Spis treści

0 Wstęp **1**
0.1 Całki 1

1 Kinematyka **2**
1.1 Wielkości średnie i chwilowe 2
1.2 Ruch 2
1.3 Ruch w wielu wymiarach 2
1.4 Ruch po okręgu 2

2 Siły **3**
2.1 Prawa Newtona 3
2.2 Ciążenie powszechne 3
2.3 Tarcie 3
2.4 Popęd 3

3 Energia **4**
3.1 Zasada zachowania energii 4
3.2 Tarcie i energia 4

4 Dynamika układów wielu ciał **4**
4.1 Środek masy 4
4.2 Zasada zachowania pędu 5
4.3 Zderzenia 5

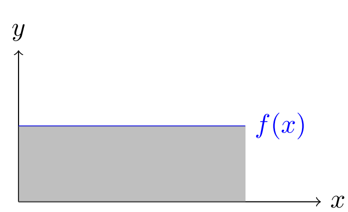
5 Obroty **5**
5.1 Bryła sztywna 5
5.2 Przyspieszenie kątowe 5
5.2.1 Punkt na obwodzie koła 5
5.3 Bezwładność, pęd i energia 6
5.4 Moment obrotowy (siły) 6
5.5 Twierdzenie Steinera 6
5.6 Energia kinetyczna w ruchu obrotowym 6
5.7 Porównanie ruchu liniowego i obrotowego 6

6 Szczególna Teoria Względności **6**
6.1 Postulaty 7
6.2 Transformacja Lorentza 7
6.3 Względność równoczesności 7
6.4 Dylatacja czasu 7
6.5 Skrócenie długości 7
6.6 Geometria czasoprzestrzeni 7

0 Wstęp

0.1 Całki

Całki to operacje odwrotne do pochodnych. Dla funkcji $f(x)$ całka oznaczona to pole pod wykresem funkcji $f(x)$ na przedziale $[a, b]$. Pozwalają nam obliczyć pole pod krzywą, a także sumę nieskończenie wielu wartości funkcji.



$$f(x) = 1, \quad \int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 3dx = [x]_0^3 = 3 - 0 = 3$$

albo, o wiele prościej:

$$\int_0^3 f(x)dx = 3 \cdot 1 = 3$$

Naturalnie nie zawsze możemy obliczyć całkę oznaczoną w ten sposób. Wtedy musimy posłużyć się bardziej zaawansowanymi metodami. Aby zademonstrować zastosowanie całek wyobraźmy sobię ciało co się porusza ciągle przyspieszając w jednym kierunku. $a(t) = t^2$. Jeśli chcielibyśmy obliczyć prędkosc ciała w chwili $t = 3$ to chcemy dodać wszystkie przyspieszenia jakie ciało doświadczyło do tej chwili. Wtedy mamy:

$$v(t) = \int_0^3 a(t)dt = \int_0^3 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^3 = 9$$

1 Kinematyka

Kinematyka to nauka o ruchu ciał.

1.1 Wielkości średnie i chwilowe

Wielkości średnie, to takie których doświadcza ciało w czasie Δt. Z kolei wielkości chwilowe, to takie które opisują ciało w danym momencie. Idealnym przykładem jest prędkość. $v(t)$ to prędkość chwilowa, a $v_{\Delta t}$ to prędkość średnia.

1.2 Ruch

Ruch ciała można opisać przy pomocy dwóch wielkości. Prędkości chwilowej (v), oraz przyspieszenia chwilowego (a).

