有理函数矩阵的右零空间和解耦*

陈树中 陈 迁
(华东师范大学数学系·上海,200062)

摘要:本文引入了有理函数矩阵右零空间标准基的概念.对于m个输入,p个输出的右可逆线性系统,我们应用这个概念,得到了动态状态反馈解耦($m\geqslant p$)和 Morgan 问题($m=p$)有解的新的充要条件.

关键词:右零空间;反馈;解耦

1 引 言

考虑线性时不变系统

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu,\\ y=Cx,\end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $x\in\mathbb{R}^n, y\in\mathbb{R}^p, u\in\mathbb{R}^m$, $\mathrm{rank}C=p$, $\mathrm{rank}B=m$, $m\geqslant p$, 传递函数阵 $G(s)=C(sI-A)^{-1}B$. 动态状态反馈解耦是寻找反馈

$$u=F(s)x+Hv, \tag{1.2}$$

其中 $F(s)$ 是 $m\times n$ 真有理函数阵, $v\in\mathbb{R}^p$, 使得闭环传递函数阵 $G_{FH}(s)$ 变成非奇异对角阵,即

$$\begin{aligned}G_{FH}(s)&=C(sI-A-BF(S))^{-1}BH\\&=\mathrm{diag}(g_{11}(s),\cdots,g_{pp}(s)),\quad g_{ii}(s)\neq 0,\quad i=1,\cdots,p,\end{aligned} \tag{1.3}$$

$G_{FH}(s)$ 亦可表示成

$$G_{FH}(s)=G(s)U(s)H,\quad U(s)=(I-F(s)(sI-A)^{-1}B)^{-1}, \tag{1.4}$$

由(1.3)和(1.4)即知,问题有解的必要条件是 $\mathrm{rank}G(s)=p$, 即系统(1.1)右可逆,矩阵 H 必须列满秩.

下面是本文需要的基本概念和结论:

设 $T(s)$ 是有理函数阵, $\mathrm{rank}T(s)$ 指有理函数域上的秩. 若 $T(s)$ 是方的真有理函数阵, $\lim\limits_{s\to\infty}T(s)$ 非奇异,则 $T(s)$ 称为有理么模阵,它的逆亦为有理么模阵. 若 $T(s)$ 是多项式阵,它的行列式是非零常数,则 $T(s)$ 称为么模阵.

设 $\beta(s)$ 是一个有理函数向量(包括多项式向量作为特例),定义 $\delta(\beta(s))$ 为满足下式的唯一值: $\lim\limits_{s\to\infty}s^{\delta(\beta(s))}\beta(s)$ 存在且非零,记极限为 $\Gamma[\beta(s)]$, (若 $\beta(s)=0$, 则 $\delta(\beta(s))=\infty$). 根据定义,

$$\beta(s)=s^{-\delta(\beta(s))}(\Gamma(\beta(s))+o(s)),\quad \lim_{s\to\infty}o(s)=0. \tag{1.5}$$

若 $\alpha_1(s), i=1,\cdots,l$ 是同维的有理函数向量组,定义

$$\Gamma[\alpha_1(s)\ \cdots\ \alpha_l(s)]=[\Gamma[\alpha_1(s)]\ \cdots\ \Gamma[\alpha_l(s)]]. \tag{1.6}$$

例 1 $\alpha_1(s)=(s^2+1\quad s\quad 0)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_2(s)=(1/s\quad 0\quad 1/(s^2+1))^{\mathrm{T}}$, 则

$$\delta(\alpha_1(s))=-2,\quad \delta(\alpha_2(s))=1,\quad \Gamma[\alpha_1(s),\alpha_2(s)]=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

* 国家自然科学基金资助项目(69374006).
本文于 1996 年 11 月 29 日收到. 1997 年 9 月 5 日收到修改稿.

命题 1.1[1] 设 $T(s)$ 是 $p\times m$ 有理函数阵，$\mathrm{rank}T(s)=r$，则存在有理幺模阵 $U(s),V(s)$ 使得

$$T(s)=U(s)\Lambda(s)V(s),\quad \Lambda(s)=\begin{bmatrix}\Delta(s) & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\tag{1.7}$$
$$\Delta(s)=\mathrm{diag}(s^{q_1},\cdots,s^{q_k},1/s^{\bar{q}_{k+1}},\cdots,1/s^{\bar{q}_r}),$$

其中 $q_i\geqslant 0,\bar{q}_i>0$.

