|  |
| --- |
| министерство образования республики беларусь белорусский государственный университет |
| Функциональный анализ |
| Лабораторная работа №6 |
|  |
| (Интеграл Лебега. Теоремы о предельном переходе) |
|  |

Студентки 3 курса 3 группы

Домановой Татьяны Алексеевны

|  |
| --- |
|  |

**Преподаватель**

Дайняк Виктор Владимирович

Доцент кафедры МФ

канд. физ.-мат. наук

Работа сдана 06.12.2013 г.

Зачтена \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2013 г.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

# Задание 1

## Постановка задачи

Выяснить, интегрируема ли по Риману, по Лебегу на отрезке функция , если да, то вычислить интеграл Лебега.

## Решение

Функция не ограничена, а значит по Риману она не интегрируема. Рассмотрим функцию . , так как они не совпадают в точках множества , а .

интегрируема по Лебегу, если сходится ряд .

Следовательно, f(x) тоже интегрируема по Лебегу, и .

# Задание 2

## Постановка задачи

Для заданной функции на отрезке :

1. Выяснить, существует ли для нее собственный или несобственный интеграл Римана;
2. Вычислить интеграл Лебега, если он существует, воспользовавшись подходящей заменой на эквивалентную, имеющую меньшее множество точек разрыва.

## Решение

Функция разрывна в точках множества [0,2], его мера 2, а значит не интегрируема по Риману.

Рассмотрим функцию :

Функция так как они не совпадают в точках множеств и , а их мера. Но функция интегрируема по Риману, а значит и по Лебегу. Следовательно, функция Тоже интегрируема по Лебегу и верно следующее равенство:

# Задание 3

## Постановка задачи

Для заданной функции на отрезке :

1. Выяснить, существует ли для нее несобственный интеграл Римана;
2. Вычислить интеграл Лебега, если он существует;

## Решение

Функцию можно представить в следующем виде:

Нетрудно видеть, что разрывна в точках вида , то есть имеет бесконечное число точек разрыва, а значит не интегрируема по Риману.

Однако она интегрируема по Лебегу, так как имеет счетное число значений.

# Задание 4

## Постановка задачи

Найти предел, если он существует:

## Решение

Рассмотрим функциональную последовательность

Для каждого :

также ограничена функцией , которая инегрируема по Риман, а значит интегрируема и по Лебегу. Тогда тоже интегрируема по Лебегу и справедливо равенство: