第一章　线性方程组与矩阵

§ 1.1　消元法及其矩阵表示

§ 1.2　矩阵的运算

§ 1.3　可逆矩阵

§ 1.4　矩阵的分块

§ 1.5　矩阵的初等变换

§1.1 消元法及其矩阵表示

一、简介线性方程组

二、消元法解线性方程组

三、矩阵的定义、初等行变换求解方程组

一、简介线性方程组

形如

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1.1)$$

称为含有m个方程n个未知量的线性方程组.

若$b_i = 0(i = 1,2,\cdots,m)$,则(1.1)称为齐次线性方程组;

否则称之为非齐次线性方程组 (即b_i不全为零时).

二、消元法解线性方程组

例1.1 解三元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + x_3 = 12, & ① \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, & ② \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 4, & ③ \end{cases} \tag{1.2}$$

解

$$(1.2) \xrightarrow{①\leftrightarrow ②} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 8x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 4, \end{cases} \tag{1.3}$$

$$(1.3) \xrightarrow[\text{③}-\text{①}]{\text{②}-3\text{①}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ \qquad 2x_2 - 2x_3 = 6, \\ \qquad 4x_2 + x_3 = 2, \end{cases} \qquad (1.4)$$

$$(1.4) \xrightarrow{\text{③}-2\text{②}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ \qquad 2x_2 - 2x_3 = 6, \\ \qquad\qquad 5x_3 = -10, \end{cases} \qquad (1.5)$$

行阶梯形方程组

$$(1.5) \xrightarrow[\text{③}\times\frac{1}{5}]{\text{②}\times\frac{1}{2}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ \qquad x_2 - x_3 = 3, \\ \qquad\qquad x_3 = -2, \end{cases} \qquad (1.6)$$

$$(1.6) \xrightarrow{②+③} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ \quad\quad x_2 \quad\quad = 1, \\ \quad\quad\quad\quad x_3 = -2, \end{cases} \quad (1.7)$$

$$(1.7) \xrightarrow[①-2②]{①-③} \begin{cases} x_1 \quad\quad\quad\quad = 2, \\ \quad\quad x_2 \quad\quad = 1, \\ \quad\quad\quad\quad x_3 = -2, \end{cases} \quad (1.8)$$

线性方程组的初等变换 (同解变换)

(1) 交换两个方程的次序;

(2) 用一个非零的常数乘以某个方程;

(3) 用一个数乘一个方程后加到另一方程上.

方程组(1.2)的求解过程用数表表示：

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 & 12 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow ②} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[③-①]{②-3③} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{③-2②} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[③\times\frac{1}{5}]{②\times\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&-1&3\\0&0&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{②+③}\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&0&1\\0&0&1&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[①-2②]{①-③}\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&-2\end{pmatrix}$$

用数表化简更好！

于是, $x_1=2, x_2=1, x_3=-2$是(1.2)的解.

唯一解

三、矩阵的定义、初等行变换求解方程组

定义1.1

由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}\left(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n\right)$ 排成的m行n 列的数表

$$
\begin{matrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{matrix}
$$

称为m行n列矩阵 . 简称$m\times n$矩阵.

记作 $$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} 称为A的第i行第j列的元素或(i,j)元.

(a_{ij}中i为行标，j为列标.)

简记为 $A=A_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}=(a_{ij})$.

若矩阵中每个元素a_{ij}都是实数,则矩阵$A=(a_{ij})$称为实矩阵,否则称$A=(a_{ij})$为复矩阵.

方程组(1.2)左边系数排列成的数表

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

称为方程组(1.2)的系数矩阵.系数矩阵右侧添加常数项构成的数表

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 & 12 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

称为方程组(1.2)的增广矩阵.

特点：

（1）可划出一条阶梯线，线的下方全为零；

（2）每个台阶只有一行；

（3）阶梯竖线后面的第一个元素不为0.

这样的矩阵称为行阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

是行阶梯形矩阵,而且还满足:

(1)每个非零行的首个元素为1,

(2)且这些非零元所在列的其他元素都为 0.

