Složitost výpočtu Nashova ekvilibria

Tomáš Dacík

31. prosince 2020

1 Úvod

John Nash v roce 1950 dokázal, že každá konečná hra má alespoň jedno Nashovo ekvilibrium[1]. Tato vlastnost, označovaná jako *univerzálnost*, je jednou z vlastností, kterou očekáváme od důvěryhodného konceptu pro řešení her. Další takovou vlastností je existence efektivního způsobu, jak toto řešení nalézt. Tato otázka je u Nashova ekvilibria, stejně jako u řady dalších problémů z oblasti teorie složitosti, doposud otevřeným problémem. V této práci jsou shrnuty výsledky, které umožňují lépe klasifikovat složitost problému nalezení Nashova ekvilibria. Tyto výsledky naznačují, že problém nelze řešit v deterministické polynomiálním čase, ale zároveň jeho univerzalita naznačuje, že se nejedná o **NP**-úplný problém.

Práce vychází primárně z článku [4] (který je upravenou a zjednodušenou verzí článku [3]) a dále pak z práce [7], která shrnuje řadu výsledků z pomezí teorie her a složitosti. První část práce se věnuje představení složitostních tříd, které souvisí s problémem výpočtu Nashova ekvilibria označovaným jako Nash a speciálně pak třídy **PPAD**, pro kterou je Nash úplným problémem. Přesný důkaz tohoto tvrzení je značně rozsáhlý a proto se dále zaměřuji pouze na ideje jeho částí související s teorií her – konkrétně se jedná o části redukcí, které ukazují souvislost s Nashovým důkazem a jeho alternativní způsob. Dále je pak studován způsob, kterým lze simulovat výpočet základních aritmetických operací a z nich složených funkcí pomocí her tak, že hráči svou hrou tyto operace počítají. V této práci jsou uvažovány hry tří a více hráčů, ale popsané výsledky lze zobecnit i pro hry dvou hráčů [1].

2 Formulace problému

Hra je definována obvyklým způsobem jako trojice $\Gamma = (Q, \{S_i\}_{i\in Q}, \{U_i\}_{i\in Q})$, kde Q je konečná množina hráčů, S_i značí konečné množiny ryzích strategií jednotlivých hráčů a U_i jejich užitkové funkce. Množina smíšených strategií hráče i (Δ_i) je tvořena pravděpodobnostními distribucemi nad jeho ryzími strategiemi a funkce π_i vyjadřují jeho očekávaný užitek z hraní těchto strategií. Smíšený strategický profil je prvkem

[1] V této práci je Nashovým ekvilibriem vždy implicitně myšleno Nashovo ekvilibrium ve smíšených strategiích.

kartézského součinu smíšených strategií a Nashovo ekvilibrium je smíšený profil $(\sigma^*, \sigma^*_{-i})$, pro který platí, že žádný hráč si není schopen polepšit změnou své strategie:

$$\forall i \in Q, \forall \sigma_i \in \Delta_i : \ \pi_i(\sigma^*_i, \sigma^*_{-i}) \geq \pi_i(\sigma_i, \sigma^*_{-i})$$

Pro hry dvou hráčů s užitkovými funkcemi jejichž oborem jsou racionální čísla platí, že také pravděpodobnosti definující strategie v Nashových ekvilibriích jsou racionální čísla. Pro hry tří a více hráčů už toto tvrzení neplatí a existují dokonce hry, které mají pouze ekvilibria s iracionálními pravděpodobnostmi. Vzhledem k numerické nepřesnosti při výpočtech je proto zaveden pojem *ε-Nashovo ekvilibrium*, který říká, že pro daný profil si hráč může polepšit maximálně o ε (typicky předpokládáme, že ε je velmi malé číslo):

$$\forall i \in Q, \forall \sigma_i \in \Delta_i : \ \pi_i(\sigma^*_i, \sigma^*_{-i}) \geq \pi_i(\sigma_i, \sigma^*_{-i}) - \varepsilon$$

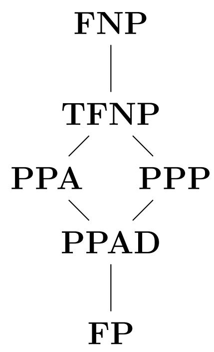
Tento koncept je možné využít i v kontextu aproximačních algoritmů pro zrychlení výpočtu za cenu připuštění jisté chyby, ale v této práci se jedná především o způsob jak se vypořádat s numerickou nepřesností při reprezentaci iracionálních čísel. Problém nalezení takového strategického profilu je dále označován jako NASH.

