

COMPTE RENDU PROJET BIOMATHEMATIQUES

Modèle de Propagation des rumeurs

BERTHET Théo
CHU Phuong Thao
DEMIRLI Gulsah

March 15, 2025

Abstract

Une rumeur est un phénomène de transmission d'histoire, un ensemble confus de bruits, une nouvelle de source incontrôlée qui se répand. Celle-ci peut avoir de nombreuses répercussions notamment économiques, sociologiques, de santé publique etc. Ainsi étudier la propagation des rumeurs apparaît important pour comprendre la diffusion de l'information et limiter celle ci lorsque les conséquences peuvent être néfastes. Nous allons alors modéliser le phénomène de propagation des rumeurs par des équations de réaction-diffusion. Tout d'abord, nous définissons notre modèle mathématique. Ensuite, nous allons résoudre les équations définies et étudier la stabilité des points d'équilibre. Nous procéderons à une étape de simulation numérique afin de comprendre l'impact des différents paramètres pris en compte. Nous introduirons une complexification du modèle notamment avec la prise en compte d'une action des autorités afin de démentir la rumeur. Nous essayerons également de modéliser la propagation de la rumeur dans un contexte plus concret. Enfin nous conclurons et discuterons des limites de notre modèle.

1 Introduction

Depuis l'émergence d'Internet et des réseaux sociaux, propager des rumeurs n'a jamais été aussi rapide et facile. Ainsi une rumeur ou même ce que l'on appelle des "fake news" peuvent se propager rapidement et avoir de lourdes conséquences en termes de sécurité ou d'économie notamment. En effet, par exemple, en 2011, la rumeur s'est répandue très largement que l'accident nucléaire de Fukushima au Japon avait pollué le sel causant ainsi une chute drastique de la vente de sel [2]. Un autre exemple peut être évoqué comme durant l'épidémie de Covid-19, de nombreuses rumeurs et désinformations se sont propagées contribuant à des actes parfois problématiques. Face aux multiples conséquences que la propagation de rumeurs peut avoir, il est alors plus facile de comprendre les nombreux enjeux derrière leur étude.

Le processus de propagation des rumeurs est très similaire à la propagation d'une maladie. En ce sens, un modèle compartimenté de type SIR est souvent utilisé et ce depuis les premières formulations de modèle de propagation de rumeurs établies en 1964 par Daley and Kendall [2, 3]. Le modèle comporte les groupes suivants :

- S : Susceptible. Ce sont des personnes qui ne connaissent pas la rumeur et qui sont susceptibles d'y être exposés.
- I : Infected. Ce sont des personnes qui sont infectées, c'est-à-dire qui croient à la rumeur et qui la font circuler dans la population.
- R : Recovered. Ce sont des personnes qui connaissent les rumeurs, qui n'y croient pas ou plus et qui ne la répandent pas.

Récemment, l'intérêt pour l'étude de la propagation des rumeurs a bien augmenté et la diversité des modèles également, utilisant divers groupes. Pour notre étude nous nous restreindrons à ces 3

compartiments.

De plus, la diffusion d'une rumeur est un phénomène social dans lequel le comportement des personnes et l'environnement social importe beaucoup. En effet, la crédibilité de la rumeur mais aussi celle des groupes I et R joue un rôle dans le processus. Un des facteurs qui peut également agir sur la propagation de la rumeur est son impact sur la vie de la population [2]. Il a été montré que des rumeurs qui concernent la population se répandent d'avantages, en ce sens nous pouvons citer une nouvelle fois l'exemple de la rumeur des sels contaminés après l'accident de Fukushima . Il s'agit d'une rumeur dont les conséquences pourraient toucher toute la population ce qui explique en partie la vigueur de la propagation. Il paraît également pertinent d'étudier la propagation des rumeurs dans le temps mais aussi dans l'espace permettant de mieux appréhender son évolution en vu par exemple de mieux pouvoir contrôler ou limiter son expansion, cela pouvant être utile pour le gouvernement afin d'éviter certains risques ou débordements. Dans cette optique, nous avons choisi d'utiliser des équations de réaction-diffusion pour notre modèle.

Ainsi, le but de notre étude est de modéliser le phénomène de propagation des rumeurs, de connaître l'impact des différents paramètres qui seront considérées, de complexifier le modèle, et d'établir des pistes pour limiter la propagation de fausses informations afin d'éviter les conséquences économiques et sociales que cela pourrait avoir.

Dans cette étude, une présentation du modèle sera faite ainsi qu'une analyse des équilibres et de leur stabilité. Ensuite, différentes simulations seront effectuées et des ajouts au modèle seront aussi appliqués afin de connaître l'impact des différents paramètres, d'étudier différentes situations et d'en tirer des interprétations contextuelles. Enfin, une conclusion et une discussion sur les résultats, le modèle et ses limites sera engagée.

Notre modèle peut se représenter dans la figure 1.

Les interactions principales entre les facteurs du modèles sont numérotées dans le graphe.

1. Interaction entre les S et les I. Les S sont convaincus par les I et deviennent les personnes qui répandent la rumeur.
2. Interaction entre les I et les R. Les I sont convaincus par les R et ne croient plus à la rumeur et à l'inverse, les R après l'interaction avec des I peuvent être redevenir les infectés.
3. Quelques personnes en I se rendent compte eux-mêmes que la rumeur est fausse à un moment donné et décident de rejoindre les R.
4. Interaction entre les S et les R. Une personne S est convaincue sans devenir I que la rumeur est fausse par la présence des R.

Nous allons définir notre système d'équations réaction-diffusion dans la partie suivante.

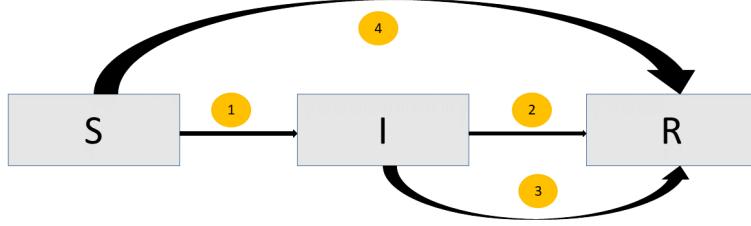


Figure 1: Représentation du modèle

2 Les équations du modèle mathématique et la résolution

Les fonctions S , I et R que nous avons définies précédemment varient en fonction de localisation x et du temps t : $S(x,t)$, $I(x,t)$, $R(x,t)$. En premier temps, nous n'allons considérer que les événements et les interactions classiques du modèle représentées par les fonctions bilinéaires (par exemple $\beta_1 SI$). Nous négligerons les décès et les morts sur le temps de propagation de la rumeur.

La variation de ces 3 classes est définie par le système :

$$\frac{\partial S}{\partial t}(x,t) = -\beta_1 S(x,t)I(x,t) - \beta_2 S(x,t)R(x,t) + d_S \Delta S(x,t)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t}(x,t) = \beta_1 S(x,t)I(x,t) - \gamma_1 I(x,t) - \beta_3 I(x,t)R(x,t) + d_I \Delta I(x,t)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t}(x,t) = \gamma_1 I(x,t) + \beta_2 S(x,t)R(x,t) + \beta_3 I(x,t)R(x,t) + d_R \Delta R(x,t)$$

avec $t \geq 0$ et $x \in \Omega \subset R^n$, $n = 1$ ou 2

Le système peut également s'écrire en dimension 1 :

$$\frac{\partial S}{\partial t}(x,t) = -\beta_1 S(x,t)I(x,t) - \beta_2 S(x,t)R(x,t) + d_S \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(x,t)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t}(x,t) = \beta_1 S(x,t)I(x,t) - \gamma_1 I(x,t) - \beta_3 I(x,t)R(x,t) + d_I \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}(x,t)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t}(x,t) = \gamma_1 I(x,t) + \beta_2 S(x,t)R(x,t) + \beta_3 I(x,t)R(x,t) + d_R \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}(x,t)$$

Avec $t \geq 0$ et $x \in [0, L]$

Les conditions initiales étant les suivantes :

- $S(x,0) = S_0(x) \geq 0$
- $I(x,0) = I_0(x) \geq 0$
- $R(x,0) = R_0(x) \geq 0$

Et en définissant les conditions aux bords de Neumann suivantes :

- $\frac{\partial S}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial I}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial R}{\partial t}(x,t) = 0$ en $x = 0$ et pour $t \geq 0$

Paramètre	Définition
β_1	taux de transmission globale d'un individu propageant à un individu susceptible par interaction
β_2	taux de transmission d'un individu rétabli à un individu susceptible par interaction
β_3	taux de transmission entre un individu infecté et un individu rétabli par intéraction
γ_1	taux de passage d'un individu propagant à un individu rétabli sans l'interaction par conviction personnelle
ν	paramètre de crédibilité de la rumeur
α	coefficient de corrélation entre la rumeur et la vie de la population
β_1'	taux de transmission d'un individu propageant à un individu susceptible par interaction
$\beta_{I \rightarrow R}$	taux de crédibilité d'un individu R intéragissant avec un individu I
$\beta_{R \rightarrow I}$	taux de crédibilité d'un individu I intéragissant avec un individu R
d_S	coefficient de diffusion de $S(x,t)$
d_I	coefficient de diffusion de $I(x,t)$
d_R	coefficient de diffusion de $R(x,t)$

Table 1: Tableau de définition des paramètres du modèle.

$$\bullet \frac{\partial S}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial I}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial R}{\partial t}(x,t) = 0 \text{ en } x = L \text{ et pour } t \geq 0$$

Tous les paramètres sont définis dans le tableau 1.

Avec $\beta_1 > 0$, $\beta_1 = \nu\alpha\beta_1'$. Ainsi le terme $\beta_1 S(x,t)I(x,t) = \nu\alpha\beta_1'S(x,t)I(x,t)$ représente la transmission de la rumeur par intéraction d'un individu I avec un individu S. Cette transmission dépend notamment de la crédibilité de la rumeur ν , de l'impact de la rumeur sur la vie de la population α .

Le terme $\beta_2 S(x,t)R(x,t)$ avec $\beta_2 > 0$, représente le fait que des individus S peuvent devenir convaincu que la rumeur est fausse par intéraction avec des individus R.

$\gamma_1 I(x,t)$ avec $\gamma_1 > 0$, correspond au fait que certains individus qui propagent la rumeur peuvent arrêter de transmettre la rumeur, ne plus y croire et donc devenir R par autoconviction ou par désintérêt.

$\beta_3 I(x,t)R(x,t)$ correspond à la transmission de la rumeur ou de la réfutation par l'intéraction entre un individu I et un individu R, $\beta_3 = \beta_{I \rightarrow R} - \beta_{R \rightarrow I}$, $\beta_{I \rightarrow R}$ est le taux de passage d'un individu I vers R par intéraction avec un individu R, avec $\beta_{I \rightarrow R} \geq 0$. A l'inverse, $\beta_{R \rightarrow I}$ est le taux de passage d'individus R vers I par intéraction avec un individu I, $\beta_{R \rightarrow I} \geq 0$. Ainsi, si $\beta_3 > 0$, cela signifie que les individus R sont plus convaincants que les individus I. Donc lorsqu'un individu I et un individu R se rencontrent, c'est l'individu I qui devient convaincu que la rumeur est fausse et il devient alors R. Lorsque $\beta_3 < 0$, c'est la cas contraire, les individus I sont plus convaincants et lorsque qu'un individu R et I se rencontrent, le R répand à nouveau la rumeur et/ou devient concaincu en sa véracité. Enfin si $\beta_3 = 0$, alors les deux groupes sont aussi convaincants l'un que l'autre et leur effet mutuel s'annule.

$d_S \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(x,t)$, $d_I \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}(x,t)$, $d_R \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}(x,t)$ sont des termes de diffusion et correspondent à l'opérateur Laplacien en dimension 1 dans ce cas mutliplié par le coefficient de diffusion (d_S, d_I, d_R). Ici, $d_S > 0$, $d_I > 0$ et $d_R > 0$.

2.1 Les points d'équilibre homogènes

Cherchons alors à résoudre les équilibres homogènes du système. Pour cela, le système va être réduit à 2 dimensions. Puisque que nous n'avons pas pris en compte les naissances et les décès et comme nous avons choisis les conditions de Neumann aux bords, la population totale reste constante.

Nous allons remplacer R par : $R = N - S - I$ en considérant donc N comme constant.

