第二章　行列式

(determinant)

- § 2.1　行列式的定义
- § 2.2　行列式的性质
- § 2.3　行列式的应用

§ 2.1　行列式的定义

- 一、二阶、三阶行列式的定义
- 二、代数余子式与 n 阶行列式的定义

一、一阶、二阶、三阶行列式的定义

一阶行列式：$|a_{11}| = a_{11}$

如，行列式 $|-5| = -5$，$|3| = 3$

二阶行列式：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

如，$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 3 = -3$

二阶行列式的计算 —— 对角线法则

主对角线

副对角线

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} \\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

例1 用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. & (2) \end{cases}$$

$$(1)\times a_{22}: \quad a_{11}a_{22}x_1 + \boxed{a_{12}a_{22}}x_2 = b_1a_{22},$$

$$(2)\times a_{12}: \quad a_{12}a_{21}x_1 + \boxed{a_{12}a_{22}}x_2 = b_2a_{12},$$

两式相减消去 x_2 ,得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2;$$

类似地，消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \qquad (3)$$

由方程组的四个系数确定.

对于二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

系数行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

则当系数行列式 $D \neq 0$时，

二元线性方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

注意　分母都为原方程组的系数行列式.

例2 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 6x_1 - 4x_2 = 10, \\ 5x_1 + 7x_2 = 29. \end{cases}$$

解
$$D = \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 42 - (-20) = 62 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 10 & -4 \\ 29 & 7 \end{vmatrix} = 186, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 5 & 29 \end{vmatrix} = 124,$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{186}{62} = 3, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{124}{62} = 2.$$

三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

例3 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

解 按对角线法则，有

$$D = 1\times 2\times(-2) + 2\times 1\times(-3) + (-4)\times(-2)\times 4$$
$$-1\times 1\times 4 - 2\times(-2)\times(-2) - (-4)\times 2\times(-3)$$
$$= -14$$

定义　(1)在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的**余子式**，记作 M_{ij}.

(2) 记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$, 叫做元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

例如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}.$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \qquad M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}.$$

$$M_{44}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{44}=(-1)^{4+4}M_{44}=M_{44}.$$

行列式的每个元素分别 对应着一个余子式和一个代数余子式．

二、 n 阶行列式的定义

定义2. 1 （1）一阶矩阵 $A=(a_{11})$ 的行列式定义为

$$|A|=|a_{11}|=a_{11}$$

（2） $n(n\geq 2)$ 阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A的行列式记作

$$D=det\ A=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$$

定理2.1 $n(n\geq 2)$ 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

的行列式 $D=det\ A=|A|$ 可表示为

它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和.

即 $$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}, i=1,2,\cdots,n \qquad (2.7)$$

$$=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}, j=1,2,\cdots,n \qquad (2.8)$$

其中 $A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{in}$ 为第 i 行各元素的代数余子式. 从而（2.7）式也称为行列式按第 i 行展开.

$A_{1j},A_{2j},\cdots,A_{nj}$ 为第 j 列各元素的代数余子式.（2.8）式称为行列式按第 j 列展开.

定理2.1又称为行列式按行、按列展开定理

例4

$$D=\begin{vmatrix}4&0&0&1\\2&-1&3&1\\0&0&0&2\\7&4&3&2\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}4&0&0\\2&-1&3\\7&4&3\end{vmatrix}=-2\times4\begin{vmatrix}-1&3\\4&3\end{vmatrix}$$

$$=-2\times4\times(-15)$$

例5 已知四阶行列式D第三列元素依次为1,2,0,-1，对应的余子式分别为3,-2,4,5，求D的值.

解:

$$D = 1\cdot(-1)^{3+1}\cdot 3 + 2\cdot(-1)^{3+2}\cdot(-2) + 0\cdot(-1)^{3+3}\cdot 4 + (-1)\cdot(-1)^{3+4}\cdot 5$$

$$= 12$$

例6 计算 $$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & O & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解:

$$D_n = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & & & \\ a_{32} & a_{33} & O & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & & & \\ a_{43} & a_{44} & O & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

同理有 $$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

特别地 $$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

例7 计算**斜下三角行列式** $D_n=\begin{vmatrix} & 0 & & a_n \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & a_2 & & \\ a_1 & & * & \end{vmatrix}$

解:

$$D_n=a_n(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} & 0 & & a_{n-1} \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & a_2 & & \\ a_1 & & * & \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}a_nD_{n-1}$$

$$=(-1)^{n-1}a_n(-1)^{n-2}a_{n-1}D_{n-2}=\cdots=(-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}a_na_{n-1}\cdots a_1$$

$$\boxed{=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n}$$

同理， $D_n = \begin{vmatrix} & 0 & & a_n \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & a_2 & & \\ a_1 & & 0 & \end{vmatrix} \boxed{= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n}$

说明四阶及四阶以上对角线规则不成立.

