2025 秋季学期 线性代数 (B) 习题课讲义

唐博文 2401110023@stu.pku.edu.cn

2025 年 9 月 13 日

1 基本信息

1.1 助教信息

唐博文 数学科学学院 2024 级博士生

邮箱: 2401110023@stu.pku.edu.cn

手机/微信: 13983802197

1.2 课程信息

1. 正课时间地点: **每周**周一 3-4 节 (10:10-12:00), 周三 1-2 节 (8:00-9:50), 地点是二**教 205**.

2. 习题课时间地点: **双周**周一 10-11 节, 即 18:40-20:30, 地点是三**教 208**. 可以迟到早退, 不考勤, 但是请**不要影响他人**.

3. 期中考试时间: 待定

4. 期末考试时间: **2026 年 1 月 7 日上午 8:30-10:30**.

5. 收发作业的要求: 作业在**习题课**收发, 纸质版作业尽量不要交太厚的本子, 否则助教会非常痛苦. 如果你希望交电子版作业, 请发到我的邮箱, 请你提交**一个**文件, 且文件格式为 **pdf**(可以手写之后用扫描全能王拍照/平板写了转成 pdf/使用 latex), 并且麻烦你尽可能检查你文件中图片方向是否正确, 不要横着或者倒着, 否则助教也会非常痛苦. 无论你提交什么格式的作业, 请写好**姓名和学号**, 并**在你所做的每个题目前面写好它的的题号**. 如果你不写的话, 助教还是会非常痛苦. 为了助教的身心健康, 请大家按照要求提交作业, 作业成绩不会为难大家. **迟交会影响作业成绩**.

6. 关于答疑: 如果你有不懂的知识点或者不会做的题目, 可以给我发邮件/微信, 更推荐的方式是发**邮件**. 由于助教的水平有限, 不可能所有题目都能一眼盯出解答, 请大家理解. 如果你需要线下答疑, 可以和我提前约时间, 或者在习题课下课的时候找我.

1.3 关于习题课的设想

事先声明, 数学学院有非常多经验丰富的传奇助教, 而本人是第一次带线性代数, 所以肯定有很多不足的地方, 欢迎大家随时提出批评. 如果你觉得我讲得不好, 但是另外某个老师班上的某个助教风格你非常喜欢, 你完全可以去听那位助教的习题课, 但是**作业还是要交到我这里**.

由于大家大概率不会是专门研究线性代数的, 所以我在习题课上不会讲任何超纲和拓展的内容, 我大致的设想是将习题课分成评讲作业 + 知识点回顾 + 例题讲解三个部分. 讲义上的所有例题会发解答.

2 预备知识

2.1 常用的符号解释说明

在这门课程 (以及高等数学) 中, 有两个常用但中学课本不会专门接触的符号是求和 $\sum$ 和求乘积 $\prod$. 这两个符号的基本逻辑是: 对一些满足特定条件的项求和或者求乘积. 以下只介绍求和, 求乘积可以完全类比过去. 一个最经典的记号是

$$\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

这个符号表示, 求和号后面的项中的 i 从 1 开始, 一直取到 n, 把这 n 项加起来. 也就是说

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

当然求和号后面的项完全可以不是一个单纯的 a_i, 它可能还含有一些别的参数. 不过我们求和的原则一定是看求和号下面是哪个变量在变. 比如说

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = a_{1j} + \cdots + a_{nj}, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = a_{i1} + \cdots + a_{in}.$$

另一种求和的记号并不是一个参数从某个整数 m 变化到另一个整数 n, 而是: 对满足某些特定条件的参数求和. 比如说

$$\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}$$

就表示: 当 i 和 j 满足 $1 \le i < j \le n$ 的时候, a_{ij} 就出现在求和的项里边, 否则 a_{ij} 就不出现. 或者说

$$\sum_{0<\alpha<10,\, \frac{\alpha}{\pi}\in\mathbb{Z}} \alpha$$

就表示当 α 满足下面的那个条件的时候, 它出现在求和项里边. 这里就是 $\alpha = \pi, 2\pi, 3\pi$ 满足要求, 所以求和式的值就等于 6π. 在某些时候, 为了简便起见, 下标不会写得那么明确, 这个时候一般就会用文字解释说明: 求和号表示对什么什么求和. 大家在高等数学课中可能很快 (也可能要过一段时间) 就会知道, 如果满足下标条件的指标有无穷多组, 那么求和和求乘积是比较危险的事情, 所以一般来讲我们还是更愿意处理有限和或者有限乘积的情况. 但是无穷多项求和的记号也是有的, 比如有一个著名的恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

这个式子左边的定义会在高等数学课中介绍.

