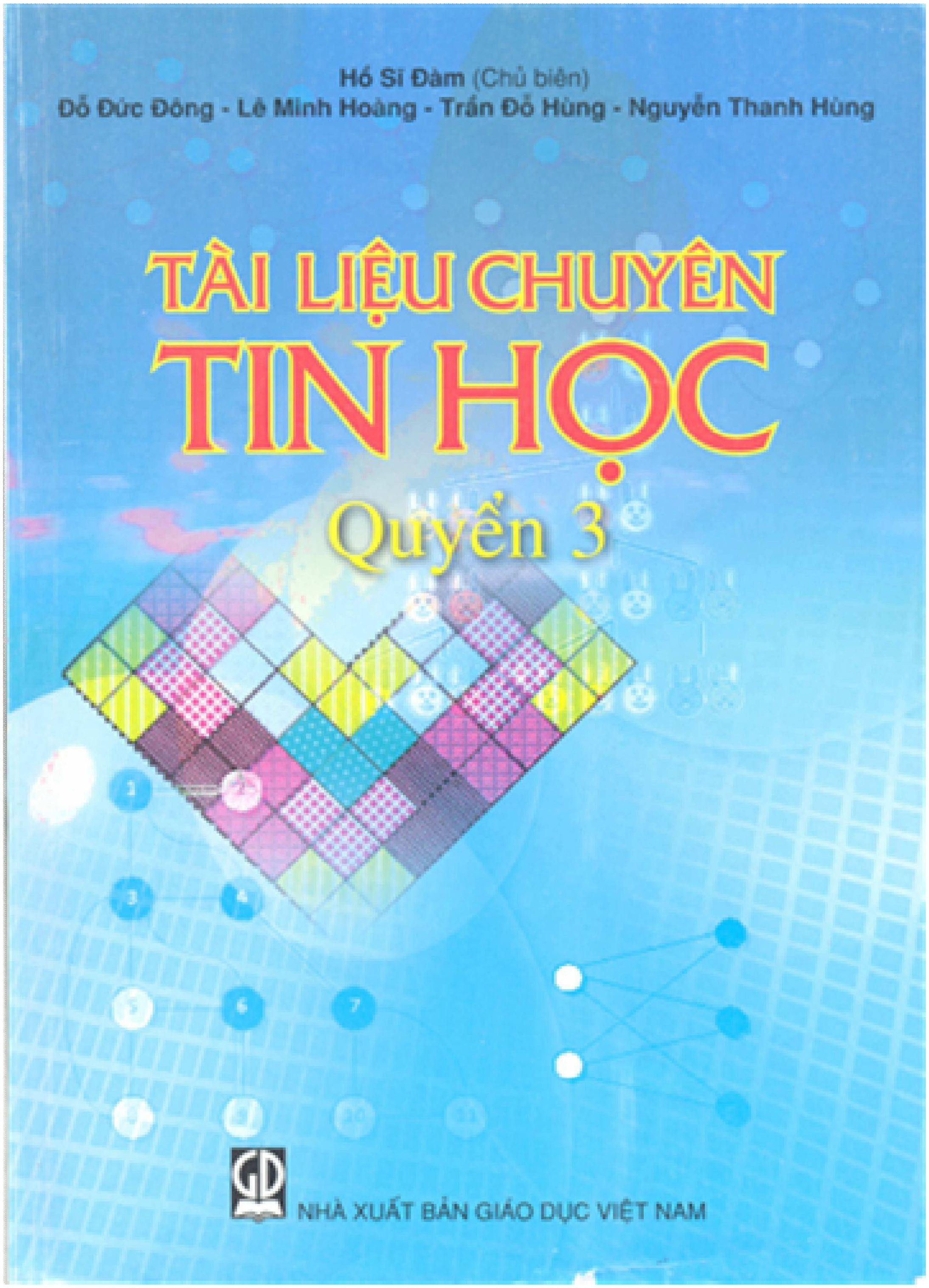
Ho Huu Son - Chuyen Nguyen Tat Thanh Kon Tum



# MỤC LỤC

Chuyên đề 9

# LÍ THUYẾT TRÒ CHƠI

## I. Một số khái niệm

### *1. Vị trí*

Là tập thông tin về trò chơi tại từng thời điểm. Những vị trí chứa đựng nhiều khả năng dẫn tới chiến thắng cho người nào đi tới được nó gọi là những vị trí có lợi (cho người chơi chiếm được lợi thế). Ngược lại có những vị trí chứa đựng nhiều khả năng dẫn tới thất bại cho người nào đi tới nó gọi là những vị trí không có lợi (người chơi bị vào thế bất lợi).

### *2. Luật chơi*

Là những quy định cho phép người chơi thực hiện các phép biến đổi chuyển trò chơi từ một vị trí hiện tại tới một vị trí khác. Một bước đi hợp lệ là một phép biến đổi theo đúng luật chơi. Vị trí kết thúc là vị trí từ nó không thể di chuyển tiếp.

### *3. Trò chơi đối kháng*

Là trò chơi hai người, khi một người chơi được lợi thế thì người chơi kia sẽ gặp bất lợi. Những trò chơi này chia làm hai loại: trò chơi có thông tin đầy đủ và trò chơi có thông tin không đầy đủ. Sự phân chia này dựa trên cơ sở người chơi có biết đầy đủ mọi thông tin về vị trí hiện tại của đối phương hay không. Chẳng hạn, các trò chơi với thông tin đầy đủ như cờ carô, cờ tướng, cờ quốc tế; các trò chơi với thông tin không đầy đủ như trò chơi đánh bài (người chơi che dấu những quân bài không cho đối thủ biết).

***4.*** Trong mọi trò chơi, quá trình chơi có thể được biểu diễn dưới dạng cấu trúc cây có hướng (đôi khi là đồ thị có hướng) gọi là cây trò chơi. Nút của các cây này biểu diễn một vị trí trò chơi (nút gốc là *vị trí khởi đầu*, nút lá là *vị trí kết thúc*). Cung $(i; j)$ trên cây thể hiện một bước đi hợp lệ chuyển từ một vị trí $i$ đến vị trí $j$ kế tiếp.

## II. Trò chơi tổ hợp cân bằng

### 1. Mô tả

Trò chơi tổ hợp cân bằng là trò chơi đối kháng thoả mãn những điều kiện sau:

- Có hai người chơi (người đi đầu kí hiệu là $A$, người kia là $B$);
- Có một tập hữu hạn các vị trí có thể xảy ra $X$ (các trạng thái) của trò chơi.
- Có quy luật chơi $Q$. Quy luật chơi áp dụng cho hai người chơi là cân bằng nghĩa là mỗi người chơi đến lượt mình đều có quyền chọn một phép di chuyển hợp lệ tuỳ ý.
- Hai người chơi lần lượt, mỗi lần thực hiện một phép di chuyển hợp lệ.
- Trò chơi kết thúc khi đạt tới vị trí kết thúc. Thông thường quy định người di chuyển được cuối cùng là người thắng, người nào đến lượt mà không thể di chuyển được nữa thì thua (một số trò chơi cũng có thể quy định ngược lại).
- Nếu trò chơi không bao giờ kết thúc sẽ có một thông báo rút thăm. Có thể bổ sung thêm điều kiện nào đó để trò chơi kết thúc không cần thông báo rút thăm như: Trò chơi sẽ kết thúc khi đã có đủ một số lần di chuyển nhất định (kể cả trường hợp còn bước di chuyển tiếp, ...) mà không đấu thủ nào thắng thì hai đấu thủ là hoà.

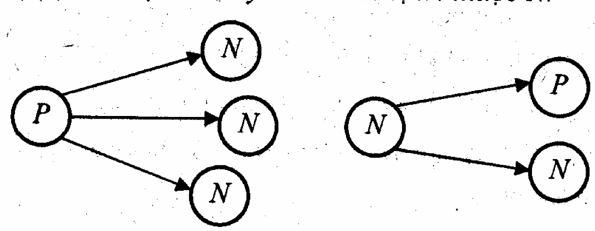
#### a) Tập P, tập N và cách tìm

Để thuận tiện cho việc xây dựng thuật toán (giành thắng) của trò chơi, người ta đưa ra khái niệm tập $P$ và tập $N$. Đó là hai tập thoả mãn các tính chất sau:

($a$) *Tất cả các vị trí kết thúc đều thuộc P.*

($b$) *Từ mỗi vị trí thuộc N luôn có ít nhất một di chuyển tới vị trí thuộc P.*

($c$) *Từ mỗi vị trí thuộc P, mọi di chuyển đều tới vị trí thuộc N.*




***Hình 9.1. Tập P và tập N***

Từ định nghĩa trên, dễ dàng suy ra thuật toán giành thắng như sau:

> *Thuật toán giành chiến thắng cho đấu thủ A khi* ***ban đầu A nhận vị trí thuộc N*** *là: đấu thủ* ***A luôn di chuyển tới các vị trí thuộc P*** *buộc đấu thủ B chỉ có thể đi tới vị trí thuộc N.*

Nếu ban đầu đấu thủ $A$ bị nhận vị trí thuộc $P$ thì $A$ cần kéo dài trò chơi chờ đến một thời điểm nào đó trong quá trình chơi do $B$ vô ý sao cho $A$ có được vị trí thuộc $N$ thì dẫn đến $A$ luôn đi vào vị trí thuộc $P$ (vậy trong trường hợp này $A$ thắng phụ thuộc vào sự vô ý của $B$).

Ta có thể tìm tập các vị trí thuộc $P$ và thuộc $N$ bằng *đệ quy* như sau:

*Bước 1*. Gán $P = \varnothing$. Gán $N = \varnothing$. Nạp các vị trí kết thúc vào $P$.

*Bước 2*. Tìm các vị trí có thể di chuyển đến một vị trí nào đó thuộc tập $P$, nạp chúng vào $N$.

*Bước 3*. Tìm những vị trí *chỉ có thể* chuyển đến các vị trí thuộc $N$, nạp chúng vào $P$.

*Bước 4*. Dừng tìm kiếm.

### b) Một số ví dụ

***Ví dụ 1.*** Trò chơi *Làm rỗng và phân chia*.

*Phát biểu*: Có hai chiếc hộp, một hộp đựng $m$ quân cờ, hộp còn lại đựng $n$ quân cờ ($m, n \in \mathbb{N}^*$). Hai đấu thủ lần lượt chơi. Mỗi lần đến lượt chơi của mình, đấu thủ đó lấy hết quân cờ trong một hộp rồi đem các quân cờ trong hộp còn lại chia vào hai hộp sao cho mỗi hộp phải có ít nhất một quân. Rõ ràng trò chơi kết thúc khi mỗi hộp còn một quân. Đấu thủ nào được chơi lượt cuối sẽ giành chiến thắng. Hãy tìm các vị trí thuộc tập $P$, các vị trí thuộc tập $N$.

*Phân tích*. Trong trò chơi này, mỗi vị trí chơi là một cặp số thể hiện số quân cờ trong hai hộp. Vị trí khởi đầu là $(m, n)$. Chúng ta sẽ chứng minh tập

$$\{(m', n') |\ m' \text{ và } n' \text{ là số nguyên lẻ}\}$$

là tập các vị trí thuộc $P$ và tập $\{(m', n') |\ m'$ hoặc $n'$ là số nguyên chẵn$\}$ là tập các vị trí thuộc $N$. Thật vậy:

Trước hết, thấy vị trí kết thúc là $(1, 1) \in P$.

Bây giờ giả sử $(m', n') \in N$ thì hoặc $m'$ chẵn hoặc $n'$ chẵn. Không mất tính chất tổng quát, giả sử $m'$ chẵn. Từ vị trí này, chúng ta chọn phép chuyển là: làm rỗng hộp thứ hai (chứa $n'$) và chia $m'$ quân có trong hộp thứ nhất thành hai phần với số quân cờ trong cả hai phần đều lẻ cho vào hai hộp, đi tới vị trí $(s, m' - s)$ với $s'$ là số lẻ $(1 \le s \le m - 1)$, nghĩa là $(s, m' - s) \in P$. Vậy từ một vị trí thuộc $N$, luôn tìm được ít nhất một phép chuyển tới vị trí thuộc $P$.

Tiếp theo, giả sử $(m', n') \in P$ nghĩa là $m'$ và $n'$ đều lẻ. Nếu làm rỗng hộp thứ nhất (chứa $m'$) và lấy $n'$ quân của hộp thứ hai chia vào hai hộp và chuyển tới vị trí $(s, n' - s)$ với $1 \le s \le n - 1$, thì $s$ và $n' - s$ không thể cùng lẻ (do tổng của chúng bằng $n'$ là số lẻ), do đó $(s, n' - s) \in N$. Tình trạng tương tự khi làm rỗng hộp thứ hai (chứa $n'$). Vậy mọi phép chuyển từ vị trí thuộc $P$ đều chuyển tới vị trí thuộc $N$.

***Ví dụ 2.*** Trò chơi *Lấy bớt quân cờ.*

*Phát biểu.* Trên bàn có $C$ quân cờ. Có hai đấu thủ chơi lần lượt. Mỗi lần, người chơi đến lượt sẽ lấy ra khỏi bàn từ 1 đến $M$ quân cờ. Người thắng là người lấy được quân cờ cuối cùng. Chương trình đọc hai số nguyên dương $C$ và $M$ từ tệp văn bản *vidu2.txt* ($C$ trong khoảng từ 1 đến $10^4$, $1 \le M \le C$), lập trình với giao diện trên màn hình để người chơi với máy (ưu tiên cho *người đi trước*) với thuật toán giành thắng cho máy.

*Phân tích.* Chúng ta dùng phương pháp phân tích ngược, xét từ vị trí kết thúc đến vị trí khởi đầu. Vị trí kết thúc là vị trí ứng với số quân cờ bằng 0, đây là vị trí thuộc $P$. Nếu trên bàn còn 1 hoặc 2... hoặc $M$ quân cờ thì đến lượt đấu thủ nào lấy hết số quân cờ trên bàn cờ thì sẽ tới vị trí kết thúc và thắng cuộc; vậy các vị trí này thuộc $N$. Nếu còn lại $M + 1$ quân cờ, người đến lượt dù lấy kiểu nào cũng phải để lại trên bàn số quân cờ là 1 hoặc 2 ... hoặc $M$, nghĩa là từ vị trí $M + 1$ quân cờ chỉ có thể đi tới các vị trí thuộc $N$, vậy vị trí $M + 1$ quân cờ là vị trí thuộc $P$. Bằng cách lí giải tương tự, đi đến kết luận chung là: các vị trí gồm 0, $M + 1$, $2(M + 1)$, $3(M + 1)$ quân cờ, ... là các vị trí thuộc $P$, các vị trí còn lại (phần dư của phép chia số quân cờ hiện tại cho $M + 1$ là khác 0) thuộc tập $N$.

*Chiến thuật giành chiến thắng.* Nếu số quân cờ $C$ ban đầu không chia hết cho $M + 1$ (nghĩa là đấu thủ $A$ ban đầu nhận vị trí thuộc tập $N$), thì $A$ thắng: mỗi lần $A$ cần lấy sao cho luôn để lại trên bàn số quân chia hết cho $M + 1$ (nghĩa là $A$

luôn buộc đấu thủ *B* phải nhận vị trí thuộc *P* để *B* chỉ có thể đi tiếp đến vị trí thuộc *N*). Ngược lại, nếu số quân *C* ban đầu chia hết cho $M + 1$ (*A* ban đầu ở vị trí thuộc *P*) thì *A* chỉ nên lấy 1 quân cờ để kéo dài trò chơi, đợi vô ý (nếu có) của *B* sao cho *A* vào được vị trí thuộc *N*, khi đó *A* phải di chuyển tới vị trí thuộc *P*.

**LAYCO.PAS ✓ Trò chơi *Lấy bớt quân cờ* với thuật giành thắng cho máy**

```
uses crt;
const fi = 'vidu2.txt';
var c, {số quân ban đầu}
 m, {bước đi cực đại}
 move, {số quân được chuyển của một lượt}
 m1 : integer; {m+1}
 OK : boolean;
procedure nhap;
var f : text;
begin
 assign(f, fi); reset(f);
 read(f, c, m); m1 := m+1;
 writeln('Tong so quan:',c,'.Quan chuyen toi da la:',m);
 close(f);
end;
procedure thuatthang;
begin
 move := c mod m1;
 dec(c, move);
 writeln('May chuyen so quan:',move,' so quan con:', c);
 OK := not OK;
end;
procedure keodai;
begin
 dec(c,1);
 writeln('May chuyen so quan: 1, so quan con: ', c);
 OK := not Ok;
end;
procedure nguoidi;
begin
 write('Ban chuyen so quan: '); readln(move);
 dec(c, move);
 writeln('So quan con lai la: ', c);
 OK := not OK;
end;
```

```
BEGIN
 clrscr;
 nhap;
 OK := True;
 while c>0 do
  begin
   nguoidi;
   if c=0 then break;
   if c mod m1 <>0 then thuatthang else keodai;
  end;
 if OK then writeln('May thang ')
 else writeln('Ban thang ');
 readln;
END.
```

Sau đây là thuật toán lập trình trò chơi đối kháng giành thắng cho máy khi tiến hành trò chơi giữa người và máy tính:

1. Thể hiện giao diện chọn đấu thủ đi trước;

   {biến OK = True là người đi trước; OK = False là máy đi trước}
2. OK := False;
3. Tạo vị trí ban đầu;
4. Thể hiện vị trí ban đầu;
5. **While** (*chưa là vị trí kết thúc*) **do**

   **begin**

   **If** OK **then** *Người đi;*

   **If** (*kết thúc*) **then** *Thoát khỏi while;*

   **If** (*là vị trí thuộc P*) **then** *Máy đi kéo dài trò chơi*

   **else** *Máy đi theo thuật thắng;*

   **End;**
6. **If** OK **then** *thông tin Người thắng* **else** *thông tin Máy thắng;*

Trong mỗi chương trình con *Người đi, Máy đi kéo dài trò chơi, Máy đi theo thuật thắng* đều có chung nội dung là: Thể hiện bước đi và vị trí sau khi đi, đổi giá trị biến OK. Riêng trong chương trình con *Máy đi theo thuật thắng* còn tuỳ thuộc trò chơi, đầu tiên cần tìm bước đi giành thắng cho thích hợp.

*Ví dụ 3.* Trò chơi *Trừ dần.*

*Phát biểu.* Cho tập $S$ gồm hữu hạn các số nguyên dương, gọi là *tập trừ*. Trên một cọc có $N$ quân, hai đấu thủ lần lượt chơi, mỗi lần chuyển đi $s$ quân khỏi cọc ($s \in S$). Đấu thủ nào được chuyển lần cuối cùng thì thắng. Viết chương trình thông báo cho biết đấu thủ đi đầu có chắc thắng không?

**Input**: Tệp *vidu3.inp* gồm hai dòng:

- Dòng thứ nhất ghi số nguyên dương $N$;
- Dòng thứ hai ghi các số nguyên dương trong tập trừ $S$ (sắp tăng dần).

**Output**: Tệp *vidu3.out* như sau: Nếu đấu thủ đi đầu chắc thắng thì ghi số 1, nếu không chắc thắng thì ghi số 0.

*Phân tích.* Xét trò chơi trừ dần với tập trừ là $S = \{1, 3, 4\}$:

Trong trò chơi này, mỗi vị trí của trò chơi là một số quân còn trên cọc tại từng thời điểm. Chúng ta tìm tập $P$ của trò chơi này: Có đúng một vị trí kết thúc là 0 đó là vị trí $P$. Do đó các vị trí 1, 3, 4 sẽ thuộc $N$ vì từ chúng có thể chuyển tới 0. Nhưng vị trí 2 thuộc $P$ vì từ 2 có duy nhất một phép chuyển đến 1 (là vị trí của $N$). Còn 5 và 6 phải thuộc $N$ vì nó có thể chuyển đến 2... Chúng ta sẽ mở rộng kết luận bằng quy nạp và tìm được $P = \{0, 2, 7, 9, 14, 16,...\}$ là tập các số nguyên không âm khi chia cho 7 còn dư 0 hoặc 2. Còn $N$ chứa các số còn lại $N = \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 15,...\}$

*Nhận xét.* Khi lập trình, để tìm được các vị trí $P$ và $N$ trong trò chơi này chúng ta có thể dùng phương pháp đánh dấu trên mảng một chiều $A$.

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $P$ | $N$ | $P$ | $N$ | $N$ | $N$ | $N$ | $P$ | $N$ | $P$ | $N$ | $N$ | $N$ | $N$ | $P$ | $N$ | $P$ | ... |
| $A[i]$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | ... |

Với vị trí $i$ thuộc tập $P$ thì ghi nhận $A[i] = 1$, nếu $i$ thuộc tập $N$ thì ghi nhận $A[i] = 0$. Ngoài ra các số thuộc tập trừ $S$ được lưu vào mảng một chiều $S$ (giả sử có $m$ số thuộc tập trừ). Ban đầu khởi trị $A[0] = 1$; sau đó xét các vị trí $i$ từ 1 đến $n$. Với mỗi vị trí $i$, chúng ta duyệt tất cả các vị trí có thể đi tiếp theo từ $i$, đó là các vị trí $i - S[j]$ ($j$ từ 1 đến $m$), nếu thấy tất cả các vị trí $i - S[j]$ đều thuộc tập $N$ (nghĩa là $A[i - s[j]] = 0$) thì vị trí $i$ chính là vị trí thuộc tập $P$. Ngược lại nếu có một vị trí trong các vị trí $i - S[j]$ là vị trí thuộc $P$ thì kết luận ngay vị trí $i$ là vị trí thuộc $N$.

**TRUDAN.PAS ✓ Trò chơi *Thử dần* với thuật thắng cho đấu thủ đi trước**

```
const fi = 'vidu3.inp';
 fo = 'vidu3.out';
 max = 100000;
var n,m : longint;
 a : array[0..max] of longint;
 s : array[0..max] of longint;
 f,g : text;
 i : longint;
function la_P(i : longint): boolean;
var j: longint;
begin
 la_P := false;
 for j:=1 to m do
 if i-s[j]>=0 then
 if a[i-s[j]]=1 then exit;
 la_P := true;
end;
BEGIN
 assign(f,fi); reset(f);
 readln(f,n);
 m := 0;
 while not eoln(f) do
  begin
   inc(m);
   read(f,s[m]);
  end;
 close(f);
 for i:=0 to n do a[i] := 0;
 a[0] := 1;
 for i:=1 to n do
 if a[i]=0 then
 if la_P(i) then a[i]:=1;
 assign(g,fo);
 rewrite(g);
 if a[n]=1 then write(g,0) else write(g,1);
 close(g);
END.
```

## *2. Tổng Nim và trò chơi Nim*

Để có thuật chiến thắng trong những trò chơi đối kháng ta cần xác định được tập $P$ và tập $N$. Công việc này có thể được giải quyết dễ dàng hơn nhờ khái niệm tổng Nim.

### a) Tổng Nim

Tổng Nim của hai số nguyên không âm là kết quả phép cộng *không nhớ* của hai số đó trong hệ cơ số 2 (còn gọi là cộng theo môđun 2).

***Ví dụ 1***

Số 14 hệ thập phân viết dưới dạng cơ số 2 là $\mathbf{1110}_{(2)}$

Số 55 hệ thập phân viết dưới dạng cơ số 2 là $\mathbf{110111}_{(2)}$

------------

Tổng Nim của chúng là: $\mathbf{111001}_{(2)}$ (là 57 trong hệ thập phân)

Vậy $14 \oplus 55 = 57$. Thường kí hiệu phép toán cộng theo môđun 2 là $\oplus$.

***Ví dụ 2***

Số 3 hệ thập phân viết dưới dạng cơ số 2 là $\mathbf{11}_{(2)}$

Số 5 hệ thập phân viết dưới dạng cơ số 2 là $\mathbf{101}_{(2)}$

Số 8 hệ thập phân viết dưới dạng cơ số 2 là $\mathbf{1000}_{(2)}$

---------

Tổng Nim của chúng là: $\mathbf{1110}_{(2)}$ (là 14 trong hệ thập phân)

Vậy $3 \oplus 5 \oplus 8 = 14$.

Trong ngôn ngữ lập trình Pascal kí hiệu phép toán $\oplus$ (tính tổng Nim) là *xor*, trong C/C++ là ^.

Phép toán $\oplus$ có tính chất kết hợp, giao hoán. Đặc biệt:

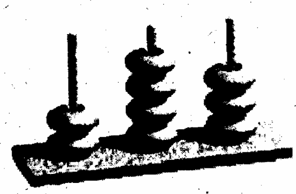
$$0 \oplus a = a,\ a \oplus a = 0, \text{ do đó nếu } a \oplus b = a \oplus c \text{ thì } b = c.$$

Có thể tạo ra tổng Nim của hai số nguyên không âm $x$ và $y$ bằng cách lập bảng như sau: Tại ô giao điểm của cột $x$ và dòng $y$ ghi $x \oplus y$; đó là số nguyên không âm nhỏ nhất chưa có trong tập các số đã có tại các ô $(x', y)$ với $1 \le x' < x$ và các số đã có tại các ô $(x, y')$ với $1 \le y' < y$. Chú ý $0 \oplus y = y$ và $x \oplus 0 = x$.

| y \ x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 1 | 1 | 0 | 3 | 2 | 5 | 4 | 7 | 6 | 9 | 8 | 11 | 10 | 13 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 1 | 6 | 7 | 4 | 5 | 10 | 11 | 8 | 9 | 14 |
| 3 | 3 | 2 | 1 | 0 | 7 | 6 | 5 | 4 | 11 | 10 | 9 | 8 | 15 |
| 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 0 | 1 | 2 | 3 | 12 | 13 | 14 | 15 | 8 |
| 5 | 5 | 4 | 7 | 6 | 1 | 0 | 3 | 2 | 13 | 12 | 15 | 14 | 9 |
| 6 | 6 | 7 | 4 | 5 | 2 | 3 | 0 | 1 | 14 | 15 | 12 | 13 | 10 |
| 7 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 8 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 9 | 9 | 8 | 11 | 10 | 13 | 12 | 15 | 14 | 1 | 0 | 3 | 2 | 5 |
| 10 | 10 | 11 | 8 | 9 | 14 | 15 | 12 | 13 | 2 | 3 | 0 | 1 | 6 |
| 11 | 11 | 10 | 9 | 8 | 15 | 14 | 13 | 12 | 3 | 2 | 1 | 0 | 7 |
| 12 | 12 | 13 | 14 | 15 | 8 | 9 | 10 | 11 | 4 | 5 | 6 | 7 | 0 |

### b) Trò chơi Nim chuẩn

Trò chơi Nim chuẩn như sau: Có ba cọc lần lượt chứa $x_1$, $x_2$, $x_3$ quân. Hai người chơi lần lượt tạo ra các bước di chuyển quân. Mỗi bước di chuyển là: chọn một cọc tuỳ ý còn quân và lấy bớt một số quân ở cọc này (từ một quân cho đến toàn bộ quân). Người chiến thắng là người lấy được quân cuối cùng. Trường hợp tổng quát có số cọc tuỳ ý.



***Hình 9.2.***
***Trò chơi Nim chuẩn***

### c) Định lí Bouton

*Mỗi vị trí $(x_1, x_2, x_3)$ trong trò chơi Nim ba cọc là vị trí P khi và chỉ khi tổng Nim $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = 0$.*

***Ví dụ.*** Vị trí (5, 7, 9) trong Nim ba cọc ứng với tổng Nim $5 \oplus 7 \oplus 9 = 11 > 0$ nên nó là vị trí *N*. Có thể kiểm tra thấy vị trí (4, 12, 8) là vị trí *P*.

Định lí còn áp dụng với trò chơi Nim có số cọc nhiều hơn.

Từ định lí suy ra chiến thuật giành thắng trong trò chơi Nim chuẩn như sau:

Giả sử vị trí hiện tại là $(x_1, x_2, ..., x_n)$ tương ứng với tổng Nim là

$$g = x_1 \oplus x_2 \oplus ... \oplus x_n > 0.$$

Có thể chứng minh sẽ tồn tại thành phần $x_i$ mà $x_i' = g \oplus x_i \le x_i$. Cách đi để giành chiến thắng là giảm cọc $x_i$ thành $x_i'$.

Vị trí mới $(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, ..., x_n)$ có tổng Nim là $g' = 0$ vì:

$$g' = x_1 \oplus x_2 \oplus ... \oplus x_{i-1} \oplus x_i' \oplus x_{i+1} \oplus ... \oplus x_n$$

$$= x_1 \oplus x_2 \oplus ... \oplus x_{i-1} \oplus [g \oplus x_i] \oplus x_{i+1} \oplus ... \oplus x_n$$

$$= (x_1 \oplus x_2 \oplus ... \oplus x_{i-1} \oplus x_i \oplus x_{i+1} ... \oplus x_n) \oplus g = g \oplus g = 0.$$

Ngược lại cũng có thể chứng minh: nếu vị trí hiện tại là $(x_1, x_2, ..., x_n)$ tương ứng với tổng Nim là $g = x_1 \oplus x_2 \oplus ... \oplus x_n = 0$ thì sau phép di chuyển bất kì đều dẫn tới vị trí mới có tổng Nim dương.

Do đó nếu vị trí ban đầu $(x_1, x_2, ..., x_n)$ có tổng Nim dương thì người $A$ luôn thắng. Trong trường hợp nếu tổng Nim bằng 0 (vị trí bất lợi) thì người $A$ chơi cầm chừng kéo dài trò chơi chẳng hạn mỗi lần giảm đi 1 (hoặc số ngẫu nhiên) ở một cột bất kì để chờ sai lầm của đối thủ $B$ khiến $A$ nhận được vị trí có tổng Nim dương.

## *3. Trò chơi trên đồ thị*

Một số trò chơi có thể mô tả bằng đồ thị có hướng. Mỗi vị trí của trò chơi được coi như một đỉnh của đồ thị và mỗi phép di chuyển hợp lệ được xem như một cung dẫn từ đỉnh này sang đỉnh khác. Chúng ta sẽ định nghĩa hàm Sprague-Grundy (SG) để xác định được các vị trí thuộc tập $P$ hoặc $N$ của trò chơi trên đồ thị.

### a) Đồ thị trò chơi

Đồ thị của một trò chơi là đồ thị có hướng $G = (X, F)$ với $X$ là tập đỉnh không rỗng - đó là tập các vị trí của trò chơi và $F$ là hàm trên tập $X$ sao cho với mỗi $x \in X$ thì $F(x)$ là một tập con thuộc $X$ tức là $x \in X \to F(x) \subset X$. Các đỉnh thuộc $F(x)$ được gọi là những đỉnh có thể tới từ đỉnh $x$. Nếu $F(x)$ rỗng thì $x$ là đỉnh kết thúc. Một phép di chuyển hợp lệ là đi từ đỉnh $x$ tới một đỉnh thuộc $F(x)$.

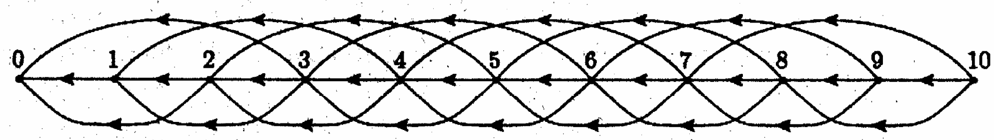
Trò chơi tổ hợp cân bằng có hai người chơi được mô phỏng trên đồ thị $G = (X, F)$ với đỉnh xuất phát $x_0 \in X$ và tuân theo các quy tắc sau:

(1) Người chơi thứ nhất đi trước và bắt đầu từ đỉnh $x_0$;

(2) Hai người chơi lần lượt thực hiện phép di chuyển trên đồ thị;

(3) Tại vị trí $x$, người chơi được di chuyển đến bất kì $y \in F(x)$;

(4) Người chơi nào đến lượt phải nhận đỉnh kết thúc là người thua.