命题 1.2[2] 设 $C(s)$ 是 $m\times m$ 真有理函数阵，则存在 $m\times n$ 真有理函数阵 $F(s)$ 和非奇异的方常数阵 H，使得

$$G(s)C(s)=C(sI-A-BF(s))^{-1}BH$$

的充要条件是 $C(s)$ 是有理幺模阵.

2 有理函数阵右零空间的标准基

设 $T(s)$ 是 $p\times m$ 有理函数阵，Π 是一切满足 $T(s)v(s)=0$ 的向量 $v(s)$ 张成的线性空间，即右零空间. Π 的维数是 m-$\mathrm{rank}T(s)$.

定义 2.1 设 $r_i(s),i=1,\cdots,l$ 是 Π 的一组基，若满足：

1° $\delta(r_i(s))=0,i=1,\cdots,l$;

2° $\Gamma[r_1(s)\ \cdots\ r_l(s)]$ 列满秩，则称 $r_i(s),i=1,\cdots,l$ 是 Π 的一组标准基.

利用命题 1.1，可得到求标准基的如下算法：

1) 将 $T(s)$ 作形如(1.7)的分解；

2) 求 $V(s)$ 逆阵，$V^{-1}(s)=[\alpha_1(s)\ \cdots\ \alpha_m(s)]$，有理幺模阵的逆仍然是有理幺模阵，所以 $\delta(\alpha_i(s))=0,i=1,\cdots,m,\Gamma[\alpha_1(s)\ \cdots\ \alpha_m(s)]$ 是非奇异方阵，由(1.7)，

$$T(s)\alpha_i(s)=0,\quad i=r+1,\cdots,m.$$

即 $\alpha_i(s),i=r+1,\cdots,m$ 是 $T(s)$ 右零空间的标准基.

如果已知 Π 的一组基，如何从这组基得到标准基？为此，首先证明一个引理.

引理 2.1 设 $\alpha_i(s),i=1,\cdots,l$ 是一组有理函数向量. $b_i(s),i=1,\cdots,l$ 是一组不全为零的有理函数. $\Gamma[\alpha_1(s),\cdots,\alpha_l(s)]$ 列满秩，$\alpha(s)=\sum\limits_{i=1}^{l}b_i(s)\alpha_i(s)$，则

1) $\delta(\alpha(s))=\min\{\delta(b_i(s))+\delta(\alpha_i(s)),i=1,\cdots,l\}$;

2) $\Gamma[\alpha(s)]=\Gamma[\alpha_1(s)\ \cdots\ \alpha_l(s)]a$，$a$ 是非零向量.

证 不失一般，设 $b_i(s)\neq 0,i=1,\cdots,l$(否则，将 $b_i(s),\alpha_i(s)$ 删除). 由(1.5)

$$\alpha_i(s)=s^{-\delta(\alpha_i(s))}(\Gamma[\alpha_i(s)]+o(s)),\quad b_i(s)=s^{-\delta(b_i(s))}(\Gamma[b_i(s)]+o(s)),$$

因此

$$\alpha(s)=\sum_{i=1}^{l}s^{-\delta(b_i(s))+\delta(\alpha_i(s)))}(\Gamma[b_i(s)]\Gamma[\alpha_i(s)]+o(s)),$$

设 $r=\min\{\delta(b_i(s))+\delta(\alpha_i(s)),i=1,\cdots,l\}$，并且在分量 $i_j,j=1,\cdots,t$ 上达到 r，则

$$\lim_{s\to\infty}s^r\alpha(s)=\sum_{j=1}^{t}\Gamma[b_{i_j}(s)]\Gamma[\alpha_{i_j}(s)],\tag{2.1}$$

由 $\Gamma[\alpha_1(s)\ \cdots\ \alpha_l(s)]$ 列满秩知，(2.1)右边是非零向量，因此 $r=\delta(\alpha(s))$，取 a 的第 i_j 个分量为 $\Gamma[b_{i_j}(s)]$，其余元素为零，即得结论 2).

现设 $\bar{r}_i(s),i=1,\cdots,l$ 是 Π 的一组非标准基，下面是一个逐步标准化的算法.

1) 取 $r_1(s)=\bar{r}_1(s)s^{\delta(\bar{r}_1(s))}$，显然 $\delta(r_1(s))=0,\Gamma[r_1(s)]\neq 0$.

