Пусть вас не пугают эти слова. Это всего лишь означает, что в трехмерном пространстве рёбра графа представлены кривыми. Как на плоскости мы рисуем рёбра — так и тут, просто для того, чтобы учесть, что не все графы планарные, их рассматривают в трехмерном пространстве.

Есть традиционный термин "Полицейский и грабитель", но "Коп и Бандит" — очень мило :)

Совершенно точно понадобится здесь пример.

Краткий реферат по теме: Note on a helicopter search problem on graphs

1 Постановка задачи

- Игра поиска определена на конечном неориентированном топологическом графе G;
- Ребра графа имеют единичную длину;
- Рассматриваются с.вязные графы с не менее чем двумя вершинами и без кратных ребер или петель.

Два игрока *Коп* и *Бандит* находятся на графе G. Коп ищет Бандита, а Бандит пытается ускользнуть. Действия Копа определяются конечной последовательностью шагов, называемой *программой поиска* $\prod$. На первом шаге Коп занимает некоторую вершину G. На каждом из следующих шагов Коп двигается к некоторой вершине (не обязательно смежной к занятой вершине) G.

Определение 1.1. *Программой поиска* $\prod$ является отображение

$$\prod : \{1, 2, ..., T\} \longrightarrow V(G),$$

где $\prod(i),\ i \in \{1, ..., T\}$, является вершиной, занятой Копом на i-м шаге.

Непрерывное отображение

$$y : [0, T] \longrightarrow G$$

интерпретируется как траектория Бандита.
Пусть скорость Бандита ограничена константой $\mu > 0$, то есть $\forall t_1, t_2 \in [0, T], t_1 \neq t_2$,

$$\left|\frac{\rho(y(t_1), y(t_2))}{t_1 - t_2}\right| \leq \mu,$$

где $\rho(y(t_1), y(t_2))$ — длина (в евклидовой метрике) самой короткой траектории в G, которая связывает $y(t_1), y(t_2)$. Коп находит Бандита на i-м шаге $\iff \exists j \in \{1, ..., i\}$, т.ч. $\rho(\prod(j), y(j)) < 1$.

Программа поиска $\prod(i), i \in 1, ..., T$ является выигрывающей, если для любой траектории Бандита $y(t), t \in [0, T]$, существует $i \in \{1, ..., T\}$, такой что на i-м шаге Бандит найден.

Существование выигрышной программы для Копа в этой задаче зависит только от постоянной μ. Для графа G рассмотрим параметр

$$\mu(G) = \inf\{\mu : \text{у Копа нет выигрывающей программы на G}\}.$$

Задача вычисления $\mu(G)$ называется *задачей поиска с вертолета*.

Есть два случая задачи поиска с вертолета:

- с повторным загрязнением;
- монотонный (без повторного загрязнения).

2 Нижняя и верхняя границы

2.1 Верхняя граница

Ширина графа G, обозначаемая как $linkage(G)$, является максимумом минимальной степени любого подграфа графа G. (минимальная степень подграфа H графа G обозначает наименьшую степень любой из его вершин; степень вершины взята относительно подграфа.)

Теорема 1. *Для любого графа* G

$$\mu(G) \leq \left\lceil \frac{linkage(G)}{2} \right\rceil^{-1}.$$

Пусть $\chi(G)$ — хроматическое число G (раскраска графа таким образом, чтобы две любые смежные вершины были разного цвета).

Следствие 1. Для любого графа G

$$\mu(G) \le \left\lceil \frac{\chi(G)-1}{2} \right\rceil^{-1}.$$

И сюда тоже примеры, где \mu берется с этих границ. Можно придумать один и тот же граф, на котором рассматривать разные \mu.

2.2 Нижняя граница

Определение 2.1. Граф G является *интервальным графом*, если и только если каждой вершине $v \in V(G)$ на вещественной прямой можно сопоставить промежуток $I_v = [l(v), r(v)]$, такой что $\forall v, w \in V(G), v \neq w : (v,w) \in E(G) \iff I_v \cap I_w \neq \varnothing$.

Определение 2.2. Множество промежутков $\mathcal{I} = \{I_v\}_{v \in V(G)}$ называется (интервальным) *представлением* для G.

Определение 2.3. Граф G' является *суперграфом* графа G, если $V(G') = V(G)$ и $E(G) \subseteq E(G')$.

Определение 2.4. *Путевая ширина* графа G, обозначаемая $pw(G)$, это наименьший размер максимальной клики по всем интервальным суперграфам G, уменьшенного на единицу.

Теорема 2. Для любого графа G

$$\mu(G) \ge \frac{2}{pw(G)+1}.$$

2.3 Примеры

Следствие 2. Пусть k — размер максимальной клики в интервальном графе I. Если k четное, то

$$\mu(I) = \left\lceil \frac{linkage(i)}{2} \right\rceil^{-1} = \frac{2}{pw(I)+1} = \frac{2}{k}.$$

Пусть K_n — полный граф с n вершинами.

Теорема 3. $\mu(K_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^{-1}$.

Пусть $\mu_m(G)$ — минимальная скорость Бандита, такая что у Копа не существует монотонной программы выигрыша на графе G. Доказано в [3], что для любого графа G,

$$\frac{1}{pw(G)} \ge \mu_m(G) \ge \frac{1}{pw(G)+1}. \tag{2.1}$$

Определение 2.5. Граф G' называется *гомеоморфным изображением* графа G, если G' можно получить из G, разбивая ребра в G с произвольным числом степени двух вершин(?).

“by subdividing edges in G with an arbitrary number of degree two vertices” — “разбивая ребро произольным числом вершин степени 2”. Что то же, “разместить на ребре произвольное число вершин степени 2”. Возникает только вопрос, для задачи поиска рассматриваются гомеоморфные образы с тоже единичными

Лемма 1. Пусть G — внешний планарный граф. Тогда существует упорядоченный набор $(v_1, v_2, ..., v_n), n = |V(G)|$, вершин графа G таких, что для любого $1 \le i < k < j < l \le n$, v_i смежна с v_j, только если v_k не смежна с v_l.

“внешнепланарный”. Это, кстати, не самое распространенное понятие, стоит сказать точное определение.

Теорема 4. Для любого внешнего планарного графа G существует гомеоморфное изображение G' графа G, такое что $\mu(G') \ge \frac{2}{3}$.

Следствие 3. Для любого $k > 0$ существует граф G, такой что $\frac{\mu(G)}{\mu_m(G)} \ge k$.

В целом, может получиться хороший доклад, нужны хорошие примеры.