§ 3.1 线性方程组的解的判定

一、非齐次线性方程组解的判定及求解

二、齐次线性方程组解的判定及求解

一、非齐次线性方程组解的判定及求解

线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$,

记：系数矩阵为$A=(a_{ij})$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$,

则线性方程组可记为: $Ax=b$.

问题：如何利用系数矩阵 A 和增广矩阵 $B=(A|b)$ 来讨论线性方程组 $Ax=b$ 的解?

◆ 增广矩阵经 行 初等变换化为行最简形矩阵，该阶梯形与方程组解的关系：

$$\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行最简形矩阵中
非零行的行数<未知量个数

无穷多解

$$\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

行最简形矩阵中
非零行的行数=未知量个数

唯一解

$$\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

该数不为零，无解

定理3.1 n 元线性方程组 $Ax=b$

1) 无解的充要条件是 $R(A) < R(A|b)$.

2) 有唯一解的充要条件是 $R(A) = R(A|b)=n$.

3) 有无穷多个解的充要条件是 $R(A) = R(A|b)< n$.

记 $R(A) = R(A|b)= r < n$,

例1 判断非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$

是否有解? 若有解, 求出其解.

解

$$B = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-3r_1} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right),$$

$\therefore R(A) = 2, R(B) = 3,$ 故方程组无解.

例2 判断非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_4 = 1, \\ -2x_1 - 2x_3 + 10x_4 = 4. \end{cases}$

是否有解? 若有解, 求出其解.

解

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 10 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 - 2r_1]{r_3 + r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2 \times (-1)]{r_3 + r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

得同解方程组: $\begin{cases} x_1 + x_3 - 5x_4 = -2, \\ x_2 - 2x_3 + 7x_4 = 5, \end{cases}$ 即: $\begin{cases} x_1 = -x_3 + 5x_4 - 2, \\ x_2 = 2x_3 - 7x_4 + 5, \end{cases}$

令 $x_3=c_1$, $x_4=c_2$, 则方程组的通解为:

$$\begin{cases} x_1 = -c_1 + 5c_2 - 2, \\ x_2 = c_1 - 7c_2 + 5, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2, \end{cases} \quad (c_1, c_2 \in R).$$

或 $$x = c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (c_1, c_2 \in R).$$

求解非齐次线性方程组步骤:

将增广矩阵用初等行变换化成行阶梯形矩阵, 便可判断其是否有解. 若有解, 再用初等行变换化成行最简形矩阵, 写出同解方程组, 便可写出其通解.

二、齐次线性方程组解的判定及求解

定理3.2 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解充要条件是系数矩阵的秩 $R(A)<n$.

$Ax=0$ 有非零解即有无穷多解.

$Ax=0$ 只有零解的充要条件是$R(A)=n$.

例3 求解齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 0. \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

解 $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & -7 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2 \div (-3)]{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可知 $R(A)=2<4$, 故方程组有非零解,

得同解方程组: $\begin{cases} x_1 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{7}{3}x_4 = 0 \\ x_2 - \frac{5}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 = 0 \end{cases}$, 即: $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_3 - \frac{7}{3}x_4 \\ x_2 = \frac{5}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \end{cases}$,

令 $x_3=c_1$, $x_4=c_2$, 方程组的通解为:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}c_1 - \frac{7}{3}c_2 \\ x_2 = \frac{5}{3}c_1 + \frac{1}{3}c_2, \ (c_1, c_2 \in R). \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

求解齐次线性方程组步骤:

将系数矩阵用初等行变换化成行最简形矩阵, 写出同解方程组(用自由未知量表示) , 即可写出其通解.

对于齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=0$ 有如下推论:

推论1 若 $m<n$, 方程组 $A_{m\times n}x=0$ 必有非零解.

推论2 若 $m=n$, 方程组 $A_{m\times n}x=0$ 有非零解的充要条件是 $|A|=0$.

三、矩阵方程有解的判定

定理3.3 矩阵方程$AX=B$有解的充要条件是 $R(A)=R(A|B)$.

利用此定理可以证明如下的矩阵秩的不等式:

定理3.4 设 $AB=C$, 则 $R(C)\le \min\{R(A), R(B)\}$.

2个定理的证明均见课本Page90.