Voici le système avec l'écriture simplifiée que nous allons résoudre théoriquement :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\beta_1 SI - \beta_2 S(N - S - I) + d_S \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \beta_1 SI - \gamma_1 I - \beta_3 I(N - S - I) + d_I \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}$$

D'abord, cherchons les équilibres homogènes (S_0, I_0) du système :

$$f(S_0, I_0) = -\beta_1 S_0 I_0 - \beta_2 S_0 (N - S_0 - I_0) = 0 \quad (1)$$

$$g(S_0, I_0) = \beta_1 S_0 I_0 - \gamma_1 I_0 - \beta_3 I_0 (N - S_0 - I_0) = 0 \quad (2)$$

Résolvons d'abord l'équation (1) :

$$-\beta_1 S_0 I_0 - \beta_2 S_0 (N - S_0 - I_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow S_0 (-\beta_1 I_0 - \beta_2 N + \beta_2 S_0 + \beta_2 I_0) = 0$$

Donc :

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ -\beta_1 I_0 - \beta_2 N + \beta_2 S_0 + \beta_2 I_0 = 0 \end{cases}$$

Nous obtenons 2 valeurs de S_0 :

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_0 = \frac{(\beta_1 - \beta_2)I_0 + \beta_2 N}{\beta_2} \end{cases}$$

- Si $S_0 = 0$:

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow -\gamma_1 I_0 - \beta_3 I_0 (N - I_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow I_0 (-\gamma_1 - \beta_3 N + \beta_3 I_0) = 0 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{cases} I_0 = 0 \\ -\gamma_1 - \beta_3 N + \beta_3 I_0 = 0 \end{cases}$$

Nous obtenons 2 valeurs de I_0 pour le cas de $S_0 = 0$:

$$\begin{cases} I_0 = 0 \\ I_0 = \frac{\gamma_1 + \beta_3 N}{\beta_3} \quad si \beta_3 \neq 0 \end{cases}$$

Nous obtenons 2 premiers points d'équilibre $(0,0)$ et $(0, \frac{\gamma_1 + \beta_3 N}{\beta_3})$

- Si $S_0 = \frac{(\beta_1 - \beta_2)I_0 + \beta_2 N}{\beta_2}$:

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow \beta_1 \frac{(\beta_1 - \beta_2)I_0 + \beta_2 N}{\beta_2} I_0 - \gamma_1 I_0 - \beta_3 I_0 \left(N - \frac{(\beta_1 - \beta_2)I_0 + \beta_2 N}{\beta_2} - I_0 \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} I_0 = 0 \\ \beta_1 \frac{(\beta_1 - \beta_2)I_0 + \beta_2 N}{\beta_2} - \gamma_1 - \beta_3 \left(N - \frac{(\beta_1 - \beta_2)I_0 + \beta_2 N}{\beta_2} - I_0 \right) = 0 \end{cases} \quad (3) \\ (3) &\Leftrightarrow \beta_1 \frac{(\beta_1 - \beta_2)I_0 + \beta_2 N}{\beta_2} - \gamma_1 - \beta_3 \left(N - \frac{(\beta_1 - \beta_2)I_0 + \beta_2 N}{\beta_2} - I_0 \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \beta_1 (\beta_1 - \beta_2)I_0 - \beta_1 \beta_2 N - \gamma_1 \beta_2 - \beta_3 (\beta_2 N - (\beta_1 - \beta_2)I_0 - \beta_2 N - \beta_2 I_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow \beta_1 (\beta_1 - \beta_2)I_0 - \beta_1 \beta_2 N - \gamma_1 \beta_2 + \beta_3 \beta_1 I_0 = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow I_0 = \frac{\beta_1 \beta_2 N + \gamma_1 \beta_2}{\beta_1 (\beta_1 - \beta_2 + \beta_3)}$$

Nous obtenons 2 autres points d'équilibre $(\frac{(\beta_1 - \beta_2)I_0 + \beta_2 N}{\beta_2}, 0)$ et $(\frac{(\beta_1 - \beta_2)I_0 + \beta_2 N}{\beta_2}, \frac{\beta_1 \beta_2 N + \gamma_1 \beta_2}{\beta_1 (\beta_1 - \beta_2 + \beta_3)})$ donc $(N, 0)$ et $(\frac{\beta_1 (2\beta_1 - 2\beta_2 + \beta_3)N + \gamma_1 (\beta_1 - \beta_2)}{\beta_1 (\beta_1 - \beta_2 + \beta_3)}, \frac{\beta_1 \beta_2 N + \gamma_1 \beta_2}{\beta_1 (\beta_1 - \beta_2 + \beta_3)})$

Conclusion : Nous avons 4 points d'équilibre : A(0,0), B(0, $\frac{\gamma_1 + \beta_3 N}{\beta_3}$), C(N,0), D $(\frac{\beta_1 (2\beta_1 - 2\beta_2 + \beta_3)N + \gamma_1 (\beta_1 - \beta_2)}{\beta_1 (\beta_1 - \beta_2 + \beta_3)}, \frac{\beta_1 \beta_2 N + \gamma_1 \beta_2}{\beta_1 (\beta_1 - \beta_2 + \beta_3)})$

2.2 Les conditions d'existence des points d'équilibre

Les valeurs de S et I doivent être non-négatives.

Pour le point A, il n'y a pas de condition particulière.

C'est aussi le cas pour le point C car $N > 0$.

- $\beta_3 > 0$:

Pour le point B, $\frac{\gamma_1 + \beta_3 N}{\beta_3} > 0$ est vérifiée. Cependant vérifions que $\frac{\gamma_1 + \beta_3 N}{\beta_3} \leq N$. On obtient $\frac{\gamma_1}{\beta_3} \leq 0$, or ceci ne peut être vérifié que si $\beta_3 < 0$. Il s'agit donc d'une contradiction. Le point B n'est pas cohérent.

Pour le point D :

$$- I > 0 \Leftrightarrow \frac{\beta_1 \beta_2 N + \gamma_1 \beta_2}{\beta_1 (\beta_1 - \beta_2 + \beta_3)} > 0 \Leftrightarrow \beta_1 (\beta_1 - \beta_2 + \beta_3) > 0 \Leftrightarrow \beta_1 - \beta_2 + \beta_3 > 0 \Leftrightarrow \beta_1 + \beta_3 > \beta_2$$

$$\begin{aligned} - S > 0 &\Leftrightarrow \frac{\beta_1 (2\beta_1 - 2\beta_2 + \beta_3) N + \gamma_1 (\beta_1 - \beta_2)}{\beta_1 (\beta_1 - \beta_2 + \beta_3)} > 0 \Leftrightarrow \beta_1 (2\beta_1 - 2\beta_2 + \beta_3) N + \gamma_1 (\beta_1 - \beta_2) > 0 \\ &\Leftrightarrow \gamma_1 > \frac{\beta_1 (2\beta_1 - 2\beta_2 + \beta_3) N}{\beta_2 - \beta_1} \end{aligned}$$

- De plus, d'après la première condition $\beta_1 + \beta_3 > \beta_2$, on a $\beta_2 < \beta_1$ donc $\frac{\beta_1 (2\beta_1 - 2\beta_2 + \beta_3) N}{\beta_2 - \beta_1} > 0$. La positivité de tous les paramètres est vérifiée.

Vérifions maintenant que $R \geq 0$, c'est-à-dire $S + I \leq N$. On obtient alors :

$$\frac{\beta_1 (2\beta_1 - 2\beta_2 + \beta_3) N + \gamma_1 (\beta_1 - \beta_2) + \beta_1 \beta_2 N + \gamma_1 \beta_2}{\beta_1 (\beta_1 - \beta_2 + \beta_3)} \leq N \Leftrightarrow (2\beta_1 - \beta_2 + \beta_3) N + \gamma_1 \leq (\beta_1 - \beta_2 + \beta_3) N$$

$$\Leftrightarrow \beta_1 < -\gamma_1$$

Or, $\beta_1 > 0$ et $\gamma_1 > 0$, on a donc ici une contradiction, donc le point d'équilibre n'est pas cohérent.

- $\beta_3 < 0$:

Pour le point B, vérifions que : $\frac{\gamma_1 + \beta_3 N}{\beta_3} \geq 0 \Leftrightarrow \gamma_1 + \beta_3 N \leq 0 \Leftrightarrow \gamma_1 \leq -\beta_3 N$

Vérifions également que $\frac{\gamma_1 + \beta_3 N}{\beta_3} \leq N \Leftrightarrow \frac{\gamma_1}{\beta_3} + N \leq N \Leftrightarrow \frac{\gamma_1}{\beta_3} \leq 0$. Or ceci est vrai puisque $\gamma_1 > 0$ et $\beta_3 < 0$.

Donc, dans ce cas, le point B est cohérent biologiquement si $\gamma_1 \leq -\beta_3 N$

Pour le point D :

- $I > 0 \Leftrightarrow \frac{\beta_1 \beta_2 N + \gamma_1 \beta_2}{\beta_1 (\beta_1 - \beta_2 - |\beta_3|)} > 0 \Rightarrow \beta_1 - \beta_2 - |\beta_3| > 0 \Leftrightarrow \beta_1 > \beta_2 + |\beta_3|$ Nous obtenons donc une première condition.
 - $S > 0 \Leftrightarrow \frac{\beta_1 (2\beta_1 - 2\beta_2 - |\beta_3|) N + \gamma_1 (\beta_1 - \beta_2)}{\beta_1 (\beta_1 - \beta_2 - |\beta_3|)} > 0$. Or d'après la condition sur I, le dénominateur est positif, il faut donc que $\beta_1 (2\beta_1 - 2\beta_2 - |\beta_3|) N + \gamma_1 (\beta_1 - \beta_2) > 0$.
- Or, on a $\beta_1 (2\beta_1 - 2\beta_2 - |\beta_3|) > 0$ puisque d'après la condition sur I $\beta_1 > \beta_2 + |\beta_3|$ donc $2\beta_1 > 2\beta_2 + 2|\beta_3|$ et a fortiori $2\beta_1 > 2\beta_2 + |\beta_3|$. Et de plus $\gamma_1 (\beta_1 - \beta_2) > 0$ est vérifié puisque $\gamma_1 > 0$ et $\beta_1 > \beta_2 + |\beta_3|$ donc a fortiori $\beta_1 > \beta_2$.
- Vérifions $R \geq 0$: $S + I \leq N \Leftrightarrow \beta_1 < -\gamma_1$. Ce qui n'est toujours pas vérifié, le point d'équilibre n'est donc pas cohérent.

- $\beta_3 = 0$: Dans ce cas l'équilibre B n'existe pas.

L'équilibre D n'est toujours pas cohérent car la condition $S + I \leq N \Leftrightarrow \beta_1 < -\gamma_1$ n'est toujours pas vérifiée.

Conclusion : Nous gardons 3 points d'équilibre : A(0,0), B(0, $\frac{\gamma_1 + \beta_3 N}{\beta_3}$) quand $\beta_3 < 0$ et $\gamma_1 \leq -\beta_3 N$, C(N,0).

2.3 La stabilité des points d'équilibre

Tout d'abord, nous calculons la matrice Jacobienne du système :

$$J = \begin{bmatrix} 2\beta_2 S + (\beta_2 - \beta_1)I - \beta_2 N & (\beta_2 - \beta_1)S \\ (\beta_1 + \beta_3)I & (\beta_1 + \beta_3)S + 2\beta_3 I - \beta_3 N - \gamma_1 \end{bmatrix}$$

On perturbe les équilibres :

$$\begin{pmatrix} S \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_0 \\ I_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_p \\ I_p \end{pmatrix}$$

Le système linéarisé s'écrit : $\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} S_p \\ I_p \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} S_p \\ I_p \end{pmatrix} + D\Delta \begin{pmatrix} S_p \\ I_p \end{pmatrix}$ où $D = \begin{pmatrix} d_S & 0 \\ 0 & d_I \end{pmatrix}$

On choisit la perturbation initiale sous la forme :

$\begin{pmatrix} S_p \\ I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} \omega_k(x)$ avec $\omega_k(x)$ une fonction propre de Laplacien associée aux conditions Neumann

homogène avec $\omega_k(x) = \cos(\frac{k\pi}{L}x)$ et $\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$ ($k \in N$). Pour simplifier l'écriture, on note $K = \frac{k\pi}{L}$ donc $\lambda_k = -K^2$.

Par la méthode de séparation des variables, on remplace $\begin{pmatrix} S_p \\ I_p \end{pmatrix}$ par $\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} \omega_k(x)$, ceci donne :

$$\begin{pmatrix} S_p \\ I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} \omega_k(x) = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} e^{(J+\lambda_k D)t} \omega_k(x) \quad (k \in N)$$

On note $M = J + \lambda_k D$

- Point A(0,0) :

$$J_A = \begin{bmatrix} -\beta_2 N & 0 \\ 0 & -\beta_3 N - \gamma_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(J_A) = \beta_2 N (\beta_3 N + \gamma_1) \text{ et } \text{tr}(J_A) = -N(\beta_2 + \beta_3) - \gamma_1$$

En considérant qu'il n'y a pas de diffusion :

- $\beta_3 > 0$: $\det(J_A) > 0$ et $\text{tr}(J_A) < 0$

Donc A(0,0) est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

- $\beta_3 < 0$: Si $\beta_3 N + \gamma_1 < 0$, condition d'existence du point B alors $\det(J_A) < 0$. A(0,0) est un point selle donc instable dans ce cas. Si $\beta_3 N + \gamma_1 > 0$ alors $\det(J_A) > 0$. De plus $\text{tr}(J_A) = -N\beta_2 - (N\beta_3 + \gamma_1) < 0$. Donc le point A est asymptotiquement stable. Si $\beta_3 N + \gamma_1 = 0$ alors $\det(J_A) = 0$ et $\text{tr}(J_A) = -N\beta_2 < 0$, donc la linéarisation prévoit une vallée.

Système avec la diffusion : $M_A = \begin{bmatrix} -\beta_2 N + \lambda_k d_S & 0 \\ 0 & -\beta_3 N - \gamma_1 + \lambda_k d_I \end{bmatrix}$

Cette matrice ne satisfait pas les règles de signe de Turing, condition nécessaire (mais non suffisante) pour qu'il y ait émergence de motifs de Turing donc il ne peut y en avoir.

