Тема 1. КОЛЬЦО, ПОЛУКОЛЬЦО, МЕРА НА ПОЛУКОЛЬЦЕ

Пусть задано непустое множество X, $\mathscr{P}(X)$ – семейство его подмножеств.

Определение 1. Непустое семейство $\mathcal{K} \subset \mathscr{P}(X)$ называют *кольцом* подмножеств, если оно обладает тем свойством, что из выполнения условий $A \in \mathcal{K}$ и $B \in \mathcal{K}$ вытекает, что $A \triangle B \in \mathcal{K}$, $A \cap B \in \mathcal{K}$.

Утверждение 1. *Пусть $\mathcal{K} \subset \mathscr{P}(X)$ – кольцо. Тогда для любых множеств A,$B \in \mathcal{K}$ выполнено $A \cup B \in \mathcal{K}$, $A \setminus B \in \mathcal{K}$ и $B \setminus A \in \mathcal{K}$.*

Определение 2. Кольцо $\mathcal{K}$ называется *алгеброй*, если все $X \in \mathcal{K}$. X в этом случае называется *единицей кольца*.

Теорема 1. *Для любой непустой системы множеств $S \subset \mathscr{P}(X)$ существует одно и только одно минимальное кольцо $\mathcal{K}(S)$, т. е. такое кольцо множеств, которое содержит систему S, и которое содержится в любом другом кольце, содержащем систему S.*

Определение 3. Непустая система $S \subset \mathscr{P}(X)$ подмножеств множества X называется *полукольцом*, если она содержит пустое множество, замкнута по отношению к операции пересечения и обладает тем свойством, что если $A, B \in S$, то найдется конечная система $C_1, \ldots ,C_n$ попарно непересекающихся множеств из S, что

$$A \setminus B = \bigsqcup_{k=1}^{n} C_k.$$

Утверждение 2. *Пусть непустая система $\mathcal{K} \subset \mathscr{P}(X)$ обладает свойствами:*

1) для любого $A \in \mathcal{K}$ его дополнение $X \setminus A = CA \in \mathcal{K}$;

2) для любых A,$B \in \mathcal{K}$ выполнено $A \cup B \in \mathcal{K}$.

Тогда $\mathcal{K}$ является алгеброй.

Лемма 1. *Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n, A \in S$ и $A_i \cap A_j = \varnothing$, $(i \neq j)$, причем все множества $A_i \subset A$. Тогда набор множеств $A_i(i = 1,$*

$2, \ldots, n$) *можно дополнить множествами* $A_{n+1}, \ldots, A_m \in S$ *до конечного разложения*

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{m} A_i \quad (m \geqslant n)$$

множества A.

Теорема 2. *Пусть* $S \subset \mathscr{P}(X)$ *– полукольцо, тогда минимальное кольцо* $\mathcal{K}(S)$, *порожденное* S, *совпадает с системой множеств, допускающих конечные разложения, т. е.*

$$\mathcal{K}(S) = \Big\{ A : A = \bigsqcup_{i=1}^{n(A)} A_i, \quad A_i \in S \Big\}.$$

Определение 4. Пусть на некотором множестве X задано полукольцо $S \subset \mathscr{P}(X)$. Будем говорить, что на S задана *мера*, если каждому элементу $A \in S$ поставлено в соответствие вещественное число $m(A) \in \mathbb{R}$ и при этом выполнены следующие условия:

1) $m(A) \geqslant 0$ для любого $A \in S$ (неотрицательность);

2) если $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, $A, A_i \in S$, то $m(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} m(A_i)$ (аддитивность).

Определение 5. Мера m, заданная на полукольце $S \in \mathscr{P}(X)$ называется *счетно-аддитивной* (σ-аддитивной), если для любых $A_1, A_2, \ldots \in S$ таких, что $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in S$ выполнено

$$m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i). \tag{1.1}$$

Свойство 1 (Монотонность меры). Пусть $A, B \in \mathcal{K}$ и при этом $A \subseteq B$. Тогда

$$m(A) \leqslant m(B). \tag{1.2}$$

Свойство 2 (Субтрактивность меры). Если $A, B \in \mathcal{K}$ и $A \subseteq B$, то

$$m(B \setminus A) = m(B) - m(A). \tag{1.3}$$

Свойство 3. Пусть $A, B \in \mathcal{K}$, тогда

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B). \tag{1.4}$$

Свойство 4. Если $A, B \in \mathcal{K}$, то

$$m(A \triangle B) = m(A) + m(B) - 2m(A \cap B). \tag{1.5}$$

Свойство 5. Для любых множеств $A, B \in \mathcal{K}$ выполняется

$$|m(A) - m(B)| \leqslant m(A \triangle B). \tag{1.6}$$

Свойство 6. Для любых множеств $A, B, C \in \mathcal{K}$ имеет место следующее неравенство

$$m(A \triangle B) \leqslant m(A \triangle C) + m(C \triangle B). \tag{1.7}$$

Свойство 7 (счетная полуаддитивность меры). Пусть $A_1,\ A_2, \ldots \in \mathcal{K}$ и $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{K}$ и пусть мера m, заданная на $\mathcal{K}$, σ-аддитивна, тогда

$$m(A) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i). \tag{1.8}$$

Теорема 3. *Пусть на числовой прямой $\mathbb{R}$ задано полукольцо, порожденное системой полуинтервалов $[a,b)$. Тогда длина полуинтервала является σ-аддитивной мерой.*

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Пусть $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел. Задает ли данная формула меру на $\mathscr{P}(\mathbb{Z})$, если $\mu(A) = \sum\limits_{1 \leqslant n \in A} \frac{1}{n}$, $\mu(A) = \varnothing$, если A содержит только отрицательные числа.

Решение. Функция μ не не определяет меру, поскольку множество натуральных чисел $\mathbb{N} \subset P(\mathbb{Z})$ и $\mu(\mathbb{N}) = \infty$, т. е. μ не является отображением $\mathscr{P}(\mathbb{Z})$ в $\mathbb{R}$.

Пример 2. Пусть X – произвольное множество. Выяснить, является ли мерой на $\mathscr{P}(X)$ следующая функция множеств:

- $\mu(\varnothing) = 0$;
- $\mu(A) = \sum\limits_{1 \leqslant n \in \mathbb{N}} (-1)^{n+1} 2^{-n} \chi_A(x_n)$,

где $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – фиксированная последовательность.

Р е ш е н и е. Функция μ является отображением из $\mathscr{P}(X)$ в $\mathbb{R}$, так как ряд $\sum\limits_{n}(-1)^{n+1}2^{-n}\chi_A(x_n)$ сходится, но не является мерой, потому что не выполнено условие положительности μ. Если множество A содержит только x_2, то $\mu(A) = -0{,}25$.

П р и м е р 3. Пусть на множестве $X = [-1;1)$ задано полукольцо S, порожденное системой полуинтервалов $\{[a,b), -1 \leqslant a < b < 1\}$ и $F : X \to \mathbb{R}$ и $F(x) = \operatorname{sign} x$. Определим на S функцию μ по формуле $\mu([a,b)) = F(b) - F(a)$. Является ли μ σ-аддитивной мерой.

Р е ш е н и е. Функция F является неубывающей, ограниченной, имеющей одну точку разрыва $x = 0$. Следовательно, F порождает меру. Покажем, что мера μ не является σ-аддитивной. Рассмотрим полуинтервал $[\frac{-1}{2},0)$ и представим его в виде счетного объединения попарно непересекающихся полуинтервалов следующим образом:

$$\left[\frac{-1}{2},0\right) = \coprod_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k), \quad a_1 = \frac{-1}{2}, \quad \lim_{k\to\infty} b_k = 0.$$

Тогда $\mu\left([\frac{-1}{2},0[\right) = F(0) - F(\frac{-1}{2}) = 0 - (-1) = 1$. Далее рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu([a_k,b_k)) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu([a_k,a_{k+1})) = \sum_{k=1}^{\infty}(F(a_{k+1}) - F(a_k)).$$

Составим последовательность частичных сумм этого ряда $S_n = F(a_n) - F(a_1) = (-1) - (-1) = 0$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$, но

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty}(F(a_{k+1}) - F(a_k)) = 0 = \sum_{k=1}^{\infty}\mu([a_k,a_{k+1})).$$

Итак, мы получили, что $1 = \mu([\frac{-1}{2},0[) \neq \sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu([a_k,a_{k+1})) = 0$. Тем самым доказано, что мера μ не является σ-аддитивной. Обратим внимание, что функция F не является непрерывной слева.

П р и м е р 4. Пусть $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, S – совокупность дуг, содержащихся в X, замкнутых слева и открытых справа $S = \{[\alpha,\beta) : 0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 2\pi\}$, $h(x,y))$ – неотрицательная, непрерывная на прямоугольнике $[0,2\pi]\times[0,1]$ функция. Пусть $F(t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^1 h(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ функция, заданная на $[0,2\pi]$. Положим

$$\mu([\alpha,\beta)) = F(\alpha) - F(\beta) = \int\limits_\alpha^\beta \int\limits_0^1 h(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Задает ли F σ-аддитивную меру.

Решение. Функция F как интеграл Римана с переменным верхним пределом является неубывающей, непрерывной слева, следовательно, μ является σ-аддитивной мерой.

Пример 5. Пусть μ – мера, заданная на кольце множеств $\mathcal{K}$. Доказать, что если для $A,B \in \mathcal{K}$ и $\mu(A\Delta B) = 0$, то $\mu(A) = \mu(B)$.

Решение. Воспользуемся свойством меры 5. Тогда для любых множеств $A, B \in \mathcal{K}$ имеем $|\mu(A) - \mu(B)| \leqslant \mu(A\Delta B)$. Следовательно, $0 \leqslant |\mu(A) - \mu(B)| \leqslant 0$, т. е. $\mu(A) = \mu(B)$.

Задание 1. Образуют ли полукольцо, кольцо, σ-кольцо, алгебру, σ-алгебру следующие системы множеств:

1.1. Все ограниченные множества на прямой;

1.2. Все конечные, счетные множества на прямой;

1.3. Все ограниченные замкнутые множества на прямой;

1.4. Все всюду плотные множества в $\mathbb{R}$;

1.5. Все множества, дополнения к которым конечны в $\mathbb{R}$;

1.6. Все множества, дополнения к которым счетны в $\mathbb{R}$;

1.7. Все компактные множества в $\mathbb{R}^2$;

1.8. Система всех подмножеств некоторого фиксированного множества;

1.9. Система таких подмножеств фиксированного множества X, что либо само множество этой системы счетно либо счетно его дополнение;

1.10. Все выпуклые множества на плоскости;

1.11. Все множества, инвариантные относительно вращения вокруг начала координат;

1.12. Множество всех многоугольников на плоскости;

1.13. Все множества на плоскости, инвариантные относительно растяжений и сжатий;

1.14. Все конечные подмножества некоторого множества X.

Задание 2. Пусть $X = \{a,b,c\}$, полукольцо $S = \mathscr{P}(X)$. Построить, если возможно, меру на S так, чтобы:

2.1. $m(\{a\}) = 2, \quad m(\{a,b\}) = 5, \quad m(\{a,b,c\}) = 8;$
2.2. $m(\{b\}) = 2, \quad m(\{b,c\}) = 6, \quad m(\{a,b,c\}) = 7;$
2.3. $m(\{c\}) = 1, \quad m(\{a,c\}) = 5, \quad m(\{c,b\}) = 8;$
2.4. $m(\{a\}) = 1, \quad m(\{a,c\}) = 4, \quad m(\{a,b,c\}) = 5;$
2.5. $m(\{b\}) = 2, \quad m(\{a,b\}) = 3, \quad m(\{a,b,c\}) = 4;$
2.6. $m(\{c\}) = 1, \quad m(\{b,c\}) = 4, \quad m(\{a,c\}) = 6;$
2.7. $m(\{a,b\}) = 2, \quad m(\{b,c\}) = 4, \quad m(\{a,c\}) = 6;$
2.8. $m(\{a,c\}) = 5, \quad m(\{c,b\}) = 6, \quad m(\{a,b\}) = 8;$
2.9. $m(\{c\}) = 3, \quad m(\{a,c\}) = 5, \quad m(\{b,c\}) = 4;$
2.10. $m(\{b,c\}) = 5, \quad m(\{a,c\}) = 5, \quad m(\{a,b,c\}) = 10;$
2.11. $m(\{a,b\}) = 2, \quad m(\{b,c\}) = 6, \quad m(\{a,b,c\}) = 8;$
2.12. $m(\{b\}) = 1, \quad m(\{b,c\}) = 2, \quad m(\{a,b,c\}) = 5;$
2.13. $m(\{a,c\}) = 5, \quad m(\{a,b\}) = 7, \quad m(\{a,b,c\}) = 8;$
2.14. $m(\{c\}) = 3, \quad m(\{b,c\}) = 4, \quad m(\{a,c\}) = 5.$

Задание 3. Пусть $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{K}$ – кольцо, состоящее из конечных подмножеств множества $\mathbb{N}$. Задает ли данная формула меру на $\mathcal{K}$?