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$v(t) = v_0 + a(t) \cdot t = v_0 + \int a(t)dt$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'$$

Dla pozycji ciała x mamy:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = x_0 + \int v(t)dt$$

1.3 Ruch w wielu wymiarach

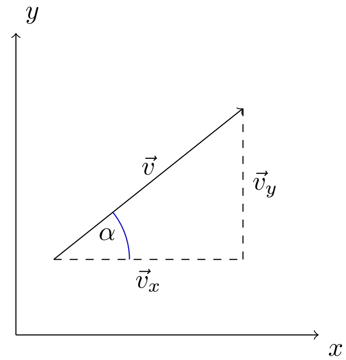
Aby opisać ruch w $n \in \mathbb{N}$ wymiarach, potrzebujemy po prostu n wymiarowych wektorów. Dla ruchu w dwóch wymiarach mamy:

$$\vec{v}_x = |\vec{v}| \cos\alpha, \quad \vec{v}_y = |\vec{v}| \sin\alpha$$

1.4 Ruch po okręgu

Dla ruchu po okręgu mamy:

$$a = \frac{v^2}{r}$$



2 Siły

Miara wielkości oddziaływania ciał na siebie to siła.

$$F = m \cdot a$$

Dla siły grawitacyjnej działającej na ciało o masie m pod kątem α do osi x mamy:

$$F_g = m \cdot g \cdot \sin \alpha$$

2.1 Prawa Newtona

1. Ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym, jeżeli na nie nie działa żadna siła. $\sum F = 0 \to \Delta v = 0$.
2. Jeżeli na ciało działa siła, to ciało porusza się z przyspieszeniem proporcjonalnym do siły i odwrotnie proporcjonalnym do masy ciała.
3. Jeżeli ciało działa na inne ciało siłą, to drugie ciało działa na pierwsze siłą o tej samej wartości, ale przeciwnie skierowaną.

2.2 Ciążenie powszechne

Każda para ciał we wszechświecie oddziałuje na siebie siłą grawitacyjną.

$$F_g = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

gdzie G to stała grawitacyjna, m_1 i m_2 to masy ciał, a r to odległość między nimi.

2.3 Tarcie

Tarcie to siła przeciwna kierunku ruchu ciała. Wyróżniamy tarcie statyczne i kinetyczne. Tarcie statyczne oddziałuje na ciała gdy te nie poruszają się, a tarcie kinetyczne gdy ciała poruszają się. W pewnym sensie tarcie statyczne określa siłę potrzebną do wzruszenia ciała, a tarcie kinetyczne to jaką siłę trzeba utrzymać aby ciało poruszało się z daną prędkością.

2.4 Pomęd

$$J = F \cdot \Delta t$$

3 Energia

Energia to miara zdolności ciała do wykonywania pracy. Energia kinetyczna to energia którą ciało posiada dzięki swojemu ruchowi, a energia potencjalna to energia którą ciało posiada dzięki swojemu stanowi.

$$E_K = \frac{mV^2}{2}$$

$$W = E_{K1} - E_{K0} = \Delta E_K = F \cdot d = \int F(x)dx$$

Wyróżniamy energie potencjalną grawitacyjną, związaną z wysokością ciała nad pewnym ustalonym punktem.

$$E_p = mgh$$

Oraz energię potencjalną sprężystości sprężyny:

$$E_p = \frac{1}{2}kd^2$$

gdzie k to stała sprężystości, a d to odkształcenie sprężyny.

3.1 Zasada zachowania energii

W układzie izolowanym energia jest stała. Energia nie może zostać ani stworzona, ani zniszczona.

$$E_{t=0} = E_{t=t}$$

3.2 Tarcie i energia

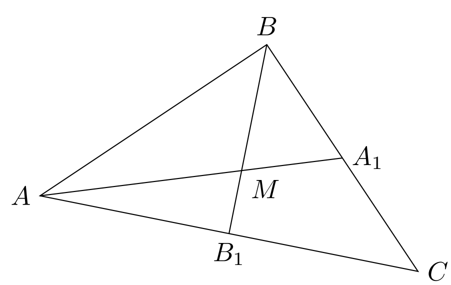
Praca siły tarcia jest zawsze ujemna, ponieważ działa ona przeciwnie do kierunku ruchu ciała. Obecność tarcia powoduje, że energia kinetyczna ciała maleje.

