

# 1 Wstęp

Przydatne wzory w jednym miejscu:

- Pęd ciała o masie  $m$  i prędkości  $v$ :

$$p = mv$$

- Energia ciała o masie  $m$  i pędzie  $p$ :

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$$

- Stała plancka i jej **evil twin**

$$h = 2\pi\hbar$$

- Prędkość fali

$$v = \lambda\nu$$

## 1.1 Algebra

*Z jakiegoś powodu dużą częśćią zajęć była algebra, bo fizycy nie mieli dedykowanego przedmiotu, więc tu przypomnienie bo pewno algebra będzie sporą częścią kolowkium <3.*

### 1.1.1 Macierze

$$A_{ij} = A_{ji}^T$$

$$\overline{a + bi} = a - bi$$

$$A^\dagger = \overline{A}^T$$

- Symetryczna  $A^T = A$
- Ortogonalna  $A^T \cdot A = A \cdot A^T = I$
- Hermitowska  $A^\dagger = A$
- Normalna  $A^\dagger \cdot A = A \cdot A^\dagger$
- Unitarna  $A^\dagger \cdot A = A \cdot A^\dagger = I$
- Osobliwa  $\det A = 0$

### 1.1.2 Wartości i wektory własne

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$(A - \lambda_i I)v_i = 0$$

### 1.1.3 Notacja Diraca

Wektor  $v$ , nazwany  $a$  w przestrzeni  $V$  (domyślnie  $\mathbb{C}^n$ ) można zapisać jako:

$$|a\rangle = v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

$$\langle a| = |a\rangle^\dagger$$

$$\langle a|b\rangle = \langle a| \cdot |b\rangle = \sum_i \overline{a_i} b_i$$

$$|a\rangle\langle b| = |b\rangle \times \langle a|$$

### 1.1.4 Rozkład spektralny

Dla każdej macierzy normalnej  $A$  istnieje jej rozkład spektralny, czyli:

$$A = \sum_i \lambda_i P_i = \sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i|$$

### 1.1.5 Diagonalizacja

$$A = UDU^{-1}$$

Dla macierzy normalnej  $U^{-1} = U^\dagger$ .  $U$  to macierz złożona z wektorów własnych  $A$ .  $D$  to macierz diagonalna, gdzie wszystkie wartości występujące na przekątnej to wartości własne  $A$ , lub inaczej, jest to macierz zapisana w bazie swoich wektorów własnych.

$$f(A) = U^\dagger \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{bmatrix} U$$

Magicznym aspektem macierzy zdiagonalizowanych, lub szerzej, tych zapisanych w bazie swoich wektorów własnych, jest to, że na ich diagonalu są ich wartości własne.

### 1.1.6 Operacje

$$\text{tr}(A) = \sum_i \lambda_i = \sum_i A_{ii}$$

$$\det(A_{2 \times 2}) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$$

$$[A, B] = AB - BA$$

## 2 Eksperyment Younga - dwu-szczelinowy

W eksperymencie mierzymy zachowanie elektronów względem dwóch dziur i czujnika ruchomego na wzdłuż osi  $x$ . Mierzmy prawdopodobieństwo, tego, że czujnik odbierze elektron, jako  $P_{12}(x)$ . Równocześnie rozróżniamy  $P_1(x)$  oraz  $P_2(x)$ ; prawdopodobieństwa, tego, że czujnik odbierze elektron przy jednej z dziur zasłoniętej.

