

1 Wstęp

Przydatne wzory w jednym miejscu:

- Pęd ciała o masie m i prędkości v :

$$p = mv$$

- Energia ciała o masie m i pędzie p :

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$$

- Stała plancka i jej **evil twin**

$$h = 2\pi\hbar$$

- Prędkość fali

$$v = \lambda\nu$$

1.1 Algebra

Z jakiegoś powodu dużączęścią zajęć była algebra, bo fizycy nie mieli dedykowanego przedmiotu, więc tu przypomnienie bo pewno algebra będzie sporączęcią kolokwium <3.

1.1.1 Macierze

$$A_{ij} = A_{ji}^T$$

$$\overline{a + bi} = a - bi$$

$$A^\dagger = \overline{A}^T$$

- Symetryczna $A^T = A$
- Ortogonalna $A^T \cdot A = A \cdot A^T = I$
- Hermitowska $A^\dagger = A$
- Normalna $A^\dagger \cdot A = A \cdot A^\dagger$
- Unitarna $A^\dagger \cdot A = A \cdot A^\dagger = I$
- Osobliwa $\det A = 0$

1.1.2 Wartości i wektory własne

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$(A - \lambda_i I)v_i = 0$$

1.1.3 Notacja Diraca

Wektor v , nazwany a w przestrzeni V (domyślnie \mathbb{C}^n) można zapisać jako:

$$|a\rangle = v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

$$\langle a| = |a\rangle^\dagger$$

$$\langle a|b\rangle = \langle a|\cdot|b\rangle = \sum_i \overline{a_i} b_i$$

$$|a\rangle\langle b| = |b\rangle \times \langle a|$$

1.1.4 Rozkład spektralny

Dla każdej macierzy normalnej A istnieje jej rozkład spektralny, czyli:

$$A = \sum_i \lambda_i P_i = \sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i|$$

1.1.5 Diagonalizacja

$$A = UDU^{-1}$$

Dla macierzy normalnej $U^{-1} = U^\dagger$. U to macierz złożona z wektorów własnych A . D to macierz diagonalna, gdzie wszystkie wartości występujące na przekątnej to wartości własne A , lub inaczej, jest to macierz zapisana w bazie swoich wektorów własnych.

$$f(A) = U^\dagger \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{bmatrix} U$$

Magicznym aspektem macierzy zdiagonalizowanych, lub szerzej, tych zapisanych w bazie swoich wektorów własnych, jest to, że na ich diagonali są ich wartości własne.

1.1.6 Operacje

$$\text{tr}(A) = \sum_i \lambda_i = \sum_i A_{ii}$$

$$\det(A_{2 \times 2}) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$$

$$[A, B] = AB - BA$$

2 Eksperyment Younga - dwu-szczelinowy

W eksperymencie mierzymy zachowanie elektronów względem dwóch dziur i czujnika ruchomego na wzdłuż osi x . Mierzymy prawdopodobieństwo, tego, że czujnik odbierze elektron, jako $P_{12}(x)$. Równocześnie rozróżniamy $P_1(x)$ oraz $P_2(x)$; prawdopodobieństwa, tego, że czujnik odbierze elektron przy jednej z dziur zasłoniętej.

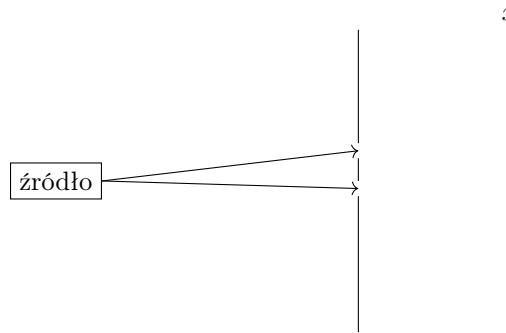


Diagram 1: Ilustracja eksperymentu

2.1 Cząstkowa interpretacja

Jeśli elektron zachowałby się jako cząstka, to spodziewalibyśmy się, że $P_{12}(x) = P_1(x) + P_2(x)$. Wnioskiem takiej obserwacji byłoby, że cząstki elektronów nie mają na siebie wpływu; nie zachodzi interferencja. Co więcej, elektron zawsze przechodzi jedną dziurą.

