ТЕМА 2. ОБРАТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ. РЕШЕНИЕ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Непрерывно обратимые операторы. Пусть $A : X \to Y$ – линейный оператор с областью определения $\mathscr{D}(A) \subseteq X$ и областью значений $\mathscr{R}(A) \subseteq Y$. Если оператор A осуществляет взаимно однозначное соответствие между $\mathscr{D}(A)$ и $\mathscr{R}(A)$, то к оператору A существует обратный оператор A^{-1}, и решение уравнения $Ax = y$ может быть записано в явном виде $x = A^{-1}y$.

Теорема 1. *Линейный оператор A переводит $\mathscr{D}(A)$ в $\mathscr{R}(A)$ взаимно однозначно тогда и только тогда, когда*

$$KerA = \{x \in \mathscr{D}(A) : Ax = 0\} = \{0\}. \tag{2.1}$$

Теорема 2. *Если $A : X \to Y$ линеен, то и $A^{-1} : Y \to X$ линеен.*

Теорема 3. *Оператор A^{-1} существует и одновременно ограничен на $\mathscr{R}(A)$ тогда и только тогда, когда для некоторой постоянной $m > 0$ и любого $x \in \mathscr{D}(A)$ выполняется энергетическое неравенство*

$$\|Ax\|_Y \geqslant m\|x\|_X. \tag{2.2}$$

Будем говорить, что линейный оператор $A : X \to Y$ *непрерывно обратим*, если $\mathscr{R}(A) = Y$, оператор A обратим и A^{-1} ограничен.

Теорема 4 (Банаха об обратном операторе). *Пусть X и Y – банаховы пространства, $A : X \to Y$ – линейный ограниченный оператор, отображающий X в Y взаимно однозначно. Тогда обратный оператор $A^{-1} : Y \to X$ ограничен.*

Следствие 1. Пусть на нормированном пространстве X заданы две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ и пространство X полно относительно каждой из норм. Если $\|x\|_1 \leqslant c\|x\|_2$ для всех $x \in X$, то эти нормы эквивалентны.

Левый и правый обратные операторы. Пусть X, Y – нормированные векторные пространства и $A : X \to Y$.

Оператор $A_r^{-1} : Y \to X$ называется *правым обратным оператором* к A, если $AA_r^{-1} = I_y$. Оператор $A_l^{-1} : Y \to X$ называется *левым обратным оператором* к A, если $A_l^{-1}A = I_x$.