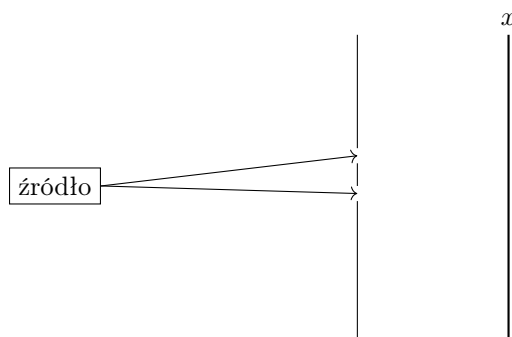


Diagram 1: Ilustracja eksperymentu

### 2.1 Częstkowa interpretacja

Jeśli elektron zachowywałby się jako cząstka, to spodziewalibyśmy się, że  $P_{12}(x) = P_1(x) + P_2(x)$ . Wnioskiem takiej obserwacji byłoby, że cząstki elektronów nie mają na siebie wpływu; nie zachodzi interferencja. Co więcej, elektron zawsze przechodzi jedną dziurą.

## 2.2 Falowa interpretacja

Jeśli elektron zachowałby się jako fala, to spodziewalibyśmy się przeciwnego wyniku. Fale nie nakładają się na siebie tak czysto. Zachodziłaby interferencja; fale w zależności od fazy albo by się na siebie nakładały, albo niwelowały. Co więcej ze względu na działanie fal, elektron by przechodził przez obydwie dziury jednocześnie.  $P_{12}(x) = |\phi_1(x) + \phi_2(x)|^2$ ,  $P_1 = |\phi_1(x)|^2$ ,  $\dots$

## 2.3 Wynik

Eksperyment pokazuje, że mimo tego, że detektor odbiera elektrony w dyskretnych grupach, to  $P_{12}$  zachowuje się jakby elektrony były falami. Zatem elektron zachowuje się "trochę jak cząstka trochę jak fala".

Obserwowanie elektronów, które przechodzą przez szczeliny, powoduje, że przestają zachowywać się jak fale, a zaczynają zachowywać się jak cząstki. Znika interferencja, bo wiemy, że elektron przechodzi przez jedną z dziur, a nie przez obydwie.

Na podstawie tego eksperymentu, opracowano zasadę niepewności Heisenberga. W ramach eksperymentu, oznacza ona, że nie da się zaprojektować detektora elektronów, który nie wpływa na elektrony. Detektor, czy to pozycji czy pędu, ma pewną dokładność i pomiar tej dokładności wpływa na mierzoną cząstkę. Zasada niepewności nie wpływa na życie na naszej skali, ponieważ długości fali obiektów w naszej skali są bardzo małe, oraz te obiekty są obserwowane ciągle, więc nie ma możliwości, żeby zachowywały się jak fale.

## 2.4 Słabe źródło światła

Z słabym źródłem światła, możemy się spodziewać pojedynczych fotonów, które trafiają w losowe punkty na ekranie. Po dłuższym czasie, możemy zauważyć, że rozkład tych punktów przypomina rozkład interferencyjny, który obserwujemy w przypadku silnego źródła światła. To dowodzi istnienia fotonów.

## 2.5 Wyprowadzenia

Ten eksperyment pozwala nam wyprowadzić następujące właściwości światła o danej długości fali  $\lambda$  i częstotliwości  $\omega$ :

$$\begin{aligned} k &= \frac{2\pi}{\lambda} \\ p &= \frac{2\pi\hbar}{\lambda} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \\ E_f &= \hbar\omega = pc = h\nu \end{aligned}$$

Zatem też:  $m_f = 0$ ,  $v_f = c$ .

## 2.6 Światło

*Światło o danym  $\lambda$  i  $\omega$  składa się z dyskretnych cząstek, których dystrybucja jest dana przez interferencję fali.* Nie jest falą, ale działa jak fala. Charakterystyka fali określa prawdopodobieństwo, tego że foton padnie w danym miejscu. Co więcej, foton wie czy szczelina jest otwarta w eksperymencie dwu-szczelinowym, co ma sens tylko jeśli jest falą. Należy też wspomnieć, że foton nie może się zatrzymać. Jako, że nie ma masy, to pęd i jego energia są zależne od jego prędkości. Gdyby się zatrzymał, to jego energia i pęd byłyby równe zero, co jest niemożliwe z zachowania energii.

