Теорема 5. *Для линейного оператора $A : X \to Y$ следующие утверждения эквивалентны:*

1) решение уравнения $Ax = y$ единственно для любого $y \in \mathscr{R}(A)$;

2) $KerA = \{0\}$, т. е. оператор A инъективен;

3) для оператора A существует левый обратный оператор A_l^{-1}.

Теорема 6. *Для линейного оператора $A : X \to Y$ следующие утверждения эквивалентны:*

1) решение уравнения $Ax = y$ существует для любого $y \in Y$;

2) $\mathscr{R}(A) = Y$, т. е. оператор A сюръективен;

3) для оператора A существует правый обратный оператор A_r^{-1}.

Решение операторных уравнений второго рода. Рассмотрим операторные уравнения второго рода

$$x - Ax = y. \tag{2.3}$$

$$x - \lambda Ax = y, \tag{2.4}$$

где X – банахово пространство, $A : X \to X$, $A \in \mathscr{B}(X)$.

Теорема 7. *Пусть X – банахово пространство, $A \in \mathscr{B}(X)$ и $\|A\| < 1$. Тогда оператор $I - A$ непрерывно обратим и при этом справедливы оценки*

$$\|(I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|A\|}, \quad \|I - (I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{\|A\|}{1 - \|A\|}. \tag{2.5}$$

Теорема 8. *Пусть X – банахово пространство, $A \in \mathscr{B}(X)$ и $|\lambda| < \frac{1}{\|A\|}$. Тогда оператор $I - \lambda A$ непрерывно обратим, причем*

$$(I - \lambda A)^{-1} = I + \lambda A + \lambda^2 A^2 + \ldots + \lambda^n A^n + \ldots.$$

Теорема 9 (о четырех шарах). *Если $A, A^{-1} \in \mathscr{B}(X)$, то множество G элементов $\mathscr{B}(X)$, имеющих в $\mathscr{B}(X)$ обратные, содержит вместе с операторами A и A^{-1} два шара*

$$\begin{aligned} B_1 &= \left\{ B \in \mathscr{B}(X) : \|A - B\| < \frac{1}{A^{-1}} \right\}, \\ B_2 &= \left\{ B \in \mathscr{B}(X) : \|A^{-1} - B\| < \frac{1}{A} \right\}. \end{aligned} \tag{2.6}$$