这样的矩阵称为行最简形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵的初等行变换

(1) 交换两行(交换i，j两行,记为$r_i \leftrightarrow r_j$);

(2) 以非零实数乘以某行(以$k \neq 0$乘以第i行,记为$r_i \times k$);

(3) 将某行乘以一个常数加到另一行上

(第j行的k倍加到第i行上,记为$r_i + kr_j$)

解线性方程组步骤:

增广矩阵 $\xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 行阶梯形矩阵

$\xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 行最简形矩阵 $\rightarrow$ 写出方程组的解

例1.2 求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. \end{cases} \tag{1.9}$$

解 将(1.9)的增广矩阵作初等行变换

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \div 2]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2-r_3\\ r_3-2r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-3r_2]{\substack{r_2\div 2\\ r_3+5r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_3]{r_3\div 2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行最简形矩阵

对应的方程组为：

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 4 \\ x_2 - x_3 = 3 \\ x_4 = -3 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad (1.10)$$

(1.10)与(1.9)是同解方程组．则(1.9)的解为：

$$\begin{cases} x_1 = 4 + x_3 \\ x_2 = 3 + x_3 \\ x_4 = -3 \end{cases}$$

无穷多个解

其中x_3可以任意取值．

例1.3 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 3. \end{cases} \tag{1.11}$$

解 将(1.11)的增广矩阵作初等行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故,(1.11)无解.

§1.2 矩阵运算

一、几种特殊矩阵

二、矩阵的运算

一、几种特殊矩阵

(1) 只有一行的矩阵 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，

称为**行矩阵**(或**行向量**).

(2) 只有一列的矩阵 $B=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$,称为**列矩阵**(或**列向量**).

(3)若$m=n$，则矩阵A称为n 阶方阵.

(4)形如 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ 的方阵称为n阶**对角矩阵**.

对角矩阵记作　$A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.

方阵　$A = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$ 称为**数量矩阵**（或**纯量阵**）

(5)方阵　$E = E_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

称为**单位矩阵**（或**单位阵**）

(6)方阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$ 称为**上三角形矩阵**（或**上三角阵**）

空白处的元素都是0

方阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 称为**下三角形矩阵**（或**下三角阵**）

(7) 元素全为零的矩阵称为**零矩阵**，零矩阵记作

$O_{m\times n}$ 或 O .

二、矩阵的运算

两个矩阵的行数相等, 列数相等时, 称为**同型矩阵**.

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ 为同型矩阵.

1、矩阵相等

定义1.2 两个矩阵 $A = (a_{ij})$ 与 $B = (b_{ij})$ 为同型矩阵, 并且对应元素相等, 即

$$a_{ij} = b_{ij} \quad (i = 1,2,\cdots,m;\ j = 1,2,\cdots,n),$$

则称**矩阵 A 与 B 相等**, 记作 $A = B$.

2、矩阵的加法

定义1.3 设有两个 $m\times n$矩阵 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$，则矩阵 A 与B 的和记作$A+B$，规定为

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})$$

注意：只有同型矩阵才能进行加法

例如 $\begin{pmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 1 & -9 & 0 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 12+1 & 3+8 & -5+9 \\ 1+6 & -9+5 & 0+4 \\ 3+3 & 6+2 & 8+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 13 & 11 & 4 \\ 7 & -4 & 4 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

矩阵加法的运算规律

(1) $A+B=B+A$;

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$.

矩阵 A 的负矩阵 $-A$

$$-A=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{m1} & -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}=(-a_{ij}),$$

(3) $A+(-A)=O$.

矩阵减法 $A-B=A+(-B)$.

3、数与矩阵的乘积

定义1.4 数 λ 与矩阵 A 的乘积记作 λA 或 $A\lambda$，规定为

$$\lambda A = A\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad \lambda A = (\lambda a_{ij}).$$

例如 $2\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

数乘矩阵的运算规律

(设 A、B为 $m\times n$ 矩阵，λ,μ为数)

$$(4)\ (\lambda\mu)A=\lambda(\mu A);$$

$$(5)\ (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A;$$

$$(6)\ \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B.$$

$$(7)\ 1\cdot A=A,$$

$$(8)\ \lambda A=O\Leftrightarrow\lambda=0\text{或}A=O.$$

4、矩阵乘法

定义1.5 设 $A=(a_{ij})$ 是一个$m\times s$ 矩阵，$B=(b_{ij})$ 是一个 $s\times n$ 矩阵，那么规定矩阵A与矩阵B的乘积是一个$m\times n$矩阵 $C=(c_{ij})$ ，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1,2,\cdots m;\ j=1,2,\cdots,n),$$

$$A_{m\times s}B_{s\times n}=C_{m\times n}$$

笑脸原则

例1.7 设

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}6&5\\4&3\\2&1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

求AB,BA,CD.