2.2 Falowa interpretacja

Jeśli elektron zachowałby się jako fala, to spodziewalibyśmy się przeciwnego wyniku. Fale nie nakładają się na siebie tak czysto. Zachodziłyby interferencja; fale w zależności od fazy albo by się na siebie nakładały, albo niwelowały. Co więcej ze względu na działanie fal, elektron by przechodził przez obydwie dziury jednocześnie. $P_{12}(x) = |\phi_1(x) + \phi_2(x)|^2$, $P_1 = |\phi_1(x)|^2$,

2.3 Wynik

Eksperyment pokazuje, że mimo tego, że detektor odbiera elektrony w dyskretnych grupach, to P_{12} zachowuje się jakby elektrony były falami. Zatem elektron zachowuje się "trocę jak cząstka trochę jak fala".

Obserwowanie elektronów, które przechodzą przez szczeliny, powoduje, że przestają zachowywać się jak fale, a zaczynają zachowywać się jak cząstki. Zniknie interferencja, bo wiemy, że elektron przechodzi przez jedną z dziur, a nie przez obydwie.

Na podstawie tego eksperymentu, opracowano zasadę niepewności Heisenberga. W ramach eksperymentu, oznacza ona, że nie da się zaprojektować detektora elektronów, który nie wpływa na elektrony. Detektor, czy to pozycji czy pędu, ma pewną dokładność i pomiar tej dokładności wpływa na mierzoną cząstkę. Zasada niepewności nie wpływa na życie na naszej skali, ponieważ długości fali obiektów w naszej skali są bardzo małe, oraz te obiekty są obserwowane ciągle, więc nie ma możliwości, żeby zachowywały się jak fale.

2.4 Słabe źródło światła

Z słabym źródłem światła, możemy się spodziewać pojedynczych fotonów, które trafiają w losowe punkty na ekranie. Po dłuższym czasie, możemy zauważyć, że rozkład tych punktów przypomina rozkład interferencyjny, który obserwujemy w przypadku silnego źródła światła. To dowodzi istnienia fotonów.

2.5 Wyprowadzenia

Ten eksperyment pozwala nam wyprowadzić następujące właściwości światła o danej długości fali λ i częstości ω :

$$\begin{aligned} k &= \frac{2\pi}{\lambda} \\ p &= \frac{2\pi\hbar}{\lambda} = \frac{h}{\lambda} = k\hbar \\ E_f &= \hbar\omega = pc = h\nu \end{aligned}$$

Zatem też: $m_f = 0$, $v_f = c$.

2.6 Światło

Światło o danym λ i ω składa się z dyskretnych cząstek, których dystrybucja jest dana przez interferencję fali. Nie jest falą, ale działa jak fala. Charakterystyka fali określa prawdopodobieństwo, tego że foton padnie w danym miejscu. Co więcej, foton wie czy szczelina jest otwarta w eksperymencie dwu-szczelinowym, co ma sens tylko jeśli jest falą. Należy też wspomnieć, że foton nie może się zatrzymać. Jako, że nie ma masy, to pęd i jego energia są zależne od jego prędkości. Gdyby się zatrzymał, to jego energia i pęd byłyby równe zero, co jest niemożliwe z zachowania energii.

2.7 Fala de Broglie

Jest to generalizacja koncepcji światła wychodzącej z eksperymentu Younga. Każda fala, która na skali makroskopicznej zachowuje się jak fala, lecz tak naprawdę jest masą dyskretnych cząstek jest falą de Broglie, lub falą materii.

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Elektron jak i foton są falami de Broglie, ale foton jest falą de Broglie o masie zerowej.

3 Zasada niepewności

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

gdzie, na przykład, $\Delta x = \sigma(x)$. Istotna jest jednak obserwacja, że dla $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta p \rightarrow \infty$, i na odwrót.

4 Efekt Fotoelektryczny

W wyniku promieniowania fotonami, elektrony atomów pierwiastka są wyrzucane z atomu. Efekt ten jest wykorzystywany w praktyce w napędzaniu fotodiod i fotokomórek.

Elektrony w metalu znajdują się w studni potencjału, głębokości W , odpowiadającej pracy wyjścia. Foton padając na materiał powoduje wyrzucenie elektronu naładowanego U z energią kinetyczną $E_{k\max}$. U nazywamy potencjałem hamującym. W wyniku tego procesu utracona zostaje energia w postaci pracy wyjścia W :

$$E_{k\max} = E_f - W = eU$$

Częstością progową nazywamy najniższą częstość ω_0 , dla której $E_{k\max} = 0$.