- Point B($0, \frac{\gamma_1 + \beta_3 N}{\beta_3}$) : $J_B = \begin{bmatrix} (\beta_2 - \beta_1)I_B - \beta_2 N & 0 \\ (\beta_1 + \beta_3)I_B & 2\beta_3 I_B - \beta_3 N - \gamma_1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \det(J_B) = [(\beta_2 - \beta_1)I_B - \beta_2 N](2\beta_3 I_B - \beta_3 N - \gamma_1) = [(\beta_2 - \beta_1)I_B - \beta_2 N](\beta_3 N + \gamma_1)$$

$$\Rightarrow \det(J_B) = [(\beta_2 - \beta_1) \frac{\gamma_1 + \beta_3 N}{\beta_3} - \beta_2 N](\beta_3 N + \gamma_1) = \left[\frac{(\beta_2 - \beta_1)\gamma_1 - \beta_1\beta_3 N}{\beta_3} \right] (\beta_3 N + \gamma_1)$$

$$\text{et } \text{tr}(J_B) = (\beta_2 - \beta_1)I_B - \beta_2 N + 2\beta_3 I_B - \beta_3 N - \gamma_1 = (\beta_3 - \beta_1)N + \frac{(\beta_2 - \beta_1 + \beta_3)\gamma_1}{\beta_3}$$

En considérant qu'il n'y a pas de diffusion :

- $\beta_3 > 0$: Le point B n'est pas cohérent

- $\beta_3 < 0$: à ce moment, le point B est cohérent biologiquement si $\gamma_1 < -\beta_3 N$
 Si $\det(J_B) > 0 \Leftrightarrow (\beta_2 - \beta_1)\gamma_1 - \beta_1\beta_3 N > 0 \Leftrightarrow \beta_2\gamma_1 - \beta_1(\gamma_1 + \beta_3 N) > 0$. Or $\gamma_1 + \beta_3 N \Leftrightarrow \gamma_1 - |\beta_3|N$ est négatif d'après la condition pour l'existence biologique de l'équilibre donc on obtient la condition $\beta_1 > \frac{\beta_2\gamma_1}{\gamma_1 + \beta_3 N}$ qui est toujours vrai car $\beta_1 > 0$ et que l'autre membre est négatif. Alors $\text{tr}(J_B) = \frac{(\beta_3 - \beta_1)(N\beta_3 + \gamma_1) + \beta_2\gamma_1}{\beta_3} < 0$ avec un numérateur positif et un dénominateur négatif. Donc, le point B est asymptotiquement stable.

Système avec la diffusion : $M_B = \begin{bmatrix} (\beta_2 - \beta_1)I_B - \beta_2 N + \lambda_k d_S & 0 \\ (\beta_1 + \beta_3)I_B & 2\beta_3 I_B - \beta_3 N - \gamma_1 + \lambda_k d_I \end{bmatrix}$

Cette matrice ne satisfait pas les règles de signe de Turing donc il n'y a pas d'émergence de motifs de Turing.

- Point C(N,0) :

En considérant qu'il n'y a pas de diffusion :

$$J_C = \begin{bmatrix} \beta_2 N & (\beta_2 - \beta_1) \\ 0 & \beta_1 N - \gamma_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(J_C) = \beta_2 N(\beta_1 N - \gamma_1) \text{ et } \text{tr}(J_C) = (\beta_2 + \beta_1)N - \gamma_1$$

Vérifions si l'équilibre C peut être stable :

$$\det(J_C) > 0 \Rightarrow \beta_2 N(\beta_1 N - \gamma_1) > 0 \Rightarrow \beta_1 N - \gamma_1 > 0 \text{ (car } \beta_2 > 0\text{).}$$

Donc, nous obtenons la condition : $\gamma_1 < \beta_1 N$.

$$\text{tr}(J_C) = (\beta_2 + \beta_1)N - \gamma_1 > 0 \text{ car } \beta_2 > 0 \text{ et } \beta_1 N > \gamma_1$$

Donc le point C n'est pas un point d'équilibre stable.

- Si $\gamma_1 > \beta_1 N$ alors $\det(J_C) < 0$, alors le point C est un point selle
- Si $\gamma_1 < \beta_1 N$, alors $\det(J_C) > 0$ et $\text{tr}(J_C) > 0$ donc l'équilibre est instable
- Si $\gamma_1 = \beta_1 N$ alors $\det(J_C) = 0$ et $\text{tr}(J_C) = \beta_2 > 0$ donc l'équilibre semble aussi instable.
 Ainsi quelque soit les conditions, l'équilibre C est instable.

Système avec la diffusion :

$$M_C = \begin{bmatrix} \beta_2 N + \lambda_k d_S & (\beta_2 - \beta_1) \\ 0 & \beta_1 N - \gamma_1 + \lambda_k d_I \end{bmatrix}$$

Cette matrice ne satisfait pas les règles de signe de Turing donc il n'y a pas d'émergence de motifs de Turing.

Conclusion : Nous avons 2 points d'équilibre tant que $\gamma_1 > -\beta_3 N$ avec le point A stable et le point C instable. Lorsque $\gamma_1 \leq -\beta_3 N$, il y a 3 points d'équilibre : A instable, B stable et C instable. Nous ne pouvons pas obtenir d'émergence de motifs de Turing avec le système de 2 équations.

2.4 Les portraits de phases

Le portrait de phase représente l'évolution du système en fonction du nombre de personnes dans chaque compartiment (susceptibles, infectées et récupérées) au fil du temps. Il permet de visualiser comment le nombre de personnes dans chaque compartiment évolue et comment les différentes phases de l'épidémie se manifestent.

En examinant le portrait de phase, les points d'équilibre peuvent être identifiés en observant les endroits où les trajectoires convergent, divergent ou restent constantes. Les points d'équilibre stables peuvent indiquer des situations où l'épidémie tend à se stabiliser, tandis que les points d'équilibre instables peuvent indiquer des situations où de petites perturbations peuvent entraîner des changements significatifs dans le système.

On a visualisé les portraits de phases des points d'équilibres pour des conditions différentes (Figure 2 pour la première condition et la figure 3 pour la deuxième condition). Pour la première condition,

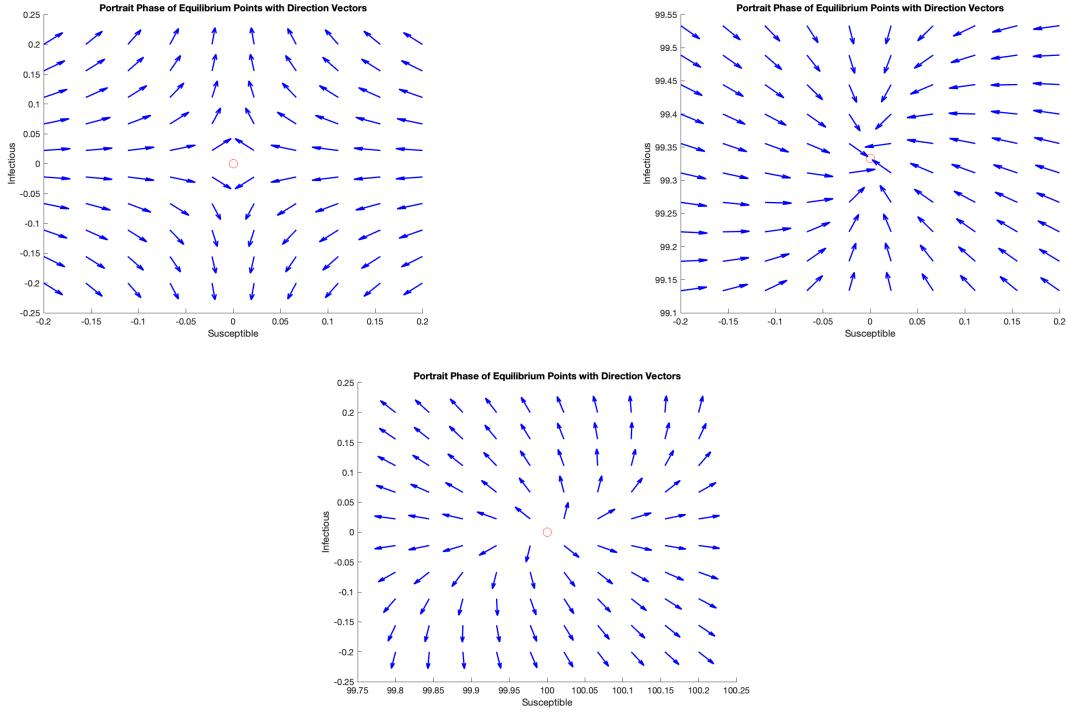


Figure 2: Représentation du portrait de phase pour la condition $\beta_3 < 0$ et $\gamma_1 \leq -\beta_3 N$: (en haut à gauche) point d'équilibre A, (en haut à droite) point d'équilibre B, (en bas) point d'équilibre C.

les trajectoires de la point d'équilibre A convergent dans un premier temps vers le point d'équilibre. Cependant, cette convergence apparente est rapidement suivie d'une divergence exponentielle, illustrant la nature instable du point selle, où de petites perturbations entraînent un éloignement rapide du système par rapport à l'équilibre. Donc le point d'équilibre A est un point instable.

La trajectoire du point d'équilibre B se manifeste par des trajectoires initiales convergentes vers le point d'équilibre. Cette convergence correspond à l'asymptotique stabilité et donc le système tend vers un état stable représenté par le point d'équilibre B.

On observe à peu près les mêmes trajectoires pour le point d'équilibre C. Mais les trajectoires s'éloignent du point d'équilibre. Ainsi, des petites perturbations initiales du système peuvent entraîner des éloignements exponentiels du point d'équilibre au lieu d'une convergence vers celui-ci. Donc ce point d'équilibre est instable.

Pour la deuxième condition, on a des trajectoires très différentes pour le point d'équilibre A que la première condition. Les trajectoires semblent converger vers le point central, cela suggère que le point d'équilibre est stable. Cela signifie que, peu importe où vous commencez dans le voisinage du point central, le système évoluera vers le point d'équilibre.

Pour la point d'équilibre C, on observe les mêmes trajectoires que la première condition. Donc quelque soit la condition, la stabilité du point d'équilibre C reste constante.

Ainsi, les portraits de phase observés sont encore avec nos résultats obtenus par calcul. L'équilibre A correspondant au fait que tous les individus deviennent instable si $\beta_3 < 0$ et $\gamma_1 \leq -\beta_3 N$ et est stable autrement. Sous cette même condition, l'équilibre B lui est stable pour lequel il n'y a plus de susceptibles dans la population mais la rumeur se maintient. Enfin l'équilibre C est un équilibre instable, tous les individus restent susceptibles tant qu'il n'y a pas d'infectés.

2.5 Onde de propagation

Pour notre étude, nous nous sommes principalement penché sur l'étude de pattern de Turing. Au vu de la propagation de la rumeur sous forme d'une onde, nous avons également par la suite essayé d'étudier le système simplifié à deux dimensions afin de calculer la vitesse de propagation. Malheureusement, nous n'avons pas obtenu de résultat concluant, dans le temps qu'il nous restait après l'étude de

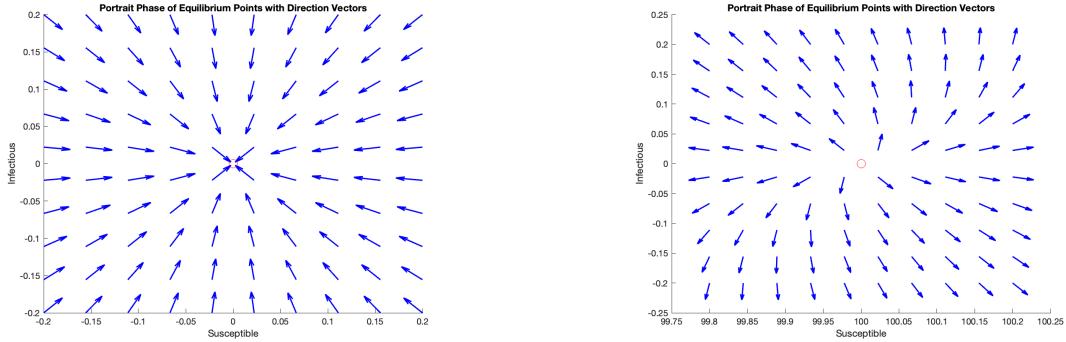


Figure 3: Représentation du portrait de phase de point d'équilibre A pour la condition $\beta_3 < 0$ et $\gamma_1 > -\beta_3 N$ ou $\beta_3 > 0$ (à gauche), Représentation du portrait de phase de point d'équilibre C pour la condition $\beta_3 > 0$ et $\gamma_1 > -\beta_3 N$ (à droite).

pattern. Il apparaît cependant intéressant de continuer sur cette voie.

2.6 Calcul du R0

Le calcul du nombre de reproduction de base \mathcal{R}_0 permet d'obtenir des informations concernant le potentiel de propagation de la rumeur dans la population. Si \mathcal{R}_0 est supérieur à 1, cela suggère que la rumeur peut se propager dans la population. Si \mathcal{R}_0 est inférieur à 1 cela indique que la rumeur a tendance à s'éteindre.

Calculons \mathcal{R}_0 . Si l'infection se propage, on a $\frac{dI}{dt} > 0$ donc dans ce cas :

$$\beta_1 S - \gamma_1 - \beta_3(N - S - I) > 0$$

$$(\beta_1 + \beta_3)S - \gamma_1 - \beta_3(N - I) > 0$$

$$\frac{S(\beta_1 + \beta_3)}{\beta_3(N - I) + \gamma_1} > 1$$

Au début de l'épidémie $S = S_0$ et $I = I_0$, on obtient alors le $\mathcal{R}_0 = \frac{S_0(\beta_1 + \beta_3)}{\gamma_1 + \beta_3(N - I_0)}$

Ainsi, lorsque $S_0(\beta_1 + \beta_3) > \gamma_1 + \beta_3(N - I_0)$, la rumeur aura tendance à se propager (\mathcal{R}_0 est supérieur à 1), dans le cas contraire, la rumeur aura tendance à disparaître. Ainsi, en prenant $S_0 = N$ et $I_0 = 1$, \mathcal{R}_0 représente le nombre de nouveaux individus contaminés par la rumeur par un individu qui la répand, donc $\mathcal{R}_0 = \frac{N(\beta_1 + \beta_3)}{\gamma_1 + \beta_3(N - 1)}$.

