TETEXERCISE

Bài này gồm 2 subtask 40% điểm và 60% điểm.

Nếu như ta quan sát kĩ, thì sẽ thấy rằng ở subtask thứ 2, $K < N$. Đây là mấu chốt để giải được subtask thứ 2. Nhưng trước tiên ta cần giải subtask 1 trước.

- Subtask 1 : Không khó để nghĩ ra thuật giải $O(NK)$. Ta sẽ dùng phương pháp quy hoạch động, gọi $F(i, j)$ là trạng thái có thể - không thể tồn tại một tập hợp con trong i phần tử ban đầu và tập hợp con đó có tổng lấy phần dư cho k là j.

  $F(i, j) = 1$ nếu như $F(i - 1, j) = 1$ hoặc $F(i - 1, r) = 1$ với $(r + a[i])\%k = j$ với % là phép chia lấy số dư.

  Xuất `NO` nếu $F(N, K) = 0$ và trong trường hợp ngược lại, ta tiến hành truy vết và in ra kết quả.

- Subtask 2: Như đã nói ở trên, $K < N$ chính là mấu chốt để giải subtask số 2. Ta có thể chứng minh được một trong những kết quả thỏa mãn chính là một dãy con liên tục từ một phần tử u nào đó đến một phần tử thứ v. Tức luôn tồn tại một cặp (u, v) sao cho : $(a[u]+a[u+1]+\ldots+a[v])\%k = 0$. Điều này đồng nghĩa với việc kết quả luôn luôn là `YES`.

  Ta sẽ chứng minh điều này như sau: Đặt $sum[i] = (a[1] + a[2] + \ldots. + a[i])\%K$.

  Như vậy, ta sẽ có một tập hợp gồm N giá trị sum: $(sum[1], sum[2], \ldots., sum[N])$

  Vì $K < N$, nên theo nguyên lý Dirichlet, luôn tồn tại ít nhất một cặp (u, v) sao cho: $sum[u] = sum[v]$. Điều này đồng nghĩa với việc $sum[v] - sum[u] = 0$ $(v > u)$

  Tức là : $(a[u + 1] + a[u + 2] + \ldots. + a[v])\%K = 0$ (điều phải chứng minh). Từ ý tưởng như vậy, ta sẽ đặt $sum[i] = (a[1] + a[2] + \ldots + a[i])\%K$. Nhiệm vụ của ta thật đơn giản, tìm 2 chỉ số (u, v) sao cho $sum[u] = sum[v]$. Từ đó in ra dãy con liên tục từ $v + 1$ đến u.