

Spis treści

1	Złożoność obliczeniowa	2
1.1	Dodawanie	2
1.2	Mnożenie	2
1.3	Potęgowanie	2
1.4	Dzielenie	2
1.5	Modulo	2
1.6	Znajdowanie odwrotności	2
2	Struktury algebraiczne	2
2.1	Podgrupa	2
2.2	Generatory	3
2.3	Warstwy	3
2.4	Homomorfizmy	3
2.5	Symbol Lagrange’a	3
2.6	Ciało p-elementowe	3
2.7	Krzywe eliptyczne	4
2.7.1	Twierdzenie Hesse’go	4
2.7.2	Dodawanie	4
2.7.3	Potęgowanie	4
2.7.4	Odwracanie	4
2.7.5	Element Neutralny	4
2.7.6	Generowanie krzywej	4
2.7.7	Generowanie punktu	5
3	Szyfr Shannona	5
3.1	Szyfr XOR	5
3.2	Bezpieczeństwo doskonałe	5
4	Problemy	5
4.1	Problem logarytmu dyskretnego (DL)	5
4.2	Problem DDH	5
4.3	CDH	6
5	Schematy	6
5.1	Protokół DH	6
5.2	Schemat szyfrowania z kluczem publicznym	6
6	Ataki	6
6.1	Man-in-the-middle	6
6.2	Bezpieczeństwo semantyczne	7
6.3	Atak CDA	7
7	RSA	7
7.1	Definicja	8
7.2	Trudność problemu	8
7.3	Przykład	8
8	Funkcja Hashująca	8
9	ElGamal	8
10	DES	8
10.1	Enkrypcja	9
10.2	Generowanie kluczy	9
10.3	Funkcja F (Feistel)	9
10.4	Bezpieczeństwo	9

1 Złożoność obliczeniowa

1.1 Dodawanie

Dodanie dwóch liczb binarnych a i b o długości n ma złożoność $O(n)$, lub lepiej $O(\log \max(a, b))$.

1.2 Mnożenie

Mnożenie dwóch liczb binarnych a i b o długości n ma złożoność $O(n^2)$, lub lepiej $O(\log^2 \max(a, b))$.

1.3 Potęgowanie

Potęgowanie liczby a do potęgi b ma złożoność $O(\log^b a)$.

1.4 Dzielenie

Dzielenie liczby a przez b ma złożoność $O(n^2)$.

1.5 Modulo

Modulo liczby a przez b ma złożoność $O(n^2)$.

1.6 Znajdowanie odwrotności

To zależy od grupy, ale dla a w przypadku Z_n wymaga obliczenia $n - a$, czyli $O(\log \max(a, n))$. W przypadku Z_n^\times wymaga użycia rozszerzonego algorytmu Euklidesa. Ten wykonuje w najgorszym przypadku a iteracji, więc złożoność wynosi $O(a \log^2 \max(a, n))$.

2 Struktury algebraiczne

1. $\forall_{a,b \in G} a * (b * c) = (a * b) * c$

2. $\forall_{a,b \in G} a * b = b * a$

3. $\exists_{e \in G} \forall_{a \in G} a * e = a$

4. $\forall_{a \in G} a^{-1} = e$

- półgrupa: 1
- monoid: 1, 3
- grupa: 1, 3, 4
- grupa abelowa: 1, 2, 3, 4

Zawsze istnieje tylko jeden element neutralny operacji. Rzędem grupy jest moc zbioru G .

$$\varphi(n) = |\{a \in \mathbb{Z}_n : \gcd(a, n) = 1\}|$$

2.1 Podgrupa

Niech H będzie podgrupą grupy G . Wtedy:

$$\forall_{a,b \in H} a * b \in H$$

$$\forall_{a \in H} a^{-1} \in H$$

Na przykład, dla $\mathbb{Z}_{10} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $H = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ jest podgrupą grupy \mathbb{Z}_{10} .

