基于零空间投影和 RQ 分解的线性自标定

娄 焱

(上海海事大学 信息工程学院，上海 200135)

摘要：研究当模型矩阵已知时的摄像机自标定和目标三维重建。通过建立多视图目标深度矢量集合所在的零空间和目标模型矩阵的零空间之间的关系，应用零空间投影和 RQ 分解，开发从目标单视图或多视图同时完成摄像机自标定和目标三维重建的线性算法。实验演示了噪声强度、点数和帧数对算法性能的影响。理论分析和实验数据表明，该算法具有快速高效、简单实用、抗噪能力较强的优点。

关键词：机器人视觉；摄像机自标定；三维重建；零空间投影；RQ 分解

中图分类号：TP242.6+2 **文献标识码**：A **文章编号**：1009- 3044(2008)17- 21529- 04

Linear Algorithm of Camera Self- Calibration Based on Null Space Projection and RQ Decomposition

LOU Yan

(Collage of Information Engineering, Shanghai Maritime University, Shanghai 200135, China)

Abstract: Camera self- calibration and 3D reconstruction, when model matrix is known, is studied. By building the relationship between the null space fell by the depth vector of the target imaged in the multi- view and the null space of the model shape matrix of the target, and by applying null space projection and RQ decomposition, a linear algorithm to simultaneously self- calibrate the camera and reconstruct the 3D pose or poses of the imaged target from single- view or multi- view. The affections of noise strength, point- number and frame- number on algorithm performance are experimentally demonstrated. The theoretical analysis and a great deal of the experiments have demonstrated that the suggested algorithm is fast, efficient, effect and rather robust to noise.

Key words: Robot vision; Camera self- calibration; 3D reconstruction; Null- space projection; Rq decomposition

三维形状重建是计算机视觉中的最重要任务之一[1-2]。从已标定的单视图或多视图重建目标三维形状已相对成熟[1-5]，但是，从未标定的单视图或多视图重建三维形状仍是一个值得研究的课题。此时，必须在线完成摄像机自标定。摄像机自标定首先由 Hartley[6] 和 Faurgeras[7] 在 1992 年提出。从此它成为计算机视觉界的一个热门课题。线性自标定[8-12]因简单有效而成为流行技术。但它对视图个数和历经的三维运动往往有较多的限制，影响了其应用范围。另外，当模型形状先验已知时，如何有效地充分利用该先验信息提高自标定和三维重建的速度和精度，仍是一个有待回答的问题。本文基于零空间投影和 RQ 分解，开发从目标单视图或多视图同时完成摄像机自标定和目标三维重建的线性算法，该算法原则上对历经的三维运动没有限制，算法也较简捷。实验演示了噪声强度、点数和帧数对算法性能的影响。理论分析和实验数据表明，该算法具有快速高效、简单实用、抗噪能力较强的优点。

1 理论分析

1.1 成像模型

假设摄像机成像服从针孔成像的透视投影模型，则第 i 帧（i=1,2,...,q, q 为帧数）的第 j 个（j=1,2,...,N, N 为点数）三维点 $X_{i,j}$ 在摄像机坐标系中的坐标 $P_{i,j}$ 及相应的数字坐标 $P_{i,j}^{(d)}$ 与其二维像点的模拟齐次坐标 $m_{i,j}=[x_{i,j}\ y_{i,j}\ 1]^T$（上标 T 标记转置运算）及相应的数字齐次坐标 $m_{i,j}^{(d)}=[x_{i,j}^{(d)}\ y_{i,j}^{(d)}\ 1]^T$ 服从透视投影公式

$$\boldsymbol{P}_{i,j}=Z_{i,j}\boldsymbol{m}_{i,j}=Z_{i,j}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{m}_{i,j}^{(d)}=\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{P}_{i,j}^{(d)} \tag{1}$$

其中，深度 $Z_{i,j}$ 是 $P_{i,j}$ 的第 3 分量，摄像机内参数矩阵

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} f_x & s & x_c \\ & f_y & y_c \\ & & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

