ТЕМА 4. СОПРЯЖЕННЫЕ, САМОСОПРЯЖЕННЫЕ, КОМПАКТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть X, Y – банаховы пространства, $A : X \to Y$ и $A \in \mathscr{B}(X,Y)$, f – линейный ограниченный, определенный на пространстве Y.

Определение 1. *Сопряженным оператором* $A^* : Y^* \to X^*$ к линейному ограниченному оператору $A : X \to Y$ называется оператор, действующий по формуле

$$f(Ax) = A^* f(x) \quad \text{для всех} \quad x \in X, f \in Y^*. \tag{2.1}$$

Теорема 1. *Сопряженный оператор A^* является линейным ограниченным оператором из Y^* в X^* и $\|A^*\| = \|A\|$.*

Свойство 1. $(A + B)^* = A^* + B^*; \quad (\alpha A)^* = \alpha A^*.$

Свойство 2. $\|A\| = \|A^*\|.$

Свойство 3. Пусть $X = Y$. Тогда $(AB)^* = B^* A^*; \quad I^* = I.$

Свойство 4. Если оператор A имеет ограниченный обратный A^{-1}, то и A^* также обратим, причем $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Теорема 2. *Пусть X, Y – банаховы пространства, оператор $A : X \to Y$ – линейный ограниченный оператор, $\mathscr{R}(A) \subset Y$ – множество его значений. Тогда замыкание $\mathscr{R}(A)$ совпадает с множеством таким $y \in Y$, что $f(y) = 0$ для всех функционалов $f \in Y^*$, удовлетворяющих условию $A^* f = 0$.*

Следствие 1. Для того, чтобы уравнение $Ax = y$ было разрешимо при заданном y необходимо, а если $\mathscr{R}(A)$ замкнуто, то и достаточно, чтобы любой функционал, удовлетворяющий уравнению $A^* f = 0$, на заданном y обращался в нуль.

Следствие 2. Для того, чтобы уравнение $Ax = y$ было разрешимо для любого $y \in Y$, необходимо, чтобы уравнение $A^* f = 0$ имело только нулевое решение.

Следствие 3. Уравнение $A^* f = 0$ имеет только нулевое решение тогда и только тогда, когда $\overline{\mathscr{R}(A)} = Y$.

Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах

Определение 2. Пусть H_1, H_2 – гильбертовы пространства. *Сопряженным оператором* к оператору $A : H_1 \to H_2$ называется оператор $A^* : H_2 \to H_1$ такой, что для любых $x \in H_1$, $y \in H_2$ выполняется равенство $(Ax,y)_{H_2} = (x, A^*y)_{H_1}$.

Определение 3. Линейный ограниченный оператор $A : H \to H$ называется *самосопряженным*, если $A = A^*$, т. е. справедливо тождество $(Ax,y)_H = (x,Ay)_H$ для всех $x,y \in H$. Линейный ограниченный оператор называется *унитарным*, если $A^* = A^{-1}$. Линейный ограниченный оператор называется *нормальным*, если $A^*A = AA^*$.

Пример 1. В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим оператор умножения на функцию, т. е.

$$Ax(t) = a(t)x(t).$$

Тогда

$$(Ax,y) = \int_0^1 Ax(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t = \int_0^1 a(t)x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t = \int_0^1 x(t)\overline{\overline{a(t)}y(t)}\mathrm{d}t.$$

Значит, $A^*y(t) = \overline{a(t)}y(t)$. Следовательно, если $a(t)$ – вещественнозначная функция, то $a(t) = \overline{a(t)}$ и оператор A самосопряженный. Если $|a(t)| = 1$ почти всюду, то $\frac{1}{a(t)} = \overline{a(t)}$ и оператор унитарный. Так как $a(t)\overline{a(t)} = \overline{a(t)}a(t)$, то оператор умножения на функцию нормальный.

Функция $\varphi(x,y) = (Ax,y)$ называется *билинейной формой*, порожденной оператором A. Билинейная форма линейна по первой переменной и антилинейна по второй. По аналогии, *квадратичной формой оператора* A будем называть числовую функцию $\varphi(x) = (Ax,x)$.

