

DFS

Định nghĩa *repr* đối với cây và rừng

Để ý rằng, với mỗi nút u , lời gọi $dfs(u)$ sẽ in ra một dãy số nguyên chứa các nút thuộc cây con gốc u . Ta gọi dãy số nguyên này là *repr* của cây con gốc u .

Giả sử nút u có các con là v_1, v_2, \dots, v_k trong đó $v_1 < v_2 < \dots < v_k$, ta có:

$$repr(u) = [u] + repr(v_1) + repr(v_2) + \dots + repr(v_k)$$

trong đó dấu $+$ là toán tử nối dãy. Hệ quả, nếu u là lá, thì $repr(u) = [u]$.

Ngoài ra, ta có định nghĩa của *repr* đối với một rừng:

$$repr(v_1, v_2, \dots, v_k) = repr(v_1) + repr(v_2) + \dots + repr(v_k)$$

trong đó $v_1 < v_2 < \dots < v_k$.

Viết lại đề bài

Cho một dãy hoán vị P , đếm số cây sao cho *repr* của cây đó bằng P ($|P| \leq 100$).

Thuật toán

Kí hiệu, $P_{L..R}$ là đoạn con từ L tới R của P .

Gọi $f(L, R)$ là số cây có *repr* bằng $P_{L..R}$ ($L \leq R$).

Gọi $g(L, R)$ là số rừng có *repr* bằng $P_{L..R}$ ($L \leq R + 1$).

Ta có:

$$f(L, R) = g(L + 1, R)$$

Trường hợp 1: $R - L + 1 = 0$,

$$g(L, R) = 1$$

Trường hợp 2: $R - L + 1 \neq 0$. Giả sử cây đầu tiên trong rừng có *repr* phủ đoạn $P_{L..i}$, số cách sẽ bằng $f(L, i) * g(i + 1, R)$. Chú ý rằng điều kiện ở đây là $P[i + 1] > P[L]$ hoặc $i = R$, bởi vì các cây trong rừng luôn được sắp xếp tăng dần theo chỉ số của gốc. Nếu không thỏa mãn điều kiện trên, ta không thể chọn i này. Tóm lại:

$$g(L, R) = \sum f(L, i) * g(i + 1, R) \text{ với mọi } i \in L..R \text{ mà } P_{i+1} > P_i \text{ hoặc } i = R.$$

Với công thức truy hồi như trên, ta có một thuật toán dạng QHD với độ phức tạp $O(n^3)$. Đáp số của bài toán là $f(1, n)$.
