

Функциональный анализ

Лабораторная работа №9

(Нормированные векторные пространства. Сходимость)

Студентки 3 курса 3 группы

Домановой Татьяны Алексеевны

Работа сдана 13.12.2013 г.

Зачтена _____ 2013 г.

Преподаватель

Дайняк Виктор Владимирович

Доцент кафедры МФ

канд. физ.-мат. наук

Задание 1

Постановка задачи

Можно ли в пространстве $C^2[0,1]$ принять за норму следующую величину:

$$|x(0)| + |x'(0)| + \max_{0 \leq t \leq 1} |x''(t)|$$

Решение

Задание 2

Постановка задачи

Найти предел последовательности x_n в пространстве $C[a, b]$, если он существует.

$$x_n = \frac{\sin(nt)}{\sqrt{n^2 + t^2}}, \quad t \in [0, 2]$$

Решение

Сначала найдём поточечный предел. Построим мажорантный ряд

$$|x_n(t)| = \left| \frac{\sin(nt)}{\sqrt{n^2 + t^2}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + t^2}} \leq 1/n \rightarrow 0.$$

Осталось показать, что процесс равномерный. Действительно, правая часть не зависит от аргумента, следовательно, сходимость к нулю равномерная.

Задание 3

Постановка задачи

Найти предел последовательности x_n в нормированном пространстве l_p , если он существует.

$$x_n = \left(\underbrace{\left(\frac{5n+1}{5n+2} \right)^n, \dots, \left(\frac{5n+1}{5n+2} \right)^n}_{n}, 0, \dots \right), \quad p = \frac{3}{2}$$

Решение

Докажем, что предел существует. Точнее, докажем, что последовательность $x = (0, 0, \dots, 0, \dots)$ является требуемым пределом.

Для этого покажем $\|x_n - x\| \rightarrow 0$. Имеем, что

$$\begin{aligned} \|x_n - x\| &= \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{5n+1}{5n+2} \right)^{\frac{3}{2}n} \right)^{\frac{2}{3}} = \left(n \cdot \left(\frac{5n+1}{5n+2} \right)^{\frac{3}{2}n} \right)^{\frac{2}{3}} = n^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{5n+1}{5n+2} \right)^n \\ &= n^{\frac{2}{3}} \cdot \left(1 - \frac{1}{5n+2} \right)^n = n^{\frac{2}{3}} \cdot \left(1 - \frac{1}{5n+2} \right)^{-(5n+2) \cdot \frac{-n}{5n+2}} = n^{\frac{2}{3}} \cdot e^{\frac{-n}{5n+2}} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Таким образом, x является пределом искомой последовательности.