2.2 Generatory

$$\langle g \rangle = \{g^k : k \in \mathbb{Z}\}$$

Grupa cykliczna, to grupa, która posiada co najmniej jednoelementowy zbiór generatorów. $\exists_{g \in G} \langle g \rangle = G$

2.3 Warstwy

Dla podgrupy H grupy G , warstwę lewostronną H wyznaczoną przez $a \in G$ jest zbiór:

$$\begin{cases} a + H = \{a + h : h \in H\} \\ aH = \{ah : h \in H\} \end{cases}$$

Warstwy są identyczne, albo rozłączne. Warstwy aH i bH są sobie równe kiedy $a^{-1}b \in H$. Suma mnogościowa warstw jest równa grupie G . Indeks podgrupy H w grupie G ($G : H$) nazywamy moc zbioru warstw względem podgrupy H .

$$G : H = \frac{|G|}{|H|}$$

Rząd podgrupy H jest dzielnikiem rzędu grupy G .

2.4 Homomorfizmy

$f : G \rightarrow G'$ nazywamy homomorfizmem grupy G w grupę G' , jeśli zachodzi:

$$f(a + b) = f(a) + f(b)$$

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

Jeśli:

- f jest iniekcją, to mówimy że f jest monomorfizmem.
- f jest suriekcją, to mówimy że f jest epimorfizmem.
- f jest bijekcją, to mówimy że f jest izomorfizmem.

Z własności homomorfizmu wynika, że $f(e) = f(ee) = f(e)f(e) = e'$ oraz $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ i $f(a)f(a^{-1}) = f(e)$.

Zbiór $\text{Ker}(f) = \{a \in G : f(a) = e'\}$ nazywamy jądrem homomorfizmu f .

Zbiór $\text{Im}(f) = \{f(a) : a \in G\}$ nazywamy obrazem homomorfizmu f .

2.5 Symbol Lagrange'a

Liczba a w grupie G jest resztą kwadratową, jeśli istnieje $b \in G$ takie, że $a = b^2$.

Symbol Lagrange'a jest zdefiniowany następująco:

$$\frac{a}{p} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } a \text{ jest resztą kwadratową} \\ 0 & \text{jeśli } p|a \\ -1 & \text{jeśli } a \text{ nie jest resztą kwadratową} \end{cases}$$

2.6 Ciało p-elementowe

Dla liczby pierwszej p :

$$\mathbb{F}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$$

Struktura $(\mathbb{F}_p, +_p)$ to grupa abelowa o p elementach. Równocześnie $(\mathbb{F}_p \setminus \{0\}, \cdot_p)$ jest grupą abelową. Ciałem p -elementowym jest $(\mathbb{F}_p, +_p, \cdot_p)$, gdzie:

$$\forall_{a,b,c \in \mathbb{F}_p} a(b+c) = ab+ac \wedge (b+c)a = ba+ca$$

2.7 Krzywe eliptyczne

Dla $p > 3$, krzywą eliptyczną E nad ciałem \mathbb{F}_p jest dana przez:

$$E : y^2 = x^3 + ax + b \pmod{p}$$

Krzywa eliptyczna musi mieć trzy pierwiastki, stąd:

$$\Delta_E = 4a^3 + 27b^2 \pmod{p} \neq 0$$

Punkt $P = (x_1, y_1)$ leży na krzywej E/\mathbb{F}_p (nad \mathbb{F}_p), jeśli spełnia równanie:

$$y_1^2 = x_1^3 + ax_1 + b \pmod{p}$$

Zatem, zbiorem wartości krzywej jest:

$$E(\mathbb{F}_p) = \{(x, y) \in \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p : y^2 = x^3 + ax + b \pmod{p}\} \cup \{\mathcal{O}\}$$

2.7.1 Twierdzenie Hesse'go

$$\#E(\mathbb{F}_p) = p + 1 - t$$

gdzie $t < 2\sqrt{p}$, oraz zależy od E . Należy wspomnieć, że $\#E$ to jej rząd oraz ilość punktów na krzywej.

