Графики функций

Darya Tlepbergenova

4 августа 2020 г.

Содержание

1 Введение

Функция (обычно обозначается $y = f(x)$) — это соответствие между двумя множествами, при котором каждому элементу одного множества соответствует **единственный** элемент другого множества.

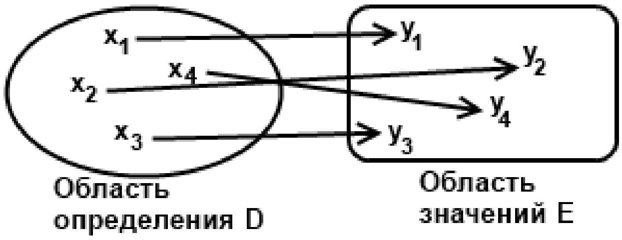


Рис. 1: Понятие функции

Допустимые значения аргумента, или **область определения функции** $D(y)$ - это то, что связано с возможными x, при которых функция имеет смысл.

Область значений функции $E(y)$ - это то, какие значения принимает y, при допустимых значениях x.

Отсюда следует, что, например, окружность не является функцией.

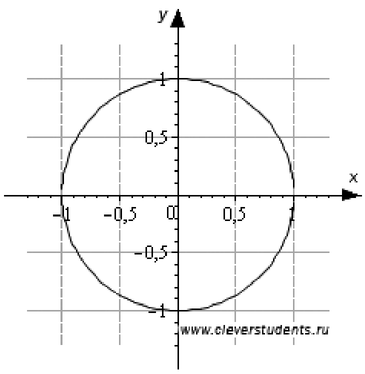


Рис. 2: Здесь одному x (например 0.5) соответствует 2 y

- x - переменная величина, или, аргумент;
- y - зависимая величина – изменяется при изменении аргумента, то есть x согласно какой-либо определенной формуле f, отражающей зависимость одной величины от другой.

Далее рассмотрим конструкции элементарных функций.

2 Элементарные функции

2.1 Линейная функция $y = kx + b$

Графиком функции такого вида является прямая.

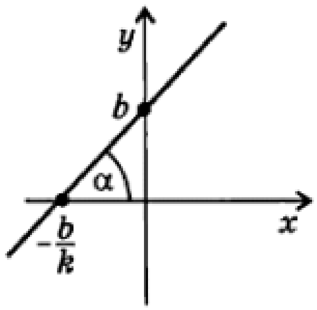


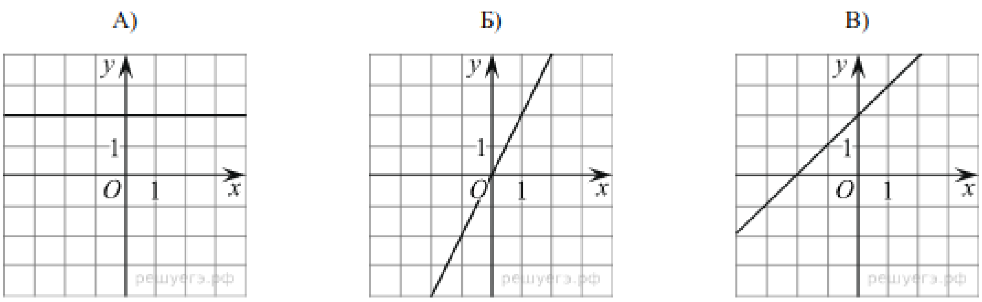
Рис. 3: Линейная функция

Построение делаем с помощью таблицы, достаточно 2 точек (Почему?).
Аналитика параметров функции:

- Параметр b - это $f(0) = b$, а значит, точка пересечения с осью OY;
- Параметр k - это угловой коэффициент - $k = \operatorname{tg} \alpha$ - тангенс угла наклона нашей прямой. Как мы знаем, если $\operatorname{tg} \alpha > 0 (k > 0)$ то угол α острый, если $\operatorname{tg} \alpha < 0 (k < 0)$ то угол α тупой.

2.1.1 Задания

Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

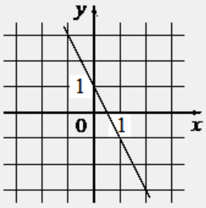


1) $y = 2x$
2) $y = -2x$
3) $y = x + 2$
4) $y = 2$

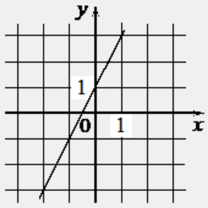
Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ

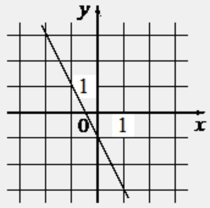
А)



Б)



В)



ФОРМУЛЫ

1) $y = -2x - 1$

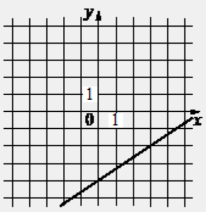
2) $y = -2x + 1$

3) $y = 2x + 1$

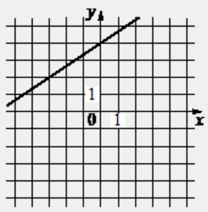
Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ

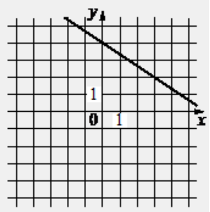
А)



Б)



В)



ФОРМУЛЫ

1) $y = -\frac{2}{3}x + 4$

2) $y = \frac{2}{3}x - 4$

3) $y = \frac{2}{3}x + 4$

2.2 Модуль функции $y = |x|$

Графиком функции является "галочка".

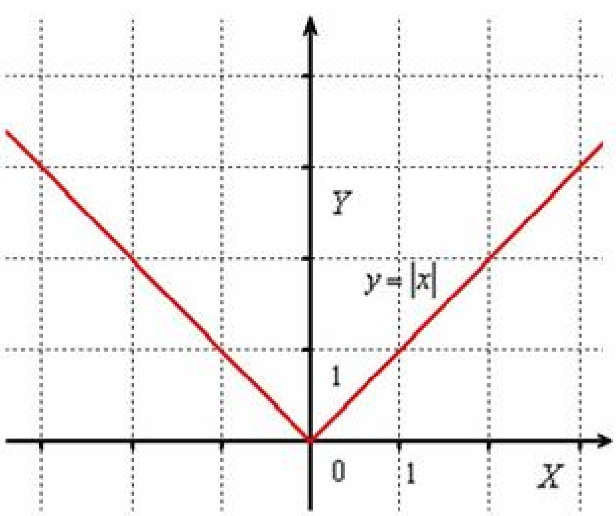


Рис. 4: Функция модуля

Перепишем модуль в виде:

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Таким образом, построение сводится к построению линейных функций.

Если под модулем стоит не только x - решается аналогично. Подробнее в разделе Типовые преобразования функций.

2.3 Функция корня $y = \sqrt{x}$

Графиком функции такого вида является половинка параболы

(!) Все обратные функции - это поворот вправо на 90 градусов, а так как в действительных числах не существует корня из отрицательного числа - нижняя ветвь параболы отсутствует. Ну и так же, если бы было две ветви - это противоречило бы определению функции - одному x должен соответствовать 1 y.

