Т.В. Абрамовская

Дополнительные материалы для курса «Дискретная математика»,

мат-мех, 171 группа, 2016-17

Производящие функции

Начнем с известных нам рассуждений из комбинаторики. Пусть нас интересует число способов загадать k различных чисел среди натуральных чисел от 1 до n. Для каждого k и любого n ответом, конечно, будет *число сочетаний из n по k*, которое мы обозначали C_n^k и ещё называли *биномиальным коэффициентом.* Для вычислелния биномиального коэффициента можно использовать непосредсвенно формулу $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, а можно вспомнить, особенно для малых значений n и k, о *треугольнике Паскаля* — строка с номером $n = 0, 1, \ldots$ в нем содержит полный набор биномиальных коэффициетов от C_n^0 до C_n^n и получается простыми вычислениями над элементами предыдущей строки. Запишем строку треугольника Паскаля с номером n в виде бесконечной последовательности

$$\left\langle C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n, 0, 0, \ldots \right\rangle.$$

Теперь мы сделаем, на первый взгляд, бессмысленную вещь: рассмотрим элементы получившейся последовательности как коэффициенты степенного ряда:

$$\left\langle C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n, 0, 0, \ldots \right\rangle \longleftrightarrow C_n^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^n x^n + 0 + \ldots = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k.$$

Для самой правой суммы мы знаем точную формулу:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = (1+x)^n.$$

То, что стоит справа в последнем равенстве — сумма ряда — является *производящей функцией* для последовательности биномиальных коэффициентов вот в каком смысле. В получившихся у нас соотношениях

$$\left\langle C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n, 0, 0, \ldots \right\rangle \longleftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k = (1+x)^n,$$

во-первых, коэффициент при x^k совпадает с k-тым членом последовательности (заметьте, что коэффициенты при степенях x, бо́льших n, нулевые), и во-вторых, разложение в ряд по степеням x производящей функции $(1+x)^n$ задает нам *общий вид члена последовательности* $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Теперь обобщим этот подход для произвольных последовательностей.

Производящей функцией для последовательности $\langle g_0, g_1, \ldots \rangle$ называется сумма степенного ряда $G(x) = \sum\limits_{i=0,1,\ldots} g_i x^i$.

Как и выше, мы составляем формальный степенной ряд, и воспринимаем x как «указатель места» для соответсвующего элемента последовательности. Вопрос сходимости ряда нас будет волновать лишь тогда, когда нам понадобится сосчитать значение производящей фунции для некоторых x.

Ещё несколько элементарных примеров.

$$\begin{array}{rcl}\langle 0,0,0,\ldots\rangle & \longleftrightarrow & 0+0x+0x^2+\ldots=0\\ \langle 1,2,3,0,0,\ldots\rangle & \longleftrightarrow & 1+2x+3x^2+0x^3+\ldots=1+2x+3x^2\\ \langle 1,1,1\ldots\rangle & \longleftrightarrow & 1+x+x^2+\ldots=\frac{1}{1-x}\end{array}$$

Будем держать в уме, что в последнем примере справа будет верное раверство только для $|x|<1$, и как мы договорились прежде, этот факт мы пока не берём в рассмотрение. Сделаем в последнем примере замену переменной $x\to ax$ для некоторого $a\in\mathbb{R}$, тогда при степенях x возникают коэффициенты $1,a,a^2,\ldots$, значит,

$$\left\langle 1,a,a^2,\ldots\right\rangle \longleftrightarrow 1+ax+a^2x^2+\ldots=\frac{1}{1-ax}.$$

Подставив $a=-1$,

$$\langle 1,-1,1,-1\ldots\rangle \longleftrightarrow 1-x+x^2-x^3+\ldots=\frac{1}{1+x}.$$

Подобные несложные рассуждения позволяют строить производящие функции для новых последовательностей из уже известных нам. Например, для последовательности $\langle 1,0,1,0\ldots\rangle$ запишем, по определению, степенной ряд, и сделаем простое преобразование:

$$1+x^2+x^4+\ldots=1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots-x-x^3-\ldots=\frac{1}{1-x}-x(1+x^2+x^4+\ldots),$$

тогда,

$$\langle 1,0,1,0\ldots\rangle \longleftrightarrow 1+x^2+x^4+\ldots=\frac{1}{(1-x)(1+x)}.$$

Есть ещё несколько общих идей, следующих непосредсвенно из определения производящей функции. Вот они (доказательства остаются читателям).

