МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Кафедра математической физики

Е. С. Чеб

ЛИНЕЙНЫЕ ОГРАНИЧЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Методические указания и задания студентам специальности "Прикладная математика и информатика"

Минск
2012

Оглавление

ТЕМА 1. ЛИНЕЙНЫЕ ОГРАНИЧЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ. НОРМА ОПЕРАТОРА

Пусть X и Y – нормированные векторные пространства и пусть множество $\mathscr{D}(A) \subseteq X$. Если каждому элементу $x \in \mathscr{D}(A)$ поставлен в соответствие определенный элемент $y \in Y$, то говорят, что задан оператор A и $y = Ax$. При этом множество $\mathscr{D}(A)$ называют *областью определения* оператора A. Множество $\mathscr{R}(A) = \{y \in Y : \exists x \in \mathscr{D}(A), y = = Ax\}$ называют *областью значений* оператора A.

Оператор $A : X \to Y$ с областью определения $\mathscr{D}(A) \subseteq X$ называют *линейным*, если:

1. Область определения $\mathscr{D}(A)$ оператора A представляет собой линейное многообразие, т. е. если $x, y \in \mathscr{D}(A)$, то $\alpha x + \beta y \in \mathscr{D}(A)$ для всех скаляров $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$;
2. $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$ для любых элементов x,$y \in \mathscr{D}(A)$ и любых скаляров α,$\beta \in \mathcal{K}$.

Лемма 1. *Область значений всякого линейного оператора является линейным многообразием.*

Практически наиболее важны два случая задания линейных операторов:

1. $\mathscr{D}(A) = X$, т. е. оператор A задан всюду в нормированном пространстве X;
2. $\overline{\mathscr{D}(A)} = X$, т. е. оператор A задан плотно в X.

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь такие линейные операторы.

Линейный оператор A называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если $Ax \to Ax_0$ при $x \to x_0$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon)$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $\|x - x_0\|_X < \delta$, выполняется $\|Ax - Ax_0\|_Y < \varepsilon$.

Теорема 1. *Пусть X, Y – нормированные векторные пространства, $A : X \to Y$ – линейный оператор. Тогда следующие свойства оператора A эквивалентны:*

1. *оператор A непрерывен в точке $x = 0$;*
2. *оператор A непрерывен в любой точке пространства X;*
3. *оператор A равномерно непрерывен.*

Линейный оператор A называется *ограниченным,* если существует константа $c > 0$ такая, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство ограниченности $\|Ax\|_Y \leqslant c\|x\|_X$. Ограниченный оператор переводит каждое ограниченное множество в X в ограниченное множество в Y.

Наименьшая из констант c в неравенстве ограниченности есть точная верхняя грань множества $\{\|Ax\| : \ \|x\| = 1\}$, т. е.

$$\inf c = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Назовем *нормой линейного ограниченного оператора* наименьшую из констант ограниченности,

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Норма $\|A\|$ называется *достижимой*, если существует $x_0 \in X$, при котором справедливо равенство

$$\|Ax_0\| = \|A\|\|x_0\|.$$

Теорема 2. *Пусть X,Y – нормированные векторные пространства, $A : X \to Y$ – линейный оператор. Оператор A непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.*

Множество тех $x \in X$, для которых $Ax = 0$, называется *ядром* линейного оператора и обозначается $KerA$.

Теорема 3. *Ядро линейного непрерывного оператора $A : X \to Y$ является подпространством пространства X.*

Примеры линейных ограниченных операторов

1. Пусть $X = Y = C[a,b]$. Для произвольной функции $x(t) \in C[a,b]$ положим

$$y(t) = Ax(t) = \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s, \tag{2.1}$$

где $\mathcal{K}(t,s)$ – ядро интегрального оператора – функция, непрерывная по переменным t,s. Оператор A называется *интегральным оператором Фредгольма* с непрерывным ядром.

Теорема 4. *Формула* (2.1) *определяет линейный ограниченный оператор в пространстве* $C[a,b]$ *причем*

$$\|A\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \int\limits_a^b |\mathcal{K}(t,s)|\,\mathrm{d}s. \qquad (2.2)$$

2. Пусть теперь в (2.1) функция $\mathcal{K}(t,s)$ измерима. Тогда при дополнительных на нее условиях при любой $x(t) \in C[a,b]$ формула (2.1) задает ограниченный оператор.

Теорема 5. *Пусть в* (2.1) *функция* $\mathcal{K}(t,s)$ *измерима и удовлетворяет условиям:*

1) $\exists c > 0$ *такое, что* $\int\limits_a^b |\mathcal{K}(t,s)|\mathrm{d}s \leqslant c$ *для всех* $t \in [a,b]$;

2) для любого $t_1 \in [a,b]$ $\int\limits_a^b |\mathcal{K}(t_1,s) - \mathcal{K}(t,s)|\mathrm{d}s \longrightarrow 0$ *при* $t_1 \to t$.

Тогда интегральный оператор (2.1) *ограничен в пространстве* $C[a,b]$.

3. Пусть $X = Y = L_2[a,b]$. Вновь рассмотрим оператор (2.1), но теперь будем предполагать, что ядро $\mathcal{K}(t,s)$ интегрируемо с квадратом в прямоугольнике $[a,b] \times [a,b]$

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^b |\mathcal{K}(t,s)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t = M^2 < \infty. \qquad (2.3)$$

Теорема 6. *Пусть* $\mathcal{K}(t,s)$ *– измеримая функция и выполнено условие* (2.3). *Тогда формула* (2.1) *определяет линейный ограниченный оператор в пространстве* $L_2[a,b]$.

Пусть X и Y – нормированные векторные пространства, $A,B,C,\ldots$ – линейные ограниченные операторы из X в Y, множество которых обозначим через $\mathscr{B}(X,Y)$.

Теорема 7. *Множество* $\mathscr{B}(X,Y)$ *является нормированным пространством.*

В пространстве $\mathscr{B}(X,Y)$ определены два типа сходимости последовательности линейных ограниченных операторов.

Будем говорить, что последовательность операторов $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{B}(X,Y)$ сходится *равномерно* к оператору $A \in \mathscr{B}(X,Y)$ если

$$\|A_n - A\| \to 0 \,\text{при}\, n \to \infty.$$

Теорема 8. *Для того, чтобы последовательность $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{B}(X,Y))$ сходилась к оператору A, равномерно необходимо и достаточно, чтобы $A_n x \rightrightarrows Ax$, при $n \to \infty$ равномерно по x в шаре $\|x\| \leqslant 1$.*

Следствие 1. Пусть $A_n \rightrightarrows A$ равномерно при $n \to \infty$ и M – произвольное ограниченное множество в X. Тогда $A_n x \rightrightarrows Ax$ при $n \to \infty$ на множестве M.

Последовательность операторов $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{B}(X,Y)$ сходится *сильно* к оператору A, если

$$\|A_n x - Ax\| \to 0 \,\text{при}\, n \to \infty$$

при каждом фиксированном $x \in X$.

Теорема 9. *Если пространство Y полно, то и пространство линейных ограниченных операторов $\mathscr{B}(X,Y)$ полно.*

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Оператор $A : L_3[0,1] \to L_2[0,1]$ определяется формулой

$$Ax(t) = x(t^3).$$

Выясним, совпадает ли область задания оператора $\mathscr{D}(A) = \big\{x(t) \in L_3[0,1] : Ax(t) \in L_2[0,1]\big\}$ со всем пространством $L_3[0,1]$? Будет ли оператор линейным непрерывным, если $A : \mathscr{D}(A) \to L_2[0,1]$?

Решение. Пусть $x(t) \in L_3[0,1]$, т. е. $\int\limits_0^1 |x(t)|^3 \,\mathrm{d}t < +\infty$. Рассмотрим

$$\int\limits_0^1 |x(t^2)|^2 \,\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 \frac{1}{3\sqrt{\tau}} |x(\tau)|^2 \,\mathrm{d}\tau.$$

Функция $x(t) = t^{-1/6}$ принадлежит пространству $L_3[0{,}1]$, так как $\int\limits_0^1 |t^{-1/6}|^3\,\mathrm{d}t < +\infty$, но $Ax(t) = t^{-1/2}$ не принадлежит пространству $L_2[0{,}1]$, поскольку $\int\limits_0^1 |t^{-1/2}|^2 \mathrm{d}t = \int\limits_0^1 t^{-1} \to +\infty$.

Рассмотрим теперь оператор A на области определения $\mathscr{D}(A)$. Оператор является линейным, поскольку

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2)(t) = \big(\alpha x_1(t^3) + \beta x_2(t^3)\big) = \alpha A x_1(t) + \beta A x_2(t).$$

Однако оператор не является непрерывным на области определения. Действительно, рассмотрим последовательность $x_n(t) \in \mathscr{D}(A)$

$$\begin{cases} x_n(t) = \sqrt[6]{n}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/n, \\ 0, \quad 0 < t \leqslant 1, \end{cases}$$

которая в пространстве $L_3[0{,}1]$ сходится к нулю.

$$\|x_n - 0\|_{L_3[0,1]} = \left(\int\limits_0^1 |x_n(t)|^3\,\mathrm{d}t\right)^{1/3} = \left(\int\limits_0^{1/n} \left(\sqrt[6]{n}\right)^3 \mathrm{d}t\right)^{1/3} =$$

$$= \left(\sqrt{n}\cdot\frac{1}{n}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \to 0$$

при $n \to \infty$. Однако ее образ

$$Ax_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/n, \\ 0, \quad 1/n < t \leqslant 1, \end{cases}$$

принадлежащий пространству $L_2[0{,}1]$, к нулю не стремится, поскольку

$$\|Ax_n - 0\| = \left(\int\limits_0^1 |Ax_n(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} = \left(\int\limits_0^{1/n} \left(\sqrt{n}\right)^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} = 1.$$

Таким образом, рассмотренная формула задает линейный оператор, который на области задания не является непрерывным.

Пример 2. Покажем, что оператор $A: \ L_3[0,1] \to L_2[0,1]$,

$$Ax(t) = tx(t^2)$$

является линейным ограниченным и вычислим его норму.

Решение. По определению, оператор является линейным, если для любых $x(t), y(t) \in L_3[0,1]$, и любых $\alpha,\beta \in \mathcal{K}$ выполняется условие линейности

$$A(\alpha x + \beta y)(t) = t(\alpha x + \beta y)(t^2) = \alpha t x(t^2) + \beta t y(t^2) = \alpha Ax(t) + \beta Ay(t).$$

Следовательно, оператор A является линейным.

Покажем, что A является ограниченным оператором, т. е. $\exists c > 0$, что $\|Ax\|_{L_2[0,1]} \leqslant c\|x\|_{L_3[0,1]}$ для всех $x(t) \in L_3[0,1]$.

$$\|Ax\|_{L_2[0,1]} = \Bigl(\int\limits_0^1 |Ax(t)|^2 \mathrm{d}t\Bigr)^{1/2} = \Bigl(\int\limits_0^1 |tx(t^2)|^2\, \mathrm{d}t\Bigr)^{1/2} = \left[\begin{array}{l} t^2 = \tau, \\ \mathrm{d}t = \frac{d\tau}{2\sqrt{\tau}} \end{array}\right] =$$

$$= \Bigl(\int\limits_0^1 |\sqrt{\tau}x(\tau)|^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\tau}} \mathrm{d}\tau\Bigr)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Bigl(\int\limits_0^1 \sqrt{\tau}\, |x(\tau)|^2\, \mathrm{d}\tau\Bigr)^{1/2} \leqslant$$

(к данному интегралу применим неравенство Гельдера при $p = 3/2$, $q = 3$, получим)

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\Bigl[\int\limits_0^1 \Bigl(\bigl(|x(\tau)|^2\bigr)^{3/2} \mathrm{d}\tau\Bigr)^{2/3} \cdot \Bigl(\int\limits_0^1 |\sqrt{\tau}|^3\, \mathrm{d}\tau\Bigr)^{1/3}\Bigr]^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Bigl(\int\limits_0^1 \tau^{3/2}\, \mathrm{d}\tau\Bigr)^{1/6} \Bigl(\int\limits_0^1 |x(\tau)|^3\, \mathrm{d}\tau\Bigr)^{1/3} = c \cdot \|x\|_{L_3[0,1]},$$

где

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}}\Bigl(\int\limits_0^1 \tau^{3/2}\, \mathrm{d}\tau\Bigr)^{1/6} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Bigl(\frac{2}{5}\Bigr)^{1/6}.$$

Мы показали, что A является линейным ограниченным оператором. Из определения нормы линейного оператора следует, что

$$\|A\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{5}\right)^{1/6}.$$

Покажем, что $\|A\| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{5}\right)^{1/6}$. По определению точной верхней грани $\|A\| \geqslant \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ для всех $x(t) \in L_3[0,1]$. Выберем в качестве функции $x(t)$ функцию $x_0(t) = \sqrt{t}$, поскольку именно для такой функции неравенство Гельдера, которое было использовано выше при проведении оценок, обратится в равенство. Тогда

$$\|Ax_0(t)\|_{L_2[0,1]} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Bigg(\int\limits_0^1 \sqrt{t}\,|\sqrt{t}|^2 \mathrm{d}t\Bigg)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Bigg(\int\limits_0^1 t^{3/2}\,\mathrm{d}t\Bigg)^{1/2},$$

а

$$\|x_0(t)\|_{L_3[0,1]} = \Bigg(\int\limits_0^1 |\sqrt{t}|^3\,\mathrm{d}t\Bigg)^{1/3} = \Bigg(\int\limits_0^1 t^{3/2}\,\mathrm{d}t\Bigg)^{1/3}.$$

Значит,

$$\|A\| \geqslant \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int\limits_0^1 t^{3/2}\mathrm{d}t\right)^{1/2}}{\left(\int\limits_0^1 t^{3/2}\,\mathrm{d}t\right)^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Bigg(\int\limits_0^1 t^{3/2}\mathrm{d}t\Bigg)^{1/6} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{5}\right)^{1/6}.$$

Пример 3. Вычислим норму оператора $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, который действует по формуле

$$Ax(t) = tx(t^2).$$

Решение. Покажем, что оператор A ограничен. С этой целью оценим норму $\|Ax\|_{L_2[0,1]}$ для всех $x(t) \in L_2[0,1]$.

$$\|Ax\|_{L_2[0,1]} = \Bigg(\int\limits_0^1 |Ax(t)|^2\,\mathrm{d}t\Bigg)^{1/2} = \Bigg(\int\limits_0^1 t^2|x(t^2)|^2\,\mathrm{d}t\Bigg)^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Bigg(\int\limits_0^1 \sqrt{\tau}\,|x(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau\Bigg)^{1/2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\Bigg(\int\limits_0^1 \sup_{0\leqslant\tau\leqslant 1}(\sqrt{\tau})\,|x(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau\Bigg)^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Bigg(\int\limits_0^1 |x(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau\Bigg)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\|x\|_{L_2[0,1]}.$$

Следовательно, $\|A\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$. С другой стороны, $\|A\| \geqslant \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ для всех $x(t) \in L_2[0{,}1]$. Выберем последовательность

$$x_n(t) = \begin{cases} 1, & t \in [1-\frac{1}{n}, 1], \\ 0, & t \in [0, 1-\frac{1}{n}), \end{cases}$$

квадрат нормы которой

$$\|x_n\|^2_{L_2[0,1]} = \int\limits_0^1 |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \int\limits_{1-1/n}^1 \mathrm{d}t = \frac{1}{n}.$$

Имеем,

$$\|Ax_n\|^2_{L_2[0,1]} = \Bigg(\int\limits_0^1 |Ax_n(t)|^2\,\mathrm{d}t\Bigg)^{1/2} = \Bigg(\int\limits_{1-1/n}^1 \sqrt{\tau}\,d\tau\Bigg) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{2}{3}\left(1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{3/2}\right)\right]^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{2}{3}\left(1 - 1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n} - \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{n^2} - O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)\right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{n}} - O\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Имея оценку $\frac{1}{\sqrt{2}} - O\big(\frac{1}{n}\big) \leqslant \|A\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, заключаем, что $\|A\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Пример 4. Вычислим норму оператора $A: C[-2{,}0] \to C[-2{,}0]$, действующего по формуле

$$Ax(t) = (t^2 + t - 1)x(t).$$

Р е ш е н и е. Оператор A – это оператор умножения на непрерывную функцию. Его линейность очевидна, а ограниченность следует из оценки

$$\|Ax\|_{C[-2,0]} = \max_{-2\leqslant t\leqslant 0}|Ax(t)| = \max_{-2\leqslant t\leqslant 0}\big|(t^2+t-1)x(t)\big| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{-2\leqslant t\leqslant 0}|t^2+t-1| \max_{-2\leqslant t\leqslant 0}|x(t)| = \frac{5}{4}\|x\|_{C[-2,0]} = c\|x\|_{C[-2,0]}.$$

Норма является достижимой и достигается на функции $x_0(t) \equiv 1$.

П р и м е р 5. Вычислить норму интегрального оператора Фредгольма $A: C[-1{,}2] \to C[-2{,}2]$, действующего по формуле

$$Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} s^3(1+t)\,x(s)\,\mathrm{d}s.$$

Р е ш е н и е. Интегральный оператор Фредгольма в пространстве непрерывных функций линеен. Это следует из линейности интеграла Римана. Покажем, что выполняется условие ограниченности, т. е. $\exists c > 0$, что $\|Ax\|_{C[-2,2]} \leqslant c\|x\|_{C[-1,2]}$ для всех $x(t) \in C[-1{,}2]$.

Действительно,

$$\|Ax\|_{C[-2,2]} = \max_{-2\leqslant t\leqslant 2}|Ax(t)| = \max_{-2\leqslant t\leqslant 2}\left|\int\limits_{-1}^{1} s^3(1+t)x(s)\,\mathrm{d}s\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{-2\leqslant t\leqslant 2}|1+t|\int\limits_{-1}^{1}|s^3|\,|x(s)|\,\mathrm{d}s \leqslant 3\int\limits_{-1}^{1}|s^3| \max_{-1\leqslant s\leqslant 1}|x(s)|\,\mathrm{d}s =$$

$$= 3\max_{-1\leqslant s\leqslant 1}|x(s)|\,2\int\limits_{0}^{1} s^3\,\mathrm{d}s = \frac{3}{2}\max_{-1\leqslant t\leqslant 2}|x(t)| = \frac{3}{2}\,\|x\|_{C[-1,2]}.$$

Значит, $\|A\| \leqslant \frac{3}{2}$. Покажем, что $\|A\| \geqslant \frac{3}{2}$. Заметим, что при любом фиксированном $t \in [-1,2]$ ядро $\mathcal{K}(t{,}s) = (1+t)s^3$ интегрального оператора по переменной $s \in [-1,1]$ меняет знак, поэтому построим последовательность $x_n(t)$ вида

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, & -1 \leqslant t \leqslant -\frac{1}{n}, \\ nt, & -\frac{1}{n} \leqslant t \leqslant \frac{1}{n}, \\ 1, & \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant 2, \end{cases}$$

с нормой $\|x_n\|_{C[-1,2]} = 1$. Тогда

$$\|Ax_n\|_{C[-2,2]} = \max_{-2\leqslant t\leqslant 2} |Ax_n(t)| =$$

$$= \max_{-2\leqslant t\leqslant 2}\Big|(1+t)\Big(\int\limits_{-1}^{-1/n} -s^3\,\mathrm{d}s + \int\limits_{-1/n}^{1/n} s^3 ns\,\mathrm{d}s + \int\limits_{1/n}^{1} s^3\,\mathrm{d}s\Big)\Big| =$$

$$= \max_{-2\leqslant t\leqslant 2}\Big|(1+t)\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^4} + \frac{2}{5n^4}\Big)\Big| = \frac{3}{2} - O\Big(\frac{1}{n^4}\Big).$$

Следовательно, $\|A\| = \frac{3}{2}$.

Пример 6. Вычислить норму оператора $A : C[-1,1] \to L_2[0,1]$, который действует по формуле

$$Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} t\,x(s)\,\mathrm{d}s - x(0).$$

Решение. Отметим, что указанный оператор как сумма двух линейных операторов является линейным. Перейдем к доказательству ограниченности оператора. По определению ограниченности мы должны оценить норму

$$\|Ax\|_{L_2[0,1]} = \Big(\int\limits_0^1 |Ax(t)|^2\,\mathrm{d}t\Big)^{1/2} = \Big(\int\limits_0^1 \Big|t\int\limits_0^1 x(s)\,\mathrm{d}s - x(0)\Big|^2\,\mathrm{d}t\Big)^{1/2}.$$

Оценим выражение, находящееся под знаком модуля

$$\Big|t\int\limits_0^1 x(s)\,\mathrm{d}s - x(0)\Big| \leqslant |t|\int\limits_0^1 \big|x(s)\big|\,\mathrm{d}s + \big|x(0)\big| \leqslant$$

$$\leqslant |t|\max_{0\leqslant s\leqslant 1}|x(s)|\cdot 1 + \max_{-1\leqslant s\leqslant 1}|x(s)| \leqslant |t|\|x\|_{C[-1,1]} + \|x\|_{C[-1,1]}.$$

Полученную оценку подставим в выражение для нормы $\|Ax\|_{L_2[0,1]}$.

$$\|Ax\|_{L_2[0,1]} \leqslant \Big(\int\limits_0^1 \Big((|t|+1)\|x\|\Big)^2\,\mathrm{d}t\Big)^{1/2} = \Big(\int\limits_0^1 (t+1)^2\Big)^{1/2}\|x\|_{C[-1,1]}.$$

Откуда следует, что $\|A\| \leqslant \left(\int\limits_0^1 (t+1)^2\right)^{1/2}$. Для доказательства неравенства в обратную сторону построим последовательность

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, & -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ 2nt - 1, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{n}, \\ 1, & \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant 2, \end{cases}$$

с нормой $\|x_n\|_{C[-1,1]} = 1$. Тогда

$$\|A\| \geqslant \|Ax_n(t)\| = \left(\int\limits_0^1 \left|\int\limits_0^{1/n} t(2ns-1)\,\mathrm{d}s + \int\limits_{1/n}^1 t\,\mathrm{d}s + 1\right|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} \to$$

$$\to \left(\int\limits_0^1 (t+1)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} - O\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

при $n \to \infty$. Это означает, что

$$\|A\| = \left(\int\limits_0^1 (t+1)^2\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{7}{3}}\,\|x\|_{C[-1,1]}.$$

Пример 7. В пространстве бесконечных числовых последовательностей ℓ_2 рассмотрим оператор A, действующий по формуле $Ax = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots)$, где $\big(\alpha_i\big)_{i=1}^{\infty}$ – последовательность вещественных чисел. При каком условии на последовательность $\big(\alpha_i\big)_{i=1}^{\infty}$ $\mathscr{D}(A) = l_2$? Когда оператор A ограничен и чему равна норма оператора?

Решение. По определению области задания

$$\mathscr{D}(A) = \{x(x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell_2 : Ax = (\alpha_1 x_1, \ldots, \alpha_n x_n, \ldots) \in l_2\}.$$

$Ax \in l_2$, если ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\alpha_i x_i|^2$ сходится для всех $x \in l_2$.

Возможны 2 случая:

1) Последовательность (α_n) ограничена, т. е. $\exists \sup\limits_n |\alpha_n| = C < +\infty$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i x_i|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} (\sup_i |\alpha_i|)^2 |x_i|^2 = C^2 \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2.$$

Это означает, что $\mathscr{D}(A) = l_2$ и $\|A\| \leqslant C$.

2) Последовательность (α_n) неограниченна, т. е. $\sup\limits_n |\alpha_n| = +\infty$, тогда $\mathscr{D}(A) \subset l_2$.