接下来解释集合相关的记号. 我们知道, 给定两个集合 X 和 Y, 我们可以定义它们的并集 $X \cup Y$ 和交集 $X \cap Y$. 我们这里引入两个集合之间两种新的运算. 第一个是

$$X \setminus Y,$$

称为 X 和 Y 的差集 (注意斜杠的方向千万不要反了). 它的定义是

$$X \setminus Y = \{x \in X : x \notin Y\}.$$

也就是在 X 中但是不在 Y 中的元素. 注意这里我们并没有要求 Y 是 X 的子集, 随便的两个集合都可以定义差集. 我们还要引入一个运算是

$$X \times Y$$

称为 X 和 Y 的笛卡尔积. 注意这里的乘号不可以省略. 它的定义是

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X,\ y \in Y\}.$$

也就是说笛卡尔积中的每个元素都是一个元素对, 其中一个元素在 X 中, 一个元素在 Y 中. 我们也可以定义多个集合的笛卡尔积

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_i \in X_i,\ i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

这里如果想要让记号更简单, 可以使用求乘积符号, 将它记为

$$\prod_{i=1}^{n} X_i.$$

为了避免一些不必要的麻烦, 我们只讨论有限个集合的笛卡尔积.

多个集合的并或者多个集合的交也可以使用类似求和和求乘积的符号, 只要把交和并的符号写大一点就可以了. 比如说

$$\bigcup_{i=1}^{n} X_i, \qquad \bigcap_{1 \le i < j \le n} (X_i \cup Y_j)$$

都是合法的记号. 在之后我们学习线性空间的直和的时候会引入符号 $\oplus$, 多个线性空间的直和也可以用类似的记号, 例如

$$\bigoplus_{i=1}^{n} V_i.$$

2.2 复数和三角函数

我们知道一个复数 $z \in \mathbb{C}$ 可以写成 $a + bi$, 其中 $a, b \in \mathbb{R}$, i 是虚数单位. 另一方面, 它还可以用模长和辐角来表示, 即

$$z = re^{i\theta}, \quad r = \sqrt{a^2 + b^2},\ \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},\ \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

其中 r 是模长, θ 是辐角. 一般认为 0 的辐角没有意义 (或者说可以取任何值). 这里我们用到一个重要的公式, 它被称为欧拉公式:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta.$$

两个复数的乘法在模长辐角的表示下会非常简便: 复数的乘法即是将模长相乘, 辐角相加. 这是因为

$$\begin{aligned}r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=&r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]\\=&r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)].\end{aligned}$$

复平面有一个特殊的子集: 单位圆周. 在单位圆周上的复数的模长总是 1, 所以总是具有 $e^{i\theta}$ 的形式. 由于一个复数的模长的平方总是等于它乘上自己的共轭, 所以

$$z\overline{z}=1\Rightarrow\overline{z}=\frac{1}{z}.$$

即单位圆周上一个复数的共轭等于它的倒数.

在模长辐角表示下我们很容易观察出方程

$$x^n=1$$

的解. 代数基本定理告诉我们它在复数域中一定有 n 个根, 事实上我们两边取模长可知

$$|x|^n=1\Rightarrow|x|=1.$$

也就是说 $x=e^{i\theta}$ 满足 $x^n=1$, 这说明 $n\theta=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. 于是不重复的 n 个根是:

$$1,\zeta,\zeta^2,\cdots,\zeta^{n-1},\quad\zeta=e^{\frac{2\pi i}{n}}\in\mathbb{C}.$$

这 n 个解被称为 n 次单位根. 如果 $\gcd(m,n)=1$, 即 m 和 n 互素, $\zeta^m=e^{\frac{2m\pi i}{n}}$ 称为 n 次本原单位根.

在高中的时候我们学习了三角函数的二倍角公式, 我们在这里回忆一下:

$$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta,\ \cos2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta.$$

那么是否有三倍角公式? 四倍角公式? n 倍角公式? 我们这里利用复数做一个简单的推导. 我们知道

$$\cos n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n,$$

并且我们有二项式定理

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^{n-k}b^k,$$

于是

$$\begin{aligned}\cos n\theta+i\sin n\theta=&\sum_{k=0}^{n}C_n^k(\cos\theta)^{n-k}(i\sin\theta)^k\\=&\sum_{0\le k\le n\text{为偶数}}C_n^k(\cos\theta)^{n-k}(\cos^2\theta-1)^{k/2}+i\sum_{0\le k\le n\text{为奇数}}C_n^k(\cos\theta)^{n-k}(-1)^{(k-1)/2}(\sin\theta)^k.\end{aligned}$$

这里我们可以看到: 实部虚部分开之后, 实部非常漂亮, 因为我们通过上面的式子证明了 $\cos n\theta$ 可以用一

个关于 $\cos\theta$ 的多项式写出来 (如果感兴趣, 可以搜索: 切比雪夫多项式). 但是虚部就不太好, 因为这里面混杂了 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$. 不过当 n 是奇数时, k 是奇数意味着 $n-k$ 是偶数, 那么 $(\cos\theta)^{n-k}$ 就可以变成关于 $\sin\theta$ 的多项式.