这儿，(x_c,y_c) 是图像主点，(f_x,f_y) 是图像水平轴和垂直轴的尺度因子，s 是畸变因子。实际上，该内参数矩阵完成以象素计的数字坐标系与以摄像机焦长 f 计的图像坐标系之间的转换，即

$$m_{i,j}^{(d)}=Km_{i,j} \tag{3}$$

1.2 三维几何变换和单应性变换

假设从目标从模型到第 i 帧图像历经了三维运动 (R_i,T_i)，其中，R_i 为三维旋转矩阵，T_i 为三维平移矢量，则三维点 $X_{i,j}$ 的模型位置 $P_j^{(0)}$ 与其第 i 帧位置 $P_{i,j}$ 满足三维几何变换

$$P_{i,j}=R_iP_j^{(0)}+T_i \tag{4}$$

把式（4）左乘矩阵 K 后，考虑到式（1），有从模型到第 i 帧的单应性变换

收稿日期：2008- 03- 16
基金项目：国家‘863’高技术研究与发展计划项目（2006AA09Z210）和上海市教委科研项目（06FZ038）
作者简介：娄焱（1984- ），女，2002 年就读于天津大学通信工程专业，2006 年就读于上海海事大学通信与信息系统专业，硕士研究生。

$$m_{ij}^{(d)}Z_{i,j}=H_iP_j^{(0)}+e_i \tag{5}$$

其中，定义了单应性矩阵 $H_i=KR_i$ 和极点 $e_i=KT_i$。式(5)可紧凑地写成矩阵方程

$$M_i^{(d)}Z_i^{(D)}=H_iP^{(0)}+e_iI_N^T \tag{6}$$

其中，模型形状矩阵 $P^{(0)}=[p_1^{(0)}...P_N^{(0)}]$，第 i 帧数据矩阵 $M_i^{(d)}=\left[m_{i,1}^{(d)} \ \cdots \ m_{i,N}^{(d)}\right]$ 和 I_N 是个由 N 个 1 组成的矢量。在本文，用上标(D)标记把矢量转换成相应的对角阵的对角化运算，例如，与第 i 帧深度矢量 $Z_i=\left[Z_{i,1} \ \cdots \ Z_{i,N}\right]^T$ 对应的对角阵是 $Z_i^{(D)}=diag\{Z_{i,1} \ \cdots \ Z_{i,N}\}$。

1.3 多帧深度矢量估计

式(6)在右乘正交投影算子 $P_{I_N}^{\perp}=\left(I-\frac{1}{N}I_NI_N^T\right)$ 后中心化成

$$M_i^{(d)}Z_i^{(D)}P_{I_N}^{\perp}=H_i\underline{P^{(0)}} \tag{7}$$

其中，中心化模型形状矩阵 $\underline{P^{(0)}}=P^{(0)}P_{I_N}^{\perp}$。在本文，用下横杠标记中心化运算。

对中心化模型数据阵 $\underline{P^{(0)}}$ 进行 RQ 分解后，有

$$\underline{P^{(0)}}=R_{\underline{P^{(0)}}}Q_{\underline{P^{(0)}},1}{}^T \tag{8}$$

其中，$R_{\underline{P^{(0)}}}$ 为可逆的 3×3 上三角阵，$Q_{\underline{P^{(0)}}}=\left[Q_{\underline{P^{(0)}},1} \ \ Q_{\underline{P^{(0)}},2}\right]$ 是正交阵。这使得 $\underline{P^{(0)}}Q_{\underline{P^{(0)}},2}=0$。这表明，N×3 阵 $Q_{\underline{P^{(0)}},1}$ 的正交补矩阵 $Q_{\underline{P^{(0)}},2}$ 是中心化模型数据阵的零空间的正交基，因此把式(7)右乘 $Q_{\underline{P^{(0)}},2}$ 后，有