2.7.2 Dodawanie

Dla dwóch punktów $P = (x_1, y_1), Q = (x_2, y_2); x_1 \neq x_2$, oraz $R = P \oplus Q = (x_3, y_3)$.

$$\lambda = (y_2 - y_1)(x_2 - x_1)^{-1} \pmod{p}$$

następnie:

$$x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2 \pmod{p}$$

$$y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1 \pmod{p}$$

2.7.3 Potęgowanie

Dla punktu $P = (x_1, y_1), R = P \oplus P = (x_3, y_3)$.

$$\lambda = (3x_1^2 + a)(2y_1)^{-1} \pmod{p}$$

następnie jak dla dodawania.

2.7.4 Odwracanie

$$P = (x_1, y_1)$$

$$P^{-1} = (x_1, -y_1)$$

2.7.5 Element Neutralny

\mathcal{O} nazywamy elementem neutralnym dla grupy $(E(\mathbb{F}_p), \oplus)$.

$$P \oplus Q = \mathcal{O} \leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = -y_2$$

$$P \oplus P^{-1} = \mathcal{O}$$

2.7.6 Generowanie krzywej

1. Generuj k -bitową liczbę pierwszą p
2. Losuj $a, b \in \mathbb{F}_p$
3. Oblicz $\Delta_E = 4a^3 + 27b^2$
4. Sprawdź, czy $\Delta_E \neq 0 \pmod{p}$, w przeciwnym razie **goto** 2
5. **return** a, b, p

2.7.7 Generowanie punktu

1. Losuj $x \in \mathbb{F}_p$
2. Oblicz $y^2 = x^3 + ax + b \pmod p$
3. Jeśli $\frac{y^2}{p} = -1$ goto 1
4. **return** x, y

3 Szyfr Shannona

Szyfr według Shannon'a jest zdefiniowany jako:

$$\pi = (E, D) : (C, M, K)$$

gdzie schemat szyfrujący E i schemat deszyfrowania D są funkcjami:

$$E : M \times K \rightarrow C$$

$$D : C \times K \rightarrow M$$

$$D(k, E(k, m)) = m$$

3.1 Szyfr XOR

$$K = M = C = \{0, 1\}^L$$

$$E(m, k) = m \oplus k$$

$$D(c, k) = c \oplus k$$

3.2 Bezpieczeństwo doskonałe

Niech π będzie szyfrem Shannona. Rozważmy eksperyment losowy, w którym zmienna losowa K ma rozkład jednostajny nad K . Jeśli zachodzi:

$$\forall_{m_0, m_1 \in M} \forall_{c \in C} P(E(k, m_0) = c) = P(E(k, m_1) = c)$$

to mówimy, że szyfr π jest szyfrem doskonałym.

Jeśli π jest szyfrem doskonałym, to $|K| \geq |M|$.

4 Problemy

4.1 Problem logarytmu dyskretnego (DL)

Niech $G = \langle g \rangle$. Problemem jest znalezienie x takiego, że $g^x = a$. W zależności od grupy oraz jej rozmiaru, ten problem może być niezwykle trudny.

4.2 Problem DDH

Mamy daną grupę cykliczną $G = \langle g \rangle$, rzędu q , gdzie q jest liczbą pierwszą. Losujemy $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_q$. Następnie obliczamy:

$$u = g^\alpha, v = g^\beta, w_0 = g^{\alpha\beta}, w_1 = g^\gamma$$

Celem problemu, jest odgadnięcie b , dla danego u, v, w_b .