4 Dynamika układów wielu ciał

Układy ciał to zbiory ciał, które oddziałują na siebie. Wewnątrz układu ciała mogą oddziaływać na siebie siłami wewnętrznymi, a na zewnątrz siłami zewnętrznymi. W układzie izolowanym suma sił wewnętrznych jest równa zeru.

4.1 Środek masy

Środek masy to punkt, w którym można zlokalizować całą masę układu. Jego położenie w relacji do ciał w układzie może mieć wpływ na ruch układu. Dla równej dystrybucji masy środek masy znajduje się w środku układu. Np.: dla trójkąta środek masy znajduje się w punkcie przecięcia środkowych.



Dla układu n ciał środek masy to będzie ważona średnia położeń ciał. Zatem dla układu n ciał o masach m_i i położeniach r_i środek masy to:

$$M = \frac{\sum m_i \cdot r_i}{\sum m_i}$$

oraz dla odległości od środka masy d_i mamy $m_i \cdot d_i = d_n \cdot m_n$

4.2 Zasada zachowania pędu

$$p = m \cdot v$$

W izolowanym układzie pęd jest stały.

$$p_{t=0} = p_{t=t}$$

4.3 Zderzenia

Zderzenia to procesy w których ciała zmieniają swoje prędkości. Rozróżniamy zderzenia sprężyste, w których energia kinetyczna jest zachowana, oraz niesprężyste, w których energia kinetyczna nie jest zachowana.

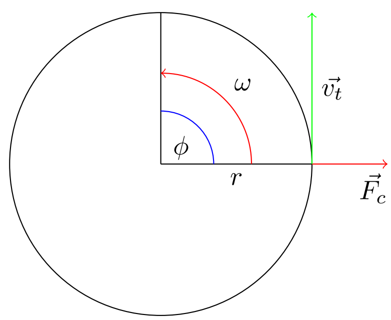
5 Obroty

5.1 Bryła sztywna

Bryła sztywna to ciało, które zachowuje swoją formę podczas ruchu.

5.2 Przyspieszenie kątowe

Zmiana kąta obrotu ciała to przyspieszenie kątowe. Jest to cecha całego ciała, a nie jego składowych. Przyspieszenie kątowe to zmiana prędkości kątowej w czasie.



$$\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}, \quad \alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Prędkość kątowa jest analogiczna do prędkości liniowej, a przyspieszenie kątowe do przyspieszenia liniowego.

$$\int \alpha(t)dt = \omega(t)$$

$$\int \omega(t)dt = \phi(t)$$

$$\text{rpm} = \frac{2\pi}{60}\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

5.2.1 Punkt na obwodzie koła

Prędkość punktu na obwodzie koła to prędkość styczna(v_t). Dla koła mamy:

$$\omega = \frac{v_t}{r}$$

Punkt na obwodzie koła doświadcza przyspieszenia dośrodkowego:

$$F_c = m \cdot a_c = m \cdot r \cdot \omega^2$$

gdzie a_c to przyspieszenie dośrodkowe, a r to promień obrotu. Dla obiektu o długości l i jednorodnym rozłożeniu masy to $r = \frac{l}{2}$.

5.3 Bezwładność, pęd i energia

$$I = \sum m_i r_i^2$$

czyli suma momentów bezwładności wszystkich punktów materialnych w ciele. Moment bezwładności wyraża opór ciała na zmianę ruchu obrotowego. Dla prętu o długości l mamy:

$$I = \int r^2 dm$$

Moment pędu:

$$L = I \cdot \omega$$

$$W = \int_0^{\theta_0} mgr \sin\theta d\theta = mgr(1 - \cos\theta_0)$$

5.4 Moment obrotowy (siły)

$$\tau = I \cdot \alpha = I \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = r \sin\alpha \cdot F$$

gdzie α to kąt między siłą a promieniem obrotu. O momencie obrotowym (torque) można myśleć jako o siły powodującej obrót ciała. Aby zatrzymać obracające się ciało musimy zastosować siłę przeciwną do momentu obrotowego. Jest to jakby siła odpowiedzialna za ω.

