МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Функциональный анализ

Лабораторная работа №6

(Интеграл Лебега. Теоремы о предельном переходе)

Студентки 3 курса 3 группы

Домановой Татьяны Алексеевны

Работа сдана 06.12.2013 г.

Зачтена ________________ 2013 г.

____

Преподаватель

Дайняк Виктор Владимирович

Доцент кафедры МФ

канд. физ.-мат. наук

Минск, 2013 г.

Задание 1

Постановка задачи

Выяснить, интегрируема ли по Риману, по Лебегу на отрезке $[0,1]$ функция f, если да, то вычислить интеграл Лебега.

$$f(x) = \begin{cases} 2^n, & x \in \left[\frac{1}{3^{n+1}}, \frac{1}{3^n}\right) \setminus K \quad n \geq 0 \\ e^x, & x \in K \end{cases}$$

Решение

Функция f не ограничена, а значит по Риману она не интегрируема. Рассмотрим функцию $g(x) = 2^n$, $x \in \left[\frac{1}{3^{n+1}}, \frac{1}{3^n}\right)$. $g(x) \sim f(x)$, так как они не совпадают в точках множества K, а $\mu(K) = 0$.

$g(x)$ интегрируема по Лебегу, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \mu\left(\left[\frac{1}{3^{n+1}}, \frac{1}{3^n}\right)\right)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \mu\left(\left[\frac{1}{3^{n+1}}, \frac{1}{3^n}\right)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^{n+1}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2$$

Следовательно, f(x) тоже интегрируема по Лебегу, и $\int_{[0,1]} f(x) d\mu = 2$.

Задание 2

Постановка задачи

Для заданной функции f на отрезке $[-1;\ 2]$:

1. Выяснить, существует ли для нее собственный или несобственный интеграл Римана;
2. Вычислить интеграл Лебега, если он существует, воспользовавшись подходящей заменой на эквивалентную, имеющую меньшее множество точек разрыва.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right] \cap K \\ x^3, & x \in \left(\frac{1}{2}, 2\right] \cap Q \\ x, & x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right] \setminus K \\ \frac{1}{x}, & x \in \left(\frac{1}{2}, 2\right] \setminus Q \end{cases}$$

Решение

Функция $f(x)$ разрывна в точках множества $M = [0,2]$, его мера 2, а значит $f(x)$ не интегрируема по Риману.

Рассмотрим функцию $g(x)$:

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{1}{x}, & x \in \left(\frac{1}{2}, 2\right] \end{cases}$$

Функция $g(x) \sim f(x)$ так как они не совпадают в точках множеств $\left[-1, \frac{1}{2}\right] \cap K$ и $\left(\frac{1}{2}, 2\right] \cap Q$, а их мера 0. Но функция $g(x)$ интегрируема по Риману, а значит и по Лебегу. Следовательно, функция $f(x)$ Тоже интегрируема по Лебегу и верно следующее равенство:

$$\int_{[-1,2]} f(x)d\mu = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} x dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{x} dx = 2\ln(2) + \frac{5}{8}$$

Задание 3

Постановка задачи

Для заданной функции f на отрезке $[0;\ \infty)$:

1. Выяснить, существует ли для нее несобственный интеграл Римана;
2. Вычислить интеграл Лебега, если он существует;

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \chi_{[k,k+1]}(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

Решение

Функцию $f(x)$ можно представить в следующем виде:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^k}{k}, & x \in (k, k+1) \\ \dfrac{(-1)^k}{k(k+1)}, & x = k \end{cases} \quad , k \in \mathbb{N}$$

Нетрудно видеть, что $f(x)$ разрывна в точках вида $x = k, k \in \mathbb{N}$, то есть имеет бесконечное число точек разрыва, а значит не интегрируема по Риману.

Однако она интегрируема по Лебегу, так как имеет счетное число значений.

$$\int_{[0,\infty)} f(x)d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \mu\big((k, k+1)\big) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)} \mu(\{k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2)$$

Задание 4

Постановка задачи

Найти предел, если он существует:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} e^{-nx^2} d\mu$$

Решение

Рассмотрим функциональную последовательность

$$f_n(x) = e^{-nx^2}, \qquad x \in [0,1], n \in \mathbb{N}$$

Для каждого x:

$$\lim_{n\to\infty} f_{n(x)} = \lim_{n\to\infty} e^{-nx^2} = 1 = f(x)$$

$f_n(x)$ также ограничена функцией $g(x) = 1$, которая инегрируема по Риман, а значит интегрируема и по Лебегу. Тогда $f(x)$ тоже интегрируема по Лебегу и справедливо равенство:

$$\lim\nolimits_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f(x)d\mu = \lim\nolimits_{n\to\infty} \int_{[0,1]} e^{-nx^2} d\mu = \int_0^1 1dx = 1$$