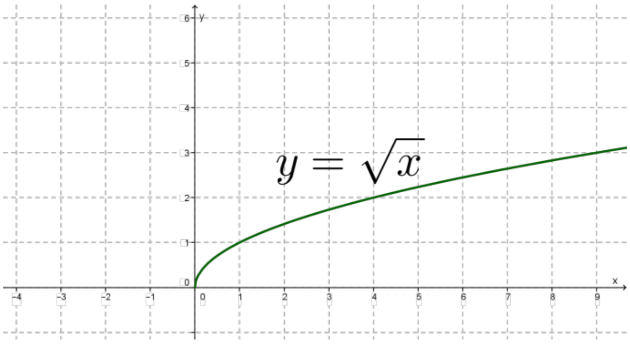


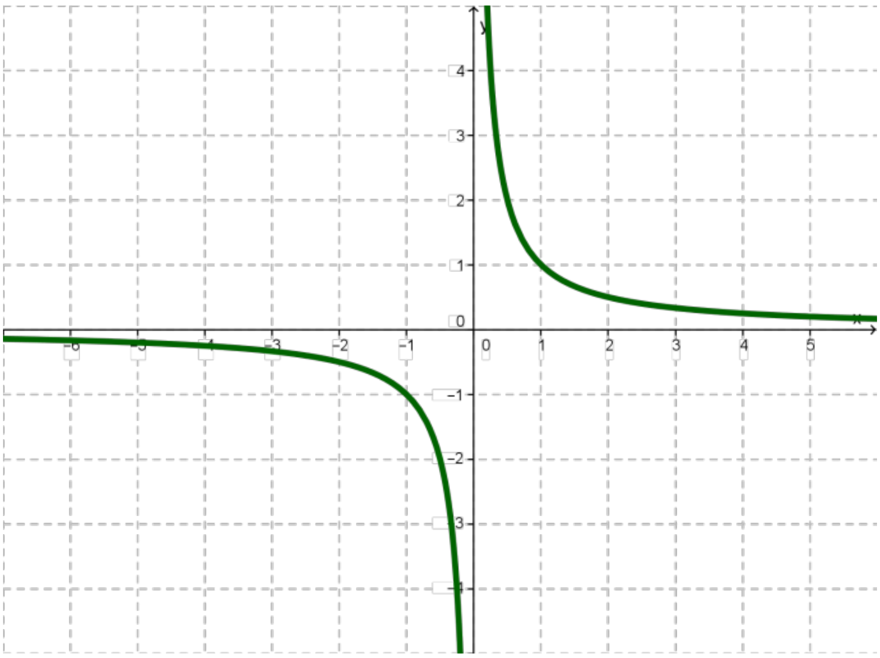
Рис. 5: Функция корня

Построение также как и для параболы запоминаем (для простого вида!) точки 1-1 2-4

По точкам, желательно выбирать - 3-4 различных точки для построения.

2.4 Гипербола $y = \frac{1}{x}$

У данного графика имеются 2 **асимптоты** - это прямые к которым график стремится, но никогда не достигает. В данном случае - это OX и OY



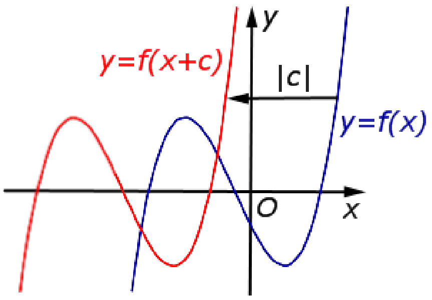
3 Типовые преобразования элементарных функций

Обратим внимание сразу, что данные преобразования можно применять к любым функциям. Также мы можем применять сразу несколько преобразований, получая более сложные функции.

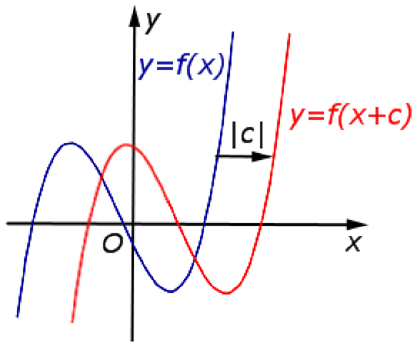
3.1 Преобразование $y = f(x+c)$, c – число

Примеры: $y = \sqrt{x+3}$, $y = \frac{1}{x+3}$

- В случае $c > 0$ график функции $y = f(x)$ переносится влево на расстояние $|c|$
- В случае $c < 0$ график функции $y = f(x)$ переносится вправо на расстояние $|c|$



$c > 0$ сдвиг по оси OX влево

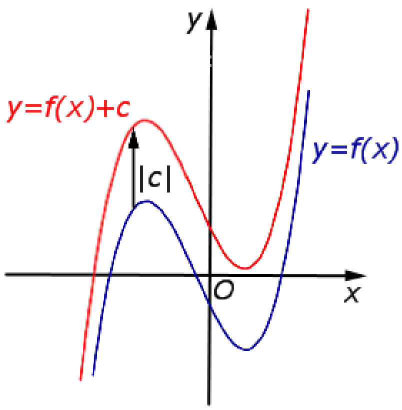


$c < 0$ сдвиг по оси OX вправо

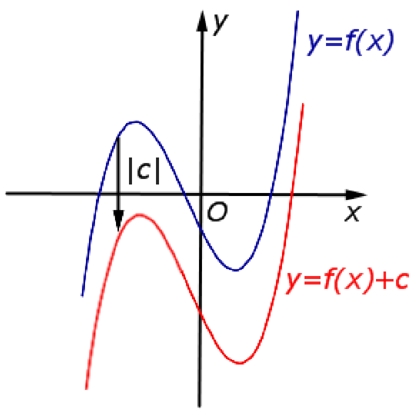
3.2 Преобразование $y = f(x) + c$, c – число

Примеры: $y = \sqrt{x} + 3$, $y = \frac{1}{x} + 3$

- В случае $c > 0$ график функции $y = f(x)$ переносится вверх на расстояние $|c|$
- В случае $c < 0$ график функции $y = f(x)$ переносится вниз на расстояние $|c|$



$c > 0$ сдвиг по оси OY вверх

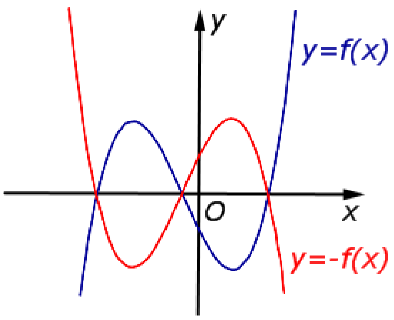


$c < 0$ сдвиг по оси OY вниз

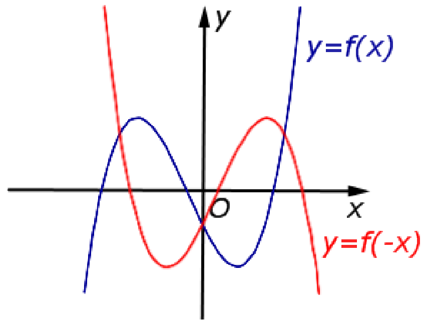
3.3 Преобразование отражения $y = -f(x)$ и $y = f(-x)$

Примеры: $y = -\sqrt{x}$, $y = \sqrt{-x}$

- $y = -f(x)$
  График функции $y = f(x)$ симметрично отражается относительно оси OX.
- $y = f(-x)$
  График функции $y = f(x)$ симметрично отражается относительно оси OY.



$y = -f(x)$ отражение от OX

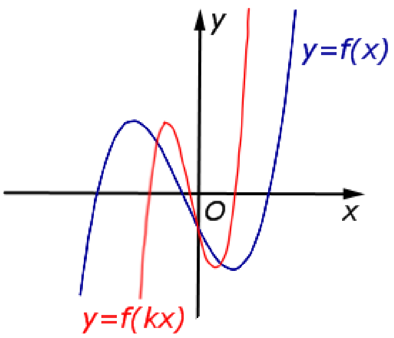


$y = f(-x)$ отражение от OY

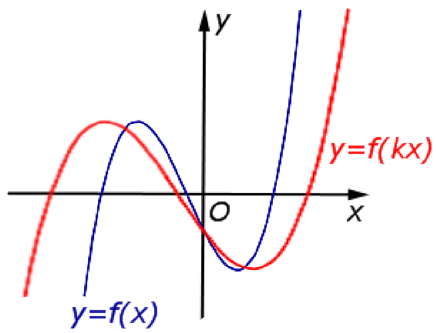
3.4 Преобразование $y = f(kx)$, k – число

Пример: $y = \sqrt{3x}$, $y = \frac{1}{3x}$

- В случае $k > 1$ происходит сжатие графика функции $y = f(x)$ в k раз к оси OY.
- В случае $0 < k < 1$ происходит растяжение графика функции $y = f(x)$ в $\frac{1}{|k|}$ раз от оси OY.



