

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Literatura</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Język</b>	<b>3</b>
2.1	Funkcje języka . . . . .	3
2.2	Nauka o języku . . . . .	3
2.3	Definicja . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Alfabet</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Słowo</b>	<b>3</b>
4.1	Konkatenacja . . . . .	4
4.2	Podsłowo . . . . .	4
4.3	Długość słowa . . . . .	4
4.4	Potęga słowa . . . . .	4
4.5	Odbicie . . . . .	4
<b>5</b>	<b>Język</b>	<b>4</b>
5.1	Konkatenacja języków . . . . .	4
5.2	Potęga języka . . . . .	5
5.3	Odbicie języka . . . . .	5
5.4	Dzielenie słów . . . . .	5
<b>6</b>	<b>Domknięcie Kleenego</b>	<b>5</b>
<b>7</b>	<b>Automaty Regularne</b>	<b>5</b>
7.1	Deterministyczne automaty skończone . . . . .	6
7.1.1	Funkcja przejść . . . . .	6
7.1.2	Rozszerzona funkcja przejść . . . . .	6
7.1.3	Przykład . . . . .	6
7.2	Niedeterministyczne automaty skończone . . . . .	7
7.2.1	Rozszerzona funkcja przejść . . . . .	7
7.2.2	Twierdzenie Scotta . . . . .	8
7.2.3	Przekształcenie $\text{niedet} \rightarrow \text{det}$ . . . . .	8
7.3	Automaty z przejściem . . . . .	9
7.3.1	Domknięcie stanu . . . . .	10
7.3.2	Domknięcie zbioru stanów . . . . .	10
7.3.3	Rozszerzona funkcja przejść . . . . .	10
7.3.4	Przekształcenie $\epsilon \rightarrow \text{ndet}$ . . . . .	10
<b>8</b>	<b>Wyrażenia regularne</b>	<b>10</b>
8.1	Operacje . . . . .	10
8.2	Przykłady . . . . .	11
8.3	Tw. Kleenego . . . . .	11
8.3.1	$w = u + v$ . . . . .	11
8.3.2	$w = uv$ . . . . .	11
8.3.3	$w = u^*$ . . . . .	11
<b>9</b>	<b>Klasy języków</b>	<b>12</b>
9.1	Języki regularne . . . . .	12
9.1.1	Lemat o pompowaniu dla języków regularnych . . . . .	12
9.1.2	Przechodniość regularności . . . . .	13
9.2	Bezkontekstowe . . . . .	13
9.2.1	Część wspólna języków bezkontekstowych . . . . .	13
9.2.2	Lemat o pompowaniu dla języków bezkontekstowych . . . . .	13
9.3	Kontekstowe . . . . .	14
9.4	Rozpoznawane przez maszyny Turinga . . . . .	14

<b>10 Gramatyki</b>	<b>14</b>
10.1 Wyprowadzanie słowa w jednym kroku . . . . .	14
10.2 Wyprowadzanie słowa w wielu krokach . . . . .	14
10.3 Język generowany przez gramatykę . . . . .	14
10.3.1 Przykład prosty . . . . .	14
10.3.2 Przykład złożony . . . . .	14
10.3.3 Przykład prosty . . . . .	15
10.3.4 Przykład złożony . . . . .	15
10.4 Suma gramatyk . . . . .	15
10.5 Rodzaje gramatyk . . . . .	15
10.6 Gramatyki typu 3 . . . . .	15
10.6.1 Gramatyki Normalne typu 3 . . . . .	15
10.6.2 Gramatyki liniowe . . . . .	15
10.7 Gramatyki bezkontekstowe . . . . .	15
10.7.1 Problem należenia słowa pustego . . . . .	16
10.7.2 Gramatyki normalne bezkontekstowe . . . . .	16
10.7.3 Problem słowa . . . . .	16
10.8 Gramatyki kontekstowe . . . . .	17
10.9 Gramatyki ogólne . . . . .	17
10.10Przekształcenie automatu na gramatykę . . . . .	17
10.11Przekształcenie gramatyki na automat . . . . .	17
<b>11 Algorytmy</b>	<b>18</b>
11.1 Problem . . . . .	18
11.1.1 Problem rozstrzygalny . . . . .	18
11.1.2 Problem pustości . . . . .	18
11.1.3 Problem skończoności . . . . .	18
11.1.4 Problem nieskończoności . . . . .	19
11.1.5 Problem równości . . . . .	19
11.2 Formalizm . . . . .	19
11.3 Teza Churcha-Turinga . . . . .	19
<b>12 Automaty ze stosem</b>	<b>19</b>
12.1 Konfiguracja . . . . .	20
12.1.1 Bezpośrednia redukcja konfiguracji . . . . .	20
12.1.2 Redukcja konfiguracji . . . . .	20
12.2 Języki automatu ze stosem . . . . .	20
12.3 Przykład . . . . .	20
12.4 Deterministyczne automaty ze stosem . . . . .	21
12.4.1 Klasa języków det CF . . . . .	21
12.4.2 Właściwości języków det CF . . . . .	21
<b>13 Maszyny Turinga</b>	<b>21</b>
13.1 Modele maszyny Turinga . . . . .	21
13.2 Konfiguracja maszyny Turinga . . . . .	21
13.3 Język akceptowany przez maszynę Turinga . . . . .	22
13.4 Rozstrzygalność . . . . .	22
13.5 Maszyna Turinga niedeterministyczna . . . . .	22
<b>14 Złożoność obliczeniowa</b>	<b>22</b>
14.1 Notacja O . . . . .	22
14.2 Klasa TIME . . . . .	22
14.3 Redukowalność wielomianowa . . . . .	23
14.4 Klasa P . . . . .	23
14.5 Klasa NP . . . . .	23
14.5.1 Klasa NP-trudna . . . . .	23
14.5.2 Klasa NP-zupełna . . . . .	23

## 1 Literatura

- J.E. Hopcroft "Wprowadzenie do teorii automatów i obliczeń"
- M. Sipser "Wprowadzenie do teorii obliczeń"
- G.E. Revesz "Introduction to formal languages"
- H.R. Lewin, Papadimitriou "Elements of the Theory of Computation"

## 2 Język

$$\infty \text{ zdań} + n \text{ reguł} = \text{język}$$

### 2.1 Funkcje języka

1. Poznawcza
2. Społeczna
3. Ekspresywna

### 2.2 Nauka o języku

1. syntaktyka - budowa
2. semantyka - co znaczy?
3. pragmatyka - jak się używa?

Przykład:  $2 + 3 \cdot 4$ : różna semantyka  $\rightarrow$  wieloznaczność syntaktyczna

### 2.3 Definicja

Język składa się z gramatyk i automatów. Gramatyka generuje język, automat rozpoznaje język.

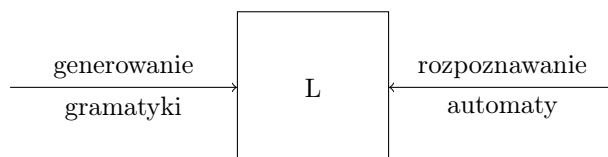


Diagram 1: Ilustracja relacji języków, automatów i gramatyk

## 3 Alfabet

Alfabet to zbiór atomowych dozwolonych symboli. Przykład:  $\{a, b, c, d\}$

## 4 Słowo

Słowo to skończony ciąg symboli nad alfabetem.

- $\varepsilon$  - słowo puste
- $\{K, L, O, P, S\} \neq "KLOPS"$ , ponieważ słowa mają dodane znaczenie, w postaci tego do którego języka należą.

## 4.1 Konkatenacja

- Dla  $P = a_1 \dots a_n$  i  $Q = b_1 \dots b_n$ , to  $PQ = a_1 \dots a_n b_1 \dots b_n$
- $P\epsilon = P$
- $\epsilon\epsilon = \epsilon$

## 4.2 Podśłowo

- $P = Q_1|Q|Q_2$
- $Q \subset P$

## 4.3 Długość słowa

- $|\epsilon| = 0$
- $|Pa| = |P| + 1$
- $|PQ| = |P| + |Q|$

## 4.4 Potęga słowa

- $P^0 = \epsilon$
- $P^{n+1} = P^n P$

## 4.5 Odbicie

- $\epsilon^{-1} = \epsilon$
- $(Pa)^{-1} = aP^{-1}$

# 5 Język

Zbiór dozwolonych słów nad alfabetem.

