第 31 卷第 4 期 淮北煤炭师范学院学报(自然科学版) Vol. 31 No. 4
2010 年 12 月 Journal of Huaibei Coal Industry Teachers College (Natural Science) Dec. 2010

矩阵的 RQ 分解

杜翠真,王信松,傅绪加

(淮北师范大学数学科学学院,安徽 淮北 235000)

摘 要: 文章利用 Householder 矩阵变换给出行满秩矩阵的 RQ 分解,作为分解结果的应用,我们给出了一般矩阵的 RQ 分解.

关键词: 矩阵; Householder 矩阵; 酉矩阵; 正交矩阵

中图分类号: O 151.21 **文献标识码**: C **文章编号**: 1672-7177(2010)04-0018-02

1 引言

将矩阵 A 分解为一个上三角矩阵 R 和一个正交(酉)矩阵(行正交规范矩阵) Q 的乘积,称为矩阵 A 的 RQ 分解. 文献[1-3]给出一般矩阵 A 的 QR 分解,我们受文[2]的启发,利用 Householder 矩阵变换,给出一般矩阵的 RQ 分解. 在本文中 C^n 代表 n 维复行向量的集合, A^H 表示矩阵 A 的共扼转置.

定义 1 设单位向量 $\boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{C}^n$,即 $\|\boldsymbol{\omega}\| = 1$,矩阵 $\boldsymbol{H}(\omega) = I_n - 2\boldsymbol{\omega}^H\boldsymbol{\omega}$ 称为 Householder 矩阵.

定义 2 设 Q 为 n 阶酉(正交)矩阵,记 $Q^H = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$,其中 Q_1 为 $m \times n$ 矩阵,有

$$Q_1 Q_1^H = I_m \tag{1}$$

满足(1)式的 $m \times n$ 矩阵 Q_1 称为行正交规范矩阵.

2 主要结论

定理 1 设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in C^n$,且 $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\beta}$,则在 C^n 存在单位向量 $\boldsymbol{\omega}$,使得 $\boldsymbol{\alpha}H(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\beta}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^H = \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^H$, $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^H = \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^H$.

并且若上述条件成立,则使 $\boldsymbol{\alpha}H(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\beta}$ 成立的单位向量 $\boldsymbol{\omega}$ 可取为

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{e^{i\theta}(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}\|}$$

其中 θ 为任一实数.

证明 对 $\boldsymbol{\alpha}^H, \boldsymbol{\beta}^H$ 应用文献[2]中定理 4.1.2 即得.

定理 2 设 A 是 $m \times n$ 实(复)矩阵,且 m 个行向量线性无关,则存在 n 阶正交(酉)矩阵 Q 和 m 阶非奇异实(复)下三角矩阵 R,使得 $AQ = (R, 0)$.

证明 令 $A_0 \equiv A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_i$ 是矩阵 A 的第 i 行, $i = 1, 2, \cdots, m$.

对 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 由引理可知存在 Householder 矩阵 H_1,使得 $\boldsymbol{\alpha}_1 \boldsymbol{H}_1 = k_1 \boldsymbol{e}_1$,这里 $|k_1|^2 = \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 > 0$, $\boldsymbol{e}_1$ 是 I_n 的第一行. 令

收稿日期: 2010-06-21
基金项目: 安徽省高校青年教师资助计划项目(2007jq1154); 安徽省高等学校自然科学研究项目(kj2008B124)
作者简介: 杜翠真(1976-),女,河南周口人,讲师,硕士,主要研究组合矩阵论.

$$A_1 \equiv A_0 H_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 H_1 \\ \alpha_2 H_1 \\ \vdots \\ \alpha_m H_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 e_1 \\ \alpha_2^{(1)} \\ \vdots \\ \alpha_m^{(1)} \end{pmatrix}$$

$\alpha_i^{(1)}$ 是矩阵 A_1 的第 i 行,$i = 2,3,\cdots,m$.

