ТЕМА 3. СОПРЯЖЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО

Пусть X – нормированное векторное пространство.

Определение 1. Линейный оператор $f : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ называется *линейным функционалом*. Обозначим его как $f(x)$, $x \in X$. Линейность f означает, что $f(\alpha x+\beta y) = \alpha f(x)+\beta f(y)$, $x,y \in X$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Линейный функционал f называется *ограниченным*, если для некоторой константы $C > 0$ выполнено неравенство $|f(x)| \leqslant C\|x\|_X$ сразу для всех $x \in X$. Наименьшая из констант C, совпадающая с числом $\sup|f(x)|$, где sup берется по всем x с $\|x\| = 1$, называется *нормой* функционала и обозначается $\|f\|$. Ограниченность функционала эквивалентна его непрерывности.

Рассмотрим множество линейных ограниченных функционалов, определенных на нормированном пространстве X, $\mathscr{B}(X, \mathbb{R})(\mathbb{C}^n)$. Это банахово пространство, так как пространство $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ банахово. Оно называется *сопряженным* пространством к пространству X и обозначается X^*.

В банаховом пространстве X^* можно рассматривать два типа сходимости.

Определение 2. Последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ сходится к $f \in X^*$

- *сильно*, если $\|f_n - f\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;
- *слабо*, если $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ для любого $x \in X$.

Примеры линейных ограниченных функционалов

Пример 1. Пусть $X = \mathbb{R}^n$ с базисом $e_1,\dots,e_n$. Возьмем $x \in \mathbb{R}^n$ и разложим его по базису $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$. Рассмотрим линейный функционал f на элементе x, тогда

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = (x,y)_{\mathbb{R}^n},$$

где $y_k = f(e_k)$. $|f(x)| = |(x,y)| \leqslant \|y\| \cdot \|x\|$. Значит $\|f\| \leqslant \|y\|$.

Таким образом, в пространстве $\mathbb{R}^n$ каждый линейный функционал ограничен.

Пример 2. Пусть $X \in C[a,b]$. Рассмотрим функционал $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k x(t_k)$, где t_k – система точек на отрезке $[a,b]$. Примером такого функционала являются конечные разности функции $x(t) \in C[a,b]$. Данный функционал ограничен. Действительно,

$$|f(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |C_k||x(t_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |C_k| \max_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t)|, \quad \|f\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |C_k|.$$

Пример 3. Определим на пространстве $C[a,b]$ функционал вида

$$f(x) = \int\limits_a^b a(t)x(t)\,\mathrm{d}t,$$

где $a(t)$ – непрерывная либо суммируемая на отрезке $[a,b]$ функция. Примером такого функционала служат коэффициенты Фурье. Данный функционал линеен и ограничим, причем $\|f\| \leqslant \int\limits_a^b a(t)\,\mathrm{d}t$.

Множество линейных ограниченных функционалов, определенных на нормированном пространстве X называется *сопряженным* пространством и обозначается X^*.

В банаховом пространстве X^* можно рассматривать два типа сходимости. Последовательность $(f_n) \subset X^*$ сходится к $f \in X^*$ *сильно*, если $\|f_n - f\| \longrightarrow {}_{n\to\infty} 0$; *слабо*, если $f_n(x) \to f(x)$ для любого $x \in X$.

С помощью сопряженного пространства в пространстве X можно ввести новый тип сходимости. Говорят, что последовательность $(x_n) \subset X$ сходится к $x \in X^*$ справедливо $f(x_n) \to f(x)$ при $n \to \infty$.

Теорема 1. *(Хана-Банаха). Пусть X – нормированное векторное пространство, X_0 – его подпространство, $f_0 : X_0 \to \mathbb{C}$ – линейный ограниченный функционал. Тогда существует ограниченный функционал $f : X \to \mathbb{C}$, продолжающий f_0, и при том такой, что*

$$\|f\| = \|f_0\|.$$

Следствие 1 (об отделимости точек в X). Пусть X – нормированное пространство и $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$. Тогда существует такой линейный ограниченный функционал в пространстве X, что

1. $\|f\| = 1$;
2. $f(x_0) = \|x_0\|$.

Следствие 2 (об отделимости точки от пространства). Пусть в нормированном пространстве X задано подпространство X_0 и элемент x_0 такой, что $\rho(x_0,X_0) = d > 0$. Тогда существует линейный ограниченный функционал $f \in X^*$, что

1. $f(x_0) = 1$;
2. $f(x) = 0$ для всех $x \in X_0$;
3. $\|f\| = \frac{1}{d}$.

Следствие 3. Множество M всюду плотно в нормированном пространстве X тогда и только тогда, когда для любого функционала $f \in X^*$ такого, что $f(x) = 0$ для всех $x \in M$ следует, что $f = 0$, т. е. $f(x) = 0$, $x \in X$.

Следствие 4. Пусть $\{x_k\}_{k=1}^n$ – линейно-независимая система элементов в нормированном пространстве X. Тогда найдется система $\{f_e\}_{e=1}^n$ – линейных ограниченных функционалов на X такая, что

$$f_l(x_k) = \begin{cases} 1, k = l, \\ 0, k \neq l, \ k,l = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Определение 3. Система $\{x_k\}_{k=1}^n \subset X$ и система функционалов $\{f_l\}_{l=1}^n \subset X^*$ называется *биортогональными*, если

$$f_e(x_k) = \begin{cases} 1, l = k, 0, l \neq k, \\ k, l = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Следствие 5. Пусть $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X^*$ – линейно независимая система линейных ограниченных функционалов. Тогда в X найдется система элементов $\{x_l\}_{l=1}^n$, биортогональная к ней.

Сопряженное пространство и его структура.

Теорема 2. *(Ф. Рисса). Пусть H – гильбертово пространство. Для любого линейного ограниченного функционала $f \in H^*$ существует единственный элемент $y \in H$ такой, что для всех $x \in H$*

$$f(x) = (x,y)_H, \quad \|f\|_{H^*} = \|y\|_H. \tag{2.1}$$

Замечание 1. В силу теоремы Рисса существует сохраняющее норму взаимно однозначное соответствие между H^* и H. Это позволяет отождествить пространства H и H^*.

Теорема 3. *(Ф. Рисса). Каждый линейный ограниченный функционал в пространстве $C[a,b]$ задается формулой*

$$f(x) = \int\limits_a^b x(t)\,\mathrm{d}g(t), \tag{2.2}$$

где $g(t) \in \bigvee[a,b]$. При этом

$$\|f\| = \bigvee_a^b(g). \tag{2.3}$$

Замечание 2. Функция g по функционалу f определяется неоднозначно. Если же потребовать от g непрерывности слева и задать значение $g(a) = 0$, то g по f будет определяться однозначно.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 4. Доказать, что функционал

$$f(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\,\mathrm{d}t - x(0), \quad x(t) \in C[-1,1],$$

является ограниченным, найти его норму.

Решение. В соответствии с определением функционал f является ограниченным, если существует постоянная $C > 0$ такая, что:

$$|f(x)| \leqslant C \cdot \|x\|_{C[-1,1]}, \quad \forall x(t) \in C[-1,1].$$

Оценим норму $|f(x)|$.

$$|f(x)| = \left| \int_{-1}^{1} x(t)\ \mathrm{d}t - x(0) \right| \leqslant \int_{-1}^{1} |x(t)|\,\mathrm{d}t + |x(0)| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \max_{t\in[-1,1]} |x(t)| + \max_{t\in[-1,1]} |x(t)| = 3\,\|x\|.$$