- $V^*$  - zbiór wszystkich języków
- $V^+ = V^* \setminus \{\epsilon\}$
- $L \in V^*$
- $\{a, ab\} \neq \{\epsilon, a, ab\}$  ponieważ inaczej operacje na językach by nie działały

## 5.1 Konkatenacja języków

$$L_1 = \{a, aa\}, L_2 = \{b, aba\}, L_1 L_2 = \{ab, aaba, aab, aaaba\}$$

$L_2 \backslash L_1$	a	aa
b	ab	aab
aba	aaba	aaaba

Tabela 1: Tabela konkatenacji języków  $L_1$  i  $L_2$

$|L_1 L_2| \leq |L_1| \cdot |L_2|$  bo  $\epsilon$  wszystko psuje.

$$L_1 = \{a^n : n \geq 0\}, L_2 = \{b^n : n \geq 0\}, L_1 L_2 = \{a^n b^m : n, m \geq 0\}$$

## 5.2 Potęga języka

$$L = \{a, ab\}, L^0 = \{\epsilon\}, L^1 = \{a, ab\}, L^2 = L \cdot L$$

Potęgowanie na językach jest dziwne

$$L = \{a^n : n \geq 0\}, L^2 = \{a^n a^m : a, m \geq 0\} = \{a^n : a \geq 0\} = L$$

Potęgowanie języku **nie** zwiększyło mocy

$$L = \{a^n : n > 0\}, L^2 = \{a^n a^m : a, m > 0\} = L \setminus \{a\} = \{a^n : n > 1\}$$

Potęgowanie języku **zmniejszyło** moc

## 5.3 Odbicie języka

$$L^{-1} = \{P^{-1} : P \in L\}$$

## 5.4 Dzielenie słów

$P \in L^n \rightarrow$  można podzielić  $P$  na  $n$  (niekoniecznie różnych) słów

$$L = \{a, ab\}, "aabababab" \in L^n, n = ?$$

Jest to problem wykładniczy, który wymaga stworzenia drzewa różnych możliwości.

## 6 Domknięcie Kleenego

$$L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n$$

$$L^+ = \bigcup_{n \geq 1} L^n$$

$$L_1 = \{a\}, L_1^* = \{a^n : n \geq 0\}, L_1^+ = \{a^n : n > 0\}$$

$$L_2 = \{\epsilon, a\}, L_2^* = \{a^n : n \geq 0\} = L_2^+$$

$L = \{aa, ab, ba, bb\}, L^* = \{P \in \{a, b\}^* : 2 \mid |P|\} =$  wszystkie słowa nad alfabetem a, b o parzystej długości

- $L^+ \subset L^*$
- $\epsilon \in L \rightarrow L^+ = L^*$
- $(L^*)^* = L^*$
- $L_1 \subset L_2 \rightarrow L_1^* \subset L_2^*$

$$L = \{a^n : n > 1\}, L^1 \neq L^2, L^* = L$$

## 7 Automaty Regularne

- nieskończona taśma
- rejestry
- w każdym rejestrze symbol z alfabetu T
- głowica, która porusza się od lewej do prawej po rejestrach taśmy, aż do momentu, kiedy napotka pusty rejestr. Głowica zawsze jest w jednym ze stanów z zbioru stanów

## 7.1 Deterministyczne automaty skończone

Automat skończenie stanowy jest uporządkowaną piątką

$$\mathfrak{A} = \langle K, T, \delta, q_0, H \rangle$$

- $K$  zbiór stanów
- $T$  alfabet - symbole z tego alfabetu znajdują się w rejestrach
- $\delta : K \times T \rightarrow K$  funkcja przejścia automatu
- $q_0$  stan początkowy automatu
- $H$  zbiór stanów akceptowalnych/końcowych

### 7.1.1 Funkcja przejść

Zbiory  $K$  i  $T$  są skończone, co oznacza, że funkcję  $\delta$  można przedstawić w formie tabelki. Przykład:

$$K = \{q_0, q_1, q_2\}, T = \{a, b\}, H = \{q_2\}$$

$$\delta : K \times T \rightarrow K$$

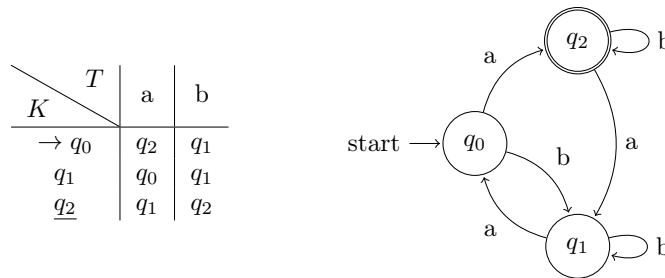


Diagram 2: Tabela konkatencji języków  $L_1$  i  $L_2$  oraz graf przejść automatu

### 7.1.2 Rozszerzona funkcja przejść

$$\hat{\delta} : K \times T^* \rightarrow K$$

- $\hat{\delta}(q, \epsilon) = q$
- $\hat{\delta}(q, Pa) = \delta(\hat{\delta}(q, P), a)$

$$L(\mathfrak{A}) = \{P \in T^* : \hat{\delta}(q_0, P) \in H\}$$

### 7.1.3 Przykład

Narysuj diagram przejścia deterministycznego automatu skończenie stanowego  $\mathfrak{A}$  w którym  $T = \{0, 1\}$ ,  $P \in L(\mathfrak{A})$  wtedy i tylko wtedy gdy w  $P$  występuje na pierwszym od końca miejscu.

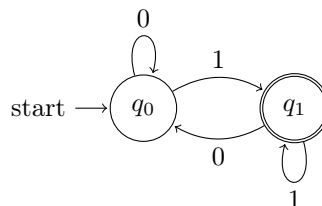


Diagram 3: Diagram przejścia automatu do wykrywania 1 na pierwszym miejscu od końca

Narysuj diagram przejścia deterministycznego automatu skończenie stanowego  $\mathfrak{A}$  w którym  $T = \{0, 1\}$ ,  $P \in L(\mathfrak{A})$  wtedy i tylko wtedy gdy w  $P$  występuje na drugim miejscu od końca 1.

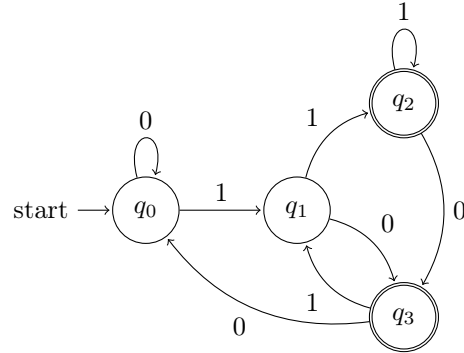


Diagram 4: Diagram przejścia automatu do wykrywania 1 na drugim miejscu od końca

Widać na diagramie 4 wprost zależność że w zależności od miejsca od końca na którym ma być jeden rośnie ilość stanów. Ilość stanów maszyny  $|K|$  do wykrywania 1 na  $n$ -tym miejscu od końca można wyrazić w następujący sposób:  $|K| = 2^n$

## 7.2 Niedeterministyczne automaty skończone

- zamiast jednego stanu początkowego jest zbiór stanów początkowych
- niedeterministyczna funkcja przejścia, która zwraca zbiór wyjściowych stanów

$$\mathfrak{A} = \langle K, T, \delta, Q_0, H \rangle$$

gdzie oznaczenia są identyczne jak dla deterministycznego automatu z dwoma różnicami:

- $\delta : K \times T \rightarrow \mathcal{P}(K)$  funkcja przejścia automatu
- $Q_0$  zbiór stanów początkowych automatu

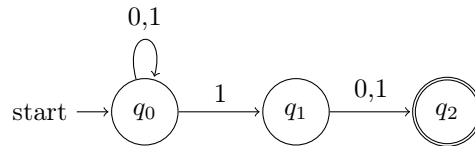


Diagram 5: Niedeterministyczna wersja automatu  $\mathfrak{A}$  z rysunku 4

Jak widać zamiast 4 stanów potrzeba tylko 3, to dlatego, że dla wersji niedeterministycznej  $|K| = n + 1$

### 7.2.1 Rozszerzona funkcja przejść

$$\hat{\delta} : \mathcal{P}(K) \times T^* \rightarrow \mathcal{P}(K)$$

- $\hat{\delta}(A, \epsilon) = A$
- $\hat{\delta}(A, Pa) = \bigcup_{q \in \hat{\delta}(A, P)} \delta(q, a)$

$$\hat{\delta}(\{p\}, a) = \delta(p, a)$$

$$L(\mathfrak{A}) = \{P \in T^* : \hat{\delta}(Q_0, P) \cap H \neq \emptyset\}$$

### 7.2.2 Twierdzenie Scotta

- każdy **niedeterministyczny** automat skończony można zastąpić równoważnym deterministycznym automatem skończonym

$$\mathfrak{L}_{ndet} \subset \mathfrak{L}_{det}$$

- każdy deterministyczny automat skończony można zastąpić równoważnym **niedeterministycznym** automatem skończonym

$$\mathfrak{L}_{det} \subset \mathfrak{L}_{ndet}$$

- liczba stanów automatu deterministycznego jest wykładnicza w stosunku do liczby stanów automatu niedeterministycznego

$$\mathfrak{L}_{det} = \mathfrak{L}_{ndet}$$

Zatem co nam daje niedeterministyczność? Przede wszystkim prostotę, ale kosztem wykładniczej złożoności.