3 Složitost funkčních problémů

Následující kapitoly věnující se složitosti jsou založené na článku [9] a přednáškách z kurzu [2]. Na rozdíl od častěji studovaných rozhodovacích problémů (výstupem je odpověď ano/ne) patří problém NASH mezi funkční problémy, přesněji mezi vyhledávací problémy (search problems) – výstupem je libovolné řešení instance na vstupu. Stejně jako u rozhodovacích problémů je pozornost věnována především třídám **FP** a **FNP**, které tvoří přirozená rozšíření tříd **P** a **NP**[2]. Tyto třídy reprezentují funkce vyčíslitelné v polynomiálním, respektive nedeterministickém polynomiálním čase. Vztahy mezi třídami funkčních problémů jsou typicky dokazovány pomocí redukcí. Redukce mezi funkčními problémy $A \leq B$ se skládá ze dvou částí – funkce, která mapuje instance problému A na instance problému B a funkce, která z řešení problému B rekonstruuje řešení problému A. Příklad znázornění takové redukce je na obrázku 2. Všechny redukce uvažované v této práci jsou polynomiální a jejich druhá část rekonstruující řešení je vždy identitou.

Mezi funkčními problémy hrají specifickou roli problémy, které jsou takzvaně *totální* – každá instance problému má řešení. Třída těchto problémů je označována jako **TFNP**. Příkladem takového problému je rozklad na prvočísla nebo právě problém NASH. Christos Papadimitriou navrhl další rozdělení této třídy na základě metody důkazu, kterým je dokázána totálnost daného problému [9].

[2]Přestože v literatuře jsou rozhodovací a vyhledávací problémy často libovolně zaměňovány a používány pouze třídy **P** a **NP**, přijde mi vhodnější držet se striktnější terminologie, protože například dále zmíněná totálnost problémů nedává v kontextu rozhodovacích problémů příliš smysl.



Obrázek 1: Vztahy mezi funkčními složitostními třídami

Jedná se ve všech případech o relativně jednoduchá tvrzení, jejichž důkazy jsou ovšem vždy nekonstruktivní povahy a nenabízejí tak efektivní algoritmus pro řešení problému, příklady jsou:

- **PPA** (Věta o paritě v neorientovaném grafu) – *"Pokud existuje v neorientovaném grafu vrchol lichého stupně, pak existuje další takový vrchol"*,
- **PPAD** (Věta o paritě v orientovaném grafu) – *"Pokud existuje v grafu nevyvážený vrchol (vrchol s odlišným vstupním a výstupním stupněm), pak existuje další takový vrchol"*,
- **PPP** (Dirichletův princip) – *"Pokud funkce mapuje n prvků na n - 1, pak existuje kolize"*.

Dále pak existují třídy související s lokálním prohledáváním **CLS** a **PLS**. Do výše zmíněných tříd lze zařadit všechny známé totální vyhledávací problémy. Některé známé vztahy mezi těmito třídami jsou znázorněny na obrázku 1. Předpokládá se, že všechny inkluze mezi třídami jsou ostré, ale pro žádnou z nich toto zatím nebylo dokázáno. V případě, že platí **FP** = **FNP** (ekvivalentní s tvrzením **P** = **NP**), tyto třídy dokonce splývají do jedné.

4 Třída PPAD

Jak bylo zmíněno v předchozí kapitole **PPAD** (*Polynomial parity argument, directed*) je třída totálních vyhledávacích problémů, jejichž úplnost lze dokázat pomocí věty o paritě v orientovaném grafu. Formálně je třída **PPAD** definována pomocí některého ze svých úplných problémů tak, že obsahuje právě ty problémy, které se v polynomiálním čase na tento základní problém redukují. Nejčastěji je v definici použit problém označovaný jako End-of-the-line.

Instanci problému End-of-the-line tvoří dva boolovské obvody[3] S (successor) a P (predeccessor), které implicitně definují hrany grafu G – orientovaná hrana (u, v) je součástí G právě tehdy, kdy $S(u) = v$ a $S(v) = u$. Oba tyto obvody

[3] V kontextu teorie složitosti se jedná o teoretické výpočetní modely.

$$\begin{tikzcd} \text{Formule } \varphi \arrow[r, "(a)"] \arrow[d, "\textsc{Sat}"] & \text{Hra } \Gamma \arrow[d, "\textsc{Nash}"] \\ \text{Interp. I / UNSAT} & \text{MNE } s^* \arrow[l, "(b)"] \end{tikzcd}$$

Obrázek 2: Schématické znázornění redukce SAT $\leq$ NASH

mají polynomiální složitost. Pro zjednodušení předpokládáme, že každý vrchol má nejvýše jednu vstupní hranu a nejvýše jednu odchozí hranu. Vstupem problému jsou dále vrcholy grafu reprezentované jako binární řetězec (graf má tedy až 2^n vrcholů, každý reprezentovaný jedním bitem) a jeden nevyvážený vrchol. Řešením problému je nalezení jiného nevyváženého vrcholu.