## 2.7 Fala de Broglie

Jest to generalizacja koncepcji światła wychodzącej z eksperymentu Younga. Każda fala, która na skali makroskopicznej zachowuje się jak fala, lecz tak naprawdę jest masą dyskretnych cząstek jest falą de Broglie, lub falą materii.

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Elektron jak i foton są falami de Broglie, ale foton jest falą de Broglie o masie zerowej.

### 3 Zasada niepewności

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

gdzie, na przykład,  $\Delta x = \sigma(x)$ . Istotna jest jednak obserwacja, że dla  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta p \rightarrow \infty$ , i na odwrót.

### 4 Efekt Fotoelektryczny

W wyniku promieniowania fotonami, elektrony atomów pierwiastka są wyrzucane z atomu. Efekt ten jest wykorzystywany w praktyce w napędzaniu fotodiod i fotokomórek.

Elektrony w metalu znajdują się w studni potencjału, głębokości  $W$ , odpowiadającej pracy wyjścia. Foton padając na materiał powoduje wyrzucenie elektronu naładowanego  $U$  z energią kinetyczną  $E_{k\max}$ .  $U$  nazywamy potencjałem hamującym. W wyniku tego procesu utracona zostaje energia w postaci pracy wyjścia  $W$ :

$$E_{k\max} = E_f - W = eU$$

Częstotą progową nazywamy najniższą częstotą  $\omega_0$ , dla której  $E_{k\max} = 0$ .

Einstein w 1905 sugerował, istnienie fotonów, jako cząstek światła, aby wyjaśnić efekt fotoelektryczny. Rzeczywiście, w formalizmie powyżej ma to sens.

### 5 Zjawisko Comptona

W zjawisku Comptona foton padający na elektron zmienia kierunek i częstotą. Efekt ten jest wykorzystywany w praktyce w analizie struktury atomów i molekuł.

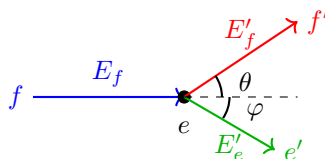


Diagram 2: Ilustracja zjawiska Comptona. Foton  $f$  ma długość fali  $\lambda$ .

W zjawisku zachowany jest pęd oraz energia, co wraz z równaniem Comptona:

$$(\lambda' - \lambda) \frac{m_e c}{h} = 1 - \cos \theta$$

Pozwala nam w istocie wyprowadzić wszystkie niewiadome w zjawisku.

$$p_f + p_e = p'_f + p'_e \Rightarrow \begin{cases} \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'} \cos \theta + p'_e \cos \varphi \\ 0 = \frac{h}{\lambda'} \sin \theta + p'_e \sin \varphi \end{cases}$$

$$E_f + E_e = E'_f + E'_e \Rightarrow \frac{hc}{\lambda} + m_e c^2 = \frac{hc}{\lambda'} + E'_e$$

Efekt Comptona, opisany w 1927 roku, jest dowodem na istnienie fotonu.

### 6 Stan cząstki

Z powyższych sekcji wiemy, że cząstka w mechanice kwantowej nie ma stricte określonej pozycji ani pędu. Wynika to z zasady niepewności Heisenberga. W mechanice klasycznej cząstki opisujemy parą  $(x, p)$ , czym opisujemy w mechanice kwantowej? Mamy funkcję falową  $\psi(x)$ , gdzie  $P(x) = |\psi(x)|^2$  opisuje prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w  $x$ .

Elektron w okolicy atomu 1 jest opisany przez funkcję falową  $\psi_1(x)$ . Prawdopodobieństwo tego, że elektron jest w miejscu  $x$  obok atomu 1 opisuje analogicznie  $P_1(x) = |\psi_1(x)|^2$ . Teraz wyobraźmy sobie, że dodajemy drugi atom

2 i nie wiemy obok którego jest elektron. Na podstawie pomiarów możemy określić, czy pomiary odpowiadają  $P_1(x)$ , czy  $P_2(x) = |\psi_2(x)|^2$ .

