МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Функциональный анализ

Лабораторная работа №9

(Нормированные векторные пространства. Сходимость)

Студентки 3 курса 3 группы

Домановой Татьяны Алексеевны

Работа сдана 13.12.2013 г.

Зачтена ________________ 2013 г.

____

Преподаватель

Дайняк Виктор Владимирович

Доцент кафедры МФ

канд. физ.-мат. наук

Минск, 2013 г.

Задание 1

Постановка задачи

Можно ли в пространстве $C^2[0,1]$ принять за норму следующую величину:

$$|x(0)| + |x'(0)| + \max_{0\le t\le 1} |x''(t)|$$

Решение

Покажем, что норма не удовлетворяет третьей аксиоме. Возьмем $x(t) = t^3$ и $y(t) = -t^3$, тогда

$$\|x\| = |x(0)| + |x'(0)| + \max_{0\le t\le 1}|x''(t)| = \max_{0\le t\le 1}|6t| = 6$$

$$\|y\| = |y(0)| + |y'(0)| + \max_{0\le t\le 1}|y''(t)| = \max_{0\le t\le 1}|-6t| = 6$$

Таким образом $\|x+y\| = \|0(t)\| = 0 \neq 12 = \|x\| + \|y\|$, а значит $|x(0)| + |x'(0)| + \max_{0\le t\le 1} |x''(t)|$не задает норму на множестве $C^2[0,1]$.

Задание 2

Постановка задачи

Найти предел последовательности x_n в пространстве $C[a,b]$, если он существует.

$$x_n = \frac{\sin(nt)}{\sqrt{n^2+t^2}}, \qquad t \in [0,2]$$

Решение

Сначала найдём поточечный предел. Построим мажорантный ряд

$$|x_n(t)| = \left|\frac{\sin(nt)}{\sqrt{n^2+t^2}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{n^2+t^2}} \le 1/n \to 0\,.$$

Осталось показать, что процесс равномерный. Действительно, правая часть не зависит от аргумента, следовательно, сходимость к нулю равномерная.

Задание 3

Постановка задачи

Найти предел последовательности x_n в нормированном пространстве l_p, если он существует.

$$x_n = \left(\underbrace{\left(\frac{5n+1}{5n+2}\right)^n, \dots, \left(\frac{5n+1}{5n+2}\right)^n}_{n}, 0, \dots\right), \qquad p = \frac{3}{2}$$

Решение

Докажем, что предел существует. Точнее, докажем, что последовательность $x = (0,0,\dots,0,\dots)$ является требуемым пределом.

Для этого покажем $\left||x_n - x|\right| \to 0$. Имеем, что

$$\left|\left|x_n - x\right|\right| = \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{5n+1}{5n+2}\right)^{\frac{3}{2}n}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(n \cdot \left(\frac{5n+1}{5n+2}\right)^{\frac{3}{2}n}\right)^{\frac{2}{3}} = n^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{5n+1}{5n+2}\right)^{n}$$

$$= n^{\frac{2}{3}} \cdot \left(1 - \frac{1}{5n+2}\right)^{n} n^{\frac{2}{3}} \cdot \left(1 - \frac{1}{5n+2}\right)^{-(5n+2) * \frac{-n}{5n+2}} = n^{\frac{2}{3}} \cdot e^{\frac{-n}{5n+2}} \to_{n\to\infty} \; 0$$

Таким образом, x является пределом искомой последовательности.