1 Ciąg Funkcyjny

Ciąg funkcyjny, to ciąg funkcji $f_n(x)$ określonych na pewnym zbiorze A. Przykład:

$$f_n(x) = \frac{x}{n}$$

1.1 Zbieżność

Ciąg funkcyjny może na podzbiorze $E \subseteq D$ może być:

- zbieżny punktowo, czyli zbieżny dla każdego $x \in E$

$$\forall_{x\in E} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

$$\forall_{x\in E} f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

$$\forall_{x\in E}\forall_{\epsilon>0}\exists_N\forall_{n\geq N}|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

  Lub; dla każdego $x \in E$, dla każdego marginesu, od pewnego punktu, odległość między f_n i f w punkcie jest mniejsza niż ϵ. Ponieważ w definicji ϵ zależy od x, to f może nie być ciągła.

- zbieżny punktowo bezwzględnie, to znaczy zbieżny punktowo dla $|f_n(x)|$
- zbieżny jednostajnie, to znaczy $a_n = \sup_{x\in E} f_n(x)$ jest zbieżny

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_N\forall_{n\geq N}\forall_{x\in E}|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$$

  Geometrycznie: w pasie o brzegach $y = f(x) \pm \epsilon$ leżą wszystkie krzywe $y = f_n(x)$. Zbieżność jednostajna implikuje punktową, oraz wymaga ciągłość f. Granica ciągu jednostajnie zbieżnego jest ciągła.

- zbieżny jednostajnie bezwględnie, to znaczy $a_n = \sup_{x\in E} |f_n(x)|$ jest zbieżny

Przykładem ciągu funkcyjnego, który jest zbieżny to $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$. Z kolei, na przykład; ciąg $f_n = x^n$ w przedziale $0 \leq x < 1$ nie jest zbieżny jednostajnie dp (dowolnej) funkcji f, bo w pobliżu punktu $x - 1$ krzywe $y - x^n$ nie leżą dowolnie blisko prostej $y - 0$.

1.2 Szereg Funkcyjny

Niech $f_n(x)$ będzie ciągiem funkcji określonych na zbiorze E. Jeżeli dla każdego $x \in E$ szereg liczbowy $\sum_{k=0}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny, to funkcja $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_n(x)$ jest sumą szeregu funkcyjnego. Zbieżność ciągu a_n jest warunkiem koniecznym, ale nie wystarczającym dla zbieżności szeregu, lub inaczej, zbieżność szeregu implikuje zbieżność ciągu a_n. W sprawdzaniu zbieżności szeregu, bardzo przydaje się wzór na sumę szeregu geometrycznego, gdzie $|q| < 1$: $\frac{a_1}{1-q}$.

Jeżeli ciąg sum częściowych $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ jest zbieżny jednostajnie, to mówimy, że szereg tworzony przez ten ciąg jest zbieżny jednostajnie. Suma szeregu jednostajnie zbieżnego jest ciągła.

1.3 Twierdzenie Arzeli-Ascoli'ego

Jeżeli f_n jest ciągiem funkcji rzeczywistych określonych na przedziale zwartym, który jest wspólnie ograniczony i jednakowo ciągły, to zawiera on podciąg zbieżny jednostajnie.

1.4 Ciągłość granicy

Jeżeli ciąg $f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny w A i funkcje $f_n(x)$ są funkcjami ciągłymi w punkcie $x_0 \in A$, to funkcja graniczna $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ jest ciągła w punkcie x_0.

1.5 Ciągłość a całka

Jeśli f_n jest ciągiem funkcji ciągłych, to:

- Dla zbieżnego jednostajnie ciągłego ciągu $f_n(x)$:

$$\int_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx$$

- Dla zbieżnego jednostajnie ciągłego $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$:

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_E \sum_{k=1}^{n} f_k(x)dx$$

1.6 Kryteria zbieżności

1.6.1 Kryterium porównawcze Weierstrassa

Jeśli szereg liczbowy utworzony z ciągu a_n o wyrazach nieujemnych jest zbieżny oraz dla każðego $x \in E$ zachodzi nierówność $|f_n(x)| < a_n$, to szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest bezwględnie jednostajnie zbieżny na E.

1.6.2 Kryterium Dirichleta

Jeżeli $b_n \to 0$ i jeśli sumy częściowe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ są ograniczone, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny.

1.6.3 Kryterium Abela

Niech $a_n(x)$ oraz $b_n(x)$ będą ciągami funkcyjnymi określonymi w zbiorze A. Jeśli ciąg a_n jest monotoniczny dla każdego x, oraz jest ciągiem wspólnie ograniczonym oraz szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny w A. Wtedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest jednoznacznie zbieżny w A.