设$\alpha_2^{(1)} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$,令 $\zeta = (b_2, b_3, \cdots, b_n) \in C^{n-1}$,对 ζ 存在 $n-1$ 阶 Householder 矩阵 $H(v) = I_{n-1} - 2v^H v$,使得 $\zeta H(v) = (k_2, 0, \cdots, 0)$,这里$|k_2|^2 = \|\zeta\|^2 > 0$.

令 $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H(v) \end{pmatrix} = I_n - 2\omega^H \omega$,这里 $\omega = (0, v) \in C^n$ 是单位向量. 所以存在 n 阶 Householder 矩阵 H_2,使得

$$k_1 e_1 H_2 = (k_1, 0, \cdots, 0) = k_1 e_1$$

$$\alpha_2^{(2)} \equiv \alpha_2^{(1)} H_2 = (b_1, \zeta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H(v) \end{pmatrix} = (b_1, k_2, 0, \cdots, 0)$$

令

$$A_2 \equiv A_1 H_2 = \begin{pmatrix} k_1 e_1 H_1 \\ \alpha_2^{(1)} H_1 \\ \vdots \\ \alpha_m^{(1)} H_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 e_1 \\ \alpha_2^{(2)} \\ \vdots \\ \alpha_m^{(2)} \end{pmatrix}$$

如此继续,最终可得 A_m,并且 A_m 的第 m 列后面的元素全为零. 即 $A_m \equiv A_0 H_1 H_2 \cdots H_m = (R, 0)$,其中 R 是 m 阶非奇异实(复)下三角矩阵. 令 $Q = H_1 H_2 \cdots H_m$,则 Q 是 n 阶正交(酉)矩阵,并且 $AQ = (R, 0)$.

注 1[2]　对非奇异矩阵 $A \in C^{n \times n}$,存在酉矩阵 Q 和下三角矩阵 R,使得 $A = QR$,且除去相差一个对角元模全等于 1 的对角矩阵因子外,上述分解式是唯一的.

令 $Q^H = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$,其中 Q_1 为 $m \times n$ 矩阵,由 $AQ = (R, 0)$得 $A = RQ_1$. 其中 R 是 m 阶非奇异实(复)下三角矩阵,Q_1 为 $m \times n$ 行正交规范矩阵.

定理 3　设 A 是 $m \times n$ 实(复)矩阵,且 $\mathrm{rank}(A) = r > 0$,则存在 n 阶正交(酉)矩阵 Q 和 $m \times r$ 列满秩实(复)矩阵 R,使得 $AQ = (R, 0)$或 $A = RQ_1$,其中 R 为列满秩实(复)矩阵,Q_1 为 $r \times n$ 行正交规范矩阵.

证明　作 A 的满秩分解 $A = BC$,其中 B, C 分别为 $m \times r$, $r \times n$ 矩阵,$\mathrm{rank}(B) = \mathrm{rank}(C) = r$. 由定理 1 可知存在 n 阶正交(酉)矩阵 Q 和 r 阶非奇异实(复)下三角矩阵 R_1,使得 $CQ = (R_1, 0)$. 令则存在 n 阶正交(酉)矩阵 Q 和 m 阶非奇异实(复)下三角矩阵 R,使得 $R = BR_1$,则 R 是 $m \times r$ 列满秩实(复)矩阵,且 $AQ = BCQ = B(R_1, 0) = (BR_1, 0) = (R, 0)$.

注 2　定理 3 同时也给出了非奇异矩阵 RQ 分解的另一种证明方法.

参考文献:

[1] HORN R A, JOHNSON C R. Matrix analysis[M]. England: Cambridge University Press, 1985.
[2] 戴华. 矩阵论[M]. 北京: 科学出版社, 2001.
[3] 北京大学数学系几何与代数教研室. 高等代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.

RQ Decomposition of the Matrix

DU Cui-zhen, WANG Xin-song, FU Xu-jia
(*School of Mathematical Sciences, Huaibei Normal University, 235000, Huaibei, Anhui, China*)

Abstract: *RQ* decompositions of the matrix with row full rank are given by using the Householder matrix transformations, and *RQ* decompositions of ordinary matrix are also obtainded as an applications of the above *RQ* decompositions.

Key words: matrix; Householder matrix; unitary matrix; orthogonal matrix