§ 2.2 行列式的性质

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D^T 称为行列式 D 的转置行列式.

性质1 $\quad \mathrm{D} = \mathrm{D}^{\mathrm{T}}$

说明　行列式中行与列具有同等的地位,因此行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立.

性质2　互换行列式的两行（列）, 行列式变号.

例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \\ 6 & 6 & 2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 7 & 1 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{vmatrix}.$$

推论　如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式为零.

性质3 行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数 k ，等于用数 k 乘此行列式.

$$\text{如}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

也可描述成: 行列式的某一行（列）中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

注意:行列式提取公因子是提取某行(或某列)的公因子

如: $$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ la_{21} & la_{22} \end{vmatrix} = l \cdot k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

而矩阵提取公因子是提取矩阵中所有元素的公因子

$$\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

推论1　行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式为零.

证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

推论2　若行列式中某行（列）的元素全为零，则此行列式等于零.

性质4　若行列式的某一列（行）的元素都是两数之和.

例如
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则D等于下列两个行列式之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1i} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a'_{2i} & \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{ni} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1+4 & 2+5 & 3+6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 0 = 0$$

性质5 把行列式的某一列（行）的各元素乘以同一数然后加到另一列(行)对应的元素上去，行列式不变.

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nj} \end{vmatrix} \quad k\times$$

$$\overset{c_i + kc_j}{=\!=} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i} + ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i} + ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni} + ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nj} \end{vmatrix}$$

例1. 设$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 2 & 4 & -3 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$，求 $\det A$.

解.

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 2 & 4 & -3 \\ -3 & 7 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & 10 & -17 \\ 0 & -2 & 23 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & 10 & -17 \\ 0 & 0 & \frac{196}{10} \end{vmatrix}=196$$

例2 计算 $D=\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix}$

解

$$D=\begin{vmatrix} -7 & 0 & -17 & -8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -7 & -17 & -8 \\ 0 & -5 & 5 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=-5\cdot\begin{vmatrix} -7 & -25 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}=10$$

例3 计算 n阶行列式 $$D=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解

$$\mathrm{D}=\begin{vmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{b} & \cdots & \mathrm{b} \\ \mathrm{b} & \mathrm{a} & \mathrm{b} & \cdots & \mathrm{b} \\ \mathrm{b} & \mathrm{b} & \mathrm{a} & \cdots & \mathrm{b} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathrm{b} & \mathrm{b} & \mathrm{b} & \cdots & \mathrm{a} \end{vmatrix} \overset{\mathrm{c_1+c_2+\cdots+c_n}}{=} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=\left[a+(n-1)b\right]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\underset{i=2,3,\cdots n}{\overset{r_i - r_1}{=}} [a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ & a-b & & & \\ & & a-b & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a-b \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

例4 计算 $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$

解 加边法

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n} a_i & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1+\sum_{i=1}^{n} a_i
$$

例5　证明范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \ge i > j \ge 1} (x_i - x_j). \qquad (1)$$

证　用数学归纳法

$$\because \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{2 \ge i > j \ge 1} (x_i - x_j),$$

$\therefore$　当 $n = 2$ 时（1）式成立.

假设（1）对于 $n-1$ 阶范德蒙德行列式成立，

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

按第1列展开，并把每列的公 因子 $(x_i - x_1)$ 提出，就有

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

n-1阶范德蒙德行列式

$$\therefore \quad D_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\prod_{n \geq i > j \geq 2}(x_i - x_j)$$

$$= \prod_{n \geq i > j \geq 1}(x_i - x_j).$$

例6 计算

$$D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}=\prod_{4\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j)$$

$$=(4-1)(3-1)(2-1)(4-2)(3-2)(4-3)$$

$$=12$$

例7

设 $D=\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$,

D 的 (i, j) 元的余子式和代数余子式依次记作 M_{ij} 和 A_{ij}，求

(1) $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$,

(2) $A_{11}+A_{31}+A_{41}$,

(3) $M_{21}+M_{22}+M_{23}+M_{24}$.

$$(1)\quad A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=4.$$

(2) $A_{11}+A_{31}+A_{41}=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$

$=\cdots=125.$

(3) $M_{21} + M_{22} + M_{23} + M_{24}$

$$= -A_{21} + A_{22} - A_{23} + A_{24}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = 10 .$$