1. Правило умножения на скаляр. Если $\langle g_0,g_1,\ldots\rangle \longleftrightarrow G(x)$, то

$$\langle cg_0,cg_1,\ldots\rangle \longleftrightarrow c\cdot G(x) \text{ для любого } c\in\mathbb{R}.$$

2. Правило сложения. Если $\langle a_0,a_1,\ldots\rangle \longleftrightarrow A(x)$ и $\langle b_0,b_1,\ldots\rangle \longleftrightarrow B(x)$, то

$$\langle a_0+b_0,a_1+b_1,\ldots\rangle \longleftrightarrow A(x)+B(x).$$

3. Правило сдвига вправо. Если $\langle g_0,g_1,\ldots\rangle \longleftrightarrow G(x)$, то

$$\langle \underbrace{0,0,\ldots,0}_{k\text{ нулей}},g_0,g_1,\ldots\rangle \longleftrightarrow x^k\cdot G(x) \text{ для любого } k\in\mathbb{N}.$$

4. Правило дифференцирования. Если $\langle g_0,g_1,g_2,\ldots\rangle \longleftrightarrow G(x)$, то

$$\langle g_1,2g_2,3g_3,\ldots\rangle \longleftrightarrow G'(x).$$

5. Правило умножения. Несколько более громоздкое, но не менее простое в доказательсве, это правило определяет последовательность, для которой производящей будет функция, полученная произведением двух производящих функций известных нам последовательностей. Если

$\langle a_0, a_1, \ldots\rangle \longleftrightarrow A(x)$ и $\langle b_0, b_1, \ldots\rangle \longleftrightarrow B(x)$, тогда $A(x)\cdot B(x)$ задаёт производящую функцию для последовательности $\langle c_0, c_1, \ldots\rangle$, где $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots a_ib_{n-i} + \ldots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0$, $n = 0, 1, \ldots$.

Пример. Построим производящую функцию для последовательности квадратов $\langle 0, 1, 4, 9, \ldots\rangle$. Начнём с известной нам последовательности из всех единиц и её производящей функци $\frac{1}{1-x}$, для которой дважды выполним пару преобразований: по правилам дифференцирования и сдвига вправо.

$$\begin{array}{rllllll}
 & \langle 1, & 1, & 1, & 1, & \ldots\rangle & \longleftrightarrow \ \frac{1}{1-x} \\
\text{Правило 4:} & \langle 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots\rangle & \longleftrightarrow \ \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \\
\text{Правило 3:} & \langle 0, & 1, & 2, & 3, & \ldots\rangle & \longleftrightarrow \ \frac{x}{(1-x)^2} \\
\text{Правило 4:} & \langle 1\cdot 1, & 2\cdot 2, & 3\cdot 3, & 4\cdot 4, & \ldots\rangle & \longleftrightarrow \ \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{(1+x)}{(1-x)^3} \\
\text{Правило 3:} & \langle 0, & 1, & 4, & 9, & \ldots\rangle & \longleftrightarrow \ \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}
\end{array}$$

Пример. Построим производящую функцию $F(x)$ для последовательности чисел Фибоначчи $\langle 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots\rangle$. Обозначим f_i i-тый член этой последовательности, зададим $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, тогда

$$f_i = f_{i-2} + f_{i-1} \text{ для всех } i = 2, 3, \ldots.$$

Рассмотрим три последовательности и их производящие функции:

$$\begin{array}{rccccc}
 & \langle 0, & 1, & 0, & 0, \ldots\rangle & \longleftrightarrow & x \\
 & \langle 0, & f_0, & f_1, & f_2 \ldots\rangle & \longleftrightarrow & x\cdot F(x) \\
 & \langle 0, & 0, & f_0, & f_1, \ldots\rangle & \longleftrightarrow & x^2\cdot F(x) \\
\hline
\text{По правилу 2:} & \langle 0, & 1+f_0, & f_1+f_0, & f_2+f_1, \ldots\rangle & \longleftrightarrow & x + x\cdot F(x) + x^2\cdot F(x)
\end{array}$$

После сложения получилась как раз последовательность чисел Фибоначчи, значит,

$$F(x) = x + x\cdot F(x) + x^2\cdot F(x),$$

$$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

Теперь мы знаем, как выглядит производящая функция последовательности чисел Фибоначчи, разложим её в ряд, так мы получим общий вид члена этой последовательности.

Для начала разложим знаменатель на множители:

$$1 - x - x^2 = (1-\alpha x)(1-\beta x), \text{ где } \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Представим тогда $F(x)$ как сумму

$$F(x) = \frac{A}{1-\alpha x} + \frac{B}{1-\beta x}.$$

Воспользуемся тем, что для $|x| < 1$ оба слагаемых — суммы сходящихся степенных рядов, подставим $x = 0$ в равенство

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{A}{1-\alpha x} + \frac{B}{1-\beta x},$$

тогда $A = -B$, после чего получим

$$A = \frac{1}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$B = \frac{-1}{\alpha - \beta} = \frac{-1}{\sqrt{5}}.$$

Итак,

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \alpha x} - \frac{1}{1 - \beta x} \right),$$

а для слагаемых в скобках, следуя одному из первых примеров в этой заметке, подберём последовательности, для которых они являются производящими функциями:

$$\left\langle 1, \alpha, \alpha^2, \ldots \right\rangle \longleftrightarrow \frac{1}{1 - \alpha x},$$

$$\left\langle 1, \beta, \beta^2, \ldots \right\rangle \longleftrightarrow \frac{1}{1 - \beta x}.$$

В итоге получим,

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left((\alpha - \beta)x + (\alpha^2 - \beta^2)x^2 + \ldots \right),$$

таким образом, общий вид члена последовательности чисел Фибоначчи

$$f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}.$$