

Contents

1 Literatura 1

2 Język 1

2.1 Funkcje języka 1

2.2 Nauka o języku 2

2.3 Definicja 2

3 Alfabet 2

4 Słowo 2

4.1 Konkatenacja 2

4.2 Podśłowo 2

4.3 Długość słowa 2

4.4 Potęga słowa 2

4.5 Odbicie 3

5 Język 3

5.1 Konkatenacja języków 3

5.2 Potęga języka 3

5.3 Dzielenie słów 3

6 Domknięcie Kleenego 4

7 Automaty 4

7.1 Deterministyczne automaty skończone 4

7.1.1 Funkcja przejść 4

7.1.2 Rozszerzona funkcja przejść 5

7.1.3 Przykład 5

7.2 Niedeterministyczne automaty skończone 5

7.2.1 Rozszerzona funkcja przejść 6

7.3 Twierdzenie Scotta 6

7.3.1 Przykład 6

7.3.2 Dowód nietet → det 7

1 Literatura

- J.E. Hopcroft "Wprowadzenie do teorii automatów i obliczeń"
- M. Sipser "Wprowadzenie do teorii obliczeń"
- G.E. Revesz "Introduction to formal languages"
- H.R. Lewin, Papadimitriou "Elements of the Theory of Computation"

2 Język

∞ zdań + n reguł = język

2.1 Funkcje języka

1. Poznawcza
2. Społeczna
3. Ekspresywna

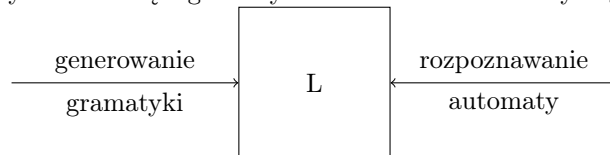
2.2 Nauka o języku

1. syntaktyka - budowa
2. semantyka - co znaczy?
3. pragmatyka - jak się używa?

Przykład: $2 + 3 \cdot 4$: różna semantyka \rightarrow wieloznaczność syntaktyczna

2.3 Definicja

Język składa się z gramatyk i automatów. Gramatyka generuje język, automat rozpoznaje język.



3 Alfabet

Alfabet to zbiór atomowych dozwolonych symboli

Przykład: $\{a, b, c, d\}$

4 Słowo

Słowo to skończony ciąg symboli nad alfabetem.

- ε - słowo puste
- $\{K, L, O, P, S\} \neq "KLOPS"$, ponieważ słowa mają dodane znaczenie, w postaci tego do którego języka należą.

4.1 Konkatenacja

- Dla $P = a_1 \dots a_n$ i $Q = b_1 \dots b_n$, to $PQ = a_1 \dots a_n b_1 \dots b_n$
- $P\epsilon = P$
- $\epsilon\epsilon = \epsilon$

4.2 Podsłowo

- $P = Q_1|Q|Q_2$
- $Q \subset P$

4.3 Długość słowa

- $|\epsilon| = 0$
- $|Pa| = |P| + 1$
- $|PQ| = |P| + |Q|$

4.4 Potęga słowa

- $P^0 = \epsilon$
- $P^{n+1} = P^n P$

4.5 Odbicie

- $\epsilon^{-1} = \epsilon$
- $(Pa)^{-1} = aP^{-1}$

5 Język

Zbiór dozwolonych słów nad alfabetem.

