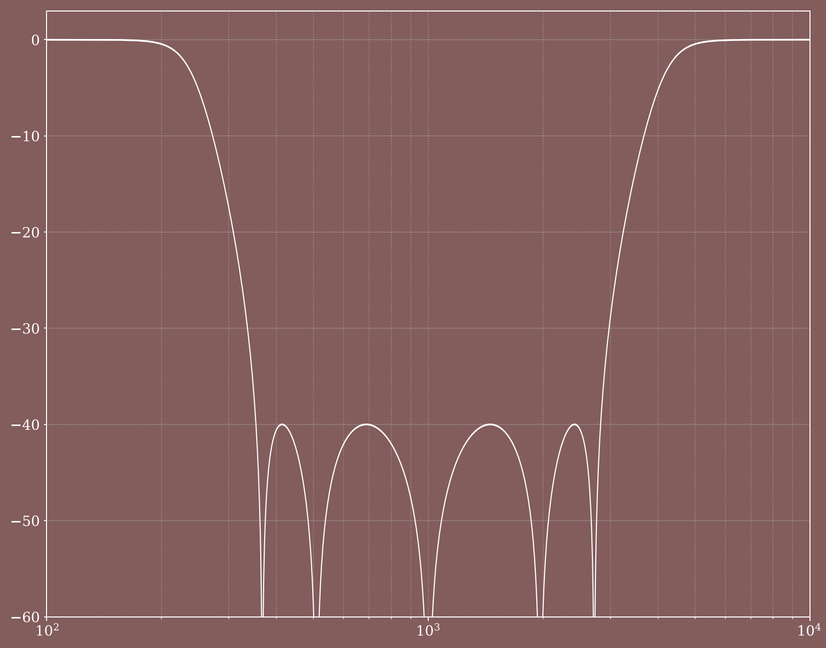
Capítulo 3

3

FUNCIONES DE APROXIMACIÓN SÍNTESIS DE FILTROS

Rev. 4 - Enero 2025

Juan Sbruzzi, Cristian Meichtry
Julieta Goldbaum, Candela Gioia, Javier Petrucci



All models are wrong, but some are useful.

- George E. P. Box

Sección 1

Ejercicio 3.1

¿Por qué existe necesariamente una banda de transición en los filtros realizables?

Ejercicio 3.2

En función de las bandas de paso y atenuación, los filtros pueden clasificarse en cuatro tipos, enumere cuáles son.

Ejercicio 3.3

Por su simplicidad algebraica la síntesis de funciones transferencia se realiza a partir de una plantilla normalizada. Realice una representación gráfica que muestre sus características.

Ejercicio 3.4

Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(1) = 1$ y $f(x) \in [-1, 1] \quad \forall x \in [0, 1]$.

- Represente gráficamente las características de $f(x)$.
- A partir de la función $f(x)$ se requiere sintetizar una nueva función $G(x)$ que cumpla con una plantilla normalizada. La relación entre $f(x)$ y $G(x)$ está dada por una transformación $t(f)$ tal que $G(x) = t(f(x))$. Encuentre esta transformación de modo que $G(x) \in [G_p, 1] \quad \forall x \in [0, 1]$ y $G(1) = G_p$.

Analice y proponga distintas alternativas para esta transformación.

Ejercicio 3.5

Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(1) = 1$, $f(x) \in [-1, 1] \quad \forall x \in [0, 1]$, y además ahora f es monótona creciente $\forall x > 1$. Indique si la transformación propuesta en el ejercicio anterior cumple además con la condición de que $t(f(x))$ sea monótona decreciente $\forall x > 1$. En caso contrario, replantee la solución para cumplir además con esta propiedad.

Sección 2

Ejercicio 3.6

Considere $f(\omega)$ como una función polinómica que tiene las propiedades descriptas en la *Sección I*. Enuncie y describa las 4 operaciones que constituyen la transformación $t(f)$, y que permiten sintetizar la función $G(\omega)$, tal que:

- $G(\omega)$ es racional.
- $G(\omega)$ cumple las restricciones de una plantilla normalizada.

Compare esta transformación con las que propuso en la *Sección I* y describa qué propiedades permiten abordar eficientemente el problema de las funciones de aproximación.

Ejercicio 3.7

Diseñar un script que:

- Represente el polinomio $f(\omega)$ en la región de interés.
- Muestre las operaciones que generan $G(\omega)$ a partir de $f(\omega)$, y represente el resultado dentro de una plantilla normalizada.
- Aplique a la función $G^2(\omega)$ la transformación de variable: $\omega = s/j$ y grafique todas las singularidades de $A(s) = G(\omega)_{|\,\omega=s/j}$.
- Obtenga la función $H(s)$ implementable y muestre que el módulo de su respuesta en frecuencia cumple la plantilla original.

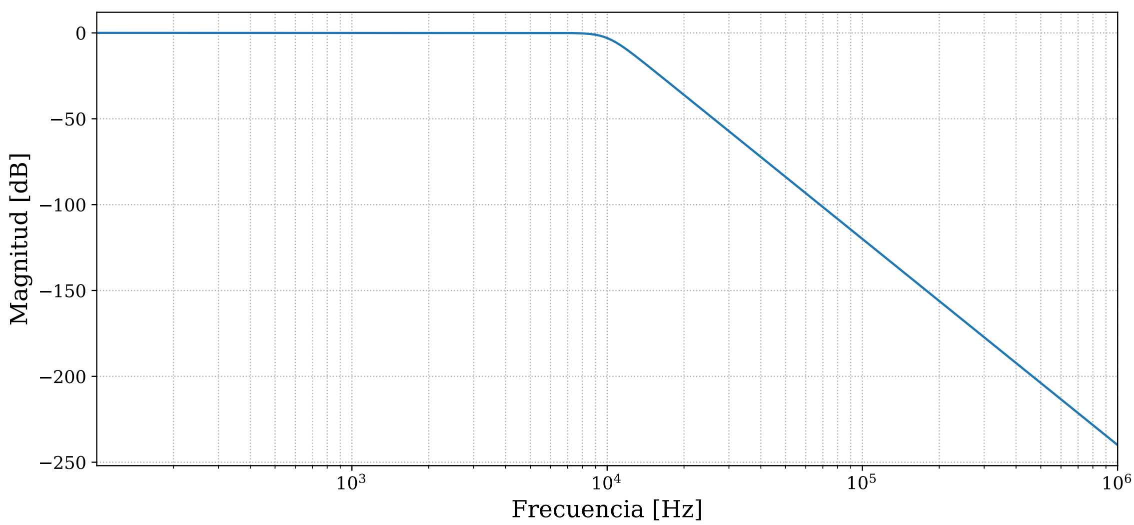
Ejercicio 3.8

Grafique la constelación de polos y ceros (en adelante PZ map) de un filtro pasabajos de orden 4 implementado con la aproximación de Butterworth para una plantilla normalizada con $G_p = 0{,}8$.

- Determine la posición exacta de las singularidades.
- Evalúe mediante software la función transferencia $H(s)$ obtenida, en $s/(2\pi 10kHz)$. Observe la respuesta en frecuencia y determine qué efecto tiene esta transformación de variable.

Ejercicio 3.9

Determine el orden del filtro al que corresponde la siguiente respuesta en frecuencia y dibuje su fase.



Ejercicio 3.10

Proponga una función $f(\omega)$ polinómica, distinta de ω^n, pero que cumpla las condiciones requeridas:

- $f : [-1, 1] \in [-1, 1]$
- $f(1) = 1$
- f monótona $\forall x > 1$

Determine:

- ¿Puede ser utilizada para generar una función de aproximación? Inténtelo mediante la transformación descripta en 6 y compare el resultado con la aproximación del ejercicio 8.
- Para $\omega = 2$, ¿cuál presenta mayor atenuación? Presente un gráfico con ambas funciones superpuestas.
- Analice las consecuencias de utilizar una función que no sea par o impar. ¿Constituye esto una condición adicional que debe exigirse a $f(w)$?

Sección 3

Ejercicio 3.11

Se requiere implementar un filtro pasa-altos que atenúe más de 40dB las componentes de frecuencia hasta 1kHz y menos de 3dB las superiores a 4kHz.