§3.2 向量组及其线性组合

一、n 维向量

二、向量组与矩阵

三、向量组的线性组合

四、等价向量组

一、n 维向量

1. 定义3.1 n 个有次序的数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 所组成的数组称为 n 维向量，第 i 个数称为第 i 个分量.

分量全为实数的向量称为实向量,

分量为复数的向量称为复向量.

2. n 维向量的表示方法

n 维向量写成一列，称为列向量.

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

通常用 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ 或 a,b,c, ⋯ 等表示.

n 维向量写成一行，称为行向量. $\alpha^T = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$

通常用$\alpha^T, \beta^T, \gamma^T, \cdots$ 或 $\mathbf{a}^T, \mathbf{b}^T, \mathbf{c}^T, \cdots$ 等表示.

列向量可通过转置变为行向量.

列向量可写为: $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$.

元素全为零的向量称为零向量.

记作 $\mathbf{0} = (0, 0, \cdots, 0)$ 或 $\mathbf{0} = (0, 0, \cdots, 0)^T$.

说明

1. 行向量和列向量总被看作是两个不同的向量.

当没有明确说明是行向量还是列向量时, 所指向量都当作列向量.

2. 行、列向量都按照矩阵的运算法则进行运算;

向量加法与数乘运算统称为向量的线性运算.

3. 设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$, $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$

则 $\alpha=\beta \Leftrightarrow a_i=b_i,(i=1,2,\cdots n).$

二、向量组与矩阵

1. 若干个同维数的列 (行) 向量组成的集合叫做列(行)向量组.

2. 一个$m\times n$矩阵$A=(a_{ij})$的每一列都可看成一个m维列向量, 记$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$,

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 称为矩阵A的列向量组.

3.一个$m\times n$矩阵$A=(a_{ij})$的每一行都可看成一个n维行向量,

$$记A=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_m^T\end{pmatrix},$$

向量组$\alpha_1^T,\alpha_2^T,\cdots,\alpha_m^T$称为矩阵$A$的行向量组.

矩阵的列向量组和行向量组都是只含有有限个向量的向量组；反之，一个含有限多个向量的向量组总可以构成矩阵.

三、向量组的线性组合与线性表示

例如:

给定向量组 $A:\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$ 和向量 $b=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$,

则有: $b=\alpha_1-\alpha_2$,

即:向量 b 可以向由量组 α_1,α_2 线性表示.

定义3.2　给定向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和向量 b,

若存在一组数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$,使 $b=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots\lambda_m\alpha_m$

则称向量 b 能由向量组 A 线性表示.

2. 定理3.5 向量 b 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表示的充分必要条件是矩阵 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ 的秩等于矩阵 $B=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, b)$ 的秩.

例1 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$

问： 向量 b 能否由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示？

解 记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

$$B=(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&0\\2&1&4&3\\2&3&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore\quad R(A)=R(A,b)=2,$

即:向量 b 可以向由量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

四、等价向量组

1. 定义3.3 设有两个向量组

$$A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \text{ 及 } B: \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s,$$

若向量组B中的每个向量都能由向量组A线性表示，就称向**向量组 B 能由向量组 A 线性表示.**

若向量组A与向量组B能相互线性表示，则称**向量组 A 与B 等价**.

设有两个向量组 $A：\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 及 $B：\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$.

向量组 B 能由向量组 A 线性表示

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 = k_{11}\alpha_1 + k_{21}\alpha_2 + \cdots + k_{m1}\alpha_m \\ \beta_2 = k_{12}\alpha_1 + k_{22}\alpha_2 + \cdots + k_{m2}\alpha_m \\ \qquad\qquad\cdots \\ \beta_s = k_{1s}\alpha_1 + k_{2s}\alpha_2 + \cdots + k_{ms}\alpha_m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s) = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1s} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots & k_{ms} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow B_{n\times s} = A_{n\times m}K_{m\times s}$$

$\Leftrightarrow AX = B$ 有解 $\Leftrightarrow R(A) = R(A|B)$

定理3.6 向量组B: $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 能由向量组A: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表示的充要条件是矩阵 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ 的秩等于矩阵 $(A, B)=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)$ 的秩, 即 $\mathrm{R}(A)=\mathrm{R}(A,B)$.

推论 向量组A: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 与向量组B: $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 等价的充要条件是 $\mathrm{R}(A)=\mathrm{R}(B)=\mathrm{R}(A,B)$, 其中$A$和$B$ 是向量组A和B 所构成的矩阵.

