ТЕМА 6. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ КОМПАКТНОГО ОПЕРАТОРА

Пусть X – нормированное векторное пространство, $A : X \to X$ – линейный оператор.

Определение 1. Число λ называется *собственным значением оператора* A, если существует ненулевой вектор $x \in X$ такой, что

$$Ax = \lambda x. \tag{2.1}$$

Вектор $x \neq 0$ называется *собственным вектором*, отвечающим собственному значению λ оператора A.

Поскольку наряду с вектором x вектор $cx(c - \mathrm{const}, c \neq 0)$ также является собственным, то собственные векторы можно считать нормированными, например, условием $\|x\| = 1$.

Максимальное число линейно независимых собственных векторов, отвечающих данному собственному значению, называют *кратностью* этого собственного значения.

Лемма 1. *Собственные векторы линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.*

Пример 1. Пусть $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – линейный оператор, определенный матрицей (a_{ij}), $i,j = \overline{1,n}$. Тогда для нахождения собственных значений оператора A, необходимо, чтобы уравнение $(A - \lambda E)x = 0$ имело нетривиальное решение. Это равносильно тому, что

$$det|A - \lambda E| = 0. \tag{2.2}$$

Уравнение (2.2) называется *характеристическим уравнением.*

Таким образом, в конечномерном пространстве, собственными значениями линейного оператора являются корнями характеристического уравнения.

Пусть теперь X – банахово пространство, $A : X \to X$ – компактный оператор. Пусть λ – собственное значение оператора A, а X_λ – собственное подпространство, состоящее из собственных векторов, отвечающих значению λ.

Теорема 1. *Пусть X – банахово пространство, $A \in \mathscr{K}(X)$. Тогда его собственное подпространство X_λ, отвечающее собственному значению $\lambda \neq 0$, конечномерно.*

Теорема 2. *Пусть X – банахово пространство, $A \in \mathscr{K}(X)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ вне круга $|\lambda| \leqslant \varepsilon$ комплексной плоскости (вещественной оси) может содержаться лишь конечное число собственных значений оператора A.*

Следствие 1. Множество значений компактного оператора не более чем счетно и может быть занумеровано в порядке невозрастания модулей $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant$ и $\lambda_n \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$.

Пример 2. Рассмотрим интегральный оператор Фредгольма

$$Ax(t) = \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s \tag{2.3}$$

с непрерывным комплекснозначным ядром $\mathcal{K}(t,s)$. Будем решать задачу на собственные значения и собственные вектора вида

$$Ax(t) = \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = \lambda x(t). \tag{2.4}$$

Поскольку ядро $\mathcal{K}(t,s)$ непрерывно, то оператор A является компактным. Для (2.4) возможны следующие варианты:

1. (2.4) имеет лишь нулевое решение: $x(t) = 0$ при $\lambda \neq 0$. Это означает, что интегральный оператор не имеет собственных значений отличных от нуля;
2. Существует конечное число собственных значений, отличных от нуля;
3. Существует последовательность собственных значений λ_n, причем $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$.

В пространстве $L_2[a,b]$ рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода с комплекснозначным параметром λ

$$x(t) - \lambda \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = y(t). \tag{2.5}$$

Будем предполагать, что ядро $\mathcal{K}(t,s)$ интегрального оператора таково, что уравнение (2.5) является уравнением с компактным оператором.

Число $1/\lambda, \lambda \neq 0$ называют *характеристическим числом* интегрального оператора. Тогда альтернатива Фредгольма для уравнения (2.5) может быть сформулирована следующим образом:

Теорема 3. *Для того, чтобы уравнение* (2.5) *было разрешимо для любого* $y \in L_2[a,b]$ *необходимо и достаточно, чтобы* λ *не было характеристическим числом интегрального оператора* (2.3). *Если* λ *– характеристическое число, то его кратность конечна и* $\overline{\lambda}$ *является характеристическим числом сопряженного оператора* A^* *к оператору* (2.3) *той же кратности. Для разрешимости уравнения* (2.5) *необходимо и достаточно, чтобы функция* $y(t)$ *была ортогональна всем собственным функциям оператора* A^*, *соответствующим собственному значению* $1/\overline{\lambda}$. *При этом у уравнения* (2.5) *существует единственное решение, ортогональное всем собственным функциям оператора* A, *отвечающим собственному значению* $1/\lambda$.

Пусть H – гильбертово пространство, $A : H \to H$ – самосопряженный оператор.

Теорема 4 . *Все собственные значения самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве вещественны. Собственные подпространства* H_{λ_1} *и* H_{λ_2}, *отвечающие различным собственным значениям* λ_1 *и* λ_2, *ортогональны.*

Теорема 5 . *Компактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве имеет по крайней мере одно собственное значение.*

Следствие 2. Если компактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H не имеет отличных от нуля собственных значений, то $A = 0$.

Теорема 6 . *Все собственные значения компактного самосопряженного оператора* $A : H \to H$ *расположены на отрезке* $[m,M]$, *где*

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Ax,x), \quad M = \sup_{\|x\|=1} (Ax,x). \tag{2.6}$$

Подпространство $L \subset H$ назовем *инвариантным* подпространством оператора A, если для любого $x \in L$ имеем $Ax \in L$.

Обозначим через H_n подпространство пространства H, состоящее из элементов $x \in H$, ортогональных первым n собственным векторам оператора A, $(x,x_i) = 0$, $i = 1,2,\ldots,n$. Для любого $x \in H_n$ вектор $Ax \in H_n$, т. е. $(Ax,x_i) = (x,Ax_i) = \lambda_i(x,x_i) = 0$. Это означает, что оператор A можно рассматривать как оператор $A : H_n \to H_n$. При этом он, естественно, является самосопряженным и компактным. Поэтому, по теореме 4,

$$|\lambda_{n+1}| = \sup_{\substack{\|x\|=1\\ x\in H_n}} |(Ax,x)|$$

и так далее.

Теорема 7. *Пусть A – компактный самосопряженный оператор из H в H, а x — произвольный элемент из H. Тогда элемент $Ax \in H$ разлагается в сходящийся ряд Фурье по системе $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ собственных векторов оператора A.*

Следствие 3. Если компактный самосопряженный оператор в H имеет обратный, то система его собственных векторов образует базис в H.

Следствие 4. Если A — компактный самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, то в H существует ортонормированный базис из собственных векторов оператора A.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 3. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального оператора

$$Ax(t) = \int_0^{\pi} \left(\cos^2 t \cos 2s + \cos 3t \cos^3 s\right) x(s)\,\mathrm{d}s.$$

Решение. Запишем уравнение для нахождения характеристических чисел и соответствующих им собственных функций интегрального оператора в виде

$$x(t) = \lambda \cos^2 t \int_0^{\pi} \cos 2s x(s)\,\mathrm{d}s + \lambda \cos 3t \int_0^{\pi} \cos^3 s x(s)\,\mathrm{d}s.$$