Spis treści

1 Uporządkowana para liczb **2**

2 Grupa **2**
- 2.1 Grupa abelowa . . . 2
- 2.2 Przykłady grup . . . 2

3 Pierścień **2**
- 3.1 Pierścień z jedynką . . . 2
- 3.2 Pierścień przemienny . . . 2

4 Ciało **2**

5 Homomorfizmy **2**
- 5.1 Homomorfizmy grupy . . . 2
- 5.2 Homomorfizmy pierścieni . . . 3
- 5.3 Jądro homomorfizmu . . . 3
- 5.4 Obraz homomorfizmu . . . 3

6 Permutacje **3**
- 6.1 Rozkład na cykle . . . 3
- 6.2 Iloczyn transpozycji . . . 3
- 6.3 Postać macierzowa . . . 3
- 6.4 Znak permutacji . . . 3

7 Macierze **3**
- 7.1 Macierz jednostkowa . . . 3
- 7.2 Macierz odwrotna . . . 4
- 7.3 Macierz transponowana . . . 4
- 7.4 Minory macierzy . . . 4
- 7.5 Wyznacznik Macierzy . . . 4
  - 7.5.1 Tw. Laplace'a . . . 4
  - 7.5.2 Własności . . . 4
  - 7.5.3 Tw. Cauche'go . . . 4
- 7.6 Wzory Cramera . . . 5
- 7.7 Dopełnienie algebraiczne macierzy . . . 5

8 Przestrzeń liniowa **5**

9 Wektory **5**
- 9.1 Układ wektorów . . . 5
- 9.2 Kombinacja liniowa . . . 5
- 9.3 Rozpinanie . . . 6
- 9.4 Własności wektorów . . . 6

10 Baza **6**
- 10.1 Macierz przejścia . . . 6

11 Wrońskian **6**

12 Przekształcenie liniowe **6**
- 12.1 Macierz przekształcenia liniowego . . . 6

13 Wektory własne **7**
- 13.1 Macierz charakterystyczna . . . 7

1 Uporządkowana para liczb

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

2 Grupa

Grupa to uporządkowana para $G(A, \circ)$, gdzie A to zbiór, a $\circ$ to działanie spełniające następujące warunki:

- Zachodzi łączność działania $\forall a, b, c \in A : a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
- Istnieje element neutralny $e \in A : \forall a \in A : a \circ e = e \circ a = a$
- Dla każdego elementu istnieje element odwrotny $\forall a \in A : \exists a^{-1} \in A : a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$

2.1 Grupa abelowa

Grupa abelowa, to specjalny rodzaj grupy w którym spełniony jest dodatkowy warunek:

- Grupa jest przemienna $\forall a, b \in A : a \circ b = b \circ a$

2.2 Przykłady grup

$$G(\mathbb{Z}, +), G(\mathbb{Q}, +), G(\mathbb{R}, +), G(\mathbb{C}, +)$$

3 Pierścień

Pierścień to uporządkowana trójka $R(A, +, \cdot)$, gdzie A to zbiór, a $+$ i $\cdot$ to działania spełniające następujące warunki:

- $(A, +)$ jest grupą abelową
- $+$ i $\cdot$ są są wewnętrzne dla A
- Dla każdego $a, b, c \in A$ zachodzi rozdzielność mnożenia względem dodawania: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ oraz $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
- Istnieje element neutralny mnożenia $1 \in A : \forall a \in A : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

3.1 Pierścień z jedynką

Pierścień z jedynką to pierścień, w którym istnieje element neutralny mnożenia oraz $A \neq \emptyset$

3.2 Pierścień przemienny

Pierścień przemienny to pierścień, w którym mnożenie jest przemienna

4 Ciało

Ciało $C(K, +, \cdot)$ to pierścień przemienny z jedynką, oraz $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ jest grupą

5 Homomorfizmy

Homomorfizmy to odwzorowania $f : A \to B$, jeśli A i B spełniają dodatkowe warunki..