解

$$AB=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&5\\4&3\\2&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\times6+2\times4+3\times2&1\times5+2\times3+3\times1\\4\times6+5\times4+6\times2&4\times5+5\times3+6\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20&14\\56&41\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}6&5\\4&3\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6\times1+5\times4&6\times3+5\times5&6\times3+5\times6\\4\times1+3\times4&4\times2+3\times5&4\times3+3\times6\\2\times1+1\times4&2\times2+1\times5&2\times3+1\times6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26&37&48\\16&23&30\\6&9&12\end{pmatrix}$$

$$CD=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

注意 (1) 只有当A的列数等于B的行数时，A与B才能相乘.

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 不存在.

(2) AB有意义时，BA未必有意义, AB与BA都有意义的矩阵, 他们的阶数未必相同, 即使是同阶矩阵, AB与BA也不一定相等;

若 $AB=BA$, 则称矩阵A与B可交换.

(3)两个非零矩阵的乘积可能是O,即由$AB=O$不能得出$A=O$或$B=O$的结果；若$A\neq O$,且$A(X-Y)=O$,也不能得出$X=Y$的结论.

矩阵乘法的运算规律

(1) $(AB)C=A(BC)$;

(2) $A(B+C)=AB+AC$, $(B+C)A=BA+CA$;

(3) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$ (其中 λ 为数);

(4) $A_{m\times n}E_n=E_mA_{m\times n}=A_{m\times n}$; 简写为$AE=EA=A$.

左乘、右乘，单位阵的阶会不同

例1.8 将下列方程组写为矩阵方程 $Ax=b$.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -3 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 2 \end{cases}$$

解

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

一般地, 线性方程组(1.1)可记为矩阵形式 $Ax=b$, 其中 A是(1.1)的系数矩阵, x是未知量构成的列矩阵, b是常数项构成的列矩阵.

设A为方阵，定义$A^k = \overbrace{AA\cdots A}^{k\text{个}A\text{连乘}}$为方阵的正整数幂. 方阵的幂满足：

$$A^k A^l = A^{k+l},\ (A^k)^l = A^{kl}\quad (k,l\text{为正整数})$$

对于两个n阶方阵，一般而言$(AB)^k \neq A^k B^k$,

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2, (A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$$

但是，

$$(A+E)^2 = A^2 + 2A + E,\ (A+E)(A-E) = A^2 - E$$

含E可按多项式法展开

5、矩阵的转置

定义1.6 把矩阵A的行换成同序数的列，所得到的新矩阵称为A的转置矩阵，记为A^{T}.

例 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\4&5&8\end{pmatrix}$, $A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\2&8\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}18\\6\end{pmatrix}$, $B^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}18&6\end{pmatrix}$.

矩阵转置的运算规律

(1) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$, (2) $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$,

(3) $(\lambda A)^{\mathrm{T}}=\lambda A^{\mathrm{T}}$, (4) $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

P37 26

已知$B=(1,2,3), C=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})$, 且$A=B^TC$, 求$A^n$.

$$A^n=(B^TC)(B^TC)\cdots(B^TC)$$

$$=B^T(CB^T)(CB^T)\cdots(CB^T)C$$

$$=3^{n-1}B^TC=3^{n-1}A \qquad (\because CB^T=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=3)$$

$$=3^{n-1}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 2 & 1 & \frac{2}{3}\\ 3 & \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}$$

例1.9

设$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$,求$(AB)^{\mathrm{T}}$.

解法1

由$AB=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\ 1 & 4 & 11\end{pmatrix}$,

得到$(AB)^{T}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 4\\ 5 & 11\end{pmatrix}$.

解法2

$$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&2&0\\2&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&3\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&4\\5&11\end{pmatrix}.$$

设A为n阶方阵,若$A^{\mathrm{T}}=A$,则称A为对称阵.

例如 $A=\begin{pmatrix}12&6&1\\6&8&0\\1&0&6\end{pmatrix}$ 为对称阵.

特点 对称阵的元素以主对角线为对称轴对应相等.

设A为n阶方阵,若$A^{\mathrm{T}}=-A$,则称A为反对称阵.

例如 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 为反对称阵.

特点 主对角线元素全为0，以主对角线为对称轴对应元素互为相反数.