3.1. $m(A) = \sum\limits_{n\in A} \frac{1}{n};$ 3.2. $m(A) = \min\limits_{n\in A} n;$
3.3. $m(A) = \max\limits_{n\in A} n;$ 3.4. $m(A) = \sum\limits_{n\in A} e^{-n};$
3.5. $m(A) = \sum\limits_{n\in A} (n^2 - n + 1);$ 3.6. $m(A) = \sum\limits_{n\in A} (n^2 - 6n + 3);$
3.7. $m(A) = |A|^{-1} \sum\limits_{n\in A} n$ – среднее арифметическое;
3.8. $m(A) = \left(\prod\limits_{n\in A} n\right)^{\frac{1}{|A|}}$ – среднее геометрическое;
3.9. $m(A) = \sum\limits_{n\in A} n^2 - 12n + 35;$ 3.10. $m(A) = \sum\limits_{n\in A} e^{-2n} + 1;$
3.11. $m(A) = \left(\sum\limits_{n\in A} n^2\right)^{\frac{1}{2}} |A|^{-1}$ – среднее квадратическое;
3.12. $m(A) = \left(\sum\limits_{n\in A} \frac{1}{n}\right)^{-1} |A|$ – среднее гармоническое;

3.13. $m(A) = \sum\limits_{n\in A} \frac{1}{2^n}$; 3.14. $m(A) = \sum\limits_{n\in A} \frac{1}{n^3}$,

где $|A|$ – количествово элементов множества A.

Задание 4. Пусть $X = [-1,1)$, полукольцо $S = \{[a,b) \subset X\}$, $m([a,b)) = F(b)-F(a)$. При каких значениях параметра α эта формула задает меру, σ-аддитивную меру. Если мера не является σ-аддитивной, то указать полуинтервал $[\alpha,\beta)$ и его разбиение $[\alpha,\beta) = \coprod\limits_{k=1}^{\infty} [\alpha_k,\beta_k)$ такое, что $m([\alpha,\beta)) \neq \sum\limits_{k=1}^{\infty} m([\alpha_k,\beta_k))$.

4.1. $F(x) = \begin{cases} x+2, x \in [-1,\frac{-1}{2}), \\ \alpha, x = \frac{-1}{2}, \\ x+4, x \in (\frac{-1}{2},1); \end{cases}$ 4.2. $F(x) = \begin{cases} x, x \in [-1,0), \\ \alpha, x = 0, \\ 4, x \in (0,1); \end{cases}$

4.3. $F(x) = \begin{cases} x+1, x \in [-1,0), \\ \alpha, x = 0, \\ x^2+3, x \in (0,1); \end{cases}$ 4.4. $F(x) = \begin{cases} x, x \in [-1,\frac{-1}{2}), \\ \alpha, x = \frac{-1}{2}, \\ 1, x \in (\frac{-1}{2},1); \end{cases}$

4.5. $F(x) = \begin{cases} x-1, x \in [-1,\frac{-1}{3}), \\ \alpha, x = \frac{-1}{3}, \\ x+2, x \in (\frac{-1}{3},1); \end{cases}$ 4.6. $F(x) = \begin{cases} -1, x \in [-1,\frac{-1}{5}), \\ \alpha, x = \frac{-1}{5}, \\ x+1, x \in (\frac{-1}{5},1); \end{cases}$

4.7. $F(x) = \begin{cases} -1, x \in [-1,\frac{-1}{4}), \\ \alpha, x = \frac{-1}{4}, \\ x, x \in (\frac{-1}{4},1); \end{cases}$ 4.8. $F(x) = \begin{cases} 1, x \in [-1,\frac{1}{2}), \\ \alpha, x = \frac{1}{2}, \\ x+3, x \in (\frac{1}{2},1); \end{cases}$

4.9. $F(x) = \begin{cases} x, x \in [-1,0), \\ \alpha, x = 0, \\ 3, x \in (0,1); \end{cases}$ 4.10. $F(x) = \begin{cases} -2, x \in [-1,\frac{1}{3}), \\ \alpha, x = \frac{1}{3}, \\ x+2, x \in (\frac{1}{3},1); \end{cases}$

4.11. $F(x) = \begin{cases} x-1, x\in[-1{,}0), \\ \alpha, x=0, \\ 5, x\in(0{,}1); \end{cases}$ 4.12. $F(x) = \begin{cases} x+2, x\in[-1,\frac{1}{2}), \\ \alpha, x=\frac{1}{2}, \\ 5, x\in(\frac{1}{2},1); \end{cases}$

4.13. $F(x) = \begin{cases} -1, x\in[-1{,}0), \\ \alpha, x=0, \\ x^2+4, x\in(0{,}1); \end{cases}$ 4.14. $F(x) = \begin{cases} x^2-2, x\in[-1,\frac{1}{3}), \\ \alpha, x=\frac{1}{3}, \\ x+4, x\in(\frac{1}{3},1). \end{cases}$

Тема 2. ЛЕБЕГОВСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ МЕРЫ. МЕРА В $\mathbb{R}^n$

Пусть задано множество X и $S \subset \mathscr{P}(X)$ – полукольцо его подмножеств, на котором задана мера m.

Определение 1. Мера μ, заданная на кольце $\mathcal{K}$ называется *продолжением меры* m, если $S \subset \mathcal{K}$ и для всех $A \in S$ выполняется равенство $\mu(A) = m(A)$.

Теорема 1. *Пусть m – мера на полукольце $S \subset \mathscr{P}(X)$ и $\mathcal{K}(S)$ — минимальное кольцо, порожденное S. Тогда на $\mathcal{K}(S)$ существует единственная мера μ, являющаяся продолжением меры m. Если мера m на полукольце $S \subset \mathscr{P}(X)$ является σ-аддитивной, то ее продолжение также σ-аддитивная мера.*

Пусть $\mathcal{K} \subset \mathscr{P}(X)$ – алгебра подмножеств множества X, m – σ-аддитивная мера на $\mathcal{K}$.

Определение 2. *Внешней мерой множества* $A \subset X$ называется число

$$\mu^*(A) = \inf_{A\subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j, A_j\subset K} \sum_{i=1}^{\infty} m(A_j),$$

где нижняя грань берется по всевозможным конечным или счетным покрытиям множества A элементарными множествами A_j .

Свойство 1. Если $A \subset \mathcal{K}$, то $\mu^*(A) = m(A)$.

Свойство 2. Для всех $A \subset X$ $\mu^*(A) \geqslant 0$ и $\mu^*(\varnothing) = 0$.

Свойство 3. Для всех $A, B \subset X$ и $A \subseteq B$ справедливо неравенство $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$.

Свойство 4. Внешняя мера счетно-полуаддитивна, т. е. для всех $B_1, B_2, \dots \subseteq X$ имеет место неравенство:

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(B_k).$$

Свойство 5. Для всех $A, B, C \subset X$

$$\mu^*(A \triangle B) \leqslant \mu^*(A \triangle C) + \mu^*(B \triangle C).$$

Свойство 6. Для любых $A, B \subset X$

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \mu^*(A \triangle B).$$

Определение 3. *Внутренней мерой множества* $A \subset X$ называется число

$$\mu_*(A) = \mu(X) - \mu^*(A).$$

Для всех $A \subset X$ имеет место неравенство $\mu_*(A) \leqslant \mu^*(A)$.

Пусть m – полная, счетно-аддитивная, конечная мера.

Определение 4. Множество $A \subset X$ называется *измеримым по Лебегу* относительно меры m, заданной на алгебре множеств K, если выполняется равенство

$$\mu^*(A) + \mu^*(X \backslash A) = \mu(X).$$

Совокупность измеримых множеств обозначим Σ. Для измеримого по Лебегу множества определим меру

$$\mu(A) = \mu^*(A), \quad A \in \Sigma.$$

Теорема 2 (критерий измеримости множества). *Пусть задано пространство (X, Σ, m). Тогда для всех $A \subset X$ следующие утверждения эквивалентны:*

1. *измеримо по Лебегу относительно меры m;*

2. *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $B \in \mathcal{K}$ *такое, что*

$$\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon.$$

Следствие 1. Множество $A \subset X$ измеримо, если для всех $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество B такое, что $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$.

Теорема 3 (о σ-алгебре измеримых множеств). *Совокупность* Σ *измеримых по Лебнгу множеств образует* σ*-алгебру множеств, содержащую исходную алгебру* K. *Сужение* μ *внешней меры* μ^* *на измеримые множества является мерой на* Σ.

Следствие 2. Счетное пересечение измеримых множеств измеримо.

Мера m, заданная на алгебре K, называется *полной*, если из $A \in \mathcal{K}$, $B \subset A$ и $\mu(A) = 0$ следует, что $B \in \mathcal{K}$ и $m(B) = 0$.

Одним из важнейших примеров меры является мера Лебега на числовой прямой.

Пусть $X = [a,b)$ – некоторый фиксированный полуинтервал прямой, $S \subset \mathscr{P}(X)$ — полукольцо, состоящее из полуинтервалов $[\alpha, \beta) \subset X$. Пусть $\mathcal{K}$ – алгебра подмножеств, порожденная полукольцом S, каждый элемент которой имеет вид $A = \coprod\limits_{j=1}^{n} [\alpha_j, \beta_j)$, причем полуинтервалы в правой части попарно не пересекаются. Через m обозначим меру на алгебре $\mathcal{K}$, полученную продолжением меры с полукольца, т. е. $m(A) = \sum\limits_{j=1}^{n} (\beta_j - \alpha_j)$. Для произвольного множества $A \subset [a,b)$ определим внешнюю меру $\mu^*(A) = \inf \sum\limits_{j=1}^{\infty} (\beta_j - \alpha_j)$, где точная нижняя грань берется по всем таким наборам полуинтервалов $[\alpha, \beta)$, что $A \subset \bigcup\limits_{k} [\alpha_k, \beta_k)$. Множество $A \subset X$ называется *измеримым по Лебегу*, если $\mu^*(A) + \mu^*(X \backslash A) = b - a$. Таким образом, мерой Лебега μ на отрезке называется лебеговское продолжение длины.

Рассмотрим измеримые по Лебегу линейные ограниченные множества:

1. Множество, состоящее из одной точки, измеримо и его мера равна нулю;

2. Всякое не более чем счетное ограниченное множество точек прямой измеримо и его мера равна нулю;
3. Любой промежуток измерим и его мера равна его длине;
4. Любое ограниченное открытое или замкнутое множество измеримо по Лебегу;
5. Любое ограниченное борелевское множество на прямой измеримо по Лебегу.

Часто приходится рассматривать меры, которые могут принимать и бесконечные значения. Ограничимся случаем σ-конечных мер.

Определение 5. Мера μ, принимающая бесконечные значения, называется *σ-конечной*, если существует последовательность множеств $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{K}$ такая, что $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots, \mu(A_i) < +\infty$ для всех i и

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Если мера μ, заданная на алгебре $\mathcal{K}$ подмножеств X, σ-конечна, то X можно представить в виде объединения счетной системы попарно непересекающихся множеств конечной меры.

