МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Функциональный анализ

Лабораторная работа №3

(Лебеговское продолжение меры.)

Студентки 3 курса 3 группы

Работа сдана 15.11.2013 г.

Зачтена _______________ 2013 г.

____

Преподаватель

Дайняк Виктор Владимирович

Доцент кафедры МФ

канд. физ.-мат. наук

Минск, 2013 г.

Задание 1

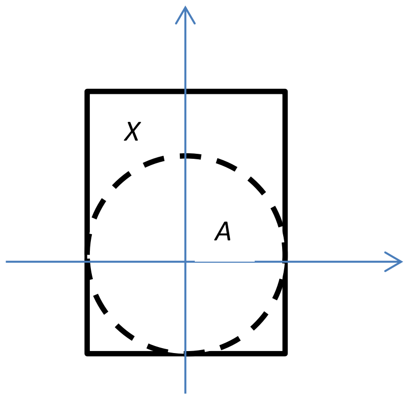
Постановка задачи

Пусть $X = [-1,1) \times [-1,2)$, $S = \{[a,b) \times [-1,2) \subset X\}$, $m(A_s) = 3(b-a)$. Найти внешнюю и внутреннюю меры множеств и выяснить, измеримы ли они.

$$A = \{\,(x,y)\ \in X : x^2 + y^2 < 1\}$$

Решение

По определению внешняя мера A:



$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, A_k \subset S} \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$$

где любой элемент полукольца S имеет вид $A_k = [a_k, b_k) \times [-1,2)$, а значит полностью определяется своей проекцией на ось OX. Чтобы покрыть множество A элементами A_k, необходимо и достаточно покрыть проекцию этого множества на ось OX полуинтервалами $[a_k, b_k)$. Поэтому внешняя мера множества A в данном случае совпадает с внешней мерой проекции этого множества на ось OX.

$$\mu^*(A) = m(X) = 3(1+1) = 6$$

$$\mu^*(X \backslash A) = m(X) = 3(1+1) = 6$$

$$m(X) = 3(1+1) = 6$$

$$\mu^*(A) + \mu^*(X \backslash A) = 6 + 6 = 12\ \neq m(x)$$

Следовательно, множество A неизмеримо.

Из приведенных выше рассуждений видно, что множество $B \subset X$ будет измеримым тогда и только тогда, когда оно будет иметь вид $B = \alpha \times [-1,2)$, где $\alpha \subset [-1,1)$ – измеримо по Лебегу.

Задание 2

Постановка задачи

Описать структуру множества точек отрезка $[0,1]$, состоящего из чисел, у которых в десятичной записи цифра 2 встречается раньше, чем цифра 3. Найти его меру.

Решение

Рассмотрим множество $A^* = \coprod_k A_k$.

$$A_1 = [0{,}23;\ 0{,}24)$$

$$A_{20} = [0{,}023; 0{,}024)$$

$$A_{21} = [0{,}123; 0{,}124)$$

…

$$A_{k0} = [0{,}0..023;\ 0{,}0..024)$$

Таким образом, мы имеем 9 полуинтервалов длиной 0.1^2, 9^2 полуинтервалов длиной 0.1^3, и так далее.

$$\mu(A^*) = \sum_{k=1}^{\infty}(0,1)^k \cdot 9^{k-1} = 0.1\sum_{k=1}^{\infty}(0,9)^k = 1$$

$$m(X) = 1 \qquad\qquad \mu(X\backslash A) = 0$$

Задание 3

Постановка задачи

Доказать, что множество $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}[n^n, n^n + \frac{1}{\ln(n+1)}] \setminus Q$, где Q – множество рациональных чисел, измеримо и найти его меру.

Решение

Рассмотрим множество $A^* = \bigcup_{n=1}^{\infty}[n^n, n^n + \frac{1}{\ln(n+1)}]$. Оно борелево, а значит измеримо. Множество рациональных чисел счетно и $m(Q) = 0$, а значит $\mu(A) = \mu(A^*)$ и оно тоже измеримо.

Множества $A_n^* = [n^n, n^n + \frac{1}{\ln(n+1)}]$ таковы, что $A_i^* \cap A_j^* = \emptyset\ \forall i \neq j$. А значит согласно свойству σ-аддитивной меры

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(\left[n^n, n^n + \frac{1}{\ln(n+1)}\right]\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)} = \infty$$

Задание 4

Постановка задачи

Доказать, что множество точек единичного квадрата на плоскости, состоящее из точек, декартовы и полярные координаты которых иррациональны, измеримо и найти его меру.

Решение

$$A = \{\, (x,y): x, y \in [0,1]\backslash Q, x^2 + y^2 \notin Q, argtg(\frac{y}{x}) \notin Q\}$$

Рассмотрим множество $A^* = \{\, (x,y): x, y \in [0,1]\backslash Q\}$. Не трудно видеть, что $A = A^*\{(x,y): x^2 + y^2 \in Q \mid arctg\left(\frac{y}{x}\right) \in Q\}$.

$m(A^*) = 1$, так как $m(Q) = 0$. А тогда

$$\mu(A) = 1, \qquad \mu(A^*\backslash A) = 0$$

А значит множество A измеримо, а $\mu(A) = 1$.