- Obtenga el menor orden posible para la función transferencia del filtro utilizando la aproximación de Butterworth.
- Calcule la ubicación de los polos y represéntelos en el plano complejo.
- Grafique la fase de la respuesta en frecuencia.

Ejercicio 3.12

Se requiere implementar un filtro pasa-bajos para el cumplimiento de una dada plantilla. Se consideran las implementaciones mediante las aproximaciones Chebyshev I y Chebyshev II.

- Indique en cuál caso la función transferencia tendrá polos de mayor Q.
- Indique en qué caso habrá picos de ganancia en la banda de paso, y en cuál habrá picos de atenuación.
- Analice cómo se relacionan estos fenónemos con la constelación de polos y ceros resultante para cada caso.

Ejercicio 3.13

Al evaluar una función transferencia de tipo pasa-bajos normalizada en una función de transformación es posible sintetizar un filtro de cualquier tipo.

- Complete la siguiente tabla indicando la función de transformación que corresponde para cada caso. Indicando la expresión que vincula ω_{an} con parámetros de la plantilla.

Transformación	$LP_n \to LP$	$LP_n \to HP$	$LP_n \to BP$	$LP_n \to BR$
Función				
ω_{an}				

Se plantea determinar la nueva ubicación de los polos luego de aplicada la función de transformación al low pass normalizado.

- Dada una coordenada p_1 en el plano s donde la función normalizada tiene un polo, es posible analizar dónde se mapearán los polos luego de la transformación igualando $T(s) = p_1$. Esto es así, porque las soluciones a esta ecuación, serán los puntos que se mapean a p_1. Analice para cada transformación, qué ocurre con un polo de módulo 1 y ángulo arbitrario. Para los casos BP y BR analizar la incidencia del parámetro ancho de banda relativo ω_0/B. Considerar que si p_1 tiene parte imaginaria, habrá siempre un polo en p_1^*.

Ejercicio 3.14

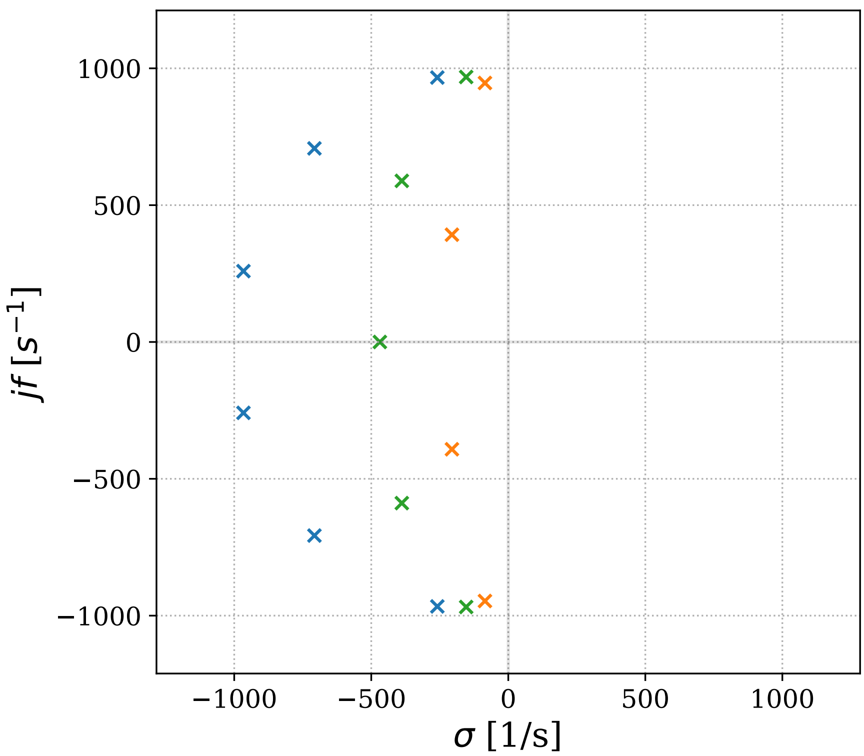
Se busca analizar un filtro pasa-bajos de ganancia unitaria implementado mediante las aproximaciones Chebyshev I y Chebyshev II, para los órdenes 1, 2 y 3.

- Represente de forma aproximada la constelación de polos y ceros en el plano complejo.
- Represente el módulo en dB de la respuesta en frecuencia en escala logarítmica.
- Indique cuál es el valor de la ganancia para $\omega \to 0$ y el valor de la pendiente para $\omega \gg \omega_p$.

Ejercicio 3.15

El siguiente PZ map representa la función transferencia de menor orden correspondiente a una misma plantilla de un filtro pasa-bajos para las aproximaciones de Butterworth, Óptimo L y Chebyshev I. Los parámetros de la plantilla son: $A_p = 3\text{dB}$ y $A_a = 35\text{dB}$.

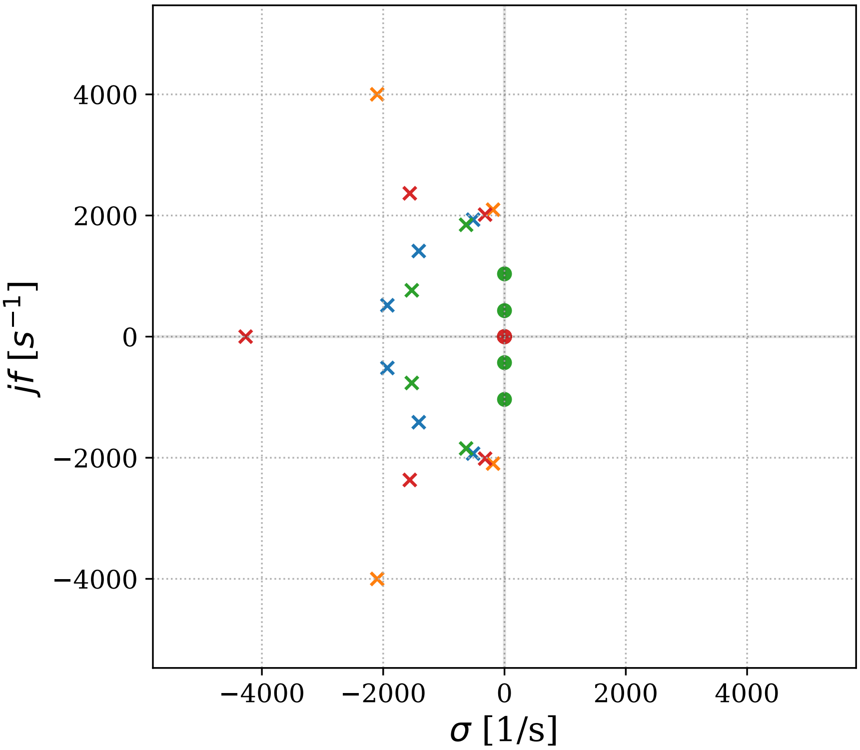
- Indique el orden de cada aproximación.
- Estime la frecuencia de paso de la plantilla original.
- Para el caso de Chebyshev I, determine el valor de la ganancia en $\omega = 0$ y cuántos puntos de derivada nula hay en la banda de paso.
- Si se implementa un filtro para cumplir con la misma plantilla utilizando la aproximación Chebyshev II, grafique la constelación de polos y ceros resultante.
- Grafique la magnitud y la fase de la respuesta en frecuencia para cada aproximación. ¿Con qué pendiente caerá la magnitud para $\omega \gg \omega_p$ en el caso de Chebyshev II?.
- Grafique el PZ map que se obtiene al aplicar la transformación $\frac{1}{s}$ a cada uno de los filtros analizados. Analice el tipo de filtro que se obtiene.



Ejercicio 3.16

El siguiente PZ map representa la función transferencia de menor orden correspondiente a una misma plantilla para las aproximaciones de Butterworth, Óptimo L, Chebyshev I y Chebyshev II.