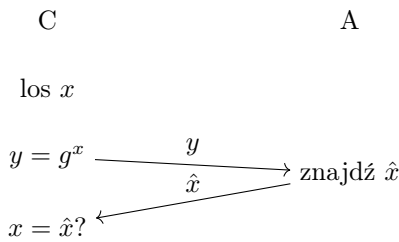


Diagram 1: Formalizm gry dla problemu logarytmu dyskretnego

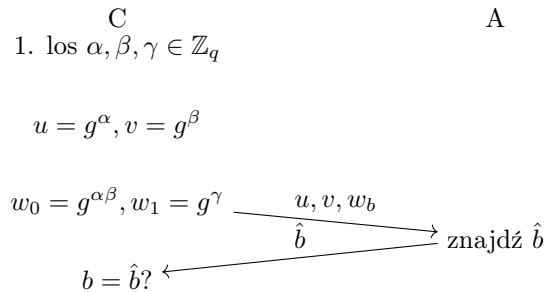


Diagram 2: Formalizm gry dla problemu DDH

4.3 CDH

Mamy daną grupę cykliczną $G = \langle g \rangle$, rzędu q , gdzie q jest liczbą pierwszą. Losujemy $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_q$. Następnie obliczamy:

$$u = g^\alpha, v = g^\beta, w = g^{\alpha\beta}$$

Celem problemu, jest odgadnięcie w , dla danego u, v .

5 Schematy

5.1 Protokół DH

Mamy daną grupę cykliczną $G = \langle g \rangle$, rzędu q , gdzie q jest liczbą pierwszą. Protokół Diffie-Hellman (DH), polega na losowym wybraniu sekretów przez dwóch użytkowników (A, B) $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_q$. Obliczeniu szyfrogramów $u = g^\alpha, v = g^\beta$, a następnym wysłaniu u i v . Sekret wspólny $s = g^{\alpha\beta}$.

Protokół jest odporny na atak pasywny (tylko czytanie). Z kolei, jest podatny na atak jeśli atakujący ma wpływ na kanał komunikacji, chociażby poprzez atak Man-in-the-middle.

5.2 Schemat szyfrowania z kluczem publicznym

$$\varepsilon = (G, E, D) \text{ nad } (M, C, K)$$

gdzie $G : \mathbb{N} \rightarrow K$, $E : K \times M \rightarrow C$, $D : K \times C \rightarrow M$.

$$(pk, sk) = G(\lambda)$$

$$C = E(pk, m)$$

$$M = D(sk, C)$$

6 Ataki

6.1 Man-in-the-middle

Jeśli atakujący ma wpływ na kanał komunikacji, to może przechwycić komunikaty podczas przekazywania kluczy. W takim momencie, może się podszyć pod drugą stronę, aby uzyskać dostęp do klucza prywatnego. Równocześnie

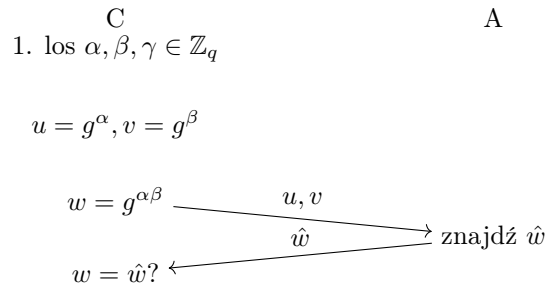


Diagram 3: Formalizm gry dla problemu CDH

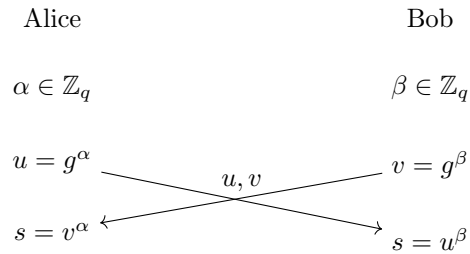


Diagram 4: Formalizm gry dla protokołu DH

może przekazywać dalej komunikację, aby ukryć swoją obecność. W ten sposób zna obydwie sekrety i tylko siedzi po środku.

6.2 Bezpieczeństwo semantyczne

Dla pewnego $\varepsilon = (G, E, D)$, atakujący ma dostęp do klucza publicznego pk . Wybiera on dwie wiadomości $m_0, m_1 \in M$. Przeciwnik wybiera jedną wiadomość $b \in \{0, 1\}$, szyfruje ją $c = E(pk, m_b)$ i zwraca atakującemu. Atakujący musi zgadnąć b .