3 Simulations de notre modèle

Intéressons nous à présent à la simulation de notre modèle sur Matlab.

3.1 Etude de l'impact des différents paramètres

Pour ces simulations, nous choisissons comme valeurs des paramètres non variables : $\beta_1 = 0.5$ avec $\beta'_1 = 0.5$, $\alpha = 1$ et $\nu = 1$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.03$, $\gamma_1 = 0.01$, $d_S = d_I = d_R = 0.1$.

- Variation de β_1 : Essayons d'abord de ne faire varier que le paramètre de ν représentant la crédibilité de la rumeur. Lorsque ν diminue, le pic de la propagation arrive plus tard et est moins intense (figure 4). Sur la figure 5, il apparaît que lorsque le paramètre ν est égale à 1,5 et 1 et avec nos paramètres que la rumeur se propage dans tous l'espace, ce qui n'est pas le cas lorsque $\nu = 0.5$. Si l'on interprète cela, lorsque la crédibilité de la rumeur est importante, elle se propage plus vite et son pic est plus haut. Par contre, lorsque la crédibilité de la rumeur est faible, celle si se répand moins dans l'espace et il n'y a plus vraiment de pic de propagation. En effet dans ce cas, la crédibilité étant trop faible peu de gens adhèrent à la rumeur et elle a du mal à se répandre.

- Variations de β_2 : Lorsque β_2 augmente l'intensité de la rumeur diminue. Avec les paramètres

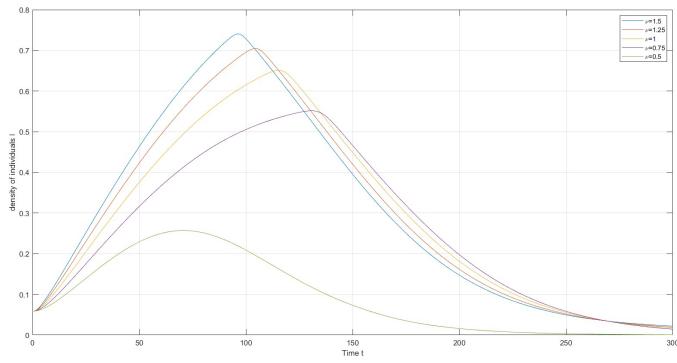


Figure 4: Représentation de la proportion totale de I dans l'espace x en fonction du temps pour différentes valeurs de ν

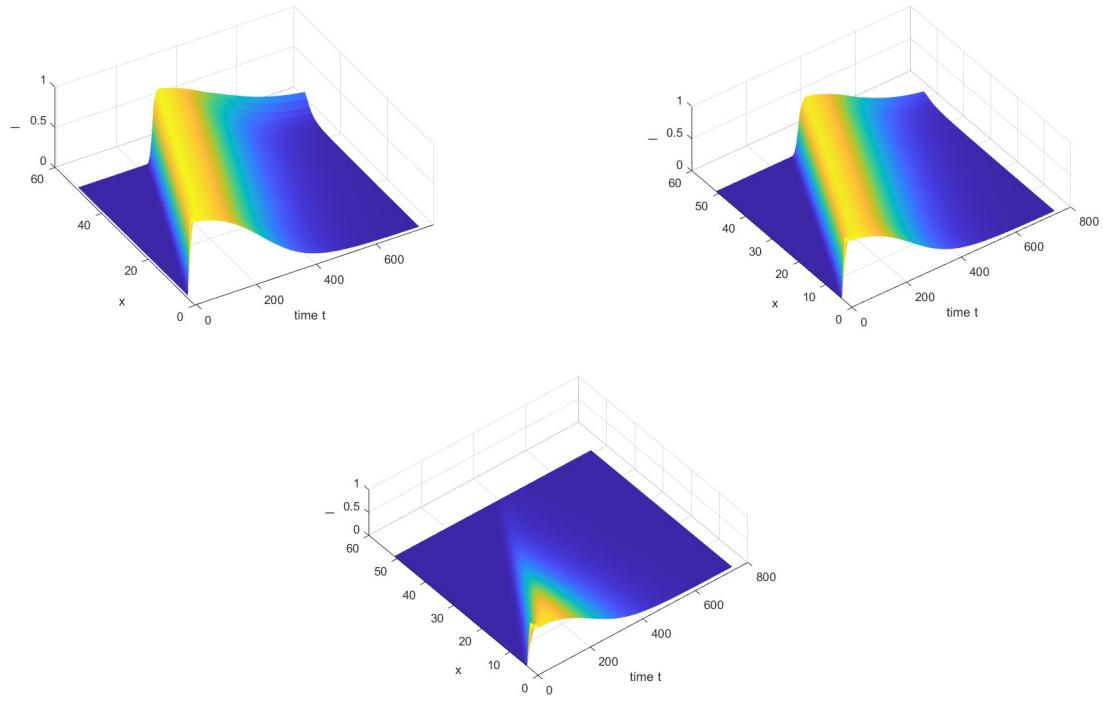


Figure 5: Représentation de la proportion de I en fonction de l'espace x et du temps t pour $\nu = 1.5$ (en haut à gauche), Représentation de la proportion de I en fonction de l'espace x et du temps t pour $\nu = 1$ (en haut à droite) Représentation de la proportion de I en fonction de l'espace x et du temps t pour $\nu = 0.5$ (en bas)

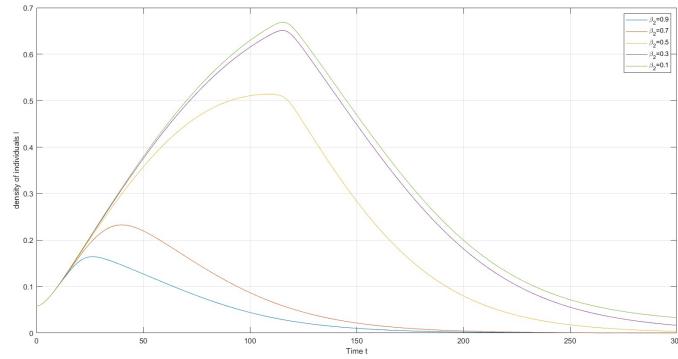


Figure 6: Représentation de la proportion totale de I dans l'espace x en fonction du temps pour différentes valeurs de β_2

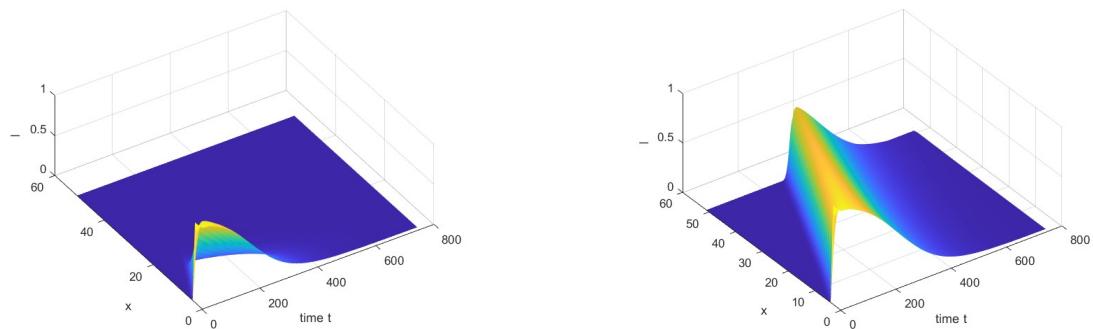


Figure 7: Représentation de la proportion de I en fonction de l'espace x et du temps t pour $\beta_2 = 0.9$ (à gauche) Représentation de la proportion de I en fonction de l'espace x et du temps t pour $\beta_2 = 0.5$ (à droite)



Figure 8: Représentation de la proportion totale de I dans l'espace x en fonction du temps pour différentes valeurs de β_3 positives (à droite) Représentation de la proportion totale de I dans l'espace x en fonction du temps pour différentes valeurs de β_3 non positives (à gauche)

choisies, lorsque β_2 est supérieur à 0.5, la rumeur se tarit rapidement, par exemple sur la figure 7, elle propage très peu dans l'espace mais perdure tout de même un certain temps à la zone initiale. Lorsque sa valeur est plus faible par contre, la vague de la rumeur diffuse dans tout l'espace. Ainsi, si l'interaction avec des individus R convainc rapidement les individus susceptibles alors la rumeur s'atténue. En regardant la figure 6, on note que pour les fortes valeurs de β_2 il y a une phase première phase de propagation parce qu'il y a peu de R au début, celle-ci s'arrête, lorsqu'il y a une proportion plus importante de R. Après cela, la rumeur diminue lentement mais cela dépend de la valeur des paramètres du passage de I vers R. Ainsi, si les individus R convainquent les S de manière importantes, même si à la base il n'y a pas de R, cela peut fortement limiter la propagation de la rumeur.

- Variations de β_3 : β_3 correspond au passage de I vers R ou de R vers I selon son signe. Lorsque β_3 est positif, plus celui-ci est faible, plus la rumeur se répand dans la population. On remarque tout de même 2 types de courbes sur la figure 8, lorsque β_3 est inférieur à 0.1, il y a une augmentation de la proportion de personne croyant en la rumeur, jusqu'à atteindre un pic avant la disparition de la rumeur. Quand β_3 est supérieur à 0.1, on obtient aussi une légère augmentation du nombre de personnes croyant en la rumeur, suivie rapidement d'une légère décroissance avant d'atteindre un plateau qui se maintient avant la disparition de la rumeur. Il est à noter que la chute de la propagation de la rumeur dans tous ces cas commence toujours au même moment. Cela doit correspondre au moment où le nombre de susceptibles s'annule. Ce moment est toujours le même, ce qui va varier c'est le nombre de susceptibles qui passe par la case I ou au contraire vont aller directement devenir R. Si on regarde dans l'espace 1D, figure 9, on remarque qu'il y a bien une vague de propagation dans l'espace dans tous les cas. Cependant la proportion de I varient selon la dynamique expliquée précédemment. Pour $\beta_3 = 0.5$, on peut aussi observé des oscillations sur le pic de l'onde de propagation. Donc, lors d'une interaction entre I et R, si les individus R auront tendance à faire adhérer les individus I, c'est-à-dire lorsque β_3 positif, dans ce cas la rumeur va se répandre dans l'espace. Cependant, si sa valeur est élevée, la proportion dans la population totale va rester à un plateau, il n'y aura pas "d'épidémie" de la rumeur, elle se propagera sans devenir trop dominante dans la population avant de s'éteindre.

Lorsque β_3 est négatif ou nul, figure 8, on remarque que dans tous les cas il y a une augmentation d'abord de la proportion d'individus croyant en la rumeur. Celle-ci se répand. Cela se voit également sur la figure 10 avec une propagation de la rumeur selon l'axe x. Puis si β_3 n'est pas trop faible (égale à 0 ou -0.01), la rumeur commence à disparaître lentement. En effet dans ce cas, une interaction entre les individus I et R entraîne globalement le passage de l'individus R vers I. Cependant dans le cas où ce passage est assez faible, le passage spontané d'individus I vers R car ils ne croient plus en la rumeur ou cesse de la répandre (par exemple par désintérêt) l'emportera sur le passage vers I d'individus R par interaction. Lorsque β_3 est plus faible (-0.5), la rumeur va atteindre un équilibre (l'équilibre B) après s'être répandue dans l'espace et va donc se maintenir. Sociologiquement, cela n'est pas préférable surtout si la rumeur peut avoir des conséquences problématiques.