Co jeśli elektron może być między cząstkami, czyli nie zakładamy, że należy do jednej cząstki? Wtedy mówimy, że elektron jest w stanie  $\psi_{1+2}(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x)$ .  $P_{1+2} = |\psi_{1+2}|^2$ .

## 6.1 Pomiar

Do momentu pomiaru, elektron w naszym przykładzie **nie ma pozycji**. Założenie, że jest obok jednej cząstki jest jak założenie, że cząstka przeszła przez jeden otwór w eksperymencie Younga. Prawdopodobieństwo w mechanice klasycznej i kwantowej działają zupełnie inaczej. W mechanice klasycznej cząstki mają określony zawczasu stan. Pomiar, wykonany w danym czasie uzyska zawsze jeden wynik. Identyczny pomiar wykonany w mechanice kwantowej może uzyskać różne odpowiedzi.

Można to sobie wyobrazić w następujący sposób. W mechanice klasycznej, prawdopodobieństwo  $P(x)$  jest ewaluowane a priori. Mechanika klasyczna jest deterministyczna i znając  $(x, p)$  nie musimy nawet robić pomiarów. W mechanice kwantowej  $P(x)$  jest ewaluowane w czasie rzeczywistym. Mechanika kwantowa nie jest deterministyczna.

## 6.2 Funkcja

$P(x) = |\psi(x)|^2$  musi być całkowalna po całej powierzchni. Prawdopodobieństwo musi być skończone w końcu. Są od tej zasady wyjątki, szczególnie cząstki, których całka rośnie wraz z rozmiarem wszechświata.

Dla cząstki z określonym pędem  $p$ :

$$\psi_p(x) = A \exp\left[\frac{ipx}{\hbar}\right]$$

$A$  to czynnik normalizujący, wychodzący z konieczności  $1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx$ . Dla nieskończonego wszechświata nie ma to sensu, bo  $1 = |A|^2 \cdot \infty$ . Zatem zakładamy skończony wszechświat o obwodzie  $L$ :

$$\psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \exp\left[\frac{ipx}{\hbar}\right]$$

## 6.3 Warunek kwantyzacji

Ponieważ wszechświat jest mniej więcej kołem, to funkcja falowa może być parametryzowana przez kąt  $\theta$ . W takiej postaci:

$$\psi(\theta) = \psi(\theta + 2\pi)$$

Nazywamy to warunkiem jednej wartości funkcji falowej.

Rozważmy teraz ten warunek w  $\psi_p$ :

$$P(x) = |\psi_p(x)|^2 = \frac{1}{\sqrt{L}} \exp\left[\frac{ipx}{\hbar}\right] \frac{1}{\sqrt{L}} \exp\left[-\frac{ipx}{\hbar}\right] = \frac{1}{L}$$

Po nałożeniu warunku jednej wartości falowej, otrzymujemy:

$$\psi_p(x) = \psi_p(x + L) = \psi_p(x) \exp\left[\frac{ipL}{\hbar}\right]$$

Zatem  $\exp\left[\frac{ipL}{\hbar}\right] = 1$ . Z własności exp można wyprowadzić, że:

$$\frac{pL}{\hbar} = 2\pi n$$

W ten sposób otrzymujemy warunek kwantyzacji:

$$p_n = \frac{nh}{L}$$

$$\psi(x) = \sum_p A(p) \psi_p(x)$$

## 7 Model Bohra

W modelu atomu Bohra, elektron porusza się wokół jądra wokół jednej z dyskretnych orbit. To też oznacza, że energia elektronu jest dyskretna lub zkwantowana.