对称阵的基本性质 设A，B为n阶对称矩阵，k是任意常数，则

(1) $A+B, kA, A^{\mathrm{T}}$都是对称阵；

(2) AB是对称阵的充要条件是A与B可交换.

例1.11 设列矩阵$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$满足$X^{\mathrm{T}}X=1$，$E$为$n$阶单位阵，$H=E-2XX^{\mathrm{T}}$，证明$H$是对称阵，且$HH^{\mathrm{T}}=E$.

证明 $H^{\mathrm{T}}=(E-2XX^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=E^{\mathrm{T}}-(2XX^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$

$=E-2(XX^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=E-2(X^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}=E-2XX^{\mathrm{T}}=H.$

$$HH^{\mathrm{T}}=HH=(E-2XX^{\mathrm{T}})^2$$

$$=E-4XX^{\mathrm{T}}+4(XX^{\mathrm{T}})(XX^{\mathrm{T}})$$

$$=E-4XX^{\mathrm{T}}+4X(X^{\mathrm{T}}X)X^{\mathrm{T}}$$

利用已知条件

$$=E-4XX^{\mathrm{T}}+4XX^{\mathrm{T}}=E.$$

§1.3 可逆矩阵

一、可逆矩阵的定义

二、可逆矩阵的性质

一、可逆矩阵的定义

定义1.7 设A是n阶方阵，若存在n阶方阵B使得

$$AB = BA = E$$

则称A是可逆的，B称为A的逆矩阵.

可逆矩阵也称非奇异矩阵(非退化矩阵).

不可逆矩阵也称奇异矩阵(退化矩阵).

定理1.1 如果A是可逆的，则A的逆矩阵是唯一的.

例1.12 证明

(1) 零矩阵是不可逆的；

(2) 如果矩阵A中有某一行元素全为零，则A不可逆.

(3) 单位矩阵E是可逆的,且$E^{-1} = E$;

(4) 若对角矩阵$\Lambda = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)(\lambda_i \neq 0, i = 1, \cdots, n)$是可逆的，且$\Lambda^{-1} = diag(\lambda_1^{-1}, \cdots, \lambda_n^{-1})$.

可逆矩阵的运算规律：

(1) 若A可逆，则A^{-1}可逆，且$(A^{-1})^{-1}=A$;

(2) 若A可逆，则A^{T}可逆，且$(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$;

(3) 若A可逆，数$\lambda \neq 0$，则λA可逆，且

$$(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1};$$

(4) A,B为同阶可逆方阵，则AB可逆，且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

当A可逆时，定义$A^{0}=E, A^{-k}=(A^{-1})^{k}$, k为正整数.且

$A^{\lambda}A^{\mu}=A^{\lambda+\mu}$, $\quad (A^{\lambda})^{\mu}=A^{\lambda\mu}$, λ, μ为整数.

§1.4 矩阵的分块

一、分块矩阵的概念

二、分块矩阵的运算

一、分块矩阵的概念

对于行数和列数较高的矩阵A，为了简化运算，经常采用分块法，使大矩阵的运算化成小矩阵的运算. 具体做法是：将矩阵A用若干条纵线和横线分成许多个小矩阵，每一个小矩阵称为A的子块，以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵.

(Block matrix)

例

$$A=\left(\begin{array}{cccc} a & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ \hdashline 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix},$$

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc} a & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix},$$

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B & O \\ E & C \end{pmatrix},$$

$$A=\left(\begin{array}{c:c:c:c} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{pmatrix},$$

二、分块矩阵的运算　　类似于普通矩阵运算

(1) (加法) 设矩阵A与B的行数相同,列数相同,采用相同的分块法,有

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} \boxed{B_{11}} & \cdots & \boxed{B_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$$

其中A_{ij}与B_{ij}的行数相同,列数相同,则

$$A+B=\begin{pmatrix} \boxed{A_{11}+B_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r}+B_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{pmatrix}.$$

(2) (数乘)设$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$, λ为数, 则

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}.$$

(3) (乘法) 设A为$m\times l$矩阵, B为$l\times n$矩阵, 分块成

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix},$$

$$A_{s\times t}B_{t\times r}=\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}$$ 笑脸原则

其中$A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{it}$的列数分别等于$B_{1j},B_{2j},\cdots,B_{ij}$的行数, $C_{ij}=\sum_{k=1}^{t}A_{ik}B_{kj}\ (i=1,\cdots,s;\ j=1,\cdots,r)$.