Narysuj diagram przejścia deterministycznego automatu skończenie stanowego  $\mathfrak{A}$  w którym  $T = \{a\}$ ,  $P \in L(\mathfrak{A})$  wtedy i tylko wtedy gdy  $(2||P|) \vee (3||P|)$ .

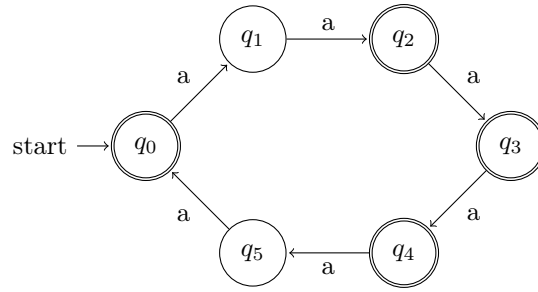


Diagram 6: Diagram przejścia automatu do wykrywania słów o długości podzielnej przez 2 lub 3

Jak widzimy na diagramie 6 przyjmuje postać cyklu o okresie 6, ponieważ  $NWW(3, 2) = 6$ . Problem z diagramami deterministycznym się pojawia dla wyższych liczb, np.: 7 i 5, wtedy  $NWW(7, 5) = 35$ . Zatem narysujmy diagram niedeterministyczny 7.

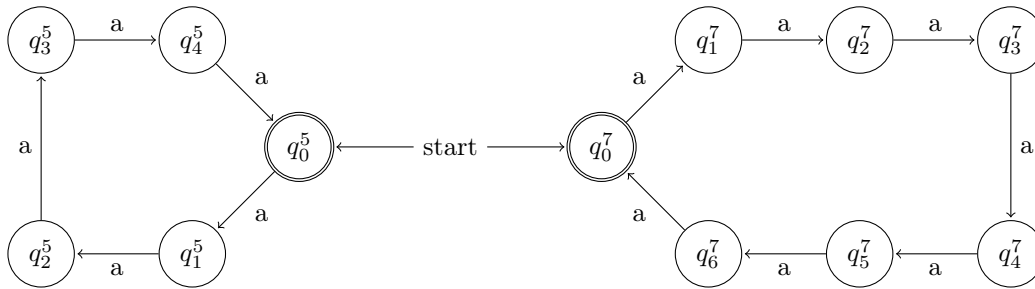


Diagram 7: Diagram przejścia automatu ndet do wykrywania słów o długości podzielnej przez 5 lub 7

Jako, że automaty niedeterministyczne pozwalają na kilka stanów początkowych, to tworzymy diagram niespójny, który w zależności od tego czy  $|P|$  jest podzielne przez 5 czy 7 przechodzi do odpowiedniego pod-automatu. Najłatwiej to można sobie wyobrazić jako dwa równoległe automaty z alternatywą na koniec.

### 7.2.3 Przekształcenie $ndet \rightarrow det$

$$\mathfrak{A} = \langle K, T, \delta, Q_0, H \rangle$$

$$\mathfrak{A}' = \langle K', T', \delta', q'_0, H' \rangle$$

$$L(\mathfrak{A}) = L(\mathfrak{A}')$$



- $T' = T$  bo nie ma sensu zmieniać taśmy
- $K' = P(K)$  **Wykładniczy wzrost liczby stanów**  
w przekształceniu będziemy używać systemu etykiet (konstrukcja potęgowa) aby zamieniać zbiory stanów na pojedyncze stany

$$\{q_0, q_1\} = q^{01}$$

$$P(K) = \{q^\emptyset, q^1, q^0, q^{10}, \dots\}$$

- $q'_0 = Q_0$  - stan odpowiadający zbiorowi stanów początkowych
- $H' = \{A \in K' : A \cap H \neq \emptyset\}$
- $\delta'(A, a) = \bigcup_{q \in A} \delta(q, a)$

Dla automatu 5 zbudujemy równoważny automat deterministyczny. Korzystając z powyższych zasad otrzymujemy:

- $K' = P(K) = \{\emptyset, \{q_0\}, \dots, \{q_1, q_2\}, \{q_0, q_1, q_2\}\} = \{q^\emptyset, q^0, \dots, q^{12}, q^{012}\}$
- $H' = \{q^2, q^{12}, q^{02}, q^{012}\}$
- $q'_0 = \{q_0\} = q^0$

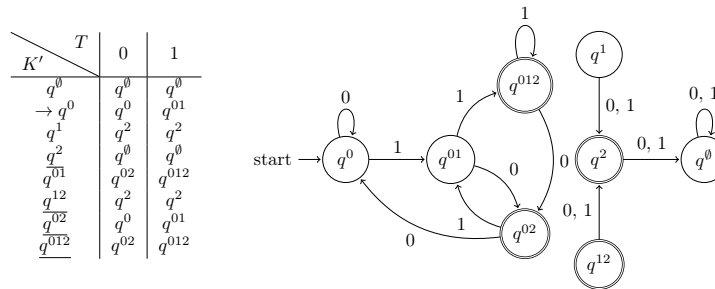


Diagram 8: Zdeterminizowany automat z rysunku 5 i jego tabela przejść

Jak widać na diagramie 8 liczba stanów wzrosła z 3 do 8, co jest zgodne z przewidywaniami. Jednocześnie widać, że diagram 4 zawiera się w diagramie 8, co niekoniecznie oznacza, że są sobie równoważne, lecz jako, że stany dodatkowe są nieosiągalne to te dwa automaty są równoważne. **Nie zawsze równoważność automatów będzie tak oczywista.**

### 7.3 Automaty z przejściem

Co jeśli moglibyśmy zmienić stan ale nie ruszyć głowicy? Wtedy mamy do czynienia z automatem z przejściem.

$$\epsilon \in T, \epsilon = \text{nie ruszaj głowicy automatu}$$

$$\delta : K \times (T \cup \{\epsilon\}) \rightarrow P(K)$$

**Każdy automat z przejściem jest niedeterministyczny**

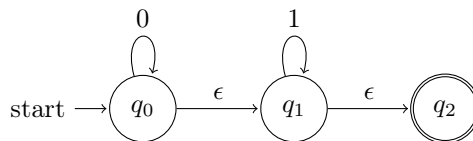


Diagram 9: Automat z przejściem

Automat przedstawiony na rysunku 9 akceptuje języki o następującej postaci  $L(\mathcal{A}) = \{0^n 1^m 2^k : n, m, k \geq 0\}$ . **Nie istnieją różne epsilony:**  $00\epsilon 1\epsilon 222 = 00122$

### 7.3.1 Domknięcie stanu

$E(q)$  = zbiór stanów osiągalnych z  $q$  przez dowolną liczbę epsilonów

1.  $q \in E(q)$
2.  $r \in E(q) \wedge p \in \delta(r, \epsilon) \rightarrow p \in E(q)$

### 7.3.2 Domknięcie zbioru stanów

$$E(A) = \bigcup_{q \in A} E(q)$$

### 7.3.3 Rozszerzona funkcja przejść

$$\hat{\delta}: P(K) \times T^* \rightarrow P(K)$$

- $\hat{\delta}(A, \epsilon) = E(A)$
- $\hat{\delta}(A, Pa) = \bigcup_{q \in \hat{\delta}(A, P)} E(\delta(q, a))$