- ¿De qué tipo de filtro se trata?
- ¿Cuál es el orden resultante para cada aproximación?
- ¿De qué orden es el cero en el origen en cada caso?
- ¿Cuál es la frecuencia de paso de la plantilla original?
- Para los casos de Chebyshev I y Chebyshev II determine cuánto vale la ganancia para $\omega \to \infty$ y $\omega \to 0$. Indique el valor final de la respuesta al escalón para ambas aproximaciones.
- Represente el módulo en dB y la fase de la respuesta en frecuencia para cada una de las aproximaciones.



Ejercicio 3.17

Se requiere implementar un filtro pasa-altos que atenúe más de 40dB las componentes de frecuencia hasta 1kHz y menos de 3dB las superiores a 4kHz.

- Obtenga el menor orden posible para la función transferencia del filtro utilizando la aproximación de Chebyshev I. Indique qué parámetros de la plantilla fueron utilizados para ello.
- Obtenga el menor orden posible utilizando la aproximación de Chebyshev II.
- Grafique el PZ map resultante para Chebyshev I y II.
- Grafique la fase de la respuesta en frecuencia del filtro obtenido al implementar Chebyshev II. Relacionar los efectos observados en la fase con la constelación de polos y ceros.
- Una plantilla más restrictiva se define como aquella cuyo cumplimiento asegura que se satisfacen las condiciones de la plantilla original. Su implementación puede lograrse ajustando los parámetros

A_a, A_p, f_p y f_a.

- Indique cuáles parámetros deben ser incrementados o reducidos para obtener una plantilla que cumpla con la condición mencionada anteriormente.
- Analice por qué en general el uso de una plantilla más restrictiva suele requerir una función de aproximación de mayor orden.

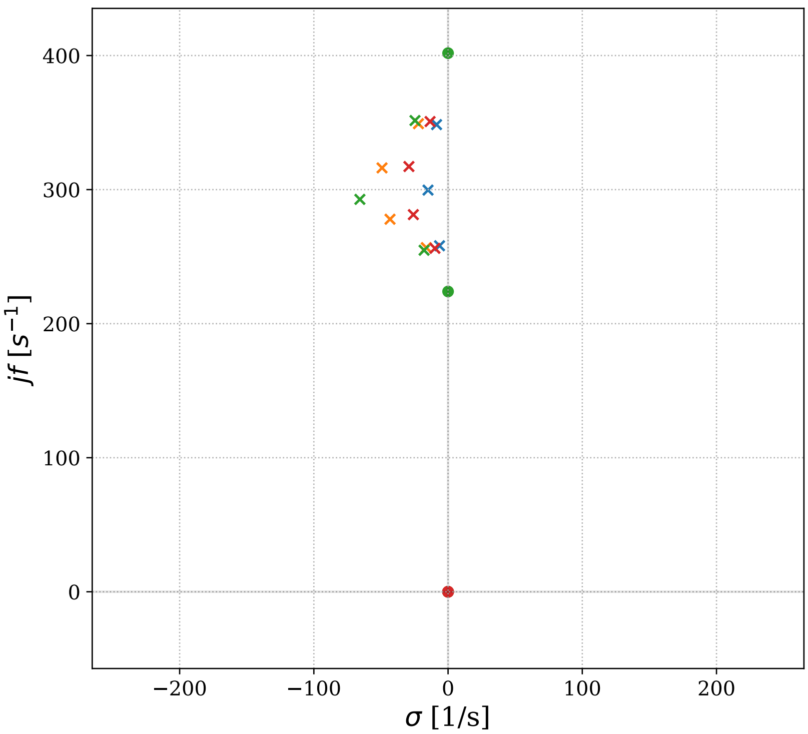
Considere que, para la plantilla original, se modifica un parámetro a la vez. Determine el orden de la función de aproximación Chebyshev I resultante para cada una de las siguientes modificaciones:

Parámetro	f_a'	f_p'	A_a'	A_p'
Nuevo valor	1.4 kHz	3.1kHz	50 dB	1 dB
Orden resultante				

Ejercicio 3.18

Las siguientes constelaciones de polos y ceros se corresponden con distintos filtros.

- Determine el orden, tipo de filtro y aproximación utilizada en cada caso.
- Indique la frecuencia central y ancho de banda.
- ¿De qué orden es la función transferencia que corresponde al LP normalizado?
- ¿De qué orden es el cero en el origen en cada caso?
- ¿Cuántos puntos de derivada nula habrá en la banda de paso al utilizar Chebyshev I?
- Represente el diagrama de polos y ceros del filtro que realiza la operación opuesta al mostrado (inviertiendo el rol de las frecuencias relevantes) e interprete la localización de los ceros de transmisión.
- Grafique la fase y la magnitud de la respuesta en frecuencia para todos los casos.



Ejercicio 3.19

Un filtro pasa banda puede especificarse por medio de un par de frecuencias que delimitan la banda de paso, y otro par que delimita la banda de atenuación. Para calcular una función de aproximación que cumpla con estos requerimientos debe analizarse la transformación pasa banda y su propiedad de simetría:

- Demuestre que si se evalúa la transformación $LP_n \to BP$ en un par de frecuencias f^- y f^+, y se obtiene otro par de frecuencias f_n^- y f_n^+ que están a la misma distancia del origen en el espacio del pasa bajos normalizado, entonces: $f^- \cdot f^+ = f_0^2$.

Por lo tanto la función de transformación permite ajustar una función de aproximación a una plantilla cuyas frecuencias cumplan con esta propiedad de simetría. Pero debe observarse que en general los dos pares de frecuencias que definen la plantilla, f_a^-, f_a^+ y f_p^-, f_p^+, no tienen la misma media geométrica.

Se propone analizar el caso de una plantilla con los siguientes parámetros:

f_a^-	f_p^-	f_p^+	f_a^+	A_p	A_a
1kHz	2kHz	8kHz	9kHz	3 dB	40 dB

- Represente la plantilla en escala lineal
- Represente la plantilla en escala logarítmica
- Calcule f_0 como la media geométrica entre las frecuencias de atenuación y las de paso. Represente estos resultados sobre el gráfico anterior.
- Muestre que existen dos formas de simetrizar esta plantilla de modo que sea posible definir f_0 como parámetro de una función de desnormalización.
- Analice cuál es la variante que permite cumplir la plantilla original con el menor orden posible.

Ejercicio 3.20

Se propone implementar un filtro con los siguientes límites:

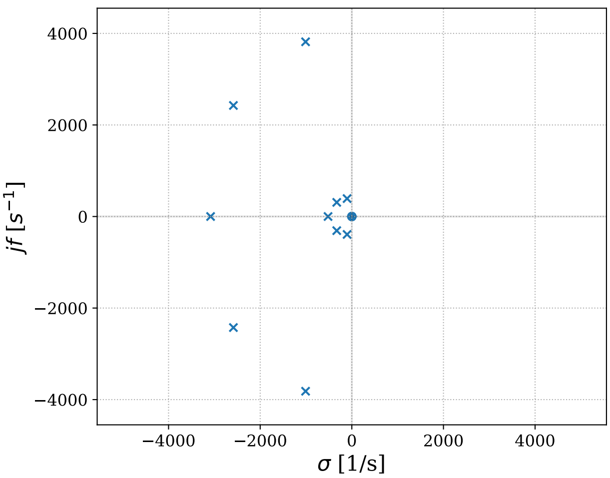
f_p^-	f_a^-	f_a^+	f_p^+	A_p	A_a
330Hz	470Hz	560Hz	680Hz	2 dB	40 dB

- Grafique la plantilla e indique el tipo de filtro que debe ser implementado.
- Determine los parámetros f_o y B que permiten minimizar el orden para una dada función de aproximación.
- Determine el orden mínimo con el cual puede sintetizarse el filtro, para cada una de las funciones de aproximación estudiadas.
- Dibuje el diagrama de polos y ceros en cada caso.