性质6 行列式第 i 行的元素与第 $j(j\neq i)$ 行的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j. \tag{2.10}$$

行列式第 i 列的元素与第 $j(j\neq i)$ 列的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0\ (j\neq i)\qquad i,j=1,2,\cdots,n \tag{2.11}$$

即:行列式任一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零

$$a_{i1}A_{j1}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{array}{|ccc|l} a_{11} & \cdots & a_{1n} & \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} & \text{第 } i \text{ 行} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} & \text{第 } j \text{ 行} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & \end{array},$$

相同

当 $i \neq j$ 时，

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad (i \neq j).$$

同理 $a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\quad (i \neq j).$

例8 已知五阶行列式D中第一行元素依次为u, 2u+1, 3, 1, u, 而第三行元素的余子式分别为2, 5, 2, 1, -3, 求u.

解： $$(-1)^{3+1}\cdot 2\cdot u+(-1)^{3+2}\cdot 5\cdot(2u+1)+(-1)^{3+3}\cdot 3\cdot 2$$
$$+(-1)^{3+4}\cdot 1\cdot 1+(-1)^{3+5}\cdot(-3)\cdot u=0$$

$$u=0$$

性质7 设 A,B为n 阶方阵，C 为m阶方阵，则

(1) $\left|A^T\right| = |A|$;　　　　(2) $|\lambda A| = \lambda^n |A|$;

(3) $\begin{vmatrix} A & O \\ D & C \end{vmatrix} = |A||C|$, $\begin{vmatrix} O & A \\ C & D \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A||C|$

(4) $|AB| = |A||B|, \Rightarrow |AB| = |BA|$.

例9 设A为3阶方阵，B为2阶方阵，且$|A| = 2, |B| = 3$

求$\begin{vmatrix} 0 & A \\ 2B & 0 \end{vmatrix}$

解：$\begin{vmatrix} 0 & A \\ 2B & 0 \end{vmatrix} = 2^2 \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = 2^2 \cdot (-1)^{3\cdot 2} |A||B| = 24$

注意1)一般地，$|A+B| \neq |A|+|B|$

2) 性质(4)要求A, B都是方阵才成立，因方阵才有行列式.

3)设A, B为n阶方阵，一般地，

$$AB \neq BA, \qquad \text{但有} |AB| = |BA| = |A||B|$$

例10 设A为n阶方阵 $|A|=-1$,且$AA^T=E$,求证$|A+E|=0$

例11 证奇数阶反对称阵的行列式为0

$$\text{如}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 5 & 6 & 7 \\ -2 & -5 & 0 & 8 & 9 \\ -3 & -6 & -8 & 0 & 10 \\ -4 & -7 & -9 & -10 & 0 \end{vmatrix}=0$$

第二章　行列式

(determinant)

§2.1　行列式的定义

- §2.2　行列式的性质
- §2.3　行列式的应用
- 一 、克拉默(Cramer)
- 二、矩阵求逆公式
- 三、矩阵的秩

§ 2.3 行列式的应用

一 、克拉默(Cramer)法则

设n个方程n个未知数的非齐次线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

定理2.2 克拉默法则

如果线性方程组(1)的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

那么线性方程组(1)有唯一解，

且解可以表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{D_2}{D}, x_3=\frac{D_2}{D}, \cdots, x_n=\frac{D_n}{D}.$$

其中D_j是把系数行列式D中第j列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的n阶行列式，即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理2.3 如果线性方程组(1)无解或有两个不同的解，则它的系数行列式必为零.

对于齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \quad (2)$$

方程组(2)是方程组（1）的特例，将定理2.2应用到方程组(2)得到

定理2.4 如果齐次线性方程组(2)的系数行列式 $D \neq 0$，则齐次线性方程组 (2)只有零解.

定理2.5 如果齐次线性方程组(2)有非零解,则它的系数行列式必为零.

例1　用克拉默法则解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - r_2]{r_1 - 2r_2} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 & 13 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3 + 2c_2]{c_1 + 2c_2} -\begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 27,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 81, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} = -108,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} \qquad D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -27, \qquad\qquad = 27,$$

$$\therefore x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{81}{27} = 3, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-108}{27} = -4,$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-27}{27} = -1, \qquad x_4 = \frac{D_4}{D} = \frac{27}{27} = 1.$$

例2 问 λ 取何值时，齐次方程组

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0, \end{cases}$$

有非零解？

解

$$D = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 4 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3+\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_3-(1-\lambda)c_1}{=}\begin{vmatrix} 1-\lambda & \lambda-3 & 3+2\lambda-\lambda^2 \\ 2 & 1-\lambda & 2\lambda-1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda-3 & 3+2\lambda-\lambda^2 \\ 1-\lambda & 2\lambda-1 \end{vmatrix}\overset{c_2+c_1}{=}\begin{vmatrix} \lambda-3 & 3\lambda-\lambda^2 \\ 1-\lambda & \lambda \end{vmatrix}$$

$$=\lambda(3-\lambda)(\lambda-2)$$

齐次方程组有非零解，则 $D=0$

所以 $\lambda=0,\lambda=2$ 或 $\lambda=3$时齐次方程组有非零解.