定理3.7 向量组B: $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 能由向量组A: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表示, 则 $\mathrm{R}(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s) \le \mathrm{R}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$.

例2 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\4\end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}3\\-2\\2\\-1\end{pmatrix}$,

证明向量组 α_1, α_2 与向量组 β_1, β_2 等价.

证明 记 $A=(\alpha_1, \alpha_2)$, $B=(\beta_1, \beta_2)$,

只要证 $R(A)=R(B)=R(A,B)$.

$$(A,B)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\-1 & 1 & 0 & -2\\1 & -1 & 0 & 2\\-1 & 4 & 1 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+r_1]{\substack{r_2+r_1\\r_3-r_1}}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\0 & 3 & 1 & 1\\0 & -3 & -1 & -1\\0 & 6 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\0 & 3 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

可知 $\mathrm{R}(A)=\mathrm{R}(B)=\mathrm{R}(A,B)=2$,

故向量组 α_1, α_2 与向量组 β_1, β_2 等价.

§ 3.3 向量组的线性相关性

一、向量组线性相关与线性无关

二、几个简单结论

一、向量组线性相关与线性无关

1. 定义3.4 给定向量组:$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，若存在不全为零的实数 $k_1, k_2,\cdots, k_m$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0,$$

则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关, 否则称它线性无关.

问题: “否则线性无关” 是什么意思?

若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关,

则只有当$k_1=\cdots=k_m=0$时, 才有$k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=0$成立.

说明

(1) 含有零向量的向量组必线性相关.

(2) 向量组只含一个向量 α 时:

若 $\alpha=0$, 则向量组线性相关;

若 $\alpha\neq 0$, 则向量组线性无关.

(3) 两个向量 α_1,α_2 线性相关的充分必要条件是

存在常数 k, 使得 $\alpha_1=k\alpha_2$.

2. 线性相关的一个等价定义

定理3.8 向量组A: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ (当 $m\geq 2$ 时) 线性相关的充要条件是A中至少有一个向量可由其余$m-1$个向量线性表示.

证明 充分性 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中有一个向量(比如α_m) 能由其余$m-1$个向量线性表示.

即有 $\alpha_m=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_{m-1}\alpha_{m-1}$,

即 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_{m-1}\alpha_{m-1}+(-1)\alpha_m=0$,

因 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_{m-1},(-1)$ 这 m 个数不全为0 ,

故向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ (当 $m\geq 2$ 时) 线性相关.

必要性 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关,

则有不全为0的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0 ,$$

因 $k_1, k_2, \cdots k_m$ 中至少有一个不为0,

不妨设$k_1 \neq 0$, 则有 $\alpha_1 = (-\frac{k_2}{k_1})\alpha_2 + \cdots + (-\frac{k_m}{k_1})\alpha_m$,

即α_1能由其余$m-1$个向量线性表示.

证毕.

注 若向量组A线性相关, 未必A中任何向量都可由其余向量线性表示.

例如: $a=(1,1,0)^{T}$, $b=(-1,-1,0)^{T}$, $c=(0,0,1)^{T}$,

则向量 a, b, c 线性相关,

但 c 不可由 a,b 线性表示.

定理3.9 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关的充要条件是它所构成的矩阵$A=(\alpha_1, \alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_m)$的秩小于向量的个数$m$；

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关的充要条件是$\mathrm{R}(A)=m$.

推论 n个n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$

线性相关的充要条件是 $|(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)|=0$；

线性无关的充要条件是$|(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)|\neq 0$.

例1　n维向量组

$$e_1=(1,0,\cdots,0)^T,e_2=(0,1,\cdots,0)^T,\cdots,e_n=(0,0,\cdots,1)^T$$

称为n维单位坐标向量组,讨论其线性相关性.

解　$E=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$是n阶单位矩阵,

$$\because |E|=1\neq 0,$$

$\therefore$向量组$e_1,e_2,\cdots,e_n$是线性无关的.

例2 已知$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\5\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\4\\7\\5\end{pmatrix}$,

试讨论向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性相关性.

解 $\because A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&2&4\\1&5&7\\1&3&5\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,

$\therefore \mathrm{R}(A)=2<3$,

故向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.

