МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Функциональный анализ

Лабораторная работа №1

(Отображения в нормированных векторных пространствах)

Студентки 3 курса 3 группы

Преподаватель

Дайняк Виктор Владимирович

Доцент кафедры МФ

канд. физ.-мат. наук

Работа сдана 15.11.2013 г.

Зачтена ________________ 2013 г.

____

Минск, 2013 г.

Задание №1

Постановка задачи

Определите, при каких $\lambda \neq 0$ для следующего интегрального уравнения Фредгольма 2-ого рода в простарнстве $C[0,1]$, $L_2[0,1]$ можно применить метод сжимающих отображений. При $\lambda = \lambda_0$ найти приближенное решение методом последовательных приближений с точностью $\varepsilon = 0{,}001$ и сравнить его с точным решением.

$$x(t) = \lambda \int_0^1 ts^2 x(s)ds + 1$$

Решение

Приведем уравнение к виду $x = F(x)$, тогда искомое решение является неподвижной точкой отображения F. Поскольку оба пространства $C[0,1]$ и $L_2[0,1]$ являются полными, то нужно показать, что отображение F сжимающее на соответствующих прострнствах.

Пусть

$$F(x) = \lambda \int_0^1 ts^2 x(s)ds + 1$$

Рассмотрим пространство $C[0,1]$.

F задает отображения пространства $C[0,1]$ на себя, так как состоит из суммы двух непрерывных функций.

Покажем, что F – сжимающее, то есть $\exists \alpha: 0 \le \alpha < 1$, такая что для всех $x, y \in C[0,1]$ выполняется $\|F(x) - F(y)\|_{C[0,1]} \le \alpha \|x - y\|_{C[0,1]}$.

$$\|F(x) - F(y)\|_{C[0,1]} = \max_{0\le t\le 1} |F(x) - F(y)| = \max_{0\le t\le 1} \left|\lambda \int_0^1 ts^2(x(s) - y(s))ds\right| \le |\lambda| \int_0^1 s^2 \max_{0\le t\le 1} |x(s) - y(s)|\, ds$$
$$\le \frac{|\lambda|}{3} \|x - y\|$$

Таким образом $\alpha = \frac{|\lambda|}{3}$ является коэффициентом сжатия, и при $|\lambda| < 3$ к уравнению можно применить принцип сжимающих отображений и оно будет иметь единственное решение.

Рассмотри приближенное решение уравнения при $\lambda = \frac{1}{2}$. Оценим количество приближений по формуле:

$$\|x_n - a\| \le \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|x_0 - x_1\|$$

Пусть $x_0(t) = 0$. Тогда $x_1(t) = F(x_0) = \frac{1}{2}\int_0^1 ts^2 x_0(s)ds + 1 = 1$, $\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, а $\|x_0 - x_1\| = 1$.

$$\frac{1}{6^n} \cdot \frac{6}{5} < 0.001$$

$$n \ge 4$$

Вычислим приближенные значения до $n = 4$, так как x_4 уже является приближенным решением с точностью $\varepsilon = 0.001$.

$$x_2(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 ts^2 ds + 1 = \frac{t}{6} + 1$$

$$x_3(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 ts^2(\frac{t}{6}+1)ds + 1 = \frac{3}{16}t + 1$$

$$x_4(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 ts^2(\frac{3}{16}t+1)ds + 1 = \frac{73}{384}t + 1$$

Таким образом, приближенное решение исходного уравнения имеет вид:

$$x_4(t) = \frac{73}{384}t + 1$$

Так как исходное уравнение представляет собой интегральное уравнение с вырожденным ядром, то можно вычислить его точное решение. Обозначим через $C = \int_0^1 s^2 x(s)ds$. Тогда $x(t) = \frac{1}{2}Ct + 1$. Подставляя его в исходное уравнение получаем:

$$C = \int_0^1 s^2(\frac{1}{2}Cs + 1)ds$$

$$C = \frac{8}{21}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{21}t + 1 = \frac{4}{21}t + 1$$

Вычислим $\|x_4 - x\|$:

$$\|x_4 - x\| = \max_{0\le t\le 1}|x_4 - x| = \left|\frac{73}{384} - \frac{4}{21}\right| = 3.72\cdot 10^{-4} < 0.001$$

Рассмотрим пространство $L_2[0,1]$.

Оценим ядро $K(t,s) = \lambda ts^2$:

$$\int_0^1\int_0^1 |K(t,s)|^2 dsdt = |\lambda|^2\int_0^1\int_0^1 t^2 {s^4}^2 dsdt = |\lambda|^2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} = \frac{|\lambda|^2}{15} < +\infty$$

Таким образом, F является отображением $L_2[0,1]$ на себя и является сжимающим, если $|\lambda| < \sqrt{15}$, поэтому к данному уравнению, при $\lambda = \frac{1}{2}$ можно применить принцип сжимающих отображений. В этом случае понадобится число итераций, определяемое соотношением:

$$\frac{1}{\left(2\sqrt{15}\right)^n\cdot(1 - \frac{1}{2\sqrt{15}})} < 0.001$$

$$n \ge 4$$

$$\|x_4 - x\| = \left(\int_0^1\left(\frac{73}{384} - \frac{4}{21}\right)^2 t^2 dt)\right)^{\frac{1}{2}} = 3.72\cdot 10^{-4}\left(\int_0^1 t^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = 3.72\cdot 10^{-4}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} < 0.001$$

