Một số bài toán về Hệ thức đệ quy

1. ***Lãi gộp.* Giả sử có một người gửi 10000\$ vào một tài khoản tiết kiệm tại ngân hàng với lãi suất 11% được tính gộp hàng năm. Sau 30 năm tài khoản đó trở thành bao nhiêu?**

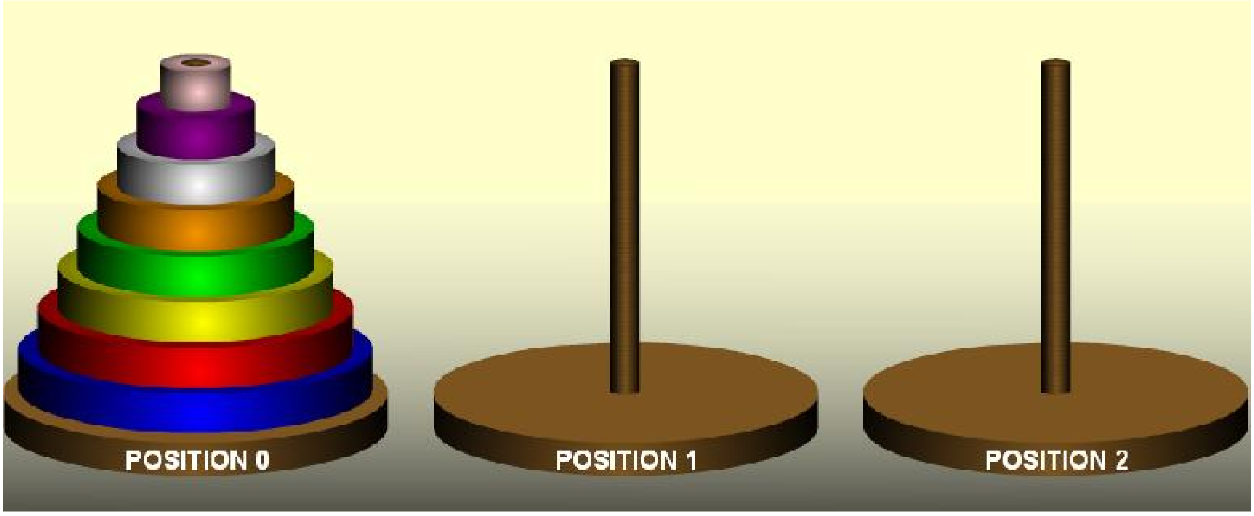
   Gọi P_n là số lượng tiền trong tài khoản sau n năm. Vì số tiền trong tài khoản sau n năm bằng số tiền sau n - 1 năm cộng với số tiền lãi của năm thứ n, nên ta có dãy $\{P_n\}$ thỏa mãn hệ thức đệ quy sau:
   $P_n = P_{n-1} + 0.11P_{n-1} = 1.11\, P_{n-1}$
   Điều kiện đầu là $P_0 = 10000$.

2. **Một đôi thỏ (một đực, một cái) được thả trên một hòn đảo. Giả sử thỏ là loài chưa thể sinh con trước 2 tháng tuổi. Sau 2 tháng tuổi, mỗi đôi thỏ mỗi tháng sinh được một đôi thỏ. Tìm hệ thức đệ quy tính số đôi thỏ sau n tháng, giả sử thỏ không bao giờ chết.**

Month	Reproducing pairs	Young pairs	Total pairs
1	0	1	1
2	0	1	1
3	1	1	2
4	1	2	3
5	2	3	5
6	3	5	8

   Gọi f_n là số đôi thỏ sau n tháng
   Ta có thể mô hình hóa dân số thỏ bằng một hệ thức đệ quy. Cuối tháng thứ nhất, số lượng đôi thỏ trên đảo là $f_1 = 1$. Vì đôi thỏ không sinh sản trong tháng thứ 2 nên ta cũng có $f_2 = 1$. Để tính số lượng đôi thỏ sau n tháng, chúng ta cộng số đôi thỏ trên đảo của tháng trước là f_{n-1} với số đôi thỏ mới sinh là f_{n-2}, vì mỗi đôi thỏ mới sinh được sinh ra một đôi ít nhất có 2 tháng tuổi.
   Do vậy, dãy $\{f_n\}$ thỏa mãn hệ thức đệ quy
   $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$
   với $n \geq 3$ cùng với các điều kiện đầu là $f_1=1$ và $f_2=1$.

