

# 本科生《统计信号处理》大作业

2023.04.03

## I. 引言

信号的来波方向是信号空域信息中非常重要的参数，可以反映信号的空间位置，因此，估计 DOA(Direction Of Arrival) 信息一直是信号处理中的一个研究重点，被广泛应用于雷达、声学信号处理、无线通信、声源定位等领域。

在具体应用方面，在雷达领域，基于阵列信号处理的 DOA 估计算法可以用于识别目标的方向和位置、确定目标的方向和距离，最终帮助实现雷达跟踪和目标定位。在声学领域，例如，在麦克风阵列中，可以利用 DOA 估计算法来定位声源，实现声源跟踪和噪声抑制等功能。此外，DOA 估计算法还被应用于语音识别、音频信号增强等领域。而在无线通信领域中，DOA 估计算法被用于实现基于波束成形的天线阵列技术。该技术可以提高通信系统的信噪比和频谱利用率。在无人机领域，DOA 估计算法被用于实现目标跟踪和定位功能。例如，在无人机雷达应用中，通过利用多个天线组成的阵列接收回波信号，可以通过 DOA 估计算法来确定目标的方向和距离，从而实现无人机的自主导航和目标跟踪。

本次大作业的目的在于让同学们对一些典型的 DOA 估计算法进行了解。

## II. 背景

### 1. 均匀线性阵列模型 DOA 估计基本原理

假设一个单输入多输出 (Single-Input Multi-Output, SIMO) 传播模型，共有  $M$  个均匀线性接收天线阵列，各个接收天线阵元之间相距  $d$ ，设一个发射信号符合远场信号模型，如图 1 所示。

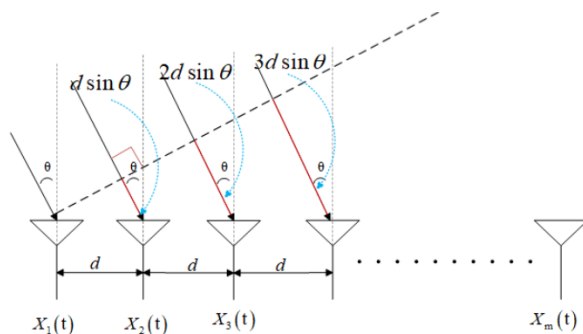


图 1: 均匀线性阵列模型

当只有一个发射天线时，也就是单输入多输出时，信道模型如图 1，信号到达第二个接收天线阵元比到达第一个天线阵元要多走  $d \sin \theta$  的路程。同理，后一个阵元比前一个多走  $d \sin \theta$  的路程，据此可以得到信号到达后一个接收天线的阵元和到达前一个接收天线的阵元的时间差为：

$$\delta t = \frac{d \sin \theta}{c} \quad (1)$$

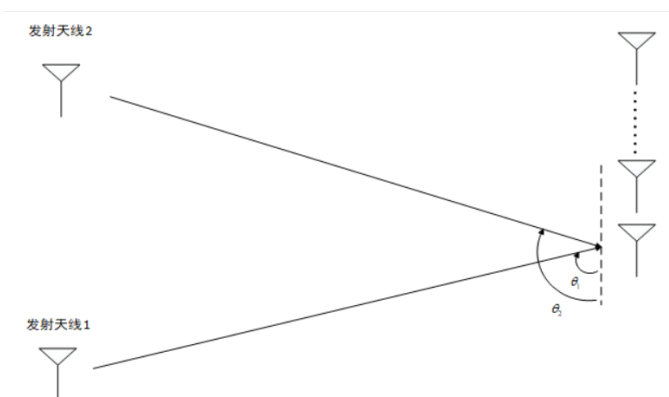
在这里,  $c$  为光速。若信号载波频率为  $f_0$ , 可得两个阵元之间相位差为:

设远场发射信号复振幅为  $s(t)$ ，则整个接收阵列的信号可以表示为：

若定义:

则可以得到接收信号的表达式为:

其中, 第  $i$  个阵元在  $t$  时刻的噪声为  $n_i(t)$ 。根据以上模型, 只要能估计出  $\mathbf{x}(t)$  就能求出波达方向。



设有  $D$  个发送信号, 由公式 4, 可得到多输入多输出的接收阵列信号表示为:

其中,

$$\mathbf{a}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & e^{j2\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda}} & \dots & e^{j \frac{(M-1)d \sin \theta}{\lambda}} \end{bmatrix}^H \quad (8)$$

## 2. 经典 DOA 算法

Capon[1]、MUSIC(Multiple Signal Classification)[2]、ESPRIT(Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques)[3] 是三个传统的 DOA 估计方法。

考虑如公式 6 所介绍的信号模型，将一个权重向量  $\mathbf{w}$  放在接收信号向量  $\mathbf{x}(t)$  上，可以得到输出为

$$y(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t) \quad (9)$$

因此，阵列输出功率可以表示如下

$$R_y = E|y(t)|^2 = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w} \quad (10)$$

其中， $\mathbf{R}_x = E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)\}$ ，是观测数据的协方差矩阵。

Capon 算法可以描述为：

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \quad & \mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w} \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta) = 1 \end{aligned} \quad (11)$$

得到最优权系数  $\mathbf{w}$  后，可以计算得到阵列输出功率，经过角度搜索，得到 Capon 算法测向结果。

关于这三类算法的详细推导可见参考文献 [1], [2], [3]，此处不进行详细介绍。

## 3. 信噪比

信噪比 (Signal-to-Noise Ratio, SNR) 是用来衡量信号和噪声强度之间关系的一个指标，通常以分贝 (dB) 为单位表示。它表示了信号相对于噪声的强度或功率，是信号质量的重要指标。

信噪比可以用以下公式表示：

$$SNR = 10 \lg(S/N) \quad (12)$$

其中， $S$  代表信号强度， $N$  代表噪声强度。如果信噪比高，说明信号较强且噪声较弱，信号质量较好；反之，如果信噪比低，说明信号较弱且噪声较强，信号质量较差。

在通信领域，信噪比被广泛应用于评估通信质量，如无线电、卫星通信、数字通信等。在音频和视频领域，信噪比也是评估音频和视频质量的重要指标之一。

## III. 任务

1. 请调研并介绍 MUSIC 及 ESPRIT 算法流程，并简要说明其与 Capon 算法的主要不同。

2. 利用背景中介绍的 MIMO 空间模型原理图，生成发射信号与接收信号。具体要求如下：

a. 发射信号信源数目为 5，信号载波频率均为 500MHz。待估计的信号波束来向分别为 -10°、20°、50°、70°、80°，分别对应的信号复振幅中频率为  $\mathbf{f} = [1, 3, 5, 6, 7]$  (单位: MHz)，对应原始信号复振幅为  $s_i(t) = \exp(j2\pi \mathbf{f}_i t)$ 。

b. 接收天线阵元为均匀线阵，阵元间距  $d$  为 0.3 米，个数为 10。采样频率为 1GHz，采样数为 1024。

请你利用上述信号模型，生成接收信号，并按照信噪比为 12dB 的要求，将高斯白噪声加入到信号中。

3. 对 2 中生成的信号，请分别利用 Capon 算法、MUSIC 算法和 ESPRIT 算法对信号来向进行估计，并将三个方法的结果展示在同一个图里。

4. 在 2 中, 阵元间距  $d$  与波长  $\lambda$  的比例实际上为  $\frac{d}{\lambda} = 0.5$ , 请讨论  $\frac{d}{\lambda}$  分别为 0.25、0.3、0.8、1、1.2 时, MUSIC 算法性能是否发生改变。

5. 对于 2 中的信号, 如果三种算法都以为信源数目为 3, 请对信号来向重新进行估计, 可以得到怎样的结果?

#### IV. 作业要求

1. 可以相互讨论, 但需独立完成。
2. 提交要求: 报告, 程序代码 (必要的注释, 单独打包)。
3. 网络学堂提交。

#### 参考文献

- [1] J. Capon, "High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis," *Proceedings of the IEEE*, vol. 57, no. 8, pp. 1408–1418, 1969.
- [2] R. Schmidt, "Multiple emitter location and signal parameter estimation," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 34, no. 3, pp. 276–280, 1986.
- [3] R. Roy and T. Kailath, "Esprit-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 37, no. 7, pp. 984–995, 1989.