МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Функциональный анализ

Лабораторная работа №4

(Компактные множества)

Студентки 3 курса 3 группы

Домановой Татьяны Алексеевны

Работа сдана 29.11.2013 г.

Зачтена ________________ 2013 г.

____

Преподаватель

Дайняк Виктор Владимирович

Доцент кафедры МФ

канд. физ.-мат. наук

Минск, 2013 г.

Задание 1

Постановка задачи

Является ли относительно компактным множество функций $M = \{\frac{1}{1+nt^2} : n \in \mathbb{N}\}$ в пространстве $C[0,1]$?

Решение

По теореме Арцела-Асколи, множество относительно компактно в $C[0,1]$, если оно равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.

Множество M равномерно ограничено, если $\exists c > 0$, такая, что $\|x\| < c$ для $\forall x \in M$.

$$\|x\| = \max_{t\in[0,1]} \frac{1}{1+nt^2} = 1$$

Таким образом с $= 1$, а значит M является равномерно ограниченным.

Множество M равностепенно непрерывно, если $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что $\forall t_1, t_2$, таких, что $|t_1 - t_2| < \delta$ выполняется $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$ для $\forall x \in M$.

$$|x(t_1) - x(t_2)| = \left|\frac{1}{1+nt_1^2} - \frac{1}{1+nt_2^2}\right| = \left|\frac{n(t_2^2 - t_1^2)}{(1+nt_1^2)(1+nt_2^2)}\right| \leq \frac{|n||t_2 - t_1||t_2 + t_1|}{|1+nt_1^2||1+nt_2^2|} \leq \frac{2n\delta}{(1+n)^2} < \varepsilon$$

$$\delta < \frac{\varepsilon(n+1)^2}{2n}$$

Значит, множество M равномерно ограниченно и равностепенно непрерывно, а значит является относительно компактным.