3. ***Tháp Hà Nội.* Một trò chơi phổ biến vào cuối thế kỷ 19 là trò Tháp Hà Nội. Tương truyền rằng tại một ngôi chùa ở Hà Nội có một tấm đế bằng đồng gắn ba chiếc cọc bằng kim cương. Thuở khai thiên lập địa, trên một trong ba chiếc cọc đó thượng đế đã xếp 64 chiếc đĩa bằng vàng có kích thước giảm dần từ dưới lên trên. Ngày đêm, các nhà sư đã chuyển đĩa sang cọc khác theo quy tắc: mỗi lần chỉ được chuyển một đĩa, mỗi đĩa có thể chuyển từ cọc này sang cọc khác bất kỳ, nhưng không được chồng đĩa lớn trên đĩa nhỏ. Đích cuối cùng phải xếp được tất cả các đĩa lên chiếc cọc thứ hai theo đúng thứ tự dưới to trên nhỏ, và khi đạt đến đích thì cũng đến ngày tận thế.**
   Giả sử H_n là số lần chuyển cần thiết để giải bài toán Tháp Hà Nội gồm n đĩa. Thành lập hệ thức đệ quy cho dãy $\{H_n\}$



Bắt đầu với n đĩa trên cọc 0. Chúng ta có thể chuyển n - 1 chiếc đĩa nằm trên sang cọc 2 theo đúng quy tắc trò chơi, bằng H_{n-1} phép di chuyển. Chúng ta giữ nguyên chỗ của chiếc đĩa lớn nhất trong khi thực hiện các di chuyển này. Sau đó chúng ta dùng một lần di chuyển để đưa chiếc đĩa lớn nhất sang cọc 1. Chúng ta có thể chuyển n - 1 chiếc đĩa từ cọc 2 sang cọc 1 bằng H_{n-1} phép di chuyển bổ sung thêm, đặt chúng lên trên chiếc đĩa lớn nhất luôn nằm dưới cùng cọc 1. Có thể dễ dàng thấy rằng không thể giải bài toán Tháp Hà Nội với số bước ít hơn. Ta có hệ thức đệ quy:

$H_n = 2H_{n-1} + 1$

Điều kiện đầu là $H_1=1$, vì với một đĩa có thể chuyển từ cọc 0 sang cọc 1 theo đúng quy tắc, bằng 1 lần di chuyển.

4. Tìm hệ thức đệ quy và cho các điều kiện đầu để tính số các xâu bit độ dài n không chứa hai bit 0 liên tiếp. Có bao nhiêu xâu bit như vậy có độ dài 5?

Gọi a_n là số các xâu bit độ dài n không có hai bit 0 liên tiếp. Để nhận được hệ thức đệ quy đối với $\{a_n\}$, theo quy tắc cộng ta thấy số các bit độ dài n không có hai bit 0 liên tiếp sẽ bằng số các xâu bit độ dài n có bit cuối là 0 cộng với các xâu bit độ dài n có bit cuối là 1. Chúng ta sẽ giả sử $n \geq 3$ để cho các xâu này có ít nhất ba bit.

Các xâu bit độ dài n kết thúc bằng 1 không có hai bit 0 liên tiếp chính là các xâu bit độ dài n - 1 không có hai bit 0 liên tiếp và có một bit 1 được thêm vào cuối. Do đó có tất cả a_{n-1} xâu bit như vậy.

Các xâu bit độ dài n kết thúc bằng 0 không có hai bit 0 liên tiếp phải có bit thứ n - 1 là 1, nếu không chúng sẽ kết thúc bằng hai bit 0. Từ đó suy ra các xâu bit độ dài n kết thúc bằng 0 và không có hai bit 0 liên tiếp chính là các xâu bit độ dài n - 2 không có hai bit 0 liên tiếp và có hai bit 10 được thêm vào cuối. Do đó, có tất cả a_{n-2} xâu bit như vậy.

Có thể rút ra kết luận rằng

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

đối với $n \geq 3$

Các điều kiện đầu là $a_1=2$, vì cả hai xâu bit độ dài một là 0 và 1 đều không có hai bit 0 liên tiếp và $a_2=3$, vì các xâu bit có giá trị và độ dài hai là 01, 10 và 11.

Để nhận được a5 chúng ta dùng hệ thức đệ quy ba lần

$a_3 = a_2 + a_1 = 3 + 2 = 5$

$a_4 = a_3 + a_2 = 5 + 3 = 8$

$a_5 = a_4 + a_3 = 8 + 5 = 13$

5. ***Tính số từ mã.* Một hệ máy tính sẽ xem một xâu các chữ số thập phân như là một từ mã hợp lệ nếu nó chứa một số chẵn các số 0. Chẳng hạn xâu 1230407869 là hợp lệ còn xâu 120987045608 là bất hợp lệ. Gọi a_n là số cá từ mã hợp lệ độ dài n. Tìm hệ thức đệ quy đối với a_n.**

Ta thấy $a_1=9$ và có 10 xâu một chữ số, và chỉ có một xâu không hợp lệ là xâu 0. Có thể đưa ra hệ thức đệ quy cho dãy này bằng cách xét xem bằng cách nào có thể nhận được xâu hợp lệ n chữ số từ xâu n - 1 chữ số. Có hai cách tạo xâu hợp lệ n chữ số từ xâu n - 1 chữ số.