5.1 Homomorfizmy grupy

Jeśli $(A, +_A)$ i $(B, +_B)$ to grupy oraz

$$\forall_{a \in A, b \in B} f(a +_A b) = f(a) +_B f(b)$$

5.2 Homomorfizmy pierścieni

Jeśli $(A, +_A, \cdot_A)$ i $(B, +_B, \cdot_B)$ to pierścienie oraz

$$\forall_{a \in A, b \in B} f(a +_A b) = f(a) +_B f(b) \wedge f(a \cdot_B b) = f(a) \cdot_B f(b)$$

5.3 Jądro homomorfizmu

$$ker f = \{a \in A : f(a) = O_B\}$$

5.4 Obraz homomorfizmu

$$im f = \{b \in B : \exists a \in A : f(a) = b\}$$

6 Permutacje

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

$$a_n = \pi(n)$$

6.1 Rozkład na cykle

$$\pi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$$

$$\pi' = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ a_2 & a_1 & b_2 & a_1 \end{pmatrix} = (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2)$$

6.2 Iloczyn transpozycji

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k) = (a_1, a_k) \cdot (a_1, a_{k-1}) \cdot \cdots \cdot (a_1, a_3) \cdot (a_1, a_2)$$

6.3 Postać macierzowa

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6.4 Znak permutacji

Ilość czynników w iloczynie transpozycji określa parzystość permutacji.

$$(-1)^n$$

gdzie n to ilość transpozycji

7 Macierze

7.1 Macierz jednostkowa

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

7.2 Macierz odwrotna

Macierz odwrotna do A to taka macierz B, że $A \cdot B = B \cdot A = I$

7.3 Macierz transponowana

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

7.4 Minory macierzy

$$A_{ij} = \text{macierz bez kolumny } i \text{ oraz wierszu } j$$

7.5 Wyznacznik Macierzy

$$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + \cdots + a_{1n} \cdot A_{1n}$$

Dla macierzy 2×2

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Dla macierzy $n \times n$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot A_{ij}$$

7.5.1 Tw. Laplace'a

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \text{ dla każdego } 1 \leq i \leq n$$

7.5.2 Własności

- Jeżeli macierz kwadratowa A ma wiersz lub kolumnę złożoną z samych zer to $\det A = 0$
- Jeżeli macierz kwadratowa ma kolumnę lub wiersz pomnożoną przez skalar to wyznacznik też jest wielokrotnością skalara
- Jeżeli dwie macierze A i B kwadratowe różnią się od innej macierzy C tylko tą samą kolumną lub wierszem, który C jest sumą odpowiednich w A i B to $\det C = \det A + \det B$
- Zamiana miejscami dwóch kolumn lub wierszy spowoduje zamienienie się znaku wyznacznika na przeciwny
- Jeżeli jedna kolumna lub wiersz jest wielokrotnością innego wiersza lub kolumny to wyznacznik jest równy 0
- Dodawanie wierszy i kolumn nie zmienia wyznacznika
- Wyznacznik macierzy górnotrójkątnej lub dolnotrójkątnej jest równy iloczynowi elementów na przekątnej

7.5.3 Tw. Cauche'go

$$\det AB = \det A \cdot \det B$$

7.6 Wzory Cramera

Dla zestawu równań liniowych

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Możemy przedstawić czynniki jako macierz

$$W = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

I zastępując kolumnę i kolumną wyrazów wolnych otrzymujemy

$$W_i = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$x_i = \frac{W_i}{W}$$

7.7 Dopełnienie algebraiczne macierzy

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$$

8 Przestrzeń liniowa

Przestrzeń liniowa V nad ciałem K to zbiór V oraz działania $+$ i $\cdot$ spełniające następujące warunki:

- $(V, +, \theta)$ jest grupą abelową z elementem neutralnym θ
- Dla każdego $\alpha, \beta \in K$ i $v \in V$ zachodzi $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha \cdot \beta) \cdot v$
- Dla każdego $\alpha \in K$ i $v, w \in V$ zachodzi $\alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$
- $1 \cdot v = v$

9 Wektory

Wektor to element przestrzeni liniowej V

9.1 Układ wektorów

Układ wektorów przestrzeni liniowej V o wskaźnikach ze zbioru T to funkcja $v : T \to V$. Wartość funkcji v w elemencie t oznaczamy v_t.