$k > 1$ - сжатие по OX (к OY)



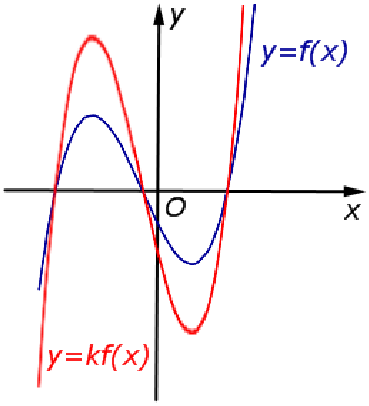
$0 < k < 1$ растяжение по OX (от OY)

(?) Что будет с графиком при $k < 0$? при $-1 < k < 0$?

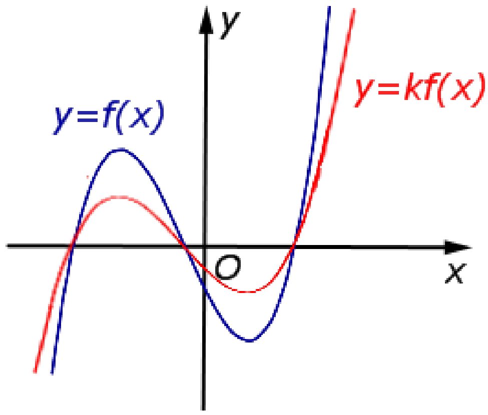
3.5 Преобразование $y = kf(x)$, k – число

Пример: $y = 3\sqrt{x}$, $y = \frac{3}{x}$

- В случае $k > 1$ происходит растяжение графика функции $y = f(x)$ в k раз от оси Ox.
- В случае $0 < k < 1$ происходит сжатие графика функции $y = f(x)$ в $\frac{1}{|k|}$ раз к оси Ox.



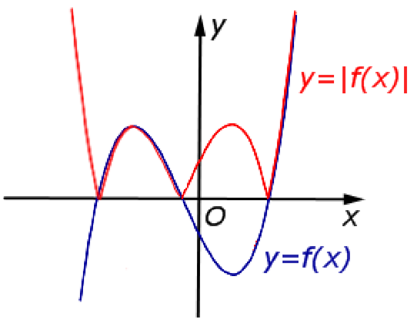
$k > 1$ - растяжение по OY (от OX)



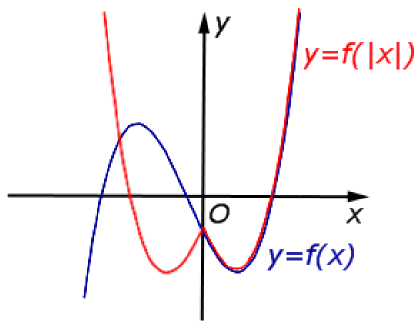
$0 < k < 1$ сжатие по OY (к OX)

3.6 Преобразование модуля $y = |f(x)|$ и $y = f(|x|)$

- $y = |f(x)|$. Часть графика функции $y = f(x)$, расположенная в области $y > 0$, остаётся на месте. Часть графика функции y = f (x), расположенная в области $y < 0$, симметрично отражается относительно оси Ох.
- $y = f(|x|)$. Ось Оу является осью симметрии графика функции $y = f(|x|)$. Часть графика функции y = f (x), расположенная в области $x > 0$ остаётся на месте. Часть графика функции $y = f(|x|)$, расположенная в области $x < 0$, получается из части графика, расположенной в области $x > 0$ при помощи симметричного отражения относительно оси Оу.

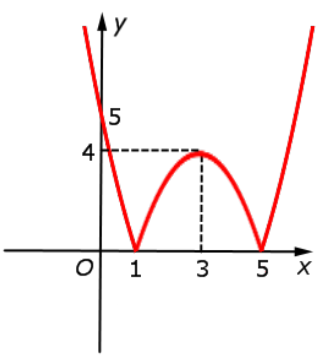


$y = |f(x)|$- отражение от OX

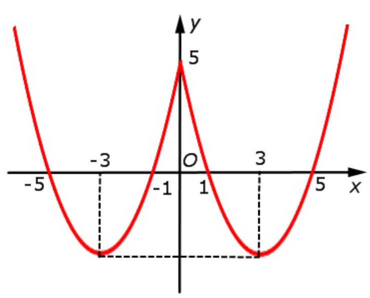


$y = f(|x|)$ отражение от OY

Пример:



$y = |x^2 - 6x + 5|$



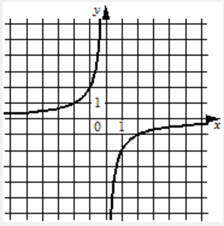
$y = x^2 - 6|x| + 5$

3.7 Задания

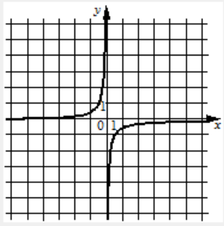
Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ

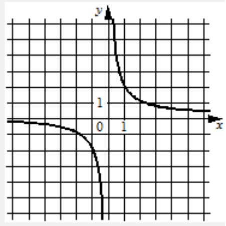
А)



Б)



В)



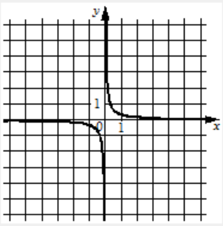
ФОРМУЛЫ

1) $y = -\dfrac{1}{2x}$ 2) $y = -\dfrac{2}{x}$ 3) $y = \dfrac{2}{x}$

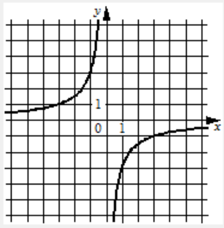
Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ

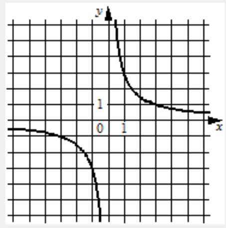
А)



Б)



В)



ФОРМУЛЫ

1) $y = -\dfrac{3}{x}$ 2) $y = \dfrac{1}{3x}$ 3) $y = \dfrac{3}{x}$

Постройте график функции

$$y = -4 - \frac{x+1}{x^2+x}.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком общих точек.

Постройте график функции

$$y = \left|x^2 - x - 2\right|.$$

Какое наибольшее число общих точек может иметь график данной функции с прямой, параллельной оси абсцисс?

Постройте график функции

$$y = \left|x^2 - 9\right|.$$

Какое наибольшее число общих точек может иметь график данной функции с прямой, параллельной оси абсцисс?

4 Элементарные функции (продолжение)

4.1 Квадратная функция $y = x^2$

Графиком функции такого вида является парабола.

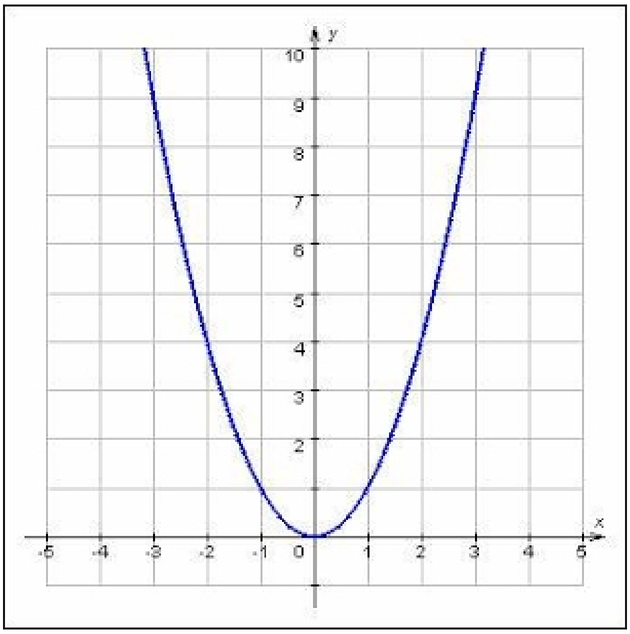


Рис. 6: Парабола

Общий вид параболы как мы знаем $y = ax^2 + bx + c$. Как мы разбирали в прошлой главе - это преобразования. Для определения конкретного преобразования используют прием - выделение полного квадрата:

$$x^2 + 2x - 5 = (x^2 + 2x + 1) - 6 = (x + 1)^2 - 6$$

И теперь видно, что это сдвиг элементарной функции x^2 по оси OX влево на 1 и сдвиг вниз по OY на 6.

