МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Функциональный анализ

Лабораторная работа №2

(Кольцо, полукольцо, мера на полукольце)

Студентки 3 курса 3 группы

Преподаватель

Дайняк Виктор Владимирович

Доцент кафедры МФ

канд. физ.-мат. наук

Работа сдана 15.11.2013 г.

Зачтена ________________ 2013 г.

____

Минск, 2013 г.

Задание 1

Постановка задачи

Образуют ли полукольцо, кольцо, σ-кольцо, алгебру, σ -алгебру следующие все ограниченные множества на прямой.

Решение

1) Любое ограниченное множество на прямой является объединением непересекающихся ограниченных множеств и замкнуто относительно разности => полукольцо.
2) $A, B = \{x \mid a < x < b\}$. Тогда $A \cup B$ и $A \backslash B$ тоже ограниченные на прямой множества => кольцо.
3) $\coprod_k A_k$ может быть не ограничено => не является σ-кольцом.
4) $R \backslash A$ не является ограниченным множеством => не является алгеброй
5) Так как не является алгеброй, то не является и σ-алгеброй.

Задание 2

Постановка задачи

Пусть $X = \{a, b, c\}$, полукольцо $S = \mathcal{P}(X)$. Построить, если возможно, меру на S так, чтобы $m(\{a\}) = 2$, $m(\{a, b\}) = 5$, $m(\{a, b, c\}) = 8$.

Решение

Пусть $f(x, A) = \begin{cases} 1, \text{если } x \in A \\ 0, \text{если } x \notin A \end{cases}$. Тогда возьмем $m(A) = 2f(a, A) + 3f(b, A) + 3f(c, A)$. Покажем, что $m(A)$ задает меру на множестве X.

1) $m(A) \geq 0\ \forall A, m(A) = 0 \iff A = \emptyset$
2) $m(A \cup B) = 2f(a, A \cup B) + 3f(b, A \cup B) + 3f(c, A \cup B) = [\text{так как } A \cap B = \emptyset] = 2f(a, A) + 3f(b, A) + 3f(c, A) + 2f(a, B) + 3f(b, B) + 3f(c, B) = m(A) + m(B)$

Задание 3

Постановка задачи

Пусть $X = \mathbb{N}$, K – кольцо, состоящее из конечных подмножеств множества $\mathbb{N}$. Задает ли $m(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{n}$ меру на K?

Решение

1. $m(A) \geq 0$, так как является суммой неотрицательных чисел.
2. $m(A) = 0 \iff A = \emptyset$
3. $m(A \cup B) = \sum_{n \in A \cup B} \frac{1}{n} = [\text{так как } A \cap B = \emptyset] = \sum_{n \in A} \frac{1}{n} + \sum_{n \in B} \frac{1}{n} = m(A) + m(B)$

Таким образом, $m(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{n}$ задает меру на множестве K.

Задание 4

Постановка задачи

Пусть $X = [-1,1)$, полукольцо $S = \{[a, b) \subset X\}$, $m\big([a, b)\big) = F(b) - F(a)$. При каких значениях параметра α эта формула задает меру, σ-аддитивную меру. Если мера не является σ -аддитивной, то указать полуинтервал $[\alpha, \beta)$ и его разбиение$[\alpha, \beta) = \coprod_{k=1}^{\infty} [\alpha_k, \beta_k)$ такое, что $m\big([\alpha, \beta)\big) \neq \sum_{k=1}^{\infty} m([\alpha_k, \beta_k))$.

$$F(x)=\begin{cases} x+2, x\in[-1,-\frac{1}{2}) \\ \alpha, x=-\frac{1}{2} \\ x+4, x\in(-\frac{1}{2},1)\end{cases}$$

Решение

1) $m([a,b))\in\mathbb{R}$: $|\alpha|< +\infty$.
2) $m([a,b))\geq 0$: $F(b)-F(a)\geq 0$ при условии что $b\geq a$

$\boldsymbol{m(x)}$	$\boldsymbol{a\in[-1,-\frac{1}{2})}$	$\boldsymbol{a=-\frac{1}{2}}$	$\boldsymbol{a\in(-\frac{1}{2},1)}$
$\boldsymbol{b\in[-1,-\frac{1}{2})}$	$b-a$		
$\boldsymbol{b=-\frac{1}{2}}$	$\alpha-a-2$	0	
$\boldsymbol{b\in(-\frac{1}{2},1)}$	$b-a+2$	$b+4-\alpha$	$b-a$

Значит

$$\begin{cases}\alpha-a-2\geq 0, & a\in[-1,-\frac{1}{2}) \\ b+4-\alpha\geq 0, & b\in(-\frac{1}{2},1)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha\geq a+2 \\ \alpha\leq b+4\end{cases}$$

$$\frac{3}{2}\leq\alpha\leq\frac{7}{2}$$

3) $m\big([a,b)\cup[b,c)\big)=m\big([a,c)\big)=F(c)-F(a)=F(c)-F(b)+F(b)-F(a)=m\big([b,c)\big)+m([a,b))$

Таким образом $m\big([a,b)\big)$ задает меру на множестве S.

4) Пусть $A=[-1,0)$. Представим A в виде:

$$A=\left(\coprod_{k=1}^{\infty}A_k\right)\coprod\left(\coprod_{k=1}^{\infty}B_k\right)$$

$$A_k=\left[-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^k},-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{k+1}}\right)\qquad B_k=\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{k+1}},-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^k}\right)$$

Вычислим меры этих множеств:

$$m(A_k)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{k+1}}+2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^k}+2=\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{k+1}}$$
$$m(B_k)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^k}+4+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{k+1}}+4=\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{k+1}}$$

Проверим σ-аддитивность:

$$\sum_{k=1}^{\infty}m(A_k)+\sum_{k=1}^{\infty}m(B_k)=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{k+1}}=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}}=1$$

$$m(A)=F(0)-F(-1)=4-1=3$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}m(A_k)+\sum_{k=1}^{\infty}m(B_k)\neq m(A)$$

При $\forall\alpha$ $m\big([a,b)\big)$ не является σ-аддитивной мерой.