Рассмотрим теорию измеримости по Лебегу для произвольных (даже неограниченных) множеств на прямой. Длина как мера на $\mathbb{R}$ является σ-конечной, потому что

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n,n) = \bigsqcup_{n=-\infty}^{\infty} [n,n+1).$$

Определение 6. Множество $A \subseteq \mathbb{R}$ называется *измеримым по Лебегу*, если для всех $n \in \mathbb{N}$ измеримо по Лебегу ограниченное множество $A \bigcap [-n,n)$ или $A \bigcap [n,n+1)$.

Совокупность всех измеримых подмножеств $\mathbb{R}$ обозначим Σ. Обозначим через $A_n = A \bigcap [n,n+1)$. Тогда $A = \coprod\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ и $\mu(A) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. Если ряд расходится, то $\mu(A) = \infty$.

Утверждение 1. *Совокупность Σ всех измеримых по Лебегу подмножеств R является σ-алгеброй.*

Утверждение 2. *Введенная функция $\mu(A)$ является σ-конечной мерой на σ-алгебре всех измеримых множеств на $\mathbb{R}$.*

Пусть, как и при построении меры Лебега, $X = [a,b)$ – фиксированный полуинтервал, $S \subset \mathscr{P}(X)$ – полукольцо, порожденное системой полуинтервалов $[\alpha,\beta) \subseteq [a,b)$. Пусть на $[a,b)$ задана неубывающая ограниченная функция $F(x)$. Определим меру элемента полукольца

$$m_F([\alpha,\beta)) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Теорема 4. *Для того, чтобы мера m_F была σ-аддитивной, необходимо и достаточно, чтобы порождающая ее функция $F(x)$ была непрерывной слева.*

Пусть $\mathcal{K}(S)$ – кольцо, порожденное полукольцом с единицей S. Тогда для всех $A \in \mathcal{K}(S)$ имеет место представление:

$$A = \coprod_{i=1}^{n(A)} [\alpha_i,\beta_i) = \coprod_{i=1}^{n(A)} A_i, \quad A_i \in S.$$

Соответствующее продолжение меры на $\mathcal{K}(S)$ задается формулой

$$m_F(A) = \sum_{i=1}^{n} m_F(A_i).$$

Пусть μ_F^* — внешняя мера, построенная по мере m_F, заданной на алгебре $\mathcal{K}$. Продолжение меры m_F на σ-алгебру Σ измеримых относительно меры m_F множеств называется мерой Лебега-Стилтьеса, построенной по неубывающей функции F.

Очевидно, что μ_F — конечная полная мера. Если $F(x) = x$, то мера Лебега-Стилтьеса совпадает с мерой Лебега μ.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Пусть $X = [0,1[\times[0,1[$, S – полукольцо прямоугольников, принадлежащих X, вида $T_{ab} = [a,b) \times [0,1)$. Определим меру таких прямоугольников как их площадь $m(T_{ab}) = b - a$. Найти внешнюю меру множества $A = \left\{(x,y) \in X : 0 \leqslant x \leqslant 1, y = \frac{1}{2}\right\}$ и выяснить, является ли оно измеримым. Описать явный вид лебеговского продолжения меры.

Р е ш е н и е. По определению внешняя мера A

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k, A_k \subset S} \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k),$$

где любой элемент полукольца S имеет вид $A_k = [a_k, b_k[\times[0,1[$, т. е. полностью определяется своей проекцией на ось OX. Чтобы покрыть множество A элементами A_k, необходимо и достаточно покрыть проекцию этого множества на ось OX полуинтервалами $[a_k,b_k[$. Поэтому внешняя мера множества A в данном случае совпадает с внешней мерой проекции этого множества на ось OX.

$\tilde{\mu}^*(P_{OX}A) = \tilde{\mu}^*([0,1]) = \tilde{\mu}^*([0,1[) = m([0,1[) = 1,$

$\tilde{\mu}^*(X \backslash A) = \tilde{\mu}^*([0,1]) = \tilde{\mu}^*([0,1[) = m([0,1[) = 1,$

$\tilde{\mu}^*(A) = \tilde{\mu}^*(P_{OX}A) = 1; \tilde{\mu}^*(X \backslash A) = \tilde{\mu}^*(P_{OX}(X \backslash A)) = 1;$

$\tilde{\mu}^*(A) + \tilde{\mu}^*(X \backslash A) = 2 \neq \mu^*(X) = m(X) = 1.$

Следовательно, множество A неизмеримо.

Из приведенных выше рассуждений видно, что множество $B \subset X$ будет измеримым тогда и только тогда, когда оно будет иметь вид $\beta \times [0,1)$ и $\beta \subset [0,1)$ — измеримо по Лебегу.

П р и м е р 2. Пусть $X = [0,1[\times[0,1)$, полукольцо $S = \{[a,b) \times [c,d) \subset X\}$ и мера $m([a,b) \times [c,d)) = (b-a)(d-c)$. Вычислить внутреннюю и внешнюю меры множества

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y < 1-x, 0 \leqslant x < 1\}.$$

Р е ш е н и е. По определению внешней меры имеем

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k, A_k \subset S} \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k), \quad A \subset \coprod_{k=0}^{n-1} \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[\times \left[0,1-\frac{k}{n}\right[,$$

т. е. прямоугольники $A_{kn} = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[\times \left[0,1-\frac{k}{n}\right[$, где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, образуют для каждого n покрытие множества A. Имеем:

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} m(A_{kn}) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right) = S_n.$$

Величина S_n является верхней суммой Дарбу для функции $f(x) = 1-x$ на отрезке $[0,1)$, соответствующей разбиению отрезка на n частей. Для функции f существует интеграл Римана, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве $\mu^*(A) \leqslant S_n$, которое выполняется для всех n, получим $\mu^*(A) \leqslant \frac{1}{2}$.

С другой стороны, внешняя мера дополнения $X\backslash A$ множества A $\mu^*(X\backslash A) \leqslant \frac{1}{2}$, так как $X\backslash A \subset \coprod\limits_{k=0}^{n-1} \left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right) \times \left[0,1-\frac{k}{n}\right)$. Поэтому $\mu^*(X\backslash A) \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}\left(1-\frac{k+1}{n}\right)$. Следовательно,

$$\mu_*(A) = m(X) - \mu^*(X\backslash A) \geqslant 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Откуда вытекает, что $\frac{1}{2} \leqslant \mu_*(A) \leqslant \mu^*(A) \leqslant \frac{1}{2}$.

Пример 3. Пусть $X = [-1,1)$, S – полукольцо, $S = \{[a,b) \subset X\}$, $F\colon X \to \mathbb{R}$ — неубывающая непрерывная слева на функция. Определим на S меру Лебега-Стилтьеса равенством: $\mu_F([a,b[) = F(b) - F(a)$.

Описать класс измеримых подмножеств из X, найти меру Лебега-Стилтьеса каждого множества A, если

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1, & 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Решение. Из определения меры μ_F на полукольце S следует, что $\mu_F([\alpha,\beta)) = 0$, если полуинтервал не содержит точку $x = 0$, и $\mu_F([\alpha,\beta)) = 1$, если $0 \in [\alpha,\beta)$. Распространим меру μ_F на минимальное кольцо $\mathcal{K}(S)$. Если $A \in \mathcal{K}(S)$, то $A = \coprod\limits_{i=1}^{n(A)} A_i$, $A_i = [\alpha_i,\beta_i)$. Поэтому если $0 \notin A$, то $0 \notin [\alpha_i,\beta_i)$ для всех $i = \overline{1,n(A)}$ и $\mu_F(A) = \sum\limits_{i=1}^{n(A)} \mu_F(A_i) = 0$. Если $0 \in A$, то найдется только один полуинтервал $[\alpha_{i_0},\beta_{i_0})$ содержащий $x = 0$, с мерой 1, и $\mu_F(A) = 1 = \sum\limits_{i=1}^{n(A)} \mu_F(A_i)$. Следовательно, мера каждого элемента кольца равна либо 0, либо 1. Поскольку $F(x)$ непрерывна слева, то μ_F – аддитивна и допускает продолжение.

С этой целью найдем вначале внешнюю меру $A \in \mathscr{P}(X)$. По определению

$$\mu_F^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k, A_k \subset S} \sum_{k=1}^{\infty} m_F(A_k),$$

где нижняя грань берется по всем конечным или счетным покрытиям множества A элементами A_k полукольца S.

Если $A = (0,1)$, то, рассматривая покрытия $(0,1) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k},1\right)$, имеем $\mu_F^*((0,1)) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_F \left[\frac{1}{k},1\right) = 0$. Поскольку $\mu^*(A) \geqslant \mu_*(A)$, то $A = (0,1)$ измеримо относительно меры μ_F и его мера равна нулю. В силу полноты меры будет измеримым и любое подмножество интервала $(0,1)$ и его мера будет также равна нулю.

Если рассмотреть одноточечное множество $A = 0$, то для каждого его покрытия $\bigcup\limits_k A_k$ множествами $A_k \in S$ имеется хотя бы одно из них, содержащее точку $x = 0$. Поэтому $\sum\limits_k \mu_F(A_k) \geqslant 1$ и $\mu_F^*(A) \geqslant 1$. Далее, пользуясь покрытием $[-1,1[\supset \{0\}$, получаем, что $\mu_F^*(A) \leqslant 1$. Таким образом, $\mu_F^*(A) = 1$.

Рассмотрим теперь произвольное множество $A \in \mathscr{P}(X)$. Из свойств монотонности внешней меры следует, что $\mu_F^*(A) = 0$, если $A \subset (0,1)$ или $A \subset [-1,0)$. Если же $\{0\} \subset A$, то $\mu_F^*(A) \geqslant 1$. Рассматривая в этом случае покрытие $[-1,1)$, имеем $\mu_F^*(A) \leqslant 1$. Следовательно, если $\{0\} \subset A$, то $\mu_F^*(A) = 1$.

Покажем теперь, что произвольное множество измеримо относительно меры Лебега–Стилтьеса. Действительно, $A \subset (0,1)$ или $A \subset [-1,0)$, то $\mu_F^*(A) = 0$ и оно измеримо. Если же $\{0\} \subset A$, то из неравенства $\mu_F^*(A \triangle [-1,1)) = \mu_F^*((A \backslash [-1,1)) \cup ([-1,1) \backslash A)) = 0 < \varepsilon$, справедливого для каждого $\varepsilon > 0$, заключаем, что множество μ_F-измеримо, $\mu_F(A) = 1$.

Пример 4. Каково строение и какая мера точек отрезка $[0,1]$, десятичное представление которых возможно без цифр 4 и 5.

Решение. Это множество строится следующим образом: делим отрезок $[0,1]$ на десять равных частей и выбрасываем полуинтервал

$[0.4, 0.6]$. Затем каждый из оставшихся восьми полуинтервалов делим на десять равных частей и выбрасываем в каждом из них соответствующий полуинтервал $[0{,}n_1 4; 0{,}n_1 6[$, где $n_1 = 0, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9$ и т. д. Данное множество нигде не плотно, каждая его точка является предельной, т. е. множество является совершенным. Вычислим меру выбрасываемых промежутков, посчитав тем самым меру дополнения к искомому множеству:

$$m(G) = \frac{2}{10} + 8\frac{2}{10^2} + 8^2\frac{2}{10^3} + \cdots + 8^k\frac{2}{10^{k+1}} + \cdots = 1.$$

Следовательно, мера точек отрезка [0,1], десятичное представление которых возможно без цифр 4 и 5, равна 0.