例3 已知$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\3\\3\\6\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\7\\1\\2\end{pmatrix}$,

试讨论向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性相关性.

解 $\because A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&3&7\\0&3&1\\0&6&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&-11\\0&0&0\end{pmatrix}$,

$\therefore \mathrm{R}(A)=3$,

故向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

例4 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, 设 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$, $\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$, $\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$, 试证$\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性无关.

证 设有数x_1,x_2,x_3 使 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0$,

即 $x_1(\alpha_1+\alpha_2)+x_2(\alpha_2+\alpha_3)+x_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$,

亦即 $(x_1+x_3)\alpha_1+(x_1+x_2)\alpha_2+(x_2+x_3)\alpha_3=0$,

因 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，故有: $\begin{cases} x_1+x_3=0 \\ x_1+x_2=0, \\ x_2+x_3=0 \end{cases}$

$\because \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0$, 故方程组只有零解 $x_1=x_2=x_3=0$,

所以向量组 β_1,β_2,β_3 线性无关.

二、几个简单结论

定理3.10 设向量组A：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关,则向量组$B:\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1}$ 也线性相关.

若向量组A是向量组B的一部分,则称向量组A是向量组B的部分组(或子组).

定理3.10可推广为:

一个向量组若有线性相关的部分组,则该向量组必线性相关.

反之：若一个向量组线性无关,则它的任何部分组都线性无关.

定理3.11 m个n 维向量组成的向量组, 当维数n小于向量个数m时一定线性相关.

证明 m 个 n 维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$构成的矩阵

记为 $A_{n\times m}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$,

有$R(A)\le n$.

若 $n<m$,则 $R(A)<m$,

故m个向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关.

特别地: $n+1$个n 维向量一定线性相关.

定理3.12 设向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关,而向量组$B:\alpha_1,\cdots,\alpha_m,b$线性相关,则向量$b$必能由向量组$A$线性表示,且表示式是唯一的.

证明 记$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m),B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,b)$,

则有$R(A)\le R(B)$. 因A组线性无关,有$R(A)=m$;

因B组线性相关,有$R(B)<m+1$.

所以$m\le R(B)<m+1$, 即有$R(B)=m$.

由$R(A)=R(B)=m$,知方程组$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)x=b$

有唯一解,

即向量b能由向量组A线性表示，且表示式唯一.

例5 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 向量组$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 证明: (1) α_1能由α_2, α_3 线性表示.

(2) α_4 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

证明 (1) 因$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性无关, 故 α_2, α_3 线性无关,

又已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关,

故 α_1 能由α_2, α_3 线性表示.

(2) 设α_4 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示,又α_1 能由α_2, α_3 线性表示, 故α_4 能由α_2, α_3 线性表示, 与已知$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性无关矛盾, 故 α_4 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

§3.4 向量组的最大无关组与秩

一、向量组的最大无关组与秩

二、矩阵的秩与向量组的秩的关系

三、向量组秩的一些结论

一、向量组的最大无关组与秩

定义3.5 设向量组 A(含有有限个或者无穷多个向量)，若在A中存在 r 个向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$，满足:

(1) 向量组 A_0： $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关,

(2) 向量组 A 中任意 $r+1$ 个向量(若存在 $r+1$ 个向量的话)都线性相关,

则称向量组 A_0 是向量组 A 的一个最大线性无关向量组 (简称最大无关组).

定义3.6 向量组 A 的最大无关组所含向量**个数**称为向量组的**秩**, 记作 R_A.

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的秩也记作 $R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$.

几点说明:

1. 只含零向量的向量组没有最大无关组.

   规定它的秩为0.

2. 含有m个非零向量的向量组的秩 R 满足 $1\le R\le m$.

3. 向量组$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$线性无关$\Leftrightarrow$ $R(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=m$.

4. 向量组$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$线性相关$\Leftrightarrow$ $R(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)<m$.

最大无关组的一个等价定义:

定理3.15 设向量组 A_0： $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是向量组 A 的一个部分组,且满足: (1) 向量组 A_0 线性无关,

(2) 向量组 A 的任一向量都能由向量组 A_0线性表示,

则向量组 A_0 是向量组 A 的一个最大无关组.