- V^* - zbiór wszystkich języków
- $V^+ = V^* \epsilon$
- $L \in V^*$
- $\{a, ab\} \neq \epsilon, a, ab$ ponieważ inaczej operacje na językach by nie działały

5.1 Konkatenacja języków

$$L_1 = \{a, aa\}, L_2 = \{b, aba\}, L_1L_2 = \{ab, aaba, aab, aaaba\}$$

$L_2 \backslash L_1$	a	aa
	ab	aab
b	ab	aab
aba	aaba	aaaba

Table 1: Tabela konkatenacji języków L_1 i L_2

$|L_1L_2| \leq |L_1| \cdot |L_2|$ bo eps wszystko psuje

$$L_1 = \{a^n : n \geq 0\}, L_2 = \{b^n : n \geq 0\}, L_1L_2 = \{a^n b^m : n, m \geq 0\}$$

5.2 Potęga języka

$$L = \{a, ab\}, L^0 = \{\epsilon\}, L^1 = \{a, ab\}, L^2 = L \cdot L$$

Potęgowanie na językach jest dziwne

$$L = \{a^n : n \geq 0\}, L^2 = \{a^n a^m : a, m \geq 0\} = \{a^n : a \geq 0\} = L$$

Potęgowanie języku **nie** zwiększyło mocy

$$L = \{a^n : n > 0\}, L^2 = \{a^n a^m : a, m > 0\} = L \setminus \{a\} = \{a^n : n > 1\}$$

Potęgowanie języku **zmniejszyło** moc

5.3 Dzielenie słów

$P \in L^n \rightarrow$ można podzielić P na n (niekoniecznie różnych) słów

$$L = \{a, ab\}, "aababaabab" \in L^n, n = ?$$

Jest to problem wykładniczy, który wymaga stworzenia drzewa różnych możliwości.

6 Domknięcie Kleenego

$$L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n$$

$$L^+ = \bigcup_{n \geq 1} L^n$$

$$L_1 = \{a\}, L_1^* = \{a^n : n \geq 0\}, L_1^+ = \{a^n : n > 0\}$$

$$L_2 = \{\epsilon, a\}, L_2^* = \{a^n : n \geq 0\} = L_2^+$$

$L = \{aa, ab, ba, bb\}, L^* = \{P \in \{a, b\}^* : 2 \mid |P|\} =$ wszystkie słowa nad alfabetem a, b o parzystej długości

- $L^+ \subset L^*$
- $\epsilon \in L \rightarrow L^+ = L^*$
- $(L^*)^* = L^*$
- $L_1 \subset L_2 \rightarrow L_1^* \subset L_2^*$

$$L = \{a^n : n > 1\}, L^1 \neq L^2, L^* = L$$

7 Automaty

- nieskończona taśma
- rejestry
- w każdym rejestrze symbol z alfabetu T
- głowica, która porusza się od lewej do prawej po rejestrach taśmy, aż do momentu, kiedy napotka pusty rejestr. Głowica zawsze jest w jednym ze stanów z zbioru stanów

7.1 Deterministyczne automaty skończone

Automat skończenie stanowy jest uporządkowaną piątką

$$\mathcal{A} = \langle K, T, \delta, q_0, H \rangle$$

- K zbiór stanów
- T alfabet - symbole z tego alfabetu znajdują się w rejestrach
- $\delta : K \times T \rightarrow K$ funkcja przejścia automatu
- q_0 stan początkowy automatu
- H zbiór stanów akceptowalnych/końcowych

7.1.1 Funkcja przejść

Zbiory K i T są skończone, co oznacza, że funkcję δ można przedstawić w formie tabelki. Przykład:

$$K = \{q_0, q_1, q_2\}, T = \{a, b\}, H = \{q_2\}$$

$$\delta : K \times T \rightarrow K$$

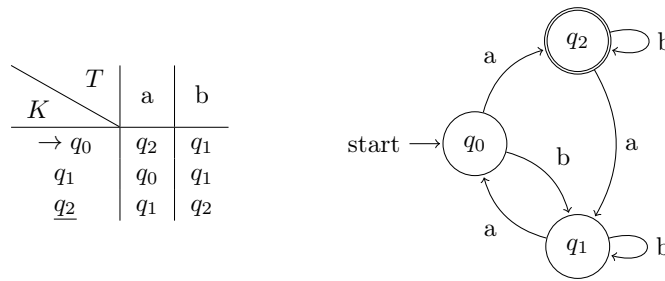


Figure 1: Tabela konkatencji języków L_1 i L_2 oraz graf przejść automatu

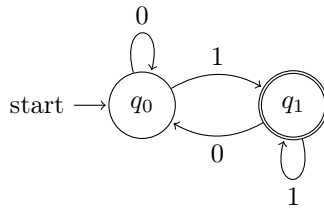
7.1.2 Rozszerzona funkcja przejść

$$\hat{\delta}: K \times T^* \rightarrow K$$

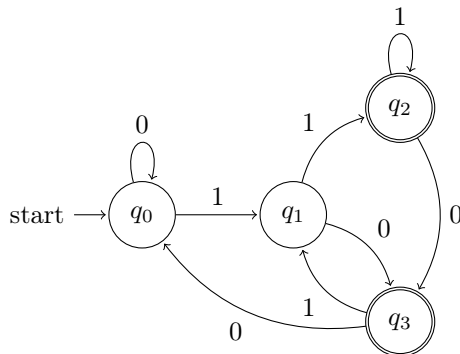
- $\hat{\delta}(q, \epsilon) = q$
- $\hat{\delta}(q, Pa) = \delta(\hat{\delta}(q, P), a)$

7.1.3 Przykład

Narysuj diagram przejścia deterministycznego automatu skończenie stanowego \mathfrak{A} w którym $T = \{0, 1\}$, $P \in L(\mathfrak{A})$ wtedy i tylko wtedy gdy w P występuje na pierwszym od końca miejscu.



Narysuj diagram przejścia deterministycznego automatu skończenie stanowego \mathfrak{A} w którym $T = \{0, 1\}$, $P \in L(\mathfrak{A})$ wtedy i tylko wtedy gdy w P występuje na drugim od końca miejscu.



Widać wprost zależność że w zależności od miejsca od końca na którym ma być jeden rośnie ilość stanów. Ilość stanów maszyny $|K|$ do wykrywania 1 na n -tym miejscu od końca można wyrazić w następujący sposób: $|K| = 2^n$

7.2 Niedeterministyczne automaty skończone

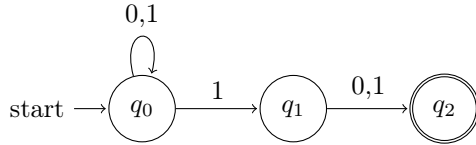
- zamiast jednego stanu początkowego jest zbiór stanów początkowych
- niedeterministyczna funkcja przejścia, która zwraca zbiór wyjściowych stanów

$$\mathfrak{A} = \langle K, T, \delta, Q_0, H \rangle$$

gdzie oznaczenia są identyczne jak dla deterministycznego automatu z dwoma różnicami:

- $\delta : K \times T \rightarrow a \in K$ funkcja przejścia automatu
- Q_0 zbiór stanów początkowych automatu

Niedeterministyczna wersja automatu skończenie stanowego \mathfrak{A} z poprzedniego przykładu.



Jak widać zamiast 4 stanów potrzeba tylko 3, to dlatego, że dla wersji niedeterministycznej $|K| = n + 1$

7.2.1 Rozszerzona funkcja przejść

$$\hat{\delta}: P(K) \times T^* \rightarrow P(K)$$

- $\hat{\delta}(A, \epsilon) = A$
- $\hat{\delta}(A, Pa) = \bigcup_{q \in \hat{\delta}(A, P)} \delta(q, a)$

$$\hat{\delta}(\{p\}, a) = \delta(p, a)$$

7.3 Twierdzenie Scotta

- każdy **niedeterministyczny** automat skończony można zastąpić równoważnym deterministycznym automatem skończonym

$$\mathfrak{L}_{ndet} \subset \mathfrak{L}_{det}$$

- każdy deterministyczny automat skończony można zastąpić równoważnym **niedeterministycznym** automatem skończonym