Действительно, пусть $\alpha_n = n$. Рассмотрим несчетное множество M_α, где

$$M_\alpha = \left\{ x : x = \left(1, \frac{1}{2^{1+\alpha}}, \ldots, \frac{1}{n^{1+\alpha}}, \ldots\right), \; 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2} \right\},$$

которое принадлежит пространству ℓ_2, но не принадлежит $\mathscr{D}(A)$, так как $A(M_\alpha) = \left\{x : x = \left(1, \frac{1}{2^\alpha}, \ldots, \frac{1}{n^\alpha}, \ldots\right)\right\}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\frac{1}{n^\alpha}|^2 \to \infty$. Оператор неограничен на области задания. Рассмотрим последовательность $x_n = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 0, \ldots)$, $\|x_n\| = 1$, а $\|Ax_n\| = |\alpha_n| < \infty$ при каждом $n \in N$.

$$\|A\| = \sup \|Ax_n\| = \sup |\alpha_n| = \infty.$$

Покажем, что в первом случае $\|A\| = C$. По определению, $\|A\| \geqslant \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ $\forall x \in l_2$. Возьмем в качестве x элемент x_n, $\|x_n\| = 1$, тогда $\|A\| \geqslant |\,\alpha_n| \Rightarrow \|A\| = \sup\limits_n |\,\alpha_n|$.

Пример 8. Исследовать на сходимость последовательность операторов A_n, действующих в пространстве $C[0,1]$, если

$$A_n x(t) = n \int\limits_t^{t+\frac{1}{n}} x(\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

Решение. Заметим, что если существует такая непрерывно дифференцируемая функция $F(t)$, что $F'(t) = x(t)$, то

$$n \int\limits_t^{t+\frac{1}{n}} x(\tau) \mathrm{d}\tau = \frac{F(t + \frac{1}{n}) - F(t)}{1/n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F'(t) = x(t).$$

Следовательно, последовательность A_n сильно сходится к тождественному оператору, т. е. $\|A_n x - x\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ при $\forall x(t) \in C[0,1]$. Покажем, что равномерной сходимости нет, т. е. $\|A_n - I\|$ не стремится к нулю при $n \to \infty$. Выберем последовательность $x_n(t) = t^{n-1}$ $(n \geqslant 2)$ с нормой $\|x_n\| = 1$.

Тогда

$$\|A_n x_n - x_n\| = \max_{0\le t\le 1}\left| n \int\limits_t^{t+1/n} \tau^{n-1}\,\mathrm{d}\tau - t^{n-1}\right| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\tau^n\Big|_t^{t+1/n} - t^{n-1}\right| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{n(n-1)}{2n^2}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|t^{n-2}| \geqslant \frac{1}{4}.$$

Имеем, $\|A_n - I\| \geqslant \|A_n x_n - x_n\| \geqslant \frac{1}{4}$. А это и означает, что равномерная сходимость отсутствует.

Задание 1. Доказать, что оператор умножения на непрерывную функцию, действующий в пространстве $X = C[a,b]$ является линейным ограниченным, найти его норму.

1.1. $Ax(t) = (5 - |t+8|)\,x(t), \quad t \in [-10, 10];$

1.2. $Ax(t) = \left(t - \sqrt{t-2}\right)x(t), \quad t \in [2, 8];$

1.3. $Ax(t) = \left(t^2 - 2t + 3\right)x(t), \quad t \in [1, 5];$

1.4. $Ax(t) = \left(-t^2 - 4t + 1\right)x(t), \quad t \in [-3, 0];$

1.5. $Ax(t) = \dfrac{2}{5 + |3t-2|}\,x(t), \quad t \in [-1/3, 1/3];$

1.6. $Ax(t) = \dfrac{2}{t^2 - 2t + 2}\,x(t), \quad t \in [-1, 5];$

1.7. $Ax(t) = \dfrac{2t}{t^2 + 1}\,x(t), \quad t \in [-2, 4];$

1.8. $Ax(t) = \dfrac{t}{4t^2 + 9}\,x(t), \quad t \in [-8, 15];$

1.9. $Ax(t) = \left(t^2 + 6t + 11\right)x(t), \quad t \in [-4, 2];$

1.10. $Ax(t) = \left(-t^2 + 2t + 2\right)x(t), \quad t \in [-1, 2];$

1.11. $Ax(t) = \dfrac{4t + 31}{t + 7}\,x(t), \quad t \in [-6, 10];$

1.12. $Ax(t) = \left(t^3 - 3t\right) x(t), \quad t \in [1,5];$

1.13. $Ax(t) = \left(12t - t^3\right) x(t), \quad t \in [2,4];$

1.14. $Ax(t) = \dfrac{4}{2-t}\, x(t), \quad t \in [3,6];$

1.15. $Ax(t) = \dfrac{t^3+8}{t+2}\, x(t), \quad t \in [3,5].$

Задание 2. Доказать, что оператор замены переменной в пространстве $X = L_p[a,b]$ является линейным ограниченным и найти его норму.

2.1. $X = L_2[0,1], \quad Ax(t) = (t^5 - t^8)x(t^3);$

2.2. $X = L_3[-1,1], \quad Ax(t) = t^2 x(t^3);$

2.3. $X = L_3[0,1], \quad Ax(t) = \sqrt{t}x(\sqrt[4]{t});$

2.4. $X = L_{3/2}[0,1], \quad Ax(t) = tx(\sqrt{t});$

2.5. $X = L_1[-1,1], \quad Ax(t) = (t^2 - 2t)x(\sqrt[3]{t});$

2.6. $X = L_2[-1,1], \quad Ax(t) = (t^2 + t)x(t^3)\ ;$

2.7. $X = L_1[-1,1], \quad Ax(t) = \left((t-1)^2 + t\right) x(\sqrt[3]{t});$

2.8. $X = L_2[-1,0], \quad Ax(t) = t^2(t-1)x(t^3);$

2.9. $X = L_3[0,1], \quad Ax(t) = tx(t^4);$

2.10. $X = L_{5/3}[-1,2], \quad Ax(t) = (t - 3t^2)x(\sqrt[3]{t});$

2.11. $X = L_{7/2}[0,1], \quad Ax(t) = (t^2 - t)x(\sqrt{t});$

2.12. $X = L_5[-1,1], \quad Ax(t) = (t^2 - t)x(t^5);$

2.13. $X = L_3[0,1], \quad Ax(t) = (t^3 - t)x(t^3);$

2.14. $X = L_{9/2}[-1,1], \quad Ax(t) = (t^3 - t^6)x(t^3);$

2.15. $X = L_{3/2}[-1,1], \quad Ax(t) = (t^5 - t^{10})x(\sqrt[5]{t}).$

Задание 3. Доказать, что интегральный оператор с вырожденным ядром является линейным и ограниченным оператором, если $A : C[a,b] \to C[\alpha,\beta]$. Вычислить норму оператора.

3.1. $A : C[-1,1] \to C[0,1], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} s(\ln(t+5) + t)\, x(s)\, \mathrm{d}s;$

3.2. $A : C[-2,2] \to C[3,5], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} t(s+1)\, x(s)\, \mathrm{d}s;$

3.3. $A : C[-1,1] \to C[-1,2], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1/3}^{1/3} \left(t^2 + t - 5\right) s\, x(s)\, \mathrm{d}s;$

3.4. $A : C[-1{,}2] \to C[-2{,}1], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} (t^3 + t - 2)s^3\, x(s)\,\mathrm{d}s;$

3.5. $A : C[-2{,}1] \to C[1{,}3], \quad Ax(t) = \int\limits_{-2}^{1} te^{t+s} s\, x(s)\,\mathrm{d}s;$

3.6. $A : C[-1{,}1] \to C[0{,}2], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} s^3 \ln(1+t)\, x(s)\,\mathrm{d}s;$

3.7. $A : C[-1{,}1] \to C[0{,}3], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1/2}^{1/2} s(t^3 - t - 1)\, x(s)\,\mathrm{d}s;$

3.8. $A : C[0{,}1] \to C[-1{,}2], \quad Ax(t) = \int\limits_{0}^{1} \left(s - \frac{1}{2}\right) \left(t + \frac{1}{2}\right) x(s)\,\mathrm{d}s;$

3.9. $A : C[-1{,}1] \to C[0{,}2], \quad Ax(t) = \int\limits_{0}^{1} \left(s - \frac{1}{2}\right) t^2\, x(s)\,\mathrm{d}s;$

3.10. $A : C[-\pi{,}\pi] \to C[0{,}\pi], \quad Ax(t) = \int\limits_{0}^{\pi} \sin s \sin t\, x(s)\,\mathrm{d}s;$

3.11. $A : C[-2{,}2] \to C[0{,}1], \quad Ax(t) = \int\limits_{0}^{1} (s-1)(t^2+2)\, x(s)\,\mathrm{d}s;$

3.12. $A : C[-1{,}2] \to C[0{,}3], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} s^3(t^3 - t)\, x(s)\,\mathrm{d}s;$

3.13. $A : C[-1{,}2] \to C[0{,}1], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} s^3 \ln(1+t)\, x(s)\,\mathrm{d}s;$

3.14. $A : C[-1{,}1] \to C[0{,}3], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1/2}^{1/2} s(1-t)\, x(s)\,\mathrm{d}s;$

3.15. $A : C[-1{,}3] \to C[-2{,}0], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} (t^2 - |t| + 2)s^5\, x(s)\,\mathrm{d}s.$

Задание 4. Вычислить норму оператора $A : L_p[a{,}b] \to L_q[\alpha{,}\beta]$.

4.1. $A : L_3[0{,}1] \to L_{3/2}[0{,}1], \quad Ax(t) = \int\limits_{0}^{1} s(1+t)x(s)\,\mathrm{d}s;$

4.2. $A : L_4[-1{,}1] \to L_{5/2}[-1{,}2], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} s^2 t^3 x(s)\,\mathrm{d}s;$

4.3. $A : L_3[0{,}1] \to L[-1{,}1], \quad Ax(t) = \int\limits_{0}^{1/2} ts^2 x(s^{3/2})\,\mathrm{d}s;$

4.4. $A : L_3[-1,1] \to L_2[-1,1], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} (1+t)(1+s)^3 x(s)\,\mathrm{d}s;$

4.5. $A : L_4[0,1] \to L_1[-1,1], \quad Ax(t) = \int\limits_{0}^{1/2} t^2 s^2 x(s^{5/2})\,\mathrm{d}s;$

4.6. $A : L_{5/3}[0,1] \to L_1[0,2], \quad Ax(t) = \int\limits_{0}^{1} s t^{-1/3} x(\sqrt{t})\,\mathrm{d}s;$

4.7. $A : L_3[-1,1] \to L_1[0,3], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1/2}^{1/2} s(t-1)x(s)\,\mathrm{d}s;$

4.8. $A : L_2[0,1] \to L_1[-1,2], \quad Ax(t) = \int\limits_{0}^{1} (s-1/2)\,x(s)ds;$

4.9. $A : L_3[-1,1] \to L_{3/2}[0,2], \quad Ax(t) = \int\limits_{0}^{1} t^2 s^3 x(s)\,\mathrm{d}s;$

4.10. $A : L_2[0,2\pi] \to L_1[0,\pi], \quad Ax(t) = \int\limits_{0}^{\pi} t\sin(s)x(s)\,\mathrm{d}s;$

4.11. $A : L_3[0,2] \to L_{5/2}[0,1], \quad Ax(t) = \int\limits_{0}^{1} t^{3/2} s^3 x(s)\,\mathrm{d}s;$

4.12. $A : L_2[-1,2] \to L_1[0,3], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} s^3(1-t)x(s)\,\mathrm{d}s;$

4.13. $A : L_3[-1,2] \to L_2[0,1], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} s^3 \ln(1+t)x(s)\,\mathrm{d}s;$

4.14. $A : L_3[-1,1] \to L_1[0,3], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1/2}^{1/2} s(1-t)x(s)\,\mathrm{d}s;$

4.15. $A : L_4[-1,3] \to L_2[-2,0], \quad Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} (1-t)s^5 x(s)\,\mathrm{d}s.$

Задание 5. Вычислить норму оператора $A : C[a,b] \to L_p[0,1]$.

5.1. $Ax(t) = \int\limits_{0}^{1} tsx(s)\,\mathrm{d}s - x(0), \quad x(t) \in C[-1,1], \quad p = 2;$

5.2. $Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} ts^2 x(s)\,\mathrm{d}s + x(0), \quad x(t) \in C[-1,1], \quad p = 2;$

5.3. $Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} t^2 s x(s)\,\mathrm{d}s + tx(0), \quad x(t) \in C[-1,1], \quad p = 3;$

5.4. $Ax(t) = \int\limits_0^1 (t+1)sx(s)\,\mathrm{d}s - tx(0), \quad x(t) \in C[-1{,}1], \quad p = 3;$

5.5. $Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1/2} t^2 sx(s)\,\mathrm{d}s - t^2 x(0), \quad x(t) \in C[-1{,}1], \quad p = 1;$

5.6. $Ax(t) = \int\limits_{-1/4}^{1/4} tsx(s)\,\mathrm{d}s + tx(0), \quad x(t) \in C[-1{,}1], \quad p = 1;$

5.7. $Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} \left(t^2+1\right) sx(s)\,\mathrm{d}s + tx(0), \quad x(t) \in C[-1{,}1], \quad p = 1;$

5.8. $Ax(t) = \int\limits_0^1 (t+1)\, sx(s)\,\mathrm{d}s - tx(1), \quad x(t) \in C[0{,}1], \quad p = 3;$

5.9. $Ax(t) = \int\limits_{-1/2}^{1/2} (t-1)\, s^3 x(s)\,\mathrm{d}s + t^2 x(1), \quad x(t) \in C[-1{,}1], \quad p = 1;$

5.10. $Ax(t) = \int\limits_0^1 (t+1)\,(s-1)\,x(s)\,\mathrm{d}s - t^2 x(1), \quad x(t) \in C[0{,}1], \quad p = 1;$

5.11. $Ax(t) = \int\limits_0^1 (\ln t + 1)\, sx(s)\,\mathrm{d}s - tx(1), \quad x(t) \in C[0{,}1], \quad p = 3;$

5.12. $Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} s^3 (1-t) x(s)\,\mathrm{d}s + tx(0) \quad x(t) \in C[-1{,}1], \quad p = 3/2;$

5.13. $Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} s^3 \ln(1+t) x(s)\,\mathrm{d}s + tx(1) \quad x(t) \in C[-1{,}1], \quad p = 3/2;$

5.14. $Ax(t) = \int\limits_{-1}^{1} s(1-t)x(s)\,\mathrm{d}s - tx(1), \quad x(t) \in C[-1{,}1], \quad p = 3\ ;$

5.15. $Ax(t) = \int\limits_0^1 (s-1)(t+2)x(s)\,\mathrm{d}s - tx(1), \quad x(t) \in C[-1{,}1], \quad p = 3.$

Задание 6. Вычислить норму оператора $A : \ell_p \to \ell_q$.

6.1. $A : \ell_6 \to \ell_6, \quad Ax = \left(\dfrac{x_1}{\sqrt{3}}, \dfrac{x_2}{\sqrt{4}}, \ldots, \dfrac{x_k}{\sqrt{k+2}}, \ldots\right);$

6.2. $A : \ell_5 \to \ell_5, \quad Ax = \left(\dfrac{x_1}{\sqrt{5}}, \dfrac{x_2}{\sqrt{5^2}}, \ldots, \dfrac{x_k}{\sqrt{5^k}}, \ldots\right);$

6.3. $A : \ell_7 \to \ell_3, \quad Ax = \left(\dfrac{x_1}{3}, \dfrac{x_2}{3^2}, \ldots, \dfrac{x_k}{3^k}, \ldots\right);$

6.4. $A:\ell_{5/2}\to\ell_2,\quad Ax=\left(\frac{x_1}{1},\frac{x_2}{2},\ldots,\frac{x_k}{k},\ldots\right);$

6.5. $A:\ell_5\to\ell_3,\quad Ax=\left(\frac{x_1}{\sqrt{5}},\frac{x_2}{\sqrt{5^2}},\ldots,\frac{x_k}{\sqrt{5^k}},\ldots\right);$

6.6. $A:\ell_{7/2}\to\ell_2,\quad Ax=\left(\frac{x_1}{4},\frac{x_2}{4^2},\ldots,\frac{x_k}{4^k},\ldots\right);$

6.7. $A:\ell_4\to\ell_3,\quad Ax=\left(\frac{x_1}{\sqrt[3]{3}},\frac{x_2}{\sqrt[3]{4}},\ldots,\frac{x_k}{\sqrt[3]{k+2}},\ldots\right);$

6.8. $A:\ell_5\to\ell_5,\quad Ax=\left(\frac{x_1}{\sqrt[3]{7}},\frac{x_2}{\sqrt[3]{7^2}},\ldots,\frac{x_k}{\sqrt[3]{7^k}},\ldots\right);$

6.9. $A:\ell_{7/3}\to\ell_2,\quad Ax=\left(\frac{x_1}{6},\frac{x_2}{6^2},\ldots,\frac{x_k}{6^k},\ldots\right);$

6.10. $A:\ell_3\to\ell_3,\quad Ax=\left(\frac{x_1}{2},\frac{2\,x_2}{2^2},\ldots,\frac{k\,x_k}{2^k},\ldots\right);$

6.11. $A:\ell_{9/2}\to\ell_4,\quad Ax=\left(\frac{x_1}{\sqrt[4]{5}},\frac{x_2}{\sqrt[4]{5^2}},\ldots,\frac{x_k}{\sqrt[4]{5^k}},\ldots\right);$

6.12. $A:\ell_2\to\ell_2,\quad Ax=\left(\frac{\sin 1\,x_1}{3},\frac{\sin 2\,x_2}{3^2},\ldots,\frac{\sin k\,x_k}{3^k},\ldots\right);$

6.13. $A:\ell_{3/2}\to\ell_{3/2},\quad Ax=\left(\frac{x_1}{\sqrt{3}},\frac{x_2}{\sqrt{4}},\ldots,\frac{x_k}{\sqrt{k+2}},\ldots\right);$

6.14. $A:\ell_2\to\ell_1,\quad Ax=\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}},\frac{x_2}{\sqrt{2^2}},\ldots,\frac{x_k}{\sqrt{2^k}},\ldots\right);$

6.15. $A:\ell_7\to\ell_3,\quad Ax=\left(\frac{x_1}{9},\frac{x_2}{9^2},\ldots,\frac{x_k}{9^k},\ldots\right).$

Задание 7. Исследовать на сходимость следующие последовательности линейных ограниченных операторов.

7.1. В пространстве ℓ_2 для элемента $x\,(x_1,x_2,\ldots,x_k,\ldots)\in l_2$ определим последовательности операторов

$$A_nx=\left(\frac{x_1}{n},\frac{x_2}{n},\ldots,\frac{x_k}{n},\ldots\right),B_nx=\Bigl(\underbrace{0,\ldots,0}_{n},x_{n+1},x_{n+2},\ldots\Bigr).$$

7.2. Рассмотрим оператор $A:C[0{,}1]\to C[0{,}1]$, $Ax(t)=\int\limits_0^t e^s x(s)\,\mathrm{d}s$ и последовательность операторов

$$A_nx(t)=\int\limits_0^t\left(\sum_{k=0}^n\frac{s^k}{k!}\right)x(s)\,\mathrm{d}s,\ n\in N.$$

ТЕМА 2. ОБРАТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ. РЕШЕНИЕ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Непрерывно обратимые операторы. Пусть $A : X \to Y$ – линейный оператор с областью определения $\mathscr{D}(A) \subseteq X$ и областью значений $\mathscr{R}(A) \subseteq Y$. Если оператор A осуществляет взаимно однозначное соответствие между $\mathscr{D}(A)$ и $\mathscr{R}(A)$, то к оператору A существует обратный оператор A^{-1}, и решение уравнения $Ax = y$ может быть записано в явном виде $x = A^{-1}y$.

Теорема 1. *Линейный оператор A переводит $\mathscr{D}(A)$ в $\mathscr{R}(A)$ взаимно однозначно тогда и только тогда, когда*

$$Ker A = \{x \in \mathscr{D}(A) : Ax = 0\} = \{0\}. \tag{2.1}$$

Теорема 2. *Если $A : X \to Y$ линеен, то и $A^{-1} : Y \to X$ линеен.*

Теорема 3. *Оператор A^{-1} существует и одновременно ограничен на $\mathscr{R}(A)$ тогда и только тогда, когда для некоторой постоянной $m > 0$ и любого $x \in \mathscr{D}(A)$ выполняется энергетическое неравенство*

$$\|Ax\|_Y \geqslant m\|x\|_X. \tag{2.2}$$

Будем говорить, что линейный оператор $A : X \to Y$ *непрерывно обратим*, если $\mathscr{R}(A) = Y$, оператор A обратим и A^{-1} ограничен.

Теорема 4 (Банаха об обратном операторе). *Пусть X и Y – банаховы пространства, $A : X \to Y$ – линейный ограниченный оператор, отображающий X в Y взаимно однозначно. Тогда обратный оператор $A^{-1} : Y \to X$ ограничен.*

Следствие 1. Пусть на нормированном пространстве X заданы две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ и пространство X полно относительно каждой из норм. Если $\|x\|_1 \leqslant c\|x\|_2$ для всех $x \in X$, то эти нормы эквивалентны.

Левый и правый обратные операторы. Пусть X, Y – нормированные векторные пространства и $A : X \to Y$.

Оператор $A_r^{-1} : Y \to X$ называется *правым обратным оператором* к A, если $AA_r^{-1} = I_y$. Оператор $A_l^{-1} : Y \to X$ называется *левым обратным оператором* к A, если $A_l^{-1}A = I_x$.

Теорема 5. *Для линейного оператора $A : X \to Y$ следующие утверждения эквивалентны:*

1) решение уравнения $Ax = y$ единственно для любого $y \in \mathscr{R}(A)$;

2) $Ker A = \{0\}$, т. е. оператор A инъективен;

3) для оператора A существует левый обратный оператор A_l^{-1}.

Теорема 6. *Для линейного оператора $A : X \to Y$ следующие утверждения эквивалентны:*

1) решение уравнения $Ax = y$ существует для любого $y \in Y$;

2) $\mathscr{R}(A) = Y$, т. е. оператор A сюръективен;

3) для оператора A существует правый обратный оператор A_r^{-1}.

Решение операторных уравнений второго рода. Рассмотрим операторные уравнения второго рода

$$x - Ax = y. \tag{2.3}$$

$$x - \lambda Ax = y, \tag{2.4}$$

где X – банахово пространство, $A : X \to X$, $A \in \mathscr{B}(X)$.

Теорема 7. *Пусть X – банахово пространство, $A \in \mathscr{B}(X)$ и $\|A\| < 1$. Тогда оператор $I - A$ непрерывно обратим и при этом справедливы оценки*

$$\|(I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|A\|}, \quad \|I - (I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{\|A\|}{1 - \|A\|}. \tag{2.5}$$

Теорема 8. *Пусть X – банахово пространство, $A \in \mathscr{B}(X)$ и $|\lambda| < \frac{1}{\|A\|}$. Тогда оператор $I - \lambda A$ непрерывно обратим, причем*

$$(I - \lambda A)^{-1} = I + \lambda A + \lambda^2 A^2 + \ldots + \lambda^n A^n + \ldots .$$

Теорема 9 (о четырех шарах). *Если $A, A^{-1} \in \mathscr{B}(X)$, то множество G элементов $\mathscr{B}(X)$, имеющих в $\mathscr{B}(X)$ обратные, содержит вместе с операторами A и A^{-1} два шара*

$$\begin{aligned} B_1 &= \left\{ B \in \mathscr{B}(X) : \|A - B\| < \frac{1}{A^{-1}} \right\}, \\ B_2 &= \left\{ B \in \mathscr{B}(X) : \|A^{-1} - B\| < \frac{1}{A} \right\}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Если оператор B лежит в шаре B_1, то его обратный представим в виде

$$B^{-1} = A^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}[(A-B)A^{-1}]^n \tag{2.7}$$

или

$$B^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}[A^{-1}(A-B)]^n A^{-1}, \tag{2.8}$$

причем справедливо неравенство

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|^2\|A-B\|}{1-\|A-B\|\|A^{-1}\|}; \tag{2.9}$$

если $B_\varepsilon \in G$ и $\|B_\varepsilon - A\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то и $\|B_\varepsilon^{-1} - A^{-1}\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Если оператор B лежит в шаре B_2, то его обратный

$$B^{-1} = A\sum_{n=0}^{\infty}[(A^{-1}-B)A]^n \tag{2.10}$$

или

$$B^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}[A(A^{-1}-B)]^n A, \tag{2.11}$$

причем справедливо неравенство

$$\|B^{-1} - A\| \leqslant \frac{\|A\|^2\|A^{-1}-B\|}{1-\|A^{-1}-B\|\|A\|};$$

если $B_\varepsilon \in G$ и $\|B_\varepsilon - A^{-1}\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то и $\|B_\varepsilon^{-1} - A^{-1}\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Теорема 9 используется при обосновании вычислительных методов, а именно: требуется оценить норму относительно ошибки, если оператору задачи и правой части придать некоторое возмущение; оценить по невязке норму относительной ошибки.