Einstein w 1905 sugerował, istnienie fotonów, jako cząstek światła, aby wyjaśnić efekt fotoelektryczny. Rzeczywiście, w formalizmie powyżej ma to sens.

5 Zjawisko Comptona

W zjawisku Comptona foton padający na elektron zmienia kierunek i częstość. Efekt ten jest wykorzystywany w praktyce w analizie struktury atomów i molekuł.

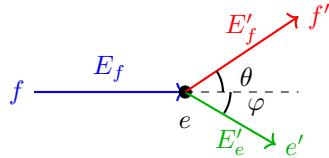


Diagram 2: Ilustracja zjawiska Comptona. Foton f ma długość fali λ .

W zjawisku zachowany jest pęd oraz energia, co wraz z równaniem Comptona:

$$(\lambda' - \lambda) \frac{m_e c}{h} = 1 - \cos \theta$$

Pozwala nam w istocie wyprowadzić wszystkie niewadome w zjawisku.

$$p_f + p_e = p'_f + p'_e \Rightarrow \begin{cases} \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'} \cos \theta + p'_e \cos \varphi \\ 0 = \frac{h}{\lambda'} \sin \theta + p'_e \sin \varphi \end{cases}$$

$$E_f + E_e = E'_f + E'_e \Rightarrow \frac{hc}{\lambda} + m_e c^2 = \frac{hc}{\lambda'} + E'_e$$

Efekt Comptona, opisany w 1927 roku, jest dowodem na istnienie fotonu.

6 Stan cząstki

Z powyższych sekcji wiemy, że cząstka w mechanice kwantowej nie ma stricte określonej pozycji ani pędu. Wynika to z zasady niepewności Heisenberga. W mechanice klasycznej cząstki opisujemy parą (x, p) , czym opisujemy w mechanice kwantowej? Mamy funkcję falową $\psi(x)$, gdzie $P(x) = |\psi(x)|^2$ opisuje prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w x .

Elektron w okolicy atomu 1 jest opisany przez funkcję falową $\psi_1(x)$. Prawdopodobieństwo tego, że elektron jest w miejscu x obok atomu 1 opisuje analogicznie $P_1(x) = |\psi_1(x)|^2$. Teraz wyobraźmy sobie, że dodajemy drugi atom

2 i nie wiemy obok którego jest elektron. Na podstawie pomiarów możemy określić, czy pomiary odpowiadają $P_1(x)$, czy $P_2(x) = |\psi_2(x)|^2$.

Co jeśli elektron może być między cząstkami, czyli nie zakładamy, że należy do jednej cząstki? Wtedy mówimy, że elektron jest w stanie $\psi_{1+2}(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x)$. $P_{1+2} = |\psi_{1+2}|^2$.

6.1 Pomiar

Do momentu pomiaru, elektron w naszym przykładzie **nie ma pozycji**. Założenie, że jest obok jednej cząstki jest jak założenie, że cząstka przeszła przez jeden otwór w eksperymencie Younga. Prawdopodobieństwo w mechanice klasycznej i kwantowej działają zupełnie inaczej. W mechanice klasycznej cząstki mają określony zawczasu stan. Pomiar, wykonany w danym czasie uzyska zawsze jeden wynik. Identyczny pomiar wykonany w mechanice kwantowej może uzyskać różne odpowiedzi.

Można to sobie wyobrazić w następujący sposób. W mechanice klasycznej, prawdopodobieństwo $P(x)$ jest ewaluowane a priori. Mechanika klasyczna jest deterministyczna i znając (x, p) nie muszę nawet robić pomiarów. W mechanice kwantowej $P(x)$ jest ewaluowane w czasie rzeczywistym. Mechanika kwantowa nie jest deterministyczna.

6.2 Funkcja

$P(x) = |\psi(x)|^2$ musi być całkowalna po całej powierzchni. Prawdopodobieństwo musi być skończone w końcu. Są od tej zasady wyjątki, szczególnie cząstki, których całka rośnie wraz z rozmiarem wszechświata.

Dla cząstki z określonym pędem p :

$$\psi_p(x) = A \exp\left[\frac{ipx}{\hbar}\right]$$

A to czynnik normalizujący, wychodzący z konieczności $1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_x(x)|^2 dx$. Dla nieskończonego wszechświata nie ma to sensu, bo $1 = |A|^2 \cdot \infty$. Zatem zakładamy skończony wszechświat o obwodzie L :

$$\psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \exp\left[\frac{ipx}{\hbar}\right]$$

6.3 Warunek kwantyzacji

Ponieważ wszechświat jest mniej więcej kołem, to funkcja falowa może być parametryzowana przez kąt θ . W takiej postaci:

$$\psi(\theta) = \psi(\theta + 2\pi)$$

Nazywamy to warunkiem jednej wartości funkcji falowej.