$$M_i^{(d)}Z_i^{(D)}P_{I_N}^{\perp}Q_{\underline{P^{(0)}},2}=0 \tag{9}$$

若定义 $P_{I_N}^{\perp}Q_{\underline{P^{(0)}},2}=\underline{Q_{\underline{P^{(0)}},2}}\overset{\text{按列推成}}{=}\left[q_1 \ \cdots \ q_{N-3}\right]$ 则利用事实 $Z_i^{(D)}q_j=q_j^{(D)}Z_i$ 后，有

$$A_iZ_i=0 \tag{10}$$

其中，$A_i=\left[\left(M_i^{(d)}q_1^{(D)}\right)^T \ \cdots \ \left(M_i^{(d)}q_{N-3}^{(D)}\right)^T\right]^T$ 可从中心化模型数据阵的零空间的正交基 $\underline{Q_{\underline{P^{(0)}},2}}$ 和第 i 帧数据矩阵 $M_i^{(d)}$ 导生。并且由式(10)知，如果 3(N-3)×N 维矩阵 A_i 的最小右奇异矢量为 $e_{i,min}$，则 $Z_i=s_1t_i\hat{Z}_i$ 其中，$\hat{Z}_i=e_{i,min}$，尺度常 $s_i=s_1t_i$ 待定。

1.4 摄像机自标定

把中心化模型数据阵 $\underline{P^{(0)}}$ 的伪逆 $\left(\underline{P^{(0)}}\right)^+=Q_{\underline{P^{(0)}},1}R_{\underline{P^{(0)}}}^{-1}$ 右乘式(6)后，有

$$KR_i=H_i=s_1t_iW_i \tag{11}$$

其中，标记了 $W_i=\underline{\hat{P}_i^{(d)}}\left(\underline{P^{(0)}}\right)^+$ 和第 i 帧中心化相对形状矩 $\underline{\hat{P}_i^{(d)}}=M_i^{(d)}\hat{Z}_i^{(D)}P_{I_N}^{\perp}$。由式(11)可知，相对尺度因子 t_i 由 $t_i=\|W_1\|_F/\|W_i\|_F$ 给出，其中 $\|W_i\|_F$ 是矩阵 W_i 的 F-范数。同时，式(11)使得

$$W=\frac{1}{s_1}K\left[R_1 \ \cdots \ R_q\right] \tag{12}$$

其中，3×3N 维矩阵 $W\overset{def}{=}\left[t_1W_1 \ \cdots \ t_qW_q\right]$。由于 $\left[R_1 \ \cdots \ R_q\right]\left[R_1 \ \cdots \ R_q\right]^T=qI$，所以，如果 W 的 RQ 分解为 $W=R_W\left[Q_{W1} \ \cdots \ Q_{Wq}\right]$，其中，$R_W$ 是个 3×3 上三角阵，则 $K=R_W/R_W(3,3)$ 其中，$R_W(3,3)$ 是矩阵 R_W 的右下角元素。

1.5 多帧形状重建和三维运动估计

把 3×3 矩阵 Q_{Wi} 规格化后，就给出第 i 帧旋转阵 R_i，考虑到 RQ 分解中的 Q 阵正交归一性和旋转阵的正交归一性，可知尺度因子 $s_1=\sqrt{q}/R_W(3,3)$ 和 $s_i=s_1t_i$。这使得第 i 帧形状矩阵为 $P_i=s_iK^{-1}\hat{P}_i^{(d)}$，而第 i 帧三维平移矢量为 $T_i=\overline{P_i}-R_i\overline{P^{(0)}}$，其中，模型形心 $\overline{P^{(0)}}=\frac{1}{N}I_N^TP^{(0)}$，第 i 帧形心 $\overline{P_i}=\frac{1}{N}I_N^TP_i$。