Na první pohled je vidět, že totálnost problému zaručuje věta o paritě. Pokud by byly hrany grafu G reprezentovány například pomocí seznamu sousedů, lze problém řešit efektivně v lineárním čase. V tomto případě ovšem předpokládáme, že hrany jsou reprezentovány dvěma programy, které pro uzel na vstupu vrací jeho následníka nebo předchůdce. Vzhledem k omezení hran je graf tvořen pouze cestami a cykly, jednoduché řešení je tedy začít v zadaném nevyváženém vrcholu a pokračovat dokud není nalezen jiný nevyvážený vrchol. Délka takto prozkoumané cesty je ovšem až exponenciální. V tomto případě lze vidět jistou analogii s hledáním pevného bodu nebo Nashova ekvilibria, kdy postupně počítáme následníky dokud nenarazíme na hledaný nevyvážený uzel.

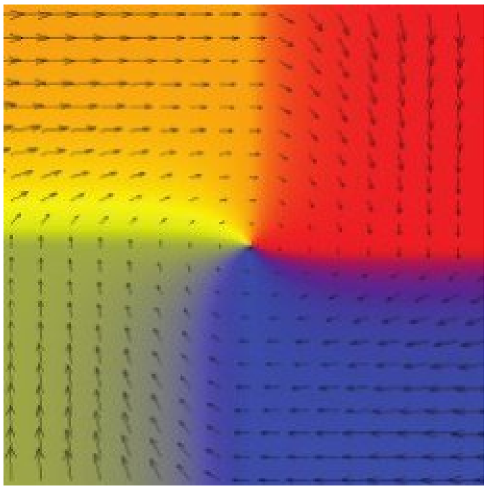
Vlastnosti třídy PPAD

Přestože vztahy mezi zmíněnými třídami jsou stále nevyřešeným problémem, obecně se předpokládá, že **PPAD**-úplné problémy jsou „těžší“ než polynomiální, ale ne tak těžké jako **FNP**-úplné problémy, tedy $\mathbf{FP} \subset \mathbf{PPAD} \subset \mathbf{FNP}$. Tento předpoklad, který umožňuje získat lepší představu i o složitosti výpočtu Nashova ekvilibria, vychází z následujících úvah (jedná se opravdu o domněnky a úvahy, nikoliv o důkazy).

Zmíněný problém END-OF-THE-LINE nelze efektivně řešit pomocí lokálního prohledávání vzhledem k implicitně zadaným hranám a otázkou je, jak v případě exponenciálně dlouhé cesty zamezit tomu, aby ji bylo nutné celou projít.

Naopak, **FNP**-úplnost například problému NASH by znamenala, že existuje redukce z tohoto problému na vyhledávací verzi problému SAT (nalezení splňující interpretace proměnných výrokové formule). Schéma takové redukce je znázorněno v obrázku 2. Problém s její existencí spočívá v tom, že její část označená v obrázku jako a by nikdy nemohla zobrazit nesplnitelnou formuli na hru bez Nashova ekvilibria, protože taková hra samozřejmě neexistuje. Tím pádem by pro nesplnitelné formule část redukce b musela tuto nesplnitelnost zjistit z Nashova ekvilibria. Lze dokázat, že existence takového algoritmu by znamenala že platí $\mathbf{NP} = \mathbf{co} - \mathbf{NP}$, což je považováno za málo pravděpodobné.

A / B	head	tail
head	(1, -1)	(-1, 1)
tail	(-1, 1)	(1, -1)



Obrázek 3: Hra dvou hráčů „matching pennies“ a znázornění její Brouwerovy funkce (převzato z [4]). Pevným bodem a tedy i Nashovým ekvilibriem je bod (0,5; 0,5)

5 Problém Nash je PPAD-úplný

Zbytek této práce se věnuje částem důkazu úplnosti problému Nash pro třídu **PPAD**. Jako ostatní důkazy úplnosti se i tento skládá ze dvou částí:

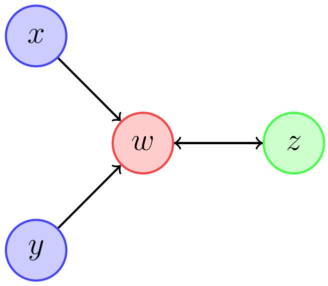
1. Nash $\in$ **PPAD** – Nash se redukuje na End-of-the-line,
2. Nash je **PPAD**-těžký – redukce opačným směrem.