2 Szeregi potęgowe

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

2.1 Twierdzenie Cauchy'ego-Hadamarda

Dla szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, niech $\lambda = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Wtedy promieniem zbieżności szeregu potęgowego jest $R = \frac{1}{\lambda}$. Za wyjątkiem $\lambda = 0$, gdzie $R = \infty$, oraz $\lambda = \infty$, gdzie $R = 0$. Szereg jest zbieżny dla $|z - z_0| < R$ i rozbieżny dla $|z - z_0| > R$. Zbieżność w punkcie $z = z_0$ zależy od ciągu a_n.

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

2.2 Wzór Eulera

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Możemy też ten wzór dalej rozwijać, więdząc, że:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

2.3 Szeregi Taylora

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

3 Przestrzenie metryczne

Jeżeli na zbiorze X określono funkcję $d : X \times X \to \mathbb{R}$, która spełnia następujące warunki:

1. $d(x, x) = 0$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

to (X, d) nazywamy przestrzenią metryczną.

3.1 Zbieżność w przestrzeni metrycznej

Mówimy, że ciąg x_n jest zbieżny do x w przestrzeni metrycznej (X, d), jeśli $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.

3.2 Twierdzenie Banacha o punkcie stałym

Mówimy, że funkcja $f : X \to X$ jest kontrakcją, jeśli istnieje taka liczba $L \in (0, 1)$, że dla każdego $x, y \in X$ zachodzi

$$d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)$$

Jeśli X to przestrzeń metryczna, a f jest kontrakcją ze stałą $L \in (0, 1)$, to f ma punkt stały x_0 w X. x_0 jest granicą ciągu $x_1 \in X$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Co więcej:

$$d(x_n, x_0) \leq \frac{L^{n-1}}{1-L} d(x_2, x_1)$$

4 Szeregi Fouriera

Jeżeli szereg trygonometryczny

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

jest zbieżny jednostajnie do funkcji f na przedziale $[-\pi, \pi]$, to

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

Jeśli f jest parzysta, to $b_n = 0$, w przeciwnym wypadku $a_n = 0$.
Alternatywnie, możemy użyć postaci zespolonej:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

gdzie:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$c_n = \begin{cases} \frac{a_n - ib_n}{2} & \text{jeśli } n > 0 \\ \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} & \text{jeśli } n < 0 \end{cases}$$

4.1 Funkcja kawałkami gładka

Mówimy, że funkcja f ma nieciągłość skokową w punkcie x_0, gdy istnieją granice jednostronne:

$$f(x_0+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x), f(x_0-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Oraz $f(x_0+) \neq f(x_0-)$.

Mówimy, że funkcja f jest kawałkami gładka, jeśli w dowolnym przedziale $[a, b]$ jest ciągła poza skończoną liczbą punktów przedziału (a, b), jej punkty nieciągłości są punktami skokowymi, a pochodna funkcji jest ciągła poza skończoną liczbą punktów przedziału (a, b).

4.2 Zbieżność szeregów Fouriera

Jeżeli funkcja 2π okresowa f jest kawałkami gładka na $\mathbb{R}$, to jej szereg Fouriera jest zbieżny dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ do wartości:

$$\frac{f(x-) + f(x+)}{2}$$

Naturalnie, to oznacza, że jeśli f jest ciągła w x, to szereg Fouriera jest zbieżny do wartości $f(x)$.

5 Funkcje wielu zmiennych

Funkcje $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ są funkcjami wielu zmiennych. Z reguły tutaj będziemy rozważać funkcjami dla $m = 1$ i $n = 2$, lecz czasami potworki się zdarzają.

5.1 Granica

Dla $A \subset \mathbb{R}^n$, oraz $x_n \in A$ i $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, mówimy, że $f : A \to \mathbb{R}$ ma granicę w x_0 równą g;

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g$$

gdy dla każdego ciągu $x_n \in A$, zachodzi:

$$x_n \overset{n\to\infty}{\to} x_0 \Rightarrow f(x_n) \overset{n\to\infty}{\to} g$$

Lub; funkcja ma granicę w punkcie x_0 równą g, gdy jej wartości dla punktów zbliżających się do x_0 zbiegają do g.

W tym zagadnieniu szczególnie istotne są niektóre triki stosowane w dowodach. Funkcja f ograniczona przez funkcję g ($f(x) \leq g(x)$ dla $x \in A$), co implikuje, że $\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$. Również, bardzo łatwo udowodnić brak istnienia granicy, chociażby poprzez kontrprzykład. Wystarczy znaleźć dwa ciągi o różnej wartości granicznej f. $(\frac{1}{n}, 0)$ i $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ to bezpieczne przykłady. Warto też wspomnieć, o uproszczeniu przez ograniczenie, gdzie dla funkcji wielu zmiennych $f(x, y)$, definiujemy $u_n = \max\{x_n, y_n\}$, upraszczamy wzór funkcji i w szczególnych przypadkach pozwala nam to na uproszczenie dowodu.

5.2 Ciągłość

Funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie x_0, jeśli:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

5.3 Pochodna cząstkowa

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,\dots,x_i+h,\dots,x_n)-f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,\dots,x_n)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x_1,\dots,x_n)$$

Z tw. Schwarz'a mamy, że jeśli drugie pochodne cząstkowe są ciągłe w okolicy x_0, to w tej okolicy mamy:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x_0)$$

Zatem jeśli masz miłą funkcję, to możesz w dowolnej kolejności różnicować.