Следствие 2. Множество обратимых операторов в пространстве $\mathscr{B}(X)$ открыто.

Следствие 3. Пусть $A \in \mathscr{B}(X)$ – непрерывно обратимы и пусть последовательность $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{B}(X)$ равномерно сходится к . Тогда, начиная с некоторого номера $n_0 \in \mathbb{N}$, все операторы A_n непрерывно обратимы и $A_n^{-1} \rightrightarrows A^{-1}$ при $n \to \infty$.

Решение интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра методом резольвент. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода с параметром λ, записанное в виде

$$x(t) - \lambda \int_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = y(t). \tag{2.12}$$

Теорема 10. *Пусть $\mathcal{K}(t,s)$ непрерывная функция по переменным t и s и $|\lambda|M(b-a) < 1$, $M = \max\limits_{a\leqslant t,s\leqslant b} |\mathcal{K}(t,s)|$. Тогда для любой непрерывной функции $y(t)$ в пространстве $C[a,b]$ существует единственное решение уравнения 2.12, которое можно представить в виде*

$$x(t) = y(t) + \lambda \int_a^b R(t,s;\lambda)\, y(s)\mathrm{d}s, \tag{2.13}$$

где резольвента $R(t,s;\lambda)$ ядра $\mathcal{K}(t,s)$ или разрешающее ядро имеет вид

$$R(t,s;\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1}\mathcal{K}_i(t,s), \tag{2.14}$$

а итерированные ядра вычисляются по формуле

$$\begin{aligned} &\mathcal{K}_1(t,s) = \mathcal{K}(t,s), \\ &\mathcal{K}_i(t,s) = \int_a^b \mathcal{K}(t,\tau)\,\mathcal{K}_{i-1}(\tau,s)\,\mathrm{d}\tau,\ i = 2,3,\ldots. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$x(t) = \lambda \int_a^t \mathcal{K}(t,s)x(s)\mathrm{d}s + y(t). \tag{2.16}$$

Теорема 11. *Пусть $\mathcal{K}(t,s)$ непрерывная функция по переменным t и s. Тогда для любой непрерывной функции $y(t)$ при любом значении параметра λ в пространстве $C[a,b]$ существует единственное решение уравнения (2.12), которое можно представить в виде*

$$x(t) = y(t) + \lambda \int\limits_a^b R(t,s;\lambda)\, y(s)\, \mathrm{d}s, \tag{2.17}$$

где

$$R(t,s;\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} \mathcal{K}_i(t,s), \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{K}_1(t,s) = \mathcal{K}(t,s),\\ &\mathcal{K}_i(t,s) = \int\limits_t^b \mathcal{K}(t,\tau)\mathcal{K}_{i-1}(\tau,s)\, \mathrm{d}\tau,\ i = 2,3,\ldots. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Замкнутые операторы. Пусть X и Y – банаховы пространства, $A : X \to Y$ линейный оператор с областью определения $\mathscr{D}(A) \subset X$. Множество $\{(x,Ax) : x \in \mathscr{D}(A), Ax \in \mathscr{R}(A)\}$ называется *графиком оператора* A и обозначается Gr_A. Поскольку A – линейный оператор, то Gr_A представляет собой линейное многообразие в пространстве $X \times Y$, однозначно определяемое оператором A. Если оператор A непрерывен, то линейное многообразие Gr_A замкнуто, т. е. является подпространством в $X \times Y$.

Определение 1. Линейный оператор $A : X \to Y$ называется *замкнутым,* если его график Gr_A является замкнутым множеством в $X \times Y$.

Лемма 2. *Пусть $A : X \to Y$, $A \in \mathscr{B}(X,Y)$, причем $\mathscr{D}(A) = X$. Тогда A замкнут.*

Лемма 3. *Если A замкнут и обратный оператор A^{-1} существует, то A^{-1} также замкнут.*

Лемма 4. *Если $A \in \mathscr{B}(X,Y)$ и A^{-1} существует, то A^{-1} замкнут.*

Теорема 12 (о замкнутом графике). *Если линейный оператор A, отображающий банахово пространство X в банахово пространство Y, имеет замкнутый график, то этот оператор ограничен.*

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. В гильбертовом пространстве ℓ_2 с ортонормированным базисом $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ зададим линейный оператор A следующим образом:

$$A\,e_1 = 0, A\,e_k = e_{k-1}, k = 2, 3, \ldots.$$

Какие из операторов $A_l^{-1}, A_r^{-1}, A^{-1}$ существуют, найти их?

Решение. Покажем, что ядро оператора $KerA$ представляет собой одномерное подпространство, натянутое на вектор e_1, а множество значений $\mathscr{R}\,(A)$ оператора совпадает с пространством l_2. Если $\mathscr{R}\,(A) = \ell_2$, то это означает, что к оператору A существует правый обратный. Зададим правый обратный оператор A_r^{-1} формулами

$$A_r^{-1}\,e_k = e_{k+1} + \gamma_k e_1, \quad k = 1{,}2, \ldots,$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ – некоторые постоянные такие, что $\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k|^2 < \infty$.

Пусть $y \in \ell_2$, т. е. $y = \sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k e_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 < \infty$, тогда

$$A_r^{-1} y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k A_r^{-1} e_k = \sum_{k=1}^{\infty} y_k e_{k+1} + e_1 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k y_k.$$

По неравенству Коши-Буняковского ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \gamma_k y_k$ сходится, поэтому $A_r^{-1}\,y \in l_2$. Заметим, что

$$AA_r^{-1} = I, \quad AA_r^{-1} e_k = A\,(e_{k+1} + \gamma_k e_1) = A\,e_{k+1} + \gamma_k A\,e_1 = e_k.$$

Следовательно, оператор A имеет семейство правых обратных операторов.

Если бы к оператору A существовал левый обратный оператор, то $Ker\ A = \{0\}$ или уравнение $Ax = 0$ имело бы только нулевое решение.

Рассмотрим это уравнение. Пусть $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k e_k$, тогда

$$A\,x = x_1 A\,e_1 + \sum_{k=2}^{\infty} x_k A\,e_k = x_1 \cdot 0 + \sum_{k=2}^{\infty} x_k e_{k-1} = 0.$$

Тогда $x = e_1$ является решением этого уравнения.

Следовательно, $Ker\ A = \mathscr{L}\left\{(e_1)\right\}$. Это означает, что к оператору не существует левого обратного, а значит и обратного оператора.

Пример 2. Рассмотрим оператор $A : \ell_2 \to \ell_2$, действующий по формуле

$$Ax = \left(x_1 + 2x_2, x_1 - x_2, x_3, x_4, \ldots\right).$$

Проверить, существует ли непрерывный обратный к оператору A Найти A^{-1}.

Решение. Очевидно, что оператор A является линейным. Покажем, что оператор A является ограниченным. Действительно,

$$\|Ax\|^2 = |x_1 + 2x_2|^2 + |x_1 + x_2|^2 + |x_3|^2 + |x_4|^2 + \ldots \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(|x_1|^2 + 4|x_2|^2\right) + 2\left(|x_1|^2 + |x_2|^2\right) + |x_3|^2 + \ldots \leqslant 8\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = 8\|x\|^2.$$

Рассмотрим решение уравнения $Ax = y$ при любой правой части $y \in \ell_2$. Имеем

$$x_1 + 2x_2 = y_1,\ x_1 + x_2 = y_2,\ \ x_3 = y_3,\ \ x_4 = y_4, \ldots.$$

Откуда

$$x_1 = 2y_2 - y_1,\ \ x_2 = y_1 - y_2,\ \ x_i = y_i,\ \ i = 3, 4, \ldots.$$

Следовательно, к оператору A существует обратный оператор, который имеет вид

$$x = A^{-1}y = (2y_2 - y_1, y_1 - y_2, y_3, y_4, \ldots).$$

Пример 3. Рассмотрим оператор $A : C\,[0{,}1] \to C\,[0{,}1]$, действующий по формуле

$$Ax\,(t) = x\,(t) + \int_0^1 e^{s+t} x\,(s)\ \mathrm{d}s.$$

Показать, что оператор A непрерывно обратим. Найти A^{-1}.

Решение. Линейный оператор называется непрерывно обратимым, если $\mathscr{R}\,(A) = Y$ и существует обратный ограниченный оператор.

Рассмотрим уравнение вида $Ax = y$ и покажем, что для любой правой части $y\,(t) \in C\,[0{,}1]$ существует единственное решение уравнения. Это будет означать, что для оператора A существует A^{-1}. Для нахождения решения используем вырожденность ядра $\mathcal{K}(t{,}s)$. Итак,

$$x\,(t) + \int_0^1 e^{t+s} x\,(s)\,\mathrm{d}s = y\,(t)\,.$$

Тогда

$$x\,(t) = y\,(t) - e^t \int_0^1 e^s x\,(s)\,\mathrm{d}s,$$

или

$$x\,(t) = y\,(t) - c\,e^t.$$

Таким образом, если мы определим значение постоянной, то тем самым сможем найти решение исходного интегрального уравнения. Умножим обе части полученного равенства на e^t и проинтегрируем его по отрезку $[0, 1]$.

$$\int_0^1 e^t x\,(t)\,\mathrm{d}t\ = \int_0^1 e^t y\,(t)\,\mathrm{d}t\ - c\int_0^1 e^{2t}\mathrm{d}t.$$

Откуда

$$c = \int_0^1 e^t y\,(t)\,\mathrm{d}t\ - c\left(e^2 - 1\right)\frac{1}{2}.$$

Полученное уравнение эквивалентно интегральному уравнению. Если данное уравнение имеет единственное решение, то исходное интегральное уравнение также будет однозначно разрешимым. Вычислим постоянную c

$$c = \frac{2}{e^2+1}\int_0^1 e^t y\,(t)\,\mathrm{d}t,$$

тогда

$$x(t) = y(t) - \frac{2}{e^2+1}\int_0^1 e^{t+s} y(s)\,\mathrm{d}s.$$

Это означает разрешимость уравнения при любой правой части $y(t) \in C[0{,}1]$. Следовательно,

$$A^{-1}y(t) = y(t) - \frac{2}{e^2+1}\int_0^1 e^{t+s} y(s)\,\mathrm{d}s.$$

Заметим, что это интегральный оператор с непрерывным ядром, который является ограниченным. Таким образом, к оператору A существует ограниченный обратный и $\mathscr{R}(A) = C[0{,}1]$, поэтому оператор A непрерывно обратим.

Пример 4. Рассмотрим оператор $A : C[0{,}1] \to C[0{,}1]$,

$$Ax(t) = x'(t) + x(t)$$

с областью определения $\mathscr{D}(A) = \left\{x(t) \in C^1[0{,}1] : x(0) = 0\right\}$. Доказать, что A – неограниченный линейный оператор. Доказать, что A непрерывно обратим, найти A^{-1}.

Решение. Оператор A неограничен, так как последовательность $x_n = \sin nt \in \mathscr{D}(A)$ с $||x_n|| = 1$ под действием оператора перейдет в последовательность $Ax_n = n\cos nt + \sin nt$ и $||Ax_n|| \to \infty$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим на $\mathscr{D}(A)$ уравнение вида

$$x'(t) + x(t) = y(t)$$

и решим его методом Эйлера с учетом начальных условий

$$x(t) = e^{-t}\int_0^t e^{\tau} y(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Значит,

$$A^{-1} : C[0{,}1] \to \mathscr{D}(A), \quad A^{-1}y(t) = e^{-t}\int_0^t e^{\tau} y(\tau)\;\mathrm{d}\tau.$$

A^{-1} ограничен, т. е. $\exists \beta > 0$, что $\left|\left|A^{-1}y\right|\right|_{C[0,1]} \leqslant \beta\,||y||_{C[0,1]}$. Действительно,

$$\left|\left|A^{-1}y\right|\right|_{C[0,1]} = \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|e^{-t}\int_0^t e^{\tau} y(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right| \leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant 1} e^{-t}\int_0^1 e^{\tau}\,|y(\tau)|\;\mathrm{d}\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 e^{\tau} \left| y(\tau) \right| \, \mathrm{d}\tau \leqslant (e-1) \max_{0\leqslant\tau\leqslant 1} \left| y(\tau) \right| = \beta \left|\left| y \right|\right|_{C[0,1]}.$$

Следовательно, A – неограниченный непрерывно обратимый оператор.

Пример 5. Рассмотрим оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$, действующий по формуле

$$Ax(t) = x(t) - \lambda \int_0^t x(s) \, \mathrm{d}s.$$

Доказать, что A непрерывно обратим, найти A^{-1}.

Решение. Оператор A является интегральным оператором Вольтерра с непрерывным ядром, поэтому A ограничен. Рассмотрим уравнение

$$Ax(t) = y(t)$$

или

$$x(t) - \lambda \int_0^t x(s) \, \mathrm{d}s = y(t).$$

Откуда

$$x(t) = \lambda C(t) + y(t),$$

где $C(t) = \int_0^t x(s) \, \mathrm{d}s$, причем $C'(t) = x(t)$ и $C(0) = 0$. Следовательно, решение интегрального уравнения Вольтерра равносильно решению следующей задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{cases} C'(t) - \lambda C(t) = y(t), \\ C(0) = 0. \end{cases}$$

Решение задачи Коши согласно метода Лагранжа ищем в виде

$$C(t) = f(t) \, e^{\lambda t}.$$

Продифференцируем полученное равенство по переменной t

$$f'(t) \, e^{\lambda t} = y(t) \Rightarrow f(t) - f(0) = \int_0^t e^{-\lambda s} y(s) \, \mathrm{d}s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(t) = e^{\lambda t} \left(f(0) + \int_0^t e^{-\lambda s} y(s) \, \mathrm{d}s \right) \Rightarrow$$

$$C(t) = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} y(s)\,\mathrm{d}s \Rightarrow x(t) = \lambda \int_0^t e^{\lambda(t-s)} y(s)\,\mathrm{d}s + y(t)\,.$$

Значит,

$$A^{-1} y(t) = \lambda \int_0^t e^{\lambda(t-s)} y(s)\,\mathrm{d}s + y(t)\,.$$

Это оператор Вольтерра 2-го рода и поэтому он ограничен.

Пример 6. В гильбертовом пространстве ℓ_2 с ортогональным базисом $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ рассмотрим оператор A, задаваемый формулами $Ae_k = \alpha_k e_k$, где $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность вещественных чисел. При каком условии на последовательность $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ оператор A замкнут?

Решение. Рассмотрим два случая:

1) Последовательность $\{|\alpha_n|\}$ ограничена. Пусть $C_A = \sup\limits_k |\alpha_k|\,,$ тогда $\|Ax\|^2 \leqslant C_A \cdot \|x\|^2$. Следовательно оператор A ограничен, а значит, и замкнут.

2) Последовательность $\{|\alpha_n|\}$ неограничена. Как показано в теме 1 в этом случае оператор A неограничен. Если $\inf\limits_k |\alpha_k| = \beta_A > 0$ (т. е. α_k отделены от нуля положительным числом), то существует A^{-1}, определяемый на элементах $y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k e_k$ $\left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 < \infty\right)$ формулой

$$A^{-1} y = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{-1} y_k e_k.$$

Поскольку $\sup\limits_k \left|\alpha_k^{-1}\right| = \beta_A^{-1} < \infty$, то A^{-1} ограничен $\left(\mathscr{D}\left(A^{-1}\right) = l_2\right)$. Таким образом, условие $\inf\limits_k |\alpha_k| > 0$ обеспечивает замкнутость оператора A.

Пример 7. Используя метод резольвент, решить интегральное уравнение Вольтерра вида

$$x(t) - \lambda \int_0^t e^{t-s} x(s)\,\mathrm{d}s = y(t).$$

Р е ш е н и е. В нашем случае $\mathcal{K}(t,s) = e^{t-s}$ и к решению уравнения Вольтерра при любом λ можно применить метод резольвент. Вычислим итерированные ядра

$$\mathcal{K}_1(t,s) = \mathcal{K}(t,s) = e^{t-s},$$

$$\mathcal{K}_2(t,s) = \int\limits_s^t e^{t-\tau} e^{\tau-s}\,\mathrm{d}\tau = e^{t-s}(t-s),$$

$$\mathcal{K}_3(t,s) = \int\limits_s^t e^{t-\tau} e^{\tau-s}(\tau-s)\,\mathrm{d}\tau = e^{t-s}\frac{(t-s)^2}{2!},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathcal{K}_i(t,s) = e^{t-s}\frac{(t-s)^{i-1}}{(i-1)!}.$$

Резольвента $R(t,s;\lambda)$ представляет собой сумму ряда

$$R(t,s;\lambda) = e^{t-s} + e^{t-s}\frac{(t-s)}{1!} + e^{t-s}\frac{(t-s)^2}{2!} +$$

$$+ \ldots + e^{t-s}\frac{(t-s)^{i-1}}{(i-1)!} + \ldots = e^{2(t-s)}.$$

Тогда решение запишется по формуле в виде

$$x(t) = y(t) + \lambda \int\limits_0^t e^{2(t-s)}\, y(s)\,\mathrm{d}s.$$

Задание 1. Пусть $A : L \to C[0,1]$ Выяснить, при каких λ к оператору A существует обратный и построить его.

1.1. $L = \{x(t) \in C^1[0,1] : x(0) = 0\}, \quad Ax(t) = x'(t) + \lambda x(t);$
1.2. $L = \{x(t) \in C^1[0,1] : x(0) = 0\}, \quad Ax(t) = x'(t) + \lambda t x(t);$
1.3. $L = \{x(t) \in C^1[0,1] : x(0) = 0\}, \quad Ax(t) = x'(t) - \lambda t x(t);$
1.4. $L = \{x(t) \in C^1[0,1] : x(0) = 0\}, \quad Ax(t) = x'(t) + \lambda t^2 x(t);$
1.5. $L = \{x(t) \in C^2[0,1] : x(0) = x(1) = 0\}, Ax(t) = x''(t) + \lambda x(t);$
1.6. $L = \{x(t) \in C^2[0,1] : x'(0) = x(1) = 0\}, Ax(t) = x''(t) + \lambda x(t);$

1.7. $L = \{x(t) \in C^2[0,1] : x(0) = x'(1) = 0\}, Ax(t) = x''(t) + \lambda x(t);$

1.8. $L = \{x(t) \in C^2[0,1] : x'(0) = x'(1) = 0\}, Ax(t) = x''(t) + \lambda x(t);$

1.9. $L = \{x(t) \in C^2[0,1] : x(0) = x(1) = 0\}, Ax(t) = x''(t) - \lambda x(t);$

1.10. $L = \{x(t) \in C^2[0,1] : x(0) = x(1) = 0\}, Ax(t) = x''(t) - \lambda x(t);$

1.11. $L = \{x(t) \in C^3[0,1] : x'(0) = x''(1) = 0\}, Ax(t) = x'''(t) + \lambda x''(t);$

1.12. $L = \{x(t) \in C^3[0,1] : x''(0) = x''(1) = 0\}, Ax(t) = x'''(t) + \lambda x''(t);$

1.13. $L = \{x(t) \in C^3[0,1] : x''(0) = x''(1) = 0\}, Ax(t) = x'''(t) - \lambda t x(t);$

1.14. $L = \{x(t) \in C^3[0,1] : x'(0) = x''(1) = 0\}, Ax(t) = x'''(t) + \lambda x(t).$

1.15. $L = \{x(t) \in C^3[0,1] : x(0) = x''(1) = 0\}, Ax(t) = x'''(t) - \lambda x(t).$

Задание 2. Пусть $A : C[0,1] \to C[0,1]$. Используя теорему Банаха об обратном операторе, показать, что оператор A непрерывно обратим, найти A^{-1}.

2.1. $Ax(t) = x(t) + \int\limits_0^1 e^{t-s} x(s)\,\mathrm{d}s;$

2.2. $Ax(t) = x(t) + \int\limits_0^1 (t+s) x(s)\,\mathrm{d}s;$

2.3. $Ax(t) = x(t) + e^t \int\limits_0^1 e^{-s} x(s)\,\mathrm{d}s;$

2.4. $Ax(t) = x(t) + t \int\limits_0^1 s x(s)\,\mathrm{d}s;$

2.5. $Ax(t) = x(t) - 2 \int\limits_0^1 t^2 s x(s)\mathrm{d}s;$

2.6. $Ax(t) = x(t) + \int\limits_0^1 (1+t+s) x(s)\,\mathrm{d}s;$

2.7. $Ax(t) = x(t) + \int\limits_0^1 t s x(s)\,\mathrm{d}s;$

2.8. $Ax(t) = x(t) + 2 \int\limits_0^1 e^{t+s} x(s)\,\mathrm{d}s;$

2.9. $Ax(t) = x(t) + \int\limits_0^1 (s \cos \pi t - 1) x(s)\,\mathrm{d}s;$

2.10. $Ax(t) = x(t) - \int\limits_0^1 t s x(s)\,\mathrm{d}s;$

2.11. $Ax(t) = x(t) + \int\limits_0^1 (1 - ts)x(s)\,\mathrm{d}s;$

2.12. $Ax(t) = x(t) + t\int\limits_0^t s^2 x(s)\,\mathrm{d}s;$

2.13. $Ax(t) = x(t) + \int\limits_0^1 \frac{t}{1+s} x(s)\,\mathrm{d}s;$

2.14. $Ax(t) = x(t) + \int\limits_0^1 \cos\pi(t - s)x(s)\,\mathrm{d}s;$

2.15. $Ax(t) = x(t) + \int\limits_0^1 (t^2 - 1)sx(s)\,\mathrm{d}s.$

Задание 3. Проверить, существует ли непрерывный обратный к оператору $A : \ell_2 \to \ell_2$. В случае положительного ответа указать его.

3.1. $Ax = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_4, \ldots)\,;$

3.2. $Ax = (x_1 + x_2, 2x_2 - x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_4, \ldots)\,;$

3.3. $Ax = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, x_1 - 2x_2 - x_3, x_1 - x_3, x_4, \ldots)\,;$

3.4. $Ax = (x_1 - 2x_2, x_1 - 2x_2 - x_3, x_1 - x_2, x_4, \ldots)\,;$

3.5. $Ax = (x_1 + 2x_2, x_1 - x_3, x_1 - 2x_2 + x_3, x_4, \ldots)\,;$

3.6. $Ax = (x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 - x_2 + 4x_3, x_1 - 2x_2 + x_3, x_4, \ldots)\,;$

3.7. $Ax = (x_1 + x_2 - 2x_3, x_1 - x_2 + 4x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_4, \ldots)\,;$

3.8. $Ax = (2x_2 - 3x_3, -x_2 + 4x_3, -5x_3, x_4, \ldots)\,;$

3.9. $Ax = (2x_1 + 3x_2 - 2x_3, x_2, x_1 + x_2 + 2x_3, x_4, \ldots)\,;$

3.10. $Ax = (x_1 + 2x_2 + 4x_3, 2x_1 + 3x_2 + x_3, x_4, \ldots)\,;$

3.11. $Ax = (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, -x_1 + 3x_2 + 2x_3, x_4, \ldots)\,;$

3.12. $Ax = (2x_1 + 3x_2 + 4x_3, x_1 + 2x_2 - 2x_3, x_1 - x_2, x_4, \ldots)\,;$

3.13. $Ax = (x_1 + x_2 + x_3, -x_1 + 2x_3, x_2 - x_3 x_4, \ldots)\,;$

3.14. $Ax = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, x_2 + 4x_3, x_3 x_4, \ldots)\,;$

3.15. $Ax = (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3, 3x_1 + x_3, x_4, \ldots)\,;$

Задание 4. Пусть $A : X \to Y$. Какие из операторов A_l^{-1}, A_r^{-1}, A^{-1} существуют? Если A^{-1} существует на $\mathscr{R}(A)$, будет ли A^{-1} ограничен.