***Hình 9.3***

Ví dụ trò chơi trừ số với tập trừ là {1, 2, 3} bắt đầu với cọc có $n$ = 10, có thể mô tả như một đồ thị có hướng ($X$, $F$) như sau:

Tập $X$ = {0, 1, ..., 10}. Hàm $F$ có các giá trị cụ thể là:

$$F(0) = \phi, F(1) = \{0\}, F(2) = \{0,1\} \text{ và } F(x) = \{x-1, x-2, x-3 \mid n \geq x > 2\}.$$

## b) Hàm Sprague-Grundy

Hàm Sprague-Grundy (SG) của một đồ thị $G = (X, F)$ được định nghĩa như sau: mỗi đỉnh $x$ của đồ thị được gắn một số $g(x)$ là số nguyên không âm nhỏ nhất không nằm trong tập các giá trị $g(y)$ của các đỉnh $y$ tới được từ $x$: $g(x) = \min\{n \geq 0 : \forall y \in F(x), n \neq g(y)\}$. Đỉnh $x$ nếu là đỉnh kết thúc thì $g(x) = 0$. Đôi khi còn dùng kí hiệu: $g(x) = \max\{g(y) \mid \forall y \in F(x)\}$.

Khi trên đồ thị trò chơi xác định được hàm Sprague-Grundy chúng ta sẽ xác định đỉnh $x$ là bất lợi nếu $g(x) = 0$ và là đỉnh có lợi nếu $g(x) > 0$. Thật vậy, vì:

- Người nhận đỉnh kết thúc (có $g(x) = 0$) thì không có phép di chuyển tiếp theo nữa nên thua (thường quy định là thua).
- Nếu nhận đỉnh $x$ có $g(x) = 0$ và không là đỉnh kết thúc thì mọi cách đi đều đến đỉnh $y$ có $g(y) > 0$ chưa là đỉnh kết thúc; nên người tiếp theo vẫn còn đi tiếp được. Vậy nhận đỉnh $x$ có $g(x) = 0$ và không là đỉnh kết thúc thì đối thủ chưa thua.
- Nếu nhận đỉnh $g(x) > 0$ thì luôn tồn tại một đỉnh $y \in F(x)$ mà $g(y) = 0$ buộc đối thủ phải nhận, cứ tiếp tục như thế cuối cùng buộc đối thủ phải nhận đỉnh kết thúc và thua.

***Ví dụ.*** Trong trò chơi *Trừ dần* với tập trừ là $S = \{1, 2, 3, ..., a\}$ thì đồ thị trò chơi có hàm Sprague-Grundy là $g(x) = x \bmod (a + 1)$.

### c) Tổng trò chơi

Giả sử chúng ta có $n$ đồ thị trò chơi là $G_1 = (X_1, F_1)$, $G_2 = (X_2, F_2)$, …, $G_n = (X_n, F_n)$. Nếu mỗi lượt đi được chọn chơi trên một trong $n$ trò chơi này thì chúng ta tổ hợp chúng thành đồ thị trò chơi mới là: $G = (X, F)$ gọi là đồ thị tổng của các đồ thị thành phần: $G_1, G_2, \ldots, G_n$. Kí hiệu $G = G_1 + G_2 + \ldots + G_n$. Đồ thị $G$ có: Tập đỉnh $X$ là một tích Đề-các $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ gồm tất cả các bộ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ với $x_i \in X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Với mỗi đỉnh $x \in X$, tập các đỉnh theo sau $x$ là:

$$F(x) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$= F_1(x_1) \times \{x_2\} \times \ldots \times \{x_n\} \cup \{x_1\} \times F_2(x_2) \times \ldots \times \{x_n\} \cup \ldots \cup \{x_1\} \times \{x_2\} \times \ldots \times F_n(x_n)$$

Do một phép di chuyển từ $x$ chứa đúng một phép di chuyển từ $x_i$ tới một điểm thuộc $F_i(x_i)$ nên có thể viết: $F(\mathrm{x}) = \{(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, \ldots, x_n) : x_i' \in F(x_i)\}$.

***Ví dụ.*** Trò chơi Nim ba cọc, có thể coi như tổng của ba trò chơi Nim một cọc.

Chúng ta cần một phương pháp tính hàm Sprague-Grundy trên đồ thị tổng các trò chơi khi biết hàm Sprague-Grundy trên từng đồ thị trò chơi thành phần.

### d) Định lí Sprague-Grundy

> *Nếu $g_i$ là các hàm Sprague-Grundy trên đồ thị của trò chơi thành phần $G_i$, với $i = 1, 2, \ldots, n$, thì đồ thị tổng của chúng là*
>
> $$G = G_1 + G_2 + \ldots + G_n$$
>
> *sẽ có hàm SG là:* $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g_1(x_1) \oplus g_2(x_2) \oplus \ldots \oplus g_n(x_n)$.

***Ví dụ 1.*** Kí hiệu $G(m)$ là trò chơi *trừ dần một cọc* với tập trừ là $S_m = \{1, 2, \ldots, m\}$ có thể trừ bớt từ 1 đến $m$ quân trên cọc, ta kí hiệu hàm Sprague-Grundy của trò chơi này là $g_m(x)$ thì $g_m(x) = x \bmod (m + 1)$ và $0 \le g_m(x) \le m$.

Cho ba trò chơi trừ dần trên một cọc cụ thể là: trò chơi $G(3)$, với số quân trên một cọc là 9; trò chơi $G(5)$ với số quân trên một cọc là 10 và trò chơi $G(7)$với số quân trên một cọc là 14.

Xét trò chơi tổng $G = G(3) + G(5) + G(7)$ có vị trí khởi đầu là (9, 10, 14). Hàm Sprague-Grundy của vị trí khởi đầu là:

$$g(9, 10, 14) = g_3(9) \oplus g_5(10) \oplus g_7(14) = 1 \oplus 4 \oplus 6 = 3.$$

Một phép chuyển tối ưu là: trong trò chơi $G(7)$ chuyển đến vị trí 13 vì $g_7(13) = 5$ nên $g(9, 10, 13) = g_3(9) \oplus g_5(10) \oplus g_7(13) = 1 \oplus 4 \oplus 5 = 0$.

Sau đây là một số ví dụ về những trò chơi có tên là *Lấy và phân chia* là những trò chơi trên các cọc mà phép di chuyển là lấy bớt quân khỏi cọc hoặc phân chia một cọc thành nhiều cọc khác rỗng theo những điều kiện nào đó.

***Ví dụ 2.*** Trò chơi *Kayles*

*Phát biểu.* Hai người chơi trò lăn bóng (bowing). Trước hai người là một hàng quả bowing mà quả thứ hai đã bị đánh đổ. Giả sử cả hai người chơi thành thạo đến mức có thể lăn đổ bất kì một quả bowing nào hoặc lăn đổ hai quả bowing bất kì cạnh nhau. Hai người lần lượt lăn bóng. Quy định người lăn đổ quả bowing cuối cùng sẽ thắng.

*Phân tích.* Khi đánh đổ một hoặc hai quả bowing ở các đầu hàng chính là phép lấy đi khỏi cọc (hàng) một hoặc hai quân. Khi đánh đổ một hoặc hai quân (ở giữa hàng) chia cọc thành hai thì đó là phép phân chia cọc.

Chúng ta hãy tìm hàm Sprague-Grundy cho trò chơi này. Chỉ có một vị trí kết thúc là cọc rỗng, vậy $g(0) = 0$.

| $x$ | Các đỉnh $y$ kế tiếp $x$ | Các giá trị $g(y)$ | $g(x)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | | | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 1, 0 | 1, 0 | 2 |
| 3 | 2, 1, (1, 1) | $2, 1, 1 \oplus 1 = 0$ | 3 |
| 4 | 3, 2, (1, 2), (1, 1) | $3, 2, 1 \oplus 2 = 3, 1 \oplus 1 = 0$ | 1 |
| 5 | 4, 3, (3, 1), (2, 2), (1, 2) | $1, 3, 3 \oplus 1 = 2, 2 \oplus 2 = 0, 1 \oplus 2 = 3$ | 4 |

Khi $x \geq 72$, các giá trị $g(x)$ bắt đầu tuần hoàn với chu kì 12, dãy giá trị $g(x)$ sau được lặp mãi:

| $x$ | … | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 | 81 | 82 | 83 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | … | 4 | 1 | 2 | 8 | 1 | 4 | 7 | 2 | 1 | 8 | 2 | 7 | … |

*Ví dụ 3.* Trò chơi *Treblecross*

*Phát biểu.* Trên một hàng có $n$ ô vuông để trống. Hai người chơi lần lượt ghi $X$ vào một ô trống không kề với ô đã có $X$. Người ghi chữ $X$ cuối cùng là người thắng. Tính hàm Sprague- Grundy của trò chơi này.

*Phân tích.* Trò chơi này có thể mô tả như trò chơi trên một cọc mà có thể bỏ bớt các quân trên cọc hoặc chia cọc thành hai cọc.

Nếu $n = 1$ có đúng một phép chuyển tới $n = 0$.

Với $n > 1$. Một phép ghi $X$ vào ô ở một trong hai đầu dòng là tương ứng loại trừ hai quân ở đầu đó khỏi cọc. Đặt $X$ tại ô cách ô ở một trong hai đầu với khoảng cách là một ô thì tương đương loại trừ ba quân ở đầu đó khỏi cọc. Đặt $X$ tại ô không phải ô ở hai đầu (và không phải tại ô kề ô $X$ đã có) tương đương loại trừ ba quân ở đầu đó khỏi cọc và chia cọc thành hai cọc mới. Vậy quy luật di chuyển trong trò chơi này là:

(1) Nếu cọc chỉ có một quân thì loại bỏ quân này;

(2) Có thể loại bỏ hai quân;

(3) Có thể loại bỏ ba quân;

(4) Chia cọc đó thành hai cọc có tổng số quân giảm đi 3.

Giả sử đã tính được giá trị hàm Sprague-Grundy của các cọc 0, 1, 2, ..., 9. Bây giờ cần tính $g(11)$. Với quy luật trên, từ cọc 11 sẽ đi tới cọc 9, cọc 8, hai cọc (1, 7), hai cọc (2, 6), hai cọc (3, 5) và hai cọc (4, 4). Cọc 9 cũng có thể coi như hai cọc (−1, 9), cọc 8 coi như hai cọc (0, 8) và quy ước thêm $g(-1) = 0$ thì ta có thể dễ viết công thức tính $g(11)$ là số nguyên không âm nhỏ nhất chưa có trong các số $g(a) \oplus g(b)$ mà $a + b = 11 - 3 = 8$.

| $a$ | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(a)$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | 3 |
| $g(b)$ | 3 | 0 | 1 | 1 | 3 | 0 | 2 | 1 | 1 | | |
| $b$ | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | |

Vậy các giá trị mà $g(a) \oplus g(b)$ (với $a + b = 8$) là: 3, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0 nên $g(11) = 2$.

TREBLECROSS.PAS ✓ Tính giá trị hàm Sprague- Grundy

```
uses crt;
var g,c : array[-1..1000] of integer;
 n,k : integer;
procedure tinh(m: integer);
var i, j, k : integer;
begin
 i:=-1; j:= m-i-3;
 while i<=j do
  begin
   c[g[i] xor g[j]] := 1;
   inc(i); dec(j);
  end;
 i:= 0;
 while c[i]=1 do inc(i);
 g[m] := i;
end;
BEGIN
 clrscr; n := 100;
 g[-1] := 0; write(g[-1]:4); g[0] := 0; write(g[0]:4);
 g[1] := 1; write(g[1]:4); g[2] := 1; write(g[2]:4);
 for k:=3 to n do
  begin
   fillchar(c, sizeof(c),0);
   tinh(k); write(g[k]:4);
  end;
 readln;
END.
```

***Ví dụ 4.*** Xét trò chơi Nim một cọc với quy luật chuyển ít nhất là một quân và nhiều nhất là nửa số quân trên cọc (*At-Most-Half*). Viết chương trình xây dựng hàm Sprague-Grundy với trò chơi này.

**Input.** Tệp *vidu4.inp* gồm 10 dòng mỗi dòng là một giá trị của $n$ ($1 \leq n \leq 10000$).

**Output.** Tệp *vidu4.out* gồm 10 dòng cho biết giá trị hàm SG tại vị trí ban đầu $n$ của dòng tương ứng trong tệp *vidu4.inp*.

ATMOSTHALF.PAS ✓ Tính giá trị hàm Sprague- Grundy

```
uses crt;
const max = 10000;
f1 = 'vidu3.inp'; f2 = 'vidu3.out';
```

```
type mang = array[0..max] of longint;
var v,g : mang;
n : longint;
fi,fo : text;
procedure sg;
var i,j,k : longint;
begin
for i:=0 to max do g[i] := 0;
g[0] := 0;
for i:=2 to max do
begin
for j:=0 to max do v[j] := 0;
for k:=1 to (i div 2) do v[g[i-k]] := 1;
k:= 0;
while v[k]=1 do inc(k);
g[i] := k;
end;
end;
BEGIN
sg;
assign(fi, f1); reset(fi);
assign(fo, f2); rewrite(fo);
while not eof(fi) do
begin
readln(fi, n);
writeln(fo, g[n]);
end;
close(fi); close(fo);
END.
```

## 4. *Các trò chơi lật xu*

### a) Lật xu một chiều

*Phát biểu.* Cho một hàng gồm hữu hạn đồng xu đặt ngửa hoặc sấp. Một lượt đi là một thao tác đổi trạng thái ngửa thành sấp hoặc ngược lại của toàn bộ các đồng xu thuộc một tập các đồng xu thoả mãn các luật quy định của từng trò chơi. Trò chơi kết thúc khi các đồng xu đều sấp. Ai được thực hiện bước lật cuối cùng thì người đó chiến thắng. Trò chơi lật rùa (Turning Turtles) cũng là một dạng của trò chơi lật xu.

Chú ý rằng một trạng thái với $k$ đồng xu ngửa tại vị trí $x_1,...,x_k$ có thể coi là tổng của $k$ trò chơi $j$ ($j=\overline{1..k}$). Mỗi trò chơi $j$ được mô tả là một dãy $x_j$ đồng xu trong đó các đồng xu từ 1 đến $x_{j-1}$ đặt sấp và đồng xu thứ $x_j$ đặt ngửa. Ví dụ với trạng thái *SNNSSN* (*S* kí hiệu cho sấp và *N* kí hiệu cho ngửa) là tổng của ba trò chơi *SN*, *SSN* và *SSSSSN*. Vì thế:

$$g(SNNSSN) = g(SN) \oplus g(SSN) \oplus g(SSSSSN).$$

***Ví dụ 1.*** Trò chơi *Twins*

Quy luật chơi là phải lật đúng hai đồng xu trong đó đồng xu bên phải đang ngửa bị lật thành sấp, đồng xu thứ hai là một trong các đồng xu bên trái của đồng xu thứ nhất và phải lật thành ngửa. Nếu ta đánh số các đồng xu từ 1 thì hàm $g(x) = x$ vì từ vị trí $x$ có thể đi đến các vị trí từ 0 đến $x-1$ (vị trí 0 quy ước là trạng thái các đồng xu đều sấp).

***Ví dụ 2.*** Trò chơi *Mock Turtles*

*Phát biểu.* Có một hàng đồng xu, phép di chuyển là lật một nhóm tối đa ba đồng xu với điều kiện đồng xu bên phải nhất của nhóm đang ngửa. Khi mọi đồng xu đều sấp là kết thúc.

*Phân tích.* Vị trí kết thúc là mọi đồng xu đều sấp. Kí hiệu vị trí này là $-1$, thì $g(-1) = 0$. Để thuận tiện cho tính toán ta đánh dấu các đồng xu từ 0. Với đồng xu ngửa tại 0 thì rõ ràng với $g(0) = 1$ vì lật sấp nó sẽ đến vị trí kết thúc. Đồng xu ngửa tại vị trí 1 có thể đi đến vị trí ngửa tại 0 (úp xu 1, lật ngửa xu 0) hoặc vị trí kết thúc (úp xu 1) nên giá trị $g(1) = 2$. Vị trí ngửa 2 có thể đi đến vị trí ngửa 1, hoặc vị trí ngửa 0, hoặc các vị trí có 2 xu ngửa tại 0 và 1 ($g(0, 1) = g(0) \oplus g(1) = 3$) nên $g(2) = 4$. Tương tự ta có được bảng giá trị:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 1 | 2 | 4 | 7 | 8 | 11 | 13 | 14 | 16 | 19 | 21 | 22 | 25 | 26 | 28 | ... |

Khi nhìn vào bảng trên, dự đoán giá trị $g(x)$ thấy $g(x) = 2x$ hoặc $2x+1$. Người ta phát hiện rằng giá trị đó phụ thuộc vào số lượng số 1 trong khai triển nhị phân của $2x$. Một số tự nhiên được gọi là bit lẻ nếu số bit 1 trong khai triển nhị phân là lẻ và gọi là bit chẵn trong trường hợp ngược lại. Chẳng hạn, số 1, 2, 4, 7 là bit lẻ do khai triển nhị phân tương ứng là 1, 10, 100, và 111. Các giá trị 0, 3, 5 là bit chẵn vì khai triển nhị phân tương ứng là 0, 11, 101. Có thể chứng minh $g(x) = 2x$ nếu $2x$ là bit lẻ và $g(x) = 2x+1$ trong trường hợp $2x$ là bit chẵn.

***Ví dụ 3.*** Trò chơi *Ruler*

Cho một hàng gồm $n$ đồng xu. Một lượt đi có thể lật một nhóm gồm số đồng xu liên tiếp nếu đồng xu bên phải nhất của nhóm đang ngửa. Nếu chúng ta đánh số các đồng xu từ 1, dễ thấy hàm SG là:

$$g(n) = \max\{0, g(n-1), g(n-1) \oplus g(n-2), ..., g(n-1) \oplus g(n-2) ... \oplus g(1)\}.$$

Từ đó có thể tính được hàm $g$ như sau:

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 1 | 2 | 1 | 4 | 1 | 2 | 1 | 8 | 1 | 2 | 1 | 4 | 1 | 2 | ... |

### b) Trò chơi tích

Trò chơi $G$ được gọi là trò chơi tích của các trò chơi thành phần $G_1, G_2, \ldots, G_n$ nếu mỗi bước di chuyển trong $G$ phải chơi đồng thời tất cả các trò chơi thành phần.

Giả sử chúng ta có $n$ đồ thị trò chơi là $G_1 = (X_1, F_1)$, $G_2 = (X_2, F_2)$, ..., $G_n = (X_n, F_n)$. Nếu chơi đồng thời cả $n$ trò chơi này thì chúng ta tổ hợp chúng thành đồ thị trò chơi mới là: $G = (X, F)$. Kí hiệu $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$. Đồ thị $G$ có: Tập đỉnh $X$ là một tích Đề-các $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ gồm tất cả các bộ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ với $x_i \in X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Với mỗi đỉnh $x \in X$, tập các đỉnh theo sau $x$ là:

$$F(x) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \{(F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots, F_n(x_n))\}.$$

### c) Lật xu hai chiều

Đây là trò chơi thực hiện trên một bảng hai chiều (hàng và cột được đánh số từ 0). Có một số đồng xu được đặt tại một số ô của bảng. Một lượt đi là lật đồng xu tại ô $(x, y)$ từ ngửa thành sấp và lật một hoặc nhiều đồng xu khác trong hình chữ nhật $\{(0, 0), (x, y)\}$ có góc trái trên là ô $(0, 0)$ và góc phải dưới là ô $(x, y)$.

***Ví dụ.*** Trò chơi lật xu bốn góc *Turning Corners*

Một lần đi là lật bốn đồng xu tại bốn góc của một hình chữ nhật $\{(a,b),(x,y)\}$ thoả mãn $0 \le a < x$, $0 \le b < y$. Đồng xu tại vị trí $(x, y)$ đang ngửa được lật thành sấp, ba đồng xu kia đang sấp được lật thành ngửa. Hàm Sprague-Grundy:

$$g(x,y) = \max\{g(x,b) \oplus g(y,a) \oplus g(a,b) : 0 \le a < x,\ 0 \le b < y\}.$$

Sở dĩ có công thức trên vì trên bảng hai chiều ứng với mỗi ô $(x, y)$ có xu ngửa là một trò chơi lật xu hai chiều chỉ có xu tại $(x, y)$ là ngửa, còn các xu khác đều sấp. Với điều kiện hình chữ nhật không rỗng thì $g(x,0) = g(0,y) = 0$, $g(1,1) = 1$ và $g(x,1) = \max\{g(a,1) : 0 \le a < x\} = x$; $g(1,y) = \max\{g(1,b) : 0 \le b < y\} = y$.

Bảng sau đây cho các giá trị SG của các vị trí $(x, y)$ trong trò chơi này.

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | $\boxed{3}$ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 2 | 0 | 2 | 3 | 1 | 8 | 10 | 11 | 9 | 12 | 14 | 15 | 13 | 4 | 6 | 7 | 5 |
| 3 | 0 | 3 | $\boxed{1}$ | 2 | 12 | 15 | 13 | 14 | 4 | 7 | 5 | 6 | 8 | 11 | 9 | 10 |
| 4 | 0 | 4 | 8 | 12 | $\boxed{6}$ | 2 | 14 | 10 | 11 | 15 | 3 | 7 | 13 | 9 | 5 | 1 |
| 5 | 0 | 5 | 10 | 15 | 2 | 7 | 8 | 13 | 3 | 6 | 9 | 12 | 1 | 4 | 11 | 14 |
| 6 | 0 | 6 | 11 | 13 | 14 | 8 | 5 | 3 | 7 | 1 | 12 | 10 | 9 | 15 | 2 | 4 |
| 7 | 0 | 7 | 9 | 14 | 10 | 13 | 3 | 4 | 15 | 8 | 6 | 1 | 5 | 2 | 12 | 11 |
| 8 | 0 | 8 | 12 | 4 | 11 | 3 | 7 | 15 | 13 | 5 | 1 | 9 | 6 | 14 | 10 | 2 |
| 9 | 0 | 9 | 14 | 7 | 15 | 6 | 1 | 8 | 5 | 12 | 11 | 2 | 10 | 3 | 4 | 13 |
| 10 | 0 | 10 | 15 | 5 | 3 | 9 | 12 | 6 | 1 | 11 | 14 | 4 | 2 | 8 | 13 | 7 |
| 11 | 0 | 11 | 13 | 6 | 7 | 12 | 10 | 1 | 9 | 2 | 4 | 15 | 14 | 5 | 3 | 8 |
| 12 | 0 | 12 | 4 | 8 | 13 | 1 | 9 | 5 | 6 | 10 | 2 | 14 | 11 | 7 | 15 | 3 |
| 13 | 0 | 13 | 6 | 11 | 9 | 4 | 15 | 2 | 14 | 3 | 8 | 5 | 7 | 10 | 1 | 12 |
| 14 | 0 | 14 | 7 | 9 | 5 | 11 | 2 | 12 | 10 | 4 | 13 | 3 | 15 | 1 | 8 | 6 |
| 15 | 0 | 15 | 5 | 10 | 1 | 14 | 4 | 11 | 2 | 13 | 7 | 8 | 3 | 12 | 6 | 9 |

Xét trò chơi lật xu bốn góc với trạng thái ban đầu như bảng a) dưới đây:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *S* | *S* | *S* | *S* | *S* |
| *S* | *S* | *S* | ***N*** | *S* |
| *S* | *S* | *S* | *S* | *S* |
| *S* | *S* | ***N*** | $\boxed{S}$ | $\boxed{S}$ |
| *S* | *S* | *S* | $\boxed{S}$ | $\boxed{N}$ |

Bảng a) Vị trí ban đầu : $SG = 4$

→

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *S* | *S* | *S* | *S* | *S* |
| *S* | *S* | *S* | ***N*** | *S* |
| *S* | *S* | *S* | *S* | *S* |
| *S* | *S* | ***N*** | $\boxed{N}$ | $\boxed{N}$ |
| *S* | *S* | *S* | $\boxed{N}$ | $\boxed{S}$ |

Bảng b) Vị trí sau khi lật : $SG = 0$

Giá trị hàm *SG* ứng với trạng thái ban đầu của bảng là $3 \oplus 1 \oplus 6 = 4$, đây là vị trí *N*; có thể di chuyển đến vị trí *P* bằng cách lật bốn đồng xu tại bốn góc của hình chữ nhật $\{(3, 3), (4, 4)\}$. Giá trị hàm *SG* của vị trí mới là $3 \oplus 1 \oplus 2 \oplus 12 \oplus 12 = 0$.

### d) Tích Nim

Tích Nim là phép toán có kí hiệu là $\otimes$ thoả mãn những tính chất sau:

$$x \otimes 0 = 0 \otimes x = 0,$$
$$x \otimes 1 = 1 \otimes x = x,$$
$$x \otimes y = y \otimes x,$$
$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z),$$
$$x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z).$$

Tích Nim liên quan đến số có dạng $2^{2^n}$ gọi là số Ferma dạng luỹ thừa 2. Giá trị Ferma với $n = 0, 1, 2, \ldots$ tương ứng là 2, 4, 16, 256, 65536. Dựa vào số Ferma, tìm kết quả phép tích Nim như sau:

$$2^{2^n} \otimes x = 2^{2^n} \times x \text{ với mọi } x < 2^{2^n}$$

$$2^{2^n} \otimes 2^{2^n} = \frac{3}{2} \times 2^{2^n}.$$

Mọi giá trị $x$ lớn hơn 0 đều có giá trị nghịch đảo. Ví dụ nghịch đảo của 2 là 3 vì $2 \otimes 3 = 2 \otimes (2 \oplus 1) = (2 \otimes 2) \oplus (2 \otimes 1) = 3 \oplus 2 = 1$.

***Ví dụ 1***

$2 \otimes 16 = 32;$

$16 \otimes 16 = \frac{3}{2} \times 16 = 24;$

$$24\otimes 17=(16\oplus 8)\otimes(16\oplus 1)=(16\otimes 16)\oplus(16\otimes 1)\oplus(8\otimes 16)\oplus(8\otimes 1)$$
$$=24\oplus 16\oplus 128\oplus 8=128;$$

$$5\otimes 6=5\otimes(2\oplus 4)=(2\otimes 5)\oplus(4\otimes 5)=(2\otimes(1\oplus 4))\oplus(4\otimes(1\oplus 4))$$
$$=(1\otimes 2)\oplus(2\otimes 4)\oplus(1\otimes 4)\oplus(4\otimes 4)=2\oplus 8\oplus 4\oplus 6=8.$$

Trong trường hợp chúng ta không thể phân tích $x$ thành tổng Nim của các số nhỏ hơn thì có thể phân tích $x$ thành tích Nim của các số nhỏ hơn.

***Ví dụ 2***

$$8\otimes 8=(2\otimes 4)\otimes(2\otimes 4)=2\otimes 2\otimes 4\otimes 4=3\otimes 6=(2\oplus 1)\otimes(4\oplus 2)$$
$$=(2\otimes 4)\oplus(2\otimes 2)\oplus(1\otimes 4)\oplus(1\otimes 2)=8\oplus 3\oplus 4\oplus 2=13;$$

$$3\otimes(5\otimes 6)=3\otimes 8=3\otimes(2\otimes 4)=(3\otimes 2)\otimes 4=1\otimes 4=4.$$

Có nhiều trò chơi có thể giải dựa vào tích Nim.

***Ví dụ 3.*** Trò chơi *Tartan*

Cho hai trò chơi lật xu một chiều là $G_1$ và $G_2$. Trò chơi Tartan là trò chơi lật xu trên bảng hai chiều hay là trò chơi tích $G_1\times G_2$ của các trò chơi $G_1$ và $G_2$ được mô tả như sau: nếu một lượt đi đúng luật trong $G_1$ là cách lật các đồng xu tại $x_1,...,x_m$ và một lượt đi đúng luật trong $G_2$ là cách lật các đồng xu $y_1,...,y_n$ thì cách lật các đồng xu tại các vị trí $(x_i,y_j)$, $i=\overline{1..m}, j=\overline{1..n}$ là một cách đi hợp lệ trong trò chơi tích $G_1\times G_2$. Giải trò chơi này, dựa vào định lí sau:

***Định lí Tartan***

> *Nếu $g_1(x)$ và $g_2(y)$ là hàm Sprague-Grundy của trò chơi $G_1$ và $G_2$ thì hàm $g(x,y)$ của trò chơi $G_1\times G_2$ có giá trị là:* $g(x,y)=g_1(x)\otimes g_2(y)$.

***Ví dụ 4.*** Trò chơi tích $G=G_1\times G_2$ với $G_1$ và $G_2$ là các trò lật xu một chiều *Twins* (mỗi lần lật đúng hai xu). Lật một đồng xu bất kì tại $(x,y)$ là một phép di chuyển trong trò chơi tích $G_1\times G_2$: lật đồng xu $x$ trong $G_1$ và lật đồng xu $y$ trong $G_2$.

Ta có hàm $g$ của trò chơi Twins là: $g(x)=x,\ x\geq 1$ (*chú ý bắt đầu từ 1*).

Với vị trí như bảng a), ta tính giá trị *SG* của vị trí này bằng tích Nim như sau:

Ô (1, 3) trong $G_1 \times G_2$ = (trò chơi *Twins*) × (trò chơi *Twins*) tương ứng với vị trí 2 trong $G_1$ và vị trí 4 trong $G_2$: nên có $g(1, 3) = g_1(2) \otimes g_2(4) = 2 \otimes 4 = 8$, tương tự $g(3, 2) = g_1(4) \otimes g_2(3) = 4 \otimes 3 = 12$, $g(4, 4) = g_1(5) \otimes g_2(5) = 5 \otimes 5 = 7$. Do đó vị trí của bảng a) có giá trị là $8 \oplus 12 \oplus 7 = 3$ đó là vị trí $N$. Một cách di chuyển đến vị trí $P$ là lật liên tiếp bốn đồng xu tại vị trí (4, 4), (1, 2), (1, 4) và (4, 2) sẽ có hàm $SG = 1 \oplus 10 \oplus 15 = 4$ khi đó bảng a) thành bảng b) và vị trí bảng b) có $SG = 8 \oplus 12 \oplus 4 = 0$.

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 0 | 2 | 3 | 1 | 8 | 10 |
| 3 | 0 | 3 | 1 | 2 | 12 | 15 |
| 4 | 0 | 4 | 8 | 12 | 6 | 2 |
| 5 | 0 | 5 | 10 | 15 | 2 | 7 |

Bảng tích Nim

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | S | S | S | S | S |
| 1 | S | S | S | N | S |
| 2 | S | S | S | S | S |
| 3 | S | S | N | S | S |
| 4 | S | S | S | S | N |

Vị trí bảng a) có $SG = 3$

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | S | S | S | S | S |
| 1 | S | S | N | N | N |
| 2 | S | S | S | S | S |
| 3 | S | S | N | S | S |
| 4 | S | S | N | S | S |

Vị trí bảng b) có $SG = 0$

*Chú ý.* Với bài toán tổng quát, không dễ dàng thực hiện được cách đi chiến thắng vì số lượng vị trí $y$ đi đến được từ mỗi vị trí $x$ có thể rất lớn.

***Ví dụ 5.*** Trò chơi $G = G_1 \times G_2$ với $G_1$ và $G_2$ đều là trò chơi *Mock Turtles*. Vị trí ban đầu chỉ có hai ô có xu ngửa ($N$) còn các ô khác là sấp ($S$). Tìm di chuyển tối ưu.

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $S$ | $N$ | $S$ | $S$ | $S$ | $S$ |
| 1 | $S$ | $S$ | $S$ | $S$ | $S$ | $S$ |
| 2 | $S$ | $S$ | $S$ | $S$ | $S$ | $S$ |
| 3 | $S$ | $S$ | $S$ | $S$ | $S$ | $S$ |
| 4 | $S$ | $S$ | $S$ | $S$ | $S$ | $N$ |

*Bước 1.* Tính giá trị $SG$ của vị trí ban đầu:

Dựa vào giá trị $SG$ của trò chơi *Mock Turtles*:

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{nếu } 2x \text{ là bit lẻ} \\ 2x+1 & \text{nếu } 2x \text{ là bit chẵn.} \end{cases}$$

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 1 | 2 | 4 | 7 | $\boxed{8}$ | $\boxed{11}$ | 13 | 14 | 16 | 19 | 21 | 22 | 25 | 26 | 28 | ... |

và bảng tích Nim, có thể tạo bảng $SG$ cho trò chơi $G = G_1 \times G_2$ này như sau:

| | 1 | 2 | 4 | 7 | 8 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 1 | 2 | 4 | 7 | 8 | 11 |
| **2** | 2 | 3 | 8 | 9 | 12 | 13 |
| **4** | 4 | 8 | 6 | 10 | 11 | 7 |
| **7** | 7 | 9 | 10 | 4 | 15 | 1 |
| **8** | 8 | 12 | 11 | 15 | 13 | [redacted] |

Có thể thấy rằng hai ô ngửa là ô (0, 1) có $SG = g_1(0) \otimes g_2(1) = 1 \otimes 2 = 2$ và ô (4, 5) có $SG = g_1(4) \otimes g_2(5) = 8 \otimes 11 = 9$, suy ra $SG$ của bảng là $2 \oplus 9 = 11$. Suy ra, bước đi chiến thắng là biến đổi ô (4, 5) sao cho $SG$ từ 9 thành 2. Tuy nhiên không dễ để tìm ra cách biến đổi này (có 176 cách khác nhau).