证明 设 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{r+1}$ 是组A中任意$r+1$个向量,

由(2)可知这$r+1$个向量能由向量组 A_0线性表示,

从而有: $R(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{r+1}) \le R(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) = r$

所以 $r+1$个向量$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{r+1}$ 线性相关,

故向量组 A_0 是向量组 A 的一个最大无关组.

二、矩阵的秩与向量组的秩的关系

定理3.13 矩阵的秩等于它的列向量组的秩,也等于它的行向量组的秩.

证 设$A=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$，$R(A)=r$,并设r阶子式$D_r\neq 0$. 由$D_r\neq 0$知其所在的r列线性无关；又由A中所有$r+1$阶子式均为零,知A中任意$r+1$个列向量都线性相关 . 因此D_r所在的r列是A的列向量的一个最大无关组 , 故列向量组的秩等于r.

类似可证A的行向量组的秩也等于$R(A)$.

即：利用矩阵的秩可以求向量组的秩.

例1 已知向量组 $\alpha_1=(1,2,3,4)^T$, $\alpha_2=(2,3,4,5)^T$, $\alpha_3=(3,4,5,6)^T$, $\alpha_4=(4,5,8,7)^T$, 求$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩及一个最大无关组.

解

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&8\\4&5&6&7\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$\therefore \text{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\text{rank}\,A=3$,

且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为向量组的一个最大无关组.

说明: 向量组的最大无关组一般不是唯一的.

例2 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 7 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 15 & 3 \\ 1 & -5 & -9 & 12 & 1 \end{pmatrix}$,

求矩阵 A 的列向量组的一个最大无关组, 并把不属最大无关组的列向量用该最大无关组线性表示.

解 记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5) \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为列向量组的一个最大无关组,

且有 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$，$\alpha_5=-8\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_4$.

§ 3.2的定理3.6中矩阵的秩均可改为向量组的秩.

定理3.17 若向量组 B 能由向量组 A 线性表示,

则$\mathrm{R}_B \le \mathrm{R}_A$.

三、向量组秩的一些结论

定理3.16 向量组 A 和它的最大无关组 A_0 是等价的.

§3.5 线性方程组解的结构

一、齐次线性方程组解的结构

二、非齐次线性方程组解的结构

一、齐次线性方程组解的结构

1. 解向量的概念

齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$， (1)

若记 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$,

则齐次方程组(1)可写成向量方程：$Ax=0$ (2)

若 $x_1=\xi_{11}, x_2=\xi_{21}, \cdots, x_n=\xi_{n1}$ 为方程 $Ax=0$ 的解,

则 $x=\xi_1=\begin{pmatrix}\xi_{11}\\ \xi_{21}\\ \vdots\\ \xi_{n1}\end{pmatrix}$ 称为方程组(1) 的解向量.

它也是向量方程(2)的解.

2. 齐次线性方程组$Ax=0$ 的解的性质

(1) 若 $x=\xi_1$, $x=\xi_2$ 为$Ax=0$ 的解, 则$x=\xi_1+\xi_2$ 也是$Ax=0$ 的解.

证明 $\because A\xi_1 = 0, A\xi_2 = 0$

$$\therefore A(\xi_1 + \xi_2) = A\xi_1 + A\xi_2 = 0,$$

故 $x=\xi_1+\xi_2$ 也是 $Ax=0$ 的解.

(2) 若 $x=\xi_1$ 为$Ax=0$ 的解, k为任意实数, 则$x=k\xi_1$ 也是$Ax=0$ 的解.

证明 $\because A(k\xi_1) = kA(\xi_1) = k0 = 0,$

故 $x=k\xi_1$ 也是 $Ax=0$ 的解.

3. 齐次线性方程组的基础解系及其求法

齐次线性方程组 $Ax=0$的全体解所组成的集合称为方程组的解集. 记作 S.

定义3.7　齐次线性方程组 $Ax=0$的解集 S 的最大无关组称为该齐次线性方程组的基础解系.

要求齐次线性方程组 $Ax=0$的通解, 只需求出它的基础解系即可.

定理3.18 当 $m\times n$ 矩阵 A 的秩 $R(A)=r$ 时, n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解集S的秩$R_S=n-r$.

当 $R(A)=n$ 时, 方程组只有零解, 故没有基础解系.

当 $R(A)=r<n$ 时, 方程组的基础解系恰有$n-r$ 个向量.

方程组任意$n-r$ 个线性无关的解向量都可构成基础解系.

