|  |
| --- |
| министерство образования республики беларусь белорусский государственный университет |
| Функциональный анализ |
| Лабораторная работа №6 |
|  |
| (Интеграл Лебега. Теоремы о предельном переходе) |
|  |

Студентки 3 курса 3 группы

Домановой Татьяны Алексеевны

Вариант 1

|  |
| --- |
|  |

**Преподаватель**

Дайняк Виктор Владимирович

Доцент кафедры МФ

канд. физ.-мат. наук

Работа сдана 20.12.2013 г.

Зачтена \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2013 г.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

# Основы теории:

Числовая измеримая функция называется *простой*, если она принимает конечное или счетное число различных значений.

*Теорема*. Функция является простой, тогда и только тогда, когда множество, на котором она задана можно разбить на конечное или счетное число непересекающихся подмножеств, на каждом из которых функция принимает постоянное значений.

*Теорема*. Для любой измеримой функции существует последовательность простых функций, сходящаяся к ней равномерно.

Пусть на множестве измеримая функция принимает значение .

Функция назыается суммируемой относительно меры или интегрируемой по Лебегу, если ряд сходится абсолютно. Если функция интегрируема по Лебегу, то сумма этого ряда называется интегралом Лебега функции .

### Свойства интеграла Лебега:

1. Любая ограниченная измеримая функция суммируема на .
2. Если и – суммируема, то

.

1. Если – суммируемые функции, и , то

.

1. Если – суммируемая функция, причем , то

.

1. Если -измеримая функция, а – суммируемая, причем , то тоже суммируема.
2. Если – суммируемая функция, а – ограниченая. Так что , то – тоже суммируема. Причем

.

1. Если суммируема на , то суммируема на любом измеримом подмножестве , причем верна следующая формула:
2. Функции и суммируемы либо не суммируемы одновременно. Справедлива оценка:
3. Если , то
4. Если почти всюду на , то
5. Если и суммируемы и равны почти всюду, то
6. Если и ,то почти всюду на .

Лемма. (Неравенство Чебышева) Пусть – суммируема, причем , и пусть множество . Тогда справедливо неравенство Чебышева:

Назовем измеримую функцию существенно ограниченой, если , почти всюду. Наименьшая из таких констант называется существенной верхней гранью функции .

*Теорема. (Абсолютная непрерывность интеграла Лебега)* Пусть – суммируемая на множестве функция. Тогда , что

*Теорема. (-аддитивность интеграла Лебега)* Пусть – суммируемая на множестве функция и , где все – измеримые множества. Тогда –суммируема по каждому и

*Причем ряд сходится абсолютно.*

*Теорема*. Если функция, заданная на отрезке интегрируема по Риману, то она интегрируема и по Лебегу, причем интеграл Лебега равен интегралу Римана.

*Теорема.* Для того, чтобы функция, заданная на отрезке, была интегрируема по Риману необходимо и достаточно, чтобы множество точек ее разрыва на этом отрезке имело меру нуль.

*Теорема.* Для сходимости несобственного интеграла Римана второго рода функции заданной на отрезке, необходимо и достаточно, чтобы существовал интеграл Лебега этой функции на заданном отрезке, причем при выполнении хотя бы одного из этих условий выполняется их равенство.

*Теорема.* Для сходимости несобственного интеграла Римана первого рода, необходимо и достаточно, чтобы существовал интеграл Лебега, причем при выполнении хотя бы одного из этих условий выполняется их равенство.

# Задание 1

## Постановка задачи

Выяснить, интегрируема ли по Риману, по Лебегу на отрезке функция , если да, то вычислить интеграл Лебега.

## Решение

Функция не ограничена, а значит по Риману она не интегрируема. Рассмотрим функцию . , так как они не совпадают в точках множества , а .

интегрируема по Лебегу, если сходится ряд .

Следовательно, f(x) тоже интегрируема по Лебегу, и .

# Задание 2

## Постановка задачи

Для заданной функции на отрезке :

1. Выяснить, существует ли для нее собственный или несобственный интеграл Римана;
2. Вычислить интеграл Лебега, если он существует, воспользовавшись подходящей заменой на эквивалентную, имеющую меньшее множество точек разрыва.

## Решение

Функция разрывна в точках множества [0,2], его мера 2, а значит не интегрируема по Риману.

Рассмотрим функцию :

Функция так как они не совпадают в точках множеств и , а их мера. Но функция интегрируема по Риману, а значит и по Лебегу. Следовательно, функция Тоже интегрируема по Лебегу и верно следующее равенство:

# Задание 3

## Постановка задачи

Для заданной функции на отрезке :

1. Выяснить, существует ли для нее несобственный интеграл Римана;
2. Вычислить интеграл Лебега, если он существует;

## Решение

Функцию можно представить в следующем виде:

Нетрудно видеть, что разрывна в точках вида , то есть имеет бесконечное число точек разрыва, а значит не интегрируема по Риману.

Однако она интегрируема по Лебегу, так как имеет счетное число значений.

# Задание 4

## Постановка задачи

Найти предел, если он существует:

## Решение

Рассмотрим функциональную последовательность

Для каждого :

также ограничена функцией , которая инегрируема по Риман, а значит интегрируема и по Лебегу. Тогда тоже интегрируема по Лебегу и справедливо равенство: