Spis treści

1 Logika

1.1 Prawa logiki

1.1.1 Prawa łączności

- $(p \land q) \land r \leftrightarrow p \land (q \land r)$

- $(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
- $((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r) \leftrightarrow (p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r))$

1.1.2 Prawa przemienności

- $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$
- $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$
- $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$

1.1.3 Prawa impotentności

- $p \vee p \leftrightarrow p$
- $p \wedge p \leftrightarrow p$

1.1.4 Prawo rozdzielności

$$(p \wedge q) \vee r \leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$

1.1.5 Prawo de Morgana

$$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

1.1.6 Prawo podwójnej negacji

$$\neg\neg p \leftrightarrow p$$

1.1.7 Prawo transpozycji

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$

1.1.8 Prawo eksportacji-importacji

$$(p \wedge q) \rightarrow r \leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

1.2 Wnioskowanie

$$\frac{x_1, x_2, \ldots, x_n}{y}$$

x_n - założenia, y - teza
Wnioskowanie jest dedukcyjne jeżeli $x_1 \wedge x_2 \cdots \wedge x_n \rightarrow y$ jest tautologią.
Jeżeli wniosek wynika logicznie z przesłanek to wnioskowanie jest dedukcyjne.

1.2.1 Reguły wnioskowania

Poniższe reguły są zawsze poprawne.

$$\frac{p, p \rightarrow q}{q}$$

$$\frac{p \rightarrow q, q \rightarrow r}{p \rightarrow r}$$

$$\frac{p \rightarrow q, \neg q}{\neg p}$$

$$\frac{p \rightarrow q, q \rightarrow p}{p \leftrightarrow q}$$

1.3 Przekształcenia

$$p \to q \leftrightarrow \neg p \lor q$$

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \to q) \land (q \to p)$$

$$X \downarrow Y = \neg(x \lor y)$$

$$X \uparrow Y = \neg(x \land y)$$

1.4 Postaci normalne

APN - alternatywna postać normalna. Zbiór klauzul nad zmiennymi połączonymi operatorem alternatywy. $(p \land q) \lor (\neg p \land q)$. Jeśli w APN jest para klauzul przeciwnych to jest to anty-tautologia.

KPN - koniunkcyjna postać normalna. Zbiór klauzul nad zmiennymi połączonymi operatorem koniunkcji. $(p \lor q) \land (\neg p \lor q)$. Jeśli w KPN jest para klauzul przeciwnych to jest to tautologia.

p	q	r	APN	KPN
1	1	1	$p \land q \land r$	$\neg p \lor \neg q \lor \neg r$
1	1	0	$p \land q \land \neg r$	$\neg p \lor \neg q \lor r$
1	0	1	$p \land \neg q \land r$	$\neg p \lor q \lor \neg r$

1.5 Sekwenty

Sekwent to para zbiorów formuł logicznych powstający z normalnego zapisu algebry logicznej.

$$\begin{tikzcd}
 & & & p \lor q \to p \land q \arrow[d] & & & \\
 & & & \neg(p \lor q), p \land q \arrow[dll] \arrow[drr] & & & \\
 & \neg p, p \land q \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & \neg q, p \land q \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\neg p, p & & \neg p, q & & \neg q, p & & \neg q, q
\end{tikzcd}$$

Przy pomocy takiego drzewa można sprawdzić czy formula jest tautologią.

1.6 Kwantyfikatory

$$\forall_{A(x)} B(x) \leftrightarrow \forall_x (A(x) \to B(x))$$

$$\exists_{A(x)} B(x) \leftrightarrow \exists_x (A(x) \land B(x))$$

2 Teoria Mnogości

2.1 Zbiory

- $X \subset Y \leftrightarrow \forall x(x \in X \to x \in Y)$
- $X \cup Y \leftrightarrow \{x : x \in X \lor x \in Y\}$
- $X \cap Y \leftrightarrow \{x : x \in X \land x \in Y\}$
- $X \setminus Y \leftrightarrow \{x : x \in X \land \neg x \in Y\}$

- $A \div B = \{x : (x \in A \wedge \neg x \in B) \vee (\neg x \in A \wedge x \in B)\}$
- $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \exists_{i \in I}(x \in A_i)\}$
- $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : \forall_{i \in I}(x \in A_i)\}$

$\mathbb{U}$ - uniwersum
$A' = \mathbb{U} \setminus A$
$A \times B = \{< x, y >: x \in A \wedge y \in B\}$

2.2 Relacje

$$R^{-1} = \{< y, x >:< x, y >\in R\}$$

$$xRy \leftrightarrow < x, y >\in R$$

2.2.1 Złożenie relacji

$$R \circ S = \{< x, z >: \exists_y (xRy \wedge ySz)\}$$

Przykład:
$R = \{< 1, 2 >, < 2, 3 >\}$
$S = \{< 2, 3 >, < 3, 4 >\}$
$R \circ S = \{< 1, 3 >, < 2, 4 >\}$

2.2.2 Rodzaje relacji

- Zwrotna $\forall_{x \in A} xRx$
- Preciwzwrotna $\neg \exists_{x \in A} xRx$
- Symetryczna $\forall_{x,y \in A}(xRy \rightarrow yRx)$
- Przeciwsymetryczna $\forall_{x,y \in A}(xRy \rightarrow \neg yRx)$
- Antysymetryczna $\forall_{x,y \in A}((xRy \wedge yRx) \rightarrow x = y)$
- Przechodnia $\forall_{x,y,z \in A}((xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz)$
- Spójna $\forall_{x,y \in A}(xRy \vee yRx)$
- Słabospójna $\forall_{x,y \in A}(xRy \vee x = y \vee yRx)$

2.2.3 Relacja równoważności

Relacja równoważności to relacja która jest zwrotna, symetryczna i przechodnia. Taka relacja może mieć klasy abstrakcji $[x]_R = \{y : xRy\}$

2.2.4 Relacje porządkujące

Relację $R \subset A_2$ nazywamy relacją porządkującą na zbiorze A_1 jeżeli:

- R jest zwrotna
- R jest antysymetryczna
- R jest przechodnia

Dodatkowo ta relacja może być liniowo porządkująca jeżeli:

- R jest spójna
- R jest porządkująca

Zbiór $X \subset A_1$ jest łańcuchem w zbiorze uporządkowanym (A_1, R) jeżeli dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi $xRy \vee yRx$.

2.2.5 Zbiory uporządkowane

(X, A) to zbiór uporządkowany; X to zbiór, A to relacja porządkująca.

- Element najmniejszy a: $\forall_{x \in X}(a \leq x)$
- Element największy b: $\forall_{x \in X}(x \leq b)$
- Element minimalny a: $\forall_{x \in X}(x \leq a \to x = a)$
- Element maksymalny b: $\forall_{x \in X}(b \leq x \to x = b)$

Element największy/najmniejszy jest jedynym elementem maksymalnym/minimalnym, oraz jest jednocześnie kresem górnym/dolnym.

2.3 Kresy

Kres nie musi należeć do zbioru.

2.3.1 Kres górny

$$\alpha = \sup A \leftrightarrow \forall_{x \in A}(x \leq \alpha)$$

2.3.2 Kres dolny

$$\beta = \inf A \leftrightarrow \forall_{x \in A}(\beta \leq x)$$

2.4 Funkcje

Relacja binarna R spełniająca prawostronną jednoznaczność to funkcja.

$$\forall_{x,y,z}(xRy \land xRz \to y = z)\text{; czyli dla każdego x jest jedno y}$$

Przeciwdziedzina funkcji $f : D^*(f) = \{f(x) : x \in D(f)\}$

$$f : X \to Y \text{ jeżeli } D(f) = X \land D^*(f) \subset Y$$

Funkcja odwzorowuje zbiór X na zbiór Y jeżeli $D^*(f) = Y$

$$\forall_{x_1,x_2 \in X}(f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2) \to f \text{ jest iniekcją}$$