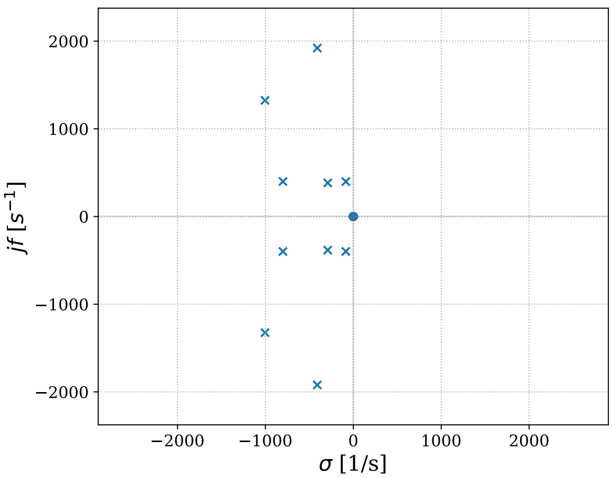
Ejercicio 3.21

En las siguientes figuras se representan los diagramas de polos y ceros de distintos filtros que se construyeron utilizando la msma función de aproximación.

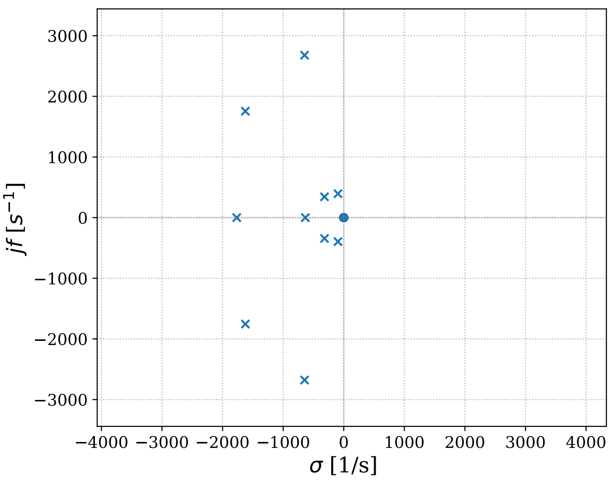
- Indique cuál es el tipo de filtro, la aproximación utilizada y el orden del cero en el origen.
- Ordene crecientemente los casos en función del ancho de banda y estime su valor en Hz.
- Obtenga una interpretación alternativa del filtro de banda más ancha como producto de dos filtros, indicando la frecuencia característica de cada uno.
- Represente el módulo y fase de la respuesta en frecuencia para los casos *a* y *d*.



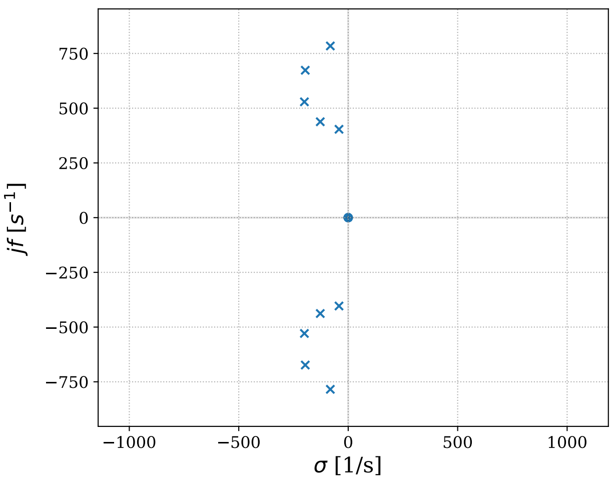
Caso a



Caso b



Caso c



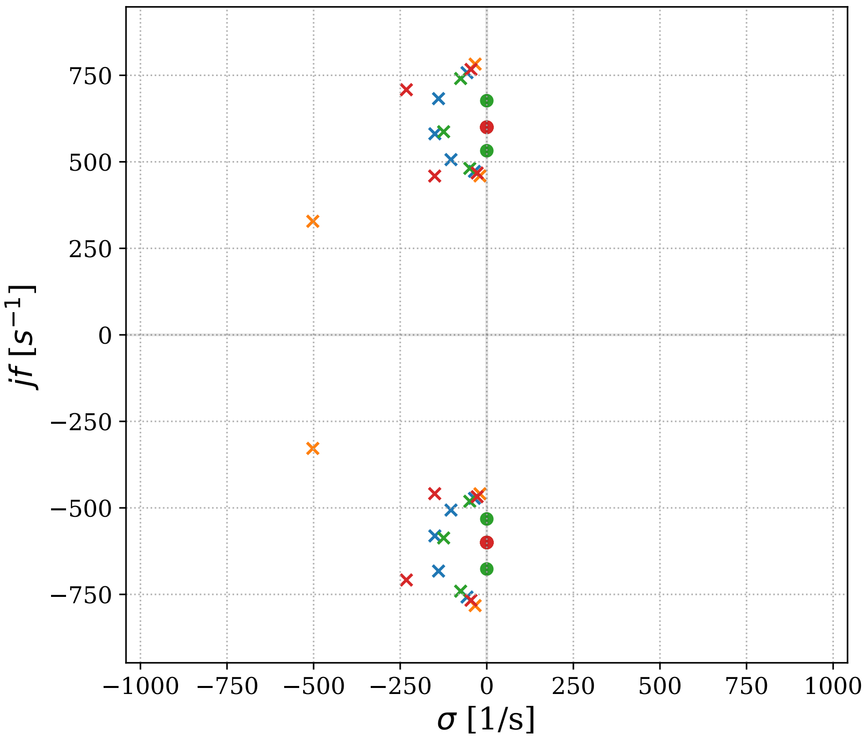
Caso d

Ejercicio 3.22

En la siguiente figura se representan los diagramas de polos y ceros de distintos filtros que cumplen la misma plantilla.

- Indique para cada caso: cuál es el tipo de filtro, la aproximación utilizada y el orden.
- Estime las frecuencias de paso y atenuación. ¿Cómo puede determinarse la frecuencia central?
- Determine el valor final de la respuesta al escalón para cada función de aproximación.

- Grafique para cada caso el módulo y la fase de la respuesta en frecuencia.

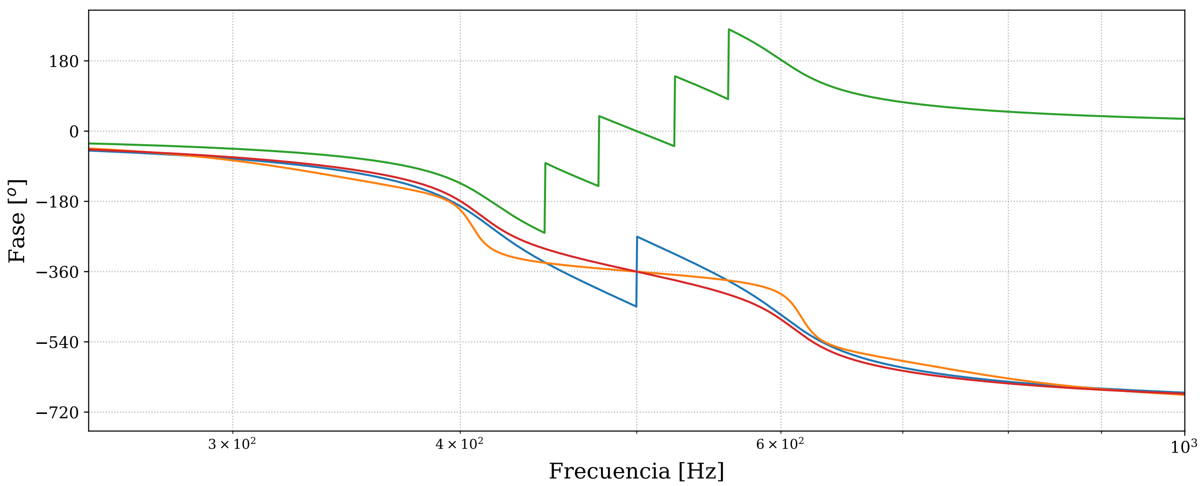


Ejercicio 3.23

Mediante un ensayo de laboratorio, utilizando un osciloscopio, se midió la fase de la respuesta en frecuencia de filtros construidos utilizando distintas funciones de aproximación conocidas. En todos los casos se cumple la misma plantilla con el mínimo orden.

Los resultados se encuentran representados en la siguiente figura.