*Bước 2.* Biến đổi ô $(x, y) = (4, 5)$ sao cho $SG$ từ 9 thành 2: Tại ô (4, 5) có $SG = v_1 \otimes v_2$ mà $(v_1, v_2) = (8,\ 11)$ trong đó $v_1 = g_1(x)$, $v_2 = g_2(y)$. Ta cần tìm $(u_1, u_2)$ mà trong $G_1$ có $u_1$ là giá trị của vị trí mới sau di chuyển từ vị trí $x$, trong $G_2$ có $u_2$ là giá trị của vị trí mới sau di chuyển từ vị trí $y$ với $u_1 < v_1$ và $u_2 < v_2$, đồng thời thoả mãn:

$$(u_1 \otimes u_2) \oplus (u_1 \otimes v_2) \oplus (v_1 \otimes u_2) = 2.$$

Một khả năng là $(u_1, u_2) = (3,\ 10)$ do

$$(3 \otimes 10) \oplus (3 \otimes 11) \oplus (8 \otimes 10) = 5 \oplus 6 \oplus 1 = 2$$

(cũng có thể là (1, 1) nhưng do cách đi này không mô tả được cho phương pháp cần tìm nên không chọn).

*Bước 3.* Tìm cách di chuyển cụ thể để chuyển giá trị hàm $g_1$ từ 8 thành 3 (trong $G_1$) và chuyển giá trị hàm $g_2$ từ 11 thành 10 (trong $G_2$). Để chuyển giá trị hàm $g_1$ từ 8 thành 3 (trong $G_1$) có thể lật xu tại 0, 1 và 4 vì

$g_1(0) \oplus g_2(1) = 1 \oplus 2 = 3$. Để chuyển $g_2$ từ 11 về thành 10 (trong $G_2$), ta lật xu tại 1, 4 và 5 vì $g_2(1) \oplus g_2(4) = 2 \oplus 8 = 10$.

Do đó trong trò chơi $G = G_1 \times G_2$ cần di chuyển 9 đồng xu tại các vị trí thuộc tích $\{0, 1, 4\} \times \{1, 4, 5\}$. Sau di chuyển sẽ tới vị trí như bảng sau:

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | S | S | S | S | N | N |
| 1 | S | N | S | S | N | N |
| 2 | S | S | S | S | S | S |
| 3 | S | S | S | S | S | S |
| 4 | S | N | S | S | N | S |

Kiểm tra lại ta sẽ thấy hàm $SG$ tại vị trí này bằng 0.

*Tổng quát giải bài toán Tartan.* Giả sử chúng ta đang đứng tại vị trí $(x, y)$ của trò chơi tích $G_1 \times G_2$ với $SG$ là $g(x, y) = g_1(x) \otimes g_2(y) = v$. Kí hiệu $v_1 = g_1(x)$, $v_2 = g_2(y)$ và $v = (v_1, v_2)$. Cần di chuyển đến vị trí mới có $SG$ là $u = (u_1, u_2)$ trong đó $u_1 = g_1(x')$ mà $x'$ là vị trí sau $x$ trong $G_1$, $u_2 = g_2(y')$ mà $y'$ là vị trí sau $y$ trong $G_2$. Thực hiện các bước sau:

*Bước 1.* Tìm cặp $(u_1, u_2)$ sao cho: $(u_1 \otimes u_2) \oplus (u_1 \otimes v_2) \oplus (v_1 \otimes u_2) = u$.

*Bước 2.* Tìm tập $M_1$ trong $G_1$ biến giá trị $g_1(x) = v_1$ thành giá trị $u_1$ với $u_1 < v_1$.

*Bước 3.* Tìm tập $M_2$ trong $G_2$ biến giá trị $g_2(y) = v_2$ thành giá trị $u_2$ với $u_2 < v_2$.

Lúc đó $M_1 \times M_2$ là tập cách đi trong $G_1 \times G_2$ để tới vị trí có giá trị $SG$ là $u$.

## Bài tập

**9.1.** Xem xét trò chơi *Lấy bớt quân cờ* nhưng với quy định người có lượt lấy cuối cùng thì thua. Phân tích xem tập $P$ là tập nào?

**9.2.** Tìm tập hợp các vị trí $P$ đối với trò chơi trừ dần, nếu tập trừ là:

a) $S = \{1, 3, 5, 7\}$;

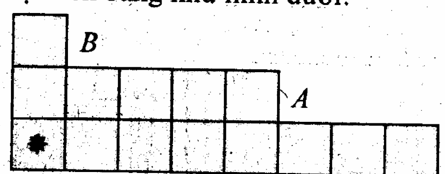
b) $S = \{1, 3, 6\}$;

c) $S = \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$ là tập các luỹ thừa của 2.

**9.3.** ***Trò chơi Chomp!*** (Bẻ miếng sôcôla)

Cần di chuyển những ô vuông trong bảng hình chữ nhật gồm $m \times n$ ô vuông. Mỗi phép di chuyển là lấy đi một ô vuông và các ô vuông ở bên phải nó cùng các ô vuông phía trên chúng. Hai người chơi lần lượt di chuyển, người nào chọn phải ô (1, 1) thì thua cuộc (ô này coi như bị nhiễm độc!).

Ví dụ chơi với bảng 3×8. Người $A$ lấy đi ô (6, 2) cùng các ô bên phải và các ô phía trên (lấy đi một hình chữ nhật có tất cả sáu ô). Sau đó người $B$ lấy ô (2, 3) và các ô bên phải (lấy đi hình chữ nhật có tất cả bốn ô). Khi đó các ô vuông còn lại trên bảng như hình dưới:




a) Tìm ra một phép chuyển tiếp theo giành thắng cho $A$.

b) Có thể chứng minh $A$ có thuật thắng trong bảng tổng quát $m \times n$ ô vuông hay không?

**9.4.** ***Trò chơi Phép trừ động***

Có thể mở rộng thêm lớp trò chơi trừ dần bằng cách tạo ra tập trừ $S$ phụ thuộc vào lần di chuyển trước của đối thủ.

Có một cọc $N$ thẻ, người chơi đầu tiên có thể lấy bao nhiêu thẻ tuỳ ý nhưng ít nhất là một thẻ và không được lấy tất cả. Sau đó, đến lượt người kia và hai người thay nhau lần lượt chơi, mỗi người chơi không được phép lấy số thẻ nhiều hơn số thẻ mà đối thủ vừa lấy.

a) Người thứ nhất di chuyển như thế nào để thắng nếu số thẻ là $N = 44$.

b) Với giá trị nào của $N$ thì người chơi sau thắng?

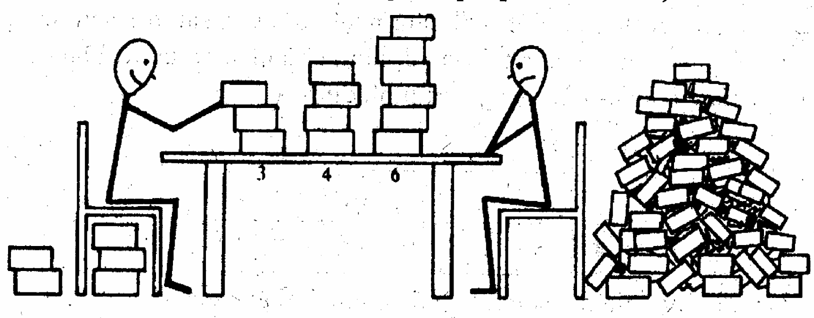
**9.5.** ***Trò chơi Fibonacci Nim***

Có một cọc $N$ thẻ, người chơi đầu tiên có thể lấy bao nhiêu thẻ tuỳ ý nhưng ít nhất là một thẻ và không được lấy tất cả. Hai người chơi lần lượt, mỗi người chơi có thể lấy số thẻ nhiều nhất bằng hai lần số thẻ mà đối thủ lấy trong lượt đi trước. Hạn chế: $1 < N \leq 100$.

Lập trình tìm chiến thuật thắng.

## 9.6. *Trò chơi Porker Nim*

Đây là trò chơi với các cọc là các chồng hộp gỗ. Cũng như trò NIM chuẩn, ngoại trừ một điều là có thể giảm kích thước của một vài cọc và phép di chuyển là có thể giảm hoặc tăng thêm kích thước của một vài cọc bằng các hộp gỗ đã chiếm được trong các bước di chuyển trước. Trong hình vẽ dưới đây là trò chơi ở thời điểm ba chồng hộp gỗ có kích thước là 3, 4 và 6 sau khi hai người chơi đã di chuyển một số bước và thu đã được một số hộp. Bây giờ đến lượt đấu thủ bên trái (gọi là $A$). Vậy chiến thuật của $A$ như thế nào để thắng (nếu trò chơi không cho phép kéo dài mãi)?

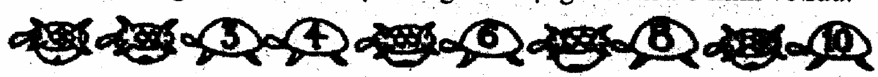



## 9.7. *Trò chơi Lật Rùa (Turning Turtles)*

Trên đường thẳng nằm ngang có $n$ con rùa ngẫu nhiên đang bò hoặc đang nằm ngửa. Một phép chuyển là lật một con rùa đang bò thành nằm ngửa và nếu muốn còn có thể lật một con rùa khác ở bên trái nó (đang bò thành nằm ngửa hoặc đang nằm ngửa thành đang bò). Người chơi nào có phép di chuyển cuối cùng thì thắng.

a) Chứng tỏ rằng trò chơi này là Nim nếu mỗi con rùa đang bò ở vị trí $n$ là một cọc có $n$ quân.

b) Nếu a) đúng, tìm chiến thuật thắng cho trạng thái nêu ở hình vẽ sau:




## 9.8. *Trò chơi Moore's Nim$_k$*

Có $n$ cọc với số quân tương ứng là $x_1, x_2, \ldots, x_n$ và quá trình chơi như trong Nim nhưng một phép chuyển là người chơi có thể chuyển số quân tuỳ ý từ $k$ cọc bất kì ($k$ là số cố định cho trước) và ít nhất phải có một quân chuyển đi từ một cọc nào đó.

Trò chơi $Nim_k$ với $k = 1$ chính là trò chơi Nim chuẩn với $n$ cọc. Để giải trò chơi này chúng ta áp dụng định lí sau:

***Định lí Moore***

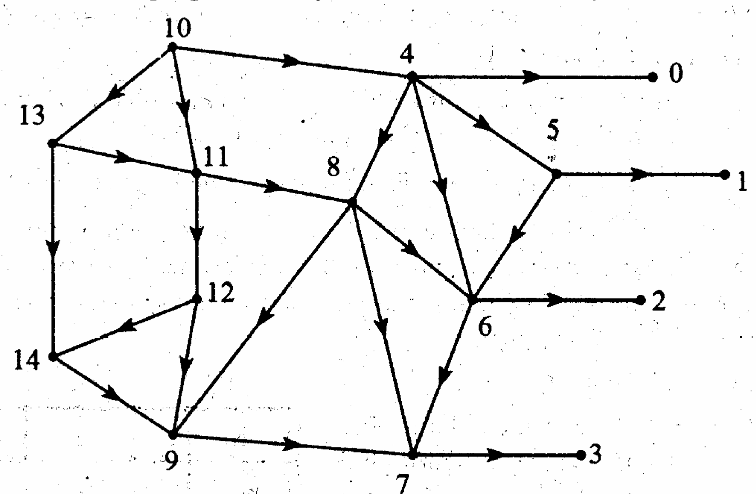
> *Vị trí ($x_1, x_2, ..., x_n$) là vị trí P trong $Nim_k$ khi và chỉ khi $x_1, x_2, ..., x_n$ viết dưới dạng cơ số 2 trong phép cộng không nhớ theo môđun (k+1) cho kết quả bằng 0. Nói cách khác số các số 1 ở mỗi cột trong phép cộng này đều chia hết cho k+1.*

Hãy lập trình trò chơi $Nim_k$ giữa máy và người, cho máy đi trước.

**Input:** Tệp *bai9_8.inp*. Mỗi dòng cho một cấu hình của trò chơi: đầu dòng là số $k$ nguyên dương sau đó là $n$ số nguyên dương thể hiện số quân trên $n$ cọc ($1 \le k \le n$).

**Output:** Tệp *bai9_8.out* có số dòng tương ứng. Đầu mỗi dòng ghi số 1 hoặc 0 thể hiện máy có thể đạt chiến thắng hoặc không chắc thắng, nếu ghi số 1 thì sau đó ghi ra n số thể hiện số quân còn lại trên các cọc 1, 2, ..., $n$ sau bước đi thứ nhất của máy.

**9.9.** Tính giá trị hàm Sprague-Grundy tại các đỉnh của đồ thị sau:




**9.10.** Tìm hàm Sprague-Grundy cho trò chơi trừ dần với tập trừ

a) $S = \{1,3,4\}$;

b) $S$ là tập các số nguyên tố lẻ;

c) $S$ là tập các số nguyên tố;

d) $S$ là tập các số Fibonacci;

e) $S$ là tập các số Lucas.

Số Lucas được định nghĩa đệ quy:

$$L_1 = 1, L_2 = 3, L_{i+2} = L_{i+1} + L_i \ (i = 1, 2, \ldots).$$

**9.11.** Trò chơi *At-Most-Haft* là trò chơi trên một cọc với quy luật phải chuyển ít nhất là một quân và nhiều nhất là nửa số quân trên cọc (tất nhiên vị trí kết thúc là 0 hoặc 1). Xây dựng hàm Sprague-Grundy với trò chơi này.

**9.12.** ***Trò chơi Dim⁺***

Giả sử có một cọc $n$ quân. Mỗi lần loại bỏ đi $c$ quân từ cọc với điều kiện $c$ là ước của $n$ (kể cả 1 và $n$). Chỉ có một vị trí kết thúc là 0.

Tính hàm Sprague-Grundy.

**9.13.** ***Trò chơi Chẵn-Lẻ***

Cho một cọc chứa $n$ quân. Quy tắc chuyển quân khỏi cọc là: có thể bớt đi một số chẵn quân nhưng không phải là toàn bộ cọc hoặc có thể bớt đi toàn bộ cọc có số quân lẻ. Trò chơi có hai vị trí kết thúc là 0 và 2.

Chứng minh (quy nạp) công thức: $g(2k) = k - 1$; $g(2k - 1) = k$, với $k \geq 1$.

**9.14.** ***Trò chơi At-Least-Haft***

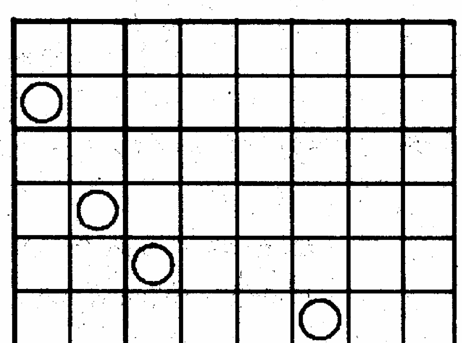
Trò chơi chỉ có một cọc mẫu với quy luật chơi là phải di chuyển ít nhất là một nửa số thẻ trên cọc. Vị trí kết thúc duy nhất là 0.

Chứng minh (quy nạp) giá trị hàm Sprague-Grundy $g(x) = \min\{k : 2^k > x\}$.

*Lưu ý.* Trò chơi này dành chiến thắng rất dễ dàng cho người thứ nhất (là lấy hết mọi quân ngay từ phép di chuyển đầu tiên). Nhưng việc tính hàm Sprague-Grundy có ý nghĩa phục vụ cho trò chơi tổng mà At-Least-Haft là một trò chơi thành phần.

**9.15.** ***Trò chơi Wythoff***

Trên bàn cờ vua kích thước 8×8 đặt một quân hậu. Hai người chơi với mỗi lượt đi là di chuyển quân hậu với số bước tuỳ ý theo hướng thẳng xuống, ngang sang trái, hoặc đi chéo xuống góc trái-dưới. Khi quân hậu đi đến góc trái-dưới thì trò chơi kết thúc.



Tìm hàm Sprague-Grundy của trò chơi.

**9.16.** Tìm phép chuyển tối ưu từ vị trí ban đầu cho trò chơi tổng của ba trò chơi:

- Trò chơi chẵn-lẻ với cọc 18 quân;
- Trò chơi *At-Least-Haft* với cọc 17 quân;
- Trò chơi Nim chuẩn một cọc 7 quân.

**9.17.** ***Trò chơi Grundy***

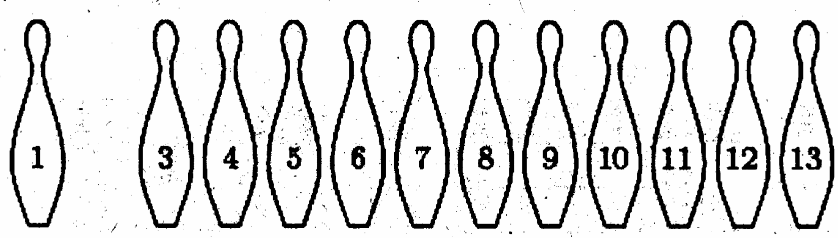
Trò chơi này có phép chuyển hợp lệ là chia một cọc thành hai cọc có kích thước khác nhau. Người nào có phép chuyển cuối cùng thì thắng (rõ ràng có hai vị trí kết thúc là cọc 1 quân và cọc 2 quân).

a) Tính giá trị hàm Sprague-Grundy cho trò chơi này khi cọc ban đầu có kích thước $n$ quân (với $n = 1, 2, 3, \ldots, 13$).

b) Xét trò chơi *Grundy* với ba cọc ban đầu có số quân là 5, 8 và 13. Tìm các phép chuyển tối ưu đầu tiên nếu có.

**9.18.** ***Trò chơi Kayler***

Có 13 quân bowing sắp thành một hàng, nhưng quân thứ hai đã bị hạ đổ (xem hình vẽ).

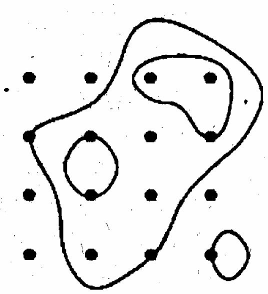



a) Chứng tỏ vị trí này là $N$.

b) Tìm phép chuyển chiến thắng. Khi đó quân bowing nào sẽ bị hạ?

**9.19.** ***Trò chơi Rims***

Một vị trí của trò chơi Rims là một tập hữu hạn chấm tròn trên mặt phẳng có thể bị ngăn cách bởi một vài đường vòng kín không cắt nhau. Một phép di chuyển là vẽ một vòng kín đi qua một vài chấm tròn nào đó (ít nhất là một điểm) nhưng không cắt các vòng khác. Hai người chơi lần lượt thực hiện di chuyển, người có phép chuyển cuối cùng là người chiến thắng.

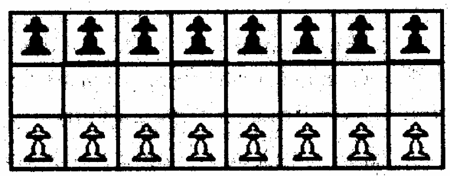


a) Chứng tỏ trò chơi này là một dạng của Nim;

b) Với vị trí cho như hình vẽ, tìm phép di chuyển chiến thắng nếu có.

## 9.20. *Trò chơi cờ Dawson*

Có hai hàng quân tốt đen và trắng đối diện nhau, cách nhau một hàng trống. Một quân tốt chỉ có thể đi lên một ô trống phía trước hoặc buộc phải bắt một quân của đối phương đã ở ô kề chéo bên trái hoặc bên phải của ô chứa quân tốt này.

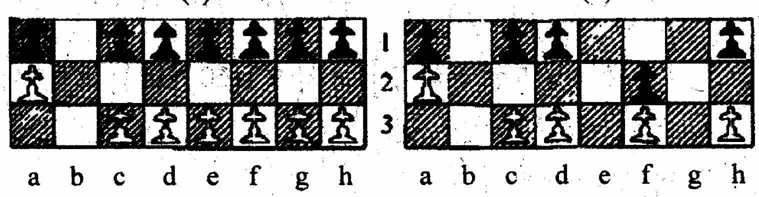


Tìm cách chơi để người chơi sau sẽ thắng.

*Ví dụ.* Nếu Trắng đi từ ô a3 đến ô a2 (kí hiệu a3-a2), Đen đi b1-a2 bắt quân Trắng ở a2, Trắng đi b3-a2 bắt quân đen tại a2. Có hình ảnh như hình (a): một cặp quân tốt bị loại và *đổi lượt đi.*

Bây giờ đến lượt Đen đi. Giả sử Đen đi f1-f2, Trắng e3-f2, Đen e1-f2, Trắng g3-f2, Đen g1-f2. Có kết quả như hình (b): hai cặp quân tốt bị loại và *đổi lượt đi.*

(a) (b)




Do vậy trò chơi này có thể coi là trò chơi trên một hàng có $n$ ô vuông để trống. Hai người chơi lần lượt ghi $X$ vào một ô trống không kề với ô đã có $X$. Người ghi chữ $X$ cuối cùng thắng.

Trò chơi này có thể mô tả như trò chơi trên một cọc có thể bỏ bớt các quân trên cọc hoặc chia cọc thành hai cọc. Nếu $n = 1$ có đúng một phép chuyển tới $n = 0$. Với $n > 1$. Một phép ghi $X$ vào ô ở một trong hai đầu dòng là tương ứng loại trừ hai quân ở đầu đó của cọc. Đặt $X$ tại ô cách ô ở một trong hai đầu khoảng cách một ô tương đương loại trừ ba quân khỏi cọc. Đặt $X$ tại ô không phải như hai loại trên (và không phải tại ô kề ô $X$ đã có) tương đương loại trừ ba quân khỏi cọc và chia cọc thành hai cọc mới. Vậy quy luật di chuyển trong trò chơi này là:

(1) Nếu cọc chỉ có một quân thì loại bỏ quân này;

(2) Có thể loại bỏ hai quân;

(3) Có thể loại bỏ ba quân;

(4) Chia cọc đó thành hai cọc có tổng số quân giảm đi 3.

Hãy tìm bước chuyển chiến thắng khi $n = 18$.

**9.21.** Lập chương trình tính tích Nim của hai số $x$ và $y$.

**9.22.** ***Trò chơi lật xu Twins***

Cho dãy $n + 1$ đồng xu đánh số từ 0 đến $n$, đồng xu $n$ ngửa, các đồng xu khác sấp. Một lượt đi là lật đồng xu ngửa thành sấp và một đồng xu khác tuỳ ý ở bên trái đang sấp thành ngửa.

Xây dựng hàm *SG* cho các vị trí của trò chơi này.

**9.23.** ***Trò chơi lật xu Ruler***

Cho một hàng gồm $n$ đồng xu, đánh số từ 1 đến $n$, đồng xu $n$ đang ngửa, còn các đồng xu khác thì sấp. Một lượt đi là lật đồng thời một số đồng xu với điều kiện các đồng xu là liên tiếp và đồng xu bên phải nhất đang ngửa bị lật thành sấp. Xây dựng hàm *SG* cho các vị trí trong trò chơi này.

**9.24.** ***Trò chơi Grunt***

Cho một hàng gồm $n + 1$ đồng xu, đánh số từ 0 đến $n$, đồng xu $n$ đang ngửa, còn các đồng xu khác thì sấp. Một lượt đi là lật bốn đồng xu có vị trí đối xứng qua vị trí chính giữa của đồng xu bên trái nhất và đồng xu bên phải nhất. Xây dựng hàm *SG* cho các vị trí trong trò chơi này.

**9.25.** ***Trò chơi Turning Corners***

Bàn cờ vuông kích thước $n \times n$ được chia thành các ô vuông và đánh toạ độ như sau: ô góc trên-phải có toạ độ (0; 0), hoành độ tăng dần từ trái qua phải, tung độ tăng dần từ trên xuống dưới. Trên mỗi ô vuông có thể đặt một đồng xu (ngửa hoặc sấp). Hai người chơi lần lượt. Một lượt đi là chọn một hình chữ nhật nhỏ trong bàn cờ có góc phải-dưới là $(x; y)$ mà đồng xu tại ô này đang ngửa và ba đồng xu ở ba góc còn lại của hình chữ nhật nhỏ này đang sấp. Sau đó người chơi cần lật đồng xu đang ngửa thành sấp và ba đồng xu ở ba góc còn lại của hình chữ nhật cần lật thành ngửa. Người chơi nào sấp được đồng xu cuối cùng thì thắng cuộc.

Lập trình cho biết trạng thái ban đầu của bàn cờ là *N* hay *P*? Nếu trạng thái là *N*, hãy tìm một bước đi chiến thắng.

**Input:** Tệp *Bai9_25.inp* chứa trạng thái ban đầu của bàn cờ:

- Dòng đầu tiên là số nguyên dương $n$;

- Tiếp theo là $n + 1$ dòng thể hiện bàn cờ, mỗi dòng có $n + 1$ số 0 hoặc 1 (số 0 thể hiện đồng xu sấp, số 1 thể hiện đồng xu ngửa).

**Output:** Tệp *Bai9_25.out*

- Dòng đầu ghi số 1 nếu trạng thái ban đầu của bàn cờ là $N$, ghi số 0 nếu trạng thái ban đầu là $P$.
- Nếu trạng thái ban đầu là $N$ thì dòng thứ hai ghi toạ độ $(x, y)$ ở góc phải-dưới của hình chữ nhật nhỏ trong bước đi chiến thắng. Hạn chế: $n < 21$.

## III. Trò chơi hai người có tổng điểm bằng 0

### *1. Mô tả*

#### a) Dạng chiến thuật

Mô hình toán học đơn giản của trò chơi *Hai người chơi có tổng điểm bằng 0* là bộ ba $(X, Y, A)$. Trong đó:

- $X$ là tập không rỗng, gọi là tập chiến thuật cho người thứ nhất;
- $Y$ là tập không rỗng, gọi là tập chiến thuật cho người thứ hai;
- $A$ là hàm lượng giá có giá trị thực, xác định trên tập $X \times Y$ (mỗi phần tử của tập là cặp $(x, y)$ mà $x \in X$ và $y \in Y$); với mỗi cặp $(x, y)$ xác định duy nhất một giá trị $A(x, y)$ là một số thực.

*Lưu ý.* Trong trò chơi này, với mỗi cặp $(x; y)$ hàm lượng giá điểm cho người thứ hai là giá trị đối của hàm lượng giá điểm cho người thứ nhất nên chỉ cần quan tâm tới hàm lượng giá tính điểm cho người thứ nhất (là $A$).

Hai người chơi phải *chọn đồng thời* chiến thuật của mình: người thứ nhất chọn $x \in X$ và người thứ hai chọn $y \in Y$. Sau sự lựa chọn của hai người, nếu $A(x, y) > 0$ thì người thứ nhất thắng $A(x, y)$ điểm từ người thứ hai, ngược lại nếu $A(x, y) < 0$ thì người thứ nhất phải trả $|A(x, y)|$ điểm cho người thứ hai.

#### b) Chiến thuật cân bằng

Để minh hoạ cho chiến thuật cân bằng, chúng ta xét trò chơi *Chẵn-Lẻ* như sau:

Quy ước gọi người thứ nhất là Lẻ, người thứ hai là Chẵn. Giả sử tập chiến thuật của người thứ nhất là $X = \{1, 2\}$, tập chiến thuật của người thứ hai là $Y = \{1, 2\}$. Hai người đồng thời chọn: người thứ nhất chọn $x \in X$, người thứ hai chọn $y \in Y$;

nếu $x + y$ lẻ thì người thứ nhất thắng $A(x, y) = x + y$ điểm, ngược lại nếu $x + y$ chẵn thì người thứ nhất nhận số điểm là $-(x + y)$ nghĩa là mất $(x + y)$ điểm. Vậy khi tính điểm cho người thứ nhất thì bảng điểm $A(x, y)$ như sau:

| | | Người thứ hai chọn $y$ bằng | |
|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 |
| Người thứ nhất chọn $x$ bằng | 1 | −2 | +3 |
| | 2 | +3 | −4 |

Giả sử người thứ nhất chọn chiến thuật "1" với tần suất $\frac{3}{5}$, chọn chiến thuật "2" với tần suất $\frac{2}{5}$ (chẳng hạn trong 1000 lần chơi, người thứ nhất có 600 lần chọn "1" và 400 lần chọn"2").

a) Nếu người thứ hai chọn "1" thì người thứ nhất sẽ mất $2\times\frac{3}{5}$ điểm và sẽ được $3\times\frac{2}{5}$ điểm trong một lần. Vậy trung bình một lần chọn người thứ nhất thu được $3\times\frac{2}{5}-2\times\frac{3}{5}=0$ (điểm).

b) Nếu người thứ hai chọn 2 thì người thứ nhất được $3\times\frac{3}{5}$ điểm và mất $4\times\frac{2}{5}$ điểm trong một lần. Vậy trung bình một lần chọn người thứ nhất thu được $3\times\frac{3}{5}-4\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}=0.2$ (điểm).

Người thứ nhất với sự lựa chọn như trên, sẽ hoà khi người thứ hai chọn "1" và sẽ thắng 0.2 điểm khi người thứ hai chọn "2". Vậy bằng chiến thuật người thứ nhất chọn "1" với tần suất $\frac{3}{5}$, chọn "2" với tần suất $\frac{2}{5}$, người thứ nhất luôn thắng, bất kể người thứ hai chọn "1" hay "2". Xét trường hợp tổng quát:

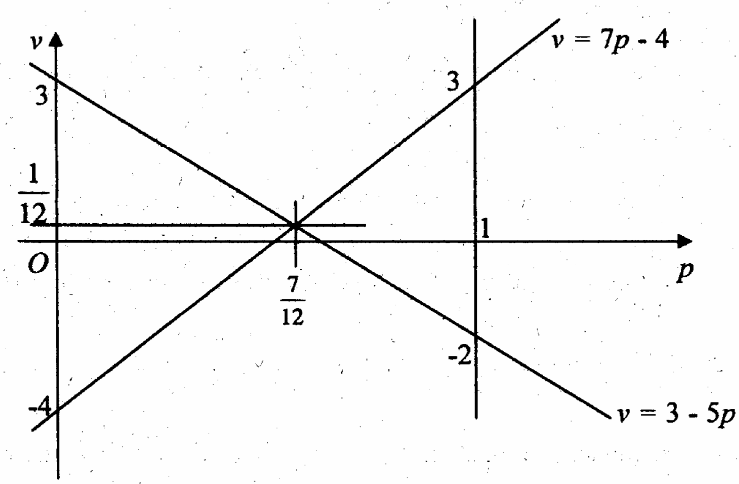
Giả sử tần suất chọn "1" của người thứ nhất là $p$, chọn "2" là $1 - p$ thì giá trị trung bình trả về cho người thứ nhất khi người thứ hai chọn "1" là

$$3(1 - p) - 2p = 3 - 5p$$

và khi người thứ hai chọn "2" là $3p - 4(1 - p) = 7p - 4$.

Vậy cần chọn $p$ bằng một giá trị nào đó sao cho người thứ nhất đạt được điểm cao nhất mà không phụ thuộc vào cách chọn của người thứ hai.

Ta xét các đồ thị $v = 3 - 5p$ và $v = 7p - 4$ trên đoạn $[0; 1]$. Giá trị của $v$ thể hiện giá trị trả về người thứ nhất. Hai đồ thị này giao nhau tại điểm $(p; v) = \left(\frac{7}{12}; \frac{1}{12}\right)$.




