

# 1 Ciąg Funkcyjny

Ciąg funkcyjny, to ciąg funkcji  $f_n(x)$  określonych na pewnym zbiorze  $A$ . Przykład:

$$f_n(x) = \frac{x}{n}$$

## 1.1 Zbieżność

Ciąg funkcyjny może na podzbiorze  $E \subseteq D$  może być:

- zbieżny punktowo, czyli zbieżny dla każdego  $x \in E$

$$\forall x \in E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

$$\forall x \in E f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

$$\forall x \in E \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Lub; dla każdego  $x \in E$ , dla każdego marginesu, od pewnego punktu, odległość między  $f_n$  i  $f$  w punkcie jest mniejsza niż  $\epsilon$ . Ponieważ w definicji  $\epsilon$  zależy od  $x$ , to  $f$  może nie być ciągłą.

- zbieżny punktowo bezwzględnie, to znaczy zbieżny punktowo dla  $|f_n(x)|$
- zbieżny jednostajnie, to znaczy  $a_n = \sup_{x \in E} f_n(x)$  jest zbieżny

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \forall x \in E |f(x) - f_n(x)| < \epsilon$$

Geometrycznie: w pasie o brzegach  $y = f(x) \pm \epsilon$  leżą wszystkie krzywe  $y = f_n(x)$ . Zbieżność jednostajna implikuje punktową, oraz wymaga ciągłości  $f$ . Granica ciągu jednostajnie zbieżnego jest ciągłą.

- zbieżny jednostajnie bezwzględnie, to znaczy  $a_n = \sup_{x \in E} |f_n(x)|$  jest zbieżny

Przykładem ciągu funkcyjnego, który jest zbieżny to  $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ . Z kolei, na przykład; ciąg  $f_n = x^n$  w przedziale  $0 \leq x < 1$  nie jest zbieżny jednostajnie do (dowolnej) funkcji  $f$ , bo w pobliżu punktu  $x = 1$  krzywe  $y = x^n$  nie leżą dowolnie blisko prostej  $y = 0$ .

## 1.2 Szereg Funkcyjny

Niech  $f_n(x)$  będzie ciągiem funkcji określonych na zbiorze  $E$ . Jeżeli dla każdego  $x \in E$  szereg liczbowy  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$  jest zbieżny, to funkcja  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$  jest sumą szeregu funkcyjnego. Zbieżność ciągu  $a_n$  jest warunkiem koniecznym, ale nie wystarczającym dla zbieżności szeregu, lub inaczej, zbieżność szeregu implikuje zbieżność ciągu  $a_n$ . W sprawdzaniu zbieżności szeregu, bardzo przydaje się wzór na sumę szeregu geometrycznego, gdzie  $|q| < 1$ :  $\frac{a_1}{1-q}$ .

Jeżeli ciąg sum częściowych  $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$  jest zbieżny jednostajnie, to mówimy, że szereg tworzony przez ten ciąg jest zbieżny jednostajnie. Suma szeregu jednostajnie zbieżnego jest ciągłą.

## 1.3 Twierdzenie Arzeli-Ascoli'ego

Jeżeli  $f_n$  jest ciągiem funkcji rzeczywistych określonych na przedziale zwartym, który jest wspólnie ograniczony i jednakowo ciągły, to zawiera on podciąg zbieżny jednostajnie.

## 1.4 Ciągłość granicy

Jeżeli ciąg  $f_n(x)$  jest jednostajnie zbieżny w  $A$  i funkcje  $f_n(x)$  są funkcjami ciągłymi w punkcie  $x_0 \in A$ , to funkcja graniczna  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  jest ciągłą w punkcie  $x_0$ .

## 1.5 Ciągłość a całka

Jeśli  $f_n$  jest ciągiem funkcji ciągłych, to:

- Dla zbieżnego jednostajnie ciągłego ciągu  $f_n(x)$ :

$$\int_E f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x)dx$$

- Dla zbieżnego jednostajnie ciągłego  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ :

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \sum_{k=1}^n f_k(x)dx$$

## 1.6 Kryteria zbieżności

### 1.6.1 Kryterium porównawcze Weierstrassa

Jeśli szereg liczbowy utworzony z ciągu  $a_n$  o wyrazach nieujemnych jest zbieżny oraz dla każdego  $x \in E$  zachodzi nierówność  $|f_n(x)| < a_n$ , to szereg funkcyjny  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  jest bezwzględnie jednostajnie zbieżny na  $E$ .

### 1.6.2 Kryterium Dirichleta

Jeżeli  $b_n \rightarrow 0$  i jeśli sumy częściowe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  są ograniczone, to  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  jest zbieżny.