Iniekcja to funkcja różnowarościowa, suriekcja to funkcja odwzorowująca na zbiór, a bijekcja to iniekcja i suriekcja.
Obraz zbioru to $f[A] = \{f(x) : x \in A\} = \{y : \exists_x(x \in A \land y = f(x))\}$

$$f^{-1}[B] = \{x : f(x) \in B\}$$

2.5 Liczby naturalne

$$S(x) = x \cup \{x\}\text{- następnik zbioru}X$$

$$n \in \mathbb{N}, n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

$$0 = \emptyset, 1 = \{0\} = S(\emptyset), 2 = \{0, 1\}$$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

Zbiór X jest indukcyjny jeżeli:

- $0 \in X$
- $x \in X \to S(x) \in X$

Liczba naturalna to zbiór należący do wszystkich indukcyjnych zbiorów.

2.6 Zasada indukcji matematycznej

$$0 \in X \wedge \forall_{n \in X}(S(n) \in X) \rightarrow X = \mathbb{N}$$

$$f(n) \text{ - formuła} \wedge \forall_{f(n)}(F(S(n))) \rightarrow \forall_{n \in \mathbb{N}}(f(n))$$

2.7 Liczby całkowite

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$$

2.8 Liczby wymierne

$$\mathbb{Q} = \{x : x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$$

2.9 Porządki

2.9.1 Porządek produktowy

$$a, b \in A \times B \wedge \forall_{x_A, y_A \in A, x_B, y_B \in B}(x_A \leq_A x_B \wedge y_A \leq_B y_B) \rightarrow a \leq b$$

2.9.2 Porządek leksykograficzny

$$a, b \in A \times B \wedge \forall_{x_A, y_A \in A, x_B, y_B \in B}(x_A = x_B \wedge y_A \leq_B y_B) \rightarrow a \leq b$$

2.10 Właściwe odcinki początkowe

$(A, \leq)$ - zbiór liniowo uporządkowany. Jeżeli $X \subset A$ oraz $\forall_{x,y \in A}(x \in X \wedge y < x) \rightarrow y \in X$ to X jest właściwym odcinkiem początkowym.
Przykład:

- $A = (\{1, 2, 3, 4, 5\}, \leq)$ - zbiór liniowo uporządkowany
- $X = \{1, 2, 3\}$ - właściwy odcinek początkowy
- $Y = \{2, 3, 4\}$ - nie jest właściwym odcinkiem początkowym

Przykład:

- $A = (\mathbb{Q}, \leq)$ - zbiór liczb wymiernych
- $X = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$ - właściwy odcinek początkowy

X jest właściwym odcinkiem początkowym. Zaczyna się od $-\infty$ i kończy na 0. Jedyne elementy mniejsze od elementów z X to elementy z X.

2.11 Liczby rzeczywiste

Liczby rzeczywiste definiujemy jako niepuste właściwe odcinki początkowe w $(\mathbb{Q}, \leq)$, nie mające elementu największego.

Zatem liczby wymierne są reprezentowane przez niepuste właściwe odcinki początkowe w $(\mathbb{Q}, \leq)$, które nie mają elementu największego, ale mają kres górny.

Liczby niewymierne to liczby wymierne, ale nie mają kresu górnego.

2.12 Dobry porządek

Porządek $\leq$, który ma element najmniejszy w każdym podzbiorze niepustym, jest dobrym porządkiem. Zbiór dobrze uporządkowany można przedstawić jako serię mniejszości elementów różnych zbiorów $a_0 < a_1 < a_2 \cdots < b_0 < b_1 \ldots$

Przykładem zbioru liniowo uporządkowanego ale nie dobrze uporządkowanego jest $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{Z}$. Każdy podzbiór w $\mathbb{R}$ jest nieskończony, zatem nie da się skonstruować serii mniejszości.

Funkcja działająca ze zbioru dobrze uporządkowanego $(A, \leq)$ do zbioru dobrze uporządkowanego $(B, \leq)$ zachowuje porządek jeśli $\forall_{x \leq_A y; x,y \in A}(f(x) \leq_B f(y))$, oraz zachowuje ostry porządek jeśli $\forall_{x < y; x,y \in A}(f(x) < f(y))$.

