1. 若 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2+3x+4}-ax-b)=0$，求 a、b.

原式 $=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{2x^2+3x+4}-ax-b)(\sqrt{2x^2+3x+4}+ax+b)}{\sqrt{2x^2+3x+4}+ax+b}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+4-(a^2x^2+2abx+b^2)}{\sqrt{2x^2+3x+4}+ax+b}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2-a^2)x^2+(3-2ab)x+4-b^2}{\sqrt{2x^2+3x+4}+ax+b}=0$.

得 $a^2=2 \Rightarrow a=\sqrt{2}$，且 $2ab=3 \Rightarrow b=\frac{3}{2\sqrt{2}}$.

2. 若 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=k$，且 $b\neq0$，試求 $\lim_{x\to0}\frac{f(bx)}{x}$?

原式 $=\lim_{x\to0}\frac{f(bx)}{bx}\cdot b=kb$.

3. (1) 請問 $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{[x]}$ 是否存在?

$x-1\le[x]<x \Rightarrow \frac{1}{x-1}\ge\frac{1}{[x]}>\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{x}{x-1}\ge\frac{x}{[x]}>\frac{x}{x}$

依據 squeez theorem 可得 $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{[x]}=1$.

(2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[146]{|x|}}{\sqrt[7]{10^7+\sqrt[3]{10^3+\sqrt[9]{x+10}}}}$

原式 $=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[146]{|x|}}{\sqrt[189]{x}}=\lim_{x\to\infty}\left[-x^{\frac{1}{146}-\frac{1}{189}}\right]=-\infty$

(3) $\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{[x]}\right]$?

$\lim_{x\to0^+}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{[x]}\right]=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{[x]}\right]=\infty$.

$\lim_{x\to0^-}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{[x]}\right]=\lim_{x\to0^-}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{-1}\right]=-\infty$

$\therefore \lim_{x\to0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{[x]}\right]$ 不存在.

4. 若 $\lim\limits_{x\to-2}\frac{f(x)}{x^2}=2$. 试求 $\lim\limits_{x\to-2}[f(x)+\frac{f(x)}{x}]$

$\lim\limits_{x\to-2}\frac{f(x)}{x^2}=\frac{f(-2)}{4}=2 \Rightarrow f(-2)=8$.

$\lim\limits_{x\to-2}[f(x)+\frac{f(x)}{x}]=\lim\limits_{x\to-2}[8+\frac{8}{-2}]=4$.

5. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}8n(\sqrt{n^2+1}-n)$

原式 $=\frac{8n(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n}$

$=\frac{8n(n^2+1-n^2)}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{8n}{2n}=4$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}x[\frac{1}{x}]$

$\because -\frac{1}{x}-1<[-\frac{1}{x}]\le-\frac{1}{x}$

$x<0$ 时 $x[-\frac{1}{x}-1]>x[-\frac{1}{x}]\ge x[\frac{1}{x}]$

即 $-1-x>x[\frac{1}{x}]\ge-1$

取 limit 得 $\lim\limits_{x\to0}x[-\frac{1}{x}]=-1$.

(3) $\lim\limits_{x\to0}x^2\cos(\frac{2}{x^2})=0$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}[\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b]=0$. 求 $a.b$

原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}[x-1+\frac{2}{x+1}-ax-b]=0$ 得 $a=1$, $b=-1$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x-\cos x}=1$.

8. 已知 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 4x+a-2b}{3x}, & x\ne0\\ 2a+b, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续. 问常数 $a.b$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\frac{\sin 4x+a-2b}{3x}=2a+b$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\frac{\sin 4x+a-2b}{3x}=2a+b$.

$\Rightarrow\begin{cases}a-2b=0\\2a+b=4/3\end{cases}$

$a=\frac{8}{15}$ $b=\frac{4}{15}$

9. 求 $f(x)=\dfrac{x^2}{2x-4}$ 之漸近線

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x-4}=\infty$ 故有一條垂直漸近線 $x=2$

1. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2+3x+4}-ax-b)=0$，求 a, b.