我们接下来做两件事情: 一是观察 $\cos n\theta$ 写成关于 $\cos\theta$ 的多项式之后, 首项 (最高次项) 系数是多少; 二是我们导出三倍角公式. 首先, 我们要求的这个首项系数是

$$\sum_{0\le k\le n\text{为偶数}} C_n^k,$$

我们利用

$$\begin{cases} 2^n = (1+1)^n = \displaystyle\sum_{0\le k\le n\text{为偶数}} C_n^k + \sum_{0\le k\le n\text{为奇数}} C_n^k \\ 0 = (1-1)^n = \displaystyle\sum_{0\le k\le n\text{为偶数}} C_n^k - \sum_{0\le k\le n\text{为奇数}} C_n^k \end{cases}$$

可知

$$\sum_{0\le k\le n\text{为偶数}} C_n^k = \frac{1}{2}(2^n+0) = 2^{n-1}.$$

也就是说

$$\cos n\theta = 2^{n-1}\cos^n\theta + (\text{关于}\cos\theta\text{次数更低的项}).$$

而对于 $n=3$ 的情况, 根据前面的式子我们知道

$$\cos 3\theta = C_3^0\cos^3\theta + C_3^2\cos\theta(\cos^2\theta-1) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$$

$$\sin 3\theta = C_3^1(1-\sin^2\theta)\sin\theta + C_3^3(-\sin^3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.$$

当然这两个三倍角公式也可以利用二倍角公式快速地得到.

在这一节的最后我们再介绍一下三角函数的和差化积公式和积化和差公式:

定理 1 (和差化积)**.** 对任何 α, β, 有

- $$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right);$$
- $$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right);$$
- $$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right);$$
- $$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

证明. 其实这个看起来复杂的公式的记忆和证明都非常简单. 只需要利用以下的四个恒等式:

$$\sin\alpha = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right);$$

$$\sin\beta = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right);$$

$$\cos\alpha = \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right);$$

$$\cos\beta = \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

□

定理 2 (积化和差)**.** 对任何 α, β, 有

- $$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)];$$
- $$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)];$$
- $$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)].$$

证明. 直接把等号右边用和差角公式展开即可. □

2.3 重要的不等式

这一节介绍两个重要的不等式: 平均值不等式和柯西不等式.

定理 3 (平均值不等式)**.** 设 $a_1, \cdots, a_n$ 是 n 个正数, 则

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{n}} \geq \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \geq \left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{1/n} \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}.$$

四个数依次被称为平方平均值, 算术平均值, 几何平均值, 调和平均值. 三个不等式成立等号的充要条件都是所有的数全相等.

证明. 我们先用数学归纳法证明算术平均值 $\geq$ 几何平均值. $n=2$ 时的不等式是

$$\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1a_2},$$

这显然成立. 因为左边减右边得到 $(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2 \geq 0$. 并且取等的充要条件是 $a_1 = a_2$.

假设对 N 个数的情况已经成立, 考虑 $N+1$ 个数的情况. 不妨设 a_{N+1} 是最大的一个, 并记 $S_k =$

$a_1 + \cdots + a_k$, 则

$$\left(\frac{a_1+\cdots+a_{N+1}}{N+1}\right)^{N+1} = \left(\frac{S_N}{N} + \frac{Na_{N+1}-S_N}{N(N+1)}\right)^{N+1} \geq \left(\frac{S_N}{N}\right)^{N+1} + (N+1)\left(\frac{S_N}{N}\right)^{N} \cdot \frac{Na_{N+1}-S_N}{N(N+1)}$$
$$= \left(\frac{S_N}{N}\right)^{N}\left(\frac{S_N}{N} + \frac{Na_{N+1}-S_N}{N}\right) \geq \left(\prod_{i=1}^{N} a_i\right) \cdot a_{N+1} = \prod_{i=1}^{N+1} a_i.$$

等号成立的充要条件是 $a_1 = \cdots = a_N$ 且 $Na_{N+1} = S_N$, 即所有数全相等. 归纳完成.

将 a_i 用它的倒数替代, 立刻得到几何平均值 $\geq$ 调和平均值, 且取等条件依然是所有数全相等.

