5.6. Пусть A – ограниченное множество на числовой прямой и $a \in \mathbb{R}$. Доказать, что множество $A + a = \{x + a, x \in A\}$ измеримо и $\mu(A + a) = \mu(A)$.

Тема 3. ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть задано пространство с мерой (X, Σ, μ).

Определение 7. Действительная функция $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *измеримой*, если для любого $c \in \mathbb{R}$ множество $A_c = \{x\colon f(x) < c\}$ измеримо (здесь $\overline{\mathbb{R}}$ – расширенная числовая прямая). Комплекснозначная функция $g + ih$ измерима, если измеримы ее действительная и мнимая части.

Лемма 1. *Числовая функция $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима тогда и только тогда, когда для любого $c \in \mathbb{R}$ измеримо одно из множеств $\{x : f(x) \leqslant c\}$, $\{x : f(x) > c\}$, $\{x : f(x) \geqslant c\}$.*

Теорема 5. *Пусть $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ – измеримая функция. Тогда для любой измеримой функции $g : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ их композиция $h = g \circ f$ также измерима на X.*

Будем говорить, что две определенные на множестве X функции *эквивалентны*, если они равны между собой *почти всюду*, т. е. равны между собой для всех $x \in X$ за исключением, быть может, точек, принадлежащих множеству нулевой меры.

Лемма 2. *Функция $f(x)$, определенная на множестве X и эквивалентная на нем измеримой функции $g(x)$, так же измерима.*

Теорема 6. *Пусть (X,Σ, μ) – пространство с мерой и $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ – измеримые функции. Тогда функции αf, f^2, $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g (при условии, что $g(x) \neq 0$ на X), $\alpha \in \mathbb{R}$, измеримы.*

1. Равномерная сходимость.

Последовательность измеримых функций f_n сходится к функции f *равномерно*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n_ε такой, что для всех $n > n_\varepsilon$ выполнено

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Равномерная сходимость обозначается так: $f_n \rightrightarrows f$.

2. Точечная сходимость.

Последовательность f_n сходится к функции f *точечно*, если для любого $x \in X$ $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$.

3. Сходимость почти всюду.

Последовательность f_n сходится к f *почти всюду* ($f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.в.}} f$), если $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ для всех точек x за исключением, быть может, тех x, которые принадлежат множеству меры нуль.

4. Сходимость по мере.

Сходимость по мере последовательности измеримых функций f_n к измеримой функции f обозначается $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$ и означает, что для любого $\varepsilon > 0$ мера множества

$$A_n(\varepsilon) = \big\{x\colon |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\big\}$$

стремится к нулю при $n \to \infty$.

Теорема 7. *Пусть X, Σ, μ – пространство с мерой и $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ – последовательность измеримых функций. Если f_n сходится в каждой точке $x \in X$ к функции f, то функция f измерима.*

Следствие 3. Если последовательность измеримых функций $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится к f равномерно, то f измерима.

Следствие 4. Если последовательность измеримых функций $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится к f почти всюду, то предельная функция измерима.

Следствие 5. Существует разрывная на отрезке $[a,b]$ функция, которая не является пределом почти всюду сходящейся последовательности непрерывных функций.

Теорема 8 (Лебег). *Пусть (X, Σ, μ) – пространство с полной конечной σ-аддитивной мерой и пусть последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ измеримых функций сходится к функции f почти всюду. Тогда она сходится к той же самой предельной функции и по мере.*

Теорема 9 (Рисс). *Пусть (X, Σ, μ) – пространство с полной σ-аддитивной мерой и пусть последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ измеримых функций сходится по мере к измеримой функции f. Тогда из этой последовательности можно выделить подпоследовательность $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty} \subset (f_n)$, сходящуюся к f почти всюду.*

Теорема 10 (Егоров). *Пусть дана последовательность* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *измеримых функций, сходящаяся на измеримом множестве* X *с конечной мерой к функции* f*. Тогда для любого* $\delta > 0$ *найдется такое измеримое множество* $X_\delta \subset X$*, что:*

1) $\mu(X \setminus X_\delta) < \delta$;

2) на множестве X_δ *последовательность* $f_n(x)$ *сходится к* $f(x)$ *равномерно.*

Теорема 11 (Лузин). *Пусть задана измеримая функция* $f(x)$ *на измеримом множестве* X*, расположенном на* $[a, b]$*. Каково бы ни было число* $\varepsilon > 0$ *из* X *можно изъять такую часть, которую можно покрыть системой интервалов с суммой длин* $< \varepsilon$*, что на оставшемся множестве функция* $f(x)$ *будет непрерывной.*

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 7. На числовой прямой $\mathbb{R}$ с мерой Лебега любая непрерывная функция измерима.

Решение. Действительно, множество $A_c = \{x\colon f(x) < c\}$ является прообразом открытого множества $f^{-1}(-\infty, c)$, которое измеримо как борелевское множество.

Пример 8. Пусть $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ – последовательность измеримых на X функций. Тогда функции $\sup\limits_n f_n(x)$, $\inf\limits_n f_n(x)$ также измеримы на X.

Решение. Обозначим через $h(x) = \sup\limits_n f_n(x)$. Измеримость $h(x)$ означает, что для любого $c \in \mathbb{R}$ измеримы множества $A_c = \{x | \, h(x) > c\}$. Покажем, что $= \{x | \, h(x) > c\} = \bigcup\limits_n \{x | \, f_n(x) > c\}$, это и будет означать измеримость h.

Пусть $x \in A_c$, т. е. $h(x) > c$. Тогда $h(x) > c + \varepsilon$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. По определению точной верхней границы найдется такой номер n_0, что $f_{n_0}(x) > h(x) - \varepsilon$. Отсюда $f_{n_0}(x) > (c + \varepsilon) - \varepsilon = c$ и потому $x \in \{x | \, f_{n_0}(x) > c\}$, а тем более, $x \in \bigcup\limits_n \{x | \, f_n(x) > c\}$.

С другой стороны, пусть $x \in \bigcup\limits_n \{x \in X | \, f_n(x) > c\}$. Это значит, что найдется такой номер n_0, что $f_{n_0}(x) > c$. Но тогда $h(x) \geqslant f_{n_0}(x) > c$, т. е. $x \in A_c$. Равенство доказано.