- Variations de γ_1 :

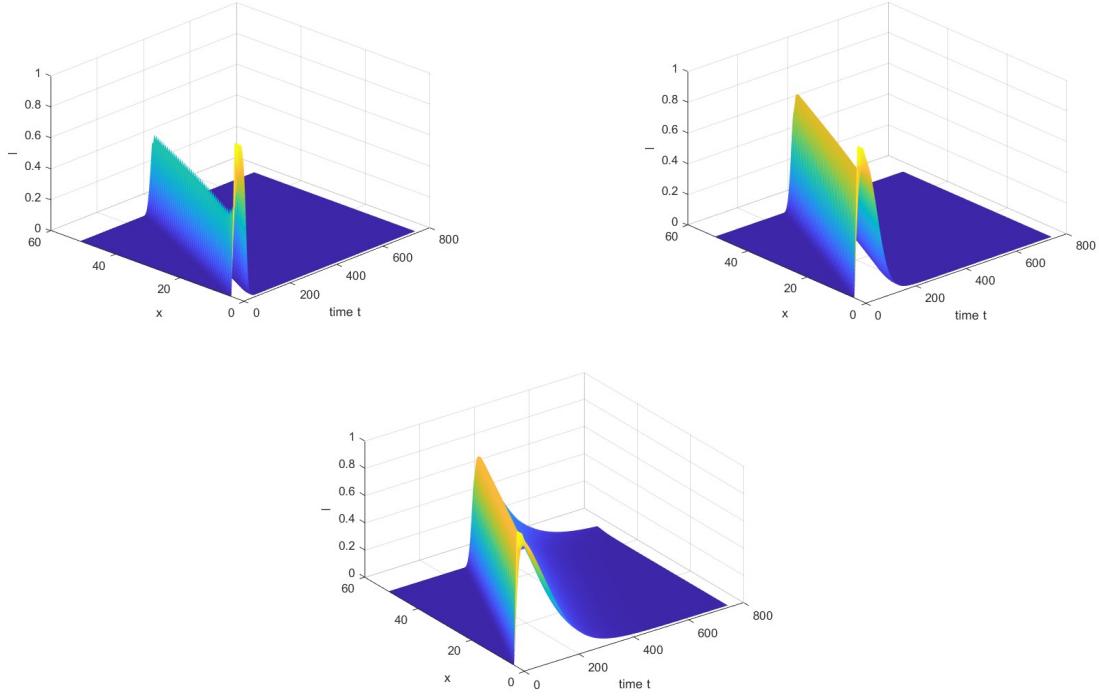


Figure 9: Représentation de la proportion de I en fonction de l'espace x et du temps t pour $\beta_3 = 0.5$ (en haut à gauche) Représentation de la proportion de I en fonction de l'espace x et du temps t pour $\beta_3 = 0.1$ (en haut à droite) Représentation de la proportion de I en fonction de l'espace x et du temps t pour $\beta_3 = 0.03$ (en bas)

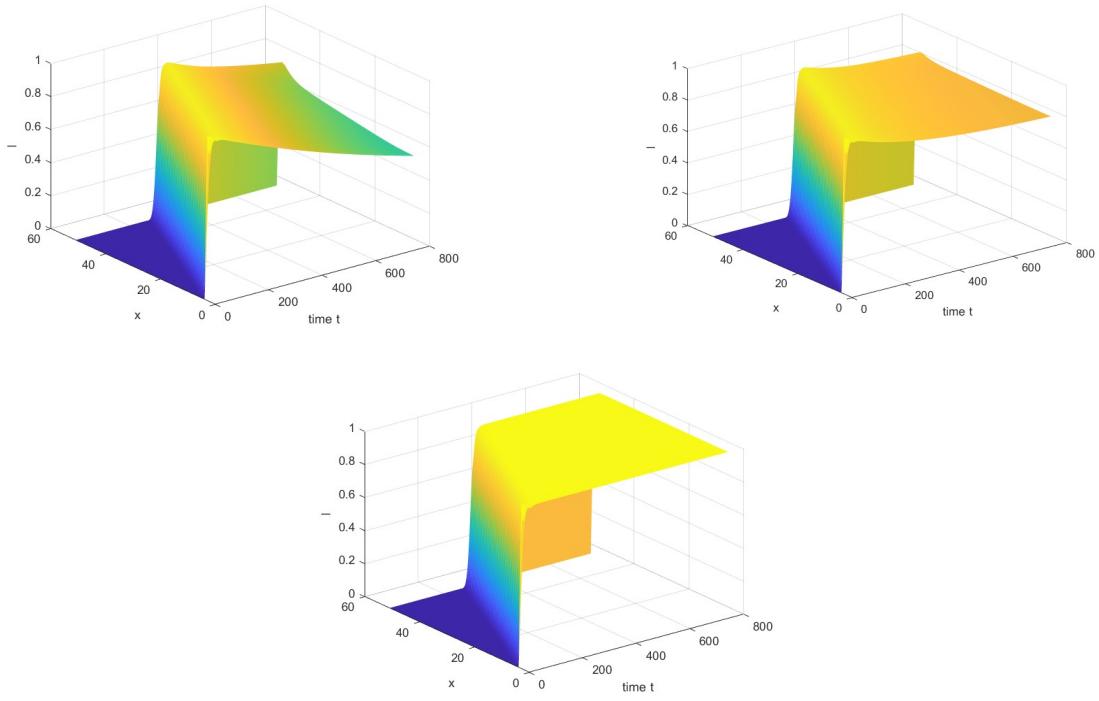


Figure 10: Représentation de la proportion de I en fonction de l'espace x et du temps t pour $\beta_3 = 0$ (en haut à gauche) Représentation de la proportion de I en fonction de l'espace x et du temps t pour $\beta_3 = -0.01$ (en haut à droite) Représentation de la proportion de I en fonction de l'espace x et du temps t pour $\beta_3 = -0.5$ (en bas)

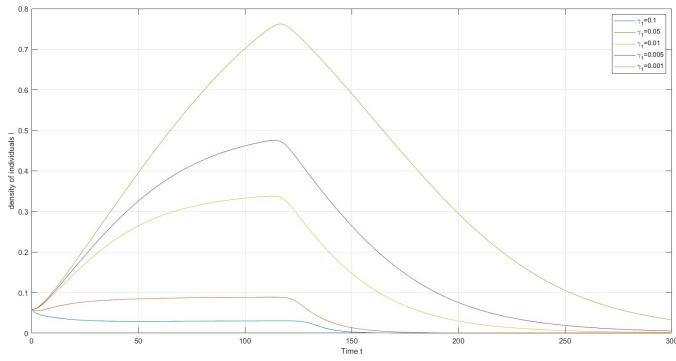


Figure 11: Représentation de la proportion totale de I dans l'espace x en fonction du temps pour différentes valeurs de γ_1

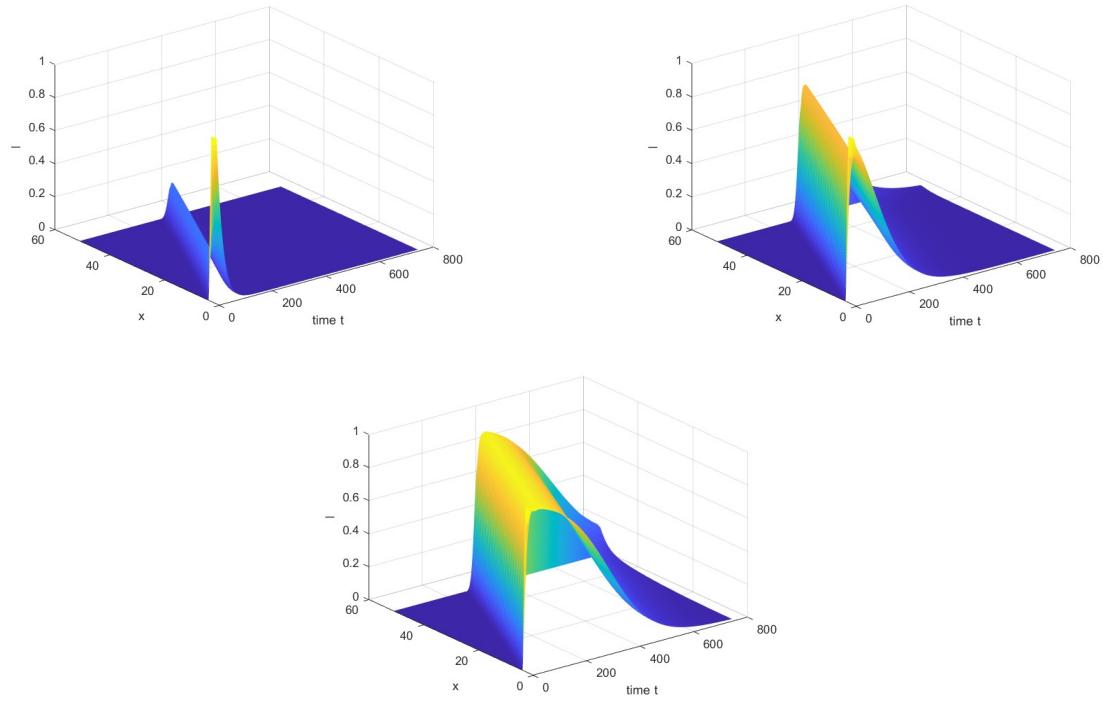


Figure 12: Représentation de la proportion de I en fonction de l'espace x et du temps t pour $\gamma_1 = 0.1$ (en haut à gauche) Représentation de la proportion de I en fonction de l'espace x et du temps t pour $\gamma_1 = 0.01$ (en haut à droite) Représentation de la proportion de I en fonction de l'espace x et du temps t pour $\gamma_1 = 0.001$ (en bas)

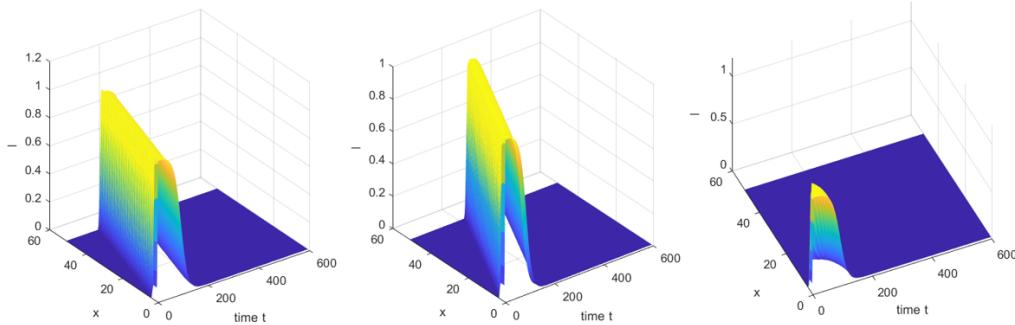


Figure 13: Représentation de la densité en individus I dans l'espace et le temps pour $d_I = 1$ (à gauche), $d_S = 1$ (au milieu) et $d_R = 1$ (à droite)

Pour rappel, γ_1 est le taux de passage d'un individu propagant I à un individu rétabli R sans l'interaction par conviction personnelle. Lorsque γ_1 diminue, la densité des individus I augmente significativement, ce que l'on peut observer dans la figure 12. On peut mieux observer cet effet grâce à la figure 14. Pour $\gamma_1 = 0.1$, nous ne voyons qu'un seul pic à l'état initial puis la densité maximale des I reste inférieure à 0.2. Ensuite, en diminuant cette valeur, nous constatons bien l'augmentation de la densité des I et l'effet de propagation. D'un point de vue sociologique, cela représente le fait que si les individus ne croient pas et ne répandent pas la rumeur assez longtemps alors celle-ci se propage mais avec un faible nombre de personnes y croyant.

- Variations des coefficients de diffusion :

Ce que l'on remarque avec la figure 13 est que pour d_S et d_I égale à 1 le pic de la rumeur atteint la même densité de I et se propage dans l'espace. Cependant, quand $d_I = 1$, la rumeur se propage plus vite (puisque I diffuse plus vite). Par contre, lorsque $d_R = 1$, la rumeur ne se propage pas dans l'espace car dès que les individus R sont présents ils bloquent la propagation en diffusant plus vite l'information que les I.

3.2 Modélisation 2D

Avant de procéder à une complexification du modèle, commençons par réaliser des simulations en 2D. En effet, il paraît intéressant de connaître le comportement dans un plan 2D de la propagation de la rumeur permettant par exemple de simuler l'expansion de celle-ci dans une ville. Nous avons alors choisi de créer un plan 2D de 10 par 10 représentant une ville de 10 km par 10 km. On choisit d'attribuer une densité de 50 individus par km^2 .

En conditions initiales, un foyer de la rumeur est présent au pixel du milieu avec une proportion de I de 1. Il n'y a aucun R initialement.

On observe alors sur la figure 14 que avec les paramètres que nous avons utilisé comme référence, il y a bien une propagation de la rumeur dans tous l'espace. Lorsque β_3 augmente, la surface dense en individus I diminue car les individus R sensibilisent les individus I rapidement (figure 15). Si ν et donc la crédibilité (et de même si on le faisait avec α) diminue, la rumeur se propage moins vite dans l'espace et aussi il y a une proportion moindre d'individus I au sein de la vague de la rumeur. Lorsque la crédibilité et la corrélation avec la vie des gens sont tous les deux plus faibles, alors il n'y a plus de propagation de la rumeur car elle n'est pas assez crédible ou intéressante.

Ces différentes simulations nous ont permis de mieux comprendre l'impact des différents paramètres et la dynamique de la propagation de la rumeur selon notre modèle. A présent, nous pouvons nous intéresser à différentes complexifications que nous pourrons faire sur notre modèle.