最后证平方平均值 $\geq$ 算术平均值. 注意到

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{1\leq i<j\leq n} (a_i - a_j)^2 \geq 0,$$

化简即得. 取等的充要条件是所有数全相等. □

定理 4 (柯西不等式)**.** 对任何实数 $a_1, \cdots, a_n$, $b_1, \cdots, b_n$, 有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2.$$

取等的充要条件是存在实数 k 使得 $a_i k = b_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

证明. 考虑一个二次函数

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) x^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) x + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

由于我们可以对这个二次函数进行配方

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i x - b_i)^2 \geq 0,$$

所以 $f(x) = 0$ 要么没有实根, 要么有两个相等的实根. 故这个二次函数的判别式一定非正, 即

$$\Delta(f) = \left[2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)\right]^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leq 0.$$

化简即得柯西不等式. 等号成立当且仅当 $f(x)$ 有两个相等的实根 k, 即 $a_i k - b_i = 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$. □

3 线性方程组

3.1 解线性方程组的算法

解线性方程组的算法是比较固定的, 我们首先写出方程组的增广矩阵, 然后对它做初等行变换即可, 即:

1. 把一行的常数倍加到另一行上;
2. 互换两行的位置;
3. 用一个非零常数乘某一行.

我们这么做的目的是把矩阵化成行简化阶梯矩阵, 这样线性方程组就变成了一个非常漂亮可以手搓的样子. 考试基本上一定会有一个题目是解线性方程组, 所以这方面的计算一定要熟练且准确, 大家需要自己在作业和习题中练习.

3.2 线性方程组解的情况及其判别准则

为了判断一个线性方程组解的情况, 我们先把方程组的增广矩阵按照 3.1 节中的办法变成一个行简化阶梯矩阵, 这样我们就可以对一个很简单的方程讨论它的解是什么样的.

1. 如果这个阶梯矩阵里面出现了某一行是

$$(0, 0, \cdots, 0, d) \quad d \neq 0,$$

   这就意味着方程组里边有一个方程是 $0 = d$, 这肯定无解.

2. 如果上面那种情况没有出现, 那么就有两种情况: 一种是方程个数 (非零行的数目) 和未知数个数一样多, 这个时候矩阵的形状是

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & d_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

   对应方程的形状是

$$\begin{cases} x_1 = d_1, \\ x_2 = d_2, \\ \cdots \\ x_n = d_n. \end{cases}$$

   这相当于就把这个方程的唯一解写出来了.

   还有一种情况是方程的个数比未知数少, 书上的例子记号比较多, 我们直接举一个极端的例子. 比如

说矩阵的形状是

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

那么方程的形状就是

$$\begin{cases} x_1 = d_1, \\ x_2 + 2x_3 + \cdots + 2x_n = d_2. \end{cases}$$

这个时候就可以直接看出方程有无穷多组解:

$$\begin{cases} x_1 = d_1, \\ x_2 = d_2 - 2x_3 - \cdots - 2x_n. \end{cases}$$

这里 x_1 和 x_2 是主变量, 其他的都是自由变量. 换句话说只要我们把矩阵化成了这种行简化阶梯矩阵, 解的样子直接就读出来了.

我们还要继续探讨一种非常特殊的方程组, 也就是齐次线性方程组 (常数项全部都是 0). 这种情况下方程是一定有解的, 有两种观点来看: 一是所有的变量都等于 0 肯定是一组解; 二是如果我们老老实实地把矩阵写出来做初等行变换, 我们就会发现最后那一列怎么变都是 0, 所以肯定不会出现 $0 = d$ 这种不好的方程. 这个时候我们去套上面的理论就知道, 如果这个方程有唯一解, 那么这个唯一解肯定就是零解了; 否则这个方程有无穷多组解, 肯定就存在非零解. 因此我们有:

定理 5 (线性方程组解的情况)**.** *一个数域上的线性方程组的解只可能有三种: 无解, 存在唯一解, 存在无穷多组解. 第一种情况对应于初等行变换后出现只有最后一列非零的行; 第二种情况和第三种情况分别对应于行简化阶梯矩阵中, 未知数个数等于和大于方程个数的情况. 特别的, 由于零解总是齐次线性方程组的解, 所以齐次线性方程组有无穷多个解当且仅当它存在非零解.*

3.3 数域

这一节的提出是为了定理的叙述更加严谨. 我们如果要验证某个集合 K 是一个数域, 那么就要验证以下三个方面: 首先 $K \subset \mathbb{C}$, 然后 $0, 1 \in K$, 最后 K 关于加减乘除封闭, 即对 $a, b \in K$, 有 $a + b, ab \in K$, 且 $a \neq 0$ 时 $1/a \in K$.

