1. 观察下列数列的变化趋势，

如果数列是收敛的，写出它们的极限。

(1) $a_n=\frac{1}{2^n}$ (2) $a_n=1+\frac{1}{n^2}$ (3) $a_n=(-1)^n n$ (4) $a_n=2(-1)^n+1$.

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{\infty}=0$.

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n=1+\frac{1}{\infty}=1$

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n=$ 不存在极限

(4) $\lim_{n\to\infty} a_n=$ 不存在极限

2. 用极限的定义证明

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}=\frac{1}{2}$ (2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-4}{n^2+1}=1$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(2n)}{n+1}=0$ (4) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}=1$.

(1) 令 $a_n=\frac{n+1}{2n+1}$，由于 $|a_n-\frac{1}{2}|=\frac{1}{4n+2}$

$\forall\varepsilon>0$，设 $|a_n-\frac{1}{2}|<\varepsilon$ 成立.

取 $\alpha\in N$，$\alpha=[\frac{1}{4\varepsilon}]-\frac{1}{2}$

则当 $n>\alpha\Rightarrow n>[\frac{1}{4\varepsilon}]-\frac{1}{2}>\frac{1}{\varepsilon}$

故恒有 $|a_n-\frac{1}{2}|<\varepsilon$ 成立，则 $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}=\frac{1}{2}$ #

(2) 令 $\frac{n^2-4}{n^2+1}=a_n$，由于 $|a_n-1|=\frac{5}{n^2+1}$

$\forall\varepsilon>0$，设 $|a_n-1|<\varepsilon$ 成立.

取 $N\in N$，$N=\sqrt{\frac{5}{\varepsilon}-1}$

则当 $n>N\Rightarrow n>[\sqrt{\frac{5}{\varepsilon}}]-1>\frac{1}{\varepsilon}$

故恒有 $|a_n-1|<\varepsilon$ 成立，则 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-4}{n^2+1}=1$ #

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(2n)}{n+1}=0$

$|\frac{\cos(2n)}{n+1}-0|\le\frac{1}{n+1}$. $\forall\varepsilon>0$，设 $|a_n-1|<\varepsilon$ 成立

取 $N\in N$. $N=[\frac{1}{\varepsilon+1}]$. 则当 $n>N$ 时

有 $n>[\frac{1}{\varepsilon+1}]>\frac{1}{\varepsilon+1}$，故恒有 $\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(2n)}{n+1}=0$ #

(4) 令 $a_n=\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}$ 由 $|a_n-1|=\frac{\sqrt{n^2+n}-n}{n}$

故恒有 $|a_n-1|<\varepsilon$ 成立，取 $N\in\mathbb{N}$，

当 $n>N$ 时，有 $n=\left[\frac{1}{\varepsilon+1}\right]$，则当 $n>N$ 时

有 $n>\left[\frac{1}{\varepsilon+1}\right]>\frac{1}{\varepsilon+1}$，故恒有 $\lim \frac{n}{\sqrt{n^2+n}-n}=1$.

3. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$，但是反之不成立，

$a_n=a$，$|a_n-0|=a$.

故恒有 $|a_n-0|<\varepsilon$ 成立，取 $N\in\mathbb{N}$，

当 $n>N$ 时，有 $\frac{1}{a}>\frac{1}{\varepsilon}$

4. 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为有界数列，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，对于 $\varepsilon\in\mathbb{N}$，$\varepsilon=1$

$\exists N\in\mathbb{N}$，使得当 $n>N$ 时，有 $|a_n-A|<\varepsilon$ 恒成立

于是，当 $n>N$ 时有 $|a_n|=|a_n-A+A|\le|a_n-A|+|A|<1+|A|$