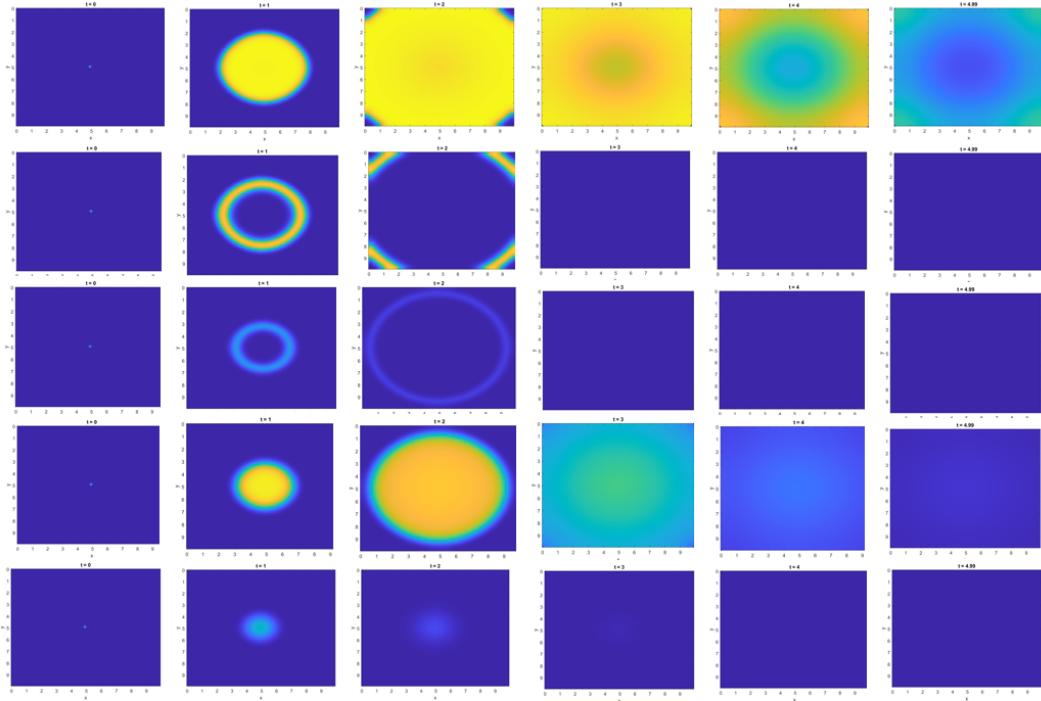


Figure 14: Représentation de la densité en individus I à différents temps t avec les paramètres suivant (respectivement de haut en bas) : **a.** les paramètres de références **b.** $\beta_3 = 0.5$ **c.** $\beta_3 = 0.5$ et $\nu = 0.5$ **d.** $\nu = 0.5$ **e.** $\nu = 0.5$ et $\alpha = 0.5$

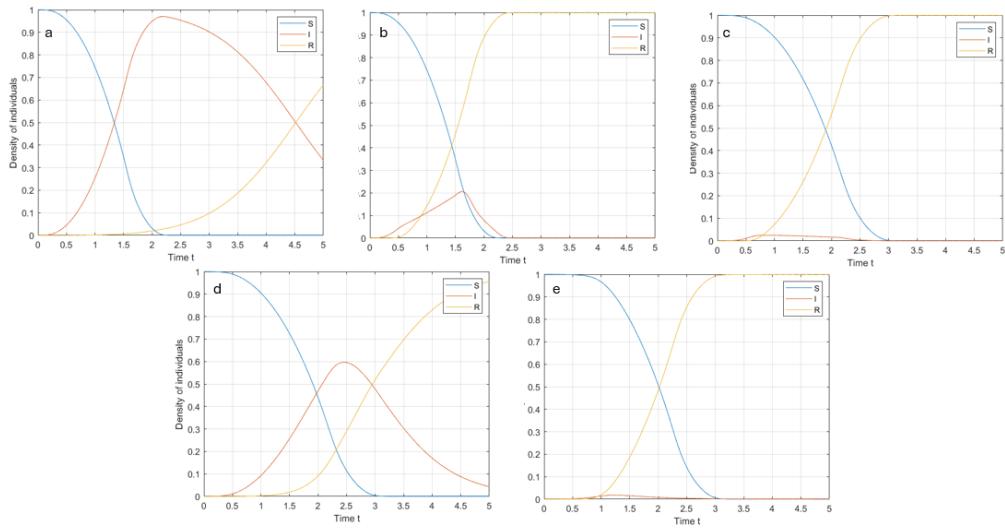


Figure 15: Représentation de la densité en individus S, I et R dans la population totale au cours du temps avec les paramètres suivants : **a.** les paramètres de références **b.** $\beta_3 = 0.5$ **c.** $\beta_3 = 0.5$ et $\nu = 0.5$ **d.** $\nu = 0.5$ **e.** $\nu = 0.5$ et $\alpha = 0.5$

4 Complexification du modèle et simulations

4.1 Contrôle par les autorités

Au vu des conséquences économiques, sociales voire sanitaires de la propagation des rumeurs, il paraît important d'en empêcher la propagation si celle-ci présente des risques. L'un des moyens qui apparaît pour limiter la rumeur est de la démentir au travers les médias par exemple. Dans notre modèle, nous considérons que le contrôle ne sera mis en place que lorsque la rumeur atteint un certain seuil I_c , à ce moment là les autorités ou les médias peuvent détecter la rumeur et décider d'intervenir. Lorsque ce seuil est atteint, un contrôle est mis en place correspondant à la fonction H . Pour cette fonction, nous nous sommes inspiré de certaines études déjà menées.^[3] Celle si vaut 0 si le seuil n'est pas dépassé. Elle comprend le facteur k qui va correspondre au taux de persuasion des autorités et de ξ , le taux de retard de l'intervention des autorités. De plus on définit, $k > 0$ et $\xi > 0$. On considère que le contrôle impacte à la fois les S et les I.

La définition de la fonction H est la suivante :

$$H(I) = \begin{cases} 0 & \text{si } I \leq I_c \\ \frac{kI}{1+\xi I} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le système est alors le suivant :

$$\frac{\partial S}{\partial t}(x, t) = -\beta_1 S(x, t)I(x, t) - \beta_2 S(x, t)R(x, t) - H(S) + d_S \Delta S(x, t)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t}(x, t) = \beta_1 S(x, t)I(x, t) - \gamma_1 I(x, t) - \beta_3 I(x, t)R(x, t) - H(I) + d_I \Delta I(x, t)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t}(x, t) = \gamma_1 I(x, t) + \beta_2 S(x, t)R(x, t) + \beta_3 I(x, t)R(x, t) + H(S) + H(I) + d_R \Delta R(x, t)$$

avec $t \geq 0$ et $x \in \Omega \subset R^n$, $n = 1$ ou 2

Pour faire les simulations, plaçons nous dans les cas où la rumeur se propage et nécessite donc une intervention.

D'abord, pour ces simulations, nous choisissons comme valeurs des paramètres non variables : $\beta_1 = 0.5$ avec $\beta'_1 = 0.5$, $\alpha = 1$ et $\nu = 1$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.03$, $\gamma_1 = 0.01$, $d_S = d_I = d_R = 0.1$.

- Impact du seuil I_c : dans ce cas, fixons $k = 0.2$ et $\xi = 1$ Trois seuils différents ont été testé : $I_c = \frac{1}{3}N$, $\frac{1}{4}N$ et $\frac{1}{10}N$. Il apparaît alors sur la figure 16 que plus le seuil est fixé bas plus vite la rumeur prendra fin. Dans les 3 cas, la rumeur cesse sa course dans l'espace, donc le contrôle

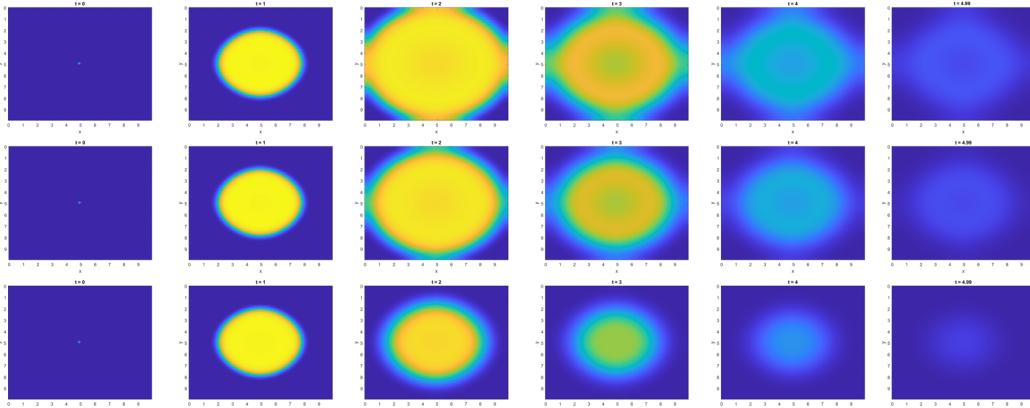


Figure 16: Représentation de la densité en individus I dans l'espace à différents temps avec $I_c = \frac{1}{3}N$ (ligne du haut), $\frac{1}{4}N$ (ligne du milieu) et $\frac{1}{10}N$ (ligne du bas)

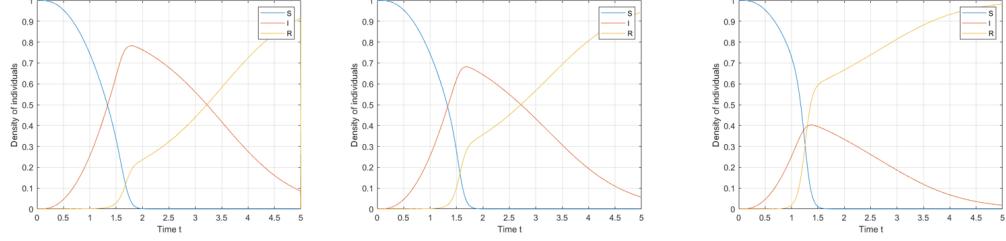


Figure 17: Représentation de la densité en individus S, I et R dans la population totale en fonction du temps avec $I_c = \frac{1}{3}N$ (à gauche), $\frac{1}{4}N$ (au milieu) et $\frac{1}{10}N$ (à droite)

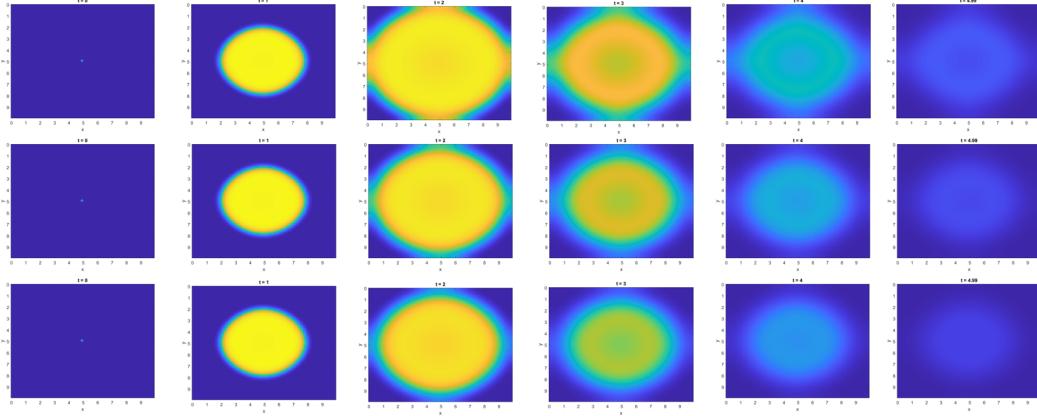


Figure 18: Représentation de la densité en individus I dans l'espace à différents temps avec $k = 0.05$ (ligne du haut), 0.2 (ligne du milieu) et 0.5 (ligne du bas)

remplit son rôle. Si l'on s'intéresse à la figure 17 on remarque que l'allure des courbes ne change pas. Le pic de la rumeur quant à lui diminue avec le seuil et que dans cette simulation, c'est avec un seuil de 10% que le pic n'atteind pas les 50% d'individus I.

- Impact des paramètres k et ξ , dans ce cas on fixera $I_c = 25\%$

Concernant les variations des paramètres ξ et k , on observe des dynamiques similaires si l'on augmente k ou diminue ξ et inversement (figures ???. Une augmentation de k ou une diminution de ξ entraîne une diminution plus rapide de la rumeur est donc une meilleure prise en charge.

Nous avons également simuler notre modèle avec des valeurs de $\beta_3 \leq 0$ (figures ??).

Ainsi, lorsque $\beta_3 = 0$, et donc qu'il n'y a pas de passage par interaction entre I et R, alors le contrôle permet bien de stopper la progression de la rumeur dans l'espace mais elle prend plus de temps pour s'évanouir. Lorsque que β_2 est négatif, le contrôle vient grandement ralentir la propagation de la rumeur mais avec les paramètres utilisés, elle ne peut la faire s'éteindre. On remarque donc qu'avec notre modèle, la force de la sensibilisation est grandement dépendante du bouche à oreille opéré par les gens sensibilisés. SI jamais les I s'avèrent encore plus convaincants et actifs alors la sensibilisation doit essayer de compenser cela un maximum pour maintenir le nombre d'individus I le plus bas possible.