Thứ nhất, xâu hợp lệ n chữ số có thể nhận được bằng cách nối thêm một chữ số khác 0 vào xâu hợp lệ n - 1 chữ số. Có thể thực hiện việc nối thêm này theo chín cách. Do đó, có thể tạo ra xâu hợp lệ n chữ số, bằng cách nối thêm theo $9a_{n-1}$ cách.

Thứ hai, xâu hợp lệ n chữ số có thể nhận được bằng cách nối thêm một số 0 vào xâu bất hợp lệ dài n - 1 chữ số. (Cách này tạo ra một xâu có một số chẵn các chữ số 0 vì xâu bất hợp lệ dài n - 1 có một số lẻ các chữ số 0). Số cách thực hiện điều này sẽ bằng số các xâu bất hợp lệ dài n - 1 chữ số. Vì có tất cả 10^{n-1} xâu dài n - 1 chữ số, và a_{n-1} là bất hợp lệ, nên ta có $10^{n-1} – a_{n-1}$ xâu hợp lệ dài n chữ số nhận được bằng cách nối thêm một số 0 vào xâu bất hợp lệ dài n - 1.
Vì tất cả các xâu hợp lệ độ dài n đều được tạo ra theo một trong hai cách này nên có thể suy ra có
$a_n = 9a_{n-1} + (10^{n-1} – a_{n-1}) = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$
xâu hợp lệ dài n.

6. **Tìm hệ thức đệ quy cho C_n là số cách đặt các dấu ngoặc đơn vào tích của n + 1 số $x_0.x_1.x_2…x_n$ để xác định thứ tự của phép nhân. Ví dụ $C_3=5$ vì có năm cách đặt dấu ngoặc đơn cho tích $x_0.x_1.x_2.x_3$ để các định thứ tự phép nhân: $((x_0.x_1).x_2).x_3$, $(x_0.(x_1.x_2)).x_3$, $(x_0.x_1).(x_2.x_3)$, $x_0.((x_1.x_2).x_3)$ và $x_0.(x_1.(x_2.x_3))$**

Để xây dựng hệ thức truy hồi cho Cn, chúng ta nhận thấy mặc dù có các dâu ngoặc đơn được đưa vào tích $x_0.x_1.x_2…x_n$ nhưng vẫn còn một toán tử "." ở ngoài tất cả các dấu ngoặc, tức là toán tử được dùng để thực hiện phép nhân cuối cùng. Ví dụ, trong $(x_0.(x_1.x_2)).x_3$ nó là toán tử nhân cuối còn trong $(x_0.x_1).(x_2.x_3)$ nó là toán tử nhân thứ hai. Toán tử nhân cuối cùng này xuất hiện giữa hai số n + 1, chẳng hạn giữa x_k và x_{k+1}. Có tất cả C_kC_{n-k-1} cách đưa dấu ngoặc đơn vào để xếp thứ tự n+1 số được nhân khi toán tử nhân cuối cùng xuất hiện giữa x_k và x_{k+1} vì có C_k cách đưa dấu ngoặc đơn vào tích $x_0.x_1…x_k$ để xác định thứ tự nhân cho k+1 số và C_{n-k-1} cách đưa dấu ngoặc đơn vào tích $x_{k+1}.\ x_{k+2}…x_n$ để xác định thứ tự nhân cho n - k số. Vì toán tử nhân cuối cùng này có thể xuất hiện giữa hai số n + 1 bất kỳ, nên có thể suy ra
$C_n = C_0\, C_{n-1} + C_1C_{n-2} + … + C_{n-2}C_1 + C_{n-1}C_0$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} C_k\, C_{n-k-1}$$

Chú ý rằng các điều kiện đầu là $C_0=1$ và $C_1=1$.

7. **Một người gửi vào tài khoản tiết kiệm của mình 1000$ với lãi suất gộp hàng năm 9%.**
   a. **Lập một hệ thức đệ quy cho số tiền có trong tài khoản đó ở cuối năm thứ n**
   b. **Tìm công thức tường minh cho số tiền trong tài khoản ở cuối năm thứ n.**

c. Sau 100 năm, số tiền trong tài khoản đó là bao nhiêu?

