《计算方法》课程总复习

1.课程内容

包括：**插值方法、数值积分与数值微分、常微分方程的差分方法、非线性方程的求根、线性方程组的迭代法与直接法**等内容。它们构成两大模块：1）数值微积分模块。讨论将微积分方法化归为代数问题或解方程，包括插值方法、数值微积分和常微分方程的差分法；2）方程（组）求解模块。致力于讨论方程（组）的解法，包括非线性方程求根、线性方程组的迭代法与直接法。

1）数值微积分模块

该模块的三部分内容都是从简单出发、基于平均化原则，都归结为某些离散函数值的加权平均，最终归结为确定权系数，将含有多个权系数的代数模型加工为每步确定一个松弛因子的递推过程。

其中，插值方法讲授函数的近似表示，由其构造出的插值函数可充当某种简单的近似函数。插值逼近是数值微积分方法的理论基础，如果用插值函数近似替代被积函数，可导出数值求积公式。而数值微积分讲授积分与微分的近似计算，基于数值求积公式可以导出差分格式，常微分方程的差分方法讲授常微分方程的近似求解，形式上可表示为积分形式。作为承上启下重要环节的常微分方程的差分方法是数值计算的核心内容，其定解问题包括初值问题与边值问题，其中，初值问题的隐式格式需要求解函数方程，边值问题的差分方法化归为大型线性方程组。

2）方程（组）求解模块

该模块的三部分内容形成了一个有机的整体，进行方程（组）求解所用的迭代方法是本模块的基础，即都是将函数方程或线性方程组划归为一系列递推算式。迭代方法不仅可用于非线性方程的求根（逐步线性化），而且还可进行线性（非线性）方程组的求解。而线性方程组的迭代法与直接法互为反方法，它们分别对矩阵施行矩阵分裂（矩阵相加）与矩阵分解（矩阵相乘）手续，基本的处理策略都是将所给的线性方程组化归为三角方程组逐步逼近所求的解。

对于上述两大模块，数值微积分模块讨论将微积分方法化归为代数问题乃至于解方程，而方程（组）求解模块致力于讨论方程的解法。

2.学习方法

把握了一条主线、两类基本方法和四种基本技术。

1）一条主线

复杂问题简单化，将复杂计算化归为一系列简单计算的重复。

2）两类基本方法

直接法与迭代法，它们均按照规模缩减的原则进行演化，主要区别在于直接法规模是正整数规模的有限缩减过程，而迭代法是实数规模的无穷缩减过程。

3）四种基本技术

缩减技术、校正技术、超松弛技术和二分技术，它们是直接法与迭代法的设计基础。其中，二分技术是缩减技术的加速，超松弛技术是校正技术的优化。

1）**缩减技术**。适用于通过有限步计算可直接得到问题解的直接法，其设计机理为大事化小，小事化了。大事化小即通过设计结构递归，将所考察的问题加工成规模压缩了的同类问题，使每一步加工后的问题规模相比之前小 1，最终达到规模递减之目的；而小事化了则意味着问题的规模变得足够小可直接计算或能方便地得出问题的解。

2）**校正技术**。是指对于无法大事化小的问题只能通过无限的逼近过程——迭代近似求解，其设计机理可概况为以简驭繁与逐步求精：（1）以简驭繁：通过构造某个简化方程（校正方程）近似替代原先比较复杂的方程，以确定所给预报值的校正量，要求校正方程具有逼近性和简易性；（2）逐步求精：继续迭代与否取决于改进值是否满足精度要求，若不满足，则用改进值作为新的猜测值重复上述步骤。

3）**松弛技术**。松弛过程也是加速迭代的过程，即通过对两个与目标值精度相当的近似值的加权平均得到精度更高的改进值，其设计机理可表述为优劣互补、激浊扬清。运用松弛技术的关键是选取合适的松弛因子，当近似值有优劣之分时，松弛因子一正一负，松弛技术称为超松弛技术。

4）**二分技术**。它是缩减技术的延伸，也是一种高效算法的设计技术，其设计机理变慢为快，即每一步使问题的规模减半，规模按等比级数（1/2）递减，直至规模变为 1 时终止计算。

3.各部分内容的侧重点

1）插值方法

明确插值过程实则是直接利用所给数据进行加权平均，基于代数精度的概念将插值公式的设计化归为确定平均化系数的代数问题。学习中应重点掌握多项式插值，主要是 Lagrange 插值，在此基础上掌握通过线性插值的重复化得到高阶插值公式的 Aitken 逐步插值算法与 Neville 逐步插值算法，并熟悉分段插值的基本思想与公式。至于 Hermite 插值及样条插值，可不做考核要求。

2）数值积分与数值微分

强调数值积分的基本思想是通过若干个求积节点上的函数值的加权平均生成平均高度，数值微分则是将导数计算化归为若干个节点处函数值的加权平均。学生在尽可能高的代数精度目标下进行求积公式的设计，且设计求积公式时可利用对称性原理减少待定参数。具体内容以等距节点上的 Newton-Cotes 公式、非等距的 Gauss 公式为重点，明确 Gauss 公式的精度较高，但需同时处理求积系数和求积节点，并能利用对称性简化处理过程。对于固定步长、变步长的复化求积方法及 Romberg 加速算法也应给予足够重视，而数值微分及其加速方法只要简单了解即可。

3）常微分方程的差分法

重点学习单步法中的 Euler 方法和 Runge-Kutta 方法，线性多步法中的 Adams 方法，它们又分为显式和隐式两者差分格式。学习中，明确 Euler 方法的不同差分格式实际上是根据近似区间上导数方法的不同而得到，重点掌握显式方法与隐式方法、两步格式与梯形格式以及 Euler 预报校正系统。对于 Runge-Kutta 方法，关键在于寻求求解平均斜率的方法，重点掌握二阶及经典 Runge-Kutta 方法。为设计多步格式，需掌握如何将所给实际问题化归为数学问题，将数学问题化归为代数问题，并基于代数精度概念，具体地列出方程组。

4）非线性方程求根

重点介绍根的存在性、根的范围和根的精确化，明确其基本思想是将隐式的非线性化模型逐步显式化、线性化。实际中，应通过运用基本的算法设计技术，舍弃了高阶小量，将难以处理的非线性方程加工成容易求解的线性化的校正方程，逐步校正所获得的近似根，迭代误差逐步缩小，以

保证迭代过程的收敛性，并对每一步迭代步的新值与老值进行加权平均（松弛），得出精度更好的改进值。要求熟练掌握 Newton 法及其一系列改进的 Newton 方法。

5）线性方程组的迭代法和直接法

对于迭代法，学会将线性方程组的求解过程加工成对角方程组或三角方程组求解过程的重复。重点掌握 Jacobi 公式与 Gauss-Seidel 公式，在此基础上熟悉超松弛迭代加速方法，以及通过矩阵分裂导出上述两者方法的迭代矩阵；对于直接法，掌握方法的核心在于利用矩阵分解技术通过运算手续直接将所给线性方程组加工成某个三角方程组乃至对角方程组来求解，掌握利用求解过程的“追”手续与“赶”手续。重点学习 Gauss 消元法、列主元与全主元 Gauss 消元法、LU 的 Doolittle 与 Crout 分解方法，掌握通过 LU 手续利用追赶法求解三对角方程组、利用 Cholesky 及其改进方法求解系数矩阵为对称正定阵的线性方程组。

4.考试题型

填充题（5 题，15 分）

选择题（5 题，15 分）

计算、分析及证明题（5 题，70 分）