4.1. $A : l_2 \to l_2, \quad Ax = (x_2, x_3, \ldots)\,;$

4.2. $A : l_2 \to l_2, \quad Ax = \left(x_1, \dfrac{1}{2}\,x_2, \ldots, \dfrac{1}{k}\,x_k, \ldots\right);$

4.3. $A : l_2 \to l_2, \quad Ax = \left(\frac{1}{2}\,x_1, \frac{1}{2^2}\,x_2, \ldots, \frac{1}{2^k}\,x_k, \ldots\right);$

4.4. $A : l_4 \to l_4, \quad Ax = \left(\frac{1}{2}\,x_1, \frac{1}{2^2}\,x_2, \ldots, \frac{1}{2^k}\,x_k, \ldots\right)$

4.5. $A : l_1 \to l_2, \quad Ax = (x_1, 0, x_2, \ldots, x_k, \ldots);$

4.6. $A : l_2 \to l_3, \quad Ax = (0, 2x_1, 3x_2, \ldots, kx_{k-1}, \ldots);$

4.7. $A : l_3 \to l_1, \quad Ax = \left(x_2, 0, x_1, \frac{1}{3^2}\,x_3, \frac{1}{4^2}\,x_4, \ldots\right);$

4.8. $A : m \to m, \quad Ax = \left(x_1, \frac{1}{2}\,x_2, \ldots, \frac{1}{k}\,x_k, \ldots\right);$

4.9. $A : m \to l_2, \quad Ax = \left(x_1, \frac{1}{2}\,x_2, \ldots, \frac{1}{2^{k-1}}\,x_k, \ldots\right);$

4.10. $A : l_3 \to l_2, \quad Ax = (x_2, x_3, \ldots);$

4.11. $A : l_3 \to l_2, \quad Ax = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_3, x_4, \ldots);$

4.12. $A : l_2 \to l_4, \quad Ax = (0, 2x_1, 3x_2, \ldots, kx_{k-1}, \ldots);$

4.13. $A : l_{3/2} \to l_1, \quad Ax = \left(x_3, x_2, x_1, \frac{1}{2^4}\,x_4, \ldots, \frac{1}{2^k}\,x_k, \ldots\right);$

4.14. $A : l_2 \to l_1, \quad Ax = \left(x_2, 0, x_1, \frac{x_3}{3^2}, \ldots, \frac{x_k}{k^2}, \ldots\right);$

4.15. $A : m \to l_1, \quad Ax = \left(x_1, \frac{1}{2^2}\,x_2, \ldots, \frac{1}{2^k}\,x_k, \ldots\right).$

Задание 5. Используя метод резольвент, найти решение следующих интегральных уравнений второго рода:

5.1. $x(t) - \int\limits_0^t e^{t-s} x(s)\,\mathrm{d}s = e^t;$

5.2. $x(t) - 2\int\limits_0^t e^{t-s} x(s)\,\mathrm{d}s = \sin t;$

5.3. $x(t) + \int\limits_0^t 3^{t-s} x(s)\,\mathrm{d}s = t3^t;$

5.4. $x(t) - \int\limits_0^t \frac{2 + \cos t}{2 + \cos s} x(s)\,\mathrm{d}s = e^t \sin t;$

5.5. $x(t) + \int\limits_0^t e^{t^2 - s^2} x(s)\mathrm{d}s = 1 - 2t;$

5.6. $x(t) - 2\int\limits_0^t e^{t^2-s^2}x(s)\,\mathrm{d}s = e^{t^2+2t};$

5.7. $x(t) - \int\limits_0^t \dfrac{1+t^2}{1+s^2}sx(s)\,\mathrm{d}s = 1+t^2;$

5.8. $x(t) - \int\limits_0^t \sin(t-s)x(s)\,\mathrm{d}s = \dfrac{1}{1+t^2};$

5.9. $x(t) - \int\limits_0^t e^{-(t-s)}\sin(t-s)x(s)\,\mathrm{d}s = e^{-t};$

5.10. $x(t) - \int\limits_0^1 e^{t+s}x(s)\,\mathrm{d}s = y(t);$

5.11. $x(t) - \int\limits_0^{\pi/2} \sin t\cos s x(s)\,\mathrm{d}s = y(t);$

5.12. $x(t) - \int\limits_{-1}^1 te^s x(s)\,\mathrm{d}s = y(t);$

5.13. $x(t) - \int\limits_{-1}^1 t^2s^2x(s)\,\mathrm{d}s = y(t);$

5.14. $x(t) - \int\limits_{-1}^1 tsx(s)\,\mathrm{d}s = y(t);$

5.15. $x(t) - \int\limits_0^1 (1+(2t-1)(2s-1))\,x(s)\,\mathrm{d}s = y(t).$

Задание 6.

6.1. Доказать, что линейный ограниченный оператор $A : X \to Y$ замкнут тогда и только тогда, когда $\mathscr{D}(A)$ замкнуто в X;

6.2. Доказать, что множество нулей замкнутого оператора является замкнутым множеством;

6.3. Пусть A,$B : X \to Y$ – линейные операторы, причем A замкнут, B ограничен и $\mathscr{D}(A) \subset \mathscr{D}(B)$. Доказать, что $A + B$ – замкнутый оператор.

6.4. Пусть $A : X \to Y$ – замкнутый линейный оператор, $\mathscr{R}(A)$ замкнуто в Y и существует такая константа $m \in \mathbb{R}$ $(m > 0)$, что для любого $x \in \mathscr{D}(A)$ выполняется неравенство $\|Ax\|_Y \geqslant m\|x\|_X$. Доказать, что A – замкнутый оператор.

ТЕМА 3. СОПРЯЖЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО

Пусть X – нормированное векторное пространство.

Определение 1. Линейный оператор $f : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ называется *линейным функционалом.* Обозначим его как $f(x)$, $x \in X$. Линейность f означает, что $f(\alpha x+\beta y) = \alpha f(x)+\beta f(y)$, $x,y \in X$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Линейный функционал f называется *ограниченным*, если для некоторой константы $C > 0$ выполнено неравенство $|f(x)| \leqslant C\|x\|_X$ сразу для всех $x \in X$. Наименьшая из констант C, совпадающая с числом $\sup|f(x)|$, где $\sup$ берется по всем x с $\|x\| = 1$, называется *нормой* функционала и обозначается $\|f\|$. Ограниченность функционала эквивалентна его непрерывности.

Рассмотрим множество линейных ограниченных функционалов, определенных на нормированном пространстве X, $\mathscr{B}(X, \mathbb{R})(\mathbb{C}^n)$. Это банахово пространство, так как пространство $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ банахово. Оно называется *сопряженным* пространством к пространству X и обозначается X^*.

В банаховом пространстве X^* можно рассматривать два типа сходимости.

Определение 2. Последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ сходится к $f \in X^*$

- *сильно*, если $\|f_n - f\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;
- *слабо*, если $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ для любого $x \in X$.

Примеры линейных ограниченных функционалов

Пример 1. Пусть $X = \mathbb{R}^n$ с базисом $e_1,\ldots,e_n$. Возьмем $x \in \mathbb{R}^n$ и разложим его по базису $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$. Рассмотрим линейный функционал f на элементе x, тогда

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = (x,y)_{\mathbb{R}^n},$$

где $y_k = f(e_k)$. $|f(x)| = |(x,y)| \leqslant \|y\| \cdot \|x\|$. Значит $\|f\| \leqslant \|y\|$.

Таким образом, в пространстве $\mathbb{R}^n$ каждый линейный функционал ограничен.

П р и м е р 2. Пусть $X \in C[a,b]$. Рассмотрим функционал $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k x(t_k)$, где t_k – система точек на отрезке $[a,b]$. Примером такого функционала являются конечные разности функции $x(t) \in C[a,b]$. Данный функционал ограничен. Действительно,

$$|f(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |C_k||x(t_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |C_k| \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|, \quad \|f\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |C_k|.$$

П р и м е р 3. Определим на пространстве $C[a,b]$ функционал вида

$$f(x) = \int\limits_{a}^{b} a(t)x(t)\,\mathrm{d}t,$$

где $a(t)$ – непрерывная либо суммируемая на отрезке $[a, b]$ функция. Примером такого функционала служат коэффициенты Фурье. Данный функционал линеен и ограничим, причем $\|f\| \leqslant \int\limits_{a}^{b} a(t)\,\mathrm{d}t$.

Множество линейных ограниченных функционалов, определенных на нормированном пространстве X называется *сопряженным* пространством и обозначается X^*.

В банаховом пространстве X^* можно рассматривать два типа сходимости. Последовательность $(f_n) \subset X^*$ сходится к $f \in X^*$ *сильно*, если $\|f_n - f\| \longrightarrow\ _{n\to\infty} 0$; *слабо*, если $f_n(x) \to f(x)$ для любого $x \in X$.

С помощью сопряженного пространства в пространстве X можно ввести новый тип сходимости. Говорят, что последовательность $(x_n) \subset X$ сходится к $x \in X^*$ справедливо $f(x_n) \to f(x)$ при $n \to \infty$.

Теорема 1. *(Хана-Банаха). Пусть X – нормированное векторное пространство, X_0 – его подпространство, $f_0 : X_0 \to \mathbb{C}$ – линейный ограниченный функционал. Тогда существует ограниченный функционал $f : X \to \mathbb{C}$, продолжающий f_0, и при том такой, что*

$$\|f\| = \|f_0\|.$$

Следствие 1 (об отделимости точек в X). Пусть X – нормированное пространство и $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$. Тогда существует такой линейный ограниченный функционал в пространстве X, что

1. $\|f\| = 1$;
2. $f(x_0) = \|x_0\|$.

Следствие 2 (об отделимости точки от пространства). Пусть в нормированном пространстве X задано подпространство X_0 и элемент x_0 такой, что $\rho(x_0,X_0) = d > 0$. Тогда существует линейный ограниченный функционал $f \in X^*$, что

1. $f(x_0) = 1$;
2. $f(x) = 0$ для всех $x \in X_0$;
3. $\|f\| = \frac{1}{d}$.

Следствие 3. Множество M всюду плотно в нормированном пространстве X тогда и только тогда, когда для любого функционала $f \in X^*$ такого, что $f(x) = 0$ для всех $x \in M$ следует, что $f = 0$, т. е. $f(x) = 0$, $x \in X$.

Следствие 4. Пусть $\{x_k\}_{k=1}^n$ – линейно-независимая система элементов в нормированном пространстве X. Тогда найдется система $\{f_e\}_{e=1}^n$ – линейных ограниченных функционалов на X такая, что

$$f_l(x_k) = \begin{cases} 1, k = l, \\ 0, k \neq l, \ k,l = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

Определение 3. Система $\{x_k\}_{k=1}^n \subset X$ и система функционалов $\{f_l\}_{l=1}^n \subset X^*$ называется *биортогональными*, если

$$f_e(x_k) = \begin{cases} 1, l = k, 0, l \neq k, \\ k, l = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

Следствие 5. Пусть $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X^*$ – линейно независимая система линейных ограниченных функционалов. Тогда в X найдется система элементов $\{x_l\}_{l=1}^n$, биортогональная к ней.

Сопряженное пространство и его структура.

Теорема 2. *(Ф. Рисса). Пусть H – гильбертово пространство. Для любого линейного ограниченного функционала $f \in H^*$ существует единственный элемент $y \in H$ такой, что для всех $x \in H$*

$$f(x) = (x,y)_H, \quad \|f\|_{H^*} = \|y\|_H. \tag{2.1}$$

Замечание 1. В силу теоремы Рисса существует сохраняющее норму взаимно однозначное соответствие между H^* и H. Это позволяет отождествить пространства H и H^*.

Теорема 3. *(Ф. Рисса). Каждый линейный ограниченный функционал в пространстве $C[a,b]$ задается формулой*

$$f(x) = \int\limits_a^b x(t)\,\mathrm{d}g(t), \tag{2.2}$$

где $g(t) \in \bigvee[a,b]$. При этом

$$\|f\| = \bigvee_a^b(g). \tag{2.3}$$

Замечание 2. Функция g по функционалу f определяется неоднозначно. Если же потребовать от g непрерывности слева и задать значение $g(a) = 0$, то g по f будет определяться однозначно.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 4. Доказать, что функционал

$$f\,(x) = \int_{-1}^{1} x\,(t)\,\mathrm{d}t - x\,(0)\,, \quad x\,(t) \in C[-1,1],$$

является ограниченным, найти его норму.

Решение. В соответствии с определением функционал f является ограниченным, если существует постоянная $C > 0$ такая, что:

$$|f\,(x)| \leqslant C \cdot \|x\|_{C[-1,1]}\,, \quad \forall x(t) \in C[-1,1].$$

Оценим норму $|f\,(x)|$.

$$|f\,(x)| = \left|\int_{-1}^{1} x\,(t)\ \mathrm{d}t - x\,(0)\right| \leqslant \int_{-1}^{1} |x\,(t)|\,\mathrm{d}t + |x\,(0)| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \max_{t\in[-1,1]} |x\,(t)| + \max_{t\in[-1,1]} |x\,(t)| = 3\,\|x\|\,.$$

Таким образом, $\|f\| \leqslant 3$. С другой стороны, существует последовательность $x_n(t) \in C[-1,1]$, определяемая формулой

$$x_n(t) = \begin{cases} 1, t \in [-1, -1/n], \\ -2nt - 1, t \in [-1/n, 0], \\ 2nt - 1, t \in [0, 1/n], \\ 1, t \in [1/n, 1], \end{cases}$$

с $\|x_n(t)\| = 1$ такой, что

$$|f(x_n)| = \left| \int\limits_{-1}^{-1/n} \mathrm{d}t + \int\limits_{-1/n}^{0} t\,\mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{1/n} nt\,\mathrm{d}t + \int\limits_{1/n}^{1} \mathrm{d}t + 1 \right| = 3 - 1/n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 3.$$

Таким образом $3 - 1/n \leqslant \|f\| \leqslant 3$, и поэтому $\|f\| = 3$.

Пример 5. Доказать, что функционал

$$f(x) = \int\limits_{-1}^{0} t^3 x(t)\,\mathrm{d}t - 2\int\limits_{0}^{1/2} t^2 x(t)\,\mathrm{d}t, \quad x(t) \in L_{3/2}[-1,1],$$

является ограниченным, найти его норму.

Решение. Функционал f является ограниченным, если существует постоянная $C > 0$ такая, что:

$$|f(x)| \leqslant C \cdot \|x\|_{L_{3/2}[-1,1]}, \quad \forall x(t) \in L_{3/2}[-1,1].$$

Оценим $|f(x)|$.

$$|f(x)| = \left| \int\limits_{-1}^{0} t^3 x(t)\,\mathrm{d}t - 2\int\limits_{0}^{1/2} t^2 x(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-1}^{1} \left|t^3 \chi_{[-1,0]}(t)\right| |x(t)| \mathrm{d}t + 2\int\limits_{-1}^{1} \left|t^2 \chi_{[0,1/2]}(t)\right| |x(t)| \mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \left(\left|t^3\chi_{[-1,0]}(t)\right| + 2\left|t^2\chi_{[0,1/2]}(t)\right|\right)|x(t)|\mathrm{d}t \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{-1}^{1} \left(\left|t^3\chi_{[-1,0]}(t)\right| + 2\left|t^2\chi_{[0,1/2]}(t)\right|\right)^3 \mathrm{d}t\right)^{1/3} \left(\int\limits_{-1}^{1} |x(t)|^{3/2}\mathrm{d}t\right)^{2/3} =$$

$$= c\|x\|_{L_{3/2}[-1,1]}.$$

Следовательно, $\|f\| \leqslant$. С другой стороны, существует функция $x(t) \in L_{3/2}[-1,1]$, которая задается формулой

$$x(t) = \begin{cases} t^6, & t \in [-1,0], \\ -2t^{4/3}, & t \in [0,1], \end{cases}$$

для которой

$$\|f\| \geqslant \frac{|f(x)|}{\|x\|_{L_{3/2}[-1,1]}} = c.$$

Таким образом, $\|f\| = c$.

Пример 6. В соответствии с теоремой Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве H вычислите норму функционала в пространстве $L_2[-1,1]$:

$$f(x) = \int\limits_{0}^{1/2} \frac{1}{t^{1/3}} x\left(\sqrt{t}\right)\,\mathrm{d}t.$$

Решение. Согласно теореме Рисса существует единственная функция $y(t) \in H$, что $f(x) = (x,y)_H$ для любой функции $x(t) \in H$ и $\|f\| = \|y\|_H$, где в нашем случае $H = L_2[-1,1]$. Преобразуем выражение для функционала так, чтобы в конечном итоге получить формулу скалярного произведения в пространстве $L_2[-1,1]$.

$$\int\limits_{0}^{1/2} \frac{1}{t^{1/3}} x\left(\sqrt{t}\right)\,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{c} \sqrt{t} = \tau,\ t = \tau^2, \\ \mathrm{d}t = 2\tau\mathrm{d}\tau \end{array}\right] = \int_{0}^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{\tau^{3/2}}\, x(\tau)\, 2\tau\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \int\limits_{0}^{1/\sqrt{2}} 2\tau^{1/3} x(\tau)\ \mathrm{d}\tau = \int\limits_{-1}^{1} 2\tau^{1/3} \chi_{[0,1/\sqrt{2}]}(\tau) x(\tau)\ \mathrm{d}\tau = (x,y)_{L_2[-1,1]}\,.$$

Откуда

$$y(\tau) = \begin{cases} 0, \quad \tau \in [-1,0), \\ 2\tau^{1/3}, \quad \tau \in \big[0, 1/\sqrt{2}\big], \\ 0, \quad \tau \in \big(1/\sqrt{2},1\big], \end{cases}$$

и

$$\|f\| = \|y\|_{L_2[-1,1]} = \left(\int\limits_{-1}^{1} |y(\tau)|^2 \,\mathrm{d}t \right)^{1/2} = \left(\int\limits_{0}^{1\sqrt{2}} |2\tau^{1/3}|^2 \mathrm{d}\tau \right)^{1/2} =$$

$$= 2\frac{3}{4}\tau^{4/3}\Big|_{0}^{1/\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4/3}.$$

П р и м е р 7. Вычислить норму функционала в гильбертовом пространстве l_2 по теореме Рисса, если

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{k}, \quad x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2.$$

Р е ш е н и е. По теореме Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве существует единственный элемент $y = (y_1, y_2, \ldots) \in l_2$, такой, что $f(x) = (x,y)_{l_2}$ для любого элемента $x \in l_2$. Учитывая, что скалярное произведение в l_2 определяется по формуле $(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$, заключаем, что $y = \big(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{k}, \ldots\big)$. Очевидно, что $y \in l_2$, тогда норма функционала $\|f\| = \|y\|_{l_2}$, т. е.

$$\|y\|_{l_2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}.$$

Следовательно, $\|f\| = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$.

П р и м е р 8. Для $x(t) \in C[-1,1]$ положим

$$f(x) = \frac{x(1) + x(-1)}{2} + \int_{-1}^{1} t x(t)\,\mathrm{d}t.$$

Доказать, что f – ограниченный линейный функционал. Найти такую функцию $g(t)$ с ограниченным изменением на $[-1{,}1]$, что $f(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\,\mathrm{d}g(t)$.

Р е ш е н и е. Исходя из определения ограниченности функционала, имеем

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}\left(|x(-1)| + |x(1)|\right) + \int_{-1}^{1} |t|\,|x(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\|x\|_{C[-1,1]} + \|x\|_{C[-1,1]}\right) +$$

$$+ \|x\|_{C[-1,1]} \cdot \int_{-1}^{1} |t|\,\mathrm{d}t = 2\,\|x\|_{C[-1,1]}\,, \quad \|f\| \leqslant 2.$$

Любой ограниченный линейный функционал f, заданный на всем пространстве $C[-1{,}1]$, может быть представлен в виде интеграла Римана-Стилтьеса

$$f(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\,\mathrm{d}g(t)\,,$$

где $g(t)$ – функция с ограниченным изменением на отрезке $[-1{,}1]$. При этом норма функционала f равна полному изменению функции $g(t)$, которая является непрерывной слева и $g(-1) = 0$. В нашем случае функция $g(t)$ почти всюду на отрезке $[-1{,}1]$ дифференцируема и ее производная $g^{'}(t) = t$, кроме того она имеет скачок в точках $t = -1$ и $t = 1$. Следовательно,

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t = -1, \\ t^2, & -1 < t < 1, \\ 1, & t = 1. \end{cases}$$

и $\bigvee\limits_{-1}^{1} g(t) = \sup\limits_{k} \sum\limits_{k} |g(t_k) - g(t_{k-1})| = 2.$

Пример 9. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$ с элементами $x(x_1,x_2)$ на подпространстве $L = \left\{x \in \mathbb{R}^2 :\ 2x_1 - x_2 = 0\right\}$ задан линейный функционал $f(x) = x_1$. Доказать, что существует единственное продолжение f на все $\mathbb{R}^2$ с сохранением нормы и найти это продолжение.

Р е ш е н и е. По теореме Хана-Банаха для всякого ограниченного линейного функционала f, заданного на подпространстве L, существует его продолжение на все X с сохранением нормы. Обозначим это продолжение через $F\left(x\right)$. В пространстве $\mathbb{R}^2$ линейный ограниченный функционал имеет вид $F\left(x\right) = \left(x,y\right) = \alpha x_1 + \beta x_2$, где $y = \left(\alpha, \beta\right)$. Тогда на подпространстве L, где $2x_1 - x_2 = 0$, имеем $\alpha x_1 + 2\beta x_1 = x_1$. Поскольку мы строим продолжение с сохранением нормы, то $\|F\| = \|f\|$. Вычислим соответствующие нормы. $\|F\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ вычислена по теореме Рисса. Вычислим $\|f\|$. Поскольку в $\mathbb{R}^2$ задана евклидова норма, тогда на подпространстве L

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{x_1^2 + 4x_1^2} = \sqrt{5}\left|x_1\right|,$$

а

$$\left|f\left(x\right)\right| = \left|x_1\right| = \frac{1}{\sqrt{5}}\|x\|, \quad \text{т. е.} \quad \|f\| = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Итак, $\begin{cases} \alpha + 2\beta = 1, \\ \alpha^2 + \beta^2 = 1/5 \end{cases}$. Решение системы единственно, причем $\alpha = 1/5$, $\beta = 2/5$. Это означает, что продолжение единственно и $F\left(x\right) = 1/5x_1 + 2/5x_2$.

П р и м е р 10. Для $x\left(t\right) \in L_2[-1,1]$ положим

$$f_n\left(x\right) = \int_{-1}^{1} x\left(t\right)\cos\pi nt\,\mathrm{d}t.$$

а) Доказать, что f_n – ограниченный линейный функционал.
б) Исследовать последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ на сходимость.

Р е ш е н и е. Линейность функционала вытекает из линейности интеграла. По теореме Рисса

$$\|f_n\| = \|\cos\pi nt\|_{L_2[-1,1]} = \left(\int_{-1}^{1}\left|\cos\pi nt\right|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2} = 1.$$

Последовательность $f_n\left(x\right)$ представляет собой последовательность коэффициентов Фурье c_n при разложении четной функции в ряд по ортонормированной системе $\varphi_n\left(t\right) = \cos n\pi t$. По теореме о разложении в ряд Фурье имеем: $c_n \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому $f_n\left(x\right)$ слабо сходится к нулю. Однако $f_n(x)$ не сходится к нулю сильно, так как $\|f_n\| = 1$ и к нулю не стремится при $n \to \infty$.

Задание 1. Выяснить, задает ли следующая формула линейный ограниченный функционал. При положительном ответе вычислить норму f для $x(t) \in L_p[a,b]$, $p \geqslant 1$.