Также для построения параболы удобно использовать формулу вершины параболы:

$$x_0 = -\frac{b}{2a},\ y_0 = f(x_0)$$

Аналитика функции относительно параметров a,b и c в $y = ax^2 + bx + c$:

- Параметр c. Как и, например, в линейной функции b, это свободный член (без x), а значит что это в точности - пересечение графика с осью OY.
- Параметр a. как изучали в преобразованиях - это отражение относительно OX. Таким образом, положительное a - ветви вверх, отрицательное - ветви вниз.
- Параметр b. Данный параметр участвует в вершине параболы, а значит относительно знака b и a можно понять с какой стороны вершина параболы.

Также в построении графика можно использовать корни квадратного уравнения - это будут точки пересечения графика с осью OX.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

4.1.1 Задания

Установите соответствие между функциями и их графиками.

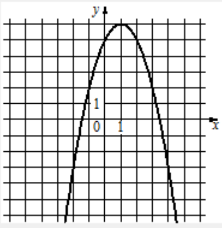
ФУНКЦИИ

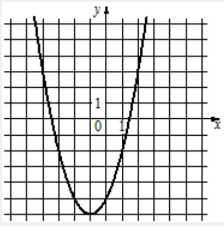
А) $y=-x^2+2x+5$

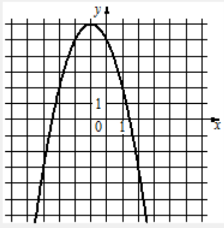
Б) $y=x^2+2x-5$

В) $y=-x^2-2x+5$

ГРАФИКИ

1) 

2) 

3) 

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

На рисунках изображены графики функций вида $y=ax^2+bx+c$. Установите соответствие между знаками коэффициентов a и c и графиками функций.

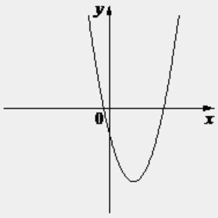
КОЭФФИЦИЕНТЫ

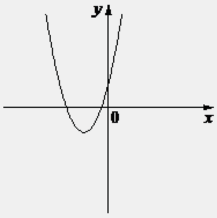
А) $a>0, c<0$

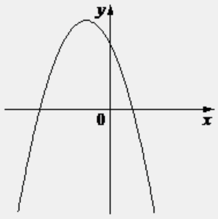
Б) $a<0, c>0$

В) $a>0, c>0$

ГРАФИКИ

1) 

2) 

3) 

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

На рисунках изображены графики функций вида $y=ax^2+bx+c$. Установите соответствие между знаками коэффициентов a и c и графиками функций.

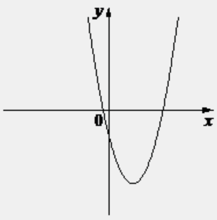
КОЭФФИЦИЕНТЫ

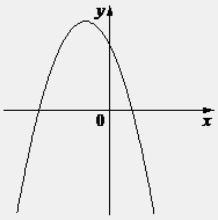
А) $a>0, c<0$

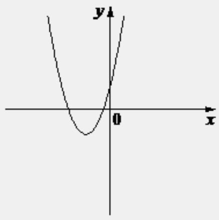
Б) $a>0, c>0$

В) $a<0, c>0$

ГРАФИКИ

1) 

2) 

3) 

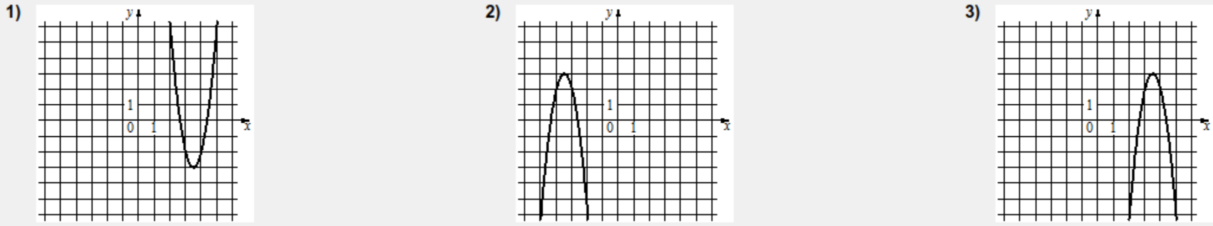
В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Установите соответствие между функциями и их графиками.

ФУНКЦИИ

А) $y = -4x^2 - 28x - 46$ Б) $y = 4x^2 - 28x + 46$ В) $y = -4x^2 + 28x - 46$

ГРАФИКИ



В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

4.2 Кубическая функция $y = x^3$

Графиком функции такого вида является справа от OY - подобная параболе ветка, слева - такая же только идущая вниз. График является симметричным относительно центра координат.

Фигура называется симметричной относительно точки O, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно точки O также принадлежит этой фигуре. Точка O называется центром симметрии фигуры.

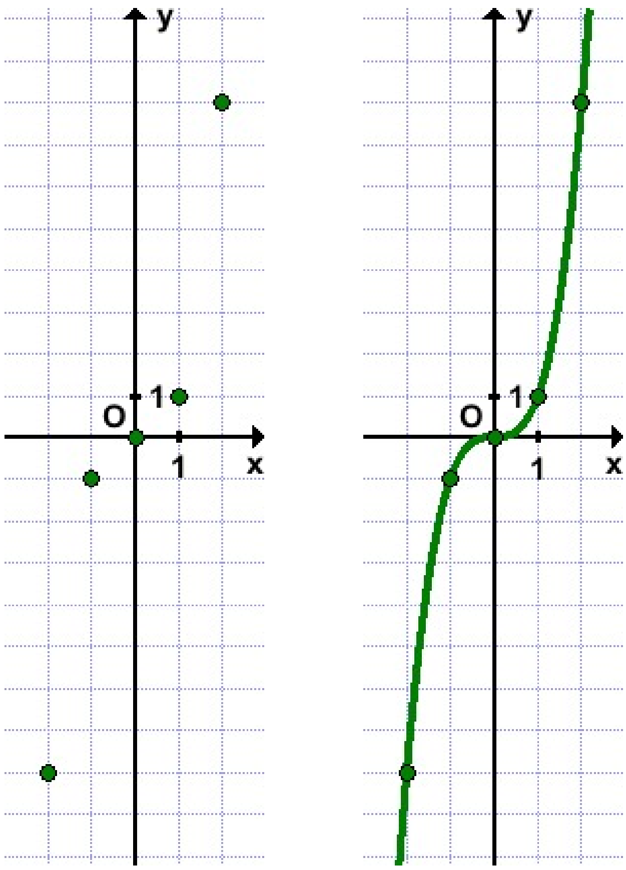


Рис. 7: Кубическая функция

В общем виде: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ - поступаем аналогично параболе.
(?) Как строится график функции $y = \sqrt[3]{x}$?