1.6 基于模型矩阵零空间投影的线性自标定和三维重建算法

步 0. 计算模型形心 $\overline{P^{(0)}}=\frac{1}{N}I_N^TP^{(0)}$ 和中心化模型形状阵 $\underline{P^{(0)}}=P^{(0)}-\overline{P^{(0)}}I_N^T$ 的 RQ 分解，得 $\underline{P^{(0)}}=R_{\underline{P^{(0)}}}Q_{\underline{P^{(0)}},1}{}^T$，取 $Q_{\underline{P^{(0)}},1}$ 的正交补矩阵 $Q_{\underline{P^{(0)}},2}$，计算 $\underline{Q_{\underline{P^{(0)}},2}}=P_{I_N}^{\perp}Q_{\underline{P^{(0)}},2}$，把它列分块为 $\underline{Q_{\underline{P^{(0)}},2}}\overset{\text{按列推成}}{=}\left[q_1 \ \cdots \ q_{N-3}\right]$。计算 $\underline{P^{(0)}}$ 的伪：$\left(\underline{P^{(0)}}\right)^+=Q_{\underline{P^{(0)}},1}R_{\underline{P^{(0)}}}^{-1}$。

步 1.多帧深度矢量估计和相对形状重建：对每个第 i 帧图像，计算 3(N-3)×N 维矩阵 $A_i=\left[\left(M_i^{(d)}q_1^{(D)}\right)^T \ \cdots \ \left(M_i^{(d)}q_{N-3}^{(D)}\right)^T\right]^T$ 的最小右奇异矢量 $e_{i,min}$，取 $\hat{Z}_i=e_{i,min}$ 计算第 i 帧相对形状阵 $\hat{P}_i^{(d)}=M_i^{(d)}\hat{Z}_i^{(D)}$。

步 2.摄像机自标定：计算中心化第 i 帧相对形状阵 $\underline{\hat{P}_i^{(d)}}=\hat{P}_i^{(d)}P_{I_N}^{\perp}$，计算 $W_i=\underline{\hat{P}_i^{(d)}}\left(\underline{P^{(0)}}\right)^+$，取第 i 帧相对尺度因子 $t_i=\|W_1\|_F/\|W_i\|_F$。计算 3×3q 维矩阵 $W\overset{def}{=}\left[t_1W_1 \ \cdots \ t_qW_q\right]$ 的 RQ 分解 $W=R_W\left[Q_{W1} \ \cdots \ Q_{Wq}\right]$，取 $K=R_W/R_W(3,3)$。

步 3.多帧形状重建和三维运动估计：把 3×3 矩阵 Q_{Wi} 规格化后，就给出第 i 帧旋转阵 R_i，取第 1 帧尺度因子 $s_1=\sqrt{q}/R_W(3,3)$，计算第 i 帧尺度因子 $s_i=s_1t_i$ 和第 i 帧形状阵 $P_i=s_iK^{-1}\hat{P}_i^{(d)}$，计算第 i 帧形心 $\overline{P_i}=\frac{1}{N}I_N^TP_i$，取第 i 帧三维平移矢量为 $T_i=\overline{P_i}-R_i\overline{P^{(0)}}$。

1.7 讨论

显然，该算法有解且有唯一解的条件是：3(N-3)×N 维矩阵 A_i 的秩等于 N-1，考虑到中心化算子 $P_{I_N}^{\perp}$ 是个正交投影算子，它具有降秩 1 的功能，因此条件变成 3(N-4)≥N-1 即点数 N≥6。这意味着该线性算法至少要 6 个特征点。节 2 的实验表明，N<6 时无唯一解和 N≥6 时有解且有唯一解。另外，点数的增多确实可改进算法性能。

经过比较，不难发现，新算法有五个鲜明的特点。

(1)现有算法往往有 8 点以上的要求，而新算法的需要点数已达到最小值 6。因为 5 个内参数加上 6 个三维运动参数有 11 个自由度，而每个点仅能提供 2 个自由度。