3.4 例题

这一部分经典的题目就是给一个线性方程组, 判断方程组解的性质. 有可能这个方程组中含有未知的参数, 要通过未知数的不同取值来判断解的不同情况. 这种题目的方法是较为固定的, 就是把增广矩阵一步一步做行变换, 直到成为一个行简化阶梯矩阵. 当然对于齐次方程组的情形, 也可以偷个懒, 只用考虑系数矩阵就可以了, 反正最后一列怎么变都是 0.

问题 1 (2024 秋期中考试第 2 题)**.** 下述齐次方程组何时有非零解？何时只有零解？

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - 7x_2 - 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 9x_2 + ax_3 = 0, \\ 5x_1 + bx_2 - 55x_3 = 0. \end{cases}$$

4 行列式

4.1 行列式的定义和性质

我们首先回顾行列式的定义.

定义 1. n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是 $n!$ 项代数和, 其中每一项都是位于不同行不同列的 n 个元素的乘积, 将它们按照行指标从小到大排好顺序之后, 列指标排列的奇偶性决定了这一项的符号, 即奇排列取负号, 偶排列取正号. 也就是说,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1\cdots j_n} \left((-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)} \prod_{k=1}^{n} a_{kj_k} \right).$$

求和号表示对所有的排列 $j_1 \cdots j_n$ 求和. 不难验证, 在这个完全展开式中, 项 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 的系数为

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}.$$

其中 $i_1\cdots i_n$ 和 $j_1\cdots j_n$ 都是 $1,2,\cdots n$ 的一个排列.

在这份讲义中, 为了不和绝对值符号混淆, 我们有时候也把矩阵 A 的行列式记为 $\det A$. 一般来讲, 由于行列式的定义过于复杂, 我们真正用这个定义手搓行列式的情况最多局限于二阶和三阶行列式, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{22}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (\text{其他三项}).$$

三阶行列式的一种记忆方法是把这个矩阵再抄一遍写成一个 3×6 的大表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

然后从第一行出发画三条主对角线方向的线, 这三条线上的取正号, 然后从第一行第四个位置开始又画三条反对角线方向的线, 这三条线上的取负号.

下面我们罗列一些行列式的性质, 这些性质是我们计算行列式的重要工具.

性质 1. 上三角矩阵和下三角矩阵的行列式都等于主对角线元素的乘积.

性质 2. 行列互换, 行列式不变.

性质 3. n 阶行列式中一行的公因子可以提出去. 进一步, 如果这个行列式中的 n^2 项里边每一项都有同一个因子 k, 那么提出去的结果是 k^n. 因为这可以看成是把每一行都提了一个公因子出来.

性质 4. 如果某一行每个数都是两组数对应项的和, 则行列式可以拆成两个行列式的和, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 5. 两行互换, 行列式变为相反数.

性质 6. 如果两行相同, 则行列式的值为 0.

性质 7. 若两行成比例, 则行列式的值为 0.

性质 8. 把某一行的某个倍数加到另一行上, 行列式的值不变.

4.2 行列式的展开和代数余子式

这是行列式这一章节中较难的部分. 行列式的展开有两种, 分别是按照一行 (或一列) 展开和按照 k 行 (或 k 列) 展开. 由于行列式中行和列是等价的, 我们接下来在回顾定义的时候就只列举按行展开的情况. 利用行列式的展开, 我们可以得到两种特殊行列式的值: 范德蒙德行列式和三对角行列式. 这两个行列式需要大家熟练掌握.

定义 2 (余子式和代数余子式)**.** 对一个 n 阶矩阵 A 而言, 划去它的 (i,j) 元所在的第 i 行和第 j 列, 可以得到一个 $n-1$ 阶矩阵, 它的行列式称为 A 的 (i,j) 元的**余子式**, 记为 M_{ij}. $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为 A 的 (i,j) 元的**代数余子式**.

定理 6 (行列式按一行展开)**.** 取定一个 n 阶矩阵 $A=[a_{ij}]$ 的第 i 行, 则 $|A|$ 等于 A 的第 i 行元素与自己的**代数**余子式的乘积之和, 即

$$|A|=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$$

这个定理看起来非常花哨, 其实在实操的时候并不困难. 我们只要选好行列式的某一行 (一般如果要做展开的话, 会选 0 尽可能多的行, 这样项数就会少一点), 然后从第一个数开始, 把它所在的行和列划掉, 先算一下剩下东西的行列式, 再乘上这个数, 然后前面乘一下 $(-1)^{i+j}$ 再相加就可以了. 行列式的展开能给出 n 阶行列式和 $n-1$ 阶行列式的某种关系, 所以经常和数学归纳法同时应用在行列式的计算之中.