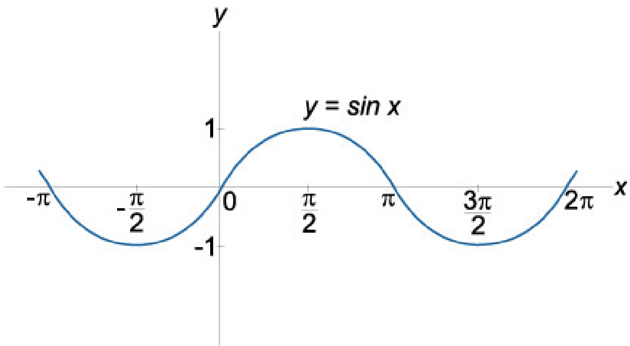
5 Элементарные (посложнее) функции

5.1 Тригонометрические функции

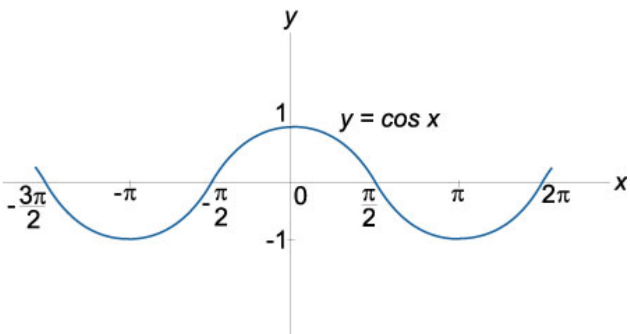
Тригонометрические функции представляют собой элементарные функции, аргументом которых является угол. С помощью тригонометрических функций описываются соотношения между сторонами и острыми углами в прямоугольном треугольнике.

Для построения функций - необходимо вспомнить единичную окружность на которой мы изображали углы и откладывали косинусы и синусы (другое занятие).

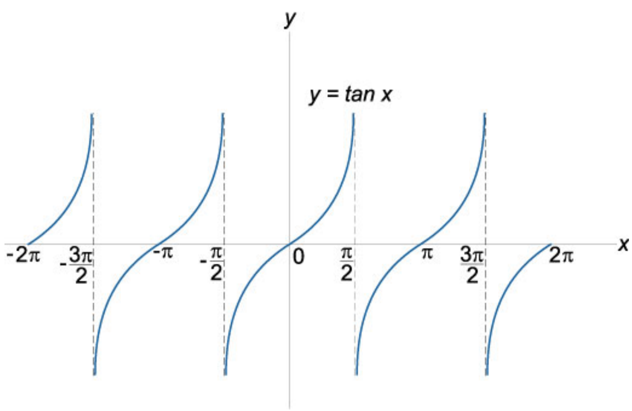
- Функция синуса $y = \sin x$



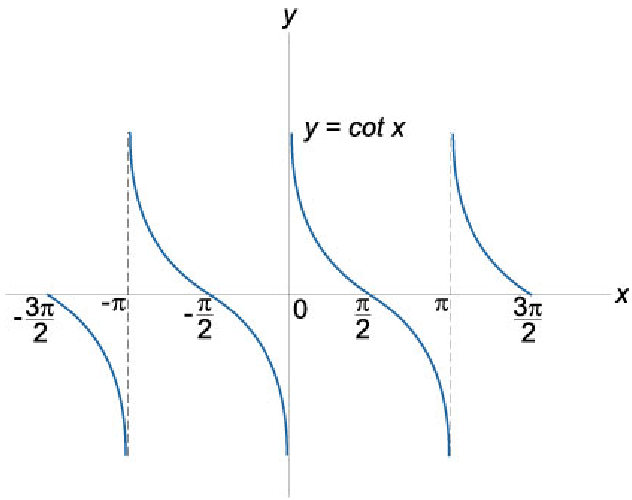
- Функция косинуса $y = \cos x$



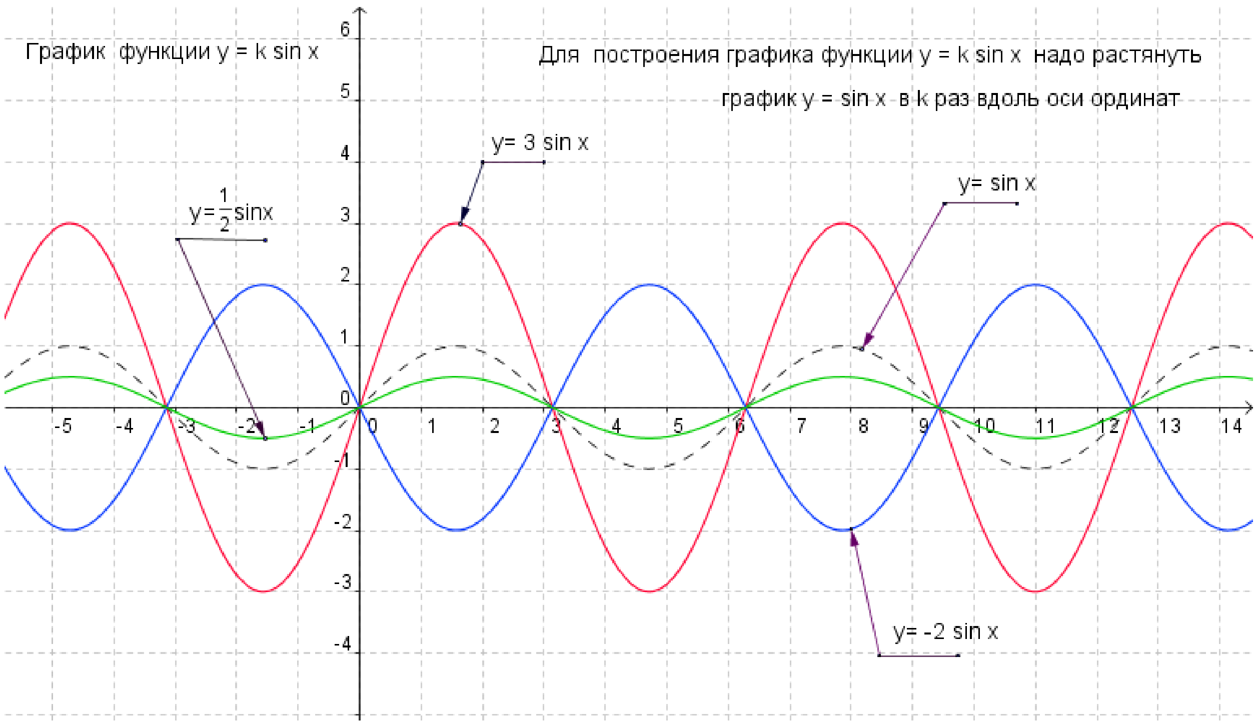
- функция тангенса $y = \operatorname{tg} x$



- Функция котангенса $y = \operatorname{ctg} x$



Все преобразования, которые мы разбирали здесь также актуальны:



5.1.1 Задания

Постройте график функции:

16.27. а) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; в) $y = \sin(x - \pi)$;

б) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; г) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

16.28. а) $y = \sin x - 2$; в) $y = \sin x + 2$;

б) $y = \sin x + 1$; г) $y = \sin x - 3$.

Постройте график функции:

○**16.29.** а) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$; б) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$.

○**16.30.** а) $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; б) $y = -\sin x + 3$.

○**16.31.** а) $y = \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}$; в) $y = \sin(x - \pi) - 1$;

б) $y = -\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2$; г) $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 2$.

Постройте график функции:

16.33. а) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; в) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;

б) $y = \cos x - 2$; г) $y = \cos x + 1{,}5$.

○**16.34.** а) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$; в) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}$;

б) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2$; г) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 3$.

●**16.35.** Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = -\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1{,}5$ на промежутке:

а) $\left[\frac{\pi}{6}; \pi\right]$; б) $(1; 9)$; в) $[231; 238]$; г) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

16.36. Известно, что $f(x) = 3 \sin x$. Найдите:

а) $f(-x)$; в) $2f(x) + 1$;
б) $2f(x)$; г) $f(-x) + f(x)$.

Постройте график функции:

○**16.59.** а) $y = |\sin x|$; в) $y = |\cos x|$;

б) $y = \left|\cos x - \frac{1}{2}\right|$; г) $y = \left|\sin x + \frac{1}{2}\right|$.