- Represente la constelación de polos y ceros en el plano complejo.
- Determine para cada caso: el orden, el tipo de aproximación y el tipo de filtro.
- Indique la frecuencia central y estime el ancho de la banda de paso.
- Grafique para cada caso el módulo de la respuesta en frecuencia.



Ejercicio 3.24

Se requiere implementar un filtro rechaza-banda de frecuencia central $20kHz$, con anchos de banda $B_{min} = 20kHz$ y $B_{max} = 50kHz$.

Se acepta a lo sumo una atenuación del 30 % de la amplitud de las señales que deben preservarse, y se consideran completamente atenuadas aquellas componentes que tengan una atenuación de 40dB o más.

Se consideran dos implementaciones mediante las funciones de aproximación Chebyshev e Inversa Chebyshev.

- Calcule el orden mínimo de la función transferencia para cada caso.
- Grafique el módulo y la fase de las respuestas en frecuencia y represente las constelaciones de polos y ceros.
- Determine cuál es el valor de A_p a partir del cual la función transferencia resulta de un orden menor.
- Calcule para cada caso el rango de frecuencias para el cual la atenuación supera los 40dB.

Sección 4

Ejercicio 3.25

Para el cumplimiento de una plantilla, se consideran las implementaciones de orden mínimo mediante las siguientes funciones de aproximación: Butterworth, Chebyshev I, Chebyshev II, Óptimo L y Cauer.

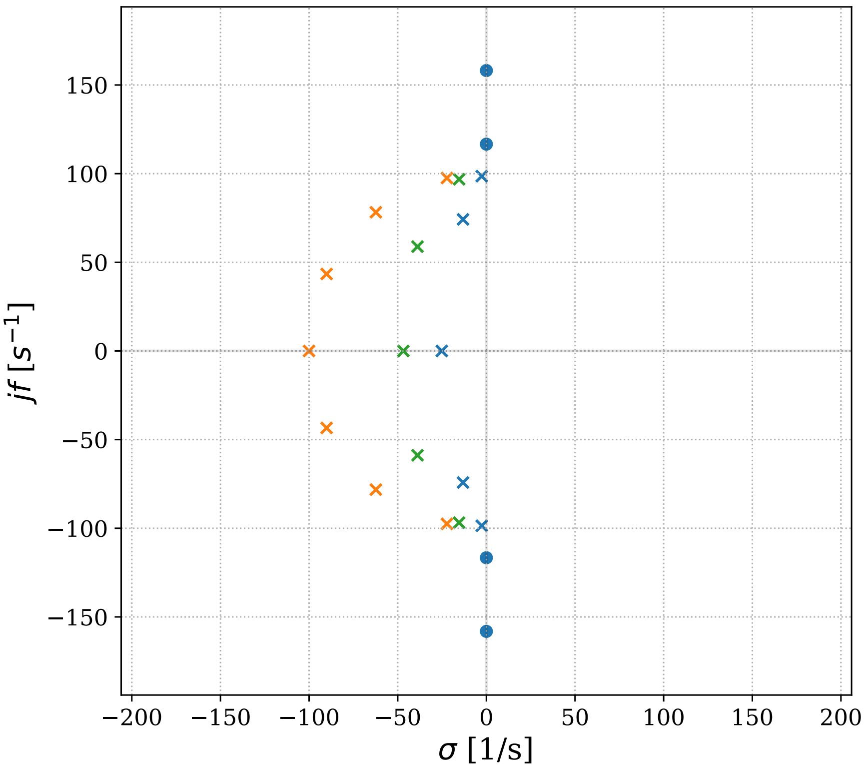
Se estudia el caso donde se modifican los parámetros de modo tal que la plantilla se vuelve más restrictiva.

- Compare si es conveniente emplear la aproximación de Butterworth o la de Chebyshev, cuando el objetivo es minimizar el orden.
- Ordene los demás casos de acuerdo con este criterio.

Ejercicio 3.26

En la siguiente figura se muestran las constelaciones de polos y ceros correspondientes a un filtro diseñado utilizando las aproximaciones de Butterworth, Cauer y Óptimo L.

- Identifique a qué aproximación corresponde cada constelación de polos y ceros.
- Grafique el módulo en dB y la fase de las respuestas en frecuencia en escala logarítmica. Indique la pendiente del módulo cuando $\omega \gg \omega_p$.



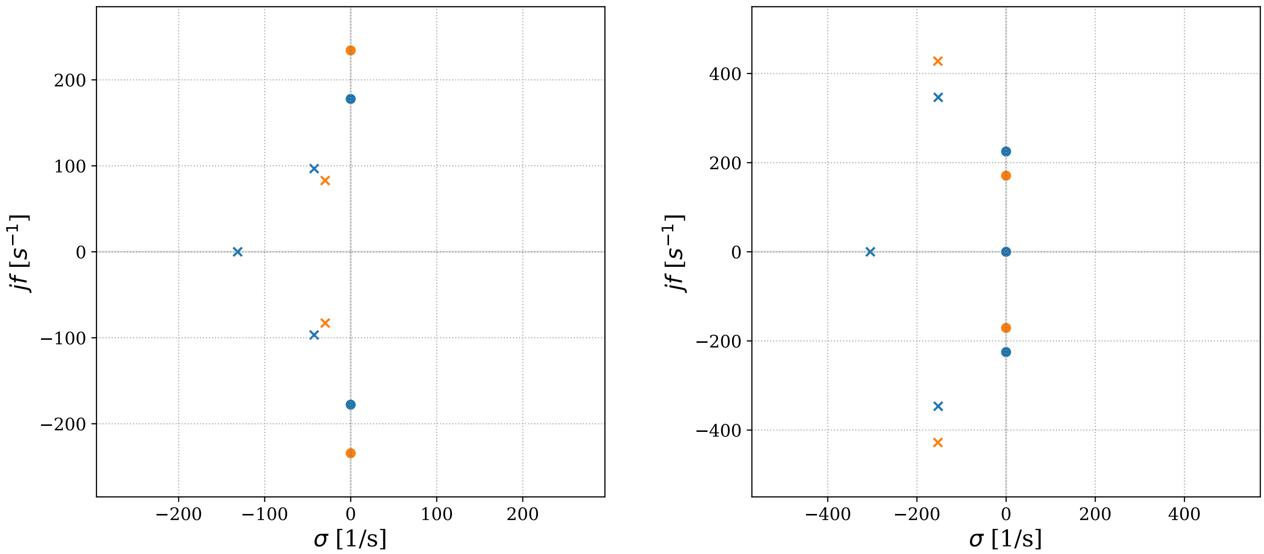
Ejercicio 3.27

Se requiere implementar un filtro que cumpla una plantilla dada mediante las aproximaciones de Cauer y Chebyshev II.

Los diagramas de polos y ceros correspondientes a estas implementaciones se presentan a continuación.

- Indique el tipo de filtro, el orden y la multiplicidad de los ceros en el origen.
- Identifique a qué aproximación corresponde cada constelación de polos y ceros.

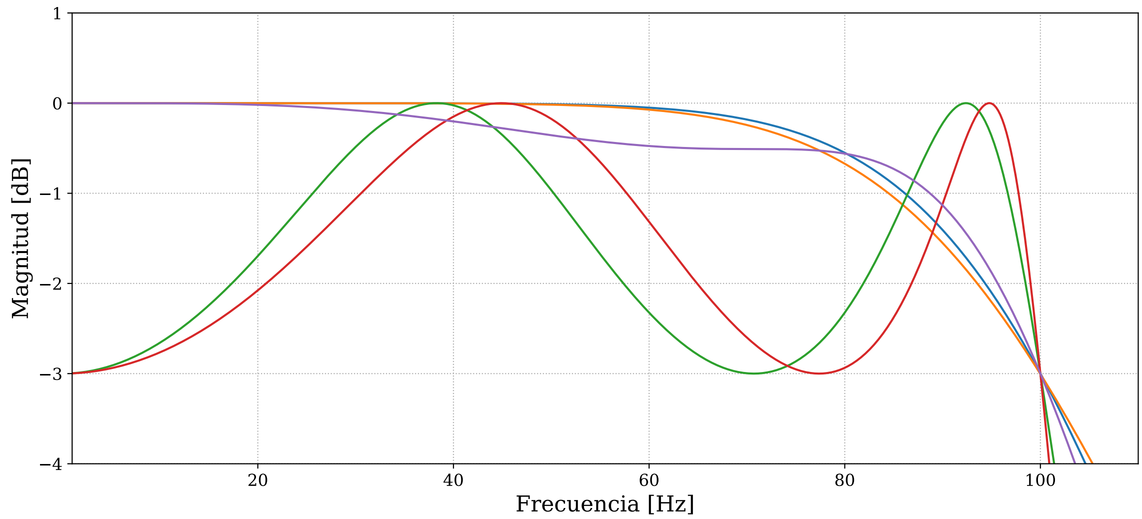
- Estime la frecuencia de corte.
- Grafique la fase y el módulo de la respuesta en frecuencia, indicando los valores de cada curva cuando $\omega \to 0$ y $\omega \to \infty$.
- Si el orden de la implementación mediante Chebyshev II se incrementa en una unidad, represente sus polos y ceros sobre cada PZ map.