### 7.3.4 Przekształcenie $\epsilon \rightarrow \text{ndet}$

$$\mathfrak{A}' = \langle K', T', \delta', Q'_0, H' \rangle$$

$$T' = T, K' = K, H' = H, Q'_0 = E(Q_0), \delta'(A, a) = E(\delta(q, a))$$

$$\mathfrak{L}_{\text{ndet}} = \mathfrak{L}_\epsilon = \mathfrak{L}_{\text{det}}$$

$\delta_\epsilon$	a	b	$\epsilon$	$\Rightarrow$	$\delta_{\text{ndet}}$	a	b
$\rightarrow q_0$	$\emptyset$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$		$\rightarrow q_0$	$E(\emptyset) = \emptyset$	$\{q_1\}$
$q_1$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$	$\emptyset$		$q_1$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
$\underline{q_2}$	$\{q_0\}$	$\emptyset$	$\emptyset$		$\rightarrow \underline{q_2}$	$E(\{q_0\}) = \{q_0, q_2\}$	$\emptyset$

Diagram 10: Przekształcenie automatu z przejściem na niedeterministyczny

## 8 Wyrażenia regularne

$\text{Reg}(V)$  = zbiór wyrażeń regularnych nad alfabetem  $V$

- $\epsilon \in \text{Reg}(V)$
- $e \in \text{Reg}(V)$
- $a \in V \rightarrow a \in \text{Reg}(V)$
- $u, v \in \text{Reg}(V) \rightarrow (u + v), (u \cdot v), (u^*) \in \text{Reg}(V)$

### 8.1 Operacje

W kolejności od najwyższego priorytetu do najniższego

1.  $P \in \text{Reg}(V) \rightarrow L(P) \neq \emptyset$
2.  $L(u^*) = (L(u))^*$
3.  $L(uv) = L(u) \cdot L(v)$
4.  $L(u + v) = L(u) \cup L(v)$
5.  $L(u) = \{u\}$

## 8.2 Przykłady

$$L(ba^*) = \{ba^n : n \geq 0\}$$

$$L(ba^*) = L(b)L(a^*) = \{b\} \cdot (L(a))^* = \{b\} \cdot \{a\}^* = \{ba^n : n \geq 0\}$$

$L((a+b)^*ab(a+b)^*)$  - wszystkie słowa nad alfabetem  $\{a, b\}$  zaczynające się od  $a$  i kończące się  $b$

## 8.3 Tw. Kleenego

$$\forall_{v \in \text{Reg}(V)} L(v) \subset \mathfrak{L}_{det}$$

Każdy język generowany przez wyrażenie regularne jest językiem akceptowanym przez automat skończony. Dowód opiera się na konstrukcji automatu  $\epsilon$  odpowiadającego operatorowi wyrażenia regularnego.

### 8.3.1 $w = u + v$

$$L(u + v) = L(u) \cup L(v)$$

$$L(u) = L(\mathfrak{A}_u), L(v) = L(\mathfrak{A}_v)$$

$$L(\mathfrak{A}) = L(\mathfrak{A}_u) \cup L(\mathfrak{A}_v)$$

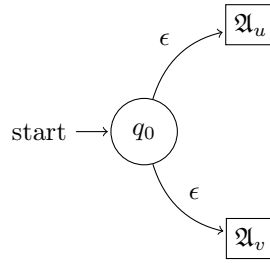


Diagram 11: Konstrukcja automatu dla wyrażenia regularnego  $u + v$

### 8.3.2 $w = uv$

$$L(uv) = L(u) \cdot L(v)$$

$$L(u) = L(\mathfrak{A}_u), L(v) = L(\mathfrak{A}_v)$$

$$L(\mathfrak{A}) = L(\mathfrak{A}_u) \cdot L(\mathfrak{A}_v)$$

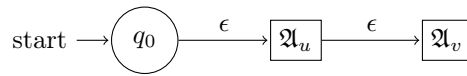


Diagram 12: Konstrukcja automatu dla wyrażenia regularnego  $uv$

### 8.3.3 $w = u^*$

$$L(u^*) = (L(u))^*$$

$$L(u) = L(\mathfrak{A}_u)$$

$$L(\mathfrak{A}) = (L(\mathfrak{A}_u))^*$$

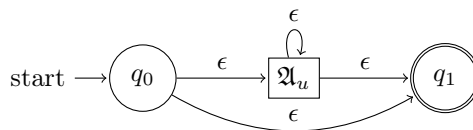


Diagram 13: Konstrukcja automatu dla wyrażenia regularnego  $u^*$

## 9 Klasy języków

Języki w zależności od swoich właściwości można podzielić na klasy. Z reguły języki dzielimy na klasy w zależności od tego co jest konieczne do ich rozpoznania i generowania.

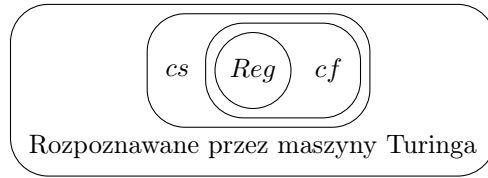


Diagram 14: Nadzbiory języków regularnych

Każda klasa języków ma odpowiadającą klasę automatów, oraz gramatyk.

$$L(G_n) = \mathcal{L}_n = L(\mathfrak{A}_n)$$

### 9.1 Języki regularne

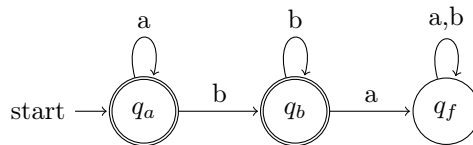


Diagram 15: Konstrukcja automatu deterministycznego dla języka  $L(a^*b^*)$

Język regularny to język akceptowany przez wyrażenie regularne, czyli język akceptowany przez automat skończony.

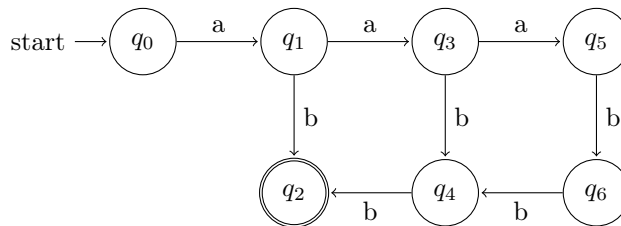


Diagram 16: Konstrukcja automatu akceptującego język  $L = \{a^n b^n : 1 \leq n \leq 3\}$  bez śmietnika

**Czy można zapisać automat deterministyczny (lub nie) skończenie stanowy, akceptujący język  $L = \{a^n b^n : n \geq 1\}$ ?**

Nie da się, ponieważ wymagałoby to nieskończonej ilości stanów. Zatem język  $L$  nie jest językiem regularnym.

#### 9.1.1 Lemat o pompowaniu dla języków regularnych

Służy do dowodzenia, że język **nie** jest regularny.

Jeżeli  $L = L(\mathfrak{A})$

to: istnieje  $k \geq 0$ , taki, że każde słowo  $P \in L$  o długości  $|P| \geq k$  można zapisać jako  $P = XYZ$ , spełniające warunki:

- $Y \neq \epsilon$
- $|XY| \leq k$
- $\forall_{i \geq 0} XY^i Z \in L$

Parafrazując: jeśli język jest regularny, to nie ma w nim słowa, którego nie mógłbyś podzielić na trzy części, takie, że środkowa część jest powtarzalna.

Lemat o pompowaniu jest warunkiem koniecznym ale nie wystarczającym. To oznacza, że wszystkie języki regularne spełniają warunek lematu o pompowaniu, ale nie wszystkie języki spełniający warunek lematu o pompowaniu są regularne. Warunkiem dostatecznym jest zdefiniowanie automatu skończonego stanowego akceptującego język.

#### Przykład zgodny

Dlaczego język  $L = \{a^n b^m : n, m \geq 1\}$  jest regularny?

- $k > 2, P \in L$
- $|P| \geq k \rightarrow n + m \geq k$
- $P = a^{n-x} a^x b^m$  czyli  $P = XYZ$  gdzie  $X = a^{n-x}, Y = a^x, Z = b^m$
- $n - x + x < k \leftrightarrow |XY| \leq k$
- dla  $i \geq 0$   $XY^i Z = a^{n-x} a^{xi} b^m = a^{n+x(i-1)} b^m$ , co jak widzimy jest w języku  $L$

#### Przykład niezgodny

Dlaczego język  $L = \{a^n b^n : n \geq 1\}$  nie jest regularny?