定理 7. n 阶行列式 $|A|$ 的第 i 行元素和第 k $(k\neq i)$ 行相应元素的代数余子式乘积之和为 0.

性质 9 (范德蒙德行列式)**.** $n \geq 2$ 阶范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

的值为

$$\prod_{1\leq j<i\leq n}(a_i - a_j).$$

性质 10 (三对角行列式)**.** 三对角行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix} \quad (b \neq 0,\ c \neq 0)$$

的值记为 E_n. 则:

1. 若 $a^2 - 4bc \neq 0$, 记 $x^2 - ax + bc = 0$ 在复数域上的两个根为 α, β, 则

$$E_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}.$$

2. 若 $a^2 = 4bc$, 则

$$E_n = (n+1)\left(\frac{a}{2}\right)^n.$$

行列式还可以按 k 行展开. 这里的定义略显复杂, 我们做一个简单的回顾.

定义 3 (矩阵的 k 阶子式, 余子式和代数余子式)**.** n 阶矩阵 A 中任意取定 k 行 $i_1 < \cdots < i_k$ 和 k 列 $j_1 < \cdots < j_k$, 则这些行列交叉处的元素按原来的排法组成一个 k 阶子矩阵, 它的行列式称为 A 的 k 阶子式. 记为

$$A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{pmatrix}.$$

划去这个 k 阶子式所在的 k 行 k 列, 剩下 $(n-k)^2$ 个元素组成一个 $(n-k)$ 阶矩阵, 称为这个 k 阶子式的余子式. 它前面乘以 $(-1)^{(i_1+\cdots+i_k)+(j_1+\cdots+j_k)}$ 称为代数余子式.

定理 8 (行列式按 k 行展开, 拉普拉斯定理)**.** n 阶矩阵 A 中任意取定 k 行 $i_1 < \cdots < i_k$, 则 $|A|$ 等于这

k 行元素形成的所有 k 阶子式与它们各自的代数余子式的乘积之和, 即

$$|A| = \sum_{1 \le j_i < \cdots < j_k \le n} A \begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{pmatrix} \cdot (-1)^{(i_1+\cdots+i_k)+(j_1+\cdots+j_k)} A \begin{pmatrix} i_1', i_2', \cdots, i_{n-k}' \\ j_1', j_2', \cdots, j_{n-k}' \end{pmatrix}.$$

其中 $\{i_1', i_2', \cdots, i_{n-k}'\} = \{1, 2, \cdots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ 且 $i_1' < i_2' < \cdots < i_{n-k}'$, $\{j_1', j_2', \cdots, j_{n-k}'\} = \{1, 2, \cdots, n\} \setminus \{j_1, j_2, \cdots, j_k\}$ 且 $j_1' < j_2' < \cdots < j_{n-k}'$.

以上定理的一个用处是能够很方便地计算分块下 (上) 三角阵的行列式.

性质 11. 分块下三角的行列式

$$\begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ C & A_2 \end{vmatrix} = |A_1| \cdot |A_2|.$$

这里 A_1 和 A_2 都是方阵.

4.3 例题 (第一部分)

这一部分例题较多. 行列式的求值也是往年必考的部分, 且在某些年份出得非常难. 它的特点是没有什么固定的章法, 基本上都是根据所求的行列式特点来找合适的解法. 我们在这里通过下面的例题来尽可能展示常见的一些技巧, 题目后附有相应的一些提示.

问题 2 (丘砖习题 2.2.6, 补充题二的 3, 4 题)**.** 设 $n \ge 2$, 证明: 若 n 级矩阵 A 的元素都是 1 或者 -1, 则它的行列式一定是偶数. 在 $n = 3$ 的时候, 求行列式的最大值. 在一般的 $n \ge 3$ 的情况, 证明这个行列式的绝对值不超过 $(n-1)!(n-1)$. 提示: 使用行列式的定义.

问题 3 (丘砖习题 2.3.4)**.** 计算以下行列式的值.

1.

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \cdots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \cdots & a_2 + b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \cdots & a_n + b_n \end{vmatrix}.$$

提示: 取定两列, 观察它们的差别.

2.

$$\begin{vmatrix} a_{1n} + a_{11} & a_{11} + a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} + a_{1n} \\ a_{2n} + a_{21} & a_{21} + a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} + a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn} + a_{n1} & a_{n1} + a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} + a_{nn} \end{vmatrix}.$$

提示: 可以尝试 n 较小的情形来找规律.