(2)现有算法往往不能有效地利用先验模型信息，而新算法能有效地充分利用先验已知的模型形状阵信息。这对提高算法性能具有显著作用。

(3)现有算法往往在自标定之后才完成深度矢量估计，新算法却是在在自标定之前完成深度矢量估计。这有利于提高深度复原

的精度,对重视深度复原的应用场合尤其重要。

(4)现有算法往往对历经的三维运动有限制,新算法无任何限制。

(5)现有算法往往只能用于多视图情况,不能用于单视图情况;而新算法既能用于多视图情况,也能用于单视图情况,只需令上述算法中的帧数 $q=1$ 即可并未单视图情况的线性算法。

2 实验

2.1 实验步骤

为了定量分析算法的统计性能,用计算机仿真数据进行了蒙特卡洛实验、每次实验对仿真生成的多视图特征点集组成的数据运行所开发的算法,并计算各种误差性能;然后,用 100 次实验的误差性能的平均值作为相应的误差性能的数学期望值。

算法输入数据的生成过程是:首先,用 N 个均匀分布于立方体{(-2, 2), (-2, 2), (1, 2)}内三维数据集合组成三维点集,该点集经 q 个由三维旋转和三维平移构成的几何变换生成 q 帧三维点集,再经透视投影后得到多视图特征点集的模拟齐次坐标集合,它们用摄像机内参数阵变换后,舍入取整生成相应的多视图特征点集的数字齐次坐标集合。该集合就是算法的输入数据。

设定的摄像机内参数是:$f_u=1000$, $f_v=1000$, $s=0$, $u_0=500$ 和 $v_0=500$, 与第 i 帧的三维旋转阵 R_i 相应 3 个旋转角分别由 $\alpha_i=\frac{\pi}{11}+\frac{\pi}{30}\tau_i$、$\beta_i=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{25}\tau_i$ 和 $\gamma_i=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{18}\tau_i$ 给出,而第 i 帧的三维平移矢量设定成 $t_i=\left[0.0122+0.337\tau_i \quad 0.141+0.312\tau_i \quad 0.99+0.123\tau_i\right]^T$,其中,$\tau_i=0.001\times i^2-0.02\times(i-1)^2-1$。

为考察算法抗噪能力,输入数据必须加入强度可控的噪声,考虑到数字坐标已整数化,不宜加噪,我们用每维均匀分布于$[-A_m, A_m]$且互相独立的二维噪声叠加到多视图特征点集的二维模拟坐标上,其中,强度 A_m 可程控然后用摄像机内参数阵变换后,舍入取整生成相应的多视图特征点集的数字齐次坐标集合,其中,强度 A_m 由运行程序控制,它从 0.001 逐步增加到 0.032。多视图的图像尺寸是 1024×1024。

算法精度用所有估计项目的以百分比计的相对误差衡量。例如,用$\|\Delta K\|/\|K\|$的统计平均值总体度量自标定误差,其中,$\Delta K=K-\hat{K}$, K 是设定的内参数阵,$\hat{K}$ 是内参数阵 K 的估计,矩阵范数采用 Frobenius 范数,矢量范数采用欧几里得范数。其它各项误差类似地定义,但是,三维运动要在取帧平均后再取统计平均,建模要在取点平均后再取统计平均,形状重建要在取点平均和帧平均后再取统计平均。

2.2 单视图实验结果

表 1 示出了单视图情况下、当点数 N=6 时,噪声强度 A_m 对算法性能的影响。可见,即使算法仅使用 6 点,仍能在所有加噪情况中,三维运动重建和三维形状重建的相对误差都小于 5.93%,而在中小强度(不超过 0.0012)噪声情况时,相对误差都不大于 1.50%以下。

表 1 单视图情况噪声强度 A_m 对算法性能的影响(点数)

Table.1 affection of noise strength A_m on algorithm performance for single-view when N=6