Rozważmy teraz ten warunek w ψ_p :

$$P(x) = |\psi_p(x)|^2 = \frac{1}{\sqrt{L}} \exp\left[\frac{ipx}{\hbar}\right] \frac{1}{\sqrt{L}} \exp\left[-\frac{ipx}{\hbar}\right] = \frac{1}{L}$$

Po nałożeniu warunku jednej wartości falowej, otrzymujemy:

$$\psi_p(x) = \psi_p(x + L) = \psi_p(x) \exp\left[\frac{ipL}{\hbar}\right]$$

Zatem $\exp\left[\frac{ipL}{\hbar}\right] = 1$. Z własności \exp można wyprowadzić, że:

$$\frac{pL}{\hbar} = 2\pi n$$

W ten sposób otrzymujemy warunek kwantyzacji:

$$p_n = \frac{n\hbar}{L}$$

$$\psi(x) = \sum_p A(p) \psi_p(x)$$

7 Model Bohra

W modelu atomu Bohra, elektron porusza się wokół jądra wokół jednej z dyskretnych orbit. To też oznacza, że energia elektronu jest dyskretna lub zkwantowana.

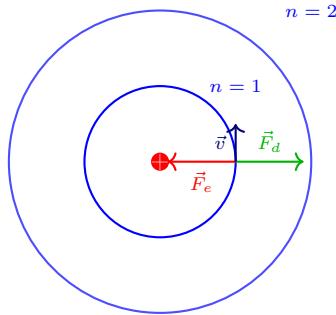


Diagram 3: Model Bohra atomu

Elektron na orbicie utrzymuje się w wyniku siły elektrostatycznej między elektronem a jądem.

$$\frac{mv^2}{r} = k \frac{e^2}{r^2}$$

$$L = mvr = n\hbar$$

Dla dowolnego ciała na orbicie:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

gdzie T jest czasem okresu orbity. Energie potencjalną można wyznaczyć z pola elektrycznego.

$$E_p = 2E_k = k \frac{e^2}{r}$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

7.1 Nieskończanie głęboka studnia potencjału

Istnieje studnia potencjału. W zakresie $x \in (0, L)$ cząstka może się poruszać swobodnie, potencjał jest zerowy. Poza tym obszarem potencjał jest nieskończoność duży. Długość studni (L) musi być równa całkowitej wielokrotności połowy długości fali:

$$L = n \frac{\lambda}{2}$$

Trzeba też wykorzystać własności fali de Broglie ($\lambda = \frac{h}{p}$) aby uzyskać:

$$p_n = \frac{nh}{2L}$$

Postulat Bohra:

$$\oint pdq = nh$$

7.2 Ciało doskonale czarne

Ciało doskonale czarne, to koncept fizyczny, w którym rozważamy zachowanie się energii, temperatury i promieniowania w doskonale czarnej wnęce. Założenie jest takie, że ciało ma nie dopuścić do powrotnej emisji promieniowania.

W ciele doskonale czarnym zakłada się, że liczba modów oscylacyjnych jest dana wzorem:

$$N(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}d\nu$$

Wynika to z $\nu = \frac{c}{\lambda}$ oraz $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. Gęstość energii na jednostkę częstotliwości wyraża się:

$$u(\nu, T) = N(\nu)\langle E \rangle$$

7.2.1 Katastrofa w ultrafiolecie

W klasycznej teorii z zasady ekwipartycji energii wynika, że średnia energia przypadająca na jeden stopień swobody układu oscylacyjnego jest równa:

$$\langle E \rangle = k_B T$$

Podstawienie $\langle E \rangle = k_B T$ do $u(\nu, T)$ daje nam wzór Rayleigha-Jeansa na gęstość energii na jednostkę częstości. Ten wzór jest o tyle słaby, że całka po całym zakresie ν daje nam nieskończoną energię, co jest nonsensem. Ten fenomen został nazwany katastrofą w ultrafiolecie.