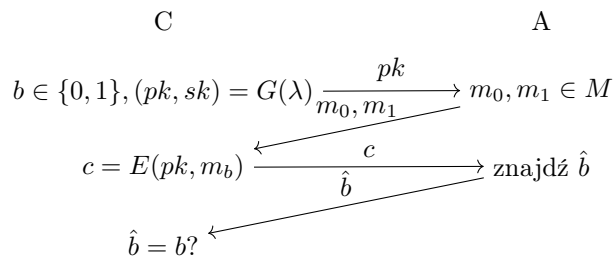


Diagram 5: Formalizm gry dla bezpieczeństwa semantycznego

6.3 Atak CDA

Jest to powielona wersja bezpieczeństwa semantycznego. Wielokrotnie atakujący może tworzyć wiadomości i dostawać losowy kryptogram na podstawie ich. To czyni ten atak o wiele trudniejszym niż bezpieczeństwo semantyczne.

Jeśli schemat szyfrowania kluczem publicznym jest semantycznie bezpieczny, to jest też odporny na ataki CDA.

7 RSA

Asymetryczny algorytm szyfrujący, w którym każda strona ma parę kluczy: publiczny i prywatny. Enkrypcja odbywa się przy pomocy klucza publicznego drugiej strony, a dekrypcja przy pomocy klucza prywatnego.

7.1 Definicja

Dla danych liczb pierwszych p i q .

$$n = pq$$

$$\varphi(n) = (p-1)(q-1)$$

Następnie wybieramy liczbę e względnie pierwszą z $\varphi(n)$. Klucz prywatny d musi spełniać warunek $ed \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$, zatem

$$d = e^{-1} \pmod{\varphi(n)}$$

(n, e) tworzy klucz publiczny, a (n, d) klucz prywatny.

Szyfrowanie wiadomości M odbywa się za pomocą wzoru:

$$C = M^e \pmod{n}$$

Odkrycie wiadomości M odbywa się za pomocą wzoru:

$$M = C^d \pmod{n}$$

7.2 Trudność problemu

Trudność wynika ze znalezienia $\varphi(n)$, a ponieważ weryfikacja czy znalezione $\varphi(n)$ jest poprawne wymaga zastosowania rozszerzonego algorytmu Euklidesa; odszyfrowanie wiadomości C wymaga znalezienia d .

7.3 Przykład

$$p = 7, q = 11 \Rightarrow n = 77, \varphi(n) = 60$$

$$e = 13 \Rightarrow d = 37 \Rightarrow \begin{cases} (n, e) = (77, 13) \\ (n, d) = (77, 37) \end{cases}$$

$$M = 15 \Rightarrow C = 15^{13} \pmod{77} = 64$$

$$C = 64 \Rightarrow M = 64^{37} \pmod{77} = 15$$

8 Funkcja Hashująca

$$H : X \rightarrow Y$$

gdzie $|X| > |Y|$. Można interpretować jako funkcję jednokierunkową, bez zapadki. Mówimy, że H jest złamana, jeśli łatwo można znaleźć przykłady $m_0 \neq m_1$, takie że zachodzi $H(m_0) = H(m_1)$.

9 ElGamal

Dla grupy cyklicznej G rzędu q , wykonujemy najpierw protokół DH, a następnie szyfrowanie wiadomości m przy pomocy ustalonego sekretu $s = g^{\alpha\beta}$ w następujący sposób:

$$c = m \cdot s$$

$$m = c \cdot s^{-1}$$

Aby zapewnić bezpieczeństwo, należy wymieniać s , czyli również α, β za każdą wiadomością.

10 DES

DES (Data Encryption Standard) to archetypiczny szyfr blokowy. Transformuje on, albowiem pewien blok bitów (64) w blok równej długości, uznawany za szyfrogram. DES używa klucza długości 64 bitów, ale jedynie 56 bitów jest używanych do szyfrowania.

Deszyfrowanie składa się z tej samej serii operacji, jedynie z kluczami używanymi w odwrotnej kolejności. To oznacza, że wystarczy jedna implementacja sprzętowa szyfrowania.