Определение 4. Оператор $A \in \mathscr{B}(H)$ называется *неотрицательным*, если порожденная им квадратичная форма неотрицательна, т. е. $(Ax,x) \geqslant 0$ для всех $x \in H$. Неотрицательный оператор обозначается следующим образом: $A \geqslant 0$. Если $A - B \geqslant 0$, то говорят, что $A \geqslant B$.

Теорема 3. *Пусть A – самосопряженный оператор в H. Тогда*

1) квадратичная форма принимает только вещественные значения;

2) $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} |(Ax,x)|$.

Пусть в H задано подпространство $L \subset H$. Согласно теореме о разложении в прямую сумму гильбертова пространства имеем $H = L \oplus L^{\perp}$ или $x = y + z$, $y \in L$, $z \in L^{\perp}$. Тогда каждому элементу $x \in H$ можно поставить в соответствие единственный элемент $y \in L$ – проекцию элемента x на подпространство L. Тем самым определяется отображение или оператор, который называется *ортопроектором* и $y = Px$.

Свойство 5. Каждый проектор P является всюду определенным в H линейным оператором со значениями в H.

Свойство 6. $P \in \mathscr{B}(H)$, причем $\|P\| = 1$, если $L \neq \{0\}$.

Свойство 7. $P^2 = P$.

Свойство 8. $P = P^*$.

Свойство 9. Оператор проектирования положителен, т. е. $(Px,x) \geqslant 0$ для всех $x \neq 0$.

Свойство 10. $x \in L$ тогда и только тогда, когда $\|Px\| = \|x\|$.

Свойство 11. $(Px,x) \leqslant \|x\|^2$ для любого $x \in H$. $(Px,x) = \|x\|^2$ тогда и только тогда, когда $x \in L$.

Теорема 4. *Пусть A – самосопряженный оператор в H, причем $A^2 = A$; тогда A – проектор на некоторое подпространство $L \subset H$.*

Компактные операторы

Определение 5. Пусть X и Y – банаховы пространства. Линейный оператор $A : X \to Y$ называется *компактным*, если он отображает всякое ограниченное множество пространства X в предкомпактное множество пространства Y.

Совокупность всех компактных операторов, действующих из X в Y, обозначим символом $\mathcal{K}(X,Y)$.

Определение 6. Линейный оператор $A : X \to Y$ называется *компактным*, если для любой последовательности $(x_n) \subset B[0,r] \subset X$ последовательность образов (Ax_n) содержит фундаментальную подпоследовательность.

Определение 7. Линейный оператор $A : X \to Y$ называется *компактным*, если образ $A(B)$ любого шара $B[0,r] \subset X$ является вполне ограниченным в Y множеством.

Пример 2. Пусть Y – конечномерное банахово пространство, $A : X \to Y$, $A \in \mathscr{B}(X,Y)$. Тогда, $A(B)$ – образ шара $B[0,r]$ пространства X будет ограниченным в Y множеством, и, следовательно, вполне ограниченным.

Пример 3. Оператор $A \in \mathscr{B}(X,Y)$ называется *оператором конечного ранга*, если $\dim \mathscr{R}(A) < \infty$, т. е. множество его значений есть конечномерное подпространство пространства Y. В этом случае $A(B)$ является ограниченным множеством в конечномерном пространстве, поэтому предкомпактным, т. е. $A \in \mathscr{K}(X,Y)$.

Таким образом, любой линейный ограниченный оператор конечного ранга компактен. Примером такого оператора служит интегральный оператор Фредгольма с вырожденным ядром, действующий в пространстве $C[a,b]$.