7.2.2 Wzór Plancka

Planck rozwiązał problem z wzorem Rayleigha-Jeansa, wprowadzając inną definicję $\langle E \rangle$. Podstawowym założeniem Plancka jest, że energia pojedynczego oscylatora jest zkwantowana.

$$E_n = nh\nu$$

$$\langle E \rangle = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

8 Obserwacje

Wyobraźmy sobie, że mamy układ, w którym możemy powiedzieć, że zachodzi superpozycja między dwoma stanami. Czyli; funkcja falowa $\psi(x)$ układu jest sumą dwóch funkcji falowych $\psi_1(x)$ i $\psi_2(x)$, które odpowiadają dwóm różnym stanom układu.

$$\psi(x) = A(p_1)\psi_{p_1}(x) + A(p_2)\psi_{p_2}(x)$$

W tym zapisie $A(p)$ to stałe prawdopodobieństwa, które są związane z prawdopodobieństwem znalezienia cząstki w stanie p . p_1 i p_2 to dwa dozwolone stany pędu w tym przykładzie.

Pomiar p w stanie $\psi(x)$ może dać wynik p_1 lub p_2 . Relatywne prawdopodobieństwo uzyskania p_1 jest równe $|A(p_1)|^2$. W dt odcinku czasu po pomiarze, układ jest w stanie $\psi_p(x)$.

Fourier udowodnił, że nie istnieją inne funkcje falowe, które spełniają warunek jednej wartości, niż te, które są liniową kombinacją $\psi_p(x)$.

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_n A(p_n)\psi_{p_n}(x), \quad p_n = \frac{n\hbar}{L} \\ A(p_n) &= \int_0^L \psi(x)\psi_{p_n}^*(x)dx \end{aligned}$$

8.1 Przykład

Niech \mathcal{A} to zmienna losowa, i α_n to dozwolone wartości. Niech $\psi_{\alpha_n}(x)$ opisuje stan układu, w którym $\mathcal{A} = \alpha_n$. Matematyka nam mówi, że $\psi(x)$ może być zapisana jako kombinacja liniowa funkcji ψ_{α_n} , a fizyka kwantowa nam mówi, że $P(\mathcal{A} = \alpha_n) = |A(\alpha_n)|^2$.

Możemy zapisać tą kombinację liniową jako wektor w przestrzeni Hilberta, czyli:

$$|\psi\rangle = \sum_n A(\alpha_n) |\alpha_n\rangle$$

W tej notacji, $|\alpha_n\rangle$ to wektor stanu, który odpowiada pomiarowi $\mathcal{A} = \alpha_n$.

8.2 Algebra

Pomiar L , wyrażony macierzą, może przyjąć wartości zgodne z jego wartościami własnymi. Z reguły, poprzez $|L = \lambda\rangle$ zapisuje się wektor własny stanu (macierzy) L , odpowiadający wartości własnej λ .

Wartość oczekiwana operatora O w stanie $|L = \lambda\rangle$ jest równa:

$$\langle O \rangle = \langle L = \lambda | O | L = \lambda \rangle$$

ta zależność jest prawdziwa, nawet dla transformacji, np.: $O = O'^2$.

Jeśli założymy, że ΔO , jest określona przez odchylenie standardowe (σ), to:

$$\Delta O = \sqrt{\langle O^2 \rangle - \langle O \rangle^2}$$

Prawdopodobieństwo wystąpienia stanu (wektora) własnego $|O = \psi\rangle$ operatora O w stanie $|L = \lambda\rangle$, jest dane wzorem:

$$P(|O = \psi\rangle) = |\langle O = \psi | L = \lambda \rangle|^2$$

W stanie $|\psi\rangle$ w bazie L , zmierzyliśmy L' i uzyskaliśmy wartość λ . Dla takiego pomiaru możemy określić podprzestrzeń L , odpowiadający stanom, które mogły doprowadzić do wyniku. Taką podprzestrzeń określamy:

$$\Pi = \sum_{\lambda_i: \lambda_i^2 = \lambda} |L = \lambda_i\rangle \langle L = \lambda_i|$$

Projekcja $|\psi\rangle$ na Π daje nam stan po pomiarze $|\psi'\rangle$.

$$|\psi'\rangle = \Pi |\psi\rangle$$

$$P(L' = \lambda) = \langle \psi | \psi' \rangle$$

9 Równanie Schrödingera

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H |\psi\rangle$$

gdzie H to hamiltonian układu (dający energię układu), a $\psi(t)$ to stan w czasie.