

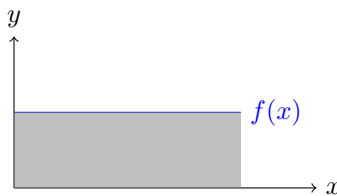
Spis treści

0	Wstęp	1
0.1	Całki	1
1	Kinematyka	2
1.1	Wielkości średnie i chwilowe	2
1.2	Ruch	2
1.3	Ruch w wielu wymiarach	2
1.4	Ruch po okręgu	2
2	Siły	3
2.1	Prawa Newtona	3
2.2	Ciążenie powszechne	3
2.3	Tarcie	3
2.4	Popęd	3
3	Energia	3
3.1	Zasada zachowania energii	4
3.2	Tarcie i energia	4
4	Dynamika układów wielu ciał	4
4.1	Środek masy	4
4.2	Zasada zachowania pędu	4
4.3	Zderzenia	4
5	Obroty	4
5.1	Bryła sztywna	4
5.2	Przyspieszenie kątowe	5
5.3	Bezwładność, pęd i energia	5
5.4	Moment bezwładności	5
5.5	Toczenie się	5

0 Wstęp

0.1 Całki

Całki to operacje odwrotne do pochodnych. Dla funkcji $f(x)$ całka oznaczona to pole pod wykresem funkcji $f(x)$ na przedziale $[a, b]$. Pozwalają nam obliczyć pole pod krzywą, a także sumę nieskończenie wielu wartości funkcji.



$$f(x) = 1, \quad \int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 3 dx = [x]_0^3 = 3 - 0 = 3$$

albo, o wiele prościej:

$$\int_0^3 f(x) dx = 3 \cdot 1 = 3$$

Naturalnie nie zawsze możemy obliczyć całkę oznaczoną w ten sposób. Wtedy musimy posłużyć się bardziej zaawansowanymi metodami.

1 Kinematyka

Kinematyka to nauka o ruchu ciał.

1.1 Wielkości średnie i chwilowe

Wielkości średnie, to takie których doświadcza ciało w czasie Δt . Z kolei wielkości chwilowe, to takie które opisują ciało w danym momencie. Idealnym przykładem jest prędkość. $v(t)$ to prędkość chwilowa, a $v_{\Delta t}$ to prędkość średnia.

1.2 Ruch

Ruch ciała można opisać przy pomocy dwóch wielkości. Prędkości chwilowej (v), oraz przyspieszenia chwilowego (a).

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$v(t) = v_0 + a(t) \cdot t = v_0 + \int a(t) dt$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'$$

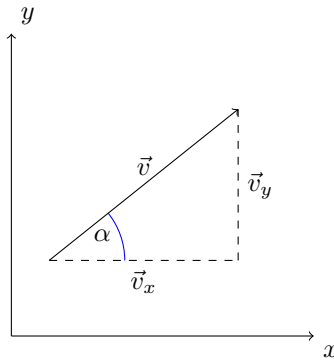
Dla pozycji ciała x mamy:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$\Delta x = s = \int v(t) dt$$

1.3 Ruch w wielu wymiarach

Aby opisać ruch w $n \in \mathbb{N}$ wymiarach, potrzebujemy po prostu n wymiarowych wektorów. Dla ruchu w dwóch wymiarach mamy:



$$\vec{v}_x = |\vec{v}| \cos \alpha, \quad \vec{v}_y = |\vec{v}| \sin \alpha$$

1.4 Ruch po okręgu

Dla ruchu po okręgu mamy:

$$a = \frac{v^2}{r}$$

Dla prędkości kątowej ω mamy:

$$\omega = \frac{\Delta \phi}{\Delta t}$$

gdzie ϕ to kąt ruchu po okręgu.

2 Siły

Miara wielkości oddziaływania ciał na siebie to siła.

$$F = m \cdot a$$

Dla siły grawitacyjnej działającej na ciało o masie m pod kątem α do osi x mamy:

$$F_g = m \cdot g \cdot \sin \alpha$$

2.1 Prawa Newtona

1. Ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym, jeżeli na nie nie działa żadna siła. $\sum F = 0 \rightarrow \Delta v = 0$.
2. Jeżeli na ciało działa siła, to ciało porusza się z przyspieszeniem proporcjonalnym do siły i odwrotnie proporcjonalnym do masy ciała.
3. Jeżeli ciało działa na inne ciało siłą, to drugie ciało działa na pierwsze siłą o tej samej wartości, ale przeciwnie skierowaną.

2.2 Ciężenie powszechne

Każda para ciał we wszechświecie oddziałuje na siebie siłą grawitacyjną.

$$F_g = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

gdzie G to stała grawitacyjna, m_1 i m_2 to masy ciał, a r to odległość między nimi.