2) 设利用$\bar{r}_i(s)$, $i=1,\cdots,k$, 求得线性独立向量$r_i(s)$, $i=1,\cdots,k$, 满足$\delta(r_i(s))=0$, $i=1,\cdots,k$, $\Gamma[r_1(s)\ \cdots\ r_k(s)]$列满秩.

3) $\bar{r}_{k+1}(s)$与$r_i(s)$, $i=1,\cdots,k$线性独立, 记$\bar{r}(s)=\bar{r}_{k+1}(s)s^{\delta(\bar{r}_{k+1}(s))}$, 若$\Gamma[r_1(s)\ \cdots\ r_k(s)\bar{r}(s)]$列满秩, 则取$\bar{r}_{k+1}(s)=\bar{r}(s)$, 否则分别取$\bar{r}_{k+1}(s)$和$r_i(s)$, $i=1,\cdots,k$各分量分母的最小公倍式, 记为$d_{k+1}(s)$, $d_i(s)$, $i=1,\cdots,k$, 记$\alpha_i(s)=r_i(s)d_i(s)$, $i=1,\cdots,k$, $\alpha_{k+1}(s)=\bar{r}_{k+1}(s)\bar{d}_{k+1}(s)$, 则

$$P(s)=[\alpha_1(s)\ \cdots\ \alpha_{k+1}(s)]$$

是多项式矩阵. $\alpha_i(s)$, $i=1,\cdots,k+1$是线性无关的多项式向量组. 由文献[3]定理2.5.7, 存在么模矩阵$N(s)$, 使得

$$P(s)N(s)=[\bar{\alpha}_1(s)\ \cdots\ \bar{\alpha}_{k+1}(s)],\quad \operatorname{rank}\Gamma[\bar{\alpha}_1(s)\ \cdots\ \bar{\alpha}_{k+1}(s)]=k+1,$$

因此在$\Gamma[\bar{\alpha}_i(s)]$, $i=1,\cdots,k+1$中, 至少有一个, 例如$\Gamma[\bar{\alpha}_1(s)]$与$\Gamma[r_i(s)]$, $i=1,\cdots,k$线性无关. 取$r_{k+1}(s)=\bar{\alpha}_1(s)s^{\delta(\bar{\alpha}_1(s))}$, 则$\delta(r_{k+1}(s))=0$, 并且

$$\operatorname{rank}\Gamma[r_1(s)\ \cdots\ r_{k+1}(s)]=k+1, \tag{2.2}$$

此时, $r_i(s)$, $i=1,\cdots,k+1$必线性无关. 若相反, 则存在不全为零的有理函数$b_i(s)$, $i=1,\cdots,k$, 使得

$$r_{k+1}=\sum_{i=1}^{k}b_i(s)r_i(s),$$

由引理2.1, $\Gamma[r_{k+1}(s)]=\Gamma[r_1(s)\ \cdots\ r_k(s)]\alpha$, 和(2.2)矛盾.

4) 上述过程重复$l-1$步, 即得Π的标准基.

3 问题的解

记$G(s)$的右零空间为K, 标准基为$w_i(s)$, $i=1,\cdots,m-p$. $G(s)$中删去第i行以后的矩阵为$G_i(s)$. 右零空间为K_i. 由逐步标准化算法, 可以找到$v_i(s)\in K_i$, 使得$v_i(s)$, $w_j(s)$, $j=1,\cdots,m-p$构成K_i的标准基.

引理3.1 记

$$r_G=\operatorname{rank}\Gamma[w_1(s)\ \cdots\ w_{m-p}(s)v_1(s)\ \cdots\ v_p(s)], \tag{3.1}$$

则r_G与标准基的选取无关.

证 设$\bar{w}_j(s)$, $j=1,\cdots,m-p$和$\bar{v}_i(s)$, $\bar{w}_j(s)$, $j=1,\cdots,m-p$分别是K和K_i的另外一组标准基, 则任一$\bar{w}_j(s)$可由$w_i(s)$, $i=1,\cdots,m-p$线性表出. 由引理2.1, 存在向量a_j, 使得

$$\Gamma[\bar{w}_j(s)]=\Gamma[w_1(s)\ \cdots\ w_{m-p}(s)]a_j,\quad j=1,\cdots,m-p. \tag{3.2}$$

类似地, 存在向量b_j, 使得

$$\Gamma[\bar{v}_j(s)]=\Gamma[w_1(s)\ \cdots\ w_{m-p}(s),v_j(s)]b_j,\quad j=1,\cdots,p. \tag{3.3}$$

由(3.2), (3.3)即知

$$\operatorname{rank}\Gamma[\bar{w}_1(s)\ \cdots\ \bar{w}_{m-p}(s)\bar{v}_1(s)\ \cdots\ \bar{v}_p(s)]\leqslant\operatorname{rank}\Gamma[w_1(s)\ \cdots\ w_{m-p}(s)v_1(s)\ \cdots\ v_p(s)],$$

同理, 相反不等式也成立. 所以引理成立.