9.2 Kombinacja liniowa

Kombinacja liniowa wektorów $v_1, v_2, \ldots, v_n$ to wektor postaci

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n$$

Zbiór wszystkich kombinacji liniowych nazywamy powłoką liniową układu

9.3 Rozpinanie

Wektory z układu wektorów rozpinają przestrzeń jeżeli każdy z wektorów należy do przestrzeni oraz jest kombinacją liniową wektorów układu, czyli można go wyrazić za pomocą innych wektorów.

Wektory są liniowo niezależne gdy ich kombinacja liniowa (L) jest równa θ_v(wektor zerowy) lub matryca tych wektorów ma $\det \neq 0$ lub rząd matrycy wektorów = ilości wektorów

9.4 Własności wektorów

- Jeżeli wektory są liniowo zależne to jeden z nich jest kombinacją liniową pozostałych
- Jeżeli θ_v jest kombinacją liniową wektorów to są liniowo zależne
- Kolumny macierzy A są wektorami liniowo zależnymi jeżeli $AX = \theta$ ma rozwiązanie niezerowe ze względu na X
- Jeżeli kolumny macierzy A to wektory liniowo niezależne to $AX = \theta$ ma jedno rozwiązanie i $\det A \neq 0$

10 Baza

Niezależny układ rozpinający przestrzeń V nazywamy bazą przestrzeni V. Jeżeli układ tworzący bazę jest skończony to mówimy że V ma bazę skończoną. Liczba elementów bazy S przestrzeni V nazywamy $dimV$ czyli wymiarem przestrzeni.

10.1 Macierz przejścia

Dla dwóch baz $B_1 = (v_1, \dots, v_n), B_2 = (w_1, \dots, w_n)$ przestrzeni liniowej R_n oraz zależności $v_n = a_{1n}w1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{nn}w_n$ to macierz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

jest macierzą przejścia między B_1 i B_2

11 Wrońskian

Macierz zawierająca pochodne n funkcji do m-1 włącznie stopnia.

$$W_{11} = f_1(x), W_{12} = f_2(x), \dots, W_{1n} = f_n(x)$$

$$W_{21} = f_1'(x), W_{22} = f_2'(x), \dots, W_{2n} = f_n'(x)$$

Jeśli funkcje są liniowo zależne w przedziale (a, b) to ich wrońskian jest tożsamościowo równy zeru. Jeżeli $x_0 \in (a, b)$ i $W(x_0) \neq 0$ to funkcje we wrońskianie są liniowo niezależne

12 Przekształcenie liniowe

Mówimy, że funkcja $T : V \to W$ jest przekształceniem liniowym, jeżeli:

$$\forall_{v_1, v_2 \in V} T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) \land T(\alpha \cdot v) = \alpha T(v)$$

Jeżeli $V = W$, to przekształcenie liniowe nazywamy operatorem liniowym przestrzeni.

12.1 Macierz przekształcenia liniowego

Dla dwóch baz $B_v i B_w$ oraz $T(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{mn}w_m$. To macierz wymiaru $m \times n$ to macierz przekształcenia T w bazach.

13 Wektory własne

Niezerowy wektor v nazywamy wektorem własnym macierzy A jeżeli istnieje skalar λ taki, że $Av = \lambda v$. W takiej konfiguracji λ nazywamy wartością własną macierzy A odpowiadającą wektorowi v.

13.1 Macierz charakterystyczna

Macierz $A - tI_n$ o współczynnikach w pierścieniu wielomianów $K[t]$ nazywamy macierzą charakterystyczną macierzy A. Równanie $\det(A - tI_n) = 0$ nazywamy równaniem charakterystycznym macierzy. $f_A(t) = \det(A - tI_n) = (-1)^n \det(A - tI_n) \in K[t]$ nazywamy wielomianem charakterystycznym macierzy. $f_A(t) = (t - \lambda)^k g(t)$ nazywamy krotnością algebraiczną wartością własnej. Przestrzeń własna to zbiór wektorów własnych odpowiadającym wartościom własnym.

Ślad macierzy to $trA = a_{11} + a_{22} + \ldots$. Krotność geometryczna wartości własnej to rząd macierzy powstałej z wektora przestrzeni własnej danej wartości własnej, lub wymiar przestrzeni własnej.