A_m	.0000	.0004	.0008	.0012	.0016	.0020	.0040
$\|\Delta K\|/\|K\|$	0.00	0.48	1.01	1.50	1.74	2.82	6.59
$\|\Delta P\|/\|P\|$	0.00	0.52	1.06	1.46	1.91	2.73	5.92
$\|\Delta R\|/\|R\|$	0.00	0.24	0.56	0.83	0.99	1.54	3.34
$\|\Delta T\|/\|T\|$	0.00	0.52	1.05	1.47	1.91	2.74	5.93

表 2 示出了单视图情况下、当噪声强度 $A_m=0.0010$ 时,点数 N 对算法性能的影响。可以看出,6 点时三维重建的相对误差为 1.21%,点数增大到 12 点时,误差就减小到 0.24%,点数增大到 48 点时,误差就减小到 0.06%。起先,点数的略微增加误差就迅速减小,然后缓慢下降,几乎不变。

表 2 单视图情况点数 N 对算法性能的影响(噪声强度 $A_m=0.0010$)

Table.2 affection of N on algorithm performance for single-view when $A_m=0.0010$

特征点数	6	8	12	18	26	36	48
$\|\Delta K\|/\|K\|$	1.15	1.03	0.27	0.14	0.09	0.07	0.06
$\|\Delta P\|/\|P\|$	1.21	0.94	0.24	0.13	0.10	0.09	0.06
$\|\Delta R\|/\|R\|$	0.65	0.48	0.12	0.06	0.04	0.04	0.03
$\|\Delta T\|/\|T\|$	1.22	0.94	0.23	0.13	0.09	0.08	0.07

2.3 多视图实验结果

表 3 示出了多视图情况下,当帧数 q=6 和点数 N=24 时,噪声强度 A_m 对算法性能的影响。可以看出,在所有加噪情况中,摄像机内参数自标定的相对误差都不大于 0.17%,三维重建相对误差都小于 0.17%,而在中小强度(不超过 0.0012)噪声情况时,自标定相对误差不大于 0.06%,三维重建相对误差都不大于 0.29%。

表 3 多视图情况噪声强度 A_m 对算法性能的影响(帧数 q=6,点数 N=24)

Table3. affection of noise strength A_m on algorithm performance for multi-view when q=6,and N=24

A_m	.0000	.0004	.0008	.0012	.0016	.0020	.0040
$\|\Delta K\|/\|K\|$	0.00	0.03	0.04	0.06	0.08	0.14	0.17
$\|\Delta P\|/\|P\|$	0.00	0.17	0.18	0.29	0.35	0.48	0.78
$\|\Delta R\|/\|R\|$	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.02	0.03
$\|\Delta T\|/\|T\|$	0.00	0.09	0.10	0.17	0.08	0.30	0.39

表 4 示出了多视图情况下、当帧数 q=6 和噪声强度 A_m=0.0010 时，点数 N 对算法性能的影响。可以看出，随着点数的增加，各项性能指标均得到较为明显的改善，相对误差保持递减趋势，且可以看出在 6 点到 24 点之间递减速度较大，而在 24 点到 64 点之间递减速度明显放缓。

表 4 多视图情况点数 N 对算法性能的影响(帧数 q=6，噪声强度 A_m=0.0010)

Table.4 affection of N on algorithm performance for multi- view when q=6,and A_m=0.0010

特征点数	6	8	16	24	32	48	64
$\|\Delta K\|/\|K\|$	0.27	0.18	0.07	0.04	0.04	0.03	0.02
$\|\Delta P\|/\|P\|$	1.03	0.76	0.43	0.23	0.22	0.21	0.21
$\|\Delta R\|/\|R\|$	0.12	0.02	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00
$\|\Delta T\|/\|T\|$	0.21	0.18	0.14	0.12	0.11	0.11	0.11

表 5 示出了多视图情况下、当点数 N=24 和噪声强度 A_m=0.0010 时，帧数 q 对算法性能的影响。可以看出，随着帧数的增加，各项性能指标均得到较为明显的改善，相对误差保持递减趋势，且可以看出在 4 帧到 7 帧之间递减速度较大，而在 7 帧到 10 帧之间递减速度明显放缓。

