Chapter 1 插值方法

习题 1 答案：

5.

解：

（1）利用待定系数法，令所求的多项式是 $p(x)=Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F$，首先根据 $x_2=0$ 可确定 F=1。利用 x 的对称性，可依次求出其余系数的值，即：$A=0,B=0,C=1,D=0,E=-1$。所以，利用数据表所构造的多项式是 $p(x)=x^3-x+1$。　　三次

（2）先取 3 个节点 x_0,x_1,x_2，利用 Lagrange 插值公式构造多项式 $p(x)=x^2-1$，将其余各插值节点代入式中，可以验证其与其他数据是吻合的。故 $p(x)=x^2-1$ 就是所构造的插值多项式。　　二次

6.

解：

利用待定系数法，令所求的多项式是 $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$，则 $p'(x)=a_1+2a_2x$。根据插值条件可得以下方程组

$$\begin{cases}1=p(0)=a_0\\0=p'(0)=a_1\\2=p(1)=a_0+a_1+a_2\end{cases}$$

解得 $a_0=1,a_1=0,a_2=1$。

所构造的多项式是 $p(x)=x^2+1$。

7.

解：

方法一：本题可利用利用条件 $p(x_i)=f(x_i),i=0,1,2$ 和 $p'(x_1)=f'(x_1)$ 求出各个系数值。

$p(x)=f(x_0)+f(x_0,x_1)(x-x_0)+f(x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1)+c(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$，

式中，$c=\left[\dfrac{f'(x_1)-f(x_0,x_1)}{x_1-x_0}-f(x_0,x_1,x_2)\right]\Big/(x_1-x_2)$，$f(x_0,x_1)=\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$，

$f(x_0,x_1,x_2)=\dfrac{f(x_1,x_2)-f(x_0,x_1)}{x_2-x_0}$

方法二：本题可仿照课本 p30-31 页问题 7 的解法进行求解，具体过程略。

8.

解：用余项校正法求解，令

$$q(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$$

$$p(x)=q(x)+c(x-x_0)^3$$

利用插值条件 $p(x_1)=f(x_1)$ 可得 $c=\dfrac{f(x_1)-q(x_1)}{(x_1-x_0)^3}$。注意到这里 x_0 是三重节点，x_1 是单节点，故插值余项为 $f(x)-p(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^3(x-x_1)$。

9．

解：注意到满足条件

$$q(1)=0, q'(1)=10, q''(1)=40$$

的插值多项式为

$$q(x)=10(x-1)+20(x-1)^2$$

且 $q(x)$的余项因子为 $(x-1)^3$，故令所求的插值多项式为

$$p(x)=10(x-1)+20(x-1)^2+(ax+b)(x-1)^3$$

利用剩下的两个插值条件 $p(0)=-1, p'(0)=-2$ 可得

$$\begin{cases}-1=p(0)=-10+20-b\\ -2=p'(0)=10-40-a+3b\end{cases}$$

解得 $a=5, b=11$。所以，所求的插值多项式为

$$p(x)=10(x-1)+20(x-1)^2+(5x+11)(x-1)^3=5x^4-4x^3+2x^2-2x-1$$

10．

解：用基函数方法完整求解问题 7

令所求的插值多项式为

$$p(x)=y_0\varphi_0(x)+y_1\varphi_1(x)+y_0'\psi_0(x)+y_1'\psi_1(x)$$

为此要求基函数 $\varphi_0(x)$ 满足条件 $\varphi_0(0)=1, \varphi_0(1)=\varphi_0'(0)=\varphi_0'(1)=0$。

后面一个条件表明 $x=1$ 是 $\varphi_0(x)$ 的二重零点，故它具有形式

$$\varphi_0(x)=(x-1)^2(ax+b)$$

利用上面的条件可得 $a=2, b=1$。所以，$\varphi_0(x)=(x-1)^2(2x+1)$

类似地有 $\varphi_1(x)=x^2(-2x+3)$。

进一步构造 $\psi_0(x)$，它满足条件 $\psi_0'(0)=1, \psi_0(0)=\psi_0(1)=\psi_0'(1)=0$。

同求 $\varphi_0(x)$ 的方法类似，令

$$\psi_0(x)=(x-1)^2(cx+d)$$

利用条件可得 $c=1, d=0$。因此，$\underline{\psi_0(x)=x(x-1)^2}$。

类似地有 $\underline{\psi_1(x)=x^2(x-1)}$。

将以上代入 $p(x)$ 中即可。

注：本题中两个节点 $x_0=0, x_1=1$ 具有对称性，事实上

$$\varphi_0(1-x)=\varphi_1(x), \varphi_1(1-x)=\varphi_0(x), \psi_0(1-x)=\psi_1(x), \psi_1(1-x)=\psi_0(x)$$

由此特性也可简化处理过程。