3.14. $\dfrac{f_1(x)\cdot f_2(x)}{1+\min(f_3(x), f_4(x))}$.

Задание 4. Сходится ли каждая из указанных последовательностей по мере, почти всюду:

4.1. $f_n(x) = \sin^n x$, $x \in \mathbb{R}$; 4.2. $f_n(x) = x\sin^n x$, $x \in \mathbb{R}$;

4.3. $f_n(x) = \dfrac{n^2\cos^2 x}{1+n^2\cos^2 x}$, $x \in \mathbb{R}$; 4.4. $f_n(x) = \dfrac{n^4\sin^2 x}{1+n^4\sin^4 x}$, $x \in \mathbb{R}$;

4.5. $f_n(x) = \dfrac{\sin^n x}{2+\sin^n x}$, $x \in \mathbb{R}$; 4.6. $f_n(x) = e^{-n^2|x^2-4|}$, $x \in \mathbb{R}$;

4.7. $f_n(x) = x^{2n}$, $x \in [0{,}1]$; 4.8. $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $x \in [0{,}1]$;

4.9. $f_n(x) = e^{-nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$; 4.10. $f_n(x) = \cos^n x$, $x \in \mathbb{R}$;

4.11. $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$, $x \in [0{,}1]$; 4.12. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, $x \in [0{,}1]$;

4.13. $f_n(x) = x^n - x^{n^2}$, $x \in [0{,}1]$; 4.14. $f_n(x) = e^{n(x-1)}$, $x \in [0{,}1]$;

Тема 4. ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА, ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛЬНОМ ПЕРЕХОДЕ

Определение 8. Числовая измеримая функция $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, заданная на измеримом пространстве (X, Σ, μ) с конечной мерой μ, называется *простой*, если она принимает конечное или счетное число различных значений.

Теорема 12. *Функция $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ является простой тогда и только тогда, когда $X = \coprod\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, где множества A_k измеримы и $f(x)$ принимает постоянное значение y_k на множестве A_k, $k = 1, 2, \ldots$.*

Теорема 13. *Для любой измеримой функции $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, заданной на измеримом пространстве (X, Σ, μ), существует последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ простых функций, сходящаяся к f равномерно.*

Пусть $f(x)$ – простая функция, принимающая значения $y_1, y_2, \ldots$, $y_i \neq y_j$ при $i \neq j$. Обозначим через $A_k = \{x : f(x) = y_k\}$, тогда $X = \coprod_{k=1}^{\infty} A_k$.

Определение 9. Простая функция f называется *суммируемой относительно меры μ (интегрируемой по Лебегу)*, если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k \mu(A_k)$ сходится абсолютно. Если функция f суммируема, то сумма этого ряда называется *интегралом Лебега* функции f, т. е.

$$\int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \mu(A_k).$$

Теорема 14. *Пусть $X = \coprod\limits_{i=1}^{\infty} B_i$ и пусть на каждом B_i функция f принимает значение c_i. Тогда*

$$\int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mu(B_i),$$

причем функция f интегрируема на X тогда и только тогда, когда ряд сходится абсолютно.

Свойство 7. Пусть $A \subset X$ – измеримое множество. Тогда

$$\int\limits_A \mathrm{d}\mu = \mu(A).$$

Свойство 8. Пусть f, g — суммируемые функции, тогда для любых скаляров $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ суммируемой является функция $\alpha f + \beta g$ и справедливо равенство

$$\int\limits_X (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}\mu = \alpha \int\limits_X f(x)\mathrm{d}\mu + \beta \int\limits_X g(x)\,\mathrm{d}\mu. \tag{1.1}$$

Свойство 9. Ограниченная измеримая функция f суммируема на X.

Свойство 10. Пусть f – суммируема и удовлетворяет условию $f(x) \geqslant 0$, тогда

$$\int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu \geqslant 0.$$

Свойство 11. Если f_1, f_2 – суммируемые функции и $f_1(x) \geqslant f_2(x)$, то

$$\int\limits_X f_1(x)\,\mathrm{d}\mu \geqslant \int\limits_X f_2(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

Свойство 12. Если f – суммируемая функция и $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то

$$m\mu(X) \leqslant \int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu \leqslant M\mu(X).$$

Свойство 13. Пусть f – измерима, а φ такая суммируемая на X функция, что $|f| \leqslant \varphi$, тогда f также суммируема.

Свойство 14. Если $f_1(x) \leqslant f(x) \leqslant f_2(x)$, где f_1, f_2 – суммируемые, а f – измеримая функция, то f будет суммируемой.

Свойство 15. Пусть f – суммируемая функция, а g – ограниченная измеримая функция такая, что $|g(x)| \leqslant c$. Тогда функция $f \cdot g$ суммируема, причем

$$\Bigl|\int\limits_X fg\,\mathrm{d}\mu\Bigr| \leqslant c\int\limits_X |f|\,\mathrm{d}\mu.$$

Свойство 16. Если f суммируема на X, то f суммируема на любом измеримом подмножестве из X и справедливо равенство

$$\int\limits_{A\sqcup B} f(x)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_A f(x)\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_B f(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

Свойство 17. Функции f и $|f|$ суммируемы либо не суммируемы одновременно, причем справедлива оценка

$$\Bigl|\int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu\Bigr| \leqslant \int\limits_X |f|\,\mathrm{d}\mu. \tag{1.2}$$

Свойство 18. Если $\mu(A) = 0$, то $\int\limits_A f(x)\,\mathrm{d}\mu = 0$.

Свойство 19. Если $f(x)=0$ почти всюду на X, то

$$\int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Свойство 20. Если $f(x)$ и $g(x)$ суммируемы и равны почти всюду, то

$$\int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X g(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

Свойство 21. Если $\int\limits_X |f(x)|\,\mathrm{d}\mu = 0$, то $f(x)=0$ почти всюду на X.