***Hình 9.4. Mô phỏng trò chơi cân bằng***

Điểm $\left(\frac{7}{12}; \frac{1}{12}\right)$ là điểm thể hiện người thứ nhất thắng $\frac{1}{12}$ điểm không phụ thuộc vào cách chọn của người thứ hai. Cách chơi của người thứ nhất chọn "1" với xác suất $\frac{7}{12}$, chọn "2" với xác suất $\frac{5}{12}$ như thế gọi là chiến thuật cân bằng.

> *Cách chơi đạt được chiến thắng (tính trung bình) không phụ thuộc vào đối phương chơi như thế nào được gọi là **chiến thuật cân bằng** hay chiến thuật MiniMax.*

Một số khái niệm khác trong trò chơi hai người có tổng điểm bằng 0:

- Mỗi chiến thuật trong các tập chiến thuật $X$ hoặc $Y$ là những chiến thuật thuần tuý. Tổ hợp các chiến thuật thuần tuý với các tần suất khác nhau ta có một chiến thuật hỗn hợp. Tất nhiên mỗi chiến thuật thuần tuý $x \in X$ cũng có thể xem là một chiến thuật hỗn hợp nếu coi như chiến thuật thuần tuý này được chọn với tần suất bằng 1, các chiến thuật thuần tuý còn lại được chọn với tần suất bằng 0.
- Trò chơi hai người có tổng điểm bằng 0 với mô hình toán học $(X, Y, A)$ gọi là có giới hạn khi và chỉ khi $X$ và $Y$ là các tập hữu hạn và tồn tại hàm lượng giá $A$.
- Trong các định lí cơ bản về lí thuyết *Trò chơi hai người có tổng điểm bằng 0* Von Neumann có định lí nổi tiếng sau đây:

***Định lí Minimax***

> *Với trò chơi hai người có tổng điểm bằng 0 và có giới hạn thì:*
>
> *(1) Tồn tại một số V hữu hạn (gọi là giá trị của trò chơi).*
>
> *(2) Có một chiến thuật hỗn hợp cho người thứ nhất mà giá trị trung bình đạt được của người thứ nhất ít nhất là V, bất kể người thứ hai đi như thế nào.*
>
> *(3) Có một chiến thuật hỗn hợp cho người thứ hai mà giá trị trung bình người thứ hai phải trả nhiều nhất là V, bất kể người thứ nhất đi như thế nào.*

Nếu $V = 0$ thì ta nói trò chơi dễ hoà. Nếu $V > 0$ thì ta nói trò chơi dành ưu tiên (có lợi) cho người thứ nhất, $V < 0$ thì trò chơi dành ưu tiên cho người thứ hai.

***Ví dụ.*** An và Bình dùng một số quân bài Tú lơ khơ để tổ chức trò chơi. An có quân Át đen (số của quân Át coi như là 1) và quân 8 đỏ, Bình có quân 2 đỏ và quân 7 đen. Hai người đồng thời chọn một trong hai quân bài của mình. Nếu hai quân bài được chọn của hai người là cùng màu thì An thắng, ngược lại thì Bình thắng. Số điểm đạt được là tổng các số ghi trên hai quân bài. Tìm hàm $A$, giá trị trò chơi và chiến thuật hỗn hợp tối ưu của trò chơi.

| | | Bình chọn | |
|---|---|---|---|
| | | 2 đỏ | 7 đen |
| An chọn | Át (1) đen | –3 | 8 |
| | 8 đỏ | 10 | –15 |

*Phân tích trò chơi trên quan điểm của An.* Giả sử An chọn "Át (1) đen" với tần suất $p$ và chọn "8 đỏ" với tần suất $1 - p$. Khi đó: Nếu Bình chọn "2 đỏ" thì giá trị trung bình trả về cho An là $-3p + 10(1 - p) = 10 - 13p$. Nếu Bình chọn "7 đen" thì giá trị trung bình trả về cho An là $8p - 15(1 - p) = 23p - 15$. Thuật tối ưu cho An là chọn $p$ sao cho: $10 - 13p = 23p - 15 \Leftrightarrow p = \frac{23}{36}$. Khi đó An nhận được trung bình ít nhất cũng là $\frac{35}{36}$ điểm.

*Phân tích trò chơi theo quan điểm của Bình.* Giả sử Bình chọn "2 đỏ" với tần suất $p$ và chọn "7 đen" với tần suất $1 - p$. Khi đó: Nếu An chọn "At (1) đen" thì giá trị trung bình trả về cho Bình là $3p - 8(1 - p) = 11p - 8$. Nếu An chọn "8 đỏ" thì giá trị trung bình trả về cho Bình là $-10p + 15(1 - p) = 15 - 25p$. Thuật tối ưu cho Bình là chọn $p$ sao cho: $11p - 8 = 15 - 25p \Leftrightarrow p = \frac{23}{36}$. Khi đó giá trị trả cho Bình là $-\frac{35}{36}$, nghĩa là Bình phải trả trung bình nhiều nhất là $\frac{35}{36}$ điểm cho An. Trò chơi này luôn ưu tiên cho đấu thủ An. Giá trị trò chơi là $\frac{35}{36}$.

## 2. *Trò chơi ma trận*

### a) Ma trận lượng giá

Trò chơi hai người có tổng điểm bằng 0 và có giới hạn với dạng chiến thuật $(X, Y, A)$ còn được gọi là *trò chơi ma trận*.

Nếu $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ và $Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$. Hàm lượng giá $A$ có thể biểu diễn bằng một ma trận dạng:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

trong đó $A(x_i\,; y_j) = a_{ij}$ là giá trị hàm lượng giá tại dòng $i$, cột $j$ (người thứ nhất chọn chiến thuật nguyên thuỷ $x_i$ và người thứ hai chọn chiến thuật nguyên thuỷ $y_j$).

Đôi khi ma trận $A$ được viết đơn giản là $A(a_{ij})_{m\times n}$ với $i = \overline{1..m}; j = \overline{1..n}$.

Quy định: Người thứ nhất chọn hàng $i$ ($i$ = 1, 2, ..., $m$), người thứ hai chọn cột $j$ ($j$ = 1, 2, ..., $n$) thì người thứ hai phải trả cho người thứ nhất số điểm $a_{ij}$ ghi tại giao của hàng và cột đã chọn. Vậy giá trị này là điểm thắng cho người chọn hàng, là điểm thua cho người chọn cột. Một chiến thuật hỗn hợp cho người thứ nhất là vectơ $p = (p_1, p_2, ..., p_m)$ gồm các tần suất $p_i$ ($i$ =1, 2, ..., $m$) có tổng bằng 1. Nếu người thứ nhất sử dụng chiến thuật hỗn hợp này và người thứ hai chọn cột $j$ thì giá trung bình trả cho người thứ nhất là $\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}$ . Tương tự chiến thuật hỗn hợp cho người thứ hai là vectơ $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$ gồm các tần suất $q_j$ ($j$ = 1, 2, …, $n$) có tổng bằng 1. Nếu người thứ hai sử dụng $q$ và người thứ nhất chọn hàng $i$ thì giá trị trung bình trả cho người thứ nhất là $\sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij}$.

*Lưu ý.* Trong tính toán, thay việc biểu diễn vectơ $p$ bằng biểu diễn một ma trận có kích thước $m\times 1$, đó là ma trận $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix}$. *Ma trận chuyển vị* của $p$ là ma trận $p^T = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_m \end{pmatrix}$ và cũng có thể biểu diễn vectơ $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$ thay bằng ma trận $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$ có kích thước $n\times 1$ . *Ma trận chuyển vị* của nó là ma trận có kích thước $1\times n$, đó là ma trận $q^T = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{pmatrix}$.

### b) Điểm yên ngựa

Phần tử $a_{ij}$ của ma trận $A$ được gọi là phần tử yên ngựa (điểm yên ngựa) nếu thoả mãn hai điều kiện:

- $a_{ij}$ là phần tử nhỏ nhất trong hàng $i$;
- $a_{ij}$ là phần tử lớn nhất trong cột $j$.

Rõ ràng, nếu $a_{ij}$ là điểm yên ngựa thì người thứ nhất sẽ luôn thắng ít nhất là $a_{ij}$ bằng cách chọn hàng $i$, người thứ hai có thể giữ cho sự thiệt hại của mình không quá $a_{ij}$ nếu chọn cột $j$ . Do đó $a_{ij}$ là giá trị của trò chơi.

***Ví dụ.*** $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

Ma trận $A$ có điểm yên ngựa là $a_{23} = 2$. Do đó chiến thuật tối ưu cho người thứ nhất là chọn hàng 2 và cho người thứ hai là chọn cột 3. Giá trị của trò chơi bằng 2 và vectơ $p = (0, 1, 0)$ là chiến thuật hỗn hợp tối ưu cho người thứ nhất và chiến thuật tối ưu cho người thứ hai là vectơ $q = (0, 0, 1)$.

### c) Giải trò chơi trên ma trận $2 \times 2$

Cho trò chơi có ma trận lượng giá $A = \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$. Để giải trò chơi này chúng ta thực hiện như sau:

- Tìm điểm yên ngựa.
- Nếu có điểm yên ngựa thì dùng điểm yên ngựa để xây dựng chiến thuật tối ưu. Nếu không có điểm yên ngựa thì dùng chiến thuật cân bằng.

Giả sử $A$ không có điểm yên ngựa. Khi đó có thể chứng minh:

$$(*) \left[\begin{array}{llll} a > b, & b < c, & c > d, & d < a \\ a < b, & b > c, & c < d, & d > a. \end{array}\right.$$

Nếu người thứ nhất chọn dòng đầu với tần suất $p$ (nghĩa là dùng chiến thuật hỗn hợp $(p, 1 - p)$, chúng ta cân bằng các giá trị trung bình trả về cho người thứ nhất khi người thứ hai chọn cột 1 hoặc 2:

$ap + d(1 - p) = bp + c(1 - p) \Leftrightarrow p = \dfrac{c - d}{(a - b) + (c - d)}$ dễ thấy $0 < p < 1$ (do (*)).

Giá trị trung bình trả cho người thứ nhất là $v = ap + d(1 - p) = \dfrac{ac - bd}{(a - b) + (c - d)}$.

Tương tự nếu người thứ hai chọn cột 1 với tần suất $q$, cột 2 với tần suất $1 - q$ thì

$$q = \frac{c - b}{(a - b) + (c - d)} \; (0 < q < 1)$$

và giá trị trung bình người thứ hai trả cho người thứ nhất là $v = \dfrac{ac - bd}{(a - b) + (c - d)}$.

Ta kí hiệu giá trị trò chơi là: $v = Val(A) = Val\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} = \dfrac{ac-bd}{(a-b)+(c-d)}$.

### d) Chiến thuật loại bỏ tính chi phối

Với các trò chơi ma trận kích thước lớn ta có thể giảm kích thước bằng cách xoá đi các hàng hoặc cột không có lợi khi sử dụng chúng. Nếu có thể được, chúng ta cố gắng đưa về ma trận kích thước 2×2.

***Định nghĩa 1***

Ta nói hàng thứ $i$ của ma trận $A = (a_{ij})$ chi phối hàng thứ $k$ nếu $a_{ij} \geq a_{kj}$ với mọi $j = 1, 2, ..., n$ (khi đó ta cũng nói hàng thứ $k$ bị chi phối bởi hàng thứ $i$). Ta nói hàng thứ $i$ của ma trận $A = (a_{ij})$ chi phối *nghiêm ngặt* hàng thứ $k$ nếu $a_{ij} > a_{kj}$ với mọi $j = 1, 2, ..., n$. Tương tự, cột thứ $j$ của $A$ chi phối (hoặc chi phối nghiêm ngặt) cột thứ $k$ nếu $a_{ij} \leq a_{ik}$ (hoặc $a_{ij} < a_{ik}$) với mọi $i = 1, 2, ..., m$.

Từ định nghĩa trên suy ra: Những gì người thứ nhất đạt được khi sử dụng một hàng $k$ bị chi phối bởi hàng $i$ đều có thể đạt được khi sử dụng chính hàng $i$ (chi phối $k$). Do đó những hàng bị chi phối có thể xoá khỏi ma trận trò chơi. Lập luận tương tự, các cột bị chi phối bởi cột khác cũng có thể xoá được. Chiến thuật tối ưu xây dựng trên những hàng và cột còn lại sau khi xoá đi những hàng và cột bị chi phối vẫn là chiến thuật tối ưu của trò chơi. Tuy nhiên, vẫn có thể có những chiến thuật tối ưu sử dụng cả những hàng hoặc cột bị chi phối (không nghiêm ngặt). Do đó trong một số trường hợp, việc xoá hàng hoặc cột có thể làm thay đổi số lượng chiến thuật tối ưu (song vẫn còn ít nhất một chiến thuật tối ưu) và giá trị trò chơi không thay đổi.

Chúng ta còn có thể làm lặp lại công việc xoá hàng hoặc cột nhiều lần (nếu còn hàng hoặc cột bị chi phối) để ma trận có kích thước nhỏ dần.

***Ví dụ.*** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Cột 2 chi phối cột 3, nên có thể xoá cột 3 vì thế $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Tiếp theo, hàng 3 chi phối hàng 1 nên có thể xoá hàng 1 vì thế $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Trong ma trận 2×2 vừa tìm được không có điểm yên ngựa, nên dùng chiến thuật cân bằng thu được: $p = \frac{3}{4}$, $q = \frac{1}{4}$, $v = \frac{7}{4}$. Suy ra chiến thuật tối ưu cho người thứ nhất trong trò chơi ma trận ban đầu là: $(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ và cho người thứ hai là $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0)$. Lưu ý: hàng hoặc cột bị xoá được gán tần suất bằng 0.

***Định nghĩa 2***

Một hàng $k$ bị chi phối bởi một tổ hợp (theo tần suất) của hàng $i_1$ và hàng $i_2$ nếu tồn tại số $p$ $(0 < p < 1)$ mà $p.a_{i_1 j} + (1-p).a_{i_2 j} \geq a_{kj} \quad \forall j = \overline{1..n}$.

*Các hàng (hoặc cột) cũng có thể xoá nếu nó bị chi phối bởi một tổ hợp (theo tần suất) các hàng (hoặc cột) khác.* Nếu hàng $k$ bị chi phối bởi một tổ hợp theo tần suất của hàng $i_1$ và hàng $i_2$ thì có thể xoá hàng $k$. Với người thứ nhất, chiến thuật hỗn hợp chọn hàng $i_1$ với tần suất $p$ và chọn hàng $i_2$ với tần suất $1 - p$, ít nhất cũng tốt hơn dùng chiến thuật chọn hàng $k$. Khi đó, mọi chiến thuật hỗn hợp có sử dụng hàng $k$ với tần suất $p_k$ sẽ được thay bằng chọn các hàng $i_1$ và $i_2$ với các tần suất tương ứng thích hợp được chia ra từ $p_k$ : tần suất của hàng $i_1$ là $p.p_k$, tần suất của hàng $i_2$ là $(1-p).p_k$.

Lập luận tương tự áp dụng cho cột.

***Ví dụ.*** Xét ma trận: $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 4 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

Cột 2 bị chi phối bởi tổ hợp các cột 1 và 3 với tần suất $\frac{1}{2}$ cho mỗi cột nên có thể xoá cột 2 vì thế $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 5 & 4 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$. Tiếp theo, hàng 2 bị chi phối bởi tổ hợp hàng 1 với tần suất $\frac{1}{3}$ và hàng 3 với tần suất $\frac{2}{3}$ nên có thể xoá hàng 2. Ma trận được giản ước về dạng $A=\begin{pmatrix}0 & 6\\ 9 & 3\end{pmatrix}$. Đến đây dễ dàng tìm được giá trị trò chơi là $v=\frac{9}{2}$. Tương tự có thể tổ hợp của hơn 2 hàng (hoặc cột) sẽ chi phối một hàng (hoặc cột) khác.

***Ví dụ.*** Xét ma trận $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 3\\ 4 & 0 & 2 & 2\\ 3 & 7 & 3 & 5\end{pmatrix}$.

Tổ hợp các cột 1, 2 và 3 với các tần suất $\frac{1}{3}$ cho mỗi cột là chi phối cột 4, do đó có thể xoá cột 4.

*Lưu ý.* Không phải mọi trò chơi ma trận đều có thể rút gọn bằng luật chi phối. Ví dụ, ma trận có điểm yên ngựa thì không có hàng hoặc cột nào bị chi phối.

### e) Giải các trò chơi ma trận 2×n và m×2

Lời giải các trò chơi ma trận dạng $2\times n$ *và* $m\times 2$ có thể minh hoạ bằng đồ thị.

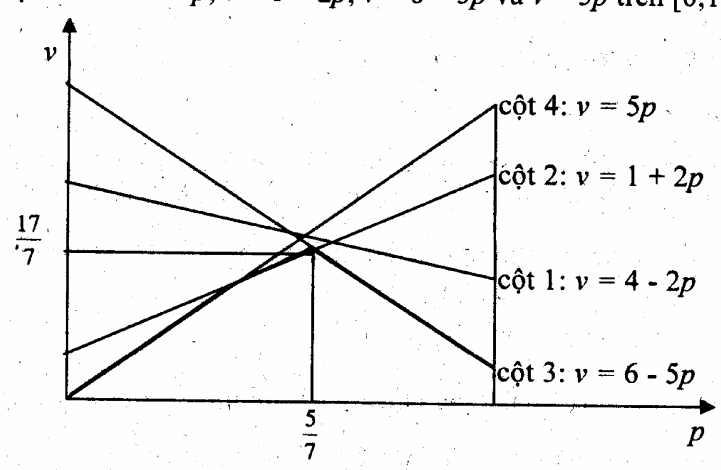
Xét trò chơi với ma trận $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & 5\\ 4 & 1 & 6 & 0\end{pmatrix}$.

Giả sử người thứ nhất chọn hàng 1 với tần suất $p$ và chọn hàng 2 với tần suất $1-p$.
Khi đó: nếu người thứ hai chọn cột 1 thì giá trị trả cho người thứ nhất là

$$2p+4(1-p)=4-2p.$$

Nếu người thứ hai lần lượt chọn cột 2, 3, 4 thì giá trị trả cho người thứ nhất tương ứng là: $3p+(1-p)=1+2p$, $p+6(1-p)=6-5p$ và $5p$.

Xét các đồ thị của $v=4-2p$, $v=1+2p$, $v=6-5p$ và $v=5p$ trên $[0;1]$.




***Hình 9.5***

Với mỗi giá trị xác định của $p$, người thứ nhất có thể nhận được một giá trị là giá trị nhỏ nhất trong bốn giá trị của các hàm $v$ nêu trên tương ứng với $p$, khi đó không phụ thuộc vào cách chọn của người thứ hai. Giá trị nhỏ nhất này là giá trị của một hàm có đồ thị là đường đậm chạy trên các đường thấp nhất trong bốn đường trên. Điểm cao nhất trên đường đậm này có hoành độ $p = \frac{5}{7}$. Điều đó có nghĩa là khi chọn hàng 1 với tần suất $p = \frac{5}{7}$ thì người thứ nhất nhận được giá trị lớn nhất trong các giá trị tối thiểu có thể phải nhận, giá trị này không phụ thuộc vào cách chọn của người thứ hai. Giá trị lớn nhất đó là $v_{max} = \frac{17}{7}$.

Qua đồ thị, chúng ta cũng nhận thấy giá trị $p = \frac{5}{7}$ chỉ là hoành độ giao điểm của cột 2 và 3, nghĩa là cột 1 không tham gia vào tìm $p$. Điều này có thể lí giải vì cột 1 bị chi phối bởi các cột 2 và 3 với cùng tỉ lệ $\frac{1}{2}$. Ngoài ra còn thấy $p = \frac{5}{7}$ chỉ là hoành độ giao điểm của hai đường ứng với cột 2 và 3 nên chỉ cần xét ma trận: $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ (mặc dù đồ thị của cột 4 có tham gia vào đường đậm, từ đó cũng có thể tính được $p = \frac{5}{7}$, $q = \frac{5}{7}$ và $v = \frac{17}{7}$. Vậy chiến thuật tối ưu của người thứ nhất là $\left(\frac{5}{7};\frac{2}{7}\right)$ và chiến thuật tối ưu của người thứ hai là $\left(0;\frac{5}{7};\frac{2}{7};0\right)$.

### 3. *Nguyên lí trung lập*

#### a) Tính giá trị trò chơi

Cho trò chơi ma trận với ma trận lượng giá là $A(a_{ij})_{m\times n}$. Nếu người thứ hai dùng chiến thuật hỗn hợp tối ưu là $p = (p_1, p_2, ..., p_m)$ và người thứ hai sử dụng cột $j$ thì giá trị trung bình trả cho người thứ nhất là $\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}$. Nếu $V$ là giá trị trò chơi trong chiến thuật tối ưu $p$ thì: $\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} \geq V \quad \forall j = 1,2,...,n$ (1).

Tương tự khi người thứ hai dùng chiến thuật tối ưu $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$, người thứ nhất chọn dòng $i$ thì giá trị trò chơi mà người thứ hai phải trả là $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$ thoả mãn:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \le V \quad \forall i = 1, 2, \dots, m. \tag{2}$$

Khi cả hai người cùng dùng chiến thuật tối ưu thì :

$$V = V\sum_{j=1}^{n} q_j = \sum_{j=1}^{n} V q_j \le \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}\right) q_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m} p_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j\right) \le \sum_{i=1}^{m} p_i V = V.$$

Suy ra $V = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j$ (3) do đó $V$ là phần tử duy nhất của ma trận $1\times 1$: $p^T A q$.

Trong nhiều công thức tính toán ma trận, để đơn giản kí hiệu, quy ước phần tử duy nhất của ma trận $1\times 1$ thay cho chính ma trận. Do đó :

$$V = p^T A q = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j \qquad a_{ij} = A(x_i, y_j).$$

## b) Định lí cân bằng

Nguyên lí trung lập được thể hiện qua định lí sau đây gọi là định lí cân bằng:

***Định lí***

*Cho trò chơi ma trận với ma trận lượng giá là $A(a_{ij})_{m\times n}$ nếu người thứ nhất dùng chiến thuật hỗn hợp tối ưu $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ và người thứ hai dùng chiến thuật hỗn hợp tối ưu $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, giá trị trò chơi đạt được là V thì:*

$$\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} = V \text{ với mọi cột } j \text{ có } q_j > 0 \tag{4}$$

$$\text{và } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j = V \text{ với mọi dòng } i \text{ có } p_i > 0 \tag{5}$$

**Chứng minh**

Ta chứng minh (5): Giả sử có dòng $k$ với $p_k > 0$ mà $V \neq \sum_{j=1}^{n} a_{kj}q_j$ thì theo (2) có:

$V > \sum_{j=1}^{n} a_{kj}q_j$ (6). Suy ra :

$$V = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j = \sum_{i=1}^{m} p_i \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \right) = p_1 \sum_{j=1}^{n} a_{1j} q_j + p_k \sum_{j=1}^{n} a_{kj} q_j + p_m \sum_{j=1}^{n} a_{mj} q_j$$

$$< p_1 V + ... + p_k V + ... + p_m V = V \sum_{i=1}^{m} p_i = V.$$

Dẫn tới $V < V$ là điều vô lí. Vậy (5) đã được chứng minh.

Chứng minh (4) tương tự.

Nhờ định lí cân bằng, khi biết chiến thuật tối ưu của một người thì việc tìm chiến thuật tối ưu cho người kia sẽ nhanh chóng hơn.

***Ví dụ 1.*** Xét trò chơi Chẵn-Lẻ, hai người chơi đồng thời gọi ra một trong các số 0, 1 hoặc 2. Ma trận trò chơi là: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ và bảng thể hiện điểm dành cho người Lẻ:

| | | Người Chẵn | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 |
| Người Lẻ | 0 | 0 | 1 | –2 |
| | 1 | 1 | –2 | 3 |
| | 2 | –2 | 3 | –4 |

Áp dụng định lí cân bằng, gọi $p = (p_1, p_2, p_3)$ là chiến thuật tối ưu của người Lẻ, $q = (q_1, q_2, \ldots, q_3)$ là chiến thuật tối ưu của người Chẵn và $V$ là giá trị của bài toán, giả sử các $q_i$ đều dương thì có hệ :

$$\text{(I)} \begin{cases} p_2 - 2p_3 = V \\ p_1 - 2p_2 + 3p_3 = V \\ -2p_1 + 3p_2 - 4p_3 = V \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

Giải hệ này tìm được vectơ $p = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ và $V = 0$.

Tìm chiến thuật tối ưu $q = (q_1, q_2, q_3)$ cho người Chẵn (người thứ hai): do $p_i > 0$ với mọi $i = 1, 2, 3$ nên có hệ gồm ba phương trình $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j = V$ và $q_1 + q_2 + q_3 = 1$. Nhưng do ma trận $A$ là ma trận đối xứng nên hệ này tương tự hệ (I) trong đó thay $p_i$ bởi $q_i$ suy ra $q = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$. Nhận thấy các $q_i$ đều dương nên chấp nhận được hệ (I) và suy ra các kết quả tìm thấy là chấp nhận được.

***Ví dụ 2.*** Trò chơi trên ma trận vuông $m \times m$ có các phần tử trên đường chéo chính là các số dương $d_1, d_2, \ldots, d_m$, các phần tử còn lại là 0 :

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & d_m \end{pmatrix}.$$

Áp dụng định lí cân bằng có thể giải trò chơi này như sau : Giả sử chiến thuật tối ưu hỗn hợp của người thứ nhất là $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, của người thứ hai là $q = (q_1, q_2, \ldots, q_m)$. Nếu $q_i$ đều dương, chúng ta có hệ : $p_i d_i = V$ với mọi $i = 1, \ldots, m$. Suy ra $p_i = \frac{V}{d_i}$ (a) với mọi $i = 1, \ldots, m$. Cộng từng vế các đẳng thức của hệ (a) ta có:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{V}{d_i} \Rightarrow 1 = V \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{d_i} \Rightarrow V = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{d_i}\right)^{-1}.$$

Do ma trận đối xứng nên suy ra $q_j = \frac{V}{d_j}$ (b) với $j = 1, \ldots, m$.

Do $V > 0$, $p_i > 0$ với mọi $i = 1, \ldots, m$ và $q_j > 0$ với mọi $j = 1, \ldots, m$ nên chấp nhận được các kết quả này.

***Ví dụ 3.*** Trò chơi ma trận tam giác. Trong trò chơi này ma trận trò chơi có dạng: các phần tử ở phía trên (hoặc dưới) đường chéo chính đều bằng 0. Xét một dạng cụ thể:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nếu $q_i$ đều dương, ta có hệ (4) $\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} = V \qquad j = 1, ..., m.$

Cụ thể là : $\begin{cases} p_1 & = V \\ -2p_1 + p_2 & = V \\ 3p_1 - 2p_2 + p_3 & = V \\ -4p_1 + 3p_2 - 2p_3 + p_4 & = V. \end{cases}$

Suy ra $p_1 = V$; $p_2 = 3V$; $p_3 = 4V$; $p_4 = 4V$. Do đó: $1 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 12V$ và từ đó dẫn tới: $V = \dfrac{1}{12}$ và $p = \left(\dfrac{1}{12}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$ có thể là chiến thuật tối ưu cho người thứ nhất. Do các $p_i$ đều dương nên tương tự từ hệ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j = V$ (5) cũng suy ra $V = \dfrac{1}{12}$; $q = \left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{12}\right)$ có thể là chiến thuật tối ưu cho người thứ hai. Do trong kết quả các $p_i$ và $q_i$ đều dương nên kết quả này được chấp nhận.

***Ví dụ 4.*** Trò chơi trên ma trận đối xứng bù. Đó là trò chơi hạn chế, có ma trận lượng giá là ma trận vuông $m \times m$ và bảo đảm $a_{ij} = -a_{ji}$ với mọi $i, j = 1, 2, ..., m$. Trò chơi *Giấy-Kéo-Búa* là điển hình của loại này.

Trong trò chơi Giấy-Kéo-Búa, người thứ nhất và người thứ hai đồng thời chọn và hiện ra một trong ba vật: giấy, kéo hoặc búa. Nếu hai người chọn vật như nhau thì giá trị trả về là 0. Nếu hai vật chọn là khác nhau thì : Kéo thắng Giấy, Búa thắng Kéo, Giấy thắng Búa. Nếu giá trị trả về cho người thắng là 1, có ma trận lượng giá như sau:

| | | Người thứ hai | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Giấy | Kéo | Búa |
| Người thứ nhất | Giấy | 0 | –1 | 1 |
| | Kéo | 1 | 0 | –1 |
| | Búa | –1 | 1 | 0 |

Ma trận này đối xứng bù, nên trò chơi thuộc loại đối xứng. Các phần tử trên đường chéo chính bằng 0 (điều này cũng đúng cho một ma trận đối xứng bù bất kì vì $a_{ii} = -a_{ii}$ nên $a_{ii} = 0$ với mọi $i = 1, ..., m$).

Dễ dàng giải các hệ (4) và (5) được kết quả: $p = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) = q$ và giá trị trò chơi là $V = 0$.

Có thể chứng minh tổng quát: Trong trò chơi hạn chế có ma trận đối xứng bù thì giá trị trò chơi bằng 0. Một chiến thuật tối ưu của người này cũng là chiến thuật tối ưu của người kia.

### c) Các bất biến

***Định nghĩa 1***

Giả sử $G = (X, Y, A)$ là một trò chơi có giới hạn và $g$ là một phép biến đổi 1-1 của $Y$ lên $Y$. Trò chơi $G$ là bất biến dưới tác động của g nếu với mỗi $x \in X$, thì có duy nhất một $x' \in X$ sao cho: $A(x, y) = A(x', g(y))$ với mọi $y \in Y$.

***Ví dụ.*** Xét trò chơi $G = (X, Y, A)$ trong đó mỗi chiến thuật nguyên thuỷ trong $X$ và $Y$ là chọn một cặp số như trong bảng sau :

| | | Các chiến thuật nguyên thuỷ $Y$ của người thứ hai | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | (3,0) | (2,1) | (1,2) | (0,3) |
| Chiến thuật nguyên thuỷ $X$ của người thứ nhất | (4,0) | 4 | 2 | 1 | 0 |
| | (3,1) | 1 | 3 | 0 | −1 |
| | (2,2) | −2 | 2 | 2 | −2 |
| | (1,3) | −1 | 0 | 3 | 1 |
| | (0,4) | 0 | 1 | 2 | 4 |

Tập $Y = \{(3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3)\}$, phép biến đổi $g$ được định nghĩa như sau:

$$g((3, 0)) = (0, 3);\ g((0, 3)) = (3, 0);\ g((2, 1)) = (1, 2);\ g((1, 2)) = (2, 1).$$

Dễ thấy $g$ là ánh xạ 1-1 của $Y$ lên $Y$ và trò chơi $G$ là bất biến dưới tác động của $g$. Ta có thể kiểm tra điều này, chẳng hạn $x = (4, 0)$, $y = (0, 3)$ thì $A(x, y) = 0$ và có duy nhất $x' = (0, 4)$, $g(y) = (3, 0)$ mà $A(x', g(y)) = A(x, y)$. Tương tự có thể kiểm tra với mọi giá trị khác của $x$ và $y$.

***Bổ đề 1***

> *Nếu trò chơi hữu hạn $G=(X, Y, A)$ là bất biến dưới hai phép biến đổi 1-1 là $g_1$ và $g_2$ thì $G$ cũng bất biến dưới phép biến đổi $g_2.g_1$ được xác định sao cho $g_2.g_1(y)=g_2(g_1(y))$.*

***Bổ đề 2***

> *Nếu trò chơi hữu hạn $G=(X, Y, A)$ bất biến dưới phép biến đổi 1-1 $g$ thì $G$ cũng bất biến dưới phép biến đổi $g^{-1}$ ($g^{-1}$ là phép nghịch đảo của $g$ được định nghĩa: $g.g^{-1} = g^{-1}.g=e$ ($e(y)=y$ với mọi $y \in Y$).*

Do đó các phép biến đổi $g$ lên $Y$ làm trò chơi bất biến đã tạo thành một nhóm $\wp$ gồm tổ hợp nhân các phép biến đổi. Phần tử đơn vị của nhóm là phép biến đổi đồng nhất $e$.

Tập $\overline{\wp}$ gồm các phép biến đổi $\overline{g}$ tương ứng trên $X$ cũng tạo thành một nhóm với phần tử đồng nhất là $\overline{e}$ mà $\overline{e}(x) = x$ với mọi $x \in X$.