Задание 2

Постановка задачи

Вычислить приближенное решение следующего уравнения с точностью до $\varepsilon = 0{,}01$.

$$g(x) = x^2 - 10x + 1$$

Решение

Приведем уравнение $g(x) = 0$ к виду $x = F(x)$ и найдем точку x_0 и радиус r, такие, что шар $B[x_0, r] = [x_0 - r, x_0 + r] = [a, b]$ инвариантен относительно отображения F и в этом шаре F – сжимающее отображение.

$$F(x) = \frac{1}{10}(x^2 + 1)$$

Так как F – дифференцируема, то в качестве константы Липшица возьмем $\alpha = \max_{a \le x \le b} |F'(x)|$.

Число r – радиус шара, в котором существует неподвижная точка, выберем из следующих условий:

$$\begin{cases} \|x_0 - F(x_0)\| \le r(1 - \alpha(r) \\ \alpha(r) < 1 \end{cases}$$

Где $\alpha(r) = \max_{-r \le x \le r} |F'(x)| = \frac{r}{5}$, а тогда $x_1 = F(x_0) = \frac{1}{10}$.

$$\begin{cases} \frac{1}{10} \le r(1 - \frac{r}{5}) \\ \frac{r}{5} < 1 \end{cases}$$

Выберем одно из решений этой системы. Пусть $r = 1$. Тогда отрезок $[-1,1]$ инвариантен относительно отображения F, на нем F – сжимающее и $\alpha = \frac{1}{3}$. Оценим расстояние до неподвижной точки:

$$\|x_n - a\| \le \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|x_0 - x_1\| = \frac{1}{5^n} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{10} < 0.01$$

Отсюда $n \ge 2$ b x_2является приближенным решением уравнения с точностью до $\varepsilon = 0.01$.

$$x_2 = F(x_1) = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{100} + 1\right) = 0.101$$

Задание 3

Постановка задачи

Определить, является ли отображение f нормированного пространства $C[-1,1]$ на себя сжимающим. Вычислить x_3, где $x_k = f(x_{k-1})$, $x_0 = 0$и оценитьрасстояние от x_3 до неподвижной точки.

$$f(x) = \frac{1}{3}\cos\big(x(t)\big) + e^t$$

Решение

Вычислим

$$\|F(x) - F(y)\|_{C[-1,1]} = \max_{-1 \le t \le 1} |F(x) - F(y)| = \max_{0 \le t \le 1} \left|\frac{1}{3}(\cos(x) - \cos(y)\right| \le \frac{2}{3} \max_{-1 \le t \le 1} \left|\sin\left(\frac{x - y}{2}\right) \sin\left(\frac{x + y}{2}\right)\right| \le \frac{1}{3} \max_{-1 \le t \le 1} |x - y| = \frac{1}{3} \|x - y\|_{C[-1,1]}$$

Значит $\alpha = \frac{1}{3} < 1$, а значит F – сжимающее.

$$x_1 = \frac{1}{3}\cos(0) + e^t = e^t + \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{1}{3}\cos\left(e^t + \frac{1}{3}\right) + e^t = 0{,}31\cos(e^t) - 0.11\sin(e^t) + e^t$$

$$x_3 = 0.33\cos(0{,}31\cos(e^t) - 0.11\sin(e^t) + e^t)$$

Оценим расстояние до неподвижной точки:

$$\|x_3 - a\|_{C[-1,1]} \le \frac{1}{3^3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\left\|e^t + \frac{1}{3}\right\|_{C[-1,1]} = \frac{1}{18}\max_{-1\le t\le 1}\left|e^t + \frac{1}{3}\right| = \frac{1}{18}\left(e + \frac{1}{3}\right) = 0.17$$

Задание 4

Постановка задачи

Выяснить, является ли отображение $F: C[0,1] \to C[0,1]$ непрерывным, равномерно непрерывным, удовлетворяющим условию Липшица.

$$F(x) = x^3(t)$$

Решение

Покажем, что отображение F удовлетворяет условию Липшица. Для этого оценим $\|F(x) - F(y)\|_{C[0,1]}$.

$$\|F(x) - F(y)\|_{C[0,1]} = \max_{0\le t\le 1}|F(x) - F(y)| = \max_{0\le t\le 1}|x^3 - y^3| = \max_{0\le t\le 1}|x - y|\cdot|x^2 + xy + y^2|$$
$$\le 3\max_{0\le t\le 1}|x - y| = 3\|x - y\|_{C[0,1]}$$

Тогда для $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta = \frac{\varepsilon}{3} > 0$ такое, что для $\forall x, y\ \in C[0,1]$, таких, что $\|x - y\| \le \delta$

$$\|F(x) - F(y)\|_{C[0,1]} \le 3\delta = \varepsilon$$

Таким образом, отображение F, удовлетворяет условию Липшица, а значит, является непрерывным и равномерно непрерывным.