第二章 行列式

§2.1 行列式的定义

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ $\qquad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

由二阶方阵所确定的二阶行列式记为 D. 也可记为 $\det A = |A|$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

代数余子式与 n 阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

def:

(1) 一阶矩阵 $A = (a_{11})$ 的行列式定义为 $|A| = |a_{11}| = a_{11}$

(2) n 阶 $(n \geq 2)$ 矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ 的行列式

记作 $D = \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

定义为 $\sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

为了便起见，引入记号

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

M_{ij}为D中划去元素a_{ij}所在的第i行，第j列后，余下的$(n-1)^2$个元素按原来的位置次序构成的n-1阶行列式称为a_{ij}的余子式，$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$称为元素a_{ij}的代数余子式

Theorem

n阶$(n\geq 2)$矩阵 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 的行列式 $D=\det A=|A|$

可表示为它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即 $D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}\cdots a_{in}A_{in}$

$=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}\cdots a_{nj}A_{nj}$

§2.2 行列式的性质

性质1. 行列式与它的转置行列式相等.

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-2 \qquad D^T=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=-2$$

性质2. 互换行列式的2行(列)，行列式变号.

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2}-\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-2. \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2}-\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

性质3. 用数k乘行列式的某一行(列)，得到的行列式等于原来行列式的k倍.

如 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

推论(1)行列式如果有2行(列)元素成比例，则此行列式等于0.

(2)若行列式中某行(列)的元素全为0，则此行列式等于0.

性质4. 若行列式的某一行(列)的元素都是2数之和，

则该行列式等于2个行列式的和.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质5. 若将行列式的某一行(列)乘数k加到另一行(列)，

则行列式的值不变

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \underline{\underline{r_2+kr_1}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} & a_{23}+ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质6. 行列式中第i行元素与第j行(j≠i)对应元素的代数

余子式乘积之和为0.

即 $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0$. $(i,j\in 1\sim n)$

性质7. 设A,B为n阶方阵，C为m阶方阵，则

(1) $|A^T|=|A|$

(2) $|\lambda A|=\lambda^n|A|$

(3) $\begin{vmatrix} A & 0 \\ D & C \end{vmatrix}=|A||C|$ $\quad\begin{vmatrix} 0 & A \\ C & D \end{vmatrix}=(-1)^{mn}|A||C|$

(4) $|AB|=|A||B|$

§2-3 行列式的应用.

一. 克拉默(Cramer)法则

定理1. 如果线性方程组的系数行列式 $D\neq 0$.

则方程组有唯一解 $\quad x_j=\dfrac{D_j}{D}$, $j=1,2\sim n$

定理2. 如果线性方程组无解或有2个不同的解
则它的系数行列式必为零

定理3. 如果齐次方程组的系数行列式 $D\neq0$.
则齐次线性方程组只有零解.

定理4. 如果齐次线性方程组有非零解.
则其的系数行列式必为0.

二. 逆矩阵公式

def: (伴随矩阵 A^*)
设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 元素 a_{ij} 的代数余子式按如下的顺序构成一个n阶矩阵.

$$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

称为矩阵A的伴随矩阵 (adjoint matrix)
记为 A^*

定理1. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 则 $AA^*=A^*A=|A|E$

定理2. n阶方阵A可逆的充要条件是 $|A|\neq0$, 且当A可逆时
有 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$, 其中 A^* 为矩阵A的伴随矩阵.

三. 矩阵的秩

def: 在 $m\times n$ 矩阵A中任取k行k列 ($k\leq m, k\leq n$)
位于这些行列交叉处的 k^2 个元素, 不改变它们在A中所处的位置次序而得到的k阶行列式, 称为A的k阶子式

def: 设在矩阵A中有一个不等于0的r阶子式D,
且所有的 $r+1$ 阶子式 (若存在) 全等于0, 那么D称为矩阵A的最高阶非0子式. r称为矩阵A的秩 (rank), 记作 $R(A)$
并规定 $A=0$, 则 $R(A)=0$.

$R(A) \le \min\{m,n\}$，若 $R(A)=\min\{m,n\}$，称A为满秩矩阵.

满秩 $\begin{cases} 行满秩\ R(A_{m\times n})=m \\ 列满秩\ R(A_{m\times n})=n \end{cases}$

定理1. 设矩阵A经初等变换得到矩阵B，则 $R(A)=R(B)$

推论1. 设A为 $m\times n$ 矩阵，则 $R(A)=r$ 的充要条件是A的标准形为 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，其中 E_r 为r阶单位矩阵.

推论2. 设矩阵 $A_{m\times n}$，$B_{n\times s}$，$C_{l\times m}$

(1) 若 $R(A)=n$（此时称A为列满秩）则 $R(AB)=R(B)$

(2) 若 $R(A)=m$（此时称A为行满秩）则 $R(CA)=R(C)$

特别地，当 $m=n$ 时，若 $A_{n\times n}$ 可逆，则 $R(AB)=R(B)$　$R(CA)=R(C)$

推论3.

(1) 设矩阵 $A_{m\times n}$，$B_{m\times s}$，

则 $\max\{R(A),R(B)\} \le R(A,B) \le R(A)+R(B)$

(2) 设矩阵 $A_{m\times n}$，$B_{m\times n}$，

则 $R(A+B) \le R(A)+R(B)$

(3) 设矩阵 $A_{m\times n}$，$B_{n\times s}$

$R(A)+R(B)-n \le R(AB) \le \min\{R(A),R(B)\}$