***Định nghĩa 2***

Một trò chơi hữu hạn $G = (X, Y, A)$ là bất biến trên nhóm các phép biến đổi $\wp$ nếu nó bất biến với mọi phép biến đổi $g$ của $\wp$, nghĩa là :

$A(x, y) = A(\overline{g}(x), g(y))$ với mọi $x \in X$ và với mọi $y \in Y$ xảy ra với mọi $g \in \wp$.

***Định nghĩa 3***

Trong trò chơi hữu hạn $G = (X, Y, A)$ bất biến trên nhóm $\wp$ (nhóm các phép biến đổi 1-1 của $Y$ lên $Y$), một chiến thuật hỗn hợp $q = (q(1), q(2), ..., q(n))$ cho người thứ hai được gọi là *chiến thuật bất biến* dưới nhóm $\wp$ nếu: $q(g(y)) = q(y)$ với mọi $y \in Y$ và với mọi $g \in \wp$.

***Định lí***

> *Nếu trò chơi hữu hạn $G=(X, Y, A)$ bất biến dưới nhóm $\wp$ thì tồn tại một chiến thuật bất biến tối ưu cho các người chơi.*

*Ví dụ 1. Trò chơi ghép xu*

Hai người chơi đồng thời chọn và hiện một mặt của một đồng xu đang cầm (đồng xu có hai mặt: sấp và ngửa). Người thứ nhất thắng nếu hai mặt xu của hai người giống nhau, ngược lại thì người thứ hai thắng. Ma trận lượng giá là $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Trong trò chơi ghép xu, $X = Y = \{1, 2\}$ và $A(1, 1) = A(2, 2) = 1$ còn $A(1, 2) = A(2, 1) = -1$.

| | Người thứ hai | | |
|---|---|---|---|
| | | Ngửa | Sấp |
| Người thứ nhất | Ngửa | 1 | −1 |
| | Sấp | −1 | 1 |

Trò chơi ghép xu $G(X, Y, A)$ là bất biến dưới nhóm $\wp = \{e, g\}$, trong đó $e$ là phép đồng nhất còn $g$ là phép biến đổi sao cho $g(1) = 2$; $g(2) = 1$. Chiến thuật hỗn hợp $(q(1), q(2))$ là bất biến dưới nhóm $\wp$ nếu $q(1) = q(g(1)) = q(2)$. Do $q(1) + q(2) = 1$ nên đã gợi ý rằng $q(1) = q(2) = \frac{1}{2}$ là một chiến thuật cho người thứ hai.

Tương tự $p(1) = p(2) = \frac{1}{2}$ là một bất biến duy nhất và do đó cũng là chiến thuật cho người thứ nhất.

*Ví dụ 2. Trò chơi Giấy-Kéo-Búa* là bất biến dưới nhóm $\wp = \{e, g, g^2\}$ với $g$(giấy) = kéo, $g$(kéo) = búa, $g$(búa) = giấy.

Do đó: $q$(giấy) = $q(g$(giấy)) = $q$(kéo) = $q(g$(kéo)) = $q$(búa). Vậy chiến thuật tối ưu có tần suất $\frac{1}{3}$ cho mỗi loại giấy, búa và kéo.

*Ví dụ 3. Trò chơi Colonel Blotto*

*Phát biểu.* Người chơi thứ nhất là đại tá Colonel Blotto có bốn trung đoàn cần chiếm hai trạm. Người chơi thứ hai là đại tá Lieutenant Kije có ba trung đoàn cũng muốn chiếm hai trạm này. Mỗi bên đều muốn gửi nhiều trung đoàn nhất để chiếm một trạm và các trung đoàn còn lại dùng để chiếm trạm kia. Giá trị trả về cho người chơi như sau: sẽ được một điểm khi chiếm được một trạm và một điểm khi bắt được một trung đoàn của đối phương (khi số quân gửi đến đông hơn sẽ bắt được toàn bộ các trung đoàn của đối phương). Nếu hai bên gửi cùng một số lượng trung đoàn tới một trạm thì cả hai cùng phải rút lui và không được điểm nào. Colonel Blotto cần quyết định phân bổ lực lượng của mình như thế nào tới chiếm hai trạm?

*Phân tích.* Có năm chiến thuật thuần tuý mà Colonel Blotto có thể thực hiện là $X = \{(4, 0), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (0, 4)\}$, ở đây $(n_1, n_2)$ tương ứng với chiến thuật gửi $n_1$ trung đoàn đi chiếm trạm 1, gửi $n_2$ trung đoàn đi chiếm trạm 2.

Lieutenant Kije có bốn chiến thuật nguyên thuỷ, $Y = \{(3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3)\}$

Ma trận giá trị trả về được thể hiện qua bảng sau:

| | Chiến thuật nguyên thuỷ của Kije | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Chiến thuật nguyên thuỷ của Blotto | | (3,0) | (2,1) | (1,2) | (0,3) |
| | (4,0) | 4 | 2 | 1 | 0 |
| | (3,1) | 1 | 3 | 0 | -1 |
| | (2,2) | -2 | 2 | 2 | -2 |
| | (1,3) | -1 | 0 | 3 | 1 |
| | (0,4) | 0 | 1 | 2 | 4 |

Bảng a)

Tiếc rằng ma trận 5×4 này không có các dòng và cột bị chi phối. Tuy nhiên, có một bất biến trong bài toán này làm cho việc giải nó đơn giản đi khá nhiều. Điều này liên quan tới tính đối xứng giữa hai trạm cần chiếm. Xét nhóm $\wp=\{e, g\}$ mà $g((3, 0)) = (0, 3)$; $g((0, 3)) = (3, 0)$; $g((2, 1)) = (1, 2)$; $g((1, 2)) = (2, 1)$ và nhóm tương ứng $\bar{\wp}=\{\bar{e},\bar{g}\}$, trong đó $\bar{g}((4, 0)) = (0, 4)$; $\bar{g}((0, 4)) = (4, 0)$; $\bar{g}((3, 1)) = (1, 3)$; $\bar{g}((1, 3)) = (3, 1)$; $\bar{g}((2, 2)) = (2, 2)$.

Các nhóm tương đương cho Kije là $\{(3, 0), (0, 3)\}$ và $\{(2, 1), (1, 2)\}$. Do đó chiến thuật $q$ là bất biến nếu $q((3, 0)) = q((0, 3))$ và $q((2, 1)) = q((1, 2))$.

Tương tự các nhóm tương đương của Blotto là $\{(4, 0), (0, 4)\}$, $\{(3, 1), (1, 3)\}$ và $\{2, 2\}$. Do đó chiến thuật $p$ cho Blotto là bất biến nếu $p((4, 0)) = p((0, 4))$ và $p((3, 1)) = p((1, 3))$.

Chúng ta có thể giảm các chiến thuật của Kije thành hai phần tử :

- (3, 0)*: sử dụng các chiến thuật (3, 0) và (0, 3) với tần suất $\frac{1}{2}$ cho mỗi chiến thuật;
- (2, 1)*: sử dụng các chiến thuật (2, 1) và (1, 2) với tần suất $\frac{1}{2}$ cho mỗi chiến thuật;

Tương tự chúng ta có thể giảm các chiến thuật của Bloto thành ba phần tử :

- (4, 0)* : sử dụng các chiến thuật (4, 0) và (0, 4) với tần suất $\frac{1}{2}$ cho mỗi chiến thuật;
- (3, 1)*: sử dụng các chiến thuật (3, 1) và (1, 3) với tần suất $\frac{1}{2}$ cho mỗi chiến thuật;
- (2, 2) : khi sử dụng chiến thuật (2, 2).

Với các chiến thuật này, ma trận giá trị trả về được thể hiện qua bảng sau:

| | (3, 0)* | (2, 1)* |
|---|---|---|
| (4, 0)* | 2 | 1.5 |
| (3, 1)* | 0 | 1.5 |
| (2, 2) | –2 | 2 |

**Bảng b)**

Chúng ta giải thích về giá trị của ô ở góc trên-trái : Nếu Blotto dùng các chiến thuật (4, 0) và (0, 4) với tần suất $\frac{1}{2}$ cho mỗi chiến thuật và Kije dùng các chiến thuật (3, 0) và (0, 3) cũng với tần suất $\frac{1}{2}$ cho mỗi chiến thuật thì bốn ô ở bốn góc của bảng a) (bảng giá trị trả về) xuất hiện với tần suất $\frac{1}{4}$ cho mỗi ô, do đó giá trị trả về cho ô ở góc trái-trên của bảng b) là trung bình cộng của bốn số: 4, 0, 0, 4 là 2. Giá trị tại các ô khác cũng tính tương tự.

Bây giờ chúng ta giải bài toán với bảng b). Chú ý dòng 2 có thể được giản ước bởi dòng 1. Sau đó giải trò chơi trên ma trận 2×2 dễ dàng suy ra kết quả. Chiến thuật hỗn hợp tối ưu cho Blotto là $\left(\frac{8}{9};0;\frac{1}{9}\right)$. Chiến thuật hỗn hợp tối ưu cho Kije là $\left(\frac{1}{9};\frac{8}{9}\right)$. Giá trị trò chơi là $\frac{14}{9}$.

Quay về ma trận cho ở bảng a), chúng ta tìm được chiến thuật tối ưu cho Blotto là $\left(\frac{4}{9};0;\frac{1}{9};0;\frac{4}{9}\right)$ và chiến thuật tối ưu cho Kije là $\left(\frac{1}{18};\frac{4}{9};\frac{4}{9};\frac{1}{18}\right)$. Giá trị trò chơi là $\frac{14}{9}$.

## *4. Giải trò chơi hạn chế*

### a) Chiến thuật Baye

Nếu người thứ nhất sử dụng chiến thuật $p$ và người thứ hai sử dụng chiến thuật $q$ thì giá trị trung bình trả về người thứ nhất sẽ là :

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j\right)p_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j = p^T Aq.$$

Nếu người thứ nhất dự đoán người thứ hai đã chọn một chiến thuật cụ thể $q$, thì người thứ nhất sẽ chọn hàng $i$ sao cho $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j$ đạt giá trị lớn nhất khi đó giá trị trung bình trả về cho người thứ nhất là $\max_{1\le i\le m}\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j\right\}$, hoặc cách tương đương là người thứ nhất sẽ chọn chiến thuật $p$ sao cho $p^TAq$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị trả về cho người thứ nhất sẽ là $\max_{p\in X^*}\left\{p^T Aq\right\}$. Có thể chứng minh :

$$\max_{1\le i\le m}\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j\right\} = \max_{p\in X^*}\left\{p^T Aq\right\}.$$

Mỗi chiến thuật $p$ để $p^TAq$ đạt được giá trị lớn nhất được gọi là chiến thuật đối phó tốt nhất (hay chiến thuật Baye) của người thứ nhất chống lại chiến thuật $q$

của người thứ hai. Trong trò chơi hạn chế, luôn tồn tại chiến thuật nguyên thuỷ Baye chống lại mỗi chiến thuật $q$ của người thứ hai.

Tương tự, nếu người thứ hai dự đoán người thứ nhất chơi chiến thuật cụ thể $p$ thì người thứ hai sẽ chọn cột $j$ sao cho $\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}$ đạt giá trị nhỏ nhất hoặc cách tương đương là người thứ hai sẽ chọn chiến thuật $q$ sao cho $p^T Aq$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tương tự có : $\underset{1 \le j \le n}{Min}\left\{ \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} \right\} = \underset{q \in Y^*}{Min}\left\{ p^T Aq \right\}$.

Mỗi chiến thuật $q$ để $p^T Aq$ đạt giá trị nhỏ nhất được gọi là chiến thuật đối phó tốt nhất (hay là chiến thuật Baye) của người thứ hai chống lại chiến thuật $p$ của người thứ nhất.

Sử dụng chiến thuật Baye là một trong các cách để chơi trò chơi. Tuy nhiên có thể sinh ra điều bất lợi (nguy hiểm) khi đối thủ chơi một chiến thuật tốt hơn chiến thuật mà bạn dự đoán đối thủ sẽ dùng.

### b) Giá trị trên, giá trị dưới

Bây giờ giả sử trò chơi quy định : người thứ hai phải thông báo sự lựa chọn chiến thuật hỗn hợp $q$ trước khi người thứ nhất lựa chọn chiến thuật của mình. Sự quy định này của trò chơi có lẽ tạo thuận lợi cho người thứ nhất. Nếu người thứ hai thông báo chọn $q$ thì người thứ nhất sẽ chọn chiến thuật Baye chống lại $q$ và người thứ hai sẽ thua trung bình một lượng là $\max_{p \in X^*}\left\{ p^T Aq \right\}$. Tuy nhiên, nếu người thứ hai biết điều này thì người thứ hai sẽ chọn thông báo $q$ sao cho $\max_{p \in X^*}\left\{ p^T Aq \right\}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị nhỏ nhất của $\max_{p \in X^*}\left\{ p^T Aq \right\}$ với mọi $q$ kí hiệu là $\overline{V}$ và được gọi là *giá trị trên* của trò chơi. Vậy :

$$\overline{V} = \underset{q \in Y^*}{\text{Min}}\left\{ \underset{1 \le i \le m}{\text{Max}} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \right\} = \underset{q \in Y^*}{\text{Min}}\left\{ \underset{p \in X^*}{\text{Max}}\left( p^T Aq \right) \right\}.$$

Giá trị trên $\overline{V}$ là sự thiệt hại trung bình nhỏ nhất của người thứ hai không phụ thuộc vào cách chọn chiến thuật của người thứ nhất. Một chiến thuật $q$ để $\max_{p \in X^*}\left\{ p^T Aq \right\}$ đạt giá trị nhỏ nhất được gọi là ***chiến thuật Minimax*** cho người thứ hai. Nó cực tiểu hoá sự thiệt hại tối đa của người thứ hai.

Phân tích tương tự cho trường hợp trò chơi quy định : người thứ nhất phải thông báo chiến thuật hỗn hợp mà người thứ nhất đã chọn là $p$ trước khi người thứ hai lựa chọn chiến thuật của mình. Khi đó người thứ hai sẽ chọn $q$ sao cho giá trị phải trả là $p^T Aq$ đạt giá trị nhỏ nhất. Nhưng người thứ nhất nếu biết tình huống này thì người thứ nhất sẽ chọn $p$ sao cho $\underset{q \in Y^*}{\mathrm{Min}}\left(p^T Aq\right)$ đạt được giá trị lớn nhất, và giá trị trung bình người thứ nhất đạt được là

$$\underline{V} = \underset{p \in X^*}{\mathrm{Max}}\left\{\underset{1 \le j \le n}{\mathrm{Min}}\left(\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}\right)\right\} = \underset{p \in X^*}{\mathrm{Max}}\left\{\underset{q \in Y^*}{\mathrm{Min}}\left(p^T Aq\right)\right\}.$$

Đại lượng $\underline{V}$ gọi là giá trị dưới của trò chơi. Nó là giá trị lớn nhất người thứ nhất đạt được không phụ thuộc vào sự lựa chọn chiến thuật của người thứ hai. Một chiến thuật $p$ sao cho $\underset{q \in Y^*}{\mathrm{Min}}\left(p^T Aq\right)$ đạt được giá trị lớn nhất gọi là ***chiến thuật Minimax*** cho người thứ nhất. Vậy trong trò chơi hạn chế, người thứ nhất cũng luôn có chiến thuật Minimax.

*Lưu ý.* Nếu quy luật chơi yêu cầu người chơi II cần thông báo một chiến thuật hỗn hợp của mình trước khi người thứ nhất chọn chiến thuật thì chưa hẳn đã là thuận lợi cho người thứ nhất vì người thứ hai có thể thông báo một chiến thuật Minimax.

Chúng ta thừa nhận những kết quả sau:

***Định lí 1***

*Mỗi trò chơi hạn chế đều có giá trị trò chơi và cả hai người chơi đều có chiến thuật Minimax.*

***Định lí 2***

*Giá trị dưới thì nhỏ hơn hoặc bằng giá trị trên :* $\underline{V} \le \overline{V}$.

- *Nếu* $\underline{V} < \overline{V}$ *thì giá trị trung bình trả về của trò chơi là* $V$ *sẽ thoả mãn :* $\underline{V} \le V \le \overline{V}$.
- *Nếu* $\overline{V} = \underline{V}$ *thì tồn tại giá trị trò chơi, giá trị này kí hiệu là* $V$ *và* $V = \overline{V} = \underline{V}$.
- *Nếu giá trị* $V$ *tồn tại thì chiến thuật Minimax là một chiến thuật tối ưu.*

***Định lí 3***

> *Nếu $A = (a_{ij})$ và $A' = (a'_{ij})$ là các ma trận mà $a'_{ij} = c.a_{ij} + b$, với $c > 0$ thì chiến thuật Minimax cho người thứ nhất và người thứ hai trên ma trận A cũng là chiến thuật Minimax cho người thứ nhất và người thứ hai trên ma trận A'. Nếu V là giá trị trò chơi trên ma trận A thì giá trị trò chơi trên ma trận A' là $V' = cV + b$.*

### c) Giản ước về bài toán lập trình tuyến tính

Bây giờ chúng ta hãy xem xét trò chơi trên quan điểm của người thứ nhất : Người thứ nhất muốn chọn $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ sao cho $\underset{1\le j\le n}{\text{Min}}\left\{\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}\right\}$ đạt giá trị lớn nhất. Có thể coi đây là một bài toán : tìm $p_1, p_2, \dots, p_m$ sao cho hàm mục tiêu $\underset{1\le j\le n}{\text{Min}}\left\{\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}\right\}$ đạt giá trị lớn nhất với ràng buộc : $p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$ và $p_i \ge 0$ với mọi $i = 1, 2, \dots, m$. Có thể chuyển bài toán này về bài toán tuyến tính bằng cách thêm biến $v$ thoả ràng buộc : $v \le \underset{1\le j\le n}{\text{Min}}\left\{\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}\right\}$ và cố gắng cực đại $v$ (càng lớn càng tốt trong ràng buộc mới này).

Bài toán đưa về: Chọn $v$ và $p_1, p_2, \dots, p_m$ sao cho $v$ đạt giá trị lớn nhất với các ràng buộc: $v < \sum_{i=1}^{m} p_i a_{i1}$ ; $v \le \sum_{i=1}^{m} p_i a_{i2}$ ; ...; $v \le \sum_{i=1}^{m} p_i a_{im}$ ; $p_1 + p_2 + \dots + p_m - 1$ ; $p_i \ge 0$ với mọi $i = 1, 2, \dots, m$.

Đây là một bài toán tuyến tính. Để giải bài toán này chúng ta có thể giải bằng một thuật toán đơn giản là thuật toán đơn hình.

Tương tự, xét bài toán trên quan điểm của người thứ hai cũng dẫn tới bài toán tuyến tính tương tự. Đó là bài toán sau :

Chọn $w$ và $q_1, q_2, \dots, q_n$ sao cho $w$ đạt giá trị nhỏ nhất với các ràng buộc :

$w \ge \sum_{j=1}^{n} a_{1j} q_j$ ; $w \ge \sum_{j=1}^{n} a_{2j} q_j$ ; ... ; $w \ge \sum_{j=1}^{n} a_{mj} q_j$ ; $q_1 + q_2 + \dots + q_m = 1$ ; $q_j \ge 0$ với mọi $j = 1, 2, \dots, n$.

Một cách khác chuyển bài toán về dạng có thể lập trình tuyến tính là : Giả sử $v > 0$, đặt $x_i = \frac{p_i}{v}$ thì ràng buộc $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$ thành $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \frac{1}{v}$. Tìm $v$ đạt giá trị lớn nhất tương đương $\frac{1}{v}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Chúng ta loại $v$ khỏi bài toán và có bài toán mới sau :

Chọn $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sao cho $x_1 + x_2 + \ldots + x_m$ đạt giá trị nhỏ nhất với các ràng buộc : $1 \le \sum_{i=1}^{m} x_i a_{i1}$ ; $1 \le \sum_{i=1}^{m} x_i a_{i2}$ ; …; $1 \le \sum_{i=1}^{m} x_i a_{in}$ và $x_i \ge 0$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, m$.

Sau khi giải xong bài toán này, lời giải của bài toán chuẩn là : $v = \frac{1}{x_1 + x_2 + \ldots + x_m}$ và chiến thuật tối ưu cho người thứ nhất sẽ là $p_i = v.x_i$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, m$.

### d) Thuật toán đơn hình để giải trò chơi hạn chế

Thuật toán đơn hình giải trò chơi hạn chế được dùng khi ma trận trò chơi không có điểm yên ngựa và cũng không còn thu gọn được bằng luật chi phối. Các bước thực hiện thuật toán như sau:

*Bước 1.* Cộng thêm một hằng số vào các phần tử của ma trận trò chơi để mọi phần tử đều dương. Cần ghi nhớ số này để cuối cùng sẽ trừ giá trị tìm được cho số này để có giá trị trò chơi trên ma trận ban đầu.

*Bước 2.* Tạo bảng có gia số $-1$ ở các ô thuộc dòng cuối (dòng $m + 1$), và gia số $+1$ ở các ô thuộc cột phải (cột $n + 1$), gia số 0 ở góc phải-dưới (dòng $m + 1$, cột $n + 1$).

| | $y_1$ | $y_2$ | … | $y_n$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $a_{11}$ | $a_{11}$ | … | $a_{11}$ | 1 |
| $x_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | … | $a_{2n}$ | 1 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | | ⋮ | ⋮ |
| $x_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m1}$ | … | $a_{mn}$ | 1 |
| | $-1$ | $-1$ | … | $-1$ | 0 |

*Bước 3.* Chọn một ô bên trong bảng làm điểm chốt, giả sử đó là ô thuộc dòng $p$ cột $q$ ($p$ gọi là dòng chốt, $q$ gọi là cột chốt, số tại điểm chốt gọi là số chốt), có những đặc điểm sau:

+ Gia số ở cột chốt là $A[m + 1 ; q]$ phải là số âm;

+ Số tại điểm chốt là $A[p ; q]$ phải dương;

+ Tỉ số giữa gia số trên dòng chốt và số chốt là $\dfrac{A[p;n+1]}{A[p;q]}$ phải nhỏ nhất với mọi số dương $A[p ; q]$ thuộc cột $q$.

*Bước 4.* Thay đổi giá trị các phần tử của bảng như sau :

+ Thay số tại các ô $A[i ; j]$ ($i \neq p$ và $j \neq q$) bởi $A[i;j]-\dfrac{A[p;j].A[i;q]}{A[p;q]}$.

+ Thay các số tại các ô thuộc dòng $p$ (trừ ô chốt) bởi thương giữa số tại ô đó và số tại ô chốt.

+ Thay các số tại các ô thuộc cột $q$ (trừ ô chốt) bởi số đối của thương giữa số tại ô đó và số tại ô chốt.

+ Thay số tại ô chốt bởi nghịch đảo của nó.

Có thể minh hoạ như sau :

| | | $q$ | | $j \neq q$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| $p$ | | $x$ | | $y$ | |
| | | | | | |
| $i \neq p$ | | $t$ | | $z$ | |
| | | | | | |
| Trước bước 4 | | | | | |

$\rightarrow$

| | | $q$ | | $j \neq q$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| $p$ | | $\dfrac{1}{x}$ | | $\dfrac{y}{x}$ | |
| | | | | | |
| $i \neq p$ | | $-\dfrac{t}{x}$ | | $\dfrac{zx-ty}{x}$ | |
| | | | | | |
| Sau bước 4 | | | | | |

*Bước 5.* Thay nhãn của cột chốt và nhãn của dòng chốt cho nhau (nghĩa là $p$ và $q$ đổi chỗ cho nhau).

*Bước 6.* Nếu còn số âm trên dòng $m + 1$ thì quay về bước 3.

*Bước 7.* Ngược lại, đưa kết quả ra:

a) Giá trị trò chơi $v$ là nghịch đảo của số ở góc phải-dưới. Nếu ở bước 1 đã trừ mỗi ô cho một hằng số (để dễ tính toán) thì phải cộng thêm hằng số này vào $v$. Ngược lại, nếu ở bước 1 đã cộng vào mỗi ô một hằng số (để các số đều dương) thì ở bước này phải trừ $v$ cho hằng số này.

b) Chiến thuật tối ưu của người thứ nhất được xây dựng như sau : Tại thời điểm cuối cùng, các biến của người thứ nhất còn lại trên cột trái sẽ có tần suất 0, các biến của người thứ nhất nằm ở trên dòng trên cùng của bảng sẽ nhận giá trị tại dòng cuối cùng thuộc cùng cột chia cho giá trị tại góc phải-dưới.

c) Chiến thuật tối ưu của người thứ hai được xây dựng như sau : Tại thời điểm cuối cùng, các biến của người thứ hai còn lại thuộc dòng trên cùng sẽ có tần suất 0, các biến của người thứ hai thuộc cột bên trái của bảng sẽ nhận giá trị tại cột bên phải cùng dòng chia cho giá trị tại góc phải-dưới.

***Ví dụ.*** Xét ma trận trò chơi:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ma trận này có phần tử nhỏ nhất là $-2$, do đó cần thực hiện bước 1 chuyển về ma trận : $A' = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, ma trận này không có điểm yên ngựa và cũng không thu gọn được bằng luật chi phối.

Thực hiện bước 2 có bảng sau :

| | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 4 | 1 | 8 | 1 |
| $x_2$ | 2 | 3 | 1 | 1 |
| $x_3$ | 0 | 4 | 3 | 1 |
| | $-1$ | $-1$ | $-1$ | 0 |

Thực hiện bước 3 chọn được ô chốt (thuộc một cột tuỳ ý vì các số thuộc dòng cuối cùng của bảng tại các cột $y_1$, $y_2$ và $y_3$ đều âm), còn dòng của ô chốt phải theo quy luật đã nêu trên. Kết quả chọn được ô chốt là ô $(x_1 ; y_1)$.

Thực hiện bước 4 và 5 có bảng sau :

| | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 2 | $\frac{1}{4}$ |
| $x_2$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{2}$ | −3 | $\frac{1}{2}$ |
| $x_3$ | 0 | 4 | 3 | 1 |
| | $\frac{1}{4}$ | $-\frac{3}{4}$ | 1 | $\frac{1}{4}$ |

Thực hiện bước 6 thấy phải quay về bước 3 chọn ô chốt mới là $(x_2 ; y_2)$.

Thực hiện bước 4 và 5 có bảng sau:

| | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0.3 | −0.1 | 2.3 | 0.2 |
| $x_2$ | −0.2 | 0.4 | −1.2 | 0.2 |
| $x_3$ | 0.8 | −1.6 | 7.8 | 0.2 |
| | 0.1 | 0.3 | 0.1 | 0.4 |

Thực hiện bước 6, chuyển sang bước 7:

Giá trị trò chơi là $v = \frac{1}{0.4} - 2 = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$ (phải trừ đi 2 vì ban đầu các phần tử của ma trận được cộng thêm 2).

Chiến thuật tối ưu cho người thứ nhất là : $p = (0.25 ; 0.75 ; 0)$.

Chiến thuật tối ưu cho người thứ hai là $q = (0.5 ; 0.5 ; 0)$.

## 5. *Dạng mở rộng của trò chơi*

Dạng chiến thuật của trò chơi là một cách chuẩn mực để diễn tả mô hình toán học của trò chơi. Tuy nhiên, có một số điều thú vị khác của trò chơi lại bị bỏ qua trong mô hình đơn giản này. Do đó, bây giờ chúng ta đề cập tới một mô hình toán học khác bàn đến các khái niệm cơ sở chưa được đề cập trong dạng chiến thuật trò chơi. Mô hình mới này gọi là dạng mở rộng của trò chơi. Ở đây đề cập tới ba khái niệm cơ sở: cây trò chơi, bước đi ngẫu nhiên và tập thông tin về trò chơi.

### a) Cây trò chơi

Dạng mở rộng của trò chơi là mô hình dùng đồ thị có hướng để mô tả trò chơi. Đồ thị có hướng là cặp $(T, F)$ trong đó $T$ là tập không rỗng các đỉnh, $F$ là một hàm sao cho với mỗi $x \in T$ có tập con $F(x) \in T$ (gọi $F(x)$ là tập các đỉnh theo sau $x$). Khi dùng đồ thị có hướng để biểu diễn trò chơi thì tập đỉnh biểu diễn các vị trí của trò chơi, $F(x)$ là tập các đỉnh có thể tới từ $x$ sau một phép di chuyển (một bước đi hay là một lượt đi của một người chơi). Đường đi từ $t_0$ đến $t_1$ là dãy $t_0 = x_0, x_1, \ldots, x_n = t_1$ mà $x_i$ là đỉnh theo sau của đỉnh $x_{i-1}$ với $i = 1, \ldots, n$. Trong dạng mở rộng của trò chơi, chúng ta thường gặp một dạng riêng của đồ thị có hướng đó là dạng ***cây*** (hay còn gọi là cây trò chơi).

***Định nghĩa***

Cây là đồ thị có hướng $(T, F)$ trong đó có một đỉnh đặc biệt $t_0$ gọi là gốc hoặc gọi là đỉnh khởi đầu, sao cho với mọi đỉnh $t \in T$ khác $t_0$ luôn có một đường đi duy nhất từ $t_0$ tới $t$. Đỉnh không có đường đi tới đỉnh khác gọi là lá của cây.

Trong dạng mở rộng của trò chơi, trò chơi được bắt đầu từ đỉnh gốc và tiếp tục theo các đường đi dần về lá khi người chơi lần lượt thực hiện các phép di chuyển của mình (lá của cây là các vị trí kết thúc trò chơi). Tại các lá, các luật chơi cho phép xác định giá trị trả về cho người chơi. Với trò chơi có $n$ người chơi, tại lá sẽ có bộ $n$ giá trị trả về.

Do chúng ta chỉ xét trò chơi hai người có tổng điểm bằng 0 nên giá trị trả về chỉ là một con số thể hiện điểm người thứ nhất thắng người thứ hai. Một số trong các đỉnh không là lá sẽ được gắn cho người thứ nhất có quyền chọn phép di chuyển từ đỉnh đó. Số đỉnh còn lại gắn cho người thứ hai có quyền chọn phép di chuyển từ đỉnh đó. Tuy nhiên cũng tồn tại một số đỉnh đơn lẻ có thể nhận các bước đi không biết trước là thuộc người nào (các đỉnh này thuộc bước đi ngẫu nhiên).

***Bước đi ngẫu nhiên.*** Nhiều trò chơi chứa các bước đi ngẫu nhiên. Chẳng hạn, gieo xu, quay bánh xe trong trò chơi may rủi, quay chiếc lồng lăn bóng trong trò chơi xổ số lôtô... Trong những trò chơi này, những bước đi ngẫu nhiên có vai trò quan trọng. Ngay trong chơi cờ cũng có một bước đi ngẫu nhiên là phép gieo xu hoặc súc sắc để xác định người chơi nào được đi trước và do đó bước đi đầu tiên có thể tạo ra những lợi thế nào đó. Trong trò chơi bài, bước đi đầu tiên cũng là một bước đi ngẫu nhiên, đó là bước "tráo bài và chia bài", mỗi người chơi chỉ nhận biết được một phần kết quả của bước đi đầu tiên này (là những quân bài mà họ được nhận) nhưng họ không biết đầy đủ thông tin về kết quả này (những quân bài đối thủ nhận được là gì). Bước đi ngẫu nhiên như là đã tạo cho mỗi người chơi một tần suất khác nhau để nhận được một kết quả nhất định trong bước đi này. Kí hiệu bước đi ngẫu nhiên là $N$.

***Thông tin.*** Một khía cạnh quan trọng khác khi chúng ta nghiên cứu dạng mở rộng của trò chơi đó là thông tin cho người chơi biết về thứ tự các bước di chuyển.