V obou směrech redukce je využita *Brouwerova věta o pevném bodě*, tvrzení z oblasti algebraické topologie, která je speciálním případem Kakutaniho věty použité v Nashově důkazu:

Věta 1. Nechť A je kompaktní a konvexní množina. Potom každá spojitá funkce $f : A \to A$ má pevný bod, tedy $\exists x_0 \in A : f(x_0) = x_0$.

Tento teorém říká, že pokud je množina A kompaktní (uzavřená a ohraničená) a konvexní („bez děr“), spojitá funkce, která ji zobrazuje samu na sebe má vždy pevný bod. Jako příklad si lze představit funkci mapující kruh sám na sebe. Funkce jako rotace okolo středu, zmenšení v rámci původního kruhu nebo jeho převrácení vždy zachovávají alespoň jeden bod, kterým je střed tohoto kruhu. Stejně tak každé „stlačení“ a i případné následné „roztažení“ kruhu v rámci původního kruhu, bude mít vždy pevný bod. Příkladem transformace, která nemusí mít pevný bod je roztržení kruhu a jeho následné poskládání do původní oblasti. Taková transformace ale není spojitá.

Problém Brouwer pak spočívá v nalezení pevného bodu pro funkci, o které mluví věta (taková funkce se označuje jako Brouwerova) a je použit jako mezikrok v rámci obou redukcí. V další části textu jsou popsány základních myšlenky těch částí redukce, které souvisí s teorií her. Kompletní důkaz lze najít v [3].



Obrázek 4: Znázornění závislostí mezi užitkovými funkcemi hráčů a způsobu jak lze obarvením sloučit hráče.

5.1 Od Nashova ekvilibria k Brouwerovu pevnému bodu

Vzhledem k souvislosti Brouwerovy věty a Kakutaniho věty, kterou použil John Nash ve svém důkazu je tento krok relativně snadný. Zároveň ukazuje, jak lze provést důkaz univerzality Nashova ekvilibria alternativním způsobem. Trik spočívá v jiné definici korespondence *best-response* jako funkce na množině smíšených strategií, která vyjadřuje jakým způsobem nespokojený hráč může změnit svou strategii a zvýšit svůj zisk (jde tedy o zúžení *best-response* na jedinou strategii). Pevný bod takové funkce bude určitě Nashovým ekvilibriem, protože hráč si z něj už nemůže nijak polepšit. Příklad hry a takové funkce je uveden na obrázku 3. Bod (0,5; 0,5) který je pevným bodem funkce je zároveň i Nashovým ekvilibriem hry.

5.2 Od Brouwerova pevného bodu k Nashovu ekvilibriu

Tato redukce vychází z faktu, že každou Brouwerovu funkci lze vyjádřit pomocí konečného počtu operací sčítání, násobení a porovnání (=). Cílem je tedy pro každou z těchto operací vytvořit hru, která své hráče „donutí počítat“ danou operaci jako Nashovo ekvilibrium. Z dílčích her je poté potřeba sestavit hru reprezentující celou funkci a protože tato konstrukce vede na vysoký počet hráčů, je ještě potřeba provést počet hráčů snížit pro co největší obecnost dokazovaného tvrzení.

Násobení jako hra

Hra odpovídající násobení se skládá ze čtyř hráčů: hráče x a y můžeme považovat za operandy a hráče z za výsledek. Pro konstrukci hry je potřeba doplnit ještě čtvrtého hráče w, který slouží pro zajištění korektního výsledku. Každý z těchto hráčů má dvě ryzí strategie označované jako *go* a *stop*. Smíšené strategie jednotlivých hráčů jsou značený písmeny X, Y, Z a W, které udávají pravděpodobnost, se kterou daný hráč hraje strategii *go*. Nyní je potřeba zajistit, že pro každé Nashovo ekvilibrium bude platit $X \cdot Y = Z$ a to vhodnou definicí užitkových funkcí jednotlivých hráčů. Stačí definovat následující omezení:

1. Pro hráče w a z je výhodné hrát vždy ryzí strategii *stop* nebo ryzí strategii *go*,

2. Pokud hráč w hraje strategii *stop* jeho užitek je $X \cdot Y$,

3. Pokud hráč w hraje strategii *go* jeho užitek je Z,

4. Hráč z má nejvyšší užitek ze hry, pokud hraje opačnou strategii než hráč w.

Závislosti mezi hráči jsou znázorněny na obrázku 4. Na strategie hráčů x a y nejsou kladena žádná omezení (koneckonců se jedná o operandy násobení a rozsah jejich hodnot by tedy neměl být omezený). Nyní lze sporem ukázat, že každé Nashovo ekvilibrium bude „implementovat" násobení $X \cdot Y = Z$:

- Pokud by platilo $Z > X \cdot Y$, znamenalo by to, že hráč w hraje strategii *go* a hráč z tedy hraje opačnou strategii *stop* ($Z = 0$). To je spor s předpokladem, protože X a Y jsou pravděpodobnosti a jejich součin je tedy vždy nezáporný.