### 1.6.3 Kryterium Abela

Niech  $a_n(x)$  oraz  $b_n(x)$  będą ciągami funkcyjnymi określonymi w zbiorze  $A$ . Jeśli ciąg  $a_n$  jest monotoniczny dla każdego  $x$ , oraz jest ciągiem wspólnie ograniczonym oraz szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$  jest jednostajnie zbieżny w  $A$ . Wtedy  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  jest jednoznacznie zbieżny w  $A$ .

## 2 Szeregi potęgowe

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

### 2.1 Twierdzenie Cauchy'ego-Hadamarda

Dla szeregu potęgowego  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ , niech  $\lambda = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ . Wtedy promieniem zbieżności szeregu potęgowego jest  $R = \frac{1}{\lambda}$ . Za wyjątkiem  $\lambda = 0$ , gdzie  $R = \infty$ , oraz  $\lambda = \infty$ , gdzie  $R = 0$ . Szereg jest zbieżny dla  $|z - z_0| < R$  i rozbieżny dla  $|z - z_0| > R$ . Zbieżność w punkcie  $z = z_0$  zależy od ciągu  $a_n$ .

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

### 2.2 Wzór Eulera

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Możemy też ten wzór dalej rozwijać, wiedząc, że:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

## 2.3 Szeregi Taylora

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

## 3 Przestrzenie metryczne

Jeżeli na zbiorze  $X$  określono funkcję  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , która spełnia następujące warunki:

1.  $d(x, x) = 0$
2.  $d(x, y) = d(y, x)$
3.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

to  $(X, d)$  nazywamy przestrzenią metryczną.

### 3.1 Zbieżność w przestrzeni metrycznej

Mówimy, że ciąg  $x_n$  jest zbieżny do  $x$  w przestrzeni metrycznej  $(X, d)$ , jeśli  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ .

### 3.2 Twierdzenie Banacha o punkcie stałym

Mówimy, że funkcja  $f : X \rightarrow X$  jest kontrakcją, jeśli istnieje taka liczba  $L \in (0, 1)$ , że dla każdego  $x, y \in X$  zachodzi

$$d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)$$

Jeśli  $X$  to przestrzeń metryczna, a  $f$  jest kontrakcją ze stałą  $L \in (0, 1)$ , to  $f$  ma punkt stały  $x_0$  w  $X$ .  $x_0$  jest granicą ciągu  $x_1 \in X$ ,  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Co więcej:

$$d(x_n, x_0) \leq \frac{L^{n-1}}{1-L} d(x_2, x_1)$$

## 4 Szeregi Fouriera

Jeżeli szereg trygonometryczny

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

jest zbieżny jednostajnie do funkcji  $f$  na przedziale  $[-\pi, \pi]$ , to

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

Jeśli  $f$  jest parzysta, to  $b_n = 0$ , w przeciwnym wypadku  $a_n = 0$ .

Alternatywnie, możemy użyć postaci zespolonej:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

gdzie:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$c_n = \begin{cases} \frac{a_n - ib_n}{2} & \text{jeśli } n > 0 \\ \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} & \text{jeśli } n < 0 \end{cases}$$

## 4.1 Funkcja kawałkami gładka

Mówimy, że funkcja  $f$  ma nieciągłość skokową w punkcie  $x_0$ , gdy istnieją granice jednostronne:

$$f(x_0+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), f(x_0-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

Oraz  $f(x_0+) \neq f(x_0-)$ .

Mówimy, że funkcja  $f$  jest kawałkami gładka, jeśli w dowolnym przedziale  $[a, b]$  jest ciągła poza skończoną liczbą punktów przedziału  $(a, b)$ , jej punkty nieciągłości są punktami skokowymi, a pochodna funkcji jest ciągła poza skończoną liczbą punktów przedziału  $(a, b)$ .

## 4.2 Zbieżność szeregów Fouriera

Jeżeli funkcja  $2\pi$  okresowa  $f$  jest kawałkami gładka na  $\mathbb{R}$ , to jej szereg Fouriera jest zbieżny dla dowolnego  $x \in \mathbb{R}$  do wartości:

$$\frac{f(x-) + f(x+)}{2}$$

Naturalnie, to oznacza, że jeśli  $f$  jest ciągła w  $x$ , to szereg Fouriera jest zbieżny do wartości  $f(x)$ .

# 5 Funkcje wielu zmiennych

Funkcje  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  są funkcjami wielu zmiennych. Z reguły tutaj będziemy rozważać funkcjami dla  $m = 1$  i  $n = 2$ , lecz czasami potworki się zdarzają.

## 5.1 Granica

Dla  $A \subset \mathbb{R}^n$ , oraz  $x_n \in A$  i  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , mówimy, że  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  ma granicę w  $x_0$  równą  $g$ ;

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$$

gdy dla każdego ciągu  $x_n \in A$ , zachodzi:

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$$

Lub; funkcja ma granicę w punkcie  $x_0$  równą  $g$ , gdy jej wartości dla punktów zbliżających się do  $x_0$  zbiegają do  $g$ .