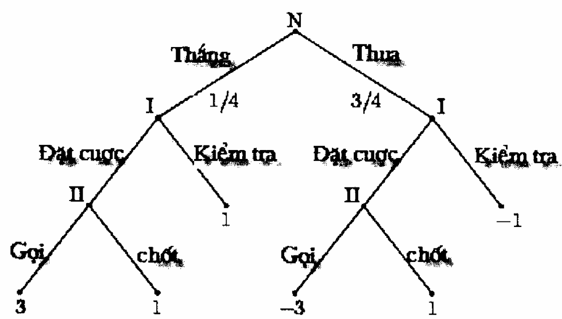
### b) Ván cơ bản kết thúc trò chơi bài

Một trong các trạng thái của trò chơi bài có mô hình toán học đơn giản và hữu ích nhất là "đánh cược cổ điển" hoặc còn gọi là "ván cơ bản kết thúc trò chơi bài". Ván cơ bản kết thúc trò chơi bài như sau: Cả hai người đặt 1 đồng tiền cược đầu tiên vào giữa bàn. Số tiền giữa bàn bây giờ là 2 đồng (khi số tiền giữa bàn có từ 2 đồng trở lên được gọi là một bình tiền). Người thứ nhất rút một quân bài từ cỗ bài. Giả sử nó có thể là quân bài chiến thắng với tần suất $\frac{1}{4}$ hoặc có thể là quân bài thua với tần suất $\frac{3}{4}$ (quân bài rút ra vẫn úp). Sau đó, người thứ nhất sẽ chọn *kiểm tra* hoặc *đặt cược* :

- Nếu chọn *kiểm tra* thì quân bài của người thứ nhất sẽ được lật lên kiểm tra (xem nó là quân bài thắng hay thua). Nếu người thứ nhất có quân bài chiến thắng thì anh ta chiếm bình tiền (do đã lấy được 1 đồng từ người thứ hai), ngược lại thì người thứ nhất mất đồng tiền đặt trước cho người thứ hai.
- Nếu chọn *đặt cược* thì đặt thêm 2 đồng vào bình. Sau đó người thứ hai (không biết quân bài của người thứ nhất) sẽ *chốt bài* hoặc *gọi bài*.
  - Nếu *chốt bài* thì mất 1 đồng đã cược.
  - Nếu *gọi bài* thì đặt thêm 2 đồng vào bình.

Sau đó quân bài của người thứ nhất được lật lên, nếu là quân bài thắng thì người thứ nhất thắng 3 đồng (1 đồng đặt cược trước và 2 đồng đặt cược sau) nếu là quân bài thua thì người thứ nhất mất 3 đồng cho người thứ hai.

Cây của trò chơi này như hình sau:

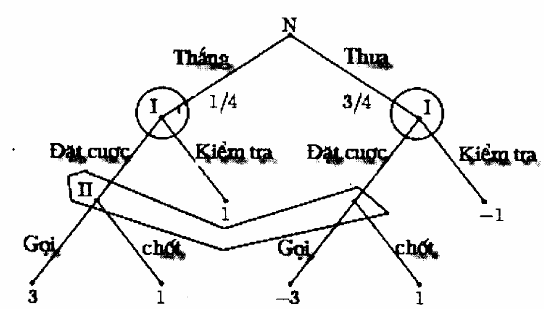



*Hình 9.6*

Trong trò chơi có ba phép di chuyển:

- Phép di chuyển ngẫu nhiên là $N$ để chọn quân bài (thắng hay thua) cho người thứ nhất;
- Các phép di chuyển của người thứ nhất: *kiểm tra* hoặc *đặt cược*;
- Các phép di chuyển của người thứ hai: *chốt bài* hoặc *gọi bài*.

Tại mỗi đỉnh của cây, chúng ta gắn một nhãn là số hiệu người chơi đi từ đỉnh này. Khi lập trình, phép chuyển ngẫu nhiên (phép rút quân bài đầu tiên cho người thứ nhất), có thể được tạo ra bằng cách tạo ngẫu nhiên một số tự nhiên (chẳng hạn với tần suất thắng là $\frac{1}{4}$ và thua là $\frac{3}{4}$) có nhãn là $N$. Trên mỗi cung gán nhãn xác định là tên phép di chuyển.




*Hình 9.7*

Giá trị tại các lá thể hiện số tiền người thứ nhất thắng (nếu là số dương) và thua (nếu là số âm).

Tuy nhiên, còn một đặc điểm chưa được thể hiện rõ trên cây này: Khi người thứ hai di chuyển thì người thứ hai không rõ quân bài người thứ nhất nhận được thuộc loại nào. Nghĩa là khi thực hiện phép di chuyển, người thứ hai không biết nên thực hiện di chuyển từ vị trí nào trong hai vị trí của mình sau khi người thứ nhất đặt cược thêm 2 đồng. Chúng ta thể hiện điều này trên cây bằng cách khoanh hai vị trí này trong một đường kín và nói rằng hai đỉnh này tạo thành một *tập thông tin*.

Hai đỉnh mà người thứ nhất di chuyển từ chúng sau phép chuyển ngẫu nhiên $N$ thì tạo thành hai tập thông tin riêng biệt do chúng diễn đạt kết quả tác động của một phép di chuyển ngẫu nhiên; chúng ta vẽ các vòng tròn nhỏ cho mỗi đỉnh này. Chúng ta cũng chỉ cần giữ lại một nhãn chung cho các đỉnh trong một tập thông tin. Nghĩa là chỉ cần gán nhãn cho từng tập thông tin.

### c) Cây Kuhn

Cây Kuhn là cây trò chơi bao gồm: các giá trị trả về, tập thông tin, nhãn của các đỉnh và cung.

***Định nghĩa***

Trò chơi hạn chế, hai người có tổng điểm bằng 0 trong dạng mở rộng được định nghĩa là:

- Một cây $T$ hữu hạn các đỉnh.
- Một hàm giá trị trả về được gắn giá trị cho mọi lá.
- Một tập $T_0$ gồm các đỉnh khác lá (mô tả các vị trí tại đó phép chuyển ngẫu nhiên xuất hiện) và với mỗi $t \in T_0$, có các tần suất phân bố trên các cung xuất phát từ $t$.
- Các đỉnh còn lại (không là lá, và không thuộc $T_0$) gồm hai nhóm các tập thông tin $T_{11}, T_{12}, ..., T_{1k_1}$ (cho người thứ nhất) và $T_{21}, T_{22}, ..., T_{2k_2}$ (cho người thứ hai).
- Với mỗi tập thông tin $T_{jk}$ cho người $j$ ($j = 1, 2$) tương ứng một tập các nhãn $L_{jk}$ và với mỗi $t \in T_{jk}$ có ánh xạ 1-1 của $L_{jk}$ lên tập các cung xuất phát từ $t$.

Vậy cây Kuhn có đầy đủ đặc trưng của trò chơi.

Trò chơi mà hai người đều biết cây Kuhn là trò chơi có thông tin đầy đủ.

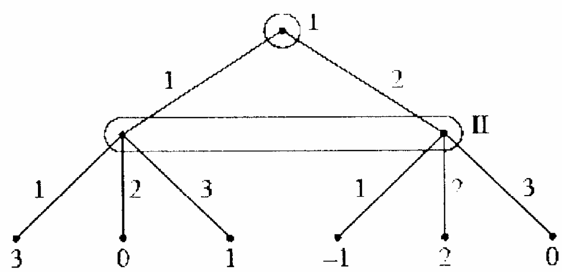
### d) Mô tả trò chơi bằng dạng mở rộng

Trước hết chúng ta kiểm tra xem có thể đặt dạng chiến thuật của trò chơi vào trong dạng mở rộng hay không. Dạng chiến thuật của trò chơi mô tả được sự chọn lựa đồng thời của các người chơi, nhưng dạng mở rộng không mô tả trực tiếp được các phép chuyển đồng thời.

Tuy nhiên, các phép chuyển đồng thời có thể coi là hai phép chuyển liên tiếp theo nhau của hai người chơi mà người đi sau không biết gì về phép di chuyển của người đi trước. Sự không biết này có thể diễn đạt bằng cách sử dụng một tập thông tin. Chẳng hạn:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Dạng ma trận




Dạng mở rộng

***Hình 9.8***

Người thứ nhất có tập chiến thuật nguyên thuỷ là {1; 2}, người thứ hai có tập chiến thuật nguyên thuỷ là {1; 2; 3}. Chúng ta giả sử rằng người thứ nhất di chuyển đầu tiên bằng cách chọn hàng 1 hoặc 2. Sau đó người thứ hai di chuyển nhưng không biết sự lựa chọn của người thứ nhất. Điều này được biểu thị bởi tập thông tin của người thứ hai. Sau đó người thứ hai chọn cột 1, 2 hoặc 3 và giá trị trả về thích hợp được tạo ra.

### e) Thu dạng mở rộng về dạng chiến thuật

Đi theo hướng ngược lại, từ dạng mở rộng của trò chơi tìm dạng chiến thuật thì chúng ta cần quan tâm đến những chiến thuật nguyên thuỷ và những quy ước về các giá trị ngẫu nhiên.

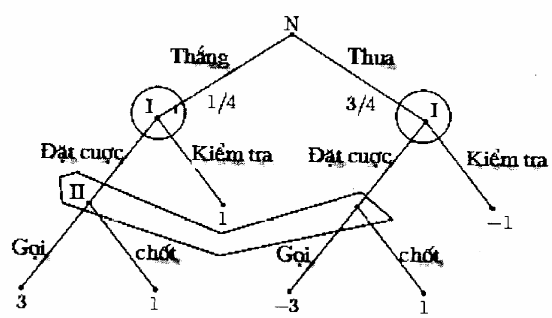
Các *chiến thuật nguyên thuỷ.* Cho trò chơi ở dạng mở rộng, trước tiên cần tìm $X$ và $Y$ là các tập gồm các chiến thuật nguyên thuỷ của các người chơi trong dạng chiến thuật. Một chiến thuật nguyên thuỷ của người thứ nhất là quy luật chỉ dẫn chính xác cho người thứ nhất thực hiện di chuyển trong một tập thông tin của mình. Giả sử $T_{11}, T_{12}, ..., T_{1k_1}$ là các tập thông tin của người thứ nhất và $L_{11}, L_{12}, ..., L_{1k_1}$ là các tập nhãn tương ứng. Một chiến thuật nguyên thuỷ của người thứ nhất là bộ $x = (x_1, x_2, ..., x_{k_1})$ trong đó $x_i$ là một trong các phần tử của $L_{1i}$ với $i$ = 1, 2,..., $k_1$. Nếu có $m_i$ phần tử trong $L_{1i}$ thì số lượng các bộ $x$ bằng tích $m_1 \times m_2 \times ... \times m_{k_1}$. Vậy số lượng các tập chiến thuật nguyên thuỷ của người thứ nhất là $m_1 \times m_2 \times ... \times m_{k_1}$. Tập tất cả các chiến thuật nguyên thuỷ của người thứ nhất kí hiệu là $X$. Tương tự, nếu $T_{21}$, ..., $T_{2k_2}$ là các tập thông tin của người thứ hai và $L_{21}$, ..., $L_{2k_2}$ là các tập nhãn tương ứng, một chiến thuật nguyên thuỷ của người thứ hai là bộ $y = (y_1, ..., y_{k_2})$, trong đó $y_j \in L_{2j}$ với mỗi $j$. Người thứ hai có $n_1 \times n_2 \times ... \times n_{k_2}$ chiến thuật nguyên thuỷ nếu có $n_j$ phần tử trong $L_{2j}$. Kí hiệu $Y$ là tập các chiến thuật nguyên thuỷ của người thứ hai.

*Các giá trị trả về ngẫu nhiên.* Chúng ta quy ước giá trị trả về của phép di chuyển ngẫu nhiên như sau:

Nếu với chiến thuật nguyên thuỷ đã cố định $x \in X$ và $y \in Y$, giá trị trả về $A(x; y)$ là một số ngẫu nhiên thì thay nó bởi giá trị trung bình.

***Ví dụ 1.*** Nếu cho chiến thuật $x \in X$ và $y \in Y$ người thứ nhất thắng ba điểm với xác suất $\frac{1}{4}$, thắng 1 điểm với xác suất $\frac{1}{4}$ và thua 1 điểm với xác suất $\frac{1}{2}$ thì giá trị trung bình trả về là $\frac{1}{4}.3 + \frac{1}{4}.1 + \frac{1}{2}.(-1) = \frac{1}{2}$. Vậy $A(x; y) = \frac{1}{2}$.

***Ví dụ 2.*** Giả sử chúng ta cần tìm dạng chiến thuật cho ván cơ bản kết thúc trò chơi bài đã mô tả bằng chiến thuật mở rộng như cây sau:




*Hình 9.9*

Với người thứ nhất : Kí hiệu *Đặt cược* là *đ*, *Kiểm tra* là *k*. Người thứ nhất có hai tập thông tin. Trong mỗi tập thông tin có hai lựa chọn: *đ* và *k*. Do đó người thứ nhất có $2 \times 2$ chiến thuật nguyên thuỷ. Đó là các chiến thuật sau:

(*đ; đ*) : *Đặt cược* bất kể quân bài nhận được là quân bài thắng hay là quân bài thua.

(*đ; k*) : *Đặt cược* với quân bài thắng và *Kiểm tra* với quân bài thua.

(*k; đ*) : *Kiểm tra* với quân bài thắng và *Đặt cược* với quân bài thua.

(*k; k*) : *Kiểm tra* bất kể quân bài nhận được là quân bài thắng hay là quân bài thua.

Vậy tập các chiến thuật nguyên thuỷ là $X = \{(đ;\ đ), (đ;\ k), (k;\ đ), (k;\ k)\}$. Vậy $X$ chứa mọi chiến thuật nguyên thuỷ kể cả tốt lẫn xấu (đặc biệt (*k; đ*) là chiến thuật khá vô lí!).

Kí hiệu *g* là *Gọi*, *c* là *Chốt*. Người thứ hai chỉ có một tập thông tin với hai lựa chọn: *g* và *c*. Do đó tập các chiến thuật nguyên thuỷ của người thứ hai là $Y = \{g;\ c\}$.

Bây giờ chúng ta tìm ma trận giá trị trả về: Giả sử người thứ nhất sử dụng (*đ; đ*) và người thứ hai sử dụng *g*. Nếu người thứ nhất được chia quân bài thắng (điều này xảy ra với xác xuất $\frac{1}{4}$) thì người thứ nhất thắng 3 điểm. Nếu người thứ nhất được chia quân bài thua (điều này xảy ra với xác suất $\frac{3}{4}$) thì người thứ nhất thua 3 điểm. Chiến thắng trung bình của người thứ nhất là

$$A((đ;\ đ), g) = 3.\frac{1}{4} + (-3).\frac{3}{4} = -\frac{3}{2} \text{ (nghĩa là thua 1,5 điểm).}$$

Tính toán tương tự có ma trận giá trị trả về là:

| | $g$ | $c$ |
|---|---|---|
| (*đ; đ*) | $-\frac{3}{2}$ | 1 |
| (*đ; k*) | 0 | $-\frac{1}{2}$ |
| (*k; đ*) | $-2$ | 1 |
| (*k; k*) | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ |

Chúng ta giải trò chơi 4×2 này. Dòng 3 bị chi phối bởi dòng 1 và dòng 4 bị chi phối bởi dòng 2. Điều này có thể giải thích như sau: Khi người thứ nhất được chia quân bài thắng thì dùng *Đặt cược* là tốt hơn *Kiểm tra*. Bỏ đi hai dòng cuối, ma trận còn là $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Dễ dàng giải được kết quả: Giá trị $V = -\frac{1}{4}$.

Chiến thuật tối ưu của người thứ nhất là $\left(\frac{1}{6}; \frac{5}{6}; 0; 0\right)$.

Chiến thuật tối ưu của người thứ hai là $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

### f) Trò chơi với thông tin hoàn chỉnh

Trò chơi với thông tin hoàn chỉnh là trò chơi mà trong dạng mở rộng mỗi tập thông tin của mỗi người chơi chứa đúng một đỉnh.

Trò chơi với thông tin hoàn chỉnh có cấu trúc toán học đặc biệt đơn giản. Mỗi trò chơi với thông tin hoàn chỉnh khi thu gọn về dạng chiến thuật đều có điểm yên ngựa, cả hai người chơi đều có chiến thuật tối ưu.

## *6. Đệ quy và trò chơi ngẫu nhiên*

### a) Trò chơi ma trận có phần tử là trò chơi

Đó là những trò chơi ma trận mà người chơi khi thực hiện các chiến thuật nguyên thuỷ có thể phải thực hiện một trò chơi khác. Ví dụ trò chơi với $G = \begin{pmatrix} G_1 & 4 \\ 5 & G_2 \end{pmatrix}$, trong đó $G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ và $G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ cũng là những trò chơi.

Trong trò chơi $G$, vẫn quy ước người thứ nhất chọn dòng, người thứ hai chọn cột. Nếu ô trong dòng hoặc cột được chọn là số thì người thứ hai phải trả cho người thứ nhất giá trị bằng số đó và trò chơi kết thúc. Nếu ô chọn là $G_1$ thì trò chơi $G_1$ được chơi. Nếu ô chọn là $G_2$ thì trò chơi $G_2$ được chơi.

Để giải trò chơi $G$, trước hết chúng ta cần giải trò chơi $G_1$ và $G_2$.

- $G_1$: có giá trị trò chơi là $V_1 = 1$, chiến thuật tối ưu cho người thứ nhất là (0.5; 0.5). Chiến thuật tối ưu cho người thứ hai là $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$.
- $G_2$: có giá trị trò chơi là $V_2 = 3$, chiến thuật tối ưu cho người thứ nhất là (0; 1). Chiến thuật tối ưu cho người thứ hai là (0; 1).

Khi chơi trò chơi $G$, các đấu thủ kết thúc trò chơi $G_1$ thì họ nhận được giá trị trả về trung bình là $V_1 = 1$, kết thúc trò chơi $G_2$ thì họ nhận được giá trị trả về trung bình là $V_2 = 3$. Do đó $G$ có thể xem như trò chơi với ma trận: $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Giải trò chơi này được: Giá trị trò chơi là $V = \frac{17}{5}$, chiến thuật tối ưu cho người thứ nhất là $\left(\frac{2}{5};\frac{3}{5}\right)$. Chiến thuật tối ưu cho người thứ hai là $\left(\frac{1}{5};\frac{4}{5}\right)$.

Phương pháp giải trò chơi $G$ có thể tổng kết lại như sau: Nếu ma trận của trò chơi $G$ có phần tử là những trò chơi khác, thì lời giải của $G$ là lời giải của trò chơi mà trong ma trận ban đầu các phần tử là trò chơi khác sẽ được thay bằng giá trị trung bình trả về của trò chơi đó.

*Sự phân giải ma trận.* Trò chơi $G$ nêu trong ví dụ trên còn có thể coi là trò chơi ma trận 4×4. Tập bốn chiến thuật nguyên thuỷ của người thứ nhất kí hiệu là : {(1; 1), (1; 2), (2; 1), (1; 2)}, với $(i; j)$ biểu thị dùng hàng $i$ trong $G$ và trong $G_i$ đã dùng dòng $j$ để chơi. Tương tự hiểu quy ước như vậy với người thứ hai (dùng cột). Ma trận 4×4 thành:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 0 & 1 \\ 5 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Chúng ta có thể giải trò chơi này bằng các phương pháp đã nêu (phương pháp đơn hình) được kết quả: Giá trị trò chơi là $\frac{17}{5}$.

Chiến thuật tối ưu cho người thứ nhất là (0.2; 0.2; 0; 0.6).

Chiến thuật tối ưu cho người thứ hai là (0.13333; 0.06667; 0; 0.8).

Từ đó có thể suy ra trong trò chơi $G$ ban đầu, chiến thuật tối ưu cho người thứ nhất là $(0.2 + 0.2; 0 + 0.6) = \left(\frac{2}{5}; \frac{3}{5}\right)$. Chiến thuật tối ưu cho người thứ hai là

$(0.13333 + 0.06667; 0 + 0.8) = \left(\frac{1}{5}; \frac{4}{5}\right)$.

Nói chung, khi chúng ta có trò chơi $G$ và nếu sau khi sắp xếp lại các hàng và các cột nào đó chúng ta phân giải được ma trận $G$ thành dạng:

$G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}$ mà $G_{11}$ và $G_{22}$ là ma trận tuỳ ý, còn $G_{12}$ và $G_{21}$ là ma trận hằng số (đó là ma trận mà các phần tử đều bằng một hằng số); thì chúng ta có thể giải $G$ theo phương pháp nêu trên, coi như các người chơi chọn hàng hoặc cột từ ma trận đã được phân giải này, từ đó suy ra chọn hàng và cột từ ma trận ban đầu.

### b) Trò chơi nhiều giai đoạn

Một trò chơi đóng vai trò là phần tử của một trò chơi khác thì bản thân nó có thể cũng có phần tử là trò chơi và phương pháp giải nêu trên được lặp lại hữu hạn lần.

***Ví dụ.*** *Trò chơi thanh tra*

Người thứ hai cần phải thực hiện một hoạt động tại một giai đoạn nào đó trong $n$ giai đoạn của một quá trình. Người thứ nhất bí mật theo dõi giám sát người thứ hai chỉ tại một giai đoạn trong $n$ giai đoạn này. Nếu người thứ hai đang hoạt động mà người thứ nhất giám sát được thì người thứ hai mất cho người thứ nhất 1 đơn vị. Nếu người thứ nhất không giám sát được khi người thứ hai đang hoạt động thì giá trị trả về là 0.

| | | Hoạt động | Chờ |
|---|---|---|---|
| $G_n$ | Giám sát | 1 | 0 |
| | Chờ | 0 | $G_{n-1}$ |

Kí hiệu trò chơi này là $G_n$. Trong đó $G_1 = (1)$.

Chúng ta giải bằng cách lặp đi lặp lại hữu hạn lần (đệ quy) tìm được:

Giá trị trò chơi $G_1$ là $\mathrm{Val}(G_1) = 1$.

Giá trị trò chơi $G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ là $\mathrm{Val}(G_2) = \frac{1}{2}$.

Giá trị trò chơi $G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ là $\mathrm{Val}(G_3) = \frac{1}{3}$.

...

Giá trị trò chơi $G_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n-1} \end{pmatrix}$ là $\mathrm{Val}(G_n) = \frac{1}{n}$.

Công thức truy hồi tính giá trị trò chơi là: $\mathrm{Val}(G_n) = \dfrac{\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n-1}} = \frac{1}{n}$.

## c) Trò chơi đệ quy

***Định nghĩa.*** Trong một trò chơi có một số phần tử tham gia là trò chơi có thể lại dẫn về trò chơi ban đầu được gọi là trò chơi đệ quy.

***Ví dụ 1.*** $G = \begin{pmatrix} G & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ là trò chơi đệ quy nhưng có thể lặp vô hạn (nếu hai người chơi luôn chơi dòng 1 và cột 1).

***Ví dụ 2.*** $G = \begin{pmatrix} G & 1 & 0 \\ 1 & 0 & G \\ 0 & G & 1 \end{pmatrix}$.

Giả sử chiến thuật của người thứ nhất là $p = (p_1; p_2; p_3)$, theo nguyên lí cân bằng có

$$\begin{cases} v = v.p_1 + p_2 \\ v = p_1 + v.p_2 \\ v = v.p_2 + p_3 \end{cases}$$

suy ra $v = \frac{1}{2}$; $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$. Giá trị trò chơi là $v = \frac{1}{2}$. Chiến thuật $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ là chiến thuật tối ưu cho cả hai người chơi.

## d) Sự di chuyển ngẫu nhiên giữa các trò chơi

Khái quát hoá khái niệm trò chơi đệ quy: cho phép chọn trò chơi tiếp theo không chỉ phụ thuộc chiến thuật nguyên thuỷ do người chơi chọn mà còn có thể chọn ngẫu nhiên. Giả sử $G_1, G_2, ..., G_n$ và $p_1, p_2, ..., p_n$ là các tần suất có tổng bằng 1. Chúng ta sử dụng kí hiệu $p_1G_1 + ... + p_nG_n$ để mô tả tình trạng trò chơi tiếp theo được chọn ngẫu nhiên là $G_i$ với tần suất $p_i$. Chúng ta cũng kí hiệu số $z$ là giá trị mà người thứ hai phải trả cho người thứ nhất thay bằng một trò chơi tầm thường ma trận $(z)$ có kích thước $1\times 1$. Ví dụ $\frac{1}{2}G_1 + \frac{1}{2}(3)$ biểu thị khi tung đồng xu đồng chất cân đối nếu nhận được mặt ngửa thì trò chơi $G_1$ được chơi và nếu nhận được mặt sấp thì người thứ hai trả cho người thứ nhất một lượng là 3 đơn vị.

***Ví dụ.*** Giả sử $G_1$ và $G_2$ quan hệ với nhau như sau:

$$G_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}G_2 + \frac{1}{2}(0) & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \qquad G_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}G_1 + \frac{1}{3}(-2) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Để giải, chúng ta đặt $v_i$ là giá trị trò chơi $i$, $i = 1$ và 2. Do $0 \le v_1 \le 1$ và $-1 \le v_2 \le 0$ nên $G_1$ và $G_2$ không có điểm yên ngựa, áp dụng công thức

$$Val(A) = Val\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} = \frac{ac-bd}{(a-b)+(c-d)}$$

ta có: $v_1 = Val\begin{pmatrix} \frac{1}{2}v_2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{4}{6-v_2}$; $v_2 = Val\begin{pmatrix} \frac{2}{3}v_1 - \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{2(1-v_1)}{5-2v_1}$.

Suy ra $v_1 = \dfrac{4}{6 + \dfrac{2(1-v_1)}{5-2v_1}}$ dẫn tới phương trình: $7v_1^2 - 20v_1 + 10 = 0$, giải được:

$$v_1 = \frac{10-\sqrt{30}}{7}, \; v_2 = \frac{10-2\sqrt{30}}{5}.$$

Từ đó tìm được chiến thuật tối ưu cho hai người chơi.

## e) Trò chơi ngẫu nhiên

Nếu trò chơi nhiều giai đoạn có thêm khả năng trả về giá trị tại mỗi giai đoạn thì trò chơi đó được gọi là trò chơi ngẫu nhiên. Đây là lĩnh vực đang được nghiên cứu mạnh mẽ hiện nay.

***Định nghĩa***

Một trò chơi ngẫu nhiên $G$ gồm tập hữu hạn các vị trí hoặc giai đoạn $\{1, 2, ..., N\}$ trong đó có một giai đoạn là vị trí xuất phát. Chúng ta kí hiệu $G^{(k)}$ là giai đoạn thứ $k$. Liên quan với mỗi giai đoạn là một ma trận $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})$. Khi trò chơi đang ở giai đoạn $k$, các người chơi đồng thời chọn hàng và cột của $A^{(k)}$ ví dụ hàng $i$ cột $j$. Có hai điều quyết định kết quả.

- Người thứ nhất thắng một lượng là $a_{ij}^{(k)}$.
- Xác suất phụ thuộc $i, j, k$ để trò chơi kết thúc hoặc chuyển sang giai đoạn khác. Xác suất để trò chơi kết thúc kí hiệu là $s_{ij}^{(k)}$ và xác suất để giai đoạn $l$ là giai đoạn tiếp theo kí hiệu là $P_{ij}^{(k)}(l)$, thoả mãn: $s_{ij}^{(k)} + \sum_{l=1}^{N} P_{ij}^{(k)}(l) = 1$ với mọi $i, j$ và $k$. Giá trị trả về được cộng dồn tích luỹ lại cho đến khi trò chơi kết thúc. Để bảo đảm trò chơi dần dần sẽ dừng, chúng ta chấp nhận một giả định là mọi xác suất dừng đều dương. Kí hiệu $s$ là số nhỏ nhất trong các xác suất này thì: $s = \min_{i,j,k} s_{ij}^{(k)} > 0$.

Với giả định trên, trò chơi kết thúc sau một số hữu hạn bước đi sẽ có xác suất bằng 1. Giả định này cũng tạo ra tổng giá trị tích luỹ trả về là hữu hạn không phụ thuộc vào những trò chơi nào đã được chọn trong khi chơi. Gọi $M$ là số lớn nhất trong các giá trị tuyệt đối của các giá trị trả về tại các giai đoạn ($M = \max_{i,j,k} |a_{ij}^{(k)}|$) thì tổng tích luỹ chờ đợi trả về cho người này hoặc người khác là hội tụ (có giới hạn) bởi vì $M + (1-s)M + (1-s)^2 M + ... = \dfrac{M}{s}$.

Người thứ nhất muốn tổng tích luỹ này lớn nhất còn người thứ hai muốn nhỏ nhất. Chúng ta mô tả trò chơi này là:

$$G^{(k)} = \left( a_{ij}^{(k)} + \sum_{l=1}^{N} P_{ij}^{(k)}(l).G^{(l)} \right).$$

Chú ý rằng tổng các xác suất cho mỗi thành phần trong ma trận là nhỏ hơn 1, phần xác suất còn lại là $s_{ij}^{(k)}$ là xác suất kết thúc trò chơi. Sau khi có giá trị trả về nó sẽ quyết định ngẫu nhiên là trò chơi được kết thúc hay giai đoạn khác sẽ được chơi tiếp theo. Do đó không có giới hạn cho độ dài của trò chơi, đây là trò chơi vô hạn.

Do những điều phức tạp nêu trên, với trò chơi ngẫu nhiên người ta thường đề cập tới *chiến thuật tối ưu tĩnh*. Đó là các chiến thuật chỉ rõ cho người chơi một phân bố xác suất cho các lựa chọn của họ chỉ phụ thuộc vào trò chơi $G^{(k)}$ hiện đang chơi tại giai đoạn $k$ không phụ thuộc vào $n$ giai đoạn hoặc các giai đoạn đã chơi qua. Định lí sau phát biểu về sự tồn tại của chiến thuật tĩnh tối ưu:

***Định lí*** (Shapley 1952)

> *Mỗi trò chơi $G^{(k)}$ có giá trị $v(k)$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình:* $v(k) = Val\left(a_{ij}^{(k)} + \sum_{l=1}^{N} P_{ij}^{(k)}(l).v(l)\right)$ *với $k=1, 2, ..., N$.*
>
> *Mỗi người chơi có một chiến thuật tĩnh tối ưu sao cho tại giai đoạn k sử dụng được chiến thuật hỗn hợp cho trò chơi có ma trận:*
>
> $$A^{(k)}(v) = \left(a_{ij}^{(k)} + \sum_{l=1}^{N} P_{ij}^{(k)}(l).v(l)\right),\ v=(v(1), v(2), ..., v(N)).$$

***Ví dụ.*** Xét trò chơi ngẫu nhiên chỉ có một trạng thái:

$$G = \begin{pmatrix} 1+\frac{3}{5}G & 3+\frac{1}{5}G \\ 1+\frac{4}{5}G & 2+\frac{2}{5}G \end{pmatrix}.$$

Trên quan điểm của người thứ hai, cột 1 có vẻ tốt hơn cột 2 với phương diện giá trị trả về ngay (là các số 1), nhưng cột 2 có vẻ làm cho trò chơi kết thúc sớm hơn (vì xác suất thực hiện lại $G$ nhỏ hơn). Vậy chọn các cột như thế nào?

Giả sử rằng mọi chiến thuật tối ưu là thực thi được nghĩa là trò chơi không có điểm yên ngựa. Chúng ta sẽ kiểm tra lại điều này khi trò chơi đã kết thúc để có thể nhìn thấy giả sử là đúng.

Khi đó:

$$v = Val\begin{pmatrix} 1+\frac{3}{5}v & 3+\frac{1}{5}v \\ 1+\frac{4}{5}v & 2+\frac{2}{5}v \end{pmatrix} = \frac{(1+\frac{4}{5}v)(3+\frac{1}{5}v)-(1+\frac{3}{5}v)(2+\frac{2}{5}v)}{(1+\frac{4}{5}v)+(3+\frac{1}{5}v)-(1+\frac{3}{5}v)-(2+\frac{2}{5}v)} = 1+v-\frac{2}{25}v^2$$

$$\Rightarrow v = \frac{5}{2}\sqrt{2} \text{ (do } v > 0\text{)}.$$

Thay giá trị này của $v$ vào ma trận $\begin{pmatrix} 1+\frac{3}{5}v & 3+\frac{1}{5}v \\ 1+\frac{4}{5}v & 2+\frac{2}{5}v \end{pmatrix}$ ta được:

$$\begin{pmatrix} 1+\frac{3}{2}\sqrt{2} & 3+\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 1+2\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Từ đó tìm được chiến thuật tối ưu cho người thứ nhất trên ma trận này là $p = \left(\sqrt{2}-1; 2-\sqrt{2}\right)$ và chiến thuật tối ưu cho người thứ hai là $q = \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Do tồn tại các vectơ tần suất này nên giả sử ban đầu là đúng và có chiến thuật tối ưu, giá trị của trò chơi ngẫu nhiên này là $v = \frac{5}{2}\sqrt{2}$.