故方程组 $Ax=0$的基础解系不是唯一的.

定理3.19 设 $R(A)=r<n$,

$\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots, \xi_{n-r}$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系,

则 $Ax=0$ 的通解可表示为:

$$x=c_1\xi_1+c_2\,\xi_2+\cdots+c_{n-r}\xi_{n-r}\ ,(c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}\in R).$$

—— $Ax=0$ 的通解结构定理.

例1 求 $\begin{cases} x_1-8x_2+10x_3+2x_4=0 \\ 2x_1+4x_2+5x_3-x_4=0 \\ 3x_1+8x_2+6x_3-2x_4=0 \end{cases}$ 的基础解系与通解.

例1 求 $\begin{cases} x_1 - 8x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$ 的基础解系与通解.

解

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & 6 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得同解方程组：$\begin{cases} x_1 = -4x_3 \\ x_2 = \dfrac{3}{4}x_3 + \dfrac{1}{4}x_4 \end{cases}$

令$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$及$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，对应有$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$及$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$，

即得基础解系：$\xi_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$

$$\therefore \text{通解为:} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (c_1, c_2 \in R).$$

例2 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

解 对系数矩阵施行初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\0&-1&1&-3&1\\0&-2&2&-6&2\\0&-2&2&-6&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1&-2\\0&1&-1&3&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$R(A)=r=2,\ n=5,\ n-r=3$，即方程组有无穷多解，

其基础解系中有三个线性无关的解向量.

令$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. 代入$\begin{cases}x_1=-2x_3-x_4+2x_5\\x_2=x_3-3x_4+x_5\end{cases}$

依次得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

所以原方程组的一个基础解系为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

故原方程组的通解为 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3$.

其中k_1, k_2, k_3为任意常数 .

二、非齐次线性方程组的解

非齐次线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \quad (4)$$

亦可写成向量方程：$Ax=b$, (5)　其中 $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$,

方程组(5) 的解称为方程组(4)的**解向量.**

$Ax=0$ 称为 $Ax=b$ 对应的齐次线性方程组, 也称为**导出组.**

非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解的性质

(1) 若 $x=\eta_1$, $x=\eta_2$ 都是 $Ax=b$ 的解, 则 $x=\eta_1-\eta_2$ 是其导出组 $Ax=0$ 的解.

证明 $\because A(\eta_1-\eta_2)=A\eta_1-A\eta_2 \ =b-b=0,$

$\therefore$ $x=\eta_1-\eta_2$ 是$Ax=0$ 的解.

(2) 若 $x=\eta$ 是 $Ax=b$ 的解, $x=\xi$ 是$Ax=0$ 的解, 则 $x=\eta+\xi$ 是 $Ax=b$ 的解.

证明 $\because A(\xi+\eta)=A\xi+A\eta=0+b=b,$

$\therefore$ $x=\eta+\xi$ 是 $Ax=b$ 的解.

非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的通解结构定理:

定理3.20 若 η 是 $Ax=b$ 的一个解,

$\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots, \xi_{n-r}$ 为其导出组 $Ax=0$ 的一个基础解系,

则 $Ax=b$ 的通解可表示为:

$$x = c_1\xi_1 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r} + \eta, (c_1, \cdots, c_{n-r} \in R).$$

例3 求方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_4 = 1 \\ -2x_1 - 2x_3 + 10x_4 = 4 \end{cases}$ 的通解.

例5 求方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_4 = 1 \\ -2x_1 - 2x_3 + 10x_4 = 4 \end{cases}$ 的通解.

解

$$B = (A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 10 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -2 - x_3 + 5x_4 \\ x_2 = 5 + 2x_3 - 7x_4 \end{cases},$

取 $x_3 = x_4 = 0$, 则 $x_1 = -2$, $x_2 = 5$,

即得方程组的一个特解 $\eta^* = (-2,5,0,0)^T$.

导出组 $Ax = 0$ 的同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -x_3 + 5x_4 \\ x_2 = 2x_3 - 7x_4 \end{cases}$,

导出组基础解系为 $\xi_1 = (-1,2,1,0)^T$,$\xi_2 = (5,-7,0,1)^T$,

故所求方程组的通解为:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (c_1, c_2 \in R).$$

例4 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, $\beta_2=\alpha_2-\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_2+\alpha_3$, 问$\beta_1,\beta_2,\beta_3$能否作为$Ax=0$ 的基础解系？

证明：$\because$ β_1,β_2,β_3 均为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合,

$\therefore$ β_1,β_2,β_3 均为 $Ax=0$ 的解.