## 5.2 Ciągłość

Funkcja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła w punkcie  $x_0$ , jeśli:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

## 5.3 Pochodna cząstkowa

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$$

Z tw. Schwarz'a mamy, że jeśli drugie pochodne cząstkowe są ciągłe w okolicy  $x_0$ , to w tej okolicy mamy:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$$

Zatem jeśli masz miłą funkcję, to możesz w dowolnej kolejności różnicować.

## 5.4 Gradient

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \right)$$

## 5.5 Pochodna

$U \subset \mathbb{R}^n$ . Mówimy, że funkcja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna w punkcie  $x_0$ , jeśli istnieje przekształcenie liniowe  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , takie, że:

$$\lim_{(h_1, \dots, h_n) \rightarrow (0, \dots, 0)} \frac{f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) - f(x_1, \dots, x_n) - A(h_1, \dots, h_n)}{\|(h_1, \dots, h_n)\|} = 0$$

$A(h_1, \dots, h_n)$  nazywamy  $f'(x_1, \dots, x_n)$ , a  $\|(h_1, \dots, h_n)\|$  to długość wektora  $\sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}$ .

Jeśli  $f$  ma pochodną w punkcie  $x_0$  to:

$$f'(x_1, \dots, x_n)(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) h_i$$

Dla większej ilości wymiarów;  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ :

$$\lim_{(h_1, \dots, h_n) \rightarrow (0, \dots, 0)} \frac{\|f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) - f(x_1, \dots, x_n) - f'(h_1, \dots, h_n)\|}{\|(h_1, \dots, h_n)\|} = 0$$

$$f' = (f'_1, \dots, f'_m)$$

## 5.6 Macierz Jacobiego

Jeżeli funkcja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  ma pochodną w punkcie  $x_0$ , to  $f'$  jest odwzorowaniem liniowym. Jego macierz nazywamy macierzą Jacobiego. Jakobian to wyznacznik tej macierzy.

## 5.7 Ekstrema lokalne

Warunkiem koniecznym tego, że punkt  $x_0$  jest ekstremum lokalnym, jest spełnienie warunku:

$$\nabla f(x_0) = (0, \dots, 0)$$

Jednak należy też sprawdzić, czy rzeczywiście ten punkt jest ekstremum lokalnym. Punkt jest ekstremum lokalnym, jeśli w otoczeniu  $U$  punktu zachodzi:

$$\forall u \in U f(u) \leq f(x_0)$$

Jeśli nierówność jest ostra to mówimy, że jest to ekstrmum ścisłe.

Warunkiem dostatecznym tego, że punkt  $(x_0, y_0)$  jest ekstremum lokalnym, jest spełnienie warunku:

$$\nabla f(x_0, y_0) = (0, \dots, 0) \wedge H(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0$$

Jeśli którakolwiek pochodna cząstkowa drugiego rzędu jest ujemna to punkt jest minimum lokalne. W p.p. jest to maksimum lokalne. Jeżeli  $H(x_0, y_0) < 0$  to ekstremum nie ma, a jeśli  $H(x_0, y_0) = 0$  to nie wiadomo.

## 5.8 Całki

Jeśli  $f(x, y)$  jest funkcją ciągłą na prostokącie  $R = [a, b] \times [c, d]$ , to całkę podwójną można obliczyć przez całki iterowane:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

nazywamy to twierdzeniem Fubiniego.

### 5.8.1 Całka przez rozszerzenie funkcji

Jeśli  $f$  jest zdefiniowane na  $D \subset \mathbb{R}^2$ , to można całkować po rozszerzeniu  $f^*$  funkcji  $f$ .

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{jeśli } (x, y) \in D \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} f^*(x, y) dx dy$$

### 5.8.2 Zbiór normalny

Obszar normalny względem osi  $x$  to zbiór punktów  $(x, y)$ , dla których:

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq g(x) \end{cases}$$

Obszar normalny względem osi  $y$  to zbiór punktów  $(x, y)$ , dla których:

$$\begin{cases} c \leq y \leq d \\ h(y) \leq x \leq k(y) \end{cases}$$

### 5.8.3 Całka po zbiorze normalnym

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

gdzie  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  są ciągłe. Dla dowolnej  $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\iint_D h(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{f(x)}^{g(x)} h(x, y) dy \right) dx$$

### 5.8.4 Obszary regularne

Suma skończonej ilości zbiorów normalnych, parami rozłącznych, jest obszarem regularnym. Dla zbioru regularnego  $D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$ :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} f(x, y) dx dy$$

### 5.8.5 Współrzędne biegunowe

$$D = \{(r \cos \alpha, r \sin \alpha) : r_1 \leq r \leq r_2; 0 \leq \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2 \leq 2\pi\}$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{[r_1, r_2] \times [\alpha_1, \alpha_2]} f(r \cos \alpha, r \sin \alpha) r dr d\alpha$$