(4) (转置) 设$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$, 则$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{s1}^{\mathrm{T}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{sr}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$.

例 $$A=\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \hdashline 7 & 8 & 9 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$$

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} A_1^{\mathrm{T}} & A_3^{\mathrm{T}} \\ A_2^{\mathrm{T}} & A_4^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ \hdashline 3 & 6 & 9 \end{array}\right)$$

(5) (分块对角矩阵) 设A为n阶矩阵,若A的分块矩阵只有在主对角线上有非零子块,其余子块都为零矩阵,且非零子块都是方阵.即

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \cdots & A_s \end{pmatrix},$$

其中$A_i\left(i=1,2,\cdots,s\right)$都是方阵,则称$A$为分块对角矩阵(准对角阵).　　记作$A=diag(A_1, A_2,\cdots, A_s)$

结论 1) 若每个子块$A_i(i=1,2,\cdots,s)$都是可逆的,则

$A=diag(A_1,A_2,\cdots,A_s)$是可逆的,且

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & O & \cdots & O \\ O & A_2^{-1} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \cdots & A_s^{-1} \end{pmatrix},$$

2) 设$A_{n\times n},B_{m\times m}$为可逆矩阵,$C_{m\times n},O_{n\times m}$,则$D=\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$可逆,且

$$D^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ \boxed{-B^{-1}CA^{-1}} & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

顺时针原则

例1.13 设$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right)$, $B=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right)$, 求$AB$.

解 把A,B分块$A=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{pmatrix}$,其中

$$A_1=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix};\quad B_1=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix},\ B_2=\begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix};$$

则$AB=\begin{pmatrix} A_1B_1 & O \\ O & A_2B_2 \end{pmatrix}$, $A_1B_1=\begin{pmatrix} a^2+1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix}$, $A_2B_2=\begin{pmatrix} b^2+1 & b \\ 2b & b^2 \end{pmatrix}$,

于是, $AB=\begin{pmatrix} A_1B_1 & O \\ O & A_2B_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+1 & a & 0 & 0 \\ a & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^2+1 & b \\ 0 & 0 & 2b & b^2 \end{pmatrix}$.

§1.5 矩阵的初等变换

一、矩阵的初等变换与标准形

二、初等矩阵

三、利用初等变换求逆矩阵

一、矩阵的初等变换与标准形

矩阵的初等行变换

$r_i \leftrightarrow r_j \qquad r_i \times k\,(k \neq 0) \qquad r_i + kr_j$

矩阵的初等列变换

$c_i \leftrightarrow c_j \qquad c_i \times k\,(k \neq 0) \qquad c_i + kc_j$

初等变换

行(列)等价

若矩阵A通过有限次初等行(列)变换化为矩阵B,

则称矩阵A与B行(列)等价, 记为$A \overset{r}{\rightarrow} B\,(A \overset{c}{\rightarrow} B)$.

等价

若矩阵A通过有限次初等行变换与初等列变换化为矩阵B,则称A与B等价,记为$A \to B$.

等价的性质

(1) 反身性：$A \to A$;

(2) 对称性：若$A \to B$,则$B \to A$;

(3) 传递性：若$A \to B$, $B \to C$,则$A \to C$.

定理1.2

任一$m\times n$矩阵A可通过初等行变换化为行阶梯形矩阵和行最简形矩阵.

定理1.3

任一$m\times n$矩阵A等价于形如$\boxed{\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}}$的矩阵,

其中E_r是r阶单位矩阵(约定$r=0$时,E_0为零矩阵).

矩阵A的标准形 —— 特点 → **主对角元为1, 其余元素全是0.**

例1.16 求$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$的行阶梯形矩阵，行最简形矩阵及标准形.

解

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\Delta}{=} A_1$$

行阶梯形

$$\xrightarrow{r_2\times(-\frac{1}{3})}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&1&2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&-2&-1\\0&1&2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{\Delta}{=}A_2$$

行最简形

$$\xrightarrow[\substack{c_3+2c_1\\c_3-2c_2\\c_4+c_1\\c_4-c_2}]{}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{\Delta}{=}F$$

标准形

二、初等矩阵

对单位矩阵施行一次初等变换后得到的矩阵称为**初等矩阵**

三类初等矩阵 $E(i,j)$ 表示$r_i \leftrightarrow r_j$或$c_i \leftrightarrow c_j$

$E(i(k))$ 表示$r_i \times k$或$c_i \times k$

$E(i,j(k))$ 表示$r_i + kr_j$或$c_j + kc_i$

例 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

引例

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 5 & 10 & 30 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 13 & 25 & 14 \end{pmatrix}$$

初等矩阵的性质

(1) 对$m\times n$矩阵A实施一次初等行变换,相当于用相应的m阶初等矩阵左乘A;对A实施一次初等列变换,相当于用相应的n阶初等矩阵右乘A.