●**16.60.** а) $y = \sin |x|$; в) $y = \cos |x|$;

б) $y = \sin\left|x - \frac{\pi}{3}\right|$; г) $y = \cos\left|x + \frac{2\pi}{3}\right|$.

Постройте график функции:

20.16. а) $y = \mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; в) $y = \mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

б) $y = \mathrm{tg}\, x + 1$; г) $y = \mathrm{tg}\, x - 2$.

Постройте график функции:

○20.17. а) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$; в) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$;

б) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}$; г) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2$.

○20.18. а) $y = -\operatorname{tg} x$; в) $y = -\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$;

б) $y = -\operatorname{tg} x + 1$; г) $y = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2$.

○20.19. а) $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; в) $y = \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;

б) $y = \operatorname{ctg} x + 1$; г) $y = \operatorname{ctg} x - 2$.

○20.20. а) $y = 2 \operatorname{tg} x$; в) $y = \operatorname{tg} 2x$;

б) $y = -0{,}5 \operatorname{ctg} x$; г) $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$.

Постройте график функции:

○20.22. а) $y = |\operatorname{tg} x|$; в) $y = |\operatorname{ctg} x|$;

б) $y = \operatorname{tg} |x|$; г) $y = \operatorname{ctg} |x|$.

○20.23. а) $y = \operatorname{tg} x + |\operatorname{tg} x|$; б) $y = |\operatorname{ctg} x| - \operatorname{ctg} x$.

○20.24. а) $y = \operatorname{tg} x\, |\operatorname{ctg} x|$; б) $y = |\operatorname{tg} x| \operatorname{ctg} x$.

○20.25. а) $y = 2 \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x + |x|$;

б) $y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x + \sqrt{x}$.

○20.26. а) $y = \sin^2 (\operatorname{tg} x) + \cos^2 (\operatorname{tg} x)$;

б) $y = 3 \cos^2 (\operatorname{ctg} x) + 3 \sin^2 (\operatorname{ctg} x)$.

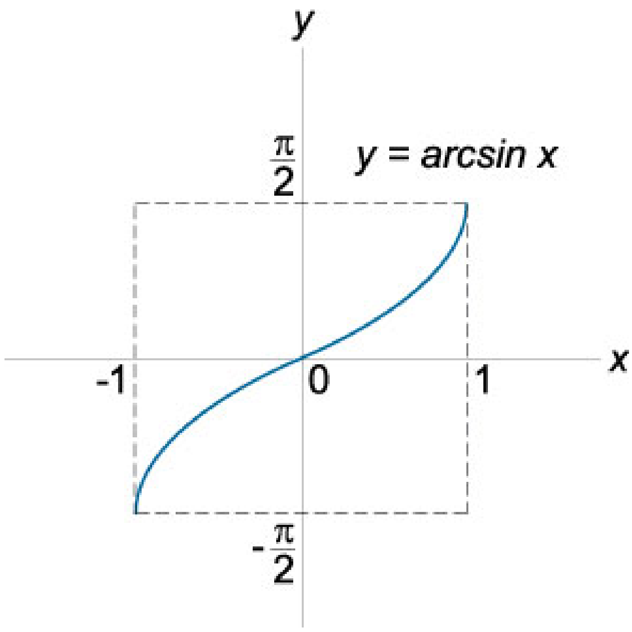
●20.27. а) $y = -\operatorname{tg} (\cos x) \cdot \operatorname{ctg} (\cos x)$;

б) $y = -2 \operatorname{tg} (\sin x) \cdot \operatorname{ctg} (\sin x)$.

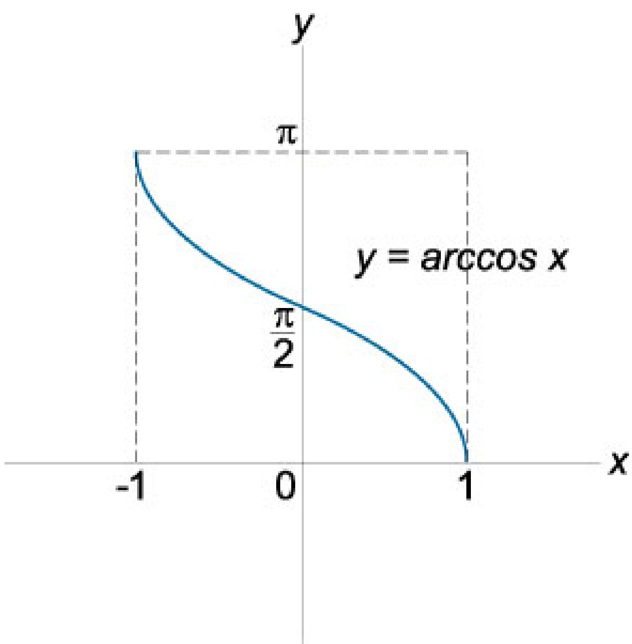
5.2 Обратные тригонометрические функции

Как мы уже говорили - обратные функции - это исходные повернутые на 90 градусов. В силу периодичности тригонометрических функций (также как было с параболой) - нарушается определение функции. По этому принято брать часть этих функций. Например, у функции $y = \arcsin x$ область значений рассматривается лишь в промежутке $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

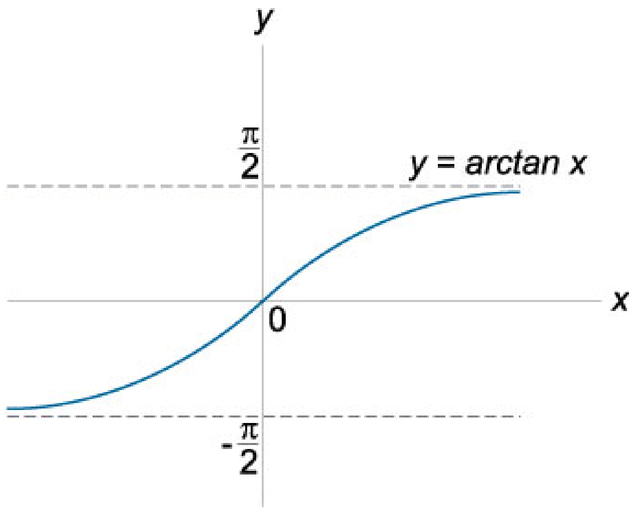
- Арксинус $y = \arcsin x$.



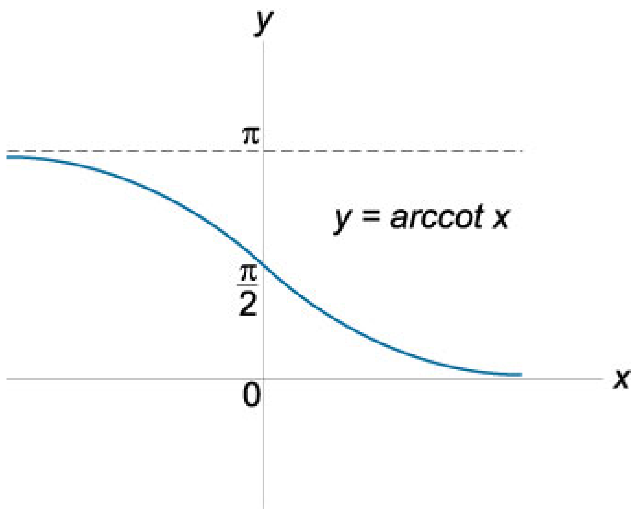
- Арккосинус $y = \arccos x$



- Арктангенс $y = \operatorname{arctg} x$



- Арккотангенс $y = \operatorname{arcctg} x$



(?) Какие D(y) и E(y) у представленных выше функций?

5.2.1 Задания

Постройте график функции:

○21.7. а) $y = \arcsin x$; б) $y = \arcsin(-x)$; в) $y = -\arcsin x$; г) $y = -\arcsin(-x)$.

