|  |
| --- |
| министерство образования республики беларусь белорусский государственный университет |
| Функциональный анализ |
| Лабораторная работа №1 |
|  |
| (Линейные ограниченные операторы. Норма оператора) |
|  |

Студентки 3 курса 3 группы

Вариант 1

|  |
| --- |
|  |

**Преподаватель**

Дайняк Виктор Владимирович

Доцент кафедры МФ

канд. физ.-мат. наук

Работа сдана 20.12.2013 г.

Зачтена \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2013 г.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

# Основы теории

Пусть – некоторые векторные пространства, и пусть . Если каждому элементу поставлен в соответствие элемент , то говорят что зада *оператор* и . Множество называют *областью определения* оператора . Множество называют *областью значений* оператора .

Оператор с областью определения называют *линейным*, если

1. Область определения оператора представляет собой линейное многообразие, то есть

*Лемма.* Область значений линейного оператора является линейным многообразием.

Линейный оператор называется *непрерывным* в точке , если при . То есть

*Теорема*. Пусть – некоторые векторные пространства, а оператор – *линейный*. Тогда следующие свойства оператора эквивалентны:

1. Оператор непрерывен в точку .
2. Оператор непрерывен в любой точке пространства .
3. Оператор равномерно непрерывен.

Линейный оператор называется *ограниченным*, если существует такая константа ограниченности , что для любого выполняется условие ограниченности:

Ограниченный оператор переводит каждое ограниченное множество в ограниченное множество .

*Нормой линейного оператора* назовем наименьшую из констант ограниченности:

Норма называется *достижимой*, если существует такой элемент , что выполняется равенство:

*Теорема*. Пусть – некоторые векторные пространства, а – линейный оператор. Оператор непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.

Множество точек , таких, что называется ядром оператора и обозначается .

Теорема. Ядро линейного непренывного оператора является подпространством .

### Пример линейного ограниченного оператора:

1. Интегральный оператор Фредгольма.

, где – ядро интегрального оператора,измеримая функция, непрерывная по переменным

Пусть – некоторые векторные пространства, а операторы - линейные ограниченные операторы из в , множество которых обозначим через .

*Теорема*. Множество является нормированным пространством.

Определим в два типа сходимости последовательностей линейных ограниченных операторов:

1. Будем говорить, что последовательность операторов сходится *равномерно* к оператору , если
2. Последовательность операторов сходится *сильно*  к оператору , если при каждом фиксированном

*Теорема*. Если пространство полно, то и пространство линейных ограниченных операторов тоже полно.

# Задание 1

## Постановка задачи

Доказать, что оператор в пространстве является линейным ограниченным, найти его норму.

## Решение

*Линейность.*

*Ограниченность.*

*Найдем норму.* Из неравенства ограниченности следует, что

Из определения следует, что . Покажем, что .

Возьмем . Не трудно видеть, что .

Таким образом, , а значит .

# Задание 2

## Постановка задачи

Доказать, что оператор является линейным ограниченным, найти его норму.

## Решение

*Линейность.*

*Ограниченность.*

*Найдем норму.* Из неравенства ограниченности следует, что

Из определения следует, что . Покажем, что .

Возьмем . Не трудно видеть, что .

Таким образом, , а значит.

# Задание 3

## Постановка задачи

Доказать, что интегральный оператор с вырожденным ядром является линейным ограниченным, найти его норму.

## Решение

*Линейность.*

*Ограниченность.*

*Найдем норму.* Из неравенства ограниченности следует, что

Из определения следует, что . Покажем, что .

Возьмем . Не трудно видеть, что .

Таким образом, , а значит .

# Задание 4

## Постановка задачи

Вычислить норму оператора .

## Решение

*Линейность.*

*Ограниченность.*

*Найдем норму.* Из неравенства ограниченности следует, что

Из определения следует, что . Покажем, что .

Возьмем . Не трудно видеть, что .

Таким образом, , а значит.