- $k > 2, P \in L$
- $|P| \geq k \rightarrow 2n \geq k$
- $|XY| \leq k \rightarrow XY = a^n \vee XY = b^n$
- dla  $i = 2$   $XY^2 Z = a^n b^n b^n \notin L$

Zatem muszą istnieć języki nieregularne

### 9.1.2 Przechodność regularności

Z tw. Kleenego:

$$L_1, L_2 \in \mathfrak{L}_{reg} \rightarrow L_1 \cup L_2, L_1 \cdot L_2, L_1^*, L_2^* \in \mathfrak{L}_{reg}$$

$$L_1 \cup L_2 = L(v + w) = L(v) \cup L(w) = L_1 \cup L_2$$

$$L_1 \cap L_2 = \overline{L_1 \cap L_2} = \overline{L_1} \cup \overline{L_2}$$

$$L_3 \subsetneq L_2 \subsetneq L_1 \subsetneq L_0$$

## 9.2 Bezkontekstowe

Klasa języków bezkontekstowych jest zamknięta na operacje sumy, konkatencji i domknięcia Kleene'ego.

### 9.2.1 Część wspólna języków bezkontekstowych

$$\{a^n b^n c^k : n \geq 1\} \cap \{a^n b^k c^k : n \geq 1\} = \{a^n b^n c^n : n \geq 1\}$$

### 9.2.2 Lemat o pompowaniu dla języków bezkontekstowych

Istnieje liczba naturalna  $p$  zależna od  $L$ , taka, że dla każdego słowa  $P \in L$  o długości  $|P| \geq p$  istnieje podział  $P = UXYWZ$  spełniający warunki:

- $XY \neq \epsilon$
- $|XWY| \leq p$
- $\forall_{i \geq 0} UX^i WY^i Z \in L$

### 9.3 Kontekstowe

### 9.4 Rozpoznawane przez maszyny Turinga

## 10 Gramatyki

Gramatyki służą do generowania języków. Działanie gramatyk wyraża się przy pomocy reguły przepisującej.

$(P, Q)$  – słowa

Jeżeli  $P \rightarrow Q$  oraz  $U = P_1 P P_2$  to  $U \Rightarrow P_1 Q P_2$

Jeżeli reguła przepisująca jest wykonywana wielokrotnie to używamy oznaczenia  $\Rightarrow^*$ .

$$G = \langle V_N, V_T, S, F \rangle$$

gdzie:

- $V_N$  - zbiór nieterminali (symboli zastępowanych)
- $V_T$  - zbiór terminali (symboli niezastępowanych)
- $S$  - symbol początkowy
- $F$  - zbiór reguł przepisujących

$$V_N \cap V_T = \emptyset$$

### 10.1 Wyprowadzanie słowa w jednym kroku

Dla gramatyki  $G$  mówimy, że  $W$  jest wyprowadzane w jednym kroku z  $U$  (oznaczane  $U \Rightarrow W$ ) jeżeli istnieje reguła  $P \rightarrow Q \in F$  taka, że  $U = P_1 P Q_2$  oraz  $W = P_1 Q Q_2$ .

### 10.2 Wyprowadzanie słowa w wielu krokach

Dla gramatyki  $G$  mówimy, że  $W$  jest wyprowadzane w wielu krokach z  $U$  (oznaczane  $U \Rightarrow^* W$ ) wtedy gdy  $U = W$ , lub gdy istnieją słowa  $R_1 \dots R_n : n > 1$  gdzie  $R_1 = U$  a  $R_n = W$ .

### 10.3 Język generowany przez gramatykę

$$L(G) = \{W \in V_T^* : S \Rightarrow^* W\}$$

#### 10.3.1 Przykład prosty

$$F = \{S \rightarrow aaSA, S \rightarrow \epsilon, A \rightarrow bA, A \rightarrow b\}$$

$$S \Rightarrow^* a^{2n} S A^n \Rightarrow a^{2n} A^n \Rightarrow^* a^{2n} b^m$$

$$L(G) = \{a^{2n} b^m : n \geq 0, m \geq 0\} \cup \{\epsilon\}$$

#### 10.3.2 Przykład złożony

$$F = \{S \rightarrow abScd, S \rightarrow A, A \rightarrow dcAba, A \rightarrow \epsilon\}$$

$$S \Rightarrow^* (ab)^n S (cd)^n \Rightarrow (ab)^n A (cd)^n \Rightarrow^* (ab)^n (dc)^m A (ba)^m (cd)^n \Rightarrow (ab)^n (dcba)^m (cd)^n$$

$$L(G) = \{(ab)^n (dcba)^m (cd)^n : n \geq 1, m \geq 0\} \cup \{\epsilon\}$$

### 10.3.3 Przykład prosty

$$L(G) = \{a^n : n \geq 0\} = L(a^*)$$

$$G = \langle \{S\}, \{a\}, S, \{S \rightarrow aS, S \rightarrow \epsilon\} \rangle$$

### 10.3.4 Przykład złożony

$$L(G) = \{a^n b^n : n \geq 1\} \notin \mathfrak{L}_{reg}$$

$$G = \langle \{S\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aSb, S \rightarrow ab\} \rangle$$

## 10.4 Suma gramatyk

$$F_1 = \{S \rightarrow aS, S \rightarrow \epsilon\}, L(G_1) = \{a^n : n \geq 0\}$$

$$F_2 = \{S \rightarrow bS, S \rightarrow \epsilon\}, L(G_2) = \{b^n : n \geq 0\}$$

$$F_1 \cup F_2 \neq F_{G_1 \cup G_2}$$

$$F_{G_1 \cup G_2} = \{S^1 \rightarrow aS^1, S^1 \rightarrow \epsilon, S^2 \rightarrow bS^2, S^2 \rightarrow \epsilon, S \rightarrow S^1, S \rightarrow S^2, S \rightarrow S^1 S^2\}$$

## 10.5 Rodzaje gramatyk

- Typu 0 (ogólne)
- Typu 1 (kontekstowe)
- Typu 2 (bezkontekstowe)
- Typu 3 (regularne)

$$G_2 \subset G_1 \subset G_0, G_3 \subset G_0$$

## 10.6 Gramatyki typu 3

$$F = \{A \rightarrow aB, A \rightarrow a, A \rightarrow \epsilon : A, B \in V_N, a \in V_T\}$$

### 10.6.1 Gramatyki Normalne typu 3

$$F = \{A \rightarrow aB, A \rightarrow \epsilon : A \in V_N, a \in V_T\}$$

Liczba kroków generacji =  $|P|$ . Każda gramatyka regularna może być zapisana w postaci gramatyki normalnej typu 3.

### 10.6.2 Gramatyki liniowe

Gramatyki regularne inaczej nazywa się gramatykami liniowymi prawostronnymi. Gramatyki liniowe prawostronne to gramatyki, w których  $F = \{A \rightarrow Pb\}$ . Gramatyki liniowe lewostronne to gramatyki, w których  $F = \{A \rightarrow bP\}$ . **Gramatyki liniowe lewostronne są równoważne gramatykom liniowym prawostronnym.** Gramatyki liniowe to gramatyki kontekstowe, w których  $F = \{A \rightarrow P_1 B_2\}$

## 10.7 Gramatyki bezkontekstowe

$$F = \{A \rightarrow P : A \in V_N, P \in \{V_N \cup V_T\}^*\}$$

### 10.7.1 Problem należenia słowa pustego

Dla każdej gramatyki bezkontekstowej  $G$  można efektywnie skonstruować równoważną jej gramatykę bezkontekstową  $G'$ , w której nie ma reguł przepisujących symbol początkowy w słowo puste, za wyjątkiem sytuacji jeśli  $\epsilon \in L(G)$ . Wówczas jedyną regułą w  $F'$  zawierającą  $\epsilon$  będzie  $S' \rightarrow \epsilon$  i  $S'$  nie pojawia się po prawej stronie żadnej reguły.