### f) Lời giải gần đúng

Với một trò chơi ngẫu nhiên nhiều trạng thái, hệ phương trình $v(k) = Val\left(a_{ij}^{(k)} + \sum_{l=1}^{N} P_{ij}^{(k)}(l).v(l)\right)$ trở thành hệ khá phức tạp gồm những phương trình không tuyến tính đồng thời. Chúng ta không hi vọng giải được hệ này trong dạng tổng quát. Tuy nhiên, có một phương pháp giải bằng cách lặp đi lặp lại kết quả gần đúng nhiều lần. Phương pháp này cũng chính là cơ sở để chứng minh định lí Shapley đã nêu trên do đó được gọi là phương pháp lặp Shapley.

Đầu tiên chúng ta tạo một dự đoán về kết quả gọi là $v_0 = (v_0(1), v_0(2), ..., v_0(N))$. Bất kì dự đoán nào cũng được.

Chúng ta có thể dùng dự đoán ban đầu là $v_0 = 0 = (0, 0, ..., 0)$. Sau khi nhận được $v_n$ chúng ta định nghĩa đệ quy $v_{n+1}$ bởi đẳng thức sau:

$$v_{n+1}(k) = Val\left( a_{ij}^{(k)} + \sum_{l=1}^{N} P_{ij}^{(k)}(l).v_n(l) \right) \text{ với } k = 1, 2, ..., N.$$

***Ví dụ.*** Xét trò chơi ngẫu nhiên chứa hai trạng thái tương ứng là hai trò chơi $G^{(1)}$ và $G^{(2)}$ liên hệ với nhau như sau:

$$G^{(1)} = \begin{pmatrix} 4+0.3G^{(1)} & 0+0.4G^{(2)} \\ 1+0.4G^{(2)} & 3+0.5G^{(1)} \end{pmatrix}; \qquad G^{(2)} = \begin{pmatrix} 0+0.5G^{(1)} & -5 \\ -4 & 1+0.5G^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Dùng $v_0 = (0; 0)$ là dự đoán ban đầu, tìm được $v_1 = (2; -2)$ vì:

$$v_1(1) = Val\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 2; \qquad v_1(2) = Val\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = -2.$$

Lặp tiếp theo có: $v_2(1) = Val\begin{pmatrix} 4.6 & -8 \\ 0.2 & 4 \end{pmatrix} = 2.0174; \qquad v_2(2) = Val\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = -2.$

Tiếp tục tìm được các kết quả sau:

| | |
|---|---|
| $v_3(1) = 2.0210$ | $v_3(2) = -1.9983$ |
| $v_4(1) = 2.0220$ | $v_4(2) = -1.9977$ |
| $v_5(1) = 2.0224$ | $v_5(2) = -1.9974$ |
| $v_6(1) = 2.0225$ | $v_6(2) = -1.9974$ |

Sai số lớn nhất mắc phải của $v_6$ nhiều nhất là 0.0002 (vì xác xuất dừng trò chơi nhỏ nhất là 0.5 nên sai số so với kết quả đúng sẽ giảm theo hàm số mũ có độ hội tụ ít nhất là $0.5^n$).

Chiến thuật tối ưu khi dùng giá trị $v_6$ là dễ dàng tìm thấy:

- Với trò chơi $G^{(1)}$,

  chiến thuật tối ưu cho người thứ nhất là $p^{(1)} = (0.4134; 0.5866)$,

  chiến thuật tối ưu cho người thứ hai là $q^{(1)} = (0.5219; 0.4718)$.

- Với trò chơi $G^{(2)}$,

  chiến thuật tối ưu cho người thứ nhất là $p^{(2)} = (0.3996; 0.6004)$,

  chiến thuật tối ưu cho người thứ hai là $q^{(2)} = (0.4995; 0.5005)$.

## Bài tập

**9.26.** Tội phạm $B$ lên tàu từ Hà Nội về Hải Phòng để trốn sự truy nã của công an $A$. Công an $A$ có thể lên tàu nhanh, bắt $B$ tại Hải Phòng. Tại ga Hải Dương, $B$ có thể xuống để tẩu thoát. Tuy nhiên công an $A$ cũng biết điều này và có thể cũng xuống tàu tại Hải Dương để truy tìm. Sau đây là bảng lượng giá trị cho công an $A$ trong kế hoạch truy tìm tội phạm $B$:

| | | *B* xuống ga | |
|---|---|---|---|
| | | Hải Dương | Hải Phòng |
| *A* xuống ga | Hải Dương | 100 | –50 |
| | Hải Phòng | 0 | 100 |

Tìm chiến thuật hỗn hợp tối ưu cho $A$ và $B$, giá trị trò chơi bằng bao nhiêu?

**9.27.** Giải trò chơi ma trận có ma trận lượng giá là $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ t & 1 \end{pmatrix}$ với $t$ là số thực tuỳ ý. Vẽ đồ thị của $v(t)$ là giá trị trò chơi phụ thuộc $t$.

**9.28.** Giải trò chơi trên các ma trận sau bằng cách giảm bớt các hàng và cột bị chi phối đưa về ma trận 2×2:

a) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;  b) $\begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 7 \\ 6 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

**9.29.** Người ta chứng minh được kết luận sau : "Với một trò chơi đã cho, các chiến thuật $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ và $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ tương ứng là các chiến thuật tối ưu cho người thứ nhất và người thứ hai nếu giá trị trung bình nhận được ít nhất của người thứ nhất bằng giá trị trung bình phải trả nhiều nhất của người thứ hai".

Chứng tỏ rằng chiến thuật $p = \left(\frac{6}{37}; \frac{20}{37}; 0; \frac{11}{37}\right)$ và $q = \left(\frac{14}{37}; \frac{4}{37}; 0; \frac{19}{37}; 0\right)$ tương ứng là chiến thuật tối ưu cho người thứ nhất và người thứ hai trong trò chơi ma trận như sau:

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tìm giá trị của trò chơi.

**9.30. *Trò chơi Mendelsohn***

Hai người chơi đồng thời chọn mỗi người một số nguyên không vượt quá mức nào đó. Chẳng hạn: Hai người chọn số nguyên trong phạm vi từ 1 đến 100. Nếu hai số bằng nhau thì giá trị trả về là 0, nếu chọn lớn hơn đối thủ 1 đơn vị thì thắng 1, nếu chọn lớn hơn đối thủ 2 đơn vị hoặc nhiều hơn thì thua 2. Bảng giá trị trả về cho người thứ nhất (chọn dòng) như sau:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | -1 | 2 | 2 | 2 | ... |
| 2 | 1 | 0 | -1 | 2 | 2 | ... |
| 3 | -2 | 1 | 0 | -1 | 2 | ... |
| 4 | -2 | -2 | 1 | 0 | -1 | ... |
| 5 | -2 | -2 | -2 | 1 | 0 | ... |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

Hãy tìm cách loại bỏ những dòng và cột bị chi phối, sau đó sử dụng định lí cân bằng tìm chiến thuật tối ưu cho hai người chơi.

**9.31.** Hãy lập trình tính ma trận nghịch đảo của ma trận khả đảo $A$ biết một số định nghĩa như sau:

- Ma trận đơn vị cấp $m$ là ma trận $m \times m$ có các phần tử trên đường chéo chính bằng 1, các phần tử còn lại bằng 0. Ví dụ ma trận đơn vị cấp 4 :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Ma trận nghịch đảo của ma trận vuông $A(a_{ij})_{m\times m}$ là ma trận $B(b_{ij})_{m\times m}$ sao cho $A.B = B.A = I$ ($I$ là ma trận đơn vị cấp $m$). Kí hiệu ma trận nghịch đảo của ma trận vuông $A$ là $A^{-1}$. Để tìm ma trận nghịch đảo của ma trận khả đảo $A$ có thể dùng các phép biến đổi sơ cấp như nhau biến đổi đồng thời ma trận $A$ và ma trận đơn vị $I$. Khi $A$ thành ma trận đơn vị thì ma trận $I$ thành ma trận $A^{-1}$. Các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận là: nhân các phần tử của một hàng với số $k$ khác 0 (định thức của ma trận tăng $k$ lần), đổi chỗ hai hàng cho nhau (định thức của ma trận đổi dấu). Cộng $k$ lần hàng $i_1$ vào hàng $i_2$ (định thức của ma trận không đổi).
- Định thức của một ma trận vuông $A(a_{ij})_{m\times m}$ được kí hiệu là det($A$) được tính theo công thức đệ quy sau :
    - Nếu $A$ là ma trận cấp 1 : $A=(a_{11})$ thì det($A$) = $a_{11}$.

○ Nếu $A$ là ma trận vuông cấp 2 : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ thì

$$\det(A) = a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}.$$

○ Nếu $A$ là ma trận vuông cấp $m$ :

$$\det(A) = (-1)^{i+1}a_{i1}\det(M_{i1}) + (-1)^{i+2}a_{i2}\det(M_{i2}) + \ldots + (-1)^{i+m}a_{im}\det(M_{im})$$

trong đó $M_{ij}$ là ma trận sinh ra từ $A$ sau khi bỏ dòng $i$ và cột $j$ ($j = \overline{1..m}$, $i$ là một hàng). Nếu kí hiệu $C_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$ thì $\det(A) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}.C_{ij}$ với $i$ chọn trong $[1,\ldots, m]$. Số $C_{ij}$ gọi là phần bù đại số của phần tử $a_{ij}$. Kí hiệu $C$ là ma trận gồm các phần bù đại số $C_{ij}$ (nằm ở dòng $i$, cột $j$). $C^T$ là ma trận chuyển vị của ma trận $C$ thì ma trận nghịch đảo của ma trận $A$ là:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}.C^T = \frac{1}{\det(A)}.\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{m1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1m} & C_{2m} & \cdots & C_{mm} \end{pmatrix}.$$

- Điều kiện để ma trận $A$ có ma trận nghịch đảo là $\det(A) \neq 0$.

***Định lí***

*Giả sử ma trận A là khả đảo và $\mathbf{1}^TA^{-1}\mathbf{1} \neq 0$ (nghĩa là tổng các số hạng của ma trận $A^{-1}$ là khác 0) và tồn tại chiến thuật p và q sao cho $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$ **và** $\mathbf{q} \geq \mathbf{0}$, thì trò chơi trên ma trận A sẽ có giá trị $V = \frac{1}{\mathbf{1}^TA^{-1}\mathbf{1}}$ với chiến thuật tối ưu p và q mà: $p^T = V\mathbf{1}^TA^{-1}$, $q = VA^{-1}\mathbf{1}$, ở đây $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ và $\mathbf{1}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$.*

**9.32.** Xét trò chơi có ma trận $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Kiểm tra xem ma trận có điểm yên ngựa hay không?

b) Chứng tỏ tồn tại ma trận nghịch đảo.

c) Chứng tỏ người thứ hai có chiến thuật tối ưu với trọng số dương cho mỗi cột.

d) Vì sao trong trò chơi này không cần dùng đẳng thức $q = \dfrac{A^{-1}.\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T.A^{-1}.\mathbf{1}}$ để tìm chiến thuật tối ưu của người thứ hai?

**9.33.** Người thứ hai chọn một số $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ và người thứ nhất cố gắng phỏng đoán số mà người thứ hai đã chọn. Nếu đoán đúng thì thắng $2^j$ điểm từ người thứ hai, ngược lại không phải trả gì. Lập ma trận trò chơi và giải trò chơi.

**9.34.** Xét trò chơi trên ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 8 & 2 \\ 9 & 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$. Qua kinh nghiệm chơi trò chơi này, người thứ nhất tin rằng người thứ hai sẽ dùng chiến thuật

$$q = \left(\frac{1}{5}; \frac{1}{5}; \frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right).$$

a) Tìm chiến thuật Baye phản ứng lại chiến thuật $q$ nêu trên.

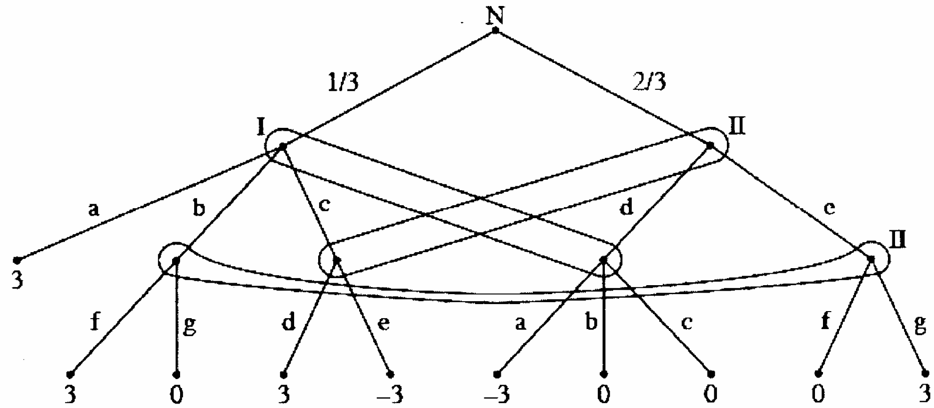
b) Giả sử người thứ hai dự đoán đúng rằng người thứ nhất sẽ dùng chiến thuật Baye để chống lại chiến thuật $q = \left(\frac{1}{5}; \frac{1}{5}; \frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right)$ của mình. Hãy hướng dẫn cho người thứ hai tìm chiến thuật Baye chống lại người thứ nhất khi người thứ nhất phản ứng lại chiến thuật $q = \left(\frac{1}{5}; \frac{1}{5}; \frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right)$.

**9.35.** Giải trò chơi với ma trận $A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

**9.36.** *Trò chơi với đồng bạc*

Người thứ hai chọn một trong hai phòng để dấu một đồng bạc. Người thứ nhất không biết phòng dấu đồng bạc và thử tìm. Nếu đồng bạc dấu ở phòng 1 và người thứ nhất tìm ở phòng 1 thì xác suất tìm thấy là $\frac{1}{2}$. Nếu đồng bạc dấu ở phòng 2 và người thứ nhất tìm ở phòng 2 thì xác suất tìm thấy là $\frac{1}{3}$. Nếu tìm được đồng bạc thì người thứ nhất được đồng bạc đó, ngược lại thì người thứ hai được. Hãy vẽ cây trò chơi và giải trò chơi.

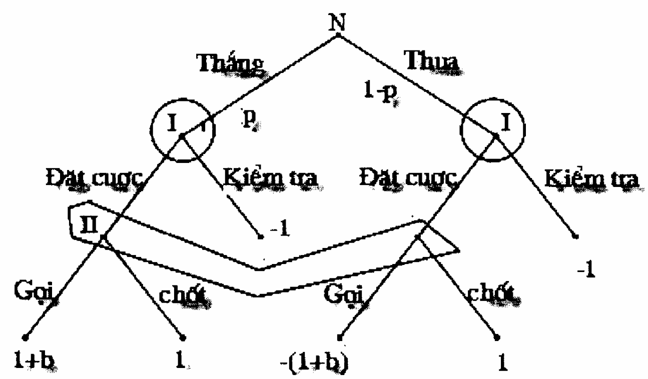
**9.37.** Tìm dạng chiến thuật tối ưu của trò chơi với cây trò chơi sau :




Sau đó giải trò chơi này

**9.38.** *Ván cơ bản kết thúc trò chơi bài*

Tổng quát hoá ván cơ bản kết thúc trò chơi bài là cách đặt xác suất cho quân bài thắng là một số tuỳ ý $p$, $0 \le p \le 1$ và cho tiền đặt cược là một số tuỳ ý $b$, $b > 0$.




Hãy tìm giá trị trò chơi và chiến thuật tối ưu cho từng người.

*Lưu ý*. Với $p \ge \dfrac{2+b}{2+2b}$ thì có điểm yên ngựa. Khi kết thúc chú ý rằng $p < \dfrac{2+b}{2+2b}$, chiến thuật tối ưu của người thứ hai không phụ thuộc vào $p$.

**9.39.** Giải hệ trò chơi gồm các ma trận sau:

a) $G = \begin{pmatrix} 0 & G_1 \\ G_2 & G_3 \end{pmatrix}$; $\quad G_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\quad G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad G_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Giải trò chơi ma trận sau:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

**9.40.** *Trò chơi đệ quy*

Giải trò chơi : $G = \begin{pmatrix} G & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.Q$ trong đó quy ước $Q$ là giá trị trả về khi trò chơi kéo dài vô hạn.

**9.41.** Xét ba trò chơi có quan hệ với nhau sau đây:

$$G_1 = \begin{pmatrix} G_1 & G_2 & G_3 \\ G_2 & G_3 & G_1 \\ G_3 & G_1 & G_2 \end{pmatrix}; \quad G_2 = \begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad G_3 = \begin{pmatrix} G_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Giả sử trò chơi kết thúc và không có ma trận trò chơi nào chứa điểm yên ngựa. Hãy giải trò chơi.

**9.42.** Giải trò chơi ngẫu nhiên: $G = \begin{pmatrix} 4 & 1 + \frac{1}{3}G \\ 0 & 1 + \frac{2}{3}G \end{pmatrix}.$

**9.43.** Cho trò chơi ngẫu nhiên có hai trạng thái sau đây:

$$G^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 + 0.5G^{(2)} \\ 0 & 4 + 0.5G^{(2)} \end{pmatrix}; \quad G^{(2)} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -2 + 0.5G^{(1)} & -4 + 0.5G^{(1)} \end{pmatrix}.$$

a) Dùng định lí Shapley tìm chính xác các giá trị $v(1)$ và $v(2)$ của hai trò chơi $G^{(1)}$ và $G^{(2)}$ nếu giả sử các trò chơi này khi kết thúc trả về được các giá trị đó.

b) Viết chương trình thực hiện lặp Shapley để tìm giá trị trò chơi ở giai đoạn $k$ (nhập từ bàn phím) là $v_k = (v_k(1); v_k(2))$, bắt đầu với dự đoán cho giai đoạn khởi trị là $v_0 = (v_0(1) = 0; v_0(2) = 0)$ và so sánh với giá trị đúng tìm được từ câu a).

## Chuyên đề 9

**9.1.** Dùng phương pháp phân tích ngược, xét từ vị trí kết thúc đến vị trí khởi đầu. Vị trí kết thúc là vị trí ứng với số quân bằng 1, đây là vị trí $P$.

**9.2.** a) $P = \{p \in X, p \bmod 2 = 0\}$;

b) $P = \{p \in X, p$ chia 9 có dư là 0, 2, 4$\}$;

c) $P = \{p \in X, p$ chia hết cho 3$\}$.

**9.3.** a) Di chuyển tiếp theo là chiếm ô (3; 1).

b) Có (chứng minh bằng phản chứng).

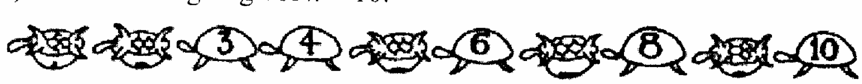
**9.4.** *Gợi ý.* Biểu diễn số thẻ dưới dạng nhị phân, mỗi lần đi theo thuật thắng là loại đi số 1 bên phải nhất của biểu diễn nhị phân của số thẻ hiện tại. Nếu số $N$ ban đầu không phải là luỹ thừa của 2 thì người đi đầu luôn thắng, ngược lại người thứ hai có nhiều khả năng thắng.

**9.5.** Nếu số quân ban đầu không là số Fibonacci thì người đi đầu sẽ thắng theo thuật sau: mỗi lần cần chọn số hạng nhỏ nhất trong phân tích số thẻ hiện tại thành tổng các số Fibonacci phân biệt không kề nhau (nếu còn phân tích được, ngược lại thì lấy toàn bộ cọc).

**9.6.** Thuật toán như trò Nim chuẩn ba cọc, chỉ thêm bước sau: Nếu $B$ di chuyển bằng cách tăng thêm $x$ quân vào một cọc nào đó thì $A$ lại rút đúng $x$ quân đó ra khỏi cọc này.

**9.7.** a) Có thể coi trò chơi này là một hình thức trá hình của trò chơi Nim: Rùa đứng ở ô $n$ coi như tương ứng một cọc có $n$ quân. Một phép di chuyển rùa: lật ngửa rùa tại ô $x$, kèm theo lật ngược lại một rùa ở bên trái ô $x$ là ô $y$ ($y < x$). Nếu rùa tại ô $y$ đang đứng mà bị đặt ngửa lại thì tương đương với việc di chuyển hết quân tại hai cọc $x$ và cọc $y$. Nếu rùa tại ô $y$ đang nằm ngửa lại được lật thành đứng trên bốn chân thì tương đương với việc xoá cọc $x$ và thêm cọc $y$, hay có thể coi như di chuyển $x - y$ quân khỏi cọc $x$ để còn $y$ quân.

b) Hình vẽ tương ứng với $n = 10$.

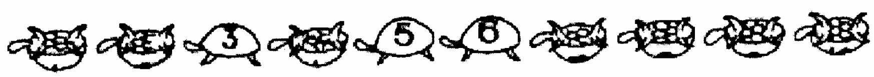



Trạng thái ban đầu là (3, 4, 6, 8, 10) có tổng Nim bằng 3 (khác 0) nên người đi đầu sẽ thắng. Do tổng Nim của 3, 4, 6, 8 bằng 9, do đó cần lật rùa 10 và úp rùa 9 thì chiếm được vị trí mới có tổng Nim bằng 0 ($9 \oplus 9 = 0$).

Các rùa đang bò bây giờ là 3, 4, 6, 8, 9 tạo thành một vị trí $P$ (tổng bằng 0).

Giả sử người thứ hai đi tiếp bằng cách lật rùa 8 và 5, các rùa đang bò lại là 3, 4, 5, 6, 9:


Tổng Nim bây giờ là 13, nên chỉ có một phép chuyển tốt cho vị trí này là lật úp 9 và 4 (nghĩa là bỏ đi 13 quân). Trạng thái mới là (3, 5, 6) có tổng Nim bằng 0:




*Kết luận.* Một bước chuyển trong Nim thành một bước lật rùa như sau: Chúng ta giảm cọc tới một kích thước nhỏ hơn bằng cách lật ngửa một rùa và lật úp một rùa như phép đầu tiên (ngửa 10, úp 9). Nếu loại hai cọc với các kích thước hiện đang có chúng ta phải lật ngửa hai rùa (ví dụ bước di lần thứ hai của người thứ nhất đã lật 9 và 4). Để loại một cọc, chúng ta chỉ cần lật ngửa một rùa thích hợp ví dụ do 4, 6, 8, 10 có tổng Nim bằng 0 (là một vị trí $P$) nên bước đầu tiên người thứ nhất cũng có thể chỉ cần lật ngửa rùa 3.

**9.10.** a) $S = \{1, 3, 4\}$

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $G(x)$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |

b) $S$ là tập các số nguyên tố lẻ

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $G(x)$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 0 | 3 | 4 | 1 | 4 | 3 | 0 | 3 | 4 | 1 |

c) $S$ là tập các số nguyên tố

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $G(x)$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |

d) $S$ là tập các số Fibonacci

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $G(x)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

e) $S$ là tập các số Lucas

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $G(x)$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 0 | 1 |

**9.11.** Hàm Sprague-Grundy của trò chơi *At Most Haft*

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $G(x)$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 | 3 | 0 | 4 | 2 | 5 | 1 | 6 | 3 | 7 | 0 | 8 | 4 | 9 | 2 |

**9.12.** Hàm Sprague-Grundy của trò chơi *Dim*$^+$

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $G(x)$ | 0 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 4 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 5 | 1 | 2 | 1 |

**9.15.** Hàm Sprague-Grundy của trò chơi Wythoff

| $x$ \ $y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1 | 1 | 2 | 0 | 4 | 5 | 3 | 7 | 8 | 6 | 10 |
| 2 | 2 | 0 | 1 | 5 | 3 | 4 | 8 | 6 | 7 | 11 |
| 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 2 | 0 | 1 | 9 | 10 | 12 |
| 4 | 4 | 5 | 3 | 2 | 7 | 6 | 9 | 0 | 1 | 8 |
| 5 | 5 | 3 | 4 | 0 | 6 | 8 | 10 | 1 | 2 | 7 |
| 6 | 6 | 7 | 8 | 1 | 9 | 10 | 3 | 4 | 5 | 13 |
| 7 | 7 | 8 | 6 | 9 | 0 | 1 | 4 | 5 | 3 | 14 |
| 8 | 8 | 6 | 7 | 10 | 1 | 2 | 5 | 3 | 4 | 15 |
| 9 | 9 | 10 | 11 | 12 | 8 | 7 | 13 | 14 | 15 | 16 |

**9.16.** Ta kí hiệu hàm Sprague-Grundy của trò chơi tổng là $g$, của các trò chơi thành phần lần lượt là $g^{(1)}$, $g^{(2)}$, $g^{(3)}$. Ta có:

$$g(18, 17, 7) = g^{(1)}(18) \oplus g^{(2)}(17) \oplus g^{(3)}(7) = 8 \oplus 5 \oplus 7 = 10 > 0$$

nên (18, 17, 7) là một vị trí $N$.

Phép chuyển tối ưu là chuyển tới vị trí (6, 17, 7) vì

$$g(6, 17, 7) = g^{(1)}(6) \oplus g^{(2)}(17) \oplus g^{(3)}(7) = 2 \oplus 5 \oplus 7 = 0.$$

**9.17.** Hai vị trí kết thúc là cọc 1 quân và cọc 2 quân. Các giá trị hàm Sprague-Grundy cho trò chơi này khi cọc có kích thước nhỏ có thể tính được không khó khăn, nhưng khi kích thước lớn thì việc tính toán rất nhiều thời gian. Dãy giá trị này có tuần hoàn không? Điều này đến nay chưa rõ!

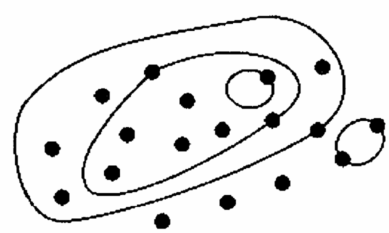
**9.18.** Giá trị hàm Sprague-Grundy của trò chơi Kayler $g(y + z)$, $y$ là các bội của 12, $z = 0, 1, \ldots, 11$.

| $y$ \ $z$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | **0** | 1 | 2 | **3** | 1 | 4 | **3** | 2 | 1 | **4** | 2 | **6** |
| 12 | 4 | 1 | 2 | **7** | 1 | 4 | **3** | 2 | 1 | **4** | **6** | 7 |
| 24 | 4 | 1 | 2 | 8 | **5** | 4 | 7 | 2 | 1 | 8 | **6** | 7 |
| 36 | 4 | 1 | 2 | **3** | 1 | 4 | 7 | 2 | 1 | 8 | 2 | 7 |
| 48 | 4 | 1 | 2 | 8 | 1 | 4 | 7 | 2 | 1 | **4** | 2 | 7 |
| 60 | 4 | 1 | 2 | 8 | 1 | 4 | 7 | 2 | 1 | 8 | **6** | 7 |
| 72 | 4 | 1 | 2 | 8 | 1 | 4 | 7 | 2 | 1 | 8 | 2 | 7 |

Khi $x = 72$, các giá trị bắt đầu là tuần hoàn với chu kì 12, các giá trị của dòng cuối bảng trên được lặp mãi.

**9.19.** Chơi trò Rims ta có thể coi như chơi theo Nim nhiều cọc.

*Ví dụ:* Hình bên vẽ vị trí (3, 4, 5) có giá trị Nim là $3 \oplus 4 \oplus 5 = 2$ là vị trí $N$, cần chuyển đến vị trí $P$ (1, 4, 5) vì $1 \oplus 4 \oplus 5 = 0$. Điều này có thể thực hiện bằng cách vẽ vòng tròn qua hai trong ba chấm ngoài cùng.



**9.20.** Giá trị hàm Sprague-Grundy của trò chơi cờ Dawson ($N = 18$)

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 0 | 1 | 1 | 2 | 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | 3 | 3 | 2 | 2 | 4 | 0 | 5 | 2 | 2 | 3 |

**9.21.** Hàm tính tích Nim của hai số $x$ và $y$:

```
function tichnim(y,x : longint) : longint;
var x1, x2, t,i : longint;·
begin
 if x<y then t:= tichnim(x,y) else
 if y=0 then t := 0 else
 if y=1 then t := x else
 if fec(x) then {x=2, 4, 16, 256, 65536,...} begin
 if x=y then t := (x*3) div 2 else
 t := x*y;
 end
 else {x không là luỹ thừa dạng ferma }
 begin {tìm x1, x2 nhỏ hơn hoặc bằng x mà x1 xor x2 = x}
 x1 := 1;
 while x1*2<=x do x1 := 2*x1;
 x2 := x xor x1;
 if (x2=0) then {không tìm được x1, x2 mà x=x1 xor x2, x=x1 là luỹ thừa của 2}
 begin {tìm x=x1.x2}
 i := 0;
 while fecmat[i]<x do inc(i);
 if fecmat[i]>=x then dec(i);
 x1 := fecmat[i];
 x2 := x div x1; {x là luỹ thừa của 2 nên chia hết cho luỹ thừa dạng ferma nhỏ hơn}
{bây giờ x = x1.x2, y.x= y.x1.x2}
 if (random(1000) mod 2 = 0) then
 t := tichnim(tichnim(y,x1),x2)
 else
 t := tichnim(tichnim(y, x2), x1);
 end
 else {y.x=y.(x1+x2)=y.x1 + y.x2}
 t := tichnim(y,x1) xor tichnim(y,x2);
 end;
 tichnim := t;
end;
```

**9.25.** Trong trò chơi lật xu bốn góc *Turning Corners*, $g(x, y) = x \otimes y$, do đó giải trò chơi này cũng là một cách để tính tích Nim.

```
uses crt;
const max = 100;
type mang = array[0..max, 0..max] of integer;
var g : mang; n,x,y : integer;
 v : array[0..max*max] of integer;
function sg(x,y : integer): integer;
var a,b,i : integer;
begin
 fillchar(v, sizeof(v),0);
 for a:=0 to x-1 do
 for b:=0 to y-1 do
 v[g[x,b] xor g[a,y] xor g[a,b]] := 1;
 i := 0;
 while v[i]=1 do inc(i);
 sg := i;
end;
BEGIN
 clrscr;
 n := 15;
 fillchar(g,sizeof(g),0);
 g[1,1] := 1;
 for y:=2 to n do g[1,y] := y;
 for x:=2 to n do g[x,1] := x;
 for y:=2 to n do
 for x:=2 to n do
 g[x,y]:=sg(x,y);
 for x:=0 to n do
 for y:=0 to n do
 begin
 if y=n then writeln(g[x,y]:4)
 else write(g[x,y]:4);
 end;
 readln;
END.
```

**9.26.** Chiến thuật tối ưu cho công an $A$ là dừng ở Hải Dương với tần suất $p = \frac{2}{5}$, dừng ở Hải Phòng với tần suất $1 - p = \frac{3}{5}$. Chiến thuật tối ưu cho tội phạm $B$ là dừng ở Hải Dương với tần suất $\frac{3}{5}$, dừng ở Hải phòng với tần suất $\frac{2}{5}$.

**9.27.** Nếu $t \le 0$ thì $a_{11}$ là điểm yên ngựa. Người thứ nhất chọn hàng 1 theo chiến thuật tối ưu là (1; 0), người thứ hai chọn cột 1 theo chiến thuật tối ưu là (1; 0). Giá trị trò chơi là $v = 0$.

Nếu $0 < t \le 1$ thì $a_{21}$ là điểm yên ngựa. Người thứ nhất chọn hàng 2 theo chiến thuật tối ưu là (0; 1), người thứ hai chọn cột 1 theo chiến thuật tối ưu là (1; 0). Giá trị trò chơi là $v = t$.

