ТЕМА 5

ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Предгильбертовы пространства. Говорят, что в комплексном векторном пространстве E задано *скалярное произведение*, если каждой паре элементов $x, y \in E$ поставлено в соответствие комплексное число (x, y) так, что выполнены следующие аксиомы:

1) $(x, x) \geq 0, (x, x) = 0$ в том и только в том случае, если $x = \Theta$;

2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;

3) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y), \alpha \in \mathbb{C}$;

4) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

В вещественном векторном пространстве скалярное произведение (x, y) – вещественное число, удовлетворяющее аксиомам $1 - 4$, аксиома 2 в таком случае имеет вид $(x, y) = (y, x)$.

Векторное пространство, снабженное скалярным произведением, называется *предгильбертовым* пространством.

Конечномерное вещественное предгильбертово пространство называют также евклидовым, а комплексное – унитарным.

Примеры пространств со скалярным произведением

1. Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ и соответственно унитарное пространство $\mathbb{C}^n$ со скалярными произведениями

$$(x, y)_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad (x, y)_{\mathbb{C}^n} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}.$$

2. Пространство l_2.

В векторном пространстве вещественных последовательностей $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$, $y = (y_i)_{i=1}^{\infty}$ таких, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |y_i|^2 < \infty$, введем скалярное произведение по формуле

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

3. Пространство $\mathcal{L}_2[a, b]$.

В векторном пространстве комплекснозначных непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций зададим скалярное произведение

$$(x, y) = \int\limits_a^b x(t)\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Свойства скалярного произведения

1. *Антилинейность по второму аргументу.* Для любых $x, y_1, y_2 \in E$ и любых $\alpha, \beta \in C$ справедливо равенство $(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \bar{\alpha}(x, y_1) + \bar{\beta}(x, y_2)$. В вещественном предгильбертовом пространстве скалярное произведение линейно по второму аргументу.

2. *Неравенство Коши – Буняковского.* Для любых векторов $x, y \in E$ справедливо неравенство

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x) \cdot (y, y).$$

3. Скалярное произведение в предгильбертовом пространстве является непрерывной функцией своих аргументов, т. е. если $x_n \to x$, $y_n \to y$ при $n \to \infty$, то $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

4. Во всяком предгильбертовом пространстве справедливо тождество параллелограмма

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Гильбертовы пространства. Поскольку предгильбертово пространство является нормированным векторным пространством с нормой $\|x\| = (x, x)^{1/2}$, то в нем можно рассматривать понятие полноты.

Предгильбертово пространство называется *гильбертовым,* если оно полно по норме, порожденной скалярным произведением. Гильбертовы пространства обычно обозначаются буквой H.

Примеры гильбертовых пространств

1. Пространство $L_2[a,b]$.

В векторном пространстве интегрируемых по Лебегу со степенью p на отрезке $[a,b]$ функций зададим отношение эквивалентности. Будем считать две функции $x(t),\ y(t)$ *эквивалентными,* если $x(t) = y(t)$ почти всюду. Обозначим через $L_p[a,b]$ — пространство классов эквивалентных последовательностей, состоящих из интегрируемых со степенью p функций. Пространство $L_p[a,b]$ является банаховым относительно нормы

$$|x\|_p = \Big(\int\limits_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t\Big)^{1/p}$$

и при $p = 2$ гильбертовым со скалярным произведением

$$(x,y) = \int\limits_a^b x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t.$$

2. Пространство Соболева $H^1[a,b]$.

Функция $y(t) \in L_2[a,b]$ называется *обобщенной производной* функции $x(t) \in L_2[a,b]$, если для любой финитной непрерывно дифференцируемой функции $v(t)$ справедливо равенство

$$\int\limits_a^b x(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = -\int\limits_a^b y(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Пространством Соболева $H^1[a,b]$ называется пространство интегрируемых по Лебегу с квадратом функций, имеющих обобщенную производную первого порядка, интегрируемую по Лебегу с квадратом.

Пространство $H^1[a,b]$ является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$(x,y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t + \int_a^b x'(t)\overline{y'(t)}\mathrm{d}t.$$

Теорема 1. *Пространство Соболева $H^1[a,b]$ вложено в пространство $C[a,b]$.*

Два вектора $x, y \in H$ называются *ортогональными* в H, если $(x,y) = 0$. Очевидно, что нуль пространства H ортогонален любому вектору пространства.

Углом между двумя ненулевыми векторами называется угол φ такой, что $0 \le \varphi \le \pi$ и $\cos\varphi = \dfrac{(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$.

Теорема 2. *Пусть H — гильбертово пространство, $L \subset H$ — его замкнутое векторное подпространство. Тогда для любого элемента $x \in H$ существует единственный элемент $y \in L$, являющийся элементом наилучшей аппроксимации x по L, т. е. $\rho(x,L) = \|x-y\|$.*

Теорема 1 остается справедливой и в том случае, когда вместо подпространства L рассматривается замкнутое выпуклое множество.

