МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Функциональный анализ

Лабораторная работа №8

(Банаховы пространства)

Студентки 3 курса 3 группы

Домановой Татьяны Алексеевны

Работа сдана 13.12.2013 г.

Зачтена ________________ 2013 г.

____

Преподаватель

Дайняк Виктор Владимирович

Доцент кафедры МФ

канд. физ.-мат. наук

Минск, 2013 г.

Задание 1

Постановка задачи

Определите, являются ли нормы $\|x\|_{C^2[a,b]}$ и $\|x\| = |x(a)| + |x'(a)| + \|x''(a)\|_{c\,[a,b]}$ эквивалентными в нормированом пространстве два раза дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций $C^2[a,b]$

Решение

Две нормы являются эквивалентными, если они подчинены друг другу. Норма $\|\cdot\|_1$ подчинена$\|\cdot\|_2$, если $\exists\alpha > 0$, такое что $\|x\|_1 \le \alpha\|x\|_2$ для всех $x \in C^2[a,b]$.

$$\|x\|_1 = max_{a\le t\le b}|x(t)| + max_{a\le t\le b}|x'(t)| + max_{a\le t\le b}|x''(t)|$$

$$\|x\|_2 = max_{a\le t\le b}|x''(t)| + |x(a)| + |x'(a)|$$

Очевидно, что $\|x\|_2 \le \|x\|_1$, так как $max_{a\le t\le b}|x(t)| \ge |x(a)|$, и $max_{a\le t\le b}|x'(t)| \ge |x'(a)|$.

Оценим $\|x\|_1$:

$$\|x\|_1 = max_{a\le t\le b}|x(t)| + max_{a\le t\le b}|x'(t)| + max_{a\le t\le b}|x''(t)|$$
$$\le x(a) + \int_a^b |x'(s)|ds + x'(a) + \int_a^b |x'(s)|ds + max_{a\le t\le b}\left|x''^{(t)}\right| \le 2\|x\|_2$$

Таким образом, нормы эквивалентны.

Задание 2

Постановка задачи

Проверить, является ли пространство $\mathrm{C}^1[0,1]$ банаховым по норме $\|x\| = \max_{0\le t\le 1}|x(t)| + \int_0^1 |x'(t)|dt$. Если пространство не полно, то указать его поплнение.

Решение

Пространство является банаховым, если любая последовательность Коши в нем сходится. По определению, последовательность является последовательность Коши, если $\|x_n - x_m\| \to 0$ при $n, m \to \infty$.

$$\|x_n - x_m\| = \max_{0\le t\le 1}|x_n - x_m| + \int_0^1 |x_n' - x_m'|\,dt \to_{n,m\to\infty} 0$$

А значит $\max_{0\le t\le 1}|x_n - x_m| \to_{n,m\to\infty} 0$ и $\int_0^1 |x_n' - x_m'|\,dt \to_{n,m\to\infty} 0$ одновременно.

Так как пространство $\mathrm{C}^1[0,1]$ принадлежит пространств $\mathrm{C}\,[0,1]$, которое является банаховым по норме $\|x\| = \max_{0\le t\le 1}|x(t)|$, то $\max_{0\le t\le 1}|x_n - x_m| \to_{n,m\to\infty} 0$

Покажем, что норма $\|x\| = \max_{0\le t\le 1}|x(t)| + \int_0^1 |x'(t)|dt$ эквивалентна норме $\|x\|^* = \max_{0\le t\le 1}|x(t)| + \max_{0\le t\le 1}|x'(t)|$, по которой пространство $C^1[0,1]$ является банаховым.

$$\|x\| = \max_{0\le t\le 1}|x(t)| + \int_0^1 |x'(t)|dt \le \max_{0\le t\le 1}|x(t)| + \max_{0\le t\le 1}\left|x'^{(t)}\right|(1-0) \le \|x\|^* = \alpha\|x\|^*, \qquad \alpha = 1$$

$$\int_a^b |x'(t)|dt \ge |x(b) - x(a)|$$

$$\|x\|^* = \max_{0\le t\le 1}|x(t)| + \max_{0\le t\le 1}|x'(t)| \le \alpha\|x\|$$

Задание 3

Постановка задачи

Проверить, сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ в нормированном пространстве l_2.

$$x_n = \left(\underbrace{\frac{(-1)^n}{n}, \dots, \frac{(-1)^n}{n}}_{n}, 0, \dots, 0\right)$$

Решение

Пространство l_2 является банаховым. Покажем, что последовательность x_n является фундаментальной, тогда искомый ряд сходится.

Для этого необходимо, чтобы $\|x_n\|$ сходился.

$$\|x_n\| = \left(\sum |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} \to_{n\to\infty} \frac{\pi^2}{6}$$

А значит исходный ряд сходится.