二、矩阵求逆公式

定义2.2 伴随矩阵

设矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$,元素a_{ij}的代数余子式A_{ij}按如下的顺序构成的n阶矩阵

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵A 的伴随矩阵,

记为A^*

定理2.6 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$,则$AA^*=A^*A=|A|E$.

证明 设 $A=(a_{ij})$, 记 $AA^*=(b_{ij})$, 则

$$b_{ij}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}|A| & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

$$AA^*=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A|\end{pmatrix}=|A|E$$

$$A^*A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A|\end{pmatrix}=|A|E$$

定理2.7 矩阵 A可逆的充要条件是$|A| \neq 0$

且 $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} A^{*},\quad$ 其中A^{*}为矩阵A的伴随矩阵.

$$1 = |E| = |AA^{-1}| = |A||A^{-1}| \qquad \therefore |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

例3（1）求方阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解 $\because\ |A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{vmatrix}=2\neq 0,\ \therefore\ A^{-1}$存在.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&1\\4&3\end{vmatrix}=2,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}2&1\\3&3\end{vmatrix}=-3,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}2&2\\3&4\end{vmatrix}=2,$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&1\\4&3\end{vmatrix}=2,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}2&3\\4&3\end{vmatrix}=6,\quad A_{31}=\begin{vmatrix}2&3\\2&1\end{vmatrix}=-4,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}2&1\\3&3\end{vmatrix}=-3,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1&3\\3&3\end{vmatrix}=-6,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1&3\\2&1\end{vmatrix}=5,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}2&2\\3&4\end{vmatrix}=2,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=2,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1&2\\2&2\end{vmatrix}=-2,$$

得 $A^*=\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-3/2&-3&5/2\\1&1&-1\end{pmatrix}.$$

例4 求$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}(ad-bc\neq 0)$的逆矩阵.

解 $\because |A|=ad-bc\neq 0,\quad A^{*}=\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}.$

$$\therefore A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}.$$

二阶矩阵的逆可以直接“看出来”

例5　若A可逆,证明A^*亦可逆,且$\left(A^*\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^*=\frac{1}{|A|}A$.

证明：由　$\left(\frac{1}{|A|}A\right)A^*=E$　知$(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$

$$(A^{-1})^*=\left|A^{-1}\right|(A^{-1})^{-1}=\frac{1}{|A|}A$$

$$\therefore\quad (A^*)^{-1}=(A^{-1})^*=\frac{1}{|A|}A$$

逆矩阵的运算性质小结

(1) 若A可逆,则A^{-1}亦可逆,且$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.

(2) 若A可逆,数$\lambda\neq 0$,则λA可逆,且$(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

(3) 若A可逆,则A^{T}亦可逆 ,且$\left(A^{T}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{T}$.

(4) 若A可逆,则A^{*}亦可逆 ,且$\left(A^{*}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{*}=\frac{A}{|A|}$.

(5) 若A,B为同阶方阵且均可逆 ,则AB亦可逆,且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

例6 设A为三阶方阵，$|A| = 2$，求$\left|(3A)^{-1} - \frac{1}{2}A^*\right|$

解： $\left|(3A)^{-1} - \frac{1}{2}A^*\right| = \left|\frac{1}{3}A^{-1} - A^{-1}\right| = \left|-\frac{2}{3}A^{-1}\right| = (-\frac{2}{3})^3\frac{1}{|A|} = -\frac{4}{27}$

例7设A,B满足方程$A^*BA=2BA-8E$, $A=\begin{pmatrix}1&&\\&-2&\\&&1\end{pmatrix}$, 求$B$

解：因$|A|\neq 0$, 所以A可逆.