1.1. $f(x) = \int\limits_0^{1/2} t^{4/3} x\left(t^2\right) \mathrm{d}t - \int\limits_{1/4}^{1} t x(t) \mathrm{d}t, \quad x(t) \in L_1[0,1];$

1.2. $f(x) = \int\limits_0^{1/2} t^5 x\left(t^2\right) \mathrm{d}t - \int\limits_{-1}^{0} t^2 x(t) \mathrm{d}t, \quad x(t), \quad x(t) \in L_3[-1,1];$

1.3. $f(x) = \int\limits_{-1}^{-1/2} t x\left(t^3\right) \mathrm{d}t - 2\int\limits_0^{1} x\left(\sqrt{t}\right) \mathrm{d}t, \quad x(t) \in L_3[-1,1];$

1.4. $f(x) = \int\limits_0^{1} t^4 x\left(t^3\right) \mathrm{d}t - \int\limits_{-1}^{0} t x\left(\sqrt[3]{t}\right) \mathrm{d}t, \quad x(t) \in L_{9/2}[-1,1];$

1.5. $f(x) = \int\limits_0^{1/2} t x\left(\sqrt[3]{t}\right) \mathrm{d}t - \int\limits_{1/2}^{1} t x(t) \mathrm{d}t, \quad x(t) \in L_{3/2}[0,1];$

1.6. $f(x) = \int\limits_0^{1/3} \sqrt{t} x\left(t^2\right) \mathrm{d}t, \quad x(t) \in L_{7/3}[0,2];$

1.7. $f(x) = \int\limits_0^{1/2} \sqrt[3]{t} x\left(\sqrt[11]{t}\right) \mathrm{d}t, \quad x(t) \in L_{6/5}[-1,1];$

1.8. $f(x) = \int\limits_0^{1/2} t^{5/3} x\left(t^2\right) \mathrm{d}t - \int\limits_{1/2}^{1} t x(t) \mathrm{d}t, \quad x(t) \in L_1[0,1];$

1.9. $f(x) = \int\limits_0^{1/2} t^{4/3} x\left(t^3\right) \mathrm{d}t - \int\limits_{1/2}^{1} t^2 x(t) \mathrm{d}t, \quad x(t) \in L_{3/2}[0,1];$

1.10. $f(x) = \int\limits_0^{1/2} t x\left(t^2\right) \mathrm{d}t - \int\limits_0^{1/2} t x\left(t^2\right) \mathrm{d}t, \quad x(t) \in L_{3/2}[0,1];$

1.11. $f(x) = \int\limits_0^{1/3} t^{1/3} x\left(\sqrt{t}\right) \mathrm{d}t, \quad x(t) \in L_{7/3}[0,1];$

1.12. $f(x) = \int\limits_{-1}^{0} t^2 x\left(\sqrt[3]{t}\right) \mathrm{d}t - \int\limits_0^{1} t x\left(\sqrt{t}\right) \mathrm{d}t, \quad x(t) \in L_1[-1,1];$

1.13. $f(x) = \int\limits_{-1}^{0} t^2 x\left(t^3\right) \mathrm{d}t - \int_0^1 t x(t) \mathrm{d}t, \quad x(t) \in L_{3/2}[-1,1];$

1.14. $f(x)=\int\limits_{-1}^{0} x(t)\,\mathrm{d}t-\int\limits_{0}^{1} t^2x(t)\,\mathrm{d}t, \quad x(t)\in L_4[-1{,}1];$

1.15. $f(x)=\int\limits_{0}^{1/2} tx\left(t^2\right)\mathrm{d}t+\int\limits_{1/2}^{1} t^2x(t)\,\mathrm{d}t, \quad x(t)\in L_{5/2}[-1{,}1].$

Задание 2. Используя теорему Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в пространстве непрерывных на отрезке функций, найти норму функционала, если $x(t)\in C[-5{,}6]$.

2.1. $f(x)=x(-4)+2x(-3)+\int\limits_{-2}^{2} t^2x(t)\,\mathrm{d}t+x(2)-2x(4);$

2.2. $f(x)=3x(-3)+\int\limits_{-2}^{1} t^2x(t)\,\mathrm{d}t+2x(1)-\int\limits_{2}^{4} tx(t)\,\mathrm{d}t-x(5);$

2.3. $f(x)=2x(-5)-\int\limits_{-3}^{1} tx(t)\,\mathrm{d}t+3x(1)+\int\limits_{2}^{3} t^2x(t)\,\mathrm{d}t-x(4);$

2.4. $f(x)=3x(-4)-\int\limits_{-3}^{0} t^2x(t)\,\mathrm{d}t+2x(0)-\int\limits_{1}^{3} tx(t)\,\mathrm{d}t+5x(3);$

2.5. $f(x)=4x(-4)+\int\limits_{-4}^{-2} tx(t)\,\mathrm{d}t-2x(-2)+\int\limits_{1}^{2} t^3x(t)\,\mathrm{d}t+x(2);$

2.6. $f(x)=x(-5)-\int\limits_{-3}^{1} t^2x(t)\,\mathrm{d}t+2x(1)+\int\limits_{2}^{3} tx(t)\,\mathrm{d}t-x(3);$

2.7. $f(x)=3x(-4)+\int\limits_{-4}^{2} (t-1)^2x(t)\,\mathrm{d}t+x(2)-7x(3);$

2.8. $f(x)=5x(-4)+x(-3)+\int\limits_{-3}^{1} t^2x(t)\,\mathrm{d}t-2x(1)-x(3);$

2.9. $f(x)=3x(-5)+x(-4)+\int\limits_{-4}^{-2} tx(t)\,\mathrm{d}t+x(-2)+4x(3);$

2.10. $f(x)=2x(-4)+x(-3)+\int\limits_{-2}^{1} tx(t)\,\mathrm{d}t+5x(1)-2x(4);$

2.11. $f(x)=3x(-4)+x(-3)+\int\limits_{-3}^{1} tx(t)\,\mathrm{d}t-2x(1)-x(5);$

2.12. $f(x)=x(-4)-2x(-2)+\int\limits_{-2}^{1} t^2x(t)\,\mathrm{d}t-3x(1)+4x(5);$

2.13. $f(x)=x(-3)+5x(-1)+\int\limits_{-1}^{1} t^2x(t)\,\mathrm{d}t+4x(1)-2x(3);$

2.14. $f(x) = 2x(-4) + 4x(-2) + \int\limits_{-2}^{2} t^2 x(t)\,\mathrm{d}t + 5x(2) - 4x(4)\,;$

2.15. $f(x) = 3x(-4) - 2x(-2) - \int\limits_{-2}^{1} t^2 x(t)\,\mathrm{d}t + 3x(1) - 4x(4)\,.$

Задание 3. Используя теорему об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве, вычислить норму функционала в $L_2[-1{,}1]$.

3.1. $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} tx(t)\,\mathrm{d}t - 2\int\limits_{0}^{1/2} t^2 x\left(t^2\right)\mathrm{d}t;$

3.2. $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} (t-1)\,x(t)\,\mathrm{d}t - 4\int\limits_{0}^{1/4} t^6 x\left(t^4\right)\mathrm{d}t;$

3.3. $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} tx(t)\,\mathrm{d}t - 2\int\limits_{-1/2}^{1/2} t^2 x(t)\,\mathrm{d}t;$

3.4. $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} t^2 x(t)\,\mathrm{d}t - 3\int\limits_{-1/4}^{1/4} t^6 x\left(\sqrt[3]{t}\right)\mathrm{d}t;$

3.5. $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} (t+1)\,x(t)\,\mathrm{d}t - 3\int\limits_{-1/2}^{1/2} t^2 x\left(\sqrt[3]{t}\right)\mathrm{d}t;$

3.6. $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} \left(t^2+t\right)x(t)\,\mathrm{d}t - 5\int\limits_{0}^{1/4} t^6 x\left(\sqrt[5]{t}\right)\mathrm{d}t;$

3.7. $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} tx(t)\,\mathrm{d}t - 2\int\limits_{0}^{1/2} t^5 x\left(t^2\right)\mathrm{d}t;$

3.8. $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} \left(t^2-t\right)x(t)\,\mathrm{d}t - 4\int\limits_{0}^{1/4} t^2 x\left(t^4\right)\mathrm{d}t;$

3.9. $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} t^2 x(t)\,\mathrm{d}t - \int\limits_{0}^{1/4} t^6 x\left(t^4\right)\mathrm{d}t;$

3.10. $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} t^3 x(t)\,\mathrm{d}t - 5\int\limits_{-1/2}^{1/2} t^3 x\left(\sqrt[3]{t}\right)\mathrm{d}t;$

3.11. $f(x) = \int\limits_{0}^{1/2} t^2 x(t)\,\mathrm{d}t - 2\int\limits_{-1}^{0} t^6 x\left(t^3\right)\mathrm{d}t;$

3.12. $f(x) = \int\limits_{0}^{1} t^2 x(t)\,\mathrm{d}t - 3\int\limits_{-1}^{0} tx\left(\sqrt[3]{t}\right)\mathrm{d}t;$

3.13. $f(x) = 3\int\limits_0^1 x(t)\,\mathrm{d}t - 3\int\limits_{-1/2}^{1/2} t^4 x\left(t^3\right)\mathrm{d}t;$

3.14. $f(x) = \int\limits_0^1 t^{-1/3} x(t)\,\mathrm{d}t - 9\int\limits_{-1}^{1} tx\left(\sqrt[3]{t}\right)\mathrm{d}t;$

3.15. $f(x) = \int\limits_{-1}^{0} t^3 x\left(t^2\right)\mathrm{d}t + 3\int\limits_{1/2}^{1} tx\left(\sqrt{t}\right)\mathrm{d}t.$

Задание 4. Вычислить норму функционала в гильбертовом пространстве l_2, используя теорему Рисса.

4.1.$f(x) = x_1 + x_2 - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}, \quad x(x_1, x_2, \ldots) \in l_2;$

4.2. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2x_k}{k} + x_4 + 2x_7, \quad x(x_1,x_2, \ldots) \in l_2;$

4.3. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} x_k + x_1 + 2x_2, \quad x(x_1,x_2, \ldots) \in l_2;$

4.4. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 4^{-k} x_k - x_5 - x_{10}, \quad x(x_1, x_2, \ldots) \in l_2;$

4.5. $f(x) = x_2 - \sum\limits_{k=1}^{20} x_{2k-1}, \quad x(x_1, x_2, \ldots) \in l_2;$

4.6. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 4^{-k} x_{k^2} - x_1 - x_2, \quad x(x_1,x_2, \ldots) \in l_2;$

4.7. $f(x) = x_1 + \sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{x_{2k}}{2^k}, \quad x(x_1, x_2, \ldots) \in l_2;$

4.8. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{100} \frac{x_k}{k} - 2\sum\limits_{k=200}^{300} x_k, \quad x(x_1,x_2, \ldots) \in l_2;$

4.9. $f(x) = 2x_2 - 3x_3 + \sum\limits_{k=5}^{10} \frac{x_k}{5^k}, \quad x(x_1, x_2, \ldots) \in l_2;$

4.10. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_{3k}}{3^k} - x_1 + 2x_2, \quad x(x_1,x_2, \ldots) \in l_2;$

4.11. $f(x) = x_5 - 2x_1 + \sum\limits_{k=1}^{10} \sqrt{k} \cdot x_k, \quad x(x_1,x_2, \ldots) \in l_2;$

4.12. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{5} \frac{x_k}{2^k} - \sum\limits_{k=3}^{10} \frac{x_k}{k} + x_{10}, \quad x(x_1, x_2, \ldots) \in l_2;$

4.13. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k} - \sum\limits_{k=3}^{20} kx_k + x_1, \quad x(x_1, x_2, \ldots) \in l_2;$

4.14. $f(x) = x_1 - \sum\limits_{k=1}^{20} \frac{x_{2k}}{4^k}, \quad x(x_1, x_2, \ldots) \in l_2;$

4.15. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{10} x_{k^2} - x_{101}, \quad x(x_1, x_2, \ldots) \in l_2.$

Задание 5.

5.1. Для $x(t) \in C^1[-1{,}1]$ положим

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon}\left(x(\varepsilon) - x(-\varepsilon)\right), \quad f_0(x) = x'(0),$$

где $\varepsilon \in \mathbb{R}, \quad |\varepsilon| < 1$.

a) доказать, что f_ε, f_0 – непрерывные линейные функционалы, найти их нормы.

b) исследовать $f_\varepsilon(x)$ на сходимость при $\varepsilon \to 0$.

5.2. В пространстве l_2 для $x(x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ положим $f_n = x_n$. Исследовать последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ на сходимость.

5.3. Для $x(t) \in C[0{,}1]$ положим $f_n(x) = n \int\limits_0^{1/n} x(t)\,\mathrm{d}t$. Исследовать последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ на сходимость.

5.4. Построить сопряженное пространство к пространству $\mathbb{R}^n$, рассмотрев случаи, когда в пространстве $\mathbb{R}^n$ задана кубическая, октаэдрическая нормы.

5.5. В пространстве $\mathbb{R}^2$ с октаэдрической нормой задано подпространство $L = \{(x_1, x_2) | 3x_1 - 2x_2 = 0\}$. На L задан линейный ограниченный функционал $f_0(x) = x_2$. Продолжить функционал f_0 на всю плоскость с сохранением нормы. Что измениться, если в $\mathbb{R}^2$ будет задана сферическая норма.

5.6. В пространстве $\mathbb{R}^2$ с кубической нормой задано подпространство $L = \{(x_1, x_2) | x_1 - 3x_2 = 0\}$. На L задан линейный ограниченный функционал $f_0(x) = x_1$. Продолжить функционал f_0 на всю плоскость с сохранением нормы. Рассмотреть случай, когда в $\mathbb{R}^2$ будет задана сферическая норма.

5.7. В пространстве $C[0{,}1]$ рассмотрим одномерное подпространство $L = \{\alpha x(t)\}$, порожденное функцией $x(t) = t$. Продолжить функционал $f_0 = \alpha$, заданный на L, на все пространство $C[0{,}1]$ с сохранением нормы.

ТЕМА 4. СОПРЯЖЕННЫЕ, САМОСОПРЯЖЕННЫЕ, КОМПАКТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть X, Y – банаховы пространства, $A : X \to Y$ и $A \in \mathscr{B}(X,Y)$, f – линейный ограниченный, определенный на пространстве Y.

Определение 1. *Сопряженным оператором* $A^* : Y^* \to X^*$ к линейному ограниченному оператору $A : X \to Y$ называется оператор, действующий по формуле

$$f(Ax) = A^* f(x) \text{ для всех } x \in X, f \in Y^*. \tag{2.1}$$

Теорема 1. *Сопряженный оператор A^* является линейным ограниченным оператором из Y^* в X^* и $\|A^*\| = \|A\|$.*

Свойство 1. $(A + B)^* = A^* + B^*$; $(\alpha A)^* = \alpha A^*$.

Свойство 2. $\|A\| = \|A^*\|$.

Свойство 3. Пусть $X = Y$. Тогда $(AB)^* = B^* A^*$; $I^* = I$.

Свойство 4. Если оператор A имеет ограниченный обратный A^{-1}, то и A^* также обратим, причем $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Теорема 2. *Пусть X, Y – банаховы пространства, оператор $A : X \to Y$ – линейный ограниченный оператор, $\mathscr{R}(A) \subset Y$ – множество его значений. Тогда замыкание $\mathscr{R}(A)$ совпадает с множеством таким $y \in Y$, что $f(y) = 0$ для всех функционалов $f \in Y^*$, удовлетворяющих условию $A^* f = 0$.*

Следствие 1. Для того, чтобы уравнение $Ax = y$ было разрешимо при заданном y необходимо, а если $\mathscr{R}(A)$ замкнуто, то и достаточно, чтобы любой функционал, удовлетворяющий уравнению $A^* f = 0$, на заданном y обращался в нуль.

Следствие 2. Для того, чтобы уравнение $Ax = y$ было разрешимо для любого $y \in Y$, необходимо, чтобы уравнение $A^* f = 0$ имело только нулевое решение.

Следствие 3. Уравнение $A^* f = 0$ имеет только нулевое решение тогда и только тогда, когда $\overline{\mathscr{R}(A)} = Y$.

Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах

Определение 2. Пусть H_1, H_2 – гильбертовы пространства. *Сопряженным оператором* к оператору $A : H_1 \to H_2$ называется оператор $A^* : H_2 \to H_1$ такой, что для любых $x \in H_1$, $y \in H_2$ выполняется равенство $(Ax,y)_{H_2} = (x, A^*y)_{H_1}$.

Определение 3. Линейный ограниченный оператор $A : H \to H$ называется *самосопряженным*, если $A = A^*$, т. е. справедливо тождество $(Ax,y)_H = (x,Ay)_H$ для всех $x,y \in H$. Линейный ограниченный оператор называется *унитарным*, если $A^* = A^{-1}$. Линейный ограниченный оператор называется *нормальным*, если $A^*A = AA^*$.

Пример 1. В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим оператор умножения на функцию, т. е.

$$Ax(t) = a(t)x(t).$$

Тогда

$$(Ax,y) = \int\limits_0^1 Ax(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 a(t)x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 x(t)\overline{\overline{a(t)}y(t)}\mathrm{d}t.$$

Значит, $A^*y(t) = \overline{a(t)}y(t)$. Следовательно, если $a(t)$ – вещественнозначная функция, то $a(t) = \overline{a(t)}$ и оператор A самосопряженный. Если $|a(t)| = 1$ почти всюду, то $\frac{1}{a(t)} = \overline{a(t)}$ и оператор унитарный. Так как $a(t)\overline{a(t)} = \overline{a(t)}a(t)$, то оператор умножения на функцию нормальный.

Функция $\varphi(x,y) = (Ax,y)$ называется *билинейной формой*, порожденной оператором A. Билинейная форма линейна по первой переменной и антилинейна по второй. По аналогии, *квадратичной формой оператора* A будем называть числовую функцию $\varphi(x) = (Ax,x)$.

Определение 4. Оператор $A \in \mathscr{B}(H)$ называется *неотрицательным*, если порожденная им квадратичная форма неотрицательна, т. е. $(Ax,x) \geqslant 0$ для всех $x \in H$. Неотрицательный оператор обозначается следующим образом: $A \geqslant 0$. Если $A - B \geqslant 0$, то говорят, что $A \geqslant B$.

Теорема 3. *Пусть A – самосопряженный оператор в H. Тогда*

1) квадратичная форма принимает только вещественные значения;

2) $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} |(Ax,x)|$.

Пусть в H задано подпространство $L \subset H$. Согласно теореме о разложении в прямую сумму гильбертова пространства имеем $H = L \oplus L^{\perp}$ или $x = y + z$, $y \in L$, $z \in L^{\perp}$. Тогда каждому элементу $x \in H$ можно поставить в соответствие единственный элемент $y \in L$ – проекцию элемента x на подпространство L. Тем самым определяется отображение или оператор, который называется *ортопроектором* и $y = Px$.

Свойство 5. Каждый проектор P является всюду определенным в H линейным оператором со значениями в H.

Свойство 6. $P \in \mathscr{B}(H)$, причем $\|P\| = 1$, если $L \neq \{0\}$.

Свойство 7. $P^2 = P$.

Свойство 8. $P = P^*$.

Свойство 9. Оператор проектирования положителен, т. е. $(Px,x) \geqslant 0$ для всех $x \neq 0$.

Свойство 10. $x \in L$ тогда и только тогда, когда $\|Px\| = \|x\|$.

Свойство 11. $(Px,x) \leqslant \|x\|^2$ для любого $x \in H$. $(Px,x) = \|x\|^2$ тогда и только тогда, когда $x \in L$.

Теорема 4. *Пусть A – самосопряженный оператор в H, причем $A^2 = A$; тогда A – проектор на некоторое подпространство $L \subset H$.*

Компактные операторы

Определение 5. Пусть X и Y – банаховы пространства. Линейный оператор $A : X \to Y$ называется *компактным*, если он отображает всякое ограниченное множество пространства X в предкомпактное множество пространства Y.

Совокупность всех компактных операторов, действующих из X в Y, обозначим символом $\mathcal{K}(X,Y)$.

О п р е д е л е н и е 6. Линейный оператор $A : X \to Y$ называется *компактным*, если для любой последовательности $(x_n) \subset B[0,r] \subset X$ последовательность образов (Ax_n) содержит фундаментальную подпоследовательность.

О п р е д е л е н и е 7. Линейный оператор $A : X \to Y$ называется *компактным*, если образ $A(B)$ любого шара $B[0,r] \subset X$ является вполне ограниченным в Y множеством.

П р и м е р 2. Пусть Y – конечномерное банахово пространство, $A : X \to Y$, $A \in \mathscr{B}(X,Y)$. Тогда, $A(B)$ – образ шара $B[0,r]$ пространства X будет ограниченным в Y множеством, и, следовательно, вполне ограниченным.

П р и м е р 3. Оператор $A \in \mathscr{B}(X,Y)$ называется *оператором конечного ранга*, если $\dim \mathscr{R}(A) < \infty$, т. е. множество его значений есть конечномерное подпространство пространства Y. В этом случае $A(B)$ является ограниченным множеством в конечномерном пространстве, поэтому предкомпактным, т. е. $A \in \mathscr{K}(X,Y)$.

Таким образом, любой линейный ограниченный оператор конечного ранга компактен. Примером такого оператора служит интегральный оператор Фредгольма с вырожденным ядром, действующий в пространстве $C[a,b]$.

П р и м е р 4. Рассмотрим оператор

$$Ax(t) = \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s \tag{2.2}$$

как оператор, действующий из пространства $C[a,b]$ в пространство $C[a,b]$, ядро которого $\mathcal{K}(t,s)$ непрерывно по совокупности переменных. Покажем, что $A(B)$ предкомпактно в $C[a,b]$. По теореме Арцела-Асколи мы должны проверить условия равномерной ограниченности и равностепенной непрерывности функций $y(t) = Ax(t) \subset A(B)$.

$$\|y\|_C = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |Ax(t)| = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |\int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b} \int\limits_a^b |\mathcal{K}(t,s)x(s)|\,\mathrm{d}s \cdot \|x\| \leqslant M(b-a), \text{где } M = \max_{a\leqslant t,s\leqslant b} |\mathcal{K}(t,s)|.$$

$$|y(t_1) - y(t_2)| \leqslant \int\limits_a^b |\mathcal{K}(t_1,s) - \mathcal{K}(t_2,s)|\,\mathrm{d}s \cdot \|x\| \leqslant \varepsilon(b-a),$$

так как в силу равномерной непрерывности функции $\mathcal{K}(t,s)$ на компакте $[a,b] \times [a,b]$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $t_1,t_2 \in [a,b] : |t_1 - t_2| < \delta$ следует, что

$$|\mathcal{K}(t_1,s) - \mathcal{K}(t_2,s)| < \varepsilon.$$

Таким образом, интегральный оператор Фредгольма с непрерывным ядром компактен.

Пример 5. Тождественный оператор $I : X \to X$ является компактным тогда и только тогда, когда $\dim X < \infty$.

Теорема 5. *Пусть $A : X \to Y$ – компактный оператор. Тогда область его значений $\mathscr{R}(A) \subset Y$ сепарабельна.*

Теорема 6. *Пусть $A_1, A_2 \in \mathscr{K}(X,Y)$. Тогда операторы $A_1 + A_2$, αA_1, где α – произвольная постоянная, также компактны.*

Теорема 7. *Пусть $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ – последовательность компактных операторов, действующих из X из Y, $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится к оператору A. Тогда $A \in \mathscr{K}(X,Y)$.*

Замечание 3. Если $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{K}(X,Y)$ – последовательность, сходящаяся в каждой точке $x \in X$, то предельный оператор A может оказаться не компактным.

Теорема 8. *Пусть $A, B \in \mathscr{B}(X)$. Если хотя бы один из операторов является компактным, то компактным будет и их произведение.*

Следствие 4. В бесконечномерном банаховом пространстве X компактный оператор A не может иметь ограниченного обратного.

Теорема 9. *Пусть X,Y – банаховы пространства, $A \in \mathscr{K}(X,Y)$. Тогда сопряженный оператор $A^* \in \mathscr{K}(X^*,Y^*)$.*

Теорема 10. *Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, $A \in \mathscr{B}(H)$. Для того, чтобы $A \in \mathscr{K}(H)$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал номер $n = n(\varepsilon)$ и такие линейные операторы A_1 и A_2: A_1 – n-мерный, $\|A_2\| < \varepsilon$, что*

$$A = A_1 + A_2. \tag{2.3}$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 6. Пусть $X = Y = \ell_2$ над полем $\mathbb{C}$. Пусть $x \in \ell_2$ и

$$Ax = (\underbrace{0,\ldots,0,}\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots),$$

где $\left(\alpha_i\right)_{i=1}^{\infty}$ – ограниченная последовательность в $\mathbb{C}$. Построить сопряженный оператор.