Пример 5. Найти меру множеств

$$1) \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{20}, \frac{1}{n} + \frac{1}{20}\right), \quad 2) \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[n^n, n^n + \frac{1}{\ln{(n+1)}}\right] \backslash Q.$$

Решение. 1) Представим множество A в виде объединения попарно непересекающихся интервалов. Для этого выясним, начиная с какого номера n интервалы будут пересекаться. Заметим, что $\mu(A_n) = \mu\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{20}, \frac{1}{n} + \frac{1}{20}\right) = \frac{1}{10}$ для всех n, и поэтому интервалы не могут быть вложены друг в друга. Решая неравенство $\frac{1}{n} - \frac{1}{20} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{20}$, находим $n \geqslant 3$. Поэтому представим в виде $B_1 \cup B_2 \cup B_3$, где $B_1 = \left(1 - \frac{1}{20}, 1 + \frac{1}{20}\right) = \left(\frac{19}{20}, \frac{21}{20}\right)$ $B_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{20}, \frac{1}{2} + \frac{1}{20}\right) = \left(\frac{19}{20}, \frac{11}{20}\right)$ $B_3 = \left(-\frac{1}{20}, \frac{1}{3} + \frac{1}{20}\right) = \left(-\frac{1}{20}, \frac{23}{60}\right)$, тогда $\mu(A) = \sum\limits_{k=1}^{3}\mu(B_k) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{23}{60} = \frac{19}{30}$.

2) Пусть $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left[n^n, n^n + \frac{1}{\ln{(n+1)}}\right]$.

Множество борелево и поэтому измеримо. Множество рациональных чисел Q числовой прямой счетно и имеет меру нуль, значит $\mu(B) = \mu(A)$. Множества $B_n = \left[n^n, n^n + \frac{1}{\ln{(n+1)}}\right]$, $n \in \mathbb{N}$, – непересекающиеся при любом $n \in \mathbb{N}$. Согласно свойству σ-аддитивности меры

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(\left[n^n, n^n + \frac{1}{\ln{(n+1)}}\right]\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln{(n+1)}} = \infty.$$

Таким образом, $\mu(A) = \infty$.

Пример 6. Вычислить меру множества A:

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R},\, 0 < y < \frac{a^2}{a^2+x^2}\right\},$$

где $a > 0$ – фиксированное число.

Решение. Множество $A \subset \mathbb{R}^2$ открыто и поэтому измеримо. Множество рассматривается в пространстве с σ-конечной мерой, поэтому построим возрастающую последовательность множеств $A_n \uparrow A$,

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [n,n), 0 < y < \frac{a^2}{a^2+x^2}\right\}.$$

Тогда $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

$$\mu(A_n) = \int\limits_{-n}^{n} \frac{a^2 dx}{a^2+x^2} = a^2\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\bigg|_{-n}^{n} = a\left(\operatorname{arctg}\frac{n}{a} - \operatorname{arctg}\frac{-n}{a}\right),$$

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty}\mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} a\left(\operatorname{arctg}\frac{n}{a} - \operatorname{arctg}\frac{-n}{a}\right) = a\pi.$$

Задание 1. Пусть $X = [-1;1[\times[-1;2)$, $S = \{[a;b)\times[-1;2) \subset X\}$, $m(A_S) = 3(b-a)$. Найти внешнюю и внутреннюю меры множеств и выяснить, измеримы ли они.

1.1. $A = \left\{(x,y) \in X : x^2+y^2 < 1\right\}$;
1.2. $A = \{(x,y) \in X : x+y = 1\}$;
1.3. $A = \{(x,y) \in X : x+y < 1\}$;
1.4. $A = \{(x,y) \in X : xy < 1\}$;
1.5. $A = \{(x,x) \in X : -1 \leqslant x < 1\}$;
1.6. $A = \left\{(x,y) \in X : 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2},\ \ 0 < y < 1\right\}$;
1.7. $A = \{(x,y) : x, y \in Q\}$, Q – множество рациональных чисел;
1.8. $A = \{(x,x) \in X : x \in [0,1] \cap Q\}$;
1.9. $A = \{(y,y) \in X : y \in [-1,1] \backslash Q\}$;
1.10. $A = \{(x,y) \in X : x+y \geqslant 1\}$;
1.11. $A = \{(x,y) \in X : x \in [0,1]\backslash Q, y \in [0,1]\backslash Q\}$;
1.12. $A = \{(x,y) \in X : x = 0\}$;

1.13. $A = \{(x,y) \in X : y = 0\}$;
1.14. $A = \left\{(x,y) \in X : x \in \left[0,\frac{1}{2}\right],\ \ y \in [1,2]\right\}$.

Задание 2. Описать структуру множества $A \subset [0,1]$ и найти его меру.

2.1. Множество точек отрезка $[0,1]$, состоящее из чисел, у которых в десятичной записи цифра 2 встречается раньше, чем цифра 3.

2.2. Множество точек отрезка $[0,1]$, в разложении которых в бесконечную десятичную дробь фигурируют все цифры $1, 2, \ldots, 9$.

2.3. Множество точек отрезка $[0,1]$, десятичное представление которых содержит хотя бы одну цифру 3.

2.4. Множество точек отрезка $[0,1]$, десятичное представление которых возможно без цифр 4 и 5.

2.5. Множество точек отрезка $[0,1]$, которые допускают десятичное разложение без комбинации стоящих рядом цифр 3,3.

2.6. Множество точек отрезка $[0,1]$, которые допускают разложение в десятичную дробь без использования цифры 7.

2.7. Множество точек отрезка $[0,1]$, десятичное представление которых не содержит цифры 2.

2.8. Множество точек отрезка $[0,1]$, десятичное представление которых содержит цифру 5 только один раз.

2.9. Множество точек отрезка $[0,1]$, в разложении которых в двоичную дробь на всех четных местах стоят нули.

2.10. Множество точек отрезка $[0,1]$, в разложении которых в двоичную дробь на всех нечетных местах стоят единицы.

2.11. Множество точек отрезка $[0,1]$, троичное представление которых не содержит цифры 3.

2.12. Множество точек отрезка $[0,1]$, троичное представление которых не содержит цифры 0.

2.13. Множество точек отрезка $[0,1]$, десятичное представление которых невозможно без цифры 4.

2.14. Множество точек отрезка $[0,1]$, которые допускают двоичное разложение, в котором на четных местах стоит цифра 0.

Задание 3. Доказать, что множество $A \subset \mathbb{R}$ измеримо и найти его меру.

3.1 $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left[n^n, n^n+\frac{1}{\ln(n+1)}\right]\backslash Q$, Q – множество рациональных чисел;

3.2. $A = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n}, 2^{-n}+1\right)$; 3.3. $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(n-\frac{1}{3^n}, n+\frac{1}{3^n}\right)$;

3.4. $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \sin\frac{1}{x} < 0, 0 < x < 1\right\}$;

3.5. $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \operatorname{tg}\frac{1}{x} > 0, 0 < x < 1\right\}$;

3.6. $A = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right]$; 3.7. $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{20}, \frac{1}{n^2}+\frac{1}{20}\right)$;

3.8. $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2n-1}{2n}, \frac{2n+1}{2n+2}\right]$;

3.9. $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \sin\frac{1}{x} > 0,\ 0 < x < 1\right\}$;

3.10. $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \cos\frac{1}{x} > 0,\ 0 < x < 1\right\}$;

3.11. $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \operatorname{tg}\frac{1}{x} < 0,\ 0 < x < 1\right\}$;

3.12. $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3^n}+\frac{1}{10}, \frac{1}{3^n}+\frac{1}{5}\right]$;

3.13. $A = \left\{x \in (0,1) : \frac{1-2x}{x(1-x)} < 5\right\}$;

3.13. $A = \left\{x \in (0,1) : |x^2-1| > x\right\}$.

Задание 4. Доказать, что множество $A \subset \mathbb{R}^2$ измеримо и найти его меру.

4.1. Множество точек единичного квадрата на плоскости, состоящее из точек, декартовы и полярные координаты которых иррациональны.

4.2. $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sin\frac{1}{x^2+y^2} < 0,\quad x^2+y^2 \leqslant 1\right\}$;

4.3. Множество точек единичного квадрата на плоскости, состоящее из точек (x,y) таких, что $|\sin x| < \frac{1}{2}$, а $\cos(x+y)$ – иррационально;

4.4. $A = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \ x \in [n, n+1), \ \ 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{(x-n)^n}{n}$;

4.5. $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \ x \in \mathbb{R}, \ \ 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{5}{5 + x^2} \right\}$;

4.6. Множество точек единичного квадрата на плоскости, состоящее из точек (x,y) таких, что $|x| + |y| < 1$.

4.7. $A = \big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \ x \geqslant 0, \ \ 0 \leqslant y \leqslant e^{-x} |\sin x| \big\}$;

4.8. $A = \big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \ x \leqslant 0, \ \ 0 \leqslant y \leqslant e^{-x} |\cos x| \big\}$;

4.9. $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \cos \frac{1}{x^2+y^2} > 0, \ \ x^2 + y^2 \leqslant 1 \right\}$;

4.10. Множество точек единичного квадрата на плоскости, состоящее из точек (x,y) таких, что $|x| < y$;

4.11. Множество точек единичного квадрата на плоскости, состоящее из точек (x,y) таких, что $x > y$.

4.12. $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \ x \in \mathbb{R}, \ \ 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{25}{25 + x^2} \right\}$;

4.13. Множество точек единичного квадрата на плоскости, состоящее из точек (x,y) таких, что $|x| < |y|$.

4.14. Множество точек единичного квадрата на плоскости, состоящее из точек (x,y) таких, что $|x| > y$.

Задание 5.

5.1. Пусть F – замкнутое множество на числовой прямой, мера Лебега которого равна нулю. Доказать что F нигде не плотно.

5.2. Пусть $0 < \alpha < 1$. Построить измеримое по Лебегу множество $A \subset [0, 1]$, мера которого равна α, но для $\forall a < b$, для которого $[a, b] \subseteq [0, 1]$ выполняется неравенство $0 < \mu(A \cap [a, b]) < b - a$.

5.3. Пусть F – замкнутое множество на числовой прямой, мера Лебега которого положительна. Доказать что F множество мощности континуума.

5.4. Пусть A – измеримое множество на числовой прямой и $\mu(A) = a > 0$. Доказать, что для любого $b \in (0, a)$ существует измеримое множество $B \subset A$, мера которого $\mu(B) = b$.

5.5. На $[0, 1]$ построить последовательность измеримых нигде не плотных попарно не пересекающихся множеств $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ таких, что $\mu\left(\coprod\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$.

5.6. Пусть A – ограниченное множество на числовой прямой и $a \in \mathbb{R}$. Доказать, что множество $A + a = \{x + a, x \in A\}$ измеримо и $\mu(A + a) = \mu(A)$.

Тема 3. ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть задано пространство с мерой (X, Σ, μ).

Определение 7. Действительная функция $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *измеримой*, если для любого $c \in \mathbb{R}$ множество $A_c = \{x\colon f(x) < c\}$ измеримо (здесь $\overline{\mathbb{R}}$ – расширенная числовая прямая). Комплекснозначная функция $g + ih$ измерима, если измеримы ее действительная и мнимая части.

Лемма 1. *Числовая функция $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима тогда и только тогда, когда для любого $c \in \mathbb{R}$ измеримо одно из множеств* $\{x : f(x) \leqslant c\}$, $\{x : f(x) > c\}$, $\{x : f(x) \geqslant c\}$.

Теорема 5. *Пусть $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ – измеримая функция. Тогда для любой измеримой функции $g : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ их композиция $h = g \circ f$ также измерима на X.*

Будем говорить, что две определенные на множестве X функции *эквивалентны*, если они равны между собой *почти всюду*, т. е. равны между собой для всех $x \in X$ за исключением, быть может, точек, принадлежащих множеству нулевой меры.

Лемма 2. *Функция $f(x)$, определенная на множестве X и эквивалентная на нем измеримой функции $g(x)$, так же измерима.*

Теорема 6. *Пусть (X,Σ, μ) – пространство с мерой и $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ – измеримые функции. Тогда функции αf, f^2, $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g (при условии, что $g(x) \neq 0$ на X), $\alpha \in \mathbb{R}$, измеримы.*

1. Равномерная сходимость.

Последовательность измеримых функций f_n сходится к функции f *равномерно*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n_ε такой, что для всех $n > n_\varepsilon$ выполнено

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Равномерная сходимость обозначается так: $f_n \rightrightarrows f$.

2. Точечная сходимость.

Последовательность f_n сходится к функции f *точечно*, если для любого $x \in X$ $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$.

