Теорема 11. *Пусть $\mathcal{K}(t,s)$ непрерывная функция по переменным t и s. Тогда для любой непрерывной функции $y(t)$ при любом значении параметра λ в пространстве $C[a,b]$ существует единственное решение уравнения (2.12), которое можно представить в виде*

$$x(t) = y(t) + \lambda \int\limits_a^b R(t,s;\lambda)\, y(s)\,\mathrm{d}s, \tag{2.17}$$

где

$$R(t,s;\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1}\mathcal{K}_i(t,s), \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{K}_1(t,s) = \mathcal{K}(t,s), \\ &\mathcal{K}_i(t,s) = \int\limits_t^b \mathcal{K}(t,\tau)\mathcal{K}_{i-1}(\tau,s)\,\mathrm{d}\tau,\ i = 2,3,\ldots. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Замкнутые операторы. Пусть X и Y – банаховы пространства, $A : X \to Y$ линейный оператор с областью определения $\mathscr{D}(A) \subset X$. Множество $\{(x,Ax) : x \in \mathscr{D}(A), Ax \in \mathscr{R}(A)\}$ называется *графиком оператора* A и обозначается Gr_A. Поскольку A – линейный оператор, то Gr_A представляет собой линейное многообразие в пространстве $X \times Y$, однозначно определяемое оператором A. Если оператор A непрерывен, то линейное многообразие Gr_A замкнуто, т. е. является подпространством в $X \times Y$.

О п р е д е л е н и е 1. Линейный оператор $A : X \to Y$ называется *замкнутым,* если его график Gr_A является замкнутым множеством в $X \times Y$.

Лемма 2. *Пусть $A : X \to Y$, $A \in \mathscr{B}(X,Y)$, причем $\mathscr{D}(A) = X$. Тогда A замкнут.*

Лемма 3. *Если A замкнут и обратный оператор A^{-1} существует, то A^{-1} также замкнут.*

Лемма 4. *Если $A \in \mathscr{B}(X,Y)$ и A^{-1} существует, то A^{-1} замкнут.*