8. Giả sử một loại vi trùng sẽ phát triển gấp ba sau mỗi giờ.
   a. Lập hệ thức đệ quy cho số vi trùng đó sau n giờ.
   b. Nếu có 100 con vi trùng ban đầu thì sau 10 giờ chúng sẽ phát triển thành bao nhiêu?

   a. $a_n = 3a_{n-1}$
   b. 5 904 900

9. Giả sử dân số thế giới năm 1999 là 6 tỷ và tăng với tốc độ 1.3% mỗi năm.
   a. Lập một hệ thức đệ quy cho dân số thế giới n năm sau 1999.
   b. Tìm công thức tường minh cho dân số thế giới n năm sau 1999.
   c. Dân số thế giới sẽ là bao nhiêu vào năm 2020?

10. Một nhà máy sản xuất ô tô thể thao theo đặt hàng với tốc độ ngày càng tăng. Tháng đầu chỉ sản xuất một chiếc, tháng thứ hai làm được hai chiếc, và cứ như vậy tháng thứ n được n chiếc.
   a. Lập một hệ thức đệ quy cho số lượng xa sản xuất được trong n tháng đầu tiên.
   b. Trong năm đầu tiên nhà máy sản xuất được bao nhiêu chiếc?

   a. $a_n = a_{n-1} + n$, $a_0 = 0$
   b. $a_{12} = 78$

11. Một nhân viên bắt đầu nhận việc tại một công ty năm 1987 với mức lương khởi điểm 50000$. Hàng năm anh ta được nhận thêm 1000$ cộng với 5% lương của năm trước.
   a. Lập một hệ thức đệ quy đối với lương của nhân viên này sau n năm kể từ năm 1987.
   b. Lương năm 1995 của anh ta là bao nhiêu?
   c. Tìm công thức tường minh để tính lương của anh ta sau n năm kể từ 1987.

12. a. Tìm một hệ thức đệ quy đối với số các hoán vị của một tập n phần tử.
   b. Dùng hệ thức đệ quy này để tìm số các hoán vị của một tập n phần tử bằng cách lặp lại.

13. Một máy bán tem tự động chỉ nhận loại tiền xu, tiền giấy 1$ và tiền giấy 5$.
   a. Tìm hệ thức đệ quy để tính số cách đưa n đôla vào trong máy có chú ý đến thứ tự của các loại xu và tiền giấy bỏ vào.
   b. Tìm các điều kiện đầu.
   c. Có bao nhiêu cách đưa 10$ vài máy để mua một bộ tem.

   a. $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-5}$ đối với $n \geq 5$
   b. $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_3 = 8$, $a_4 = 16$
   c. 1217

14. Một nước sử dụng các loại xu mệnh giá 1 peso, 2 peso, 5 peso và 10 peso và các loại tiền giấy mệnh giá 5 peso, 10 peso, 20 peso, 50 peso và 100 peso. Tìm hệ thức đệ quy để tính số cách trả n peso nếu có chú ý đến thứ tự trả các loại xu và các loại tiền giấy.

15. a. Tìm hệ thức đệ quy cho số các xâu bit độ dài n chứa hai bit 0 liên tiếp.

b. Các điều kiện đầu là gì?
c. Có bao nhiêu xâu bit độ dài bảy có chứa hai bit 0 liên tiếp?

a. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2^{n-2}$ đối với $n \geq 2$
b. $a_0 = 0$, $a_1 = 0$
c. 94

16. a. Tìm hệ thức đệ quy cho số các xâu bit độ dài n chứa ba bit 0 liên tiếp.
b. Các điều kiện đầu là gì?
c. Có bao nhiêu xâu bit độ dài bảy có chứa ba bit 0 liên tiếp?

17. a. Tìm hệ thức đệ quy cho số các xâu bit độ dài n không chứa ba bit 0 liên tiếp.
b. Các điều kiện đầu là gì?
c. Có bao nhiêu xâu bit độ dài bảy không chứa ba bit 0 liên tiếp?

a. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ với $n \geq 3$
b. $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$
c. 81

18. a. Tìm hệ thức đệ quy cho số cách bước lên n bậc thang, nếu người đang lên có thể bước từng bậc hoặc hai bậc cùng một lúc.
b. Các điều kiện đầu là gì?
c. Có bao nhiêu cách để người đó có thể đi lên một cầu thang tám bậc?

a. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ với $n \geq 2$
b. $a_0 = 1$, $a_1 = 1$
c. 34

19. a. Tìm hệ thức đệ quy cho số cách bước lên n bậc thang, nếu người đang lên có thể bước một, hai hoặc ba bậc cùng một lúc.
b. Các điều kiện đầu là gì?
c. Có bao nhiêu cách để người đó có thể đi lên một cầu thang tám bậc?

20. a. Tìm hệ thức đệ quy đối với các xâu tam phân không chứa hai số 0 liên tiếp.
b. Các điều kiện đầu là gì?
c. Có bao nhiêu xâu tam phân độ dài sáu không chứa hai số 0 liên tiếp?

a. $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$ với $n \geq 2$
b. $a_0 = 1$, $a_1 = 3$
c. 448