Решение. Применяя теорему Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве, получим

$$f(Ax) = (Ax,y)_{\ell_2} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \overline{y_{i+k}} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \alpha_i \overline{y_{i+k}} = A^* f(x) = (x,z)_{\ell_2},$$

где $z = A^* y$ $z_i = \overline{\alpha_i} y_{i+k}$. Следовательно,

$$A^* y = (\overline{\alpha_1} y_{k+1}, \overline{\alpha_2} y_{k+2}, \ldots).$$

Здесь мы заменили пространство функционалов изоморфным ему пространством, а именно, пространством ℓ_2.

Пример 7. Рассмотрим в пространстве $L_2[a,b]$ интегральный оператор Фредгольма с ядром $\mathcal{K}(t,s)$, удовлетворяющим условию

$$\int_a^b \int_a^b |\mathcal{K}(t,s)|^2 \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s < \infty. \tag{2.4}$$

Построить сопряженный оператор.

Р е ш е н и е. Поступим, как в предыдущем случае, заменим пространство $(L_2[a,b])^*$ на ему изоморфное $L_2[a,b]$. Получим

$$f(Ax) = (Ax,y)_{L_2[a,b]} = \int\limits_a^b Ax(t)y(t)\mathrm{d}t = \int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\mathrm{d}s\right)y(t)\mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_a^b x(s)\left(\int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)y(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s = \int\limits_a^b x(s)z(s)\,\mathrm{d}s = (x,z) = A^*f(x),$$

где

$$z(t) = A^*y(t) = \int\limits_a^b \mathcal{K}(s,t)y(s)\mathrm{d}s. \tag{2.5}$$

В цепочке равенств мы использовали теорему Фубини о перемене порядка интегрирования по t и s. Формула (2.5) говорит о том, что сопряженным к интегральному оператору Фредгольма является интегральный оператор с ядром $\mathcal{K}(s,t)$ – транспонированным к исходному $\mathcal{K}(t,s)$.

П р и м е р 8. В пространстве $L_2[0,1]$ построим сопряженный оператор к интегральному оператору Вольтерра с непрерывным ядром по переменным t и s

$$Ax(t) = \int\limits_0^t t^2 s x(s)\,\mathrm{d}s.$$

Построить сопряженный оператор

Р е ш е н и е. По определению сопряженного оператора имеем

$$f(Ax) = (Ax,y)_{L_2[0,1]} = \int\limits_0^1 Ax(t)y(t)\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^t t^2 s x(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_0^1 x(s)\left(\int\limits_s^1 t^2 s y(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_t^1 s^2 t y(s)\mathrm{d}s\right)x(t)\mathrm{d}t = (x,A^*y).$$

Откуда

$$A^*y(t) = \int\limits_t^1 ts^2 y(s)\,\mathrm{d}s.$$

Пример 9. Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t) - \int\limits_0^1 4t^2 s x(s)\mathrm{d}s = t - a.$$

Выясним, при каких значениях параметра a уравнение разрешимо.

Решение. Запишем сопряженное однородное уравнение

$$u(t) - \int\limits_0^1 4ts^2 u(s)\mathrm{d}s = 0.$$

Это уравнение с вырожденным ядром и его решением будет функция $u(t) = ct$, где c – произвольная постоянная. Таким образом, сопряженное однородное уравнение имеет одно линейно независимое решение $u(t) = t$. Условие разрешимости уравнения примет вид

$$\int\limits_0^1 (t-a)t\mathrm{d}t = 0.$$

Отсюда видим, что при $a = \frac{2}{3}$ условие разрешимости выполнено, а при $a \neq \frac{2}{3}$ условие не выполнено, и уравнение решения не имеет.

Пример 10. Выяснить, является ли компактным оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$, если

$$Ax(t) = \int_0^1 \frac{x(s)}{\sqrt{(t-s)^2}}\mathrm{d}s.$$

Решение. Оператор A задан не на всем пространстве $C[0,1]$. Действительно, если рассмотреть функцию $x(t) \equiv 1, \forall t \in [0,1]$, то $Ax(t) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}s}{|t-s|}$ и интеграл является расходящимся. Оператор A поэтому не является ограниченным и, следовательно, компактным как отображение из $C[0,1]$ в $C[0,1]$.

Пример 11. Выяснить, является ли компактным оператор

а) $A : C[0,1] \to C[0,1]$; б) $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, действующий по формуле

$$Ax(t) = \int_0^1 x\left(s^2\right) \mathrm{d}s.$$

Решение. а). Оператор A является линейным ограниченным ($\|A\| = 1$) оператором конечного ранга, следовательно, A – компактным оператор.

б). Исследуем оператор A в пространстве $L_2[0,1]$.

$$\int_0^1 x(s^2)\mathrm{d}s = \left[\begin{array}{l} s^2 = t \\ 2s\mathrm{d}s = \mathrm{d}t \end{array}\right] = \int\limits_0^1 \frac{x(t)}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$

Покажем, что оператор A неограничен. Рассмотрим последовательность функций $x_n(t) = \frac{t^{1/2n-1/2}}{\sqrt{n}}$, $t \in [0,1]$, из пространства $L_2[0,1]$. Имеем

$$\int_0^1 \frac{x_n(t)}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{1/n-1}}{\sqrt{n}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{n} \Rightarrow \|Ax_n\| = \sqrt{n},\ \forall n \in N.$$

Оператор A неограничен и поэтому A не является компактным.

Пример 12. Будет ли компактным оператор дифференцирования $Ax(t) = x'(t)$, если он действует из $C^{(2)}[0,1]$ в $C[0,1]$.

Решение. Покажем, что A компактный оператор. Пусть $M \subset C^{(2)}[0,1]$ – произвольное ограниченное множество, т. е. $\exists \beta > 0$, что

$$\forall x(t) \in M \Rightarrow \|x\|_{C^2[0,1]} = \max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)| + \max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x'(t)| + \max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x''(t)| \leqslant \beta,$$

тогда $\max\limits_t |x'(t)| \leqslant \beta$ и $\max\limits_t |x''(t)| \leqslant \beta$, $\forall x \in M$.

Рассмотрим множество $A(M) = \{x'(t)|x(t) \in M\}$. Тогда каждая функция из $A(M)$ непрерывно дифференцируема и как показано выше $A(M)$ равномерно ограничено. Докажем, что $A(M)$ равностепенно непрерывно. Пусть $\varepsilon > 0$ задано, выберем $\delta = \varepsilon/\beta$. Тогда для $\forall t_1,t_2 \in [0,1]$, удовлетворяющих неравенству $|t_1 - t_2| < \delta$, имеем

$$|x'(t_1) - x'(t_2)| = |x''(\tau)| \cdot |t_1 - t_2| < \beta\delta \leqslant \varepsilon\,(\tau \in [t_1,t_2] \subset [0,1]).$$

По теореме Арцела множество $A(M)$ предкомпактно, поэтому оператор A компактен.

Пример 13. Рассмотрим оператор $A : \ell_2 \to \ell_2$, определенный с помощью формулы

$$Ax = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots), \quad x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2,$$

где $(\alpha_i)_{i=1}^{\infty}$ – заданная числовая последовательность. Какой должна быть эта последовательность, чтобы оператор A был компактным?

Решение. Мы показывали ранее, что оператор A является ограниченным тогда и только тогда, когда последовательность $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ ограничена, т. е. $\exists L > 0$, что $|\alpha_i| \leqslant L, \forall i$. Докажем, что оператор A является компактным тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ и пусть $M \subset l_2$ ограничено, т. е. $\exists \beta > 0$, что

$$\|x\|_{l_2} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{1/2} \leqslant \beta, \ \forall x \in M.$$

В этом случае оператор A ограничен, т. е. он отображает ограниченное множество $M \subset \ell_2$ в ограниченное множество $A(M) \subset \ell_2$.. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда из условия $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ следует, что

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow |\alpha_n| < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\beta}.$$

Поэтому для $\forall x = (x_1, x_2, \ldots) \in M$ имеем

$$\sum_{j=n_0}^{\infty} |Ax_i|^2 = \sum_{j=n_0}^{\infty} \alpha_i^2 x_i^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{\beta^2} \sum_{j=n_0}^{\infty} x_i^2 \leqslant \varepsilon,$$

т. е. согласно критерию предкомпактности в ℓ_2 множество $A(M)$ предкомпактно. Пусть теперь A компактный оператор, тогда он ограничен и, следовательно, последовательность $(\alpha_i)_{i=1}^{\infty}$ также ограничена. Рассмотрим для каждого $n \in N$ вектор $l_n = (0, \ldots, 0,1,0, ldots) \neq 0, Al_n = \alpha_n l_n$. Следовательно, все числа α_n являются собственными значениями компактного оператора A. Поэтому, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Задание 1. Найти сопряженный оператор A^* к оператору $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, действующему по следующим формулам:

1.1. $Ax(t) = \int\limits_0^{t^2} tx(s)\mathrm{d}s - \int\limits_0^{t^3} t^2 sx(s)\mathrm{d}s;$

1.2. $Ax(t) = \begin{cases} x(t),\ 0 \le t \le \lambda\ , \\ 0, \lambda < t \leqslant 1, \end{cases}$

1.3. $Ax(t) = x(t^\alpha) - 2\sin tx(t);$

1.4. $Ax(t) = \int\limits_0^{t^3} \cos ts^4 x(s)\mathrm{d}s - \int\limits_{t^2}^{t^3} \sin tsx(s)\mathrm{d}s;$

1.5. $Ax(t) = \int\limits_0^{t} sx\left(s^{1/4}\right)\mathrm{d}s + \int\limits_0^{t^4} \sin t\sqrt{s}x(s)\mathrm{d}s;$

1.6. $Ax(t) = \int\limits_0^{t} \ln t + 1s^5 x(s)\mathrm{d}s - \int\limits_{t^2}^{t} (t+1)sx(s)\mathrm{d}s;$

1.7. $Ax(t) = \int\limits_0^{1-t} ts^3 x(s)\mathrm{d}s - \int\limits_0^{t^3} t^4 s^3 x(s)\mathrm{d}s;$

1.8. $Ax(t) = \int\limits_t^{1} e^s x(s)\mathrm{d}s - \int\limits_0^{t^2} t^5 \cos sx(s)\mathrm{d}s;$

1.9. $Ax(t) = \int\limits_0^{t} ts^2 x(s)\mathrm{d}s - \int\limits_{t^3}^{t^2} t^2 sx(s)\mathrm{d}s;$

1.10. $Ax(t) = \int\limits_0^{t^4} ts^5 x(s)\mathrm{d}s - \int\limits_{t^2}^{t} (t+1)^2 sx(s)\mathrm{d}s;$

1.11. $Ax(t) = \int\limits_0^{t^2} tsx(s)\mathrm{d}s - \int\limits_{t^3}^{t^2} t^2 s^3 x(s)\mathrm{d}s;$

1.12. $Ax(t) = \int\limits_{t^3}^{1} t^2 x\left(\sqrt[3]{s}\right)\mathrm{d}s + \int\limits_0^{t^2} tsx(s)\mathrm{d}s;$

1.13. $Ax(t) = \int\limits_t^{t^2} e^t x(s)\mathrm{d}s - \int\limits_0^{t^3} \sin t\sqrt{s}x(s)\mathrm{d}s;$

1.14. $Ax(t) = \int\limits_t^{1} tx(s)\mathrm{d}s - \int\limits_0^{1} \cos tsx(s)\mathrm{d}s;$

1.15. $Ax(t) = \int\limits_t^{t^2} tx(s)\mathrm{d}s - \int\limits_0^{1} \sin ts^2 x(s)\mathrm{d}s.$

Задание 2. Найти сопряженный оператор A^* к оператору $A : \ell_2 \to \ell_2$, действующему по следующим формулам. Будет ли A самосопряженным?

2.1. $Ax = (x_2, x_3, \ldots)$, $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$;
2.2. $Ax = (0, x_1, x_2, \ldots)$, $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$;
2.3. $Ax = (0{,}0{,}\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots)$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$;
2.4. $Ax = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots)$, $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$;
2.5. $Ax = \Big(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, x_1, \ldots\Big)$, $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$;
2.6. $Ax = (\alpha_n x_n, \alpha_{n+1} x_{n+1}, \ldots)$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$;
2.7. $Ax = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3, x_4, \ldots)$, $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$;
2.8. $Ax = (x_3, x_1, x_2, x_4, x_5, \ldots)$, $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$;
2.9. $Ax = (-x_1, x_2, -x_3, x_4, \ldots)$, $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$;
2.10. $Ax = (0, 0, x_3 + x_4, x_4 - x_3, x_5, x_6, \ldots)$, $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$;
2.11. $Ax = (0, 0, x_1, x_2, \ldots)$, $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$;
2.12. $Ax = (x_2 + x_1, x_1 - x_2, x_4, x_3, x_5, x_6, \ldots)$, $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$;
2.13. $Ax = (x_1, 0, x_2, 0, \ldots)$, $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$;
2.14. $Ax = (x_2, 0, x_3, 0, \ldots)$, $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$.
2.15. $Ax = (x_1, 0, x_2, 0, \ldots)$, $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$.

Задание 3. Являются ли компактными следующие операторы как отображение E в E ?

3.1. $E = C[0,1]$, $\quad Ax(t) = x(0) + tx\left(\frac{1}{2}\right) + t^2 x(1)$;
3.2. $E = C[0,1]$, $\quad Ax(t) = x\left(t^2\right)$;
3.3. $E = C[-1,1]$, $\quad Ax(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$;
3.4. $E = C[0,1]$, $\quad Ax(t) = \int\limits_0^t \tau x(\tau)\mathrm{d}\tau$;
3.5. $E = C[0,1]$, $\quad Ax(t) = \int\limits_0^1 e^{ts}\tau x(s)\mathrm{d}s$;
3.6. $E = L_2[0,1]$, $\quad Ax(t) = \int\limits_0^t \tau x(\tau)\mathrm{d}\tau$;
3.7. $E = L_2[0,1]$, $\quad Ax(t) = \int\limits_0^1 \dfrac{x(s)\mathrm{d}s}{|t-s|^\alpha}$;
3.8. $E = L_2[0,1]$, $\quad Ax(t) = \int\limits_0^1 \dfrac{x\left(\sqrt{s}\right)}{s^{5/4}}\mathrm{d}s$;
3.9. $E = L_2[0,1]$, $\quad Ax(t) = \int\limits_0^1 \dfrac{x(s)}{\sin(t-s)}\mathrm{d}s$;

3.10. $E = C[0,1]$, $\quad Ax(t) = \int\limits_0^1 (s\sin t + s^2\cos t)x(s)\mathrm{d}s;$

3.11. $E = L_2[0,1]$, $\quad Ax(t) = \int\limits_0^1 \dfrac{x(s)}{s-1/2}\mathrm{d}s;$

3.12. $E = C[0,1]$, $\quad Ax(t) = \int\limits_0^1 t^\alpha s^\beta x(s^\gamma)\mathrm{d}s,\ \gamma > 0;$

3.13. $E = L_2[0,1]$, $\quad Ax(t) = \int\limits_0^1 t^\alpha s^\beta x(s^\gamma)\mathrm{d}s,\ \gamma > 0;$

3.14. $E = C[0,1]$, $\quad Ax(t) = \int\limits_0^1 tsx(s)\mathrm{d}s + \sin t x(1).$

3.15. $E = C[0,1]$, $\quad Ax(t) = \int\limits_0^1 tsx(s)\mathrm{d}s + \cos t x(0).$

Задание 4. С помощью сопряженного оператора найти необходимые условия разрешимости уравнения $Ax = y$, если $A : \ell_2 \to \ell_2$

4.1 $Ax = (x_1 - 3x_2, 3x_2 - x_1, x_3 - 2x_4, x_4 - 2x_3, x_5, x_6, \ldots)$;
4.2 $Ax = (x_1 + x_2, 3x_2 - x_1, x_3 - 2x_2, x_4 - 2x_3, x_5, x_6, \ldots)$;
4.3 $Ax = (x_1 - 3x_2, 3x_2 - x_1, x_3 - 2x_4, x_4 - 2x_3, x_5, x_6, \ldots)$;
4.4 $Ax = (x_1 - x_3, x_2 - x_1, x_3 - 2x_4, x_4 - 5x_1, x_5, x_6, \ldots)$;
4.5 $Ax = (x_1 - x_2 + x_3, 3x_2 - x_1, x_2 - x_3 - x_4, x_4 - x_2, x_5, x_6, \ldots)$;
4.6 $Ax = (x_1 - x_2, 3x_2 - x_1 - x_3, x_3 - 2x_4, x_4 - 2x_1, x_5, x_6, \ldots)$;
4.7 $Ax = (x_1 - x_2 + x_3, 3x_2 - x_1 - x_3, x_3 - x_4, x_4 - 2x_2, x_5, x_6, \ldots)$;
4.8 $Ax = (x_1 - x_2 + x_4, 3x_2 - x_1 - x_4, x_3 - x_4, x_4 - 2x_3, x_5, x_6, \ldots)$;
4.9 $Ax = (x_1 + x_2 + x_3, 3x_2 - x_1, x_3 - 2x_4, x_4 - 2x_3, x_5, x_6, \ldots)$;
4.10 $Ax = (x_1 - x_2, x_2 - x_1, x_3 - x_2 - 2x_4, x_4 - 2x_3, x_5, x_6, \ldots)$;
4.11 $Ax = (x_1 + 2x_2, 3x_2 + 5x_1, x_1 - x_3 - 2x_4, x_4 - 2x_3, x_5, x_6, \ldots)$;
4.12 $Ax = (x_1 + x_2, x_2 + x_1, x_3 - x_4, x_4 - x_3, x_5, x_6, \ldots)$;
4.13 $Ax = (x_1 - x_2, x_2 - x_1, x_3 - x_2 - x_4, x_4 - x_3, x_5, x_6, \ldots)$;
4.14 $Ax = (x_1, 3x_2 - x_1, x_4 - x_3 - x_2, x_4 - 2x_3, x_5, x_6, \ldots)$.
4.15 $Ax = (x_2, 3x_2 - 2x_1, x_4 - x_3 - 2x_2, x_4 - 2x_3, x_5, x_6, \ldots)$.

Задание 5.

5.1. В пространстве $\mathbb{R}^2$ рассмотрим подпространство $L = \{x = (x_1,x_2) | x_1 - 3x_2 = 0\}$ и определим на нем линейный ограниченный функционал вида $f_0(x) = x_2$. Продолжить функционал f_0 на все пространство с сохранением нормы. Рассмотреть случай, когда в пространстве $\mathbb{R}^2$ задана сферическая, кубическая либо октаэдрическая нормы. Что можно сказать о продолжении?

ТЕМА 5. ТЕОРИЯ РИССА – ШАУДЕРА РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЙ С КОМПАКТНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Пусть A – компактный оператор, заданный на банаховом пространстве X, т. е. $A \in \mathscr{K}(X)$. Рассмотрим в X линейное уравнение второго рода

$$x - Ax = y. \tag{2.1}$$

Наряду с уравнением (2.1) рассмотрим соответствующее ему однородное уравнение

$$z - Az = 0, \tag{2.2}$$

а также сопряженное к (2.1) уравнение

$$f - A^*f = g \tag{2.3}$$

и однородное сопряженное уравнение

$$h - A^*h = 0. \tag{2.4}$$

По теореме $A^* \in \mathscr{K}(X^*)$.

Теорема 1. *Пусть X – банахово пространство, $A \in \mathscr{K}(X)$. Тогда множество значений $\mathscr{R}(I - A)$ оператора $I - A$ замкнуто в X, и, соответственно, множество $\mathscr{R}(I - A^*)$ замкнуто в X^*.*

Лемма 5. *Пусть x – некоторое решение уравнения* (2.1)*, где $A \in \mathscr{K}(X)$. Тогда существует постоянная $m > 0$, зависящая лишь от A, что выполняется неравенство:*

$$\|x - Ax\| = \|y\| \geqslant m\|x\|. \tag{2.5}$$

Теорема 2 (первая теорема Фредгольма). *Пусть X – банахово пространство, $A \in \mathscr{K}(X)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) уравнение (2.1) *имеет решение при любом $y \in X$;*

2) уравнение (2.2) *имеет только нулевое решение;*

3) уравнение (2.3) *разрешимо при любом $g \in X^*$;*

4) уравнение (2.4) *имеет только нулевое решение.*

Если выполнено одной из условий 1), 2), 3), 4), то операторы $I - A$ и $I - A^*$ непрерывно обратимы.

Теорема 3 (вторая теорема Фредгольма). *Пусть X – банахово пространство, $A \in \mathscr{K}(X)$. Тогда уравнения* (2.2) *и* (2.4) *имеют одинаковое конечное число линейно независимых решений.*

Теорема 4 (третья теорема Фредгольма). *Пусть X – банахово пространство, оператор $A \in \mathscr{K}(X)$. Для того,чтобы уравнение* (2.1) *имело хотя бы одно решение при заданном y, необходимо и достаточно, чтобы для любого решения h уравнения* (2.4) *выполнялось условие $h(y) = 0$.*

Пусть X,Y – банаховы пространства. Оператор $A \in \mathscr{B}(X,Y)$ называется *фредгольмовым*, если

1. $dimKer(A) < \infty$;
2. $dimKer(A^*) < \infty$;
3. образ $\mathscr{R}(A)$ замкнут в Y;

Число $n = dimKerA$ называется *числом нулей* оператора A; число $m = dimKerA^*$ – *дефектом* оператора A; число $ind(A) = n - m$ – *индексом* оператора A.

Тогда для уравнения $Ax = y$, где A – фредгольмов оператор, справедливы теоремы Фредгольма.

Теорема 5 (С.М. Никольского). *Пусть X,Y – банаховы пространства, $A \in \mathscr{B}(X,Y)$. Для того, чтобы оператор A был фредгольмовым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:*

1. $A = B+P$, где $B \in \mathscr{B}(X,Y)$ – непрерывно обратим, $P \in \mathscr{B}(X,Y)$ – оператор конечного ранга;

2. $A = C+T$, где $C \in \mathscr{B}(X,Y)$ – непрерывно обратим, $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ – компактен;

Рассмотрим в пространстве $L_2[a,b]$ интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$x(t) - \int_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = y(t), \tag{2.6}$$

где

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^b |\mathcal{K}(t,s)|^2 \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t < \infty.$$

Данное уравнение можно записать в виде $x - Ax = y$, где A – компактный оператор. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$x(t) - \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s) \, \mathrm{d}s = 0. \tag{2.7}$$

Поскольку $L_2[a,b]$ – гильбертово пространство и $(L_2[a,b])^*$ линейно изоморфно $L_2[a,b]$, то соответствующие сопряженные уравнения можно записать опять же на элементах пространства $L_2[0,1]$.

$$u(t) - \int\limits_a^b \mathcal{K}(s,t)u(s) \, \mathrm{d}s = g(t). \tag{2.8}$$

$$u(t) - \int\limits_a^b \mathcal{K}(s,t)u(s) \, \mathrm{d}s = 0. \tag{2.9}$$

Теорема 6 (альтернатива Фредгольма). *Пусть $\mathcal{K}(t,s)$ – такое ядро, при котором интегральный оператор компактен в $L_2[a,b]$. Тогда возможны лишь два случая:*

1. *Однородные уравнения* (2.7) *и* (2.9) *имеет только нулевые решения; уравнения* (2.6) *и* (2.8) *разрешимы для любой правой части и имеют единственные значения.*
2. *Уравнение* (2.7) *имеет лишь конечное число линейно независимых решений $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда уравнение* (2.9) *имеет то же количество линейно независимых решений $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Уравнение* (2.6) *разрешимо, если*

$$\int\limits_a^b u_i(t)y(t) \, \mathrm{d}t = 0, \; i = 1,2,\ldots,n. \tag{2.10}$$

и его решение имеет вид

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k + x_0(t),$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *– произвольные постоянные;* x_0 *– некоторое частное уравнение.*

Теорема 7. *Пусть* $\mathcal{K}(t,s) \in C([a,b] \times [a,b])$, *тогда для уравнения* (2.6) *справедлива альтернатива Фредгольма.*

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Найти $\mathrm{Ker}A$ и $\mathrm{Ker}A^*$ для оператора $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, действующего по формуле

$$Ax(t) = \int\limits_0^t x(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad x(t) \in L_2[0,1].$$

Решение. Оператор A является линейным и непрерывным, а сопряженный к нему действует по формуле

$$A^*x(t) = \int\limits_t^1 x(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad x(\tau) \in L_2[0,1].$$

$$\mathrm{Ker}A^* = \left\{ x(t) \in L_2[0,1] : \int\limits_t^1 x(\tau)\mathrm{d}\tau = 0, \;\; t \in [0,1] \right\}.$$

Продифференцировав по t соотношение $\int\limits_t^1 x(\tau)\mathrm{d}\tau = 0$, получим, что $x(t) = 0$ почти всюду на $[0,1]$. Поэтому $\mathrm{Ker}A^* = \{0\}$. Аналогично, и ядро оператора A состоит только из нулевых функций.