原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{2x^2+3x+4}-ax-b)(\sqrt{2x^2+3x+4}+ax+b)}{\sqrt{2x^2+3x+4}+ax+b}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+4-(a^2x^2+2abx+b^2)}{\sqrt{2x^2+3x+4}+ax+b}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2-a^2)x^2+(3-2ab)x+4-b^2}{\sqrt{2x^2+3x+4}+ax+b}=0$.

得 $a^2=2 \Rightarrow a=\sqrt{2}$，又 $2ab=3 \Rightarrow b=\frac{3}{2\sqrt{2}}$.

2. 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=k$，且 $b\neq0$，试求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(bx)}{x}$？

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(bx)}{bx}\cdot b=kb$.

3. (1) 请问 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{[x]}$ 是否存在？

$x-1\le[x]<x \Rightarrow \dfrac{1}{x-1}\ge\dfrac{1}{[x]}>\dfrac{1}{x} \Rightarrow \dfrac{x}{x-1}\ge\dfrac{x}{[x]}\ge\dfrac{x}{x}$

依据 squeez theorem 可得 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{[x]}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[146]{|x|}}{\sqrt[7]{10^7+\sqrt[3]{10^3+\sqrt[7]{x+10}}}}$

原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[146]{|x|}}{\sqrt[147]{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[-x^{\frac{1}{146}-\frac{1}{147}}\right]=-\infty$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{|x|}\right]$？

$\lim\limits_{x\to0^+}\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{|x|}\right]=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\right]=0$.

$\lim\limits_{x\to0^-}\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{|x|}\right]=\lim\limits_{x\to0^-}\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{-x}\right]=-\infty$

$\therefore \lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{|x|}\right]$ 不存在.

4. 若 $\lim\limits_{x\to -2}\frac{f(x)}{x^2}=2$. 试求 $\lim\limits_{x\to -2}[f(x)+\frac{f(x)}{x}]$

$\lim\limits_{x\to -2}\frac{f(x)}{x^2}=\frac{f(-2)}{4}=2 \Rightarrow f(-2)=8$.

$\lim\limits_{x\to -2}[f(x)+\frac{f(x)}{x}]=\lim\limits_{x\to -2}[8+\frac{8}{-2}]=4$.

5. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}8n(\sqrt{n^2+1}-n)$

原式 $=\frac{8n(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n}$

$=\frac{8n(n^2+1-n^2)}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{8n}{2n}=4$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}x[\frac{1}{x}]$

$\because -\frac{1}{x}-1<[-\frac{1}{x}]\le -\frac{1}{x}$

$x<0$ 时 $x(-\frac{1}{x}-1)>x[-\frac{1}{x}]\ge x[\frac{1}{x}]$

即 $-1-x>x[\frac{1}{x}]\ge 1$

取 limit 得 $\lim\limits_{x\to 0}x[-\frac{1}{x}]=-1$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos(\frac{2}{x^2})=0$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}[\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b]=0$, 求 $a.b$

原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}[x-1+\frac{2}{x+1}-ax-b]=0$ 得 $a=1$
$b=-1$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x-\cos x}=1$.

8. 已知 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 4x+a-2b}{3x}, & x\neq 0.\\ 2a+b, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续. 问常数 a, b

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\frac{\sin 4x+a-2b}{3x}=2a+b$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\frac{\sin 4x+a-2b}{3x}=2a+b$.

$\Rightarrow\begin{cases}a-2b=0\\ 2a+b=4/3\end{cases}$

$a=\frac{8}{15}$ $b=\frac{4}{15}$

9. 求 $f(x)=\frac{x^2}{2x-4}$ 之渐近线

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2x-4} = \infty$ 故有一条垂直渐近线 $x=2$