4.2 Effet Allee

Nous nous intéressons à mettre plus de complexification dans le modèle en introduisant l'effet Allee. L'effet Allee est un phénomène densité-dépendant qui peut être également traduit par une corrélation positive entre la densité et le taux de croissance de la population [1]. Cette effet est généralement utilisé pour modéliser des croissances de populations avec un terme de charge du milieu et un seuil Allee correspondant au nombre d'individus (inférieur à la capacité de charge) à partir duquel la croissance

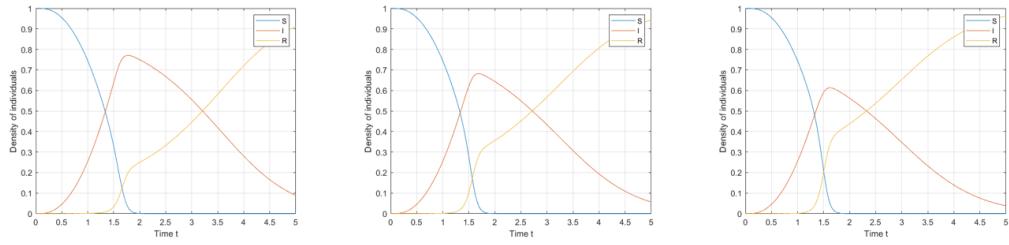


Figure 19: Représentation de la densité en individus S, I et R dans la population totale en fonction du temps avec $k = 5$ (à gauche), 1 (au milieu) et 0.5 (à droite)

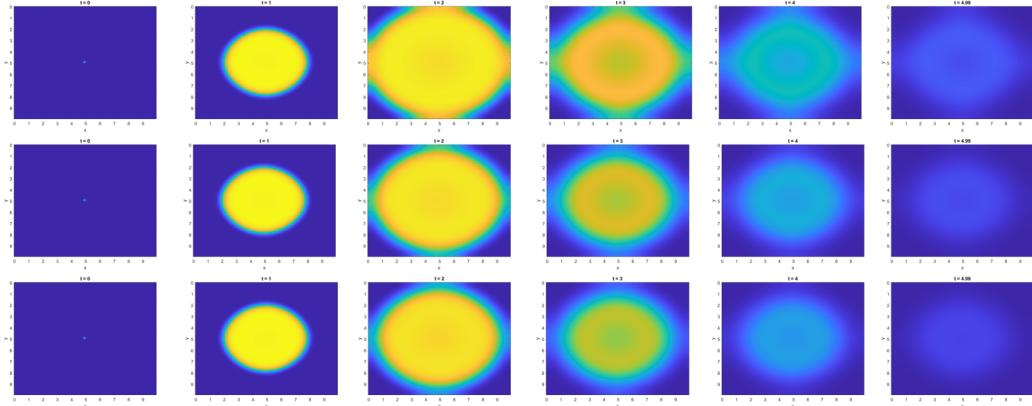


Figure 20: Représentation de la densité en individus I dans l'espace à différents temps avec $ksi = 5$ (ligne du haut), 1 (ligne du milieu) et 0.5 (ligne du bas)

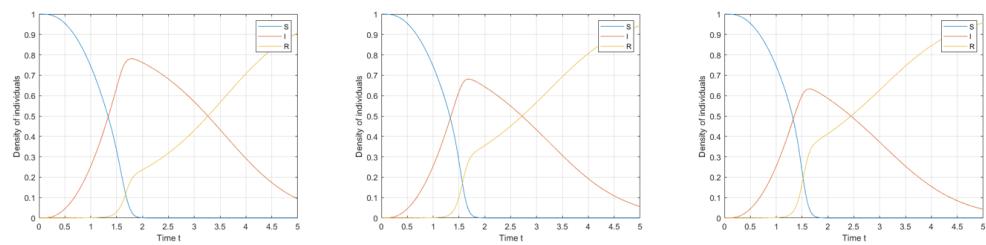


Figure 21: Représentation de la densité en individus S, I et R dans la population totale en fonction du temps avec $ksi = 0.05$ (à gauche), 0.2 (au milieu) et 0.5 (à droite)

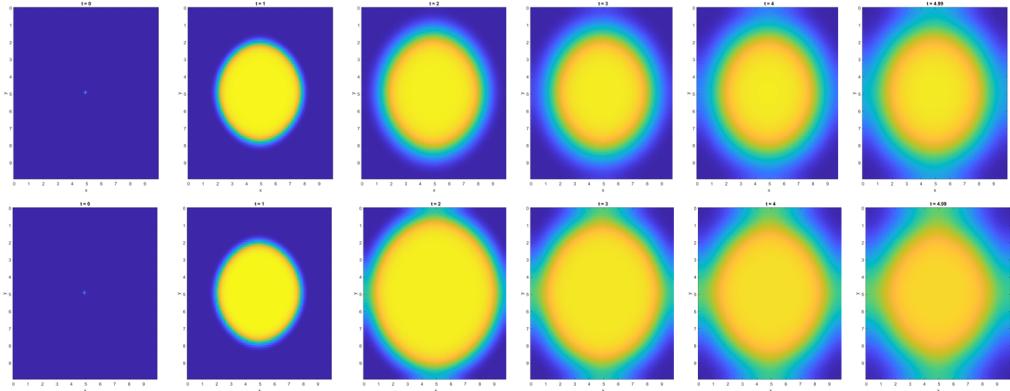


Figure 22: Représentation de la densité en individus I dans l'espace à différents temps avec en haut $I_c = 10\%$ et $\beta_3 = -0.01$ et en bas $I_c = 25\%$ et $\beta_3 = 0$

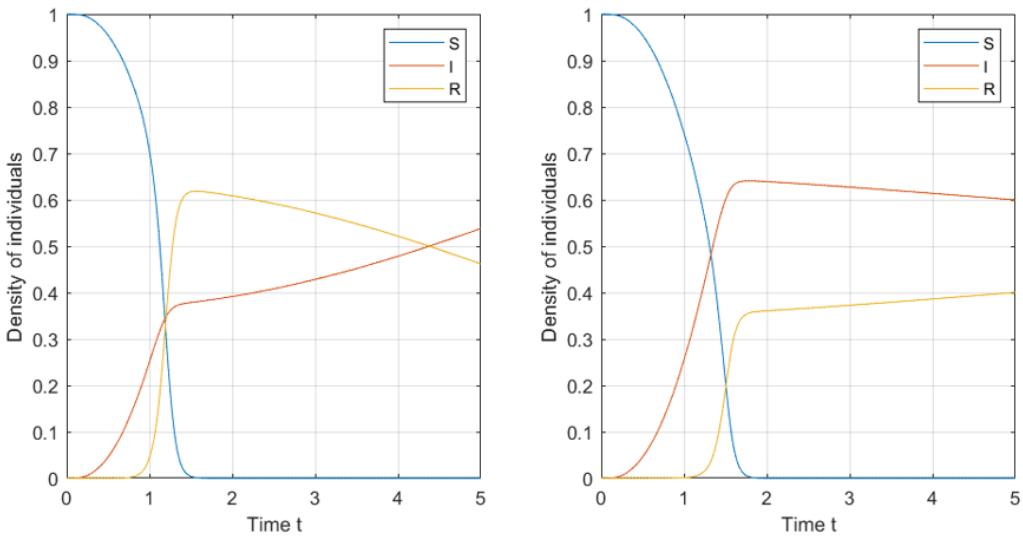


Figure 23: Représentation de la densité en individus S, I et R dans la population totale en fonction du temps avec à gauche $I_c = 10\%$ et $\beta_3 = -0.01$ et à droite $I_c = 25\%$ et $\beta_3 = 0$

Paramètre	Définition
A	le seuil d'Allee
K	capacité de charge intrinsèque de la population

Table 2: Tableau de définition de nouveaux paramètres du modèle.

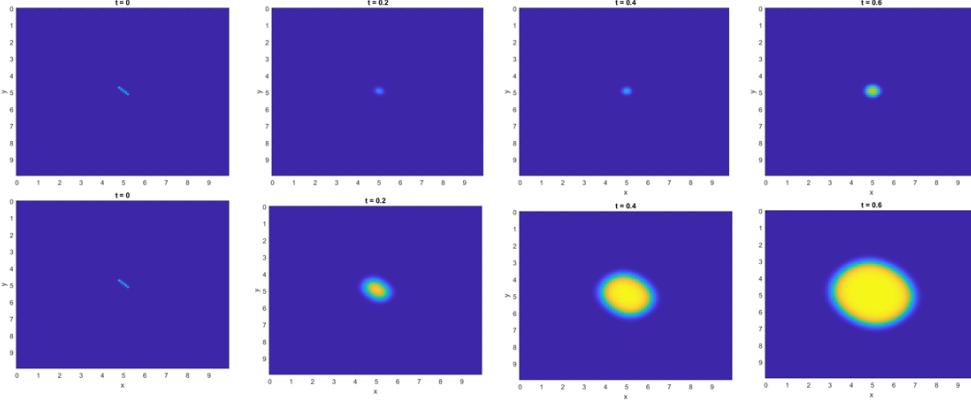


Figure 24: Représentation de la densité en individus I en haut avec le terme Allee et en dessous sans

de la population augmente d'avantage. Nous introduisons ces paramètres dans le tableau 2. Ici, le but est d'utiliser les caractéristiques de l'effet Allee mais non pas pour modéliser la dynamique de croissance d'une population mais pour la propagation de la rumeur. On peut appartenir le seuil d'Allee comme un nombre d'individus I à partir duquel la rumeur commence à se répandre. En effet, on souhaite modéliser le fait que lorsqu'il y a peu d'individus qui croient et répandent la rumeur, la rumeur se répand difficilement, aussi quand assez de gens sont convaincus de la rumeur, celle-ci devient plus crédible par une forme d'effet de groupe et la population adhère à l'idée qui semble aussi prendre de l'importance. La capacité de charge reflète une saturation du passage de I vers S.

Le système d'équations mathématiques avec l'écriture simplifiée s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= \beta_1 SI \left(1 - \frac{I}{K}\right) \left(\frac{I}{A} - 1\right) - \beta_2 SR + d_S \Delta S \\ \frac{\partial I}{\partial t} &= \beta_1 SI \left(1 - \frac{I}{K}\right) \left(\frac{I}{A} - 1\right) - \gamma_1 I - \beta_3 IR + d_I \Delta I \\ \frac{\partial R}{\partial t} &= \gamma_1 I + \beta_2 SR + \beta_3 IR + d_R \Delta R \end{aligned}$$

avec $t \geq 0$ et $x \in \Omega \subset R^n$

Ainsi, le terme de l'effet d'Allee $\beta_1 SI \left(1 - \frac{I}{K}\right) \left(\frac{I}{A} - 1\right)$ est comprise dans le terme d'interaction entre les personnes susceptibles et les personnes infectées de la rumeur, ce qui induit une explosion de la propagation de la rumeur quand le seuil est dépassé avant d'atteindre la saturation. Nous avons réalisé la modélisation du modèle avec et sans effet Allee avec les paramètres suivants : $\beta_1 = 0.5$, $\beta_2 = 0.1$, $\beta_3 = 0.03$, $\gamma_1 = 0.01$, et dans le cas de l'effet Allee, $K = \frac{4}{5}N$ et $A = 0.12N$

Les résultats sont présentés sur les figures ???. Il apparaît bien que sans l'effet Allee, la rumeur explose directement tandis que avec, il faut attendre un temps plus important avant que la rumeur commence sa propagation. Il y a une phase un peu latente au début et la rumeur commence à se propager lorsque la densité en individus I est assez importante. Cette dynamique peut paraître un peu plus réaliste, un rumeur se propage rarement brusquement dès le départ.

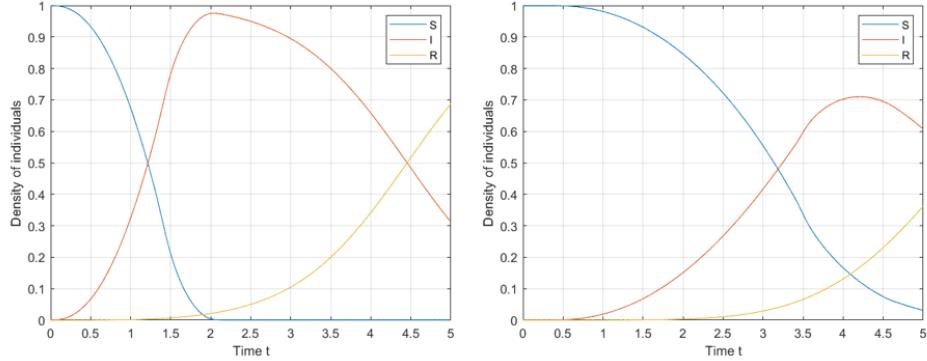


Figure 25: Représentation de la densité en individus S, I et R dans la population totale et dans le temps à gauche sans le terme Allee et à droite avec

4.3 Phénomène d'oubolie : modèle SIRS

Une autre phénomène que nous n'avons pas considérés en première approche, mais qui peut être pris en compte dans certains cas est le phénomène d'oubolie. Dans ce cas, les individus qui sont rétablis de la rumeur peuvent oublier l'existence même de la rumeur et ainsi redevenir susceptible. Dans ce cas, il s'agit d'un modèle SIRS. On peut alors introduire le paramètre $\omega (> 0)$ dans notre modèle simple, qui correspondrait à l'inverse du temps nécessaire pour oublier la rumeur lorsque l'on cesse d'y croire ou de la répandre.

Le modèle deviendrait alors :

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial t}(x, t) &= -\beta_1 S(x, t)I(x, t) - \beta_2 S(x, t)R(x, t) + \omega R + d_S \Delta S(x, t) \\ \frac{\partial I}{\partial t}(x, t) &= \beta_1 S(x, t)I(x, t) - \gamma_1 I(x, t) - \beta_3 I(x, t)R(x, t) + d_I \Delta I(x, t) \\ \frac{\partial R}{\partial t}(x, t) &= \gamma_1 I(x, t) + \beta_2 S(x, t)R(x, t) + \beta_3 I(x, t)R(x, t) - \omega R + d_R \Delta R(x, t)\end{aligned}$$

avec $t \geq 0$ et $x \in \Omega \subset R^n$, $n = 1$ ou 2

5 Contextualisation : une rumeur dans la métropole lyonnaise

Pour essayer d'illustrer la propagation de la rumeur dans un cadre plus concret, nous avons choisi d'essayer de modéliser un rumeur se propageant à partir de La Doua à travers la métropole de Lyon.

Pour cela, nous avons décidé de prendre en compte la densité de population qui pourrait potentiellement impacter la dynamique de la propagation. Ainsi, une carte de la densité de population de la métropole lyonnaise a été récupérée. A partir de celle-ci, nous avons construit une matrice représentant la densité de population pour chaque pixel de la carte. Globalement, cette carte correspondra à la matrice S des densités de population initiale (figure 26).