10.1 Enkrypcja

DES składa się z 16 rund, poprzedzonych permutacją wejściową (IP), oraz zakończoną permutacją wyjściową ($FP = IP^{-1}$). Blok wejściowy jest dzielony na pół, i operacje są wykonywane na obu częściach na przemian. $F(S)$ oznacza funkcję szyfrowania, dla klucza 48 bitowego S .

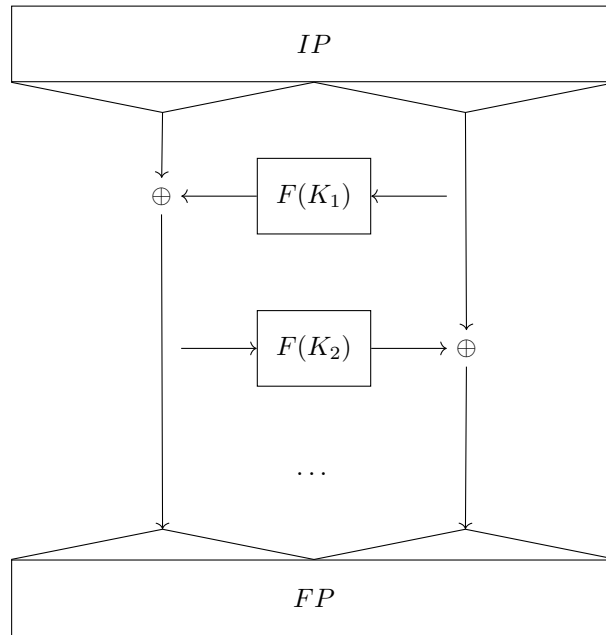


Diagram 6: Schemat szyfrowania DES

10.2 Generowanie kluczy

Generowanie kluczy S_n polega na kolejnych transformacji połówek klucza początkowego K . Najpierw klucz K jest transformowany przez permutację $PC1$ do 56 bitów i dzielony na dwie 28-bitowe połowy L_0 i R_0 . Następnie L_0 i R_0 są przesuwane o $p(n)$ bitów w lewo, gdzie $p(n)$ jest zależne od rundy n . Po przesunięciu, L_n i R_n są połączone i permutowane przez $PC2$ do 48 bitów, aby uzyskać klucz K_n . Generacja $K_n = PC2(L_{n-1} \ll p(n) | R_{n-1} \ll p(n))$. Do dekrypcji, używamy kluczy K_n w odwrotnej kolejności, zatem najpierw K_{16} , a następnie K_{15} , itd.

10.3 Funkcja F (Feistel)

Najpierw nasze 32 bity wejściowe szyfrogramu C są poddawane transformacji E do 48 bitów ($4 \cdot 6$). Następnie szyfrogram jest mieszany z kluczem, zatem $I = E(C) \oplus K_n$. Po tym, I jest dzielone na 8 bloków po 6 bitów (I_1, I_2, \dots, I_8), które są przekazywane do odpowiednich S-boxów. S-boxy działają jak funkcje nieliniowe i stanowią główne źródło bezpieczeństwa DES. Wyniki działania są transformowane przez P , dzięki czemu bity są równo dystrybuowane po całym 32-bitowym wyjściu.

$$I = E(C) \oplus K_n$$

$$F(K_n) = P(S_1(I_1) | S_2(I_2) | \dots | S_8(I_8))$$

10.4 Bezpieczeństwo

DES nie jest bezpieczny na dwóch frontach: jego wielkość klucza i jego własności kryptoanalityczne. 64 bitowy klucz to po prostu za mało, zwłaszcza, że tak naprawdę klucz ma 56 bitów. $2^{56} \sim 10^{16}$, co więcej, klucz DES mieści się w jednym rejestrze w architekturach 64-bitowych i przeszukanie wszystkich kluczy wiąże się z jedną pętlą `for` na typie `uint64_t`.

Bardziej zaawansowane ataki, opierające się na kryptoanalizie potrafią rozwiązać problem CDA w 2^{50} rund z prawdopodobieństwem 50%.