Пусть L — векторное подпространство в H. *Проекцией* вектора x на L называется вектор $y \in L$ такой, что $x - y \perp L$, т. е. $(x-y, l) = 0$ для любого вектора $l \in L$.

Теорема 3. *Пусть H—гильбертово пространство, $L \subset H$ — его замкнутое векторное подпространство. Тогда для любого элемента $x \in H$ существует единственная его проекция y на L, т. е. $y = P_L x$.*

Ортонормированные системы. Ряды Фурье. Система элементов $\{x_\alpha\}$, $\alpha \in \Gamma$, $x_\alpha \in H$ называется *ортогональной,* если каждые два ее различных элемента ортогональны.

Ортогональная система векторов называется *ортонормированной,* если $\|x_\alpha\| = 1$.

Система элементов $\{x_\alpha\}$, $\alpha \in \Gamma$, $x_\alpha \in H$ называется *линейно независимой,* если любая ее конечная подсистема линейно независима.

Лемма 1. *Ортонормированная система векторов в гильбертовом пространстве линейно независима.*

Лемма 2. *Пусть $x_1, x_2, \ldots$ − линейно независимая система векторов в H. Тогда в H существует ортогональная система $e_1, e_2, \ldots$ такая, что $e_k = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kk}x_k + \ldots$, $k = 1, 2, \ldots$.*

Построение ортогональной системы по заданной линейно независимой системе называется *ортогонализацией.*

Пусть $x \in H$, $\{\varphi_k\}$ − ортонормированная система векторов, числа $C_k = (x, \varphi_k)$ называются *коэффициентами Фурье* элемента x по ортонормированной системе $\{\varphi_k\}$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k\varphi_k$ − *рядом Фурье* элемента x. Многочлен $\sum\limits_{k=1}^{n} C_k\varphi_k$ − частная сумма ряда Фурье − называется *многочленом Фурье.*

Теорема 4 (о разложении в ряд Фурье). *Пусть $\{\varphi_k\}$ − ортонормированная система в гильбертовом пространстве H, x − произвольный элемент в H. Тогда:*

1) числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |C_k|^2$ сходится, причем справедливо неравенство Бесселя $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 \le \|x\|^2$;

2) ряд Фурье $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k\varphi_k$ сходится;

3) сумма ряда Фурье есть проекция элемента x на подпространство L, порожденное системой $\{\varphi_k\}$;

4) элемент $x \in H$ равен сумме своего ряда Фурье тогда и только тогда, когда справедливо равенство Стеклова:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 = \|x\|^2.$$

С л е д с т в и е 1. *Отрезок ряда Фурье обладает экстремальным свойством, т. е.* $\|x - \sum\limits_{k=1}^{n} C_k\varphi_k\| = \inf\limits_{\ell\in L_n} \|x - \ell\|$, *где* L *– подпространство, порождённое* $\{\varphi_k\}_{k=1}^{n}$.

С л е д с т в и е 2. *Если* $\|\varphi_k\| \geq \alpha > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, *то коэффициенты Фурье* C_k *любого элемента* $x \in H$ *стремятся к нулю при* $k \to \infty$.

Ортонормированная система $\{\varphi_k\}$ называется *полной,* если из того, что $(x, \varphi_k) = 0$ для любого k, следует что $x = \Theta$.

Теорема 5 (о полных ортонормированных системах). *Пусть* H *– гильбертово пространство,* $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– ортонормированная система в* H, L *– подпространство, порожденное системой* $\{\varphi_k\}$ *. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) любой элемент $x \in H$ *является суммой своего ряда Фурье;*

2) система $\{\varphi_k\}$ *полная;*

3) для любого $x \in H$ *выполняется равенство Стеклова:*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2;$$

4) подпространство L, *порожденное системой* $\{\varphi_k\}$, *совпадает с* H.

Ортогональное разложение гильбертовых пространств. Пусть M – линейное многообразие в H. Совокупность всех элементов из H, ортогональных к M, называется *ортогональным дополнением к* M и обозначается $M^{\perp}$, т. е. $M^{\perp} = \{z \in H,\ z \perp M\}$.

Теорема 6. $M^{\perp}$ *– подпространство в* H.

Теорема 7 (о всюду плотном множестве в H***).*** *Пусть* M *– линейное многообразие в гильбертовом пространстве* H. M *всюду плотно в* H *тогда и только тогда, когда* $M^{\perp} = \{0\}$.

Теорема 8 (о разложении H ***в прямую сумму).*** *Пусть* H *– гильбертово пространство,* $L \subset H$ *– его подпространство. Тогда* $H = L \oplus L^{\perp}$.