$$\mathfrak{L}_{det} \subset \mathfrak{L}_{ndet}$$

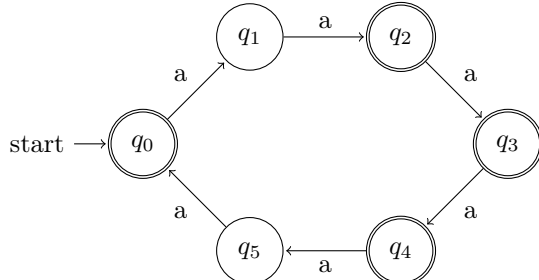
- liczba stanów automatu deterministycznego jest wykładnicza w stosunku do liczby stanów automatu niedeterministycznego

$$\mathfrak{L}_{det} = \mathfrak{L}_{ndet}$$

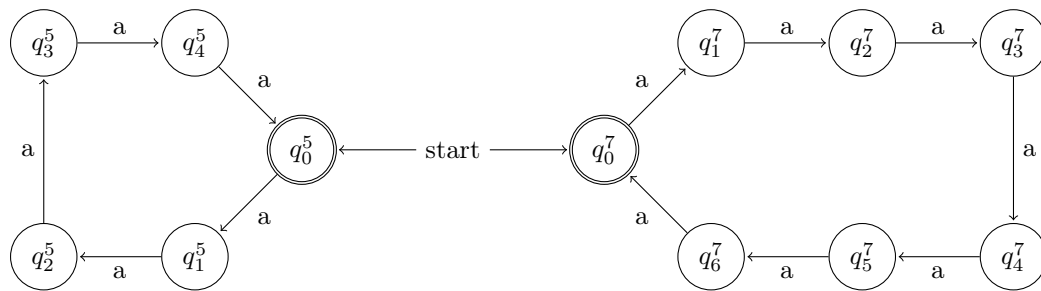
Zatem co nam daje niedeterministyczność? Przede wszystkim prostotę, ale kosztem wykładniczej złożoności.

7.3.1 Przykład

Narysuj diagram przejścia deterministycznego automatu skończenie stanowego \mathfrak{A} w którym $T = \{a\}, P \in L(\mathfrak{A})$ wtedy i tylko wtedy gdy $(2||P|) \vee (3||P|)$.



Jak widzimy diagram przyjmuje postać cyklu o okresie 6, ponieważ $NWW(3, 2) = 6$. Problem z diagramami deterministycznym się pojawia dla wyższych liczb, np.: 7 i 5, wtedy $NWW(7, 5) = 35$. Zatem narysujmy diagram niedeterministyczny.



Jako, że automaty niedeterministyczne pozwalają na kilka stanów początkowych, to tworzymy diagram niespójny, który w zależności od tego czy $|P|$ jest podzielne przez 5 czy 7 przechodzi do odpowiedniego pod-automatu. Najłatwiej to można sobie wyobrazić jako dwa równoległe automaty z alternatywą na koniec.

7.3.2 Dowód $\text{niedet} \rightarrow \text{det}$

$$\mathfrak{A} = \langle K, T, \delta, Q_0, H \rangle$$

$$\mathfrak{A}' = \langle K', T', \delta', q'_0, H' \rangle$$

$$L(\mathfrak{A}) = L(\mathfrak{A}')$$

- $T' = T$ bo nie ma sensu zmieniać taśmy
- $K' = P(K)$ **Wykładniczy wzrost liczby stanów**
w przekształceniu będziemy używać systemu etykiet (konstrukcja potęgowa) aby zamieniać zbiory stanów na pojedyncze stany

$$\{q_0, q_1\} = q^{01}$$

$$P(K) = \{q^\emptyset, q^1, q^0, q^{10}, \dots\}$$

- $q'_0 = Q_0$ - stan odpowiadający zbiorowi stanów początkowych
- $H' = \{A \in K' : A \cap H \neq \emptyset\}$
- $\delta'(A, a) = \bigcup_{q \in A} \delta(q, a)$