Пример 2. Рассмотрим оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$, определенный с помощью равенства

$$Ax(\tau) = \int\limits_0^\tau x(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad \forall x(t) \in C[0,1].$$

а). Доказать, что уравнение $x - Ax = y$ имеет решение при любом $y(t) \in C[0,1]$.

б). Найти $(I - A)^{-1}$.

Р е ш е н и е. Проверим, что A компактный оператор. Пусть $M \subset C[0,1]$ – ограниченное множество, т. е. $\exists \beta > 0$, что $\|x\| = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|x(t)\| \leqslant \beta$,

$$\|Ax\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \Big\| \int\limits_0^t x(\tau) \mathrm{d}\tau \Big\| \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \int\limits_0^t \mid x(\tau) \mid \mathrm{d}\tau \leqslant \beta, \quad \forall x(t) \in C[0,1].$$

Значит $A(M)$ – равномерно ограниченное множество. Покажем еще, что $A(M)$ равностепенно-непрерывное множество.

$$|Ax(t_1) - Ax(t_2)| = \left| \int\limits_{t_0}^{t_1} x(\tau) \mathrm{d}\tau \right| \leqslant \int\limits_{t_0}^{t_1} |x(\tau)| \mathrm{d}\tau \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(\tau)| |t_1 - t_2| =$$

$$= \|x\| |t_1 - t_2| \leqslant \beta |t_1 - t_2| < \varepsilon, \quad \delta < \frac{\varepsilon}{\beta}.$$

Следовательно, A – компактный оператор. Согласно первой теореме Фредгольма, покажем, что однородное уравнение $z(t) - Az(t) = 0$ имеет только нулевое решение. Из тождества

$$z(t) = \int\limits_0^t z(\tau) \mathrm{d}\tau, \quad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$

получаем (после дифференцирования) задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$z'(t) = z(t), \quad z(0) = 0 \Rightarrow z(t) \equiv 0.$$

Задача Коши имеет единственное решение. А значит существует обратный оператор $(I - A)^{-1} : C[0,1] \to C[0,1]$, являющийся линейным и непрерывным. Найдем его, решив уравнение

$$x(t) - \int\limits_0^t x(\tau) \mathrm{d}\tau = y(t), \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Уравнение дифференцировать нельзя, так как функция $y(t)$ лишь непрерывна, и поэтому она не обязана быть дифференцируемой. Ищем решение уравнения в виде $x(t) = y(t) + z(t), 0 \leqslant t \leqslant 1$, где $z(t)$ – новая неизвестная функция, удовлетворяющая условию $z(0) = 0$. Имеем

$$z(t) = \int\limits_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau + \int\limits_0^t z(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Сейчас $z(t)$ дифференцируема и удовлетворяет уравнению $z'(t) = y(t) + z(t), z(0) = 0$. Решая это уравнение методом вариации постоянной, имеем

$$z(t) = e^t \left(c + \int\limits_0^t y(\tau)e^{-\tau}\mathrm{d}\tau \right), 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

С учетом условия $z(t) = e^t \int\limits_0^t y(\tau)e^{-\tau}\mathrm{d}\tau$. Значит,

$$x(t) = y(t) + \int\limits_0^t e^{t-\tau}y(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Следовательно, обратный оператор действует по формуле

$$((I - A)^{-1})y(t) = y(t) + \int\limits_0^t e^{t-\tau}y(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Пример 3. Найти решение интегрального уравнения Фредгольма при всех значениях $\lambda \neq 0$ и при всех значениях параметров a и b.

$$x(t) - \lambda \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (s \sin t + \cos s)x(s)\mathrm{d}s = at + b. \qquad (2.11)$$

Р е ш е н и е. В соответствии с теоремой Фредгольма рассмотрим следующие уравнения:

$$x(t) - \lambda \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (s \sin t + \cos s) x(s) \mathrm{d}s = 0, \tag{2.12}$$

$$u(t) - \lambda \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (t \sin s + \cos t) u(s) \mathrm{d}s = g(t), \tag{2.13}$$

$$u(t) - \lambda \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (t \sin s + \cos t) u(s) \mathrm{d}s = 0 \tag{2.14}$$

В альтернативе Фредгольма утверждается, что:

а) уравнения (2.12)и (2.14) имеют только нулевые решения, уравнения (2.11) и (2.13) разрешимы для любых правых частей;

б) уравнение (2.12)имеет только конечное число линейно независимых решений $x_1, \ldots, x_n$, уравнение (2.14) также имеет только n линейно независимых решений $u_1, \ldots, u_n$. Уравнение (2.11) разрешимо для $y(t) \in L_2[0,1]$ тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_a^b y(t) u_k(t) \mathrm{d}t = 0, \quad k = 1,2, \ldots n.$$

Рассмотрим решение уравнения (2.12).

$$x(t) = \lambda \sin t \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} s x(s) \mathrm{d}s + \lambda \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos s x(s) \mathrm{d}s = \lambda C_1 \sin t + C_2 \lambda,$$

где

$$C_1 = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} s x(s) \mathrm{d}s, \quad C_2 = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos s x(s) \mathrm{d}s.$$

Таким образом, решение уравнения (2.12) нужно искать в виде $x(t) = C_1\lambda\sin t + C_2\lambda$, определив C_1 и C_2 из следующей системы:

$$\begin{cases} C_1 = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} s(C_1\lambda\sin s + C_2\lambda)\mathrm{d}s, \\ C_2 = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos s(C_1\lambda\sin s + C_2\lambda)\mathrm{d}s, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1(1-2\lambda) = 0, \\ C_2(1-2\lambda) = 0. \end{cases}$$

В соответствии с теорией разрешимости линейных систем, система имеет ненулевое решение относительно C_1 и C_2 в том случае, если ее определитель равен нулю, т. е.

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1-2\lambda & 0 \\ 0 & 1-2\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Это значит, что при $\lambda = 1/2$ система имеет ненулевое решение, а при $\lambda \neq 1/2$ $C_1 = C_2 = 0$. Рассмотрим два случая.

а) $\lambda \neq 1/2$ Уравнение (2.12) имеет только нулевое решение, тогда уравнение (2.11) имеет решение при любой правой части, т. е. при $\forall a,b$. Будем его искать в виде:

$$x(t) = C_1\lambda\sin t + C_2\lambda + at + b,$$

где

$$\begin{cases} C_1 = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} s(C_1\lambda\sin s + C_2\lambda)\mathrm{d}s, \\ C_2 = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos s(C_1\lambda\sin s + C_2\lambda)\mathrm{d}s. \end{cases}$$

Откуда $C_1 = \frac{\pi^3 a\lambda}{12(1-2\lambda)}$, $\quad C_2 = \frac{2b}{1-2\lambda}$. Получим следующее решение уравнения (2.11) при $\lambda \neq 1/2$:

$$x(t) = \frac{\pi^3 a\lambda^2}{12(1-2\lambda)}\sin t + \frac{2b\lambda}{1-2\lambda} + at + b,$$

б)$\lambda = 1/2$. В этом случае мы должны вычислить линейно независимые решения уравнения (2.14).

$$u(t) = \frac{t}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin s u(s) \mathrm{d}s + \frac{\cos t}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} u(s)\mathrm{d}s = \frac{t}{2}C_1 + \frac{\cos t}{2}C_2,$$

где

$$C_1 = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin s\left(\frac{s}{2}C_1 + \frac{\cos s}{2}C_2\right)\mathrm{d}s,$$

$$C_2 = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{s}{2}C_1 + \frac{\cos s}{2}C_2\right)\mathrm{d}s.$$

После вычисления интегралов получим, что линейно независимыми решениями (2.14) будут функции

$$u_1 = t, \quad u_2 = \cos t.$$

Таким образом, уравнение (2.11) разрешимо, если a и b удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} t(at+b)\mathrm{d}t = 0, \\ \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t(at+b)\mathrm{d}t = 0. \end{cases}$$

Из решения систем имеем, что $a = b = 0$. При $\lambda = 1/2$ уравнение(2.11) разрешимо при $a = b = 0$ и его решение $x(t) = C_2 + C_1 \sin t$, где C_1 и C_2 – любые константы.

Задание 1. Найти все решения следующих интегральных уравнений при всех значениях $\lambda \neq 0$ и при всех значениях параметров a, b, c, входящих в свободный член этих уравнений.

1.1. $x(t) - \lambda\int\limits_0^{\pi} \cos(t+s)x(s)\mathrm{d}s = a\sin t + b;$

1.2. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} (ts+1)x(s)\,\mathrm{d}s = at^2 + bt + c;$

1.3. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} (t^2 s + s^2 t)x(s)\,\mathrm{d}s = at + bt^3;$

1.4. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{2}(ts + s^2 t^2)x(s)\,\mathrm{d}s = at + b;$

1.5. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} \Big(5(ts)^{1/3} + 7(st)^{2/3}\Big)x(s)\,\mathrm{d}s = at + bt^{1/3};$

1.6. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} \dfrac{1+st}{1+s^2}\,x(s)\,\mathrm{d}s = a + t + bt^2;$

1.7. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} \big(\sqrt[3]{s} + \sqrt[3]{t}\big)x(s)\,\mathrm{d}s = at^2 + bt + c;$

1.8. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} (ts + s^2 t + t^2 - 3t^2 s^2)x(s)\,\mathrm{d}s = at + b;$

1.9. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} (3t + ts - 5s^2 t^2)x(s)\,\mathrm{d}s = at;$

1.10. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} (3ts + 5s^2 t^2)x(s)\,\mathrm{d}s = at^2 + bt;$

1.11. $x(t) - \lambda \int\limits_{-\pi}^{\pi} (t\sin s + \cos t)x(s)\,\mathrm{d}s = a + b\cos t;$

1.12. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} (st^2 + s^2 t^3)x(s)\,\mathrm{d}s = at^2 + bt + c;$

1.13. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} \dfrac{st + s^2 t^2}{1+s^2}\,x(s)\,\mathrm{d}s = at + b;$

1.14. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} (ts - 1/3)x(s)\,\mathrm{d}s = at^2 - bt + 1;$

1.15. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} (ts + 2s^2 t^2)x(s)\,\mathrm{d}s = at^2 + bt^4 - c;$

1.16. $x(t) - \lambda \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (s\sin t + \cos s)x(s)\,\mathrm{d}s = at + b - c;$

1.17. $x(t) - \lambda \int\limits_{0}^{\pi/2} \cos(2t + 4s)x(s)\,\mathrm{d}s = e^{at+b};$

1.18. $x(t)-\lambda\int\limits_{-1}^{1}\frac{1+st}{(1+s^2)^{1/2}}\,x(s)\,\mathrm{d}s=at^2-(b+c)t+b;$

1.19. $x(t)-\lambda\int\limits_{-1}^{1}(s^2t+s)x(s)\,\mathrm{d}s=at^2+b+ct;$

1.20. $x(t)-\lambda\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\cos s\sin t+t\cos s)x(s)\,\mathrm{d}s=a+b\sin t;$

1.21. $x(t)-\lambda\int\limits_{-\pi}^{\pi}(t\sin s+\cos t)x(s)\,\mathrm{d}s=(a-b)t+b;$

1.22. $x(t)-\lambda\int\limits_{-1}^{1}(\sqrt[3]{s}+\sqrt[3]{t})x(s)\,\mathrm{d}s=(a+b)t^2+t-c;$

1.23. $x(t)-\lambda\int\limits_{-1}^{1}\frac{1+ts}{\sqrt{1-s^2}}\,x(s)\,\mathrm{d}s=at^2-(b+c)t+b;$

1.24. $x(t)-\lambda\int\limits_{0}^{1}(t+s)x(s)\,\mathrm{d}s=at^2+b+1;$

1.25. $x(t)-\lambda\int\limits_{0}^{\pi/2}\cos(2t+4s)x(s)\,\mathrm{d}s=e^{at+b};$

Задание 2. При каждом значении λ выяснить значения параметров a,b,c, используя сопряженный оператор, при которых существует решение интегрального уравнения в пространстве $L_2[a,b]$

2.1. $x(t)-\lambda\int\limits_{0}^{\pi}\sin(t-2s)x(s)\,\mathrm{d}s=(a-b)t+c;$

2.2. $x(t)-\lambda\int\limits_{0}^{\pi}\sin(3t+s)x(s)\,\mathrm{d}s=ae^t(b+c)t;$

2.3. $x(t)-\lambda\int\limits_{0}^{\pi}\sin(2t+s)x(s)\,\mathrm{d}s=at+c+b\sin t;$

2.4. $x(t)-\lambda\int\limits_{0}^{2\pi}\cos(2t+4s)x(s)\,\mathrm{d}s=e^{at+b};$

2.5. $x(t)-\lambda\int\limits_{-\pi}^{\pi}(t\sin s+\cos t)\,x(s)\,\mathrm{d}s=at+b;$

2.6. $x(t)-\lambda\int\limits_{0}^{\pi}\cos(2t+s)x(s)\,\mathrm{d}s=a+2b\cos 2t;$

2.7. $x(t)-\lambda\int\limits_{0}^{\pi}\sin(t+s)x(s)\,\mathrm{d}s=a\cos t+b\sin t+c;$

2.8. $x(t)-\lambda\int\limits_{0}^{\pi}(\cos t\cos s-\cos 2t\cos 2s)\,x(s)\,\mathrm{d}s=at+bt^2+c;$

2.9. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} \left(1 + s^2 + t^2\right) x(s)\,\mathrm{d}s = at + bt^3;$

2.10. $x(t) - \lambda \int\limits_{0}^{2\pi} (\cos t \cos s + 2 \sin 2t \sin 2s)\, x(s)\,\mathrm{d}s = at + b;$

2.11. $x(t) - \lambda \int\limits_{0}^{2\pi} \cos(3t + s) x(s)\,\mathrm{d}s = a + b + \sin t;$

2.12. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} \left(5 + 4ts + 9t^2 s^2 - 3t^2 - 3s^2\right) x(s)\,\mathrm{d}s = at + b;$

2.13. $x(t) - \lambda \int\limits_{0}^{1} \left[\left(\frac{t}{s}\right)^{2/5} + \left(\frac{s}{t}\right)^{2/5}\right] x(s)\,\mathrm{d}s = (a - b)t + b - ct^2;$

2.14. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} \left(ts - 3t^2 s^2 + t^2 + s^2\right) x(s)\,\mathrm{d}s = c + (b + 1)t;$

2.15. $x(t) - \lambda \int\limits_{0}^{1} (t + s - 2ts)\, x(s)\,\mathrm{d}s = at^2 + bt - ct^3;$

2.16. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} \left(t^2 - ts\right) x(s)\,\mathrm{d}s = (a + b) \sin t - b;$

2.17. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} \left(5t^3 s + t^4\right) x(s)\,\mathrm{d}s = at^3 + bt - c;$

2.18. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} (1 - t + 2ts)\, x(s)\,\mathrm{d}s = at + b;$

2.19. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} \left(t^3 s + t^2 s^2\right) x(s)\,\mathrm{d}s = (a + b)t + ce^t;$

2.20. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} \left(2ts^3 s + 5t^2 s^2\right) x(s)\,\mathrm{d}s = (b + c)t + a;$

2.21. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} \left(1 + ts + s^2 + t^2\right) x(s)\,\mathrm{d}s = at + b + ct^2;$

2.22. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} (1 + ts)\, x(s)\,\mathrm{d}s = at^3 + bt + c;$

2.23. $x(t) - \lambda \int\limits_{0}^{\pi} \sin(t + 3s) x(s)\,\mathrm{d}s = a \sin t + bt;$

2.24. $x(t) - \lambda \int\limits_{0}^{2\pi} \cos(3s - t) x(s)\,\mathrm{d}s = a \cos t + b \sin t + ct;$

ТЕМА 6. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ КОМПАКТНОГО ОПЕРАТОРА

Пусть X – нормированное векторное пространство, $A : X \to X$ – линейный оператор.

Определение 1. Число λ называется *собственным значением оператора* A, если существует ненулевой вектор $x \in X$ такой, что

$$Ax = \lambda x. \tag{2.1}$$

Вектор $x \neq 0$ называется *собственным вектором*, отвечающим собственному значению λ оператора A.

Поскольку наряду с вектором x вектор $cx (c - \mathrm{const}, c \neq 0)$ также является собственным, то собственные векторы можно считать нормированными, например, условием $\|x\| = 1$.

Максимальное число линейно независимых собственных векторов, отвечающих данному собственному значению, называют *кратностью* этого собственного значения.

Лемма 1. *Собственные векторы линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.*

Пример 1. Пусть $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – линейный оператор, определенный матрицей (a_{ij}), $i,j = \overline{1,n}$. Тогда для нахождения собственных значений оператора A, необходимо, чтобы уравнение $(A - \lambda E)x = 0$ имело нетривиальное решение. Это равносильно тому, что

$$det|A - \lambda E| = 0. \tag{2.2}$$

Уравнение (2.2) называется *характеристическим уравнением.*

Таким образом, в конечномерном пространстве, собственными значениями линейного оператора являются корнями характеристического уравнения.

Пусть теперь X – банахово пространство, $A : X \to X$ – компактный оператор. Пусть λ – собственное значение оператора A, а X_λ – собственное подпространство, состоящее из собственных векторов, отвечающих значению λ.

Теорема 1. *Пусть X – банахово пространство, $A \in \mathscr{K}(X)$. Тогда его собственное подпространство X_λ, отвечающее собственному значению $\lambda \neq 0$, конечномерно.*

Теорема 2. *Пусть X – банахово пространство, $A \in \mathscr{K}(X)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ вне круга $|\lambda| \leqslant \varepsilon$ комплексной плоскости (вещественной оси) может содержаться лишь конечное число собственных значений оператора A.*

Следствие 1. Множество значений компактного оператора не более чем счетно и может быть занумеровано в порядке невозрастания модулей $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant$ и $\lambda_n \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$.

Пример 2. Рассмотрим интегральный оператор Фредгольма

$$Ax(t) = \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s \tag{2.3}$$

с непрерывным комплекснозначным ядром $\mathcal{K}(t,s)$. Будем решать задачу на собственные значения и собственные вектора вида

$$Ax(t) = \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = \lambda x(t). \tag{2.4}$$

Поскольку ядро $\mathcal{K}(t,s)$ непрерывно, то оператор A является компактным. Для (2.4) возможны следующие варианты:

1. (2.4) имеет лишь нулевое решение: $x(t) = 0$ при $\lambda \neq 0$. Это означает, что интегральный оператор не имеет собственных значений отличных от нуля;
2. Существует конечное число собственных значений, отличных от нуля;
3. Существует последовательность собственных значений λ_n, причем $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$.

В пространстве $L_2[a,b]$ рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода с комплекснозначным параметром λ

$$x(t) - \lambda \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = y(t). \tag{2.5}$$

Будем предполагать, что ядро $\mathcal{K}(t,s)$ интегрального оператора таково, что уравнение (2.5) является уравнением с компактным оператором.

Число $1/\lambda, \lambda \neq 0$ называют *характеристическим числом* интегрального оператора. Тогда альтернатива Фредгольма для уравнения (2.5) может быть сформулирована следующим образом:

Теорема 3. *Для того, чтобы уравнение* (2.5) *было разрешимо для любого* $y \in L_2[a,b]$ *необходимо и достаточно, чтобы* λ *не было характеристическим числом интегрального оператора* (2.3). *Если* λ *– характеристическое число, то его кратность конечна и* $\overline{\lambda}$ *является характеристическим числом сопряженного оператора* A^* *к оператору* (2.3) *той же кратности. Для разрешимости уравнения* (2.5) *необходимо и достаточно, чтобы функция* $y(t)$ *была ортогональна всем собственным функциям оператора* A^*, *соответствующим собственному значению* $1/\overline{\lambda}$. *При этом у уравнения* (2.5) *существует единственное решение, ортогональное всем собственным функциям оператора* A, *отвечающим собственному значению* $1/\lambda$.

Пусть H – гильбертово пространство, $A : H \to H$ – самосопряженный оператор.

Теорема 4 . *Все собственные значения самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве вещественны. Собственные подпространства* H_{λ_1} *и* H_{λ_2}, *отвечающие различным собственным значениям* λ_1 *и* λ_2, *ортогональны.*

Теорема 5 . *Компактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве имеет по крайней мере одно собственное значение.*

Следствие 2. Если компактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H не имеет отличных от нуля собственных значений, то $A = 0$.

Теорема 6 . *Все собственные значения компактного самосопряженного оператора* $A : H \to H$ *расположены на отрезке* $[m,M]$, *где*

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Ax,x), \quad M = \sup_{\|x\|=1} (Ax,x). \tag{2.6}$$

Подпространство $L \subset H$ назовем *инвариантным* подпространством оператора A, если для любого $x \in L$ имеем $Ax \in L$.

Обозначим через H_n подпространство пространства H, состоящее из элементов $x \in H$, ортогональных первым n собственным векторам оператора A, $(x,x_i) = 0$, $i = 1,2,\ldots,n$. Для любого $x \in H_n$ вектор $Ax \in H_n$, т. е. $(Ax,x_i) = (x,Ax_i) = \lambda_i(x,x_i) = 0$. Это означает, что оператор A можно рассматривать как оператор $A : H_n \to H_n$. При этом он, естественно, является самосопряженным и компактным. Поэтому, по теореме 4,

$$|\lambda_{n+1}| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x\in H_n}} |(Ax,x)|$$

и так далее.

Теорема 7. *Пусть A – компактный самосопряженный оператор из H в H, а x — произвольный элемент из H. Тогда элемент $Ax \in H$ разлагается в сходящийся ряд Фурье по системе $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ собственных векторов оператора A.*

Следствие 3. Если компактный самосопряженный оператор в H имеет обратный, то система его собственных векторов образует базис в H.

Следствие 4. Если A — компактный самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, то в H существует ортонормированный базис из собственных векторов оператора A.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 3. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального оператора

$$Ax(t) = \int_0^{\pi} \left(\cos^2 t \cos 2s + \cos 3t \cos^3 s\right) x(s)\,\mathrm{d}s.$$

Решение. Запишем уравнение для нахождения характеристических чисел и соответствующих им собственных функций интегрального оператора в виде

$$x(t) = \lambda \cos^2 t \int_0^{\pi} \cos 2s x(s)\,\mathrm{d}s + \lambda \cos 3t \int_0^{\pi} \cos^3 s x(s)\,\mathrm{d}s.$$

Обозначим через

$$C_1 = \int_0^{\pi} \cos 2s x(s)\, \mathrm{d}s, \quad C_2 = \int_0^{\pi} \cos^3 s x(s)\, \mathrm{d}s.$$

Тогда решение $x(t)$ представимо в виде

$$x(t) = \lambda \cos^2 t C_1 + \lambda \cos 3t C_2.$$

Для определения C_1 и C_2 получим систему линейных уравнений вида

$$C_1 \left(1 - \lambda \int_0^{\pi} \cos^2 s \cos 2s\, \mathrm{d}s\right) - C_2\lambda \int_0^{\pi} \cos 3s \cos 2s\, \mathrm{d}s = 0,$$
$$-C_1\lambda \int_0^{\pi} \cos^5 s\, \mathrm{d}s + C_2 \left(1 - \lambda \int_0^{\pi} \cos^3 s \cos 2s\right) \mathrm{d}s = 0.$$

Вычисляя интегралы, получим

$$C_1 \left(1 - \lambda\frac{\pi}{4}\right) - C_2\lambda \cdot 0 = 0,$$
$$-C_1\lambda \cdot 0 + C_2 \left(1 - \lambda\frac{\pi}{8}\right) = 0.$$

Система имеет ненулевое решение, если ее определитель равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda\pi}{4} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\lambda\pi}{8} \end{vmatrix} = \left(1 - \frac{\lambda\pi}{4}\right)\left(1 - \frac{\lambda\pi}{8}\right) = 0.$$

Таким образом, характеристические числа $\lambda_1 = 4/\pi$, $\lambda_2 = 8/\pi$. Для нахождения собственных функций, соответствующих характеристическим числам λ_1 и λ_2 рассмотрим решение системы при $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$.