2.3 Tarcie

Tarcie to siła przeciwna kierunku ruchu ciała. Wyróżniamy tarcie statyczne i kinetyczne. Tarcie statyczne oddziałuje na ciała gdy te nie poruszają się, a tarcie kinetyczne gdy ciała poruszają się. W pewnym sensie tarcie statyczne określa siłę potrzebną do wzruszenia ciała, a tarcie kinetyczne to jaką siłę trzeba utrzymać aby ciało poruszało się z daną prędkością.

2.4 Popęd

$$J = F \cdot \Delta t$$

3 Energia

Energia to miara zdolności ciała do wykonywania pracy. Energia kinetyczna to energia którą ciało posiada dzięki swojemu ruchowi, a energia potencjalna to energia którą ciało posiada dzięki swojemu stanowi.

$$E_K = \frac{mV^2}{2}$$

$$W = E_{K1} - E_{K0} = \Delta E_K = F \cdot d = \int F(x)dx$$

Wyróżniamy energie potencjalną grawitacyjną, związaną z wysokością ciała nad pewnym ustalonym punktem.

$$E_p = mgh$$

Oraz energię potencjalną sprężystości sprężyny:

$$E_p = \frac{1}{2}kd^2$$

gdzie k to stała sprężystości, a d to odkształcenie sprężyny.

3.1 Zasada zachowania energii

W układzie izolowanym energia jest stała. Energia nie może zostać ani stworzona, ani zniszczona.

$$E_{t=0} = E_{t=t}$$

3.2 Tarcie i energia

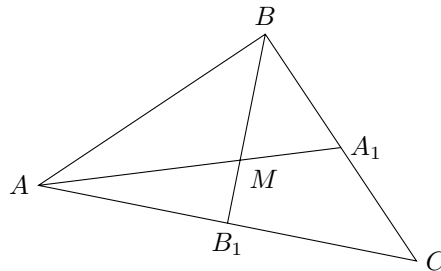
Praca siły tarcia jest zawsze ujemna, ponieważ działa ona przeciwnie do kierunku ruchu ciała. Obecność tarcia powoduje, że energia kinetyczna ciała maleje.

4 Dynamika układów wielu ciał

Układy ciał to zbiory ciał, które oddziałują na siebie. Wewnątrz układu ciała mogą oddziaływać na siebie siłami wewnętrznymi, a na zewnątrz siłami zewnętrznymi. W układzie izolowanym suma sił wewnętrznych jest równa zero.

4.1 Środek masy

Środek masy to punkt, w którym można zlokalizować całą masę układu. Jego położenie w relacji do ciał w układzie może mieć wpływ na ruch układu. Dla równej dystrybucji masy środek masy znajduje się w środku układu. Np.: dla trójkąta środek masy znajduje się w punkcie przecięcia środkowych.



Dla układu n ciał środek masy to będzie ważona średnia położenia ciał.

4.2 Zasada zachowania pędu

$$p = m \cdot v$$

W izolowanym układzie pęd jest stały.

$$p_{t=0} = p_{t=t}$$

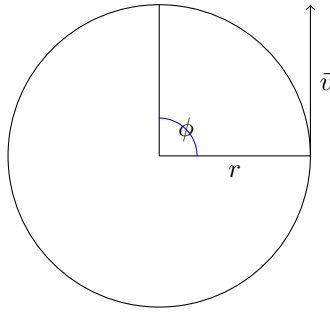
4.3 Zderzenia

Zderzenia to procesy w których ciała zmieniają swoje prędkości. Rozróżniamy zderzenia sprężyste, w których energia kinetyczna jest zachowana, oraz niesprężyste, w których energia kinetyczna nie jest zachowana.

5 Obroty

5.1 Bryła sztywna

Bryła sztywna to ciało, które zachowuje swoją formę podczas ruchu.



5.2 Przyspieszenie kątowe

$$\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$\int \alpha dt = \int d\omega$$

$$F_c = m \cdot a_c = m \cdot r \cdot \omega^2$$

gdzie a_c to przyspieszenie dośrodkowe, a r to promień obrotu. Dla obiektu o długości l i jednorodnym rozłożeniu masy to $r = \frac{l}{2}$.

$$\text{rpm} = \frac{2\pi}{60} \text{ rad/s}$$

5.3 Bezwładność, pęd i energia

$$I = \sum m_i r_i^2$$

czyli suma momentów bezwładności wszystkich punktów materialnych w ciele. Moment bezwładności wyraża opór ciała na zmianę ruchu obrotowego.

Moment pędu:

$$L = I \cdot \omega$$

Moment siły:

$$\tau = \frac{dL}{dt}$$

5.4 Moment bezwładności

Moment obrotowy:

$$\tau = I \cdot \alpha = I \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$W = \frac{I\omega^2}{2}$$

5.5 Toczenie się

Energia kinetyczna ruchu postępowego:

$$E_K = \frac{mV^2}{2}$$

Energia kinetyczna obrotu:

$$E_K = \frac{I\omega^2}{2}$$