

例1. 若  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$ , 問  $f(x)$  在  $x=0$  是否連續

$\therefore f(0)=1.$

但  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [x \sin \frac{1}{x}] = 0 \neq 1.$

故  $f(x)$  不連續

例2. 試證  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$  在區間  $[-2, 2]$  連續

任  $a \in [-2, 2]$ , 則  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{4-x^2}$   
 $= \sqrt{4-a^2} = f(a)$  得證.

例3. 若  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 4 = 0$

$\therefore f(0) = -4 < 0, f(2) = 4 > 0$

則依據中間值定理其在  $(0, 2)$  之間存在一根使  $f(x)=0$ .

例4. 若  $f(x) = \begin{cases} \frac{k(x^2-4)+x-2}{x-2}, & x \neq 2 \\ 3, & x=2 \end{cases}$  在  $x=2$  連續,  
 則  $k=?$

(1)  $f(2)=3$  是存在的.

(2) 若  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  要存在, 且其值為 3, 即  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{k(x^2-4)+x-2}{x-2} = 3.$

由  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{k(x^2-4)+x-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)[k(x+2)+1]}{(x-2)} = k+1 = 3.$

則  $k = \frac{1}{2}.$

例5. 設  $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \geq 0 \\ 2x+1, & x < 0 \end{cases}$ , 則  $f(x)$  在  $x=0$  連續否?

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2+1) = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x+1) = 1$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

(2)  $f(0) = (x^2+1)|_{x=0} = 1$ , 故連續

例6. 设  $f(x) = \begin{cases} ax, & x < -1 \\ 3x+b, & -1 \leq x < 2 \\ x^2+1, & x \geq 2 \end{cases}$  为连续函数, 求  $a, b$ .

由  $f(1^-) = f(1^+) \rightarrow -a = -3+b$   
 $f(-2^-) = f(-2^+) \rightarrow b+b=5 \Rightarrow \text{解 } a=-4, b=1$

例7.  $f(x)$  为连续函数,  $g(x)$  为不连续函数.

(1)  $f(x) \pm g(x)$  为不连续函数

(2)  $f(x), g(x)$  有可能连续, 例如  $f(x)=x, g(x)=\frac{1}{x}$

例1. 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$ , 求使得  $f(x)$  在  $x=0$  处为连续之  $k$  值

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = k$ .

例2. 设  $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0 \\ a+x^2, & 0 \leq x < 1 \\ bx, & x \geq 1 \end{cases}$  为连续函数. 求  $a, b$  之值

由  $f(0^-) = f(0^+) \rightarrow 1 = a$   
 $f(1^-) = f(1^+) \rightarrow a+1=b$   
 solved  $\rightarrow a=1, b=2$