Если $\lambda = 4/\pi$, то система имеет вид $C_1 \cdot 0 = 0$; $\frac{1}{2}C_2 = 0$, откуда C_1 – любое. Тогда $x_1(t) = \cos^2 t$ – собственная функция, отвечающая характеристическому числу $\lambda_1 = 4/\pi$. Аналогично, характеристическому числу $\lambda_2 = 8/\pi$ соответствует функция $x_2(t) = \cos 3t$.

Пример 4. Найти характеристические числа и собственные функции однородного уравнения

$$x(t) - \lambda \int_0^{\pi} \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = 0,$$

где

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} \cos t \sin s, & 0 \leqslant t \leqslant s, \\ \sin t \cos s, & s \leqslant t \leqslant \pi. \end{cases}$$

Решение. Решение уравнения представим в виде

$$x(t) = \lambda \int\limits_0^t \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s + \lambda \int\limits_t^{\pi} \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s,$$

или

$$x(t) = \lambda \sin t \int\limits_0^t x(s)\cos s\,\mathrm{d}s + \lambda \cos t \int\limits_t^{\pi} x(s)\sin s\,\mathrm{d}s \tag{2.7}$$

Дифференцируя обе части (2.7), находим

$$x'(t) = \lambda \cos t \int\limits_0^t x(s)\cos s\,\mathrm{d}s + \lambda \sin t \cos t x(t) -$$

$$-\lambda \sin t \int\limits_t^{\pi} x(s)\sin s\,\mathrm{d}s - \lambda \sin t \cos t x(t),$$

или

$$x'(t) = \lambda \cos t \int\limits_0^t x(s)\cos s\,\mathrm{d}s - \lambda \sin t \int\limits_t^{\pi} x(s)\sin s\,\mathrm{d}s. \tag{2.8}$$

Повторное дифференцирование дает

$$x''(t) = -\lambda \sin t \int\limits_0^t x(s)\cos s\,\mathrm{d}s + \lambda \cos^2 t x(t) -$$

$$-\lambda \cos t \int\limits_t^{\pi} x(s) \sin s \, \mathrm{d}s + \lambda \sin^2 t x(t) =$$

$$= \lambda x(t) - \left[\lambda \sin t \int\limits_0^t x(s) \cos s \, \mathrm{d}s + \lambda \cos t \int\limits_t^{\pi} x(s) \sin s \, \mathrm{d}s \right].$$

Выражение в квадратных скобках равно $x(t)$, так что

$$x''(t) = \lambda x(t) - x(t).$$

Из равенств (2.7) и (2.8) находим, что

$$x(\pi) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

Итак, интегральное уравнение сводится к следующей краевой задаче:

$$\begin{aligned} & x''(t) - (\lambda - 1)x(t) = 0, \\ & x(\pi) = 0, \quad x'(0) = 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Здесь возможны три случая.

1. $\lambda - 1 = 0$, или $\lambda = 1$. Уравнение (2.9) принимает вид $x''(t) = 0$. Его общее решение будет $x(t) = C_1 t + C_2$. Используя краевые условия, получим для нахождения неизвестных C_1 и C_2 систему

$$\begin{cases} C_1 \pi + C_2, \\ C_1 = 0, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение $C_1 = 0, \quad C_2 = 0$, а следовательно, интегральное уравнение имеет только тривиальное решение

$$x(t) \equiv 0.$$

2. $\lambda - 1 > 0$ или $\lambda > 1$. Общее решение уравнения задачи (2.9) имеет вид

$$x(t) = C_1 \cosh(\sqrt{\lambda - 1}\, t) + C_2 \sinh(\sqrt{\lambda - 1}\, t),$$

откуда

$$x'(t) = \sqrt{\lambda - 1} \left(C_1 \sinh(\sqrt{\lambda - 1}\, t) + C_2 \cosh(\sqrt{\lambda - 1}\, t) \right).$$

Для нахождения значений C_1 и C_2 краевые условия дают систему

$$\begin{cases} C_1 \cosh(\pi\sqrt{\lambda-1}) + C_2 \sinh(\pi\sqrt{\lambda-1}) = 0, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Система имеет единственное решение $C_1 = 0, \quad C_2 = 0$. Интегральное уравнение имеет только тривиальное решение

$$x(t) \equiv 0.$$

3. $\lambda - 1 < 0$ или $\lambda < 1$. Общее решение уравнения (2.9) будет

$$x(t) = C_1 \cos(\sqrt{1-\lambda}\, t) + C_2 \sin(\sqrt{1-\lambda}\, t).$$

Отсюда находим, что

$$x'(t) = \sqrt{1-\lambda}\left(-C_1 \sin(\sqrt{1-\lambda}\, t) + C_2 \cos(\sqrt{1-\lambda}\, t)\right).$$

Краевые условия (2.9) в этом случае дают для нахождения C_1 и C_2 систему

$$\begin{cases} C_1 \cos(\pi\sqrt{1-\lambda}) + C_2 \sin(\pi\sqrt{1-\lambda}) = 0, \\ \sqrt{1-\lambda}C_2 = 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Определитель этой системы

$$\triangle(\lambda) = \begin{vmatrix} \cos(\pi\sqrt{1-\lambda}) & \sin(\pi\sqrt{1-\lambda}) \\ 0 & \sqrt{1-\lambda} \end{vmatrix}.$$

Полагая его равным нулю, получим уравнение для нахождения характеристических чисел:

$$\begin{vmatrix} \cos(\pi\sqrt{1-\lambda}) & \sin(\pi\sqrt{1-\lambda}) \\ 0 & \sqrt{1-\lambda} \end{vmatrix} = 0, \tag{2.11}$$

или $\sqrt{1-\lambda}\cos(\pi\sqrt{1-\lambda}) = 0$. По определению $\sqrt{1-\lambda} \neq 0$, поэтому $\cos(\pi\sqrt{1-\lambda}) = 0$. Отсюда находим, что $\pi\sqrt{1-\lambda} = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, где n – любое целое число. Все корни уравнения (2.11) даются формулой

$$\lambda_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2.$$

При значении $\lambda = \lambda_n$ система (2.10) принимает вид

$$\begin{cases} C_1 \cdot 0 = 0, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Она имеет бесконечное множество ненулевых решений

$$\begin{cases} C_1 = C, \\ C_2 = 0, \end{cases}$$

где C - произвольная постоянная. Значит, интегральное уравнение имеет бесконечное множество решений вида

$$x(t) = C \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) t,$$

которые являются собственными функциями этого уравнения.

Итак, характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения имеют вид

$$\lambda_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2, \quad x_n(t) = \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) t,$$

где n – любое целое число.

Пример 5. Решить уравнение

$$x(t) - \lambda \int_0^1 K(t,s) x(s)\, \mathrm{d}s = t$$

с симметричным ядром

$$K(t,s) = \begin{cases} t(s-1), 0 \leqslant t \leqslant s, \\ s(t-1), s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Решение. Найдем характеристические значения и собственные функции этого ядра. Исходя из определения, нужно найти те значения λ_n, при которых уравнение $x(t)-\lambda\int\limits_0^1 K(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s=0$ имеет нетривиальные решения $x_n(t)$, и найти функции $x_n(t)$. Для этого перейдем от интегрального уравнения к соответствующему ему дифференциальному уравнению. Поскольку

$$x(t)=\lambda\int\limits_0^t s(t-1)x(s)\,\mathrm{d}s+\lambda\int\limits_t^1 t(s-1)x(s)\,\mathrm{d}s,$$

то после двукратного дифференцирования обеих частей по t имеем

$$x''(t)-\lambda x(t),\quad x(0)=x(1)=0.$$

Значит $x(t)=C_1e^{i\sqrt{\pi}t}+C_2e^{-i\sqrt{\pi}t}$, тогда

$$\begin{cases}C_1+C_2,\\ C_1e^{i\sqrt{\pi}}+C_2e^{-i\sqrt{\pi}}.\end{cases}$$

Система имеет нетривиальное решение $\lambda_n=-n^2\pi^2, n\in N$, при этом $x_n(t)=\sqrt{2}\sin\pi nt, n\in N$. Воспользуемся теоремой Гильберта-Шмидта о разрешимости уравнений с компактным самосопряженным оператором. Итак, при $\lambda\neq\lambda_n$

$$x(t)=t-\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}a_n}{\lambda+n^2\pi^2}\sin\pi nt,$$

где a_n – коэффициенты Фурье функции $f(t)\equiv t$, т. е. $a_n=\int\limits_0^t t\sin\pi nt\,\mathrm{d}t$. Значит,

$$x(t)=t-\frac{2\lambda}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin\pi nt}{n(\lambda+n^2\pi^2)}.$$

При $\lambda_n=-n^2\pi^2$, $n\in N$, исходное уравнение решений не имеет, поскольку его правая часть $f(t)=t$ не ортогональна всем решениям соответствующего однородного уравнения.

Пример 6. Решить уравнение

$$x(t)-\lambda\int\limits_0^1\mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s=e^t,\tag{2.12}$$

где

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} \dfrac{\sinh t \sinh(s-1)}{\sinh 1}, & 0 \leqslant t \leqslant s, \\ \dfrac{\sinh s \sinh(t-1)}{\sinh 1}, & s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Решение. Данное уравнение перепишем в виде

$$x(t) = e^t + \lambda \frac{\sinh(t-1)}{\sinh 1} \int\limits_0^t \sinh s\, x(s)\, \mathrm{d}s + \lambda \frac{\sinh(t)}{\sinh 1} \int\limits_t^1 \sinh(s-1) x(s)\, \mathrm{d}s. \tag{2.13}$$

Дифференцируя дважды, получим

$$x'(t) = e^t + \lambda \frac{\cosh(t-1)}{\sinh 1} \int\limits_0^t \sinh s\, x(s)\, \mathrm{d}s + \lambda \frac{\cosh(t)}{\sinh 1} \int\limits_t^1 \sinh(s-1) x(s)\, \mathrm{d}s,$$

$$x''(t) = e^t + \frac{\lambda \sinh(t-1)}{\sinh 1} \int\limits_0^t \sinh s\, x(s)\, \mathrm{d}s + \lambda \frac{\sinh(t)}{\sinh 1} \int\limits_t^1 \sinh(s-1) x(s)\, \mathrm{d}s +$$

$$+ \lambda \frac{\cosh(t-1)}{\sinh 1} \sinh t x(t) - \lambda \frac{\cosh(t)}{\sinh 1} \sinh(t-1) x(t),$$

или

$$x''(t) = x(t) + \lambda x(t).$$

Полагая в (2.13) $t = 0$ и $t = 1$, получим, что $x(0) = 1$, $x(1) = e$. Искомая функция $x(t)$ является решением неоднородной краевой задачи

$$\begin{aligned} & x''(t) - (\lambda + 1) x(t) = 0, \\ & x(0) = 1, \quad x(1) = e. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Рассмотрим следующие случаи:

1). $\lambda + 1 = 0$, т. е. $\lambda = -1$. Уравнение (2.14) имеет вид $x''(t) = 0$. Его общее решение $x(t) = C_1 t + C_2$. Учитывая краевые условия (2.14), получим для нахождения постоянных C_1 и C_2 систему

$$\begin{cases} C_1 = 1, \\ C_1 + C_2 = e, \end{cases}$$

решая которую находим $C_1 = e - 1, \quad C_2 = 1$, и, следовательно,

$$x(t) = (e-1)t + 1.$$

2). $\lambda + 1 > 0$, т. е. $\lambda > -1 \quad (\lambda \neq 0)$. Общее решение уравнения (2.14)

$$x(t) = C_1 \cosh\left(\sqrt{\lambda+1}\, t\right) + C_2 \sinh\left(\sqrt{\lambda+1}\, t\right).$$

Краевые условия (2.14) дают для нахождения C_1 и C_2 систему

$$\begin{cases} C_1 = 1, \\ C_1 \cosh\left(\sqrt{\lambda+1}\right) + C_2 \sinh\left(\sqrt{\lambda+1}\right) = e, \end{cases}$$

откуда

$$C_1 = 1, \quad C_2 = \frac{e - \cosh\sqrt{\lambda+1}}{\sinh\sqrt{\lambda+1}}.$$

Искомая функция $x(t)$ после несложных преобразований приводится к виду

$$x(t) = \frac{\sinh\sqrt{\lambda+1}(1-t) + e\sinh\sqrt{\lambda+1}t}{\sinh\sqrt{\lambda+1}}.$$

3). $\lambda + 1 < 0$, т. е. $\lambda < -1$. Обозначим $\lambda + 1 = -\mu^2$. Общим решением уравнения (2.14) будет $x(t) = C_1 \cos\mu t + C_2 \sin\mu t$. Краевые условия (2.14) дают систему

$$\begin{cases} C_1 = 1, \\ C_1 \cos\mu + C_2 \sin\mu = e. \end{cases} \tag{2.15}$$

Здесь в свою очередь возможны два случая:

1. μ не является корнем уравнения $\sin\mu = 0$. Тогда

   $$C_1 = 1, \quad C_2 = \frac{e - \cos\mu}{\sin\mu},$$

   и, следовательно,

   $$x(t) = \cos\mu t + \frac{e - \cos\mu}{\sin\mu}\sin\mu t,$$

   где $\mu = \sqrt{-\lambda - 1}$.

2. μ является корнем уравнения $\sin\mu = 0$, т. е. $\mu = n\pi$ $(n = 1,2,\ldots)$. Система (2.15) несовместна, а следовательно, данное уравнение (2.12) не имеет решений. В этом случае соответствующее однородное интегральное уравнение

$$x(t) - (1 + n^2\pi^2)\int\limits_0^1 \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = 0 \tag{2.16}$$

имеет нетривиальные решения, т. е. числа $\lambda_n = -(1+n^2\pi^2)$ являются характеристическими числами, а функции $x_n(t) = \sin n\pi t$ – собственными функциями уравнения (2.16).

Задание 1. Найти характеристические числа и собственные функции для следующих однородных интегральных уравнений с вырожденным ядром:

1.1. $x(t) - \lambda\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t\, x(s)\,\mathrm{d}s = 0.$

1.2. $x(t) - \lambda\int\limits_0^{2\pi} \sin t\cos s\, x(s)\,\mathrm{d}s = 0.$

1.3. $x(t) - \lambda\int\limits_0^{2\pi} \sin t\sin s\, x(s)\,\mathrm{d}s = 0.$

1.4. $x(t) - \lambda\int\limits_0^{\pi} \cos(t+s)x(s)\,\mathrm{d}s = 0.$

1.5. $x(t) - \lambda\int\limits_0^{1} (45t^2\ln s - 9s^2\ln t)x(s)\,\mathrm{d}s = 0.$

1.6. $x(t) - \lambda\int\limits_0^{1} (2ts - 4t^2)x(s)\,\mathrm{d}s = 0.$

1.7. $x(t) - \lambda\int\limits_{-1}^{1} (5ts^3 + 4t^2s)x(s)\,\mathrm{d}s = 0.$

1.8. $x(t) - \lambda\int\limits_{-1}^{1} (5ts^3 + 4t^2s + 3ts)x(s)\,\mathrm{d}s = 0.$

1.9. $x(t) - \lambda\int\limits_{-1}^{1} (t\cosh s - s\sinh t)x(s)\,\mathrm{d}s = 0.$

1.10. $x(t) - \lambda\int\limits_{-1}^{1} (t\cosh s - s^2\sinh t)x(s)\,\mathrm{d}s = 0.$

1.11. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} (t \cosh s - s \cosh t) x(s)\, \mathrm{d}s = 0.$

1.12. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} (ts + t^2 s^3) x(s)\, \mathrm{d}s = 0.$

1.13. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} (t^2 \cosh s - s^2 \cosh t) x(s)\, \mathrm{d}s = 0.$

1.14. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} (t^3 \cos s - s^2 \cos t) x(s)\, \mathrm{d}s = 0.$

1.15. $x(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} (ts - \frac{1}{2}) x(s)\, \mathrm{d}s = 0.$

Задание 2. В пространстве $L_2[a,b]$ найти решение интегрального уравнения

$$x(t) - \lambda \int_a^b \mathcal{K}(t,s) x(s)\, \mathrm{d}s = y(t)$$

с помощью разложения в ряд по собственным функциям.

2.1. $\mathcal{K}(t,s) = \sin(t+s),\ f(t) = t + \sin t,\ x(t) \in L_2[0,\frac{\pi}{2}];$

2.2. $\mathcal{K}(t,s) = \cos(t+s),\ f(t) = \cos t + 1,\ x(t) \in L_2[0,\pi];$

2.3. $\mathcal{K}(t,s) = \sin(t+s),\ f(t) = t + 1,\ x(t) \in L_2[0,\pi];$

2.4. $\mathcal{K}(t,s) = e^{t+s},\ f(t) = te^t,\ x(t) \in L_2[0,1];$

2.5. $\mathcal{K}(t,s) = ts + t^2 s^2,\ f(t) = t^2 + t + 1,\ x(t) \in L_2[-1,1];$

2.6. $\mathcal{K}(t,s) = \cos^2(t-s),\ f(t) = \sin 2t + 1,\ x(t) \in L_2[-\pi,\pi];$

2.7. $\mathcal{K}(t,s) = \cos(t+s),\ f(t) = t^2,\ x(t) \in L_2[0,\frac{\pi}{2}];$

2.8.

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} t(s-1), 0 \leqslant t \leqslant s, \\ (s+1)t, s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases} \qquad f(t) = \cos \pi t,\ x(t) \in L_2[0,1];$$

2.9.

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} (t+1)s, 0 \leqslant t \leqslant s, \\ s-t, s \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \qquad f(t) = t^3 - t^2,\ x(t) \in L_2[0,1];$$

2.10.

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} t(s-1), t \leqslant s, \\ s(t-1), s \leqslant t, \end{cases} \qquad f(t) = \sin \pi t,\ x(t) \in L_2[0,1];$$

2.11. $\mathcal{K}(t,s)=\min(t,s),\ f(t)=\sin\pi t,\ x(t)\in L_2[0,1];$
2.12. $\mathcal{K}(t,s)=2\cos(t-s),\ f(t)=t^2+t+1,\ x(t)\in L_2[0,\pi];$
2.13. $\mathcal{K}(t,s)=ts,\ f(t)=t,\ x(t)\in L_2[0,1];$
2.14.

$$\mathcal{K}(t,s)=\begin{cases}\sin t\cos s, t\leqslant s,\\ \cos t\sin s, s\leqslant t,\end{cases}\qquad f(t)=t,\ x(t)\in L_2\Big[0,\frac{\pi}{2}\Big];$$

2.15.

$$\mathcal{K}(t,s)=\begin{cases}t(s+1), t\leqslant s,\\ s(t+1), s\leqslant t,\end{cases}\qquad f(t)=t,\ x(t)\in L_2[0,1];$$

2.16.

$$\mathcal{K}(t,s)=\begin{cases}(t+1)(s-2), t\leqslant s,\\ (s+1)(t-2), s\leqslant t,\end{cases}\qquad f(t)=\sin 2t,\ x(t)\in L_2[0,1];$$

2.17.

$$K(t,s)=\begin{cases}\sin t\sin(s-1), t\leqslant s,\\ \sin s\sin(t-1), s\leqslant t,\end{cases}\qquad f(t)=t-1,\ x(t)\in L_2[-\pi,\pi];$$

2.18.

$$\mathcal{K}(t,s)=\begin{cases}\sin t\sin(s-1), t\leqslant s,\\ \sin s\sin(t-1), s\leqslant t,\end{cases}\qquad f(t)=\cos 3t,\ x(t)\in L_2[0,\pi];$$

2.19.

$$\mathcal{K}(t,s)=\begin{cases}t(s-1), t\leqslant s,\\ s(t-1), s\leqslant t,\end{cases}\qquad f(t)=t-1,\ x(t)\in L_2[0,1];$$

2.20. $\mathcal{K}(t,s)=\cos(t+s),\ f(t)=\sin t,\ x(t)\in L_2[0,\pi];$
2.21. $\mathcal{K}(t,s)=s^{1/3}+t^{1/3},\ f(t)=t^2+1,\ x(t)\in L_2[-1,1];$
2.22. $K(t,s)=t^2s+s^2t,\ f(t)=t+1,\ x(t)\in L_2[-1,1].$

Задание 3. Решить следующие неоднородные интегральные симметричные уравнения:

3.1. $x(t) - \frac{\pi^2}{4}\int\limits_0^1 \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = \dfrac{t}{2},$

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} \dfrac{t(2-s)}{2}, 0 \leqslant t \leqslant s, \\ \dfrac{s(2-t)}{2}, s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

3.2. $x(t) + \int\limits_0^1 \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = te^t,$

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} \dfrac{\sinh t \sinh(s-1)}{\sinh 1}, 0 \leqslant t \leqslant s, \\ \dfrac{\sinh s \sinh(t-1)}{\sinh 1}, s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

3.3. $x(t) - \int\limits_0^1 \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = t-1,$

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} t-s, 0 \leqslant t \leqslant s, \\ s-t, s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

3.4. $x(t) - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = \cos 2t,$

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} \sin t \cos s, 0 \leqslant t \leqslant s, \\ \sin s \cos t, s \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

3.5. $x(t) + 2\int\limits_0^{\pi} \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = 1,$

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} \sin t \cos s, 0 \leqslant t \leqslant s, \\ \sin s \cos t, s \leqslant t \leqslant \pi. \end{cases}$$

3.6. $x(t) - 8\int\limits_0^{\pi} \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = 1,$

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} \sin t \cos s, 0 \leqslant t \leqslant s, \\ \sin s \cos t, s \leqslant t \leqslant \pi. \end{cases}$$

3.7. $x(t) - 4\int\limits_0^1 \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = t,$

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} (t+1)(s-3), 0 \leqslant t \leqslant s, \\ (s+1)(t-3), s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

3.8. $x(t) + 9\int\limits_0^1 \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = t,$

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} (t+1)(s-3), 0 \leqslant t \leqslant s, \\ (s+1)(t-3), s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

3.9. $x(t) - \int\limits_0^\pi \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = \sin t,$

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} \sin(t+\frac{\pi}{4})\cos(s-\frac{\pi}{4}), 0 \leqslant t \leqslant s, \\ \sin(s+\frac{\pi}{4})\cos(t-\frac{\pi}{4}), s \leqslant t \leqslant \pi. \end{cases}$$

3.10. $x(t) - \int\limits_0^1 \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = \sinh t,$

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} -e^{-s}\sinh t,\ 0 \leqslant t \leqslant s, \\ -e^{-t}\sinh s, s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

3.11. $x(t) + 2\int\limits_0^1 \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = \cosh t,$

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} \dfrac{\cosh t\cosh(s-1)}{\sinh 1}, 0 \leqslant t \leqslant s, \\ \dfrac{\cosh s\cosh(t-1)}{\sinh 1}, s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

3.12. $x(t) - 4\int\limits_0^\pi |t-s|x(s)\,\mathrm{d}s = 1,$

3.13. $x(t) - 16\int\limits_0^\pi |t-s|x(s)\,\mathrm{d}s = 1.$

3.14. $x(t) - \int\limits_0^1 \sin s\sin t\,x(s)\,\mathrm{d}s = 1 - \sin t.$

3.15. $x(t) - \int\limits_0^1 \cos s\cos t\,x(s)\,\mathrm{d}s = \cos t.$