Лемма 3 неравенство Чебышева. *Пусть f – суммируема, причем $f(x) \geqslant 0$, $c > 0$, и пусть $A_c = \{x\colon f(x) \geqslant c\}$. Тогда справедливо неравенство Чебышева*

$$\mu(A_c) \leqslant \frac{1}{c}\int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu. \tag{1.3}$$

Определение 10. Назовем измеримую функцию f на X *существенно ограниченной,* если $\exists c > 0$, что $|f(x)| \leqslant c$ почти всюду на X. Наименьшая из таких констант называется *существенной верхней гранью функции f* и обозначается $ess\sup|f(x)|$.

Теорема 15 (абсолютная непрерывность интеграла Лебега). *Пусть $f(x)$ – суммируемая на множестве A функция. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, что $\left|\int\limits_E f(x)\,\mathrm{d}\mu\right| < \varepsilon$ для всякого измеримого множества $E \subset A$ такого, что $\mu(E) < \delta$.*

Теорема 16 (σ-аддитивность интеграла Лебега). *Пусть f – суммируемая функция на множестве A и пусть $A = \coprod_{k=1}^{\infty} A_k$, где все A_k – измеримые множества. Тогда f суммируема по каждому A_k и*

$$\int\limits_A f(x)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{A_k} f(x)\,\mathrm{d}\mu,$$

причем ряд сходится абсолютно.

Теорема 17. *Если* $A = \coprod\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, f *суммируема на каждом* A_k *и ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} |f(x)|\,\mathrm{d}\mu$ *сходится, то функция* f *суммируема на* A *и*

$$\int\limits_A f(x)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} f(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

Теорема 18 (Лебега о мажорированной сходимости). *Пусть* (X, Σ, μ) *– пространство с конечной мерой. Если последовательность измеримых функций* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *сходится почти всюду к функции* $f(x)$ *и при этом существует суммируемая функция* φ, *такая что для всех* n $|f_n| \leqslant \varphi$, *то* f *– суммируемая функция и*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu. \tag{1.4}$$

Теорема 19 (Беппо Леви). *Пусть* (X, Σ, μ) *– пространство с мерой и* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *– монотонно возрастающая последовательность суммируемых функций такая, что существует константа* $C > 0$, *что*

$$\int\limits_X f_n(x)\,\mathrm{d}\mu \leqslant C \text{ для всех } n \in \mathbb{N}. \tag{1.5}$$

Тогда почти всюду существует конечный предел

- $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$;
- f *– суммируемая функция;*
- $\int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\,\mathrm{d}\mu$.

Следствие 6. Пусть $\varphi_n(x)$ – последовательность неотрицательных суммируемых функций и пусть числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X \varphi_n(x)\,\mathrm{d}\mu \tag{1.6}$$

сходится. Тогда почти всюду на X сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$, т. е.

- $\varphi(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$;
- $\int\limits_X \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_X \varphi_n(x)\,\mathrm{d}\mu$.

Теорема 20 (Фату). *Пусть (X, Σ, μ) – пространство с мерой и $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ – последовательность неотрицательных суммируемых функций на множестве X, обладающая свойствами:*

- *$f_n(x) \to f(x)$ почти всюду на X;*
- *$\int\limits_X f_n(x)\,\mathrm{d}\mu \leqslant C$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

Тогда

- *f суммируема;*
- *$\int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu \leqslant C$.*

Пусть X – пространство с σ-конечной мерой. По определению σ-конечной меры существует неубывающая последовательность измеримых множеств $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$, для которых $\mu(A_n) < +\infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

О п р е д е л е н и е 11. Измеримая функция f, заданная на множестве с σ-конечной мерой μ, называется *суммируемой* на X, если она суммируема на каждом A_n и

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{A_n} f(x)\,\mathrm{d}\mu$$

существует и конечен и не зависит от выбора последовательности A_n. Этот предел называется интегралом Лебега от функции f и обозначается так $\int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu$.

Теорема 21. *Если для функции, заданной на [a,b], существует собственный интеграл Римана $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, то она интегрируема и по Лебегу и ее интеграл Лебега $\int_{[a;b]} f(x)\,\mathrm{d}\mu$ равен интегралу Римана.*

Теорема 22. *Для того, чтобы ограниченная на отрезке* $[a,b]$ *функция, была интегрируема по Риману на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы множестве ее точек разрыва имело меру нуль.*

Теорема 23. *Для абсолютной сходимости несобственного интеграла Римана второго рода* $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^{b-1/n} f(x)\,\mathrm{d}x$ *необходимо и достаточно, чтобы* f *была интегрируемой по Лебегу на* $[a,b]$*. При выполнении любого из этих условий имеет место равенство*

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

Теорема 24. *Для абсолютной сходимости несобственного интеграла Римана ервого рода необходимо и достаточно, чтобы функция* f *была интегрируема по Лебегу на* $[a,+\infty)$*. При выполнении любого из этих условий имеет место равенство*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{[a,+\infty)} f(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 17. Выяснить, интегрируемы ли по Лебегу на отрезке $[0,1]$ следующие функции:

1. $f(x) = (-1)^n n$, если $x \in \left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right[$ $n = 1,2,\ldots;$
2. $f(x) = \operatorname{sign}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$, $x \in [0,1]$.

Решение. 1) Функция $f(x)$ является неограниченной, поэтому по Риману она не интегрируема. f измерима, так как принимает счетное число значений на измеримых множествах $A_n = \left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)$, и является простой. Для интегрируемости функции f необходимо, чтобы ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n\mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\mu\left(\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$$