定理3.2 对右可逆系统, 动态状态反馈解耦问题有解的充要条件是

$$r_G\geqslant p. \tag{3.4}$$

证 必要性. 将(1.4)中的$U(s)H$用列向量表出

$$U(s)H=[\beta_1(s)\ \cdots\ \beta_p(s)],$$

因为$G(s)U(s)H$是非奇异对角矩阵, 所以$\beta_i(s)\in K_i$. 因此存在有理函数

$$a_i(s),b_{i_j}(s),j=1,\cdots,m-p,$$

使得

$$\beta_i(s)=a_i(s)v_i(s)+\sum_{j=1}^{m-p}b_{i_j}(s)w_j(s),$$

由引理2.1,存在向量 a_i,使得

$$\Gamma[\beta_i(s)] = \Gamma[w_1(s) \cdots w_{m-p}(s), v_i(s)]a_i, \quad i = 1, \cdots, p, \tag{3.5}$$

因为 $U(s)$ 是有理么模矩阵,H 列满秩,所以 $\Gamma[\beta_1(s) \cdots \beta_p(s)]$ 列满秩,由(3.5)即得(3.4).

充分性:设(3.4)成立.在(3.1)中取 p 个线性无关的列向量,不失一般,设为 $\Gamma[v_i(s)]$, $i = 1, \cdots, r$ 和 $\Gamma[w_i(s)], i = 1, \cdots, p - r, r \leqslant p$.定义 $P(s)$ 如下:

$$P(s) = [v_1(s) \cdots v_r(s) w_1(s) + v_{r+1}(s)s^{-1} \cdots w_{p-r}(s) + v_p(s)s^{-1}], \tag{3.6}$$

$P(s)$ 是 $m \times p$ 有理函数阵,并有

$$\lim_{s\to\infty} P(s) = \Gamma[v_1(s) \cdots v_r(s) w_1(s) \cdots w_{p-r}(s)],$$

此时 $P(s)$ 可以看成有理么模阵的一部份.取 $m \times (m - p)$ 常数阵 Q,得

$$[\Gamma[v_1(s) \cdots v_r(s) w_1(s) \cdots w_{p-r}(s)], Q],$$

组成非奇异方阵,则 $U(s) = [P(s), Q]$ 是有理么模阵.由命题1.2,存在 $m \times n$ 真有理函数矩阵 $F(s)$,$m \times m$ 非奇异矩阵 M,使得

$$C(sI - A - BF(s))^{-1}BM = G(s)U(s). \tag{3.7}$$

另一方面,记 $G(s)$ 的第 i 行为 $g_i(s)$,则 $g_i(s)v_i(s) \neq 0$,若相反,$v_i(s) \in K$.这和 $v_i(s)$ 与 $w_j(s)$, $j = 1, \cdots, m - p$ 线性无关矛盾.由(3.6)得

$$G(s)P(s) = \mathrm{diag}(g_1(s)v_1(s), \cdots, g_r(s)v_r(s), g_{r+1}(s)v_{r+1}(s)s^{-1}, \cdots, g_p(s)v_p(s)s^{-1}) \tag{3.8}$$

是一个非奇异对角矩阵.取 $H = M\begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix}$,则由(3.7)可得

$$C(sI - A - BF(s))^{-1}BH = G(s)[P(s)Q]\begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix} = G(s)P(s),$$

由(3.8)知 $(F(s), H)$ 即为所求的反馈矩阵.

