n} D_{KL}(\mathbf{y}_i, \hat{\mathbf{y}}_i)$ มีค่าน้อยที่สุด

($\hat{\mathbf{y}}_i$ เหมือนกับ $\mathbf{y}_i$ บนทุก sample มากที่สุด)

KL as Cost Function

$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
−1	0	0	0	1

$\hat{\mathbf{y}}_1$	$\hat{\mathbf{y}}_2$	$\hat{\mathbf{y}}_3$
0.5	0.3	0.2
0.2	0.7	0.1
⋮	⋮	⋮
0.1	0.3	0.6

$$\min \ \sum_{i=1}^{n} D_{KL}(\mathbf{y}_i, \hat{\mathbf{y}}_i) \equiv \min \ -\sum_{i=1}^{n} \sum_{c=0}^{k-1} y_{i,c} \log\left(\hat{y}_{i,c}\right)$$

KL as Cost Function

$$\min \quad -\sum_{i=1}^{n} \sum_{c=0}^{k-1} y_{i,c} \log\left(\hat{y}_{i,c}\right)$$

KL as Cost Function

เพื่อความสะดวกในการใช้ gradient descent เราจึงใช้
ค่าเฉลี่ยของ cross entropy ในการ train model

KL as Cost Function

$$\min \quad -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=0}^{k-1} y_{i,c}\log\left(\hat{y}_{i,c}\right)$$

KL as Cost Function

- 2-class

$$Cost = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[y_i \log(\hat{y}_i) + (1 - y_i)\log(1 - \hat{y}_i)]$$

- Multi-class

$$Cost = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=0}^{k-1}[y_{i,c}\log(\hat{y}_{i,c})]$$

KL as Cost Function

- พิจารณา $Cost$ สำหรับ 2-class

$$Cost = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=0}^{k-1} y_{i,c}\log\left(\hat{y}_{i,c}\right)$$

$$= -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=0}^{1} y_{i,c}\log\left(\hat{y}_{i,c}\right)$$

$$= -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[y_{i,0}\log\left(\hat{y}_{i,0}\right) + y_{i,1}\log\left(\hat{y}_{i,1}\right)\right]$$

KL as Cost Function

- พิจารณา $Cost$ สำหรับ 2-class

$$Cost = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[y_{i,0}\log\left(\hat{y}_{i,0}\right) + y_{i,1}\log\left(\hat{y}_{i,1}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[y_{i,0}\log\left(\hat{y}_{i,0}\right) + \left(1 - y_{i,0}\right)\log\left(1 - \hat{y}_{i,0}\right)\right]$$

$$(\because y_{i,0} + y_{i,1} = 1$$

$$\hat{y}_{i,0} + \hat{y}_{i,1} = 1)$$

KL as Cost Function

y_0	y_1
1	0
0	1
$\vdots$	$\vdots$
1	0

y
1
0
$\vdots$
1

$\because y_0 + y_1 = 1$

KL as Cost Function

$\hat{y}_0$	$\hat{y}_1$
0.7	0.3
0.2	0.8
$\vdots$	$\vdots$
0.6	0.4

$\hat{y}$
0.7
0.2
$\vdots$
0.6

$\because \hat{y}_0 + \hat{y}_1 = 1$

KL as Cost Function

- พิจารณา $Cost$ สำหรับ 2-class

$$Cost = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[y_{i,0}\log\left(\hat{y}_{i,0}\right) + \left(1 - y_{i,0}\right)\log\left(1 - \hat{y}_{i,0}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[y_i\log(\hat{y}_i) + (1 - y_i)\log(1 - \hat{y}_i)]$$

KL as Cost Function

- 2-class

$$Cost = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[y_i \log(\hat{y}_i) + (1 - y_i)\log(1 - \hat{y}_i)]$$

- Multi-class

$$Cost = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=0}^{k-1}\left[y_{i,c}\log\left(\hat{y}_{i,c}\right)\right]$$

KL Divergence

What is KL Divergence?

Origin of the Equation

KL as Cost Function

Cross Entropy