3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n & n & n \end{vmatrix}.$$

提示*: 观察相邻两列之间的差别. 既然行列式中有很多位置的数一样, 那么就总能想办法把它们大部分都弄成 0.*

问题 4 (缺项的范德蒙德行列式, 加边法)**.** 设 $n \geq 2$, 求以下行列式的值.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_{n-1}^n & x_{n-1}^n \end{vmatrix}.$$

提示*: 我们还是希望利用范德蒙德行列式, 所以可以强行地加上一行. 为了使行和列数量一致, 我们还要加上一列.*

问题 5 (丘砖习题 2.4.17)**.** 求以下行列式的值.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_2 & \cdots & 1+x_n \\ 1+x_1^2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+x_1^n & 1+x_2^n & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}.$$

提示*: 和问题 4 一样采用加边法.*

问题 6 (丘砖 2.3 节例 4, 2022 秋期中考试第 2 题)**.** 设 $n \geq 2$, $a_i \neq 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 计算以下 n 阶行列式的值.

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}.$$

提示*: 和问题 3 的最后一小题一样, 可以把很多的项想办法弄成 0. 也可和问题 4 一样采用加边法.*

问题 7 (2023 秋期中考试第 3 题)**.** 求以下行列式的值.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

提示: 如果我们让相邻的两行作差, 就会出现很多 1, 那么也就有机会出现很多 0.

问题 8 (丘砖 2.4 节例 8)**.** 求以下行列式的值.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}.$$

提示: 如果我们让相邻的两行作差, 就会出现很多 1, 那么也就有机会出现很多 0.

问题 9 (2024 秋期中考试第 3 题)**.** 设 $n \geq 2$, 求以下行列式的值.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}.$$

提示: 想办法让某一行或者某一列出现很多 0, 然后展开.

问题 10 (多项式的友矩阵)**.** 设 $n \geq 2$, 求以下行列式的值.

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

提示: 利用数学归纳法.

问题 11. 设 $n \geq 2$. 求以下行列式的值.

$$\begin{vmatrix} a_0+a_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & a_1+a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_2+a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1}+a_n \end{vmatrix}.$$

提示: 按最后一行展开.

问题 12 (2022 春期中考试第 7 题)**.** 设 $n \geq 2$, 求以下行列式的值.

$$D_n = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_n} \\ \dfrac{1}{a_2+b_1} & \dfrac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{1}{a_n+b_1} & \dfrac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}.$$

提示: 利用数学归纳法.

问题 13 (丘砖 2.4 节例 11)**.** 设 $n \geq 2$, 求以下行列式的值.

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1+a_{11} & x_1^2+a_{21}x_1+a_{22} & \cdots & x_1^{n-1}+a_{n-1,1}x_1^{n-2}+\cdots+a_{n-1,n-1} \\ 1 & x_2+a_{11} & x_2^2+a_{21}x_2+a_{22} & \cdots & x_2^{n-1}+a_{n-1,1}x_2^{n-2}+\cdots+a_{n-1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n+a_{11} & x_n^2+a_{21}x_n+a_{22} & \cdots & x_n^{n-1}+a_{n-1,1}x_n^{n-2}+\cdots+a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.$$

提示: 第 k 列是 k 个项的和, 所以根据行列式的性质 *4*, 此行列式可以写成 $n!$ 个行列式的和.

问题 14 (丘砖补充题二的 14 题)**.** 设 $n \geq 2$, 求以下行列式的值.

$$\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \cdots & a_nb_n \end{vmatrix}.$$

提示: 如果想要提取整行整列的公因子的话, 提取的办法基本上是唯一的.

问题 15 (丘砖 2.6 节例 3)**.** 求一个 $2n$ 阶行列式的值, 它的主对角线上元素都是 a, 反对角线上元素都是 b, 其他位置的元素都是 0. 提示: 按某两行展开.

总结一下, 我们从以上的例题中能够看到求行列式的一些大致的思路.

1. 我们相对来讲比较喜欢让行列式里面出现很多的 0. 这是因为如果有某一行或者某一列 0 的个数非常多, 那我们在按这一行 (列) 展开的时候形式就会比较简单. 进一步, 如果我们能让行列式里面有很多元素都相同, 那么加加减减很有可能凑很多 0 出来. 这种思路可能可以很好地和数学归纳法结合起来.

2. 可以注意观察行 (或列) 的和 (或差) 是否有一些特性. 比如说, 如果每一行的和都一样, 可能就可以把所有的列加到第一列, 公因数提出来之后就有很多 1 出现. 又比如说, 两列的差会出现很多的 1, 那我们就可以先作差再争取凑一些 0 然后展开.