等号两边同时左乘A，右乘A^{-1}得

$$AA^*B=2AB-8E \qquad \Rightarrow \quad (AA^*-2A)B=-8E$$

$$\Rightarrow \quad (-2E-2A)B=-8E$$

$$\Rightarrow B=4(A+E)^{-1}=\begin{pmatrix}2&&\\&-4&\\&&2\end{pmatrix}$$

三、矩阵的秩

任何矩阵 $A_{m\times n}$，总可经过有限次初等行 变换把它变为行阶 梯形，行阶梯形矩阵中非零行的行数是唯一确定的． 矩阵的秩

定义2.3

在 $m\times n$ 矩阵 A 中任取 k 行 k 列 $(k\le\min\{m,n\})$，位于这些行、列交叉处的 k^2 个元素，不改变它们在 A 中所处的位置次序而得的k阶行列式，称为矩阵 A 的 k 阶子式.

定义2.4 设在矩阵 A 中有一个不等于 $\mathbf{0}$ 的 r 阶子式 D，且所有 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）全等于 0，那末 D 称为矩阵A的最高阶非零子式，数r称为矩阵 A 的秩，记作 $\mathrm{R}(A)$.并规定零矩阵的秩等于零.

$m\times n$ 矩阵 A 的秩 $R(A)$ 是 A 中不等于零的子式的最高阶数.

对于 A^T， 显有 $R(A^T)=R(A)$.

显然$R(A)\le min\{\mathrm{m,n}\}$,

若$R(A)$=$min\{\mathrm{m,n}\}$，则称A为满秩矩阵

例8 已知 $A=\begin{pmatrix}1&3&-2&2\\0&2&-1&3\\-2&0&1&5\end{pmatrix}$，求该矩阵的秩.

解 $\because \begin{vmatrix}1&3\\0&2\end{vmatrix}=2\neq 0,$ 计算A的3阶子式，

$$\begin{vmatrix}1&3&-2\\0&2&-1\\-2&0&1\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}1&3&2\\0&2&3\\-2&0&5\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}3&-2&2\\2&-1&3\\0&1&5\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}1&-2&2\\0&-1&3\\-2&1&5\end{vmatrix}=0,$$

$=0.$ $\quad\therefore R(A)=2.$

定理 2.8 若 A经过初等变换得到B，则 $R(A)=R(B)$.

如果 对矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 做初等变换，

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{\Delta}{=} B,$$

显然，非零行的行数为2，R(B)=2

此方法简单！

例9 设$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

求矩阵 A 及矩阵 $B=(A|b)$的秩．

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 & 4 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (\tilde{\mathbf{A}} \mid \tilde{\mathbf{b}})$$

$$\therefore R(A) = 2, \quad R(B) = 3.$$

下面讨论矩阵秩的一些性质和公式

性质1

设A为$m\times n$矩阵, 则$R(A)=r \Leftrightarrow A$的标准型为$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$

其中E_r为r阶单位阵.

例5 写出下列矩阵的标准型,并指出哪个是满秩矩阵.

(1)$A_{3\times4}, R(A)=2$, (2)$A_{3\times4}, R(A)=3$,

(3)$A_{3\times3}, R(A)=3$, (4)$A_{1\times4}, R(A)=1$,

性质2 设$A_{m\times n}, B_{n\times m}, C_{n\times m}$

(1) 若R(A)=n(此时称A为列满秩),则R(AB)=R(B)

(2) 若R(A)=m(此时称A为行满秩),则R(CA)=R(C)

特别地 若A可逆,则R(AB)=R(BA)=R(B)

关于矩阵秩的几个常见公式:

(1) 设$A_{m\times n}, B_{m\times n}$,

$$\max\{R(A),R(B)\}\le R(A,B)\le R(A)+R(B);$$

$$R(A+B)\le R(A)+R(B)$$

(2) 设$A_{m\times n}, B_{n\times s}$,

$$R(A)+R(B)-n\le R(AB)\le \min\{R(A),R(B)\}$$

特别地当AB=O时 $R(A)+R(B)\le n$

(3) 设A为n阶方阵，则

$$R(A^*)=\begin{cases} n, & R(A)=n \\ 1, & R(A)=n-1 \\ 0, & R(A)<n-1 \end{cases}$$

例10 设$A=\begin{pmatrix}2&3&4\\6&x&2\\4&6&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&4\end{pmatrix}$

,若$R(A+AB)$=2,求x,并写出A的标准型.

解：$B+E=\begin{pmatrix}3&3&4\\6&10&12\\0&0&1\end{pmatrix}$ 得B+E可逆

$$2=R(A+AB)=R(A(B+E))=R(A)$$

$A\to\begin{pmatrix}2&3&4\\0&x-9&-10\\0&0&-5\end{pmatrix}$ A的标准形为$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$x=9$

例11 A为n阶方阵，$A^2=A$, 证明 $R(A)+R(A-E)=n$