Пример 4. Рассмотрим оператор

$$Ax(t) = \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s \tag{2.2}$$

как оператор, действующий из пространства $C[a,b]$ в пространство $C[a,b]$, ядро которого $\mathcal{K}(t,s)$ непрерывно по совокупности переменных. Покажем, что $A(B)$ предкомпактно в $C[a,b]$. По теореме Арцела-Асколи мы должны проверить условия равномерной ограниченности и равностепенной непрерывности функций $y(t) = Ax(t) \subset A(B)$.

$$\|y\|_C = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |Ax(t)| = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |\int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b}\int\limits_a^b |\mathcal{K}(t,s)x(s)|\,\mathrm{d}s\cdot\|x\| \leqslant M(b-a), \text{где } M=\max_{a\leqslant t,s\leqslant b}|\mathcal{K}(t,s)|.$$

$$|y(t_1)-y(t_2)| \leqslant \int\limits_a^b |\mathcal{K}(t_1,s)-\mathcal{K}(t_2,s)|\,\mathrm{d}s\cdot\|x\| \leqslant \varepsilon(b-a),$$

так как в силу равномерной непрерывности функции $\mathcal{K}(t,s)$ на компакте $[a,b]\times[a,b]$ для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для всех $t_1,t_2\in[a,b] : |t_1-t_2|<\delta$ следует, что

$$|\mathcal{K}(t_1,s)-\mathcal{K}(t_2,s)|<\varepsilon.$$

Таким образом, интегральный оператор Фредгольма с непрерывным ядром компактен.

Пример 5. Тождественный оператор $I : X\to X$ является компактным тогда и только тогда, когда $\dim X<\infty$.

Теорема 5. *Пусть $A : X\to Y$ – компактный оператор. Тогда область его значений $\mathscr{R}(A)\subset Y$ сепарабельна.*

Теорема 6. *Пусть $A_1, A_2\in\mathscr{K}(X,Y)$. Тогда операторы A_1+A_2, αA_1, где α – произвольная постоянная, также компактны.*

Теорема 7. *Пусть $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ – последовательность компактных операторов, действующих из X из Y, $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится к оператору A. Тогда $A\in\mathscr{K}(X,Y)$.*

Замечание 3. Если $(A_n)_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{K}(X,Y)$ – последовательность, сходящаяся в каждой точке $x\in X$, то предельный оператор A может оказаться не компактным.

Теорема 8. *Пусть $A, B\in\mathscr{B}(X)$. Если хотя бы один из операторов является компактным, то компактным будет и их произведение.*

Следствие 4. В бесконечномерном банаховом пространстве X компактный оператор A не может иметь ограниченного обратного.

Теорема 9. *Пусть* X,Y *– банаховы пространства,* $A \in \mathscr{K}(X,Y)$*. Тогда сопряженный оператор* $A^* \in \mathscr{K}(X^*,Y^*)$.

Теорема 10. *Пусть* H *– сепарабельное гильбертово пространство,* $A \in \mathscr{B}(H)$*. Для того, чтобы* $A \in \mathscr{K}(H)$ *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовал номер* $n = n(\varepsilon)$ *и такие линейные операторы* A_1 *и* A_2*:* A_1 *–* n*-мерный,* $\|A_2\| < \varepsilon$*, что*

$$A = A_1 + A_2. \tag{2.3}$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 6. Пусть $X = Y = \ell_2$ над полем $\mathbb{C}$. Пусть $x \in \ell_2$ и

$$Ax = (\underbrace{0,\ldots,0,}\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots),$$

где $\left(\alpha_i\right)_{i=1}^{\infty}$ – ограниченная последовательность в $\mathbb{C}$. Построить сопряженный оператор.

Решение. Применяя теорему Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве, получим

$$f(Ax) = (Ax,y)_{\ell_2} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \overline{y_{i+k}} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \alpha_i \overline{y_{i+k}} = A^* f(x) = (x,z)_{\ell_2},$$

где $z = A^* y$ $z_i = \overline{\alpha_i} y_{i+k}$. Следовательно,

$$A^* y = (\overline{\alpha_1} y_{k+1}, \overline{\alpha_2} y_{k+2}, \ldots).$$

Здесь мы заменили пространство функционалов изоморфным ему пространством, а именно, пространством ℓ_2.

Пример 7. Рассмотрим в пространстве $L_2[a,b]$ интегральный оператор Фредгольма с ядром $\mathcal{K}(t,s)$, удовлетворяющим условию

$$\int_a^b \int_a^b |\mathcal{K}(t,s)|^2 \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}s < \infty. \tag{2.4}$$

Построить сопряженный оператор.