3. Сходимость почти всюду.

Последовательность f_n сходится к f *почти всюду* ($f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.в.}} f$), если $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ для всех точек x за исключением, быть может, тех x, которые принадлежат множеству меры нуль.

4. Сходимость по мере.

Сходимость по мере последовательности измеримых функций f_n к измеримой функции f обозначается $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$ и означает, что для любого $\varepsilon > 0$ мера множества

$$A_n(\varepsilon) = \big\{x\colon |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\big\}$$

стремится к нулю при $n \to \infty$.

Теорема 7. *Пусть X, Σ, μ – пространство с мерой и $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ – последовательность измеримых функций. Если f_n сходится в каждой точке $x \in X$ к функции f, то функция f измерима.*

Следствие 3. Если последовательность измеримых функций $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится к f равномерно, то f измерима.

Следствие 4. Если последовательность измеримых функций $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится к f почти всюду, то предельная функция измерима.

Следствие 5. Существует разрывная на отрезке $[a,b]$ функция, которая не является пределом почти всюду сходящейся последовательности непрерывных функций.

Теорема 8 (Лебег). *Пусть (X, Σ, μ) – пространство с полной конечной σ-аддитивной мерой и пусть последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ измеримых функций сходится к функции f почти всюду. Тогда она сходится к той же самой предельной функции и по мере.*

Теорема 9 (Рисс). *Пусть (X, Σ, μ) – пространство с полной σ-аддитивной мерой и пусть последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ измеримых функций сходится по мере к измеримой функции f. Тогда из этой последовательности можно выделить подпоследовательность $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty} \subset (f_n)$, сходящуюся к f почти всюду.*

Теорема 10 (Егоров). *Пусть дана последовательность* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *измеримых функций, сходящаяся на измеримом множестве* X *с конечной мерой к функции* f. *Тогда для любого* $\delta > 0$ *найдется такое измеримое множество* $X_\delta \subset X$, *что:*

1) $\mu(X \setminus X_\delta) < \delta$;

2) на множестве X_δ *последовательность* $f_n(x)$ *сходится к* $f(x)$ *равномерно.*

Теорема 11 (Лузин). *Пусть задана измеримая функция* $f(x)$ *на измеримом множестве* X, *расположенном на* $[a, b]$. *Каково бы ни было число* $\varepsilon > 0$ *из* X *можно изъять такую часть, которую можно покрыть системой интервалов с суммой длин* $< \varepsilon$, *что на оставшемся множестве функция* $f(x)$ *будет непрерывной.*

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 7. На числовой прямой $\mathbb{R}$ с мерой Лебега любая непрерывная функция измерима.

Решение. Действительно, множество $A_c = \{x\colon f(x) < c\}$ является прообразом открытого множества $f^{-1}(-\infty,c)$, которое измеримо как борелевское множество.

Пример 8. Пусть $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ – последовательность измеримых на X функций. Тогда функции $\sup\limits_n f_n(x)$, $\inf\limits_n f_n(x)$ также измеримы на X.

Решение. Обозначим через $h(x) = \sup\limits_n f_n(x)$. Измеримость $h(x)$ означает, что для любого $c \in \mathbb{R}$ измеримы множества $A_c = \{x|\, h(x) > c\}$. Покажем, что $= \{x|\, h(x) > c\} = \bigcup\limits_n \{x|\, f_n(x) > c\}$, это и будет означать измеримость h.

Пусть $x \in A_c$, т. е. $h(x) > c$. Тогда $h(x) > c + \varepsilon$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. По определению точной верхней границы найдется такой номер n_0, что $f_{n_0}(x) > h(x) - \varepsilon$. Отсюда $f_{n_0}(x) > (c + \varepsilon) - \varepsilon = c$ и потому $x \in \{x|\, f_{n_0}(x) > c\}$, а тем более, $x \in \bigcup\limits_n \{x|\, f_n(x) > c\}$.

С другой стороны, пусть $x \in \bigcup\limits_n \{x \in X|\, f_n(x) > c\}$. Это значит, что найдется такой номер n_0, что $f_{n_0}(x) > c$. Но тогда $h(x) \geqslant f_{n_0}(x) > c$, т. е. $x \in A_c$. Равенство доказано.

Аналогично доказывается измеримость функции $\inf\limits_n f_n(x)$.

Пример 9. Определим функцию $f(x)$ на [0,1] следующим образом. Если $x = 0{,}n_1 n_2, \ldots$ – десятичная запись числа x, то $f(x) = \max\limits_i n_i$. Показать, что функция $f(x)$ измерима.

Решение. Рассмотрим множество чисел отрезка [0,1], в десятичной записи которых присутствует цифра 9. Мера данного множества равна

$$\frac{1}{10} + 9\,\frac{1}{10^2} + \ldots + 9^{n-1}\,\frac{1}{10^n} + \ldots = 1.$$

Следовательно, функция $f(x)$ равна 9 почти всюду. Функция $f(x)$ измерима как постоянная функция.

Пример 10. Доказать, что функция f измерима тогда и только тогда, когда измерима функция $\sin f$.

Решение. Обозначим через $g(x) = \sin x$, тогда при измеримости функции f имеем $h(x) = g(f(x)) = \sin f(x)$ – композиция непрерывной и измеримой и поэтому $\sin f$ будет измеримой.

С другой стороны, пусть измерима функция $h(x) = \sin f(x)$, покажем, что измерима функция f. Измеримость $\sin f$ означает, что для любого $\in \mathbb{R}$ измеримо множество

$$\{f(x) : \sin f(x) > c\} =$$

$$= \begin{cases} f(x) \in \mathbb{R}, & c < -1; \\ f(x) \in (-\arcsin c + 2\pi k, \arcsin c + 2\pi k), & -1 \leqslant c \leqslant 1; \\ f(x) \in \varnothing, & c \geqslant 1. \end{cases}$$

Таким образом, измеримыми являются пустое множество, числовая прямая $\mathbb{R}$ и для $\forall c \in \mathbb{R}$ множество $\bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty} \arcsin c \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Пример 11. Доказать, что функция $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, измерима на $\mathbb{R}$, если

1) $f(x) = \sin[x]$, где $[x]$ – целая часть числа $x \in \mathbb{R}$; 2) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{x^4+n^4}$.

Р е ш е н и е. 1) Функция $f(x)$ принимает счетное число значений $\sin k$, $k \in \mathbb{Z}$. А именно, $f(x) = \sin k$, если $x \in A_k = [k, k+1)$ и $\cup_k [k, k+1] = \mathbb{R}$. Так как промежутки A_k являются измеримыми, то $f(x)$ является простой функцией и, следовательно, измеримой.

2) Члены рассматриваемого ряда являются непрерывными функциями и поэтому измеримы. Если $x \geqslant 0$, то эквивалентность $\operatorname{arctg} \frac{x}{x^4+n^4} \sim \frac{1}{n^4}$ при $n \to \infty$ позволяет сделать вывод о равномерной сходимости этого функционального ряда для $x \geqslant 0$. Аналогично, если $x < 0$, то $\operatorname{arctg} \frac{x}{x^4+n^4} \sim -\frac{1}{n^4}$ при $n \to \infty$, и поэтому для $x < 0$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{x^4+n^4}$ сходится равномерно. Тогда его сумма является непрерывной, а значит, измеримой функцией.

П р и м е р 12. Доказать, что функция $z = f(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ является измеримой на $\mathbb{R}^2$, если $f(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{n[xy]}{1+n^3[x^2+y^2]}$.

Р е ш е н и е. Поскольку функции $z = [xy]$ и $z = [x^2+y^2]$ простые, то они измеримы на плоскости. Измеримой для каждого номера n является функция $f_n(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{n[xy]}{1+n^3[x^2+y^2]}$. Из сходимости функционального ряда (что устанавливается с помощью признака сравнения) следует измеримость на $\mathbb{R}^2$ функции $f(x,y)$.

П р и м е р 13. Для функции f построить последовательность простых измеримых функций, равномерно сходящуюся к f, если

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \operatorname{arctg} x, & x > 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Исходя из теоремы, для измеримой ограниченной на множестве A функции $f(x)$ последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ простых измеримых функций строится так: для каждого целого k $f_n(x) = \frac{k}{n}$ на множестве $A_k = \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, \frac{k}{n} \leqslant f(x) < \frac{k+1}{n}\right\}$. Поэтому для $x \leqslant 0$ полагаем $f_n(x) = 0$, а на множествах

$$\left\{x > 0 | \frac{k\pi}{2n} \leqslant \operatorname{arctg} x < \frac{(k+1)\pi}{n}\right\} = \left\{x > 0 | \operatorname{tg} \frac{k\pi}{2n} \leqslant x < \operatorname{tg} \frac{(k+1)\pi}{2n}\right\},$$

$k = 0, 1, \ldots, n-1$, полагаем $f_n(x) = \frac{k\pi}{2n}$.

Пример 14. Доказать, что при $n \to \infty$ последовательность $f_n(x) = \sin^n \pi x + \cos^n \pi x$ сходится к нулю почти всюду на $\mathbb{R}$ относительно меры Лебега.

Решение. При тех $x \in \mathbb{R}$, для которых $|\sin \pi x| < 1$ и $|\cos \pi x| < 1$, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^n \pi x = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \cos^n \pi x = 0$. Если же $x \in \mathbb{R}$ таково, что $\sin \pi x = \pm 1$ (или $\cos \pi x = \pm 1$), то предел функции $\sin^n \pi x$ (соответственно $\cos^n \pi x$) равен единице или не существует.

Таким образом, рассмотрим множество $A_0 = \{x \in \mathbb{R} | \sin \pi x = \pm 1$ или $\cos \pi x = \pm 1\} = \{k | k \in \mathbb{Z}\} \cup \{1/2 + k | k \in \mathbb{Z}\}$. Множество A_0 – счетное (как объединение двух счетных множество) и поэтому $\mu(A_0) = 0$. Тогда для каждой точки $x \in \mathbb{R} \setminus A_0$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^n \pi x + \cos^n \pi x = 0$ и, следовательно, почти всюду последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x) = 0$.

Пример 15. Для последовательности $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$ указать множество, на котором $f_n(x)$ сходится равномерно, причем мера множества, на котором нет сходимости, может быть сделана сколь угодно малой.

Решение. Рассмотрим произвольное $\delta > 0$. Если $\delta \geqslant 1$, то в качестве $X_\delta \subset X$, $X = [0,1]$, возьмем, например, отрезок $[0, 1/2]$. Тогда $\mu(X \setminus X_\delta) = 1 - 1/2 < \delta$. $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[0,1/2]} |x|^n = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{-n}$, т. е. на $[0,1/2]$ последовательность равномерно сходится к функции $f(x) = 0$.

Если же $\delta < 1$, то покажем, что множества X_δ не существует. Предположим от противного, что такое множество X_δ найдется, тогда множество $(X \setminus X_\delta) \cap ([1 - \delta,\delta])$ не пусто, ибо в противном случае $X \setminus X_\delta \subset [0,1 - \delta]$ и $\mu(X \setminus X_\delta) < 1 - \delta$ и чтобы выполнялось условие теоремы, необходимо, чтобы $1-\delta < \delta$, т. е $\delta > 1/2$, что не так. Поэтому на множестве $X \setminus X_\delta$ существует последовательность $(f_k(x))_{k=1}^{\infty}$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = 1$. Далее, пусть на множестве $X \setminus X_\delta$ последовательность (f_n) равномерно сходится к нулю. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер n_0, что $\forall n \geqslant n_0$ $|x^n| < \varepsilon$.

Пусть $\varepsilon < 1$, тогда $x_k^n < \varepsilon$ $\forall n \geqslant n_0$ и при $k \to \infty$ имеем: $1 \leqslant \varepsilon$, что противоречит выбору ε.

