1. 用函数的定义证明:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos(2x)}{\sqrt{x}}=0$.

(3) $\lim\limits_{x\to2}(2x-3)=1$

(4) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{1-x^2}{x+1}=2$.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty^+}\frac{x-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty^-}\frac{x-1}{x+1}=1$

故 $\frac{x-1}{x+1}$ 的 limit 存在且 $=1$ #

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos^2(2x)}{x}$, $-1\le\cos^2(2x)\le1$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos^2(2x)}{x}=0$ #

(3) $\lim\limits_{x\to2^+}(2x-3)=1$ —(1)

$\lim\limits_{x\to2^-}(2x-3)=1$ —(2)

(1)=(2), 故 $\lim\limits_{x\to2}(2x-3)=1$ #

(4) $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{(1+x)(1-x)}{(x+1)}=2$ —(1)

$\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{(1+x)(1-x)}{(x+1)}=2$ —(2)

(1)=(2), 故 $\lim\limits_{x\to-1}\frac{1-x^2}{x+1}=2$ #

2. 求 $f(x)=\frac{x}{x}$, $\varphi(x)=\frac{|x|}{x}$, 当 $x\to0$ 时的左右极限

并说明它们在 $x\to0$ 时的极限是否存在?

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=1$ $\Rightarrow$ limit exist

$\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x)=\frac{x}{x}=1$ $\lim\limits_{x\to0^-}\varphi(x)\ \frac{-x}{x}=-1$ $\Rightarrow$ limit doesn't exist.

3. 求 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\ge0\\ |x+1|, & x<0\end{cases}$, 求 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$. $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 是否存在?

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}|x+1|=1$ —(1)

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}e^x=1$. —(2)

(1)=(2)

$\therefore \lim\limits_{x\to0}f(x)$ exist 且等于 1.

4. 设极限 $\lim\limits_{x\to2}f(x)$ 存在. 且函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=x+2\lim\limits_{x\to2}f(x)$, 求 $\lim\limits_{x\to2}f(x)$

$\lim\limits_{x\to2}f(x)=2+\lim\limits_{x\to2}f(x)=2+2+\lim\limits_{x\to2}f(x)=2\cdot\infty$

故 $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\infty$

5. 設 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x>1\\ e^{x}, & x\le 1\end{cases}$. 问极限 $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ 是否存在.

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\sqrt{x}=1$ —(1)　　(1)≠(2),

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=e^{1}=e$ —(2)　　∴ $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ doesn't exist.

6. 証明: 极限 $\lim\limits_{x\to0}\cos\frac{1}{x}$ 不存在.

記 $f(x)=\cos\frac{1}{x}$, 因為取

$x_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$, $y_n=\frac{1}{n\pi}$, $n=1,2,3\cdots$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$. 但

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\cos(2n\pi+\frac{\pi}{2})=0$. —(1)

$\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\cos(n\pi)=\pm1$ —(2)

(1)≠(2), $\ast$

∴ $\lim\limits_{x\to0}\cos\frac{1}{x}$ 不存在

7. 用函数极限的定义証明 $\lim\limits_{x\to x_0}\ln x=\ln x_0\ (x_0>0)$

$x\to x_0^+$ 时

$\forall\varepsilon>0$, 要使 $|\ln x-\ln x_0|<\varepsilon$. 只要使 $|\ln\frac{x}{x_0}|<\varepsilon$

即使 $\frac{x}{x_0}<e^{\varepsilon}$　$x<x_0e^{\varepsilon}$. $x-x_0=x_0(e^{\varepsilon}-1)$

取 $\alpha=x_0(e^{\varepsilon}-1)$, 当 $0<x-x_0<\varepsilon$ 时, $|\ln x-\ln x_0|<\varepsilon$

即 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\ln x=\ln x_0$.

$x\to x_0^-$ 时

$\forall\varepsilon>0$, 要使 $|\ln x-\ln x_0|<\varepsilon$, 只要使 $|\ln\frac{x}{x_0}|<\varepsilon$

即使 $-\frac{x}{x_0}<e^{\varepsilon}$, $x>-x_0e^{\varepsilon}$, $0>x-x_0>-x_0(e^{\varepsilon}+1)$

取 $\alpha=x_0(e^{\varepsilon}+1)$. 当 $0<x_0-x<\varepsilon$ 时, $|\ln x-\ln x_0|<\varepsilon$

即 $\lim\limits_{x\to x_0^-}\ln x=\ln x_0$,

综上 $\lim\limits_{x\to x_0}\ln x=\ln x_0$

8. 用函数极限的定义证明 $\lim\limits_{x \to 2}(2x^2+1)=9$.

$\forall \varepsilon>0$. 使 $|2x^2+1-9| = 2x^2-8 < \varepsilon$ 成立

只要 $(x+2)(x-2) < \frac{\varepsilon}{2}$ 成立. 即取 $x=2$ 时

恒有 $(x+2)(x-2)=0 < \varepsilon$ 成立.

故 $\lim\limits_{x \to \infty}(2x^2+1)=9$, proved #