- Exemple de rumeur 1 : "Thao, Théo et Gulsah ont fait beaucoup d'erreurs dans leur projet, c'est inadmissible !" Pour modéliser cette rumeur, nous pouvons commencer par estimer la valeur des paramètres, de manière un peu subjective :
 - $\nu = 2$, en effet il s'agit quand même d'un cas de figure probable
 - $\alpha = 0.05$, alpha doit être faible car il s'agit d'une rumeur qui n'impacte pas beaucoup la population (sauf notre groupe)

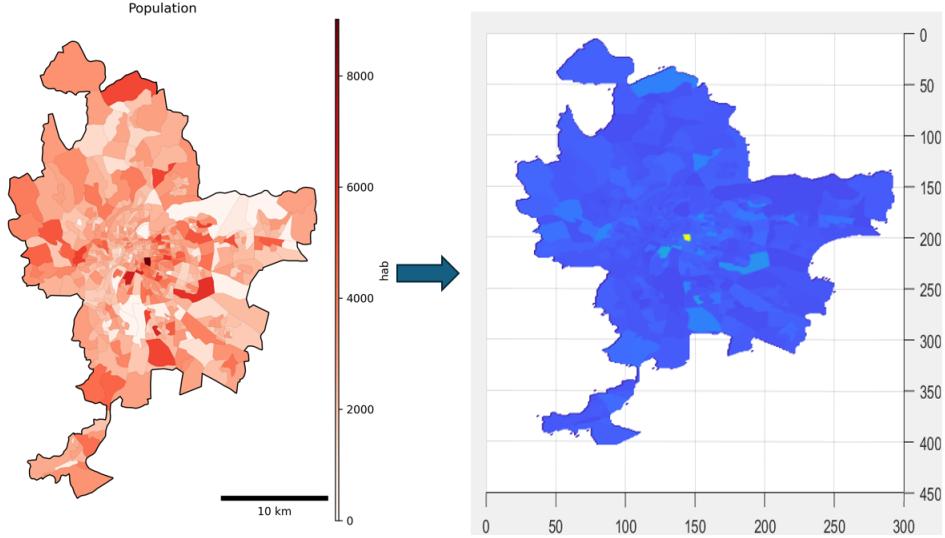


Figure 26: A gauche : la carte de la densité de population dans la métropole de Lyon, a droite : la matrice obtenue à partir de la carte

- $\beta'_1 = 0.5$
- $\beta_2 = 0.5$
- $\beta_3 = 0.3$
- $\gamma_1 = 0.5$, la rumeur, on espère, est assez vite inintéressante et un individu arrête de la répandre après 2 jours

On peut considérer en condition initiale que tous les élèves de 3BS répandent cette rumeur soit 40 personnes à peu près.

Ainsi, avec cette rumeur, on peut voir dans la figure 27 qu'elle ne se propage pas voir s'évanouie après moins d'une heure. Nous sommes donc soulagés.

- Exemple de rumeur 2 : "Un virus dangereux se serait échappé des laboratoires de l'INSA"
 - $\nu = 0.6$, selon nous cette rumeur n'a pas une bonne crédibilité,
 - $\alpha = 1$, alpha doit être élevé car il s'agit d'une rumeur dont les conséquences concernent toute la population,
 - $\beta'_1 = 0.5$,
 - $\beta_2 = 0.2$,
 - $\beta_3 = 0.005$, une interaction entre I et R entraîne légèrement les individus I à ne plus croire en la rumeur. Nous considérons qu'un individu n'est pas facilement convaincu de la non véracité de la rumeur.
 - $\gamma_1 = \frac{1}{15}$, le temps pour qu'une personne arrête de répandre la rumeur ou cesse d'y croire est estimé à 15 jours

En condition initiale, nous choisirons que 40 individus propagent la rumeur et 10 individus sont au courant que la rumeur est fausse.

On remarque alors sur la figure 28 que la rumeur se répand dans la métropole et une importante part de la population croit en la rumeur après un jour et demi. La rumeur continue de se répandre mais la vérité éclate vers l'origine de la rumeur et se répand également. Ainsi cette rumeur continuerait à se propager hors de la métropole. De plus les conséquences de la rumeur pourrait être grave et entraîner une forme de panique. Nous allons essayer de voir l'impact d'une sensibilisation dans cette simulation (figure 29).

Nous avons alors choisi les paramètres suivants : $I_c = 25\%$, $\xi = 1$ et $k = 0.5$

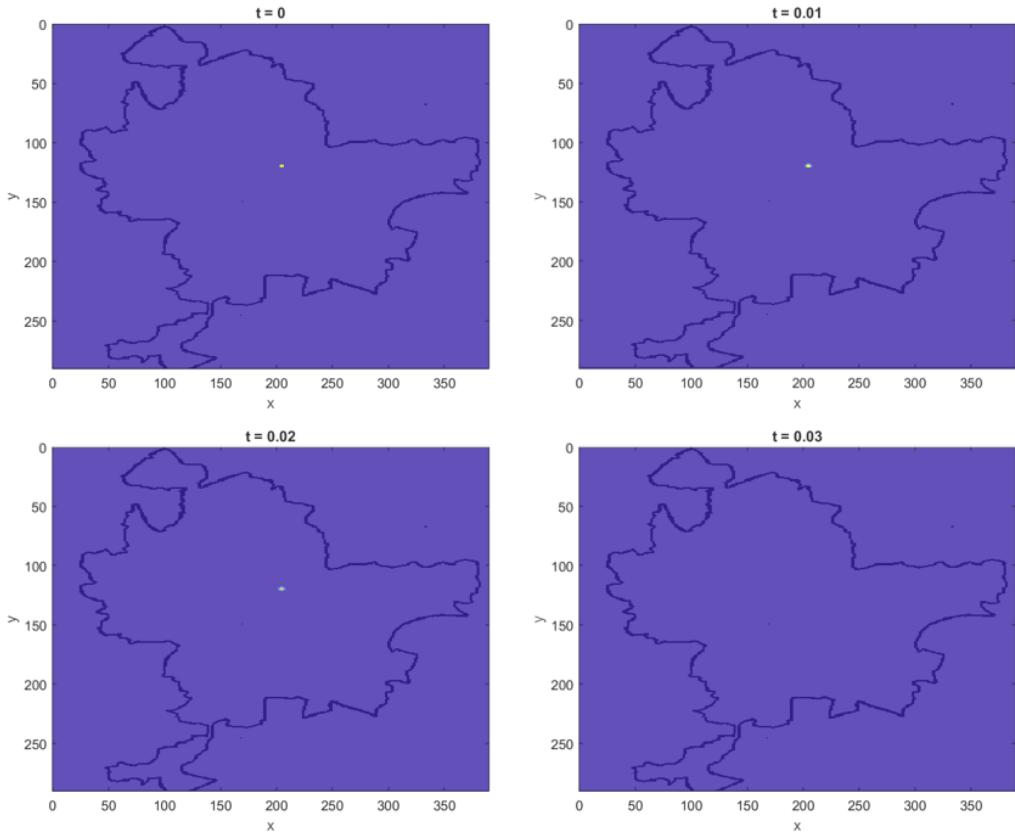


Figure 27: Nombres d'individus I sur la carte de Lyon à différent temps t pour la rumeur 1

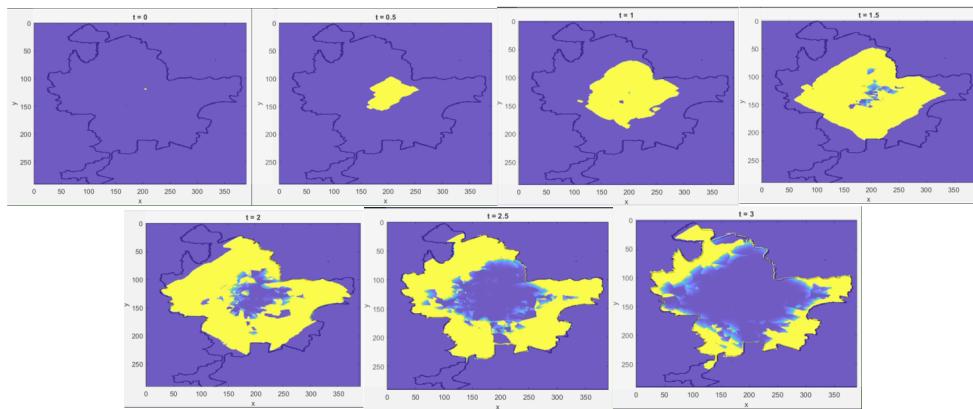


Figure 28: Nombres d'individus I sur la carte de Lyon à différent temps t pour la rumeur 2

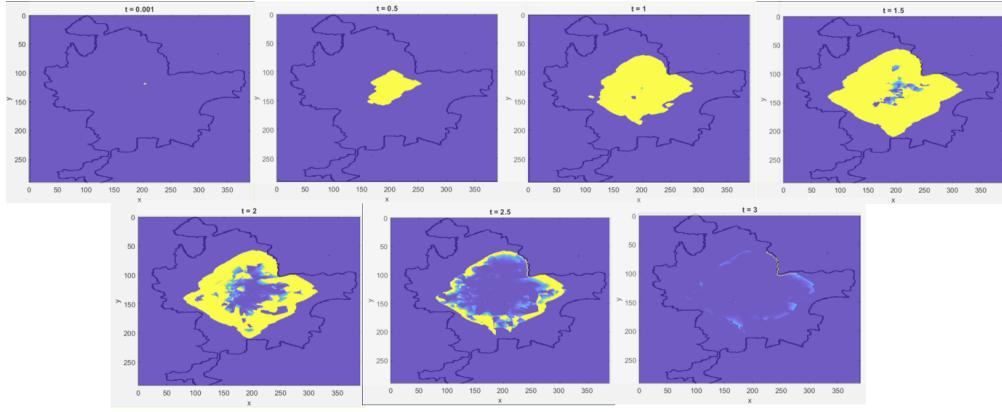


Figure 29: Nombres d'individus I sur la carte de Lyon à différent temps t pour la rumeur 2 avec contrôle

Dans ce cas, on remarque que la propagation de la rumeur s'arrête après une journée et demi avant de s'éteindre au 3e jour. Le contrôle ici semble fonctionner et limiter la propagation de la rumeur. Une prise en charge plus rapide permettrait de limiter grandement le nombre d'individu I. Se pose également la question de savoir en combien de temps une sensibilisation peut être mise en place.

6 Conclusion

Avec notre modèle, nous avons pu établir que lorsque les individus rétablis sont plus convaincants que les individus "croyants" alors il n'existe qu'un seul équilibre stable qui est la disparition de la rumeur. Cependant, celle-ci peut tout de même se propager dans l'espace ce qui reste problématique car ne permettant pas d'éviter les conséquences possibles de la rumeur. Cette propagation dépend notamment de la crédibilité de la rumeur, de l'intérêt de la population pour la rumeur, du temps d'oubli etc. Lorsque β_3 est négatif, et donc que globalement les individus "croyants" sont plus convaincants que les individus rétablis alors la rumeur peut également se maintenir. Ce qui peut être à l'origine de conséquences encore plus désastreuses. Ainsi, cela révèle le besoin de mettre en place de la sensibilisation à travers les médias par exemple. Ce que nous avons également modélisée. Il apparaît alors clairement qu'une prise en charge à un seuil assez précoce est un des facteurs les plus importants pour limiter la propagation de la rumeur. Enfin, la mise en situation dans la métropole lyonnaise a permis de mettre en lumière la propagation dans un milieu avec des densités de population différentes afin d'anticiper cette diffusion dans un contexte plus concret et d'observer l'action de la sensibilisation.

7 Discussion

Cependant, notre modèle reste criticable et limité. Déjà, une part importante de la propagation des rumeurs de nos jours se déroule sur les réseaux sociaux, ce que nous n'avons pas pris en compte. En effet notre modélisation concerne surtout une rumeur se propageant par bouche à oreille, on peut sans doute imaginer qu'une rumeur se propageant par réseaux sociaux se répande plus rapidement puisque une seule personne peut toucher un public assez large et qu'il est difficile d'appliquer un contrôle par sensibilisation. Il aurait été pourtant intéressant de se pencher sur cela et notamment les moyens de limiter la propagation de rumeurs et de "fake news" sur Internet.

Un autre problème auquel notre étude a été confronté et le manque de données utilisables pour appliquer le modèle et estimer la valeur des paramètres. Problème auxquels ont été confrontés d'autres études [3].

L'étude de la propagation des rumeurs est un domaine qui commence à devenir de plus en plus important, il existe à présent d'autres modèles qui prennent en considération d'autres facteurs que nous n'avons pas pris en compte et/ou qui correspondent à des situations plus spécifiques. Nous avons fait de notre mieux afin de réaliser un modèle qui correspondait à notre logique, aux phénomènes que nous

considérions et sans trop l'allourdir. Mais différentes idées pourraient être creusées ou approfondies. Déjà il semble plus réaliste de considérer un effet de seuil avant le départ de la rumeur comme nous l'avons fait avec l'effet Allee. De plus dans notre modèle, il ne peut rester d'individus susceptibles si il y a eu initialement des individus I ou R. Il serait sans doute intéressant de considérer qu'une fois le nombre de I à 0 la rumeur est épuisée et limiter le passage de S vers R par exemple. Aussi, des équations à retards pourraient être employé notamment pour l'action des autorités qui n'agirait sans doute pas immédiatement. De nombreuses autres pistes et améliorations sont donc exploitables.

References

- [1] Allee effect. *Wikipedia*, January 2024. Page Version ID: 1194173097.
- [2] XuelongChen and NanWang. Rumor spreading model considering rumor credibility, correlation and crowd classification based on personality. *Scientific Reports*, 2020. <https://www.nature.com/articles/s41598-020-62585-9>.
- [3] P. Wu et al. Y. Ke, L. Zhu. Dynamics of a reaction-diffusion rumor propagation model with non-smooth control. *Applied Mathematics and Computation*, 2022. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300322005525>.