○21.8. а) $y = \arcsin(x - 1) + \frac{\pi}{2}$;

б) $y = -\arcsin(x + 2) - \frac{\pi}{3}$.

○21.9. а) $y = 2\arcsin x$; б) $y = \frac{\pi}{3} - \arcsin x$; в) $y = -\frac{1}{3}\arcsin x$; г) $y = -2\arcsin(x - 3)$.

○21.10. а) $y = \arcsin 2x$; б) $y = \arcsin\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}$; в) $y = \arcsin\frac{x}{3}$; г) $y = \arcsin 2(x - 1) + \frac{\pi}{2}$.

Постройте и прочитайте график функции:

○21.26. а) $y = \arccos(x - 1) - \frac{\pi}{2}$;

б) $y = \arccos(x + 2) + \frac{\pi}{3}$.

○21.27. а) $y = -3\arccos x$; б) $y = \frac{3\pi}{4} - \arccos x$; в) $y = \frac{1}{2}\arccos x$; г) $y = \frac{2}{3}\arccos(x + 1{,}5)$.

○21.28. а) $y = \arccos 2x$; б) $y = \arccos\frac{x}{2} - \frac{5\pi}{6}$; в) $y = -\arccos\frac{x}{3}$; г) $y = \arccos 2(x - 1) - \frac{\pi}{2}$.

Постройте график функции:

○21.40. а) $y = \operatorname{arctg}(-x)$; б) $y = \operatorname{arcctg}(-x)$; в) $y = -\operatorname{arcctg} x$; г) $y = -\operatorname{arctg}(-x)$.

○21.41. а) $y = \operatorname{arctg}(x - 1) - \frac{\pi}{2}$;

б) $y = \operatorname{arcctg}(x + 2) + \frac{\pi}{3}$.

○21.42. а) $y = 0{,}5\operatorname{arctg} x$; б) $y = \frac{2\pi}{3} - \operatorname{arcctg} x$; в) $y = -\frac{1}{3}\operatorname{arcctg} x$; г) $y = 1{,}5\operatorname{arctg}(x + 2)$.

○21.43. а) $y = \operatorname{arctg} 3x$; б) $y = \operatorname{arctg}\frac{x}{2}$ [illegible] $\frac{\pi}{6}$; в) $y = \operatorname{arcctg}\frac{3x}{4}$; г) $y = \operatorname{arcctg} 2(x - 1)$.

Страница 123 из 348

5.3 Показательная функция $y = a^x$, где а - число

Показательная функция - это монотонно возрастающая функция при $a > 0$ и монотонно убывающая при $0 < a < 1$. Именно этим свойством мы пользуемся при решении уравнений и неравенств. (Как именно?)

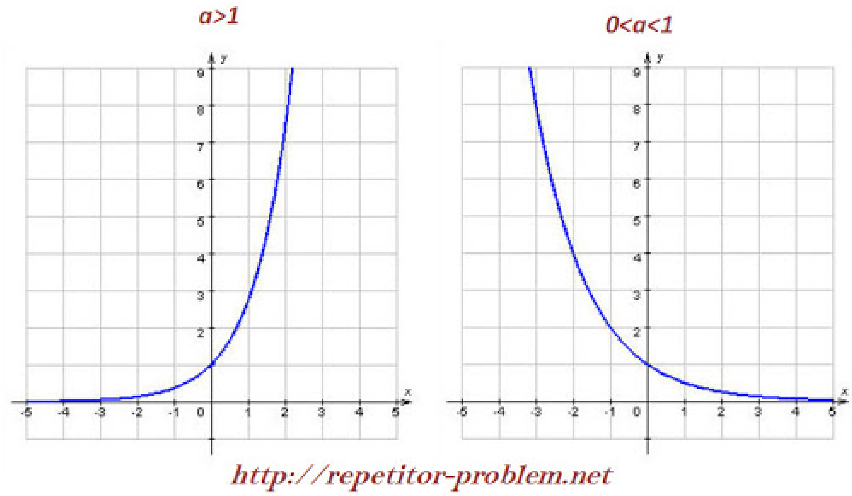


Рис. 8: Показательная функция

5.3.1 Задания

Постройте график функции:

11.48. а) $y = 2^x + 1$; в) $y = 4^x - 1$;

б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$; г) $y = (0{,}1)^x + 2$.

11.49. а) $y = 5^{x+1}$; в) $y = 3^{x-2}$;

б) $y = \left(\frac{3}{4}\right)^{x-2}$; г) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+0,5}$.

○**11.50.** а) $y = 2^{x-1} + 3$; в) $y = 3^{x+1} - 2$;

б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} + 4$; г) $y = \left(\frac{4}{5}\right)^{x-1} - 3$.

Постройте график функции:

○**11.56.** а) $y = 2^{|x|}$; б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x-1|}$; в) $y = 4^{|x|}$; г) $y = 0{,}2^{|x+2|}$.

○**11.57.** а) $y = |2^x - 4|$; б) $y = |9 - 3^x|$.

●**11.58.** а) $y = |2^x + 1| + |1 - 2^x|$; б) $y = |0{,}5^x + 1| - |1 - 0{,}5^x|$.

5.4 Логарифмическая функция $y = \log_a x$, где a - число

Так как логарифм - обратная функция от показательной, она логично получается поворотом на 90 градусов вправо и также делится на 2 случая, относительно параметра a.

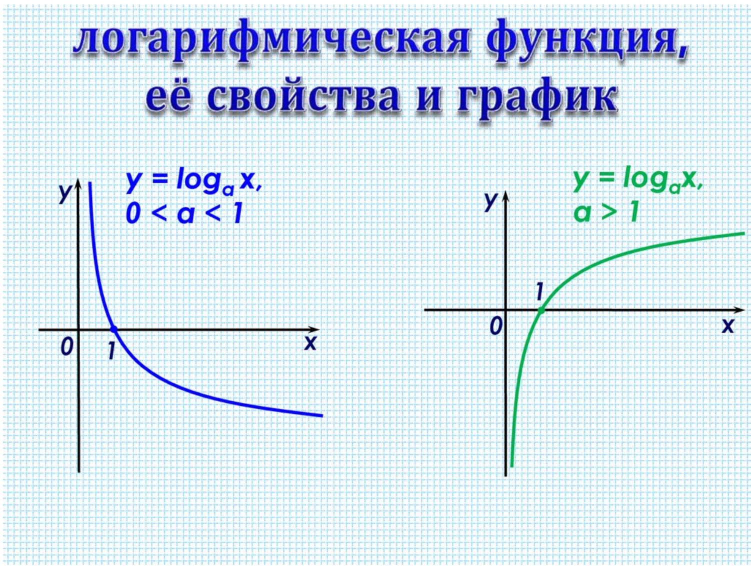


Рис. 9: Логарифмическая функция

5.4.1 Задания

Постройте график функции:

○**15.38.** а) $y = \log_3(x+1) - 3$; в) $y = \log_5(x-1) + 2$;
б) $y = \log_{0,2}(x-2) + 1$; г) $y = \log_{0,5}(x+2) - 1$.

○**15.39.** а) $y = \lg(5-x)$; в) $y = \log_{0,5}(1-x)$;
б) $y = \log_{\frac{1}{2}}(2x-4)$; г) $y = \log_3(3x+6)$.

○**15.40.** Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} -3x+3, & \text{если } x \leqslant 1, \\ \log_{\frac{1}{3}} x, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

а) Вычислите $f(-8)$, $f(-6)$, $f(0)$, $f(3)$, $f(9)$.
б) Постройте и прочитайте график функции.

Постройте график функции:

○**15.42.** а) $y = \log_2|x|$; в) $y = \log_{\frac{1}{3}}(1+|x|)$;
б) $y = \left|\log_{\frac{1}{2}}(1+x)\right|$; г) $y = |\log_3(-x)|$.

●**15.43.** а) $y = \big|1 - \log_2|x-1|\big|$; б) $y = \big|\log_{1,5}|2-x| - 2\big|$.