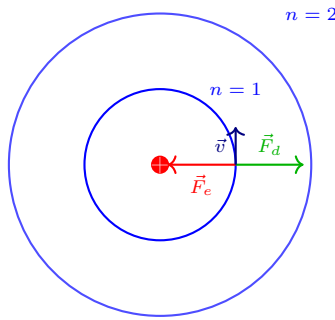


Diagram 3: Model Bohra atomu

Elektron na orbicie utrzymuje się w wyniku siły elektrostatycznej między elektronem a jądrem.

$$\frac{mv^2}{r} = k \frac{e^2}{r^2}$$

$$L = mvr = n\hbar$$

Dla dowolnego ciała na orbicie:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

gdzie  $T$  jest czasem okresu orbity. Energie potencjalną można wyznaczyć z pola elektrycznego.

$$E_p = 2E_k = k \frac{e^2}{r}$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

### 7.1 Nieskończenie głęboka studnia potencjału

Istnieje studnia potencjału. W zakresie  $x \in (0, L)$  cząstka może się poruszać swobodnie, potencjał jest zerowy. Poza tym obszarem potencjał jest nieskończenie duży. długość studni ( $L$ ) musi być równa całkowitej wielokrotności połowy długości fali:

$$L = n \frac{\lambda}{2}$$

Trzeba też wykorzystać własności fali de Broglie ( $\lambda = \frac{h}{p}$ ) aby uzyskać:

$$p_n = \frac{nh}{2L}$$

Postulat Bohra:

$$\oint p dq = nh$$

### 7.2 Ciało doskonale czarne

Ciało doskonale czarne, to koncept fizyczny, w którym rozważamy zachowanie się energii, temperatury i promieniowania w doskonale czarnej wnęce. Założenie jest takie, że ciało ma nie dopuścić do powrotnej emisji promieniowania.

W ciecie doskonale czarnym zakłada się, że liczba modów oscylacyjnych jest dana wzorem:

$$N(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}d\nu$$

Wynika to z  $\nu = \frac{c}{\lambda}$  oraz  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ . Gęstość energii na jednostkę częstości wyraża się:

$$u(\nu, T) = N(\nu)\langle E \rangle$$

### 7.2.1 Katastrofa w ultrafiolecie

W klasycznej teorii z zasady ekwipartycji energii wynika, że średnia energia przypadająca na jeden stopień swobody układu oscylacyjnego jest równa:

$$\langle E \rangle = k_B T$$

Podstawienie  $\langle E \rangle = k_B T$  do  $u(\nu, T)$  daje nam wzór Rayleigha-Jeansa na gęstość energii na jednostkę częstotliwości. Ten wzór jest o tyle słaby, że całka po całym zakresie  $\nu$  daje nam nieskończoną energię, co jest nonsensem. Ten fenomen został nazwany katastrofą w ultrafiolecie.

### 7.2.2 Wzór Plancka

Planck rozwiązał problem z wzorem Rayleigha-Jeansa, wprowadzając inną definicję  $\langle E \rangle$ . Podstawowym założeniem Plancka jest, że energia pojedynczego oscylatora jest zkwantowana.

$$E_n = n h \nu$$

$$\langle E \rangle = \frac{h \nu}{e^{\frac{h \nu}{k_B T}} - 1}$$

## 8 Obserwacje

Wyobraźmy sobie, że mamy układ, w którym możemy powiedzieć, że zachodzi superpozycja między dwoma stanami. Czyli; funkcja falowa  $\psi(x)$  układu jest sumą dwóch funkcji falowych  $\psi_1(x)$  i  $\psi_2(x)$ , które odpowiadają dwóm różnym stanom układu.

$$\psi(x) = A(p_1)\psi_{p_1}(x) + A(p_2)\psi_{p_2}(x)$$

W tym zapisie  $A(p)$  to stałe prawdopodobieństwa, które są związane z prawdopodobieństwem znalezienia cząstki w stanie  $p$ .  $p_1$  i  $p_2$  to dwa dozwolone stany pędu w tym przykładzie.

