МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Функциональный анализ

Лабораторная работа №5

(Измеримые функции)

Студентки 3 курса 3 группы

Домановой Татьяны Алексеевны

Работа сдана 06.12.2013 г.

Зачтена ________________ 2013 г.

____

Преподаватель

Дайняк Виктор Владимирович

Доцент кафедры МФ

канд. физ.-мат. наук

Минск, 2013 г.

Задание 1

Постановка задачи

Пусть $f: \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$. Является ли f измеримой?

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + x^2}$$

Решение

Функция $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ – непрерывна, а значит измерима. Тогда, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ сходится, то $f(x)$ непрерывна, а значит измерима.

$$\forall n, x: f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + x^2} \leq \frac{(-1)^n}{n}$$

Значит искомый ряд ограничен сходящимся (по теореме Лейбница).

Задание 2

Постановка задачи

Пусть $f: \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$. Является ли f измеримой?

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n(x^2 + y^2))}{\sqrt{n^4[x^2 + y^2]}}$$

Решение

$\sin(n(x^2 + y^2))$ – непрерывна, а значит измерима. $[x^2 + y^2]$ – простая, так как принимает счетное число значений. А значит $\sqrt{n^4[x^2 + y^2]}$ – тоже простая. Следовательно, $f_n = \frac{\sin(n(x^2+y^2))}{\sqrt{n^4[x^2+y^2]}}$ – измерима. А значит f - измерима, так как функциональный ряд сходится, так как

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$$

А значит f_n ограничена сходящимся числовым рядом.

Задание 3

Постановка задачи

Пусть $X, \sum, \mu$ – пространство с мерой, $f_1, f_2, f_3, f_4: X \to \overline{\mathbb{R}}$ – измеримые функции. Выяснить, является ли измеримой функция:

$$f(x) = \frac{f_1(x)}{\ln(2 + |f_2(x)|)}$$

Решение

$|x|$ – непрерывная на $\mathbb{R}$ функция, а значит $|f_2(x)|$ – измерима, как композиция измеримых функций. Тогда, так как $\ln(x)$ – непрерывна на $\mathbb{R}^+$, то она измерима, а значит $\ln(2 + |f_2(x)|)$ – тоже измерима. А так как $\ln(2 + |f_2(x)|)$ никогда не обращается в 0, то $f(x)$ – композиция измеримых функций, а з начит измерима.

Задание 4

Постановка задачи

Сходится ли последовательность $f_n(x) = \sin^n(x)$, $x \in \mathbb{R}$ по мере и почти всюду.

Решение

$$f(x) = 0$$

Последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ почти всюду, если $\mu(A_n(\varepsilon) = \{x: |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \to_{n\to\infty} 0$.

Для $\forall x, \sin(x) < 1, f_n(x) \to_{n\to\infty} 0$. Если $\sin(x) = 1$, то $f_n(x) \to_{n\to\infty} 1$. Но $A = \{x: \sin(x) = 1\} = \left\{x: x = \frac{\pi}{2} + \pi k\right\} \sim \mathbb{Z}$. А значит $\mu(A) = \ \mu(\mathbb{Z}) = 0$. То есть последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ почти всюду. А из сходимости почти всюду следует сходимость по мере.