Problem należenia słowa pustego jest rozstrzygalny dla gramatyk bezkontekstowych. Algorytm wygląda następująco:

1. Przekształć gramatykę  $G$  na równoważną jej gramatykę  $G'$ , w której nie ma reguł przepisujących symbol początkowy w słowo puste.
2. Sprawdź, czy  $S' \rightarrow \epsilon \in F'$ .

### 10.7.2 Gramatyki normalne bezkontekstowe

Gramatyka bezkontekstowa jest normalna, jeżeli każda reguła przepisująca ma postać  $A \rightarrow a$  lub  $A \rightarrow BC$ , efektywnie tworząc drzewo binarne.

Dla każdej  $\epsilon$ -wolnej gramatyki bezkontekstowej można efektywnie skonstruować równoważną jej gramatykę bezkontekstową normalną.

**Zamiana CF  $\rightarrow$  CF norm**

- Pozbądź się terminalów z reguł innych niż te o kształcie  $A \rightarrow a$  kosztem nowych nieterminali.

$$\{A \rightarrow abXc\} \Rightarrow \{A \rightarrow X_aX_bXX_c, X_a \rightarrow a, X_b \rightarrow b, X_c \rightarrow c\}$$

- Zamień reguły o kształcie  $A \rightarrow a_1a_2 \dots a_nB$  na reguły o kształcie  $A \rightarrow a_1X_1, X_1 \rightarrow a_2X_2, \dots, X_{n-1} \rightarrow a_nB$ .

$$\{A \rightarrow X_1X_2X_3X_4\} \Rightarrow \{A \rightarrow X_1Z_1, Z_1 \rightarrow X_2Z_2, Z_2 \rightarrow X_3X_4\}$$

### 10.7.3 Problem słowa

Problem słowa jest rozstrzygalny dla gramatyk bezkontekstowych. Problem słowa polega na sprawdzeniu, czy dane słowo należy do języka generowanego przez gramatykę bezkontekstową. Algorytm siłowy ma złożoność  $O(|F|^{|P|})$  gdzie  $|P|$  to długość słowa. Z kolei algorytm "CYK" ma złożoność  $O(|P|^3)$ .

**Algorytm CYK**

Algorytm CYK na wejściu przyjmuje gramatykę bezkontekstową w postaci normalnej. Dla danego słowa  $P$  sprawdza, czy  $P \in L(G)$ . Ponieważ drzewa wyprowadzenia w postaci normalnej są drzewami binarnymi, drzewo dla  $P$  będzie miało dokładnie  $|P| - 1$  wierzchołków wewnętrznych. Algorytm ten polega na konstruowaniu tablicy trójkątnej o końcowej podstawie długości  $|P|$  elementów i wysokości  $|P| - 1$  wierszy. W komórce  $(i, j)$  przechowywane są nieterminalne symbole, które mogą wyprowadzić słowo  $P[i..j]$ . Wartość w komórce  $(1, |P|)$  oznacza, czy  $P \in L(G)$ .

$X_{15}$				
$X_{14}$	$X_{25}$			
$X_{13}$	$X_{24}$	$X_{35}$		
$X_{12}$	$X_{23}$	$X_{34}$	$X_{45}$	
$X_{11}$	$X_{22}$	$X_{33}$	$X_{44}$	$X_{55}$
$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$

Tabela 2: Tablica trójkątna dla algorytmu CYK

Tabelę konstruujemy od dołu. W pierwszym kroku wypełniamy komórki  $P_n$ . Potem dla każdego  $P_n$  znajdujemy wszystkie nieterminalne symbole, które mogą tworzyć  $P_n$ . W kolejnym kroku dla zbioru  $X_{ij}$  znajdujemy wszystkie nieterminalne symbole, które mogą wyprowadzić  $P_iP_{i+1} \dots P_j$ .

$$((i \leq k < j) \wedge (B \in X_{ik}) \wedge (C \in X_{k+1j}) \wedge (A \rightarrow BC)) \rightarrow A \in X_{ij}$$

Dla normalnych gramatyk  $n = \overline{\overline{V_n}}$ ,  $p = 2^n$ .

**Przykład**



$$F = \{S \rightarrow AB|BC, A \rightarrow BA|a, B \rightarrow CC|b, C \rightarrow AB|a\}$$

$X_{11} = \{B\}$ , ponieważ tylko  $B$  generuje  $b$ . Z kolei  $X_{12} = \{S, A\}$ , ponieważ:  $k = 1$ , więc musimy brać pod uwagę wszystkie ciała  $X_{1k}X_{k2} = \{BA, BC\}$ . Są dwa nieterminaly, które mogą wyprowadzić te elementy:  $A$  i  $S$ .  $X_{24} = \{B\}$ , ponieważ:  $k \in \{2, 3\}$  więc musimy brać pod uwagę:  $X_{22}X_{34} \cup X_{23}X_{44} = \{AS, AC, CS, CC, BB\}$ . Jest tylko jeden nieterminal, który może wyprowadzić któryś z tych elementów:  $B$ .

$\{S, A, C\}$				
$\emptyset$	$\{S, A, C\}$			
$\emptyset$	$\{B\}$	$\{B\}$		
$\{S, A\}$	$\{B\}$	$\{S, C\}$	$\{S, A\}$	
$\{B\}$	$\{A, C\}$	$\{A, C\}$	$\{B\}$	$\{A, C\}$
$b$	$a$	$a$	$b$	$a$

Tabela 3: Tablica trójkątna dla  $F$  i słowa "baaba"

Z kolei ta tabela potrafi określić, np.: że  $S|A \xRightarrow{*} ba$  oraz  $B \xRightarrow{*} aba$ .

## 10.8 Gramatyki kontekstowe

$$F = \{Q_1AQ_2 \rightarrow Q_1PQ_2 : Q_1, Q_2, A, P \in \{V_N \cup V_T\}^* \setminus S\} \cup \{S \rightarrow \epsilon\}$$

Reguły w  $F$  nie mogą pozwolić na zmniejszenie się ciągu.

## 10.9 Gramatyki ogólne

Bez ograniczeń na reguły

## 10.10 Przekształcenie automatu na gramatykę

Dla  $\mathfrak{A} = \langle K, T, \delta, q_0, H \rangle$ ,  $\mathfrak{A} \in \mathfrak{A}_{det}$

- $V_T = T$
- $V_N = K \cup \{S\}$
- $\delta(q_0, a) = p$  to  $p \rightarrow a \in F$
- $\delta(q, a) = p$  to  $p \rightarrow qa \in F$
- $q \in H$  to  $S \rightarrow p \in F$
- $q_0 \in H$  to  $S \rightarrow \epsilon \in F$

## 10.11 Przekształcenie gramatyki na automat

Dla  $G = \langle V_N, V_T, S, F \rangle$

- $K = V_N$
- $T = V_T$
- $Q_0 = \{S\}$
- $H = \{A \in K : A \rightarrow \epsilon \in F\}$
- $A \rightarrow aB \in F$  to  $B \in \delta(A, a)$

## 11 Algorytmy

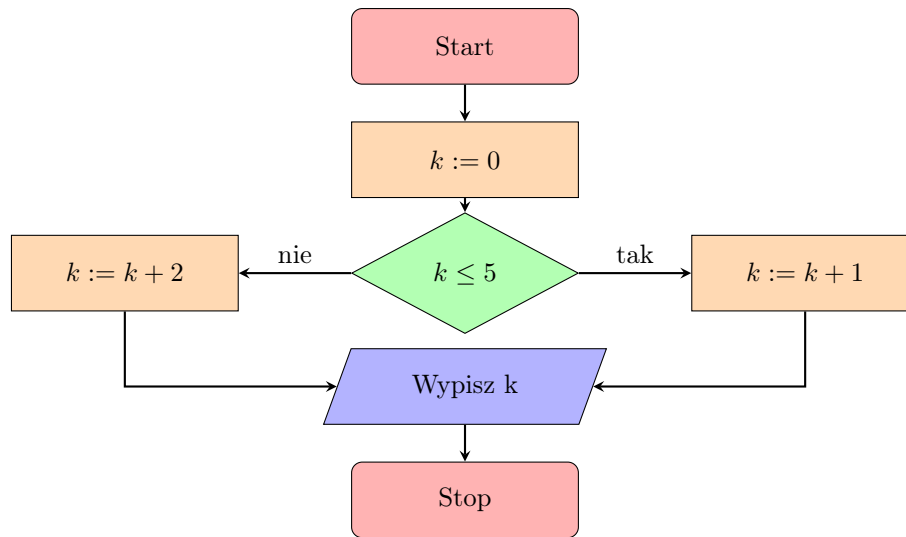


Diagram 17: Schemat blokowy przykładowego algorytmu

Algorytm to zbiór procedur, które dla danego wejścia dają określony wynik. My zakładamy, że algorytm zwraca TAK lub NIE.