5.4 Gradient

$$\nabla f(x_1,\dots,x_n)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\dots,x_n),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1,\dots,x_n)\right)$$

5.5 Pochodna

$U\subset\mathbb{R}^n$. Mówimy, że funkcja $f:U\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie x_0, jeśli istnieje przekształcenie liniowe $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, takie, że:

$$\lim_{(h_1,\dots,h_n)\to(0,\dots,0)}\frac{f(x_1+h_1,\dots,x_n+h_n)-f(x_1,\dots,x_n)-A(h_1,\dots,h_n)}{||(h_1,\dots,h_n)||}=0$$

$A(h_1,\dots,h_n)$ nazywamy $f'(x_1,\dots,x_n)$, a $||(h_1,\dots,h_n)||$ to długość wektora $\sqrt{h_1^2+\dots+h_n^2}$.

Jeśli f ma pochodną w punkcie x_0 to:

$$f'(x_1,\dots,x_n)(h_1,\dots,h_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n)h_i$$

Dla większej ilości wymiarów; $f:U\to\mathbb{R}^m$:

$$\lim_{(h_1,\dots,h_n)\to(0,\dots,0)}\frac{||f(x_1+h_1,\dots,x_n+h_n)-f(x_1,\dots,x_n)-f'(h_1,\dots,h_n)||}{||(h_1,\dots,h_n)||}=0$$

$$f'=(f_1',\dots,f_m')$$

5.6 Macierz Jacobiego

Jeżeli funkcja $f:U\to\mathbb{R}^m$ ma pochodną w punkcie x_0, to f' jest odwzorowaniem liniowym. Jego macierz nazywamy macierzą Jacobiego. Jakobian to wyznacznik tej macierzy.

5.7 Ekstrema lokalne

Warunkiem koniecznym tego, że punkt x_0 jest ekstremum lokalnym, jest spełnienie warunku:

$$\nabla f(x_0)=(0,\dots,0)$$

Jednak należy też sprawdzić, czy rzeczywiście ten punkt jest ekstremum lokalnym. Punkt jest ekstremum lokalnym, jeśli w otoczeniu U punktu zachodzi:

$$\forall_{u\in U} f(u)\le f(x_0)$$

Jeśli nierówność jest ostra to mówimy, że jest to ekstrmum ścisłe.

Warunkiem dostatecznym tego, że punkt (x_0,y_0) jest ekstremum lokalnym, jest spełnienie warunku:

$$\nabla f(x_0,y_0)=(0,\dots,0)\wedge H(x_0,y_0)=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\end{vmatrix}>0$$

Jeśli którakolwiek pochodna cząstkowa drugiego rzędu jest ujemna to punkt jest minimum lokalne. W p.p. jest to maksimum lokalne. Jeżeli $H(x_0,y_0)<0$ to ekstremum nie ma, a jeśli $H(x_0,y_0)=0$ to nie wiadomo.

5.8 Całki

Jeśli $f(x,y)$ jest funkcją ciągłą na prostokącie $R = [a,b] \times [c,d]$, to całkę podwójną można obliczyć przez całki iterowane:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

nazywamy to twierdzeniem Fubiniego.

5.8.1 Całka przez rozszerzenie funkcji

Jeśli f jest zdefiniowane na $D \subset \mathbb{R}^2$, to można całkować po rozszerzeniu f^* funkcji f.

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{jeśli } (x,y) \in D \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R f^*(x,y)\,dx\,dy$$

5.8.2 Zbiór normalny

Obszar normalny względem osi x to zbiór punktów (x,y), dla których:

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ f(x) \le y \le g(x) \end{cases}$$

Obszar normalny względem osi y to zbiór punktów (x,y), dla których:

$$\begin{cases} c \le y \le d \\ h(y) \le x \le k(y) \end{cases}$$

5.8.3 Całka po zbiorze normalnym

$$D = \{(x,y) : a \le x \le b, f(x) \le y \le g(x)\}$$

gdzie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ są ciągłe. Dla dowolnej $h : D \to \mathbb{R}$:

$$\iint_D h(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} h(x,y)\,dy \right) dx$$

5.8.4 Obszary regularne

Suma skończonej ilości zbiorów normalnych, parami rozłącznych, jest obszarem regularnym. Dla zbioru regularnego $D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots D_n$:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} \iint_{D_i} f(x,y)\,dx\,dy$$

5.8.5 Współrzędne biegunowe

$$D = \{(r\cos\alpha, r\sin\alpha) : r_1 \le r \le r_2; 0 \le \alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2 \le 2\pi\}$$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{[r_1,r_2]\times[\alpha_1,\alpha_2]} f(r\cos\alpha, r\sin\alpha)\,r\,dr\,d\alpha$$