2.13 Homomorfizmy

Jeżeli funkcja $f : A \to B$ dla zbiorów liniowo uporządkowanych $(A, \leq_A)$ i $(B, \leq_B)$ jest iniekcją i zachowuje porządek to jest to homomorfizm porządkowy. Jeżeli funkcja jest homomorfizmem porządkowym oraz bijekcją dla zbiorów uporządkowanych to jest izomorfizmem. Zbiory dla których istnieje izomorfizm są izomorficzne wobec siebie ($A \backsimeq B$). Jeżeli A jest zbiorem dobrze uporządkowanym i funkcja f zachowuje ostry porządek to $x \leq f(x)$ dla każdego $x \in A$. Zbiór dobrze uporządkowany nie jest izomorficzny z żadnym swoim właściwym odcinkiem początkowym. Jeżeli A i B są zbiorami dobrze uporządkowanymi i $A \backsimeq B$ to A i B są izomorficzne z właściwymi odcinkami początkowymi drugiego zbioru.

2.14 Aksojmat wyboru

Dla dowolnej rodziny zbiorów niepustych i parami rozłącznych istnieje zbiór zawarty w sumie tej rodziny i mający z każdym zbiorem tej rodziny dokładnie jeden element wspólny.

Ten aksojmat jest równoważny:

- Twierdzeniu, że dla dowolnej rodziny zbiorów niepustych istnieje funkcja wyboru dla rodziny
- Twierdzeniu, że dla każdego zbioru istnieje dobry porządek na tym zbiorze
- Jeżeli zbiór uporządkowany spełnia warunek łańcucha, to dla każdego łańcucha istnieje ograniczenie górne

2.15 Liczby kardynalne

Zbiór X jest równoliczby ze zbiorem Y jeżeli istnieje bijekcja $f : X \to Y (X \backsim Y)$.

$$\overline{\overline{X}} = |X| = \text{liczba elementów zbioru } X$$

Zbiór Y jest skończony, jeżeli jest równoliczby z jakąś liczbą naturalną: $\exists_{x \in \mathbb{N}}(Y \backsim x)$. Zbiór skończony nie jest równoliczny z żadnym ze swoich podzbiorów.

$$\aleph_0 = |\mathbb{N}| = \aleph_0 + \aleph_0 = \text{liczba liczb naturalnych}$$

Moc zbioru to $\aleph_0$ wtedy i tylko wtedy jeżeli X jest zbiorem wszystkich wyrazów pewnego ciągu nieskończonego bez powtórzeń. Zbiór jest przeliczalny jeżeli jest skończony lub mocy $\aleph_0$. Zbiór jest niepusty i przeliczalny wtedy i tylko wtedy gdy jest zbiorem wszystkich wyrazów pewnego ciągu nieskończonego.

Zbiór $\mathbb{R}$ jest nieprzeliczalny.

$$\mathfrak{c} = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c} + \mathfrak{c} > \aleph_0$$

$$|X| \leq |Y| \leftrightarrow \exists_Z (Z \subset X \land Z \backsim X)$$

2.15.1 Twierdzenie Cantora

$P(X)$ - zbiór potęgowy X

$$|X| < |P(X)|$$

2.16 Twierdzenie Cantora-Bernsteina

$$|X| \leq |Y| \land |X| \geq |Y| \to |X| = |Y|$$

$$|X| + |Y| = |X \cup Y|$$

$$|X| \cdot |Y| = |X \times Y|$$

2.17 Twierdzenie Hessenberga

$$X \times X \backsim X$$

dla każdego nieskończonego zbioru X

$$\aleph_{n+1} > \aleph_n, n \in \mathbb{N}$$

2.18 Hipoteza continuum

$$\mathfrak{c} = \aleph_1$$

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

Udowodniono, że ta hipoteza jest niezależna od aksjomatów teorii mnogości.