Ejercicio 3.28

Las siguientes curvas corresponden a filtros del mismo orden.

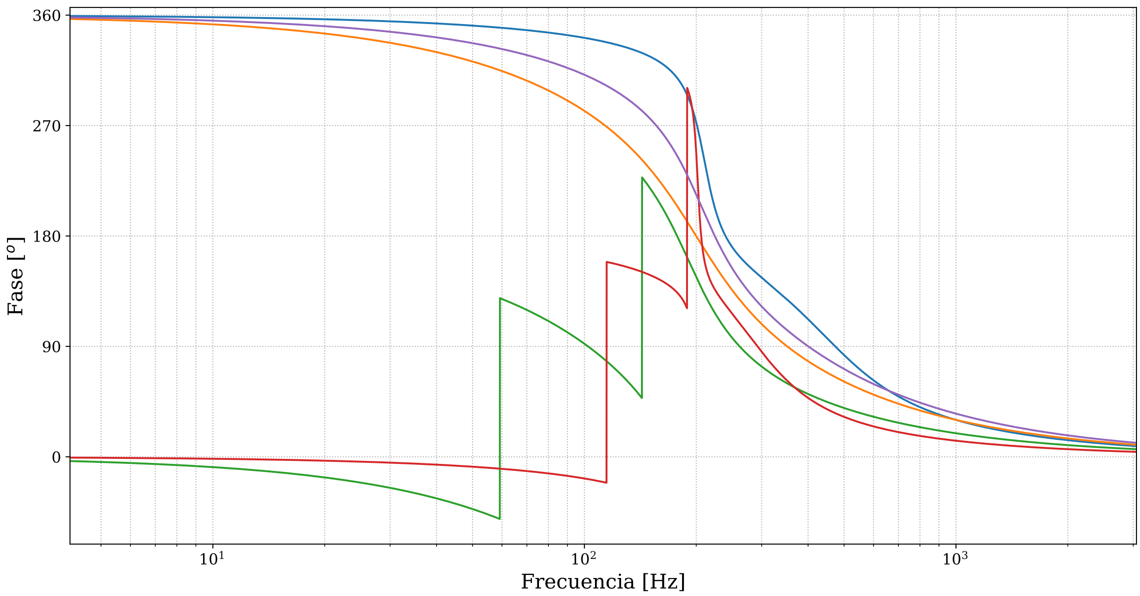
- Determine cuál es el orden implementado.
- Indique con qué función de aproximación se corresponde cada curva.
- Represente las constelaciones de polos y ceros correspondientes.



Ejercicio 3.29

En la siguiente figura se representa la fase de la respuesta en frecuencia de distintos filtros.

- Determine el tipo de filtro, orden, y la aproximación utilizada.
- Estime la frecuencia de corte.
- Represente las constelaciones de polos y ceros de cada función transferencia.



Ejercicio 3.30

La función transferencia de un filtro que se sintetiza a partir de la aproximación de Butterworth tiene en total 5 polos y 5 ceros. Fue diseñado para cumplir con una plantilla tal que $A_p = 1dB$ y $A_a = 40dB$.

- Indique de qué tipo de filtro se trata.
- Determine el valor mínimo del parámetro ω_{an} de la plantilla normalizada correspondiente.
- Si se utiliza la aproximación de Chebyshev para sintetizar una función transferencia que cumpla con la msima plantilla, calcule cuál es el orden mínimo con el que puede implementarse el filtro.

Ejercicio 3.31

En la siguiente figura se muestran las constelaciones de polos y ceros de distintas funciones transferencia, que fueron diseñadas para cumplir con una misma plantilla.

- Determine el tipo de filtro, el orden, y la aproximación utilizada.
- Indique el orden del cero en el origen para cada caso.
- Estime el radio del círculo que se encuentra representado en el plano complejo. Analice con qué parámetro característico está relacionado este valor.
- Grafique el módulo y la fase de la respuesta en frecuencia.

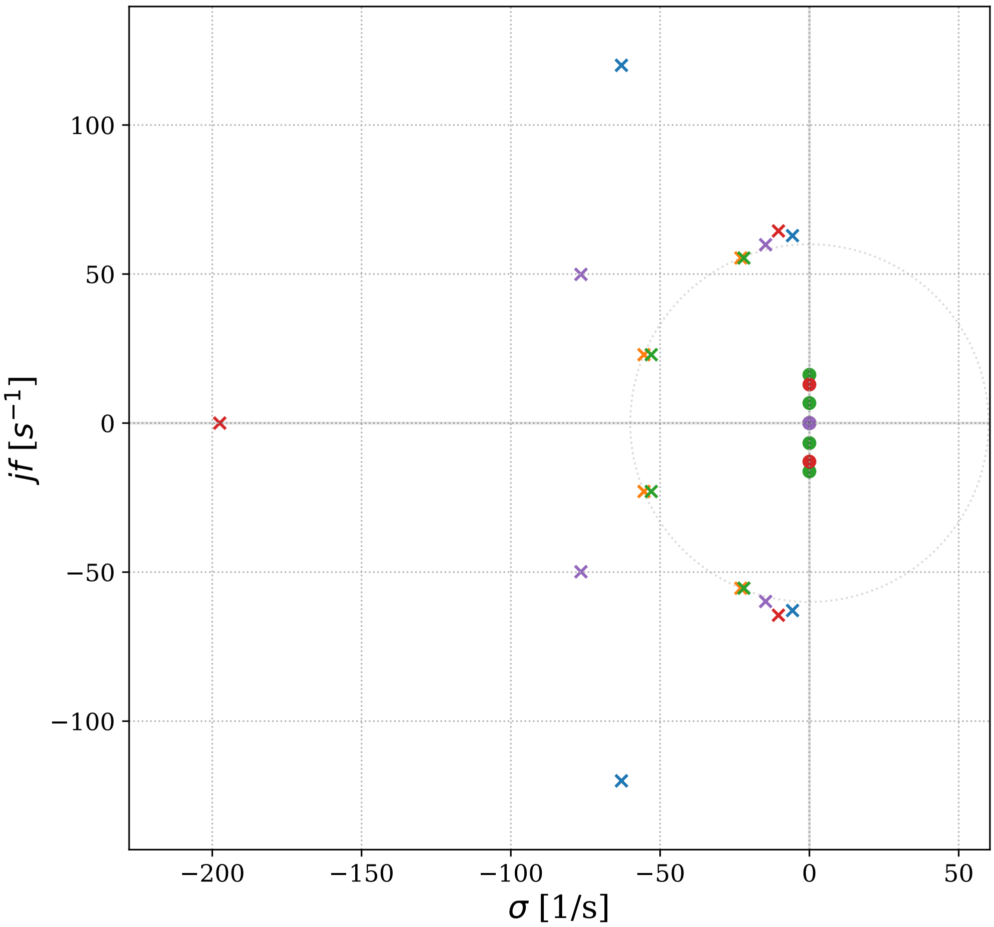


Figura 3

Ejercicio 3.32

Se desea procesar una señal mediante un filtro pasa bajos preservándose el contenido espectral hasta la frecuencia f_1. Se espera que la característica de fase del filtro no imponga una distorsión a la señal. Aceptándose como única diferencia entre la entrada y la salida del sistema, un retraso temporal τ.