设有数 k_1,k_2,k_3 使 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$,

即有 $k_1\alpha_1+(k_1+k_2+k_3)\alpha_2+(k_1-k_2+k_3)\alpha_3=0$,

故有：$\begin{cases} k_1=0 \\ k_1+k_2+k_3=0, \\ k_1-k_2+k_3=0 \end{cases}$ 方程组只有零解：$\begin{cases} k_1=0 \\ k_2=0, \\ k_3=0 \end{cases}$

$\therefore$ β_1,β_2,β_3线性无关. 故β_1,β_2,β_3是$Ax=0$ 的基础解系.

例6 设有线性方程组$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$,

问 λ 取何值时, 此方程组: (1)有唯一解? (2)无解? (3)有无穷多个解? 并在有无穷多个解时求其通解.

解

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2\end{array}\right)\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 1 & \lambda & 1 & \lambda\\ \lambda & 1 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-\lambda r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda)\\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & (1-\lambda)(1+\lambda)^2\end{array}\right)$$

(1) 当 $\lambda \neq 1$且$\lambda \neq -2$时，$R(A)=R(B)=3$, 方程组有唯一解.

(2) 当 $\lambda = -2$时, $R(A)=2$, $R(B)=3$, 方程组无解.

(3) 当 $\lambda=1$时，$R(A)=R(B)=1<3$，方程组有无穷多解.

此时有：$B \xrightarrow{r} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$,

得同解方程组：$x_1 + x_2 + x_3 = 1$,

通解为：$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in R)$.

此种题型，若方程个数等于未知量个数，则可考虑用下面的解法：

解

系数行列式 $|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix} \overset{c_1+c_2+c_3}{=\!=\!=} \begin{vmatrix}\lambda+2 & 1 & 1\\ \lambda+2 & \lambda & 1\\ \lambda+2 & 1 & \lambda\end{vmatrix}$

$$=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1}}{=\!=\!=} (\lambda+2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+2)(\lambda-1)^2,$$

(1) 当 $\lambda \neq 1$且$\lambda \neq -2$时, $|A| \neq 0$, 方程组有唯一解.

(2) 当 $\lambda = -2$时,

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3+2r_1]{\substack{r_3 \leftrightarrow r_1 \\ r_2 - r_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right),$$

$\because R(A)=2, R(B)=3, \therefore$方程组无解.

(3) 当 $\lambda=1$时,

此时有: $B \xrightarrow{r} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$,

$R(A)=R(B)=1$, 方程组有无穷多解.

得同解方程组: $x_1+x_2+x_3=1$,

通解为: $x=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in R)$.

例7 设 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解,

证明 $\mathrm{R}(A)=\mathrm{R}(B)$.

例8 证明 $\mathrm{R}(A^{\mathrm{T}}A)=\mathrm{R}(A)$.

§3.6　向量空间

一、向量空间的概念

二、向量空间的基与维数

三、基变换与坐标变换, 过渡矩阵

一、向量空间的概念

定义3.8 设V为n维向量的集合,若V非空且对加法及数乘两种运算封闭,则称集合V为向量空间.

说明:

1. 集合V对加法及数乘两种运算封闭是指:

1) 若$\alpha, \beta \in V$, 则 $\alpha+\beta \in V$.

2) 若$\alpha \in V, k \in R$, 则 $k\alpha \in V$.

2. n 维向量的集合是一个向量空间,记作R^n.

例1 齐次线性方程组$Ax=\theta$的解集 $S=\{x|Ax=\theta\}$是一个向量空间.

$S=\{x\,|\,Ax=\theta\}$称为 $Ax=\theta$的解空间.

例2 非齐次线性方程组$Ax=b$ 的解集 $S=\{x|Ax=b\}$不是一个向量空间.

二、向量空间的基与维数

定义3.9 设 V 是向量空间, 若V 中有 r 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 满足:

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关,

(2) V 中任一向量都可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示,

则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 就称为向量空间V的一个基,

r 称为向量空间V的维数, 并称V为r 维向量空间.