●**15.44.** а) $y = |\log_2 x - 1| + |\log_2 x + 1|$;
б) $y = |\log_3 x + 1| - |\log_3 x - 1|$.

6 Что делать с не элементарными функциями?

Полное описание функции состоит из (то, как строят сложные функции):

1. Нахождение области определения функции $D(y)$
2. Четноть, нечетность, периодичность
   Функция называется **чётной**, если справедливо равенство $f(-x) = f(x)$, (график её симметричен относительно центра координат).
   Функция называется **нечётной**, если справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$, (график её симметричен относительно оси ординат)
   Ни чётная, ни нечётная функция такие тоже бывают :)
   Периодическая функция — функция, повторяющая свои значения через некоторый регулярный интервал аргумента, то есть не меняющая своего значения при добавлении к аргументу некоторого фиксированного ненулевого числа (периода функции) на всей области определения.
3. Непрерывность
4. Асимптоты
   Асимптота - прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки кривой до этой прямой стремится к нулю при удалении точки вдоль ветви в бесконечность.
   По простому - то, к чему функция стремится, но не может достичь
5. Нули функции и интервалы знакопостоянства
6. Интервалы монотонности и экстремумы
   Монотонность - возрастание/убывание функции;
   Экстремум - максимальное или минимальное значение функции на заданном множестве (то есть на границах не может быть экстремума!). Точка, в которой достигается экстремум, называется точкой экстремума
7. Выпуклость. Вогнутость. Точка перегиба
8. Дополнительные точки
9. Область значений функции $E(y)$
10. График функции

Пример полного описания функции будет в конце (Приложение 1)

6.1 Задание

Провести полное исследование функции и построить график функции:

$$y = \frac{x^2}{4(x+2)}$$

Приложение 1: Пример полного описания функции

Провести полное исследование функции и построить график функции:

$$y = \frac{x^4}{(x+1)^3}$$

1. Найдем область определения функции: $D(x) = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

2. Четноть, нечетность, периодичность.

Четность: проверим $y(-x) = \frac{x^4}{(-x+1)^3}$, то есть $y(-x) \neq y(x)$. Значит функция не четна. Нечетность: так как $y(-x) \neq -y(x)$ функция не нечетна. Так как в состав функции не входят периодичные функции - функция непериодична.

3. Непрерывность: Функция элементарная, значит непрерывна на своей области определения, осталось проверить характер разрыва в точке -1:

$$\lim_{x \to -1-0} y(x) = \frac{1}{-0^3} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1+0} y(x) = \frac{1}{+0^3} = +\infty$$

Значит, -1 - точка разрыва второго рода.

4. Асимптоты: Так как при $x = -1$ функция терпит разрыв второго рода, прямая $x = -1$ является вертикальной асимптотой.

Найдем наклонные асимптоты: пусть она имеет вид: $y = kx + b$, тогда

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x^4}{x \cdot (x+1)^3} = 1$$

$$‘b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \infty} (\frac{x^4}{(x+1)^3} - x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^4 - x(x+1)^3}{(x+1)^3} =$$
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^4 - x^4 - 3x^3 - 9x^2 - 27x}{(x+1)^3} = \lim_{x \to \infty} \frac{-3 - \frac{9}{x} - \frac{27}{x^2}}{1 + \frac{9}{x} + \frac{27}{x^2} + \frac{27}{x^3}} = -3$$

Получили наклонную асимптоту: $y = x - 3$

5. Нули функции и интервалы знакопостоянства.

Данная функция обращается в 0 при $x = 0$. Разобьем числовую прямую на интервалы точками 0 и -1:

Интервалы	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, +\infty)$
Знак функции	-	$+$	$+$

Таким образом, функция отрицательна на интервале $(-\infty, -1)$ и положительна на интервале $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$.

6. Интервалы монотонности и экстремумы. Найдем стационарные точки:

$$y' = \frac{4x^3(x+1)^3 - 3x^4(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{(x+1)^2 \cdot (4x^4 + 4x^3 - 3x^4)}{(x+1)^6} =$$
$$= \frac{(x+1)^2 \cdot (x^4 + 4x^3)}{(x+1)^6} = \frac{x^3 \cdot (x+1)^2 \cdot (x+4)}{(x+1)^6} = \frac{x^3(x+4)}{(x+1)^4}$$

Таким образом, точки подозрительные на экстремум: $0, -1, -4$ Разобьем всю числовую прямую на интервалы этими точками и определим знак производной на этих промежутках для определения характера монотонности функции:

Интервалы	$(-\infty, -4)$	-4	(-4,-1)	-1	(-1,0)	0	$(0, +\infty)$
$y'(x)$	$+$	0	-	не существует	-	0	$+$
$y(x)$	возрастает	$-\frac{256}{27}$	убывает	не существует	убывает	0	возрастает

Таким образом, функция возрастает на интервалах $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$ и убывает на промежутках: $(-4, -1) \cup (-1, 0)$.

Локальный минимум функции: $y(0) = 0$,

Локальный максимум функции: $y(-4) = -\frac{256}{7}$

7. Выпуклость. Вогнутость. Точка перегиба.

Найдем точки перегиба, для этого найдем 2 производную:

$$y'' = \left(\frac{x^3(x+4)}{(x+1)^4} \right)' = \frac{(3x^2(x+4) + x^3) \cdot (x+1)^4 - 4(x+1)^3 x^3 (x+4)}{(x+1)^8} =$$

$$= \frac{x^2(x+1)^3 \cdot ((3x + 12 + x)(x+1) - 4x(x+4))}{(x+1)^8} =$$

$$= \frac{x^2 \cdot 4 \cdot (x^2 + x + 3x + 3 - x^2 - 4x)}{(x+1)^5} = \frac{12x^2}{(x+1)^5}$$

Таким образом, точки, подозрительные на перегиб $x = 0, -1$

Исследуем выпуклость/вогнутость функции слева и справа от точки разрыва. Для этого нужно определить интервалы знакопостоянства 2 производной:

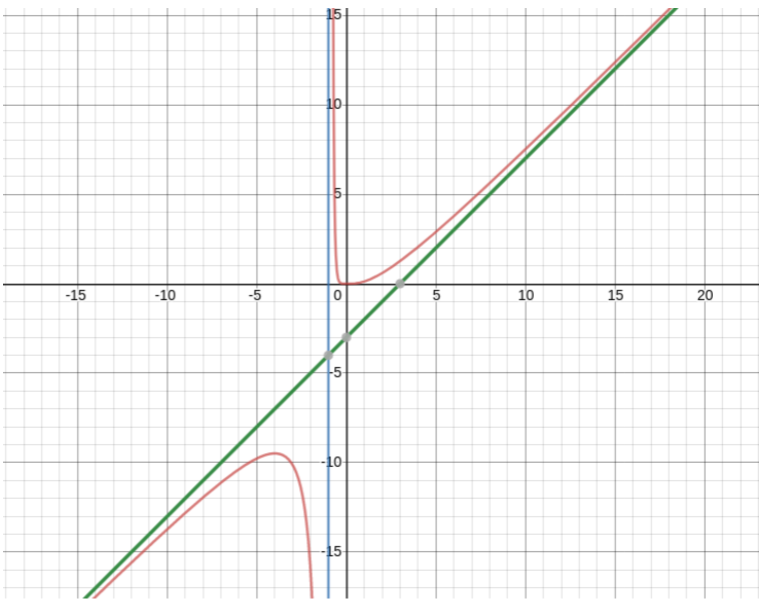
Интервалы	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$y''(x)$	-	не существует	$+$	0	$+$
$y(x)$	выпукла	не существует	вогнута	0	вогнута

8. Дополнительные точки.

x	1	2	-2	1.5
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{16}{27}$	-16	0.324

9. Область значений: $E(y) = (-\infty, -\frac{256}{27}) \cup (0, +\infty)$

10. График функции:



На графике красным обозначена сама функция, а зеленым и синим ее асимптоты.