### 11.1 Problem

Problem to zbiór instancji, oraz zbiór instancji pozytywnych problemu.

$$\mathcal{P} = \langle \mathbb{I}, \mathbb{P} \rangle$$

$$\mathbb{P} \subset \mathbb{I}$$

Warto zauważyć zatem, że  $\mathbb{I}$  działa jak alfabet, a  $\mathbb{P}$  jak język nad tym alfabetem. Algorytm dla danego problemu określa czy dana instancja należy do zbioru pozytywnego (języka), w podobny sposób jak automat określa co jest w języku. Zatem algorytm działa trochę jak funkcja  $\mathcal{A} : \mathbb{I} \rightarrow \{\top, \perp\}$ .

#### 11.1.1 Problem rozstrzygalny

Problem rozstrzygalny to taki problem, dla którego istnieje algorytm, który dla każdej instancji zwraca TAK lub NIE.

#### 11.1.2 Problem pustości

$$\mathbb{I} = \text{wszystkie automaty} = \mathbb{A}$$

$$\mathbb{P} = \{\mathfrak{A} \in \mathbb{A} : L(\mathfrak{A}) = \emptyset\}$$

Jest to problem **rozstrzygalny** dla języków regularnych.

#### 11.1.3 Problem skończoności

$$\mathbb{I} = \mathbb{A}$$

$$\mathbb{P} = \{\mathfrak{A} \in \mathbb{A} : |L(\mathfrak{A})| < \infty\}$$

Jest to problem **rozstrzygalny** dla języków regularnych.

### 11.1.4 Problem nieskończoności

$$\mathbb{I} = \mathbb{A}$$

$$\mathbb{P} = \{\mathfrak{A} \in \mathbb{A} : |L(\mathfrak{A})| = \infty\}$$

Jest to problem **rozstrzygalny** dla języków regularnych, ponieważ jest to odwrotne pytanie do problemu skończoności.

### 11.1.5 Problem równości

$$\mathbb{I} = \mathbb{A} \times \mathbb{A}$$

$$\mathbb{P} = \{(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2) \in \mathbb{A} \times \mathbb{A} : L(\mathfrak{A}_1) = L(\mathfrak{A}_2)\}$$

Jest to problem **rozstrzygalny** dla języków regularnych.

- Zbuduj  $\mathfrak{B}$ , takie, że  $L(\mathfrak{B}) = (L(\mathfrak{A}_1) \cap \overline{L(\mathfrak{A}_2)}) \cup (L(\mathfrak{A}_2) \cap \overline{L(\mathfrak{A}_1)})$  (XOR mnogościowe)
- Zastosuj problem pustości na  $\mathfrak{B}$

## 11.2 Formalizm

Algorytmy nie mają formalnej definicji. Jest to pojęcie intuicyjne. Formalizacją algorytmu są maszyny Turinga(13). Z kolei ciekawą konsekwencją jest to, że zatem teoretycznie nie ma dowodu na to czy każdy problem i algorytm ma swoją maszynę Turinga.

## 11.3 Teza Churcha-Turinga

Klasa funkcji obliczalnych na maszynie Turinga, maszynie RAM oraz funkcji  $\lambda$  jest równoważna klasie algorytmów. Innymi słowy: każdy algorytm (pojęcie rozmyte) ma swoją implementację.

Nie jest to twierdzenie, ani lemat - jest to teza, która nie ma dowodu. Jest to dogmat, aksjomat informatyki jako dziedziny. Jej zaprzeczenie by oznaczało, że istnieje algorytm, którego nie da się zaimplementować.

## 12 Automaty ze stosiem

Zachowują się jak automaty regularne z  $\epsilon$  przejściami, ale z tą różnicą, że mają dodatkową głowicę operującą na stosie.

$$\mathfrak{A}_{zs} = \langle Z, K, T, \delta, z_0, q_0, H \rangle$$

- $Z$  - zbiór symboli stosu
- $K$  - zbiór stanów
- $T$  - zbiór symboli wejściowych
- $\delta$  - funkcja przejścia
- $z_0$  - symbol początkowy stosu
- $q_0$  - stan początkowy
- $H$  - zbiór stanów akceptujących

Głowica na taśmie jest tylko i wyłącznie do odczytu, natomiast głowica na stosie czytając element ze stosu, usuwa go i następnie może włożyć na stos nowe elementy.

$$\delta : Z \times K \times (T \cup \{\epsilon\}) \rightarrow P(Z^* \times K)$$

## 12.1 Konfiguracja

Konfiguracja to opis chwilowy automatu ze stosem. Formalnie jest to słowo postaci  $WqP \in Z^*KT^*$  takie, że  $W \in Z^*$  (głowica ogląda ostatni symbol  $W$ ),  $q \in K$  natomiast  $P \in T^*$

Konfiguracja początkowa to konfiguracja dla początkowych zmiennych automatu. Z reguły jest to  $z_0q_0P : P \in T^*$ . Konfiguracja końcowa z kolei to konfiguracja dla stanów akceptujących. Z reguły przyjmuje postać  $zq\epsilon : z \in Z, q \in H$ .

### 12.1.1 Bezpośrednia redukcja konfiguracji

Dla dwóch konfiguracji  $X, Y$  mówimy że  $X$  bezpośrednio redukuje się do  $Y$  ( $X \Rightarrow Y$ ) jeśli  $X = \omega z q a P$ ,  $Y = \omega U p p$  oraz:

- $q, p \in K$
- $z \in Z, a \in T \cup \{\epsilon\}$
- $\omega, U \in Z^*, p \in T^*$
- $(U, p) \in \delta(z, q, a)$

### 12.1.2 Redukcja konfiguracji

Dla dwóch konfiguracji  $X, Y$  mówimy że  $X$  redukuje się do  $Y$  ( $\overset{*}{\Rightarrow}$ ), jeśli istnieje ciąg  $X_1, X_2, \dots, X_n$  taki, że:  $X_1 = X, X_n = Y, \forall 1 \leq i < n, X_i \Rightarrow X_{i+1}$

## 12.2 Języki automatu ze stosem

Dla automatów ze stosem języki definiujemy przy pomocy redukcji konfiguracji. Język akceptowany przez  $\mathfrak{A}_{zs}$  to zbiór  $L(\mathfrak{A}) = \{P \in T^* : z_0q_0P \overset{*}{\Rightarrow} Wp\epsilon : W \in Z^*, p \in H\}$  **lub**  $N(\mathfrak{A}) = \{P \in T^* : z_0q_0P \overset{*}{\Rightarrow} \epsilon p\epsilon : p \in K\}$

Są dwie różne konwencje dot. tego czy automat akceptuje język. Albo automat dochodzi do stanu końcowego ( $L(\mathfrak{A})$ ), albo kończy mu się stos ( $N(\mathfrak{A})$ ). Dla dowolnego automatu ze stosem  $\mathfrak{A}$  można skonstruować automat  $\mathfrak{A}'$  dla którego  $L(\mathfrak{A}) = N(\mathfrak{A}')$  i na odwrót.

## 12.3 Przykład

$\mathfrak{A}_{zs}$  akceptujący język  $\{a^n b^n : n \geq 1\}$

- $Z = \{z_0, a\}$
- $K = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $T = \{a, b\}$
- $H = \{q_2\}$

$$\delta : Z \times K \times (T \cup \{\epsilon\}) \rightarrow P(Z^* \times K)$$

Przy każdym  $a$  dodajemy  $a$  na stos, a potem czytając  $b$  ściągamy ze stosu. Jeśli liczba jest  $a$  i  $b$  jest równa to jak dojdziemy do końca to stos będzie pusty.