Пример 16. Исследовать на сходимость по мере к функции f на измеримом множестве X следующие последовательности:

$$1)f_n(x) = x^n,\ \ x[0{,}1];\quad 2)f_n(x) = \cos^n x,\ \ x \in \mathbb{R}.$$

Р е ш е н и е. 1) Рассмотрим для любого $\delta > 0$ измеримое множество $\{x \in [0{,}1] |\, x^n \geqslant \delta\} = [\sqrt[n]{\delta}, 1]$. Отметим, что когда $\delta > 1$, то это множество пусто. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \mu\{x \in [0,1] |\, x^n \geqslant \delta\} = \lim\limits_{n\to\infty} (1 - \sqrt[n]{\delta}) = 0$ и поэтому по мере $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ на [0,1]. С другой стороны, $x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ почти всюду на множестве конечной меры, поэтому она сходится и по мере.

2) Пусть $\delta \leqslant 1$, тогда

$$|x \in \mathbb{R}| \,|\cos x|^n \geqslant \delta| = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \Big[-\arccos \sqrt[n]{\delta} + k\pi, \arccos \sqrt[n]{\delta} + k\pi\Big].$$

Значит $\mu\{x \in \mathbb{R}| \,|\cos x|^n \geqslant \delta\} = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} 2 \arccos \sqrt[n]{\delta} = +\infty$. Поэтому заданная последовательность не сходится по мере.

Задание 1. Пусть $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$. Выяснить является ли функция f измеримой.

1.1. $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n + x^2}$; 1.2. $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin\left(n[x]^4\right)}{n\sqrt{n}}$;

1.3. $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos\left(n[x]^4\right)}{\sqrt{n^4 + [x]^4}}$; 1.4. $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n[x]}{1 + n^5 + [x]^4}$;

1.5. $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n^2}{n^4 + x^2}$; 1.6. $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{2^n + x^4}$;

1.7. $f(x) = \arctan \dfrac{x^2}{x^4 + n^2}$; 1.8. $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{\sin^2 x + n^4}$;

1.9. $f(x) = e^{[x]}$; 1.10. $f(x) = \operatorname{sign} \cos \pi x$;

1.11. $f(x) = \operatorname{sign} \sin \pi x$; 1.12. $f(x) = \operatorname{sign} \cos \dfrac{\pi}{2} x$;

1.13. $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos\left(n[x]^2\right)}{\sqrt{n^4 + \cos x^4}}$; 1.14. $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n[x]^2}{\sqrt{n^4 + \sin x^4}}$;

Задание 2. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$. Выяснить является ли функция f измеримой.

2.1. $f(x{,}y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(n(x^2 + y^2))}{\sqrt{n^4[x^2 + y^2]}}$;

2.2. $f(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n} \arctan n^4[x] + y]$;

2.3. $f(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos([x^3]+[y^2])^n}{n^5}$; 2.4. $f(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(n(x^3+y^3))}{\sqrt{n^6[x^4+y^4]}}$;

2.5. $f(x,y) = \operatorname{sign} \cos\pi(x^2+y^2)$; 2.6. $f(x,y) = (x^2+y^2)[x]$;

2.7. $f(x,y) = (|x|+|y|)\, e^{[x]}$; 2.8. $f(x,y) = \arctan\sin[x^2+y^2]$;

2.9. $f(x,y) = \arctan[y]\sin(x^2+y^2)$; 2.10. $f(x,y) = \big([x]^2+[y]^2\big)\, x$;

2.11. $f(x,y) = \dfrac{1}{2}\ln\big(1+[x^4+y^4]\big)$; 2.12. $f(x,y) = \big(1+[x^4+y^4]\big)\, e^{[x]}$;

2.13. $f(x,y) = \coth\sin\big(1+[x]^4+[y]^4]\big)$;

2.14. $f(x,y) = \cos\sinh\big(1+[x]^2+[y]^2]\big)$.

Задание 3. Пусть X, Σ, μ – пространство с мерой, $f_1, f_2, f_3, f_4 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ – измеримые функции. Выяснить, являются ли следующие функции измеримыми:

3.1. $\dfrac{f_1(x)}{\ln(2+|f_2(x)|)}$; 3.2. $\max(f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x))$;

3.3. $\max(f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x))$; 3.4. $\dfrac{f_1(x)+f_2(x)}{\operatorname{ch}(f_3(x))}$;

3.5. $\sin(|f_1(x)|+|f_2(x)|+|f_3(x)|+|f_4(x)|)$;

3.6. $(5+|f_1(x)|+|f_2(x)|)^{f_3(x)}$;

3.7. $\dfrac{f_1(x)\cdot f_2(x)}{1+\max(f_3(x), f_4(x))}$; 3.8. $\dfrac{f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+f_4(x)}{5+\arctan f_1(x)]}$;

3.9. $\dfrac{\sinh f_1(x)}{1+|f_1(x)|+|f_2(x)|}$; 3.10. $\dfrac{\arctan f_4(x)}{1+\max(f_1(x), f_2(x), f_3(x))}$;

3.11. $\max(f_1(x), f_2(x), f_3(x), 0)$; 3.12. $\min(f_1(x), f_2(x), f_3(x), 0)$;

3.13. $\cos(|f_1(x)|+|f_2(x)|+|f_3(x)|+|f_4(x)|)$;

3.14. $\dfrac{f_1(x)\cdot f_2(x)}{1+\min(f_3(x), f_4(x))}$.

Задание 4. Сходится ли каждая из указанных последовательностей по мере, почти всюду:

4.1. $f_n(x)=\sin^n x$, $x\in\mathbb{R}$; 4.2. $f_n(x)=x\sin^n x$, $x\in\mathbb{R}$;

4.3. $f_n(x)=\dfrac{n^2\cos^2 x}{1+n^2\cos^2 x}$, $x\in\mathbb{R}$; 4.4. $f_n(x)=\dfrac{n^4\sin^2 x}{1+n^4\sin^4 x}$, $x\in\mathbb{R}$;

4.5. $f_n(x)=\dfrac{\sin^n x}{2+\sin^n x}$, $x\in\mathbb{R}$; 4.6. $f_n(x)=e^{-n^2|x^2-4|}$, $x\in\mathbb{R}$;

4.7. $f_n(x)=x^{2n}$, $x\in[0{,}1]$; 4.8. $f_n(x)=x^n-x^{2n}$, $x\in[0{,}1]$;

4.9. $f_n(x)=e^{-nx^2}$, $x\in\mathbb{R}$; 4.10. $f_n(x)=\cos^n x$, $x\in\mathbb{R}$;

4.11. $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}$, $x\in[0{,}1]$; 4.12. $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, $x\in[0{,}1]$;

4.13. $f_n(x)=x^n-x^{n^2}$, $x\in[0{,}1]$; 4.14. $f_n(x)=e^{n(x-1)}$, $x\in[0{,}1]$;

Тема 4. ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА, ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛЬНОМ ПЕРЕХОДЕ

Определение 8. Числовая измеримая функция $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, заданная на измеримом пространстве (X,Σ,μ) с конечной мерой μ, называется *простой*, если она принимает конечное или счетное число различных значений.

Теорема 12. *Функция $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ является простой тогда и только тогда, когда $X=\coprod\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, где множества A_k измеримы и $f(x)$ принимает постоянное значение y_k на множестве A_k, $k=1,2,\ldots$.*

Теорема 13. *Для любой измеримой функции $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, заданной на измеримом пространстве (X,Σ,μ), существует последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ простых функций, сходящаяся к f равномерно.*

Пусть $f(x)$ – простая функция, принимающая значения $y_1,y_2,\ldots$, $y_i\neq y_j$ при $i\neq j$. Обозначим через $A_k=\{x : f(x)=y_k\}$, тогда $X=\coprod_{k=1}^{\infty} A_k$.

О п р е д е л е н и е 9. Простая функция f называется *суммируемой относительно меры μ (интегрируемой по Лебегу)*, если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k \mu(A_k)$ сходится абсолютно. Если функция f суммируема, то сумма этого ряда называется *интегралом Лебега* функции f, т. е.

$$\int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \mu(A_k).$$

Теорема 14. *Пусть $X = \coprod\limits_{i=1}^{\infty} B_i$ и пусть на каждом B_i функция f принимает значение c_i. Тогда*

$$\int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mu(B_i),$$

причем функция f интегрируема на X тогда и только тогда, когда ряд сходится абсолютно.

С в о й с т в о 7. Пусть $A \subset X$ – измеримое множество. Тогда

$$\int\limits_A \mathrm{d}\mu = \mu(A).$$

С в о й с т в о 8. Пусть f, g — суммируемые функции, тогда для любых скаляров $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ суммируемой является функция $\alpha f + \beta g$ и справедливо равенство

$$\int\limits_X (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}\mu = \alpha \int\limits_X f(x)\mathrm{d}\mu + \beta \int\limits_X g(x)\,\mathrm{d}\mu. \qquad (1.1)$$

С в о й с т в о 9. Ограниченная измеримая функция f суммируема на X.

С в о й с т в о 10. Пусть f – суммируема и удовлетворяет условию $f(x) \geqslant 0$, тогда

$$\int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu \geqslant 0.$$

Свойство 11. Если f_1, f_2 – суммируемые функции и $f_1(x) \geqslant f_2(x)$, то

$$\int\limits_X f_1(x)\,\mathrm{d}\mu \geqslant \int\limits_X f_2(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

Свойство 12. Если f – суммируемая функция и $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то

$$m\mu(X) \leqslant \int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu \leqslant M\mu(X).$$

Свойство 13. Пусть f – измерима, а φ такая суммируемая на X функция, что $|f| \leqslant \varphi$, тогда f также суммируема.

Свойство 14. Если $f_1(x) \leqslant f(x) \leqslant f_2(x)$, где f_1, f_2 – суммируемые, а f – измеримая функция, то f будет суммируемой.

Свойство 15. Пусть f – суммируемая функция, а g – ограниченная измеримая функция такая, что $|g(x)| \leqslant c$. Тогда функция $f \cdot g$ суммируема, причем

$$\Big|\int\limits_X fg\,\mathrm{d}\mu\Big| \leqslant c\int\limits_X |f|\,\mathrm{d}\mu.$$

Свойство 16. Если f суммируема на X, то f суммируема на любом измеримом подмножестве из X и справедливо равенство

$$\int\limits_{A\sqcup B} f(x)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_A f(x)\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_B f(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

Свойство 17. Функции f и $|f|$ суммируемы либо не суммируемы одновременно, причем справедлива оценка

$$\Big|\int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu\Big| \leqslant \int\limits_X |f|\,\mathrm{d}\mu. \tag{1.2}$$

Свойство 18. Если $\mu(A) = 0$, то $\int\limits_A f(x)\,\mathrm{d}\mu = 0$.

Свойство 19. Если $f(x) = 0$ почти всюду на X, то

$$\int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Свойство 20. Если $f(x)$ и $g(x)$ суммируемы и равны почти всюду, то

$$\int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X g(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

Свойство 21. Если $\int\limits_X |f(x)|\,\mathrm{d}\mu = 0$, то $f(x) = 0$ почти всюду на X.

Лемма 3 неравенство Чебышева. *Пусть f – суммируема, причем $f(x) \geqslant 0$, $c > 0$, и пусть $A_c = \{x\colon f(x) \geqslant c\}$. Тогда справедливо неравенство Чебышева*

$$\mu(A_c) \leqslant \frac{1}{c}\int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu. \tag{1.3}$$

Определение 10. Назовем измеримую функцию f на X *существенно ограниченной,* если $\exists c > 0$, что $|f(x)| \leqslant c$ почти всюду на X. Наименьшая из таких констант называется *существенной верхней гранью функции f* и обозначается $ess\sup|f(x)|$.

Теорема 15 (абсолютная непрерывность интеграла Лебега). *Пусть $f(x)$ – суммируемая на множестве A функция. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, что $\left|\int\limits_E f(x)\,\mathrm{d}\mu\right| < \varepsilon$ для всякого измеримого множества $E \subset A$ такого, что $\mu(E) < \delta$.*

Теорема 16 (σ-аддитивность интеграла Лебега). *Пусть f – суммируемая функция на множестве A и пусть $A = \coprod_{k=1}^{\infty} A_k$, где все A_k – измеримые множества. Тогда f суммируема по каждому A_k и*

$$\int\limits_A f(x)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{A_k} f(x)\,\mathrm{d}\mu,$$

причем ряд сходится абсолютно.