Pomiar  $p$  w stanie  $\psi(x)$  może dać wynik  $p_1$  lub  $p_2$ . Relatywne prawdopodobieństwo uzyskania  $p_1$  jest równe  $|A(p_1)|^2$ . W  $dt$  odcinku czasu po pomiarze, układ jest w stanie  $\psi_p(x)$ .

Fourier udowodnił, że nie istnieją inne funkcje falowe, które spełniają warunek jednej wartości, niż te, które są liniową kombinacją  $\psi_p(x)$ .

$$\psi(x) = \sum_n A(p_n)\psi_{p_n}(x), \quad p_n = \frac{n h}{L}$$

$$A(p_n) = \int_0^L \psi(x)\psi_{p_n}^*(x)dx$$

### 8.1 Przykład

Niech  $\mathcal{A}$  to zmienna losowa, i  $\alpha_n$  to dozwolone wartości. Niech  $\psi_{\alpha_n}(x)$  opisuje stan układu, w którym  $\mathcal{A} = \alpha_n$ . Matematyka nam mówi, że  $\psi(x)$  może być zapisana jako kombinacja liniowa funkcji  $\psi_{\alpha_n}$ , a fizyka kwantowa nam mówi, że  $P(\mathcal{A} = \alpha_n) = |A(\alpha_n)|^2$ .

Możemy zapisać tę kombinację liniową jako wektor w przestrzeni Hilberta, czyli:

$$|\psi\rangle = \sum_n A(\alpha_n) |\alpha_n\rangle$$

W tej notacji,  $|\alpha_n\rangle$  to wektor stanu, który odpowiada pomiarowi  $\mathcal{A} = \alpha_n$ .

### 8.2 Algebra

Pomiar  $L$ , wyrażony macierzą, może przyjąć wartości zgodne z jego wartościami własnymi. Z reguły, poprzez  $|L = \lambda\rangle$  zapisuje się wektor własny stanu (macierzy)  $L$ , odpowiadający wartości własnej  $\lambda$ .

Wartość oczekiwana operatora  $O$  w stanie  $|L = \lambda\rangle$  jest równa:

$$\langle O \rangle = \langle L = \lambda | O | L = \lambda \rangle$$

ta zależność jest prawdziwa, nawet dla transformacji, np.:  $O = O'^2$ .

Jeśli założymy, że  $\Delta O$ , jest określona przez odchylenie standardowe ( $\sigma$ ), to:

$$\Delta O = \sqrt{\langle O^2 \rangle - \langle O \rangle^2}$$

Prawdopodobieństwo wystąpienia stanu (wektora) własnego  $|O = \psi\rangle$  operatora  $O$  w stanie  $|L = \lambda\rangle$ , jest dane wzorem:

$$P(|O = \psi\rangle) = |\langle O = \psi | L = \lambda \rangle|^2$$

W stanie  $|\psi\rangle$  w bazie  $L$ , zmierzylismy  $L'$  i uzyskaliśmy wartość  $\lambda$ . Dla takiego pomiaru możemy określić podprzestrzeń  $L$ , odpowiadający stanom, które mogły doprowadzić do wyniku. Taką podprzestrzeń określamy:

$$\Pi = \sum_{\lambda_i: \lambda_i^2 = \lambda} |L = \lambda_i\rangle \langle L = \lambda_i|$$

Projekcja  $|\psi\rangle$  na  $\Pi$  daje nam stan po pomiarze  $|\psi'\rangle$ .

$$|\psi'\rangle = \Pi |\psi\rangle$$

$$P(L' = \lambda) = \langle \psi | \psi' \rangle$$

## 9 Równanie Schrödingera

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H |\psi\rangle$$

gdzie  $H$  to hamiltonian układu (dający energię układu), a  $\psi(t)$  to stan w czasie.