例1. 求 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-2x-3}$ 之所有渐近线

$f(x)=1+\dfrac{x+3}{x^2-2x-3}$

(1) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\infty$，得 $x=-1$ 为垂直渐线（亦可觀察得之）

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\infty$，得 $x=3$ 为垂直渐近线（亦可觀察得之）

(2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-x}{x^2-2x-3}=1$　$y=1$ 为渐近线.

例2. 求 $f(x)=\dfrac{x^2-x+4}{x+1}$ 之所有渐近线

假分式先化為真分式！先整理為

$f(x)=\dfrac{x^2-x+4}{x+1}=x-2+\dfrac{6}{x+1}$

∴直接看出 $x=-1$ 为垂直渐近线

$x=1$ 为垂直渐近线.

例3. 求 $y=\dfrac{\sqrt{x^6+3}-x^3-x^2}{x^2-x}$ 之所有渐近线？

(1) 由 $\lim\limits_{x\to 0} y(x)=\infty$，得 $x=0$ 为垂直渐近线

但 $\lim\limits_{x\to 1} y(x)\neq\infty$（分子分母皆為0），見此 $x=1$ 不一定为垂直渐近线

故再分析如下：

$\lim\limits_{x\to 1} y(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^6+3}-x^3-x^2}{x^2-x}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{x^6+3}-x^3-x^2)(\sqrt{x^6+3}+x^3+x^2)}{(x^2-x)(\sqrt{x^6+3}+x^3+x^2)}=-\dfrac{5}{2}\neq\infty$

故 $x=1$ 不为垂直渐近线

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^6+3}-x^3-x^2}{x^2-x}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x^6+3}-x^3-x^2)(\sqrt{x^6+3}+x^3+x^2)}{(x^2-x)(\sqrt{x^6+3}+x^3+x^2)}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^5-x^4+3}{(x^2-x)(\sqrt{x^6+3}+x^3+x^2)}=\dfrac{-2}{1\cdot 2}=-1$

例4. 求 $y=x^{1/3}(x+3)^{2/3}$ 之斜漸近線?(此法僅適用求斜漸近線)

(sol1)

以 $y=mx+b$ 代入 $\Rightarrow mx+b=x^{1/3}(x+3)^{2/3}$

$\Rightarrow (mx+b)^3=x(x+3)^2$.

整理得 $(m^3-1)x^3+(3m^2b-6)x^2+(3mb^2-9)x+b^3=0$.

由 $\begin{cases} m^3-1=0, \\ 3m^2b-6=0. \end{cases} \Rightarrow m=1,\ b=2$ $\quad\therefore y=x+2$ 為斜漸近線

例5. 求笛卡兒葉線 (folium of Descartes)

$x^3+y^3=3axy$ 之斜漸近線

以 $y=mx+b$ 代入原方程得

$x^3+(mx+b)^3-3ax(mx+b)=0$.

$\Rightarrow (m^3+1)x^3+(3m^2b-3am)x^2+(3mb^2-3ab)x+b^3=0$.

由 $\begin{cases} m^3+1=0 \\ 3m^2b-3am=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ solve $\begin{cases} m=-1 \\ b=-a \end{cases}$

故斜漸近線為 $y=-x-a$.

例6. 求曲線 $\begin{cases} x=\dfrac{2t}{1-t^2} \\ y=\dfrac{t^2}{1+t^2} \end{cases}$ 之斜漸近線

(1) $m=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{\frac{t^2}{1-t^2}}{\frac{2t}{1-t^2}}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t}{2}=\dfrac{1}{2}$. 又,

$b=\lim\limits_{t\to 1}[y-\frac{x}{2}]=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^2-t}{1-t^2}=-\dfrac{1}{2}$

故斜漸近線為 $y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}$

(2) $m=\lim\limits_{t\to -1}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{t\to -1}\dfrac{\frac{t^2}{1-t^2}}{\frac{2t}{1-t^2}}=\lim\limits_{t\to -1}\dfrac{t}{2}=-\dfrac{1}{2}$. 又

$b=\lim\limits_{t\to -1}(y+\frac{x}{2})=\lim\limits_{t\to -1}\dfrac{t^2+t}{1-t^2}=-\dfrac{1}{2}$

故斜漸近線為 $y=-\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}$

例7. 求 $f(x)=2x+\tan^{-1}x$ 之漸近線

由 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+\tan^{-1}x}{x}=2$.

$\lim\limits_{x\to\infty}(y-2x)=\lim\limits_{x\to\infty}2x+\tan^{-1}x-2x=\pi/2$

得 $y=2x+\frac{\pi}{2}$ 為斜漸近線

由 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+\tan^{-1}x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-\pi/2}{x}=2$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}(y-2x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+\tan^{-1}x-2x)=-\pi/2$

得 $y=2x-\pi/2$

習1. 求 $y=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ 之漸近線

題目要求 $x\geq1$ or $x\leq1$ $\therefore x=0$ 不為漸近線

又 $\lim\limits_{x\to\infty}y(x)=1$，得 $y=1$ 為水平漸近線

又 $\lim\limits_{x\to-\infty}y(x)=-1$，得 $y=-1$ 為水平漸近線

習2. $2x^4-x^3y+3x^2-2x+y-x=0$ 之漸近線

整理得

$y=\frac{2x^4+3x^2-2x-x}{(x-1)(x^2+x+1)}=2x+\frac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+x+1)}$

得 $x=1$ 和 $y=2x$ 為斜漸近線

習3. 求 $f(x)=\frac{x-9}{\sqrt{4x^2+3x+2}}$ 之漸近線

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\frac{1}{2}$

習4. 求 $f(x)=\frac{x^3-1}{x}$

令 $f(x)=\frac{x^3-1}{x}=x^2-\frac{1}{x}$

$x=0$ 為唯一漸近線

習5. 求 $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ 之漸近線

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}=-1$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}=\infty$$

故漸近線為 $y=-1$

$x=1.$

習6. 求 (1) $y(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{3x^2+1}}$ (2) $y(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{4x^2+1}}$ 之漸近線

(1) $y=\frac{2}{\sqrt{3}}$ or $y=-\frac{2}{\sqrt{3}}$

(2) $y=\frac{3}{2}$ or $y=-\frac{3}{2}$

之漸近線