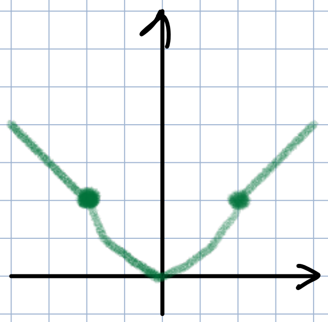
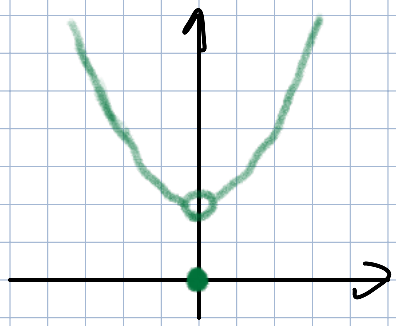
1. 研究下列函数的连续性，并画出函数的图形.

(1) $f(x)=\begin{cases} x^2, & |x|\le 1 \\ |x|, & |x|>1 \end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\ne 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$





2. 求下列函数的间断点，并说明这些间断点的类型，如果是可去的，补充或改变定义使其连续

(1) $f(x)=\cos\frac{1}{x}$

$x=0$ 为可去间断点

(2) $f(x)=\frac{x}{\tan x}$

$x=0$ 为可去间断点

define $f(0)=1$.

$x=k\pi\ (k\ne 0)$ 为第二类间断点

(3) $f(x)=\frac{x^2+x-2}{x^3-1}$

$=\frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{x+2}{x^2+x+1}$

$x=1$ 为可去间断点

define $f(1)=1$

(4) $f(x)=\frac{x}{\sin\pi x}$

$x=0$ 为可去间断点.

Define $f(0)=\frac{1}{\pi}$

$x=k\ (k\ne 0)$ 为第二类间断点

(5) $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$

$x=0$ 为可去间断点

define $f(0)=0$

(6) $f(x)=\frac{1}{e-e^{\frac{1}{x}}}$

$x=0$ 为跳跃间断点

$x=1$ 为第二类间断点

(7) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}\sin\frac{1}{x}, & x>0 \\ x^2+1, & x\le 0 \end{cases}$

$x=0$ 为跳跃间断点

(8) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{1+x}, & x\ge 0 \\ e^{\frac{1}{x}}, & x<0 \end{cases}$

$x=0$ 为跳跃间断点

3. 确定常数 a 的值使函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\geq 0\\ a+x, & x<0\end{cases}$ 在 $(-\infty,\infty)$ 内处处连续

$f(0)=\cos 0=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} (a+x)=a+x=1$ 　故 $a=1$

4. 讨论函数的连续性，若有间断点，判别其类型

(1) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$ 　(2) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x-x^{2n}}{1+x^{2n}}$

(1) $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leq 1\\ x^2, & |x|>1\end{cases}$ 处处连续

(2) $f(x)=\begin{cases}-1, & x\leq -1\\ x, & -1<x<1\\ 0, & x=1\\ -1, & x>1\end{cases}$ 　$x=-1$ 为连续点，$x=1$ 为跳跃间断点

5. 证明：若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续且 $f(x_0)\neq 0$，
则存在 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$，当 $x\in U(x_0)$ 时 $f(x)\neq 0$。

6. 求下列极限

(1) $\lim_{x\to 0}\sqrt{e^x+5x^2+3}$

$=\lim_{x\to 0}\sqrt{1+0+3}=2$

(2) $\lim_{x\to 1}\ln(1+\sin(\pi x))$

$=\lim_{x\to 1}\ln(1+\sin\pi)$

$=\ln 1=0$

(3) $\lim_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$

$\Rightarrow(\sin)'=\cos$

(4) $\lim_{x\to\infty}\arctan(\sqrt{x^2+2x}-x)$

$=\lim_{x\to\infty}\arctan\dfrac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x}$

$=\lim_{x\to\infty}\arctan\dfrac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}$

$=\lim_{x\to\infty}\arctan\dfrac{2x}{2x}=\dfrac{\pi}{4}$

(5) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x\sin x}}$

$=\lim_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{x\sin x}}$

$=\lim_{x\to 0}\left[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos-1}}\right]^{\frac{\cos x-1}{x\sin x}}$

(6) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$