1.  $\delta(z_0, q_0, b) = \emptyset$  - pierwsze co czytamy to  $b$ : nonsens
2.  $\delta(z_0, q_0, a) = (z_0a, q_0)$  - przechodzimy w tryb czytania  $a$
3.  $\delta(a, q_0, a) = (aa, q_0)$  - czytamy  $a$
4.  $\delta(a, q_0, b) = (\epsilon, q_1)$  - przechodzimy w tryb czytania  $b$
5.  $\delta(a, q_1, b) = (\epsilon, q_1)$  - czytamy  $b$
6.  $\delta(z_0, q_1, b) = \emptyset$  - jeśli stos jest pusty a dalej są  $b$
7.  $\delta(z_0, q_1, \epsilon) = (z_0, q_2)$  - stan końcowy

## 12.4 Deterministyczne automaty ze stosem

Jeśli poniższe warunki są spełnione to uznajemy, że automat ze stosem jest deterministyczny:

- Dla dowolnych  $z \in Z$  oraz  $q \in K$  jeśli  $\delta(z, q, \epsilon) \neq \emptyset$  to dla każdego  $a \in T$  mamy  $\delta(z, q, a) = \emptyset$
- Dla każdego  $q \in K, z \in Z, a \in T \cup \{\epsilon\}$  zachodzi  $|\delta(z, q, a)| \leq 1$

Innymi słowy: automaty ze stosem są deterministyczne, jeśli dla każdego stanu i symbolu wejściowego istnieje co najwyżej jedno przejście, oraz jeśli istnieje przejście na  $\epsilon$  to nie ma przejść na inne symbole.

### 12.4.1 Klasa języków det CF

Deterministycznym automatom ze stosem odpowiada klasa języków. Potocznie nazywamy ją klasą języków deterministycznych bezkontekstowych (det CF).

### 12.4.2 Właściwości języków det CF

Jest to klasa domknięta na dopełnienie, iloczyn.

$$\det CF \subset CF$$

## 13 Maszyny Turinga

$$\mathfrak{M} = \langle K, \gamma, \delta, q_0, H \rangle$$

- $K$  - zbiór stanów
- $\gamma$  - zbiór symboli taśmy
- $\delta$  - funkcja przejścia
- $q_0$  - stan początkowy
- $H$  - zbiór stanów akceptujących

$$\delta : K \times \gamma \rightarrow K \times \gamma \times \{L, R\}$$

Głowica tego automatu porusza się po taśmie, czytając i zapisując symbole. Instrukcje (zapisane w  $\delta$ ) mają postać:  $qaq'a'M : M \in \{L, R\}$  i czyta się w następujący sposób: jeśli głowica jest w stanie  $q$  i czyta symbol  $a$  to zapisuje symbol  $a'$ , przechodzi w stan  $q'$  i przesuwają głowicę w lewo (L) lub w prawo (R).  $\delta$  nie musi być funkcją całkowitą, czyli może nie być zdefiniowana dla niektórych stanów i symboli.

### 13.1 Modele maszyny Turinga

Istnieje wiele różnych modeli maszyny Turinga. Z reguły różnią się one ilością taśm oraz tym czy taśmy są nieskończone. Wszystkie te modele są równoważne. Jedynie złożoność obliczeniowa maszyn z większą długością taśm jest "lepszą" od maszyn z mniejszą długością taśm. Czyli, np.: maszyna z dwiema taśmami jest równoważna maszynie z jedną taśmą, ale jest bardziej wydajna.

### 13.2 Konfiguracja maszyny Turinga

Konfiguracja to opis chwilowy maszyny Turinga. Formalnie jest to słowo postaci  $WqP \in \gamma^* K \gamma^*$  takie, że  $W$  to zawartość taśmy po lewej stronie głowicy,  $q$  to stan w którym znajduje się głowica, a  $P$  to zawartość taśmy po prawej stronie głowicy.

Rozkaz maszyny  $qbq'b'L$  przekształca  $uaqbw \rightarrow uq'ab'w$ .  $\mathfrak{M}$  akceptuje słowo  $w$  wtedy gdy istnieje ciąg konfiguracji  $C_1, C_2, \dots, C_n$  taki, że  $C_1 = q_0w$ ,  $C_n = uq'bw$  oraz  $C_i$  redukuje się do  $C_{i+1}$ .

### 13.3 Język akceptowany przez maszynę Turinga

Język akceptowany przez maszynę Turinga to zbiór wszystkich słów, które maszyna Turinga akceptuje. Formalnie jest to zbiór  $L(\mathfrak{M}) = \{w \in \gamma^* : q_0 w \xRightarrow{*} u q_a w : u, w \in \gamma^*\}$

### 13.4 Rozstrzygalność

Jeśli maszyna zatrzymuje się dla każdego wejścia w stanie  $q_a$  lub  $q_r$  to jest rozstrzygająca. **Maszyna Turinga to formalizm algorytmu.** Dwie maszyny są równoważne jeśli rozstrzygają te same języki. Problem jest rozstrzygalny jeśli istnieje maszyna Turinga, która rozstrzyga język

$$L_{I,P} = \{ \langle i \rangle : i \in P \}$$

### 13.5 Maszyna Turinga niedeterministyczna

Maszyna Turinga niedeterministyczna to maszyna Turinga, która w każdym stanie może mieć wiele możliwości przejścia. Formalnie jest to maszyna Turinga, dla której funkcja przejścia  $\delta$  nie jest funkcją, ale zbiorem funkcji.

## 14 Złożoność obliczeniowa

Niech  $\mathfrak{M}$  będzie det. maszyną Turinga, która zatrzymuje się dla każdego wejścia. Złożoność obliczeniowa maszyny Turinga to funkcja  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  taka, że dla każdego słowa wejściowego  $w$ , maszyna zatrzymuje się w co najwyżej  $f(|w|)$  krokach.

### 14.1 Notacja O

Jest to notacja asymptotyczna, używana do określania skali osiąganych wartości przez funkcję. Niech  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ . Mówimy, że funkcja jest duże O od  $g$  jeśli istnieje  $c > 0$  i  $n_0$  takie, że dla każdego  $n > n_0$  zachodzi  $f(n) \leq c \cdot g(n)$ .

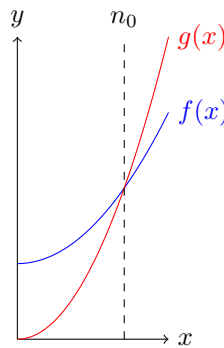


Diagram 18: Ilustracja notacji O

### 14.2 Klasa TIME

Niech  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ . Klasą  $TIME(f)$  nazywamy zbiór języków, które są akceptowane przez maszynę Turinga, której złożoność obliczeniowa jest  $O(f(n))$ .

Dla każdej deterministycznej wielotaśmowej maszyny Turinga o złożoności  $f(n)$  można skonstruować odpowiadającą jej jednotaśmową maszynę Turinga o złożoności  $O(f(n)^2)$ .

Podobna transformacja jest możliwa dla maszyn niedeterministycznych, ale złożoność wynosi  $2^{O(f(n))}$ . Zatem widzimy, że maszyny niedeterministyczne są bardziej wydajne, ale mniej realistyczne.

### 14.3 Redukowalność wielomianowa

Język  $L_1$  jest redukowalny do języka  $L_2$  w czasie wielomianowym, jeśli istnieje funkcja obliczalna w czasie wielomianowym  $f : V^* \rightarrow V^*$  taka, że dla każdego  $w \in V^*$  zachodzi  $w \in L_1 \Leftrightarrow f(w) \in L_2$ . Czyli jeśli istnieje przyporządkowanie wielomianowe między językami.

### 14.4 Klasa P

Klasa wszystkich języków rozstrzygalnych w czasie wielomianowym przez maszynę Turinga deterministyczną to klasa P.

$$P = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{TIME}(n^k)$$

$$L_1 \leq_p L_2 \wedge L_2 \in P \Rightarrow L_1 \in P$$

### 14.5 Klasa NP

Klasa wszystkich języków, które są rozstrzygalne w czasie wielomianowym przez maszynę Turinga niedeterministyczną to klasa NP.

#### 14.5.1 Klasa NP-trudna

$$\forall L \in \text{NP} \exists L' \leq_p L \Rightarrow L' \in \text{NP}_{\text{HARD}}$$

#### 14.5.2 Klasa NP-zupełna

$$L \in \text{NP}_{\text{HARD}} \wedge L \in \text{NP} \Rightarrow L \in \text{NP}_{\text{COMPLETE}}$$

$$L \in \text{NP}_{\text{COMPLETE}} \wedge L \in P \Rightarrow P = \text{NP}$$