例2 设

$$G(s) = \begin{bmatrix} s^{-4} & 0 & s^{-2} & (s+1)^{-2}s^{-4} \\ 0 & (s+1)^2 s^{-3} & 0 & s^{-3} \\ s^{-3} & (s+2)s^{-2} & -s^{-1} & s^{-3} \end{bmatrix},$$

$G(s)$ 是右可逆的

$$w_1(s) = [(s+1)^{-2} \quad (s+1)^{-2} \quad 0 \quad -1]^{\mathrm{T}},$$
$$v_1(s) = [1 \quad 0 \quad s^{-2} \quad 0]^{\mathrm{T}},$$
$$v_2(s) = [1 \quad -2(s+2)^{-1}s^{-1} \quad -s^{-2} \quad 0]^{\mathrm{T}},$$
$$v_3(s) = [1 \quad 0 \quad -s^{-2} \quad 0]^{\mathrm{T}},$$

$$\Gamma = [w_1(s)v_1(s)v_2(s)v_3(s)] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$r_G = 2 < 3 = p$,由定理3.2对 $G(s)$ 的最小实现表示的系统(1.1),不可能实现动态状态反馈解耦.

因为静态状态反馈 $u = Kx + Hv$,其中 K 是常数矩阵,是反馈(1.2)的特例.因此 $r_G \geqslant p$ 也是静态状态反馈解耦,即Morgan问题有解的必要条件.因为任意一个有理么模矩阵表示的前馈补偿器不一定可以用常数反馈矩阵 (K, H) 实现(如命题1.2),因此 $r_G \geqslant p$ 不是充分条件.

但当 $m=p$ 时，这个条件也是充分的.

定理 3.3　对右可逆系统，若 $m=p$，则(3.4)也是 Morgan 问题有解的充分条件.

证　当 $m=p$ 时，(3.6) 定义的 $P(s)$ 是 $m\times m$ 方阵. 因此本身就是有理么模阵. 将(3.8)表示成

$$\begin{bmatrix} g_1(s) \\ \vdots \\ g_m(s) \end{bmatrix} P(s) = \mathrm{diag}(d_1(s) \cdots d_m(s)) = \Lambda(s), \quad d_i(s) \neq 0,$$

因为用有理么模矩阵乘一个有理函数矩阵，不改变该有理函数矩阵的无穷零点，极点结构. 因此 $g_i(s)$ 和 $d_i(s)$ 的无穷零点相同. $G(s)$ 的无穷零点结构和 $\Lambda(s)$ 的相同. 由于 $\Lambda(s)$ 是对角矩阵，它的无穷零点结构就是 $d_i(s), i=1,\cdots,m$ 无穷零点的并集，因此 $G(s)$ 的无穷零点结构是它的行 $g_i(s), i=1,\cdots,m$ 的无穷零点的并集. 由文献[4]定理 1，即得结论.

参　考　文　献

1 Vardulakis, A. I. G., Limebeer, D. N. J. and Karcanias, N.. Structure and Smith-MacMillan form of a rational matrix at infinity. Int. J. Control, 1982, 35(4): 701－725

2 Dion, J. M. and Commault, C.. The minimal delay decoupling problem: feedback implementation with stability. Int. J. Control and Optimization, 1983, 26(1): 66－82

3 Wolovich, W. A.. Linear multivariable systems. New York, Berlin: Springer-Verlag, 1974

4 Descusse, J. and Dion, J. M.. On the strueture at infinity of linear square decoupling systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1982, AC-27(8): 971－974

5 Descusse, J., Lafay, J. F. and Malabre, M.. Solution to Morgan's problem. IEEE Trans. Automat. Contr. 1988, AC-33 (8): 723－739

6 陈树中. Morgan 问题：输入数＝输出数＋1 情形. 自动化学报，1993，19(5)：520－526

7 陈树中，曹立. 受限 Morgan 问题. 中国科学 A 辑，1996，26(8)：513－523

8 许可康. 一类非方系统的 Morgan 问题. 中国科学 A 辑，1996，26(4)：307－316

The Right Null Space of Rational Matrix and Decoupling

CHEN Shuzhong　and　CHEN Qian

(Department of Mathematics, East China Normal University · Shanghai, 200062, PRC)

Abstruct: In this paper a new concept called normal base of right null space for rational matrix is introduced. For right invertible linear systems with m inputs and p outputs, we give new sufficient and necessary condition of decoupling problem by dynamic state feedback ($m \geqslant p$) and of Morgan's problem ($m=p$).

Key words: right null space; feedback; decoupling

本文作者简介

陈树中　1943 年生. 1965 年毕业于南京大学数学系. 现任华东师范大学数学系教授. 主要研究领域有解耦，分散控制，奇异系统和控制理论在工业中的应用.

陈　迁　1970 年生. 1992 年毕业于华东师范大学数学系. 1995 年获华东师范大学数学系硕士学位. 现为交通大学博士生.