5.5 Twierdzenie Steinera

W przypadku gdy znamy moment bezwładności względem jednej osi obrotu (przechodzącej przez środek masy) to możemy obliczyć moment bezwładności względem innej równoległej osi obrotu:

$$I = I_0 + m \cdot d^2$$

5.6 Energia kinetyczna w ruchu obrotowym

W jaki sposób obliczyć energię kinetyczną ciała w ruchu obrotowym? Wystarczy zsumować energię kinetyczną wszystkich punktów materialnych w ciele.

$$E_K = \sum \frac{1}{2} m_i v_{ti}^2 = \frac{1}{2} \sum m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{I\omega^2}{2}$$

5.7 Porównanie ruchu liniowego i obrotowego

Cecha	Ruch liniowy	Ruch obrotowy
przemieszczenie	x	θ
prędkość	$v = \frac{\Delta v}{\Delta t}$	$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$
przyspieszenie	$a = \frac{\Delta a}{\Delta t}$	$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$
bezwładność	m	I
pęd	$p = m \cdot v$	$L = I \cdot \omega$
zmiana pędu	$F = m \cdot a$	$\tau = I \cdot \alpha$
E_K	$\frac{m \cdot v^2}{2}$	$\frac{I \cdot \omega^2}{2}$
Praca	$W = F \cdot d$	$\tau \cdot \theta$

6 Szczególna Teoria Względności

Szczególna teoria względności to podzbiór ogólnej teorii względności, i nie uwzględnia grawitacji. Skupia się na ruchu ciał w układach odniesienia poruszających się z prędkościami zbliżonymi do prędkości światła.

6.1 Postulaty

1. Prawa fizyki są takie same we wszystkich układach odniesienia poruszających się z prędkościami stałymi.
2. Prędkość światła w próżni jest stała i niezależna od prędkości źródła światła.

6.2 Transformacja Lorentza

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Transformacja Lorentza to przekształcenie współrzędnych między układami odniesienia poruszającymi się z różnymi prędkościami. Dla dwóch układów odniesienia S i S' poruszających się względem siebie z prędkością v względem siebie wzdłuż osi x mamy:

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$t' = \gamma(t - \frac{vx}{c^2})$$

Relatywistyczna suma prędkości:

$$u' = \frac{u + v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

gdzie u to prędkość dodana, v to prędkość układu odniesienia, a c to prędkość światła.

6.3 Względność równoczesności

Dla danego układu odniesienia zdarzenia odbywają się z różnicą czasu $\leq \Delta t_0$. Jest to stała dla danego układu odniesienia. Dla obserwatora poruszającego się z prędkością v zdarzenia mogą odbywać się w różnych momentach czasu.

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0$$

6.4 Dylatacja czasu

Dla obserwatora poruszającego się z prędkością v czas w jego układzie odniesienia płynie wolniej. Dla obserwatora stacjonarnego czas w układzie poruszającym się płynie szybciej. Obserwator oczywiście nie odczuwa tego efektu.

$$t = t_0 \cdot \gamma$$

6.5 Skrócenie długości

Dla obserwatora poruszającego się z prędkością v długość ciała w jego układzie odniesienia jest skrócona. Dla obserwatora stacjonarnego długość ciała w układzie poruszającym się jest dłuższa.

$$l = l_0 \cdot \gamma$$

gdzie l to długość ciała w układzie poruszającym się, a l_0 to długość ciała w układzie stacjonarnym.

6.6 Geometria czasoprzestrzeni

W szczególnej teorii względności czas i przestrzeń są złączone w jedną całość. Dlatego też zamiast mówić o czasie i przestrzeni mówimy o czasoprzestrzeni. Względność czasu i przestrzeni sprawia, że czas i przestrzeń są względne i zależą od prędkości obserwatora. To oznacza, że pozycję w czasoprzestrzeni wyraża się czterowektorem (x, y, z, t).