- Pokud by platilo $Z < X \cdot Y$, znamenalo by to, že hráč w hraje strategii *stop* a hráč w tím pádem bude hrát vždy *go* ($Z = 1$). To je opět spor, protože součin pravděpodobností nemůže být větší než 1.

Podobným způsobem lze vytvořit i hru, která implementuje sčítání. O něco složitější je konstrukce operátoru porovnání, který je sestaven pouze jako aproximativní. To ovšem není problém vzhledem k tomu, jak byl v kapitole 2 formulován problém Nash.

Snížení počtu hráčů

Představená konstrukce povede na hru s velkým počtem hráčů, který je potřeba pro dokončení důkazu v co největší obecnosti zmenšit. Velmi zjednodušeně řečeno je hra vyjádřena pomocí orientovaného grafu, jehož vrcholy tvoří hráči a hrana (u, v) reprezentuje, že užitková funkce hráče v závisí na zvolené strategii hráče u. Zásadním, ale poměrně složitým krokem je pak důkaz, že vrcholy tohoto grafu lze vzhledem k tomu jak byla hra zkonstruována, vždy obarvit třemi barvami tak, že žádné dva na sobě závislé vrcholy nemají stejnou barvu. Příklad takového obarvení pro násobící hru je na obrázku 4. Vzhledem ke způsobu obarvení mezi hráči jedné barvy nedochází ke „konfliktu zájmů" a lze je tedy brát jako jediného hráče. K dokončení důkazu je pak potřeba ještě ukázat, že tato konstrukce zachová Nashova ekvilibria.

6 Závěr

Tato práce se věnovala popisu složitostních tříd souvisejících s problémem výpočtu Nashova Ekvilibria a myšlence důkazu, že tento problém je pro tři a více hráčů úplný pro třídu **PPAD**. Zobecnění tohoto výsledku pro hry dvou hráčů lze nalézt v [1]. Dalšími souvisejícími oblastmi je výzkum vlivu aproximace na složitost. V tomto ohledu je znám polynomiální algoritmus, který ovšem připouští až exponenciálně velkou chybu [5]. Na druhou stranu je studována i oblast úplně přesného výpočtu ekvilibrií (a dalších pevných bodů), která ukazuje mimo jiné zajímavé souvislosti mezi teorií her a formální verifikací programů [6].

Reference

[1] Xi Chen, Xiaotie Deng, and Shang-Hua Teng. Settling the Complexity of Computing Two-Player Nash Equilibria, 2007.

[2] Constantinos Daskalakis. MIT Course 6.890 Algorithmic Lower Bounds: Fun with Hardness Proofs, Fall 2014 (video lectures on the PPAD class available online at `https://www.youtube.com/watch?v=TUbfCY_8Dzs`).

[3] Constantinos Daskalakis, Paul Goldberg, and Christos Papadimitriou. The Complexity of Computing a Nash Equilibrium. *SIAM J. Comput.*, 39:195–259, 02 2009.

[4] Constantinos Daskalakis, Paul Goldberg, and Christos Papadimitriou. The Complexity of Computing a Nash Equilibrium (simplified version, available online at `http://people.csail.mit.edu/costis/simplified.pdf`). *SIAM J. Comput.*, 39:195–259, 02 2009.

[5] Constantinos Daskalakis, Aranyak Mehta, and Christos Papadimitriou. A note on approximate nash equilibria. In Paul Spirakis, Marios Mavronicolas, and Spyros Kontogiannis, editors, *Internet and Network Economics*, pages 297–306, Berlin, Heidelberg, 2006. Springer Berlin Heidelberg.

[6] Kousha Etessami and Mihalis Yannakakis. On the Complexity of Nash Equilibria and Other Fixed Points (Extended Abstract). pages 113–123, 11 2007.

[7] Paul W. Goldberg. A Survey of PPAD-Completeness for Computing Nash Equilibria, 2011.

[8] John Nash. Non-Cooperative Games. *Annals of mathematics*, pages 286–295, 1951.

[9] Christos H. Papadimitriou. On the Complexity of the Parity Argument and Other Inefficient Proofs of Existence. 48(3):498–532, June 1994.