|  |
| --- |
| министерство образования республики беларусь белорусский государственный университет |
| Функциональный анализ |
| Лабораторная работа №3 |
|  |
| (Лебеговское продолжение меры.) |
|  |

Студентки 3 курса 3 группы

|  |
| --- |
|  |

**Преподаватель**

Дайняк Виктор Владимирович

Доцент кафедры МФ

канд. физ.-мат. наук

Работа сдана 15.11.2013 г.

Зачтена \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2013 г.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

# Задание 1

## Постановка задачи

Пусть , , . Найти внешнюю и внутреннюю меры множеств и выяснить, измеримы ли они.

## Решение

*X*

*A*

По определению внешняя мера :

где любой элемент полукольца имеет вид , а значит полностью определяется своей проекцией на ось . Чтобы покрыть множество элементами , необходимо и достаточно покрыть проекцию этого множества на ось полуинтервалами*.* Поэтому внешняя мера множества в данном случае совпадает с внешней мерой проекции этого множества на ось .

Следовательно, множество неизмеримо.

Из приведенных выше рассуждений видно, что множество будет измеримым тогда и только тогда, когда оно будет иметь вид , где – измеримо по Лебегу.

# Задание 2

## Постановка задачи

Описать структуру множества точек отрезка , состоящего из чисел, у которых в десятичной записи цифра 2 встречается раньше, чем цифра 3. Найти его меру.

## Решение

Рассмотрим множество .

…

Таким образом, мы имеем полуинтервалов длиной , полуинтервалов длиной , и так далее.

# Задание 3

## Постановка задачи

Доказать, что множество , где – множество рациональных чисел, измеримо и найти его меру.

## Решение

Рассмотрим множество. Оно борелево, а значит измеримо. Множество рациональных чисел счетно и , а значит и оно тоже измеримо.

Множества таковы, что . А значит согласно свойству -аддитивной меры

# Задание 4

## Постановка задачи

Доказать, что множество точек единичного квадрата на плоскости, состоящее из точек, декартовы и полярные координаты которых иррациональны, измеримо и найти его меру.

## Решение

Рассмотрим множество . Не трудно видеть, что .

, так как . А тогда

А значит множество измеримо, а .