表 5 多视图情况帧数 q 对算法性能的影响(噪声强度 A_m=0.0010，点数 N=24)

Table.5 affection of q on algorithm performance for multi- view when Am=0.0010 ,and N=24

帧数 q	4	5	6	7	8	9	10
$\|\Delta K\|/\|K\|$	0.06	0.05	0.04	0.03	0.03	0.03	0.03
$\|\Delta P\|/\|P\|$	0.75	0.41	0.23	0.22	0.21	0.20	0.20
$\|\Delta R\|/\|R\|$	0.01	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
$\|\Delta T\|/\|T\|$	0.48	0.20	0.12	0.11	0.11	0.10	0.10

3 结束语和展望

通过对中心化模型形状阵的 RQ 分解得到其零空间的标准正交基，然后把中心化后的从模型形状阵到多视图数据阵的单应性变换方程投影到该零空间，建立了一个精确求解多帧深度矢量集合的方法，然后用中心化单应性变换方程求取多帧单应性矩阵的最小二乘最小范数估计，最后用 RQ 分解计算摄像机内参数阵和多帧三维旋转矩阵，并进而完成目标三维重建。这样，通过充分利用包含于先验已知的模型形状阵和后验提供的多帧数据阵中的所有信息，开发了一个能同时完成摄像机自标定和目标三维重建的线性算法。

该算法不同于已有线性算法的五个鲜明特点是：1)所需点数达到了可能的最小值 6；2)能很有效地利用宝贵的先验模型信息；3)在自标定之前完成深度矢量估计；4)对历经的三维运动没有限制；5)既能用于多视图情况也能用于单视图情况。

可以预期，使用零空间投影技术也能推广应用于模型形状阵未知时的多视图自标定和三维重建。该算法正在研究开发中，将另行著文讨论。

参考文献：

[1] 马颂德,张正友.计算机视觉计算理论与算法基础[M].科学出版社,1998.
[2] 章毓晋.图像理解与计算机视觉[M].清华大学出版社,2000.
[3] Oliensis, J., A Multi- frame structure from motion algorithm under perspective projection [C].IEEE Workshop on Perception for Mobile Agents, 1998, pp. 49- 577.
[4] Thomas, J. I. and Oliensis J., Dealing with noise in multiframe structure from motion[J], CVIU 76, 1999, pp. 109- 124.
[5] Chiuso, A., Brockett, R. and Soatto S., Optimal structure from motion: local ambiguities and global estimates[J], IJCV 39(3), 2000, 195- 228.
[6] Hartley, R., Estimation of relative camera positions for uncalibrated camera [C], In: Proc. European Conference on Computer Vision, NLCS 588, Springer- Verlag, 1992, 579~587
[7] Faurgeras, O. D., What can be seen in three dimensions with an uncalibrated stereo rig[C], In: Proc. European Conference on Computer Vision, NLCS 588, Springer- Verlag, 1992, 563~578
[8] 吴朝福,胡占义.摄象机自标定的理论与算法[J].计算机学报,2001, 24(11):1121~1135.
[9] 吴朝福,胡占义.线性确定无穷远平面的单应性矩阵和摄象机自标定[J].自动化学报,2003,28(4):488~496.
[10] Yang, Z. - G., Ren, L., SVD- based camera self- calibration and 3- D reconstruction from single- view [C], ' Proceedings of 2004 International Conference on Machine Learning and Cybernetics, Vol. 7 of 7, 4090- 4095, Aug. 2004.
[11] Yang, Z. - G., Ren, L., A new algorithm for linearly reconstructing the infinite homography matrix and intrincic parameter matrix of a camera[C], 7th International Conference on Signal Processing Proceedings, Vol. II of III, 1247- 1251, Aug. 2004.
[12] Yang Z. - G., Xia Z., Zhang Z., Linear modeling and reconstruction of target 's shape from its un- calibrated multiple- view [C], IEEE ICIT 2005, Hong Kong, 480- 485, Dec. 2005.