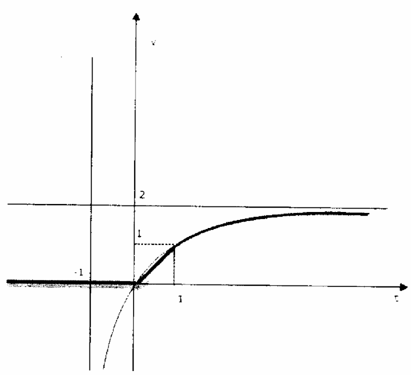
Nếu $t > 1$ không có điểm yên ngựa. Khi đó áp dụng các công thức tính $p$, $q$ và $v$:

$$p = \frac{t-1}{t+1},\ q = \frac{1}{t+1},\ v = \frac{2t}{t+1}.$$

Vậy giá trị trò chơi là:

$$v = \begin{cases} 0 & \text{với} \quad t \le 0 \\ t & \text{với} \quad 0 < t \le 1 \\ \dfrac{2t}{t+1} & \text{với} \quad t > 1. \end{cases}$$

Đồ thị như sau:



**9.28.** a) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Ma trận 2×2 không có điểm yên ngựa. Tính $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{3}{8}$, $v = \frac{3}{2}$.

Suy ra chiến thuật hỗn hợp tối ưu của người thứ nhất là: $p = \left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 0\right)$ và chiến thuật tối ưu của người thứ hai là $q = \left(0; \frac{3}{8}; 0; \frac{5}{8}\right)$.

b) $\begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 7 \\ 6 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 \\ 2 & 6 & 4 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

(từ ma trận 3×3 chuyển thành ma trận 2×3 vì: $\frac{1}{2}\left(a_{1j} + a_{2j}\right) \geq a_{3j}$ với mọi $j = 1, 2, 3$).

Giả sử người thứ nhất chọn hàng 1 với tần suất $p$, hàng 2 với tần suất $1 - p$. Khi đó nếu người thứ hai lần lượt chọn cột 1, 2 và 3 thì giá trị người thứ nhất nhận được tương ứng là:

$$v = 10p + 2(1 - p) = 2 + 8p;\ v = 6(1 - p) = 6 - 6p;$$
$$v = 7p + 4(1 - p) = 4 + 3p.$$

Vẽ ba đường thẳng và thấy đường đậm thấp nhất chỉ nằm trên đồ thị ứng với cột 1 và 2 (giao nhau tại điểm $\left(\frac{5}{7}; \frac{30}{7}\right)$, do đồ thị cột 3 nằm hoàn toàn phía trên đường đậm nên cũng có thể dùng ma trận chỉ gồm cột 1 và 2: $\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ để tính $p = \frac{2}{7}$, $v = \frac{30}{7}$.

**9.29.** a) Tính $\text{Min}\left\{\sum_{j=1}^{n} p[i]*a[i,j] \quad \forall i=1,2,\ldots,m \right\} = 3.27027\ldots$

Tính $\text{Max}\left\{\sum_{i=1}^{m} q[j]*a[i,j] \quad \forall j=1,2,\ldots,n \right\} = 3.27027\ldots$

Suy ra chiến thuật $p=\left(\frac{6}{37};\frac{20}{37};0;\frac{11}{37}\right)$ và $q=\left(\frac{14}{37};\frac{4}{37};0;\frac{19}{37};0\right)$ tương ứng là chiến thuật tối ưu cho người thứ nhất và người thứ hai.

**9.30.** Dòng 1 chi phối các dòng 4, 5, 6, ..., cột 1 chi phối các cột 4, 5, 6, ... nên có thể loại bỏ các dòng 4, 5, 6, ... và các cột 4, 5, 6, ... :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 & 2 & \ldots \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 2 & \ldots \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 2 & \ldots \\ -2 & -2 & 1 & 0 & -1 & \ldots \\ -2 & -2 & -2 & 1 & 0 & \ldots \\ \ldots & & & & & \ldots \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ma trận là đối xứng bù, giá trị trò chơi là $V = 0$ và chiến thuật tối ưu của hai người là như nhau. Giải hệ: $\begin{cases} p_2 - 2p_3 = 0 \\ -p_1 + p_3 = 0. \\ 2p_1 - p_2 = 0 \end{cases}$

Ta có: $p = q = \left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{1}{4};0;0;\ldots\right)$ là chiến thuật tối ưu cho hai người.

**9.33.** $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & & & \end{pmatrix}$ có thể thu gọn về $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$ và có ma trận nghịch đảo là :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,125 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0625 \end{pmatrix}$$

Giá trị trò chơi là : 1.06667. Chiến thuật tối ưu cho người thứ hai là :

(0.53333; 0.26667; 0.13333; 0.06667).

Chiến thuật tối ưu cho người thứ nhất là :

(0.53333; 0.26667; 0.13333; 0.06667; 0; 0; ...).

**9.34.** a) Chiến thuật Baye của người thứ nhất phản ứng lại chiến thuật $q = \left(\frac{1}{5}; \frac{1}{5}; \frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right)$ của người thứ hai là $p = (p_1 ; p_2 ; p_3)$ sao cho $p^T Aq$ đạt giá trị lớn nhất.

$$p^T Aq = (p_1 ; p_2 ; p_3).\begin{pmatrix} 0 & 7 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 8 & 2 \\ 9 & 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

$$= (p_2 + 9p_3 ; 7p_1 + 4p_2 + 3p_3 ; 2p_1 + 8p_2 - p_3 ; 4p_1 + 2p_2 + 6p_3).\begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

$$= (0.2p_2 + 1.8p_3 + 1.4p_1 + 0.8p_2 + 0.6p_3 + 0.4p_1 + 1.6p_2 - 0.2p_3 + 1.6p_1 + 0.8p_2 + 2.4p_3)$$

$$= (3.4p_1 + 3.4p_2 + 4.6p_3).$$

Vậy giá trị $v = 3.4p_1 + 3.4p_2 + 4.6p_3$ (1) trong đó $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ (2) và $p_1 \geq 0$; $p_2 \geq 0$; $p_3 \geq 0$. Thay (2) vào (1) có $v = 3.4 + 1.2p_3$.

Vậy $v$ lớn nhất khi $p_3 = 1$ ; $p_2 = 0$ ; $p_1 = 0$. Chiến thuật Baye của người thứ nhất đáp ứng lại chiến thuật $q$ của người thứ hai là chiến thuật $p = (0; 0; 1)$.

b) Người thứ hai cần dùng chiến thuật Baye đáp ứng lại chiến thuật (0; 0; 1) của người thứ nhất, đó là chiến thuật nhằm $p^T Aq$ đạt giá trị nhỏ nhất :

$$p^TAq = (0;0;1).\begin{pmatrix} 0 & 7 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 8 & 2 \\ 9 & 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} = (9;3;-1;6).\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} = (9q_1 + 3q_2 - q_3 + q_4).$$

Vậy cần chọn $q$ sao cho $v = (9q_1 + 3q_2 - q_3 + q_4)$ (3) đạt giá trị nhỏ nhất đồng thời thoả mãn điều kiện : $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 1$ (4) và $q_j > 0$ với mọi $j = 1, 2, 3, 4$.

Thay (4) vào (3) có $v = 10q_1 + 4q_2 + 2q_4 - 1 \geq -1$. Suy ra $v$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $q_1 = q_2 = q_4 = 0$ và $q_3 = 1$, khi đó người thứ hai không mất điểm mà còn được 1 điểm (do người thứ nhất nhận giá trị trả về là $v = -1$ điểm). Vậy chiến thuật đáp ứng lại của người thứ hai là $q = (0 ; 0 ; 1 ; 0)$.

**9.35.** Xét ma trận trò chơi $A_{3\times3} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, kiểm tra thấy $A$ không có điểm yên ngựa và cũng không thể rút gọn bằng luật chi phối.

*Lượt 1*

*Bước 1* : Cộng các phần tử của ma trận với $x = 4$, được ma trận sau :

$$A' = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 1 & 4 & 8 \\ 10 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

*Bước 2* :

| | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 4 | 9 | 2 | 1 |
| $x_2$ | 1 | 4 | 8 | 1 |
| $x_3$ | 10 | 0 | 4 | 1 |
| | −1 | −1 | −1 | 0 |

*Bước 3* : Chọn chốt tại dòng $x_3$ cột $y_1$ (chứa giá trị 10).

*Bước 4* : Thay đổi lại các giá trị của bảng, có bảng mới như sau :

| | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | −0.4 | 9 | 0.4 | 0.6 |
| $x_2$ | −0.1 | 4 | 7.6 | 0.9 |
| $x_3$ | 0.1 | 0 | 0.4 | 0.1 |
| | 0.1 | −1 | −0.6 | 0.1 |

*Bước 5.* Thay nhãn cột 1 là $y_1$ và dòng 3 là $x_3$ cho nhau :

| | $x_3$ | $y_2$ | $y_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | −0.4 | 9 | 0.4 | 0.6 |
| $x_2$ | −0.1 | 4 | 7.6 | 0.9 |
| $y_1$ | 0.1 | 0 | 0.4 | 0.1 |
| | 0.1 | −1 | −0.6 | 0.1 |

*Bước 6* : Quay lại bước 3.

*Lượt 2*

*Bước 3* : Chọn chốt là ô thuộc dòng 1 (nhãn $x_1$) và cột 2 (nhãn $y_2$).

*Bước 4* : Thay đổi lại các giá trị của bảng, có bảng mới với giá trị gần đúng như sau:

| | $x_3$ | $y_2$ | $y_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | –0.0444 | 0.1111 | 0.0444 | 0.0667 |
| $x_2$ | 0.0778 | –0.4444 | 7.4222 | 0.6333 |
| $y_1$ | 0.1 | 0 | 0.4 | 0.1 |
| | 0.0556 | 0.1111 | –0.5556 | 0.1667 |

*Bước 5* : Thay nhãn cột 2 là $y_2$ và dòng 1 là $x_1$ cho nhau :

| | $x_3$ | $x_1$ | $y_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| $y_2$ | –0.0444 | 0.1111 | 0.0444 | 0.0667 |
| $x_2$ | 0.0778 | –0.4444 | 7.4222 | 0.6333 |
| $y_1$ | 0.1 | 0 | 0.4 | 0.1 |
| | 0.0556 | 0.1111 | –0.5556 | 0.1667 |

*Bước 6* : Quay lại bước 3.

*Lượt 3*

*Bước 3* : Chọn chốt là ô thuộc dòng 2 (nhãn là $x_2$ ) cột 3 (nhãn là $y_3$).

*Bước 4 và 5.*

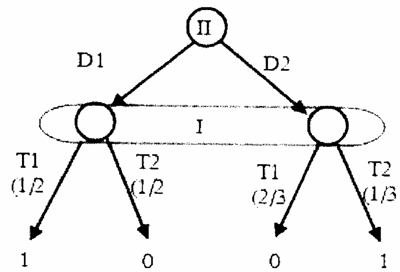
| | $x_3$ | $x_1$ | $x_2$ | |
|---|---|---|---|---|
| $y_2$ | –0.0449 | 0.1138 | –0.0060 | 0.0629 |
| $y_3$ | 0.0105 | –0.0599 | 0.1347 | 0.0853 |
| $y_1$ | 0.0958 | 0.0240 | –0.0539 | 0.0659 |
| | 0.0614 | 0.0778 | 0.0749 | 0.2141 |

*Bước 6, Bước 7*: Giá trị trò chơi là 0,6713.

Chiến thuật tối ưu cho người thứ nhất là $p$ = (0.3636; 0.3497; 0.2867).

Chiến thuật tối ưu cho người thứ hai là $q$ = (0.3077; 0.2937; 0.3986).

**9.36.** Lưu ý rằng "Người thứ nhất không biết đồng tiền được dấu ở phòng nào" do đó hai vị trí mà người thứ nhất có thể chọn để di chuyển trong cây là cùng một tập thông tin.




Kí hiệu $D_1$ và $D_2$ là các chiến thuật nguyên thuỷ của người thứ hai, tương ứng là dấu đồng bạc ở phòng 1 hoặc dấu đồng bạc ở phòng 2.

Kí hiệu $T_1$ và $T_2$ là các chiến thuật nguyên thuỷ của người thứ nhất, tương ứng là tìm đồng bạc ở phòng 1 hoặc tìm ở phòng 2.

Theo đề bài có các phân bổ xác suất như trên cây Kuhn.

Khi người thứ nhất thực hiện $T_1$, nếu người thứ hai thực hiện $D_1$ thì giá trị trả về là $\frac{1}{2}.1 = \frac{1}{2}$.

Khi người thứ nhất thực hiện $T_2$, nếu người thứ hai thực hiện $D_2$ thì giá trị trả về là $\frac{1}{3}.1 = \frac{1}{3}$.

Bảng giá trị trả về cho người thứ nhất là :

| | $D_1$ | $D_2$ |
|---|---|---|
| $T_1$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $T_2$ | 0 | $\frac{1}{3}$ |

Thực hiện chiến thuật cân bằng: Gọi tần suất thực hiện $T_1$ là $p$, thực hiện $T_2$ là $1-p$ thì có: $\frac{p}{2} = \frac{1-p}{3}$ suy ra $p = \frac{2}{5}$.

Vậy chiến thuật cân bằng tối ưu cho người thứ nhất là $\left(\frac{2}{5}; \frac{3}{5}\right)$. Giá trị trò chơi là $\frac{1}{5}$. Tương tự tìm được chiến thuật tối ưu cho người thứ hai là $\left(\frac{2}{5}; \frac{3}{5}\right)$.

**9.37.** Bảng tính giá trị trung bình trả về cho người thứ nhất :

| | *d-f* | *d-g* | *e-f* | *e-g* |
|---|---|---|---|---|
| *a* | $\frac{1}{3}.3+\frac{2}{3}.(-3) = -1$ | $\frac{1}{3}.3+\frac{2}{3}.(-3) = -1$ | $\frac{1}{3}.3+\frac{2}{3}.0 = 1$ | $\frac{1}{3}.3+\frac{2}{3}.3 = 3$ |
| *b* | $\frac{1}{3}.3+\frac{2}{3}.0 = 1$ | $\frac{1}{3}.0+\frac{2}{3}.0 = 0$ | $\frac{1}{3}.3+\frac{2}{3}.0 = 1$ | $\frac{1}{3}.0+\frac{2}{3}.3 = 2$ |
| *c* | $\frac{1}{3}.3+\frac{2}{3}.0 = 1$ | $\frac{1}{3}.3+\frac{2}{3}.0 = 1$ | $\frac{1}{3}.(-3)+\frac{2}{3}.0 = -1$ | $\frac{1}{3}.(-3)+\frac{2}{3}.3 = 1$ |

Vậy có ma trận trò chơi là:

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} df & dg & ef & eg \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Dòng ($a$) bị chi phối bởi dòng ($b$) nên có thể loại bỏ dòng ($a$). Cột ($eg$) bị chi phối nghiêm ngặt bởi cột ($ef$) nên có thể loại cột ($eg$). Cột ($df$) bị chi phối nghiêm ngặt bởi tổ hợp các cột ($dg$) và ($ef$) với tần suất 0.5 cho mỗi cột. Dẫn tới ma trận 2×2:

$$\begin{array}{c} \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} dg & ef \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Dễ dàng tìm được giá trị trò chơi là $\frac{1}{3}$. Chiến thuật tối ưu cho người thứ nhất là $\left(0;\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$. Chiến thuật tối ưu cho người thứ hai là $\left(0;\frac{2}{3};\frac{1}{3};0\right)$.

**9.38.** Với người thứ nhất : Kí hiệu *Đặt cược* là *đ*, *Kiểm tra* là *k*. Người thứ nhất có hai tập thông tin. Trong mỗi tập thông tin có thể tạo ra một lựa chọn trong hai lựa chọn. Do đó người thứ nhất có 2×2 chiến thuật nguyên thuỷ. Đó là các chiến thuật sau :

(*đ; đ*) : Đặt cược bất kể quân bài nhận được là quân bài thắng hay là quân bài thua;

(*đ; k*) : Đặt cược với quân bài thắng và kiểm tra với quân bài thua;

(*k; đ*) : Kiểm tra với quân bài thắng và đặt cược với quân bài thua;

(*k; k*) : Kiểm tra với quân bài thắng hoặc thua.

Vậy tập các chiến thuật nguyên thuỷ là $X = \{(đ;\ đ), (đ;\ k), (k;\ đ), (k;\ k)\}$. Chúng ta đã chứa trong $X$ mọi chiến thuật nguyên thuỷ kể cả tốt lẫn xấu.

Người thứ hai chỉ có một tập thông tin. Do đó $Y = \{g;\ c\}$ với kí hiệu $g$ là *Gọi*, $c$ là *Chốt*.

Người thứ hai sử dụng $g$ hoặc $c$ nếu người thứ nhất vừa dùng đặt cược (*đ; đ*).

Ma trận giá trị trả về cho người thứ nhất như bảng sau:

| | Cột 1: *g (gọi)* | Cột 2: *c (chốt)* |
|---|---|---|
| Dòng 1: *(đặt cược; đặt cược) = (đ;đ)* | $p(1 + b) + (1 - p)(-1 - b)$ | $p.1 + (1 - p).1$ |
| Dòng 2: *(đặt cược; kiểm tra) = (đ;k)* | $p.(1 + b) + (1 - p).(-1)$ | $p.1 + (1 - p).(-1)$ |
| Dòng 3: *(kiểm tra; đặt cược) = (k;đ)* | $p.1 + (1 - p).(-1 - b)$ | $p.1 + (1 - p).1$ |
| Dòng 4: *(kiểm tra; kiểm tra) = (k;k)* | $p.1 + (1 - p).(-1)$ | $p.1 + (1 - p).(-1)$ |

Dòng 3 bị chi phối bởi dòng 1, nên có thể loại bỏ dòng 3. Dòng 4 bị chi phối bởi dòng 2 nên có thể loại bỏ dòng 2. Dẫn tới ma trận $A$ kích thước 2×2 :

| | Cột 1: *g (gọi)* | Cột 2: *c (chốt)* |
|---|---|---|
| Dòng 1: *(đặt cược; đặt cược) = (đ;đ)* | $p(1 + b) + (1 - p)(-1 - b)$ | $p.1 + (1 - p).1$ |
| Dòng 2: *(đặt cược; kiểm tra) = (đ;k)* | $p.(1 + b) + (1 - p).(-1)$ | $p.1 + (1 - p).(-1)$ |

***Khi p = 1***

| | Cột 1: *g (gọi)* | Cột 2: *c (chốt)* |
|---|---|---|
| Dòng 1: *(đặt cược; đặt cược) = (đ;đ)* | $1 + b$ | $p$ |
| Dòng 2: *(đặt cược; kiểm tra) = (đ;k)* | $1 + b$ | $p$ |

$A$ có hai dòng giống nhau, có hai điểm yên ngựa là $A(1;2)$ và $A(2;2)$.

Vậy giá trị trò chơi là $p$. Chiến thuật tối ưu cho người thứ nhất là $(x;\ 1-x;\ 0;\ 0)$ với $0 \le x \le 1$. Chiến thuật tối ưu cho người thứ hai là $(0;1)$.

*Khi $p = 0$*

| | Cột 1: *g (gọi)* | Cột 2: *c (chốt)* |
|---|---|---|
| Dòng 1: *(đặt cược; đặt cược) = (đ;đ)* | $-1-b$ | 1 |
| Dòng 2: *(đặt cược; kiểm tra) = (đ;k)* | $-1$ | $-1$ |

$A(2;1)$ là điểm yên ngựa. Giá trị trò chơi là $-1$.

Chiến thuật tối ưu cho người thứ nhất là $(0;\ 1;\ 0;\ 0)$. Chiến thuật tối ưu cho người thứ hai là $(1;\ 0)$.

*Khi* $\begin{cases} p \neq 0 \\ p \neq 1 \end{cases}$

Nhận thấy $A(1;\ 1)$ không là ô lớn nhất cột 1, $A(2;\ 1)$ không là ô nhỏ nhất dòng 2. $A(2;\ 2)$ không lớn nhất cột 2. Vậy nếu $A$ có điểm yên ngựa thì chỉ có thể là $A(1;\ 2)$.

$A(1;\ 2)$ lớn nhất cột 2 do đó sẽ là điểm yên ngựa nếu nó nhỏ nhất dòng 1, nghĩa là:

$$A(1;\ 1) \ge A(1;2) \Leftrightarrow p(1+b) + (1-p)(-1-b) \ge p.1 + (1-p).1 \Leftrightarrow\ p \ge \frac{2+b}{2(1+b)}$$

Vậy khi $p \ge \dfrac{2+b}{2(1+b)}$ (và $p \neq 1$) thì $A(1;\ 2)$ là điểm yên ngựa, do đó giá trị trò chơi là 1. Chiến thuật tối ưu cho người thứ nhất là $(1;\ 0;\ 0;\ 0)$ và chiến thuật tối ưu cho người thứ hai là $(0;\ 1)$.

Cuối cùng xét trường hợp $p < \dfrac{2+b}{2(1+b)}$ (và $p \neq 0$).

Bằng các công thức giải trò chơi ma trận 2×2 tìm chiến thuật cân bằng tối ưu sẽ có: Giá trị trò chơi là $V = \dfrac{(4p-1)(1+b)-1}{2+b}$.

Chiến thuật tối ưu cho người thứ nhất là:

$$\left(\frac{pb}{(1-p)(2+b)};\frac{2-2p+b-2pb}{(1-p)(2+b)};0;0\right).$$

Chiến thuật tối ưu cho người thứ hai là: $\left(\frac{2}{2+b};\frac{b}{2+b}\right)$.

**9.39.** a) Sử dụng các công thức tính giá trị và các chiến thuật tối ưu của trò chơi ma trận $\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$ không có điểm yên ngựa:

$$p=\frac{c-d}{a+c-b-d};\qquad p=\frac{c-b}{a+c-b-d};\qquad V=\frac{ac-bd}{a+c-b-d}$$

Ta có kết quả sau:

Trò chơi $G_1$ có điểm yên ngựa tại ô (1; 2) nên là giá trị trò chơi là 3, chiến thuật cho người thứ nhất là (1; 0) chiến thuật tối ưu cho người thứ hai là (0; 1).

Trò chơi $G_2$ không có điểm yên ngựa, giá trị trò chơi là 3, chiến thuật cho người thứ nhất là $\left(\frac{2}{5};\frac{3}{5}\right)$ chiến thuật tối ưu cho người thứ hai là $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Trò chơi $G_3$ không có điểm yên ngựa, giá trị trò chơi là −1, chiến thuật cho người thứ nhất là $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ chiến thuật tối ưu cho người thứ hai là $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Do đó trò chơi $G$ xem như trò chơi với ma trận $G' = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Trò chơi $G'$ không có điểm yên ngựa, giá trị trò chơi là $\frac{9}{7}$, chiến thuật cho người thứ nhất là $\left(\frac{4}{7};\frac{3}{7}\right)$ chiến thuật tối ưu cho người thứ hai là $\left(\frac{4}{7};\frac{3}{7}\right)$.

b) Đổi cột 1 và cột 4 cho nhau, được ma trận: $G' = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Trò chơi trên $G'$ coi như trò chơi $G'' = \begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix}$ mà

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ và } G_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Giải $G_1$ và $G_2$ được kết quả:

| | Giá trị trò chơi | Chiến thuật tối ưu cho người thứ nhất | Chiến thuật tối ưu cho người thứ hai |
|---|---|---|---|
| $G_1$ | $V_1 = \frac{27}{7}$ | $p_1 = \left(\frac{2}{7}; \frac{5}{7}\right)$ | $q_1 = \left(\frac{3}{7}; \frac{2}{7}\right)$ |
| $G_2$ | $V_2 = 3$ | $p_2 = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ | $q_2 = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ |

Vậy $G''$ coi như trò chơi $G^*$ sau đây:

$$G^* = \begin{pmatrix} \frac{27}{7} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Giải trò chơi $G^*$ được kết quả là: $V = \frac{27}{16}$; chiến thuật tối ưu cho người thứ nhất là $p^* = \left(\frac{7}{16}; \frac{9}{16}\right)$ chiến thuật tối ưu cho người thứ hai là $q^* = \left(\frac{7}{16}; \frac{9}{16}\right)$.

Suy ra trò chơi $G$ ban đầu có giá trị là $V = \frac{27}{16}$, chiến thuật tối ưu cho người thứ nhất là:

$$p = \left(\frac{7}{16} \times \frac{2}{7}; \frac{7}{16} \times \frac{5}{7}; \frac{9}{16} \times \frac{1}{2}; \frac{9}{16} \times \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{8}; \frac{5}{16}; \frac{9}{32}; \frac{9}{32}\right),$$

chiến thuật tối ưu cho người thứ hai là

$$q = \left(\frac{7}{16} \times \frac{3}{7}; \frac{7}{16} \times \frac{4}{7}; \frac{9}{16} \times \frac{2}{3}; \frac{9}{16} \times \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{3}{16}; \frac{1}{4}; \frac{3}{8}; \frac{3}{16}\right).$$

**9.40.** Nếu trò chơi kết thúc với giá trị $v$ thì : $v = Val\begin{pmatrix} v & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Nếu trò chơi vô hạn ta gọi giới hạn của giá trị trả về là $Q$. Nếu $0 \le Q < 2$ thì ô (1; 1) là điểm yên ngựa, giá trị trò chơi là $Q$. Nếu $Q > 2$ thì ô (1; 2) là điểm yên ngựa, giá trị trò chơi là 2. Nếu $Q < 0$ thì ô (2; 1) là điểm yên ngựa, giá trị trả về là 0.

Nếu trò chơi kết thúc với giá trị $v$, giải đẳng thức $v = Val\begin{pmatrix} v & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sẽ có:

$v = \dfrac{v}{v-1}$ suy ra $v = 0$ hoặc $v = 2$. Khi đó chiến thuật tối ưu cho người thứ nhất là $\left(\dfrac{1}{v-1}; \dfrac{v-2}{v-1}\right)$. Chỉ có thể chọn $v = 2$ nghĩa là có chiến thuật (1; 0).

Với chiến thuật này người thứ hai luôn luôn chọn dòng 1, nhưng khi đó nếu người thứ hai luôn chọn cột 1 thì trò chơi không thể kết thúc (mâu thuẫn với giả sử).

*Kết luận*: Trong mọi trường hợp giá trị trò chơi là $v \in [0; 2]$.

**9.41.** Chúng ta hãy giải đồng thời các trò chơi này. Gọi giá trị của các trò chơi $G_1$, $G_2$, $G_3$ tương ứng là $v_1$, $v_2$ và $v_3$. Nếu không có trò chơi nào dẫn tới ma trận có điểm yên ngựa ta có:

$$v_2 = Val\begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \frac{2v_1}{2+v_1} \qquad \text{(a)}$$

$$v_3 = Val\begin{pmatrix} v_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_3 = \frac{1}{2-v_2} \Rightarrow v_3 = \frac{2+v_1}{4} \qquad \text{(b)}$$

$$v_1 = Val\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_2 & v_3 & v_1 \\ v_3 & v_1 & v_2 \end{pmatrix}.$$

Giả sử chiến thuật của người thứ nhất là $p = (p_1; p_2; p_3)$.

Sử dụng nguyên lí cân bằng có hệ :

$$\begin{cases} v_1 = p_1.v_1 + p_2.v_2 + p_3.v_3 \\ v_1 = p_1.v_2 + p_2.v_3 + p_3.v_1. \\ v_1 = p_1.v_3 + p_2.v_1 + p_3.v_2 \end{cases}$$

Cộng từng vế ba đẳng thức trên có :

$$3v_1 = (v_1 + v_2 + v_3).(p_1 + p_2 + p_3) \Rightarrow 2v_1 = v_2 + v_3 \qquad \text{(c)}$$

Từ hệ gồm (a), (b) và (c) suy ra $7v_1^2 + 4v_1 - 4 = 0 \Rightarrow v_1 = \dfrac{4\sqrt{2}-2}{7}$ (do $0 < v_1$).

**9.42.** Đây là trò chơi ngẫu nhiên một trạng thái (là $G$). Giả sử không có điểm yên ngựa khi trò chơi tiếp diễn.

Giá trị trò chơi là $v = Val\begin{pmatrix} 4 & 1+\dfrac{v}{3} \\ 0 & 1+\dfrac{2v}{3} \end{pmatrix} = \dfrac{4(1+\dfrac{2v}{3})}{4+(1+\dfrac{2v}{3})-(1+\dfrac{v}{3})} = \dfrac{12+8v}{12+v}$.

Dẫn tới phương trình : $v^2 + 4v - 12 = 0$ suy ra $v = 2$ (loại $v = -6$).

Thử lại $v = 2$, có ma trận $\begin{pmatrix} 4 & \dfrac{5}{3} \\ 0 & \dfrac{7}{3} \end{pmatrix}$, không có điểm yên ngựa. Từ đó suy ra:

Chiến thuật tối ưu cho người thứ nhất là (0.5; 0.5) vì: $p = \dfrac{\dfrac{7}{3}-0}{4+\dfrac{7}{3}-0-\dfrac{5}{3}} = \dfrac{1}{2}$.

Chiến thuật tối ưu cho người thứ hai là : $\left(\dfrac{1}{7};\dfrac{6}{7}\right)$ vì $q = \dfrac{\dfrac{7}{3}-\dfrac{5}{3}}{4+\dfrac{7}{3}-0-\dfrac{5}{3}} = \dfrac{1}{7}$.

**9.43.** a) $v_1 = Val\begin{pmatrix} 2 & 2+0.5v_2 \\ 0 & 4+0.5v_2 \end{pmatrix} = \dfrac{8+v_2}{4}$; $v_2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -2+0.5v_1 & -4+0.5v_1 \end{pmatrix} = \dfrac{v_1-8}{3}$.

Từ đó dẫn tới hệ $\begin{cases} 4v_1 - v_2 = 8 \\ v_1 - 3v_2 = 8. \end{cases}$

Suy ra: $\begin{cases} v(1) = v_1 = \dfrac{16}{11} \\ v(2) = v_2 = -\dfrac{24}{11}. \end{cases}$

Thay các giá trị $v_1$ và $v_2$ vào các ma trận trên có

$$G^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & \dfrac{10}{11} \\ 0 & \dfrac{32}{11} \end{pmatrix}; \qquad G^{(2)} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -\dfrac{14}{11} & -\dfrac{36}{11} \end{pmatrix}.$$

Trong $G^{(1)}$ chiến thuật tối ưu của người thứ nhất là $\left(\frac{8}{11};\frac{3}{11}\right)$, của người thứ hai là $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Trong $G^{(2)}$ chiến thuật tối ưu của người thứ nhất là $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$, của người thứ hai là $\left(\frac{6}{11};\frac{5}{11}\right)$.

b) Chương trình

```
uses crt;
const fo = 'shapley.dat';
type mang = array[1..2,1..2] of real;
var v1, v2 : real;
 g1, g2 : mang;
 p, q : real;
 k,i : integer;
 f : text;
procedure tinhv;
var mauso : real;
begin
 v1 := g1[1,1]*g1[2,2]-g1[2,1]*g1[1,2];
 mauso := g1[1,1]+g1[2,2]-g1[2,1]-g1[1,2];
```

```
 v1 := v1/mauso;
 p := g1[2,2]-g1[2,1];
 p := p/mauso;
 q := g1[2,2]-g1[1,2];
 q := q/mauso;
 write(f,'G1 co v1= : ', v1:5:2);
 write(f,' p=(',p:4:2,',',(1-p):4:2,')');
 writeln(f,' q=(',q:4:2,',',(1-q):4:2,')');
 v2 := g2[1,1]*g2[2,2]-g2[2,1]*g2[1,2];
 mauso := g2[1,1]+g2[2,2]-g2[2,1]-g2[1,2];
 v2 := v2/mauso;
 p := g2[2,2]-g2[2,1];
 p := p/mauso;
 q := g2[2,2]-g2[1,2];
 q := q/mauso;
 write(f,'G2 co v2= : ', v2:5:2);
 write(f,' p=(',p:4:2,',',(1-p):4:2,')');
 writeln(f,' q=(',q:4:2,',',(1-q):4:2,')');
end;
BEGIN
 clrscr;
 assign(f, fo);
 rewrite(f);
 write('Cac giai doan tu 0 den k. Nhap so k : ');
readln(k);
 v1 := 0;
 v2 := 0;
 for i:=1 to k do
 begin
 g1[1,1] := 2; g1[1,2] := 2+0.5*v2;
 g1[2,1] := 0; g1[2,2] := 4+0.5*v2;
 g2[1,1] := -4; g2[1,2] := 0;
 g2[2,1] := -2+0.5*v1; g2[2,2] := -4+0.5*v1;
 writeln(f,'Giai doan ',i, ' : ');
 tinhv;
 end;
 close(f);
END.
```