- ¿Qué características debe tener la fase de la respuesta en frecuencia para cumplir con las condiciones requeridas?
- ¿Cómo se vincula el parámetro τ con la fase?
- ¿Hasta qué frecuencia tiene sentido imponer condiciones sobre la fase?
- Represente de forma aproximada como se espera que sean el módulo y la fase de la respuesta en frecuencia, indicando la posición de f_1.

Ejercicio 3.33

Se desea construir un filtro pasa-bajos en base a la aproximación de Bessel cuyo retardo de grupo sea de $5ms$ hasta $100Hz$.

- ¿Cuál debe ser la transformación a aplicar sobre la función transferencia normalizada?
- Represente de forma aproximada la forma de la fase y el retardo de grupo de las funciones antes y después de aplicar la desnormalización.

Ejercicio 3.34

Mediante la función de aproximación de Bessel se requiere diseñar un filtro pasa-bajos cuyo retardo de grupo sea de $2ms$ hasta una frecuencia de $625Hz$. Se acepta para el retardo de grupo un desvío de a lo sumo un 15 %.

- En base a lo representado en la Figura 1, determine cuántos polos tendrá la función transferencia del filtro implementado.

Ejercicio 3.35

Mediante la función de aproximación de Bessel se implementa un filtro pasa-bajos con frecuencia de corte $750Hz$ y $Ap = 5dB$. En la banda de paso se requiere un retardo de grupo comprendido en el rango de $0{,}95ms \pm 0{,}05ms$.

- Analizando los siguientes gráficos, indique de qué orden deberá ser la implementación.

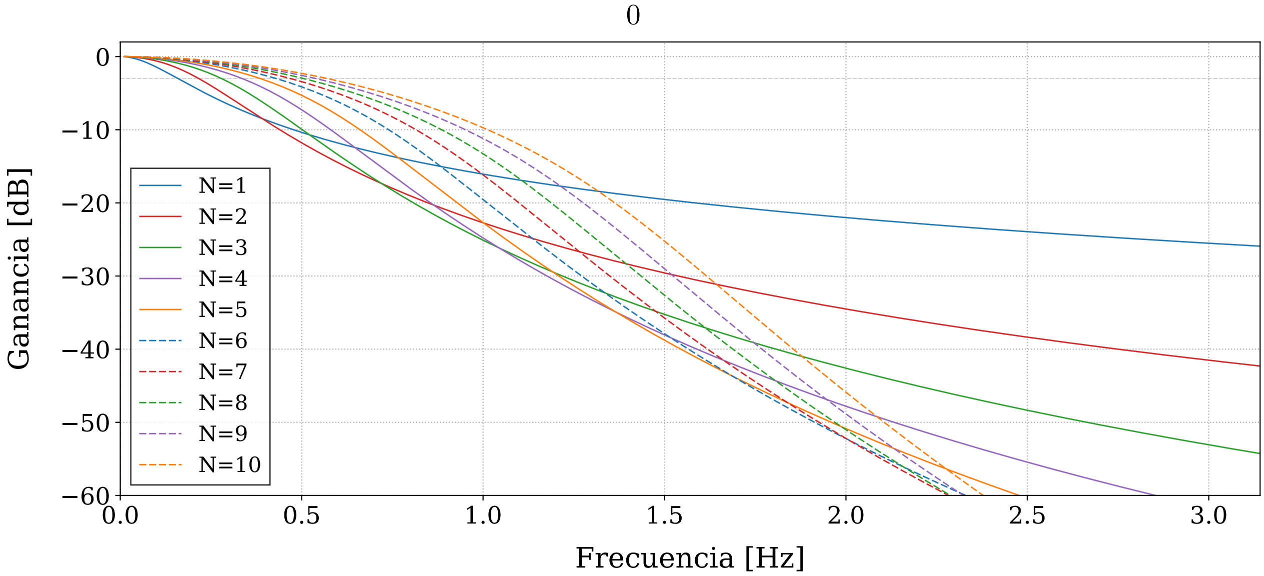


Figura 1: Retardo de grupo para distintos órdenes de la función transferencia normalizada utilizando la aproximación de Bessel

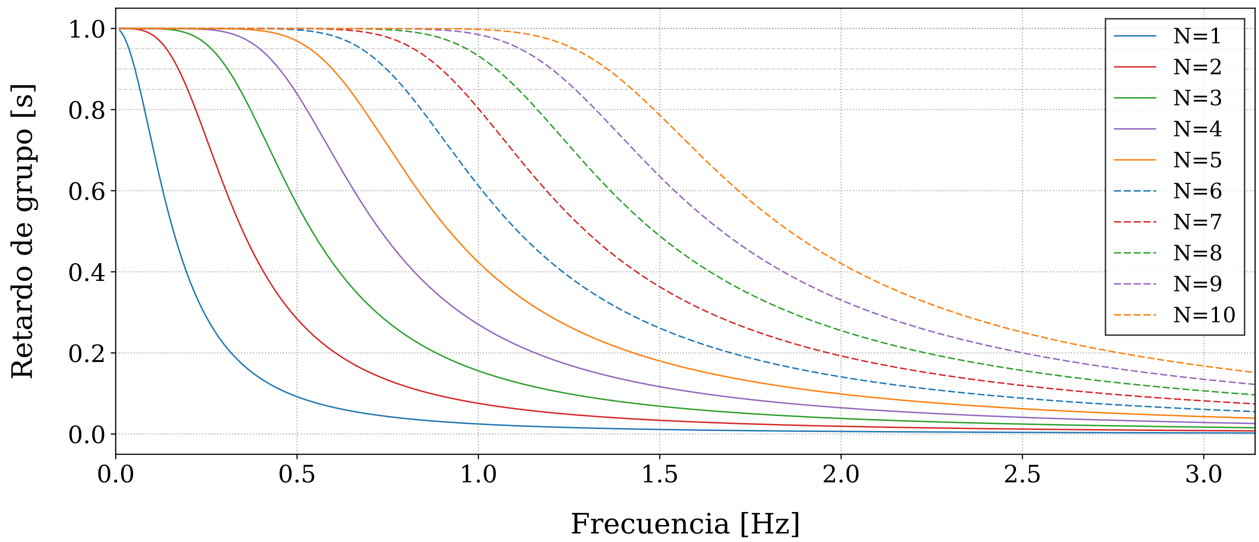


Figura 2: Módulo de la respuesta en frecuencia para distintos órdenes de la función transferencia normalizada utilizando la aproximación de Bessel

Ejercicio 3.36

Dado un filtro construido a partir de las siguientes etapas de segundo orden:

$$H_1(s) = K_1 \cdot \frac{s}{\left(\frac{s}{2\pi \cdot 925Hz}\right)^2 + \frac{s}{15{,}6 \cdot 2\pi \cdot 925Hz} + 1}$$

$$H_2(s) = K_2 \cdot \frac{s}{\left(\frac{s}{2\pi \cdot 1081Hz}\right)^2 + \frac{s}{15{,}6 \cdot 2\pi \cdot 1081Hz} + 1}$$

- Determine cuál es el tipo de filtro.
- Indique el valor de f_0.
- Analice con qué función de aproximación pudo haberse implementado.

Sección 5

Ejercicio 3.37

$H(s)$ representa la función transferencia de un filtro obtenido a partir de una función de aproximación, donde $\omega_0 = 8{,}4 \cdot \omega_z$.

$$H(s) = \frac{K\left[\left(\frac{s}{\omega_z}\right)^2 + 1\right]}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + \frac{s}{3\cdot\omega_0} + 1}$$

- Determine cuál es el tipo de filtro.
- Analice con qué función de aproximación se implementó.
- Estime el valor de K tal que la ganancia sea unitaria.
- Estime el valor de A_a de la plantilla.

Ejercicio 3.38

En la Figura 3 se muestra el PZ map de funciones transferencia implementadas a partir de distintas funciones de aproximación.