(2) 方阵A可逆的充分必要条件是存在有限个初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_l$,使$A=P_1P_2\cdots P_l$.

例1.17 求$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\6&5&4\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

解 由于$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E(1,2)$, $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E(1,3(1))$

记原式为$A=E(1,2)BE(1,3(1))$

左乘表示行变

右乘表示列变

故, $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\6&5&4\\7&8&9\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}6&5&4\\1&2&3\\7&8&9\end{pmatrix}\xrightarrow{c_3+c_1}\begin{pmatrix}6&5&10\\1&2&4\\7&8&16\end{pmatrix}=A.$

定理1.4 设A与B都是$m\times n$矩阵,则

(1) $A\xrightarrow{r}B$的充分必要条件是存在m阶可逆矩阵P,使得$PA=B$;

(2) $A\xrightarrow{c}B$的充分必要条件是存在n阶可逆矩阵Q,使得$AQ=B$;

(3) $A\rightarrow B$的充分必要条件是存在m阶可逆矩阵P,n阶可逆矩阵Q,使得$PAQ=B$.

推论1 对于任意的$m\times n$矩阵A，存在m阶可逆矩阵P，n阶可逆矩阵Q，使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

推论2 设A,B为n阶方阵,若$AB=E$(或$BA=E$),则A,B均为可逆矩阵,且它们互为逆矩阵.

推论3 方阵A可逆的充分必要条件是$A\xrightarrow{r}E$.

例1.18

利用推论2

设方阵A满足$A^2-A+2E=O$,证明$A,A+2E$可逆,并求其逆.

三、利用初等变换求逆矩阵

初等行变换法 $\left(A \;\vdots\; E\right) \xrightarrow{r} \left(E \;\vdots\; A^{-1}\right)$

例1.19 证明矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$是可逆的,并求其逆矩阵.

解 构造3×6矩阵$\left(A \;\vdots\; E\right)=\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$,

对$(A \mid E)$作初等行变换

$$(A \mid E) \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_1+2r_2 \\ r_3\times(-1)}]{r_3-r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_2+5r_3 \\ r_2\times(-1)}]{r_1+7r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 9 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) = (E \mid A^{-1})$$

A的逆

例1.20 设$A=\left(\begin{array}{c|cc}7 & 0 & 0\\ \hline 0 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 5\end{array}\right)$,并$A^{-1}$.

解 记$A=\begin{pmatrix}A_1 & O\\ O & A_2\end{pmatrix}$,其中$A_1=(7)$, $A_2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$, $A_1^{-1}=(7^{-1})$,

$$(A_2 \mid E)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 5 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -5 & 2\\ 0 & 1 & 3 & -1\end{array}\right)=(E \mid A_2^{-1})$$

于是$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1} & O\\ O & A_2^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7^{-1} & 0 & 0\\ 0 & -5 & 2\\ 0 & 3 & -1\end{pmatrix}$.

分块法求逆

初等变换求解矩阵方程

类型	方法	解
(1) $AX=B$	$\left(A \;\vdots\; B\right) \xrightarrow{r} \left(E \;\vdots\; A^{-1}B\right)$	$X=A^{-1}B$
(2) $XA=B$	$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \xrightarrow{c} \begin{pmatrix} E \\ BA^{-1} \end{pmatrix}$	$X=BA^{-1}$
(3) $AXB=C$	综合运用(1),(2)	$X=A^{-1}CB^{-1}$

例1.21

设矩阵A,B满足方程$AB=A+2B$，其中$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$,求$B$.

相当于$AX=B$

解 方程改写为$(A-2E)B=A$，由$A-2E=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$,

$$\left(A-2E \;\vdots\; A\right)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&3&0&1\\1&-1&0&1&1&0\\0&1&2&0&1&4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&5&-2&-2\\0&1&0&4&-3&-2\\0&0&1&-2&2&3\end{array}\right)=\left(E \;\vdots\; B\right)$$

故$A-2E$可逆,且$B=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{pmatrix}$.