ТЕМА 5. ТЕОРИЯ РИССА – ШАУДЕРА РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЙ С КОМПАКТНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Пусть A – компактный оператор, заданный на банаховом пространстве X, т. е. $A \in \mathscr{K}(X)$. Рассмотрим в X линейное уравнение второго рода

$$x - Ax = y. \tag{2.1}$$

Наряду с уравнением (2.1) рассмотрим соответствующее ему однородное уравнение

$$z - Az = 0, \tag{2.2}$$

а также сопряженное к (2.1) уравнение

$$f - A^*f = g \tag{2.3}$$

и однородное сопряженное уравнение

$$h - A^*h = 0. \tag{2.4}$$

По теореме $A^* \in \mathscr{K}(X^*)$.

Теорема 1. *Пусть X – банахово пространство, $A \in \mathscr{K}(X)$. Тогда множество значений $\mathscr{R}(I - A)$ оператора $I - A$ замкнуто в X, и, соответственно, множество $\mathscr{R}(I - A^*)$ замкнуто в X^*.*

Лемма 5. *Пусть x – некоторое решение уравнения (2.1), где $A \in \mathscr{K}(X)$. Тогда существует постоянная $m > 0$, зависящая лишь от A, что выполняется неравенство:*

$$\|x - Ax\| = \|y\| \geqslant m\|x\|. \tag{2.5}$$

Теорема 2 (первая теорема Фредгольма). *Пусть X – банахово пространство, $A \in \mathscr{K}(X)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) уравнение (2.1) имеет решение при любом $y \in X$;

2) уравнение (2.2) имеет только нулевое решение;

3) уравнение (2.3) разрешимо при любом $g \in X^*$;

4) уравнение (2.4) имеет только нулевое решение.

Если выполнено одной из условий 1), 2), 3), 4), то операторы $I-A$ и $I - A^*$ непрерывно обратимы.

Теорема 3 (вторая теорема Фредгольма). *Пусть X – банахово пространство, $A \in \mathscr{K}(X)$. Тогда уравнения* (2.2) *и* (2.4) *имеют одинаковое конечное число линейно независимых решений.*

Теорема 4 (третья теорема Фредгольма). *Пусть X – банахово пространство, оператор $A \in \mathscr{K}(X)$. Для того,чтобы уравнение* (2.1) *имело хотя бы одно решение при заданном y, необходимо и достаточно, чтобы для любого решения h уравнения* (2.4) *выполнялось условие $h(y) = 0$.*

Пусть X,Y – банаховы пространства. Оператор $A \in \mathscr{B}(X,Y)$ называется *фредгольмовым*, если

1. $dimKer(A) < \infty$;
2. $dimKer(A^*) < \infty$;
3. образ $\mathscr{R}(A)$ замкнут в Y;

Число $n = dimKerA$ называется *числом нулей* оператора A; число $m = dimKerA^*$ – *дефектом* оператора A; число $ind(A) = n - m$ – *индексом* оператора A.

Тогда для уравнения $Ax = y$, где A – фредгольмов оператор, справедливы теоремы Фредгольма.

Теорема 5 (С.М. Никольского). *Пусть X,Y – банаховы пространства, $A \in \mathscr{B}(X,Y)$. Для того, чтобы оператор A был фредгольмовым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:*

1. *$A = B+P$, где $B \in \mathscr{B}(X,Y)$ – непрерывно обратим, $P \in \mathscr{B}(X,Y)$ – оператор конечного ранга;*
2. *$A = C+T$, где $C \in \mathscr{B}(X,Y)$ – непрерывно обратим, $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ – компактен;*

Рассмотрим в пространстве $L_2[a,b]$ интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$x(t) - \int_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s = y(t), \tag{2.6}$$

где

$$\int_a^b \int_a^b |\mathcal{K}(t,s)|^2 \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t < \infty.$$

Данное уравнение можно записать в виде $x - Ax = y$, где A – компактный оператор. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$x(t) - \int_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s) \, \mathrm{d}s = 0. \tag{2.7}$$

Поскольку $L_2[a,b]$ – гильбертово пространство и $(L_2[a,b])^*$ линейно изоморфно $L_2[a,b]$, то соответствующие сопряженные уравнения можно записать опять же на элементах пространства $L_2[0,1]$.

$$u(t) - \int_a^b \mathcal{K}(s,t)u(s) \, \mathrm{d}s = g(t). \tag{2.8}$$

$$u(t) - \int_a^b \mathcal{K}(s,t)u(s) \, \mathrm{d}s = 0. \tag{2.9}$$

Теорема 6 (альтернатива Фредгольма). *Пусть $\mathcal{K}(t,s)$ – такое ядро, при котором интегральный оператор компактен в $L_2[a,b]$. Тогда возможны лишь два случая:*

1. *Однородные уравнения (2.7) и (2.9) имеет только нулевые решения; уравнения (2.6) и (2.8) разрешимы для любой правой части и имеют единственные значения.*
2. *Уравнение (2.7) имеет лишь конечное число линейно независимых решений $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда уравнение (2.9) имеет то же количество линейно независимых решений $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Уравнение (2.6) разрешимо, если*

$$\int_a^b u_i(t)y(t) \, \mathrm{d}t = 0, \ i = 1,2,\ldots,n. \tag{2.10}$$

и его решение имеет вид

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k + x_0(t),$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – произвольные постоянные; x_0 – некоторое частное уравнение.

Теорема 7. *Пусть $\mathcal{K}(t,s) \in C([a,b] \times [a,b])$, тогда для уравнения* (2.6) *справедлива альтернатива Фредгольма.*

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Найти $\mathrm{Ker}A$ и $\mathrm{Ker}A^*$ для оператора $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, действующего по формуле

$$Ax(t) = \int_0^t x(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad x(t) \in L_2[0,1].$$

Решение. Оператор A является линейным и непрерывным, а сопряженный к нему действует по формуле

$$A^*x(t) = \int_t^1 x(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad x(\tau) \in L_2[0,1].$$

$$\mathrm{Ker}A^* = \left\{ x(t) \in L_2[0,1] : \int_t^1 x(\tau)\mathrm{d}\tau = 0, \ \ t \in [0,1] \right\}.$$

Продифференцировав по t соотношение $\int\limits_t^1 x(\tau)\mathrm{d}\tau = 0$, получим, что $x(t) = 0$ почти всюду на $[0,1]$. Поэтому $\mathrm{Ker}A^* = \{0\}$. Аналогично, и ядро оператора A состоит только из нулевых функций.

Пример 2. Рассмотрим оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$, определенный с помощью равенства

$$Ax(\tau) = \int_0^\tau x(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad \forall x(t) \in C[0,1].$$