Теорема 17. *Если* $A = \coprod\limits_{k=1}^{\infty} A_k$*,* f *суммируема на каждом* A_k *и ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} |f(x)| \, \mathrm{d}\mu$ *сходится, то функция* f *суммируема на* A *и*

$$\int\limits_{A} f(x) \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} f(x) \, \mathrm{d}\mu.$$

Теорема 18 (Лебега о мажорированной сходимости). *Пусть* (X, Σ, μ) *– пространство с конечной мерой. Если последовательность измеримых функций* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *сходится почти всюду к функции* $f(x)$ *и при этом существует суммируемая функция* φ*, такая что для всех* n $|f_n| \leqslant \varphi$*, то* f *– суммируемая функция и*

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{X} f_n(x) \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_{X} \lim_{n \to \infty} f_n(x) \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_{X} f(x) \, \mathrm{d}\mu. \tag{1.4}$$

Теорема 19 (Беппо Леви). *Пусть* (X, Σ, μ) *– пространство с мерой и* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *– монотонно возрастающая последовательность суммируемых функций такая, что существует константа* $C > 0$*, что*

$$\int\limits_{X} f_n(x) \, \mathrm{d}\mu \leqslant C \text{ для всех } n \in \mathbb{N}. \tag{1.5}$$

Тогда почти всюду существует конечный предел

- $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$*;*
- f *– суммируемая функция;*
- $\int\limits_{X} f(x) \, \mathrm{d}\mu = \lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_{X} f_n(x) \, \mathrm{d}\mu.$

Следствие 6. Пусть $\varphi_n(x)$ – последовательность неотрицательных суммируемых функций и пусть числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{X} \varphi_n(x) \, \mathrm{d}\mu \tag{1.6}$$

сходится. Тогда почти всюду на X сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$, т. е.

- $\varphi(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$;
- $\int\limits_X \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_X \varphi_n(x)\,\mathrm{d}\mu$.

Теорема 20 (Фату). *Пусть (X, Σ, μ) – пространство с мерой и $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ – последовательность неотрицательных суммируемых функций на множестве X, обладающая свойствами:*

- *$f_n(x) \to f(x)$ почти всюду на X;*
- *$\int\limits_X f_n(x)\,\mathrm{d}\mu \leqslant C$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

Тогда

- *f суммируема;*
- *$\int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu \leqslant C$.*

Пусть X – пространство с σ-конечной мерой. По определению σ-конечной меры существует неубывающая последовательность измеримых множеств $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$, для которых $\mu(A_n) < +\infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Определение 11. Измеримая функция f, заданная на множестве с σ-конечной мерой μ, называется *суммируемой* на X, если она суммируема на каждом A_n и

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{A_n} f(x)\,\mathrm{d}\mu$$

существует и конечен и не зависит от выбора последовательности A_n. Этот предел называется интегралом Лебега от функции f и обозначается так $\int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu$.

Теорема 21. *Если для функции, заданной на [a,b], существует собственный интеграл Римана $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, то она интегрируема и по Лебегу и ее интеграл Лебега $\int_{[a;b]} f(x)\,\mathrm{d}\mu$ равен интегралу Римана.*

Теорема 22. *Для того, чтобы ограниченная на отрезке* $[a,b]$ *функция, была интегрируема по Риману на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы множестве ее точек разрыва имело меру нуль.*

Теорема 23. *Для абсолютной сходимости несобственного интеграла Римана второго рода* $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^{b-1/n} f(x)\,\mathrm{d}x$ *необходимо и достаточно, чтобы* f *была интегрируемой по Лебегу на* $[a,b]$. *При выполнении любого из этих условий имеет место равенство*

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

Теорема 24. *Для абсолютной сходимости несобственного интеграла Римана ервого рода необходимо и достаточно, чтобы функция* f *была интегрируема по Лебегу на* $[a,+\infty)$. *При выполнении любого из этих условий имеет место равенство*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{[a,+\infty)} f(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 17. Выяснить, интегрируемы ли по Лебегу на отрезке $[0,1]$ следующие функции:

1. $f(x) = (-1)^n n$, если $x \in \left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right[\ n = 1,2,\ldots$;
2. $f(x) = \operatorname{sign}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$, $x \in [0,1]$.

Решение. 1) Функция $f(x)$ является неограниченной, поэтому по Риману она не интегрируема. f измерима, так как принимает счетное число значений на измеримых множествах $A_n = \left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)$, и является простой. Для интегрируемости функции f необходимо, чтобы ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n\mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\mu\left(\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$$

сходился абсолютно. Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ расходится, поэтому f не интегрируема по Лебегу.

2) Рассматриваемая функция $f(x)$ также является простой, принимающей три значения: $1, -1$ и 0. А именно: $f(x)=1$ на множестве $A_1=\coprod\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1},\frac{1}{2k}\right)$, $f(x)=-1$ на $A_2=\coprod\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k},\frac{1}{2k-1}\right)$ и $f(x)=0$ на $A_0=\left\{1,\frac{1}{2},\ldots\frac{1}{k},\ldots\right\}$. Множества A_1,A_2 открыты, а поэтому измеримы. Кроме того

$$\mu(A_1)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+1}\right)=1-\ln 2,$$

$$\mu(A_2)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\ln 2.$$

Счетное множество A_0 также измеримо и $\mu(A_0)=0$. Поэтому

$$\int\limits_{[0;1]}\operatorname{sign}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)d\mu=1\cdot\mu(A_1)-1\cdot\mu(A_2)+0\cdot\mu(A_0)=1-\ln 4.$$

Пример 18. Интегрируема ли по Риману, по Лебегу функция $f(x)$, если да, то вычислить интеграл.

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in[0{,}1]\cap Q,\\ x^3, & x\in[0{,}1]\setminus Q.\end{cases}$$

Решение. Функция $f(x)$ не интегрируема по Риману, так как она разрывна в каждой точке, за исключением точек $x=0$, $x=1$, т. е. мера ее точек разрыва не меньше 1. Действительно, для любого $a\in(0{,}1)$ существуют последовательности $(a_n)\in(0{,}1)\cap Q$ и $(b_n)\in(0{,}1)\setminus Q$ такие, что $a_n\to a$ и $b_n\to a$, но $f(a_n)=a_n^2\to a^2$, а $f(b_n)\to a^3$, при этом $a^2\neq a^3$, т. е. интервал $(0{,}1)$ – подмножество множества точек разрыва функции.

Выясним, интегрируема ли функция по Лебегу. Так как эквивалентные функции интегрируемы или неинтегрируемы одновременно и их интегралы совпадают, заменим f на эквивалентную функцию $g(x)=x^3, x\in[0{,}1]$, ($f\sim g$, так как $\mu\{x: f\neq g\}=\mu([0{,}1]\cap Q)=0$).

Функция $g(x)$ непрерывна и интегрируема по Риману, а значит и по Лебегу и имеет место равенство

$$\int\limits_{[0,1]} f(x)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{0}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$$

Пример 19. Вычислить интеграл Лебега от функции $f(x)$,

$$f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & x \in \left[0,\frac{1}{2}\right[\cap\ CK, \\ \cos \pi x, & x \in \left[\frac{1}{2},1\right] \cap\ CK, \\ x^2, & x \in K, \end{cases}$$

где K – канторово множество, CK – его дополнение.

Решение. Функция $f(x)$ эквивалентна на отрезке $[0,\,1]$ функции $g(x)$

$$g(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & x \in \left[0,\frac{1}{2}\right[\,, \\ \cos \pi x, & x \in \left[\frac{1}{2},1\right]. \end{cases}$$

так как $\mu\,\{x : f \neq g\} = \mu(K) = 0$. Поэтому

$$\int\limits_{[0,1]} f(x) d\mu = \int\limits_{[0;1]} g(x)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{0}^{1} g(x) dx = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \sin \pi x\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \cos \pi x\,\mathrm{d}x = 0.$$

Пример 20. Вычислить интеграл Лебега от функции $f(x)$, заданной на отрезке $[0;1]$, если $f(x) = 10$ в точках канторова множества, а на смежных интервалах графиком функции служат треугольники, опирающиеся на эти интервалы, как на основания, высоты 1.

Решение. Воспользуемся аддитивностью интеграла Лебега и представим интеграл в виде суммы двух интегралов: первый по канторову множеству, он будет равен нулю, так как $\mu(K) = 0$, а второй – по его дополнению.

$$[0,1] \setminus K = \coprod_{k=1}^{\infty} G_k, \quad G_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right), \quad \mu(G_1) = \frac{1}{3},$$

$$G_2=\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)\bigcup\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right),\quad \mu(G_2)=2\cdot\frac{1}{3^2},$$

и так далее. Следовательно,

$$\int\limits_{[0;1]} f(x)\,\mathrm{d}\mu=\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{G_k} f(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

На каждом G_k функция непрерывна и поэтому интегрируема по Риману. Интеграл Римана равен площади треугольника, значит,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{G_k} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-1}}{3^k}=\frac{1}{2}.$$

Пример 21. При каких значениях параметров α и β функция $f(x)=x^{\alpha}\cdot\sin x^{\beta}$, $x\in(0,1)$,

- интегрируема по Лебегу;
- интегрируема по Риману в несобственном смысле.

Решение. Неограниченная на отрезке $[a,b]$ функция интегрируема по Лебегу в том случае, когда она абсолютно интегрируема по Риману в несобственном смысле.

1 случай: $\beta>0$.

$$\int_0^1 x^{\alpha}\sin x^{\beta}\,\mathrm{d}x=\left[\begin{array}{l} x^{\beta}=t, x=t^{1/\beta}\\ \mathrm{d}x=\frac{1}{\beta}t^{1/\beta-1}\,\mathrm{d}t\end{array}\right]_0^1=$$

$$=\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{\beta}}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot t^{\frac{1}{\beta}-1}\cdot\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\beta}\int_0^1 t^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}\sin t\,\mathrm{d}t.$$

Данный интеграл сходится абсолютно, если $\alpha>-1-\beta$. Действительно, подынтегральная функция по модулю эквивалентна $\frac{t}{t^{1-\frac{\alpha+1}{\beta}}}=\frac{1}{t^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}}\sin\frac{1}{t^{\gamma}}$, следовательно $\gamma<1$, т. е. $-\frac{\alpha+1}{\beta}<1$.

Итак, при $\beta>0$ функция интегрируема по Лебегу при $\alpha>-1-\beta$.

Для интегрируемости по Риману необходимо, чтобы интеграл сходился условно. Используя признак Дирихле, получаем $\frac{\alpha+1}{\beta}-1>0$, следовательно $\alpha>-1-\beta$.

2 случай: $\beta < 0$.

$$\int\limits_0^1 x^\alpha \sin x^\beta \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{\beta} \int\limits_1^\infty t^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1} \sin t \, \mathrm{d}t = -\frac{1}{\beta} \int_1^\infty \frac{\sin t}{t^{1-\frac{\alpha+1}{\beta}}} \, \mathrm{d}t.$$

Интеграл сходится абсолютно, если $-\frac{\alpha+1}{\beta} + 1 > 1$, т. е. $\alpha > -1$. Следовательно, при $\beta < 0$ функция интегрируема по Лебегу, если $\alpha > -1$. Для интегрируемости по Риману необходимо, чтобы $\frac{\alpha+1}{\beta} - 1 < 0$, следовательно $\alpha > -1 + \beta$.

Итак, функция $f(x) = x^\alpha \sin x^\beta$ интегрируема по Лебегу при $\alpha > -1 - \beta$ ($\beta > 0$) и $\alpha > -1$ ($\beta < 0$); по Риману при $\alpha > -1 - |\beta|$.

Пример 22. Вычислить интеграл Лебега на интервале $(0, +\infty)$ от функции $f(x) = e^{-[x]}$, где $[\cdot]$ – целая часть.