- Indique cómo agruparía las singularidades para implementar el filtro empleando etapas de, a lo sumo, segundo orden para cada aproximación.
- Determine el tipo de filtro que resulta de aplicar la transformación $T(s)$ a cada una de las funciones transferencia.

$$T(s) = 4 \cdot \left(\frac{s}{200\cdot 2\pi} + \frac{200\cdot 2\pi}{s}\right)$$

Basándose en las nuevas funciones transferencia obtenidas:

- Indique frecuencia central y ancho de banda.
- Represente gráficamente la constelación de polos y ceros en el plano complejo.
- Dado el PZ map obtenido a partir de la aproximación de Cauer, agrupe las singularidades de manera que permita implementar el filtro mediante celdas de primer y segundo orden.

Ejercicio 3.39

Dado un filtro de ganancia unitaria construido a partir de etapas de segundo orden tales que $H(s) = H_1(s)\cdot H_2(s)\cdot H_3(s)$, proponga el valor de $f_?$ más conveniente para la implementación en etapas y a partir de eso obtenga la expresión de $H(s)$.

$$H_1(s) = 0{,}4 \cdot \frac{\frac{s^2}{(2\pi\cdot 1119Hz)^2} + 1}{\left(\frac{s}{2\pi\cdot 1189Hz}\right)^2 + \frac{s}{6{,}67\cdot 2\pi\cdot 1189Hz} + 1}$$

$$H_2(s) = 0{,}4 \cdot \frac{\frac{s^2}{(2\pi\cdot f_?)^2} + 1}{\left(\frac{s}{2\pi\cdot 1000Hz}\right)^2 + \frac{s}{3{,}29\cdot 2\pi\cdot 1000Hz} + 1}$$

Dibuje para cada etapa la respuesta en frecuencia (tanto de magnitud como de fase) y la respuesta al escalón.

Link al video con la solución, accesible en la versión digital.

Ejercicio 3.40

Se requiere construir un filtro pasa-altos utilizando la aproximación de Butterworth, con los siguientes parámetros: $f_a = 5KHz$, $f_p = 20KHz$, $A_a = 50dB$ y $A_p = 2dB$.

- Calcule el orden mínimo de la función transferencia del fitro a implementar.
- Si se desnormaliza de manera tal que la atenuación en f_a sea A_a, calcule el margen porcentual de frecuencia para la banda de paso.
- Para la implementación a través de Chebyshev II, calcule el valor estable de la respuesta a un escalón de $10V$.

Ejercicio 3.41

Se busca construir un filtro pasa-altos utilizando la aproximación de Chebyshev II, donde $f_a = 4kHz$, $f_p = 8kHz$, $A_a = 40dB$ y $A_p = 3dB$.

- Calcular el menor orden posible de la función transferencia del filtro implementado.
- Si se desnormaliza de forma que la atenuación en f_p sea A_p, ¿Cuál es la frecuencia de la banda de transición a la que se cumple que la atenuación vale A_a?

Nota: Para evaluar los polinomios de Chebyshev del orden requerido en los puntos de interés se recomienda la aplicación de recursos computacionales.

Ejercicio 3.42

Se busca construir un filtro que presente una atenuación inferior a $2dB$ para las componentes de frecuencia comprendidas entre $1kHz \pm 3{,}2\pi\,\%$ y que, fuera de este intervalo, las atenúe más de $50dB$. Además se conoce que $\omega_{an} = 1{,}5\frac{rad}{s}$.

- Determine el orden mínimo de la función transferencia implementada con la aproximación de Butterworth que cumple la plantilla mencionada.
- Represente gráficamente la constelación de polos y ceros en el plano complejo.

Ejercicio 3.43

Indique cuáles de las características enumeradas en la Tabla 5.1 se corresponden con cada función de aproximación.

Característica	Butter	Cheby I	Cheby II	Cauer	Óptimo L	Bessel
Presenta oscilaciones en banda de paso						
Muestra oscilaciones en banda de atenuación						
Resulta de mínimo orden al utilizar una misma plantilla						
Resulta de mínimo orden sin oscilaciones en la banda de paso						
Presenta ceros de transmisión						
Es de orden mínimo, sin ceros de transmisión						
En un pasa-bajos, presenta mínima distorsión de fase en banda de paso						
Presenta saltos de 180° en la fase						
Para un filtro pasa-bajos, el valor de la respuesta al escalón en $t \to \infty$ varía según el orden del filtro						
Es monótona y de mínimo orden						
Es de utilidad para construir filtos de tipo rechaza banda						
Tiende a requerir etapas de muy alto Q						

Tabla 5.1: Selección de características para diferentes funciones de aproximación

Rev. 4
Enero 2025 - Juan Sbruzzi, Julieta Goldbaum, Candela Gioia, Javier Petrucci

Versionado sobre Rev. 3
Agosto 2024 - Juan Sbruzzi, Cristian Meichtry, Javier Petrucci

Consideraciones

- La entrega en términos y completa suma 1 punto adicional en el Trabajo Práctico N°4.
- Fecha de entrega establecida en el cronograma.
- El conocimiento de los contenidos abordados es obligatorio. La entrega es opcional.
- Se considerará una resolución completa y correcta cuando los resultados hayan sido verificados mediante simulación, para lo cual puede hacerse uso de la Filter Tool provista por la cátedra.

Anexo

Polinomios de Chebyshev:

$$
\begin{aligned}
T_0(x) &= 1 \\
T_1(x) &= x \\
T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\
T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \\
T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 \\
T_7(x) &= 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x \\
T_8(x) &= 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1 \\
T_9(x) &= 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x \\
&\vdots \\
T_{n+1}(x) &= 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x)
\end{aligned}
$$

Polinomios de Bessel inversos:

$$
\begin{aligned}
B_1 &= s + 1 \\
B_2 &= s^2 + 3s + 3 \\
B_3 &= s^3 + 6s^2 + 15s + 15 \\
B_4 &= s^4 + 10s^3 + 45s^2 + 105s + 105 \\
B_5 &= s^5 + 15s^4 + 105s^3 + 420s^2 + 945s + 945 \\
B_6 &= s^6 + 21s^5 + 210s^4 + 1260s^3 + 4725s^2 + 10395s + 10395 \\
B_7 &= s^7 + 28s^6 + 378s^5 + 3150s^4 + 17325s^3 + 62370s^2 + 135135s + 135135 \\
B_8 &= s^8 + 36s^7 + 630s^6 + 6930s^5 + 51975s^4 + 270270s^3 + 945945s^2 + 2027025s + 2027025
\end{aligned}
$$

Polinomios característicos L Óptimo:

$$\begin{aligned}
L_1(\omega^2) &= \omega^2 \\
L_2(\omega^2) &= \omega^4 \\
L_3(\omega^2) &= \omega^2 - 3\omega^4 + 3\omega^6 \\
L_4(\omega^2) &= 3\omega^4 - 8\omega^6 + 6\omega^8 \\
L_5(\omega^2) &= \omega^2 - 8\omega^4 + 28\omega^6 - 40\omega^8 + 20\omega^{10} \\
L_6(\omega^2) &= 6\omega^4 - 40\omega^6 + 105\omega^8 - 120\omega^{10} + 50\omega^{12} \\
L_7(\omega^2) &= \omega^2 - 15\omega^4 + 105\omega^6 - 355\omega^8 + 615\omega^{10} - 525\omega^{12} + 175\omega^{14} \\
L_8(\omega^2) &= 10\omega^4 - 120\omega^6 + 615\omega^8 - 1624\omega^{10} + 2310\omega^{12} - 1668\omega^{14} + 490\omega^{16} \\
L_9(\omega^2) &= \omega^2 - 24\omega^4 + 276\omega^6 - 1624\omega^8 + 5376\omega^{10} - 10416\omega^{12} + 11704\omega^{14} - 7056\omega^{16} + 1764\omega^{18} \\
L_{10}(\omega^2) &= 15\omega^4 - 280\omega^6 + 2310\omega^8 - 10416\omega^{10} + 27860\omega^{12} - 45360\omega^{14} + 44100\omega^{16} - 23520\omega^{18} + 5292\omega^{20}
\end{aligned}$$