3. 有时候我们可以去凑一凑范德蒙德行列式或者上/下三角行列式 (在所求的式子形式比较接近的情况下). 其中加边法是一种技巧性比较高的方法.

以下是一些和余子式, 代数余子式相关的题目.

问题 16 (2023 秋期中考试第 4 题的推广)**.** *假设一个矩阵的某一行全是 1, 求它的所有元素的代数余子式的和.*

问题 17 (丘砖习题 2.4.19)**.** *证明: 如果把 n 级矩阵 A 的每一个元素都加上同一个数 t 得到矩阵 $A(t)$, 那么 $A(t)$ 的所有元素的代数余子式的和等于 A 的所有元素的代数余子式的和.*

4.4 Cramer 法则

Cramer 法则本质上来讲是给出了**未知数个数和方程个数相同**的线性方程组的解的情况的判别准则. 并且在**存在唯一解**的情况下, 能够给出解具体的表达式. 我们首先回忆 Cramer 法则的陈述.

定理 9 (Cramer 法则)**.** *数域 K 上含有 n 个方程的 n 元线性方程组存在唯一解的充分必要条件是, 它的系数矩阵 A 的行列式不等于 0. 并且, 当这个线性方程组存在唯一解时, 这个唯一的解可以表示为*

$$\left(\frac{|B_1|}{|A|}, \frac{|B_2|}{|A|}, \cdots, \frac{|B_n|}{|A|}\right)^T.$$

其中 B_j 是将 A 的第 j 列用常数项替换得到的矩阵.

我们在使用 Cramer 法则的时候要小心以下的两件事情:

1. 我们在用 Cramer 法则计算唯一的解的时候, 这个**常数项**一定要是**等号右边的项** (和未知数放在等号的两侧). 比如说随便写一个方程

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 1 = 0, \\ x_1 + x_3 + 3 = 0, \\ x_2 + 3x_3 + 8 = 0. \end{cases}$$

这里的常数项不是 $(-1, 3, 8)^T$, 而是要把它挪到等号右边成为 $(1, -3, -8)^T$.

2. Cramer 法则**无法判断**方程是**存在无穷多个解**还是**无解**, 这两种情况下系数矩阵的行列式都是 0. 对于齐次方程组而言, 由于零解的存在使得它不可能无解, 故这种特殊的情况下, 如果算出来系数矩阵的行列式是 0, 就可以断言方程有无穷多个解了. 但是非齐次的情况下, 我们还是需要把增广矩阵写出来变换, 才知道是哪一种情况. 为什么会出现这样的情况呢? 我们可以翻译成线性方程组的语言. 假如说方程

组里面有两个方程是这样的:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = d_1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = d_2, \end{cases}$$

(当然方程组可能还有一些别的方程和别的未知数保证方程个数和未知数个数一样多) 那么系数矩阵的这两行成比例, 行列式是 0. 但是这个方程组有没有解并不只取决于前面的系数. 如果说 $d_2 = 2d_1$, 那么这个方程目前就没有矛盾, 它就有可能存在无穷多组解. 如果 $d_2 \neq 2d_1$, 那么这个方程组中有两个方程就是矛盾的, 肯定就无解了. 所以 Cramer 法则有它的局限性.

4.5 例题 (第二部分)

Cramer 法则相关的例题并不是很难, 重点是要记住公式.

问题 18 (2023 秋期中考试第 7 题)**.** *给定 n 个彼此互不相同的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 设 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 为任意的 n 个数, 证明存在唯一的次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$ 使得 $f(a_i) = b_i$.*

问题 19 (2022 秋期中考试第 3 题)**.** *设行列式*

$$\begin{vmatrix} \zeta_{11} & \zeta_{12} & \cdots & \zeta_{1n} \\ \zeta_{21} & \zeta_{22} & \cdots & \zeta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{n1} & \zeta_{n2} & \cdots & \zeta_{nn} \end{vmatrix}$$

不为零.

1. *证明满足下面方程组的未知量 x_{ijl} 唯一:*

$$\zeta_{jt}\zeta_{lt} = \sum_{i=1}^{n} x_{ijl}\zeta_{it}, \quad 1 \le j, l, t \le n.$$

2. *求出 x_{ijl} 的值.*

问题 20 (主对角占优矩阵)**.** *设 $A = [a_{ij}]_{1 \le i,j \le n}$ 是元素全为实数的矩阵, 满足*

$$a_{ii} > \sum_{1 \le j \le n, j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

这样的矩阵称为严格主对角占优矩阵. 证明严格主对角占优矩阵的行列式非零. 进一步证明严格主对角占优矩阵的行列式一定严格大于 0. 提示: 可以利用连续函数的介值性.