Решение. Интервал $(0, +\infty)$ – пространство с σ-конечной мерой, так как $(0, +\infty) = \coprod_{k=0}^{\infty} [k, k+1)$ и $\mu([k, k+1)) = 1 < +\infty$. На каждом полуинтервале $[k, k+1)$ функция $f(x)$ является простой, так как $f(x) = e^{-k}$ при $x \in [k, k+1)$.

$$\int\limits_{(0,+\infty)} f(x) \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} \mu([k,k+1)) = \frac{1}{1-\frac{1}{e}} = \frac{e}{e-1}.$$

Пример 23. Исходя из определения интеграла Лебега, вычислить

$$\int\limits_{[0,1]} x \chi_{\mathbb{R}\setminus Q}(x) \, \mathrm{d}\mu,$$

где $\chi_{\mathbb{R}\setminus Q}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R}\setminus Q, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \bigcap Q. \end{cases}$ – характеристическая функция множества $\mathbb{R}\setminus Q$.

Решение. Построим для измеримой функции $f(x) = x\chi_{\mathbb{R}\setminus Q}(x)$, $x \in [0; 1]$ последовательность простых интегрируемых функций, равномерно сходящуюся на $[0, 1]$ к f. А именно, для $n \in \mathbb{N}$ положим $f_n(x) = \frac{k}{n}$ на множестве $A_k = \left\{x \in [0,1] : \frac{k}{n} \leqslant f(x) < \frac{k+1}{n}\right\}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Тогда последовательность $f_n(x)$ является искомой. Кроме того, поскольку

$\bigcup_{k=0}^{n-1} A_k = [0{,}1]$, то $|f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{n}$ для $\forall x \in [0{,}1]$. Следовательно, последовательность равномерно сходится к f.

$$\int\limits_{[0;1]} f(x)\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[0;1]} f_n(x)\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n}\,\mu(A_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)n}{2n^2} = \frac{1}{2},$$

так как $\mu(A_k) = \mu\left\{x \in [0{,}1] : \frac{k}{n} \leqslant x < \frac{k+1}{n}\right\} = \frac{1}{n}$ и поскольку множество Q рациональных чисел имеет меру нуль.

Пример 24. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \sin\frac{|x|}{n} \cdot (1 - x^4)^{-1}\,\mathrm{d}\mu.$$

Решение. Рассмотрим функциональную последовательность

$$f_n(x) = n \sin\frac{|x|}{n} (1 + x^4)^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}.$$

Для каждого $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n \sin\frac{|x|}{n}}{1 + x^4} = \frac{|x|}{1 + x^4} = f(x).$$

Кроме того, эта функциональная последовательность имеет мажоранту

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{|x|}{1 + x^4} = g(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Неотрицательная функция g интегрируема по Риману в несобственном смысле, поэтому она интегрируема по Лебегу. Следовательно, по теореме Лебега f также интегрируема по Лебегу на $\mathbb{R}$ и справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} n \sin\frac{|x|}{n} (1 + x^4)^{-1}\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|x|}{1 + x^4}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg}(x^2)\big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Задание 1. Выяснить, интегрируема ли по Риману, по Лебегу на отрезке $[0;1]$ функция f, если да, то вычислить интеграл Лебега.

1.1. $f(x) = \begin{cases} 2^n, & x \in \left[\frac{1}{3^{n+1}}, \frac{1}{3^n}\right[\setminus K, \quad n \geqslant 0, \\ e^x, & x \in K. \end{cases}$

1.2. $f(x) = \begin{cases} 3^n, & x \in \left[\frac{1}{5^{n+1}}, \frac{1}{5^n}\right) \setminus K, \quad n \geqslant 0, \\ \cos x, & x \in K. \end{cases}$

1.3. $f(x) = \begin{cases} n, & x \in \left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right) \setminus K, \quad n \geqslant 0, \\ \operatorname{arctg} x, & x \in K. \end{cases}$

1.4. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{n}, & x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right) \setminus K, \quad n \geqslant 1, \\ x \cos x, & x \in K. \end{cases}$

1.5. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[\frac{1}{(n+1)^2}, \frac{1}{n^2}\right) \setminus K, \quad n \geqslant 1, \\ x \sin x, & x \in K. \end{cases}$

1.6. $f(x) = \begin{cases} \text{sign } \cos \pi x, & x \in [0{,}1] \setminus \mathbb{Q}, \\ e^{\sin x}, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$

1.7. $f(x) = \begin{cases} \text{sign } \sin \pi x, & x \in [0{,}1] \setminus \mathbb{Q}, \\ e^{\sin x}, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$

1.8. $f(x) = \begin{cases} (-1)^n n, & x \in \left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right) \setminus K, \quad n \geqslant 0, \\ \ln(x^2+1), & x \in K. \end{cases}$

1.9. $f(x) = \begin{cases} (-1)^n n^2, & x \in \left[\frac{1}{6^{n+1}}, \frac{1}{6^n}\right) \setminus K, \quad n \geqslant 0, \\ \ln(x^2+1), & x \in K. \end{cases}$

1.10. $f(x) = \begin{cases} n2^n, & x \in \left[\frac{1}{2^{2n+1}}, \frac{1}{2^{2n}}\right) \setminus K, \quad n \geqslant 0, \\ \cos x, & x \in K, \\ 0, & x \in [0{,}1] \setminus \coprod_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2^{2n+1}}, \frac{1}{2^n}\right). \end{cases}$

1.11. $f(x) = \begin{cases} \text{sign } \cos \frac{\pi}{x}, & x \in (0{,}1] \setminus \mathbb{Q}, \\ e^{\sin x}, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$

1.12. $f(x) = \begin{cases} n3^n, & x \in \left[\frac{1}{5^{n+1}}, \frac{1}{5^n}\right) \setminus K, \quad n \geqslant 0, \\ e^{\sin x} + x, & x \in K. \end{cases}$

1.13. $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sign}\sin\frac{\pi}{x}, & x\in(0{,}1]\backslash\mathbb{Q}, \\ e^{\sin x}, & x\in\mathbb{Q}. \end{cases}$

1.14. $f(x)=\begin{cases} (-1)^n n, & x\in\left[\frac{1}{3^{n+1}},\frac{1}{3^n}\right)\backslash K, \quad n\geqslant 0, \\ e^{\arcsin x}, & x\in K. \end{cases}$

Задание 2. Для заданной функции f на отрезке $[-1;2]$

1. выяснить, существует ли для нее собственный или несобственный интеграл Римана;
2. вычислить интеграл Лебега, если он существует, воспользовавшись подходящей заменой на эквивалентную, имеющую меньшее множество точек разрыва.

2.1. $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in\left[1,\frac{1}{2}\right]\cap K, \\ x^3, & x\in\left(\frac{1}{2},2\right]\cap Q, \\ x, & x\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]\backslash K, \\ \frac{1}{x}, & x\in\left(\frac{1}{2},2\right]\backslash Q. \end{cases}$

2.2. $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in\left[-1,\frac{1}{4}\right]\cap K, \\ x^3+3, & x\in\left]\frac{1}{4},2\right]\backslash Q, \\ \ln(x^2+1), & x\in\left(\frac{1}{4},2\right]\cap Q, \\ x^3, & x\in\left[-1,\frac{1}{4}\right]\backslash K. \end{cases}$

2.3. $f(x)=\begin{cases} 2^x, & x\in[-1,0[\backslash Q, \\ \ln|x|, & x\in[-1,0[\cap Q, \\ \sin x, & x\in[0,2]\cap K, \\ x, & x\in[0,2]\backslash K. \end{cases}$

2.4. $f(x)=\begin{cases} e^{\sin x}, & x\in[-1{,}0)\cap Q \\ x^2+1, & x\in[-1{,}0)\backslash Q, \\ \operatorname{arctg} x, & x\in[0{,}1]\cap K, \\ x, & x\in[0{,}1]\backslash K\cup[1{,}2]. \end{cases}$

2.5. $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x\in[-1,2]\cap Q, \\ \frac{1}{x}, & x\in[-1,2]\backslash Q. \end{cases}$

2.6. $f(x)=\begin{cases}\sin^2 x, & \cos x\in[-1,2]\cap Q,\\ \sin^4 x, & \cos x\in[-1,2]\backslash Q.\end{cases}$

2.7. $f(x)=\begin{cases}\sin x, & \cos x\in[-1,2]\cap Q,\\ \sin^2 x, & \cos x\in[-1,2]\backslash Q.\end{cases}$

2.8. $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\in[-1{,}2]\backslash Q,\\ x^2+1, & \cos x\in[-1{,}2]\cap Q.\end{cases}$

2.9. $f(x)=\begin{cases}x^\alpha\sin x^\beta, & x\in[0{,}1]\backslash Q,\\ x^2+1, & x\in[0{,}1]\cap Q,\\ e^x, x\in[-1{,}0]\cup]1{,}2].\end{cases}$

2.10. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\in([0{,}2]\cap Q)\backslash\{0\},\\ 0, & x=0,\\ \ln x, & x\in[-1{,}0]\cup(0{,}2)\backslash Q.\end{cases}$

2.11. $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\cap K,\\ \ln x, & x\in\left(\frac{1}{2},2\right)\cap K,\\ x^3, & x\in\left(\frac{1}{2},2\right]\backslash K,\\ x^4+1, & x\in[-1{,}0)\cup\left(\left(0,\frac{1}{2}\right)\backslash K\right).\end{cases}$

2.12. $f(x)=\begin{cases}\sin^3 x, & x\in[-1,2]\bigcap Q,\\ \sin x+\cos x, & x\in[-1,2]\backslash Q.\end{cases}$

2.13. $f(x)=\begin{cases}e^{\sin x}, & x\in[-1{,}2]\cap Q,\\ \mathrm{tg}(x+4), & x\in[-1{,}2]\backslash Q.\end{cases}$

2.14. $f(x)=\begin{cases}e^{x^2}, & x\in[-1,2]\cap Q,\\ \frac{1}{x+4}, & x\in[-1,2]\backslash Q.\end{cases}$

Задание 3. Для заданной функции f на промежутке $[0;\infty)$

1. выяснить, существует ли для нее несобственный интеграл Римана;
2. вычислить интеграл Лебега, если он существует.

3.1. $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k}\chi_{[k,k+1]}(x)$, $x\in\mathbb{R}$;

3.2. $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k^2}}{k}\chi_{[k^2,(k+1)^2]}(x)$, $x\in\mathbb{R}$;

3.3. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^2}\, \chi_{[k,k+1]}(x),\ x \in \mathbb{R};$

3.4. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin k}{k}\, \chi_{[k,k+1]}(x),\ x \in \mathbb{R};$

3.5. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos k}{k^2}\, \chi_{[k,k+1]}(x),\ x \in \mathbb{R};$

3.6. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos k}{k}\, \chi_{[k^2,(k+1)^2]}(x),\ x \in \mathbb{R};$

3.7. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \cos k\, \chi_{[\sqrt{k},\sqrt{k+1}]}(x),\ x \in \mathbb{R};$

3.8. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin k\, \chi_{[\sqrt{k},\sqrt{k+1}]}(x),\ x \in \mathbb{R};$

3.9.
3.10.
3.11.
3.12.
3.13.
3.14.

Задание 4. Найти предел, если он существует.

4.1. $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,1]} e^{-nx^2}\, d\mu;$ 4.2. $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \dfrac{\sin^n x}{1+x^2}\, d\mu;$

4.3. $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,1]} e^{-\frac{x^2}{n}}\, d\mu;$ 4.4. $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,\infty)} n\left(e^{\frac{x}{n}} - 1\right) \dfrac{1}{1+x^4}\, d\mu;$

4.5. $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,1]} ne^{-\frac{x^2}{n}}\, d\mu;$ 4.6. $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,\infty)} n^2\left(e^{\frac{x}{n^2}} - 1\right) \dfrac{1}{1+x^2}\, d\mu;$

4.7. $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,1]} n \sin \frac{|x|}{n}\, \dfrac{1}{1+x^2}\, d\mu;$ 4.8. $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,\infty)} n \cos \frac{|x|}{n}\, \dfrac{1}{1+x^2}\, d\mu;$

4.9.
4.10.
4.11.
4.12.
4.13.
4.14.